

I. ARTOBOLEVSKI

MEHHANISMIDE JA MASINATE TEOORIA

A-23693

I. I. ARTOBOLEVSKI

MEHHANISMIDE JA MASINATE TEOORIA

Lubatud NSV Liidu Kultuuriministeeriumi Kõrgema Hariduse Peavalitsuse poolt kasutada õpikuna masinaehitusalastes kõrgemates õppeasutustes

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1961

Originaali tiitel:

И. И. Артоболевский

Теория механизмов и машин

Издание третье

Государственное издательство
технико-теоретической литературы
Москва 1953

Tõlkinud dotsent, tehn. tead. kand.
H. LEPIKSON

Kaane kujundanud *S. Liiberg*

Tartu Ülikooli Raamatukogu

Retsenseerinud *A. Särev*

TEISE TRÜKI EESSÕNAST

1940. aastal avaldas käesoleva raamatu autor M. V. Lomonossovi nimelise Moskva Riikliku Ülikooli matemaatika ja mehaanika teaduskonnas peetud loengud pealkirja all «Mehhanismide ja masinate teooria». Hiljem, 1945. aastal, avaldati autori poolt õpik «Mehhanismide ja masinate teooria kursus», mis oli määratud kõrgematele tehnilistele õppeasutustele mehaanika valdkonda kuuluvate erialade jaoks.

Nimetatud õpik oli oma mahult ülikoolikursusest tunduvalt väiksem ja sisaldas ainult selle miinimumi kursuse kavasse puutuvat materjali, mis aine omandamiseks on hädavajalik.

Õpiku käesolev väljaanne erineb varemilmunuist tunduval määral ja osutub tegelikult õpiku uueks variandiks. Seejuures on raamatus säilitatud aine esituse põhi-ideed nõukogude koolkonna teadlaste poolt loodud ja arendatud süsteemi alusel. Detailsemalt on käsitletud vene mehhanismide teaduse ajalugu, mõningaid uusimaid küsimusi mehhanismide projekteerimise alalt, masinagregaatide dünaamikat, masinate uurimise eksperimentaalseid meetodeid jne.

Uuele õpikule on antud nimeks «Mehhanismide ja masinate teooria», sest ta vastab temas esitatud küsimuste käsitlemisulatuselt kõige enam 1940. aastal ilmunud samasisulisele raamatule. Seejuures on uue õpiku sisu kohandatud nõuetele, mida kaasajal esitatakse kõrgemate tehniliste õppeasutuste üliõpilastele.

Raamatu teise trüki ettevalmistamisel võeti arvesse autori kaastööliste, tema õpilaste ja paljude kõrgemate tehniliste õppeasutuste õppejõudude poolt raamatu esimese trüki kohta tehtud hulgalisi märkusi.

Lähtudes seisukohast, et kõrgemates tehnilistes õppeasutustes on väga tähtis üliõpilastele tutvustada tehnikas kasutatavaid tüüpilisi mehhanisme, toob autor kursuse algul mitmete kaasaegsete mehhanismide üksikasjalisi kirjeldusi, illustreerides neid hulgaliste näidetega. Selles kursuse osas käsitletakse ka uusi, hüdrauliliste ja elektriliste seadistega varustatud mehhanisme.

Arvesse võttes nõukogude teaduse silmapaistvat osa mehhanismide ja masinate teooria probleemide uurimisel, käsitleb autor lühidalt mehhanismide ja masinate teooria teaduslikkude kool-

kondade arengut Venemaal ja annab ülevaate nõukogude teaduse saavutustest mehhanismide ja masinate kinemaatika ning dünaamika alal.

Mehhanismide ja masinate teooria vene klassikalise koolkonna iseloomustavaks jooneks oli mehhanismide kinemaatika aluste sügav esitus, kusjuures laialdaselt kasutati mehhanismide ja masinate liikumise uurimise geomeetrilisi meetodeid. Selle traditsiooni kohaselt on nimetatud geomeetrilised meetodid ka käesolevas õpikus laialdast rakendamist leidnud. Autor on neid meetodeid edasi arendanud, toetudes vene teadlaste poolt mehhanismide ja masinate teoorias saavutatud üldistavatele uurimustulemustele. Tänu viimastele on meie kodumaine teadus loonud mehhanismide range klassifikatsiooni.

Viimaste aastate jooksul on nõukogude teaduslik koolkond saavutanud tõsiseid tulemusi mehhanismide projekteerimismeetodite arendamisel. See asjaolu peegeldub ka käesolevas õpikus, kus käsitletakse mehhanismide kinemaatiliste skeemide täpse ja ligikaudse projekteerimise kaasaegseid meetodeid niihästi madalamate kui ka kõrgemate kinemaatiliste paaride puhul. Hammasmehhanismide uurimis- ja projekteerimisküsimuste osas oli autor sunnitud piirduma hammasmehhanismide teooria aluste esitamisega. Nimetatud mehhanisme saab õppijaile vajalikul määral tutvustada ainult vastavate erikursuste abil.

Mehhanismide ja masinate dünaamikasse puutuvates peatükkides pööratakse peamist tähelepanu mehhanismides ja masinates mõjuvate jõudude määramisele, mehhanismide kinetostaatilisele arvutusele, mehhanismide ja masinate liikumisvõrrandite uurimisele ja masinate tasakaalustamise küsimustele.

Mehhanismide ja masinate dünaamika üldiste ülesannete lahendamist haaravas osas on tunduvalt laiendatud lõikusid, mis käsitlevad masinate käigu ebaühtlust ja masinagregaadi liikumise uurimist. Need küsimused on raamatus esitatud nõukogude teadlaste poolt avaldatud uusimate uurimuste alusel.

Masinate käigu reguleerimise teooria on toodud ainult ulatuses, mis on ette nähtud NSV Liidu Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt kinnitatud õppeprogrammis.

Omistades masinate ja mehhanismide eksperimentaalsetele uurimismeetoditele suurt tähtsust, liitis autor raamatusse paragrahvid, mis käsitlevad mehhanismides ja masinates esinevate kiiruste, kiirenduste, jõudude ja momentide määramise kaasaegseid meetodeid.

Mitmesugustes masinaehituslikes ja mehaanika-alastes kõrgemates tehnilistes õppeasutustes ettekantavad mehhanismide ja masinate teooria kursused erinevad üksteisest teataval määral nii esitatava materjali mahu kui ka sisu jaotuse poolest sõltuvalt antud õppeasutuse spetsiifikast. Seda arvesse võttes pidas autor

vajalikuks anda õppeainest veidi täielikum esitus, kui see on ette nähtud ühes või teises konkreetses programmis. Õpiku hõlpsamaks kasutamiseks on programmis esinevate küsimuste täiendavaks arenduseks toodud teksti osad laotud peenema kirjaga. Kursuse läbitöötamisel ei ole nimetatud osade õppimine alati kohustuslik.

Üheaegselt käesoleva õpiku trükist ilmumisega avaldab autor koostöös V. A. Zinovjevi ja B. V. Edelšteiniga mehhanismide ja masinate teooria ülesannete kogu teise trüki. Õpikut ja ülesannete kogu, mis koos moodustavad mehhanismide ja masinate teooria alase kompleksse õppevahendi, tuleb käsitada kui ühtset tervikut. Paljud küsimused, mis käsitlevad üksikute näidete või ülesannete praktilisi lahendamismeetodeid, on ära toodud mitte õpikus, vaid ülesannete kogus. Viimane sisaldab vastavaid rohkete näidetega illustreeritud peatükke, nagu mehhanismide struktuuri uurimine, nukkmehhanismide projekteerimine jne.

Käesoleva raamatu kirjutamisel on suurel määral kasutatud autori isiklikkude uurimistööde tulemusi. Selle kõrval aga peegeldab raamat ka teiste nõukogude teadlaste poolt viimase kümne aasta jooksul avaldatud põhilisi uurimistöid. Raamatus leiavad üldistamist autori, tema õpilaste ja autoriga palju aastaid kõrgemates koolides koos töötanud kaastööliste rikkalikud pedagoogilised kogemused. Autor avaldab oma kaastöölistele siinkohal suurt tunnustust ja tänu.

Lõpuks pöördub autor kõikide kolleegide poole palvega avaldada oma arvamus käesoleva väljaande kohta, ära märkides selles esinevaid puudusi. Autor tänab ette kõiki seltsimehi, kes sääraseid näpunäiteid esitavad.

6. septembril 1951. a.

Autor

EESSÕNA KOLMANDALE TRÜKILE

Kolmandas trükis on tehtud mõningaid muudatusi eesmärgiga parandada üksikute küsimuste esitust.

23. juunil 1953. a.

Autor

SAATEKS EESTIKEELSELE TÕLKELE

Akadeemik I. I. Artobolevski teos «Mehhanismide ja masinate teooria», mis ilmus vene keeles lühikese ajavahemiku jooksul kolmes trükis, on tõlgitud juba mitmetesse NSV Liidu rahvaste ja väliskeeltesse. Käesoleva väljaandega muutub ta kättesaadavaks ka eesti keelt valdavale lugejaskonnale.

Raamatu 3. trükk, mille järgi on tehtud eestikeelne tõlge, ilmus 1953. aastal, seega ajajärgul, mil algas Kommunistliku Partei võitlus rahvamajanduse võimsa tõusu eest sotsialismi ülesehitamise lõpuleviimise eesmärgil. Käesoleval ajal, kus NLKP XXI kongressi ja Keskkomitee 1960. a. juulipleenumi otsused seavad meie masinaehituse ette uusi suuri ja tõsiseid ülesandeid, eriti komplekssе mehhaniseerimise ja automatiseerimise valdkonnas, on mehhanismide ja masinate teooria osa noorte inseneride ettevalmistamisel veelgi kasvanud.

Hoolimata seitsme aasta möödumisest ja selle aja jooksul aset leidnud tehnilisest progressist, ei ole esitatav teos sisuliselt vananenud. Temas käsitletavad mehhanismide ja masinate teooria alused on kõrgemate tehniliste õppeasutuste kavade ulatuses jäänud põhijoontes muutumatuiks. Raamat figureerib kõikides ametlikkudes õppeprogrammides õpikuna endiselt esimesel kohal. Ainult mõne üksiku uue küsimusega tutvumiseks (Novikovi hambumise teooria alged) tuleb lugejal otsida materjale vastavast erikirjandusest.

I. I. Artobolevski «Mehhanismide ja masinate teooria» tõlke ilmumine kõrvaldab eestikeelses masinaehitusalases kirjanduses ühe olulise lünga. Ühtlasi leiab temas esmakordselt fikseerimist mehhanismide ja masinate teooria alane terminoloogia, mis on esitatud tõlkija poolt Tallinna Polütehnilises Instituudis kauaaegse õppetöö jooksul väljaarendatud ja süstematiseeritud kujul.

Tõlkija

SISSEJUHATUS [1]

§ 1. Põhilisi mõisteid ja definitsioone

1°. Mehhanismide ja masinate teooria on esimeseks õppeaineks, mis juhib üliõpilase masinaehitust käsitlevate üld- ja eridistsipliinide tsüklisse. Oma esituses tugineb ta teadmistele, mida üliõpilased on omandanud füüsikat, matemaatikat ja teoreetilist mehaanikat õppides. Tema ülesannete hulka kuulub üliõpilaste ettevalmistamine masinaelementide, masinaehituse tehnoloogia ja konkreetsest erialast sõltuvate üksikute masinaliikide arvutamist ning konstrueerimist käsitlevate kursuste jälgimiseks. Masinaehitusalastes kõrgemates õppeasutustes osutub mehhanismide ja masinate teooria seega aluseks, millele rajatakse tulevase insener-mehaaniku tehniline haridus.

Mehhanismide ja masinate teooria on teadus, mis uurib mehhanismide ja masinate struktuuri (ülesehitust), kinemaatikat ja dünaamikat.

Mehhanismide ja masinate teooria probleemid võib liigitada kahte gruppi. Esimesse gruppi kuuluvad probleemid, mis käsitlevad juba olemasolevate mehhanismide ja masinate uurimist. Teise grupi probleemid haaravad uute, etteantud liikumist teostavate mehhanismide ja masinate projekteerimise küsimusi.

Esitusmetoodika seisukohast lähtudes on kasutusele võetud teine, mugavam kursuse jaotus. Viimase põhjal jaguneb kursus samuti kahte ossa, ja nimelt:

1) mehhanismide struktuuriteooria ja kinemaatika ning
2) mehhanismide ja masinate dünaamika.

Mehhanismide struktuuriteooria ja kinemaatika ülesandeks on nii mehhanismide ülesehituse kui ka nende lülide liikumise uurimine. See toimub geomeetrilisest seisukohast lähtudes, arvesse võtmata jõudusid, mis uuritavat liikumist põhjustavad. Struktuuriteooria ja kinemaatika ülesannetesse kuulub ka meetodite loomine, mis võimaldaksid projekteerida etteantud kinemaatilistele tingimustele vastavaid mehhanisme.

---

[1] Eestikeelses tõlkes on sissejuhatuses tehtud mõningaid redaktsioonilisi muudatusi. — *Tõlk.*

Mehhanismide ja masinate dünaamika tegeleb mehhanismide ja masinate elementidele liikumise protsessis mõjuvate jõudude määramisega ning uurib seoseid mehhanismielementide massi, nende liikumise ja neile mõjuvate jõudude vahel.

2°. Iga mehhanism või masin koosneb üksikutest detailidest. Statsionaarsete mehhanismide või masinate mõned detailid on liikumatud, teised detailid aga liiguvad nende suhtes. Liikuvates masinates või mehhanismides, nagu näiteks lennuki- või automootorites, loetakse tinglikult liikumatuiks need detailid, mis on jäigalt ühendatud lennuki või auto kerega. Vastavalt sellele käsitletakse näiteks kolbmootori karterit, väntvõlli laagreid (nn. raamlaagreid), silindreid jne. kõikidel juhtudel kui liikumatuid detaile. Liikuvateks detailideks loetakse aga väntvõll, kolvid, klapid jne. Liikuvaid detaile või nende sääraseid gruppe, mis moodustavad ühe tervikliku ning jäiga liikuvate kehade süsteemi, nimetatakse mehhanismi või masina liikuvateks lülideks. Nii näiteks moodustab kolbmootori keps ainult ühe liikuva lüli, ehkki ta võib koosneda mitmest detailist: kepsu säärest, laagritest, laagrikaantest, laagrikaante kinnituspoltidest jne. Tõepoolest, kõik need detailid on omavahel ühendatud ning moodustavad üksteise suhtes liikumatute kehade jäiga süsteemi. Mõnikord pole aga ühte lüli moodustavate detailide vahel jäika sidet, nagu näiteks konveieri lindi ja selle poolt transporditavate esemete vahel. Selle tunnuseks, et siin siiski on tegemist ainult ühe lüliga, osutub asjaolu, et esemed ja konveieri lint teineteise suhtes ei liigu. Järelikult võiks neid omavahel jäigalt siduda, ilma et liikumiste iseloom seetõttu muutuks.

Kõik liikumatud detailid moodustavad ühe jäiga liikumatu kehade süsteemi, mida nimetatakse *liikumatuks (paikseks) lüliks* ehk *kinnislüliks*. Näiteks mootori karter, raamlaagrid jne. moodustavad koos ühe liikumatu lüli ehk kinnislüli.

Igas mehhanismis või masinas esineb seega üks kinnislüli ja üks või mitu liikuvat lüli.

Mehhanismi ja masinat võib järelikult käsitleda kui kinnislüli ja liikuvate lülide kogumit. Liikuvad lülid on ühendatud kas omavahel või siis kinnislüliga nii, et nende omavaheline suhteline liikumine on alati võimalik. Omavahelise suhtelise liikumise iseloom on seejuures määratud lülide kokkupuutes olevate elementide geomeetrilise kujuga. *Lülide elementideks* (kinemaatilisteks elementideks) nimetatakse lülide neid pindasid, jooni või punkte, mis lülide suhtelisel liikumisel on teineteisega kokkupuutes (kontaktis).

Kahe, teineteise suhtes liikuva lüli ühendust nimetatakse *kinemaatiliseks paariks*. Teiste sõnadega, kinemaatilise paari moodustavad kaks lüli, millede elemendid on omavahelises kokkupuutes. Kinemaatilised elemendid kuuluvad liikumatult

lülide külge ja on moodustatud kas pindadest, joontest või punktidest. Omavahelise kontakti tõttu piiravad elemendid lülide suhtelist liikumist. Kinemaatilisi paare moodustavatest lülidest koosnevat seotud süsteemi nimetatakse *kinemaatiliseks ahelaks.* Kolbmootori väntvõll näiteks moodustab koos liikumatu raamlaagriga ühe kinemaatilise paari. Keps moodustab väntvõlliga teise kinemaatilise paari, kolb koos kepsuga — kolmanda kinemaatilise paari jne. Kõik need lülid koos võetuna moodustavad kinemaatilise ahela. Siit järgneb, et iga mehhanismi või masina aluseks on teatav kinemaatiline ahel. Kasutades kinemaatilise ahela mõistet, võime defineerida mehhanismi järgmiselt.

Mehhanism on ühe kinnislüliga tehislik kinemaatiline ahel, mille ülesandeks on sooritada teatavale otstarbele vastavat täielikult määratud liikumist.

Masinaks nimetatakse mehhanismi või mehhanismide kompleksi, mille ülesandeks on teha kasulikku tööd, mis on seotud kas mõne tootmisprotsessiga või energia muundamisega.

Toodud definitsioonist selgub, et masina põhitunnuseks ei ole mitte üksnes otstarbekus tema lülide liikumises, vaid ka teatava kasuliku töö sooritamine, mis oleks seotud kas energia ühest olekust teise muundamisega või siis mõne tootmisprotsessiga. Viimase all on siin mõeldud töödeldava keha füüsikaliste omaduste, oleku, kuju või asukoha muutmist.

Öeldust järgneb, et juhul, kui lähtuda otstarbeka liikumise reprodutseerimise seisukohast, siis ei pruugi vahet teha mehhanismi ja masina vahel. Tõepoolest, nii taskukell kui ka treipink on mehhanismid, või õigemini mehhanismide kompleksid, sest kõik nende lülid sooritavad otstarbekaid, täielikult määratud liikumisi. Kuid kui taskukella ülesanne seisneb ainult osutitele ühtlase kiirusega liikumise andmises (kusjuures osutite nurkkiiruste vahel kehtib kindel suhe), siis treipingi ülesandeks on esemete töötlemine, mille tulemusel muutub nende kuju.

Enamik mehaanilisi mõõteriistu, matemaatilisi aparaate ja arvutusmasinaid, suurtükitule juhtimisseadmeid jne. osutuvad mehhanismideks.

Masinate hulka kuuluvad mitmesugust tüüpi mootorid, mitmesuguste materjalide ja esemete töötlemiseks määratud tööpingid ning transpordimasinad.

3°. *«Iga arenenud kogumasin koosneb kolmest oluliselt erinevast osast: jõumasinast, ülekandemehhanismist ja lõpuks masin-tööriistast ehk töömasinast»* (K. Marx, Kapital, I köide, lk. 323, Eesti Riiklik Kirjastus, 1953).

See arenenud kogumasina (masinagregaadi) definitsioon on rakendatav mis tahes kaasaegse masinagregaadi kohta, sest kõik need koosnevad jõumasinast ja ühest või mitmest töömasi-

nast, mis käitatakse jõumasina poolt ülekandemehhanismide abil.

Kaasaegsed masinagregaadid sisaldavad lisaks Marxi poolt nimetatuile veel teisi koostisosi, millede ülesandeks on kas täielikult või osaliselt täita inimese kontrollfunktsioone. Nendeks koostisosadeks on mitmesugused reguleerimis- ja jälgimisseadmed, mis reguleerivad tootmisprotsesse, väldivad agregaadi omavolilist seiskumist ja mittekvaliteetsete toodete tekkimist, signaliseerivad avariidest agregaadi ühes või teises sõlmes jne. Tehnika edasise arenemisega kasvab pidevalt ka automaatsete juhtimisseadmete tähtsus.

K. Marxi epohhil olid laialdaselt levinud mehaanilised transmissioonid (ülekandemehhanismid), millede abil jõumasina energia kanti ühele töömasinale või jaotati mitme töömasina vahel. Masinagregaatide arenedes hakati ülekandemehhanisme kujundama töömasinate ühe koostisosana. Seoses individuaalmootorite kasutamisega töömasinate ja isegi nende eri mehhanismide käitamiseks on tarvidus eriliste ülekandemehhanismide järele mõningatel juhtudel kadunud. Sääraseid kaasaegseid masinaid võib seetõttu käsitleda kui agregaate, mis koosnevad ainult jõuja töömasinaist.

Jõumasinateks nimetatakse masinaid, milledes üks või teine energialiik muundatakse mehaaniliseks tööks, mida vajatakse töömasinate liikumapanemiseks.

Jõumasinate hulka kuuluvad: soojusjõumasinad, elektrimootorid, veeturbiinid, tuuleturbiinid jne.

Mõningatel juhtudel toimub masinates vastupidine protsess: mehaanilise energia muundamine mõnda teist liiki energiaks. Masinaid, kus säärane protsess aset leiab, nimetatakse muundavateks masinateks. Muundavate masinate hulka kuuluvad näiteks elektrivoolu generaatorid, mis pannakse töötama turbiini või sisepõlemismootori abil.

Töömasinateks nimetatakse masinaid, millede abil toimub töödeldava materjali või eseme omaduste, oleku, kuju või asukoha muutmine.

Töömasinate hulka kuuluvad mitmesugused tööstuses ja põllumajanduses kasutatavad masinad. Siia kuuluvad näiteks metallitöötlemispingid, tekstiilitööstuse, polügraafiatööstuse, toiduainetetööstuse jms. masinad. Edasi kuuluvad siia veski- ja rehepeksumasinad, kombainid ning teised põllutöömasinad. Töömasinate hulka kuuluvad lõpuks veel kraanad, konveierid, pumbad ja igasugused muud esemete transportimiseks või ümberpaigutamiseks määratud masinad.

Töömasinaid, milledes kõik operatsioonid sooritatakse vastavate mehhanismide poolt ilma inimese kaasabita ja kus inimese

ülesanne piirdub ainult masinate poolt tehtava töö kontrollimisega, nimetatakse masinautomaatideks.

Käesoleval ajal kasutatakse masinautomaate nõukogude masinaehituse kõikides harudes väga laialdaselt. Reas tööstusharudes sooritavad automaadid tooraine valmisesemeks ümbertöötlemise tsüklis koguni mitmeid üksteisele järgnevaid operatsioone, moodustades automaatsete töömasinate pideva ahela — automaatliini.

Nõukogude Liidus loodi maailma esimene automaattehas mootorikolbide tootmiseks, mis kujutab endast masinautomaatide süsteemi kõrgeimat astet. Nimetatud tehases on kogu tootmisprotsess, alates kolbide valamisest ja lõpetades nende pakkimisega, täielikult automatiseeritud. Täielikult on automatiseeritud ka kõik vaheoperatsioonid: toorikute ja pooltoodete transport, kontrollmõõtmised jne. Kõiki selles tehases toimuvaid protsesse juhitakse spetsiaalsete mehaaniliste, elektriliste ja elektron-automaatseadiste abil. Viimased võimaldavad automaattehase töötamist kontrollival isikul pidevalt jälgida spetsiaalsel juhtimispuldil kogu tootmisprotsessi käiku tehase kõikides põhisõlmedes. Inimese tootmisest osavõtt piirdub siin ainult tootmisprotsessi juhtimise ja kontrollimisega.

4°. NSV Liidus on masinad juba praegu leidnud kõige laialdasemat kasutamist. Aastast aastasse aga laieneb meil masinate kasutusala veelgi.

Partei XIX kongress töötas välja ajaloolised direktiivid NSV Liidu rahvamajanduse arendamise 5. viisaastaku plaani kohta, mis nägid ette masinaehituse kui kogu meie rahvamajanduse uue võimsa tehnilise progressi aluse arendamist kiirendatud tempos.

Erilist tähelepanu pöörati direktiivides turbiinide, generaatorite, suurte tööpinkide, sepistamismasinate ja -presside, töömahukate protsesside mehhaniseerimist võimaldavate masinate, kerge- ja toiduainetetööstuse automaatseadmete ning paljude teiste masinate ja mehhanismide tootmisele.

Ka kapitalistlikes maades kasutatakse masinaid, kuid seal on nende kasutamise eesmärgid sootuks erinevad. Kapitalistlikes maades ei kasutata loodavat uut tehnikat mitte tööliste töövaeva kergendamiseks ega töö säästmiseks ühiskonnale, nagu see sünnib NSV Liidus, vaid selleks, et kapitalistid saaksid suuremaid kasumeid. Kapitalismi tingimustes toob uute, täiuslikumate masinate loomine endaga sageli kaasa tööpuuduse. Uute masinakonstruktsioonide areng kapitalistlikes maades pole mitte allutatud ühiskonna materiaalsete ja kultuurivajaduste rahuldamise nõuetele, vaid seda suunatakse üha suureneval määral uute hävitusvahendite loomisele.

§ 2. Lühike ülevaade mehhanismide ja masinate teooria arengust Venemaal ja NSV Liidus

1°. Masinaehitus on üks NSV Liidu põhilistest tööstusharudest. Teised tootmisharud võivad edasi areneda ainult siis, kui masinaehitus on vajalikul tasemel. Tööviljakuse nimetamisväärne tõus, töömahukate protsesside mehhaniseerimine ja tootmise automatiseerimine on saavutatav ainult täiuslikkude masinate abil.

Revolutsioonieelsel Venemaal oli masinaehitustööstus väga nõrgalt arenenud. Enamik masinaid imporditi Venemaale teistest riikidest. Mõningat edu võis märkida ainult diiselmootorite, vedurite ja vagunite, laevade ning lokomobiilide ehituses. Tehti algust auruturbiinide tootmisega. Eriti nõrgalt oli arenenud tööpinkide tootmine. Lennuki- ja autotööstus, traktorite, keerukamate põllutööriistade ja mitmete teiste masinate ehitus aga puudus täielikult.

Masinaehitustehaste tootmistehnoloogia oli väga maha jäänud. Enamikus tehastes esines kõige primitiivsemalt organiseeritud väikeseeriatootmine. Ainult üksikutes ettevõtetes, nagu Kolomna, Sormovo ja Putilovi tehastes oli tootmine kõrgemal tasemel.

Asjaolu, et vene tehased, hoolimata primitiivsest tootmistehnoloogiast, suutsid toota sääraseid keerukaid masinaid, nagu diiselmootoreid, auruturbiine ja laevamasinaid, viitab vene tööliste ja inseneride andekusele. Nende pingutusi aga tõkestasid tol ajal kehtinud, kapitalistlikule majandussüsteemile revolutsioonieelsel Venemaal omased tingimused. Venemaa sõltus tol ajal välismaisest kapitalist, mille valdajail ei olnud kasulik arendada masinaehitust maal, mis kujutas endast soodsat välisturgu.

Partei ja Nõukogude valitsus, seades eesmärgiks NSV Liidu industrialiseerimise, pöörasid erilist tähelepanu võimsa kodumaise masinaehitustööstuse kui rasketööstuse põhilise haru arendamisele.

Kiire ja plaanipärane masinaehituse areng algas juba esimese viisaastakuga. Sõjaeelsete viisaastakute jooksul loodi sisuliselt uus autotööstus, organiseeriti traktorite, tankide, lennukite ja nende mootorite, keerukate põllutöömasinate, metallurgiatööstuse masinate, keemiatööstuse, energeetikamajanduse ning mäetööstuse seadmete tootmine. Arendati ka transpordimasinate ehitust.

Tormiliselt, ennenägemata tempoga arenesid kõik masinaehituse harud esimeste viisaastakute perioodil. Partei ja Nõukogude valitsus pöörasid suurimat tähelepanu masinaehituse kui terviku ja samuti ka tema üksikute harude edasise arengu suunamisele.

Kõikide pingutuste sihiks oli muuta meie maa mehaanilisi seadmeid importivast maast neid seadmeid tootvaks maaks.

Esimese kolme viisaastaku jooksul ehitati sadu uusi suuri masinaehitustehaseid.

Uued tehased varustati kaasaegse tehnikaga ja esmaklassiliste seadmetega. Tootmine kulgeb neis kaasaegse eesrindliku masinaehituse tehnoloogia alusel. Selle poolest on meie tehased kui uuemad, sotsialistliku industrialiseerimise põhimõtete alusel loodud ettevõtted maailmas esikohal.

NSV Liidu rahvamajanduse tormilise arengu taustal asub masinaehitus esimesel kohal. Kui näiteks NSV Liidu tööstuse kogutoodang oli 1940. aastaks kasvanud 1913. aastaga võrreldes ligikaudu 12-kordseks, siis masinaehitus oli sama ajavahemiku jooksul kasvanud 50-kordseks. Masinaehituse osatähtsus tõusis 36,3 protsendini NSV Liidu tööstuse kogutoodangu mahust, saavutades sellega teiste tööstusharude ees esikoha.

Suure Isamaasõja perioodil olid meie masinaehitustehased sunnitud oma töö ümber korraldama ning üle minema peamiselt sõjatoodangule. Masinaehitustehaste tegevus sellel nõukogude riigile vastutusrikkal ajaloolisel perioodil kinnitas meie tööstuse elujõulisust, näidates ühtlasi tööliste ja inseneride kõrget kvalifikatsiooni ning tõelist patriotismi. Hiiglaslikud masinaehitustehased evakueeriti Itta. Uraali ja Siberisse ehitati suur hulk uusi tehaseid. Paralleelselt tehaste projekteerimisega lahendati kommunaal- ja elamuehituslikke küsimusi, komplekteeriti sisseseadeid ja valmistati ette kaadreid. Siin avaldusid nõukogude inimeste energia, oskused ja kogemused, siin ilmnes nende patriotism ja palav armastus oma sotsialistliku riigi vastu.

Suur Isamaasõda demonstreeris eredalt Nõukogude Liidu masinaehitustööstuse küpsust ja näitas tema võimet lahendada lühima aja jooksul ka kõige keerukamaid ülesandeid. Meie tööstuse ümberkorraldamine uusima sõjatehnika tootmiseks viidi läbi ennenägemata kiirusega.

Sõjajärgne rahvamajanduse taastamise ja arendamise plaan aastateks 1946—1950 nägi ette masinaehituse tootmismahu kahekordistamist, võrreldes sõjaeelse tasemega. Mõnede seadmete tootmise osas oli määratud veelgi intensiivsem kasvutempo.

NLKP XIX kongressi direktiivides NSV Liidu rahvamajanduse arendamise viie aasta plaani kohta aastateks 1951—1955 fikseeriti masinaehituse kui rahvamajanduse kõigi harude võimsa progressi aluse jaoks jällegi kõrge arengutempo. Ka sellel viisaastakul oli masinaehituse ja metallitöötlemise alal ette nähtud toodangu suurendamine peaaegu kahekordseks, mõnede seadmete osas koguni mitmekordseks. Näiteks raskete sepistamismasinate ja -presside tootmist suurendati kaheksa korda, juhtimis- ning kontrollseadmete tootmist — 2,7 korda jne.

Grandioossed ülesanded ootasid nõukogude masinaehitajaid, insenere ja teadlasi 5. viisaastakul. Nende ülesannete seas oli tähtsal kohal uute hüdrotehniliste ehituste varustamine täiuslike masinate ja mehhanismidega, mis võimaldasid täielikult mehhaniseerida kõik töömahukad protsessid. Suurt tähtsust tuli omistada ka mitmete rahvamajandusharude kompleksse mehhaniseerimise küsimustele ja sellega seoses nende varustamisele uut tüüpi masinate ning mehhanismidega. Tootmise automatiseerimine tuli tõsta veel kõrgemale järjele, tuli luua uusi automaate, automaatliine ja automaattehaseid.

Kõik see osutub vajalikuks kommunismi tehnilise ja majandusliku baasi loomisel ning omab tohutut tähtsust nii tööviljakuse suurendamise ja töövaeva vähendamise kui ka töötajate tehnilise ning kultuurilise taseme tõstmise seisukohalt.

2°. Masinaehituse erakordselt kiire arengu tõttu Nõukogude Liidus tekkis vajadus kõrgestikvalifitseeritud kaadrite järele. Oli tarvis uusi insenere, tehnikuid, teaduslikke töötajaid jne. Paralleelselt masinaehitustööstuse arendamisega tuli seetõttu partei ja valitsuse näpunäidete alusel väga kiiresti laiendada ka masinaehitusinsenere ettevalmistavaid kõrgemaid õppeasutusi. Reorganiseeriti suuremastaabiline teaduslik uurimistöö kõigis põhilistes rahvamajandusharudes.

Masinaehitustööstust abistavad suurel määral kõrgemate tehniliste õppeasutuste kateedrid ja nii NSV Liidu Teaduste Akadeemia kui ka liiduvabariikide akadeemiate ning üksikute teadusharude akadeemiate instituudid. NSV Liidu Teaduste Akadeemia süsteemis loodi spetsiaalne Masinaõpetuse Instituut. Tihe side teaduse ja praktika, teadlaste ja tootmisnovaatorite vahel tagab tootmiskultuuri kiire kasvu kõigis tööstusharudes, sealhulgas ka masinaehituses.

Mitmetes masinaehitusalastes distsipliinides oli vene teadus maailmas esikohal juba enne revolutsiooni. Nõukogude võimu poolt teaduse edasiarenemiseks loodud ülisoodsad tingimused põhjustasid aga selle eriti kiiret kasvu.

Suuri edusamme on nõukogude teadus teinud mehhanismide ja masinate teooria alal. Rajatuna Tšebõševi ja Žukovski klassikalistele töödele arenes ta edasi uutes suundades, jättes kaugele maha välismaised teaduslikud koolkonnad. Rida tegureid, nagu uute masina- ja mehhanismitüüpide tootmisse võtmine, masinaehituse üldine areng tööpingiehituse, põllutöömasinate, tekstiili-, polügraafia- ja toiduainetetööstuse alal ning keerukate kinemaatiliste skeemidega masinaid kasutama hakanud aparaadiehitus ja kaitsetehnika — kõik see sundis nõukogude teadlasi arendama esimeses järjekorras just keerukate mehhanismide, masinate ja aparaatide analüüsi- ning projekteerimismeetodeid.

Laialdaselt arenesid uurimistööd mehhanismide, struktuuri

teooria alal. Rajati üldised meetodid, mis võimaldavad mitte ainult uurida juba olemasolevate mehhanismide struktuuri, vaid ka luua uusi, oma struktuurilt täiuslikumaid mehhanisme, kasutades kõige mitmekesisemaid sidemeliike. Esimeses järjekorras uuriti mehhanisme, millede koostisse kuuluvad ainult jäigad kehad. Viimastel aastatel, seoses hüdrauliliste ajamite, sidurite, regulaatorite jne. levikuga, arenevad uurimistööd ka hüdrauliliste seadmetega varustatud mehhanismide teooria valdkonnas.

Sama suurt tähtsust omistatakse veel elektriliste seadmetega varustatud mehhanismide uurimisele. Põhjuseks on siin individuaalsete elektriajamite, blokeerimismehhanismide, automaatsete kontrollseadmete jne. laialdane levik. Teaduslikkudes uurimisinstituutides püstitatakse ja lahendatakse rohkesti probleeme, mis on seotud elektriliste seadmetega varustatud uut tüüpi mehhanismide analüüsimise ja projekteerimisega.

Laial rindel käib uurimistöö mehhanismide kinemaatilise analüüsi ja projekteerimise alal. Esmakordselt suudeti arendada akadeemik P. L. Tšebõševi klassikalistes töödes esitatud mehhanismide sünteesi käsitlevaid ideesid.

Nimetamisväärseid uurimistöid on tehtud masinates ja aparaatides laialdaselt kasutatavate mitmesugust tüüpi hammasmehhanismide teooria, arvutuse ja projekteerimise valdkonnast. Leningradi ja Moskva teadlaste poolt on arendatud nii tasapinnaliste kui ka ruumiliste hammasrataste projekteerimise üldist analüütilist teooriat, mis on tihedalt seotud nende valmistamise tehnoloogiaga. Selle tulemusena on praegu meie käsutuses küllalt täiuslikult väljatöötatud meetodid, mis võimaldavad mitte ainult projekteerida ja valmistada kaasaegseid hammasmehhanisme, vaid ka ehitada keerukaid, tasapinnaliste ja ruumiliste hammasrataste lõikamiseks vajalikke tööpinke.

Mõnede masinate ja masinaosade töökiiruse tõstmine sundis nõukogude teadlasi tõsist tähelepanu pöörama neile dünaamilistele nähtustele, mis esinevad kiirekäiguliste mehhanismide ja masinate töös. See asjaolu põhjustas teoreetiliste ja eksperimentaalsete uurimistööde laialdast arengut masinate ja mehhanismide dünaamika valdkonnas. Nõukogude teadlased leidsid põhilise lahenduse jõumasinast, transmissioonist ja töömasinast koosneva masinagregaadi liikumise probleemile juhu jaoks, mil agregaadile mõjuvad jõud ei sõltu üksnes agregaadi lülide asendist, vaid ka nende kiirustest. Välja on töötatud üldmeetodid masinatele vajalike hoomasside määramiseks. Tunduvalt on arendatud masinate pöörlevate masside tasakaalustamise küsimust, millel on suur tähtsus kiirekäiguliste turbiini-, elektrimasinate jt. rootorite balansseerimisel.

Mitmetes uurimisinstituutides, tehastes ja kõrgemate tehniliste õppeasutuste kateedrites töötati välja balansseerimismasinate uued

kodumaised tüübid, milledest paljud on tööstuses kasutamist leidnud.

Koos mootorite ja kompressorite tootmise arenguga pöörati suurt tähelepanu väntmehhanismiga masinate tasakaalustamise probleemile. Nõukogude teadlaste poolt väljatöötatud tasakaalustamismeetodid on juurutatud meie tehaste konstrueerimisbüroode praktikasse.

Suurt tähelepanu on pööratud ka elastsetele võnkumistele masinates. Eriti on seejuures silmas peetud neid detaile ja sõlmi, milledel ühes või teises masinatüübis on oluline tähtsus (sirged võllid, väntvõllid, muhvid jne.). Nõukogude teadlaste poolt töötati välja ja juurutati konstrueerimisbüroode praktikasse originaalsed meetodid masinaelementide arvutamiseks väändevõnkumistele.

Nõukogude teadus on saavutanud suurt edu ka masinate eksperimentaalse dünaamika valdkonnas. NSV Liidus on välja töötatud meetodid, mis võimaldavad eksperimentaalselt registreerida mitmesuguseid masinate dünaamilise arvutuse juures olulist tähtsust omavaid kinemaatilisi ja dünaamilisi suurusi, nagu paigutused, kiirused ja kiirendused, deformatsioonid, jõud, väändemomendid jne. Valdavas enamikus on need meetodid rajatud mitut tüüpi tundlikkude elementide (nn. tundlate) ja kodumaise päritoluga elektriliste registreerivate aparaatide kasutamisele.

Mehhanismide ja masinate teoorias on tähtis koht probleemil, mis käsitleb nii püsiva kui ka mittepüsiva liikumise reguleerimist. Viimaste aastate jooksul on tehtud suuri uurimistöid mehaaniliste ja elektriliste süsteemide reguleerimise ja liikumise stabiilsuse üldteooria küsimustes ning uuritud auru- ja veeturbiinide, lennukimootorite jms. reguleerimise meetodeid.

Nõukogude Liidus töötatakse praegu edukalt masinautomaatide ehituse üldteooria loomise kallal. Nõukogude teadlased ja insenerid arendasid tunduvalt masinautomaatide ja automaatliinide tootlikkuse arvutamise meetodeid. On uuritud keerukate masinautomaatide analüüsimeetodeid ja antud juhiseid kaasaegsete, automaatselt töötavate masinate ning automaattehaste ehitamiseks.

Eesrindliku nõukogude teaduse, sealhulgas ka masinaõpetuse tähtsaimaks eeliseks on orgaaniline side teooria ja praktika — teaduse ja tootmise vahel. Marksistlik õpetus teooria ja praktika ühtsusest avab nõukogude teaduse ees edasise progressi ennenägematud perspektiivid meie võimsa kodumaa ja kogu eesrindliku inimkonna hüvanguks.

3°. Kuni Suure Sotsialistliku Oktoobrirevolutsioonini arenes mehhanismide ja masinate teooria Venes peamiselt Venemaa Teaduste Akadeemia, ülikoolide ja tehniliste õppeasutuste seinte vahel. Peeter I poolt 1724. aastal asutatud Venemaa Teaduste Akadeemia pööras juba oma tegevuse esimestest päevadest alates suurt tähelepanu rakendusmehaanikale kui laevade, sildade, igasuguste masi-

nate ja mehhanismide, tõsteseadmete, suurtükkide jms. konstrueerimise ja ehitamise teaduslikule alusele. Teaduste Akadeemiasse kutsutud teadlastest võib esile tõsta sääraseid suuri õpetlasi, nagu L. Euler, D. Bernoulli, J. Hermann ja teisi.

XVIII sajandi väljapaistev teadlane Leonhard Euler (1707—1783) veetis suure osa oma elust Peterburis. Ta avaldas mitusada artiklit ja memuaari, mis käsitlesid üldist mehaanikat, mehhanismide ja masinate teooriat, optikat ja teisi küsimusi matemaatika, füüsika ning tehnika valdkonnast.

4°. Praktilise mehaanika arendamisel XVIII sajandil Venemaal tehtud edusammude eest võlgneme tänu esmajärjekorras geniaalsele vene teadlasele akadeemik Mihhail Vassiljevitš Lomonossovile (1711—1765). M. V. Lomonossov oli väljapaistev füüsik kui ka spetsialist mäeasjanduses, metallurgias ja tehnoloogia küsimustes. Ta konstrueeris mitmed klaasesemete tootmiseks vajalikud tööpingid, projekteeris materjalide katsetamise masinaid, leiutas originaalseid seadmeid ning mehhanisme jne. M. V. Lomonossovi silmapaistvad teoreetilised tööd rajasid vene leidurite, inseneride ja konstruktorite loomingu arengule tõsise teoreetilise aluse. Tema ja ta õpilaste töödele tuginedes lõid I. P. Kulibin, I. I. Polzunov, K. D. Frolov, vennad Tšerepanovid jt. tähelepanuväärseid masinaid ja mehhanisme.

5°. Akadeemia töötajate seast paistavad XVIII sajandil silma kaks suurt vene leidurit ja mehaanikut: A. K. Nartov ja I. P. Kulibin.

Andrei Konstantinovitš Nartov (1684—1756) on masinaehituse tehnoloogia alal mitme väga suure leiutise autoriks. Muuseas leiutas ta treipinkides kasutatava iseliikuva supordi. Nartov oli oma oskuselt välismaisi insenere tunduvalt ületavaks metallilõikepinkide konstruktoriks. Ta ehitas masinaid saehammaste stantsimiseks, keermete lõikamiseks, konstrueeris tõstukeid jne.

Ivan Petrovitš Kulibin (1735—1818), kes kolmkümmend aastat töötas Teaduste Akadeemia mehaanikuna, oli silmapaistev leidur ja konstruktor. I. P. Kulibin valmistas Teaduste Akadeemia töökodades kõik need rohkearvulised seadmed, mida akadeemikud kasutasid oma eksperimentaalsetes töödes, nagu elektrimasinad, kellamehhanismid, astronoomilisteks vaatlusteks vajalikud optilised aparaadid jne. I. P. Kulibini kui leiduri tegevust iseloomustab tema mitmekülgsus. Temale kuulub prioriteet uut tüüpi sillasõrestikkude väljatöötamises, mehaanilise proteesi loomises jne. Kulibin on originaalse mehaanilise kaariku konstruktsiooni autoriks. Ta leiutas veel laeva, mille liikumapanemiseks kasutatakse ära jõevoolu, mitut tüüpi automaatseadmeid, helgiheitja jne. I. P. Kulibini silmapaistvaid võimeid hindas kõrgelt tema kaasaegne, aka-

deemik L. Euler, kes oma kirjavahetuses korduvalt märkis selle vene leiduri geniaalsust.

6°. Rääkides praktilise mehaanika arengust XVIII sajandil Venemaal, tuleb erilist tähelepanu pöörata geniaalsele vene leidurile ja konstruktorile Ivan Ivanovitš Polzunovile (1728—1766). I. I. Polzunov ehitas esimese aurumasina Venemaal. Tema tegevus ei olnud vahetult seotud Teaduste Akadeemiaga, kuid võib oletada, et XVIII sajandi algul Teaduste Akadeemia töötajate poolt avaldatud mehaanika-alased uurimistööd olid I. I. Polzunovile tuntud ja avaldasid suurt mõju tema loomingule. Võib näiteks märkida XVIII sajandi esimesel poolel ilmunud Peterburi akadeemiku I. V. Krafti teost «Lühikene juhatus lihtsate ja keeruliste masinate tundmaõppimiseks, koostatud Venemaa nooruse tarviduseks» ning Mereakadeemia presidendi Grigori Grigorjevitš Skornjakov-Pissarevi raamatut «Staatika teadus ehk mehaanika». Nendes raamatutes käsitleti üksikasjaliselt lihtsamate masinate ja mehhanismide teooriat.

XVIII sajandi lõpul oli silmapaistvaks mehaanikuks akadeemik Semjon Kirillovitš Kotelnikov (1723—1806). Ta kirjutas raamatu, mis ilmus pealkirja all «Õpetus kehade tasakaalust ja liikumisest» ja kus käsitletakse teoreetilisi mehaanika aluseid ning nende rakendamist mitmesuguste mehaaniliste seadmete juures.

7°. Teiseks suureks teaduslikuks tsentriks, kus praktilist mehaanikat intensiivselt arendati, oli 1755. aastal M. V. Lomonossovi initsiatiivil loodud Moskva Ülikool.

Praktilise mehaanika arengut Moskva Ülikoolis soodustas suur teadlane ja insener, professor Nikolai Dmitrievitš Braschmann (1796—1866). Olles hariduselt insener, mõistis N. D. Braschmann hinnata praktilise mehaanika tähtsust kõrgesti haritud eriteadlaste ettevalmistamisel, olgu see siis üldises mehaanikas, hüdraulikas või termodünaamikas. Seetõttu valis N. D. Braschmann oma kõige andekamate õpilaste seast Aleksander Stepanovitš Jeršovi (1818—1867) ja tegi sellele ülesandeks uurida ülalloetletud distsipliinide õpetamise viise nii vene kui ka välismaa kõrgemates õppeasutustes.

Alates 1844. aastast tegeleb A. S. Jeršov Moskva Ülikoolis õppetööga, algul dotsendina, hiljem praktilise mehaanika kateedri professorina. 1854. aastal avaldas ta raamatu «Kinemaatika alused ehk elementaarne õpetus liikumisest üldse ja masinate mehhanismist eriti». Selles raamatus käsitleb A. S. Jeršov masspunkti ja jäiga keha kinemaatikat, vaatleb liikumise muundamisviise mitmesuguste mehhanismide abil ja toob ära lihtsate madalamaid paare sisaldavate neljalüliliste mehhanismide, sirgjooneliselt suunavate mehhanismide ja nukk- ning hammasmehhanismide kinemaatika. Haaratud küsimuste ulatuse kui ka käsitluse sügavuse poolest ületas see A. S. Jeršovi teos paljuski tema kaasaegsete

välismaiste autorite raamatuid. Tuleb märkida ka A. S. Jeršovi ühiskondlikku tegevust kõrgema tehnilise hariduse eest võitlejana Venemaal ja tema osa Moskva Kõrgema Tehnikakooli loomisel.



P. L. TSEBÕSEV

8°. N. D. Braschmanni õpilaseks Moskva Ülikoolis oli kuulus vene matemaatik ja mehaanik, mehhanismide teooria vene koolkonna looja, akadeemik Pafnuti Lvovitš Tšebõšev (1821—1894). P. L. Tšebõševi tähtsust suure vene matemaatikuna on hästi valgustatud reas kodu- ja välismaiste uurijate töödes. Tunduvalt vähemal määral on uuritud tema osa mehhanismide teooria, või — nagu tol ajal nimetati — praktilise ehk rakendusmehaanika arengus, olgugi et tänu just Tšebõševi silmapaistvatele töödele tõusis vene mehhanismideteadus eesrindlikuks ja muutus iseseisvaks, omandades erilise, ainult temale omase suuna. Tšebõševi teeneks on rea ülesannete püstitamine ja nende hiilgav lahendamine mehhanismide teooria ühes keerulisemas küsimuses — mehhanismide

sünteesi (projekteerimise) küsimuses. Selle küsimuse kallal töötasid möödunud sajandi vältel ja töötavad praegugi nii vene kui ka välismaa suurimad teadlased.

Enne Tšebõševi ei esinenud vene tehnilises kirjanduses spetsiaalselt mehhanismide teooriale pühendatud töid, rääkimata mehhanismide sünteesi käsitlevatest teostest. Need vähesed uurimused, milledes tolleaegsed prantsuse ja inglise teadlased sünteesiprobleemi käsitlesid, kandsid enamikul juhtudel üksikute eriülesannete lahendamise iseloomu, olles mõnikord ilma tõsise matemaatilise töötluseta. Esimesel hetkel tundub üllatavana, et Tšebõšev, valinud oma uurimistöö objektiks mehhanismide sünteesi ühe keerukaima ülesande — šarniirmehhanismide sünteesiprobleemi —, suutis välja töötada selle lahenduse niisuguses ulatuses, et isegi käesoleval ajal, rohkem kui 90 aastat pärast šarniirmehhanisme käsitleva esimese Tšebõševi memuaari ilmumist, ei ole tema meetod kaotanud vähemalgi määral oma tähtsust. Vastupidi, see osutub allikaks, kust uurijad veel kaua aastaid võivad ammutada materjale mehhanismide sünteesiülesannete lahendamiseks.

Mõned teadlased kalduvad arvama, et Tšebõševi poolt lahendatud tasapinnaliste mehhanismide sünteesiülesannetel ei ole iseseisvat tähtsust, ja et nad osutuvad ainult Tšebõševi matemaatiliste teooriate leidlikult saadud rakendusteks. Praktilise mehaanika valdkonda kuuluvate Tšebõševi tööde üksikasjaline analüüs aga näitab vastupidist. Võib järeldada, et hulgaline mehhanismide sünteesi ülesannete püstitamine ja nende lahendamine Tšebõševi poolt ei ole kaugeltki juhuslik ega osutu ainult tema matemaatiliste teooriate illustratsiooniks. Nad on loogiliselt tingitud sellest suurest huvist, mida Tšebõšev kogu oma elu kestel tundis praktilist mehaanikat ja tehnikat käsitlevate küsimuste vastu.

Tšebõšev uuris sihikindlalt oma kaasaja suurimate praktilise mehaanika spetsialistide töid. Seda põhjustas kõigepealt huvi, mida Tšebõšev ilmutas tolleaegsete masinakonstruktsioonide (aurumasinate, turbiinide, tuulemootorite, paberimasinate jne.) vastu. Teiseks põhjuseks oli sügav arusaamine tähendusest, mis oleks võinud olla nende juurutamisel tolleaegsetesse tehniliselt mahajäänud vene tehastesse ja vabrikutesse. Viibides välismaisel komandeeringul Pariisis, Brüsselis ja Londonis, tutvub Tšebõšev üksikasjaliselt kõige mitmekesisemate masinate konstruktsioonidega ja tal on pikemaid kõnelusi väljapaistvamate teadlaste ja inseneridega. Tšebõšev jälgib loenguid praktilise mehaanika alal ja kogub hoolega materjale ning vahendeid, mida ta vajab vastavate loengute pidamiseks Peterburi Ülikoolis, Aleksandri Lütseumis ja mujal.

Kaasaegsed hindasid kõrgelt Tšebõševi saavutusi praktilises mehaanikas. 1850. aastal, seoses Tšebõševi valimisega Peterburi Ülikooli erakorraliseks professoriks, rõhutab akadeemik V. J. Bun-

jakovski oma esilduses asjaolu, et Tšebõšev, lisaks reale matemaatikakursustele, loeb veel praktilise mehaanika kursust füüsika ja matemaatika teaduskonna reaalharus, milles valmistati ette täppisteaduste õpetajaid. Eriti märgib akadeemik Bunjakovski Tšebõševi poolt esitatud hammasrataste teooriat.

1853. aastal, seoses Tšebõševi valimisega Peterburi Teaduste Akadeemia adjunktiks, teatab akadeemia alatine sekretär Peterburi Ülikooli rektorile, et Tšebõšev valiti akadeemiasse rakendusmehaanika alal. 1854. aastal väljaantud määruses Tšebõševi valimise kohta Riigivarade Ministeeriumi Õpetatud Komitee korrespondeerivaks liikmeks on märgitud, et ta valiti «silmas pidades tema üldtuntud teadmisi mehaanika alal».

Meie ajani on säilunud Tšebõševi poolt Peterburi Ülikooli füüsika ja matemaatika teaduskonnas loetud praktilise mehaanika kursuse programm. Sellega tutvumine näitab, et nimetatud kursust loeti erakordselt kõrgel teaduslikul tasemel. Tšebõšev käsitles hammasrataste teooriat, masinate dünaamikat (koos hoomasside valiku teooria küsimustega), hõõrdumist kinemaatilistes paarides, mehhanismides esinevate löökide teooria küsimusi jne.

Kõik ülaltoodu näitab ilmselt, et Tšebõševi poolt püstitatud ja lahendatud mehhanismide teooria ülesanded ei ole juhuslikud ega ka ainuüksi tema matemaatika-alastest huvidest tingitud, vaid et need kujutavad endast täiesti iseseisvaid, praktilise mehaanika väljapaistva spetsialisti poolt tehtud teaduslikke uurimusi.

Millega seletada, et Tšebõšev valib praktilise mehaanika mitmekesiste küsimuste hulgast ühe kõige keerukama ja raskema — šarniirmehhanismide sünteesi probleemi? Seda valikut tuleb seletada asjaoluga, et XIX sajandi keskel on šarniirmehhanismide teooria muutunud väga aktuaalseks. Ilmub palju sellealaseid teaduslikke töid. Tol ajal leiab ka juba suur hulk šarniirmehhanisme praktilist rakendamist reaalsetes konstruktsioonides — aurumasinates, tuulemootorites, tekstiilimasinates jne. Paljud teadlased, kellega Tšebõšev kohtus ja mõtteid vahetas, olid ülaltähendatud mehhanismide teooriat käsitlevate tööde autoriteks. On loomulik, et ka Tšebõšev tundis šarniirmehhanismide vastu erilist huvi ja et nende teooriale on tema teaduslikes memuaarides pühendatud palju ruumi.

Viieteistkümnest memuaarist ja märkmest, milledes Tšebõšev käsitleb mehhanismide teooria küsimusi, on kaksteist memuaari pühendatud šarniirmehhanismide sünteesi ülesannetele ja kolm — mitmesuguste teiste mehhanismide, nagu regulaatorite, hammasrataste jms. teooriale. Šarniirmehhanismide sünteesi probleemide seast eelistas Tšebõšev peamiselt nn. ligikaudselt suunavate mehhanismide sünteesi küsimusi. (Ligikaudselt suunavateks mehhanismideks nimetatakse mehhanisme, millede teatavate punktide trajektoorid erinevad vähe vastavatest etteantud kõveratest.) Tše-

bõšev lahendas šarniirmehhanismi punktide poolt kujundatavate trajektooride lähendamise sirgele või ringjoonele nii kogu trajektoori ulatuses kui ka ainult selle teatavas osas. Nimetatud ülesande lahendamiseks töötas Tšebõšev välja spetsiaalse matemaatilise meetodi.

Tšebõševi mehhanismide teooriat käsitleva pärandi uurijale on kuulsa teadlase poolt ehitatud mehhanismide mudelid sama suure tähtsusega, kui tema poolt avaldatud memuaaridki. Tõepoolest, kui piirduda ainult avaldatud memuaaridega, siis näib, nagu oleks Tšebõševi poolt lahendatud mehhanismide teooria ülesannete arv suhteliselt väike. Tšebõševi poolt loodud mudelite analüüs aga näitab, et tema loominguline diapasoon oli erakordselt lai. Tšebõševi poolt lahendati tunduvalt laiem probleemide kompleks, milles ligikaudselt suunavate mehhanismide sünteesimise ülesanne moodustab ainult erijuhu. Lähtudes sümmeetriliste kepsuköverate omadustest, lahendas Tšebõšev sünteesimise ülesande mitut tüüpi šarniirmehhanismide jaoks. Viimaste hulka kuuluvad peatustega (pausidega) liikuvad šarniirmehhanismid, vända ühe täispöörde kohta nookurile kahte kiikumist andvad šarniirmehhanismid, veetavatele lülidele mitmesuguste liikumisseadustega pöörlevat liikumist ülekandvad šarniirmehhanismid ja paljud teised.

Lisaks ligikaudselt suunavate mehhanismide sünteesiprobleemile lahendas Tšebõšev sama ülesande veel rea konkreetseid funktsioone täitvate mehhanismide juures, nagu aurujagamismehhanismid, kaalud, press, regulaatorid, aritmomeeter jt.

Analüüsides kõiki materjale, mis käsitlevad Tšebõševi töid mehhanismide teooria alal, selgub, et mehhanismideteaduse arenguloos ei leidu ühtegi teist teadlast, kelle loomingus esineks nii palju tähelepanuväärsete omadustega mehhanisme. Nende loomine osutus jõukohaseks ainult säärasele hiilgavale matemaatikule ja mehaanikule, nagu seda oli Tšebõšev. Tema mehhanismide poolt realiseeritud liikumiste mitmekesised ja üllatavad vormid hämmastavad alati vaatlejat ja pakuvad väärtuslikku materjali uurijate ning leidurite loomingulistele ideedele.

Tšebõševi loomingut iseloomustab äärmiselt tihe seos tema poolt uuritavate teoreetiliste probleemide ja tehnikas esinevate konkreetsete ülesannete vahel. Tšebõšev ise kirjutas selle küsimuse kohta järgmist:

«Teooria lähendamine praktikale annab kõige viljakamaid tulemusi, ja praktika pole seejuures ainus, mis selle läbi võidab; teadused ise arenevad tema mõjul, ta näitab neile kätte uusi uurimisobjekte või avastab uusi küsimusi probleemides, mis on ammu tuntud. Hoolimata kõrgest arenguastmest, milleni on viidud matemaatilised teadused tänu viimase kolme sajandi geomeetrite töödele, näitab praktika selgelt nende lünklikkust mitmes suhtes;

ta esitab küsimusi, mis oma olemuselt on teadusele uued ja mis sunnivad seetõttu otsima täiesti uusi uurimismeetodeid. Kui teooria palju võidab vana meetodi uutest rakendustest või tema uutest arendustest, siis veelgi enam ammutab ta uute meetodite avastamisest ja sel puhul leiab teadus endale praktika näol tõelise juhendaja.»

Tšebõševi kogu loomingut iseloomustab veel algupärasus ülesannete asetuses ja nende lahendustes, mis on nii omane kogu vene teadusele. Tšebõševi töödes, mis käsitlevad mehhanismide teooriat, ei leidu ühegi välismaise teadusliku koolkonna, suuna või üksikteadlaste mõjustusi. Nagu N. I. Lobatševski geomeetrias, seisis ka Tšebõšev oma kaasaegsetest nii palju kõrgemal, et teda isegi täielikult ei suudetud mõista. Alles nüüd, kus mehhanismideteadus on asunud vahetult mehhanismide sünteesimise probleemi lahendamisele, ollakse suutelised väärikalt hindama Tšebõševi teadusliku loomingu geniaalsust. Tšebõšev kuulub teadlaste hulka, kes iga oma teoreetilise otsingu suunavad praktikat huvitavaile küsimustele või lõpetavad kõik oma uurimistööd konkreetsete rakendustega praktikas. Sellest seisukohast lähtudes võib Tšebõševi kõrvutada Lomonossovi, Žukovski ja teiste suurte vene õpetlaste-looduseuurijatega.

9°. Väljapaistev osa rakendusmehaanika arengus kuulub ka analüütilise mehaanika ühe rajaja — akadeemik Mihhail Vassiljevitš Ostrogradski (1801—1861) kahele õpilasele — Ivan Alekseje-vitš Võšnegradskile ja Nikolai Pavlovitš Petrovile.

I. A. Võšnegradski (1831—1895) oli masinate dünaamika ühe tähtsama haru — automaatse reguleerimise teooria — rajajaks. I. A. Võšnegradski oli praktilise mehaanika professoriks Mihhaili Suurtükiväe Akadeemias, kuid töötas samal ajal ka professorina Peterburi Praktilise Tehnoloogia Instituudis. Ta avaldas rea reguleerimise teooriat käsitlevaid töid, mis tunduvalt ennetasid saksa ja prantsuse teadlaste vastavaid uurimusi. I. A. Võšnegradski tööd on oma tähtsuse säilitanud kaasajani. Märgime, et I. A. Võšnegradski tegeles intensiivselt inseneripraktikaga ja pühendas palju tähelepanu üldinseneri-distsipliinide õpetamise küsimustele kõrgemates tehnilistes õppeasutustes.

N. P. Petrov (1836—1920) oli kaua aega Peterburi Tehnoloogiainstituudi professoriks. 1894. aastal valiti ta Venemaa Teaduste Akadeemia auliikmeks. Ta on kirjutanud suure hulga teaduslikke töid, mis käsitlevad mitmeid tehnilisi distsipliine. Nende seas osutub tähtsaimaks tema 1883. aastal avaldatud uurimistöö «Hõõrdumine masinates ja määrdeõlide toime sellele». Nimetatud töös käsitles N. P. Petrov nähteid, mis leiavad aset tapi pöörlemisel määrdeõliga kaetud liugelaagris. N. P. Petrov pani aluse laagrites esineva hõõrdumise hüdrodünaamilisele teooriale. Seda

teooriat arendasid edasi N. J. Žukovski, S. A. Tšaplõgin, N. I. Mertsalov ja teised nõukogude teadlased.

I. A. Võšnegradski üheks õpilaseks oli Viktor Lvovitš Kirpitšov (1845—1913). V. L. Kirpitšov töötas rea aastate vältel Peterburi Polütehnilises Instituudis korralise professorina, siirdus seepeale algul Harkovi Tehnoloogiainstituudi, pärast Kiievi Polütehnilise



V. L. KIRPITŠOV

Instituudi direktori ametikohale ja lõpuks 1903. a. alates töötas uuesti rakendus- ja ehitusmehaanika õppetoolil Peterburi Polütehnilises Instituudis. V. L. Kirpitšov avaldas rea töid mehhanismide kinemaatika alal, mis käsitlesid tasapinnaliste mehhanismide trajektooride, kiiruste ja kiirenduste määramist. Suure kuulsuse saavutas tema raamat «Vestlusi mehaanikast», kus erakordselt lihtsal ja arusaadaval kujul oli esitatud süsteemide dünaamika põhivõrrandid, muuhulgas nende seas ka mõningad masinate dünaamika küsimused. V. L. Kirpitšovi mõjutusel tegelesid rakendusmehaanika küsimustega K. E. Rerih, A. A. Radzig ja teised tema õpilased, kes avaldasid sel alal rea teaduslikke töid.

10°. Pärast A. S. Jeršovi surma arendas praktilist mehaanikat

Moskva Ülikoolis edasi Jeršovi õpilane Fjodor Jevplovitš Orlov.

F. J. Orlov (1843—1892) töötas pärast Moskva Ülikooli lõpetamist mitmete tolleaegsete suurte teadlaste juhendamisel ja tutvus laboratooriumide, tehaste ning vabrikutega, valmistudes ette praktilise mehaanika õpetamiseks ülikoolis. F. J. Orlovi suur eruditsioon nii praktilises mehaanikas kui ka matemaatikas andis talle võimaluse korraldada praktilise mehaanika õpetamist nii Moskva Ülikoolis kui ka Kõrgemas Tehnikakoolis erakordselt kõrgel teaduslikul tasemel. F. J. Orlovi poolt loetud praktilise mehaanika kursus koosnes mehhanismide teooriast, masinate üldteooriast, hüdraulikast koos turbiinide teooriaga ja termodünaamikast koos soojusmootorite ja aurumasinate teooriaga. F. J. Orlov organiseeris Moskva Ülikooli ja Kõrgema Tehnikakooli juurde suurepärased mehaanikakabinetid, kus olid esitatud mitmesuguste masinate ja mehhanismide mudelid. Kuigi F. J. Orlov ei ole kirjutanud matemaatika või rakendusmehaanika alal kapitaalseid teoseid, oli tema osa rakendusteaduste arengus Venemaal siiski erakordselt suur.

F. J. Orlov oli N. J. Žukovski lähedane sõber ja avaldas noorele, tol ajal alles algajale teadlasele suurt mõju. Ta tutvustas N. J. Žukovskit rea inseneripraktikas esilekerkinud ülesannetega ja suunas N. J. Žukovski huvi hüdraulika ja mehhanismide teooria ülesannete lahendamisele.

F. J. Orlovi õpilaste seast on võrsunud mitmed silmapaistvad teadlased: P. K. Hudjakov, A. P. Gavrilenko, A. I. Sidorov ja N. I. Mertsalov, kes lõid aluse vene parima tehnilise õppeasutuse — Moskva Kõrgema Tehnikakooli kuulsusele.

11°. «Vene lennuasjanduse isa» — Nikolai Jegorovitš Žukovski (1847—1921) oli ühtlasi suur vene mehaanik. Tema sulest ilmus rida väljapaistvaid uurimistöid mehhanismide ja masinate teooria alal. Ta rakendas oma teoreetilisi uurimusi alati praktika teenistusse ja vastupidi, ammutas praktikas kerkinud ülesannetest uusi loomingulisi ideid oma sügavaimateks teoreetilisteks uurimusteks.

Mõistes suurepäraselt mehhanismide ja masinate dünaamika arendamise tähtsust, pühendas N. J. Žukovski sellele küsimusele oma klassikaliseks kujunenud teadusliku töö «Kinemaatilisi ahelaid käsitlevate dünaamikaprobleemide taandamisest kangi tasakaalu ülesandele» (1908—1911). Selles töös oli esitatud jõudude analüüsi ja mehhanismide dünaamilise uurimise üldine meetod, mis on kujunenud aluseks nii mehhanismides esinevate jõudude arvutusele kui ka mehhanismide dünaamika ühe keerukaima ülesande — antud jõududest põhjustatud mehhanismi liikumise leidmise — lahendamisele.

Teiseks N. J. Žukovski teaduslikuks tööks, mis avaldas väga

suurt mõju masinate dünaamika arengule, oli tema «Masinate reguleerimise teooria» (1909). Selles töös käsitles Žukovski reguleerimise dünaamikat ja reguleerimisprotsessi stabiilsuse ning koonduvuse küsimusi — seega reguleerimisteooria põhiprobleeme. Rida N. J. Žukovski teaduslikke töid on pühendatud mitmesugustele muudele mehhanismide ja masinate teooria küsimustele, nagu: «Assuri mehhanismist» (1917), «Kõrgema astme võrrandite lahendamiseks ehitatud Kempe aparaadi kirjeldus» (1879), «Surve jaotumisest kruvi ja mutri keermetes» (1902) jt. Viimaste tööde seas osutus eriti tähtsaks uurimus «Hõõrdumisest tapi ja laagri vahelises määrdekihis» (1904), mis on kirjutatud koostöös S. A. Tšaplõginiga. Selles töös on üldkujul antud lahendus ülesandele, mis käsitleb ekstsentriliselt paikneva tapi liikumist määritud laagris.

N. J. Žukovski tööde mõju ei piirdunud ainult tema õpilaste ja ligemate kaastöölistega. Nad on suurel määral mõjustanud ka mehhanismide ja masinate dünaamika arengu üldsuunda NSV Liidus.

12°. XIX sajandi teisel poolel luuakse suurtes provintsiülikoolides oma iseseisvad teaduslikud koolkonnad.

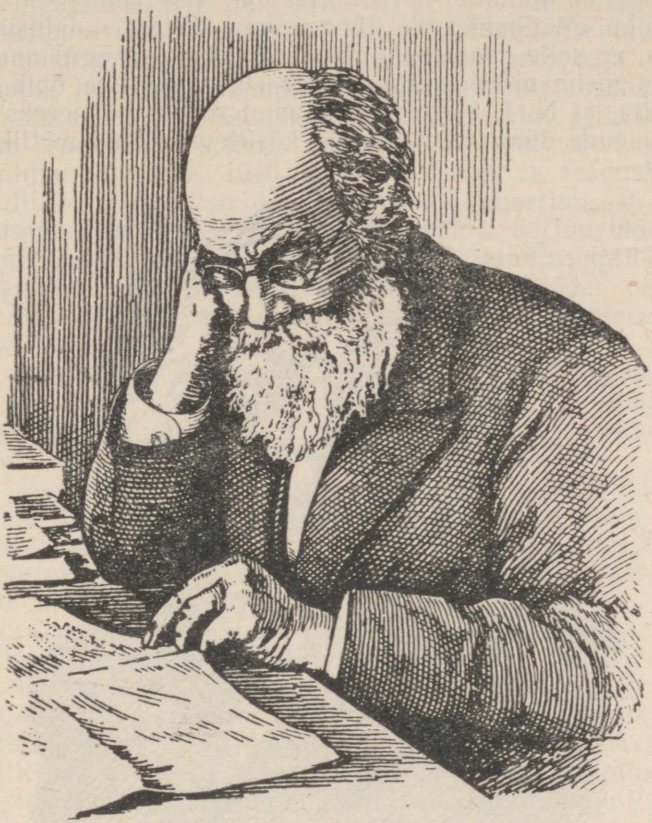
Alates 1872. aastast õpetas Novorossiiski (Odessa) Ülikoolis praktilist mehaanikat professor Valerian Nikolajevitš Ligin, suure hulga tasapinnaliste mehhanismide kinemaatikat käsitlevate tööde autor.

N. V. Ligini üheks õpilaseks oli H. I. Gohman (1851—1916), silmapaistva uurimistöö «Hambumise teooria, üldistatud ja laiendatud analüüsi abil» (1887) autor. See töö oli aluseks reale hilisematele uurimustele, mis kõik olid pühendatud hammasmehhanismide teooriale. H. I. Gohmanile kuulub ka põhjapanev teos «Masinate kinemaatika» (1890), milles ta püüdis luua mehhanismide analüüsi ja sünteesi üldisi meetodeid, toetudes tema poolt väljatöötatud mehhanismide klassifikatsioonile.

Alates 1886. aastast luges Varssavi Ülikoolis rea aastate jooksul mehhanismide ja masinate teooriat Pavel Jossifovitš Somov. Somovi sulest ilmus rida uurimistöid mehhanismide struktuuri ja klassifikatsiooni kohta. Tähtsaimateks nendest olid «Kinemaatilise ahela vabadusastmeist» (1887), «Muutuvate kehade kinemaatika mõningatest rakendustest šarniirmehhanismide teoorias» (1900), «Ühest kahe vabadusastmega kinemaatilisest ahelast» (1894) jt.

Nimetatud uurimustes arendas P. J. Somov tasapinnaliste ja ruumiliste mehhanismide üldist struktuuriteooriat ning lahendas ühtlasi rea mehhanismide projekteerimise ülesandeid. P. J. Somov sünteesis ka suure hulga mehhanisme, mis reprodutseerisid kõige mitmekesisemaid liikumisvorme.

13°. N. J. Žukovski üheks õpilaseks ja hilisemaks kaastöötajaks oli väljapaistev nõukogude teadlane, professor Nikolai Iva-



N. J. ŽUKOVSKI

novitš Mertsalov (1860—1948). N. I. Mertsalov osutus F. J. Orlovi väärikaks järglaseks Moskva Ülikooli ja Moskva Kõrgema Tehnikakooli professori ametikohtadel. Ta laiendas tunduvalt Moskva Kõrgema Tehnikakooli mehaanikakabinetti. Oma rakendusmehaanika loengutes andis ta reale mehhanismide kinemaatika ja dünaamika ülesannetele uusi originaalseid lahendamismeetodeid.

N. I. Mertsalovi 1904. a. ilmunud õpik «Mehhanismide kinemaatika» toob range, geomeetrilistele analüüsi- ja sünteesimeetodeile rajatud mehhanismide teooria esituse. Kinemaatilise geomeetria alused ja nende rakendamine mehhanismide uurimisel on selles teoses esitatud otse üllatava selgusega. Samas raamatus on veel püstitatud tasapinnaliste mehhanismide sünteesi üldine ülesanne, mis kujunes hilisemate sellealaste uurimistööde aluseks.

Selleks, et hinnata N. I. Mertsalovi teise kapitaalse teose — tema õpiku «Mehhanismide dünaamika» (1914) — tähtsust, tuleb märkida, et selle raamatu ilmumiseni puudus kogu maailmakirjanduses mehhanismide dünaamika süstemaatiline õpik. Seega võib väita, et N. I. Mertsalovi raamat osutus esimeseks suureks mehhanismide dünaamika aluseid käsitlevaks kokkuvõtlikuks teoseks.



N. I. MERTSALOV

Nii vene kui ka välismaiste teadlaste seas oli N. I. Mertsalov esimene, kes hakkas uurima ruumiliste mehhanismide teooriat. 1921. aastal alustas ta ruumiliste mehhanismide teooria lugemist Timirjazevi Põllumajanduse Akadeemia masinaehituse teaduskonnas. Nendes loengutes käsitles N. I. Mertsalov jäiga keha kinemaatikat ruumis ning sfääriliste ja mõningate seitsmelüliliste mehhanismide teooriat. Et rõhutada N. I. Mertsalovi prioriteeti ruumiliste mehhanismide teooria alal, märgime, et mõnede saksa teadlaste uurimused, mis lahendasid N. I. Mertsalovi probleemidele analoogilisi ülesandeid, ilmusid alles käesoleva sajandi kol-

mekümnendatel aastatel. Pole kahtlust, et N. I. Mertsalov on ruumiliste mehhanismide teooria rajajaks. Ta reageeris elavalt kõigile küsimustele, mis olid seotud nimetatud teooriaga. Näiteks 1936. aastal, huvitudes ruumiliste seitsmelüliliste mehhanismide kiiruste määramise probleemist, avaldab Mertsalov selle ülesande lahenduse teaduslikus artiklis «Kiiruste määramisest ruumilises seitsmelülilises ahelas». 1940. aastal kirjutab ta teadusliku töö seitsmelüliliste mehhanismide asendite konstrueerimisest ruumis. Ainulaadseteks oma liigis on N. I. Mertsalovi uurimistööd laotuvate ja mittelaotuvate kaasprofiilidega varustatud ruumiliste hammasülekannete projekteerimise kohta. Nendes töödes on antud suurepärane näide ruumilise hambumise üldjuhu geomeetrilisest sünteesist.

N. I. Mertsalovi teadusliku töö suunale avaldas suurt mõju koostöö vene teaduse korüfeedega: N. J. Žukovskiga, sotsialistliku töö kangelase akadeemik S. A. Tšaplõginiga ja au-akadeemiku V. P. Gorjatškiniga.

N. I. Mertsalov arendas oma määrimise hüdrodünaamilist teooriat käsitlevates töödes edasi Žukovski ja Tšaplõgini ideesid. N. I. Mertsalov kirjutas ülalnimetatud uurimistööd seoses Žukovski ja Tšaplõgini tähelepanuväärsete, vedelikulist hõõrdumist käsitlevate memuaaride ilmumise 30. aastapäevaga.

Erakordne huvi, mida N. I. Mertsalov ilmutas ruumiliste mehhanismide vastu, seletub suurel määral asjaoluga, et N. I. Mertsalovil tuli koos töötada akadeemik V. P. Gorjatškiniga. Viimane soovitas temal tegelema hakata ruumiliste mehhanismidega ja alustada vastava kursuse lugemist. Rida N. I. Mertsalovi silmapaistvaid töid, mis käsitlevad ruumiliste mehhanismide analüüsi ja sünteesi ning põllumajandusmasinate mehhanisme, ilmusid seega tänu V. P. Gorjatškini kasulikule mõjustusele.

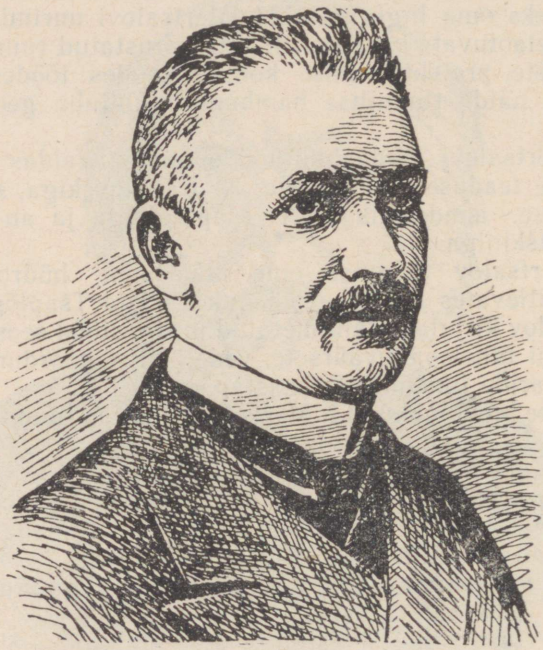
14°. Uue teadusliku distsipliini — «põllutöö mehaanika» — rajajaks ning rea mehhanismide ja masinate dünaamikat käsitlevate suuremate uurimistööde autoriks on teine N. J. Žukovski õpilane — akadeemik Vassili Prohhorovitš Gorjatškin (1868—1935).

Oma teoses «Põllumajandusmasinate ja -riistade massi ja kiiruste teooria» avastas V. P. Gorjatškin põhilised seaduspärasused, mis seovad töö- ja jõumasinate masse, nende käigu ebaühtlust ning lülide tegelikke kiirusi. See oli maailmakirjanduses esimeseks töömasinate dünaamikat käsitlevaks teoseks. Uurimuses «Inertsjõud ja nende tasakaalustamine» esitas V. P. Gorjatškin mehhanismide ja masinate tasakaalustamise ning stabiilsuse teooria alused. Reas teistes töödes käsitles V. P. Gorjatškin löögi teooria küsimusi, põllumajandusmasinates esinevate tasapinnaliste ja ruumiliste mehhanismide kinemaatikat ning dünaamikat jne.

V. P. Gorjatškin pühendas palju tähelepanu eksperimentaalsetele uurimistöödele, arendades sel viisil N. J. Žukovski tradit-

siooni, kes püüdis oma kõikide uurimuste tulemusi katsete abil kontrollida. V. P. Gorjatškin rajas mitu suurt eksperimentaalsete uurimistööde tsentrit. Ta konstrueeris mitukümmend originaalset aparaati ja seadist. Me võime teda õigusega lugeda töömasinate dünaamika rajajaks.

15°. N. J. Žukovski ja N. I. Mertsalovi üheks silmapaistvaks õpilaseks oli professor Leonid Vladimirovitš Assur (1878—1920). Lõpetanud 1906. aastal Moskva Kõrgema Tehnikakooli, hakkas



L. V. ASSUR

L. V. Assur Peterburi Polütehnilise Instituudi õppejõuks. 1916. aastal kaitses ta samas instituudis oma väitekirja «Tasapinnaliste madalamate paaridega varbmehhanismide struktuuri ja klassifikatsiooni uurimine».

L. V. Assuri suurimaks teeneks mehhanismide teoorias osutub tasapinnaliste šarniirmehhanismide ratsionaalse klassifikatsiooni loomine. L. V. Assuri vastavad ideed olid esitatud tema ülalnimetatud dissertatsioonis. Selles töös on toodud Releaux' ja tema järglaste loodud saksa koolkonna sügav kriitika ja näidatud, et saksa koolkonnal ei õnnestunud luua mehhanismide ratsionaalset süsteemi, mis oleks seotud mehhanismide kinemaatiliste ja dünaamiliste uurimismeetoditega.

L. V. Assur käsitleb oma töös gruppide võimalikke struktuurivorme ja tõestab, et mis tahes ühe vabadusastmega tasapinnalist mehhanismi on alati võimalik moodustada vändast ja kinnislülist koosnevale algmehhanismile teatavate kinemaatiliste ahelate järkjärgulise juurdeliitmise teel. Juurdeliidetavaid kinemaatilisi ahelaid on hiljem hakatud nimetama «Assuri gruppideks». Samas töös teeb Assur ettepaneku mehhanismide jagamiseks perekondadesse, klassidesse, liikidesse, järkudesse jne., arvesse võttes nende struktuuritunnuseid. Dissertatsioonis on esitatud veel Assuri gruppide uurimiseks tuletatud originaalsed kinemaatilised ja kinetostaatilised meetodid. See L. V. Assuri töö ületas kaugelt vastavad välismaised saavutused ja kujunes aluseks, millele on rajatud paljude nõukogude teadlaste tööd, kes arendasid ja täiendasid nii L. V. Assuri klassifikatsiooni kui ka tema poolt väljatöötatud mehhanismide uurimismeetodeid.

Nõukogude teadlaste töödega on tõestatud, et L. V. Assuri klassifikatsiooni aluseks võetud printsiibid on laiendatavad kõikidele võimalikkudele mehhanismidele, nii tasapinnalistele kui ka ruumilistele, sõltumatult neis esinevatest kinemaatilistest paaridest. L. V. Assuri tööd võib käsitleda kui silda, mis ühendab vene klassikalist mehhanismide teooria koolkonda (Tšebõšev, Somov, Žukovski jt.) kaasaegse nõukogude koolkonnaga.

16°. Revolutsioonieelne vene mehhanismide ja masinate teooria koolkond oli esitatud sääraste silmapaistvate teadlastega, nagu P. L. Tšebõšev, N. P. Petrov, I. A. Võšnegradski jt., kuid Tsaari-Venemaa tingimustes ei leidnud nimetatud teadlaste tööd peaaegu mingit praktilist kasutamist. Revolutsioonieelse Venemaa mahajäänud tööstus ja põllumajandus kasutas peamiselt välismaiseid masinaid. Paljude masinaehitusettevõtete eesotsas seisid välismaised insenerid, kes ei olnud huvitatud originaalsete vene masinate ja mehhanismide arengust. Alles pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni loodi meie kodumaal tingimused, mis soodustasid masinaehituse arenemist, ja pandi alus masinateaduse tõelisele õitsengule.

Paljud meie kodumaise masinateaduse väljapaistvad esindajad, nagu N. J. Žukovski, V. P. Gorjatškin, N. I. Mertsalov, L. V. Assur jt., elasid Suure Oktoobrirevolutsioonini ja said tänu sellele aktiivselt osa võtta kõikidest üritustest, mis olid seotud nõukogude teaduse ja tehnika arenguga.

N. J. Žukovski, V. P. Gorjatškini ja teiste meie maa eesrindlike teadlaste juhtimisel luuakse suurimad teadusliku uurimise instituudid (ЦАГИ, ЦИАМ, ВИСХОМ, ВИМЭ jt.), tugevdatakse ülikoolide ja kõrgemate tehniliste õppeasutuste eksperimentaalbaase, organiseeritakse noorte teadlaste kaadri ettevalmistamist jne.

17°. Moskva Kõrgemas Tehnikakoolis töötasid ja töötavad praegugi N. I. Mertsalovi õpilased mehhanismide ja masinate

teooria mitmesuguste küsimuste kallal. Professor L. P. Smirnov lahendas rea masinate dünaamikasse puutuvaid küsimusi. L. P. Smirnovi õpilane, professor V. A. Gavrilenko arendab edasi hammasmehhanismide geomeetria küsimusi. Nimetatud uurimistööde aluseks on võetud H. I. Gohmani ja N. I. Mertsalovi klassikalised tööd. Käesoleval ajal moodustab Moskva Kõrgem Tehnikakool ühe nendest teaduslikkudest tsentritest, kus toimub viljakas uurimistöö tasapinnaliste ja ruumiliste hambumiste teooria alal.

N. I. Mertsalovi ja L. P. Smirnovi koolkonda kuuluvad ka professorid G. G. Baranov ja L. N. Rešetov. Professor G. G. Baranov töötas läbi ja lahendas rea tähtsaid probleeme ning ülesandeid ruumiliste mehhanismide kinemaatika alalt. Ta on arendanud ka tasapinnaliste mehhanismide struktuuri, kinemaatika ja kinetostaatika küsimusi.

Prof. L. N. Rešetovi tööd käsitlevad peamiselt nukkmehhanismide teooria ja projekteerimise küsimusi ning hammasrataste korrigeerimist.

N. I. Mertsalovi õpilaseks oli ka NSV Liidu Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige V. V. Dobrovolski. Prof. Dobrovolski on kirjutanud rea põhjapanevaid töid, mis käsitlevad mehhanismide ja masinate teooria kõige mitmekesisemaid küsimusi. Ta on välja töötanud mehhanismide struktuuri ja klassifikatsiooni üldised alused, arendanud ruumiliste, eriti aga sfääriliste mehhanismide teooriat, lahendanud rea küsimusi mehhanismide projekteerimise alalt, uurinud hambumise teooriat, joonistavaid mehhanisme jne. V. V. Dobrovolski tööd on avaldanud suurt mõju paljude noorte nõukogude teadlaste hilisematele uurimustele. V. V. Dobrovolski õpilane, akadeemik N. G. Brujevitš, on teinud rea suuri teaduslikke töid, mis käsitlevad tasapinnaliste ja ruumiliste mehhanismide analüütiliste uurimismeetodite arendamist, nn. «passiivsete sidemetega» mehhanismide teooriat jne.

Lisaks sellele on N. G. Brujevitš avaldanud mitmeid töid mehhanismide täpsuse teooria alal. Sel mehhanismide ja masinate teooria lõigul on suur tähtsus kaasaegsetes täpsetes aparaatides esinevate mehhanismide projekteerimisel ja konstrueerimisel.

V. V. Dobrovolski teine õpilane, prof. M. A. Skuridin, on tegelenud küsimustega, mis on seotud kinemaatilistes paarides esinevate hõõrdejõudude mõjuga mehhanismide dünaamikale, ja uurinud masinate liikumist etteantud jõudude toimel.

Timirjazevi Põllumajanduse Akadeemias loodi prof. N. I. Mertsalovi ja akadeemik V. P. Gorjatškini poolt suur teaduslik koolkond, mis haaras nii masinate üldteooria kui ka põllumajandusmasinate teooria küsimusi.

Alates 1921. aastast luges N. I. Mertsalov Timirjazevi Põllumajanduse Akadeemias nii mehhanismide ja masinate teooria üld-

kursust kui ka mitmeid erikursusi. Samal ajal luges seal põllutöö mehaanikat akadeemik V. P. Gorjatškin. Nende kahe väljapaistva vene teadlase paljud õpilased on edasi arendanud nii põllumajandusmasinate teooriat kui ka mehhanismide ja masinate teooria üldküsimusi. Nimetatud õpilaste seast on oma mehhanismide teooriat käsitlevate tööde poolest tuntud V. I. Lenini nimelise Üleliidulise Põllumajandusteaduste Akadeemia liikmed V. A. Želigovski ja I. F. Vassilenko, ning edasi — professor S. I. Artobolevski ja akadeemik I. I. Artobolevski.

V. A. Želigovski töötas läbi rea küsimusi põllumajandusmasinate teoorias, konstrueeris suure hulga mitmesuguseid instrumente ja aparaate põllumajandusmasinate katsetamiseks ning lõi ühtlasi rea põllutöömasinate uusi konstruktsioone. Tema tööde tähtsus ei piirdu ainult põllumajandus-mehaanikaga, vaid haarab ka mehhanismide ja masinate üldteooriat.

I. F. Vassilenko on mitmete põllumajandusmasinaid käsitlevate uurimistööde autor ning tema poolt on loodud koristusmasinate, muuhulgas ka kombainide uusi mehhanisme.

S. I. Artobolevski on läbi töötanud rea küsimusi, mis on seotud põllumajandusmasinates esinevate mehhanismide kinemaatilise ja dünaamilise uurimisega. Viimastel aastatel on ta lahendanud rea tähtsaid, masinautomaatide üldteooriaga seotud küsimusi.

I. I. Artobolevskile kuulub rida töid mehhanismide ja masinate struktuuri teooria, kinemaatika ja dünaamika valdkonnas.

I. I. Artobolevski õpilased, tehniliste teaduste doktor N. I. Levitski ja dotsent S. A. Tšerkudinov on tunduvalt laiendanud madalamaid paare sisaldavate mehhanismide projekteerimise meetodeid. I. I. Artobolevski õpilase V. A. Zinovjevi poolt on arendatud mehhanismide kinemaatilise ja kinetostaatilise uurimise analüütilist meetodit ning lahendatud mõned masinagregaatide dünaamikasse puutuvad probleemid.

Tehniliste teaduste doktorid D. S. Tavhelidze ja N. D. Husseinov — mõlemad I. I. Artobolevski õpilased — olid esimesed kõrgeltkvalifitseeritud spetsialistid mehhanismide ja masinate teooria alal Nõukogude Gruusias ja Aserbaidžaanis.

Suur teaduslik koolkond loodi Moskva Tekstiiliinstituudi professori A. P. Malõševi poolt. Professor Malõšev töötas läbi tekstiilitööstuse masinate teooria ja arvutuse küsimused, uuris mehhanismide struktuuri analüüsi ja sünteesi meetodeid ning lahendas rea teisi mehhanismide ja masinate teooriasse puutuvaid küsimusi.

Professor A. P. Malõševi koolkonna suureks teeneks tuleb lugeda masinate kinemaatilise ja dünaamilise uurimise eksperimentaalsete meetodite arendamist. Moskva Tekstiiliinstituudis asutati Nõukogude Liidu esimene mehhanismide ja masinate teooria laboratoorium. Terve rida A. P. Malõševi õpilasi said oma kooli nimetatud laboratooriumis tehtud uurimistööde najal. Nendest

õpilastest tuleb märkida professor V. A. Judinit, kelle sulest on ilmunud rida töid nii mehhanismide ja masinate üldteooria kui ka peenmehaanikas kasutatavate mehhanismide kohta. A. P. Malõševi teise õpilase prof. V. T. Kostitsõni poolt lahendati rida probleeme, mis on seotud nukkmehhanismide uurimise ja projekteerimisega. Muuhulgas arendas prof. V. T. Kostitsõn originaalse meetodi vähimate gabariitmõõdetega nukkmehhanismide projekteerimiseks. Lisaks sellele kuulub V. T. Kostitsõnile rida töid mehhanismide ja masinate eksperimentaalse dünaamika ning tekstiili- ja kergetööstuse masinate teooria alal.

Moskva Mäeinstituudi professor L. B. Levenson töötas välja esimese põhjapaneva kursuse kasulike kaeviste rikastamismasinate teooria ja arvutusmeetodite kohta ning kirjutas mehhanismide ja masinate teooria õpiku, mis on ilmunud juba mitmes trükis.

Ukraina NSV TA korrespondeeriv liige S. N. Koževnikov koos oma õpilastega tegi Dnepropetrovski Metallurgiainstituudis suuri uurimistöid mehhanismide ja masinate teooria üldküsimustes. Muu hulgas avaldas prof. Koževnikov rea töid masinate ja masinagregaatide dünaamika ning hammasrataste geomeetria alalt. Prof. Koževnikov ja tema õpilased on edasi arendanud metallurgiatööstuse masinate ja mehhanismide teooria probleeme. S. I. Koževnikovi sulest on ilmunud mehhanismide ja masinate teooria õpik.

18°. Kaasaegne Leningradi teadlaste koolkond on oma aluse saanud professorite V. L. Kirpitšovi, D. S. Zernovi ja L. V. Assuri töödest. Suurt teaduslikku huvi pakub prof. K. E. Rerihi töö, mis käsitleb masinate käigu reguleerimise teooriat. Professorid H. F. Ketov ja N. I. Koltšin saavutasid olulisi tulemusi hammasmehhanismide teooria ja arvutamisega seotud küsimustes.

H. F. Ketov on mitmete tasapinnalist evolventhambumist käsitlevate tööde autoriks; N. I. Koltšin on avaldanud rea töid ruumilise hambumise analüütiliste uurimis- ja projekteerimismeetodite kohta.

Leningradi koolkonna esindaja prof. S. V. Vjahhirev avaldas Nõukogude Liidus esimese monograafia masinautomaatide kohta.

Masinate tasakaalustamise ning mehhanismide reguleerimise ja projekteerimise teooria valdkonnas kuulub rida olulise tähtsusega uurimistöid Leningradi professorile M. V. Semjonovile.

Hammasmehhanismide teooria küsimusi arendavad käesoleval ajal väga edukalt Leningradi teadlased, kellede hulgast võib mainida V. N. Kudrjavtsevit ja F. L. Litvini. Masinautomaatide teooria alal on tuntud ka leningradlase prof. A. P. Ivanovi tööd.

Meil ei ole võimalik siinkohal meenutada paljusid teisi andekaid teadlasi, uurijaid ning insenere ja konstruktoreid, kes töötavad mehhanismide ja masinate teooria mitmete eriküsimuste alal. Märgime vast ainult seda, et mehhanismide ja masinate teoo-

ria on laialdaselt arenema hakanud mitte ainult Moskvas ja Leningradis, vaid ka paljudes teistes Nõukogude Liidu linnades. Mehhanismide ja masinate teooria uurimise iseseisvad tsentrid on loodud Harkovis (prof. J. L. Geronimuse poolt), Dnepropetrovskis (prof. S. N. Koževnikov), Tbilissis (prof. D. S. Tavhelidze) ja reas teistes linnades.

ESIMENE JAGU

MEHHANISMIDE STRUKTUURIANALÜÜS JA KLASSIFIKATSIOON

I peatükk

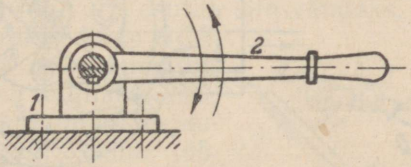
MÕNINGAID ÜLDANDMEID KAASAEGSETEST MEHHANISMIDEST

§ 3. Varbmehhanismid

1°. Käesolevas peatükis kirjeldatakse masinaehituses kõige levinumaid mehhanisme. Kirjelduste eesmärgiks on lugejat esialgselt tutvustada mehhanismidega, millede teooria hiljem esitatakse.

Kirjeldamisel on mehhanismid liigitatud gruppidesse, lähtudes nende konstruktiivsest kujundusest (varb-, nukk-, hammasmehhanismid jne.).

Kaasaegsetes masinates ja aparaatides kasutatakse laialdaselt

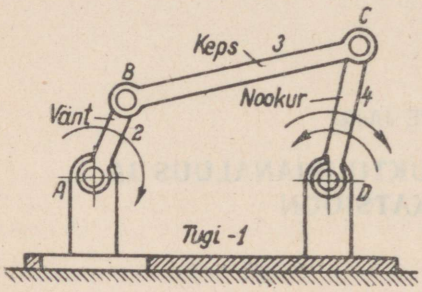


Joon. 1.

nn. *varbmehhanisme*. Viimaste lihtsaimaks esindajaks on nn. *kahelüliline mehhanism*. See koosneb kahest lülist (joon. 1): liikuvast hoovast *2*, mis võib pöörelda ümber paikse telje, ja liikumatust lülist *1*, mida nimetatakse *kinnislüliks*. Kahelüliliste mehhanismide hulka kuuluvad paljude roteeruvate masinate, nagu elektrimootorite, turbiinide, ventilaatorite jt. põhimehhanismid, mis enamikul juhtudel osutuvad ühtlasi ka nimetatud masinate ainsateks mehhanismideks. Tõepoolest, kõikide loetletud masinate mehhanis-

mid koosnevad kinnislülist ja ühest paiksetes laagrites pöörlevast lülist (rootorist).

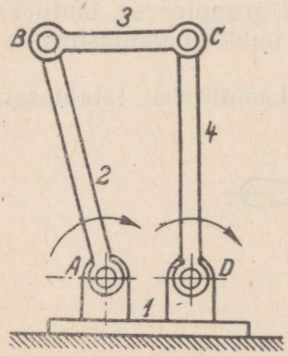
2°. Keerulisemad varbmehhanismid koosnevad neljast lülist. Need on nn. *neljalülilised mehhanismid.*



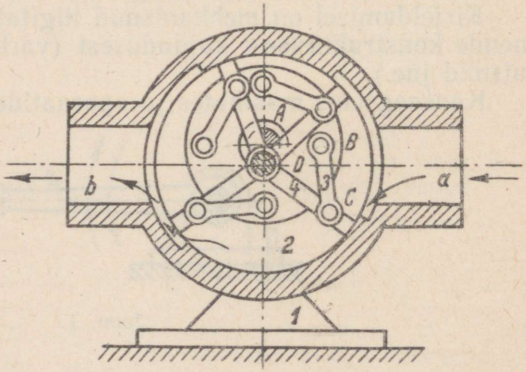
Joon. 2.

Joonisel 2 on toodud *šarniir-nelilülikuks* nimetatav tasapinnaline mehhanism. See koosneb kolmest liikuvast lülist (*2, 3* ja *4*) ning ühest paiksest lülist (*1*). Mehhanismi kõik lülid on omavahel ühendatud šarniirselt, s. t. nad moodustavad sääraseid kinemaatilisi paare, mis võimaldavad lülidel üksteise suhtes ainult pöörlevalt liikuda (rotatsioonipaarid).

Juhul kui kinnislüliga rotatsioonipaari moodustav lüli saab teha täispöörde (s. t. pöörelda 360° ulatuses), siis nimetatakse säärast lüli *vändaks*, kui aga selline võimalus puudub — *nookuriks*. Lüli, mis rotatsioonipaaride abil on ühendatud liikuvateülidega, kuid ei ole seejuures seotud kinnislüliga, nimetatakse *kepsuks*. Šarniir-nelilülikus (joon. 2) on vändaks lüli *AB*, nookuriks — lüli *CD*, kepsuks — lüli *BC* ja kinnislüliks — lüli *AD*.



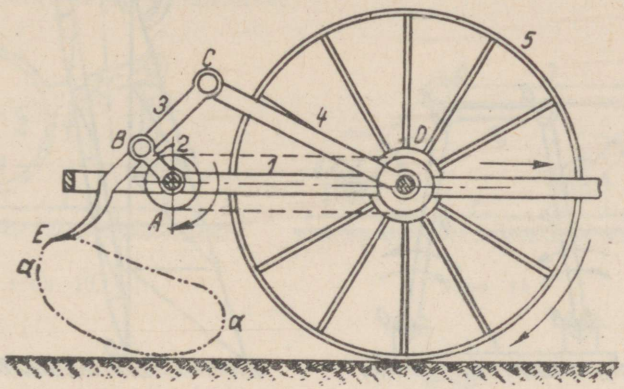
Joon. 3.



Joon. 4.

Šarniir-nelilülikut, milles mõlemad kinemaatiliste paaride kaudu kinnislüliga ühendatud lülid on vändad, s. o. saavad liikuda täispöörde (360°) ulatuses, nimetatakse *kahevändaliseks šarniir-nelilülikuks* (joon. 3). Sellise mehhanismi näiteks on joonisel 4 toodud pump. Esimene vänt *AB* on kujundatud kettana *2*. Teise

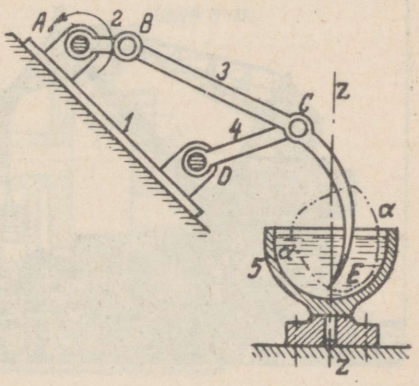
vända moodustab labidas *4*. Kepsuks on lüli *3*, kinnislüliks aga lüli *1*. Jooniselt selgub, et ketta *2* täispöörde jooksul ümber telje *A* teeb lüli *4* samuti täispöörde ümber telje *D*. Tulemusena surutakse vedelik kanalist *a* kanalisse *b*.



Joon. 5.

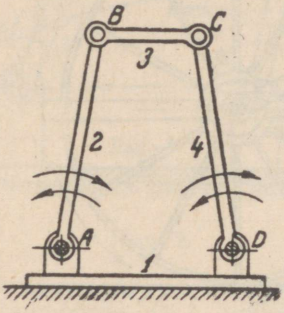
Šarniir-nelilülikut, millel on üks vänt ja üks nookur, nimetatakse *vänt-nookurmehhanismiks* (joon. 2). Praktiliselt on säärast mehhanismi rakendatud näiteks heinakaarutamismasinas (joon. 5). Jooniselt on näha, et vända *AB* täispöörde puhul pöördub nookur *CD* ainult teatava nurga võrra. Lülil *3* olev punkt *E* liigub lüli *1* suhtes mööda trajektoori *aa*. Seda liikumist koos ratta *5* veeremisega kasutataksegi heina kaarutamiseks.

Teise näitena võib tuua taignasõtkumismasina mehhanismi (joon. 6). Vedav lüli *AB* osutub siin vändaks, lüli *CD* aga nookuriks. Taignat sõtkuv käpp *BCE*, mis on kepsuga *BC* liikumatult ühendatud, liigub taignakünas *5*; käpa punkt *E* kujundab seejuures trajektoori *aa*. Masina töötamise ajal pöörleb taignaküna *5* ühtlaselt ümber vertikaaltelje *zz*, mis läbib küna *5* põhja keskpunkti.

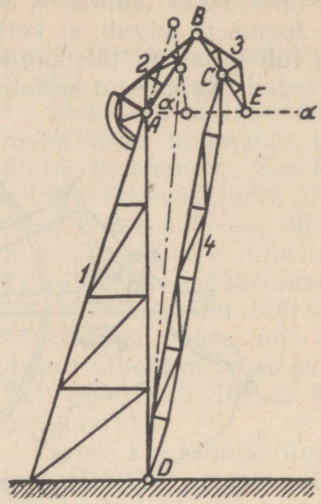


Joon. 6.

Kui šarniir-nelilülikus mõlemad alusega kinemaatilistesse paaridesse astuvad lülid on nookurid, s. t. kui kumbki nimetatud lülidest ei saa teha täispööret (360°), siis on meil tegemist niinimetatud *kahenookurilise šar-*



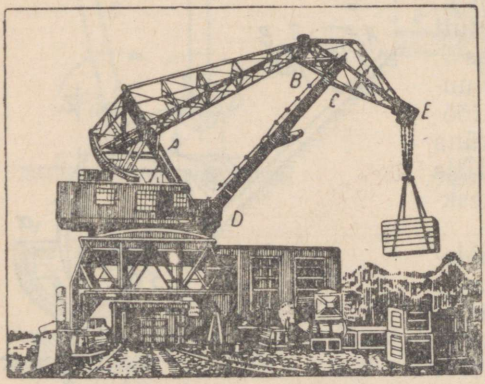
Joon. 7.



Joon. 8.

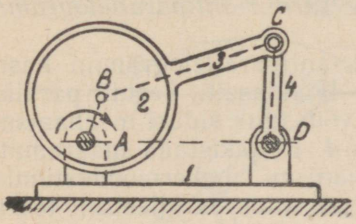
niir-nelilülikuga (joon. 7). Säärase mehhanismi näitena võib tuua tõstekraana mehhanismi (joon. 8). Siin neljalülilise mehhanismi lülid *AB* ja *CD* saavad ümber punktide *A* ja *D* ainult kiikuda. Punktis *E* asub konks trossiga, mille otsas ripub tõstetav last. Nagu jooniselt näha, liigub punkt *E* oma trajektoori *αα*-ga tähistatud osas peaaegu sirgjooneliselt (horisontaalselt). Taoline kraana on kujutatud joonisel 9.

3°. Kinemaatiliste paaride erilise konstruktiivse kujundamisega saadakse nn. *ekstsentrikuga šarniir-nelilülik.* See mehhanism kujundatakse järgmiselt. Olgu antud neljalüliline mehhanism *ABCD* (joon. 10). Selle mehhanismi vänt *AB* olgu seejuures ümmarguse ketta kujuline, mis pöörleb ümber punkti *A* ning mille geomeetriline tsenter asub punktis *B* (säärast ketast nimetatakse *ekstsentrikuks*). Kinemaatilist paari ekstsentrik-keps võib vaadelda kui tapi *B* laien-

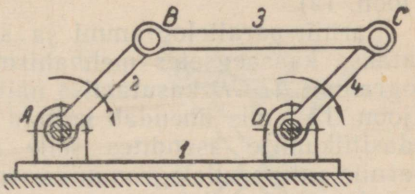


Joon. 9.

damise tulemust mõõdeteni, mil tapi raadius ületab vända pikkuse ning selle tagajärjel viimane asendub ekstsentrikuga. Lihtne on näha, et saadud uue mehhanismi liikumine on identne mehhanismi *ABCD* liikumisega. Ekstsentrikuid sisaldavaid mehhanisme nimetatakse *ekstsentrikmehhanismideks*.

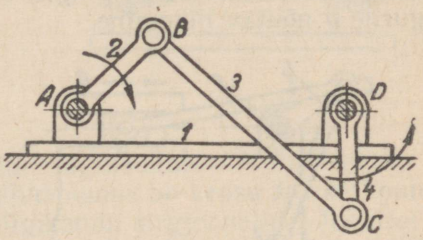


Joon. 10.

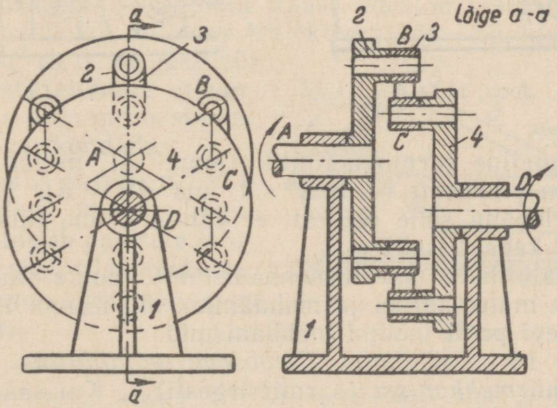


Joon. 11.

4°. Šarniir-nelilüliku erikujudest tuleb veel nimetada *šarniir-parallelogrammi* (šarniir-rööpkülikut, joon 11), s. o. nelilülikut, millel vastastikku asetsevate lülide pikkused on paarikaupa võrdsed. See mehhanism väärib tähelepanu selle poolest, et tema vändad *2* ja *4* pöörlevad ühesuguse nurkkiirusega, keps *3* liigub aga translatoorselt. Kahes asendis, kus väntade *2* ja *4* ning kepsu *3* teljed ühte langevad, s. t. kus mehhanismi kõik lülid asetsevad



Joon. 12.

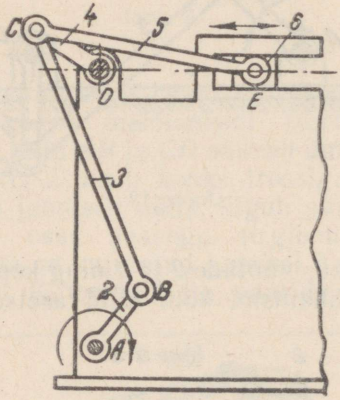


Joon. 13.

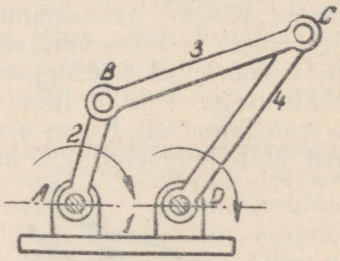
ühel ja samal sirgel, osutub mehhanismi edasiliikumine määramatuks. Vändad *2* ja *4* võivad pärast ühe ülalnimetatud asendi läbimist jätkata pöörlemist ühes ja samas suunas. Sel juhul jääb mehhanism edasi šarniir-parallelogrammiks. Kuid üks vändadest võib hakata pöörlema ka teisele vändale vastupidises suunas. Sel juhul tekib meil uus mehhanism, nn. *šarniir-antiparallelogramm* (joon. 12).

Šarniir-parallelogrammi ja šarniir-antiparallelogrammi kasutatakse kaasaegsetes mehhanismides laialdaselt. Šarniir-parallelogrammi *ABCD* kasutamise näitena võib tuua siduri mehhanismi (joon. 13), mis ühendab kettaid *2* ja *4*. Et takistada määramata edasiliikumise asendites selle mehhanismi ümbermoodustumist šarniir-antiparallelogrammiks, on siduril kuus paralleelselt töötavat šarniir-parallelogrammi, millede asendid omavahel kunagi ei ühti.

Joonisel 14 on näidatud šarniir-antiparallelogramm *ABCD*, mida kasutatakse höövelpingis. Selle mehhanismi abil antakse liugurile *6* nõutav liikumine.



Joon. 14.



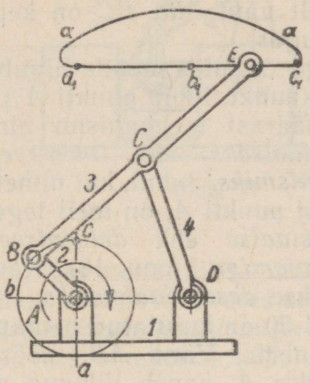
Joon. 15.

Kahevändaline šarniir-nelilülik (joon. 15), millel kõrvutiseisvad lülid on pikkuselt võrdsed, s. t. kus $AB = AD$ ja $BC = CD$, väärib tähelepanu selle poolest, et vända *4* ühe täispöörde ajal teeb vänt *2* kaks täispööret.

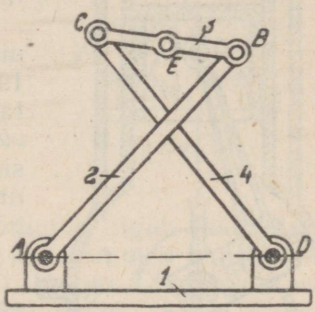
5°. Neljalüliliste šarniirmehhanismide hulka kuuluvad ka kuulsa vene matemaatiku ja mehaaniku, akadeemik Pafnuti Lvovitš Tšebõševi poolt loodud mehhanismid.

Joonisel 16 on näidatud *Tšebõševi neljalüliline ligikaudselt suunav šarniirmehhanism* (šarniirsirgesti). Kui säärases mehhanismis on täidetud tingimused $AD = 2AB$ ja $BC = CD = CE =$

$= 2{,}5\,AB$, siis punkt E kujundab trajektoori $\alpha\alpha$, mis osas $a_1b_1c_1$ erineb väga vähe sirgjoonest. Trajektoori $\alpha\alpha$ nimetatud osa läbimisele vastab punkti B liikumine kaarel abc, mis võrdub ringjoone poole pikkusega. Mehhanismi kasutatakse aparaatides, kus on nõutav, et üks mehhanismi punktidest liiguks oma trajektoori teatavas osas ligikaudu sirgjooneliselt.



Joon. 16.

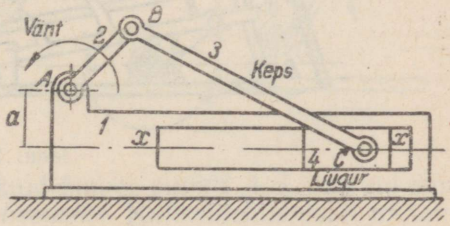


Joon. 17.

Tšebõševi teine neljalüliline ligikaudne šarniirsirgesti on kujutatud joonisel 17. Selles mehhanismis on kepsu BC keskpunkti E trajektoor teatavas ulatuses ligikaudu sirgjooneline. Joonisel 17 toodud mehhanism vastab tingimustele $AB = DC$, $BC = 0{,}5AB$ ja $AD = 0{,}83AB$.[1]

Akadeemik P. L. Tšebõšev töötas välja meetodi, mis võimaldab määrata mehhanismi lülide mõõteid nii, et üks mehhanismi punktidest liiguks oma trajektoori teatavas ulatuses sirgjooneliselt või kujundaks ringjoone kaare. Meetod võimaldab projekteerida mehhanisme, milledes trajektoori kõrvalekaldumised etteantud kujust (s. o. sirgest või ringjoonest) ei ületa etteantud piiri ja seda mitmesuguse ulatusega piirkondades.

6°. Kui šarniir-nelilülikus asendada nookur liuguriga, mis liigub paiksete juhtpindade vahel, siis moodustub *neljalüliline väntmehhanism* (joon. 18).

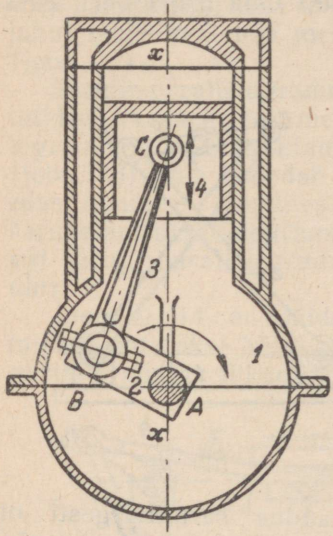


Joon. 18.

[1] Vt. «Научное наследие П. Л. Чебышева», вып. 2, Изд. АН СССР, стр. 96.

Liikuvat lüli *4*, mis moodustab kepsuga *BC* rotatsioonipaari ja kinnislüliga translatsioonipaari, nimetatakse liuguriks.

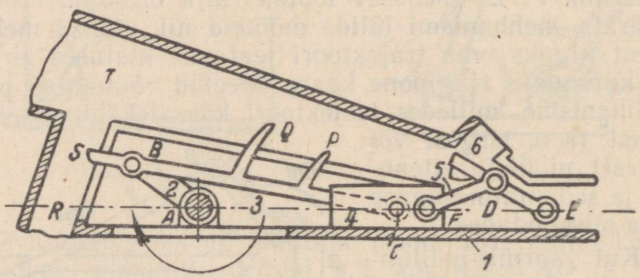
Väntmehhanismi kasutatakse väga laialdaselt kolbmootorites, kompressorites, pressides, pumpades jne. Joonisel 19 on kujutatud mootori väntmehhanism. Lüli *AB* saab teha täispöörde ümber telje *A* ning on järelikult vänt, lüli *BC* on keps ja lüli *4* — liugur.



Joon. 19.

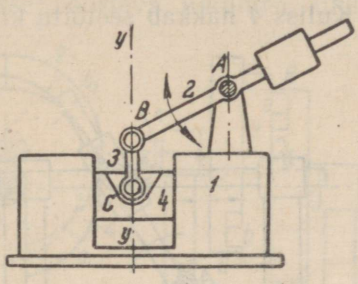
Kui sirge *xx*, mida mööda liigub šarniiri *C* keskpunkt, läbib punkti *A* (joon. 19), siis säärast mehhanismi nimetatakse *aksiaalseks* ehk *tsentreeritud väntmehhanismiks*. Juhul, kui nimetatud sirge ei läbi punkti *A*, on meil tegemist nn. *desaksiaalse* ehk *detsentreeritud väntmehhanismiga* (joon. 18). Kaugust *a* nimetatakse *desaksiaalsuseks*.

Joonisel 20 on kujutatud heinapressi väntmehhanism. Vänt *AB*, pööreldes ümber punkti *A*, paneb liikuma pressi templi *4*. Hein antakse ette kanalite *R* ja *T* kaudu haarajate *S*, *Q* ja *P* abil. Viimased on liikumatult ühendatud kepsuga *BC*. Heina tihendamine toimub nookuriga *6*. Viimane on kinnislüliga ühendatud šarniiri *E* ja lüliga *5* — šarniiri *D* kaudu. Lüli *5* omakorda on punktis *F* šarniirselt seotud templiga *4*.

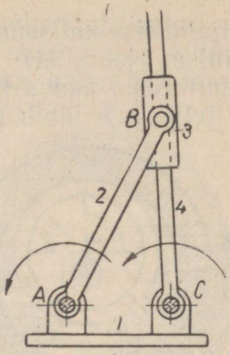


Joon. 20.

Nagu šarniir-nelilülikus, nii ka väntmehhanismis võib lüli *AB* olla kas vänt või nookur. Joonistel 19 ja 20 kujutatud mehhanismides on lüli *AB* vändaks. Joonisel 21 on näidatud sulguri mehhanism, kus lüli *AB* liigub nookurina. Viimane, pöördudes ümber punkti *A*, paneb liikuma sulguri *4*.

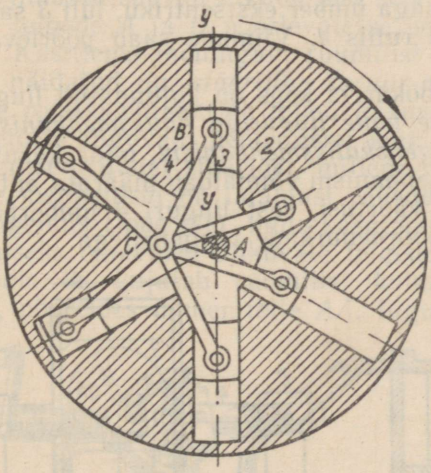


Joon. 21.

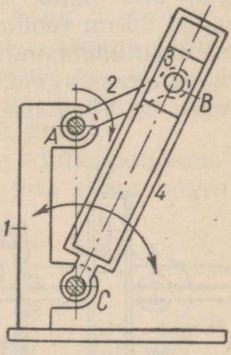


Joon. 22.

7°. Kui neljalülilise mehhanismi liugur liigub liikuvate juhtpindade vahel (liikuvates suunajates), siis on meil tegemist *neljalülilise kulissmehhanismiga* (joon. 22). Liugur *3* liigub siin suunajal *4*, mis omakorda pöörleb täisringis ümber punkti *C*; vänt *2*



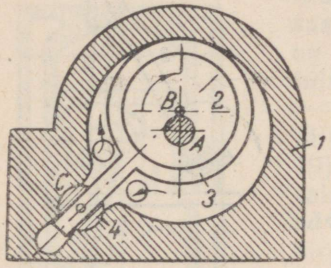
Joon. 23.



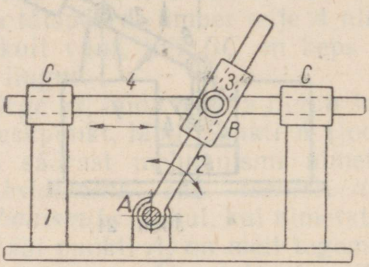
Joon. 24.

pöörleb samuti 360° ulatuses, kuid ümber punkti *A*. Liikuvaid suunajaid nimetatakse üldiselt *kulissideks*. Kulissmehhanismi näitena võib tuua rotatiivse pumba mehhanismi, mis on näidatud joonisel 23. Lüli *2*, mis kujutab endast silindrite plokki, pöörleb ümber paikse telje *A*. Kepsud *4* pöörlevad ümber teise paikse telje *C*. Tulemusena saavad kolvid *3* suhtelise liikumise piki silindrite telgi *yy*. Joonisel 23 näidatud pump on kuuesilindriline.

Neljalülilise kulissmehhanismi näiteks võib olla ka höövelpingi mehhanism (joon. 24). Ümber telje *A* pöörlev vänt *AB* paneb liikuma kulissis *4* asuva liuguri *3*. Kuliss *4* hakkab seetõttu kiikuma ümber telje, mis läbib punkti *C*.



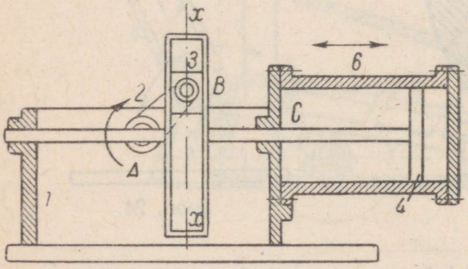
Joon. 25.



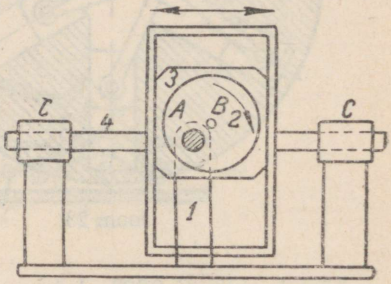
Joon. 26.

Joonisel 25 on näidatud ekstsentrikpumba kulissmehhanism, mis töötab järgmiselt. Ekstsentrik *2* pöörleb ümber telje *A*. Lüli *3* haarab oma rõngakujulise osaga ümber ekstsentriku, lüli *3* saba aga libiseb piluga varustatud rullis *4*. Viimane saab pöörlevalt liikuda ümber telje *C*.

8°. Kui šarniirnelinurga nookur ja keps on kujundatud liuguritena, siis tekib *neljalüliline kahe liuguriga kulissmehhanism*. Joonisel 26 on toodud nn. *tangenskulissmehhanism*, mida kasutatakse arvutusmasinates. See mehhanism võimaldab määrata antud nurkadele vastavaid tangensi väärtusi, sest liuguri *4* ümberpaigutused on võrdelised lüli *2* pöördenurkade tangensitega.



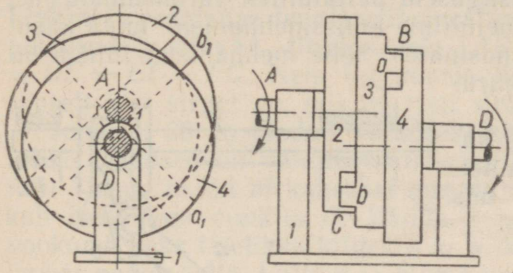
Joon. 27.



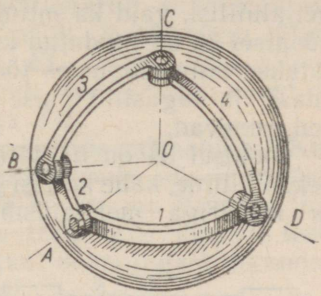
Joon. 28.

Kahe liuguriga kulissmehhanismi teise näitena võib tuua kompressori kulissmehhanismi (joon. 27). Translatoorselt liikuvas kulissis *xx* libiseb liugur *3*. Kuliss *xx* ise on jäigalt ühendatud silindris *6* liikuva kolviga *4*.

Joonisel 28 on näidatud analoogiline ekstsentrikuga kulissmehhanism ja joonisel 29 — samalaadne siduri mehhanism. Viimast kasutatakse pöörleva liikumise ülekandmiseks kahe paralleelse,



Joon. 29.

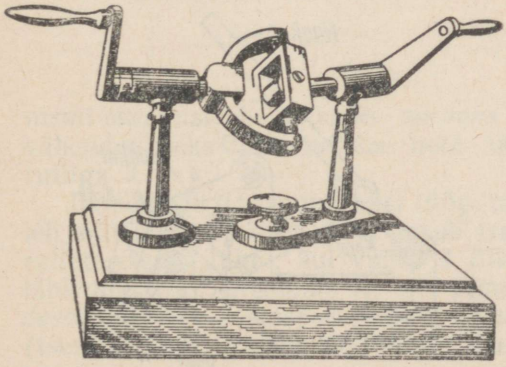


Joon. 30.

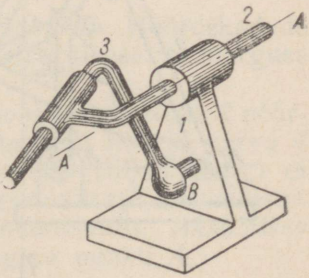
kuid mitte koaksiaalselt asetseva võlli *A* ja *D* vahel. Liikumine kantakse selles mehhanismis üle vaheketta *3* kaudu, mis on varustatud kahe, omavahel risti asetseva risttahukakujulise eendiga *a* ja *b*. Viimased saavad liikuda piki sooni a_1 ja b_1, mis on freesitud ümber telgede *A* ja *D* pöörlevatesse ketastesse *2* ja *4*.

9°. Käsitleme mõningaid ruumilisi varbmehhanisme. Joonisel 30 on näidatud nn. *sfääriline šarniir-nelilülik*. Selle mehhanismi kõikide rotatsioonipaaride teljed lõikuvad ühes ja samas punktis *O*. Seetõttu liiguvad mehhanismi kõik lülid nii, nagu asetseksid nad kontsentrilistel sfääridel, millede ühine tsenter asub punktis *O*. See mehhanism on laialdast rakendamist leidnud nn. universaal-liigendis (joon. 31), mida kasutatakse pöörleva liikumise ülekandmiseks omavahel lõikuvate telgedega võllide puhul.

Joonis 32 kujutab ruumilist kolmelülilist varbmehhanismi. Lüli *2*, pööreldes ümber telje *AA*, liigub ühtlasi piki sama telge



Joon. 31.

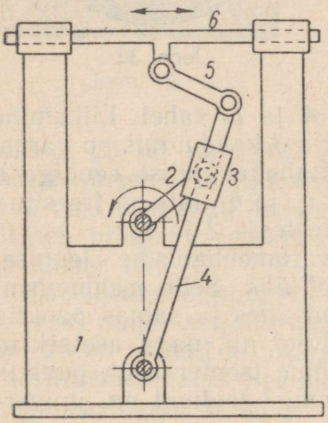


Joon. 32.

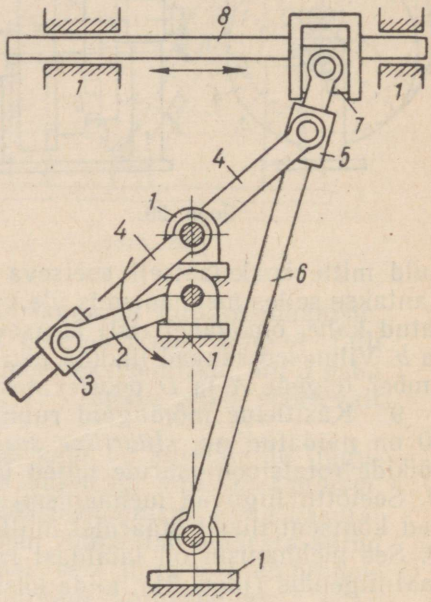
ka translatoorselt ning annab lülile *3* sfäärilise liikumise ümber tsentri *B*.

10°. Tehnikas kasutatakse laialdaselt mitte ainult kolme- ja neljalülilisi, vaid ka mitmesuguseid paljulülilisi varbmehhanisme. Joonisel 33 on näidatud kuuelüliline kulissmehhanism, mida kasutatakse mitmesugustes töömasinates. Selle mehhanismi lülil *6* on edasi- ja tagasiliikumise kiirused erinevad.

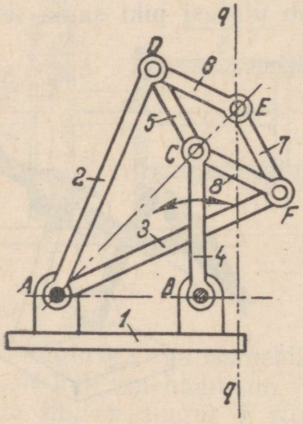
Joonisel 34 on näidatud kaheksalüliline, kahe kulissi ja nelja liuguriga mehhanism, mis



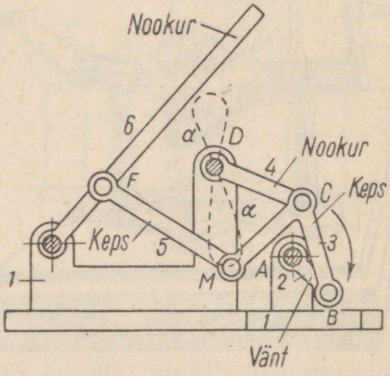
Joon. 33.



Joon. 34.



Joon. 35.



Joon. 36.

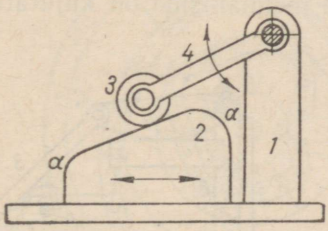
võimaldab anda lülile *8* erinevaid edasi- ja tagasiliikumise kiirusi.

Joonisel 35 on toodud kaheksalüliline täpne suunavmehhanism, mis leiutati üheaegselt ja teineteisest sõltumatult vene teadlase Lipkini ja prantsuse teadlase Peaucellier' poolt. Mehhanismi lülide pikkused vastavad tingimustele $AB = BC$, $AD = AF$, $CD = DE = EF = FC$. Neis tingimusis liigub mehhanismi punkt E täpselt piki sirget qq, mis on risti sihiga AB.

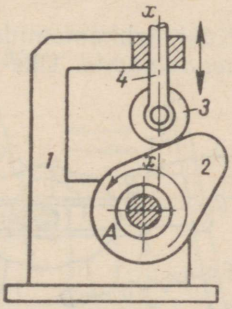
Joonisel 36 on toodud Tšebõševi kuuelüliline mehhanism.[1] Kui lülide pikkused on valitud teatavas proportsioonis, siis kujundab lülil *3* asuv punkt *M* kaheksat meenutava kõvera *aa*. Viimane lõikub iseendaga punktis *D*. Vända *2* iga täispöörde jooksul teeb nookur *6* kaks täielikku kiiget, s. o. kiikuvat edasi-tagasi liikumist ümber paikse telje. Lülid *3* ja *5* on kepsud.

§ 4. Nukkmehhanismid

1°. *Nukkmehhanisme* kasutatakse tehnikas laialdaselt. Joonisel 37 on toodud lihtsaim nukkmehhanism, kus *nukiks* on translatoorselt liikuv lüli *2*. Kõverat *aa*, mille järgi nukk on kujundatud, nimetatakse nuki profiiliks. Lüli *4* nimetatakse sõltuvalt mehha-



Joon. 37.



Joon. 38.

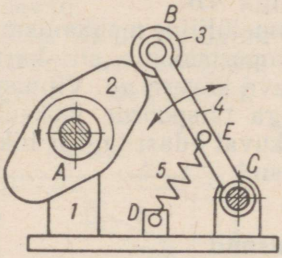
nismi skeemist kas *hoovaks*, *varvaks* või *tõukuriks*. Hõõrdekadude vähendamiseks varustatakse hoob tavaliselt väikese ümmarguse rulliga *3*.

Joonisel 38 on toodud teist tüüpi nukkmehhanism. Nukk *2* pöörleb siin ümber punkti *A* ja surub translatoorselt liikuva varva *4* rullikesele *3*. Juhul, kui varva *4* liikumise siht (liikumistelg) ei läbi nuki pöörlemistelge *A*, siis nimetatakse säärast mehhanismi *desaksiaalseks* (detsentreeritud) *nukkmehhanismiks*. *Aksiaalses* (tsentreeritud) *nukkmehhanismis* läbib telg *xx* punkti *A*.

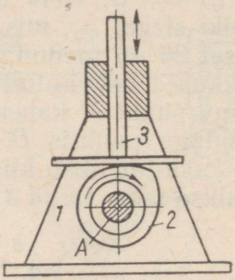
[1] Vt. «Научное наследие П. Л. Чебышева», вып. 2. Изд. АН СССР.

Joonisel 39 on näidatud nukkmehhanism, kus pöörlev liikumine on antud nii nukile *2* kui ka hoovale *4*. Rulli *3* pideva kontakti nukiga *2* tagab vedru *5*.

Mõnedes nukkmehhanismides ei lõpe hoob (või varb) rullikesega, vaid tasapinnalise otsikuga (joon. 40). Sääraseid mehhanisme nimetatakse *tasapinnalise taldrikuga nukkmehhanismideks*.



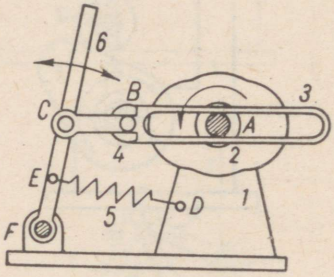
Joon. 39.



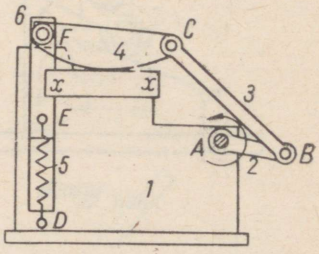
Joon. 40.

Joonis 41 kujutab nukkmehhanismi, mille hooval *3* on liitliikumine.

2°. Nukkmehhanismide hulka kuuluvad ka nn. *veerevate hoobadega mehhanismid*. Üks sääraseid mehhanisme on kujutatud joonisel 42. Lüli *4*, mida vänt *2* kepsu *3* kaudu käitab, veereb ning libiseb liikumatul tasapinnal *xx*.



Joon. 41.

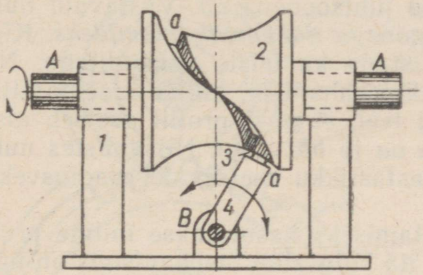


Joon. 42.

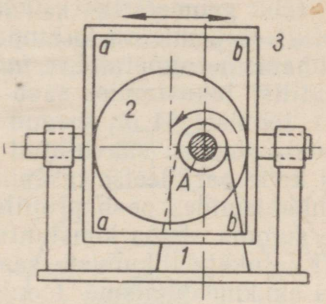
Juhul kui profiilide veeremine nukkmehhanismis toimub ilma libisemata, osutuvad profiilid tsentroididekс. Sel puhul nimetatakse kogu mehhanismi *tsentroidmehhanismiks*. On ilmne, et tsentroidmehhanismid kujutavad endast nukkmehhanismide erijuhtu.

Joonis 43 kujutab ruumilist nukkmehhanismi, mille ülesandeks on pöörleva liikumise ülekandmine nukilt tõukurile perpendikulaarsete, kuid mittelõikuvate (kiivate) telgede *A* ja *B* puhul. Lülisse 2 lõigatud juhtsoone *aa* toimel hakkab rullikesega *3* varustatud hoob *4* kiikuma ümber telje *B*.

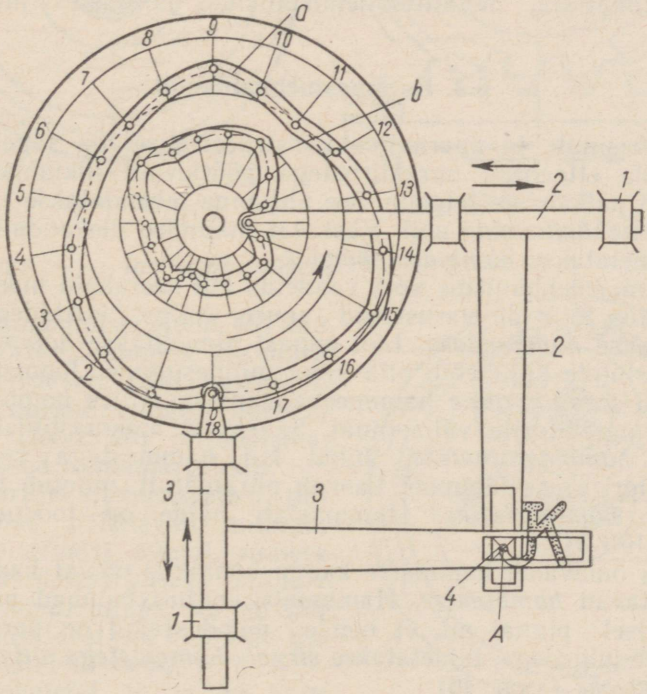
Kontakti säilitamiseks kinemaatilisi paare moodustavate lülide



Joon. 43.



Joon. 44.



Joon. 45.

vahel kasutatakse nukkmehhanismides vedrusid (lüli *5* joonistel 39, 41 ja 42). Säärast nukkmehhanismi lülidevahelise kontakti säilitamise moodust nimetatakse *kinemaatilise paari lukustamiseks jõu abil.* Jõuga lukustamist on võimalik läbi viia ka teistsuguste vahenditega, näiteks raskusjõu abil jne. Juhul kui jõu abil lukustamine osutub mittepiisavaks, tuleb kasutada nn. *kinemaatilist* (ehk geomeetrilist) *lukustamist* (joon. 43). See toimub nuki profiili abil, mis on kujundatud juhtsoonena *aa*. Vastavaid nukkmehhanisme nimetatakse *juhtsoonega nukkmehhanismideks.* Kinemaatilist lukustamist saab teostada ka teiste vahenditega. Näiteks joonisel 44 on toodud nukkmehhanism, milles kinemaatiline lukustamine on saavutatud sel teel, et nuki profiil asetseb alaliselt kahe paralleelse tasapinna *aa* ja *bb* vahel. Niisugustes nukkmehhanismides peab profiili vastastikku asetsevate raadiusvektorite summa olema konstantne.

Keerukate liikumiste saavutamiseks kasutatakse mitme profiiliga nukkmehhanisme. Joonisel 45 kujutatud mehhanismis on nukk varustatud kahe juhtsoonega *a* ja *b*, milles asetsevad lülide *2* ja *3* otsa kinnitatud rullikesed. Liuguri *4* punkt *A* graveerib mehhanismi liikudes tähe «K». Sääraseid mehhanisme kohtab graveerimisautomaatides, metallitöötlemispinkides ja teistes masinates.

§ 5. Hammasmehhanismid

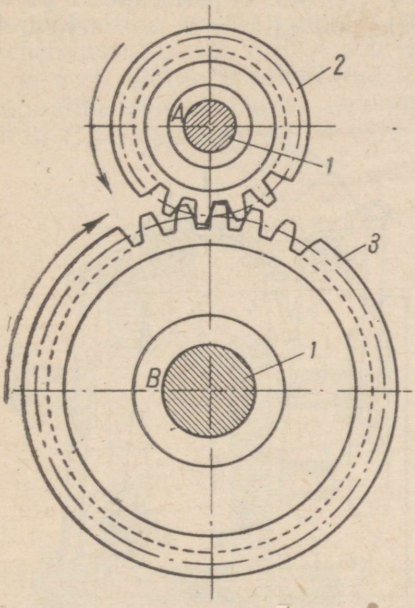
1°. Masinate ja aparaatide konstrueerimisel on sageli tarvis saavutada etteantud nurkkiirustega pöörlevaid liikumisi ümber erinevalt paiknevate telgede. See ülesanne lahendatakse tavaliselt *hammasmehhanismide* abil. Vastavat liikumise ülekandmise moodust nimetatakse *hammasülekandeks.*

Hammasmehhanisme võib vaadelda kui keerukaid nukkmehhanisme, kus lülid on varustatud suure hulga nukkidega, mida nimetatakse *hammasteks.* Lüli ennast nimetatakse *hammaslüliks.* Hammaslülide kuju võib olla väga mitmesugune. Joonisel 46 on näidatud *tasapinnaline* hammasmehhanism, milles hambad paiknevad ringsilindrite välispinnal. Sääraseid hammaslülisid nimetatakse *hammasratasteks.* Juhul kui hammastega varustatud ringsilindri aluse läbimõõt kasvab piiramatult, muutub hammasratas nn. *hammaslatiks.* Hammaslati näide on toodud joonisel 47 (lüli *3*).

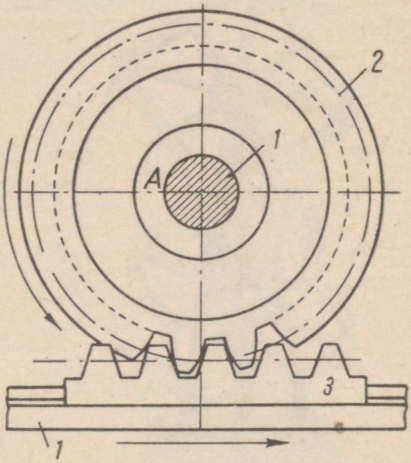
Kaks omavahel hammaste kaudu kontaktis olevat hammaslüli moodustavad *hambumise.* Hambumist, milles hambad paiknevad silindrilisel pinnal nii, et nende moodustajad on paralleelsed silindrite telgedega, nimetatakse *sirgete hammastega silindriliseks hambumiseks* (joon. 46).

Silindriline hambumine võib olla nii välis- kui ka sisehambu-

mine. Silindrilisel *välishambumisel* paiknevad hammasrataste hambad silindrite välispinnal (joon. 46). Silindrilisel *sisehambumisel* paiknevad ühe hammasratta hambad silindri sisepinnal (joon. 48). Silindrilist hammasratast, millel hambad on asetatud ringsilindri pinnale, nimetatakse *ümmarguseks silindriliseks hammasrattaks* (joon. 46 ja 48). Silindrilist hambumist, mis on moodustatud hammasrattast ja hammaslatist, nimetatakse *silindriliseks latthambumiseks* (joon. 47).



Joon. 46.

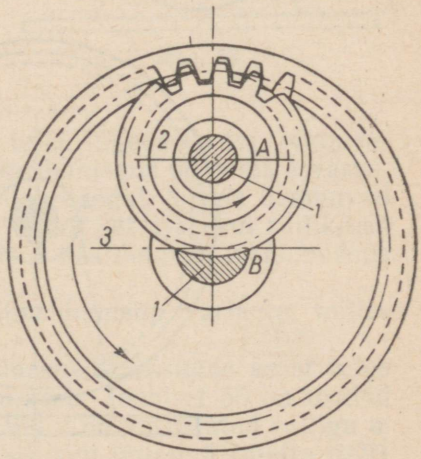


Joon. 47.

Välishambumisel (joon. 46) kantakse pöörlev liikumine üle märgi poolest erinevate (s. o. vastassuunaliste) nurkkiirustega. Sisehambumisel (joon. 48) on mõlemad nurkkiirused samamärgilised.

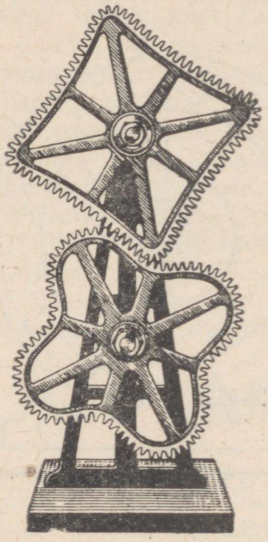
Silindrilist hammasratast, millel hambad paiknevad mitteümmarguse silindri pinnal, nimetatakse *mitteümmarguseks silindriliseks hammasrattaks*. Näited sääraste hammasrataste kohta on toodud joonistel 49 ja 50.

2°. Joonistel 46 ja 48 kujutatud hammasmehhanismide teljed

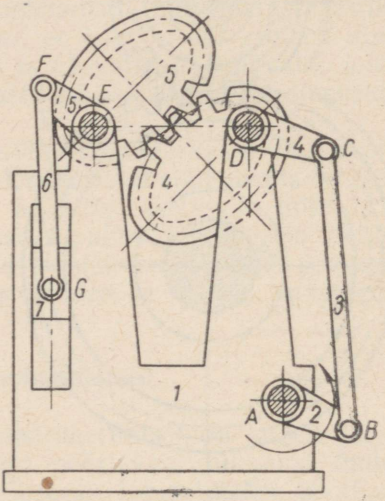


Joon. 48.

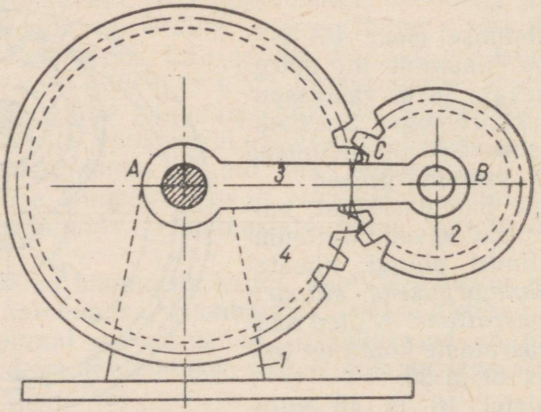
A ja *B*, millede ümber toimub rataste pöörlemine, on p a i k s e d. Praktikas kohtab aga väga sageli mehhanisme, kus mõnede rataste teljed on l i i k u v a d. Joonisel 51 on kujutatud hammasmehhanism, milles ratta *2* telg *B* tiirleb ümber paikse telje *A*, kujundades niiviisi pöördsilindri raadiusega *AB*. Ratas *2* liigub seejuures otsekui veeredes rattal *4*. Selleks, et punktide *A* ja *B* vaheline kaugus jääks muutumatuks, on rataste *2* ja *4* teljed *A* ja *B* omavahel seotud lüliga *3*.



Joon. 49.



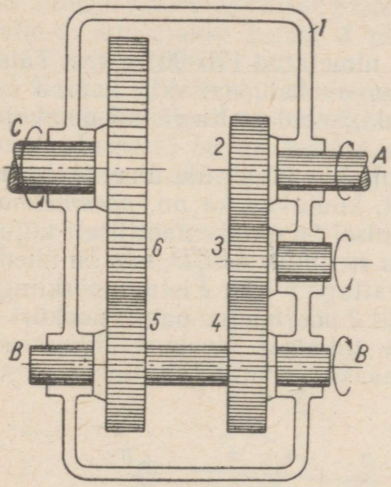
Joon. 50.



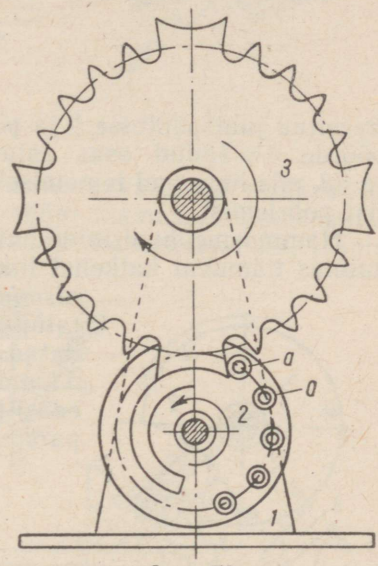
Joon. 51.

Liikuvate telgedega hammasmehhanisme, millede kõik rattad võivad pöörelda, nimetatakse *diferentsiaal-hammasmehhanismideks*. Juhul kui üks hammasratastest on liikumatu, kannab vastav mehhanism *planetaar-hammasmehhanismi* nime.

3°. Liit-hammasmehhanisme, mis koosnevad mitmest hammasrattapaarist, nimetatakse *hammasreduktoriteks*. Joonisel 52 on kujutatud üks selline reduktor, mis hammasrataste *2*, *3*, *4*, *5* ja *6* vahendusel kannab võlli *A* pöörleva liikumise üle võllile *C*. Rattad *4* ja *5* on võllile *B* kinnitatud liikumatult. Võllide *A* ja *B* samasuunaline pöörlemine on saavutatud vaheratta *3* sissetoomisega. Võlli *C* pöörlemissuund on võlli *A* pöörlemissuunaga vastupidine.



Joon. 52.

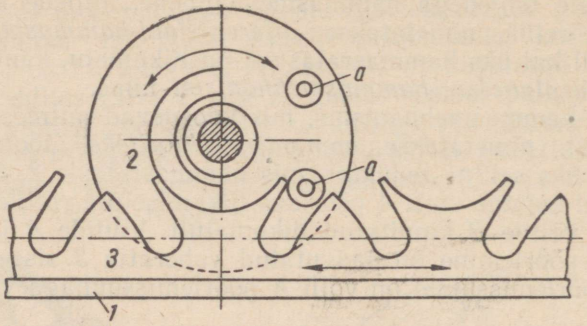


Joon. 53.

4°. Hammasmehhanismide hulka tuleb lugeda ka nn. *tähtmehhanismid*. Joonisel 53 näidatud tähtmehhanismis on ratas *2* varustatud ümmarguste rullikestega (rulltappidega) *a*, mis hambuvad ratta *3* hammastega. Ratas *3* liigub ainult sel ajal, kui rullikesed *a* hambuvad. Tulemusena saab ratas *3* käsitletavas mehhanismis katkelise pöörleva liikumise.

Joonisel 54 on toodud üks tähtmehhanismi variante, milles veetav lüli *3* on kujundatud latina.

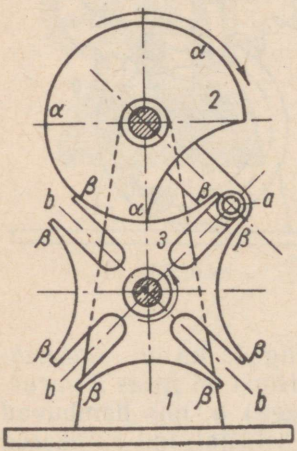
Katkelist liikumist andvate hammasmehhanismide seast tuleb veel nimetada nn. *malta risti mehhanismi*. Joonisel 55 on toodud malta risti mehhanism, mille vedav lüli *2* on varustatud rulliga *a*. Ratta *2* iga täispöörde juures satub see rull lülisse *3* (malta risti)



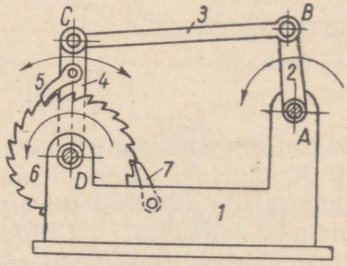
Joon. 54.

freesitud juhtsoontesse *b* ja pöörab nimetatud lüli 90° võrra. Täispöörde ülejäänud osas astuvad omavahel kontakti kaared *αα* ja *ββ*, mis libisevad teineteisel ja takistavad malta risti *3* omavolilist pöörlemist.

Hammasmehhanismide hulka, mis kannavad üle ühes teatavas suunas toimuvat katkelist liikumist, kuuluvad ka nn. *põrkmehhanismid*. Joonisel 56 on skemaatiliselt kujutatud šarniir-nelilülik *ABCD*, mis on ühendatud põrkrattaga *6* lülil *4* istuva põrklingi *5* kaudu. Lüli *2* pöörlemine paneb nookuri *4* edasi-tagasi liikuma. Nookuri liikumisel paremalt vasakule toetub põrklink *5* põrk-



Joon. 55.



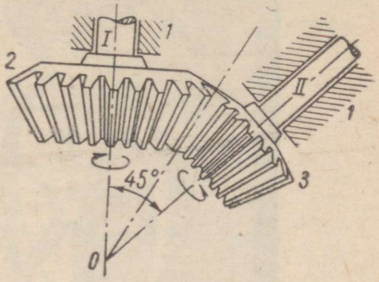
Joon. 56.

ratta *6* hamba taha ja pöörab põrkratast teatava nurga võrra. Põrkratta omavolilist tagasiliikumist väldib tõkestav põrklink *7*.

5°. Vaatleme nüüd *ruumilisi hammasmehhanisme*. Neid kasutatakse juhul, kui on tarvis üle kanda pöörlevat liikumist *mitte-*

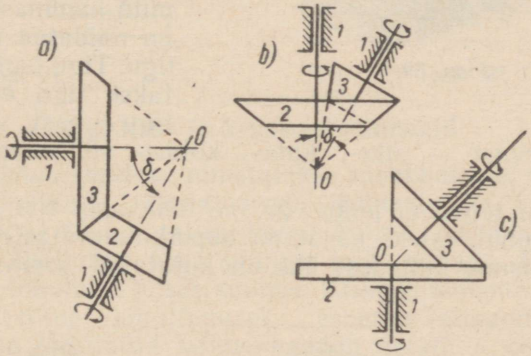
paralleelsete telgede vahel. Telgede vastastikune asend ruumis võib seejuures olla kolmesugune. Esimesel juhul teljed omavahel lõikuvad; teisel juhul teljed ei lõiku, kuid on teineteisega risti; kolmandal juhul teljed omavahel ei lõiku ega ole ka teineteisega risti.

Juhul kui teljed omavahel lõikuvad, kasutatakse tavaliselt nn. *koonushammasratas-mehhanisme.* Sellise mehhanismi näide on kujutatud joonisel 57. Koonusrataste telgede vaheline nurk võib olla meelevaldne. Joonisel toodud näites lõikuvad rataste teljed *I* ja *II* punktis *0,* moodustades omavahel 45° nurga. Pöörates ratast *2* ümber telje *I,* sunnitakse ratast *3* pöörlema ümber telje *II.*



Joon. 57.

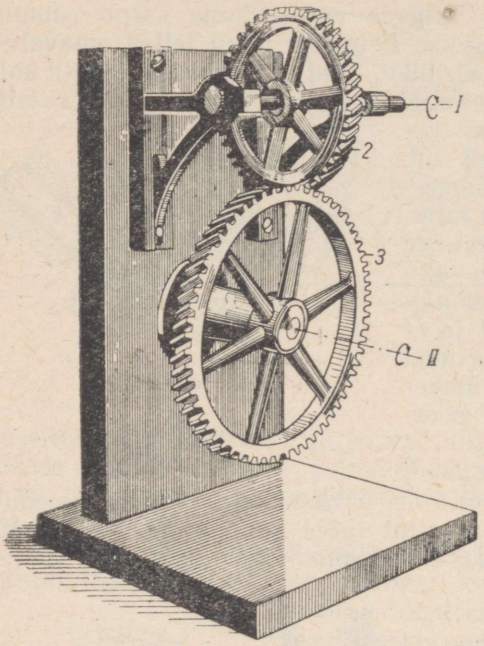
Nagu silinderhammasratastel, nii ka koonushammasratastel võib esineda välis- ja sisehambumine. Joonisel 58 on toodud mitut tüüpi koonusratas-mehhanismide skeeme. Joonis 58, *a* kujutab *koonus-välishambumist,* joonis



Joon. 58.

58, *b* — *koonus-sisehambumist.* Joonisel 58, *c* on näidatud mehhanism, kus koonushammasratas hambub nn. *tasapinnalise koonusrattaga («koonuslatiga»).* See mehhanism on analoogiline silinderhammasrattast ja hammaslatist moodustatud mehhanismiga. Masinates esineb kõige sagedamini koonus-välishambumist telgedevahelise nurgaga 90°. Sisehambumist kohtab erakordselt harva, tingituna raskustest, mis esinevad sääraste hammasrataste lõikamisel.

Mittelõikuvate kuid omavahel risti asetsevate telgede puhul

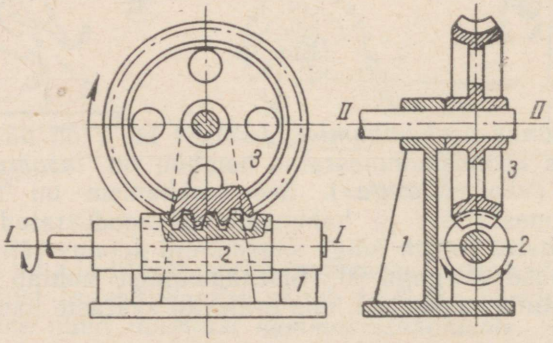


Joon. 59.

kasutatakse nn. *kruviratt-aid.* Nendest moodustatud mehhanism pöörlemise ülekandmiseks omavahel ristuvate võllide vahel on kujutatud joonisel 59. Pööra-tes ratast *2* ümber telje *I*, pannakse ratas *3* pöörlema ümber telje *II*, mis on risti teljega *I*.

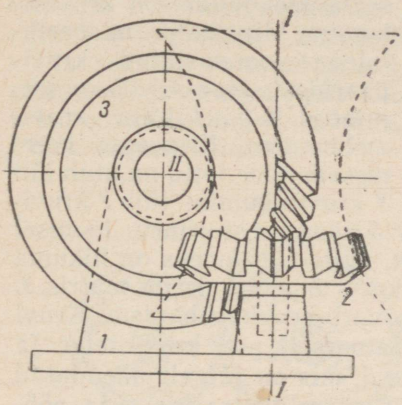
Kui hammaste arv väik-semal rattal väheneb, muu-tub nende kuju keermetao-liseks (joon. 60). Säära-stest kruviratastest moodus-tatud mehhanismi nimeta-takse *tigumehhanismiks* (või lihtsalt tiguülekan-deks). Ratast *2* nimeta-takse *tiguks* ja ratast *3* — *tigurattaks.* Tigul võib olla mitu hammast. Joonisel 60 on näidatud ühe hambaga tigu. Tigu hambaid nimeta-takse tigu *keermeteks* ja tigu ennast, sõltuvalt tema keermete arvust — ühe-, kahe-, kolme- või enamakäiguliseks tiguks.

Juhul kui teljed ei lõiku ega ole omavahel risti, s. o. kiivate telgede üldjuhul, tuleks kasutada hüperboloidratastest moodustatud mehhanisme, milledest üks on kujutatud joonisel 61. Kaks

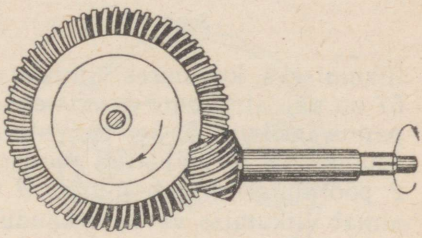


Joon. 60.

pöördhüperboloidi varustatakse nende teatava osa ulatuses hammastega. Kui pöörata ratast *2* ümber telje *I*, hakkab ratas *3* pöörlema ümber telje *II*. Raskuste tõttu, mis esinevad hüperboloidhammasrataste valmistamisel, asendatakse need sageli kas kruvi- või *hüpoidhammasratastega* (joon. 62). Viimased kujutavad endast koonushammasrattaid, millede hammaste külgpinnad on kujundatud kruvipindadena. Hüpoidrataste hambad paiknevad hüperboloidi nendes piirkondades, mida võib ligikaudselt asendada tüvikoonustega. Hüpoidrattaid kasutatakse mootorite ülekannetes.



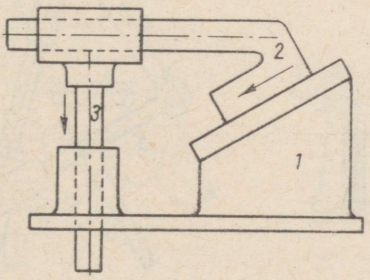
Joon. 61.



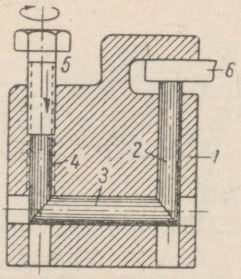
Joon. 62.

§ 6. Kiil- ja kruvimehhanismid

1°. *Kiilmehhanismideks* nimetatakse mehhanisme, millede kõik lülid liiguvad ainult translatoorselt. Lihtsaimaks kiilmehhanismiks on joonisel 63 kujutatud kolmelüliline mehhanism. Lüli *2* translatoorne liikumine ühes suunas toob endaga kaasa lüli *3* translatoorse liikumise teises suunas. Kiilmehhanisme kasutatakse peamiselt detailide kinnitamiseks, esemete etteandmiseks jne. Joonisel 64 on kujutatud kiilmehhanism detaili *6* kinnitamiseks.

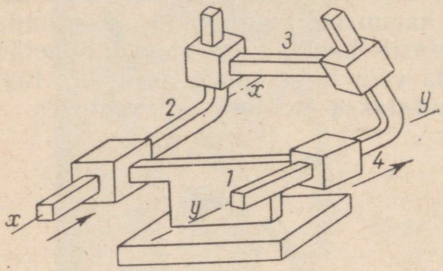


Joon. 63.



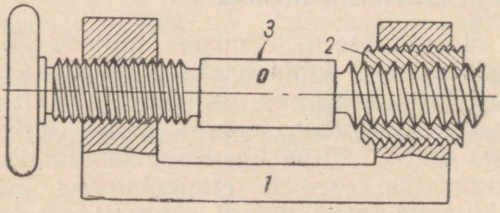
Joon. 64.

Kui pöörata kruvi *5* ümber vertikaaltelje, surub lüli *4* oma kaldotsaga lülile *3* ja nihutab seda horisontaalsuunas vasakult paremale. Lüli *2* tõstetakse seejuures üles ja see pigistab kinni detaili *6*. Joonisel 65 on kujutatud ruumiline neljalüliline kiilmehhanism, kus lüli *2* liikumine piki telge *xx* sunnib lüli *4* liikuma piki telge *yy*.

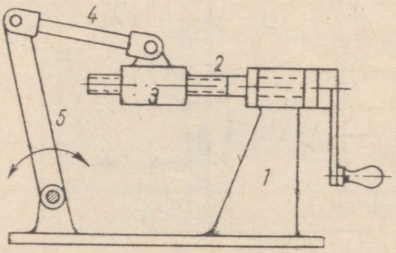


Joon. 65.

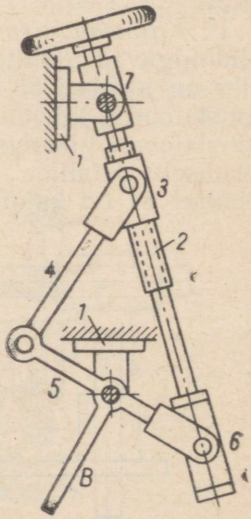
2°. *Kruvimehhanismideks* nimetatakse mehhanisme, kus teatavatel lülidel on kruviliikumine, tingituna naaberlülidega moodustatud kruvipaaridest. Joonisel 66 on kujutatud kolmelüliline kruvimehhanism. Erinevate keermesammude tõttu muutub lüli *3* kruviliikumine lüli *2* kruviliikumiseks, kusjuures viimane on lüli *3* liikumisest erinev. Joonisel 67 on näidatud *varb-kruvimehhanism*, mille ülesandeks on liikuma panna nookurit *5*. See saavutatakse kruvi *2* pööramisega mutris *3*. Joonisel 68 on näidatud rooliseadme varb-kruvimehhanism. Kruvi *2* pööramisel liigub mutter *3* translatoorselt piki kruvi telge ja annab liikumise varva *4* kaudu lülile *5*, mis on jäigalt ühendatud rooliga *B*. Kruvi *2* varb saab vabalt pöörelda laagris *6* ja pöörelda ning libiseda laagris *7*.



Joon. 66.



Joon. 67.

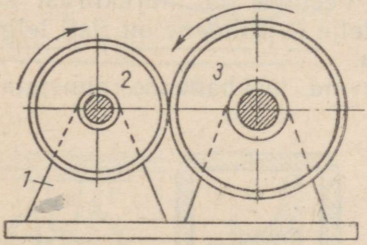


Joon. 68.

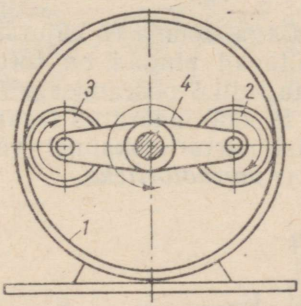
§ 7. Friktsioonmehhanismid

1°. Tänapäeva tehnikas kohtab sageli mehhanisme, kus lülide liikumapanemiseks või nende liikumise pidurdamiseks kasutatakse hõõrdejõudusid.

Jäikadest lülidest koosnevaid mehhanisme, kus liikumise ülekandmiseks on kasutatud hõõrdejõudusid, nimetatakse *friktsioonmehhanismideks* (hõõrdmehhanismideks). Joonisel 69 on kujutatud *silindrilistest friktsioonratastest* (hõõrdratastest) koosnev lihtsaim friktsioonmehhanism. Liikumise ülekandmine rattalt *2* rattale *3* toimub siin hõõrdejõudude varal, mis tekivad teineteise vastu surutud rattapöidade vahel. Joonis 70 kujutab *friktsioonplanetaarmehhanismi*, mis koosneb ratastest *2* ja *3*, hoovast *4* ja liikumatust rattast *1*. Joonisel 71 on kujutatud *koonusratastega friktsioonmehhanism*.

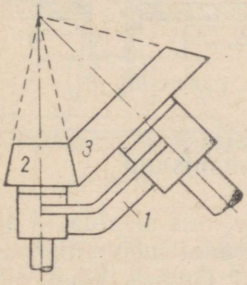


Joon. 69.

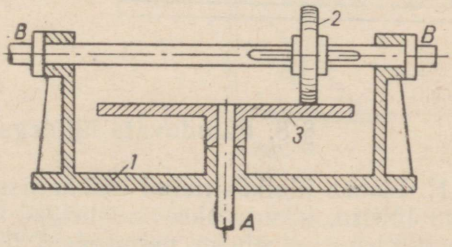


Joon. 70.

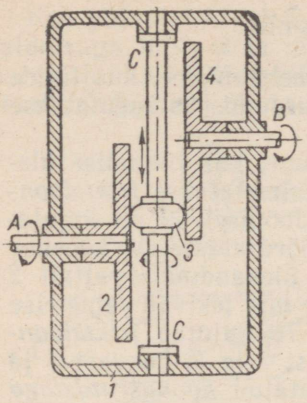
2°. Friktsioonmehhanisme kasutatakse laialdaselt seadmetes, kus tuleb sujuvalt (astmeteta) muuta nurkkiirusi. Joonisel 72 on kujutatud *astmeteta ülekannet võimaldav frontaalne friktsioonmehhanism*. Võlliga *A* liikumatult ühendatud ketas *3* kannab liikumise oma pealmise pinnaga üle võllil *B* istuvale rullile *2*. Viimane



Joon. 71.



Joon. 72.

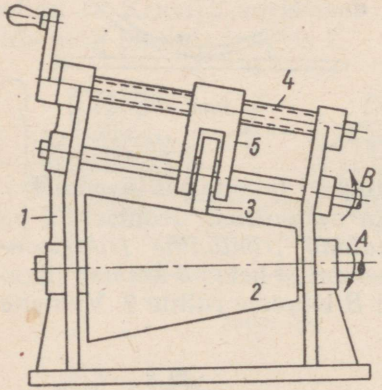


Joon. 73.

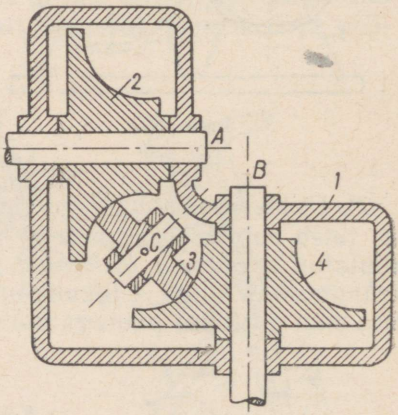
on nihutatav piki telge *BB*. Muutes rulli asendit võllil *B*, on võlli *A* püsiva pöörlemiskiiruse juures võimalik sujuvalt muuta võlli *B* nurkkiirust. Joonisel 73 on näidatud kaksik-frontaalfriktsioonmehhanism. Rull *3* on asetatud siin kahe ketta *2* ja *4* vahele. Vedava võlli püsiva nurkkiiruse juures saab veetava võlli nurkkiirust sujuvalt muuta rulli *3* nihutamisega piki telge *CC*.

Joonisel 74 on kujutatud astmeteta ülekannet võimaldav friktsioonmehhanism lõikuvate telgede *A* ja *B* vahel. Rulli *3* nihutamiseks on mehhanismis ette nähtud spindel *4* ja mutter *5*. Spindli telg on paralleelne koonustrumli *2* moodustajaga. Joonis 75 kujutab friktsioonmehhanismi, kus lülide *2* ja *4* töötavad pinnad on toroidsed. Veetava lüli nurkkiirust saab muuta rulli *3* pööramisega ümber telje *C*. Viimane on risti telgede *A* ja *B* poolt määratud tasapinnaga.

Astmeteta ülekannet võimaldavaid mehhanisme nimetatakse *kiiruse variaatoriteks*.



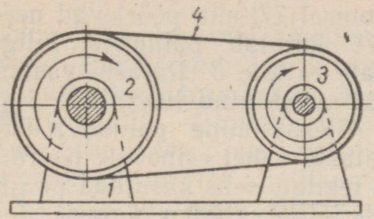
Joon. 74.



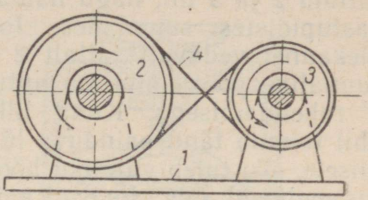
Joon. 75.

§ 8. Painduvate lülidega mehhanismid

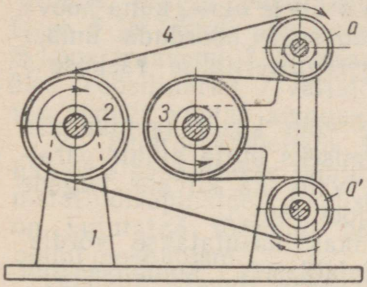
1°. Lisaks ülalkäsitletud mehhanismidele, mis sisaldasid ainult jäiku lülisid, kasutatakse mõningatel juhtudel mehhanisme, kus vahelülidena esineb ka painduvaid lülisid (trosse, köisi, rihmu, linte, kette jne.).



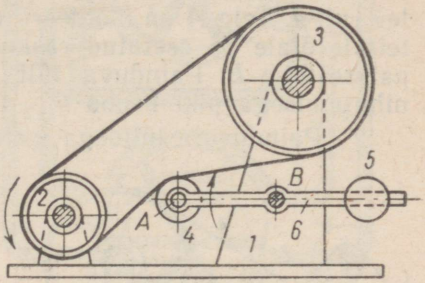
Joon. 76.



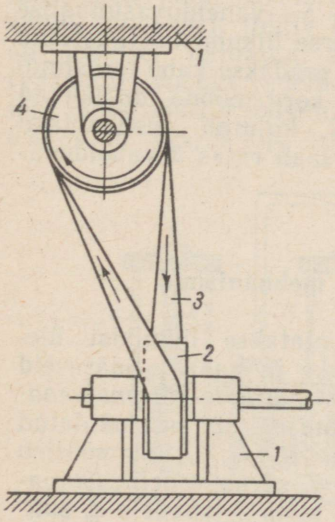
Joon. 77.



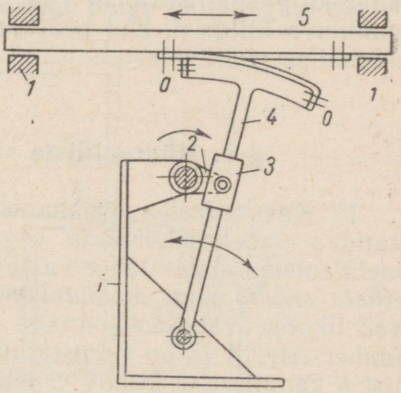
Joon. 78.



Joon. 79.



Joon. 80.

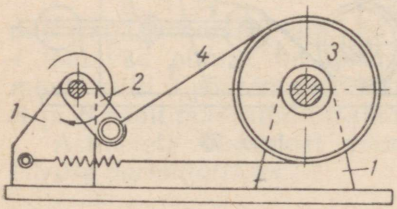


Joon. 81.

Joonisel 76 on näidatud lihtsaim *painduva lüliga mehhanism.* Painduv lüli *4* seob selles mehhanismis rattaid *2* ja *3.* Viimased pöörlevad ühes ja samas suunas. Juhul kui painduv lüli haarab

rattaid *2* ja *3* nii, nagu näidatud joonisel 77, siis pöörlevad need vastupidistes suundades. Joonis 78 kujutab painduva lüliga ülekannet vedavalt rattalt *2* veetavale rattale *3*. Rataste vastassuunaline pöörlemine on antud juhul saavutatud lisarullide *a* ja *a'* rakendamisega. Kuna liikumise ülekandmine painduva lüli abil toimub tänu painduva lüli ja rataste vahel esinevale hõõrdumisele, siis tuleb vajaliku hõõrdejõu tekitamiseks kasutada pingutusseadmeid, mis annavad painduvale lülile vajaliku pinguse. Sellistest seadmetest üks lihtsaim on kujutatud joonisel 79. Painduvale lülile annab siin vajaliku pinguse vabalt ümber telje *A* pöörlev rull *4*. Telg *A* on monteeritud hoova *6* ühele õlale, kuna hoova teisele õlale on asetatud raskus *5*. Hoob saab pöörduda ümber paikse telje *B*. Painduva lüli pingust reguleeritakse raskuse *5* nihutamisega piki hooba *6*.

2°. Painduvate lülidega mehhanisme võib kasutada liikumise ülekandmiseks mitte ainult paralleelsete, vaid ka kiivate telgede puhul (joon. 80).



Joon. 82.

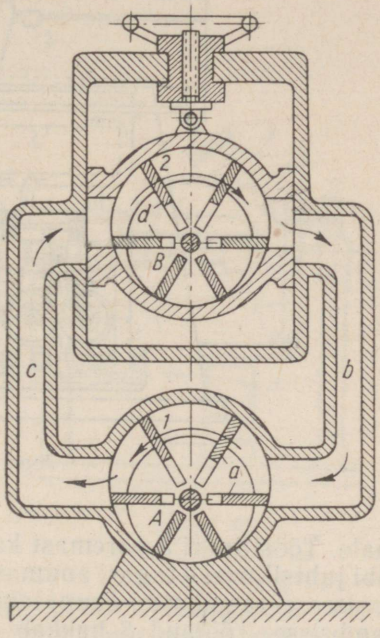
Tehnikas kasutatakse võrdlemisi laialdaselt kombineeritud mehhanisme. Joonisel 81 on näidatud kulissmehhanism, mis annab liugurile *5* vahelduvasuunalise translatoorse liikumise. Nimetatud liikumine saadakse kahe teraslindi abil, mis kordamööda mähkuvad kaarekujulisele sektorile *aa*. Joonis 82 kujutab mehhanismi painduva lüliga *4*. Kui pöörata vänta *2*, saab ratas *3* vahelduvasuunalise pöörlemise.

§ 9. Hüdrauliliste seadmetega mehhanismid

1°. Kaasaegsetes mehhanismides kasutatakse liikumist ülekandva vahekeskkonnana sageli vedelikke ja gaase. Sääraseid mehhanisme nimetatakse vastavalt kas *hüdrauliliste* või *pneumaatiliste seadmetega mehhanismideks*. Joonisel 83 on näidatud vedelikulise vahekeskkonnaga mehhanism. Ratas *1*, mis pöörleb ümber telje *A* ja on varustatud labadega *a*, surub vedeliku kanalist *b* kanalisse *c*. Liikuv vedelik, surudes ratta *2* labadele *d*, sunnib nimetatud ratast pöörlema ümber telje *B*. Selle tulemusel kantakse pöörlev liikumine lülilt *1* (mis pöörleb punkti *A* läbiva telje ümber) üle lülile *2* (mis pöörleb punkti *B* läbiva telje ümber).

Joonisel 84 on näidatud giljotiinkääride hüdraulilise ajami (hüdroajami) mehhanism. Vedelik juhitakse pumba abil püsiva

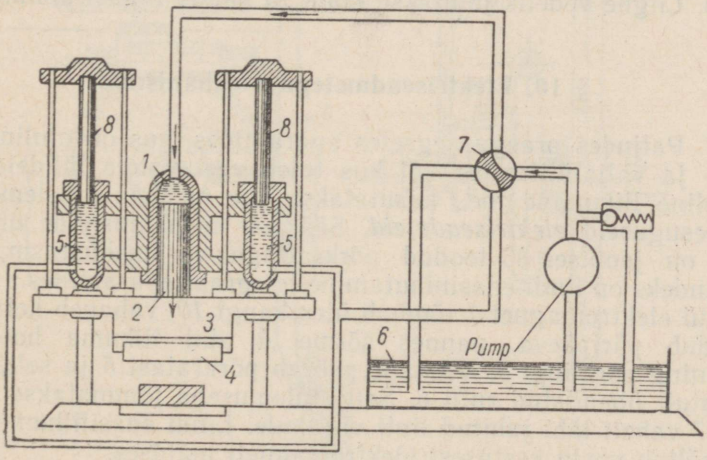
rõhu all läbi kraani *7* töösilindrisse *1*. Plunžerkolb *2* surutakse seejuures koos traaversiga *3* ja teraga *4* alla — toimub lõikamine. Silindrites *5* olev vedelik tõrjutakse traaversi allaliikumisel välja ja juhitakse anumasse *6*. Tera ülestõstmiseks keeratakse kraan *7* teise asendisse. Vedelik tungib nüüd silindritesse *5* ja tõstab plunžerkolvid *8* koos traaversi *3* ja teraga *4* üles. Töösilindrist *1* väljatõrjutav vedelik voolab anumasse *6*.



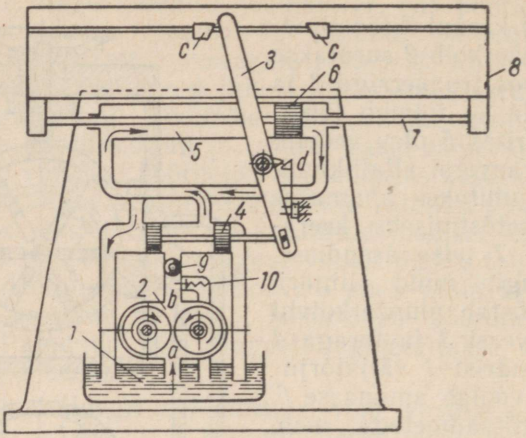
Joon. 83.

2°. Hüdroseadmetega mehhanisme kasutatakse laialdaselt metallilõikepinkides. Joonisel 85 on kujutatud tööpingi hüdroajami mehhanism.

Vedelik voolab anumast *1* läbi imitoru *a* pumpa *2* ja surutakse selle poolt surutorusse *b*. Juhul, kui siibrit juhtiv hoob *3* on joonisel näidatud asendis (vasakul), voolab vedelik edasi läbi juhtsilindri *4* töösilindri *5* vasakusse kambrisse, surudes kolvi *6* koos kolvivarda *7* ja sellega ühendatud pingi töölauaga *8* pare-



Joon. 84.



Joon. 85.

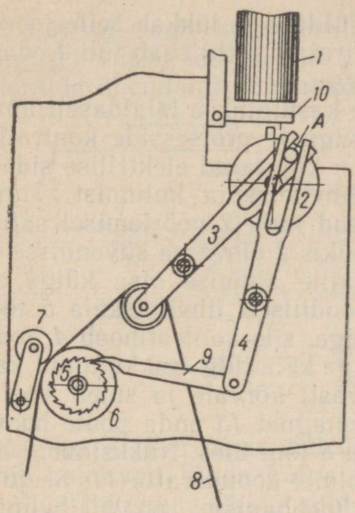
male. Töösilindri *5* paremast kambrist tõrjutakse vedelik seejuures läbi juhtsilindri *4* tagasi anumasse *1*. Kui hoob *3* jõuab oma parempoolsesse asendisse, suunatakse vedelik töösilindri *5* paremasse kambrisse. Töölaud *8* hakkab liikuma vasakule, kusjuures töösilindri *5* vasakus kambris olev vedelik tõrjutakse läbi juhtsilindri *4* tagasi anumasse *1*. Juhtsilindri siibri hoob *3* viiakse ühest tööasendist teise pingi töölaua *8* külge kinnitatud piirajate *c* poolt. Riiv *d* väldib hoova *3* seismajäämist juhuslikes vaheasendites. Kraani *9* abil reguleeritakse töösilindrisse *5* voolava vedeliku hulka. Liigne vedelik juhitakse klapi *10* kaudu tagasi anumasse *1*.

§ 10. Elektriseadmetega mehhanismid

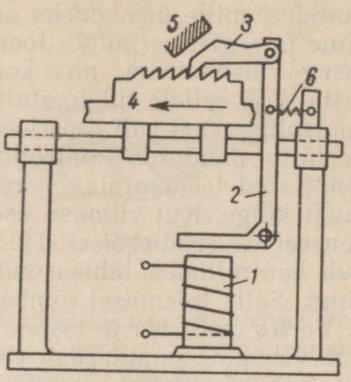
1°. Paljudes praegusaegsetes aparaatides, kus on oluline kiire sisse- ja väljalülitamine või kus tuleb veetavatele lülidele anda katkeline liikumine jne., kasutatakse ühe mehhanismielemendina mitmesuguseid *elektriseadmeid*. Sääraste mehhanismide ühe näitena on joonisel 86 toodud põrkrattaga varbmehhanism, mille ülesandeks on lindi edasinihutamine telegraafiaparaatides.

Kui elektromagnet *1* tõmbab üles kangi *10*, vabaneb ketas *2* ja pöördub päripäeva, pannes sõrme *A* abil liikuma hoovad *3* ja *4* ning põrklingi *9*. Viimane pöörab põrkratast *5* ja sellega liikumatult ühendatud rulli *6*. Selle tulemusena tõmmatakse rullide *6* ja *7* vahelt läbi juhitud linti vasakule. Lindi edasiliikumise pikkus sõltub voolu kestusest elektromagneti mähises.

Joonisel 87 on toodud automaattelefonijaamades kasutatavate

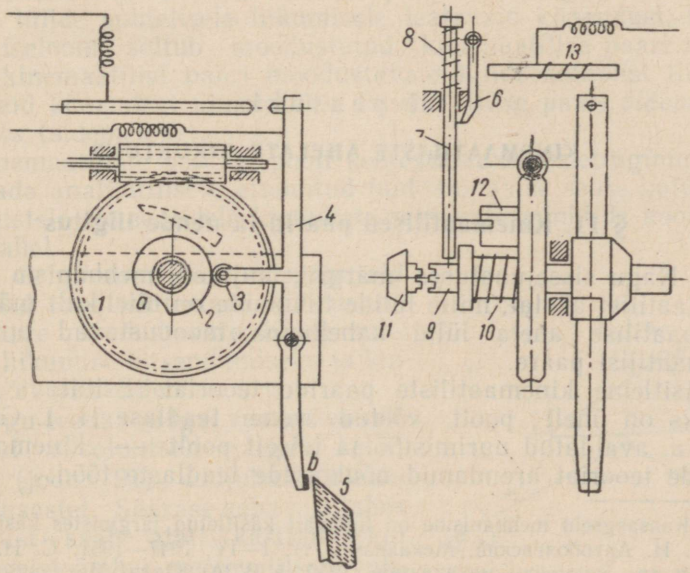


Joon. 86.



Joon. 87.

valijate elektromagnetilise ajamiga põrklattmehhanism. Voolu kulgemisel läbi elektromagneti *1* mähise tõmmatakse elektromagneti ankrut moodustav nurkhoob *2* alla. Nurkhoova ülemise õla



Joon. 88.

küljes olev põrklink surub seejuures lülile *4* ja lükkab selle joonisel noolega näidatud suunas edasi. Piiraja *5* tõttu saab lüli *4* edasi liikuda ainult ühe hambasammu võrra.

2°. Elektriseadmetega mehhanisme kasutatakse laialdaselt aparaatides, mille ülesandeks on mitmesuguste protsesside kontrollimine ja registreerimine. Joonisel 88 on kujutatud elektrilise sidestusega mehhanism, mis kontrollib lihvimiskäia kulumist. Tiguratta *1* ja sellele liikumatult kinnitatud nuki *2* pöörlemisel satub kontrollhoova *4* rull *3* perioodiliselt nukis *2* olevasse süvendisse *a*. Seetõttu puudutab kontrollhoob *4*, mille alumise otsa külge on kinnitatud teemantplaadikene *b*, perioodiliselt lihvimiskäia *5* töötavat külge. Kui viimase asend on õige, siis kontrollhoob *4* kompenseerivat seadist sisse ei lülita. Kui aga käiakülg on kulunud, kaldub kontrollhoob lähteasendist tugevasti kõrvale ja suleb vooluringi. Selle tulemusel tõmbab elektromagnet *13* enda poole hoova *6*. Varb *7* vabaneb ja tõstetakse vedru *8* jõul üles. Nukksidur *9* liigub vasakule ja sidurdab vedru *10* toimel koonusratta *11*. Seejuures antakse joonisel mittenäidatud mehhanismi poolt lihvimiskäiale *5* teljesuunaline nihutus, mis kompenseerib käia kulumist. Nukk *2*, mille pöörlemine kogu aeg jätkub, viib rulli *3* süvendist *a* välja ja hoob *4* surutakse lähteasendisse tagasi. Selle tulemusel vooluring katkeb ja hoob *6* langeb oma raskuse toimel algasendisse. Varb *7* surutakse omakorda tiguratta küljes oleva nuki *12* poolt alla, kusjuures nukksidur *9* lülitub välja.[1]

II peatükk

KINEMAATILISTE AHELATE STRUKTUUR

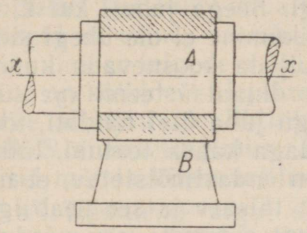
§ 11. Kinemaatilised paarid ja nende liigitus

1°. Nagu sissejuhatuses märgiti, kujutab mehhanism endast kinemaatilist ahelat, mille lülide liikumine on täielikult määratud. Kinemaatilise ahela lülid kahekaupa moodustavad omakorda kinemaatilisi paare.

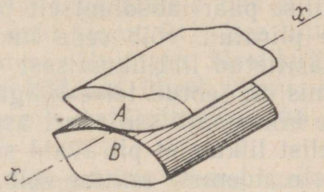
Käsitleme kinemaatiliste paaride teooriat. Esitatava teooria aluseks on ühelt poolt võetud vene teadlase H. I. Gohmani 1890. a. avaldatud uurimistöö ja teiselt poolt — kinemaatiliste paaride teooriat arendanud nõukogude teadlaste tööd.

[1] Kaasaegseid mehhanisme on ligemalt käsitletud järgmistes käsiraamatutes: И. И. Артоболевский, Механизмы, тт. I—IV, 1947—1951; С. Н. Кожевников и др., Элементы механизмов, 1950 ja В. А. Юдин, Механизмы приборов, тт. I—II, 1949—1952.

Lülisid saab kinemaatilistesse paaridesse ühendada mitmesugusel viisil, sest nende kinemaatilisi paare moodustavate elementide ühendamisvõimalused on väga mitmekesised. Joonisel 89



Joon. 89.



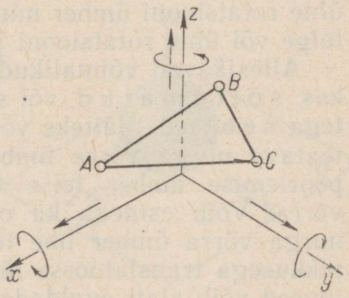
Joon. 90.

on lülid *A* ja *B* omavahel ühendatud kahe silindrilise pinna abil, mis kuuluvad lülide külge ja kujutavad endast nende elemente. Lüli *A* liikumine lüli *B* suhtes, või vastupidi, lüli *B* liikumine lüli *A* suhtes taandub pöörlemiseks ümber ühise telje *xx*. Joonisel 90 on näidatud lülide *A* ja *B* elementide teistsugune ühendamisviis. Lülide *A* ja *B* külge kuuluvad silindrilised pinnad puutuvad siin teineteist piki ühist moodustajat *xx*. Säärane ühendamismoodus tagab lülidele *A* ja *B* suhtelise liikumise, mis koosneb silindriliste pindade veeremisest, keerlemisest ning libisemisest teineteise peal ja teineteise suhtes. Kinemaatiline paar loob seega teda moodustavate lülide suhtelisele liikumisele teatavaid kitsendusi. Kitsenduste iseloom sõltub moodustatud kinemaatilise paari tüübist. Neid, kinemaatilist paari moodustavate lülide suhtelist liikumist piiravaid kitsendusi nimetatakse kinemaatilise paari *sidemetingimusteks* (sidemeteks).

Kinemaatiliste paaride poolt kehtestatud sidemetingimusi võib avaldada analüütiliselt, etteantud funktsionaalse seose kujul kinemaatilistele elementidele kuuluvate teatavate punktide koordinaatide vahel.

2°. Selgitame nüüd, missuguseid sidemeid saab kehtestada kinemaatilisi paare moodustavate lülide suhtelise liikumise kitsendamiseks ja kui suur võib olla sidemete arv.

Nagu teada, on igal ruumis vabalt liikuval absoluutselt jäigal kehal *ABC* (joon. 91) üldjuhul k u u s vabadusastet. Säärase keha mis tahes liikumist saab alati käsitada kui pöörlemist ümber meelevaldselt valitud omavahel risti asetsevate tel-



Joon. 91.

gede x, y, z ja sellele liituvat libisemist piki samu telgi. Kehal ABC on järelikult kuus võimalikku sõltumatut liikumist: kolm pöörlevat liikumist ümber telgede x, y, z ja kolm translatoorset (kulgevat) liikumist piki neidsamu telgi. Seega juhul, kui kinemaatilise paari absoluutselt jäiga lüli liikumine ei ole ühegi sidemega piiratud, võib seda liikumist kujutleda koosnevana kuuest ülalkäsitletud lihtliikumisest valitud koordinaatsüsteemi xyz suhtes, mis on seotud teise lüliga. Kuid nagu juba ülal näidati, toob lülide kinemaatilisse paari astumine endaga kaasa teatuid, lülide suhtelist liikumist piiravaid sidemeid. On endastmõistetav, et niisuguste sidemete arvuks võib olla ainult täisarv ja see peab igal juhul olema väiksem kui kuus. Juhul kui sidemete arv võrduks vabadusastmete arvuga, kaotaksid lülid suhtelise liikuvuse, s. t. kinemaatiline paar muutuks kahe lüli jäigaks ühenduseks. Sidemete arv ei või samuti olla väiksem kui üks. Tõepoolest, juhul kui sideme arv võrduks nulliga, ei puutuks lülid üldse teineteist ja kinemaatiline paar lakkaks olemast: saaksime kaks keha, mis liiguksid ruumis teineteisest sõltumatult.

Seega võib kinemaatilist paari moodustava iga lüli suhtelist liikumist piiravate sidemete arv kõikuda ühest kuni viieni. Kinemaatilise lüli vabadusastmete arvu V võib suhtelises liikumises järelikult avaldada võrrandiga

$$V = 6 - S, \tag{2.1}$$

kus S tähistab kinemaatilise paari poolt kehtestatud sidemete arvu. Nagu ülal selgitati, võib S muutuda piirides 1 kuni 5. Võrrandist (2.1) selgub, et kinemaatilisse paari kuuluva lüli vabadusastmete arv V suhtelises liikumises võib muutuda samades piirides.

3°. Nagu ülal näidati, piiravad kinemaatiliste paaride poolt kehtestatud sidemed paaridesse kuuluvate lülide suhtelist liikumist. Nimetatud sidemete tõttu tõkestatakse vabalt liikuva keha mõni kuuest võimalikust suhtelisest lihtliikumisest. Nii võib näiteks lülide kokkupuute-elementide sobiva valikuga tõkestada lüli ühte rotatsiooni ümber mingi telje, ühte translatsiooni piki mõnda telge või ühte rotatsiooni ja ühte translatsiooni korraga jne.

Allesjäävad võimalikud liikumised võivad üksteise suhtes olla kas s õ l t u m a t u d või siis mõnede geomeetriliste lisatingimustega s e o t u d. Näiteks võib esineda olukord, kus lüli pöörlemine teatava nurga võrra ümber ühe telje toob endaga kaasa tema pöörlemise ümber teise telje mingi täielikult määratud nurga võrra. Võib esineda ka olukord, kus lüli pöörlemine määratud nurga võrra ümber ühe telje toob endaga kaasa teatava kindla pikkusega translatoorse lükke piki teist telge jne. Need lisatingimused võib alati avaldada vastavate võrrandite näol, mis määravad omavahel seotud liikumiste funktsionaalse sõltuvuse.

Allesjäävad sõltumatud võimalikud liikumised fikseerivad kinemaatilise paari lülide *vabadusastmete arvu* nende suhtelises liikumises.

Juhul kui lüli võimalikkude liikumiste vahel funktsionaalseid seoseid ei esine, vastab lüli igale vabadusastmele üks lihtliikumine ümber telgede x, y, z või piki neid (joon. 91). See lihtliikumine on kõikidest ülejäänud liikumistest sõltumatu. Järelikult võib lülile allesjäävate lihtliikumiste arv kõikuda ühest viieni, sõltuvalt S sidemetingimuse iseloomust, mis kehtestatakse lüli astumisel mõnda kinemaatilisse paari.

4°. Käsitleme algul sääraseid kinemaatilisi paare, kus paari moodustavate lülide võimalikud lihtliikumised ei ole üksteisega funktsionaalses sõltuvuses. Säärastes paarides vastab lülide suhtelises liikumises kehtestatud sidemete arv nende lülide tõkestatud lihtliikumiste arvule.

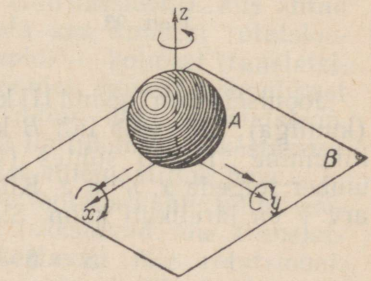
Kõik kinemaatilised paarid liigitatakse *klassidesse* sõltuvalt sidemete arvust, mida nad neisse kuuluvate lülide suhtelises liikumises kehtestavad. Kuna sidemete arv võib muutuda 1 kuni 5-ni, siis on loomulikult ka v i i s kinemaatiliste paaride klassi. Teiste sõnadega, esineb I, II, III, IV ja V klassi kinemaatilisi paare. Kinemaatilise paari klassi saab alati määrata, kui silmas pidada võrrandit (2.1). Sellest võrrandist saame

$$S = 6 - V. \tag{2.2}$$

Võrrandist (2.2) järeldub, et kinemaatilise paari poolt kehtestatud sidemete arv S võrdub alati arvu 6 ja selle vabadusastmete arvu vahega, mis paari igal lülil suhtelises liikumises on. Kuid nagu ülal näidati, vastab käsitletavates paarides igale vabadusastmele üks lihtliikumine. Järelikult selleks, et leida kinemaatilise paari poolt kehtestatud sidemete arvu, tuleb kindlaks teha paari kuuluva ühe lüli lihtliikumiste arv ja lahutada see kuuest. Sellega on ühtlasi määratud ka vaadeldava paari klass.

Toome mõned näited.

5°. Joonisel 92 on kujutatud kinemaatiline paar, mis on moodustatud tasapinnast B ja sellel veerevast ning libisevast kerast A. On pikemata selge, et kera liikumise tasapinna suhtes võib lahutada kolmeks pöörlemiseks ümber telgede x, y ja z ning libisemiseks tasapinnal B. Libisemise võib omakorda lahutada libisemiseks piki telgi x ja y. Kera libisemine piki z-telge osu-



Joon. 92.

tub võimatuks, kuna see ühes suunas on tõkestatud tasapinna B poolt, vastassuunaline liikumine aga katkestaks kontakti lülide vahel, mistõttu kinemaatiline paar lakkaks olemast. Kera liikumist saab seega käsitleda kui pöörlemist ümber kolme telje ja sellele liituvat libisemist piki kahte telge. Kera lihtliikumiste arv võrdub järelikult viiega. Antud kinemaatilisse paari kuuluvate lülide vabadusastmete arv V võrdub samuti viiega, sidemetingimuste arvu S saame aga seosest

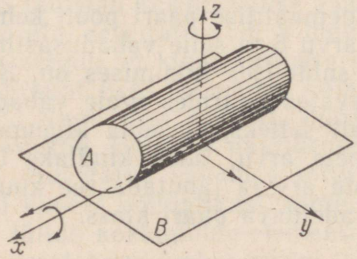
$$S = 6 - V = 6 - 5 = 1.$$

Ülaltoodu põhjal kuulub joonisel 92 kujutatud kinemaatiline paar I klassi.

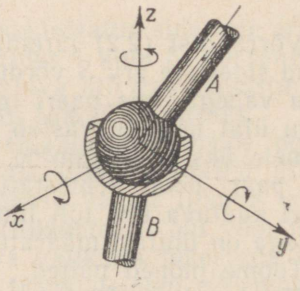
II klassi paari näitena võib käsitleda joonisel 93 toodud kinemaatilist paari, mille moodustavad tasapind B ja sellel asetsev silinder A. Silindri A liikumine tasapinna B suhtes (või vastupidi, tasapinna B liikumine silindri A suhtes) koosneb pöörlemisest ümber telgede x ja z ning libisemisest piki telgi x ja y. Silindri A lihtliikumiste arv on seega 4, järelikult on neli ka käsitlevat kinemaatilist paari moodustavate lülide vabadusastmete arv V. Sidemetingimuste arvuks S saame

$$S = 6 - V = 6 - 4 = 2,$$

mis põhjal antud paar kuulub II klassi.



Joon. 93.



Joon. 94.

Joonisel 94 on toodud III klassi paari näide. Lüli A lõpeb keraga (kuuliga), mis asub lüli B külge kuuluvas kerajas kausis. Lüli A liikumine lüli B suhtes (või vastupidi) koosneb pöörlemistest ümber telgede x, y ja z. Kinemaatilise paari lüli vabadusastmete arv V on järelikult kolm. Sidemete arv

$$S = 6 - V = 6 - 3 = 3,$$

mis põhjal paar kuulub III klassi.

Joonis 95 kujutab IV klassi paari. Silinder A on asetatud õõnsasse silindrisse B. Silindri A liikumine silindri B suhtes taandub pöörlemiseks ümber telje x ja libisemiseks piki sama telge. Vabadusastmete arv $V = 2$. Sidemete arv S võrdub järelikult

$$S = 6 - V = 6 - 2 = 4,$$

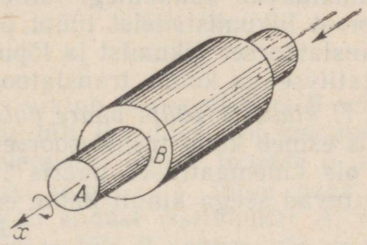
mille põhjal paar tuleb liigitada IV klassi.

Joonisel 89 on kujutatud V klassi kinemaatiline paar, mille kummalgi lülil on ainult üks lihtliikumine, ja nimelt — pöörlemine ümber telje xx. Vabadusastmete arv V võrdub järelikult ühega ja sidemete arv selles kinemaatilises paaris

$$S = 6 - V = 6 - 1 = 5.$$

Seega kuulub käsitletud paar V klassi.

Kokkuvõttes kordame, et kinemaatilisi paare liigitatakse viide klassi, aluseks võttes paari kuuluvate lülide suhtelist liikumist tõkestavate sidemete arvu.



Joon. 95.

Märgime veel lõpuks, et paari kuuluvate lülide lihtliikumiste võimalikkuse selgitamisel tuleb silmas pidada ainult antud hetke, s. t. tuleb kindlaks teha, kas teatav lihtliikumine osutub antud hetkel võimalikuks või mitte.

6°. Iga klassi piirides alaliigitatakse kinemaatilised paarid veel *tüüpideks*. See toimub järgmiste tunnuste alusel.

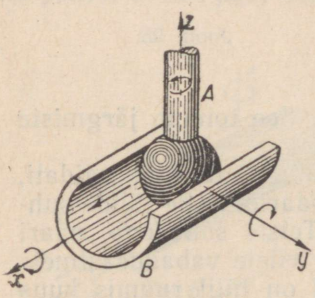
Olgu antud I klassi kinemaatiline paar. Nagu ülal näidati, kuuluvad I klassi säärased kinemaatilised paarid, mille lülide suhtelist liikumist tõkestab ainult üks side. Teiste sõnadega, paari kummalgi lülil on viis vabadusastet. Neile viiele vabadusastmele vastab viis lihtliikumist. Kuna üldjuhul on lülil ruumis kuus lihtliikumist (kolm rotatsiooni ja kolm translatsiooni), siis antud lülide viis lihtliikumist võivad koosneda kas kolmest rotatsioonist ja kahest translatsioonist või vastupidi — kolmest translatsioonist ja kahest rotatsioonist. Teisiti öeldes, kuuest võimalikust lihtliikumisest tõkestatakse esimesel juhul üks translatsioon, teisel juhul aga üks rotatsioon. See ühe lihtliikumise tõkestamine ongi selleks sidemeks, mille loob I klassi kinemaatiline paar.

Ülaltoodu põhjal võiks I klassi paare jaotada kahte tüüpi: esimese tüübi moodustaksid paarid, mis tõkestavad ühe translatsiooni, II tüübi aga paarid, mis tõkestavad ühe rotatsiooni. I klassi 1. tüüpi paar on kujutatud joonisel 92. *I klassi 2. tüüpi paare pole aga faktiliselt võimalik moodustada.* Põhjuseks

on asjaolu, et iga kord, kui esineb kokkupuude kahe mingisuguse geomeetrilise elemendi vahel, osutub suhteline translatoorne liikumine geomeetriliste elementide normaali sihis tõkestatuks. Näiteks joonisel 92 toodud paaris, kus esineb kokkupuude kera ja tasapinna vahel, on tõkestatud translatoorne liikumine piki z-telge, mis on kokkupuutepindade ühiseks normaaliks. Teiste sõnadega, kinemaatilise paari elementidele on võimatu anda säärast kuju, mis võimaldaks kolme translatoorset liikumist. Vähemalt üks translatsioonidest osutub alati tõkestatuks.

II klassi paarid loovad neisse kuuluvate lülide suhtelisele liikumisele kaks tõket. Viimased võivad olla moodustatud järgmiselt: tõkestatakse kas kaks translatsiooni või üks translatsioon ja üks rotatsioon, või lõpuks, tõkestatakse kaks rotatsiooni. Seetõttu võib II klassi paare jaotada k o l m e k s tüübiks: esimest tüüpi paarid võimaldavad kummalegi lülile kolme rotatiivset ja ühte translatoorset liikumist, teist tüüpi paarid — kahte rotatiivset ja kahte translatoorset liikumist ja lõpuks, kolmandat tüüpi paarid — ühte rotatiivset ja kolme translatoorset liikumist.

II klassi 3. tüüpi paare pole tegelikult võimalik teostada, kuna neis esineb kolm translatoorset liikumist, mis, nagu ülal näidati, ei ole kinemaatilises paaris faktiliselt saavutatav. Reaalseteks osutuvad seega ainult kahte esimesse tüüpi kuuluvad paarid.



Joon. 96.

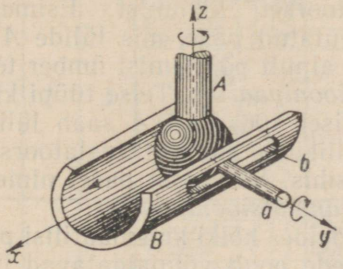
Joonisel 96 on näidatud II klassi 1. tüüpi paar. Kerapind, mis kuulub lülile A, liigub õõnsas lülis B. Lüli A liikumist lüli B suhtes võib kujutada kui pöörlemist ümber kõigi kolme telje, millele liitub translatoorne liikumine piki üht telge. II klassi 2. tüüpi paar on toodud joonisel 93.

III klassi paarid loovad neisse kuuluvate lülide suhtelisele liikumisele kolm tõket. Need kolm tõket võivad olla järgmised: a) tõkestatud on kõik kolm translatsiooni, b) tõkestatud on kaks rotatsiooni ja üks translatsioon, c) tõkestatud on kaks translatsiooni ja üks rotatsioon ning lõpuks d) tõkestatud on kõik kolm rotatsiooni. III klassi paare saab järelikult alaliigitada n e l j a k s tüübiks. 1. tüüpi paarid võimaldavad igale lülile ainult kolme rotatiivset liikumist; 2. tüüpi paarid jätavad kõigile neisse kuuluvatele lülidele kaks rotatiivset ja ühe translatoorse liikumise; 3. tüüpi paarid võimaldavad kahte translatoorset ja ühte rotatiivset liikumist, ning lõpuks 4. tüüpi paarid peaksid jätma igale lülile ainult kolm translatoorset liikumist.

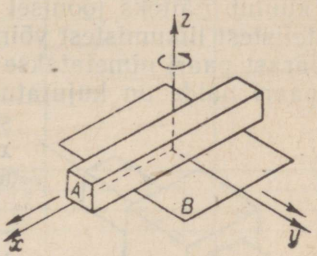
III klassi 4. tüüpi paare ei ole võimalik teostada, sest nad

peaksid võimaldama kolme translatoorset liikumist. Reaalselt esineb seega ainult kolme esimesse tüüpi kuuluvaid paare.

III klassi 1. tüüpi paar on näidatud joonisel 94. III klassi 2. tüüpi paari kujutab joonis 97. Lüli *A* lõpeb keraja otsikuga.



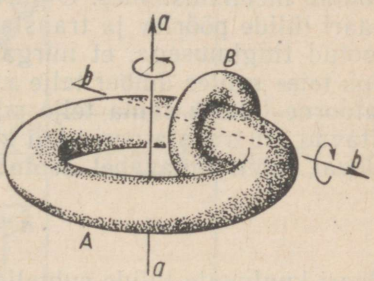
Joon. 97.



Joon. 98.

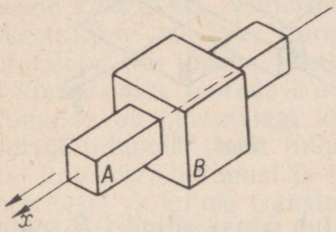
Viimasesse on asetatud sõrm *a*, mis ulatub õõnsa silindri *B* seina freesitud pilusse *b*. Lüli *A* liikumine lüli *B* suhtes, või vastupidi, *B* liikumine *A* suhtes koosneb pöörlemisest ümber telgede *y* ja *z* ning translatoorsest liikumisest piki telge *x*. 3. tüüpi paar on toodud joonisel 98. See paar kujutab endast risttahukat *A*, mis toetub tasapinnale *B*. Lüli *A* liikumine lüli *B* suhtes, või vastupidi, lüli *B* liikumine lüli *A* suhtes koosneb translatsioonidest piki telgi *x* ja *y* ning rotatsioonist ümber tasapinnaga *B* risti oleva telje *z*.

IV klassi paarid põhjustavad neisse kuuluvate lülide liikumises neli tõket. Tõkestatakse kas kõik kolm translatsiooni ja üks rotatsioon või kaks translatsiooni ja kaks rotatsiooni või lõpuks, üks translatsioon ja kõik kolm rotatsiooni. III klassi paaride seas saab järelikult eraldada k o l m e tüüpi. 1. tüüpi paarid võimaldavad ainult kahte rotatiivset liikumist. Näitena on joonisel 99 toodud rõngakujuline (toroidne) lüli *A*, millel tihedalt istub teine rõngas *B*. Säärase paari lülide suhtelist liikumist saab vaadelda kui pöörlemist ümber rõnga *A* telje *aa* ja ümber rõnga *B* telje *bb*. 2. tüüpi paarid võimaldavad ühte translatoorset ja ühte rotatiivset liikumist (joon. 95). IV klassi 3. tüüpi paarid peaksid võimaldama ainult kahte translatoorset liikumist, *kuid nende teostamine osutub võimatuks.*



Joon. 99.

V klassi paarid toovad neisse kuuluvate lülide liikumisse v i i s tõket. Tõkestatakse kolm translatsiooni ja kaks rotatsiooni või vastupidi, kolm rotatsiooni ja kaks translatsiooni. Seetõttu saab V klassi paaride seas eraldada ainult k a h t e tüüpi. Esimest tüüpi paarid võimaldavad ainult ühte rotatiivset liikumist, teist tüüpi paarid aga ainult ühte translatoorset liikumist. Esimesse tüüpi kuulub näiteks joonisel 89 kujutatud paar, mis lülide *A* ja *B* suhtelistest liikumistest võimaldab ainult pöörlemist ümber telje *xx*. Säärast paari nimetatakse *rotatsioonipaariks*. Teise tüüpi kuuluva paari näide on kujutatud joonisel 100. Lüli *A* saab lüli *B* suhtes liikuda ainult translatoorselt, *x*-telje sihis. Niisugust paari nimetatakse *translatsioonipaariks*.



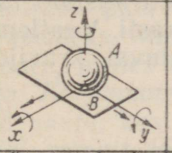
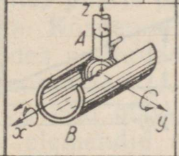
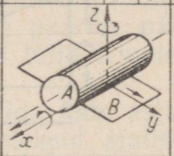
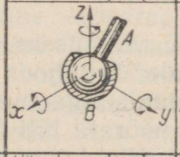
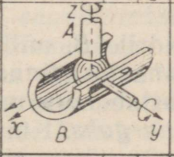
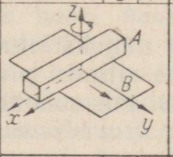
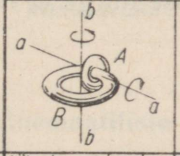
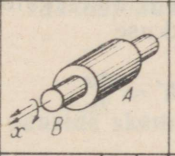
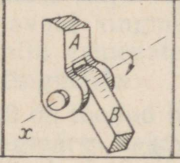
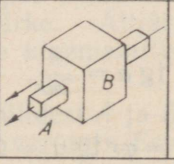
Joon. 100.

Vaadeldes kõiki kinemaatilisi paare, millede poolt võimaldatavad lihtliikumised ei ole omavahel funktsionaalses sõltuvuses, selgub, et nende konstruktiivne kujundus võib olla vägagi mitmesugune. Iga klassi piirides võib paarid nende poolt võimaldatavate lihtliikumiste põhjal alaliigitada tüüpideks. Leheküljel 77 on toodud kinemaatiliste paaride klassifikatsiooni tabel. Suurema näitlikkuse saavutamiseks on tabeli lahtrites toodud ka vastavate paaride skemaatilised kujutused.

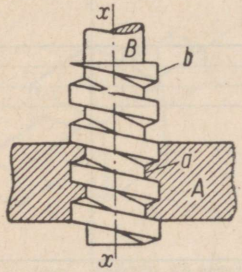
7°. Kõik ülalkäsitletud kinemaatilised paarid kuulusid paaride hulka, mille lülide võimalikud h e t k e l i s e d liikumised ei sõltunud üksteisest. Tehnikas aga kohtab veel kinemaatilisi paare, mille lülide suhtelised liikumised on mõne geomeetrilise lisatingimusega seotud. Näitena käsitleme ühte paari, mida väga sageli kohtab mehhanismides. Olgu näiteks joonisel 95 toodud IV klassi paari lülide pöörlev ja translatoorne suhteline liikumine omavahel seotud tingimusega, et nurgale φ, mille võrra üks lülidest pöördub teise suhtes ümber telje *xx*, vastaks täielikult määratud translatoorne lüke h sama telje sihis. Kuigi paari kuuluvad lülid säilitavad nii translatoorse kui ka rotatiivse liikumise, on need käesoleval juhul omavahel seotud tingimusega

$$h = h(\varphi). \tag{2.3}$$

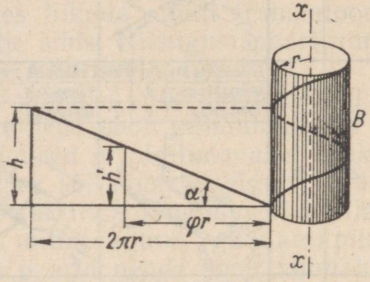
Paari kuuluvate lülide suhtelisele liikumisele on lisatud seega veel üks tõke, mida väljendab seos (2.3). Käsitletud paari tuleb järelikult lugeda mitte enam IV, vaid juba V klassi paariks. Sarnaseid paare kohtab tehnikas väga sageli. Kuna nende lülide suhteline liikumine on kruviliikumise iseloomuga, siis nimetatakse neid paare *kruvipaarideks*.

