

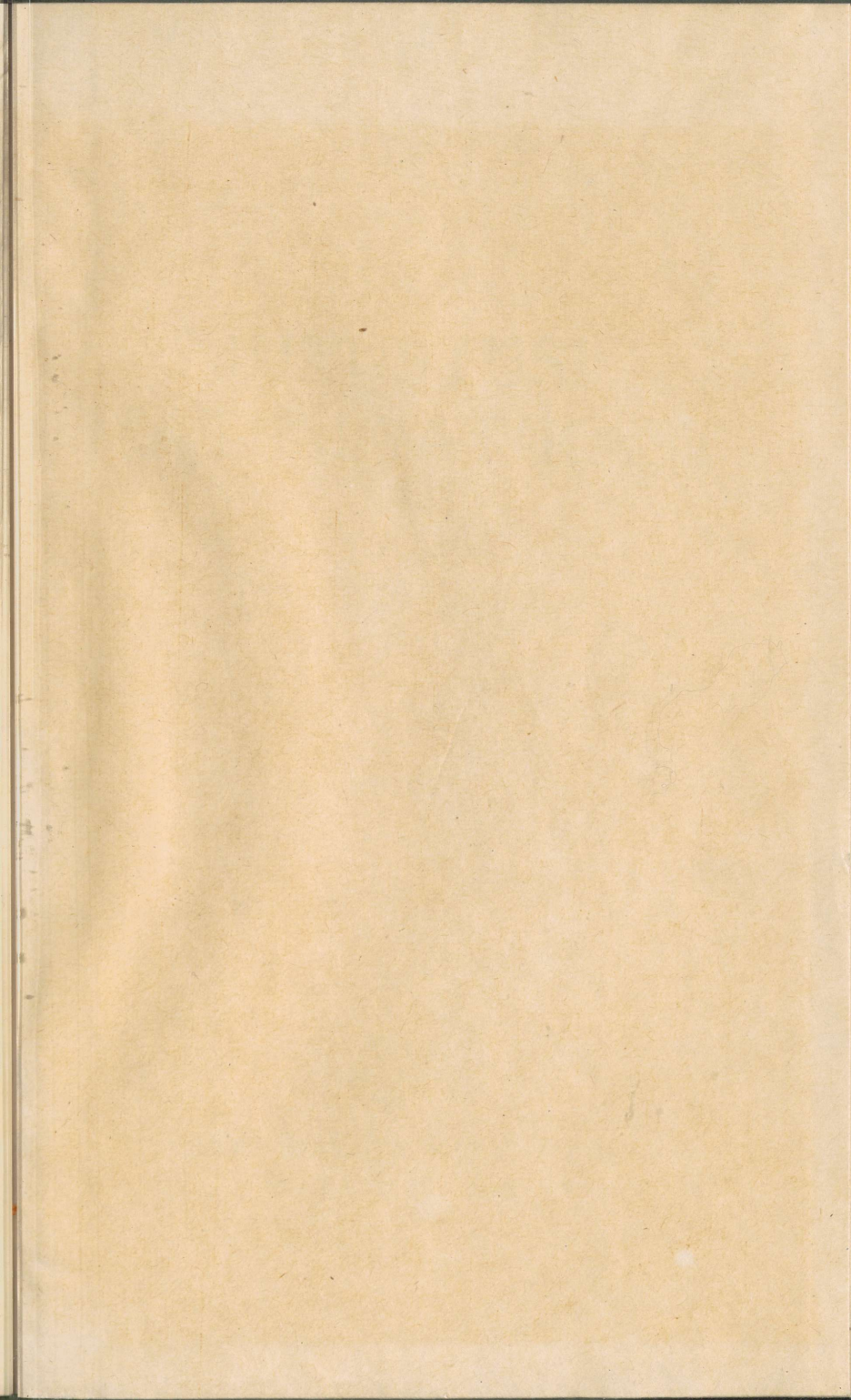
V - 38237

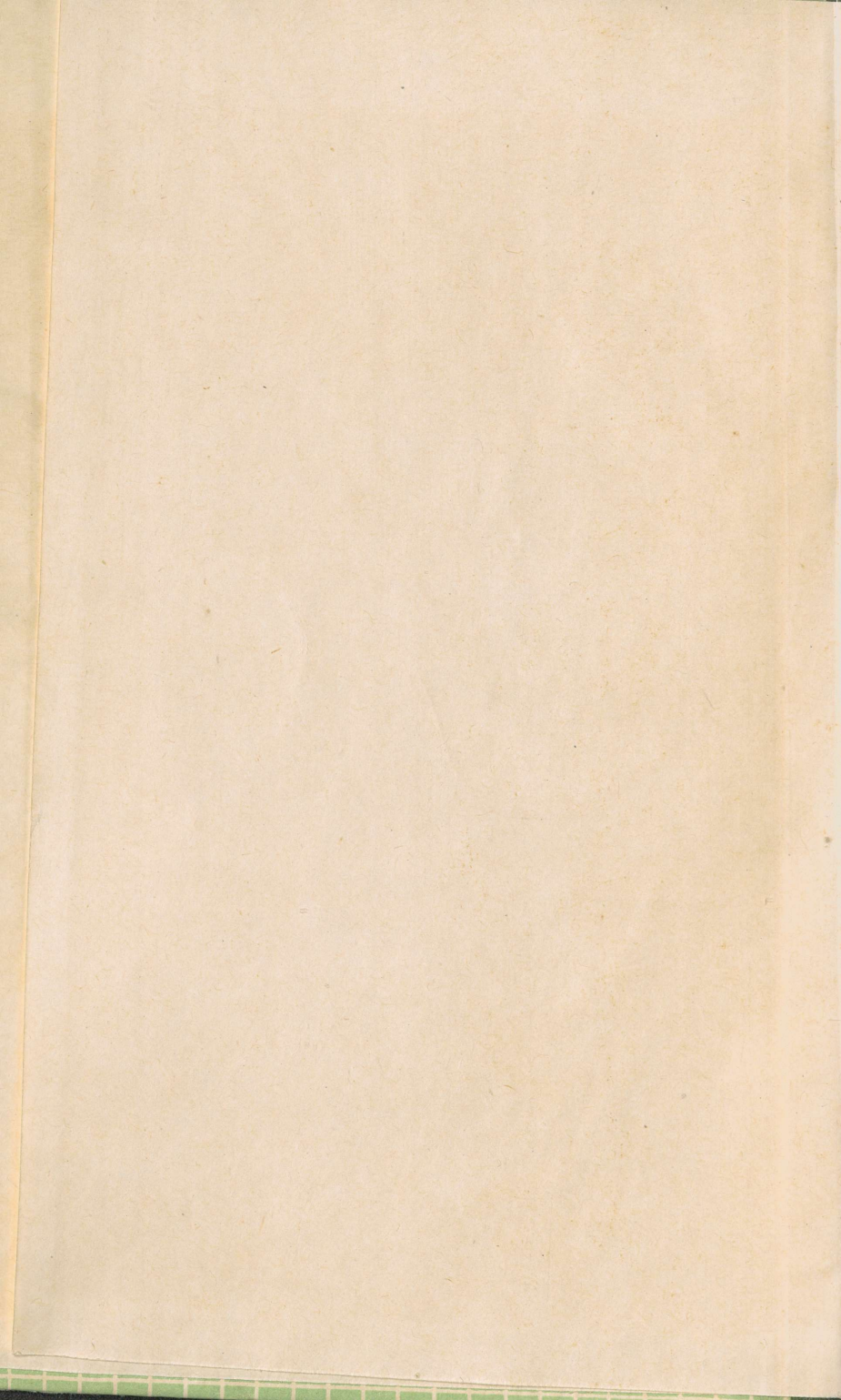
J. DEPMAN

JUTUSTUSI  
MATEMAATIKAST









V - 38237

J. DEPMAN

# JUTUSTUSI MATEMAATIKAST



EESTI RIIKLIK KIRJASTUS  
TALLINN 1956

Originaali tiitel:

И. ДЕПМАН

**Рассказы о математике**

Дополненное и исправленное издание

Государственное издательство  
детской литературы Министерства просвещения РСФСР  
Ленинград 1954

*Tõlkinud L. Võhandu*

*Kaane kujundanud*

*E. Lüüs*

И. Депман

РАССКАЗЫ О МАТЕМАТИКЕ

На эстонском языке

Обложка Э. Лююс

Эстонское Государственное Издательство  
Таллин, Пярну маantee, 10

\*

Toimetaja R. Toming. Kunstiline toimetaja A. Kooemets.

Tehniline toimetaja T. Mitt. Korrektor S. Kõiv.

---

Ladumisele antud 14. IV 1956. Trükkimisele antud 31. VII 1956. Paber 54:84, 1/16. Trükipoognaid 8,5. Formaadile 60:92 kohaldatud trükipoognaid 6,97. Arvutuspoognaid 6,8. Trükiarv 8000. MB-06731. Tellimise nr. 795.

---

Trükikoda «Punane Täht», Tallinn, Pikk tän. 54/58.

Hind rbl. 3.55

2—2

## SISSEJUHATUS

Selle raamatu sisu moodustavad jutustused puudutavad keskkooli viiendates—seitsmendates klassides vaadeldavaid matemaatika küsimusi. Raamatus räägitakse sellest, kuidas inimese tööalasest tegevusest tekkisid elementaar-matemaatika peamised mõisted ja põhilised harud, kuidas need arenesid ja täiustusid ning saavutasid oma kaas-aegse taseme.

Elementaar-matemaatika põhiharude — aritmeetika, algebra ja geomeetria — peamiste ideede ajaloolise arengu mõnevõrragi täielikuks käsitlemiseks kuluks mitmeid pakse köiteid. Uhte väikesesse raamatukesse mahuvad ainult lühikesed jutustused nende ideede kõige põhilisematest arenguastmetest. Autor püstitas endale ülesande jutustada eelkõige matemaatika sünnist muistsete rahvaste juures, kelle ajalugu me tunneme. Raamatu esimeses osas antakse lühiteatmeid babüloonlaste, egiptlaste, kreeklaste ja hindude matemaatikast. Kahjuks on meile üsna huvipakkuv muistse Hiina matemaatika ajalugu Euroopa teadusele seni peaaegu tundmatu.

Raamatu teises osas jutustatakse Nõukogude Liidu rahvaste — armeenlaste, usbekkide, tadžikkide ja teiste Kesk-Aasia rahvaste ning vene rahva matemaatikast kuni XVIII sajandini. See ülevaade lõpeb jutustusega 1703. aastast pärinevast L. F. Magnitski „Aritmeetikast“, mis nagu tegi kokkuvõtte matemaatika arengust vene rahva juures kuni XVIII sajandini. Soovides rõhutada seda fakti, et mõned ajalooliselt arenenud rahvamatematika jooned olid käibel ka XVIII ja XIX sajandil, on sellesse ossa paigutatud jutustus matemaatilistest ajaviidetest hilisema aja õpikutes.

Raamatu kolmandas osas antakse teatmeid aritmeetika, algebra ja geomeetria põhimõistete tekkimisest ja tuuakse ära üksikute elementaar-matemaatika küsimuste lahendamisvõtted.

Silmapaistvad vene matemaatikud tegelesid matemaatika kõrgemate küsimuste kõrval ka selle teaduse alustega, s. o. küsimustega, millel on vahetu side koolis õpitava elementaararvmatemaatikaga. See asjaolu lubab raamatu eesmärki silmas pidades jutustada suurimatest kodumaistest matemaatikutest: XVIII sajandi geniaalseimast matemaatikust, Peterburi Teaduste Akadeemia liikmest Leonhard Eulerist ja tema õpilastest; uue geomeetria loojast Nikolai Ivanovitš Lobatševskist; Pafnuti Lvovitš Tšebõševist, kes rajas rea uusi matemaatika harusid ja andis võimsa tõuke selle kõrgema aritmeetika arenguks, mis ühelt poolt on lähedane kooliaritmeetikale, teiselt poolt aga tõstatab erakordselt raskeid küsimusi. Suurim nõukogude matemaatik, sotsialistliku töö kangelane Ivan Matvejevitiš Vinogradov, kes töötas välja meetodi küsimuste lahendamiseks, mille kallal nägid tulemusteta vaeva suurimad kaasaja matemaatikud, on P. L. Tšebõševi poolt loodud Peterburi matemaatikakoolkonna vahetuks järglaseks. Raamatu samas osas on antud ka visandkuulsast vene naismatemaatikust Sofia Vassiljevna Kovaljevskajast.

Õpilastel on iga päev tegemist Andrei Petrovitiš Kisseljovi ja Nikolai Aleksandrovitiš Šapošnikovi õpikutega. Raamatu lõpus on antud lühiülevaade neist autoritest, kelle raamatutest on matemaatikat õppinud meie maa noorsoo mitukümmend põlvkonda.

# MATEMAATIKA TEKKIMINE

## Muistsete rahvaste matemaatika

Matemaatika nagu iga teiseigi teaduse arengu aluseks on inimese praktilise tegevuse nõuded.

Teaduste teke ja areng on tingitud tootmisest. Engelsilt leiame järgmised read: „Nagu kõik teised teadused, nii on ka matemaatika välja kasvanud inimeste praktilistest vajadustest: maatükkide suuruse ja anu- mate mahu mõõtmisest, ajaarvamisest ja mehaanikast.“<sup>1</sup>

Käesoleva raamatu iga lehekülj kinnitab Engelse sõnu. Mitte ainult matemaatika algmõisted, vaid ka matemaatikateaduse kõige kõrgemad ja abstraktsemad ideed on alguse saanud inimese praktilisest tegevusest.

Eriti õpetlik on selles suhtes suure vene matemaatiku Pafnuti Lvovitš Tšebõševi tegevus.

Tema kõige originaalsemad, tolle aja matemaatikale täiesti uued ideed tekkisid tuuleveskite ja mitmesuguste vabrikuseadmete puuduste uurimisest ning teiste puhtpraktiliste ülesannete lahendamisest.

Matemaatika nagu iga teinegi teadus kasvab välja praktikast, ta toitub praktikast ning teda kontrollib praktika.

Uksikud inimese praktilisest tegevusest ning loodusnähtuste vaatlemisest välja kasvanud matemaatilised teadmised eksisteerivad kõigil meile teada olevatel muistsetel rahvastel. Ka oma praktilise tegevuse kõige kaugematel aegadel ei saanud inimesed läbi ilma matemaatiliste teadmisteta. Leidub arengu algastmeil olevate inimeste elu kujutavaid raamatuid. Selline on näiteks raamat „Kuidas inimesed elasid ilma sepata“.

<sup>1</sup> Friedrich Engels, Anti-Dühring, Eesti Riiklik Kirjastus, Tallinn, 1954, lk. 35.

Kord kuulutati välja suur preemia raamatu eest teemal „Kuidas elas inimene ilma matemaatikata“. Preemia jäi välja andmata. Nähtavasti ei osanud ükski kirjanik kujutada mingeid matemaatilisi teadmisi mitte omava inimese elu.

Matemaatilised teadmised korjusid rahvaste praktilise tegevuse tulemusena aastatuhandete vältel aegadel, millest pole kirjalikke mälestusmärke. Ka mitmesuguste rahvaste elu ajaloolistes ephhides on suuri ajavahemikke, millest pole säilinud tarkade ja õpetlaste nimesid, ning teaduslikke, sealhulgas ka matemaatilisi saavutusi võib omistada ainult kogu rahvale, tema praktilisele tegevusele.

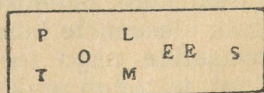
Kaasajal me tunneme hästi muistse Babüloonia (osa kaasaegsest Iraagist) ja muistse Egiptuse (Niiluse jõe kaldad) asukate matemaatilisi teadmisi. Nende rahvaste tegevus matemaatika arendamisel saavutas oma kõrgpunkti umbes neli tuhat aastat tagasi.

Nende rahvaste matemaatikast tulebki eelkõige jutustada.

## Egiptus

Kaasaegse teaduse käsutuses on suhteliselt väike arv Egiptuse matemaatilisi dokumente. Neid on umbes viiskümmend.

Ürgseimaks Egiptuse matemaatiliseks ürikuks on niinimetatud „Moskva papüürus“<sup>1</sup>, mis kuulub umbes XIX



*Egiptlaste hieroglüüfkiri ja ta tähendus.*

sajandi viiekümnendatesse aastatesse enne meie ajaarvamise algust. Moskva papüüruse pikkus on 544 sentimeetrit ja laius 8 sentimeetrit.

Vene kollektsoonäär Goleništšev omandas ta 1893. aastal ning 1912. aastal läks ta üle Moskva Kujutava Kunsti Muuseumi valdusse.

<sup>1</sup> Papüürus — väga paksu paberi taoline muistne kirjutusmaterjal.



Kõik ülejäänud Egiptuse matemaatilised dokumendid, millest viimane kuulub meie ajaarvamise tuhandendasse aastasse, kordavad nimetatud põhidokumentides juba leitud arvutusreegleid.



Geomeetriline ülesanne Moskva papüürusest. Trapets on täisnurkne; tema suhtes rakendatuna on papüüruses toodud pindala arvutamise valem õige.

1	10	100	1000	10000	100000	1000000					
9	45	2314									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30

Egiptuse numbrid: kaks ülemist rida on kirjutatud hieroglüüfidega, alumine rida hieraatiliste märkidega.

Osutub, et egiptlased lahendasid neli tuhat aastat tagasi paljusid meie praktilise matemaatika — aritmeetika, geomeetria ja mõningate algebra osade — ülesandeid.

Neil oli kümnendalusega numeratsioon ning nad oskasid arvutada murdudega.

Ülesandeid, mida meie lahendame lineaarvõrrandite abil, lahendasid nemad meetodiga, mida meie koolis nimetatakse „oletusvõtteks“. Seda võtet kasutati kõigi rahvaste aritmeetikas kuni XVIII sajandini „vale oletuse meetodi“ ehk „regula falsi“ nime all.

Milles see meetod seisab, näeme edaspidi.



Võrrand hieroglüükirjas. Paremt vasakule loetakse: „Hunnik (tundmatu),  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{7}$ , kokku on 33“, s. o.  $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$ .

Egiptlased oskasid arvutada sirgjoonsete kujundite ja ringi pindala. Ringjoone pikkuse ja diameetri suhe (meie arv  $\pi$ ) oli Egiptuse geomeetria reeglite põhjal võrdne 3,16-ga. Mõnede uurijate arvates tundsid egiptlased kera ruumala arvutamise reeglit ning kahtlemata oskasid arvutada ruutalusega tüvipüramiidi ruumala.

## Babüloonia

Samaaegselt matemaatika tärkamisega Egiptuses löid muistse Babüloonia elanikud sumerid ja akadlased iseisvalt oma matemaatika. Need rahvad kirjutasid kiilukujulistest kriipsudest koosnevate märkide abil saviplaatidele, mis kõrvetava päikese käes kuivamisel omandasid suure kõvaduse. Kaasajal leitakse neid saviplaate lahti-kaevamistel tuhandete kaupa.

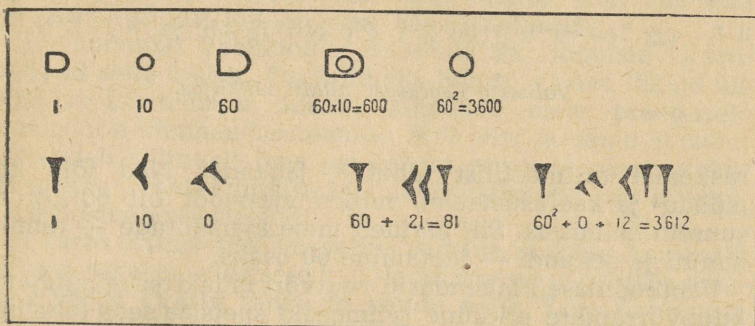
Leningradi Ermitaažis ja Moskva Kujutava Kunsti Muuseumis on suur hulk ehtsate pealiskirjadega Egiptuse ja Babüloonia mälestusmärke. Egiptuse raidkiri on säilinud ka Leningradis Neeva kaldal Kunstiakadeemia ees seisvatel sfinksidel.



*Uks sfinksidest Neeva kaldal Leningradis.*

Need vaaraosid inimpeadega lõvidena kujutavad sfinksid leiti 1819. aastal Egiptuses toimunud väljakaevamistel ja toodi 1832. aastal Peterburisse. Nad kujutavad Egiptuse vaaraod, kes valitses aastail 1419—1383 enne meie ajaarvamise algust, ja on järelikult umbes 3500 aastat vanad. Nad on välja raiutud kõige kõvemast punasest graniidist ning on vastu pidanud Egiptuse kohutavale kuumusele ja Põhja külmale. Sfinkside mõõtmed on järgmised: pikkus 4,88 meetrit, kõrgus 3,66 meetrit, laius umbes 1,55 meetrit, kaal 23 tonni. Sfinkside eest maksti assignatsioonides 64 000 rubla; nende kohaletoimetamine läks maksma umbes pool sellest summast. Akadeemik

A. N. Krõlov märkis hämmastusega ära fakti, et tolle aja egiptlastel oli meisleid, millega võis raiuda kõvasse graaniiti peeni kirjamärke.



Ülemine rida — sumeri numbrid, alumine — babüloonia numbrid.

Viimase kahe-kolmekümne aasta jooksul on leitud ja läbi uuritud tohutu hulk Babüloonia matemaatilisi mälestusmärke.

Leiti neljakümne neljast tahvlist koosnev babüloonia matemaatiline entsüklopeedia, mis kuulub umbes kahe-tuhandendasse aastasse enne meie ajaarvamise algust, s. o. Babüloonia kultuuri õitseaja haripunkti, ja kujutab endast nagu babüloonia matemaatiliste saavutuste kokkuvõtet. Sellest entsüklopeediast nähtub, et babüloonia lastel oli praktilise elu, s. t. põllutöö, maa niisutamise reguleerimise ja kaubanduse poolt püstitatud praktiliste ülesannete lahendamiseks küllaltki mugavaid meetodeid.

Babüloonia lapsed olid astronoomia rajajaiks. Neilt pärineb seitsmepäevane nädal, ringi jaotamine 360 kraadiks, tunni jaotamine 60 minutiks, minuti jaotamine 60 sekundiks, sekundi jaotamine 60 tertsiks. Nende juures sündis ka tähtede järgi tulevikku enustav valeteadus astroloogia.

Babüloonia lapsed löid oma aja kohta täiusliku arvusteemi, mille aluseks polnud arv 10 nagu meil, vaid arv 60, mis paljudel juhtudel kergendas



Babüloonia saviplaat kiilkirjaga.



Teise aastatuhande teisel poolel enne meie ajaarvamise algust eksisteeris maa-alal, mis asus ühelt poolt Babüloonia ja teda asendanud Assüüria riigi ning teiselt poolt Taga-Kaukaasia vahel, Vani ehk Urartu riik, mis VIII sajandil vallutas lõunapoolse Taga-Kaukaasia.

Omandanud Babüloonia matemaatika, töötasid Urartu rahvad selle ümber. On kindlaks tehtud, et nad läksid üle kümnendsüsteemile, mis oli lähedane meie praegusele positsioon-kümnendsüsteemile (kus üks ja sama number tähendab sõltuvalt oma asukohast erinevat suurusjärku) ja erines järsult Egiptuse kümnendsüsteemist, mis ei tundnud positsiooniprintsiipi.

Urartu aritmeetika on paljus samane muistse Armeenia aritmeetikaga. Muistsete babüloonlaste matemaatika avaldas seega Urartu rahvaste kaudu mõju Taga-Kaukaasia rahvaste, eriti armeenlaste muistsele matemaatikakultuurile, soodustades selle erakordselt varast õitsengut.

## India

Paralleelselt Egiptuse ja Babülooniaga toimus matemaatika arenemine ka Indias. Kas kaks või poolteist tuhat aastat enne meie ajaarvamise algust kirjutati muistsed hindude raamatud, mida nimetati vedadeks.

Neis raamatutes ja nende ümbertöötlustes, nn. sutrates leiduvad üksikasjalised reeglid ühe kujundi asendamise kohta temaga pindvõrdse kujundiga, nende kujundite jaotamise ja liitmise kohta. Seejuures kasutatakse peamiselt täisarvudes avalduvate külgedega täisnurkseid kolmnurki. Vedades käsitletakse järgmisi täisarvuliste külgedega täisnurkseid kolmnurki:

1) kolmnurka külgedega 3, 4, 5 ning arvude 3, 4, 5 ühe ja sama arvuga korrutamisel saadud kolmnurki;

2) kolmnurka külgedega 5, 12, 13 ja temaga sarnaseid kolmnurki;

3) kolmnurki külgedega 8, 15, 17 ja 12, 35, 37.

Täisnurksete kolmnurkade kaatete ruutude summa võrdub teatavasti hüpotenuusi ruuduga (Püthagorase teoreem). Seda nõuet rahuldavad ülalpool toodud külgedega kolmnurgad. Näiteks:

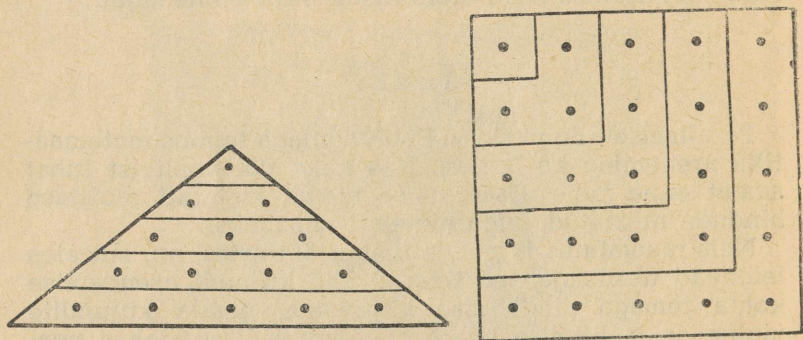
$$12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369 = 37^2.$$

Antud kujundiga täpselt pindvõrdse, kuid kujult temast

erineva kujundi konstrueerimine ja analoogilised ülesanded moodustavad olulise osa Kreeka geomeetriast ning neid vaadeldakse ka meie koolikursuses.

Ehituskunst nõudis ruudukujuliste, kolmnurksete või hulknurksete kujundite koostamist ruudukujulistest plaatidest või tellistest. See ülesanne pani tõenäoliselt aluse õpetusele kolmnurkarvudest, ruutarvudest ja üldse hulknurkarvudest. Seda õpetust arendati laialdaselt edasi ka Kreekas.

Kolmnurkarvudeks nimetati arve 1, 3, 6, 10, 15 jne., ruutarvudeks arve 1, 4, 9, 16, 25 jne. Kui telliseid kujutada punktidenä, siis need arvud annavad meile punktide (telliste) hulga, mis on vajalik kolmnurkse või ruudukujulise kujundi ehitamiseks külgede järjestikusel pikenemisel (vt. joonis).



Punktide loendamine kolmnurkades annab „kolmnurkarvud“ 1, 3, 6, 10, 15, ..., ruutudes aga „ruutarvud“ 1, 4, 9, 16, 25, ...

Ruudukujulised plaadid (tellised) olid põhiliseks ehitusmaterjaliks Indias ja eriti naaberriigis Babüloonias, kus kivid ja puit täiesti puudusid. Kujundite pindvõrdsuse üle otsustati nende plaatide arvu järgi. See ehituskunsti praktiline ülesanne püstitas küsimuse, kuidas määrata antud pindalaga kolmnurkse, ruudukujulise või hulknurkse kujundi saamiseks vajalike plaatide arvu.

Selle ülesande lahendamine nõudis naturaalarvude jada 1, 2, 3, 4, ..., kolmnurkarvude jada 1, 3, 6, 10, 15, ... ja ruutarvude jada 1, 4, 9, 16, ... omaduste uurimist. Nende küsimustega tegelesid babüloonlased, hindud ja

hiljem kreeka matemaatikud, eriti Püthagoras (VI saj. e. m. a.) ning tema koolkond.

Püthagorase elulookirjeldustes räägitakse tema viibimisest Egiptuses, Babülooonias ja Indias. Paljud temale omistatud avastused, nende hulgas ka õpetus nimetatud kujurvudest (kolmnurkarvudest, ruutarvudest jne.), olidki tõenäoliselt kaasa toodud Babülooniast ja Indiast, kus see õpetus kasvas välja nende maade ehituskunsti ülesannetest.

Hindude kõige väärtuslikumaks panuseks matemaatiliste teaduste varasalve on meie poolt kasutatav arvude kirjutamisviis kümne märgi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 abil.

Selle kirjutamisviisi aluseks on idee, et üks ja sama number tähistab olenevalt oma asukohast kord ühelisi, kord kümmelisi, sajalisi või tuhandelisi. Kui mõned järgud puuduvad, siis pannakse nende asemele nullid.

Sellise kohast sõltuva ehk positsioonilise arvusüsteemi idee oli olemas juba babüloonlastel, kuid selle lõplik väljatöötamine on hindude suurimaks teeneks.

Suur prantsuse matemaatik Laplace (1749—1827) kirjutab selle kohta järgmist: „Mõte väljendada kõiki arve väheste märkidega, millele on antud peale kujulise tähenduse ka positsiooniline tähendus, on sedavõrd lihtne, et just selle lihtsuse tõttu on raske hinnata, kuivõrd ta on imeteldav. Kui raske on selle mõteni jõuda, näeme selgesti kreeka teaduse kahe suurima geeniuse Arhimedese ja Apolloniose tööde varal, kellele see mõte jäi varjatuks.“

Positsioonilist arvusüsteemi ei leiutanud mingi geniaalne üksikisik. See hindude leiutis nagu kõik egiptlaste ja babüloonlaste leiutisedki on kogu rahva tähelepanekute ja kogemuste rikastumise tulemuseks. Samasugused on ka paljud esimesel pilgul üsnagi abstraktsed matemaatika saavutused.

## Kreeka matemaatika

Kreeka matemaatikud tundsid suurt osa praeguse koolimatemaatika, eriti geomeetria kursusest.

Matemaatika valdkonnas töötanud kreeklaste kohta võib öelda Engelsi sõnadega: „Me peame nagu paljudel teistelgi aladel ikka uuesti tagasi pöörduma selle väikese rahva saavutuste juurde, kelle universaalne andekus ja

tegevus kindlustasid talle inimkonna arengu ajaloos koha, millele ei või pretendeerida ükski teine rahvas...<sup>1</sup>

Aritmeetika ja geomeetria õpikutes kohtame terve rea kreeka matemaatikute nimesid.

Kõige varasemaks kreeka matemaatikuks oli Thales (VII ja VI sajand e. m. a.).

Temale omistatakse mõned geomeetria põhiteoreemid (teoreem võrdhaarse kolmnurga alusnurkade võrdsusest, teoreem kolmnurkade ühtimisest ühe külje ja kahe selle külje juures asetseva nurga järgi ning teisi teoreeme). Ta ennustas ka päikesevarjutusi.

VI sajandil e. m. a. elas eespool mainitud Püthagoras. Peale varemnimetatute omistatakse talle veel väga palju avastusi, muide ka muusika matemaatilist teooriat, millele andis kaasaegse kuju Peterburi Teaduste Akadeemia liige Leonhard Euler (1707—1783). Umbes 300. aastal e. m. a. koostas Eukleides (geomeetria) „Elemendid“, mille sisu hõlmab suurema osa kooli geomeetriakursusest. Nii sellest kui ka Eukleidese teenetest aritmeetikas on meie raamatus juttu mitmes kohas.

Matemaatikut ja mehaanikut Arhimedest (287—212) tuleb pidada kõigi aegade suurimaks matemaatikuks. Tal oli olemas paljude matemaatiliste ideede algmeid, milleni Euroopa rahvad jõudsid alles 2000 aastat hiljem.

Aritmeetika õpikus kohtame matemaatiku ja geograafi Eratosthenese nime, kes andis meetodi algarvude eraldamiseks naturaalarvude jadast ja arvutas meridiaani pikkuse.<sup>2</sup>

Kreeklased muutsid matemaatika abstraktseks teoreetiliseks teaduseks, milles nad saavutasid suure täpsuse. Nende ajal tekkisid muide neli silmapaistvat ülesannet, millega inimkond tegeles üle kahe ja poole aastatuhande. Need ülesanded olid järgmised:

1. Ring või kaar jagada meelevaldseks arvuks võrdseteks osadeks (konstrueerida ringi sisse meelevaldse külgede arvuga korrapärane hulknurk).

2. Kahekordistada kuup, s. o. ehitada kuup, mille ruumala oleks kaks korda suurem kui antud kuubil.

3. Jagada mistahes nurk kolmeks võrdseks osaks.

<sup>1</sup> Ф. Энгельс, Диалектика природы, 1948, стр. 27.

<sup>2</sup> Kuidas ta meridiaani pikkust mõttis, sellest on juttu raamatus И. Деппман, Меры и метрическая система, Детгиз, Ленинград, 1953.

#### 4. Konstrueerida antud ringiga pindvõrdne ruut.

Kõik need ülesanded tuli täpselt lahendada sirkli ja jaotusteta joonlaua abil. Vaatamata oma näilisele lihtsusele, osutusid need ülesanded lahendamatuks, mida saadi aga kindlaks teha alles XIX sajandi teisel poolel.

Selle ajani ja osalt ka pärast seda raiskasid paljud inimesed, eriti asjaarmastajad, kes ei uurinud matemaatikat tõsiselt, aega ja jõudu nende ülesannete lahendamise lootusetutele katsetele.

Nende ülesannete kohta on kõigis keeltes kirjutatud palju raamatuid ja brošüüre ning nende ajalugu nõuaks õmaette raamatut, millest võiks näha, kuidas esimesel pilgul väga lihtsad ülesanded aitasid välja töötada meetodeid, tänu millele on loodud kaasaegse matemaatika tähtsaid harusid.

Kreeka teadus suri välja V sajandil meie ajaarvamise järgi. Pärast seda ei teinud Euroopa rahvad terve aastatuhande kestel matemaatikas mingeid edusamme ja isegi ei teadnud midagi Kreeka matemaatika saavutustest.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000								
六	千	二	百	一	十	四														
six	mille	deux	cents	une	dizaine	et														
} Exemple																				
écriture																				
du																				
nombre																				
6214																				
										x	8	±	±	±	̄	+	千	千	千	0
							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10000	0
							100	千 ± 8		千 ±	千									
							100	465		120	10.204									

Hiinâ numbrid: ülemine rida — teaduslike tööde numbrid; all vasakul on ülalt alla kirjutatud arv 6214; raamiga piiratud osas on kaubanduslikud numbrid.

Idamaised rahvad (hindud, hiinlased, Kesk-Aasia rahvad) jätkasid matemaatika arendamist. Nende saavutused tungisid pikkamööda Euroopasse: umbes 1000. aastal jõudis kohale kaasaegne numeratsioon, umbes 1200. aastal hindude aritmeetika, mis peaaegu langeb ühte meie omaga. Alles XVI sajandist hakkas Euroopas iseseisvalt

arenema algebra ja XVII sajandil sai alguse kaasaegne kõrgem matemaatika.

Matemaatika tärkamises Euroopa rahvaste juures on suur osa mõnedel Nõukogude Liidu rahvastel, kelle matemaatikast me asumeegi nüüd jutustama.