Paari klass	Sidemetingimuste arv	Vabadusastmete arv	Paari tüüp			
			1. tüüp	2. tüüp	3. tüüp	4. tüüp
I	1	5	Liikumiste arv: Rot. 3, Trans. 2 Võimalikud: 3 2 Takistatud: 0 1 			
II	2	4	Liikumiste arv: Rot. 3, Trans. 1 Võimalikud: 3 1 Takistatud: 0 2 	Liikumiste arv: Rot. 2, Trans. 2 Võimalikud: 2 2 Takistatud: 1 1 		
III	3	3	Liikumiste arv: Rot. 3, Trans. 0 Võimalikud: 3 0 Takistatud: 0 3 	Liikumiste arv: Rot. 2, Trans. 1 Võimalikud: 2 1 Takistatud: 1 2 	Liikumiste arv: Rot. 1, Trans. 2 Võimalikud: 1 2 Takistatud: 2 1 	
IV	4	2	Liikumiste arv: Rot. 2, Trans. 0 Võimalikud: 2 0 Takistatud: 1 3 	Liikumiste arv: Rot. 1, Trans. 1 Võimalikud: 1 1 Takistatud: 2 2 		
V	5	1	Liikumiste arv: Rot. 1, Trans. 0 Võimalikud: 1 0 Takistatud: 2 3 	Liikumiste arv: Rot. 0, Trans. 1 Võimalikud: 0 1 Takistatud: 3 2 		

Kruvipaar koosneb kahest lülist A ja B (joon. 101). Silinder B on varustatud väliskeermega b; lülisse A on vastavalt sellele lõigatud sisekeere a. Lüli A pöörlemisel lüli B suhtes, või vastupidi, lüli B pöörlemisel lüli A suhtes liigub pöörlev lüli ühtlasi ka piki telge xx. Pole raske näha, et nii ühe kui ka teise lüli pöörlemisele mingisuguse nurga φ võrra vastab x-telje sihis toimuv täielikult määratud nihutus. Teiste sõnadega, lüli pöörlev liikumine on teataval viisil seostatud tema translatoorse liikumisega. Kehtestatud seose võib leida väga hõlpsasti. Vaatleme selleks ühele antud paari moodustavale lülile kuuluvat kruvijoont. Kuulugu



Joon. 101.



Joon. 102.

see kruvijoon näiteks silindrile B, mille raadiuseks olgu r (joon. 102). Laotame silindri pinna tasapinnale; kruvijoon muutub seejuures sirgeks, mis moodustab horisontaalsihiga nurga α. Nurka α nimetatakse *kruvi tõusunurgaks*. Kui pöörata lüli B (joon. 101) ühe täispöörde, s. t. nurga 2π võrra, siis liigub see lüli piki telge xx edasi pikkuse h võrra, mida nimetatakse kruvi sammuks (joon. 102). Kui aga pöörata lüli B meelevaldse nurga φ võrra, siis nihkub ta piki telge edasi pikkuse

$$h' = \frac{h\varphi}{2\pi} \tag{2.4}$$

võrra.

Võrrand (2.4) kehtestab sidemetingimuse kruvipaari kuuluvate lülide liikumisele ümber telje xx ja piki seda. Kuna jooniselt 102 selgub, et

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{2\pi r},$$

siis

$$h' = \varphi r \operatorname{tg}\alpha = C\varphi,$$

kus C tähistab konstanti, mille väärtuseks on $r \operatorname{tg}\alpha$.

Viimasest võrrandist võib järeldada, et kui nurk $\alpha = 0$, siis

$h' = 0$, s. t. esineb ainult lülide pöörlemine ümber paari telje. Kruvipaar taandub järelikult tavaliseks, joonisel 89 toodud rotatsioonipaariks. Kui aga $\alpha = \frac{\pi}{2}$, s. t., kui keere on paralleelne paari teljega, siis $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ ja $r\varphi = 0$. Kuna $r \neq 0$, siis järgneb, et $\varphi = 0$. Niisugusel juhul taandub kruvipaar joonisel 100 näidatud translatsioonipaariks.

8°. Kinemaatilisi paare liigitatakse veel madalamateks ja kõrgemateks paarideks. *Madalamateks* kinemaatilisteks paarideks nimetatakse paare, milles kinemaatiliste elementide kokkupuude toimub pinnaga. *Kõrgemateks* kinemaatilisteks paarideks nimetatakse sääraseid paare, kus kinemaatiliste elementide kokkupuude toimub kas *piki mingit joont* või koguni *ühes ainsas punktis*. Madalama paari näitena võib tuua joonisel 89 kujutatud kinemaatilist paari. Selles paaris puutuvad lülid *A* ja *B* teineteist silindriliste pindadega. Kõrgemate paaride näited leiab jooniselt 90 ja 92. Neis paarides puutuvad lülid teineteist piki sirget (joon. 90) või punktis (joon. 92).

Lõpuks tuleb veel märkida ühte asjaolu. Selleks, et kinemaatiliste paaride elemendid oleksid alalises kokkupuutes, peavad kinemaatilised paarid olema «*lukustatud*». Lukustus võib olla kas *kinemaatiline* või *teostatud jõu abil*.

Kinemaatiline lukustus saavutatakse paari kuuluvatele elementidele sobiva konstruktiivse kuju andmisega. Näiteks kõik leheküljel 77 toodud tabelis esinevad V klassi paarid osutuvad kinemaatiliselt lukustatuiks, sest paaride elementide kokkupuude on tagatud ainult tänu nende konstruktiivsele kujule.

Selleks, et joonisel 92 näidatud paar oleks lukustatud, tuleks kuulikest mingi jõuga suruda vastu tasapinda. *Paaride jõu abil lukustamiseks kasutatakse raskusjõudu, vedrujõudu jne.* (vt. § 4, 2°).

§ 12. Kinemaatiliste paaride skemaatiline kujutamine

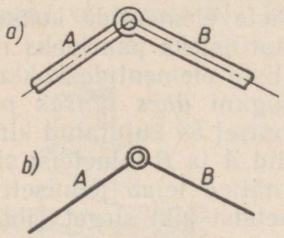
1°. Mehhanismide skeemides on kinemaatiliste paaride ja lülide konstruktiivse kuju täpse edasiandmise asemel otstarbekam kasutada vastavaid tingmärke. Alljärgnevalt käsitleme ainult kõige sagedamini esinevate kinemaatiliste paaride tähistamiseks kasutatavaid tingmärke.

Joonisel 103 on toodud lülidest *A* ja *B* koosneva V klassi rotatsioonipaari tingmärgi kaks varianti. Esimene neist (joon. 103, *a*) on konstruktiivsele kujundusele ligem; teine variant (joon. 103, *b*) on skemaatilisem.

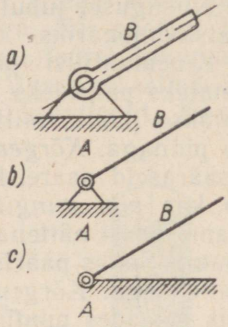
Joonisel 104 on toodud V klassi rotatsioonipaari tingmärgid

juhu jaoks, kus üks paari lülidest (lüli A) on liikumatu (kinnislüli).

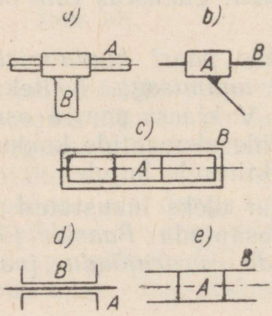
Joonisel 105 on näidatud V klassi translatsioonipaari tingmärgid. Joonisel 106 on toodud sama paari tingmärgid juhu jaoks, kui lüli B on liikumatu.



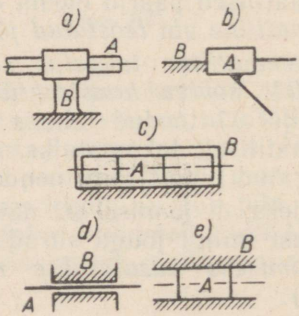
Joon. 103.



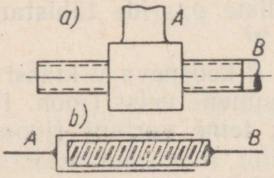
Joon. 104.



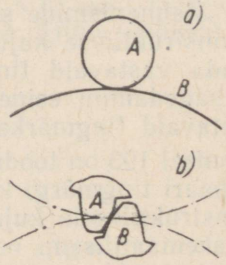
Joon. 105.



Joon. 106.



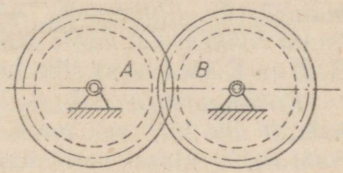
Joon. 107.



Joon. 108.

Joonis 107 kujutab V klassi kruvipaari tähistamiseks kasutatavaid tingmärke.

Mõnedel juhtudel tuleb anda täpne ettekujutus elementidest, mille kaudu toimub paari moodustavate lülide kokkupuude (kontakt). Kokkupuutuvate elementide kuju (profiil) joonestatakse sel juhul skeemile täpselt. Sääraste paaride kujutamise näited on toodud joonisel 108. Joonis 108, *a* kujutab ümmargust rullikest *A* kokkupuutes lüli *B* profiiliga. Joonis 108, *b* kujutab ühe hammasratta hamba *A* kontakti teise ratta hambaga *B*. Kahe omavahel kinemaatilist paari moodustava hammasratta tingtähistamine on näidatud joonisel 109.

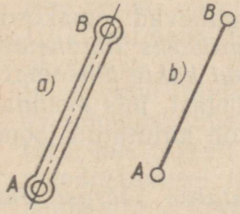


Joon. 109.

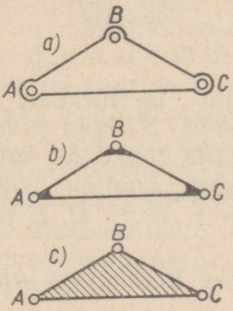
2°. Käsitleme veel mitmesse kinemaatilisse paari kuuluvate lülide tingtähistamist.

Kui osutub vajalikuks uurida ainult lüli kahe punkti liikumist, siis kasutatakse säärase lüli tähistamiseks joonisel 110 toodud tingmärke, kuid seda ainult juhul, kui lüli kuulub kahte rotatsioonipaari. Joonisel 111 on toodud kolme rotatsioonipaari *A*, *B* ja *C* kuuluva lüli tingmärgid.

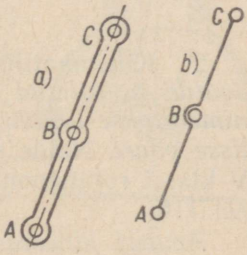
Lõpuks joonisel 112 on skemaatiliselt kujutatud lüli, mis kuulub kolme rotatsioonipaari *A*, *B* ja *C*, kusjuures viimaste teljed on omavahel paralleelsed ja asuvad ühes ning samas tasapinnas.



Joon. 110.



Joon. 111.



Joon. 112.

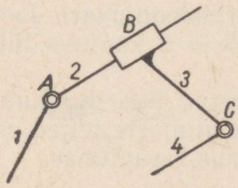
Teiste kinemaatiliste paaride skemaatilise kujutamise juures peatume hiljem, vastavalt sellele, kuidas kerkib vajadus nende kasutamiseks.

§ 13. Kinemaatilised ahelad

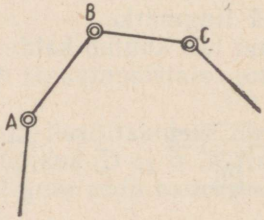
1°. *Kinemaatiliseks ahelaks nimetatakse kinemaatilistesse paaridesse kuuluvate lülide seotud süsteemi.* Joonis 113 kujutab neljast lülist koosnevat kinemaatilist ahelat, mille lülid moodustavad kolm kinemaatilist paari. Lülid *1* ja *2* moodustavad omavahel V klassi rotatsioonipaari *A*. Lülid *2* ja *3* kuuluvad translatsioonipaari *B* (V klass) ja lõpuks, lülid *3* ja *4* — rotatsioonipaari *C* (samuti V klass).

Kinemaatilisi ahelaid liigitatakse *liht-* ja *liitahelateks. Kinemaatiliseks lihtahelaks nimetatakse ahelat, mille ükski lüli ei kuulu rohkem kui kahte kinemaatilisse paari.* Rotatsioonipaaridega *A*, *B* ja *C* (V klass) lihtahela näide on kujutatud joonisel 114.

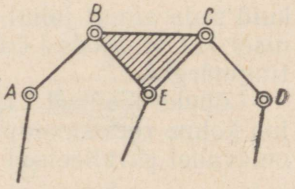
Kinemaatiliseks liitahelaks nimetatakse ahelat, kus esineb vähemalt üks lüli, mis kuulub enam kui kahte kinemaatilisse paari. Säärase V klassi rotatsioonipaare *A*, *B*, *C* ja *D* sisaldava ahela näide on toodud joonisel 115.



Joon. 113.



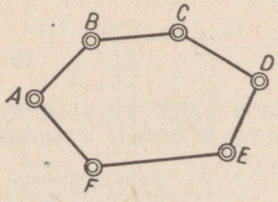
Joon. 114.



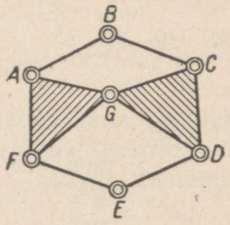
Joon. 115.

2°. Kinemaatilised liht- ja liitahelad jagunevad omakorda *avatud* ja *suletud ahelateks. Suletud kinemaatiliseks lihtahelaks nimetatakse lihtahelat, mille kõik lülid kuuluvad kahte kinemaatilisse paari.* Näide säärasest tasapinnalisest ahelast, mis sisaldab V klassi rotatsioonipaare *A*, *B*, *C*, *D*, *E* ja *F* on kujutatud joonisel 116.

Avatud kinemaatiliseks lihtahelaks nimetatakse säärast liht-



Joon. 116.



Joon. 117.

ahelat, mis sisaldab ainult ühte kinemaatilisse paari kuuluvaid lülisid. Avatud ahela näiteks on joonisel 114 toodud ahel.

Suletud kinemaatiliseks liitahelaks nimetatakse liitahelat, mille iga lüli kuulub vähemalt kahte kinemaatilisse paari. Säärase tasapinnalise ahela näide (ahel sisaldab V klassi rotatsioonipaare *A, B, C, D, E, F* ja *G*) on kujutatud joonisel 117.

Avatud kinemaatiliseks liitahelaks nimetatakse kinemaatilist liitahelat, mis sisaldab ainult ühte kinemaatilisse paari kuuluvaid lülisid. Näitena võib tuua joonisel 115 kujutatud ahelat.

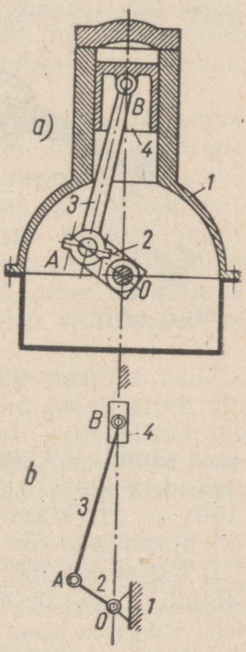
§ 14. Kinemaatilise ahela üldjuhu struktuurivalem

1°. Kinemaatiliste ahelate struktuuriteooria alused rajas silmapaistev vene teadlane professor P. I. Somov oma 1887. aastal ilmunud teaduslikus töös. Hiljem on struktuuriteooriat arendanud mitmed nõukogude teadlased. Alljärgnevas on kasutatud peamiselt kodumaa teadlaste poolt arendatud struktuurianalüüsi meetodit.

Nagu varem näidati, on lülil ruumis kuus vabadusastet juhul, kui tema liikumist ei ole piiratud ühegi sidemetingimusega. Kui kinemaatilisse ahelasse kuulub kokku k lüli, siis, enne lülide kinemaatilistesse paaridesse ühendamist, on üldiseks vabadusastmete arvuks $6k$. Lülide ühendamine kinemaatilisteks paarideks piirab nende suhtelist liikumist sidemetega, mille arv sõltub kasutatud kinemaatiliste paaride klassist (vt. § 11). Kui mingi kinemaatilise ahela lülide poolt moodustatud I klassi paaride arvuks on p_1, II klassi paaride arvuks p_2, III klassi paaride arvuks p_3, IV klassi paaride arvuks p_4 ja V klassi paaride arvuks p_5, siis tuleb enne lülide kokkuühendamist esinenud $6k$ vabadusastmest lahutada need vabadusastmed, mis tõkestatakse kinemaatiliste paaride moodustamisel. Kinemaatilise ahela vabadusastmete arv V võrdub seega

$$V = 6k - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \quad (2.5)$$

Masinaehituses kohtab tavaliselt säraseid kinemaatilisi ahelaid, milles üks lüli osutub täiesti liikumatuks, moodustades kinnislüli. Näiteks joonisel 118 toodud sisepõlemismootori mehhanismis moodustavad vänt, keps, kolb ja silinder koos karteriga kinemaatilise ahela. Silinder koos alusraami külge



Joon. 118.

kinnitatud karteriga on selle ahela kinnislüliks. Mootori kinemaatilise ahela kõikide lülide liikumise uurimisel käsitleme me järelikult nende absoluutset liikumist kinnislüli suhtes. Kui üks ahela lülidest on liikumatu, siis väheneb ahela vabadusastmete koguarv veelgi 6 võrra. Vabadusastmete arv kinnislüli suhtes avaldub seega järgmiselt:

$$L = V - 6. \tag{2.6}$$

Kinemaatilise ahela vabadusastmeid kinnislüli suhtes nimetatakse tema liikuvusastmeks. Asetades võrrandisse (2.6) V väärtuse võrrandist (2.5), saame

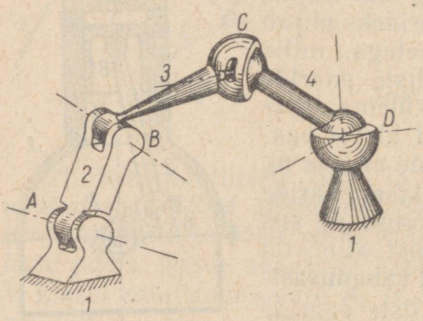
$$L = 6(k - 1) - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \tag{2.7}$$

Kui võrrandis (2.7) esinevat suurust $k - 1$ tähistada tähega n, siis saame:

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \tag{2.8}$$

Sisuliselt võttes tähistab n kinemaatilise ahela liikuvate lülide arvu. Valemit (2.8) nimetatakse kinemaatilise ahela *üldjuhu struktuurivalemiks* (ehk *liikuvuse valemiks*).

Valemi (2.8) tuletas esimesena, kuigi veidi erineval kujul, professor P. I. Somov 1887. aastal. 1923. aastal arendas seda küsimust edasi professor A. P. Malõšev. Seetõttu nimetatakse valemit (2.8) ka *Somov-Malõševi valemiks*.



Joon. 119.

Kui kinemaatiline ahel sisaldab ainult V klassi paare, muutub valem (2.8) järgmiseks:

$$L = 6n - 5p_5.$$

2°. Toome kinemaatilise ahela liikuvusastme määramist käsitleva näite. Joonisel 119 on näidatud kinemaatiline ahel, mille lülid *1* (kinnislüli) ja *2* moodustavad paari *A* (V klass, 1. tüüp); lülid *2* ja *3* moodustavad samuti V klassi 1. tüüpi kuuluva paari *B*; lülid *3* ja *4* moodustavad IV klassi 1. tüüpi paari *C* ja lõpuks — lülid *4* ning *1* (kinnislüli) — III klassi 1. tüüpi paari *D*. Liikuvate lülide arv $n = 3$, V klassi paaride arv $p_5 = 2$, IV klassi paaride arv $p_4 = 1$ ja III klassi paaride arv $p_3 = 1$. Asetades valemisse (2.8) ülaltoodud lülide ja paaride arvud, saame:

$$L = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1,$$

s. t. käsitletaval kinemaatilisel ahelal on üks liikuvusaste.

III peatükk

MEHHANISMIDE STRUKTUUR

§ 15. Mehhanismi liikuvusaste

1°. Mehhanismi üldine definitsioon on käesolevas raamatus (§ 1) juba toodud. Nüüd, aluseks võttes II peatükki, on võimalik seda definitsiooni täpsustada.

Mehhanismiks nimetatakse kinemaatilist ahelat, mille kõik lülid sooritavad täielikult määratud liikumise juhul, kui ette anda ühe või mitme lüli liikumine antud ahelas meelevaldselt valitud lüli suhtes. Mehhanismi neid lülisid, mille liikumisseadusi loetakse etteantuiks, nimetatakse *vedavateks* lülideks, lülisid aga, mille liikumine on vedavate lülide liikumisseadustega määratud, *veetavateks* lülideks.[1] Mehhanismi oluliseks tunnuseks on seega asjaolu, et tema kõikide lülide liikumine osutub määratuks, niipea kui vedavate lülide liikumine on ette antud.

Mehhanismi liikumise uurimiseks ei piisa tema struktuuri tundmisest, s. t. tema lülide arvu ja kinemaatiliste paaride arvu ning klassi määramisest. Tähtis on teada veel lülide pikkusi, mis mõjutavad nende liikumist, lülide vastastikust asendit jne. Mehhanismi liikumise uurimiseks koostatakse seetõttu tavaliselt nn. mehhanismi *kinemaatiline skeem.*

Mehhanismi kinemaatiline skeem joonestatakse valitud mastaabis, täpselt edasi andes neid mõõteid ja lülide vorme (konfiguratsioone), millest sõltub ühe või teise lüli liikumine. Teiste sõnadega, tuleb täpselt jäljendada lülide neid vorme ja mõõteid, millede muutmine tooks kaasa muutusi mehhanismi punktide asendites, kiirustes või kiirendustes. Kinemaatilisele skeemile tuleb kanda ainult see, mis on vajalik mehhanismi liikumise uurimiseks. Kõike liigset, liikumist mitteiseloomustavat tuleb vältida selleks, et mitte skeemi asjatult koormata.

Käsitleme näitena joonisel 118, *a* kujutatud mootori mehhanismi. Kuna selle mehhanismi kõik lülid liiguvad paralleelselt ühe ühise tasapinnaga (tasapinnaline mehhanism), siis piisab mis tahes lüli liikumise uurimiseks sellest, kui uurida tema kahe meelevaldselt valitud punkti liikumist. Näiteks selleks, et uurida vända

[1] Nagu juba varem märgitud (§ 1, 1°), käsitletakse kinemaatilisel uurimisel mehhanismide liikumist sõltumatult jõududest, mis seda põhjustavad. Mehhanismide struktuuri ja kinemaatika uurimisel ei ole seetõttu kohustuslik vedavaks lüliks valida tingimata just seda lüli, millele on rakendatud mehhanismi liikuma panev välisjõud. Kui kasutada terminit «vedav» ainult niisuguste lülide kohta, millele on rakendatud motoorsed jõud, siis lülisid, millede liikumine on ette antud, võib nimetada *«alglülideks»*.

AO liikumist, piisab tema kahe punkti A ja O asendi teadmisest igal hetkel; kepsu AB liikumise uurimisel on küllaldane, kui teada igal hetkel, kus asuvad tema punktid A ja B jne. Kasutades joonistel 103—112 toodud tingmärke, võib nüüd koostada mehhanismi kinemaatilise skeemi (joon. 118, *b*). Kõik mõõted on skeemile kantud teatavas, meelevaldselt valitud mastaabis μ_l m/mm. Viimase tähendus on järgmine: ühele millimeetrile joonisel vastab μ_l meetrit tegelikkuses:

$$1 \text{ mm} \rightarrow \mu_l \text{ m}.$$

Raskem on koostada kinemaatilist skeemi juhul, kui mehhanismi lülide liikumine toimub ruumis. Sel juhul tuleb kinemaatiline skeem koostada projektsioonides kahel, mõningatel juhtudel koguni kolmel omavahel risti asetseval tasapinnal.

2°. Kuna mehhanism kujutab endast kinemaatilist ahelat, mille lülide liikumine on täielikult määratud, siis tuleb selgitada, kuidas mehhanismi liikumise määratlus on seotud tema liikuvusastmega. Nagu selgub valemist (2.8), iseloomustab liikuvusaste mehhanismi vabadusastmete arvu lüli suhtes, mis muudeti liikumatuks (kinnislüliks). Kui mehhanismil on üks liikuvusaste, võib ühele mehhanismi lülidest ette anda mingisuguse täielikult määratud liikumisseaduse kinnislüli suhtes, näiteks tuntud kiirusega pöörleva liikumise, translatoorse liikumise või kruviliikumise. Kõik mehhanismi ülejäänud lülid saavad endale seejuures täielikult määratud liikumised, mis osutuvad etteantud liikumise funktsioonideks. Kui mehhanismil on kaks liikuvusastet, siis tuleb kas ühele lülidest anda kinnislüli suhtes kaks sõltumatut liikumist või võtta kaks lüli ja anda kummalegi valitud kinnislüli suhtes üks liikumine jne. Toome selle kohta näite. Joonisel 119 kujutatud mehhanism on, nagu varem selgitatud, ühe liikuvusastmega. Järelikult, kui anda ühele tema lülidest ettemääratud seaduspärane liikumine, siis on seega ka kõikide ülejäänud lülide liikumised täielikult määratud.

Olgu näiteks lülile *2* antud pöörlemine seaduse järgi $\varphi_2 = \varphi_2(t)$, kus φ_2 tähistab lüli *2* pöördenurka ja t — aega.

Pole raske näha, et kui on antud lüli *2* liikumine, siis kõik ülejäänud lülid liiguvad täielikult määratud viisil. Nende liikumine sõltub seejuures meie poolt valitud seadusest $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Lüli *2* osutub seetõttu v e d a v a k s (alg-) lüliks ja kõik teised lülid (s. o. lülid *3* ja *4*) — v e e t a v a t e k s lülideks.

Mitme liikuvusastmega mehhanisme kohtab praktikas suhteliselt harva, mistõttu me siinkohal neid ei käsitle, küll aga puudutame mõningaid neist hiljem.

§ 16. Mehhanismide perekonnad

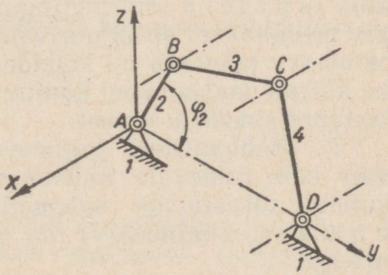
1°. Käesolevas peatükis näidati (§ 14 ja 15), et mehhanismi liikuvusaste L võrdub üldjuhul tema vabadusastmete arvuga ja on arvutatav struktuurivalemiga (2.8):

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Seda valemit võib kasutada ainult juhul, kui mehhanismi koosseisu kuuluvate lülide liikumist ei piira ükski üldine lisatingimus. Säärased, kogu mehhanismile kui tervikule mõjuvad ühised tingimused võivad olla väga mitmesugused. Näiteks võib nõuda, et mehhanismis, mis sisaldab ainult V klassi rotatsioonipaare, oleksid kõikide nimetatud paaride teljed paralleelsed, või lõikuksid ühes punktis, või lõikuksid kahes erinevas punktis jne. Selgub, et säärased l i s a t i n g i m u s e d mõjutavad oluliselt mehhanismi liikumise iseloomu ja muudavad vastavalt sellele ka tema struktuurivalemi kuju.

Olgu näiteks ainult V klassi rotatsioonipaare sisaldavas mehhanismis kõikide paaride teljed paralleelsed (joon. 120).

Valime koordinaatide süsteemi xyz nii, et x-telg langeks kokku paaride telgede ühise sihiga ja teljed y ning z asetseksid paaride telgedega ristuvas tasapinnas. Pole raske näha, et mehhanismi $ABCD$ lülid liiguvad sel juhul paralleelselt yz-tasapinnaga, s. t. meil on tegemist nn. *tasapinnalise mehhanismiga.*



Joon. 120.

Uurime, missuguseid üldisi kitsendusi mehhanismi kõikide lülide liikumises põhjustab telgede paralleelsuse nõue. Need kitsendused on järgmised. Mehhanismi lülidel ei saa kõigepealt olla pöörlevat liikumist ümber telgede y ja z. Teiseks on tõkestatud lülide translatoorne liikumine piki x-telge. Kuuest võimalikust lihtliikumisest ei saa seega teostada kolme. Võimalikeks osutuvad järelikult ainult järgmised kolm lihtliikumist: pöörlemine ümber x-telje (või sellega paralleelsete telgede) ning translatoorsed liikumised piki y- ja z-telgi. Tõepoolest, lülide AB ja CD liikumine pole midagi muud kui pöörlemine ümber x-teljega paralleelsete telgede. Mis puutub lülisse BC, siis sooritab see liitliikumist tasapinnas yz. Seda liikumist võib vaadelda kui pöörlemist ümber yz-tasapinnaga risti asetseva telje, millele liitub translatoorne liikumine piki y- ja z-telge.

Kui mehhanismi kõikide lülide liikumist tõkestab kokku kolm kitsendust, siis on ilmne, et seda asjaolu tuleb arvesse võtta nii üksikute lülide vabadusastmete loendamisel kui ka kogu mehhanismi kui terviku liikuvusastme määramisel. Kui üldjuhul mehhanismi liikuvate lülide vabadusastmete arv oli $6n$ (n tähistab liikuvate lülide arvu), siis käesoleva mehhanismi juures on liikuvate lülide vabadusastmete arv antud avaldisega $(6-3)n = 3n$. Analoogiliselt võib näidata, et $5p_5$ sideme asemel kehtestavad V klassi paarid käesolevas mehhanismis ainult $(5-3)p_5 = 2p_5$ sidet, sest kolm sidet on juba kehtestatud telgede paralleelsuse tingimusega, jne. Mehhanismi struktuurivalem (2.8) tuleb nüüd kirjutada järgmiselt:

$$L = (6-3)n - (5-3)p_5 - (4-3)p_4 - \\ - (3-3)p_3 = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (3.1)$$

Valemisse (3.1) ei saa kuuluda I, II ja III klassi paarid, kuna neid moodustavatel lülidel on kolm ja enam võimalikku suhtelist liikumist. Käsitletud näitest selgub, et juhul, kui mehhanismi kõikide lülide liikumises on kehtestatud teatavaid, kogu mehhanismile ühiseid sidemetingimusi, tuleb nende sidemetingimuste arv mehhanismi struktuurivalemist välja jätta. Selleks tuleb nimetatud arv lahutada nii kõikide liikuvate lülide vabadusastmete kui ka kõikide mehhanismi kuuluvate kinemaatiliste paaride poolt kehtestatud sidemete arvust.

2°. Mehhanismid jagunevad viide perekonda, vastavalt neis esinevate üldiste, mehhanismi kõikide lülide liikumist tõkestavate sidemetingimuste hulgale. Perekonna number (tunnusarv) on määratud üldiste sidemetingimuste arvuga.

Juhul, kui mehhanismi liikumist ei piira ükski üldine sidemetingimus, kuulub mehhanism 0-perekonda. Selle perekonna struktuurivalem on identne valemiga (2.8):

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$

Kui mehhanismis kehtib üks üldine sidemetingimus, siis liigitatakse ta esimesse perekonda. Esimese perekonna mehhanismide struktuurivalem on järgmine:

$$L = (6-1)n - (5-1)p_5 - (4-1)p_4 - (3-1)p_3 - \\ - (2-1)p_2 - (1-1)p_1$$

ehk

$$L = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2. \qquad (3.2)$$

Võrreldes valemeid (2.8) ja (3.2) selgub, et esimese perekonna mehhanismide struktuurivalem (3.2) saadakse struktuurivalemist (2.8), vähendades kõigi seal esinevate kordajate absoluutväärtusi ühe võrra.

Teise perekonna mehhanismide struktuurivalem saadakse analoogiliselt:

$$L = (6-2)n - (5-2)p_5 - (4-2)p_4 - (3-2)p_3 - \\ - (2-2)p_2$$

ehk

$$L = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3. \tag{3.3}$$

Kolmanda perekonna mehhanismide struktuurivalemi kuju on järgmine:

$$L = (6-3)n - (5-3)p_5 - (4-3)p_4 - (3-3)p_3$$

ehk

$$L = 3n - 2p_5 - p_4. \tag{3.4}$$

Neljanda perekonna mehhanismide puhul on struktuurivalemiks

$$L = (6-4)n - (5-4)p_5 - (4-4)p_4$$

ehk

$$L = 2n - p_5. \tag{3.5}$$

Viienda perekonna mehhanismid on moodustatud ühest V klassi kinemaatilisest paarist, s. t. kas rotatsiooni-, translatsiooni- või kruvipaarist.

Lõpuks kui mehhanismi liikumist piirab kuus sidemetingimust, siis mehhanism lakkab olemast, muutudes jäigaks süsteemiks (lüliks).

NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige V. V. Dobrovolski andis 1943. aastal mehhanismide ühtse struktuurivalemi:

$$L = (6-m)n - \sum_{k=5}^{k=m+1} (k-m)p_k,$$

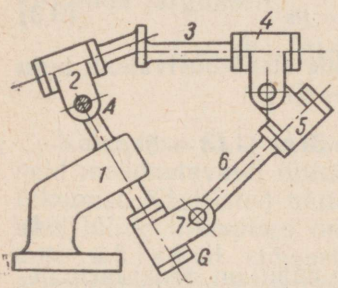
kus m tähistab mehhanismi lülide liikumist piiravate üldiste sidemetingimuste arvu ($m = 0, 1, 2, 3$ või 4, sõltuvalt perekonnast, kuhu mehhanism kuulub) ja k — kinemaatilise paari klassi numbrit, mis on määratud paari poolt kehtestatavate sidemete arvuga ($k = 5, 4, 3$ jne.). Eespool toodud valemid (3.1)—(3.5) on selle erikujud.

3°. Toome eri perekondadesse kuuluvatest mehhanismidest mõningaid näiteid.

Nagu juba märgitud, avaldub 0-perekonna mehhanismide struktuurivalem kujul:

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1,$$

kus L tähistab mehhanismi liikuvusastet. 0-perekonna mehhanismide liikumist ei piira ükski üldine sidemetingimus. Säärasteks mehhanismideks osutuvad ruumilised mehhanismid, millede lülide liikumine on kõige üldisema iseloomuga.



Joon. 121.

Joonisel 121 on toodud ühe lihtsama, käsitletud perekonda kuuluva mehhanismi skemaatiline kujutis. Tegemist on nn. *ruumilise seitsmelülilise šarniirmehhanismiga*, mille rotatsioonipaaride teljed on meelevaldse orientatsiooniga. Selle mehhanismi kuus liikuvat lüli moodustavad seitse V klassi kinemaatilist paari. Mehhanism võimaldab üle kanda vedava lüli *2* pöörlevat liikumist veetavale lülile *7*, kusjuures nimetatud lülide teljed A ja G on ruumis meelevaldselt orienteeritud.

Mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 6n - 5p_5.$$

Kui sellesse valemisse asetada liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvud, saame

$$L = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 7 = 1.$$

Mehhanismil on seega üks liikuvusaste.

4°. Esimese perekonna mehhanismide struktuurivalemiks on, nagu varem näidatud, valem (3.2):

$$L = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2.$$

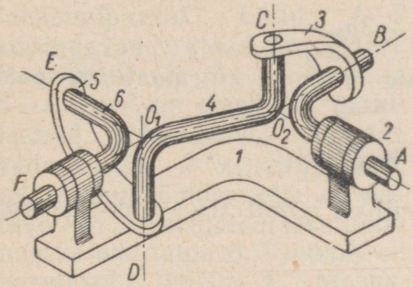
1. perekonda kuuluvate mehhanismide näitena võib tuua nn. *kahekordse universaalliigendi*, mille skeemi kujutab joonis 122. Selle mehhanismi lülid moodustavad kuus V klassi rotatsioonipaari. Viimaste teljed lõikuvad kolmekaupa kahes punktis O_1 ja O_2. Mehhanismi abil saab vedava lüli *2* pöörlemist üle kanda veetavale lülile *6*, kasutades ainult kolme vahelüli (*3*, *4* ja *5*). Lüli *2* telg A ja lüli *6* telg F on seejuures ruumis meelevaldselt orienteeritud. Mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 5n - 4p_5.$$

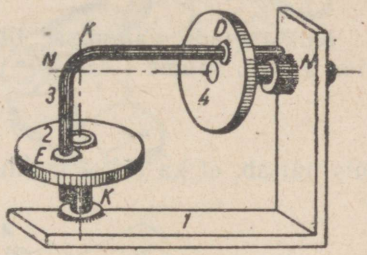
Asetanud valemisse liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvud, saame:

$$L = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 1,$$

mis näitab, et mehhanismil on üks liikuvusaste.



Joon. 122.



Joon. 123.

1. perekonna mehhanismide teise näitena toome neljalülilise nurkvarbadega mehhanismi, mida skemaatiliselt kujutab joonis 123. Ümber telje *K* pöörlev ketas *2* on varustatud puksiga *E*. Selles pöörleb ja liigub üles-alla täisnurkne varb *3*. Varva teine ots pöörleb ja libiseb kettasse *4* asetatud puksis *D*. Ketas *4* ise pöörleb ümber telje *N*. Mehhanismi kuulub koos kinnislüliga neli lüli. Lülid *1 — 2* ja *4 — 1* moodustavad kaks V klassi rotatsioonipaari. Lülid *2 — 3* ja *3 — 4* on ühendatud IV klassi paarideks. Mehhanism võimaldab üle kanda pöörlevat liikumist vedavalt lülilt *4* veetavale lülile *2* lõikuvate telgede *NN* ja *KK* puhul, kasutades ühtainust vahelüli *3*.

Käsitletava mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 5n - 4p_5 - 3p_4$$

ehk, pärast liikuvate lülide ja paaride arvude valemisse asetamist:

$$L = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 1.$$

Saadud tulemus näitab, et mehhanismil on üks liikuvusaste.

5°. Teise perekonna mehhanismide struktuurivalem oli teatavasti järgmine [valem (3.3)]:

$$L = 4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3.$$

2. perekonna mehhanismide näitena vaatleme joonisel 124 toodud mehhanismi. Lülid *1 — 2*, *2 — 3*, *3 — 4* moodustavad selles

V klassi rotatsioonipaare. Lülid *4 — 5* on omavahel ühendatud V klassi kruvipaariks, lülid *5 — 1* aga V klassi translatsioonipaariks. Mehhanismi abil saab ümber telje *C* pöörleva vedava lüli liikumist muundada veetava lüli *5* translatoorseks liikumiseks piki etteantud telge *A*.

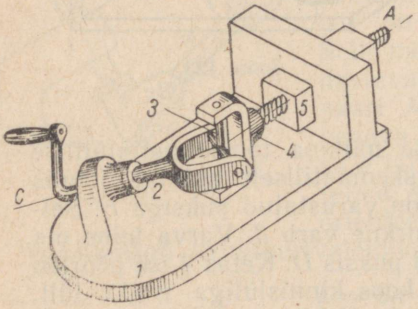
Mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 4n - 3p_5.$$

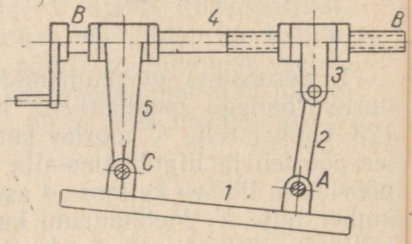
Kui asetada valemisse liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvud, saame

$$L = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1,$$

mis näitab, et ka sellel mehhanismil on ainult üks liikuvusaste.



Joon. 124.



Joon. 125.

Teine näide 2. perekonda kuuluvatest mehhanismidest on toodud joonisel 125. Lülid *1—2*, *2—3* ja *5—1* moodustavad siin paralleelsete telgedega V klassi rotatsioonipaare. Lülid *3—4* on ühenduses V klassi kruvipaari kaudu. Lülid *4—5* moodustavad V klassi rotatsioonipaari. See mehhanism võimaldab pöörata veetavaid lülisid *2* ja *5* ümber telgede *A* ja *C*, kui vedav lüli *4* pöörleb ümber telje *B*, mis asub telgede *A* ja *C* risttasapinnas.

Mehhanismi struktuurivalemiks on:

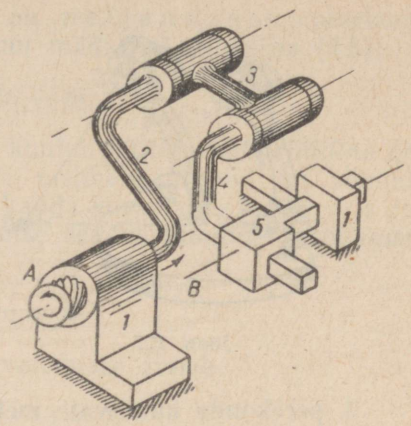
$$L = 4n - 3p_5.$$

Liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvude asetamine annab:

$$L = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1.$$

Mehhanismil on seega üks liikuvusaste.

Kolmandat näidet 2. perekonna mehhanismidest kujutab joonis 126. Lülid *2—3* ja *3—4* moodustavad kaks V klassi rotatsioonipaari. Lülisid *4—5* ja *5—1* seovad V klassi translatsioonipaarid. Lülid *1—2* kujundavad V klassi kruvipaari. Paaride *1—2*, *2—3*, *3—4* ja *5—1* teljed on omavahel paralleelsed. Mehhanism muudab vedava lüli *2* kruviliikumise, mis toimub ümber telje *A*, veetava lüli *5* translatoorseks liikumiseks piki telge *B*. Viimane on paralleelne teljega *A*. Mehhanismil on üks liikuvusaste ja tema struktuurivalemiks on:



Joon. 126.

$$L = 4n - 3p_5.$$

Tõepoolest, asetanud valemisse liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvud, saame

$$L = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 5 = 1.$$

6°. K o l m a n d a perekonna mehhanismide struktuurivalem oli teatavasti järgmine [valem (3.4)]:

$$L = 3n - 2p_5 - p_4.$$

3. perekonda kuuluvate mehhanismide näitena võib kõigepealt tuua V klassi paaridega *neljalülilise sfäärilise mehhanismi* (joon. 127).

Kõikide selles mehhanismis esinevate kinemaatiliste paaride teljed lõikuvad ühes ja samas punktis *O*, mistõttu selle mehhanismi kõikide lülide liikumised taanduvad pöörlemiseks ümber nimetatud punkti.

See mehhanism võimaldab lõikuvate telgede *AO* ja *DO* puhul vedava lüli *2* pöörlemist üle kanda veetavale lülile *4*.

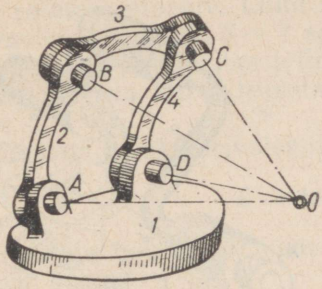
Mehhanismi struktuurivalem on järgmine:

$$L = 3n - 2p_5.$$

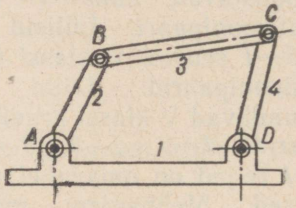
Asetades valemisse n ja p_5 väärtused, saame:

$$L = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Seega on mehhanismil üks liikuvusaste.



Joon. 127.



Joon. 128.

3. perekonda kuuluvate mehhanismide näitena võib veel tuua mis tahes tasapinnalist mehhanismi, muuhulgas ka *tasapinnalist šarniirnelilülikut* ehk *šarniirnelinurka* (joon. 128). See mehhanism võimaldab vedaval lülil *2* ja veetaval lülil *4* pöörelda ümber vastavate paralleelsete telgede *A* ja *D*.

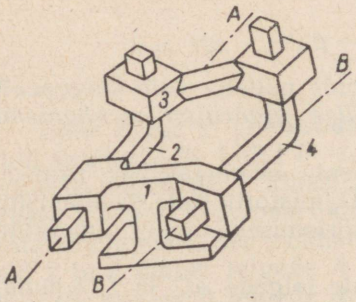
Mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 3n - 2p_5.$$

Pärast n ja p_5 väärtuste asetamist saame:

$$L = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

s. t. mehhanismil on üks liikuvusaste.



Joon. 129.

3. perekonna mehhanismide kolmanda näitena toome *ainult V klassi translatsioonipaare sisaldava neljalülilise ruumilise mehhanismi* (joon. 129). Mehhanismi abil saab nii vedavale lülile *2* kui ka veetavale lülile *4* anda translatoorse liikumise piki ruumis meelevaldselt orienteeritud telgi *A* ja *B*. Mehhanismi nimetatakse *neljalüliliseks ruumiliseks kiilmehhanismiks*.

Käsitletava mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 3n - 2p_5.$$

Pärast liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvude asetamist valemisse saame:

$$L = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1,$$

mis näitab, et käsitletaval mehhanismil on üks liikuvusaste.

7°. Nagu eespool näidati, on neljandasse perekonda kuuluvate mehhanismide struktuur määratud valemiga (3.5):

$$L = 2n - p_5.$$

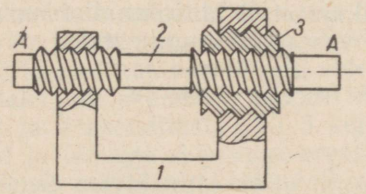
Kõne all olevasse perekonda kuulub näiteks *kolmelüliline kruvimehhanism* (joon. 130). Selle mehhanismi abil on võimalik vedava lüli *2* kruviliikumist üle kanda koaksiaalselt liikuvale veetavale lülile *3*, kusjuures liikumise seadus muutub. Mehhanismi struktuurivalem on järgmine:

$$L = 2n - p_5.$$

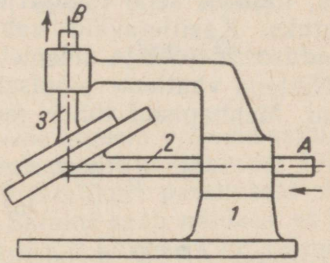
n ja p_5 väärtuste asetamine valemisse annab:

$$L = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Mehhanism on seega ühe liikuvusastmega.



Joon. 130.



Joon. 131.

4. perekonda kuuluvate mehhanismide teise näitena käsitleme *ainult translatsioonipaare sisaldavat kolmelülilist kiilmehhanismi*, mille paaride liikumisteljed on paralleelsed ühe ja sama tasapinnaga (joon. 131). Lülid *1—2*, *2—3* ja *3—1* moodustavad kolm V klassi translatsioonipaari. Mehhanism võimaldab üle kanda vedava lüli *2* translatoorset liikumist veetavale lülile *3*, kusjuures teljed *A* ja *B* on ühe ja sama tasapinnaga paralleelsed.

Käsitletud mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 2n - p_5.$$

Pärast liikuvate lülide ja kinemaatiliste paaride arvude asetamist valemisse saame:

$$L = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

millest selgub, et ka see mehhanism on ühe liikuvusastmega.

Käsitletud mehhanismide hulgast on tehnikas kõige enam levinud need 3. perekonda kuuluvad mehhanismid, mille lülid liiguvad paralleelselt ühe ühise tasapinnaga (joon. 128). Neid mehhanisme nimetatakse *tasapinnalisteks mehhanismideks*. Käesolevas raamatus käsitletakse peamiselt just tasapinnaliste mehhanismide teooriat.

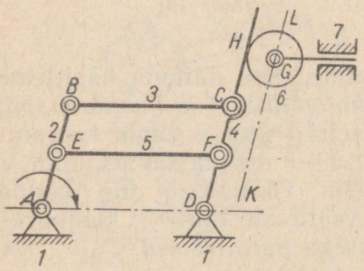
8°. Uurides mitmesugustesse perekondadesse kuuluvaid mehhanisme ja koostades nende struktuurivalemeid, lähtuti eeldusest, et kõik mehhanismi lülide vabadusastmed ja kõik kinemaatiliste paaride poolt kehtestatud sidemed on mehhanismi liikuvuse seisukohalt määravad.

Tuleb aga märkida, et peale vabadusastmete ja paaride poolt kehtestatud sidemete, mis aktiivselt mõjutavad mehhanismi liikumise iseloomu, võib mehhanismides kohata sääraseid vabadusastmeid ja sidemeid, mis ei avalda mingit mõju mehhanismi kui terviku liikumisele. Lülisid ja kinemaatilisi paare, milledele need vabadusastmed ja sidemed kuuluvad, võib mehhanismist kõrvaldada, ilma et selle tagajärjel mehhanismi kui terviku liikumine muutuks. Käsitletavaid vabadusastmeid nimetatakse *liigseteks vabadusastmeteks* ja sidemeid — *passiivseteks sidemeteks*.

Näitena vaatleme joonisel 132 kujutatud tasapinnalist mehhanismi. Mehhanismi lülide mõõted vastavad tingimustele:

$$l_{AB} = l_{CD},\ l_{AD} = l_{EF} = l_{BC},\ l_{AE} = l_{BE} \text{ ja}$$

$$l_{DF} = l_{FC}.$$



Joon. 132.

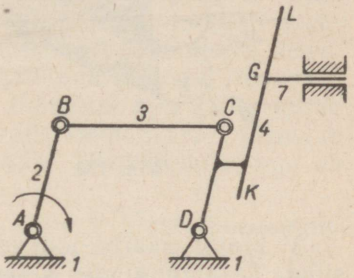
Kujund *ABCD* moodustab seega alati rööpküliku. Seetõttu jääb punktide *F* ja *E* vahekaugus alati konstantseks ja võrdseks punktide *A* ja *D* ning *B* ja *C* vahekaugusega. Järelikult võib mehhanismist eemaldada lüli *EF* (või *BC*), ilma et mehhanismi liikumise iseloom seetõttu muutuks. Nimetatud lüli, mis moodustab mehhanismis kinemaatilised paarid *E* ja *F*, loob järelikult sidemeid, mis osutuvad passiivseiks.

Edasi vaatleme ümmargust rulli *6* (joon. 132). Koos lüliga *7* moodustab rull ühe V klassi rotatsioonipaari, koos lüliga *4*, millega ta kokku puutub piki sirgjoonelist profiili *HC*, aga IV klassi paari. On pikemata selge, et rulli *6* pöörlemine punkti *G* läbiva telje ümber ei mõjuta mehhanismi kui terviku liikumist. Vabalt pöörlev rull annab seega liigse vabadusastme. Seetõttu võib, rikkumata mehhanismi kui terviku liikumise iseloomu, kõrvaldada

rulli ja viia lüli *4* vahetult ühendusse lüliga *7*, kasutades selleks IV klassi kinemaatilist paari. Lülide *4* ja *7* kokkupuude (kontakt) toimub nimetatud paaris piki sirgjoonelist profiili *LK*, mis on seotud lüliga *4*. Viimane on paralleelne sirgega *DC* ja asub sellest rulli *6* raadiuse kaugusel (joon. 133).

Ülalkirjeldatud viisil saadud mehhanism annab veetavale lülile samasuguse liikumise kui lähtemehhanismgi, kuid sellest on kõrvaldatud liigsed vabadusastmed ja passiivsed sidemed.

Mehhanismide struktuuri uurimisel struktuurivalemite abil tuleb silmas pidada liigsete vabadusastmete ja passiivsete sidemete olemasolu võimalust.



Joon. 133.

Passiivsete sidemete ja liigsete vabadusastmete väljaselgitamine toimub kõige lihtsamalt mehhanismide kinemaatika uurimisel, näiteks lülide asendite ja kiiruste määramisel. Kui veetavate lülide asendeid või kiirusi on võimalik määrata mehhanismi ühte või mitut lüli kõrvale jättes, siis on selge, et need lülid loovad kas passiivseid sidemeid või liigseid vabadusastmeid. Näiteks lüli *6* asendit (joon. 132) saab määrata, lähtudes lülide *2, 3* ja *4* asenditest. Lüli *5* kehtestab järelikult passiivseid sidemeid ja temaga ei pruugi arvestada. Samuti saab näidata, et lüli *6* kiiruse määramine sõltuvalt vedava lüli *2* kiirusest, on võimalik ilma lüli *5* kiirust arvestamata. Edaspidi on alati eeldatud, et kõik liigsed vabadusastmed ja passiivsed sidemed on mehhanismist vastavate lülide eemaldamisega juba kõrvaldatud. Seega tulevad arvestamisele ainult need sidemed ja vabadusastmed, millest mehhanismi liikumine tõepoolest sõltub.

§ 17. Tasapinnaliste mehhanismide struktuur

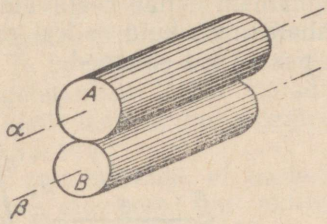
1°. Uurides 3. perekonna mehhanisme, märkisime ära juhu (§ 16, 6°), kus nimetatud mehhanismide kõik lülid liikusid paralleelselt ühe ja sama tasapinnaga. Neid mehhanisme, nagu juba ülal märgiti, nimetatakse lülide liikumise iseloomu alusel tasapinnalisteks mehhanismideks.

Üldjuhul on niisuguste mehhanismide struktuurivalemiks

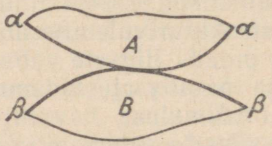
$$L = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (3.6)$$

Selle valemi tuletas esimesena 1869. aastal vene akadeemik P. L. Tšebõšev, mistõttu seda nimetatakse *Tšebõševi valemiks*.

2°. Nagu selgub võrrandist (3.6), võivad 3. perekonna tasapinnalistesse mehhanismidesse kuuluda ainult IV ja V klassi kinemaatilisi paare moodustavad lülid. Tasapinnalistes mehhanismides piiravad IV klassi paarid lülide suhtelist liikumist ainult ühe sideme kehtestamisega.

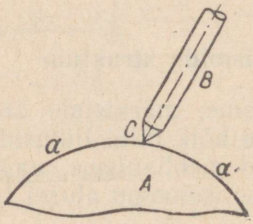


Joon. 134.

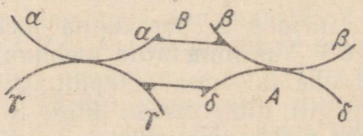


Joon. 135.

V klassi paarid loovad aga samades mehhanismides kaks sidet. Tasapinnalistes kinemaatilistes ahelates esinevate IV klassi paaride näitena võib tuua lülide A ja B poolt moodustatud paari (joon. 134). Lülid A ja B on kujundatud silindriliste pindadena α ja β, mis veerevad ja libisevad teineteisel, jäädes omavahel alaliselt kontakti piki silinderpindade sirgjoonelisi moodustajaid. Libisemist piki moodustajaid ei tohi paaris esineda. Lõikumisel moodustajate risttasapinnaga tekib kaks teineteisega kokkupuutuvat kõverat $\alpha\alpha$ ja $\beta\beta$ (joon. 135). Teise näitena võib tuua paari, mis on moodustatud lüli A külge kuuluvast kõverast $\alpha\alpha$ ja lüli B külge kuuluvast teravikust C (joon. 136). Nagu tähendatud, puutuvad lülid kõikides IV klassi kinemaatilistes paarides teineteist kas ühes punktis või piki sirget, s. t. need kinemaatilised paarid osutuvad kõrgemateks paarideks.



Joon. 136.



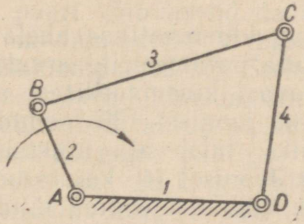
Joon. 137.

Tasapinnalises mehhanismis tõkestab IV klassi paar ühte teatavat liikumist. Näiteks joonisel 134 kujutatud paar tõkestab

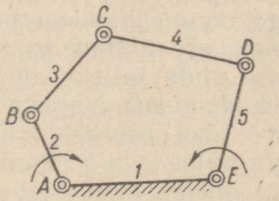
lülide A ja B suhtelist liikumist kõverate $\alpha\alpha$ ja $\beta\beta$ kokkupuutepunktist (kontaktpunktist) tõmmatud ühise normaali sihis. Seda paari moodustavate lülide kaheks säilinud suhteliseks liikumiseks on ühe kõvera veeremine ja libisemine teisel.

V klassi madalamad paarid, s. t. paarid, milles lülide kokkupuude toimub teatava pinna ulatuses, *osutuvad tasapinnalistes mehhanismides kas rotatsioonipaarideks* (joon. 89) *või translatsioonipaarideks* (joon. 100). Teised madalamad paarid, näiteks kruvipaarid, ei saa tasapinnalises mehhanismis esineda, kuna nende lülide suhteline liikumine on ruumiline. Tasapinnaliste mehhanismide lülide kolmest võimalikust suhtelisest liikumisest tõkestavad nii rotatsiooni- kui ka translatsioonipaarid kaks liikumist. Rotatsioonipaar tõkestab translatoorset liikumist piki kahte lülide liikumistasapinnas paiknevat telge. Translatsioonipaar tõkestab ühe translatoorse ja ühe pöörleva liikumise (ümber telje, mis on risti lülide liikumistasapinnaga).

Tasapinnalistes mehhanismides esineb ka V klassi kõrgemaid paare. Joonis 137 kujutab üht säärast paari. See paar on moodustatud kahest omavahel jäigalt ühendatud tasapinnalisest kõverast $\alpha\alpha$ ja $\beta\beta$, mis on kokkupuutes kahe teise, samuti omavahel jäigalt ühendatud kõveraga $\gamma\gamma$ ja $\delta\delta$.



Joon. 138.

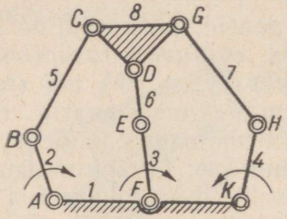


Joon. 139.

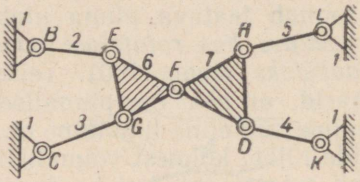
3°. 3. perekonna tasapinnalised mehhanismid võivad olla ühe, kahe ja kolme liikuvusastmega. Joonisel 138 on näidatud ühe liikuvusastmega mehhanism. Joonisel 139 toodud mehhanismil on kaks ning joonisel 140 kujutatud mehhanismil kolm liikuvusastet.

Kui mingi kinemaatilise ahela liikuvusaste on n u l l, siis ei saa ükski selle ahela lülidest oma asendit kinnislüli suhtes muuta. Kinemaatiline ahel on seega muutunud sõrestikuks (joon. 141). Edaspidises käsitleme ainult niisuguseid kinemaatilisi ahelaid, milledel on v ä h e m a l t ü k s l i i k u v u s a s t e ja mis seejuures moodustavad mehhanisme. Nagu ülal fikseeriti (§ 15, 1°), nimetatakse mehhanismiks säärast kinemaatilist ahelat, mille kõikide lülide liikumine on täielikult määratud, niipea kui ette

anda tema ühe või mitme lüli liikumine mõne teise, meelevaldselt võetud lüli suhtes. Viimast käsitletakse sel juhul mehhanismi kinnislülina.



Joon. 140.



Joon. 141.

Ühe lüli liikumisseaduse etteandmine on tarvilik ja piisav selleks, et ühe liikuvusastmega kinemaatilisest ahelast moodustatud mehhanismi kõikide lülide liikumine oleks täielikult määratud. Juhul, kui mehhanism on moodustatud kahe liikuvusastmega kinemaatilisest ahelast, tuleb ette anda kahe meelevaldselt valitud lüli liikumisseadused. Kolme liikuvusastmega kinemaatilisest ahelast tuleneva mehhanismi puhul tuleb liikumisseadused ette anda kolmele lülile jne.

Seega on mehhanismi moodustava kinemaatilise ahela liikuvusastmete arv ühtlasi ka sõltumatute parameetrite arvuks, mis tuleb ette anda selleks, et vaadeldavast kinemaatilisest ahelast saada mehhanismi. Näiteks selleks, et joonisel 139 toodud kinemaatiline ahel osutuks mehhanismiks, tuleb aja funktsioonina ette anda lülide *2* ja *5* pöördenurgad. Joonisel 140 kujutatud kinemaatilise ahela puhul peab aja funktsioonina teadma lülide *2*, *3* ja *4* asendeid jne.

Kasutades ülal toodud Tšebõševi valemit [valem (3.6)], saab alati hõlpsasti analüüsida antud tasapinnalise kinemaatilise ahela (või mehhanismi) struktuuri ja määrata tema liikuvusastet.

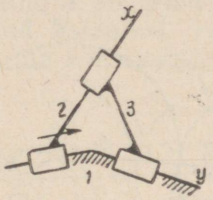
4°. Tasapinnaliste 4. perekonna mehhanismide hulka kuuluvad mehhanismid, mis sisaldavad ainult translatsioonipaare, millede liikumisteljed on paralleelsed ühe ühise tasapinnaga (§16, 7°). Selle perekonna lihtsaimaks esindajaks on joonisel 131 kujutatud kiilmehhanism.

Käsitletavate mehhanismide struktuurivalem on järgmine:

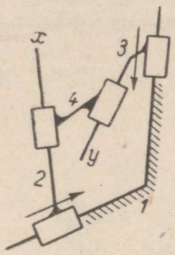
$$L = 2n - p_5. \tag{3.7}$$

Seda valemit, mida 1937. aastal esimesena kasutas NSV Liidu Teaduste Akadeemia korrespondeeriv liige V. V. Dobrovolski, nimetatakse *Dobrovolski valemiks*.

Nagu valemist (3.7) selgub, esineb tasapinnalistes 4. perekonna mehhanismides ainult V klassi paare. Kui veel arvesse võtta asjaolu, et käsitletavates mehhanismides võivad lülid liikuda ainult translatoorselt, siis on selge, et ka V klassi paaride seast saab praktiliselt kasutada ainult translatsioonipaare. Joonisel 142 on kujutatud ühe liikuvusastmega kiilmehhanism. Joonisel 143 näidatud kiilmehhanismil on kaks liikuvusastet.



Joon. 142.



Joon. 143

5°. Iga tasapinnalises 3. perekonna mehhanismis esinevat kõrgemat paari võib asendada kinemaatilise ahelaga, mis koosneb ainult madalamatest V klassi paaridest (s. o. rotatsiooni- või translatsioonipaaridest). Selleks, et ainult V klassi paaridest koostatud asendavad kinemaatilised ahelad moodustaksid süsteemi, mis mehhanismi antud asendis oleks kinemaatiliselt ekvivalentne IV klassi kõrgema paariga, tuleb täita kaks tingimust. Asendavad ahelad peavad kõigepealt looma sama palju sidemetingimusi kui asendatav kõrgem paar, ning teiseks, uuritavate lülide hetkeline suhteline liikumine peab jääma muutumatuks.

IV klassi kõrgem kinemaatiline paar loob tasapinnalistes mehhanismides ainult ühe sideme. V klassi paaridest koosnev kõrgemat paari asendav ahel peab seetõttu kehtestama samuti ühe sideme. Asendava ahela lülide arv n ja V klassi paaride arv p_5 peavad seega rahuldama tingimust

$$3n - 2p_5 = -1,$$

s. t. sidemete arv peab vabadusastmete arvu ühe võrra ületama.

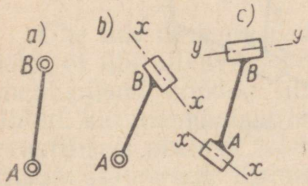
Sel puhul

$$p_5 = \frac{3n+1}{2}. \qquad (3.8)$$

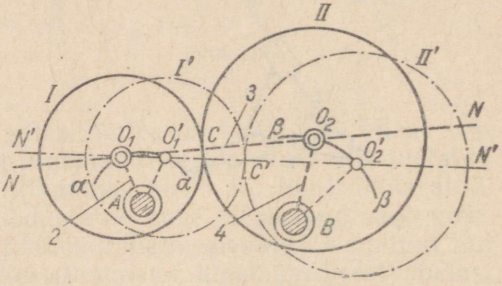
Seosest (3.8) selgub, et kõrgemat paari asendav ahel peab koosnema v ä h e m a l t ühest lülist ja kahest V klassi kinemaa-

tilisest paarist. Seega, lähtudes sidemetingimustest, *osutub tasapinnalise mehhanismi iga IV klassi paar ekvivalentseks kahte V klassi madalamat paari* (s. o. rotatsiooni- või translatsioonipaari) *moodustava lüliga*, kuid seda ainult juhul, kui kogu mehhanismi liikumisseadus jääb seejuures muutumatuks.

Joonis 144, *a* kujutab asendavat lüli, mis moodustab kaks rotatsioonipaari. Asendav lüli, mida kujutab joonis 144, *b*, moodustab ühe rotatsiooni- ja ühe translatsioonipaari ning joonisel 144, *c* näidatud lüli — kaks translatsioonipaari.



Joon. 144.

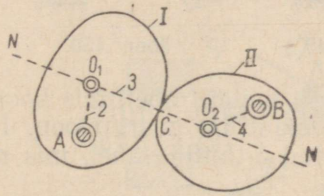


Joon. 145.

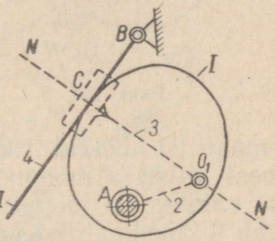
6°. Olgu näiteks antud mehhanism, mille liikuvateks lülideks on kaks ümber punktide *A* ja *B* pöörlevat ketast *I* ja *II* (joon. 145). IV klassi kõrgem paar tekib siin ketaste kokkupuutepunktis *C*. Lihtne on näidata, et kaugused AO_1, O_1O_2 ja O_2B jäävad selle mehhanismi liikumisel muutumatuks. Tõepoolest, viime lüli *I* asendisse *I'*. Lõik AO_1 liigub seejuures asendisse AO_1'. Punkt O_1, mis kujutab endast ringjoone *I* tsentrit, liigub kaarel $\alpha\alpha$. Lõik BO_2 asetub ümber asendisse BO_2', sest ringjoone *II* tsenter O_2 saab liikuda ainult kaarel $\beta\beta$. Selleks, et leida punkti O_2' asendit kaarel $\beta\beta$, tuleb viimast sälkida raadiusega O_1O_2, asetades sirkli teraviku punkti O_1'. Kaugus O_1O_2 kujutab endast ringjoontele *I* ja *II* nende kokkupuutepunktis tõmmatud normaali *NN* lõiku ja võrdub nimetatud ringjoonte raadiuste summaga. Oletame nüüd, et lõik O_1O_2, mille pikkus jääb tsentrite O_1 ja O_2 kõikides asendites konstantseks, on kujundatud punktides O_1 ja O_2 kahte V klassi rotatsioonipaari moodustava lülina. Käsitletavat mehhanismi võib sel puhul asendada ainult madalamaid V klassi kinemaatilisi paare sisaldava šarniir-nelilülikuga AO_1O_2B. Kõrgem paar *C* on asendatud nn. *fiktiivse lüliga* O_1O_2, mis moodustab kaks madalamat V klassi kinemaatilist paari. Lihtne on kontrollida, et IV klassi kõrgemat paari asendav «fiktiivne» lüli O_1O_2 rahuldab võrrandit (3.6).

7°. Käsitletud asendamismeetodit võib laiendada kõikidele IV

klassi paaridele. Moodustagu näiteks joonisel 146 toodud profiilid *I* ja *II* kõrgema IV klassi paari. Profiilide kuju olgu meelevaldne. Joonestame puutepunktist *C* profiilide ühise normaali *NN* ning kanname sellele profiilide kõverustsentrid, mis vastavad puutepunktile *C* — saame punktid O_1 ja O_2. Ühendame nüüd punktid O_1 ja O_2 fiktiivse lüliga, kasutades kaht V klassi paari. Tulemus on sama, mis eelmiseski näites: lähtemehhanismi hetkelist liikumist võib jäljendada asendava šarniirmehhanismiga AO_1O_2B. Erinevalt joonisel 145 toodud juhust osutuvad siin fiktiivse lüli *3* ja lülide *2* ning *4* pikkused aga muutuvateks suurusteks. See on tingitud asjaolust, et kokkupuutuvate profiilide kõverusraadiused ei ole konstantse pikkusega.



Joon. 146.



Joon. 147.

Juhul kui üks kokkupuutes olevatest profiilidest kujutab endast mingit kõverat *I*, teine aga sirget *II* (joon. 147), asub teise profiili kõverustsenter lõpmata kaugel. Fiktiivne lüli *3* moodustab sel juhul profiili *I* kõverustsentris O_1 V klassi rotatsioonipaari. Teine rotatsioonipaar, mille peaks moodustama lüli *3*, asub oma pöörlemisteljega lõpmata kaugel, s. t. muutub V klassi translatsioonipaariks.

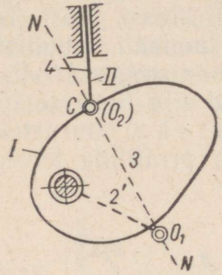
8°. On võimalik ka olukord, kus üks kokkupuutuvatest profiilidest on moodustatud kõverast *I*, kuna teiseks profiiliks osutub punkt *C* (joon. 148). Teise profiili kõverustsenter O_2 langeb sel puhul ühte punktiga *C*. Fiktiivne lüli moodustab siin seega kaks V klassi rotatsioonipaari. Esimese rotatsioonipaari telg läbib punkti *C*, kuna teise paari telg asub kõverjoonelise profiili *I* kõverustsentris O_1.

Juhul kui üheks profiiliks on sirge ja teiseks punkt (joon. 149), asendatakse kõrgem paar fiktiivse lüliga, mis moodustab ühe rotatsiooni- ja ühe translatsioonipaari. Nii rotatsioonipaari kui ka translatsioonipaari liikumistelg peab läbima puutepunkti *C*. Asendavat mehhanismi kujutab joonis 150.

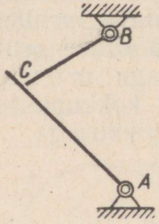
9°. Oleme tulnud seega järeldusele, et *iga IV klassi kõrgemate paaridega tasapinnalist mehhanismi võib asendada mehhanis-*

miga, mille koostisse kuuluvad ainult madalamad V klassi kinemaatilised paarid.

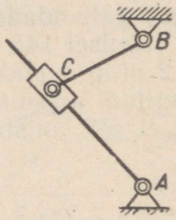
Lisaks asendavale kinemaatilisele ahelale, mis koosneb ainult ühest kahte kinemaatilist paari moodustavast lülist, võib, rahuldades tingimust (3.8), konstrueerida ka keerukamaid asendavaid



Joon. 148.

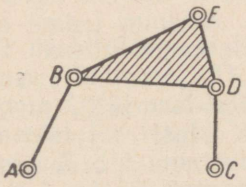


Joon. 149.

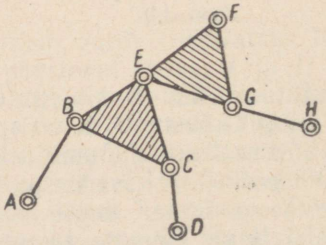


Joon. 150.

kinemaatilisi ahelaid. Üks sääraseid on näiteks ahel, mis koosneb kolmest lülist ja moodustab viis kinemaatilist paari (joon. 151). Teise näitena on joonisel 152 kujutatud 5-lüliline ahel, mis moodustab 8 kinemaatilist paari.



Joon. 151.



Joon. 152.

Kui tasapinnalises mehhanismis kõik IV klassi kõrgemad paarid on asendatud madalamaid paare sisaldavate kinemaatiliste ahelatega, muutub asendava mehhanismi kohta kehtiv Tšebõševi struktuurivalem järgmiseks:

$$L = 3n - 2p_5.$$

§ 18. Ruumiliste mehhanismide struktuurist

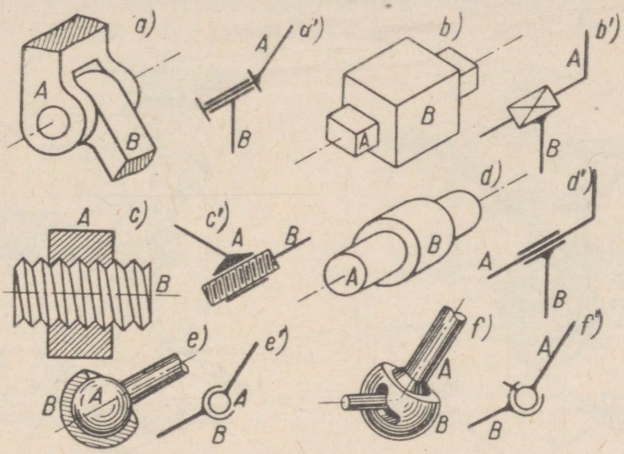
1°. Kaasaegses masinaehituses kasutatakse mitmesse perekonda kuuluvaid ruumilisi mehhanisme.

Käsitleme alljärgnevas mõningate tehnikas sagedamini esinevate ruumiliste mehhanismide struktuuri.

Säärasteks sageli esinevateks ruumilisteks mehhanismideks osutuvad ühelt poolt 0-perekonna mehhanismid ja teiselt poolt 3. perekonna sfäärilised mehhanismid. 0-perekonda kuuluvate mehhanismide struktuurivalem (Somov-Malõševi valem, § 16, 2°) on järgmine:

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1. \qquad (3.9)$$

Valemist (3.9) järgneb, et 0-perekonna mehhanisme saab koostada lülidest, millede poolt moodustatavad kinemaatilised paarid võivad kuuluda kõigisse viide klassi.



Joon. 153.

Madalamatest kinemaatilistest paaridest kohtab neis mehhanismides kõige sagedamini joonisel 153 poolkonstruktiivselt ja skemaatiliselt kujutatud paare. V klassi paarid (rotatsioonipaar, translatsioonipaar ja kruvipaar) on toodud joonisel 153 *a*, *b* ja *c*. Nimetatud paaridega oli meil võimalus juba varem tutvuda (§ 11, 5°). Juhul kui need paarid kuuluvad ruumilistesse mehhanismidesse, tuleb neid skemaatiliselt kujutada nii, nagu on näidatud joonisel 153, *a'*, *b'* ja *c'*. IV klassi silinderpaar ja selle tingmärk on toodud joonisel 153, *d* ja *d'*. III klassi sfäärilist paari koos vastava tingmärgiga kujutab joonis 153, *e* ja *e'*.

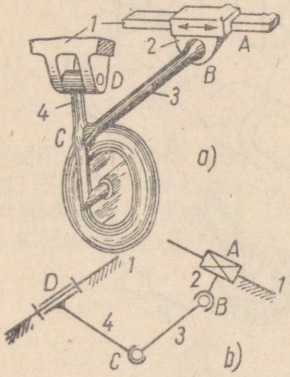
Lõpuks IV klassi kuuluv tapiga varustatud sfääriline paar ja selle tingmärk on näidatud joonisel 153, *f* ja *f'*.

Nagu 3. perekonna tasapinnaliste mehhanismide puhul, nii ka siin kõrgemaid paare tavaliselt tingmärkidega ei kujutata. Põhjuseks on see, et kõrgemate paaride juures on paari moodustavate elementide täpse kuju edasiandmine olulise tähtsusega.

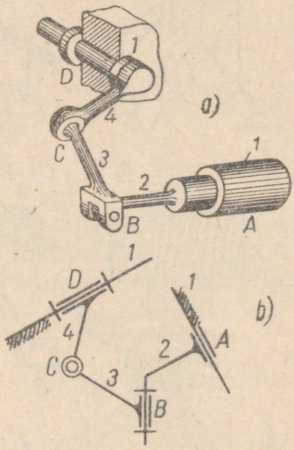
2°. Käsitleme allpool mõningaid tehnikas kasutatavaid ruumilisi mehhanisme, mis kuuluvad 0-perekonda. Joonisel 154, *a* on näidatud lennuki ülestõstetava maandumistelliku (šassii) neljalüliline mehhanism *ABCD*. Liugur *2* libiseb liikumatul suunajal *1* ja annab kepsu *3* kaudu liikumise edasi ratast kandvale hoovale *4*, mis pöördub ümber liikumatu lüli *1* külge kinnitatud telje. Lülid *1—2* moodustavad translatsioonipaari. Lülid *2—3* ja *3—4* moodustavad sfäärilised paarid (kuul-liigendid) ning lülid *4—1* — rotatsioonipaari. Mehhanismi kinemaatiline skeem on toodud joonisel 154, *b*. Mehhanismi vaadeldes

selgub, et lülil *3* on üks liigne vabadusaste — võimalus vabalt pöörelda ümber oma pikitelje. Seetõttu võiks ühe sfäärilistest paaridest (*B* või *C*) asendada sõrmega varustatud IV klassi sfäärilise paariga (joon. 153, *f*). Kuna aga kõne all olev liigne vabadusaste ei avalda mehhanismi liikumisele segavat mõju, valmistatakse mehhanism konstruktsiooni lihtsust silmas pidades siiski kahe sfäärilise paariga. Kui ülalkäsitletud liigne vabadusaste välja jätta, siis kujuneb mehhanismi struktuurivalem järgmiseks:

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 =$$
$$= 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1.$$



Joon. 154.



Joon. 155.

Lennuki šassii mehhanismil on järelikult üks liikuvusaste.

Joonisel 155, *a* on kujutatud lennukijuhtimise automaadi (nn. autopiloodi) neljalüliline roolimehhanism *ABCD*. Silinder *2* liigub paikse kolvi *1* suhtes ja annab kepsu *3* kaudu liikumise edasi nookurile *4*. Viimane saab pöörelda liikumatu lüli *1* külge kinnitatud laagris. Lülid *1—2* moodustavad silinderpaari, lülid *2—3* ja *4—1* kujundavad kaks rotatsioonipaari ja lõpuks, lülid *3—4* on omavahel ühendatud sfäärilise paariga. Mehhanismi kinemaatiline skeem on toodud joonisel 155, *b* ja tema struktuurivalem on järgmine:

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 =$$
$$= 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Roolimehhanismil on järelikult üks liikuvusaste.

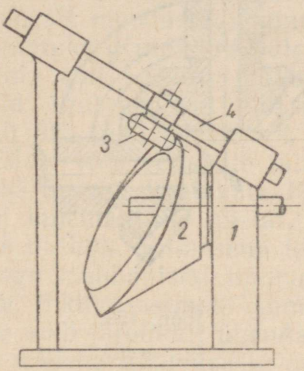
3°. Joonis 156 kujutab ruumilist nukkmehhanismi. Liikumatu aluse *1* külge kinnitatud telje ümber pöörleb nukk *2*, mille vastu on surutud tünnikujuline rull *3*. Viimane võib vabalt pöörelda ümber oma telje, mis omakorda on liikumatult ühendatud varvaga *4*. Varb *4* liigub translatoorselt liikumatusse alusesse *1* paigutatud juhtpuksides. Jättes kõrvale rulli võimaluse pöörelda ümber oma telje (see moodustab liigse vabadusastme), võime konstateerida, et lülid *1—2* moodustavad rotatsioonipaari ja lülid *4—1* — translatsioonipaari. Kuna rull *3* ja nuki *2* profileeritud otspind puutuvad omavahel kokku ainult ühes punktis,

siis, peale rulli ja lüli *4* mõttelist kokkuliitmist, moodustub lülide *2* ja *4* vahel punktkontaktiga *I* klassi paar. Mehhanismi struktuurivalemiks on:

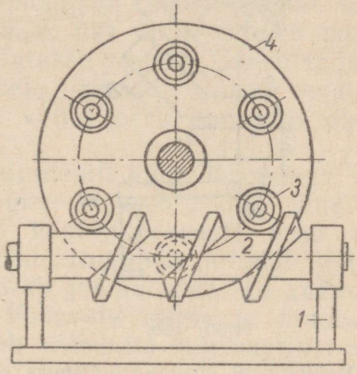
$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 =$$
$$= 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Käsitletud nukkmehhanismil on seega üks liikuvusaste.

Joonisel 157 on näidatud tappidega tiguülekande mehhanism. Aluse *1* laagrites pöörlev tigu *2* surub ratta *4* külge kinnitatud rulltapile *3*. Ratas *4* pöörleb aluse *1* külge kinnitatud laagris. Lülid *1—2* ja *4—1* moodustavad kokku 2 rotatsioonipaari. Kuna iga rull *3* puutub tigu *2* kruvipinda ainult ühes punktis, siis



Joon. 156.



Joon. 157.

sidudes rullid mõtteliselt rattaga *4* (mis on vajalik liigse vabadusastme kõrvaldamiseks), saame lülide *2* ja *4* vahel I klassi kõrgema paari. Mehhanismi struktuurivalem on järgmine:

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 =$$
$$= 6 \cdot 2 - 5 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1.$$

Käsitletud tappidega tigumehhanismil on järelikult üks liikuvusaste.

4°. 3. perekonna sfääriliste mehhanismide struktuurivalem tuletati esmakordselt 1936. aastal käesoleva raamatu autori poolt. Valemi kuju on järgmine (§ 16, 2°):

$$L = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (3.10)$$

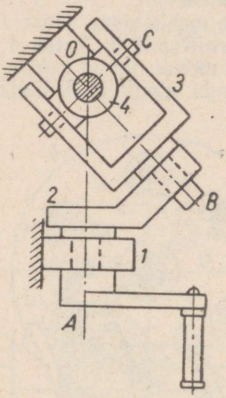
Sfääriliste mehhanismide struktuurivalem osutub seega Tšebõševi valemiga identseks.

Struktuurivalemist (3.10) selgub, et sfäärilistes mehhanismides esinevad ainult IV ja V klassi kinemaatilised paarid.

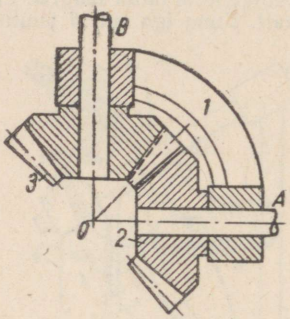
Kuna sfääriliste mehhanismide lülide liikumine toimub kontsentrilistel sfääripindadel, siis ei saa nende liikumises esineda translatsiooni. Seetõttu kohtab sfäärilistes mehhanismides V klassi paaridest ainult rotatsioonipaare. IV klassi kuuluvatest paaridest tulevad kõne alla ainult säärased kõrgemad paarid, millede elemendid puutuvad teineteist kas piki sirget, mis läbib sfääride ühist

tsentrit, või ühes punktis. Translatoorne liikumine sfääride ühise tsentri sihis (radiaalne translatsioon) peab seejuures olema tõkestatud.

Joonisel 158 on kujutatud neljalüliline sfääriline mehhanism, mille lülid *1*, *2*, *3* ja *4* on ühendatud rotatsioonipaaridega. Kõikide paaride teljed lõikuvad punktis *O*. Viimane osutub seega kõikide nende sfääriliste pindade ühiseks tsentriks, milledel toimub lülide liikumine. Lüli *2* pöörlemisest saab nookur *4* kiikuva liikumise. Mõlema lüli laagrid on ühendatud kinnislüliga *1*.



Joon. 158.



Joon. 159.

Mehhanismi struktuurivalemiks on:

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Mehhanismil on seega üks liikuvusaste.

Joonis 159 kujutab kahest koonushammasrattast moodustatud mehhanismi. Rataste *2* ja *3* teljed lõikuvad ühises tsentris. Samas punktis lõikuvad ka hammaste külgpindade kõik moodustajad. Lülid *1—2* ja *3—1* on seotud rotatsioonipaaridega. Lülisid *2—3* ühendav kõrgem paar kuulub IV klassi, sest mehhanismis ei esine liikumist piki hambapindade moodustajaid.

Struktuurivalem

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

näitab, et mehhanism on ühe vabadusastmega.

IV peatükk

MEHHANISMIDE KLASSIFIKATSIOON

§ 19. Mehhanismide moodustamise põhiprintsiip

1°. Mehhanismide moodustamise põhiprintsiip formuleeriti esmakordselt silmapaistva vene teadlase, professor Leonid Vladimirovitš Assuri poolt 1914. aastal. Nimetatud printsiip väljendub järgmiselt.

Kõik mõeldavad mehhanismid on moodustatud vedava lüli (või vedavate lülide) ja kinnislüli külge 0-liikuvusega kinemaatiliste ahelate järkjärgulise ühendamise teel. 0-liikuvusega kinemaatilisi ahelaid, s. o. ahelaid, mille liikuvusaste on null, nimetatakse edaspidi gruppideks.

Tõepoolest, nagu juba varem näidati, koosneb iga mehhanism *liikumatust lülist* (*kinnislülist*), *vedavatest lülidest* (s. t. lülidest, mille liikumine on ette antud) ja *veetavatest lülidest*. Viimaste liikumine sõltub vedavate lülide liikumisseadustest ja mehhanismi üldisest struktuurist.[1]

Soovitava liikuvusastmega mehhanismi koostamiseks tuleb kõigepealt moodustada kinnislüli, s. o. üks lülidest tuleb muuta liikumatuks. Kinnislüli külge ühendatakse seepeale kinemaatiliste paaride abil soovitud liikuvusastmele vastaval hulgal vedavaid lülisid. Igal vedaval lülil üksikult võttes peab seejuures olema ainult üks liikuvusaste.

Edasi võib vedavate lülide ja kinnislüli külge ühendada veetavaid lülisid. Veetavate lülide kogum kujutab endast ühte või mitut kinemaatilist ahelat, millede koguliikuvusaste peab võrduma nulliga. Viimasena formuleeritud tingimus järeldub sellest, et kogu mehhanismi liikuvusaste peab jääma võrdseks vedavate lülide liikuvusastmete summaga. Vedavate lülide ja kinnislüli külge võib järelikult ühendada ainult sääraseid kinemaatilisi ahelaid, millede liikuvusaste on null.

2°. 0-liikuvusega veetavate lülide kogum on moodustatud kinemaatilistest ahelatest, mis üksikult võetuna on samuti 0-liikuvusega. Nagu varem tähendati, nimetatakse sääraseid liikuvuseta kinemaatilisi ahelaid *gruppideks*. Täpsustame nüüd grupi definitsiooni. *Grupiks nimetatakse kinemaatilist ahelat, mille liikuvusaste muutub nulliks, kui ta ühendada vabade väliselementide kaudu kinnislüliga, ning mida ei saa lahutada 0-liikuvusega sõltumatuteks all-ahelateks.*

3°. Vaatleme näiteks joonisel 160 toodud tasapinnalist mehhanismi. Selle liikuvusastet saab määrata Tšebõševi valemiga:

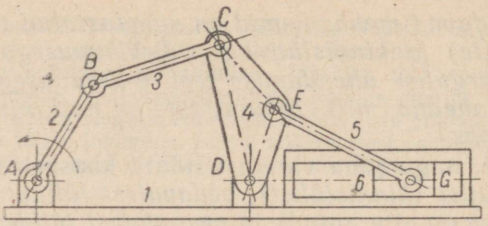
$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1,$$

sest liikuvate lülide arv $n = 5$, V klassi paaride arv $p_5 = 7$ ja IV klassi paare mehhanismis ei esine.

Lüli *1* on kinnislüliks. Vedavaks lüliks valime lüli *2*. Lülid *3*, *4*, *5* ja *6* moodustavad veetavate lülide kogumi, mille liikuvusaste on null. Tõepoolest, kogumisse kuulub neli lüli ja kuus V klassi paari. Kogumi liikuvusaste on järelikult

$$3n - 2p_5 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 0.$$

[1] Termini «vedav lüli» võib asendada terminiga «alglüli» (vt. joonealune viide lk. 85).



Joon. 160.

Edasi on lihtne näha, et lülidest *3*, *4*, *5* ja *6* moodustatud kogumi saab lahutada kaheks kinemaatiliseks ahelaks. Esimene neist koosneb lülidest *3* ja *4* ning teine — lülidest *5* ja *6*. Kumbki nimetatud ahelaist on moodustatud kahest lülist ja kolmest V klassi kinemaatilisest paarist. Mõlema ahela liikuvusaste L_{gr} võrdub seejuures nulliga. Tõepoolest,

$$L_{gr} = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Seega võib väita, et joonisel 160 kujutatud mehhanism on saadud kinnislülile *1* ja vedavale lülile *2* kahe grupi külgeliitmise teel. Esimene grupp koosneb lülidest *3* ja *4*, kuna teise moodustavad lülid *5* ja *6*.

4°. Gruppide struktuurivalemeid saab kõikide mehhanismiperekondade jaoks tuletada tingimusest

$$L_{gr} = 0. \tag{4.1}$$

Järelikult peab 0-perekonda kuuluva grupi struktuurivalem olema järgmine:

$$6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 0. \tag{4.2}$$

1. perekonna grupi koostise määrab valem

$$5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2 = 0; \tag{4.3}$$

2. perekonna grupi struktuurivalemiks on

$$4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 = 0; \tag{4.4}$$

3. perekonnas kehtib grupi struktuurivalemina seos

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0 \tag{4.5}$$

ja lõpuks, 4. perekonnas on grupi struktuur määratud valemiga

$$2n - p_5 = 0. \tag{4.6}$$

§ 20. Kaasaegsed mehhanismide klassifitseerimise meetodid

1°. Nagu juba käesoleva raamatu 1. ja 3. peatükis näidati, rakendab tänapäeva tehnika tohutul hulgal mitmesugust tüüpi mehhanisme.

Mehhanismide ja masinate teooria põhiülesandeks on uurida mehhanismide mitmesuguseid omadusi, nagu näiteks mehhanismilülide liikumise iseloomu, kiiruste ja kiirenduste muutumise seadusi, jõudude ja võimsuste ülekandmise seadusi jne.

Ülalnimetatud omaduste uurimine iga üksiku konkreetse mehhanismi juures eraldi poleks olemasolevate mehhanismide mitmekesisuse tõttu kuigi otstarbekas. Tuleb nimelt silmas pidada, et rööbiti tuntud mehhanismide kasutamisega ja nende täiustamisega loob tehnika järjest uusi ja täiuslikumaid mehhanismitüüpe.

Seetõttu on mehhanismide ja masinate teooria kõikidel arenguetappidel püütud uuritavaid mehhanisme liigitada üksikutesse küllalt laia ulatusega *mehhanismiklassidesse*. Teiste sõnadega, mehhanismide ja masinate teooria on alati tegelnud *mehhanismide klassifitseerimise* küsimustega.

Kõikide mehhanismiklassifikatsioonide aluseks on võetud mehhanismide mingi ühine omadus, mis iseloomustab antud klassi. Näiteks eespool, § 16, esitasime mehhanismide liigituse perekondadesse, aluseks võttes üldiste sidemetingimuste arvu, mis piiravad mehhanismi kõikide lülide liikumist. Igal mehhanismiperekonnal on oma struktuurivalem, s. t. mehhanismide perekondadeks jaotamise aluseks võib võtta struktuuritunnuse. Mehhanismide liigitus perekondadesse osutub seega kaasaegsete mehhanismide *struktuurilisele alusele* rajatud *klassifikatsiooni* esimeseks etapiks.

Nagu edaspidises näidatakse, on mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon tihedalt seotud mehhanismide kinemaatika ja kinetostaatika uurimisega. See tähendab, et ühte ja samasse perekonda kuuluvate mehhanismide uurimisel on rakendatavad ühed ja samad kinemaatilise ja kinetostaatilise analüüsi meetodid. Nii näiteks võib 3. perekonda kuuluvate (§ 16, 6°) sfääriliste ja tasapinnaliste mehhanismide uurimiseks rakendada analoogilisi meetodeid. Sama kehtib ka kruvi- ja kiilmehhanismide uurimisel, sest mõlemad nimetatud mehhanismid kuuluvad 4. perekonda (§ 16, 7°).

Mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon ei piirdu ainult mehhanismide liigitamisega perekondadesse. Iga perekonna ja mehhanismitüübi piirides võib klassifitseerimist jätkata, aluseks võttes mehhanismide kinemaatilises ja kinetostaatilises analüüsis rakendatavaid meetodeid.

Allpool on esmajärjekorras käsitletud kaasaegses tehnikas

väga levinud 3. ja 4. perekonna tasapinnaliste mehhanismide struktuurilist klassifikatsiooni ning on toodud mõningaid teatmeid enamlevinud ruumiliste mehhanismide struktuurilisest klassifikatsioonist.

Mehhanismi struktuurilise klassifikatsiooni aluseks on võetud professor L. V. Assuri poolt 1914.—1917. a. avaldatud põhimõtted, mida ta rakendas 3. perekonna tasapinnalistele mehhanismidele.

2°. Peale mehhanismide struktuurilise klassifikatsiooni kasutatakse mehhanismide ja masinate konstrueerimise praktikas veel *struktuurilis-konstruktiivset mehhanismide klassifikatsiooni*. Viimase aluseks on võetud mehhanismide konstruktiivse kujunduse tunnused.

Seda klassifikatsiooni kasutati ka käesoleva raamatu esimeses peatükis põhiliste mehhanismitüüpide kirjeldamisel.

Mõningatel juhtudel osutub mehhanismide praktilise kasutamise seisukohast lähtudes mugavaks mehhanisme klassifitseerida, aluseks võttes nende kasutusotstarvet. Vastavat klassifikatsiooni võib nimetada *mehhanismide klassifikatsiooniks kasutusotstarbe järgi*.

Selle klassifikatsiooni põhjal liigitatakse mehhanismid liikumist ülekandvateks mehhanismideks, sisse- ja väljalülitamismehhanismideks, blokeerivateks mehhanismideks, kinnitusmehhanismideks, fikseerivateks mehhanismideks, haardemehhanismideks, katkelist liikumist andvateks mehhanismideks, matemaatilisi operatsioone sooritavateks mehhanismideks, ettenihkemehhanismideks, sidurimehhanismideks, regulaatorimehhanismideks, pidurimehhanismideks jne.

Säärane klassifikatsioon koos vastavate näidismehhanismidega võib olla väga kasulik inseneridele ja konstruktoritele, kes tegelevad mehhanismide ja mitmesuguste seadeldiste konstrueerimisega. Käsitletava klassifikatsiooniga ja suure hulga masinate ning aparaatide projekteerimisel kasutatavate mehhanismidega võib ligemalt tutvuda lk. 68 toodud joonealuses viites loetletud käsiraamatute kaudu.

§ 21. Tasapinnaliste mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon

1°. Nagu juba varem märgiti, kasutatakse 3. ja 4. perekonda kuuluvaid tasapinnalisi mehhanisme kaasaegses masinaehituses eriti laialdaselt. Seetõttu käsitleme nende struktuurilist klassifikatsiooni siinkohal eraldi.

Käesoleva raamatu 19. paragrahvis formuleeriti mehhanismide moodustamise põhiprintsiip. Viimane seisneb teatavasti selles, et

vedavate lülide ja kinnislüli külge liidetakse järk-järgult gruppe, millede struktuur peab rahuldama tingimust (4.1):

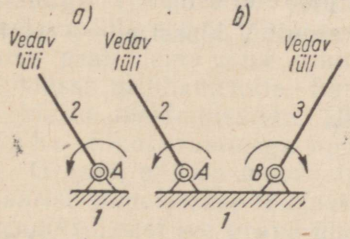
$$L_{gr} = 0.$$

Tasapinnaliste **mehhanismide** puhul (§ 19, 4°) kujuneb see tingimus järgmiseks:

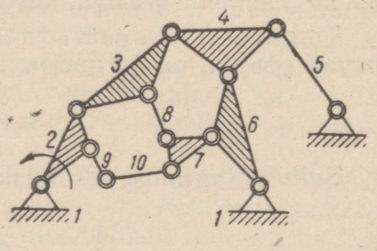
$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \qquad (4.5)$$

2°. Nimetame (kokkuleppeliselt) *vedavat lüli koos kinnislüliga,* mis omavahel moodustavad V klassi kinemaatilise paari, *I klassi mehhanismiks* (joon. 161, *a*). Joonisel 161, *b* on näidatud kaks I klassi mehhanismi.

Mis tahes tasapinnalise mehhanismi moodustamist võib käsitada kui I klassi mehhanismile tingimust (4.5) rahuldavate kinemaatiliste ahelate (g r u p p i d e) j ä r k j ä r g u l i s t j u u r d e l i i t m i s t. Näiteks esimene grupp liidetakse ü h e I klassi mehhanismiga (s. o. vedava lüli ja kinnislüliga); järgmine grupp ühendatakse kas esimesena juurdeliidetud grupi lülidega või osalt nendega ja osalt vedava lüli või kinnislüliga.



Joon. 161.



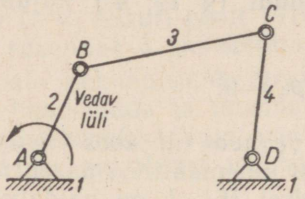
Joon. 162.

Joonis 162 kujutab skeemi mehhanismist, mis on saadud kolme kinemaatilise ahela juurdeliitmise teel ühele I klassi mehhanismile (vedav lüli *2* ja kinnislüli *1*).

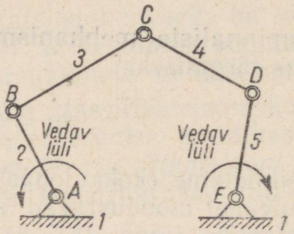
Esimene juurdeliidetud ahelatest koosneb lülidest *3*, *4*, *5* ja *6*. Teise ahela moodustavad lülid *7* ja *8*, ning kolmanda — lülid *9* ja *10*. Lihtne on veenduda selles, et kõik kolm ahelat rahuldavad tingimust (4.5) ja osutuvad järelikult g r u p p i d e k s. Ü h e l e I klassi mehhanismile meelevaldse hulga gruppide juurdeliitmise teel saadud mehhanismid on kõik ühe liikuvusastmega nagu I klassi mehhanismgi, sest gruppide liitmine ei muuda mehhanismi liikuvusastet.

Mehhanisme võib moodustada ka gruppide üheaegse juurdeliit-

misega m i t m e l e I klassi mehhanismile. Sel juhul tekivad mehhanismid, mille liikuvusaste võrdub kasutatud I klassi mehhanismide arvuga, s. t. gruppide liitmise tulemusel tekkinud mehhanismi v e d a v a t e lülide arvuga (joon. 163 ja 164).



Joon. 163.



Joon. 164.

3°. Nagu varem tõestati (§ 17), võib kõiki tasapinnalistes mehhanismides esinevaid IV klassi kinemaatilisi paare asendada V klassi paaridega. Sel viisil saadud asendavate mehhanismide hetkeline liikumine on sama iseloomuga kui IV klassi kõrgemaid paare sisaldavatel lähtemehhanismidel. Seetõttu võib mehhanismide klassifitseerimisküsimuste käsitlemisel piirduda ainult asendavate mehhanismidega, kus IV klassi paare ei esine.

Tingimus, mida peavad rahuldama ainult V klassi paare sisaldavad grupid, on järgmine:

$$3n - 2p_5 = 0.$$

Sellest tingimusest saadakse seos

$$p_5 = \frac{3}{2} n. \tag{4.7}$$

Tähendab, gruppi kuuluvate V klassi paaride arv peab samas grupis esinevate lülide arvu ü l e t a m a p o o l t e i s e k o r d s e l t.

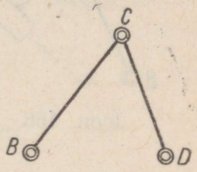
Kuna teiselt poolt nii lülide kui ka paaride arvuks saab olla üksnes täisarv, siis on selge, et tingimust (4.7) rahuldavad ainult järgmised gruppe moodustavate lülide ja paaride arvude kombinatsioonid:

$$\begin{aligned} n &= 2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \ldots; \\ p_5 &= 3, \quad 6, \quad 9, \quad 12, \quad \ldots \end{aligned}$$

Valides ülaltoodud, tingimust (4.7) rahuldavatest arvude kombinatsioonidest soovikohaseid ühendeid, võib moodustada eri

tüüpi gruppe. Sel viisil saadavaid gruppe on otstarbekas liigitada klassidesse. Allpool näidatakse, et gruppide klassifitseerimine on tingitud vajadusest kasutada eri klassidesse kuuluvate gruppide uurimiseks kinemaatilise ja kinetostaatilise analüüsi erinevaid meetodeid.

4°. Lihtsaimast lülide ja paaride arvu ühendist, kus $n = 2$ ja $p_5 = 3$, saab moodustada ainult ühte tüüpi grupi. Kuna vedava ja kinnislüliga ühendatud grupid moodustavad alati suletud kinemaatilisi ahelaid, siis on ilmne, et gruppide ühendamiseks vajalike elementide arv ei saa olla väiksem kui 2. Käsitletavas lihtsaimas grupis, mis koosneb kolmest kinemaatilisest paarist, jäävad seega kahe paari elemendid vabaks. Grupi üldkuju on toodud joonisel 165. Joonisel kujutatud grupp koosneb kahest lülist ja kolmest rotatsioonipaarist. Seda gruppi võib paarielementide *B* ja *D* abil liita mehhanismi kahe meelevaldse lüli külge. Seejuures kehtib tingimus, et grupi vabu paarielemente ei tohi ühendada ühe ja sama lüliga.



Joon. 165.

Grupi võib ühendada vedavast lülist *2* ja kinnislülist *1* moodustatud I klassi mehhanismiga (joon. 163) järgmiselt. Paarielement *B* ühendatakse vedava lüliga *2* ja paarielement *D* kinnislüliga *1*. Tekkiv mehhanism peab olema ühe liikuvusastmega, sest grupp liideti ühele I klassi mehhanismile. Sama gruppi võib ühendada ka kahe I klassi mehhanismiga (joon. 164), kuid sel puhul saadakse kahe liikuvusastmega mehhanism.

Gruppi, mis on moodustatud kahest lülist ja kolmest V klassi paarist, nimetatakse *II klassi 2. liigi grupiks* ehk *kahehaarmeliseks grupiks* [1], sest see grupp ühendatakse alusmehhanismiga kahe lüli (haarme) *BC* ja *DC* abil.

Grupi liik on määratud gruppi alusmehhanismiga ühendavate paarielementide arvuga.

Mehhanisme, mille koosseisu kuulub ainult II klassi gruppe, nimetatakse *II klassi mehhanismideks.*

5°. Joonisel 165 kujutatud grupp koosneb kahest lülist ja kolmest rotatsioonipaarist. Säärast lülide ja paaride ühendit nimetatakse II klassi grupi *esimeseks modifikatsiooniks.*

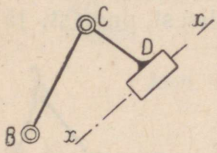
II klassi grupi kõik ülejäänud modifikatsioonid saadakse üksikute rotatsioonipaaride asendamisel translatsioonipaaridega.

Teise modifikatsiooni puhul on üks välimine rotatsioonipaar (välispaar) asendatud translatsioonipaariga (joon. 166).

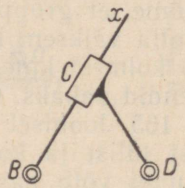
[1] Käsitletavat gruppi nimetatakse ka veel diaadiks. — *Tõlk.*

Kolmas modifikatsioon on näidatud joonisel 167. Siin on translatsioonipaariga asendatud keskmine rotatsioonipaar (sisepaar).

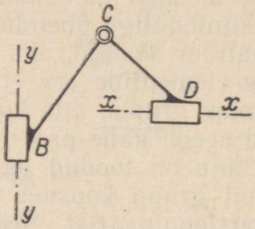
Neljandat modifikatsiooni kujutab joonis 168. Siin on mõlemad välisrotatsioonipaarid asendatud translatsioonipaaridega.



Joon. 166.

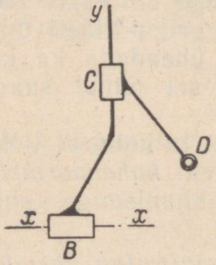


Joon. 167.

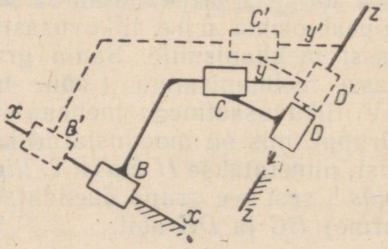


Joon. 168.

Viiendale modifikatsioonile vastab joonis 169. Selles modifikatsioonis on siserotatsioonipaar ja üks välisrotatsioonipaar asendatud translatsioonipaaridega.



Joon. 169.

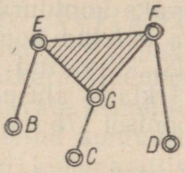


Joon. 170.

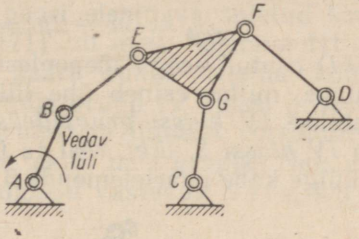
Lõpuks, jätkates rotatsioonipaaride asendamist translatsioonipaaridega, on võimalik moodustada modifikatsiooni, kus kõik paarid osutuvad translatsioonipaarideks. Kuid jooniselt 170 ilmneb, et säärane grupp säilitab ühe liikuvusastme ka pärast kinnislüliga ühendamist. Järelikult saab ta iseseisvalt liikuda ja moodustab mehhanismi. Joonisel 170 on grupi teine (meelevaldne) asend kujutatud kriipsjoonega. Nagu varem (§ 16, 7°) näidati, kuuluvad säärased, ainult translatsioonipaare sisaldavad mehhanismid 4. perekonna kiilmehhanismide hulka. Seega 3. perekonna tasapinnalistes mehhanismides esineb II klassi grupp (diaad) ainult viies modifikatsioonis.

Enamik kaasaegses tehnikas kasutatavaid mehhanisme kuulub II klassi.

6°. Käsitleme nüüd teist gruppimoodustavat lülide ja kinemaatiliste paaride ühendit. Võrrandi (4.7) põhjal peab lülide arvu poolest järgmine grupp sisaldama n e l i lüli ja k u u s V klassi paari. Lihtne on näidata, et neljast lülist ja kuuest paarist saab moodustada kolme erinevat tüüpi kinemaatilisi ahelaid, mis erinevad üksteisest oma struktuuri poolest.



Joon. 171.



Joon. 172.

Esimene, joonisel 171 näidatud kinemaatiline ahel koosneb lülist *EGF*, millega on ühendatud k o l m haaret *BE*, *CG* ja *DF*. See ahel kujutab endast avatud liitahelat ja moodustab *III klassi 3. liigi grupi* (nn. triaadi), sest see grupp ühendatakse k o l m e haarme *BE*, *CG* ja *DF* abil.

Käsitletava grupi eritunnuseks on lüli *EFG*, mis sisaldab kolme kinemaatilise paari elemente ja moodustab lülidest *EG*, *GF* ja *FE* jäiga kolmnurkse suletud kontuuri. Viimase suhteline liikuvusaste $L_{suht.}$ võrdub nulliga. Tõepoolest, kui muuta üks ülalloetletud lülidest mõtteliselt liikumatuks, siis liikuvusaste selle, seisatud lüli suhtes on antud seosega

$$L_{suht.} = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0.$$

Kontuur *EFG* osutub seega jäigaks.

Lüli *EFG* nimetatakse grupi *aluseks* (aluslüliks). Grupp ühendatakse alusmehhanismiga haarmete *BE*, *CG* ja *DF* otsas olevate paarielementide *B*, *C* ja *D* abil. Joonisel 172 on element *B* ühendatud vedava lüliga, elemendid *C* ja *D* aga kinnislüliga.

Mehhanisme, milles ei esine k õ r g e m a i d k u i III k l a s s i 3. l i i g i g r u p p e, nimetatakse *III klassi mehhanismideks*. Joonisel 172 kujutatud mehhanism osutub seega III klassi mehhanismiks.

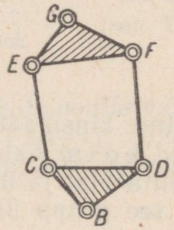
7°. Neljast lülist ja kuuest madalamast kinemaatilisest paarist moodustatud kinemaatilise ahela teine tüüp on näidatud joonisel 173. See suletud kinemaatiline ahel ühendatakse alusmehha-

nismiga mitte haarme-elementide, vaid paaride *B* ja *G* vabade elementide abil. Erinevalt äsjakäsitletud grupist sisaldab see grupp lisaks kahele aluslülile *BCD* ja *EGF* (mis moodustavad kaks jäika suletud kontuuri) veel ühe mittejäiga (deformeeruva) suletud kontuuri *CEFD*. Viimasel on üks suhteline liikuvusaste ($L_{suht.} = 1$). Tõepoolest, kui eraldada kontuur *CEFD* (joon. 174) ja muuta mõtteliselt üks tema lülidest liikumatuks, siis selle kontuuri liikuvusaste seisatud lüli suhtes $L_{suht.}$ on määratav valemiga

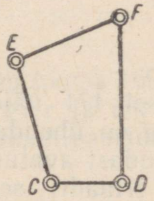
$$L_{suht.} = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

CEFD osutub seega tõepoolest deformeeruvaks kontuuriks.

Gruppe, milles esineb ühe liikuvusastmega suletud kontuure, nimetatakse *IV klassi gruppideks*. Joonisel 173 kujutatud grupp kuulub *IV klassi 2. liiki*, sest ta ühendatakse I klassi alusmehhanismi külge kahe paarielemendi *B* ja *G* abil. Joonisel 175 on grupp



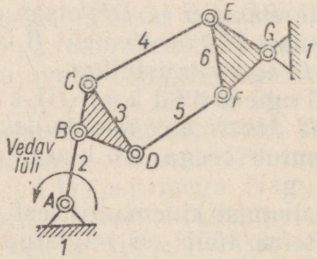
Joon. 173.



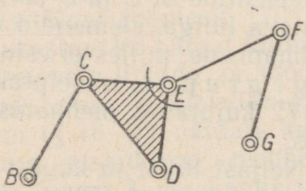
Joon. 174.

elemendi *B* abil ühendatud vedava lüliga *2* ja elemendi *G* abil kinnislüliga *1*. Mehhanisme, milles ei esine kõrgemaid kui IV klassi 2. liigi gruppe, nimetatakse *IV klassi mehhanismideks*. Joonisel 175 kujutatud mehhanism osutub seega IV klassi mehhanismiks.

Kolmas võimalus kolme lüli ja kuue kinemaatilise paari ahelasse ühendamiseks on näidatud joonisel 176. On ilmne, et see



Joon. 175.



Joon. 176.

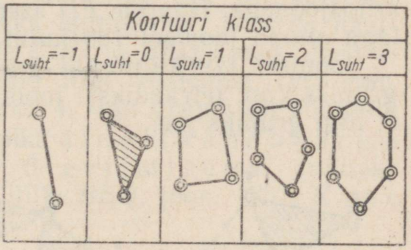
ahel laguneb kaheks lihtsaks II klassi grupiks *BCD* ja *EFG*. Seega kuulub antud ahel meie poolt juba varem käsitletute hulka ega kujuta endast põhimõttelt midagi uut.

8°. Oleme seni käsitlenud gruppe, mis sisaldavad suletud kontuure, kus esineb kaks kuni neli kinemaatilist paari. Gruppi, mille suletud kontuuris esines k a k s kinemaatilist paari («atrofeerunud» kontuurid *BCB* ja *CDC* joonisel 165) nimetasime II klassi grupiks. K o l m e kinemaatilist paari sisaldava suletud kontuuri puhul (kontuur *EFG* joonisel 171) oli meil tegemist III klassi grupiga. N e l j a kinemaatilise paari puhul suletud kontuuris (kontuur *CEFD* joonisel 173) kandis grupp IV klassi grupi nime. Kui jätkata kinemaatilistest paaridest ja lülidest võrrandit (4.7) rahuldavate ühendite loomist, siis tekiks uusi gruppe. Neis esineksid suletud kontuurid, mis sisaldaksid vastavalt v i i s, k u u s ja enamgi kinemaatilist paari.

Tšebõševi struktuurivalemi (3.6) abil on lihtne näidata, et v i i e s t lülist ja v i i e s t V klassi kinemaatilisest paarist koosneva kontuuri suhteline liikuvusaste $L_{suht.} = 2$ juhul, kui kinnistada üks kontuuri lülidest. K u u t V klassi paari ja k u u t lüli sisaldaval grupil on kolm suhtelist liikuvusastet ($L_{suht.} = 3$) jne.

Joonis 177 kujutab mitmesuguseid suletud kontuure suhtelise liikuvusastmega $L_{suht.} = -1$ kuni $L_{suht.} = 3$.

Kokkuvõtteks võime öelda järgmist. *Kontuuri klass on määratud kontuuri kuuluvate lülide poolt moodustatud kinemaatiliste paaride arvuga. Grupi klassi määrab omakorda gruppi kuuluv kõige kõrgem kontuur. Grupi liik on määratud nende kinemaatiliste paaride elementide arvuga, millede abil grupp alusmehhanismiga ühendatakse.*



Joon. 177.

9°. Meie ei peatu siin kõrgemat klassi gruppide juures põhjusel, et neid kasutatakse kaasaegsetes mehhanismides suhteliselt harva. Käsitleme seetõttu ainult II, III ja IV klassi gruppide omadusi. III klassi gruppide moodustamist võib käsitleda kui teatud struktuuriga kinemaatiliste ahelate külgeliitmist aluskontuuri lülidele. Olgu antud lähtekontuur *EFG*, mille suhteline liikuvusaste $L_{suht.} = 0$ (joon. 178). Kui iga vaba šarniiriga *E, F* ja *G* ühendada üks haare (vastavalt *EB, GC* ja *FD*), siis saame tulemuseks varemkäsitletud III klassi 3. liigi grupi (vt. joon. 171). Iga

haare kujutab endast lüli, mis kuulub kahte kinemaatilisse paari. Tema liikuvusaste $L = -1$, sest

$$L = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Haarmete asemel võib järelikult lähtekontuurile liita ka teisi kinemaatilisi ahelaid, kuid seda tingimusel, et nende liikuvusaste oleks sama mis haarmetelgi. Kõikide liitmiseks sobivate ahelate struktuurivalem on seega järgmine:

$$L = 3n - 2p_5 = -1.$$

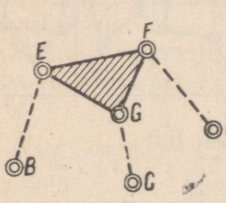
Siit saame tingimuse

$$p_5 = \frac{3n+1}{2}. \qquad (4.8)$$

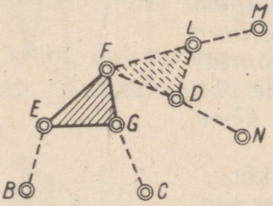
Pole raske veenduda selles, et võrrand (4.8) on identne võrrandiga (3.8), mis tuletati § 17, 5°. Nagu seal näidati, rahuldavad võrrandit (3.8) mitte üksnes ahelad, mis koosnevad ühest lülist ja kahest kinemaatilisest paarist (joon. 144), vaid ka ahelad, mis on moodustatud kolmest lülist ja viiest paarist (joon. 151) või viiest lülist ja kaheksast paarist (joon. 152) jne.

Joonisel 178 kujutatud ahelas esineva haarme *FD* asendamine joonisel 151 näidatud tüüpi ahelaga annab tulemuseks grupi, mida kujutab joonis 179. Juurdeliidetud ahel on seal näidatud kriipsjoonega. Haarme *FD* asendamine joonisel 152 näidatud ahelaga annab joonisel 180 kujutatud grupi jne.

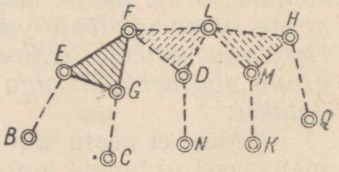
Joonisel 179 kujutatud gruppi nimetatakse III klassi 4. liigi grupiks (nn. tetraadiks), joonisel 180 toodud gruppi — III klassi 5. liigi grupiks jne.



Joon. 178.



Joon. 179.



Joon. 180.

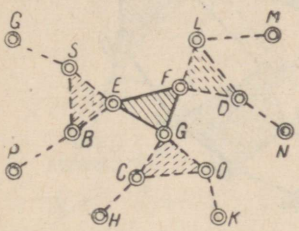
Kui joonisel 178 näidatud grupi kõik kolm haaret asendada joonisel 151 kujutatud tüüpi ahelatega, siis saaksime III klassi 6. liigi grupi, mida kujutab joonis 181.

10°. Kui ükskõik missugune III klassi grupi haarmetest üle viia teisele aluslülile, laguneb käsitletav grupp alati madalamat klassi

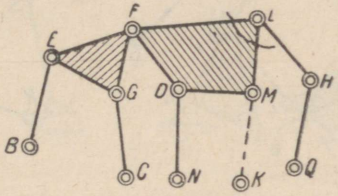
ja madalamat liiki gruppideks. Näiteks, kui viia haare *MK* lülilt *LMN* lülile *FDL* (joon. 180), laguneb III klassi 5. liigi grupp kaheks, üheks III klassi 4. liigi grupiks *BEGCFDNMK* (joon. 182) ja üheks II klassi 2. liigi grupiks *LHQ*. Edasi, kahe haarme asendamine ühe V klassi paariga, mis oma liikuvusastmelt on nendega ekvivalentne ($L = -2$), põhjustab samuti kas grupi lagunemist või tema klassi ja liigi alanemist. Näiteks, kui asendada haarmed *GC* ja *FD* (joon. 178), millede koguliikuvusaste

$$L = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 = -2,$$

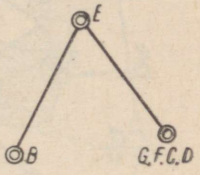
ühe V klassi paariga, saame joonisel 183 kujutatud ahela, s. o. II klassi 2. liigi grupi.



Joon. 181.

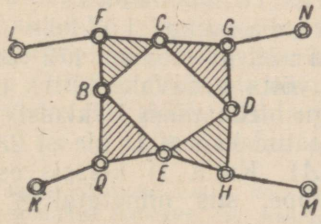


Joon. 182.

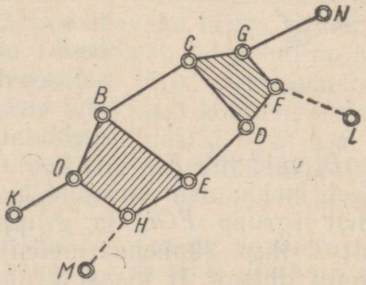


Joon. 183.

IV klassi gruppides ei too haarme üleviimine mitte alati endaga kaasa grupi klassi ja liigi alanemist ega põhjusta iga kord ahelate lihtsamateks gruppideks lagunemist. Näiteks haarmete *FL* ja *HM* üleviimine lülidele *CGD* ja *BEQ* (joon. 184) ei põhjusta grupi lagunemist ega tema liigi alanemist (vt. joon. 185). Joonisel 184 kujutatud IV klassi 4. liigi gruppi on võimalik lõhata kaheks III klassi 3. liigi grupiks ainult kahe haarme ühele ja samale lülile üleviimisega (näiteks haarmete *HM* ja *LF* üleviimisega lülile *BEQ*, joon. 186). Kahe

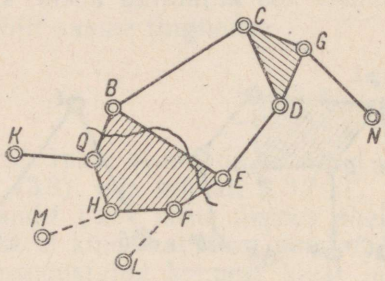


Joon. 184.

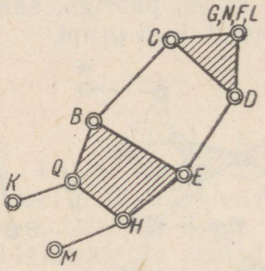


Joon. 185.

haarme asendamine ühe V klassi paariga põhjustab küll alati grupi liigi alanemist, kuid ei too iga kord endaga kaasa grupi lagunemist. Näiteks grupp, mis tekib pärast haarmete *GN* ja *FL* (joon. 185) asendamist ühe V klassi paariga (paar *G*, *N*, *F*, *L* joonisel 187), jääb endiselt IV klassi grupiks. Küll aga alaneb tema liik, langedes neljalt kolmele. Kui lisaks sellele veel asendada haarmed *QK* ja *HM* (joon. 185) ühe paariga *Q*, *K*, *H*, *M* (joon. 188), jääb tekkinud grupp endiselt IV klassi, kuid tema liik alaneb sedapuhku juba kolmelt teisele.

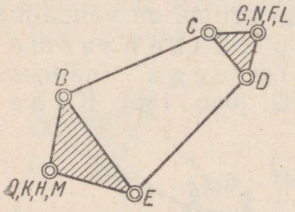


Joon. 186.



Joon. 187.

11°. Kui mehhanismi koosseisus esineb erinevatesse klassidesse ja liikidesse kuuluvaid gruppe, siis mehhanismi klass on määratud temas esineva kõige kõrgemat klassi grupi poolt. Olgu näiteks mehhanism moodustatud kolmest grupist: ühest IV klassi 3. liigi, ühest IV klassi 2. liigi ja ühest III klassi 4. liigi grupist. Käsitletav mehhanism tuleb seega liigitada IV klassi.



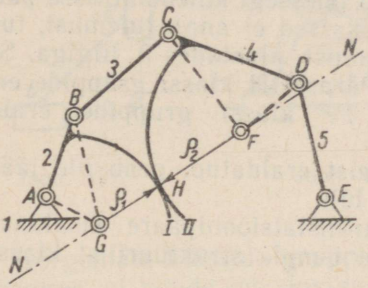
Joon. 188.

Mehhanismi klassi määramisel tuleb fikseerida, missugused lülid on vedavad, sest mehhanismi klass võib sõltuda vedavate lülide valikust. Kui näiteks joonisel 172 toodud mehhanismis võtta vedavaks lüliks mitte lüli *AB*, vaid lüli *FD*, siis kuulub kogu mehhanism II klassi. Tõepoolest, mehhanism on nüüd moodustatud kahest II klassi 2. liigi grupist (grupp *FGC* ja grupp *EBA*). Kuna II klassis esineb ainult 2. liigi (kahehaarmelisi) gruppe, siis nimetatakse neid edaspidi lihtsalt II klassi gruppideks.[1]

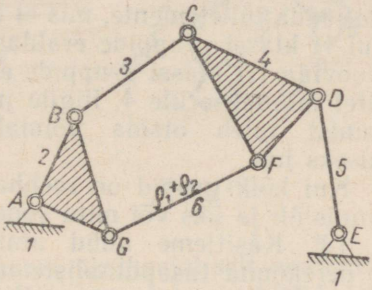
[1] Käesolevas paragrahvis on L. V. Assuri poolt loodud klassifikatsioon esitatud veidi ümbertöötatud kujul. Neile, kes tunnevad huvi selle klassifikatsiooni

12°. Kui mehhanismi koosseisu kuulub lisaks madalamatele paaridele veel kõrgemaid paare, siis, rakendades § 17, 5° toodud meetodit, on alati võimalik neid asendada ahelatega, mis sisaldavad ainult madalamaid paare. Pärast asendamist määratakse mehhanismi klass ja liik tavalisel viisil.

Olgu näiteks antud mehhanism, mille lülid *2* ja *4* moodustavad IV klassi kuuluva kõrgema paari *H* (joon. 189). Antud juhul on paar *H* moodustatud kahest teineteist puutuvast kõverast *I* ja *II*. Kõver *I* on jäigalt ühendatud lüliga *2* ja kõver *II* — lüliga *4*. Tõm-



Joon. 189.



Joon. 190.

bame läbi punkti *H* kõverate *I* ja *II* ühise normaali *NN* ja märgime sellel ära mõlema kõvera kõverustsentrid — punktid *G* ja *F*. Fiktiivne lüli *GF*, mis peab asendama kõrgemat paari *H*, tuleb võtta pikkusega $\varrho_1 + \varrho_2$ (ϱ_1 ja ϱ_2 tähistavad kõverate *I* ja *II* kõverusraadiusi punktis *H*). See lüli ühendatakse lüliga *2* V klassi madalama paari *G* abil ja lüliga *4* — samuti V klassi kuuluva madalama paari *F* abil.

Asendava mehhanismi skeemi kujutab joonis 190. Lüli *GF* pikkus osutub käesoleval juhul muutuvaks, kuna kõverusraadiused ϱ_1 ja ϱ_2 on kõverate erinevates punktides isesugused.

Nüüd on lihtne näha, et juhul, kui vedavaks lüliks valida lüli *2*, kuulub mehhanism III klassi. Tõepoolest, sel puhul on põhimehhanismile (kinnislülist *1* ja vedavast lülist *2* moodustatud I klassi mehhanismile) juurde lisatud III klassi kolmehaarmeline grupp (triaad). Viimane on moodustatud lülidest *3*, *4*, *5* ja *6*. Kui aga vedavaks lüliks valida lüli *5*, siis kuulub mehhanism juba IV klassi, kuna temas esineb lülidest *2*, *3*, *4* ja *6* koosnev

originaalse käsitluse vastu, soovitame tutvuda L. V. Assuri teadusliku tööga «Исследование плоских стержневых механизмов с низшими парами с точки зрения их структуры и классификации», Изв. С.-Петербургского политехнического института, 1913—1918. Nimetatud töö on teistkordselt välja antud 1952. a. NSVL TA Kirjastuse poolt.

IV klassi 2. liigi grupp. Viimane on põhimehhanismiga ühendatud kahe kinemaatilise paari (D ja A) elementide abil.

Mehhanismide gruppideks lahutamisel on soovitav kasutada järgmist metoodikat.

Olgu antud mehhanism, mis koosneb kinnislülist, ühest või mitmest vedavast lülist ja mitmest erinevasse klassi kuuluvast grupist. Gruppideks lahutamist tuleb alustada katsetega eraldada mehhanismist II klassi gruppe. Pärast iga grupi eraldamist tuleb seejuures kontrollida, et allesjääv kinemaatiline ahel oleks sama liikuvusastmega kui uuritav lähtemehhanism. Vastasel korral võib üle jääda lülielemente, mis ei kuulu ühessegi kinemaatilisse paari. Kui II klassi gruppide eraldamise katsed ei anna tulemusi, tuleb proovida III klassi gruppide eraldamist, alustades 3. liigiga. Seejärel minnakse üle 4. liigile jne. Pärast III klassi gruppide eraldamist tuleb otsida võimalusi IV klassi gruppide eraldamiseks jne.

Kui kõik grupid on mehhanismist eraldatud, peab üle jääma kinnislüli ja üks või mitu vedavat lüli.

13°. Käsitleme nüüd ainult translatsioonipaare sisaldavate 4. perekonna tasapinnaliste mehhanismide struktuurilist klassifikatsiooni.

Nimetatud mehhanismide puhul on grupi struktuurivõrrandil (4.1)

$$L_{gr} = 0$$

järgmine kuju:

$$2n - p_5 = 0. \tag{4.6}$$

Sellest järgneb, et

$$p_5 = 2n. \tag{4.8}$$

Tähendab, gruppi kuuluvate V klassi translatsioonipaaride arv peab olema grupi lülide arvust kaks korda suurem.

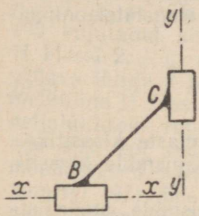
Kuna nii lülide kui ka paaride arvuks võivad olla ainult täisarvud, siis tingimust (4.8) saab täita ainult järgmiste lülide ja paaride arvude ühenditega:

$$n = 1, 2, 3 \ldots, \quad p_5 = 2, 4, 6 \ldots$$

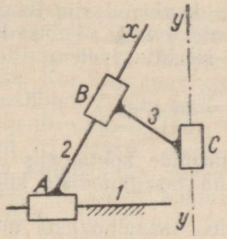
Valides tingimusele (4.8) vastaval hulgal lülisid ja paarisid, võib moodustada erineva kujuga gruppe.

Lihtsaimaks neist on grupp, mis vastab ühendile $n = 1$, $p_5 = 2$ (vt. joon. 191). See on 4. perekonna II klassi grupp. Kui säärane grupp ühendatakse I klassi mehhanismiga (mis on moodustatud kinnislülist *1* ja sellega kinemaatilise paari abil ühendatud lülist *2*), siis tekib 4. perekonna II klassi mehhanism (joon. 192). Nagu näha, osutub see lihtsaks kiilmehhanismiks. Järgmine, võrrandit (4.8) rahuldav lülide ja paa-

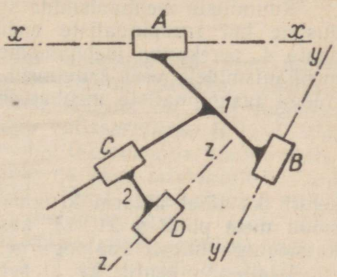
ride ühend sisaldab kaks lüli ja neli translatsioonipaari. Sellele ühendile vastab joonisel 193 kujutatud kinemaatiline ahel. Pole raske veenduda, et see ahel laguneb kaheks II klassi grupiks: grupiks, mis koosneb lülist *1* ja paaridest *A* ning *B* ja grupiks, kuhu kuuluvad lüli *2* ning paarid *C* ja *D*.



Joon. 191.



Joon. 192.

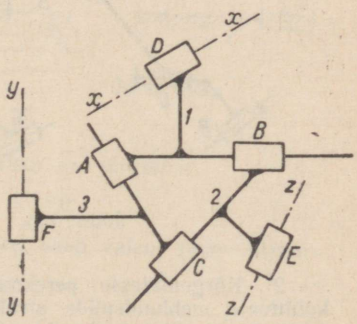


Joon. 193.

Kõrgemate klasside gruppide juures üksikasjaliselt peatumata märgime, et nende moodustamine allub samadele seadustele, mis kehtisid 3. perekonna tasapinnaliste mehhanismide moodustamiselgi (§ 20, 8°). Grupi aluseks võetakse suletud kontuur, näiteks kontuur *ABC* joonisel 194. Säärase kontuuri suhteline liikuvusaste võib olla erineva väärtusega. Kontuuril *ABC* näiteks on $L_{suht.} = 1$, sest 4. perekonda kuuluvate kinemaatiliste ahelate puhul kehtiva valemi järgi

$$L_{suht.} = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Kontuuri lülid ühendatakse mehhanismiga vahetult lülide *1*, *2* ja *3* külge kuuluvate välispaaride *D*, *E* ja *F* abil. Haarmed on seega nagu atrofeerudes muutunud paarideks. Joonisel 194 toodud grupp kuulub III klassi 3. liiki. Analoogilisel viisil võib koostada ka kõrgematesse klassidesse kuuluvaid gruppe, kuid nende juures me siin ei peatu, sest ainult translatsioonipaare sisaldavaid paljulülilisi mehhanisme kasutatakse tehnikas harva. Põhjuseks on translatsioonipaarides tekkivad suured hõõrdejõud.



Joon. 194.

§ 22. Mõningaid teatmeid ruumiliste mehhanismide struktuurilisest klassifikatsioonist

1°. Paragrahvis 21 käsitletud mehhanismide struktuurilise klassifikatsiooni põhimõtteid võib üldistada ja rakendada kõikide perekondade ruumiliste mehhanismide uurimisel.

Ruumiliste mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon allub samadele seadustele kui tasapinnaliste mehhanismide klassifikatsioongi. Näiteks kui vaadelda 4. perekonna mehhanisme, siis kuuluvad siia lisaks tasapinnalistele kiilmehhanismidele veel kruvimehhanismid (vt. § 16, 7°). Kuna translatsioonipaaridega tasapinnaliste mehhanismide struktuurivalem

$$L = 2n - p_5 \tag{4.9}$$

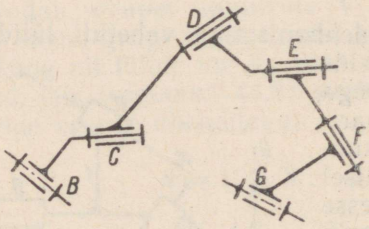
kehtib ka täiel määral kruvimehhanismide kohta, siis on viimaste klassifikatsioon meie poolt § 21, 13° käsitletud tasapinnaliste kiilmehhanismide klassifikatsiooniga täiesti analoogiline.

Ülaltoodu kehtib ka 3. perekonna tasapinnaliste mehhanismide, sfääriliste mehhanismide ja ruumiliste kiilmehhanismide puhul. Kuna Tšebõševi 3. perekonna tasapinnaliste mehhanismide struktuurivalem

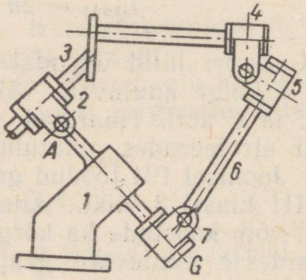
$$L = 3n - 2p_5 - p_4 \tag{4.10}$$

kehtib ka sfääriliste mehhanismide ja ruumiliste kiilmehhanismide juures (§ 16, 6°), siis on nende klassifikatsioon analoogiline tasapinnaliste, 3. perekonda kuuluvate mehhanismide klassifikatsiooniga. Viimast käsitleti § 21, 1°—12°.

Kuna mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon määrab ühtlasi ära ka mehhanismide kinemaatilise ja kinetostaatilise analüüsi meetodid, siis ülalkäsitletud analoogia klassifikatsioonikäsimuste alal laieneb ka mehhanismide uurimismeetoditele. See asjaolu on tõestatud nõukogude teadlaste töödes, kes esitasid sfääriliste mehhanismide uurimiseks rea meetodeid, mis on tasapinnaliste 3. perekonna mehhanismide juures kasutatavate meetoditega analoogilised.



Joon. 195.



Joon. 196.

2°. Kõrgematesse perekondadesse (null-, esimesse ja teise perekonda) kuuluvate mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon on rajatud vastavate gruppide struktuurivalemite analüüsile (§ 19, 4°). Näiteks 0-perekonna gruppide struktuurivalemiks on

$$6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 0. \tag{4.2}$$

Kui kõik grupis esinevad paarid kuuluvad V klassi, siis muutub valem (4.2) järgmiseks:

$$6n - 5p_5 = 0, \tag{4.11}$$

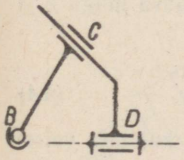
millest saame

$$p_5 = \frac{6}{5} n. \tag{4.12}$$

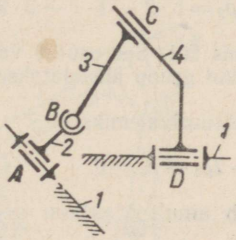
Lülide ja kinemaatiliste paaride lihtsaimaks ühendiks on see, milles $n = 5$ ja $p_5 = 6$. 0-perekonna lihtsaimaks grupiks osutub järelikult joonisel 195 kujutatud kinemaatiline ahel. Nagu jooniselt selgub, on meil tegemist II klassi 2. liigi grupiga. Kui ühendada see grupp välissõrniiride *B* ja *G* abil vedava lüliga *2* ja kinnislüliga *1*, siis tekib ruumiline 0-perekonda kuuluv seitsmelüliline II klassi mehhanism (joon. 196). Tehnikas on väga laialdaselt levinud neljalülilised ruumilised II klassi mehhanismid. Need mehhanismid tekivad siis, kui vedav- ja kinnislüliga ühendada kahelülíline grupp, mille lülid moodustavad näiteks ühe III klassi kuuluva sfäärilise paari (kuul-liigendi *B* joonisel 197), ühe IV klassi silinderpaari (paar *C*) ja ühe V klassi rotatsioonipaari (paar *D*). Valem (4.2) annab

$$6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = \\ = 6 \cdot 2 - 5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0.$$

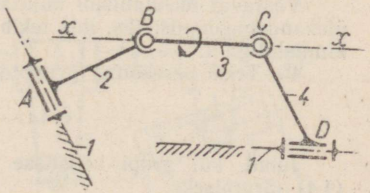
Säärane neljalülíline mehhanism on kujutatud joonisel 198. Neljalüliliste ruumiliste mehhanismide mõningates konstruktsioonides moodustab keps *BC* kaks III klassi sfäärilist paari (joon. 199). Seejuures saab keps *BC* ühe liigse vabadusastme, mis vastab kepsu võimalusele vabalt pöörelda ümber telje *xx*. Endastmõistetavalt ei mõjuta nimetatud pöörlemine mehhanismi kui terviku liikumisseadust.



Joon. 197.



Joon. 198.



Joon. 199.

3°. Esimese perekonna gruppide struktuurivalem on järgmine:

$$5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2 = 0. \tag{4.3}$$

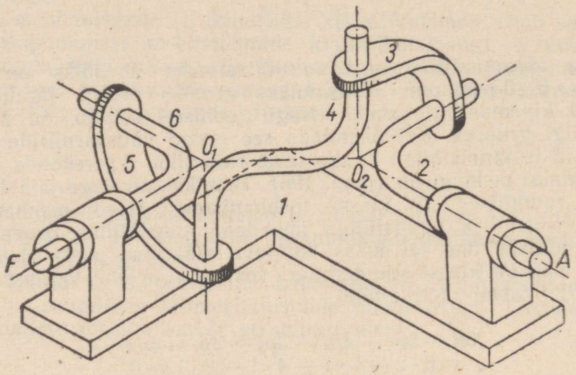
Juhul, kui grupis esineb ainult V klassi paare, saab valem (4.3) alljärgneva kuju:

$$5n - 4p_5 = 0. \tag{4.13}$$

Viimasest järgneb, et

$$p_5 = \frac{5}{4} n.$$

Lülide ja kinemaatiliste paaride lihtsaim ühend vastab ahelale, kus $n = 4$ ja $p_5 = 5$. Seega sisaldab 1. perekonna lihtsaim grupp neli lüli ja viis V klassi paari. Säärane grupp kuulub II klassi 2. liiki. Seda gruppi välisšarniiride *A* ja *F* abil vedava lüliga *2* ja kinnislüliga *1* ühendades saame kuuelülilise kaksik-universaalšarniiri mehhanismi (joon. 200). Viimane osutub seega 1. perekonnas II klassi mehhanismiks.



Joon. 200.

Esimese perekonna II klassi neljalüliline mehhanism tekib siis, kui grupi koostisse viia näiteks üks V klassi rotatsioonipaar ja kaks IV klassi silinderpaari. Valemi (4.3) alusel saame

$$5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2 = 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = 0.$$

Vastavat mehhanismi kujutab joonis 201. See osutub varemkäsitletud nurkülekandemehhanismiks, mis tekib siis, kui grupp ühendatakse vedava lüliga *2* ja kinnislüliga *1*.

4°. Teise perekonna gruppide struktuurivalemiks on

$$4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 = 0. \tag{4.4}$$

Juhul, kui grupi koostisse kuulub ainult V klassi paare, kujuneb valem (4.4) järgmiseks:

$$4n - 3p_5 = 0. \tag{4.14}$$

Sellest järgneb, et

$$p_5 = \frac{4}{3}n. \tag{4.15}$$

Käsitletava perekonna lihtsaim grupp tekib siis, kui $n = 3$ ja $p_5 = 4$. Seega koosneb 2. perekonna lihtsaim grupp kolmest lülist ja neljast V klassi paarist. See on järelikult II klassi 2. liigi grupp. Kui ta välisšarniiride abil ühendada vedava lüliga *2* ja kinnislüliga *1*, siis saadakse joonisel 202 kujutatud viielülililine mehhanism. Viimase koosseisu kuulub üks V klassi kruvipaar.

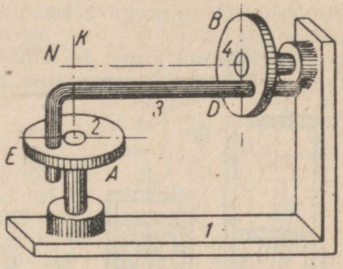
Teise perekonna neljalüliline II klassi mehhanism tekib siis, kui gruppi kuulub näiteks üks V klassi rotatsioonipaar, üks V klassi kruvipaar ja üks

IV klassi paar. Valem (4.4) põhjal saame sel puhul

$$4n - 3p_5 - 2p_4 - p_3 = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 0.$$

Säärane mehhanism on kujutatud joonisel 203. Grupp on siin ühendatud vedava lüliga *2* ja aluslüliga *1*. IV klassi paari moodustab rull *a*, mis vabalt pöörleb ja libiseb kulissis *b*.

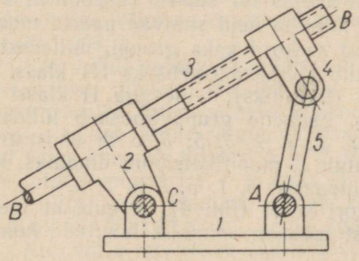
Ülal käsitleti ainult lihtsamate, II klassi mitmesugustesse perekondadesse kuuluvate ruumiliste mehhanismide klassifikatsiooni. Kõrgematesse klassidesse kuuluvaid ruumilisi mehhanisme saab moodustada samade üldiste meetoditega, mida kasutati tasapinnaliste mehhanismide käsitluses. Üleminekul madalamate perekondade (s. o. 4. ja 3. perekonna) mehhanismidelt kõrgemate perekondade (s. o. 2., 1. või 0-perekonna) mehhanismidele suureneb muidugi võimalikkude mehhanismide arv ja nende klassifikatsioon muutub keerulisemaks.



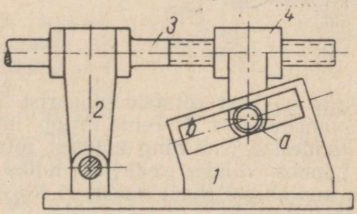
Joon. 201.

Kuna klassifitseerimise juures on aluseks võetud mehhanismide struktuuriteooria üldised printsiibid, võib kõikidesse perekondadesse kuuluvate mehhanismide klassifikatsioone käsitada kui 0-perekonna mehhanismide klassifikatsiooni erijuhte. Täpselt samuti võib ka näiteks 4. perekonna mehhanismide klassifikatsiooni käsitada kui 3. perekonna mehhanismide klassifikatsiooni erijuhtu, 3. perekonna mehhanismide klassifikatsiooni kui 2. perekonna mehhanismide klassifikatsiooni erijuhtu jne.

Toome kaks näidet, mis selgitavad mehhanismide liikuvusastme, klassi ja struktuuri määramist.



Joon. 202.



Joon. 203.

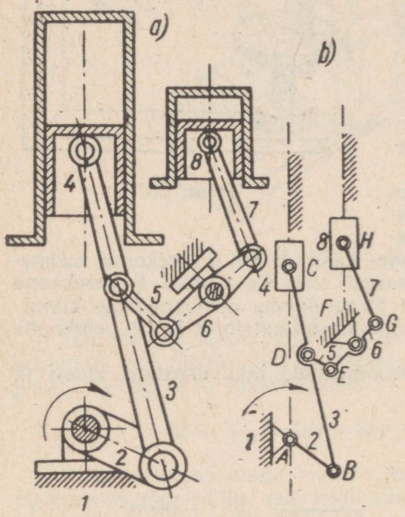
Näide 1. Joonis 204, *a* kujutab mootori mehhanismi. Meie ülesandeks on määrata mehhanismi klass ja temasse kuuluvate gruppide liigid. Vänt *2* moodustab aluslüliga *1* V klassi kuuluva rotatsioonipaari. Keps *3* kujundab kaks V klassi rotatsioonipaari: ühe vändaga *2* ja teise kolviga *4*. Kolb omakorda moodustab silindriga V klassi translatsioonipaari. Silinder on kinnislüliga *1* liikumatult ühendatud. Kepsu *3* külge on V klassi rotatsioonipaari abil ühendatud lüli *5*. Selle teine ots moodustab lüliga *6* samuti rotatsioonipaari. Lüli *6* moodustab veel kaks V klassi rotatsioonipaari: aluslüliga *1* ja kompressori kepsuga *7*. Kompressori keps *7* omakorda on seotud kompressori kolviga *8* V klassi rotatsioonipaari abil. Kompressori kolbi ja silindrit ühendab V klassi translatsioonipaar. Lõpuks, kompressori silinder on kinnislüliga liikumatult ühendatud.

Seega koosneb mehhanism kaheksast V klassi rotatsioonipaarist, kahest V klassi translatsioonipaarist ja seitsmest liikuvast lülist. Kuna mehhanismis ei ole liigseid vabadusastmeid ega passiivseid sidemeid, siis saame, kasutades Tšebõševi valemit:

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 1.$$

Mehhanismil on seega üks liikuvusaste ja tal peab järelikult olema ka üks vedav lüli.

Mehhanismi klassi ja temasse kuuluvate gruppide liigi määramiseks koostame mehhanismi kinemaatilise skeemi (joon. 204, *b*).



Joon. 204.

Kui valida vedavaks lüliks lüli *AB* (mootori väntvõll), siis mehhanism, koosnedes kolmest II klassi grupist (diaadist), kuulub II klassi. Esimene grupp koosneb lülidest *3* ja *4*, mis moodustavad kaks rotatsioonipaari *2*, *3* ja *3*, *4* ning ühe translatsioonipaari *4*, *1*. See grupp kuulub järelikult II klassi 2. modifikatsiooni. Teine grupp on moodustatud lülidest *5* ja *6* ning kolmest rotatsioonipaarist *3*, *5*, *5*, *6* ja *6*, *1*. Seega on meil siin tegemist II klassi 1. modifikatsiooni grupiga. Kolmas grupp, kuhu kuuluvad lülid *7* ja *8*, sisaldab jällegi kaks rotatsioonipaari *6*, *7* ja *7*, *8* ning ühe translatsioonipaari *8*, *1*, kuuludes seega II klassi 2. modifikatsiooni.

Kui lugeda vedavaks lüliks lüli *8* (kompressori kolb), siis kuulub mehhanism hoopis III klassi. Tõepoolest, veetavad lülid ja neid siduvad paarid moodustavad seekord kaks gruppi, milledest üks osutub kolmehaarmeliseks III klassi grupiks (triaadiks), teine aga II klassi grupiks. Esimene grupp koosneb lülidest *2*, *3*, *4* ja *5*, viiest rotatsioonipaarist *2*, *1*; *2*, *3*; *3*, *4*; *3*, *5*; *5*, *6* ja ühest translatsioonipaarist *4*, *1*. Teine grupp, mis osutub 1. modifikatsiooni diaadiks, koosneb lülidest *6* ja *7* ning kolmest rotatsioonipaarist *6*, *1*; *6*, *7* ja *7*, *8*.

Lõpuks, valides vedavaks lüliks mootori kolvi (lüli *4*), selgub, et mehhanism kuulub sel juhul uuesti II klassi, sest teda on võimalik lahutada kolmeks II klassi grupiks.

Näide 2. Joonisel 205, *a* on toodud mootori gaasijaotusmehhanismi skeem. Ümber telje *A* pöörlev nukk *2* tõstab rulli *3*, mis on kinnitatud nookuri *4* ühe õla külge. Teise õla külge ühendatud rulliga *5* surub nookur *4* klapile *6*. Klapp liigub juhtpuksis *F*. Mehhanism koosneb seega viiest liikuvast lülist, neljast V klassi rotatsioonipaarist, ühest V klassi translatsioonipaarist ja kahest IV klassi paarist.

Tšebõševi valemiga saame:

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 5 - 2 = 3.$$

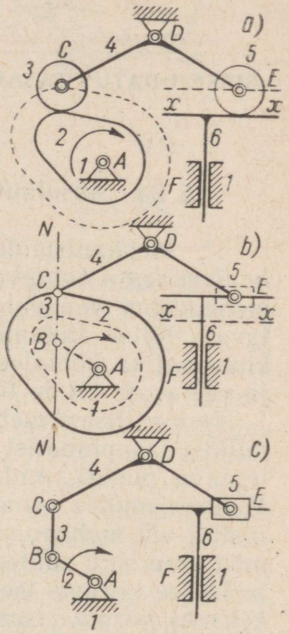
Lihtne on näha, et mehhanismis esineb liigseid vabadusastmeid. Need vastavad rullide *3* ja *5* pöörlemisvõimalustele ümber telgede *C* ja *E* (joon. 205). Tõepoolest, kui kaotada need võimalused, sidudes rullid *3* ja *5* jäigalt nookuriga *4*, siis mehhanismi kui terviku liikumise iseloom ei muutu. Seetõttu võib mehhanismist need kaks eriotstarbelist lüli (rullid *5* ja *6*) kõrvaldada.

Mehhanismi kinemaatiline skeem, mis vastab olukorrale pärast rullide kõrvaldamist, on toodud joonisel 205, *b*. Selleks et nuki *2* ja nookuri *4* vahel moodustada punktis *C* paiknev IV klassi kinemaatiline paar *2, 4*, on nuki *2* profiil asendatud rulli *3* tsentri suhteliste asendite geomeetrilise kohaga. Analoogiliselt on toimitud punktis *E*, kus IV klassi kinemaatilise paari *4, 6* moodustamiseks nookuri *4* ja klapi *6* vahel on klapi *6* tasapind *xx* tõstetud rulli *5* raadiuse võrra kõrgemale.

Pärast rullide kõrvaldamist on mehhanismi jäänud ainult kolm liikuvat lüli ($n = 3$), kolm V klassi paari ($p_5 = 3$) ja kaks IV klassi paari ($p_4 = 2$). Liigseid vabadusastmeid enam ei ole, mistõttu struktuurivalem kujuneb järgmiseks:

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1,$$

s. t. mehhanismil on üks liikuvusaste.



Joon. 205.

Mehhanismi klassi ja teda moodustavate gruppide liigi määramiseks tuleb eelkõige kõik IV klassi kõrgemad paarid taandada, s. o. asendada sääraste kinemaatiliste ahelatega, mis sisaldavad ainult V klassi (madalamaid) paare. IV klassi paari *2, 4* asendamiseks (joon. 205, *b*) tõmbame läbi lülide *2* ja *4* kokkupuutepunkti *C* nuki *2* profiilile normaali *NN*. Edasi ühendame punkti *B* (nuki profiili kõverustsenter punktis *C*) punktiga *A*. Lõik *BC* kujutab endast fiktiivset lüli, mis moodustab kaks V klassi rotatsioonipaari — *4, 3* ja *2, 3*.

IV klassi paari *4, 6* taandamiseks toome mehhanismi uue, fiktiivse lüli liuguri *5* näol. See lüli moodustab kaks V klassi kinemaatilist paari: rotatsioonipaari *4, 5* ja translatsioonipaari *5, 6*. Kõrgemate paaride taandamiseks vajalikkude fiktiivsete lülide sissetoomisega oleme moodustanud asendava mehhanismi. Viimase kinemaatiline skeem on toodud joonisel 205, *c*.

Kui valida vedavaks lüliks lüli *2*, siis laguneb veetavatest lülidest moodustatud ahel kaheks II klassi grupiks. Esimene neist koosneb lülidest *3* ja *4* ning sisaldab kolm rotatsioonipaari *2, 3*; *3, 4* ja *4, 1*. Teine koosneb lülidest *5* ja *6*, mis moodustavad ühe rotatsioonipaari *4, 5* ja kaks translatsioonipaari *5, 6* ning *6, 1*. Esimene grupp kuulub järelikult 1. modifikatsiooni, teine aga 5. modifikatsiooni.

Kui võtta vedavaks lüliks klapp *6*, siis laguneb veetavatest lülidest *5, 4, 3* ja *2* koosnev kinemaatiline ahel samuti kaheks II klassi grupiks, kusjuures lülidest *3* ja *2* moodustatud grupp kuulub 1. modifikatsiooni.

Lõpuks, kui võtta vedavaks lüliks nookur *4*, saame jällegi kaks II klassi gruppi, millest esimene (lülid *2* ja *3*) kuulub esimesse ja teine (lülid *5* ja *6*) viiendasse modifikatsiooni. Seega selgub, et käsitletav mehhanism kuulub II klassi, sõltumatult vedava lüli valikust.

Asendava mehhanismi liikuvusastme arvutamiseks kasutame Tšebõševi valemit. Kinemaatilisest skeemist (joon. 205, *c*) leiame, et $n = 5$, $p_5 = 7$ ja $p_4 = 0$. Seega on mehhanismi struktuurivalem järgmine:

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Tähendab, mehhanismil on üks liikuvusaste ja tal peab järelikult olema ka üks vedav lüli.

MEHHANISMIDE UURIMINE JA PROJEKTEERIMINE

V peatükk

SISSEJUHATUS TASAPINNALISTE MEHHANISMIDE KINEMAATIKASSE

§ 23. Absoluutse ja relatiivse liikumise tsentroidid

1°. Mehhanismide kinemaatika põhiülesandeks on *uurida mehhanismidesse kuuluvate lülide liikumist.* Nagu näidati § 15, 1°, on mehhanismi vedavate lülide etteantud liikumise puhul tema veetavate lülide liikumine alati täielikult määratud. Mehhanismide kinemaatika põhiülesandeks on järelikult mehhanismide vedavate ja veetavate lülide liikumise uurimine.

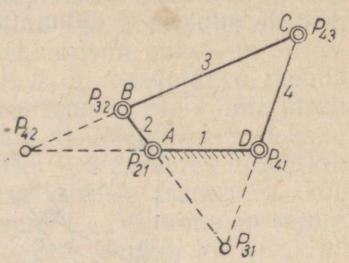
Teoreetilisest mehaanikast on teada, et jäiga keha (mehhanismilüli) tasapinnalist liikumist võib käsitada kui pöörlemist ümber teatava punkti, mida nimetatakse *hetkeliseks kiiruste tsentriks.* Mehhanismides esinevat lülide liikumist võib vaadelda kas kinnislüli või mehhanismi mis tahes teise lüli suhtes. Kui lüli liikumist kinnislüli suhtes võtta absoluutse liikumisena,[1] siis on vastav hetkeline kiiruste tsenter *käsitletava lüli absoluutse liikumise hetkeliseks kiiruste tsentriks.* Kui aga vaadelda antud lüli liikumist mis tahes teise, liikuva lüli suhtes, osutub vastav hetkeline kiiruste tsenter *relatiivse (suhtelise) liikumise hetkeliseks kiiruste tsentriks.*

Vaatleme näiteks šarniirnelilülikut (joon. 206). Lüli *2* liikumisel lüli *1* suhtes on hetkeline kiiruste tsenter punktis *A*. Punkt *A* on ühtlasi ka hetkeline kiiruste tsenter lüli *2* absoluutses liikumises. Tähistame selle punkti tähisega P_{21}. Lüli *4* hetkeliseks kiiruste tsentriks absoluutses liikumises (s. o. liikumises kinnislüli *1* suhtes) on punkt *D*, mille tähistame P_{41}. Lüli *3* liikumisel lüli *2* suhtes asub hetkeline kiiruste tsenter punktis *B*. See punkt on relatiivse liikumise hetkeline kiiruste tsenter ja me tähistame ta P_{32}. Lõpuks, lüli *4* relatiivses liikumises lüli *3* suhtes on hetkeliseks kiiruste tsentriks punkt *C* (tähis P_{43}).

---

[1] Siin käsitletakse juhtu, kus kogu mehhanism, kaasa arvatud ka kinnislüli, liigub. Säärane olukord esineb näiteks transpordimasinates.

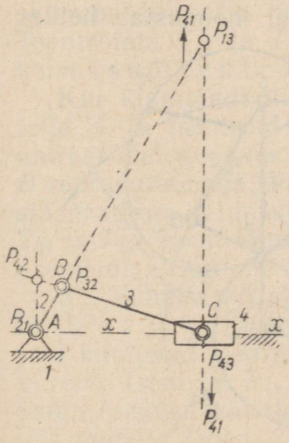
2°. Kui jälgida lüli *3* liikumist lüli *1* suhtes, siis on lihtne näidata, et selle liikumise hetkeline kiiruste tsenter P_{31} asub sirgete AB ja DC lõikepunktis. Tõepoolest, teoreetilisest mehaanikast on teada, et hetkeline kiiruste tsenter asub lüli kahe punkti trajektooridele tõmmatud normaalide lõikepunktis. Käesoleval juhul on lüli *3* vastavateks punktideks valitud B ja C.



Joon. 206.

Hetkelised kiiruste tsentrid P_{32}, P_{21} ja P_{31}, mille indeksid kujutavad arvude 1, 2 ja 3 kombinatsioone kahekaupa, asuvad kõik ühel ja samal sirgel. Ühel ja samal sirgel paiknevad ka hetkelised kiiruste tsentrid P_{43}, P_{41} ja P_{31}, mille indeksid on saadud kombineerides kahekaupa arvusid 1, 3 ja 4. See asjaolu järgneb teoreetilise mehaanika tuntud teoreemist, mis käsitleb paralleelsete telgede ümber toimuvate pöörlemiste liitmist. Resulteeriva pöörlemise telg on antud telgedega paralleelne ja asub nende tasapinnas. Hetkeliste tsentrite ülalkäsitletud omadust saab kasutada näiteks selleks, et leida hetkelist kiiruste tsentrit P_{42}, mis määrab lüli *4* relatiivse liikumise lüli *2* suhtes. Hetkeline kiiruste tsenter P_{42} peab asuma nii sirgel, mis ühendab hetkelisi tsentreid P_{32} ja P_{43}, kui ka sirgel, mis ühendab hetkelisi tsentreid P_{21} ja P_{41}. Hetkeline kiiruste tsenter P_{42} asub järelikult sirgete BC ja AD lõikepunktis.

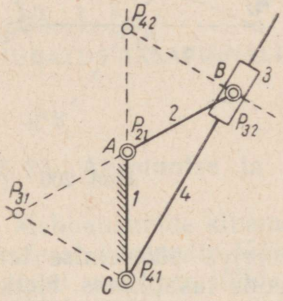
3°. Eelmises punktis toodud hetkeliste kiiruste tsentrite omadus annab juhise uuritava mehhanismi kõikide hetkeliste kiiruste tsentrite leidmiseks. Vaatleme näiteks joonisel 207 kujutatud väntmehhanismi. Tähistame punktides A, B ja C paiknevad hetkelised kiiruste tsentrid vastavalt tähistega P_{21}, P_{32} ja P_{43}. Hetkeline tsenter P_{41} asub lõpmatuses sirgel, mis on risti liuguri *4* liikumisteljega xx. Ühendame omavahel hetkelised tsentrid P_{21} ja P_{32} ning pikendame saadud ühendussirget kuni lõikumiseni sirgega $P_{43}P_{41}$ (s. o. telje xx ristsirgega). Saame hetkelise kiiruste tsentri P_{13}. Et leida lüli *4* liikumist lüli *2* suhtes määravat hetkelist kiiruste tsentrit P_{42}, selleks ühendame omavahel hetkelised tsentrid P_{43} ja P_{32}. Saadud ühendussirget pikendame kuni lõikumiseni punktis P_{42} hetkelisi tsentreid P_{21} ja P_{41} ühendava sirgega (s. o. sirgega, mis läbib punkti P_{21} ja on risti teljega xx).



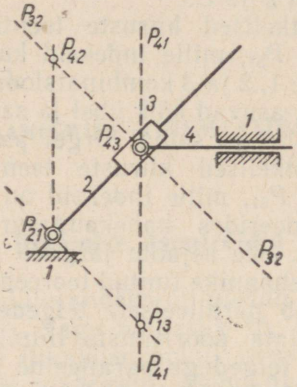
Joon. 207.

Joonistel 208 ja 209 on näidatud kahe kulissmehhanismi hetkelised kiiruste tsentrid.

Joonis 210 kujutab nukkmehhanismi. Lüli *2* hetkeline kiiruste tsenter liikumisel kinnislüli *1* suhtes (P_{21}) asub punktis *A*. Lüli *3* hetkeline kiiruste tsenter lüli *2* suhtes (P_{32}) peab asuma nuki *2* profiilile punktis *C* tõmmatud normaalil, s. t. profiili *xx* ristsirgel.



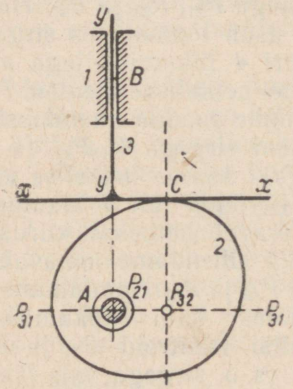
Joon. 208.



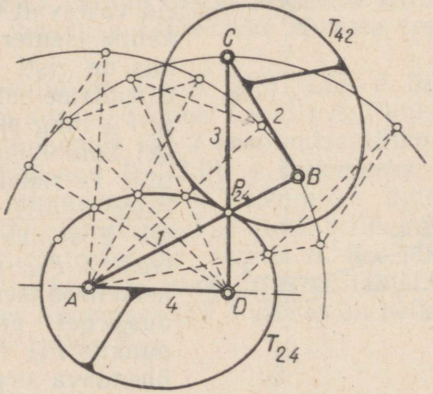
Joon. 209.

Teiselt poolt on teada, et hetkeline kiiruste tsenter P_{31}, mis määrab lüli *3* liikumise kinnislüli *1* suhtes, asub lõpmatuses sirgel, mis on risti lüli *3* liikumisteljega *yy*. Seega peab otsitav hetkeline kiiruste tsenter P_{32} asuma hetkelisi tsentreid P_{21} ja P_{31} ühendava sirge ja profiilile punktis *C* tõmmatud normaali lõikepunktis.

4°. Nagu teoreetilisest mehaanikast teada, moodustab hetke-



Joon. 210.



Joon. 211.

liste kiiruste tsentrite geomeetriline koht nn. tsentroidi. Vaatleme näiteks joonisel 211 kujutatud neljalülilist šarniir-antiparallelogrammi, mille vastaslülid on paarikaupa võrdsed. Ülesandeks on konstrueerida tsentroid, mis tekib lüli *2* liikumisel lüli *4* suhtes. Kinnistame lüli *4*, s. o. muudame ta kinnislüliks. Hetkeline kiiruste tsenter P_{24} asub sirgete *AB* ja *CD* lõikepunktis. Teeme lüliga *AB* ühe täispöörde ümber punkti *A*. Punktide P_{24} geomeetriline koht moodustab tsentroidi T_{24}, mis antud mehhanismi puhul on ellipsikujuline, fookustega *A* ja *D*. Kuna lüli *4* on vaadeldava mehhanismi kinnislüli, siis kuulub tsentroid T_{24} temale. Me võime järelikult tsentroidi T_{24} ja lüli *4* omavahel jäigalt ühendada. Selleks, et leida tsentroidi, mis tekib lüli *4* liikumisel lüli *2* suhtes, tuleb kinnistada lüli *2* ja konstrueerida hetkelise kiiruste tsentri P_{42} kõik asendid. Tulemuseks saame seekord kõvera T_{42}. Viimane on samuti ellips, fookustega *C* ja *B*. Tsentroidi T_{42}, mis kuulub lülile *2*, võib viimasega jäigalt ühendada. Lüli *2* liikumist lüli *4* suhtes, või vastupidi, lüli *4* liikumist lüli *2* suhtes võib nüüd reprodutseerida, pannes tsentroidid T_{24} ja T_{42} teineteisel libisemata veerema. Sõltuvalt mehhanismi *ABCD* kinnislüli valikust osutuvad tsentroidid T_{24} ja T_{42} kas absoluutse või relatiivse liikumise tsentroidideks. Näiteks kinnistades lüli *4* ja sellega jäigalt seotud tsentroidi T_{24}, võib lüli *2* absoluutset liikumist reprodutseerida, veeretades liikuvat tsentroidi T_{42} libisemata paiksel tsentroidil T_{24}.

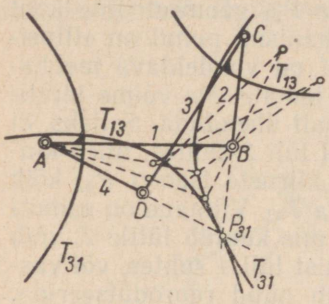
Käsitletud juhul oli T_{24} lüli *2* absoluutse liikumise paikseks ja T_{42} — sama liikumise liikuvaks tsentroidiks. Vastupidine olukord tekib juhul, kui kinnistada lüli *2*. Paikseks tsentroidiks kujuneb siis T_{42}, lüli *4* absoluutse liikumise liikuvaks tsentroidiks aga T_{24}.

Juhul kui kinnistada lüli *1* või *3*, kujunevad mõlemad tsentroidid T_{24} ja T_{42} liikuvaiks. Nende libisemata veeremine teineteisel reprodutseerib lülide *2* ja *4* suhtelist (relatiivset) liikumist. Tsentroidid T_{24} ja T_{42} osutuvad sedapuhku relatiivse liikumise tsentroidideks.

Kui kinnistada lüli *1*, hakkab tsentroid T_{24} pöörlema ümber telje *A* ja tsentroid T_{42} ümber telje *B*. Järelikult saab šarniir-antiparallelogrammi lülide *4* ja *2* pöörlemist ümber telgede *A* ja *B* reprodutseerida kahe, antud telgedele kinnitatud elliptilise friktsioonrattaga. Viimaste profiilid kujutavad vastavalt tsentroide T_{24} ja T_{42}. Šarniir-antiparallelogrammi kui mehhanismi võib seega asendada elliptiliste friktsioonratastega.

5°. Eelmises punktis käsitletud tsentroidid T_{24} ja T_{42} kuulusid lülidele *2* ja *4*. Täiesti analoogiliselt võib konstrueerida lülidele *1* ja *3* kuuluvad tsentroidid T_{13} ja T_{31}. Selleks tuleb leida hetkeliste kiiruste tsentrite P_{13} ja P_{31} geomeetrilised kohad. Nagu ülal näidatud, asuvad käsitletavad hetkelised tsentrid sirgete *AD* ja *CB* lõikepunktis (joon. 212). Kinnistades algul lüli *1* ja seepeale lüli

3, saab hõlpsasti konstrueerida tsentroidid T_{13} ja T_{31}, mis oma kujult on hüperboolid. Hüperbooli T_{31} harud on jäigalt seotud lüliga *1*, hüperbooli T_{13} harud aga lüliga *3*. Kui kinnistada lüli *1* või lüli *3*, kujunevad T_{31} ja T_{13} lülide *1* ja *3* absoluutse liikumise tsentroidideks. Seejuures on üks tsentroididest liikuv ja teine paikne, sõltuvalt sellest, kumb lülidest *1* või *3* kinnistati. Kui aga kinnistada lüli *2* või lüli *4*, muutuvad tsentroidid T_{31} ja T_{13} mõlemad liikuvaiks, moodustades suhtelise liikumise tsentroidide paari.



Joon. 212.

Nagu ülal näidati on mis tahes mehhanismi igas meelevaldses asendis alati võimalik määrata nii absoluutse kui ka relatiivse liikumise hetkelisi kiiruste tsentreid. Järelikult saab iga mehhanismi poolt antavat liikumist reprodutseerida teise mehhanismiga, mis koosneb kahest, kinnislüliga šarniirselt ühendatud kaastsentroidist. Näiteks, liikumise ülekandmist šarniir-antiparallelogrammi kepsude *AD* ja *CB* vahel saab reprodutseerida kahe elliptilise friktsioonrattaga (joon. 211); liikumise ülekandmist kepsude *AB* ja *CD* vahel — kahe hüperboolse friktsioonrattaga (joon. 212). Mehhanisme, mis liikumist tsentroidide abil üle kannavad, nimetatakse *tsentroidmehhanismideks*.

Praktikas ei ole liikumise reprodutseerimine tsentroidmehhanismide abil alati teostatav, sest tsentroide moodustavad kõverad võivad mõningatel juhtudel osutuda äärmiselt keerukaiks: neis võib esineda kaksikpunkte, lõpmatusse siirduvaid punkte jne. Kui näiteks vaadelda jooniseid 211 ja 212, siis selgub, et liikumise reprodutseerimine elliptiliste friktsioonrataste abil (joon. 211) on võimalik, hüperboolsete rataste kasutamine on aga ebareaalne, sest kumbki neist peaks koosnema kahest, lõpmatuses oma asümptootidele lähenevast harust.

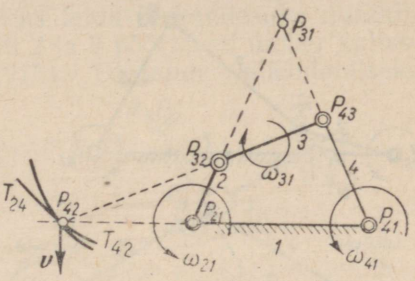
§ 24. Lülide kiiruste vahel kehtivad seosed

1°. Nagu näidati § 23, on mehhanismi igas asendis alati võimalik määrata lülide absoluutse või relatiivse liikumise hetkelisi kiiruste tsentreid. Teiselt poolt on teoreetilisest mehaanikast teada, et lülide pöörlemine ümber oma hetkeliste kiiruste tsentrite toimub igal vaadeldaval momendil teatava *kindla hetkelise nurkkiirusega*.

Joonisel 213 kujutatud šarniirnelinurgal, mille lüli *1* on kinnistatud, on kokku 6 hetkelist kiiruste tsentrit: P_{21}, P_{41}, P_{31}, P_{32},

P_{43} ja P_{42}. Vastavalt sellele on käsitletaval mehhanismil kolm absoluutse liikumise hetkelist nurkkiirust — ω_{21}, ω_{41} ja ω_{31} ning kolm relatiivse liikumise hetkelist nurkkiirust — ω_{32}, ω_{43} ja ω_{42}. Ülalloetletud nurkkiiruste seast meelevaldselt valitud kahe nurkkiiruse vahelist suhet on alati võimalik määrata.

Näiteks, olgu ülesandeks leida nurkkiiruste ω_{21} ja ω_{41} vaheline suhe. Nimetatud nurkkiirused määravad lülide *2* ja *4* pöörlemise ümber kinnislülile *1* kuuluvate tsentrite P_{21} ja P_{41}.



Joon. 213.

Lülide *2* ja *4* suhtelise liikumise hetkeliseks kiiruste tsentriks on punkt P_{42}. Selles punktis puutuvad teineteist lülidele *2* ja *4* kuuluvad tsentroidid T_{42} ja T_{24}. Kuna tsentroidid veerevad teineteisel libisemata, siis on neil puutepunktis võrdne kiirus v, mille suuruse saab määrata seosest

$$v = \omega_{21}(P_{21}P_{42}) = \omega_{41}(P_{41}P_{42}). \qquad (5.1)$$

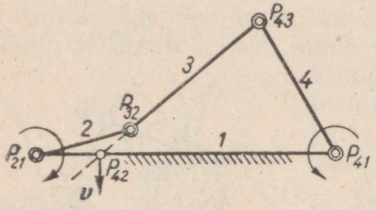
Seosest (5.1) järgneb, et

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \frac{(P_{41}P_{42})}{(P_{21}P_{42})}. \qquad (5.2)$$

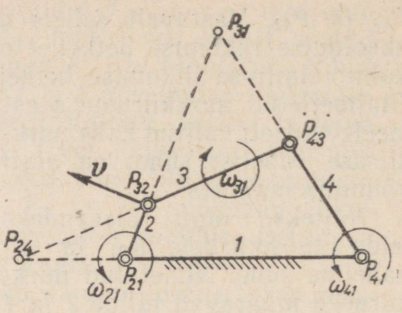
Saadud võrdest (5.2) selgub, et juhul kui kinnistada lüli *1*, on lülide *2* ja *4* absoluutsed nurkkiirused pöördvõrdelised kaugustega, mis lahutavad nimetatud lülide absoluutse liikumise hetkelisi kiiruste tsentreid nendesamade lülide suhtelise liikumise hetkelisest kiiruste tsentrist.

Jooniselt 213 on näha, et hetkeline kiiruste tsenter P_{42} asub kepsu *3* telje $P_{32}P_{43}$ ja kinnislüli *1* telje $P_{21}P_{41}$ lõikepunktis. Kui sirget $P_{21}P_{41}$ nimetada *tsentrite jooneks* ja sirget $P_{32}P_{43}$ *mõjujooneks*, võib seose (5.2) lühidalt formuleerida järgmises sõnastuses: *Mõjujoon jagab tsentrite joone osadeks, mis on pöördvõrdelised nurkkiirustega, millega lülid pöörlevad ümber vaadeldavate tsentrite.* Seejuures juhul kui punkt P_{42} jagab sirglõigu $P_{21}P_{41}$ väliselt (joon. 213), on nurkkiirused ω_{21} ja ω_{41} samasuunalised. Juhul kui P_{42} jagab sirglõigu $P_{21}P_{41}$ siseselt, on nurkkiirused ω_{21} ja ω_{41} vastassuunalised (joon. 214) ja ühele võrde (5.2) pooltest tuleb panna miinusmärk.

2°. Nurkkiiruste ω_{21} ja ω_{31} suhte võib leida lähtudes asjaolust, et lülide *2* ja *3* ühise punkti P_{32} kiiruse v väärtuse saab avaldada kahel erineval viisil (joon. 215):



Joon. 214.



Joon. 215.

$$v = |\omega_{21}|\,(P_{21}P_{32}) = |\omega_{31}|\,(P_{31}P_{32}). \tag{5.3}$$

Silmas pidades, et ω_{21} ja ω_{31} on vastassuunalised, saame ülaltoodud seosest:

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{31}} = -\frac{(P_{31}P_{32})}{(P_{21}P_{32})}. \tag{5.4}$$

Analoogiliselt leitakse ka nurkkiiruste ω_{41} ja ω_{31} suhe:

$$\frac{\omega_{31}}{\omega_{41}} = -\frac{(P_{41}P_{43})}{(P_{31}P_{43})}. \tag{5.5}$$

Nurkkiiruste ω_{32} ja ω_{21} suhet on võimalik leida, lähtudes lüli *3* liikumisest lüli *2* suhtes. Kui eeldada, et lüli *2* on kinnistatud, siis kujutaks see liikumine endast pöörlemist ümber tsentri P_{32}. Selleks aga, et lüli *2* võiks käsitada kinnislülina, piisab kui anda nii temale kui ka lülile *3* lisanurkkiirus, mis suuruselt võrdub nurkkiirusega ω_{21}, kuid on sellega vastassuunaline. Pärast säärase lisanurkkiiruse rakendamist muutub lüli *2* liikumatuks, lüli *3* aga saab lisaks oma endisele nurkkiirusele ω_{31} veel lisanurkkiiruse $-\omega_{21}$. Nurkkiirus ω_{32} on järelikult arvutatav valemiga

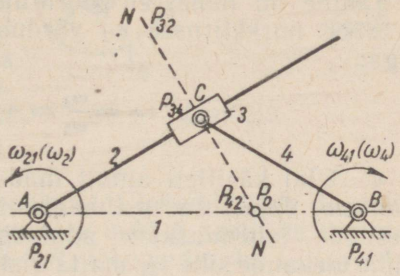
$$\omega_{32} = \omega_{31} - \omega_{21}. \tag{5.6}$$

Asetades valemisse (5.6) ω_{31} väärtuse võrdest (5.4), saame seose nurkkiiruste ω_{32} ja ω_{21} vahel. Analoogiliselt saab avaldada ka nurkkiirust ω_{34}:

$$\omega_{34} = \omega_{31} - \omega_{41}. \tag{5.7}$$

Lähtudes saadud tulemusest ja kasutades võrret (5.5), võib leida nurkkiiruste ω_{34} ja ω_{41} vahelise seose.

3°. Mehhanismi mis tahes kahe lüli nurkkiiruste suhet nimetatakse ülekandesuhteks [1]. Eelmises punktis toodud seoste abil on võimalik hõlpsasti määrata ülekandesuhteid igasugustes mehhanismides. Olgu näiteks ülesandeks leida ülekandesuhe nurkkiiruste ω_{21} ja ω_{41} vahel, millega lülid *2* ja *4* pöörlevad ümber kulissmehhanismi kinnislüli *1* (joon. 216). Ülesande lahendamiseks tuleb määrata hetkelise kiiruste tsentri P_{42} asukoht. Nimetatud tsenter peab ühelt poolt asuma sirgel, mis ühendab tsentreid P_{21} (punkt *A*) ja P_{41} (punkt *B*). Teiselt poolt peab tsenter P_{42} paiknema ka sirgel, mis ühendab tsentreid P_{32} ja P_{34}. Kuna liuguri *3* liikumine lüli *2* suhtes on translatoorne, siis paikneb tsenter P_{32} liuguri liikumistelje ristsirgel lõpmatuses. Tsentreid P_{32} ja P_{34} ühendavaks sirgeks on seega läbi tsentri P_{34} (punkt *C*) liuguri liikumisteljele tõmmatud ristsirge. Otsitav hetkeline kiiruste tsenter P_{42} asub sirge *NN* (mõjujoone) ja sirge *AB* (tsentrite joone) lõikepunktis. Nurkkiiruste ω_{21} ja ω_{41} ülekandesuhe on määratud võrdega:



Joon. 216.

$$\frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \pm \frac{(P_{41}P_{42})}{(P_{21}P_{42})}. \qquad (5.8)$$

Tähistame ülekandesuhte edaspidises tähega *i*. Selle tähe juurde asetame indeksid, mis viitavad vastavate lülide numbritele. Ülalkäsitletud juhul, kus määrati lülide *2* ja *4* nurkkiiruste suhe, võib seega äsjakehtestatud tähistusviisi kasutades kirjutada:

$$i_{24} = \frac{\omega_{21}}{\omega_{41}} = \pm \frac{(P_{41}P_{42})}{(P_{21}P_{42})}. \qquad (5.9)$$

Ülekandesuhte märk valitakse sõltuvalt sellest, kas lülide nurkkiirused on sama- või vastassuunalised. Kuna joonisel 216 toodud mehhanismis on nurkkiirused ω_{21} ja ω_{41} vastupidiste märkidega, siis on ülekandesuhe siin loomulikult negatiivne. Edasi, kuna lülide *2* ja *4* liikumist vaadeldakse ühe ja sama lüli (kinnislüli *1*) suhtes, võib tähistusviisi lihtsustamiseks nurkkii-

[1] Eestikeelses tehnilises kirjanduses nimetatakse käsitletavat nurkkiiruste suhet sageli ka ülekandeteguriks. — *Tõlk.*

ruste tähistes teise indeksi ära jätta. Lõplikult saame seega:

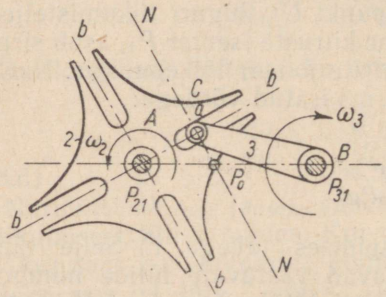
$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = -\frac{BP_0}{AP_0}, \tag{5.10}$$

kus P_0 tähistab mõjujoone ja tsentrite joone lõikepunkti.

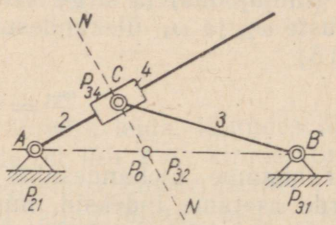
Lihtne on näha, et pöörd-ülekandesuhe i_{42}, s. o. nurkkiiruse ω_4 suhe nurkkiirusse ω_2 võrdub ülekandesuhte i_{24} pöördväärtusega:

$$i_{42} = \frac{\omega_4}{\omega_2} = -\frac{AP_0}{BP_0} = \frac{1}{i_{24}}. \tag{5.11}$$

4°. Ülal käsitleti ainult madalamaid paare sisaldavaid mehhanisme. Juhul kui mehhanismis esineb kõrgemaid paare, on ülesande lahenduskäik analoogiline. Olgu näiteks ülesandeks leida ülekandesuhe i_{23} malta risti mehhanismi lülide *2* ja *3* vahel (joon. 217). Kui punktis *C* asuv kõrgem paar asendada lüliga *4*, mis moodustab kinemaatilisi paare lülidega *2* ja *3*, võib malta risti mehhanismi asendada joonisel 218 kujutatud kulissmehha-



Joon. 217.



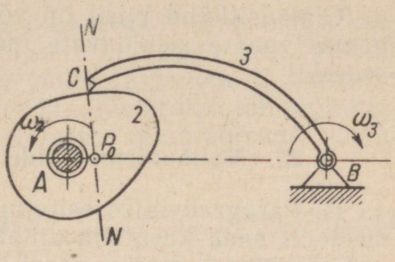
Joon. 218.

nismiga. Aluseks võttes § 23, 3° toodut, saab näidata, et hetkeline kiiruste tsenter $P_0(P_{32})$ asub tsentreid $A(P_{21})$ ja $B(P_{31})$ ühendaval sirgel. Teiselt poolt peab see kiiruste tsenter asuma sirgel, mis ühendab tsentreid $P_{34}(C)$ ja P_{42}. Kuna tsenter P_{42} asub lõpmatuses, siis tsentreid $P_{34}(C)$ ja P_{42} ühendavaks sirgeks on punkti *C* (s. o. rulli *a* tsentrit) läbiv normaal *NN*. Hetkeline kiiruste tsenter $P_0(P_{32})$ asub seega seal, kus kõrgema paari elementidele (s. o. joonisel 217 näidatud rullile ja juhtsoonele) punktis *C* tõmmatud normaal *NN* lõikub lülide *2* ja *3* pöörlemistsentreid ühendava sirgega (s. o. tsentrite joonega). Ülekandesuhe i_{23} on seega määratud järgmiselt:

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{BP_0}{AP_0}. \tag{5.12}$$

Joonisel 217 on sama ülesande lahendus näidatud vahetult malta risti mehhanismi skeemil.

Käsitletud näitest järgneb, et kõrgema paari elementidele kokkupuutepunktis (kontaktpunktis) tõmmatud normaal on selles kõrgemas paaris mõjujooneks. Seega *kõrgema paari elementide kontaktpunktis tõmmatud normaal jagab tsentrite joone nurkkiirustega pöörvõrdelisteks osadeks.*

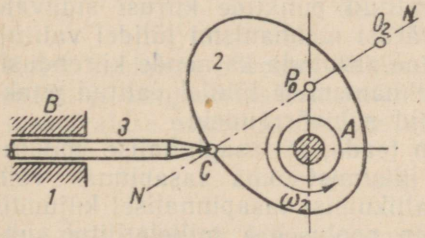


Joon. 219.

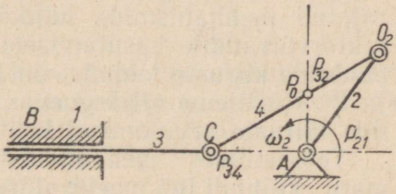
Joonis 219 kujutab nukkmehhanismi. Ülekandesuhte i_{23} määramiseks piisab, kui punktis C tõmmata nuki *2* profiilile normaal ja otsida selle lõikepunkt sirgega AB. Ülekandesuhe i_{23} avaldub järgmiselt:

$$i_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{BP_0}{AP_0}. \tag{5.13}$$

Joonis 220 kujutab nukkmehhanismi translatoorselt liikuva lüliga *3*. Seose lüli *3* kiiruse v_3 ja nuki *2* nurkkiiruse ω_2 vahel võib leida, tõmmates läbi punkti C normaali NN ja otsides selle lõikepunkti P_0 sirgega AP_0. Viimane on tõmmatud läbi punkti A risti



Joon. 220.



Joon. 221.

lüli *3* liikumise sihiga. Punkt P_0 ongi hetkeline kiiruste tsenter P_{32}. See selgub vahetult jooniselt 221, mis kujutab punktis C asuva kõrgema paari asendamise tulemusel tekkinud mehhanismi. Kuna lülidel *2* ja *3* on punktis P_0 ühine kiirus v_3, siis joonise 220 põhjal võib kirjutada, et

$$v_3 = \omega_2 l_{AP_0} \tag{5.14}$$

või

$$l_{AP_0} = \frac{v_3}{\omega_2}. \tag{5.15}$$

Ülalkäsitletud viisil on võimalik määrata tasapinnaliste, kõrgemaid paare sisaldavate mehhanismide lülide kiiruste vahelisi seoseid.

§ 25. Mehhanismi lülide kiiruste ja kiirenduste leidmine

1°. Paragrahvis 24 esitatud kiirustevaheliste seoste määramise meetodit saab kasutada ainult lihtsate mehhanismide kinemaatilisel uurimisel, sest meetodi rakendamiseks peab teadma mehhanismi kõikide lülide hetkelisi kiiruste tsentreid. Kui neljalülilises mehhanismis on ainult kuus hetkelist kiiruste tsentrit (vt. § 23), siis paljulülilistes mehhanismides on nende arv tunduvalt suurem. Tõepoolest, kiiruste tsentrite arv k ja mehhanismi lülide arv n on omavahel seotud tingimusega

$$k = \frac{n(n-1)}{2}, \tag{5.16}$$

s. t. hetkeliste kiiruste tsentrite arv k võrdub kombinatsioonide arvuga, mida n lülist saab kahekaupa moodustada. Lisaks sellele võib juhtuda, et hetkelised kiiruste tsentrid paiknevad väljaspool joonise piire, mis ülesande graafilise lahendamise teeb keerukamaks. Inseneride arvutuspraktikas on seetõttu laialdaselt levinud analüütilised ja grafoanalüütilised uurimismeetodid. Viimased on rajatud mehhanismide lülidel valitud punktide kiirusi siduvate vektorvõrrandite kasutamisele. Pärast mehhanismi lülidel valitud punktide kiiruste leidmist on lihtne arvutada ka nende kiirendusi.

2°. Käsitleme alljärgnevas mehhanismide lülidel valitud punktide kiiruste arvutamisel kehtivaid põhivõrrandeid.

Teoreetilisest mehaanikast on teada, et tasapinnalise muutumatu kujundi iga meelevaldset liikumist oma tasapinnas võib käsitada kui translatoorset kaasaliikumist tasapinnalisel kujundil meelevaldselt valitud punktiga (nn. poolusega), millele liitub suhteline pöörlemine ümber valitud pooluse.

Seetõttu võib tasapinnalise kujundi iga punkti kiirust kujutada kui pooluse kiiruse ja pöörlemisel ümber pooluse tekkiva joonkiiruse geomeetrilist summat. Kui näiteks pooluseks valida tasapinnalise kujundi punkt B, siis sama kujundi meelevaldse punkti C kiirus v_C väljendub järgmiselt:

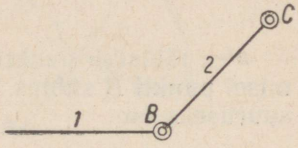
$$v_C = v_B + v_p,$$

kus v_B tähistab pooluse B kiirust ja v_p — pöörlemiskiirust ümber pooluse, või täpsemalt, punkti C kiirust relatiivses liikumises sellise muutumatu tasapinnalise kujundi suhtes, mis liigub translatoorselt poo-

luse kiirusega v_B. Et vältida seda keerukat sõnastust, nimetatakse kiirust v_p mitte küll päris täpselt, kuid selle eest lühidalt tasapinnalisel muutumatul kujundil paikneva *punkti C kiiruseks* samal kujundil asuva *punkti B suhtes* ja tähistatakse tähisega v_{CB}. Kasutades seda tähistusviisi, võib eelneva vektorvõrrandi kirjutada järgmisel kujul:

$$v_C = v_B + v_{CB}. \tag{5.17}$$

Kuna v_{CB} on punkti C kiirus pöörleval liikumisel ümber punkti B, siis on selge, et tema väärtus võrdub tasapinnalise kujundi nurkkiiruse ja punktide B ning C vahelise kauguse l_{BC} korrutisega. Kiirus v_{CB} on risti sihiga BC ja tema suuna määrab nurkkiiruse märk.



Joon. 222.

Analoogiliselt saab ka tasapinnalise kujundi iga punkti kiirendust käsitada kui pooluse kiirenduse ja pooluse suhtes toimuva relatiivse liikumise kiirenduse geomeetrilist summat. (Ka siin on kasutatud lihtsustatud väljendust. Väljenduse «pooluse suhtes» asemel oleks täpsem olnud «koos poolusega translatoorselt liikuva muutumatu kujundi suhtes»). Arvestades ülaltoodut, võib seega kirjutada

$$a_C = a_B + a_{CB}.$$

Kuna suhtelise pöörleva liikumise kiirendust võib lahutada normaal- ja tangentsiaalkomponendiks, siis tasapinnalise kujundi iga meelevaldse punkti kiirenduse võib lõplikult avaldada kujul

$$a_C = a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB},$$

kus a^n_{CB} tähistab kiirenduse normaal-, ja a^t_{CB} — kiirenduse tangentsiaalkomponenti punkti C relatiivsel liikumisel pooluse B suhtes.

Moodustagu lülid *1* ja *2* (joon. 222) rotatsioonipaari B. Valides punkti B pooluseks, võib rakendada võrdust (5.17)

$$v_C = v_B + v_{CB}.$$

Selles võrduses tähistab v_B punkti B absoluutset kiirust (nimetatud punkt kuulub korraga mõlemale lülile *1* ja *2*), v_{CB} aga punkti C kiirust relatiivsel liikumisel punkti B suhtes. See kiirus ristub lüli BC teljega ja tema väärtus on antud valemiga

$$v_{CB} = |\omega_2|\, l_{BC}, \tag{5.18}$$

kus ω_2 tähistab lüli *2* nurkkiirust ja l_{BC} — punktide *B* ja *C* vahelist kaugust natuuris (nn. loomulikku kaugust).

Vastavalt ülaltoodule võib punkti *C* kiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ avaldada punkti *B* kiirenduse $\boldsymbol{a}_B$ kaudu järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB}, \tag{5.19}$$

kus $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ tähistab punkti *C* normaalkiirendust relatiivsel liikumisel punkti *B* suhtes. See kiirendus kulgeb piki lüli *BC* telge ja on suunatud punktist *C* punkti *B*. Tema väärtuse arvutame valemiga

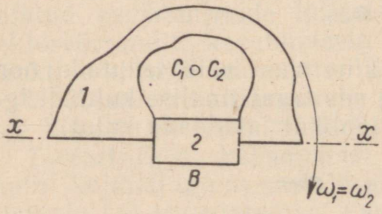
$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_{CB}} = \omega^2_2 l_{BC}; \tag{5.20}$$

$\boldsymbol{a}^t_{CB}$ tähistab punkti *C* tangentsiaalkiirendust relatiivsel liikumisel punkti *B* suhtes. See kiirendus ristub lüli *BC* teljega ja tema suuruseks on

$$a^t_{CB} = \left|\frac{dv_{CB}}{dt}\right| = |\varepsilon_2|\, l_{BC}, \tag{5.21}$$

kus ε_2 tähistab lüli *2* nurkkiirendust.

Juhul kui lülid *1* ja *2* moodustavad translatsioonipaari *B* (joon. 223), on lülile *2* kuuluva punkti C_2 kiirus lülil *1* asuva punkti C_1 kiirusega seotud järgmiselt:



Joon. 223.

$$\boldsymbol{v}_{C2} = \boldsymbol{v}_{C1} + \boldsymbol{v}_{C2C1}. \tag{5.22}$$

Selles võrrandis tähistab $\boldsymbol{v}_{C1}$ kiirust, millega liiguks lüli *1* (s. o. kulissi telje *xx*) säärane punkt C_1, mis mehhanismi antud asendis ühtib lülile *2* kuuluva punktiga C_2; $\boldsymbol{v}_{C2C1}$ tähistab kiirust, millega lüli *2* liigub lüli *1* suhtes. See kiirus on paralleelne kulissi teljega *xx*.

Punkti C_2 kiirenduse $\boldsymbol{a}_{C2}$ võib punkti C_1 kiirenduse $\boldsymbol{a}_{C1}$ kaudu avaldada järgmiselt:

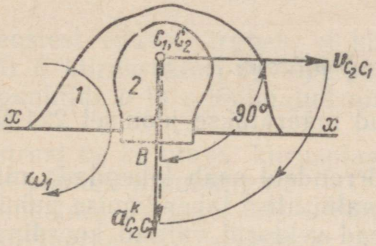
$$\boldsymbol{a}_{C2} = \boldsymbol{a}_{C1} + \boldsymbol{a}^k_{C2C1} + \boldsymbol{a}^r_{C2C1}. \tag{5.23}$$

Siin $\boldsymbol{a}_{C1}$ tähistab punkti C_1 kiirendust. Vektor $\boldsymbol{a}^k_{C2C1}$ kujutab endast nn. Coriolise kiirendust. See kiirendus ristub kulissi teljega *xx* ja tema suuruse saab arvutada valemiga

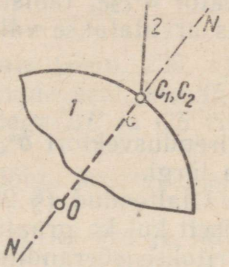
$$a^k_{C2C1} = 2\,|\omega_1|\, v_{C2C1}, \tag{5.24}$$

kus ω_1 tähistab lüli *1* nurkkiirust. Viimane võrdub käsitletaval juhul lüli *2* nurkkiirusega ω_2, sest lülid *1* ja *2* on omavahel seotud translatsioonipaariga. a^r_{C2C1} tähistab kiirendust lüli *2* liikumisel lüli 1 suhtes. See relatiivne kiirendus on paralleelne teljega *xx*.

Coriolise kiirenduse a^k_{C2C1} suuna määramiseks tuleb suhtelise kiiruse vektorit v_{C2C1} (joon. 224) pöörata ümber oma alguspunkti 90° võrra nurkkiiruse ω_1 poolt määratud suunas. Pööratud vektori v_{C2C1} suund ühtib Coriolise kiirendusvektori a^k_{C2C1} suunaga.



Joon. 224.



Joon. 225.

Ka sel juhul, kui lülid *1* ja *2* moodustavad omavahel kõrgema paari *C* (joon. 225), on ülesannet võimalik lahendada seoste (5.17) ja (5.19) abil. Selleks tuleb eelnevalt läbi punkti *C* tõmmata normaal *NN*, leida lülile kuuluva paarielemendi kõverustsenter *O* ja asendada kõrgem paar *C* lüliga *OC*, mis moodustab rotatsioonipaare punktides *C* ja *O*.

Juhul kui kõrgema paari *C* taandamist ei kasutata, võib rakendada seost, mis kehtib lülile *2* kuuluva punkti C_2 kiiruse v_{C2} ja lülile *1* kuuluva punkti C_1 kiiruse v_{C1} vahel:

$$v_{C2} = v_{C1} + v_{C2C1}. \tag{5.22}$$

Liige v_{C2C1} tähistab siin kiirust, millega lüli *2* liigub lüli *1* suhtes. Nimetatud kiirus kulgeb lülile *1* kuuluva paarielemendi puutuja sihis, s. t. on risti normaaliga *NN*.

Punkti C_2 kiirendus a_{C2} on punkti C_1 kiirendusega a_{C1} seotud järgmiselt:

$$a_{C2} = a_{C1} + a^n_{C2C1} + a^t_{C2C1} + a^k_{C2C1}.$$

Selles võrrandis tähistab a^n_{C2C1} normaalkiirendust, mis kulgeb piki normaali *NN*, suunaga punktist *C* punkti *O* ja mille suurus on arvutatav valemiga

$$a^n_{C2C1} = \frac{v^2_{C_2C_1}}{l_{OC}} = \frac{v^2_{C_2C_1}}{\varrho}, \tag{5.25}$$

kus $\varrho = l_{OC}$ tähistab kõrgemasse paari kuuluva profiili kõverusraadiust punktis C.

Vektor $\boldsymbol{a}^t_{C_2C_1}$ tähistab tangentsiaalkiirendust. See kiirendus kulgeb profiilile punktis C tõmmatud puutuja sihis, s. t. risti normaaliga NN ja tema suurus on antud tuntud valemiga

$$a^t_{C_2C_1} = \frac{dv_{C_2C_1}}{dt}. \tag{5.26}$$

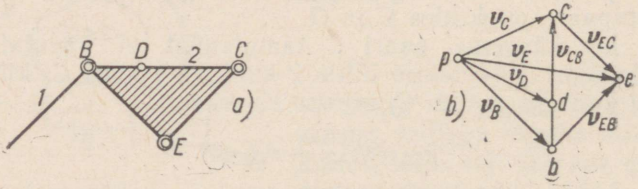
Vektor $\boldsymbol{a}^k_{C_2C_1}$ tähistab nagu alati Coriolise kiirendust, mille suurus arvutatakse valemiga

$$a^k_{C_2C_1} = 2|\omega_1|v_{C_2C_1}. \tag{5.27}$$

Kiirendusvektori $\boldsymbol{a}^k_{C_2C_1}$ suund määratakse joonisel 224 toodud juhise järgi.

3°. Ülaltoodud (§ 25, 2°) võrrandeid saab lahendada nii analüütiliselt kui ka graafiliselt. Analüütilise lahendamise puhul projekteeritakse võrrandites esinevad vektorid valitud koordinaattelgedele. Igale vektorvõrrandile vastab sel puhul kaks skalaarvõrrandit, mis lahendatakse koos.

Inseneri arvutuspraktikas osutuvad käsitletavate vektorvõrrandite graafilised lahendusmeetodid palju ülevaatlikumateks. Näiteks juhul, kui lülid *1* ja *2* moodustavad omavahel rotatsioonipaari (joon. 226, *a*), võib võrrandi (5.17) graafiliselt lahendada järgmise konstruktsiooni abil.



Joon. 226.

Lähtudes meelevaldsest punktist p (joon. 226, *b*), kantakse joonisele punkti B kiirust kujutav vektor $\boldsymbol{v}_B$. Läbi selle lõpp-punkti b tõmmatakse paralleelsirge punkti C kiirusele punkti B suhtes ($\boldsymbol{v}_{CB}$). Nimetatud sirge ristub seega lüli BC teljega. Pikendame saadud sirget kuni lõikumiseni läbi punkti p tõmmatud teise sirgega, mis on paralleelne punkti C kiirusega $\boldsymbol{v}_C$. Tekib kolmnurk ***pbc***, mida nimetatakse *lüli BC kiirusplaaniks*. Punkti p nimetatakse *kiirusplaani pooluseks*. Konstruktsiooni analüüsist selgub, et kiirusplaani *pbc* joonestamiseks piisab, kui on teada lüli ühe punkti kiirus (näiteks punkti B kiirus $\boldsymbol{v}_B$) ja teise punkti kiiruse

siht (näiteks punkti C kiiruse v_C kandesirge). Kiiruse v_{CB} siht on teada — see peab alati ristuma sirgega BC. Kui lüli kiirusplaan on juba koostatud, siis on alati võimalik määrata lüli mis tahes teise punkti, näiteks punkti E, kiirust.

Tõepoolest, võrrandi (5.17) põhjal võib punkti E kiiruse avaldada tingimustest

$$\left.\begin{aligned} v_E &= v_B + v_{EB} \\ \text{ja} \qquad v_E &= v_C + v_{EC}. \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

Seostest (5.28) järgneb, et kiirusplaanis (joon. 226, *b*) peab punkti E kiirusvektori v_E lõpp-punkt e asuma seal, kus lõikuvad läbi punktide b ja c tõmmatud ning sihtidega BE ja CE ristuvad sirged.

Kiirust v_E kujutava kiirusplaani joonlõigu saame, ühendades plaani pooluse p punktiga e.

Vaadeldes kiirusplaanis tekkinud kolmnurka bce ja lülil asuvat kolmnurka BCE, selgub, et lõigud bc, be ja ce ristuvad vastavalt lõikudega BC, BE ja CE, s. t. $bc \perp BC$, $be \perp BE$, $ce \perp CE$.

Tähendab suhtelisi kiirusi v_{CB}, v_{EB} ja v_{EC} kiirusplaanis kujutav kolmnurk bce on sarnane kolmnurgaga BCE ja on selle suhtes 90° võrra pööratud. Suhteliste kiiruste poolt kiirusplaanis moodustatud kujundi geomeetriline sarnasus lülil oleva kujundiga võimaldab määrata antud lüli punktide kiirusi mitte ainult võrrandite abil, vaid ka puht-graafiliselt, geomeetriliselt sarnaste kujundite joonestamise teel. Märgime siinjuures, et geomeetriliselt sarnaste kujundite graafilise konstrueerimise õigsust kontrollitakse, võrreldes lüli skeemil ja kiirusplaanis figureerivate tähiste järjestust. Kui näiteks tähiste järjestus skeemil on B, C, E (lugedes piki lüli kontuuri kellaosuti liikumise suunas), siis peab see järjestus esinema ka kiirusplaanis. Kiirusplaanis kellaosuti liikumise suunas lugedes peame seega saama järjestuse b, c, e.

Lüli kõikide punktide absoluutsete kiiruste vektorid lähtuvad plaanis poolusest p. Kõik suhteliste kiiruste vektorid ühendavad absoluutsete kiiruste vektoreid omavahel.

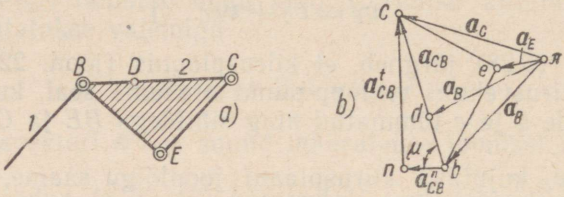
Kiirusplaanis ja lüli skeemil esinevate kujundite geomeetrilist sarnasust võib kasutada ka lüli teljel BC paiknevate punktide kiiruste määramiseks. Näiteks et leida kiirusplaanis punkti D (joon. 226, *a*) kiirust v_D kujutava lõigu lõpp-punkt d, tuleb joonlõik bc kiirusplaanis (joon. 226, *b*) jagada kaheks osaks samas vahekorras, nagu punkt D jagab lõigu BC lülil, s. t.

$$\frac{v_{DB}}{v_{CB}} = \frac{bd}{bc} = \frac{BD}{BC}. \tag{5.29}$$

Punkti D kiirust v_D kujutab kiirusplaanis lõik pd.

Koostatud kiirusplaanist saab hõlpsasti määrata ka lüli *2* nurkkiiruse ω_2. Valemist (5.18) leiame $|\omega_2| = \frac{v_{CB}}{l_{BC}}$. Vektorit $\boldsymbol{v}_{CB}$ kujutab kiirusplaanis joonlõik bc, kuna lõik l_{BC} on mõõdetav vahetult lülil. Nurkkiiruse ω_2 suund selgub jooniselt.

4°. Rotatsioonipaari moodustava lüli BC (joon. 227, *a*) punktide kiirendusi saab määrata graafiliselt, kasutades seost (5.19).



Joon. 227.

Lähtudes meelevaldselt valitud punktist π (joon. 227, *b*), kanname joonisele punkti B kiirendusvektori $\boldsymbol{a}_B$. Vektorile $\boldsymbol{a}_B$ liidame normaalkiirenduse vektori $\boldsymbol{a}^n_{CB}$, mis, nagu varem näidatud, on suunatud punktist C punkti B. Selle vektori suurus arvutatakse valemiga (5.20). Viimases esinevat vektorit $\boldsymbol{v}_{BC}$ võib omakorda määrata varemkoostatud kiirusplaanist (joon. 226, *b*), kus teda kujutab joonlõik bc. Lõigu l_{BC} pikkus võetakse vahetult lülilt (joon. 227, *a*). Olgu vektor $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ kiirusplaani kantud lõiguna bn, mis lähtub punktist b (joon. 227, *b*). Võrrandi (5.19) põhjal tõmbame nüüd läbi punkti n tangentsiaalkiirenduse vektori $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ sihilise sirge, mis peab ristuma lüli BC teljega. Seda sirget pikendame kuni lõikumiseni punktist π tõmmatud teise sirgega, mis on punkti C kiirendusvektori $\boldsymbol{a}_C$ sihiline. Konstrueeritud kujundit πbnc nimetatakse *lüli BC kiirendusplaaniks* ja punkti π — *kiirendusplaani pooluseks.*

Konstruktsioonist selgub, et kiirendusplaani πbnc saamiseks piisab lüli ühe punkti kiirenduse (näiteks punkti B kiirenduse $\boldsymbol{a}_B$) ja teise punkti kiirenduse sihi (näiteks punkti C kiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ kandesirge) teadmisest. Lisaks sellele peab varem olema koostatud uuritava lüli kiirusplaan. Kui ühendada omavahel kiirendusplaani punktid b ja c, siis tekkiv joonlõik bc kujutab punkti C liikumisel punkti B suhtes toimivat täiskiirendust $\boldsymbol{a}_{CB}$. See selgub vektorvõrrandist

$$\boldsymbol{a}_{CB} = \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB}. \qquad (5.30)$$

Konstruktsioonist on edasi näha, et vektor $\boldsymbol{a}_{CB}$ moodustab joonlõigu BC sihiga nurga μ (joon. 227, *b*), mille tangensit on või-

malik määrata kiirendusplaanis esinevast kolmnurgast *bnc*:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{nc}{nb} = \frac{a^t_{CB}}{a^n_{CB}}. \tag{5.31}$$

Asetades võrrandisse (5.31) a^t_{CB} ja a^n_{CB} väärtused valemitest (5.20) ja (5.21), saame:

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{|\varepsilon_2| l_{BC}}{\omega_2^2 l_{BC}} = \frac{|\varepsilon_2|}{\omega_2^2}. \tag{5.32}$$

Võrrandist (5.32) järeldub, et punkti *C* liikumisel punkti *B* suhtes toimiv suhtelise kiirenduse vektor a_{CB} moodustab *BC*-sihiga nurga μ, mis on lüli *2* nurkkiiruse ω_2 ja nurkkiirenduse ε_2 poolt täielikult määratud.

On endastmõistetav, et lüli *BC* kõikide punktide suhtelised kiirendused moodustavad vastavatest punktidest punktini *B* tõmmatud raadiusvektoritega ühe ja sama nurga μ, mille suurus on antud seosega (5.32).

Lüli *BC* teljel paikneva meelevaldse punkti *D* kiirenduse määramisel (joon. 227, *a*) peab järelikult vektori a_{DB} siht kiirendusplaanis ühtima vektori a_{CB}, s. t. joonlõigu *bc* sihiga (joon. 227, *b*). Kiirendusplaanis kiirendust a_{DB} kujutava joonlõigu *bd* pikkus määratakse kiirenduste ja raadiusvektorite võrdelisuse tingimusest:

$$\frac{a_{DB}}{a_{CB}} = \frac{l_{DB}}{l_{CB}}. \tag{5,33}$$

Asetades võrdesse (5.33) vastavad lõigud kiirendusplaanist ja lüli skeemilt, saame:

$$\frac{bd}{bc} = \frac{BD}{BC}. \tag{5.34}$$

Võrdest (5.34) järeldub, et suhtelist kiirendust a_{DB} kujutava kiirendusplaani lõigu määramiseks tuleb suhtelist kiirendust a_{CB} kiirendusplaanis kujutav lõik jagada kaheks osaks suhtes, milles punkt *D* jagab lüli *BC* skeemil. Kandes saadud joonlõigu *bd* kiirendusplaani ja ühendades punkti *d* punktiga π, saame joonlõigu πd, mis kujutabki punkti *D* absoluutset kiirendust.

Lüliga *BC* jäigalt ühendatud m e e l e v a l d s e punkti *E* kiirenduse määramisel (joon. 227, *a*) võib rakendada ülalkäsitletud geomeetrilise sarnasuse reeglit. Konstrueerime kiirendusplaani lõigule *bc* kolmnurga *bce*, mis on sarnane lüli skeemil oleva kolmnurgaga

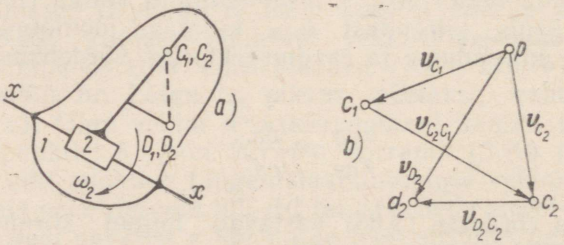
BCE, kuid viimase suhtes pööratud nurga μ võrra. Nurga μ väärtus määratakse seosest (5.32). Kuna kolmnurga *bce* küljed on kolmnurga *BCE* vastavate külgede suhtes pööratud konstantse nurga μ võrra, siis geomeetriliselt sarnase kolmnurga *bce* joonestamiseks on otstarbekas ära mõõta nurgad kolmnurga *BCE* naaberkülgede vahel. Liikudes ümber kontuuri *bce* vabalt valitud suunas, peab tippe tähistavate tähtede järjestus ühtima kontuuril *BCE* esineva järjestusega.

Nagu kiiruste määramise ülesande juures, nii ka siin lähtuvad kõik absoluutseid kiirendusi kujutavad vektorid ühest punktist — kiirendusplaani poolusest π. Kõik suhtelisi kiirendusi kujutavad vektorid ühendavad absoluutseid kiirendusi kujutavate vektorite otsi omavahel.

Kiirendusplaanist on lihtne määrata ka lüli *BC* nurkkiirendust. Valemi (5.21) põhjal võime kirjutada

$$|\varepsilon_2| = \frac{a^t_{CB}}{l_{BC}}.$$

Vektorit $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ kujutab kiirendusplaanis joonlõik *nc*, kuna pikkuse l_{BC} saab määrata vahetult lülilt *BC*. Nurkkiirenduse ε_2 suund selgub jooniselt.



Joon. 228.

5°. Juhul kui lülid *1* ja *2* moodustavad translatsioonipaari (joon. 228, *a*), siis võib kiirusplaani koostamiseks (joon. 228, *b*) kasutada võrrandit (5.22).

Lähtudes poolusest *p* kanname plaani kõigepealt punkti C_1 kiirust kujutava vektori $\boldsymbol{v}_{C1}$. Läbi selle lõpp-punkti c_1 tõmbame vektori $\boldsymbol{v}_{C2C1}$ sihilise sirge. Kuna vektor $\boldsymbol{v}_{C2C1}$ kujutab punkti C_2 relatiivset kiirust liikumisel punkti C_1 suhtes, tuleb kõne all olev sirge tõmmata paralleelselt kulissiga *xx* (joon. 228, *a*) kuni lõikumiseni punktis c_2 sirgega, mis lähtub poolusest *p* ja on paralleelne punkti C_2 kiirusvektoriga $\boldsymbol{v}_{C2}$. Ülaltoodust selgub, et kiirusplaani pc_1c_2 konstrueerimiseks piisab sellest, kui on teada lüli *1* ühe punkti, näiteks punkti C_1 kiirus $\boldsymbol{v}_{C1}$ ja lülil *2* paikneva, kuid antud

hetkel punktiga C_1 kokkulangeva punkti C_2 kiiruse v_{C2} siht. Kuna lülid *1* ja *2* moodustavad omavahel translatsioonipaari, siis on nende nurkkiirused ω_1 ja ω_2 omavahel võrdsed, s. t.

$$\omega_1 = \omega_2.$$

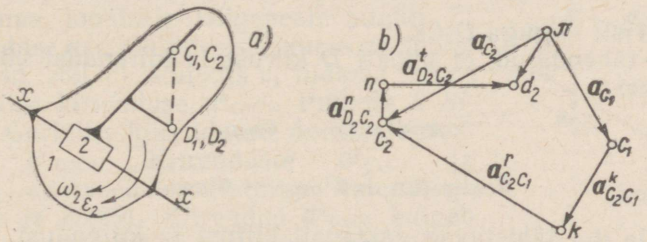
Lülil *2* paikneva meelevaldse punkti D kiiruse saab leida võrrandist

$$v_{D2} = v_{C2} + v_{D2C2}. \qquad (5.35)$$

Kiirusvektorit v_{C2} kujutab kiirusplaanis lõik pc_2 (joon. 228, *b*). Kiirus v_{D2C2} on risti lüli skeemil oleva lõiguga D_2C_2 ja ta suurus on

$$v_{D2C2} = |\omega_2| l_{D2C2}. \qquad (5.36)$$

6°. Translatsioonipaari moodustava lüli (joon. 229, *a*) kiirendusplaani koostamiseks võib kasutada seost (5.23).



Joon. 229.

Kiirendusplaani poolusest π lähtudes (joon. 229, *b*) kanname plaani punkti C_1 kiirenduse a_{C1}. Punktis c_1 liidame sellele Coriolise kiirenduse vektori a^k_{C2C1}.

Kiirenduse a^k_{C2C1} väärtuse saab määrata valemiga (5.24) juhul, kui eelnevalt on koostatud lüli kiirusplaan (joon. 228, *b*). Sihilt on a^k_{C2C1} risti kulissiga *xx* ja tema suund määratakse § 25, 2° joonisel 224 toodud reegli abil. Vektori a^k_{C2C1} lõpp-punktist k tõmbame nüüd vektori a^r_{C2C1} sihilise sirge (s. t. paralleeljoone kulissile *xx*). Seda sirget pikendame kuni lõikumiseni punktis c_2 sirgega, mis lähtub poolusest π ja on paralleelne vektoriga a_{C2}.

Ülaltoodust selgub, et kiirendusplaani $\pi c_1 k c_2$ koostamiseks piisab, kui on teada lüli *1* ühe punkti (näiteks C_1) kiirendus a_{C1} ja lülil *2* paikneva ning antud hetkel punktiga C_1 kokkulangeva punkti C_2 kiirenduse a_{C2} siht. Lisaks sellele peab olema eelnevalt koostatud lüli kiirusplaan.

Kuna lülid *1* ja *2* moodustavad translatsioonipaari, siis on nende nurkkiirendused ε_1 ja ε_2 omavahel võrdsed, s. t.

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2. \tag{5.37}$$

Lülil *2* paikneva meelevaldse punkti D kiirendust on võimalik määrata vektorvõrrandist

$$\boldsymbol{a}_{D2} = \boldsymbol{a}_{C2} + \boldsymbol{a}^n_{D2C2} + \boldsymbol{a}^t_{D2C2}. \tag{5.38}$$

Vektorit $\boldsymbol{a}_{C2}$ kujutab kiirendusplaanis lõik πc_2. Kiirenduse $\boldsymbol{a}^n_{D2C2}$ väärtuseks on

$$a^n_{D2C2} = \omega^2_2 l_{D2C2} \tag{5.39}$$

ja ta on suunatud punktist D_2 punkti C_2.

Kiirendus $\boldsymbol{a}^t_{D2C2}$ on arvutatav valemiga

$$a^t_{D2C2} = |\varepsilon_2|\, l_{D2C2} \tag{5.40}$$

ja ta on risti lõiguga D_2C_2.

Olgu tähendatud, et punkti D kiirust ja kiirendust võib leida ka seostest

$$\boldsymbol{v}_{D2} = \boldsymbol{v}_{D1} + \boldsymbol{v}_{D2D1} \tag{5.41}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_{D2} = \boldsymbol{a}_{D1} + \boldsymbol{a}^k_{D2D1} + \boldsymbol{a}^r_{D2D1}, \tag{5.42}$$

kus $\boldsymbol{v}_{D1}$ ja $\boldsymbol{a}_{D1}$ tähistavad vastavalt kiirust ja kiirendust, millega liigub lüli *1* säärane punkt D_1, mis antud hetkel ühtib lülil *2* asuva punktiga D_2. Kuna lüli *2* nurkkiiruseks on ω_2 ja kuna lüli *2* relatiivses liikumises lüli *1* suhtes on kõikide punktide kiirused ja kiirendused omavahel võrdsed, s. t.

$$\boldsymbol{v}_{D2D1} = \boldsymbol{v}_{C2C1}, \tag{5.43}$$

siis

$$\left.\begin{aligned} a^k_{D2D1} &= 2|\omega_2|v_{D2D1} = 2|\omega_2|v_{C2C1} = a^k_{C2C1} \\ \text{ja} \qquad & \\ \boldsymbol{a}^r_{D2D1} &= \boldsymbol{a}^r_{C2C1}. \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

Seega võib võrrandid (5.41) ja (5.42) esitada järgmisel kujul:

$$\boldsymbol{v}_{D2} = \boldsymbol{v}_{D1} + \boldsymbol{v}_{C2C1} \tag{5.45}$$

ja

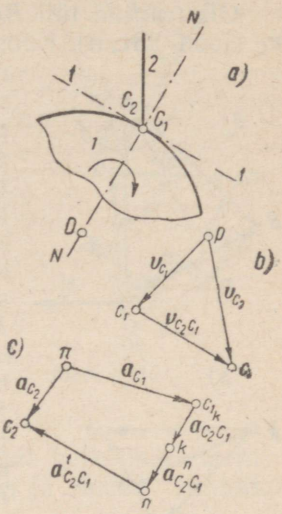
$$\boldsymbol{a}_{D2} = \boldsymbol{a}_{D1} + \boldsymbol{a}^k_{C2C1} + \boldsymbol{a}^r_{C2C1}. \tag{5.46}$$

7°. Kui lülid *1* ja *2* moodustavad omavahel kõrgema kinemaa-

tilise paari (joon. 230, *a*), siis pärast kõrgema paari asendamist madalamaid paare moodustava lüliga võib kiirus- ja kiirendusplaane koostada nii nagu näidatud § 25, 5° ja 6°.

Juhul kui soovitakse plaane koostada ilma kõrgema paari eelneva taandamiseta, tuleb rakendada seoseid (5.23) ja (5.24).

Lähtudes kiirusplaani poolusest p, kanname joonisele punkti C_1 kiirusvektori $\boldsymbol{v}_{C1}$ (joon. 230, *b*). Viimase lõpp-punktist c_1 tõmbame sirge, mis on paralleelne kiirusega $\boldsymbol{v}_{C2C1}$, millega punkt C_2 liigub punkti C_1 suhtes. Kuna see kiirus on puutujasihiline, siis ristub käsitletav sirge normaaliga NN. Saadud sirget pikendame kuni lõikumiseni punktis c_2 poolusest p lähtuva teise sirgega, mis kulgeb paralleelselt punkti C_2 kiirusega $\boldsymbol{v}_{C2}$. Kolmnurk pc_1c_2 kujutabki endast lüli *2* kiirusplaani.



Joon. 230.

Lüli *2* kiirendusplaani koostamiseks kanname joonisele kõigepealt punkti C_1 kiirenduse $\boldsymbol{a}_{C1}$, lähtudes seejuures poolusest π (joon. 230, *c*). Punktis c_1 liidame sellele Coriolise kiirenduse $\boldsymbol{a}^k_{C2C1}$. Punktis k liidame Coriolise kiirendusele normaalkiirenduse $\boldsymbol{a}^n_{C2C1}$. Kiirenduste $\boldsymbol{a}^k_{C2C1}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{C2C1}$ suurused arvutatakse valemitega (5.27) ja (5.25). Kiirendus $\boldsymbol{a}^n_{C2C1}$ kulgeb piki normaali NN, suunaga punktist C punkti O. Kiirendus $\boldsymbol{a}^k_{C2C1}$ kulgeb samuti piki normaali NN. Tema suund määratakse joonisel 224 kujutatud reegliga. Nüüd tõmbame poolusest π kiirenduse $\boldsymbol{a}_{C2}$ sihilise sirge ja läbi punkti n — kiirenduse $\boldsymbol{a}^t_{C2C1}$ sihilise sirge. Viimane on paralleelne puutujaga t—t. Nende sirgete lõikumine määrab ära punkti c_2. Saadud kujund $\pi c_1 n k c_2$ ongi lüli *2* kiirendusplaan.

Lüli *2* mis tahes teise punkti kiiruse ja kiirenduse määramine toimub analoogiliselt varemkäsitletud juhtudega.

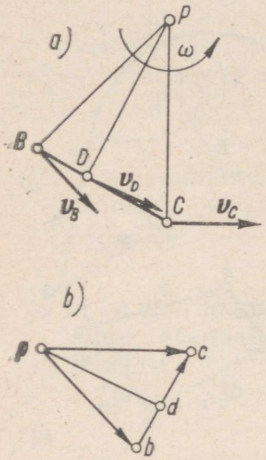
§ 26. Hetkeline kiirenduste tsenter. Käänuringjoon

1°. Mehhanismi lülide hetkeliste kiiruste tsentrite määramist käsitlesime § 23. Nagu selgus, teeb paljulüliliste mehhanismide puhul olukorra komplitseerituks asjaolu, et mehhanismi mõne vahepealse lüli hetkelise kiiruste tsentri leidmiseks tuleb tavaliselt määrata ka kõikide teiste lülide hetkelised kiiruste tsentrid. Mõningatel juhtudel on lüli hetkelist kiiruste tsentrit seetõttu otstarbekam määrata tema kiirusplaani abil, kui see on koostatud.

Hetkelise kiiruste tsentri leidmiseks võib kasutada asjaolu, et

antud hetkel lüli hetkelise kiiruste tsentriga kokkulangeva punkti kiirus peab võrduma nulliga. Lüli hetkelise kiiruste tsentri leidmine taandub seega lüli säärase punkti määramiseks, mille kiirus kas absoluutses või suhtelises liikumises (sõltuvalt esitatud ülesandest) oleks antud momendil null.

Olgu antud lüli BC ja selle punktide B ning C kiirused v_B ja v_C (joon. 231, *a*). Koostame lüli kiirusplaani (joon. 231, *b*) ja määrame lülil punkti, mille kiirus antud hetkel võrdub nulliga. Kiirusplaanis kujutab säärase punkti kiirust vektor, mille pikkuseks on null, s. t. vektor, mis ühtib kiirusplaani poolusega *p*. Nagu ülal näidatud, on lüli punktide suhtelistest kiirustest kiirusplaanis moodustatud kujund samadest punktidest lülil moodustatud kujundiga geomeetriliselt sarnane ja viimase suhtes 90° võrra pööratud. Järelikult on lülil BC lihtne leida niisugust punkti P, mille kiirusvektor ühtiks kiirusplaanis punktiga *p*. Selleks tuleb konstrueerida lülile BC kolmnurk BCP (joon. 231, *a*), mis oleks sarnane kiirusplaani kolmnurgaga *bcp* (joon. 231, *b*). Tõmbame punktist B sirge, mis on risti kiirusplaani lõiguga *bp* ja punktist C sirge, mis ristub kiirusplaani lõiguga *cp*. Nende sirgete lõikumine määrabki punkti P, mille kiirus antud hetkel võrdub nulliga, s. t. $v_P = 0$.



Joon. 231.

Kuna saadud punkt P ühtib lüli BC hetkelise kiiruste tsentriga, siis võib selle lüli kõikide ülejäänud punktide kiirusi määrata järgmiselt. Kiiruste v_B ja v_C väärtuseks on

$$v_B = |\omega| l_{PB} \quad \text{ja} \quad v_C = |\omega| l_{PC},$$

kus ω tähistab hetkelist nurkkiirust. Kiiruste sihid ristuvad seejuures vastavalt joonlõikudega BP ja CP (joon. 231, *a*). Lülil meelevaldselt valitud punkti D kiiruse väärtust saab määrata valemiga

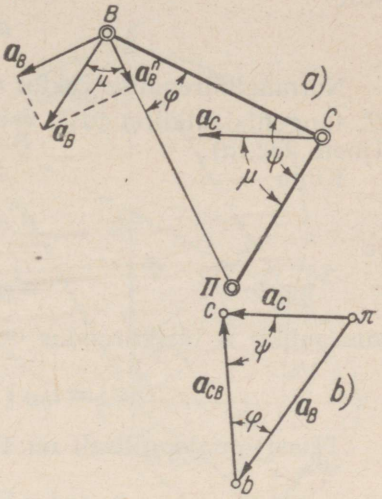
$$v_D = |\omega| l_{PD},$$

kusjuures tema siht ristub lõiguga PD.

2°. Analoogiliselt hetkelise kiiruste tsentri määramisega võib lülil leida punkti, mille absoluutne kiirendus on antud hetkel null. Säärast punkti nimetatakse *hetkeliseks kiirenduste tsentriks*. Hetkelise kiirenduste tsentri asukohta saab alati määrata, kui lüli kiirendusplaan on teada. Olgu näiteks antud lüli BC (joon. 232, *a*) ja tema kiirendusplaan πbc (joon. 232, *b*). Kiirendusplaani omadustest järeldub, et lüli punktile Π, mille kiirendus võrdub nulliga, vastab kiirendusplaanil punkt, mille kaugus poolusest π on null,

s. t. kiirendusplaani poolus π ise. Järelikult, et leida lülil BC punkti, millel puudub kiirendus, tuleb lüli skeemil konstrueerida kujund $BC\Pi$, mis on geomeetriliselt sarnane kiirendusplaanis esineva kujundiga $bc\pi$. Nii leitud punkt Π (joon. 232, *a*) ongi lüli hetkeliseks kiirenduste tsentriks, kuna kolmnurkade $BC\Pi$ ja $bc\pi$ geomeetrilisest sarnasusest tingituna peab punkti Π kiirendus olema null, s. t.

$$a_\Pi = 0.$$



Joon. 232.

Geomeetriliselt sarnast kujundit $BC\Pi$ on võimalik konstrueerida, kasutades kiirendusplaanis esinevaid nurki φ ja ψ (joon. 232, *b*). Punktis B konstrueerime nurga φ ja punktis C — nurga ψ. Sirgete $B\Pi$ ja $C\Pi$ lõikepunkt Π ongi otsitud kiirenduste hetkeliseks tsentriks. Liikudes piki kontuure $BC\Pi$ ja $bc\pi$ ühes ja samas suunas, peab tähtede järjestus olema ühesugune.

Nagu ülal näidatud (§ 25, 4°), on relatiivse kiirenduse vektor $\boldsymbol{a}_{CB}$ nurga μ võrra lüli BC suhtes pööratud. Nurk μ määrati seejuures valemiga

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \qquad (5.47)$$

kus ε tähistas lüli BC nurkkiirendust ja ω — tema nurkkiirust. Kolmnurga $bc\pi$ külg bc moodustab seega küljega BC nurga μ. Kolmnurkade $bc\pi$ ja $BC\Pi$ geomeetrilise sarnasuse tõttu tekib külgede πb ja ΠB ning πc ja ΠC vahel samuti nurk μ. Vektor $\boldsymbol{a}_B$ moodustab seega nurga μ küljega $B\Pi$ ja vektor $\boldsymbol{a}_C$ — küljega $C\Pi$. Lüli kõikide teiste punktide absoluutsete kiirenduste vektorid asuvad vastavaid punkte hetkelise tsentriga Π ühendavate raadiusvektorite suhtes sama nurga all.

Lüli mis tahes punkti kiirendust saab alati väljendada kui punktiga Π koos kulgeva translatoorse kaasaliikumise kiirenduse ja sama punkti ümber toimuva relatiivse liikumise kiirenduse summat. Näiteks punkti B kiirendusvektorit $\boldsymbol{a}_B$ võib käsitleda alljärgneva geomeetrilise summana:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_\Pi + \boldsymbol{a}^n_{B\Pi} + \boldsymbol{a}^t_{B\Pi} = \boldsymbol{a}^n_{B\Pi} + \boldsymbol{a}^t_{B\Pi},$$

sest

$$a_{\Pi} = 0.$$

Normaalkiirenduse vektor $a^n_{B\Pi}$ on suunatud punktist B punkti Π, tangentsiaalkiirenduse vektor $a^t_{B\Pi}$ aga ristub lõiguga $B\Pi$ (joon. 232, *a*).

Kuna

$$a^n_{B\Pi} = \omega^2 l_{B\Pi}$$

ja

$$a^t_{B\Pi} = |\varepsilon| l_{B\Pi},$$

siis punkti B täiskiirendus on

$$a_B = l_{B\Pi}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = K l_{B\Pi}. \tag{5.48}$$

Täiesti analoogiliselt on antud ka punkti C täiskiirendus:

$$a_C = l_{C\Pi}\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} = K l_{C\Pi}, \tag{5.49}$$

kus

$$K = \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Lüli kõikide punktide täiskiirendused on seega võrdelised nende punktide kaugusega hetkelisest kiirenduste tsentrist.

Tsentriga Π ühtiva lüli punkti liikumist võib täpsusega kuni kolmandat järku lõpmatult kahanevate suurusteni käsitleda kui ühtlast ja sirgjoonelist, kuna selle kiirendus on null.

3°. Asugu lüli antud asendile vastav hetkeline kiiruste tsenter punktis P (joon. 233) ja tema hetkeline kiirenduste tsenter punktis Π. Ühendame punktid P ja Π sirgega ja konstrueerime punktis P seosega (5.47) määratud nurga μ, silmas pidades nurkkiirenduse ε etteantud suunda. Edasi tõmbame läbi punkti Π ristsirge lõigule $P\Pi$ ja pikendame seda kuni lõikumiseni punktis K sirgega, mis lähtub punktist P nurga μ all. Joonlõik PK osutub punkte P, Π ja K läbiva ringjoone diameetriks. Olgu O selle ringjoone tsenter ja d tema diameetri pikkus. Uurime nüüd saadud ringjoonel meelevaldselt valitud punkti M kiirust v_M ja kiirendust a_M. Kiiruse v_M suuruseks on

$$v_M = |\omega| l_{PM} \tag{5.50}$$

ja ta kulgeb piki sirget, mis läbib punkti K.

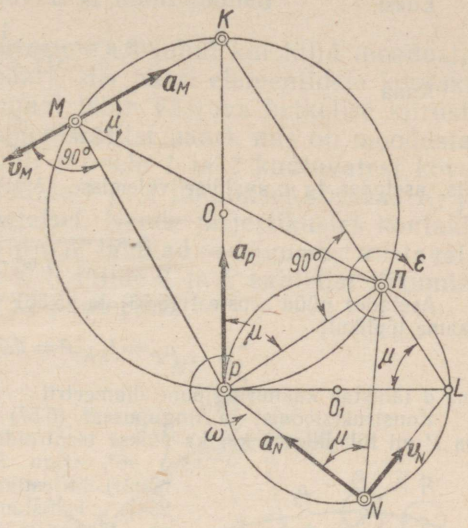
Punkti M kiirendus a_M peab sihiga $M\Pi$ moodustama nurga μ. Jooniselt selgub, et ka vektor a_M asub sirgel, mis läbib punkti K. Tähendab, punkti M täiskiirenduse a_M suund kas ühtib sama punkti kiiruse v_M suunaga, või on siis vastupidine. Punkti M täiskiirendus a_M osutub seega tangentsiaalkiirenduseks. Kuna punkt M oli ringjoonel valitud meelevaldselt, siis tuleb järeldada, et lüli kõikidel punktidel, mis asuvad käsitletaval ringjoonel, on ainult tangentsiaalkiirendus.

Lüli punkt, millel on ainult tangentsiaalkiirendus, liigub kas sirgjooneliselt

või läbib oma trajektoori käänupunkti. See ongi põhjuseks, miks ringjoont diameetriga PK nimetatakse *käänuringjooneks*. Käänuringjoone punkti K nimetatakse *käänupooluseks*. Joonisel 233 toodud konstruktsioonist selgub, et kõikide käänuringjoonel paiknevate punktide kiirusvektorid on suunatud käänupoolusesse.

4°. Pikendame sirget $K\Pi$, kuni see punktis L lõikub käänuringjoone diameetrile punktist P tõmmatud ristsirgega. Tekkinud joonlõiku PL diameetriks võttes konstrueerime ringjoone tsentriga O_1. Lihtne on näha, et nurk ΠLP võrdub nurgaga μ.

Uurime nüüd äsjakonstrueeritud ringjoonel meelevaldselt valitud punkti N kiirust v_N ja kiirendust a_N. Kiiruse v_N suurus arvutatakse valemiga



Joon. 233.

$$v_N = |\omega| l_{PN} \tag{5.51}$$

ja ta kulgeb piki punkti L läbivat sirget.

Punkti N kiirendus a_N moodustab sihiga $N\Pi$ nurga μ. Konstruktsioonist selgub (joon. 233), et vektor a_N asub sirgel, mis läbib punkti P. Punkti N täiskiirendus a_N ristub seega tema kiirusega v_N, osutudes järelikult normaalkiirenduseks.

Kuna punkt N valiti ringjoonel tsentriga O_1 meelevaldselt, siis tuleb järeldada, et kõikidel nimetatud ringjoonel asuvatel lüli punktidel on ainult normaalkiirendus. Käsitletavat ringjoont nimetatakse *muuteringjooneks*.

Kõikide muuteringjoonel asuvate lüli punktide kiirusvektorite pikendused läbivad ilmselt punkti L. Kuna käsitletud punktidel puudub tangentsiaalkiirendus, siis peab nende kiirustel olema antud asendis kas maksimum- või miinimumväärtus.

5°. Jooniselt 233 selgub, et käänuringjoon ja muuteringjoon lõikuvad punktides P ja Π. Lüli selle punkti kiirendus, mis antud hetkel asub hetkelises kiirenduste tsentris Π, võrdub nulliga. Tema kiiruseks v_Π on aga võrrandi (5.51) põhjal:

$$v_\Pi = |\omega| l_{P\Pi}.$$

Antud hetkel hetkelises kiiruste tsentris P paikneva punkti kiirus v_P on null. Tema kiirenduse a_P suurus on seejuures antud avaldisega

$$a_P = l_{P\Pi} \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{5.52}$$

Jooniselt 233 võime kirjutada:

$$l_{P\Pi} = l_{PK} \cos \mu. \tag{5.53}$$

Edasi,

$$\cos\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}}. \tag{5.54}$$

Kuna

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}, \tag{5.55}$$

siis, asetades $\operatorname{tg}\mu$ avaldise valemisse (5.54), saame:

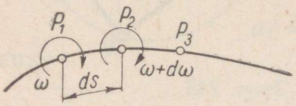
$$\cos\mu = \frac{\omega^2}{\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}}. \tag{5.56}$$

Asetades nüüd seostest (5.53) ja (5.56) võetud avaldised võrdusesse (5.52), saame lõplikult

$$a_P = l_{PK}\omega^2 = d\omega^2, \tag{5.57}$$

kus d tähistab käänuringjoone diameetrit.

Konstruktsioonist ja tingimusest (5.57) selgub, et sirge PK ristub punktis P nii lüli liikuva kui ka paikse tsentroidiga.



Joon. 234.

6°. Olgu P_1, P_2, P_3 ... hetkelise kiiruste tsentri järjestikused asukohad tsentroidil T (joon. 234). Tähistame hetkelise tsentri liikumiskiiruse tähega $\boldsymbol{u}$. Antud momendil hetkelise tsentriga ühtiva lüli punkti kiiruse tähistame $\boldsymbol{v}_P$. Endastmõistetavalt $\boldsymbol{v}_P = 0$. Liikugu hetkeline tsenter P lõpmata väikese ajavahemiku dt jooksul asukohast P_1 asukohta P_2. Vastav teepikkus olgu ds. Kui pöörlemise hetkeline nurkkiirus ümber tsentri P_1 on ω, siis sama kiirus ümber tsentri P_2 olgu $\omega + d\omega$. Kiiruse $\boldsymbol{v}_P$ juurdekasvu $d\boldsymbol{v}_P$ väärtuseks kujuneb seega

$$|d\boldsymbol{v}_P| = ds\,|\omega + d\omega|, \tag{5.58}$$

või, kõrvale jättes teist järku lõpmata kahanevad suurused,

$$|d\boldsymbol{v}_P| = |\omega| ds. \tag{5.59}$$

Hetkelise kiiruste tsentri kiirendus $\boldsymbol{a}_P$ avaldub seose (5.57) põhjal järgmiselt:

$$a_P = \frac{|d\boldsymbol{v}_P|}{dt} = \omega^2 d. \tag{5.60}$$

Asetades võrrandisse (5.60) $d\boldsymbol{v}_P$ väärtuse võrrandist (5.59) ja silmas pidades, et kiiruse $\boldsymbol{u}$ väärtus on antud seosega

$$u = \frac{ds}{dt}, \tag{5.61}$$

saame

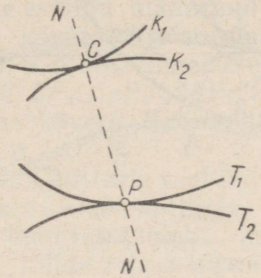
$$u = |\omega|\, d. \tag{5.62}$$

Võrranditest (5.60) ja (5.62) järgneb, et käänuringjoone läbimõõtu d saab alati arvutada suuruste ω, u *ja* a_P kaudu. Tõepoolest

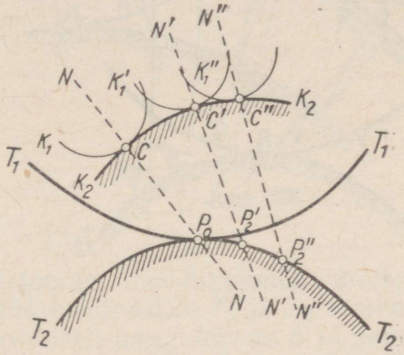
$$d = \frac{u}{|\omega|} = \frac{a_P}{\omega^2}. \tag{5.63}$$

§ 27. Mähitavad ja mähisjooned

1°. Eespool (§ 24, 4°) näitasime, et juhul kui lülid moodustavad kõrgema kinemaatilise paari, siis paari elementidele kontaktpunktis tõmmatud ühine normaal läbib vastava hetkelise kiiruste tsentri. Vaatleme kõrgemat kinemaatilist paari, mis on moodustatud kokkupuutuvatest, vastavalt lülidele *1* ja *2* kuuluvatest kõveratest K_1 ja K_2 (joon. 235). Lülide *1* ja *2* liikumisel kõverad K_1 ja K_2 veerevad ja libisevad teineteisel. Nende järjestikustes kontaktpunktides tõmmatud normaalid NN läbivad seejuures vastavaid hetkelisi kiiruste tsentreid P, s. t. lülide *1* ja *2* suhtelist liikumist määravate tsentroidide T_1 ja T_2 puutepunkte.



Joon. 235.



Joon. 236.

Uurime lüli *1* liikumist lüli *2* suhtes. Selleks muudame lüli *2* liikumatuks, s. t. paneme seisma tsentroidi T_2 koos kõveraga K_2 (joon. 236) ja jälgime lüli *1* liikumist.

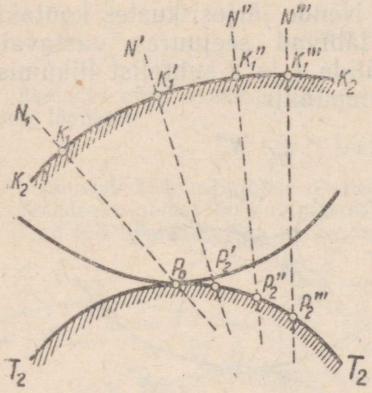
Liikuv tsentroid T_1 veereb libisemata paikseks muudetud tsentroidil T_2, kõver K_1 aga veereb ja libiseb liikumatul profiilil K_2. Olgu K_1, K_1', K_1'' jne. tema järjestikused asendid. Jooniselt 236 selgub, et kõver K_2 kujuneb seejuures kõvera K_1 järjestikuste asendite mähisjooneks. Nagu matemaatikast teada, nimetatakse kõverat K_1 antud juhul *mähitavaks* ja kõverat K_2 — *mähkijaks* (mähisjooneks, mähiskõveraks). Juhul kui me oleksime liikumise reverseerinud, s. t. vaadelnud lüli *2* liikumist lüli *1* suhtes, oleks mähitavaks kujunenud kõver K_2 ja mähkijaks kõver K_1. Sellest võib järeldada, et kõrgema paari elemendid kujutavad endast *kaasmähisjooni*.

Käsitletust selgub veel, et juhul kui kahe lüli suhteline liikumine on antud nende tsentroidide veeremise kaudu ja teada on ühele lülile kuuluv kõrgema paari element, siis teisele lülile kuu-

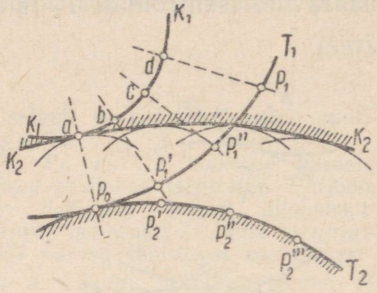
luvat kaaselementi saab alati leida kui esimese lüli elemendi järjestikuste asendite mähisjoont.

Erijuhul võib üks elementidest, näiteks K_1, olla punktikujuline (joon. 237). Sel puhul saab mähisjoont K_2 määrata kui punkti K_1 trajektoori lüli *1* relatiivses liikumises lüli *2* suhtes.

Trajektoore, mida kujundavad lüli punktid sel ajal, kui üks tsentroididest veereb teisel, nimetatakse *rulettideks*.



Joon. 237.



Joon. 238.

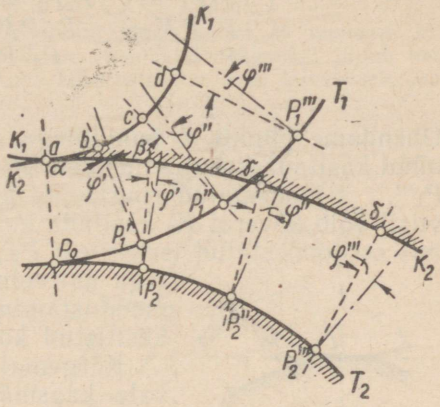
2°. Liikumise reverseerimisvõttele rajatud kaasmähisjoonte konstrueerimise meetod on küll üldine, kuid kahjuks mitte alati küllalt täpne. Põhjuseks on asjaolu, et selle meetodi juures tuleb mähitavat kõverat palju kordi eri asenditesse ümber joonestada. Mähisjoont saab täpsemalt konstrueerida alljärgneval viisil. Olgu antud lülile *1* kuuluv mähitav kõver K_1 (joon. 238). Ülesandeks on konstrueerida lülile *2* kuuluv mähisjoon K_2. Valime etteantud kõveral K_1 rida üksteisele küllalt lähedal paiknevaid punkte *a*, *b*, *c* ... Läbi valitud punktide tõmbame kõverale K normaalid, mis lõikuvad tsentroidiga T_1 punktides P_0, P_1', P_1'', P_1''', ... Seepeale kanname tsentroidile T_2 kaared $\smile P_0P_2'$, $\smile P_2'P_2''$, $\smile P_2''P_2'''$, ..., mis on vastavalt võrdsed kaartega $\smile P_0P_1'$, $\smile P_1'P_1''$, $\smile P_1''P_1'''$, ... Nagu ülal näidatud, läbib kontaktpunktis mähisjoonele ja mähitavale tõmmatud normaal vastava hetkelise kiiruste tsentri. Antud juhul kontakteeruvad tsentroidide T_1 ja T_2 veeremisel punktid P_1' ja P_2', P_1'' ja P_2'', P_1''' ja P_2''' ... Normaalid aP_0, bP_1', cP_1'', dP_1''' jne. läbivad seejuures punkte P_0, P_2', P_2'', P_2''', ...

Punktide P_0, P_2', P_2'', P_2''', ... kaugused mähisjoonest K_2 võrduvad joonlõikude aP_0, bP_1', cP_1'', dP_1''', ... pikkustega.

Lähtudes punktidest P_0, P_2', P_2'', P_2''', ... kui tsentritest tõmbame ringjooned, võttes raadiusteks vastavalt aP_0, bP_1', cP_1'',

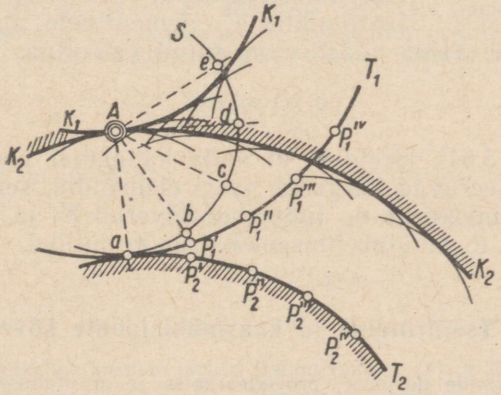
dP_1'''... Saadud ringjoonte mähkija ongi otsitav, lülile *2* kuuluv kõver K_2.

Juhul kui kõverat K_2 tuleb konstrueerida üksikute punktide kaupa, toimime järgmiselt. Tõmbame tsentroidile T_1 normaalid punktides P_1', P_1'' P_1''',... (joon. 239). Tsentroidi T_1 normaalide ja sirgete bP_1', cP_1'', dP_1'''... vahel tekkinud nurgad tähistame vastavalt φ', φ'', φ''',... Konstrueerides nüüd punktides P_2', P_2'', P_2''',... tsentroidile T_2 normaalid ja kandes neile üle nurgad φ', φ'', φ''',..., oleme esialgu määranud otsitava kõvera K_2 normaalide sihid. Kandes viimastele pikkused bP_1', cP_1'', dP_1''',..., saame kõvera K_2 punktid α, β, γ, δ,...



Joon. 239.

3°. Käsitleme veel üht kõrgemate kinemaatiliste paaride teoorias tähtsat kaasmähisjoonte moodustamise meetodit. Olgu lülide *1* ja *2* liikumine antud tsentroidide T_1 ja T_2 veeremise kaudu (joon. 240). Valime meelevaldselt mingi kõvera S ja paneme ta kordamööda ilma libisemata veerema mõlemal tsentroidil T_1 ja



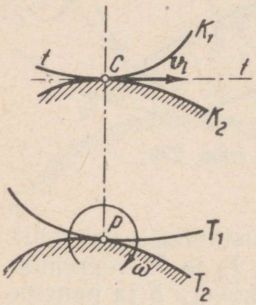
Joon. 240.

T_2. Kõveraga S jäigalt seotud punkt A kujundab seejuures trajektoorid K_1 ja K_2. Viimased osutuvad kaasmähisjoonteks, sest neid võib käsitada kui kahe ringjoonte parve mähkijaid. Tõepoolest, fik-

seerime kõveral S üksteisele küllalt lähedal paiknevad punktid a, b, c, d, ... ja kanname tsentroididele T_1 ja T_2 kaared, mis on vastavalt võrdsed kaartega $\smile ab$, $\smile bc$, $\smile cd$, s. t.

$$\smile P_0P_1' = \smile P_0P_2' = \smile ab,$$
$$\smile P_1'P_1'' = \smile P_2'P_2'' = \smile bc,$$
$$\smile P_1''P_1''' = \smile P_2''P_2''' = \smile cd,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ühendame punkti A punktidega a, b, c, d, ... Kõverat K_1 võib nüüd käsitada kui raadiustega Ab, Ac, Ad, ... tsentritest P_1', P_1'', P_1''', ... joonestatud ringjoonte parve mähisjoont. Täpselt samal viisil võib kõverat K_2 käsitada kui mähisjoont ringjoonte parvele, mis on joonestatud tsentritest P_2', P_2'', P_2''', ... samade raadiustega kui eelmine parvgi. Kõverate K_1 ja K_2 moodustamine on seega taandatud § 27, 2° käsitletud konstruktsioonile.



Joon. 241.

Kõrgemate paaride elemente moodustavate kaasmähisjoonte konstrueerimise ülalkäsitletud meetoditel on oluline tähtsus nukk- ja hammasmehhanismide projekteerimisel.

Paragrahvi kokkuvõtteks märgime, et paarielemendid K_1 ja K_2 (joon. 241) hakkavad teineteise suhtes veerema nurkkiirusega, mis võrdub hetkelise nurkkiirusega ω ümber kiiruste tsentri. Mis puutub nende elementide libisemiskiirust v_l, siis on see alati kontaktpunktis C elementidele tõmmatud puutuja tt sihiline. Tema väärtus on antud valemiga

$$v_l = |\omega|\, l_{PC}. \qquad (5.64)$$

Valemist (5.64) järeldub, et mida kaugemal vastavast tsentrist P kontakteeruvad kõrgema paari elemendid, seda suuremaks kujuneb libisemiskiirus v_l. Juhul kui kõverad K_1 ja K_2 kontakteeruvad punktis P, muutub libisemiskiirus v_l nulliks.

§ 28. Tsentroidide ja kaasmähisjoonte kõverusest

1°. Mehhanismide uurimise, projekteerimise ja arvutamisega seotud ülesannete lahendamisel on sageli tähtis määrata kõrgemate paaride elementide kui ka mehhanismi punktide poolt kujundatud trajektooride kõverusi.

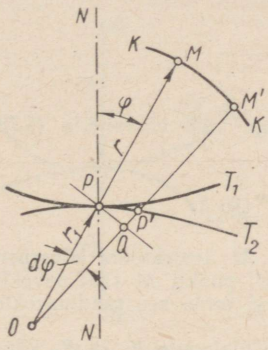
Alustame järgneva ülesandega.

Leida kõverusraadius trajektooril (ruletil) K, mida kujundab tsentroidiga T_1 jäigalt seotud punkt M juhul, kui tsentroid T_1 veereb kaastsentroidil T_2 (joon. 242). Tõmbame tsentroididele T_1 ja T_2 läbi punkti P normaali NN. Punkti M trajektoori kõverustsenter peab asuma sirgel, mis ühendab punkte M ja P,

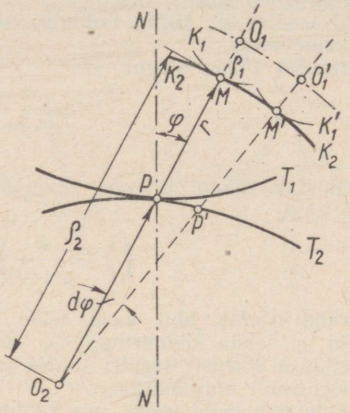
s. t. punktis M tõmmatud normaalil OM. Viimase poolt normaaliga NN moodustatud nurga tähistame tähega φ. Edasi olgu O trajektoori K otsitav kõverustsenter. Tähistame $PM = r$ ja $OP = r_1$. Kõverusraadius ϱ punktis M on sel juhul antud avaldisega

$$\varrho = r + r_1. \tag{5.65}$$

Lõpmata lühikese ajavahemiku dt jooksul jõuab punkt M asukohta M', kujundades ümber tsentri P ringjoone kaare. Samal ajavahemikul liigub hetkeline kiiruste tsenter asendisse P'. Kuna kõverustsenter asub teineteisele lõp-



Joon. 242.



Joon. 243.

mata lähedal paiknevate kõvera normaalide lõikepunktis, siis on ilmne, et normaal OM' peab läbima tsentri P'. Tõmbame nüüd läbi punkti P sirgjoonega OM' ristuva sirge PQ. Silmas pidades, et sirgete OM ja OM' vahel olev nurk $d\varphi$ on lõpmata väikene, võime joonise 242 põhjal kirjutada:

$$\frac{MM}{PQ} = \frac{r + r_1}{r_1}. \tag{5.66}$$

Teiselt poolt on ilmne, et

$$MM' = |\omega| r\, dt \tag{5.67}$$

ja

$$PQ = PP' \cos\varphi. \tag{5.68}$$

Kuna aga

$$PP' = u\, dt,$$

kus u tähistab hetkelise kiiruste tsentri liikumiskiirust (vt. § 26, 6°), siis

$$PQ = u \cos\varphi\, dt. \tag{5.69}$$

Asetades võrdustes (5.67) ja (5.69) avaldatud suurused võrdesse (5.66), saame:

$$\frac{|\omega| r\, dt}{u \cos\varphi\, dt} = \frac{r + r_1}{r_1} = \frac{\varrho}{r_1}. \tag{5.70}$$

Edasine teisendamine annab:

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r_1}\right)\cos\varphi=\frac{|\omega|}{u} \tag{5.71}$$

ehk

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho-r}\right)\cos\varphi=\frac{|\omega|}{u}. \tag{5.72}$$

Ülal käsitleti juhtu, kus punkt M ja kõverustsenter O paiknesid teine teisel pool hetkelist kiiruste tsentrit P. Juhul kui nimetatud punktid paiknevad ühel pool tsentrit P, kujunevad võrrandis (5.71) suuruste r ja r_1 ees olevad märgid erinevateks.

Võrrandist (5.62) selgub, et

$$\frac{|\omega|}{u}=\frac{1}{d}, \tag{5.73}$$

kus d tähistab käänuringjoone läbimõõtu. Seega võib võrrandile (5.72) anda järgmise kuju:

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho-r}\right)\cos\varphi=\frac{1}{d}. \tag{5.74}$$

Võrrandi (5.74) abil saab leida punkti M trajektoori kõverusraadiuse juhul, kui on teada käänuringjoone läbimõõt d, punkti M raadiusvektori pikkus r hetkelise kiiruste tsentri suhtes ja nurk φ, mida see raadiusvektor moodustab tsentroidi normaaliga.

2°. Tuletame nüüd seose, mis kehtib kaasmähisjoonte K_1 ja K_2 kõverusraadiuste ϱ_1 ja ϱ_2 vahel (joon. 243). Olgu nimetatud mähisjoonte kõverustsentrid vastavalt punktides O_1 ja O_2. Punkt O_1 kujundab oma liikumisel trajektoori O_1O_1', mida võib käsitada ruletina. Kuna sirged PM ja $P'M'$ on üheaegselt normaalideks nii kõveratele K_1 ja K_2 (punktides M ja M') kui ka punkti O_1 trajektoorile O_1O_1', siis ruleti O_1O_1' kõverustsenter asub punktis O_2. Viimase asukoha määramiseks kasutame võrrandeid (5.71) ja (5.73). Saame:

$$\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p_1}\right)\cos\varphi=\frac{|\omega|}{u}=\frac{1}{d}, \tag{5.75}$$

kus $p=PO_1$ ja $p_1=O_2P$.

Kui tähistada punkti M kaugust tsentrist P tähega r (joon. 243), siis saame:

$$p=\varrho_1+r \quad \text{ja} \quad p_1=\varrho_2-r.$$

Võrrandi (5.75) saab nüüd kirjutada järgmiselt:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1+r}+\frac{1}{\varrho_2-r}\right)\cos\varphi=\frac{|\omega|}{u}=\frac{1}{d}. \tag{5.76}$$

Kaastsentroide T_1 ja T_2 (joon. 244) võib käsitada kui kaasmähisjoonte K_1 ja K_2 erijuhtu, mil nurk φ ja kaugus r võrduvad nulliga. Tähistades nimetatud tsentroidide kõverusraadiused tähtedega R_1 ja R_2 ja rakendades nende puhul võrrandit (5.76), saame:

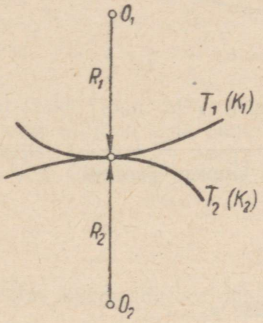
$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{|\omega|}{u}=\frac{1}{d}. \tag{5.77}$$

Võrrand (5.77) ongi otsitud seoseks tsentroidide kõverusraadiuste R_1 ja R_2, nurkkiiruse ω, hetkelise kiiruste tsentri kiiruse u ja käänuringjoone läbimõõdu d vahel.

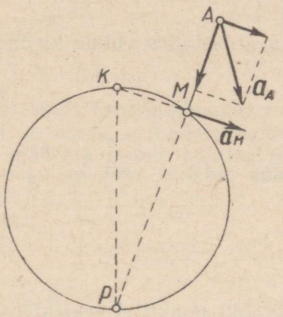
Kõrvutades võrrandeid (5.77) ja (5.76), võime kirjutada:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1 + r} + \frac{1}{\varrho_2 - r}\right)\cos\varphi = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \tag{5.78}$$

Selle võrrandi, mis seostab kaasmähisjoonte ja tsentroidide kõverusraadiused, tuletas esimesena vene akadeemik L. Euler 1765. aastal. Võrrandit laiendas hiljem Savary. Seetõttu nimetatakse võrrandit (5.78) *Euler-Savary võrrandiks.*



Joon. 244.



Joon. 245.

3°. Kui on konstrueeritud käänuringjoon läbimõõduga $PK = d$ (joon. 245), saab määrata liikuva lüli iga punkti trajektoori kõverustsentri. Olgu näiteks ülesandeks leida punkti A antud asukohale vastav trajektoori kõverusraadius ϱ. Ühendame punkti A hetkelise kiiruste tsentriga P. Olgu M sirge PA ja käänuringjoone lõikepunktiks. Punkti A kiirendust $\boldsymbol{a}_A$ võib alati väljendada järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_M + \boldsymbol{a}^t_{AM} + \boldsymbol{a}^n_{AM}. \tag{5.79}$$

Kuna punkt M asub käänuringjoonel, siis on tal ainult tangentsiaalkiirendus $\boldsymbol{a}^t_M$. Järelikult

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^t_M + \boldsymbol{a}^t_{AM} + \boldsymbol{a}^n_{AM}. \tag{5.80}$$

Paralleelsete vektorite $\boldsymbol{a}^t_M$ ja $\boldsymbol{a}^t_{AM}$ summa moodustab ilmselt punkti A tangentsiaalkiirenduse $\boldsymbol{a}^t_A$. Seetõttu võib võrduse (5.80) kirjutada järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^t_A + \boldsymbol{a}^n_{AM}.$$

Punkti A kiirendust $\boldsymbol{a}_A$ saab ka teisiti väljendada:

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}^t_A + \boldsymbol{a}^n_A.$$

Võrrutades $\boldsymbol{a}_A$ mõlemaid avaldisi, saame:

$$\boldsymbol{a}^t_A + \boldsymbol{a}^n_{AM} = \boldsymbol{a}^t_A + \boldsymbol{a}^n_A. \tag{5.81}$$

Võrrandist (5.81) selgub, et normaalkiirendused a^n_A ja a^n_{AM} on omavahel võrdsed. Edasi on teada, et

$$a^n_A = \frac{v^2_A}{\varrho},$$

kus v_A tähistab punkti A kiirust ja ϱ — sama punkti trajektoori kõverusraadiust. Teiselt poolt

$$a^n_{AM} = \omega^2 l_{MA},$$

kus ω tähistab lüli hetkelist nurkkiirust ja l_{MA} — kaugust punktist M kuni punktini A.

Seda arvestades võime kirjutada:

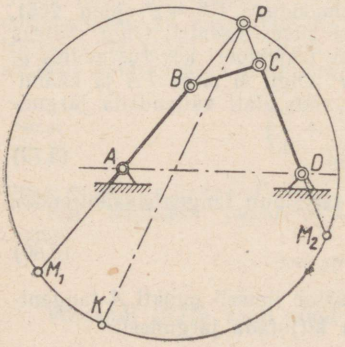
$$\frac{v^2_A}{\varrho} = \omega^2 l_{MA}. \tag{5.82}$$

Silmas pidades veel, et $v_A = |\omega| l_{PA}$, saame lõpuks võrrandi

$$\varrho = \frac{l^2_{PA}}{l_{MA}}, \tag{5.83}$$

mis määrabki punkti A trajektoori kõverusraadiuse ϱ.

4°. Võrrand (5.83) annab võimaluse käänuringjoone konstrueerimiseks, juhul kui on teada lüli kahe meelevaldse punkti trajektooride kõverusraadiused.



Joon. 246.

Käsitleme näiteks järgnevat ülesannet. Konstrueerida šarniir-nelilüliku $ABCD$ kepsu BC jaoks käänuringjoon (joon. 246). Määrame kõigepealt hetkelise kiiruste tsentri P asukoha. Edasi, kuna punkti B trajektoori kõverusraadiuseks on AB ja punkti C trajektoori kõverusraadiuseks CD, võime võrrandi (5.83) alusel kirjutada

$$(AB) = \frac{(AP)^2}{(PM_1)}$$

ja

$$(DC) = \frac{(DP)^2}{(PM_2)}.$$

Sellest järgneb, et

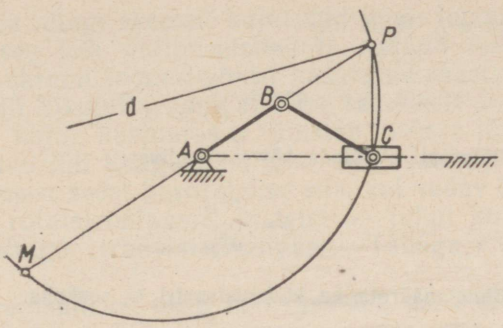
$$(PM_1) = \frac{(AP)^2}{(AB)} \tag{5.84}$$

ja

$$(PM_2) = \frac{(DP)^2}{(DC)}. \tag{5.85}$$

Võrrandite (5.84) ja (5.85) abil leitakse punktide M_1 ja M_2 asukohad. Otsitav käänuringjoon läbib punktid M_1, M_2 ja P.

Järgmise ülesandena käsitleme käänuringjoone konstrueerimist väntmeh-

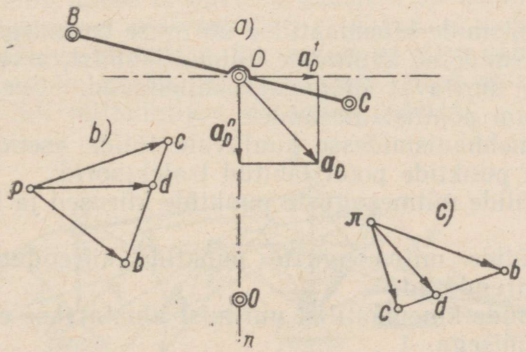


Joon. 247.

hanismi jaoks (joon. 247). Kuna punktil C on ainult tangentsiaalkiirendus, siis peab käänuringjoon seda punkti läbima. Edasi on teada, et käänuringjoon läbib ka hetkelist tsentrit P. Seega jääb meil üle määrata ainult kolmas punkt M, milleks võib kasutada võrrandit

$$(PM) = \frac{(AP)^2}{(AB)}.$$

Otsitav käänuringjoon läbib punkte M, P ja C.



Joon. 248.

5°. Paragrahvi lõpetamiseks näitame, kuidas leida lülil BC võetud meelevaldse punkti D kõveruststsentrit ϱ (joon. 248, *a*), juhul kui on konstrueeritud kiirusplaan (joon. 248, *b*) ja kiirendusplaan (joon. 248, *c*). Kõveruststsenter asub sirgel Dn, mis läbides punkti D ristub kiirusega v_D (joon. 248, *a*). Nimetatud sirge on seega risti kiirusplaani lõiguga (pd) (joon. 248, *b*). Punkti D täiskiirenduse vektor a_D on kujutatud kiirendusplaanis lõigu (πd) näol (joon. 248, *c*). Lahutame vektori a_D komponentideks. Üks komponentidest olgu sihiga Dn paralleelne ja teine sellega risti. Dn-sihiline komponent kujutab endast punkti D

normaalkiirendust a^n_D. Kuna aga

$$a^n_D = \frac{v^2_D}{\varrho}, \tag{5.86}$$

siis saame siit hõlpsasti avaldada kõverusraadiuse:

$$\varrho = \frac{v^2_D}{a^n_D}. \tag{5.87}$$

Arvutanud ϱ, võime määrata ka kõverustsentri O asukoha.

VI peatükk

MADALAMATE PAARIDEGA TASAPINNALISTE MEHHANISMIDE KINEMAATILINE UURIMINE PLAANIDE MEETODIL

§ 29. Gruppe moodustavate lülide asendid ja mehhanismi lülidele kuuluvate punktide trajektoorid

1°. Mehhanismide kinemaatilise uurimise eesmärgiks on selgitada mehhanismidesse kuuluvate lülide liikumist, arvesse võtmata jõudusid, mis uuritavat liikumist põhjustavad. Seejuures tuleb lahendada kolm põhilist ülesannet:

a) leida mehhanismidesse kuuluvate lülide asendid ja lülide mitmesuguste punktide poolt läbitud trajektoorid;

b) leida lülide mitmesuguste punktide kiirused ja lülide eneste nurkkiirused;

c) leida lülide mitmesuguste punktide kiirendused ja lülide eneste nurkkiirendused.

Mehhanismide kinemaatilist uurimist alustatakse esimese ülesande lahendamisega.

Mehhanismi lülide asendeid saab määrata, kui on antud mehhanismi skeem ja kui on teada vedava lüli liikumisseadus (ühe liikuvusastmega mehhanismide puhul). Juhul kui mehhanismil on liikuvusastmeid rohkem kui üks, peab teadma tema kõikide vedavate lülide liikumisseadusi.

Kuna mehhanismidesse kuuluvate lülide asendid määratakse tavaliselt graafiliste meetoditega, tuleb mehhanismi kinemaatiline skeem joonestada graafilisteks arvutusteks sobivas mastaabis. Tähistame leppeliselt mehhanismi skeemi mastaabi tähisega μ_l. Viimane näitab reaalsel mehhanismil mõõdetud meetrite arvu, mis vastab skeemi ühele millimeetrile, s. t. 1 mm $\rightarrow \mu_l$ m. Seega, juhul

kui tuleb leida mingi skeemil kujutatud lõigu loomulikku pikkust, mõõdetakse see lõik millimeetrites ja saadud millimeetrite arv korrutatakse skeemi joonestamisel kasutatud mastaabiga μ_l.

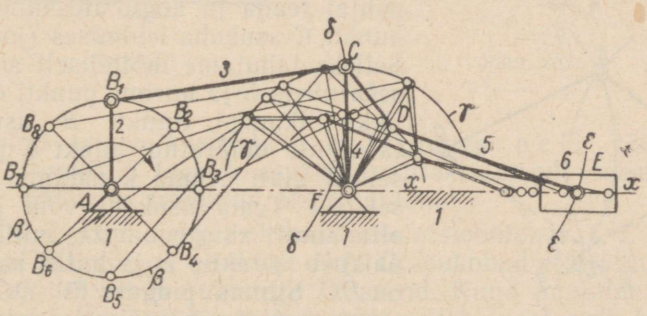
Vedava lüli liikumisseadus antakse tavaliselt seoste $\varphi = \varphi\ (t)$ või $S = S(t)$ kujul, kusjuures φ tähistab vedava lüli pöördenurka ja S — vedava lüli kaugust mingist meelevaldselt valitud lähteasendist. Esimest seost kasutatakse siis, kui vedav lüli moodustab kinnislüliga rotatsioonipaari, ja teist — juhul kui vedavat lüli seob kinnislüliga translatsioonipaar. Tähega t on tähistatud aega.

Kui mehhanismil on mitu liikuvusastet, peab ülaltoodud tüüpi seoste arv võrduma liikuvusastmete arvuga, ehk, mis on samaväärne, vedavate lülide arvuga.

Praktiliste inseneriarvutuste raames toimuval mehhanismide kinemaatilisel uurimisel eeldatakse tavaliselt, et vedava lüli liikumisseadus on lineaarne, s. t. et vedava lüli kiirus on püsiv.

Säärane liikumine on tavaliselt mehhanismi töötingimuste poolt ette kirjutatud ja see leiab suuremate või väiksemate kõrvalekaldumistega praktikas ka aset.

On täiesti mõistetav, et nii mehhanismi lülide asendid kui ka nende mitmesuguste punktide trajektoorid, s. t. mehhanismi järkjärgulised konfiguratsioonid, sõltuvad ainuüksi mehhanismi struktuurist ja tema lülide mõõdetest. Seetõttu on mehhanismide kinemaatilisel uurimisel edaspidi alati eeldatud, et mehhanismi vedav lüli liigub püsiva kiirusega. See muide ei piira vähemalgi määral esitatavate uurimismeetodite kasutusala. Need meetodid kehtivad ka vedava lüli mitteühtlase liikumise puhul.



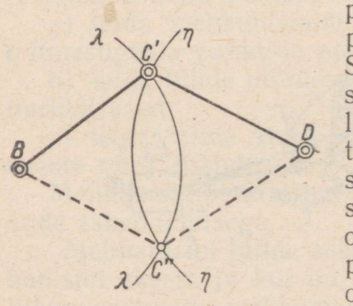
Joon. 249.

2°. Oluline on silmas pidada, et mehhanismi lülide asendite määramise ülesannet lahendatakse ainult teatavas kindlaksmääratud järjestuses. Näiteks joonisel 249 kujutatud kuuelülilise mehhanismi lülide asendid määratakse järgmiselt (vedavaks lüliks olgu lüli 2). Kanname kõigepealt joonisele kinnispunktid A ja F

ning liikumatu telje (juhtjoone) xx (joon. 249). Edasi joonestame ringjoone β, mille raadius võrdub lüli AB pikkusega. See ringjoon moodustab punktide B geomeetrilise koha. Märgime ringjoonel β ära punktid B_1, B_2, B_3, B_4, . . . , s. t. punkti B need asukohad, milledele vastavaid mehhanismi lülide asendeid tahetakse leida. Valime nüüd punkti B asenditest ühe, näiteks asendi B_1. Vändaga AB_1 ühendatud grupi BCF välisšarniiridę B_1 ja F asukohad on seega teada. Jääb üle leida grupi sisešarniiri C asukoht. Selleks joonestame algul ringjoone γ, mis osutub punktide C esimeseks geomeetriliseks kohaks. Seepeale, lähtudes punktist B_1 kui tsentrist, joonestame raadiusega B_1C ringjoone δ. Viimane moodustab punktide C teise geomeetrilise koha. Ringjoonte γ ja δ lõikepunkt määrab seega ära punkti C tegeliku asukoha. Kui lüli CF asend on leitud, siis on edasi lihtne määrata šarniiri D asukohta. See tehtud, on meil ühtlasi teada ka teise kahehaarmelise grupi DE välispaaride (šarniiri D ja juhtjoone xx) asendid. Jääb üle veel leida sisepaari, s. o. šarniiri E asukoht. Seda on lihtne teha, joonestades tsentrist D ringjoone ε. Viimase lõikepunkt juhtjoonega xx määrabki ära šarniiri E otsitud asukoha.

II klassi mehhanismide juures taandub lülide asendite leidmise ülesanne seega kahehaarmelistesse gruppidesse (diaadidesse) kuuluvate lülide asendite järkjärguliseks määramiseks. Gruppide välispaaride asukohad on seejuures alati ette antud. Järgnevalt käsitletakse asendite määramise ülesannet diaadi kõikide modifikatsioonide kohta eraldi.

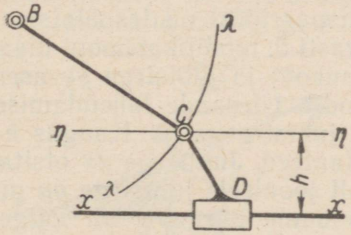
Olgu antud kolme rotatsioonipaariga II klassi grupp (s. o. 1. modifikatsiooni diaad). Punktide B ja D asukohad on ülaltoodu põhjal teada ja kogu ülesanne seisneb punkti C asukoha leidmises (joon. 250). Selleks lahutame mõtteliselt sideme sisešarniiris C ja uurime punkti C võimalikku liikumist. Punkti B asukoht on täielikult määratud; punkt C peab aga sellest alati asuma konstantsel kaugusel BC. Tema asukoht võib järelikult olla ainult ringjoonel $\lambda\lambda$, mille tsenter paikneb punktis B ja mille raadiuseks on BC. Silmas pidades lüli DC pikkuse muutumatust, võib täiesti analoogiliselt väita, et punkt C peab samaaegselt asuma punktist D kui tsentrist raadiusega DC tõmmatud ringjoonel $\eta\eta$. Ringjooned $\lambda\lambda$ ja $\eta\eta$ on seega punkti C mõeldavate asendite geomeetrilisteks kohtadeks ja punkt C võib paikneda ainult nimetatud ringjoonte lõikepunktides. Kuna üldjuhul kaks ringjoont lõikuvad omavahel kahes punktis, siis saadakse punkti C jaoks kaks võimalikku asukohta — C' ja C''. Punkti



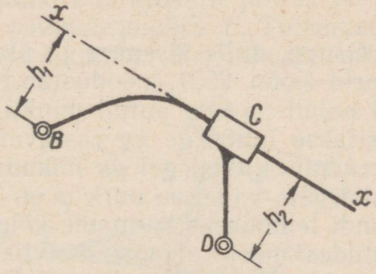
Joon. 250.

C tegeliku asukoha fikseerimisel tuleb silmas pidada tema liikumise pidevust (trajektoori katkematust) kogu mehhanismi liikumise raames. Neil juhtudel, kus ringjoonekaared $\lambda\lambda$ ja $\eta\eta$ omavahel ei lõiku, tuleb järeldada, et lülide antud mõõdete puhul ei ole grupi ühendamine mehhanismiga soovitud asendis üldse võimalik. Vaadeldavat gruppi võib mehhanismi lülitada küll mõnes teises asendis, kuid sel puhul ei saa mehhanism pärast grupi liitmist enam käsitletavasse asendisse liikuda.

Kui üks grupi välis-rotatsioonipaaridest, näiteks šarniir D, asendada translatsioonipaariga (joon. 251), tekib 2. modifikatsiooni diaad. Selleks, et asendite leidmise ülesanne oleks lahendatav, peab käesoleval juhul teada olema nii punkti B asukoht kui ka juhtsirge xx asend. Punkti C asukoha leidmisel lähtume seekord asjaolust, et kaugus h juhtsirge xx ja punkti C vahel jääb alati muutumatuks. Punktist B kui tsentrist joonestame ringjoone $\lambda\lambda$, võttes raadiuseks pikkuse BC (joon. 251) ja kaugusel h tõmbame juhtsirgele xx paralleeljoone $\eta\eta$. Ringjoone $\lambda\lambda$ ja sirge $\eta\eta$ lõikepunktid kujutavad punkti C võimalikke asendeid.



Joon. 251.



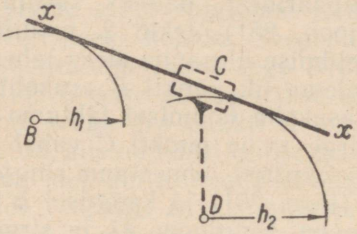
Joon. 252.

Üldjuhul esineb käsitletava näite juures n e l i võimalikku lahendit. Punkti C tegelik asukoht valitakse nende seast nii, et liikumise pidevuse tingimus oleks täidetud.

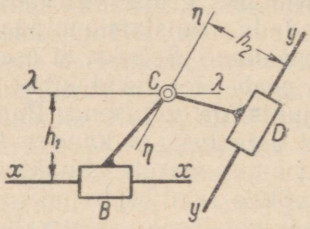
Juhul kui grupi sisepaariks on translatsioonipaar, s. t. 3. modifikatsiooni diaadis, on punktide B ja D asukohad ette antud. Otsitavaks kujuneb seega juhtsirge xx asend. Kuna punktide B ja D väikseimad kaugused nimetatud juhtjoonest (vastavalt h_1 ja h_2) on tuntud suurused, saab sirget xx määrata kui ühist puutujat kahele ringjoonele, mis on joonestatud tsentritest B ja D raadiustega vastavalt h_1 ja h_2 (joon. 253). Üldjuhul on ka sellel ülesandel n e l i võimalikku lahendit.

Kui grupi mõlemateks välispaarideks on translatsioonipaarid B ja D, siis moodustab grupp 4. modifikatsiooni diaadi (joon. 254). Juhtsirgete xx ja yy asendid on sel puhul ette antud. Otsitakse

punkti C asukohta, kusjuures on teada, et selle väikseimad kaugused h_1 ja h_2 juhtsirgetest on muutumatud suurused. Kanname joonisele kõigepealt mõlemad juhtsirged, paigutades need etteantud asenditesse. Seepeale tõmbame vastavatel kaugustel (h_1 ja h_2) rööpsirged $\lambda\lambda$ ja $\eta\eta$. Viimaste lõikepunkt fikseeribki punkti C otsitava asukoha. Märgime veel, et ka käsitletud ülesandel võib üldjuhul olla n e l i võimalikku lahendit.

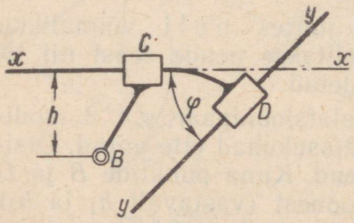


Joon. 253.

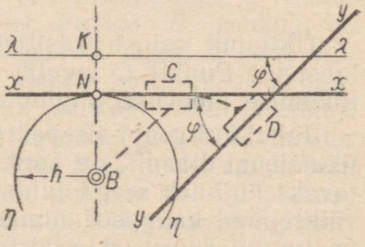


Joon. 254.

Grupp, mille sisepaar ja üks välispaaridest on translatsioonipaarid (joon. 255), moodustab teatavasti 5. modifikatsiooni diaadi. Sel puhul on ette antud punkti B asukoht ja juhtsirge yy asend. Otsitakse juhtsirge xx vastavat asendit. Ülesande lahendamiseks pikendame juhtsirget yy lõikumiseni juhtsirgega xx. Kaugus h ja juhtsirgete vaheline nurk φ on konstantsed. Juhtsirge xx otsitava asendi leidmiseks kanname kõigepealt joonisele juhtsirge yy ning lähtudes meelevaldsest punktist, tõmbame nurga φ all kulgeva sirge $\lambda\lambda$ (joon. 256). Tsentrist B joonestame ringjoone $\eta\eta$, mille raadiuseks on pikkus h, ja tõmbame sirgele $\lambda\lambda$ perpendikulaari BK.



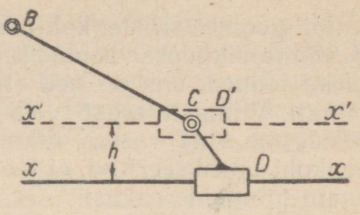
Joon. 255.



Joon. 256.

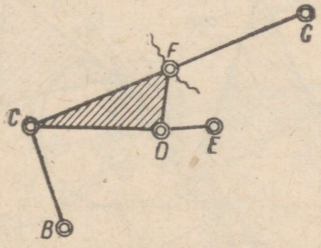
Viimane lõikub ringjoonega $\eta\eta$ punktis N. Läbi selle punkti tõmbame lõpuks sirgele $\lambda\lambda$ paralleeli, mis kujutabki juhtsirge xx otsitud asendit. Ka sellel ülesandel on üldjuhul n e l i võimalikku lahendit.

Translatsioonipaare sisaldavate gruppide käsitlemisel (joon. 251, 252, 254 ja 255) on mugav kasutada tingjuhtsirgeid, mis läbivad šarniiride tsentreid. Näiteks joonisel 257 kujutatud gruppi BCD võib asendada grupiga BCD', tuues liuguri D juhtsirge xx paralleel-lükkega asendisse $x'x'$. Määranud liuguri D' asendi juhtsirgel $x'x'$, võib lüli CD etteantud mõõdete alusel hõlpsasti leida liuguri D asendi juhtsirgel xx.

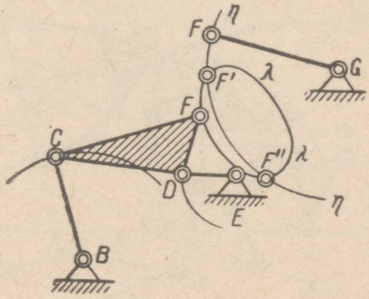


Joon. 257.

3°. Ka III klassi kuuluvate gruppide asendite määramisel võib kasutada geomeetriliste kohtade meetodit. Erinevalt II klassi gruppidest, kus geomeetrilisteks kohtadeks olid sirged või ringjooned, esineb siin veel mõningaid kõrgemat järku kõveraid. Olgu näiteks antud III klassi kuuluv kolmehaarmeline grupp $BCDEFG$ (joon. 258). Punktide B, E ja G asukohad olgu teada. Otsitakse ülejäänud punktide asukohti. Alustame ülesande lahendamist nii nagu II klassi gruppide puhulgi: vabastame ühe aluslüli juures olevatest šarniiridest, näiteks selle, mis paikneb punktis F. Tulemuseks on, et süsteemid $BCDE$ ja FG saavad kumbki ühe liikuvusastme.



Joon. 258.

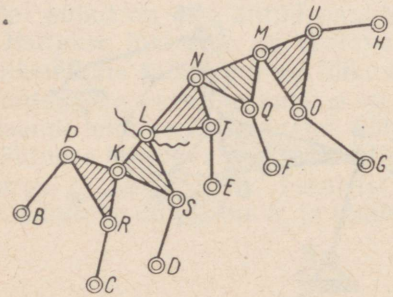


Joon. 259.

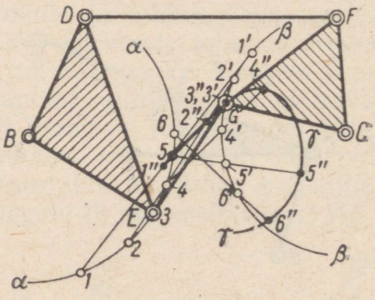
Kui sel viisil saadud süsteemid ühendada punktides B, E ja G kinnislüliga, tekib kaks iseseisvat, ühe liikuvusastmega mehhanismi. Süsteem $BCDE$ (joon. 259) moodustab seejuures II klassi mehhanismi, süsteem FG aga kuulub I klassi. Leiame nüüd šarniir-nelilüliku $BCDE$ kepsule CD kuuluva punkti F trajektoori $\lambda\lambda$. Olgu möödaminnes märgitud, et kepsu punktide trajektoore nimetatakse *kepsukõverateks*. Edasi leiame lüli FG punkti F trajektoori $\eta\eta$. See moodustab ilmselt ringjoone kaare raadiusega FG. Punkti F mõeldavate asendite geomeetrilisteks kohtadeks on seega ühelt poolt kõver $\lambda\lambda$ ja teiselt poolt ringjoone kaar $\eta\eta$. Nime-

tatud geomeetriliste kohtade lõikepunktid F' ja F'' ongi punkti F võimalikkudeks asukohtadeks. Et kepsukõverad on kõrgemat järku jooned, siis on neil ringjoone kaarega üldjuhul mitu lõikepunkti. Viimaste seast tuleb punkti F tegelikuks asukohaks valida niisugune, mis vastab liikumise pidevuse nõudele. Kui punkti F asukoht on fikseeritud, ei tee grupi ülejäänud punktide määramine enam mingeid raskusi.

Näitame nüüd, et šarniiri lahutamise meetod võimaldab määrata mis tahes III klassi grupi kõikide punktide asukohti. Olgu näiteks antud III klassi kuuluv seitsmehaarmeline grupp (joon. 260). Kahe sõltumatu II klassi mehhanismi saamiseks lahutame šarniiri ühes punktidest K, L, N või M. Lahutatud šarniiri näiteks punktis L, saame mehhanismid $BPKRCSD$ ja $ETNQFMOGUH$. Kui määrata vedavateks lülideks BP või CR ja HU või GO, kuuluvad mõlemad tekkinud mehhanismid II klassi. (Valides vedavateks lülideks DS, ET ja FQ, saaksime III klassi mehhanismid.) Pärast šarniiri lahutamist on ülalkäsitletud viisil lihtne konstrueerida mõlema mehhanismi ühise punkti trajektoore, s. t. leida punkti L mõeldavate asendite geomeetrilised kohad. Saadud geomeetriliste kohtade lõikepunktid võimaldavad hõlpsasti määrata punkti L tegeliku asukoha. Kui punkti L asu-



Joon. 260.



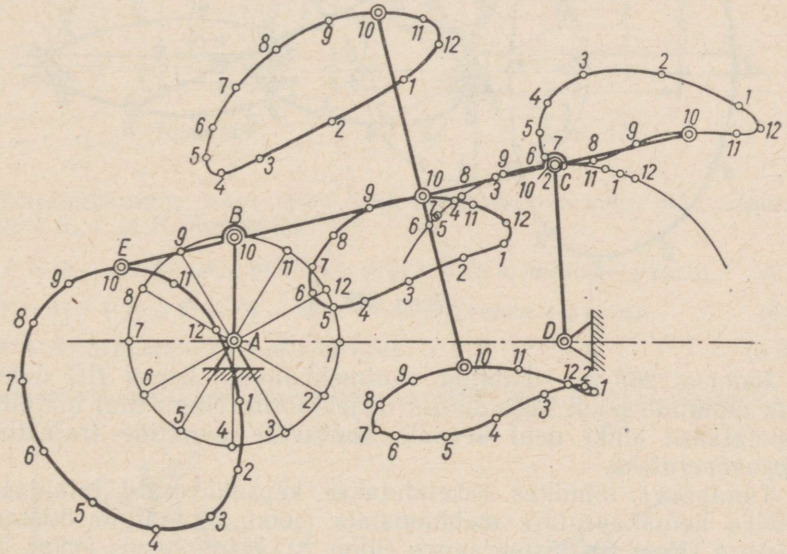
Joon. 261.

koht on grupi mingisuguses asendis fikseeritud, ei tee grupi ülejäänud punktide määramine enam mingisuguseid raskusi.

Kepsukõverate punkthaaval konstrueerimine on seotud suure ajakuluga. Selle ülesande kiiremaks lahendamiseks võib edukalt kasutada nn. *šabloone*. Papist või kõvemast paberist lõigatakse välja grupi ühte aluslüli moodustav kujund ja asetatakse kahe punktiga etteantud trajektooridele. Kujundit nihutatakse nüüd joonise tasapinnal nii, et ülalmärgitud kaks punkti liiguksid oma trajektooridel. Kujundi iga kolmanda punkti poolt moodustatud kõver on selle punkti tegelikuks trajektooriks. Näiteks lülile CD kuuluva punkti F trajektoori $\lambda\lambda$ leidmiseks valmistatakse lüli CDF

kujutav kolmnurkne šabloon (joon. 259). Selle šablooni punktid *C* ja *D* asetatakse ringjoonte kaartele, mida mööda need punktid mehhanismis liiguksid. Šablooni ülalkirjeldatud viisil nihutades saadaksegi punkti *F* trajektoor — kõver $\lambda\lambda$. Keerukamate gruppide uurimisel tuleb sõltuvalt grupi aluslülide arvust kasutada mitut šablooni.

IV klassi gruppide puhul kasutatakse lülide asendite määramiseks meetodit, mis samuti rajaneb geomeetriliste kohtade konstrueerimisel, kuid erineb seejuures siiski III klassi gruppide uurimisel rakendatud meetodist. Joonisel 261 on näidatud IV klassi grupp. Lahutame šarniirid *G* ja *E*, s. t. eraldame grupist lüli *GE*. Punktide *B* ja *C* etteantud asendite puhul taandub nüüd kogu grupp II klassi mehhanismiks *BDFC*. Punkt *E*, liikudes ringjoonel $\alpha\alpha$, mille raadius on *BE*, läbib järk-järgult asendid *1*, *2*, *3* jne. Punkt *G*, mille trajektooriks on ringjoon $\beta\beta$, asub vastavatel hetkedel asendites *1'*, *2'*, *3'* ... Ühendame omavahel punktid *1* ja *1'*, *2* ja *2'*, *3* ja *3'* ... ning kanname nii tekkinud lõikudele lüli *EG*

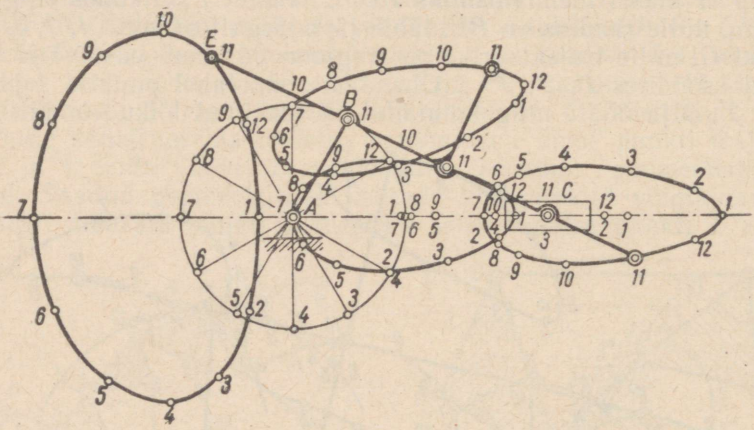


Joon. 262.

pikkuse, lähtudes punktidest *1*, *2*, *3*, ... Saame punktid *1''*, *2''*, *3''* ..., mis sujuva joonega ühendatult moodustavad kõvera $\gamma\gamma$. Viimase lõikepunkt ringjoonekaarega $\beta\beta$ määrab ära lüli *EG* tegeliku asendi. Grupi ülejäänud lülide vastavate asendite konstrueerimine ei tekita nüüd enam nimetamisväärseid raskusi.

4°. Kui mehhanismi lülide asendid on vedava lüli küllaldase hulga etteantud asendite kohaselt leitud, ei ole mehhanismis meid huvitavate punktide poolt kujundatavate trajektooride joonestamine enam raske. Olgu näiteks ülesanne leida šarniir-nelilüliku punkti E trajektoor (joon. 262). Jagame punkti B trajektoori (ringjoone) 12 võrdseks osaks ja leiame kepsule BC kuuluva punkti C vastavad asendid. Seepeale ühendame sirgetega teineteisele vastavad punktid B ja C ning konstrueerime kepsu BC igas saadud asendis punkti E asukoha. Viimaseid numbrite järjekorras sujuva joonega ühendades saame punkti E otsitava trajektoori.

Lisaks punkti E poolt kujundatud trajektoorile on joonisel 262 toodud veel mitme teise, kepsuga BC jäigalt ühendatud punkti trajektoorid.



Joon. 263.

Joonisel 263 on näidatud väntmehhanismi kepsu BC mõningate punktide poolt kujundatud trajektoorid. Nagu ülal mainitud, nimetatakse kõiki neid kepsule kuuluvate punktide trajektoore *kepsukõverateks*.

Tänapäeva tehnikas rakendatakse kepsukõveraid laialdaselt, näiteks heinakaarutaja mehhanismis (joon. 5), taignasõtkumise masinas (joon. 6), tõstekraanas (joon. 8), heinapressis (joon. 20). Kepsukõveraid kasutas sageli oma mehhanismides ka P. L. Tšebõšev (joon. 16, 17).

5°. Neljalüliliste mehhanismide kepsukõverate võrrandi võib üldjuhul kirjutada järgmisel kujul:

$$U^2 + V^2 = W^2. \tag{6.1}$$

Šarniir-nelilüliku puhul (joon. 264) avalduvad U, V ja W järgmiselt:

$$U = a[(x - k)\cos\gamma + y\sin\gamma](x^2 + y^2 + b^2 - r^2) -$$

$$-bx[(x-k)^2+y^2+a^2-R^2], \tag{6.2}$$

$$V=a[(x-k)\sin\gamma-y\cos\gamma](x^2+y^2+b^2-r^2)+ \\ +by[(x-k)^2+y^2+a^2-R^2], \tag{6.3}$$

$$W=2ab\sin\gamma[x(x-k)+y^2-ky\operatorname{ctg}\gamma]. \tag{6.4}$$

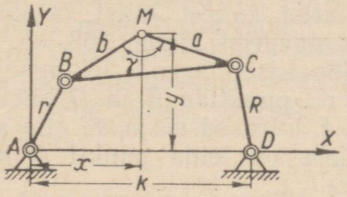
Sarniir-nelilüliku kepsukõverad on seega määratud 6. astme võrrandiga. Väntmehhanismi puhul (joon. 265) avalduvad võrrandis (6.1) esinevad suurused U, V ja W järgmiselt:

$$U=a(x^2+y^2+b^2-r^2)\sin\gamma+2by(x-e), \tag{6.5}$$

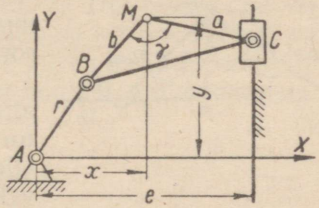
$$V=a(x^2+y^2+b^2-r^2)\cos\gamma+2bx(e-x), \tag{6.6}$$

$$W=2ab(x\sin\gamma+y\cos\gamma). \tag{6.7}$$

Väntmehhanismi kepsukõvera võrrandiks on järelikult 4. astme võrrand.



Joon. 264.



Joon. 265.

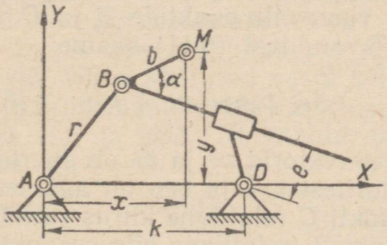
Kulissmehhanismi puhul (joon. 266) kujunevad võrrandis (6.1) esinevad suurused U, V ja W järgmisteks:

$$U=(k-x)(x^2+y^2+b^2-r^2)+2b(e+b\sin\alpha)(x\sin\alpha-y\cos\alpha), \tag{6.8}$$

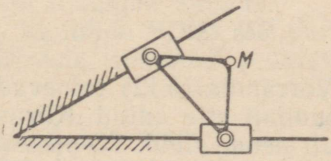
$$V=y(x^2+y^2+b^2-r^2)-2b(e+b\sin\alpha)(x\cos\alpha+y\sin\alpha), \tag{6.9}$$

$$W=2b\cos\alpha[x(x-k)+y^2+ky\operatorname{tg}\alpha]. \tag{6.10}$$

Kulissmehhanismi kepsukõvera võrrand osutub seega 6. astme võrrandiks.



Joon. 266.

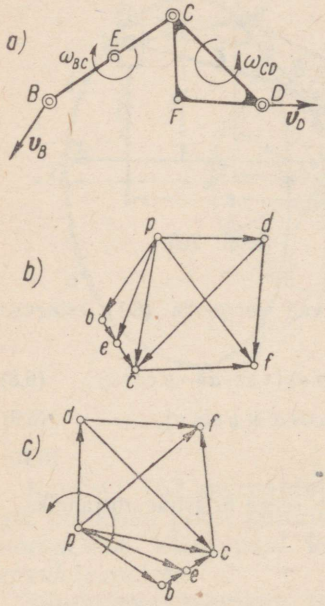


Joon. 267.

Joonisel 267 toodud kahe translatsioonipaariga mehhanismi kepsukõver kujutab endast teise järgu kõverat.

§ 30. Kiiruste ja kiirenduste leidmine diaadides (II klassi gruppides)

1°. Diaadide (II klassi kuuluvate gruppide) kiirusi ja kiirendusi võib määrata käesoleva raamatu 5. peatükis käsitletud meetoditega. Enamasti aga kasutatakse selleks otstarbeks siiski kiirus- ja kiirendusplaanide meetodit (§ 25). Kuna kõik II klassi mehhanismid on moodustatud gruppide järkjärgulise liitmise teel, siis on kiirus- ja kiirendusplaanide meetodit otstarbekas käsitleda diaadide eri modifikatsioonide kaupa. Analoogiliselt asendile määramise ülesandega on siin välispaaride kiirused ja kiirendused alati ette antud. Otsitavateks on gruppidesse kuuluvatel lülidel valitud punktide kiirused ja kiirendused ning lülide eneste nurkkiirused ja nurkkiirendused.



Joon. 268.

2°. Diaadi 1. modifikatsioon on moodustatud kahest lülist ja kolmest rotatsioonipaarist (joon. 268, *a*).

Analoogiliselt asendi leidmise ülesandega on punktide B ja D kiirusvektorid, s. t. kiirused $\boldsymbol{v}_B$ ja $\boldsymbol{v}_D$ ette antud. Ülesandeks on leida punkti C kiirusvektor $\boldsymbol{v}_C$.

Punkti C kiirust määravate vektorvõrrandite kuju oli teatavasti järgmine (vt. § 25, 2°):

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB}$$

ja

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{CD}, \qquad (6.11)$$

kus $\boldsymbol{v}_C$, $\boldsymbol{v}_B$ ja $\boldsymbol{v}_D$ tähistavad vastavalt punktide C, B ja D absoluutseid kiirusi ja $\boldsymbol{v}_{CB}$ ning $\boldsymbol{v}_{CD}$ — punkti C relatiivseid kiirusi vastavalt punktide B ja D suhtes. Võrranditest (6.11) saame:

$$\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{CD}. \qquad (6.12)$$

Võrrandis (6.12) esinevad kiirusvektorid $\boldsymbol{v}_B$ ja $\boldsymbol{v}_D$ on suuruselt ja suunalt ette antud. Kiirusvektoritest $\boldsymbol{v}_{CB}$ ja $\boldsymbol{v}_{CD}$ on aga teada ainult nende sihid. Tõepoolest, punkti C relatiivne kiirus punkti B suhtes $\boldsymbol{v}_{CB}$ on risti lüliga BC; punkti C relatiivne kiirus punkti D suhtes on vastavalt risti lüliga DC. Võrrandis (6.12) on seega tundmatuiks ainult kiirusvektorite $\boldsymbol{v}_{CB}$ ja $\boldsymbol{v}_{CD}$ moodulid (suurused), mida saab aga leida kiirusplaani konstrueerimise teel (joon. 268, *b*). Valime meelevaldse punkti p kiirusplaani poolu-

seks ja kanname paberile lõigud (pb) ja (pd), mis kujutavad mingis vabalt valitud mastaabis μ_v punktide B ja D kiirusi v_B ja v_D. Mastaap μ_v, mis näitab, mitu meetrit sekundis vastab 1 millimeetrile kiirusplaanis, valitakse nii, et kiirusplaani joonestamine ja arvutuste tegemine oleks mugav.

Punktide B ja D kiiruste tegeliku väärtuse leidmiseks tuleb lõikude (pb) ja (pd) millimeetrites mõõdetud pikkusi korrutada kiirusplaani joonestamisel valitud mastaabiga μ_v. Seega

$$v_B = \mu_v(pb),$$
$$v_D = \mu_v(pd).$$

Kandnud kiirusplaanile lõigud (pb) ja (pd), tõmbame läbi punktide b ja d suhteliste kiiruste v_{CB} ja v_{CD} sihilised sirged, s. t. sirged, mis kulgevad risti lülidega BC ja DC (joon. 268, *a*). Lõikepunkt c määrab ära punkti C absoluutse kiiruse vektori v_C lõpppunkti. Võrrandite (6.11) põhjal on kiirus v_C kujutatud joonlõiguna (pc), mis saadakse kiirusplaani pooluse p ühendamisel punktiga c. Selle kiiruse suuruseks on

$$v_C = \mu_v(pc).$$

Lõigud (bc) ja (dc) kujutavad endast mastaabis μ_v joonestatud suhtelisi kiirusi v_{CB} ja v_{CD}, s. t.

$$v_{CB} = \mu_v(bc),$$
$$v_{CD} = \mu_v(dc).$$

Joonisel 268, *b* kujutatud vektorite nooleotsad tuleb suunata nii, et võrrandid (6.11) oleksid rahuldatud.

Kiirusvektorite konstrueerimise hõlbustamiseks võib grupi kõikide punktide kiirusi tinglikult pöörata ühes ja samas suunas 90° võrra. Suhteliste kiiruste v_{CB} ja v_{CD} vektorid on siis paralleelsed lülidega BC ja DC. Nii konstrueeritud kiirusplaani nimetatakse *pööratud kiirusplaaniks*.

Joonis 268, *c* kujutab pööratud kiirusplaani, kus kõik kiirused on 90° võrra pööratud vastu kellaosuti liikumise suunda.

Kiirusplaanide abil saab määrata ka lülide BC ja DC nurkkiirusi ω_{BC} ja ω_{DC}. Nimetatud nurkkiiruste suurused arvutatakse seostega

$$\left.\begin{aligned} |\omega_{BC}| &= \frac{v_{CB}}{l_{BC}}, \\ |\omega_{DC}| &= \frac{v_{CD}}{l_{DC}}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.13)$$

kus l_{BC} ja l_{DC} tähistavad vastavalt lülide BC ja DC pikkusi.

Olgu grupp BCD joonestatud meelevaldselt valitud mastaabis μ_l. Viimane näitab, mitu meetrit tegelikku pikkust vastab igale millimeetrile skeemil. Asendame seostes (6.13) esinevad kiiruste v_{CB} ja v_{CD} moodulid kiiruste mastaabi μ_v ja kiirusplaani vastavate joonlõikude pikkuste korrutistega. Lülide BC ja DC tegelikud pikkused aga asendame pikkuste mastaabi μ_l ja grupi skeemilt võetud vastavate lõikude korrutistega. Saame:

$$|\omega_{BC}| = \frac{\mu_v(bc)}{\mu_l(BC)},$$

$$|\omega_{DC}| = \frac{\mu_v(dc)}{\mu_l(DC)}.$$

Mastaapide suhte $\frac{\mu_v}{\mu_l}$ dimensiooniks on sec^{-1}. Nurkkiiruste ω_{BC} ja ω_{DC} suunda võib määrata järgmiselt. Kandes vektorid v_{CB} ja v_{CD} punkti C, näeme, et lüli BC pöörleb kellaosuti liikumise suunas, lüli DC aga vastu kellaosuti liikumise suunda (joon. 268, *a*).

Lüli BC teljel paikneva meelevaldse punkti E kiiruse määramiseks (joon. 268, *a*) võime kasutada võrrandit (5.29). Viimasest järgneb, et punktide E ja C kiirused punkti B suhtes on võrdelised nimetatud punktide kaugustega punktist B, s. t.

$$(be) = (bc)\frac{l_{BE}}{l_{BC}}. \qquad (6.14)$$

Seosest (6.14) selgub, et kiirusplaanis suhtelist kiirust v_{EB} kujutava lõigu määramiseks tuleb suhtelist kiirust v_{CB} kujutav kiirusplaani lõik (bc) jagada kahte ossa proportsioonis, milles punkt E jagab lüli BC grupi skeemil (joon. 268, *a*,).

Kandnud võrrandist (6.14) saadud joonlõigu (be) kiirusplaani (joon. 268, *b*) ja ühendanud punkti e kiirusplaani poolusega p, saame lõigu (pe). Viimane kujutab punkti E absoluutset kiirust v_E mastaabis μ_v. Seega

$$v_E = \mu_v(pe).$$

Lüli CD mingi meelevaldse, teljest eemal paikneva punkti F kiiruse määramiseks (joon. 268, *a*) kasutame kiirusplaanis ja lüli skeemil esinevate kujundite geomeetrilist sarnasust (§ 25, 3°). Kiirusplaani punktist d tõmbame sirge, mis on risti lüli skeemil oleva lõiguga FD, läbi punkti C aga sirge, mis on risti lõiguga FC. Nimetatud sirgete lõikepunkt f (joon. 268, *b*) määrab punkti F absoluutse kiiruse vektori v_F lõpp-punkti. Geomeetriliselt sar-

naste kujundite joonestamisel pööratud kiirusplaanidesse peab silmas pidama, et sarnaste kujundite vastavad küljed on siin omavahel paralleelsed (joon. 268, *c*).

3°. Diaadi 1. modifikatsiooni kiirenduste määramisel peavad välispaaride *B* ja *D* täiskiirendused $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_D$ olema ette antud (joon. 269, *a*). Lisaks sellele eeldatakse, et diaadi kiirusplaan on juba koostatud ja seega grupi kõikide punktide kiirused määratud. Punkti *C* kiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ leidmiseks kasutatakse vektorvõrrandeid (vt. § 25, 2°)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB}, \\ \boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{CD} + \boldsymbol{a}^t_{CD}, \end{aligned}\right\} \tag{6.15}$$

kus $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ tähistavad suhtelise liikumise normaalkiirendusi ja $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ning $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ — sama liikumise tangentsiaalkiirendusi.

Võrdustest (6.15) saame:

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB} = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{CD} + \boldsymbol{a}^t_{CD}. \tag{6.16}$$

Võrrandis (6.16) esinevatest vektoritest on punktide *B* ja *D* kiirendused $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_D$ suuruse ning sihi poolest tuntud. Suhtelise liikumise normaalkiirendused $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ on määratavad. Nimetatud vektorite suurusi saab arvutada seostest

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_{BC}} = \omega^2_{BC} l_{BC},$$

$$a^n_{CD} = \frac{v^2_{CD}}{l_{DC}} = \omega^2_{DC} l_{DC}.$$

Kiirused $\boldsymbol{v}_{CB}$ ja $\boldsymbol{v}_{CD}$ ning nurkkiirused ω_{BC} ja ω_{DC} võib määrata varemkonstrueeritud kiirusplaanist. Lülide *BC* ja *DC* pikkused mõõdetakse skeemilt. Kasutades mastaabis μ_v konstrueeritud kiirusplaanis esinevaid lõikusid ja mastaabis μ_l joonestatud skeemilt mõõdetavaid lülide pikkusi, võime kirjutada

$$\left.\begin{aligned} a^n_{CB} &= \frac{\mu^2_v (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_1), \\ a^n_{CD} &= \frac{\mu^2_v (dc)^2}{\mu_l (DC)} = \mu_a (dn_2). \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

Lõigud (*bc*) ja (*dc*) võetakse kiirusplaanist; μ_a tähistab kiirendusplaani mastaapi, määrates ära vastavuse 1 mm $\rightarrow \mu_a$ m/sec^2.

Nagu kiirusplaanide puhul, nii ka siin, kiirendusplaanide koostamisel, valitakse mastaap μ_a sääraselt, et plaani joonestamine ja arvutustöö toimuks võimalikult mugavalt. Kui soovitakse leida mingi kiirenduse tegelikku väärtust, tuleb kiirendusplaanist mõõta

vastava joonlõigu pikkus millimeetrites ja saadud tulemust korrutada kiirendusplaani mastaabiga μ_a. Viimane näitab, mitmele kiirendusühikule vastab 1 mm pikkune lõik kiirendusplaanis.

Kiirendusvektor $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ on suunatud punktist C punkti B, paralleelselt lüliga BC; kiirendusvektor $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ on analoogiliselt suunatud punktist C punkti D, paralleelselt lüliga DC. Normaalkiirendused $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ on seega tuntud nii suuruse kui ka suuna poolest. Vektoritest $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ on teada nende kandesirged: esimene neist on risti lüliga BC ja teine risti lüliga DC. Võrrandi (6.16) tundmatuiks on seega ainult kiirendusvektorite $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ suurused. Viimaseid saab hõlpsasti määrata alljärgneva graafilise konstruktsiooniga.

Valime kiirendusplaani pooluseks punkti π (joon. 269, *b*) ja kanname sellest lähtudes joonisele lõigud (πb) ja (πd), mis mastaabis μ_a kujutavad punktide B ja D kiirendusi. Edasi, kasutades seoseid (6.17), arvutame kiirenduste $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ suurused.

Nüüd, lähtudes punktidest b ja d, kanname joonisele lõigud (bn_1) ja (dn_2), mis kujutavad ülalnimetatud kiirendusi mastaabis μ_a. Saadud punktidest n_1 ja n_2 tõmbame tangentsiaalkiirenduste $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ sihis, s. t. risti lülidega BC ja DC kulgevad sirged. Viimaste lõikepunkt c määrabki ära punkti C täiskiirendusvektori $\boldsymbol{a}_C$ lõpp-punkti. Seega

$$a_C = \mu_a(\pi c).$$

Ühendades kiirendusplaani punktid b ja d äsjakonstrueeritud lõikepunktiga c, saame suhteliste täiskiirenduste vektorid $\boldsymbol{a}_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}_{CD}$. Viimaste moodulid arvutatakse seostega

$$a_{CB} = \mu_a(bc),$$
$$a_{CD} = \mu_a(dc).$$

Lülide BC ja DC nurkkiirenduste ε_{BC} ja ε_{DC} moodulid arvutatakse järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} |\varepsilon_{BC}| &= \frac{a^t_{CB}}{l_{BC}}, \\ |\varepsilon_{DC}| &= \frac{a^t_{CD}}{l_{DC}}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.18)$$

Asetades valemitesse (6.18) grupi skeemilt ja kiirendusplaanist võetavad vastavate lõikude pikkused, saame:

$$|\varepsilon_{BC}| = \frac{\mu_a(n_1c)}{\mu_l(BC)},$$

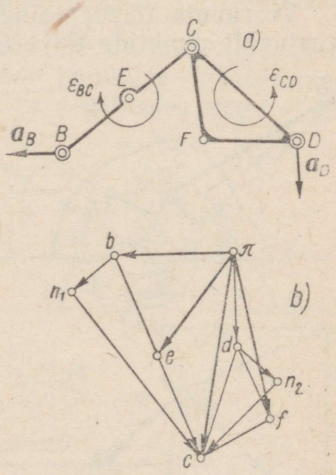
$$|\varepsilon_{DC}| = \frac{\mu_a(n_2d)}{\mu_l(DC)}.$$

Mastaapide suhte $\frac{\mu_a}{\mu_l}$ dimensiooniks on sec^{-2}. Nurkkiiruste suunda võib määrata, kandes vektorid $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ punkti C (joon. 269, *a*). Näeme, et nurkkiirenduse ε_{BC} suund ühtib kella-osuti pöörlemissuunaga, kuna nurkkiirendusel ε_{DC} on see vastupidine.

Lüli BC teljel paikneva punkti E kiirenduse määramiseks (joon. 269, *a*) kasutame võrret (5.34). Viimasest nähtub, et punkti E kiirendusvektori $\boldsymbol{a}_E$ määramiseks tuleb joonisel 269, *b* kiirendusplaani lõik (*bc*) jagada kahte ossa vahekorras, milles punkt E jagab lõigu (BC) grupi skeemil (joon. 269, *a*). Lõik (πe) kujutab seega kiirendusplaani mastaabis punkti E täiskiirendust $\boldsymbol{a}_E$, s. t.

$$a_E = \mu_a(\pi e).$$

Lülile CD kuuluva meelevaldselt paikneva punkti F kiirenduse määramiseks (joon. 269, *a*) kasutame kiirendusplaanis ja mehhanismi skeemil esinevate kujundite geomeetrilise sarnasuse seadust (§ 25, 3°). Konstrueerime kiirendusplaani lõigule (*dc*) kolmnurga *dcf* (joon. 269, *b*), mis on geomeetriliselt sarnane grupi skeemil esineva kolmnurgaga DCF (joon. 269, *a*), kuid viimase suhtes valemiga (5.32) määratud nurga μ võrra pööratud. Kolmnurga *dcf* praktiliseks konstrueerimiseks tuleb mõõta kolmnurga DCF naaberkülgede vahelised nurgad ja kanda need kiirendusplaani punktides *d* ja *c*. Liikudes piki konturit *dcf* mis tahes suunas, peab tähtede järjekord ühtima konturil DCF esinevaga. Ühendades kiirendusplaani pooluse π sirgjoone abil punktiga *f*, saame lõigu (πf). Viimane, korrutatuna mastaabiga μ_a, annab punkti F otsitava kiirenduse $\boldsymbol{a}_F$ väärtuse:



Joon. 269.

$$a_F = \mu_a(\pi f).$$

4°. Diaadi 2. modifikatsioonis esineb üks translatsioonipaar ja kaks teineteisele järgnevat rotatsioonipaari (joon. 270, *a*). Antud suurusteks on punkti B kiirusvektor $\boldsymbol{v}_B$ ja juhtsirge xx kõikide punktide kiirused. Juhtsirge nurkkiirus ω_x on järelikult samuti teada. Seome mõtteliselt juhtsirge xx külge tasapinna S, mis olgu juhtsirgega jäigalt ühendatud näiteks punktides K_1 ja K_2. Üles-

ande lähtetingimuste kohaselt on punktide K_1 ja K_2 kiirused ette antud. Järelikult on alati võimalik leida tasapinna S mis tahes kolmanda punkti kiirust. Olgu C_x tasapinnale S kuuluv punkt, mis antud hetkel langeb kokku diaadi punktiga C. Eeltoodu põhjal on nimetatud punkti kiirusvektor v_{Cx} hõlpsasti määratav. Diaadi punkti C kiirusvektori v_C leidmiseks lahendame nüüd vektorvõrrandite süsteemi (vt. § 25, 2°)

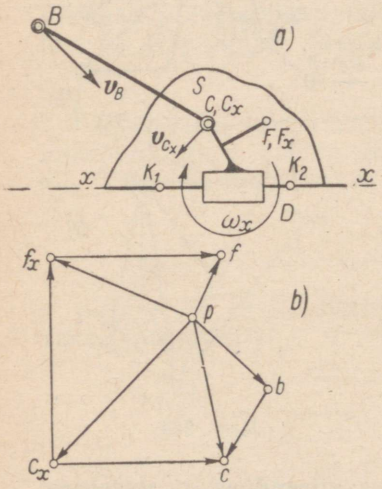
$$\left.\begin{aligned} v_C &= v_B + v_{CB}, \\ v_C &= v_{Cx} + v_{CCx}, \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

millest järgneb, et

$$v_B + v_{CB} = v_{Cx} + v_{CCx}. \tag{6.20}$$

Võrrandites (6.19) tähistab v_{CCx} punkti C relatiivset kiirust tasapinna S suhtes ja v_{CB} — punkti C relatiivset kiirust punkti B suhtes.

Võrrandis (6.20) esinevad vektorid v_B ja v_{Cx}, mis tähistavad vastavalt punktide B ja C_x kiirusi, on tuntud nii suuruse kui ka suuna poolest. Relatiivsete kiiruste vektoritest v_{CB} ja v_{CCx} on teada ainult suunad. Vektorite suurused, ühtlasi aga ka punkti C kiirus v_C leitakse kiirusplaanist. Valime kiirusplaani pooluseks meelevaldse punkti p (joon. 270, b) ja kanname plaanile joonlõigud (pb) ja (pc_x), mis mastaabis μ_v kujutavad punktide B ja C_x meile tuntud kiirusi v_B ja v_{Cx}. Punktist b tõmbame kiirusvektori v_{CB}-sihilise, s. t. lüliga BC risti kulgeva sirge (joon. 270, a). Läbi punkti c_x aga joonestame sirge, mis oleks paralleelne suhtelise kiiruse vektoriga v_{CCx}, s. t., mis kulgeks rööbiti translatsioonipaari teljega xx. Käsitletud sirgete lõikepunkt c määrabki kiirusplaanil ära otsitavale kiirusvektorile v_C vastava lõigu (pc). Punkti C kiiruse v_C väärtus arvutatakse valemiga



Joon. 270.

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Lüli BC ülejäänud punktide kiirused ja nurkkiirus ω_{BC} määratakse viisil, mida käsitleti 1. modifikatsiooni diaadi puhul. Lüli CD nurkkiirus ω_{CD} on määratud asjaoluga, et see lüli moodustab

juhtsirgega xx translatsioonipaari. Lüli CD nurkkiirus võrdub seega juhtsirge ja viimasega jäigalt seotud tasapinna S nurkkiirusega ω_x, s. t.

$$\omega_{CD} = \omega_x.$$

Lülil CD meelevaldselt valitud punkti F kiiruse määramiseks (joon. 270, a) võib kasutada vektorvõrrandit

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_{Fx} + \boldsymbol{v}_{FFx}. \qquad (6.21)$$

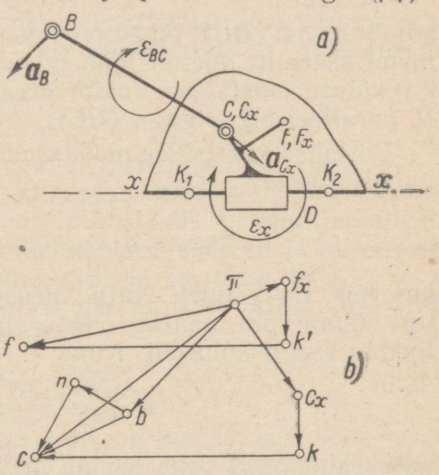
Tasapinnale S kuuluva punkti F_x kiirusvektor $\boldsymbol{v}_{Fx}$ määratakse samal viisil kui punkti C_x kiirus $\boldsymbol{v}_{Cx}$. Kiirus $\boldsymbol{v}_{FFx}$ võrdub kiirusega $\boldsymbol{v}_{CCx}$, sest translatsioonipaari tõttu liigub lüli CD tasapinna S suhtes translatoorselt. Lüli CD kõikide punktide relatiivsed kiirused tasapinna S suhtes on seetõttu omavahel võrdsed. Võrrandi (6.21) võib järelikult kirjutada järgmisel kujul:

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_{Fx} + \boldsymbol{v}_{CCx}. \qquad (6.22)$$

Punkti F kiirus $\boldsymbol{v}_F$ määratakse võrrandi (6.22) alusel järgmiselt. Eelnevalt määratud punktist f_x lähtudes kanname kiirusplaani (joon. 270, b) joonlõiguga (c_xc) võrdse ja paralleelse lõigu (f_xf). Resulteeriv joonlõik (pf) vastabki punkti F otsitavale absoluutsele kiirusele $\boldsymbol{v}_F$.

Seega

$$v_F = \mu_v(pf).$$



Joon. 271.

5°. Diaadi 2. modifikatsiooni kiirenduste leidmiseks kasutame moodust, mis on analoogiline kiiruste määramisel rakendatule. Eeldame järelikult, et etteantud suurusteks on punkti B kiirendus $\boldsymbol{a}_B$ (joon. 271, a), juhtsirge xx kõikide punktide kiirendused (seega ka tema nurkkiirendus ε_x) ja grupi kõikide lülide kiirused. Punktides K_1 ja K_2 ühendame jäigalt translatsioonipaari teljega xx tasapinna S ja fikseerime sellel punkti C_x, mis antud hetkel ühtib šarniiriga C (joon. 271, a).

Punkti B kiirendus on ette antud, punkti C_x kiirendust saab aga alati leida, sest juhtsirge xx kõikide punktide kiirendused on teada.

Punkti C kiirendus saadakse võrranditest (vt. § 25, 2°)

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB}, \\ \boldsymbol{a}_C &= \boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}^k_{CCx} + \boldsymbol{a}^r_{CCx}. \end{aligned}\right\} \tag{6.23}$$

Suhteline kiirendus $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ kujutab endast punkti C relatiivset kiirendust juhtsirge xx külge kuuluva tasapinna S suhtes. Et juhtsirge ja sellega liikumatult ühendatud tasapinna S liikumine on üldjuhul liitliikumine, siis on ilmne, et valemis (6.23) peab lisaks suhtelisele kiirendusele $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ esinema ka veel Coriolise kiirendus $\boldsymbol{a}^k_{CCx}$.

Elimineerides võrranditest (6.23) $\boldsymbol{a}_C$, saame:

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB} = \boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}^k_{CCx} + \boldsymbol{a}^r_{CCx}. \tag{6.24}$$

Võrrandis (6.24) esinevad kiirendusvektorid $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_{Cx}$ on tuntud suurused. Kiirenduse $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ moodul määratakse valemiga

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_{BC}} = \omega^2_{BC} l_{BC} = \frac{\mu^2_v (bc)}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn),$$

kus (bc) ja (BC) tähistavad vastavalt kiirusplaanist ja mehhanismi skeemilt võetud lõikusid, μ_l, μ_v, μ_a aga pikkuse, kiiruse ja kiirenduse mastaape. Vektor $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ on suunatud punktist C punkti B, paralleelselt lõiguga (BC).

Coriolise kiirenduse moodul määratakse tasapinnalise liikumise puhul seosest

$$a^k_{CCx} = 2 \mid \omega_x \mid v_{CCx} = 2 |\omega_x| \, \mu_v (cc_x), \tag{6.25}$$

kus lõik (cc_x) tuleb võtta kiirusplaanist. Coriolise kiirendusvektori suuna võib määrata vektoralgebrast tuntud viisil või § 25, 2° toodud reegli kohaselt. Kuna

$$\boldsymbol{a}^k_{CCx} = 2 (\boldsymbol{\omega}_x \times \boldsymbol{v}_{CCx}), \tag{6.26}$$

siis vektor $\boldsymbol{a}^k_{CCx}$ peab asuma mehhanismi liikumise tasapinnas ja tema suuna leidmiseks piisab, kui pöörata vektorit $\boldsymbol{v}_{CCx}$ (punkti C relatiivset kiirust juhtsirge xx suhtes) 90° võrra nurkkiiruse ω_x poolt määratud suunas. Vektor $\boldsymbol{a}^k_{CCx}$ on järelikult risti juhtsirgega xx. Tema moodul arvutatakse valemiga (6.25), kasutades nurkkiiruse ω_x etteantud väärtust ja kiirusplaanist võetava lõigu (cc_x) pikkust. Viimane kujutab kiirust $\boldsymbol{v}_{CCx}$ mastaabis μ_v.

Võrrandis (6.24) esinevad kiirendusvektorid $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ on tuntud ainult sihi poolest. Tõepoolest, esimene neist — $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ — on

risti lõiguga (BC) ja teine — $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ — paralleelne juhtsirgega xx. Võrrandi (6.24) tundmatuiks on seega ainult kiirenduste $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ väärtused. Viimaste leidmiseks konstrueerime kiirendusplaani. Valime meelevaldselt kiirendusplaani pooluse π (joon. 271, b). Sellest lähtudes kanname kiirendusplaani lõigud (πb) ja (πc_x), mis valitud mastaabis μ_a kujutavad punktide B ja C_x tuntud kiirendusi $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_{Cx}$. Edasi arvutame kiirendused $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ ning $\boldsymbol{a}^k_{CCx}$ ja kanname need plaani mastaabis μ_a lõikude (bn) ja (c_xk) näol. Punktidest n ja k tõmbame kiirenduste $\boldsymbol{a}^t_{CB}$- ja $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$-sihilised sirged. Kiirendus $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ on paralleelne translatsioonipaari teljega xx, kuna kiirendus $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ on risti lõiguga (BC). Niiviisi saadud kahe sirge lõikepunkt c määrabki punkti C täiskiirendusvektori $\boldsymbol{a}_C$ lõpppunkti. Punkt C täiskiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ väärtuseks on järelikult

$$a_C = \mu_a(\pi c).$$

Lüli BC nurkkiirenduse ε_{BC} suurus on antud valemiga

$$|\varepsilon_{BC}| = \frac{a^t_{CB}}{l_{BC}} = \frac{\mu_a(nc)}{\mu_l(BC)}.$$

Kiirenduse ε_{BC} suund määratakse samal viisil kui varemkäsitletud 1. modifikatsiooni diaadis. Mis puutub lüli CD nurkkiirendust ε_{CD}, siis

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_x,$$

sest lüli CD moodustab juhtsirgega xx translatsioonipaari.

Lüli BC mis tahes punkti kiirendus määratakse graafilise konstruktsiooniga, mis on analoogiline diaadi 1. modifikatsiooni juures kasutatule, s. t. tuginedes mehhanismi skeemil ja kiirendusplaanis esinevate kujundite geomeetrilisele sarnasusele.

Lüliga CD jäigalt seotud meelevaldse punkti F kiirenduse võib määrata võrrandist

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{Fx} + \boldsymbol{a}^k_{FFx} + \boldsymbol{a}^r_{FFx}. \qquad (6.27)$$

Tasapinna S punkti F_x kiirendus $\boldsymbol{a}_{Fx}$ on tuntud, sest selle tasapinna kõikide punktide kiirendused on ülesande tingimuste kohaselt ette antud. Kiirenduse $\boldsymbol{a}^k_{FFx}$ moodul arvutatakse valemiga

$$a^k_{FFx} = 2\,|\omega_x|\,v_{FFx} = 2\,|\omega_x|\,v_{CCx} = a^k_{CCx},$$

sest $v_{FFx} = v_{CCx}$. Kiirenduse $\boldsymbol{a}^r_{FFx}$ väärtuseks saame

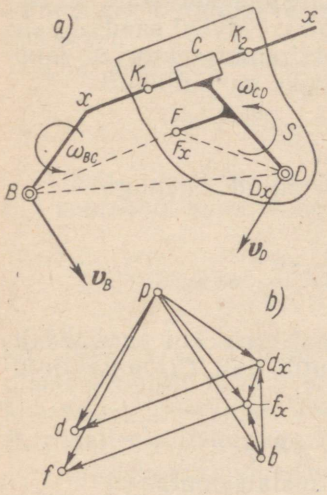
$$a^r_{FFx} = a^r_{CCx},$$

sest lüli CD liigub tasapinna S suhtes translatoorselt.

Võrrandi (6.27) võib nüüd kirjutada järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{Fx} + \boldsymbol{a}^k_{CCx} + \boldsymbol{a}^r_{CCx}. \tag{6.28}$$

Võrrandi (6.28) paremal poolel olevad vektorid on tuntud ja otsitav vektor $\boldsymbol{a}_F$ konstrueeritakse seega lihtsalt kui nende geomeetriline summa. Selleks kanname kiirendusplaani (joon. 271, *b*), lähtudes punktist f_x, lõigu ($f_x k'$), mis on võrdne ja paralleelne lõiguga ($c_x k$). Edasi, punktist k' lähtudes kanname plaani joonlõiguga (kc) võrdse ja paralleelse lõigu ($k'f$). Resulteeriv joonlõik (πf) võetuna mastaabis μ_a kujutabki punkti F täiskiirendust, s. t.



Joon. 272.

$$a_F = \mu_a(\pi f).$$

6°. Siirdume nüüd diaadi 3. modifikatsiooni käsitlemisele. Diaadi 3. modifikatsiooni iseloomustab kahe rotatsioonipaari vahel paiknev translatsioonipaar (joon. 272, *a*). Etteantud suurusteks on punktide B ja D kiirused $\boldsymbol{v}_B$ ja $\boldsymbol{v}_D$. Punktides K_1 ja K_2 seome juhtsirgega xx jäigalt tasapinna S ja fikseerime sellel punkti D_x, mis antud hetkel ühtib diaadi punktiga D. Punkti D_x kiirus $\boldsymbol{v}_{Dx}$ kui juhtsirge xx punkti kiirus on määratav võrrandist (vt. § 25, 2°)

$$\boldsymbol{v}_{Dx} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{DxB}. \tag{6.29}$$

Lülile CD kuuluva punkti D kiiruse $\boldsymbol{v}_D$ kohta kehtib seos

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_{Dx} + \boldsymbol{v}_{DDx}. \tag{6.30}$$

Lahendades koos võrrandid (6.29) ja (6.30), saame:

$$\boldsymbol{v}_D = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{DxB} + \boldsymbol{v}_{DDx}. \tag{6.31}$$

Võrrandis (6.31) esinevatest vektoritest on punktide B ja D kiirusvektorid $\boldsymbol{v}_B$ ja $\boldsymbol{v}_D$ tuntud. Kiirused $\boldsymbol{v}_{DxB}$ ja $\boldsymbol{v}_{DDx}$ on aga tuntud ainult sihi poolest. Esimene neist on risti sihiga DB ja teine — paralleelne juhtsirgega xx. Nimetatud kiiruste väärtust saab määrata võrrandiga (6.31) vastava kiirusplaani konstrueerimise teel. Kiirusplaanist leitakse ühtlasi ka punkti D_x kiiruse $\boldsymbol{v}_{Dx}$ väärtus. Plaani pooluseks valime meelevaldse punkti p (joon. 272, *b*). Lähtudes sellest kanname kiirusplaani mastaabis μ_v joonestatud lõikude (pd) ja (pb) näol kõigepealt etteantud kiirused $\boldsymbol{v}_D$ ja $\boldsymbol{v}_B$.

Edasi tõmbame läbi punkti b kiiruse v_{DxB}-sihilise, s. o. DB ristsirge. Läbi punkti d tõmbame omakorda v_{DDx}-sihilise, s. o. juhtsirgega xx paralleelse sirge. Nende sirgete lõikumine määrabki ära punkti D_x kiirusvektori v_{Dx} lõpp-punkti d_x. Kiiruse v_{Dx} väärtus saadakse seosest

$$v_{Dx} = \mu_v (pd_x).$$

Lüli BC nurkkiiruse ω_{BC} suurus arvutatakse valemiga

$$|\omega_{BC}| = \frac{v_{DxB}}{l_{BD}} = \frac{\mu_v (bd_x)}{\mu_l (BD)}.$$

Nurkkiiruse suund määratakse samuti nagu varemkäsitletud gruppideski. Lüli CD nurkkiirus ω_{CD} võrdub lüli BC nurkkiirusega ω_{BC}:

$$\omega_{CD} = \omega_{BC},$$

sest nimetatud lülid on omavahel seotud translatsioonipaariga.

Lüli CD meelevaldse punkti F kiiruse leidmiseks määrame kõigepealt juhtsirgele xx kuuluva punkti F_x kiiruse. Selleks konstrueerime kiirusplaani lõigule (bd_x) kolmnurga bf_xd_x (joon. 272, b), mis on geomeetriliselt sarnane diaadi skeemil esineva kolmnurgaga BF_xD_x (joon. 272, a). Kiirusplaani lõik (pf_x) kujutab mastaabis μ_v juhtsirge xx punkti F_x kiirust.

Nüüd võime kirjutada

$$v_F = v_{Fx} + v_{FFx}.$$

Silmas pidades, et

$$v_{FFx} = v_{DDx},$$

saame lõplikult

$$v_F = v_{Fx} + v_{DDx}.$$

Lähtudes punktist f_x kanname kiirusplaani lõiguga (dd_x) pikkuselt võrdse joonlõigu (ff_x). Viimane kujutabki kiirust $v_{FFx} = v_{DDx}$. Ühendades omavahel punktid f ja p, saame lõigu (pf) näol punkti F kiirusvektori. Seega

$$v_F = \mu_v (pf).$$

7°. Analoogiliselt kiiruste määramise ülesandega on diaadi 3. modifikatsiooni kiirenduste määramisel etteantud suurusteks punktide B ja D kiirendusvektorid a_B ja a_D (joon. 273, a). Teada

on ka grupi kõikide lülide kiirused. Punktides K_1 ja K_2 seome juhtsirgega xx tasapinna S ja fikseerime viimasel punkti D_x, mis antud hetkel ühtib šarniiriga D. Nüüd võime kiirenduse $\boldsymbol{a}_D$ määramiseks kasutada seost

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_{D_x} + \boldsymbol{a}^k{}_{DD_x} + \boldsymbol{a}^r{}_{DD_x}. \tag{6.32}$$

Tasapinnale S kuuluva punkti D_x kiirenduse $\boldsymbol{a}_{D_x}$ võib omakorda avaldada järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}_{D_x} = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n{}_{D_xB} + \boldsymbol{a}^t{}_{D_xB}. \tag{6.33}$$

Asetades võrrandist (6.33) saadud $\boldsymbol{a}_{D_x}$ avaldise võrrandisse (6.32), leiame, et

$$\boldsymbol{a}_D = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n{}_{D_xB} + \boldsymbol{a}^t{}_{D_xB} + \boldsymbol{a}^k{}_{DD_x} + \boldsymbol{a}^r{}_{DD_x}. \tag{6.34}$$

Võrrandis (6.34) esinevad kiirendused $\boldsymbol{a}_D$ ja $\boldsymbol{a}_B$ on ette antud. Kiirenduste $\boldsymbol{a}^n{}_{D_xB}$ ja $\boldsymbol{a}^k{}_{DD_x}$ väärtused määratakse valemitega, mis on analoogilised varemkäsitletutega:

$$a^n{}_{D_xB} = \frac{v^2{}_{D_xB}}{l_{BD}} = \omega^2{}_{BC} l_{BD} = \frac{\mu^2{}_v (bd_x)^2}{\mu_l (BD_x)}$$

ja

$$a^k{}_{DD_x} = 2\,|\omega_{BC}|\, v_{DD_x} = 2\,\frac{\mu^2{}_v (bd_x)(dd_x)}{\mu_l (BD_x)}.$$

Lõigud (bd_x) ja (dd_x) võetakse seejuures kiirusplaanist, kuna lõik (BD_x) saadakse mehhanismi skeemilt. Kiirendus $\boldsymbol{a}^n{}_{D_xB}$, mis kulgeb sihis BD_x, on suunatud punktist D_x punkti B. Kiirendus $\boldsymbol{a}^k{}_{DD_x}$ kulgeb risti juhtsirgega xx ja tema suund sõltub nii nurkkiiruse ω_{BC} kui ka suhtelise kiiruse $\boldsymbol{v}_{DD_x}$ suunast.

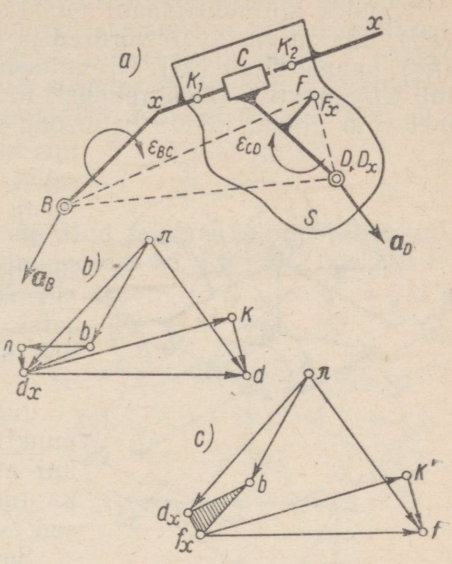
Kiirenduste $\boldsymbol{a}^t{}_{D_xB}$ ja $\boldsymbol{a}^r{}_{DD_x}$ sihid on teada. Esimene neist kulgeb risti sihiga BD_x, teine aga paralleelselt juhtsirgega xx. Võrrandis (6.34) on tundmatuiks seega ainult kiirenduste $\boldsymbol{a}^t{}_{D_xB}$ ja $\boldsymbol{a}^r{}_{DD_x}$ väärtused. Nende määramiseks tuleb konstrueerida kiirendusplaan. Plaani pooluseks valime punkti π (joon. 273, *b*). Lähtudes sellest punktist, kanname plaani kõigepealt etteantud kiirendused $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_D$. Valitud mastaabis μ_a kujutavad neid kiirendusi joonlõigud (πb) ja (πd). Edasi kanname samas mastaabis plaanile kiirendusvektori $\boldsymbol{a}^n{}_{D_xB}$ — saame lõigu (bn), mis on suunatud punktist D_x punkti B, paralleelselt sihiga D_xB. Kiirenduse $\boldsymbol{a}^k{}_{DD_x}$ kanname kiirendusplaani samuti mastaabis μ_a, lõigu (dk) näol. Kuna $\boldsymbol{a}_D$ on võrrandi (6.34) põhjal resulteeriv vektor, siis tuleb ta kiirendusplaani nii kanda, et tema noole ots oleks suunatud punkti d. Edasi tõmbame

läbi punkti n sirge, mis kulgeks suhtelise tangentsiaalkiirenduse $\boldsymbol{a}^t_{D_xB}$ sihis ja läbi punkti k sirge, mis oleks paralleelne suhtelise kiirendusega $\boldsymbol{a}^r_{DD_x}$. Saadud sirgete lõikepunkt d_x osutubki tasapinnale S (ja seega ka lülile BC) kuuluva punkti D_x täiskiirendusvektori $\boldsymbol{a}_{D_x}$ lõpppunktiks.

Lüli BC nurkkiirenduse ε_{BC} väärtus arvutatakse valemiga

$$|\varepsilon_{BC}| = \frac{a^t_{D_xB}}{l_{D_xB}} = \frac{\mu_a(nd_x)}{\mu_l(BD)},$$

suund aga määratakse analoogiliselt varemkäsitletud juhtudele. Lüli CD nurkkiirendus ε_{CD} võrdub lüli BC nurkkiirendusega ε_{BC}, s. t.



Joon. 273.

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_{BC},$$

sest nimetatud lülisid seob omavahel translatsioonipaar.

Lüli CD meelevaldse punkti F kiirenduse leiame järgmiselt. Punktide B ja D_x tuntud kiirenduste abil konstrueerime kõigepealt punkti F_x kiirenduse. Selleks joonestame kiirendusplaanis (joon. 273, c) lõigule (bd_x) kolmnurga bf_xd_x, mis on geomeetriliselt sarnane joonisel 273, a esineva kolmnurgaga BF_xD_x. Juhtsirge xx punkti F_x kiirusvektori lõpp asub punktis f_x. Lüli CD punkti F kiirendus määratakse nüüd võrrandiga

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{F_x} + \boldsymbol{a}^k_{FF_x} + \boldsymbol{a}^r_{FF_x}. \qquad (6.35)$$

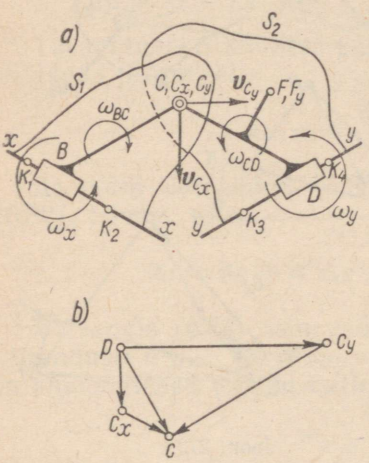
Punkti F relatiivne kiirendus punkti F_x suhtes võrdub punkti D relatiivse kiirendusega $\boldsymbol{a}^r_{DD_x}$ punkti D_x suhtes. Lüli CD suhtelises liikumises võrduvad omavahel ka tema kõikide punktide Coriolise kiirendused, seega

$$\boldsymbol{a}^k_{FF_x} = \boldsymbol{a}^k_{DD_x}.$$

Seda silmas pidades võime võrrandi (6.35) asemele kirjutada:

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{F_x} + \boldsymbol{a}^k_{DD_x} + \boldsymbol{a}^r_{DD_x}.$$

Kandes kiirendusplaani punktist f_x lähtudes lõigud $(f_x k')$ ja $(k'f)$, mis on vastavalt võrdsed ja paralleelsed lõikudega $(d_x k)$ ja (kd), saame lõigu (πf). Kiirendusplaani mastaabis μ_a kujutab see lüli CD punkti F täiskiirendust. Eraldi lõikude $(f_x k')$ ja $(k'f)$ asemel võib plaani kanda ka nende geomeetrilise summa. Lüli CD mis tahes teise punkti kiirendust võib nüüd määrata geomeetriliselt sarnaste kolmnurkade abil.



Joon. 274.

8°. Käsitleme nüüd diaadi 4. modifikatsiooni. Selles modifikatsioonis esineb teatavasti kaks translatsioonipaari, millede vahel paikneb üks rotatsioonipaar (joon. 274, *a*).

Juhtsirgete xx ja yy kõikide punktide kiirused on käesoleval juhul ette antud. Järelikult on teada ka nimetatud juhtsirgete nurkkiirused ω_x ja ω_y.

Seome juhtsirgega xx tasapinna S_1 ja juhtsirgega yy — tasapinna S_2. Fikseerime neil tasapindadel punktid C_x ja C_y, mis antud hetkel ühtivad diaadi punktiga C. Punktide C_x ja C_y kiirusi $\boldsymbol{v}_{Cx}$ ja $\boldsymbol{v}_{Cy}$ saab määrata üldiste reeglitega, sest juhtsirgete xx ja yy kõikide punktide kiirused on teada. Punkti C kiirus $\boldsymbol{v}_C$ leitakse seepeale võrranditest

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_{Cx} + \boldsymbol{v}_{CCx}, \\ \boldsymbol{v}_C &= \boldsymbol{v}_{Cy} + \boldsymbol{v}_{CCy}. \end{aligned}\right\} \tag{6.36}$$

Lahendades need võrrandid koos, saame:

$$\boldsymbol{v}_{Cx} + \boldsymbol{v}_{CCx} = \boldsymbol{v}_{Cy} + \boldsymbol{v}_{CCy}. \tag{6.37}$$

Võrrandis (6.37) esinevad vektorid $\boldsymbol{v}_{Cx}$ ja $\boldsymbol{v}_{Cy}$ on tuntud nii suuruse kui ka suuna poolest. Teada on ka vektorite $\boldsymbol{v}_{CCx}$ ja $\boldsymbol{v}_{CCy}$ sihid. Tõepoolest, punkti C kiirus juhtsirge xx suhtes $\boldsymbol{v}_{CCx}$ on nimetatud juhtsirgega paralleelne. Punkti C kiirus juhtsirge yy suhtes $\boldsymbol{v}_{CCy}$ on omakorda paralleelne juhtsirgega yy. Vektorite $\boldsymbol{v}_{CCx}$ ja $\boldsymbol{v}_{CCy}$ moodulid ja punkti C absoluutne kiirus $\boldsymbol{v}_C$ määratakse kiirusplaani abil. Valime selle pooluseks meelevaldse punkti p (joon. 274, *b*). Lähtudes valitud poolusest, kanname plaani lõigud (pc_x) ja (pc_y), mis kasutatavas mastaabis μ_v kujutavad punk-

tide C_x ja C_y kiirusi v_{Cx} ja v_{Cy}. Edasi, lähtudes saadud punktidest c_x ja c_y, tõmbame kaks sirget, milledest esimene on v_{CCx}-sihiline, s. t. paralleelne juhtsirgega xx, teine aga v_{CCy}-sihiline, s. t. paralleelne juhtsirgega yy. Nimetatud sirgete lõikepunkt c kujunebki punkti C kiirusvektori v_C lõpp-punktiks. Kiiruse v_C väärtuse aga arvutame seosest

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Lüli BC nurkkiirus ω_{BC} on määratud sellega, et nimetatud lüli moodustab juhtsirgega xx translatsioonipaari. Lüli BC nurkkiirus võrdub järelikult juhtsirge xx ette-antud nurkkiirusega, s. t.

$$\omega_{BC} = \omega_x.$$

Analoogiliselt võib kirjutada

$$\omega_{CD} = \omega_y,$$

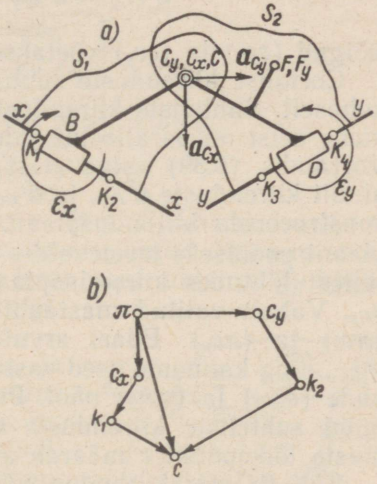
sest lüli CD ja juhtsirget yy seob samuti translatsioonipaar.

Lülile CD kuuluva meelevaldse punkti F (joon. 274, a) kiirus määratakse seosest

$$v_F = v_{Fy} + v_{FFy} = v_{Fy} + v_{CCy},$$

sest lüli CD liikumisel piki juhtsirget yy on tema kõikide punktide suhtelised kiirused omavahel võrdsed, seega ka

$$v_{FFy} = v_{CCy}.$$



Joon. 275.

Punkti F kiirus määratakse kiirusplaanist viisil, mida käsitleti diaadi 2. modifikatsiooni puhul.

9°. Diaadi 4. modifikatsiooni juhtsirgete xx ja yy kõikide punktide kiirendused on ette antud (joon. 275, a). Järelikult on teada ka juhtsirgete nurkkiirendused ε_x ja ε_y. Lisaks sellele on konstrueeritud grupi kõikide lülide kiirused. Seome juhtsirgega xx jäigalt tasapinna S_1 ja määrame sellel punkti C_x, mis antud hetkel ühtib diaadi punktiga C. Samal viisil ühendame juhtsirgega yy tasapinna S_2, fikseerides sellel antud hetkel diaadi punktiga C ühtiva punkti C_y. Punkti C kiirenduse leidmiseks tuleb lahendada vektorvõrrandite süsteem

$$\left.\begin{aligned} a_C &= a_{Cx} + a^k_{CCx} + a^r_{CCx}, \\ a_C &= a_{Cy} + a^k_{CCy} + a^r_{CCy}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.38)$$

millest saame:

$$a_{Cx} + a^k_{CCx} + a^r_{CCx} = a_{Cy} + a^k_{CCy} + a^r_{CCy}. \qquad (6.39)$$

Võrrandis (6.39) esinevad punktide C_x ja C_y kiirendused a_{Cx} ja a_{Cy} on tuntud. Coriolise kiirenduste a^k_{CCx} ja a^k_{CCy} väärtused saadakse valemitest

$$a^k_{CCx} = 2|\omega_x| v_{CCx} = 2|\omega_x| \mu_v (cc_x)$$

ja

$$a^k_{CCy} = 2\,|\omega_y|\, v_{CCy} = 2\,|\omega_y|\, \mu_v (cc_y).$$

Lõigud (cc_x) ja (cc_y) võetakse seejuures kiirusplaanist.

Coriolise kiirenduste suunad määratakse § 25,2° toodud juhise kohaselt. Suhteliste kiirenduste a^r_{CCx} ja a^r_{CCy} sihid on teada: esimene neist on paralleelne juhtsirgega xx ja teine juhtsirgega yy. Võrrandis (6.39) esinevatest suurustest on seega tundmatuteks ainult kiirenduste a^r_{CCx} ja a^r_{CCy} väärtused. Nende leidmiseks tuleb konstrueerida kiirendusplaan. Nagu tavaliselt, valime kiirendusplaani pooluseks meelevaldse punkti π (joon. 275, *b*) ja kanname sellest lähtudes kiirendusplaani meile tuntud kiirendused a_{Cx} ja a_{Cy}. Vabalt valitud mastaabi μ_a puhul vastaku neile joonlõigud (πc_x) ja (πc_y). Edasi arvutame Coriolise kiirendused a^k_{CCx} ja a^k_{CCy} ning kanname need vastavates suundades kiirendusplaani lõikude $(c_x k_1)$ ja $(c_y k_2)$ näol. Punktidest k_1 ja k_2 lähtudes tõmbame nüüd suhteliste kiirenduste a^r_{CCx} ja a^r_{CCy} sihilised sirged. Viimaste lõikepunkt c määrab ära punkti C täiskiirendusvektori a_C.

Lüli BC nurkkiirendus võrdub juhtsirge xx nurkkiirendusega:

$$\varepsilon_{BC} = \varepsilon_x,$$

sest lüli BC ja juhtsirge xx on omavahel seotud translatsioonipaariga. Samal põhjusel võrduvad omavahel ka lüli CD ja juhtsirge yy nurkkiirendused:

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_y.$$

Lülile CD kuuluva meelevaldse punkti F (joon. 275, *a*) kiirenduse a_F leidmiseks võib kasutada võrrandit

$$a_F = a_{Fy} + a^k_{FFy} + a^r_{FFy} = a_{Fy} + a^k_{CCy} + a^r_{CCy}, \qquad (6.40)$$

sest

$$a^k_{FFy} = a^k_{CCy}$$

ja

$$a^r_{FFy} = a^r_{CCy}.$$

Otsitav kiirendus saadakse kiirendusplaanist viisil, mida kasutasime juba diaadi 2. modifikatsiooni puhul.

10°. Käsitleme nüüd lõpuks diaadi 5. modifikatsiooni. Nimetatud modifikatsiooni iseloomustavad kaks teineteisele järgnevat translatsioonipaari ja üks rotatsioonipaar (joon. 276, *a*). Etteantud suurusteks on punkti B kiirus v_B ja juhtsirge yy kõikide punktide kiirused. Järelikult on teada ka juhtsirge nurkkiirus ω_y. Punktides K_1 ja K_2 seome juhtsirgega xx jäigalt tasapinna S_1. Juhtsirgega yy ühendame punktides K_3 ja K_4 tasapinna S_2. Fikseerime punktid B_x ja B_y, mis antud hetkel ühtivad diaadi punktiga B. Kiiruste määramise võrranditeks on

$$\left.\begin{aligned} v_B &= v_{B_x} + v_{BB_x}, \\ v_{B_x} &= v_{B_y} + v_{B_xB_y}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.41)$$

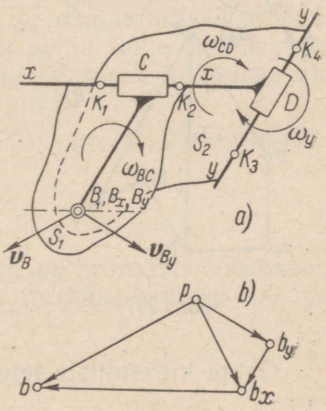
Lahendades need võrrandid (6.41) koos, saame:

$$v_B = v_{B_y} + v_{B_xB_y} + v_{BB_x}. \qquad (6.42)$$

Võrrandis (6.42) esinevad punktide B ja B_y kiirused v_B ja v_{B_y} on meile tuntud. Tõepoolest, kiirus v_B on ette antud. Mis puutub kiirust v_{B_y}, siis seda on võimalik alati leida, sest juhtsirge yy kõikide punktide kiirused on ülesande tingimuste kohaselt ette antud.

Edasi on teada kiiruste $v_{B_xB_y}$ ja v_{BB_x} sihid. Esimene neist on paralleelne juhtsirgega yy ja teine juhtsirgega xx. Nimetatud kiiruste väärtusi ja punkti B_x kiirust v_{B_x} saab määrata kiirusplaani konstrueerimisega.

Lähtudes kiirusplaani pooluseks võetud meelevaldsest punktist p (joon. 276, *b*), kanname joonisele lõigud (pb) ja (pb_y). Mastaabis μ_v kujutavad need kiirusi v_B ja v_{B_y}. Läbi punkti b_y tõmbame suhtelise kiiruse $v_{B_xB_y}$ sihilise, s. o. translatsioonipaari teljega yy paralleelselt kulgeva sirge. Punktist b lähtudes joonestame omakorda sirgjoone, mis kulgeb suhtelise kiiruse v_{BB_x} sihis, s. t. paralleelselt juhtsirgega xx. Punkti B_x kiirusvektor v_{B_x} lõpeb saadud sirgete lõikepunktis b_x.



Joon. 276.

Lüli CD nurkkiirus ω_{CD} on võrdne juhtsirge yy etteantud nurkkiirusega, sest nimetatud lüli ja juhtsirget seob omavahel translatsioonipaar. Seega

$$\omega_{CD} = \omega_y.$$

Samal põhjusel võrdub lüli BC nurkkiirus ω_{BC} lüli CD nurkkiirusega ω_{CD}, s. t.

$$\omega_{BC} = \omega_{CD} = \omega_y.$$

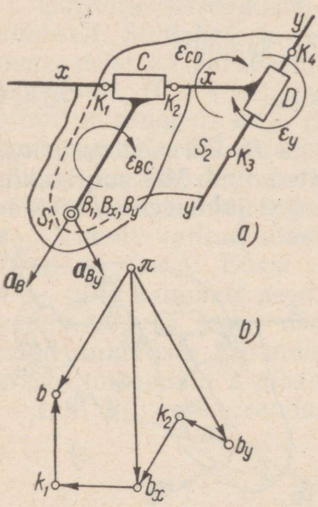
Lülile BC kuuluva meelevaldse punkti F (joon. 276, *a*) kiiruse määramiseks kasutame võrrandit

$$\boldsymbol{v}_F = \boldsymbol{v}_{Fy} + \boldsymbol{v}_{FxFy} + \boldsymbol{v}_{FFx} = \boldsymbol{v}_{Fy} + \boldsymbol{v}_{B_xB_y} + \boldsymbol{v}_{BB_x}, \qquad (6.43)$$

sest

$$\boldsymbol{v}_{FxFy} = \boldsymbol{v}_{B_xB_y} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{v}_{FFx} = \boldsymbol{v}_{BB_x}.$$

Kiirusvektorit $\boldsymbol{v}_{Fy}$ saab hõlpsasti määrata, sest tasapinna S_2 (joon. 276, *a*) kõikide punktide kiirused on teada. Kiirusi $\boldsymbol{v}_{B_xB_y}$ ja $\boldsymbol{v}_{BB_x}$ võib leida nii eraldi kui ka koos, nende geomeetrilise summa näol, varemkonstrueeritud kiirusplaanist (joon. 276, *b*). Nimetatud kiirusvektorite geomeetriline liitmine annab punkti F kiiruse resulteeriva vektori $\boldsymbol{v}_F$ kujul.



Joon. 277.

11°. Lahendame nüüd kiirenduste leidmise ülesande. Diaadi 5. modifikatsiooni puhul on punkti B ja juhtsirge yy kõikide punktide kiirendused ette antud (joon. 277, *a*). Järelikult on teada ka juhtsirge nurkkiirendus ε_y. Lisaks eeltoodule on grupi kõikide lülide kiirused antud. Punktides K_1 ja K_2 seome jäigalt juhtsirge xx külge tasapinna S_1 ja fikseerime sellel punkti B_x, mis antud hetkel ühtib diaadi punktiga B. Punktides K_3 ja K_4 seome samal viisil juhtsirge yy külge tasapinna S_2, millel fikseerime diaadi punktiga B kokkulangeva punkti B_y.

Grupi kiirenduste leidmiseks koostame võrrandi

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{B_x} + \boldsymbol{a}^k_{BB_x} + \boldsymbol{a}^r_{BB_x}. \qquad (6.44)$$

Kuna kiirendust $\boldsymbol{a}_{B_x}$ võib avaldada järgmisel kujul

$$\boldsymbol{a}_{B_x} = \boldsymbol{a}_{B_y} + \boldsymbol{a}^k_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^r_{B_xB_y}, \qquad (6.45)$$

siis võib võrrandi (6.44) asemel kirjutada

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{B_y} + \boldsymbol{a}^k_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^r_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^k_{BB_x} + \boldsymbol{a}^r_{BB_x}. \qquad (6.46)$$

Võrrandis (6.46) esinevad kiirendused $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_{B_y}$ on tuntud. Coriolise kiirenduste $\boldsymbol{a}^k{}_{B_xB_y}$ ja $\boldsymbol{a}^k{}_{BB_x}$ suurused määratakse tuntud valemitega

$$a^k{}_{B_xB_y} = 2\,|\omega_y|\,v_{B_xB_y} = 2\,|\omega_y|\,\mu_v(b_yb_x) = \mu_a(b_yk_2)$$

ja

$$a^k{}_{BB_x} = 2\,|\omega_y|\,v_{BB_x} = 2\,|\omega_y|\,\mu_v(b_xb) = \mu_a(k_1b).$$

Lõigud (b_yb_x) ja (b_xb) võetakse seejuures kiirusplaanist. Coriolise kiirenduste suunad määratakse tavalisel viisil. Kiirenduste $\boldsymbol{a}^r{}_{B_xB_y}$ ja $\boldsymbol{a}^r{}_{BB_x}$ sihid on teada: esimene neist on paralleelne juhtsirgega yy ja teine juhtsirgega xx. Seega on võrrandis (6.46) tundmatuiks ainult kiirenduste $\boldsymbol{a}^r{}_{B_xB_y}$ ja $\boldsymbol{a}^r{}_{BB_x}$ suurused. Nende leidmiseks tuleb konstrueerida kiirendusplaan. Nagu tavaliselt, valime kiirendusplaani pooluseks meelevaldse punkti π (joon. 277, *b*). Lähtudes poolusest kanname kiirendusplaani lõigud (πb) ja (πb_y), mis meie poolt valitud mastaabis μ_a kujutavad kiirendusi $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_{B_y}$. Edasi arvutame kiirendused $\boldsymbol{a}^k{}_{B_xB_y}$ ja $\boldsymbol{a}^k{}_{BB_x}$ ning kanname nad kiirendusplaani järgmiselt: esimese alates punktist b_y lõigu (b_yk_2) näol ja teise — punkti b suunduva lõigu (k_1b) näol. Mõlemad lõigud on võetud mastaabis μ_a. Punktidest k_2 ja k_1 tõmbame suhteliste kiirenduste $\boldsymbol{a}^r{}_{B_xB_y}$ ja $\boldsymbol{a}^r{}_{BB_x}$ sihilised sirged. Esimene neist on paralleelne juhtsirgega yy ja teine juhtsirgega xx. Nimetatud sirgete lõikepunkt b_x annabki meile juhtsirge xx punkti B_x täiskiirendusvektori $\boldsymbol{a}_{B_x}$ lõpp-punkti.

Lüli CD nurkkiirendus ε_{CD} võrdub juhtsirge yy nurkkiirendusega:

$$\varepsilon_{CD} = \varepsilon_y,$$

sest lüli CD moodustab koos juhtsirgega yy translatsioonipaari. Samal põhjusel võrduvad omavahel ka nurkkiirendused ε_{BC} ja ja ε_{CD}. Järelikult:

$$\varepsilon_{BC} = \varepsilon_{CD} = \varepsilon_y.$$

Lüli BC külge kuuluva meelevaldse punkti F kiirenduse määramiseks koostame võrrandid

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_F &= \boldsymbol{a}_{F_x} + \boldsymbol{a}^k{}_{FF_x} + \boldsymbol{a}^r{}_{FF_x} \\ \text{ja} \qquad \boldsymbol{a}_{F_x} &= \boldsymbol{a}_{F_y} + \boldsymbol{a}^k{}_{F_xF_y} + \boldsymbol{a}^r{}_{F_xF_y}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.47)$$

kust saame:

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{F_y} + \boldsymbol{a}^k{}_{F_xF_y} + \boldsymbol{a}^r{}_{F_xF_y} + \boldsymbol{a}^k{}_{FF_x} + \boldsymbol{a}^r{}_{FF_x}. \qquad (6.48)$$

Kuna aga

$$\boldsymbol{a}^r_{F_xF_y} + \boldsymbol{a}^k_{F_xF_y} = \boldsymbol{a}^r_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^k_{B_xB_y}$$

ja

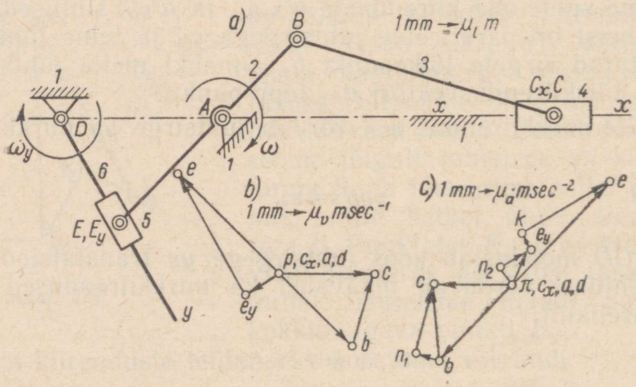
$$\boldsymbol{a}^r_{FF_x} + \boldsymbol{a}^k_{FF_x} = \boldsymbol{a}^r_{BB_x} + \boldsymbol{a}^k_{BB_x},$$

siis võib võrrandit (6.48) kirjutada järgmiselt:

$$\boldsymbol{a}_F = \boldsymbol{a}_{F_y} + \boldsymbol{a}^k_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^r_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^k_{BB_x} + \boldsymbol{a}^r_{BB_x}. \qquad (6.49)$$

Võrrandis (6.49) esinev punkti F_y kiirendus $\boldsymbol{a}_{F_y}$ on tuntud. Kiirendused $\boldsymbol{a}^k_{B_xB_y}$, $\boldsymbol{a}^r_{B_xB_y}$, $\boldsymbol{a}^k_{BB_x}$ ja $\boldsymbol{a}^r_{BB_x}$ saame määrata meie poolt konstrueeritud kiirendusplaanist (joon. 277, *b*). Võrrandi (6.49) paremal poolel olevad liikmed on seega kõik tuntud ja punkti F täiskiirendusvektor $\boldsymbol{a}_F$ määratakse nende geomeetrilise liitmise teel.

Näide 3. Joonisel 278 on kujutatud kuuelüliline 2. klassi kulissmehhanism. Ülesandeks on määrata mehhanismi lülide kiirendused ja kiirused juhul, kui vänt *AB* pöörleb etteantud püsiva nurkkiirusega ω. Mehhanism on moodustatud vändale *AB* ja kinnislülile kahe 2. klassi grupi liitmise teel. Lülidest *3* ja *4* koosnev grupp *BC* on 2. modifikatsiooni diaad, lülide *5* ja *6* poolt moodustatud diaad aga kuulub 3. modifikatsiooni.



Joon. 278.

Koostame kiiruste ja kiirenduste määramiseks vajalikud võrrandid. Selleks fikseerime juhtsirgetel *xx* ja *yy* asuvad punktid C_x ja E_y, mis antud hetkel ühtivad diaadide punktidega *C* ja *E*.

Diaadi *BC* kohta võime kirjutada:

$$\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} = \boldsymbol{v}_{C_x} + \boldsymbol{v}_{CC_x}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB} = \boldsymbol{a}_{C_x} + \boldsymbol{a}^k_{CC_x} + \boldsymbol{a}^r_{CC_x}.$$

Kuna käesoleval juhul

$$\boldsymbol{v}_{Cx} = 0, \quad \boldsymbol{a}_{Cx} = 0, \quad \boldsymbol{a}^k{}_{CCx} = 0,$$

siis saadud võrrandid lihtsustuvad:

$$\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} = \boldsymbol{v}_{CCx}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n{}_{CB} + \boldsymbol{a}^t{}_{CB} = \boldsymbol{a}^r{}_{CCx}.$$

Diaadi DE kohta võib kirjutada järgmised võrrandid:

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{EyD} + \boldsymbol{v}_{EEy}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n{}_{EyD} + \boldsymbol{a}^t{}_{EyD} + \boldsymbol{a}^k{}_{EEy} + \boldsymbol{a}^r{}_{EEy}.$$

Kuna käesoleval juhul

$$\boldsymbol{v}_D = 0, \boldsymbol{a}_D = 0,$$

siis

$$\boldsymbol{v}_E = \boldsymbol{v}_{EyD} + \boldsymbol{v}_{EEy}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_E = \boldsymbol{a}^n{}_{EyD} + \boldsymbol{a}^t{}_{EyD} + \boldsymbol{a}^k{}_{EEy} + \boldsymbol{a}^r{}_{EEy}.$$

Kiirusplaani konstrueerimiseks valime sobiva kiiruse mastaabi μ_v. Lähtudes meelevaldselt valitud punktist p (joon. 278, *b*), kanname joonisele lõigud (pb) ja (pe), mis kujutavad punktide B ja E kiirusi $\boldsymbol{v}_B$ ja $\boldsymbol{v}_E$. Nimetatud kiiruste väärtused saadakse valemitest

$$v_B = |\omega|\, l_{AB} = |\omega|\, \mu_l(AB) = \mu_v(pb)$$

ja

$$v_E = |\omega|\, l_{AE} = |\omega|\, \mu_l(AE) = \mu_v(pe),$$

kusjuures μ_l tähistab mehhanismi joonestamisel kasutatud pikkuse mastaapi. Kui lõigud (pb) ja (pe) valida nii, et $(pb) = (AB)$ ja $(pe) = (AE)$, siis mastaabi μ_v väärtuseks kujuneb

$$\mu_v = |\omega|\, \mu_l.$$

Lõigud (pb) ja (pe) tuleb kiirusplaani kanda nii, et nad kulgeksid risti lüli 2 teljega. Edasi tõmbame läbi punkti b kiiruse $\boldsymbol{v}_{CB}$ sihilise sirge, s. t. ristjoone lülile BC, ja läbi pooluse p — kiiruse $\boldsymbol{v}_{CCx}$ sihilise sirge, s. t. paralleeljoone juhtsirgele xx. Sirgete lõikepunkt c määrab punkti C kiirusvektori $\boldsymbol{v}_C$ lõpp-punkti.

Selle kiiruse väärtuseks on

$$v_C = \mu_v(pc).$$

Kuna kiirused $\boldsymbol{v}_A$ ja $\boldsymbol{v}_D$ võrduvad nulliga, siis ühtivad punktid a ja d kiirusplaani poolusega. Edasi tõmbame läbi punkti e kiiruse $\boldsymbol{v}_{EEy}$ sihilise sirge (s. t. paralleeljoone juhtsirgele yy) ja läbi pooluse p — kiiruse $\boldsymbol{v}_{EyD}$ sihis kul-

geva sirge (s. t. ristjoone juhtsirgele yy). Saadud lõikepunkt e_y määrab kiirusplaanis punkti E_y kiirusvektori $\boldsymbol{v}_{Ey}$.

Kiiruse $\boldsymbol{v}_{Ey}$ mooduliks on

$$v_{Ey} = \mu_v (pe_y).$$

Kiirendusplaani konstrueerimiseks valime kõigepealt sobiva kiirenduste mastaabi μ_a. Meelevaldselt valitud punktist π lähtudes (joon. 278, *c*) kanname seepeale kiirendusplaani kiirendusi $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_E$ kujutavad joonlõigud (πb) ja (πe). Nimetatud kiirenduste väärtused saadakse valemitest

$$a_B = \omega^2 l_{AB} = \omega^2 \mu_l (AB),$$
$$a_E = \omega^2 l_{AE} = \omega^2 \mu_l (AE).$$

Kui võtta joonlõigud (πb) ja (πe) vastavalt võrdsed lõikudega (AB) ja (AE), siis kujuneb kiirendusplaani mastaabiks $\mu_a = \omega^2 \mu_l$.

Kuna punktidel B ja E on ainult normaalkiirendus, tuleb lõigud (πb) ja (πe) joonisele kanda lüli 2 telje sihis. Esimene nimetatud lõikudest on suunatud punktist B punkti A ja teine — punktist E punkti A.

Edasi tõmbame läbi punkti b kiirenduse $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ sihilise, s. o. lüliga BC paralleelselt kulgeva sirge ja kanname sellele suunas $C \to B$ lõigu (bn_1), mis kujutab kiirendust $\boldsymbol{a}^n_{CB}$. Seega

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_{BC}} = \frac{\mu^2_v (bc)^2}{\mu_l (BC)} = \omega^2 \mu_l \frac{(bc)^2}{(BC)} = \mu_a (bn_1).$$

Kuna kasutatavad mastaabid olid valitud nii, et

$$\mu_a = \omega \mu_v = \omega^2 \mu_l,$$

siis järeldub ülaltoodust, et

$$(bn_1) = \frac{(bc)^2}{(BC)}.$$

Läbi punkti n_1 kanname nüüd kiirendusplaani sirge, mis kulgeb kiirenduse $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ sihis, s. t. on risti lüliga BC. Edasi tõmbame läbi punkti π kiirenduse $\boldsymbol{a}^r_{CCx}$ sihilise sirge (s. t. paralleeljoone juhtsirgele xx). Saadud sirgete lõikepunkt c määrab kiirusplaanis koha, kus lõpeb punkti C kiirendusvektor $\boldsymbol{a}_C$. Selle kiirenduse väärtuseks on

$$a_C = \mu_a (\pi c) = \omega^2 \mu_l (\pi c).$$

Läbi punkti e tõmbame seepeale Coriolise kiirenduse $\boldsymbol{a}^k_{EEy}$ sihis (s. t. risti juhtsirgega yy) kulgeva sirge. Kiirenduse $\boldsymbol{a}^k_{EEy}$ suurus on määratud valemiga

$$a^k_{EEy} = 2 |\omega_y| v_{EEy} = 2 \frac{v_{Ey}}{l_{DE}} \cdot v_{EEy} = 2 \frac{\mu^2_v (pe_y)(e_y e)}{\mu_l (DE)} = \mu_a (ke).$$

Saadud lõigu (*ke*) kanname äsja läbi punkti *e* tõmmatud sirgele. Kiirendusvektor $\boldsymbol{a}^k_{EE_y}$ tuleb seejuures kanda joonisele nii, et tema lõpp-punkt, s. o. nooleots langeks punkti *e*.

Järgmiseks joonestame punktist *k* lähtudes suhtelise kiirenduse $\boldsymbol{a}^r_{EE_y}$ sihis, s. t. juhtsirgega *yy* paralleelselt kulgeva sirge. Teiselt poolt, lähtudes poolusest π, kanname kiirendusplaani lõigu πn_2, mis on paralleelne juhtsirgega *yy* ja suunatud punktist *E* punkti *D*. Kiirendusplaani mastaabis kujutab see lõik normaalkiirendust $\boldsymbol{a}^n_{E_yD}$, mille suurus on arvutatav valemiga

$$a^n_{E_yD} = \frac{v^2_{E_yD}}{l_{ED}} = \frac{\mu^2_v (pe_y)^2}{\mu_l (ED)} = \omega^2 \mu^2_l \frac{(pe_y)^2}{ED} = \mu_a (\pi n_2).$$

Saadud punktist n_2 tõmbame lõpuks sirgjoone kiirenduse $\boldsymbol{a}^t_{E_yD}$ sihis (s. o. risti juhtsirgega *yy*). Kiirenduste $\boldsymbol{a}^r_{E_yE}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{E_yD}$ sihiliste sirgete lõikepunkt e_y määrab kiirendusplaanis koha, kus lõpeb punkti E_y täiskiirenduse vektor $\boldsymbol{a}_{E_y}$. Kiirenduse $\boldsymbol{a}_{E_y}$ väärtuseks on seejuures

$$a_{E_y} = \mu_a (\pi e_y) = \omega^2 \mu_l (\pi e_y).$$

§ 31. Kolmanda klassi gruppide kiiruste ja kiirenduste leidmine

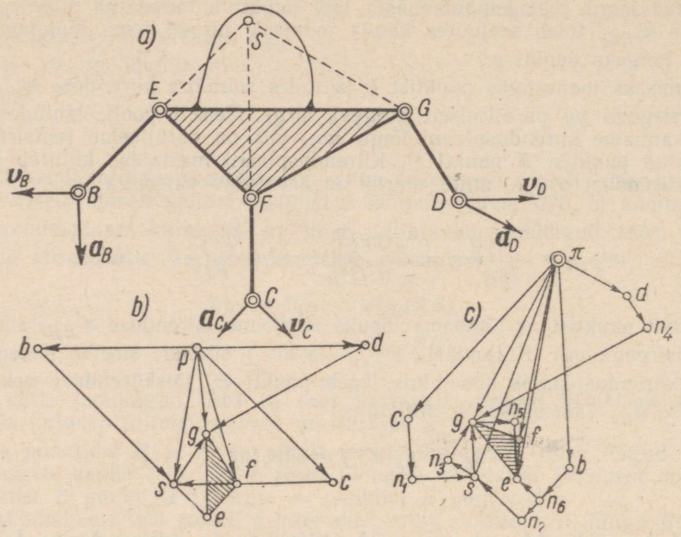
1°. 3. klassi gruppide kiirusi ja kiirendusi võib määrata meetodiga, mida nimetatakse *eripunktide* ehk, käsitletavat meetodit esmakordselt rakendatud vene teadlase L. V. Assuri nime järgi — *Assuri punktide* meetodiks.

Meetodiga tutvumiseks lahendame kõigepealt kolmehaarmelise 3. klassi grupi kiiruste ja kiirenduste määramise ülesande.

Olgu antud kolmehaarmeline 3. klassi grupp, kusjuures kõik gruppi kuuluvad paarid olgu rotatsioonipaarid (joon. 279, *a*). Välisšarniiride *B*, *C* ja *D* kiirused ja kiirendused olgu samuti teada. Ülesandeks on leida grupi kõikide lülide kiirused ja kiirendused. Pikendame haarmete *BE* ja *CF* telgi, kuni need lõikuvad punktis *S*, mis ise kuulub lülile *EGF*. Edasi, lähtudes meelevaldselt valitud punktist *p* (joon. 279, *b*), kanname joonisele lõigud (*pb*), (*pc*) ja (*pd*). Meie poolt meelevaldselt valitud mastaabis μ_v kujutavad need lõigud punktide *B*, *C* ja *D* etteantud kiirusi. Lüliga *EGF* seotud punkti *S* kiirus $\boldsymbol{v}_S$ määratakse alljärgnevate seostega (vt. § 25, 2°):

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_S &= \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_{SE} = \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{EB} + \boldsymbol{v}_{SE}, \\ \boldsymbol{v}_S &= \boldsymbol{v}_F + \boldsymbol{v}_{SF} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{FC} + \boldsymbol{v}_{SF}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.50)$$

Võrdustes (6.50) esinevatel vektoritel $\boldsymbol{v}_{EB}$ ja $\boldsymbol{v}_{SE}$ ühelt poolt ning vektoritel $\boldsymbol{v}_{FC}$ ja $\boldsymbol{v}_{SF}$ teiselt poolt on paarikaupa ühine kandesirge. Tõepoolest, kaks esimest vektorit on risti sirgega *SB* ja kaks viimast — risti sirgega *SC*.



Joon. 279.

Võrduste (6.50) alusel tõmbame läbi kiirusplaani punkti b sirge, mis kulgeb kiiruse $\boldsymbol{v}_{SB} = \overline{\boldsymbol{v}_{EB} + \boldsymbol{v}_{SE}}$ sihis (s. t. risti sihiga SB). Läbi kiirusplaani punkti c tõmbame teise sirge — kiirusvektori $\boldsymbol{v}_{SC} = \overline{\boldsymbol{v}_{FC} + \boldsymbol{v}_{SF}}$ sihis (s. t. risti SC-sihiga). Nimetatud sirgete lõikepunkt s määrab kiirusplaanis koha, kus peab lõppema punkti S kiirusvektor $\boldsymbol{v}_S$, mille väärtuseks on

$$v_S = \mu_v(ps).$$

Ühendame nüüd punkti S punktiga G ja kirjutame punkti G kiiruse määramiseks järgmised seosed:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_G &= \boldsymbol{v}_S + \boldsymbol{v}_{GS}, \\ \boldsymbol{v}_G &= \boldsymbol{v}_D + \boldsymbol{v}_{GD}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.51)$$

Seoste (6.51) põhjal joonestame kiirusplaani punktidest s ja d lähtudes kiiruste $\boldsymbol{v}_{GS}$ ja $\boldsymbol{v}_{GD}$ sihilised sirged. Need sirged on vastavalt risti sihtidega GS ja GD. Sirgete lõikepunkt g aga määrab ära punkti G kiirusvektori.

Kiiruse $\boldsymbol{v}_G$ suuruseks on järelikult

$$v_G = \mu_v(pg).$$

Teades punkti G kiirust, võime määrata punkti E kiiruse, kasutades seoseid

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_E &= \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}_{EG}, \\ \boldsymbol{v}_E &= \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{EB}. \end{aligned}\right\} \tag{6.52}$$

Punkti F kiiruse saab leida kas lähtudes kiirusplaani kolmnurga *egf* geomeetrilisest sarnasusest grupi skeemil esineva kolmnurgaga *EGF*, või kasutades seoseid

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{v}_F &= \boldsymbol{v}_G + \boldsymbol{v}_{FG}, \\ \boldsymbol{v}_F &= \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}_{FC}. \end{aligned}\right\} \tag{6.53}$$

Kiirusplaani konstruktsioon on näidatud joonisel 279, *b*.

Kahe haarme telje lõikumisel tekkivat punkti S nimetatakse *eripunktiks*. Kuna eripunkte võib moodustada mis tahes haarmete telgi kahekaupa lõikumiseni pikendades, siis kolmehaarmelises grupis saadakse kokku kolm eripunkti.

Kiirusplaani koostamisel võib nende seast alusena kasutada ükskõik missugust. Praktiliselt valitakse aluseks võetav eripunkt nii, et kiirusplaani konstrueerimine oleks võimalikult lihtne.

Tuleb silmas pidada, et punkti S käsitletakse alati kui grupi *aluslüli EGF* külge kuuluvat punkti. Eripunkt ei ole seega seotud haarmetega, mille telgede lõikumisel ta moodustub.

Erijuhul, kus kõigi kolme haarme teljed lõikuvad ühes ja samas punktis, langevad kõik eripunktid ühte. Sel juhul omandab grupp hetkelise lisaliikuvuse.

2°. Kolmehaarmelise 3. klassi grupi kiirenduste leidmise ülesanne lahendatakse analoogiliselt kiiruste määramise ülesandega. Nagu kiiruste määramiselgi, valime lülil *EGF* kõigepealt eripunkti S (joon. 279, *a*). Nimetatud punktiks võime oma äranägemisel võtta ükskõik missuguse kolmest olemasolevast eripunktist. Grupi kõikide punktide kiirendused konstrueeritakse järgmiselt. Valime kiirendusplaani pooluseks meelevaldse punkti π (joon. 279, *b*). Kanname plaani lõigud (πb), (πc) ja (πd), mis mastaabis μ_a kujutavad punktide B, C ja D etteantud kiirendusi $\boldsymbol{a}_B$, $\boldsymbol{a}_C$ ja $\boldsymbol{a}_D$. Eripunkti S kiirendus $\boldsymbol{a}_S$ määratakse võrranditest.

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_S &= \boldsymbol{a}_B + \overline{\boldsymbol{a}^n_{EB} + \boldsymbol{a}^n_{SE}} + \overline{\boldsymbol{a}^t_{EB} + \boldsymbol{a}^t_{SE}} = \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{SB} + \boldsymbol{a}^t_{SB}, \\ \boldsymbol{a}_S &= \boldsymbol{a}_C + \overline{\boldsymbol{a}^n_{FC} + \boldsymbol{a}^n_{SF}} + \overline{\boldsymbol{a}^t_{FC} + \boldsymbol{a}^t_{SF}} = \boldsymbol{a}_C + \boldsymbol{a}^n_{SC} + \boldsymbol{a}^t_{SC}. \end{aligned}\right\} \tag{6.54}$$

Lihtsuse mõttes on võrrandites (6.54) normaal- ja tangentsiaalkiirenduste summad kirjutatud resulteerivate vektorite $\boldsymbol{a}^n_{SB}$, $\boldsymbol{a}^n_{SC}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{SB}$, $\boldsymbol{a}^t_{SC}$ kujul, sest liidetavate vektorite suunad on ühtivad.

Suhteliste normaalkiirenduste suurused määratakse tavalisel meetodil, kasutades valemeid

$$a^n_{EB} = \frac{v^2_{EB}}{l_{BE}}, \quad a^n_{SE} = \frac{v^2_{SE}}{l_{ES}},$$

$$a^n_{FC} = \frac{v^2_{FC}}{l_{CF}}, \quad a^n_{SF} = \frac{v^2_{SF}}{l_{FS}}.$$

Normaalkiirendusvektorite suund määratakse samuti varemkäsitletud meetodiga. Kuna tangentsiaalkiirenduste summad on moodustatud ühissuunalistest liidetavatest vektoritest, siis pole tarvis neid liidetavaid üksikult määrata. Tangentsiaalkiirenduste summade määramiseks aga piisab, kui normaalkiirenduste $\boldsymbol{a}^n_{SB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{SC}$ lõpp-punktidest tõmmata sirged, mis ristuvad nimetatud normaalkiirendustega.

Ülalesitatu põhjal kanname kiirendusplaani, lähtudes punktidest b ja c, lõigud (bn_2) ja (cn_1). Mastaabis μ_a kujutavad need lõigud kiirendusi $\boldsymbol{a}^n_{SB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{SC}$. Edasi tõmbame punktidest n_2 ja n_1 kiirenduste $\boldsymbol{a}^t_{SB}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{SC}$ sihis kulgevad sirged. Esimene neist on seega risti sihiga SB ja teine — sihiga SC. Saadud sirgete lõikepunkt s määrab kiirendusplaanis koha, kus peab lõppema eripunkti S täiskiirenduse vektor $\boldsymbol{a}_S$. Viimase moodul saadakse valemiga

$$a_S = \mu_a(\pi s).$$

Punkti G kiirendus leitakse seostest

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_G &= \boldsymbol{a}_S + \boldsymbol{a}^n_{GS} + \boldsymbol{a}^t_{GS}, \\ \boldsymbol{a}_G &= \boldsymbol{a}_D + \boldsymbol{a}^n_{GD} + \boldsymbol{a}^t_{GD}. \end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

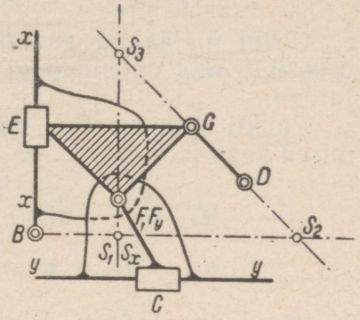
Lähtudes kiirendusplaani punktidest d ja s, kanname plaani lõigud (dn_4) ja (sn_3), mis mastaabis μ_a kujutavad kiirendusi $\boldsymbol{a}^n_{GD}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{GS}$. Läbi punktide n_3 ja n_4 tõmbame nüüd lõikudega GS ja GD risti kulgevate tangentsiaalkiirenduste $\boldsymbol{a}^t_{GS}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{GD}$ sihilised sirged. Viimaste lõikepunkt g määrab šarniiri G täiskiirenduse $\boldsymbol{a}_G$ lõpp-punkti. Teades šarniiri G kiirendust, on lihtne leida grupi ülejäänud punktide kiirendusi. Näiteks punkti E kiirendus määratakse seostega

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_E &= \boldsymbol{a}_G + \boldsymbol{a}^n_{EG} + \boldsymbol{a}^t_{EG}, \\ \boldsymbol{a}_E &= \boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{EB} + \boldsymbol{a}^t_{EB}. \end{aligned}\right\} \tag{6.56}$$

Punkti F kiirendus leitakse kiirendusplaani kolmnurga egf ja grupi skeemis esineva kolmnurga EGF geomeetrilise sarnasuse tingimusest. Selleks võib aga kasutada ka võrrandeid, mis on analoogilised seostega (6.56).

Kõik ülalnimetatud kiirendustega seotud konstruktsioonid on näidatud joonisel 279, *c*.

3°. Käsitleme nüüd kiiruste ja kiirenduste määramist eripunktide meetodiga olukorras, kus grupi koostisse kuulub peale rotatsioonipaaride ka translatsioonipaare. Olgu näiteks antud kolmehaarmeline 3. klassi grupp, mis sisaldab kahte translatsioonipaari E ja C (joon. 280). Punktide B ja D ning juhtsirge yy kõikide punktide kiirused olgu seejuures ette antud. Lüli EGF eripunktide määramiseks võib toimida järgmiselt. Tõmbame läbi punkti B ristjoone juhtsirgele xx. Läbi punkti F tõmbame aga sirge, mis ristub juhtsirgega yy. Nii saadud kahe sirge lõikepunkt S_1 on lüli EGF esimeseks võimalikuks eripunktiks. Teise eripunkti S_2 määrab juhtsirgele xx tõmmatud ristjoone lõikumine haarme GD teljega. Lõpuks, kolmas eripunkt S_3 saadakse, tõmmates läbi punkti F ristjoone juhtsirgele yy ja määrates selle lõikepunkti haarme GD teljega. Et suhteliste kiiruste v_{SxB} ja $v_{S_1S_x}$, v_{FF_y} ja v_{S_1F} jne. suunad paarikaupa ühtivad, siis võime järeldada, et leitud punktid S_1, S_2 ja S_3 osutuvad tõepoolest e r i p u n k t i d e k s.



Joon. 280.

Võttes aluseks näiteks eripunkti S_1, võib grupi kiirusi määrata järgmiselt. Punkti S_1 kiirus leitakse seostega

$$v_{S1} = v_B + \overline{v_{SxB} + v_{S_1S_x}}, \quad v_{S1} = v_{F_y} + \overline{v_{FF_y} + v_{S_1F}}. \qquad (6.57)$$

v_{F_y} tähistab siinjuures juhtsirge yy punkti F_y kiirust. Nimetatud kiirus on teada, sest ülesande tingimuste kohaselt on juhtsirge yy kõikide punktide kiirused ette antud. Vektor v_B tähistab punkti B etteantud kiirust. Punkt S_x on juhtsirgele xx kuuluv punkt, mis antud hetkel ühtib eripunktiga S_1. Nimetatud punkti kiirust relatiivses liikumises punkti B suhtes tähistab vektor v_{SxB}. Selle kiiruse suurus on tundmata, kuid on teada, et ta kulgeb risti sirgega BS_1. Eripunkti S_1 relatiivset kiirust juhtsirge xx suhtes tähistab võrrandites (6.57) vektor $v_{S_1S_x}$. Ka selle kiiruse suurus on tundmata, tema siht on aga jällegi teada — ta kulgeb paralleelselt juhtsirgega xx, s. t. risti sirgega BS_1. Kiirused v_{SxB} ja $v_{S_1S_x}$ on seega paralleelsed, ja neid tähistavate vektorite kohale võib seostes (6.57) tõmmata järelikult ühise kriipsu. Punkti F kiirust juhtsirgele yy kuuluva punkti F_y suhtes tähistab v_{FF_y}. See kiirus, mille suurus on tundmata, on paralleelne juhtsirgega yy, seega risti sihiga FS_1. Punkti S_1 relatiivne kiirus punkti F suhtes on tähistatud tähisega v_{S_1F}. Selle kiiruse suurus on jällegi tundmata, kuid

on teada, et ta kulgeb risti sihiga FS_1. Vektorid v_{FF_y} ja v_{S_1F} on järelikult omavahel paralleelsed. Seda asjaolu märgib ära käsitletud vektorite kohale seostes (6.57) tõmmatud ühine kriips. Punkti S_1 kiirus saadakse võrduste (6.57) lahendamise tulemusena.

Punkti G kiirus määratakse nüüd võrranditest

$$\left.\begin{aligned} v_G &= v_{S_1} + v_{GS_1}, \\ v_G &= v_D + v_{GD}. \end{aligned}\right\} \tag{6.58}$$

Grupi ülejäänud punktide kiirused leitakse tavaliste võrrandite abil, mis on analoogilised 2. klassi gruppide puhul kasutatutega.

Punkti S_1 kiirenduse määramiseks tuleb koos lahendada järgmised kaks võrrandit:

$$\left.\begin{aligned} a_{S_1} &= a_B + \overline{a^n_{S_xB} + a^k_{S_1S_x}} + \overline{a^i_{S_xB} + a^r_{S_1S_x}}, \\ a_{S_1} &= a_{F_y} + \overline{a^n_{S_1F} + a^k_{FF_y}} + \overline{a^i_{S_1F} + a^r_{FF_y}}. \end{aligned}\right\} \tag{6.59}$$

Võrrandites (6.59) esinevatest kiirendustest on a_B ja a_{F_y} ette antud. Punkti S_x liikumisel punkti B suhtes toimiv normaalkiirendus $a^n_{S_xB}$ ja punkti S_1 liikumisel juhtsirge xx suhtes mõjuv Coriolise kiirendus $a^k_{S_1S_x}$ on teineteisega paralleelsed. Nimetatud kiirenduste moodulid määratakse tavalisel viisil. Omavahel on paralleelsed ka punkti F liikumisel juhtsirge yy suhtes tekkiv Coriolise kiirendus $a^k_{FF_y}$ ja normaalkiirendus $a^n_{S_1F}$, mis esineb punkti S_1 liikumisel punkti F suhtes. Ka nende kiirenduste väärtus määratakse tavalisel viisil. Kiirendused $a^i_{S_xB}$ ja $a^r_{S_1S_x}$ on suuruselt tundmatud, kuid sihilt omavahel paralleelsed. Teineteisega paralleelsed on ka kiirendused $a^i_{S_1F}$ ja $a^r_{FF_y}$. Seoste (6.59) abil saab seega määrata punkti S_1 kiirenduse a_{S_1}.

Punkti G kiirenduse leidmiseks lahendame koos võrrandid

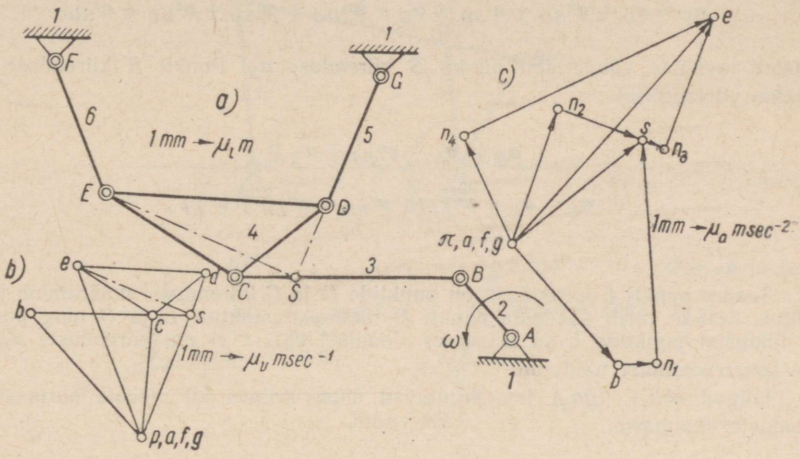
$$\left.\begin{aligned} a_G &= a_{S_1} + a^n_{GS_1} + a^i_{GS_1}, \\ a_G &= a_D + a^n_{GD} + a^i_{GD}. \end{aligned}\right\} \tag{6.60}$$

Grupi ülejäänud punktide kiirenduste leidmiseks rakendatakse tavalisi, 2. klassi gruppide puhul kasutatud võrranditega analoogilisi seoseid.

Eripunktide meetod on rakendatav 3. klassi gruppide kõikide liikide puhul.

Näide 4. Eripunktide meetodi rakendamise demonstreerimiseks vaatleme joonisel 281, *a* kujutatud sarja mehhanismi. Ülesandeks on leida selle mehhanismi lülide punktide kiirused eeldusel, et vänt AB pöörleb püsiva nurkkiirusega ω.

Kui valida vedavaks lüliks AB, siis kuulub uuritav mehhanism 3. klassi 3. liiki, olles moodustatud kolmehaarmelise 3. klassi grupi $BCDEFG$ liitmisteel vedavale lülile AB.



Joon. 281.

Määrame nüüd eripunktide meetodit rakendades mehhanismi lülide kiirused. Pööratud kiirusplaani koostamiseks fikseerime kõigepealt haarmete GD ja BC telgede lõikepunktis paikneva eripunkti S (joon. 281, a). Seepeale, lähtudes punktist p, kanname kiirusplaani vedava lüli punkti B kiiruse, mastaabis μ_v joonestatud lõigu (pb) näol (joon. 281, b). Punkti S kiiruse võib leida seostest

$$v_S = v_C + v_{SC} = v_B + \overline{v_{CB} + v_{SC}}$$

ja

$$v_S = v_D + v_{SD} = v_G + \overline{v_{DG} + v_{SD}} = \overline{v_{DG} + v_{SD}},$$

sest et $v_G = 0$.

Edasi ühendame sirgega punktid E ja S (joon. 281, a) ning koostame punkti E kiiruse määramiseks võrrandid

$$v_E = v_S + v_{ES},$$

$$v_E = v_F + v_{EF} = v_{EF},$$

sest et $v_F = 0$.

Pärast punkti E kiiruse leidmist on mehhanismi ülejäänud punktide kiiruste määramine juba lihtne. Kiirusplaani õigsuse kontrollimiseks võib kasutada kahte lisatingimust: punktid d, c ja e peavad paiknema poolusest p lähtuvatel, etteantud sihtidega sirgetel, kolmnurgad dce ning DCE peavad aga olema geomeetriliselt sarnased. Lõpuks märgime, et eripunktina oleks võinud loomulikult kasutada ka mis tahes teist kahe haarme telje lõikepunkti.

Kiirendusplaan koostatakse analoogiliselt. Lähtudes poolusest π, kanname joonisele lõigu (πb), mis mastaabis μ_a kujutab punkti B kiirendust (joon. 281, c). Edasi, kasutades seoseid

$$a_S = a_C + a^n_{SC} + a^t_{SC} = a_B + \overline{a^n_{CB} + a^n_{SC}} + \overline{a^t_{CB} + a^t_{SC}}$$

ja

$$a_S = a_D + a^n_{SD} + a^t_{SD} = a_G + \overline{a^n_{DG} + a^n_{SD}} + \overline{a^t_{DG} + a^t_{SD}},$$

leiame tavaliste võtete abil punkti S kiirenduse a_S. Punkti E kiirenduse a_E saame võrranditest

$$a_E = a_S + a^n_{ES} + a^t_{ES},$$

$$a_E = a_F + a^n_{EF} + a^t_{EF} = a^n_{EF} + a^t_{EF},$$

sest et $a_F = 0$.

Teades punkti E kiirendust, on punktide D ja C kiirenduste määramine juba lihtne. Selleks tuleb vaadelda punkti D liikumist punktide E ja G ning punkti C liikumist punktide E ja B suhtes. Joonisel 281, c ei ole kiirenduste a_D ja a_C konstrueerimist näidatud.

Lõigud (bn_1), (gn_2) jne. kujutavad ühise kriipsu all olevate normaalkiirenduste summasid.

VII peatükk

MADALAMATE PAARIDEGA LIHTSATE MEHHANISMIDE KINEMAATILINE UURIMINE

§ 32. Šarniir-nelilülik

1°. Madalamate kinemaatiliste paaridega mehhanismidest on tehnikas laialdasemalt levinud neljalülilised mehhanismid. Järgnevas käsitletakse mõningate tähtsamate neljalüliliste mehhanismide kinemaatilist analüüsi.

Joonis 282, a kujutab mastaabis μ_l konstrueeritud šarniir-nelilülikut $ABCD$. Vänt AB pöörleb etteantud nurkkiirusega ω_2. Kiiruste ja kiirenduste määramiseks võime kasutada seoseid (6.12) ja (6.16). Saame:

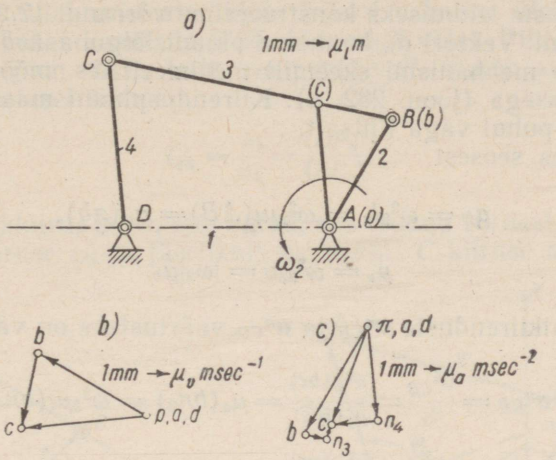
$$v_B + v_{CB} = v_D + v_{CD}, \quad a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB} = a_D + a^n_{CD} + a^t_{CD},$$

ehk, kuna $v_D = 0$ ja $a_D = 0$,

$$v_B + v_{CB} = v_{CD}, \tag{7.1}$$

$$a_B + a^n_{CB} + a^t_{CB} = a^n_{CD} + a^t_{CD}. \tag{7.2}$$

Võrrandi (7.1) alusel koostame kiirusplaani (joon. 282, b), kus vektor v_B esineb lõiguna (pb). Lõik $(pb) = (AB)$, kusjuures pik-



Joon. 282.

kus (AB) on mõõdetud millimeetrites mehhanismi skeemilt (joon. 282, *a*).

Säärast konstrueerimismoodust nimetatakse kiirusplaani konstrueerimiseks vedava lüli mastaabis. Kiirusplaani mastaap μ_v väljendub sel puhul väga lihtsalt. Tõepoolest,

$$v_B = |\omega_2|\, l_2 = |\omega_2|\, \mu_l (AB) = \mu_v (pb). \tag{7.3}$$

Kuna meil oli võetud $(pb) = (AB)$, siis järgneb ülaltoodud seostest, et

$$\mu_v = |\omega_2|\, \mu_l. \tag{7.4}$$

Punkti C kiirus $\boldsymbol{v}_C$ on antud valemiga

$$v_C = \mu_v (pc) = |\omega_2|\, \mu_l (pc).$$

Seoste (7.3) põhjal võib lüli *3* nurkkiiruse ω_3 absoluutväärtuse arvutada järgmiselt:

$$|\omega_3| = \frac{v_{CB}}{l_3} \frac{\mu_v (bc)}{\mu_l (BC)} = |\omega_2| \frac{(bc)}{(BC)}.$$

Lüli *4* nurkkiiruse ω_4 absoluutväärtus on arvutatav analoogiliselt:

$$|\omega_4| = \frac{v_C}{l_4} \frac{\mu_v (pc)}{\mu_l (DC)} = |\omega_2| \frac{(pc)}{(DC)}.$$

Kiirenduste leidmiseks konstrueerime võrrandi (7.2) alusel kiirendusplaani. Vektori $\boldsymbol{a}_B$ kanname plaani lõiguna (πb), mille pikkus võrdub mehhanismi skeemilt millimeetrites mõõdetud lõigu (AB) pikkusega (joon. 282, *a*). Kiirendusplaani mastaap μ_a väljendub sel puhul väga lihtsalt.

Lähtudes seosest

$$a_B = \omega^2_2 l_2 = \omega^2_2 \mu_l (AB) = \mu_a (\pi b),$$

saame

$$\mu_a = \omega^2_2 \mu_l = |\omega_2| \mu_v. \tag{7.5}$$

Normaalkiirenduste $\boldsymbol{a}^n_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{CD}$ väärtusteks on vastavalt

$$a^n_{CB} = \frac{v^2_{CB}}{l_3} = \frac{\mu^2_v (bc)}{\mu_l (BC)} = \mu_a (bn_3) = \omega^2_2 \mu_l (bn_3),$$

$$a^n_{CD} = \frac{v^2_C}{l_4} = \frac{\mu^2_v (pc)}{\mu_l (DC)} = \mu_a (bn_4) = \omega^2_2 \mu_l (bn_4).$$

Tangentsiaalkiirendused $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ ja $\boldsymbol{a}^t_{CD}$ võrduvad vastavalt

$$a^t_{CB} = \mu_a (n_3 c) = \omega^2_2 \mu_l (n_3 c),$$

$$a^t_{CD} = \mu_a (n_4 c) = \omega^2_2 \mu_l (n_4 c).$$

Punkti C täiskiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ väärtuseks kujuneb

$$a_C = \mu_a (\pi c) = \omega^2_2 \mu_l (\pi c).$$

Lülide *3* ja *4* nurkkiirenduste ε_3 ja ε_4 absoluutväärtused on antud seostega

$$|\varepsilon_3| = \frac{a^t_{CB}}{l_3} = \frac{\omega^2_2 \mu_l (n_3 c)}{\mu_l (BC)} = \omega^2_2 \frac{(n_3 c)}{(BC)}$$

ja

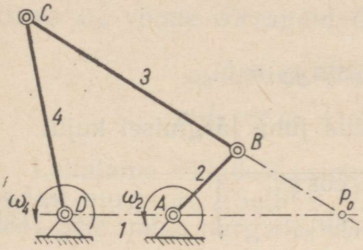
$$|\varepsilon_4| = \frac{a^t_{CD}}{l_4} = \frac{\omega^2_2 \mu_l (n_4 c)}{\mu_l (DC)} = \omega^2_2 \frac{(n_4 c)}{(DC)}.$$

Kiirusplaanide konstrueerimisel on mugav kasutada pööratud plaanide meetodit (§ 30, 2°), valides kiirusplaani pooluseks mehhanismi skeemil oleva punkti A (joon. 282, *a*). Kiirusplaani konstrueerimine taandub sel puhul sirge DC paralleelsirge Ac joonestamiseks läbi punkti $A(p)$. Kujund ABC (joon. 282, *a*) kujutabki pööratud kiirusplaani, mis on konstrueeritud mastaabis $\mu_v = |\omega_2| \mu_l$.

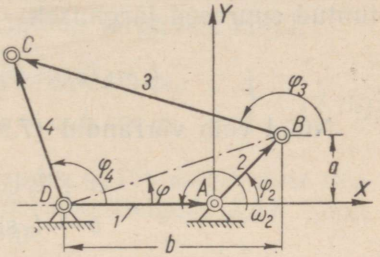
Juhul kui tuleb määrata lülide *2* ja *4* vaheline ülekandetegur i_{24}, on otstarbekas kasutada § 24, 1° toodud võtet. Pikendame lüli *3* telge *BC* (joon. 283), kuni see punktis P_0 lõikub sirgega *DA*. Seose (5.2) alusel saame:

$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{(DP_0)}{(AP_0)}. \tag{7.6}$$

Kuna nurkkiirus ω_2 on ette antud, siis toodud võrdest (7.6) saab leida nurkkiiruse ω_4 ja järelikult ka punkti *C* kiiruse v_C.



Joon. 283.



Joon. 284.

2°. Mehhanismide uurimisel nõutakse mõningates tehnilistes arvutustes suuremat täpsust kui see, mida võimaldavad graafilised meetodid. Sel puhul tuleb soovitada analüütilisi arvutusmeetodeid. Nimetatud meetodite arendamisel on väga suuri teeneid nõukogude teadlastel — akadeemik N. G. Brujevitšil ja V. A. Zinovjevil.

Kinemaatilise uurimise ülesanded taandatakse analüütiliste meetodite puhul teatavate võrrandsüsteemide lahendamiseks. Võrrandsüsteemid saadakse mehhanismi lülide poolt moodustatud kontuuride projekteerimisel koordinaattelgedele. Kiiruste ja kiirenduste määramiseks tuleb saadud võrrandeid hiljem diferentseerida.

Näitena käsitleme šarniir-nelilüliku (joon. 284) kinemaatika analüütilist uurimist. Vaadeldes kontuuri *ABCD*, võib koostada järgmise vektorvõrduse:

$$\overline{DA} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{DC}$$

ehk

$$\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{l}_4.$$

Projekteerides selle võrduse koordinaattelgedele *XAY*, saame:

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos\varphi_3 &= l_4 \cos\varphi_4 \\ \text{ja} \qquad l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin\varphi_3 &= l_4 \sin\varphi_4, \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

kus φ_1, φ_2, φ_3 ja φ_4 tähistavad lülide *1*, *2*, *3* ja *4* poolt *X*-teljega moodustatud nurki.

Kuna $\varphi_1 = 0$, siis $\sin\varphi_1 = 0$ ja $\cos\varphi_1 = 1$. Järelikult kujunevad võrrandid (7.8) järgmiseks:

$$\left.\begin{aligned} l_1 + l_2\cos\varphi_2 + l_3\cos\varphi_3 &= l_4\cos\varphi_4, \\ l_2\sin\varphi_2 + l_3\sin\varphi_3 &= l_4\sin\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Vedava lüli *2* pöördenurk φ_2 on ette antud.

Lihtsustamise mõttes tähistame võrrandites (7.9) esinevad tuntud suurused järgmiselt:

$$l_1 + l_2\cos\varphi_2 = a, \quad l_2\sin\varphi_2 = b.$$

Nüüd võib võrrandid (7.9) kirjutada juba järgmisel kujul:

$$\left.\begin{aligned} a + l_3\cos\varphi_3 &= l_4\cos\varphi_4, \\ b + l_3\sin\varphi_3 &= l_4\sin\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{7.10}$$

Tõstame võrrandid (7.10) ruutu ja liidame nad omavahel. Saame:

$$a^2 + b^2 + 2al_3\cos\varphi_3 + l^2_3 + 2bl_3\sin\varphi_3 - l^2_4 = 0$$

ja edasi

$$\frac{a^2 + b^2 + l^2_3 - l^2_4}{2al_3} + \cos\varphi_3 + \frac{b}{a}\sin\varphi_3 = 0. \tag{7.11}$$

Kasutades kirjutusviisi lihtsustamiseks tähiseid

$$\frac{a^2 + b^2 + l^2_3 - l^2_4}{2al_3} = A \quad \text{ja} \quad \frac{b}{a} = B,$$

saame

$$A + \cos\varphi_3 = -B\sqrt{1 - \cos^2\varphi_3}. \tag{7.12}$$

Tõstes võrrandi (7.12) mõlemad pooled omakorda ruutu, saame

$$A^2 + 2A\cos\varphi_3 + \cos^2\varphi_3 = B^2(1 - \cos^2\varphi_3),$$

millest järgneb

$$(1 + B^2)\cos^2\varphi_3 + 2A\cos\varphi_3 + (A^2 - B^2) = 0. \tag{7.13}$$

Arvutuste tulemusena saime ruutvõrrandi, millest määratakse nurk φ_3. Nurga φ_4 leidmiseks kasutatakse ühte võrranditest (7.10).

3°. Lülide *3* ja *4* nurkkiiruste ω_3 ja ω_4 leidmiseks diferentseerime võrrandeid (7.9) aja *t* suhtes. Saame:

$$\left.\begin{aligned} -l_2 \sin\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} - l_3 \sin\varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} &= -l_4 \sin\varphi_4 \frac{d\varphi_4}{dt} \\ \text{ja} \qquad l_2 \cos\varphi_2 \frac{d\varphi_2}{dt} + l_3 \cos\varphi_3 \frac{d\varphi_3}{dt} &= l_4 \cos\varphi_4 \frac{d\varphi_4}{dt}. \end{aligned}\right\} \tag{7.14}$$

Silmas pidades, et $\frac{d\varphi_2}{dt}$ pole midagi muud, kui lüli *2* etteantud nurkkiirus ω_2, $\frac{d\varphi_3}{dt}$ — lüli *3* nurkkiirus ω_3 ja $\frac{d\varphi_4}{dt}$ — lüli *4* nurkkiirus ω_4, võime võrrandid (7.14) kirjutada järgmisel kujul:

$$\left.\begin{aligned} \omega_2 l_2 \sin\varphi_2 + \omega_3 l_3 \sin\varphi_3 &= \omega_4 l_4 \sin\varphi_4, \\ \omega_2 l_2 \cos\varphi_2 + \omega_3 l_3 \cos\varphi_3 &= \omega_4 l_4 \cos\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{7.15}$$

Lahutame kõikidest esimeses võrrandis (7.15) esinevatest nurkadest nurga φ_3. (Sellele vastab koordinaattelgede XAY (joon. 284) pööramine nurga φ_3 võrra.) Saame:

$$\omega_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = \omega_4 l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3),$$

millest leiame, et

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}. \tag{7.16}$$

Sama võrrandi analoogiline teisendamine koordinaattelgede pööramise teel nurga φ_4 võrra annab

$$\omega_3 = -\omega_2 \frac{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \tag{7.17}$$

Lülide *3* ja *4* nurkkiirenduste ε_3 ja ε_4 leidmiseks diferentseerime aja suhtes võrrandeid (7.15), mille tulemuseks saame alljärgnevad seosed:

$$\left.\begin{aligned} \omega_2^2 l_2 \cos\varphi_2 + \omega_3^2 l_3 \cos\varphi_3 + \varepsilon_3 l_3 \sin\varphi_3 &= \omega_4^2 l_4 \cos\varphi_4 + \varepsilon_4 l_4 \sin\varphi_4, \\ -\omega_2^2 l_2 \sin\varphi_2 - \omega_3^2 l_3 \sin\varphi_3 - \varepsilon_3 l_3 \cos\varphi_3 &= -\omega_4^2 l_4 \sin\varphi_4 - \varepsilon_4 l_4 \cos\varphi_4, \end{aligned}\right\} \tag{7.18}$$

kus nurkkiirendus $\frac{d\omega_2}{dt} = \varepsilon_2$ võrdub nulliga juhul, kui $\omega_2 = \text{const.}$, $\frac{d\omega_3}{dt} = \varepsilon_3$ ja $\frac{d\omega_4}{dt} = \varepsilon_4$.

Kui esimene võrrand (7.18) ümber moodustada koordinaattel-

gede pööramisega algul nurga φ_3 ja hiljem nurga φ_4 võrra, saame nurkkiirenduste ε_4 ja ε_3 määramiseks järgmised valemid:

$$\varepsilon_4 = \frac{\omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + \omega_3^2 l_3 - \omega_4^2 l_4 \cos(\varphi_4 - \varphi_3)}{l_4 \sin(\varphi_4 - \varphi_3)}, \tag{7.19}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) + \omega_3^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_4) - \omega_4^2 l_4}{l_3 \sin(\varphi_3 - \varphi_4)}. \tag{7.20}$$

Ülal šarniir-nelilüliku kinemaatilisel uurimisel demonstreeritud analüütilist meetodit võib kasutada kõikide 2. klassi mehhanismide juures, kuna need teatavasti on moodustatud kahehaarmeliste gruppide (diaadide) juurdeliitmise teel. Iga säärase grupi kohta on aga võimalik koostada seostele (7.7) analoogilisi vektorvõrrandeid.

§ 33. Väntmehhanism

1°. Teiseks tehnikas laialdaselt kasutatavaks neljalüliliseks mehhanismiks on nn. väntmehhanism (joon. 285, *a*). Pöörelgu vänt AB etteantud püsiva nurkkiirusega ω_2. Kiiruste ja kiirenduste leidmiseks kasutame võrrandeid (6.20) ja (6.24). Saame:

$$\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} = \boldsymbol{v}_{C_x} + \boldsymbol{v}_{CC_x}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB} = \boldsymbol{a}_{C_x} + \boldsymbol{a}^k_{CC_x} + \boldsymbol{a}^r_{CC_x}$$

ehk, kuna $\boldsymbol{v}_{C_x} = 0$, $\boldsymbol{a}^k_{CC_x} = 0$ ja $\boldsymbol{a}_{C_x} = 0$,

$$\boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{v}_{CB} = \boldsymbol{v}_{CC_x} \tag{7.21}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_B + \boldsymbol{a}^n_{CB} + \boldsymbol{a}^t_{CB} = \boldsymbol{a}^r_{CC_x} = \boldsymbol{a}_C. \tag{7.22}$$

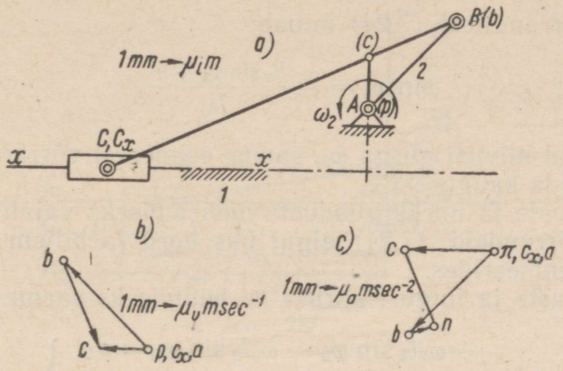
Võrrandi (7.21) alusel konstrueerime kiirusplaani, kasutades vända AB mastaapi (joon. 285, *b*). Punkti C kiirus on arvutatav valemiga

$$v_C = |\omega_2|\, \mu_l (pc).$$

Kepsu nurkkiiruse absoluutväärtus $|\omega_3|$ saadakse seosest

$$|\omega_3| = |\omega_2| \frac{(bc)}{(BC)}.$$

Joonisel 285, *a* on näidatud pööratud kiirusplaani konstruktsioon, kusjuures plaani poolus p on viidud punkti A.



Joon. 285.

Kiirenduste leidmiseks konstrueerime võrrandi (7.22) alusel kiirendusplaani (joon. 285, *c*), kasutades ka seekord vända *AB* mastaapi.

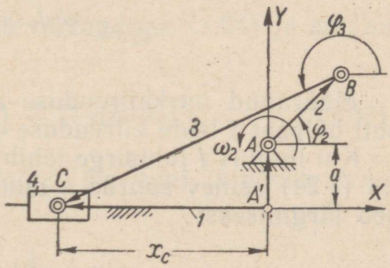
Punkti *C* kiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ väärtus saadakse valemiga

$$a_C = \omega^2{}_2 \mu_l (\pi c).$$

Kepsu *BC* nurkkiirenduse ε_3 absoluutväärtus on arvutatav järgmiselt:

$$|\varepsilon_3| = \omega^2{}_2 \frac{(nc)}{(BC)}.$$

2°. Siirdume nüüd väntmehhanismi kiiruste ja kiirenduste analüütilise määramise juurde. Vaatleme väntmehhanismi *ABC* (joon. 286). Muutuvaid kiirusi ja kiirendusi arvutada võimaldavate valemite tuletamiseks käsitame kontuuri *A'ABC* kui vektorite summat:



Joon. 286.

$$\overline{A'A} + \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{A'C},$$

ehk teiste tähistega:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 = \boldsymbol{x}_C.$$

Projekteerides selle vektorvõrrandi *X*- ja *Y*-telgedele, saame

ja

$$\left.\begin{aligned} l_2 \cos\varphi_2 + l_3 \cos\varphi_3 &= x_C \\ a + l_2 \sin\varphi_2 + l_3 \sin\varphi_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7.24)$$

Teine võrranditest (7.24) annab:

$$\sin \varphi_3 = -\frac{l_2 \sin \varphi_2 + a}{l_3}. \tag{7.25}$$

Määranud niiviisi nurga φ_3, saame esimesest võrrandist (7.24) hõlpsasti leida kauguse x_C.

Nurkkiiruste ja nurkkiirenduste määramiseks vajalikud seosed saadakse võrrandeid (7.24) algul üks kord ja hiljem veel teist korda diferentseerides.

Nurkkiiruste ja liuguri kiiruse v_C leidmiseks saame seosed:

$$\left.\begin{aligned} -\omega_2 l_2 \sin \varphi_2 - \omega_3 l_3 \sin \varphi_3 &= v_C, \\ \omega_2 l_2 \cos \varphi_2 + \omega_3 l_3 \cos \varphi_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.26}$$

Kiirus v_C leitakse esimesest võrrandist (7.26), kuna kepsu *3* nurkkiiruse ω_3 leidmiseks tuleb kasutada teist ülaltähendatud võrranditest. Saame:

$$\omega_3 = -\omega_2 \frac{l_2 \cos \varphi_2}{l_3 \cos \varphi_3}. \tag{7.27}$$

Kepsu *3* nurkkiirenduse ε_3 ja liuguri kiirenduse a_C määramiseks saame võrrandid:

$$\left.\begin{aligned} &-\omega_2^2 l_2 \cos \varphi_2 - \omega_3^2 l_3 \cos \varphi_3 - \varepsilon_3 l_3 \sin \varphi_3 = a_C \\ \text{ja} \quad &-\omega_2^2 l_2 \sin \varphi_2 - \omega_3^2 l_3 \sin \varphi_3 + \varepsilon_3 l_3 \cos \varphi_3 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7.28}$$

kusjuures juhul, kui nurkkiirus $\omega_2 = \text{const.}$, nurkkiirendus $\varepsilon_2 = 0$.

Teine võrranditest (7.28) võimaldab arvutada nurkkiirendust

$$\varepsilon_3 = \frac{\omega_2^2 l_2 \sin \varphi_2 + \omega_3^2 l_3 \sin \varphi_3}{l_3 \cos \varphi_3}. \tag{7.29}$$

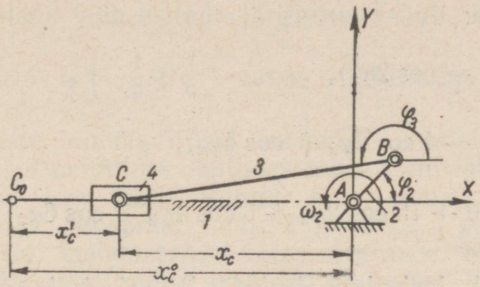
Määranud nurkkiirenduse ε_3, võime esimese võrrandi (7.28) abil hõlpsasti leida kiirenduse a_C.

Kui liuguri *4* juhtsirge läbib punkti *A* (joon. 287), siis võrranditest (7.24) esinev suurus a muutub nulliks ja võrdus (7.25) kujuneb järgmiseks:

$$\sin \varphi_3 = -\frac{l_2}{l_3} \sin \varphi_2. \tag{7.30}$$

Võrrandid (7.26) ja (7.28) seejuures ei muutu.

3°. Teatavatel juhtudel tekib vajadus avaldada liuguri *4* paigutust x_C, kiirust v_C ja kiirendust a_C vända *2* pöördenurga φ_2 funktsioonina (joon. 287).



Joon. 287.

Seosest (7.30) saame:

$$\sin \varphi_3 = -\lambda \sin \varphi_2, \tag{7.31}$$

kus $\lambda = \frac{l_2}{l_3}$ tähistab vända AB pikkuse suhet kepsu BC pikkusse. Rõhuval enamikul väntmehhanismidest on suurus λ väiksem kui üks. Võrdusest (7.31) järgneb:

$$\cos \varphi_3 = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_3} = \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}. \tag{7.32}$$

Ruutjuure ees tuleb siinjuures võtta miinusmärk seetõttu (vt. joon. 287), et nulliga võrduvale nurgale φ_2 vastab $\varphi_3 = 180°$, mille koosinus on -1, s. t. kui $\varphi_2 = 0°$, siis

$$\cos \varphi_3 = -\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 0°} = -1.$$

Asetades avaldise (7.30) esimesse võrrandisse (7.24) ja silmas pidades võrdust (7.32), saame:

$$x_C = l_3(\lambda \cos \varphi_2 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}). \tag{7.33}$$

Avaldise $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2}$ arendame Newtoni binoomvalemi järgi ritta. Saame:

$$(1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi_2)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2 \varphi_2 - \frac{1}{8}\lambda^4 \sin^4 \varphi_2 - \frac{1}{16}\lambda^6 \sin^6 \varphi_2 - \ldots \tag{7.34}$$

Nurga siinuse paarisarvulisi astmeid võib avaldada $2\varphi_2$-kordsete nurkade koosinuste kaudu, kasutades trigonomeetrias tuntud

seoseid. Saame:

$$\left.\begin{aligned}
&\sin^2\varphi_2 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi_2),\\
&\sin^4\varphi_2 = \frac{1}{8}(3 - 4\cos 2\varphi_2 + \cos 4\varphi_2),\\
&\sin^6\varphi_2 = \frac{1}{32}(10 - 15\cos 2\varphi_2 + 6\cos 4\varphi_2 - \cos 6\varphi_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (7.35)$$

Kui valemitest (7.35) saadud siinuste väärtused viia võrrandisse (7.34) ja koondada ühte liikmed, mis sisaldavad $\cos 2\varphi_2$, $\cos 4\varphi_2$, $\cos 6\varphi_2$ ..., saame:

$$(1 - \lambda^2 \sin^2\varphi_2)^{\frac{1}{2}} = C_0 + C_2 \cos 2\varphi_2 + C_4 \cos 4\varphi_2 + C_6 \cos 6\varphi_2 + \ldots,$$

kus

$$\left.\begin{aligned}
C_0 &= 1 - \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{3}{64}\lambda^4 - \frac{5}{256}\lambda^6 - \ldots,\\
C_2 &= \frac{1}{4}\lambda^2 + \frac{1}{16}\lambda^4 + \frac{15}{512}\lambda^6 + \ldots,\\
C_4 &= -\frac{1}{64}\lambda^4 - \frac{3}{256}\lambda^6 - \ldots,\\
C_6 &= \frac{1}{512}\lambda^6 + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (7.36)$$

Võrrandi (7.33) võib nüüd kirjutada järgmisel kujul:

$$x_C = l_3(\lambda \cos\varphi_2 - C_0 - C_2 \cos 2\varphi_2 - C_4 \cos 4\varphi_2 - C_6 \cos 6\varphi_2 - \ldots). \qquad (7.37)$$

Kui $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$, siis praktiliste arvutuste juures võib piirduda rea (7.34) kolmanda liikmega. See võimaldab paigutust x_C arvutada täpsusega kuni viis kohta pärast koma. Juhul kui piisab täpsusest kolm kohta pärast koma, võib piirduda rea (7.34) teise liikmega. Sel juhul kujuneb seos (7.33) järgmiseks:

$$x_C = l_3(\lambda \cos\varphi_2 - 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\varphi_2). \qquad (7.38)$$

Silmas pidades esimest võrrandit (7.35), saame:

$$x_C = l_3\left(\lambda \cos\varphi_2 - 1 + \frac{1}{4}\lambda^2 - \frac{1}{4}\lambda^2 \cos 2\varphi_2\right). \qquad (7.39)$$

Saadud valemi võib esitada järgmisel kujul:

$$x_C = l_2\left(-\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda}{4}+\cos\varphi_2-\frac{1}{4}\lambda\cos 2\varphi_2\right). \tag{7.40}$$

Kolbmasinate kinemaatilisel uurimisel arvutatakse väga tihti liuguri (kolvi) 4 paigutusi, lähtudes mitte tsentrist A, vaid liuguri piirasendist C_0 (joon. 287). Liugur asub nimetatud piirasendis siis, kui $\varphi_2=\pi$, mispuhul vänt 2 ja keps 3 paiknevad teineteise pikendusel, moodustades ühise sirgjoone. Kui joonisel 287 kujutatud mehhanismi puhul arvutada paigutusi, lähtudes punktist C_0, kujuneb nimetatud paigutusi määrav seos järgmiseks:

$$x'_C = l_2\left(1+\frac{\lambda}{4}+\cos\varphi_2-\frac{1}{4}\lambda\cos 2\varphi_2\right). \tag{7.41}$$

Punkti C kiiruse v_C määramiseks diferentseerime seost (7.40). Saame:

$$v_C=\frac{dx_C}{dt}=\frac{dx_C}{d\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}=-\omega_2 l_2\left(\sin\varphi_2-\frac{1}{2}\lambda\sin 2\varphi_2\right). \tag{7.42}$$

Punkti C kiirenduse a_C määramiseks diferentseerime omakorda võrrandit (7.42). Saame

$$a_C=\frac{dv_C}{dt}=\frac{dv_C}{d\varphi_2}\frac{d\varphi_2}{dt}=-\omega^2{}_2 l_2(\cos\varphi_2-\lambda\cos 2\varphi_2). \tag{7.43}$$

§ 34. Kulissmehhanismid

1°. Vaatleme kulissmehhanismi ABC (joon. 288, *a*), mille vänt AC pöörleb etteantud püsiva nurkkiirusega ω_2. Kiiruse ja kiirenduse määramiseks kasutame võrrandeid (6.31) ja (6.34). Saame:

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{CxB}+\boldsymbol{v}_{CCx}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_B+\boldsymbol{a}^n{}_{CxB}+\boldsymbol{a}^t{}_{CxB}+\boldsymbol{a}^k{}_{CCx}+\boldsymbol{a}^r{}_{CCx}.$$

Kuna käesoleval juhul $\boldsymbol{v}_B=0$ ja $\boldsymbol{a}_B=0$, siis

$$\boldsymbol{v}_C=\boldsymbol{v}_{CxB}+\boldsymbol{v}_{CCx} \tag{7.44}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}^n{}_{CxB}+\boldsymbol{a}^t{}_{CxB}+\boldsymbol{a}^k{}_{CCx}+\boldsymbol{a}^r{}_{CCx}. \tag{7.45}$$

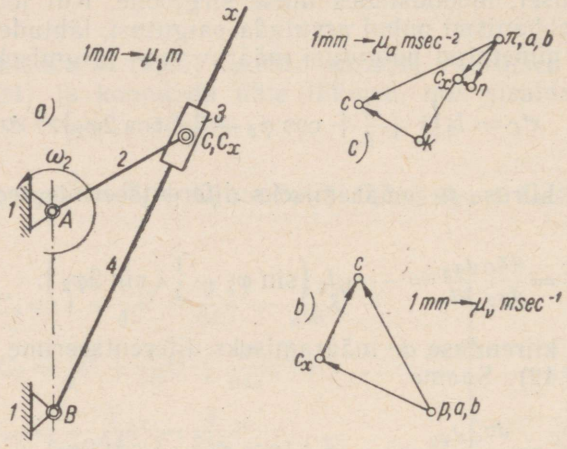
Kiirusplaani konstrueerime võrrandi (7.44) alusel, kasutades vända AC mastaapi (joon. 288, *b*). Kulissi 4 külge kuuluva punkti

C_x kiiruse v_{Cx} suurus on antud valemiga

$$v_{Cx} = |\omega_2|\, \mu_l\, (pc_x).$$

Kulissi *4* nurkkiiruse ω_4 absoluutväärtus saadakse seosest

$$|\omega_4| = |\omega_2|\, \frac{(pc_x)}{(BC_x)}.$$



Joon. 288.