# MEIE KODUMAA RAHVASTE MATEMAATIKA

## Armeenlaste matemaatika

Kõige varasemad andmed meie kodumaa rahvaste matemaatikast kuuluvad esimesse aastatuhandesse meie ajaarvamise järgi.

Matemaatilise kultuuri vanuse poolest on Nõukogude Liidu rahvaste seas esikohal armeenlased.

Armeenlastel oli VII sajandil silmapaistev õpetlane Anania Širakatsi, kelle töödest on suur hulk säilinud tänapäevani. Anania Širakatsi oli matemaatik, astronoom, meteoroloog, ajaloolane ja geograaf. Ta käsitleb oma töödes puhtaritmeetiliste ülesannete kõrval küsimusi maa kerakujulisusest, päikese- ja kuuvarjutustest, nulli kasutamisest matemaatikas, hulknurkarvudest, kalendri arvutamistest, päikese kellast, ja kõike seda ajajärgul, mil Euroopas nende küsimustega veel peaaegu mitte keegi ei tegeelnud.

Nagu väidavad armeenia rahva ajaloolased, ei olnud teaduslik uurimistöö Ananiale ainsaks eesmärgiks. Kui tema kodumaad ähvardas oht, võttis ta vahetult osa vabadusvõitlusest bütsantslastest anastajate vastu.

Sõdur-armeenlane võitles kodumaa eest mõõgaga, õpetlane-patrioot aga sulega. Selline oli esimene armeenia matemaatik Anania Širakatsi.

Anania töödest pakuvad meile huvi eriti aritmeetika õpik ja ülesandekogu.

Ülesandekogu algusse on paigutatud teoreetiline sissejuhatus ja arvude liitmise, lahutamise, korrutamise ning jagamise tabelid, mis on sarnased meie nooremate klasside õpikutes leiduvate tabelitega.

Need tabelid kuuluvad kõige vanemate teaduses tuntud tabelite hulka.

Toome mõned näited Anania ülesannetest:

„Nr. 11. Uks kaupmees läks läbi kolme linna; talt võeti esimeses linnas maksu: pool ja kolmandik varandusest, ka teises linnas võeti pool ja kolmandik (sellest, mis oli järele jäänud), kolmandas linnas võeti jälle pool ja kolmandik sellest, mis tal oli; ja kui ta jõudis koju, siis oli tal alles 11 dahhekaani (rahaühikut). Niisiis, tee kindlaks, kui palju oli kaupmehel algul dahhekaane.“ Vastus: 2376.

„Nr. 22. Vaarao, Egiptuse valitseja, pühitses oma sünnipäeva ja sel puhul oli tal tavaks jagada kümne kõrge aukandja vahel igäühe väarikusele vastavalt sada mõõtu veini. Niisiis, jaga see vein vastavalt kõigi kümne väarikusele.“

(Sõnade „igäühe väarikusele vastavalt“ mõte on see, et esimese osa suhtub teise osasse nagu 1:2, teise osa kolmanda osasse nagu 2:3 jne.). Vastus (kaasaegses kirjaviihis): esimene sai  $1\frac{9}{11}$ , teine  $3\frac{7}{11}$ , seitsmes  $12\frac{8}{11}$ .

Anania annab vastuse murde egiptuse viisi kirjutades: esimene —  $1\frac{1}{2}\frac{1}{5}\frac{1}{10}\frac{1}{55}$ , see on  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{55}$ , seitsmes —  $12\frac{1}{2}\frac{1}{10}\frac{1}{22}\frac{1}{30}\frac{1}{33}\frac{1}{55}$ .

„Nr. 24. Ateena linnas oli bassein, millesse suundus kolm toru. Uks toru võis täita basseini ühe tunniga, teine, peenem toru kahe tunniga, kolmas, veel peenem toru kolme tunniga. Niisiis, tee kindlaks, missuguse osaga tunnist täitsid basseini kõik kolm toru koos.“

Vastus:  $\frac{1}{4}\frac{1}{6}\frac{1}{12}\frac{1}{22} = \frac{6}{11}$  tunniga.

Anania matemaatiliste teadmiste taseme kõrgus saab eriti ilmseks, kui märkida, et tema kaasaegne, „auväärne“ inglise munk Beda, keda peeti oma aja targimaks inimeseks Euroopas, räägib: „Maailmas on palju raskeid asju, kuid pole midagi nii rasket, kui seda on aritmeetika neli tehet...“ Anania aga lahendab kaheksa murru liitmist nõudvaid ülesandeid (näiteks ülesanne nr. 21 tema ülesandekogust), kusjuures murdude nimetajate hulgas on arvud 7, 8, 9, 13, 14, 16, 20, millel on väga suur ühine nimetaja. Märgime võrdluseks, et inglise aritmeetikaõpiku autor kirjutab 1735. aastal: „Õpilaste huvides... me käsitleme eraldi raamatu lõpus tehteid murtud arvudega, mida harilikult nimetatakse murdudeks, ja mida

nähes osa õpilasi on sedavõrd masendatud, et nad peatuvad ja hüüavad: „Aitab!“

Seega Inglismaal veel üksteist sajandit hiljem aritmeetika õppijat ahastusse viivad murrud ei valmistanud Anania Širakatsile mingeid raskusi.

See fakt illustreerib hästi matemaatiliste teadmiste taset meie ajast nii kaugel seitsmendal sajandil.

Üheteistkümnendal sajandil (1051) tõlgiti lühendatult kreeka keelest armeenia keelde kreeka matemaatiku Eukleidese geomeetria „Elemendid“.

See maailma kuulsamaid tõlkeid on säilinud tänaseni ja seda hoitakse alal Erevani muuseumis.

Eukleidese „Elemendid“ on meie geomeetria algürikuks ja oli kõigil rahvastel kahe tuhande aasta jooksul ainsaks geomeetria õpikuks. Seda raamatut on sadu kordi tõlgitud paljudesse keeltesse. „Elementide“ armeeniakeelne tõlge oli arabiakeelse tõlke järel ajalisel teine. Euroopa õpetlaste rahvusvahelisse keelde — ladina keelde — tõlgiti „Elemendid“ araabia keelest 1120. aastal, esimene tõlge kreekakeelsest originaalist aga tehti Euroopas alles 1533. aastal, peaaegu viis sajandit hiljem armeeniakeelsest tõlkest.

Peale Anania Širakatsi ning Eukleidese „Elementide“ arvatava tõlkija Grigor Magistri on teada ka teisi kesk-aegseid armeenia matemaatikuid, näiteks Ovannes Sarkavag-Vardapet (vardapet — õpetaja), kes suri 1129. aastal. Ovannes Sarkavag seletab kreeka matemaatiku Nikomahhose (I sajand m. a. j.) õpetust arvudest, täiustab kalendrit 365 päeva pikkuse aasta kindlaksmääramisega ja võitleb kogemustele toetuvate teadmiste eest. „Kogemusteta ei saa ükski arvamus olla usutav ja vastuvõetav, sest ainult kogemustes pole võimalik kahelda,“ kirjutab ta.

Kõik need faktid kinnitavad muistse ja keskaegse Armeenia kultuuri kõrget taset. On teada armeenia õpetlasi, kes olid meie ajaarvamise esimestel sajanditel kreeka akadeemias professoriteks.

Lõpuks toome esimese armeenia matemaatiku Anania Širakatsi sõnad selle teaduse kohta: „Ja olles tugevasti arvutamiskunsti armastama hakanud, ma mõtlen endamisi, et ilma arvuta ei tule välja ükski filosoofiline arutus, ning pean teda kogu tarkuse emaks.“

Taolisi arvamusmatemaatika kohta leiame tihti ka vanadest vene ürikutest.

## Kesk-Aasia rahvaste matemaatika

Me jutustasime matemaatika sünnist babüloomlaste, egiptlaste ja hindude juures ning sellest, et edaspidi, alates VII sajandist e. m. a. toimus matemaatika areng terve aastatuhande vältel peamiselt Kreekas. V sajandi lõpust meie ajaarvamise järgi, kui katkes Kreeka matemaatika areng, kuni 1200. aastani pole Euroopa rahvaste matemaatika kohta peaaegu mingeid andmeid. Tollal kõikvõimsad kirikuteenrid suhtusid vaenulikult igasse teadusse, sealhulgas ka matemaatikasse. Kirikumeestest ei jäänud selles suhtes maha ka ilmalikud võimumehed.

Bütsantsi valitseja Justinianuse poolt 529. aastal välja antud seadustekoodeksis leidis jagu, mille pealkiri oli „Kurjasepitsejatest, matemaatikutest ja muudest säärastest“, ning selles jaos paragrahv: „Hukkamõistmist vääriv matemaatikakunst keelatakse täielikult.“ Muide, siin käisid mõiste „matemaatik“ alla kaennustajad ja astroloogid, kes ennustasid tulevikku tähtede järgi; see nähtub valitseja Theodosiose seadusest: „Argu keegi küsigu nõu ennustaja või matemaatiku käest.“

Mõjukas munk Caccini, üks peamisi suure õpetlase Galileo Galilei (1564—1642) tagakiusajaid, kuulutas veel XVII sajandil, et matemaatikuid kui igasuguse ketserluse loojaid tuleb põletada kogu kristlikul maapinnal.

Munk Caccini mõttekaaslastel-kirikumeestel õnnestus röövida raugastunud õpetlase vabadus ning teda piinata, kuid neil ei õnnestunud teda sundida loobuma poola astronoomi ja matemaatiku Koperniku (1473—1543) õpetusest, mille kohaselt mitte Päike ei liigu ümber Maa, vaid Maa tiirleb ümber Päikese.

Teadused muudeti jumalasõna teenreiks ning paljud eesrindlikud õpetlased lõpetasid kirikukohtute (inkvisitsioonikohtute) otsuste põhjal oma elupäevad tuleriidal. Inkvisitsiooni juht Hispaanias „suurinkvisiitor“ Thomas de Torquemada saatis 1486. aastal tuleriidale hispaania matemaatiku Valmes'i, kes väitis, et ta on leidnud neljanda astme võrrandi lahenduse, mis Torquemada kinnituse järgi oli jumala soovi tõttu inimloomusele kättesaamatu. Märgime, et meetodi selliste võrrandite lahendamiseks leidis XVI sajandi keskpaiku itaalia matemaatik Ferrari.

Sellise teadusse suhtumise tulemuseks polnud mitte ainult teaduse arengu seismajäämine, vaid ka see, et tolle aja õpetlased ei saanud enam aru varasemast teadusest.

VII sajandil hakkasid silmapaistvat osa etendama araablased. Nad pidasid grandioosseid vallutussõdu ja alistasid pikkamööda enamiku varasemaid kultuurriike.

Kaubandus, meresõit, tööstus ja sõjaasjandus nõudsid sügavamaid teadmisi. IX sajandi esimesest poolest algas rahvaste kultuuripärandi hoogne araabia keelde tõlkimine.

Paljusid kreeka õpetlaste matemaatilisi töid tunneme praegu ainult nende araabiakeelsete tõlgete järgi. Ka meie päevil avastatakse araabia käsikirjade hulgas aegajalt kreeka matemaatikute senitundmatuid töid. Üheks viimastest sellelaadsetest suurtest avastustest oli 1924. aastal leitud Arhimedese töö korrapärase seitsenurga kohta. Veidi rohkem kui viiekümne aasta eest leidis vene õpetlane A. I. Popadopulo-Keramevs Arhimedese väga tähtsa, tolle ajani tundmatu töö, mis trükiti 1905. aastal pealkirja all „Arhimedese uus teos“.

Idamaade teadusliku elu tähtsateks keskusteks olid meie Kesk-Aasia vabariikide linnad Samarkand, Horesm (Urgentš), Buhaara, Merv jt.

Siin puhkes alates IX sajandist õitsele matemaatika ning kerkisid esile kohalikud tadžiki ja usbeki teadlased, kes rikastasid teadust ning real juhtudel jäädvustasid oma kuulsuse igaveseks ajaks teadusse. Nende teadlaste hulka kuulusid: matemaatik Muhámmed al-Horesmi (Muhámmed Horesmist), astronoom Abul al-Fergani (Abul Ferganast), fergaanlased-astronoomid at-Türki ja tema poeg Abdul Hassan, al-Sagani Mervi linna lähedalt, al-Hodžendi ja al-Džauhhari Sõr-Darja kallastelt, al-Biruni Horesmist ja Ibn Sina Buhaarast (IX—X sajand), Omar Haijám, kelle elu on seotud Samarkandiga (XI sajand) ja al-Kaši — Samarkandi teadlase-vürsti Ulugbeki observatooriumi direktor (XV sajand).

Horesmlane Muhámmed al-Horesmi, kes sündis VIII sajandi teisel poolel ning suri 830. ja 840. aastate vahel, kirjutas aritmeetika õpiku, mille ladinakeelse tõlke kaudu Euroopa rahvad tutvusid hindude kümnest numbrist koosneva arvusüsteemiga.

IX sajandi algul seesama Muhámmed al-Horesmi kirjutas algebra õpiku, mis sai Euroopa õpikute esiisaks.



Ulugbek.

Al-Horesmi algebraraamat ei andnud sellele teadusele mitte ainult nime, vaid ka täiesti uue iseloomu.

Kreeklaste juures, kus ta oli tuntud aritmeetika nime all, tegeles algebra raskete, abstraktsete arvuteooria küsimustega. Al-Horesmi aga kirjutab oma raamatu eessõnas, et ta „koostas selle väikese teose arvutamisteaduse kõige kergemast ja kasulikumast osast, mida inimestel on alati tarvis päranduste ja päranduslõivude asjades, kohtuprotsessides, kaubanduses ja kõigis ärisuhetes, maamõõtmise korral, kanalite ehitamise juures, geo-

meetrilistes arvutustes ja iga liiki ja sorti teistes asjades...“

Kolm neljandikku raamatust on pühendatud praktiliste ülesannete lahendamisele, mida kreeka matemaatikud täielikult vältisid. Raamatu teoreetilist osa läbib arusaamine sellest, et algebra on üldist laadi teadus, mis lahendab „iga liiki ja sorti“ küsimusi (üldiste meetoditega — lisame meie).

Selle silmapaistva usbeki õpetlase nimest tuleneb ka matemaatiline termin „algoritm“, mis kaasajal tähistab iga teatava küsimuste ringi lahendamiseks sobivat arvutuste seeriat. Nii näiteks võib kõnelda võrrandite lahendamise algoritmist, teatavat tüüpi ülesannete lahendamise algoritmist jne.

Varasematel aegadel nimetati algoritmiks või algorismiks kümnendsüsteemis töötavat aritmeetikat, sest Euroopa teadlased tutvusid selle aritmeetikaga äsjamainitud al-Horesmi „Hindu numbritega aritmeetika“ tõlke kaudu. Tõlge algas sõnadega „al-Horesmi hindude arvutusviisist“; sõna „al-Horesmi“ võttiski kuju „algorism“.

Al-Horesmi on tuntud ka oma astronoomiliste ja geograafiliste töödega (meridiaani pikkuse mõõtmine).

Samuti Horesmist pärinev kuulus filosoof, astronoom ja matemaatik al-Biruni sündis 973. aastal.

Filosoofina on ta huvitav selle poolest, et ta juba neil kaugetel aegadel võitles inimhõimustuse õiguste eest. Ta kirjutab, et astronoomiliste vaadete üle „vaidlesid temaga mõned inimesed, kes omistavad jumalikule ülitarkusele selle, millest neil aimu ei ole. Oma harimatust õigustavad nad väitega, et ainult Allah on kõikvõimas ja kõik-teadja.“

Al-Biruni ei rahuldu sellega, et üks või teine astronoomiline teooria on mugav nähtuste seletamiseks. Ühtemoodi mugavasti võivad nähtusi seletada ka mitu teooriat. Tema arvates peaks teadlane püstitama küsimuse: missugune neist teooriatest on õige?

Silmapaistvas matemaatilises töös „Raamat kõõludest“ toob al-Biruni üksikute lausete kohta erinevaid tõestusmeetodeid, mis olid teada varasematele teadlastele. Ta kirjutab:

„Lugeja, ma korjasin selle kõik sinu jaoks ja oma harjumuse kohaselt näitasin iga kord autori, et sa näeksid nende tõestusi oma silmaga ja taipaksid, et kõik nad koonduvad ühte punkti, ja et sa ise otsustaksid, mida on siit vaja järeldada kõõlude tundmaõppimiseks.“

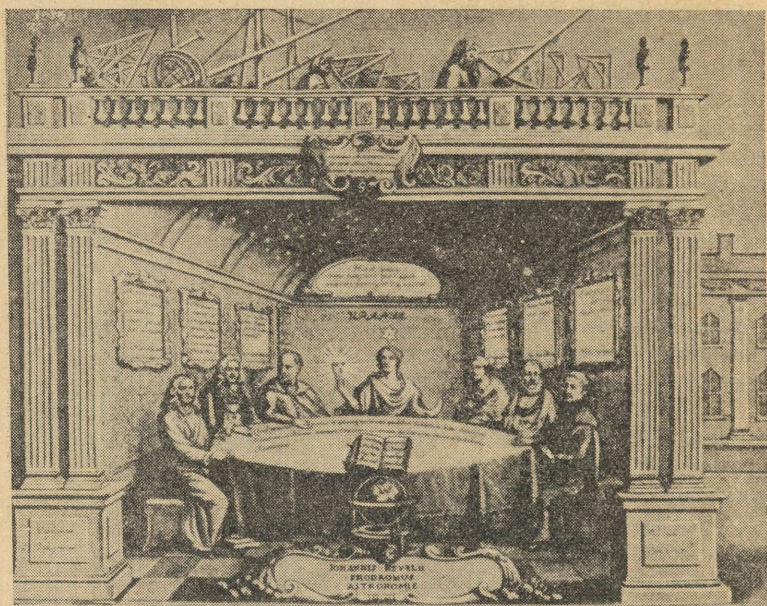
Sisu poolest kuulub raamat geomeetria ja trigonomeetria keerukamate küsimuste kohta käiva õpetuse alla — matemaatika osasse, mida õpitakse koolis alates VIII klassist. Oma astronoomilistes töedes näitab al-Biruni meetodi täpsete kaartide koostamiseks (triangulatsioonimeetod).

Mongoli valitseja Tamerlani pojapoeg Ulugbek (1394—1449), kes ise oli kuulus astronoom, ehitas Samarkandi tolle aja maailma parima observatooriumi, kogudes sinna tuntumaid õpetlasi astronoomia ja matemaatiliste teaduste läbitöötamiseks.

Trigonomeetria võlgneb palju selle õpetlaste rühma tegevusele.

Selle observatooriumi esimeseks direktoriks oli usbekk Džemšid ibn Masud al-Kaši, kes suri 1436. aasta paiku. Tema panus matemaatikasse oli üsna suur. Ta leidis reegli ühest kuni meelevaldse naturaalarvu  $m$ -ni võetud arvude jada liikmete neljandate astmete summa arvutamiseks:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + m^4 = \frac{1}{30} (6m^5 + 15m^4 + 10m^3 - m),$$



XVII sajandi gravüür, mis kajutab Ulugbekki kuulsaimate astronoomide hulgas: laua taga on astronoomia muusa Urania. Uraniast paremal istub esimesena Ulugbek.

täiustas trigonomeetrilisi arvutusi, andis kõrgema astme võrrandite ligikaudse lahendamise eeskirja ja taevakehade kauguse määramise meetodi ning leiutas planeetide asukoha uurimiseks teravmeelse mehaanilise vahendi.

Kõik need avastused tehti Euroopa teadlaste poolt alles mitme sajandi pärast uuesti.

Al-Kaši kirjutas XV sajandi algul raamatu „Õpetus ringjoonest“, millele ta viitab oma 1427. aastal ilmunud raamatus „Arvutamiskunsti võti“. „Õpetuses ringjoonest“ teostab ta arvutusi meid hämmastama paneva täpsusega: kui tema poolt kuuekümnendsüsteemis läbi viidud arvutused üle kanda kümnendmurdudesse, siis saame 16 õiget kümnendkohta pärast koma. Oma raamatus leiab al-Kaši ringjoone pikkuse ja raadiuse ligikaudse suhte (arvu, mida me tähistame sümboliga  $2\pi$ ), arvutades selleks ringjoone sisse joonestatud korrapärase 800 335 168-nurga külje pikkuse. Nagu me hiljem näeme, leiab al-Kaši  $\pi$

kuueteistkümne õige kohaga pärast koma.

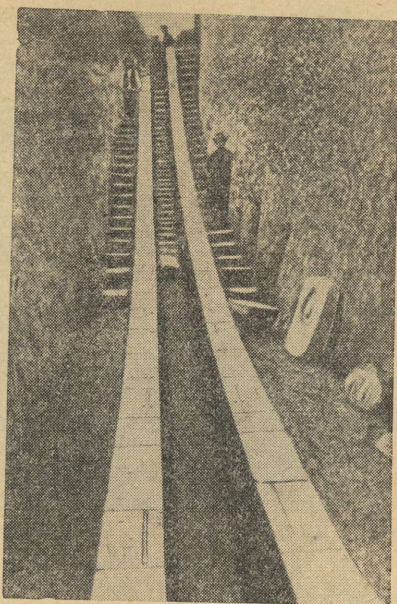
Samas raamatus toob al-Kaši terve rea muude üsna tähtsate tulemuste kõrval teadusse esmakordselt sisse kümnendmurrud, ilma milleta oleksid mõeldamatud kaasaegne matemaatika ja tehnika. See oli 175 aastat enne kümnendmurdude Euroopasse ilmumist.

Kuulus tadžiki poeet, filosoof, matemaatik ja astronoom Omar Haijám sündis 1048. aasta paiku ja suri 1122. aasta paiku. Tema biograafiast on teada, et ta samarkandlasest sõber Abu Tahir võimaldas tal matemaatika õppimist. Viimasele ongi pühendatud Omar Haijámi algebra, mis on kirjutatud aastail 1069—1074. Selles raamatus annab autor

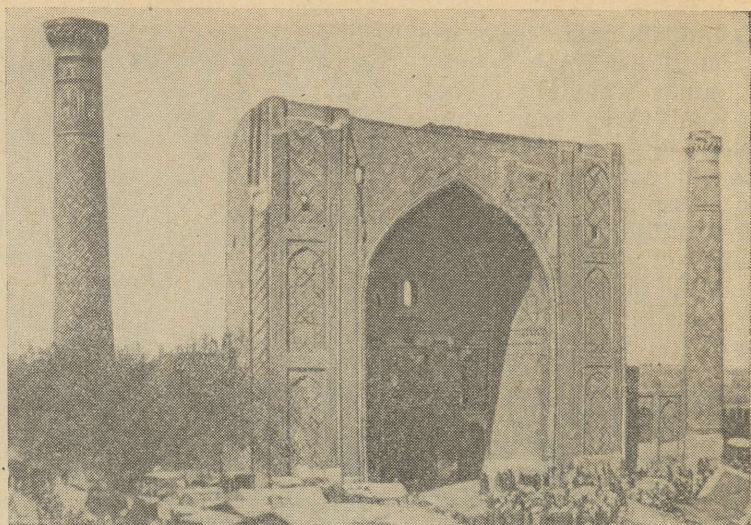
kuupvõrrandite lahendamise geomeetrilise meetodi, mida tuleb lugeda keskaja algebra suurimaks saavutuseks. Nende võrrandite algebralise lahendamise meetodid leiti Euroopas alles XVI sajandi keskpaiku.

Meie päevil leitud Omar Haijámi töö „Võti Eukleidese raskete kohtade juurde“ kuulub geomeetriasse. Omar Haijám tegeleb seal paralleeljoonte küsimustega ja jõuab XIX sajandi esimesel poolel kõigi aegade geniaalseima geomeetri N. I. Lobatševski poolt loodud geomeetrilise mõtte kõrgeimate konstruktsioonide mõningate lähteideeni.

1079. aastal koostas Omar Haijám uue väga täpse kalendri. See kalender võeti mõnedes Aasia maades Omar Haijámi eluajal tarvitusele ja selle matemaatilisi arvutusi kasutati prantsuse revolutsioonilise kalendri jaoks üsna XVIII sajandi lõpul.



*Kraadideks jaotatud suure raadiusega kaar; Ulugbeki observatooriumi varemed Samarkandis.*



*Selles hoones töötas Ulughbek (varemed Samarkandis).*

Al-Horesmi, al-Biruni, al-Kaši ja Omar Haijámi nimele viitamisest piisab, et iseloomustada seda erakordselt kõrget taset, mille saavutasid täppisteadused keskajal meie Kesk-Aasia rahvaste juures.

Euroopas aga lõpetasid eesrindlikud teadlased ja mõtlejad sel ajal ja veel hiljemgi oma elupäevad tihti tuleriidal (Giordano Bruno 1600. a.) ning neid piinati ja ähvardati inkvisitsiooni poolt (Kopernik 1473—1543, Galilei 1564—1642).

Koperniku raamatut, millest said alguse meie kaasaja vaated päikesesüsteemile, katoliiklastele keelatud raamatute nimekirja kandes kirjutas rooma kiriku tsensuur 1616. aastal: „Need raamatud peetakse kuni korralduseni kinni katoliiklikku tõde kahjustava õpetuse laialivalgumise ärahoidmiseks.“

Samal ajal kui usbeki ja tadžiki teadlased võitlesid teadusliku mõtte vabaduse eest, ei võinud „haritud“ Euroopas teaduslik raamat arvestada teaduslikku, vaid katoliiklikku tõde, s. o. katoliikliku religiooni eausku.

Kodanlikud ajaloolased peavad harilikult Kesk-Aasia teadlasi araablaseks, sest nad kirjutasid valdava enamuse

oma teaduslikest töödest araabia keeles. Araablased nad aga ei olnud ning rida nende töid on säilinud ainult nende emakeeles. Araabia keel oli ainult teadlaste rahvusvaheliseks keeleks nagu Euroopas tollal ja veel kaua hiljem ladina keel.

### Vene rahva matemaatika

Vene rahva matemaatiliste teadmiste kohta on olemas kirjalikke dokumente alates umbes meie ajaarvamise tuhandendast aastast. Need teadmised on eelneva pika arengu tulemus ja põhinevad inimese praktilistel vajadustel.

Venemaal tekkis üksikutes rahvakihtides huvi teaduse vastu üpris varakult. On säilinud teateid koolidest Vladimir Svjatoslavitši (978—1015) ja Jaroslav Targa (1019—1054) ajal. Juba väga varastel aegadel leidis „arvuarmastajaid“, kelle huvi matemaatika vastu ei piirdunud ainult selle määraga, mis oli otseselt vajalik praktiliseks tegevuseks.

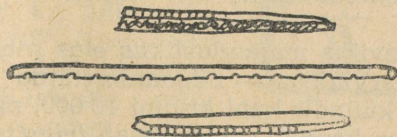
Sellise „arvuarmastajana“ tunneme XII sajandi algusest Novgorodi munka Kiirikut.

Kõneldes vene rahva huvist matemaatika vastu neil meist kaugeil aastasadel, ei tohi me unustada, et jutt on eesrindlikest, teaduste poole püüdvaist inimesist, kes ehitasid rahvuslikku kultuuri, mis järgnevatel sajanditel lõi lopsakalt õitsele.

Nende progressiivsete elementide kõrval eksisteerisid laialdased vaimulike ja ekspluataatorite ringkonnad, kes suhtusid vaenulikult teadmistesse üldse ja matemaatikasse eriti.

Teadusse vaenuliku suhtumise fakte kohtame veel XVII ja XVIII sajandilgi.

Kõigi matemaatiliste teadmiste põhiliseks eelduseks on erinevate muistsetel rahvastel erinevat kuju. Nähtavasti kõik rahvad tähistasid algul



Birkad — arvestuspulgad.

arve sisselõigetega pulkadele, mida venelased kutsusid birkadeks. Sellist võla- või maksukohustuste üleskirjutamise viisi kasutasid paljude maade väheharitud elanikud. Pulkadele tehti sisselõikeid, mis vastasid võla- või maksummale. Pulk lõhestati pooleks: üks pool jäi võlgniku või maksumaksja kätte, teine pool seisis laenuandja käes või maksuametis.

Maksmise juures kontrolliti mõlemaid pooli kokkupanemise teel. Inglismaal kehtis see maksude üleskirjutamise viis veel suhteliselt hiljuti. Talupoegade vanade maksukohustuste likvideerimisel otsustati kogunenud arvestuspulgad põletada parlamendihoone ahjudes. Sellest tekkis tulekahju ning parlamendihoone põles maani maha (1834), koos temaga aga hävis ka inglise pikkusmõõdu (jala) näidis, nii et tollest ajast peale inglased ei tea selle täpset pikkust. Hävinud jala pikkuse taastamise kauakestnud tööst võttis osa D. I. Mendelejevi lähim abiline meie mõõtude korrastamise alal professor F. Blumbach. Inglased meelitasid Blumbachi jääma Inglismaale tööle. 1949. aastal Läti NSV Teaduste Akadeemia auliikmena surnud Blumbachi enese sõnadest on teada, et tema poolt inglaste ettepanekule antud eitava vastuse peale märkis D. I. Mendelejev rahulolevalt: „Sa olid ja jääd vene lätlaseks...“

Inglise parlamendihoone põlemist on kirjeldanud suur kirjanik C. Dickens (An Address on Administrative Reform)<sup>1</sup>.

Kreeklased hakkasid VI sajandil e. m. a. tähistama arve eriliste märkidega varustatud tähtedega. Ka venelased kirjutasid arve slaavi tähestiku tähtede abil, kusjuures tähtede kohale asetati eriline märk — tiitel. Toodud tabel näitab, missuguseid numbreid missuguste tähtedega tähistati. Selle numeratsiooni mõjuga on seletatav ka mõnede vene keele grammatika terminite päritolu. Vanades grammatikaõpikutes nimetati tähte „и“ „и kaheksane“, tähte „i“ aga „i kümnene“. Need nimetused seletuvad sellega, et slaavi numeratsioonis „и“ tähendas kaheksat, „i“ aga kümnet.

Kauge mineviku majanduslikus elus rahulduti suhteliselt väikeste arvudega — nõndanimetatud „väikese loendusega“. See küündis kuni arvuni 10 000, mis kõige vanemates ürikutes kannab nime „tma“ (musttuhat), s. o. nii

<sup>1</sup> Dickensi teoste täielikus ingliskeelses väljaandes.

Ā	Ḃ	Ḟ	Ḍ	Ē	Š	Ž	Ń	Ḍ
аз	вѣди	глаголь	добро	есть	зело	земля	уже	фита
1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ḟ	Ḃ	Ḟ	Ḍ	Ń	Ḍ	ō	Ḟ	Ḟ
и	како	люди	мыслете	наш	кци	он	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Ḟ	Ḟ	Ḟ	Ḟ	Ḟ	Ḟ	Ḟ	и	Ḟ
рцы	слово	твердо	ук	ферт	зер	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Slaavi numeratsioon.

suur arv, et seda ei oska selgesti ette kujutada.

Edaspidi laiendati väikese loenduse piire kuni arvuni  $10^8$  — „musttuhast musttuhandet“. Vanaaegne käsikiri teatab sel puhul, et „sellest suuremat arvu inimõistus enam kinni ei võta“. Kui aga „oli tegemist suurte arvudega“, siis kasutati kõrvuti selle väikese loendusega teist süsteemi, mida nimetati „suureks arvuks ehk loenduseks“ või „slaavi suureks arvuks“. Seal kasutati kõrgemaid järke; tma —  $10^6$ , legeon —  $10^{12}$ , leodr —  $10^{24}$ , voron —  $10^{48}$ , mõnikord ka koloda —  $10^{49}$  (kuigi süsteemi kohaselt koloda pidanuks olema  $10^{96}$ ). Käsikirja autor teatab jälle, et „sellest arvust pole suuremat“.

Ḍ	Тысяща
Ḍ	Тьма
Ḍ	Легеон
Ḍ	Леодр
Ḍ	Ворон
Ḍ	Колода

Suured numbrid slaavi kirjaviisis.

Nende suurte arvude tähistamiseks kasutati originaalset meetodit, mida pole ühelgi teisel meile tuntud rahval: mistahes eespool loetletud kõrgema järgu ühikute arvu tähistati sama tähega kui lihtsaid ühelisigi, kusjuures igale arvule vastas oma ääris (vt. tabelit).

Suurimadki kreeka matemaatikud ei osanud seda arvude kirjutamise meetodit välja mõtelda.

Ühegi praktilise ülesande lahendamisel ei vajatud selliseid suuri arve tookord ega vajata neid ka praegu. Suurim kreeka matemaatik Arhimeses arvutas, et kogu maailmaruumis (nagu seda tollal mõisteti) leiduvate liivaterade hulk ei ületa arvu  $10^{63}$ .

Slaavi „arvuarmastaja“ ütles, et liivaterade arv ei ületa tuhandet legeoni voroneid

$$(10^{63} = 10^3 \cdot 10^{12} \cdot 10^{48}).$$

Liivaterade arv kogu maailmaruumis võis tolle aja inimesele näida tõepoolest suurima mõeldava arvuna, millega on ka õigustatud käsikirjade autorite ütlused, et „suuremast arvust kui see ei saa inimene enam aru“. Suure slaavi loenduse sage esinemine vene matemaatilistes ürikutes tõendab, et „arvuarmastajaid“ oli muistsel Venemaal küllaltki palju.

Esimeses trükitud vene matemaatikaõpikus — L. F. Magnitski „Aritmeetikas“ (1703)<sup>1</sup> — antakse suurte arvude jaoks juba rahvusvahelised terminid (miljon, biljon, triljon, kvadriljon). Jõudes arvuni  $10^{24}$  (kvadriljon), teatab autor:

See arv on ilma lõputa,  
ei mõistus teda seleta,  
ei keegi tema lõppu tea...

..... on asjata  
suuremaid arvuksid uurida  
ja kirjutada veel suuremat  
kõrgete arvude tabelis.

.....  
Või mõnel, kes arvutab vaevas,  
kui palju on midagi taevas,  
saab küllalt sest arvust, et võib  
siin ilmas küll lugeda kõik.

<sup>1</sup> 1699. aastal trükkis I. F. Kopijevski Amsterdamis raamatu „Sissejuhatus aritmeetikasse, see on igasugusesse rehkendusse“, milles ta kuueteistkümmel väikesel leheküljel käsitles arvutamise algmeid. Raamat ei leidnud Venemaal levikut.

Viimased read meenutavad ilmselt Arhimedese ülesannet maailmaruumis leiduvate liivaterade hulga kohta.

Hindude numeratsiooni tarvituselevõtmisega kaotas slaavi numeratsioon igasuguse praktilise tähenduse.

Muistse Venemaa tüüpiliseks „arvuarmastajaks“ oli meie poolt juba nimetatud munk Kiirik, kes kirjutas 1134. aastal raamatu „Novgorodi Antooniuse kloostri diakoni Kiiriku õpetus; ta annab ka inimestele teada kõigi aastate arvu“.

Kiirik arvestab innukalt, kui palju kuid, päevi ja tunde ta on elanud. Kiriklik ajaarvamine algas oletatavast „maailma loomisest“, mis olevat toimunud 5510 aastat enne meie ajaarvamise algust. 1134. aasta, millal Kiirik oma raamatu kirjutas, oli kirikliku ajaarvamise järgi 6644. aasta. Kiirik arvutab kuudes, nädalates ja päevades aega, mis on möödunud selle aastani, ning teostab mitmesuguste kirikupühade arvutamist tuleviku jaoks. Aja arvutamisel kasutab Kiirik „murrulisi tunde“, mõistes nende all kahe-teisttunnise päeva viiendikke, kahekümneviieendikke, sajakahekümneviieendikke jne. Jõudes niiviisi seitsmenda murrulise tunni juurde, milliseid päevas on 937 500, teatab ta: „sellest suuremaid ei ole“, mis nähtavasti tähendab, et päeva väiksemaid jaotusi ei kasutatud.

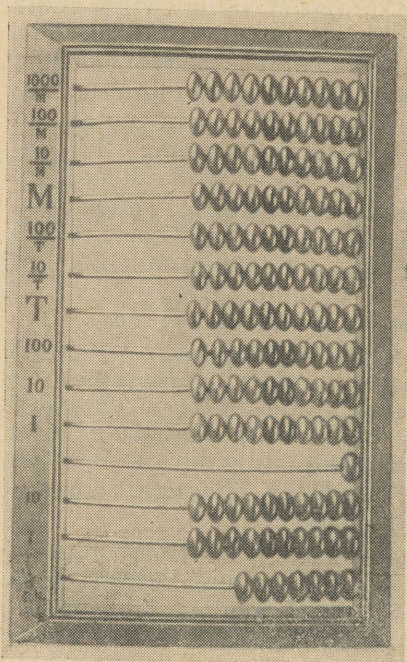
Muistse Venemaa kuulsas õiguslikus ürikus „Vene õiguses“, mille koostamise ajaks loetakse XI ja XV sajandi vahemikku, leidub artikleid teatava kindla alghulga lammaste, kitsede ja sigade järeltulijate hulga arvutamise kohta. Arvutaja eeldab, et olemasolev lammaste hulk aasta jooksul kahekordistub. Sel juhul saab 22 lambast 12 aasta pärast  $22 \cdot 2^{12} = 90\,112$ -päine lambakari, missugune tulemus antaksegi „Vene õiguses“.

Siin on meil tegemist ülesandega, mis ilmub umbes samal ajal mitmesuguste rahvaste aritmeetikaõpikuisse kord küülikute järeltulijate arvu leidmise, kord malemängu leiutajale tasu maksmise ülesande näol. Need arvutused on nähtavasti Kiiriku-taoliste „arvuarmastajate“ loodud.

Vene rahva matemaatilise kultuuri kohta öeldut on huvitav võrrelda Lääne-Euroopa rahvaste matemaatiliste teadmiste tasemega. Aritmeetilisi tehteid teostati seal arvutamislaua (abakuse) abil, millele laoti kivikesi või kriipsudega kettakesi. Meie arvelaud, millest on juttu edaspidi, osutub abakuse kõige täiuslikumaks kujuk.

Arvude kirjutamiseks kasutati kohmakat rooma numbratsiooni, milles isegi väikesed arvud nõuavad suurt hulka märke (näiteks 888 kirjutatakse nii: DCCCLXXXVIII), suurte arvude kirjutamine aga on märksa keerukam kui suures slaavi loenduses. Meie kaasaegsed numbrid ilmusid Lääne-Euroopa raamatutesse alles XIII sajandil, kohates seejuures vana, abakusel arvutamise meetodi pooldajate ja rooma numbrite abil arvutajate raevukat vastu-panu.

### Vene arvelaud



Vene arvelaud. Raami vasakul äärel on arvelaua traatidele vastavate järkude tähendused: üheli- sed, kümnelised, sajalised, tuhan- delised jne.; all — kümnekopika- lised, kopikalised ja veerandkopi- kalised; C. 4. — omaniku nime- tähed.

Esimeses peatükis me jutustasime sellest, et hindu rahvas võttis arvu puuduva järgu tähistamiseks tarvitusele erilise märgi. „Hindud leiutasid millegi, et tähistada eimidagit.“ Ilma selle märgita — praeguse nullita — poleks meie arvutussüsteemil neid eeliseid, mis tal on kõigi teiste varem eksisteerinud ja eksisteerivate arvutussüsteemide ees.

Nulli leiutasid hindud nii kauges minevikus, et vene rahva kohta puuduvad sellest ajast igasugused usaldatavad andmed.

Vene rahvas leiutas kümnendsüsteemi abil teostatavate arvutuste kergendamiseks ideaalse abinõu — arvelaua.

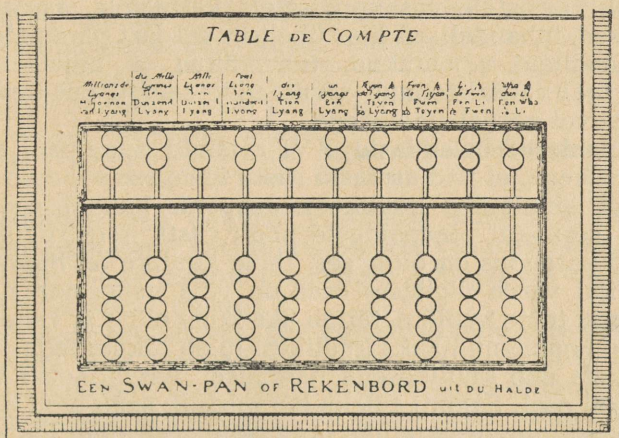
Seda arvelauda nimetatakse õigusega *vene arvelauaks*.

Raamatutes võib leida viiteid, et arvelaua

leiutasid hiinlased, et see kandus hiinlastelt edasi Siberi rahvastele ning et Vene ajaloos tuntud kaupmehed ja töösturid Stroganovid tõid ta Venemaale.

Teatakse isegi aega, millal arvelaud olevat Venemaale toodud: ühtede andmete järgi Dimitri Donskoi ajal (XIV sajandil), teiste järgi Peeter Esimese ajal (XVII ja XVIII sajandi piiril).

Neil jutustusil puudub alus samal määral kui pärimusel sellest, et Stroganovide esiisa oli tatari kuningapoeg. Kahjuks sattus vene arvelaua idamaise päritolu versioon ka N. M. Karamzini „Vene riigi ajaloo“ veergudele (köide IX, märkus 651) ja sealt enamikku õpikutesse.



Hiina arvelaud suan-pan.

Tõsi küll, hiinlastel on olemas meie arvelauale vastav arvutusvahend, kuid see põhineb teisel ideel. Ta kannab nimetust „suan-pan“ ja kujutab endast madalat piklikku kasti, mis on vaheseinaga pikuti jagatud kaheks ebavõrdseks osaks. Kasti läbivad ühest pikemast seinast teise ulatuvad ning seintesse kinnitatud otstega vardad. Arvutajale lähemal asetsevas, laiemas vahes on kõigil varrastel viis kuulikest; ülemises, kitsamas vahes on igal vardal kaks kuulikest. Suan-pani alumise osa kuulikesed on ette nähtud kuni viieni ulatuvate arvude jaoks, suan-pani ülemises osas asuvad kuulikesed aga vastavad kumbki viiele.

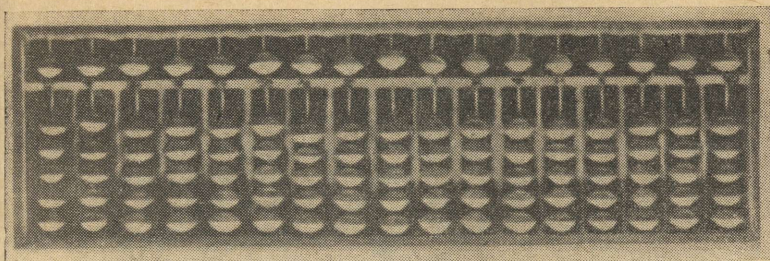
Joonisel on kujutatud XVII sajandi suan-pan (tänapäeval on tal täpselt samasugune kuju).

Kui temale on vaja asetada 1, 2, 3 või 4 ühelist, siis tuleb ühelisti kandval vardal (meie joonisel paremalt viiendal vardal) vastav hulk kuulikesi nihutada vastu vaheseina. Viie kuulikese vaheseina vastu nihutamise asemel tõmmatakse üks kuulike riista ülemisest osast vastu vaheseina. Kui samal viisil lisandub veel viis ühelist, siis nihutatakse nende asemel ülemisest vahest alla teine kuulike. Need kaks kuulikest, mis tähendavad kaht viielist, annavad aga kokku 10 ning kümnelist kujutab üks kuulike riista alumises osas järgmisel vasakpoolsel vardal. Edasistele vasakpoolsetele varrastele asetatakse sajalised, tuhandelised jne., üheliste vardast paremale aga kümnendikud, sajandikud, tuhandikud ja muud murdosad. Igal vardal toimub arvutamine samuti kui keskpaigas asuval vardal ühelistega.

Jaapanlased omandasid XVI sajandil suan-pani ainult selle vahega, et nad asetasi riista ülemisse vahesse igale vardale ainult ühe kuulikese. Jaapanis kannab see riist nime „soruban“. Jaapanlaste poolt riista konstruktsiooni tehtud parandus on õige, sest teine kuulike on liigne: iga kord kui varda ülemises osas on vaja vaheseina juurde nihutada teine kuulike, täitub üks kümneline ja vaheseina juurde kogunenud kaks kuulikest tuleb lükata tagasi ning asendada ühe kuulikesega järgmise, vasakpoolse varda alumisel osal. Samuti tuleks kõrvaldada suan-pani alumisest osast iga viies kuulike ning vene arvelaualt iga varda kümnes kuulike.

Siinkohal peab märkima, et taani matemaatiku ja teoloogi Peter van Haveni poolt 1743. aastal antud üks varasemaid vene arvelaua kirjeldusi, nagu ka mõned teised vanad ürikud, näitavad täiesti täpselt, et arvelaua igal traadil oli ü h e k s a kuulikest. Võib seega väita, et vene rahvalik arvutusvahend oli rahva enese poolt arendatud täiuslikkuseni. Liigne kümnes kuulike ilmus hiljem ja on säilinud siiani, kuigi XIX sajandi autorid mitmel korral tõestasid, et ta on liigne ja segav.

Sellest kirjeldusest on näha, et hiina ja jaapani arvelaual on arvul 5 eriline koht teiste arvude seas, vene arvelaual aga mitte. Vene arvelaud rajaneb puhtal kujul kümnendsüsteemile, samal ajal kui hiina suan-panis on säilinud ühe käe sõrmede abil arvutamise — viindsüs-



*Jaapani arvelaud soruban.*

teemi — igandid. Viindsüsteemi jäljed on säilinud ka rooma numeratsioonis, milles teatavasti

kuus	—	VI	—	viis ja üks
seitse	—	VII	—	viis ja kaks
kaheksa	—	VIII	—	viis ja kolm
üheksa	—	VIIII	—	viis ja neli (roomlased kirjutasid tavaliselt nii)
neli	—	IV	—	üks vähem kui viis.

Lääne-Euroopa rahvad kasutasid kuni XVI sajandi lõpuni suan-pani konstruktsioonile vastavat arvutamismeetodit. Seda meetodit nimetati „joontel arvutamiseks“ ning ta seisis järgnevas.

Arvutaja ees oli vasakult paremale minevate paralleeljoontega laud. Esimesele joonele asetati ühelisi tähistavad kettakesed. Viie ühelise asemel pandi esimese ja teise joone vahele üks kettake. Teisele joonele asetati kümnelistele vastavad kettad, teise ja kolmanda joone vahel asetsevad kettakesed tähistasid 50 jne. See vastab täiel määral rooma numeratsioonile ja suan-pani kasutamisele.

Analoogiline arvutamismeetod oli ka vene rahval, kuid see tõrjuti varakult ja täielikult välja kümnendarvelaua leiutamise; hiinlastel ja jaapanlastel on ta aga säilinud tänaseni. Seepärast me ei saa lugeda oma kümnendarvelauda idapoolsetelt rahvastelt omastatuks, vaid peame ta tunnustama vene leiutiseks ja peame arvelauda ennast õiguse järgi nimetama „vene arvelauaks“.

Märgime, et Lääne-Euroopa igapäevane elu ei tunne arvelaua tarvitamist ja tema osav kasutamine venelaste poolt on palju kordi esile kutsunud välismaalaste imetlust.

Kooliarvelaud kui aritmeetika õpetamise abivahend sattus Lääne-Euroopasse möödunud sajandi kahekümnendail aastail järgmisel viisil.



*Boulier'* nimetuse all hakati arvelauda kasutama Prantsuse ning hiljem ka teiste maade koolides.

Kõige sagedamini tuli arvelaual teha arvutusi raha-dega. Vene kümnendarvelaua laialdane levik on seotud sellega, et Venemaal tekkis varem kui teistes maades raha kümnendsüsteem: rubla võrdus 10 grivennikuga, grivennik 10 kopikaga, tšervonets 10 rublaga (muide, XVIII sajandil ei võrdunud tšervonets kohe 10 rublaga). Kodanlike maade ajaloolased omistavad rahade kümnendsüsteemi rakendamise prioriteedi Ameerika Ühendriikidele, kuid seal jäi dollari jaotus sajaks tsendiks püsima alles XVIII sajandi lõpul. Venemaal aga lõpetati rahaühikute kümnendsüsteemile üleviimine 1704. aastal, järelikult 100 aastat enne Ameerika Ühendriike. Inglismaal kasutatakse tänaseni kümmel mitte põhinevat rahasüsteemi, mille kohta inglise suurim füüsik Thomson ütles, et „inglise mõõdusüsteem oleks kõigist kõige totram, kui inglise rahasüsteem ei oleks veelgi totram“.

Edaspidi me ei korda kodanlike autorite väljamõeldisi vene arvelaua võõramaise päritolu kohta. Need väljamõeldised on vahel üsna kurioossed. Nii näiteks kirjutab ameerika matemaatika-ajaloolane D. E. Smith oma arvutusvahendite kohta käivas spetsiaalses, 1921. aastal ilmunud „uurimuses“, et vene arvelaud saabus Venemaale Armeenia kaudu Türgist, ja et see riist olla türklaste juures kandnud nime „kulba“ ning armeenlaste juures „horab“. Kumbki keel nimetatutest aga ei tunne sõnu, mida Smith neile omistab. Türgi keeles on sõna „horab“, armeenia keeles aga sõna „kulba“, ning mõlemate sõnade tähendus on üks ja sama — nimelt „sukad“.

See vene arvelaua idamaise päritolu teaduslik „põhjendus“ tuletab meile veel kord meelde kodanlike „teadlaste“ väidetes kriitilise suhtumise vajadust.

Me ei tohi suhtuda vene arvelauasse halvustavalt kui algelisse arvutamismasinasse. See riist teenis nii kaua ja sellise auga vene rahvast, et ta väärib meie tänu ja austust. Me kutsume kooliõpilasi üles hästi omandama vene arvelaua kasutamist ning kordame meie ajastu suure poeedi V. V. Majakovski sõnu, kes kutsus meid kolmkümmend aastat tagasi võitlusse erakaupmehega:

Võitlustandrile!  
Kaubasakstega võitlema mine!  
Arvelauaga lahingut lööma õpi.

## Geomeetrilisi teatmeid vanades vene ürikutes

Kõigil rahvastel, sealhulgas ka slaavlastel tekkisid geomeetria algmed maaharimise, ehitus- ja sõjakunsti tarvidustest. Praktilise elu vajadused õhutasid ka geomeetria edasist arengut.

Geomeetria algteadmisi kohtame juba vene ajaloo kõige vanemates ürikutes.

Pindalade mõõtmise võtteid käsitlevaks vanimaks vene käsiraamatuks on „Adrakirja raamat“, mille kõige vanem eksemplar pärineb 1629. aastast, kuigi leidub andmeid, et originaal koostati Ivan Groznõi ajal 1556. aastal.

Selles raamatus soovitatakse kujundite pindalade arvutamiseks neid tükeldada ruutudeks, ristkülikuteks, kolmnurkadeks ja trapetsiteks. Ruudu ja ristküliku pindala arvutati meie reeglite kohaselt, kolmnurga pindala aga leiti kui pool aluse ja külje pikkuse korrutisest ning trapetsi pindala kui aluste poolsumma ja külje pikkuse korrutis. Viimased reeglid on sõnasõnalt võetuna ebaõiged.

On võimalik, et vene maamõõdupraktikas oli tegemist ainult täisnurksete või peaaegu täisnurksete kolmnurkade ja trapetsitega ning sel juhul pole meil alust teha tolleaegsetele maamõõtjatele etteheiteid elementargeomeetria reeglite mittetundmise pärast. Neil kaugetel aegadel ei olnud maa ostu-müügi objektiks ja mõõtmistulemuste täpsus mängis tähtsusetut osa.

Lõuna-Venemaa kubermangudes, kus vaba maad oli palju ning maa ei olnud seetõttu eriti hinnas, kasutati selliseid primitiivseid pindala määramise võtteid veel XIX sajandil, mis peegeldub ka biograafilistes jutustustes XIX sajandi kuulsast vene matemaatikust M. V. Ostrogradskist.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Mihhail Vassiljevitš Ostrogradski (1801—1862), kes õppis äsjaavatud Harkovi ülikoolis edukalt matemaikat, ei saanud seal lõpudiplomit ebaküllaldase agaruse tõttu usuõpetuses.

Teda toetas ülikooli rektor, samuti silmapaistev matemaatik T. F. Ossipovski, kuid asi lõppes rektori enda ülikoolist vallandamisega.

Ostrogradski oli sunnitud sõitma Pariisi ja hakkas seal kuulama matemaatikute loenguid; peagi märgati, et viimases pingis istuv pikaajukseline üliõpilane lahendab momentaanselt kõik kateedrist esitavad ülesanded. Ostrogradski sai kõigi Pariisi matemaatikakuulsuste lemmikuks ning talle organiseeriti professorikoht Pariisi, kuid teda kutsus kodumaa, kus ta peagi sai akadeemikuks ja professoriks.



M. V. Ostrogradski  
(1801—1862).

Tal oli tavaks oma kuulajatega naljatada ning ta jagas neid muide „maamõõtjateks“ ja „geomeetriteks“.

Kui talt küsiti sellise jaotamise tähendust, siis jutustas ta järgmist:

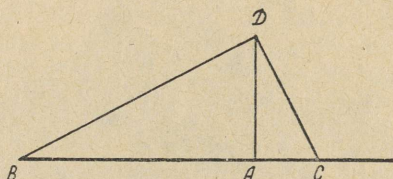
„Sõidan kord mööda Poltaava kubermangu. Vaatan — keegi näeb põllul millegagi vaeva. Selgub, et möödab maad. Küsin, kuidas ta kolmnurkset maatükki möödab. Ütleb, et korrutab kolmnurga kahe külje pikkused ja jagab kahega. Küsin: „Kas teil kõik niiviisi teevad?“

Vastuseks saan, et maakonnas teevad kõik nii, ainult kubermangus (kubermangu maamõõtjad) tehakse kuidagi teistmoodi.“

Pole siis midagi imestada, et sellised maamõõtmise võtted olid kasutusel 500 aastat tagasi muistsel Venemaal.

Aastatel 1607 ja 1621 anti välja „Jalaväe, suurtükiväe ja teiste sõjakunsti alla käivate asjade määrus“. Selles raamatus antakse muude teatmete hulgas ka geomeetriaalaseid teadmisi. Vaatluspunkti *A* ja ligipääsematu punkti *B* vahelist kaugust näiteks määratakse seal järgmiselt.

Punkti  $A$  lüüakse maasse umbes inimese pikkune teivas  $AD$ . Teiba tippu asetatakse täisnurk nii, et täisnurk ühtib teiba tipuga  $D$ , üks kaatetest aga suundub punkti  $B$ . Maapinnal märgitakse punkt  $C$ , mida läbib teise kaateti pikend. Kaugus  $AC$  mõõdetakse. Otsitav vahemaa suhtub teiba pikkuse samuti nagu teiba pikkus suhtub kaugusse  $AC$ .



1556. aastal, Ivan Groznõi valitsemise ajal koostati esimene vene maamõõtmise käsiraamat pealkirjaga „Sügavasti tark, kõige ligipääsmatumate kohtade, tasandike ja tihnikute mõõtmiseks hõlpsat viisi andev raamat, mida nimetatakse geomeetriaks ehk maamõõtmiseks raadiksi ja sirkliga...“. XVI sajandi keskpaiku koostati esimene Euroopa-Venemaa üldkaart, mis koos 1667. aastast pärinevate „Siberi maade joonistega“ on üheks vene kartograafia kõige silmapaistvamaks ürikuks.

Ühes XVI sajandi käsikirjas mainitakse esmakordselt „ülitarka Klidast“, s. o. meie kaasaegse geomeetria rajajat Eukleidest.

Kogu geomeetria üheks tähtsamaks lauseks on Püthagorase teoreem, mis väidab, et täisnurkses kolmnurgas võrdub kaatetite ruutude summa hüpotenuusi ruuduga, ehk teiste sõnadega täisnurkse kolmnurga kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summa võrdub hüpotenuusile ehitatud ruudu pindalaga. See tõde sisaldub varastes vene käsikirjades, kuigi neis pole otseseid viiteid sellele, et teoreem kehtib ainult täisnurksete kolmnurkade korral. On võimalik, et teda kasutati ka vahemaade ligikaudseks määramiseks juhul, kui kolmnurk oli peaaegu täisnurkne.

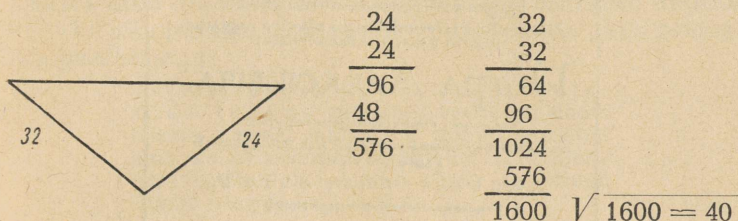
XVII sajandi algusest pärinevas käsikirjas igatahes kohtame näiteks selliseid ülesandeid:

„Kas tahad ilma käimata ja mõõtmata teada saada, kui palju on kahe koha vahel versti, süldasid või arssinaid? Siis tea: sa lähed Troitse-Sergi kloostri — sinna on 32 versta. Lähed aga Voskressenski kloostri — sinna

on 24 versta. Mis on nende kloostrite vahemaa, ütle ilma mõõtmata?

Korruta need arvud iseenesega. Saadused liida kokku ja jaga raadiksiga [s. o. võta ruutjuur]. Ja niipalju kui sest asjast välja tuleb, niipalju ongi nende kohtade vahel versti."

On toodud ka joonis ja arvutused:



Vastus: 40.

Teine sama liiki ülesanne:

„Läksin Moskvast Novgorodi, kuhu 600 versta. Läksin Šuiski linna, kuhu 500 versta. Kui suur on nende linnade vahemaa? Vaata: 781 versta.“

On kerge kontrollida, et  $\sqrt{600^2 + 500^2} \approx 781$ .

1625. aastal tõlgiti inglise keelest geomeetriaalne raamat, mis ulatus ringi kohta käiva õpetuseni. See käsikiri kujutab endast nähtavasti Eukleidese „Elementide“ ümbertöötlust, s. o. meie kooli hariliku geomeetriaõpiku esimest osa.

Vene keeles trükiti Eukleidese raamat esimest korda 1739. aastal pealkirja all „Eukleidese elemendid kaheksas raamatus, matemaatika professori Andrei Farhvarsoni<sup>1</sup> poolt lühendatud. Kirurgus Ivan Satarov on nad ladina keelest vene keelde ümber pannud. Sankt-Peterburgis 1739“. Selle raamatu jätkuks olid 1745. aastal ilmunud „Arhimedese teoreemid“ sellesama Ivan Satarovi tõlkes.

Nende raamatute kaudu sai vene lugejale kättesaadavaks kõik oluline elementargeomeetria klassikalisest pärandist.

<sup>1</sup> Andrei Farhvarson — Aberdeeni ülikooli professor, kelle Peeter Esimene XVII sajandi lõpul merekoolides õpetamiseks Venemaale kutsus.

ГЕОМЕТРІА  
СЛАВЕНСКІ  
СЕМЛЕМЪРІЕ

Издается новопитографскимъ вѣщеніемъ.  
ПОВЕЛѢНІЕМЪ БЛАГОЧЕСТІВѢЙШАГО ВЕЛИКАГО ГОСУДАРЯ  
НАШЕГО ЦАРЯ, І ВЕЛИКАГО КНЯЗЯ.

ПЕТРА АЛЕКСІЕВИЧА.

Всякъ великій, і мѣднѣ і бѣлѣя росси самодержца  
при благороднѣйшемъ ГОСУДАРѢ НАШЕМЪ ЦАРЕВИЧѢ  
І ВЕЛИКОМЪ КНЯЗѢ

АЛЕКСІИ ПЕТРОВИЧѢ.

Въ царствующемъ великомъ градѢ МосквѢ

Въ лѣто мѣроуказна 7216. Омѣ рождества же по плоти Бога  
слова 1708. Января перваго  
мѣсца Марта

*Esimese venekeelse geomeetriaraamatu tiitelleht.*

Peale selle ilmus juba 1708. aastal esimene venekeelne trükitud geomeetriaõpik pealkirjaga „Geometria ehk maamõõtmine“.

Vähem kui aasta pärast anti välja selle raamatu teine trükk pealkirja all „Sirkli ja joonlaua võtted ehk matemaatiliste kunstide kõige väljavalitum hakatus; temaga võib kerge ja uue meetodiga peatselt asuda maamõõtmise ja muude sama sorti kunstide juurde“.

Raamatu uus väljaanne ilmus originaalsete vene illustatsioonidega, sest esimese väljaande välismaise elu stseene kujutavad illustatsioonid ei vastanud vene lugeja nõuetele.

See näitab, et kui vene rahvas kasutas välismaisi allikaid, siis töötas ta need ümber ja kohandas oma elule.

Raamatu mitmekordse väljaandmise fakt aga annab tunnistust suurest huvist geomeetria ja üldse matemaatika vastu üsna XVIII sajandi alguses.

Sel ajal oli vene matemaatikaharrastajatel juba olemas L. F. Magnitski poolt koostatud mahukas matemaatiline entsüklopeedia, mis oli põhiliselt pühendatud aritmeetikale ja algebrale.

### L. F. Magnitski ja tema „Aritmeetika“

Aasta 1703 on Venemaa matemaatilise hariduse ajaloos tähtsaks momendiks. Sel aastal ilmus tohutu paks raamat pika pealkirjaga:

„Aritmeetika, see on arvutamise teadus, mitmetest murretest slaavi keelde ümber pandud ja kokku korjatud ning kahte raamatusse jagatud... Sellesinase raamatu koostamise vaeva on näinud Leonti Magnitski.“

See raamat sisaldab tolle aja matemaatiliste teadmiste algmeid aritmeetika, algebra, geomeetria ja trigonomeetria alalt. Raamatu lõpus on mereasjandusele pühendatud ning suure hulga tabelitega varustatud osa. Enamiku ruumist, nagu näitab ka raamatu pealkiri, pühendab autor aritmeetikale.

Kasutades peale käsikirjaliste vene materjalide ka talle kasulikuna näivat osa välismaistest allikatest, kohandas Magnitski kogu materjali vene lugeja nõuetele ja andis oma käsitelule paljuski vene käsikirjaliste matemaatiliste raamatute iseloomu, milledega seoses tulebki vaadelda Magnitski „Aritmeetikat“.

Peeter Esimese valitsemise ajal, millal raamat ilmus, toimus Venemaal tööstuse ja kaubanduse kiire arenemine ning murrang sõjatehnikas. Maa vajab haritud inimesi tunduvalt rohkem kui eelnevatel aastakümnetel. Loodi rida tehnilisi õppeasutusi, millest esimesena avati 1701. aastal Moskvas, Suhharevi tornis navigatsiooni ja matemaatiliste teaduste kool. Magnitski raamat oligi esmajärjekorras määratud selle kooli õpilastele. Raamat oli tulise patrioodi vastuseks kodumaa nõudmistele.

Raamat täitis poole sajandi kestel auga oma ülesandeid, olles õpperaamatuks kõigile matemaatilist haridust taotlevatele vene inimestele.

Selle silmapaistva raamatu autorist on teada üsna vähe.

Leonti Filippovitš Magnitski sündis 9. juunil 1669. aastal, suri 1739. aastal.



А р и т м е т и к а ,  
сирѣчь наука числительная .

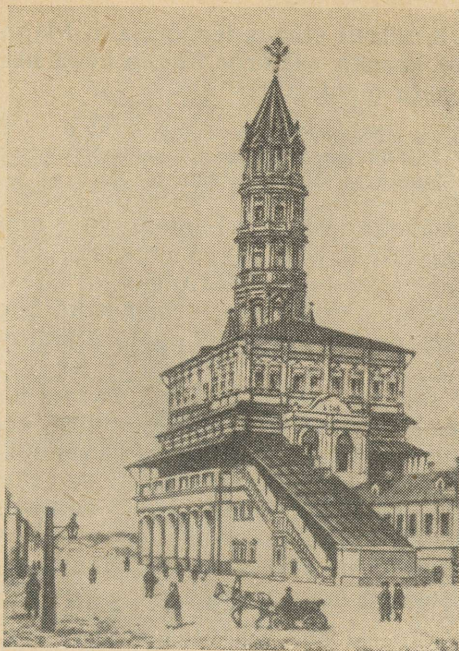
Разныхъ діалектовъ на славѣнскій ѡзыкъ  
приведѣная , и во единомъ собранѣ , и на двѣ  
книги раздѣлена .

Нынѣ же повелѣніемъ благочестивѣйшаго  
великаго Гара нашего Царя и великаго  
Кнзя Петра Алексіевича всеа великіа  
и малыа и бѣлыа россій самодержца :  
При блгороднѣйшемъ великомъ Гартѣ наше  
Црѣвнѣ , и великомъ Кнзѣ Алексіи  
Петровичѣ , в бгоспасаемомъ црѣвующе  
великомъ градѣ москвѣ типографскимъ  
тисненіемъ ради шѣченіа мудролюбивыхъ  
россійскихъ отроковъ , и всакаго чина  
и возраста людеи на свѣтъ произведена  
первое , въ лѣто ѡ сотвореніа міра  
жзгаи , ѡ ржтва же по плоти  
бга слова ждг , индикта аи ,  
мца іаннуаріа .

1903

Сочинѣніа сіа книга чрѣ трды . Леонтіа магницкаго .

L. F. Magnitski „Aritmeetika“ tiitelleht.



*Suhharevi torn Moskvas, milles asus  
navigatsioonikool. Praegu pole torni  
enam olemas.*

Magnitski poja poolt tema hauale tehtud raidkiri jutustab, et „Peeter Esimene vestles temaga tihti matemaatilisest teadustest ning oli tema teadmistest sedavõrd vaimustatud, et kutsus teda magnetiks ja käskis tema nimeks panna Magnitski“.

Vanaaegsest Magnitski elulookirjeldusest loeme: „Kuidas ta nimi enne oli, seda ei tea isegi ta sugulased.“

Kus ja kuidas Magnitski matemaatikat õppis, me ei tea. Pikk hauakiri kõneleb: „Ta uuris teadusi kummalisel ning üsna ebatõenäolisel viisil.“

On väga usutatav, et Magnitski oli iseõppija, ja võib-olla just sellepärast tal õnnestuski kirjutada raamat, mis osutus kasulikuks tohutule hulgale iseõppijatele. Kui ta oma raamatu eessõnas kirjutas:

Ja mõtlen ma, kel raamat käes on see,  
teaduste juurde ise leiab tee,

siis pidas ta kindlasti silmas iseõppijaid. Magnitski oskas aga ka ladina, kreeka, saksa ja itaalia keelt ning ta viitab, et tema raamatu materjalid

on eri raamatutest võetud,  
küll ladina, küll kreeka keelest,  
itaalia ja saksa keelest.

Suur vene õpetlane M. V. Lomonossov nimetas Magnitski „Aritmeetikat“ ja Meleti Smotritski „Grammatikat“ oma „tarkuse väravateks“. „Aritmeetika“ ta õppis pähe.

„Tarkuse väravateks“ oli see raamat kõigile XVIII sajandi esimesel poolel hariduse poole püüdlevatele vene inimestele.

Magnitski sai aru niihästi sellest, et vene ühiskond vajab matemaatilist kirjandust, kui ka sellest, et vene lugejale ei tohi pakkuda vene rahva sajanditepikkust omapärast arengut mitte arvestava välismaise raamatu tõlget.

Ta kasutas seepärast laialdaselt vene käsikirjalisi materjale, lisades neile vastavalt vene rahva vajadustele kohandatud ning ümber töötatud maailma teadusliku mõtte saavutusi ja kriipsutades seejuures alla, et

ei saksa tarkus siia ritta pandud,  
vaid vene tarkus kogutud.

Kõige selle tulemusena tekkis esimene originaalne vene matemaatikaõpik. Vene matemaatiline kirjandus ei tunne teist raamatut, millel oleks nii suur tähtsus vene matemaatilise hariduse ajaloos.

Magnitski spetsiaalkooli õpikuna kirjutatud raamat leidis hoopis laialdasema tarbijaskonna, nagu seda lootis ka autor ise, kes raamatu eessõnas ütles:

Ainus soov minu südames asub, —  
et sest tööst vene rahvas saaks kasu.

Magnitski oli kuni surmani õpetajaks navigatsioonikoolis, selles Venemaa matemaatiliste ja merealaste teadmiste esimeses taimelavas.

Kooli faktiline ülem, pärisorjadest põlvnev djakk Kurbatov kirjutab kooli 1703. aasta aruandes:

„16. juulist võeti vastu ja õpivad 200 inimest. Inglased õpetavad neile teadmisi ükskõikselt, satuvad vahetevahel pummeldamishoogu ja magavad oma harjumuste kohaselt tihti ning kaua. Meil on veel neile abiks määratud Leonti Magnitski, kes on pidevalt kooli juures ja kes alati mitte



ainult ei püüa õpilasi õppimises aidata, vaid ka heas käitumises..."

Sellest iseloomustusest näeme, et Magnitski mängis navigatsioonikoolis kaugelt suuremat osa, kui seda nõudis tema tagasihoidlik algklasside õpetaja amet.



*Esimese venekeelse logaritmade tabeli tiitelleht. Selle tabeli koostamisest võttis osa Magnitski.*

L. Magnitski kirjanduslik tegevus ei piirdunud tema „Aritmeetikaga“.

Veel samal 1703. aastal andis ta koos oma inglise kolleegidega välja „Logaritmade ja siinuste, tangensite ja seekansite tabelid püüdlike tarkuseotsijate õpetamiseks“.

Need olid esimesed taolised tabelid vene keeles.

1722. aastal andsid samad autorid välja meresõidu käsi-  
raamatu „Põhja- ja lõunalaiuste horisontaalide tabelid“.  
Kui Andrei Farhvarsonile omistati 1737. aastal brigadiiri<sup>1</sup>  
auaste, siis ütles ametlik karakteristika: „Sellepärast, et  
tema poolt on matemaatika algõpetus Venemaale sisse  
toodud.“ Veel suurema õigusega võib neid sõnu öelda  
Leonti Filippovitš Magnitski kohta — esimese venelasest  
matemaatikaõpetaja kohta Venemaal.