Liuguri *3* libisemiskiiruseks v_{CCx} piki kulissi *4* kujuneb

$$v_{CCx} = |\omega_2|\, \mu_l (c_x c).$$

Kiirenduste leidmiseks konstrueerime kiirendusplaani (joon. 288, *c*), kasutades vända *AC* mastaapi ja võttes aluseks võrrandi (7.45). Punkti C_x kiirenduse a_{Cx} väärtuse saame valemiga

$$a_{Cx} = \omega_2^2 \mu_l (\pi c_x).$$

Kulissi *4* nurkkiirenduse ε_4 absoluutväärtuseks kujuneb

$$|\varepsilon_4| = \omega_2^2\, \frac{(nc_x)}{(BC_x)}.$$

Liuguri *3* libisemisel piki kulissi *4* toimiv kiirendus a^r_{CCx} arvutatakse järgmiselt:

$$a^r_{CCx} = \omega_2^2 \mu_l (c_x k).$$

Lülide *2* ja *4* vahel kehtiva ülekandeteguri i_{24} leidmiseks võib kasutada § 24, 1° toodud võtet: tõmbame läbi punkti C (joon. 289) sirge CP_0, mis ristub kulissi *4* teljega BC. Lõikugu nimetatud sirge tsentrite joonega AB punktis P_0. Saame:

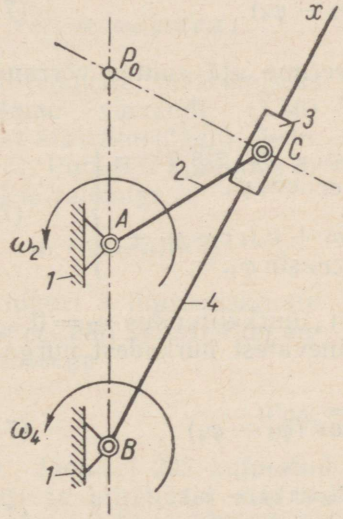
$$i_{24} = \frac{\omega_2}{\omega_4} = \frac{(BP_0)}{(AP_0)}. \tag{7.46}$$

2°. Kulissmehhanismi ABC (joon. 290) lülide paigutuste, kiiruste ja kiirenduste analüütiliseks määramiseks kirjutame kolmnurgast ABC lähtudes vektorvõrrandi

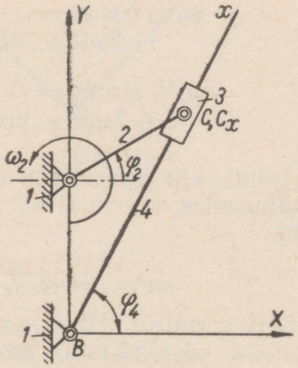
$$\overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BC}$$

ehk teiste tähiste abil

$$\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 = \boldsymbol{l}_4.$$



Joon. 289.



Joon. 290.

Projekteerides koordinaattelgedele, saame võrrandid

$$\left.\begin{aligned} l_2 \cos\varphi_2 &= l_4 \cos\varphi_4, \\ l_1 + l_2 \sin\varphi_2 &= l_4 \sin\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{7.47}$$

Nurga φ_4 määramiseks jagame teise võrrandi esimesega.

Saame:

$$\operatorname{tg}\varphi_4 = \frac{l_1 + l_2 \sin\varphi_2}{l_2 \cos\varphi_2}. \tag{7.48}$$

Leidnud nurga φ_4, võime arvutada esimesest võrrandist (7.47) pikkuse l_4.

Kiiruste määramiseks diferentseerime võrrandeid (7.47) aja t suhtes. Saame:

$$\left.\begin{aligned} -\omega_2 l_2 \sin\varphi_2 &= -\omega_4 l_4 \sin\varphi_4 + v_{CCx}\cos\varphi_4, \\ \omega_2 l_2 \cos\varphi_2 &= \omega_4 l_4 \cos\varphi_4 + v_{CCx}\sin\varphi_4. \end{aligned}\right\} \tag{7.49}$$

Lahutame kõikidest võrrandites (7.49) esinevatest nurkadest nurga φ_4. Tulemusena saame seosed

$$v_{CCx} = -\omega_2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4), \tag{7.50}$$

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{l_2}{l_4}\cos(\varphi_2 - \varphi_4). \tag{7.51}$$

Kiirenduste leidmiseks diferentseerime aja suhtes võrrandeid (7.49). Saame võrrandid

ja

$$\left.\begin{aligned} -\omega_2^2 l_2 \cos\varphi_2 &= -\omega_4^2 l_4 \cos\varphi_4 - \varepsilon_4 l_4 \sin\varphi_4 - \\ &\quad - 2\omega_4 v_{CCx}\sin\varphi_4 + a^r_{CCx}\cos\varphi_4 \\ -\omega_2^2 l_2 \sin\varphi_2 &= -\omega_4^2 l_4 \sin\varphi_4 + \varepsilon_4 l_4 \cos\varphi_4 + \\ &\quad + 2\omega_4 v_{CCx}\cos\varphi_4 + a^r_{CCx}\sin\varphi_4, \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

sest juhul, kui nurkkiirus $\omega_2 = \text{const.}$, nurkkiirendus $\varepsilon_2 = 0$.

Lahutades võrrandites (7.52) esinevatest nurkadest nurga φ_4, saame:

$$a^r_{CCx} = \omega_4^2 l_4 - \omega_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_4) \tag{7.53}$$

ja

$$\varepsilon_4 = -\frac{2\omega_4 v_{CCx} + \omega_2^2 l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_4)}{l_4}. \tag{7.54}$$

3°. Joonis 291, *a* kujutab kahe translatsioonipaariga kulissmehhanismi *ACB*. Oletame, et kuliss *Ax* pöörleb etteantud püsiva nurkkiirusega ω_2. Kiiruste ja kiirenduste leidmiseks kasutame võrrandeid (6.37) ja (6.39):

$$\boldsymbol{v}_{Cx} + \boldsymbol{v}_{CCx} = \boldsymbol{v}_{Cy} + \boldsymbol{v}_{CCy}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_{Cx} + \boldsymbol{a}^k_{CCx} + \boldsymbol{a}^r_{CCx} = \boldsymbol{a}_{Cy} + \boldsymbol{a}^k_{CCy} + \boldsymbol{a}^r_{CCy}.$$

Kuna käesoleval juhul $v_{Cy} = 0$, $a_{Cy} = 0$ ja $a^k_{CCy} = 0$, siis võime kirjutada, et

$$v_{Cx} + v_{CCx} = v_{CCy}, \tag{7.55}$$

$$a_{Cx} + a^k_{CCx} + a^r_{CCx} = a^r_{CCy}. \tag{7.56}$$

Kiirendusplaani (joon. 291, *b*) koostame võrrandi (7.55) põhjal. Punkti *C* kiiruse v_C suurus arvutatakse valemiga

$$v_C = |\omega_2|\,\mu_l(pc).$$

Liuguri *3* libisemiskiirus v_{CCx} piki kulissi *4* saadakse seosest

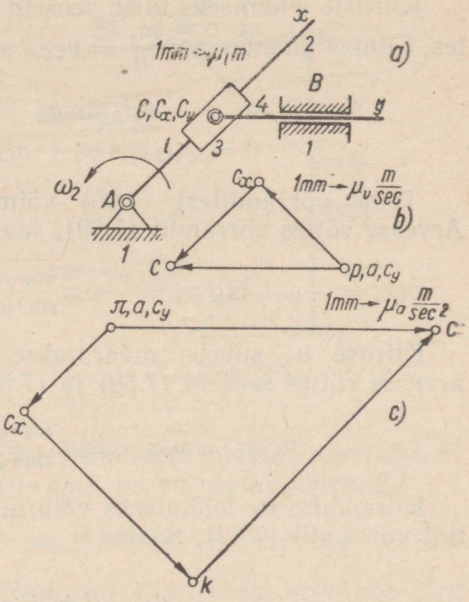
$$v_{CCx} = |\omega_2|\,\mu_l(c_x c).$$

Kiirenduste määramiseks koostame võrrandi (7.56) põhjal kiirendusplaani (joon. 291, *c*). Punkti *C* kiirendus a_C leitakse valemiga

$$a_C = \omega_2^2 \mu_l(\pi c).$$

Liuguri *3* libisemiskiirendus a^r_{CCx} piki kulissi *4* on antud seosega

$$a^r_{CCx} = \omega_2^2 \mu_l(kc).$$



Joon. 291.

4°. Joonisel 292 kujutatud mehhanismi *ABC* lülide paigutusi, kiirusi ja kiirendusi määravate valemite tuletamiseks käsitame kontuuri *ADC* kui vektorite summat:

$$\overline{AD} + \overline{DC} = \overline{AC}$$

ehk

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_2.$$

Saadud vektorvõrrandi projekteerimine koordinaattelgedele annab

$$l = l_2 \cos\varphi_2, \quad a = l_2 \sin\varphi_2. \tag{7.57}$$

Võrranditest (7.57) järeldame, et

$$l = a \operatorname{ctg} \varphi_2 \tag{7.58}$$

ja

$$l_2 = \frac{a}{\sin \varphi_2}. \tag{7.59}$$

Kiiruste leidmiseks tuleb seoseid (7.57) diferentseerida aja suhtes. Silmas pidades, et $\frac{dl_2}{dt} = v_{CCx}$, saame:

$$\left.\begin{aligned} v_C &= -\omega_2 l_2 \sin \varphi_2 + v_{CCx} \cos \varphi_2, \\ 0 &= \omega_2 l_2 \cos \varphi_2 + v_{CCx} \sin \varphi_2. \end{aligned}\right\} \tag{7.60}$$

Teine võrranditest (7.60) võimaldab arvutada kiirust v_{CCx}. Arvesse võttes võrrandit (7.59), saame lõplikult

$$v_{CCx} = -\omega_2 l_2 \operatorname{ctg} \varphi_2 = -\omega_2 a \frac{\cos \varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} = -\omega_2 a \frac{\cos \varphi_2}{1 - \cos^2 \varphi_2}. \tag{7.61}$$

Kiiruse v_C suurus määratakse esimesest võrrandist (7.60), arvesse võttes seoseid (7.59) ja (7.61). Saame

$$v_C = -\omega_2 a - \omega_2 a \frac{\cos^2 \varphi_2}{\sin^2 \varphi_2} = -\omega_2 a \frac{1}{\sin^2 \varphi_2}.^1 \tag{7.62}$$

Kiirenduse a_C leidmiseks võib diferentseerida aja suhtes vahetult võrrandit (7.62). Saame

$$a_C = 2\omega_2^2 a \frac{\cos \varphi_2}{\sin^3 \varphi_2}. \tag{7.63}$$

5°. Lõpuks käsitleme veel joonisel 293, *a* kujutatud kulissmehhanismi *ABC*.

Pöörelgu vänt *AB* etteantud püsiva nurkkiirusega ω_2. Kiiruste ja kiirenduste määramiseks rakendame võrrandeid (6.42) ja (6.46):

$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{B_y} + \boldsymbol{v}_{B_xB_y} + \boldsymbol{v}_{BB_x},$$

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_{B_y} + \boldsymbol{a}^k_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^r_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^k_{BB_x} + \boldsymbol{a}^r_{BB_x}.$$

Silmas pidades, et käesoleval juhul $\boldsymbol{v}_{B_y} = 0$, $\boldsymbol{a}_{B_y} = 0$, $\boldsymbol{a}^k_{BB_x} = 0$ ja $\boldsymbol{a}^k_{BB_y} = 0$, saame:

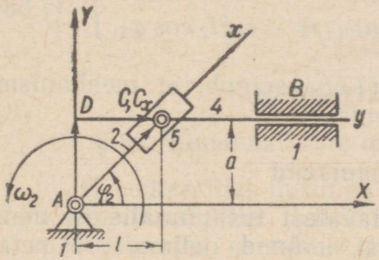
$$\boldsymbol{v}_B = \boldsymbol{v}_{B_xB_y} + \boldsymbol{v}_{BB_x} \tag{7.64}$$

ja

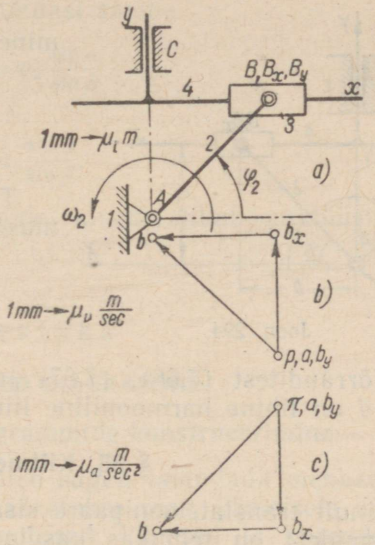
$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}^r_{B_xB_y} + \boldsymbol{a}^r_{BB_x}. \tag{7.65}$$

---

[1] Kiiruste v_{CCx} ja v_C väärtusi on võimalik leida ka võrrandite (7.58) ja (7.59) vahetu diferentseerimise teel.



Joon. 292.



Joon. 293.

Võrrandi (7.64) alusel konstrueerime kiirusplaani (joon. 293, *b*). Lülile *4* kuuluva punkti B_x kiirus $v_{B_xB_y}$ on arvutatav valemiga

$$v_{B_xB_y} = |\omega_2|\,\mu_l(pb_x).$$

Liuguri *3* libisemiskiiruse piki kulissi *x* saame arvutada järgmiselt:

$$v_{BB_x} = |\omega_2|\,\mu_l(b_xb).$$

Kiirendusplaan konstrueeritakse võrrandi (7.65) alusel (vt. joon. 293, *c*). Lülil *4* paikneva punkti B_x kiirenduse $a^r_{B_xB_y}$ arvutamiseks kasutame valemit

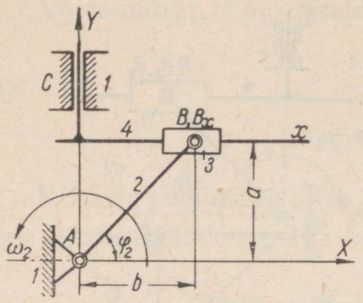
$$a^r_{B_xB_y} = \omega_2^2\mu_l(\pi b_x).$$

Kiirenduse väärtus liuguri *3* liikumisel piki kulissi *x* on antud valemiga

$$a^r_{BB_x} = \omega_2^2\mu_l(b_xb).$$

6°. Joonisel 294 kujutatud mehhanismi lülide kiirusi ja kiirendusi saab analüütiliselt avaldada, lähtudes võrranditest

$$\left.\begin{aligned} a &= l_2 \sin\varphi_2, \\ b &= l_2 \cos\varphi_2. \end{aligned}\right\} \qquad (7.66)$$



Joon. 294.

Võrrandite (7.66) diferentseerimine annab

$$\left.\begin{aligned} v_{B_xB_y} &= \omega_2 l_2 \cos\varphi_2, \\ v_{BB_x} &= -\omega_2 l_2 \sin\varphi_2. \end{aligned}\right\} \quad (7.67)$$

Teistkordse diferentseerimise tulemusena saame

$$\left.\begin{aligned} a_{B_xB_y} &= -\omega_2^2 l_2 \sin\varphi_2, \\ a_{BB_x} &= -\omega_2^2 l_2 \cos\varphi_2. \end{aligned}\right\} \quad (7.68)$$

Võrranditest (7.66), (7.67) ja (7.68) selgub, et mehhanismi lülil *4* on lihtne harmooniline liikumine.

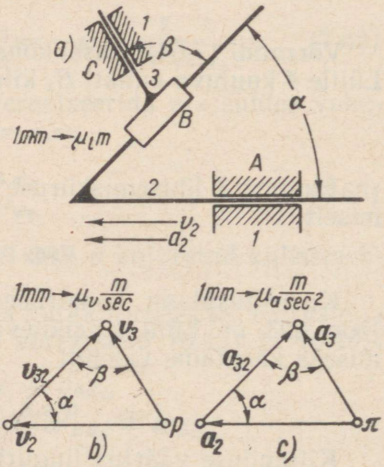
§ 35. Kiilmehhanismid

Ainult translatsioonipaare sisaldavatest tasapinnalistest mehhanismidest on tehnikas kasutamist leidnud neljandasse perekonda kuuluvad kolmelülilised kiilmehhanismid (vt. 4. peatükk, § 21). Ühe säärase mehhanismi *ABC* skeem on toodud joonisel 295, *a*.

Lüli *2* liigub etteantud kiirusega v_2 ja etteantud kiirendusega a_2. Lüli *3* kiirus v_3 ja kiirendus a_3 määratakse võrranditega

$$v_3 = v_2 + v_{32} \quad (7.69)$$

$$a_3 = a_2 + a_{32}. \quad (7.70)$$



Joon. 295.

Kiirusplaani kujutab joonis 295, *b*, kiirendusplaani — joonis 295, *c*. Lihtne on näha, et mehhanismi lülide eranditult translatoorse liikumise tõttu kujunevad kiirus- ja kiirendusplaanid kas kongruentseteks (ühtivateks) või siis geomeetriliselt sarnasteks (joon. 295, *b* ja *c*). Lülide *2* ja *3* paigutusi, kiirusi ja kiirendusi määravad analüütilised seosed saadakse seetõttu väga hõlpsasti. Lüli *3* paigutus on näiteks antud võrrandiga

$$S_3 = S_2 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad (7.71)$$

kus S_2 tähistab lüli *2* paigutust. Edasi saame

$$v_3 = v_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \tag{7.72}$$

ja

$$a_3 = a_2 \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \tag{7.73}$$

Keerukamate kiilmehhanismide kinemaatikat analüüsitakse analoogiliste meetoditega.

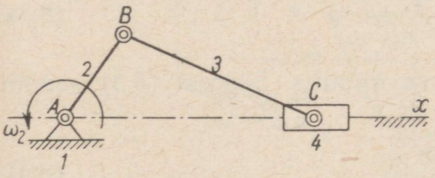
VIII peatükk

KINEMAATILISED DIAGRAMMID

§ 36. Kinemaatiliste diagrammide konstrueerimine

1°. Kinemaatilist uurimist tuleb sageli laiendada mehhanismi kogu liikumistsüklile. Selleks määratakse reas, üksteisele küllalt lähedal asuvates asendites paigutused, kiirused ja kiirendused. Saadud väärtused koondatakse vastavatesse tabelitesse või kasutatakse ära *kinemaatilisteks diagrammideks* nimetatavate graafikute konstrueerimisel.

Sõltuvalt uuritavate mehhanismilülide või nende üksikpunktide liikumise iseloomust võib konstrueerida mitmesuguseid kinemaatilisi diagramme. Mehhanismide ja masinate teooria praktilistes ülesannetes on kinemaatiliste diagrammide iseloom tavaliselt piiratum. Nad kujutavad endast uuritava mehhanismi teatava lüli (või punkti) ühe kinemaatilise parameetri muutumise graafikut sõltuvalt kas ajast, mehhanismi vedava lüli asendist või siis nimetatud lüli ühe punkti paigutusest.



Joon. 296.

Olgu näiteks antud väntmehhanism *ABC* (joon. 296). Sirgjooneliselt liikuva punkti *C* paigutuse s_C, kiiruse v_C ja kiirenduse a_C uurimiseks on otstarbekohane koostada kinemaatilised diagrammid graafikutena, mis näitavad nimetatud suuruste sõltuvust kas ajast t, vedava lüli *2* punkti *B* paigutusest s_B või siis lüli *AB* pöördenurgast φ_{AB}. Teisiti öeldes on käesoleval juhul otstarbekas kujutada graafiliselt järgmisi sõltuvusi:

$$\left.\begin{aligned} s_C &= s_C(t), \\ v_C &= v_C(t), \\ a_C &= a_C(t), \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} s_C &= s_C(s_B), \\ v_C &= v_C(s_B), \\ a_C &= a_C(s_B), \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} s_C &= s_C(\varphi_{AB}), \\ v_C &= v_C(\varphi_{AB}), \\ a_C &= a_C(\varphi_{AB}). \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

Mõningatel juhtudel on vajalik konstrueerida ka teistsuguseid sõltuvusi, nagu näiteks

$$v_C = v_C(s_C) \qquad \text{või} \qquad a_C = a_C(s_C). \tag{8.2}$$

Lihtne on näha, et seoseid (8.2) võib saada seostest (8.1), elimineerides esimese ja teise (vastavalt esimese ja kolmanda) sõltuvuse vahel parameetri t.

Kui uuritavateks on kepsu *3* pöördenurk φ_3, nurkkiirus ω_3 ja nurkkiirendus ε_3 (joon. 296), siis sõltuvuste

$$\varphi_3 = \varphi_3(t), \quad \omega_3 = \omega_3(t), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(t)$$

või

$$\varphi_3 = \varphi_3(\varphi_2), \quad \omega_3 = \omega_3(\varphi_2), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_2)$$

graafiline konstrueerimine on alati võimalik. Samuti on võimalik graafiliselt näidata ka sõltuvusi

$$\omega_3 = \omega_3(\varphi_3), \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3(\varphi_3).$$

2°. Käsitleme näitena kinemaatiliste diagrammide $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ ja $a_C = a_C(t)$ konstrueerimist väntmehhanismi ABC punkti C jaoks (joon. 297, *a*). Oletame, et mehhanismi vänt AB pöörleb püsiva nurkkiirusega ω_2. Varemkäsitletud meetodite abil fikseerime punktide B ja C kaksteist teineteisele vastavat asendit. Punkti C paigutusi on otstarbekas mõõta, lähtudes liuguri vasakust piirasendist. Joonestame koordinaatteljed (joon. 297, *b*) ja kanname abstsissteljele joonlõigu pikkusega l mm, mis mastaabis μ_t kujutab vända üheks täispöördeks kuluvat aega T sec.

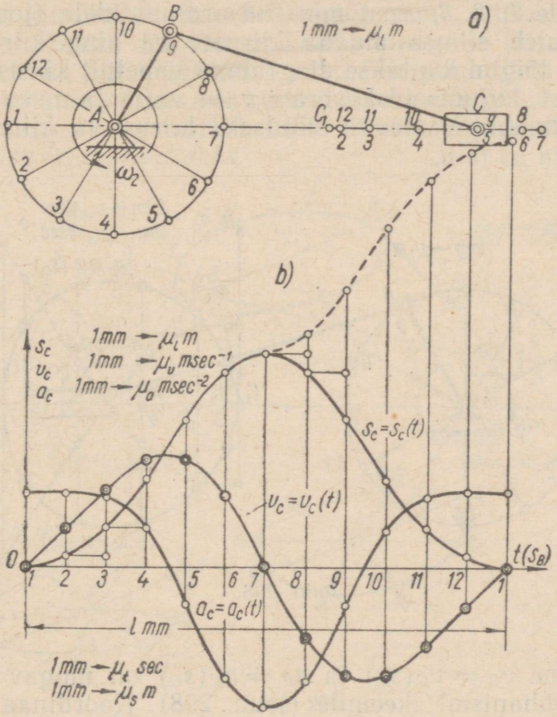
$$T = \frac{60}{n} = \mu_t l, \tag{8.3}$$

kus n tähistab vända pöörete arvu minutis. Seosest (8.3) saame määrata aja mastaabi

$$\mu_t = \frac{60}{nl} \frac{\text{sec}}{\text{mm}}. \tag{8.4}$$

Jagame lõigu l kaheteistkümneks võrdseks osaks. Saadud jaotuspunktides *1*, *2*, *3*, ... kanname diagrammile punkti C poolt läbitud teepikkused, lähtudes liuguri vasakust piirasendist C_1 (joon. 297, *a*). Punktis *2* (joon. 297, *b*) tuleb seega diagrammi kanda ordinaattelgede sihis lõik (C_1C_2), punktis *3* — lõik (C_1C_3) jne. Kui võtta nimetatud lõigud vahetult mehhanismi skeemilt (joon. 297, *a*), siis võrdub diagrammi $s_C = s_C(t)$ ordinaattelgede mastaap skeemi pikkuste mastaabiga μ_l. Alates asendist C_7, mis vas-

tab liuguri parempoolsele piirasendile (joon. 297, *a*), tuleb lõigud (C_7C_8), (C_7C_9), ... lahutada punktis C_7 diagrammi kantud ordinaadist (C_1C_7). Vända tagasisaabumisel (naasmisel) lähteasendisse C_1 muutub kõvera $s_C = s_C(t)$ ordinaat seetõttu nulliks. Saadud kõver osutub punkti C paigutuste (s. o. liuguri vasakust piirasendist C_1 loetud kauguste) diagrammiks. Kui soovitakse konstrueerida punkti C teepikkuse diagrammi, tuleb punktist C_7 alates lõigud (C_7C_8), (C_7C_9), ... lõigule (C_1C_7) liita. Joonisel 297, *b* on vastav diagrammi osa näidatud katkestatud joonega.



Joon. 297.

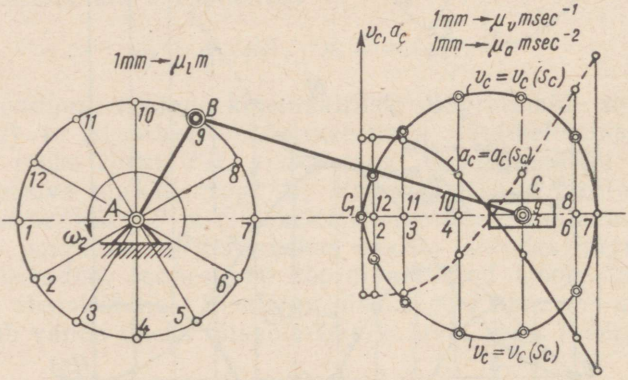
Et vänt meie näites pöörleb püsiva nurkkiirusega, siis kujutavad diagrammi abstsisstelje jaotused mitte üksnes aja t, vaid ka punkti B teepikkuse s_B või lüli AB pöördenurga φ_{AB} muutumist. Tähendab, diagrammid $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ ja $a_C = a_C(t)$ osutuvad ühtlasi ka diagrammideks $s_C = s_C(s_B)$, $v_C = v_C(s_B)$, $a_C = a_C(s_B)$ ja diagrammideks $s_C = s_C(\varphi_{AB})$, $v_C = v_C(\varphi_{AB})$, $a_C = a_C(\varphi_{AB})$. Nimetatud diagrammide mastaabid abstsissteljel

μ_s ja μ_φ on antud valemitega

$$\mu_s = \mu_l \frac{2\pi (AB)}{l}, \quad \mu_\varphi = \frac{2\pi}{l}.$$

Valemites esinevad lõigud AB ja l tuleb võtta jooniselt millimeetrites.

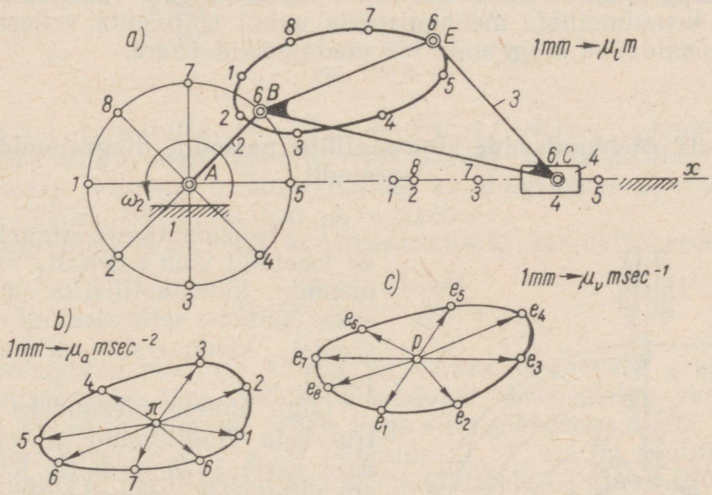
3°. Diagrammide $v_C = v_C(t)$ ja $a_C = a_C(t)$ konstrueerimiseks võetakse kiirus- ja kiirendusplaanidest lõigud, mis kujutavad punkti C kiirust v_C ning kiirendust a_C, ja kantakse läbi abstsisstelje punktide *1, 2, 3, ...* tõmmatud ordinaatidele (joon. 297, *b*). Seejuures tuleb silmas pidada kiiruste v_C ning kiirenduste a_C suunda. Kui lõigud kantakse diagrammi vahetult kiirus- ja kiirendusplaanidest, kujunevad kõverate $v_C = v_C(t)$ ja $a_C = a_C(t)$ ordinaatide mastaabid vastavalt võrdseks kiirus- ja kiirendusplaani mastaapidega μ_v ja μ_a.



Joon. 298.

Diagramme $v_C = v_C(s_C)$ ja $a_C = a_C(s_C)$ on mugav konstrueerida otse mehhanismi skeemile (joon. 298). Koordinaatide alguspunktiks valime sel juhul punkti C_1. Punktides C_1, C_2, C_3, ... tõmmatud ordinaatidele kanname kiirus- ja kiirendusplaanidest lõigud, mis kujutavad punkti C kiirust v_C ja kiirendust a_C. Kõvera $a_C = a_C(s_C)$ osa, mis vastab liuguri liikumisele vasakult paremale, ühtib kõvera selle osaga, mis vastab liuguri tagasitulekule (naasmisele) paremalt vasakule. Mõnikord loetakse kiirendust, mille suund ühtib vastava kiiruse suunaga, positiivseks ja, vastupidi, kiirendust, mis on suunatud vastu vastavat kiirust — negatiivseks. Kõvera $a_C = a_C(s_C)$ osa, mis vastab kolvi liikumisele paremalt vasakule, tuleks sel puhul joonestada nii nagu joonisel 298 on näidatud kriipsjoonega.

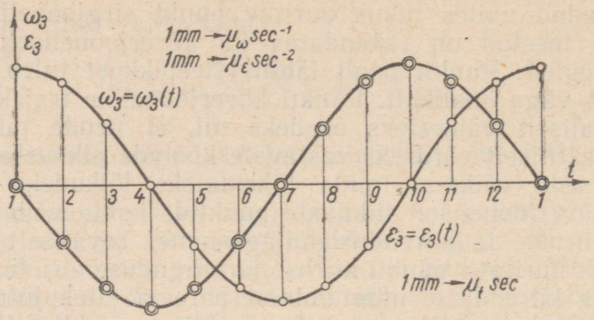
4°. Toodud näites liikus uuritav punkt sirgjooneliselt. Kuid käsitletud meetod on rakendatav ka kõverjooneliselt liikuvate punktide puhul. Punkti poolt läbitud teepikkust tuleb sel puhul aga mõõta väga hoolikalt. Punkti kõverjooneline trajektoor jagatakse tavaliselt väikesteks osadeks nii, et nende pikkusi võib lugeda praktiliselt võrdseks vastavate kõõlude pikkustega. Tekkiv viga on seda väiksem, mida lühemateks lõikudeks trajektoor jagada. Kõverjooneliselt liikuvate punktide kohta võib konstrueerida ka kiiruste ja kiirenduste diagramme. Tavaliselt kujutavad need ainult uuritava punkti kiiruse ja kiirenduse absoluutväärtusi. Kiiruste ja kiirenduste muutumisest parema ettekujutuse saamiseks on otstarbekas diagrammi kanda kiirus- ja kiirendusvektorid nende tegelikus sihis, lähtudes vastavalt punktidest p ja π. Kui ühendada kõikide kiirus- või kiirendusvektorite otsad sujuva kõveraga, siis saame diagrammid, mida nimetatakse vastavalt *kiiruse* ja *kiirenduse hodograafideks*.



Joon. 299.

Joonisel 299, *b* ja *c* on toodud väntmehhanismi *ABC* (joon. 299, *a*) punkti *E* kiiruse ja kiirenduse hodograafid.

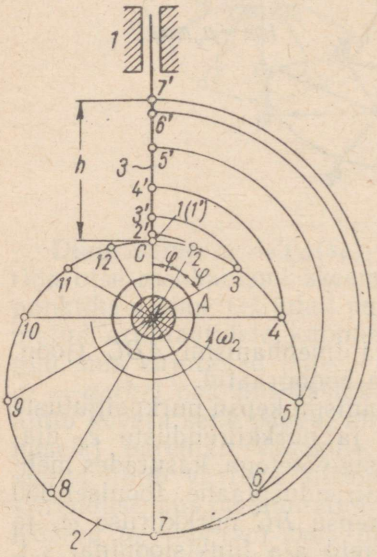
Joonisel 297, *a* kujutatud väntmehhanismi kepsu nurkpaigutuste (pöördenurkade) φ_3, nurkkiiruste ω_3 ja nurkkiirenduste ε_3 diagramme saab konstrueerida analoogiliste võtetega, kasutades mehhanismi skeemi ja tema kiirus- ning kiirendusplaane. Joonisel 300 on näidatud nimetatud mehhanismi kepsu *BC* nurkkiiruse ω_3 ja nurkkiirenduse ε_3 kulgemise diagrammid aja funktsioonina, s. t. diagrammid $\omega_3 = \omega_3(t)$ ja $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(t)$.



Joon. 300.

Ülaltoodut, väntmehhanismi uurimiseks kasutatud kinemaatiliste diagrammide konstrueerimise meetodit võib rakendada mis tahes tasapinnaliste mehhanismide puhul sõltumata sellest, kas need sisaldavad kõrgemaid või madalamaid paare.

§ 37. Mehhanismide kinemaatiline uurimine diagrammide meetodil

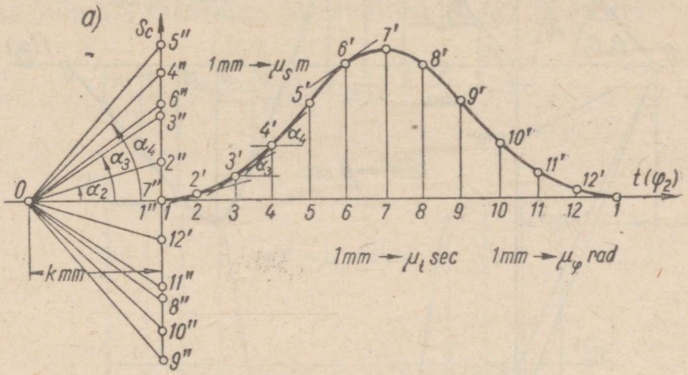


Joon. 301.

1°. Kinemaatiliste diagrammide meetodit võib kasutada mehhanismide kinemaatiliseks uurimiseks. Näitame selle meetodi rakendamist konkreetse mehhanismi puhul.

Olgu näiteks ülesandeks konstrueerida diagrammid $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ ja $a_C = a_C(t)$ joonisel 301 kujutatud nukkmehhanismi lülil *3* paikneva punkti *C* jaoks. Seejuures eeldatakse, et nukk pöörleb konstantse nurkkiirusega ω_2. Määrame punkti *C* paigutused tema alumise piirasendi (asend *1'*) suhtes. Selleks tõmbame võrdsete nurkade all läbi nuki *2* pöörlemistsentri *A* kiired *A1*, *A2*, *A3*, ... Kui nüüd tsentrist *A* sälkida lüli *3* liikumistelge raadiusega *A2*, siis tekkiv lõik (*1—2'*) võrdub lüli *3* pai-

gutusega, mida põhjustaks nuki *2* pöördumine nurga φ võrra (s. o. esimesest asendist teise). Analoogiliselt saadud lõik (*1—3′*) võrdub lüli *3* paigutusega, mis vastab nuki *2* pöördumisele nurga 2φ võrra, s. o. liikumisele esimesest asendist kolmandasse jne.



Joon. 302 a.

Pärast paigutuste (*1—2′*), (*1—3′*), (*1—4′*), ... määramist konstrueerime vabalt valitud mastaapides μ_s ja μ_t diagrammi $s_C = s_C(t)$. Viimane kujutab ühtlasi ka diagrammi $s_C = s_C(\varphi_2)$ (joon. 302 a), sest nurkkiirus $\omega_2 = \text{const}$.

Diagrammi $v_C = v_C(t)$ konstrueerimiseks kasutame seost

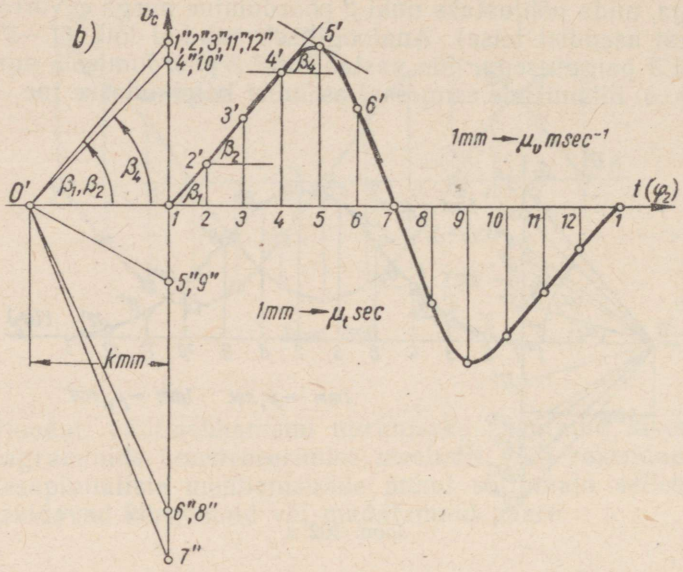
$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{d\,[s_C(t)]}{dt}, \tag{8.5}$$

mis võimaldab määrata kiirust v_C kõvera $s_C = s_C(t)$ graafilise diferentseerimise teel. Selleks pikendame abstsisstelge vasakule (joon. 302 a) ja kanname sellele lõigu (*01*) pikkusega *k* mm. Edasi tõmbame kõverale $s_C = s_C(t)$ punktides *2′*, *3′*, *4′*, ... puutujad ja läbi punkti *0*, paralleelselt saadud puutujatele — kiired *01″*, *02″*, *03″*, ... Viimased määravad ära s_C-teljel lõigud (*1—2″*), (*1—3″*), (*1—4″*), ..., mis on võrdelised kiiruse v_C väärtustega punktides *2, 3, 4, 5, ...* Tõestame selle väite. Teatavasti

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \alpha, \tag{8.6}$$

kus α tähistab kõverale $s_C = s_C(t)$ antud punktis tõmmatud puutuja kaldenurka. Korrutame ja jagame avaldise (8.6) pikkusega *k*. Saame

$$v_C = \frac{\mu_s}{\mu_t k} k \operatorname{tg} \alpha. \tag{8.7}$$



Joon. 302 b.

Suurus $k \operatorname{tg} \alpha$ väljendab α vastavate väärtuste puhul kiirte *02″*, *03″*, *04″*, ... poolt s_C-teljel määratud lõikude (*1—2″*), (*1—3″*), (*1—4″*), ... pikkust. Seega osutub väide, mille kohaselt kiirused v_C on võrdelised millimeetrites mõõdetud lõikude (*1—2″*), (*1—3″*), (*1—4″*), ... pikkustega, tõestatuks. Seosest (8.7) võib avaldada kiiruste mastaabi:

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t k} \frac{\text{m sec}^{-1}}{\text{mm}}. \tag{8.8}$$

Diagrammi $a_C = a_C(t)$ konstrueerimiseks kasutame seost

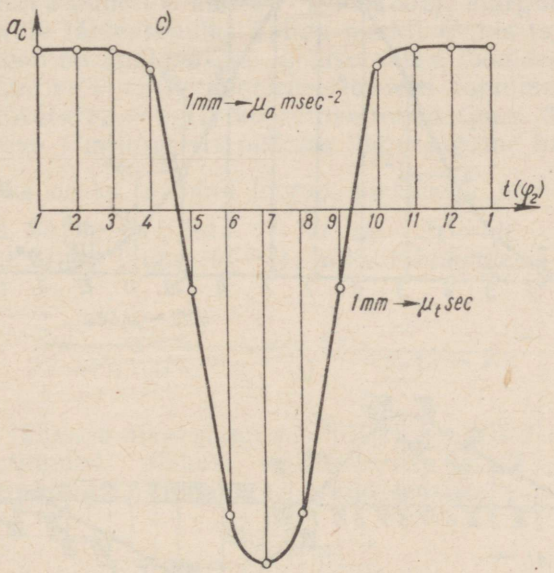
$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{d[v_C(t)]}{dt}, \tag{8.9}$$

millest järeldub, et kiirendusi a_C saab leida kõvera $v_C = v_C(t)$ graafilise diferentseerimise teel. Nagu kiiruste v_C määramisel, nii ka siin kanname abstsissteljele lõigu *0′1* pikkusega k mm (joon. 302 b), tõmbame kõverale $v_C = v_C(t)$ punktides *2′*, *3′*, *4′*, ... puutujad ja läbi punkti *0′*, paralleelselt saadud puutujatega, — kiired *0′2″*, *0′3″*, ... Analoogiliselt eelnevaga võime kirjutada, et

$$a_C = \frac{\mu_v}{\mu_t} \operatorname{tg} \beta = \frac{\mu_v}{\mu_t k} k \operatorname{tg} \beta, \tag{8.10}$$

kus β tähistab kõverale $v_C = v_C(t)$ vastavates punktides tõmmatud puutujate kaldenurki. Suurus $k \operatorname{tg} \beta$ võrdub seega kiirte poolt eraldatud lõikude (*1—2″*), (*1—3″*), (*1—4″*), ... pikkustega. Kiirenduste leidmiseks tuleb järelikult mõõta lõigud (*1—2″*), (*1—3″*), (*1—4″*) jne. millimeetrites ja saadud pikkused korrutada mastaabiga μ_a. Viimase määrame võrranditest (8.10) ja (8.8):

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t k} = \frac{\mu_s}{\mu^2_t k^2} \frac{\text{m sec}^{-2}}{\text{mm}}. \tag{8.11}$$



Joon. 302 c.

Kui eeldada, et abstsissteljele (joon. 302 c) ei ole kantud mitte aeg *t*, vaid nuki *2* pöördenurgad φ_2 (joon. 301), siis kõverate kuju jääb endiseks. Muutub ainult kiiruste ning kiirenduste mastaap. Tõepoolest,

$$v_C = \frac{ds_C}{dt} = \frac{ds_C}{d\varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 \frac{ds_C}{d\varphi_2} = \frac{\omega_2}{k} \frac{\mu_s}{\mu_\varphi} k \operatorname{tg} \alpha \tag{8.12}$$

ja

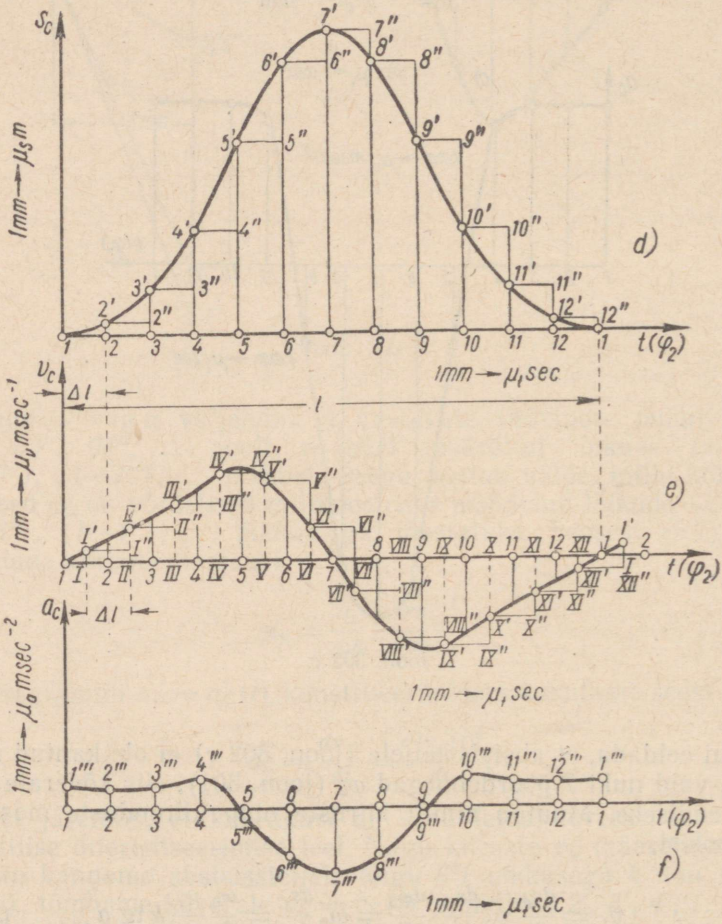
$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{dv_C}{d\varphi_2} \cdot \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2 \frac{dv_C}{d\varphi_2} = \frac{\omega_2}{k} \frac{\mu_v}{\mu_\varphi} k \operatorname{tg} \beta. \tag{8.13}$$

Võrranditest (8.12) ja (8.13) järgneb, et

$$\mu_v = \frac{\omega_2}{k}\frac{\mu_s}{\mu_\varphi}\frac{\text{m sec}^{-1}}{\text{mm}} \tag{8.14}$$

ja

$$\mu_a = \frac{\omega_2}{k}\frac{\mu_v}{\mu_\varphi} = \frac{\omega_2^2}{k^2}\frac{\mu_s}{\mu^2\varphi}\frac{\text{m sec}^{-2}}{\text{mm}}. \tag{8.15}$$



Joon. 302 d, e, f.

Joonisel 301 kujutatud mehhanismi jaoks võib diagramme $s_C = s_C(t)$, $v_C = v_C(t)$ ja $a_C = a_C(t)$ konstrueerida ka nn. juurdekas-

vude meetodil. Viimane on rajatud alljärgnevale eeldusele. Kui vaadelda küllalt lühikest ajavahemikku Δt, siis võib oletada, et uuritava punkti kiirus ja kiirendus muutuvad selles ajavahemikus lineaarselt. Säärases ajavahemikus arvutatud keskmine kiirus ja kiirendus ühtib sel puhul kiiruse ja kiirenduse tegeliku väärtusega ajavahemiku keskel.

Joonis 302 d kujutab nukkmehhanismi (joon. 301) varva punkti C paigutuste diagrammi, mis on konstrueeritud vabalt valitud mastaapides μ_s ja μ_t, aluseks võttes mehhanismi kahtteistkümmet eriasendit. Lähteasendiks, millest algab aja ja paigutuste lugemine, on valitud lüli *3* punkti C asend $1'$ (joon. 301). Märgime siinkohal, et üldiselt võib lähteasendiks valida punkti C mis tahes asendi. Konstruktsioon on analoogiline joonisel 302 a toodule.

Diagrammi $v_C = v_C(t)$ konstrueerimiseks toimime järgmiselt. Tõmbame kõvera $v_C = v_C(t)$ koordinaatteljed (joon. 302 e). Abstsissteljel oleva l millimeetri pikkuse lõigu jagame kaheteistkümneks võrdseks osaks. Saadud lõigud, pikkusega $\Delta l = \frac{l}{12}$, jagame veel pooleks. Saame punktid *I, II, III* jne.

Keskmine kiirus lõigus $(1—2)$, mille tähistame v_{1-2} on antud seosega

$$v_{1-2} = \frac{s_2 - s_1}{\Delta t} = \frac{\mu_s}{\mu_t}\frac{(2-2')}{\Delta l} = \mu_v(2-2'), \tag{8.16}$$

kus $(2—2')$ tähistab diagrammi $s_C = s_C(t)$ punktis *2* (joon. 302 d) mõõdetud ordinaadi pikkust millimeetrites ja μ_v — diagrammi $v_C = v_C(t)$ mastaapi. Viimane on antud seosega

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t \Delta l}\frac{\text{m sec}^{-1}}{\text{mm}}. \tag{8.17}$$

Diagrammist $s_C = s_C(t)$ võetud pikkuse $(2—2')$ kanname lõiguna $(I—I')$ diagrammi $v_C = v_C(t)$ punktis I (joon. 302 e) tõmmatud ordinaadile. Seega

$$(I—I') = (2—2').$$

Kui mastaabi μ_v valik toimus kooskõlas valemiga (8.19), siis

$$v_{1-2} = \mu_v(I—I').$$

Keskmine kiirus v_{2-3} lõigus $(2—3)$ võrdub vastavalt

$$v_{2-3} = \frac{s_3 - s_2}{\Delta t} = \frac{\mu_s}{\mu_t}\frac{[(3-3')-(2-2')]}{\Delta l} = \frac{\mu_s}{\mu_t}\frac{(2''-3')}{\Delta l} = \mu_v(2''-3'),$$

kus lõik $(2''—3') = (II—II')$ võetakse diagrammist $s_C = s_C(t)$ (joon. 302 d).

Lõik $(II—II')$ kantakse ordinaadile, mis on tõmmatud läbi diagrammi $v_C = v_C(t)$ punkti II (joon. 302 e). Keskmiste kiiruste v_{3-4}, v_{4-5}, ... väärtused leitakse analoogiliselt. Punkte I', II'', III', ... sujuva kõveraga ühendades saadakse diagramm $v_C = v_C(t)$ (joon. 302 e).

Lõpuks tuleb veel selgitada, kuidas kulgeb diagramm $v_C = v_C(t)$ varva liikumistsükli alguses, s. o. lõigus $(I—I)$, ja liikumistsükli lõpus, s. o. lõigus $(XII—I)$ (vt. joon. 302 e). Selleks kanname abstsissteljele, lähtudes tsükli lõpus olevast punktist I, lõigu $(I—I)$, mis võrdub samanimelise lõiguga tsükli alguses. Punktist I tõmmatud ordinaadile kanname lõigu $(I—I')$, mis mastaabis μ_v vastab kiirusele v_{1-2}. Punktide XII' ja I' ühendamine sujuva kõveraga määrabki diagrammi $v_C = v_C(t)$ kuju varva liikumistsükli alguses ja lõpus.

Diagramm $a_C = a_C(t)$ (joon. 302 f) konstrueeritakse analoogiliselt diagrammiga $v_C = v_C(t)$.

Keskmised kiirendused a_{I-II}, a_{II-III}, a_{III-IV}, ... intervallides $(I—II)$, $(II—III)$, $(III—IV)$, ... on antud võrranditega

$$a_{I-II} = \frac{v_{II} - v_I}{\Delta t} = \frac{\mu_v [(II - II') - (I - I')]}{\mu_t \quad \Delta l} = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l}(I'' — II') = \mu_a (2 — 2'''),$$

$$a_{II-III} = \frac{v_{III} - v_{II}}{\Delta t} = \frac{\mu_v [(III - III') - (II — II')]}{\mu_t \quad \Delta l} =$$

$$= \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l}(II'' — III') = \mu_a (3 — 3'''), \ldots \qquad (8.18)$$

Võrrandites (8.18) esinevad lõigud $(I''—II')$, $(II''—III')$, ... võetakse diagrammist $v_C = v_C(t)$. Lõigud $(2—2''')$, $(3—3''')$, ... kantakse aga diagrammi $a_C = a_C(t)$ ordinaatidele, mis on tõmmatud punktidest 2, 3, ... (joon. 302 f). Need lõigud kujutavad endast kiirendusi a_{I-II}, a_{II-III}, jne. mastaabis

$$\mu_a = \frac{\mu_v}{\mu_t \Delta l} \frac{\text{m sec}^{-2}}{\text{mm}}.$$

Punkte $1'''$, $2'''$, ... sujuva kõveraga ühendades saame diagrammi $a_C = a_C(t)$.

3°. Käsitletud mehhanismi puhul lahendati kiiruste ja kiirenduste määramise ülesanne etteantud paigutustekõvera kahekordse graafilise diferentseerimise teel. Reas mehhanismide ja masinate teooria ülesannetes tuleb kasutada graafilist integreerimist. Kujutagu näiteks joonis 303, *a* mingi sirgjooneliselt liikuva meh-

hanismipunkti kiirenduse a_C diagrammi aja t funktsioonina. Ülesandeks on konstrueerida diagrammid $v_C = v_C(t)$ ja $s_C = s_C(t)$. Ülesande lahendamiseks kantakse abstsissteljele võrdse pikkusega lõigud ja saadud punktidest *1, 2, 3, ...* tõmmatakse ordinaadid *1—1′, 2—2′, 3—3′, ...* Kiiruse v_C juurdekasv ajavahemikus $\Delta t = t_2 - t_1$ on arvutatav tuntud seosega

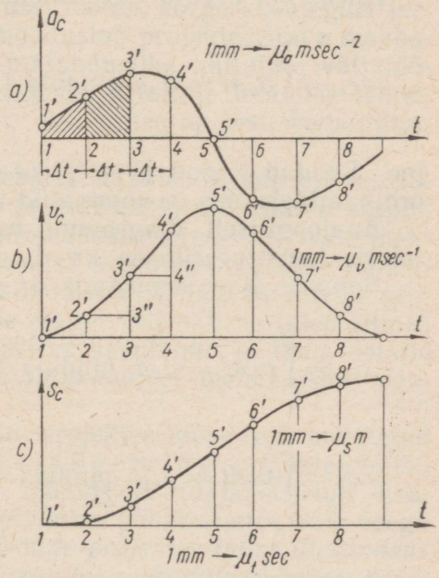
$$v_{C2} - v_{C1} = \int_{t_1}^{t_2} a_C dt. \qquad (8.19)$$

Võrrandi (8.19) paremal poolel esinev integraal on väljendatav pindalaga [*1 1′ 2′ 2*] mm², mis on alt piiratud abstsissteljega, külgedelt ordinaatidega *1—1′* ja *2—2′* ning ülalt kõveraga $a_C = a_C(t)$ (joon. 303, *a*). Nimetatud pindala tuleb seejuures veel korrutada mastaapidega μ_a ja μ_t. Seega

$$v_{C2} - v_{C1} = \mu_a \mu_t \text{ pindala } [1\ 1'\ 2'\ 2] \text{ mm}^2. \qquad (8.20)$$

Pindala [*1 1′ 2′ 2*] on otstarbekas mõõta planimeetriga. Kuid selle võib määrata ka ruutude loendamise teel, joonestades kõvera $a_C = a_C(t)$ eelnevalt millimeeterpaberile või kattes ta millimeetervõrguga. Lõpuks võib pindala [*1 1′ 2′ 2*] asendada ka võrdpindse trapetsiga või püstkülikuga. Asetades ruutmillimeetrites saadud pindala väärtuse valemisse (8.20), määrame kiiruse v_C juurdekasvu ajavahemikus $\Delta t = t_2 - t_1$. Kui asendile *1* vastav kiirus v_{C1} võrdub nulliga (joon. 303, *b*), siis asendis *2* valitsev kiirus v_{C2} saadakse seosest

$$v_{C2} = \mu_a \mu_t \text{ pindala } [1\ 1'\ 2'\ 2] \text{ mm}^2.$$



Joon. 303.

Kiiruse v_{C2} leitud väärtus kantakse mastaabis μ_v joonestatud lõigu (*2—2′*) näol punktist *2* tõmmatud ordinaadile (joon. 303, *b*). Seega

$$v_{C2} = \mu_v (2—2').$$

Edasi mõõdame ruutmillimeetrites pindala [*2 2′ 3′ 3*] (joon. 303, *a*) ja rakendame seost

$$v_{C3} - v_{C2} = \int_{t_2}^{t_3} a_C dt = \mu_a \mu_t \text{ pindala } [2\ 2'\ 3'\ 3] \text{ mm}^2.$$

Lõigus $t_2 - t_3$ arvutatud kiiruse v_C juurdekasv kantakse punktis *3* tõmmatud ordinaadile lõigu (*3″ — 3′*) näol (joon. 303, *b*), nimetatud lõiku lõiguga $(3 - 3'') = (2 - 2')$ liites. Korrates ülalkirjeldatud arvutusi ja konstruktsioone kõigi järgnevate ajavahemikkude kohta, saame lõpuks diagrammi $v_C = v_C(t)$. Arvutustäpsuse parandamiseks võib pindalade mõõtmisel lähtuda alati asendist *1*. Kiirus v_{C3} näiteks avaldatakse sel puhul seosest

$$v_{C3} = \int_{t_1}^{t_3} a_C dt = \mu_a \mu_t \text{ pindala } [1\ 1'\ 3'\ 3] \text{ mm}^2 = \mu_v (3 — 3').$$

Kiirus v_{C4} arvutatakse valemiga

$$v_{C4} = \int_{t_1}^{t_4} a_C dt = \mu_a \mu_t \text{ pindala } [1\ 1'\ 4'\ 4] \text{ mm}^2 = \mu_v (4 — 4')$$

jne. Saadud lõigud (*3—3′*), (*4—4′*), ... kantakse diagrammis ordinaatidele, mis on tõmmatud läbi punktide *3*, *4*, ...

Analoogiliselt diagrammi $v_C = v_C(t)$ graafilisele integreerimisele konstrueeritakse ka diagramm $s_C = s_C(t)$ (joon. 303, *c*). Samade ajavahemikkude Δt puhul leiame, et

$$s_{C2} = \int_{t_1}^{t_2} v_C dt = \mu_v \mu_t \text{ pindala } [1\ 1'\ 2'\ 2] \text{ mm}^2 = \mu_s (2 — 2'),$$

$$s_{C3} = \int_{t_1}^{t_3} v_C dt = \mu_v \mu_t \text{ pindala } [1\ 1'\ 3'\ 3] \text{ mm}^2 = \mu_s (3 — 3'),$$

. . . . . .

Pindalad [*1 1′ 2′ 2*], [*1 1′ 3′ 3*], ... mõõdetakse diagrammilt $v_C = v_C(t)$ (joon. 303, *b*), lõigud (*2—2′*), (*3—3′*), ... kantakse aga diagrammi $s_C = s_C(t)$ (joon. 303, *c*) ordinaatidele mastaabis μ_s.

Lõpuks märgime, et graafilise diferentseerimise ja integreerimise meetodid, mis käesolevas peatükis esitati seoses kinemaatiliste diagrammide konstrueerimisega, on mehhanismide ja masi-

nate teoorias kasutatavad ka mitmete teiste ülesannete lahendamisel. Reas mehhanismide dünaamika ülesannetes antakse näiteks mehhanismile mõjuvate jõudude sõltuvus nende rakenduspunktide paigutustest vastavate diagrammide näol. Sääraselt määratud jõudude tööd saab leida graafilise integreerimise teel.

IX peatükk

SISSEJUHATUS TASAPINNALISTE MEHHANISMIDE PROJEKTEERIMISSE

§ 38. Mehhanismide projekteerimise põhiülesanded

1°. Mehhanismide projekteerimine osutub keerukaks, kompleksseks ülesandeks, mille lahendamise võib jagada reaks sõltumatuteks etappideks. Projekteerimise esimeseks etapiks on mehhanismi säärase kinemaatilise põhiskeemi loomine, mis tagaks nõutava liikumisviisi ja liikumisseaduse. Projekteerimise teiseks etapiks on mehhanismi konstruktsiooni loomine. Viimane peab mehhanismile tagama vajaliku tugevuse, töö-ea, kõrge kasuteguri jne. Projekteerimise kolmanda etapi moodustab projekteeritava mehhanismi tehnoloogiliste ja tehnilis-majanduslike näitajate väljatöötamine. Viimased sõltuvad mehhanismi detailide tootmise tehnoloogiast, mehhanismi montaažist, ekspluateerimisest, remontimisest jne.

Mehhanismide ja masinate teooria käsitleb peamiselt meetodeid, mis võimaldavad lahendada projekteerimistöö esimest etappi, s. o. nõutud liikumisviisi ja liikumisseadust reprodutseerivate mehhanismide kinemaatilise skeemi loomist. Seejuures võetakse endastmõistetavalt arvesse ka mõningaid küsimusi, mis kuuluvad projekteerimise teise või kolmandasse etappi. Nii näiteks tuleb silmas pidada, et mehhanismil oleks soovitav kasutegur, et tema detaile saaks valmistada kaasaegsetel tööpinkidel, et mehhanismi montaaž oleks võimalik jne.

Edaspidises on mehhanismide projekteerimise all mõistetud ainult nende kinemaatiliste skeemide projekteerimist, kusjuures võetakse arvesse ka mõningaid ülalkäsitletud lisatingimusi. Mehhanismide projekteerimise põhiülesande võib seega formuleerida järgmiselt: *mehhanismide projekteerimise ülesandeks on ühe või mitme lüli etteantud liikumise reprodutseerimine, kasutades kas lülide vahetut vastastikust toimet või rakendades nende vahel liikumise ülekandmiseks vahelülisid.* Mõlemal juhul taandub ülesande lahendamine teatava, määratud liikumisega kinemaatilise ahela projekteerimiseks. Projekteerimise peaülesandeks on seega mehhanismi loomine, mis võimaldaks saavutada etteantud liikumist.

2°. Projekteerimisülesande lahendamisel tuleb silmas pidada kõiki tegureid, mis määravad reprodutseeritavat liikumist. Niisugusteks teguriteks on esmajärjekorras projekteeritava mehhanismi õige struktuur, reprodutseeritava liikumise kinemaatiline täpsus, võimalus reprodutseerida etteantud liikumist projekteeritava mehhanismi abil ka dünaamika seisukohast ja lõpuks, nõue, et projekteeritava mehhanismi lülide reaalsed mõõted võimaldaksid etteantud liikumist tegelikult saavutada. Käesolevas peatükis peatutakse mehhanismide projekteerimise põhiülesannete üldlahendite juures ja näidatakse, kuidas on võimalik arvesse võtta ülalkäsitletud struktuuri, kinemaatilisi, dünaamilisi ja lülide reaalseid mõõteid käsitlevaid tingimusi.

Tehnikas on eriline tähtsus järgmistel mehhanismide projekteerimise põhiülesannetel:

1) ühe teatava telje ümber toimuva pöörleva liikumise ülekandmine pöörlevaks liikumiseks ümber mingi teise etteantud telje;

2) ümber ühe telje toimuva pöörleva liikumise muundamine etteantud sihiga translatoorseks liikumiseks, või vastupidi;

3) teatavas sihis toimuva translatoorse liikumise ülekandmine translatoorseks liikumiseks teises, etteantud sihis ja

4) etteantud trajektoori reprodutseerimine mehhanismi ühe lüli mingi punkti poolt.

Kolme esimese ülesande lahendamisel antakse ette tavaliselt nende lülide liikumisseadused, mille vahel liikumise ülekandmine või muundumine toimub. Liikumisseadused esinevad seejuures tavaliselt aja funktsioonidena antud lineaar- või nurkpaigutuste näol. Sageli kohtab liikumisseadustena ka lineaar- või nurkkiiruste sõltuvusi ajast.

Neljanda ülesande puhul antakse soovitav trajektoor ette kas analüütiliselt, vastavate võrrandite abil, või siis graafiliselt, trajektoori määravate üksikute punktide kaupa.

Peale selle, nagu ülal mainitud, fikseeritakse projekteeritavate mehhanismide soovitav konstruktiivne kuju ja mõningad dünaamilised lisatingimused, millest sõltub mehhanismi kasutegur, tema liikumise stabiilsus, detailide tugevus jne.

Ülalkäsitletud sünteesiülesandeid õnnestub tavaliselt lahendada mitmete üksteisest erinevate mehhanismide abil. Mõnedel neist on ainult madalamad kinemaatilised paarid, teistel aga esineb nii madalamaid kui ka kõrgemaid paare.

Praktika näitab, et etteantud liikumisvormide reprodutseerimise ülesanne on alati lihtsamalt lahendatav mehhanismidega, milles esineb nii kõrgemaid kui ka madalamaid kinemaatilisi paare. See on seletatav kõigepealt asjaoluga, et kõrgemaid paare

võib luua määratul hulgal variantides, kuna madalamatest paaridest esineb tasapinnalistes mehhanismides ainult kaks liiki: translatsioonipaarid ja rotatsioonipaarid.

Etteantud liikumisvormide täpne reprodutseerimine toimub seepärast peaaegu alati mehhanismidega, mille koosseisu kuulub nii kõrgemaid kui ka madalamaid paare. Mehhanisme, milles esineb ainult madalamaid paare, kasutatakse etteantud liikumisvormide l i g i k a u d s e k s reprodutseerimiseks.

Lähtudes ülaltoodust valib konstruktor ühe või teise kinemaatilise skeemi vastavalt mehhanismi projekteerimisel kehtivatele tingimustele.

3°. Nagu 5. peatükis märgiti (§ 23, 5° ja § 27), on kõrgema kinemaatilise paari elemendid kas suhtelise liikumise tsentroidid või kaasmähisjooned. Esimesel juhul veerevad kõrgemate paaride elemendid ilma libisemiseta, teisel juhul aga esineb veeremine koos libisemisega. Seega, kui sünteesitavas mehhanismis on ette nähtud kõrgemaid kinemaatilisi paare, siis taandub nende elementide projekteerimine kas suhtelise liikumise tsentroidide või kaasmähisjoonte leidmiseks. Mehhanisme, mille kõrgemate paaride elemendid on tsentroidid, nimetatakse *tsentroidmehhanismideks*. Mehhanisme, mille kõrgemate paaride elemendid on moodustatud kaasmähisjoontest, nimetatakse sõltuvalt nende konstruktiivsest kujundusest kas *nukk-* või *hammasmehhanismideks*.

Kui mehhanismi koosseisus esineb ainult madalamaid paare, siis sõltuvalt tema konstruktiivsest kujundusest on meil tegemist kas *varbmehhanismiga, kulissmehhanismiga, kiilmehhanismiga* vms.

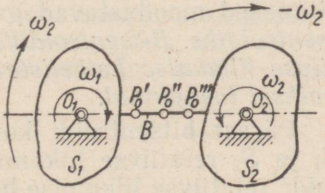
Alljärgnevas käsitleme mõningaid mehhanismide projekteerimise üldküsimusi.

§ 39. Liikumise reprodutseerimine tsentroidide abil

1°. Alustame järgmise ülesandega. Ümber tsentri O_1 pöörleva süsteemi S_1 liikumine, mis toimub nurkkiirusega ω_1, tuleb üle kanda süsteemile S_2 nii, et see hakkaks pöörlema ümber tsentri O_2, nurkkiirusega ω_2. Nurkkiirused ω_1 ja ω_2 on antud aja funktsioonidena:

$$\omega_1 = \omega_1(t), \qquad \omega_2 = \omega_2(t).$$

Süsteemide S_1 ja S_2 vastastikune (suhteline) liikumine on määratud hetkelise kiiruste tsentri P_0 asukohaga ja hetkelise relatiivse nurkkiiruse Ω suurusega. Neid tegureid saab süsteemide S_1 ja S_2 reas järjestikus-



Joon. 304.

tes asendites leida järgmiselt. Olgu real üksteisele järgnevatel hetkedel süsteemide S_1 ja S_2 nurkkiirusteks vastavalt

$$\omega_1', \omega_1'', \omega_1''', \ldots$$

ja

$$\omega_2', \omega_2'', \omega_2''', \ldots$$

Anname mõtteliselt mõlemale süsteemile veel ühe hetkelise lisanurkkiiruse ümber tsentri O_2. Lisanurkkiirus olgu seejuures väärtuselt võrdne nurkkiirusega ω_2', kuid märgilt vastupidine. Süsteem S_2, millel on nüüd kaks suuruselt võrdset, kuid vastassuunalist nurkkiirust, muutub mõtteliselt liikumatuks. Süsteem S_1 aga hakkab pöörlema summaarse nurkkiirusega Ω', mis on määratud seosega

$$\Omega' = \omega_1' - \omega_2', \tag{9.1}$$

kusjuures

$$|\Omega'| = |\omega_1'| + |\omega_2'|.$$

Nurkkiirus Ω' osutub hetkeliseks relatiivseks kiiruseks süsteemi S_1 liikumisel süsteemi S_2 suhtes. Nimetatud liikumise hetkeline kiiruste tsenter asub punktis P_0', mis paikneb sirgel O_1O_2. Punkti P_0' asukoht määratakse (vt. § 24, 3°) võrdest

$$\frac{|\omega'_1|}{|\omega'_2|} = \frac{O_2P_0'}{O_1P_0'}. \tag{9.2}$$

Hetkeline kiiruste tsenter P_0' jagab seega lõigu O_1O_2 pöördvõrdeliselt nurkkiirustega.

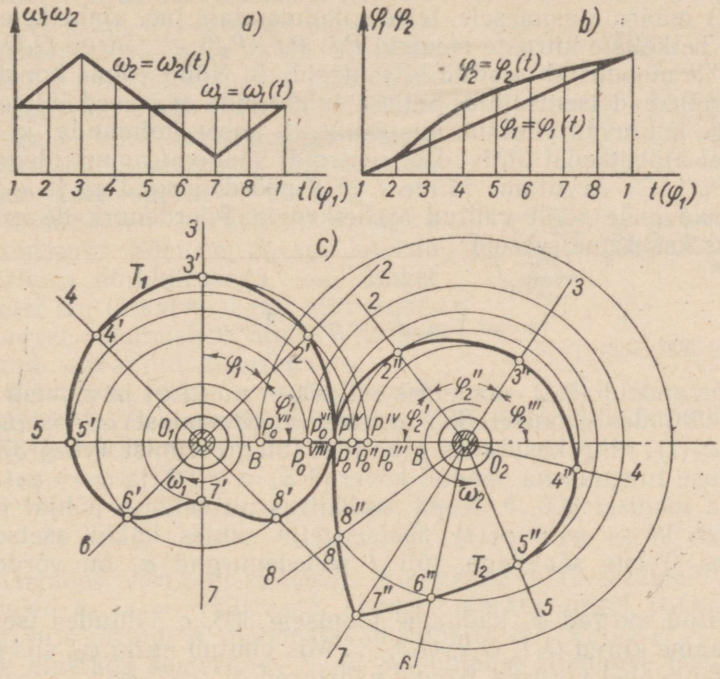
Viime nüüd süsteemid S_1 ja S_2 asendisse, mis vastab teisele ajahetkele. Süsteemide S_1 ja S_2 nurkkiirusteks on siin vastavalt ω_1'' ja ω_2''. Hetkelise kiiruste tsentri P_0'' asukoht sirgel O_1O_2 määratakse sedapuhku võrdest

$$\frac{|\omega''_1|}{|\omega''_2|} = \frac{O_2P''_0}{O_1P''_0}.$$

Korrates ülalkirjeldatut ka süsteemide S_1 ja S_2 järgnevate asendite puhul, saame paiksel tasapinnal rea punkte P_0', P_0'', P_0''', ... Viimased moodustavad geomeetrilise koha, mida nimetatakse *bitsentroidiks. Bitsentroidiks nimetatakse seega kahe süsteemi relatiivse liikumise hetkeliste kiiruste tsentrite geomeetrilist kohta paiksel tasapinnal.*

Pärast bitsentroidi konstrueerimist võib määrata süsteemide S_1 ja S_2 relatiivse liikumise tsentroidid. Kuna uuritavate süsteemide relatiivse liikumise hetkelisteks kiiruste tsentriteks olid punktid P_0', P_0'', P_0''', ... siis süsteemile S_1 kuuluva tsentroidi konst-

rueerimiseks tuleb leida süsteemi S_1 sääraste punktide geomeetriline koht, mis punktidega P_0', P_0'', P_0''', ... järgemööda ühtivad. Analoogiliselt tuleb süsteemi S_2 kuuluva tsentroidi konstrueerimiseks leida süsteemi S_2 sääraste punktide geomeetriline koht, mis järgemööda ühtivad samade punktidega P_0', P_0'', P_0''', ... (vt. § 23, 4°).



Joon. 305.

2°. Olgu näiteks lülide *1* ja *2* liikumine antud kõverate $\omega_1 = \omega_1(t)$ ja $\omega_2 = \omega_2(t)$ abil (vt. joon. 305, *a*), kusjuures eeldame, et $\omega_1 = \text{const}$. Nurkkiirused ω_1 ja ω_2 olgu seejuures erimärgilised. Kasutades ω_1 ja ω_2 etteantud väärtusi, konstrueerime kõigepealt bitsentroidi. Selleks ühendame punktid O_1 ja O_2 (joon. 305, *c*) sirgega ning määrame lülide *1* ja *2* relatiivse liikumise hetkelise kiiruste tsentri P_0. Seose (9.2) põhjal

$$\frac{O_1P_0}{O_2P_0} = \left|\frac{\omega_2}{\omega_1}\right|.$$

Kuna aga

$$O_1P_0 + O_2P_0 = O_1O_2,$$

siis saame lõplikult

$$O_1P_0 = O_1O_2 \frac{|\omega_2|}{|\omega_1| + |\omega_2|}. \qquad (9.3)$$

Asetades joonisel 305, *a* toodud diagrammist võetud nurkkiiruste ω_1 ja ω_2 väärtused valemisse (9.3), võime sirgel O_1O_2 (joon. 305, *c*) määrata esimesele, teisele, kolmandale jne. ajahetkele vastavad hetkeliste kiiruste tsentrid P_0', P_0'', P_0''', ... Sirge O_1O_2 lõik $P_0'''P^{VII}$ moodustab otsitud bitsentroidi *B*. Nüüd võime konstrueerida mõlemad tsentroidid. Selleks tuleb leida säärased lülide *1* ja *2* külge kuuluvad punktid, mis esimesel, teisel, kolmandal ja järgnevatel ajahetkedel ühtivad bitsentroidi vastavate punktidega P_0', P_0'', P_0''', ... Arvutame lülide *1* ja *2* pöördenurgad φ_1 ja φ_2, mis vastavad meie poolt valitud ajahetkedele. Pöördenurkade arvutamiseks kasutame seoseid

$$\varphi_1 = \int_t^{t} \omega_1 \, dt, \quad \varphi_2 = \int_t^{t} \omega_2 dt. \qquad (9.4)$$

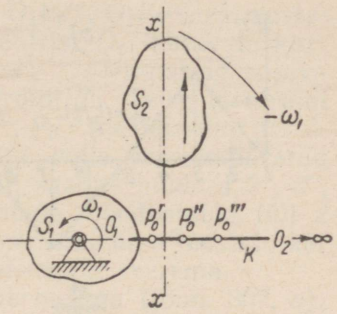
Võrrandeid (9.4) vaadeldes selgub, et nurki φ_1 ja φ_2 võib määrata, lähtudes joonisel 305, *a* toodud kõveratest $\omega_1 = \omega_1(t)$ ja $\omega_2 = \omega_2(t)$, ning kasutades graafilist integreerimist (vt. § 37, 2°). Arvutuse tulemusena saadud kõverad $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ ja $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ on toodud joonisel 305, *b*. Kuna nurkkiirus oli eelduse põhjal püsiv, kujuneb kõver $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ abstsisstelje suhtes kaldu asetsevaks sirgeks. Teiste sõnadega, lüli *1* pöördenurgad φ_1 on võrdelised ajaga.

Leitud nurgad φ_1 kanname joonisele 305, *c*, lähtudes tsentrist O_1. Saame kiired O_11, O_12, O_13, ... Mis puutub nurki φ_2, siis ei ole need omavahel võrdsed. Nende väärtused φ_2', φ_2'', φ_2''', ... võtame graafikust $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ (joon. 305, *b*) ja kanname joonisele 305, *c*, lähtudes seekord tsentrist O_2. Saame kiired O_21, O_22, O_23, ... Nüüd tõmbame, lähtudes tsentrist O_1 ja kasutades raadiustena pikkusi O_1P_0'', O_1P_0''', $O_1P_0^{IV}$, ..., ringjoone kaari, kuni need punktides $2'$, $3'$, $4'$, ... lõikuvad juba varem tsentrist O_1 joonestatud kiirtega. Ühendades punktid P_0', $2'$, $3'$, ... omavahel sujuva kõverjoonega, saame lülile *1* kuuluva tsentroidi T_1. Teine tsentroid konstrueeritakse analoogiliselt. Joonestame raadiustega $P_0''O_2$, $P_0'''O_2$, $P_0^{IV}O_2$, ... tsentrist O_2 lähtudes ringjoone kaared, mis punktides $2''$, $3''$, $4''$, ... lõikuvad tsentrist O_2 lähtuvate kiirtega. Saadud punktide P_0', $2''$, $3''$, ... ühendamine sujuva kõverjoone abil annab lülile *2* kuuluva tsentroidi T_2. Lülide *1* ja *2* relatiivne liikumine realiseeritakse tsentroidide T_1 ja T_2 veeretamisega teineteisel.

3°. Käsitleme nüüd liikumise ülekandmise probleemi joonisel

306 kujutatud süsteemide S_1 ja S_2 vahel. Süsteem S_1 pöörleb ümber tsentri O_1 nurkkiirusega ω_1. Viimane on antud aja t funktsioonina $\omega_1 = \omega_1(t)$. Süsteem S_2 peab aga liikuma xx-sihis translatoorselt ja vahelduvasuunaliselt kiirusega v_2. Viimane on aja t funktsioonina samuti ette antud: $v_2 = v_2(t)$.

Süsteemide S_1 ja S_2 ülalkirjeldatud liikumise puhul määratakse relatiivse liikumise hetkelise kiiruste tsentri P_0 asukohad järgmiselt (vt. § 24, 4°). Anname mõtteliselt mõlemale süsteemile S_1 ja S_2 ühise hetkelise lisanurkkiiruse, mis oma absoluutväärtuselt võrdub nurkkiirusega ω_1, kuid kulgeb sellega vastassuunaliselt. Süsteem S_1, millele nüüd mõjub kaks suuruselt võrdset, kuid vastassuunalist kiirust, jääb seega liikumatuks. Süsteem S_2 aga hakkab pöörlema nurkkiirusega $-\omega_2$ ümber tsentri O_1, jätkates samal ajal translatoorset liikumist xx-sihis. Viimane toimub etteantud kiirusega v_2.



Joon. 306.

Relatiivse liikumise hetkelise kiiruste tsentri P_0 asukoht määratakse § 24, 4° toodud võrrandi (5.15) põhjal seosest

$$O_1P_0 = \frac{v_2}{|\omega_1|}. \qquad (9.5)$$

Asetades võrrandisse (9.5) erinevatele ajahetkedele vastavad kiiruste v_2 ja ω_1 väärtused, saame määrata sirgel O_1O_2 paiknevad, bitsentroidi K moodustavad punktid P_0', P_0'', P_0''', ... Nüüd võib alustada süsteemide S_1 ja S_2 suhtelise liikumise tsentroidide konstrueerimist. Selleks leiame kõigepealt süsteemidesse S_1 ja S_2 kuuluvate sääraste punktide geomeetrilised kohad, mis vastavatel ajahetkedel ühtivad bitsentroidi punktidega P_0', P_0'', P_0''', ... Konstruktsiooni teostame järgmiselt. Pöörelgu vedav lüli *1* ümber tsentri O_1 (joon. 307, *b*) püsiva nurkkiirusega ω_1. Veetav lüli *2* liikugu xx-sihis translatoorselt muutuva kiirusega v_2. Kiiruse v_2 kulgemine aja, ühtlasi ka vedavlüli *1* pöördenurga φ_1 funktsioonina

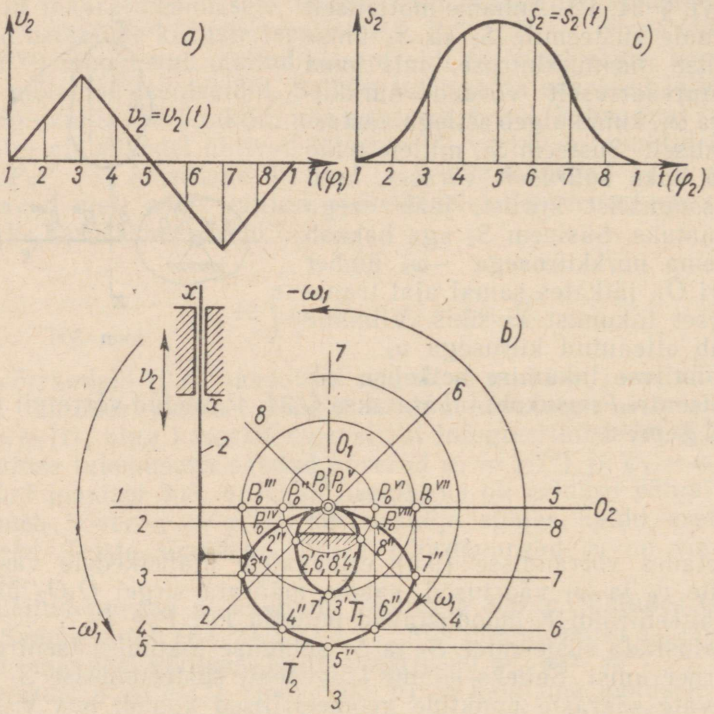
$$v_2 = v_2(t) = v_2(\varphi_1)$$

on antud joonisel 307, *a* toodud graafiku kujul.

Suhtelise liikumise tsentroidide määramiseks tuleb leida kõigepealt bitsentroid, s. t. lülide *1* ja *2* suhtelisel liikumisel esinevate hetkeliste kiiruste tsentrite geomeetriline koht liikumatul tasapinnal. Bitsentroidi punktid paiknevad ilmselt sirgel O_1O_2, mis ris-

tub lüli *2* liikumisteljega *xx* (joon. 307, *b*). Bitsentroidi punktide määramiseks kasutame seost (9.5).

Asetades nimetatud võrrandisse graafikust (joon. 307, *a*) saadavad, vedava lüli pöördenurga φ_1 erinevatele väärtustele vastavad kiiruse v_2 suurused, leiame bitsentroidi moodustavad punktid P_0', P_0'', P_0''', ... (joon. 307, *b*).



Joon. 307.

Pärast bitsentroidi määramist konstrueeritakse tsentroidid. Selleks tuleb leida süsteemidesse *1* ja *2* kuuluvad punktid, mis bitsentroidi punktides P_0', P_0'', P_0''', ... astuvad omavahel paarikaupa kontakti. Alustame konstruktsiooni lüli *1* pöördenurkade φ_1 ja lüli *2* paigutuste s_2 joonisele kandmisega. Kuna oletasime, et lüli *1* nurkkiirus ω_1 on püsiv, siis lüli *1* pöördenurgad φ_1 on võrdsete ajavahemikkude puhul omavahel võrdsed. Kanname need nurgad joonisele, lähtudes punktist O_1. Saame kiired $O_1 1$, $O_1 2$, $O_1 3$, ...

Edasi määrame lüli *2* lineaarsed paigutused s_2', s_2'', s_2''', ...

(joon. 307, *c*). Selleks kasutame seost

$$s_2 = \int_t^{} v_2 dt,$$

kusjuures joonisel 307, *a* toodud kõver $v_2 = v_2(t) = v_2(\varphi_1)$ integreeritakse graafiliselt (vt. § 37, 2°). Seepeale, lähtudes punktist O_1 kui tsentrist, tõmbame raadiustele O_1P_0'', O_1P_0''', $O_1P_0^{IV}$, ... vastavad ringjoone kaared. Need lõikuvad tsentrist O_1 lähtuvate kiirtega O_12, O_13, O_14, ... punktides $2'$, $3'$, $4'$, ... Viimaseid sujuva kõveraga ühendades saame lüli *1* tsentroidi T_1. Teise tsentroidi konstrueerimiseks tõmbame punktidest P_0'', P_0''' jne. lähtudes paralleeljooned etteantud sihile *xx* ja kanname neile varemmääratud paigutused s_2'', s_2''', ... (joon. 307, *c*). Nii saadud punktid $2''$, $3''$, $4''$, ... ühendame sujuva kõveraga. Viimane moodustabki lüli *2* tsentroidi T_2. Lüli *1* ja *2* soovitud suhteline liikumine teostub, kui panna tsentroidid T_1 ja T_2 teineteisel libisemata veerema.

Kuna kiirus v_2 asendites *1* ja *5* võrdub nulliga (joon. 307, *a*), siis ühtivad neile vastavad hetkelised kiiruste tsentrid P_0' ja P^V punktiga O_1. Tsentroidide T_1 ja T_2 profiilid läbivad järelikult nimetatud punkti. See asjaolu võib antud mehhanismi konstruktiivset kujundamist suurel määral raskendada.

Käsitletud näidetest selgub, et juhul, kui liikumist kantakse üle tsentroidide abil, leiab tsentroidide vaheline kontakt aset alati bitsentroidil. Bitsentroid osutub seega mitte ainult suhtelise liikumise hetkeliste kiiruste tsentrite geomeetriliseks kohaks, vaid ühtlasi ka liikumatu tasapinna sääraste punktide geomeetriliseks kohaks, kus tsentroidid kontakteeruvad (hambuvad). Käsitletav geomeetriline koht on seetõttu ühtlasi ka *tsentroidide hambumisjooneks.*

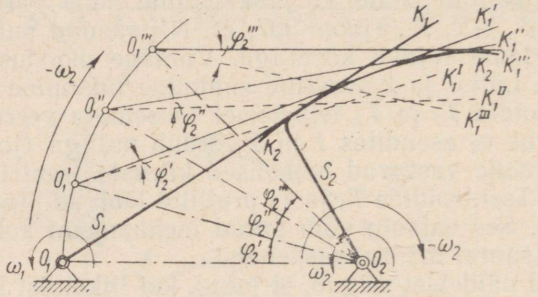
Siirdudes nüüd meie poolt püstitatud eelviimase probleemi juurde, mis käsitleb etteantud translatoorse liikumise muundamist teisesihiliseks translatoorseks liikumiseks, selgub, et seda ülesannet ei saa tsentroidide meetodiga lahendada. Tõepoolest, lülide suhtelise liikumise uurimine näitab, et see osutub ühe lüli resulteerivaks translatoorseks liikumiseks teise suhtes. Järelikult paiknevad siin bitsentroidi kõik punktid lõpmatuses.

§ 40. Liikumise reprodutseerimine kaasmähisjoonte abil

1°. Käsitleme nüüd liikumise reprodutseerimise küsimust kaasmähisjoonte (kaasmähiskõverate) abil. Käesoleva raamatu § 27 näidati, et põhitingimuseks, millele kaasmähisjooned pidid vastama, oli nõue, et nende kokkupuutepunktis tõmmatud ühine normaal peab igal hetkel läbima vastava suhtelise liikumise hetke-

list kiiruste tsentrit. Üldjuhul rahuldab seda tingimust arvutu hulk kaasmähiskõverate paare. On ilmne, et tegelikult kasutamisele tuleva mähiskõverate paari valikul peab silmas pidama § 38 nimetatud lisatingimusi.

Praktikas valitakse tavaliselt üks kõveratest (mida käsitatakse kui mähitavat) meelevaldselt ja kogu ülesanne taandub seega teise mähiskõvera — mähkija — konstrueerimiseks. Säärase ülesande lahendamine ei valmista erilisi raskusi. Lähtudes etteantud liikumisseadustest ja kasutades § 39 toodud meetodit, konstrueeritakse kõigepealt suhtelise liikumise tsentroidid. Edasi valitakse ühele tsentroidile kuuluvas süsteemis mähitav kõver. Mähkija konstrueeritakse seepeale § 27 toodud meetoditega.



Joon. 308.

2°. Enamik tehnilisi ülesandeid aga lahendatakse lihtsamalt. Kaaskõverat K_2 ei konstrueerita mitte punkthaaval, suhtelise liikumise tsentroididest lähtudes, vaid hoopis teisiti, tsentroide eelnevalt määramata. Olgu näiteks ette antud süsteemi S_1 kuuluv ja etteantud nurkkiirusega $\omega_1 = \omega_1(t)$ ümber tsentri O_1 pöörlev sirge K_1 (joon. 308). Ülesandeks on konstrueerida süsteemi S_2 kuuluv kaaskõver K_2, mis pöörleks etteantud nurkkiirusega $\omega_2 = \omega_2(t)$ ümber tsentri O_2. Ülesande lahendamiseks kasutame liikumise pööramise võtet, andes mõlemale süsteemile ühise lisanurkkiiruse — ω_2 ümber tsentri O_2. Lisanurkkiirus on seega oma absoluutväärtuselt võrdne süsteemi S_2 etteantud nurkkiirusega ω_2, kuid vastassuunaline. Lisanurkkiiruse tõttu muutub süsteem S_2 liikumatuks, süsteem S_1 aga saab lisaks nurkkiirusele ω_1 ümber tsentri O_1 veel nurkkiiruse $-\omega_2$ ümber tsentri O_2. Määrame rea sirge K_1 asendeid selles süsteemi S_1 suhtelises liikumises. Süsteemi S_1 tiirlemisel nurkkiirusega $-\omega_2$ ümber tsentri O_2 läbib tsenter O_1 järjekorras asendid O_1', O_1'', O_1''', ..., mis kõik paiknevad tsentrist O_2 raadiusega O_1O_2 tõmmatud ringjoonel. Punktide O_1', O_1'', O_1''', ... asukohad on määratud pöördenurkadega φ_2', φ_2'', φ_2''', ... Vii-

masedsaadakse võrrandist

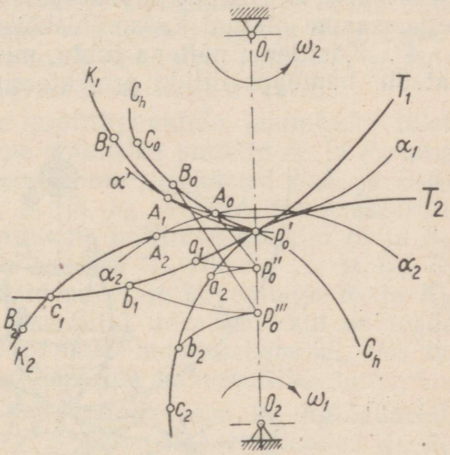
$$\varphi_2 = \int_t^t \omega_2 dt.$$

Sirge K_1 vastavateks asenditeks on K_1^{I}, K_1^{II}, K_1^{III}, ...

Lisaks ülalkäsitletud tiirlemisele ümber tsentri O_2 pöörleb sirge K_1 veel nurkkiirusega ω_1 ümber tsentri O_1. Seetõttu pöörame nüüd sirget K_1 veel igas tema asendis K_1^{I}, K_1^{II}, K_1^{III}, ... ümber vastavate punktide O_1', O_1'', O_1''', ... võrrandiga

$$\varphi_1 = \int_t^t \omega_1 dt$$

määratud nurkade φ_1', φ_1'', φ_1''', ... võrra. Sirge K_1 lõplikeks asenditeks kujunevad K_1', K_1'', K_1''', ... Otsitav kõver K_2 peab mähkima saadud sirgete parve K_1, K_1', K_1'', K_1''', ... Praktiliselt saadakse mähkija K_2 sel teel, et tõmmatakse silma järgi kõver, mis oleks kordamööda puutujaks kõikidele parve K_1 moodustavatele sirgetele. Mähkija K_2 konstrueerimisel vajaliku täpsuse saavutamiseks tuleb sirge K_1 asendeid suhtelises liikumises määrata küllaldasel hulgal.



Joon. 309.

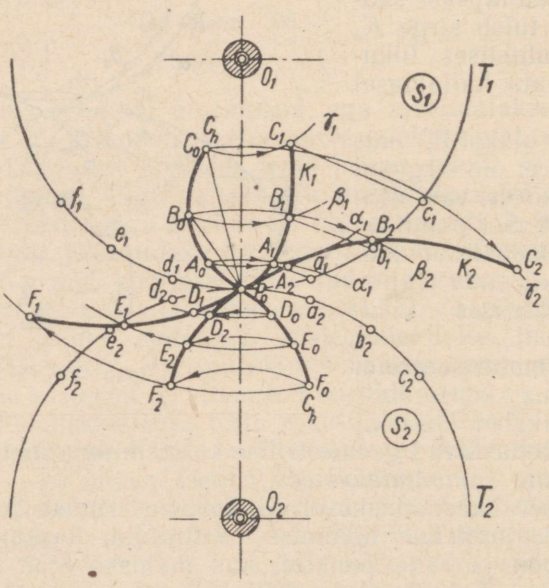
Esineb olukordi, kus mähitavaks ei ole sirgjoon ega mingi kõver, vaid üksainus punkt. Sel puhul on mähkija moodustatud mähitava punkti enda trajektoorist suhtelises liikumises.

3°. Liikumatu tsentroidi punktid, kus kaasmähisjooned omavahel kontakti astuvad, moodustavad geomeetrilise koha, mida nimetatakse *kaasmähiskõverate hambumisjooneks.*

Käsitleme kaasmähiskõverate konstrueerimist juhul, kui on antud nende suhtelise liikumise tsentroidid, kaasmähiskõverate hambumisjoon ja selle punktid, kus mähiskõverad kontakteeruvad. Tähistagu T_1 ja T_2 (joon. 309) ümber tsentrite O_1 ja O_2 pöörlevate süsteemide S_1 ja S_2 tsentroide. Punktid P_0', P_0'', P_0''', ...

kuuluvad bitsentroidile ja on seega kohaks, kus kontakteeruvad tsentroidid: tsentroidide punktid a_1 ja a_2 astuvad omavahel kontakti punktis P_0'', punktid b_1 ja b_2 kontakteeruvad punktis P_0''' jne. Hambumisjoonel C_h on ette antud punktid A_0, B_0, C_0, ... kus peavad kontakti astuma otsitavad mähiskõverad K_1 ja K_2. Seejuures vastab punkt A_0 tsentroidide kontaktile punktis P_0'', punkt B_0 — tsentroidide kontaktile punktis P_0''' jne. Ühendame punkti A_0 punktiga P_0'', punkti B_0 punktiga P_0''' jne. On ilmne, et kontakti astunud punktide a_1 ja a_2 ühine kaugus punktist A_0 võrdub lõigu $(P_0''A_0)$ pikkusega; hetkel, mil kontakti astuvad punktid b_1 ja b_2, võrdub nende ühine kaugus punktist B_0 pikkusega $P_0'''B_0$ jne. Süsteemi S_1 punkti A_1, mis punktis A_0 ühtib süsteemi S_2 kuuluva punktiga A_2, peab asuma tsentrist O_1 raadiusega O_1A_0 tõmmatud ringjoone kaarel A_0a_1. Analoogiliselt peab süsteemi S_2 punkt A_2 asuma ringjoone kaarel A_0a_2, mis on tõmmatud punktist O_2 raadiusega A_0O_2. Punktide A_1 ja A_2 asukoha määramiseks nimetatud ringjoone kaartel tuleb viimaseid punktidest a_1 ja a_2 sälkida raadiustega, mis pikkuselt võrduvad lõiguga $P_0''A_0$. Samal viisil määratakse ka punktid B_1 ja B_2, C_1 ja C_2, ... Ühendades nüüd punktid A_1, B_1, C_1, ... ja vastavalt A_2, B_2, C_2, ... sujuvate kõveratega, saame otsitud kaasmähiskõverad.

4°. Käsitleme näitena juhtu, mis esineb ümmarguste hammasrataste hambaprofiilide projekteerimisel.



Joon. 310.

Kujutagu ringjooned T_1 ja T_2, mis pöörlevad vastavalt ümber tsentrite O_1 ja O_2 (joon. 310), süsteemide S_1 ja S_2 relatiivse liikumise tsentroide ja kõver C_h — etteantud hambumisjoont.

Leiame tsentroidide järjestikused kokkupuutepunktid a_1, b_1, c_1, ... ja a_2, b_2, c_2, ... Selleks kanname tsentroididele T_1 ja T_2 kaared $\smile P_0a_1 = \smile P_0a_2$, $\smile a_1b_1 = \smile a_2b_2$, $\smile b_1c_1 = \smile b_2c_2$, ...

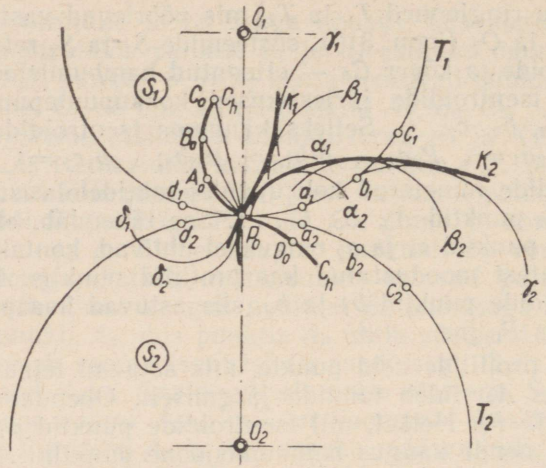
Tsentroidide nimetatud kokkupuutepunktidele vastaku hambumisjoone C_h punktid A_0, B_0, C_0, ... See tähendab, et hetkel, mil tsentroidide punktid a_1 ja a_2 omavahel ühtivad, kontakteeruvad ka mähiskõveratest moodustatud kaasprofiilid punktis A_0; kui ühtivad tsentroidide punktid b_1 ja b_2, siis astuvad kaasprofiilid kontakti punktis B_0 jne.

Et leida profiilide neid punkte, mis astuvad teineteisega kontakti punktis A_0, tuleb toimida järgmiselt. Ühendame omavahel punktid A_0 ja P_0. Hetkel, mil tsentroidide punktid a_1 ja a_2 ühtivad, võrdub nende kaugus hambumisjoone punktini A_0 pikkusega P_0A_0. Seega peab süsteemi S_1 kuuluv punkt A_1, mis punktis A_0 ühtib süsteemi S_2 vastava punktiga A_2, asuma tsentrist O_1 raadiusega O_1A_0 tõmmatud ringjoonel A_0a_1. Analoogiliselt süsteemi S_2 kuuluv punkt S_2 peab asuma tsentrist O_2 raadiusega O_2A_0 tõmmatud ringjoonel A_0a_2. Joonestame ringjooned A_0a_1 ja A_0a_2. Punktide A_1 ja A_2 asukoha leidmiseks tuleb nüüd neid ringjooni sälkida raadiusega P_0A_0, lähtudes vastavalt punktidest a_1 ja a_2.

Punktis B_0 kontakteeruvate profiilipunktide leidmiseks tuleb toimida analoogiliselt. Ühendame omavahel punktid B_0 ja P_0 ning võttes raadiuseks pikkuse P_0B_0, sälgime ringjooned $B_0\beta_1$ ja $B_0\beta_2$, lähtudes vastavalt punktidest b_1 ja b_2. Tehtud konstruktsioon annab süsteemidele S_1 ja S_2 kuuluvate profiilide punktid B_1 ja B_2. Analoogiliste võtete abil leiame punktid C_1, D_1, E_1, ... ja C_2, D_2 E_2, ... Ühendades saadud punktid sujuvate kõveratega K_1 ja K_2, saame süsteemide S_1 ja S_2 kaasprofiilid. Järelikult kui on teada tsentroidid ja profiilide kontaktpunktid hambumisjoonel, siis on punkthaaval alati võimalik konstrueerida kaasprofiile.

Käsitletud konstruktsiooni on võimalik teha ka ligikaudselt. Tõmbame punktidest a_1, b_1, c_1, ... (joon. 311) ringjooned α_1, β_1, γ_1, ..., võttes raadiusteks vastavalt pikkused P_0A_0, P_0B_0, ... Saadud ringjoonte parve mähkija ongi otsitav profiil K_1. Analoogiliselt, lähtudes punktidest a_2, b_2, c_2, ... kui tsentritest ja tõmmates samade raadiustega ringjooned α_2, β_2, γ_2, ..., võime määrata profiili K_2.

Lõpuks käsitleme veel järgmist ülesannet: konstrueerida süsteemi S_2 profiil K_2, kui on antud kaks ringjoonelist tsentroidi T_1 ja T_2 ning süsteemile S_1 kuuluv profiil K_1 (joon. 312). Ülesannet saab hõlpsasti lahendada hambumisjoone C_h konstrueerimise teel. Viimase konstrueerimiseks kasutame ära asjaolu, et kaasprofiili-

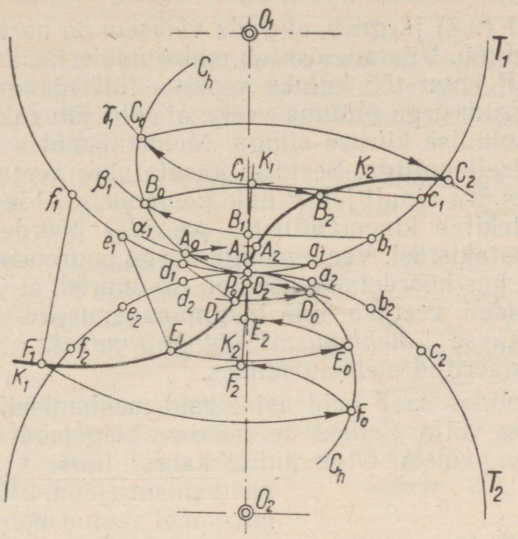


Joon. 311.

dele kokkupuutepunktis tõmmatud normaal läbib alati profiilide suhtelise liikumise hetkelise kiiruste tsentri.

Käesoleval juhul, kus tsentroidid T_1 ja T_2 on ringjoonekujulised, peab kaasprofiilidele kontaktpunktis tõmmatud normaal alati läbima püsiva punkti P_0. Fikseerime etteantud kõveral K_1 rea punkte A_1, B_1, C_1, ... ja joonestame neis kõverale K_1 normaalid A_1a_1, B_1b_1, C_1c_1, ... Normaalid tuleb tõmmata kuni lõikumiseni punktides a_1, b_1, c_1, ... tsentroidiga T_1. Kui süsteem S_1 pöörleb, liigub kõvera K_1 punkt A_1 piki ringjoone kaart A_1a_1, mille raadiuseks on O_1A_1. Hetkel, mil tsentroidi T_1 punkt a_1 jõuab punkti P_0, on punkt A_1 liikunud punktist P_0 kaugusele $P_0A_0 = a_1A_1$. See asjaolu võimaldab meil määrata punkti A_0 asukohta: sälgime punktist P_0 kui tsentrist ringjoont A_1a_1, kasutades raadiusena pikkust a_1A_1. A_0 osutub hambumisjoone selleks punktiks, kus kõvera K_1 punkt A_1 astub kontakti kõvera K_2 vastava punktiga A_2. Hambumisjoone punkt B_0 määratakse, sälkides kaart $B_1\beta_1$ punktist P_0 raadiusega P_0B_0. Viimane võrdub punktis B_1 kõverale K_1 tõmmatud normaali lõigu b_1B_1 pikkusega. Hambumisjoone C_h ülejäänud punktid C_0, D_0, E_0, ... leitakse analoogiliselt. Punkte A_0, B_0, C_0, ... sujuva kõveraga ühendades saame hambumisjoone. Kaasprofiili K_2 võib nüüd konstrueerida meetodiga, mida käsitleti varemtoodud näites (vt. joon. 310). Vastav konstruktsioon on näidatud ka joonisel 312.

Märgime veel seda, et kaasprofiilide konstrueerimise käsitletud meetodite juures peavad tsentroidi T_1 kaared P_0a_1, a_1b_1, b_1c_1, ... olema võrdsed tsentroidi T_2 vastavate kaartega P_0a_2, a_2b_2, b_2c_2, ...



Joon. 312.

Omavahel, ühel ja samal tsentroidil ei pruugi aga need kaared võrdsed olla, s. t. kaar P_0a_1 ei pruugi võrduda kaarega a_1b_1, see omakorda ei pruugi võrduda kaarega b_1c_1 jne.

§ 41. Mehhanismides jõudude ülekandmist määravad geomeetrilised tingimused

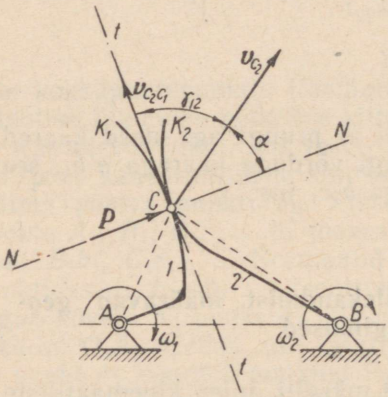
1°. Nagu käesoleva peatüki § 38 märgiti, tuleb kinemaatiliste skeemide projekteerimisel silmas pidada, et projekteeritava mehhanismi liikumine oleks temale rakendatavate jõudude toimel võimalik ja toimuks kõrge kasuteguriga. Nende tingimuste täitmine sõltub suurel määral mehhanismi lülidele antud kujust ja valitud mõõdetest.

Mõjugu mehhanismi vedav lüli sama mehhanismi veetavale lülile punktis C jõuga $\boldsymbol{P}$. Punktis C jõu $\boldsymbol{P}$ rakendussirge ja veetava lüli absoluutse kiiruse vahel tekkiva teravnurga tähistame tähega α. Jõu $\boldsymbol{P}$ poolt teatava teepikkuse s läbimisel tehtud töö A avaldub siis järgmiselt:

$$A = \int_0^s P\, ds \cos \alpha. \tag{9.6}$$

Võrrandist (9.6) järgneb, et mida väiksem on nurk α, seda suurem on tehtud töö. Viimane osutub maksimaalseks, kui $\alpha = 0$. Selleks, et jõu P kogu töö kuluks veetava lüli liikumapanemiseks, peaks tema kandesirge ühtuma veetaval lülil jõu rakenduspunktis valitseva absoluutse kiiruse sihiga. Mehhanismides ei võrdu aga nurk α tavaliselt nulliga. Seetõttu kasutatakse veetava lüli liikumapanemiseks ära ainult jõu P ühte komponenti. Jõu P teine komponent aga tekitab kinemaatilistes paarides hõõrdejõudude näol kahjulikke lisatakistusi. Veel enamgi, nurga suurenemisel võib tekkida olukord, kus hõõrdetakistused on nii suured, et jõust P ei piisagi mehhanismi veetava lüli liikumapanemiseks. See nähtus, mida nimetatakse *mehhanismi kinnikiilumiseks,* võib esineda valesti projekteeritud mehhanismides.

Uurime, kuidas saab neid asjaolusid mehhanismide projekteerimisel arvesse võtta. Selleks defineerime kõigepealt nn. *liikumise ülekandenurga* mõiste. Olgu antud kahest lülist *1* ja *2* koosnev mehhanism (joon. 313). Lülid olgu omavahel seotud kõrgema paariga punktis C. Selles punktis mõjub lüli *1* lülile *2* jõuga P. Tähistagu v_{C2} lüli *2* absoluutset kiirust punktis C. Juhul kui kõrgemas paaris esinevat hõõrdumist mitte arvestada, mõjub jõud P normaali NN sihis. Nurk α moodustub siis normaali NN ja absoluutse kiiruse v_{C2} vahel. Juhul kui soovitakse arvestada ka kõrgemas paaris tekkivat liugehõõrdumist, tuleb jõudu, millega üks lüli mõjub teisele, normaali suhtes hõõrdenurga võrra kallutada. Enamiku tehniliste ülesannete juures on hõõrdenurga mõju aga tähtsusetu.



Joon. 313.

Tõmbame kõveratele K_1 ja K_2 puutuja tt ning tähistame puutuja ja kiiruse v_{C2} vahel tekkinud nurga tähega γ. Nurga γ suurus on antud seosega

$$\gamma = 90° - \alpha. \tag{9.7}$$

Nurka γ nimetataksegi *liikumise ülekandenurgaks,* või lühemalt, *ülekandenurgaks.*

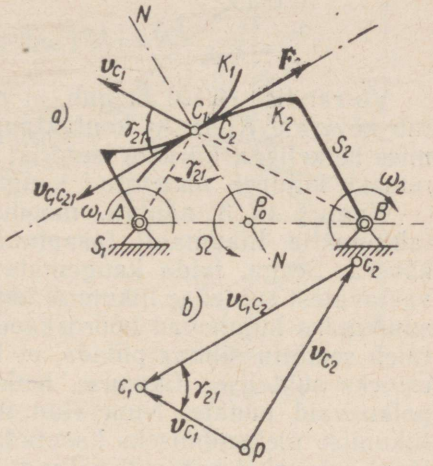
Kuna puutuja tt siht ühtib lülile *2* kuuluva punkti C_2 relatiivse kiirusega lüli *1* suhtes (tähis — v_{C2C1}), siis võib järeldada, et kõrgemates kinemaatilistes paarides tekib ülekandenurk kontaktpunktis valitseva veetava lüli absoluutse ja suhtelise kiiruse

vahel. Mida väiksem on nurk γ, seda suurem on kinnikiilumise oht. Kõrgemates paarides soovitatavad ülekandenurkade piirväärtused määratakse tavaliselt katselisel teel, kuna need sõltuvad hõõrdejõudude suurusest.

Tähis γ varustatakse leppeliselt kahe indeksiga, milledest esimene tähistab vedavat ja teine — veetavat lüli. Kui näiteks vedavaks lüliks on lüli *1*, veetavaks aga lüli *2*, siis tähistatakse ülekandenurka γ_{12}. Vastupidi, kui lüli *2* osutub vedavaks ja lüli *1* veetavaks, siis tähistatakse ülekandenurka γ_{21}.

2°. Kaasmähiskõverate projekteerimisel tuleb arvesse võtta ka liugehõõrdekadusid, mis tekivad nimetatud kõverate veeremisel teineteisel.

Hõõrdumisele kuluv võimsus on võrdeline kaasmähiskõverate suhtelise liikumise kiirusega. On ilmne, et mida suuremaks osutub nimetatud kiirus, seda suuremaks kujunevad ka hõõrdekaod. Kantagu näiteks süsteemi S_1 liikumine üle süsteemile S_2 punktis $C(C_1, C_2)$ kokkupuutuvate kaasmähiskõverate K_1 ja K_2 kaudu (joon. 314, *a*). Liugehõõrde ületamiseks kuluv võimsus on arvutatav seosest



Joon. 314.

$$N = Fv_{C_2C_1}, \tag{9.8}$$

kus F tähistab hõõrdejõudu ja $v_{C_2C_1}$ — kõvera K_2 punkti C_2 relatiivset kiirust kõvera K_1 punkti C_1 suhtes (või vastupidi).

Hõõrdejõu suurus on omakorda antud valemiga

$$F = Pf,$$

kus P tähistab punktis C normaali NN sihis mõjuvat jõudu ja f — liugehõõrdetegurit. Libisemiskiiruse võib arvutada seosest

$$v_{C_2C_1} = \Omega(P_0C),$$

kus Ω tähistab süsteemi S_2 hetkelist relatiivset nurkkiirust süsteemi S_1 suhtes.

Võrrandi (9.1) põhjal

$$\Omega = \omega_2 - \omega_1.$$

Järelikult

$$|\Omega| = |\omega_2| + |\omega_1|$$

ja

$$v_{C2C1} = (|\omega_2| + |\omega_1|)\,(P_0C). \tag{9.9}$$

Asetades saadud tulemused valemisse (9.8) leiame, et

$$N = fP(|\omega_2| + |\omega_1|)\,(P_0C). \tag{9.10}$$

Võrrandist (9.10) selgub, et hõõrdumiseks kuluv võimsus sõltub kõverate K_1 ja K_2 kontaktpunkti C kaugusest suhtelise liikumise hetkelisest kiiruste tsentrist P_0 ja on seda suurem, mida suuremaks kujuneb nimetatud kaugus P_0C.

Nagu § 40, 3° näidati, moodustavad kaasmähiskõverate kontaktpunktid liikumatul tasapinnal hambumisjooneks nimetatava kõvera. Seega, mida kaugemale jäävad hambumisjoone punktid vastavatest suhtelise liikumise hetkelistest kiiruste tsentritest, seda suuremaks kujunevad hõõrdekaod. Mehhanismide projekteerimisel tuleb seetõttu silmas pidada, et kaasprofiilide hambumisjoonel ei esineks suhtelise liikumise hetkelisest kiiruste tsentrist kaugel paiknevaid punkte. Nimetatud nõude täitmiseks tuleb mõnikord liikumise ülekandmiseks kasutada mitte ühte, vaid mitut üksteise järgi omavahel kontakti astuvat kaasmähiskõverate paari.

Edasi on lihtne näidata, et kõverate K_1 ja K_2 kontaktpunkti C ja hetkelisi kiiruste tsentreid A ning P_0 ühendavad sirged AC ja P_0C (joon. 314, *a*) moodustavad omavahel nurga, mis võrdub ülekandenurgaga γ_{21}. Tõepoolest, kõvera K_1 punkti C_1 absoluutne kiirus v_{C1} on igal juhul risti sirgega AC ja tema suhteline kiirus v_{C1C2} on risti sirgega CP_0. Samuti on ilmne, et ülekandenurka γ_{21} võib alati leida mehhanismi kiirusplaanist (joon. 314, *b*).

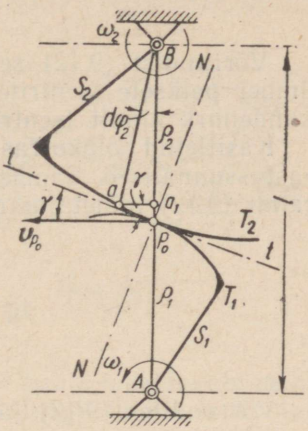
Ülekandenurga määramiseks piisab eeltoodu põhjal uuritava hambumispunkti (näiteks punkti C joonisel 314, *a*) ühendamisest hetkeliste kiiruste tsentritega nii absoluutses (punkt A) kui ka relatiivses (punkt P_0) liikumises. Juhul kui nimetatud sirgete poolt moodustatud nurk ületab 90°, tuleb ülekandenurgaks γ võtta selle täiendusnurk 180 kraadini.

Mehhanismide projekteerimisel nõutakse tavaliselt, et mehhanismi üheski asendis ei tohi ülekandenurk langeda alla teatava etteantud minimaalse väärtuse γ_{min}, mis veel tagab mehhanismi normaalse töö.

Nurga γ_{min} valik sõltub mehhanismi dünaamilistest töötingimustest, esmajoones veetava lüli kinnikiilumisohu vältimise nõudest (vt. § 87, 6°—9°).

3°. Juhul kui liikumist kantakse üle tsentroididega, määratakse ülekandenurk järgmiselt (joon. 315). Kuna tsentroididel on nende

kokkupuutepunktis P_0 ühine kiirus v_{P0}, siis ei sõltu nurga γ suurus sellest, kumb tsentroididest on vedav. Punkti P_0 muutuvad kaugused süsteemide S_1 ja S_2 hetkelistest kiiruste tsentritest tähistame vastavalt ϱ_1 ja ϱ_2. Oletame, et tsentroid T_2 pöördus lõpmata lühikese ajavahemiku jooksul ümber tsentri B nurga $d\varphi_2$ võrra. Tõmbame punktist a sihile BP_0 ristsirge aa_1. Tekkinud nurk a_1aP_0 on võrdne ülekandenurgaga γ.



Joon. 315.

Järelikult

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{P_0a_1}{aa_1}.$$

Kõrgemat järku kaduvväikesi suurusi kõrvale jättes võib kirjutada, et $P_0a_1 = \frac{\partial\varrho_2}{\partial\varphi_2}d\varphi_2$ ja $aa_1 = \varrho_2 d\varphi_2$. Seega

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{\partial\varrho_2}{\partial\varphi_2}}{\varrho_2}. \qquad (9.11)$$

Võrrandist (9.2) järgneb, et

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Tähistades nüüd

$$AB = \varrho_1 + \varrho_2 = l,$$

võime kirjutada:

$$\varrho_2 = l\frac{\frac{\omega_1}{\omega_2}}{1+\frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Kuna $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$ ja $\omega_1 = \frac{d\varphi_1}{dt}$, kus φ_2 ja φ_1 tähistavad tsentroidide pöördenurki, siis

$$\varrho_2 = l\frac{\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}}{1+\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}}$$

ja

$$\frac{\partial\varrho_2}{\partial\varphi_2} = l\frac{\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2}}{\left(1+\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\right)^2}.$$

Asetades saadud tulemused võrrandisse (9.11), saame lõplikult

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2}}{\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\left(1+\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\right)}. \qquad (9.12)$$

Võrrandist (9.12) selgub, et juhul kui liikumist kantakse üle ümber paiksete tsentrite pöörlevate tsentroidide abil, sõltub ülekandenurk ainult tsentroidide pöördenurkade tuletistest.

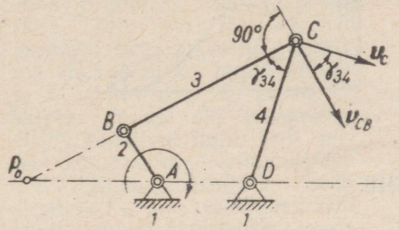
Käsitletud olukorras olid tsentroidide nurkkiirused ω_1 ja ω_2 vastassuunalised. Samasuunaliste nurkkiiruste puhul muutub võrrandi (9.12) nimetajas märk:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2}}{\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\left(1-\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}\right)}. \qquad (9.13)$$

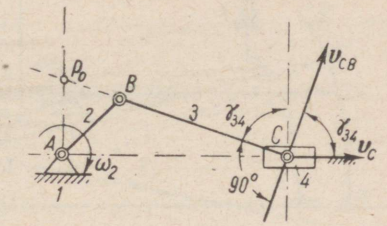
Võrrandites (9.12) ja (9.13) esinevad tuletised $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$ ja $\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2}$. Need määratakse tavaliselt graafiliselt, konstrueerides kõvera $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_2)$ ja diferentseerides selle. Tulemusena saadakse kõver $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2} = f(\varphi_2)$. Viimast on võimalik saada ka kiirusplaanidest. Tekkinud kõverat omakorda graafiliselt diferentseerides (või kiirendusplaane kasutades) määratakse suurused $\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2}$. Asetades saadud $\frac{d\varphi_1}{d\varphi_2}$ ja $\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2}$ väärtused võrrandisse (9.12) või (9.13), leitakse ülekandenurga γ suurused mehhanismi kõikides asendites ja konstrueeritakse ülekandenurga muutumise graafik. Tsentroidid töötavad kinnikiilumiseta ainult selles piirkonnas, kus ülekandenurga γ väärtus ületab teatava minimaalse väärtuse γ_{min}, mida soovitatakse antud ülekandetüübi puhul aluseks võtta. Kaasaegsetes mehhanismides sõltuvad lubatavad γ_{min} väärtused nii kinemaatilistes paarides valitsevatest hõõrdeteguritest kui ka paaride konstruktsioonist. Seetõttu on need väärtused mitmesuguste mehhanismide puhul erinevad. Piirkondades, kus γ on väiksem lubatavast piirväärtusest γ_{min}, ei funktsioneeri tsentroidmehhanism korralikult. Neis piirkondades tuleb tsentroidid asendada kaasmähiskõveratega, s. t. kasutada lisahambaid (lisaprofiile), lisakulisse jne. Suletud tsüklis liikuvate tsentroididega ülekanded, nagu näiteks joonisel 305 kujutatud mitteümmarguste tsentroididega mehhanism, õnnestuvad harva. Tõepoolest, võrrandist (9.12) võib järeldada, et nurk γ võrdub nulliga siis kui $\frac{d^2\varphi_1}{d\varphi_2^2} = 0$. Seda

juhtub aga vähemalt kaks korda ühe täispöörde jooksul — asendites, kus ω_1 saavutab oma piirväärtused.

Olukorras, kus vedavaks süsteemiks on S_1, kasutatakse $\operatorname{tg}\gamma$ arvutamiseks sama tüüpi valemeid kui (9.12) ja (9.13), kusjuures neis valemites esinevad seekord nurga φ_2 tuletised φ_1 suhtes.



Joon. 316.



Joon. 317.

4°. Liikumise ülekandmisel madalamaid paare sisaldavate mehhanismidega määratakse ülekandenurk analoogilistest seisukohtadest lähtudes.

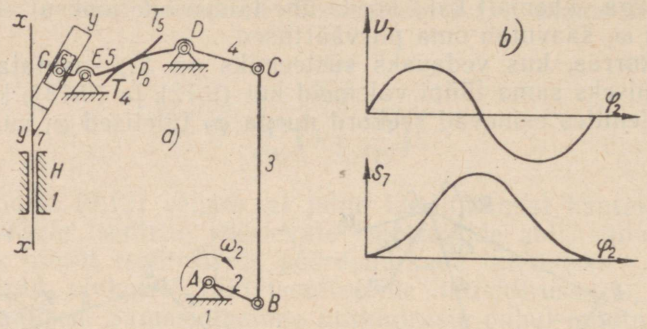
Joonisel 316 kujutatud šarniirnelinurgas on näiteks veetava lüli *4* ülekandenurk γ_{34} määratud kiiruste v_C ja v_{CB} sihtidega.

Nurka γ_{34} saab määrata ka siis, kui sirgjoone abil ühendada punkt *C* punktidega P_0 ja *D*. Esimene neist on hetkeline kiiruste tsenter lüli *4* relatiivses, teine aga absoluutses liikumises.

Joonisel 317 on näidatud ülekandenurk γ_{34} väntmehhanismi *ABC* kepsult veetavale liugurile *4*. Nimetatud nurk tekib siin sirge *BC* ja liuguri *4* liikumisteljele tõmmatud ristjoone vahel.

§ 42. Veerevate hoobadega mehhanismid. Mitteümmarguste hammasratastega mehhanismid

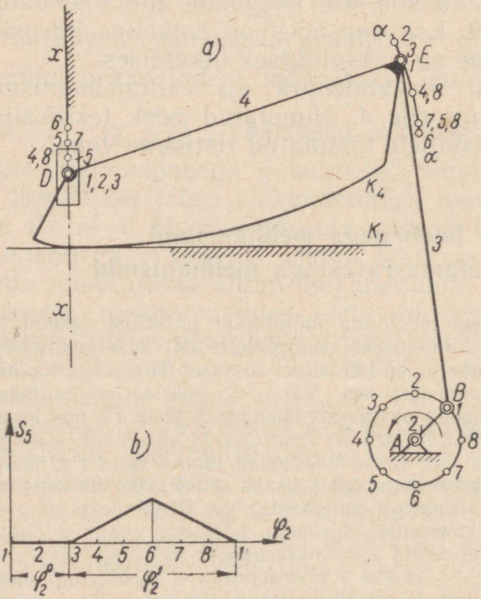
1°. Käsitleme nüüd ülalesitatud meetodite mõningaid praktilisi rakendusi. Nagu märgitud, võib liikumise ülekandmiseks tsentroidide abil kasutada ainult neid tsentroidiosi, kus ülekandenurk on küllalt suur. Joonisel 318, *a* on toodud veerevate hoobadega tsentroid-varbmehhanism. Vända *2* pöörlemine kantakse kepsu *3* poolt üle hoovale *4*. Viimasega on jäigalt ühendatud hoob T_4, mis kujutab endast ümber tsentri *D* pöörlevat tsentroidi. Tsentroid T_4 surub lüli *5* külge kinnitatud profileeritud hoovale T_5. See hoob moodustab ümber tsentri *E* pöörleva tsentroidi. Lüli *5* moodustab koos liuguriga *6* lisaks sellele veel rotatsioonipaari *G*. Liugur *6* liigub kulissi *7* freesitud juhtsoontes *yy*. Ülesandeks on projekteerida see mehhanism nii, et konstantse kiirusega pöörleva vända *2* puhul liiguks liugur *7* joonisel 318, *b* kujutatud liikumisseaduse $s_7 = s_7(\varphi_2)$ järgi (s_7 tähistab liuguri *7* paigutust ja φ_2 — vända *2* pöördenurka). Püstitatud ülesanne lahendatakse järgmiselt. Valime konstruktiivsete kaalutluste alusel tsentrite *D*, *E* ja *A* asukohad, juhtsirgete *xx* ja *yy* asendid ning lülide *2*, *3*, *4* ja *5*



Joon. 318.

mõõted. Edasi, lähtudes etteantud graafikust $s_7 = s_7(\varphi_2)$, konstrueerime graafiku $v_7 = v_7(\varphi_2)$ (vt. joon. 318, *b*), kus v_7 tähistab lüli *7* kiirust. Seepeale leiame lüli *5* nurkkiiruse ω_5 ja joonestame graafiku $\omega_5 = \omega_5(t) = \omega_5(\varphi_2)$ (meenutame siin, et vända nurkkiirus ω_2 on püsiv). Edasi, lähtudes vända etteantud nurkkiirusest ω_2, määrame lüli *4* nurkkiiruse ω_4 ja konstrueerime graafiku $\omega_4 = \omega_4(t) = \omega_4(\varphi_2)$. Võttes nüüd aluseks graafikud $\omega_5 = \omega_5(\varphi_2)$ ja $\omega_4 = \omega_4(\varphi_2)$, võime konstrueerida bitsentroidi, ja, rakendades § 39 käsitletud meetodit, leida kaasprofiilid T_4 ja T_5.

2°. Joonisel 319, *a* on kujutatud veereva hoovaga mehhanism. Kui pöörata vänta *2*, paneb keps *3* lüli *4* külge kinnitatud profiili K_4 veerema ja libisema liikumatul profiilil K_1. Lüli *4* koos liuguriga *5* moodustab punktis *D* rotatsioonipaari. Liugur *5* liigub paiksel juhtsirgel translatoorselt. Ülesandeks on projekteerida kirjeldatud tüüpi mehhanism nii, et liugur *5* liiguks vända *2* pöördenurga φ_2' ulatuses joonisel 319, *b* ette antud liikumisseadusega $s_5 = s_5(\varphi_2)$, pöördenurga φ_2^0 ulatuses aga püsiks paigal. Vända nurkkiirus on seejuures ühtlane.

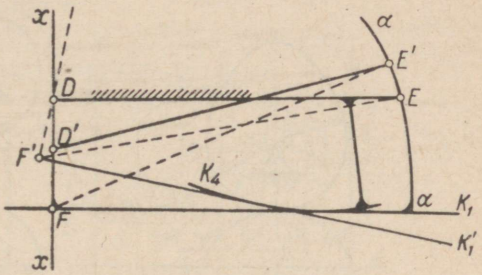


Joon. 319.

Konstruktiivsetest kaalutlustest lähtudes valime tsentri *A* asukoha, juhtsirge *xx* ja profiili K_1 asendid ning lülide *4* ja *3* pikkused *DE* ja *BE*. Edasi kanname mehhanismi skeemile punktide *B* ja *D* vastavad asendid *1, 2, 3, ...*, kasutades selleks kõverat $s_5 = s_5(\varphi_2)$ (joon. 319, *b*) ja silmas pidades, et vänt pöörleb ühtlase nurkkiirusega. Kuna lülide *3* ja *4* pikkused on teada, siis ei tee punkti *E* trajektoori *aa* konstrueerimine raskusi.

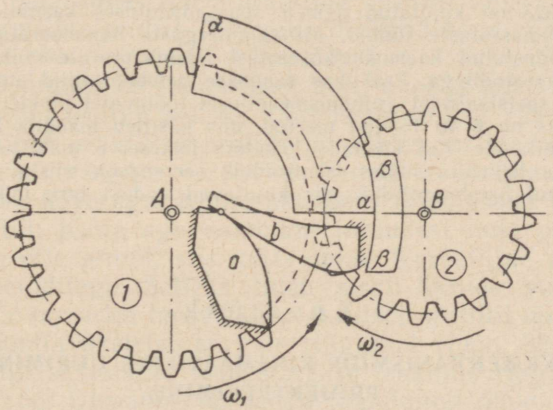
Kuna liugur *5* püsib inter-

vallis $\varphi_2{}^0$ liikumatuna, siis on ilmne, et trajektoori $\alpha\alpha$ vastav osa peab moodustama ringjoone kaare, mille tsenter asub punktis D. Profiil K_4 leitakse etteantud mähitavale K_1 mähkija konstrueerimise teel. Kasutame liikumise pööramise võtet: muudame lüli *4* liikumatuks ja jälgime sirge K_1 liikumist tema suhtes (joon. 320). See liikumine on määratud kahe tingimusega: sirgega K_1 jäigalt seotud juhtsirge xx peab alati läbima punkti D ja teiseks, liikumatul tasapinnal paiknev trajektoor $\alpha\alpha$ (mis samuti on sirgega K_1 jäigalt seotud) peab vaadeldavas suhtelises liikumises alati läbima punkti E. Neid tingimusi saab hõlpsasti täita lõigu DE järjestikuseid asendeid tema algasendiga ühtima viies. Näiteks, punktidele D' ja E' vastav sirge K_1 asend K_1' leitakse lõigule DE kolmnurga DEF' konstrueerimise teel, mis on kongruentne kolmnurgaga $D'E'F$. Kuna juhtsirge xx ristub sirgega K_1, siis, tõmmates läbi saadud punkti F' ristsirge lõigule DF', saame sirge K_1 otsitava asendi K_1'. Sirge K_1 ülaltoodud viisil leitud asenditele konstrueeritakse mähisjoon, mis moodustabki otsitava kõvera K_4.



Joon. 320.

3°. Joonisel 321 on kujutatud veerevate hoobadega täiendatud hammasmehhanism. Ajavahemikus, mil ratas *1* teeb ühe täispöörde, pöördub ratas *2* samuti ühe täispöörde võrra ja püsib lisaks sellele veel teatavat aega liikumatuna. Ratas *2* on seejuures liikumatu niikaua, kuni ratta *1* külge kinnitatud kaar $\alpha\alpha$ libiseb ratta *2*



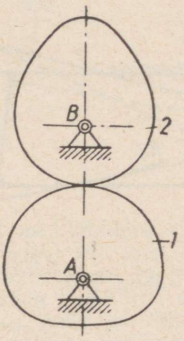
Joon. 321.

küljes oleval vastaval kaarel $\beta\beta$. Kui nüüd ratas *2* saaks otsekohe ülekandetegurile vastava nurkkiiruse, siis tekiks mehhanismile kahjulikult mõjuv löök. Selle vältimiseks on rattad varustatud veerevate hoobadega a ja b, mis kujutavad endast tsentroide. Tsentroidid on seejuures projekteeritud nii, et lüli *2* nurkkiirus kasvaks pidevalt.

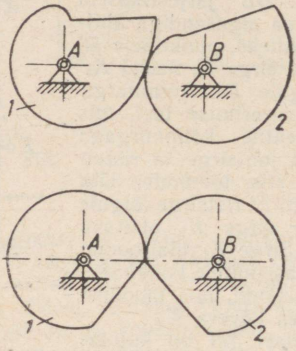
4°. Märgime lõpuks, et seoses aparaadiehituse arenguga on viimastel aasta-

tel hakatud rohkesti kasutama mitteümmargusi hammasrattaid. Viimaste teooria, arvutus ja tootmismeetodid on üksikasjaliselt välja töötatud Leningradi teadlaste H. F. Ketovi ja F. L. Litvini poolt. Joonisel 322 on näitena toodud mitteümmarguste hammasrataste tsentroidid, mis kannavad pöörlemist üle nii, et rataste pöördenurkade φ_1 ja φ_2 vahel kehtib seos

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 0{,}586 \sin \varphi_1.$$



Joon. 322.



Joon. 323.

Joonisel 323 on kujutatud mõned aparaadiehituses kasutatavad mitteümmarguste hammasrataste tüübid. Mitteümmarguste hammasrataste hambaprofiilid on moodustatud kaasmähiskõveratest. Hambaprofiile võib konstrueerida § 40 toodud meetoditega. Praktikas saadakse hambaprofiilid automaatselt, lõigates rattaid spetsiaalsetel rullumismenetlusel töötavatel pinkidel. Rullumismenetluse aluseks on § 40 toodud meetod, mis käsitleb mähkija konstrueerimist etteantud mähitavale. Kui käsitada lõiketera lõikeserva mähitava kõverana ja toorikule anda lõiketera suhtes tsentroidide veeremisele vastav liikumine, siis tekivad toorikul hambaprofiilid, mis kujutavad endast tera lõikeserva mähkijaid.

X peatükk

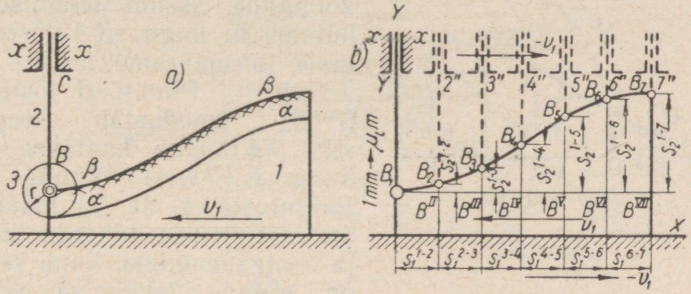
NUKKMEHHANISMIDE KINEMAATILINE UURIMINE JA PROJEKTEERIMINE

§ 43. Paigutuste määramine

1°. Juhul kui nuki profiililõikude kõverusraadiused on ette antud, lahendatakse nukkmehhanismi lülide paigutuste määramise ülesanne varemkäsitletud üldiste meetoditega. Nende rakendamiseks tuleb aga mehhanismis esinev kõrgem paar eelnevalt taandada ahelaks, mis sisaldab ainult madalamaid paare. Asendav mehhanism koosneb järelikult ainult madalamatest paaridest. Pai-

gutuste määramise ülesanne lahendatakse sel puhul § 29 käsitletud meetoditega. Juhul kui nuki profiili kõverusraadiused on tundmatud, muutub ülesanne keerukamaks ja teda on võimalik lahendada ainult ligikaudselt, rakendades liikumise pööramise meetodit.

Alustame paigutuste määramise ülesande käsitlust nukkmehhanismiga, mis on moodustatud translatoorselt liikuvast nukist *1* ja vardast *2* (joon. 324, *a*). Veetav lüli (varras *2*) lõpeb ümmarguse rulliga *3*, mille raadius olgu *r*.

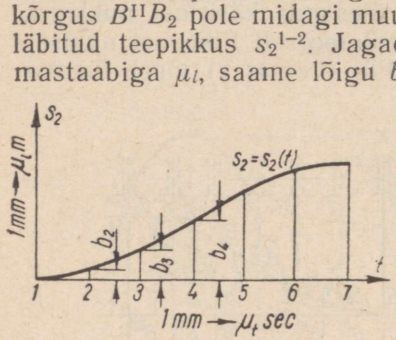


Joon. 324.

Nuki *1* profiili *aa* nimetatakse *praktiliseks profiiliks*. Enne lüli *2* paigutuste määramist tuleb praktilise profiili alusel konstrueerida nn. *teoreetiline profiil*. Mõlemad profiilid koos võetuna kujutavad endast *ekvidistantseid kõveraid*, s. t. sääraseid kõveraid, mis normaali suunas on teineteisest alati ühel ja samal kaugusel. Käesoleval juhul osutub selleks kauguseks rulli *3* raadius *r*. Kui normaalide sihid praktilise profiili punktides on teada, siis kanname neile raadiusega *r* võrduvad lõigud ja ühendame saadud punktid sujuva kõveraga. Konstruktsiooni tulemusena saame teoreetilise profiili. Kuna aga enamikul juhtudest nuki profiili normaalid ei ole ette antud, siis määratakse teoreetiline profiil ligikaudsete meetoditega. Selleks tuleb sirkli harude vahele võtta rulli raadius *r* ja, sirkli teravikku praktilisel profiilil *aa* edasi paigutades, tõmmata üksteise kõrvale ringjooni (joon. 324, *a*). Teoreetilise profiili saamiseks joonestatakse tekkinud ringjoonte parvele mähkija *ββ*. Ülesanne on seega taandunud olukorra uurimisele, kus veetav lüli *2* lõpeb piki profiili *ββ* libiseva punktiga *B*.

Lüli *2* paigutuste leidmiseks kasutame liikumise pööramise võtet. Anname kogu mehhanismile üldise kiiruse $-\boldsymbol{v}_1$, mis suuruselt võrdub nuki kiirusega $\boldsymbol{v}_1$, kuid on suunalt vastupidine. Juhtpuks *xx* hakkab nüüd liikuma kiirusega $-\boldsymbol{v}_1$ ja tuleb järk-järgult asenditesse *2″*, *3″*, *4″*, ... (joon. 324, *b*). Lüli *1*, s. t. nukk, osutub nüüd liikumatuks ja lüli *2* hakkab juhtpuksi suhtes liikuma kiirusega $\boldsymbol{v}_2$.

Et leida näiteks lüli *2* teist asendit, nihutame teda kiiruse $-v_1$ suunas (s. o. vasakult paremale) pikkuse s_1^{1-2} võrra. Seejärel tõstame lüli *2* juhtpuksis *xx* üles, kuni punkt *B* tuleb nuki teoreetilisele profiilile. Olgu tema vastavaks asendiks B_2. Tõstekõrgus $B^{II}B_2$ pole midagi muud kui lüli *2* poolt ajavahemikus t_{1-2} läbitud teepikkus s_2^{1-2}. Jagades leitud teepikkuse s_2^{1-2} pikkuste mastaabiga μ_l, saame lõigu b_2, mille võib juba kanda graafikule $s_2 = s_2(t)$ (joon. 325). Lüli *2* kolmanda asendi leidmiseks nihutame ta lõigu s_1^{2-3} võrra paremale ja määrame punkti *B* uue asendi B_3. Punkti *B* tõstekõrgus $B^{III}B_3$ moodustab teepikkuse s_2^{1-3}. Viimane kantakse graafikusse $s_2 = s_2(t)$ lõiguna b_3 jne. Paigutuste s_1 ja s_2 määramisel on otstarbekas lähtuda lülide *1* ja *2* algasenditest, kuna sel juhul on vigade tekkimise võimalus graafilise konstrueerimise juures kõige väiksem.

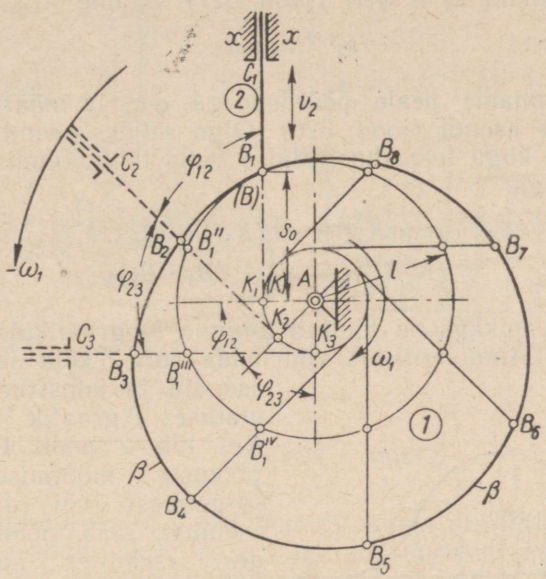


Joon. 325.

Lihtne on näidata, et juhul kui lülide *1* ja *2* poolt läbitud teepikkuste s_1 ja s_2 mastaabid μ_l on omavahel võrdsed, kujuneb paigutuste kõver $s_2 = s_2(t)$ nuki *1* profiiliga geomeetriliselt sarnaseks. Tõepoolest, tõmbame veetava lüli *2* lähteasendist, s. t. läbi punkti B_1 (joon. 324, *b*) teljed *X* ja *Y* nii, et telg *Y* kulgeks lüli *2* ja telg *X* — lüli *1* liikumise sihis. Nüüd on näha, et *X*-teljele kantud lõigud (B_1B^{II}), $(B^{II}B^{III})$, $(B^{III}B^{IV})$, $(B^{IV}B^{V})$, ... kujutavad nuki *1* poolt läbitud teepikkusi vaadeldavate ajavahemikkude jooksul. Teiste sõnadega, lõik (B_1B^{II}) kujutab endast teepikkust s_1^{1-2}, lõik $(B^{II}B^{III})$ — teepikkust s_1^{2-3}, lõik $(B^{III}B^{IV})$ — teepikkust s_1^{3-4} jne. Paralleelselt *Y*-teljega kantud lõigud $(B^{II}B_2)$, $(B^{III}B_3)$, $(B^{IV}B_4)$, ... kujutavad analoogiliselt lüli *2* poolt läbitud teepikkusi, mõõdetuna nimetatud lüli algasendist. Teiste sõnadega, lõik $(B^{II}B_2)$ kujutab teepikkust s_2^{1-2}, lõik $(B^{III}B_3)$ — teepikkust s_2^{1-3} jne. Kõver $\beta\beta$ on sel juhul ühtlasi ka kõveraks $s_2 = s_2(s_1)$. Nuki profiil kujutab seega ise lüli *2* paigutuste sõltuvust lüli *1* paigutustest. See hõlbustab käsitletud tüüpi nukkmehhanismide kinemaatilist uurimist tunduval määral.

Märgime, et lihtsustus, mis saadi olukorras, kus veetav lüli lõppes punktiga, ei ole laiendatav nukkmehhanismidele, mille veetav lüli lõpeb mingi k õ v e r j o o n e g a, sest lülidevaheline kontakt võib sel puhul esineda veetava lüli otskõvera (profiili) erinevates punktides.

2°. Liikumise pööramise meetodit võib rakendada ka siis, kui



Joon. 326.

nukk *1* pöörleb ümber mingi telje *A* ühtlase nurkkiirusega ω_1 ja veetav lüli *2* liigub translatoorselt juhtpuksis *xx* (joon. 326).

Olgu *ββ* nuki *1* teoreetiliseks profiiliks. Anname kogu mehhanismile üldise nurkkiiruse (lisanurkkiiruse) $-\omega_1$. Nukk *1* jääb sel juhul paigale, veetav lüli *2* aga hakkab tiirlema nurkkiirusega $-\omega_1$ ümber telje *A*, jätkates samal ajal oma liikumist lineaarkiirusega v_2 juhtpuksis *xx*.

Pöörame lüli *2* nurkkiiruse $-\omega_1$ suunas nurga φ_{1-2} võrra. Selleks on otstarbekas kasutada abiringjoont, mis on joonestatud raadiusega AK_1, s. o. punkti *A* väikseima kaugusega teljest *xx*. Nihutame seepeale lüli *2* juhtpuksis *xx*, kuni punkt *B* tuleb nuki *1* profiilile. Olgu vastav asend tähistatud B_2. Lähteasendiks loeme asendit B_1. Lüli *2* poolt asendist *1* asendisse *2* liikumisel läbitud teepikkuse s_2^{1-2} saame seosest

$$s_2^{1-2} = (K_2B_2 - K_2B_1^{II})\,\mu_l =$$
$$= (K_2B_2)\,\mu_l - s_0 =$$
$$= (B_1^{II}B_2)\,\mu_l,$$

kus μ_l tähistab joonise mastaapi.

Leitud teepikkuse s_2^{1-2} kanname mastaabis μ_l joonestatud lõigu

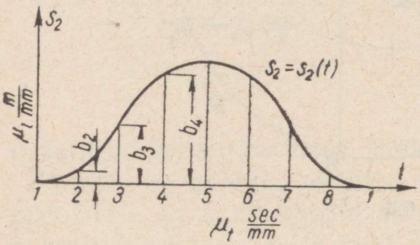
b_2 näol graafikule $s_2 = s_2(t)$ (joon. 327). Saame

$$s_2^{1-2} = \mu_l b_2.$$

Edasi kanname peale pöördenurga φ_{2-3} ja määrame lüli *2* punkti *B* uue asendi (joon. 326). Olgu selleks asend B_3. Lüli *2* poolt läbitud kogu teepikkus, alates tema lähteasendist, on määratud valemiga

$$s_2^{1-3} = [(K_3B_3) - (K_3B_1^{III})]\mu_l =$$
$$= (K_3B_3)\mu_l - s_0 = (B_1^{III}B_3)\mu_l.$$

Saadud teepikkus on kantud lõiguna b_3 graafikule $s_2 = s_2(t)$ (joon. 327). Analoogiliselt võib leida lüli *2* kõik järjestikused asendid ja konstrueerida kogu ulatuses graafik $s_2 = s_2(t)$. Kui lüli *2* poolt läbitud teepikkuste mõõtmisel lähtuda kõrgeimast või madalaimast asendist, jääb mõõde s_0 kõikides asendites konstantseks. Lüli *2* teepikkusi võib sel juhul mõõta, lähtudes uuest abiringjoonest raadiusega *l* (joon. 326). Raadius *l* määratakse seosest

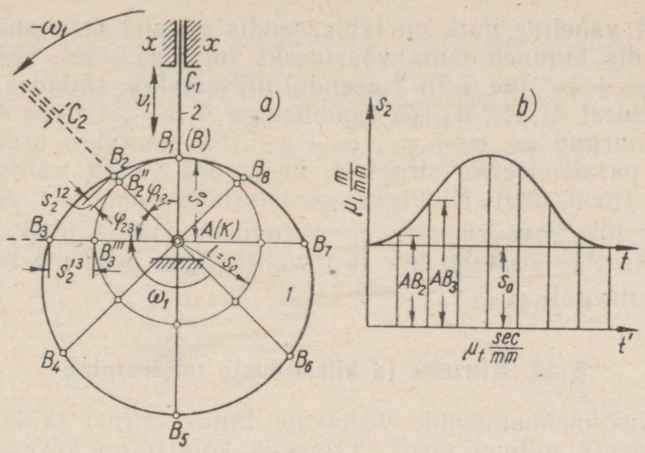


Joon. 327.

$$l = \sqrt{l^2_{AK1} + s_0^2}.$$

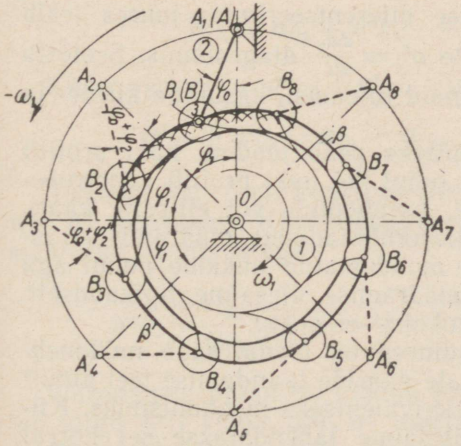
Juhul kui lüli *2* juhtpuksi *xx* telg läbib nuki *1* pöörlemistelje *A* (joon. 328), võrdub esimese abiringjoone raadius AK_1 (joon. 326) nulliga. Lõigud (AB_1), (AB_2), (AB_3), ... kujutavad sel puhul lüli *2* poolt läbitud teepikkusi, millele on liidetud konstantne pikkus $s_0 = (AB_1)\mu_l$. Graafiku $s_2 = s_2(t)$ konstrueerimiseks piisab sel puhul lõikude (AB_1), (AB_2), (AB_3), ... ordinaatidele kandmisest, kusjuures lähtuda tuleb teljest t' (joon. 328, *b*). Pärast kõvera väljajoonestamist nihutatakse abstsisstelg pikkuse $(AB_1) = \frac{s_0}{\mu_l}$ võrra kõrgemale. Nii saadud diagramm kujutab mastaabis μ_l sõltuvust $s_2 = s_2(t)$.

3°. Pöörduva hoovaga nukkmehhanismi paigutuste määramiseks võib samuti kasutada liikumise pööramise võtet. Olgu antud nukkmehhanism (joon. 329), mille nukk *1* pöörleb ühtlase nurkkiirusega ω_1 ja mille veetava lüli ots on varustatud ümmarguse rulliga *3*. Määrame kõigepealt nuki teoreetilise profiili $\beta\beta$. Ülesanne taandub nüüd lüli *2* järjestikuste asendite leidmiseks,

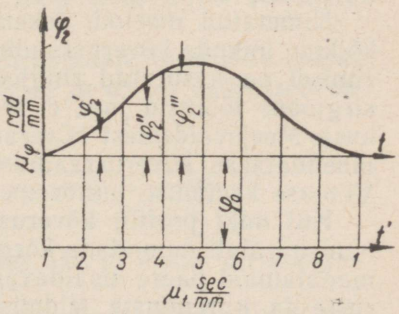


Joon. 328.

lähtudes tingimusest, et punkt B peab asuma profiilil $\beta\beta$. Anname kogu mehhanismile nurkkiiruse $-\omega_1$, mis suuruselt on võrdne nuki *1* nurkkiirusega ω_1, kuid suunalt sellega vastupidine. Nukk *1* muutub nüüd liikumatuks, kuna lüli *2* hakkab tiirlema ümber telje O nurkkiirusega $-\omega_1$, jätkates seejuures pöörlemist ümber telje A nurkkiirusega ω_2. Punkt A läbib järjekorras asendid A_1, A_2, A_3 jne. Kui etteantud nurkkiirus ω_1 on konstantne, kujunevad kõik raadiuste OA_1 ja OA_2, OA_2 ja OA_3, OA_3 ja OA_4 vahel moodustunud nurgad φ_1 omavahel võrdseteks. Pöörame nüüd lüli *2* ümber tsentri A nii, et tema punkt B tuleks nuki *1* profiilile $\beta\beta$. Kui lüli *2* ja raa-



Joon. 329.



Joon. 330.

diuse OA vaheline nurk on lähteasendis φ_0, siis mehhanismi teises asendis kujuneb tema väärtuseks juba $\varphi_0 + \varphi_2'$, kolmandas asendis $\varphi_0 + \varphi_2''$ jne. Lüli *2* asendid määratakse, sälkides kõverat $\beta\beta$ punktidest A_1, A_2, A_3, ... raadiustega $A_1B_1 = A_2B_2 = A_3B_3$, ... Saadud nurgad φ_0, $\varphi_0 + \varphi_2'$, $\varphi_0 + \varphi_2''$, ... kantakse ordinaatteljega φ_2 paralleelsetele sirgetele, kasutades vabalt valitud mastaapi μ_φ (joon. 330). Nihutades abstsisstelje asendist t' asendisse t, saame lüli *2* pöördenurkade sõltuvuse ajast, s. o. diagrammi $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Abstsisstelgede t ja t' vahekaugus peab mastaabis μ_φ vastama nurgale φ_0.

§ 44. Kiiruste ja kiirenduste määramine

1°. Nukkmehhanismide veetavate lülide kiirusi ja kiirendusi võib määrata mitmel viisil. Lihtsaim kõigist on kõverate $s_2 = s_2(t)$ ja $v_2 = v_2(t)$ graafilise diferentseerimise ehk kinemaatiliste diagrammide meetod, mida käsitleti kaheksandas peatükis. Näiteks lüli *2* (joon. 328) kiiruse v_2 algebralise väärtuse leidmiseks võime kasutada seost

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt}.$$

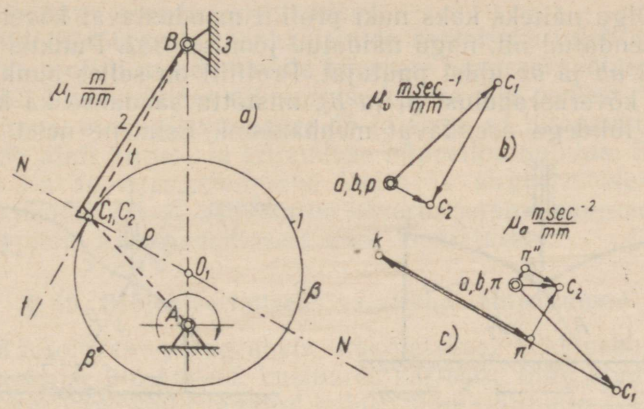
Määranud kiiruse v_2 algebralise väärtuse ja konstrueerinud kõvera $v_2 = v_2(t)$, võime graafilise diferentseerimise teel leida lüli *2* kiirenduse, sest

$$a^t_2 = \frac{dv_2}{dt}.$$

Peab märkima, et kahekordse diferentseerimise juures tekib suuri ebatäpsusi, eriti kiirenduste $a^t_2 = \frac{dv_2}{dt}$ diagrammis. Seetõttu tuleb juhul, kui vajatakse täpsemaid tulemusi, kasutada kiirus- ja kiirendusplaanide meetodit.

Nimetatud meetodi rakendamiseks peab teadma nuki profiili kõikide lõikude kõverusraadiusi. Juhul kui nuki profiili konstrueerimisel on kasutatud ringjoonte, paraboolide või ellipsite kaari, sirgjoone lõikusid jne., ei teki kõverusraadiuste määramisel raskusi. Meelevaldsetest kõveratest moodustatud nukkide puhul aga lahendatakse kõverusraadiuste määramise ülesanne ligikaudselt. Viimase küsimuse juures me siinkohal ei peatu.

Kui nuki profiili kõverusraadiused on teada, saab nukkmehhanismi alati muundada kõrgemate paaride taandamise teel ainult madalamaid paare sisaldavaks ekvivalentseks mehhanismiks. Kiiruste ja kiirenduste leidmise ülesanne lahendatakse sel korral § 30 ja 31 käsitletud meetoditega.



Joon. 331.

2°. Kiirus- ja kiirendusplaane võib koostada ka kõrgema paari eelneva taandamiseta, kasutades § 25, 2° toodud seoseid (5.22)—(5.24).

Olgu näiteks ülesandeks koostada joonisel 331, *a* kujutatud nukkmehhanismile kiirus- ja kiirendusplaan nuki profiili punktis *C*, kus kõverusraadiuse väärtuseks on ϱ. Nuki nurkkiirus ω_1 on konstantne.

Võime kirjutada järgmised võrrandid:

$$\boldsymbol{v}_{C2} = \boldsymbol{v}_{C1} + \boldsymbol{v}_{C2C1} \tag{10.1}$$

ja

$$\boldsymbol{a}_{C2} = \boldsymbol{a}_{C1} + \boldsymbol{a}^k_{C2C1} + \boldsymbol{a}^n_{C2C1} + \boldsymbol{a}^t_{C2C1}. \tag{10.2}$$

Kuna aga $\boldsymbol{a}_{C2} = \boldsymbol{a}^n_{C2} + \boldsymbol{a}^t_{C2}$, siis

$$\boldsymbol{a}^n_{C2} + \boldsymbol{a}^t_{C2} = \boldsymbol{a}_{C1} + \boldsymbol{a}^k_{C2C1} + \boldsymbol{a}^n_{C2C1} + \boldsymbol{a}^t_{C2C1}. \tag{10.3}$$

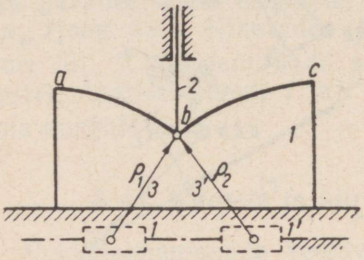
Joonisel 331, *b* on konstrueeritud kiirusplaan lõigu AC_1 (joon. 331, *a*) mastaabis. Kiirenduste $\boldsymbol{a}^n_{C2}$, $\boldsymbol{a}^k_{C2C1}$ ja $\boldsymbol{a}^n_{C2C1}$ väärtused on määratud tingimustega

$$a^n_{C2} = \frac{v^2_{C_2}}{l_{BC_2}},\ a^k_{C2C1} = 2\,|\omega_1|\,v_{C2C1} \text{ ja } a^n_{C2C1} = \frac{v^2_{C_2C_1}}{\varrho}.$$

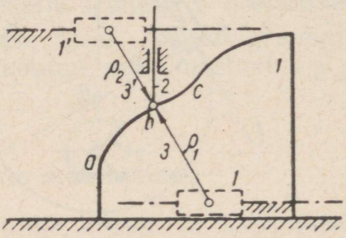
Kiirenduste plaan on toodud joonisel 331, *c*. Plaan on koostatud lõigu AC_1 (joon. 331, *a*) mastaabis.

3°. Nukkmehhanismide kinemaatilise uurimise juures tuleb erilist tähelepanu pöörata nuki profiili moodustavate kõverate liitekoh-

tadele. Olgu näiteks kaks nuki profiili moodustavat kõverat omavahel ühendatud nii, nagu näidatud joonisel 332. Punktis *b* ei ole kõveratel *ab* ja *bc* ühist puutujat. Profiilil on selles punktis kaks erinevat kõverusraadiust ϱ_1 ja ϱ_2, mistõttu saadakse ka kaks eri pikkuste lülidega asendavat mehhanismi. Esimene neist koosneb

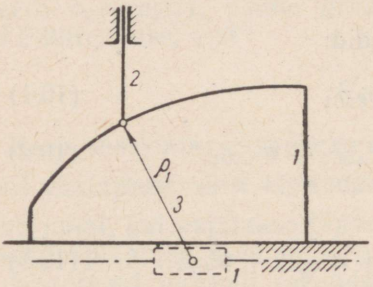


Joon. 332.

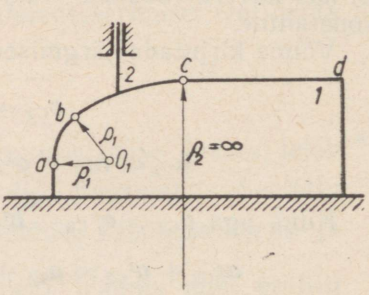


Joon. 333.

lülidest *1, 3* ja *2*, teise moodustavad aga lülid *1'*, *3'* ja *2*. On ilmne, et hetkel, mil piki nuki profiili libisev veetava lüli ots jõuab punkti *b*, saab ta korraga kaks erinevat kiiruse ja ühtlasi ka kiirenduse väärtust. Selles punktis esineb seega kiiruse ja kiirenduse hüppeline muutus, s. t. mehhanismis tekib löök.



Joon. 334.



Joon. 335.

Profiili moodustavad kõverad võivad liituda ka nii, et neil esineb liitekohas küll ühine puutuja, kuid kummalgi kõveral on seejuures erinev kõverusraadius (joon. 333). Sel puhul tekib jällegi kaks erinevat asendavat mehhanismi. Esimese moodustavad lülid *1*, *3* ja *2* ning teise — lülid *1'*, *3'* ja *2*. Vaadeldaval hetkel on lüli *2* kiirusel küll ühene väärtus, kiirendusel aga kaks erinevat väärtust. Seega muutub siin hüppeliselt ainult lüli *2* kiirendus.

Nuki profiil võib lõpuks olla moodustatud ka kõveratest, mille

kõverusraadiused on liitepunktis võrdsed (joon. 334). Sel juhul esineb üksainus asendav mehhanism.

Rahulikult töötavate mehhanismide saamiseks tuleb alati hoolitseda, et profiili moodustavate kõverate kõverusraadiused ühtiksid profiili liitepunktides nii suuruse kui ka sihi poolest.

On ilmne, et ringjoone kaare *ab* ja sirge *cd* liitepunktis (joon. 335) tekib alati kiiruse ja kiirenduse hüppeline muutus. Selle vältimiseks on soovitav ringjoone kaare ja sirge vahele asetada üleminekukõver (joon. 335), mille kõverusraadius suureneks sujuvalt ringjoone kaare raadiusest kuni lõpmatuseni.

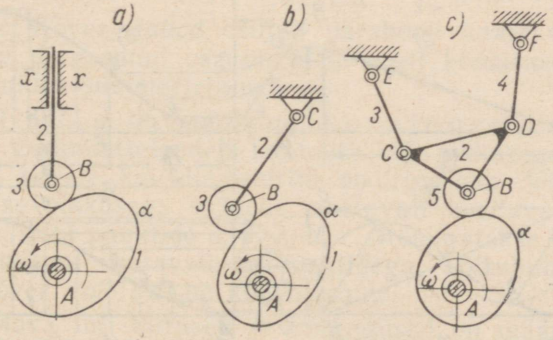
§ 45. Projekteerimiseks vajalikud lähteandmed

1°. Käesolevas paragrahvis käsitletakse nukkmehhanismide projekteerimise ülesandeid, kusjuures käsitluse lihtsustamiseks on kõik nukkmehhanismid jagatud kolme tüüpi, lähtudes veetava lüli liikumise iseloomust. Need kolm tüüpi on järgmised:

1) nukkmehhanismid, mille veetav lüli liigub translatoorselt,

2) nukkmehhanismid, mille veetav lüli pöörleb,

3) nukkmehhanismid, mille veetaval lülil on liitliikumine.



Joon. 336.

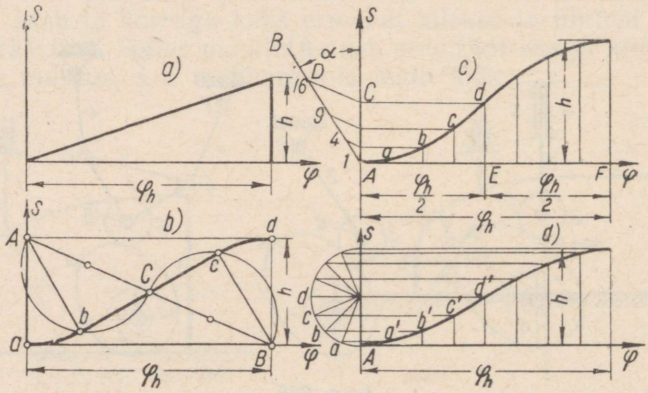
Esimesse tüüpi kuulub joonisel 336, *a* kujutatud nukkmehhanism. Tasapinnaline kõver *1* pöörleb selles etteantud nurkkiirusega ω_1 ümber telje *A*. Surudes rullile *3*, mis on pöörlevalt kinnitatud teljele *B*, paneb kõver *1* veetava lüli *2* juhtpuksis *xx* translatoorselt liikuma. Nimetame leppeliselt nukiks seda kõrgemat paari moodustavat lüli, mille kinemaatilise elemendi kuju on määratud lülide etteantud suhtelise liikumise reprodutseerimise nõudest. Tasapinnalise nuki profiiliks nimetame kõverat, mis tekib nuki ja tema liikumistasapinnaga paralleelse

tasapinna lõikumisel. Joonisel 336, *a* kujutatud mehhanismis on nukiks lüli *1*. Nuki profiili moodustab kõver *a*. Joonis 336, *b* kujutab teist tüüpi nukkmehhanismi. Nukk *1* pöörleb etteantud nurkkiirusega ω_1. Surudes rullile *3*, pöörab nukk lüli *2* ümber punkti *C*. Joonisel 336, *c* on näidatud nukkmehhanismi kolmas tüüp. Nukk *1* pöörleb ümber oma telje nurkkiirusega ω_1. Surudes rullile *5*, annab nukk *1* seekord lülile *2* liitliikumise, lülid *3* ja *4* aga pöörduvad vastavalt ümber punktide *E* ja *F*.

2°. Nukkmehhanismide kinemaatiliseks ja dünaamiliseks sünteesimiseks tuleb mehhanismi vedavate ja veetavate lülide liikumisseadused ette anda. Peale selle peab teadma veetavale lülile kuuluva mähiskõvera kuju.

Vedava ja veetava lüli liikumine antakse tavaliselt kas analüütiliselt, vastavate liikumisvõrrandite näol, või siis graafiliselt, paigutuste diagrammide abil. Võrrandite või diagrammide iseloom võib seejuures olla väga mitmesugune, sõltuvalt etteantud liikumistingimustest.

Tehnilisest seisukohast tuleb pidada mugavaiks diagramme, mis määravad veetava lüli paigutused vedava lüli paigutuste funktsioonina kas a) sirgjoone, b) ringjoone kaarteks siirduva sirgjoone, c) parabooli või d) koosinusoidi kujul.



Joon. 337.

Joonisel 337, *a* on toodud sirgjoone seadusele vastav veetava lüli paigutuste *s* diagramm vedava lüli pöördenurga φ funktsioonina. Diagramm kehtib joonisel 336, *a* toodud 1. tüüpi nukkmehhanismide kohta. Ordinaat *h* kujutab veetava lüli täit tõusukõrgust ja nurk φ_h — tõusule vastavat vedava lüli pöördenurka. Joonisel 337, *b* on toodud ringjoone kaarteks siirduva sirgjoone seaduse järgi konstrueeritud paigutuste diagramm. Abstsissteljele on kantud pöördenurk φ_h ja ordi-

naatteljele — veetava lüli tõusukõrgus h. Punktidest A ja B joonestatakse ringjoone kaared raadiusega h. Need kaared lõikuvad punktides b ja c ringjoone kaartega, mis on konstrueeritud lõikudele AC ja CB kui diameetritele. Nagu jooniselt selgub, on $AC = CB = \frac{AB}{2}$. Ühendades punktid b ja c sirgjoonega, saame kõvera $s = s(\varphi)$, mis algab kaarega ab, läheb üle sirgeks bc ja muutub lõpuks uuesti kaareks cd. Sirge bc on seejuures kaarte ab ja cd ühiseks puutujaks.

Joonis 337, *c* kujutab parabooli seaduse järgi konstrueeritud diagrammi. Ordinaatteljega meelevaldset nurka α moodustavale sirgele AB kantakse punktist A lähtudes lõigud, mis on võrdelised arvudega 1, 4, 9, 16 jne. Joonisel 337, *c* on kasutatud nelja lõiku. Jaotusele *16* vastav punkt D ühendatakse ordinaatteljel asuva punktiga $C\left(AC = \frac{h}{2}\right)$ ja läbi jaotuspunktide *9, 4, 1* tõmmatakse saadud sirgele DC paralleeljooned. Sellega määratakse ordinaatteljel lõigud, mis suhtuvad üksteisesse nagu arvud 1, 4, 9 ja 16. Need lõigud kantakse seepeale üle vastavatele ordinaatidele. Viimased tõmmatakse läbi punktide, mis käsitletaval juhul saadakse abstsisstelje lõigu $AE = \frac{\varphi_h}{2}$ nelja ossa jagamise tulemusena. Kõver $Aabcd$ osutub parabooli kaareks. Intervallis EF paiknev diagrammi osa on meie poolt konstrueeritud osaga punkti d suhtes sümmeetriline.

Joonisel 337, *d* on kujutatud koosinuseliselt kulgev diagramm. Ordinaattelgedele kantakse lõik pikkusega h ja konstrueeritakse sellele kui diameetrile poolringjoon. Viimane jagatakse võrdse pikkusega osadeks, vastavalt uuritavate vaheasendite arvule. Läbi punktide *a, b, c, d, ...* tõmmatakse horisontaalid kuni lõikumiseni vastavate ordinaatidega. Lõikepunkte sujuvalt ühendav kõver $Aa'b'c'd'$ on koosinusoid.

3°. Veetava lüli kiirused ja kiirendused on määratud paigutuste etteantud seadusega.

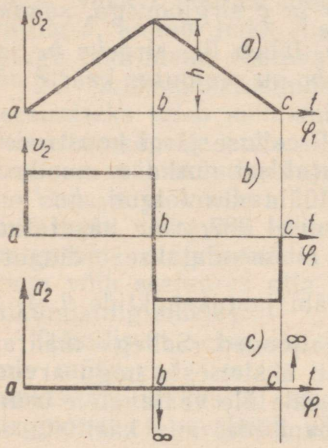
Olgu näiteks esimest tüüpi nukkmehhanismi (joon. 336, *a*) veetava lüli *2* liikumisseadus ette antud selle lüli mingi punkti — näiteks punkti B — paigutuste diagrammi

$$s_B = s_B(t)$$

abil. Nuki *1* liikumisseadus olgu samuti teada diagrammi $\varphi = \varphi(t)$ kujul, kusjuures φ tähistab nuki pöördenurka. Nimetatud kahe diagrammi järgi saab alati konstrueerida diagrammi

$$s_B = s_B(\varphi).$$

Neil juhtudel, kui nukk pöörleb ühtlase nurkkiirusega, võib diagrammi $s_B = s_B(t)$ abstsissteljele kantud aja t asendada nurgaga φ diagrammi eelnevalt ümber konstrueerimata. Selleks tuleb teha ainult vastav mastaabi ümberarvutus.



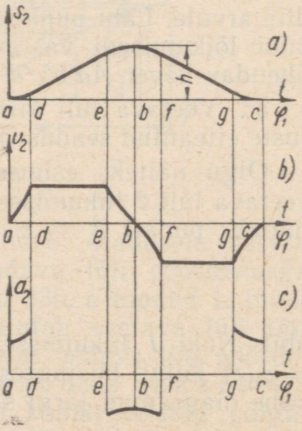
Joon. 338.

Kui punkti B paigutuste diagramm on kogu tsükli ulatuses moodustatud kahest sirgest (joon. 338, *a*), peab kiiruse v_B diagramm koosnema kahest, abstsissteljega paralleelsest sirglõigust (joon. 338, *b*). Kiirus v_B on seega suuruselt püsiv, kuid muudab tsükli kestel märki. Veetav lüli liigub järelikult ühtlaselt. Punkti B kiirenduste diagramm ühtib lõikudes ab ja bc abstsissteljega (joon. 338, *c*). See tähendab, et nimetatud lõikudes puudub veetaval lülil kiirendus. Punktides a, b ja c, kus kiirus v_B muudab hüppeliselt oma märki, on kiirendus teoreetiliselt lõpmata suur. Dünaamiline surve, mis tekib mehhanismi kinemaatilistes paarides, on teoreetiliselt võttes samuti piiramata. Nimetatud asendite läbimisel tekivad mehhanismis l ö ö g i d. Teoreetiliselt lõpmata suurtest jõududest tingitud lööke nimetatakse *kõvadeks löökideks*.

Kui veetava lüli punkti B liikumisseadus kogu tsükli ulatuses koosneb ringjoone kaartega ühendatud sirglõikudest (joon. 339, *a*), omandab kiiruste v_B diagramm joonisel 339, *b* ning kiirenduste a_B diagramm joonisel 339, *c* toodud kuju.

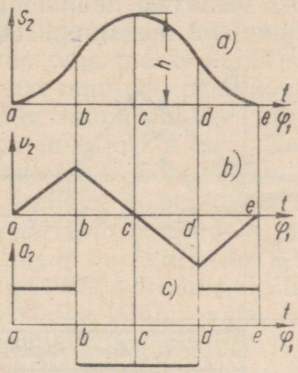
Punktides *d*, *e*, *f* ja *g* esinevad siinjuures samuti löögid, kuid viimaste iseloom on kõvade löökide iseloomust e r i n e v. Tõepoolest, nimetatud punktides ei tõuse dünaamiline surve teoreetiliselt lõpmata suureks. Kinemaatilistes paarides mõjuvad reaktsioonid muutuvad küll h ü p p e l i s e l t, kuid jäävad seejuures oma suuruselt alati l õ p l i k e k s. Vastavaid lööke nimetatakse *pehmeteks löökideks*.

Kui lüli *2* punkti B liikumisseadus on määratud paraboolse diagram-

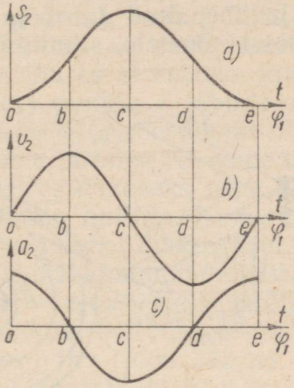


Joon. 339.

miga (joon. 340, *a*), siis muutuvad kiirus v_B ja kiirendus a_B vastavalt joonisel 340, *b* ja *c* toodud diagrammidele. Veetav lüli liigub sel juhul ühtlase kiirendusega. Punktides *b* ja *d* talub mehhanism pehmeid lööke.



Joon. 340.



Joon. 341.

Koosinuselise liikumisseaduse puhul (joon. 341, *a*) ei esine kiiruse ega kiirenduse hüppelisi muutusi, mistõttu puuduvad nii kõvad kui ka pehmed löögid.

P ö ö r l e v a t e veetavate lülide puhul tuleb konstrueerida pöördenurkade (nurkpaigutuste), nurkkiiruste ja nurkkiirenduste diagrammid. Nimetatud diagrammide analüüs viib samadele järeldustele, mis saadi juhul, kui veetav lüli liikus t r a n s l a t o o r s e l t. Mõlemal juhul tuleb seega veetava lüli liikumisseaduse valikul silmas pidada mitte ainult veetava lüli paigutusi, vaid ka tema liikumisel esinevaid k i i r u s i ja k i i r e n d u s i.

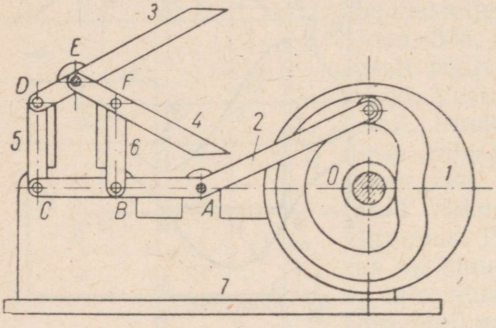
Nukkmehhanismide veetavate lülide mähiskõverad (mähitavad) võivad kuuluda kolme liiki. Mähitavaks võib olla kõigepealt mingi k õ v e r, näiteks ringjoon, evolvent, spiraal vms. Teiseks võib mähitavana kasutada s i r g j o o n t ja kolmandaks — p u n k t i.

4°. Ülal käsitleti mõningaid lihtsaid nukkmehhanismide veetavate lülide liikumisseadusi. Masinautomaatide projekteerimisel konstrueeritakse nukkmehhanisme ka tunduvalt keerukamate seaduste kohaselt. Joonis 342 kujutab kompvekipakkimise automaadi kääride nukkmehhanismi. Nuki *1* pöörlemine ümber telje *O* paneb liikuma nurkhoova *2*, mille otsas olev rull paikneb nuki juhtsoones. Nurkhoob, pöördudes ümber punkti *A*, paneb omakorda liikuma käärid, mille terad on moodustatud lülidest *3* ja *4*. Täistsükli aeg *T* koosneb siin kolmest osast: ajavahemikust t_s, mis kulub kääride sulgemiseks, ajavahemikust t_a, mis kulub kääride

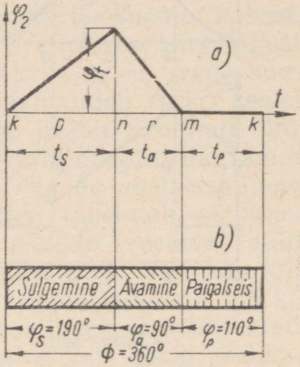
avamiseks, ja ajavahemikust t_p, mille vältel käärid püsivad avatud olekus paigal. Tähendab,

$$T = t_s + t_a + t_p. \tag{10.4}$$

Ajavahemikud t_s, t_a ja t_p valitakse vastavalt tehnoloogilise protsessi nõuetele, silmas pidades mehhanismi maksimaalset või-



Joon. 342.

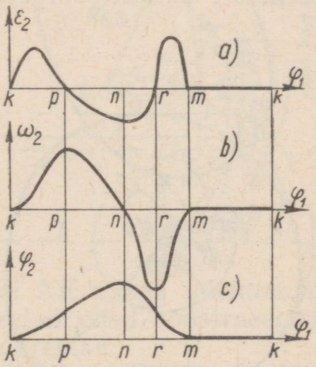


Joon. 343.

malikku tootlikkust. Teades mehhanismi mõõteid, võib määrata ajavahemikele t_s ja t_a vastava hoova *2* pöördenurga φ_t. Seda pöördenurka nimetame edaspidi tööpöördenurgaks. Hoob *2* pöördub algul aja t_s vältel nurga φ_t võrra, sulgedes käärid. Seepeale pöördub hoob *2* aja t_a vältel sama nurga φ_t võrra, kuid vastupidises suunas, avades käärid. Lõpuks püsib hoob *2* aja t_p vältel liikumatuna.

Käsitletud andmete najal saab konstrueerida nii hoova *2* liikumise tingdiagrammi kui ka mehhanismi tsüklogrammi (joon. 343). Joonis 343, *a* kujutab tinglikult hoova *2* pöördenurka φ_2 sõltuvust ajast *t*, s. t. diagrammi $\varphi_2 = \varphi_2(t)$. Juhul kui nukk pöörleb püsiva nurkkiirusega, osutub diagramm $\varphi_2 = \varphi_2(t)$ ühtlasi ka diagrammiks $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$. Diagramm (joon. 343, *a*) on tinglik seetõttu, et nurga φ_2 muutumine aja funktsioonina on temas kujutatud lineaarsena. Joonis 343, *b* kujutab mehhanismi tsüklogrammi. Selles on näidatud nurgad φ_s, φ_a ja φ_p, mille võrra nukk *1* vastavate ajavahemikkude t_s, t_a ja t_p jooksul pöördub. Kui valida hoova *2* liikumisseadus joonisel 343, *a* toodud diagrammi kohaselt, tekivad mehhanismis kõvad löögid (vt. § 45, 3°). Ajaintervallides t_s ja t_a on seetõttu otstarbekam kehtestada lineaarsest erinev liikumisseadus. Sobivamaid liikumisseaduse variante käsitleti eespool (§ 45, 3°).

Paigutuste lõpliku diagrammi määramisel on löökide vältimise seisukohalt kõige otstarbekam lähtuda kiirenduste diagrammist. Demonstreerime seda ülaltoodud näite varal. Olgu meile ette antud tinglik diagramm $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (joon. 343, *a*) ja mehhanismi tsüklogramm (joon. 343, *b*). Lõigus φ_s pöördub hoob *2* ühes, lõigus φ_a aga teises suunas. Hoova nurkkiirus ω_2 peab järelikult muutma oma märki punktis *n*. Et selle juures ei esineks kiiruse hüppelist muutust, peab kõver $\omega_2 = \omega_2(\varphi_1)$ punktis *n* läbima abstsisstelje. Samal põhjusel peab kõvera $\omega_2 = \omega_2(\varphi_1)$ ordinaat olema null ka punktides *k* ja *m*. Nende tingimuste täitmisel ei esine mehhanismis kõvu lööke. Pehmete löökide kõrvaldamiseks peab lüli *2* nurkkiirendus ε_2 punktides *k* ja *m* võrduma nulliga. Kuna nurkkiirus ω_2 läbib punktide *k* ja *n* ning *n* ja *m* vahel maksimumi, siis on ilmne, et nurkkiirendus ε_2 peab nendele maksimumidele vastavates punktides võrduma nulliga. Kõver $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varphi_1)$ peab järelikult abstsisstelge läbima vähemalt neljas punktis. Saavutagu nurkkiirus ω_2 oma maksimaalväärtused punktides *p* ja *r* (joon. 343, *a*). Fikseerime kõvera $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varphi_1)$ abstsissteljel punktid *k*, *p*, *n*, *r* ja *m* (joon. 344, *a*) ning tõmbame läbi nende punktide sujuva kiirenduskõvera. Kõvera kulgemine võib seejuures olla üldiselt meelevaldne. Silmas tuleb pidada ainult seda, et kõvera $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varphi_1)$ poolt punktide *k*, *p*, *n*, *r* ja *m* vahel eraldatud pindalad oleksid omavahel võrdsed. See tähendab, et kõvera poolt intervallis *kp* eraldatud pindala peab võrduma intervallis *pn* eraldatud pindalaga; intervallis *nr* eraldatud pindala peab olema võrdne intervallis *rm* tekkinud pindalaga, ja lõpuks, pindalade summa kogu intervallis *kn* peab võrduma pindalade summaga kogu intervallis *nm*. Nende tingimuste täitmine tagab kõigepealt seda, et kõvera $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varphi_1)$ graafiline integreerimise teel konstrueeritud nurkkiiruste diagramm $\omega_2 = \omega_2(\varphi_1)$ läbib abstsisstelje punktides *k*, *n* ja *m* (joon. 344, *b*). Teiseks on tagatud, et kõvera $\omega_2 = \omega_2(\varphi_1)$ omakordsel graafilisel integreerimisel saadav nurkpaigutuste diagramm $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ läbib abstsisstelje punktides *k* ja *m* (joon. 344, *c*). Teiste sõnadega, kiirus ω_2 võrdub sel juhul nulliga punktides *k*, *n* ja *m*, paigutus φ_2 muutub aga nulliks punktides *k* ja *m*. Ülalkirjeldatud viisil saadud graafikut $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ võibki mehhanismi projekteerimisel aluseks võtta.



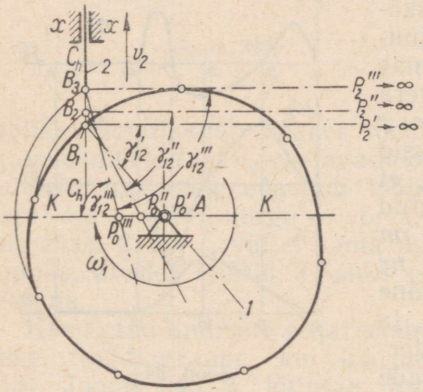
Joon. 344.

Sõltuvalt kõvera $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varphi_1)$ valitud kujust ja punktide *p* ning *n* asukohast võib saada mitmesuguseid, eri tingimuste järgi

muutuva kiirusega liikumise seadusi. Arvutuste lihtsustamiseks moodustatakse kõver $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varphi_1)$ väga sageli sirglõikudest; kõverad $\omega_2 = \omega_2(\varphi_1)$ ja $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ koosnevad sel juhul vastavalt teise või kolmanda astme parabooli kaartest.

§ 46. Nukkmehhanismide põhimõõdete valikust

1°. Nukkmehhanismi põhiliste mõõdete valikul lähtutakse konstruktiivsetest kaalutlustest, s. o. võetakse arvesse tugevusarvutusega saadud nukkvõlli läbimõõtu, nukis oleva ava suurust, veetava lüli otsas asuva rulli mõõteid jne. Seejuures püütakse enamikul juhtudel saada minimaalsete gabariitmõõdetega mehhanismi. Nukkmehhanismi mõõted ei sõltu aga ainuüksi konstruktiivsetest kaalutlustest. Oluline osa on siin veel tingimusel, mille kohaselt mehhanismis tekkivad ülekandenurgad peavad tagama mehhanismi normaalset töötamist (vt. § 41). Alljärgnevas käsitleme mehhanismi põhiliste mõõdete määramist sõltuvalt valitud või etteantud ülekandenurgast.



Joon. 345.

Nukkmehhanism töötab häireteta siis, kui temas esinevad ülekandenurgad γ ei ole liiga väikesed. Seetõttu fikseeritakse nukiprofiilide projekteerimisel tavaliselt ülekandenurga piirväärtus γ_{min} ja hoolitsetakse selle eest, et tegelik ülekandenurk ei langeks mehhanismi üheski asendis alla nimetatud piirväärtuse.

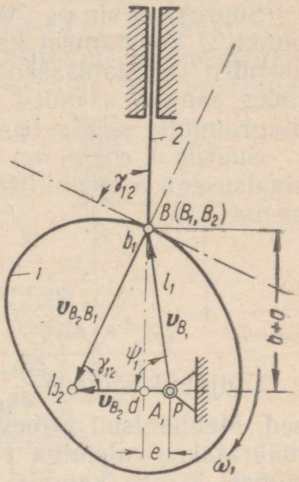
2°. Alljärgnevas selgitame, kuidas seda tagada nukkmehhanismi enamlevinud tüüpide puhul.

Vaatleme translatoorselt liikuva veetava lüliga nukkmehhanismi (joon. 345). Veetava lüli *2* mähitavaks profiiliks olgu punkt *B*. Ülekandenurkade määramiseks (vedava nuki puhul) konstrueerime bitsentroidi, s. o. lülide *1* ja *2* suhtelise liikumise hetkeliste kiiruste tsentrite geomeetrilise koha. Tõmbame läbi punkti *A* sirge *KK*, mis kulgeb risti juhtpuksi *xx* teljega. Kuna lüli *2* hetkeline kiiruste tsenter asub lõpmatuses, siis ühendab sirge *KK* omavahel lülide *1* ja *2* absoluutse liikumise hetkelisi kiiruste tsentreid. Lüli *2* relatiivset liikumist lüli *1* suhtes määravad hetkelised kiiruste tsentrid, s. o. punktid P_0', P_0'', P_0''', ... asuvad

sellel sirgel, moodustades bitsentroidi. Punktide P_0', P_0'', P_0''', ... asukohti fikseerib valem

$$l_{AP_0} = \frac{v_2}{|\omega_1|},$$

kus v_2 tähistab lüli *2* etteantud kiirust ja ω_1 — lüli *1* etteantud nurkkiirust vaadeldavas asendis. Praktikas võib punkte P_0', P_0'', P_0''', ... määrata kas analüütiliselt või graafiliselt. Nad paiknevad punktist *A* paremal või vasakul, sõltuvalt kiiruse v_2 suunast. Hambumisjooneks C_h on lüli *2* ja nuki *1* profiili kontaktpunktide *B* geomeetriline koht. Viimast saab määrata eespool toodud viisil, lähtudes lülide *1* ja *2* etteantud liikumisseadustest. Ühendame hambumisjoone C_h punktid B_1, B_2, B_3, ... ühelt poolt bitsentroidi vastavate punktidega P_0', P_0'', P_0''', ... ja teiselt poolt — lüli *2* hetkeliste kiiruste tsentriga P_2', P_2'', P_2'''. Kuna lüli *2* liigub translatoorselt, siis ristuvad kontaktpunkte B_1, B_2, B_3, ... kiiruste tsentritega P_2', P_2'', P_2''', ... ühendavad sirged B_1P_2', B_2P_2'', B_3P_3''', ... juhtpuksi *xx* teljega. Nurgad $P_2'B_1P_0'$, $P_2''B_2P_0''$, $P_2'''B_3P_0'''$, ... ongi otsitud ülekandenurkadeks γ_{12}', γ_{12}'', ν_{12}'''. ... On ilmne, et samad nurgad esinevad ka sirgete B_1P_0', B_2P_0'', B_3P_0''', ... ja bitsentroidi *KK* vahel. Mehhanism töötab rahuldavalt siis, kui kõik ülaltoodud viisil konstrueeritud nurgad on etteantud piirnurgast γ_{min} suuremad.



Joon. 346.

Ülekandenurga γ_{12} väärtusi saab leida ka analüütiliselt. Olgu näiteks ülesandeks leida joonisel 346 kujutatud asendis viibiva nukkmehhanismi ülekandenurk γ_{12}. Ülesande lahendamiseks konstrueerime punktis *A* pööratud kiirusplaani pb_1b_2, kasutades seejuures etteantud nurkkiiruse ω_1 mastaapi. Kiirusplaanist leiame, et

$$\operatorname{tg}\gamma_{12} = \frac{b_1d}{b_2d} = \frac{v_{B_1}\sin\psi_1}{v_{B_2} - v_{B_1}\cos\psi_1}.$$

Teiselt poolt on aga teada, et

$$v_{B1} = \omega_1 l_1$$

ja

$$v_{B2} = \frac{ds_2}{dt} = \frac{ds_2}{d\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1\frac{ds_2}{d\varphi_1},$$

kus s_2 tähistab lüli 2 paigutust ja φ_1 — nuki pöördenurka (nimetatud suurused on ette antud diagrammiga $s_2 = s_2(\varphi_1)$). Arvestades ülaltoodut, saame

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{l_1 \sin \psi_1}{\frac{ds_2}{d\varphi_1} - l_1 \cos \psi_1}. \tag{10.5}$$

Suurus $l_1 \sin \psi_1$ võrdub pikkusega $b + a$, kus b tähistab punkti d konstantset kaugust veetava lüli punkti B madalaimast asendist (nn. lähisasendist) ja a — veetava lüli paigutust, arvestades samast asendist. Paigutuse a väärtused saadakse samuti diagrammist $s_2 = s_2(\varphi_1)$.

Suurus $l_1 \cos \psi_1$ on konstantne, võrdudes mehhanismi desaksiaalsusega e (joon. 346). Asetades $b + a$ ja e võrrandisse (10.5) saame

$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{b + a}{\frac{ds_2}{d\varphi_1} - e}. \tag{10.6}$$

Üldjuhul võivad $\frac{ds_2}{d\varphi_1}$ ja e olla nii positiivsed kui ka negatiivsed. Mehhanismi erinevatele asenditele vastav nurga γ_{12} väärtus määratakse valemiga (10.6). Viimasest selgub, et nuki projekteerimisel ei saa kaugusi b ja e valida meelevaldselt. Kui näiteks ette anda desaksiaalsus e ja lubatav minimaalne ülekandenurk γ_{min}, peab kaugus b rahuldama a ja $\frac{ds_2}{d\varphi_1}$ kõikide vastavate väärtuste puhul tingimust

$$b \geqslant \left(\frac{ds_2}{d\varphi_1} - e\right) \operatorname{tg} \gamma_{min} - a. \tag{10.7}$$

Tingimusest (10.7) leitakse kauguse b arvutuslik väärtus b_{arv}. Määranud valitud desaksiaalsusele e ja ülekandenurgale γ_{min} vastava kauguse b_{arv}, võime arvutada nuki vähima raadiusvektori l_{min}. Selleks kasutame seost

$$l_{min} = \sqrt{b^2_{arv} + e^2}. \tag{10.8}$$

Nukkmehhanismides, kus varda 2 liikumistelg läbib nuki tsentri 1, on $e = 0$, mistõttu võrrand (10.6) lihtsustub:

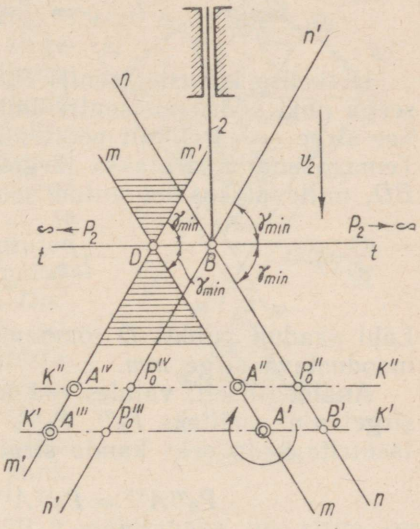
$$\operatorname{tg} \gamma_{12} = \frac{b + a}{\frac{ds_2}{d\varphi_1}}.$$

Võrratus (10.7) ja seos (10.8) kujunevad sel puhul järgmisteks:

$$b \geqslant \frac{ds_2}{d\varphi_1} \operatorname{tg} \gamma_{min} - a \quad \text{ja} \quad l_{min} = b_{arv}.$$

Ülaltoodud tingimustele vastavalt projekteeritud nuki gabariitmõõted on minimaalsed.

3°. Minimaalsete gabariitmõõdetega nuki projekteerimisel võib rakendada ka varemkäsitletud geomeetrilisi konstruktsioone. Asugu lüli *2* mingis vaheasendis, kus on teada tema punkti *B* kiirus v_B ja lüli *1* nurkkiirus ω_1 (joon. 347). Ülekandenurga piirväärtus γ_{min} olgu samuti ette antud. Määrame nüüd koha, kuhu tuleb asetada nuki pöörlemistsenter *A*, et täita minimaalse ülekandenurga tingimust. Tõmbame läbi punkti *B* lüli *2* liikumissuunaga ristuva sirge *tBt*. On ilmne, et lüli *2* hetkeline kiiruste tsenter asub sellel sirgel, paiknedes lõpmatuses. Punktis *B* kanname sirgest *tBt* üles- ja allapoole etteantud nurga γ_{min} ja tõmbame sirged *nn* ning *n'n'*. Lülide suhtelise liikumise hetkeline kiiruste tsenter P_0 peab asuma nendel sirgetel. Nuki pöörlemistsentri *A* geomeetrilise koha määramine ei valmista nüüd enam raskusi. Tõepoolest, pöörlemistsentri *A* kaugus hetkelisest kiiruste tsentrist P_0 on üldjuhul määratud seosega



Joon. 347.

$$l_{AP_0} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{\frac{ds_B}{dt}}{\frac{d\varphi_1}{dt}} = \frac{ds_B}{d\varphi_1}. \qquad (10.9)$$

Lisaks sellele on teada, et lõik AP_0 on alati risti lüli *2* liikumissihiga. Kui eeldada näiteks, et hetkeline tsenter ühtib sirgel *nn* asuva punktiga P_0', tuleb vastava pöörlemistsentri A' leidmiseks tõmmata läbi punkti P_0' sihiga *tBt* paralleelne sirge $K'P_0'K'$

ja kanda sellele lõik $P_0'A'$. Viimase pikkus määratakse seosest

$$l_{P_0'A'} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{ds_B}{d\varphi_1},$$

mis on analoogiline võrrandiga (10.9).

Valides hetkelise kiiruste tsentri asukohaks punkti P_0'', tuleb vastava pöörlemistsentri A'' leidmiseks toimida järgmiselt. Tõmbame sihiga tBt paralleelse sirge $K''P_0''K''$ (joon. 347) ja kanname sellele lõigu $P_0''A''$. Viimane võrdub pikkuselt lõiguga $P_0'A'$, sest

$$l_{P_0''A''} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{ds_B}{d\varphi_1} = l_{P_0'A'}.$$

Hetkelise kiiruste tsentri P_0 liikumisele piki sirget nn vastab seega nuki pöörlemistsentri ümberpaiknemine paralleelsirgel mm. See sirge on järelikult pöörlemistsentrite geomeetriliseks kohaks. Tema asend määratakse järgmiselt. Kanname sirgele tBt lõigu BD, mille pikkus on antud seosega

$$l_{BD} = \frac{v_B}{\omega_1} = \frac{ds_B}{d\varphi_1}.$$

Läbi saadud punkti D tõmbame sihiga tBt ülekandenurka γ_{min} moodustava sirge mm.

Analoogiliselt, valides rea hetkelise pöörlemistsentri asendeid sirgel $n'n'$ (näiteks P_0''', P_0^{IV}, ...), tuleb vastavate pöörlemistsentrite leidmiseks kanda sirgetele $K'P_0'''K'$ ja $K''P_0^{IV}K''$ lõigud

$$P_0'''A''' = P_0^{IV}A^{IV} = P_0''A'' = P_0'A'.$$

Nuki pöörlemistsentri geomeetriliseks kohaks kujuneb seekord sihiga $n'n'$ paralleelselt kulgev sirge $m'm'$.

Nuki pöörlemistsentriks A võib valida mis tahes punkti sirgetega mm ja $m'm'$ piiratud alas (joonisel 347 on vastav ala viirutatud). Sääraselt valitud pöörlemistsentri A puhul ületab mehhanismi ülekandenurk alati etteantud piirväärtuse γ_{min}.

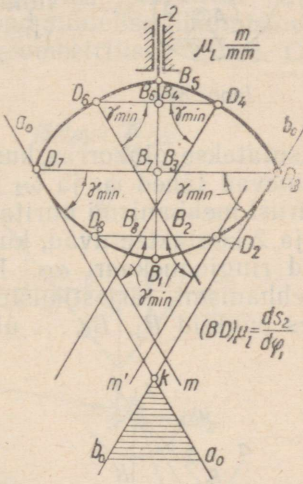
Joonestame nüüd lüli *2* kõikides asendites, s. t. punktides B_1, B_2, B_3, ... (joon. 348) lüli *2* liikumissuunale perpendikulaarid ja kanname neile vastavad lõigud

$$l_{B_1D_1} = \frac{v_{B_1}}{\omega_1'}, \quad l_{B_2D_2} = \frac{v_{B_2}}{\omega_1''}, \quad l_{B_3D_3} = \frac{v_{B_3}}{\omega_1'''}, \ldots,$$

kus v_{B1}, v_{B2}, v_{B3}, ... tähistavad lülile *2* kuuluva punkti B kiirusi ja ω_1', ω_1'', ω_1''', ... — nuki *1* nurkkiirusi reas teineteisele järgne-

vates asendites. Saadud punktidest D_1, D_2, D_3, ... tõmbame sirged D_1m_1 ja D_1m_1', D_2m_2 ja D_2m_2', ..., mis moodustavad lõikudega B_1D_1, B_2D_2, B_3D_3, ... nurga γ_{min}. Iga saadud sirgetepaar kujundab lüli *2* vastavas asendis nuki pöörlemistsentri A võimalikkude asupaikade geomeetrilise koha.[1] Tsentrit A võib paigutada mis tahes punkti sirgetepaari poolt piiratud alas.

Ülal käsitleti nuki pöörlemistsentri A võimalikkude asendite paiknemisala määramist veetava lüli *2* üksikutes konkreetsetes vaheasendites. Püüame nüüd nimetatud paiknemisalades fikseerida piirkonnad, mis on ühised lüli *2* kõikide asendite jaoks. Üldjuhul on sääraseid piirkondi kaks: üks ühispiirkondadest paikneb sirgetest B_1D_1, B_2D_2, ... madalamal ja teine — nimetatud sirgetest kõrgemal. Joonisel 348 on viirutusega näidatud alumine ühispiirkond, mida piiravad sirged a_0k ja b_0k. Käsitletud piirkonda võib määrata veel järgneval viisil. Ühendame sujuva joonega kõik leitud punktid D_1, D_2, D_3, ... ja tõmbame saadud kõverale puutujad a_0a_0 ja b_0b_0. Esimene neist on paralleelne sihiga Dm ja teine sihiga Dm'. Nii määratud puutujad a_0a_0 ja b_0b_0 piiravad joonisel 348 viirutusega tähistatud ala b_0ka_0, kuhu (või mille piiridele) võib paigutada nuki pöörlemistsentri A. Nuki mõõted kujunevad minimaalseteks juhul, kui pöörlemistsenter asub punktis k.



Joon. 348.

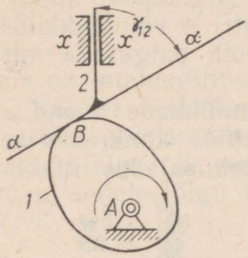
Mehhanismis, mille veetava lüli *2* mähitavaks on sirge aa (joon. 349), kujuneb nurk γ_{12} konstantseks. Projekteerimisel tuleb siin silmas pidada ainult seda, et mähitava aa poolt lüli *2* liikumissihiga moodustatud nurk γ_{12} oleks suurem etteantud ülekandenurgast γ_{min}. Kui mähitava sirge aa ja lüli *2* liikumissihi vaheline nurk $\gamma_{12} = 90°$, saadakse ülekandenurga seisukohalt lähtudes optimaalne nukkmehhanism.

4°. Käsitleme nüüd nookuva veetava lüliga nukkmehhanismi, mille mähitavaks profiiliks on valitud punkt B (joon. 350). Määrame vedavale nukile vastava ülekandenurga γ_{12}, kasutades varemesitatud konstruktsiooni.

Pöörelgu nukk *1* ümber punkti O nurkkiirusega ω_1 (joon. 350). Veetav lüli *2* pöörleb omakorda nurkkiirusega ω_2 ümber telje A.

[1] Joonisel 348 langevad punktid B_1 ja D_1 ühte seetõttu, et kiirus $v_{B1} = 0$.

Vedavale nukile vastava ülekandenurga γ_{12} leidmiseks konstrueerime lülide *1* ja *2* suhtelise liikumise bitsentroidi *KK*. Selleks ühendame sirgega lülide *1* ja *2* hetkelised pöörlemistsentrid *A* ja *O*. Bitsentroidi *KK* moodustavad punktid P_0', P_0'', P_0''', ... määratakse võrdest



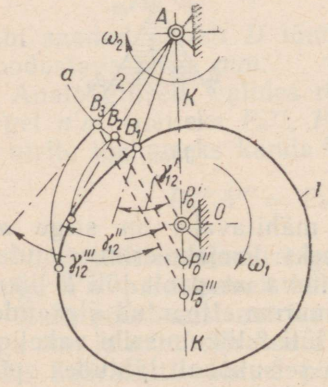
Joon. 349.

$$\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|} = \frac{OP_0}{AP_0} = \frac{OP_0}{OA - OP_0}$$

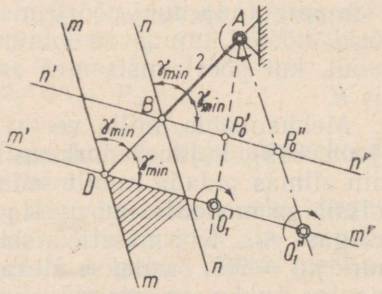
juhul, kui punkt P_0 jagab lõigu *AO* sisemisel viisil. Võrret

$$\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|} = \frac{OP_0}{AP_0} = \frac{OP}{OA + OP_0}$$

kasutatakse olukorras, kus lõik *AO* jagatakse välisel viisil. Võrretes esinevad tähed ω_1 ja ω_2 tähistavad lülide *1* ja *2* etteantud nurkkiirusi mehhanismi uuritavas asendis. Hambumisjooneks, kus lülid *1* ja *2* kontakteeruvad, kujuneb punktist *A* raadiusega *AB* tõmmatud ringjoonekaar *aa*. Hambumispunktid B_1, B_2, ... saadakse mehhanismi järjestikuste asendite konstrueerimisega. Ühendades punktid B_1, B_2, ... ühelt poolt tsentriga *A* ja teiselt poolt —



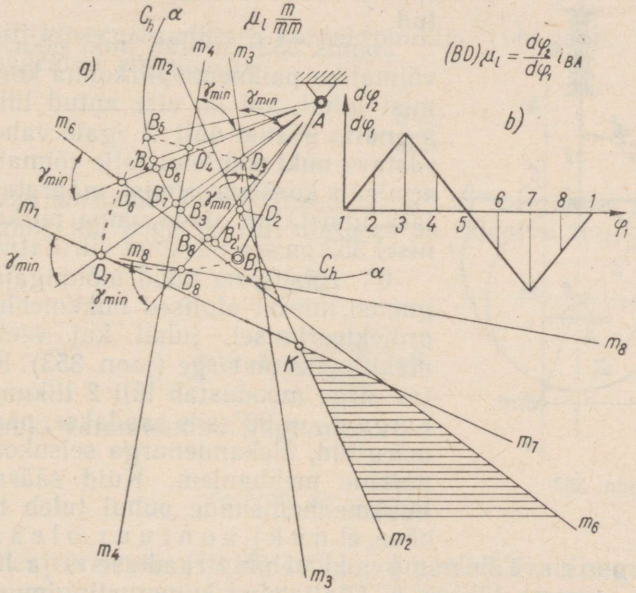
Joon. 350.



Joon. 351.

bitsentroidi vastavate punktidega P_0', P_0'', ..., saame ülekandenurgad γ_{12}', γ_{12}'', γ_{12}''', ... Mehhanism töötab rahuldavalt ainult siis, kui ükski tekkinud ülekandenurkadest ei ole väiksem etteantud piirnurgast γ_{min}. Juhul kui hambumispunkti ja hetkelisi kiiruste tsentreid *A* ning P_0 ühendavad sirged moodustavad nürinurga, tuleb mehhanismi ülekandenurgaks lugeda leitud nurka 180°-ni täiendav teravnurk (joon. 350).

5°. Lahendame nüüd minimaalsete gabariitmõõdetega nuki konstrueerimise ülesande. Selleks tuleb teatavasti leida nuki pöörlemistsentri võimalikkude asendite paiknemisalad. Mehhanismi igas vaadeldavas asendis on seejuures ette antud lülide *1* ja *2* nurkkiirused ω_1 ja ω_2 ning hoova AB asend. Lisaks sellele on teada hoova AB pikkus ja lubatav minimaalne ülekandenurk γ_{min} (joon. 351). Ülesande lahendamiseks määrame kõigepealt suhtelise liikumise hetkeliste kiiruste tsentrite geomeetrilised kohad etteantud minimaalse piir-ülekandenurga γ_{min} puhul. Hoova AB punktis B konstrueerime kaks piirnurgaga γ_{min} võrduvat nurka (joon. 351). Sirged nn ja $n'n'$ moodustavad suhtelise liikumise võimalikkude hetkeliste kiiruste tsentrite geomeetrilised kohad. Ole-



Joon. 352.

tame, et hetkeliseks kiiruste tsentriks on näiteks sirge $n'n'$ punkt P_0'. Juhul kui nurkkiirused ω_1 ja ω_2 on vastassuunalised, asub nuki pöörlemistsenter O_1' sirge AP_0' pikendusel, paiknedes punktist P_0' kaugusel $P_0'O_1'$. Viimane on määratav seosega

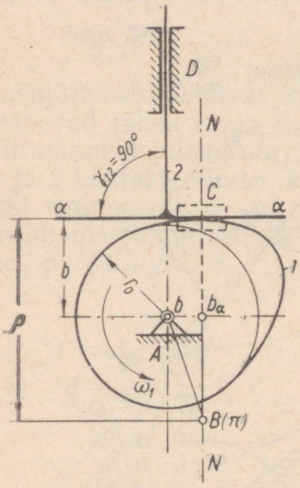
$$P_0'O_1' = P_0'A \frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}.$$

Punkt P_0' jagab seega lõigu $O_1'A$ sisemisel viisil osadeks, mis on pöördvõrdelised nurkkiirustega. Juhul kui ω_1 ja ω_2 osutuvad samasuunalisteks, jagab punkt P_0' lõigu AO' endises proportsioonis, kuid

välisel viisil. Kui hetkeline tsenter asub punktis P_0'', siis vastab sellele nuki pöörlemistsentri asend O_1'' jne. Nuki pöörlemistsentrite geomeetriliseks kohaks on ilmselt punkti D läbiv sihiga $n'n'$ paralleelne sirge $m'm'$. Punkti D asukoht sirge BA pikendusel määratakse seosega

$$DB = AB\frac{|\omega_2|}{|\omega_1|}.$$

Nuki pöörlemistsentri teine geomeetriline koht saadakse nn-sihilise sirge mm joonestamisega läbi punkti D. Sirgete mm ja $m'm'$ vahel paiknevas alas on etteantud minimaalne ülekandenurk tagatud. Joonisel 351 on nimetatud ala viirutatud.



Joon. 353.

Joonis 352 kujutab nuki pöörlemistelje võimaliku paiknemispiirkonna konstrueerimist juhul, kui on ette antud lüli 2 mitu asendit. Pärast lüli 2 igale vaheasendile vastava nuki pöörlemistelje võimaliku paiknemisala konstrueerimist määratakse kindlaks nimetatud alade ühine piirkond. Joonisel 352 on see piirkond viirutatud.

6°. Käsitleme nüüd mõningaid lisatingimusi, mis on olulised nukkmehhanismide projekteerimisel, juhul kui veetava lüli mähitavaks on sirge (joon. 353). Kui mähitav sirge moodustab lüli 2 liikumisteljega nurga $\gamma_{12} = 90°$, siis saadakse, nagu varem märgitud, ülekandenurga seisukohalt optimaalne mehhanism. Kuid säärast tüüpi nukkmehhanismide puhul tuleb täita veel nõue, et nuki kontuur oleks pidevalt kumer. Tähistame nuki vähima raadiuse r_0 ja lüli 2 paigutuse s_2 summa tähega b. Ülaltoodud kumerustingimuse täitmiseks peavad b väärtused b_1, b_2, b_3, ... mehhanismi kõikides asendites olema suuremad, kui lüli 2 vastavate paigutuste s_2', s_2'' s_2''', ... teised tuletised pöördenurga φ_1 suhtes, võetuna miinusmärgiga. Seega

$$r_0 + s_2' > -\frac{d^2s_2'}{d\varphi_1^2}, \quad r_0 + s_2'' > -\frac{d^2s_2''}{d\varphi_1^2}, \ \ldots$$

Ülalväidetu järeldub alljärgnevatest lihtsatest kaalutlustest. Asugu nuki profiili kontaktpunktide vastav kõverustsenter punktis B (joon. 353). Konstrueerime asendava mehhanismi $ABCD$ ja koostame punktis $B(\pi)$ kui pooluses kiirendusplaani. Lõik (πb)

võetuna mastaabis ω_1^2 kujutab punkti B kiirenduse a_B moodulit, s. t. $a_B = \omega_1^2(\pi b)$. Lõik (πb_α) võetuna samas mastaabis kujutab omakorda lüli *2* kiirenduse a_2 moodulit, s. t.

$$a_2 = \omega_1^2(\pi b_\alpha) = \frac{d^2 s_2}{dt^2} = \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}\omega_1^2. \qquad (10.10)$$

Seejuures on eeldatud, et nurkkiirus ω_1 on ühtlane.

Ilmutades seosest (10.10) (πb_α), saame

$$(\pi b_\alpha) = \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}. \qquad (10.11)$$

Profiili kõverusraadius ϱ kontaktpunktis (vt. joon. 353) on seega määratud võrrandiga

$$\varrho = r_0 + s_2 + \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}, \qquad (10.12)$$

kus s_2 saab kordamööda väärtused s_2', s_2'', s_2''', ... Nuki profiil on kumer juhul, kui kogu profiili ulatuses on täidetud tingimus

$$\varrho > 0 \qquad (10.13)$$

ehk

$$r_0 + s_2 + \frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} > 0. \qquad (10.14)$$

See annabki varemtoodud tingimuse

$$r_0 + s_2 > -\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}. \qquad (10.15)$$

Jagades võrratuse (10.15) mõlemad pooled avaldisega $r_0 + s_2$, saame

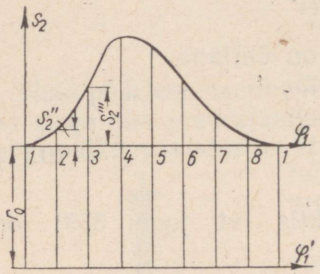
$$\frac{-\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}}{r_0 + s_2} < 1 \qquad (10.16)$$

ehk

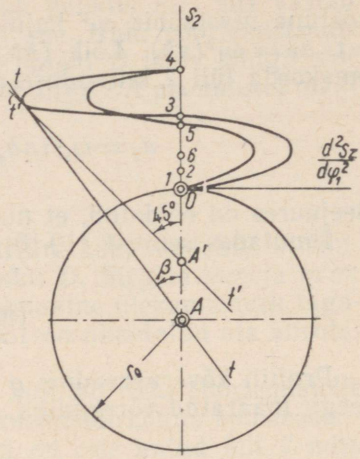
$$\frac{-\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2}}{r_0 + s_2} < \operatorname{tg} 45°. \qquad (10.17)$$

Võrratus (10.17) on alljärgneva graafilise konstruktsiooni aluseks (joon. 355).

Lähtudes etteantud diagrammist $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (joon. 354), konstrueerime diagrammi $\frac{d^2 s_2}{d\varphi_1^2} = f(s_2)$ (joon. 355). Selleks märgime



Joon. 354.



Joon. 355.

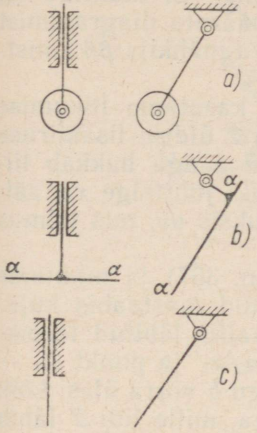
Os_2-teljele lüli *2* vaheasendid *1, 2, 3, ...* ja kanname neist tõmmatud rõhtsirgetele vastavad $\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}$ väärtused. Saadud punktide ühendamine sujuva kõvera abil annab diagrammi $\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = f(s_2)$. Nüüd tõmbame kõverale $\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}$ puutuja $t't'$, mis moodustab s_2-teljega 45° nurga. Puutuja tuleb tõmmata diagrammile punktis, mis vastab $\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2}$ negatiivsele, kuid absoluutselt võttes suurimale väärtusele.