### Kuidas vene rahvas hindas matemaatikat

Magnitski „Aritmeetika“ on väga paljus sarnane eelne-  
vate sajandite käsikirjaliste matemaatikaraamatutega.

Peaaegu kõik vanaaegsed vene matemaatikakäsiraama-  
tud algavad selgitusega selle teaduse tähtsusest inimesele.

Aritmeetika ja geomeetria leiutamine omistatakse  
„muistsete filosoofide teravale mõistusele“, enamasti Pü-  
thagorasele (kreeka filosoof ja matemaatik VI sajandil  
e. m. a.).

Seda traditsiooni jätkab ka Magnitski. Oma „Aritmee-  
tika“ tiitellehel kujutab ta Püthagorast ja Arhimedest ning  
kirjutab:

Arhimedes on näha siinsamas,  
kes on filosoof kuulus ja vana,  
tema kõrval on teinegi veel  
samavõrdne su silmade ees.  
Arhimedes, Püthagoras — need  
nagu mägedelt voolavad veed  
esimestena teadusi toitsid,  
suuri tarkusi enda käes hoidsid;  
nagu vetevood voolata võivad,  
nii maailmale teadusi tõid nad.

Magnitski veenab oma lugejat, et aritmeetika on vaja-  
lik kõigile, mitte ainult kaupmeestele, et

kaupade hindasid teada  
ja õigesti kokku neid seada,

vaid ka

kunstnikele ja meistrimeestele,  
härradele ja kõigile teistele.

Teda peab uurima see,

kes tahab merele jõuda,  
olgu ta navigaator või sõudja

<sup>1</sup> Polkovnikust kõrgem vanaaegne sõjaväeline auaste. *Tõlk.*

ja

nüüd ka iga tublim sõjamees  
tugev olema peab selles teaduses.

Samasugust selgitustööd teeb ka esimene trükitud geometria õpik „Sirkli ja joonlaua võtmed“ (1709).

„Kes kiidab ainult teooriat, saab vaid hea vundamendi, millele ta midagi ei ehita; see on sarnane suurtükkidega, mida ei veeta lahinguväljale, või sadamas mädanevate laevadega. Selline teoreetik sarnaneb käsitöölisega, kes tunneb oma ala, kuid ei rakenda oma teadmisi, inseneriga, kes ehitab oma kindlusi ainult paberil, laevnikuga, kes sõidab oma kodus mööda kaarti Ameerikasse... Parem pole ka see, kes tunnistab ainult praktikat: see on inimene, kes ehitab kindluse liivale, kes kaevab maa-alust käiku Doonau jõe alla ja loodab kuidagiviisi kokkuklopsitud parvel jõuda Indiasse.“

Ka Magnitski hindab kõrgelt teooriat. Ta jagab oma „Aritmeetika“ kaheks raamatuks, millest esimene kannab nime „aritmeetika-poliitika“ ja teine „aritmeetika-logistika“.

Esimene on määratud neile, kes soovivad õppida ainult praktiliste ülesannete lahendamist, „et teha iga rehken-dust müümise ja ostmise juures“. See osa on kirjutatud näidete lahendamise abil kirjeldavalt, ilma tõestusi toomata.

Teine osa — „aritmeetika-logistika“ — lahendab abstraktseid küsimusi, „mis alluvad ainult meie mõistusele“. Magnitski kuulutab, et aritmeetika-poliitika lihtsate vahendite abil ei saa neid lahendada, sest ilma reegleid põhjendamata on kogu edasine ehitus ebakindel ja kasutu ning nii toimida pole kohane.

Üks Magnitski aegadest pärinev käsikiri väljendab selgesti vene iseseisva mõttelaadi eitavat suhtumist skolas-tikasse ja formalismi matemaatika õpetamisel.

Sel ajal oli Moskvas vene noormeeste jaoks pansione, kus välismaalased õpetasid nende poolt kaasa toodud, igasugustest kunstlikest reeglitest kubisevate õpikute järgi.

Mainitud käsikirjas on käsitletud kolmlauset järgmise selgitava märkusega: „Selles teaduses on ka palju muid reegleid, missuguseid Moskvas rohkem kasutatakse, kuid me jätame selle kõik kõrvale, sest et nendest reeglitest ei leia keegi mingisugust abi ja kõik need kasutud reeglid



Lehekülj Karion Istomini abitsast (1692). Hindu numbrite esmakordne esinemine vene raamatus.

põlvnevad nende tõelistest alustest, ja kes hästi tunneb kõikide reeglite aluseid, see võib neid kasutuid teha nii-palju kui tahab. Meie aga oma õpetuses seda ei luba. Parem pead murda asja pärast kui kasutult."

Geniaalne vene teadlane Mihhail Vassiljevitsš Lomonosov (1711—1765) oli paljudes teadusharudes uute põõretekitavate ideede loojaks. Ta oli suur keemik, füüsik, geo-

loog ning samal ajal ka ajaloolane, keeleteadlane ja isegi poeet.

A. S. Puškin ütles tema kohta: „Lomonossov lõi esimese vene ülikooli, õigemini ta ise oligi meie esimeseks ülikooliks.“

Lomonossov sai väga hästi aru matemaatika tähtsusest teiste teaduste uurimisel ja mõistuse arendamisel. Ta kõneleb korduvalt oma matemaatikaalasest tegevusest.

Matemaatika kui kooli-õppeaine tähtsuse kohta avaldas M. V. Lomonossov oma arvamuse 1752. aastal, millal talle tehti ülesandeks koostada selgituskiri füüsika, keemia ja matemaatika õpetamise kohta kadetikorpuses — ühes vähestest tollal eksisteerivatest koolidest. See oli õppeasutus, millest XVIII sajandil väljusid peaaegu kõik tuntud vene tegelased — kirjanikud, teadlased, sõjaväelased, administraatorid.

Saanud ülesande kirjutada reformeeritava korpuse jaoks füüsika, keemia ja matemaatika õppeprogrammid ning põhjendada nende ainete õpetamise vajadust, kirjutab Lomonossov pärast kadettidele füüsika ja keemia õpetamise tähtsuse üksikasjalist selgitamist matemaatika kohta üheainsa lause: „Ja matemaatikat tuleb juba sellepärast õpetada, et ta seab mõistuse korda.“

See Lomonossovi lühike väljendusriikas lause pole matemaatika kiitja tühi sõnakõlks, nagu me neid suurel hulgal kirjandusest leiame. Lomonossovi väljendused matemaatika kohta tema mitmetes töedes näitavad, et ta sai aru matemaatika osatähtsusest teistes teadustes ja praktikas. Ühtlasi sai ta aru ka sellest, et kool ei pea õpilastele andma ainuüksi faktilisi teadmisi mitmesugustes õppeainetes, vaid ka oskust mõelda, tõestada. Õpilane tõestab tundides teoreeme selleks, et tuntud teoreeme tõestades õppida tõestama hiljem ka uusi teoreeme. Seda õpilaste vaimse arendamise ülesannet pidaski Lomonossov silmas, kui ta ütles, et „matemaatikat tuleb juba sellepärast õpetada, et ta seab mõistuse korda“.

### Vene muistsete matemaatikakäsiraamatute sisust

Nii käsikirjalised kui ka trükitud muistsed vene matemaatikakäsiraamatud sisaldavad palju sellist, mida on kasulik teada matemaatika õppijal ka praegu. Peatume

kolme küsimuse juures: vale eelduse reeglil, huvitavatel ülesannetel ja matemaatilistel meeelahutustel.

**„Vale reegel“** — nii nimetavad vanad vene käsiraamatud üht ülesannete lahendamise meetodit, mis on nüüd tuntud „regula falsi“ nime all.

Selle reegli abil lahendati vanades käsiraamatutes esimese astme võrrandeile taanduvaid ülesandeid.

Nendes käsiraamatutes puudub peatükk „Esimese astme võrrandid“. Kaasaegsed esimese astme võrrandite lahendamise meetodid eeldavad negatiivse arvu mõiste tundmist, mis aga levis aeglaselt.

Veel XVIII sajandi lõpul avaldasid suurimad matemaatikud meile vastuvõetamatuid arvamusi negatiivsete arvude kohta.

Tutvumine sellega, kuidas negatiivseid arve tundmata tuli lihtsaid ülesandeid lahendada kunstliku „regula falsiga“, näitab meile, et igavavõitu harjutused negatiivsete arvudega, millega me tegeleme algebrakursuse esimeses osas, võimaldavad meil esimese astme võrrandeid edaspidi lahendada palju lihtsamini, kui seda tegid veel meie vaarisad.

Toome Magnitskilt ühe ülesande, mille ta lahendab „regula falsiga“.

„Keegi küsis õpetajalt: ütle, palju on sul klassis õpilasi, sest ma tahan anda oma poja sulle õpetada. Õpetaja vastas: kui tuleb veel niipalju õpilasi, kui mul on, veel pool niipaljut ja veerand ning sinu poeg, siis saab mul kokku 100 õpilast. Küsitakse: kui palju oli õpetajal õpilasi?“ Magnitski annab järgmise lahendusmeetodi.

Teeme esimese eelduse: õpilasi oli 24.

Siis tuleb ülesande mõtte järgi sellele arvule liita „niipalju, pool niipaljut, veerand niipaljut ja 1“; me saame

$$24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67,$$

mis on  $100 - 67 = 33$  vähem (kui oli ülesande tingimuses nõutud); arvu 33 nimetame „esimeseks hälbeks“.

Teeme teise eelduse: õpilasi oli 32.

Siis saame

$$32 + 32 + 16 + 8 + 1 = 89,$$

mis on  $100 - 89 = 11$  vähem; see on „teine hälve“.

Juhuks, kus mõlema eelduse korral saame vähem kui nõutud, on antud reegel: esimene eeldus korrutada teise

Вопроси некто учителя некоего глагола :  
 повежда ми колику имаша учениковъ оу себѣ  
 во училци , понеже имамъ сына ѡдати во  
 училце : и хощѣ оубѣдати ѡ числѣ учениковъ  
 твоихъ . учитель же ѡвѣщавъ рече емѣ :  
 аще придетъ ми учениковъ толко же , елико  
 имамъ , и полтолка , и четвертаа часть ,  
 ещѣ же и твои сынъ , и тогда бдетъ  
 оу мене учениковъ 100 : вопросивъ же  
 оудивсѣ ѡвѣтѣ емѣ ѡнде , и начатъ  
 изъсрѣгати чре сию надкѣ снце :

Ulesanne L. F. Magnitski „Aritmeetikast“.

hälbega ja teine eeldus esimese hálbega, suuremast kor-  
 rutisest lahutada väiksem ja vahe jagada hálvete vahega:

$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Õpilasi oli 36.

Sama reegli põhjal tuleb arvutada ka siis, kui mõlema  
 eelduse korral saame rohkem, kui tingimuse järgi on  
 nõutud.

Näiteks:

Esimene eeldus: 52

$$52 + 52 + 26 + 13 + 1 = 144.$$

Saime 144 — 100 = 44 rohkem (esimene hálve).

Teine eeldus: 40.

$$40 + 40 + 20 + 10 + 1 = 111.$$

Saime 111 — 100 = 11 rohkem (teine hálve).

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36.$$

Kui me ühe eelduse korral saame r o h k e m, teise eelduse korral aga v ä h e m, kui on nõutud ülesandes, siis tuleb ülalpool toodud arvutustes võtta mitte vahed, vaid summad. Näiteks:

Esimene eeldus: 60.

$$60 + 60 + 30 + 15 + 1 = 166.$$

Saime 166 — 100 = 66 r o h k e m (esimene hälve).

Teine eeldus: 20.

$$20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56.$$

Saime 100 — 56 = 44 v ä h e m (teine hälve).

$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

Neid reegleid on kerge põhjendada kõige elementaarsemate algebraaliste teadmiste abil.

Me peame lahendama võrrandi  $ax + b = c$ . (\*)

Esimene eeldus:  $x = x_1$ ;  $ax_1 + b = c_1$ . (1)

Teine eeldus:  $x = x_2$ ;  $ax_2 + b = c_2$ . (2)

Lahutame võrrandist (\*) liikmeti võrdused (1) ja (2):

$$a(x - x_1) = c - c_1 = d_1 \quad (\text{esimene hälve});$$

$$a(x - x_2) = c - c_2 = d_2 \quad (\text{teine hälve}).$$

Jagades kaks viimast võrdust liikmeti, saame

$$\frac{a(x - x_1)}{a(x - x_2)} = \frac{d_1}{d_2} \quad \text{ehk} \quad \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Algebra reeglite põhjal teeme järgmised teisendused:

$$(x - x_1)d_2 = (x - x_2)d_1;$$

$$d_2x - d_2x_1 = d_1x - d_1x_2;$$

$$d_2x - d_1x = d_2x_1 - d_1x_2;$$

$$(d_2 - d_1)x = x_1d_2 - x_2d_1;$$

$$x = \frac{x_1d_2 - x_2d_1}{d_2 - d_1}. \quad (3)$$

Kui hälbed  $d_1$  ja  $d_2$  on mõlemad negatiivsed arvud,  $d_1 < 0$  ja  $d_2 < 0$ , siis on võrduse (3) paremal poolel lugejas ja nimetajas esimesed liikmed negatiivsed, teised liikmed positiivsed; seega arvu  $x$  leidmise reegel jääb samaks kui esimesel juhulgi.

Võrdus (3) väljendab regula falsit nendel juhtudel, millal mõlemad hälbed on positiivsed või negatiivsed.

Kui aga  $d_2$  on positiivne ning  $d_1$  negatiivne (või vastupid), siis omandab võrdus (3) kuju

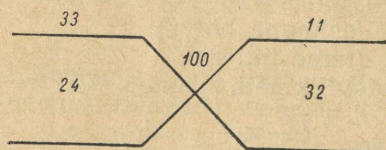
$$x = \frac{x_1 d_2 + x_2 d_1}{d_2 + d_1}$$

ja meil on käes regula falsi juhuks, mil hälbed on erinevate märkidega.

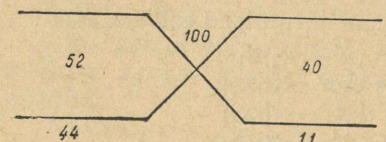
Keskaja matemaatikud andsid regula falsi rakendamiseks mugava mehaanilise meetodi, nn. „kaalude meetodi“. Nad soovivad toimida järgmiselt.

„Joonista kaalud. Toetuspunkti kohale kirjuta arv, mille saab tundmatust arvust pärast nõutud tehteid. Kaalukaussidele kirjuta mõlemad eeldused. Hälbed „rohkem“ kirjuta kaalude alla, hälbed „vähem“ kaalude peale. Korruta eeldused ja hälbed risti läbi. Kui hälbed on mõlemad kirjutatud ühele poole kaale, siis tuleb võtta korrutiste ja hälvete vahed; kui aga hälbed on kirjutatud kaalude eri pooltele, siis tuleb võtta korrutiste ja hälvete summad ning jagada.“

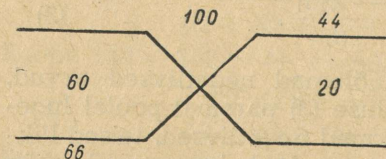
Sel viisil kirjutatuna näeksid meie lahendused välja järgmiselt:



$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36;$$



$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36;$$



$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

**Huvitavad ülesanded.** Enamikus vene vanaaegsetes matemaatilistes käsikirjades ja trükitud käsiraamatutes kohtame huvitavaid ülesandeid. Nii näiteks esineb neis

ülesanne, mis leidis juba Ahmese papüüruses ülesande  
näol seitsmest kassist, kes sõid ära seitse hiirt, jne.

Vastav vene rahvaülesanne kõlas järgmiselt:

Kõndis seitse vanakest,  
igal vanal seitse karku,  
igal kargul seitse oksa,  
igal oksal seitse pauna,  
igas paunas seitse pirukat,  
igas pirukas seitse värvukest.  
Palju oli kõiki kokku?

Vastus: 137 256.

VIII sajandist on tuntud huvitavate ülesannete kogu  
pealkirjaga „Küsimusi noorte meeste mõistuse teritamise  
jaoks“. Sama „mõistuse teritamise“ eesmärki peab oma  
ülesannetega silmas ka Magnitski.

Toome mõned näited vanematest vene ürikutest pärine-  
vate huvitavate ülesannete kohta.

XVII sajandi käsikirjast: „Lõvi sõi lamba ühe tunniga,  
hunt sõi lamba kahe tunniga, koer sõi lamba kolme tun-  
niga. Kui nüüd lõvi, hunt ja koer aga äkki kolmekesi olek-  
sid asunud lamba kallale, kui kiiresti oleksid nad siis  
lamba ära söönud?“

Käsikirja autor soovitab järgmist lahendamisvõtet:  
12 tunniga sööb lõvi 12 lammast, hunt 6 ja koer 4. Kokku  
nad söönuks 12 tunniga 22 lammast; järelikult ühe tunniga  
nad söönuks  $\frac{22}{12} = \frac{11}{6}$  lammast ja ühe lamba kolmekesi koos  
 $\frac{6}{11}$  tunniga.

Magnitski „Aritmeetikast“: „Mees joob joogitõrre tüh-  
jaks 14 päevaga, koos naisega tühjendab ta sama tõrre  
10 päevaga, ja on tarvis teada, mitme päevaga temà naine  
üksinda selle tõrre tühjaks jook.“

Vastus: 35 päevaga.

„Keegi mees palkas aastaks töölise, lubades talle anda  
12 rubla ja kaftani<sup>1</sup>. Kuid see, töötanud 7 kuud, tahtis ära  
minna ja palus väärilist tasu koos kaftaniga. Ta [pere-  
mees] andis talle töötasuks 5 rubla ja kaftani, ja vaja on  
teada, missuguse hinnaga see kaftan oli.“

Vastus: 48 grivennikut<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> Kaftan — vana-vene pikahõlmaline meeste pealiskaub. Tõlk.

<sup>2</sup> Grivennik — kümnekopikane hõberaha. Tõlk.

„Keegi mees müüs hobuse 156 rubla eest; ostja aga hakkas kahetsema ja pakkus müüjale hobust tagasi: „Eks ole minu poolt rumalus võtta seda hobust, mis pole väärt nii kõrget hinda.“

Müüja pakkus teist kaupa: „Kui sa arvad, et selle hobuse hind on liiga kõrge, siis osta ära naelad, mis on hobuseraudades, hobune aga võta pealekauba. Naelu on igas rauas kuus ja esimese naela eest anna mulle veerand kopikat, teise eest pool kopikat, kolmanda eest kopikas, ja nii osta kõik naelad.“ Nähes nii madalat hinda ja soovides hobust pealekauba saada, lubas ostja selle hinna tasuda, lootes naelte eest mitte üle 10 rubla maksta. Vaja on teada, kui palju ostja kaubeldes kahju sai?“

V a s t u s: 4 178 703<sup>3</sup>/<sub>4</sub> kopikat.

See ülesanne leidub XVII sajandi käsikirjades. Ta on analoogiline ülesandega malemängu leiutajast, kes nõustus tagasihoidliku tasuga, nimelt et talle pandaks malelaua esimesele ruudule üks viljatera, teisele ruudule kaks tera, kolmandale ruudule neli tera ja nii edasi, iga kord terade arvu kahekordistades.

Selgub, et selle tingimuse täitmiseks oleks vajalik rikkalik viljasaak põllult, mille suurus ületab 28 korda kogu maakera maismaa suuruse.

Dante (1265—1321) kuulsast „Jumalikust komöödiast“ loeme:

Lõi sädelema ilu ringides,  
ta lõõmas nii, et teda ära puutu;  
sai sadu kordi rohkem sädemeid  
kui kahekordselt malelaua ruute.

Siin mõeldakse järjestikust arvude suurenemist eelmise arvu kahekordistumise teel, seega meenutatakse meile sedasama vana ülesannet.

Nagu selgub, ei esine see ülesanne ka meie ajal ainult huvitavate ülesannete kogudes. Uhe 1914. aasta ajalehe teatel arutati Novotšerkasski linna kohtuniku juures 20-pealise lambakarja müümist järgmistel tingimustel: esimese lamba eest maksti 1 kopikas, teise eest 2 kopikat, kolmanda eest 4 kopikat jne. Nähtavasti meelitas ostjat lootus osta odavalt terve kari, kuid ta eksis. Arvutage, missuguse summa ta pidi maksma.

Ilmneb, et Magnitski ei varustanud selle ülesande lahendust asjatult hoiatusega:

Kui tahad miskit muidu saada,  
siis arvesta ja ette vaata,  
et ohtlikuks see kaup ei muutu...

Jefim Voitjahhovski<sup>1</sup> „Puhta matemaatika kursusest“  
(1786):

„Küsimusele: palju kell on? vastati:  $\frac{2}{5}$  keskööst prae-  
guseni möödunud tundidest võrduvad  $\frac{2}{3}$  keskpäevani jää-  
nud tundidega. Küsitakse, palju kell oli.“

Vastus: 7.30.

„Hinnati sissesõitnud gaskoonlase varandust: moodne  
vest koos kantud frakiga maksid veerand kopikat vähem  
kui kolm altõni [altõn = 3 kopikat]; frakk oli aga kaks ja  
pool korda kallim vestist. Küsitakse kummagi eseme  
hinda.“

Vastus:  $6\frac{1}{4}$  ja  $2\frac{1}{2}$ .

„Asja Venemaale tulnud prantsuse madaam  
tahtis hinnata, mis maksab tema kraam:  
uutmoodi kangesti ehitud fourreau (kleit)  
ja pidulik tanu à la figaro.

Hindaja oli vene mees, rääkis madaami ees:

„Sinu asjadest kõige tähtsam on fourreau,  
ta on kolm ja pool korda kallim kui tanu figaro;  
kokku nad maksavad neli ja pool kolmekopikast,  
tegelik hind neil aga vaid pool on sellest.“

Küsitakse iga eseme hinda,  
millega prantslanna saabus me kilda.“

Vastus:  $5\frac{1}{4}$  ja  $1\frac{1}{2}$ .

Ülesannetest Magnitski „Aritmeetikas“. Me leiame  
Magnitskilt palju ka tänapäeval õpetlike ülesannete ori-  
ginaalseid lahendusi. Toome näitena ühe sellistest lahend-  
dustest.

Ülesanne.

Leida arv, mis kahega jagamisel annab jäägiks 1, kol-  
mega jagamisel annab jäägiks 2, neljaga jagamisel annab  
jäägiks 3 ning viiega jagamisel annab jäägiks 4.

Lahendus.

Tähistame otsitava arvu tähega  $x$ . Otsime arvu, mis  
oleks ühe võrra suurem otsitavast, s. o. otsime arvu  $x + 1$ .

<sup>1</sup> Jefim Dmitrijevitsj Voitjahhovski (suri umbes  
1812) — täägijunkur (suurtükiväe ohvitseri aukraad XVIII sajandil,  
võrdne lipnikuga jalaväes) ja kõrgeast seisusest noorte eraõpetaja —  
andis välja suure neljakõitelise „Matemaatika kursuse“.

See uus arv jagub ilma jäägita kahe, kolme, nelja ja viiega ning on järelikult arvude 2, 3, 4, 5 ühiskordne. Selliseid ühiskordseid on lõpmata palju. Väikseim arvude 2, 3, 4, 5 ühiskordne on 60. Tähendab, väikseim arvu  $x + 1$  väärtus on 60, väikseim otsitava arvu  $x$  väärtus aga 59.

Ülesande tingimust rahuldavate arvude üldvalem on

$$x = 60k - 1,$$

kus  $k$  võib omandada iga täisarvulise väärtuse 1, 2, 3...

Märgime, et sellist tüüpi ülesanded arvude leidmise kohta nende teiste arvudega jagamisel jäävate jääkide abil olid üsna levinud hiina rahvalikus matemaatikas.

**Matemaatilist meelelahutust Magnitski „Aritmeetikas“.** Magnitski „Aritmeetikas“ moodustavad meelelahutuse küsimused omaette peatüki „Mõnedest aritmeetika kaudu pruugitavatest lõbustustest“, mis algab selgitusega, et autor paigutas selle peatüki oma raamatusse õpilaste meelelahutuseks ja eriti nende mõistuse teritamiseks, kuigi tema arvates need meelelahutused „pole väga vajalikud“.

**Esimene meelelahutus.** Üks kaheksaliikmelises seltskonnas olijaist paneb sõrmuse oma mingi sõrme teatavale liigesele. Tuleb mõistatada, kelle käes, missuguses sõrmes ja missugusel liigesel on sõrmus.

Asugu sõrmus neljanda inimese viienda sõrme teisel liigesel (tuleb kokku leppida, et kõik loevad sõrmi ja liigeseid ühtemoodi).

Raamatus antakse järgmine mõistatamise meetod. Mõistataja palub kellelgi seltskonnast tulemusi nimetamata teostada järgmised tehted:

1) sõrmusega isiku number korrutada kahega; küsitav teostab arvutuse kas peast või paberil:

$$4 \cdot 2 = 8;$$

2) saadud korrutisele liita 5:

$$8 + 5 = 13;$$

3) saadud summa korrutada viiega:

$$13 \cdot 5 = 65;$$

4) korrutisele liita selle sõrme number, milles asub sõrmus:

$$65 + 5 = 70;$$

5) summa korrutada kümneaga:

$$70 \cdot 10 = 700;$$

6) korrutisele liita selle liigese number, millel asub sõrmus:

$$700 + 2 = 702.$$

Tulemus teatatakse mõistatajale.

Viimane lahutab saadud arvust 250 ja saab:

$$702 - 250 = 452.$$

Esimene number (vasakult paremale lugedes) annab inimese numbriga, teine number sõrme numbriga, kolmas number liigese numbriga. Sõrmus asetseb seega neljanda inimese viienda sõrme teisel liigesel.

Selle võtte põhjendust, mida Magnitski ei anna, on kerge leida.

Olgu sõrmus inimese nr.  $a$  sõrme nr.  $b$  liigesel nr.  $c$ .

Teostame eespool näidatud tehted arvudega  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

1)  $a \cdot 2 = 2a$ ;

2)  $2a + 5$ ;

3)  $(2a + 5) \cdot 5 = 10a + 25$ ;

4)  $10a + 25 + b = 10a + b + 25$ ;

5)  $(10a + b + 25) \cdot 10 = 100a + 10b + 250$ ;

6)  $100a + 10b + 250 + c = 100a + 10b + c + 250$ ;

7)  $100a + 10b + c + 250 - 250 = 100a + 10b + c$ .

Saime arvu, milles inimese number võrdub sajalistega, sõrme number kümnelistega ja liigese number ühelistega. Mängu reeglid on rakendatavad meelevaldse osavõtjate arvu juures.<sup>1</sup>

Magnitski kolmas meelelahutus. Nädalapäevi loeme alates pühapäevast: esimene, teine, kolmas jne. kuni seitsmendani (laupäevani).

Keegi mõtles teatavale päevale: mõistatada, missugusele päevale ta mõtles.

Olgu mõeldud kuues päev — reede.

Mõistataja palub endamisi sooritada järgmised tehted:

1) mõeldud päeva number korrutada kahega:

$$6 \cdot 2 = 12;$$

2) korrutisele liita 5:

$$12 + 5 = 17;$$

<sup>1</sup> Kui kümneliste arv võrdub nulliga, siis asub sõrmus kümnendas sõrmes ja õige inimese numbriga saamiseks tuleb sajaliste arvu lahutada üks. Tõlk.

3) summa korrutada viiega:

$$17 \cdot 5 = 85;$$

4) korrutisele kirjutada lõppu null juurde ja nimetada tulemus:

$$850.$$

Mõistataja lahutab sellest arvust 250 ja saab

$$850 - 250 = 600.$$

Mõeldi nädala kuuendale päevale — reedele.

Reegli põhjendus on sama, mis eelmisel korralgi.

Magnitskil on ka rida keerukamaid matemaatilisi meelelahutusi.

### M. J. Lermontovi matemaatilistest meelelahutustest

Äsjatoodutega sarnanevaid matemaatilisi meelelahutusi võib leida ka suure poeedi M. J. Lermontovi eluloost.

On teada, et ta oli suur matemaatika harrastaja ja oma vabatahtlikel ning sunniviisilistel kolimistel ühest teenistuskohast teise vedas ta alati endaga kaasa matemaatikaõpikut.

Toome mõnede Lermontovi hästi tundnud kaasaegsete jutustusi tema suhtumisest matemaatikasse:

„1841. aasta algul seisis Tenginski polk Anapas. Igavlevad ohvitserid, nende hulgas ka Lermontov, käisid üksteise juures külas. Kord oli juttu ühest õpetatud kardinalist, kes oskas peast lahendada kõige keerukamaid matemaatilisi ülesandeid.

„Mida teie selle kohta ütlete, Lermontov?“ pöördus tema poole üks auväärsetest pataljoniülematest, Georgi risti kandev vanake. „Kõneldakse, et ka teie olete hea matemaatik?“

„Siin pole midagi imelikku,“ vastas poeet. „Kui te soovite, siis võin teile esitada küllalt tähelepanuvääriva näite niisugustest matemaatilistest arvutustest.“

„Tehke mulle seda meehead.“

„Mõtlege mistahes arvule ja ma määrän lihtsate matemaatiliste tehete abil selle arvu.“

„Noh, mis siis ikka, eks proovige,“ naeris vanake, kes ilmselt kahtles. „Kui suur see mõeldud arv peab siis olema?“

„See pole tähtis. Esimeseks korraks võtke arvutuste kiiruse mõttes ainult kahekohane arv.“

# Михаила Лермонтова

Изъ книгѣ

Михаилъ Лермонтова,

M. J. Lermontovi autograaf prantsuse autori Bezout' matemaatikaõpikul, mis oli XIX sajandi esimesel poolel Venemaal laialdaselt tarvitusel.

„Hästi, arv on mul mõeldud,“ ütles pataljoniülem juuresolevatele ohvitseridele salaja silma pilgutades ja teatas mõeldud arvu enda kõrval istuvale daamile.

„Suvatsege sellele arvule liita 25 ja pidage tulemus meeles või kirjutage üles,“ algas Lermontov.

Vanake palus pliiatsi ja hakkas paberitükil arvutama.

„Kas te nüüd ei lisaks veel 125.“

Vanake liitis.

„Edasi lahutage 37.“

Vanake lahutas

„Lahutage veel see arv, millele te algul mõtlesite.“

Vanake lahutas.

„Nüüd korrutage jääk viiega.“

Vanake korrutas.

„Jagage saadud arv kahega.“

Vanake jagas.

„Nüüd vaatame, mis teil pidi välja tulema... Näib, et kui ma ei eksi, siis arv  $282 \frac{1}{2}$ ?“

Pataljoniülem hüppas isegi püsti — nii üllatas teda arvutuse täpsus.

„Jah, täiesti õige:  $282 \frac{1}{2}$ . Ma mõtlesin arvule 50.“ Ja ta kontrollis uuesti arvutusi. „Tõepoolest tuleb  $282 \frac{1}{2}$ . Hm, kas te pole äkki nõid?...“

„Nõid nõiaks, aga matemaatikat ma olen õppinud,“ naeratas Lermontov.

„Aga lubage...“ vanake nähtavasti kahtles, kas Lermontov ei vaadanud tema numbraid, kui ta arvutas. „Kas ei võiks korrata?“

Vanake pani mõeldud arvu seda kellelegi näitamata kirja, asetaski ta küünla alla ning arvutas poeedi poolt antud arvudega peast. Ka seekord mõistatati lõpptulemus õigesti.

Kõik tundsid asja vastu huvi. Vanake aina lahutas käsi. Majaperenaine palus katset veel kord korrata, ja ka seekord õnnestus see.

Jutt läks mööda kindlust laiali. Kuhu ka poeet ei ilmunud, kõikjal pöörduti tema poole palvetega mõistatada väljamõeldud arv. Ta täitis neid palveid mõned korrad, kuid lõpuks hakkas see asi teda tüütama ning mõne päeva pärast, ühel samasugusel õhtul, avaldas ta oma saladuse, mis seisis selles, et väljamõeldud arv, missugune ta ka ei oleks, lastakse lahutada sellesama arvu ja mõnede teiste arvude summast, nii et etteütlejal on kerge arvutada tulemust, näiteks:

$$[(x + 100 + 206 + 310 - 500 - x) : 2] \cdot 3 = 174."$$

A. A. Lopuhhin, Lermontovi kaaslane ratsakoolist, kes tundis poeeti hästi, jutustas temast järgmist.

Lermontov otsis alati uut tegevust ega andunud kunagi jäägitult sellele kõrgele poeetilisele loomingule, mis tegi ta nime surematuks ja mis, nagu näis, pidanuks neelama ta tervelt. Pidevalt huvialasid vahetades laskis ta end talle omase kirega täielikult uuest alast kaasa kiskuda.

Uksvahe ta tegeles niiviisi ainult matemaatikaga.

Sõitnud kord Moskvasse Lopuhhini juurde, lukustas Lermontov end kabinetti ja istus hilise ööni mingi matemaatilise ülesande lahendamise kallal. Lõpuks ta uinus kurnatuna, suutmata ülesannet lahendada.

Selle ülesande ta lahendas unes. Talle näis unes, et tuli keegi matemaatik ning ütles talle ülesande lahenduse ette. Ta isegi maalisk selle matemaatiku portree.

Osutus, et unes nähtud matemaatik oli väga sarnane logaritmi leiutaja, šoti matemaatiku John Napier'iga (1550—1617). Arvatavasti luges Lermontov enne seda Napieri töödest ning nägi tema portreed. See portree sulas Lermontovil kokku tema abilise ülesande lahendamise juures.

Lermontovi poolt maalitud fantastilise matemaatiku portree sattus pärast Suurt Oktoobrirevolutsiooni Tea-



*I. A. Lappo-Danilevski*  
(1896—1931).

duste Akadeemia Puškini majja, kus ta asub ka praegu. See portree on ära toodud Lermontovi kohta kirjutatud raamatutes ja tema teoste täielikus väljaandes.

Matemaatikute elulugudest on teada juhtumeid, mil unes lahendati ülesandeid, millega ärkvel olles hakkama ei saadud. Isegi unes jätkab teadlase aju tööd lahendamata jäänud probleemi kallal.

Selline juhtum on teada geniaalse nõukogude matemaatiku Ivan Aleksandroviš Lappo-Danilevski (1896—1931) eluloost.

Märgime möödaminnes, et peale Lermontovi huvitusid matemaatikast ka paljud teised poeedid. Selline matemaatika harrastaja oli näiteks vene poeet Benediktov (1807—1873), kes pühendas oma puhketunnid matemaatikale ja kes jättis maha käsikirja „Lõbus aritmeetika“, mis on nähtavasti üheks esimestest venekeelsetest katsetest käsitleda matemaatikat huvipakkuval kujul.

## ELEMENTAARMATEMAATIKA ARENGU AJALOOST

Eelnevatel lehekülgedel jutustasime sellest, kuidas rajati matemaatika alused. Siin anname lühidaid ajaloolisi teatmeid koolimatemaatika põhiosadest, mis hõlmavad aritmeetikat ja algebra ning geomeetria algmeid. Me tunneme juba seda suurt osa, mida mängisid matemaatika ajaloos Kesk-Aasia matemaatikud. Nüüd jutustame veel sellest, kuidas suured vene matemaatikud lahendasid lõpuni rea küsimusi, mis olid tekkinud juba väga ammu, kuid jäänud siiski lahendamatuks, vaatamata ülemaailmse teaduse kõige suuremate esindajate pingutustele.