Võrratuse (10.17) põhjal peab nuki pöörlemistsenter paiknema allpool punkti A'. Kui pöörlemistsenter asub näiteks punktis A, on tingimus (10.17) ilmselt täidetud. Tõepoolest, punktist A diagrammi $\frac{d^2s_2}{d\varphi_1^2} = f(s_2)$ negatiivses osas kõverale tõmmatud puutuja tt moodustab s_2-teljega nurga β, mis on väiksem kui 45°. Valinud nuki pöörlemistelje A asukoha, oleme ühtlasi määranud ka nuki vähima raadiuse r_0. Kanname selle suuruse diagrammile $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (joon. 354). Nüüd ei valmista kumera profiiliga nuki konstrueerimine enam mingeid raskusi. Käsitletud projekteerimismeetodi autoriks on nõukogude teadlane professor J. L. Geronimus.

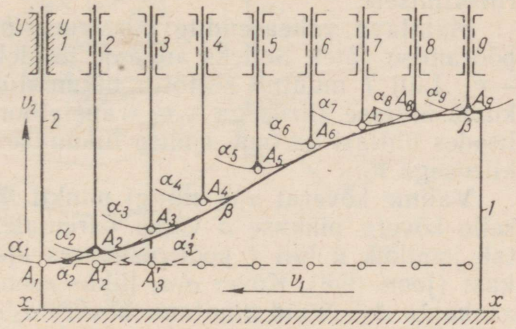
§ 47. Nukiprofiilide projekteerimine

1°. Nukiprofiile võib projekteerida, tuginedes § 40 käsitletud kaasmähiskõverate konstrueerimise üldistele meetoditele. Tõepoolest, kui käsitada vedava lüli (varda, hoova, kepsu jne.) külge

kuuluvat kõrgema kinemaatilise paari elemenți kui mähitavat, kujuneb nuki profiil selle suhtes mähkijaks. Nagu ülal märgitud, võib mähitavaks profiiliks valida kas mingisuguse kõvera, sirge



Joon. 356.

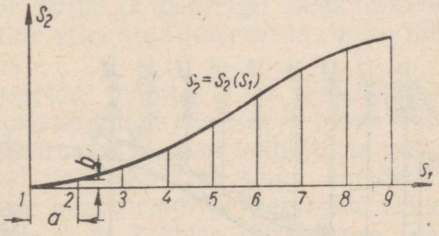


Joon. 357.

või koguni punkti. Joonisel 356 on kujutatud mõningat tüüpi mähitavad. Joonisel 356, *a* on mähitavaks profiiliks ringjoon, joonisel 356, *b* — sirge, ja joonisel 356, *c* — punkt.

Kui mehhanismi lülide liikumisseadused on teada ja mähitav profiil veetaval lülil valitud, määratakse § 46 toodud viisil nukkmehhanismi põhilised gabariidid. Pärast seda projekteeritakse nuki profiil.

§ 45, 1° toodud liigituse alusel kuuluvad nukkmehhanismide esimesse tüüpi mehhanismid, mille veetavad lülid liiguvad translatoorselt (joon. 336, *a*). Sõltuvalt vedava lüli liikumisest (see võib kulgeda kas rotatiivselt või translatoorselt) saab 1. tüüpi mehhanisme alaliigitada veel kahte rühma.



Joon. 358.

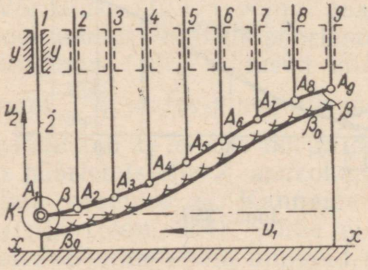
Liikugu vedav lüli *1* (joon. 357) translatoorselt, etteantud ühtlase kiirusega v_1. Veetava lüli *2* liikumine juhtpuksis *yy* olgu samuti translatoorne ja toimugu kiirusega v_2. Lüli *2* liikumisseadust kujutagu diagramm $s_2 = s_2(s_1)$ (joon. 358).

Nagu märgiti § 39, on veetavale lülile translatoorse liikumise

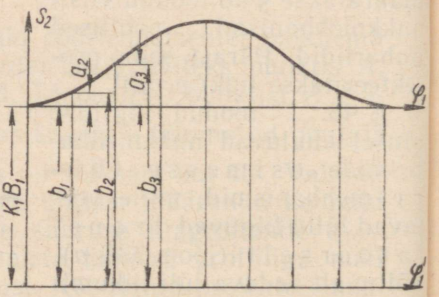
andmine olukorras, kus ka vedav lüli liigub translatoorselt, võimalik ainult kaasmähiskõverate abil. Olgu lüli *2* külge kuuluvaks mähitavaks valitud meelevaldne kõver aa (joon. 357). Viimase lähteasendiks olgu a_1a_1. Kuna käesoleval juhul on mähitav aa antud ja tema järjestikuseid asendeid saab määrata diagrammist $s_2 = s_2(s_1)$, võib vahetult asuda lülile *1* kuuluva mähkija $\beta\beta$ konstrueerimisele.

Mähitava vaheasendite konstrueerimiseks kasutame liikumise pööramise võtet. Selleks anname lülidele *1* ja *2* üldise lisakiiruse $-v_1$. Lüli *1* muutub seetõttu liikumatuks, lüli *2* aga hakkab liikuma ühtlase kiirusega $-v_1$ translatoorselt piki juhttelge *xx*, säilitades ühtlasi ka oma endise liikumise juhtpuksis *yy*, mis toimus kiirusega v_2.

Valime kõveral a_1a_1 mingi punkti A_1 (joon. 357) ja nihutame selle kõvera pikkuse *a* võrra paremale. Valitud mastaabis kujutab joonlõik *a* lüli *1* poolt esimeses ajaintervallis läbitud teepikkust (joon. 358). Kõver a_1a_1 liikus asendisse $a_2'a_2'$ ja punkt A_1 — asukohta A_2'. Nüüd nihutame kõvera $a_2'a_2'$ lõigu *b* võrra üles. Lõik *b* võrdub varemvalitud mastaabis teepikkusega, mille lüli *2* läbib sama 1. ajaintervalli jooksul (joon. 358). Punkt A_2' tuli seejuures asukohta A_2 ja kõver $a_2'a_2'$ asendisse a_2a_2. Mähitava kõik järgmised vaheasendid konstrueeritakse analoogiliselt. Tõmmates nii saadud mähitavate parvele mähisjoone $\beta\beta$, oleme leidnud nuki *1* profiili. Juhul kui mähitavaks on punkt *A* (joon. 359), määrame analoogiliste võtete abil tema vaheasendid A_1, A_2, A_3, ... Leitud punkte kõveraga $\beta\beta$ omavahel ühendades saadakse mähisjoon, mis moodustabki nuki otsitava profiili.

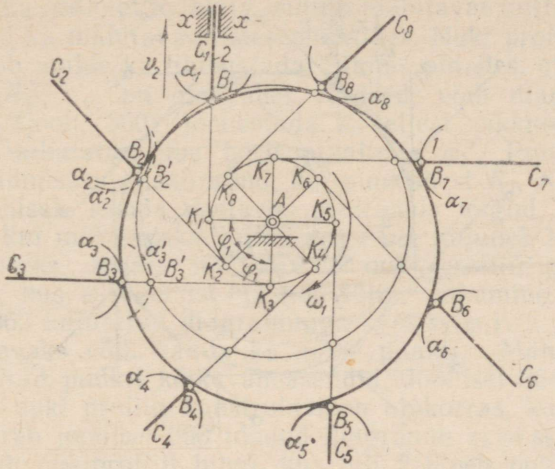


Joon. 359.



Joon. 360.

Juhul kui lüli *2* on varustatud teljel *A* pöörleva rulliga *K*, kujutab kõver $\beta\beta$ rulli *K* tsentri geomeetrist kohta. Viimast nimetati leppeliselt nuki teoreetiliseks profiiliks. Nuki praktilise profiili moodustab ekvidistantne kõver $\beta_0\beta_0$, mis asub teoreetilisest

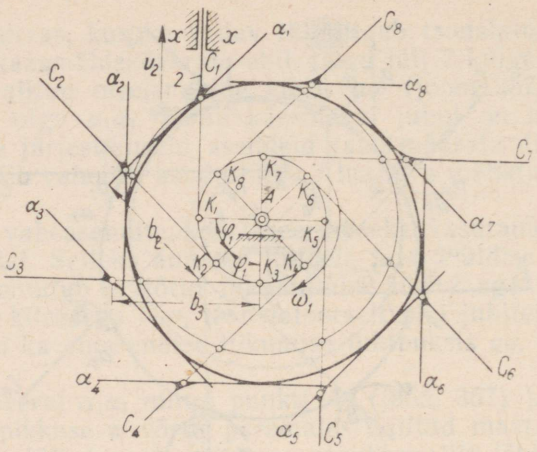


Joon. 361.

profiilist $\beta\beta$ rulli raadiuse kaugusel. Ekvidistantse kõvera joonestamiseks tõmmatakse teoreetilise profiili $\beta\beta$ punktidest kui tsentritest lähtudes ringjooni, millede raadius võrdub rulli K raadiusega. Kõver $\beta_0\beta_0$ konstrueeritakse seega kui rulli K järjestikuste asendite mähkija.

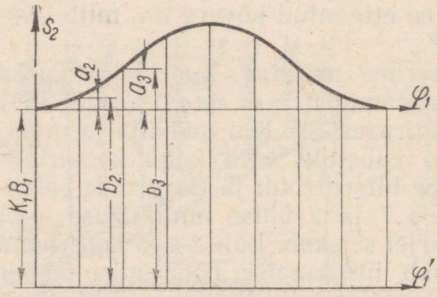
2°. Juhul kui vedav lüli *1* (nukk) pöörleb, võib nukiprofiili projekteerida järgmiselt. Olgu lüli *2* liikumisseadus antud diagrammi $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (joon. 360) kujul ja pöörelgu nukk ühtlase nurkkiirusega. Mähitavaks võtame etteantud kõvera aa, mille lähteasendiks olgu a_1a_1 (joon. 361).

Mähkija leidmiseks konstrueerime mähitava aa järjestikused vaheasendid. Selleks lähtume diagrammist $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (joon. 360) ja nuki etteantud ühtlasest nurkkiirusest ω_1. Kui mähkija ja mähitava liikumisseadused on antud vahetult, võib kogu konstruktsiooni läbi viia suhtelise liikumise bitsentroidi ja tsentroide eelnevalt määramata. Anname lülidele *1* ja *2* ühise nurkkiiruse $-\omega_1$ ümber telje A. Lüli *1* selle tagajärjel seiskub. Lüli *2* aga koos tema külge kuuluva mähitavaga aa saab liitliikumise; pöörlemise ümber punkti A nurkkiirusega $-\omega_1$ ja translatoorse liikumise juhtpuksis xx kiirusega v_2. Kuna eeldasime, et nurkkiirus ω_1 on ühtlane, siis pöördub lüli *2* võrdsete ajavahemikkude jooksul võrdsete nurkade φ_1 võrra (joon. 361). Kõvera aa järjestikuste asendite leidmiseks tõmbame punktist A lüli *2* liikumissihile B_1C_1 ristsirge AK_1. Joonlõiku AK_1 raadiuseks võttes joonestame ringjoone, mille tsenter on punktis A. Saadud ringjoone jagame võrdseteks, tsentraalnurkadele φ_1 vastavateks kaarteks. Saame punktid K_2, K_3, K_4, ... Kui lüli *2*



Joon. 362.

pöörleb nurkkiirusega $-\omega_1$, peavad sirged B_2C_2, B_3C_3, ... puutuma meie poolt konstrueeritud ringjoont punktides K_2, K_3, K_4, ... Konstrueerime nimetatud sirged ja määrame nendel lülil *2* valitud punkti *B* asukoha. Lähtudes punktidest K_1, K_2, K_3, ..., kanname käsitletavatele sirgetele võrdsed joonlõigud $K_1B_1 = K_2B_2' = K_3B_3' = K_4B_4' = \ldots$ Sellega oleme määranud mähitava aa asendid a_1a_1, $a_2'a_2'$, $a_3'a_3'$, ... Lisaks ülal vaadeldud pöörlemisele liigub lüli *2* veel translatoorselt juhtpuksis *xx*. See liikumine kulgeb joonisel 360 kujutatud seaduse järgi. Lüli lõplikute asendite leidmiseks tuleb seetõttu punktidest B_2', B_3', B_4', ... lähtudes ja valitud mastaapi kasutades joonisele kanda veel lõigud $B_2'B_2 = a_2$, $B_3'B_3 = a_3$, ..., mis võetakse joonisel 360 toodud diagrammist. Sel viisil saadakse mähitava aa vaheasendid. Viimastele konstrueeritakse sujuva kõvera $\beta\beta$ näol mähkija, mis moodustabki nuki otsitava profiili. Kui pöörata nii saadud nukki nurkkiirusega ω_1 ümber telje *A*, hakkab veetav lüli *2* liikuma temale ettenähtud kiirusega v_2.



Joon. 363.

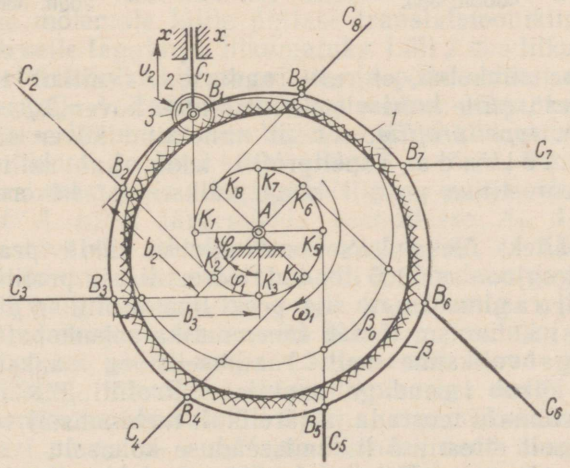
Jooniselt 361 selgub, et nuki õige kontuuri saamiseks tuleb üldjuhul mähitavat aa konstrueerida küllalt paljudes vaheasendites.

Märgime ka seda, et mähkija puutub mähitavat mitte ainult punktis B, vaid ka mähitava teistes punktides. Nuki profiili konstrueerimist saab muide ka lihtsustada. Silmas pidades, et lõigud K_1B_1, K_2B_2', K_3B_3', ... on omavahel võrdsed, võib diagrammil $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (joon. 360) joonestada φ_1-teljest pikkuse K_1B_1 võrra allapoole nihutatud uue horisontaaltelje φ_1'. Punktide B_1, B_2, B_3, ... leidmiseks piisab nüüd, kui punktidest K_1, K_2, K_3, ... lähtudes joonisele kanda vastavas mastaabis lõigud b_1, b_2, b_3, ...

Juhul kui mähitavaks valida sirge $\alpha\alpha$, kujuneb konstruktsioon analoogiliseks. Joonis 362 kujutab nuki profiili projekteerimist olukorras, kus $\omega_1 = \text{const.}$ ja kus lüli *2* liikumine on määratud joonisel 363 kujutatud diagrammiga $s_2 = s_2(\varphi_1)$.

Mähitavaks võib valida ka mõne punkti. Mähkija läbib sel juhul valitud punkti kõik vaheasendid. Joonisel 364 on näidatud seda liiki nuki profiili konstruktsioon olukorras, kus lüli *2* liikumist määrab joonisel 360 toodud diagramm $s_2 = s_2(\varphi_1)$. Mähkija $\beta\beta$ kujutab nukiprofiili juhul, kus lüli *2* lõpeb punktis B teravikuga.

Kui aga punktis B asub rull *3* raadiusega r, siis moodustab kõver $\beta\beta$ esialgu ainult teoreetilise profiili. Praktiliseks profiiliks on sel juhul ekvidistantne kõver $\beta_0\beta_0$. Viimase konstrueerimiseks

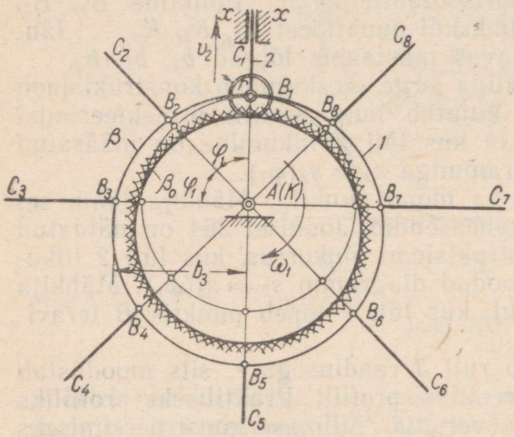


Joon. 364.

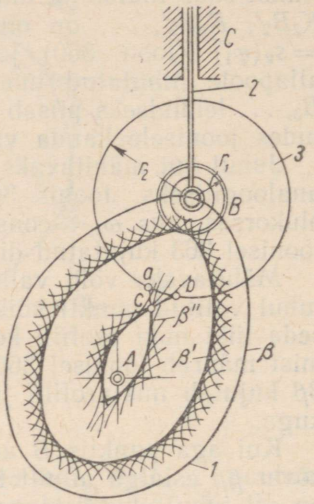
tuleb joonestada ringjooni raadiusega r, paigutades selleks sirkli teravikku teoreetilisel profiilil järk-järgult edasi. Saadud ringjoonte mähisjoon $\beta_0\beta_0$ (joon. 364) kujutab nuki praktilist profiili.

Mehhanismides, kus lüli *2* liikumistelg läbib nuki pöörlemistelge A (joon. 365), taanduvad ringjooned raadiusega AK_1 (vt.

joon. 361, 362 ja 364) punktideks ja kõik vastavate diagrammide $s_2 = s_2(\varphi_1)$ lõigud b_1, b_2, b_3, ... kantakse punktist A tõmmatud sirgetele (joon. 365).



Joon. 365.



Joon. 366.

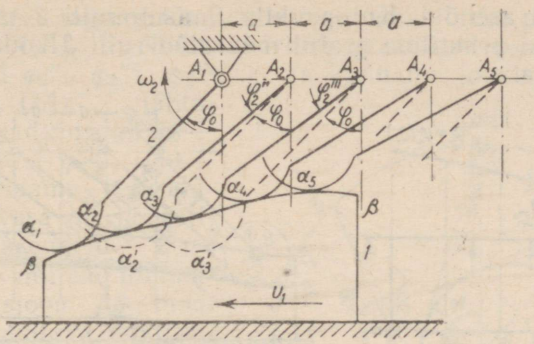
Märgime siinkohal, et rulli raadiuse r valikul tuleb juhinduda nõudest, mille kohaselt ekvidistantne kõver $\beta_0\beta_0$ ei tohi põhjustada nn. *topeltprofiile*, s. t. et nimetatud kõver ei tohi i s e e n d a g a l õ i k u d a. Topeltprofiil tekib, kui rulli raadius r on nuki teoreetilise profiili kõige väiksemast kõverusraadiusest suurem.

Olgu näiteks ülesandeks konstrueerida nukile praktiline profiil, lähtudes joonisel 366 toodud teoreetilisest profiilist $\beta\beta$. Kui valida rulli raadiuseks r_1, siis praktiline profiil $\beta'\beta'$ iseendaga ei lõiku ja mehhanism töötab kinemaatika seisukohalt laitmatult. Kui me aga valiksime rulli raadiuseks r_2, saaksime profiili $\beta''\beta''$, mis lõikub iseendaga punktis c. Profiili $\beta''\beta''$ osa *cab* on faktiliselt võimatu teostada ja järelikult mehhanismi veetav lüli ei liiguks täpselt etteantud liikumisseaduse kohaselt.

Selleks, *et veetav lüli liiguks etteantud kinemaatilise seaduse kohaselt, ei tohi rulli raadius üheski profiilipunktis ületada nuki teoreetilise profiili kõverusraadiust.*

3°. Nukkmehhanismide t e i s e t ü ü b i moodustavad mehhanismid, millel v e e t a v lüli p ö ö r l e b. Ka siin saab eraldada kahte juhtu: 1) vedav lüli liigub t r a n s l a t o o r s e l t ja 2) vedav lüli liigub r o t a t i i v s e l t.

Liikugu lüli *1* (joon. 367) t r a n s l a t o o r s e l t ühtlase kii-

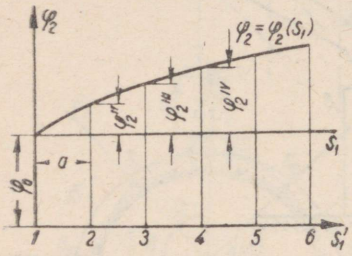


Joon. 367.

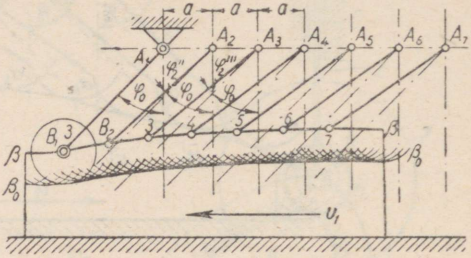
rusega v_1, veetav lüli *2* aga pöörelgu nurkkiirusega ω_2. Lüli *2* pöördenurga φ_2 sõltuvus lüli *1* paigutusest s_1 olgu antud graafikuga $\varphi_2 = \varphi_2(s_1)$ (joon. 368). Juhul kui liikumist kantakse ülekaasmähiskõverate abil, lahendatakse nuki profiili konstrueerimise ülesanne järgmiselt. Olgu mähitavaks kõveraks valitud mingi lülile *2* kuuluv kõver aa. Viimase lähteasendiks olgu a_1a_1 (joon. 367). Anname mõlemale lülile ühtlase translatsioonikiiruse $-v_1$. Lüli *1* muutub selle tagajärjel liikumatuks. Lüli *2* uus liikumine aga koosneb translatsioonist kiirusega $-v_1$ ja pöörlemisest nurkkiirusega ω_2 ümber telje A. Kuna kiirus v_1 on eelduse põhjal konstantne, siis translatoorse liikumise osas liiguvad lüli *2* kõik punktid võrdsete ajavahemikkude jooksul edasi pikkuse a võrra. Viimane võetakse teatavas mastaabis diagrammilt $\varphi_2 = \varphi_2(s_1)$ (joon. 368). Lüli *2* punkt A tuleb järgemööda asenditesse A_1, A_2, A_3, ... Kõvera aa vastavateks asenditeks on $a_2'a_2'$, $a_3'a_3'$, ... Lüli *2* pöörlemine ümber punkti A on määratud lüli *2* pöördenurgaga φ_2. Viimase sõltuvus paigutusest s_1 on antud diagrammiga $\varphi_2 = \varphi_2(s_1)$. Kui nurkade mastaap on teada, võib lüli *1* iga asendi jaoks määrata lüli *2* vastava pöördenurga. Lähteasendis moodustab lüli *2* lüli *1* liikumissihile tõmmatud perpendikulaariga nurga φ_0. Järgmises vaheasendis moodustab lüli *2* sama perpendikulaariga nurga $\varphi_0 + \varphi_2''$, edasi nurga $\varphi_0 + \varphi_2'''$ jne. Kandes need nurgad joonisele, saame mähitava aa järjestikused asendid a_1a_1, a_2a_2, a_3a_3, ... Viimaste mähkija $\beta\beta$ moodustabki otsitava nukiprofiili. Nagu varemkäsitletud tüübi puhul, võib ka siin nurga φ_0 kanda vahetult diagrammile $\varphi_2 = \varphi_2(s_1)$, kasutades nurkade φ_2 kujutamiseks valitud mastaapi. Sel puhul võib veetava lüli pöördenurki lugeda alates uuest teljest s_1' (joon. 368).

Juhul kui mähitavaks pole valitud ei kõver ega sirge, vaid punkt, näiteks punkt B joonisel 369, läbib mähkija kõik punkti B

järjestikused asendid. Kui punktis B asub rulli *3* tsenter (joon. 369), on nuki praktiline profiil määratud rulli *3* kõikide asendite mähisjoonena.

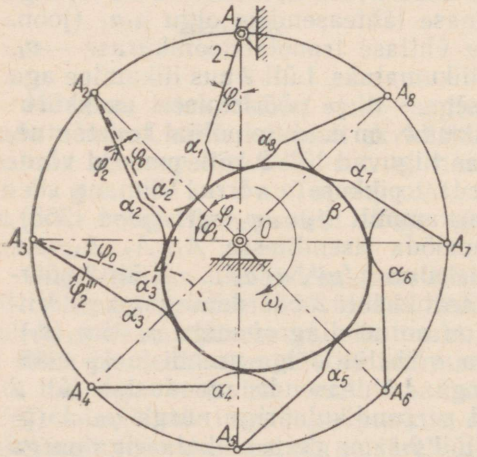


Joon. 368.

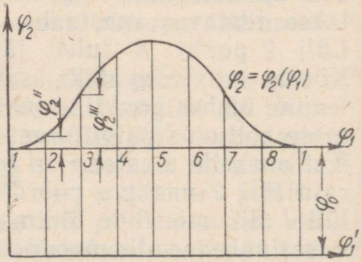


Joon. 369.

4°. Käsitleme nüüd antud tüüpi nukkmehhanismi teist varianti, kus nii v e d a v kui ka v e e t a v lüli p ö ö r l e v a d. Olgu veetavale lülile kuuluvaks mähitavaks kõver aa (joon. 370). Viimane pöörleb ümber punkti A ja tema lähteasendiks olgu a_1a_1. Kõvera aa pöördenurgad φ_2 on antud diagrammiga $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (joon. 371). Lähtenurga, mis tekib lüli *2* ja sirge AO vahel, tähistame φ_0. Kõvera aa järjestikuste



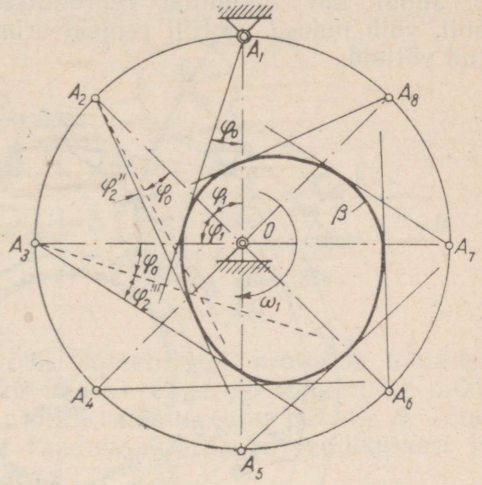
Joon. 370.



Joon. 371.

asendite leidmiseks anname lülidele *1* ja *2* ühise nurkkiiruse $-\omega_1$. Lüli *1* muutub seetõttu liikumatuks, lülil *2* aga on liitliikumine, mis koosneb ühtlase kiirusega tiirlemisest ümber telje O ja joonisel 371 toodud graafikuga määratud nookumisest ümber punkti A. Tõmbame nüüd tsentrist O ringjoone raadiusega OA. Fikseerime sellel ringjoonel punkti A asendid A_1, A_2,

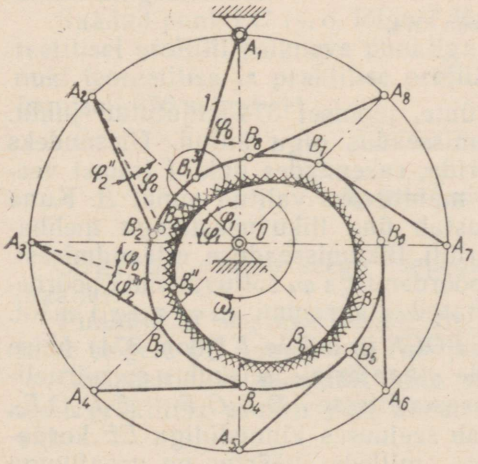
A_3, ... Selleks jagame tõmmatud ringjoone võrdse pikkusega kaarteks A_1A_2, A_2A_3, ... Nüüd määrame graafikust $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ nurkpaigutused φ_2'', φ_2''', φ_2^{IV}, ... ja kanname joonisele raadiustest OA_2, OA_3, OA_4, ... lähtudes vastavad nurgad $\varphi_0 + \varphi_2''$, $\varphi_0 + \varphi_2'''$, $\varphi_0 + \varphi_2^{IV}$, ... Saame rea mähitava kõvera $\alpha\alpha$ järjestikuseid asendeid $\alpha_1\alpha_1$, $\alpha_2\alpha_2$, ..., millele tõmmatud mähisjoon $\beta\beta$ moodustabki otsitava nukiprofiili. Konstruktsiooni lihtsustamiseks võib lähteasendi nurga φ_0 kanda diagrammile $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ ja lugeda nurki $\varphi_0 + \varphi_2''$, $\varphi_0 + \varphi_2'''$, ... juba uuest abstsissteljest φ_1' (joon. 371).



Joon. 372.

Juhul kui mähitavaks on valitud sirge (joon. 372), konstrueeritakse nuki profiil sama meetodi alusel.

Juhul kui mähitava moodustab punkt B (joon. 373), saadakse nuki teoreetilist profiili kujundav mähkija $\beta\beta$ punkti B järjestikuseid asendeid B_1, B_2, B_3, ... sujuva kõveraga ühendades. Praktilise profiili $\beta_0\beta_0$ saamiseks tuleb konstrueerida rulli *3* asenditest moodustatud ringjoonte parv. Viimaste mähisjoon on nuki *1* praktiliseks profiiliks $\beta_0\beta_0$.

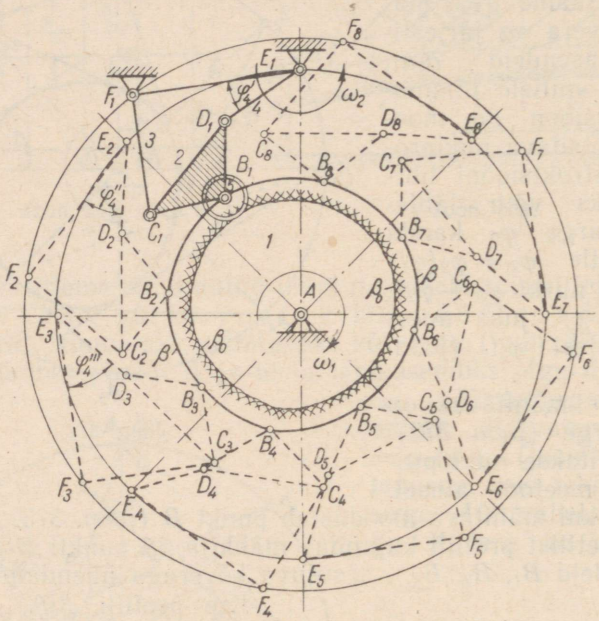


Joon. 373.

5°. Nukkmehhanismide kolmandasse tüüpi kuuluvad teatavasti mehhanismid, mille veetaval lülil on tasaparalleelne liitliikumine. Veetava lüli *2* (joon. 336, *c*) liikumisseadus antakse sel puhul funktsionaalse sõltuvusena kas lüli *3* või lüli *4* liikumisest. Nuki *1* pöörlemine on eelduse põhjal ühtlane. Et 3. tüüpi nukkmeh-

hanisme kohtab masinates võrdlemisi harva, siis käsitleme siinkohal ainult mõningaid nende projekteerimisega seotud üldküsimusi.

Juhul kui liikumine reprodutseeritakse kaasmähiskõverate abil, võib nuki *1* profiili projekteerimisel kasutada varemselgitatud võtteid.

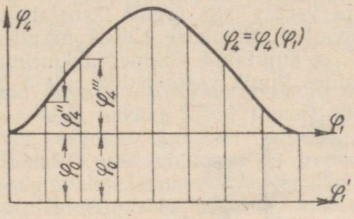


Joon. 374.

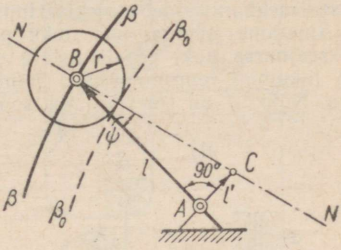
Näitena käsitleme ainult ühte, joonisel 374 kujutatud juhtu. Šarniirnelinurga *EDCF* liikumisseadus olgu antud. Ülesandeks on seda liikumist reprodutseerida, rakendades nuki *1* toimet veetavale lülile *2*. Viimasel olgu mähitavaks valitud punkt *B*. Kuna šarniirnelinurk *EDCF* moodustab ühe liikuvusastmega mehhanismi, siis piisab ainult ühe lüli liikumisseaduse etteandmisest. Olgu näiteks ette antud lüli *4* pöördenurga φ_4 sõltuvus nuki pöördenurgast φ_1 joonisel 375 kujutatud diagrammi $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_1)$ näol.

Anname šarniirnelinurgale *EDCF* ja nukile *1* (joon. 374) ühise nurkkiiruse $-\omega_1$. Nukk *1* selle tagajärjel seiskub, šarniirnelinurk *EDCF* aga liigub vaheasenditesse $E_1D_1C_1F_1$, $E_2D_2C_2F_2$, $E_3D_3C_3F_3$, ... Lüli *4* moodustab seejuures kinnislüliga *EF* kordamööda nurki φ_4', φ_4'', φ_4''', ..., millede väärtus on graafikuga $\varphi_4 = \varphi_4(\varphi_1)$ ette antud. Selle alusel määratakse punkti *B* järjes-

tikused asendid B_1, B_2, B_3, ... Viimaseid sujuva kõveraga ühendades saadakse nuki teoreetiline profiil. Praktilise profiili saamiseks tuleb rulli 5 kõikidele asenditele konstrueerida mähisjoon $\beta_0\beta_0$.



Joon. 375.



Joon. 376.

6°. Praktilist profiili võib teoreetilisest profiilist lähtudes konstrueerida ka punkt-punkti haaval. Olgu $\beta\beta$ teoreetiline nukiprofiil (joon. 376) ja l selle profiili raadiusvektor punktis B. Tõmbame punktist A nimetatud raadiusvektorile perpendikulaari ja kanname sellele lõigu pikkusega

$$l' = \frac{dl}{d\varphi_1}.$$

Tuletist l' võib arvutada kas analüütiliselt, lähtudes etteantud sõltuvusest $l = l(\varphi_1)$ või graafiliselt, graafilise diferentseerimise teel. Viimast moodust kasutatakse siis, kui sõltuvus $l = l(\varphi_1)$ on antud diagrammina.

Saadud punkti C (s. o. lõigu l' lõpp-punkti) ühendame nuki teoreetilisel profiilil paikneva punktiga B. Sirge BC on suunatud piki nuki teoreetilise ja praktilise profiili ühist normaali. Tõepoolest, jooniselt 376 selgub, et

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{l'}{l} = \frac{\frac{dl}{d\varphi_1}}{l}.$$

Sirge BC osutub seega tõepoolest profiilide $\beta\beta$ ja $\beta_0\beta_0$ normaaliks.

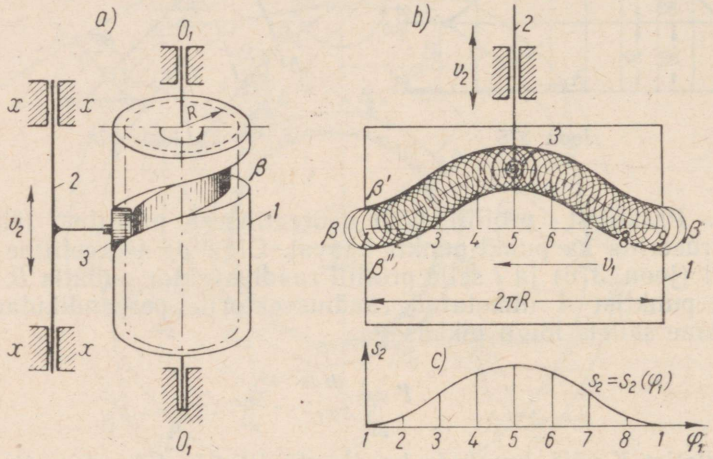
Punktile B vastava punkti B_0 leidmiseks praktilisel profiilil tuleb sirgele BC kanda rulli raadius r.

Ülalkäsitletud meetodit võib mõningatel juhtudel kasutada nuki praktilise profiili $\beta_0\beta_0$ konstrueerimiseks punkt-punkti haaval.

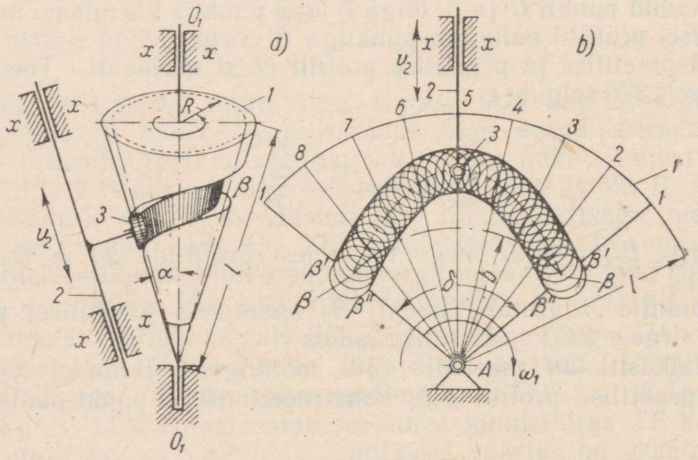
§ 48. Ruumiliste nukkmehhanismide projekteerimisest

1°. Käesolevas paragrahvis käsitletakse sääraseid ruumilisi nukkmehhanisme, mille projekteerimist saab kas täielikult või osaliselt taandada tasapinnaliste mehhanismide projekteerimiseks.

Alustame juhuga, kus nukk pöörleb ja veetav lüli liigub translatoorselt. Kui seejuures nuki pöörlemistelg on veetava lüli liikumise sihiga paralleelne, võib liikumist reprodutseerida joonisel 377, *a* kujutatud silindernukkmehhanismiga. Nukki *1* on freesitud juhtsoon $\beta\beta$, milles liigub veetava lüli rull *3*. Nuki



Joon. 377.



Joon. 378.

pöörlemine nurkkiirusega ω_1 paneb veetava lüli *2* liikuma teljega O_1O_1 paralleelses sihis xx.

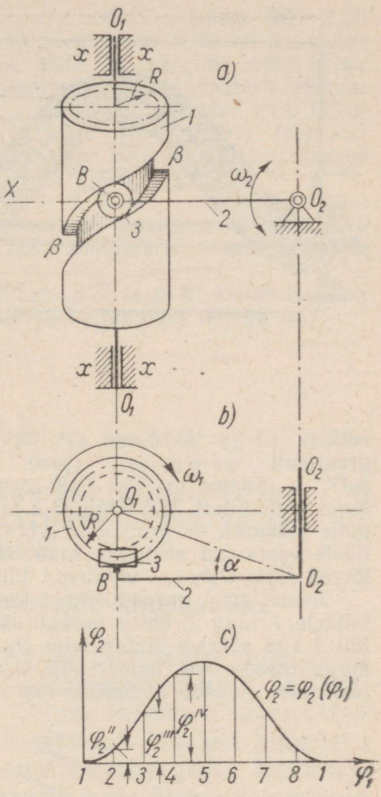
Lüli *2* liikumisseadus on antud graafikuga $s_2 = s_2(\varphi_1)$, kus s_2 tähistab lüli *2* paigutust ja φ_1 — nuki pöördenurka (joon. 377, *c*). Juhtsoone $\beta\beta$ profiili konstrueerimiseks joonestame nuki keskmisele raadiusele R vastava külgpinna laotuse (joon. 377, *b*). Kui nihutada nuki laotust *1* translatoorselt joonkiirusega $v_1 = \omega_1 R$, hakkab lüli *2* ilmselt liikuma etteantud seaduse kohaselt kiirusega v_2. Seega taandub nuki juhtsoone $\beta\beta$ projekteerimine tasapinnalise, esimest tüüpi nukkmehhanismi projekteerimiseks erijuhul, kus vedav lüli liigub translatoorselt (§ 47, 1°). Kõver $\beta\beta$ on nuki teoreetiliseks profiiliks. Praktilise profiili saamiseks joonestame profiilile $\beta\beta$ kaks rulli raadiuse kaugusel kulgevat ekvidistantset kõverat $\beta'\beta'$ ja $\beta''\beta''$.

2°. Juhul kui nuki pöörlemistelg lõikub veetava lüli liikumise sihiga, saadakse joonisel 378, *a* kujutatud koonusnukkmehhanism.

Juhtsoone $\beta\beta$ profiili konstrueerimiseks tuleb koonus *1* (joon. 378, *b*) laotada tasapinnale. Selleks määrame laotusnurga δ, kasutades valemit

$$\delta = \frac{2\pi R}{l} = 2\pi \sin \alpha,$$

kus R tähistab keskmise koonuse aluse raadiust, l — keskmise koonuse moodustaja pikkust ja α —keskmise koonuse poolt tipunurka. Juhtsoone profiili $\beta\beta$ projekteerimine taandub nüüd esimest tüüpi tasapinnalise nukkmehhanismi projekteerimiseks olukorras, kus nukk pöörleb ümber punkti A (§ 47, 2°).

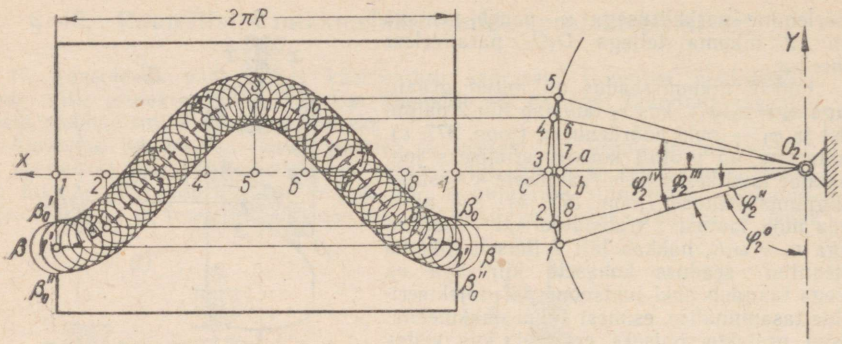


Joon. 379.

Oletame, et lüli *2* liikumisseadus on antud graafikuga $s_2 = s_2(\varphi_1)$ (joon. 377, *c*). Konstantse nurkkiirusega ω_1 pöörleva nuki projekteerimiseks tuleb laotusnurk δ jagada võrdseteks osadeks ja tõmmata vastavad, punktist A väljuvad raadiused. Lähtudes nüüd väiksema raadiusega algringjoonest, kanname igasse jaotuspunkti suunduvale raadiusele veetava lüli *2* vastava paigutuse, mille leiame graafikust $s_2 = s_2(\varphi_1)$. Tulemuseks saame nuki-juhtsoone teoreetilise profiili $\beta\beta$. Juhtsoone praktilised kontuurid saadakse ekvidistantsete kõverate $\beta'\beta'$ ja $\beta''\beta''$ konstrueerimisega. Pannes nuki laotuse pöörlema nurkkiirusega ω_1 ümber telje A, saame lüli *2* nõutava liikumise.

3°. Käsitleme nüüd juhtu, kus veetaval lülil on vahelduvasuunaline pöörlev liikumine, kuna silindriline nukk pöörleb ühesuunalise ühtlase nurkkiirusega. Joonisel 379, *a* ja *b* on toodud silindriline nukk *1*, mis pöörleb ühtlase nurkkiirusega ω_1 ümber telje O_1O_1. Lüli *2* liikumine ümber telje O_2 olgu diagrammiga $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (joon. 379, *c*) määratud vahelduvasuunaline pöörlemine.

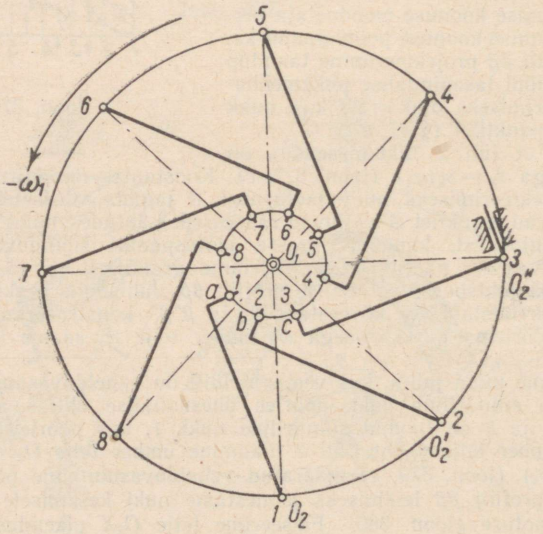
Juhtsoone profiili $\beta\beta$ leidmiseks joonestame nuki keskmisele raadiusele R vastava pinnalaotuse (joon. 380). Fikseerime telje O_2X pikendusel punkti O_2, mille võtame lüli *2* pöörlemisteljeks. Punktist O_2 tõmbame ringjoone kaare, kasutades raadiusena lüli O_2B pikkust. Lüli O_2B lähteasendi ja telje O_2Y vahel



Joon. 380.

tekkiva nurga tähistame φ_2^0. Lähtudes sellest algasendist, kanname joonisele graafikult $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$ (joon. 379, *c*) võetavad nurgad φ_2'', φ_2''', φ_2^{IV}, ... Saame rea lüli O_2B asendeid, mis määravad ära punktid *1*, *2*, *3*, ... Neist punktidest tõmbame O_2X-teljele ristsirged *1a*, *2b*, *3c*, ... (joon. 380), mille pikkused on juhtsoone profiili $\beta\beta$ punktide ordinaatideks. Leitud ordinaatidele vastavaid abstsisse saab määrata tingimusest, et joonisel 380 esinevad lõigud O_2a, O_2b, ... võrduvad lüli O_2B horisontaalprojektsioonidega.

Joonestame mehhanismi horisontaalprojektsiooni (joon. 381) ja anname lülidele *1* ning *2* ühise nurkkiiruse $-\omega_1$. Nukk *1* on seetõttu nüüd liikumatu, lüli *2* aga pöörleb ümber telje O_2 nurkkiirusega ω_2 ja tiirleb lisaks sellele veel nurkkiirusega $-\omega_1$ ümber telje O_1. Kui eeldada, et $\omega_1 = \text{const.}$, tuleb lüli *2* järjestikuste asendite leidmiseks jagada raadiusega O_1O_2 tõmmatud ringjoon võrd-



Joon. 381.

seteks osadeks. Seepeale fikseerime punktid O_2, O_2', O_2'', ... (joon. 381). Lüli O_2B moodustab raadiusega O_1O_2 konstantse nurga α (joon. 379, *b*). Kanname nurga α üle joonisel 381 olevatele raadiustele O_1O_2 ja märgime selle nurga igale vasakpoolsele haarale lüli O_2B horisontaalprojektsiooni vastava pikkuse O_2a, O_2b, O_2c, ... Saadud punktidest *a*, *b*, *c*, ... tõmbame ristjooned kuni lõikumiseni ringjoonega *1*, mille raadiuseks on *R* (vt. joon. 379, *b* ja 381). Joonestatud ristjooned kujutavad rulli *3* (joon. 379, *a*) telje asendeid. Kaarepikkused *1—2*, *2—3*, *3—4*, ... kanname laotatult O_2X-teljele (joon. 380).

Konstruktsioonist järgneb, et kaared *1—2*, *2—3*, *3—4*, ... ei ole üldjuhul omavahel võrdsed. Juhtsoone profiili (keskjoone) $\beta\beta$ konstrueerimiseks tuleb nüüd O_2X-telje punktidest *1*, *2*, *3*, *4*, ... (joon. 380) tõmmata ristjooned ja kanda neile lõigud *1a*, *2b*, *3c*, ...

Joonisel 380 kujutatud ekvidistantsete kõverate $\beta'\beta'$ ja $\beta''\beta''$ konstruktsioon on ligikaudne, sest rulli *3* telg ei lõiku käesolevas näites nuki teljega O_1.

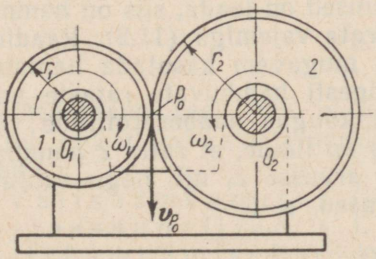
XI peatükk

ÜMMARGUSTEST SILINDERRATASTEST KOOSNEVATE HAMMASMEHHANISMIDE KINEMAATILINE UURIMINE JA PROJEKTEERIMINE

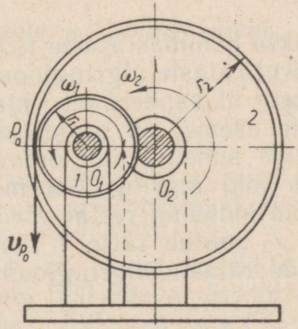
§ 49. Lihtsate hammasmehhanismide kinemaatika

1°. Pöörleva liikumise ülekandmist kahe paralleelse telje vahel meelevaldse seaduse järgi muutuvate nurkkiiruste puhul käsitleti juba varem (§ 39). Nagu seal näidati, on see ülesanne lahendatav kas silindrilistest mitteümmargustest friktsioonratastest koosneva tsentroidmehhanismi või silindriliste mitteümmarguste hammasrataste abil (vt. § 42). Nimetatud mehhanismide ülekandetegur on muutuv. Kaasaegsetes masinates on laialdaselt kasutusel konstantse ülekandeteguriga friktsioon- ja hammasmehhanismid. Säärastel mehhanismidel on ringjoonelised tsentroidid.

Kui tsentroide konstruktiivselt kujundada ümmarguste silind-



Joon. 382.



Joon. 383.

ritena (joon. 382 ja 383) ja tekitada nende vahel nii suur hõõrdejõud, et silindrite suhteline libisemine oleks välditud, saaksime ümmargustest silinderfriktsioonratastest koosneva tsentroidmehhanismi (vt. § 7). Olgu friktsioonrataste raadiusteks vastavalt r_1 ja r_2 (joon. 382 ja 383). Et silindritevaheline libisemine on välditud, siis avaldub silindrite kokkupuutepunktis P_0 valitsev joonkiirus v_{P_0} järgmiselt:

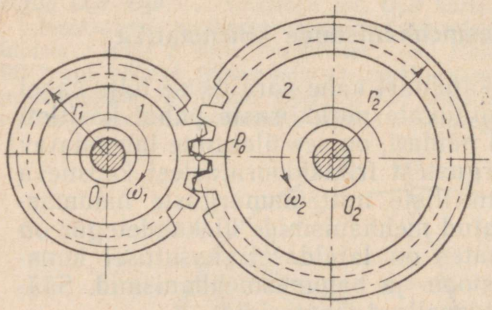
$$v_{P_0} = |\omega_1| r_1 = |\omega_2| r_2. \qquad (11.1)$$

Sellest järeldame, et käsitletavate mehhanismide ülekandesuhe i_{12} (vt. § 24, 3°) on antud seosega

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_2}{r_1}, \qquad (11.2)$$

kusjuures ülemine märk kehtib sise- ja alumine — välishambumisel.

2°. Valemit (11.2) rakendatakse ka ümmargustest silinderhammasratastest koosneva mehhanismi ülekandesuhte arvutamiseks. Tuleb ainult silmas pidada, et r_1 ja r_2 tähistavad sel juhul tegelikkuses mitteeksisteerivate tsentroidide raadiusi. Tõepoolest, rattad on antud juhul varustatud hammastega, mille profiilid kujutavad kaasmähiskõveraid. Nagu näitavad joonised 384 ja 385, tuleb liikumise ülekandmiseks hambaprofiilid kujundada nii, et need paikneksid osalt sees- ja osalt väljaspool tsentroide. Tsentroide moodustavaid ringjooni raadiustega r_1 ja r_2 nimetatakse hammasrataste teoorias ka *algringjoonteks*.



Joon. 384.

Kui rataste algringjoonte raadiused on teada, siis on hammasrataste ülekandesuhet lihtne määrata valemiga (11.2). Raadiuste suhte asemel on praktiliselt aga mugavam kasutada hammaste arvude suhet. Kuna omavahel õigesti hambuvate rataste puhul peab piki algringjooni mõõdetud kaugus naaberprofiilide vahel olema mõlemal rattal võrdne, siis on ilmne, et ratta *2* hammaste arv z_2 suhtub ratta *1* hammaste arvusse z_1 nii, nagu suhtuvad nende rataste algringjoonte pikkused, s. t.

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{2\pi r_1} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Asetades saadud tulemuse valemisse (11.2), võime kirjutada

$$_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1},$$

kus n_1 ja n_2 tähistavad vastavalt rataste *1* ja *2* pöörete arve minutis.

Ümmargustel hammasratastel on hammaste arvude suhe seega pöördvõrdeline rataste nurkkiiruste suhtega.

3°. Ümmargusi silinderhammasrattaid kasutatakse laialdaselt kõikides masinaehituse harudes. Kuna nende rataste geomeetriline kuju on väga lihtne, siis käsitletakse nende kinemaatikat tavaliselt analüütiliste meetoditega.

Kasutame selleks meie poolt § 24,3° esitatud ülekandesuhte mõistet.

Ülekandesuhteks nimetame edaspidi vedava ratta nurkkiiruse suhet veetava ratta nurkkiirusesse. Ülekandesuhet tähistatakse leppeliselt i_{kl}, kusjuures indeks «*k*» tähistab vedavat ja indeks «*l*» — veetavat ratast. Näiteks joonisel 384 on kujutatud välishambumisega mehhanism, mis koosneb kahest, ümber telgede O_1 ja O_2 pöörlevast rattast. Vedavaks rattaks on ratas *1*. Mehhanismi ülekandesuhe avaldub järgmiselt:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{11.3}$$

kusjuures n_1 ja n_2 tähistavad siin vaadeldavate rataste pöörete arve minutis.

Vastupidi, kui vedavaks rattaks on ratas *2*, avaldub ülekandesuhe järgmiselt:

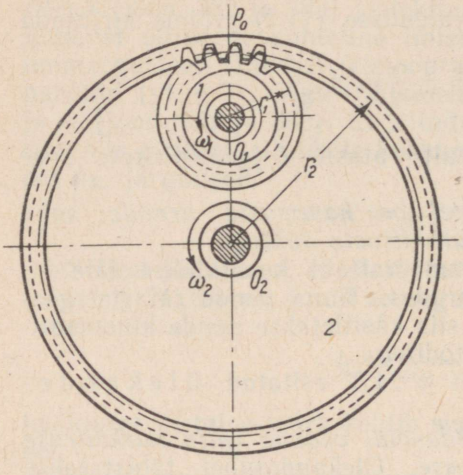
$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{11.4}$$

Ülekandesuhe i_{12} on seega ülekandesuhte i_{21} pöördväärtus, s. o.

$$i_{12} = \frac{1}{i_{21}}. \tag{11.5}$$

Meenutame veel seda, et ülekandesuhtele antakse märk, mis sõltub sellest, kas rataste nurkkiirused on sama- või vastassuunalised.

Välishambumisel (joon. 384) on rataste nurkkiirused vastassuunalised, s. t. erinevate märkidega. Seetõttu on välishambumisel ülekandesuhe alati negatiivne. Vastupidi, sisehambumisel (joon. 385) on ülekandesuhe



Joon. 385.

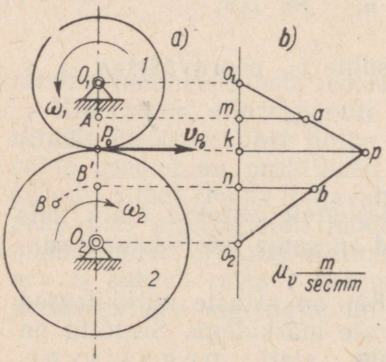
eranditult positiivne. Valem (11.3) käsitab mõlemat juhtu, tuleb ainult silmas pidada, et nurkkiirused ω_1 ja ω_2 võetakse koos oma märgiga.

4°. Hammasrataste punktides valitseva kiiruse jaotuse uurimiseks ja üksikute punktide kiiruse leidmiseks võib kasutada nõukogude teadlase prof. L. P. Smirnovi poolt väljatöötatud kiiruspiltide meetodit. Olgu näiteks ülesandeks konstrueerida kiiruspildid ratastele *1* ja *2* (joon. 386, *a*). Selleks tõmbame rööbiti tsentrite joonega O_1O_2 sirgjoone o_1o_2 (joon. 386, *b*) ja projekteerime sellele tsentrid O_1, O_2 ja hambumispooluse P_0. Saame punktid o_1, k ja o_2.

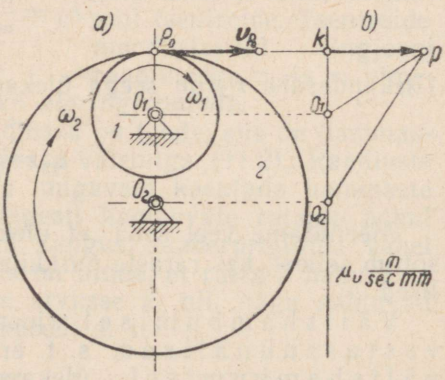
Lähtudes punktist k ja kasutades kiiruste mastaapi μ_v, kanname lõigu kp näol kiiruspildile punkti P_0 kiiruse v_{P_0}. Seega

$$v_{P_0} = \mu_v (kp).$$

Punktides O_1 ja O_2 on kiirus null. Seetõttu ühendame punkti p sirgete abil punktidega o_1 ja o_2. Saame kolmnurgad kpo_1 ja kpo_2, mis moodustavadki rataste *1* ja *2* kiiruspildi. Antud hetkel tsentrite joonel O_1O_2 paiknevate rattapunktide kiirusvektorid lõpevad kõik sirgetel o_1p või o_2p. Need sirged on seega käsitatud kiirus-



Joon. 386.



Joon. 387.

vektorite lõpp-punktide geomeetriliseks kohaks. Et leida näiteks punkti A kiirust v_A, tuleb punkt A projekteerida sirgele o_1p. Projekteerida tuleb seejuures paralleelselt kiirusega v_{P_0}. Kiirust v_A kujutab kiiruspildis seega lõik ma, tema suurus saadakse aga valemist

$$v_A = \mu_v(ma). \tag{11.6}$$

Rattale *2* kuuluva meelevaldse punkti B kiiruse v_B leidmiseks tuleb punkt B kõigepealt üle kanda tsentrite joonele, nagu on näidatud joonisel 386. Saadud punkt B' projekteeritakse sirgele o_2p. Punkti B kiiruse v_B väärtuseks on

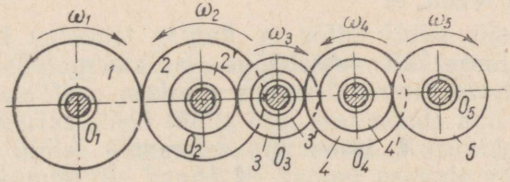
$$v_B = \mu_v(nb). \tag{11.7}$$

Kiiruse v_B siht on risti raadiusega O_2B.

Joonis 387 kujutab sisehambumisega hammasrataste kiiruspilti.

§ 50. Paljulüliliste hammasmehhanismide kinemaatika

1°. Kaks teineteisega hambuvat hammasratast moodustavad hammasmehhanismide lihtsaima tüübi. Ühe hammasrattapaari ülekandesuhe ei ole aga kuigi suur. Praktikas on sageli vaja suuri ülekandesuhteid, mille saavutamiseks tuleb järjestikku ühendada mitu rattapaari. Peale vedava ja veetava ratta on säärases mehhanismis veel nn. vahehammasrattaid. Kirjeldatud keerulisi hammasmehhanisme nimetatakse *hammasrataste seeriateks* (ridadeks). Hammasrataste seeriaid, kus rataste pöörlemisteljed on liikumatud, nimetatakse *lihtseeriateks* (lihtridadeks).



Joon. 388.

Vaatleme joonisel 388 kujutatud hammasrataste lihtseeriat. Vedav hammasratas *1* hambub rattaga *2*. Ratta *2* võllile on liikumatult istatud ratas *2'*, mis hambub rattaga *3*. Viimase võllile omakorda on kiilutud ratas *3'* jne. Veetavaks rattaks on ratas *5*. Tähistame ratta *1* nurkkiiruse ω_1, rataste *2* ja *2'* ühise nurkkiiruse ω_2, rataste *3* ja *3'* nurkkiiruse ω_3 jne. Kogu mehhanismi üldine

ülekandesuhe on määratud valemiga

$$i_{15} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Määrame ülekandesuhte iga rattapaari kohta eraldi (§ 49, 3°):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad i_{2'3} = \frac{\omega_2}{\omega_3}, \quad i_{3'4} = \frac{\omega_3}{\omega_4}, \quad i_{4'5} = \frac{\omega_4}{\omega_5}. \tag{11.8}$$

Saadud ülekandesuhteid (11.8) omavahel korrutades leiame, et

$$i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdot i_{4'5} = \frac{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4}{\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5} = \frac{\omega_1}{\omega_5}.$$

Kuna aga

$$\frac{\omega_1}{\omega_5} = i_{15},$$

siis

$$i_{15} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \cdot i_{4'5}.$$

Hammasrataste lihtseeria ülekandesuhe võrdub seega temasse kuuluvate rattapaaride ülekandesuhete korrutisega, kusjuures viimased tuleb võtta oma märgiga.

Üldjuhul, kui seeriasse kuulub n ratast, võib üldise ülekandesuhte i_{1n} väljendada järgmiselt:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} = i_{12} \cdot i_{2'3} \cdot i_{3'4} \ldots i_{(n-1)'n}. \tag{11.9}$$

Edasi on aga teada, et

$$i_{12} = \pm\frac{r_2}{r_1} = \pm\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{2'3} = \pm\frac{r_3}{r_{2'}} = \pm\frac{z_3}{z_{2'}}, \ldots$$

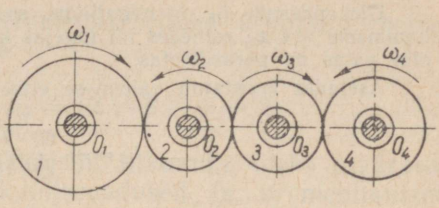
$$\ldots, \; i_{(n-1)'n} = \pm\frac{r_n}{r_{(n-1)'}} = \pm\frac{z_n}{z_{(n-1)'}},$$

kus r_1, r_2, $r_{2'}$, r_3, ..., r_n, tähistavad rataste algringjoonte raadiusi ja z_1, z_2, $z_{2'}$, ..., z_n — hammaste arvusid. Ülemisi märke kasutatakse seejuures sise-, ja alumisi — välishambumise puhul. Seda silmas pidades võime kirjutada

$$i_{1n} = (-1)^m \frac{r_2 r_3 r_4 \ldots r_n}{r_1 r_{2'} r_{3'} \ldots r_{(n-1)'}} = (-1)^m \frac{z_2 z_3 z_4 \ldots z_n}{z_1 z_{2'} z_{3'} z_{(n-1)'}}. \tag{11.10}$$

Kordaja $(-1)^m$ määrab hammasrataste seeria ülekandesuhte

märgi. Nagu § 49, 3° näidati, on välishambumise puhul ülekandesuhe negatiivne, sisehambumise puhul aga positiivne. Kui seerias on m välishambumist, siis liikumise ülekandmisel ühelt võllilt teisele muutub nurkkiiruse suund m korda. Seetõttu tuleb lihtseeria ülekandesuhte määramiseks algringjoonte raadiuste korrutiste suhet (või hammaste arvude korrutiste suhet) veel korrutada teguriga —1, võetuna seerias esinevate välishambumiste arvule vastavas astmes. Praktilistes arvutustes on mugavam kasutada valemit



Joon. 389.

$$i_{1n} = (-1)^m \frac{|\omega_1|}{|\omega_n|} = (-1)^m |i_{12}| \cdot |i_{2'3}| \cdot |i_{3'4}| \dots |i_{(n-1)'n}|. \quad (11.11)$$

2°. Teineteisest kaugel paiknevate võllide puhul või olukorras, kus soovitakse teatava kindla märgiga ülekandesuhet, kasutatakse hammasrataste seeriat, mis koosneb järjestikku ühendatud hammasratastest, kusjuures igaühel neist on oma pöörlemistelg. Säärast hammasrataste seeriat kujutab joonis 389. Seeria üldine ülekandesuhe i_{14} avaldub käesoleval juhul järgmiselt:

$$i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = (-1)^3 |i_{12}| \cdot |i_{23}| \cdot |i_{34}| = -|i_{12}| \cdot |i_{23}| \cdot |i_{34}| =$$

$$= -\frac{r_2 r_3 r_4}{r_1 r_2 r_3} = -\frac{r_4}{r_1} = -\frac{z_4}{z_1}.$$

Nagu toodud valemist selgub, ei sõltu üldise ülekandesuhte i_{14} väärtus vahehammasrataste mõõdetest. Sääraseid vahehammasrattaid nimetatakse seetõttu *parasiithammasrataste*ks. Parasiitratastel on seerias siiski tähtis osa, sest nende abil saab soovi kohaselt muuta üldise ülekandesuhte märki. Kasutades parasiitrattaid, võib liikumist üle kanda ka kaugel asuvale võllile.

Näide 5. Vaatleme joonisel 390 kujutatud reduktorit. Olgu selle ratastel järgmised hammaste arvud:

$z_1 = 20$, $z_2 = 20$, $z_3 = 60$,

$z_{3'} = 16$, $z_4 = 24$, $z_{4'} = 15$, $z_5 = 25$.

Ülesandeks on leida reduktori üldine ülekandesuhe. Valemite (11.9) ja (11.10) põhjal võime kirjutada

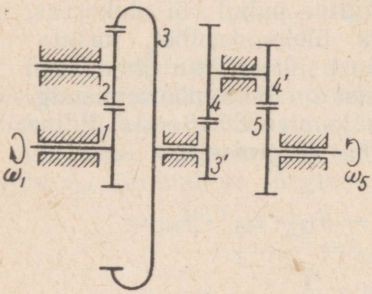
$$i_{15} = i_{12} \cdot i_{23} \cdot i_{3'4} \cdot i_{4'5} = (-1)^3 \frac{z_2 z_3 z_4 z_5}{z_1 z_2 z_{3'} z_{4'}} = -\frac{z_2 z_3 z_4 z_5}{z_1 z_2 z_{3'} z_{4'}}.$$

Ülekandesuhe i_{15} on negatiivne, sest välishambumiste arv $m = 3$. Ratta *2* hammaste arv z_2, esinedes nii lugejas kui ka nimetajas, taandub, sest kõne all olev ratas on parasiitratas.

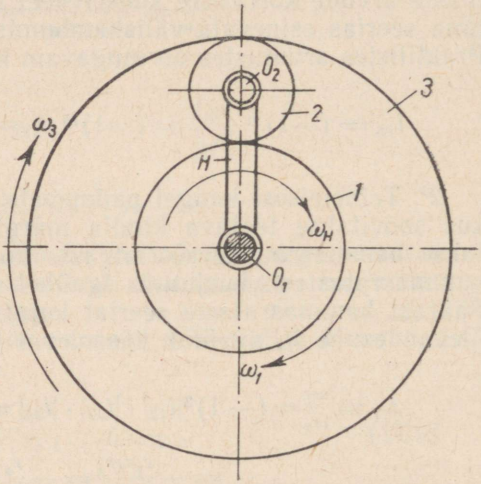
Asetades koostatud valemisse etteantud hammaste arvud, saame

$$i_{15} = -\frac{60 \cdot 24 \cdot 25}{20 \cdot 16 \cdot 15} = -7{,}5.$$

3°. Käsitleme nüüd hammasrataste seeriaid, kus mõnede rataste teljed on liikuvad. Säärasteks hammasrataste seeriateks on nn. *diferentsiaal-hammasmehhanismid* (*diferentsiaalid*) ja *planetaar-hammasmehhanismid.*



Joon. 390.



Joon. 391.

Diferentsiaaliks nimetatakse hammasratastest ja hoobadest koosnevat mehhanismi, millel on mitu liikuvusastet ja mille ülesandeks on pöörlevate liikumiste liitmine. Lihtsa diferentsiaali näitena võib tuua joonisel 391 kujutatud mehhanismi. Rattad *1* ja *3* pöörlevad ümber liikumatu telje O_1. Nende nurkkiirusteks on vastavalt ω_1 ja ω_3. Ka lüli H pöörleb ümber telje O_1, ja seda sõltumatult rataste *1* ja *3* liikumisest. Tema nurkkiiruseks olgu ω_H. Ratas *2* võtab ilmselt osa kahest liikumisest. Üheks neist on tiirlemine ümber telje O_1 nurkkiirusega ω_H ja teiseks — pöörlemine ümber telje O_2, mis toimub nurkkiirusega ω_2^H. Telg O_2 kuulub lülile H ja liigub järelikult sellega koos. Nurkkiiruse tähises ω_2^H näitab ülemine indeks, et tegemist on ratta *2* nurkkiirusega lüli H suhtes. Käsitletavas mehhanismis on neli liikuvat lüli ($n = 4$), neli 5. klassi rotatsioonipaari ($p_5 = 4$) ja kaks 4. klassi paari

($p_4 = 2$). Kasutades struktuurivalemit, võime arvutada mehhanismi liikuvusastme L. Saame

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 12 - 8 - 2 = 2.$$

Seega kui tahame, et mehhanismi liikumine oleks määratud, tuleb ette anda kahe lüli liikumisseadused (s. o. mehhanismil peab olema kaks vedavat lüli). Ette võib näiteks anda lülide *1* ja H nurkkiirused ω_1 ja ω_H. Lüli *3* nurkkiirus ω_3 osutub sel juhul täielikult määratuks. Võib aga ka ette anda nurkkiirused ω_3 ja ω_1. Sel juhul on lüli H nurkkiirus ω_H täielikult määratud jne.

4°. Tuletame valemi, mis seob lülide *1*, *3* ja H nurkkiirusi ω_1, ω_3 ja ω_H. Liikugu mehhanismi lülid vastavalt nurkkiirustega ω_1, ω_3 ja ω_H. Lülide suhteline liikumine ei muutu, kui kogu mehhanism tervikuna panna veel pöörlema mingisuguse üldise lisanurkkiirusega. Annamegi kogu mehhanismile lisapöörlemise ümber telje O_1 nurkkiirusega $-\omega_H$. Valitud nurkkiirus on seega lüli H nurkkiirusega suuruselt võrdne, kuid vastassuunaline. Mehhanismi lülide nurkkiirused kujunevad nüüd järgmisteks:

Mehhanismi lülid	Algnurkkiirus	Lüli nurkkiirus pärast lisapöörlemise rakendamist
1	ω_1	$\omega_1^H = \omega_1 - \omega_H$
3	ω_3	$\omega_3^H = \omega_3 - \omega_H$
H	ω_H	$\omega_H^H = \omega_H - \omega_H = 0$

Nagu näha, muutub mehhanismi lüli H pärast lisanurkkiiruse $-\omega_H$ rakendamist liikumatuks ja diferentsiaal taandub tavaliseks liikumatute telgedega O_1 ja O_2 hammasmehhanismiks. Nurkkiiruste ω_1^H, ω_3^H ja ω_H^H ülemine indeks H viitab sellele, et tegemist on lülide *1*, *3* ja H nurkkiirustega olukorras, kus lüli H on liikumatu. Säärase mehhanismi ülekandesuhe arvutatakse tavalisest seosest

$$i_{13}^H = \frac{\omega_1^H}{\omega_3^H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}, \qquad (11.12)$$

kus n_1, n_3 ja n_H tähistavad indeksitele vastavate lülide pöörete arvu minutis.

Ratta *2* nurkkiirus ω_2^H ei esine valemis (11.12), sest tegemist on parasiitrattaga (vt. § 50, 2°). Valemi (11.12) vasakul poolel

olev ülekandesuhe i_{13}^{H} on tavalise hammasmehhanismi ülekandesuhe, s. o. ülekandesuhe, mis kehtib liikumatu lüli H puhul. Valem (11.12) seob omavahel rataste *1* ja *3* ning lüli H nurkkiirusi. Kui valemis esinevast kolmest kiirusest kaks kiirust ette anda, siis on ülejäänud kolmandat kiirust alati võimalik arvutada. Käsitletud mehhanismi võib kasutada kahe suuruse skalaarseks liitmiseks. Olgu lisatud, et diferentsiaale kasutatakse tehnikas laialdaselt (autodes, arvutusmasinates, põllumajandusmasinates jne.).

5°. Kasutades ühe lüli seiskamist, võib joonisel 391 kujutatud diferentsiaalmehhanismist saada veel rida uusi mehhanisme. Kui muuta liikumatuks näiteks lüli H, siis nurkkiirus $\omega_H = 0$. Ülekandesuhte i_{13} arvutamise valem kujuneb sel puhul tavaliseks:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}. \tag{11.13}$$

Nagu ülal märgiti, muutub diferentsiaal ise seejuures tavaliseks, liikumatute telgedega hammasmehhanismiks. Juhul kui pannakse seisma üks ratastest, näiteks ratas *3* (joon. 392), siis muutub nulliks nurkkiirus ω_3 ja valemi (11.12) võib kirjutada järgmisel kujul:

$$i_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{-\omega_H} = 1 - \frac{\omega_1}{\omega_H} = 1 - i_{1H}.$$

Siit võime avaldada

$$i_{1H} = 1 - i_{13}^{H}. \tag{11.14}$$

Suuruse i_{1H} all tuleb mõista ülekandesuhet ratta *1* ja lüli H vahel olukorras, kus ratas *3* on liikumatu. Tähis i_{13}^{H} kujutab ülekandesuhet ratta *1* ja ratta *3* vahel liikumatu lüli H puhul, s. t. ülekandesuhet ratastest *1*, *2* ja *3* koosnevas tavalises, liikumatute telgedega O_1 ja O_2 mehhanismis. Pole raske näha, et olukorras, kus ratas *3* on liikumatu, hakkab ratas *2* sellel veerema, edasiviiduna oma telje O_2 poolt, mis tiirleb nurkkiirusega ω_H ümber telje O_1. Säärase mehhanismi liikuvusaste L võrdub ühega. Tõepoolest,

$$L = 3n - 2p_5 - p_4 = 9 - 6 - 2 = 1.$$

Käsitletut, hammasratastest ja hoobadest koosnevat mehhanismi nimetatakse *planetaar-hammasmehhanismiks* (*planetaarmehhanismiks*).

Diferentsiaal- või planetaarmehhanismides nimetatakse hammasratast, mis pöörleb ümber liikumatu telje või mis on liiku-

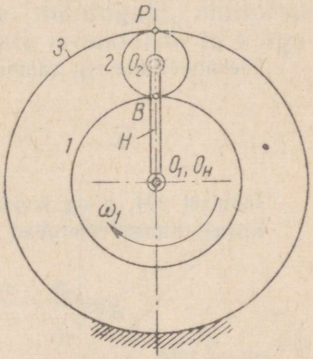
matult ühendatud kinnislüliga, *päikeserattaks* ehk *tsentraalrattaks*. Hammasrattaid, milledel on päikeseratta suhtes hüpo- või epitsükliline liikumine, nimetatakse *satelliitideks*. Lüli H, mis ühendab päikeseratast satelliidiga, kannab *satelliitide raami* nimetust. Nagu valemist (11.14) selgub, tuleb planetaarmehhanismi ülekandesuhte leidmiseks arvutada kõigepealt tavalise, liikumatu satelliitide raamiga mehhanismi ülekandesuhe ja lahutada see ühest. Mis puutub ülekandesuhet satelliitide raamilt rattale (joon. 392), siis on see antud valemiga

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - i_{13}^{H}}.$$

Lihtne on näha, et planetaarmehhanismidega saab realiseerida väga suuri ülekandesuhteid. Selleks piisab, kui mehhanismi ülekandesuhe liikumatu raami puhul läheneb ühele.

6°. Planetaarmehhanisme võib uurida ka kiiruspiltide meetodiga. Joonis 393 kujutab kiiruspildi konstruktsiooni lihtsa planetaarmehhanismi puhul, mis koosneb liikuvast rattast *1*, liikumatust rattast *2* ja satelliitide raamist H.

Raamile H kuuluva punkti O_1 kiirus vo_1 on kantud joonisele lõiguna ko_1. Ratta *1* kiiruspildi saamiseks ühendame punkti o_1 punktiga p, s. o. ratta *1* hetkelise kiiruste tsentri P_0 projektsiooniga. Tekib kolmnurk pko_1. Raami H kiiruspilt saadakse punktide o_1 ja o_2 ühendamise teel, mis annab kolmnurga o_2ko_1.



Joon. 392.

Konstrueeritud kiiruspiltidest võime kirjutada:

$$v_{O_1} = \omega_1 r_1 = \omega_H (r_1 + r_2),$$

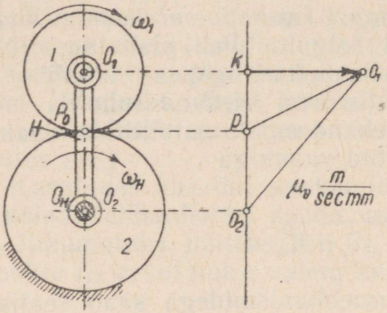
kust selgub, et

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{r_1 + r_2}{r_1}.$$

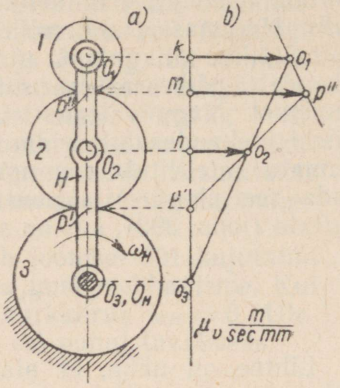
Näide 6. Joonis 394, *a* kujutab planetaarmehhanismi, mille ratas *3* on kinnislüliga liikumatult ühendatud. Tähistame rataste *1*, *2* ja *3* hammaste arvud vastavalt z_1, z_2 ja z_3 ning nende raadiused r_1, r_2 ja r_3. Ülesandeks on leida ülekandesuhted i_{1H} ja i_{H1}.

Ülekandesuhe i_{1H} rattalt *1* raamile H on antud valemiga

$$i_{1H} = 1 - i_{12}i_{23} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = 1 - \frac{z_3}{z_1} = \frac{z_1 - z_3}{z_1}$$



Joon. 393.



Joon. 394.

Ülekandesuhte i_{H1} raamilt H rattale *1* saame valemist

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{z_1}{z_1 - z_3}.$$

Joonisel 394, *b* on konstrueeritud mehhanismi kiiruspildid. Kiiruspiltidest tuletuvad järgmised seosed:

$$v_{O_2} = \omega_H (r_3 + r_2) = \omega_2 r_2,$$

$$v_{P''} = \omega_2 2 r_2$$

ja

$$v_{O_1} = \omega_H (r_3 + 2r_2 + r_1),$$

kus ω_1, ω_2 ja ω_3 tähistavad vastavalt rataste *1* ja *2* ning raami H nurkkiirusi. Kiiruspiltidest järgneb veel, et

$$v_{P''} - v_{O_1} = -\omega_1 r_1.$$

Asetades sellesse võrdusesse kiiruste $v_{P''}$ ja v_{O_1} väärtused, saame

$$2\omega_2 r_2 - \omega_H (r_3 + 2r_2 + r_1) + \omega_1 r_1 = 0.$$

Kiiruse v_{O_2} avaldisest järgneb, et

$$2\omega_2 r_2 = 2\omega_H (r_3 + r_2).$$

Seega võib lõplikult kirjutada:

$$2\omega_H (r_3 + r_2) - \omega_H (r_3 + 2r_2 + r_1) + \omega_1 r_1 = 0.$$

Pärast lihtsaid teisendusi on viimasest võrrandist lihtne avaldada ülekandesuhet i_{1H}. Saame:

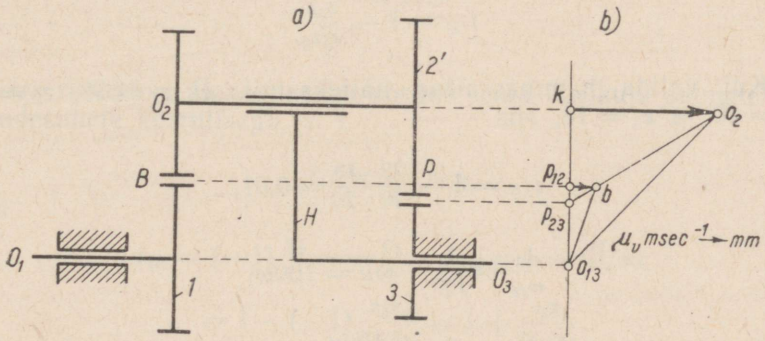
$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{r_1 - r_3}{r_1}.$$

Ülekandesuhte i_{H1} avaldis kujuneb vastavalt järgmiseks:

$$i_{H1} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_1 - r_3}.$$

§ 51. Mõningat tüüpi reduktorite ja käigukastide kinemaatika

1°. Käesolevas paragrahvis käsitleme mõningate, mitmesugustes masinates ja seadmetes kasutatavate reduktorite ja käigukastide kinemaatikat.



Joon. 395.

Joonisel 395 on kujutatud neljalüliline planetaarreduktor. Reduktor koosneb kahest välishambumisega hammasrattapaarist ja satelliitide raamist H.

Joonisel 395, *b* on konstrueeritud reduktori lülide kiiruspildid.

Reduktori ülekandesuhte arvutame valemiga (11.14). Saame

$$i_{1H} = 1 - i_{13} = 1 - i_{12} \cdot i_{2'3} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}} = 1 - \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}}.$$

Samale tulemusele võib jõuda aga ka kiiruspiltide abil (joon. 395, *b*).

Võime kirjutada järgmised seosed:

$$v_O = \omega_H (r_1 + r_2), \quad v_B = \omega_1 r_1$$

ja

$$\frac{v_{O_2}}{v_B} = \frac{r_{2'}}{r_1 - r_3}.$$

Järelikult

$$\frac{\omega_H (r_1 + r_2)}{\omega_1 r_1} = \frac{r_{2'}}{r_1 - r_3}.$$

Siit järgneb omakorda, et

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{r_1 (r_1 + r_2 - r_3) - r_2 r_3}{r_1 r_{2'}} = 1 - \frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}},$$

sest $r_1 + r_2 - r_3 = r_{2'}$.

Edasi võib veel kirjutada

$$i_{1H} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}.$$

Kui valida hammasrattad näiteks nii, et $z_1 = 20$, $z_2 = 22$, $z_{2'} = 20$ ja $z_3 = 18$, siis

$$i_{1H} = 1 - \frac{22 \cdot 18}{20 \cdot 20} = 0{,}01,$$

s. t.

$$\frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{1}{100}, \quad \omega_H = 100\omega_1$$

ehk

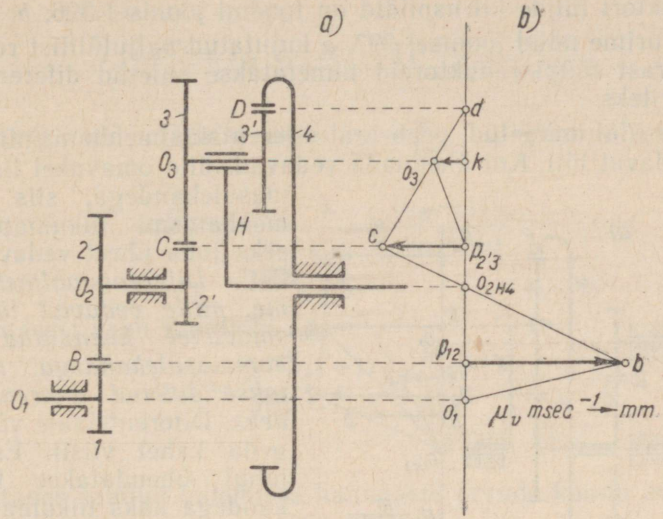
$$n_H = 100 n_1.$$

Saadud valemis tähistavad n_1 ja n_H vastavalt ratta *1* ja raami *H* pöörete arvu minutis. Kui näiteks $n_1 = 1$ p/min, siis $n_H = 100$ p/min.

Kui vedavaks lüliks on ratas *1*, osutub nii suure ülekandesuhtega reduktor isepidurdavaks. Ta võib pöörlevat liikumist järelikult üle kanda ainult ühes suunas — raamilt *H* rattale *1*. Reduktor töötab seega pöörlemiskiiruse **aeglustajana**.

Väiksema ülekandesuhte i_{1H} puhul võib aga vedavaks lüliks olla ka ratas *1* (vt. § 105).

2°. Joonisel 396, *a* on kujutatud kaheastmeline planetaarreduktor, milles aste *1—2* moodustab paiksete telgedega ülekande ja aste *2'—H* planetaarmehhanismi. *Reduktori astmeks nimetatakse ülekannet kahel liikumatul naaberteljel asetseva lüli vahel.* Käsit-



Joon. 396.

letava reduktori ülekandesuhe võrdub tema üksikute astmete ülekandesuhete korrutisega, s. t.

$$i_{1H} = i_{12} \cdot i_{2'H},$$

kus

$$i_{12} = (-1)\frac{z_2}{z_1} = -\frac{z_2}{z_1}, \quad i_{2'H} = 1 - i^H_{2'4} =$$

$$= 1 - (-1)\frac{z_3 z_4}{z_{2'} z_{3'}} = 1 + \frac{z_3 z_4}{z_{2'} z_{3'}}.$$

Kui näiteks $z_1 = 25$, $z_2 = 50$, $z_{2'} = 20$, $z_3 = 40$, $z_{3'} = 30$ ja $z_4 = 90$, siis ülekandesuhte i_{12} väärtuseks on

$$i_{12} = -\frac{z_2}{z_1} = -\frac{50}{25} = -2.$$

Ülekandesuhte $i_{2'H}$ leiame järgmiselt:

$$i_{2'H} = 1 + \frac{z_3 z_4}{z_{2'} z_{3'}} = 1 + \frac{40 \cdot 90}{20 \cdot 30} = 7.$$

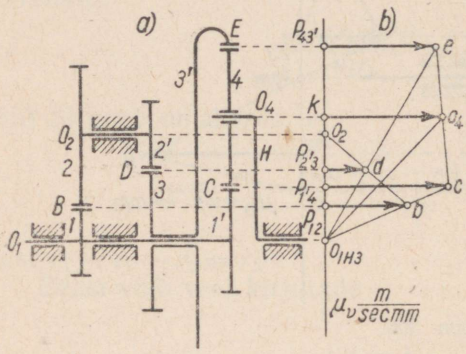
Reduktori koguülekandesuhteks on seega

$$i_{1H} = i_{12} \cdot i_{2'H} = (-2) \cdot 7 = -14.$$

Reduktori lülide kiiruspildid on toodud joonisel 396, *b*.

3°. Uurime nüüd joonisel 397, *a* kujutatud paljulülilist reduktorit. Säärast tüüpi reduktoreid nimetatakse suletud diferentsiaalreduktoriteks.

Nagu ülal märgitud, peab igal diferentsiaalmehhanismil olema kaks vedavat lüli. Kui ühendada vedavad lülid omavahel lisahammasülekandega, siis piisab mehhanismi liikumapanemiseks juba ühest vedavast lülist. *Diferentsiaalmehhanisme, mille vedavad lülid on omavahel ühendatud lisahammasülekandega, nimetatakse suletud diferentsiaalideks.* Diferentsiaale võib sulgeda kahel viisil. Esimesel juhul ühendatakse lisaülekandega kaks liikumatul teljel pöörlevat ratast. Teisel juhul ühendatakse üks liikumatul teljel pöörlevatest ratastest lüliga H (s. o. satelliitide raamiga).



Joon. 397.

Joon. 397, *a* kujutab diferentsiaalmehhanismi, mille rattad *1'* ja *3'* on omavahel sidestatud hammasrataste seeriaga *1 — 2 — — 2' — 3*. Ratta *3'* nurkkiirus sõltub seetõttu vedava lüli *1* nurkkiirusest. Ülesandeks on leida ülekandesuhe i_{1H}.

Valemi (11.12) põhjal on nurkkiirused $\omega_{1'}$, $\omega_{3'}$, ja ω_H omavahel seotud tingimusega

$$i^H_{1'3'} = \frac{\omega_{1'} - \omega_H}{\omega_{3'} - \omega_H}$$

ehk

$$i^H_{1'3'} = \frac{\frac{\omega_{1'}}{\omega_H} - 1}{\frac{\omega_{3'}}{\omega_H} - 1} = \frac{i_{1'H} - 1}{\frac{\omega_{3'}}{\omega_H} - 1},$$

kus

$$i^H_{1'3'} = i^H_{1'4}\, i^H_{43'} = (-1)\frac{z_4}{z_{1'}} \cdot \frac{z_{3'}}{z_4} = -\frac{z_{3'}}{z_{1'}}.$$

Et leida $i_{1'H}$ väärtust, tuleb nurkkiirus ω_3 avaldada nurkkiiruse ω_1 kaudu. Määrame selleks kõigepealt ülekandesuhte i_{13}.

Saame

$$i_{13}=\frac{\omega_1}{\omega_3}=i_{12}\cdot i_{2'3}=(-1)^2\frac{z_2z_3}{z_1z'_2}=\frac{z_2\cdot z_3}{z_1\cdot z_{2'}}.$$

Asetades ω_3 väärtuse $\omega_3=\omega_{3'}=\frac{\omega_1}{i_{13}}$ ülaltoodud valemisse, saame

$$i^H_{1'3'}=\frac{i_{1H}-1}{\frac{\omega_1}{i_{13}\omega_H}-1}=\frac{(i_{1H}-1)i_{13}}{i_{1H}-i_{13}}.$$

Viimasest saab ilmutada i_{1H}:

$$i_{1H}=\frac{i_{13}(i^H_{1'3'}-1)}{i^H_{1'3'}-i_{13}}=\frac{i^H_{1'3'}-1}{\frac{i^H_{1'3'}}{i_{13}}-1}.$$

Asetades saadud valemisse hammaste arvude kaudu avaldatud i_{13} ja $i^H_{1'3'}$ väärtused, võib leida i_{1H}. Kui näiteks $z_1=20$, $z_{1'}=26$, $z_2=34$, $z_{2'}=18$, $z_3=36$, $z_{3'}=78$ ja $z_4=26$, siis, arvutades eelnevalt

$$i^H_{1'3'}=(-1)\frac{z_{3'}}{z_{1'}}=-\frac{78}{26}=-3$$

ja

$$i_{13}=(-1)^2\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}=\frac{34\cdot 36}{20\cdot 18}=3{,}4,$$

saame i_{1H} väärtuseks:

$$i_{1H}=\frac{-3-1}{\frac{3}{3{,}4}-1}=2{,}125.$$

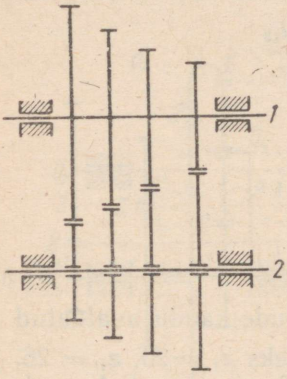
Uuritava mehhanismi lülide kiiruspildid on toodud joonisel 397, *b*.

4°. Käsitleme nüüd mõningate käigukastitüüpide kinemaatikat.

Käigukastiks (*hammaskäigukastiks*) nimetatakse hammasratastest koosnevat mehhanismi, mille ülekandesuhet saab muuta hüppeliselt, teatavate kindlate astmete kaupa. Käigukastidega varustatakse masinad, mille tööorganid peavad, sõltuvalt töötingimustest, pöörlema mitme erineva kiirusega. Näiteks treipingid varustatakse käigukastiga seetõttu, et erinevate mõõdetega detailid töödeldakse erinevate kiirustega. Autodel kasutatakse käigukaste erinevate liikumiskiiruste saamiseks. Käigukastide kinemaatilised skeemid ja nende konstruktiivne kujundus võivad olla väga

mitmekesised. Kui kiiruse reguleerimiseks ettenähtud astmete arv ei ole suur, on käigukasti kinemaatiline skeem üsna lihtne. Suure astmete arvu puhul võib nii käigukasti skeem kui ka tema konstruktiivne kujundus aga muutuda väga keerukaks.

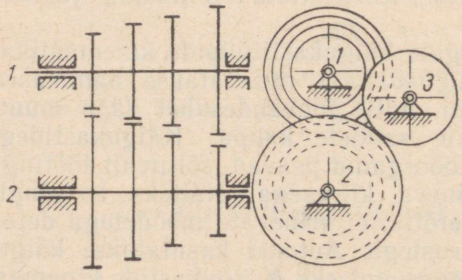
Käigukast koosneb hammasratastest, mida võib hambumisse viia mitmesugustes kombinatsioonides selleks, et saavutada ülekandesuhteid, mis vastaksid masina tööorgani etteantud pöörlemiskiirustele. Hammasrataste lülitamisseadmed, mille abil vajalikud kiiruste astmed saadakse, võivad olla mitmesugused. Et nad sõltuvad käigukasti konstruktsioonist, siis neid siin ligemalt ei käsitleta.



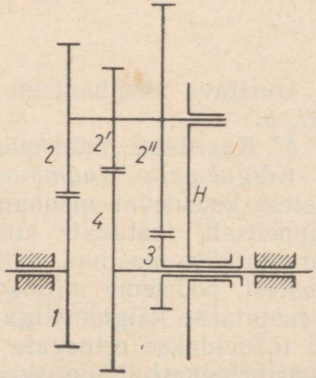
Joon. 398.

Joonis 398 kujutab kahe võlliga neljaastmelise käigukasti skeemi. Ülemisele võllile paigutatud hammasrattad on võllile kinnitatud liikumatult. Alumisel võllil olevad rattad aga pöörlevad sellel vabalt. Erilise liistu abil, mida joonisel ei ole näidatud, võib iga alumist ratast ühekaupa võlliga siduda. Seetõttu saadakse võllide vahel neli erinevat ülekandesuhet.

Joonisel 399 näidatud käigukastil on kolm võlli. Käigukasti kolmandal võllil paikneb üksainus, võlli suhtes vabalt pöörlev hammasratas, mis lisaks sellele on piki võlli veel edasi-tagasi nihutatav. Võlli *3* koos ülalkirjeldatud rattaga saab võllidele *1* ja *2* kinnitatud hammasratastest külgsuunas eemale lükata. Ratta *3* abil saab järelikult omavahelisse hambumisse viia kõiki võllidel *1* ja *2* kohakuti asuvaid hammasrattapaare. Üks võllidest (*1* või *2*) võib seetõttu pöörelda nelja erineva kiirusega juhul, kui teine võll pöörleb ühtlaselt.



Joon. 399.



Joon. 400.

Käsitleme nüüd planetaarmehhanismi sisaldava keerukama käigukasti skeemi.

Joonis 400 kujutab kaheastmelist planetaarkäigukasti. Üks kiiruseaste saadakse ratta *3* kinnistamisega. Teise kiiruseastme saamiseks tuleb kinnistada ratas *4*.

Arvutame käigukasti ülekandesuhte olukorras, kus ratas *3* on kinnistatud ja ratas *4* pöörleb tühjalt. Saame:

$$i'_{1H} = 1 - i_{13} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2''}} = 1 - \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2''}}.$$

Olukorras, kus ratas *4* on liikumatu ja ratas *3* pöörleb tühjalt, saame:

$$i''_{1H} = 1 - i_{14} = 1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_4}{z_1 z_{2'}} = 1 - \frac{z_2 z_4}{z_1 z_{2'}}.$$

Kui näiteks $z_1 = 28$, $z_2 = 28$, $z_{2'} = 20$, $z_{2''} = 38$, $z_3 = 18$ ja $z_4 = 36$, siis

$$i'_{1H} = 1 - \frac{28 \cdot 18}{28 \cdot 38} = 0{,}526;$$

$$i''_{1H} = 1 - \frac{28 \cdot 36}{28 \cdot 20} = -0{,}8.$$

Selle näitega lõpetame keerukamate hammasmehhanismide kinemaatika käsitluse.

§ 52. Hammaste profileerimise põhiülesanded

1°. Nagu paragrahvis 40 näidati, peavad rataste suhtelise liikumise tsentroidid olema hambaprofiilide projekteerimisel (s. o. hammaste profileerimisel) ette antud. Hambaprofiile, mis teatavasti kujutavad endast kaasmähiskõveraid, võib sel puhul konstrueerida kas täpselt või ligikaudu, rakendades varemkäsitletud meetodeid. Viimaste kasutamisel peab aga veel ette andma kas hambumisjoone või ühe projekteeritavatest kaasprofiilidest. Missugustest kaalutlustest tuleb nende valikul juhinduda?

Praktikas lähtutakse selle ülesande lahendamisel nii kinemaatilistest kui ka dünaamilistest, tehnoloogilistest ja lõpuks isegi ekspluatatsioonilistest kaalutlustest. Kinemaatilisi kaalutlusi võib kokkuvõtlikult väljendada järgmiste tingimuste näol: hambaprofiilid peavad olema küllalt lihtsate geomeetriliste võtete abil konstrueeritavad ja tagama seejuures etteantud ülekandesuhte (vt. § 40).

Dünaamilised kaalutlused avalduvad reas nõuetes, milledest siin võib nimetada järgmisi. Tuleb kõigepealt taotleda, et mehhanismi hammastele ja tugedele (s. o. laagritele) mõjuvad jõud oleksid konstantse võimsuse ülekandmisel nii suuruselt kui ka sihilt võimalikult püsivad. Teiseks, hammaste geomeetriline kuju peab neile tagama võimalikult suure tugevuse ja kolmandaks, hammaste kulumine peab olema minimaalne.

Tehnoloogilised tingimused seisnevad põhiliselt selles, et projekteeritavate profiilide valmistamine kaasaegsetel tööpinkidel ja automaatidel ei tohi valmistada raskusi.

Ekspluatatsioonilised kaalutlused nõuavad, et projekteeritavad profiilid peavad masinatele tagama pika kasutusea ja löögivaba ning müratu töötamise. Hammasrataste monteerimine peab seejuures olema lihtne. Lõpuks on tähtis veel nõue, mille kohaselt peab ühe või mõlema koostöötava ratta kulumise korral nende asendamine uute ratastega olema hõlbus. Viimast tingimust nimetatakse tavaliselt hammasrataste *vahetatavuse tingimuseks*. Masinate masstootmises saavutatakse hammasrataste vahetatavus teatavate kindlaksmääratud normide kehtestamisega nende mõõdete kohta.

Kokkuvõttes võib öelda, et kuigi teoreetiliselt võiks hammasrattaid konstrueerida kõige mitmekesisemate profiilidega, on praktikas hambaprofiilide valik ülalpüstitatud tingimuste poolt tublisti piiratud. Masinaehituses kasutatakse seetõttu hambaprofiilidena ainult mõnd erilist kõverat.

Peatume siinkohal üksikasjaliselt nn. *ringjoone evolvendi* juures, mida kaasaegsete hammasrataste juures kasutatakse põhiliselt hambaprofiilideks, ja käsitleme ka üksikuid *tsükloidide* rakendamise juhte.

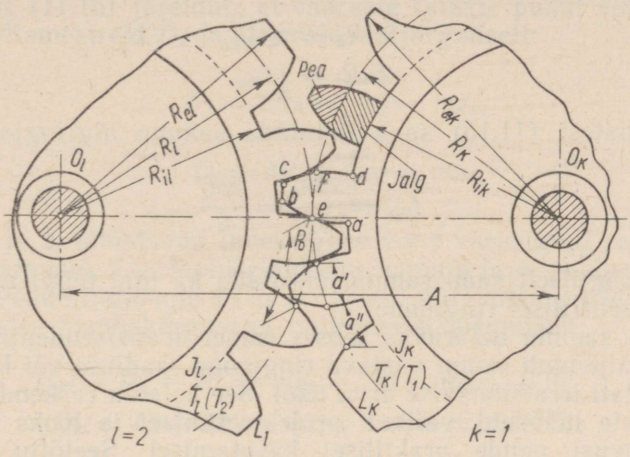
2°. Enne evolventprofiilide teooria juurde asumist tutvume põhiliste oskussõnade, definitsioonide ja tähistega.

Ümmarguste hammasrataste tsentroide T_1 ja T_2 (joon. 401) nimetatakse teatavasti *algringjoonteks*. Algringjoonest välja ulatuvat hamba osa *ebcf* nimetatakse *hamba peaks*. Hamba osa *aefd*, mis jääb algringjoone sisse, nimetatakse *hamba jalaks*.

Välishambumise puhul on kõikide hammaste pead väljastpoolt piiratud nn. peaderingjoontega, millede raadiusi tähistatakse vastavalt R_{ek} ja R_{el}. Hammaste jalgu piiravad seestpoolt nn. jalgaderingjooned raadiustega R_{ik} ja R_{il}. Sisehambumise puhul, kus hambad on suunatud sissepoole, piiravad peaderingjooned hambaid seest- ja jalgaderingjooned — väljastpoolt. Peaderingjoone kaugust algringjoonest, mõõdetuna raadiuse sihis, nimetatakse *hamba pea kõrguseks* (tähis h', vt. joon. 402). Radiaalne kaugus jalgaderingjoone ja algringjoone vahel moodustab hamba jala kõrguse (tähis h''). Hamba kogukõrgus h avaldub seega järgmi-

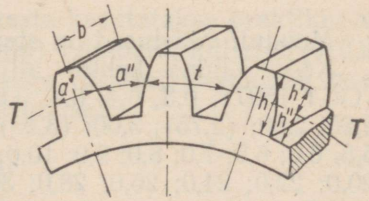
selt:

$$h = h' + h''.$$



Joon. 401.

Algringjoone kaare pikkust ühe hamba ulatuses (ilma hambavaheta) nimetatakse *hamba paksuseks* ja tähistatakse tähisega a'. Algringjoone kaare pikkust ühe hambavahe ulatuses, s. t. kahe naaberhamba vahelist kaugust, nimetatakse *hambavahe laiuseks* ja tähistatakse a'' (joon. 402). Algringjoone kaare pikkust, mis on moodustatud ühest hambapaksusest ja ühest hambavahe laiusest, nimetatakse *hambumise sammuks algringjoonel* ja tähistatakse t_{alg}. Samm algringjoonel t_{alg} avaldub seega järgmiselt:



Joon. 402.

$$t_{alg} = a' + a''.$$

Õigesti hambuvatel, pidevalt liikumist ülekandvatel ratastel on algringjoontel mõõdetud sammud omavahel võrdsed.

Nagu varem näidati, saab ülekandesuhet i_{kl} avaldada järgmiselt:

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \pm \frac{R_l}{R_k} = \pm \frac{z_l}{z_k},$$

kus ω_k ja ω_l tähistavad vastavalt ratta k ja ratta l nurkkiirusi, R_k ja R_l — algringjoonte raadiusi ja z_k ning z_l — hammaste arvusid.

Rataste algringjoonte pikkused on antud võrdustega

$$\begin{aligned} 2\pi R_k &= z_k t_{alg}, \\ 2\pi R_l &= z_l t_{alg}. \end{aligned} \tag{11.15}$$

Võrdustest (11.15) saab ilmutada sammu algringjoonel t_{alg}:

$$t_{alg} = \frac{2\pi R_k}{z_k} = \frac{2\pi R_l}{z_l}.$$

Analoogiliselt saab sammu arvutada ka igal teisel meelevaldsel kontsentrilisel ringjoonel.

Kuna sammu määravas seoses esineb transtsendentne suurus π, siis väljendub samm vastava ringjoone raadiuse või läbimõõdu kaudu alati irratsionaalse arvu näol. See asjaolu raskendaks hammasrataste mõõdete valikut projekteerimisel ja looks teatavaid ebamugavusi nende praktilisel kasutamisel. Seetõttu võetakse hammasrataste põhimõõdete määramisel aluseks hambumise mooduliks nimetatav parameeter. Hambumise moodulit mõõdetakse millimeetrites ja tähistatakse tähega m. Ta on defineeritud järgmiselt:

$$m = \frac{t}{\pi}.$$

Mooduli väärtused on standardiseeritud.

NSV Liidus kehtib alljärgnev normaalmoodulite standard (OCT 1597): 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00; 2,25; 2,50; (2,75); 3,00; (3,25); 3,50; (3,75); 4,00; (4,25); 4,50, 5,00; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 8,0; 9,0; 10,0; 11,0; 12,0; 13,0; 14,0; 15,0; 16,0; 18,0; 20,0; 22,0; 24,0; 26,0; 28,0; 30,0; 33,0; 36,0; 39,0; 42,0; 45,0; 50,0; jne. 5 mm kaupa.

Sulgudes toodud mooduleid on soovitav kasutada ainult erandjuhtudel.

Kõik hammaste normaalmõõted avaldatakse mooduli kaudu. Näiteks, hamba pea kõrgus $h' = m$, hamba jala kõrgus $h'' = 1{,}25\ m$, hamba paksus ja sellega võrdne hambavahe laius $a' = a'' = \frac{\pi m}{2}$.

Kontsentrilist ringjoont, millele vastav moodul osutub standardseks, nimetatakse hammasratta *jaotusringjooneks*. Hambuvate rataste jaotusringjooned võivad teatavates tingimustes vastavate algringjoontega ühtida (vt. § 58).

3°. Hammasrataste mõõteid saab avaldada nende jaotusring-

joone mooduli ja hammaste arvu funktsioonina. Erandjuhtudel, kui hammasrataste algringjooned ühtivad vastavate jaotusringjoontega, nimetatakse hammasrattaid nullratasteks (vt. § 58, 4°). Seostest (11.15) järeldub, et sääraste rataste puhul võib algringjoonte diameetreid D_k ja D_l avaldada järgmiselt:

$$D_k = 2R_k = \frac{t}{\pi} z_k = mz_k, \tag{11.16}$$

$$D_l = 2R_l = \frac{t}{\pi} z_l = mz_l, \tag{11.17}$$

kus z_k ja z_l tähistavad indeksiga k või l varustatud rataste hammaste arvusid, t — jaotusringjoone sammu ja m — vastavat moodulit. Peaderingjoonte L_k ja L_l (joon. 401) diameetrid avalduvad normaalse hambakõrgusega nullratastel järgmiselt:

$$D_{ek} = D_k + 2h' = mz_k + 2m = m(z_k + 2), \tag{11.18}$$

$$D_{el} = D_l + 2h' = mz_l + 2m = m(z_l + 2). \tag{11.19}$$

Jalgaderingjoonte I_k ja I_l diameetrid D_{ik} ja D_{il} avalduvad (joon. 401):

$$D_{ik} = D_k - 2h'' = mz_k - 2{,}5m = m(z_k - 2{,}5), \tag{11.20}$$

$$D_{il} = D_l - 2h'' = mz_l - 2{,}5m = m(z_l - 2{,}5). \tag{11.21}$$

Peale normaalkõrgusega hammaste kasutatakse praktikas veel lühendatud kõrgusega (nn. madalaid) hambaid, millel $h' = 0{,}8\ m$ ja $h'' = 1{,}1\ m$. Madalate hammastega ratastel avalduvad peade- ja jalgaderingjoonte diameetrid järgmiselt:

$$D_{ek} = m(z_k + 1{,}6),$$
$$D_{el} = m(z_l + 1{,}6),$$
$$D_{ik} = m(z_k - 2{,}2),$$
$$D_{il} = m(z_l - 2{,}2).$$

Nullrataste puhul saab mooduli ja hammaste arvude kohta avaldada ka tsentrite O_1 ja O_2 vahelise kauguse A (joon. 401). Tõepoolest,

$$A = \frac{D_k}{2} + \frac{D_l}{2} = \frac{mz_k}{2} + \frac{mz_l}{2} = \frac{m}{2}(z_k + z_l).$$

Hammasrataste projekteerimisega seotud arvutustes kasutatakse sageli dimensioonituid kordajaid. Näiteks, hamba pea kõr-

gus h' avaldatakse mooduli ja teatava koefitsiendi χ' korrutisena, s. t.

$$h' = \chi' m. \tag{11.22}$$

Analoogiliselt avaldatakse ka hamba jala kõrgus:

$$h'' = \chi'' m. \tag{11.23}$$

Varem toodud hambamõõdetest järeldub, et normaalkõrgusega hammastel $\chi' = 1$ ja madalatel hammastel — $\chi' = 0{,}8$. Vastavalt sellele valitakse $\chi'' = 1{,}25$ või $\chi'' = 1{,}1$. Valemeid (11.18)—(11.21) võib seega üldjuhul kirjutada järgmiselt:

$$\begin{aligned} D_{ek} &= m(z_k + 2\chi'), \\ D_{el} &= m(z_l + 2\chi'), \\ D_{ik} &= m(z_k - 2\chi''), \\ D_{il} &= m(z_l - 2\chi''). \end{aligned} \tag{11.24}$$

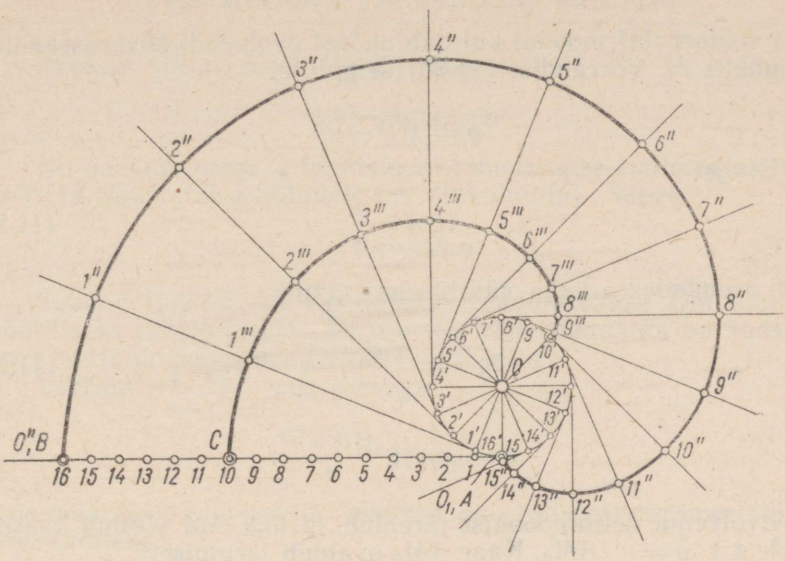
§ 53. Põhilisi teatmeid evolventprofiilide üldteooriast

1°. Peatume kõigepealt küsimuse juures, mida kujutab endast ringjoone evolvent ja missugused on tema hambumise teooria seisukohalt tähtsad omadused. Olgu antud ringjoon tsentriga O (joon. 403). Tõmbame ringjoonele puutuja AB ja hakkame seda ringjoonel ilma libistamata veeretama. Evolvendi konstrueerimiseks jagame ringjoone võrdsete pikkustega kaarteks: $\smile 0_1—1'$, $\smile 1'—2'$, $\smile 2'—3'$, $\smile 3'—4'$, ..., $\smile 15'—16'$. Lähtudes punktist $0_1(A)$ kanname sirgele AB lõigud, mis pikkuselt võrduvad ülalnimetatud kaartega $\smile 0_1—1'$, $\smile 1'—2'$, $\smile 2'—3'$ jne.

Seega

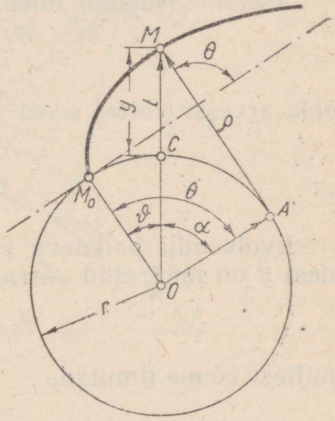
$$\begin{aligned} &\smile 0_1—1' = 0_1—1, \\ &\smile 1'—2' = 1—2, \\ &\smile 2'—3' = 2—3, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\smile 15'—16' = 15—16. \end{aligned}$$

Kui sirge AB hakkab ringjoonel libisemata veerema, langevad tema punktid $1, 2, 3, \ldots 16$ järjekorras kokku ringjoone vastavate punktidega $1', 2', 3', \ldots 16'$. Sirge kõik punktid kujundavad seejuures kõverjooni, mida nimetataksegi ringjoone evolventideks. Joonisel 403 on näidatud punktide B ja C poolt kujundatud evol-



Joon. 403.

vendid. Jooniselt selgub otsekohe, et punkti C poolt kujundatud evolvendi kõik punktid asuvad punkti B poolt moodustatud evolvendi vastavatest punktidest ühel ja samal kaugusel BC. Punktid 0_1, $1'$, $2'$, $3'$, ... $16'$ on sirge veeremisel hetkelisteks kiiruste tsentriteks. Sirge ise on tema poolt kujundatud evolvendile vastavas punktis alati normaaliks. Ringjoont, millel sirge veereb, nimetatakse evoluudiks. Evoluut on sirge AB poolt kujundatud evolvendi kõverustsentrite geomeetriline koht. Punktid 0_1, $1'$, $2'$, $3'$, ... $16'$ osutuvad seega evolvendi kõverustsentriteks.



Joon. 404.

2°. Ringjoone evolvendi üksikute parameetrite vahelised sõltuvused ilmnevad eriti selgesti evolvendi võrranditest. Olgu antud ringjoon raadiusega r ja evolvent M_0M (joon. 404). On ilmne, et

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM}.$$

Vektori $\overline{OM}$ moodul OM saadakse seosest

$$OM = \sqrt{r^2 + \varrho^2} = l, \qquad (11.25)$$

sest vektori $\overline{AM}$ moodul kujutab endast evolvendi kõverusraadiust ϱ punktis M. Võrrandist (11.25) selgub, et

$$\varrho = \sqrt{l^2 - r^2}.$$

Et aga

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varrho}{r}, \tag{11.26}$$

siis, asendades ϱ tema väärtusega, saame

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r}, \tag{11.27}$$

või

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r}.$$

Evolvendi definitsioonist järeldub, et lõik AM võrdub kaarega M_0A, s. t. $\varrho = \smile AM_0$. Kaar AM_0 avaldub järgmiselt:

$$\smile AM_0 = r\theta,$$

millest järgneb, et

$$\varrho = r\theta.$$

Asetades saadud tulemuse võrdusse (11.26), saame

$$\theta = \operatorname{tg} \alpha \tag{11.28}$$

ehk, arvesse võttes seost (11.27):

$$\theta = \frac{\sqrt{l^2 - r^2}}{r}.$$

Evolvendil paikneva punkti M radiaalne kaugus alusringjoonest y on määratud võrrandiga

$$(y + r)\cos \alpha = r,$$

millest võime ilmutada

$$y = \frac{r}{\cos \alpha}(1 - \cos \alpha).$$

Lõpuks, evolvendil meelevaldselt valitud punkti M viiva raadiusvektori $\overline{OM}$ sihti määrav nurk ϑ on antud seosega

$$\vartheta = \theta - \alpha.$$

Arvesse võttes seost (11.28), saame:

$$\vartheta = \operatorname{tg} \alpha - \alpha.$$

Nii saadud nurga α funktsiooni nimetatakse *evolventfunktsiooniks* ja tähistatakse lühidalt inv (involutum). Seega

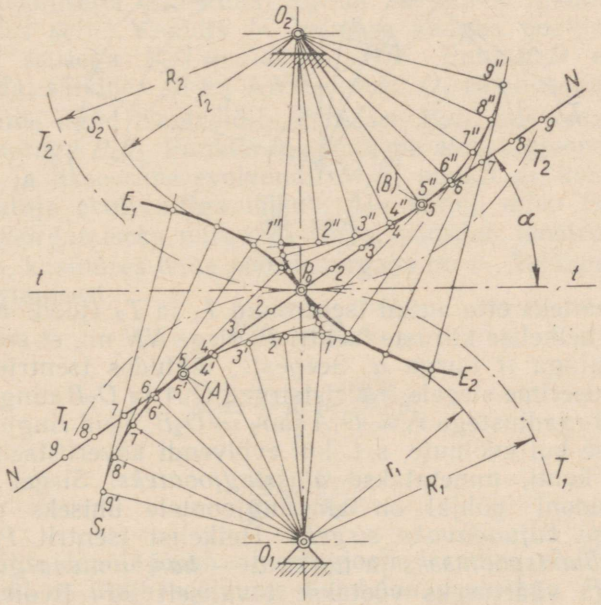
$$\vartheta = \operatorname{inv} \alpha. \qquad (11.29)$$

Saadud funktsiooni kasutatakse raadiusvektori $\overline{OM}$ sihi analüütiliseks määramiseks. Arvutustöö hõlbustamiseks on koostatud evolventfunktsiooni inv α väärtuste tabelid [1].

Võrrand (11.29) koos seosega

$$l = \frac{r}{\cos \alpha},$$

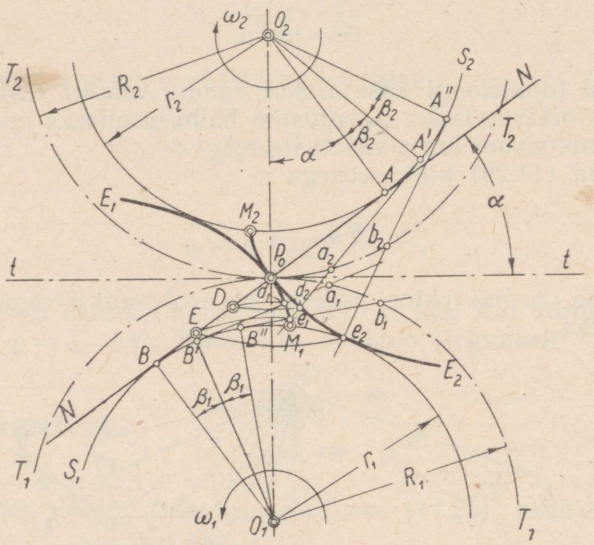
mis määrab raadiusvektori pikkuse, on evolvendi parameetrilisteks võrranditeks.



Joon. 405.

[1] Vt. näiteks И. И. Артоболевский, Вяч. А. Зиновьев, Б. В. Эдельштейн, Сборник задач по теории механизмов и машин, Гостехиздат, 1951 (nimetatud raamatust on ilmunud uus trükk 1955. a. — *Tõlk.*), või Энциклопедический справочник «Машиностроение», Машгиз, 1947, т. I, вып. 2, стр. 97.

3°. Evolventsed hambaprofiilid tagavad ümmarguste hammasrataste puhul alati püsiva ülekandesuhte. Tõepoolest, evolvendikujulistele kaasprofiilidele tõmmatud normaal läbib alati suhtelise liikumise hetkelise kiiruste tsentri P_0, mis paikneb muutumatus asendis tsentrite joonel O_1O_2 (joon. 405).



Joon. 406.

Olgu näiteks ette antud tsentroidid T_1 ja T_2 (joon. 405). Tõmbame läbi hetkelise kiiruste tsentri P_0 sirge NN nii, et see moodustaks puutujaga tt nurga α. Seepeale, lähtudes tsentritest O_1 ja O_2, konstrueerime sirgele NN ristsirged O_1A ja O_2B ning tõmbame ringjooned raadiustega $r_1 = O_1A$ ja $r_2 = O_2B$. Neid ringjooni, mida käsitletakse kui evoluute, s. t. kui evolvendi kõverustsentrite geomeetrilisi kohti, nimetatakse *alusringjoonteks*. Sirget NN, mis konstruktsiooni põhjal on alusringjoontele ühiseks puutujaks, nimetatakse *kujundavaks sirgeks*. Hetkelist tsentrit P_0 nimetatakse *hambumispooluseks* ja nurka α — *hambumisnurgaks*. Hambumisnurga väärtuseks võetakse tavaliselt 20°. Evolvente võib moodustada, veeretades kujundavat sirget NN alusringjoontel. Nagu näidati joonisel 403, tuleb selleks kujundav sirge AB jagada võrdse pikkusega lõikudeks ja kanda alusringjoontele nimetatud lõikude pikkused kaared. Kui kujundav sirge veereb ratta *1* alusringjoonel, moodustab tema tsentriga P_0 ühtelangev punkt evolvendi P_0E_1. Veeredes ratta *2* alusringjoonel, kujundab sama punkt

evolvendi P_0E_2. Evolvendid P_0E_1 ja P_0E_2 algavad alusringjoontel paiknevatest punktidest $1'$ ja $1''$. Nimetatud punktidest lähtudes võib neid piiramatult pikendada. Juhul, kui kujundav sirge veereb üle punkti $1'$ või $1''$, tekib vastava evolvendi teine, esimese suhtes sümmeetriliselt paiknev haru.

4°. Nüüd on lihtne näidata, et selliselt konstrueeritud evolventidele kontaktpunktis tõmmatud ühine normaal läbib alati hambumispooluse P_0. Olgu antud tsentroidid T_1 ja T_2 (joon. 406) ning hambumisnurk α, mis on määratud kujundava sirge kaldega puutuja tt suhtes. Konstrueerime alusringjooned S_1 ja S_2 ning evolvendid M_1E_1 ja M_2E_2. Kanname raadiusele O_2A kui küljele nurga β_2. Saame alusringjoonel punkti A'. Nurga β_2 teistkordne pealekandmine annab punkti A''. Punktides A' ja A'' tõmbame alusringjoonele puutujad $A'd_2$ ja $A''e_2$. Need puutujad lõikuvad evolvendiga M_2E_2 vastavalt punktides d_2 ja e_2 ning tsentroidiga T_2 — punktides a_2 ja b_2. Jälgime teekonda, mida läbivad punktid d_2 ja e_2 juhul, kui ratas *2* hakkab pöörlema nurkkiiruse ω_2 suunas. Kui ratas *2* on ennast pööranud nurga β_2 võrra, siis on ilmne, et alusringjoone raadius O_2A' on tulnud asendisse O_2A ja punkt a_2 on ühtinud poolusega P_0. Punkt d_2 on seejuures liikunud sirgele NN, asudes sellel asendis D. Viimase kaugus poolusest P_0 on määratud seosega $P_0D = d_2a_2 = \smile AA'$. Punkti D asendit on lihtne leida, sälkides sirget NN tsentrist O_2 raadiusega O_2d_2.

Kanname nüüd tsentroidile T_1 kaare P_0a_1, mis oma pikkuselt võrdub kaarega P_0a_2. Punktis a_1 tõmbame alusringjoonele S_1 puutuja a_1B' ja fikseerime evolvendil M_1E_1 punkti d_1, kus ülalnimetatud puutuja evolvendiga lõikub. Aja vältel, mida tsentroid T_2 kulutab pöördumiseks nurga β_2 võrra, pöördub tsentroid T_1 vastassuunas, kusjuures tema pöördenurgaks on β_1. Viimane on arvutatav tingimusest

$$R_1\beta_1 = R_2\beta_2,$$

mis annab

$$\beta_1 = \frac{R_2}{R_1}\beta_2 = \frac{O_2A}{O_1B}\beta_2,$$

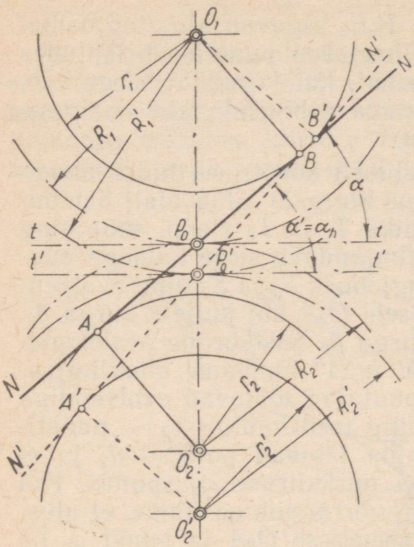
sest et

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{O_2A}{O_1B}.$$

Selle pöörde lõpul jõuab alusringjoone raadius O_1B' asendisse O_1B. Punkt a_1 ühtib seejuures hambumispoolusega P_0 ja punkt d_1 punktiga D, sest

$$d_1a_1 = \smile BB' = O_1B \cdot \beta_1 = \frac{O_1B \cdot O_2A}{O_1B}\beta_2 =$$

$$= O_2A \cdot \beta_2 = \smile AA' = d_2a_2 = P_0D.$$



Joon. 407.

Evolventide M_1E_1 ja M_2E_2 punktid d_1 ja d_2 ühtivad seega kujundava sirge NN punktis D. Analoogiliselt saab näidata, et evolventide punktid e_1 ja e_2 astuvad omavahel kontakti sirge NN punktis E jne. On ilmne, et *kujundav sirge moodustab evolventprofiilide hambumisjoone.* Kontakteerumishetketel ühtivad puutujad $A'd_2$, $A''e_2$, ... ja $B'd_1$, $B''e_1$, ... paarikaupa kujundava sirgega. Kuna nimetatud puutujad on evolventidele normaalideks, siis on selge, et punktides D, E, ... kujuneb evolventprofiilidele ühine normaal, mis läbib punkti P_0. Konstrueeritud evolventprofiilid rahuldavad järelikult tingimust, mille kohaselt profiilidele kontaktpunktis tõmmatud üldine normaal pidi alati läbima suhtelise liikumise hetkelise kiiruste tsentri P_0 (*hambumispooluse*).

Samale järeldusele võib tulla ka teisel viisil. Kontakteeruvatele evolventidele kokkupuutepunktides tõmmatud ühine normaal peab sõltumatult evolventide asendist puutuma kummagi ratta alusringjoont alati ühes ja samas punktis. Kuna toodud tingimusele vastab ainult üks, tsentrite joont punktis P_0 lõikav sirge, siis on selge, et evolventidele kontaktpunktis tõmmatud ühine normaal sellega ühtib.

5°. Alusringjoonte raadiused r_1 ja r_2 ning algringjoonte raadiused R_1 ja R_2 (joon. 406) on omavahel lihtsas sõltuvuses. Tõepoolest,

$$r_1 = R_1 \cos \alpha, \tag{11.30}$$
$$r_2 = R_2 \cos \alpha.$$

Toodud seostest järgneb veel, et

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{r_2}{r_1}. \tag{11.31}$$

Ülekandesuhe i_{12} ei sõltu seega hambumisnurgast α, vaid selle määrab ainult algringjoonte (või alusringjoonte) raadiuste suhe.

Seosest (11.31) järgneb (joon. 405), et rataste tsentrite vahe O_1O_2 muutmine ei mõjuta evolventprofiilide puhul ülekandesuhet

i_{12} tingimusel, et alusringjoonte raadiused jäävad seejuures endisteks. Kõrvalekaldumist arvutuslikust tsentrite vahest O_1O_2 võib aga mehhanismide koostamisel või montaažil alati esineda. Joonisel 407 on näidatud kaks hambuvat ratast, millede tsentrid asuvad vastavalt punktides O_1 ja O_2. Nihkugu tsenter O_2 asendisse O_2'. Sirge NN uueks asendiks kujuneb sel juhul $N'N'$. Hambumispoolus ei asu nüüd enam punktis P_0, vaid paikneb ümber punkti P_0'. Koos sellega muutuvad ka rataste algringjoonte raadiused: R_1 asemel on uueks raadiuseks R_1' ja R_2 asemel — R_2'. Lõpuks muutub ka hambumisnurk α, mille uueks väärtuseks kujuneb α'. Muutumatuks jääb aga ülekandesuhe i_{12}, olles määratud seosega

$$i_{12} = \frac{r_2}{r_1} = -\frac{O_2P_0}{O_1P_0} = -\frac{O'_2P'_0}{O_1P'_0}. \qquad (11.32)$$

Evolventprofiilidega hammasrataste ülalkäsitletud omadusest võib järeldada, et hambumisnurk α on täielikult määratav alles pärast rataste montaaži. Seetõttu eraldatakse hambumisnurka α nurgast α'. Viimast nimetatakse *montaaži hambumisnurgaks* ja tähistatakse α_n.

§ 54. Evolventprofiilide konstrueerimine

1°. Alustame v ä l i s h a m b u m i s e profileerimist. Rataste algringjoonte raadiused R_1 ja R_2 määratakse, lähtudes etteantud ülekandesuhtest i_{12} ja tsentrite vahest A:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{z_2}{z_1},$$

$$A = R_1 + R_2,$$

kus z_1 ja z_2 tähistavad hammaste arvusid.

Käsitleme alljärgnevas erijuhtu, kus $A = 0{,}5(z_1 + z_2)m$. Joonisel 408 on algringjooned tähistatud vastavalt T_1T_1 ja T_2T_2. Tõmbame neile ühise puutuja tt läbi hambumispooluse P_0. Edasi joonestame kujundava sirge NN, mis moodustab puutujaga tt hambumisnurga α. Hammaste mõõted arvutame seostega, mis toodi § 52. Punktidest O_1 ja O_2 tõmbame kujundavale sirgele NN ristsirged O_1A ja O_2B. Tähistades viimaste pikkusi vastavalt r_1 ja r_2, saame valemite (11.30) põhjal:

$$r_1 = R_1 \cos\alpha, \qquad r_2 = R_2 \cos\alpha.$$

Kasutades raadiusi r_1 ja r_2, joonestame alusringjooned S_1 ja S_2. Edasi konstrueerime peaderingjooned L_1 ja L_2 ning jalgade-

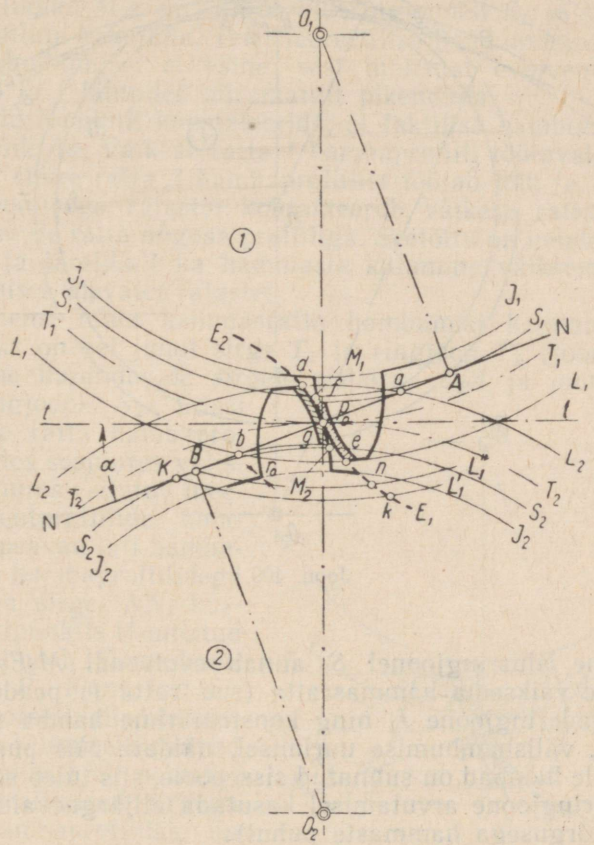
ringjooned J_1 ja J_2, rakendades nende raadiuste arvutamiseks valemeid (11.18)—(11.21). Veeretades kujundavat sirget alusringjoontel, saame evolvendid M_1E_1 ja M_2E_2. Nagu jooniselt näha, algavad evolvendid vastavates alusringjoonte S_1 ja S_2 punktides M_1 ja M_2 ning lõpevad peaderingjoontel L_1 ja L_2 paiknevates punktides *e* ja *d*.

2°. Määrame nüüd punktid, kus algab ja lõpeb kontakt hambaid moodustavate kaasprofiilide vahel. Kuna kujundav sirge *NN* on ühtlasi ka hambumisjooneks, siis sälgime seda sirget raadiusega O_1e. Saame punkti *b*. Punkt *b* osutub hambumisjoone piirpunktiks, kus hambad veel kontakteeruvad, sest punkt *e* asub ratta *1* peaderingjoonel. Kanname nüüd profiilile M_2d punkti *g*, sälkides nimetatud profiili raadiusega O_2b. Saadud punkt *g* on ratta *2* hambaprofiili punkt, mis kontakteerub ratta *1* hambaprofiili punktiga *e*. Kontakt nimetatud punktide vahel leiab aset hambumissirgel punktis *b*. Ratta *2* hambaprofiilist võtab seega hambumisest osa ainult punktide *g* ja *d* vahel paiknev lõik. Analoogiliste võtetega saab määrata ratta *1* hambaprofiili lõiku *fe*, mis hambumisest osa võtab. Lõikusid *gd* ja *fe* nimetatakse *hambaprofiilide töötavateks osadeks*. Ülaltoodust võib järeldada, et evolventide lõigud M_2g ja M_1f on *profiilide mittetöötavad osad*, nagu hambajalgade ülejäänud osadki. Üldjuhul võib hammaste mittetöötavaid osi profileerida meelevaldselt. Tuleb ainult silmas pidada, et kontakteeruvatel hammastel oleks võimalik hambumisest vabalt väljuda. Alates punktides M_1 ja M_2 võib hambajalgu näiteks kujundada radiaalsuunas kulgevate sirgete abil. Üleminek jalgaderingjoontele J_1 ja J_2 toimub sel juhul ümmardusraadiusega r_0, mille suurus valitakse $(0{,}3—0{,}4)m$ piirides (*m* tähistab siin hambumise moodulit). Hamba teine profiil on esimesega hamba telje suhtes sümmeetriline.

Evolventprofiilide hambumisjoon on seega moodustatud rataste peaderingjoonte vahel paiknevast kujundava sirge lõigust *ab*. Seda lõiku nimetatakse *praktiliseks hambumisjooneks*.

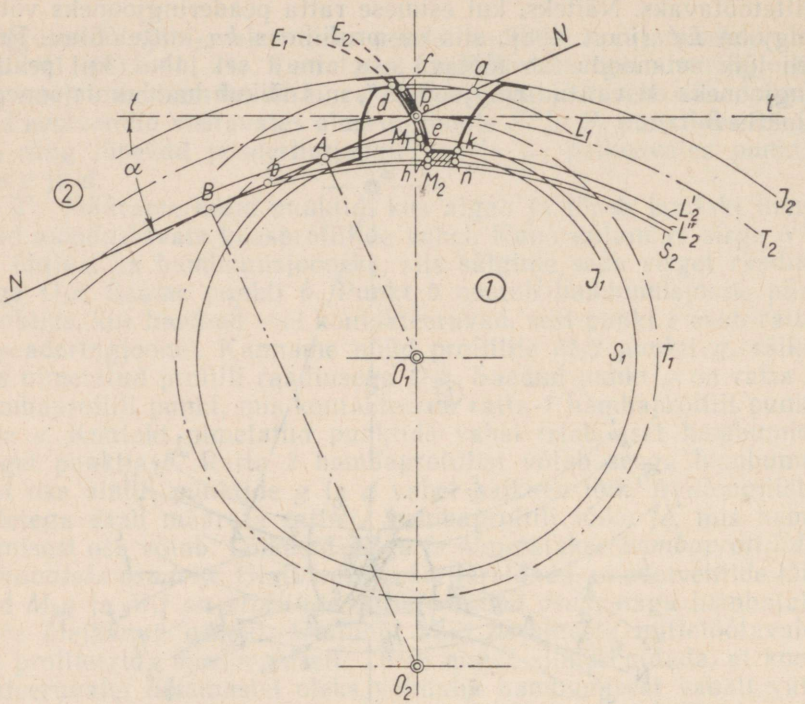
Lisaks praktilisele hambumisjoonele eksisteerib veel teoreetiline hambumisjoon, mis vastab olukorrale, kus hambumine toimuks hamba kogu evolventse osa ulatuses. Joonisel 408 kujutatud hambumises ei tööta evolvendi M_1E_1 osa, mis paikneb punktide M_1 ja *f* vahel. Samuti ei võta hambumisest osa evolvendi M_2E_2 lõik M_2g. On ilmne, et nimetatud profiiliosad saaksid hambumisest osa võtta ainult siis, kui rataste peaderingjooned L_1 ja L_2 läbiksid vastavalt punkte *A* ja *B*. Kujundava sirge lõiku *AB* nimetatakse *teoreetiliseks hambumisjooneks*. Esitatust võib ka järeldada, et profiilide töötavaid osi võib laiendada, suurendades peaderingjoonte läbimõõte. Kui ühe ratta peaderingjoon lõikub kujundava sirgega väljaspool teoreetilist hambumisjoont, siis kogu profiiliosa, mille punktid asuvad väljaspool hambumisjoont, kujuneb

mittetöötavaks. Näiteks, kui esimese ratta peaderingjooneks võtta ringjoon L_1' (joon. 408), siis on profiiliosa *kn* mittetöötav. Profiili lõik *ne* moodustab töötava osa ainult sel juhul, kui peaderingjooneks on valitud ringjoon L_1'', mis lõikub hambumisjoonega punktis *B*.



Joon. 408.

3°. S i s e h a m b u m i s e l konstrueeritakse hambaprofiilid analoogiliselt ülaltooduga. Joonisel 409 on kujutatud tsentroidid T_1 ja T_2, mis puutuvad punktis P_0. Tõmbame läbi punkti P_0 kujundava sirge *NN*. Olgu α nurk kujundava sirge ja puutuja *tt* vahel. Tsentritest O_1 ja O_2 joonestame kujundavale sirgele ristjooned O_1A ja O_2B ning konstrueerime alusringjooned S_1 ja S_2. Veeretades sirget *NN* alusringjoonel S_1, saame evolvendi M_1E_1. Sirge *NN*



Joon. 409.

veeretamine alusringjoonel S_2 annab evolvendi M_2E_2. Seepeale joonestame väiksema hammasratta (s. o. ratta *1*) peaderingjoone L_1 ja jalgaderingjoone J_1 ning konstrueerime hamba profiili nii nagu ülal, välishambumise uurimisel, näidati. Mis puutub suurt ratast, mille hambad on suunatud sissepoole, siis tuleb selle peade- ja jalgaderingjoone arvutamisel kasutada alljärgnevaid valemeid (normaalkõrgusega hammaste puhul):

$$D_{e2} = D_2 - 2h' = m(z_2 - 2),$$
$$D_{i2} = D_2 + 2h'' = m(z_2 + 2{,}5).$$

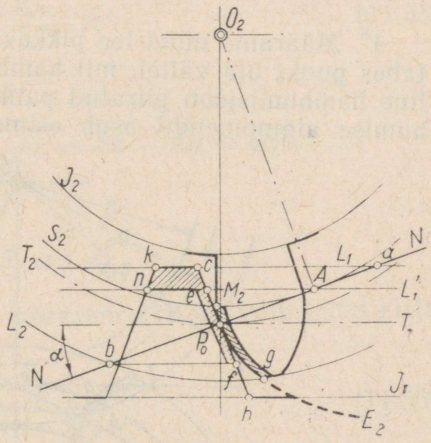
Jooniselt 409 selgub, et ratta *2* peaderingjoone lõikumine hambumisjoonega *NN* võib toimuda kas paremal või vasakul pool punkti *A*. On võimalik ka olukord, kus lõikumine leiab aset täpselt nimetatud punktis. Juhul kui lõikumine toimub punktist *A* paremal, kujuneb ratta *2* hambaprofiil kogu hambapea ulatuses töötavaks profiiliks. Olukorras, kus lõikumine leiaks aset punktist *A* vasemal — näiteks punktis *b*, mis vastab peaderingjoonele

L_2'' —, ei saaks profiiliosa *he* hambumisel kasutada, mistõttu teda reaalsel hammasrattal ei esine. Ratta *2* hambapea ulatus on seega määratud evolvendi kaarega P_0e, kus *e* tähistab lõikepunkti hambumisjoone piirpunkti *A* läbiva peaderingjoone ja hambaprofiili vahel. Profiililõiku M_2e, mis algab alusringjoonelt S_2, ei saa ratta *2* hambaprofiilina kasutada. Teist teoreetilise hambumisjoone piirpunkti sisehambumisel ei esine, sest mõlemat evolventi võiks punktidest *d* ja *f* lähtudes piiramatult pikendada.

Seega võib lõplikult konstateerida, et faktilise hambumisjoone moodustab lõik *Aa*. Väikese ratta *1* hambaprofiili töötavaks osaks on lõik M_1d, suure ratta *2* hambaprofiilist töötab lõik *fe*.

Sisehambumisega ratastel kontakteerub väikese ratta kumer profiil alati suure ratta nõgusa profiiliga. Seetõttu on nendel ratastel erisurve ja järelikult ka hammaste kulumine väiksemad kui välishambumises olevatel ratastel.

4°. Käsitleme nüüd hammasratta hambumist hammaslatiga. Tsentroidideks on sel juhul sirge T_1 ja ringjoon T_2 (joon. 410). Konstrueerime kujundavale sirgele ristsirge O_2A ja joonestame ratta alusringjoone S_2. Edasi konstrueerime ratta hambaprofiilid, kasutades seejuures välishambumise juures esitatud meetodit. Evolventprofiilide omaduste põhjal peavad lati hambaprofiilid ratta hambaprofiilidega kontakteeruma sirgel *NN*, kusjuures kontaktpunktis tõmmatud ühine normaal peab läbima hambumispooluse P_0. Kuna latt liigub translatoorselt, siis ülaltoodud tingimuse täitmiseks peavad lati hambaprofiili kõik normaalid olema paralleelsed sirgega *NN*. Lati hambaprofiiliks on järelikult sirgjoon, mis ristub kujundava sirgega *NN*. Läbi hambaprofiili joonestamiseks tõmmatakse läbi punkti P_0 kujundava sirgega *NN* ristuv sirglõik *ch*. Lati hammaste päid piirab peadesirge L_1, hambajalgu aga jalgadesirge J_1. Hammaste pea ja jala kõrgused arvutatakse rataste puhul kehtivate valemitega. Teoreetilisel hambumisjoonel on nagu sisehambumise puhulgi ainult üks piirpunkt — punkt *A*. Tõepoolest, teoreetiliselt võib evolventi M_2E_2 ja sirget *ch* punktidest *g* ja *h* lähtudes allapoole piiramatult pikendada. Praktilist hambumisjoont piiravad peadesirge L_1 ja peaderingjoon L_2. Kuna praktilise hambumisjoone punkt *a* asub joonisel 410 punkti *A* taga,



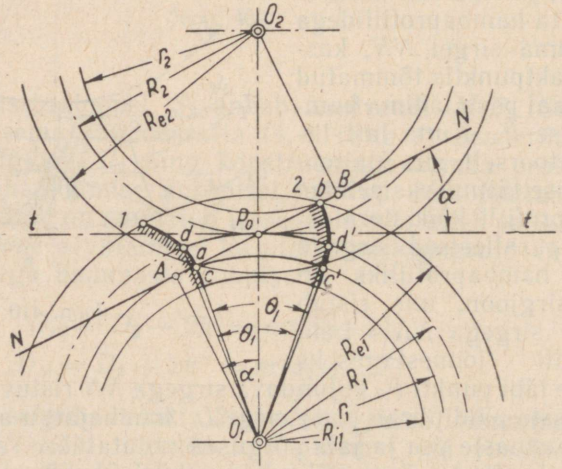
Joon. 410.

siis, tõmmates sirgele T_1 paralleeli Ae, selgub, et lati hamba osa *nkce* tegelikult ratta hammastega ei hambu, mistõttu selle võib praktikas ära jätta. Hambaprofiili töötava osa alumise piiri leidmiseks tõmbame läbi hambumisjoone punkti *b* paralleelsirge tsentroidile T_1, kuni lõikumiseni hambaprofiiliga punktis *f*. Lati hambaprofiili töötavaks osaks on seega lõik *fe*.

Käsitletud näidetest selgub, et mida pikem on teoreetiline hambumisjoon, seda kõrgemad võivad olla hambapead ja seda suuremad on hambaprofiilide töötavad osad. Teoreetilise hambumisjoone pikkus suureneb koos hambumisnurgaga α. Siinjuures tuleb aga meenutada (vt. § 41, 2°), et praktilise hambumisjoone pikenemine suurendab kontaktpunktide kaugust hambumispoolusest. Nimetatud vahemaa suurenemine toob teatavasti kaasa profiilide suhtelise libisemiskiiruse kasvu. Ühes sellega tõuseb ka hammastevahelisele hõõrdumisele kuluv võimsus [vt § 41, valem (9.10)], mis põhjustab hambaprofiilide intensiivset kulumist.

§ 55. Hambumiskaar ja kattetegur

1°. Määrame nüüd tee pikkuse, mille läbib algringjoone mis tahes punkt aja vältel, mil hambub üks hambapaar. Olgu praktiline hambumisjoon piiratud punktidega *a* ja *b* (joon. 411). Hambumise algmomendil asub esimese ratta hambaprofiil sel juhul



Joon. 411.

asendis *1*. Hambumise lõppmomendiks on sama profiil jõudnud asendisse *2*. Ühe hambapaari hambumise ajal on algringjooned teineteisel veerenud kaare *dd'* ulatuses. Kaart *dd'* nimetatakse

seetõttu hambumiskaareks. Hambumiskaare pikkust võib arvutada järgmiselt. Ühendame punktid d ja d' tsentriga O_1 ja tähistame tekkinud tsentraalnurga dO_1d_1 tähega Θ_1. Fikseerime nüüd alusringjoonel paiknevad evolvendi alguspunktid c ja c'. Nurk cO_1c' võrdub ilmselt nurgaga Θ_1. Kaare dd' pikkuse võime avaldada vastava raadiuse ja tsentraalnurga korrutisena:

$$\smile dd' = R_1\Theta_1. \tag{11.33}$$

Kaare cc' pikkuseks on analoogiliselt

$$\smile cc' = r_1\Theta_1.$$

Seetõttu võime kirjutada, et

$$\Theta_1 = \frac{\smile cc'}{r_1}. \tag{11.34}$$

Asetades nii leitud Θ_1 väärtuse võrrandisse (11.33), saame

$$\smile dd' = \frac{R_1}{r_1} \smile cc'. \tag{11.35}$$

Evolvendi omadustest järgneb, et

$$\smile cc' = \smile Ac' - \smile Ac = Ab - Aa = ab.$$

Edasi on teada, et

$$r_1 = R_1 \cos \alpha,$$

kus α tähistab hambumisnurka. Võrrandi (11.35) võib nüüd kirjutada järgmiselt:

$$\smile dd' = \frac{R_1 \cdot ab}{R_1 \cos \alpha} = \frac{ab}{\cos \alpha}. \tag{11.35'}$$

Algringjoone hambumiskaare pikkus võrdub järelikult hambumisjoone pikkuse ja hambumisnurga koosinuse jagatisega.

Hambumiskaart saab analoogiliselt arvutada mis tahes kontsentrilisel ringjoonel. Alusringjoone hambumiskaare pikkus võrdub seejuures hambumisjoone praktilise (töötava) osa pikkusega.

2°. Juhul kui hambumiskaare pikkus võrdub hambumise sammuga t, siis on ilmne, et ajal, mil algringjooned teineteisel selle kaare ulatuses veerevad, hambub üheaegselt ainult üks hambapaar. Kui hambumiskaar on hambumise sammust lühem, siis hambumine vahepeal katkeb ja ülekanne töötab löökidega. Kui aga

hambumiskaar on hambumise sammust pikem, siis on teataval ajavahemikul kontaktis üks hambapaar, ülejäänud ajal aga kaks või enam paari hambaid.

Hammaste lõikamisel esineb paratamatult teatavaid kõrvalekaldumisi profiilide teoreetilisest kujust. Seetõttu ei ole soovitav hambaid nii projekteerida, et hambumiskaar ja hambumise samm oleksid võrdsed. Hambumiskaar peab alati olema hambumise sammust pikem. Sel puhul töötab hammasrattapaar sujuvalt, ilma löökideta. Teiste sõnadega, õigesti projekteeritud hambumises on soovitav, et hambumiskaare suhe hambumise sammu oleks suurem kui üks, s. t.

$$\varepsilon = \frac{\text{hambumiskaar}}{t} > 1.$$

Tähega ε tähistatud hambumiskaare ja hambumise sammu suhet nimetatakse *kattegiguriks*.

Silmas pidades valemit (11.35′), saame

$$\varepsilon = \frac{\smile dd'}{t} = \frac{ab}{t \cos \alpha} > 1. \qquad (11.36)$$

Kaasaegses praktikas loetakse välishambumise puhul kattegiguri minimaalseks lubatavaks väärtuseks 1,1. Kattegigurit nimetatakse mõnikord ka *hambumise sujuvuse* või *hambumise kestuse koefitsiendiks*.

• 3°. Valemi (11.36) nimetajas esinevat suurust $t \cos \alpha$ nimetatakse *hambumise alussammuks* ja tähistatakse t_0. Hambumise sammu ja alussammu vahel kehtib seega seos

$$t_0 = t \cos \alpha. \qquad (11.37)$$

Seosest (11.37) järgneb, et alussamm vastab alusringjoone kaarele, mis haarab üht hammast koos juurdekuuluva hambavahega. Kattegigurit ε võib seega kujutada kui hambumisjoone pikkuse ja hambumise alussammu suhet, s. t.

$$\varepsilon = \frac{ab}{t_0}. \qquad (11.38)$$

Kattegiguri väärtust saab arvutada ka analüütiliselt. Tõepoolest, jooniselt 411 võib kirjutada:

$$ab = AB - Bb - Aa = AB - (AB - Ab) -$$
$$- (AB - Ba) = AB - AB + Ab - AB + Ba =$$
$$= Ab + Ba - AB.$$

Kuna aga

$$Ab = \sqrt{R^2_{e1} - r_1^2}, \qquad Ba = \sqrt{R^2_{e2} - r_2^2}$$

ja

$$AB = A \sin \alpha,$$

kus R_{e1} ja R_{e2} tähistavad rataste peaderingjoonte raadiusi ning A — kaugust telgede O_1 ja O_2 vahel, siis

$$ab = \sqrt{R^2_{e1} - r_1^2} + \sqrt{R^2_{e2} - r_2^2} - A \sin \alpha.$$

Asetades saadud tulemuse seosesse (11.36), saame lõplikult

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R^2_{e1} - r_1^2} + \sqrt{R^2_{e2} - r_2^2} - A \sin \alpha}{t \cos \alpha}. \qquad (11.39)$$

4°. Mõningatel juhtudel on otstarbekas avaldada katteteguri hambumiskaarele ja alussammule vastavate tsentraalnurkade kaudu.

Seosest (11.34) ja evolvendi omadustest selgub, et

$$\Theta_1 = \frac{\smile cc'}{r_1} = \frac{ab}{r_1}.$$

Praktilise hambumisjoone pikkus avaldub seega nurga Θ kaudu järgmiselt

$$ab = \Theta_1 r_1.$$

Alussammu pikkuse võib omakorda avaldada alussammule vastava tsentraalnurga ψ_1 ja raadiuse r_1 korrutisena:

$$t_0 = \psi_1 r_1.$$

Meenutame siin, et Θ_1 on nurk, mille võrra ratas *1* ennast pöörab (pöördub) ühe hambapaari kontaktis olemise ajal. Katteteguri võib seega ratta *1* parameetrite abil avaldada järgmiselt

$$\varepsilon = \frac{ab}{t_0} = \frac{\Theta_1 r_1}{\psi_1 r_1} = \frac{\Theta_1}{\psi_1}.$$

Kasutades ratta *2* parameetreid, saaksime analoogiliselt

$$\varepsilon = \frac{\Theta_2}{\psi_2}.$$

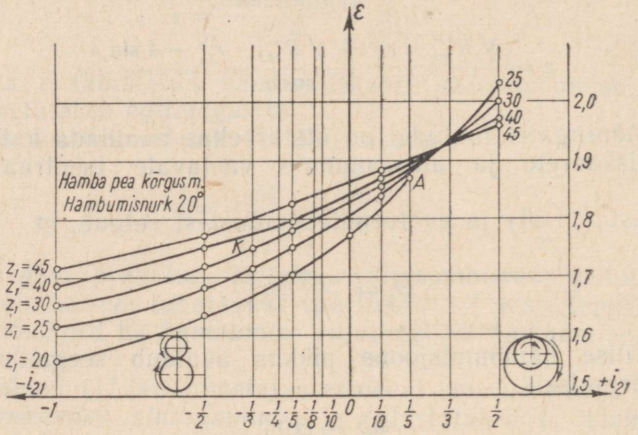
Kuna aga

$$\psi_1 z_1 = 2\pi \quad \text{ja} \quad \psi_2 z_2 = 2\pi,$$

siis

$$\varepsilon = \frac{\Theta_1 z_1}{2\pi} = \frac{\Theta_2 z_2}{2\pi}. \qquad (11.40)$$

Valemist (11.38) võib järeldada, et kattetegur ε kasvab koos praktilise hambumisjoone pikkusega *ab*. Katteteguri suurendamiseks tuleb seega pikendada praktilist hambumisjoont, suurendades hambapeade kõrgusi teoreetilise hambumisjoone poolt ettemääratud piires. Võrrandit (11.40) võib kasutada katteteguri arvutamiseks igasuguste (s. o. ka mitteevolventsete) hambaprofiilide puhul.



Joon. 412.

5°. Võrrandist (11.40) selgub veel, et kattetegur suureneb hammaste arvu kasvades. Joonisel 412 on toodud diagramm, mis kujutab katteteguri ε sõltuvust väikese ratta hammaste arvust z_1 ja ülekandesuhtest i_{12}. Diagramm on joonestatud eeldusel, et hamba pea kõrgus $h' = m$ ja et hambumisnurk $\alpha = 20°$. Välishambumiste ülekandesuhete i_{12} väärtused on kantud ordinaatteljest $O\varepsilon$ vasakule. Sisehambumiste ülekandesuhete väärtused paiknevad paremal pool telge $O\varepsilon$. Hammaste arvule $z_1 = 20$ vastav kõver lõpeb punktis A. Hammaste arvudele $z_1 = 25$, $z_1 = 30$ ja $z_1 = 40$ vastavad kõverad on toodud intervallis, mis on määratud ülekandesuhte i_{12} väärtustega -1 ja $+\frac{1}{2}$.

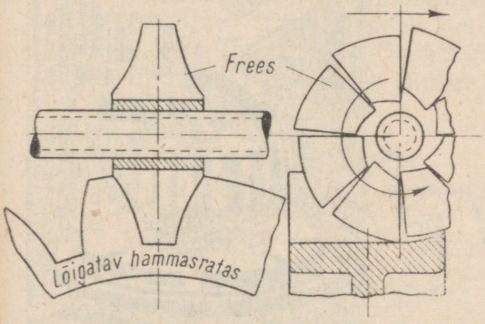
Diagrammilt on näha, et kattetegur ε kasvab nimetatud intervallis pidevalt. Sisehambumisel on kattetegur alati suurem kui välishambumisel. Ülekandesuhtele $i_{12} = 0$ vastavad katteteguri kehtivad ratta hambumisel hammaslatiga.

Näide 7. Leida joonisel 412 toodud diagrammi abil kattetegur ε normaalsel välishambumisel, kui $z_1 = 30$ ja $z_2 = 90$. Ülekandesuhte i_{21} saame seosest $i_{21} = -\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{3}$. Otsime abstsissteljel i_{21} väärtuse $-\frac{1}{3}$ ja fikseerime kõveral, mis vastab hammaste arvule $z_1 = 30$, punkti k. Viimasele vastab ordinaatteljel katteteguri väärtus 1,75.

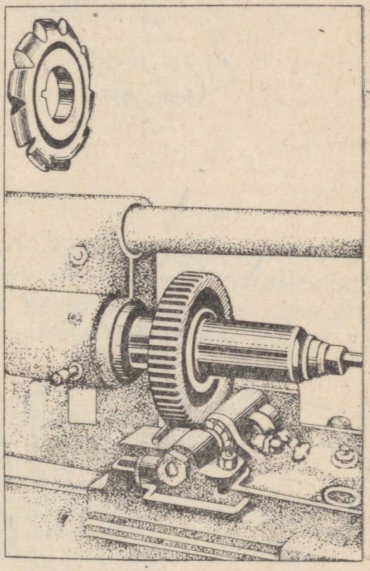
§ 56. Evolventprofiiliga hammasrataste lõikamisest

1°. Käesolevas paragrahvis käsitleme üldjoontes hammasrataste lõikamise meetodeid, sest nimetatud küsimus on tihedalt seotud hammaste profileerimise teooriaga. Evolventhambad lõigatakse tavaliselt spetsiaalsetel hambalõikepinkidel, kasutades kahte erinevat meetodit: 1) kopeerimismeetodit ja 2) rullumismeetodit.

K o p e e r i m i s m e e t o d i puhul valmistatakse täpselt konstrueeritud profiili joonise järgi ketasfrees (joon. 413). Freesi lõikeserval on seega hambavahe kuju. Pöörlevale freesile antakse ettenihe piki hamba külgmoodustajat. Iga töökäiguga lõigatakse sel viisil üks hambavahe, mille järel



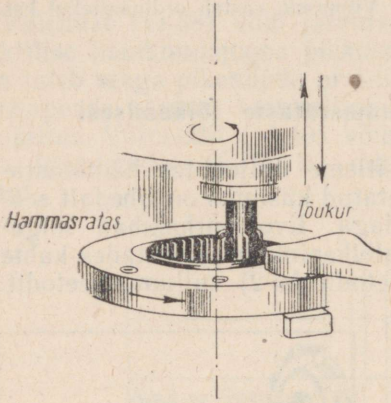
Joon. 413.



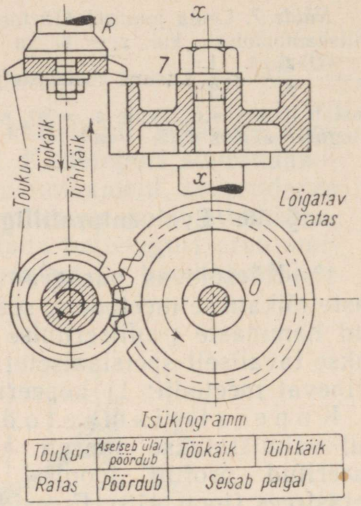
Joon. 414.

frees tuuakse tagasi oma lähteasendisse. Seepeale pööratakse toorikut nurga $\tau = \frac{2\pi}{z}$ võrra, ja alustatakse uue hambavahe freesimist. Joonis 414 kujutab hammasratta lõikamist ketasfreesiga.

2°. R u l l u m i s m e e t o d i juures antakse toorikule ja hambalõiketerale säärane suhteline liikumine, mis esineks kahe õigesti hambuva ratta puhul. On ilmne, et lõiketera peab seetõttu olema

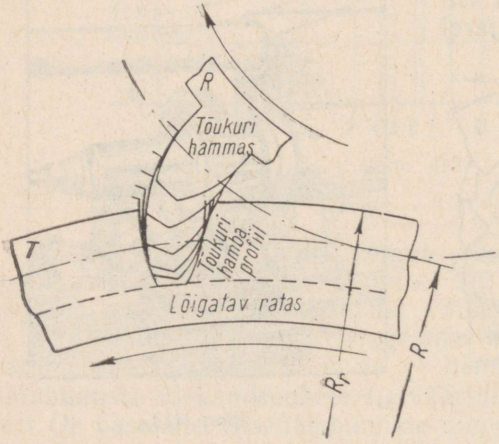


Joon. 415.

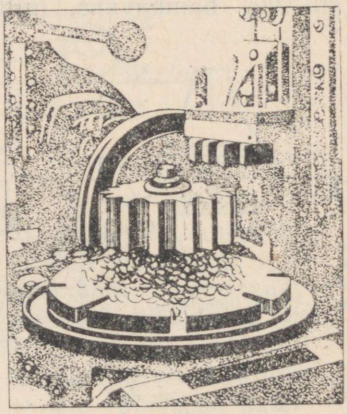


Tõukur	Asetseb ülal, pöördub	Töökäik	Tühikäik
Ratas	Pöördub	Seisab paigal	

Joon. 416.



Joon. 417.

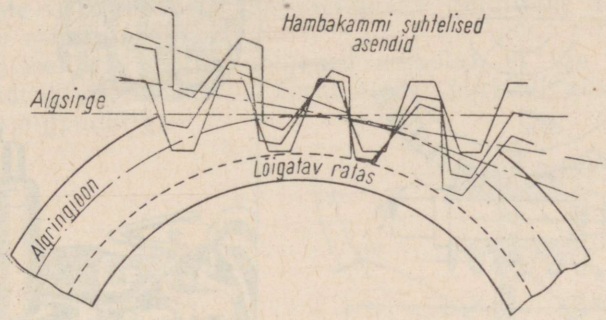


Joon. 418.

hammasrattakujuline ehk täpsemalt öeldes, lõiketera peab endast kujutama kas hammasratast või hammaslatti. Joonis 415 kujutab ühte säärast, *hambatõukuriks* nimetatavat lõikeriista. Tõukur *R* liigub translatoorselt piki lõigatava ratta *T* telge *xx* (joon. 416). Samaaegselt antakse tõukurile ja rattale pöörlev liikumine. Nurk-

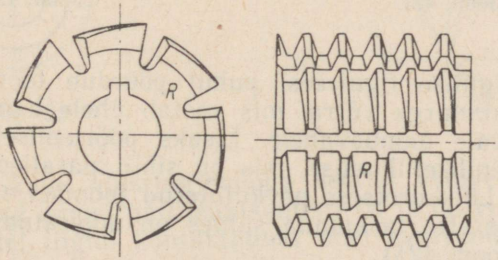
kiirused valitakse seejuures nii, nagu oleks tegemist tõukuri ja lõigatava ratta omavahelise hambumisega. Hambaprofiiliks kujuneb sel juhul tõukuri lõikeserva kõikide asendite mähkija (joon. 417), kusjuures lõikeriist nagu rulluks ümber töödeldava ratta. Käsitletud meetodil lõigatakse ka sisehammastega rattaid (joon. 415).

3°. Et igale hammasrattale saab konstrueerida temaga õigesti hambuvat hammaslatti, siis võib rattakujulise lõikeriista asemel kasutada ka kujult hammaslatti meenutavat instrumenti. Latikuju-



Joon. 419.

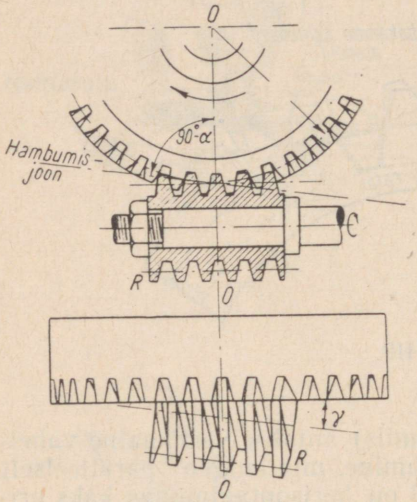
lisele hambatõukurile (hambakammile) antakse vertikaalne vahelduvasuunaline translatoorne liikumine, mis kulgeb paralleelselt ratta teljega (joon. 418). Toorikul on horisontaalpinnas kaks erinevat liikumist: pööreldes ümber oma telje, liigub ta ühtlasi ka



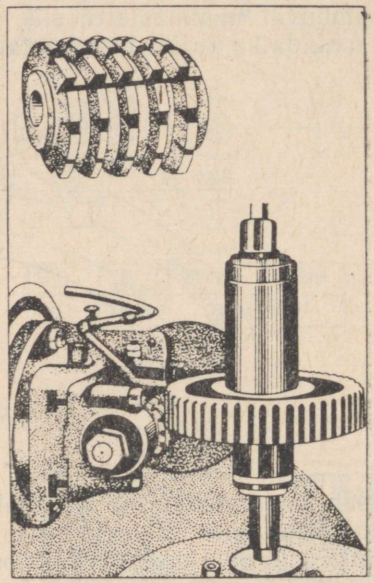
Joon. 420.

piki hambakammi (joon. 419). Toorik liigub hambakammi suhtes seega nii, nagu liiguks hammasratas hambumise protsessis hammaslati suhtes. Lõigatava ratta hambaprofiilid kujunevad rullumise teel. Kogu ülalkirjeldatud hambalõikamise protsess toimub spetsiaalsetel hambalõikamise automaatidel.

4°. Latikujulise hambatõukuri asemel võib kasutada tigufreesi (joon. 420), mille profiil vastab hammaslatile. Tõepoolest, kui lõigata tigufreesi diametraaltasapinnaga, tekib hammaslatikujuline lõikejoon (joon. 421). Tigufreesi külgpind saadakse, andes hammaslatile püsiva tõusunurgaga kruvijoonelise liikumise. Tõusunurk γ ei ületa seejuures tavaliselt 5°.



Joon. 421.



Joon. 422.

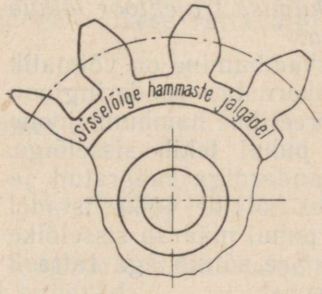
5°. Ühekäigulise tigufreesi puhul pöördub toorik freesi iga täispöörde ajal nurga võrra, mis vastab ühele hambale ja selle juurde kuuluvale hambavahele. Lisaks pöörlemisele saab tigufrees veel ettenihkeliikumise, mis on sihilt paralleelne lõigatava ratta teljega. Lõikeprotsess on kujutatud joonisel 422. Tigufreesi asend hammasratta tasapinna suhtes on määratud freesi tõusunurgaga γ (joon. 421).

Rullumismeetodi kohta ülal toodud näidetest võib järeldada, et see meetod on rajatud hammasratta ja lati või kahe hammasratta vahelise hambumise omadustele.

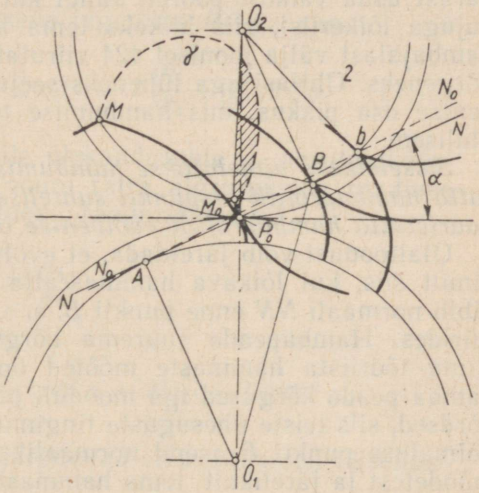
§ 57. Sisselõige

1°. Hambaid rullumismenetlusel lõigates võib juhtuda, et lõikeriista hambapead lõikuvad valmistatava ratta hambajalgadesse. Selle tagajärjel tekib lõigatava ratta hammaste jalaosas iseloomustav *sisselõige* (joon. 423), millest käsitletav nähtus ka oma nime on saanud. On ilmne, et sisselõike tagajärjel hambajalad nõrgenevad. Lisaks sellele lõigatakse hamba jalas ära osa evolventsest profiilist. Nimetatud põhjustel loetakse sisselõiget hammasrataste valmistamisel ebasoovitavaks. Selgitame alljärgnevas sisselõike esinemispõhjusi.

2°. Sisselõike nähtus põhjeneb asjaolul, et iga hambaprofiili moodustav evolvent on ühest otsast piiratud alusringjoonel paikneva algpunktiga.



Joon. 423.



Joon. 424.

Jälgime kahe alusringjoonega seotud evolvendi hambumist, mis pöörlevad ümber paiksete tsentrite O_1 ja O_2 (joon. 424). Hambumise kestel liigub kontaktpunkt ühel evolvendil pidevalt algpunktist eemale, teisel evolvendil aga vastupidi, algpunktile lähemale. Hambumisprotsessi teataval etapil jõuab kontaktpunkt nimetatud evolvendi algpunkti. Profiilidevaheline kontakt toimub sel hetkel teoreetilise hambumisjoone punktis *B*. Evolventide säärane asend on piiriks, millest edasi minnes muutuks evolventhambumine võimatuks. Tõepoolest, kui alusringjoonte pöörlemine jätkuks, jääks hambuvate kõverate ühiseks punktiks ühe evolvendi algpunkt (punkt *b* joonisel 424). Ühine normaal N_0N_0 ei läbiks aga sel juhul enam hambumispoolust P_0, mistõttu varem hambuvate evolventide

poolt kindlaksmääratud ülekandesuhe enam ei kehtiks. Väljaspool teoreetilist hambumisjoont ei ole hambumise põhiteoreemi nõuded seega rahuldatud.

Ülal käsitleti kõrguses piiramata evolventide hambumist. Tegelikkuses hambuvad aga piiratud kõrgusega hambapaarid, millede seespool alusringjooni paiknevad jalaosad pole enam evolventsed. Olgu näiteks ratta *2* (joon. 424) hamba jala mitteevolventne osa kujundatud sirgena, mis algab evolvendi algpunktist M_0 ja kulgeb piki raadiust M_0O_2. Ratta *1* liikumisel ratta *2* suhtes liigub ratta *1* hamba serv (punkt *M*) piki suhtelist trajektoori γ, mis, nagu jooniselt näha, lõikub ülemise ratta hambajala meie poolt kujundatud mitteevolventsesse ossa. Kui rataste liikumine algab joonisel näidatud asendist, siis kiiluvad hambad paratamatult kinni juba pärast üsna väikest pööret. Juhul kui ratta *1* asemel oleks sama kujuga lõikeriist, siis lõikaks tema lõikeserva punkt *M* ratta *2* hambajalast välja joonisel 424 viirutatud osa, mistõttu hambajalg nõrgeneks. Ühtlasi aga lüheneks seejuures ka hambaprofiili evolventse osa pikkus, mis hambumise teooria seisukohalt on isegi olulisem.

Sisselõikeks nimetatakse hambumise teoorias nähtust, kus ühe ratta hambaprofiili otspunkti suhtelise liikumise trajektoor lõikub paarisratta hambaprofiili evolventse osaga.

Ülaltoodust võib järeldada, et evolventhambumine on võimalik ainult siis, kui lõikava hammasratta (lõikeriista) peaderingjoon läbib normaali *NN* enne punkti *B*, s. o. teoreetilise hambumisjoone piirides. Hambapeade suurema kõrguse puhul tekib sisselõige. Kuna tööriista hammaste mõõted on standardiga määratud ja hamba peade kõrgused iga mooduli piirides kõikidel lõikeriistadel võrdsed, siis teiste ühesuguste tingimuste puhul määrab sisselõike võimaluse punkti *B* asend normaalil *NN*. See sõltub aga ratta *2* mõõdetest ja järelikult tema hammaste arvust.

3°. Uurime nüüd, missugune on ratta vähim hammaste arv z_{min}, mille puhul sisselõiget veel ei esine. Selleks vaatleme piirjuhtu, kus peaderingjooned läbivad teoreetilise hambumissirge piirpunkte *A* ja *B*, s. t. kus kogu teoreetiline hambumissirge võtab tööst osa (joon. 424).

Oletame, et lõikava hammasratta hammaste arv on suurem kui lõigataval rattal.

Kui lõigatakse ratast *2*, siis lõikava ratta *1* peaderingjoone suurim raadius, mis veel sisselõiget ei põhjusta, on määratud seosega

$$O_1B = R_1 + \chi' m, \tag{11.41}$$

kus $\chi' m$ on hamba pea kõrgus h' [vt. § 52, valem (11.22)]. Rataste tsentritevahelise kauguse O_1O_2 määrab võrdus

$$O_1O_2 = R_1 + R_2, \tag{11.42}$$

lõigu O_2B pikkuse saame aga seosest

$$O_2B = R_2 \cos \alpha, \tag{11.43}$$

kus α tähistab hambumisnurka. Kolmnurgast O_1O_2B saame

$$O_1B^2 = O_1O_2^2 + O_2B^2 - 2O_1O_2 \cdot O_2B \cos \alpha.$$

Asetades O_1B, O_1O_2 ja O_2B asemele nende väärtused võrdustest (11.41)—(11.43), saame:

$$(R_1 + \chi' m)^2 = (R_1 + R_2)^2 + R_2^2 \cos \alpha - \\ - 2(R_1 + R_2) R_2 \cos^2 \alpha. \tag{11.44}$$

Võrrandi (11.44) mõlema poole jagamine R_2^2-ga annab

$$\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{\chi' m}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right)^2 + \cos^2 \alpha - 2\left(\frac{R_1}{R_2} + 1\right) \cos^2 \alpha. \tag{11.45}$$

Tõstes võrrandis (11.45) esile ülekandesuhte i_{21} absoluutväärtuse, mis antud juhul võrdub suure ratta algringjoone raadiuse suhtega väikese ratta algringjoone raadiusesse, s. t.

$$i_{21} = \frac{R_1}{R_2},$$

saame

$$\left(i_{21} + \chi' \frac{m}{R_2}\right)^2 = (i_{21} + 1)^2 + \cos^2 \alpha - 2(i_{21} + 1) \cos^2 \alpha.$$

Sulgude avamine ja sellele järgnevad elementaarsed teisendused annavad:

$$\frac{\chi' m}{R_2} = \sqrt{i_{21}^2 + (2i_{21} + 1) \sin^2 \alpha} - i_{21}. \tag{11.46}$$

Kuid teiselt poolt on teada, et

$$R_2 = \frac{m z_2}{2}.$$

Seda silmas pidades võime võrrandist (11.46) ilmutada ratta 2 hammaste arvu z_2, mis ülesande lähtetingimuste kohaselt on selle ratta hammaste arvu lubatavaks minimaalseks piiriks:

$$z_2 = z_{min} = \frac{2\chi'}{\sqrt{i_{21}^2 + (2i_{21} + 1) \sin^2 \alpha} - i_{21}}. \tag{11.47}$$

Korrutades nimetajat ja lugejat suurusega

$$\sqrt{i_{21}^2 + (2i_{21} + 1)\sin^2\alpha} + i_{21},$$

saame lõpptulemuseks:

$$z_2 = z_{min} = 2\chi' \frac{\sqrt{i_{21}^2 + (2i_{21} + 1)\sin^2\alpha} + i_{21}}{(2i_{21} + 1)\sin^2\alpha}. \qquad (11.48)$$

Valemitega (11.47) ja (11.48) arvutatakse väiksema hammasratta lubatav minimaalne hammaste arv *välishambumise* puhul.

Sisehambumisel kujuneb valem (11.48) järgmiseks:

$$z_2 = z_{min} = 2\chi' \frac{\sqrt{i_{21}^2 + (1 - 2i_{21})\sin^2\alpha} + i_{21}}{(2i_{21} - 1)\sin^2\alpha}. \qquad (11.49)$$

Lõpuks, hambumisel *latiga*, või hammaste lõikamisel lati profiili omava lõikeriistaga, on $i_{21} = \infty$ ja valem (11.48) annab sel puhul

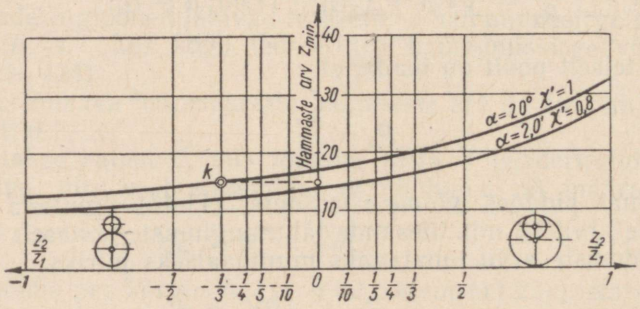
$$z_2 = z_{min} = 2\chi' \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{i_{21}^2} + \frac{2}{i_{21}}\right)\sin^2\alpha} + 1}{\left(2 + \frac{1}{i_{21}}\right)\sin^2\alpha} = \frac{2\chi'}{\sin^2\alpha}. \qquad (11.50)$$

Ei tule unustada, et valemites (11.48)—(11.50) on ülekandesuhte i_{21} absoluutväärtus alati suurem või võrdne ühega.

4°. Saadud valemid kehtivad nii normaalkõrgusega hammaste puhul, mil $\chi' = 1$, kui ka madalate hammaste puhul, mil $\chi' < 1$.

Nagu valemitest selgub, on z_{min} seda väiksem, mida väiksem on valitud hamba pea kõrguse tegur χ' ja mida suurem on hambumisnurk α.

Joonis 425 kujutab z_{min} sõltuvust ülekandesuhtest. Abstsisstel-

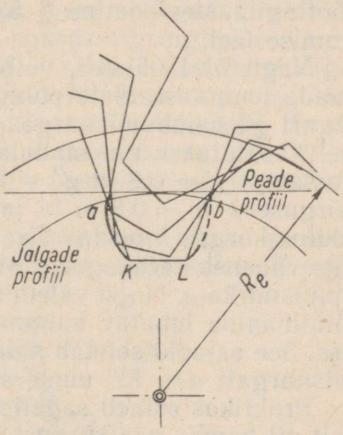


Joon. 425.

jele on kantud ülekandesuhte pöördväärtus $\frac{1}{i_{21}}$, ordinaatteljele — minimaalne hammaste arv z_{min}. Abstsisstelje positiivne suund vastab sisehambumisele, negatiivne suund — välishambumisele. Diagrammi ordinaatteljel asuvad punktid kehtivad hambumisel latiga. Diagramm on koostatud hamba pea kahe erineva kõrguse jaoks ($\chi' = 1$ ja $\chi' = 0{,}8$), kusjuures on eeldatud, et hambumisnurk $\alpha = 20°$.

Toodud diagrammi abil on lihtne leida z_{min} väärtust mitmesuguste ülekandesuhete puhul. Olgu näiteks ülesandeks leida z_{min} hammasülekandes, mille $i_{12} = -3$, $\alpha = 20°$ ja $\chi' = 1$. Kuna ülekandesuhe on negatiivne, siis on meil ilmselt tegemist välishambumisega. Otsime abstsissteljel antud ülekandesuhte pöördväärtuse $\frac{1}{i_{21}} = -\frac{1}{3}$. Ordinaatteljel vastab sellele punkt k. Nagu diagrammist selgub, on z_{min} ligikaudseks väärtuseks 15. Väiksemal rattal ei tohi seega olla vähem kui 15 hammast.

Hammasajamite projekteerimisel püütakse võimaluse piirides kasutada väikesi hammaste arvusid, kuna selle tagajärjel alaneb hammasrataste hind ja väheneb kogu mehhanismi gabariit ning kaal. Nagu jooniselt 425 selgub, on seda võimalik saavutada madalate hammaste kasutamisega, milledel $\chi' = 0{,}8$.



Joon. 426.

Ülekandesuhte i_{12} sama väärtuse juures on z_{min} sisehambumisel suurem kui välishambumisel. Sisehambumise puhul tuleb veel silmas pidada, et juhul, kui i_{21} läheneb ühele, võib suurema ratta kontakteeruva hamba naaberhammastel esineda sisselõige hamba pea piirkonnas. Hammasülekannetel, mille väiksema ratta hammaste arv on alla z_{min}, on sisselõigatud profiilid. Profiili kulgemist sisselõigatud osas saab konstrueerida, määrates vastasratta hambaservade K ja L suhtelise liikumise trajektoorid (joon. 426). Viimased osutuvad pikendatud epitsükloididdeks Ka ja Lb.

§ 58. Latiprofiili omava lõikeriistaga lõigatavate evolventrataste projekteerimisest

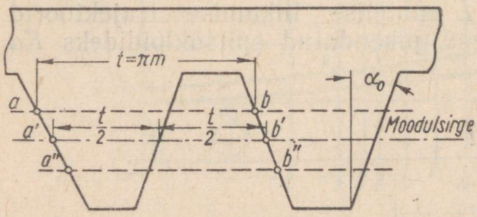
1°. § 52 toodud hammasrataste põhimõõdete määramise valemid kehtivad olukorras, kus standardne moodul on määratud ratta algringjoonel, mis omakorda ühtib jaotusringjoonega. See tingimus toob aga kaasa rea kitsendusi, mis raskendavad hammasrataste projekteerimist. Kitsendatud on näiteks hammaste arvu valikuvõimalused. Nagu varem märgitud, mõjub hammaste arvu vähendamine soodsalt hammasrataste maksumusele, vähendab kogu konstruktsiooni mõõteid jne. Kuid teiselt poolt võib hammaste arvu vähendamine tingida sisselõikumist, põhjustada intensiivsemat kulumist jms. Seetõttu tuleb olukorras, kus vähendatud hammaste arv on mingil põhjusel vajalik, lähtuda hammasrataste projekteerimisel teistest proportsioonidest.

Peamiseks ülesandeks on seejuures hammasratastele paremate töötingimuste loomine § 52 toodud proportsioonidest kõrvalekaldumise teel.

Nagu ülal näidati, võib erinevate proportsioonidega hambaid saada hammasrataste põhiparameetrite, nagu hamba pea kõrguse teguri χ', hambumisnurga α jt. muutmise teel. Mõningatel juhtudel kasutatakse nn. madalaid hambaid, mille kõrguse tegurid on vastavalt $\chi' = 0{,}8$ ja $\chi'' = 1{,}1$. Madalatel hammastel on seega pea kõrguseks $h' = 0{,}8\ m$ ja jala kõrguseks — $h'' = 1{,}1\ m$. Hamba üldine kõrgus h on tavalise 2,25 m asemel ainult 1,9 m. Seejuures aga väheneb kattetegur ε. Mõningatel juhtudel suurendatakse hambumisnurka α. Nagu valemist (11.47) võib järeldada, väheneb ratta minimaalne lubatav hammaste arv z_{min} hambumisnurga α kasvades. See asjaolu seletab muide üleminekut varemkasutatud hambumisnurgalt $\alpha = 15°$ uuele standardhambumisnurgale $\alpha = 20°$.

Praktikas esineb sageli veel olukordi, kus muudetakse üheaegselt nii hamba pea kõrgust kui ka hambumisnurka.

2°. Kaasajal lõigatakse hammasrattaid peamiselt rullumismenetlusel. Hammasratastele antakse sel juhul nõutavad parameetrid lihtsalt hambalõiketera (hammaslati) ja lõigatava ratta (tooriku) sobiva vastastikuse asendi valikuga.

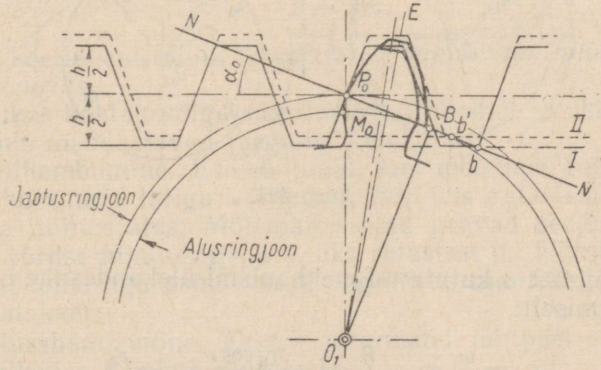


Joon. 427.

Juba varem selgitati, et juhul kui hammasrattaid valmistatakse rullumismenetlusel, veereb lõikeriist (s. o. hammaslatt) tooriku (s. o. lõigatava hammasratta) tsentroidil. Lõigates hammaslati hambaid peadesirgele paralleelsete sirgetega (joon. 427), selgub, et kõik kau-

gused ab, $a'b'$, $a''b''$, ... võrduvad hambumise sammuga $t = \pi m$. Igaühe nendest sirgetest võib seega valida hambalõiketera algsirgeks, mis veereb rullumisprotsessis ratta algringjoonel. Sõltuvalt algsirge valikust (kas ab või $a'b'$ või $a''b''$ ...) saadakse erineva paksusega hambad ja vastavalt erineva laiusega hambavahed. Valides algsirgeks lati hamba kõrgust poolitava sirgjoone, saadakse hammasrattad, mille hamba paksus ja hambavahe laius on omavahel võrdsed. Säärane hambumisjuht on näidatud joonisel 428 (peadesirge *I*). Joonisel on kujutatud hammaslatt asendis *I* ja selle latiga lõigatud ratta hamba profiil M_0E. Algringjoontel mõõdetud ratta hamba paksus võrdub algsirgel mõõdetud lati hambavahe laiusega. Kui nihutada latt asendist *I* asendisse *II*, muutub ratta hambavahe hamba paksusest kitsamaks. Hambaprofiil on seejuures kujundatud sama evolvendi järgi, mis enne nihutustki, kuid on oma ulatuselt suurem. Jooniselt on selgesti näha, et peadesirge ja hambumisjoone lõikepunkt b siirdub asendisse b', kui latti lõigatava hammasratta tsentrist eemale nihutada. Koos sellega väheneb ka sisselõikekoht hamba jalaosas. Hamba paksus algringjoonel suureneb, evolvendi kuju aga lati nihutusest ei sõltu. Nihutuseta lõigatud hammasrattaid nimetatakse *nullratasteks*. Tsentri poole nihutatud latiga lõigatud rattaid nimetatakse *miinusratasteks*. Tsentrist eemale nihutatud latiga lõigates saadakse *plussrattad*. Vastavalt sellele omistatakse ka lati nihutusele positiivne või negatiivne märk.

Ringjoont, millel latil valitud algsirge hammaste lõikamise protsessis veereb, nimetatakse ratta töötlemise *algringjooneks* ehk ratta



Joon. 428.

jaotusringjooneks (joon. 428). Seega võib rataste töötlemise algringjoon rataste hambumisel esineva algringjoonega üldjuhul mitte ühtida.

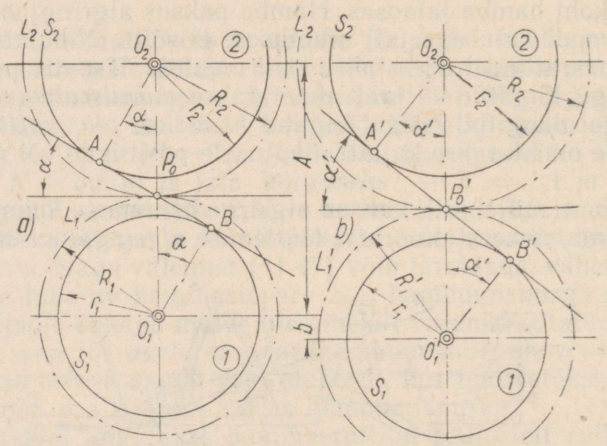
3°. Tõestame nüüd, et töötlemise algringjoone erinemine hambumisel esinevast algringjoonest ei muuda hambumise ülekandesuhet. See asjaolu rajaneb evolventhambumise järgmisel väga tähtsal omadusel.

Olgu kaks evolventhammastega ratast monteeritud nii (joon. 429, *a*), et nende tsentritevaheline kaugus

$$A = \frac{m}{2}(z_1 + z_2).$$

Hambumispoolus asugu seejuures punktis P_0 ja hambumisnurgaks olgu α.

Oletame nüüd, et ratta *1* telge nihutatakse pikkuse *b* võrra, kusjuures ratta tsenter tuleb asendisse O_1' (joon. 429, *b*). Hambumispoolus siirdub seetõttu punktist P_0 asendisse P_0' ja uueks hambumisnurgaks kujuneb α'. Vastavalt sellele muutuvad ka algringjooned, millede raadiusteks kujunevad R_1' ja R_2'.



Joon. 429.

Joonisel 429, *a* kujutatud mehhanismi ülekandesuhe i_{12} on määratud järgmiselt:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R_2}{R_1} = -\frac{r_2 \cos\alpha}{r_1 \cos\alpha} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Joonisel 429, *b* toodud mehhanismi ülekandesuhe i_{12}' avaldub analoogiliselt:

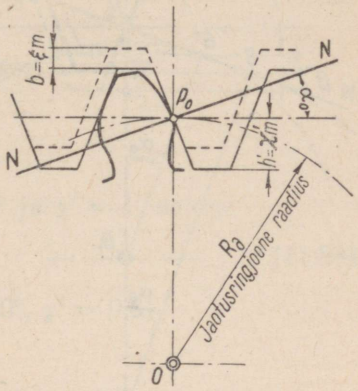
$$i'_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{R'_2}{R'_1} = -\frac{r_2 \cos\alpha'}{r_1 \cos\alpha'} = -\frac{r_2}{r_1}.$$

Sellest järgneb, et

$$i_{12} = i_{12}'.$$

Telgede vahe O_1O_2 muutmine ei mõjuta järelikult ülekandesuhet, mis sõltub otseselt alusringjoonte raadiuste r_2 ja r_1 vahelisest suhtest. Nimetatud raadiused on aga täielikult määratud kujundava hammaslati lõikeserva kaldenurgaga α_0 (joon. 428).

Kahest evolventhammastega rattast võib järelikult koostada erinevate telgedevahega hambumisi. Seejuures muutub hambumispooluse P_0 asend ja hambumisnurga α suurus. Siit võib ka järeldada, et algringjoonte raadiused on evolventhammastega ratastel määratud alles pärast rataste montaaži. See omadus võimaldab õigesse hambumisse viia kõiki ühe ja sama kujundava latiga lõigatud rattaid.



Joon. 430.

4°. Nagu ülal näidati, on sisselõike vältimine ja hammaste tugevdamine nende kuju muutmise teel üheks tähtsamaks probleemiks, millega konstruktorid hammasrataste projekteerimisel kokku puutuvad. Hammasratast lõikava kujundava lati *absoluutne nihutus* b (joon. 430) avaldatakse tavaliselt mooduli kaudu:

$$b = \xi m, \qquad (11.51)$$

kus ξ on koefitsient, mida nimetatakse *suhteliseks nihutuseks* ehk *nihutusteguriks*.

Praktikas kohtab kõige sagedamini alltoodud ratastekombinatsioone, mis moodustavad järgmisi hambumisi:

I) nullhambumine. Esineb juhul, kus mõlemad rattad on lõigatud nihutamata latiga või juhul, kus üks ratastest on pluss-, teine aga miinusratas. Mõlemad rattad peavad seejuures olema lõigatud võrdse nihutusega, s. t. üks ratastest on lõigatud teatava positiivse, teine aga sama suure negatiivse nihutusega (nihutuse kompensatsioon);

II) plusshambumine. Esineb järgmistel juhtudel:

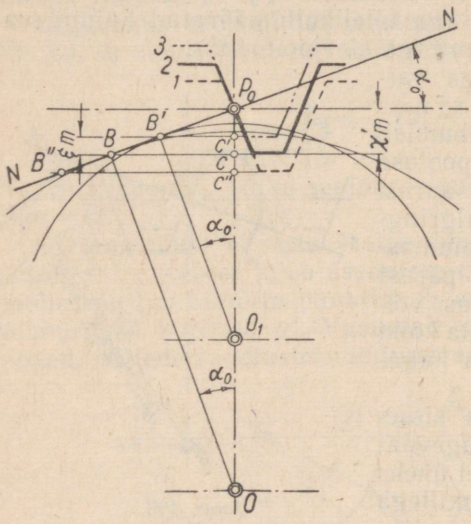
1) nullratas hambub plussrattaga;

2) plussratas hambub plussrattaga;

3) plussratas hambub miinusrattaga, kusjuures plussratta nihutuse absoluutväärtus on suurem kui miinusrattal.

Kõiki teisi võimalikke kombinatsioone kasutatakse võrdlemisi harva.

5°. Uurime nüüd lati nihutusteguri ξ ja lõigatava ratta minimaalse lubatud hammaste arvu vahelist seost. Oletame, et hammaslatt, mille kujundava sirge kaldenurk on α_0, paikneb asendis *1* (joon. 431). Lati peadesirge lõikub sel juhul hambumisjoonega NN punktis B'' ja lõigatava hamba jalaosas tekib sisselõige. Nihutame hammaslati tsentrist eemale nii, et lati peadesirge läbiks teoreetilise hambumisjoone piirpunkti B (asend *2*). Hambumispoolus jääb seejuures endiseks. Sisselõiget käesoleval juhul ei teki ja minimaalne hammaste arv, mida lõigata võib, on antud valemiga (11.50):



Joon. 431.

$$z_{min} = \frac{2\chi'}{\sin^2 \alpha_0}.$$

Nihutame lati tsentrist veelgi kaugemale, asendisse *3*. Olgu ξm vastavaks nihutuse väärtuseks. Lati hammaste peadesirge läbib sel juhul punkti B' ja lõigatav hammaste arv z võib järelikult olla valemiga (11.50) antavast väärtusest z_{min} väiksem.

Tuletame seose z_{min}, z ja ξ vahel. Kuna me eeldasime, et lati nihutamisel jääb hambumispoolus endiseks, siis järgneb jooniselt 431, et pärast nihutust on alusringjoone tsentri asend määratud punktis B' hambumisjoonele NN konstrueeritud normaali ja sirge P_0O lõikumisega punktis O_1.

Kolmnurkade sarnasusest järgneb, et

$$\frac{P_0C}{P_0C'} = \frac{OB}{O_1B'}.$$

Kuna

$$P_0C = \chi' m, \quad P_0C' = \chi' m - \xi m,$$

$$OB = OP_0 \cos \alpha_0 = \frac{mz_{min}}{2} \cos \alpha_0,$$

$$O_1B' = O_1P_0 \cos \alpha_0 = \frac{mz}{2} \cos \alpha_0,$$

siis saame asendamise teel

$$\frac{\chi' m}{\chi' m - \xi m} = \frac{z_{min}}{z}$$

ehk

$$\frac{\chi'}{\chi' - \xi} = \frac{z_{min}}{z}.$$

Viimasest järgneb, et

$$\xi = \frac{\chi'(z_{min} - z)}{z_{min}}, \qquad (11.52)$$

kus z_{min} on arvutatud valemiga (11.50):

$$z_{min} = \frac{2\chi'}{\sin^2 \alpha_0}.$$

Standardlati puhul, millel $\alpha_0 = 20°$ ja $\chi' = 1$, saame

$$z_{min} = 17. \qquad (11.53)$$

Madalate hammaste puhul ($\alpha_0 = 20°$, $\chi' = 0{,}8$)

$$z_{min} = 14.$$

Olukorras, kus $\alpha_0 = 15°$ ning $\chi' = 1$, saame

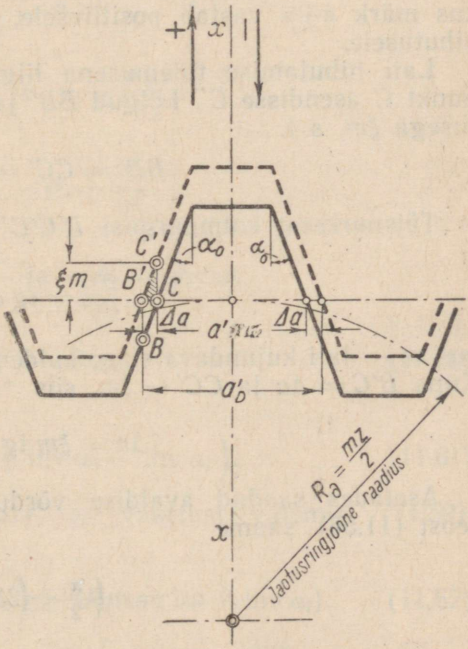
$$z_{min} = 30.$$

Valem (11.52) kujuneb standardlati puhul seega järgmiseks:

$$\xi = \frac{17 - z}{17}. \qquad (11.54)$$

Selle valemiga saab arvutada nihutusteguri väärtuse, mis väldib igasuguse sisselõike soovitud hammaste arvuga rattal. Valem kehtib juhul, kui $\alpha_0 = 20°$ ja $\chi' = 1$.

Praktikas on lubatud teatav väike sisselõige, mille juures hamba evolventse osa lühenemine on tähtsusetu. Sel juhul kasutatakse nihutusteguri arvu-



Joon. 432.

tamiseks valemit

$$\xi = \frac{14 - z}{17}. \tag{11.55}$$

6°. Käsitleme nüüd nihutatud latiga lõigatud hammasrataste põhimõõdete määramist. Alustame hamba paksuse arvutamisega. Nullhamba ($\xi = 0$) paksus a' algringjoonel on antud järgmise valemiga (joon. 432):

$$a' = \frac{t}{2} = \frac{\pi m}{2}. \tag{11.56}$$

Paksus a' vastab lati hambavahe laiusele, mis on mõõdetud töötlemise algringjoonel (jaotusringjoonel) libisemata veereval sirgel. Meenutame, et töötlemise algringjoon ühtib käesoleval juhul ratta algringjoonega. Anname hammaslatile x-telje suunas nihutuse ξm (joon. 432 kriipsjoonega näidatud asend). Ratta hamba paksus (või kujundava lati hambavahe laius) jaotusringjoonel on sedapuhku määratud järgmiselt:

$$a_0' = a' \pm 2\Delta a, \tag{11.57}$$

kus märk «+» vastab positiivsele, märk «—» aga negatiivsele nihutusele.

Lati nihutamise tulemusena liigub punkt B asendisse B' ja punkt C asendisse C'. Lõigud BB' ja CC' võrduvad ilmselt nihutusega ξm, s. t.

$$BB' = CC' = \xi m.$$

Täisnurksest kolmnurgast $B'C'C$ saame

$$\frac{B'C}{CC'} = \operatorname{tg} \alpha_0,$$

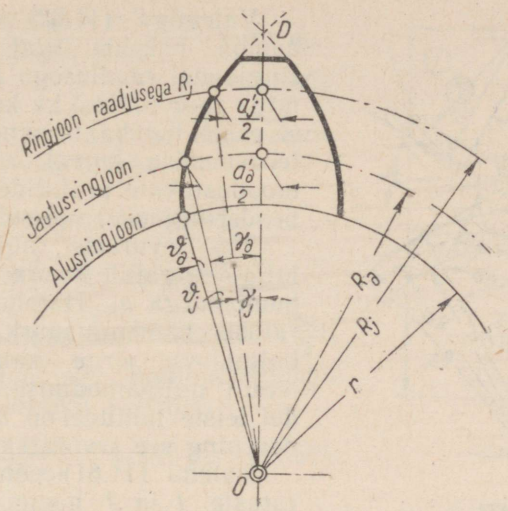
kus α_0 — lati kujundava sirge kaldenurk — võrdub tavaliselt 20°. Kuna $B'C = \Delta a$ ja $CC' = \xi m$, siis

$$\Delta a = \xi m \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{11.58}$$

Asetades saadud avaldise võrdusesse (11.57) ja arvestades seost (11.56), saame

$$a_0' = m\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0\right). \tag{11.59}$$

Hamba paksus a_j' meelevaldsel ringjoonel raadiusega R_j mää-



Joon. 433.

ratakse järgmiselt. Jooniselt 433 võib kirjutada:

$$\vartheta_j + \gamma_j = \vartheta_\partial + \gamma_\partial;$$

et aga

$$\gamma_j = \frac{a'_j}{2R_j} \quad \text{ja} \quad \gamma_\partial = \frac{a'_\partial}{2R_\partial},$$

siis

$$\vartheta_j + \frac{a'_j}{2R_j} = \vartheta_\partial + \frac{a'_\partial}{2R_\partial}.$$

Valem (11.29) põhjal

$$\vartheta_j = \text{inv}\,\alpha_j \quad \text{ja} \quad \vartheta_\partial = \text{inv}\,\alpha_0.$$

Seega

$$\frac{a'_j}{2R_j} + \text{inv}\,\alpha_j = \frac{a'_\partial}{2R_\partial} + \text{inv}\,\alpha_0, \tag{11.60}$$

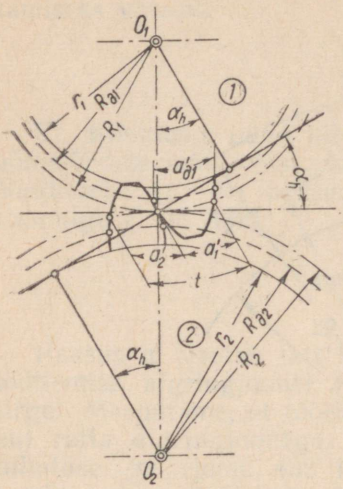
millest järgneb, et

$$a_j' = 2R_j\left(\frac{a'_\partial}{2R_\partial} + \text{inv}\,\alpha_0 - \text{inv}\,\alpha_j\right). \tag{11.61}$$

Asetades valemisse (11.61) a_∂' väärtuse valemist (11.59), saame lõplikul kujul

$$a_j' = m\frac{R_j}{R_\partial}\left(\frac{\pi}{2} \pm 2\xi\,\text{tg}\,\alpha_0\right) + 2R_j(\text{inv}\,\alpha_0 - \text{inv}\,\alpha_j). \tag{11.62}$$

Nurk α_j leitakse seosest $\cos\alpha_j = -\frac{r}{R_j}$ (joon. 433).



Joon. 434.

Valemiga (11.62) võib arvutada hamba paksust igal meelevaldsel ringjoonel raadiusega R_j. Selle valemiga saab ühtlasi ka kontrollida, kas ei esine hamba teravnemist. Hamba teravnemise korral asub hammast moodustavate profiilide lõikepunkt D peaderingjoonel või selle sees.

7°. Arvutame nüüd nihutatud latiga lõigatud hammasrataste hambumisnurga α_h. Hambumises olevate rataste hambumisnurk α_h ühtib lati kujundava sirge kaldenurgaga α_0 ainult nullhambumise puhul. Kõikidel teistel juhtudel on α_h väärtus erinev ning see arvutatakse järgmiselt.

Valemi (11.61) põhjal avalduvad rataste *1* ja *2* hammaste paksused a_1' ja a_2' algringjoontel (joon. 434) järgmisel kujul:

$$a_1' = 2R_1\left(\frac{a'_{\partial 1}}{2R_{\partial 1}} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_h\right),$$
$$a_2' = 2R_2\left(\frac{a'_{\partial 2}}{2R_{\partial 2}} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_h\right), \qquad (11.63)$$

kus $a'_{\partial 1}$ ja $a'_{\partial 2}$ tähistavad vastavalt rataste *1* ja *2* hammaste paksusi jaotusringjoontel raadiustega $R_{\partial 1}$ ja $R_{\partial 2}$.

Külglõtkuta hambumisel võrdub ühe ratta hamba paksus algringjoonel teise ratta hambavahega, s. t.

$$a_1' + a_2' = t = \frac{2\pi R_1}{z_1} = \frac{2\pi R_2}{z_2}. \qquad (11.64)$$

Asetades võrrandisse (11.64) a_1' ja a_2' asemele vastavad väärtused valemitest (11.63), saame

$$\frac{2\pi R_1}{z_1} = 2R_1\left(\frac{a'_{\partial 1}}{2R_{\partial 1}} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_h\right) +$$
$$+ 2R_2\left(\frac{a'_{\partial 2}}{2R_{\partial 2}} + \operatorname{inv}\alpha_0 - \operatorname{inv}\alpha_h\right). \qquad (11.65)$$

Silmas pidades, et

$$R_2 = R_1\frac{z_2}{z_1} \quad \text{ja} \quad R_{\partial 2} = R_{\partial 1}\frac{z_2}{z_1},$$

võime võrrandist (11.65) pärast lihtsaid teisendusi ilmutada inv α_h:

$$\text{inv}\,\alpha_h = \frac{(a'_{\partial 1} + a'_{\partial 2})\,z_1 - 2\pi R_{\partial 1}}{2R_{\partial 1}(z_1 + z_2)} + \text{inv}\,\alpha_0. \tag{11.66}$$

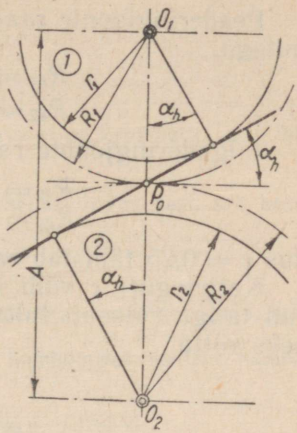
Asendades veel $a'_{\partial 1}$ ja $a'_{\partial 2}$ valemi (11.59) põhjal väärtusega

$$a'_{\partial 1} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_1 \operatorname{tg}\alpha_0\right),$$

$$a'_{\partial 2} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_2 \operatorname{tg}\alpha_0\right);$$

ja pannes raadiuse $R_{\partial 1}$ asemele $\frac{mz_1}{2}$, saame hambumise hambumisnurga määramiseks lõpliku valemi:

$$\text{inv}\,\alpha_h = \frac{2(\xi_1 + \xi_2)\operatorname{tg}\alpha_0}{(z_1 + z_2)} + \text{inv}\,\alpha_0. \tag{11.67}$$



Joon. 435.

Valemist (11.67) selgub, et nullhambumise hambumisnurk α_h võrdub kujundava lati hambumisnurgaga α_0. Tõepoolest, kui mõlemad rattad on nullrattad, kehtib tingimus $\xi_1 = \xi_2 = 0$. Valem (11.67) annab sel juhul

$$\text{inv}\,\alpha_h = \text{inv}\,\alpha_0.$$

Juhul kui on tegemist võrdselt nihutatud nullratastega, s. t., kui $\xi_1 = -\xi_2$, saame valemist (11.67) jällegi

$$\text{inv}\,\alpha_h = \text{inv}\,\alpha_0.$$

Nihutatud latiga lõigatud ratastest koostatud hambumise (nn. korrigeeritud hambumise) telgede vahe saadakse jooniselt 435:

$$A = O_1O_2 = O_1P_0 + O_2P_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos\alpha_h}.$$

Kui hambumisnurk on α_0, siis vastav telgede vahe oleks

$$A_0 = \frac{r_1 + r_2}{\cos\alpha_0}.$$

Järelikult

$$A = A_0\,\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_h}$$

ehk, kuna $A_0 = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)$ (vt. § 52, 3°), siis

$$A = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)\,\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_h}. \tag{11.68}$$

Peaderingjoonte raadiused R_{e1} ja R_{e2} on antud järgmiste valemitega:

$$R_{e1} = A - R_{\partial 2} - \xi_2 m + \chi' m, \tag{11.69}$$

$$R_{e2} = A - R_{\partial 1} - \xi_1 m + \chi' m. \tag{11.70}$$

Jalgaderingjoonte raadiused R_{i1} ja R_{i2} arvutatakse valemitega

$$R_{i1} = R_{\partial 1} - \chi'' m + \xi_1 m - cm, \tag{11.71}$$

$$R_{i2} = R_{\partial 2} - \chi'' m + \xi_2 m - cm, \tag{11.72}$$

kus $c = 0{,}25$ tähistab radiaallõtku tegurit.

Katteteguri ε võib leida valemiga (11.39), kusjuures nihutatud latiga ratastel tuleb algringjoonel mõõdetud sammu väärtuseks võtta

$$t = \frac{\pi m \cos \alpha_0}{\cos \alpha_h}.$$

Vastavalt sellele tuleb nurk α valemis (11.39) asendada nurgaga α_h.

Katteteguri valem kujuneb seega järgmiseks:

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R^2_{e_1} - r_1^2} + \sqrt{R^2_{e_2} - r_2^2} - A \sin \alpha_h}{\pi m \cos \alpha_0}. \tag{11.73}$$

Evolventhambumise geomeetriat on üksikasjaliselt käsitletud järgmistes teostes: В. А. Гавриленко «Геометрическая теория эвольвентных зубчатых передач», Машгиз, 1942; Т. С. Жегалова «Геометрия эвольвентного профиля», Машгиз, 1952; В. Н. Кудрявцев «Графоаналитический способ расчета передач с цилиндрическими зубчатыми колесами», Машгиз, 1949; А. И. Петрусевич «Зубчатые и червячные передачи», Энциклопедический справочник «Машиностроение» 2. köide, lk. 212 [1].

Näide 8. Arvutada lati nihutus $b = \xi m$, mis on vajalik hammasratta lõikamiseks, mille $z = 10$ ja $m = 10$ (joon. 430). Hammaslati kujundava sirge kaldenurk $\alpha_0 = 20°$, hamba pea kõrguse tegur $\chi' = 1$. Nihutusteguri arvutamiseks kasutame valemit (11.54):

$$\xi = \frac{17 - z}{17} = \frac{17 - 10}{17} = \frac{7}{17}.$$

Nihutuse absoluutväärtus saadakse valemist (11.51):

$$b = \xi m = \frac{7}{17} \cdot 10 \approx 4{,}12 \text{ mm}.$$

Näide 9. Arvutada sirgete hammastega silinderratastest koosnev hambumine nii, et hamba jalaosas ei esineks sisselõiget. Lähteandmed on järgmised:

[1] Lisaks loetletud teostele on viimasel ajal ilmunud veel rida evolventhambumist käsitlevaid raamatuid, muuhulgas ka prof. V. A. Gavrilenko raamatu teine väljaanne. Eestikeelsest kirjandusest võib soovitada teose «Masinaelemendid» XII osa: H. Lepikson ja E. Soonvald «Hammasajamid», ERK, Tallinn, 1955.

Hammaste arvud $z_1 = 12$, $z_2 = 36$.
Lõikeriista moodul $m = 10$ mm.
Hamba pea ja jala kõrguse tegurid

$$\chi' = \chi'' = \chi = 1.$$

Hambumisnurk hamba lõikamisel (s. o. lati kujundava sirge kaldenurk) $\alpha_0 = 20°$.
Radiaallõtku tegur $c = 0{,}25$.
Arvutuse käik:
1. Valime nihutustegurid ξ_1 ja ξ_2, lähtudes sisselõiketingimusest, s. t. kasutades valemit (11.54):

$$\xi_1 = \frac{17 - z_1}{17} = +0{,}294.$$

Kuna teise ratta hammaste arv $z_2 > 17$, siis pole siin sisselõiget karta, mistõttu võtame $\xi_2 = 0$.
2. Määrame valemi (11.67) abil külglõtkuta hambumises kehtiva hambumisnurga:

$$\text{inv } \alpha_h = \frac{2(\xi_1 + \xi_2)\operatorname{tg}\alpha_0}{z_1 + z_2} + \text{inv } \alpha_0 = 0{,}019355;$$

evolventfunktsioonide tabelist leiame, et

$$\alpha_h = 21°45'.$$

3. Arvutame nüüd telgede vahe A, kasutades valemit (11.68). Saame

$$A = \frac{m}{2}(z_1 + z_2)\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_h} = 242{,}78 \text{ mm}.$$

4. Leiame jaotusringjoonte raadiused $R_{\partial 1}$ ja $R_{\partial 2}$:

$$R_{\partial 1} = \frac{mz_1}{2} = 60 \text{ mm}; \quad R_{\partial 2} = \frac{mz_2}{2} = 180 \text{ mm}.$$

5. Arvutame valemitega (11.69) ja (11.70) peaderingjoonte (s. o. ühtlasi ka toorikute) raadiused R_{e1} ja R_{e2}.

$$R_{e1} = A - R_{\partial 2} - \xi_2 m + \chi m = 242{,}78 - 180 + 10 = 72{,}78 \text{ mm},$$

$$R_{e2} = A - R_{\partial 1} - \xi_1 m + \chi m = 242{,}78 - 60 - 2{,}94 + 10 = 189{,}84 \text{ mm}.$$

6. Määrame alusringjoonte raadiused r_1 ja r_2. Saame:

$$r_1 = R_{\partial 1}\cos\alpha_0 = 60 \cdot 0{,}94 = 56{,}4 \text{ mm},$$

$$r_2 = R_{\partial 2}\cos\alpha_0 = 180 \cdot 0{,}94 = 175{,}2 \text{ mm}.$$

7. Kontrollime, kas väiksema ratta hammas ei kujune teravaks. Selleks arvutame valemiga (11.62) hamba paksuse peaderingjoonel a_{e1}, silmas pidades, et seekord

$$R_j = R_{e1} \text{ ja } \alpha_j = \alpha_{e1}.$$

Nurk α_{e1} saadakse seosest

$$\cos\alpha_{e1} = \frac{r_1}{R_{e1}} = \frac{56{,}4}{72{,}78} = 0{,}776.$$

Trigonomeetriliste funktsioonide tabelist leiame, et

$$\alpha_{e1} = 39°11'.$$

Evolventfunktsioonide tabelid annavad vastavalt sellele $\text{inv } \alpha_{e1} = 0{,}1312$.
Otsitav hamba paksus saadakse seega valemist

$$a_{e1} = m\frac{R_{e1}}{R_{\partial 1}}\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi_1 \operatorname{tg}\alpha_0\right) + 2R_{e1}(\text{inv } \alpha_0 - \text{inv } \alpha_{e1}) = 4{,}7 \text{ mm}.$$

Hamba paksus peaderingjoonel ei võrdu järelikult nulliga, s. t. hammas ei ole terav[1].