### Aritmeetika

Kooli aritmeetikakursus koosneb kolmest põhilisest osast, milleks on õpetus numeratsioonist, õpetus täisarvude omadustest ja tehtest nendega ning lõpuks õpetus murdudest.

Peatume oma jutustusega igaühe juures neist kolmest osast.

### Suuline numeratsioon

Arve on lõpmata palju. Kui iga arvu tähistaksime erineva sõnaga, siis me ei suudaks nende nimetusi mees pidada.

Suulise numeratsiooni küsimuse lahendasid kõik rahvad juba väga ammu sel viisil, et nad hakkasid esemeid arvestama mitte üksikult, vaid rühmade kaupa, mida nad tähistasid samade sõnadega kui üksikesemeidki: üks, kaks, kolm ja nii edasi.

Loendusrühmaks võib võtta mistahes arvu. Valdav enamus rahvaid valis selleks kümne, sest kümme sõrme

on loendamise loomulikuks aluseks. Mitmesugustel aegadel aga on mitmesugused rahvad loendanud ka teiste rühmituste abil. Kesk- ja Põhja-Aafrikas on praeguseni säilinud rahvaid, kes loendavad esemeid kaheteistkümne kaupa ehk tosinatega. Selline loendamisviis oli nähtavasti varem laiemalt levinud, mida tõendab fakt, et alles hiljutises minevikus loendati mõningaid esemeid, näiteks sulgi, tosinate kaupa; kahtteistkümmet tosinat nimetati „grossiks“ (saksa „gross“ — suur), mis tähendab „suur tosin“ (samuti nagu sadat nimetati „suureks kümneks“ ja miljonit „suureks tuhandeks“).

Muistsed babüloomlased kasutasid loendust kuuekümnendite rühmade abil ehk kuuekümnendsüsteemi.

Kümnest erinevate alustega arvusüsteemid võivad osutada otstarbekaks mõningate ülesannete lahendamisel.

### Kahendsüsteem

Kümnnendsüsteemis võib näiteks arvu 7438 avaldada kujul

$$7438 = 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

ehk

$$7438 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Mingis teises arvusüsteemis, mille aluseks on  $r$ , võime arvu esitada kujul

$$a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \dots + a_3 r^2 + a_2 r + a_1.$$

Siin on  $a_1$  üheliste arv,  $a_2$  teise järgu üheliste arv,  $a_3$  kolmanda järgu üheliste arv jne.

Arvusüsteemides alusega 2 või 3 (kahendsüsteemis või kolmendsüsteemis) kirjutatakse arvud kujul

$$a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 1,$$

$$a_n \cdot 3^{n-1} + a_{n-1} \cdot 3^{n-2} + \dots + a_3 \cdot 3^2 + a_2 \cdot 3 + a_1 \cdot 1.$$

Kümnnendsüsteemis kirjutatud arvu iga järgu üheliste arv ei ületa üheksat, kolmendsüsteemis võib igas järgus olla ühelisi kas 0 või 1 või 2, kahendsüsteemis aga ainult 0 või 1.

Iga kümnnendsüsteemi kuuluvat arvu saab üle viia mistahes alusega arvusüsteemi, näiteks kahendsüsteemi. Nõutagu arvu 743 kirjutamist kahendsüsteemis.

Jagame antud arvu kahega. Jääk näitab, mitu esimese järgu ühikut on antud arvu otsitavas kujus kahendsüs-

teemis. Kui jagatis on suurem ühest, siis jagame teda omakorda kahega; teine jääk annab otsitava arvu teise järgu ühikud. Jagatist jagame jälle kahega, kuni ta on kahest väiksem; järgmine jagatis on siis juba 0.

Kümnendsüsteemi kuuluva arvu muutmist kahendsüsteemi kuuluvaks arvuks on mugav teostada järgmise skeemi abil, jagades peast (tabelit paremalt poolt alustades).

X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I		Jagamise nr.
0	1	2	5	11	23	46	92	185	371	743	Jagatised kümnendsüsteemis
	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	Jagamisel saadavad jäägid, mis on ühtlasi arvu numbriteks kahendsüsteemis
X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I		Järgud kahendsüsteemis

Toodud näites on üheksas jagatis võrdne ühega. Teda kahega jagades saame jagatise null ja jäägi üks. Saadud jäägid ongi otsitava arvu numbrid kahendsüsteemis, kusjuures nende järjekord on sama, mis jagamisel saadud jääkidelgi. Seega me saime

$$743_{10} = 1011100111_2.$$

Indeksid 10 ja 2 nende arvude juures näitavad, et arv 743 kuulub kümnendsüsteemi, arv 1011100111 aga kahendsüsteemi.

Asjaolu, et meil on kahendsüsteemi kasutamiseks vaja ainult numbreid 0 ja 1, sai selle arvusüsteemi väga tähtsa rakenduse ajendiks.

Viimastel aastatel on konstrueeritud elektron-arvutusmasinaid, mis võivad ühe sekundiga sooritada kümneid tuhandeid arvutusoperatsioone. Arve tuleb nendesse masinatesse anda kahendsüsteemis. Nende masinate võimsusest võib saada ettekujutuse järgmiste faktide abil.

Ringjoone ja tema diameetri pikkuste suhe, mida tähistatakse tähega  $\pi$ , on arv, mida saab leida ainult ligikaudselt. Tema lihtsaimad väärtused on  $3\frac{1}{7}$  ja 3,14. Kõigil aegadel on matemaatikud püüdnud määrata selle suhte võimalikult täpset väärtust. Väga tuntud matemaatik-arvutaja Ludolph van Ceulen (1540—1610) tegeles kogu

oma eluaja selle suhte arvutamise ja ning leidis elu lõpuks selle arvu 34 numbrit, mis ka raiuti tema hauakivile. 1596. aastaks oli Ceulen jõudnud arvutada ainult 20 numbrit, mis ta paigutas oma portree alla raamatu kaanele.

Mõni aasta tagasi, kui konstrueeriti esimesed väga ebatäiuslikud elektronarvutusmasinad, arvutas selline masin 75 tunniga  $\pi$  väärtuse 2035 kohaga pärast koma!

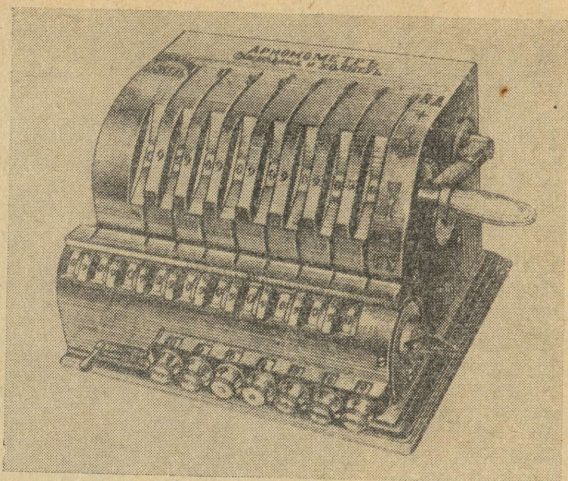
Tavalisi aritmeetilisi arvutusi teostavad arvutusmasinad eksisteerivad juba kaua aega. Aritmomeetrit te võite näha igas kontoris või isegi kooli kantseleis arveametniku käes. Harilikult on see

aritmomeeter Odneri süsteemi. Selle arvutusmasina leiutas Peterburis 1874. aastal vene insener V. T. Odner.<sup>1</sup> Maailma esimese arvutusautomaadi, mis teostas hoopis keerukamaid operatsioone, konstrueeris 1878. aastal suur vene matemaatik P. L. Tšebõšev. Tsaariajal ei võetud seda leiutist kasutusele ja isegi Tšebõševi enda poolt valmistatud masina ainukest eksemplari hoitakse alal Pariisi Kunstide ja Käsitöö Muuseumis. Kaheksa aastat hiljem, 1886. aastal laskis Würzburgi ülikooli matemaatika professor Selling välja masina, mille süsteem langes täielikult ühte Tšebõševi omaga. 1894. aastal tõestati avalikult, et

<sup>1</sup> V. T. Odner töötas Peterburis riiklike paberite valmistamise talituse peainsenerina.



Kuulsa arvutaja Ludolph van Ceuleni raamatu tiitelleht. Portree all on arv  $\pi$  antud 20 numbriga.



Vene inseneri Odneri aritmomeeter.

Selling ei ole selle masina leiutaja, vaid et Sellingi poolt originaalsena esitatud idee oli juba kaheksa aastat varem realiseerinud Tšebõšev. Tšebõševi masina mudel oli kõik need aastad Pariisis näitusel ning oli kõigile kättesaadav.

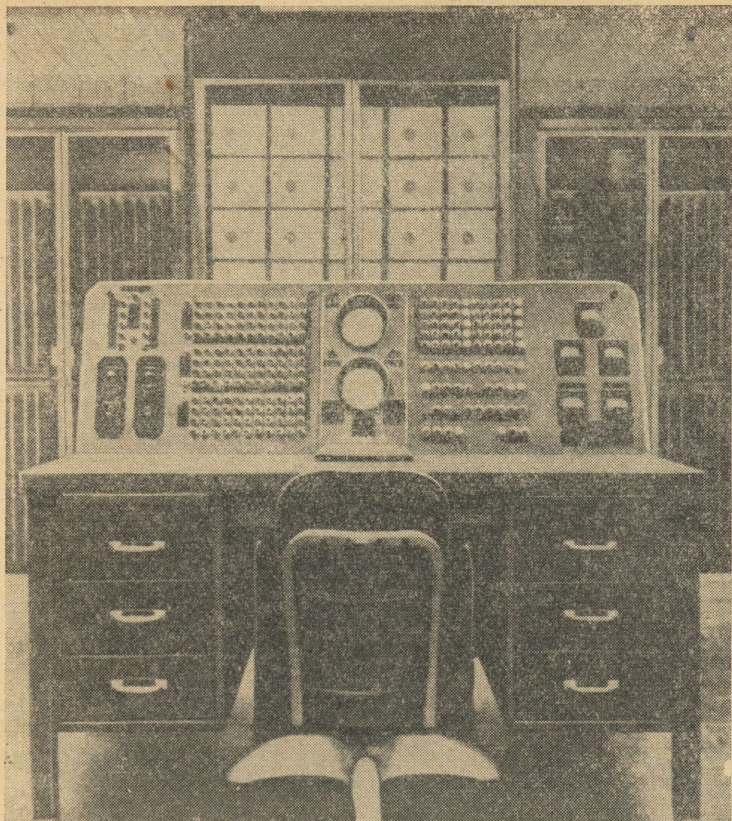
Paljud vene matemaatikud — akadeemik A. N. Krõlov, professor S. A. Geršgorin ja teised — on leiutanud masinaid kõrgema matemaatika operatsioonide teostamiseks. 1947. aastal sai leiutajate brigaad (N. V. Korolkov, B. A. Volõnski ja V. P. Lebedev) eesotsas matemaatika professori L. I. Gutenmacheriga sellise arvutusmasina leiutamise eest Stalini preemia. 1951. aastal sai kõige keerukamaid ja mitmekesisemaid arvutusi teostava masina leiutamise eest Stalini preemia professor V. S. Lukjanov.

Uue konstruktsiooniga masinad (elektronmasinad) sooritavad arvutusoperatsioone hämmastava kiirusega. Nii näiteks arvutas 21. augustil 1952. aastal elektronmasin 13,5 minutiga arvu

$2^{1279} - 1$

ja kontrollis, et see 386-kohaline arv on algarv. Seesama masin arvutas sama aasta oktoobris arvu

$2^{2281} - 1$



*Kaasaegne elektron-arvutusmasin.*

ja kontrollis, et see on algarv. See on kõige suurem tänapäeval tuntud algarv. Ühe aritmeetilise oletuse kontroll nõudis 20 miljonit korrutamist. Masin tegi selle töö 6 tunniga. 800 000 korrutamist nõudva meteoroloogilise prognoosi leiab masin ühe tunniga.

Et elektronmasinad töötavad kahendsüsteemis, siis omandab küsimus kümnest erineva alusega arvusüsteemidest küllalt tõsise tähenduse.

Märgime möödamindes, et arvude teisendamine kümneysüsteemist arvusüsteemidesse alusega kaks või kolm lahendab vana ülesande mugavaima kaaluvihtide süsteemi



Peterburi Teaduste Akadeemia liige L. Euler  
(1707—1783).

kohta. Kui kaaluvihte asetada ainult ühele kaalukausicile, siis osutub mugavaimaks kahe astmetel põhinev vihtide süsteem (1, 2, 4, 8, 16, ... grammi); kui aga vihte asetada mõlemale kaalukausicile, siis on kõige mugavam kolme astmetel põhinev süsteem (1, 3, 9, 27, 81, ... grammi).

Kaaluvihtide süsteemi küsimusi on põhjalikult käsitletud raamatus „Mõõdud ja meetrisüsteem“<sup>1</sup>, mistõttu me siin selle küsimuse juures ei peatu. Märgime ainult, et küsimuse lahendamine nõuab arvude teisendamist kahend- või kolmendsüsteemi, mis omakorda rõhutab selle teisenduse tähtsust.

Nähtavasti ainsaks näiteks kolme astmetel põhineva vihtide süsteemi kasutamise kohta on meie kodumaa, kus see süsteem kehtestati 1797. aastal

mõõtude kohta käiva seadusega ning oli kasutusel 1842. aastani. Mõõtude kohta käiva 1797. aasta seaduse valmistas ette kuulus akadeemik L. Euler, kelle osavõtu kohta mõõtude ja kaalude komisjoni tööst on säilinud palju dokumente. Asjaolu, et kaubanduslikus praktikas pole vihtide odavuse tõttu kolme astmel põhinevat vihtide süsteemi vaja, ei vähenda teaduslikku ega ka praktilist huvi selle süsteemi kui väärismetallist valmistatud täpsete vihtide kasutamise korral kõige ökonoomsema süsteemi vastu. Selle vihtide süsteemi kasutuselevõtmine Venemaal XVIII sajandi lõpul kõneleb mõõtude teaduse eesrindlikust iseloomust meie kodumaaal.

<sup>1</sup> И. Деппман, Меры и метрическая система. Детгиз, Ленинград, 1953.



*Leonhard Euleri mälestussammas Leningradi Smolenski (luteri) kalmistul. Pealkiri tähendab järgmist: „Leonhard Eulerile Peterburi Akadeemialt MDCCCXXXVII“.*

### Kirjalik numeratsioon

Kirjaliku numeratsiooni ülesandeks on kõigi arvude kujutamine võimalikult väiksema märkide (numbrite) hulgaga.

Nagu me juba nägime, lahendasid erinevad rahvad selle ülesande erisuguselt.

Küsimuse ideaalseks lahenduseks oli positsioonilise numeratsiooni leiutamine; tänu nulli olemasolule võimaldab see süsteem kirjutada mistahes arvu kümne numbri abil.

Numbrite nüüdisaegne kuju stabiliseerus XV sajandi keskpaiku trükikunsti leiutamisega. Nagu näitab meie tabel, ei olnud numbritel selle ajani standardset kuju.

Numbrite praeguse kuju seletamiseks on olemas palju teooriaid. Mõned teooriad seovad numbrite kuju kriipsude, punktide või nurkade arvuga numbris, kuid neil teooriatel ei ole teaduslikku väärtust.

Seoses selle küsimusega võime märkida meie suure poeedi A. S. Puškini nime.

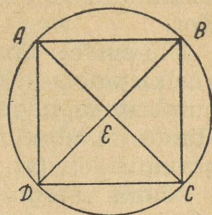
<i>Kaasaegsed numbrid:</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
I <i>Kujundist</i> ⊕	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
II	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
III	{	○	○	○	○	○	○	○	○	○
	{	-	=	≡	0,4	6,5	6	7	8	9
IV	{	○	8	8	8	8	8	8	8	8
	{	·	1	2	3	4	5	6	7	8
V		1	2	3	×	5	6	7	8	9
VI		1	7	3	0	5	6	8	8	8
VII <i>Kujundist</i> ⊗	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
VIII	1	7	7	4	5	6	7	8	9	
IX	{	1	=	≡	0	5	6	7	8	9
	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	{	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X	{	I = I	2 = 2 <sup>või</sup> 2 <sup>või'</sup>	3 = √	4 = ee	5 = v <sup>või</sup> x <sup>või</sup> y <sup>või</sup>	6	7	8	9
	{	μ = h <sup>või</sup>	7 = 7 <sup>või</sup> 7 <sup>või'</sup>	8 = 8	9 = 6 <sup>või</sup> = 8					
XI		1	2	3	4	5	6	8	8	8
XII		1	=	≡	0	5	6	7	8	9
XIII		1	=	≡	0	6	6	8	8	0

Meie numbrite päritolu selgitamise katseid. Rooma numbriga VII on tähistatud A. S. Puškini kaalutlused.

Tema teoste täielikus kogus leidub väike joonisega varustatud märkus:

„Araabia numbrite kuju on saadud järgmisest kujundist:

AD (1), ABDC (2), ABECD (3),  
ABD + AE (4).“



A. S. Puškini oletus vastab teooriale, mis on meie tabelis tähistatud rooma numbriga VII.

Paljud kaasaegsed õpikud nimetavad meie numbreid araabia numbriteks. See pole õige; neid tuleb nimetada hindu numbriteks, sest araablased olid ainult hindu numbrite Euroopasse levitajateks. Et araablaste osa piirdus ainult hindu numbrite Euroopasse toomisega, seda tõestas

Хощь дѣлати. вѣ. рѣблеву надъбаже  
 рѣбля первомѣ жеребью взати двѣ  
 прети адрѣгомѣ взати притетвети  
 ннш иколикш по торомѣ взати: кажи  
 ми спанѣтѣ первомѣ взати. вѣ. с.  
 рѣблеву да. дѣ. зѣ. ашлѣи рѣбля  
 аичитѣи. сице вшзми н. 12. вѣ. надѣ  
 прети пшѣтѣ. 8. н. а на  $\frac{3}{4}$ . тоѣст  
 9. сложиже ѡбое вмѣсто. 8. н. да. 9.  
 придетѣ. 17. зѣ. рубѣ. 17. дастьми  
 12. вѣ. ытш дастьтѣ. 8. н. придетѣ.  $5\frac{11}{17}$   
 по первомѣ да ѡпатѣ молви. 17. зѣ.  
 дастьми. 12. вѣ. ытш дастьтѣ. 9. д.  
 придетѣтѣ.  $6\frac{6}{17}$ . пш адрѣгомѣ  $\frac{2}{3}$   
 н. 12. вѣ. тоѣтѣ. 8. н. 17. зѣ да  
 12. вѣ. ытш дастьтѣ  
 $\frac{8}{12}$   $\frac{3}{4}$  н. 12. тоѣтѣ.  $\frac{9}{17}$   $\frac{4}{4}$   $\frac{1}{6}$   $\frac{15}{17}$  пе  
 96  
 вому. 17. зѣ да — 12 —  $\frac{9}{108}$   $\frac{46}{17}$   $\frac{6}{17}$  арѣ

XVII sajandi vene käsikirjades esinevad kõrvuti slaavi numbritega ka hindu numbrid.

esmakordselt XVIII sajandi keskpaigas vene orientalist Ker.

Venemaal ilmusid hindu numbrid matemaatilistesse käsikirjadesse XVII sajandi lõpul paralleelselt slaavi numbritega, nagu me seda näeme ülesvõttelt leheküljel 77. Hindu numbreid võib leida ka mõnedelt XVII sajandi gravüüridelt (vt. lk. 53).

Alates Magnitski „Aritmeetikast“ (1703) kasutavad kõik vene matemaatikaraamatud ainult hindu numbreid.

### Mõningatest aritmeetika oskussõnadest

Paljudes keeltes on sõna „number“ (vene „цифра“, saksa „Ziffer“, inglise „cipher“) tuletatud araabia sõnast „cifr“, mis tähendab „tühi“ (koht). Araablased tõlkisid selle sõnaga hindu sõna „sunja“ — „tühi“ (koht), mis hindudel tähistas arvus teatava järgu puudumist tähendavat märki. Kuni XVIII sajandini nimetati ka vene keeles nulli „tsifriks“. Nii näiteks kirjutab Magnitski oma „Aritmeetikas“, et märki 0 „kutsutakse tsifriks ehk eimillekski“. Inglise keeles on sõna „cipher“ üheks vasteks ka kaasajal „null“; selle mitteteadmise on viinud tõlkijaid tõlgitava mõtte jämedale moonutamisele.

Hindu numbrid IX sajandist.

Lääne-araabia numbrid  
X sajandist.

Hispaania numbrid 976. aastast.

Prantsuse numbrid XII sajandist.

Prantsuse numbrid XIII sajandist.

Gooti numbrid umbes 1400. aastast.

Renessansiaja numbrid umbes  
1500. aastast.

Kaasaegsed numbrid.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0

Hindu numbrite järkjärguline üleminek kaasaegseteks.

Kui hindu numbrid ilmusid XIII sajandil Euroopasse, siis olid nad enamikule inimestest arusaamatud ja neid loeti mingisugusteks salamärkideks, salakirjaks. Salakirja

(teatavate kokkulepitud tingmärkidega kirja) nimetatakse šifriks. Sõna „šiffer“ tuleneb samast tüvest „cifr“.

Selline sõna moodustamine on seletatav sellega, et eurooplastele salakirjaks oleva hindu numeratsiooni tuumaks oli nulli märk: seepärast saigi tema esialgne nimetus „cifr“ kogu hindu numbritest koosneva aritmeetilise „salakirja“ nimeks. Nüüdisaegne nimetus „null“ pärineb ladina sõnast „nulla“ (figura) — „ei mingisugune“ (number).

Hindud tähistasid arvu tühja järku algul punktiga, hiljem ringikesega. Paljudes keeltes nimetati nulli kaua aega ringikeseks. Näib usutavana, et null arvu tühja koha märgina tekkis esialgsest märgist  $\square$ , mis asendati kirjutamiseks mugavama märgiga.

Hõlpsasti arusaadavad on arvude nimetused:

üksteistkümmed = üks teist kümnet,

kaksteistkümmed = kaks teist kümnet jne.,

kakskümmed = kaks kümnet,

kolmkümmed = kolm kümnet jne.

### Täisarvude aritmeetika

Täisarvude juures nüüdisajal kasutatavate aritmeetiliste tehete meetodid kujunesid pikkamööda välja Indias, sest seal levis positsiooniline künnendsüsteem varem kui teistes maades. Kõige varasemad kirjalikud andmed hindude aritmeetika eksisteerimise kohta kuuluvad VII sajandi keskpaika. Õpetatud kreeklane Severus Sebectus kirjutas umbes 660. aastal: „Hindude tähtsad avastused astronoomias on geniaalsemad kui kreeklaste ja babülonlaste omad; nende väärtuslikud arvutusmeetodid on kõrgemal igasugustest kirjeldustest. Utlen vaid, et arvutused viiakse läbi üheksa numbri abil...“ Esimesi jälgi nende võtete Euroopasse tungimise kohta võib leida üksikutest ürikutest X sajandi lõpul.

Euroopas algas laialdasem tutvumine nende võtetega XIII sajandil, pärast seda kui XII sajandil tõlgiti ladina keelde usbeki matemaatiku Muhámmed al-Horesmi raamat „Aritmeetika hindu numbritega“.

Täisarvudega sooritavate tehete reeglid erinesid hindudel meie omadest ainult selle poolest, et kõik tehted algasid vasakult, kõrgematest järkudest.

## ВѢДОМОСТИ

На Москвѣ въ оубъ нынѣ пѣшекъ мѣдныхъ  
 гоубенцѣ и мартирѣвъ вѣланто ѱ .  
 тѣ пѣшкн , мѣромъ по нѣ . по нѣ . и по вѣ  
 фѣнтоу . гоубенцы бѣгомъ пѣдовыѣ и полѣ  
 пѣдовыѣ . мартирѣ бѣгомъ девѣти трѣхъ и двѣ  
 пѣдовыѣ и мѣнше . И ещѣ многу формъ готѣвнхъ

*Esimene vene ajaleht „Vedomosti“ kasutas veel 1703. aastal slaavi numbreid: „Moskvas on vasksuurtükke, haubitsaid ja mortiiere vast-selt valatud 400. Nende suurtükkide pommid on 24-, 18- ja 12-naelased“ jne.*

Hindud kirjutasid pulbriga kaetud lauakestele, mistõttu neil oli kerge kustutada kirjutatud arvu ja asendada seda uuega, kui tehe järgmise järguga andis tulemuse, millest osa tuli lisada kõrgemale järgule.

Et meie kirjutame paberile, siis on selline kustutamine ebamugav. Elukutselised arvutajad alustavad aga ka kaasajal tehteid kõrgematest järkudest. Nii näiteks mitme arvu liitmise korral nad liidavad kaks arvu, alustades kõrgematest järkudest, ning saadud summa kirjutavad kõrvale üles. Seejärel liidetakse saadud summa analoogiliselt kolmanda liidetavaga, uus summa neljanda liidetavaga jne.

Sellist aritmeetiliste tehete teostamise meetodit soovitab suur matemaatik akadeemik A. N. Krõlov (1863—1945), kes oli kahtlemata üks paremaid arvutajaid matemaatikute seas. Kui nii toimivad elukutselised arvutajad, siis on selline arvutuste järjekord kahtlemata mugavam ja täpsem koolis kasutatavast.

L. F. Magnitski kirjutab korrutamise kohta käivas peatükis, et „mõned korrutavad mingisugusel veidral viisil“, paigutades arvutused järgmiselt:

481
399
-----
1443
4329
4329
-----
191919



A. N. Krõlov  
(1863—1945).

Selle korrutamismeetodi „veidruseks“ on ainult see, et korrutamine algab korrutaja kõrgema järguga korrutamisest.

Nii on loomulik toimida juba sellepärast, et korrutise tähtsaim osa saadakse korrutaja kõrgeima järguga korrutamisel. Ligikaudsete arvude korrutamisel on see meetod harilikust meetodist võrdlematult mugavam.

Üldiselt teostati aritmeetilisi arvutusi erinevatel aegadel erinevate meetoditega.

### Aritmeetiliste tehete arvust

Aritmeetiliste tehete arv on olnud erinevatel aegadel ja erinevatel rahvastel erinev. Keskaegsed käsiraamatud sisaldavad üheksat aritmeetilist tehet. Need on 1) numbratsioon, 2) liitmine, 3) lahutamine, 4) kahekordistamine, 5) korrutamine, 6) kahestamine (kahega jagamine), 7) jagamine, 8) progressioonid (tavaliselt naturaalarvude jada liikmete summa leidmine), 9) juurimine (tavaliselt ainult ruutjuure leidmine).

Arvude kahekordistamist kasutasid laialdaselt egiptlased, kes taandasid iga korrutamise sellele lihtsamale operatsioonile.

Olgu näiteks vaja arvutada

$$37 \cdot 19$$

$$19 = 1 + 2 + 2^2 + 2^4; 37 \cdot 19 = 37 \cdot (1 + 2 + 2^4) = 37 \cdot (1 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$37 \cdot 1 = 37 \quad (*)$$

$$37 \cdot 2 = 74 \quad (*)$$

$$37 \cdot 2 \cdot 2 = 148$$

$$37 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 296$$

$$37 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 592 \quad (*)$$

$$37 \cdot (1 + 2 + 2^4) = 37 + 74 + 592 = 703.$$

Korrutamine taandatakse kahekordistamisele ja liitmisele. See on alati võimalik, sest korrutajat saab alati avaldada kahe astmete (ja ühe, kui arv on paaritu) summana: selleks tuleb ainult korrutaja esitada kahendsüsteemis.

Meie poolt juba mitu korda nimetatud IX sajandi usbeki matemaatik Muhámmed al-Horesmi tunnistas kahekordistamise ja kahestamise omaette aritmeetilisteks teheteks. Pärast tema raamatu ladina keelde tõlkimist XII sajandil lisasid kõik Euroopa õpikud aritmeetiliste tehetehulka ka kahekordistamise ja kahestamise. Alles üsna XV sajandi lõpus märkis itaalia autor Lucas Pacciolo esimesena, et kahekordistamine ja kahestamine on ainult korrutamise ja jagamise erijuhtudeks, ning heitis nad kõrvale. Olles õpikutest spetsiaalsete aritmeetiliste tehetena kõrvaldatud, jätkasid kahekordistamine ja kahestamine eksisteerimist praktilistes arvutustes. Selles suhtes näitas erilist elujõulisust üks korrutamismeetod, mida meie päevil on kirjanduses kirjeldatud pealkirja all:

### „Vene talupoja korrutamismeetod“

Olgu tarvis korrutada 37 ja 32. Moodustame kaks arvude tulpa, ühe arvu 37 kahekordistades, teise arvu 32 kahestades:

37	.	.	.	.	.	.	.	32
74	.	.	.	.	.	.	.	16
148	.	.	.	.	.	.	.	8
296	.	.	.	.	.	.	.	4
592	.	.	.	.	.	.	.	2
1184	.	.	.	.	.	.	.	1.

Kõigi vastavate paaride korrutised on võrdsed, seega

$$37 \cdot 32 = 1184 \cdot 1 = 1184.$$

Teise näitena leiame korrutise  $47 \cdot 37$ .

Toimime nagu eelmises näiteski, aga juhul kui teises tulbas on jagatav paaritu arv, kirjutame kahestamisel üles ainult jagatise täisosa ning tähistame tähekestega need read, milles jagamine toimus jäägiga, ja viimase rea. Saame:

47	. . . . .	37 (*)
94	. . . . .	18
188	. . . . .	9 (*)
376	. . . . .	4
752	. . . . .	2
1504	. . . . .	1 (*)

Kui teises tulbas poleks kahega jagamisel olnud jääke, siis võrduks korrutis arvuga 1504. Antud juhul me aga toimisime nii, nagu poleks meil olnud algul korrutis  $47 \cdot 37$ , vaid  $47 \cdot 36$  ja kolmandas reas mitte  $188 \cdot 9$ , vaid  $188 \cdot 8$ . Me heitsime kõrvale vastavalt 47 ja 188; seepärast saame õige korrutise, kui liidame arvule 1504 188 ja 47:  
 $47 \cdot 37 = 1504 + 188 + 47 = 1739$ .

Korrutamise reegel: antud arvude korrutis võrdub teise tulba paaritutele arvudele vastavate esimese tulba arvude summaga.

See arvude korrutamise meetod on praktiline siis, kui üht ja sama arvu tuleb korrutada erinevate arvudega. Arvutagu näiteks aritmomeetrit mitte omav kolhoosi arveametnik erinevate inimeste töötasu tingimusel, et iga antud kategooria tööline saab päevas 53 rubla.

Esimene, järjestikuse kahekordistamisega saadav tulp on ühine kõigi korrutiste jaoks ja kehtib alati. Erineva tööpäevade hulga eest saadava töötasu leidmiseks tuleb ainult iga päevade hulga jaoks kahestamise teel moodustada teine tulp, mida on kerge teha peast.

### Mõnedest täisarvude omadustest

Elementaararitmeetikas vaadeldakse niinimetatud naturaalarvude jada 1, 2, 3, 4, ... moodustavate naturaalarvude mõningaid omadusi.

Kaasajal omandab laps juba kooli nooremates klassides oskuse piiramatult loendada naturaalarvude jada liik-

meid. Urginimeselt aga nõudis selle oskuse omandamine pikka arenguperioodi. Sellest annavad tunnistust mitmesugused faktid.

Vene keeles nagu valdavas enamuses teistes kaasaegsetes keelteski on erivormid sõnade ainsuse ja mitmuse jaoks, s. o. juhtudeks, kus on tegemist ühe esemega või rohkem kui ühe esemega.

Vene keelele väga lähedases slaavi keeles aga oli sõna-  
del kolm vormi: ainsus, kahelisus ja mitmus. Teiste sõnade-  
ga, kui tegemist oli kahe esemega, siis asetati nende  
nimetus nii ainsusest kui ka mitmusest erinevasse  
vormi. Sellist nähtust esineb ja esines ka mõningates teistes  
keeltes. On keeli, kus esineb kolmelisuse erivorm, s. o.  
kui on tegemist kolme esemega, siis kasutatakse sõna  
erivormi. See nähtus tekkis keeles neil kaugetel aegadel,  
kui inimene oskas loendada ainult üks, kaks või üks, kaks,  
kolm, sellest rohkema korral aga enam ei eritlenud ese-  
meid, vaid ütles „palju“. On võimalik, et ebausklikud  
ettekujutused mõnede arvude (7 ja 13) kohta ongi sele-  
tatavad sellega, et need arvud kas olid suurimateks ini-  
mese poolt teatud arenguastmel omandatud arvudest või  
olid arvudeks, milleni ta veel polnud jõudnud ja mis see-  
pärast näisid talle ebatavalistena, arusaamatutena ja  
hirmu tekitavatena.

Millal jõudis inimene oskuseni piiramatult loendada  
arvude jada liikmeid?

Me mainisime juba Arhimedese (287—212 e. m. a.) tööd  
„Liivaterade arvutamisesest“, milles ta tõestab, et arve jät-  
kub isegi tolle aja ettekujutuse järgi kerakujulist ma-  
ailmaruumi täitvate liivaterade arvu loendamiseks. Arhi-  
medes tõestab üksikasjaliselt, et ta võib arvude abil loen-  
dada meelevaldset esemete hulka.

Püthagoras tõi VI sajandil enne meie ajaarvamise  
algust aritmeetikasse sisse arvude jaotuse algarvudeks  
ja kordarvudeks. Algarvudeks nimetatakse arve, mis ja-  
guvad jäägita ainult ühe ja iseenesega; kordarvudeks  
nimetatakse arve, mis peale ühe ja iseenesega jaguvad veel  
mingi kolmanda arvuga. Edasi näidatakse aritmeetikas,  
et iga kordarvu saab ühesel viisil lahutada algarvude kor-  
rutiseks. Algarvud on seega nagu telliskivideks, millest  
koosnevad kõik ülejäänud arvud. Siit on ka arusaadav  
huvi algarvude vastu.

Arvude jaotust alg- ja kordarvudeks, mille võttis kasutusele Püthagoras, loetakse matemaatika arengus tähtsaks momendiks. See jaotus sai aluseks arvude omaduste teoreetilisele uurimisele, millega tegeleb tähelepanuvääriv osa kogu matemaatikast.

Kaasaegne aritmeetika eristab naturaalarvude hulgas kolme eri liiki arve:

- 1) algarv 1, millel on ainult üks jagaja,
- 2) algarvud, millel on ainult kaks jagajat: üks ja arv ise,
- 3) kordarvud, millel on rohkem kui kaks jagajat.