8. Arvutame **nüüd** jalgaderingjoonte raadiused R_{i1} ja R_{i2}, kasutades valemeid (11.71) ja (11.72):

$$R_{i1} = R_{\partial 1} - \chi m + \xi_1 m - cm = 60 - 10 + 2{,}94 - 2{,}5 = 50{,}44 \text{ mm.}$$

$$R_{i2} = R_{\partial 2} - \chi m + \xi_2 m - cm = 180 - 10 - 2{,}5 = 167{,}5 \text{ mm.}$$

9. Lõpuks leiame veel katteteguri ε.
Valem (11.73) annab

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{R^2_{e1} - r^2_1} + \sqrt{R^2_{e2} - r^2_2} - A \sin \alpha_h}{\pi m \cos \alpha_0} = 1{,}43.$$

§ 59. Tsükloidprofiilide projekteerimine

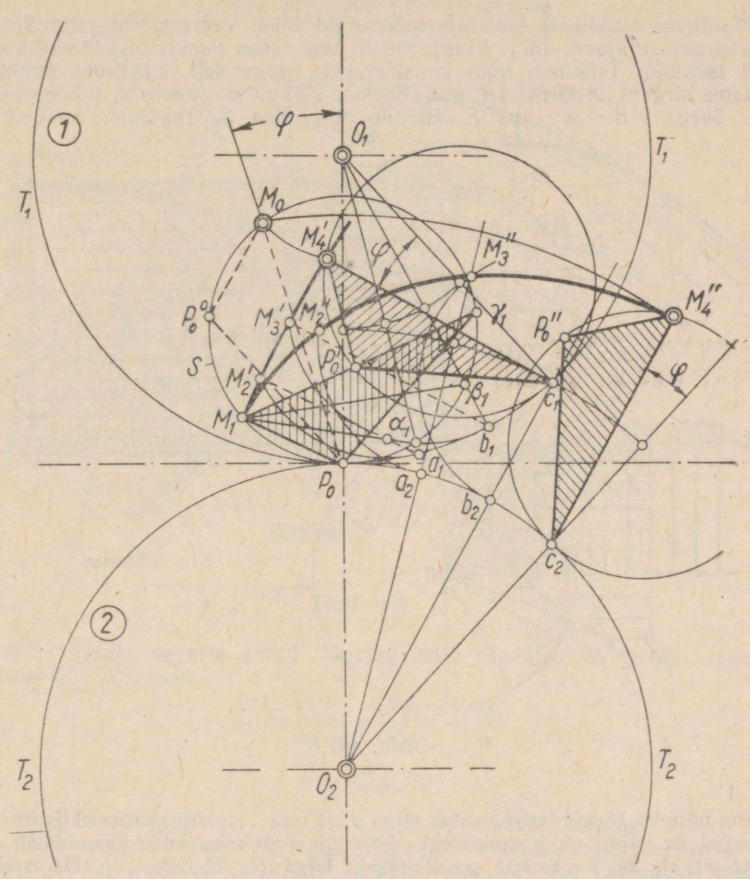
1°. Ülal (§ 27, 3°) näidati, et kaasmähiskõveraid võib konstrueerida kui kaastsentroididel libisemata veereva abikõvera mingi punkti rulette. Käsitleme alljärgnevas, kuidas rakendada abikõverate rulette nn. *tsükloidprofiilide* kujundamisel.

Olgu antud kahe ümmarguse silinderratta tsentroidid T_1 ja T_2 (joon. 436). Joonestame abiringjoone (abikõvera) S, mis puutub tsentroide T_1 ja T_2 punktis P_0. Valime abiringjoonel meelevaldse punkti M ja määrame selle trajektoori $M_1M'_2M'_3 \ldots$ olukorras, kus abiringjoon veereb libisemata tsentroidil T_1. Kuna veeremine toimub libisemata, siis kaared P_0a_1, $a_1\beta_1$, $\beta_1\gamma_1 \ldots$ võrduvad vastavalt kaartega P_0a_1, a_1b_1, b_1c_1, ... Teiseks määrame punkti M trajektoori $M_1M''_2M''_3 \ldots$, mis tekiks juhul, kui abiringjoon S veereks libisemata tsentroidil T_2. Kaared $P_0\alpha_1$, $\alpha_1\beta_1$, $\beta_1\gamma_1$, ... võrduksid sel juhul vastavalt kaartega P_0a_2, a_2b_2, b_2c_2, ...

Näitame, et tsentroidile T_1 kuuluv kõver $M_1M'_2M'_3M'_4 \ldots$ ja tsentroidile T_2 kuuluv kõver $M_1M''_2M''_3M''_4 \ldots$ on kaasmähisjooned. Ühendades punktid M_1, P_0 ja γ_1 omavahel sirgetega, saame kolmnurga $M_1\gamma_1P_0$. Hetkel, mil punkt γ_1 ühtib punktiga c_1, asub nimetatud kolmnurk asendis $M'_4c_1P'_0$. Kaar P'_0c_1 võrdub ülaltoodud tingimuse kohaselt kaarega $P_0\gamma_1$. Edasi võib näidata, et kõvera $M_1M''_2M''_3M''_4 \ldots$ mingi punkt M''_4 on mähkija punkt, mis vastab mähitava kõvera $M_1M'_2M'_3M'_4 \ldots$ punktile M'_4. Selleks ühendame omavahel sirgetega punktid M''_4, P''_0 ja c_2. Tulemuseks saame kolmnurga $M''_4c_2P''_0$, mis võrdub varemkonstrueeritud kolmnurgaga $M_1\gamma_1P_0$. Tõepoolest, konstruktsiooni põhjal $\smile c_2P''_0 = \smile P_0c_2 = \smile P_0c_1 = \smile P_0\gamma_1$, lõigud M''_4c_2 ja $M_1\gamma_1$ on omavahel võrdsed ning kolmnurkade tipud asuvad võrdse läbimõõduga ringjoontel S' ja S''. Sirged $c_2M''_4$ ja $c_1M'_4$ on kõverate $M_1M'_2M'_3M'_4 \ldots$ ja $M_1M''_2M''_3M''_4 \ldots$ normaalideks, moodustades sirgetega O_1c_1 ja O_2c_2 ühe ja sama nurga φ. Seetõttu hetkel, mil tsentroidide T_1 ja T_2 punktid c_1 ja c_2 omavahel kontakteeruvad, ühtivad normaalid $c_2M''_4$ ja $c_1M'_4$ ja kõverad $M_1M'_2M'_3M'_4 \ldots$ ning $M_1M''_2M''_3M''_4 \ldots$ loovad omavahel kontakti punktides M'_4 ja M''_4. Analoogiliselt saab näidata, et järjestikku kontakteeruvad omavahel ka kõverate $M_1M'_2M'_3 \ldots$ ja $M_1M''_2M''_3 \ldots$ ülejäänud punktid. Kõveratele kontaktpunktis konstrueeritud normaalid ühtivad seejuures omavahel ja läbivad alati punkti P_0. Ringjoone S veeremisel tekkivad kõverad — punkti M ruletid $M_1M'_2M'_3M'_4 \ldots$ ja $M_1M''_2M''_3M''_4 \ldots$ — on seega kaasmähisjooned.

---

[1] Praktikas loetakse hammas lubamatult teravaks juba siis, kui $a_e <$ $<$ (0,3 ... 0,5) m. — *Tõlk.*



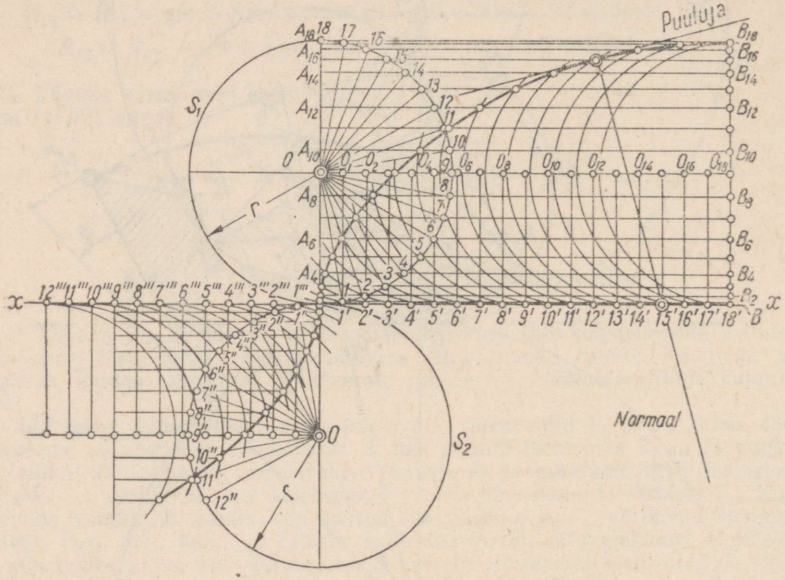
Joon. 436.

Pole raske näidata, et käsitletavate kaasprofiilide hambumisjooneks kujuneb ringjoon S. Tõepoolest, selleks et leida näiteks hambumisjoone punkti M_0, kus kontakteeruvad punktid M'_4 ja M''_4, tuleb ühtimisele viia ringjooned S' ja S''. Tänu ringjoonte S, S', S'', kolmnurkade $P'_0c_1M'_4$, $P''_0c_2M''_4$ ja nurkade φ võrdsusele langevad ringjoonte ühtimisel omavahel kokku punktid M'_4, M''_4 ja ringjoonel S asuv punkt M_0. Ülalnimetatud kolmnurkade ühtimisasend ringjoonel S on joonisel 436 tähistatud tähtedega $P_0P^0_0M_0$. Punktide M_1, M_2, M_3, M_4, ... kontakteerumisele vastavaid hambumisjoone punkte saab alati leida alljärgneval viisil. Olgu näiteks ülesandeks leida hambumisjoone punkt, kus kontakteeruvad rulettide punktid M'_4 ja M''_4. Selleks tõmbame tsentrist O_1 ringjoone kaare raadiusega $O_1M'_4$ ja tsentrist O_2 ringjoone kaare, mille raadiuseks on $O_2M''_4$. Nimetatud kaared lõikuvad omavahel punktis M_0, mis asub ringjoonel S.

Mitteümmarguste tsentroidide ja meelevaldselt valitud abikõverate puhul võib kaasmähiskõverate leidmiseks kasutada analoogilisi konstruktsioone.

2°. Tsükloidhambumiseks nimetatakse säärast hambumist, mille korral hambaprofiilid on kujundatud tsükliliste kõveratena.

Vaatleme tsükliliste kõverate mõningaid liike. Veeregu ringjoon S_1 libisemata sirgel xx (joon. 437). Ringjoone S_1 mis tahes punkti trajektooriks on sel juhul tsükloid. Tsükloidi võib konstrueerida järgmiselt. Lähtudes punktist A kanname sirgele xx lõigu AB, mille pikkus võrdub ringjoone S_1 poole perimeetriga. Seega $AB = \pi r$, kus r tähistab ringjoone S_1 raadiust. Saadud lõigu



Joon. 437.

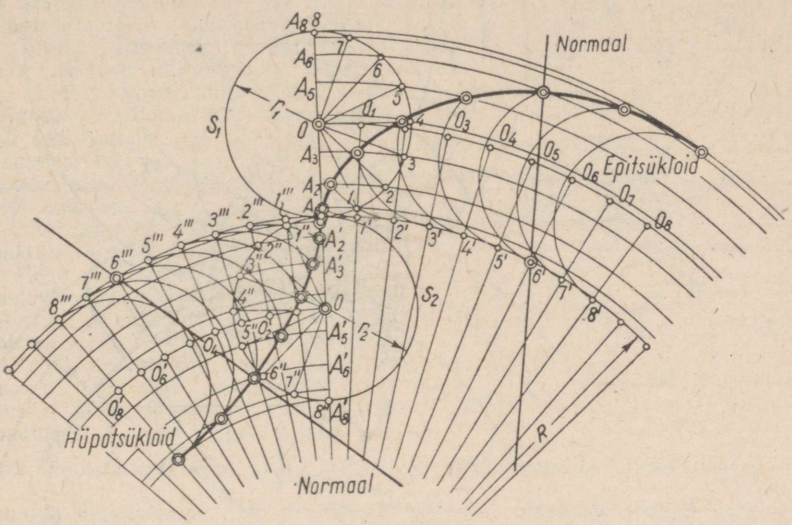
jagame näiteks 18 võrdseks osaks. Olgu $1'$, $2'$, $3'$, ..., $18'$ vastavad jaotuspunktid sirgel xx. Nimetatud punktidest püstitame ristsirged kuni lõikumiseni punktist O sirgele xx tõmmatud paralleeliga. Olgu O_1, O_2, O_3, ..., O_{18} vastavad lõikepunktid. Seepeale jagame poole ringjoone S_1 perimeetrist 18-ks võrdseks kaareks. Saame jaotuspunktid 1, 2, 3, ..., 18, millest lähtudes joonestame veel xx-ga paralleelselt kulgevad sirged A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...

Kasutades nüüd raadiusena pikkust r, tõmbame tsentritest O_1, O_2, O_3, ... lähtudes ringjoonekaari kuni lõikumiseni vastavate paralleelidega A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... Saadud lõikepunktid kuuluvad konstrueeritavale tsükloidile. Tsükloidi mis tahes punktis tõmmatud normaal läbib alati vastavas asendis oleva kujundava ringjoone S_1 ja sirge xx puutepunkti. Kui veeretada sirgel xx ringjoont S_2, saadakse analoogiliselt teine tsükloid. Kirjeldatud viisil konstrueeritud tsükloidide teatavaid lõikusid võib kasutada hammaste profileerimiseks.

3°. Ringjoonel raadiusega R libisemata veereva kujundava ringjoone S_1 iga punkt moodustab tsüklilise kõvera, mida nimetatakse *epitsükloidiks*. Juhul kui ringjoon S_1 veereb libisemata alusringjoone sees, tekib *hüpotsükloidiks* nimetatav tsükliline kõver. Epi- ja hüpotsükloidi konstrueerimine on analoogiline tsükloidi konstrueerimisega (vt. joon. 438).

Tsükloidhambumise profileerimisel kasutatakse tsükloidide, epitsükloidide ja hüpotsükloidide teatavaid lõikusid.

4°. Käsitleme nüüd välishambumisega tsükloidhammasrataste profileerimist.



Joon. 438.

Olgu ülekandesuhe i_{12} ette antud. Algringjoonte raadiuste R_1 ja R_2 arvutamiseks kasutame valemeid

$$i_{12}=\frac{\omega_1}{\omega_2}=-\frac{R_2}{R_1}=-\frac{z_2}{z_1}$$

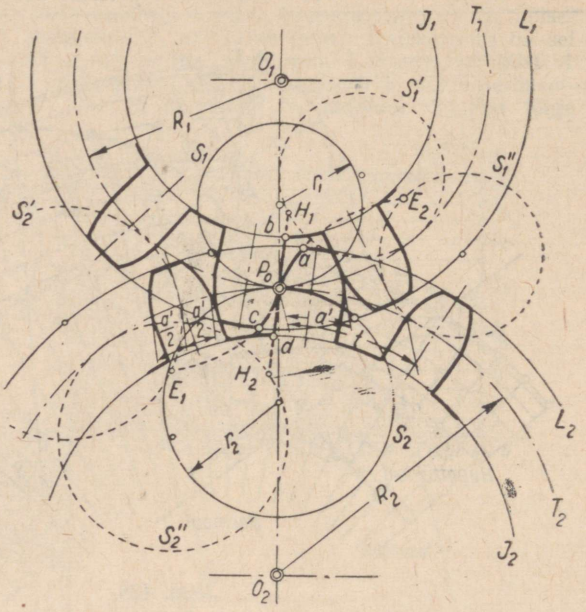
ja

$$A=R_1+R_2,$$

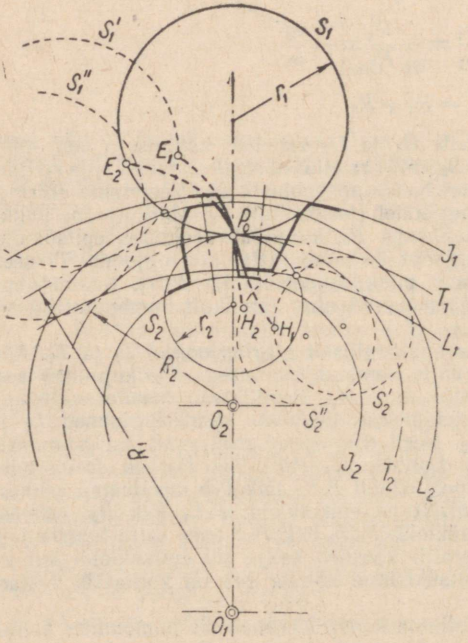
kus A tähistab algringjoonte tsentrite O_1 ja O_2 vahelist kaugust (joon. 439). Valime nüüd kaks abiringjoont S_1 ja S_2, mille raadiused olgu vastavalt r_1 ja r_2. Puutugu need abiringjooned algringjooni hambumispooluses P_0. Veeretame abiringjoont S_1 libisemata teise ratta algringjoonel (tsentroidil) T_2. Abiringjoone punkt, mis lähteasendis ühtis hambumispoolusega P_0, kujundab seejuures epitsükloidi P_0E_2. Kui veeretada sama abiringjoont esimese ratta algringjoone T_1 sees, siis kujundab abiringjoone vaadeldav punkt hüpotsükloidi P_0H_1. Saadud epitsükloid ja hüpotsükloid on kaasmähiskõverad ning järelikult hambaprofiilidena kasutatavad.

Teist abiringjoont S_2 veeretame analoogiliselt algringjoontel T_1 ja T_2. Abiringjoone punkt, mis lähteasendis ühtis hambumispoolusega P_0, kujundab seejuures epitsükloidi P_0E_1 ja hüpotsükloidi P_0H_2. Profiilidena kasutatavate epitsükloidi ja hüpotsükloidi lõikude leidmiseks tõmbame peaderingjooned L_1 ja L_2, ning jalgaderingjooned J_1 ja J_2. Need ringjooned määravad ära hammaste tegelikud, nn. praktilised profiilid. Epitsükloidi P_0E_2 lõik P_0a on seega teise ratta hamba pea profiiliks, kuna hüpotsükloidi P_0H_1 lõik P_0b moodustab esimese ratta hamba jala profiili. Analoogiliselt on epitsükloidi P_0E_1 lõik P_0c esimese ratta hamba pea profiiliks ja hüpotsükloidi P_0H_2 lõik P_0d teise ratta hamba jala profiiliks. Kummagi ratta hamba profiil koosneb seega nii epitsükloidi kui ka hüpotsükloidi kaarest, kusjuures epitsükloidne hamba osa on kontaktis vastashamba hüpotsükloidse osaga.

5°. Joonis 440 kujutab hambaprofiilide konstrueerimist sisehambumise puhul. Siin on esimese ratta hamba pea kujundatud hüpotsükloidi P_0H_1 kaarena, hamba jala osas moodustab profiili aga epitsükloid P_0E_1. Sisehambumisega ratastel on



Joon. 439.

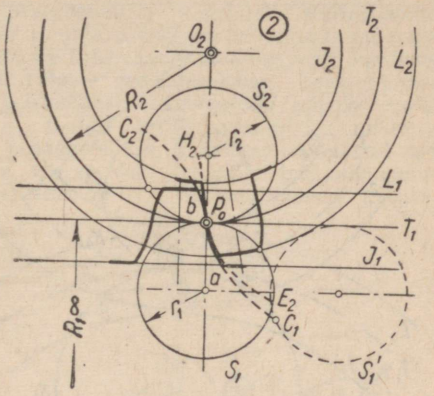


Joon. 440.

seega epitsükloidne hambaosa kontaktis vastashamba epitsükloidse osaga ja hüpotsükloidne — hüpotsükloidsega.

Ratta hambumisel latiga (joon. 441) asendab algringjoont algsirge T_1. Lati hambaprofiili lõik P_0a on kujundatud tsükloidi P_0C_1 kaarena, lõik P_0b aga kulgeb piki tsükloidi P_0C_2. Hammasratta 2 hambaprofiilid on moodustatud epitsükloidi ja hüpotsükloidi kaartest.

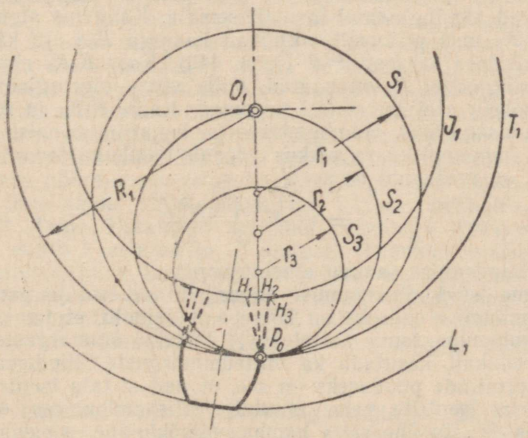
Abiringjoone raadius r võib kinemaatika seisukohast lähtudes olla meelevaldne tingimusel, et ta ei ületaks vastava algringjoone raadiust. Hamba tugevuse seisukohast aga on soovitav abiringjoone raadius valida väiksem kui pool alusringjoone raadiust. Tõepoolest, kui võtta abiringjoone raadius r_1 suurem poolest algringjoone raadiusest R_1, siis kulgeb hamba jalg



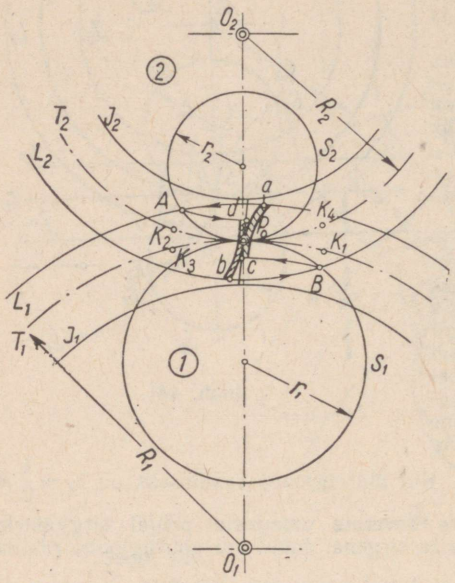
Joon. 441.

piki hüpotsükloidi P_0H_1 (joon. 442). Kui abiringjoone raadiuseks on $r_2 = \frac{1}{2} R_1$, muutub hüpotsükloid P_0H_2 tsükliliste kõverate omaduste põhjal sirgjooneks. Hamba jalg kulgeb sel puhul radiaalse sirgena. Juhul kui abiringjoone raadius $r_3 < \frac{1}{2} R_1$, on hamba jala profiil moodustatud hüpotsükloidist P_0H_3. Jooniselt 442 selgub, et hamba jalg, mille moodustab raadiusele $r_1 > \frac{1}{2} R_1$ vastav hüpotsükloid P_0H_1, on tunduvalt väiksema ristlõikega ja järelikult nõrgem kui hüpotsükloidi P_0H_3 poolt moodustatud hamba jalg. Abiringjoone raadiuseks soovitatakse tavaliselt valida $0{,}35R_1$ kuni $0{,}4R_1$.

6°. Ülal näidati, et juhul kui rulettideks on epi- ja hüpotsükloidid, siis kuju-



Joon. 442.



Joon. 443.

neb hambumisjooneks abiringjoon ise (joon. 436). Olgu näiteks antud kaks tsükloidhambumises olevat hammasratast (joon. 443). Tegeliku hambumisjoone pikkuse määramiseks tuleb fikseerida abiringjoontel S_1 ja S_2 piirpunktid A ja B, kus hammaste kaasprofiilid kontakteeruvad. Selleks sälgime abiringjoont S_2 tsentrist O_1 raadiusega O_1a. Saadud lõikepunkt A on profiilide hambumise üheks piirpunktiks. Ratta *2* pöörlemisel punktiga A ühtiva profiilipunkti d leidmiseks sälgime hambaprofiili raadiusega O_2A. Hambumisjoone teise piirpunkti B määramiseks sälgitakse abiringjoont S_1 tsentrist O_2, võttes raadiuseks O_2b. Punktis B hambuv ratta *1* profiilipunkt c leitakse, sälkides vastavalt hambaprofiili raadiusega O_1B. Tegeliku hambumisjoone pikkus võrdub kaarte AP_0 ja P_0B pikkuste summaga. Lõik ac esimesel rattal ja lõik bd teisel rattal moodustavad hammaste töötava profiili. On ilmne, et hammaste töötav profiil on seda pikem, mida pikem on hambumisjoon. Viimase pikkus aga suureneb koos abiringjoonte raadiustega. Kuid eespool näidati, et abiringjoonte raadiuste kasvades väheneb hammaste paksus jalaosas. Seetõttu ei saa abiringjoonte raadiuste tunduvat suurendamist soovitada.

Määrame nüüd ühe hambapaari kontaktisoleku vältel algringjoone mis tahes punkti poolt läbitud teepikkuse. Selleks kasutame ära asjaolu, et abiringjooned S_1 ja S_2 veerevad algringjoontel ilma libisemata. Kanname algringjoontele kaared P_0K_2 ja P_0K_3, mis pikkuselt võrduvad kaarega P_0A, ja kaared P_0K_1 ning P_0K_4, mis on võrdsed kaarega P_0B (joon. 443). Kaar K_1K_3 algringjoonel T_1 ja kaar K_2K_4 algringjoonel T_2 on kaared, mille võrra algringjooned ühe hambapaari kontaktisoleku ajal teineteisel veerevad. Kaari K_1K_3 ja K_2K_4 nimetatakse seetõttu *hambumiskaarteks*. Hambumiskaarte konstruktsioonist selgub, et tsükloidhambumise hambumiskaare pikkus võrdub hambumisjoone pikkusega.

Kattetegur on määratud seosega

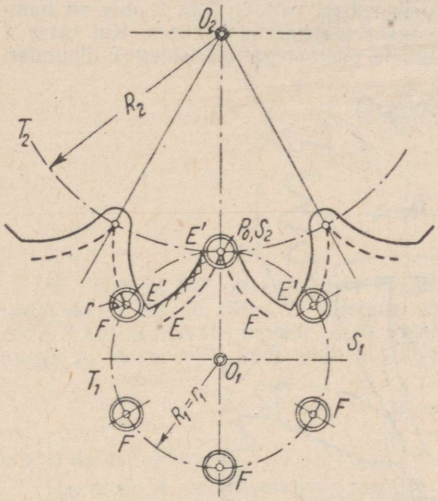
$$\varepsilon = \frac{\smile P_0A + \smile P_0B}{t},$$

kus t tähistab hambumise sammu algringjoonel.

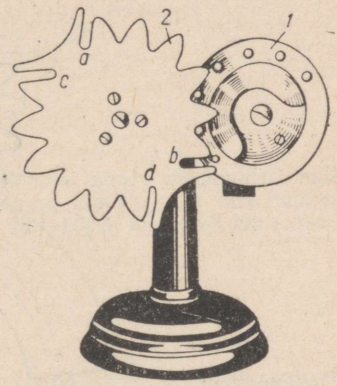
7°. Käsitleme tsükloidhambumise mõningaid eeliseid ja puudusi.

Tsükloidhambumise eeliseks on kõigepealt asjaolu, et temaga saavutatakse väga sujuv hambumine (suur kattetegur). Teiseks, ümmarguste abitsentroidide meetodit saab edukalt kasutada ka mitteümmarguste silinderrataste profileerimisel. Tsükloidprofiilide puuduseks on see, et nad ei talu tsentrite vahe muutumist. Kui näiteks tsentrite vahe muutub välishambumises olevatel ratastel (joon. 439), siis ei astu ühe ratta hamba epitsükloidne osa enam kontakti vastashamba hüpotsükloidse osaga, vaid juba epitsükloidse profiiliosaga. Hambumistingimused on seega rikutud. Tsükloidhambumise puuduseks tuleb lugeda ka raskusi kulunud rataste asendamisel uutega. Kui vana ratas asendatakse

uuega, siis ei piisa ainult moodulite võrdsusest nagu evolventhambumisel. Lisaks sellele peavad sobima ka uue ratta profileerimisel kasutatud abiringjoonte raadiused, sest tsükloidratta hamba pea ja jala profiil on määratud erinevate abiringjoontega. Kulunud ratta asendamisel tuleb seetõttu kõigepealt kindlaks teha, missuguseid abiringjooni kasutati rataste projekteerimisel. Tsükloidhammasrattad on järelikult vahetatavuse seisukohast ebamugavad. Lõpuks, tsükloidhammastega rataste valmistamine on seotud suurte raskustega, mistõttu üldises masinaehituses ei kasutata neid peaaegu üldse. Rakendamist leiavad nad ainult mõningates eriliiki masinates ja aparaatides. Teatavad tsükloidhambumise eritüübid, mida me järgnevas käsitleme, on aga leidnud laiemat kasutamist.



Joon. 444.



Joon. 445.

8°. Tsükloidhambumise eritüüpidest vaatleme nn. tapphambumist. Olgu ette antud tsentroidid T_1 ja T_2 (joon. 444). Esimeseks abiringjooneks S_1 valime seekord tsentroidi T_1. Kui see veereb tsentroidil T_2, siis kujundab tema lähteasendis hambumispoolusega P_0 kokkulangev punkt katkestatud joonega näidatud epitsükloidi P_0E. Teiseks abiringjooneks olgu hambumispoolusega P_0 ühtiv punkt. Praktikas kasutatakse liikumise ülekandmiseks punktide asemel tappe F raadiusega r, kusjuures vastasratta hambaprofiilid kujundatakse epitsükloididele ekvidistantsete kõveratena $E'E'$. Sel viisil saadakse nn. *tapphambumine*. Tappide asemel kasutatakse hõõrdumise vähendamiseks tegelikult väikesi rulle F. Joonis 445 kujutab ühte näidet tapphambumisest. Säärast mehhanismi nimetatakse *tähtmehhanismiks*. Tema ülesandeks on luua pausidega liikumist; tapphambumine esineb siin ainult kaarte *ab* ja *cd* ulatuses. Tapphambumise puuduseks on tappide (või rullide) kiire kulumine. Praktikas on kasutamist leidnud nn. *tsentroidiväline tapphambumine*. Viimane kujutab endast tapphambumise säärast erijuhtu, kus tappratta tapid on viidud väljapoole tsentroidi T_1. Vastavalt sellele nihutatakse ka hammasratta hambaid. See asjaolu võimaldab suurendada hambumise sammu [1].

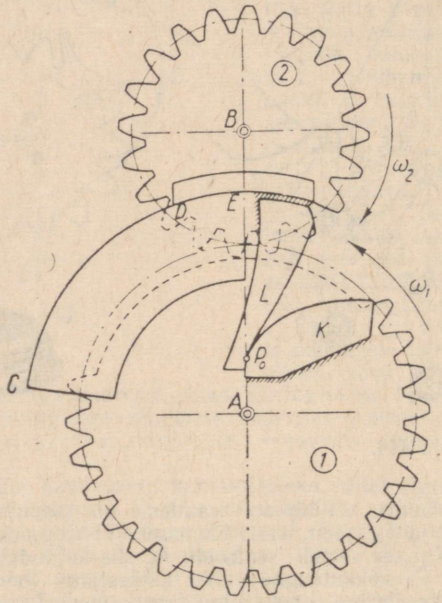
[1] Täpsemaid andmeid selle hambumisliigi kohta vt. В. М. Шанников, Планетарные редукторы с внецентроидным зацеплением. Машгиз, 1948.

§ 60. Tasapinnaliste hammasmehhanismide mõningaid eritüüpe

1°. Käsitleme mõningaid hammasmehhanismide eritüüpe, mida kasutatakse selleks, et saada peatustega, pöörlemissuuna muutustega ja katkestustega liikumist.

Mehhanismitüüpe, mis annavad ülalloetletud liikumisvorme, on väga palju. Seetõttu saame siin peatuda ainult enamlevinute juures.

Peatustega liikumist tagavate mehhanismide näitena võib tuua joonisel 446 kujutatud hammasmehhanismi. See koosneb kahest rattast *1* ja *2*, mis on hammastega varustatud ainult algringjoone teatavate kaarte ulatuses. Kui ratas *1* pöörleb pidevalt, saab ratas *2* seetõttu omale peatustega (pausidega) liikumise.



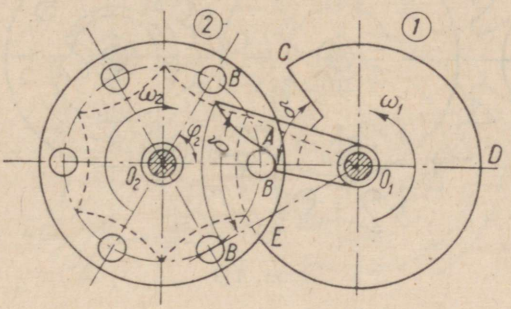
Joon. 446.

Käsitletav mehhanism töötab löökidega, sest et ratas *2* on hambumisse astumise hetkel liikumatu. Löökide nõrgendamiseks on soovitav rattale *2* anda sujuvam liikumine. Selleks varustatakse rattad lisahoobadega *K* ja *L*, mis kujutavad endast kas tsentroide või kaasmähisjooni. Joonisel 446 on hoovad *K* ja *L* profileeritud suhtelise liikumise tsentroidide kaartena. Ratta *2* nurkkiirus leitakse seosest

$$\omega_2 = -\omega_1 \frac{P_0 A}{P_0 B},$$

kus P_0 tähistab rataste *1* ja *2* suhtelise liikumise hetkelist kiiruste tsentrit. Toodud seosest võib järeldada, et ratta *2* nurkkiiruse ω_2 pidevaks kasvamiseks peab hambumispunkt P_0 liikuma punktist *A* punkti *B* poole. Löök puuduks täiesti, kui

punkt P_0 asuks liikumise alghetkel tsentris A. Ratta *2* juhusliku omavolilise liikumise tõkestamiseks on ratas *1* varustatud nn. tõkestuskaarega *CDE*, mis peatuse alghetkel jõuab rattal *2* asuva vastaskaare alla, tagades sellega veetava ratta täieliku liikumatuse.



Joon. 447.

2°. Joonisel 447 on kujutatud peatustega liikumist andev mehhanism, mille vedavaks lüliks on ratas *1*. Viimane on varustatud hambaga *A*, mis hambub ratta *2* küljes olevate tappidega *B*. Ratta *1* iga täispöörde ajal pöördub ratas *2* nurga φ_2 võrra, mille võib leida avaldisest

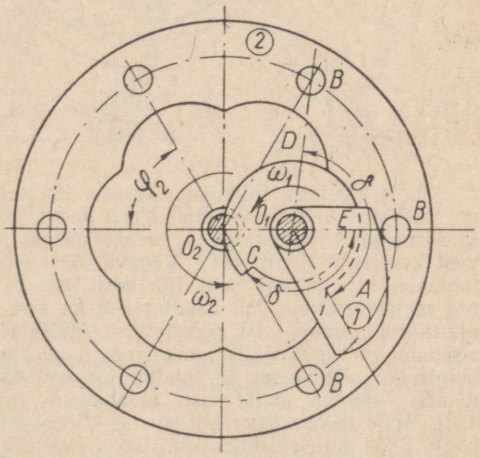
$$\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

kus z on tappide arv.

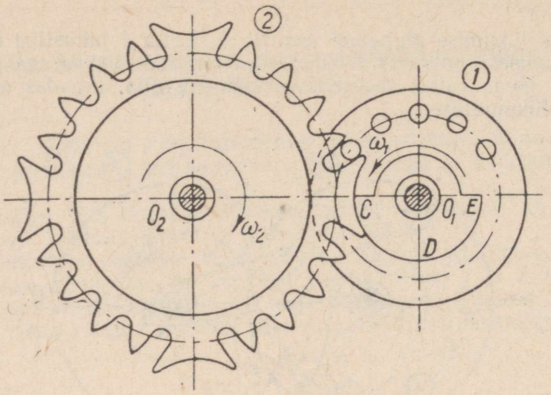
Hammas *A* profileeritakse reeglite järgi, mis kehtivad tsükloidhammaste projekteerimisel. Seejuures tuleb veel silmas pidada, et igakordse hambumise alg- ja lõppmomentidel peab ratta *2* kiirus olema null.

Joonis 448 kujutab ühte teist, peatustega liikumist reprodutseerivat tappmehhanismi, mille juures on kasutatud sisehambumist. Lüli *2* omavolilise liikumise tõkestamiseks (mis katkestaks kinemaatilise ahela), on ratas *1* varustatud tõkestuskaarega *CDE*. Viimane libiseb piki ratta *2* vastavat kaart.

Joonisel 449 ja 450 on kujutatud keerukamad tappmehhanismid, mis samuti annavad peatustega liikumist ja mida nimetatakse *tähtmehhanismideks*. Tähtmehhanismidega saab reprodutseerida erinevate liikumis- ja puhkeperioodidega liikumisvorme. Eri liikumisperioodidel võib seejuures veel esineda erinevaid ülekandesuhteid. Joonisel 449 kujutatud mehhanismil on neli võrdset liikumis- ja neli

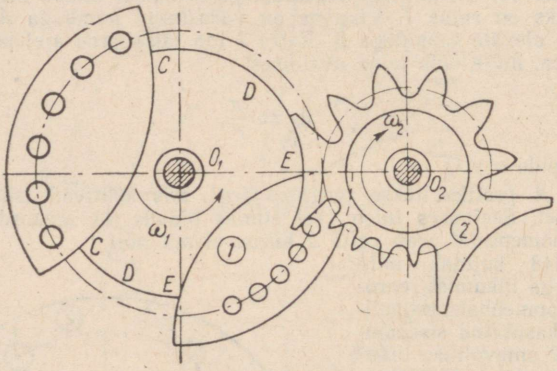


Joon. 448.



Joon. 449.

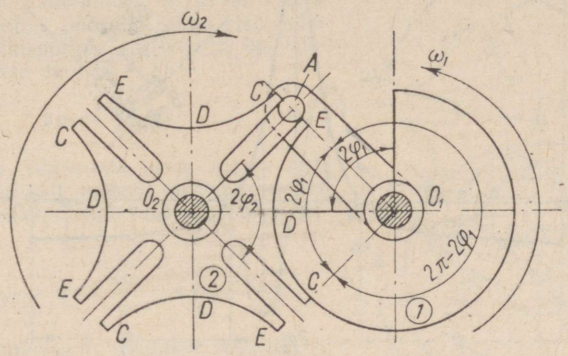
võrdset puhkeperioodi, kusjuures ülekandesuhe on konstantne. Mehhanismil, mida kujutab joonis 450, on erinevad liikumis- ja puhkeperioodid ja kaks erinevat ülekandesuhet.



Joon. 450.

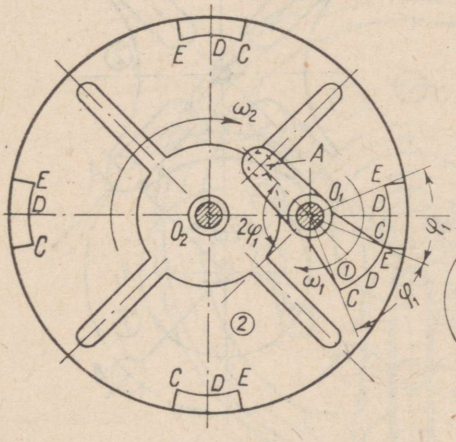
3°. Peatustega liikumist andvate hammasmehhanismide hulka kuuluvad ka nn. *malta risti mehhanismid*. Need koosnevad kahest liikuvast lülist: sisselõike ja sõrmega *A* varustatud vedavast kettast *1* ja radiaalsete juhtsoontega veetavast kettast *2* (joon. 451). Vedava ketta pöörlemisel satub sõrm *A* malta risti juhtsoonde ja pöörab seda iga kord teatava nurga võrra. Nagu varemkirjeldatud mehhanismides, nii kasutatakse ka siin tõkestuskaari *CDE*, mis takistavad malta risti omavolilist pöördumist. Malta riste valmistatakse nii välis- kui ka sisehambumisega. Välishambumisega mehhanismi kujutab joonis 451. Sisehambumisega mehhanism on toodud joonisel 452. Pärast kõrgemate paaride asendamist taandub malta risti mehhanism tavaliseks kulissmehhanismiks (joon. 453). Selle mehhanismi kiiruste ja kiirenduste arvutamiseks võib kasutada meie poolt § 34 kulissmehhanismi jaoks tuletatud valemeid. Asendava mehhanismi

lüli *1* pöördumine nurga $2\varphi_1$ ulatuses vastab välishambumisega malta ristile (joon. 453). Kui lüli *1* pöördub nurga $2\varphi'_1$ ulatuses, siis saame sisehambumisega malta risti vaste. Joonisel 454 on toodud lüli *2* nurkkiiruste ja nurkkiirenduste

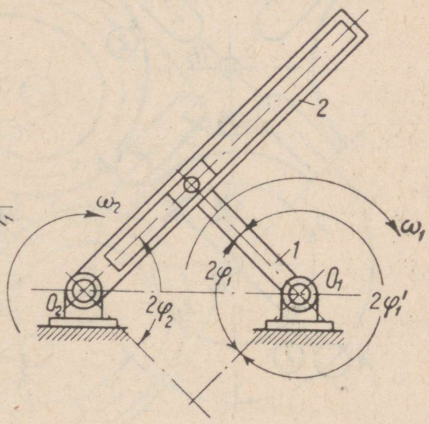


Joon. 451.

diagrammid nii välis- kui ka sisehambumise puhul. Seejuures on eeldatud, et vedava lüli *1* nurkkiirus on püsiv. Välishambumisel muutuvad nurkkiirus ω_2 ja nurkkiirendus ε_2 diagrammi lõigu *AB* kohaselt. Sisehambumisel kehtivat nurk-



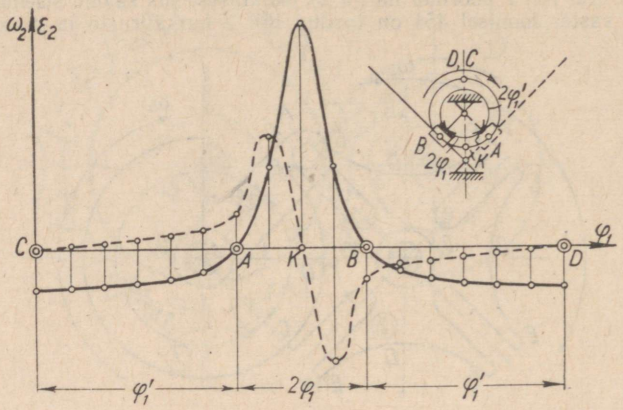
Joon. 452.



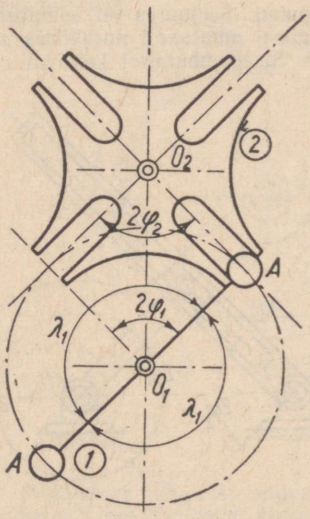
Joon. 453.

kiiruse ω_2 ja nurkkiirenduse ε_2 kulgemist kujutavad diagrammi lõigud *CA* ja *BD*. Võrreldes välis- ja sisehambumisele vastavaid diagrammi osi, selgub, et sisehambumisega malta rist töötab välishambumisega ristist palju sujuvamalt.

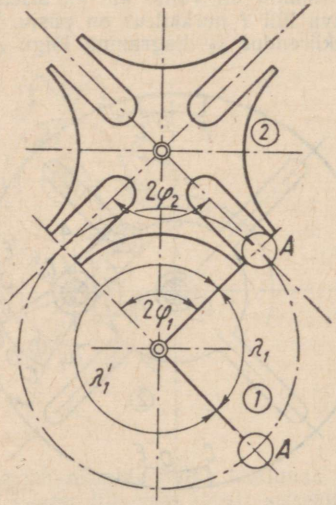
Joonisel 455 kujutatud mehhanism tagab võrdse kestusega liikumis- ja puhkeperioodid, sest sõrmede ja juhtsoonte vahel olevad nurgad on omavahel võrdsed. Võrdsete puhkeperioodide saavutamiseks peavad sõrmedevahelised nur-



Joon. 454.



Joon. 455.



Joon. 456.

gad olema omavahel võrdsed ja sõrmed paiknema pöörlemisteljest O_1 ühel ja samal kaugusel.

Juhul kui liikumisperioodid peavad olema omavahel võrdsed, puhkeperioodid aga erinevad, kasutatakse mehhanisme, kus malta risti juhtsooned paiknevad korrapäraselt, vedava lüli sõrmed aga asetsevad erinevate nurkade all (joon. 456).

Juhul kui liikumis- ja puhkeperioodid on ette antud meelevaldselt, saadakse ebakorrapärane malta risti mehhanism (joon. 457). Säärases mehhanismis võivad esineda erinevad nurgad nii juhtsoonte kui ka sõrmede vahel ning pöörlemisteljest O_1 eri kaugusel paiknevad sõrmed.

Ühe sõrmega mehhanismides, kus sõrme telje kiirus on hambumise alghetkel juhtsoone telje sihiline, pöördub malta rist vedava lüli *1* ühe täispöörde ajal nurga $2\varphi_2$ võrra, mis saadakse seosest

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z},$$

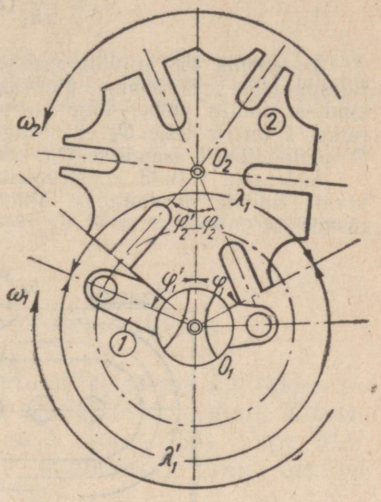
kus z tähistab juhtsoonte arvu. Malta risti ühe liikumisperioodi jooksul pöördub vedav lüli *1* ise nurga $2\varphi_1$ võrra. Jooniselt 451 selgub, et

$$2\varphi_1 = \pi - 2\varphi_2 = \pi - \frac{2\pi}{z} = \pi\left(1 - \frac{2}{z}\right).$$

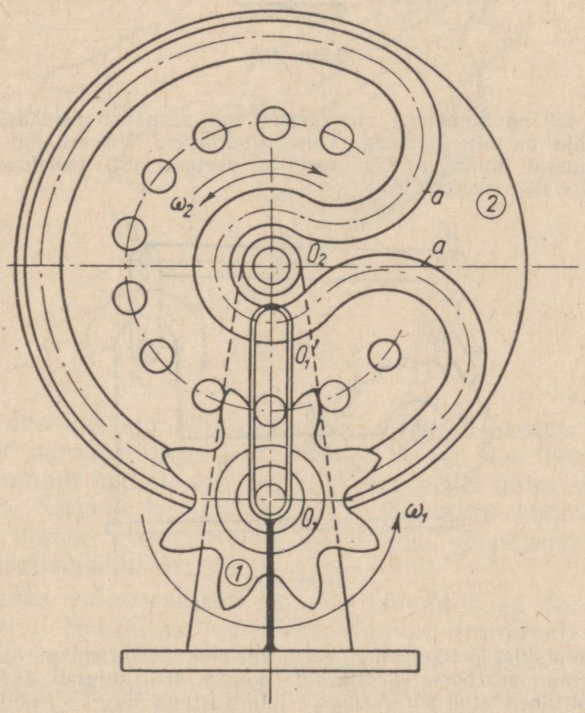
Risti liikumisaeg t_l saadakse seosest

$$t_l = \frac{30}{\pi n_1} 2\varphi_1 = \frac{30}{n_1}\left(1 - \frac{2}{z}\right),$$

kus n_1 tähistab vedava lüli *1* pöörete arvu minutis. Risti puhkeaeg on antud võrrandiga



Joon. 457.

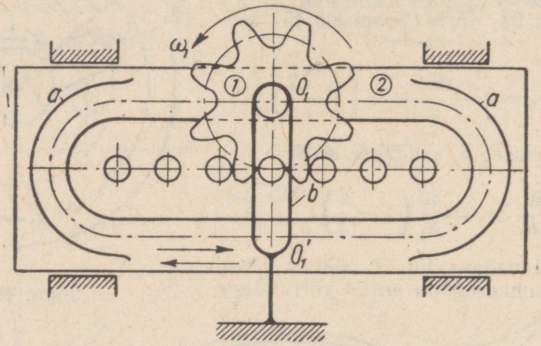


Joon. 458.

$$t_p = \frac{30}{\pi n_1}(2\pi - 2\varphi_1) = \frac{30}{n_1}\left(1 + \frac{2}{z}\right).$$

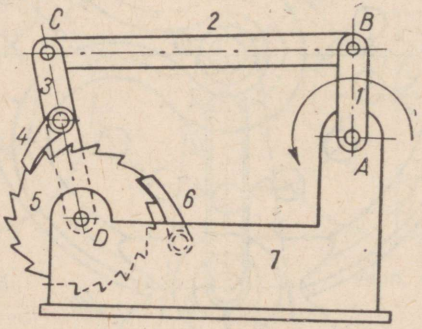
4°. Joonis 458 kujutab mehhanismi, mille ülesandeks on muundada pidev ühesuunaline pöörlemine pidevaks vahelduvasuunaliseks pöörlemiseks. Ühes kindlas suunas ümber telje O_1 pöörlev ratas *1* sunnib tappidega varustatud ratast *2* ümber telje O_2 edasi-tagasi pöörlema. Ratta *2* juhtsoon *aa* viib telje O_1 perioodiliselt asendisse O_1', reverseerides sellega ratta *2* liikumise.

Sääraseid rattaid konstrueeritakse tapphambumise projekteerimisel kasutatavate üldiste meetoditega. Ratta *2* liikumise reverseerimisel tekib mehhanismis löök.



Joon. 459.

Joonisel 459 on kujutatud mehhanism, mis sarnaneb äsjakäsitletuga, kuid veetavaks lüliks on siin tappidega varustatud latt *2*. Vedava lüli ühesuunaline pöörlev liikumine muundub siin seetõttu veetava lüli vahelduvasuunaliseks translatoorseks liikumiseks.



Joon. 460.

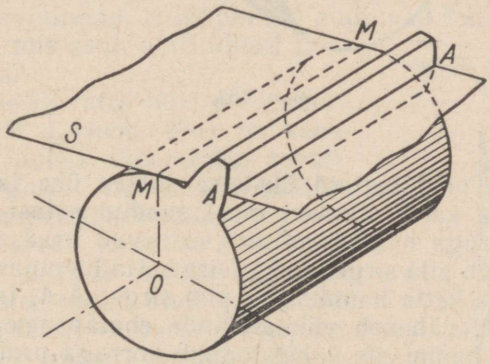
5°. Ühesuunalist katkestatud pöörlevat liikumist andvate mehhanismide hulka kuuluvad nn. *põrkmehhanismid*. Joonis 460 kujutab šarniirnelilülikut *ABCD*, mis on ühendatud *põrkrattaga 5* lülil *3* istuva *põrgiku 4* abil. Lüli *1* pöör-

lemine paneb nookuri *3* vahelduvasuunaliselt liikuma. Liikumisel paremalt vasakule toetub põrgik *4* põrkratta *5* vastavale hambale, pöörates ratast teatava nurga võrra. Ratta omavolilise tagasiliikumise tõkestamiseks on ette nähtud tõkkepõrgik *6*. Viimane täidab oma ülesandeid ainult sel juhul, kui ratta hambale tõkkepõrgikuga kokkupuutepunktis tõmmatud normaal möödub nimetatud põrgiku teljest ratta poolt.

Põrkmehhanisme esineb väga mitmes konstruktsioonis. Nende kinemaatiline projekteerimine, mis toimub ülalkäsitletud üldiste meetodite alusel, ei valmista raskusi.

§ 61. Kaldhammasrataste projekteerimine

1°. Sirgete hammastega silinderrataste hambad kontakteeruvad omavahel piki rataste telgedega paralleelseid sirgeid. Konstrueerime alussilindrile puutujatasapinna *S* (joon. 461). Olgu *MM* nimetatud tasapinna ja alussilindri puutesirge ning ühtlasi



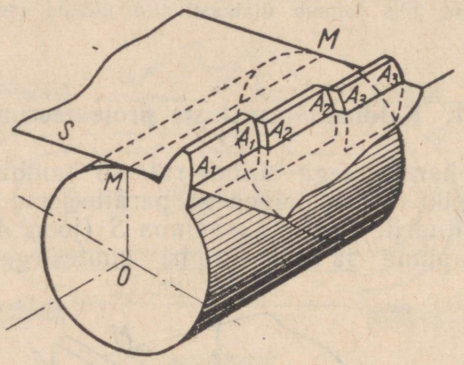
Joon. 461.

silindri üks moodustaja. Puutujatasapind lõikab hamba külgpinda piki silindri moodustajaga paralleelset sirget *AA*. Kontakt piki sirget *AA* toimub hetkel, mil puutujatasapind *S* ühtib hambumistasapinnaga. Sirgete hammastega silinderrattad kontakteeruvad seega kogu hamba pikkuses üheaegselt, piki alussilindri moodustajatega paralleelseid sirgeid.

Kõik hamba valmistamisel esineda võivad vead (profiili ebatäpsus, sammu ebaühtlus jne.) halvendavad tunduvalt hammasülekande töötingimusi, tugevdades muuhulgas näiteks hammaste töötamisel esinevat müra. Nagu ülal näidati, on seejuures sirgete hammastega ülekande kattetegur alati suhteliselt väike, mistõttu kogu ülekantav koormus jaotub parimal juhul kahele hambapaarile. Valmistamisel tekkivate ebatäpsuste mõju vähendamiseks ja

katteteguri suurendamiseks võib sirgeid hambaid asendada astmeliste hammastega. *Astmeliste hammasrataste* moodustumist võib ette kujutada järgmiselt.

Lõikame sirgete hammastega silinderratta võrdseteks osadeks, kasutades selleks ratta teljega ristuvaid tasapindasid (joon. 462). Tulemuseks saame rea ühepaksuseid hambulise servaga kettaid.

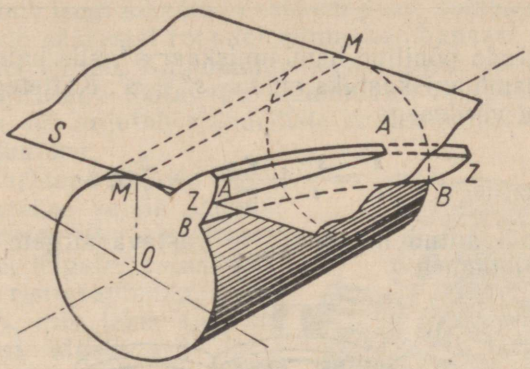


Joon. 462.

Pöörame kõiki neid kettaid üksteise suhtes ühe ja sama nurga võrra. Kui viia kaks säärasel moel saadud ratast kontakti, siis hambuvad korraga hambaprofiilide erinevad osad. Esimese ketta hammas hambub piki sirget A_1A_1, teise ketta hammas — piki sirget A_2A_2, kolmanda ketta hammas — piki sirget A_3A_3 jne.

Tänu sellele väheneb võimalikkude ebatäpsuste mõju rataste tööle. Kontakt hammaste vahel toimub korraga profiilide erinevates piirkondades. Hambumiskaar pikeneb, sest talle lisandub kaar, mille võrra ketaste hambaid algringjoonel üksteise suhtes pöörati. Selle tagajärjel aga suureneb ülekande kattetegur.

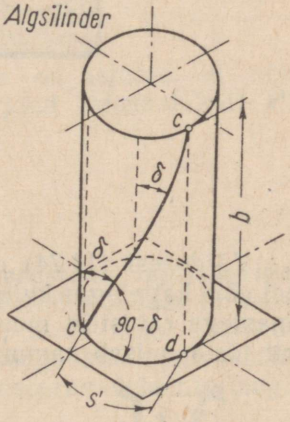
2°. Hammasrattaid valmistatakse harva joonisel 462 näidatud kujul. Astmeliste hammasrataste asemel kasutatakse tavaliselt *kaldhammastega* rattaid (joon. 463). Kaldhammaste külgpinna moodustamisest saab endale ettekujutuse, kui jälgida tasapinna *S* libisemata veeremist alussilindril, mille teljeks on *O* (joon. 463). Kui valida tasapinnal *S* sirge *AA*, mis paikneb moodustaja *MM* suhtes teatava nurga all, siis kujundab säärase sirge iga punkt evolvendi. Kogu sirge aga moodustab kruvipinna, mida nimetatakse *evolventkruvipinnaks*. Selle pinna ja teljega *O* ristuvate tasapindade lõikumisel tekivad evolvendid, mille alguspunktid paiknevad kruvijoonel *BB* (joon. 463). Et saada kahe kaldhammastega silinderratta hambumiseks vajalikke kaaskruvipindasid, tuleb



Joon. 463.

ühist puutujatasapinda veeretada algul ühel, siis teisel silindril. Puutujatasapinnal valitud sirge AA kujundab seejuures soovitud kaasmähiskruvipinnad. Kruvipinnad puutuvad teineteist piki ühist moodustajat, mis asub alati ühisel puutujatasapinnal.

Kruvijoone ja ratta telje poolt moodustatud nurk δ (joon. 464) on konstantne. Seda nurka nimetatakse tavaliselt *kaldenurgaks*. Algsilindril mõõdetud kaart s' nimetatakse *väändekaareks*. Kaks koostöötavat hammasratast peavad olema võrdsete kaldenurkadega. Välishambumisel peab ühel rattal olema parem ja teisel — vasak kruvijoon. Sisehambumise puhul peavad mõlema ratta kruvijooned kulgema samasuunaliselt, s. t. mõlemad kruvijooned peavad olema kas paremad või vasakud. Rataste telgedega risti asetsevates tasapindades toimub hambumine samal viisil kui tavalistel, sirgete hammastega ratastel. Kuid igal vaadeldaval hetkel hambuvad üheaegselt profiilide erinevad punktid. Seetõttu on hammaste lõikamisel esinenud ebatäpsuste mõju nende rataste juures palju väiksem kui sirgete hammastega ratastel. Hamba kalde tõttu suureneb peale selle veel hambumiskaare pikkus väändekaare $s' = \smile cd$ võrra (joon. 464).



Joon. 464.

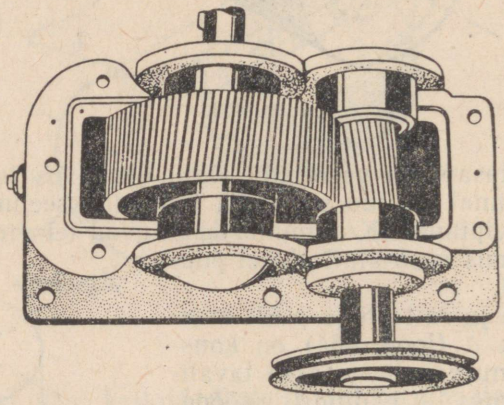
Hambumiskaarele liituvat väändekaart võib avaldada järgmiselt:

$$s' = b \operatorname{tg} \delta.$$

Kui tähistada põhiline hambumiskaar s'', siis kaldhammastega ratta kogu hambumiskaareks on $s = s'' + s'$. Kattetegur ε' väljendub sel juhul võrdusega

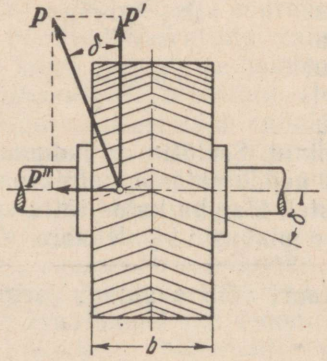
$$\varepsilon' = \frac{s}{t} = \frac{s}{t} + \frac{s'}{t} = \varepsilon + \frac{b}{t} \operatorname{tg} \delta, \qquad (11.74)$$

kus ε tähistab antud hambumisele vastava sirgete hammastega ülekande katttegurit.



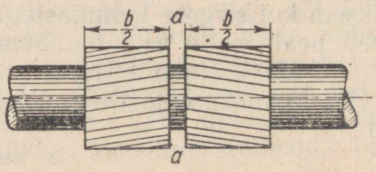
Joon. 465.

Võrdusest (11.74) on näha, et kaldhammastega hammasratastel võib kattetegur kujuneda tunduvalt suuremaks, kui sirgete hammastega ratastest moodustatud ülekannetel. Selleks et kattetegurit tõsta, piisab hammasratta laiuse b ja kaldenurga δ suurendamisest.



Joon. 466.

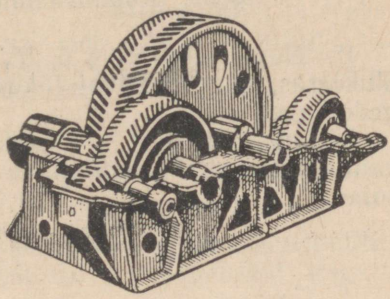
Kaldhammastega ratastest moodustatud ülekannetes võib seetõttu üheaegselt hambumises olla enam kui üks või kaks hambapaari. Esineb olukordi, kus



Joon. 467.

korraga hambub isegi kümme ja rohkem paari hambaid. Ülekantav koormus jaotub säärastel ratastel mitme hambapaari vahel ja ülekande sujuvus tõuseb. Kaldhammastega rattaid kasutatakse seetõttu suure kiirusega töötavates ülekannetes ja suurte võimsuste puhul. Joonis 465 kujutab silindriliste kaldhammasratastega üheastmelist reduktorit.

Kaldhammastega rataste algsilindril eristatakse kolme sammu. Need on *otssamm t* (ka laupsamm), mis saadakse, lõigates ratast algsilindri telje risttasapinnaga; *normaalsamm* t_n, mis tekib siis, kui lõigata ratast algsilindril oleva kruvijoone risttasapinnaga, ja *telgsamm* t_a (ka aksiaalsamm), mis saadakse, lõigates ratast algsilindri diametraaltasapinnaga.



Joon. 468.

Nimetatud sammud on omavahel seotud järgmiselt:

$$t = \frac{t_n}{\cos \delta} = \frac{t_a}{\operatorname{ctg} \delta}.$$

3°. Kaldhammastega rataste puuduseks on asjaolu, et neis tekib ringjõu P' ülekandmisel teatav telgjõud (aksiaaljõud) P'' (joon. 466).

Viimase suurus on määratud seosega

$$P'' = P' \operatorname{tg} \delta.$$

Telgjõu vastuvõtmiseks tuleb ajam varustada tugilaagriga, milles aga tekivad lisa-hõõrdekaod. Nimetatud puudust ei esine nn. *noolhammastega* ratastel (joon. 466), mida võib käsitleda kui kahe võrdse, kuid vastassuunalise kaldega kaldhammasratta liitmise tulemust. Seetõttu telgjõud kompenseeruvad ja tugilaagri vajadus langeb ära.

Hammaste lõikamise hõlbustamiseks tehakse mõnikord noolhambad keskse freesimissoonega *a* (joon. 467). Joonis 468 kujutab suurte võimsuste ülekandmiseks määratud noolhammasratastega reduktorit.

XII peatükk

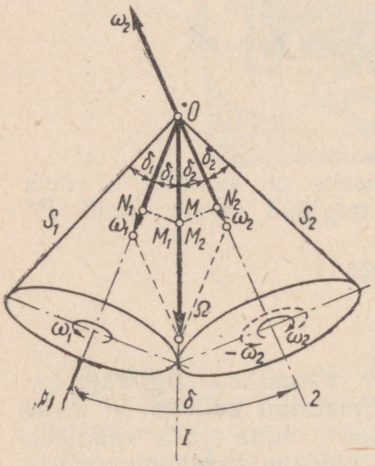
RUUMILISTE HAMMASMEHHANISMIDE KINEMAATILINE UURIMINE JA PROJEKTEERIMINE

§ 62. Koonushammasrataste kinemaatika

1°. Nagu selgitati § 5, 5°, kasutatakse koonushammasrattaid olukorras, kus pöörlevat liikumist tuleb üle kanda lõikuvate telgede vahel.

Lõikugu teljed *1* ja *2* punktis *O* (joon. 469). Ülesandeks on kanda süsteemi S_1 pöörlemine üle süsteemile S_2 nii, et ülekandesuhe

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const.}$$



Joon. 469.

Suuname nurkkiiruste vektorid leppeliselt nii, et noole sihis vaadates toimuks pöörlemine kellaosuti suunas. Otsime nüüd hetkelist pöörlemistelge süsteemi S_1 relatiivses liikumises süsteemi S_2 suhtes. Selleks anname mõlemale süsteemile ühise lisanurkkiiruse $-\omega_2$. Süsteem S_2 muutub selle tagajärjel liikumatuks. Süsteem S_1 aga hakkab tiirlema nurkkiirusega $-\omega_2$ ümber telje *2*, jätkates seejuures pöörlemist nurkkiirusega ω_1 ümber telje *1*. Olgu Ω süsteemi S_1 hetkeline nurkkiirus relatiivses liikumises süsteemi S_2 suhtes:

$$\Omega = \omega_1 + (-\omega_2).$$

Kanname vektorid ω_1 ja $-\omega_2$ kokkulepitud suunas telgedele *1* ja *2* ning konstrueerime resulteeriva vektori Ω. Viimase siht määrab ära hetkelise pöörlemistelje *OI* süsteemide S_1 ja S_2 suhtelises liikumises. Kuna nurkkiirused ω_1 ja ω_2 on konstantsed, siis telje *OI* siht on püsiv ja süsteemide S_1 ning S_2 suhtelise liikumise aksoidideks kujunevad kaks pöördkoonust S_1 ja S_2, mis puutuvad teineteist piki ühist moodustajat *OI*. Liikumist saaks üle kanda, kui valmistada ülalkäsitletud aksoididele vastavad koonused ja suruda need teineteise vastu nii, et libisemine oleks välditud. Viimane on vajalik selleks, et ülekandesuhe i_{12} püsiks konstantsena. Libisemist ei esine, kui mõlema

koonuse joonkiirused ühisel moodustajal OI on võrdsed. Kui valida sellel moodustajal näiteks mingi punkt M (M_1, M_2), siis koonusele S_1 kuuluva punkti M_1 kiirus peab võrduma koonuse S_2 punkti M_2 kiirusega (joon. 469). Seega

$$v_{M1} = v_{M2}.$$

Tõmbame punktist M telgedele *1* ja *2* ristsirged M_1N_1 ja M_2N_2. Kiiruste v_{M1} ja v_{M2} absoluutväärtused võib avaldada järgmiselt:

$$v_{M1} = v_{M2} = \omega_1(M_1N_1) = \omega_2(M_2N_2). \qquad (12.1)$$

Seosest (12.1) võib järeldada, et

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{M_2N_2}{M_1N_1},$$

s. t. et nurkkiirused on pöördvõrdelised sääraste teineteist puutuvate ringjoonte raadiustega, mis tekivad, kui koonuseid lõigata nende telgede risttasapindadega.

Kolmnurkadest OM_1N_1 ja OM_2N_2 võime kirjutada, et

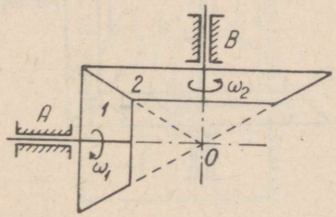
$$\frac{M_2N_2}{M_1N_1} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}.$$

Sellest järgneb, et

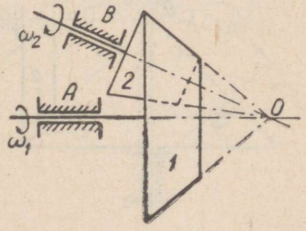
$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1}. \qquad (12.2)$$

Nurkkiirused on seega pöördvõrdelised koonuste poolte tipunurkade siinustega.

2°. Koonushõõrdrattad on tavaliselt moodustatud püsttüvikoonustest *1* ja *2* (joon. 470), mille pöörlemisteljed A ja B lõikuvad omavahel punktis O. Rattad puutuvad teineteist piki ühist moodustajat. Kokkupuutepunktides tekkivate hõõrdejõudude toimel kantakse esimese koonuse pöörlemine nurkkiirusega ω_1 üle teisele koonusele, mis hakkab pöörlema nurkkiirusega ω_2. Joonisel 470 on kujutatud *välispuutega ümmargustest koonushõõrdratastest* moodustatud ülekanne. Joonisel 471 kujutatud *ümmargused koonus-*



Joon. 470.



Joon. 471.

hõõrdrattad on omavahel *sisepuutes*. Et vältida rataste libisemist teineteisel, varustatakse need hammastega. Sel viisil saadakse kas *välis-* või *sisehambumisega ümmarguste hammasratastega koonusülekanne.*

Ümmarguste koonusratastega hõõrd- või hammasmehhanismide kinemaatikat käsitletakse tavaliselt analüütilisel kujul, nagu ümmarguste tasapinnaliste silinderrataste puhulgi.

Koonushammasrataste ülekandesuhteks i_{kl} nimetame ratta k nurkkiiruse ω_k suhet ratta l nurkkiirusesse ω_l, s. t.

$$i_{kl} = \frac{\omega_k}{\omega_l} = \frac{n_k}{n_l},$$

kus n_k ja n_l tähistavad vastavalt rataste k ja l pöörete arvu minutis.

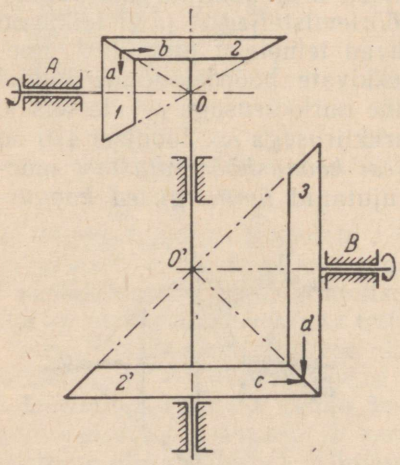
3°. Ümmarguste koonushammasrataste seeria üldise ülekandesuhte võib arvutada valemiga (11.10), mis tuletati silinderrataste jaoks.

Ülekandesuhe i_{1n} rattalt 1 rattale n on seega antud valemiga

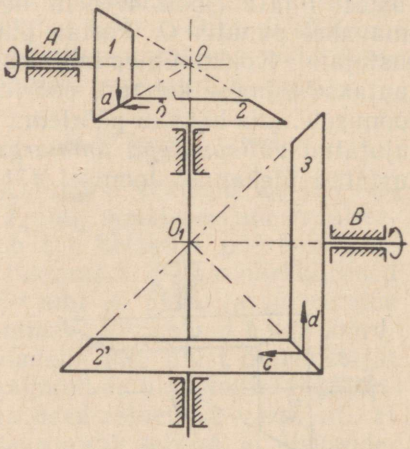
$$i_{1n} = \frac{z_2 z_3 z_4 \dots z_n}{z_1 z'_2 z'_3 \dots z_{(n-1)'}} = i_{12} i_{2'3} i_{3'4} \dots i_{(n-1)'n}.$$

Juhul kui kõik vaherattad osutuvad parasiitratasteks, saame ülekandesuhteks

$$i_{1n} = \frac{z_n}{z_1}.$$



Joon. 472.



Joon. 473.

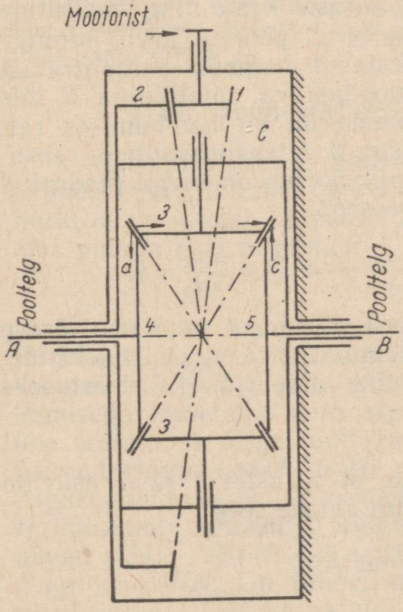
Kui koonusrataste seeria veetava ratta telg on paralleelne või isegi ühtelangev vedava ratta teljega, siis on otstarbekas ülekandesuhet i_{1n} käsitleda algebralise suurusena. Ülekandesuhe loetakse positiivseks, kui vedava ja veetava ratta pöörlemissuunad ühtivad. Vastasel korral on ülekandesuhe negatiivne.

Ülekandesuhte märgi võib määrata järgmiselt. Asetame rataste *1* ja *2* kokkupuutekohtadesse nooled *a* ja *b* (joon. 472 ja 473). Juhul kui nool *a* on suunatud kokkupuutekohast ratta telje poole, tuleb ka nool *b* suunata samuti (joon. 472). Vastupidine näide on toodud joonisel 473. Ratastega *2* koos pöörlevatele ratastele *2'* joonestame kokkupuutekohas ratastega *3* nooled *c*. Viimased peavad suunalt ühtima nooltega *b*. Seepeale joonestame ratastele *3* ülaltoodud tingimuse kohaselt nooled *d*. Joonisel 472 kujunevad noolte *a* ja *d* suunad ühesugusteks, joonisel 473 aga vastupidisteks. Kui vedava ja veetava ratta noolte suunad ühtivad (joon. 472), on ülekandesuhe p o s i t i i v n e. Vastasel korral (joon. 473) loetakse teda n e g a t i i v s e k s.

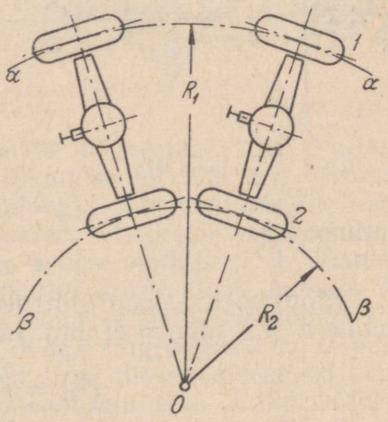
4°. Koonusdiferentsiaal- ja koonusplanetaarmehhanisme kasutatakse laialdaselt mitmesugustes masinates.

Koonusdiferentsiaali kuuluvate rataste pöörlemiskiiruse ja koonusplanetaarmehhanismide ülekandesuhte leidmiseks võib kasutada valemeid (11.12) ja (11.14).

Joonisel 474 on kujutatud autodel kasutatav koonusdiferentsiaal. Sõites kurvil (joon. 475), läbivad auto vedavad rat-



Joon. 474.



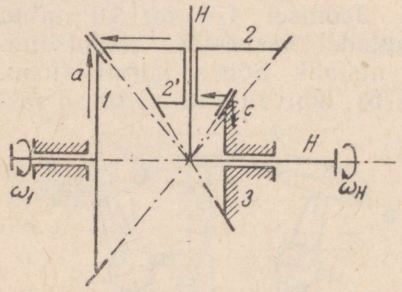
Joon. 475.

tad erineva teepikkuse. Piki kaart aa liikuva ratta *1* teepikkus on suurem kui rattal *2*, mis liigub seespool kurvi, kaarel $\beta\beta$. Välimise ratta pöörlemiskiirus peab sisemise ratta pöörlemiskiirusest olema järelikult suurem. Ratastele erineva pöörlemiskiiruse andmiseks kasutataksegi diferentsiaali. Koonusratas *1* (joon. 474), mis saab pöörleva liikumise mootorilt, hambub poolteljel *A* vabalt pöörleva koonusrattaga *2*. Viimase külge on jäigalt kinnitatud satelliitide karp *C*, kus vabalt oma telgedel pöörleb kaks ühesugust satelliiti *3*. Satelliidid hambuvad pooltelgedele *A* ja *B* kiilutud ühesuguste koonusratastega *4* ja *5*. Kui auto liigub sirgjooneliselt, võib eeldada, et takistusjõudude momendid pooltelgedel *A* ja *B* on võrdsed. Satelliidid on sel juhul oma pöörlemistelgede suhtes tasakaalus, s. t. ei pöörle ümber oma telgede. Karp *C*, satelliidid *3* ning pooltelged *A* ja *B* pöörlevad sel korral tervikuna ühes ja samas suunas ning ühe ja sama nurkkiirusega. Niipea kui auto rattad aga satuvad erinevate raadiustega trajektooridele, algab satelliitide *3* pöörlemine ümber oma telgede ja kogu mehhanism hakkab töötama diferentsiaalina.

Käsitleme auto diferentsiaali kinemaatikat. Valemi (11.12) põhjal võime kirjutada

$$i^C_{45} = \frac{n_4 - n_C}{n_5 - n_C},$$

kus n_4, n_5 ja n_C tähistavad vastavalt rataste *4* ja *5* ning satelliitide karbi *C* pöörete arvu minutis. Ratas *4* hambub parasiitratast moodustava satelliidiga *3*, mis omakorda on hambumises rattaga *5*. Ülekandesuhte i_{45} absoluutväärtus on seega määratud seosega



Joon. 476.

$$|i^C_{45}| = \frac{z_5 z_3}{z_3 z_4} = 1,$$

sest rattad *4* ja *5* on võrdse hammaste arvuga. Ülekandesuhte algebraliseks väärtuseks kujuneb aga

$$i^C_{45} = -1.$$

Miinusmärk esineb siin seetõttu, et ratastel *4* ja *5* asuvate noolte a ja c suunad ei ühti. Lõplikult saame seega

$$i^C_{45} = \frac{n_4 - n_C}{n_5 - n_C} = -1,$$

mistõttu

$$n_4 - n_C = -n_5 + n_C$$

ja

$$n_C = \frac{n_4 + n_5}{2}.$$

Saadud tulemus näitab, et satelliitide karbi pöörete arv n_C võrdub pooltelgede A ja B pöörete arvu poole summaga. Kui üks ratastest, näiteks ratas *4* peatub, siis $n_4 = 0$ ja

$$n_C = \frac{n_5}{2}.$$

Ratas *5* pöörleb seega antud juhul kaks korda kiiremini kui karp C. Muutes karbi C liikumatuks, saame

$$n_4 = -n_5,$$

s. t. rattad *4* ja *5* pöörlevad sel puhul võrdse kiirusega, kuid vastassuunas.

Näide 10. Joonis 476 kujutab koonusratastest *1*, *2*, *2'* ja *3* koosnevat planetaarreduktorit. Rataste hammaste arvud on antud:

$$z_1 = 60,\ z_2 = 48,\ z_{2'} = 18,\ z_3 = 30.$$

Ülesandeks on leida ülekandesuhe rattalt *1* raamile H, juhul kui ratas *3* on jäigalt ühendatud kinnislüliga. Valemi (11.14) põhjal

$$i_{1H} = 1 - i^H_{13} = 1 - \left(-\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}}\right) = 1 + \frac{48}{60} \cdot \frac{30}{18} = \frac{7}{3}.$$

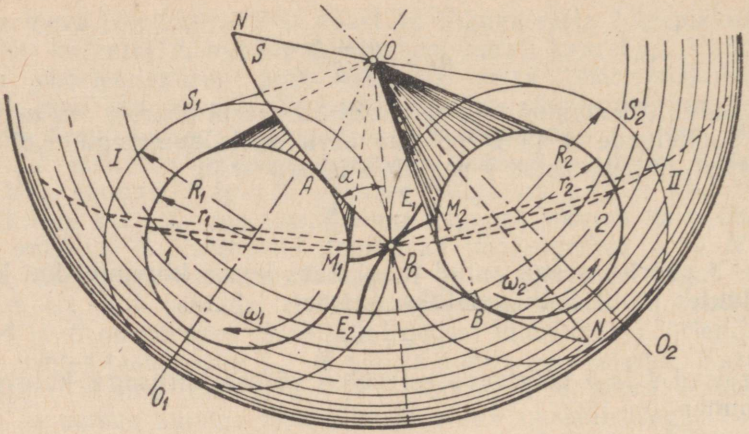
Sulgude sees esineb miinusmärk seetõttu, et nooled a ja c on suunatud teine teisele poole. Rattad *1* ja *3* pöörleksid kinnitatud raamiga mehhanismis seega vastassuunas.

§ 63. Koonusrataste hammaste profileerimine

1°. Koonusülekande konstrueerimisel on ülekandesuhe i_{12} ja telgede *1* ning *2* vahel olev nurk δ tavaliselt ette antud. Koonuste nurki δ_1 ja δ_2 saab hõlpsasti leida, kui lisaks valemile (12.2) silmas pidada veel tingimust

$$\delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Koonusratta hammaste kujundamist võib endale ette kujutada järgmiselt. Olgu antud suhtelise liikumise aksoide moodustavad koonused S_1 ja S_2 (joon. 477). Analoogia põhjal silindrilise hambumisega nimetame neid *algkoonusteks*. Lõikame algkoonuseid ühe teatava sfääriga, mille tsenter asugu punktis O. Lõikumisel tekivad ringjooned *I* ja *II*, mis puutuvad teineteist punktis P_0. Algkoonuste veeremise asemel võib nüüd vaadelda ringjoonte *I* ja *II* libisemata veeremist teineteisel. Kuna ringjooned *I* ja *II* paiknevad sfääril, siis täidab kujundava sirge ülesandeid sfääri suurringi kaar NN. On ilmne, et algkoonuseid võib ülalkirjeldatud viisil lõigata lõpmata paljude erinevate sfääridega. Iga kord tekivad seejuures ringjoontele *I* ja *II* analoogilised ringjooned ja

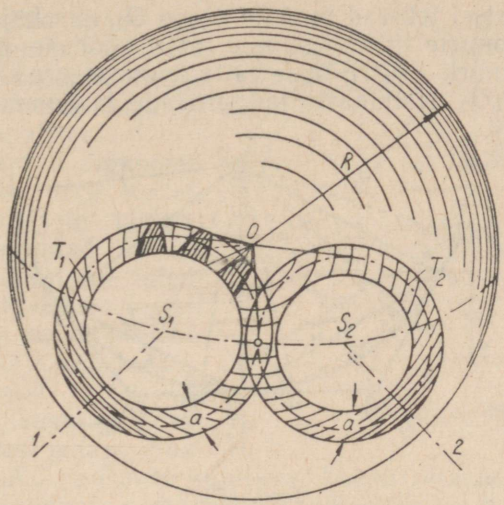


Joon. 477.

kujundavale kaarele *NN* vastavad suurringi kaared. Viimaste geomeetriliseks kohaks on teatav tasapind *S*, mis sisaldab sirget P_0O ja moodustab algkoonuste puutujatasapinnaga nurga α. Nurka α nimetatakse koonusrataste hambumisnurgaks ja tasapinda *S* — kujundavaks tasapinnaks. Kui tõmmata telje OO_1 punktidest rida ristsirgeid tasapinnale *S*, siis moodustavad need tasapinna, mis sisaldab telge OO_1 ja on risti tasapinnaga *S*. Lõikumisel viimasega tekib sirge *AO*. Pöörates saadud sirget ümber telje O_1O, saame koonuse *1*, mida nimetame *aluskoonuseks*. Tasapind *S* on aluskoonuse puutujatasapinnaks. Teine aluskoonus *2* konstrueeritakse analoogiliselt. Hamba profiilid saadakse tasapinda *S* ilma libistamata aluskoonustel veeretades. Tasapinna *S* iga punkt kujundab seejuures *sfääriliseks evolvendiks* nimetatava kõvera.

Näiteks tasapinna *S* punkt, mis ühtib punktiga P_0, kujundab, juhul kui tasapind veereb aluskoonusel *1*, sfäärilise evolvendi M_1E_1. Kui tasapind *S* veereb aluskoonusel *2*, moodustab käsitletav punkt sfäärilise evolvendi M_2E_2. Ringjoonte *I* ja *II* vastastikune veeremine sunnib evolvente M_1E_1 ja M_2E_2 teineteisel veerema ja libisema. Konstrueerides samasuguseid sfäärilisi evolvente sirgel OP_0 paiknevate tasapinna *S* teiste punktide abil, saadakse kõikide sfääriliste evolventide geomeetrilise kohana evolvent-koonushambumise hammaste külgpind. Evolventsete kaaskoonuspindade suhtelise veeremise ja libisemise teel toimubki pöörlemise ülekandmine süsteemilt S_1 süsteemile S_2. Käsitletud geomeetriline konstruktsioon annab täpse evolvent-koonushambumise.

2°. Täpse evolvent-koonushambumise projekteerimine ja vastavate hammaste lõikamine on praktikas seotud suurte raskustega,



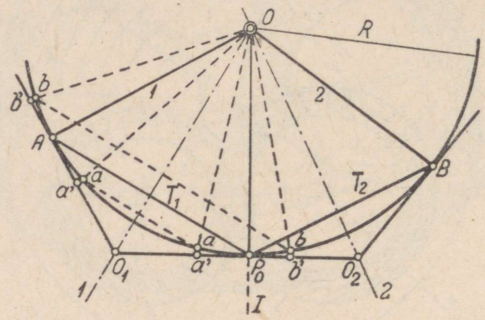
Joon. 478.

sest sfääri pind pole tasapinnale laotatav. Seetõttu ei õnnestu ka nimetatud hambumise projekteerimise ja valmistamise probleeme taandada analoogilisteks, silinderrataste juures lahendatud ülesanneteks.

See asjaolu sunnib konstruktoreid kasutama evolvent-koonusrataste profileerimisel järgmist ligikaudset meetodit. Uurides koonusrataste hammaste täpset kuju, võib näha (joon. 478), et jalgade- ja peaderingjoonte vahel paiknevad hammaste otspinnad moodustavad sfääril teatavad sfäärilised vööndid laiusega *a* (joonisel 478 on nimetatud vööndid viirutatud). Sfääri raadiusega *R* võrreldes on vööndite laius *a* väga väike. Seetõttu võib neid sfäärilisi vööndeid küllaldase täpsusega asendada vööndi tega, mis paiknevad piki ringjooni T_1 ja T_2 sfääri puutuvatel koonustel.

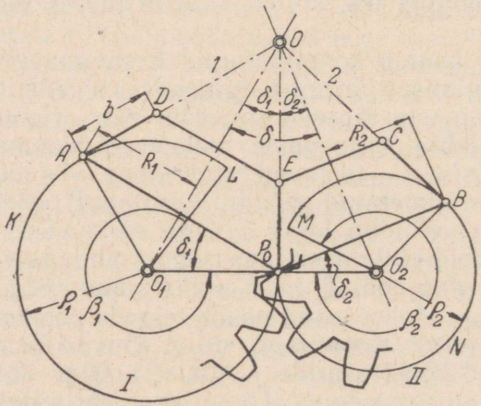
Projekteerime algkoonused nende telgede poolt määratud tasapinnale (joon. 479). Koonuseid, millel asuvad hammaste otspinnad, saab nüüd konstrueerida järgmiselt. Olgu kolmnurk AOP_0 algkoonuse *1* projektsiooniks. Täpsel profileerimisel projekteeruks peadekoonus kolmnurgana *bOb,* kuna jalgadekoonuse projektsiooniks kujuneks kolmnurk *aOa*. Hammaste otspinna lõikumisel projektsioonitasapinnaga tekiksid täpse profileerimise puhul kaared *ab,* mis asuksid raadiusega *R* joonestatud sfääri projektsioonil. Koonused, millel asuvad ligikaudsete profiilide otspinnad, peavad puutuma sfääri piki rataste algringjooni. Nimetatud koonuste projektsioonide leidmiseks tõmbame läbi pooluse P_0 sirge O_1O_2, mis ristub sirgega P_0O. Tõmmatud sirge ja telgede *1*

ning 2 lõikumisel tekivad punktid O_1 ja O_2, mis kujutavad endast otsitavate koonuste tippe. Esimese ratta koonuse projektsiooniks kujuneb kolmnurk AP_0O_1, teise ratta koonuse projektsiooniks aga kolmnurk BP_0O_2. Hammaste külgpindade ja koonuste lõikumisel



Joon. 479.

tekkivad profiilid projekteeruvad sirgele $a'b'$, mis ühtib mõlema koonuse projektsiooniga. Ringjoone kaarte ab asemel saadakse nüüd sirglõigud $a'b'$. On ilmne, et viga, mis tekib sfääriliste evol-



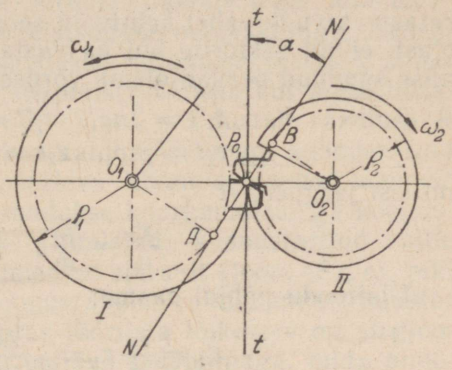
Joon. 480.

ventide asendamisel koonuste AO_1P_0 ja BO_2P_0 pindadele konstrueeritud profiilidega, on seda väiksem, mida suurem on sfääri raadius, võrreldes hammaste mooduliga.

Koonuseid, mille tipud paiknevad punktides O_1 ja O_2, nimetatakse *täienduskoonusteks*. Hammaste otsprofiilide konstrueerimine

ei valmista nüüd enam raskusi, sest täienduskoonuseid saab laotada tasapinnale ja kogu konstruktsioon kujuneb seega tasapinnaliseks.

3°. Olgu antud algkoonused *1* ja *2* (joon. 480). Konstrueerime hammaste pikkust piiravad tasapinnad *DE* ja *EC*. Edasi joonestame täienduskoonused P_0O_1A ja P_0O_2B ning laotame need projektsioonitasapinnale. Selleks tõmbame tsentritest O_1 ja O_2 ringjooned *I* ja *II*, kasutades raadiustena pikkusi ϱ_1 ja ϱ_2. Saadud kaared P_0KL ja P_0NM kujutavad koonusrataste algringjoonte laotusi (algringjoonte vastavateks raadiusteks on R_1 ja R_2). Kaari P_0KL ja P_0NM võib käsitada kui silinderrataste algringjooni, mille tsentrid paiknevad punktides O_1 ja O_2. Nüüd profileerime evolventhambad (joon. 481), silmas pidades varemesitatud üldisi reegleid ja peatükis XI toodud proportsioone. Tulemusena saame kaks hammassektorit *I* ja *II*. Rullime need hammassektorid täienduskoonustele ja ühendame kõik profiilipunktid sirgete abil tipuga *O*, moodustades niiviisi hammaste külgpinnad (joon. 480). Ülalkirjeldatud meetodiga konstrueeritaksegi etteantud algkoonustele vastavate koonusrataste hambad.



Joon. 481.

Tinglike algringjoonte raadiused ϱ_1 ja ϱ_2 (joon. 480) arvutatakse valemitega

$$\varrho_1 = \frac{R_1}{\cos \delta_1} \quad \text{ja} \quad \varrho_2 = \frac{R_2}{\cos \delta_2}.$$

Hammassektorite nurgad β_1 ja β_2 (joon. 480) saadakse tingimustest

$$\varrho_1 \beta_1 = 2\pi R_1 \quad \text{ja} \quad \varrho_2 \beta_2 = 2\pi R_2,$$

millest järgneb, et

$$\beta_1 = \frac{2\pi R_1}{\varrho_1} \quad \text{ja} \quad \beta_2 = \frac{2\pi R_2}{\varrho_2}.$$

Katteteguri arvutamiseks ja sisselõike puudumise kontrollimiseks võib kasutada ümmarguste silinderrataste jaoks tuletatud valemeid. Selleks tuleb aga hammassektoritelt üle minna täisratastele, kuna on ilmne, et sektorite hammaste arvud z_1 ja z_2 ei võrdu raadiustele ϱ_1 ja ϱ_2 vastavate silinderrataste (nn. abisilinderrataste) hammaste arvudega z_1' ja z_2'. Nimetatud hammas-

rataste arvude vahel kehtivaid seoseid võib saada, lähtudes asjaolust, et nii sektorite kui ka vastavate abisilinderrataste hambumise sammud peavad olema võrdsed. Seega:

$$z_1't = 2\pi\varrho_1, \quad z_2't = 2\pi\varrho_2,$$
$$z_1t = \beta_1\varrho_1, \quad z_2t = \beta_2\varrho_2,$$

millest järgneb, et

$$\frac{z'_1}{z_1} = \frac{2\pi}{\beta_1}, \quad \frac{z'_2}{z_2} = \frac{2\pi}{\beta_2}.$$

Ülaltoodu põhjal saame:

$$z'_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} z_1 = \frac{2\pi}{2\pi\cos\delta_1} z_1 = \frac{z_1}{\cos\delta_1},$$
$$z'_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} z_2 = \frac{2\pi}{2\pi\cos\delta_2} z_2 = \frac{z_2}{\cos\delta_2}.$$

Abisilinderrataste hammaste arvud on sektorite hammaste arvudest seega alati $\frac{1}{\cos\beta_1}$ või vastavalt $\frac{1}{\cos\beta_2}$ korda suuremad. On samuti ilmne, et abisilinderrataste ülekandesuhe erineb projekteeritavate koonusrataste ülekandesuhtest.

Koonusrataste ülekandesuhe

$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Abisilinderrataste ülekandesuhteks aga kujuneb

$$i'_{12} = \frac{z'_2}{z'_1} = \frac{z_2\cos\delta_1}{z_1\cos\delta_2} = i_{12}\frac{\cos\delta_1}{\cos\delta_2}.$$

Juhul kui nurk $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 90°$, saame:

$$i'_{12} = i_{12}\frac{\cos(90 - \delta_2)}{\cos\delta_2} = i_{12}\operatorname{tg}\delta_2.$$

Teiselt poolt, valemi (12.2) põhjal

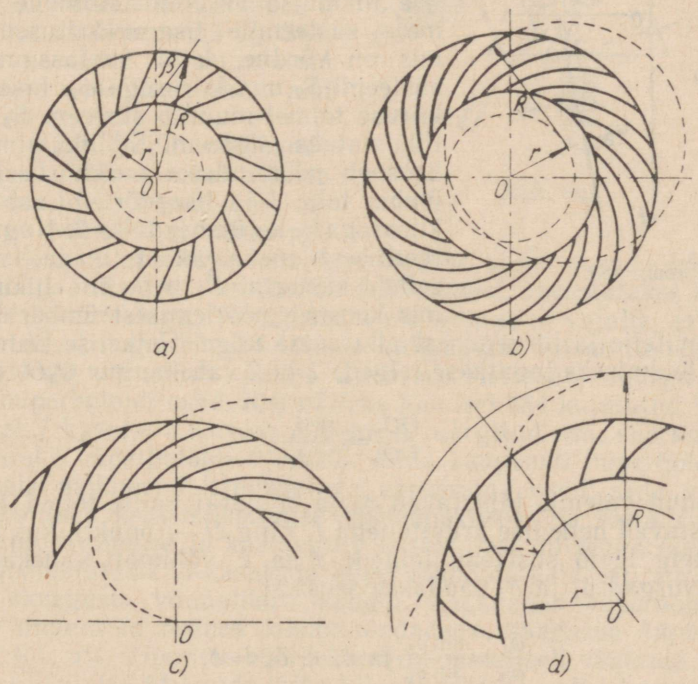
$$i_{12} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1} = \frac{\sin\delta_2}{\sin(90° - \delta_2)} = \operatorname{tg}\delta_2.$$

Järelikult

$$i'_{12} = i^2_{12}.$$

Koonusrataste hambumine vastab seega teatavale, suurema hammaste arvuga silinderrataste hambumisele. Võrdsete tingimuste puhul on koonushambumise kattetegur ε sama hammaste arvuga silinderhambumise katteteguri järelikult suurem. Sisselõike piirile vastav väiksema ratta hammaste arv z_{min} on aga koonushambumisel väiksem kui silinderratastel.

Masinaehituses kasutatakse sirgete hammastega koonusrataste kõrval väga laialdaselt ka teistsuguse hambakujuga koonusrattaid. Erinevad hambakujud saadakse rullumismenetlusel, andes lõikeriistale erinevaid suhtelisi liikumisi. Näiteks kui anda lõiketerale sirgjooneline liikumine nii, et see moodustab raadiuse R sihiga teatava nurga β, saadakse kaldhammastega koonusrattad (joon. 482, *a*). Andes terale pöörleva liikumise ümber koonuse tippu mitteläbiva telje suhtes, saadakse kaarhammastega koonusrattad (joon. 482, *b*). Võib veel valmistada koonusrattaid, mille puhul lõiketera liigub piki Archimedese spiraali (joon. 482, *c*), piki evolventi (joon. 482, *d*) jne. Koonusrataste valmistamisel kasutatakse rullumismenetlust, kusjuures tööriista lõikeserv on sirgjooneline ja kinemaatiliselt seotud teatava tasapinnaga, mida nimetatakse kujundava ratta tasapinnaks. Viimane veereb rullumisprotsessis tooriku jaotuskoonusel. Seetõttu loetakse koonushammasrataste lõikamise protsessi mõnikord analoogiliseks silinderrataste lõikamisega, kus sirgjoonelise lõikeservaga lõiketera kujundab rullumisel evolventprofiili. Koonusrataste lõikamisel aga



Joon. 482.

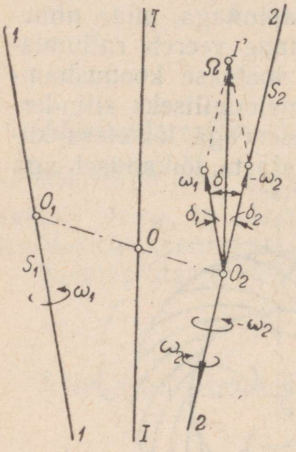
paikneb lõikeserv kujundava ratta tasapinna suhtes teatava nurga all, mistõttu rullumisel tekib tunduvalt komplitseeritum pind.

Sirgete hammaste puhul saadakse seejuures nn. *oktoidhambumine,* mille hambumisjoone kuju meenutab numbrit 8.

§ 64. Hüperboloid- ja kruvirattad

1°. Hüperboloid- ja kruvirattaid kasutatakse olukorras, kus pöörlevat liikumist tuleb üle kanda kiivate telgede vahel. Hüperboloidhammasrataste moodustamist võib käsitada järgmiselt. Olgu antud kaks ruumis meelevaldselt orienteeritud telge *1* ja *2* (joon. 483). Ülesandeks on kanda süsteemi S_1 pöörlev liikumine üle süsteemile S_2 nii, et ülekandesuhe

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const.}$$



Joon. 483.

Leiame süsteemide S_1 ja S_2 suhtelise liikumise aksoidid. Anname mõlemale süsteemile lisanurkkiiruse $-\omega_2$, mis on võrdne, kuid vastassuunaline süsteemi S_2 nurkkiirusega ω_2. Lisanurkkiiruse toimel muutub süsteem S_2 nüüd liikumatuks, süsteemi S_1 liikumine aga koosneb pöörlemisest nurkkiirusega ω_1 ümber telje *1* ja lisapöörlemisest nurkkiirusega $-\omega_2$ ümber telje *2*. Nagu teoreetilisest mehaanikast teada, vastab sellele süsteemi S_1 hetkeline liikumine, mis koosneb pöörlemisest ümber hetkelise kruvitelje ja libisemisest piki sama telge. Hetkelise kruvitelje asendi leidmiseks jagatakse telgede *1* ja *2* vahekaugus O_1O_2 nii, et

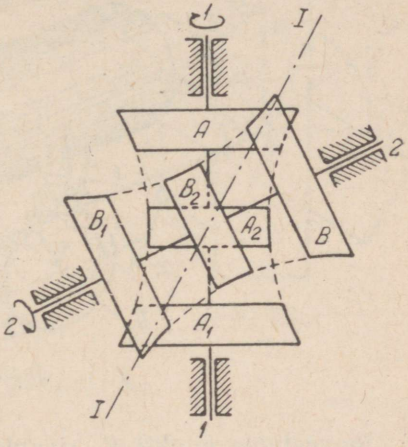
$$\frac{OO_1}{OO_2} = \frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta_2}.$$

Toodud valemis tähistavad δ_1 ja δ_2 nurki, mille teljed *1* ja *2* moodustavad hetkelise kruviteljega *I*, ning *O* — punkti, kus nimetatud telg läbib süsteemi telgede *1* ja *2* vähimat vahekaugust O_1O_2. Nurgad δ_1 ja δ_2 saadakse seostest

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sin\delta_2}{\sin\delta_1} \quad \text{ja} \quad \delta_1 + \delta_2 = \delta,$$

kus δ tähistab telgede *1* ja *2* vahelist nurka.

Süsteemide S_1 ja S_2 suhtelise liikumise hetkelise kruvitelje OI siht määratakse tingimusest, mille kohaselt nimetatud telg peab olema paralleelne vektoritele ω_1 ja $-\omega_2$ ehitatud rööpküliku diagonaaliga. Kuna nurkkiirused ω_1 ja ω_2 ning nurgad δ_1 ja δ_2 on eelduse põhjal konstantsed, siis osutub hetkelise kruvitelje asend sõltumatuks süsteemide S_1 ja S_2 paigutustest. Süsteemidele S_1 ja S_2 kuuluvad aksoidid puutuvad järelikult teineteist alati piki ühist sirget OI. Kuna kaugused O_1O ja O_2O telgede *1* ja *2* ning hetkelise telje OI vahel on konstantsed nagu ka nimetatud telgede vahelised kaldenurgad δ_1 ja δ_2, siis kujunevad aksoidid ühekattelisteks pöördhüperboloididekstelgedega *1* ja *2*.



Joon. 484.

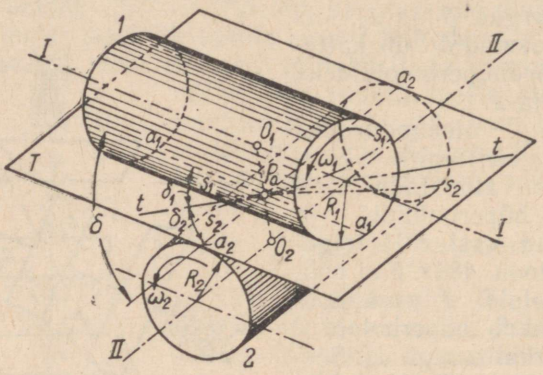
Liikumise ülekandmiseks süsteemilt S_1 süsteemile S_2 tuleb järelikult valmistada ülalkirjeldatud hüperboloidid ja kinnitada nad vastavalt telgedele *1* ja *2* (joon. 484). Kui pöörata hüperboloidi *1* nurkkiirusega ω_1, hakkab hüperboloid *2* pöörlema nurkkiirusega ω_2. Seejuures veerevad hüperboloidid teineteisel ja libisevad piki telge OI.

2°. Kirjeldatud ülekande praktilisel teostamisel tuleb hoolitseda, et hüperboloididevaheline hõõrdejõud oleks piisav. Selleks tuleks hüperboloide teineteise vastu suruda küllaltki suure jõuga. Et mitte sõltuda hõõrdejõududest, varustatakse hüperboloidid hammastega. Tavaliselt ei ole seejuures vajalik, et hambad kataksid kogu hüperboloidide välispinda. Piisab sellest, kui hammastega varustada ainult teatavad, risttasapindadega eraldatud hüperboloidi osad. Kui näiteks joonisel 484 kujutatud hüperboloidist *1* kasutada rattana tähega *A* märgitud osa, siis kujuneb kaasrattaks hüperboloidi *2* osa *B*. Mida kaugemal hüperboloidide «kurgust» paiknevad hammastega varustatud osad, seda väiksemaks kujuneb kruviteljesihilise libisemiskiiruse ja ratta ringkiiruse suhe. Kulumise ja kasuteguri seisukohast on seega otstarbekas hammasratastena kasutada hüperboloidide neid osi, mis paiknevad «kurgust» võimalikult kaugel. Asendades hüperboloidide pinnad nimetatud osades koonuspindadega, saadakse *hüpoidrattad* (vt § 5, 5°). Viimaste hõõrdekaod on suhteliselt väikesed.

3°. Liikumise ülekandmiseks kiivate telgede vahel kasutatakse hüperboloidrataste asemel *kruvirattaid*.

Kruvirattad on kujutatud joonisel 59 (lk. 58). Tuletame nende rataste põhiliste parameetrite vahel kehtivad seosed. Vaatleme kaht silindrit *1* ja *2*, mis pöörlevad nurkkiirustega ω_1 ja ω_2 ümber telgede *I* ja *II*. Puutugu silindrid teineteist punktis P_0. Kui silindrite raadiusteks võtta vastavalt R_1 ja R_2, siis telgede *I* ja *II* väikseimaks vahemaaks on

$$O_1O_2 = R_1 + R_2.$$



Joon. 485.

Joonestame punkti P_0 sisaldava tasapinna *T*, mis ristub sirglõiguga O_1O_2. See tasapind puutub silindrit *1* piki moodustajat a_1 ja silindrit *2* piki moodustajat a_2, olles mõlema nimetatud silindri ühiseks puutujatasapinnaks. Tõmbame nüüd tasapinnal *T* punkti P_0 läbiva sirge *tt*. Nurgad, mis tekivad selle sirge ja moodustajate a_1 ning a_2 vahel, tähistame vastavalt δ_1 ja δ_2. Kui δ on moodustajate a_1 ja a_2 vaheline kogunurk, mis ühtlasi võrdub ka kiivate telgede *I* ja *II* vahelise nurgaga, siis on ilmne, et

$$\delta_1 + \delta_2 = \delta.$$

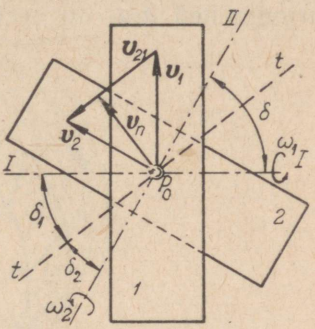
Rullime tasapinna *T* kordamööda silindritele *1* ja *2*. Sirge *tt* moodustab seejuures silindril *1* kruvijoone s_1s_1, mille kaldenurgaks on δ_1. Silindril *2* tekib analoogiliselt kruvijoon s_2s_2 kaldenurgaga δ_2. Kruvijooned puutuvad teineteist punktis P_0 ja sirge *tt* on nendele ühiseks puutujaks.

Kui käsitada silindreid *1* ja *2* algsilindritena, siis kujunevad kruvijooned s_1s_1 ja s_2s_2 hammaste külgjoonteks. Hammaste külgpinnaks on laotuvaks helikoidiks nimetatav joonpind.

Kruvirataste põhiliste parameetrite vahel kehtivate põhiseoste leidmine ei ole raske.

Projekteerime kruvirataste algsilindrid tasapinnale *T* (joon.

485). Teljed *I* ja *II* ning nurgad δ_1, δ_2 ja δ projekteeruvad seejuures moonutusteta (joon. 486). Ratta *1* punkti P_0 absoluutkiirust kujutab teljega *I* ristuv vektor $\boldsymbol{v}_1$. Ratta *2* punkti P_0 absoluutkiiruseks on teljega II ristuv vektor $\boldsymbol{v}_2$. Silindri *2* punkti P_0 relatiivne kiirus silindri *1* suhtes $\boldsymbol{v}_{21}$ on hammaste kruvijoonte ühise puutuja *tt* sihiline. Ülekande kiirusplaaniks on tasapinnal *T* paiknevatest vektoritest $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ ja $\boldsymbol{v}_{21}$ moodustatud kolmnurk. Tõmbame läbi punkti P_0 vektori $\boldsymbol{v}_{21}$ sihile ristsirge. Saame vektori $\boldsymbol{v}_n$, kusjuures



Joon. 486.

$$v_n = v_1 \cos \delta_1 \quad \text{ja} \quad v_n = v_2 \cos \delta_2.$$

Toodud seostest selgub, et

$$v_1 \cos \delta_1 = v_2 \cos \delta_2.$$

Kiiruste $\boldsymbol{v}_1$ ja $\boldsymbol{v}_2$ suurused on aga teatavasti antud valemitega

$$v_1 = \omega_1 R_1 \quad \text{ja} \quad v_2 = \omega_2 R_2,$$

kus R_1 ja R_2 tähistavad vastavate algsilindrite raadiusi. Seega võime kirjutada:

$$\omega_1 R_1 \cos \delta_1 = \omega_2 R_2 \cos \delta_2.$$

Viimasest järgneb omakorda, et

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2 \cos \delta_2}{R_1 \cos \delta_1}. \tag{12.3}$$

Seoses (12.3) tähistavad z_1 ja z_2 rataste *1* ja *2* hammaste arvusid.

Erijuhul, kui $\delta = 90°$, saame

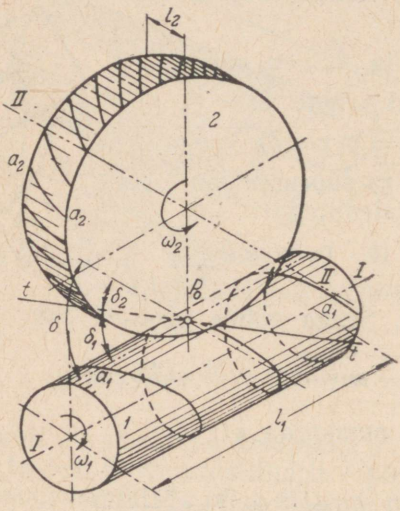
$$i_{12} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1. \tag{12.4}$$

Võrrand (12.3) näitab, et erinevalt sellest, mis kehtis silinder-, koonus- ja hüperboloidrataste juures, võib kruvirataste ülekandesuhet mõjustada mitte kahe, vaid nelja suuruse (R_1, R_2, δ_1 ja δ_2) valikuga.

Kruvirataste puuduseks tuleb lugeda asjaolu, et nende hambad puutuvad teineteist ainult ühes punktis. Kontaktpunktis valitsev erisurve on seetõttu alati suur. Lisaks sellele põhjustab suur hammastevaheline libisemine nende kiiret kulumist.

§ 65. Tigumehhanism

1°. Masinaehituses kasutatakse laialdaselt üht kruviratast eriliiki. Selle telgedevaheline nurk δ võrdub 90°, kusjuures kaldenurgad δ_1 ja δ_2 aga teineteisest tublisti erinevad. Olgu näiteks ratta *1* kaldenurk δ_1 suur, ratta *2* kaldenurk δ_2 seevastu väikene (joon. 487). Ratta *2* algsilindri külgpinnal paiknevad hammaste kruvijooned a_2a_2 on seetõttu lühikesed. Vastupidi, ratta *1* ham-



Joon. 487.

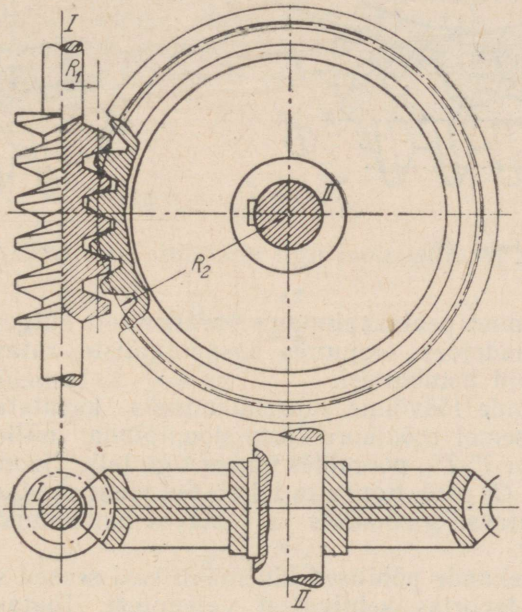
maste kruvijooned a_1a_1 võivad silindri *1* külgpinnal teha mitu ringi.

Kruviratast, mille hambad teevad ümber algsilindri mitu ringi, nimetatakse *tiguks*, viimasega hambuvat kaaskruviratast aga *tigurattaks*. Tigu koos temaga hambuva tigurattaga moodustab *tiguhambumise*. Kasutades tigu ja tiguratta lõikamiseks tavalist rullumismenetlust, saadakse tiguhambumine, mis kujutab endast kruvihambumise erijuhtu. Säärasel tiguhambumisel esinevad järelikult ka kõik kruvihambumise puudused.

Tiguhambumise puudusi saab suurel määral vähendada, kui tiguratta hambad lõigata tigufreesiga, mille kuju vastab täpselt sellele tigule, millega lõigatav ratas peab hiljem hambuma. Tigufreesile ja lõigatavale tigurattale tuleb seejuures anda tigu ja tiguratta hambumisel esinev suhteline liikumine. Säärasel viisil lõigatud tiguratas kontakteerub tiguga piki teatavat joont. Kon-

taktjoone pikendamiseks antakse tiguratta pöiale tigu embav kuju (joon. 488).

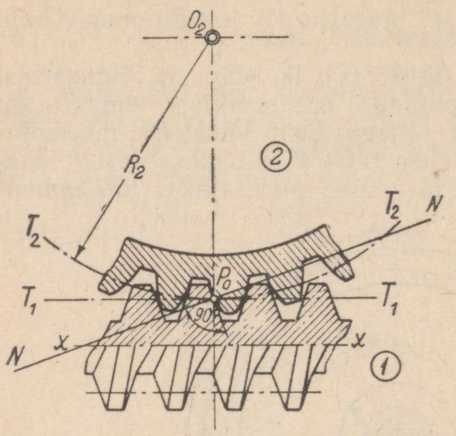
2°. Lõigates Archimedese tigust (vt. lk. 405) ja tigurattast moodustatud ülekannet tasapinnaga, mis sisaldab endas tigu telge ja on seejuures risti ratta teljega, tekib lõikejoon, mis kujutab evolventprofiiliga tasapinnalise ratta *2* ja hammaslati *1* hambumist (joon. 489). Käsitletud tasapinda nimetatakse *tiguhambu-*



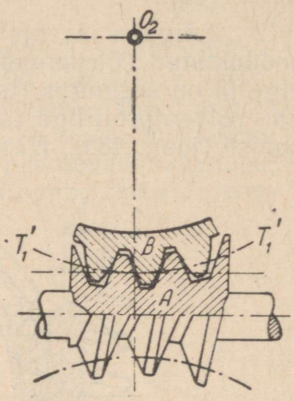
Joon. 488.

mise peatasapinnaks. Nii peatasapinnas kui ka teistes sellega paralleelsetes tasapindades võib tiguhambumist käsitada kui tasapinnalist hambumist ratta ja lati vahel. Nihutades hammaslatti *1* piki telge *xx*, saab tiguratta *2* panna pöörlema nurkkiirusega ω_2. Seetõttu võib tiguülekande profileerimise taandada tavalise ratta ja hammaslati vahelise hambumise projekteerimiseks. Selleks et latist moodustada tigu, piisab latile kruviliikumise andmisest piki telge *xx*. Kui lati hammas ühe täispöörde jooksul nihkub piki telge *xx* edasi ühe hambumise sammu *t* võrra, siis tekib *ühekäiguline* tigu (joon. 489). Juhul kui lati hammas nihkub sama aja jooksul edasi 2*t* võrra, saadakse *kahekäiguline* tigu jne.

Tiguülekande kontaktpunktid moodustavad küllaltki keeruka hambumisjoone. Viimast saab punkthaaval konstrueerida, lõiga-



Joon. 489.



Joon. 490.

tes tiguülekannet peatasapinnaga paralleelselt kulgevate tasapindadega ja vaadeldes seejuures tasapinnaliste rataste ja lattide vahel tekkivaid hambumisi.

Tiguülekande töövõime suurendamiseks kasutatakse tigudel algsilindri asemel mõnikord rotatsioonipinda, mille moodustab ringjoone kaar $T'_1T'_1$, pööreldes ümber tigu telje (joon. 490). Kaare $T'_1T'_1$ tsenter O_2 asub tiguratta teljel. Sel viisil saadud rotatsioonipinda nimetatakse *globoidiks* ja vastavat hambumist — *globoidhambumiseks*.

3°. Tiguülekande põhilised kinemaatilised seosed saab tuletada kruvirataste teoorias kehtivatest valemitest. Teatavasti arvutatakse ristuvate telgedega kruvirataste ülekandesuhe valemiga (12.4):

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{R_2}{R_1} \operatorname{tg} \delta_1.$$

Kasutades tiguülekandele vastavaid indekseid, võime kirjutada

$$\omega_1 = \omega_t, \quad \omega_2 = \omega_r, \quad R_1 = R_t,$$
$$R_2 = R_r, \quad z_1 = z_t, \quad z_2 = z_r,$$

kus ω_t ja ω_r tähistavad vastavalt tigu ja tiguratta nurkkiirusi, R_t ja R_r — tigu ja tiguratta algsilindri raadiusi, z_t — tigu käikude arvu ja z_r — tiguratta hammaste arvu. Valem (12.4) kujuneb nüüd järgmiseks:

$$i_{tr} = \frac{\omega_t}{\omega_r} = \frac{R_r}{R_t} \operatorname{tg} \delta_1 = \frac{z_r}{z_t}.$$

Kaldenurga δ_1 asemel on mugavam kasutada tigukeerme tõusunurka α, mille väärtuseks on $90° - \delta_1$. Sel juhul

$$i_{tr} = \frac{R_r}{R_t \operatorname{tg} \alpha} = \frac{z_r}{z_t}. \qquad (12.5)$$

Nurga α tangensit saab avaldada hambumise sammu t kaudu. Tõepoolest, kui laotada tigu algsilinder tasapinnale, muutub kruvijoon abstsisstelje suhtes nurga α all paiknevaks sirgeks AB. Keerme tõus h sõltub seejuures tigukeerme käikude arvust. Üldjuhul on keerme tõus määratud seosega

$$h = z_t t,$$

mistõttu

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{2\pi R_t} = \frac{z_t t}{2\pi R_t}. \qquad (12.6)$$

Valemist (12.6) võib ilmutada tigu jaotussilindri raadiuse:

$$R_t = \frac{z_t t}{2\pi \operatorname{tg} \alpha},$$

ehk silmas pidades, et $\frac{t}{\pi} = m$,

$$R_t = \frac{m z_t}{2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Ratta jaotussilindri raadius on antud valemiga

$$R_r = \frac{m z_r}{2}.$$

Valemist (12.5) võib järeldada, et ühekäigulise tigu puhul võrdub ajami ülekandesuhe tiguratta hammaste arvuga. Kahekäigulist tigu kasutades tuleb ülekandesuhte leidmiseks tiguratta hammaste arv jagada kahega, kolmekäigulise puhul — kolmega jne. Tiguülekanne võimaldab järelikult suuri ülekandesuhteid. Näiteks, kui tigurattal on 80 hammast ja tigu on ühekäiguline, siis ülekandesuhe

$$i_{tr} = \frac{\omega_t}{\omega_r} = \frac{z_r}{z_t} = \frac{80}{1} = 80.$$

Tigukeeret moodustava kruvipinna kuju sõltub tigu lõikamisel kasutatavast lõiketera seadest. Näiteks juhul, kus tigu telg asub lõikeriista esitahu tasapinnas, saadakse joonkruvipind, mille kõik moodustajad läbivad tigu telge. Tekkinud kruvipinna ja tigu teljega ristuva tasapinna (nn. risttasapinna) lõikumisel tekib Archimedese spiraal. Vastavat tigu nimetatakse seetõttu ka *Archimedese tiguks*.

Lõiketera võib aga olla ka tigu telje suhtes kruvijoone tõusunurga võrra pööratud. Sel juhul ristub tera esitahk lõigatava kruvipinnaga. Lõikamisel tekib nüüd joonkruvipind, mille moodustajad enam tigu teljega ei lõiku, vaid on puutujaiks ühele teatavale, tigu algsilindris asuvale koaksiaalsele silindrile. Kirjeldatud viisil saadud joonkruvipinna ja risttasapinna lõikumisel tekib *konvoluudiks* nimetatav kõver. Vastavat tigu nimetatakse seetõttu *konvoluuttiguks.*

Juhul kui tera esitahu tasapind on suhtelises liikumises tigu kruvijoone puutujaks, saadakse joonkruvipind, mille lõikumisel risttasapinnaga tekib ringjoone evolvent. Evolventkruvipinnaga tigu nimetatakse *evolventtiguks.*[1]

XIII peatükk

MADALAMATE PAARIDEGA TASAPINNALISTE MEHHANISMIDE PROJEKTEERIMINE

§ 66. Projekteerimise põhilisi ülesandeid

1°. Madalamate paaridega tasapinnalisi mehhanisme kasutatakse paljudes masinates, aparaatides ja seadmetes.

Nimetatud mehhanismide eelised on eestkätt määratud lülisid ühendavate madalamate paaride omadustega. Madalamates paarides on kinemaatilised elemendid moodustatud teatavasti pindadest (translatsioonipaarides tasapindadest, rotatsioonipaarides — silinder- või rotatsioonipindadest). Seetõttu on nendes valitsev erisurve ja kulumine väiksemad kui kõrgemates kinemaatilistes paarides. Madalamaid paare moodustavate elementide nõutava täpsusega valmistamine on suhteliselt lihtne, sest tasapindade ja silinderpindade töötlemistehnoloogia on tänapäeval juba küllaltki täiuslik. Lisaks sellele ei vaja madalamad paarid vedrusid (mis on vajalikud näiteks nukkmehhanismides) ega muid seadmeid kinemaatiliste elementide vahelise alalise kokkupuute tagamiseks (kinemaatiliste paaride lukustamiseks).

---

[1] Kaasaegses masinaehituses kasutatakse paljudesse eritüüpidesse kuuluvaid ruumilisi hambumisi, mille teooriat on laiaulatuslikult arendanud nõukogude teadlased. Asjasthuvitatud võivad nimetatud küsimustega lähemalt tutvuda järgmistes monograafiates: Гавриленко В. А., Геометрическая теория эвольвентных зубчатых передач, Машгиз, 1949 (uus trükk 1956); Колчин Н. И., Аналитический расчет плоских и пространственных зацеплений, Машгиз 1949. Nimetatud monograafiates on toodud ka üksikasjalised kirjanduse loetelud. Teatmematerjali hammas- ja tiguülekannete arvutamiseks võib leida entsüklopeedilise käsiraamatu «Машиностроение» 2. köites, 1948, lk. 212—358 või selle hilisemates väljaannetes, mis samuti sisaldavad detailseid kirjanduse loetelusid.

Teoreetiliselt saab madalamaid paare sisaldavate tasapinnaliste mehhanismidega reprodutseerida mis tahes algebralist kõverat või mis tahes algebralist sõltuvust vedava ja veetava lüli paigutuste vahel. Nende praktilist kasutamist piiravad aga teoreetilise kinemaatilise skeemi reaalse teostamise võimalused. Lülide arvu suurenemisel kasvab mehhanismides lubamatute ülekandenurkade tekkimise võimalus. Suureneb ka reprodutseerimiseks etteantud sõltuvuse moonutus. Viimast põhjustab mehhanismi valmistamisel tekkivatest ebatäpsustest tingitud vigade kuhjumine. Ülaltoodud põhjustel ei saa kõiki ülekandeseadusi ainult madalamaid paare sisaldavate tasapinnaliste mehhanismide abil praktiliselt teostada. Selles seisnebki käsitlevate mehhanismide põhiline puudus. Nukk- ja hammasmehhanismid on tänu nende kõrgemate paaride kuju ja asetuse suurematele varieerimisvõimalustele praktiliselt palju universaalsemad. Tuleb aga märkida, et seoses madalamaid paare sisaldavate mehhanismide projekteerimismeetodite arenguga laieneb vastavalt ka nende kasutusala. Näiteks viimastel aastatel rakendatakse NSV Liidus teatavate, matemaatilisi operatsioone sooritavate masinate juures šarniirmehhanisme, mis on varemkasutatud nukk- ja friktsioonmehhanismidest palju täiuslikumad.

2°. Enne kui käsitleda madalamaid paare sisaldavate mehhanismide kaasaegseid projekteerimismeetodeid, vaatleme lühidalt nende projekteerimise põhilisi ülesandeid.

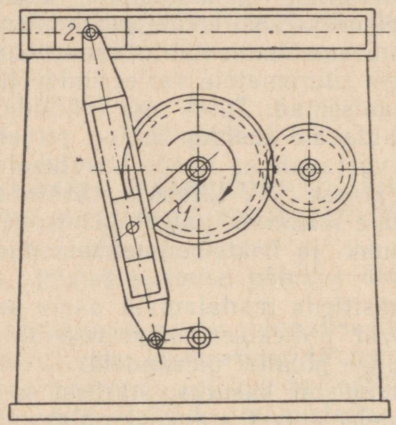
Olenevalt mehhanismi kasutusotstarbest peavad tema veetavate lülide punktidel olema teatavad kindlaksmääratud trajektoorid, paigutused, kiirused ja kiirendused. Nimetatud suurused sõltuvad mehhanismi vedava lüli liikumisseadusest ja kinemaatilise skeemi parameetritest, s. t. kinemaatilist skeemi määravate lülide mõõdetest. Madalamate paaridega tasapinnalistes mehhanismides tuleb kinemaatilise skeemi parameetriteks (skeemiparameetriteks) lugeda šarniiride tsentritevahelised kaugused, translatsioonipaaride asukohti määravad mõõted, kaugused punktideni, mille trajektooride omadusi antud mehhanismis kasutatakse jne. Mehhanismide projekteerimise põhiliseks ülesandeks on leida skeemiparameetrid, mis vastaksid veetava lüli etteantud geomeetrilistele ja kinemaatilistele liikumistingimustele. Projekteerimise kõik ülejäänud etapid sisaldavad ainult abi- ja kontrollarvutusi, mis lubavad otsustada, kas saadud kinemaatiline skeem on reaalselt teostatav ja majanduslikult otstarbekas.

Edaspidises tuleb madalamate paaridega mehhanismide projekteerimise all mõista lülide etteantud liikumistingimustele vastavate skeemiparameetrite määramise kompleksi. Et lülidele etteantavad liikumistingimused võivad olla väga mitmekesised, siis vastavalt sellele on mitmekesised ka madalamate paaridega mehhanismide projekteerimise ülesanded. Nende seast võib siiski esile

tõsta kaks põhilist ülesandetüüpi, millest esimene käsitleb etteantud liikumisseaduse reprodutseerimist (matkimist) ja teine — etteantud trajektoori saavutamist.

3°. *Etteantud liikumisseaduse reprodutseerimise ülesande sisuks* on mehhanismi sääraste skeemiparameetrite leidmine, mis vedava lüli teatava kindla liikumise puhul tagaksid, et mehhanismi veetav lüli saab etteantud seadusele täpselt või ligikaudselt vastava liikumise.

Toome näiteid mehhanismidest, kus etteantud liikumisseaduse enam-vähem täpne jälgimine on oluline.

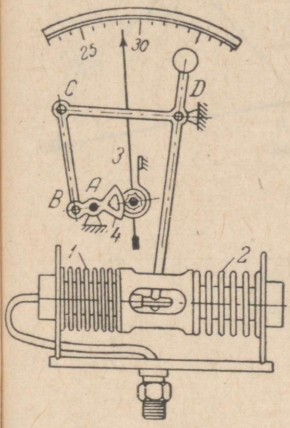


Joon. 491.

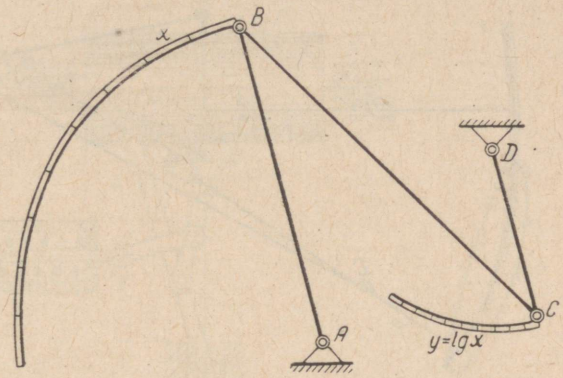
Joonisel 491 on kujutatud risthöövelpingi (šepingu) mehhanism. Vedava lüli *1* ühtlane pöörlemine annab supordile *2* vahelduvasuunalise translatoorse liikumise, kusjuures supordi liikumiskiirus peab töökäigul olema võimalikult ühtlane, tagasikäigul aga kiirendatud. Sellise mehhanismi projekteerimisel tuleb kinemaatilise skeemi parameetrite valikul lähtuda nõudest, et supordi kiirus oleks lõikamise ajal enam-vähem ühtlane.

Peale ühtlase kiirusega liikumise võib veetavale lülile ette kirjutada ka tunduvalt keerukamaid liikumisseadusi. Säärane olukord esineb näiteks sõelte, konveierite, sorteerimismasinate, iseladujate ja paljude teiste mehhanismide projekteerimisel. Etteantud liikumisseaduse reprodutseerimise ülesanneteks taanduvad ka aparaadiehituses kasutatavate ülekandemehhanismide projekteerimisel tekkivad küsimused, kus tundliku elemendi ebaühtlane liikumine tuleb muundada osutava elemendi ühtlaseks liikumiseks. Näiteks diferentsiaal-manovaakuummeetris, mille mehhanismi kujutab joonis 492, kantakse tundlikkude elementide *1* ja *2* paigu-

tused osutile *3* üle šarniirnelilüliku ja hammassektori *4* abil. Et saada ühtlase jaotusega skaalat, tuleb kõigepealt võrdsete rõhumuutuste juures leida tundlikkude elementide *1* ja *2* paigutustele vastavad lüli *CD* pöördenurgad. Seepeale valitakse šarniirnelilüliku *ABCD* skeemiparameetrid nii, et lüli *CD* leitud pöördenurkadele vastaksid lüli *AB* võrdsed pöördenurgad.



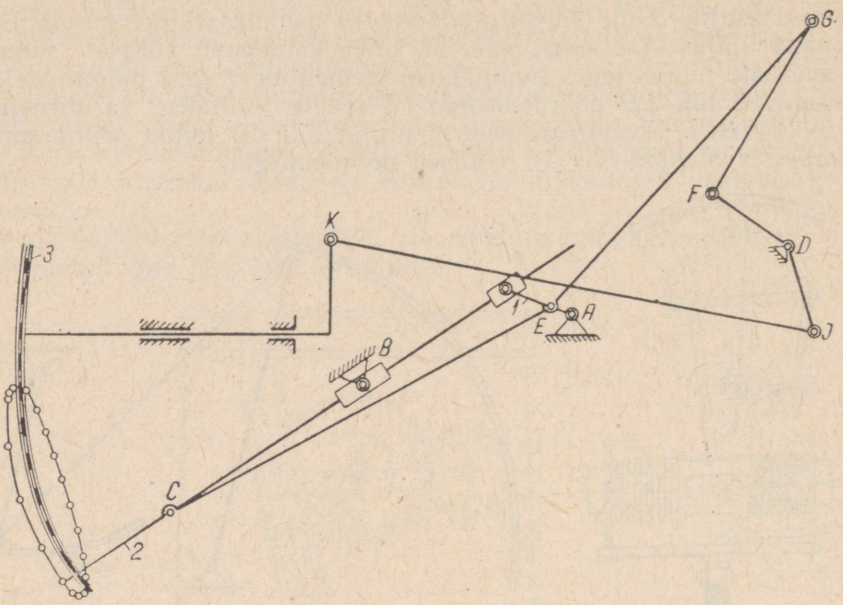
Joon. 492.



Joon. 493.

Mehaanilistes arvutusmasinates kasutatavad šarniirmehhanismid lähenevad oma omadustelt ühtlast skaalat tagavatele ülekandemehhanismidele. Joonisel 493 on kujutatud mehhanism, mida kasutatakse logaritmilise sõltuvuse $y = \lg x$ arvutamiseks intervallis $1 \leqslant x \leqslant 10$. Kui mehhanismi lülide pikkused on sobivalt valitud, siis lüli *AB* pööramisele argumendiga x võrdelise nurga võrra vastab lüli *CD* pöördenurk, mis on praktikas küllaldase täpsusega võrdeline funktsiooni $y = \lg x$ väärtusega. See lähendusmehhanism on praktikas osutunud palju otstarbekamaks kui teoreetiliselt täpselt töötavad, kõrgemaid paare või friktsioonülekandeid sisaldavad mehhanismid.

Kõigis ülalkäsitletud mehhanismides olid veetavad lülid šarniiride või translatsioonipaaride abil seotud vahetult kinnislüliga. Järelikult võisid nad pöörelda ümber kinnispunkti või liikuda translatoorselt. Liitliikumisega veetavaid lülisid esineb harvemini. Näitena võib viidata joonisel 494 kujutatud kinokaamera haardemehhanismile. Ajavahemikus, mil vedav lüli *1* pöördub 142° võrra, viib veetav lüli *2* filmi *3* edasi ühe kaadri võrra. Vedava lüli täispöörde ülejäänud aja jooksul jääb film liikumatuks. Selle mehhanismi projekteerimisel tuleb lülide parameetrid valida nii, et veetava lüli ots läbiks oma liikumisel joonisel 494 kujutatud trajek-



Joon. 494.

toori. Peale selle peab lüli *2* geomeetriline telg asuma teatavates etteantud asendites, mis vastavad vedava lüli *1* etteantud positsioonidele.

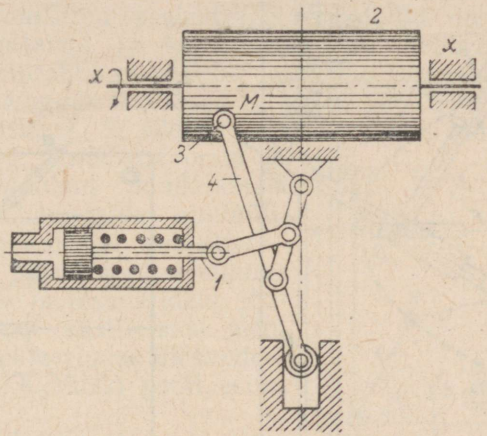
Toodud näited käsitlesid kõik mehhanisme, kus etteantud liikumisseadusest tuli veetava lüli liikumise teatava ulatusega intervallis enam-vähem täpselt kinni pidada. Mõnedel juhtudel aga piisab, kui mehhanismi veetav lüli läbib ainult teatava arvu etteantud üksikasendeid (mehhanismi projekteerimine etteantud asendite järgi). Esineb veel olukordi, kus etteantud asendites on ära määratud ka veetava lüli kiirus või kiirendus jne. Kõiki neid ülesandeid võib aga vaadelda kui etteantud liikumisseaduse reprodutseerimise üldprobleemi erijuhte.

4°. Projekteerides mehhanisme, mille veetavatel lülidel on liitliikumine, võib mõnedel juhtudel piirduda ainult veetava lüli ühe teatava punkti trajektoori reprodutseerimisega. Vastavat mehhanismide projekteerimise ülesannet nimetatakse *etteantud trajektoori reprodutseerimise ülesandeks.*

Nimetatud ülesande sisuks on mehhanismi sääraste skeemiparameetrite leidmine, mis tagaksid, et liitliikumisega lüli üks punktidest läbiks ettemääratud trajektoori. Lihtsaimal juhul on ettemääratud trajektooriks sirglõik. Mehhanisme, mille kepsudel võib leida punkte, mis liiguvad täpselt või ligikaudu sirgjooneli-

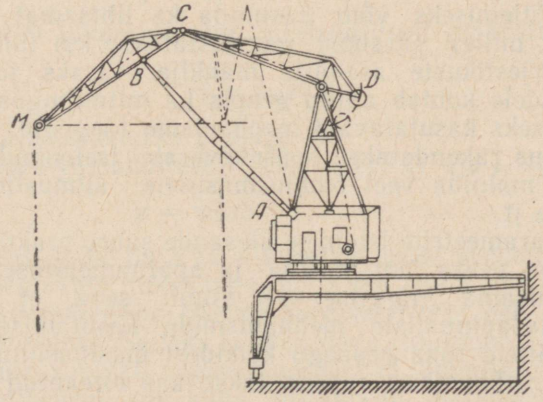
selt, nimetatakse sirg-juhtmehhanismideks. Aparaadiehituses kasutatakse neid näiteks indikaatorite juures.

Joonis 495 kujutab skemaatiliselt indikaatorit, mille lüli *1* paigutused on võrdelised mõõdetava suurusega. Viimane kirjutatakse kepsu *4* külge kinnitatud sulega *3* teljel *xx* pöörlevale silindrile *2*. Käsitletud mehhanismi projekteerimisel tuleb skeemiparameetrid valida nii, et kepsu *4* punkt *M* liiguks ligikaudu sirgjooneliselt.



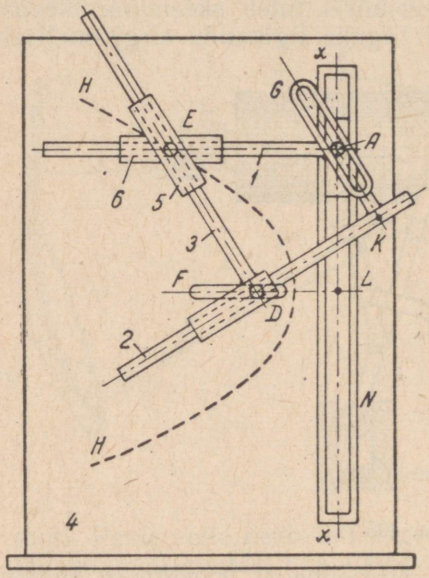
Joon. 495.

Raskemasinaehituses kohtab sirgjoonelisi trajektoore andvaid mehhanisme tõstekraanades (joon. 496), kus šarniirnelilüliku *ABCD* punkti *M* ligikaudselt sirgjooneline trajektoor võimaldab lasti horisontaalselt nihutada.

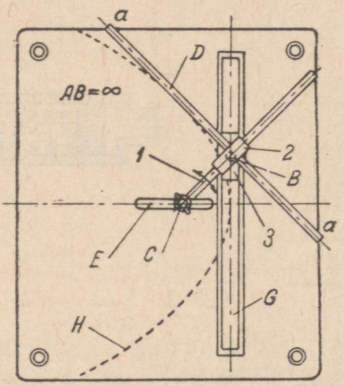


Joon. 496.

Etteantud trajektoori reprodutseerivate mehhanismide gruppi kuuluvad ka nn. joonestavad mehhanismid. Viimaseid kasutatakse mitte üksnes teatavate kõverate mehaaniliseks joonestamiseks, vaid ka tööpinkides erikujuliste detailide töötlemisel. Joonisel 497 on toodud ühe säärase mehhanismi skeem, mille parameetrid on



Joon. 497.

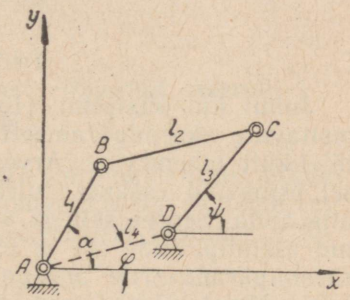


Joon. 498.

valitud nii, et punkt *E* kujundab täpse parabooli. Paraboolsete pindade töötlemiseks võib kasutada ka lihtsamat mehhanismi (joon. 498), milles parabool moodustatakse kui lüliga *2* seotud sirge *aa* järjestikuste asendite mähkija. Lisaks joonestavatele mehhanismidele kohtab antud grupis ka mitmesuguseid materjalide segamiseks kasutatavaid mehhanisme (segistid, taignasõtkujad jne.), kus rakendatakse kepsukõverate iseloomulikke vorme. Edasi võib mainida veel õmblusmasinate silmustmoodustavaid mehhanisme jt.

Skeemiparameetrite leidmise ülesande suure praktilise tähtsuse selgitamiseks peaks ülal masina- ja aparaadiehituse alal toodud näidetest piisama. Märgime veel ainult seda, et madalamate paaridega tasapinnaliste mehhanismide kasutamise kohta võib hulgalisi näiteid tuua peaaegu kõikidest masinaehituse harudest. Kõiki neid mehhanisme rakendatakse kas etteantud liikumisseaduse reprodutseerimiseks (kaasa arvatud ka lülide üksikasendite ülesanne) või ettemääratud trajektooride saamiseks.

5°. Madalamate paaridega mehhanismide projekteerimise ülesandeid saab lahendada nii graafiliste kui ka analüütiliste meetoditega. Selle või teise meetodi valik sõltub suurel määral projekteerimisel esitatud tingimustest. Kui liikumise ligikaudsel reprodutseerimisel nõutakse näiteks hinnangu andmist kõrvalekaldumiste suuruse kohta, mis esinevad etteantud ja tegelikult saavutatava liikumise vahel, tuleb rakendada analüütilist meetodit, sest et graafilised meetodid ei suuda esitatud küsimusele täielikku vastust anda. Graafilised projekteerimismeetodid on ülevaatlikud, hõlpsasti äraõpitavad ja konstruktoritele käepärased. Seetõttu on nad inseneripraktikas leidnud laialdast kasutamist. Viimastel aastatel on nõukogude teadlased N. I. Levitski, S. A. Tšerkudinov, V. V. Dobrovolski, Z. Š. Blohh, G. G. Baranov, M. V. Semjonov, I. Š. Pinsker, J. P. Novodvorski jt. tunduvalt arendanud madalamate paaridega mehhanismide analüütilisi ja grafoanalüütilisi projekteerimismeetodeid, tehes need seejuures konstruktoritele ja inseneridele jõukohaseks. Allpool käsitletakse mehhanismide projekteerimise ülesandeid peamiselt N. I. Levitski poolt esitatud kujul.



Joon. 499.

6°. Etteantud liikumisseaduse reprodutseerimise ülesande formuleeringut võib käsitleda šarniirnelilüliku (joon. 499) näite põhjal.

Olgu vedava lüli AB liikumisseadus määratud tema pöördenurga α sõltuvusega ajast t:

$$\alpha = f_1(t). \tag{13.1}$$

Veetava lüli CD liikumine olgu analoogiliselt määratud sõltuvusega

$$\varphi = f_2(t), \tag{13.2}$$

mis seob tema pöördenurka ψ ajaga t.

Elimineerides võrranditest (13.1) ja (13.2) aja t, saame

$$\psi = \psi(\alpha). \tag{13.3}$$

Nagu näidati § 32, on α ja ψ vahelise seose iseloom määratud mehhanismi teatavate mõõdetega, mida me (§ 66, 2°) nimetasime mehhanismi *kinemaatilise skeemi parameetriteks* ehk lühidalt — *skeemiparameetriteks*. Selleks et rahuldada tingimust (13.3), tuleb järelikult valida sobivad skeemiparameetrid. Joonisel 499 kujutatud šarniirnelilülikul on kuus sõltumatut parameetrit: lülide pikkused l_1, l_2, l_3 ja l_4, nurga α algväärtus α_0 ja kinnislüli AD

asendit fikseeriv nurk φ. Kasutades suhtelisi parameetreid, võime asendada

$$\frac{l_1}{l_1}=1;\quad \frac{l_2}{l_1}=l;\quad \frac{l_3}{l_1}=r;\quad \frac{l_4}{l_1}=d.$$

Seega tuleb määrata 5 skeemiparameetrit: l, r, d, α_0 ja φ. Olgu lülide AB ja CD teatavad asendid paarikaupa antud nurkade α_1, α_2, α_3, ... α_m ja ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... ψ_m kaudu, mida need lülid moodustavad x-teljega (joon. 499). Asetades need väärtustepaarid seosesse (13.3), saame võrrandsüsteemi

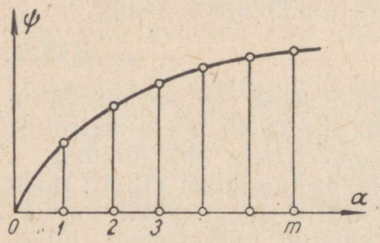
$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 &= \psi(\alpha_1),\\
\psi_2 &= \psi(\alpha_2),\\
\psi_3 &= \psi(\alpha_3),\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\psi_m &= \psi(\alpha_m).
\end{aligned}\right\} \qquad (13.4)$$

Juhul kui süsteemi (13.4) kuuluvate võrrandite arv võrdub otsitavate skeemiparameetrite arvuga, on ülesanne teoreetiliselt täielikult lahendatav. Arvesse võttes süsteemi (13.4) lahendamisel esinevaid raskusi, tuleb praktikas mõned parameetrid siiski ette anda. Seoses sellega valitakse nurkade α ja ψ kaudu etteantud asendipaaride arv m nii, et ta võrduks määramisele tulevate skeemiparameetrite arvuga. Ülesande lahendamine ei tekita sel juhul nimetamisväärseid raskusi. Liikumisseaduse reprodutseerimise ülesannet ülalkäsitletud esituses nimetatakse *asenditingimuste* ülesandeks.

7°. Projekteerides kontroll- ja mõõteriistade ülekandeid või matemaatilisi tehteid sooritavaid mehhanisme (vt. näiteks joonisel 493 kujutatud mehhanismi), kerkib esile seose

$$\psi=\psi(\alpha) \qquad (13.5)$$

näol antud liikumisseaduse reprodutseerimise ülesanne. Seejuures esitatakse veel nõue, et toodud sõltuvus kehtiks lülide AB ja CD (joon. 499) pöördenurkade suurtes intervallides ja et funktsioon (13.5) oleks seejuures pidev, vastates näiteks joonisel 500 toodud diagrammile. Ka taolisel juhul võib projekteerimise taandada asenditingimuste ülesande lahendamiseks. Et aga siin asendipaaride arv m (vt. joon. 500) peab olema küllalt suur, siis on ilmne, et süsteemi (13.4) kuuluvate võrrandite arv ületab tunduvalt otsitavate skeemiparameetrite arvu.



Joon. 500.

Nimetatud parameetrid tuleb sel juhul valida nii, et tingimus (13.5) oleks l i g i k a u d s e l t täidetud. Kõrvalekaldumine etteantud liikumisseadusest ei tohi seejuures ületada teatavat lubatavat piiri.

Selles esituses võib meie projekteerimisülesannet nimetada *etteantud liikumisseaduse ligikaudse reprodutseerimise ülesandeks*. Märgime veel, et liikumisseaduse saab anda ka seose

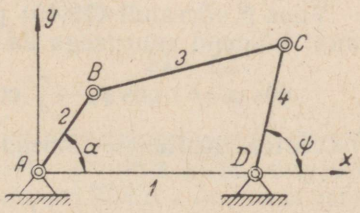
$$\omega_3 = \omega_3(\omega_1) \tag{13.6}$$

kujul, kus ω_1 ja ω_3 tähistavad vastavalt lülide *1* ja *3* nurkkiirusi (joon. 499).

Lihtne on näha, et juhul, kui nurkade α ja ψ algväärtused α_0 ja ψ_0 on teada, võib seoselt (13.6) integreerimise teel üle minna seosele (13.5).

§ 67. Mehhanismide projekteerimine etteantud asenditingimuste alusel

1°. Käsitleme šarniirnelinurga (joon. 501) projekteerimist lülide etteantud asendite alusel. Ülesande lihtsustamiseks eeldame, et kinnislüli šarniirid A ja D asuvad x-teljel, millest lähtudes mõõdetakse nurki α ja ψ (joon. 501). Nurk φ (joon. 499) võrdub sel juhul nulliga ja otsitavaid skeemiparameetreid on ainult kolm (vt. § 66, 6°). Nendeks on suhtelised pikkused l, r ja d, mis on määratavad seostega



Joon. 501.

$$l = \frac{l_3}{l_2};\quad r = \frac{l_4}{l_2};\quad d = \frac{l_1}{l_2}.$$

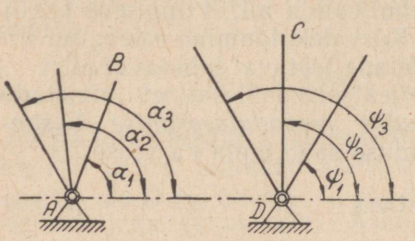
Parameetrite l, r ja d leidmiseks peab teadma lülide AB ja CD kolme üksteisele vastavat asendit, mis on määratud etteantud nurkadega α_1, α_2, α_3 ja ψ_1, ψ_2, ψ_3 (joon. 502). Süsteemi (13.4) võrrandite arv võrdub sel puhul otsitavate skeemiparameetrite arvuga.

2°. Püstitatud ülesannet võib lahendada järgmiselt. Käsitleme šarniirnelinurga külgi kui vektoreid $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{r}$ ja $\boldsymbol{d}$, kusjuures $i = 1$ (joon. 503). Siis võime kirjutada, et

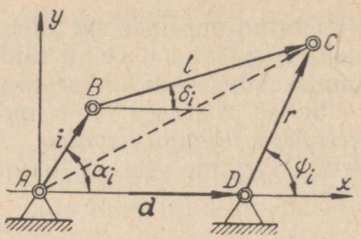
$$\boldsymbol{i} + \boldsymbol{l} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{r}. \tag{13.7}$$

Projekteerime vektorvõrrandi (13.7) mõlemad pooled koordinaattelgedele, tähistades kepsu BC ja x-telje vahelise nurga tähega δ.

Kui mehhanism asub näiteks meelevaldses, indeksiga «i» märgitud asendis, siis saame:



Joon. 502.



Joon. 503.

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 + l\cos\delta_i &= d + r\cos\psi_i, \\ \sin\alpha_i + l\sin\delta_i &= r\sin\psi_i \end{aligned}\right\} \tag{13.8}$$

ehk

$$\left.\begin{aligned} l\cos\delta_i &= d + r\cos\psi_i - \cos\alpha_i, \\ l\sin\delta_i &= r\sin\psi_i - \sin\alpha_i. \end{aligned}\right\} \tag{13.9}$$

Tõstame võrrandite (13.9) mõlemad pooled ruutu ja liidame nad. Saame

$$l^2 = d^2 + r^2 + 1 + 2dr\cos\psi_i - 2d\cos\alpha_i - 2r\cos(\psi_i - \alpha_i). \tag{13.10}$$

Viies l^2 võrrandi (13.10) paremale poolele ja jagades kõiki võrrandi liikmeid suurusega $2d$, saame

$$\cos\alpha_i = r\cos\psi_i - \frac{r}{d}\cos(\psi_i - \alpha_i) + \frac{d^2 + r^2 + 1 - l^2}{2d}. \tag{13.11}$$

Võttes kasutusele tähised

$$\left.\begin{aligned} p_0 &= r, \\ p_1 &= -\frac{r}{d}, \\ p_2 &= \frac{d^2 + r^2 + 1 - l^2}{2d}, \end{aligned}\right\} \tag{13.12}$$

võime võrrandi (13.11) kirjutada järgmisel kujul

$$\cos\alpha_i = p_0\cos\psi_i + p_1\cos(\psi_i - \alpha_i) + p_2. \tag{13.13}$$

Asetades saadud võrrandisse etteantud nurgad α_1, α_2, α_3 ja ψ_1, ψ_2, ψ_3 (joon. 502), saame kolmest lineaarsest võrrandist koosneva süsteemi:

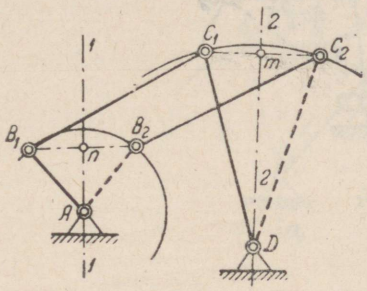
$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= p_0\cos\psi_1 + p_1\cos(\psi_1 - \alpha_1) + p_2, \\ \cos\alpha_2 &= p_0\cos\psi_2 + p_1\cos(\psi_2 - \alpha_2) + p_2, \\ \cos\alpha_3 &= p_0\cos\psi_3 + p_1\cos(\psi_3 - \alpha_3) + p_2. \end{aligned}\right\} \tag{13.14}$$

Süsteemi lahendamine annab meile abisuuruste p_0, p_1 ja p_2 väärtused. Kasutades nüüd seoseid (13.12), leiame lõpuks otsitavad parameetrid l, r ja d.

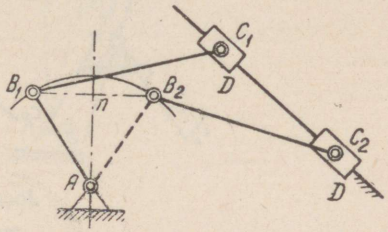
Kui mehhanism tuleb projekteerida lülide AB ja CD kahe etteantud asendi alusel, võib ühe skeemiparameetri valida meelevaldselt. Ülesande võimalikke lahendusi on sel juhul määramatult palju.

3°. Käsitleme nüüd šarniirnelinurga projekteerimisülesande graafilisi lahendusmeetodeid nii kahe kui ka kolme etteantud asendipaari puhul. Neid ülesandeid saab lahendada väga lihtsate geomeetriliste konstruktsioonide abil.

Olgu ette antud šarniirnelinurga $ABCD$ kepsu BC kaks asendit: B_1C_1 ja B_2C_2 (joon. 504). Ülesandeks on leida kinnislüli šarniirid A ja D. On ilmne, et punktid B_1 ja B_2 peavad asuma ringjoonel, mille tsentriks on punkt A. Punktid C_1 ja C_2 peavad ana-



Joon. 504.



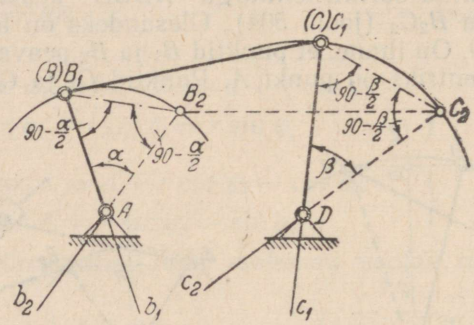
Joon. 505.

loogiliselt paiknema ringjoonel, mis on tõmmatud tsentrist D. Läbi kahe punkti B_1 ja B_2 saab joonestada arvutult palju ringjooni. Nende tsentrite geomeetriliseks kohaks on sirge $1 — 1$, mis punktis n poolitab lõigu B_1B_2 ja on sellega risti. Otsitava šarniiri A võib seega paigutada sirge $1 — 1$ igasse punkti. Analoogiliselt võib šarniiri D asukohaks valida mis tahes punkti sirgel $2 — 2$. Viimane ristub lõiguga C_1C_2, poolitades selle punktis m. Ülesande tingimustele vastab käesoleval juhul seega arvutu hulk mehhanisme. Ülesande täpsustamiseks võib esitada lisatingimusi, näiteks nõuda, et mehhanismil peab olema kaks vänta või üks vänt ja üks nookur jne.

Juhul kui soovitakse, et üks lüli BC punktidest, näiteks punkt C, liiguks sirgel C_1C_2, peab tsenter D asuma lõpmatuses, mistõttu šarniir D muutub translatsioonipaariks (joon. 505). Tekib väntmehhanism.

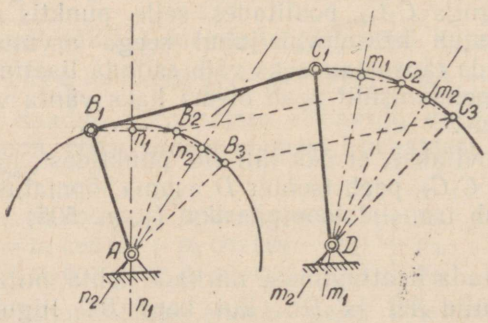
Võib veel esitada lisatingimuse nurkade kohta, mille võrra peavad pöörduma lülid AB ja DC, kui keps BC liigub esimesest etteantud asendist teise. Olgu näiteks lüli AB vastavaks pöördenurgaks α ja lüli DC pöördenurgaks β (joon. 506). Ühendame punk-

tid B_1 ja B_2 sirgega ning kanname punktides B_1 ja B_2 joonisele nurgad $90° - \frac{\alpha}{2}$. Sirgete B_1b_1 ja B_2b_2 lõikepunkt A määrab sel juhul lüli AB pöörlemistelje asendi. Punkt D saadakse analoogilisel viisil: ühendanud sirge abil punktid C_1 ja C_2, kantakse joonisele nurgad $90° - \frac{\beta}{2}$ ning tõmmatakse sirged C_1c_1 ja C_2c_2, mille lõikumine määrab šarniiri D asukoha.



Joon. 506.

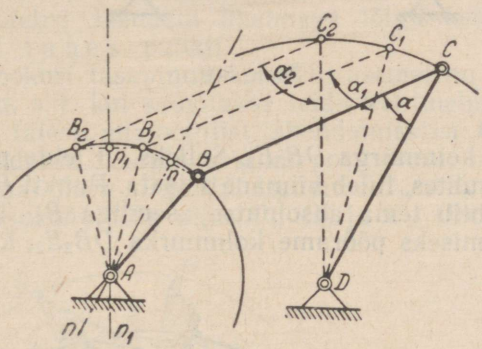
4°. Olgu nüüd ülesandeks konstrueerida šarniirnelinurk kepsu BC kolme etteantud asendi B_1C_1, B_2C_2 ja B_3C_3 järgi (joon. 507). Ülesanne taandub kolme etteantud punkti läbiva ringjoone tsentri leidmiseks. Nagu teada, on sellel ülesandel ainult üks lahend. Määrame kõigepealt šarniiri A asukoha punktide B_1, B_2 ja B_3 kaudu. Ühendame punktid B_1 ja B_2 sirgega ja tõmbame saadud lõigu B_1B_2 keskkohast ristsirge n_1n_1. Seejärel ühendame sirgega punktid B_2 ja



Joon. 507.

B_3 ning konstrueerime lõiku B_2B_3 poolitava ristsirge n_2n_2. Ristsirgete n_1n_1 ja n_2n_2 lõikepunkt fikseerib šarniiri A asukoha. Šarniiri D asend leitakse analoogiliselt ristsirgete m_1m_1 ja m_2m_2 lõikepunktis. Juhul kui punktid C_1, C_2 ja C_3 paiknevad ühel ja samal sirgel, muutub lüli CD liuguriks, nagu joonisel 505 käsitletud olukorraski.

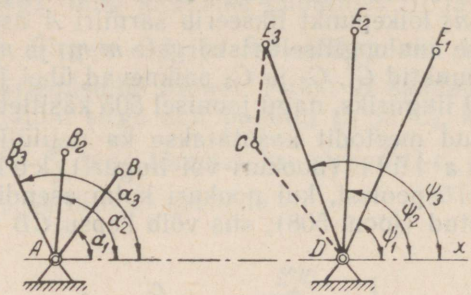
Ülalkäsitletud meetodit kasutatakse ka nelilüliku projekteerimisel veetava lüli (nookuri või liuguri) kolme etteantud asendi alusel. Tõepoolest, kui nookuri kolm asendit CD, C_1D ja C_2D on ette antud (joon. 508), siis võib kepsu CB vastavad asen-



Joon. 508.

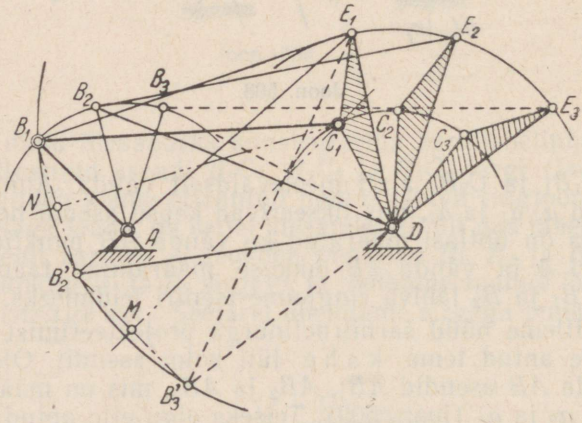
did CB, C_1B_1 ja C_2B_2 alati meelevaldselt valida. Anname seega ette nurgad α, α_1 ja α_2, mis fikseerivad kepsu asendi nookuri suhtes. Sellega on ühtlasi määratud ka vända AB punktid B, B_1 ja B_2. Šarniiri A ja vända AB pikkuse määramine taandub nüüd punkte B, B_1 ja B_2 läbiva ringjoone tsentri leidmiseks.

5°. Käsitleme nüüd šarniirnelinurga projekteerimist olukorras, kus on ette antud tema kahe lüli kolm asendit. Olgu näiteks teada vända AB asendid AB_1, AB_2 ja AB_3, mis on määratud nurkadega α_1, α_2 ja α_3 (joon. 509). Teiseks olgu ette antud nookuriga DC seotud tasapinna kolm asendit. Nimetatud tasapinna asendeid võib anda näiteks tasapinnale kuuluva lõigu DE kolme üksteisele järgneva positsiooni DE_1, DE_2 ja DE_3 fikseerimise teel. Nimetatud positsioonid on määratud nurkadega ψ_1, ψ_2 ja ψ_3. Ülesandeks on leida vänta AB ja nookurit ühendava kepsu pikkus. Eeldame, et keps moodustab vändaga kinemaatilise paari punktis B. Seega tuleb leida punkt C, kus asub kepsu ja nookurit ühendava rotatsioonipaari telg. Vaatleme vända punkti B asendeid sirge DE suhtes (joon. 510). Esimeses asendis moodustab punkt B sirgega DE kolmnurga DB_1E_1, teises asendis — kolmnurga DB_2E_2 ja kolman-



Joon. 509.

das asendis — kolmnurga DB_3E_3. Selleks, et leida punkti B asendeid sirge DE suhtes, tuleb viimane seisata. Punkti B esimene suhteline asend ühtib tema absoluutse asendiga B_1. Teise suhtelise asendi B'_2 leidmiseks pöörame kolmnurka DB_2E_2, kuni selle külg



Joon. 510.

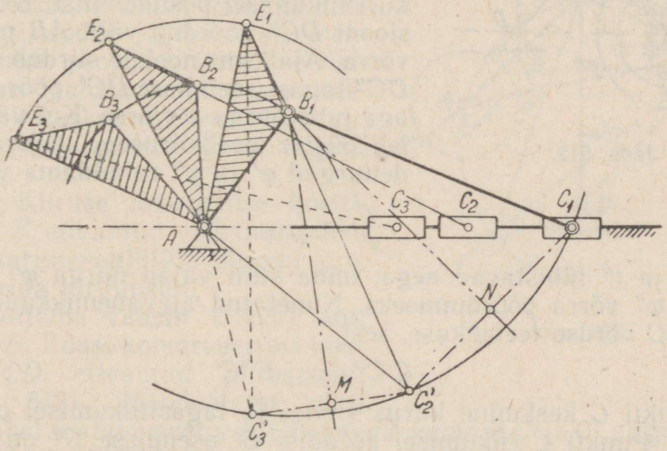
DE_2 ühtib sirgega DE_1. Kolmnurga tipp B_2 tuleb sel juhul asendisse B'_2. Kolmanda suhtelise asendi B'_3 saamiseks tuleb kolmnurga DB_3E_3 külg DE_3 viia ühtimisse sirgega DE_1. Tipp B_3 langeb sel juhul asendisse B'_3.

Oma relatiivses liikumises sirge DE suhtes tuleb seega kepsu BC punkt B kordamööda asenditesse B_1, B'_2 ja B'_3. Kepsu punkt C jääb aga vaadeldavas relatiivses liikumises paigale. Siit võib

järeldada, et punkt C peab olema punkte B_1, B'_2 ja B'_3 läbiva ringjoone tsentriks. Punkti C asukoht leitakse tavalisel viisil. Ühendame punktid B_1, B_2' ja B_3' sirgetega. Saadud lõikude B_1B_2' ja $B_2'B_3'$ keskpunktidest N ning M tõmbame ristjooned NC_1 ja MC_1. Viimaste lõikepunkt C_1 määrabki rotatsioonipaari C telje asukoha šarniirnelinurga esimeses asendis.

Leitud kujund AB_1C_1D moodustab seega otsitud šarniirnelinurga skeemi. Vända ja nookurile kuuluva tasapinna kolme etteantud asendi puhul saadakse ühene lahend. Juhul kui on ette antud ainult kaks asendipaari, võib šarniiri C paigutada punkti B suhtelisi asendeid ühendava lõigu keskelt tõmmatud ristsirge mis tahes punkti.

6°. Kui nookuri tasapinna asendite asemel on ette antud liuguri asukohad, s. t. kui soovitakse leida väntmehhanismi skeemi, võib kasutada täiesti analoogilist lahendamisviisi. Olgu ette antud vändaga ühendatud tasapinna kolm positsiooni, mida iseloomustavad tasapinnal oleva sirge AE asendid AE_1, AE_2 ja AE_3. Liuguri vastavateks asukohtadeks olgu C_1, C_2 ja C_3 (joon. 511). Ühen-

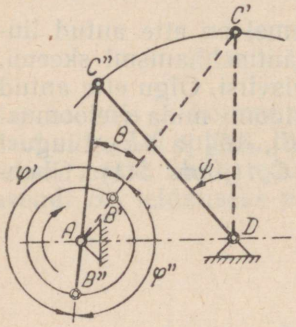


Joon. 511.

dame sirgetega punktid E_1 ja C_1, E_2 ja C_2 ning E_3 ja C_3. Saame kolmnurgad AE_1C_1, AE_2C_2 ja AE_3C_3. Valime lähteasendiks vända positsiooni, mis vastab sirgele AE_1. Oletame nüüd, et vänt moodustab kepsuga rotatsioonipaari punktis B. Viimase leidmiseks konstrueerime lõigule AE_1 kolmnurgad AE_1C_2' ja AE_1C_3', mis on vastavalt võrdsed kolmnurkadega AE_2C_2 ja AE_3C_3. Otsitav šarniir B peab asuma punkte C_1, C_2' ja C_3' läbiva ringjoone tsentris. Selle leidmiseks ühendame sirgetega punktid C_1 ja C_2' ning C_2' ja C_3'.

Saadud lõikude C_1C_2' ja $C_2'C_3'$ keskpunktidest konstrueerime ristsirged NB_1 ja MB_1. Viimaste lõikepunkt B_1 määrabki rotatsioonipaari B telje asukoha vändmehhanismi esimeses asendis. Otsitud skeemiks on seega kujund AB_1C_1.

Käesoleval ajal on madalamaid paare sisaldavate mehhanismide projekteerimisküsimusi tugevasti edasi arendatud, eriti tänu nõukogude teadlaste töödele. Muuhulgas on lahendatud madalamate paaridega mehhanismide projekteerimisülesanne olukorras, kus mehhanismi lülidele on ette antud neli või viis asendit.[1]



Joon. 512.

7°. Käsitleme veel nelilüliku kinemaatilise skeemi projekteerimist olukorras, kus *kiiruse muutumise koefitsiendi* väärtus on varem ette antud. Olgu sarniirnelilüliku $ABCD$ vedavaks lüliks vänt AB (joon. 512). Nookuri piirasenditeks olgu DC' ja DC''. Mehhanismi nendes asendites langevad vänt AB ja keps BC ühele ja samale sirgele. Nookuri liikumisel positsioonist DC' positsiooni DC'' pöördub vänt AB nurga φ'' võrra. Ajal, mil nookur siirdub asendist DC'' tagasi asendisse DC', pöördub vänt aga juba nurga φ' võrra. Kui vänt pöörleb püsiva nurkkiirusega, peavad pöördenurgad φ' ja φ'' rahuldama võrret

$$\frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{t'}{t''}, \tag{13.15}$$

kus t' ja t'' tähistavad aega, mida vänt vajab nurga φ' või vastavalt φ'' võrra pöördumiseks. Nimetatud ajavahemikkudes katab punkt C võrdse teepikkuse, sest

$$\smile C'C'' = \smile C''C'. \tag{13.16}$$

Punkti C keskmine kiirus sinna- ja tagasiliikumisel on seega erinev. Punkti C liikumisel asendist C' asendisse C'' on keskmiseks kiiruseks

$$v'' = \frac{\smile C'C''}{t''}. \tag{13.17}$$

Tagasiliikumise keskmine kiirus v' on omakorda antud seosega

$$v' = \frac{\smile C'C''}{t'}. \tag{13.18}$$

[1] И. И. Артоболевский, З. Ш. Блох, В. В. Добровольский, Синтез механизмов, М.—Л., Гостехиздат, 1944. Н. И. Левитский, Проектирование плоских механизмов с низшими парами, Изд. АН СССР, М.—Л., 1950.

. Jagades seost (13.18) seosega (13.17) ning võttes arvesse seoseid (13.15) ja (13.16), saame

$$\frac{v''}{v'} = \frac{t'}{t''} = \frac{\varphi'}{\varphi''} = K.$$

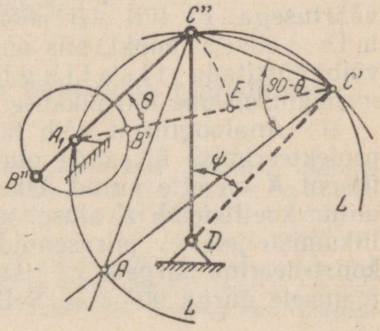
Keskmiste kiiruste suhte väärtust K nimetatakse *kiiruse muutumise koefitsiendiks*. Jooniselt 512 võib koefitsiendi K avaldada järgmisel kujul:

$$K = \frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{180° + \Theta}{180° - \Theta}. \qquad (13.19)$$

Seosest (13.19) võib ilmutada sihtide AC' ja AC'' poolt moodustatud nurga Θ:

$$\Theta = 180° \frac{K-1}{K+1}. \qquad (13.20)$$

Etteantud kiiruse muutumise koefitsiendi alusel osutub vajalikuks mehhanismi projekteerida olukorras, kus nõutakse, et veetava lüli sinna- ja tagasiliikumine toimuks erineva kiirusega. Säärane ülesanne esineb näiteks höövelpingi, sõelte ja rea teiste mehhanismide projekteerimisel. Kõikides neis mehhanismides peab veetava lüli keskmine kiirus töökäigul olema väiksem kui tühjal tagasikäigul.



Joon. 513.

8°. Kiiruse muutumise koefitsiendi K etteantud väärtuse puhul võib šarniirnelilüliku skeemi projekteerida järgmiselt.

Arvutame valemi (13.20) abil nurga Θ. Edasi konstrueerime nookuri CD etteantud piirasendid (joon. 513). Moodustagu need omavahel teatava nurga ψ. Ühendame punktid C' ja C'' sirgega. Saadud lõigule $C'C''$ kui kõõlule konstrueerime ringjoone, mille piirdenurk oleks Θ. Selleks tõmbame punktis C'' lõigule $C'C''$ ristsirge $C''A$; punktis C' aga konstrueerime nurga $90° - \Theta$. Nurk $C''AC'$ võrdub sel juhul nurgaga Θ. Joonestame nüüd punkte C', C'' ja A läbiva ringjoone L. Vända AB pöörlemistelje võib paigutada ringjoone L kaare $C''AC'$ mis tahes punkti. Tõepoolest, ühendades nimetatud kaarel valitud meelevaldse punkti punktidega C' ja C'', saame kaks sirget, mille vahele jääb nurk Θ. Olgu vända pöörlemisteljeks valitud näiteks punkt A_1. Lõikude A_1C'' ja A_1C' pikkused on vastavalt

$$A_1C'' = l - r, \qquad A_1C' = l + r,$$

kus r tähistab vända ja l — kepsu pikkust. Toodud seostest saame:

$$A_1C' - A_1C'' = l + r - l + r = 2r$$

ehk

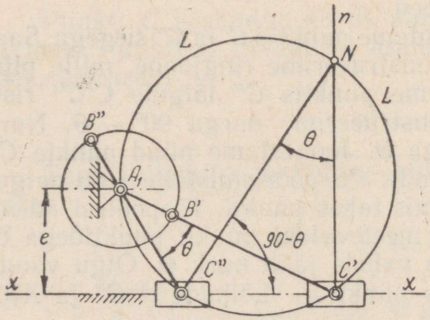
$$r = A_1B = \frac{A_1C' - A_1C''}{2}.$$

Punktist A_1 kui tsentrist tõmbame kaare raadiusega A_1C'', mis lõikab sirget A_1C' punktis E. Lõigu EC' pikkuseks kujuneb sel juhul $2r$, mistõttu

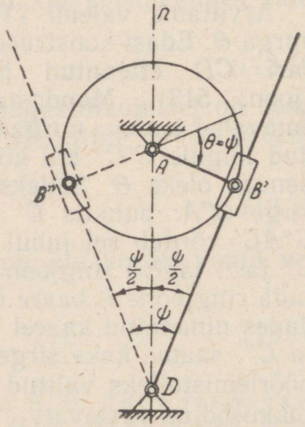
$$r = \frac{EC'}{2}.$$

Lähtudes nüüd punktist A_1, kanname sirgele A_1C' lõigu A_1B', mille pikkuseks võtame $\frac{EC'}{2}$. Sama pikkusega lõigu A_1B'' kanname ka sirgele A_1C''. Tulemuseks kujuneb neljalüliline mehhanism, mille kiiruse muutumise koefitsient K võrdub etteantud väärtusega. Et lüli AB pöörlemistsentriks A sobib ringjoone L mis tahes punkt, siis on arusaadav, et lülide mõõdete kohta võib püstitada lisatingimusi. Nii näiteks võib ette anda mehhanismi ühe lüli pikkuse.

9°. Analoogiliselt võib lahendada ka väntmehhanismi projekteerimise ülesande olukorras, kus kiiruse muutumise koefitsent K on ette antud. Ülesande lahendamiseks arvutame etteantud koefitsiendi K alusel nurga Θ. Seejärel kanname liuguri C liikumisteljele xx piirasendid C' ja C'' (joon. 514). Punktis C' konstrueerime sirgele xx ristsirge $C'n$, punktis C'' kanname aga joonisele nurga $90° - \Theta$. Sellega on määratud punkt N, s. t. üks



Joon. 514.



Joon. 515.

tasapinna punkte, kust vaadates piirasendid C'' ja C' paistavad nurga Θ all. Konstrueerime nüüd punkte C', C'' ja N läbiva ringjoone L. Lüli AB pöörlemistsentriks sobib kaare $C'NC''$ iga punkt. Joonisel 514 on nimetatud tsenter asetatud punkti A_1. Vända AB ja kepsu BC pikkus määratakse eelmises punktis käsitletud viisil. Lisatingimusena võib näiteks ette anda desaksiaalsuse e väärtuse.

Lõpuks vaatleme veel kiikuva kulissiga kulissmehhanismi. Jooniselt 515 ilmneb, et valemiga (13.20) määratud nurk Θ võrdub käesoleval juhul kulissi kiikumise kahekordse nurkamplituudiga ψ. Kulissmehhanismi projekteerimisel on koefitsient K seega määratud nurga ψ kaudu:

$$K = \frac{180° + \psi}{180° - \psi}.$$

Igale etteantud K väärtusele vastab lõpmatu hulk nurka ψ poolitava sirge Dn punkte, mida võib valida tsentriks A. Lisatingimusena võib ette anda kauguse AD, kusjuures tuleb silmas pidada, et see ületaks vända AB raadiuse.

§ 68. Etteantud liikumisseaduse ligikaudne reprodutseerimine

1°. Nagu ülal näidati (vt. § 66, 7°), saab suure arvu etteantud asendite puhul soovitavat liikumisseadust reprodutseerida **ainult ligikaudselt**. Käsitleme alljärgnevas küsimust, kuidas hinnata seejuures tekkivaid kõrvalekaldumisi.

Olgu projekteeritud šarniirnelilülik $ABCD$ (joon. 516, a), mida määravad parameetrid l, r ja d (vt. § 66, 6°). Lüli CD ja kinnislüli AD telje x vaheline nurk ψ erinegu etteantud liikumisseadusega määratud arvutuslikust nurgast ψ_a. Vahet

$$\Delta_\psi = \psi_a - \psi \qquad (13.21)$$

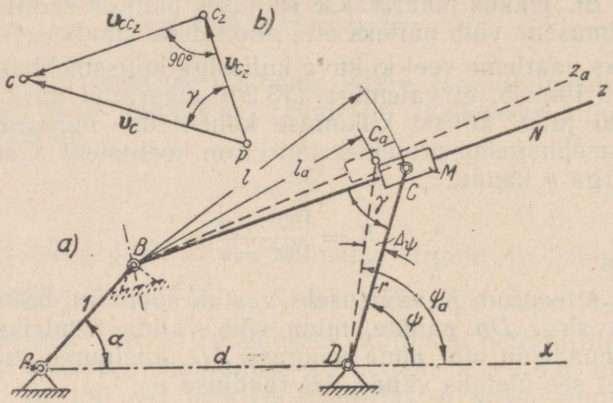
võib käsitada kui etteantud liikumisseadusest kõrvalekaldumise mõõtu. Mida vähem vahe (13.21) erineb teatava etteantud ajavahemiku jooksul nullist, seda täpsemalt on etteantud liikumisseadus matkitud.

Kõrvalekaldumist etteantud liikumisseadusest (hälvet) on mugavam iseloomustada ühe teise suurusega. Oletame, et parameetrid r ja d on konstantsed ja et muutuda võib ainult parameeter l. Olgu tema väärtus ligikaudses mehhanismis $ABCD$ tähistatud tähega l. Mehhanismis, mis annaks täpselt soovitud liikumise, oleks käsitletud lüli pikkuseks l_a. Lüli pikkuse hälbeks on vahe Δ_l:

$$\Delta_l = l - l_a. \qquad (13.22)$$

Seose leidmiseks suuruste Δ_l ja Δ_ψ vahel võib kujutleda, et mehhanism siirdub konfiguratsioonist $ABCD$ üle konfiguratsiooni ABC_aD liugurit M kandva kulissi N pöördega asendist Bz asendisse Bz_a (joon. 516, a). Nimetatud pööret võib käsitleda kui kinnispunktidega B ja D ühendatud kulissmehhanismi BCD liikumist asendisse BC_aD. Lüli CD pöördub seejuures väikese nurga Δ_ψ

võrra. Mehhanismi *BCD* punktide väikeste paigutuste ja nende kiiruste sihte võib antud juhul küllaldase täpsusega lugeda kokkulangevaiks. Konstrueerime mehhanismi *BCD* kiirusplaani (joon. 516, *b*). Ülekandenurga *BCD* tähiseks valime γ. Kiirusplaani kolmnurgast pc_zc saame:



Joon. 516.

$$\sin\gamma = \frac{c_z c}{pc} = \frac{v_{cc_z}}{v_c}. \tag{13.23}$$

Kõrgemat järku väikesi suurusi kõrvale jättes võime kirjutada

$$v_{cc_z} = \frac{\Delta_l}{\Delta t} \quad \text{ja} \quad v_c = \frac{\Delta_\psi}{\Delta t} r.$$

Järelikult

$$\sin\gamma = \frac{\Delta l}{r\Delta_\psi},$$

millest järgneb, et

$$\Delta_\psi = \frac{\Delta_l}{r \sin\gamma}. \tag{13.24}$$

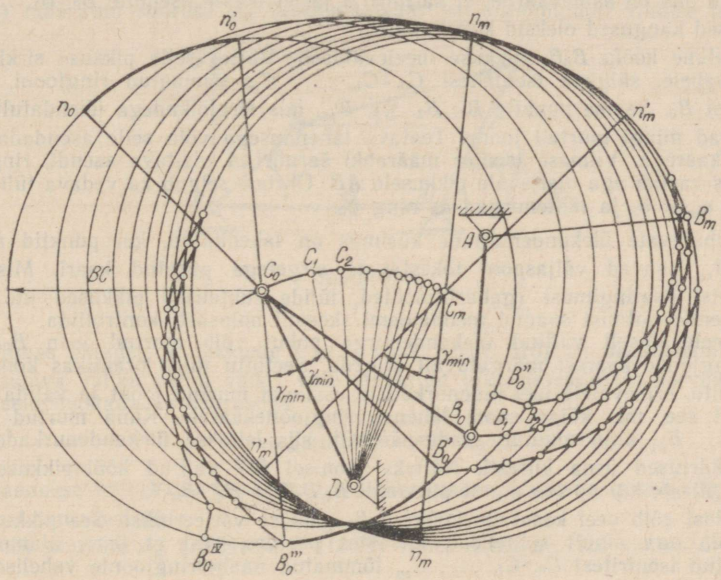
Seega, teades mehhanismi igale asendile vastavat ülekandenurka γ ja kepsu pikkuse hälvet, võib alati leida veetava lüli pöördenurga hälbe Δ_ψ.

Kinemaatilise skeemi otsitavad parameetrid tuleb valida nii, et valemiga (13.24) arvutatav hälve Δ_ψ ei ületaks lubatud piirväärtust. Seejuures peab silmas pidama veel teisi mehhanismi töökõlblikkust määravaid parameetreid: ülekandenurga γ lubatavaid väärtusi, mehhanismi gabariitmõõteid, lülide võimalust pöörduda 360° ulatuses jne. Tingimus, et hälve Δ_ψ võimalikult vähe erineks nullist, on seega küll vajalik, kuid paljudel juhtudel kaugeltki mitte piisav. Kinemaatilise skeemi lõplikud parameetrid valitakse pärast etteantud tingimust (13.24) küllalt täpselt rahuldavate skeemivariantide kiiret ja süstemaatilist võrdlust. Võrdluse teel selgitatakse mehhanismi need variandid, mis rahulda-

vad kõiki ülesandes esitatud tingimusi. Pärast skeemiparameetrite esialgset valikut võib vajaduse korral neid veel analüütiliselt täpsustada, et vähendada kõrvalekaldumisi etteantud liikumisseadusest.

2°. Käsitleme N. I. Levitski ja B. I. Stepanovi poolt väljatöötatud kinemaatilise skeemi parameetrite ligikaudse määramise graafilist meetodit.

Ülesandeks olgu konstrueerida šarniirnelilülik, mis vastaks funktsiooniga $\psi = \psi(\alpha)$ (joon. 500) ette antud liikumisseadusele. Valime selle funktsiooni graafikul $m+1$ punkti nii, et need vastaksid vedava lüli võrdsetele paigutustele (joon. 500). Punktide arv oleneb etteantud funktsionaalse sõltuvuse kujust.



Joon. 517.

Punkte on soovitav valida nii tihedalt, et maksimaalne vahe kõvera kahte naaberpunkti ühendava kõõlu ordinaadi ja kõvera enda vastava ordinaadi vahel ei ületaks lubatavat hälvet. Seepeale valime veetava lüli CD käigu ulatuse, s. t. suuruse $\psi_m - \psi_0$ (joon. 517) ja määrame etteantud funktsiooni alusel tema pöördenurgad alates lähteasendist: $\psi_1 - \psi_0$, $\psi_2 - \psi_0$, ..., $\psi_m - \psi_0$.

Pärast lüli CD pöördenurkade arvutamist asume otsitavate skeemiparameetrite graafilisele määramisele. Soovitav on seejuures kasutada võimalikult suurt mastaapi.

Konstruktsiooni alustame vedava lüli võrdsetele pöördenurkadele vastavate lüli CD asendite väljajoonestamisega. Lüli CD pikkus võib seejuures olla meelevaldne, sest lülide AB ja CD pöördenurkade vaheline sõltuvus oleneb ainult lülide suhtelistest mõõdetest. Joonisel 517 on lüli CD konstrueeritud asendid tähistatud vastavalt C_0D, C_1D, ..., C_mD, kusjuures $\angle C_1DC_0 = \psi_1 - \psi_0$, $\angle C_2DC_0 = \psi_2 - \psi_0$ jne. Nüüd valime meelevaldselt kepsu BC pikkuse ja joonestame punktidest C_0, C_1, ..., C_m kui tsentritest lähtudes ringjoonte parve, kasutades äsjavalitud kepsupikkust raadiusena. Samadest punktidest C_0, C_1, ..., C_m

lähtudes konstrueerime seepeale mõlemale poole veetava lüli asendeid C_0D, C_1D, ..., C_mD nn. tõkestavad sirged, mis moodustavad veetava lüliga lubatava minimaalse ülekandenurga γ_{min}. (Joonisel 517 on need sirged konstrueeritud ainult asendites C_0D ja C_mD.) On ilmne, et šarniir B ei tohi sattuda joonestatud ringjoonte nendele osadele, mida piiravad tõkestavad sirged, sest mehhanismi ülekandenurk langeks sel juhul alla lubatava väärtuse. Valides nüüd mingile ülekandenurga γ lubatavale väärtusele vastava punkti B asendi, alustame tsentri A ja vedava lüli AB pikkuse otsimist. Seejuures lähtume nõudest, et vedava lüli AB asendite vahelised nurkpaigutused peavad olema võrdsed, või mis on samaväärne, et šarniiri B järjestikuste asendite B_0, B_1, ..., B_m vahelised kaugused oleksid konstantsed.

Valime kõõlu B_0B_1 pikkuse meelevaldselt. Võttes selle pikkuse sirkli haarade vahele, sälgime tsentritest C_0, C_1, ..., C_m tõmmatud ringjooni, alates punktist B_0. Saame punktid B_1, B_2, ..., B_m, mis sirglõikudega ühendatult moodustavad mingi murtud joone. Teatava lähendusega võib selle asendada ringjoone kaarega. Viimase tsenter määrabki šarniiri A otsitava asendi, ringjoone raadius vastab aga otsitavale pikkusele AB. Ühtlasi selgub ka vedava lüli käigu ulatus $\alpha_m - \alpha_0$ ja lähtenurgad α_0 ning ψ_0.

Lubatavate ülekandenurkade küsimus on lahendatud, kui punktid B_0, B_1, ..., B_m asuvad väljaspool tõkestavate sirgetega piiratud kaari. Mis puutub teisi lisatingimusi (gabariitmõõted, lülide suhtelised pikkused jne.), siis võib nende täitmist saadud mehhanismi skeemil hõlpsasti kontrollida.

Meelevaldselt valitud ülekandenurga puhul võib murtud joon $B_0B_1 \ldots B_m$ ringjoone kaarest märgatavalt erineda. Seetõttu tuleb praktikas konstrueerida mitu, erinevatele ülekandenurkadele vastavat murtud joont ja valida nende hulgast see, mis kõige enam läheneb ringjoonekaarele. Kuna murtud joonte $B_0B_1 \ldots B_m$ kuju muutub seaduspäraselt, siis leitakse ülekandenurkade sobivad väärtused üsna kiiresti. Näiteks joonisel 517 valitud kõõlupikkuse B_0B_1 puhul piisab; kui uurida ainult piirkondi $B_0'B_0''$ ja $B_0'''B_0^{IV}$.

Edasi võib veel kasutada kõõlu B_0B_1 pikkuse varieerimist. See pikkus saab muutuda aga ainult suhteliselt kitsastes piirides, sest et tema alampiir on määratud tsentritest C_0, C_1, ..., C_m tõmmatud naaberringjoonte vahelise maksimaalse kaugusega ja ülempiiri tõkestab nõue, mille kohaselt kõik punktid B_0, B_1, ..., B_m peavad paiknema ülekandenurga lubatavatele väärtustele vastavates lõikudes. Et vältida joonise ülekoormamist, on soovitav kõõlu B_0B_1 eri pikkustele vastavatest murtud joontest $B_0B_1 \ldots B_m$ jätta joonisele ainult see, mis kõige enam läheneb ringjoonele.

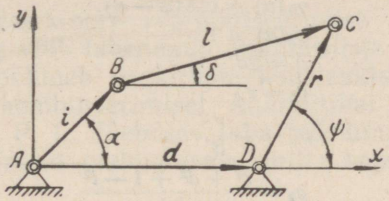
Esitatud konstruktsioon võimaldab ühelt ja samalt jooniselt määrata kinemaatilise ahela viis parameetrit (lülide suhtelised pikkused d ja r, lähteasendite nurgad α_0 ja ψ_0 ning vedava lüli käigu ulatuse $\alpha_m - \alpha_0$). Esimeses lähenduses tagavad nii valitud parameetrid etteantud liikumisseaduse küllaltki täpset reprodutseerimist, kusjuures on arvesse võetud ka lisatingimusi. Kuid vajaduse korral võib varieerida ka veel ülejäänud parameetreid, korrates ülalesitatud konstruktsiooni nii erinevate kepsupikkuste l kui ka veetava lüli muudetud käiguulatuse puhul. Tuleb ainult märkida, et kepsu pikkuse muutumisel säilitab piirkond, kus murtud jooned $B_0B_1 \ldots B_m$ lähenevad ringjoone kaartele, oma asendi tõkestavate sirgetega piiratud alade suhtes.

Väntmehhanismide ja teiste nelilülikute projekteerimisel kasutatakse analoogilisi konstruktsioone.

Nelilülikule liitmise teel saadavate paljulüliliste mehhanismide projekteerimine toimub järkjärgulise lähenemise teel. Kõigepealt määratakse esimese

(arvates vedavast lülist) neljalülilise mehhanismi parameetrid. Seepeale, käsitledes esimese mehhanismi saadud mõõteid kui etteantuid, leitakse teise mehhanismi parameetrid jne.

3°. Eelmises punktis käsitletud kinemaatilise skeemi parameetrite ligikaudse määramise graafiline meetod võimaldab etteantud liikumisseadust saavutada lähendusega, mille määrab graafiliste konstruktsioonide täpsus. Aparaadiehituses aga esineb tihti olukordi, kus etteantud liikumisseadus tuleb reprodutseerida täpsusega, milleni graafilised meetodid ei küüni. Neil juhtudel tuleb esimeses lähenduses saadud skeemiparameetrid täpsustada nii, et esinevad hälved ei ületaks lubatavaid piire. Täpsustamisel on soovitav lähtuda seosega (13.24) määratud suuruse Δ_ψ maksimaalväärtuse miinimumini viimise nõudest.



Joon. 518.

Silmas pidades, et pikkuste l ja l_a vahe (joon. 516) on mehhanismi mõõtmete sobiva valiku puhul väike, võib etteantud liikumisseadusest kõrvalekaldumist iseloomustada ka suurusega

$$\Delta = \Delta_l(l + l_a) = l^2 - l_a^2, \tag{13.25}$$

mis saadakse hälvet Δ_l teguriga $l_a + l$ korrutades. Viimane erineb väga vähe püsivast suurusest $2l$.

Seos suuruste Δ_ψ (13.24) ja Δ (13.25) vahel saadakse, kui suurus Δ esitada kujul

$$\Delta = \Delta_l(l + l_a),$$

kust selgub, et

$$\Delta_l = \frac{\Delta}{l + l_a} \approx \frac{\Delta}{2l}, \tag{13.26}$$

sest $l + l_a \approx 2l$.

Asetades avaldise (13.26) valemisse (13.24), saame

$$\Delta_\psi = \frac{\Delta}{2lr \sin \gamma}. \tag{13.24'}$$

Funktsiooni Δ võib saada ka analüütilisel kujul. Suuruse l_a^2 määramiseks projekteerime joonisel 516 kujutatud neljalülilise mehhanismi teljele x (joon. 518) ja sellega ristuvale sihile ning elimineerime saadud avaldiste vahel kepsu ja x-telje vahelise nurga δ. Tulemuseks kujuneb

$$l_a^2 = r^2 + d^2 + 1 + 2rd \cos \psi - 2d \cos \alpha - 2r \cos(\psi - \alpha).$$

Edasi, arvesse võttes seost (13.25), saame:

$$\Delta = 2r \cos(\psi - \alpha) + 2d \cos \alpha - 2rd \cos \psi + l^2 - r^2 - d^2 - 1. \tag{13.27}$$

Valitud skeemiparameetrite täpsustamiseks piisab, kui funktsiooni Δ miinimumitingimustest arvutada kolm kuni neli parameetrit. Ülejäänud parameetrite väärtus määratakse jooniselt, mida kasutati mehhanismi ligikaudsete mõõdete leidmiseks.

4°. Käsitleme mehhanismi kolme parameetri arvutamist. Olgu näiteks ülesandeks arvutada lülide suhtelised pikkused r, d ja l. Funktsiooni Δ (13.27) võib sel puhul esitada järgmisel kujul:

$$\Delta = A[F(\alpha) - p_0\varphi_0(\alpha) - p_1\varphi_1(\alpha) - p_2\varphi_2(\alpha)], \tag{13.28}$$

kus

$$F(\alpha) = \cos\alpha, \tag{13.29}$$

$$\varphi_0(\alpha) = \cos\psi, \tag{13.30}$$

$$\varphi_1(\alpha) = \cos(\psi - \alpha), \tag{13.31}$$

$$\varphi_2(\alpha) = 1, \tag{13.32}$$

$$A = 2d, \tag{13.33}$$

$$p_0 = r, \tag{13.34}$$

$$p_1 = -\frac{r}{d}, \tag{13.35}$$

$$p_2 = \frac{r^2 + d^2 + 1 - l^2}{2d}. \tag{13.36}$$

Funktsioonid $F(\alpha)$, $\varphi_0(\alpha)$, $\varphi_1(\alpha)$ ja $\varphi_2(\alpha)$ on tuntud. Tõepoolest, teades suurusi α_0 ja ψ_0, võib nurga α iga valitud väärtuse jaoks arvutada vastava ψ väärtuse. Kordajad A, p_0, p_1 ja p_2 sõltuvad mehhanismi otsitavatest parameetritest. Nende arvutamiseks kasutame summa

$$S = \sum_{i=0}^{i=m} (\Delta_i)^2 \tag{13.37}$$

miinimumi tingimust, kusjuures Δ_i tähistab Δ väärtust, kui $\alpha = \alpha_i$.

Funktsioonide lähendamise teooriast on teada, et (13.28)-tüüpi funktsioonide koefitsientide p_0, p_1 ja p_2 väärtused, mis vastavad summa S miinimumile, saadakse lineaarvõrrandite süsteemist

$$\left.\begin{aligned} c_{00}p_0 + c_{01}p_1 + c_{02}p_2 &= \gamma_0, \\ c_{10}p_0 + c_{11}p_1 + c_{12}p_2 &= \gamma_1, \\ c_{20}p_0 + c_{21}p_1 + c_{22}p_2 &= \gamma_2. \end{aligned}\right\} \tag{13.38}$$

Võrrandites (13.38) esinevad koefitsiendid c_{kl} ja γ_k arvutatakse valemitega

$$c_{kl} = c_{lk} = \sum_{i=0}^{i=m} \varphi_k(\alpha_i)\varphi_l(\alpha_i) \qquad (k = 0, 1, 2;\ l = 0, 1, 2), \tag{13.39}$$

$$\gamma_k = \sum_{i=0}^{i=m} F(\alpha_i)\varphi_k(\alpha_i) \qquad (k = 0, 1, 2). \tag{13.40}$$

Mehhanismi lülide mõõdete leidmiseks arvutame valitud $m + 1$ punkti kohta funktsioonide $F(\alpha)$, $\varphi_0(\alpha)$ ja $\varphi_1(\alpha)$ väärtused, kasutades valemeid (13.29), (13.30) ja (13.31). Koefitsiendid γ_k ja c_{kl} saame valemitest (13.40) ja (13.39).

Nüüd lahendame võrrandsüsteemi (13.38) ja arvutame mehhanismi lülide otsitavad mõõted valemite (13.34)—(13.36) abil.

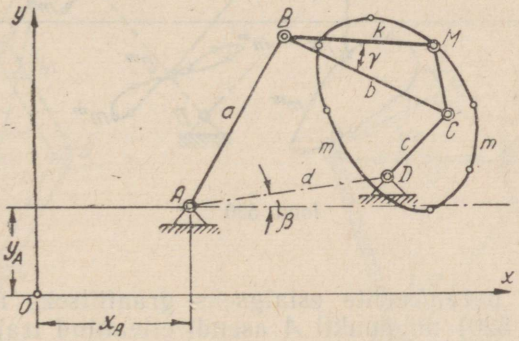
Et hinnata antud liikumisest kõrvalekaldumise suurust, arvutame valemi (13.28) abil funktsiooni Δ väärtused ja seepeale, kasutades valemit (13.24′), määrame otsitavad hälbed. Arvutuseks vajalikud $\sin\gamma$ väärtused saadakse mehhanismi asendiplaanidest mõõtmise teel.

Kolme otsitava parameetri teistsuguste kombinatsioonide puhul on arvutuse käik analoogiline.

Vajaduse korral võib arvutada ka neli või rohkem kinemaatilise skeemi parameetrit.[1]

§ 69. Etteantud trajektoori reprodutseerimine

1°. Etteantud trajektoori reprodutseerimise (taastekitamise, matkimise) ülesande võib lahendada analüütiliste meetoditega või siis meetodil, mis põhineb graafiliste konstruktsioonide ja analüütiliste arvutuste kombineerimisel. Analüütilisi meetodeid kasutades lõi akadeemik P. L. Tšebõšev juba möödunud sajandil mitmeid tähelepanuväärseid mehhanisme, mille kepsukõverad (s. o.

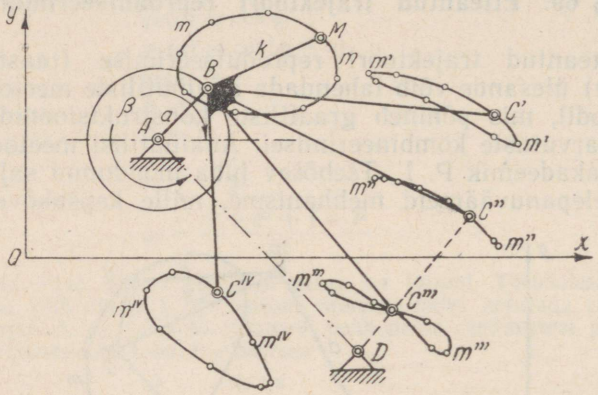


Joon. 519.

kepsu mingi punkti trajektoorid) väga vähe erinesid sirgjoone lõikudest või ringjoone kaartest. Samade meetoditega lahendati hiljem veel mitmed üksikülesanded, mis käsitlesid teatavate kõverate matkimist ainult madalamaid paare sisaldavate mehhanismide abil. Need lahendatud ülesanded ei haara aga kahjuks kõiki praktika jaoks tähtsaid probleeme, mis kerkivad madalamate paaridega mehhanismide projekteerimisel etteantud trajektooride alusel. Lisaks sellele on nad väga töömahukad. Suurema praktilise tähendusega on meetodid, kus kinemaatilise skeemi parameetrid määratakse algul graafiliselt ja täpsustatakse hiljem analüütiliste arvutuste abil.

[1] Н. И. Левитский, Проектирование плоских механизмов с низшими парами, Изд. АН СССР, 1950.

Sarniirnelilüliku *ABCD* (joon. 519) projekteerimisel, mille kepsu punkt *M* peab täpselt või ligikaudselt liikuma etteantud trajektooril *mm*, tuleb määrata kinemaatilise skeemi üheksa parameetrit: lülide pikkused *a, b, c, d*, punkti *M* asendit kepsul määravad suurused (s. t. pikkus *k* ja nurk γ) ning mehhanismi asendit etteantud trajektoori suhtes fikseerivad parameetrid (s. o. tsentri *A* koordinaadid x_A ja y_A ning nurk β).



Joon. 520.

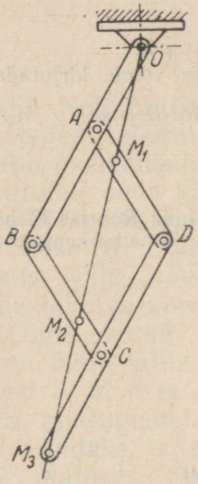
Nimetatud parameetrite esialgseks graafiliseks määramiseks valime (joon. 520) nii punkti *A* asendi etteantud trajektoori suhtes (s. o. koordinaadid x_A ja y_A) kui ka pikkused $AB = a$ ja $BM = k$ oma äranägemise järgi. Nihutades nüüd punkti *M* etteantud kõveral *mm* ja hoides punkti *B* seejuures ringjoonel, mis on tõmmatud tsentrist *A* raadiusega $AB = a$, jälgime lüliga *BM* seotud punktide trajektoore, neid selleks välja joonestades. Saadud trajektooridest valime sellise, mis kogu oma ulatuses kõige enam läheneb ringjoonele või ringjoone kaarele. Sel viisil saadud ringjoone raadius määrab lüli *CD* pikkuse *c* ja tema tsenter — kinnislüli *AD* pikkuse *d*. Valitud punkti *C* asend omakorda annab kepsu *BC* pikkuse *b*. Sirglõikude *BM* ning *BC* vaheline nurk osutub nurgaks γ. Juhul kui saadud lähendus kujuneb etteantud trajektoori suhtes väga jämedaks, võib kogu konstruktsiooni korrata, valides uue tsentri *A* ning muutes pikkusi $AB = a$ ja $BM = k$.

Toodud meetodiga saab etteantud trajektoore ligikaudselt matkivaid kepsukõveraid määrata graafiliste konstruktsioonide täpsuse piirides. Kui tekib vajadus lähenduse täpsust suurendada, tuleb pärast skeemiparameetrite graafilist määramist kolm või

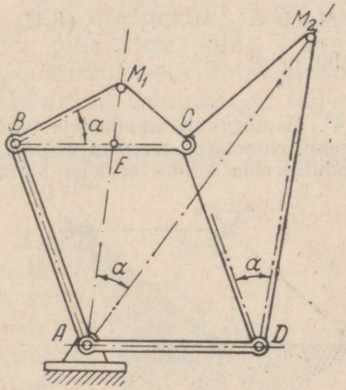
rohkem parameetrit arvutada analüütiliselt, kasutades meetodit, mis on analoogiline § 68 käsitletule.

2°. Lisaks etteantud trajektoore matkivatele mehhanismidele on tehnikas laialdaselt levinud veel kõverate teisendamiseks kasutatavad mehhanismid. Viimaste seast kohtab kõige sagedamini nn. pantograafe. Pantograafe kasutatakse kõverate sarnasusteisenduseks. Lihtsaimat pantograafi kujutab joonis 521. Ta on moodustatud šarniirrööpkülikust $ABCD$, mille külje AB pikendusel asuv punkt O on liikumatu. Tõmbame läbi selle punkti meelevaldse sirge ja fikseerime viimase lõikepunktid rööpküliku teiste külgedega, s. o. punktid M_1, M_2 ja M_3. Sõltumata pantograafi konfiguratsioonist jäävad need punktid rööpküliku omaduste põhjal alati ühele ja samale sirgele, kusjuures nende kaugused punktist O rahuldavad tingimust

$$OM_1 : OM_2 : OM_3 = OA : OB : (OB + CM_3).$$



Joon. 521.



Joon. 522.

Kõverad, mida punktid M_1, M_2 ja M_3 mehhanismi liikumisel kujundavad, on järelikult geomeetriliselt sarnased ja sarnaselt asetatud, sarnasuse tsentriga punktis O.

3°. Joonisel 521 kujutatud pantograafi kasutatakse kõverate proportsionaalseks suurendamiseks või vähendamiseks. Juhul kui soovitakse seejuures kõverat veel teatava nurga võrra pöörata, tuleb kasutada Sylvesteri pantograafi (joon. 522). Ka see mehhanism on moodustatud šarniirrööpkülikust $ABCD$, mille punkt A on kinnistatud, punktid M_1 ja M_2 aga paiknevad sarnaste kolmnurkade BM_1C ja DCM_2 tippudes. Tippude B ja D juures olevad nurgad tähistame tähega α. Toodud tingimustes kujunevad punktide M_1 ja M_2 trajektoorid geomeetriliselt sarnasteks kõverateks, olles teineteise suhtes pööratud nurga α võrra. Sarnasusteguriks on seejuures k, mille väärtus leitakse alljärgnevalt:

$$k = \frac{AM_1}{AM_2} = \frac{BM_1}{AD} = \frac{AB}{DM_2}. \qquad (13.41)$$

Pantograafi loetletud omaduste tõestamiseks tuletame seose (13.41) ja näitame, et $\angle M_1AM_2 = \alpha$.

Kolmnurkade CBM_1 ja M_2DC sarnasusest järgneb, et

$$\frac{BM_1}{BC} = \frac{DC}{DM_2}.$$

Silmas pidades, et $DC = AB$ ja $BC = AD$, saame

$$\frac{BM_1}{AB} = \frac{AD}{DM_2}.$$

Rööpküliku omaduste põhjal $\angle CBA = \angle ADC$. Järelikult $\angle ABM_1 = \angle ADM_2$. Kolmnurgad M_1BA ja ADM_2 on seega geomeetriliselt sarnased, mistõttu on õiged ka seosed (13.41).

Nimetatud kolmnurkade sarnasuse tõttu

$$\angle AM_1B = \angle M_2AD.$$

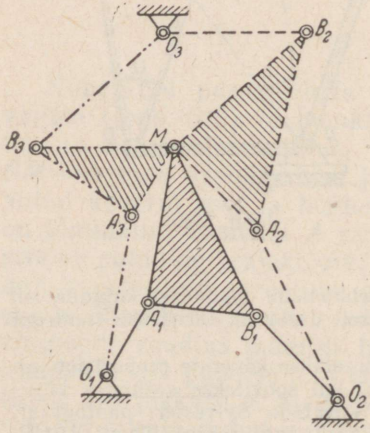
Edasi, kuna küljed AD ja BC on paralleelsed, siis võime kirjutada, et

$$\angle M_1AD = \angle M_1AM_2 + \angle M_2AD = \angle M_1EC = \alpha + \angle AM_1B = \alpha + \angle M_2AD.$$

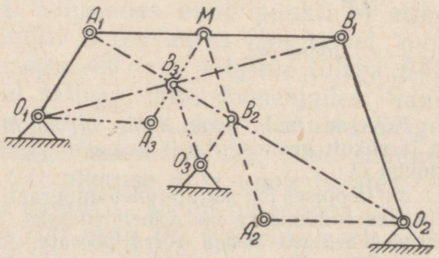
Järelikult

$$\angle M_1AM_2 = \alpha.$$

4°. Pantograafi omadustele tuginedes on lihtne tõestada Roberts-Tšebõševi teoreemi. Nimetatud teoreem väidab, et üldjuhul võib ühte ja sama kepsukõverat reprodutseerida kolme erineva šarniirnelilülikuga.



Joon. 523.



Joon. 524.

Kujundagu joonisel 523 näidatud šarniirnelilüliku $O_1A_1B_1O_2$ punkt M mingi kepsukõvera. Punktides M ja O_2 liidame mehhanismiga kahehaarmelise grupi MA_2O_2 nii, et tekiks Sylvesteri pantograaf. Punkti B_2 trajektoor tuleb sarnane punkti A_1 trajektooriga, s. t. kujuneb ringjoone kaareks, mille raadiuseks on $k \cdot O_1A_1$ (k tähistab siin sarnasustegurit). Ringjoone tsentri O_3 saame tingimu-

sest, mis nõuab, et kolmnurgad $O_1O_2O_3$ ja A_1B_1M oleksid geomeetriliselt sarnased.

Ühendades punktid B_2 ja O_3 šarniirselt lüliga B_2O_3, ei muuda me mehhanismi liikuvusastet. Lahutades nüüd lähtemehhanismi $O_1A_1B_1O_2$, saame ümbermoodustatud mehhanismi $O_2A_2B_2O_3$, mille punkt M läbib täpselt lähtemehhanismi poolt määratud kepsukõvera. Korrates analoogilist konstruktsiooni tsentri O_1 juures, saame kolmanda nelilüliku $O_1A_3B_3O_3$, mis samuti matkib etteantud kepsukõverat.

Juhul kui punkt M asub kepsu šarniiride tsentreid ühendaval sirgel, tekib Sylvesteri pantograafi asemel tavaline pantograaf ja sarnaste kolmnurkade asemel saame võrdelised joonlõigud (joon. 524):

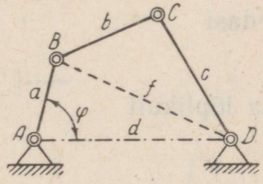
$$\frac{A_1M}{A_1B_1}=\frac{MB_2}{MA_2}=\frac{A_3B_3}{A_3M}=\frac{O_1O_3}{O_1O_2}.$$

Pantograafi omaduste põhjal saab analoogilist teoreemi tõestada ka kuuelüliliste mehhanismide kohta.

§ 70. Lülide täispöördetingimused

1°. Neljalüliliste mehhanismide projekteerimisel tuleb erilist tähelepanu pöörata lülide suhtelistele pikkustele, kuna viimastest sõltub mehhanismi teatavate lülide võimalus sooritada täispööret. Selgitame seda küsimust mõnede etteantud liikumisega neljalüliliste mehhanismide puhul.

Seose neljalüliliste mehhanismide lülide pikkuste ja nende liikumise vahel võib matemaatiliselt väljendada teatava võrratuse abil.



Joon. 525.