Arvu 1 eraldamine naturaalarvude eri liiki põhineb sellel, et arvul 1 on terve rida teiste arvude vastavatest omadustest erinevaid omadusi. Näide. Me nimetame murdu  $\frac{1}{n}$  arvu  $n$  pöördarvuks. Arvu 1 pöördarv on samuti 1, kõigi teiste arvude korral aga see võrdus ei kehti. Kui ka arv ise lugeda enda teguriks, siis on iga ühest erineva arvu kõigi tegurite summa arvust endast suurem, arvu 1 korral aga võrdub tegurite summa arvu endaga. Kui arv 1 paigutada algarvude rühma, nagu seda mõnikord tehti, siis peab paljudes teoreemides eraldi märkima arvu 1 omadusi. Et nendest märkustest vabaneda, loeti arv 1 naturaalarvude eri liigiks. Muistse Kreeka matemaatikud seda ei teinud, sest nad nimetasid arvuks ühikute hulka: nendel ei olnud 1 arvuks, vaid arvu elemendiks, aatomiks. Nad ei lugenud arvudeks ka murde, vaid vaatesid murdu kui kahe naturaalarvu suhet.

Kreeka matemaatik Eukleides tõestas umbes 300 aastat enne meie ajaarvamise algust, et algarve on lõpmata palju, ja et pole olemas suurimat algarvu. Umbes sada aastat pärast teda andis teine kreeka matemaatik Eratosthenes meetodi („Eratosthenese sõel“), mille abil sai algarvud naturaalarvude jadast välja eraldada. Õpikutes tuuakse ära nii Eukleidese tõestus kui ka Eratosthenese sõela kirjeldus.

„Eratosthenese sõel“ on tänapäeval arendatud kuni 12 miljonini; leidub kõigi 1 ja 12 000 000 vahel asetsevate algarvude trükitud tabeleid.

Väljaspool selle tabeli piire on teada palju algarve, kuid need on kõik teatud kindlat tüüpi arvud, näiteks arvud kujuga  $2^n - 1$  või  $2^n + 1$ . Nii näiteks tõestas silmapaistev matemaatik-iseõppija I. M. Pervušin 1883. aastal,

et arv

$$2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

on algarv.

See arv oli rea aastakümnete kestel suurimaks teadaolevaks algarvuks.<sup>1</sup>

I. M. Pervušin tõestas peale selle 1878. aastal, et arv

$$2^{2^{23}} + 1$$

pole algarv, sest ta jagub arvuga  $167\,772\,161 = 5 \cdot 2^{25} + 1$ .

Arv  $2^{2^{23}} + 1$  koosneb 2 525 223 numbrist. Kui teda trükkida hariliku trükikirjaga, siis kuluks selleks 5 kilomeetri pikkune rida ehk 1100-leheküljeline hariliku suurusega raamat. Pervušini tulemusi kontrolliti Peterburi ja Pariisi teaduste akadeemiates ning nad leiti olevat õiged.

Olemasolevad algarvude tabelid näitavad, et sedamööda kuidas me kaugeneme naturaalarvude jada algusest, esineb algarve üha harvemini ja harvemini, kuid tabeli detailne uurimine toob algarvude jaotuses esile suuri ebakorrapärasusi.

Järgmine tabel (lk. 87) annab nendest ebakorrapärasustest teatava ettekujutuse.

Algarvude jaotumise ebakorrapärasus ja nende hulga kahanemine nähtub selgesti tabeli teisest veerust.

Algarvude jaotumise pildi kirjusus suurendab veel see, et leidub algarvude paare, mis on naturaalarvude jadas eraldatud teineteisest ainult ühe arvuga, nagu näiteks 3 ja 5, 5 ja 7, 11 ja 13 või 10 016 957 ja 10 016 959 (selliseid algarve nimetatakse „kaksikuteks“); teiselt poolt leidub järjestikuseid algarve, mille vahel on naturaalarvude jadas palju kordarve. Nii näiteks on kõik 153 järjestikust arvu alates arvust 4 652 354 ja lõpetades arvuga 4 652 506 kordarvud. Saab tõestada, et naturaalarvude jadas küllalt kaugele minnes võime leida vahemikke, mis koosnevad meelevaldsest hulgast järjestikustest kordarvudest.

Kõige silmapaistvamad matemaatikud püüdsid lahendada algarvude jaotumise mõistatust. Nad otsisid valemeid, mille abil saaks kas või ligikaudselt määrata teatavat naturaalarvu mitte ületatavate algarvude hulka.

<sup>1</sup> Nagu eespool näitasime, on kaasajal suurimaks teadaolevaks algarvuks  $2^{2^{281}} - 1$ . See arv on väga palju kordi suurem Pervušini arvust.

Naturaalarvude jada vahemik	Selles vahemikus on algarve	Algarvude hulk ühest vahemiku lõpuni
1	2	3
1— 10	4	4
10— 20	4	8
20— 30	2	10
30— 40	2	12
40— 50	3	15
50— 60	2	17
60— 70	2	19
70— 80	3	22
80— 90	2	24
90—100	1	25
1—100	25	25
100—200	21	46
200—300	16	62
300—400	16	78
400—500	17	95
500—600	14	109
600—700	16	125
700—800	14	139
800—900	15	154
900—1000	14	168
esimene miljon	78 498	78 498
teine miljon	70 435	148 933
kolmas miljon	67 883	216 816
neljas miljon	66 330	283 146
viies miljon	65 367	348 513
kuues miljon	64 336	412 849
seitsmes miljon	63 799	476 648
kaheksas miljon	63 129	539 777
üheksas miljon	62 712	602 489
kümnes miljon	52 090	664 579

Teiste sõnadega, nad otsisid valemeid järgmise küsimuse lahendamiseks: kui palju on algarve naturaalarvude jadas 1 ja 1000 vahel, 1 ja 100 000 vahel, 1 ja 1 000 000 vahel jne. Selle üliraske küsimuse lahendamisel saavutas parima tulemuse mitte ainult Venemaa, vaid ka kogu maailma üks geniaalsemaid matemaatikuid Pafnuti Lvovitš Tšebõšev.

### P. L. Tšebõšev

Pafnuti Lvovitš Tšebõšev sündis 16. mail 1821. aastal ja suri 8. detsembril 1894. aastal. Tšebõšev oli Moskva ülikooli kasvandik, Peterburi ülikooli professor ning Peter-

buri ja Pariisi teaduste akadeemia liige, tegi palju väärtuslikke avastusi matemaatika mitmesugustes harudes ja lõi rea uusi matemaatika harusid. Väga silmapaistvate tulemuste hulka kuuluvad ka tema algarve käsitlevad tööd.

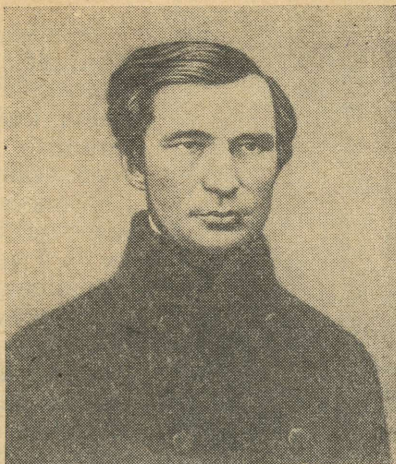
Tšebõšev tuletas 1849. aastal valemi, mida tulemusteta otsisid kõige nimekamad matemaatikud. See valem võimaldas suure täpsusega määrata 1 ja mistahes arvu  $x$  vahel asetsevate algarvude hulka. Et kaasajal on olemas 1 ja 12 000 000 vahel asetsevate algarvude tabelid, siis on nendes piirides kerge kontrollida Tšebõševi valemi täpsust.

Tähistades, nagu see on matemaatikas kombeks, 1 ja arvu  $x$  vahel olevate algarvude tegelikku hulka sümboliga  $\pi(x)$  ja Tšebõševi valemi abil arvutatud algarvude hulka sümboliga  $Li(x)$ , leiame mitmesuguste  $x$  väärtuste korral nende vahe, s. o.  $Li(x) - \pi(x)$ . Need vahed näitavad, kui võrd Tšebõševi valemi abil arvutatud tulemus erineb tõelisest algarvude hulgast selles vahemikus.

$x$	$\pi(x)$	$Li(x)$	$Li(x) - \pi(x)$
10	4	6	2
100	25	29	4
1 000	168	178	10
10 000	1 229	1 246	17
100 000	9 592	9 630	38
500 000	41 538	41 606	68
1 000 000	78 498	78 628	130
1 500 000	114 149	114 263	114
2 000 000	148 933	149 055	122
2 500 000	183 072	183 245	173
3 000 000	216 816	216 971	155
4 000 000	283 146	283 352	206
5 000 000	348 513	348 638	125
6 000 000	412 849	413 077	228
7 000 000	476 648	476 827	179
8 000 000	539 777	540 000	223
9 000 000	602 489	602 676	187
10 000 000	664 579	664 918	339

Tabel näitab, et Tšebõševi valemi abil leitav arvude hulk ületab 10 000 000 piires mõnevõrra algarvude tegelikku hulga, kuid see hälve on 500 000 korral ainult 0,16%. 10 000 000 korral aga ainult 0,05%. Tšebõševi valemi täpsus on väga suur ja kasvab arvu  $x$  kasvamisel.

Märgime, et kaasajal on tõestatud Tšebõševi arvude järgmine üllatav omadus. Naturaalarvude jadas, väga



P. L. Tšebõšev  
(1821—1894).

palju kaugemal arvust 10 000 000, leidub arv, mille korral  $Li(x)$  pole enam suurem, vaid on väiksem kui  $\pi(x)$ . 1933. aastal tehti kindlaks, et see arv  $x$  on määratud ligikaudse võrdusega

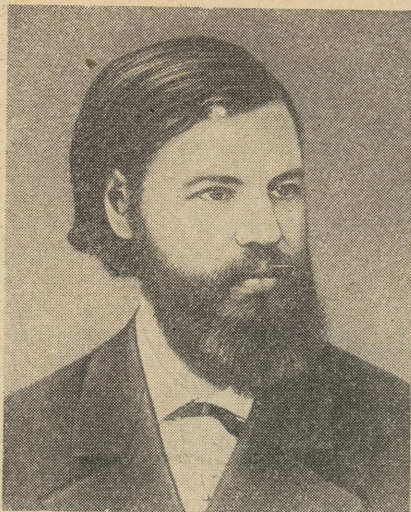
$$x \approx 10^{10}$$

See nn. Skewesi arv on kõige suurem arv, mis kunagi on teaduses esinenud. See on arv, milles ühe järel on 10<sup>10</sup> 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 nulli.

Muljest, mida tekitas algarvude hulga määramise valesi leidmine Tšebõševi poolt, saame aimu suurte matemaatikute väljenduste põhjal.

Kuulus inglise matemaatik Sylvester (1814—1897) nimetas Tšebõševi „algarvude võitjaks, kes esimesena surus nende kapriisse voolu algebralistesse piiridesse“, ja lisas, et „algarvude teoorias võib järgmisi edusamme oodata alles siis, kui sünnib keegi, kes ületab Tšebõševi oma läbinägelikkuse ja analüüsivõime poolest sedavõrd, nagu Tšebõšev ületas nende omaduste poolest harilikke inimesi“.

P. L. Tšebõšev lahendas samal ajal ka teise, tolle ajani lahendamatu ülesande.



J. I. Zolotarjov (1847—1878).



A. M. Ljapunov (1857—1918).

Prantsuse matemaatik Bertrand (1822—1900) kontrollis kõigi arvude puhul kuni 6 miljonini järgmise seaduspärasuse olemasolu: iga arvu  $x$  korral alates neljast on arvude  $x$  ja  $2x - 2$  vahel vähemalt üks algarv. See lause oli tuntud „Bertrandi hüpoteesi (postulaadi)” nime all. P. L. Tšebõšev tõestas Bertrandi lause ja muutis selle teoreemiks.

Kõige P. L. Tšebõševi kohta öeldu põhjal võiks arvata, et ta oli praktikast kaugel seisev teoreetik, kes tegeles matemaatika kõige abstraktsemate aladega.

Ta oli aga hoopis teadlane, kes sagedamini kui ükski teine matemaatik lahendas inimese praktilistest vajadustest tulenevaid ülesandeid.

Selle üle võib otsustada juba tema tööde pealkirjade järgi, mille hulgas kohtame selliseid, nagu „Ühest mehhanismist”, „Hammasratastest”, „Lihtsamatest kiilühendustest”, „Rõivaste juurdelõikamisest” jne. Ta uuris tuuleveskite ja mitmesuguste vabrikuseadmete ehitust ning igal

pool kohtas ta tema enda sõnade järgi matemaatika küsimustega, mida tema-aegne teadus vähe tundis.

Oma geniaalsete teoreetiliste töödega P. L. Tšebõšev täitis need lüngad teaduses.

Kõrvuti sellega tegeles ta kogu elu vältel praktilise mehaanikaga, leiutas suure hulga mehhanisme, teostas laskekatseid ja aitas palju kaasa kõikide Euroopa riikide suurtükiväe taset ületava Vene suurtükiväe suure täiuslikkuse saavutamisele.

Kogu Tšebõševi tegevus kujutab endast teooria ja praktika pidevat ühendamist; seda tegevust ajendas üks ja sama idee, mis Tšebõševi arvates on kogu inimtegevuse aluseks: kuidas saada väikseima jõukuluga parimaid tulemusi, kuidas paigutada oma vahendeid võimalikult suuremate tulemuste saavutamiseks. Seda ideed arvutusvahendite täiustamiseks rakendades andis ta valemid, mille kasutamine võimaldas akadeemik Krõlovil, ühel tema andekatest järglastest, sedavõrd täiustada laevaehituse arvu-



A. A. Markov (1856—1922).



G. F. Voronoi (1868—1908).



*P. L. Tšebõšev vanas eas.*

tusi, et Venemaa ületab selles osas juba palju aastakümneid teisi maailma maid.

Lõpuks peab veel märkima, et P. L. Tšebõšev rajas esimese vene matemaatikateaduse koolkonna, mille iseloomustavaks jooneks oli konkreetsete probleemide lahendamine võimalikult lihtsate vahenditega, esitades seejuures lahendust arvulise tulemuseni jõuda võimaldava valemiga. Sellesse koolkonda kuuluvad peaaegu kõik XIX sajandi teise poole ja XX sajandi alguse kuulsad vene matemaatikud: A. N. Korkin, J. I. Zolotarjov, A. M. Ljapunov, A. A. Markov, G. F. Voronoi, V. A. Steklov, A. N. Krõlov. Tšebõševi koolkonna otsesteks järeltulijateks on nõukogude matemaatikud, akadeemikud I. M. Vinogradov, S. N. Bernstein ja teised.



V. A. Steklov  
(1863—1926).

### Euler—Goldbach—Vinogradovi teoreem algarvudest

Algarvude kohta on olemas rida teoreeme, mis hämmastavad oma näiva lihtsusega ja tõestuse raskusega. Üks tuntumaid neist on Goldbachi teoreem. Kahesaja aasta vältel, kuni akadeemik Ivan Matvejevitš Vinogradovi töödeni, ei andnud väga paljude suurte matemaatikute pingutused selle teoreemi tõestamiseks mingeid tulemusi.

Goldbachi probleem tekkis järgmisel viisil.

1725. aastal asutatud Peterburi Teaduste Akadeemia liikmeks astus 1727. aastal kahekümneaastane Leonhard Euler, kellest sai XVIII sajandi üks suuremaid matemaatikuid.

Tema nime kannavad kümned teoreemid ja valemid kõigis matemaatika ja mehaanika harudes. Tema teoste kogu hõlmab 80 väga paksu köidet. Erinevalt reast XVIII sajandi akadeemikutest-välismaalastest pälvis Euler esi-

meste vene akadeemikute, nende hulgas M. V. Lomonosovi austuse ja armastuse.

1742. aastal vastab Euler kirjas oma akadeemiakaaslase Goldbachi küsimusele, et ta loeb õigeks järgmist teoreemi, mida ta aga ei suuda tõestada: „Alates kuuest avaldub iga paarisarv kahe paaritu algarvu summana“:  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ ,  $10 = 3 + 7 = 5 + 5$  jne.

Kui see teoreem on õige, siis järeldub sellest, et iga paaritu arv on kolme algarvu summa. Need laused kannavad Goldbachi teoreemi nime. Paarisarvude suhtes on seda teoreemi kontrollinud paljud matemaatikud. 1940. aastal jõuti kontrolliga arvuni 100 000.

Euler—Goldbach—Vinogradovi teoreemi saab paarisarvude korral kontrollida järgmiselt. Võtke kaks paksu pabeririba ja jaotage need võrdseteks ruutudeks. Ühe riba ruutudesse kirjutage paaritud arvud kahanevas järjekorras, alates teatavast kindlast arvust, näiteks viiekümnest. Teisele ribale kirjutage alates ühest paaritud arvud kasvavas järjekorras. Kriipsutage mõlemal ribal alla kõik algarvud kas „Eratostenese sõela“ abil või algarvude tabelit kasutades (meie tabelis on algarvud trükitud rasvase kirjaga).

Asetage ribad niiviisi kõrvuti, et ühe riba arv 49 seisaks samal kõrgusel teise riba arvuga 1. Sel juhul annavad mõlemal ribal kõrvuti seisvad allakriipsutatud (rasvase kirjaga trükitud) arvud arvu 50 lahutuse kahe algarvu summaks.

Selliseid arvu 50 lahutusi on 4, nimelt  $3 + 47$ ,  $7 + 43$ ,  $13 + 37$  ja  $19 + 31$ . Samu ribasid saab kasutada iga 50 mitte ületava paarisarvu kahe algarvu summaks lahutamiseks. Selleks tuleb teine riba asetada esimese kõrvale nii, et kõrvuti seisvate arvude summa võrduks lahutatava arvuga.

Meie tabelis on toodud arvude 50, 48 ja 40 lahutus kahe algarvu summaks (vt. lk. 95).

Goldbachi teoreemi tõestamiseks tehti väga palju katseid, kuid kõik need jäid tulemusteta.

Veel 1922. aastal oli suur inglise matemaatik Hardy sunnitud teatama, et selle teoreemi tõestamiseks pole kaasaegne matemaatika võimeline. Nagu sellistel juhtudel ikka, tuli ka siin luua küsimuse lahendamiseks uusi matemaatilisi meetodeid.

49	1	49		49	
47	3	47	1	47	
45	5	45	3	45	
43	7	43	5	43	
41	9	41	7	41	
39	11	39	9	39	1
37	13	37	11	37	3
35	15	35	13	35	5
33	17	33	15	33	7
31	19	31	17	31	9
29	21	29	19	29	11
27	23	27	21	27	13
25	25	25	23	25	15
		23	25	23	17
		21	27	21	19

Goldbachi teoreemi kontrollimine arvude 50, 48 ja 40 korral.



I. M. Vinogradov.

Nende uute meetodite loomisele pani 1930. aastal aluse nõukogude matemaatik L. G. Šnirelman (1905—1938); välja töötas need meetodid akadeemik Ivan Matvejevitš Vinogradov (sündis 1891. aastal)<sup>1</sup>.

1937. aastal tõestas I. M. Vinogradov, et iga küllalt suur paaritu arv on kolme paaritu algarvu summa. Seega on ülesanne, mille kallal nägid vaeva väga paljud suured matemaatikud, lahendatud kõigi paaritute arvude jaoks, alates teatavast arvust  $C$ . See arv on üsna suur. Küsimuse edasine uurimine võimaldab kindlasti vähendada tõket, millest alates võib paaritute arvude jaoks lugeda Goldbachi teoreemi tõestatuks.

See küsimus pakub huvi seepärast, et nõukogude matemaatikud löid uusi teaduslikke uurimismeetodeid, mis leiavad loomulikult rakendamist ka teiste küsimuste lahendamisel.

---

<sup>1</sup> Vinogradovi poolt välja töötatud meetodid on täiesti sõltumatud Šnirelmani omadest. *Tõlk.*



L. G. Snirelman  
(1905—1938).

Mistahes matemaatika harus on kõige tähtsam uute meetodite loomine. Juba eksisteerivate meetodite rakendamise on hoopis kergem töö.

Eespool mainitud tõestusmeetodi leiutamine I. M. Vinogradovi poolt oli sündmuseks, mis äratas kogu maailma tähelepanu.

### Murdarvud

Me kohtame murdarvude arengu ajaloos kolme liiki murde:

1) mitmendikud ehk ühikmurrud, millel lugejaks on üks, nimetajaks aga võib olla mistahes täisarv;

2) süstemaatilised murrud, millel lugejaks võivad olla mistahes arvud, nimetajaks aga ainult teatavat eritüüpi arvud, näiteks kümne või kuuekümne astmed;

3) üldkujulised murrud, millel nii lugejaks kui nimetajaks võivad olla mistahes arvud.

Nende kolme eri liiki murdude leiutamine tekitas inimkonnale erinevaid raskusi, mistõttu erinevad murdude liigid võeti kasutusele erinevatel aegadel.

Inimese tutvumine murdudega algas väikeste nimetajatega ühikmurdudest.

Mõisteid „pool“, „kolmandik“, „veerand“, „kaheksandik“ kasutavad tihti ka inimesed, kes pole kunagi õppinud murdarvude aritmeetikat. Need lihtsaimad murrud leiutas iga rahvas oma ajaloolises arengus iseseisvalt.

**Ühikmurrud.** Vaatamata sellele, et muistsed egiptlased arendasid oma ajaloo mitme aastatuhande vältel kõrgetasemelist kultuuri, et nad pärandasid meile suurepäraseid kunstilisi mälestusmärke ja et nad valdasid mitmeid tehnika harusid, ei jõudnud nad murdarvude aritmeetikas siiski kaugemale ühikmurdude leiutamisest (ja murrust  $\frac{3}{8}$ ). Kui ülesanne andis murdarvulise vastuse, siis esitasid egiptlased selle ühikmurdude ehk mitmendike summana. Vastuse  $\frac{7}{8}$  näiteks oleks egiptlane esitanud summana  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  ja oleks kirjutanud ta ilma liitmismärkideta:  $\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{1}{8}$ . Ilma liitmismärgita said hakkama ka paljud hilisemad rahvad, kes mõistsid murdude kõrvuti kirjutamist kui liitmist. See egiptuse kirjaviis on osaliselt säilinud ka meil. Me kirjutame segaarvude puhul mingit ühendavat märki kasutamata kõrvuti arvu täisosa ja murdosa ning mõistame kirjutist kui summat: kirjutame  $3 + \frac{1}{2}$  asemel  $3\frac{1}{2}$ .

Võib näida, et ainult ühikmurdude kasutamine tegi egiptlastele ülesannete lahendamise keerukaks. See pole aga alati nõnda.

Egiptuse autor lahendab järgmise ülesande: jagada 7 leiba võrdselt kaheksa inimese vahel. Meie ütleksime, et igaüks saaks  $\frac{7}{8}$  leiba.

Egiptlasel ei olnud arvu  $\frac{7}{8}$ , kuid ta teadis, et seitset kaheksaga jagades saame  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ . See fakt näitas talle, et seitse leiva jagamiseks kaheksa inimese vahel peab olema 8 poolt, 8 veerandit ja 8 kaheksandikku. Ta lõikas neli leiba pooleks, kaks leiba neljaks ja ühe leiva kaheksaks ning jaotas tükid osaliste vahel. Jaotamiseks tuli tal teha kokku ainult  $4 + 6 + 7 = 17$  lõiget.

Meie päevil töötaval laohoidjal, kellele esitatakse sama jaotamisülesanne, on kohe selge, et igaüks peab saama seitse kaheksandikku, ja ta arvab võib-olla, et kõik 7 leiba tuleb lõigata kaheksaks, milleks tal kulub  $7 \cdot 7 =$

= 49 lõiget. Nagu näeme, on selle ülesande korral egiptuse lahendusviis praktilisem.

Egiptuse õpetlasel pidi murdarvudele viivate ülesannete lahendamisel olema käepärast tabel, et teada saada, missuguste ühikmurdude summana avaldub jagamise tulemus (murdarv). Sellise tabeli leiame Ahmese või Rhindi papüüruse nime all tuntud egiptuse matemaatika-käsiraamatu agusest.

Kas on võimalik iga murdu esitada ühikmurdude summana? Meie aritmeetikaoskuse juures on see kergesti teostatav.

Saab veenduda järgmise võrduse õigsuses (kontrolige!):

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)a-b}{(n+1)b} (*).$$

Kui  $n$  on murru  $\frac{b}{a}$  täisosa (matemaatikas tähistatakse seda märgiga  $E\left(\frac{b}{a}\right)$ ), s. o. kui  $n = E\left(\frac{b}{a}\right)$ , siis saame võrdust (\*) kasutades esitada murru  $\frac{a}{b}$  ühikmurdude summana. Näitame seda murru  $\frac{13}{20}$  abil.

$$n = E\left(\frac{20}{13}\right) = 1 \text{ (muru } \frac{20}{13} \text{ täisosa).}$$

Võrdust (\*) kasutades

$$\begin{aligned} \frac{13}{20} &= \frac{1}{1+1} + \frac{(1+1) \cdot 13 - 20}{(1+1) \cdot 20} = \frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 13 - 20}{2 \cdot 20} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{6}{40} = \frac{1}{2} + \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Murruga  $\frac{3}{20}$  viime läbi samad teisendused:

$$n = E\left(\frac{20}{3}\right) = 6;$$

$$\frac{3}{20} = \frac{1}{6+1} + \frac{(6+1) \cdot 3 - 20}{(6+1) \cdot 20} = \frac{1}{7} + \frac{21 - 20}{7 \cdot 20} = \frac{1}{7} + \frac{1}{140}.$$

Asetades selle väärtuse  $\frac{3}{20}$  asemele, saame:

$$\frac{13}{20} = \frac{1}{2} + \frac{3}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{140}.$$

Ülesanne: esitada  $\frac{17}{18}$  ühikmurdude summana.

$$\text{Vastus: } \frac{17}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}.$$

Alates kreeklastest oli praktilise elu ülesannete lahendamise ainult ühikmurdude abil (egiptuse meetod) kasutamisel peaaegu kõigi Euroopa rahvaste juures.

**Süstemaatilised murrud.** Samaaegselt ühikmurdudega ilmusid ka süstemaatilised murrud. Kõige varasemaks selliste murdude liigiks on Babüloonias kasutatud kuuekümnenmurrud. Nendes murdudes on nimetajateks arvud  $60$ ,  $60^2 = 3600$ ,  $60^3 = 216\,000$ ,  $60^4$ ,  $60^5$  jne. ning nad on sarnased meie kümnenmurdudega.

Kuuekümnenmurde kasutasid kõik kultuurrahvad kuni XVII sajandini. Neid kasutati eriti teaduslikes töodes, mistõttu neid nimetati füüsikalisteks ehk astronoomilisteks murdudeks, üldkujulisi murde aga harilikeks ehk rahvalikeks murdudeks. Nende murdude kasutamise jäljed on säilinud tänaseni: minut on  $1/60$ , sekund  $1/60^2 = 1/3600$ , terts  $1/60^3 = 1/216000$  tunnist.

**Kümnenmurrud.** Kümnenmurrud kujutavad endast süstemaatiliste murdude eriliiki. Kümnenmurdude leiutajaks peetakse peaaegu kõigis raamatutes flaami (belgia) inseneri Simon Stevinit (1548—1620). Stevin andis 1585. aastal välja brošüüri, milles ta tuliselt agiteeris uute murdude, kümnenmurdude kasutuselevõtmise poolt; nende murdude abil saab tema sõnade järgi „kõiki igapäevaseid ülesandeid lahendada ilma murtuteta“ (nii nimetasid murde kõik rahvad). Nagu me aga juba teame, tõi kümnenmurrud teaduslikku kirjandusse umbes 175 aastat enne Stevinit usbeki matemaatik ja astronoom al-Kaši. Arvutades tollal teaduslikes uurimustes üldiselt kasutusel olevas kuuekümnenmurdude süsteemis ringjoone pikkuse ja raadiuse suhte  $2\pi$ , sai al-Kaši tulemuse järgmisel kujul:

terved	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	
	6	16	59	28	1	34	51	46	14	50

mis tähendab:

$$6 + \frac{16}{60} + \frac{59}{60^2} + \frac{28}{60^3} + \frac{1}{60^4} + \frac{34}{60^5} + \frac{51}{60^6} + \frac{46}{60^7} + \frac{14}{60^8} + \frac{50}{60^9}$$

Selle arvu alla ta kirjutas:

terveid 6 283 185 307 179 586 5.

See arv on ülalpool kuuekümnenmurdude süsteemis kirjutatud arvu  $2\pi$  väärtuse ümberkirjutus kümnenmurdude süsteemi ning

kujutab endast kümnendmurdu

6,2831853071795865.

Seda arvu kahega jagades saame arvu  $\pi$  ligikaudse väärtuse — ringjoone pikkuse suhte diameetrisse:

3,1415926535897932.

Selles murrus on kõik 16 kohta pärast koma õiged.

Kümnendosi nimetab al-Kaši kümnendminutiteks, kümnendsekunditeks, kümnendtertsideks jne.

1427. aastal kirjutatud raamatus „Arvutamiskunsti võti“ annab al-Kaši arvutusreeglid kümnendsüsteemis, s. o. õpetab kümnendmurdude korrutamist ja jagamist.

Oeldu annab meile täieliku aluse pidada XV sajandi alguse usbeki õpetlast al-Kašid kümnendmurdude praktilise kasutamise rajajaks ja ühtlasi ka õpetlaseks, kes põhendas nende murdude teooria.

Peale selle demonstreerib al-Kaši nimetatud raamatutes selget arusaamist reeglitest

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; a^m : a^n = a^{m-n},$$

mis Lääne-Euroopas kasutusel olnud kohmakate, Arhimedese-aegsete reeglitega võrreldes kujutab endast suurt sammu edasi.

**Üldkujulised murrud.** Üldkujulised murrud  $\frac{m}{n}$ , kus  $m$  ja  $n$  on meelevaldsed täisarvud, esinevad juba mõningates Arhimedese töodes. Lihtsamaid sellistest murdudest ( $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3}{4}$ ) hakati pikkamööda kasutama igapäevases praktikas. Hindud fikseerisid juba meie ajaarvamise esimestel sajanditel nüüdisaegsed harilike murdude kohta käivad arvutusreeglid. Need reeglid sattusid Kesk-Aasia matemaatikute — al-Horesmi ja teiste — käsiraamatute kaudu Euroopa aritmeetikaõpikutesse. See toimus enne kümnendmurdude levimist.

Magnitski „Aritmeetikas“ (1703) käsitletakse harilikke murde üksikasjaliselt, kümnendmurde aga teatava uue arvutusviisina, millel ei olnud toleaeegse mõõtude süsteemi juures suurt praktilist tähtsust. Alles pärast mõõtude meetrisüsteemi (kümnendsüsteemi) kehtestamist omandasid kümnendmurrud väärilise koha meie igapäevases elus.

## Algebra

Algebra kui võrrandite lahendamise kunst sündis babüloomlaste juures, kellel oli selle jaoks isegi spetsiaalne sõna, mis kandus üle ka araabia keelde.

Babüloonia matemaatikast jutustades märkisime juba, et babüloomlased lahendasid lineaar- ja ruutvõrrandeid ning tabelite abil isegi mõningaid kuupvõrrandite eriliike.

Usbeki matemaatik al-Horesmi andis oma IX sajandi algusest pärinevale ning XII sajandil ladina keelde tõlgituna kõigi Euroopa algebraõpikute esiisaks saanud raamatule nime „Kitab-al-gebr val-mukabala“, mis tõlkes tähendab „Raamat taastamisest ja vastandamisest“. „Taastamine“ tähendab lahutatava (nüüdisaegselt „negatiivse“) arvu muutmist positiivseks teda ühelt võrrandi poolelt teisele üle kandes. Et tollal negatiivseid arve ei loetud tõelisteks arvudeks, siis operatsioon al-gebr (algebra), mis nagu toonuks arvu olematusest tagasi reaalsusse, näis selle teaduse imena, mida Euroopas veel kaua pärast seda nimetati „suureks kunstiks“ kõrvuti „väikese kunsti“ — aritmeetikaga.

Terminit „algebra“ kui taastamiskunsti nimetust hakkasid araablased kasutama ka meditsiinis. Murtud käe või jalaluu paigaldamine oli samuti kaotatud organi taastamine ja arsti kunsti, mis taastas inimesele käe või jala, hakati samuti nimetama algebraks.

Selline sõna „algebra“ kahes mõttes kasutamine selgitab meile ühe esimesel pilgul imeliku fakti. Cervantese tuntud romaani „Don Quijote“ teises osas (XIV ja XV peatükis) kõneldakse, kuidas don Quijote lõi oma vastase hobuselt maha ning kuidas see vastane hiljem leidis oma kannupoisi abiga lähedasest külast enda tohterdamiseks algebraisti.

Nii on öeldud romaani hispaaniakeelses originaalis, nii kirjutatakse ka romaani „Don Quijote“ varasemates venekeelsetes väljaannetes; alles viimases väljaandes on sõna „algebraist“ asendatud „luude paigalepanijaga“. See seletub sellega, et hispaania ja portugali keeles nagu araabia keeleski tähendab sõna „algebra“ mitte ainult matemaatika osa, vaid ka „nihestuste paigaldamise kunsti“; sõnaga „algebraist“ tähistatakse mitte ainult algebra

tundjat, vaid ka arsti-spetsialisti käte ja jalgade haiguste alal.

Araablased peremehetsesid mitme sajandi vältel osal Pürenee poolsaarest ja tõid sinna oma kultuuri algmeid ning ühtlasi ka teistelt rahvastelt, eriti meie Kesk-Aasia rahvastelt omastatud kultuuri algmeid. Araablased tõid alistatud maadesse Muhámmed al-Horesmi, Abul al-Fergani ja teiste õpetlaste matemaatilisi töid, aga samuti ka kreeka autorite tõlkeid. Hispaania ja portugali keelde tungis palju araabia sõnu, sealhulgas ka sõnad „algebra“ ja „algebraist“ nendes kahes tähenduses, mis neil oli araablaste juures.

Ülesandeid, mida me nüüd lahendame lineaarvõrrandite abil, lahendasid egiptlased „régula falsiga“.

Kreeka geomeetritele olid algebra põhilised operatsioonid tuntud, kuid nad rakendasid neid ainult sirglõikudele. Alles hilisema aja kreeka matemaatiku Diofantese (III ja IV sajand m. a. j.) juures leiame lineaar- ja ruutvõrrandite numbrilist lahendamist. Kreeka matemaatika oli sel perioodil juba hääbumas.

Nagu nüüd on teada, hakkasid hindud umbes samal ajal arendama algebrat, kuid Euroopa tutvus hindude originaalsete matemaatiliste töödega alles XIX sajandil ja seejärel ei avaldanud need Euroopa matemaatika arengule mingit mõju.

Algebra kui võrrandite lahendamise kunsti alused tungisid juba XII sajandil al-Horesmi raamatu kaudu Euroopasse ja neid arendati järgmistel sajanditel Euroopa matemaatikute poolt edasi.

**Algebra täheline sümbolika.** Juba al-Horesmi nägi algebra iseloomulikku omapära selles, et ta lahendab üldkujul ka aritmeetikas vaadeldvaid ülesandeid. Meie ajal saavutatakse seda sellega, et arve tähistatakse tähtedega, mis võivad sõltuvalt ülesande tingimustest omandada mitmesuguseid arvilisi väärtusi.

Algebrat nimetati seetõttu tihti üldiseks ehk universaalseks aritmeetikaks.

Tähtede kasutamine algebras on väga pika arengu viljaks. Otsitavate arvude ja nendega teostatavate tehete tähistamiseks eriliste märkide, nn. algebra tähelise sümbolika kasutamise algmeid võime leida juba muistsetel babüloonlastel.

Egiptlastel oli otsitava tundmatu arvu tähistamiseks eriline märk, nn. „hunnik“.

Kreeka matemaatikul Diofantesel on märgid tundmatu ja tema astmete, lahutamistehte ja võrdsuse tähistamiseks. Ta teab ka seda, et  $(5-3)$   $(4-2)$  tüüpi avaldisi saab korrutada eelnevalt vahesid arvutamata, kusjuures samade märkidega arvude korrutis tuleb võtta liideta- vana, s. o. plussmärgiga, erinevate märkidega arvude korrutis aga tuleb võtta lahutatavana, s. o. miinusmär- giga. Negatiivset arvu Diofantesel veel pole.

Hindu matemaatikud kasutasid võrrandite lahendamisel julgemini neidsamu võtteid mis Diofanteski ja hakkasid võrrandite lahendamisel vaatlema ka negatiivseid juuri, mida nad tõlgendasid kui võlga või väljaminekut ning tähistasid punktiga arvu kohal või ristikesega tema kõr- val. Veel XII sajandi hindu matemaatik aga teatab, et „inimesed ei kiida selliseid arve heaks“. Positiivsete ja negatiivsete arvude võrdõiguslikkust tunnustati mate- maatikas alles XVII sajandil.

Araabia keeles kirjutavad matemaatikud, nende hul- gas tihti ka kesk-aasialased nimetasid otsitavat tundmatut arvu „asjaks“ (tähest sümboolikat neil veel ei olnud). Selle sõna esimene täht euroopalikus transkriptsioonis andiski meie poolt kasutatava tundmatu tähise  $x$ .

Kuni XVI sajandini oli algebra käsitus üldiselt siiski sõnaline.

Prantsuse matemaatik Viète (1540—1603) ja tema kaas- aegsed tõid algebrasse laialdaselt sisse tähelisi tähistusi ja sümboleid, kuigi mitte kohe sel kujul, nagu me seda teeme tänapäeval.

Juba XVI sajandi algul võtsid üksikud matemaatikud kasutusele arvu astmete tähistamise astmenäitajate abil, kuid veel XVIII sajandil leiame  $a^2$ ,  $a^3$  ja  $a^4$  asemel kirju- tisi  $aa$ ,  $aaa$  ja  $aaaa$ . Isegi nii mugav ja arusaadav märk, nagu seda on  $=$ , võeti üldiselt kasutusele alles XVIII sa- jandil<sup>1</sup> ja isegi veel selle sajandi algul pidasid teaduslike raamatute autorid vajalikuks selgitada, et märgid  $+$  ja  $-$  tähendavad liitmist ja lahutamist, märk  $\times$  korrutamist.

<sup>1</sup> Märki  $=$  kahe avaldise võrdsuse tähistamiseks soovitas inglise autor Robert Record 1557. aastal esimeses ingliskeelses algebraõpi- kus, mis oli pühendatud Moskva kaubavahetust pidavatele kaup- meeste kompaniidele, kellele ta „soovib tervist ja nende kuulsatest sõitudest saadavate kasude pidevat kasvu“.

Meie poolt aritmeetikas ja algebras kasutatavate märkide päritolu ei saa alati täpselt kindlaks teha.

Arvatakse, et märgid  $+$  ja  $-$  tekkisid kaubanduslikus praktikas. Veinikaupmees märkis kriipsudega, kui palju mõõte veini ta vaadist ära müüs. Valades vaati uusi tagavarasid, kriipsutas ta läbi nii palju „kulukriipse“, kui palju ta vaati veini tagastas. Nii olevat tekkinud XV sajandil märgid  $+$  ja  $-$ .

Märgi  $-$  tekkimine sel viisil näib olevat tõepärane.

Märgi  $+$  tekkimise kohta on olemas ka teine, mitte vähem tõepärane seletus.  $a + b$  asemel kirjutati „ $a$  ja  $b$ “, ladina keeles „ $a$  et  $b$ “. Kuna sõna „et“ („ja“) tuli väga tihti kirjutada, siis hakati teda lühendama: algul kirjutati ainult täht  $t$ , mis lõpuks muutus märgiks  $+$ . Aritmeetika raamatutes kirjutati veel kaua  $+$  ja  $-$  asemel tähed  $p$  (plus) ja  $m$  (minus).

Märgid  $\times$  ja  $\cdot$  korrutamise ning  $:$  jagamise tähistamiseks tulid tarvitusele alles XVII sajandil. Nende märkide sissetoomiseni kasutati korrutamise ja jagamise tähistamiseks märke  $M$  ja  $D$  kui vastavate tehete ladinakeelsete nimetuste esimesi tähti.

Märgi  $\sqrt{\quad}$  kohta öeldakse tavaliselt, et ta tulenevat tähest  $r$  (ladinakeelse sõna „radix“ — „juur“ esimesest tähest). See seletus ei ole aga üldiselt tunnustatud. Kõige vanemates käsikirjades asetati juuritava arvu ette punkt, hiljem aga kas punkt või kitsas, paremale üles suunatud kriipsuga varustatud rombike. Nii moodustuski märk  $\sqrt{\quad}$ .

Sulud tulid oma tänapäevasel kujul kasutusele alles XVIII sajandil ja leidsid laialdast rakendamist eelkõige Peterburi Teaduste Akadeemia väljaannetes.

Varem kasutati avaldise sulgudesse panemise asemel kriipsu arvu kohal või all. Kui algebralist avaldist oli vaja juurida, siis asetati tema ette juuremärk — kaldkriipsuga romb — ja avaldise kohale tõmmati kriips: juuremärgi ja kriipsu ühinemisest tekkis kriipsuga juuremärk  $\sqrt{\quad}$ , mida välismaistes raamatutes peaaegu üldse ei kasutata. Meie kirjutusviisi  $\sqrt{x^2 + axy + y^2}$  asemel kirjutatakse seal  $\sqrt{x^2 + axy + y^2}$ .

Alates XVII sajandist hakati tundmatuid arve tähistama ladina tähestiku viimaste tähtedega  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Veel kaua aga tähistati tundmatut võrrandis ka tähega  $R$  (sõnast „Radix“ — juur) ja tema ruutu tähega  $q$  („quadratus“).



Osa L. F. Magnitski „Aritmeetika“ tiitellehest.

Vaadolge Magnitski „Aritmeetika“ tiitellehe osast tehtud fotot. Arhimedese käes on tahvel järgmise kirjutisega:

$$\begin{array}{r}
 2R + 1 \\
 3R \div 2 \\
 \hline
 6q + 3R \\
 \div 4R \div 2 \\
 \hline
 6q \div 1R \div 2
 \end{array}$$

Siin on  $\div$  vanaaegne lahutamismärk. Magnitski kirjutis oleks meie tähistes järgmine:

$$\begin{array}{r}
 2x + 1 \\
 3x - 2 \\
 \hline
 6x^2 + 3x \\
 \quad - 4x - 2 \\
 \hline
 6x^2 - x - 2
 \end{array}$$

Pärast tähelise sümboolika sissetoomist algebrasse ja negatiivse arvu mõiste omandamist taandus lineaarvõrrandite lahendamine arvudega sooritatavate tehete seadustele. Mingit nende võrrandite lahendamismeetodi „leiutamist“ ei olnud tarvis ja sellist leiutist pole ka kellegi omistatud.

Olemasolevad lineaarvõrrandisüsteemide lahendamise meetodid leiduvad kõik juba Newtoni raamatus „Üldine aritmeetika“, mis anti välja 1707. aastal ja mis 1948. aastal ilmus ka venekeelses tõlkes.

Esimeseks originaalseks vene algebraraamatuks oli „Matemaatika algpõhjendus, koostatud inseneride kaptenleitnandi Nikolai Muravjovi poolt. I osa, Peterburi, 1752“. Kõige tähtsamaks originaalseks vene algebrakäsi-raamatuks XIX sajandil oli „Algebra ehk lõplike arvutus. Koostanud N. Lobatševski. Kaasan, 1834“. Selles raamatus ennetas meie suur matemaatik N. I. Lobatševski nii teaduslikus kui ka meetoodilises suhtes paljutki, milleni Lääne-Euroopa teadlased ja pedagoogid jõudsid alles hiljem.

## Geomeetria

Kõigi rahvaste praktilisest tegevusest tekkinud geomeetrilised teadmised ühendas süstemaatiliseks teaduseks kreeka matemaatik Eukleides, kes toetus seejuures oma eelkäijate Thalese, Püthagorase, Hippokratase, Eudoksose jt. töödele.

Eukleides kirjutas umbes 300 aastat enne meie ajaarvamise algust raamatu „Elemendid“, mis on üks matemaatilise kirjanduse tähelepanuväärivamaid teoseid ega ole tänapäevalgi oma väärtust kaotanud. Meie päevil ilmus trükist „Elementide“ uus, rikkalike ja õpetlike märkustega varustatud venekeelne tõlge.

See tohutu suur, 465 lauset (definiitsiooni, aksioomi, teoreemi) hõlmav töö on kirjutatud ranges loogilises jär-

jekorras ja oli paljude aastasadade vältel peaaegu ainsaks geomeetria õpikuks.

Kõik hilisemad autorid on ühel või teisel määral jäljendanud Eukleidest.

Küllaltki suur osa geomeetria õpikute sisust on tervikuna võetud Eukleideselt.

Vaatamata oma täiuslikkusele kutsus aga Eukleidese töö esile ka kriitikat. See kriitika oli suunatud peamiselt paralleelide õpetuse vastu Eukleidese „Elementides“.

Rohkem kui kahe aastatuhande vältel tehti sadu katseid parandada paralleelide õpetuse esitust, kuid XIX sajandi alguseni ei toonud need katsed geomeetriasse mingeid täiustusi. Alles geniaalsel vene matemaatikul Nikolai Ivanovitš Lobatševskil õnnestus see, mis ei õnnestunud rohkem kui kahe tuhande aasta vältel suurimatel matemaatikutel.

Selle teadusliku kangelasteo sooritamine nõudis täielikku revolutsiooni vaadetes geomeetria alustele ja filosoofilistes vaadetes ruumile.

## N. I. Lobatševski

Uks Eukleidese poolt ilma tõestuseta aktsepteeritud lausetest oli järgmine: „Kui kaks ühel tasandil asetsevat sirget moodustavad neid mingi kolmanda sirgega lõigates seesmised ühepoolsed nurgad, mille summa on väiksem sirgnurgast, siis need sirged lõikuvad sellel pool kolmandast sirgest, kus nimetatud nurkade summa on väiksem sirgnurgast.“

XIX sajandi algul anti sellele aksiomile formuleering, mis esineb geomeetria õpikuis: „Tasandil saab läbi antud punkti tõmmata ainult ühe sirge, mis on paralleelne antud sirgega.“

Rohkem kui kahe tuhande aasta kestel tegid paljud, nende hulgas ka kõige silmapaistvamad matemaatikud suure hulga katseid selle lause tõestamiseks Eukleidese ülejäänud aksiomide ja postulaatide põhjal.

Kõik need katsed jäid tagajärjetuks, kuid sellegipärast nad ei võtnud inimeste usku sellesse, et see Eukleidese lause osutub siiski teoreemiks, mida varem või hiljem on võimalik tõestada.

Nendele otsingutele tegi lõpu N. I. Lobatševski. Ta väi-



*N. I. Lobatševski*  
(1792—1856).

tis, et Eukleidese paralleelide lause on iseseisev aksiom ega ole teistest aksiomidest järeldatav.

Lobatševski eeldab, et antud sirget ja väljaspool sirget asuvat punkti sisaldaval tasandil saab tõmmata läbi antud punkti lõpmatu hulga antud sirgega mitte lõikuvaid sirgeid.

Sellest eeldusest lähtudes konstrueerib Lobatševski oma geomeetria koos trigonomeetriaga ega jõua mingile vastuolule ülejäänud geomeetria aksiomidega, mis peaks sündima, kui Eukleidese paralleelide aksiom oleks nende aksiomide järeldus.

See Lobatševski avastus oli geomeetrias ja filosoofias täielikuks pöördeks.

Lobatševskit on nimetatud geomeetria Kopernikuks või Kolumbuseks, sest geomeetria valdkonnas tekitas see avastus samasuguse revolutsiooni, nagu seda tegid astronoomias Koperniku ja geograafias Kolumbuse avastused.

Nagu juba öeldud, saab Lobatševski geomeetrias läbi väljaspool sirget võetud punkti tõmmata lõpmatu hulga antud sirge ja punktiga samal tasandil asuvaid, antud sirget mitte lõikavaid sirgeid.

Täpselt samuti saab läbi selle punkti tõmmata ka lõpmatu hulga antud sirget lõikavaid sirgeid. Kaht joont, mis eraldavad antud punktist tõmmatud ning antud sirget lõikavaid ja mitte lõikavaid sirgeid, nimetab Lobatševski antud sirge paralleelideks. Siit näeme, et Lobatševski geomeetrias on sõnal „paralleelne“ nagu paljudel teistelgi sõnadel teine mõte kui Eukleidese geomeetrias.

Lobatševski geomeetrias on kolmnurga sisnurkade summa alati väiksem sirnurgast ja sõltub kolmnurga külgede pikkusest. Selles geomeetrias pole sarnaseid kujundeid.

Hoolimata nendest hariliku eukleidilise geomeetria seisukohast näilikest „veidrustest“ aga jääb Lobatševski geomeetrias kehtima terve rida eukleidilise geomeetria teoreeme ning kõik ülejäänud laused moodustavad harmoonilise süsteemi.

Seega osutus võimalikuks enne Lobatševskit ainuvõimalikuks, ainumõeldavaks peetud geomeetriast erinev geomeetria.

Selles väljendub Lobatševski poolt geomeetrias ja filosoofias teostatud pööre.

Lobatševski geomeetrilised ideed on käesoleval ajal väga paljude uute füüsikaliste ja astronoomiliste teooriate aluseks. Meie raamatu maht ja eesmärk ei võimalda siinkohal nende ideede esitamist. Viimastel aastatel on sellel teemal välja antud palju raamatuid ja brošüüre. Piirdume teaduse suure revolutsionääri N. I. Lobatševski isiksuse lühikese iseloomustamisega.

Nikolai Ivanovitš Lobatševski sündis 1. detsembril 1792. aastal (uue kalendri järgi) Nižni Novgorodis (nüüdses Gorki linnas).

Tema isa Ivan Maksimovitš, maamõõdukontori ametnik, suri 1802. aastal. Kolme alaealise pojaga vaesusse jäänud emal Praskovja Aleksandrovnal õnnestus paigutada poegi riigi kulul Kaasani gümnaasiumi.

1805. aastal avati Kaasani ülikool ja 1807. aastal võeti N. I. Lobatševski vastu üliõpilaseks.

Ülikoolis äratas N. I. Lobatševski peagi professorite tähelepanu oma erakordse eduga matemaatikas.

1811. aastal lõpetas ta ülikooli ning ta jäeti ülikooli juurde professoritele abiks.

Aastail 1819 kuni 1826 elas noor Kaasani ülikool üle raskeid aegu. Ülikooli kuraator Magnitski pani ülikoolis kehtima sünge keskaja režiimi: ta jälitas iga vaba mõtet ning külvas silmakirjalikkust, variserlikkust ja salakuulamist.

Teadusega tegelemise asemel nõuti üliõpilastelt teeseldud vagadust ja juhtkonna austamist. Suur osa professoreid vallandati.

Alles pärast selle agara kuraatori kõrvaldamist, sõna otseses mõttes mõne päeva pärast esines Lobatševski esimese ettekandega uuest geomeetriast. See oli 1826. aastal. Kahjuks aga ei saadud tema ideedest aru ei ülikoolis ega ka teistes teaduslikes ringkondades.

Kogu N. I. Lobatševski pikk elu Kaasani ülikooli professorina ja rektorina oli pühendatud kodumaa teenimisele. Ta kutsus oma üliõpilasi üles armastama teadust, armastama kodumaad ja tema kuulsust. Ta mõistis karmilt hukka võõra töö arvel elavaid inimesi, kes elasid vaimsete huvideta elu ega armastanud oma kodumaad kuulsust.

Koolide eest hoolitsedes kirjutas Lobatševski algebra ja geomeetria õpikuid, külastas koolides tunde ja andis õpetajatele metoodilisi näpunäiteid.

Ta pidas laiade elanikkonna kihtide valgustamiseks avalikke loenguid ning ümbruskonna põllumajanduskultuuri tõstmiseks seadis omandatud mõisas majapidamise eeskujulikult korda.

Lobatševski kõne rektori ametisse astumise puhul ilmutab progressiivseid pedagoogilisi, filosoofilisi ja poliitilisi vaateid.

Ta kritiseeris kogu elu kestel järsult tollal moodsaid idealistlikke filosoofilisi voole, väites, et „matemaatika aluseks võib võtta mistahes loodusest ammutatud mõisteid“, et „neid mõisteid me ammutame oma aistingute vahendusel“ ja et „kõik mõisted, mis pole saadud meie aistingute abil... tuleb kõrvale heita“.

Üliõpilased austasid sügavalt oma professorit ja rektorit. Ka professorid austasid teda. Ta oli peaaegu kahekümne aasta vältel ülikooli valitavaks rektoriks.

Kõik Kaasani ülikoolis — hooned, kliinikud, observatooriumid, raamatukogu — tuletab siiani meelde seda unustamatut rektorit.

Kuid kõigi Lobatševski poolt oma teaduslike ideede propageerimiseks tehtud katsete viljatus raugastas geniaalse inimese enneaegselt. Pimedaks jäänuna dikteeris ta oma elu viimastel päevadel veel kord uue geomeetria alused ja suri teistele arusaadamatuna, tunnustamatuna 12. veebruaril 1856. aastal.

Varsti pärast tema surma saabus aga kuulsus.

Lobatševski ideed leidsid tõlgendajaid ja järgijaid.

Mitmed teadlased tegid kindlaks esimesel pilgul nii veidrana näivate Lobatševski geomeetria valemite konkreetse realiseerimise võimaluse.

Käesoleva sajandi algul said Lobatševski ideed peaaegu kõigi uute astronoomiliste ja füüsikaliste teooriate ning kogu teoreetilise loodusteaduse aluseks. Õigustus tema julge ütlus, et „pole ühtki matemaatika haru, olgu ta kui tahes abstraktne, mis kunagi ei osutuks reaalse maailma nähtustele rakendatavaks“. Täppisteaduste valdkonnas on Lobatševski nimi praegu kõige kuulsam.

Suur on Lobatševski kui inimese, kodaniku ja patrioodi kuju.

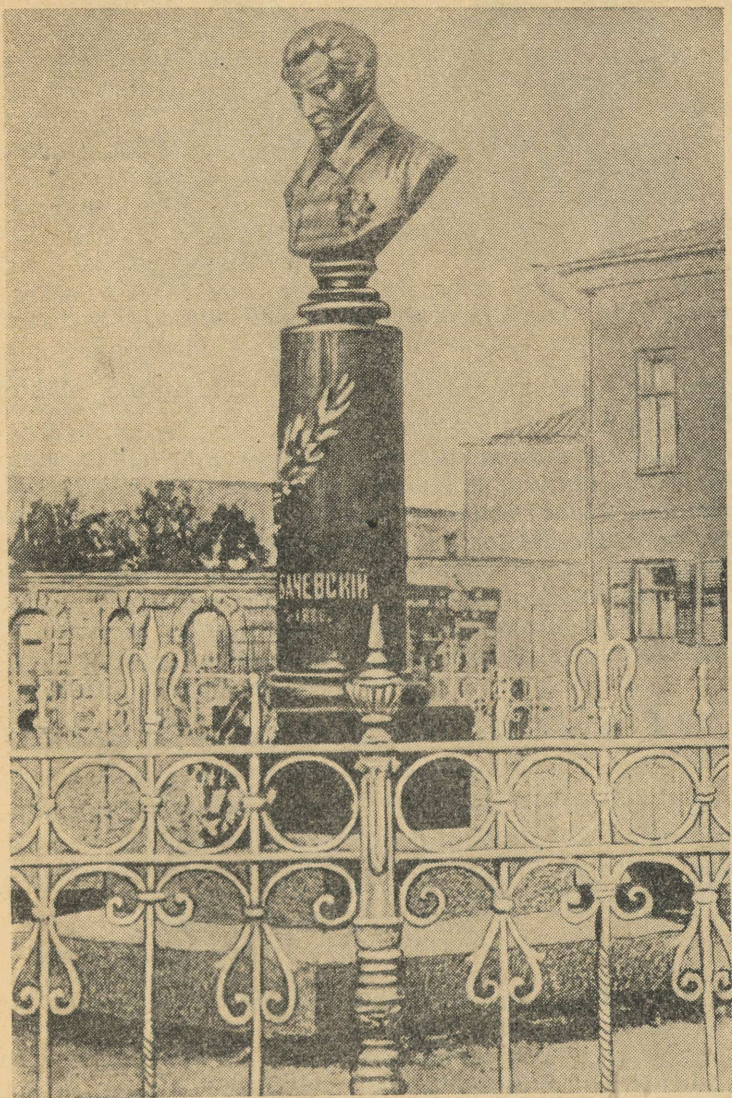
Uue ehk, nagu nüüd öeldakse, mitte-eukleidilise geomeetria võimalikkuse ideeni jõudsid mitu teadlast. Nad aga kas ei julgenud oma vaateid trükis avaldada, nagu Gauss, või neid trükis avaldades ei kannatanud välja pilkeid ning loobusid võitlusest oma ideede eest.

N. I. Lobatševskil oli mehisust esineda korduvalt, väljendades oma revolutsioonilisi teaduslikke vaateid. Ta kaitses neid viimse hingetõmbeni ega sattunud ahastusse, kui kaasaegsed temast aru ei saanud.

Juba 1893. aastal, Lobatševski sajandal sünnipäeval, püstitati talle Kaasanis mälestussammas. See oli kogu maailmas esimene mälestussammas matemaatikule.

Mälestussamba avamisel korraldati tuntud kirjaniku sõnu: „Ükski taim ei tungi maapinnast välja suurema vaevaga kui suure inimese kuju, kuid see-eest ka ükski taim ei voha lopsakamalt, ei anna rohkem vilju ega külva rohkem häid seemneid enda ümber.“ Need sõnad iseloomustavad suurepäraselt selle geniaalse inimese eluraskusi ja väga viljakat tegevust.

Vabatahtlike annetustega püstitatud mälestussamba avamine oli üldrahvalikuks ja ülemaailmseks tunnustuseks vene matemaatiku geniaalsusele. Kuidas tolleaegsed



*N. I. Lobatševski mälestussammas Kaasanis.*



Medal N. I. Lobatševski mälestuseks.

vene inimesed reageerisid sellele sünnimusele, nähtub järgmistest telegrammidest:

„Teaduste lahutamatu side tekitab iga nende suure edusammu puhul igas teadusemehes rõõmutunde, ükskõik missugusel alal see edusamm ka toimuks. Mõte kaasmaalase poolt loodud tervest uuest teadusest aga äratlab allakirjutanus tõelise vaimustuse ja südame põhjast tungib välja hüüe: saagu Lobatševski nimi kuulsaks kõikjal, kus on ruumi teadusele, ja pangu tema kuulsus särama nii meie kodumaa kui ka Kaasani ülikooli.

Mehaanika professor Petrov.“<sup>1</sup>

Teine, lühem, kuid niisama väljendusrikas telegramm kõlas:

„Geomeetrilised teadused moodustavad kogu täppisteaduse aluse, Lobatševski geomeetria algupärasus aga teaduse iseseisva arenemise koidiku Venemaal. Teaduslik külv tärkab rahvalikuks lõikuseks.

Kaasani ülikooli auliige  
Dmitri Mendelejev.“

Meil on õnn näha selle lõikuse koristamist nõukogude matemaatika õitsengu näol.

Nikolai Ivanovitš Lobatševski nimi on vene teadusliku ja filosoofilise mõtte suurimaks uhkuseks.

<sup>1</sup> Nikolai Pavlovitš Petrov (1836—1920) — insener-kindral, Raudteeinseneride Instituudi mehaanika professor, Teaduste Akadeemia auliige, suur autoriteet rakendusemehaanikas, teedeministri abi.

## S. V. Kovalevskaja

Kõik meie raamatu lugejad on kindlasti palju kordi kuulnud suurima naismatemaatiku, ülikooli professori Sofia Vassiljevna Kovalevskaja nime. Kuigi tema looming pärineb mitte ainult keskkooli, vaid ka kõrgemate õppeasutuste matemaatikakursusest väga kaugel seisvatest teadusharudest, on S. V. Kovalevskaja elu ja isiksus sedavõrd huvitavad ja õpetlikud, tema nimi aga vene teaduse selliseks uhkuseks, et meie raamatus tuleb talle tingimata pühendada mõned leheküljed.

Sofia Vassiljevna sündis 15. jaanuaril 1850. aastal Moskvas kindral V. V. Korvin-Krukovski perekonnas (sünnitunnistusel on S. V. Kovalevskaja nimeks märgitud „Krkjovskaja“). Kindral läks peatselt erru ja kolis oma mõisasse Vitebski kubermangu. Kindrali noorem tütar Sofia ja vanem tütar Anna kasvasid guvernantide järelevalve all. Et saada hästikasvatatud aadlipreilideks, õppisid nad võõrkeeli ja muusikat, kuid kindral, olles ise kuulsa matemaatiku M. V. Ostrogradski õpilane, otsustas oma nooremale tütrele anda ka tõsisemat haridust, milleks kutsuti kohale suurepärase õpetaja Jossif Ignatjevitsš Malevitš. Õpilane osutus taibukaks ja püüdlikuks, kuid ei tundnud aritmeetika vastu algul erilist huvi. Alles viiendal õppeaastal avaldas kolmeteistkümneaastane õpilane ringjoone pikkuse ja diameetri suhte (arvu  $\pi$ ) leidmisel oma matemaatilisi võimeid: ta tuletas nõutud suhte iseseisvalt. Kui Malevitš näitas, et tema tuletuses on kasutatud mõnevõrra kaudset teed, puhkes Sofia nutma.

Sofia Vassiljevna ise jutustab oma mälestustes, et suuresl määral äratas temas matemaatika vastu huvi onu oma jutustustega ringi kvadratuurist (lahendamatu ülesanne, antud ringiga pindvõrdse ruudu konstrueerimine sirkli ja joonlaua abil) ja teistest huvitavatest matemaatilistest küsimustest. Need jutustused avaldasid mõju tütarlapse fantaasiale ja tekitasid temas ettekujutuse matemaatikast kui teadusest, milles on palju huvitavaid mõistatusi.

Sofia Vassiljevna jutustab veel teisest juhtumist, mis tugevdas tema huvi matemaatika vastu. Lastetoa seinad olid tapeedi puudusel kaetud isa poolt nooruses kuulatud kõrgema matemaatika loengute lehtedega. Saladuslikud valemid, mõistatuslikud sõnad ja kujundid lõikusid sagedasest nägemisest tütarlapse mällu. Kui ta viie-

teistkümneaastasena hakkas väga tuntud pedagoogi A. N. Strannoljubski juures võtma kõrgema matemaatika tunde ning kuulis nendesamade küsimuste käsitlust, mida ta mõtet taipamata oli lugenud „tapeedilt“, siis näisid õpetaja poolt esitatavad uued mõisted talle vanade tuttavatena ja ta omandas nad õpetaja hämmastuseks väga kergesti.

Juba enne seda aga üllatas neljateistkümneaastane Sofia oma võimetega isa sõpra, füüsika professorit N. P. Törtovit. Professor tõi Sofiale oma füüsika õpiku. Peagi selgus, et Sofia, kes polnud veel koolimatemaatika kursust läbi võtnud, sai iseseisvalt aru õpikus kasutatavate matemaatiliste (trigonomeetriliste) valemite mõttest. Pärast seda lubas tütre edusammude üle uhke olev kindral võtta tal talviste Peterburis viibimiste ajal matemaatika ja füüsika tunde, mida viieteistkümneaastane Sofia ka viivitamatult kasutas.

Kuid seda oli talle vähe. Sofia Vassiljevna püüdis saada täielikku kõrgemat haridust.

Venemaa kõrgemate õppeasutuste ukсед olid tollal naistele suletud. Jäi üle ainult tee, mida kasutasid paljud tolle aja neid — otsida kõrgema hariduse saamiseks võimalusi välismaal.

Välismaale sõiduks oli vajalik isa luba, kuid isa ei tahtnud tütre sellisest sõidust kuuldagi. Siis abiellus juba kaheksateistkümneaastaseks saanud Sofia Vassiljevna fiktiivselt Vladimir Onufrievitš Kovalevskiga (hiljem kuulus looduseuurija) ja sõitis tema „naisena“ koos õega Saksamaale, kus tal õnnestus mitte just raskusteta astuda Heidelbergi ülikooli. Ülikooli professorid, kelle hulgas oli kuulsaid teadlasi, olid oma õpilase võimetest vaimustatud. Ta sai väikese linnakese vaatamisväärsuseks. Tänaval kohates näitasid emad teda oma lastele kui ülikoolis matemaatikat õppivat imelist vene neitut.

Sofia Vassiljevna võttis väga intensiivselt töötades kolme aastaga läbi ülikooli matemaatika, füüsika, keemia ja füsioloogia kursused. Ta tahtis end matemaatika alal täiendada Euroopa tollaegse suurima matemaatiku Karl Weierstrassi juures Berliinis. Et Berliini ülikooli naise vastu ei võetud, siis õpetas Sofia Vassiljevna erakordsetest võimetest vaimustatud Weierstrass teda neli aastat kodus, korrates talle oma ülikoolis peetud loenguid. 1874. aastal omistas Saksamaa matemaatikateaduse keskus Göt-



S. V. Kovalevskaja  
(1850—1891).

tingeni ülikool Weierstrassi ettepanekul Sofia Vassiljevna kolme esitatud töö eest doktori kraadi ilma väitekirja kaitsmiseta. Oma esitises ütles Weierstrass, et ta ei tea oma kõigist maadest kokku sõitnud arvukate õpilaste hulgas ühtki, keda ta „võiks kõrgemalt hinnata kui proua Kovalevskajat“.

„Kõrgeima kiitusega filosoofia doktori“ diplomiga pöördus kahekümne nelja aastane Sofia Vassiljevna koos mehega tagasi Venemaale.

Tema õde Anna, kellel oli F. M. Dostojevski poolt tunnustatud kirjanduslikke andeid, sõitis juba Heidelbergist Pariisi ning abiellus seal revolutsionääri Victor Jacquelaire'iga. Anna Vassiljevna ja tema mees võtsid aktiivselt osa Pariisi Kommuuni (1871) tegevusest. Kommuuni purustamise ajal tabati Victor Jacquelaire ning teda ähvardas mahalaskmine. Sofia Vassiljevna, tunginud koos mehega ümberpiiratud Pariisi, töötas haiglas haavatud kommunaaride heaks. Õemehe päästmiseks kutsus Sofia

Vassiljevna Pariisi isa, kellel tänu endistele tutvustele uue kodanliku valitsuse mõjukate tegelastega õnnestus korraldada väimehe „põgenemist“.

Sofia Vassiljevna asus koos mehega elama Peterburisse. Ta ei leidnud mingit võimalust oma teadmiste rakendamiseks ja eemaldus mitmeks aastaks matemaatikast, võttes agaralt osa kodumaa poliitilisest ja kultuurilisest elust. Tänu P. L. Tšebõševile pöördus ta 1880. aastal tagasi matemaatika juurde. Tema palve saada luba eksamite andmiseks Venemaal teadusliku kraadi omandamiseks lükati ministeeriumi poolt tagasi. Tulemusteta jäi ka Helsingi ülikooli professori Mittag-Leffleri katse hankida Sofia Vassiljevna selle ülikooli õppejõu kohta.

1881. aastal avati Stokholmis uus ülikool, mille matemaatika kateedri juhatajaks sai professor Mittag-Leffler. Usna suurte pingutustega õnnestus tal keelitada Stokholmi liberaalseid ringkondi kutsuma Sofia Vassiljevnat uue ülikooli dotsendiks. Pärast mehe traagilist surma 1883. aasta aprillis kolis Sofia Vassiljevna sama aasta novembris Stokholmi. Demokraatlik ajaleht võttis tema saabumise vastu sõnadega: „Täna me ei teata mingisuguse labase printsi saabumisest... Teaduseprintsess proua Kovalevskaja austas meie linna oma külastusega ja on kogu Rootsis esimeseks naisdotsendiks.“

Teadlaste ja elanikkonna konservatiivsed ringkonnad võtsid Sofia Vassiljevnat vaenulikult vastu, kirjanik Strindberg aga tõendas, et nais-matemaatikaprofessor on koletislik, kahjulik ja sündsusetu nähtus. Sofia Vassiljevna teadlase- ja pedagoogianne aga sundis kõik vastased vaikima. Aasta pärast ta valiti korraliseks professoriks ning talle tehti ülesandeks peale matemaatika õpetamise ka ajutine mehaanika loengute pidamine.

Pariisi Teaduste Akadeemia kuulutas 1888. aastaks välja ühe oma kõige suuremaid auhindu teema eest „Ülesanne tahke keha pöörlemisest ümber püsipunkti“. See ülesanne oli lahendatud lõpuni ainult kahel erikujul, kusjuures lahendused kuulusid oma aja suurimatele matemaatikutele: Peterburi akadeemikule L. Eulerile (1707—1783) ja prantsuse matemaatikule J. Lagrange'ile (1736—1813). Nõuti „ülesande täiustamist mingis olulises punktis“. 15 töö hulgas saabus konkursile ka töö deviisiga „Räägi, mida tead, tee, mis on su kohus, ning saagu, mis saab“. See töö ületas ülejäänuid sedavõrd, et prantsuse



*J. F. Litvinova*  
(1845—1918).

suurimatest matemaatikutest koosnev akadeemiline komisjon määras autorile 3000 frangilt 5000 frangile suurendatud auhinna. Selle töö autoriks osutus Sofia Vassiljevna Kovalevskaja. Nagu märgib tolelaegne prantsuse ajakiri, oli ta auhinda vastu võtma tulles ühtlasi ka esimeseks Akadeemia läve ületavaks naiseks.

On arusaadav Sofia Vassiljevna rõõm, mida ta sel puhul väljendas, kirjutades:

„Ulesanne, mis libises välja suurimate matemaatikute käest, ülesanne, mida nimetati matemaatiliseks näkineit-siks, osutus püütuks... kelle poolt? Sonja Kovalevskaja poolt!”

Sofia Vassiljevna sõprade katse „tagastada S. V. Kovalevskaja Venemaale ja vene teadusele” lõppes keiserliku Teaduste Akadeemia silmakirjaliku vastusega, et „Venemaal pole proua Kovalevskajal võimalik saada nii väarikat ja hästitasuvat kohta kui see, mis tal on Stokholmis”. Alles 1889. aasta lõpus õnnestus akadeemikutel-matemaatikutel saavutada Sofia Vassiljevna Peterburi Akadeemia



V. I. Siff  
(suri 1918. a.).

kirjavahetajaks liikmeks valimist, kusjuures Akadeemial tuli eelnevalt lahendada põhimõtteline küsimus „naissoost isikute kirjavahetajaks liikmeks valimise lubatavuse kohta“. Et see aunimetus ei andnud mingeid materiaalseid vahendeid, siis jäi Kovalevskaja kodumaale tulek endiselt võimatuks.