Olgu antud šarniirnelilülik $ABCD$ (joon. 525), mille lülide pikkusi tähistavad tähed a, b, c ja d. Ülesandeks on selgitada, missugustel tingimustel kujuneb lüli AB vändaks, s. t. võib sooritada pöörde 360° ulatuses. Seejuures on eeldatud, et $a<b<c<d$. Ühendame punktid B ja D sirgega ning tähistame nendevahelise kauguse tähega f. Kolmnurgast ABD selgub, et

$$f^2=a^2+d^2-2da\cos\varphi. \tag{13.42}$$

Kolmnurgast BCD võib omakorda kirjutada:

$$b+c\geqslant f\geqslant c-b. \tag{13.43}$$

Seosest (13.42) saame

$$\frac{a^2+d^2-f^2}{2ad}=\cos\varphi.$$

Kui silmas pidada võrratust (13.43), siis võime kirjutada

$$\frac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad}\leqslant\cos\varphi \tag{13.44}$$

ja

$$\frac{a^2+d^2-(c-b)^2}{2ad} \geqslant \cos\varphi. \qquad (13.45)$$

Kui lüli AB teeb täispöörde, kasvab nurk φ 0—360 kraadini, kusjuures $\cos\varphi$ muutub piires $-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant +1$. Kuna võrratuse (13.44) vasak pool peab olema väiksem $\cos\varphi$ minimaalsest väärtusest ja võrratuse (13.45) vasak pool ületama $\cos\varphi$ maksimaalse väärtuse, siis

$$\frac{a^2+d^2-(b+c)^2}{2ad} \leqslant -1$$

ja

$$\frac{a^2+d^2-(c-b)^2}{2ad} \geqslant +1.$$

Toodud võrratustest järgneb, et

$$a^2+d^2-b^2-2bc-c^2 \leqslant -2ad$$

ja

$$a^2+d^2-b^2+2bc-c^2 \geqslant +2ad.$$

Lihtne ümbergrupeerimine annab algul

$$a^2+2ad+d^2 \leqslant b^2+2bc+c^2,$$
$$a^2-2ad+d^2 \geqslant b^2-2bc+c^2,$$

edasi

$$(a+d)^2 \leqslant (b+c)^2,$$
$$(d-a)^2 \geqslant (b-c)^2,$$

ja lõplikult

$$d+a \leqslant b+c, \qquad (13.46)$$
$$d-a \geqslant b-c. \qquad (13.47)$$

Võrratuse (13.47) võib kirjutada veel järgmisel kujul:

$$d+c \geqslant a+b.$$

Kui meenutada, et eelduse põhjal $a<b<c<d$, siis on selge, et võrratus (13.47) ei ole mingiks täiendavaks tingimuseks.

Võrratustest (13.46) ja (13.47) selgub seega järgmist. *Šarniirnelilülikus, mille lülide pikkused vastavad tingimusele* $a<b<c<d$, *on lühim lüli* a *vändaks siis, kui lühima ja pikima lüli pikkuste summa ületab või on võrdne kahe ülejäänud lüli pikkuste summaga.*

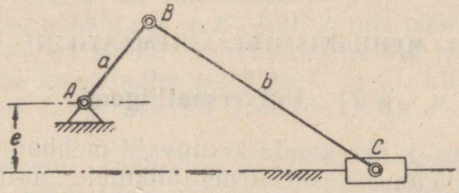
2°. Analoogilisi võtteid kasutades võib leida šarniirnelilüliku lülide pikkusi siduvad tingimused ka kõikidel teistel juhtudel. Näiteks võib tuua olukorra, kus nõutakse, et vändaks oleks lüli c või lülid a ning c üheaegselt jne. Ülesande lahendamine taan-

dub alati vastavate lülide poolt moodustatud kolmnurkade uurimiseks.

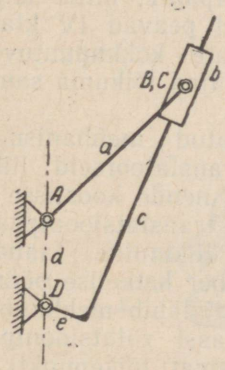
Tingimuste (13.46) ja (13.47) najal saab tõestada, et mehhanismis, kus $a < b < c < d$ ja kus kinnislüliks on lüli b või d (joon. 525), esineb üks vänt a ja üks nookur c. Juhul kui kinnistada lüli a, saadakse kahe vändaga mehhanism. Lõpuks, kui kinnistada lüli c, tekib kahe nookuriga mehhanism.

Šarniirnelinurga lülide vastastikuste asendite ja suhteliste mõõdete kõikide võimalikkude variantide analüüsi põhjal võib formuleerida alljärgneva üldise tingimuse.

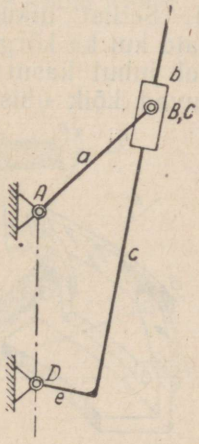
Kõiki šarniirnelilülikuid võib liigitada kahte gruppi. Esimesse gruppi kuuluvad mehhanismid, millel lühima ja pikima külje pikkuste summa on kahe ülejäänud külje pikkuste summaga võrdne või sellest väiksem. Teise grupi moodustavad mehhanismid, millel lühima ja pikima külje pikkuste summa on ülejäänud külgede pikkuste summast suurem. Kinnistades esimese grupi mehhanismis lühima lüli, saadakse kahe vändaga mehhanism. Lühima lüli naaberlüli kinnistamine annab ühe vändaga mehhanismi, kusjuures vändaks on lühim lüli. Lühima lüli vastaslüli kinnistamise korral saadakse kahe nookuriga mehhanism. Kõik teise grupi mehhanismid on samuti kahenookurilised.



Joon. 526.



Joon. 527.



Joon. 528.

3°. Kasutades šarniirnelilüliku uurimisel rakendatud mõttekäiku, saame väntmehhanismi (joon. 526) puhul järgmise tulemuse. Lüli a on vänt, kui

$$a < b - e,$$

kusjuures e tähistab mehhanismi desaksiaalsust. Vastupidi, lüli a osutub nookuriks, kui

$$a > b - e.$$

Lõpuks, joonistel 527 ja 528 kujutatud kulissmehhanismide puhul võib lihtsate geomeetriliste kaalutluste põhjal järeldada, et lüli c (kuliss) on vänt, kui

$$a > d + e,$$

ning nookur, kui

$$a < d + e.$$

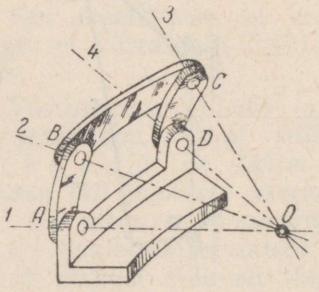
Esimesel juhul on meil tegemist nn. *pöörleva kulissiga* (joon. 527), teisel juhul — *kiikuva kulissiga* (joon. 528).

XIV peatükk

MÕNINGATE MEHHANISMIDE KINEMAATILINE UURIMINE

§ 71. Universaalliigend

1°. Käsitledes 3. perekonda kuuluvaid mehhanisme (§ 16, 6°), juhiti lugeja tähelepanu šarniirnelilülikutele, mille lülid pöörlevad ümber kolme ühes ja samas punktis lõikuva telje (joon. 529). Sellist liikumist on võimalik reprodutseerida nii madalamaid kui ka kõrgemaid paare sisaldavate mehhanismidega. Esimesel juhul kasutatakse V klassi rotatsioonipaare, mille teljed lõikuvad kõik ühises punktis O. Teisel juhul peavad IV klassi paare kujundavate kokkupuutuvate pindade moodustajad lõikuma samas punktis.

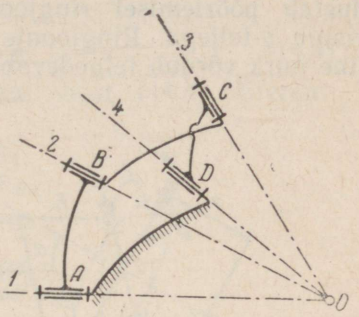


Joon. 529.

Kuna nimetatud mehhanismide lülidel ei ole translatoorseid liikumisi, siis ei saa nende koostisse ka kuuluda V klassi translatsioonipaare. Kõikide lülide liikumine taandub pöörlemiseks ümber hetkelise pöörlemistelje, mis alati läbib mehhanismi kuuluvate V klassi rotatsioonipaaride telgede püsivat lõikepunkti O. Lülide kirjeldatud liikumist nimeta-

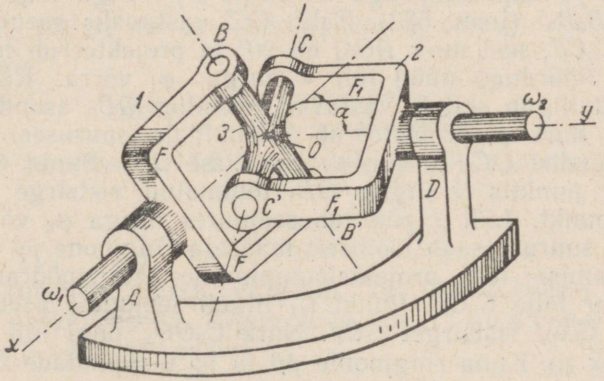
takse sfääriliseks liikumiseks, mistõttu ka vastavad mehhanismid kannavad *sfääriliste mehhanismide* nime.

2°. Käsitleme mõningaid lihtsamaid sfäärilisi mehhanisme. Nagu mainitud, kuuluvad sfääriliste mehhanismide liiki need mehhanismid, mille lülide kõik punktid liiguvad kontsentrilistel sfääridel. Et säärast liikumist reprodutseerida madalamaid paare sisaldavate mehhanismide abil, peavad kõikide paaride teljed lõikuma ühes ja samas punktis. Viimane on ühiseks tsentriks sfääridele, milledel paiknevad mehhanismi lülide trajektoorid. Joonisel 529 on kujutatud lihtsaim sfääriline mehhanism — šarniirnelilülik *ABCD*, kus kõikide sfääride ühiseks tsentriks on punkt *O*. Viimases lõikuvad kinemaatiliste paaride teljed *1*, *2*, *3* ja *4*. Selle sfäärilise mehhanismi kinemaatiline skeem on toodud joonisel 530. Sfäärilise šarniirnelilüliku konstruktiivne kujundus on näidatud joonisel 531. Liikumatus laagris nurkkiirusega ω_1 pöörlevale lülile *1* on antud kahvli kuju. Kahvel *F* on varustatud kahe koaksiaalse puksiga *B* ja *B'*. Lüli *2*, mis pöörleb kinnislaagris nurkkiirusega ω_2, on samuti kahvlikujuline. Ka tema kahvel F_1 on varustatud kahe koaksiaalse puksiga *C* ja *C'*. Lüli *3* on ristikujuline. Tema neli tappi asuvad kahvlite *F* ja F_1 puksides *B*, *B'* ning *C*, *C'*.



Joon. 530.

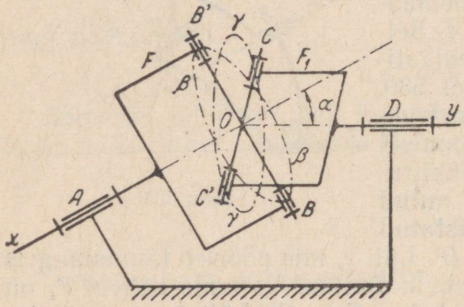
Mehhanismi abil saab lüli *1* pöörleva liikumise üle kanda lülile *2*. Seega võimaldab vaadeldav mehhanism pöörlevat liikumist üle kanda kahe, nurga α all lõikuva telje vahel (joon. 531).



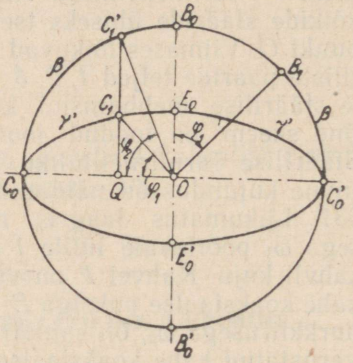
Joon. 531.

Praktikas kohtab peamiselt erijuhtu, kus nurgad AOB, COB ja COD võrduvad 90°. Punktid B ja B' liiguvad sel juhul ringjoonel, mille tasapind on risti x-teljega. Punktid C ja C' omakorda liiguvad ringjoonel, mille tasapind ristub y-teljega. Kirjeldatud mehhanismi nimetatakse *universaalliigendiks*.

3°. Käsitleme nüüd nurkkiiruste ω_1 ja ω_2 vahel kehtivat sõltuvust. Nagu selgub jooniselt 532, kujundab kahvli F punkt B teljega x ristuvas tasapinnas ringjoone $\beta\beta$. Kahvli F punkt C moodustab pöörlemisel ringjoone $\gamma\gamma$, kusjuures viimase tasapind ristub y-teljega. Ringjoonte poolt määratud tasapindade vaheline nurk võrdub telgedevahelise nurgaga α.



Joon. 532.



Joon. 533.

Valides projektsioonitasapinnaks telje x risttasapinna, projekteerub ringjoon $\beta\beta$ sellel loomulikus suuruses (joon. 533). Ringjoone $\gamma\gamma$ kujutiseks aga on ellips $\gamma'\gamma'$. Olgu telje BB' algasendiks B_0B_0' (joon. 533). Telje CC' vastavaks asendiks kujuneb siis C_0C_0', sest nurk BOC on 90° ja projekteerub loomulikus suuruses. Pöördugu nüüd lüli *1* nurga φ_1 võrra. Kahvli haru (telg) OB liigub sellele vastavalt asendist OB_0 asendisse OB_1, kusjuures nurk φ_1 projekteerub loomulikus suuruses. Telg OC lahkub asendist OC_0 ja siirdub asendisse OC_1. Punkt C_1 määratakse kui punktis O sirgele OB_1 tõmmatud ristsirge ja ellipsi $\gamma'\gamma'$ lõikepunkt. Lüli *2* pöördub seejuures nurga φ_2 võrra, mille loomuliku suuruse saab jooniselt määrata ringjoone $\gamma\gamma$ tasapinna mahapööramise teel projektsioonipinnale. Mahapööramine toimub ümber telje C_0C_0'. Punkt C_1 liigub seejuures asendisse C_1' piki telje C_0C_0' ristsirget QC_1'. Nurk C_0OC_1' ongi lüli *2* otsitav pöördenurk φ_2. Kuna ringjoonte $\beta\beta$ ja $\gamma\gamma$ tasapindade vahel olev nurk on võrdne telgede x ja y vahelise nurgaga α, siis kehtib alati seos

$$QC_1 = QC_1' \cos \alpha. \tag{14.1}$$

Jooniselt 533 selgub, et

$$QC_1 = OQ \operatorname{tg} \varphi_1 \tag{14.2}$$

ja et

$$QC_1' = OQ \operatorname{tg} \varphi_2. \tag{14.3}$$

Järelikult

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \cos \alpha$$

ehk

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2 \cos \alpha. \tag{14.4}$$

Silmas pidades, et $\alpha = \text{const}$, saame seost (14.4) diferentseerides:

$$\frac{d\varphi_1}{\cos^2 \varphi_1} = \cos \alpha \frac{d\varphi_2}{\cos^2 \varphi_2}.$$

Jagades mõlemaid pooli dt-ga, saame:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi_1} = \frac{d\varphi_2}{dt} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos^2 \varphi_2};$$

et aga

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1; \quad \frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_2,$$

siis

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos^2 \varphi_2}{\cos^2 \varphi_1} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}. \tag{14.5}$$

Edasi, meenutades, et

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \cos \alpha \quad \text{ja} \quad \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1}{\operatorname{tg}^2 \varphi_2} = \cos^2 \alpha,$$

võime kirjutada

$$\sin^2 \varphi_1 \cos^2 \varphi_2 = \sin^2 \varphi_2 \cdot \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha,$$

millest saame:

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{\cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha}. \tag{14.6}$$

Asetades avaldise (14.6) võrdusse (14.5), saame tulemuseks:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1 \cos^2 \alpha}. \tag{14.7}$$

Saadud tulemus näitab, et juhul, kui üks võllidest pöörleb ühtlase nurkkiirusega, liigub teine mitteühtlaselt.

Kui $\varphi_1 = 0$ või 180°, saame

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

Kui φ_1 on 90 või 270°, saame

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \cos\alpha.$$

Universaalliigendi ülekandetegur muutub seega piirides $\frac{1}{\cos\alpha}$ kuni $\cos\alpha$.

§ 72. Kaksikuniversaalliigend

1°. Esimese perekonna mehhanismidest vaatleme alljärgnevas kaksikuniversaalliigendit. Nagu näidati § 16, 4°, vastab 1. perekonna mehhanismidele struktuurivalem

$$L = 5n - 4p_5 - 3p_4 - 2p_3 - p_2.$$

Juhul kui kõik kinemaatilised paarid kuuluvad V klassi, on valemi kuju järgmine

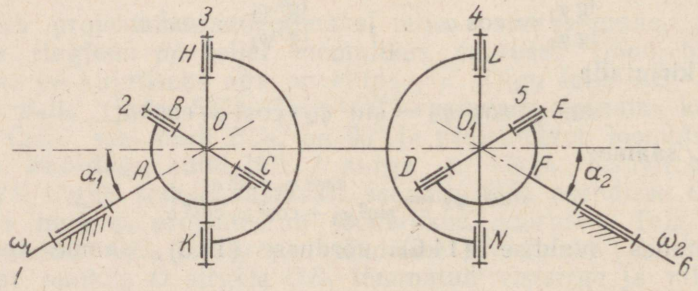
$$L = 5n - 4p_5.$$

Vaatleme kaksikuniversaalliigendit, mille skeem on toodud joonisel 534. Mehhanismil on viis liikuvat lüli ja kuus V klassi kinemaatilist paari. Tema struktuurivalem annab

$$5n - 4p_5 = 5 \cdot 5 - 4 \cdot 6 = 1.$$

Kaksikuniversaalliigendil on seega üks liikuvusaste.

2°. Selgitame nüüd nurkkiiruste vahel kehtiva seose iseloomu kaksikuniversaalliigendis (joon. 534). Olgu punkt O telgede *1*,



Joon. 534.

2 ja *3* ning punkt O_1 telgede *4*, *5* ja *6* lõikepunktiks. Lüli *ABC* pöörelgu ümber telje *1* nurkkiirusega ω_1. Lüli *DEF* nurkkiiruseks ümber telje *6* olgu ω_2. Telgede *1* ja *6* kaldenurkadeks sirge OO_1 suhtes olgu vastavalt α_1 ja α_2. Kahvlid *HK* ja *LN* asugu ühes ja samas tasapinnas.

Tähistame lüli $HKLN$ pöördenurga tähega φ, lüli ABC pöördenurga tähega φ_1 ja lüli DEF pöördenurga tähega φ_2. Universaalliigendi uurimisel tuletatud valemi (14.4) põhjal saame:

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha_1,$$
$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi\cos\alpha_2,$$

millest järeldub, et

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}. \tag{14.8}$$

Nurkkiiruste ω_1 ja ω_2 vaheline seos saadakse võrrandist, mis on anoloogiline seosega (14.5). Kui

$$\alpha_1 = \alpha_2,$$

siis endastmõistetavalt

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_2$$

ja

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2.$$

Seega

$$\varphi_1 = \varphi_2$$

ja järelikult ka

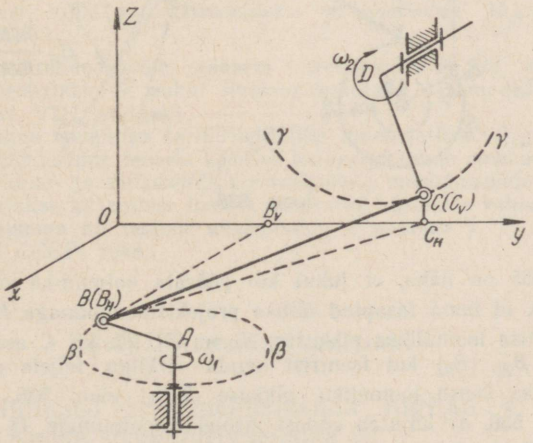
$$\omega_1 = \omega_2.$$

Kaksikuniversaalliigendi lülide sümmeetrilise asetuse puhul on lülide ABC ja DEF nurkkiirused seega v õ r d s e d.

§ 73. Ruumiline šarniirnelilülik

1°. Reas kaasaegsetes masinates kasutatakse liikumise ülekandmiseks kiivate telgede vahel ruumilist šarniirnelilülikut (joon. 535). See mehhanism kuulub 0-perekonda ja tema struktuurivalemiks on (vt. § 16, 2°):

$$L = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1.$$



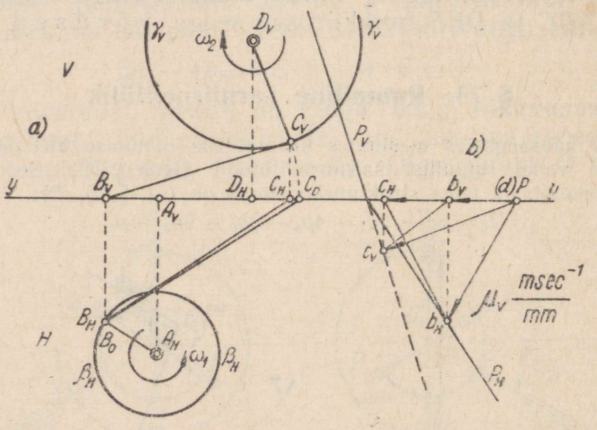
Joon. 535.

Mehhanismis on kaks V klassi rotatsioonipaari ja kaks III klassi kuulliigendit (sfäärilist paari). Liigset liikuvusastet põhjustab lüli BC pöörlemisvõimalus ümber oma pikitelje. Struktuuri ja kinemaatika seisukohast võib ühe III klassi paari seetõttu asendada IV klassi paariga. Mehhanismi struktuurivalem annaks sel juhul

$$6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1,$$

s. t. mehhanism on sundliikuvusega.

2°. Praktikas kohtab ruumilisi šarniirnelilülikuid kõige sagedamini joonisel 535 näidatud kujul, kus vända AB pöörlemine ümber z-teljega paralleelse telje tuleb muundada nookuri DC kiikeliikumiseks (nookumiseks) ümber x-teljega paralleelse telje. Kepsu BC punkt B liigub seega tasapinnal xOy paikneval ringjoonel $\beta\beta$. Punkti C geomeetriliseks kohaks on aga tasapinnal zOy paiknev ringjoone kaar $\gamma\gamma$. Lüli AB pöörelgu püsiva nurkkiirusega ω_1. Nookuri CD järjestikuste asendite leidmiseks võib kasutada tavalist, kujutavas geomeetrias tuntud meetodit. Valime projektsiooniteljeks telje Oy. Horisontaalseks projektsioonipinnaks H olgu tasapind xOy ja vertikaalseks projektsioonipinnaks V tasapind yOz (joon. 535). Ringjoon $\beta\beta$ projekteerub tasapinnale xOy loomulikus suuruses (ringjoon $\beta_H\beta_H$ joonisel 536, a). Täpselt samuti projekteerub kaar $\gamma\gamma$ tasapinnale V (kaar $\gamma_V\gamma_V$ joonisel 536, a). Vända AB asend on uurimise hetkel määratud tema projektsioonidega A_HB_H ja A_VB_V.



Joon. 536.

Jooniselt 535 on näha, et juhul kui pöörata kolmnurka $B_HB_VC_V$ ümber külje B_HB_V nii, et tema tasapind ühtiks projektsioonipinnaga H, saame sellel kepsu BC kujutise loomulikus pikkuses. Kepsu BC punkti C asendi leidmiseks tuleb punktist B_H (B_0) kui tsentrist kanda sirkliga teljele yy punkti C_0, võttes raadiuseks kepsu loomuliku pikkuse B_0C_0(joon. 536, a). Kolmnurk $B_HB_VC_0$ (joon. 536, a) kujutab endast projektsioonipinnale H mahapööratud kolmnurka B_HB_VC. Pöörame nüüd kolmnurka $B_HB_VC_0$ ümber külje B_HB_V.

Punkt C_0 liigub seejuures piki punktist B_V raadiusega B_VC_0 tõmmatud ringjoone kaart. Punkt C_V saadakse nimetatud kaare lõikumisel kaarega $\gamma_V\gamma_V$. Punkt C_H leitakse kui punkti C_V projektsioon teljel yy. Mehhanismi horisontaalprojektsiooniks on seega kujund $A_HB_HC_HD_H$ ja vertikaalprojektsiooniks — kujund $A_VB_VC_VD_V$ (joon. 536, *a*).

3°. Punkti C kiiruse v_C leidmiseks võime kasutada kahte võrrandit:

$$v_C = v_B + v_{CB}$$

ja

$$v_C = v_D + v_{CD}.$$

Siinnas pidades, et $v_D = 0$, saame

$$v_{CD} = v_B + v_{CB}.$$

Kiirusplaani koostamisel kasutame samu projektsioone (joon. 536, *b*).

Lähtudes punktist p kanname plaani vändaga A_HB_H (joon. 336, *a*) ristuva lõigu (pb_H). Kiiruse v_B suurus on antud seosega

$$v_B = \omega_1\mu_l(A_HB_H) = \mu_v(pb_H).$$

Kiiruse v_B projektsiooni tasapinnal V kujutab lõik (pb_v). Läbi vektori v_B lõpp-punkti kujundame tasapinna, mis sisaldab kiirust v_{CB}. See tasapind peab ristuma kepsu BC teljega. Joonisel 536, *b* on käsitletav tasapind näidatud tema jälgede P_V ja P_H abil.

Edasi tõmbame punktist p sirge, mis kulgeb kiiruse $v_C = v_{CD}$ sihis, s. t. ristub lõiguga D_VC_V (joon. 536, *a*). Punkt c_V, kus nimetatud sirge lõikub jäljega P_V, on punkti C kiirusvektori v_C lõpp-punktiks, s. t.

$$v_C = \mu_0(pc_V).$$

Kiiruse v_C horisontaalprojektsiooniks on lõik pc_H. Kiirusplaan on moodustatud kolmnurgast, mille projektsioonideks on vastavalt pb_Hc_H ja pb_Vc_V (joon. 536, *b*).

Mehhanismi kiirendusi võib määrata kiirendusplaani abil, kuid tavaliselt on ruumiliste mehhanismide puhul lihtsam kasutada kinemaatiliste diagrammide meetodit (vt. VIII peatükk).

Ülal käsitlesime ruumilise šarniirnelilüliku kinemaatikat. Olgu tähendatud, et ruumiliste mehhanismide teooria käsitleb ka keerukamate mehhanismide, muuhulgas ka viie-, kuue- ja seitsmelüliliste ruumiliste mehhanismide kinemaatilist uurimist. Üksikasjalise kirjanduse loetelu nimetatud küsimuse kohta annab kogumik «Труды семинара по теории механизмов и машин» т. IV, вып. 16, Л., 21—32, Изд. АН СССР, 1948.

§ 74. Kruvimehhanismid

1°. Kolmelülilised kruvimehhanismid liigitati 4. perekonda (vt. § 16, 7°). Nende struktuurivalemiks on

$$L = 2n - p_5.$$

Joonisel 537 on kujutatud kolmelüliline kruvimehhanism (vt. § 6). Selle mehhanismi puhul saame:

$$L = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1,$$

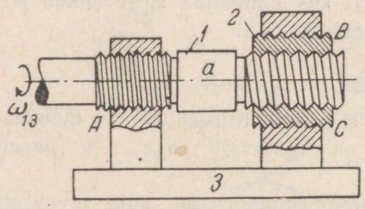
s. t. mehhanismil on s u n d l i i k u v u s.

Käsitleme nüüd kolmelülilise kruvimehhanismi kinemaatiliste parameetrite vahelisi seoseid. Kruvipaari lülide suhteliseks liikumiseks on pöörlemine ümber paari telje ja translatoorne liikumine piki sama telge. Nimetatud liikumised on koordineeritud seosega

$$s = h\frac{\varphi}{2\pi}, \qquad (14.9)$$

kus s tähistab ühe lüli liikumist teise suhtes piki paari telge, h — kruvijoone (keerme) sammu ja φ — pöördenurka.

Seega, kui lüli *1* pöördenurk ja keerme samm on teada, võib valemi (14.9) abil alati leida selle lüli teljesuunalist paigutust. Juhul kui kellaosuti suunas pöörlev lüli e e m a l d u b telje sihis vaatlejast, nimetatakse keeret p a r e m p o o l s e k s. Vastupidi, kui telje sihis vaadates paistab, et kellaosuti suunas pöörlev lüli l ä h e n e b, on tegemist v a s a k p o o l s e keermega. Parempoolse keerme sammu loeme edaspidi p o s i t i i v s e k s, vasakpoolse keerme sammu aga n e g a t i i v s e k s.



Joon. 537.

2°. Käsitleme joonisel 537 kujutatud mehhanismi kinemaatikat. Lüli *1* paigutus kinnislüli *3* suhtes s_{13} on antud valemiga (14.9):

$$s_{13} = h_1\frac{\varphi_{13}}{2\pi} = h_1\frac{\omega_{13}t}{2\pi}, \qquad (14.10)$$

kus h_1 tähistab lülide *1* ja *3* poolt moodustatud kruvipaari sammu, φ_{13} — lüli *1* pöördenurka kinnislüli *3* suhtes ja ω_{13} — lüli *1* nurkkiirust sama lüli suhtes.

Analoogiliselt määratakse ka paigutused s_{21} ja s_{23}:

$$s_{21} = h_2\frac{\varphi_{21}}{2\pi} = h_2\frac{\omega_{21}t}{2\pi} \qquad (14.11)$$

ja

$$s_{23} = h_3\frac{\varphi_{23}}{2\pi} = h_3\frac{\omega_{23}t}{2\pi}. \qquad (14.12)$$

Toodud valemites tähistavad h_2 ja h_3 sammusid kruvipaarides B (lülide *1* ja *2* vahel) ja C (lülide *2* ja *3* vahel), φ_{21} ja φ_{23} — lüli *2* pöördenurki lülide *1* ja *3* suhtes ning ω_{21} ja ω_{23} — sama lüli nurkkiirusi lüli *1* ja kinnislüli *3* suhtes.

Paigutus s_{23} on antud seosega

$$s_{23} = s_{13} + s_{21}. \tag{14.13}$$

Suurusi s_{23}, s_{13} ja s_{21} tuleb siinjuures käsitleda kui algebralisi. Nende märk on määratud seostega (14.10), (14.11) ja (14.12), kus sammud h_1,h_2 ja h_3 loetakse p a r e m p o o l s e keerme puhul positiivseteks ja v a s a k p o o l s e keerme puhul negatiivseteks.

Asetades võrrandisse (14.13) s_{13}, s_{23} ja s_{21} väärtused seostest (14.10), (14.11) ja (14.12), saame:

$$h_3\omega_{23} = h_1\omega_{13} + h_2\omega_{21}. \tag{14.14}$$

Nurkkiiruse ω_{21} saame võrrandist

$$\omega_{23} = \omega_{13} + \omega_{21},$$

millest selgub, et

$$\omega_{21} = \omega_{23} - \omega_{13}.$$

Asetades saadud avaldise võrrandisse (14.14), leiame ülekandeteguri

$$i_{12} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{23}} = \frac{h_3 - h_2}{h_1 - h_2}. \tag{14.15}$$

Võrrand (14.15) seob mehhanismi ülekandeteguri keermete sammudega.

Paigutust s_{23} saab lüli *1* etteantud pöördenurga puhul alati leida võrrandi (14.12) abil. Tõepoolest,

$$s_{23} = h_3\frac{\varphi_{23}}{2\pi} = h_3\frac{\varphi_{13}}{2\pi i_{12}}, \tag{14.16}$$

sest et

$$\frac{\varphi_{13}}{\varphi_{23}} = \frac{\omega_{13}}{\omega_{23}} = i_{12}.$$

Asetades võrrandist (14.15) leitud i_{12} väärtuse võrrandisse (14.16), saame

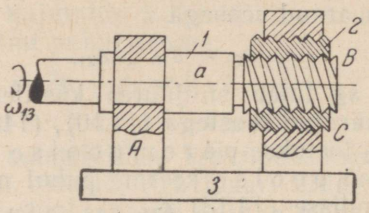
$$s_{23} = h_3\frac{h_1 - h_2}{h_3 - h_2}\cdot\frac{\varphi_{13}}{2\pi}. \tag{14.17}$$

Võrrandi (14.17) võib kirjutada ka alltoodud kujul:

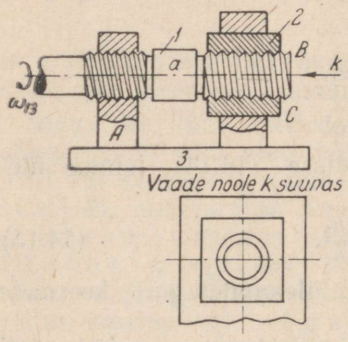
$$s_{23} = \frac{h_1 - h_2}{1 - \frac{h_2}{h_3}}\cdot\frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

3°. Käsitleme nüüd kolmelülilise kruvimehhanismi mitmesuguseid modifikatsioone. Olgu näiteks kruvipaar A (joon. 537) asendatud rotatsioonipaariga (joon. 538). Keerme samm h_1 võrdub sel juhul nulliga ja paigutus s_{23} on antud seosega

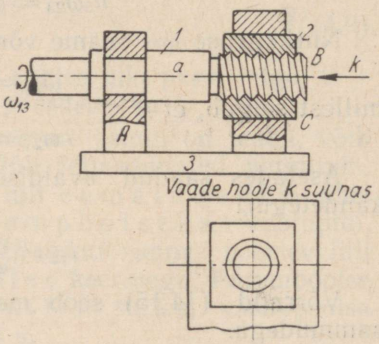
$$s_{23} = \frac{-h_2}{1 - \frac{h_2}{h_3}}\cdot\frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$



Joon. 538.



Joon. 539.



Joon. 540.

Juhul kui kruvipaar C asendada translatsioonipaariga, tekib joonisel 539 näidatud mehhanism. Sel puhul osutub keermesamm h_3 lõpmata suureks ja lüli 2 paigutus s_{23} on antud valemiga

$$s_{23} = \frac{h_1 - h_2}{1 - \frac{h_2}{\infty}} \cdot \frac{\varphi_{13}}{2\pi} = (h_1 - h_2)\,\frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

Lõpuks käsitleme juhtu, kus kruvipaar A (joon. 537) on asendatud rotatsioonipaariga ja kruvipaar C — translatsioonipaariga (joon. 540). Antud juhul $h_1 = 0$ ja $h_3 = \infty$. Järelikult

$$s_{23} = -h_2 \frac{\varphi_{13}}{2\pi}.$$

§ 75. Suunavmehhanismid. P. L. Tšebõševi mehhanismid

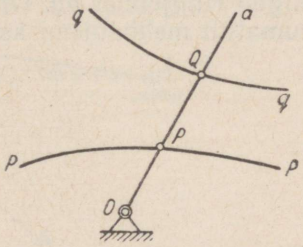
1°. Suunavmehhanismideks (juhtmehhanismideks) nimetatakse šarniirmehhanisme, kus ühe lüli teatav punkt liigub etteantud trajektooril. Praktikas on sääraseks trajektooriks kõige sagedamini kas sirge või ringjoon. Vastavalt sellele liigitatakse suunav-

mehhanisme sirgjooneliselt ja ringjooneliselt suunavateks mehhanismideks.

Tasapinnaliseks sirgjooneliselt suunavaks mehhanismiks (sirgjuhtmehhanismiks) nimetatakse säärast tasapinnalist mehhanismi, mille ühe lüli mingi punkti kogu trajektoor või osa sellest kulgeb sirgjooneliselt või kujundab sirgjoonest küllalt vähe erineva kõvera. Trajektoori sirgjoonelisus saavutatakse suunavmehhanismides lülide suhteliste pikkuste sobiva valikuga, mitte aga eriliste juhtpindade abil, nagu näiteks väntmehhanismides.

Juhul kui suunavmehhanismi teatava punkti trajektooriks on sirgjoon, nimetatakse mehhanismi *täpseks sirgjooneliselt suunavaks mehhanismiks* (*täpseks sirgjuhtmehhanismiks*). Juhul kui aga mehhanismi üks punkte kujundab sirgjoonest vähe erineva kõvera, on meil tegemist *ligikaudse sirgjooneliselt suunava mehhanismiga* (*ligikaudse sirgjuhtmehhanismiga*).

Tehnika kasutab suunavmehhanisme aparaatides, mitmesugustes seadeldistes, automaatides jne. Käesolevas paragrahvis käsitleme ainult mõningaid, kõige sagedamini esinevaid suunavmehhanisme.



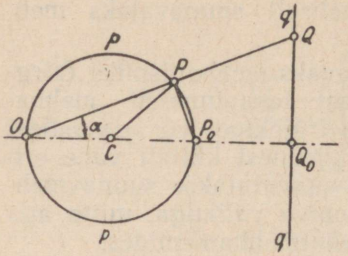
Joon. 541.

2°. Täpsete sirgjooneliselt suunavate mehhanismide (sirgjuhtmehhanismide) hulka kuuluvad niinimetatud *inversorid*, kus rakendatakse inversiooniks nimetatavat kõverate geomeetrilist teisendust. Olgu antud punktid O ja P, mis paiknevad sirgel Oa (joon. 541). Kinnistame punkti O ja paneme sirge selle ümber pöörlema. Sirgel libisev punkt P kujundab seejuures mingi kõvera pp. Alati on võimalik leida punkti Q, mis liigub vaadeldaval sirgel nii, et on täidetud tingimus

$$OP \cdot OQ = K^2,$$

kus K on teatav konstantne suurus. Punkti Q geomeetrilise koha tähistame qq. Kõveraid pp ja qq, mis rahuldavad ülaltoodud tingimust, nimetatakse *vastastikku inverssseteks kõverateks*, s. t. üks kõver on teise *inversiooniks*.

Otsime nüüd ringjoone pp inversiooni olukorras, kus pöörlemistsenter O asub samal ringjoonel (joon. 542). Selgub, et otsitavaks kõveraks on sel juhul sirge qq, mis ristub inversioonitsentrit O ja ringjoone tsentrit C ühendava sirgega OC. Tõestamiseks ühendame punkti P sirgete abil punktidega C ja P_0. Täisnurksed kolmnurgad OPP_0 ja OQQ_0 on ühise teravnurga tõttu geomeetriliselt sarnased. Seetõttu



Joon. 542.

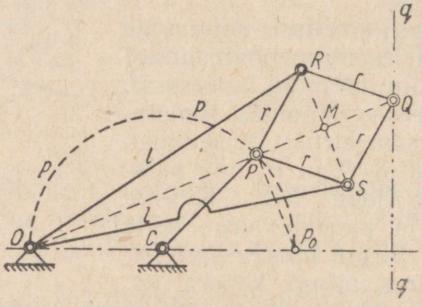
$$\frac{OQ_0}{OQ} = \frac{OP}{OP_0},$$

millest järgneb, et

$$OP \cdot OQ = OP_0 \cdot OQ_0 = K^2. \quad (14.18)$$

Seega, kui valida mehhanismis kolm kollineaarset punkti O, P ja Q nii, et tingimus (14.18) oleks täidetud, ja panna punkt P liikuma ringjoonel raadiusega CO, siis punkt Q kujundab sirgjoone qq, mis ristub sihiga OC ja rahuldab võrrandit (14.18).

Üks käsitletud printsiipi rakendavaist mehhanismidest on Lipkin-Peaucellier mehhanism ehk *Lipkin-Peaucellier inversor* (joon. 543). Mehhanism koosneb šarniir-rombist $PRQS$ küljepikkusega r ning kahest lülist OR ja OS, mille pikkuseks on l. Punkt P liigub ringjoonel pp. On ilmne, et punktid O, P ja Q jäävad sõltumatult mehhanismi asendist alati ühele sirgele, s. t. rahuldavad



Joon. 543.

esimest tingimust. Seega jääb veel tõestada, et käsitletav mehhanism rahuldab ka tingimust (14.18). Konstrueerime selleks rombi diagonaalid PQ ja RS. Rööpküliku omaduste põhjal

$$(OP) \cdot (OQ) = [(OM) - (PM)][(OM) + (MQ)] =$$
$$= (OM)^2 - (PM)^2 = [l^2 - (RM)^2] - [r^2 - (RM)^2] =$$
$$= l^2 - r^2 = K^2.$$

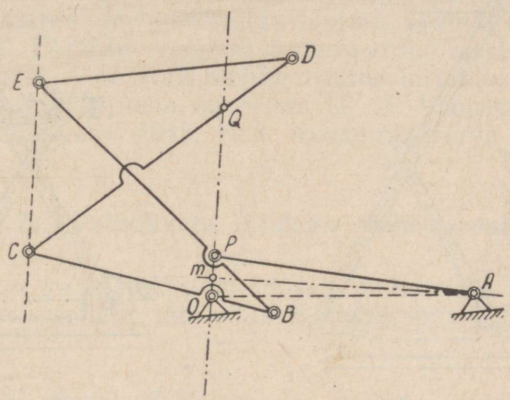
Seega, kui lüli PC pöörleb ümber tsentri C, liigub mehhanismi punkt Q sirgel qq.

3°. Inversiooni rakendamise teise näitena võib tuua ühe Harti täpsetest suunavmehhanismidest (joon. 544). Kui selle mehha-

nismi lülide pikkused on paarikaupa võrdsed, s. t. kui $BC = ED$ ja $CD = EB$, siis sihiga EC paralleelselt kulgeval sirgel valitud kolm punkti O, P ja Q rahuldavad tingimust

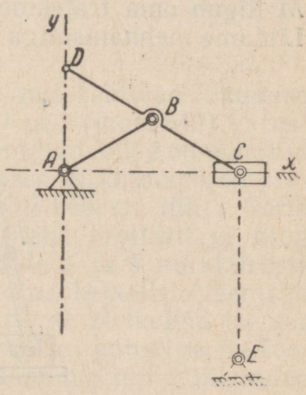
$$OP \cdot OQ = K^2.$$

Väidetut saab tõestada elementaarsete geomeetriliste konstruktsioonide abil. Lüli AP punkti A asukoht valitakse lõigu OP keskelt tõmmatud ristsirgel.



Joon. 544.

Me ei peatu teiste täpsete suunavmehhanismide juures, vaid siirdume mõningate ligikaudsete suunavmehhanismide käsitlemisele. Vaatleme kõigepealt mehhanismi, mis tekib väntmehhanismist siis, kui selle keps ja vänt on ühepikkused (joon. 545). Olgu $AB = BC = BD = r$. Kepsu BC punkt D liigub x-telje ristsirgel y, sest sirglõigu DC liikumine on määratud tema otspunktide libisemisega täisnurga yAx külgedel. Kui ühendada omavahel punkti C piirasendid ja tõmmata saadud lõigu keskkohast ristsirge CE, võib liuguri asendada väga pika lüliga CE. Punkti C trajektoor kaldub seejuures muidugi sirgjoonest vähesel määral kõrvale. Punkt D läbib antud olukorras trajektoori, mis pole küll enam täpselt sirge, kuid erineb sellest väga vähe.



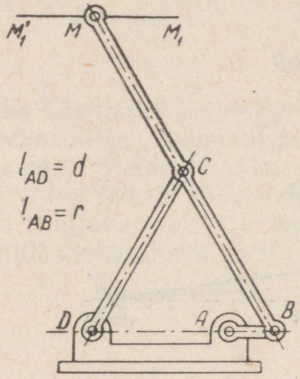
Joon. 545.

4°. Kuulus vene matemaatik ja me-

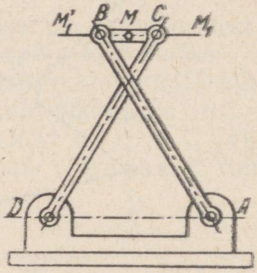
haanik akadeemik P. L. Tšebõšev oli paljude šarniirmehhanismide sünteesijaks. Joonis 546 kujutab Tšebõševi ligikaudset sirgjooneliselt suunavat mehhanismi. Kui valida lülide pikkused nii, et $BC = CD = CM = 1$, $AB = r$, $AD = d$ ja täita tingimus

$$d = \frac{2+r}{3},$$

siis erineb punkti M trajektoor lõigus M_1M_1' väga vähe sirgest.



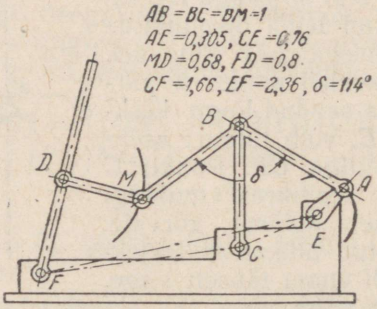
Joon. 546.



Joon. 547.

Mehhanismi teine variant, mis annab sama trajektoori, on näidatud joonisel 547. Selle variandi sai Tšebõšev, rakendades Roberts-Tšebõševi teoreemi (§ 69, 4°).

Joonis 548 kujutab Tšebõševi mehhanismi, mille lüli BC punkt M liigub oma trajektoori teatavas osas ligikaudu ringjooneliselt. Liidame mehhanismiga kahehaarmelise grupi (diaadi) MDF, mille

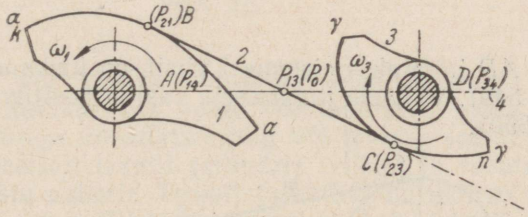


Joon. 548.

lüli DM pikkus võrdub punkti M poolt läbitava ringjoone kaare raadiusega. Tsentri F asendi ja kauguse FD võib seejuures valida nii, et ajal, mil punkt M liigub ringjoone kaarel, asub punkt D selle tsentris, lüli FD on aga liikumatu. Tulemuseks saame seega nn. *liikumispausidega* mehhanismi, s. t. mehhanismi, kus vända AE ühe täispöörde vältel veetav lüli FD sooritab peatusega katkestatud liikumist. Liikumispausidega mehhanisme kasutatakse laialdaselt masinautomaatides. Prioriteet käsitletavate mehhanismide alal kuulub P. L. Tšebõševile, kes on ka paljude teiste teravmeelselt koostatud mehhanismide loojaks. Nende sünteesimisel rakendas P. L. Tšebõšev rangeid matemaatilisi meetodeid. Asjasthuvitatud võivad nimetatud mehhanismide kirjeldusi ja analüüse leida raamatust «Научное наследие П. Л. Чебышева», вып. II «Теория механизмов», 1945, Изд. Академии Наук СССР.

§ 76. Painduvate lülidega mehhanismid

1°. Tehnikas kasutatakse laialdaselt painduvate lülidega mehhanisme. Piisab sellest, kui viidata rihmajamitele, köisajamitele jne.



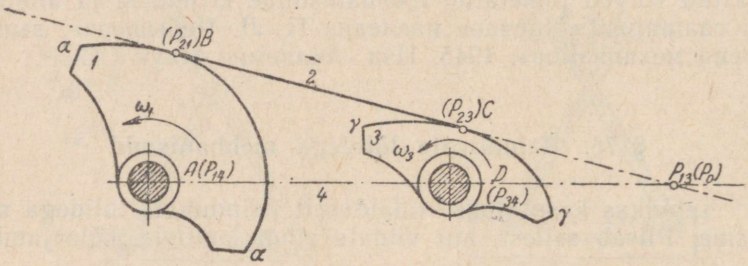
Joon. 549.

Käsitleme põhilisi kinemaatilisi seoseid, mis kehtivad liikumise ülekandmisel painduva niidiga. Olgu lülid *1* ja *3* (joon. 549) varustatud profiilidega $\alpha\alpha$ ja $\gamma\gamma$. Painduv, kuid venimatu niit *2* on mähitud profiilidele $\alpha\alpha$ ja $\gamma\gamma$ lõikude Bk ja Cn ulatuses. Niidi otsad on profiilide külge kinnitatud punktides k ja n. Kui pöörata lüli *1*, kerib niit profiilile $\alpha\alpha$, mähkudes samaaegselt maha profiililt $\gamma\gamma$ ning pannes pöörlema lüli *3*. Leiame seose lülide *1* ja *3* nurkkiiruste ω_1 ja ω_3 vahel. Selleks kasutame § 24 esitatud hetkeliste tsentrite meetodit. Hetkeline tsenter P_{14} asub punktis A. Hetkeline tsenter P_{34} paikneb punktis D. Tsenter P_{21} langeb kokku punktiga B. Tõepoolest, kui mõtteliselt seisata lüli *1*, siis taandub lüli *2* liikumine libisemata veeremiseks lüli *1* profiilil $\alpha\alpha$. Samal põhjusel võib väita, et hetkeline tsenter P_{23} ühtib punktiga C. Lüli *3* relatiivsel

liikumisel lüli *1* suhtes peab vastav hetkeline tsenter P_{13} asuma hetkelisi tsentreid P_{14} ja P_{34} ning P_{21} ja P_{23} ühendavatel sirgetel. Tema asukohaks on järelikult sirgete *AD* ja *BC* lõikepunkt. Ülekandesuhe i_{13} saadakse seosest

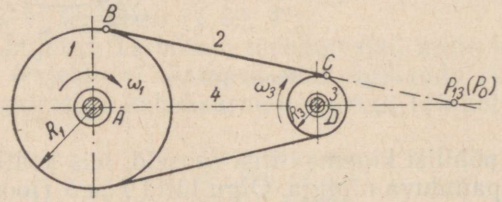
$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = -\frac{P_{34}P_{13}}{P_{14}P_{13}} = -\frac{DP_0}{AP_0}. \qquad (14.19)$$

Painduva niidi siht jagab seega lülide *1* ja *3* pöörlemistsentreid ühendava sirge nimetatud lülide nurkkiirustega pöördvõrdelisteks osadeks.



Joon. 550.

Kui sirge *AD* jagatakse sisemisel viisil, on ülekandesuhe negatiivne (joon. 549). Välisele jagamisele vastab positiivne ülekandesuhe (joon. 550).



Joon. 551.

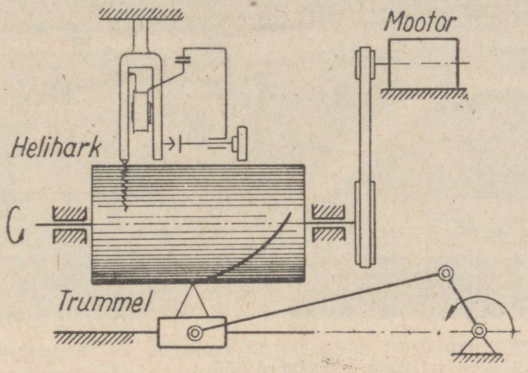
2°. Kasutades liikumise ülekandmiseks painduvat niiti ja ümmargusi kettaid (joon. 551), tuleb ülekandesuhe arvutada järgmiselt:

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{DP_0}{AP_0} = \frac{R_3}{R_1}.$$

Ülekandesuhe on seega pöördvõrdeline raadiuste R_1 ja R_3 suhtega.

§ 77. Masinate kinemaatika uurimise eksperimentaalsetest meetoditest

1°. Joonpaigutuste mõõtmine. Mõõtmise ülesandeks on saada aeg — tee graafik, s.t. $s = s(t)$. Selleks kasutatakse sageli kümograafiks nimetatavat aparaati, mille skeem on toodud joonisel 552. Kerge metalltrumli (silindri) paneb pöörlema kas



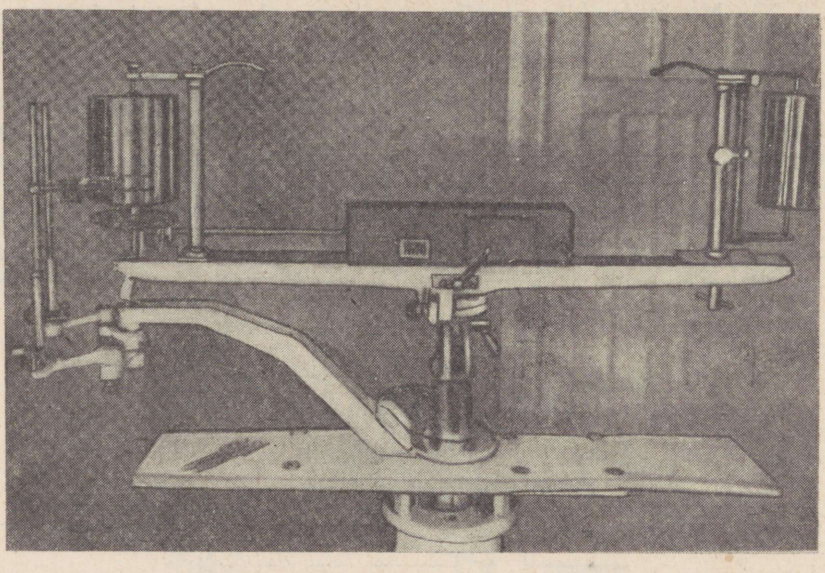
Joon. 552.

kellamehhanism või püsiva kiirusega elektrimootor. Trumlile (silindrile) kinnitatakse kas valge või tahmatud paber. Mehhanismi uuritava lüliga ühendatud sulg või teravik seatakse nii, et ta liiguks paralleelselt trumli (silindri) teljega ja surutakse seejuures õrnalt vastu paberit. Trumli (silindri) nurkkiirus valitakse arvestusega, et kogu mõõdetav paigutus mahuks trumli (silindri) külgpinnale. Paigutuskõveraga üheaegselt märgitakse trumlil (silindril) olevale paberile ka helihargi võnkumine. Selleks kinnitatakse helihargi ühe haru otsa metallsulg, mille teravik on kergelt surutud paberile. Helihark hoitakse vastava elektromagnetilise ergutuse abil püsivas võnkumises. Tema otsa kinnitatud metallsulg joonestab pöörlevat trumlit (silindrit) katvale paberile seetõttu sinusoidaalse kõvera. Sinusoidi kahe naaberharja vaheline kaugus vastab helihargi võnkumise ühele perioodile. Kui helihargi sageduseks on 50 Hz, vastab sellele periood T kestusega

$$T = \frac{1}{50} = 0{,}02 \text{ sec.}$$

Kümograafil saadud kõverat graafiliselt diferentseerides võib konstrueerida sõltuvuse kiirus — aeg, s. t. kõvera $v = v(t)$.

Kümograafi registreerimisulatust saab suurendada, kasutades lisaks veel teist kümograafi, mille trummel (silinder) hoiab pingul



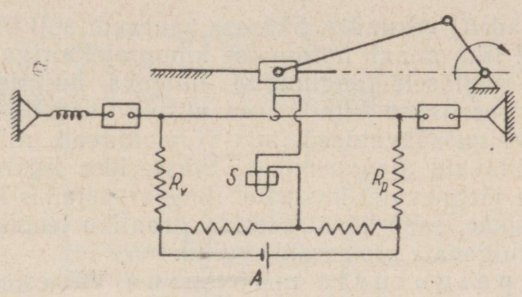
Joon. 553.

lõputuks lindiks kokkukleebitud registreerimispaberi. NSV Liidu TA Masinaõpetuse Instituudi masinate dünaamika laboratooriumi suure kümmograafi üldvaade on kujutatud joonisel 553.

Kümmograaf ei suurenda uuritava paigutuse kujutist, s. t. registreeritava graafiku ordinaat vastab täpselt paigutuse suurusele. Kümmograafi abil saab seetõttu uurida ainult sääraseid liikumisi, kus paigutuste mõõted vastavad trumli (silindri) pikkusele. Väga suurte kui ka väga väikeste paigutuste registreerimiseks teda kasutada ei saa. Neil puhkudel tuleb rakendada paigutuste elektrilise registreerimise mooduseid.

Näiteks võib kasutada lineaarpaigutuste tajuriks nimetatavat seadeldist. Viimane tüürib teatavat elektrivoolu võrdeliselt uuritava paigutusega. Tundlana võib kasutada reohordi, s. o. suure elektrilise eritakistusega traati (konstantaan, nikroom vms.), millel libiseb liikuva lüliga ühendatud kontakt. Tajur on koostatud neljast võrdsest takistist, mis moodustavad alalisvoolu silla.

Kontakti viibimisel keskasendis on sild tasakaalus ja registreeriv aparaat S näitab nulli. Kontakti liikumisel vasakule või paremale saavad takistid R_v ja R_p erimärgilise juurdekasvu, silla tasakaal kaob ja registreerivas aparaadis tekib kontakti nihkumisega võrdeline vool. Valides sobivad silla õlgade takistused ja muutes toitepatarei pinget, saadakse ühe ja sama paigutuse puhul erine-

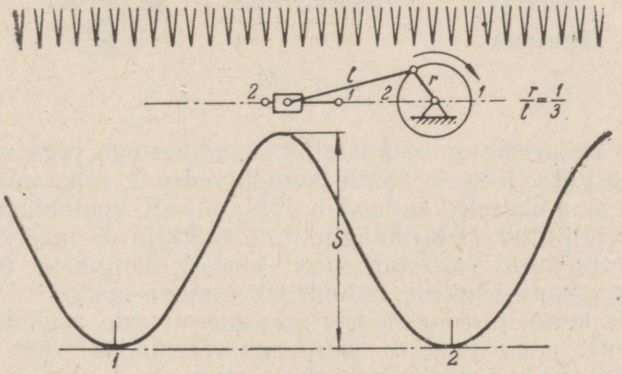


Joon. 554.

vaid voolusid. See võimaldab suurendada või vähendada paigutuste graafiku ordinaate, s. t. muuta tema mastaapi.

Registreerimine toimub käsitletava meetodi juures spetsiaalse aparaadi — elektromagnetilise ostsillograafi abil. Koos paigutuste diagrammiga registreeritakse ka ajamastaapi määrav helihargi võnkumine. Paigutuste mastaabi arvutamiseks tuleb uuritava lüli ekstreemasendite vaheline kaugus jagada ostsillogrammi maksimaalse ordinaadiga.

Ülalkirjeldatud lineaarpaigutuste registreerimismoodust kasutatakse paigutuste uurimisel, mille amplituud on mõni millimeeter või suurem, kiiruste puhul 12—15 m/sec.



Joon. 555.

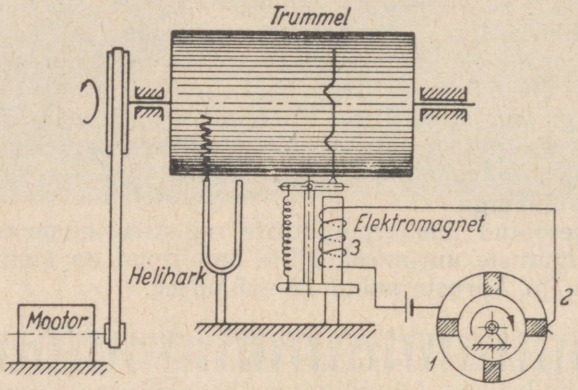
Joonisel 555 on kujutatud väntmehhanismi liuguri (kolvi) paigutuste ostsillogramm.

Mõnikord vajatakse paigutuste diagramme protsesside kohta, mis kulgevad väga lühikese aja jooksul. Selle ülesande lahendamiseks võib kasutada ülikiiret filmimist.

On olemas kinokaameraid, mis võimaldavad teha kuni 4000

ülesvõtet (kaadrit) sekundis. Säärase aparaadi abil ülikiirest protsessist tehtud film annab normaalse kinoprojektoriga demonstreerimisel väga aeglaselt (aegluubis) kulgeva kujutise. Filmimise juures registreeritakse filmile veel püsiva sagedusega süttiva neoonlambi valgussähvatused, mis võimaldavad määrata filmikaadreid eraldavaid ajavahemikke. Fikseerides liikuva lüli asendid üksteisele järgnevatel kaadritel ning arvestades kaadritevahelisi ajavahemikke, saab konstrueerida graafiku teepikkus—aeg ka väga kiirelt kulgevate protsesside puhul.

2°. Nurkpaigutuste mõõtmine. Väikeste nurkkiiruste puhul võib nurkpaigutusi registreerida kümmograafi abil. Pöörlevale võllile (joon. 556) asetatakse selleks otstarbeks metallketas

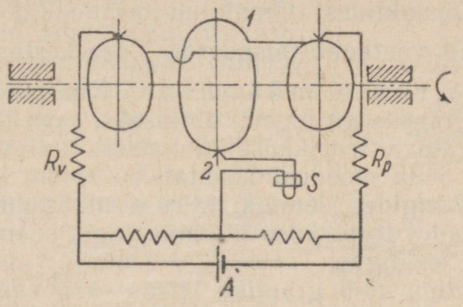


Joon. 556.

1, mis on isoleerainest valmistatud plaadikestega jagatud võrdseteks sektoriteks. Kettale toetub kontaktvedru *2*, mis, sattudes isoleerivale plaadikesele, katkestab lühiajaliselt vooluahela. Viimasesse on lülitatud elektromagnetiline märkija *3*, mis voolu igakordsel katkemisel vabastab sulge hoidva kangikese ning sulg jätab kümmograafi trumlile (silindrile) vastava märgi.

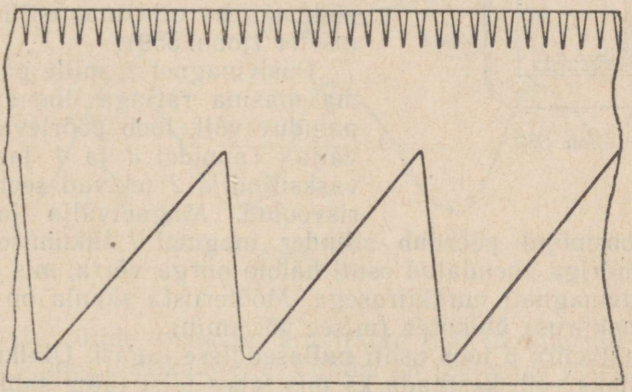
Teades kettal olevate isoleerivate plaadikeste asukohta ja silmas pidades aega märkiva helihargi võnkumist, võib koostada kõvera, mis näitab nurkkiiruse kulgemist aja funktsioonina. See meetod on kohane masinate käivitus- ja pidurdusperioodi uurimiseks. Teades ühe täispöörde üksikute osade ajalist kestust, võib nende osade jaoks arvutada keskmise nurkkiiruse ja koostada graafiku, mis iseloomustab nurkkiiruse sõltuvust pöördenurgast.

Nurkkiiruse ajast sõltumise vahetuks registreerimiseks võib kasutada joonisel 557 skemaatiliselt kujutatud nurkpaigutuste tajurit, s. o. üle minna elektrilisele registreerimismeetodile. Nimetatud seadeldis koosneb nagu lineaarpaigutuste tajurgi traattakis-



Joon. 557.

tist, mis on mähitud ümber võlli *1*. Kontaktrõngaste tasapind joonisel 557 on risti võlli teljega. Kui eelmisel juhul oli takistustraat paigalseisev ja uuritava lüliga ühendatud kontakt liikuv, siis käesoleval juhul on olukord vastupidine. Mõõtesilla muutuv takisti on monteeritud võllile ja pöörleb koos sellega. Reohordi libisev kontakt *2* kinnitatakse liikumatult võlli kõrvale.



Joon. 558.

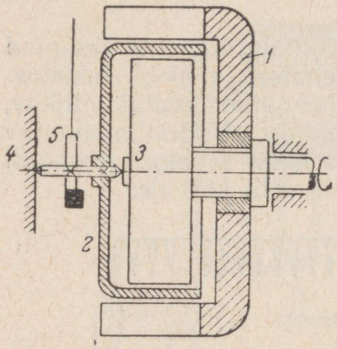
Ostsillogrammil tekivad joonisel 558 kujutatud kaldjooned. Igale kaldjoonele vastab võlli üks täispööre. Ühtlase nurkkiiruse puhul koosneb paigutuste diagramm paralleelsetest kaldsirgetest. Kasvava või kahaneva nurkkiiruse korral registreeritakse paigutused kõverjoontena.

Jagame ühele täispöördele vastava paigutuste ordinaadi n võrdseks osaks ja tõmbame läbi jaotuspunktide abstsissteljega (s. o. ajateljega) paralleelseid sirgeid kuni lõikumiseni paigutuste

kõveraga. Lõikepunktidest tõmmatud ordinaadid eraldavad ajateljel lõigud, mis vastavad täispöörde $\frac{1}{n}$ osa kestusele.

3°. Joonkiiruste mõõtmine. Kui uuritavat liikumist võib küllaldase täpsusega lugeda ühtlaseks, saab joonkiirust määrata lihtsalt teatava teepikkuse läbimiseks kuluva ajavahemiku mõõtmise teel. Seda moodust kasutatakse voolu kiiruse mõõtmiseks lahtistes sängides, lennuki kiiruse määramiseks maapinna suhtes jne. Jagades teepikkuse liikumisajaga, saame kiiruse keskväärtuse antud teelõigus.

Nagu märgitud, võib graafiku kiirus—aeg saada kõvera teepikkus—aeg graafilise diferentseerimise teel. See kiiruse mõõtmise moodus taandub järelikult paigutuste määramiseks aja funktsioonina.



Joon. 559.

Joonkiirusi mõõdetakse väga sageli nurkkiiruste kaudu. Näiteks auto sõidukiirus määratakse tema rataste pöörlemiskiiruse mõõtmise teel. Rataste pöörlev liikumine antakse selleks edasi mõõteriistale, mis näitab nurkkiirust. Sääraseks mõõteriistaks võib näiteks olla magnetiline tahhomeeter (joon. 559).

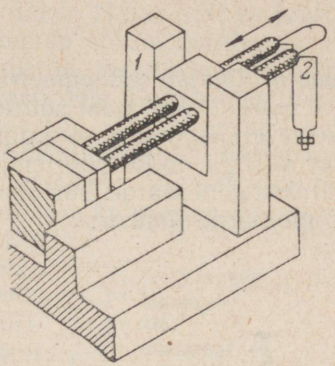
Püsivmagnet *1*, mille paneb liikuma masina rattaga ühenduses olev painduv võll, loob pöörleva magnetvälja. Tappidel *3* ja *4* laagerdatud vasksilindris *2* tekivad seetõttu pöörisvoolud. Magnetvälja ja elektrivälja koosmõjul pöördub silinder magneti *1* liikumise suunas. Vasksilindriga ühendatud osuti hälbib nurga võrra, mis on võrdeline püsivmagneti nurkkiirusega. Mõõteriista skaala on graduseeritud joonkiiruse ühikutes (m/sec või km/h).

Spiraalvedru *5* toob osuti nullasendisse tagasi. Ülalkirjeldatud mõõtmisteks võib kasutada ka mis tahes teist tüüpi tahhomeetrit.

Käsitletud meetodid võimaldavad mõõta kiiruse teatavaid keskväärtusi ühtlasel või aeglaselt muutuval liikumisel. Üleminekurežiimidel valitsevaid kiirusi saab määrata ainult graafikute abil, mida registreerib lineaarkiiruse tajuriga ühendatud ostsillograaf.

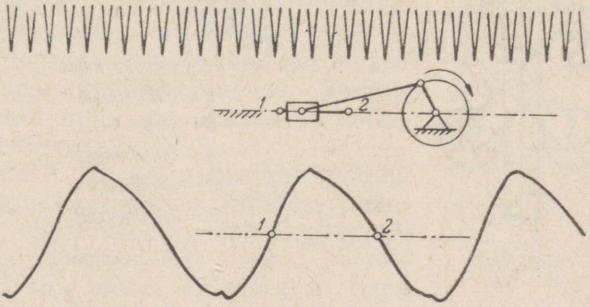
Üks sääraseid tajureid on kujutatud joonisel 560. Püsivmagneti *1* magnetväljas liigub pehmest rauast südamikule mähitud pool *2*. Pooli pikkus valitakse vastavalt uuritava liikumise amplituudile. Püsivas magnetväljas liikuvas mähises indutseeritakse elektromotoorne jõud $E = Blv$. Elektromotoorne jõud on seega võrdeline magnetilise induktsiooniga, juhtme pikkusega ja pooli joonkiirusega. Et magnetvälja tihedus B ja pooliks keritud juhtme

pikkus l on konstantsed, sõltub elektromotoorne jõud ainuüksi uuritavast joonkiirusest, olles sellega võrdeline. Ühendades pooli mähise ostsillograafi silmusega, saame vahetult registreerida vahelduvasuunalise translatoorse liikumise kiirust. Üks sellisel viisil saadud ostsillogramme on toodud joonisel 561, mis kujutab väntmehhanismi liuguri joonkiiruse kulgu.



Joon. 560.

4°. Nurkkiiruse mõõtmine. Püsival pöörlemisrežiimil mõõdetakse nurkkiirusi tavaliselt tahhomeetri abil. Neid mõõteriistu valmistatakse mitmes konstruktsioonis ja erinevate mõõtepiirkondadega. Kõige sagedamini kohtab praktikas tsentrifugaaltahhomeetreid (joon. 562).



Joon. 561.

Ristuvate lülide otstesse kinnitatud neli ühesuurust raskust pöörlevad ümber vertikaaltelje. Lülidel on seejuures võimalus veel liikuda ümber telje O. Nurkkiiruse suurenedes liigub punkt A allapoole ja pöörab hoobade abil hammassektorit *1*. Viimase liikumine kandub üle osutile *2*, mille hälve kujuneb võrdeliseks mõõdetava kiirusega.

Joonisel 559 on kujutatud lihtsa konstruktsiooniga magnetiline tahhomeeter. Ühtlasel pöörlemisel võib kiiruse mõõtmiseks kasutada ka stroboskoopi, kusjuures mõõtmine toimub masina liikuvaid osi puudutamata.

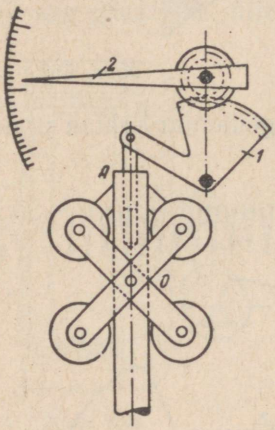
Tuleb märkida, et tahhomeetrite skaaladele kantakse tavaliselt pöörete arv minutis. Nurkkiirust saab sel puhul arvutada alljärgneva valemiga:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \frac{\text{rad}}{\text{sec}},$$

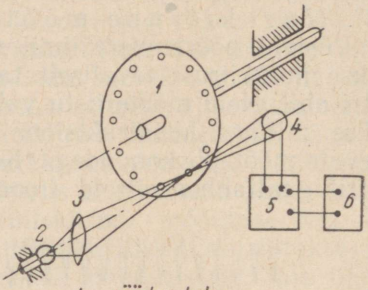
kus n tähistab tahhomeetri lugemina saadud pöörete arvu minutis.

Nurkkiiruse ajast sõltuvuse graafikuid võib vahetult saada väikeste alalisvoolugeneraatorite abil. Kui ühendada generaatori rootor võlliga, mille pöörlemiskiirust tahetakse uurida, siis indutseeritakse generaatori harjadel uuritava nurkkiirusega võrdeline elektromotoorne jõud E:

$$E = a\Phi n.$$



Joon. 562.



1 – pöörlev ketas
2 – elektrilamp
3 – lääts
4 – fotoelement
5 – võimendaja
6 – ostsillograaf

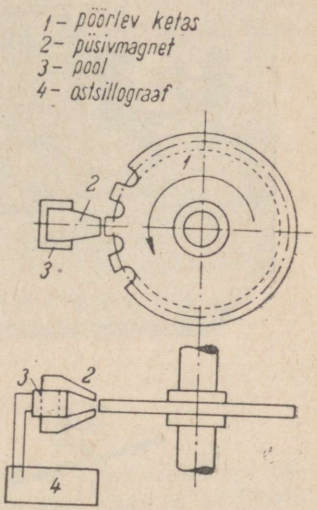
Joon. 563.

Valemis tähistab a alalisvoolugeneraatori konstruktsioonist sõltuvat konstanti, Φ — magnetvoogu ja n — rootori pöörete arvu minutis. Kuna a ja Φ on konstantsed, sõltub indutseeritud elektromotoorne jõud ainuüksi rootori nurkkiirusest. Ühendades masina harjad ostsillograafi silmusega, võime saada kõvera, mille ordinaadid on mõõdetava nurkkiirusega võrdelised. Käsitletud meetodiga on mugav uurida masina käivitamisel ja seiskamisel esinevaid üleminekureežiime.

Meetodit võib kasutada ka pöörlemise ebaühtluse määramiseks. Kiiruse kõikumised ebaühtlasel pöörlemisel on võrreldes keskmise nurkkiirusega aga tavaliselt nii väikesed, et kiiruse ebaühtluse koefitsiendi mõõtmine käsitletud meetodiga ei anna täpseid tulemusi. Pöörlemise ebaühtlust on kohasem uurida nurkkiiruse impulstajurite abil.

Kasutatakse kahte erinevat tüüpi tajureid: fotoelektrilisi ja magnetilisi. Esimesel juhul (joon. 563) rakendatakse fotoelemendi

omadusi. Elektrilambi valgus koondatakse läätse abil ja juhitakse fotoelemendile. Valguskiirte teed tõkestab võllile kinnitatud aukudega ketas. Augud on kettasse puuritud reeglipäraselt, võrdsel kaugusel üksteisest. Võlli ühele täispöördele vastab ostsillogrammil rida hälbeid, millede arv on määratud aukude arvuga kettas. Ebaühtlasel pöörlemisel on kaugused ostsillogrammi üksikute hälvete vahel erinevad. Teades ostsillogrammi ajamastaapi, saab määrata aja, mis võllil kulub pöördumiseks kahe naaberaugu vahelise nurga võrra. Sel alusel arvutatakse võlli nurkkiirus vaadeldavas ajavahemikus. Keskmise nurkkiiruse leidmiseks määratakse kogu täispöörde sooritamiseks kuluv aeg. Saadud andmetest lähtudes võib arvutada kiiruse ebaühtluse koefitsiendi.

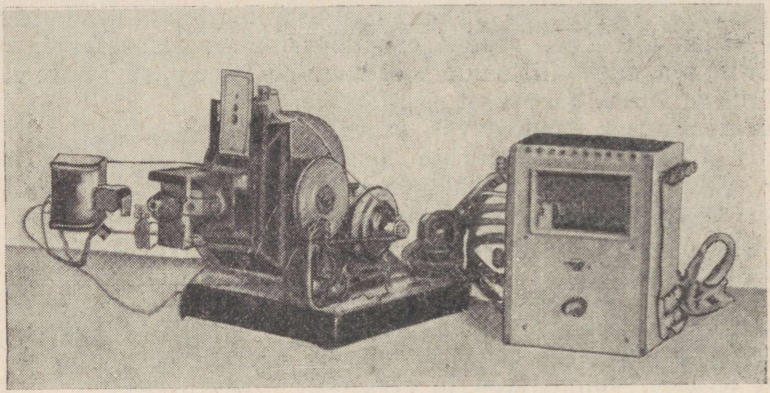


Joon. 564.

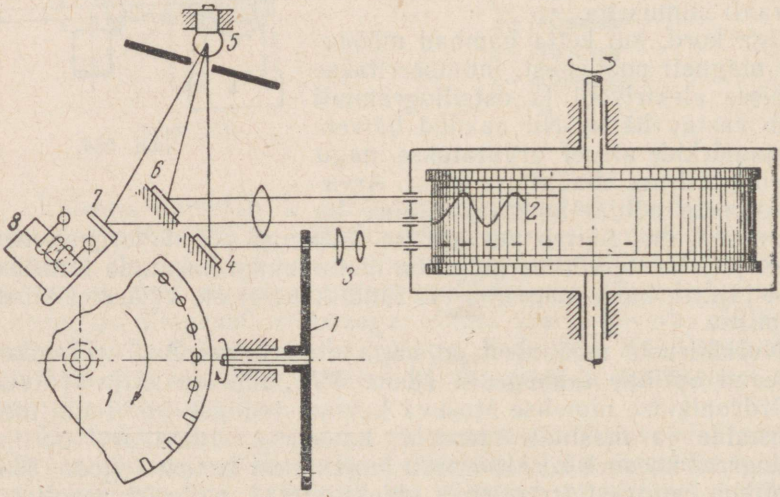
Magnet-tajur (joon. 564) on konstruktsioonilt fotoelektrilisest tajurist lihtsam. Tema põhiliseks detailiks on pehmest terasest valmistatud ja reeglipäraste hammastega varustatud pöörlev ketas. Pöörlemisel mööduvad ketta hambad püsivmagneti poolustest. Magnetile keritud mähis on ühendatud ostsillograafi silmusega.

Iga kord, kui ketta hambad mööduvad magneti poolustest, indutseeritakse mähises elektrivool ja ostsillogrammil tekib vastav hälve. Nii saadud hälvete ja ajamärkide alusel arvutatakse nagu varemgi kiiruse ebaühtluse tegur. Arvutusandmete põhjal konstrueeritakse ka diagramm, mis näitab nurkkiiruse sõltuvust pöördenurgast. Aeglaselt pöörlevate võllide puhul on otstarbekam kasutada fotoelektrilist tajurit, kuna magnettajuri tundlikkus ei ole väikestel kiirustel piisav.

Nurkkiiruste mõõtmisel on väga otstarbekas A. T. Tšuvikovi süsteemi optiline tahhograaf (joon. 565), mis on välja töötatud S. Ordžonikidze nimelise Moskva Lennuasjanduse Instituudi mehhanismide ja masinate teooria kateedris. Tšuvikovi optiline tahhograaf koosneb korrapäraselt augustatud kettast *1* (joon. 566), kinofilmi kandvast trumlist *2*, objektiivist *3*, paiksest peeglist *4*, valgusallikast *5*, paiksest peeglist *6*, liikuvast peeglist *7* ja elektromagnetist *8*. Ketas *1* kinnitatakse katseobjekti võllile, mistõttu tema nurkkiirus kujuneb uuritava kiirusega võrdseks. Valgusallika *5* kiir peegeldub peeglilt *4* ja, läbinud kettas olevad augud, satub filmile, mida kannab pöörlev trummel *2*. Valguskiir katkestatakse



Joon. 565.

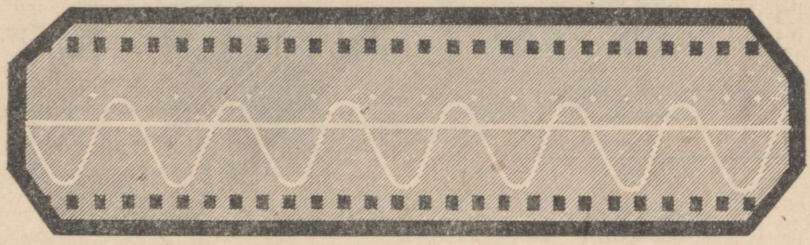


Joon. 566.

seejuures ketta poolt rütmis, mis sõltub katseobjekti pöörlemiskiirusest. Juhul kui katsetataval masinal on mõni detail, mis võib ketast *1* asendada (näit. hammasratas), langeb vajadus nimetatud ketta järele ära.

Katse lõpul saadakse ilmutatud filmil selgesti eraldatavad punktid, millede vahekaugused on katseobjekti pöörlemisel muutuva kiirusega ebaühtlased, pöörlemisel jääva kiirusega aga ühtlased.

Igal juhul on need kaugused aga võrdelised ajaga, mida vajab ketas kahte naaberauku eraldava nurga võrra pöördumiseks. Kuna kettasse puuritud aukude samm on konstantne, siis on selge, et katseobjekti nurkkiirus kujuneb pöördvõrdeliseks filmilindil üksikuid punkte eraldavate kaugustega.



Joon. 567.

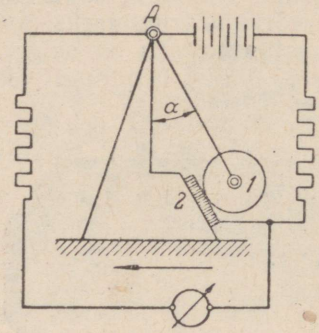
Joonis 567 kujutab koormuseta elektrimootori käivitamisel filmilindile tekkivat tahhogrammi. Tahhogrammist saadud andmete najal võib konstrueerida diagrammi, mis kujutab katseobjekti nurkkiirust aja funktsioonina. Trumli *2* pöörlemiskiiruse kontrollimiseks kantakse katsetamise ajal filmile ka aega märkiv kõver. Ajamärkijana kasutatakse käsitletaval juhul elektromagnetit *8*, mida ergutatakse elektrivõrgust saadava 50 Hz vahelduvvooluga. Elektromagnet paneb võnkuma peeglit *7* kandva elastse plaadikese, mistõttu valgusallikast *5* lähtuva kiire suund perioodiliselt muutub. Trumlile *2* kinnitatud filmile tekib seejuures sinusoidi meenutav kõver. Viimase abil saab filmi igas punktis kindlaks teha seal kehtivat aja mastaapi. Trumli pöörlemiskiirust kontrolliv kõver on näha joonisel 567.

Tahhograaf on varustatud veel peeglikesega *6* (joon. 566). Sellelt peeglilt filmile langev kiir jätab sinna katkematu sirgjoone, mis läbib ajamärkija poolt joonestatud sinusoidi. Sääraselt asetatud sirgjoon hõlbustab tahhogrammi ajamastaabi määramist ja trumli *2* kiiruse kontrollimist. Käsitletav sirgjoon on samuti näidatud joonisel 567.

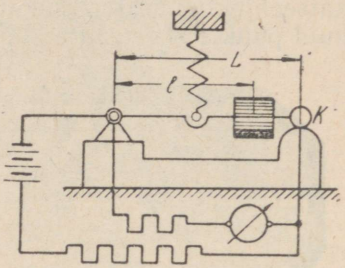
5°. Joonkiirenduste mõõtmine. Lihtsaima joonkii-

renduste mõõtja (joon. 568) konstrueeris akadeemik B. B. Golitsin. Punktis *A* ülesriputatud raskus *1* toetub kaldpinnale *2* ja suleb sellega vooluahela.

Kui kogu süsteemi liikumisel mõjuv kiirendus saavutab väärtuse $a = g \operatorname{tg} \alpha$, jääb raskus liikuvast kaldpinnast maha ja katkestab vooluahela. Ahela katkemist registreerib elektriline mõõteriist.



Joon. 568.



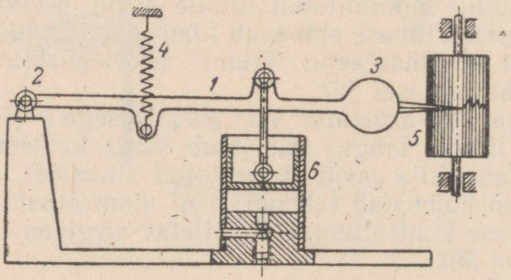
Joon. 569.

Uuritava kiirenduse suuruse saab määrata nurga α mõõtmise teel. Akadeemik Golitsini kiirendusmõõtjat kasutatakse horisontaalkiirenduste registreerimiseks. Vertikaalkiirenduste maksimumväärtuste registreerimiseks võib kasutada analoogiliselt töötavat seadeldist, mille skeem on näidatud joonisel 569.

Joonisel kasutatud tähiste puhul katkeb vooluahel niipea, kui kiirendus saavutab väärtuse

$$a = \frac{lL}{I} P_0.$$

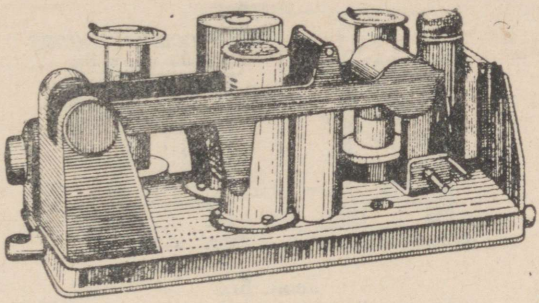
Toodud valemis tähistab *I* horisontaalsel kangil paikneva ras-



Joon. 570.

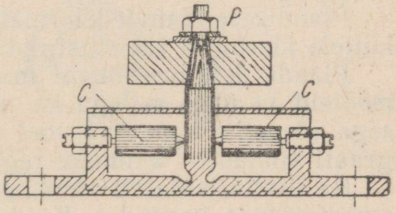
kuse inertsmomenti ja P_0 — jõudu, millega on suletud kontakt K juhul, kui $a = 0$.

Joonis 570 kujutab kiirenduste mõõtmiseks kasutatava teise aparaadi skeemi. Aparaat koosneb jäigast hoovast *1*, mis saab takistamatult võnkuda ümber telje *2*. Hoova vabas otsas asub raskus *3*. Vedru *4* hoiab hoova lähteasendis. Kiirendused registreeritakse hoova külge liikumatult kinnitatud teravikuga *5*.



Joon. 570a.

Süsteemi omavõngete summutamiseks on ette nähtud õhkamortisaator *6*. Aparaadi üldvaade on toodud joonisel 570a. Tema registreerimistäpsus sõltub omasagedusest, summutustegurist ja mõõdetava kiirenduse sagedusest. Aparaadi näidud jäävad kiirenduse tegelikust kulgemisest ajas veidi maha, kuid saadud kiirenduskõver on seejuures moonutustevaba. Mehaanilised kiirendusmõõtjad suudavad registreerida ainult aeglaselt kulgevaid kiirenduse muutusi, sest nende tundlikkus on piiratud omasagedusega. Kõrgetel omasagedustel jääb nimetatud kiirendusmõõtjate tundlikkus väikeseks ega võimalda enam vajaliku täpsusega mõõtmisi. Kiirendusmõõtjate tundlikkust saab suurendada elektriliste mõõtmismeetodite rakendamisega. Lihtsa joonkiirenduste mõõtja skeem on toodud joonisel 571. Aparaadi tundlikkudeks elementideks on kaks sammast *C*. Viimased on koostatud üksikutest grafiitketastest ja nende elektriline takistus sõltub neile mõjuvast kokkusuruvast jõust. Grafiitsambad toetuvad vastu vertikaalset varrast, mille alumises otsas on elastne šarniir. Varda ülemises otsas asub vahetatav raskus *P*.

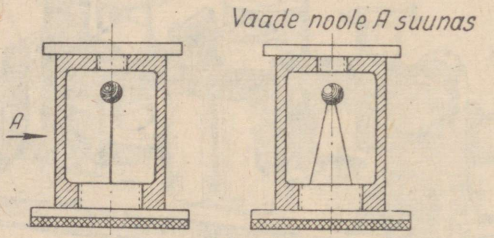


Joon. 571.

Aparaadi liikumiskiiruse muutumisel püüab raskus kallutada

varrast kiirendusele vastupidises suunas, mistõttu grafiitsambakesi komprimeeriv jõud muutub võrdeliselt mõjuva kiirendusega. Grafiitsambad kui muutuvad takistid lülitatakse elektrilisse mõõtesilda, mille üks diagonaal on ühendatud ostsillograafi silmusega.

Kuna käsitletud lineaarkiirenduste tajuril puudub summutus, siis suudab ta suuremate moonutusteta registreerida ainult neid kiirendusi, mille sagedus on 10—15 korda väiksem aparaadi omasagedusest.



Joon. 572.

Täiuslikum on joonkiirenduste tajur, milles rakendatakse pealekleebitavaid traattakisteid. Säärane aparaat (joon. 572) koosneb vertikaalselt aluse külge kinnitatud väikesest pronksplaadikesest. Plaadikese ülemisse otsa on kinnitatud inertse massi ülesandeid täitev kuulikene. Aparaadi aluse liikudes paindub kuulikesega koormatud plaadikene kõrvale võrdeliselt liikumisel mõjuva kiirendusega.

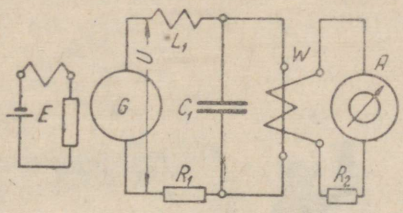
Plaadikese paindedeformatsioone mõõdetakse tema mõlemale küljele kleebitud takistustraat-tundlate abil.

Plaadi deformeerimine muudab takistustraatide geomeetrilisi mõõteid ja ühes sellega ka nende elektrilist takistust. Kiirendusega võrdeliselt muutuv vool võimendatakse ja juhitakse ostsillograafi silmusele. Viimane registreeribki kõvera kiirendus — aeg.

Ka ülalkirjeldatud joonkiirenduste tajurite tundlikkus väheneb omasageduse kasvades. Kuid, kui mehaanilisi tajureid on raske ehitada sagedustele üle 12—15 Hz, siis elastse plaadikesega tajuri omasagedus võib tõusta 200 Hz. Sobiva summutuse puhul võib säärase tajuriga mõõta kiirendusi, mille kõrgeima harmoonilise sagedus on 70 Hz. Komplitseerituma ehitusviisi puhul saadakse tajurid omasagedusega 2000—5000 Hz. Erijuhtudel on aga omasagedust võimalik veelgi tõsta.

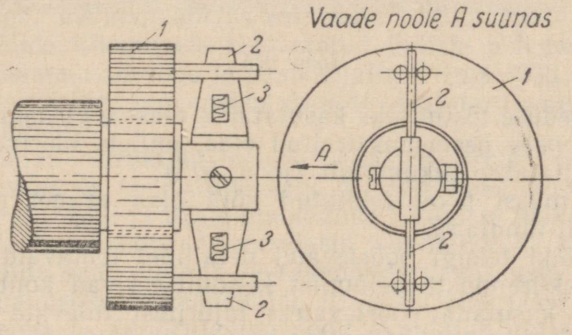
6°. Nurkkiirenduste mõõtmine. Nurkkiirenduste mõõtmine on joonkiirenduste mõõtmisest keerukam. Rahuldavalt töötavaid nurkkiirenduste mehaanilisi mõõteseadmeid ei ole seni õnnestunud konstrueerida. Elektrilised mõõteseadmed jagunevad

kahte rühma: diferentseerivate seadmetega tajurid ja inertstajurid. Esimeste juures kasutatakse väljundtransformaatoriga varustatud generaatortüüpi nurkkiiruste tajureid (joon. 573). Joonisel 573 tähistab G alalisvoolugeneraatorit, C_1 — kondensaatorit, R_1 ja R_2 — takisteid, W — transformaatorit, A — mõõte- või registreerimisseadist ja E — alalisvoolugeneraatori stabiilset ergutusallikat.



Joon. 573.

Püsiva nurkkiiruse puhul läbib transformaatori primaarmähist alalisvool. Sekundaarmähises seetõttu voolu ei ole. Nurkkiiruse muutudes indutseeritakse sekundaarmähises vool, mis on võrdeline kiiruse muutumisega, s. t. kiirendusega.



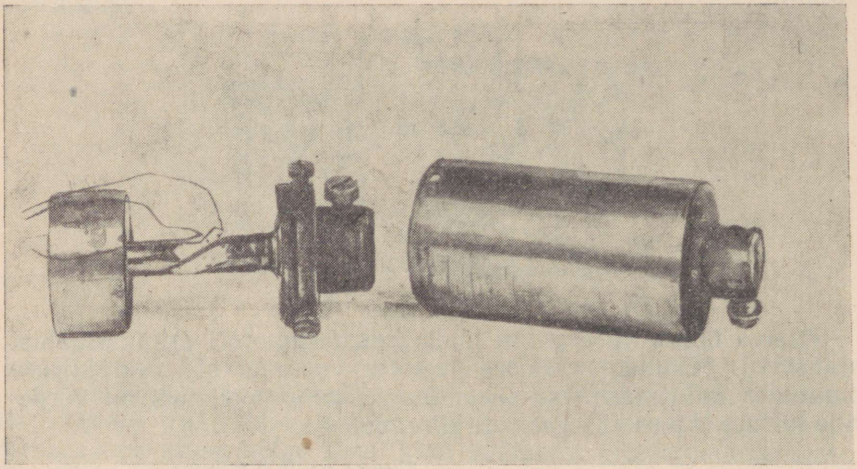
Joon. 574.

Transformaatori südamik, mille magneetumiskõver ei ole lineaarne, moonutab kiirenduste kõverat. Seetõttu töötab kirjeldatud tajur hästi ainult väiksemate kiirenduste puhul.

Inertstajuri inertne mass on tavaliselt moodustatud uuritavale võllile vabalt asetatud tasakaalustatud kettast *1* (joon. 574). Ebaühtlasel pöörlemisel püüab ketas inertsi mõjul võllist maha jääda või temast ette jõuda. Seejuures painduvad kõrvale tajuri elastsed plaadikesed *2*, millele on kleebitud takistustraat-tundlad

3. Plaadikeste paindedeformatsioon on mõõdetava kiirendusega võrdeline.

Elastsete osade läbipainet võib määrata ka teiste elektriliste mõõtmismeetoditega. Nagu joonkiirenduste mõõtmisel, peab ka siin olema tajurite omasagedus kõrge, mis paratamatult aga vähendab nende tundlikkust.



Joon. 575.

Omasageduse tõstmiseks kasutatakse elastse elemendina mõnikord võlli enese peenemakstreitud otsa, millele inertne mass sel korral kinnitatakse liikumatult (joon. 575).

Inertse massi poolt tekitatud võlli otsa väänet mõõdetakse takistustraat-tundlaga.

Nagu kõiki teisigi pöörlevatel detailidel tehtavaid mõõtmisi, nii ka nurkkiirenduste mõõtmist komplitseerivad kontaktrõngad, mida tuleb kasutada pöörlevatest tajuritest tulevate signaalide edasijuhtimiseks võimendavatesse ja registreerivatesse aparaatidesse.

§ 78. Nõukogude teaduse osa mehhanismide struktuuriteooria ja kinemaatika arenemises

1°. Käesoleva raamatu alguses (vt. § 2) käsitleti juba vene teaduslike koolkondade arengu põhilisi etappe mehhanismide ja masinate teooria valdkonnas. Toodud ülevaatest selgub väga ilmekalt, et vene mehhanismide ja masinate teooria oli alates oma sünnist Venemaal kuni Suure Sotsialistliku Oktoobrirevolutsioonini esindatud terve plejaadi hiilgavate teadlaste poolt, kelle tööd on

kujunenud klassikalisteks. Nimetatud teadlaste tööd panid aluse kaasaegsele mehhanismide ja masinate teooriale. Silmapaistvad nõukogude teadlased, nagu N. J. Žukovski, L. V. Assur, N. I. Mertsalov ja teised jätkasid revolutsioonieelsete vene teadlaste töid. Tänu meie teadlaste, inseneride ja tootmise novaatorite töödele on teadus mehhanismidest teinud nõukogude ajal suuri edusamme.

2°. Mehhanismide struktuuriteooriat ja klassifikatsiooniga seotud küsimusi arendasid edasi nõukogude teadlased, toetudes seejuures P. L. Tšebõševi, P. I. Somovi ja H. I. Gohmani töödele.

1869. aastal tuletas P. L. Tšebõšev esimesena struktuurivalemi mehhanismidele, mis liiguvad tasapinnaliselt.

1887. aastal andis P. I. Somov struktuurivalemi V klassi paaridest moodustatud ruumilistele mehhanismidele.

1890. aastal avaldas H. I. Gohman kinemaatiliste paaride klassifikatsiooni, mis oli rajatud paari kuuluvate lülide vabadusastmete arvule, ja esitas originaalse mehhanismide liigitamise süsteemi.

1923. aastal laiendas A. P. Malõšev Tšebõševi ja Somovi valemid mehhanismidele, mille lülidel on üldine ruumiline liikumine.

1938. aastal esitas V. V. Dobrovolski idee mehhanismide liigitamiseks viide põhilisse perekonda (Dobrovolski kasutas terminit «род» — liik, sugukond). Mehhanismide liigitamisel võttis Dobrovolski aluseks mehhanismides esinevate lihtliikumiste arvu või ka kõikide lülide liikumisele kehtestatud üldiste sidemete hulga. Nimetatud küsimusi arendas ta üksikasjaliselt oma 1938.—1946. a. ilmunud töödes, milles tegi mehhanismide struktuuriteoorias suure tähtsusega üldistusi.

Mehhanismide struktuuriteooria edasine areng on seotud I. I. Artobolevski, G. G. Baranovi, N. S. Vassiljevi, V. V. Dobrovolski, I. E. Petuhhovi ja teiste nõukogude teadlaste töödega. Nõukogude teadlaste uurimused laiendasid võimalikkude mehhanismide ringi, mida saab ehitada ja rakendada kaasaegses tehnikas.

Tõsiseks panuseks mehhanismide struktuuriteooriasse oli 1937. aastal akadeemik N. G. Brujevitši poolt avaldatud uurimus. Oma töös esitas N. G. Brujevitš kinemaatilised kriteeriumid mehhanismides esinevate passiivsete sidemete avastamiseks ja näitas, kuidas rakendada seda meetodit mitmete tasapinnaliste ja ruumiliste mehhanismide puhul.

3°. Mehhanismide esinemisvormide mitmekesisus sundis uurijaid välja töötama mehhanismide moodustamise metoodika ja tegema katseid mehhanismide teaduslikuks klassifitseerimiseks. Juba P. L. Tšebõševi töödes kasutatakse madalamaid paare sisaldavate keeruliste mehhanismide moodustamisel kinemaatiliste ahelate juurdeliitmise ideed. P. L. Tšebõšev saab kahehaarmeliste gruppide järkjärgulise juurdeliitmise teel rea uusi mehhanisme.

Mehhanismide klassifikatsiooni loomise uusi üldistavaid põhimõtteid esitas ja arendas L. V. Assur oma 1914.—1918. aastate töödes. L. V. Assur püstitas neis mehhanismide moodustamise printsiibi, mis on rajatud null-liikuvusega kinemaatiliste ahelate järkjärgulisele liitmisele. Nimetatud ahelaid tuntakse praegu «Assuri gruppidena».

Assuri poolt arendatud klassifikatsioon hõlmas ainult V klassi paare sisaldavaid tasapinnalisi mehhanisme. Kuid tema poolt fikseeritud põhimõtteid võis üle kanda ka teistele mehhanismidele ja saada sel viisil mis tahes perekonda kuuluvate mehhanismide üldistatud klassifikatsiooni.

L. V. Assuri töid arendas edasi V. V. Dobrovolski, kes esitas uue mooduse gruppide saamiseks, nn. «šarniiride liigendamise» meetodi.

Reas N. S. Vassiljevi töödes on antud tasapinnaliste ja ruumiliste mehhanismide moodustamise uusi meetodeid, mille aluseks on P. I. Somovi uurimused.

Mehhanismide struktuuriteooria uueks haruks on tervete masinate, peamiselt keerukate masinautomaatide struktuuri uurimine. S. I. Artobolevski, I. I. Kapustini, L. V. Petrokase, V. A. Judini, G. A. Šaumjani ja teiste teadlaste töödes on esitatud mitmesugustes tööstusharudes kasutatavate masinautomaatide struktuuri analüüsi meetodid. Nimetatud töödes on näidatud, et keerukate masinautomaatide kinemaatikat ja kinetostaatikat võib uurida, lähtudes automaati moodustavate üksikmehhanismide struktuuri analüüsist. Seepeale tuleb üle minna kogu automaadi kui terviku üldstruktuuri uurimisele.

Võib kinnitada, et mehhanismide struktuurialastes küsimustes asub nõukogude koolkond juhtival kohal. Tšebõševi, Somovi ja Assuri tööd mehhanismide struktuuri uurimisel lõid suurepärase aluse mitte üksnes struktuuriteooria, vaid ka mehhanismide teooria teiste harude kiireks kasvuks ja sügavaks arenguks Nõukogude Liidus. Muuhulgas võib nimetada, et nõukogude teadlaste poolt loodud mehhanismide klassifikatsioon võimaldas suurel määral lahendada mehhanismide kinemaatilise ja kinetostaatilise analüüsi probleeme, tõi selgust mõningates sünteesiküsimustes jne.

Nõukogude teadlaste tööd mehhanismide struktuuri analüüsi ja klassifikatsiooni alal ei lahenda aga kaugeltki veel mitte kõiki struktuuriteooria probleeme. Lahendamist ootavad mehhanismide struktuuri sünteesi ülirasked ülesanded ja projekteerimismeetoditega seotud klassifikatsiooni loomise probleemid. Tähtsaks küsimuseks on mehhanismide klassifikatsiooni loomine nende funktsionaalse kasutusotstarbe alusel. Loetletud ülesannete lahendamisel on tohutu tähtsus nõukogude tehnika kõrget taset määravate kiirekäiguliste ja kõrge tootlikkusega mehhanismide projekteerimismeetodite arendamisel.

4°. Nõukogude teadlased on saavutanud märkimisväärseid tulemusi tasapinnaliste mehhanismide kinemaatikas. L. V. Assuri töödes lahendati kõrgemat klassi mehhanismide kiiruste ja kiirenduste määramise ülesanne meetodil, mis oli rajatud nn. eripunktide kasutamisele. Suletud kontuure sisaldavate kinemaatiliste ahelate puhul soovitas L. V. Assur rakendada spetsiaalseid geomeetriliste kohtade meetodeid, mis võimaldasid nimetatud mehhanismide kinemaatikaga seotud ülesandeid täielikult lahendada.

NSVL Teaduste Akadeemia korrespondeeriva liikme I. M. Rabinovitši uurimus, mis andis ülevaate komplitseeritud ahelate kinemaatilise analüüsi meetoditest, oli esimeseks sääraseks tööks nõukogude literatuuris. Akadeemik N. G. Brujevitši uurimistöö andis kinemaatika ülesannete lahendamiseks uue ja originaalse, vektorvõrranditele rajatud meetodi. Nimetatud töö oli esimeseks uurimuseks, mis põhines Assuri klassifikatsioonil. N. G. Brujevitši töös näidati selgesti, et mehhanismide ratsionaalne klassifikatsioon on kinemaatika probleemide lahendamise võtmeks. Selles seisabki nimetatud uurimistöö suur tähtsus.

Mehhanismide kinemaatika analüütilisi uurimismeetodeid arendas edasi N. A. Zinovjev. G. G. Baranovi, V. V. Dobrovolski, S. N. Koževnikovi, A. P. Malõševi, V. A. Judini ja teiste nõukogude teadlaste töödes aga arendati edasi keerukate mehhanismide kinemaatilise analüüsi geomeetrilisi meetodeid.

Jäikade lülidega tasapinnaliste mehhanismide kinemaatika probleemid on nõukogude teadlaste uurimistöödega seega küllaltki ammendavalt lahendatud.

Kaasaegse mehhanismide ja masinate teooria ees seisab veel rida tähtsaid ja seni puudulikult uuritud probleeme. Need probleemid hõlmavad painduvate ja elastsete lülidega mehhanismide teooriat, hüdrauliliste ja pneumaatiliste mehhanismide arvutamise aluseid ning mitmesuguste liitmehhanismide kinemaatikat.

Ruumiliste mehhanismide teoorias kuulub esikoht maailmas õigusega nõukogude teadlastele. Juba käesoleva sajandi kahekümnendatel aastatel avaldasid kaks nõukogude teadlast — akadeemik V. P. Gorjatškin ja prof. N. I. Mertsalov uurimusi ruumiliste mehhanismide probleemide kohta. 1921. aastal luges N. I. Mertsalov Timirjazevi Põllumajandusakadeemias ruumiliste mehhanismide kursust. N. I. Mertsalov kasutas ruumiliste mehhanismide kinemaatika ülesannete lahendamisel kujutava geomeetria meetodeid. Alles mitmed aastad hiljem hakkasid samade küsimustega tegelema saksa teadlased. Ruumiliste mehhanismide teooria — muuhulgas ka nende kinemaatika probleemide uurimist — jätkasid edukalt N. I. Mertsalovi õpilased. Viitame siin I. I. Artobolevski 1932.—1937. aastate töödele, mis käsitlevad ruumiliste mehhanismide struktuuriteooriat ja kinemaatikat. G. G. Baranov käsitles seitsmelüliliste ruumiliste mehhanismide asendite määramise

ning kiiruste ja kiirenduste leidmise küsimust. N. G. Brujevitš töötas välja ruumiliste mehhanismide kinemaatilise uurimise vektormeetodi. Ruumiliste mehhanismide teooriat täiendasid F. M. Dimentbergi tööd, kes edukalt arendas edasi mootorite meetodit, mille rajajaks oli üks silmapaistvamaid vene mehaanikuid — prof. A. P. Kotelnikov.

Ruumiliste mehhanismide kinemaatikat käsitlevad ka A. V. Verhovski, V. V. Jegorovi, V. A. Zinovjevi, J. B. Šori, N. I. Noskovi, J. F. Moroškini ja teiste uurimistööd.

Sfääriliste mehhanismide teooria sai tugeva tõuke V. V. Dobrovolski uurimistöödest, kes käsitles mitte ainult sfääriliste mehhanismide analüüsi, vaid ka nende sünteesiprobleeme. Neljalüliliste ruumiliste mehhanismide mõningad eriküsimused lahendati D. S. Tavhelidze ja S. N. Koževnikovi uurimustega.

Ruumilistele hammasmehhanismidele on pühendatud suur hulk teaduslikke töid. Silmapaistvaks uurimuseks on professor H. I. Gohmani poolt 1886. aastal publitseeritud teaduslik töö, milles pandi alus hambumise analüütilisele teooriale. Prof. H. I. Gohmani uurimused ruumiliste hambumiste valdkonnas mõjutasid tugevasti kõiki selleaegseid hilisemaid teaduslikke töid. Gohmani ideesid kasutasid H. F. Ketov, N. I. Koltšin, V. V. Boldõrjev, V. A. Gavrilenko, F. L. Litvin, G. I. Apuhtin, A. N. Kalužnikov, K. I. Pismanik jt. Nimetatud teadlaste poolt loodi tasapinnaliste ja ruumiliste hammasmehhanismide geomeetria kooskõlaline üldteooria, mis on tihedalt seotud hammasrataste kaasaegse valmistamistehnoloogiaga.

Ruumiliste mehhanismide kinemaatikas on veel rida tähtsaid lahendamist ootavaid probleeme. Siia kuuluvad ruumiliste mehhanismide analüüsi küsimused ja ruumiliste hambumiste geomeetria sügavamad probleemid. Arendamist nõuavad ka nukkmehhanismide uurimise meetodid.

5°. Paralleelselt mehhanismide struktuuriteooria ja kinemaatilise analüüsi arenguga on viimastel aastatel Nõukogude Liidus suurt tähelepanu pööratud uute mehhanismiskeemide sünteesimise küsimustele. Selleks aitasid tublisti kaasa tingimused, milles arenes nõukogude masinaehitus.

Juba nõukogude võimu esimestel aastatel kerkis probleem luua riigis võimas masinaehitus, mis suudaks varustada teisi tööstusharusid, põllumajandust ja transporti uute masinate ning mehhanismidega. Konstruktorite ja teadlaste ülesandeks oli mitte piirduda olemasolevate masinatüüpide tootmistehnoloogia omandamisega, vaid ka luua uusi originaalseid, suure tootlikkusega, kiirekäigulisi ja võimsaid masinaid ning mehhanisme. Niisuguste ülesannete lahendamine sundis nõukogude teadlasi viimasel aastakümnel erilist tähelepanu pöörama mehhanismide ja masinate projekteerimismeetodite arendamisele. See töö toimus põhiliselt kahes

suunas. Ühelt poolt arendati sääraste mehhanismide projekteerimismeetodeid, mis võimaldavad etteantud liikumist töötlemistolerantside piirides täpselt reprodutseerida. Teiselt poolt uuriti ka sünteesimeetodeid, mis annavad mehhanisme, kus nõutavat liikumist matkitakse küll ligikaudselt, kuid praktika seisukohalt piisava täpsusega.

Esimesse suunda kuuluvad uurimistööd, mis käsitlevad mehhanismide sünteesimist, kus esineb nii madalamaid kui ka kõrgemaid kinemaatilisi paare. Säärasteks mehhanismideks on teatavasti tsentroid-, nukk- ja hammasmehhanismid ning mõningad teised.

A. P. Malõševi töödes on arendatud originaalne mehhanismide struktuuri sünteesimise meetod. Meetod on rajatud erinevatesse klassidesse kuuluvatest kinemaatilistest paaridest moodustatud mehhanismide struktuurivalemite rakendamisele.

N. I. Mertsalovi uurimistöödes arendati tasapinnaliste tsentroidmehhanismide üldisi sünteesimeetodeid. Oma töödes uuris ta lisaks sellele ka mehhanisme, mille kõrgemad paarid on moodustatud kaasmähiskõveratest. Seega käsitles N. I. Mertsalov geomeetrilise sünteesi probleemi üldjuhtu sääraste mehhanismide puhul, nagu mitteümmargused hammasrattad, tapp-hammasmehhanismid, veerevate hoobadega mehhanismid jt. N. I. Mertsalovi arendatud meetodid on kõrgemate paaridega mehhanismide projekteerimise praktikas leidnud laialdast kasutamist.

Tasapinnaliste ja ruumiliste hammasrataste projekteerimise teoorias on silmapaistvaid tulemusi saanud Leningradi teadlaste koolkond H. F. Ketovi ja N. I. Koltšini juhendamisel. N. I. Koltšin laiendas muuhulgas tunduvalt koonus-, hüpoid- ja teiste ruumiliste hammasrataste projekteerimismeetodeid. Leningradi teadlased töötasid välja ka meetodid mitteümmarguste hammasrataste ja diferentsiaalhammasülekannete projekteerimiseks. Kõikide nende tööde iseloomustavaks jooneks on tihe side hammasrataste tootmistehnoloogiaga, tugevusarvutusega, kulumisarvutusega jne.

Suuri tulemusi mehhanismide sünteesimise alal on Moskva teadlaste koolkonnal. Reas V. V. Dobrovolski töödes on uuritud välis- ja sisehambumisega hammasreduktorite ning hammasdiferentsiaalmehhanismide geomeetria ja projekteerimise küsimusi.

L. N. Rešetovi, A. N. Kalužnikovi, V. A. Gavrilenko, M. A. Kreinesi, B. N. Kudrjavtsevi, L. M. Malkini jt. uurimistööd käsitlevad lihtsate ja komplitseeritud hammasmehhanismide projekteerimisega seotud probleeme. Nimetatud teadlaste poolt on loodud ja praktikasse juurutatud uut tüüpi tasapinnalisi ja ruumilisi hammasmehhanisme. Neid mehhanisme on mitmesugustes masinates ja mehhanismides juba laialdaselt rakendatud.

Suur hulk nõukogude teadlaste töödest on pühendatud nukkmehhanismide projekteerimise teooriale. Erilist tähelepanu on viimastel aastatel pööratud seejuures sääraste projekteerimismeeto-

dite arendamisele, mis arvestavad nuki profiili ja veetava lüli kontaktpunkti liikumissihi vahel tekkivat ülekandenurka. Paljudest sellealastest uurimustest nimetame siinkohal J. L. Geronimuse tööd, mis käsitleb translatoorselt liikuvate tasapinnaliste tõukuritega nukkmehhanismide projekteerimist. Edasi tuleb mainida L. N. Rešetovi monograafiat, kus vaadeldakse nukkide projekteerimist, eriti aga ringjoone kaartest koostatud profiilide puhul. V. T. Kostitsõni töödes on vähimate gabariitidega nukkmehhanismide projekteerimise ülesanne üldistatud. Nendes töödes võetakse muuhulgas arvesse mitte ainult nuki, vaid ka veetava lüli (tõukuri) gabariite. Nukkmehhanismide projekteerimise küsimusi käsitlevad ka A. J. Kobrinski, V. A. Judini, G. A. Šaumjani ja teiste nõukogude teadlaste tööd.

Mehhanismide sünteesimisel valitsenud teine põhisuund arenes ainult madalamaid paare sisaldavate mehhanismide projekteerimismeetodite väljatöötamise sihis. Etteantud liikumise täpne reprodutseerimine ülaltoodud kitsendavates tingimustes on teatavasti seotud paljulüliliste mehhanismide kasutamisega. Viimastel on aga rida olulisi puudusi, nagu suured hõõrdekaod kinemaatilistes paarides, kinnikiilumise oht teatavates asendites, valmistamise ja montaaži keerukus jne. Seetõttu on mõistetav, miks konstruktorid püüavad projekteerida võimalikult väikese lülide arvuga mehhanisme. Lülide arvu piiramisel õnnestub aga etteantud liikumist ainult ligikaudselt matkida. Käsitletavate mehhanismide sünteesiteooria ei tohi seetõttu piirduda kinemaatilise skeemi projekteerimisvõtete loomisega, vaid peab ühtlasi andma ka meetodid, mis lubavad hinnata tegelikult saadava liikumise kõrvalekaldumist etteantûd liikumisest. Vastava probleemi püstitas esimesena akadeemik P. L. Tšebõšev ja lahendas selle hiilgavalt ligikaudsete suunavmehhanismide (juhtmehhanismide) projekteerimise erijuhul. P. L. Tšebõševi arendatud ideesid oma uurimuste aluseks võttes lõid nõukogude teadlased madalamate paaridega mehhanismide projekteerimiseks rea uusi originaalseid meetodeid. Nimetame sel alal N. I. Levitski, S. A. Tšerkudinovi, V. V. Dobrovolski, G. G. Baranovi, Z. Š. Blohhi ja teiste uurimistöid. Nõukogude teadlaste uurimuste tulemusel saab nüüd projekteerida väikese lülide arvuga mehhanisme, mis suure täpsusega reprodutseerivad kõige mitmekesisemaid liikumisvorme.

Mehhanismide sünteesi alal on tähtsamateks ülesanneteks uut tüüpi tasapinnaliste ja ruumiliste nukk- ning hammasmehhanismide projekteerimise meetodite arendamine, nõutavaid liikumisvorme etteantud täpsusega matkivate madalamate paaridega mehhanismide projekteerimise aluste väljatöötamine, mitme liikuvusastmega mehhanismide projekteerimismeetodite loomine ja mitmesuguste masinautomaatide kinemaatiliste skeemide projekteerimise metoodika rajamine.

TEINE OSA

MEHHANISMIDE JA MASINATE DÜNAAMIKA

ESIMENE JAGU

MEHHANISMIDES MÕJUVATE JÕUDUDE ANALÜÜS

XV peatükk

SISSEJUHATUS MEHHANISMIDE JA MASINATE DÜNAAMIKASSE

§ 79. Mehhanismide ja masinate dünaamika põhiülesanded

1°. Mehhanismide kinemaatika küsimuste käsitlemisel eeldati alati, et vedavate lülide liikumine on teada. Veetavate lülide liikumist uuriti sõltuvalt vedavate lülide etteantud liikumisest. Seejuures ei pööratud tähelepanu mehhanismi lülidele mõjuvatele jõududele ega ka jõududele, mis tekivad mehhanismis liikumise tagajärjel. Mehhanismide liikumist uuriti seega silmas pidades ainult nende struktuuri ja lülide mõõdete vahelisi geomeetrilisi suhteid.

Erinevalt mehhanismide kinemaatikast seab mehhanismide dünaamika endale alljärgnevad ülesanded:

a) mehhanismile (või masinale) rakendatud jõudude ja mehhanismi (masina) liikumisel tekkivate jõudude uurimine;

b) mehhanismi (või masina) energiabilansi, s. t. mõjuvate jõudude poolt tehtud tööde suhete uurimine;

c) etteantud jõududest põhjustatud tegeliku liikumise uurimine mehhanismides (või masinates);

d) mehhanismidele (või masinatele) praktikas nõutavate liikumisrežiimide tagamine;

e) mehhanismide kinemaatilistes paarides ja mehhanismide või masinate tugedes toimivate dünaamiliste koormuste vähendamine.

Mehhanismide ja masinate dünaamika valdkonda kuulub veel rida teisi suure tehnilise tähtsusega probleeme, millega tegelevad masina väikeste võngete (vibratsioonide) teooria, mehhanismilü-

lide põrketeooria jt. Kuid neid küsimusi käsitletakse tavaliselt eri kursustes, sest nende lahendamiseks tuleb kasutada elastsuse teooria meetodeid. Mehhanismide ja masinate teoorias aga eeldatakse tavaliselt, et mehhanismide lülid on absoluutselt jäigad.

2°. Esimene ülalloetletud dünaamika probleemidest tegeleb mehhanismi lülidele mõjuvate tundmatute välisjõudude ja liikuva mehhanismi kinemaatilistes paarides tekkivate koormuste (reaktsioonide) määramisega.

Välisjõududeks on näiteks sisepõlemismootori, aurumasina või kompressori väntmehhanismi kolvile mõjuvad gaaside või vedelike rõhujõud; väliskoormuse moodustab ka elektrimootori poolt töömasina võllile ülekantav väändemoment jne. Mõned jõud tekivad mehhanismis liikumise tagajärjel. Säärasteks jõududeks on näiteks hõõrdejõud, keskkonna takistusest põhjustatud jõud jne. Teatavad jõud, näiteks kinemaatilistes paarides esinevad dünaamilised reaktsioonid, tekivad liikumisel lülide inertsi tõttu.

Jõudude päritolu selgitamiseks tuleb rakendada nii teoreetilisi kui ka eksperimentaalseid uurimismeetodeid. Nagu allpool näidatakse, saab kaasaegsete mõõteseadmetega väga täpselt määrata mehhanismide lülidele mõjuvaid jõudusid ja selgitada nende sõltuvust mitmesugustest teguritest.

Kui mehhanismi lülidele mõjuvad välisjõud ja tema kõikide lülide liikumisseadused on teada, saab teoreetilisest mehaanikast tuntud süsteemide üldise dünaamika meetoditega määrata kinemaatilistes paarides valitsevaid sidemereaktsioone ja hõõrdejõudusid, keskkonna takistusjõudusid, lülide inertsjõudusid ja teisi mehhanismi liikumisel tekkivaid koormusi, s. o. läbi viia nn. mehhanismi jõudude arvutust.

3°. Teise probleemi eesmärgiks on määrata masinale või mehhanismile etteantud liikumiseks vajalikku üldist energiat ja uurida selle jagunemist tööde vahel, mida teevad mehhanismile või masinale mõjuvad jõud. Siia kuulub ka masinate või mehhanismide võrdlev hindamine nende kasuteguri alusel, mis iseloomustab masina või mehhanismi poolt tarbitava koguenergia rakendamist kasulikuks tööks.

4°. Kolmas probleem on üheks tähtsamaks mehhanismide ja masinate dünaamikas. Nagu juba mainiti, käsitleb see masinale või mehhanismile rakendatud jõudude poolt põhjustatud tegelikku liikumist, s. t. masina liikumisrežiimi määramist. Seda ülesannet saab teoreetiliste meetoditega täpselt ja täielikult lahendada ainult väga lihtsate mehhanismide puhul. Tehniliste ülesannete valdava enamiku juures õnnestub teoreetiline lahendus ainult ligikaudsel kujul. Seetõttu on selle dünaamikaülesande lahendamisel eriti suur tähtsus masinate ja mehhanismide liikumise uurimise eksperimentaalsetel meetoditel, mis ainsatena võimaldavad ligikaudsete teoreetiliste arvutuste täpsust kontrollida.

5°. Dünaamika neljas probleem on eelmisega tihedalt seotud. Tema sisuks on mehhanismi või masina lülide mõõdete, masside ja neile mõjuvate jõudude vahel sääraste vahekordade leidmine, mille puhul saavutatav liikumine läheneks kõige enam masina tööprotsessi poolt ettekirjutatule. Vastavat masinate dünaamika osa, mis on üheks raskemaks dünaamika probleemiks, nimetatakse masinate käigu reguleerimise teooriaks.

6°. Eespooltoodud loetelus viimasena nimetatud dünaamika-probleemi sisuks on vahendite leidmine, mis aitaksid kas täiesti või osaliselt kõrvaldada mehhanismide kinemaatilistele paaridele, tugedele, vundamentidele jne. mõjuvaid dünaamilisi koormusi. Nimetatud ülesanne lahendatakse põhiliselt mehhanismi lülide masside ratsionaalse paigutuse teel. Küsimusega tegelevat mehhanismide ja masinate teooria lõiku nimetatakse seetõttu masside tasakaalustamise teooriaks.

Märgime kokkuvõttes, et kaasaegsete mehhanismide ja masinate dünaamika areng sõltub väga suurel määral eksperimentaalsel teel lahendatavate probleemide õigest valikust ja masinates toimuvate dünaamiliste protsesside uurimisel kasutatavate tehniliste vahendite edasisest täiustamisest.

§ 80. Jõudude arvutuse ülesanded

1°. Nagu varem märgiti (§ 79, 2°), on jõudude arvutamise ülesandeks määrata liikuvates mehhanismides lülidele mõjuvaid jõudusid.

Jõudude määramisel on suur praktiline tähtsus mehhanismi tugevusarvutusel, masina töötamiseks vajaliku energia leidmisel, mehhanismides esineva hõõrdumise uurimisel, kinemaatiliste elementide kulumise arvutamisel jne. Teades mehhanismi lülidele mõjuvaid jõudusid, saab konstruktor anda lülidele ratsionaalsed mõõted, valida sobivalt nende kuju, tagada kinemaatilistes paarides vajalikku määrimist jne.

Kiirekäiguliste masinate kasutuselevõtuni määrati mehhanismides mõjuvaid jõudusid liikumisel tekkivaid lisakoormusi arvesse võtmata. Vastavaid jõudude arvutusi nimetati tavaliselt *staatilisteks arvutusteks*. Kiirekäiguliste masinate areng tõi siin kaasa pöörde. Paratamatult tuli nüüd arvestada ka jõudusid, mis kaasuvad mehhanismi liikumisega ja mis enamikul juhtudel staatilisi koormusi tunduvalt ületavad. Jõudude arvutusi, kus peetakse silmas nii staatilisi kui ka dünaamilisi koormusi, nimetatakse tavaliselt *dünaamilisteks arvutusteks*.

2°. Mehhanismi lülidele liikumisel mõjuvaid jõudusid saab määrata ainult juhul, kui on teada mehhanismi kõikide lülide liikumisseadused ja kui on antud mehhanismi lülidele rakendatud

välisjõud. Seetõttu jagab konstruktor uute mehhanismide või masinate projekteerimise ja dünaamilise arvutuse kompleksse ülesande tavaliselt kahte ossa. Kõigepealt tuleb tal varemate kogemuste põhjal valida mehhanismi vedavate lülide ligikaudsed liikumisseadused ja mehhanismile mõjuvad välisjõud. Kasutades neid andmeid, määrab konstruktor kõik vajalikud arvutuslikud koormused ja määrab siis nende alusel lülide mõõted, massid ja inertsmomendid. Seejärel algab arvutuse teine osa, milles määratakse projekteeritud mehhanismi või masina tegelik liikumine kõigi temale mõjuvate jõudude toimel. Saanud mehhanismi või masina tegeliku liikumisseaduse, võib konstruktor teha oma arvutuse esimeses etapis kõik vajalikud parandused.

Ülesande esimest poolt nimetatakse tavaliselt mehhanismi arvutamiseks temale toimivate *jõudude alusel.* Seda küsimust käsitleb raamatu käesolev osa. Ülesande teist poolt vaadeldakse raamatu järgmises, *masinate dünaamikale* pühendatud osas.

3°. Mehhanismile mõjuvaid jõudusid võib analüüsida mitmesuguste meetoditega. Mehhanismide ja masinate teoorias kasutatakse seks otstarbeks väga sageli tavalisi jäiga keha tasakaalu võrrandeid.

Selle nn. kinetostaatilise meetodi sisu seisab selles, et dünaamikasse kuuluva ülesande lahendamiseks kasutatakse staatilise tasakaalu võrrandeid. Nagu teoreetiline mehaanika õpetab, tuleb selleks kiirendatavale kehale rakendada tinglikult i n e r t s j õ u d. (Viimased kujutavad endast teatavasti kiirendatava keha reaktsiooni ja on tegelikult rakendatud kiirendust ülekandvale kehale.) Inertsjõud tasakaalustatakse sel juhul kõikide ülejäänud välisjõudude, muuhulgas ka kehale mõjuvate reaktsioonide poolt.

Mehhanismidele rakendatuna võib kinetostaatilise meetodi lähteidee formuleerida järgmiselt: kui mehhanismi lülile mõjuvatele välisjõududele lisada inertsjõud, võib säärast lüli vaadelda kui tasakaalus olevat. Käsitletava arvutusmeetodi rakendamisel tuleb seega mehhanismile toimivate välisjõudude kõrval silmas pidada ka lülidele mõjuvaid inertsjõude. Viimaste suurus leitakse, korrutades üksikute masspunktide masse neile mõjuvate kiirendustega. Sel viisil saadud inertsjõud suunatakse vastu antud punktides valitsevaid kiirendusi. Tekkinud jõududesüsteemi kohta koostatakse nüüd tavalised tasakaaluvõrrandid.

Tasakaaluvõrrandite lahendamine annabki jõud, mis tekkisid mehhanismi liikumisel.

§ 81. Mehhanismidele mõjuvad jõud

1°. Masina või mehhanismi töötamisel koormavad tema lülisid etteantud välisjõud. Viimaste hulka kuuluvad motoorsed jõud, kasuliku koormuse jõud, raskusjõud jt. Masina liikumisel lisanduvad

neile veel kinemaatilistes paarides sidemereaktsioonide poolt põhjustatud hõõrdejõud. Viimaseid võib käsitleda kui sidemereaktsioonide tangentsiaalkomponente. Masina kui terviku seisukohast vaadates tuleb nii kinemaatilistes paarides mõjuvaid reaktsioone kui ka hõõrdejõudusid käsitada kui masina sisejõudusid. Üksiklülide seisukohast vaadates on nad aga välisjõududeks.

Kinemaatilistes paarides esinevad reaktsioonid ei teki ainult mehhanismi lülidele mõjuvatest välisjõududest. Neid põhjustab ka mehhanismi masside kiirendusega liikumine. Kiirendusega liikuvatest lülidest tingitud reaktsioone võib käsitada kui kinemaatilistes paarides mõjuvaid d ü n a a m i l i s i l i s a k o o r m u s i. Nagu ülal (§ 80, 3°) näidati, saab neid lisakoormusi lülide tasakaaluvõrranditest kergesti leida, kui etteantud jõududele ja sidemereaktsioonidele liita inertsjõud.

2°. Masinates või mehhanismides toimivatest jõududest nimetatakse *motoorseteks* neid, mis püüavad vedava lüli liikumist k i i r e n d a d a. Teiste sõnadega, masina lülidele rakendatud jõududest on motoorsed jõud need, mille elementaartöö on p o s i t i i v n e. Mehhanismi või masina *takistusjõududeks* nimetatakse jõudusid, mis püüavad vedava lüli liikumist a e g l u s t a d a. Takistusjõudude elementaartöö on seega alati n e g a t i i v n e.

Kasulikuks koormuseks nimetatakse neid takistusjõudusid, mille ületamiseks kulub vaadeldava mehhanismi või masina otseseks ülesandeks oleva tehnoloogilise protsessi teostamiseks vajalik töö.

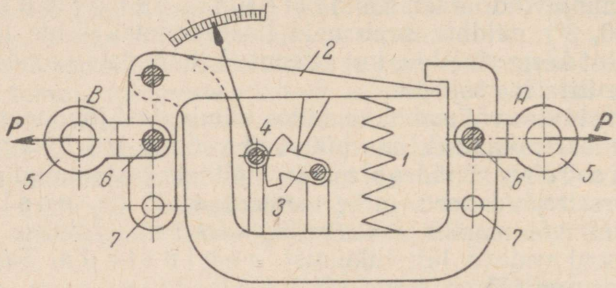
Kahjulikeks takistusteks nimetatakse takistusjõudusid, mille ületamiseks tuleb kulutada lisatööd üle selle, mida vajab masina või mehhanismi poolt teostatav tehnoloogiline protsess.

Näiteks sisepõlemismootoris tuleb seega motoorseks jõuks lugeda kolvile mõjuvate paisuvate gaaside rõhujõud. Takistusjõududeks on hõõrdetakistused laagrites, õhutakistus, sisepõlemismootori poolt käitatava töömasina takistusjõud jne. Töömasina takistusjõud on seejuures kasulikuks koormuseks. Hõõrdejõud, õhutakistus jne. moodustavad aga kahjuliku takistuse.

Tuleb märkida, et jõudude liigitamine kasulikuks koormuseks ja takistusteks on teataval määral tinglik. Lülide raskused kuuluvad näiteks takistusjõudude hulka juhul, kui lülide masskeskmed raskusväljas tõusevad. Masskeskmete laskumisel tuleb neid jõudusid aga käsitada kui kasulikke koormusi. Laagrites tekkivad hõõrdejõud on takistusjõud. Painduva niidi ja pöörleva lüli profiili kontaktpunktides tekkivaid hõõrdejõudusid aga tuleb liigitada motoorsete jõudude hulka jne. Motoorsete jõudude tööd nimetatakse mõnikord *kulutatud tööks,* kasuliku koormuse tööd — *kasulikuks tööks* ja kahjulike takistuste tööd — *kahjulikuks tööks.*

§ 82. Masinates mõjuvate jõudude eksperimentaalsest määramisest

1°. Jõudude mõõtmine. Kõige lihtsamateks jõudusid mõõtvateks riistadeks on vedrudünamomeetrid. Joonis 576 kujutab ühe säärase dünamomeetri skeemi. Mõõtevedru *1* surutakse kokku hoovaga *2*, mida pööravad punktides *A* ja *B* rakendatud jõud *P*. Hammasrattaga *4* hambuv hammassektor *3* paneb seejuures mõõteriista osuti liikuma. Dünamomeetril on kaks skaalat, mis vastavad tõmbelülide *5* kahele võimalikule asendile avades *6* ja *7*.

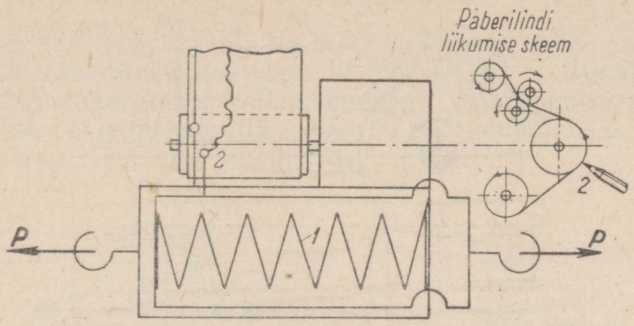


Joon. 576.

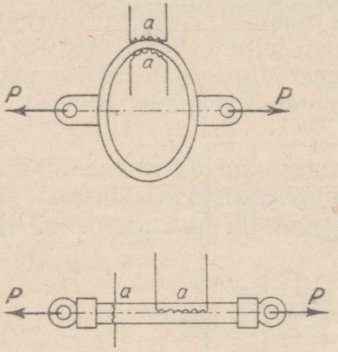
Registreeriva vedrudünamomeetri näitena võib tuua joonisel 577 kujutatud akadeemik V. P. Gorjatškini dünamograafi. Mõõdetava jõu poolt surutakse vedru *1* teatava määrani kokku. Vedru deformatsioon märgitakse paberilindile pliiatsiga *2*, mis vedru jäikusest sõltuvas mastaabis joonistab üles jõu kulgemist iseloomustava kõvera. Paberilinti veab edasi vedrumehhanism, mille tsentrifugaalregulaator võimaldab liikumise kiirust reguleerida.

Elektriliste mõõtemeetodite rakendamine, eriti aga takistustraat-tajurite kasutamine võimaldab konstrueerida lihtsaid dünamomeetreid, mis on vabad ülalkirjeldatud dünamograafide juures esinevatest puudustest. Väga tihti saab dünamomeetrina kasutada seda detaili ennast, milles valitsevat koormust soovitakse mõõta. Selleks liimitakse detailile takistustraadist valmistatud tajurid, mis võimaldavad määrata koormusest põhjustatud deformatsiooni. Viimane on uuritava koormuse mõõduks.

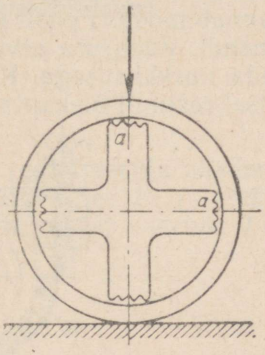
Spetsiaalseadmetena võib tõmbejõudude mõõtmiseks kasutada pealeliimitud takistustraat-tajuritega *a* rõngasdünamomeetreid või vardaid (joon. 578). Tõmbe- ja survejõudude üheaegseks mõõtmiseks kasutatakse samasuguste tajuritega varustatud metallvõrusid (joon. 579). Need dünamomeetrid, mille omasagedus on äärmiselt kõrge, võivad registreerida ka kõige kiiremaid praktikas esinevaid jõudude muutumisi.



Joon. 577.



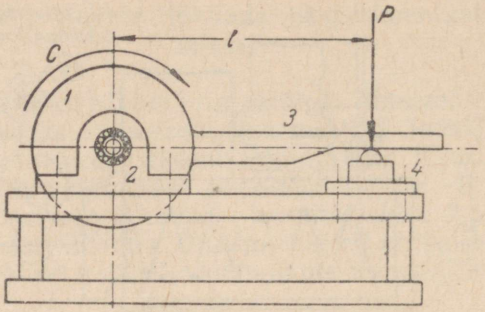
Joon. 578.



Joon. 579.

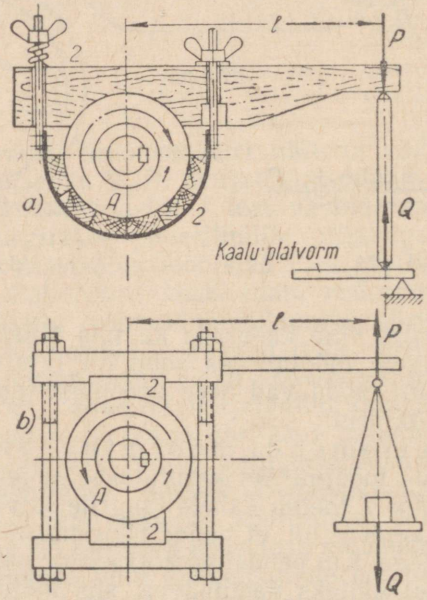
Dünamomeetrites võib kasutada ka mis tahes teisi, deformatsioonide või pingete mõõtmiseks sobivaid tajureid. Uuritavale detailile kinnitatult mõõdavad need koormusi täpselt samal viisil kui takistustraat-tajurid.

2°. V ä ä n d e m o m e n d i m õ õ t m i n e. Masinate poolt tarbitavate võimsuste mõõtmiseks kasutatakse sageli pendelmootorit (joon. 580). Mootor *1* toetub kahele laagrile *2*. Viimased on monteeritud mootori keresse nii, et nende pöörlemisteljed ühtivad rootori pöörlemisteljega. Kui pendelmootori rootor pöörleb katsetatava masina käitamisel näiteks vastupäeva, siis mõjub pendelmootori staatorile reaktiivne väändemoment, mis on motoorse momendiga küll võrdne, kuid suunalt vastupidine. Reaktiivne moment püüab seega staatorit pöörata päripäeva. Staatori pöörlemist tõkestab hoob *3*, mis on ühe otsaga kinnitatud staatori külge ja mille teine ots toetub dünamomeetrile *4*.



Joon. 580.

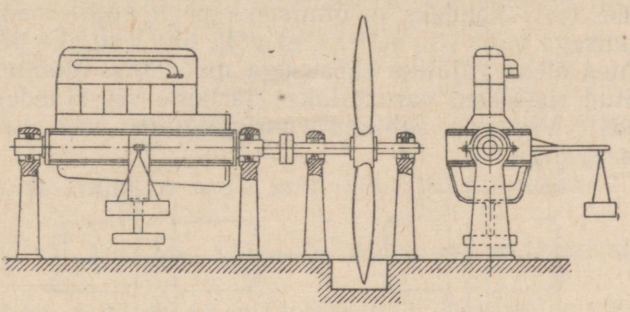
Kangi õla pikkuse l ja dünamomeetriga mõõdetud jõu P korrutis annab mootori poolt katsetatavale masinale ülekantava väändemomendi. Võimsuse arvutamiseks tuleb leitud väändemoment korrutada nurkkiirusega. Kirjeldatud meetodiga saab mõõta permanentsel režiimil ülekantava väändemomendi keskmist suurust.



Joon. 581.

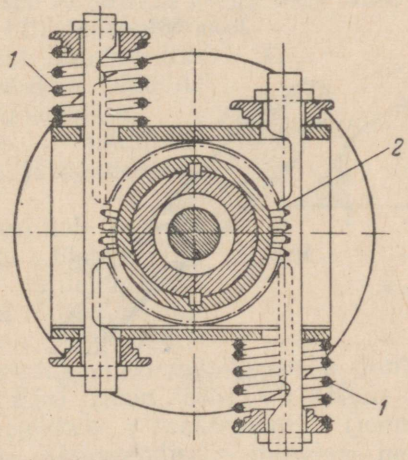
Jõumasinate võllidel arendatava võimsuse või väändemomendi mõõtmiseks kasutatakse tihti pidur- või muid koormamisseadmeid. Esimesel juhul (joon. 581, *a* ja *b*) kinnitatakse jõumasina võllile

piduriklotside *2* vahele asetatud ketas *1*. Piduriklotside kaasapöörlemist takistab dünamomeetriga ühendatud hoob. Dünamomeetri näidu järgi määratakse väändemoment. Koormamisseadmetena kasutatakse peale mehaaniliste pidurite veel õhukruvisid, hüdropidureid ja muid seadmeid (joon. 582).



Joon. 582.

Väändemomendi muutumist ajas saab registreerida akadeemik V. P. Gorjatškini roteeruva dünamograafiga. See P. F. Suškovi poolt konstrueeritud dünamograaf koosneb kahest vedrude *1* abil

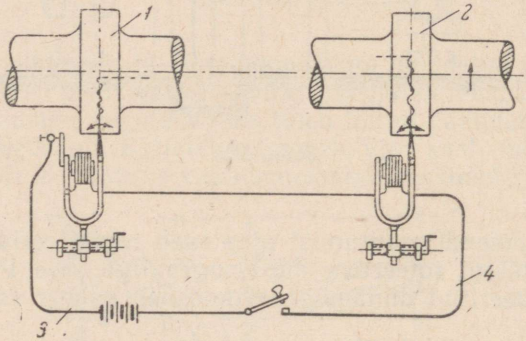


Joon. 583.

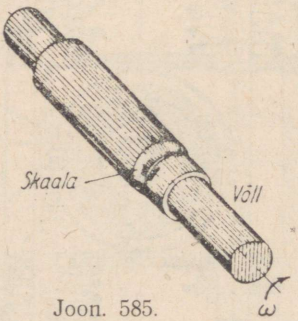
ühendatud poolest (joon. 583). Üks pooltest ühendatakse jäigalt võlliga, teine aga elemendiga, mis paneb võlli pöörlema (rihmarattaga, ketirattaga vms.).

Väändemoment deformeerib dünamograafi vedrusid. Deformatsioonile vastav paigutus kantakse hammaslatt-ülekande *2* vahendusel üle pliiatsile, mis saab seega translatoorse liikumise ja registreerib väändemomendi muutumise graafiku.

Väändemomenti mõõdetakse sageli uuritava võlli väändenurga määramise teel. Nendeks mõõtmisteks peab võllil olema küllaldase pikkusega vaba osa selleks, et võlli ühe ristlõike pöördumine teise suhtes oleks vajaliku täpsusega mõõdetav. Mõõtmistel baasiks valitud ristlõiked varustatakse äärikute või kraedega *1* ja *2* (joon. 584). Viimaste suhteline nurkpaigutus määratakse mõne sobiva meetodiga.



Joon. 584.



Joon. 585.

Mõnikord kantakse spetsiaalse elektrilise seadme *3* abil äärikute külgpindadele korraga kaks võrdse sageduse ja algfaasiga sinusoidi. Võlli väändumise tõttu nihkub üks sinusoid oma faasi poolest teise suhtes. Väändenurk määratakse faasinihke kaudu.

Väändenurga määramiseks võib kasutada võllile asetatud pikendustoru, mis nagu lähendab mõõteäärikuid teineteisele. Ühele

äärikule kantakse sobiv jaotus, kuna teine varustatakse osutiga. Väändenurga lugemiseks valgustatakse skaalat pöörleva võlliga sünkroniseeritud stroboskoobi abil.

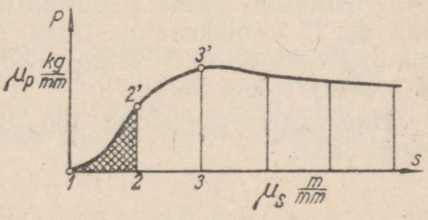
Juhul kui soovitakse väändemomenti registreerida ostsillograafiga, tuleb kasutada otse uuritavale võllile pealeliimitud takistustraat-tajureid. Viimased ühendatakse võimendi ja ostsillograafiga võllile monteeritud kontaktrõngaste kaudu.

XVI peatükk

MOTOORSED JÕUD JA KASULIKUD KOORMUSED

§ 83. Jõudude, tööde ja võimsuste diagrammid

1°. Nagu selgus § 82, määratakse mehhanismide või masinate lülidele mõjuvad jõud tavaliselt eksperimentaalselt, kasutades selleks mitmesuguseid mõõteriistu. Sõltuvalt ühe või teise aparaadi konstrueerimisel aluseks võetud põhimõttest registreerivad need a) jõudusid või jõudude momente, b) jõudude või momentide poolt tehtud tööd, c) jõudude või momentide poolt arendatud võimsust. Enamikul juhtudest registreeritakse kõik need suurused kõverate näol. Viimased kujutavad seega nimetatud suuruste sõltumist masina vedava lüli teekonnast või liikumise ajast. Saadud diagramme kasutatakse jõudude analüüsil lähtematerjalina.



Joon. 586.

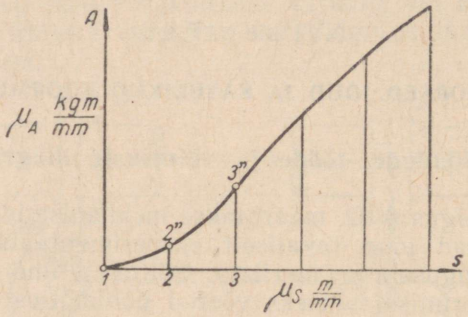
2°. Käsitleme tüüpilisemaid diagramme ja nendevahelisi seoseid.

Joonis 586 kujutab lennuki maandumistelliku tõstemehhanismi vedavale lülile mõjuva jõu P diagrammi telliku tõstmisel. Jõud P on diagrammis antud tema rakenduspunkti teepikkuse s funktsioonina. Teades diagrammi $P = P(s)$ (joon. 586), on hõlbus konstrueerida töö A diagrammi teepikkuse s funktsioonina (joon. 587). Tõepoolest, selleks et liikuda lähteasendist s_1 mingisse meelevaldsesse vaheasendisse s_k, tuleb kulutada tööd A_{1k}, mille suuruse saab arvutada võrrandiga

$$A_{1k} = \int_{s_1}^{s_k} P\, ds. \qquad (16.1)$$

Diagrammi $A = A(s)$ (joon. 587) konstrueerimiseks tuleb seega kõverat $P = P(s)$ (joon. 586) integreerida. Graafilise integreerimise meetodit käsitleti kaheksandas peatükis (§ 37, 2°). Näiteks intervallis $s_1 s_2$ tehtud töö saadakse seosest

$$A_{12} = \int_{s_1}^{s_2} P ds = \mu_p \mu_s \text{ pindala } [12'2] = \mu_A (2—2''),$$



Joon. 587.

kus [12'2] tähistab punktide *1*, *2'* ja *2* vahel asuva pinna (joonisel 586 viirutatud) pindala ruutmillimeetrites ja μ_p ning μ_s — vastavalt jõu ja teepikkuse mastaapi. Töö A_{12} leitud suurus on mastaabis μ_A joonestatud lõigu (2—2'') näol kantud diagrammi $A = A(s)$ (joon. 587).

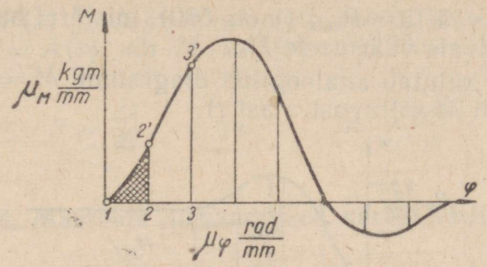
Intervallis $s_1 s_3$ tehtud töö A_{13} saadakse analoogiliselt (vt. joon. 587):

$$A_{13} = \int_{s_1}^{s_3} P ds = \mu_p \mu_s \text{ pindala } [12'3'3] = \mu_A (3—3'').$$

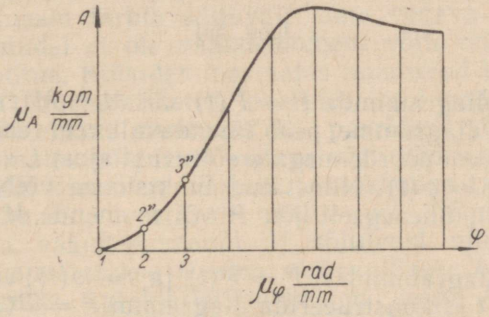
3°. Joonis 588 kujutab diiselmootori võllil arendatavat momenti M võlli pöördenurga φ funktsioonina, s. t. diagrammi $M = M(\varphi)$. Töö $A = A(\varphi)$ diagrammi konstrueerimiseks võib kasutada seost

$$A_{1k} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} M \, d\varphi, \qquad (16.2)$$

mistõttu kogu ülesanne taandub diagrammi $M = M(\varphi)$ (joon. 588) integreerimiseks. Diagramm $A = A(\varphi)$ on toodud joonisel 589.

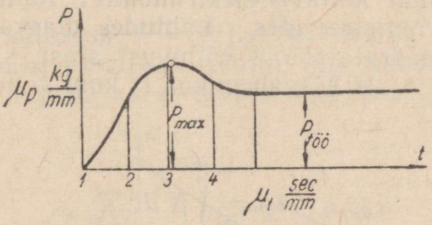


Joon. 588.



Joon. 589.

4°. Käsitletud näidetes olid jõud P ja moment M antud vastavalt vedava lüli teepikkuse s või pöördenurga φ funktsioonina. Mõningatel juhtudel on nimetatud suurused aga määratud aja t funktsioonidena. Joonis 590 kujutab diagrammi $P = P(t)$, mis on

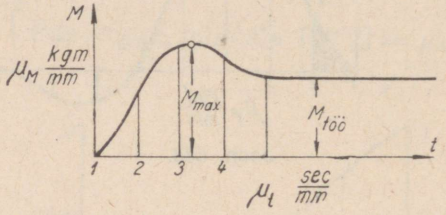


Joon. 590.

iseloomustav paljudele masinatele. Säärase diagrammi kohaselt muutub veojõud näiteks paljudes põllutöömasinates. Kui jälgida veojõu muutumist alates paigalt võtmisest, s. o. masina liikumise alghetkest, siis on näha, et veojõud tõuseb algul kiiresti, kuni saa-

vutab teatava väärtuse P_{max} (joon. 590), misjärel hakkab langema, lähenedes püsivale väärtusele $P_{töö}$.

Joonis 591 kujutab analoogilist diagrammi $M = M(t)$ (tsentrifuugi momendi M sõltuvust ajast t).



Joon. 591.

Selleks et diagrammide $P = P(t)$ või $M = M(t)$ alusel konstrueerida tööde diagramme, peab täiendavalt veel teadma paigutuse (teepikkuse) s või pöördenurga φ sõltuvust ajast t, s. t. funktsioone $s = s(t)$ või $\varphi = \varphi(t)$. Nimetatud funktsioone võib määrata eksperimentaalselt, üheaegselt jõu P või momendi M registreerimisega.

Lähtudes diagrammidest $P = P(t)$ ja $s = s(t)$, võib nendest elimineerida aja t ja konstrueerida diagrammi $P = P(s)$. Diagrammi $A = A(s)$ saab nüüd konstrueerida juba varem käsitletud viisil (vt. § 83, 2°). Täiesti analoogiliselt tuleb toimida, kui kasutada diagramme $M = M(t)$ ja $\varphi = \varphi(t)$: algul konstrueeritakse diagramm $M = M(\varphi)$ ja selle põhjal $A = A(\varphi)$ (vt. § 83, 3°).

5°. Masinate eksperimentaalsel uurimisel saadakse mõnikord kõver, mis näitab masina poolt tarbitava võimsuse N muutumist aja funktsioonina, s. t. kõver $N = N(t)$. Säärane diagramm saadakse näiteks töömasinat käitava elektrimootori võimsust isekirjutava vattmeetri abil registreerides. Lähtudes diagrammist $N = N(t)$ saab lihtsasti määrata töö A sõltuvust ajast, s. o. konstrueerida diagrammi $A = A(t)$. Ajavahemikus t_1 kuni t_k tehtud töö arvutatakse seosega

$$A_{1k} = \int_{t_1}^{t_k} N\,dt. \tag{16.3}$$

Diagrammi $A = A(t)$ konstrueerimine taandub seega sõltuvuse $N = N(t)$ integreerimiseks. Kui lisaks sellele on konstrueeritud veel diagramm $s = s(t)$ või $\varphi = \varphi(t)$, siis elimineerides aja t diagrammide $A = A(t)$ ja $s = s(t)$ või $A = A(t)$ ja $\varphi = \varphi(t)$ vahel, saadakse vastavalt diagramm $A = A(s)$ või $A = A(\varphi)$. Dia-

gramme $P = P(s)$ ja $M = M(\varphi)$ võib saada, kui diferentseerida diagramme $A = A(s)$ või $M = M(\varphi)$ teepikkuse s või nurga φ järgi, sest

$$P = \frac{dA}{ds} \qquad \text{ja} \qquad M = \frac{dA}{d\varphi}. \tag{16.4}$$

§ 84. Masinate mehaanilised karakteristikud

1°. Masinate arvutamisel ja dünaamilisel uurimisel on tähtis teada võimsust, mida jõumasin suudab arendada veetava võlli erinevate pöörlemiskiiruste juures. Sama oluline on teada, missugust võimsust töömasin tarbib sõltuvalt tema vedava võlli kiirusest. Enamikul juhtudel ei ole väändemoment võlli erinevate kiiruste juures konstantne. Kõikides masinates muutuvad koos pöörlemiskiirusega ka kinemaatilistes paarides mõjuvad dünaamilised koormused. Järelikult muutuvad ka paarides mõjuvad hõõrdejõud. Töömasinates põhjustab vedava võlli pöörlemiskiiruse muutumine kasuliku koormuse kõikumist, keskkonna takistuse muutumist jne. Jõumasina veetavale võllile või töömasina vedavale võllile mõjuva väändemomendi M sõltuvust nimetatud võllide nurkkiirusest nimetatakse *masina mehaaniliseks karakteristikuks.*

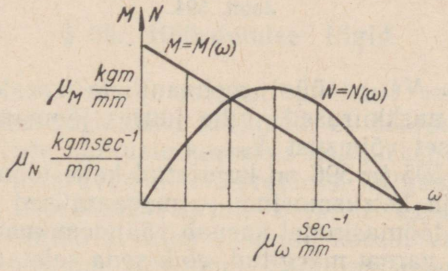
Mehaanilisteks karakteristikuteks on seega $M = M(\omega)$ või $M = M(n)$ tüüpi sõltuvused, kusjuures n tähistab masina pöörete arvu minutis. Viimane on antud tuntud valemiga

$$n = \frac{30\omega}{\pi}.$$

Kuna võimsus N, moment M ja nurkkiirus ω on omavahel seotud võrrandiga

$$N = M\omega, \tag{16.5}$$

siis juhul, kui sõltuvus $M = M(\omega)$ on teada, ei tee sõltuvuse $N = N(\omega)$ leidmine raskusi. Seetõttu võib masina mehaaniliseks karakteristikuks lugeda ka sõltuvust $N = N(\omega)$.

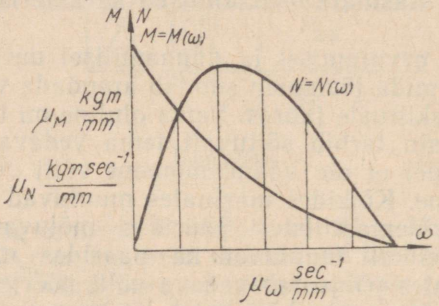


Joon. 592.

2°. Vaatleme mõningate jõumasinate ja töömasinate mehaanilisi karakteristikuid.

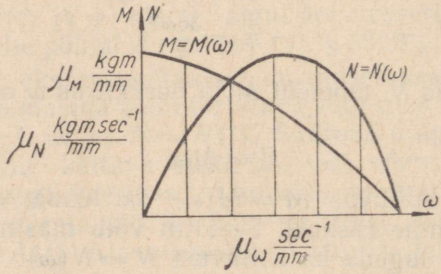
Jõumasinate karakteristikuid iseloomustab väändemomendi M langus nurkkiiruse ω kasvamisel.

Joonistel 592 ja 593 on näidatud kaht tüüpi alalisvoolu-elektrimootorite mehaanilised karakteristikud. Joonisel 592 muutub moment $M = M(\omega)$ lineaarselt. Joonisel 593 toimub see aga kee-



Joon. 593.

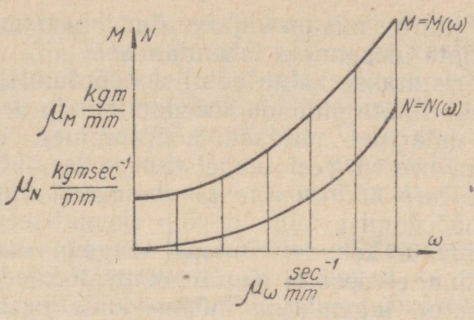
rukama seaduse järgi. Kõverad $N = N(\omega)$ meenutavad paraboole. Joonis 594 kujutab veeturbiini karakteristikut. Kõik $M = M(\omega)$ tüüpi mehaanilised karakteristikud on jõumasinate puhul lähte-



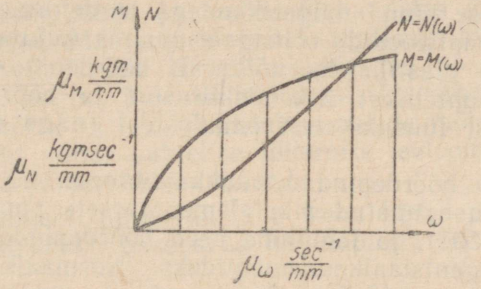
Joon. 594.

kõverateks. $N = N(\omega)$ tüüpi mehaaniliste karakteristikute abil saab fikseerida nurkkiirused, mille juures jõumasinad arendavad oma maksimaalset võimsust N_{max}.

3°. Joonistel 595 ja 596 on kujutatud kahe töömasina — tsentrifugaalpumba ja ketrusmasina — mehaanilised karakteristikud. Neist selgub, et töömasinatel kasvab väändemoment M koos nurkkiirusega. Nagu varem märgitud, võib seda seletada asjaoluga, et kiiruse kasvades suurenevad hõõrdejõud, kasulik koormus jne. Nii



Joon. 595.



Joon. 596.

$M = M(\omega)$ tüüpi kui ka $N = N(\omega)$ tüüpi mehaanilised karakteristikud on töömasinate puhul seega kasvavad (tõusvad) kõverad. Mehaaniliste karakteristikute küsimust käsitletakse üksikasjalisemalt erikursustes, kus uuritakse antud töömasinale optimaalse jõumasina valiku küsimust.

XVII peatükk

HÕÕRDUMINE KINEMAATILISTES PAARIDES JA MEHHANISMIDES

§ 85. Hõõrdumise liigid

1°. Hõõrdumise olemus on seni täielikult veel selgitamata. Eksperimentaalsed uurimused näitavad, et hõõrdumine on füüsikaliste ja keemiliste nähtuste keerukas kompleks, kusjuures domineeriva nähtuse määravad hõõrdeprotsessi kulgemistingimused.

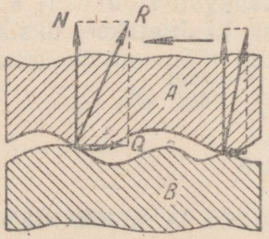
Kaasaegsete hõõrdumisteooriate detailne käsitlus ja hõõrduvate masinaelementide arvutus ei kuulu käesoleva raamatu ülesannetesse. Meie peatume siin ainult hõõrdumisteooria elementaar-

sete küsimuste juures, mis on vajalikud mehhanismide ja masinate teooria lihtsamate ülesannete lahendamisel.

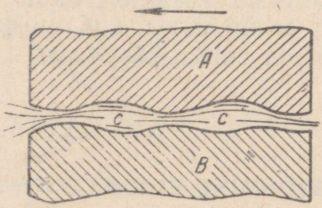
Tavaliselt eristatakse kahte põhilist hõõrdumisliiki: *kuiv hõõrdumine* (või määrimata pindade hõõrdumine) ja *vedelikuline hõõrdumine* (või määritud pindade hõõrdumine). Toodud liigitust täiendatakse mõnikord veel kahe vahepealse hõõrdumisliigiga, milleks on *poolkuiv hõõrdumine* ja *poolvedelikuline hõõrdumine*.

2°. Kuiva hõõrdumise nähteid võib skematiseerida järgmiselt. Uurides hõõrduvate kehade pindasid tugeva suurenduse abil, võib tähele panna, et need ei ole absoluutselt siledad, vaid konarlikud, s. t. kaetud lugematute mügerikkude ja lohkudega. Joonis 597 kujutab skemaatiliselt kaht hõõrdepinda *A* ja *B*. Kui säärased pinnad hakkavad teineteisel liikuma, haarduvad ühe pinna mügerikud teise pinna mügerikkudega ja deformeeruvad. Mügerikkude deformatsioonid võivad seejuures kujuneda nii elastseteks kui ka plastilisteks, sõltuvalt hõõrdepindadele mõjuvast koormusest, suhtelisest liikumiskiirusest ja hõõrduvate kehade mitmesugustest füüsikalistest omadustest (nagu elastsus, pinna iseloom jne.).

Rakendame hõõrdepindade kokkupuutepunktidesse reaktsioonid $\boldsymbol{R}$, mis on suunatud piki elementaarsete puutepindade normaale (joon. 597), ja lahutame need hõõrdepindade suhtes normaal- ja tangentsiaalkomponentideks. Normaalkomponendid $\boldsymbol{N}$ tasakaalustatakse hõõrdepindadele mõjuva normaalkoormusega. Tangentsiaalkomponentide $\boldsymbol{Q}$ summa aga moodustab teatava resultantjõu, mis püüab takistada pindade *A* ja *B* suhtelist liikumist. Seda takistavat jõudu nimetataksegi *hõõrdejõuks*.



Joon. 597.



Joon. 598.

Kui pindade *A* ja *B* mügerikud on üksteisega vahetus kokkupuutes, siis on meil tegemist *kuiva hõõrdumisega*. Olukorras, kus mügerikke lahutab üksteisest määrdekiht *cc* (joon. 598), esineb *vedelikuline hõõrdumine*. Vedelikulise hõõrde puhul ei puutu seega pinnad *A* ja *B* teineteist otseselt. Hõõrdejõududeks on siin seetõttu määrdeõli üksikute kihtide suhtelisel nihkumisel tekki-

vad takistusjõud. Suur hulk vedelikulisel hõõrdumisel esinevaid nähteid puudub kuiva hõõrdumise juures ja vastupidi. Poolkuivaks hõõrdumiseks loetakse tavaliselt säärast hõõrdumist, kus hõõrdepindade üksikud mügerikud hoolimata määrdevedeliku kihist omavahel siiski kokku puutuvad. Vahe poolkuiva ja poolvedelikulise hõõrdumise vahel sõltub peamiselt sellest, missugune põhilistest hõõrdumisliikidest antud protsessi juures domineerib.

3°. Kuiva ja vedelikulise hõõrdumise nähted on oma olemuselt täiesti erinevad. Seetõttu on täiesti erinevad ka meetodid hõõrdejõudude arvutamiseks selle või teise hõõrdumisliigi juures. Tehnikas kohtab kõige sagedamini poolkuiva ja poolvedelikulist hõõrdumist. Esimest käsitatakse tavaliselt kui kuiva hõõrdumist. Näiteks friktsioon-, rihm- ja teistes ülekannetes esinevad kuiva hõõrdumise nähted. Määritud laagrites, tugilaagrites jne. on meil aga tegemist vedelikulise hõõrdumisega, mis mõnikord muutub poolkuivaks või koguni kuivaks hõõrdumiseks (masinate käivitamisel jne). Seetõttu on tehnikas oluline uurida mõlemaid hõõrdumisliike. Aluseks võttes suhtelise liikumise iseloomu, eristatakse *liugehõõrdumist* ja *veerehõõrdumist*.

Liugehõõrdumisel puutuvad ühe keha hõõrdepinna ühed ja samad osakesed kokku teise keha hõõrdepinna erinevate osakestega.

Veerehõõrdumisel puutuvad ühe keha hõõrdepinna erinevad osad järgemööda kokku teise keha hõõrdepinna vastavate osakestega.

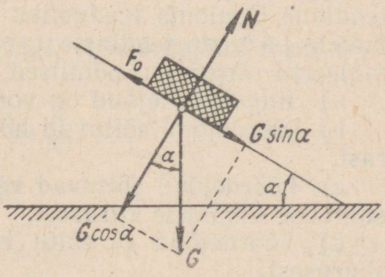
§ 86. Määrimata kehade liugehõõrdumine

1°. Käsitleme põhilisi seadusi, mis kehtivad määrimata kehade liugehõõrdumisel. Asugu keha raskusega G kaldpinnal, mis moodustab horisondiga nurga α (joon. 599). Kui tähistada kaldpinna normaalreaktsioon tähega N ja hõõrdumise tagajärjel tekkiv kaldpinnasihiline jõud F_0, siis selleks, et keha jääks tasakaalu, peavad kehtima seosed

$$F_0 = G \sin \alpha \text{ ja } N = G \cos \alpha.$$

(Keha kallutavat momenti ei ole seejuures arvesse võetud.) Toodud võrrandist järgneb, et

$$\frac{F_0}{N} = \operatorname{tg} \alpha. \qquad (17.1)$$



Joon. 599.

Vaatluste põhjal võib väita,

et tasakaal on alati võimalik, kuni nurk α ei ületa teatavat piirväärtust φ_0, s. t. kuni kehtib võrratus

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant \operatorname{tg}\varphi_0.$$

Kui kasutada $\operatorname{tg}\varphi_0$ tähistamiseks tähist f_0, siis võib kirjutada

$$\operatorname{tg}\alpha \leqslant f_0.$$

Arvu f_0 nimetatakse *seisuhõõrdeteguriks* ja nurka φ_0 — *seisuhõõrdenurgaks.*

Võrrandist (17.1) järgneb, et jõu F_0 väärtus rahuldab võrratust

$$F_0 \leqslant f_0 N. \qquad (17.2)$$

Hõõrdumist, mis esineb kokkupuutuvate kehade suhtelise liikumatuse puhul, nimetatakse *seisuhõõrdumiseks* ehk *staatiliseks hõõrdumiseks.*

Võrratus (17.2) määrab ära ainult seisuhõõrdejõu maksimaalse võimaliku väärtuse, sest hõõrdejõud osutub passiivse sidemereaktsiooni komponendiks ja tema algul tundmatu siht määratakse alles hiljem aktiivsete jõudude poolt. Toodud võrratusest selgub veel, et seisuhõõrdejõud on alati parajasti nii suur, et takistada kehade liikumist. Seejuures ei saa ta aga ületada teatavat piirväärtust. Kui hõõrdumist ei oleks, võiks tasakaal aset leida ainult jõudude teatud suuruste juures või ainult teatavate, keha asendit määravate koordinaatide puhul. Tänu hõõrdumisele aga esineb meil terve tasakaaluasendite tsoon ja määramatu suur hulk aktiivsete jõudude väärtusi, mille juures keha jääb tasakaalu.

2°. Kui kokkupuutuvad kehad teineteise suhtes liiguvad, leiab aset *liikumishõõrdumine* ehk *kineetiline hõõrdumine.*

Erinevalt seisuhõõrdejõust teeb liikumisel esinev hõõrdejõud teatavat tööd.

Kuiva liugehõõrde küsimuste uurimist alustati juba ammu. Hõõrdeküsimustega tegeles Leonardo da Vinci. Hiljem lahendas kuiva hõõrdumisega seotud küsimusi Venemaa Teaduste Akadeemia akadeemik L. Euler. XVIII sajandi lõpul avaldas prantsuse teadlane Coulomb teadusliku töö, milles, toetudes isiklikele vaatlustele ja teiste teadlaste (peamiselt Amontoni) uurimustele, formuleeriti järgmised põhilised seisukohad:

a) liugehõõrdejõud on võrdelised normaalkoormustega,

b) hõõrdejõud sõltuvad hõõrdepindade materjalist ja seisukorrast,

c) hõõrdejõud sõltuvad vähesel määral ka hõõrduvate kehade suhtelise liikumise kiirusest,

d) hõõrdejõud ei sõltu hõõrduvate kehade kokkupuutepinna suurusest,

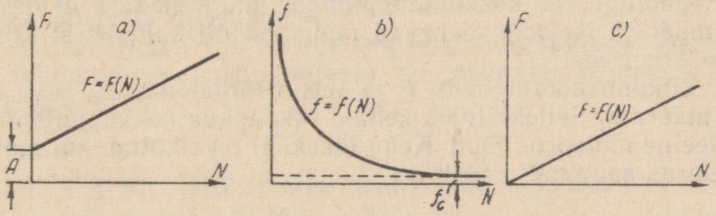
e) seisuhõõrdejõud on suuremad hõõrdejõududest liikumisel,

f) hõõrdejõud kasvavad koos kehade liikumiseelse kontaktisoleku ajaga.

Amontoni ja Coulombi tõekspidamiste analüüs hilisemate uurijate poolt näitas, et neid võib lugeda õigeteks ainult teatavate materjalide puhul ja ainult siis, kui kiirused ja koormused püsivad teatavates piirides. Rea eksperimentide alusel tehti näiteks kindlaks, et hõõrdejõu sõltuvuse normaaljõust võib avaldada järgmise võrrandiga:

$$F = A + f_c N. \tag{17.3}$$

Selles võrrandis tähistab F hõõrdejõudu, f_c — liikumishõõrdetegurit (oletatakse, et see on antud kehade puhul konstantne), N — normaaljõudu ja A — teatavat hõõrdekonstanti. Viimane ei sõltu normaaljõust, vaid oleneb kokkupuutuvate kehade võimest teineteisega haarduda. Hõõrdejõud on normaaljõust seega küll lineaarses sõltuvuses, kuid seda sõltuvust iseloomustav sirge ei läbi koordinaatide alguspunkti (joon. 600, *a*). Konstantne suurus



Joon. 600.

A iseloomustab hõõrduvate kehade omavahelist haardumisvõimet ja näitab, et liikumisele eelneva aja jooksul toimunud hõõrdepindade haardumise ületamiseks tuleb kulutada teatavat lisajõudu.

Jagades seose (17.3) mõlemad pooled normaaljõuga N, saame:

$$\frac{F}{N} = \frac{A}{N} + f_c. \tag{17.4}$$

Oletades Amontoni ja Coulombi järgi, et hõõrdejõud F on võrdeline normaaljõuga, s. t.

$$F = fN \text{ ehk } f = \frac{F}{N},$$

võib seose (17.4) kirjutada järgmiselt:

$$f = \frac{A}{N} + f_c. \tag{17.5}$$

Võrrandile (17.5) vastav graafik on toodud joonisel 600, *b*

ning see kujutab hüperbooli. *Hõõrdetegur sõltub järelikult normaaljõust.*

Tehnilistes arvutustes kasutatakse tavaliselt Amonton-Coulombi valemit selle lihtsamal kujul, mis ei võta arvesse pindade eelhaardumist:

$$F = fN. \qquad (17.6)$$

Toodud valemis tähistab f hõõrdeteguri teatavat keskväärtust. Viimane saadakse katseliselt ja see loetakse konstantseks. Seose (17.6) graafiline kujutis on toodud joonisel 600, *c*.

Katsed näitavad veel, et *enamiku materjalide puhul hõõrdetegur f suhtelise kiiruse kasvades väheneb* ja saavutab lõpuks suurte kiiruste juures teatava püsiva väärtuse. Üksikutel juhtudel, näiteks naha ja terase hõõrdumisel, esineb vastupidine nähe: kiiruse kasvades hõõrdetegur suureneb.

Katsete põhjal on selgunud lõpuks, et *hõõrdetegur f muutub sõltuvalt kokkupuutepinnale mõjuvast erisurvest.* Hõõrdejõu sõltumist suhtelisest kiirusest ja erisurvest saab hõlpsasti seletada asjaoluga, et kokkupuutepindade mügerikkude deformeerumise määr ja iseloom olenevad mõlemad nii suhtelisest kiirusest kui ka erisurvest.

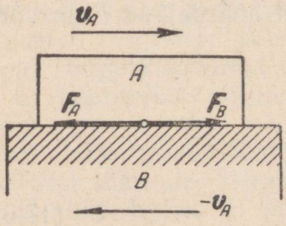
3°. Liikumishõõrdejõudu F ja seisuhõõrdejõudu F_0 saab katseliselt määrata. Selleks tuleb kehale rakendada kokkupuutepinnaga paralleelne motoorne jõud. Keha tasakaal on rikutud, kui motoorse jõu suurus saavutab väärtuse.

$$P_0 = F_0 = f_0 N.$$

Selleks et keha jätkaks ühtlase kiirusega liikumist, tuleb temale mõjuvat motoorset jõudu P, võrreldes jõuga P_0, veidi vähendada. Jõud P on antud seosega

$$P = F = fN.$$

Hõõrdetegurite f ja f_0 väärtused on enamkasutatavate hõõrdepinnamaterjalide jaoks toodud kõikides inseneri käsiraamatutes.



Joon. 601.

Käsitleme nüüd veel hõõrdejõudude sihi küsimust kokkupuutuvate kehade teatavate liikumisvormide puhul.

Liikugu keha A kiirusega $\boldsymbol{v}_A$ paikse tasapinna B suhtes (joon. 601). Kehale A rakendatud hõõrdejõud $\boldsymbol{F}_A$ on sihitud vastu kiirust $\boldsymbol{v}_A$. Kui on vaja määrata kehale B mõjuva hõõrdejõu $\boldsymbol{F}_B$ sihti, siis tuleb vaadelda keha B relatiivset liikumist keha A suhtes. Anname selleks mõlemale kehale lisakiiruse $-\boldsymbol{v}_A$, mis on suunalt vastupidine kiirusega $\boldsymbol{v}_A$. Keha A muutub

nüüd liikumatuks, keha B aga hakkab A suhtes liikuma kiirusega $-v_A$ ja hõõrdejõud F_B suundub vastu kiirust $-v_A$. Hõõrdejõud F_A ja F_B on suuruselt ilmselt võrdsed, kuid vastassuunalised. *Hõõrdejõud on seega alati suunatud suhtelise liikumise kiirusega vastupidi.*

Märgime, et juhul kui suhtelise liikumise kiirus on null, puudub loomulikult ka liikumishõõrdejõud. Sõltuvalt kehale mõjuvatest jõududest võib aga esineda staatiline hõõrdejõud.

4°. Kuiva hõõrdumist käsitlevad põhiseisukohad võib nüüd täpsemal kujul formuleerida järgmiselt:

a) hõõrdeteguri võib lugeda konstantseks ja hõõrdejõu normaaljõuga võrdeliseks ainult kiiruse ja koormuse teatavates diapasoonides;

b) hõõrdejõud on alati suunatud suhtelise kiirusega vastupidi;

c) liikumise alghetkel on seisuhõõrdejõud enamikul juhtudel suurem kui liikumishõõrdejõud;

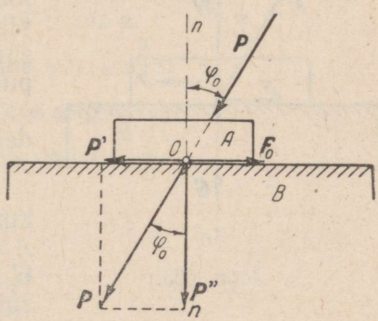
d) kiiruse kasvades hõõrdejõud tavaliselt väheneb, lähenedes teatavale püsivale piirväärtusele;

e) erisurve kasvades hõõrdejõud enamikul juhtudel suureneb;

f) liikumiseelse kokkupuuteaja suurenemine põhjustab hõõrdejõu kasvu.

§ 87. Hõõrdumine translatsioonipaaris

Olgu liugur A koormatud teatava jõuga P (joon. 602), mis on kõikide liugurile mõjuvate jõudude resultandiks. Seisu- ja liikumishõõrdetegurid olgu vastavalt f_0 ja f. Selgitame, missugustel tingimustel hakkab liugur A liikuma paiksel juhtpinnal B. Nihutame selleks jõu P piki tema kandesirget punkti O ja lahutame ta kaheks komponendiks P' ja P''. Esimene neist on kokkupuutepinnaga paralleelne, teine aga sellega risti. Kui tähistada nurk jõu P kandesirge ja normaali nn vahel tähega φ_0, siis avalduvad komponendid P' ja P'' järgmiselt:



Joon. 602.

$$P' = P \sin \varphi_0 \text{ ja } P'' = P \cos \varphi_0.$$

Komponendi P'' toimel surutakse kokkupuutepinnad teineteise vastu. Komponent P' püüab aga liugurit A nihutada piki juhtpinda B. Amonton-Coulombi seaduse põhjal saadakse seisuhõõrde-

jõud $\boldsymbol{F}_0$ valemist

$$F_0 = P''f_0 = P\cos\varphi_0 f_0.$$

Liugur hakkab liikuma hetkel, mil komponent P' saavutab väärtuse F_0, s. t. siis, kui

$$P' = F_0.$$

Asendades P' ja F_0 nende avaldistega, võime kirjutada

$$P\sin\varphi_0 = P\cos\varphi_0 f_0,$$

millest järgneb

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{\sin\varphi_0}{\cos\varphi_0} = f_0.$$

Liuguri A tasakaal hävib, kui nurga φ_0 tangens muutub võrdseks seisuhõõrdeteguriga f_0.

Nagu varem märgitud, nimetatakse nurka φ_0 *seisuhõõrdenurgaks.*

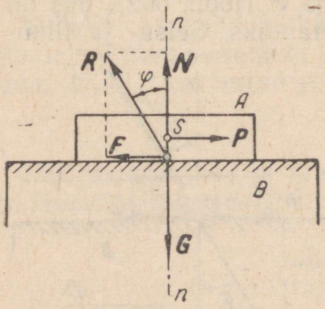
Liikumishõõrdejõud F on seisuhõõrdejõust F_0 väiksem. Sama vahekord peab kehtima ka *liikumishõõrdenurga* φ ja seisuhõõrdenurga φ_0 vahel, s. t.

$$\varphi < \varphi_0.$$

Nurga φ saame määrata seosest

$$\operatorname{tg}\varphi = f.$$

2°. Seisu- ja liikumishõõrdenurkade abil saab geomeetrilisel kujul väga lihtsalt selgitada liugurile mõjuvate jõudude vastastikust toimet. Käsitleme tasakaalu küsimust liuguri puhul, mis horisontaalse jõu $\boldsymbol{P}$ mõjul liigub konstantse kiirusega piki juhtpinda B (joon. 603). Jõu $\boldsymbol{P}$ suurus on tundmatu; tema rakenduspunktiks olgu liuguri raskuskese S.



Joon. 603.

Kui hõõrdenurgaks on φ, siis hõõrdejõu suuruseks kujuneb

$$F = Nf = N\operatorname{tg}\varphi, \qquad (17.7)$$

kus N tähistab normaaljõudu. Liugur A on tasakaalus temale mõjuva raskuse $\boldsymbol{G}$, hõõrdejõu $\boldsymbol{F}$, reaktsiooni $\boldsymbol{N}$ ja suuruse poolest tundmatu motoorse jõu $\boldsymbol{P}$ toimel (kallutavat momenti siin arvesse ei võeta). Liites jõud $\boldsymbol{F}$ ja $\boldsymbol{N}$, saame resultandi $\boldsymbol{R}$, mis pole midagi muud kui liugurile mõjuv täisreaktsioon. Viimase moodul on arvutatav seosega

$$R = \sqrt{N^2 + F^2} = \sqrt{N^2 + N^2\operatorname{tg}^2\varphi} = N\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} = N\frac{1}{\cos\varphi}.$$

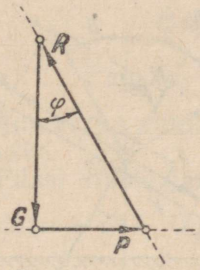
Ülaltoodust järgneb, et

$$R \cos \varphi = N,$$

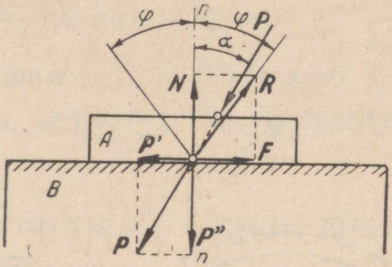
s. t. *täisreaktsioon on normaali suhtes hõõrdenurga võrra pööratud.*

Seega, kui hõõrdetegur f on ette antud, siis on ka täisreaktsiooni $\boldsymbol{R}$ siht alati määratud. Jõu $\boldsymbol{P}$ ja reaktsiooni $\boldsymbol{R}$ suurus leitakse joonisel 604 toodud jõudude hulknurgast, mille aluseks on võrrand

$$\boldsymbol{R} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{G} = 0.$$



Joon. 604.



Joon. 605.

3°. Näitame nüüd, et juhul, kui jõu $\boldsymbol{P}$ ja normaali *nn* vaheline nurk α on väiksem hõõrdenurgast φ, siis ei saa see jõud paigalseisvat liugurit liikuma panna. Lahutame jõu $\boldsymbol{P}$ komponentideks $\boldsymbol{P'}$ ja $\boldsymbol{P''}$, mille suurused on antud seostega

$$P' = P \sin \alpha \text{ ja } P'' = P \cos \alpha.$$

Liikumishõõrdejõu $\boldsymbol{F}$ suuruse saame võrrandist

$$F = fN = fP'' = P \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi.$$

Asendades selles võrrandis P tema väärtusega

$$P = \frac{P'}{\sin \alpha},$$

saame

$$F = P' \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

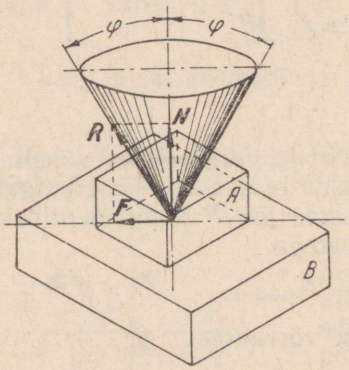
Kuna ülesande tingimuste kohaselt $\varphi > \alpha$, siis

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} \alpha} > 1$$

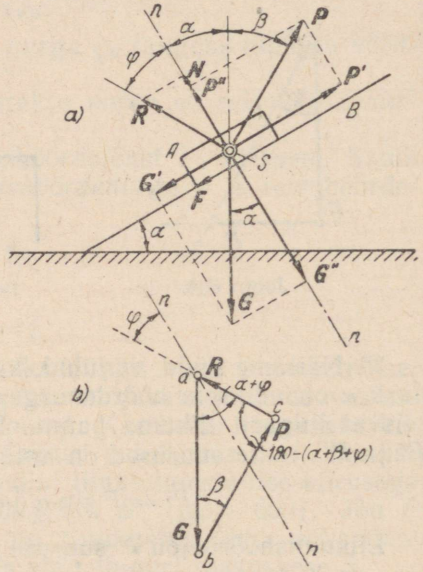
ja

$$P' < F.$$

Jõud, mis püüab liugurit A nihutada juhtpinnal B, on seega liikumisel tekkivast hõõrdejõust $\boldsymbol{F}$ väiksem. Tähendab, kui $\alpha < \varphi$, jääb liikumatu liugur endiselt tasakaalu, olgu jõud $\boldsymbol{P}$ nii suur kui tahes. Vastupidi, kui $\alpha \geqslant \varphi$, alustab liugur liikumist. Kanname nurga φ mõlemale poole normaali nn (joon. 605). Nurk 2φ määrab seega ära teatava tasakaalupiirkonna. Ükski jõud, mis on rakendatud selles piirkonnas nurga $\alpha < \varphi$ all, ei suuda liugurit tasakaalust välja viia. Kui muuta jõu $\boldsymbol{P}$ sihti ruumis, siis piirab tasakaalupiirkonda teatav hõõrdekoonus, mis tekib, kui pöörata nurga φ all paiknevat sirget ümber kokkupuutepinna normaali (joon. 606).



Joon. 606.



Joon. 607.

4°. Asugu liugur A, mille raskus on $\boldsymbol{G}$, kaldpinnal B. Viimase kaldenurgaks olgu α. Liugurile mõjub vertikaali suhtes nurga β all paiknev jõud $\boldsymbol{P}$, mis püüab teda kaldpinda mööda tõsta. Oletame, et liuguri ja kaldpinna vaheline hõõrdetegur f on teada. Liugurile mõjuvad: jõud $\boldsymbol{P}$, raskus $\boldsymbol{G}$, hõõrdejõud $\boldsymbol{F}$ ja kaldpinna reaktsioon $\boldsymbol{N}$.

Selgitame, missugustel tingimustel hakkab liugur ühtlase kiirusega piki kaldpinda tõusma. Lahutame jõud $\boldsymbol{P}$ ja $\boldsymbol{G}$ komponentideks $\boldsymbol{P'}$, $\boldsymbol{P''}$, $\boldsymbol{G'}$, $\boldsymbol{G''}$, mis on suunatud rööbiti ja risti tasapinnaga

B, ning kirjutame kõikide nende jõudude projektsioonivõrrandid nimetatud sihtidel. Saame

$$P' - G' - F = 0$$

ja

$$P'' + N - G'' = 0.$$

Teine võrrand annab

$$N = G'' - P''.$$

Väljendades komponendid P', P'', G' ja G'' jõudude P ja G kaudu, saame

$$P \sin(\alpha + \beta) - G \sin \alpha - Nf = 0$$

ehk

$$P \sin(\alpha + \beta) - G \sin \alpha - (G'' - P'') \operatorname{tg} \varphi = 0.$$

Siinjuures on silmas peetud, et $f = \operatorname{tg} \varphi$, kus φ tähistab hõõrdenurka.

Edasi võime jätkata:

$$P \sin(\alpha + \beta) - G \sin \alpha - G \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + P \cos(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \varphi = 0$$

ehk

$$P[\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) \operatorname{tg} \varphi] = G(\sin \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi).$$

Viimasest järgneb, et

$$P = G \frac{\sin \alpha \cos \varphi + \cos \alpha \sin \varphi}{\sin(\alpha + \beta) \cos \varphi + \cos(\alpha + \beta) \sin \varphi} = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}. \qquad (17.8)$$

Jõud $\boldsymbol{P}$ ja $\boldsymbol{G}$ ning nurgad α, β ja φ on seega omavahel seotud võrrandiga (17.8).

Sama seose võib tuletada jõudude kolmnurgast, mis vastab vektorvõrrandile

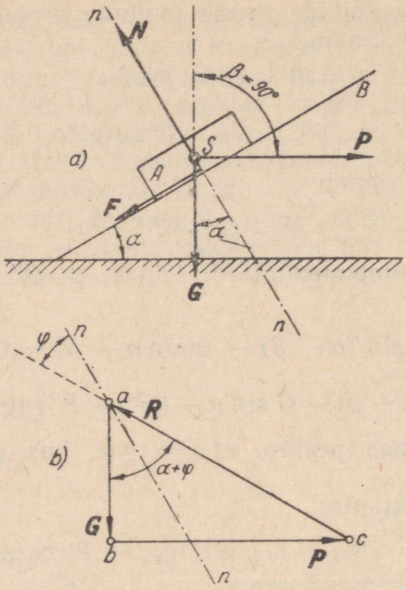
$$\boldsymbol{G} + \boldsymbol{P} + \boldsymbol{R} = 0.$$

Lähtudes punktist a, kanname joonisele raskusjõu $\boldsymbol{G}$ (joon. 607, b). Selle jõu lõpp-punktist b tõmbame jõu $\boldsymbol{P}$ sihilise sirge. Siirdudes tagasi punkti a, kanname joonisele sirge, mis kulgeb reaktsiooni $\boldsymbol{R}$ sihis, s. t. moodustab normaali nn sihiga hõõrdenurga φ. Konstrueeritud sirgete lõikepunkt c määrab jõudude $\boldsymbol{P}$ ja $\boldsymbol{R}$ suuruse. Siinusteoreemi alusel võib kolmnurgast abc kirjutada

$$\frac{P}{G} = \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin(\alpha + \beta + \varphi)}.$$

Saadud tulemus pole midagi muud kui võrrand (17.8).

5°. Käsitleme nüüd mõningaid erijuhte. Olgu kehale A rakendatud jõud $\boldsymbol{P}$ horisontaalne (joon. 608, a). Nurk β on sel juhul 90° ja võrrandi (17.8) kuju muutub järgmiseks:



Joon. 608.

$$P = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(90^\circ+\alpha+\varphi)} = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos(\alpha+\varphi)} = G\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi). \qquad (17.9)$$

Sama tulemuse võime saada jõudude kolmnurgast, lähtudes võrrandist

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}=0.$$

Kui $\alpha = 0$, siis seos (17.9) annab

$$P = G\,\mathrm{tg}\,\varphi = fG.$$

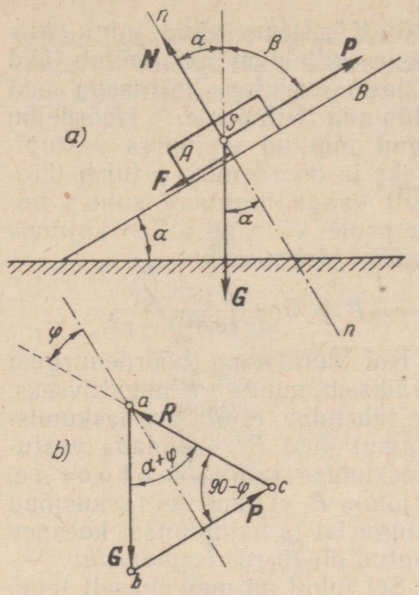
Saadud tulemus vastab olukorrale, kus horisontaalpinnal asuvale liugurile mõjub horisontaalne jõud.

Olgu kehale A rakendatud jõud $\boldsymbol{P}$ paralleelne kaldpinnaga (joon. 609, *a*). Nurk $\alpha+\beta$ võrdub sel juhul 90 kraadiga ja võrrand (17.8) kujuneb järgmiseks:

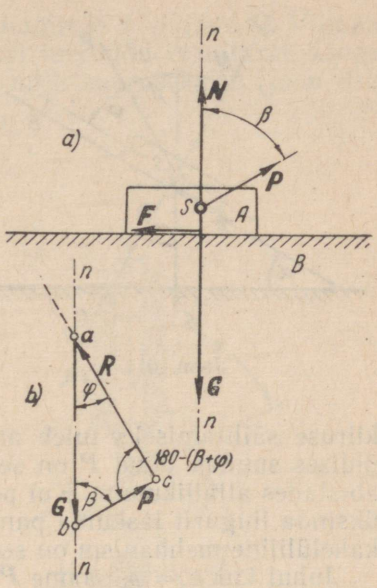
$$P = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(90^\circ+\varphi)} = G\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\cos\varphi} = G(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Sama tulemuse saaksime ka joonisel 609, *b* kujutatud jõudude kolmnurgast lähtudes, kasutades nagu varemgi vektorvõrrandit

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}=0.$$



Joon. 609.



Joon. 610.

Kui kaldenurk $\alpha = 0$, s. t. kui horisontaalpinnal asuvale liugurile mõjub vertikaali suhtes nurga β all asetsev jõud $\boldsymbol{P}$ (joon. 610, *a*), kujuneb võrrand (17.8) järgmiseks:

$$P = G\frac{\sin\varphi}{\sin(\beta+\varphi)}.$$

Samale tulemusele jõuaksime ka vektorvõrrandist

$$\boldsymbol{G}+\boldsymbol{P}+\boldsymbol{R}=0$$

lähtudes (joon. 610, *b*).

Võrrandist (17.8) on näha, et jõud $\boldsymbol{P}$ on minimaalne siis, kui

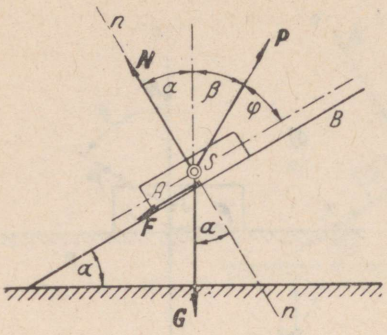
$$\sin(\alpha+\beta+\varphi)=1 \text{ ehk } \alpha+\beta+\varphi=90°.$$

Nurga β optimaalseks väärtuseks on järelikult

$$\beta = 90° - (\alpha+\varphi).$$

Jõud $\boldsymbol{P}$ on seega minimaalne siis, kui ta moodustab kaldpinna sihiga nurga, mille suurus võrdub hõõrdenurgaga (joon. 611). Liuguri liikumisel horisontaalpinnal saadakse analoogiline tulemus.

Kõikide ülaltoodud arutluste juures on eeldatud, et nende jõudude moment, mis püüavad liugurit ümber serva kallutada, on väiksem raskusjõu momendist sama serva suhtes. Teiste sõnadega, on eeldatud, et liugur ei kippa oma alusel.



Joon. 611.

6°. Käsitleme nüüd juhtu, kus liugur, millele endiselt mõjub jõud P, laskub ühtlase kiirusega piki kaldpinda allapoole. Hõõrdejõu suund muutub seejuures vastupidiseks ja hõõrdenurk φ tuleb järelikult kanda normaali suhtes teisele poole. Võrrand (17.8) kujuneb seetõttu järgmiseks:

$$P = G\,\frac{\sin(\alpha-\phi)}{\sin(\alpha+\beta-\varphi)}.$$

Kui nurk α on hõõrdenurgast φ väiksem, muutub P negatiivseks. See tähendab, et ühtlase laskumiskiiruse säilitamiseks tuleb antud juhul jõud P rakendada vastupidises suunas. Jõud P on seega laskumise juures m o t o o r n e, abistades allaliikumist. Kui poleks jõudu P, ei suudaks raskusjõud üksinda liugurit laskuma panna. Liugurist ja kaldpinnast koosnev kahelüliline mehhanism on seega antud olukorras *isepidurdav*.

Juhul kui $\alpha = \varphi$, saame $P = 0$. Sel juhul on meil ilmselt tegemist isepidurduse piiriga, kus piisab mis tahes väikese jõu rakendamisest liugurile, et provotseerida selle kiirendatud laskumist. Kui $\alpha > \varphi$, ei ole mehhanism enam isepidurdav ja liugur laskub juba raskusjõu mõjul kiirendatult piki kaldpinda allapoole.

Juhul kui jõud P on horisontaalne, võib kasutada valemit (17.9), muutes selles nurga φ ees oleva märgi vastupidiseks. Tulemuseks saame

$$P = G\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\varphi). \qquad (17.10)$$

Võrranditest (17.9) ja (17.10) võib järeldada, et
1) liugur jääb tasakaalu niikaua, kui

$$G\,\mathrm{tg}\,(\alpha+\varphi) > P > G\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\varphi),$$

2) liugur tõuseb mööda kaldpinda üles, kui

$$P > G\,\mathrm{tg}(\alpha+\varphi),$$

3) liugur laskub kaldpinnal allapoole, kui

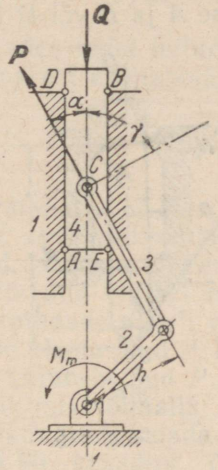
$$P < G\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\varphi).$$

Kaldpinnal kiirendatult liikuva liuguri käitumist võib uurida analoogiliste arutlustega tingimusel, et lisaks kõikidele mõjuvatele jõududele rakendatakse liugurile veel inertsjõud.

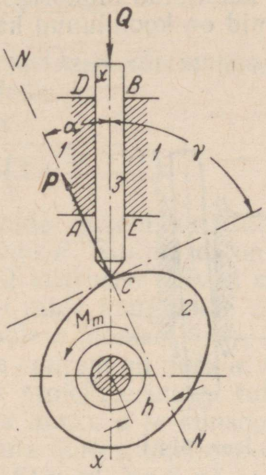
7°. Siirdume nüüd liuguri üldisema liikumisjuhu uurimisele. Joonisel 612 on kujutatud väntmehhanism paiksete juhtpindade *1* vahel liikuva liuguriga *4*. Vedavale vändale *2* on rakendatud

motoorne moment M_m ja veetavale liugurile *4* — jõud $\boldsymbol{Q}$. Viimane kujutab endast takistusjõu ja liuguri inertsjõu resultanti. Liugurile mõjuvad seega motoorne jõud $\boldsymbol{P}$, mille suuruseks on (joon. 612)

$$P = \frac{M_m}{h},$$



Joon. 612.

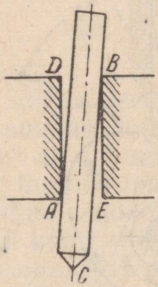


Joon. 613.

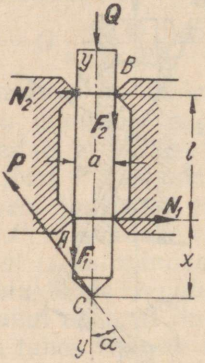
jõud $\boldsymbol{Q}$, toereaktsioonid ja hõõrdejõud. Analoogiline koormuse skeem saadakse joonisel 613 kujutatud nukkmehhanismi puhul. Ka siin on liugur koormatud motoorse jõuga $\boldsymbol{P}$, jõuga $\boldsymbol{Q}$, tugede normaalreaktsioonidega ja hõõrdejõududega. Kui juhtpukside *1* (joon. 612 ja 613) tugipindu lugeda elastseteks, siis jaotuvad neile liuguri poolt ülekantavad jõud mingi keeruka seaduse alusel. Viimane on määratud nii väliskoormuse kui ka liuguri ja juhtpindade materjalide iseloomuga. Ülesande täielik lahendamine on sellisel juhul seotud suurte raskustega. Käesoleva raamatu autori poolt koos V. T. Kostitsõni ja N. P. Rajevskiga tehtud katsed [1] aga näitasid, et praktiliste arvutuste seisukohast võib ülesannet lihtsustada, kui liuguri ja juhtpindade materjal on küllaldase jäikusega. Tähistame juhtpindade piirpunktid tähtedega *A*, *B*, *D* ja *E* (joon. 612 ja 613). Lihtsustamiseks võime oletada, et toereaktsioonid on koondatud ainult kahte piirpunkti. Kuna liuguri

[1] Артоболевский И. И., Костицын В. Т., Раевский Н. П., О давлениях на опоры штанги кулачкового механизма, Труды семинара по теории механизмов и машин, т. IX, вып. 35, Изд. АН СССР, 1950.

ja juhtpukside vahel on alati teatav lõtk, siis on ilmne, et liugur toetub sõltuvalt mõjuvate jõudude iseloomust kas ainult ühele juhtpinnale või asetub nende vahel nii, nagu on skemaatiliselt näidatud joonisel 614. Esimesel juhul võib eeldada, et toereaktsioonid on rakendatud punktides A ja D või B ja E. Liuguri liikumapanemiseks vajaliku jõu $\boldsymbol{P}$ arvutus toimub sel juhul samuti, nagu joonisel 610 käsitletud olukorraski. Teisel juhul tuleb eeldada, et toereaktsioonid on koondunud kas punktidesse A ja B või D ja E.



Joon. 614.



Joon. 615.

8°. Joonis 615 kujutab jõudude arvutusskeemi olukorras, kus liugur asub juhtpuksis viltu. Motoorne jõud $\boldsymbol{P}$ on liugurile rakendatud punktis C, moodustades liuguri liikumisteljega $y - y$ nurga α. Takistusjõud $\boldsymbol{Q}$ mõjub piki telge $y - y$. Punktides A ja B on liugurile rakendatud reaktsioonid $\boldsymbol{N}_1$ ja $\boldsymbol{N}_2$ ning hõõrdejõud $\boldsymbol{F}_1$ ja $\boldsymbol{F}_2$.

Selgitame, kui suur peab olema liugurile rakendatud jõud P, et ületada jõudude $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{F}_1$ ja $\boldsymbol{F}_2$ toimet. Võime kirjutada:

$$P \cos \alpha = Q + F_1 + F_2.$$

Silmas pidades, et $F_1 = fN_1$ ja $F_2 = fN_2$ (f tähistab hõõrdetegurit juhtpuksis), saame:

$$P \cos \alpha = Q + N_1 f + N_2 f. \qquad (17.11)$$

Reaktsioonide $\boldsymbol{N}_1$ ja $\boldsymbol{N}_2$ määramiseks koostame kõikide jõudude momentide võrrandid punktide A ja B suhtes. Saame:

$$\left.\begin{aligned} P \sin \alpha \cdot x + N_2 f \cdot a + Q \frac{a}{2} - P \cos \alpha \frac{a}{2} - N_2 l = 0, \\ P \sin \alpha \cdot (x + l) - N_1 f \cdot a - Q \frac{a}{2} + P \cos \alpha \frac{a}{2} - N_1 l = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (17.12)$$

Võrranditest (17.12) leiame reaktsioonid N_1 ja N_2:

$$N_1 = \frac{P\left[\sin\alpha \cdot (x+l) + \cos\alpha \cdot \frac{a}{2}\right] - Q \cdot \frac{a}{2}}{l + fa}, \tag{17.13}$$

$$N_2 = \frac{P\left(\sin\alpha \cdot x - \cos\alpha \cdot \frac{a}{2}\right) + Q \cdot \frac{a}{2}}{l - fa}. \tag{17.14}$$

Asetades nüüd leitud N_1 ja N_2 väärtused võrrandisse (17.11), saame pärast elementaarseid teisendusi:

$$P = Q \frac{1}{\cos\alpha - f\sin\alpha\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{fa}{l}\right)}. \tag{17.15}$$

Võrrandist (17.15) selgub, et mida pikem on juhtpindade mõõde l, seda väiksemaks kujuneb jõud P. Siinjuures on muidugi eeldatud, et võrrandis esinevad teised suurused jäävad muutumatuiks. Võrrand (17.15) näitab veel, et mida kaugemale ulatub liugur juhtpindade vahelt välja («konsool» x joonisel 615), seda suurem peab olema jõud P. Lõpuks, mida suurem on nurk α, seda suuremaks kujuneb jõud P. Juhtpindade projekteerimisel tuleb seega teha kõik mis võimalik, et vähendada nurka α ja konsooli x ning suurendada juhtpindade pikkust l. Kuna nurk α täiendab ülekandenurka γ 90 kraadini (joon. 612 ja 613; vt. ka § 41 ja 46), siis jõuame uuesti juba varem tehtud järeldusele, mis soovitas mehhanismide projekteerimisel suurendada võimaluse piirides ülekandenurki γ.

Võrrandis (17.15) esinev suurus $\frac{fa}{l}$ on nukkmehhanismide puhul (joon. 613) väike, võrreldes teiste sulgudes olevate suurustega. Seetõttu võib nimetatud mehhanismide praktilisel arvutamisel kasutada võrrandit

$$P = Q \frac{1}{\cos\alpha - f\sin\alpha\left(1 + \frac{2x}{l}\right)}. \tag{17.16}$$

9°. Seostest (17.15) ja (17.16) võib järeldada, et olukorras, kus nende nimetajad võrduvad nulliga, kasvab jõud $\boldsymbol{P}$ piiramatult. Liugur jääb seega paigale, muutugu jõud $\boldsymbol{P}$ nii suureks kui tahes. Tekib nn. liuguri kinnikiilumine juhtpindades. Määrame nurga α väärtused, mille juures see nähe esineb. Võrrutades avaldise (17.15) nimetaja nulliga, saame

$$\cos\alpha - f\sin\alpha\left(1 + \frac{2x}{l} - \frac{fa}{l}\right) = 0.$$

Avaldisest (17.16) saame analoogiliselt

$$\cos\alpha - f\sin\alpha\left(1 + \frac{2x}{l}\right) = 0.$$

Kinnikiilumine tekib järelikult siis, kui nurk α rahuldab tingimust

$$\operatorname{tg} \alpha_k \geqslant \frac{1}{f\left(1+\frac{2x}{l}-\frac{fa}{l}\right)} \tag{17.17}$$

ehk ligikaudu

$$\operatorname{tg} \alpha_k \geqslant \frac{1}{f\left(1+\frac{2x}{l}\right)}. \tag{17.18}$$

Võrratustega (17.17) ja (17.18) määratavaid nurki α_k soovitas prof. V. T. Kostitsõn nimetada nukkmehhanismide kriitilisteks survenurkadeks ja näitas, kuidas neid nukkmehhanismide projekteerimisel tuleb arvesse võtta.[1]

Võrratustest (17.17) ja (17.18) võib samuti järeldada, et valitud mõõdete a ja l ning nurga α puhul võib liugur kinni kiiluda ka siis, kui konsool x rahuldab tingimust

$$x_k \geqslant \frac{l}{2}\left(\frac{1}{f \operatorname{tg} \alpha}-1+\frac{fa}{l}\right) \tag{17.19}$$

või ligikaudselt

$$x_k \geqslant \frac{l}{2}\left(\frac{1}{f \operatorname{tg} \alpha}-1\right). \tag{17.20}$$

Võrratustega (17.17) — (17.20) saab liguritega mehhanisme kiilumisohu seisukohast kontrollida.

10°. Mõnel juhul kujundatakse liuguri ja juhtsoone kokkupuutepind kahetahulise nurgana ehk rennikujulisena (joon. 616, *a*). Säärase kujuga liugurit nimetatakse *kiil-liuguriks*.

Kui liugurile mõjub horisontaaljõud $\boldsymbol{P}$ ja vertikaalkoormus $\boldsymbol{Q}$, siis selleks, et liugur liiguks juhtsoones ühtlase kiirusega, peab olema täidetud tingimus

$$P = 2F.$$

F tähistab siin juhtsoone tahkudel tekkivate hõõrdejõudude $\boldsymbol{F}_1$ ja $\boldsymbol{F}_2$ moodulit, kusjuures $F_1 = F_2 = F$. Kuna $F_1 = N_1 f$ ja $F_2 = N_2 f$ ning $N_1 = N_2 = N$, siis

$$P = 2Nf.$$

Reaktsioonide $\boldsymbol{N}_1$ ja $\boldsymbol{N}_2$ suurused määratakse jõudude kolmnurgast (joon. 616, *b*), mis on rajatud vektorvõrrandile

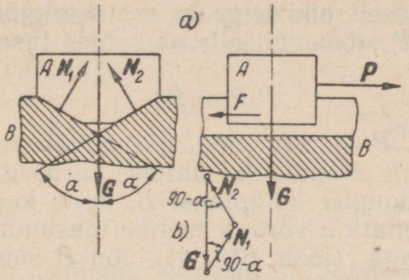
$$\boldsymbol{G} + \boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 = 0.$$

Silmas pidades, et $N_1 = N_2 = N$, saame jõudude plaanist:

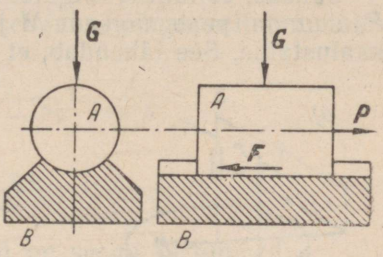
$$N = \frac{G}{2 \sin \alpha}.$$

---

[1] Костицын В. Т., О наименьших размерах кулачковых механизмов, Изд. АН СССР, ОТН, № 10, 1948.



Joon. 616.



Joon. 617.

Järelikult

$$P = \frac{f}{\sin\alpha} G = f'G,$$

kus

$$f' = \frac{f}{\sin\alpha}. \qquad (17.21)$$

Seos (17.21) näitab, et tegelikult k i i l - l i u g u r i hõõrdeteguriks nimetatav suurus f' on samades tingimustes töötava t a s a p i n n a l i s e liuguri hõõrdetegurist f alati s u u r e m.

Mõnikord kasutatakse ümmarguse ristlõikega liugureid, mis liiguvad silindrilises juhtsoones (joon. 617). Sel korral tuleb jõu $\boldsymbol{P}$ arvutamiseks kasutada valemi (17.21) alusel seost

$$P = Gf',$$

kus

$$f' = 1{,}27f. \qquad (17.22)$$

§ 88. Hõõrdumine kruvipaaris

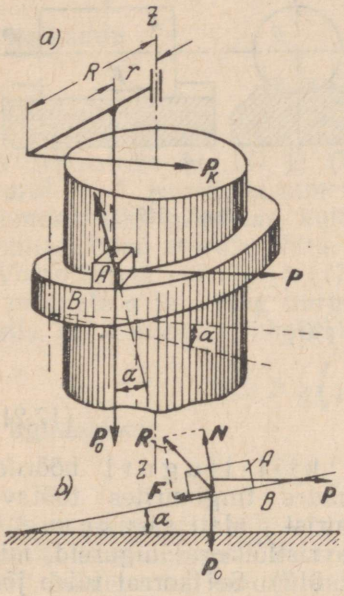
1°. Hõõrdumise käsitlus kruvipaaris on seotud terve rea lihtsustavate oletustega. Kuna koormuse jaotus kruvikeermel on teadmata, siis eeldatakse kõigepealt, et mutrilt kruvile ülekantav jõud on rakendatud keerme keskjoonel, mille kaugus kruvi teljest olgu r (joon. 618, *a*). Teiseks oletatakse, et jõudude mõju kruvipaaris võib käsitada kui jõudude mõju kaldpinnal asuvale liugurile. Keerme keskjoone tasapinnale laotamisega (joon. 618, *b*) taandatakse esialgne ruumiline ülesanne tasapinnaliseks.

Mõjugu mutrile A telgjõud $\boldsymbol{P}_0$ ja kruvi telje zz risttasapinnas paiknev jõupaar (joon. 618, *a*). Viimase momenti M võib käsitada kui teljest zz kaugusel R paikneva jõu $\boldsymbol{P}_k$ momenti:

$$M = P_k \cdot R.$$

Selleks, et mutter liiguks ühtlaselt piki telge *zz* vastu telgjõu P_0 suunda, peab moment M jõu P momendi telje *zz* suhtes tasakaalustama. See tähendab, et

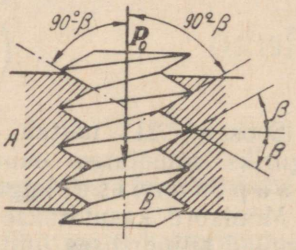
$$P_k R = Pr.$$



Joon. 618.

P on siin jõud, mis annab kehale A (mutrile) ühtlase kiirusega liikumise kaldpinnal B, mille kaldenurk α võrdub keerme tõusunurgaga (joon. 618, *b*). Jõu P suuruse saab määrata võrrandiga (17.9):

$$P = P_0 \operatorname{tg} (\alpha + \varphi).$$



Joon. 619.

Asendame P tema suurusega, et arvutust jätkata. Saame:

$$P_k R = P_0 r \operatorname{tg} (\alpha + \varphi)$$

ja

$$P_k = P_0 \frac{r}{R} \operatorname{tg} (\alpha + \varphi). \qquad (17.23)$$

Võrrand (17.23) seob mutrile rakendatud telgjõu kruvipaari parameetrite ja hõõrdenurgaga φ. Juhul kui mutter liigub jõu P_0 suunas, kujuneb võrrand (17.23) järgmiseks

$$P_k = P_0 \frac{r}{R} \operatorname{tg} (\alpha - \varphi). \qquad (17.24)$$

Kui $\alpha < \varphi$, muutub kruvist ja mutrist koosnev kahelüliline mehhanism isepidurdavaks.

2°. Ülaltuletatud valemeid võib kasutada kruvipaaride arvutamiseks juhul, kui keermeprofiil on ristkülikuline. Kolmnurkkeerme puhul (joon. 619) eeldatakse (tegemist on jämeda lähendusega), et mutri A liikumist võib samastada kiil-liuguri liikumisega juht-

soontes, kus külgtahkude kalle vertikaaltasapinna suhtes on $90° - \beta$. Hõõrdetegur f' väljendub sel juhul järgmiselt [vt. valem (17.21)]:

$$f' = \frac{f}{\sin(90° - \beta)} = \frac{f}{\cos \beta}$$

ja

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \beta}.$$

Kolmnurkkeerme arvutusvalemid on seega järgmised:

$$P_k = P_0 \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi'), \tag{17.25}$$

$$P_k = P_0 \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi'). \tag{17.26}$$

Kuna $\varphi' > \varphi$, siis võib järeldada, et kolmnurkkeermega varustatud kruvipaaris on hõõrdumine suurem kui püstkülikulise keermega paaris.

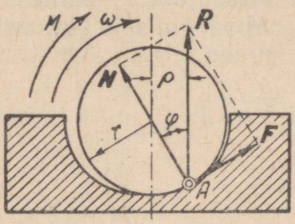
§ 89. Hõõrdumine rotatsioonipaaris

1°. Rotatsioonipaaris esineva kuiva hõõrdumise uurimisel võib teha mitmesuguseid hüpoteese koormuse jaotumise kohta paari elementide pinnal. Nende hüpoteeside põhjal saab tuletada valemeid, mis annavad hõõrdejõudude suuruse ja võimaldavad määrata nende ületamiseks vajalikku võimsust. Koormuse jaotuse hüpoteese on esitanud mitmed teadlased (Reihe, Weisbach jt.). Kahjuks aga puudub nende hüpoteeside kinnituseks, nagu kruvipaari juureski, küllaldane eksperimentaalne materjal, mis aitaks selgitada koormuse jaotust määrdeta töötavas kinemaatilises paaris. Seetõttu ei peatu me siinkohal kõikide võimalikkude valemite juures, mis on tuletatud rotatsioonipaaris esinevate hõõrdejõudude arvutamiseks, vaid piirdume ainult kõige lihtsamate, hõõrdumisnähete skematiseerimisel saadavate valemite esitamisega.

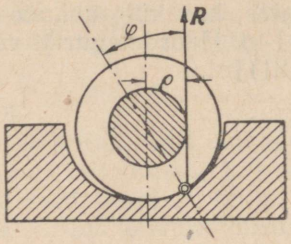
2°. Joonisel 620 noolega näidatud suunas pöörlev võllitapp püüab nagu laagri pinda mööda «üles ronida». Oletame, et kontakt laagriliua ja tapi pinna vahel toimub seetõttu punktis A. Varem selgitatud põhjustel moodustab punkti A koondunud täisreaktsioon $\boldsymbol{R}$ normaaliga nurga φ ja tema suuruseks on

$$R = \sqrt{N^2 + F^2}.$$

Silmas pidades, et $F = fN$, võime reaktsiooni avaldada veel järgmiselt:



Joon. 620.