Pöördudes 1891. aasta alguses tagasi Itaalias veedetud õppetöö vaheajalt, Sofia Vassiljevna külmetas; 10. veebruaril ta suri Stokholmis ning on ka sinna maetud.

S. V. Kovalevskaja avaldas trükis üheksa teaduslikku tööd, saades neist ühe eest ka Rootsi Teaduste Akadeemia auhinna. Tema tööd kuuluvad puhta matemaatika, mehaanika, füüsika ja astronoomia (Saturni rõngas) valdkonda. Mehaanikaalases töös lõpetas ta selle, mida alustasid kuulsad Euler ja Lagrange, matemaatikas viis ta lõpule Cauchy ideed, Saturni rõnga küsimuses aga täiendas ja parandas ta Laplace'i teooriat. Euler, Lagrange, Laplace ja Cauchy olid XVIII sajandi lõpu ja XIX sajandi alguse suu-



J. A. Narõškina  
(1895—1940).

rimad matemaatikud. Selliste teadusekorüfeede tööde täiendamiseks ja parandamiseks oli vaja väga suurt teadlast. Niisugune teadlane oligi S. V. Kovalevskaja. Tema poolt saadud uusi teaduslikke tulemusi käsitletakse mahukates ülikooli loengukursustes.

Sofia Vassiljevna oli samal ajal ka silmapaistev kirjanik-belletrist. Tema autobiograafilised „Lapsepõlve mälestused“, romaan „Nihilist“ ja lõpetamata või kaotsi läinud jutustuste katkendid annavad huvitava pildi XIX sajandi teise poole Venemaa ühiskondlikust ja poliitilisest elust. Kriitika märkis, et tema jutustuste lehekülgedes „on tunda turgenevlikku hõngu“.

Koos Rootsi naiskirjaniku Mittag-Leffleriga kirjutas ta huvitava draama „Võitlus õnne eest“ — ainsa matemaatilise plaani järgi kirjutatud teose maailmakirjanduses.

Teaduslike ja kirjanduslike teenete kõrval kuulub S. V. Kovalevskajale erandlik koht naiste võrdõiguslikkuse eest peetud võitluse ajaloos. Ta räägib tihti oma kirjades, et tema edu või ebaedu pole ainult tema isiklikuks asjaks, vaid on seotud kõigi naiste huvidega. See-



N. N. Gernet  
(1876—1943).

pärast oli ta enda vastu erakordselt nõudlik. Ta kirjutab ühes oma luuletuses:

„Kellele andekust hulgana antakse,  
Sellelt ka võimete kohaselt nõutakse.“

Sofia Vassiljevna tunnetas, et talle on antud palju andeid, et ta peab neid rakendama kõigi naiste ühisesse üritusse ja et temalt ka nõutakse palju.

Kui Sofia Vassiljevna taotles möödunud sajandi kaheksakümnendatel aastatel oma teaduslike õiguste tunnustamist Venemaal, siis vastas talle tsaari minister, et proua Kovalevskaja ja tema tütar ei näe seda aega, millal naine pääseb Venemaal professori kohale.

Tsaari ministrid polnud mitte ainult kehvad poliitikud, vaid ka kehvad ennustajad. Sofia Vassiljevna tütar, arst Sofia Vladimirovna Kovalevskaja, kes suri 1952. aastal Moskvas, elas 35 aastat nõukogude korra ajal, mil naistele on avatud kõik tegevusalad.

Enne Sofia Vassiljevnat tunneb matemaatiliste teaduste ajalugu ainult üksikuid naismatemaatikuid. Need oleksid



*P. J. Polubarinova-Kotšina.*

järgmised: kreeklanna Hüpatia Aleksandriast, kelle kiskus 415. aastal meie ajaarvamise järgi tükkideks jõuk kristlasi, keda selleks ässitasid ilusa ja targa pagana Hüpatia poolt linnaülemale avaldatavat mõju kartvad mungad; Newtoni tööde prantsuse keelde tõlkija markiis de Chatelet (1706—1749), kes õppis Voltaire'i juures ajalugu ja õpetas Voltaire'ile matemaatikat; tema biograafia märgib, et õppimisest polnud kasu kummalgi; Bologna ülikooli matemaatika professor itaallanna Maria Agnesi (1718—1799), kelle nime kannab kõrgemas matemaatikas „Agnesi lõkkide“ kõverjoon; prantslanna Sophie Germain (1776—1831), kelle nime kohtame arvuteoorias ja kõrgemas analüüsis; prantslanna Hortensia Lepaute (1723—1788), tuntud arvutaja, kelle nime kannab tema poolt Indiast kaasa toodud lill hortensia.

Nõukogude Liidus on palju nais-matemaatikaprofessoreid, kelle hulgast võib nimetada selliseid väljapaistvaid matemaatikuid, nagu Veera Jossifovna Šiff (suri 1918. a.), Nadežda Nikolajevna Gernet (1876—1943), Jekaterina Aleksejevna Naroškina (1895—1940), S. V. Kovalevskaja sõbranna Jelizaveta Fjodorovna Litvinova (1845—1918) ja palju praegu elavaid. Samal ajal peab nõustuma NSV

Liidu Teaduste Akadeemia korrespondeeriva liikme, füüsikalis-matemaatiliste teaduste doktori Pelageja Jakovlevna Polubarinova-Kotšinaga, et „Kovalevskaja ületas oma naiseelkäijaid andekuse ja saadud tulemuste poolest. Ühtlasi ületas ta tollal teaduse poole püüdvate naiste üldise taseme.“

S. V. Kovalevskaja jääb igavesti vene teaduse uhkuseks.

### Silmapaistvad vene matemaatikud-pedagoogid

Meie poolt oleks tänamatus, kui me matemaatika loojate kuulsate nimede kõrval ei mainiks nende tagasihoidlike töömeeste nimesid, kes „annavad teaduse saavutused koolipoiste kätte“.

Need on õpikute autorid, kellest nimetame A. P. Kisseljovi ja N. A. Šapošnikovi. Õpilane peab neid tundma.

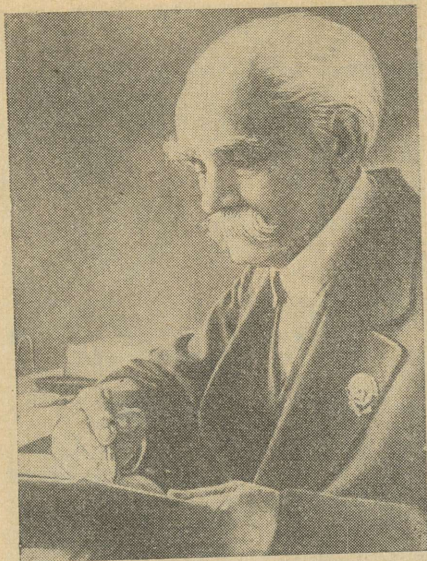
Andrei Petrovitš Kisseljov sündis 30. novembril 1852. aastal Orjoli kubermangus vaeses perekonnas. Juba Orjoli gümnaasiumis õppides elatas ta end tunniandmisest. Pärast gümnaasiumi lõpetamist 1871. aastal sõitis ta kuldmedali eest saadud rahaga Peterburisse õppima. Ülikoolis kuulus ta akadeemikute P. L. Tšebõševi, J. I. Zolotarjovi, O. I. Somovi ja D. I. Mendelejevi ning teiste suurte teadlaste loenguid. 1875. aastal lõpetas Andrei Petrovitš ülikooli ja hakkas Voroneži reaalkooli õpetajaks.

Pärast viieteistkümneaastast tööd tunnistasid tsaariametnikud ta poliitiliselt kahtlaseks tegevuse eest puudustkannatavate õpilaste abistamise seltsis. A. P. Kisseljov asus tööle Voroneži kadetikorpuses, kus töötas kuni erruminekuni 1910. aastal. 1884. aastast peale ilmusid üksteise järel trükist Kisseljovi aritmeetika, algebra, geomeetria, füüsika ja kõrgema matemaatika aluste õpikud.

Kisseljovi õpikud surusid peagi vanemad õpikud välja ja pidasid vastu paljusid trükke.

Pärast revolutsiooni asus Andrei Petrovitš uuesti tööle õpetajana.

26. detsembril 1933. aastal andis Kesktäitevkomitee Presiidium välja määruse: „Autasustada Andrei Petrovitš Kisseljovi, vanimat matemaatika õpetajat ja aastakümnete kestel vene koolis põhilisteks käsiraamatuteks olnud õpikute autorit tema kauaaegse viljaka pedagoogilise tegevuse eest Tööpunalipu ordeniga.“



A. P. Kisseljov  
(1852—1940).

Andrei Petrovitš jätkas tööd oma õpikute kallal kuni oma surmani 8. novembril 1940. aastal.

Teine kooliõpilastele hästi tuntud silmapaistev pedagoog-matemaatik on Nikolai Aleksandrovitš Šapošnikov. Ta sündis 1851. aastal Moskvas, kus lõpetas kuldmedaliga gümnaasiumi ning 1874. aastal ka ülikooli, saades teadusliku töö eest kuldmedali. Nikolai Aleksandrovitš töötas neliteist aastat gümnaasiumis, mille ta ise oli lõpetanud, ning samaaegselt ka Naiste Kõrgematel Kursustel.

1880. aastal kaitses N. A. Šapošnikov puhta matemaatika alal magistriväitekirja ja ta kutsuti algul Moskva Tehnikakooli dotsendiks, hiljem professoriks. Seal töötas ta kuni 1893. aastani. Pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni oli Nikolai Aleksandrovitš Põhja-Kaukaasia Polütehnilise Instituudi professoriks ja rektoriks, töötades seal oma elu viimaste päevadeni. Nikolai Aleksandrovitš suri 24. veebruaril 1920. aastal.

1876. aastal kirjutas N. A. Šapošnikov algebra õpiku, mis tollaegsetest õpikutest erineva käsitusviisi tõttu sai



*N. A. Šapošnikov*  
(1851—1920).

mahategeva kriitika osaliseks Rahvahariduse Ministeeriumi teadusliku komitee poolt, mille koosseisust oli mõni aasta enne seda lahkunud P. L. Tšebõšev.

Sama saatus tabas ka tema trigonomeetria õpikuid (kaks erineva käsitusviisiga raamatut).

Nikolai Aleksandrovitši võitlejaloomus ajendas teda kirjutama tervet rida väga teravaid brošüüre ministeeriumi ametimeeste vastu.

Vaatamata sellele, et N. A. Šapošnikovi raamatuid ei lubatud koolis kasutada, ilmusid nad mitmes trükis, sest kõigis neis raamatuis oli erinevalt teistest värsket hõngu.

Koostöös õpetaja N. K. Valtseviga koostas N. A. Šapošnikov algebra ülesannete kogu, mis ületas varasemaid sedavõrd, et isegi autorile vaenulik ministeerium lubas

tema kasutamist koolides. See ülesannete kogu teenib vene kooli juba üle viiekümne aasta. Samasugused õpikud koostas N. A. Šapošnikov ka aritmeetikas.

Nõukogude matemaatika suurejooneliste ehituste püstitamises on teeneid ka tagasihoidlikel töömeestel, kelleks olid A. P. Kisseljov ja N. A. Šapošnikov.

## JARELSÕNA

Meie silmade eest möödus kümneid teadlasi, kelle nimesid me kohtame keskkooli matemaatikakursuses.

Võrreldes nende panuseid maailma kultuuri varaaia, ei saa jätta märkimata vene geeniuse erilist iseloomu.

Paralleelide probleemi kallal nägid vaeva kõigi rahvaste targemad pead. Tema lahendamine õnnestus Nikolai Ivanovitš Lobatševskil.

Algarvude probleem... „Esimene, kes pärast Eukleidest läks õiget rada ja saavutas edu, oli Pafnuti Lvovitš, Tšebõšev,“ väidab selle küsimuse parim rajatagune spetsialist.

„Goldbachi ülesande lahendamiseks ei piisa olemasolevast matemaatikast,“ tunnistab XX sajandi suurim inglise matemaatik.

Vastuseks sellele loob Ivan Matvejevitš Vinogradov need uued matemaatilised meetodid, mis on vajalikud selle küsimuse lahendamiseks.

Selliseid näiteid võiks tuua veel palju.

Matemaatika on Venemaal seisnud kõigil aegadel väga kõrgel tasemel.

Missuguse õitsengu on matemaatika saavutanud nõukogude ajal, on näha kas või juba sellest, et nõukogude võimu kolmekümne aasta jooksul matemaatika alal ilmunud teaduslike tööde ülevaade moodustab suureformaadilise tuhandeleheküljelise raamatu (Математика в СССР за тридцать лет, Москва, 1948).

Need tööd on tõhusaks panuseks ülemaailmsesse teadusse, meie teadlased aga omavad juhtivat kohta enamikus matemaatika harudes. Enamikul nendest töödest on suur praktiline väärtus.

Jääb vaid soovida, et noor lugeja süttiks soovist saada aktiivseks võitlejaks eesrindliku nõukogude matemaatika edasise õitsengu eest.

## MATEMAATIKA EESTI NSV TERRITOORIUMIL

V sajandil hääbus kreeka matemaatika ja jäi Euroopas täielikku unustusse. Alles XIII sajandil, tänu kaubanduslikele suhetele araablastega, hakkasid Lääne-Euroopas levima hindu numbrid ja hindu arvutusreeglid, mis tulevad meelde juba tänapäeva aritmeetikat. Itaalia, seejärel aga ka teiste maade kaubalinnad hakkasid avama oma aritmeetika koole (Venemaal Peeter Esimese ajal „numbrite koolid“), kusjuures igas niisuguses linnas oli oma „arvutusmeister“ (Rechenmeister). Sellised arvutusmeistrid olid ka balti linnades, mis kauplesid nii Lääne kui ka Idaga.

Tallinna linna raamatupidaja Johann Daniel Intelmann kirjastas 1736. aastal Halles 416-leheküljelise raamatu „Aritmeetiline teejuht ehk esimene Tallinna rehkendusraamat“<sup>2</sup>. Järgmisel aastal kirjastas juba Tallinnas analoogilise „Aritmeetika käsiraamatu“<sup>3</sup> toomkooli õpetaja Michael Weber. Raamatu maht on umbes 350 lehekülge.

Esitame siin Intelmanni raamatu täieliku tiitli:

JOH. DANIEL INTELMANNI,  
linna raamatupidaja  
ning rehkenduskunsti armastajate ja harrastajate  
seltsi liikme

### ARITMEETILINE TEEJUHT

ehk  
Eesti- ja Liivimaa kaubanduse vajaduste järgi  
põhjalikult koostatud

ESIMENE TALLINNA REHKENDUSRAAMAT,  
mille sees on leida kõik rehkendused täis- ja murdarvudes, samuti sise- ja välismaistel rahalistel ümberarvestamistel ette tulevad rehkendused ning laevarehkendused Eesti- ja Liivimaa ning teiste nimekate kaubalinnade valuutades;

<sup>1</sup> Lisa on spetsiaalselt kirjutatud raamatu eestikeelse väljaande jaoks. *Toim.*

<sup>2</sup> Joh. Daniel Intelmanns... Arithmetischer Wegweiser, Oder... Erstes Revalsches Rechenbuch...

<sup>3</sup> Anweisung zur Arithmetic... von Michael Weber... Reval, Gedruckt bey Jacob Johann Köhler 1737.

kaheteistkümnes osas koos kasuliku lisaga kõige suurema hoolega ette valmistatud, autori kuludega kirjastatud ja härra Johann Joachim Langeni, Halle ülikooli ordinaarse professori ning paljude teaduslike seltside liikme eessõnaga varustatult trükitud Halles Joh. Justinus Gebaueri juures ülikooli trükikojas 1736.

Raamatu algusse on paigutatud autorile tema sõprade ja ametikaaslaste poolt raamatu ilmumise puhul pühendatud luuletused, milledest ilmneb, et matemaatika õpetajaid ja arvutusmeistreid oli tol ajal Arensburgis (Kingissepas), Tallinnas, Narvas ja Tartus.

Kirjanduses leidub andmeid Joachim Scheleni (ka Schelenius, Schedelius) poolt 1665. aastal Tallinnas välja antud raamatust „Cursus mathematici“, mis oli määratud tolleaegse „Academia Gustaviana“ väga väikese arvulise õpilaskonna jaoks. Laiema elanikkonna ja eriti eestlaste suhtes raamat mingit tähtsust ei omanud.

Intelmanni ja Weberi omavahel väga sarnased raamatud pakuvad eelkõige huvi näidetena tolleaegsetest aritmeetika õpikutest. Need raamatud olid põhiliselt õppe-raamatuteks olemasolevatele ja tulevastele kaupmeestele. Raamatute alguses antakse välismaa ja Baltimaade linnade rahade ja mõõtude süsteemid (omavahel erinevad mõõdud olid Tallinnas, Riias, Pärnus, Narvas, Tartus), seejärel aga näidatakse üksikasjaliselt rahade ja mõõtude ümberarvestamist ühest süsteemist teise. Raamatute igas osas leidub huvitavaid ülesandeid ja arvutuslikku meelelahutust, sealhulgas ka kõik need, milledest me jutustasime oma raamatu eelmistel lehekülgedel (Magnitski „Aritmeetika“ naljaülesanded ja huvitavad ülesanded, M. J. Lermontovi matemaatiline meelelahutus, vanad vene huvitavad ülesanded). Samuti nagu Magnitskilgi kaasnevad iga osaga, sageli aga ka üksikute reeglitega värsivormis nõuanded ja näpunäited. Lõbusate harjutuste (Lust-Exempel) seas kohtame järgmisi:

1) Kirjutada nelja ühesuguse numbriga arvud 100; 89; 78; 67; 56; 45; 34; 23; 12. (Vastus:  $99\frac{9}{9}$ ;  $88\frac{8}{8}$  jne.)

2) Kaks isa ja kaks poega jaotasid omavahel 3 rubla nii, et igaüks sai oma osa täisrublades. Kuidas oli see võimalik? (Vastus: 2 isa ja 2 poega olid isa, poeg ja poja-poeg.)

3) Arvu mõistatamine: tehakse ettepanek mõelda arv, see korrutada kahega, liita tulemusele neli, korrutada viiega, liita kaksteist, korrutada kümnega, lahutada 320 ja ütelda tulemus.

(Vastus: Mõeldud arvu mõistatamiseks tuleb tulemuse lõpust kustutada nullid; järele jääb mõeldud arv.)

4) Mõistatada arv selle kohta midagi küsimata. Las partner mõtleb arvu ning mõtle ka sina üks arv.

Olgu partneri arv 24, sinu oma 30.

Teosta oma arvuga järgmised korrutamise ja jagamise tehted ning lase ka partneril teha oma arvuga needsamad tehted.

	Sinu arv 30,	partneri arv 24
Korrutada neljaga	120	96
Jagada kaheksaga	15	12
Korrutada kaheteistkümnegaga	180	144
Jagada kahega	90	72
Jagada mõeldud arvuga	3	3

Teata, et partner sai arvu 3. Korrutajad ja jagajad võivad olla ka teistsugused.

Kuidas seletada tulemuste võrdsust?

Pimeda ehk neitsi reegel. Peale väga paljude teiste reeglite kasutatakse kommertspraktika mitmesuguste ülesannete lahendamiseks ka reeglit, mida nimetatakse pimeda ehk neitsi reegliks. Üks autoritest seletab seda nimetust sellega, et ülesannete lahendamisel selle reegli järgi saadakse harva üks määratud vastus.

Toome näiteks ühe niisuguse ülesande:

80 inimest — mehed, naised ja alaealised — kogusid 200 rubla. Mehed andsid igaüks 6 rubla, naised 3 rubla ja alaealised 1 rubla.

Kui palju mehi, kui palju naisi ja kui palju alaealisi võttis korjandusest osa?

Autor annab ülesande lahendamiseks järgmise reegli.

Kirjuta vasakule inimeste arv, keskele osavõtjate panuse suurus vähenevas järjekorras, paremale summa:

	meeste panus 6	
80 inimest	naiste panus 3	200 rubla
	alaealiste panus 1	

Lahuta väikseim panus esimesest ja teisest ning kirjuta jäägid panuste kõrvale:

	6	5	
80 inimest	3	2	200 rubla
	1		

Korruta väikseim panus inimeste arvuga ja lahuta saadud summa üldsummast:

$$1 \text{ rbl.} \times 80 = 80 \text{ rbl.}; \quad 200 \text{ rbl.} - 80 \text{ rbl.} = 120 \text{ rbl.}$$

Jaota saadud jääk kaheks niisuguseks liidetavaks, et esimene jaguks viiega, teine kahega (arvudega, mis asetsevad teistkordses üleskirjutuses paremal pool joont). Jaga leitud liidetavad vastavalt viiega ja kahega:

$$\begin{array}{l} 5)100(20\text{meest}^1 \\ 2)20(10 \text{ naist} \end{array}$$

(autor jaotas 120 nii:  $100 + 20$ ).

Sel juhul oli alaealisi  $80 - 20 - 10 = 50$ .

Kontroll kinnitab vastuse õigsust.

Lahendus soovitatakse lühidalt üles kirjutada järgmiselt:

80 inimest	mehed	6		5	200 rbl.
	naised	3		2	80 rbl.
	alaealised	1			120 rbl. jaga
					5)100(20 meest
					2)20(10 naist
					50 alaealist.

Autor ei anna oma lahendamismeetodile mingisugust põhjendust, kuid seda pole raske teha: kui mehi oli  $x$  ja naisi  $y$ , siis alaealisi oli  $80 - x - y$ . Saame võrrandi

$$\begin{aligned} 6x + 3y + 1(80 - x - y) &= 200; \\ 5x + 2y + 80 &= 200; \\ 5x + 2y &= 120; \quad 5x = 120 - 2y. \end{aligned}$$

Andes tundmatule  $y$  täisarvulisi väärtusi, saame ülesande lahenduse nendel juhtudel, mil  $x$  omandab samuti täisarvulised väärtused.

Et aga kahe tundmatuga võrrandil võib olla rohkem kui üks täisarvuline lahend, mis rahuldab ülesande tingimusi, siis „pimeda ehk neitsi reegel“, nagu ütlevad ka raamatu autorid, võib anda palju lahendeid.

<sup>1</sup> Tol ajal kirjutati jagamist nii.

1874. aastast peale ilmusid Laakmanni kirjastusel R. G. Kallase raamatud, nagu „Mõistlik rehkendaja. Kõigile rehkendamise sõbratele, iseäranis koolmeistritele ning koolidele tuluks ning toeks kirja pannud R. G. Kallas, rehkendamise koolmeister I. linnakoolis Tartus. Tartus, 1874“ (338 lk.), „Mõistliku rehkendaja tarwilisemad õpetused. Kudas? Miks ja Millal? Koolilastele lühidalt kirja pannud R. G. Kallas. Tartus, 1878“ (86 lk.), „1½ toopi pähkliid. Wirgemaile rehkendajatele meelejahutuseks ära närida kogunud R. G. Kallas. Tartus, 1878“ (24 lk.) ja mõned teised.

Aastail 1879 ja 1880 ilmusid J. Kurriku raamatud „Aruwald. I. Algebra — oma algusõpetustega. Kirja pannud J. Kurrik. Tartus. Schnakenburgi trükk ja kulu. 1879“ (85 lk.) ja „Aruwald. II. Neljaliikme ja ruumi arwamine ning wõrdlused ruut- ja järgarwudega. Kirja pannud J. Kurrik. Tartus, Trükitud Wilhelm Just'i trükikojas. 1880“ (106 lk.). Kummalegi vihule ilmus „Aruwalla wõti“ (46 + 38 lk.). Ulesannete kohta ütleb autor: „Nende kallal wõid lõpeks proowida, kui kangeks so arwamise-hambad on kaswanud ehk kui kõrge pulga peal su tõsine rehken-duse osavus seisab.“ „Aruwald“ hõlmab algebra kuni ruutvõrranditeni ja progressioonideni (Kurrikul „järg-arvud“).

Geomeetria alal ilmusid:

1878 — „Geometria kihelkonnakoolidele ja iseõpetu-seks. J. Kapp“. Raamatu maht on 104 lehekülge. Autor ütleb: „Eesti keeles geometria õpetusraamat siitsaadik puudus...“.

1879 — „Kerged ja lühikesed Geometria õpetused. Rahwa koolide kasuks kirja pannud J. Tülk“. Maht 116 lk. Autor räägib geomeetria mõistust harivast väärtusest ja ütleb oma raamatu koostamisel Legendre'i, Vincenti, Amiot' ja teiste eeskuju tarvitatud olevat. Ta kinnitab Descartes'i sõnadega: „Meie ei pea mitte oma mälestust koormama, kui meie mõistusega tööd tahame teha.“

Käesoleva sajandi algul hakkasid matemaatika õpikud ilmuma nii rohkel arvul, et nende kirjeldamine tarbetuks muutub.

Tuleb märkida üht daatumit matemaatika levimise loos Eestis. 9. mail 1878. aastal pidas J. Tülk Eesti Kirjameeste Seltsis kõne „Inimese sugu edenemisest ja teaduse kasvamisest“ (trükkis ilmunud Eesti Kirjameeste Seltsi Aasta-

raamatus 1878). Selles kõnes leiduvad mõisted: koordinaadid, Kepleri seadused, parabooli (parable) graafik, Newtoni seadused, parallaks (paralaxe),  $\sin \alpha$ ,  $\log \sin \alpha$ , integraalarvutus (integralrechnung) ja võrdus

$$s = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}} = \frac{p}{2} \log \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p} + \frac{x \sqrt{x^2 + p^2}}{2p}$$

See on kahtlemata enne 1920. aastat ainus integraali märgi tarvitamise juhtum eestikeelses kirjanduses.

---

## SISUKORD

Sissejuhatus . . . . .	3
------------------------	---

### Matemaatika tekkimine

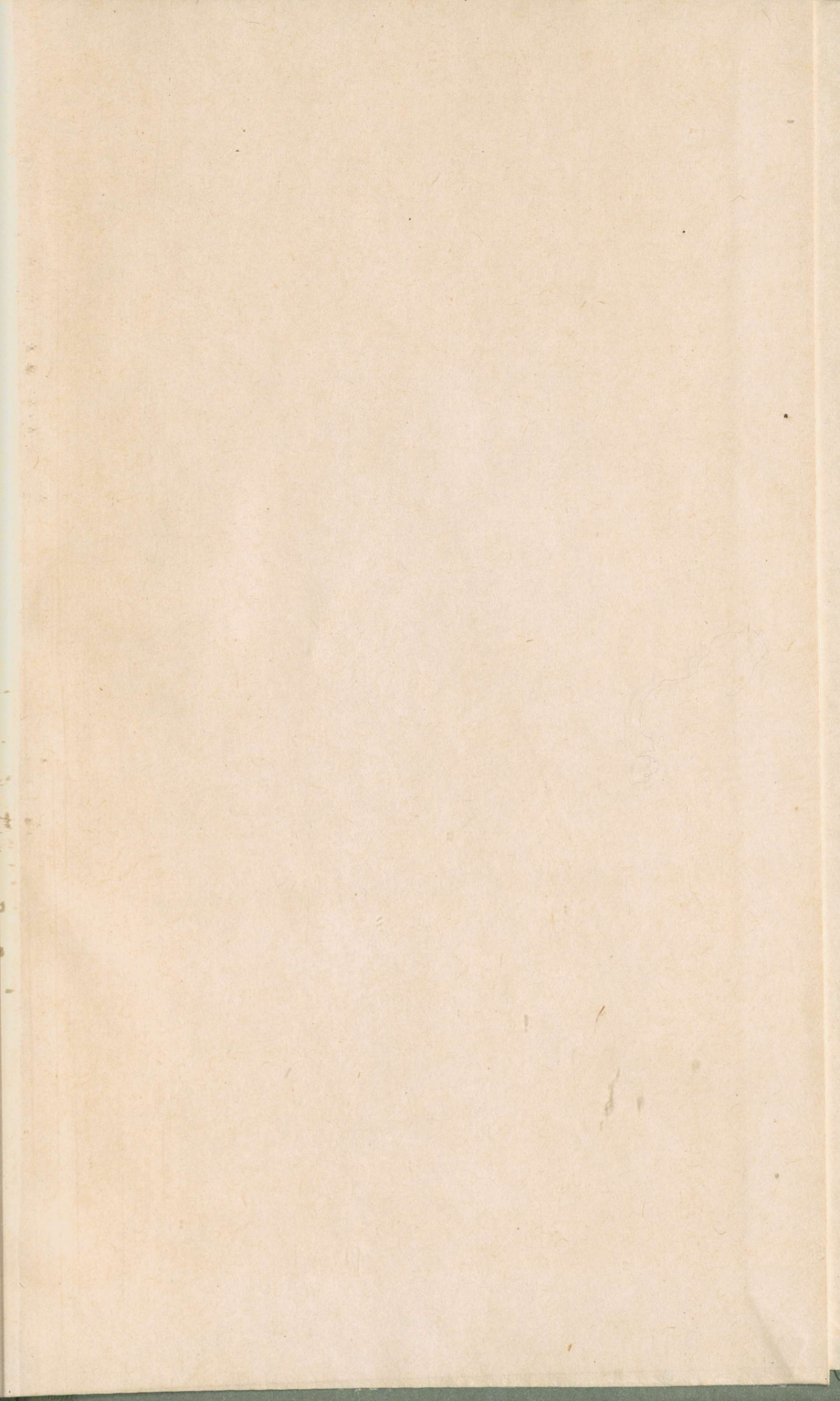
Muistsete rahvaste matemaatika . . . . .	5
Egiptus . . . . .	6
Babüloonia . . . . .	9
India . . . . .	13
Kreeka matemaatika . . . . .	15

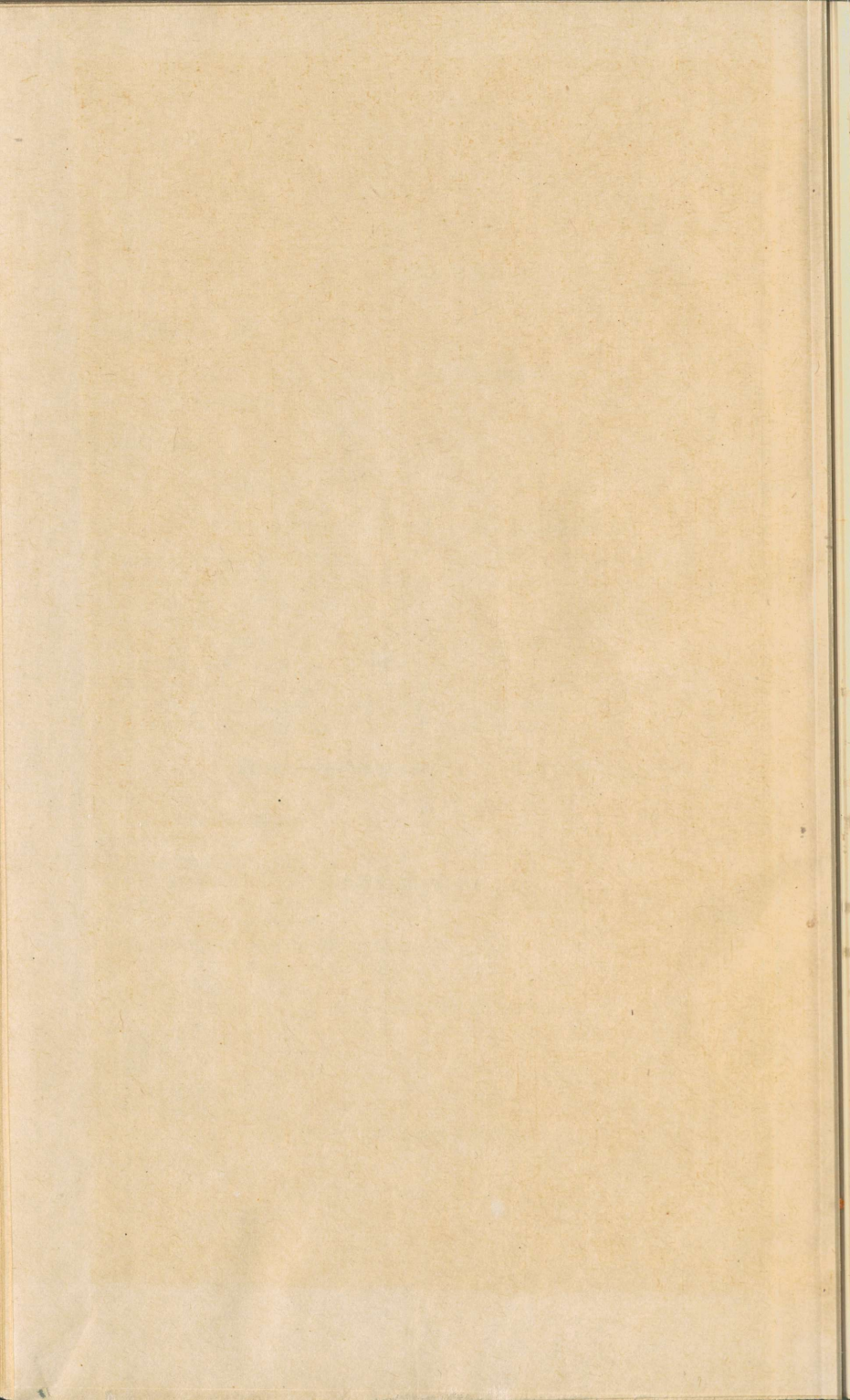
### Meie kodumaa rahvaste matemaatika

Armeenlaste matemaatika . . . . .	19
Kesk-Aasia rahvaste matemaatika . . . . .	22
Vene rahva matemaatika . . . . .	29
Vene arvelaud . . . . .	34
Geomeetrilisi teatmeid vanades vene ürikutes . . . . .	40
L. F. Magnitski ja tema „Aritmeetika“ . . . . .	45
Kuidas vene rahvas hindas matemaatikat . . . . .	51
Vene muistsete matemaatikakäsiraamatute sisust . . . . .	54
M. J. Lermontovi matemaatilistest meelelahutustest . . . . .	64

### Elementaar matemaatika arengu ajaloost

Aritmeetika . . . . .	68
Suuline numeratsioon . . . . .	68
Kahendsüsteem . . . . .	69
Kirjalik numeratsioon . . . . .	75
Mõningatest aritmeetika oskussõnadest . . . . .	78
Täisarvude aritmeetika . . . . .	79
Aritmeetiliste tehete arvust . . . . .	81
„Vene talupoja korrumismeedod“ . . . . .	82
Mõnedest täisarvude omadustest . . . . .	83
P. L. Tšebõšev . . . . .	87
Euler-Goldbach-Vinogradovi teoreem algarvudest . . . . .	93
Murdarvud . . . . .	97
Algebra . . . . .	102
Geomeetria . . . . .	107
N. I. Lobatševski . . . . .	108
S. V. Kovalevskaja . . . . .	115
Silmapaistvad vene matemaatikud-pedagoogid . . . . .	124
Järelsõna . . . . .	127
Lisa . . . . .	128







Rbl. 3.55