Joon. 621.

$$R = N\sqrt{1+f^2} = N\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{N}{\cos\varphi}.$$

$\boldsymbol{N}$ tähistab normaalreaktsiooni punktis A. Tapile mõjuv motoorne moment M on tasakaalustatud hõõrdemomendiga $M_h = Fr$. Tapi telje suhtes arvutatud hõõrdejõudude momendi saab reaktsiooni $\boldsymbol{R}$ momendi kaudu avaldada järgmiselt:

$$M_h = Fr = R\varrho,$$

kus

$$\varrho = r \sin\varphi. \tag{17.27}$$

Võlli tsentrist raadiusega ϱ tõmmatud ringjoon puutub täisreaktsiooni $\boldsymbol{R}$ kandesirget (joon. 621). Kui võllile mõjuvate jõudude resultant möödub nimetatud ringjoonest, siis liigub võll kiirendatult. Juhul kui resultant on ringjoonele puutujaks, jätkab võll ühtlase kiirusega pöörlemist või jääb tasakaalu. Lõpuks, kui resultant läbib ringjoont, siis liigub võll aeglustatult või jääb tasakaalu püsima. Analoogia põhjal hõõrdenurga ja hõõrdekoonusega nimetatakse raadiusega ϱ tõmmatud ringi tapi *hõõrderingiks*.

Et hõõrdenurgad on väga väikesed, siis $\sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi$. Hõõrderingi raadiuse võib seetõttu avaldada ka järgmiselt:

$$\varrho \approx rf.$$

3°. Rotatsioonipaari hõõrdemoment on tavaliselt antud valemiga

$$M_h = Prf', \tag{17.28}$$

kus r tähistab paari silindrilise elemendi raadiust, f' — hõõrdetegurit rotatsioonipaaris ja P — resulteerivat koormust. Viimane võrdub laagrireaktsiooniga.

Hõõrdeteguri f' väärtused määratakse rotatsioonipaaride mitmesugustes töötingimustes eksperimentaalselt. Sõltuvalt hõõrdepindade materjalist ja seisukorrast, nende töötingimustest ja muudest asjaoludest, muutub hõõrdetegur f' suurtes piirides. Uutes laagrites võetakse kuiva hõõrdumise puhul tavaliselt

$f' = \frac{\pi}{2} f$, sissetöötanud laagrites aga $f' = \frac{4}{\pi} f$. Tähega f on mõlemas valemis tähistatud hõõrdetegurit, mis kehtiks samast materjalist valmistatud ja samades tingimustes töötavas translatsioonipaaris.

§ 90. Määritud kehade liugehõõrdumine

1°. Ülal käsitleti kinemaatilistes paarides esineva kuiva hõõrdumise teooria põhiküsimusi. Käesolevas paragrahvis peatume lühidalt vedelikulise hõõrdumise teooria olulisemate küsimuste juures. Nagu juba märgiti, ei esine liikuvate pindade vahel vedelikulise hõõrdumise olukorras otsest kontakti, sest hõõrdepinnad on teineteisest määrdevedeliku kihiga eraldatud. Liikumisel täheldatakse aga üksikute määrdekihtide nihkumist teineteise suhtes. Hõõrdumine määrdevedelikus taandub seega *viskoosseks nihkeks*.

Et hõlbustada tehnilisi arvutusi, kasutatakse ka vedelikulise hõõrdumise juures hõõrdeteguri mõistet. Kuid erinevalt kuival hõõrdumisel esinevast hõõrdetegurist sõltub *vedelikulise hõõrdumise tegur* f määrdekihtide suhtelisest liikumiskiirusest v, erikoormusest p ja määrdevedeliku viskoossusest η:

$$f = f(v, p, \eta).$$

Viskoossustegurit η nimetatakse absoluutse viskoossuse teguriks. See tegur iseloomustab määrde vastupanuvõimet nihkejõududele. Tehnilises mõõdusüsteemis on absoluutse viskoossuse ühikuks säärase vedeliku viskoossus, mille puhul 1 m suuruse tasapinna nihutamiseks 1 m kaugusel paikneva sama suure tasapinna suhtes kiirusega 1 m/sec vajatakse jõudu 1 kg. Absoluutse viskoossuse ühiku dimensiooniks on $\frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}$.

CGS-süsteemis on viskoossuse ühikuks *puaas*. Viimane on tehnilise viskoossusühikuga seotud järgmiselt:

$$1 \text{ puaas} = 0{,}0102 \frac{\text{kg sec}}{\text{m}^2}.$$

Uurides viskoosse vedeliku tasapinnalist liikumist, avastas Newton eksperimentaalsel teel, et jõudu, mida vajatakse ühe vedelikukihi nihutamiseks teise suhtes, saab avaldada järgmiselt:

$$T = F\eta \frac{dv}{dy}. \qquad (17.29)$$

Valemis tähistab T viskoosse nihke jõudu, F — nihkepinna pindala, η — absoluutse viskoossuse tegurit ja $\frac{dv}{dy}$ — kiiruse muu-

tumist vedeliku kõrguse sihis (kiiruse gradienti). Pinnaühikule mõjuv viskoosse nihke jõud ehk *nihkepinge* saadakse valemist

$$\tau = \frac{T}{F} = \eta \frac{dv}{dy}. \qquad (17.30)$$

2°. Määritud kehade hõõrdeteooria rajaja, silmapaistev vene teadlane prof. N. P. Petrov formuleeris oma 1883. a. ilmunud teadusliku uurimuses «Hõõrdumine masinates ja määrdevedeliku mõju sellele» need põhilised nõuded, mis tuleb selleks täita, et asendada kuiv hõõrdumine vedelikulisega. Need nõuded on järgmised:

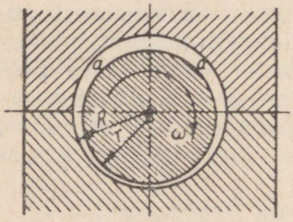
a) liugepindadevahelist pilu täitev määrdevedeliku kiht peab olema püsiv;

b) määritavate pindade suhtelisel liikumisel peab määrdevedeliku kihis tekkima püsiv siserõhk, mis tasakaalustab liugepindu teineteise vastu suruva väliskoormuse;

c) määrdevedelik peab liugepinnad teineteisest täielikult eraldama;

d) liugepindadevahelise määrdevedeliku kihi paksus peab ületama teatava minimaalse piiri.

Esimese nõude täitmiseks peavad liugepindade ja määrdevedeliku vahel tekkivad adhesioonijõud olema vedelikuosakestevahelistest kohesioonijõududest tugevamad. Sellega on tagatud, et märjatud tahkete kehade liikumisel tekib suhteline nihkumine määrdevedeliku kihtides, mitte aga määrdevedeliku ja tahke keha vahel.



Joon. 622.

Teise nõude rahuldamiseks peab liugepindade vahele suruma pidevalt määrdevedelikku või tagama, et liugepindadevaheline pilu oleks alaliselt kiilukujuline. Laagris pöörleva tapi puhul saavutatakse see lihtsalt sel teel, et laager ja tapp valmistatakse erinevate raadiustega (joon. 622). Tänu sellele tekib tapi ja laagriliudade vahel kiiljas pilu *aa*, millesse tapi pöörlemisel surutakse määrdevedelikku. Seejuures tekivad määrdekihis jõud, mis tasakaalustavad tapile mõjuva väliskoormuse. Tapp nagu «ujub» määrdevedeliku kihil. Nurkkiiruse suurenedes püüab tapi pikitelg ühtida laagri geomeetrilise teljega.

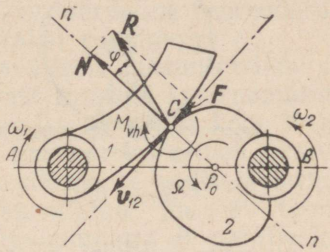
Kolmanda ja neljanda nõude kohaselt tuleb laagriliudu ja tappi väga puhtalt töödelda, et vähendada nende pinnal esinevaid ebatasasusi ja konarusi. Peale selle tuleb vältida tapi liigset deformeerimist ja hoolitseda, et määrdevedelik oleks kõrvalistest tahketest lisanditest võimalikult puhas.

Vedelikulise hõõrdumise tingimustes töötavate kinemaatiliste

paaride küsimust käsitletakse üksikasjaliselt masinaelementide ja ka mõningate erikursuste peatükkides, mis on pühendatud laagrite, juhtpindade jms. elementide arvutamisele ja konstrueerimisele.

§ 91. Veere- ja liugehõõrdumine kõrgemates kinemaatilistes paarides

1°. Kõrgemaid kinemaatilisi paare moodustavate elementide relatiivsel liikumisel esineb peale elementide suhtelise libisemise veel ühe elemendi veeremist teisel. Juhul kui kõrgema paari elemendid kehastavad tsentroide, esineb elementide vahel ainult puhas veeremine. Kui aga elemendid on profileeritud kaasmähisjoontena, siis veerevad ja libisevad nad teineteisel. Olgu kõrgema kinemaatilise paari elemendid A ja B (joon. 623) kujundatud kaasmähisjoontena. Suhtelise liikumise hetkeliseks kiiruste tsentriks olgu punkt P_0.



Joon. 623.

Nagu IX peatükis näidati, saab sel juhul lüli *1* profiili libisemiskiiruse lüli *2* profiilil avaldada järgmiselt:

$$v_{12} = |\Omega|(P_0C),$$

kus Ω tähistab suhtelise liikumise hetkelist nurkkiirust. Viimase absoluutväärtus saadi omakorda seosest

$$|\Omega| = |\omega_1| + |\omega_2|.$$

Nagu varemates ülesannetes, on ka siin teise lüli poolt esimesele lülile mõjuv täisreaktsioon rakendatud kontaktpunkti C. Ühise normaali suhtes on see reaktsioon kallutatud nurga φ võrra sihis, mis on vastupidine suhtelise libisemiskiirusega $\boldsymbol{v}_{12}$. Lülile *1* mõjuva hõõrdejõu $\boldsymbol{F}$ saab määrata valemist

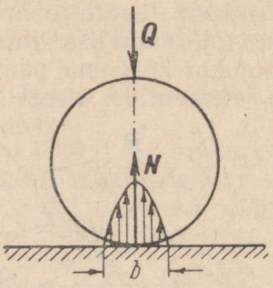
$$F = fN,$$

kus f nagu alati tähistab liugehõõrdetegurit.

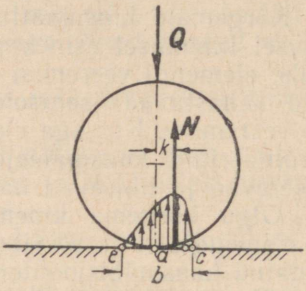
Takistust, mis tekib paarielementide suhtelisel veeremisel nurkkiirusega Ω, võib arvesse võtta nimetatud nurkkiirusele vastupidi orienteeritud veerehõõrdemomendi M_{vh} näol (joon. 623).

2°. Veerehõõrdumist põhjustavaid füüsikalisi nähteid on uuritud vähe. Tehnilistes arvutustes kasutatakse seetõttu peamiselt andmeid, mis on saadud konkreetsete esemete, nagu rullide, rataste, laagriveerekehade jt. katsetamisel. Katsed näitavad, et veerehõõrdumine sõltub veerevate kehade elastsetest omadustest, veerepindade kõverusest ja kehi kokkusuruvast jõust. Veerehõõr-

detakistuse ületamiseks tuleb kulutada teatav hulk tööd, mis läheb puutepindade deformeerimiseks. Asugu näiteks jõuga Q koormatud liikumatu silinder tasapinnal (joon. 624). Silindri ja tasapinna puutealal tekib kohalik deformatsioon, mida iseloomustab muljutud riba laius b. Elastsusteoorias tõestatakse, et pingete jaotus deformatsioonialal on elliptiline. Pingete jaotuskõver on seejuures sümmeetriline, mistõttu elastsusjõudude resultant N peab langema koormuse Q kandesirgele.



Joon. 624.



Joon. 625.

Paneme silindri veerema (joon. 625). Deformatsioonipiirkond ac satub seejuures kasvavate deformatsioonide tsooni, kuna piirkonnas ea hakkavad deformatsioonid kahanema. Materjalide sisehõõrdumise tõttu ei ühti materjalide koormamise ja koormast vabanemise kõverad (elastne järelmõju ehk hüstereesise nähtus). Kasvavate deformatsioonide piirkonnas kulgeb pingete kõver kõrgemalt kui seal, kus deformatsioonid kahanevad. Pingete jaotus piki riba laiust b kujuneb seetõttu ebasümmeetriliseks, kusjuures tema maksimum on nihutatud liikumise suunas. Pingete resultant N nihkub kauguse k võrra punktist a paremale. Kaugust k nimetatakse *veerehõõrdejõu õlaks*. Veeremisel tuleb seega ületada teatav *veerehõõrdemoment* M_{vh}, mille suuruse määrab seos

$$M_{vh} = Qk, \tag{17.31}$$

kus võrdeteguriks on veerehõõrdejõu õlg k. Viimast nimetatakse ka *veerehõõrdeteguriks*.

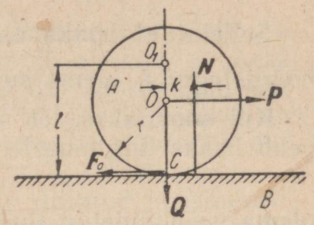
3°. Valem (17.31) näitab, et veerehõõrdeteguril k on pikkuse dimensioon. Veeregu silinder A libisemata ja ühtlase kiirusega tasapinnal B (joon. 626). Olgu silindri punktis O rakendatud välisjõud P. Silindri ühtlast veeremist põhjustab jõupaar P, F_0, kus F_0 tähistab punktis C rakendatud liugehõõrdejõudu, mis suuruselt võrdub jõuga P. Jõud F_0 on seisuhõõrdejõud, mistõttu $F_0 \leqslant Qf_0$. Meenutame, et f_0 on seisuhõõrdetegur ehk, nagu teda käesoleval juhul veel nimetatakse, silindri ja tasapinna

vaheline haardetegur. Jõupaaril, mille toimel silinder veereb, on moment

$$M = Pr,$$

kus r tähistab silindri raadiust. Silindri ühtlasel veeremisel peab see moment võrduma veerehõõrdemomendiga:

$$Pr = M_{vh} = Qk. \qquad (17.32)$$



Joon. 626.

Ülaltoodust järgneb, et

$$P = k\frac{Q}{r}. \qquad (17.33)$$

Võrrand (17.33) näitab, et jõud P on võrdeline veerehõõrdeteguriga k ja pöördvõrdeline silindri (rulli) raadiusega r.

Veerehõõrdetegureid mõõdetakse tavaliselt millimeetrites või sentimeetrites. Nende väärtusi leiab igast inseneri käsiraamatust.

4°. Et praktikas kohtab veerehõõrdumist tavaliselt koos liugehõõrdumisega, siis selgitame, millistes tingimustes esineb üks või teine hõõrdumine puhtal kujul. Liikugu silinder A endiselt ühtlase kiirusega tasapinnal B punkti O rakendatud jõu $\boldsymbol{P}$ toimel (joon. 626). Eeldame, et jõud $\boldsymbol{P}$ on tasapinnaga B paralleelne. Kui normaaljõud silindri ja tasapinna puutepunktis on $\boldsymbol{Q}$, siis liugehõõrdejõu $\boldsymbol{F}_0$ väärtuseks kujuneb

$$F_0 = f_0 Q.$$

Selleks, et silinder veereks tasapinnal ühtlaselt, peab jõud P võrduma jõuga F_0, s. t.

$$P = f_0 Q.$$

Ühtlase veeremise tingimus kujuneb seega järgmiseks:

$$Pr = kQ.$$

Selleks et silinder tasapinnal ainult libiseks, peab lisaks tingimusele

$$P = f_0 Q$$

olema täidetud veel tingimus

$$Pr < kQ.$$

Puhtaks veeremiseks tuleb seega täita tingimus

$$Qf_0 r < kQ$$

ehk

$$f_0 < \frac{k}{r}.$$

Selleks et leiaks aset puhas libisemine, peab liugehõõrdetegur f_0 olema suhtest $\frac{k}{r}$ väiksem.

Kui soovitakse, et silinder tasapinnal ainult veereks, peab lisaks tingimusele

$$Pr = kQ$$

olema veel täidetud tingimus

$$P < f_0 Q.$$

Sellest järgneb, et

$$f_0 > \frac{k}{r}.$$

Puhtaks veeremiseks peab liugehõõrdetegur f olema suhtest $\frac{k}{r}$ suurem.

Lõpuks, selleks et nii veeremine kui ka libisemine toimuksid üheaegselt, tuleb korraga rahuldada tingimused

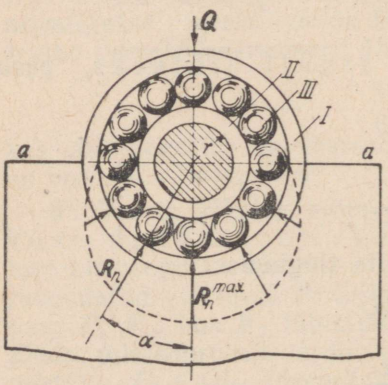
$$P = f_0 Q \text{ ja } Pr = kQ,$$

millest järgneb:

$$f_0 = \frac{k}{r}.$$

Silindri (rulli) ühtlaseks veeremiseks koos libisemisega peab liugehõõrdetegur f_0 võrduma suhtega $\frac{k}{r}$.

Juhul kui jõud P ei ole rakendatud punktis O (joon. 626), vaid kuskil mujal, näiteks tasapinnast etteantud kaugusel l paiknevas punktis O_1, tuleb ülaltoodud valemites esinev raadius r asendada kaugusega l. Kuna veerehõõrde töö on praktikas liugehõõrde tööst alati väiksem, siis püütakse tehnikas sageli liugehõõret asendada veerehõõrdega. Seks otstarbeks kasutatakse rulle, kuul- ja rull-laagreid jms.



Joon. 627.

5°. Käsitleme nüüd veerehõõrdekadude määramist kuullaagrites.

Joonis 627 kujutab kuul- või rull-laagri skeemi. Laager koosneb liikumatult laagri kerega ühendatud välisvõrust *I*, võlli peale pressitud sisevõrust *II* ja kuulidest (veerekehadest) *III*. On ilmne, et laagrile mõjuv koormus Q jaotub veerekehade vahel ebaühtlaselt. Kõige enam koormatakse veerekehi, mis

asuvad jõu $\boldsymbol{Q}$ kandesirgel. Eeldades, et koormatud on ainult diameetrist *aa* allpool paiknevad veerekehad, võib oletada, et reaktsiooni $\boldsymbol{R}_n$ ligikaudne jaotus vastab joonisel 627 katkestatud joonega kujutatud seadusele. Viimase põhjal väheneb veerekehade koormus nende eemaldumisel jõu $\boldsymbol{Q}$ kandesirgest, muutudes diameetril *aa* nulliks.

Kui oletada, et veerekehade koormus on jaotatud koosinuseliselt, siis mis tahes veerekehale mõjuv normaalreaktsioon on arvutatav seosega

$$R_n = R_{n\,max} \cos \alpha,$$

kus $R_{n\,max}$ tähistab reaktsiooni maksimaalselt koormatud veerekehal. Kõikide reaktsioonide aritmeetiliseks summaks kujuneb sel puhul

$$\Sigma R_n \approx 1{,}3\,Q.$$

Kui kasutada elastsusteooria alusel H. Hertzi poolt tuletatud valemeid, siis kuullaagrite puhul kujuneb vastavaks summaks

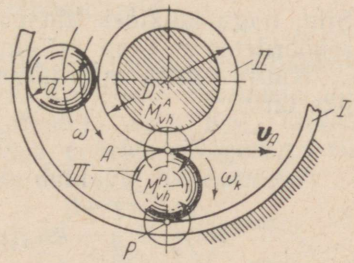
$$\Sigma R_n \approx 1{,}4\,Q$$

ja rull-laagrite puhul

$$\Sigma R_n \approx 1{,}46\,Q.$$

Sõltuvalt kasutatavast hüpoteesist muutub ΣR_n seega piirides 1,3 Q kuni 1,46 Q.

6°. Siirdume nüüd kuullaagrites veerehõõrdumisele kuluva võimsuse määramisele (joon. 628). Ühe kuuli veeretamiseks kuluv võimsus N_h' on antud seosega



Joon. 628.

$$N'_h = N^P{}_h + N^A{}_h,$$

kus $N^P{}_h$ ja $N^A{}_h$ tähistavad vastavalt kontaktpunktides P ja A kulutatavat võimsust.

Võimsuse $N^P{}_h$ saab avaldada järgmiselt:

$$N^P{}_h = M^P{}_{vh}\omega_k,$$

kus $M^P{}_{vh}$ tähistab veerehõõrdemomenti ja ω_k — kuuli nurkkiirust. Veerehõõrdemoment $M^P{}_{vh}$ võrdub teatavasti aga veerehõõrdeteguri k ja normaalreaktsiooni R_n korrutisega, s. t.

$$M^P{}_{vh} = kR_n.$$

Tähistame võru *II* diameetri tähega D ja kuuli diameetri — tähega d. Kuna punkt P on kuuli hetkeliseks kiiruste tsentriks (joon. 628), saab kuuli nurkkiiruse ω_k määrata tingimusest

$$v_A = \omega_k(PA) = \omega_k d.$$

Et v_A omakorda on antud seosega

$$v_A = \omega \frac{D}{2},$$

kus ω tähistab võlli nurkkiirust, siis saame lõpuks

$$\omega_k = \omega \frac{D}{2d}.$$

Võimsus $N^P{}_h$ tuleb seega arvutada valemiga

$$N^P{}_h = kR_n\omega \frac{D}{2d}.$$

Mis puutub punktis A kuluvat võimsust $N^A{}_h$, siis saadakse see seosest

$$N^A{}_h = M^A{}_{vh}\,\Omega,$$

kus $M^A{}_{vh}$ tähistab veerehõõrdemomenti, mille suurus on antud valemiga

$$M^A{}_{vh} = kR_n.$$

Siin, nagu kõikides lihtsustatud arvutustes, on eeldatud, et veerehõõrdetegur k on mõlemas kontaktpunktis A ja P ühesugune.

Kuuli suhtes arvutatud võru relatiivse nurkkiiruse mooduliks on

$$\Omega = \omega + \omega_k.$$

Võimsus $N^A{}_h$ avaldub seega järgmiselt:

$$N^A{}_h = kR_n(\omega + \omega_k) = kR_n\omega\left(1 + \frac{D}{2d}\right).$$

Kuuli hõõrdumise ületamiseks vajalik koguvõimsus on seega

$$N'_h = N^P{}_h + N^A{}_h = kR_n\omega\left(1 + \frac{D}{d}\right).$$

Tähistame kõikide kuulide veeretamiseks vajaliku võimsuse tähisega N_h ja normaalreaktsioonide summa — tähega R. Seega

$$N_h = \Sigma N_h' \quad \text{ja} \quad R = \Sigma R_n = AQ,$$

kus A on tegur, mille väärtus § 91, 5° alusel kõigub piirides 1,3 kuni 1,46. Üldise võimsuse N_h saab arvutada järgmiselt:

$$N_h = AQk\omega\left(1 + \frac{D}{d}\right).$$

Kui veel kasutada tähistust

$$AQk\left(1 + \frac{D}{d}\right) = M_h,$$

võib võimsuse arvutusvalemile anda sama kuju, mis kehtis liugelaagrite arvutamisel:

$$N_h = M_h \omega.$$

Ka momendi M_h avaldisele võib anda valemit (17.28) meenutava kuju:

$$M_h = Qrf',$$

kus r tähistab võlli raadiust (joon. 627) ja

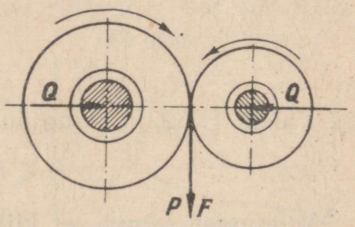
$$f' = \frac{Ak}{r}\left(1 + \frac{D}{d}\right).$$

Suurust f' nimetatakse kuul- või rull-laagri redutseeritud (taandatud) hõõrdeteguriks.

Nagu juba ülal märgitud, tuleb koefitsiendi A väärtus valida piirides 1,3 ... 1,46.

§ 92. Friktsioonratas-mehhanismid

1°. Hõõrdejõudusid kasutatakse tehnikas sageli mehhanismi lülidele soovitud liikumise andmiseks. Käsitleme liikumise ülekandmist friktsioonrataste (hõõrderataste) abil. Kui lõigata ümmarguste silinderrataste paari nende pöörlemistelgedega ristuva tasapinnaga, siis saame kaks ringjoont, mis kujutavad endast rataste suhtelise liikumise tsentroide (joon. 629). Nagu ülal (§ 41) näidati, ei saa liikumist ringjooneliste tsentroididega üle kanda, sest need hakkavad teineteisel libisema, kuna ülekandenurk γ on antud juhul null. Liikumise ülekandmine saab võimalikuks siis, kui tsentroidide vahel tekib haardejõud $\boldsymbol{F}$. Viimane peab suuruselt ületama ringjõu $\boldsymbol{P}$, mille suurus saadakse, kui jagada veetava ratta takistusmoment M tema raadiusega r. Haardejõu tekitamiseks surutakse friktsioonrattad teineteise vastu teatava jõuga $\boldsymbol{Q}$. Haardejõu piirväärtuseks on seega



Joon. 629.

$$F = fQ,$$

kus f tähistab nagu alati hõõrdetegurit.

Kui $F > P$, ei esine friktsioonrataste vahel mingit libisemist. Suhet

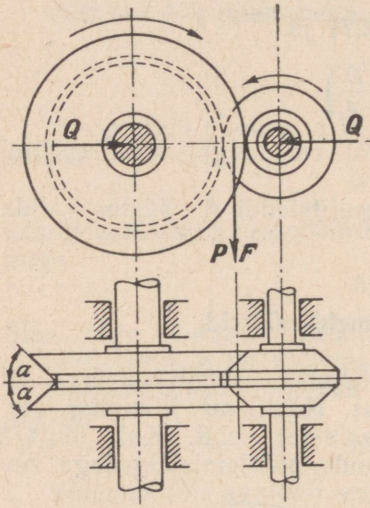
$$k = \frac{F}{P} = \frac{Qfr}{M}$$

nimetatakse *ülekande haardevaru teguriks.*

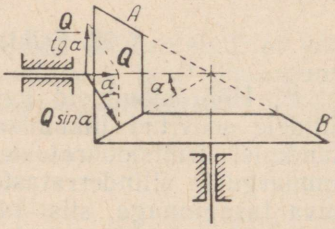
Survejõud Q kandub üle rataste laagritele ja on üheks nende kulumise põhjustajaks. Seetõttu püütakse friktsioonülekannetes saavutada vajalikku jõudu P võimalikult väikese survega Q. Selleks kasutatakse näiteks kiil-friktsioonrattaid (joon. 630). Viimaste juures võib ringjõu ligikaudsel arvutamisel kasutada kiil-liugurite puhul tuletatud hõõrdetegurit f':

$$f' = \frac{f}{\sin\alpha},$$

kus f tähistab hõõrdetegurit tasapinnalises hõõrdepaaris [vt. § 87, valem (17.22)]. Ringjõu $\boldsymbol{P}$ väärtus saadakse sel juhul valemist



Joon. 630.



Joon. 631.

$$P \leqslant F \text{ ehk } P \leqslant \frac{Qf}{\sin\alpha}.$$

Viimasest selgub, et kiil-friktsioonrataste puhul saab teatavat ringjõudu P üle kanda väiksema survejõuga Q, kui see, mis on nõutav lamedates friktsioonratastes.

2°. Lõikuvate võllide puhul kasutatakse koonusfriktsioonrattaid (joon. 631). Ratas A surutakse jõuga $\boldsymbol{Q}$ vastu ratast B. Lahutades jõu komponentideks, millest esimene ristub ratta A teljega ja teine — koonuste ühise moodustajaga, saame jõud $\frac{Q}{\text{tg}\,\alpha}$ ja $\frac{Q}{\sin\alpha}$.

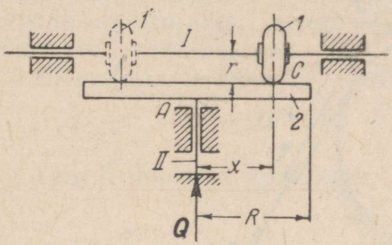
Ringjõu $\boldsymbol{P}$ suurus saadakse valemist

$$P < \frac{Qf}{\sin\alpha} \text{ või } P < Qf'.$$

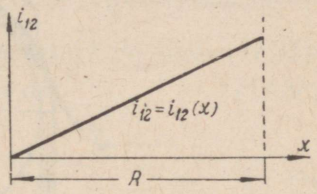
Koonusrataste ringjõud arvutatakse järelikult valemiga, mida kasutati ka kiil-friktsioonrataste puhul.

3°. Pöörlemiskiiruse astmeteta (sujuvaks) muutmiseks kasutatakse sageli nn. *laup-friktsioonrattaid* (joon. 632). Ratast *1* saab teljel *I* nihutada mis tahes asendisse. Kaugus rataste kontaktpunkti *C* ja ratta *2* telje *II* vahel on seega muudetav suurus. Kui ratas *1* on vedav, saab muutuva ülekandesuhte i_{12} arvutada valemiga

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{x}{r}.$$



Joon. 632.



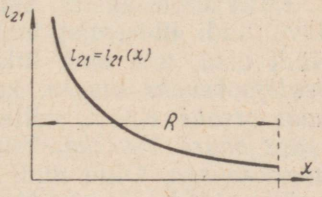
Joon. 633.

Toodud valemis tähistab *r* ratta *1* raadiust ja *x* — ratta *2* telje ja kontaktpunkti *C* vahelist muudetavat kaugust.

Ülekandesuhte $i_{12} = i_{12}(x)$ sõltuvust kaugusest *x* kujutab konstantse nurkkiiruse ω_1 puhul joonis 633. Nagu sealt näha, on graafikuks sirgjoon. Kui nihutada ratas *1* ratta *2* teljest vasakule, siis nurkkiiruse muutumise seadus säilib, kuid ratta *2* pöörlemissuund muutub vastupidiseks. Kui muuta ratas *2* vedavaks, tuleb ülekandesuhte i_{21} arvutamiseks kasutada valemit

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{x}.$$

Ülekandesuhte $i_{21} = i_{21}(x)$ sõltuvust kaugusest *x* püsiva nurkkiiruse ω_2 puhul illustreerib joonisel 634 kujutatud diagramm.



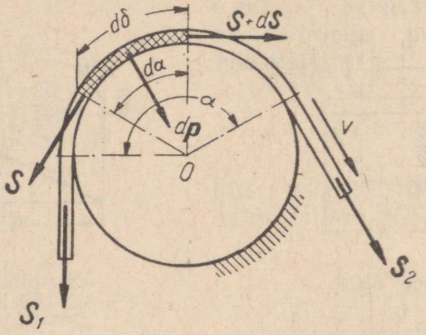
Joon. 634.

Friktsioonrattaid rakendatakse laialdaselt masinaehituse mitmetes harudes. Eriti suuri eeliseid pakub nende kasutamine *astmeteta reduktorites,* mis võimaldavad pöörlemiskiirust sujuvalt muuta. Friktsioonrataste puuduseks on rataste kokkupuutepindade intensiivne kulumine ja paratamatu libisemine, mistõttu nende ülekandesuhe ei ole rangelt konstantne.[1]

[1] Friktsioonrataste kohta leiab täpsemaid andmeid masinaehituse entsüklopeedilises käsiraamatus «Машиностроение» köide 2, lk. 401—429.

§ 93. Painduva niidi hõõrdumine

Nagu näidati § 76, kasutatakse tehnikas väga sageli painduvate lülidega mehhanisme. Analoogiliselt friktsioonülekannetele saab painduvate lülidega mehhanisme kasutada liikumise ülekandmiseks ainult siis, kui painduva lüli ja vastava ratta vahel tekib küllalt intensiivne hõõrdejõud.



Joon. 635.

Valemi, mis seob elastse niidiga ülekande põhiparameetrid, tuletas kuulus teadlane, Venemaa Teaduste Akadeemia liige L. Euler 1765. aastal. Selle valemi taastuletamiseks uurime painduva niidi libisemist ümmargusel liikumatul kettal (joon. 635). Niidi otsa, mis oma liikumisel kettale läheneb, nimetame niidi *pealejooksvaks otsaks,* kettast eemalduvat otsa aga *mahajooksvaks otsaks.* Kaart, mille ulatuses niit ketast ümbritseb, nimetatakse *haardekaareks.* Viimasele vastav kesknurk moodustab nn. *haardenurga.* Olgu niidi pealejooksvas otsas mõjuv jõud S_1 ja mahajooksvas otsas mõjuv jõud S_2. Määrame nimetatud jõudude vahel kehtiva seose. Seejuures tuleb teha järgmisi lihtsustusi. Oletame kõigepealt, et niit on absoluutselt venimatu, kuid seejuures ideaalselt painduv, mistõttu tema peale- või mahakerimine ei ole seotud vähimagi takistusega. Teiseks oletame, et niit liigub kogu oma ulatuses ühtlase kiirusega v. Lõpuks jätame kõrvale niidi massi ja temale mõjuva tsentrifugaaljõu.

Niidile ühtlase liikumiskiiruse andmiseks tuleb ilmselt ületada teatav hõõrdejõud F. Niidi mahajooksvas otsas mõjuv jõud S_2 peab pealejooksvat otsa koormavast jõust S_1 olema seetõttu hõõrdejõu F võrra suurem, s. t.

$$S_2 = S_1 + F. \qquad (17.34)$$

Hõõrdejõud F avaldub seega järgmiselt:

$$F = S_2 - S_1. \tag{17.35}$$

Konstantse kiirusega liikuval niidil võrdub niidi otstele mõjuvate jõudude vahe seega niidi ja ketta vahel tekkiva hõõrdejõuga.

2°. Vaatleme nüüd haardekaare lõpmata väikest elementi $d\delta$, millele vastab elementaarne haardenurk $d\alpha$ (joon. 635). Kui vaadeldava kaare alguses mõjub niidile jõud S, siis kaare lõpus on mõjuvaks jõuks $S + dS$. Jõudude S ja $S + dS$ kandesirged on kettale puutujaiks, seega risti tsentrist O puutepunktidesse tõmmatud raadiustega.

Elementaarse hõõrdejõu dF saab määrata valemiga (17.35):

$$dF = (S + dS) - S = dS. \tag{17.36}$$

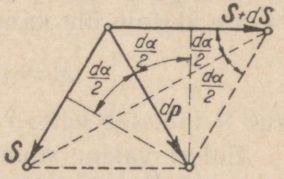
Teiselt poolt on aga ilmne, et

$$dF = f\,dp, \tag{17.37}$$

kus f tähistab nagu alati hõõrdetegurit ja dp — elementaarjõudu, millega niit mõjub kettale kaarel $d\delta$.

Seostest (17.36) ja (17.37) järeldub, et

$$dS = f\,dp. \tag{17.38}$$



Joon. 636.

Jõu dp leidmiseks liidame parallelogrammi reegli kohaselt jõud S ja $S + dS$. Teist järku lõpmata väikesi suurusi kõrvale jättes võib parallelogrammi asendada joonisel 636 kujutatud rombiga, mille küljepikkuseks on S.

Sel puhul

$$dp = 2S \sin\frac{d\alpha}{2} \approx 2s\,\frac{d\alpha}{2} = S\,d\alpha. \tag{17.39}$$

Asetades saadud dp väärtuse võrrandisse (17.38), saame

$$dS = f S\,d\alpha, \tag{17.40}$$

millest järgneb, et

$$\frac{dS}{S} = f\,d\alpha. \tag{17.41}$$

Integreerides võrrandi (17.41) mõlemaid pooli, saame

$$\int_{S_1}^{S_2} \frac{dS}{S} = f \int_0^{\alpha} d\alpha$$

ehk

$$\ln\frac{S_2}{S_1} = f\alpha.$$

Viimasest järgneb, et

$$S_2 = S_1 e^{i\alpha}, \tag{17.42}$$

kus α tähistab kogu haardenurka (joon. 635).

Saadud tulemust (17.42) nimetatakse *Euleri valemiks*.

Euleri valem näitab, et jõud S_2 suureneb haardenurga ja hõõrdeteguri f kasvades. Seejuures ilmneb, et konstantse hõõrdeteguri f puhul põhjustab haardenurga suurenemine jõu S_2 väga intensiivset kasvu.

Asendades valemis (17.35) esineva jõu S_2 Euleri valemist saadud väärtusega, võime hõõrdejõu arvutada järgmiselt:

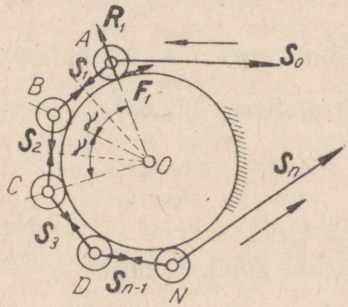
$$F = S_1(e^{\alpha f} - 1). \tag{17.43}$$

Jõud F on niidi poolt kettale ülekantava ringjõu maksimaalseks piiriks. Kui veetavale kettale mõjuv perifeerne takistusjõud ei ületa hõõrdejõudu F, paneb niit ketta pöörlema. Vastupidisel juhul hakkab niit kettal libisema, ilma et ketas seejuures liiguks. Jõududega S_1 ja S_2 ($S_2 > S_1$) koormatud niit suudab seega veetavale kettale üle kanda väändemomendi

$$M = (S_2 - S_1)R = S_1 R(e^{\alpha f} - 1), \tag{17.44}$$

kus R tähistab ketta raadiust.

Euleri valem annab niidi otstes mõjuvate jõudude arvutamiseks ainult ligikaudse seose. Seetõttu soovitatakse viimase aja nõukogude tehnilises kirjanduses ka teisi arvutusmeetodeid, muuhulgas ka neid, mis ei kasuta Euleri valemit (vt. entsüklopeediline käsiraamat «Машиностроение» köide 2, lk. 429—487).



Joon. 637.

3°. Reas mehhanismides, eriti aga pidurseadmetes, kasutatakse painduva niidiga ülekannet, mille juures niit koosneb ketast ainult üksikutes punktides puutuvatest lülidest. Ligikaudse võrrandi, mis seob vedavas otsas mõjuva jõu S_n veetavas otsas mõjuva jõuga S_0, võib tuletada järgmistest kaalutlustest lähtudes (joon. 637).

Puutugu säärane niit paikset silindrit punktides A, B, C, D jne. ning libisegu seejuures joonisel noolega näidatud suunas nii, et

$$S_n > S_0.$$

Tähistades puutepunktidevahelistes niidi osades mõjuvad jõud S_1, S_2, S_3 jne., uurime niidi tasakaaluküsimust ühes puutepunktis, näiteks punktis A.

Nimetatud punktis kehtivad järgmised tasakaaluvõrrandid:

$$S_0 \cos\frac{\gamma}{2} + F_1 - S_1 \cos\frac{\gamma}{2} = 0, \tag{17.45}$$

$$R_1 - S_0 \sin\frac{\gamma}{2} - S_1 \sin\frac{\gamma}{2} = 0, \tag{17.46}$$

kus γ tähistab puutepunktidevahelist kesknurka. Seejuures on veel oletatud, et nurk γ on kõikide puutepunktide vahel konstantne.

Silmas pidades, et hõõrdejõud $F_1 = R_1 f$ ja lahendades võrrandid (17.45) ning (17.46) jõu S_1 suhtes, saame

$$S_1 = S_0 \frac{\cos\frac{\gamma}{2} + f\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} - f\sin\frac{\gamma}{2}} = S_0 k, \tag{17.47}$$

kus

$$k = \frac{\cos\frac{\gamma}{2} + f\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} - f\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Analoogiliselt leiame punktis B:

$$S_2 = S_1 k = S_0 k^2,$$

punktis C:

$$S_3 = S_2 k = S_0 k^3,$$

punktis D:

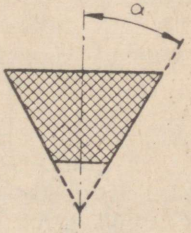
$$S_4 = S_3 k = S_0 k^4$$

ja lõpuks, punktis N:

$$S_n = S_0 k^n.$$

Kõigi n puutepunkti kohta saame seega

$$S_n = S_0 \left(\frac{\cos\frac{\gamma}{2} + f\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} - f\sin\frac{\gamma}{2}} \right)^n.$$



Joon. 638.

Jagades võrrandi paremal poolel esineva murru nimetajat ja lugejat $\cos\frac{\gamma}{2}$-ga, saame

$$\frac{S_n}{S_0} = \left(\frac{1 + f\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}{1 - f\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}} \right)^n. \tag{17.48}$$

Juhul kui käsitletavat tüüpi painduv niit töötab kiilukujulises soones (joon. 638), tuleb hõõrdeteguri f asemel kasutada taandatud hõõrdeteguri $f' = \frac{f}{\sin\alpha}$ [vt. valem (17.21)].

Valemi (17.48) tuletas prof. V. T. Kostitsõn. Täpsemaid andmeid painduva niidiga ülekannete kohta leiab entsüklopeedilises käsiraamatus «Машиностроение» köide 2, lk. 429—487.

XVIII peatükk

LÜLIDE INERTSJÕUD

§ 94. Lülidele mõjuvate inertsjõudude määramine

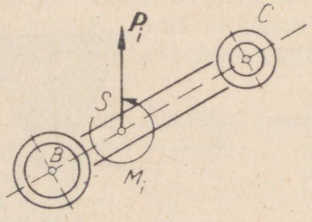
Liikugu lüli BC (joon. 639) tasapinnas, mis on paralleelne tema sümmeetriatasapinnaga. Nagu teoreetilisest mehaanikast teada, võib säärase liikumise üldjuhul taandada kõik lülile mõjuvad inertsjõud lüli masstsentrisse S rakendatud inertsjõuks $\boldsymbol{P}_i$ ja inertsjõudude paariks momendiga M_i. Jõu $\boldsymbol{P}_i$ saab määrata võrrandist

$$\boldsymbol{P}_i = -m_S \boldsymbol{a}_S. \tag{18.1}$$

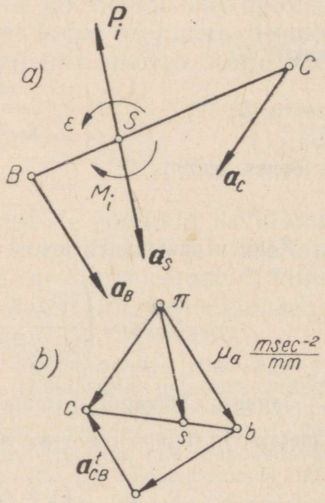
Võrrandis (18.1) tähistab $\boldsymbol{P}_i$ lüli BC inertsjõudu, m_S — lüli BC massi ja $\boldsymbol{a}_S$ — lüli masskeskme S täiskiirendust.

Tasapinnalise mehhanismi lüli inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$ määramiseks tuleb seega teada lüli massi m_S ja masskeskme täiskiirendust või selle projektsioone koordinaattelgedel.

Tehnilises mõõdusüsteemis on keha mass määratud kui tema raskuse G ja raskusjõu kiirenduse



Joon. 639.



Joon. 640.

jagatis. Raskusjõu kiirenduse g võib seejuures lugeda konstantseks ja võrdseks 9,81 m/sek^2. Seega

$$m_S = \frac{G}{g} = \frac{G}{9{,}81}\,\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}}. \tag{18.2}$$

Küllaldase täpsusega võib kasutada ka seost

$$m_S = 0{,}102G.$$

Lüli massi ligikaudse arvväärtuse leidmiseks tehnilises mõõdusüsteemis tuleb seega lüli raskus jagada 10-ga ja saadud tulemusele liita 2%.

Masskeskme täiskiirenduse leidmiseks on mehhanismide uurimisel kõige otstarbekam konstrueerida kiirendusplaan ja kasutada kinemaatikast tuntud sarnasuse (õigemini homoteetsuse) reeglit. Olgu näiteks antud lüli BC (joon. 640, a) ning olgu teada tema punktide B ja C kiirendused $\boldsymbol{a}_B$ ja $\boldsymbol{a}_C$. Mastaabis μ_a koostatud kiirendusplaanis (joon. 640, b) esindavad neid kiirendusi lõigud (πb) ja (πc). Lüli masskeskme S täiskiirenduse saamiseks ühendame punktid b ja c sirgega ning jagame tekkinud joonlõigu punkti s abil samas vahekorras, milles punkt S jagab lüli BC. Nii määratud punkti s poolusega π ühendades saame punkti S täiskiirenduse $\boldsymbol{a}_S$ väärtuse:

$$a_S = \mu_a(\pi s).$$

Lüli inertsjõud $\boldsymbol{P}_i$ on punkti S täiskiirendusega $\boldsymbol{a}_S$ suunalt vastupidine ja tema suuruseks on

$$P_i = m_S a_S.$$

Inertsjõudude paari momendi M_i saab arvutada valemiga

$$M_i = -I_S \varepsilon. \tag{18.3}$$

Toodud valemis tähistab I_S masskeset S läbiva telje suhtes arvutatud lüli inertsmomenti ja ε — lüli nurkkiirendust.

2°. Tasapinnalise mehhanismi lüli inertsmomendi I_S suurus on määratud integraaliga

$$I_S = \int r^2 dm, \tag{18.4}$$

kus dm tähistab lüli massielementi ja r — selle kaugust masskeset S läbivast teljest. Integraal (18.4) tuleb võtta kogu lüli mahu τ ulatuses.

Kui keha tihedus on δ ja mahuelement $d\tau$, siis

$$dm = \delta d\tau.$$

Valemi (18.4) võib nüüd kirjutada järgmisel kujul:

$$I_S = \int \delta r^2 d\tau.$$

Homogeense keha puhul kehtib seos

$$\delta = \frac{m}{\tau} = \text{const.},$$

kus m tähistab keha massi. Inertsmoment avaldub sel juhul järgmiselt:

$$I_S = \frac{m}{\tau} \int r^2 d\tau. \tag{18.5}$$

Valemist (18.5) võib järeldada, et inertsmomendi arvutamiseks peab teadma lüli massi, mille võib arvutada valemiga (18.1), lüli mahtu τ ja integraali $\int r^2 d\tau$ väärtust. Viimane kujutab endast lüli mahu geomeetrilist inertsmomenti ja on määratud lüli kujuga. Keeruka kujuga lülid tuleb inertsmomendi I_S arvutamisel lahutada mõtteliselt lihtsama kujuga algosadeks, nagu silinder, rööptahukas, koonus jne. Seejärel arvutatakse iga saadud lihtsakujulise algosa inertsmoment I_i tema masskeset läbiva telje suhtes. Et leida lüli algosade inertsmomenti kogu lüli masskeset läbiva telje suhtes, tuleb kasutada teoreetilises mehaanikas tõestatud valemit:

$$I_{Si} = I_i + m_i l_i^2,$$

kus I_{Si} tähistab algosa inertsmomenti kogu lüli masskeset S läbiva telje suhtes, I_i — algosa inertsmomenti tema enese masskeset läbiva telje suhtes, m_i — algosa massi ja l_i — kaugust, mis lahutab kogu lüli masskeset S läbivat telge vaadeldava algosa masskeset läbivast teljest.

Kogu lüli inertsmoment I_S saadakse tema algosade inertsmomentide liitmise teel:

$$I_S = \Sigma I_{Si}.$$

Lüli üldist inertsmomenti I_S võib käsitada ka kui lüli massi m korrutist inertsraadiuse ϱ ruuduga:

$$I_S = m\varrho^2. \tag{18.6}$$

Inertsmomentide määramisel võib arvutamise asemel kasutada ka eksperimentaalseid meetodeid, pannes näiteks lüli teatava punkti ümber võnkuma ja määrates võnkeperioodi.

Võrrandis (18.3) esinev nurkkiirendus ε saadakse meile juba tuntud valemist

$$|\varepsilon| = \frac{a^t_{CB}}{l_{BC}},$$

kus a^t_{CB} tähistab lüli BC suhtelise liikumise tangentsiaalkiirendust (joon. 640, *b*) ja l_{BC} — sama lüli pikkust.

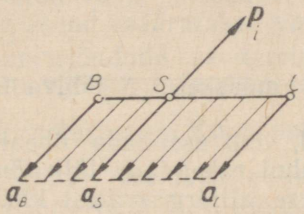
Inertsjõudude paari moment M_i on alati suunatud vastupidi lüli nurkkiirendusega ε.

Sel viisil saab lüli kõik inertsjõud taandada masskeskmesse S rakendatud inertsjõuks $\boldsymbol{P}_i$ ja inertsjõudude paariks, mille moment on M_i (joon. 640, *a*).

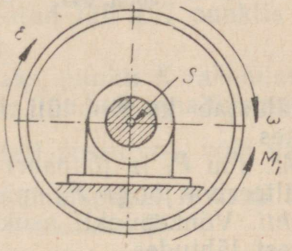
3°. Käsitleme nüüd mehhanismi lülide liikumise erijuhte. Kui lüli liigub translatoorselt, kuid muutuva kiirusega v, saab tema inertsjõu P_i arvutada seosest

$$P_i = -m_S a_S,$$

kus m_S on lüli mass ja a_S — masskeskme kiirendus. Kuna translatoorsel liikumisel lüli nurkkiirendus $\varepsilon = 0$, siis võrdub nulliga ka tema inertsjõudude paari moment. Kõik inertsjõud taanduvad käsitletaval juhul resulteerivaks jõuks P_i, mis on rakendatud lüli masskeskmesse ja suunatud vastupidi kiirendusega a_S (joon. 641).



Joon. 641.



Joon. 642.

Kui lülil puudub muu liikumine peale pöörlemise ümber oma masskeset läbiva telje, siis võrdub tema masskeskme täiskiirendus a_S nulliga. Sel juhul

$$P_i = 0.$$

Kui neis tingimusis lüli nurkkiirendus $\varepsilon \neq 0$, siis taanduvad kõik inertsjõud jõupaariks momendiga M_i, kusjuures

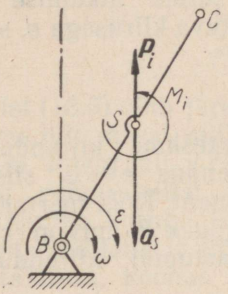
$$M_i = -I_S \varepsilon.$$

Säärane olukord võib esineda näiteks mitteühtlaselt pöörlevates masinaosades (rihmarattad, trumlid, rootorid jt.), mille masskese S asub pöörlemisteljel (joon. 462). Ühtlasel pöörlemisel ei mõju neile seega mingit inertsjõudu ega inertsjõudude momenti (tasapinnalise ülesande puhul).

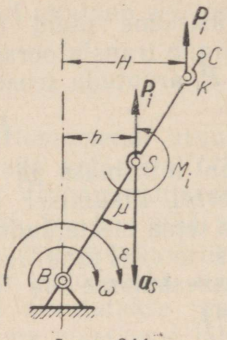
Olukorras, kus lüli BC pöörleb ümber masskeset mitteläbiva telje B (joon. 643), saab tema inertsjõud taandada masskeskmesse rakendatud ning kiirendusele a_S vastu suunatud jõuks P_i, mille suurus on antud valemiga

$$P_i = m_S a_S$$

ja inertsjõudude paariks momendiga M_i, kusjuures



Joon. 643.



Joon. 644.

$$M_i = -I_S\varepsilon.$$

I_S tähistab ka siin lüli inertsmomenti masskeset S läbiva telje suhtes.

4°. Jõu $\boldsymbol{P}_i$ ja jõupaari momendi M_i võib asendada üheainsa resulteeriva jõuga $\boldsymbol{P}_i$, mis tuleb sel juhul rakendada lüli *võnkepunkti*. Võnkepunkti asukoht määratakse alljärgnevatest kaalutlustest lähtudes.

Lüli BC inertsjõudude kogumoment punkti B suhtes (joon. 644) on antud seosega

$$M_B(\boldsymbol{P}_i) = P_i h + I_S\varepsilon, \tag{18.7}$$

kus h tähistab inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$ kandesirge kaugust punktist B.

Inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$ suurus on määratud valemiga

$$P_i = ma_S$$

ja inertsmoment valemiga (18.6)

$$I_S = m\varrho^2.$$

Nagu teada, tähistab ϱ siin lüli inertsraadiust masskeskme S suhtes. Kauguse h saab avaldada järgmiselt:

$$h = l_{BS}\sin\mu.$$

Mis puutub nurkkiirendust ε, siis

$$|\varepsilon| = \frac{a_S^\tau}{l_{BS}} = \frac{a_S \sin\mu}{l_{BS}},$$

kus a_S^τ on punkti S tangentsiaalkiirenduse moodul ja μ — nurk vektori $\boldsymbol{a}_S$ ning sihi SB vahel.

Asendades saadud avaldised valemisse (18.7), leiame, et

$$M_B(\boldsymbol{P}_i) = ma_S\left(l_{BS} + \frac{\varrho^2}{l_{BS}}\right)\sin\mu = P_i\left(l_{BS} + \frac{\varrho^2}{l_{BS}}\right)\sin\mu. \tag{18.8}$$

Kanname nüüd lülile lõigu BK pikkusega

$$l_{BK} = l_{BS} + \frac{\varrho^2}{l_{BS}} = l_{BS} + \frac{I_S}{ml_{BS}}. \qquad (18.9)$$

Võrdus (18.8) kujuneb nüüd järgmiseks:

$$M_B(\boldsymbol{P}_i) = P_i l_{BK} \sin \mu$$

ehk, kuna $l_{BK} \sin \mu = H$ (vt. joon. 644), siis

$$M_B(\boldsymbol{P}_i) = P_i H.$$

Säärasel viisil võib lüli BC kõik inertsjõud taandada üheks ainsaks resultantjõuks $\boldsymbol{P}_i$, mis võrdub lüli massi ja tema masskeskme kiirenduse $\boldsymbol{a}_S$ mooduli korrutisega. See resultantjõud on suunatud vastu kiirendust $\boldsymbol{a}_S$ ja rakendatud lüli BC punktis K, mille asend määratakse valemiga (18.9).

Inertsjõudude taandamine üheks ainsaks, punkti K rakendatud resultantjõuks on mehhanismile mõjuvate jõudude analüüsimisel väga otstarbekas. Kuna suhe $\frac{\varrho^2}{l_{BS}}$ on alati positiivne, võib valemist (18.9) järeldada, et inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$ rakenduspunkt K asub lüli pöörlemisteljest alati kaugemal, kui lüli masskese S.

Punkti K nimetatakse *võnkepunktiks* seetõttu, et ta on füüsikalise pendli teooriast tuntud samanimelise punktiga analoogiline. Nagu teoreetilisest mehaanikast teada, võib võnkeperioodi seisukohast lähtudes füüsikalise pendli asendada matemaatilise pendliga, mille pikkus l on antud valemiga

$$l = \frac{I_0}{mL}. \qquad (18.10)$$

Selles valemis tähistab I_0 füüsikalise pendli inertsmomenti võnkumistelje suhtes, m — pendli massi ja L — masskeskme kaugust võnkumisteljest. Võnkumisteljest kaugusel l olevasse punkti K võib mõtteliselt koondada kogu füüsikalise pendli massi m. Seetõttu võib sinna rakendada ka pendli resulteeriva inertsjõu.

Valemile (18.9) on lihtne anda seose (18.10) kuju. Selleks asendame masskeskme S suhtes arvutatud inertsmomendi lüli pöörlemistelje B suhtes arvutatud inertsmomendiga I_B (joon. 644). Saame:

$$I_B = I_S + ml^2_{BS} = m\varrho^2 + ml^2_{BS},$$

millest järgneb, et

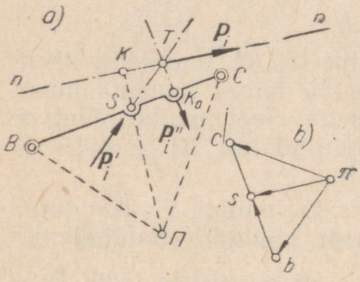
$$\varrho^2 = \frac{I_B}{m} - l^2_{BS}.$$

Asetades saadud ϱ^2 väärtuse valemisse (18.9), leiame soovitud tulemuse:

$$l_{BK} = l_{BS} + \frac{I_B}{ml_{BS}} - l_{BS} = \frac{I_B}{ml_{BS}}. \qquad (18.11)$$

Võrreldes valemeid (18.10) ja (18.11) näeme, et lüli BC võib igal ajahetkel käsitada kui teatavat füüsikalist pendlit, mille võnketelg läbib punkti B.

5°. Uurime nüüd liitliikumisega lüli resulteeriva inertsjõu küsimust.



Joon. 645.

Ülesandeks on leida liitliikumises oleva lüli BC (joon. 645, a) resulteeriva inertsjõu rakenduspunkt või kandesirge. Lüli punktide kiirendused on antud kiirendusplaanis (joon. 645, b). Viimasest leiame ka lüli masskeskme S täiskiirenduse $\boldsymbol{a}_S$:

$$\boldsymbol{a}_S = \mu_a(\overline{\pi s}). \qquad (18.12)$$

Nagu tavaliselt, tähistab μ_a siin kiirendusplaani mastaapi. Seose (18.12) võib kirjutada ka järgmisel kujul

$$\boldsymbol{a}_S = \mu_a[(\overline{\pi b}) + (\overline{bs})],$$

kujutades vektori $(\overline{\pi s})$ kahe vektori $(\overline{\pi b})$ ja $(\overline{bs})$ geomeetrilise summana. Vastavalt sellele saab ka lüli BC resulteerivat inertsjõudu $\boldsymbol{P}_i$ käsitada kui kahe inertsjõu geomeetrilist summat:

$$\boldsymbol{P}_i = [-m\mu_a(\overline{\pi b})] + [-m\mu_a(\overline{bs})]. \qquad (18.13)$$

Geomeetrilise summa esimene liidetav kujutab endast inertsjõudu, mis esineks lüli BC translatoorsel kaasaliikumisel koos punktiga B. Summa teine liidetav on inertsjõud, mis mõjuks juhul, kui lüli pöörleks ümber punkti B. Esimene jõududest $\boldsymbol{P}_i'$ kui translatoorse liikumise inertsjõud on rakendatud lüli masskeskmes S. Oma suunalt on see vektor vastupidine punkti B kiirendusega $\boldsymbol{a}_B$ või kiirendusplaani vastava vektoriga $(\overline{\pi b})$ (joon. 645, b).

Teine jõud kui punkti B ümber pöörleva lüli inertsjõud annab liitudes inertsjõudude paariga resulteeriva jõu, mille suuruseks on $-m\mu_a(\overline{bs})$. Viimane tuleb rakendada pöörlemistelje B suhtes arvutatud võnkepunkti K_0. Nimetatud võnkepunkti asukoht saadakse kas valemist

$$l_{BK_0} = l_{BS} + \frac{I_S}{ml_{BS}} \qquad (18.14)$$

või valemist

$$l_{BK_0} = \frac{I_S}{ml_{BS}}. \tag{18.15}$$

Valemis (18.14) tähistab I_S lüli BS inertsmomenti masskeskme S suhtes. Valemis (18.15) figureeriv inertsmoment I_B on aga arvutatud punkti B suhtes. Punkti K_0 tuleb seega rakendada inertsjõud suurusega $-m\mu_a(\overline{bs})$ [vt. valem (18.13)]. Oma suunalt on see jõud kiirendusega a_{SB} vastupidine, seega orienteeritud vastu kiirendusplaani vektorit $(\overline{bs})$. Tähistame ta tähisega P_i''. Täisinertsjõud P_i on jõudude P_i' ja P_i'' geomeetriline summa:

$$P_i = P_i' + P_i''.$$

Et jõud P_i' ja P_i'' on rakendatud ühele ja samale lülile BC, siis pikendades nende kandesirgeid kuni lõikumiseni punktis T, oleme määranud resulteeriva inertsjõu P_i kandesirge ühe punkti. Seetõttu, et resulteerivat inertsjõudu ennast saab määrata vahetult valemiga

$$P_i = -m_S a_S, \tag{18.16}$$

puudub komponentide P_i' ja P_i'' arvutamiseks vajadus. Piisab sellest, kui määrata punkti T asend lülil BC. Selleks tõmbame läbi punkti S sirge, mis kulgeks rööbiti kiirendusplaani vektoriga $(\overline{\pi b})$, ja läbi punkti K_0 sirge, mis oleks paralleelne vektoriga $(\overline{bs})$. Nimetatud sirged on ilmselt komponentide P_i' ja P_i'' kandesirgeteks ja nende lõikepunkt T määrab resulteeriva inertsjõu P_i rakenduspunkti. Inertsjõudu P_i, mille suuruse ja suuna määrab valem (18.16), võib üldiselt rakendada sirge nn mis tahes punkti (joon. 645, a).

Ülal käsitleti lüli BC liikumist kui translatsiooni koos punktiga B ja sellega liituvat pöörlemist ümber sama punkti. Mõnel juhul on punkti B asemel mugavam kasutada mõnda teist punkti, näiteks punkti C (joon. 645, a). Sel juhul leitakse jõu P_i u u s, punktiga T mitteühtiv rakenduspunkt, mis asub aga samuti sirgel nn. Viimasel paikneb muide ka lüli BC tegelik võnkepunkt — punkt K.

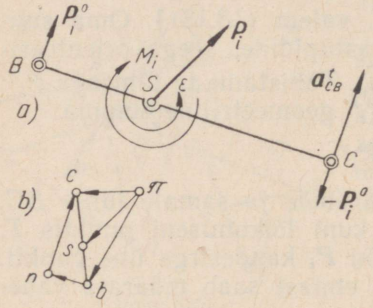
6°. Liitliikumisega lüli inertsjõude saab redutseerida ka teisiti, neid resulteerivaks inertsjõuks koondamata. Alltoodud käsitluses on inertsjõud taandatud jõuks ja l i s a m o m e n t i põhjustavaks jõupaariks.

Meetod on rajatud lüli liitliikumise lahutamisele translatoorseks liikumiseks koos lüli masskeskmega S ja pöörlemiseks ümber masskeset läbiva telje. Translatoorsel liikumisel mõjub kogu lülile seega masskeskme kiirendus a_S, kuna pöörlemine toimub nurkkii-

rendusega ε. Nagu ülal selgus, võib sel juhul lüli täisinertsjõu $\boldsymbol{P}_i$, mille väärtus saadakse seosest

$$P_i = -ma_S,$$

rakendada lüli masskeskmesse S (joon. 646). Lisaks sellele esineb veel inertsjõudude paar, mille moment M_i on määratud valemiga



Joon. 646.

$$M_i = -I\varepsilon. \qquad (18.17)$$

Nurkkiirenduse ε väärtus saadakse kiirendusplaanist. Selleks lahutame kaheks komponendiks kiirendusplaani vektori $(\overline{bc})$ (joon. 646, *b*), mis kujutab vaadeldava lüli punkti C relatiivset täiskiirendust punkti B suhtes. Esimene neist $(\overline{bn})$, mis kulgeb rööbiti lüli BC teljega, on suhtelise liikumise normaalkiirendus. Teine vektor $(\overline{nc})$, ristudes nimetatud teljega, osutub sama liikumise tangentsiaalkiirenduseks. Nurkkiirenduse ε absoluutväärtus on antud valemiga

$$|\varepsilon| = \frac{a^t_{CB}}{l_{BC}} = \frac{\mu_a(nc)}{l_{BC}},$$

kus μ_a tähistab kiirendusplaani mastaapi ja l_{BC} — lüli BC pikkust. Kiirenduse ε suuna saamiseks tuleb tangentsiaalkiirendus $\boldsymbol{a}^t_{CB}$ viia oma rakenduspunkti C. Lihtne on näha, et punkti C kiirendus punkti B suhtes, seega ka lüli BC nurkkiirendus ε, on käesolevas näites suunatud vastupäeva.

Asetades nurkkiirenduse ε leitud väärtuse valemisse (18.17), saame lõplikult

$$|M_i| = \frac{I_S\mu_a(nc)}{l_{BC}}. \qquad (18.18)$$

Juhul kui momendist M_i põhjustatud dünaamiline koormus võetakse vastu kinemaatiliste paaride B ja C elementide poolt, on mugav kasutada järgmist võtet. Momenti M_i võib käsitada kui punktidesse B ja C rakendatud, lüliga BC ristuvate jõudude $\boldsymbol{P}_i^0$ poolt moodustatud jõupaari momenti. Jõudude $\boldsymbol{P}_i^0$ moodul saadakse valemist

$$P_i^0 l_{BC} = |M_i|.$$

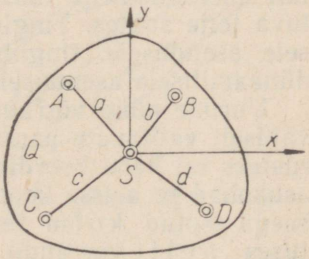
Silmas pidades seost (18.18), võime nüüd kirjutada

$$P_i^0 = \frac{I_S \mu_a (nc)}{l^2_{BC}}.$$

Saadud jõupaar, mille õlaks on l_{BC}, pöörab lüli vastu nurkkiirenduse ε suunda. Kokkuvõttes on lüli BC inertsjõud taandatud seega kolmeks jõuks: masskeskmesse rakendatud jõuks $\boldsymbol{P}_i$ ning punktidesse B ja C rakendatud jõududeks $\boldsymbol{P}_i^0$ ja $-\boldsymbol{P}_i^0$.

§ 95. Asendavate masside meetod

1°. Selle asemel, et taandada lüli inertsjõud üheks jõuks ja jõupaariks või lüli teatavasse punkti rakendatud resulteerivaks inertsjõuks, on mõnedel juhtudel otstarbekam lülile mõjuvad inertsjõud asendada teatavates valitud masspunktides toimivate inertsjõududega. Nimetatud punktideks (nn. *asenduspunktideks*) võivad olla näiteks lülisid ühendavate šarniiride tsentrid. Sel juhul taandub lüli inertsjõudude arvutus teatavatesse punktidesse koondatud massidele mõjuvate inertsjõudude määramiseks ja langeb ära vajadus inertsjõudude momendi ning lüli nurkkiirenduse leidmiseks.



Joon. 647.

Uurime, missugustele tingimustele peavad asenduspunktid vastama, et nendele mõjuvate inertsjõudude süsteem oleks ekvivalentne lähtesüsteemiga. Olgu antud lüli Q (joon. 647), mille sümmeetriatasapind on paralleelne liikumistasapinnaga. Selleks et asenduspunktidesse koondatud masside (asendavate masside) resulteeriv inertsjõud võrduks kogu lüli inertsjõuga, tuleb täita alljärgnevad tingimused:

1) asendavate masside summa peab võrduma kogu lüli massiga;

2) asendavate masside masskese peab ühtima lüli masskeskmega.

Toodud tingimusi rahuldades saadakse nn. *lüli masside staatiline asendus*. Selleks et asendusmasside inertsjõudude resulteeriv jõupaar oleks ekvivalentne lüli inertsjõudude jõupaariga, tuleb lisaks eelmistele täita veel kolmas tingimus. Viimane nõuab, et ühise masskeskme suhtes arvutatud asendavate masside inertsmomentide summa võrduks kogu lüli inertsmomendiga sama telje suhtes. Kõigile kolmele tingimusele vastavat asendust nimetatakse *lüli masside dünaamiliseks asenduseks*.

Ülalkäsitletud staatilise ja dünaamilise asenduse tingimused võib avaldada järgmiselt:

$$\sum_1^n m_i = m, \tag{18.19}$$

$$\sum_1^n m_i x_i = 0, \tag{18.20}$$

$$\sum_1^n m_i y_i = 0, \tag{18.21}$$

$$\sum_1^n m_i (x_i^2 + y_i^2) = I_S. \tag{18.22}$$

Võrrandites (18.19)—(18.22) on kasutatud järgmist tähistust: m_i — asendav mass punktis i; m — lüli kogumass; x_i ja y_i — punkti i koordinaadid masskeset S läbivate telgede suhtes; I_S — lüli inertsmoment masskeset S läbiva, liikumistasapinnaga ristuva telje suhtes. Tingimused (18.19)—(18.21) vastavad staatilisele asendusele, tingimus (18.22) koos eelmise kolmega aga dünaamilisele asendusele.

Uurime nüüd võrrandite (18.19)—(18.22) lahendamisel meelevaldselt valitavate parameetrite arvu küsimust. Otsitavateks suurusteks on kahe koordinaadi kaudu määratavad asenduspunktide asukohad ja neisse koondatavad massid. Iga asenduspunktiga on seega seotud k o l m tundmatut. Nende leidmiseks on meie käsutuses n e l i võrrandit (18.19)—(18.22). Kui tähistada valitud asenduspunktide arvu tähega n, siis meelevaldselt valitavate parameetrite arv p on antud seosega.

$$p = 3n - 4. \tag{18.23}$$

Kui võtta $n = 1$, siis ei saa rahuldada võrrandit (18.22). Valides $n = 2$, saame $p = 2$. Sel juhul võime järelikult ette anda näiteks ühe asenduspunkti mõlemad koordinaadid või asenduspunkti ühe koordinaadi ja ühe asendava massi suuruse. Kui $n = 3$, saame $p = 5$. Meelevaldselt võib käesoleval juhul valida näiteks kahe asenduspunkti asendid ja kolmanda punkti ühe koordinaadi või kahe punkti asendid ja ühe asendava massi. Juhul kui $n = 4$, saame $p = 8$ ja me võime soovi korral valida kas kõik neli asenduspunkti või kolme punkti asendid ja kaks asendavat massi jne.

2°. Käsitleme nüüd tehnilistes arvutustes kõige sagedamini esinevaid masside asendamise juhte. Olgu ülesandeks asendada lüli Q mass m nelja meelevaldsesse punkti A, B, C ja D koondatud

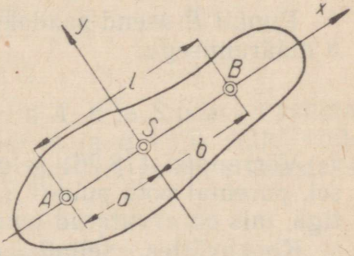
massidega (joon. 647). Lüli masskese asugu punktis S. Seos (18.23) näitab, et meie käsutuses on seejuures 8 meelevaldselt valitavat parameetrit.

Otstarbekas on ette anda punktide A, B, C ja D koordinaadid, s. t. valida sobivad asenduspunktid ja arvutada neisse koondunud massid.

Võrrandid (18.19)—(18.21) kujunevad antud konkreetsel juhul järgmisteks:

$$\left.\begin{aligned} m_A + m_B + m_C + m_D &= m, \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C + m_D x_D &= 0, \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C + m_D y_D &= 0, \\ m_A a^2 + m_B b^2 + m_C c^2 + m_D d^2 &= I_S. \end{aligned}\right\} \qquad (18.24)$$

Võrrandites (18.24) tähistavad m_A, m_B, m_C, m_D punktidesse A, B, C ja D koondatud masse; x_A ja y_A, x_B ja y_B, x_C ja y_C, x_D ja y_D — nimetatud punktide koordinaate masskeset S läbivate koordinaattelgede x ja y suhtes; I_S — lüli inertsmomenti masskeset S läbiva telje suhtes ja a, b, c ning d — vastavalt punktide A, B, C ja D kaugust masskeskmest S. Massid m_A, m_B, m_C ja m_D leitakse, lahendades võrrandite süsteemi (18.24).



Joon. 648.

Edasi käsitleme ülesannet, kus lüli mass tuleb koondada masskeset S läbival sirgel paiknevasse kolme punkti A, B ja S. Antud juhul on otstarbekas valida punkte A, B ja S sisaldav sirge x-teljeks (joon. 648). Võrrandid (18.19)—(18.23) annavad sel juhul

$$m_S + m_A + m_B = m, \quad m_A a - m_B b = 0, \quad m_A a^2 + m_B b^2 = I_S,$$

kusjuures a ja b tähistavad vastavalt punktide A ja B kaugusi masskeskmest S.

Võrrandeid lahendades saame

$$m_A = \frac{I_S}{al}, \qquad m_B = \frac{I_S}{bl}, \quad m_S = m - \frac{I_S}{ab},$$

kus

$$l = a + b.$$

Lüli Q masside (masside kese asub punktis S) koondamiseks ainult k a h t e asenduspunkti A ja B (joon. 648) rakendame võrrandeid:

$$\left.\begin{aligned} m_A + m_B &= m, \\ -m_A a + m_B b &= 0, \\ m_A a^2 + m_B b^2 &= I_S \end{aligned}\right\} \qquad (18.25)$$

Tingimuse (18.23) kohaselt võib käesoleval juhul valida meelevaldselt ainult kaks parameetrit, näiteks ühe asenduspunkti koordinaadid.

Anname ette näiteks punkti A. Punkti B asendi saab sel juhul süsteemi (18.25) lahendamise tulemusena. Arvutades nimetatud võrranditest esialgu asendavad massid m_A ja m_B, saame

$$m_A = \frac{mI_S}{ma^2 + I_S}$$

ja

$$m_B = \frac{m^2a^2}{ma^2 + I_S}.$$

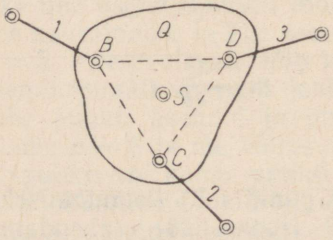
Punkti B asend saadakse teda masskeskmest lahutava kauguse b määramisega:

$$b = \frac{I_S}{ma}. \qquad (18.26)$$

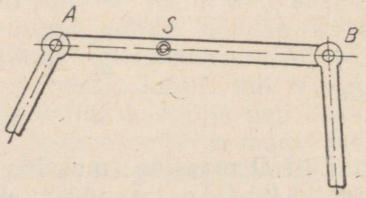
Võrrandist (18.26) selgub, et punkt B asub sirge AS pikendusel, paremal pool punkti S. Tema asukoht ühtib lüli Q võnkepunktiga, mis on arvutatud punkti A kui võnketelje suhtes.

Kokkuvõttes selgub, et masside dünaamiline asendamine nelja meelevaldsesse punkti on alati võimalik. Kolme meelevaldsesse punkti saab masse dünaamiliselt asendada tingimusel, kui need punktid asuvad masskeset läbival sirgel. Lõpuks, masse on võimalik dünaamiliselt asendada kahte, masskeset läbival sirgel olevasse punkti, kusjuures ühe punkti asend on ette kindlaks määratud.

3°. Asendavate masside meetodi rakendamisel on otstarbekas kasutada asenduspunktidena šarniiride tsentreid ja lülide mass-



Joon. 649.



Joon. 650.

keskmeid. Näiteks joonisel 649 kujutatud kolmehaarmeline III klassi grupi (triaadi) aluslüli Q masside asendamisel on ratsionaalne asenduspunktideks valida haarmeid *1*, *2* ja *3* ühendavate šarniiride A, B ja C tsentrid ning lüli masskese S.

Lülide puhul, mille masskese S asub lüli teljel (joon. 650), on asenduspunktidena mugav kasutada šarniiride A ja B tsentreid, masskeset S jne.

Mõningate praktiliste ülesannete lahendamisel piisab, kui rahuldada ainult staatilise asendamise tingimused, s. t. arvestada ainult võrrandeid

$$\sum_1^n m_i = m, \quad \sum_1^n m_i x_i = 0, \quad \sum_1^n m_i y_i = 0.$$

Masse kahte punkti koondades võib sel juhul piirduda tingimustega

$$m_A + m_B = m$$

ja

$$m_A a + m_B b = 0.$$

Toodud võrranditest selgub, et punktid A, B ja S peavad asuma ühel ja samal sirgel, kusjuures punktide A ja B valik sellel võib olla m e e l e v a l d n e. Asendavate masside m_A ja m_B suurusteks on

$$m_A = m\frac{b}{a+b} \quad \text{ja} \quad m_B = m\frac{a}{a+b}.$$

K o l m e a s e n d u s p u n k t i kasutades saame staatilisel asendamisel võrrandid

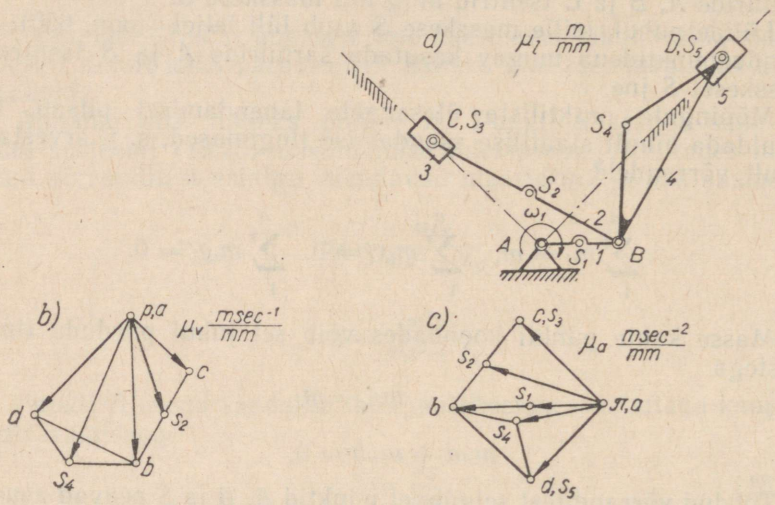
$$\left.\begin{aligned} m_A + m_B + m_C &= m, \\ m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C &= 0, \\ m_A y_A + m_B y_B + m_C y_C &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.27)$$

Viimastest selgub, et punktide A, B ja C asukoht võib olla meelevaldne. Kolme asenduspunkti puhul ei ole staatiline asendamine seega lisatingimustega kitsendatud. Asendavate masside suurused võib arvutada võrranditega (18.27).

Kokkuvõttena saab öelda, et masside staatilisel asendamisel võib nad koondada kas k o l m e m e e l e v a l d s e l t valitud punkti või siis k a h t e, m a s s k e s e t l ä b i v a l s i r g e l a s e t s e v a s s e mis tahes punkti.

Näide 11. Määrata joonisel 651, *a* toodud skeemile vastava kahesilindrilise mootori lülide inertsjõud. Vedav lüli AB liigub etteantud püsiva nurkkiirusega ω_1. Lülide massid ja nende inertsmomendid on teada. Tähega S koos vastava lüliindeksiga on tähistatud lülide masskeskmed.

Konstrueerime mehhanismi kiirusplaani, lähtudes etteantud nurkkiirusest ω_1 (joon. 651, *b*). Seejärel koostame ka kiirendusplaani (joon. 651, *c*). Lülide inertsjõudude suuruse määramiseks korrutame lülide massid kiirendusplaanist leitud kiirendustega.



Joon. 651.

Tähistades lülide masstsentrite kiirendused tähisega a_S (millele liitub teise indeksina veel lüli number) ja kasutades masside tähisena tähte m koos vastava lüli indeksiga, võime kirjutada:

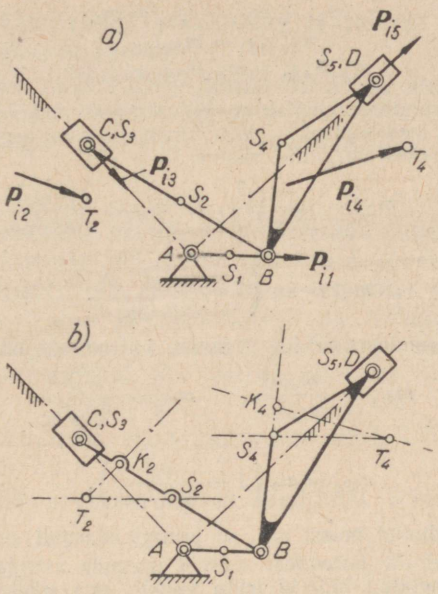
$$P_{i1} = m_1 a_{S1} = m_1 \mu_a (\pi_{S1}),$$
$$P_{i2} = m_2 a_{S2} = m_2 \mu_a (\pi_{S2}),$$
$$P_{i3} = m_3 a_{S3} = m_3 \mu_a (\pi_{S3}),$$
$$P_{i4} = m_4 a_{S4} = m_4 \mu_a (\pi_{S4}),$$
$$P_{i5} = m_5 a_{S5} = m_5 \mu_a (\pi_{S5}),$$

kus μ_a nagu alati tähistab kiirendusplaani mastaapi. Leitud inertsjõudude sihid määratakse kiirendusplaani alusel. Jõud $\boldsymbol{P}_{i1}$ on suunalt vastupidine kiirendusele $\boldsymbol{a}_{S1}$, jõud $\boldsymbol{P}_{i2}$ on vastupidine kiirendusele $\boldsymbol{a}_{S2}$ jne. Resulteerivate inertsjõudude rakenduspunktid leitakse varemkäsitletud meetodiga.

Et lüli *1* pöörleb püsiva nurkkiirusega, on tema inertsjõud $\boldsymbol{P}_{i1}$ rakendatud punktis S_1 (joon. 652, *a*). Lülid *3* ja *5* liiguvad translatoorselt. Järelikult on nende inertsjõud rakendatud masskeskmetesse S_3 ja S_5, mis antud juhul ühtivad punktidega *C* ja *D*.

Liitliikumisega lülidele *2* ja *4* mõjuvate resulteerivate inertsjõudude rakenduspunktide leidmiseks kasutame ülalesitatud meetodit. Selleks määrame lülide *2* ja *4* võnkepunktid K_2 ja K_4, eeldades, et lülide võnketeljeks on punkt *B* (joon. 652, *b*). Saame

$$BK_2 = BS_2 + \frac{I_{S_2}}{m_2 BS_2}$$



Joon. 652.

ja

$$BK_4 = BS_4 + \frac{I_4}{m_4 BS_4},$$

kus I_2 ja I_4 tähistavad lülide *2* ja *4* etteantud inertsmomente nende masskeskmeid S_2 ja S_4 läbivate telgede suhtes.

Lüli *2* inertsjõu rakenduspunkt T_2 leitakse punktist S_2 rööbiti punkti B kiirendusega $\boldsymbol{a}_B$ tõmmatud sirge lõikumisel punktist K_2 lähtuva sirgega. Viimane kulgeb paralleelselt punkti S_2 liikumisel punkti B suhtes toimiva suhtelise kiirendusega $\boldsymbol{a}_{S_2B}$ (joon. 652, *b*). Esimene käsitletud sirgetest on paralleelne kiirendusplaani lõiguga πb, kuna teine kulgeb rööbiti lõiguga bs_2 (joon. 651, *c*). Lüli *4* inertsjõu rakenduspunkt T_4 leitakse analoogiliselt: punktist S_4 tõmmatakse rööpjoon punkti B kiirendusele $\boldsymbol{a}_B$ ja määratakse selle lõikumine punkti K_4 läbiva sirgega, mis kulgeb paralleelselt punkti S_4 liikumisel punkti B suhtes mõjuva suhtelise kiirendusega $\boldsymbol{a}_{S_4B}$ (joon. 652, *b*). Esimene neist sirgetest on rööbiti kiirendusplaani lõiguga πb ja teine — kiirendusplaani lõiguga bs_4 (joon. 651, *c*). Leitud punktidesse T_2 ja T_4 rakendame jõud $\boldsymbol{P}_{i2}$ ja $\boldsymbol{P}_{i4}$ (joon. 652, *a*). Sellega on käsitletava mehhanismi lülidele mõjuvad inertsjõud määratud nii suuruse, suuna kui ka kandesirge poolest.

Kasutame nüüd sama ülesande lahendamiseks asendavate masside meetodit. Antud mehhanismi juures (joon. 651, *a*) on otstarbekas koondada lülide *1* ja *2* massid kolme punkti, sest nimetatud lülide masskeskmed asuvad rotatsioonipaaride tsentreid ühendavatel sirgetel. Lülil *1* valime asenduspunktideks punktid A, B ja S_1. Lüli *2* asenduspunktideks olgu vastavalt B, C ja S_2. Rakendame nüüd valemeid, mis kehtisid asendamisel kolme ühel ja samal sirgel asuvasse punkti. Lüli *1* jaoks saame:

$$m_{A1} + m_{B1} + m_{S1} = m_1,$$
$$m_{A1} l_{AS1} = m_{B1} l_{BS1},$$
$$m_{A1} l^2_{AS1} + m_{B1} l^2_{BS1} = m_1 \varrho_1^2.$$

Ülaltoodud võrrandites tähistab m_1 lüli *1* massi, m koos vastavate indeksitega — asendavaid masse ja ϱ_1 — lüli *1* inertsraadiust tema masskeset läbiva telje suhtes. Lahendades võrrandid, saame:

$$m_{A1} = \frac{m_1 \varrho_1^2}{l_{AS1} l_{AB}}, \qquad m_{B1} = \frac{m_1 \varrho_1^2}{l_{BS1} l_{AB}}$$

ja

$$m_{S1} = m_1 \left(1 - \frac{\varrho_1^2}{l_{AS1} l_{BS1}}\right).$$

Analoogiliselt asendame ka lüli *2* massi. Tulemuseks on

$$m_{B2} = \frac{m_2 \varrho_2^2}{l_{BS2} l_{BC}}, \qquad m_{C2} = \frac{m_2 \varrho_2^2}{l_{CS2} l_{BC}}$$

ja

$$m_{S2} = m_2 \left(1 - \frac{\varrho_2^2}{l_{BS2} l_{CS2}}\right).$$

Punkti A koondunud massi m_{A1} ei pruugi edaspidi enam arvestada, sest nimetatud punktil ei ole kiirendust. Lüli *4* masside asendamine ei too kaasa lihtsustusi, sest nimetatud lülil ei leidu punkte, mis sobiksid hästi asenduspunktideks. Tõepoolest, lülil *4* tuleks valida vähemalt neli asenduspunkti, kuid sobivaid punkte leidub sellel ainult kaks — punktid B ja D.

Pärast masside asendamist tuleb asenduspunktidesse rakendada inertsjõud, mille suurus ja siht määratakse varemkoostatud kiirendusplaani abil. Näiteks lülide *1* ja *2* masside asendamisel tekkinud asendava massi m_B inertsjõu $\boldsymbol{P}_{iB}$ suurus saadakse seosest

$$P_{iB} = m_B a_B = (m_{B1} + m_{B2}) a_B = (m_{B1} + m_{B2}) \mu_a (\pi b),$$

kus m_{B1} ja m_{B2} tähistavad masside m_1 ja m_2 asendamisel punkti B koondatud masse. Jõud $\boldsymbol{P}_{iB}$ on suunatud vastu punkti B kiirendust $\boldsymbol{a}_B$.

Analoogiliselt leiaksime, et lüli *2* masside asendamisel saadud asendavale massile m_C mõjub inertsjõud

$$P_{iC} = m_C a_C = (m_3 + m_{C2}) a_C = (m_3 + m_{C2}) \mu_a (\pi c),$$

kus m_3 tähistab lüli *3* massi ja m_{C2} — massi m_2 asendamisel punkti C koondatud asendavat massi.

XIX peatükk

JÕUDUDE ARVUTUS TASAPINNALISTES MEHHANISMIDES

§ 96. Staatiliselt määratud kinemaatilised ahelad

1°. Mehhanismides mõjuvate jõudude arvutamisel eeldatakse, et vedava lüli liikumisseadus on teada. Samuti oletatakse, et mehhanismi lülide massid ja inertsmomendid on ette antud. Mehha-

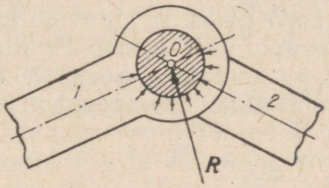
nismide kinetostaatiliseks arvutuseks vajalikke inertsjõude on seega võimalik alati määrata.

Mehhanismides mõjuvate jõudude arvutust alustame kinemaatilistes paarides esinevate reaktsioonide määramisega, s. o. koormuste määramisega, mis tekivad kinemaatiliste elementide kontaktis.

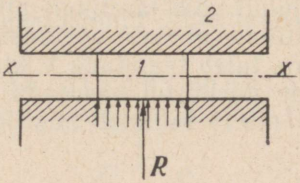
Juhul kui arvutusel jäetakse kõrvale mehhanismis toimivad inertsjõud, nimetatakse arvutust *staatiliseks* jõudude arvutuseks. Kui aga mehhanismile mõjuvate etteantud jõudude hulka arvatakse ka lülide inertsjõud, siis on meil tegemist *dünaamilise* jõudude arvutusega. Kuna arvutusmeetod on mõlemal juhul sama, siis eeldame alljärgnevas, et etteantud jõudude hulka kuuluvad ka inertsjõud, mis on tuntud nii suuruse kui ka sihi ja rakenduspunkti poolest.

Esimeses lähenduses viime arvutuse läbi h õ õ r d e j õ u d u s i d a r v e s t a m a t a.

Hõõrdejõudude arvessevõtmise küsimust käsitletakse allpool (§ 100).

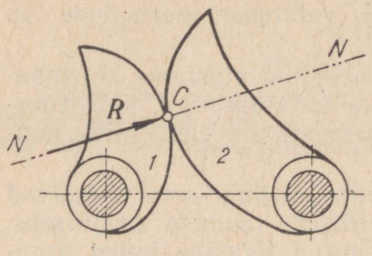


Joon. 653.



Joon. 654.

2°. Uurime nüüd, missugune on reaktsioonide siht tasapinnaliste mehhanismide paarides. Rotatsioonipaaris läbib resulteeriv reaktsioon $\boldsymbol{R}$ šarniiri geomeetrilist tsentrit O (joon. 653). Reaktsiooni siht ja suurus, mis sõltuvad kinemaatilist paari moodustavatele lülidele mõjuvatest jõududest, on tundmatud. Translatsioonipaaris (joon. 654) ristub reaktsioon $\boldsymbol{R}$ paari teljega xx. Seega on käesoleval juhul reaktsioon tuntud sihi poolest. Tema suurus ja rakenduspunkt on tundmatud. Lõpuks IV klassi kõrgemas paaris (joon. 655) on reaktsioon $\boldsymbol{R}$ rakendatud paari elementide kontaktpunktis C. Ta on seejuures sihitud piki profiilidele *1* ja *2* kontaktpunktis C tõmmatud ühist normaali NN. Kõrgemas kinemaatilises paaris on reaktsiooni siht ja rakenduspunkt seega alati teada. Kokkuvõttes võib öelda, et madalamates paarides esinevate reaktsioonide määramisel tuleb alati leida kaks tundmatut suurust. Kõrgemates paarides toimivate reaktsioonide määramine on aga seotud ainult ühe tundmatu leidmisega.



Joon. 655.

3°. Tähistame tasapinnalise kinemaatilise ahela liikuvate lülide arvu tähega n, V klassi paaride arvu tähisega p_5 ja IV klassi paaride arvu — tähisega p_4. Koostame nüüd tingimused, mis näitavad mitmesuguste tasapinnaliste kinemaatiliste ahelate staatilist määratavust. Iga tasaparalleelselt liikuva lüli kohta võib teatavasti kirjutada kolm tasakaaluvõrrandit. Kui säärase liikumisega lülide arv on n, siis kogu ahela kohta saab kirjutada $3n$ tasakaalutingimust. Tundmatute arv V klassi kinemaatilistes paarides on $2p_5$ ja IV klassi paarides — p_4. Kinemaatiline ahel on seega staatiliselt määratud siis, kui on täidetud tingimus

$$3n = 2p_5 + p_4. \tag{19.1}$$

Teatavasti saab kõiki IV klassi paare sisaldavaid kinemaatilisi ahelaid taandada ainult V klassi paare sisaldavateks ahelateks. Üldjuhul võib järelikult piirduda V klassi paare sisaldavate kinemaatiliste ahelate uurimisega. Need grupid, kus esineb IV klassi paare, tuleb taandada V klassi paaridega ahelateks. Seepeale võib nende uurimisel kasutada alljärgnevaid üldisi meetodeid. Tingimus (19.1) kujuneb nüüd järgmiseks:

$$3n = 2p_5$$

ehk

$$n = \frac{2}{3} p_5. \tag{19.2}$$

Staatiliselt määratud ahelates kehtib seega lülide ja kinemaatiliste paaride arvude vahel seos (19.2). Kuna nii n kui ka p_5 saavad olla ainult täisarvud, siis rahuldavad nimetatud seost ainult järgmised lülide ja paaride ühendid:

$$n = 2, 4, 6, 8, \ldots;$$
$$p_5 = 3, 6, 9, 12, \ldots$$

Nagu eelnevast teada (vt. § 21), moodustab esimene ülaltoodud ühenditest, mis koosneb kahest lülist ja kolmest paarist, grupi, mida nimetatakse diaadiks (ehk II klassi grupiks). Teine ühend, mis sisaldab neli lüli ja kuus paari, moodustab kas triaadi (III klassi 3. järgu grupi) või siis IV klassi grupi jne. Selgub, et kõik g r u p p i d e k s nimetatud kinemaatilised ahelad osutuvad s t a a t i l i s e l t m ä ä r a t u i k s. Kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide uurimise meetodeid on seega otstarbekas käsitleda meie poolt varem defineeritud gruppide kaupa. Alustame seda

tööd diaadidest (II klassi gruppidest). Möödaminnes tuleb märkida, et reaalsetes konstruktsioonides mõjuvad nn. tasapinnalistele mehhanismidele rakendatud jõud mitte ühes, vaid mitmes paralleelses tasapinnas. Tehniliste arvutuste valdavas osas eeldatakse siiski, et jõud mõjuvad ühes tasapinnas. Kogu alljärgnev käsitlus on rajatud sellele eeldusele.

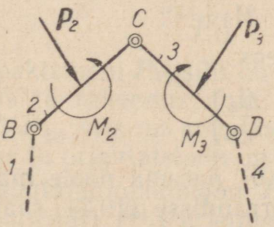
§ 97. Diaadide (II klassi gruppide) kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramine

1°. Olgu antud 1. modifikatsiooni diaad *BCD* (joon. 656). Kasutame järgmisi tähiseid. Lüli, mille külge ühendatakse diaad šarniiri *B* kaudu, on tähistatud numbriga *1*. Lüli *BC* tähistame numbriga *2* ja lüli *CD* — numbriga *3*. Järgnev lüli, mille külge diaad liitub šarniiriga *D*, kannab numbrit *4*. Lüli *k* poolt lülile *l* mõjuva jõu tähistame $\boldsymbol{P}_{kl}$. Jõu $\boldsymbol{P}_k$ momendi punkti *A* suhtes tähistame $M_A(\boldsymbol{P}_k)$. Kahe punkti *A* ja *B* vahelise kauguse tähistame l_{AB} ja lülile *k* mõjuva jõupaari momendi tähisega M_k. Olgu diaad *BCD* (joon. 656) koormatud jõududega $\boldsymbol{P}_2$ ja $\boldsymbol{P}_3$ ning momentidega M_2 ja M_3. Ülesandeks on määrata reaktsioonid kinemaatilistes paarides.

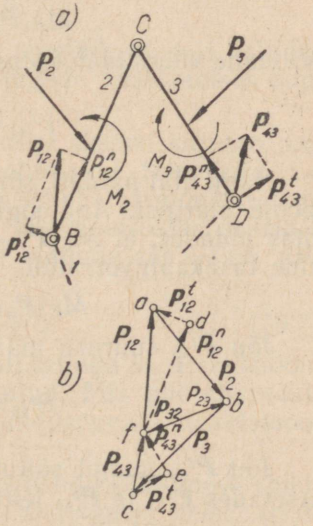
Ülesande võib lahendada j õ u d u d e p l a a n i m e e t o d i l. Rakendame punktidesse *B* ja *D* esialgu veel tundmatud reaktsioonid $\boldsymbol{P}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}_{43}$ ning koostame diaadi *BCD* (joon. 657, *a*) tasakaaluvõrrandid. Selleks kirjutame, et grupile mõjuvate jõudude summa võrdub nulliga. Saame

$$\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}_{43} = 0. \qquad (19.3)$$

Selles võrrandis on jõud $\boldsymbol{P}_2$ ja $\boldsymbol{P}_3$ tuntud nii suuruse, suuna kui



Joon. 656.



Joon. 657.

ka rakenduspunkti poolest. Reaktsioonidest $\boldsymbol{P}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}_{43}$ on teada ainult nende rakenduspunktid. Reaktsioonide suuruse leidmiseks lahutame nad piki ja risti vastavat lüli sihitud komponentideks. Esimese komponendi tähistame indeksiga «*n*» ja teise — indeksiga «*t*». Seega siis

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{P}_{12} &= \boldsymbol{P}^n{}_{12} + \boldsymbol{P}^t{}_{12}, \\ \boldsymbol{P}_{43} &= \boldsymbol{P}^n{}_{43} + \boldsymbol{P}^t{}_{43}. \end{aligned}\right\} \tag{19.4}$$

Ristkomponentide $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}^t{}_{43}$ suurused saab vahetult leida lülide *2* ja *3* kohta eraldi koostatud tasakaaluvõrranditest. Uurime algul lüli *2* tasakaalu küsimust. Nimetatud lülile mõjuvad järgmised jõud ja momendid: jõud $\boldsymbol{P}_2$, reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{12}$ komponendid $\boldsymbol{P}^n{}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$, reaktsioon $\boldsymbol{P}_{32}$ ja moment M_2. Koostame momentide tasakaaluvõrrandi punkti C suhtes. Kuna jõu $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ suund on esialgu tundmatu, siis omistame võrrandi koostamisel tema momendile meelevaldse märgi. Kui see jõud hiljem arvutuse tulemusel osutub negatiivseks, siis on ilmne, et tema tegelik suund on esialgu valitud suunaga vastupidine. Tasakaaluvõrrand kujuneb järgmiseks

$$M_C(\boldsymbol{P}_2) + M_C(\boldsymbol{P}^t{}_{12}) + M_2 = 0,$$

sest et

$$M_C(\boldsymbol{P}^n{}_{12}) = 0 \quad \text{ja} \quad M_C(\boldsymbol{P}_{32}) = 0.$$

Edasi, kuna

$$M_C(\boldsymbol{P}^t{}_{12}) = P^t{}_{12} l_{BC},$$

siis võime äsjakoostatud võrrandile anda järgmise kuju

$$M_C(\boldsymbol{P}_2) + P^t{}_{12} l_{BC} + M_2 = 0.$$

Viimane võimaldab hõlpsasti määrata jõu $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ suuruse. Saame

$$P^t{}_{12} = -\left[\frac{M_C(\boldsymbol{P}_2)}{l_{BC}} + \frac{M_2}{l_{BC}}\right]. \tag{19.5}$$

Nagu ülal näidati, sõltub jõu $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ suund võrrandi (19.5) parema poole märgist. Analoogiliselt lüli *3* tasakaalu käsitledes ja silmas pidades, et $M_C(\boldsymbol{P}^n{}_{43}) = 0$ ning $M_C(\boldsymbol{P}_{23}) = 0$, saame momentide tasakaaluvõrrandi

$$M_C(\boldsymbol{P}_3) + M_C(\boldsymbol{P}^t{}_{43}) + M_3 = 0.$$

Jõu $\boldsymbol{P}^t{}_{43}$ suuruse määrab seekord seos

$$P^t{}_{43} = -\left[\frac{M_C(\boldsymbol{P}_3)}{l_{CD}} + \frac{M_3}{l_{CD}}\right]. \tag{19.6}$$

Jõu $\boldsymbol{P}^t{}_{43}$ suund sõltub võrrandi (19.6) parema poole märgist. Asetades $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}^t{}_{43}$ leitud suurused võrrandisse (19.3), saame:

$$\boldsymbol{P}^n{}_{12} + \boldsymbol{P}^t{}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}^n{}_{43} + \boldsymbol{P}^t{}_{43} = 0.$$

Selles võrrandis on nüüd tundmatuteks ainult reaktsioonide P_{12} ja P_{43} piki vastavate lülide telgi suunatud komponendid (pikikomponendid) P^n_{12} ja P^n_{43}. Nende suurusi on lihtne määrata jõuplaani konstrueerimise teel. Valime jõudude mastaabi μ_P. Lähtudes meelevaldsest punktist a, kanname joonisele jõu P_2 ning liidame sellega kohe jõu P_3. Samas mastaabis konstruktsiooni jätkates kanname plaani võrranditega (19.5) ja (19.6) arvutatud jõud P^t_{12} ja P^t_{43}. Need jõud kulgevad risti lülide BC ja CD telgedega. Seepeale konstrueerime punktist d paralleelsirge lüli BC teljele ja punktist e — paralleelsirge lüli CD teljele. Sirgete lõikepunkt f määrab pikikomponentide P^n_{12} ja P^n_{43} suuruse. Täisreaktsioonid P_{12} ja P_{43} võib arvutada võrrandite (19.4) põhjal kui vastavate komponentide geomeetrilised summad. Jõuplaanis saadakse reaktsioon P_{12}, kui ühendada omavahel punktid f ja a; teise reaktsiooni P_{43} leidmiseks tuleb ühendada punktid c ja f. Lüli *2* toimel lülil *3* tekkiva reaktsiooni P_{23} leidmiseks kirjutame, et lülile *3* mõjuvad jõud on tasakaalus:

$$P_{43} + P_3 + P_{23} = 0.$$

Selles võrrandis on reaktsioon P_{23} ainsaks tundmatuks jõuks. Tema määramiseks konstrueerime toodud võrrandile vastava jõudude kolmnurga. Joonisel 657, *b* kujutatud jõuplaanis piisab selleks punktide f ja b ühendamisest sirglõiguga. Reaktsioon P_{32} võrdub suuruse poolest ilmselt reaktsiooniga P_{23}, kuid on vastupidiselt orienteeritud. Tema leidmiseks võib kasutada ka lüli *2* tasakaalu väljendavat võrrandit:

$$P_{12} + P_2 + P_{32} = 0.$$

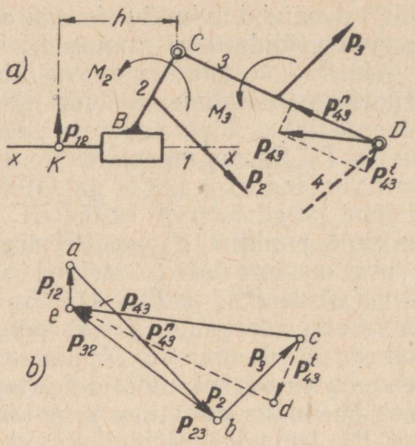
Jõuplaanis kujutab vektorit P_{32} sama sirglõik bf, mis esindas reaktsiooni P_{23}, kuid teda tuleb seekord lugeda vastupidises suunas.

2°. Diaadi 2. modifikatsiooni kinemaatilist skeemi kujutab joonis 658, *a*. Translatsioonipaari telg on tähistatud tähtedega *xx*. Grupile mõjuvad välisjõud P_2 ja P_3 ning jõupaarid momentidega M_2 ja M_3. Määrame jõuplaani meetodiga kinemaatilistes paarides tekkivad reaktsioonid. Diaadile mõjuvate jõudude tasakaalu väljendab vektorvõrrand

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \qquad (19.7)$$

Reaktsiooni P_{12} siht on teada: ta on risti teljega *xx*. Reaktsiooni suurus ja rakenduspunkt on aga tundmatud. Mis puutub reaktsiooni P_{43}, siis on siin teada ainult rakenduspunkt. Reaktsiooni suurus ja orientatsioon on tundmatud.

Lahutame reaktsiooni P_{43} kaheks komponendiks. Esimese (pikikomponendi) P^n_{43} orienteerime piki lüli CD telge ja teise (ristkomponendi) P^t_{43} — risti nimetatud teljega. Seega



Joon. 658.

$$\boldsymbol{P}_{43} = \boldsymbol{P}^n{}_{43} + \boldsymbol{P}^t{}_{43}.$$

Jõu $\boldsymbol{P}_{43}$ suuruse saame hõlpsasti määrata, võrrutades lülile *3* mõjuvate momentide summa nulliga. Momendid arvutame seejuures punkti *C* suhtes. Saame:

$$M_C(\boldsymbol{P}_3) + M_C(\boldsymbol{P}^t{}_{43}) + M_3 = 0,$$

sest et

$$M_C(\boldsymbol{P}_{23}) = 0 \quad \text{ja} \quad M_C(\boldsymbol{P}^n{}_{43}) = 0.$$

Et aga

$$M_C(\boldsymbol{P}^t{}_{43}) = P^t{}_{43} l_{CD},$$

siis saame lõplikult:

$$P^t{}_{43} = -\left[\frac{M_C(\boldsymbol{P}_3)}{l_{CD}} + \frac{M_3}{l_{CD}}\right].$$

Jõu $\boldsymbol{P}^t{}_{43}$ suund on määratud momentide $M_C(\boldsymbol{P}_3)$ ja M_3 summa märgiga. Asendades jõu $\boldsymbol{P}_{43}$ võrrandis (19.7) tema komponentidega, saame:

$$\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}^n{}_{43} + \boldsymbol{P}^t{}_{43} = 0.$$

Selle võrrandi ainsateks tundmatuteks on jõud $\boldsymbol{P}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}^n{}_{43}$. Nende määramine on jõuplaani abil lihtne. Kanname joonisele jõu $\boldsymbol{P}_2$, lähtudes meelevaldselt valitud punktist *a* ja kasutades meelevaldset jõu mastaapi μ_P (joon. 658, *b*). Liidame jõu $\boldsymbol{P}_3$, mis tuleb joonestada samas mastaabis. Punktist *c* lähtudes kanname

nüüd plaani lüli CD teljega ristuva tuntud jõu P^t_{43}. Edasi, lähtudes punktist d, joonestame jõu P^n_{43} sihilise sirge, s. t. rööpjoone lüli CD teljele. Nüüd tõmbame punktist a lähtudes teljega xx ristuva sirge, mis fikseerib jõu P_{12} sihi. Konstrueeritud sirgete lõikepunkt e määrab otsitavad reaktsioonid P_{12} ja P_{43}. Esimest kujutab jõuplaani lõik ea ja teist — lõik ce. Reaktsioon P_{23} ja temaga võrdne, kuid vastupidiselt suunatud reaktsioon P_{32} esinevad jõuplaanis lõigu be näol.

Jääb veel määrata jõu P_{12} rakenduspunkt K juhtsirgel xx (joon. 658, a). Selleks koostame lüli 2 koormavate, punkti C suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi. Saame

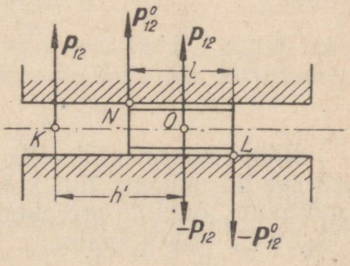
$$M_C(P_2) + M_C(P_{12}) + M_2 = 0,$$

sest et $M_C(P_{23}) = 0$. Selles võrrandis on ainsaks tundmatuks jõu P_{12} õlg h (joon. 658, a), mille saame alljärgnevast seosest:

$$h = -\left[\frac{M_C(P_2)}{P_{12}} + \frac{M_2}{P_{12}}\right]. \qquad (19.8)$$

Õla h asend punkti C suhtes on määratud võrrandi (19.8) parema poole märgiga.

Jõu P_{12} rakenduspunkt K võib üldjuhul sattuda väljapoole liugurit, nagu näidatud joonisel 658, a. Sel puhul on ilmne, et liugurile mõjub nimetatud jõu toimel moment, mis püüab liugurit juhtpindade vahel kipata. Kippava momendi määramiseks kanname jõu P_{12} rakenduspunkti üle liuguri tsentrisse O (joon. 659). Liugurile mõjub nüüd jõud P_{12} ja jõupaar, mille momendi absoluutsuurus on



Joon. 659.

$$M = P_{12}h'.$$

Siinjuures tähistab h' punkti K kaugust liuguri tsentrist O. Jõupaari momendiga M on mugav esitada liuguri servadele punktides N ja L rakendatud jõudude P^0_{12} ja $-P^0_{12}$ näol (joon. 659). Kui tähistada liuguri pikkus tähega l, siis saame jõu P^0_{12} suuruseks:

$$P^0_{12} = \frac{M}{l} = P_{12}\frac{h'}{l}.$$

Liugurile mõjuvad seega kokku kolm jõudu: jõud P_{12}, mis on rakendatud punktis O, ja momenti M põhjustavad jõud P^0_{12} ning $-P^0_{12}$, mille rakenduspunktideks on vastavalt N ja L.

3°. Diaadi 3. modifikatsiooni kinemaatiline skeem on kujutatud joonisel 660, a. Translatsioonipaari moodustavad lülid liigu-

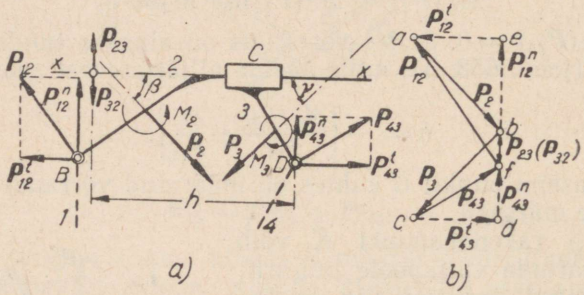
vad piki telge *xx*. Grupile mõjuvad välisjõud P_2 ja P_3 ning paarid momentidega M_2 ja M_3.

Käsitletavale diaadile mõjuvate jõudude tasakaaluvõrrand kujuneb järgmiseks (joon. 660, *a*):

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \tag{19.9}$$

Lahutame reaktsioonid P_{12} ja P_{43} teljega *xx* paralleelseteks ja ristuvateks komponentideks. Saame

$$P_{12} = P^n_{12} + P^t_{12},$$
$$P_{43} = P^n_{43} + P^t_{43}.$$



Joon. 660.

Rööpkomponentide P^t_{12} ja P^t_{43} leidmiseks koostame tasakaaluvõrrandid mõlema lüli kohta eraldi. Kirjutame, et lülidele *2* ja *3* mõjuvate jõudude projektsioonide summa teljel *xx* võrdub nulliga.

Lüli *2* kohta saame:

$$P^t_{12} + P_2 \cos\beta = 0, \tag{19.10}$$

sest et jõudude P^n_{12} ja P_{32} projektsioon *x*-teljel on null.

Lüli *3* kohta võime kirjutada:

$$P^t_{43} + P_3 \cos\gamma = 0, \tag{19.11}$$

sest et jõudude P^n_{43} ja P_{23} projektsioon *x*-teljel on null. Võrranditest (19.10) ja (19.11) leiame rööpkomponendid P^t_{12} ja P^t_{43}:

$$P^t_{12} = -P_2 \cos\beta; \quad P^t_{43} = -P_3 \cos\gamma.$$

Leitud väärtused asetame võrrandisse (19.9). Saame:

$$P^n_{12} + P^t_{12} + P_2 + P_3 + P^n_{43} + P^t_{43} = 0.$$

Selles võrrandis on ainsateks tundmatuteks jõud P^n_{12} ja P^n_{43}. Nende määramiseks tuleb koostada jõuplaan. Valime meelevaldse mastaabi μ_P ja lähtepunkti *a* (joon. 660, *b*). Kanname joonisele

jõu P_2 ja liidame sellele otsekohe ka jõu P_3. Edasi, lähtudes punktist *c*, kanname joonisele tuntud jõu P^t_{43} ning punktist *a* lähtudes konstrueerime tuntud jõu P^t_{12}. Mõlemad jõud kulgevad rööbiti teljega *xx*. Punktide *d* ja *e* ühendamine sirgega annab lõigu *de*, mis kujutab samasihiliste jõudude P^n_{12} ja P^n_{43} summat. Nimetatud jõudude teineteisest eraldamiseks koostame punkti *D* suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi kogu diaadi kohta

$$M_D(P^t_{12}) + M_D(P^n_{12}) + M_D(P_2) + M_D(P_3) + M_2 + M_3 = 0. \tag{19.12}$$

Toodud võrrandiga võib arvutada jõu P^n_{12} suuruse. Kandes saadud arvutustulemuse lõigu *fe* näol jõuplaani sirgele *de*, selgub, et jõudu P^n_{43} kujutab ülejäänud lõik *df*. Täisreaktsioonile P_{12} vastab jõuplaanis lõik *fa*, täisreaktsioonile P_{43} — lõik *cf* ja võrdseid, kuid suunalt vastupidiseid reaktsioone P_{23} ning P_{32} kujutab lõik *bf*. Kõik need jõud on jõuplaanis antud mastaabis μ_P.

Jõu P_{23} rakenduspunkti *K* leidmiseks koostame lülile *3* mõjuvate momentide tasakaaluvõrrandi punkti *D* suhtes. Saame, silmas pidades, et $M_D(P_{43}) = 0$:

$$M_D(P_{23}) + M_D(P_3) + M_3 = 0. \tag{19.13}$$

Võrrandis (19.13) figureerib ainsa tundmatuna jõu P_{23} õlg *h*, mis esineb momendi $M_D(P_{23})$ avaldises. Määrame selle õla, kirjutades, et

$$h = -\left[\frac{M_D(P_3)}{P_{23}} + \frac{M_3}{P_{23}}\right].$$

Nagu diaadi 2. modifikatsiooni käsitledes näidati, võib liuguri täisreaktsiooni P_{23} asendada liuguri tsentrisse rakendatud jõuga P_{23}, millega liituvad paari moodustavad jõud P^0_{23} ja $-P^0_{23}$ (vt. joon. 659).

4°. Diaadi 4. modifikatsiooni kinemaatilist skeemi kujutab joonis 661, *a*. Ühe translatsioonipaari teljeks on *xx*, teise translatsioonipaari teljeks *yy*. Gruppi koormavad jõud P_2 ja P_3 ning jõupaarid momentidega M_2 ja M_3.

Antud grupile mõjuvate jõudude tasakaalutingimus kujuneb järgmiseks:

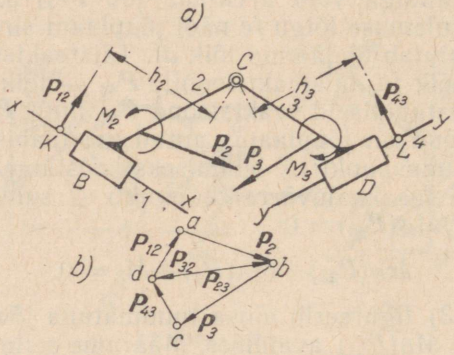
$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \tag{19.14}$$

Võrrandis (19.14) esinevate reaktsioonide P_{12} ja P_{43} sihid on meile teada (joon. 661, *a*). Esimene neist on risti teljega *xx*, teine ristub teljega *yy*. Reaktsioonide suurused on aga tundmatud.

Reaktsioonide suurused saab leida jõuplaani abil. Lähtudes meelevaldsest punktist *a*, kanname plaani mastaabis μ_P joonestatud jõu P_2. Liidame sellele samas mastaabis konstrueeritud jõu P_3. Läbi punkti *a* tõmbame teljega *xx* ristuva sirge, määrates

sellega jõu P_{12} sihi. Lähtudes nüüd punktist *c*, konstrueerime ristsirge teljele *yy*, mis fikseerib reaktsiooni P_{43} sihi. Otsitavate reaktsioonide suurus on määratud sirgete lõikepunktiga *d*. Reaktsiooni P_{12} kujutab lõik *da*, reaktsiooni P_{43} — lõik *cd*. Sarniiris *C* mõjuvatele reaktsioonidele P_{23} ja P_{32} vastab lõik *bd* ja nende leidmiseks võib kasutada mõlema lüli tasakaalutingimusi, s. t. võrrandeid

$$P_{32} + P_2 + P_{12} = 0,$$
$$P_{23} + P_3 + P_{43} = 0.$$



Joon. 661.

Kõik reaktsioonid on jõuplaanis kujutatud mastaabis μ_P.

Reaktsioonide P_{12} ja P_{43} rakenduspunktide *K* ja *L* leidmiseks koostame mõlema lüli kohta eraldi punkti *C* suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi. Saame

$$M_C(P_2) + M_C(P_{12}) + M_2 = 0$$

ja

$$M_C(P_3) + M_C(P_{43}) + M_3 = 0,$$

sest et

$$M_C(P_{32}) = 0 \quad \text{ja} \quad M_C(P_{23}) = 0.$$

Et aga

$$M_C(P_{12}) = P_{12}h_2 \quad \text{ja} \quad M_C(P_{43}) = P_{43}h_3,$$

siis

$$h_2 = -\left[\frac{M_C(P_2)}{P_{12}} + \frac{M_2}{P_{12}}\right]$$

ja

$$h_3 = -\left[\frac{M_C(P_3)}{P_{43}} + \frac{M_3}{P_{43}}\right].$$

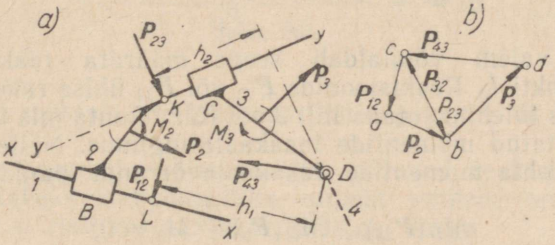
Viimased võrrandid määravadki reaktsioonide P_{12} ja P_{43} rakenduspunktid K ja L.

5°. Diaadi 5. modifikatsiooni kinemaatiline skeem on toodud joonisel 662, *a*. Translatsioonipaaride teljed on tähistatud vastavalt *xx* ja *yy*. Grupile mõjuvad välisjõud P_2 ja P_3 ning jõupaarid momentidega M_2 ja M_3.

Grupile rakendatud jõudude tasakaaluvõrrandiks on

$$P_{12} + P_2 + P_3 + P_{43} = 0. \qquad (19.15)$$

Võrrandis (19.15) esinevatest reaktsioonidest on P_{12} oma suunalt teada — ta ristub teljega *xx* (joon. 662, *a*). Punktis D rakendatud reaktsiooni P_{43} suurus ja orientatsioon on aga tund-



Joon. 662.

matud. Võrrandis (19.15) on seega kokku kolm tundmatut suurust, mis tulevad määrata. Reaktsioonide P_{12} ja P_{43} määramiseks kirjutame lülide *2* ja *3* kohta eraldi tasakaaluvõrrandid. Saame

$$P_{12} + P_2 + P_{32} = 0 \quad \text{ja} \quad P_{23} + P_3 + P_{43} = 0.$$

Et lülid *2* ja *1* ning *2* ja *3* on omavahel seotud translatsioonipaaridega, siis on ka reaktsioonide P_{12} ja P_{32} sihid määratud: reaktsioon P_{12} ristub juhtsirgega *xx* ja reaktsioon P_{32} — juhtsirgega *yy*.

Mis puutub käsitletavate reaktsioonide suurusi, siis on need jõuplaani abil hõlpsasti määratavad. Lähtudes meelevaldsest punktist *a* (joon. 662, *b*) ja kasutades meelevaldset mastaapi μ_P, joonestame kõigepealt jõu P_2. Seepeale tõmbame punktidest *a* ja *b* telgedega *xx* ning *yy* ristuvad sirged. Viimaste lõikepunkt *c* määrab reaktsioonid P_{32} ja P_{12}. Esimest kujutab lõik *bc* ja teist lõik *ca*. Määranud reaktsiooni P_{32}, saame lüli *3* kohta ülaltoodud tasakaaluvõrrandit kasutades hõlpsasti leida reaktsiooni P_{43}. Selleks

kanname jõuplaani punktist b lähtuva lõigu bd näol etteantud jõu $\boldsymbol{P}_3$ ja ühendame omavahel punktid d ning c. Lõik dc kujutab reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{43}$ mastaabis μ_P. Reaktsioonile $\boldsymbol{P}_{23}$ vastab juba varem konstrueeritud lõik cb.

Reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{12}$ rakenduspunkti leidmiseks koostame kogu gruppi koormavate momentide tasakaaluvõrrandi punkti D suhtes. Silmas pidades, et $M_D(\boldsymbol{P}_{43}) = 0$, saame

$$M_D(\boldsymbol{P}_{12}) + M_D(\boldsymbol{P}_2) + M_D(\boldsymbol{P}_3) + M_2 + M_3 = 0. \qquad (19.16)$$

Võrrandis esineva momendi $M_D(\boldsymbol{P}_{12})$ võib kirjutada järgmisel kujul:

$$M_D(\boldsymbol{P}_{12}) = P_{12}h_1.$$

Asetades $M_D(\boldsymbol{P}_{12})$ avaldise momentide võrrandisse (19.16), saame otsitava õla pikkuse:

$$h_1 = -\frac{M_D(\boldsymbol{P}_2) + M_D(\boldsymbol{P}_3) + M_2 + M_3}{P_{12}}.$$

Toodud valem võimaldab seega määrata reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{12}$ rakenduspunkti L. Reaktsioonide $\boldsymbol{P}_{23}$ või $\boldsymbol{P}_{32}$ ühise rakenduspunkti K saamiseks tuleb kirjutada lüli *2* või lüli *3* kohta mis tahes punkti suhtes arvutatud momentide tasakaalutingimus. Näiteks kirjutades lüli *3* kohta momentide tasakaaluvõrrandi punkti D suhtes, saame:

$$M_D(\boldsymbol{P}_{23}) + M_D(\boldsymbol{P}_3) + M_3 = 0,$$

sest et $M_D(\boldsymbol{P}_{43}) = 0$. Silmas pidades, et $M_D(\boldsymbol{P}_{23}) = P_{23}h_2$, võime nüüd avaldada:

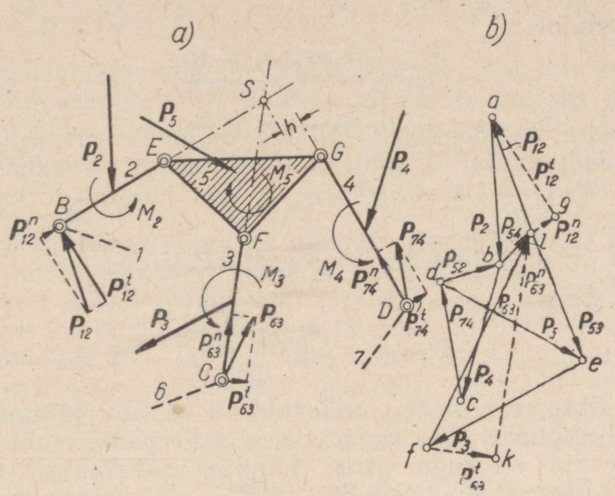
$$h_2 = -\frac{M_D(\boldsymbol{P}_3) + M_3}{P_{23}}.$$

Sellega on reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{23}$ rakenduspunkt K määratud. Mis puutub reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{32}$, siis võrdub see suuruselt eelmisega, kuid on suunalt vastupidine.

§ 98. Triaadide kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramine

1°. Triaadide (III klassi gruppide) kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramiseks on kõige sobivam kasutada *jõuplaani meetodit koos eripunktide rakendamisega*. Esitame alljärgnevas selle meetodi.

Olgu antud triaad (kolmehaarmeline III klassi grupp) $BCDEFG$ (joon. 663, *a*), millele mõjuvad etteantud jõud $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{P}_3$, $\boldsymbol{P}_4$ ja $\boldsymbol{P}_5$ ning jõupaarid momentidega M_2, M_3, M_4 ja M_5. Ülesan-



Joon. 663.

deks on leidá reaktsioonid kinemaatilistes paarides *B, C, D, E, F* ja *G*.

Lahutame haarmete välispaarides mõjuvad reaktsioonid $\boldsymbol{P}_{12}$, $\boldsymbol{P}_{63}$ ja $\boldsymbol{P}_{74}$ kaheks komponendiks, millest esimene on suunatud piki ja teine — risti vastava haarme telge. Seega

$$\boldsymbol{P}_{12} = \boldsymbol{P}^n{}_{12} + \boldsymbol{P}^t{}_{12},$$
$$\boldsymbol{P}_{63} = \boldsymbol{P}^n{}_{63} + \boldsymbol{P}^t{}_{63}$$

ja

$$\boldsymbol{P}_{74} = \boldsymbol{P}^n{}_{74} + \boldsymbol{P}^t{}_{74}.$$

Seame endale ülesandeks ülaltoodud komponentide leidmise. Kirjutame selleks kõikide lülile *2* mõjuvate momentide tasakaaluvõrrandi, arvutades need momendid punkti *E* suhtes. Kui veel arvesse võtta, et $M_E(\boldsymbol{P}_{52}) = 0$ ja $M_E(\boldsymbol{P}^n{}_{12}) = 0$, siis saame:

$$M_2 + M_E(\boldsymbol{P}^t{}_{12}) + M_E(\boldsymbol{P}_2) = 0.$$

Sellest võrrandist võib leida reaktsiooni $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ suuruse:

$$P^t{}_{12} = -\frac{M_E(\boldsymbol{P}_2) + M_2}{l_{BE}}.$$

Nüüd, arvutades kõik lülile *3* mõjuvad momendid punkti *F* suhtes ja kirjutades nende tasakaaluvõrrandi, leiame reaktsiooni $\boldsymbol{P}^t{}_{63}$. Arvesse võttes, et $M_F(\boldsymbol{P}_{53}) = 0$ ja $M_F(\boldsymbol{P}^n{}_{63}) = 0$, saame:

$$M_3 + M_F(\boldsymbol{P}^t{}_{63}) + M_F(\boldsymbol{P}_3) = 0.$$

Siit järgneb, et

$$P^t_{63} = -\frac{M_F(P_3) + M_3}{l_{CF}}.$$

Kirjutades analoogiliselt lülile 4 mõjuvate momentide tasakaaluvõrrandi punkti G suhtes, võime määrata reaktsiooni P^t_{74}. Kuna $M_G(P_{54}) = 0$ ja $M_G(P^n_{74}) = 0$, siis kujuneb tasakaaluvõrrand järgmiseks:

$$M_4 + M_G(P^t_{74}) + M_G(P_4) = 0$$

ja sellest järgneb, et

$$P^t_{74} = -\frac{M_G(P_4) + M_4}{l_{DG}}.$$

Nüüd fikseerime kahe meelevaldselt valitud juhtme telgede lõikumisel eripunkti S ja kirjutame, et selle punkti suhtes arvutatud momendid on kogu grupi ulatuses tasakaalus. Seejuures võtame arvesse, et jõududel P^n_{12} ja P^n_{63} puudub punkti S suhtes moment. Saame:

$$M_S(P_2) + M_S(P_3) + M_S(P_4) + M_S(P_5) + M_S(P^t_{12}) + M_S(P^t_{63}) + M_S(P^t_{74}) + M_S(P^n_{74}) + M_2 + M_3 + M_4 + M_5 = 0. \quad (19.17)$$

Kuna me juba varem määrasime reaktsioonid P^t_{12}, P^t_{63} ja P^t_{74}, siis on võrrandi (19.17) ainsaks tundmatuks reaktsioon P^n_{74}, mille moment punkti S suhtes on antud seosega $M_S(P^n_{74}) = P^n_{74}h$. Võrrandist (19.17) saame järelikult selle reaktsiooni määrata järgmiselt:

$$P^n_{74} = -\frac{1}{h}\Big[M_S(P_2) + M_S(P_3) + M_S(P_4) + M_S(P_5) + M_S(P^t_{12}) + M_S(P^t_{63}) + M_S(P^t_{74}) + \sum_2^5 M_i\Big],$$

kusjuures

$$\sum_2^5 M_i = M_2 + M_3 + M_4 + M_5.$$

Leidnud ülalkirjeldatud viisil reaktsiooni P_{74} pikikomponendi P^n_{74}, võime komponente geomeetriliselt liites saada kogu täisreaktsiooni P_{74}:

$$P_{74} = P^n_{74} + P^t_{74}.$$

Nüüd kirjutame, et kogu grupile mõjuvate jõudude geomeetriline summa on null. Saame:

$$P^n_{12} + P^t_{12} + P_2 + P_4 + P_{74} + P_5 + P_3 + P^t_{63} + P^n_{63} = 0.$$

Selles vektorvõrrandis on ainult kaks tundmatut: reaktsioonide pikikomponendid P^n_{12} ja P^n_{63}. Nende leidmiseks koostame jõuplaani, valides meelevaldseks jõudude mastaabiks μ_P (joon. 663, *b*). Lähtudes vabalt valitavast punktist *a*, kanname lõigu *ab* näol plaani jõu P_2. Punktis *b* liidame sellega lõigu *bc*, mis kujutab jõudu P_4. Punktis *c* liitub eelmistega jõudu P_{74} kujutav lõik *cd*. Edasi liidame lõigu *de* näol jõu P_5 ja lõigu *ef* kujul jõu P_3. Nüüd kanname plaani eelnevalt määratud jõud P^t_{12} ja P^t_{63}. Esimene neist liitub jõudude hulknurgaga punktis *a* lõigu *ga* näol ja teine — punktis *f* lõiguna *fk*. Saadud punktidest *g* ja *k* tõmbame jõudude P^n_{12} ja P^n_{63} sihis kulgevad sirged. Olgu *l* viimaste lõikepunktiks. Ühendades omavahel jõuplaani punktid *a* ja *l*, saame lõigu *la*, mis mastaabis μ_P kujutab täisreaktsiooni P_{12}. Punktide *f* ja *l* ühendamine annab samas mastaabis täisreaktsiooni P_{63} kujutava lõigu *fl*.

Reaktsioonid P_{52}, P_{53} ja P_{54} saadakse võrranditest, mis väljendavad lülidele *2*, *3* ja *4* mõjuvate jõudude tasakaalu. Saame:

$$P_{12} + P_2 + P_{52} = 0,$$
$$P_{63} + P_3 + P_{53} = 0,$$
$$P_{74} + P_4 + P_{54} = 0.$$

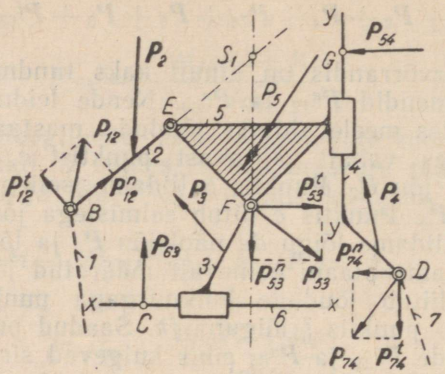
Esimeses võrrandis on tundmatuks reaktsioon P_{52}, teises võrrandis — reaktsioon P_{53} ja kolmandas võrrandis — reaktsioon P_{54}. Kõik need reaktsioonid määratakse vastavate jõukolmnurkade konstrueerimisega. Esimene reaktsioon saadakse, kui ühendada jõuplaanis esinevad punktid *b* ja *l*; teise reaktsiooni leiame, ühendades jõuplaani punktid *l* ja *e*, kuna kolmanda reaktsiooni saamiseks piisab punktide *b* ja *d* ühendamisest. Mastaabis μ_P konstrueeritud lõigud *bl*, *le* ja *bd* kujutavad vastavalt reaktsioone P_{52}, P_{53} ja P_{54}. Sellega on ühtlasi ka kõik triaadi kinemaatilistes paarides mõjuvad reaktsioonid määratud.

Käsitletud meetodit saab laiendada kõikidele eripunkte omavatele III klassi gruppidele.

2°. Käsitleme nüüd juhtu, kus mõned rotatsioonipaarid on asendatud translatsioonipaaridega. Olgu näiteks antud triaad, kus esineb neli rotatsioonipaari ja kaks translatsioonipaari (joon. 664). Triaadile mõjugu välisjõud P_2, P_3, P_4 ja P_5.

Joonisel 664 kujutatud translatsioonipaaride asetuse puhul kasutame eripunkti S_1. Reaktsiooni P^t_{12} suuruse ja märgi saame lähtudes sellest, et lülil *2* on punkti *E* suhtes arvutatud momendid tasakaalus:

$$P^t_{12} = -\frac{M_E(P_2)}{l_{BE}}.$$



Joon. 664.

Reaktsiooni P^t_{53} suuruse ja märgi saamiseks projekteerime teljele *xx* kõik lülile *3* mõjuvad jõud ja võrdutame saadud projektsioonide summa nulliga. See annab

$$P^t_{63} = -P_3 \cos \beta,$$

kus β tähistab nurka jõu P_3 ja telje *xx* vahel.

Projekteerides lülile *4* mõjuvad jõud teljele *yy* ja kirjutades, et projektsioonide summa on null, saame reaktsiooni P^t_{74} suuruse ja märgi:

$$P^t_{74} = -P_4 \cos \gamma,$$

kus γ tähistab jõu P_4 ja telje *yy* vahelist nurka. Nüüd koostame eripunkti S_1 suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi, võttes arvesse lülidele *2*, *4* ja *5* mõjuvaid jõudusid ning silmas pidades, et $P^t_{53} = -P^t_{35}$. Saame:

$$M_{S1}(P^t_{12}) + M_{S1}(P_2) + M_{S1}(P^t_{35}) + M_{S1}(P_5) + \\ + M_{S1}(P^t_{74}) + M_{S1}(P^n_{74}) + M_{S1}(P_4) = 0.$$

Võrrandi ainsaks tundmatuks on reaktsioon P^n_{74}, mis sellest võrrandist määrataksegi.

Edasi leiame reaktsiooni P_{74}, kasutades võrrandit

$$P_{74} = P^n_{74} + P^t_{74}.$$

Reaktsioon P_{54} saadakse alljärgnevast võrrandist, mis väljendab lülile *4* mõjuvate jõudude tasakaalu:

$$P_{54} + P_4 + P_{74} = 0.$$

Reaktsiooni rakenduspunkti *G* leidmiseks tuleb punkti *D* suhtes arvutada kõik lülile *4* mõjuvad momendid ja võrdutada nende

summa nulliga. Kuna $M_D(\boldsymbol{P}_{74}) = 0$, siis saame järgmisekujulise võrrandi:

$$M_D(\boldsymbol{P}_{54}) + M_D(\boldsymbol{P}_4) = 0.$$

Et leida reaktsiooni $\boldsymbol{P}^n_{35}$, kirjutame lülile *5* mõjuvate momentide tasakaaluvõrrandi punkti *E* suhtes. Seetõttu, et $M_E(\boldsymbol{P}_{25}) = 0$, saame:

$$M_E(\boldsymbol{P}^n_{35}) + M_E(\boldsymbol{P}^t_{35}) + M_E(\boldsymbol{P}_5) + M_E(\boldsymbol{P}_{45}) = 0.$$

Täisreaktsioon $\boldsymbol{P}_{35}$ leitakse kui teadaolevate komponentide geomeetriline summa:

$$\boldsymbol{P}_{35} = \boldsymbol{P}^n_{35} + \boldsymbol{P}^t_{35}.$$

Reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{63}$ saamiseks kirjutame lülile *3* mõjuvate jõudude tasakaalu:

$$\boldsymbol{P}_{63} + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}_{53} = 0.$$

Et leida reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{63}$ rakenduspunkti *C*, kirjutame lülile *3* mõjuvate momentide tasakaaluvõrrandi punkti *F* suhtes. Saame:

$$M_F(\boldsymbol{P}_{63}) + M_F(\boldsymbol{P}_3) = 0,$$

sest et $M_F(\boldsymbol{P}_{53}) = 0$. Võrrutades nulliga lülile *5* mõjuvate jõudude summa, saame reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{25}$. Tõepoolest,

$$\boldsymbol{P}_{35} + \boldsymbol{P}_{25} + \boldsymbol{P}_{45} + \boldsymbol{P}_5 = 0.$$

Reaktsiooni $\boldsymbol{P}_{12}$ leidmiseks kirjutame, et lülile *2* mõjuvate jõudude summa on null:

$$\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_{52} = 0.$$

Siinjuures on silmas peetud, et

$$\boldsymbol{P}_{52} = -\boldsymbol{P}_{25}.$$

Translatsioonipaaride esinemine triaadis ei tee seega arvutusmeetodit keerukamaks, kuid muudab teataval määral tasakaaluvõrrandite koostamise ja nende lahendamise järjestust.

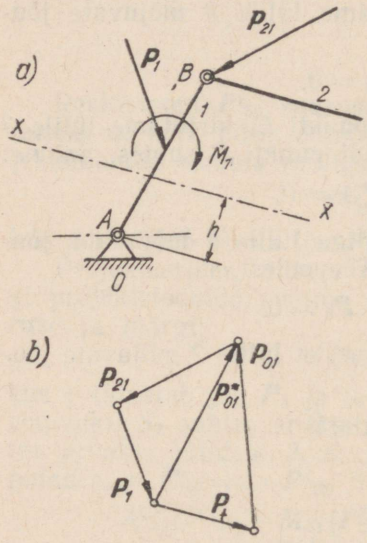
§ 99. Mehhanismi vedavale lülile mõjuvate jõudude arvutus

1°. Käsitleme nüüd küsimust, kuidas määrata üldjuhul reaktsiooni, mis tekib vedavat lüli kinnislüliga ühendavas kinemaatilises paaris. Vedav lüli on paikse lüliga (kinnislüliga) seotud tavaliselt kas rotatsioonipaari või translatsioonipaari abil. Seetõttu tuleb mõlemat juhtu vaadelda eraldi. Võrrandist (19.1) võib järeldada, et vedav lüli, millele on rakendatud meelevaldsed jõud, sealhulgas ka inertsjõud, ei saa olla tasakaalus. Tõepoolest, kuna

meil on käesoleval juhul tegemist ahelaga, mis koosneb ainult ühest liikuvast lülist ja ühest V klassi kinemaatilisest paarist, siis ületab tasakaalutingimuste arv otsitavate suuruste arvu ühe võrra:

$$3n - 2p_5 = 3 - 2 = 1.$$

Selleks et vedav lüli saaks olla tasakaalus, tuleb talle rakendada veel üks jõud või jõupaar, mis tasakaalustab kõik teised lülile mõjuvad jõud. Säärase toimega jõudu nimetatakse *tasakaalustavaks jõuks* (tähis P_t) ja vastavat jõupaari momenti — *tasakaalustavaks momendiks* (tähis M_t). Uurime nüüd, missugused jõud või momendid võivad masinates mõjuda tasakaalustavalt.



Joon. 665.

Oletame, et jõudude arvutus hõlmab ühesilindrilise kolbmootori väntmehhanismi, mis käitab mingit töömasinat. Juhul kui antud liikumisega lüliks valida vänt, siis sellega liituv diaad on moodustatud kepsust ja kolvist. Pärast nimetatud grupile mõjuvate jõudude arvutust määratakse kepsu reaktsioon vändale (jõud P_{21} joonisel 665, *a*). Vändale mõjuvad lisaks sellele veel jõud P_1 ja jõupaar, mille momendiks olgu M_1 (joon. 665, *a*). Loetletud jõudude ja toereaktsiooni P_{01} mõjul ei jää vänt üldjuhul tasakaalu. Selle saavutamiseks tuleb vändale rakendada veel tasakaalustav jõud P_t või tasakaalustav moment M_t. Tasakaalustava jõu või momendi moodustavad seejuures kas vaadeldava mootoriga ühendatud töömasina reaktiivjõud või selle takistusjõududest põhjustatud moment. Juhul kui mootori väntvõll ja töömasina peavõll on omavahel ühendatud muhviga, mõjub mootori väntvõllile tasakaalustav moment, mida põhjustavad töömasina takistusjõud. Juhul kui ülekanne mootori väntvõllilt töömasina peavõllile toimub hammasratastega, mõjub väntvõllil istuvale hammasrattale tasakaalustav jõud, mille suurus saadakse töömasina kõikide takistusjõudude redutseerimise teel. Kui jätta kõrvale hambumises esinev hõõrdumine, siis on kõne all olev redutseeritud jõud sihitud piki hambaprofiilidele kontaktpunktis tõmmatud ühist normaali. Tasakaalustava jõu kandesirge on seega

mootorit töömasinaga ühendava ülekandemehhanismi konstruktsiooniga täielikult määratud.

Töömasina vedava lüli arvutamisel on olukord vastupidine. Tasakaalustavaks jõuks või momendiks on sel juhul mootori poolt arendatud ja töömasina vedavale lülile rakendatud jõud või moment.

2°. Olgu vedav lüli AB (joon. 665, *a*) kinnislüliga ühenduses rotatsioonipaari A kaudu ja mõjugu temale lüli 2 reaktsioon $\boldsymbol{P}_{21}$, etteantud jõud $\boldsymbol{P}_1$ ja jõupaar momendiga M_1.

Tasakaalustava jõu suuruse määramiseks tuleb fikseerida tema kandesirge. Selleks tuleb omakorda uurida lüli AB jõumasina või töömasinaga ühendava ülekandemehhanismi konstruktsiooni. Olgu tasakaalustava jõu kandesirgeks näiteks sirge *xx*. Momendi $M_A(\boldsymbol{P}_t)$ saab sel puhul määrata tingimusest, et lülile AB mõjuvad momendid on punkti A suhtes tasakaalus. Arvesse võttes, et $M_A(\boldsymbol{P}_{01}) = 0$, saame:

$$M_A(\boldsymbol{P}_t) + M_A(\boldsymbol{P}_1) + M_A(\boldsymbol{P}_{21}) + M_1 = 0,$$

millest järgneb:

$$M_A(\boldsymbol{P}_t) = -\,[M_A(\boldsymbol{P}_1) + M_A(\boldsymbol{P}_{21}) + M_1]. \qquad (19.18)$$

Momendi $M_A(\boldsymbol{P}_t)$ märk on määratud momentide $M_A(\boldsymbol{P}_1)$, $M_A(\boldsymbol{P}_{21})$ ja M_1 väärtuste ja märkide poolt. Tasakaalustava jõu $\boldsymbol{P}_t$ suurus saadakse seosest

$$P_t h = M_A(\boldsymbol{P}_t),$$

kus h tähistab tasakaalustava jõu etteantud õlga. Seega

$$P_t = -\frac{[M_A(\boldsymbol{P}_1) + M_A(\boldsymbol{P}_{21}) + M_1]}{h}.$$

Leidnud tasakaalustava jõu $\boldsymbol{P}_t$ suuruse ja suuna, võime määrata veel kinemaatilises paaris A mõjuva koormuse $\boldsymbol{P}_{01}$. Selleks kasutame võrrandit

$$\boldsymbol{P}_t + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_{21} + \boldsymbol{P}_{01} = 0. \qquad (19.19)$$

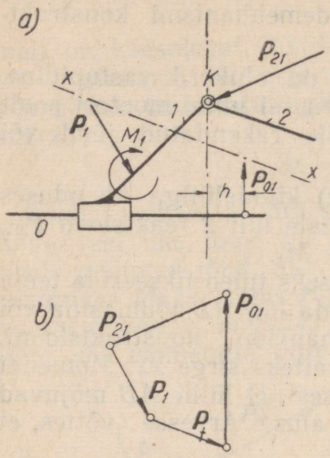
Võrrandi graafiline lahendus on toodud joonisel 665, *b*.

Juhul kui vedavat lüli ei tasakaalusta jõud, vaid jõupaar, võib tasakaalustava momendi M_t arvutamiseks rakendada seost, mis on analoogiline võrrandiga (19.18):

$$M_t = -\,[M_A(\boldsymbol{P}_1) + M_A(\boldsymbol{P}_{21}) + M_1].$$

Kinemaatilises paaris A mõjuv koormus $\boldsymbol{P}^*_{01}$ saadakse võrrandist

$$\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_{21} + \boldsymbol{P}^*_{01} = 0,$$



Joon. 666.

millest järgneb, et

$$P^*_{01} = -[P_1 + P_{21}].$$

3°. Oletame nüüd, et vedav lüli moodustab kinnislüliga translatsioonipaari (joon. 666, *a*). Kinemaatilisele paarile mõjuv reaktsioon P_{01} ristub sel juhul paari teljega. Olgu tasakaalustava jõu P_t kandesirgeks *xx*. Jõud P_t saadakse võrrandist (19.19).

Selles võrrandis esinevatest jõududest on P_1 ja P_{21} ette antud. Lisaks sellele on teada jõudude P_{01} ja P_t kandesirged. Võrrandi graafiline lahendus on toodud joonisel 666, *b*.

Reaktsiooni P_{01} rakenduspunkti leidmiseks koostame momentide võrrandi jõu P_{21} rakenduspunkti *K* suhtes. Saame:

$$M_K(P_t) + M_K(P_1) + M_K(P_{01}) + M_1 = 0.$$

Selles võrrandis on ainsaks tundmatuks jõu P_{01} õlg *h*, mille leidmiseks kasutame seost

$$h = -\frac{M_K(P_1) + M_K(P_t) + M_1}{P_{01}}.$$

Lõik *h* tuleb kanda punktist *K* vasakule või paremale, sõltuvalt momentide M_1, $M_K(P_t)$ ja $M_K(P_1)$ suurustest ja märkidest.

§ 100. Hõõrdejõudude arvestamine kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramisel

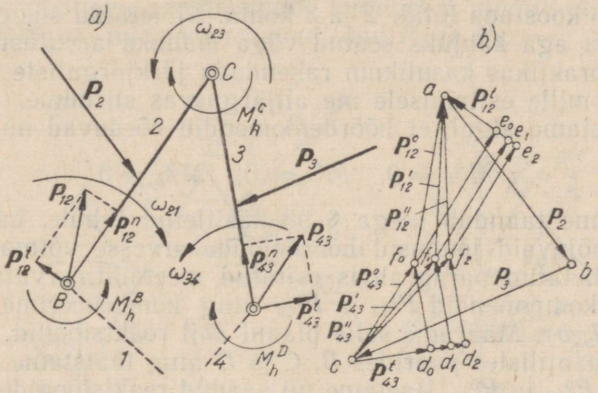
1°. Seni (§ 97—99) käsitlesime gruppides mõjuvate jõudude arvutust, eeldades, et kinemaatilistes paarides puudub hõõrdumine.

Selgitame nüüd, missuguseid muudatusi tuleb teha esitatud arvutuste metoodikas, juhul kui arvesse võtta kinemaatilistes paarides tekkivaid hõõrdejõudusid. Alustame reaktsioonide määramisega gruppides, milledest mehhanismid on koostatud.

Vaatleme kõigepealt 1. modifikatsiooni diaadi (joon. 667, *a*), millele mõjuvad jõud P_2 ja P_3. Kuna gruppi kuulub kolm rotatsioonipaari, tekivad neis hõõrdejõududest põhjustatud hõõrdemomendid $M^B{}_h$, $M^C{}_h$ ja $M^D{}_h$. Momentide väärtused on valemi (17.28) põhjal järgmised:

$$M^{B}{}_{h} = \boldsymbol{P}_{12} f'_{B} r_{B},$$
$$M^{C}{}_{h} = \boldsymbol{P}_{23} f'_{C} r_{C}, \qquad (19.20)$$
$$M^{D}{}_{h} = \boldsymbol{P}_{43} f'_{D} r_{D},$$

kus P_{12}, P_{23} ja P_{43} tähistavad kinemaatilistes paarides B, C ja D mõjuvaid reaktsioone, f'_B, f'_C ja f'_D — indeksitega märgitud paarides esinevaid arvutuslikke hõõrdetegureid ja r_B, r_C ning r_D — nimetatud paaride silindriliste elementide raadiusi (vt. § 88). Iga hõõrdemomendi suund sõltub seejuures vastavasse paari kuuluvate lülide suhtelise liikumise nurkkiirusest. Näiteks juhul kui lüli



Joon. 667.

2 nurkkiirus lüli *1* suhtes ω_{21} kulgeb kellaosuti liikumise sihis (joon. 667, *a*), tuleb lüli *2* tasakaalu käsitledes hõõrdemoment $M^{B}{}_{h}$ suunata vastupäeva. Kui lüli *2* nurkkiirus lüli *3* suhtes ω_{23} on suunatud vastupäeva, tuleb lüli *2* tasakaalu uurides anda hõõrdemomendile $M^{C}{}_{h}$ märk, mis vastab liikumisele päripäeva jne. Lüli *3* tasakaalu käsitlemisel tuleb samale momendile $M^{C}{}_{h}$ anda endastmõistetavalt vastupidine märk, sest et

$$\omega_{23} = -\omega_{32}.$$

Kogu grupi tasakaalu vektorvõrrandiks on

$$\boldsymbol{P}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}_{43} = 0$$

ehk

$$\boldsymbol{P}^{n}{}_{12} + \boldsymbol{P}^{t}{}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{P}^{n}{}_{43} + \boldsymbol{P}^{t}{}_{43} = 0,$$

kusjuures $\boldsymbol{P}^{n}{}_{12}$, $\boldsymbol{P}^{t}{}_{12}$, $\boldsymbol{P}^{n}{}_{43}$ ja $\boldsymbol{P}^{t}{}_{43}$ tähistavad reaktsioonide $\boldsymbol{P}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}_{43}$ piki- ning ristkomponente (joon. 667, *a*).

Ristkomponentide P^t_{12} ja P^t_{43} suuruse leidmiseks koostame lülide *2* ja *3* kohta momentide võrrandid. Saame:

$$M_C(P^t_{12}) + M_C(P_2) + M^B_h + M^C_h = 0, \qquad (19.21)$$
$$M_C(P^t_{43}) + M_C(P_3) + M^D_h - M^C_h = 0. \qquad (19.22)$$

Võrrandites (19.21) ja (19.22) esinevad hõõrdemomendid, mis on määratud võrranditega (19.20). Kuna aga seal esinevad reaktsioonid P_{12}, P_{23} ja P_{43} on tundmatud ja tuleb alles määrata, siis ei saa võrranditest (19.21) ja (19.22) vahetult komponente P^t_{12} ja P^t_{43} leida. Reaktsioonide määramiseks tuleks seega lahendada kuuest tasakaaluvõrrandist koosnev võrrandsüsteem, mida üldjuhul võib koostada lülide *2* ja *3* kohta. Nimetatud süsteemi lahendamine on aga kahjuks seotud väga mahuka arvutustööga. Seetõttu on praktikas kasulikum rakendada järkjärguliste lahenduste meetodit, mille esitamisele me alljärgnevas siirdume.

2°. Oletame algul, et hõõrdemomendid võrduvad nulliga, s. t.:

$$M^B_h = 0, \quad M^C_h = 0, \quad M^D_h = 0.$$

Ülesanne taandub seega § 98 käsitletud juhule, kus arvutati grupile mõjuvaid jõudusid hõõrdejõude arvesse võtmata. Rakendades nimetatud paragrahvis esitatud meetodit, arvutame reaktsioonide komponendid P^t_{12} ja P^t_{43} ning konstrueerime jõuplaani (joon. 667, *b*). Määrame selle plaani abil reaktsioonid, mis mõjuvad kinemaatilistes paarides *B*, *C* ja *D* ning tähistame nad vastavalt P^0_{12}, P^0_{23} ja P^0_{43}. Asetame nii saadud reaktsioonide väärtused võrranditesse (19.20). Saame:

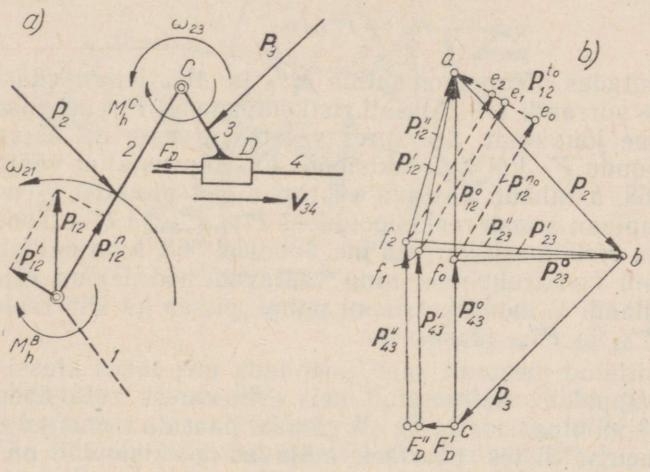
$$M^B_h = P^0_{12} f'_B r_B,$$
$$M^C_h = P^0_{23} f'_C r_C,$$
$$M^D_h = P^0_{43} f'_D r_D.$$

Viime nüüd hõõrdemomentide leitud väärtused võrranditesse (19.21) ja (19.22) ning määrame nende abil komponentide P^t_{12} ja P^t_{43} suurused. Saadud tulemused erinevad ilmselt nendest, mis leiti ülal eeldusega, et hõõrdemomendid võrduvad nulliga. Kui esimese arvutuse põhjal saadud vektor P^t_{43} lõpeb punktis d_0, siis teise arvutuse tulemusel tuleb teda pikendada punktini d_1. Täpselt samal põhjusel muutub vektori P^t_{12} alguspunkt, nihkudes punktist e_0 punkti e_1. Tõmmates nüüd komponentide P^n_{12} ja P^n_{43} sihis kulgevad sirged, leiame, et vektori P_{43} lõpp ja vektorite P_{12} ning P_{23} algus asuvad mitte enam punktis f_0, vaid punktis f_1. Sel viisil saadakse uus jõuplaan, mis annab kinemaatilistes paarides *B*, *C* ja *D* mõjuvate reaktsioonide uued, täpsemad suurused P'_{12}, P'_{23} ja P'_{43}.

Reaktsioonide edasiseks täpsustamiseks võib tehtud arvutust veel korrata. Selleks tuleb äsja saadud väärtused P'_{12}, P'_{23} ja P'_{43}

asetada uuesti võrranditesse (19.20), arvutada hõõrdemomentide $M^{B}{}_{h}$, $M^{C}{}_{h}$ ja $M^{D}{}_{h}$ uued väärtused ning asetada need võrranditesse (19.21) ja (19.22). Viimaste lahendamisega saadakse komponentide $\boldsymbol{P}^{t}{}_{12}$ ja $\boldsymbol{P}^{t}{}_{43}$ uued, täpsustatud suurused, mis on aluseks uue jõuplaani koostamisel (joon. 667, *b*). Jõuplaani punktid d_2, e_2 ja f_2 määravad ära otsitavate reaktsioonide uued suurused $\boldsymbol{P}''{}_{12}$, $\boldsymbol{P}''{}_{23}$ ja $\boldsymbol{P}''{}_{43}$. Arvutust võib veelgi jätkata, kuid praktika seisukohast piisab täielikult teisest või isegi esimesest lähendusest, s. t. $\boldsymbol{P}''{}_{12}$, $\boldsymbol{P}''{}_{23}$, $\boldsymbol{P}''{}_{43}$ või isegi $\boldsymbol{P}'{}_{12}$, $\boldsymbol{P}'{}_{23}$ ja $\boldsymbol{P}'{}_{43}$ leidmisest.

3°. Juhul kui grupis on üks või kaks translatsioonipaari, lahendatakse reaktsioonide määramise ülesanne analoogiliselt. Näitena käsitleme reaktsioonide leidmist 2. modifikatsiooni diaadis (joon. 668, *a*), mida koormavad jõud $\boldsymbol{P}_2$ ja $\boldsymbol{P}_3$.



Joon. 668.

Erinevalt eelmisest juhust mõjub siin lülile *3* hõõrdemomendi $M^{D}{}_{h}$ asemel hõõrdejõud $\boldsymbol{F}_D$, mille suurus saadakse valemist

$$F_D = P_{43} f_D, \tag{19.23}$$

kus f_D tähistab translatsioonipaari hõõrdetegurit. Hõõrdejõud $\boldsymbol{F}_D$ on nagu alati suunatud vastu lüli *3* relatiivset kiirust lüli *4* suhtes, s. t. vastu vektorit $\boldsymbol{v}_{34}$. Grupi tasakaalu vektorvõrrand kujuneb käesoleval juhul järgmiseks:

$$\boldsymbol{P}^{n}{}_{12} + \boldsymbol{P}^{t}{}_{12} + \boldsymbol{P}_2 + \boldsymbol{P}_3 + \boldsymbol{F}_D + \boldsymbol{P}_{43} = 0. \tag{19.24}$$

Lülile *2* mõjuvate momentide tasakaaluvõrrandiks on

$$M_C(\boldsymbol{P}^t_{12}) + M_C(\boldsymbol{P}_2) + M^B{}_h + M^C{}_h = 0. \qquad (19.25)$$

Oletades nagu eelmisel juhulgi, et $M^B{}_h = 0$, $M^C{}_h = 0$ ja $\boldsymbol{F}_D = 0$, määrame võrrandist (19.25) reaktsiooni ristkomponendi $\boldsymbol{P}^{t0}{}_{12}$ ning konstrueerime tavalisel viisil jõuplaani (joon. 688, *b*). Viimane annab reaktsioonide esialgsed väärtused $\boldsymbol{P}^0{}_{12}$, $\boldsymbol{P}^0{}_{23}$ ja $\boldsymbol{P}^0{}_{43}$. Asetades need kahte esimesse võrrandisse (19.20) ning võrrandisse (19.23), saame:

$$M^B{}_h = P^0{}_{12} f'_B r_B,$$

$$M^C{}_h = P^0{}_{23} f'_C r_C$$

ja

$$F_D = P^0{}_{43} f_D.$$

Kasutades hõõrdemomentide $M^B{}_h$ ja $M^C{}_h$ leitud väärtusi, täpsustame võrrandi (19.25) abil ristkomponendi $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ suuruse ja koostame uue jõuplaani. Seejuures võtame arvesse nii äsjaarvutatud hõõrdejõudu $\boldsymbol{F}_D$ kui ka reaktsiooni $\boldsymbol{P}^t{}_{12}$ täpsustatud väärtusi (joonisel 668, *b* nihkub vastava vektori algus punktist e_0 punkti e_1). Uus jõuplaan annab reaktsioonideks $\boldsymbol{P}'_{12}$, $\boldsymbol{P}'_{23}$ ja $\boldsymbol{P}'_{43}$. Toodud arvutuskäiku võib uuesti korrata jne. Joonisel 668, *b* on näidatud kolme jõuplaani konstruktsioon ning vastavad hõõrdejõud $\boldsymbol{F}'_D$ ja $\boldsymbol{F}''_D$. Nagu diaadi 1. modifikatsiooni puhul, piisab ka siin reaktsioonide $\boldsymbol{P}''_{12}$, $\boldsymbol{P}''_{23}$ ja $\boldsymbol{P}''_{43}$ täpsusest.

Käsitletud meetodit saab laiendada mis tahes klassi kuuluvatele gruppidele, sõltumatult neis esinevatest rotatsioonipaaride, translatsioonipaaride ja ka kõrgemate paaride kombinatsioonidest. Kui kinemaatilistes paarides mõjuvad reaktsioonid on leitud ja hõõrdejõud ning hõõrdemomendid määratud, siis on jõudude arvutuse edasine käik identne arvutusega, mida kasutati olukorras, kus hõõrdumist ei esinenud. Ainsaks erinevuseks on see, et lisaks antud välisjõududele tuleb siin mehhanismi lülidele rakendada ka leitud hõõrdejõud või hõõrdemomendid.

Ülalesitatud arvutusmeetod on ligikaudne. Tema rakendamine isepidurdusele lähedastes mehhanismi positsioonides annab ebatäpseid tulemusi. Nimetatud olukorras arvutamiseks võib soovitada G. A. Barsovi, M. A. Skuridini jt. poolt arendatud täpsemaid, kuid seejuures tunduvalt töömahukamaid meetodeid [1].

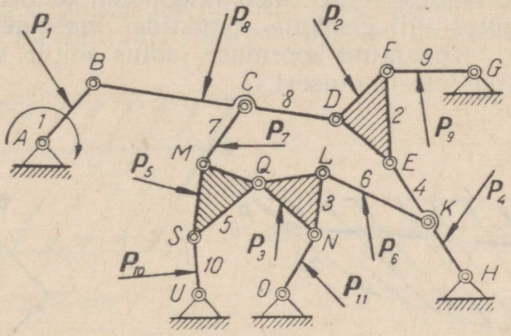
---

[1] Vaata näiteks M. A. Скуридин, Динамика двухзвенных и кинетостатика диадных механизмов, Труды семинара по теории машин и механизмов, т. II, вып. 6, 1947.

§ 101. Mehhanismides mõjuvate jõudude arvutus

1°. Mehhanismides mõjuvate jõudude arvutuse (jõudude analüüsi) all mõistetakse mehhanismide lülidele ja kinemaatilistele paaridele mõjuvate koormuste määramist.

Mehhanism tuleb jõudude arvutuseks lahutada aluseks võetud klassifikatsiooni kohaselt gruppidesse. Grupid tuleb seejuures rangelt järjestada, alates vedavast lülist. Jõudude arvutamisel seatakse grupid järjekorda, mis on v a s t u p i d i n e mehhanismide kinemaatilisel uurimisel kasutatavale. Jõudude arvutus algab seega vedavast lülist k õ i g e k a u g e m a l paiknevast grupist ja lõpeb vedava lüli uurimisega. Olgu näiteks antud III klassi



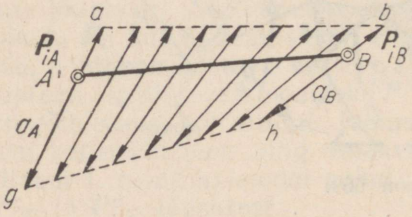
Joon. 669.

4. järgu mehhanism (joon. 669), mille vedavaks lüliks on *AB*. Mehhanismi koormab rida välisjõude P_1, P_2, P_3, ..., mille hulka on arvatud ka lülidele mõjuvad inertsjõud. Jõudude arvutus peab algama tetraadist (III klassi 4-haarmelisest grupist) *USMCQLKNO*, mis asub vändast kõige kaugemal. Seejärel arvutatakse triaad *BDEFGH* ja lõpuks vänt *AB*. Mehhanismi kinnislüli tähistab indeks «0».

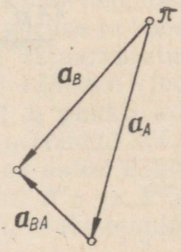
Alustame seega välisjõududega P_3, P_5, P_6, P_7, P_{10} ja P_{11} koormatud tetraadi *USMCQLKNO* uurimist. Rakendades ülalkäsitletud jõuplaanide meetodit, määrame šarniirides *U*, *O*, *K* ja *C* mõjuvad reaktsioonid P_{010}, P_{011}, P_{46} ja P_{87}. Seepeale arvutame triaadi *BDEFGH*. Lisaks rakendatud välisjõududele P_8, P_2, P_9 ja P_4 ning reaktsioonidele P_{18}, P_{04} ja P_{09} tuleb seejuures triaadi koormata veel punktides *C* ja *K* mõjuvate reaktsioonidega P_{78} ja P_{64}. Viimased on suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised tetraadi *USMCQLKNO* analüüsimisel leitud reaktsioonidega P_{87} ja P_{46}. Triaadis mõjuvate jõudude arvutus annab muuhulgas ka reaktsiooni P_{18}. Sellega võrdse, kuid vastassuunalise jõu P_{81} raken-

dame mehhanismi vedava lüli šarniirile B. Vedava lüli AB arvutus toimub § 99 toodud meetodiga, kusjuures talle rakendatakse kas tasakaalustav jõud või tasakaalustav moment.

2°. Mehhanismi lülidele mõjuvate koormuste määramine on aluseks nende tugevuse arvutamisel. Koormuste määramisel võib lähtuda asjaolust, et i g a l ü l i ü k s i k u l t võetuna peab temale mõjuvate jõudude toimel olema tasakaalus. Arvutuse läbiviimiseks eraldame mõtteliselt lüli ülejäänud mehhanismist ja rakendame tema lahutatud kinemaatiliste paaride elementidele vastavad reaktsioonid. Juhul kui lülile mõjuvate jõudude hulgas esineb ka resulteeriv inertsjõud, on arvutustäpsuse tõstmiseks soovitav see keskendatud jõud asendada kogu lüli mahule jaotatud inertsjõududega. Teisiti öeldes, lülile tuleb rakendada teatav pidev koormus, mis kujutab lüli üksikute punktide massidele mõjuvaid inertsjõudusid. Nimetatud koormuse jaotus sõltub seejuures lüli masside ja kiirenduste jaotusest.



Joon. 670.



Joon. 671.

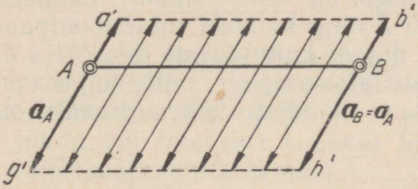
Olgu näiteks antud lüli AB (joon. 670), millel on liikumise tasapinnaga paralleelne sümmeetriatasapind. Oletame, et selle lüli mass on jaotatud ühtlaselt kogu tema pikkuses. Kui punktide A ja B kiirenduseks on vastavalt $\boldsymbol{a}_A$ ja $\boldsymbol{a}_B$, siis kiirenduse jaotust piki lüli kujutab epüür $AghB$. Viimasele vastavaks inertsjõudude epüüriks on $AabB$. Iga massielemendi inertsjõud võrdub selle massielemendi ja temale mõjuva kiirenduse korrutisega. Üldjuhul ei ole massielementide inertsjõud omavahel seega paralleelsed. Arvutuste hõlbustamiseks on järelikult otstarbekas punkti A kiirendust $\boldsymbol{a}_A$ või punkti B kiirendust $\boldsymbol{a}_B$ käsitleda kui kahe komponendi summat (joon. 671). Kiirenduse $\boldsymbol{a}_B$ võib näiteks lahutada translatoorse kaasaliikumise ja rotatiivse suhtelise liikumise kiirenduseks:

$$\boldsymbol{a}_B = \boldsymbol{a}_A + \boldsymbol{a}_{BA}.$$

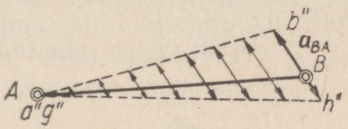
Sel juhul võib ka iga massielemendi inertsjõudu käsitleda kui kahe jõu summat.

Massielemendi esimene inertsjõud P_{ik} võrdub elemendi massi ja kaasaliikumise kiirenduse a_A korrutisega. Kuna lüli mass oli pikkuses ühtlaselt jaotatud, siis vastab nimetatud inertsjõudude jaotusele rööpkülikuline epüür $Aa'b'B$ (joon. 672), mille külg $a'b'$ on paralleelne sirgetega $g'h'$ ja AB. Kõik inertsjõud P_{ik} on omavahel paralleelsed.

Massielemendi teine inertsjõud P_{is} võrdub elemendi massi ja suhtelise kiirenduse a_{BA} korrutisega. Suhteliste kiirenduste epüüriks on kolmnurk $g''b''B$ (joon. 673). Vastavalt sellele on kolmnurgakujuline ka inertsjõudude P_{is} epüür $a''h''B$. Seetõttu, et kõik relatiivsed kiirendused on lüli AB telje suhtes kallutatud ühe ja sama nurga all, on omavahel paralleelsed ka kõik inertsjõud P_{is}.



Joon. 672.



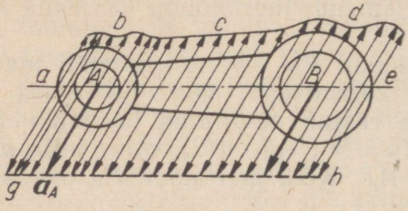
Joon. 673.

Inertsjõududega koormatud lüli AB tugevusarvutus taandub seega algul rööpküliku-, hiljem kolmnurgakujulist pidevat koormust kandva keha arvutamiseks (joon. 672 ja 673).

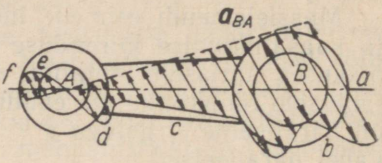
Kui lüli masside jaotus on tema pikkuse suhtes ebaühtlane, kuid materjal seejuures homogeenne, kujuneb inertsjõududest põhjustatud pideva koormuse epüür keerukamaks. Joonised 674 ja 675 kujutavad esimene — kaasaliikumise kiirendusest a_A ja teine — suhtelisest kiirendusest a_{BA} põhjustatud inertsjõudude epüüre lüli kohta, mille kuju meenutab kepsu. Erinevalt joonisel 672 toodud rööpkülikukujulisest epüürist on joonisel 674 kujutatud epüüril keerukas kuju *abcde* ja joonisel 673 toodud kolmnurgakujulise epüüri asemel esineb nüüd joonisel 675 näidatud kuju *abcdAef*. Praktika jaoks küllaldase täpsusega võib käsitletaval juhul oletada, et elementaarsed inertsjõud on võrdelised risti lüli AB teljega tehtud lõigete vahele jäävate massidega.

3°. IV klassi paare sisaldavaid mehhanisme võib arvutada samade meetoditega, kuid alles pärast seda, kui kõik IV klassi paarid on asendatud ainult V klassi paare sisaldavate ahelatega.

Olgu antud IV klassi paaridega mehhanism (joon. 676), mida koormavad välisjõud P_2 ja P_3. Mehhanismi tasakaalustab jõud

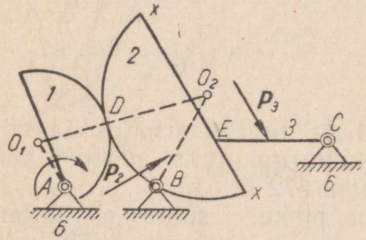


Joon. 674.

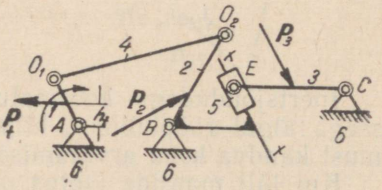


Joon. 675.

P_t. Taandame mehhanismi V klassi paaridega ahelaks. Profiilide *1* ja *2* kõverustsentrid kontaktpunktis *D* on tähistatud vastavalt O_1 ja O_2. Kui vedavaks lüliks lugeda lüli *1*, siis kuulub asendav mehhanism II klassi. Tema koostises on kaks diaadi. Esimene neist on moodustatud lülidest *4* ja *2* ning kolmest rotatsioonipaarist punktides O_1, O_2 ja *B*. Teise diaadi kujundavad lülid *3* ja *5*, rotatsioonipaarid *E* ja *C* ning translatsioonipaar, mille teljeks on *xx*. Arvutust tuleb alustada teisest diaadist. Selles diaadis on



Joon. 676.



Joon. 677.

koormatud ainult lüli *3*. Lüli *5* kui tinglik mingit koormust ei kanna. Arvutades gruppi ülaltoodud meetodi järgi, saame reaktsioonid P_{25} ja P_{63}. Reaktsioon P_{25} läbib punkti *E* ja on risti teljega *xx*, sest lüli *5* on koormamata. Siirdudes grupi O_1O_2B arvutamisele, rakendame kõigepealt punktis *E* lülile *2* mõjuva jõu P_{52}. Viimane võrdub reaktsiooniga P_{25}, kuid on sellega vastupidine. Grupi O_1O_2B lüli *2* koormavad seega jõud P_2 ja P_{52}. Tinglik lüli *4* on koormuseta. Ka see grupp arvutatakse ülal käsitletud meetodite alusel. Tänu sellele, et lülil *4* puudub koormus, on reaktsioon P_{14} sihitud piki tema telge. Reaktsioon P_{42} võrdub reaktsiooniga P_{14}.

Vedav lüli arvutatakse järgmiselt. Kui tasakaalustava jõu P_t kandesirge on määratud, leitakse tema väärtus võrrandist

$$P_t = -\frac{M_A(P_{41})}{h},$$

kus h_t tähistab jõu P_t õlga punkti A suhtes (joon. 677). Kinemaatilist paari A koormav reaktsioon P_{01} saadakse võrrandist

$$P_{61} + P_t + P_{41} = 0.$$

Juhul kui lüli *1* tasakaalustatakse momendiga M_t, võib viimase väärtuse saada võrrandist

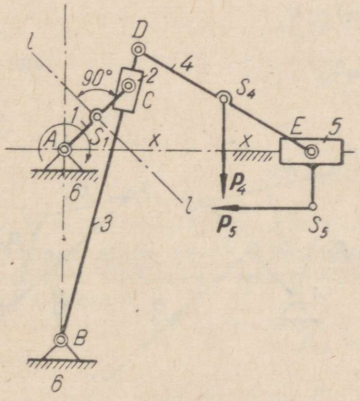
$$M_t + M_A(P_{41}) = 0.$$

Reaktsiooni P_{61} määramiseks tuleb sel juhul kasutada võrrandit

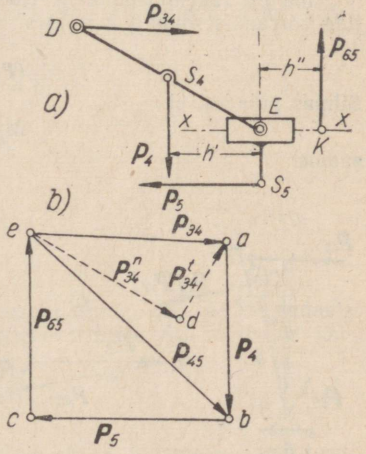
$$P_{61} + P_{41} = 0.$$

Kõigist ülalkäsitletust võib järeldada, et mehhanismides mõjuvate jõudude arvutamiseks loodud meetodid võimaldavad leida reaktsioone kinemaatilistes paarides, määrata tasakaalustavat jõudu või momenti vedaval lülil ja arvutada mehhanismi igale lülile mõjuvaid koormusi.

Näide 12. Joonisel 678 on kujutatud kulissmehhanismi skeem. Vedav lüli AC pöörleb etteantud nurkkiirusega ω_1. Ülesandeks on leida kinemaatilistes paarides tekkivad koormused, mida põhjustavad lüli *5* punktis S_5 rakendatud jõud P_5 ja lüli *4* punktis S_4 rakendatud jõud P_4. Jõud P_5 on teljega xx paralleelne, jõud P_4 aga ristub sellega. Tasakaalustava jõu P_t kandesirge läbib lüli *1* punkti S_1 ja on lüli teljega risti.



Joon. 678.



Joon. 679.

Uuritav kulissmehhanism kuulub tasapinnaliste mehhanismide II klassi ja koosneb kahest diaadist: 3. modifikatsiooni diaadist (lülid *2* ja *3*) ning 2. modifikatsiooni diaadist (lülid *4* ja *5*).

Kinemaatiliste paaride koormuse määramisel lähtume vedavast lülist kõige kaugemal olevast grupist, s. t. diaadist, mis koosneb lülidest *4* ja *5*. Lahutame paari *D* koormava reaktsiooni P_{34} (joon. 679, *a*) komponentideks P^n_{34} ja P^t_{34}. Saame

$$P_{34} = P^n_{34} + P^t_{34}.$$

Edasi kirjutame, et lülile *4* mõjuvate jõudude momendid punkti *E* suhtes (joon. 679, *a*) on tasakaalus:

$$M_E(P^t_{34}) + M_E(P_4) = 0.$$

Sellest järgneb, et

$$P^t_{34} = \frac{P_4 h'}{l_{DE}}.$$

Nüüd koostame kogu grupi tasakaaluvõrrandi, kirjutades, et kõikide grupile mõjuvate jõudude summa võrdub nulliga. Saame

$$P^n_{34} + P^t_{34} + P_4 + P_5 + P_{65} = 0.$$

Jõud P_4, P_5 ja P^t_{34} on teada. Jõud P^n_{34} on paralleelne lüli *DE* teljega, jõud P_{65} aga risti sihiga *xx*. Nende suuruse määramiseks konstrueerime jõuplaani (joon. 679, *b*). Kanname kõigepealt joonisele jõu P^t_{34} lõigu *da* näol. Nüüd liidame sellega jõu P_4, mida kujutab lõik *ab*, ja jõu P_5, mida kujutab lõik *bc*. Edasi tõmbame läbi punkti *c* jõu P_{65} sihilise, s. t. teljega *xx* ristuva sirge ja läbi punkti *d* — jõu P^n_{34} sihilise, seega lüli *DE* teljega rööbiti kulgeva sirge. Sirgete lõikepunkt *e* määrab vektori P^n_{34} alguse ja vektori P_{65} lõpu. Ühendades punktid *e* ja *a*, saame jõudu P_{34} kujutava lõigu *ea*. Punkte *e* ja *b* ühendades saadakse lõik *be*, mis kujutab reaktsiooni P_{45}.

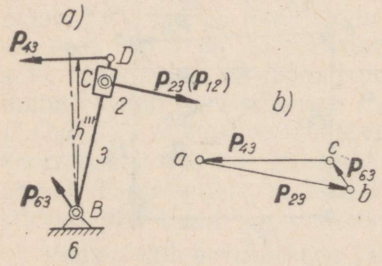
Jõu P_{65} rakenduspunkt *K* (joon. 679, *a*) saadakse lülile *5* mõjuvate momentide võrrandist punkti *E* suhtes:

$$M_E(P_5) + M_E(P_{65}) = 0.$$

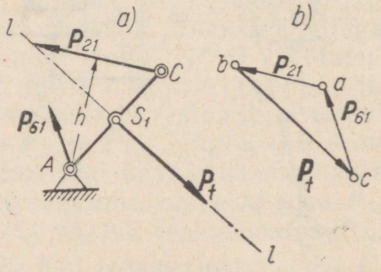
Silmas pidades, et

$$M_E(P_{65}) = P_{65} h'',$$

saame:



Joon. 680.



Joon. 681.

$$h'' = -\frac{M_E(P_5)}{P_{65}}.$$

Käsitleme nüüd lülidest *2* ja *3* koosnevat gruppi (joon. 680, *a*). Sellele grupile mõjub punkti *D* rakendatud välisjõud P_{43}, mis on võrdne, kuid vastupidine jõuga P_{34}.

Vaatleme lüli *3* tasakaalu. Et lüli *2* on koormamata, peab punkti *C* rakendatud reaktsioon P_{23} ristuma lüli *BD* teljega.

Jõu P_{23} suurus leitakse lülile *3* mõjuvate, punkti *B* suhtes arvutatud momentide tasakaalust. Viimast väljendab võrrand

$$M_B(P_{43}) + M_B(P_{23}) = 0,$$

sest et

$$M_B(P_{63}) = 0.$$

Toodud võrrandist saame:

$$P_{23} = \frac{P_{43}h'''}{l_{BC}}.$$

Nüüd on lihtne määrata jõudu P_{63}, kirjutades, et lülile *3* mõjuvate jõudude summa on null. Saame

$$P_{43} + P_{23} + P_{63} = 0.$$

Konstrueerime jõuplaani (joon. 680, *b*). Lähtudes punktist *c* kanname joonisele kõigepealt jõu P_{43}, mida kujutab lõik *ca*. Liidame sellele lõigu *ab* näol jõu P_{23}. Lõik *bc* kujutab jõudu P_{63}. Jõud P_{12} võrdub suuruselt jõuga P_{32}, kuid on sellega vastassuunaline. Tõepoolest, lüli *2* tasakaaluvõrrand annab

$$P_{12} + P_{32} = 0.$$

Käsitleme lõpuks vedava lüli *AC* tasakaalu (joon. 681, *a*). Vedavale lülile mõjub jõud P_{21}, mis suuruselt võrdub jõuga P_{12}, kuid on sellega vastassuunaline. Tasakaalustava jõu P_t kandesirge *ll* ristugu vända *AC* teljega (joon. 678). Tasakaalustava jõu suurus saadakse võrrandist

$$M_A(P_t) + M_A(P_{21}) = 0.$$

Et aga

$$M_A(P_{21}) = P_{21}h,$$

siis

$$P_t = -\frac{P_{21}h}{h_t},$$

kus h_t tähistab jõu P_t õlga punkti *A* suhtes.

Kinemaatilise paari *A* koormuse P_{61} leidmiseks (joon. 681, *b*) lahendame graafiliselt alljärgneva vektorvõrrandi, mis väljendab lülile *AC* mõjuvate jõudude tasakaalu:

$$P_{21} + P_t + P_{61} = 0.$$

Kanname joonisele jõudu P_{21} kujutava lõigu *ab* ja liidame sellega tasakaalustava jõu P_t (lõigu *bc* näol). Lõik *ca* kujutab otsitavat jõudu P_{61}.

TEINE JAGU

MASINATE DÜNAAMIKA

XX peatükk

MASINATE JA MEHHANISMIDE MEHAANILINE KASUTEGUR

§ 102. Põhimõisteid. Masina liikumine

1°. *Masina liikumise koguajaks* nimetatakse ajavahemikku masina liikumise algusest kuni tema täieliku seiskumiseni. Kuna aga masina kõikide lülide liikumine on tema vedava lüli liikumisega täielikult määratud, siis võib masina liikumise koguajaks nimetada ka ajavahemikku, mis eraldab masina vedava lüli liikumise algust selle täielikust seiskumisest.

Masina liikumise koguaeg jaguneb kolme ossa (faasi):

a) masina *käivitusaeg* (*käivitusfaas*);
b) masina *püsiva liikumise aeg* (*permanentne faas*) ja
c) masina *seiskumisaeg* (*seiskumisfaas*).

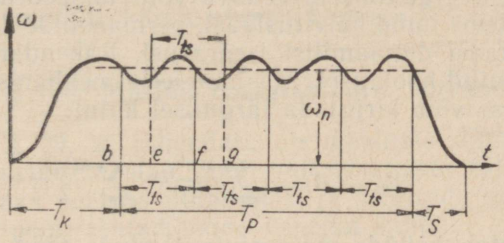
Masina käivitusfaasi iseloomustab vedava lüli kiiruse kasv nullist kuni teatava, normaalsele töökiirusele vastava keskmise väärtuseni. Permanentses faasis kõigub tavaliselt masina vedava lüli kiirus perioodiliselt ümber eespoolnimetatud keskväärtuse.

Masina seiskumisfaasi iseloomustab vedava lüli kiiruse kahanemine normaalsele töökiirusele vastavast keskväärtusest kuni nullini.

Joonisel 682 on kujutatud masina *tahhogramm*, s. t. kõver $\omega = \omega(t)$, mis näitab vedava lüli nurkkiiruse ω sõltuvust ajast t. Masina liikumise koguaeg T koosneb käivitusajast T_k, püsiva liikumise ajast T_p ja seiskumisajast T_s. Jooniselt 682 on näha, et permanentse liikumise faasis kõigub nurkkiirus $\omega = \omega(t)$ teatava amplituudiga ümber normaalsele töökiirusele vastava keskväärtuse ω_k.

Masina vedava lüli *liikumise tsükliks* nimetatakse ajavahemikku, mille möödumisel vedava lüli asend, kiirus ja kiirendus saavutavad taas oma algväärtuse. Joonisel 682 sisaldab permanentse liikumise faas neli tsüklit. Igale tsüklile vastab aeg T_{ts}. Seega masina liikumise koguaeg

$$T = T_k + T_p + T_s$$



Joon. 682.

ja püsiva liikumise aeg

$$T_p = kT_{ts},$$

kus k tähistab tsüklite arvu.

Käivitusaja T_k, seiskumisaja T_s ja tsükli T_{ts} kestused sõltuvad masinale mõjuvate jõudude, tema masside ja kinemaatiliste parameetrite vahelistest suhetest. Juhul kui viimased on teada ja osutuvad küllaldasteks, saab käivitusfaasi, seiskumisfaasi ja masina ühe tsükli ajalise kestuse alati ette määrata.

Permanentse liikumise faas võib liikumise tsükleid sisaldada meelevaldsel hulgal. Tema ajaline kestus T_p sõltub sellest, kui kaua on vajalik või võimalik säilitada masina liikumise töörežiimi, s. t. režiimi, mille puhul masina vedav lüli pöörleb nominaalse nurkkiirusega ω_n.

Tuleb märkida, et mõnedel masinatel võivad selged piirid üksikute liikumisfaaside vahel ka puududa. Tõstekraanadel, ekskavaatoritel, mõnedel transpordimasinatel jne. võib näiteks liikumise koguaeg koosneda ainult käivitusajast ja seiskumisajast. Nimetatud masinatel puudub permanentse liikumise faas oma iseloomustavate liikumistsüklitega.

Masina perioodiliseks liikumiseks nimetatakse liikumist, mille puhul masina tsüklid on teatava ajavahemiku jooksul konstantsed, kusjuures liikumine kulgeb kõikides tsüklites ühe ja sama seaduse kohaselt. Joonisel 682 näiteks liigub masin perioodiliselt ajavahemikus T_p. Masina perioodilist liikumist iseloomustab veel see, et tsükli T_{ts} kestus ei sõltu aja arvestamiseks valitud

alghetkest. Kui joonisel 682 alustada aja T_{ts} arvestamist mitte punktist b, vaid punktist e, siis nihkub ka tsükli lõpp punktist f punkti g. Lõigud bf ja eg on seejuures omavahel võrdsed.

Üks tsükkel võib vastata vedava võlli ühele või mitmele täispöördele. Väntmehhanismiga pumba vedav võll teeb tsükli jooksul näiteks ühe täispöörde. Neljataktilise mootori väntvõll teeb ühe tsükli jooksul aga kaks täispööret. Mõnedel masinatel vastab ühele tsüklile veelgi rohkem vedava võlli täispöördeid.

2°. Käsitleme nüüd käivitusfaasi, permanentse liikumise faasi ja seiskumisfaasi dünaamilisi iseärasusi. Rakendame selleks dünaamikast tuntud hoolauset. Masinatele ja mehhanismidele kohandatud hoolause võib kirjutada järgmisel kujul:

$$A_m - A_t = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}, \qquad (20.1)$$

kus A_m tähistab kõikide motoorsete jõudude tööd, A_t — kõikide takistusjõudude tööd, $\sum \frac{mv^2}{2}$ — masina kineetilist energiat. Tähistega v ja v_0 on märgitud kiirused vaadeldava liikumise algul ja lõpul. Käivitusfaasis peab masina lõppkiirus v olema algkiirusest v_0 loomulikult suurem. Antud ajavahemikus peab motoorsete jõudude töö seetõttu ületama takistusjõudude töö, s. t.

$$A_m > A_t.$$

Permanentse liikumise faasis saavutab kiirus v pärast iga tsüklit uuesti algväärtuse v_0. Ühe tsükli jooksul tehtav motoorne töö peab seega võrduma takistusjõudude tööga, s. t.

$$A_m = A_t.$$

Mis puutub lõpuks masina või mehhanismi seiskumisfaasi, siis siin $v < v_0$ ja järelikult ka

$$A_m < A_t.$$

Võrrandi (20.1) parem pool saab vastavalt ülaltoodule järgmised väärtused. Käivitusfaasis

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} > 0, \qquad (20.2)$$

permanentse liikumise faasis (täisarvulise tsüklite hulga puhul)

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0 \qquad (20.3)$$

ja seiskumisfaasis

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} < 0. \qquad (20.4)$$

Saadud tulemustest on lihtne järeldada, et käivitusfaasis töötava masina kineetiline energia järjest suureneb. Permanentse liikumise faasis võrdub kineetilise energia juurdekasv täistsükli jooksul nulliga. Seiskumisfaasis loovutab masin kogu selle kineetilise energia, mille ta käivitusfaasis kogus.

§ 103. Masina energiabilansi võrrand

1°. Nagu § 79, 2° tähendati, on masinate dünaamika üheks ülesandeks uurida masina poolt mitmesuguste takistuste ületamiseks tarbitava energia üldbilanssi ja selgitada masinale mõjuvate jõudude poolt tehtud tööde vahelisi suhteid.

Selle ülesande lahendamiseks on otstarbekas anda hoolausele (20.1) alljärgnev kuju:

$$A_m - A_t - \left(\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}\right) = 0. \qquad (20.5)$$

Sulgudes olevat suurust võib tinglikult lugeda inertsjõudude tööks A_i. Võrrandi (20.5) võib sel juhul kirjutada järgmiselt:

$$A_m - A_t \pm A_i = 0. \qquad (20.6)$$

Kaksikmärki töö A_i ees põhjustab asjaolu, et kineetilise energia juurdekasv võib sõltuvalt kiiruste v ja v_0 väärtustest olla kas positiivne või negatiivne.

Toome nüüd võrrandis (20.6) eraldi esile kasuliku koormuse töö A_k, hõõrde- ja muude kahjulikkude takistuste töö A_h ja masina lülide raskusjõudude töö A_r.

Võrrand (20.6) kujuneb sel puhul järgmiseks:

$$A_m = A_k + A_h \pm A_r \pm A_i. \qquad (20.7)$$

Raskusjõudude töö A_r ees seisab kaksikmärk põhjusel, et mehhanismi üldise masskeskme kerkimisel on töö A_r negatiivne, laskumisel aga positiivne.

Juhul kui masinas esineb peale võrrandiga (20.7) arvestatud jõudude veel teisi jõudusid, siis võib ka viimaste poolt tehtud töid võrrandis (20.7) vastava märgiga arvesse võtta. Sõltuvalt masina tüübist ning tema töö iseloomust tuleb mõnedel juhtudel võrrandisse sisse tuua näiteks vedrude elastsusjõudude poolt tehtud tööd jne.

2°. Võrrand (20.7) kehtib ka elementaartööde kohta:

$$dA_m = dA_k + dA_h \pm dA_r \pm dA_i. \qquad (20.8)$$

Jagades võrrandi (20.8) kõik liikmed aja diferentsiaaliga dt, saame:

$$\frac{dA_m}{dt} = \frac{dA_k}{dt} + \frac{dA_h}{dt} \pm \frac{dA_r}{dt} \pm \frac{dA_i}{dt}$$

ehk

$$N_m = N_k + N_h \pm N_r \pm N_i. \qquad (20.9)$$

N_m tähistab siin motoorsete jõudude poolt arendatud võimsust, N_k — kasuliku koormuse ületamiseks kuluvat võimsust, N_h — hõõrdejõudude ja muude kahjulike takistuste ületamiseks vajalikku võimsust, N_i — võimsust, mis kulub kogu masina kineetilise energia suurendamiseks või (sõltuvalt märgist) võimsust, mis saadakse masina kineetilise energia vähenemise arvel, ja N_r — võimsust, mis kulutatakse raskusjõudude ületamiseks või (sõltuvalt jällegi märgist) võimsust, mida arendavad raskusjõud.

Seost (20.9) võib nimetada *masina energiabilansi võrrandiks.*

Võrrandist (20.9) selgub, et kaksikmärgiga võimsused $\pm N_r$ ja $\pm N_i$ võivad mõnedel ajavahemikkudel olla positiivsed ja teistel — negatiivsed. Juhul kui nende ees seisab plussmärk, suurendavad nad masina vedaval võllil vajalikku motoorset võimsust N_m. Miinusmärgi puhul nimetatud võimsus väheneb. Näiteks käivitusfaasis [vt. § 102, 2°, võrrand (20.2)] on võimsus N_i tavaliselt positiivne, mistõttu motoorne võimsus N_m peab siin olema suurem kui seiskumisfaasis, kus N_i on tavaliselt negatiivne [vt. § 102, 2°, võrrand (20.4)].

Võrrandist (20.9) võib veel järeldada, et juhul kui võimsused $\pm N_r$ ja $\pm N_i$ kogusummas või üksikult võetuna on negatiivsed ja seejuures oma absoluutväärtuselt ületavad võimsuste N_k ja N_h summat, muutub motoorsete jõudude võimsus N_m negatiivseks. Säärases olukorras nagu muutuks masinat läbiva energiavoo suund. Näiteks masina seiskumisfaasis on võimsus $\pm N_i$ negatiivne ja võib juhtuda, et tema absoluutväärtus ületab kõikide teiste võimsuste summat. Sel juhul ei ole jõumasinast ja töömasinast koosnevas agregaadis vedavaks osaks mitte enam jõumasin, vaid töömasin, mis hoo mõjul pöörlemist jätkates veab endaga kaasa ka jõumasinat.

Energiabilansi võrrandil on suur tähtsus jõumasina vajaliku võimsuse arvutamisel ja masinagregaatide majanduslikul ning tootmislikul hindamisel.

§ 104. Mehaaniline kasutegur

1°. Käsitleme eraldi permanentse liikumise faasi (permanentset režiimi). Nimetatud režiimi iga täistsükli jooksul võrdub kineetilise energia juurdekasv nulliga [vt. võrrand (20.3)], s. t.

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = 0.$$

Võrrandis (20.7) esinev töö A_i on permanentsel režiimil seega null:

$$A_i = 0.$$

Ka raskusjõudude poolt ühe täistsükli jooksul tehtud töö võrdub nulliga, s. t.

$$A_r = 0.$$

Permanentsel režiimil kujuneb võrrand (20.7) seega järgmiseks:

$$A_m = A_k + A_h. \tag{20.10}$$

Permanentse režiimi ühe täistsükli jooksul tehtud motoorsete jõudude töö võrdub kasuliku koormuse ja kõikide kahjulikkude takistuste poolt tehtud tööde summaga.

Mehaaniliseks kasuteguriks η ehk lihtsalt kasuteguriks nimetatakse kasuliku koormuse töö absoluutväärtuse suhet motoorsete jõudude töösse permanentsel režiimil. Seega

$$\eta = \frac{A_k}{A_m} \tag{20.11}$$

ehk, silmas pidades võrrandit (20.10),

$$\eta = \frac{A_k}{A_k + A_h}. \tag{20.12}$$

Võrrandile (20.12) võib anda veel kuju

$$\eta = \frac{A_m - A_h}{A_m} = 1 - \frac{A_h}{A_m}, \tag{20.13}$$

sest et võrrandi (20.10) põhjal

$$A_k = A_m - A_h.$$

Kahjulike takistuste töö A_h suhet motoorsete jõudude töösse A_m tähistatakse tavaliselt tähega φ ja nimetatakse *masina kadude koefitsiendiks*. Võrrandi (20.13) võib nüüd kirjutada järgmiselt:

$$\eta = 1 - \varphi. \tag{20.14}$$

Mida väiksem on masinas kahjulike takistuste töö, seda väik-

sem on tema kadude koefitsient ja seda täiuslikum on masin energiabilansi seisukohast.

Mõnedel juhtudel on otstarbekas kasutada veel koefitsienti ψ, mis tähistab suhet $\frac{A_h}{A_k}$. Võrranditest (20.13) ja (20.14) leiab hõlpsasti η, φ ja ψ vahelise seose. Saame:

$$\psi = \frac{\varphi}{\eta} = \frac{1-\eta}{\eta} = \frac{\varphi}{1-\varphi}. \qquad (20.15)$$

Võrrandi (20.12) põhjal võib järeldada, et kuna üheski masinas või mehhanismis ei saa kahjulike takistuste töö A_h olla null, siis kasutegur η on alati väiksem kui 1, s. t.

$$\eta < 1.$$

Võrrand (20.13) aga näitab, et kasutegur on null, kui

$$A_m = A_h.$$

Kasutegur on seega null juhul, kui motoorsete jõudude töö võrdub kõikide masinas või mehhanismis esinevate kahjulike takistuste tööga. **Masina liikumine on säärases olukorras küll võimalik, kuid talle ei saa rakendada vähimatki kasulikku koormust. Masina sellist liikumist nimetatakse tavaliselt tühikäiguks.**

Kasutegur ei saa olla väiksem kui null, sest siis peaks tööde suhe $\frac{A_h}{A_m}$ olema suurem kui üks, s. t.

$$\frac{A_h}{A_m} > 1$$

ehk

$$A_h > A_m$$

[vt. võrrand (20.13)].

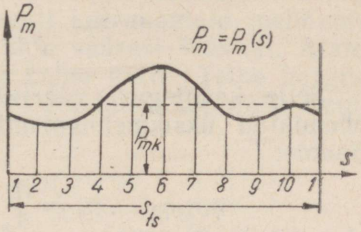
Ülaltoodust selgub, et juhul kui masin või mehhanism, mis seda tingimust rahuldab, seisab paigal, siis ei õnnestugi teda liikuma panna. Niisugust nähet nimetatakse mehhanismi või masina *isepidurdumiseks*. Kui masin oli kasuteguri negatiivseks muutumise hetkel liikumises, siis hakkab kahjulike takistuste toimel tema kiirus vähenema, kuni masin lõpuks seiskub. Teoreetiliste arvutuste käigus saadav negatiivne kasutegur on seega alati isepidurduse tunnuseks või viitab sellele, et masina liikumine antud suunas on võimatu.

Masina või mehhanismi kasutegur võib seega muutuda piirides

$$0 \leqslant \eta < 1. \qquad (20.16)$$

Seostest (20.16) ja (20.14) võib järeldada, et koefitsient φ muutub piirides $0 < \varphi \leqslant 1$ ja koefitsient ψ — piirides $0 < \psi \leqslant \infty$.

2°. Liikumise permanentses faasis masinatele mõjuvad motoorsed ja takistusjõud on enamikul juhtudel m i t t e p ü s i v a d. Seetõttu võetakse kasuteguri arvutamisel aluseks motoorsete jõudude ja takistusjõudude tööd, mis on tehtud permanentse liikumise ühe täistsükli jooksul. Kui näiteks on antud motoorse jõu $P_m = P_m(s)$ kulgemise diagramm (joon. 683), siis töö A_m arvutamiseks tuleb see jagada üksikuteks osadeks ja määrata viimaste pindala. Motoorsete jõudude töö A_m võrdub saadud pindalade summaga, korrutatult diagrammi koostamisel kasutatud jõu P_m ja teepikkuse s mastaapidega. Kui seda meetodit rakendada keskmise motoorse jõu P_{mk} määramiseks, siis võib motoorsete jõudude töö arvutada valemiga

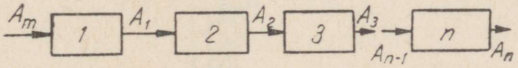


Joon. 683.

$$A_m = P_{mk} s_{ts},$$

kus s_{ts} on jõu P_m rakenduspunkti poolt permanentse liikumise ühe tsükli jooksul läbitud teepikkus.

3°. Käsitleme nüüd kasuteguri määramist olukorras, kus rida masinaid või mehhanisme on ühendatud omavahel järjestikku.



Joon. 684.

Olgu kokku n üksteisega seotud mehhanismi (joon. 684). Esimest mehhanismi käitavad motoorsed jõud, tehes seejuures tööd A_m. Kuna iga mehhanismi kasulik töö osutub järgneva mehhanismi suhtes motoorseks tööks, siis võib esimese mehhanismi kasuteguri avaldada järgmiselt:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_m}.$$

Teise mehhanismi kasuteguriks on

$$\eta_2 = \frac{A_2}{A_1}.$$

Kolmandal mehhanismil saame kasuteguriks

$$\eta_3 = \frac{A_3}{A_2}$$

ja lõpuks, mehhanismil indeksiga «n» kujuneb kasuteguriks

$$\eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Kogu mehhanismide ühendi kasuteguriks on ilmselt

$$\eta_{1n} = \frac{A_n}{A_m}.$$

Selle kasuteguri väärtuse võib leida, korrutades omavahel ühendatud üksikmehhanismide kasutegurid η_1, η_2, η_3, ..., η_n. Saame:

$$\eta_1\eta_2\eta_3 \ldots \eta_n = \frac{A_1}{A_m} \cdot \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{A_3}{A_2} \cdots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_m} = \eta_{1n}.$$

Järjestikku ühendatud masinate või mehhanismide üldine mehaaniline kasutegur võrdub seega ühendisse kuuluvate üksikmehhanismide või masinate mehaaniliste kasutegurite korrutisega:

$$\eta_{1n} = \eta_1\eta_2\eta_3 \ldots \eta_n. \qquad (20.17)$$

Kuna masina permanentse liikumise faasi kogu ulatuses tehtud tööd on võrdelised vastavate võimsustega, siis võib võrrandid (20.11) ja (20.13) kirjutada ka alljärgneval kujul:

$$\eta = \frac{N_k}{N_m} \qquad (20.18)$$

ehk

$$\eta = 1 - \frac{N_h}{N_m}, \qquad (20.19)$$

kus N_k tähistab kasuliku koormuse ületamiseks kulutatud keskmist võimsust, N_h — kahjulike takistuste keskmist võimsust ja N_m — motoorsete jõudude poolt arendatud keskmist võimsust.

Üldise kasuteguri arvutamisel tuleb silmas pidada, et ühtesid ja samu takistusi ei arvestataks korraga kahe mehhanismi kasuteguris. Kui näiteks vaadelda mehhanismi indeksiga «i», siis on ilmne, et selle ühendamine eelneva mehhanismiga $i-1$ ja järgneva mehhanismiga $i+1$ on seotud teatavate kadudega. Kasutegurite η_{i-1}, η_i ja η_{i+1} arvutamisel tuleb neid kadusid arvesse võtta ainult üks kord, kas siis mehhanismi juures, mille indeks on i, või mehhanismide juures, mille indeksiks on $i-1$ või $i+1$. Et siin eksitusi vältida, on soovitav algul arvutada üksikmehhanismide kasutegurid, kõrvale jättes kaod, mis tekivad naabermehhanismidega ühendamisel, ja seepeale arvutada eraldi ühenduste

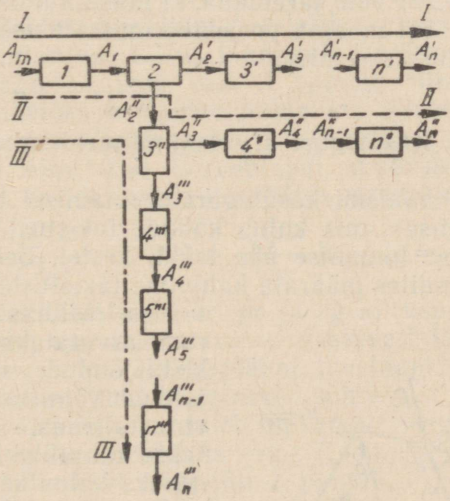
kasutegurid. Pärast neid arvutusi võib kasutada valemit (20.17). Praktikas sellest tavaliselt ei hoolita, vaid rakendatakse valemit (20.17) ülaltoodud tingimusi arvesse võtmata. Seejuures saadav üldine kasutegur osutub muidugi ainult ligikaudseks, olles tegelikust kasutegurist veidi v ä i k s e m.

4°. Ülal (joon. 684) käsitleti kõige lihtsamat mehhanismide ühendamise juhtu, kus need paiknesid ahelas järjestikku. Kaasaegsetes masinates esineb aga väga sageli keerukamaid mehhanismide ühendeid. Joonis 685 kujutab ühte säärast ühendit. Alates mehhanismist *2* jaguneb energiavoog kahte harru. Teine hargnemine leiab aset pärast mehhanismi *3″*. Kasuliku koormuse kogutöö A_k on antud seosega

$$A_k = A_n' + A_n'' + A_n'''.$$

Kogu ühendi (masina) kasutegur η saadakse järelikult valemiga

$$\eta = \frac{A_k}{A_m} = \frac{A'_n + A''_n + A'''_n}{A_m}. \qquad (20.20)$$



Joon. 685.

Motoorset tööd A_m saab avaldada tööde A_n', A_n'' ja A_n''' ning vastavate üksikmehhanismide kasutegurite kaudu.

Joonisel 685 on tööd A_m tegevast energiaallikast kulgevad energiavood näidatud täisjoonega *I—I*, kriipsjoonega *II—II* ja

punkt-kriipsjoonega *III—III*. Tööd A_m võib seega käsitada kui summat

$$A_m = \frac{A'_n}{\eta_{1n'}} + \frac{A''_n}{\eta_{1n''}} + \frac{A'''_n}{\eta_{1n'''}}, \tag{20.21}$$

kusjuures $\eta_{1n'}$, $\eta_{1n''}$ ja $\eta_{1n'''}$, mis tähistavad energiavoogude *I—I*, *II—II* ning *III—III* poolt läbitavate mehhanismiühendite kasutegureid, on arvutatavad valemitega

$$\eta_{1n'} = \eta_1\eta_{2'}\eta_{3'}\eta_{4'} \ldots \eta_{n'},$$
$$\eta_{1n''} = \eta_1\eta_{2''}\eta_{3''}\eta_{4''} \ldots \eta_{n''}$$

ja

$$\eta_{1n'''} = \eta_1\eta_{2'''}\eta_{3'''}\eta_{4'''} \ldots \eta_{n'''}.$$

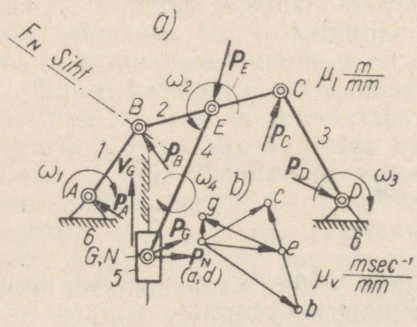
Masina üldine kasutegur η arvutatakse antud juhul valemiga

$$\eta = \frac{A'_n + A''_n + A'''_n}{\frac{A'_n}{\eta_{1n'}} + \frac{A''_n}{\eta_{1n''}} + \frac{A'''_n}{\eta_{1n'''}}}. \tag{20.22}$$

Valemist (20.22) võib järeldada, et masina üldkasutegur sõltub väga suurel määral masina projekteerimisel aluseks võetud energiavoogude jaotuse skeemist.

§ 105. Kasuteguri arvutamine mehhanismides

1°. Üksikmehhanismi kasuteguri arvutamisel tuleb alati leida see töö või võimsus, mis kulub kõikide takistusjõudude ületamiseks permanentse liikumise ühe tsükli kestel. Selleks tuleb reas mehhanismi asendites määrata kahjulike takistuste jõud. Seepeale, teades mehhanismi lülide kiirusi, arvutatakse nimetatud takistusjõudude ületamiseks vajalikud võimsused. Saadud arvutustulemuste põhjal määratakse kahjulike takistuste ületamiseks kuluv keskmine võimsus permanentse liikumise ühe tsükli kohta. Pärast seda võib mehhanismi kasuteguri arvutamiseks kasutada valemit (20.19).



Joon. 686.

Mehhanismi kasutegur sõltub endastmõistetavalt tema töös esinevate takistusjõudude iseloomust, kinemaatiliste lülide

ja paaride konstruktsioonist, kasutatavast määrimisviisist ja teistest teguritest. Seetõttu ei saa täpselt anda selle või teise mehhanismi kasuteguri väärtust. Igal üksikul juhul tuleb küsimust teoreetiliselt ja eksperimentaalselt analüüsida. Allpool on ainult üldjoontes puudutatud mõningaid võtteid, mida võib mehhanismide kasutegurite arvutamisel kasutada. Alustame madalamaid paare sisaldavate mehhanismide käsitlemisega.

2°. Olgu antud näiteks joonisel 686, *a* kujutatud mehhanism ja olgu ülesandeks arvutada selle kasutegur. Oletame, et mehhanismi kõik kahjulikud takistused on moodustatud ainuüksi hõõrdetakistustest ja et hõõrdetegurid kinemaatilistes paarides on ette antud. Kinemaatilisi paare koormavad reaktsioonid P_A, P_B, P_C, P_D, P_E, P_G ja P_N olgu mehhanismi kõikides asendites samuti teada. Hõõrdejõudude suurused on vastavalt eeltoodule järgmised:

$$F_A = f_A P_A,\ F_B = f_B P_B,\ F_C = f_C P_C,\ F_D = f_D P_D,$$
$$F_E = f_E P_E,\ F_G = f_G P_G \text{ ja } F_N = f_N P_N,$$

kusjuures f_A, f_B, f_C, f_D, f_E, f_G ja f_N tähistavad etteantud hõõrdetegureid indeksitega näidatud kinemaatilistes paarides.

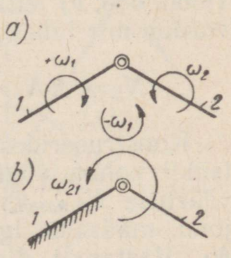
Kinemaatilistes paarides esineva hõõrdumise ületamiseks kuluva hetkelise võimsuse arvutamiseks tuleb määrata šarniiride suhtelised nurkkiirused ja liuguri relatiivne joonkiirus juhtpinna suhtes. Lüli *1* relatiivne kiirus kinnislüli *6* suhtes võrdub etteantud nurkkiirusega ω_1, sest võll *A* pöörleb liikumatus laagris. Ülejäänud šarniirides esinevate suhteliste kiiruste määramiseks tuleb konstrueerida mehhanismi kiirusplaan (joon. 686, *b*). Konstrueerinud nimetatud kiirusplaani, määrame sellest lülide *BC*, *CD* ja *EG* nurkkiirused, kasutades valemeid

$$|\omega_2| = \frac{\mu_v (bc)}{l_{BC}}, \quad |\omega_3| = \frac{\mu_v (pc)}{l_{CD}} \text{ ja } |\omega_4| = \frac{\mu_v (eg)}{l_{EG}}.$$

Toodud valemites tähistavad *bc*, *pc* ja *eg* kiirusplaanist mõõdetavaid joonlõikusid, l_{BC}, l_{CD} ja l_{EG} — vastavalt lülide *BC*, *CD* ja *EG* pikkusi ning μ_v — kiirusplaani mastaapi. Lüli *2* relatiivsel liikumisel lüli *1* suhtes esineva suhtelise nurkkiiruse saamiseks tuleb mõlemale lülile anda ühine lisanurkkiirus $-\omega_1$ (joon. 687, *a*). Selle tulemusel näib lüli *1* paigalseisvana (joon. 687, *b*), lüli *2* aga hakkab lüli *1* suhtes pöörlema nurkkiirusega ω_{21}, mille absoluutväärtus saadakse seosest

$$|\omega_{21}| = |\omega_2| + |\omega_1|.$$

Lülide *3* ja *4* relatiivsed nurkkiirused lüli *2* suhtes saadakse siis, kui neile anda ühine lisanurkkiirus $-\omega_2$. Seda võtet kasuta-



Joon. 687.

des leiaksime suhtelise nurkkiiruse ω_{32} absoluutväärtuse valemist

$$|\omega_{32}| = |\omega_3| + |\omega_2|.$$

Lülide *4* ja *2* vahelise suhtelise nurkkiiruse absoluutväärtuse arvutamiseks kasutame analoogilist valemit:

$$|\omega_{42}| = |\omega_4| + |\omega_2|.$$

Lüli *3* nurkkiirus liikumatu laagri suhtes ω_{36} võrdub nurkkiirusega ω_3. Ja lõpuks, lüli *5* nurkkiirus lüli *4* suhtes ω_{54} saadakse seosest

$$\omega_{54} = -\omega_4.$$

Üldjuhul arvutatakse lüli i ja lüli k suhtelise liikumise nurkkiirus valemiga

$$\omega_{ik} = \omega_k - \omega_i,$$

mille kohaselt tuleb vastassuunaliste nurkkiiruste puhul nende absoluutväärtused liita. Samasuunaliste nurkkiiruste puhul tuleb suuremast absoluutväärtusest lahutada väiksem.

Mis puutub liuguri relatiivset kiirust juhtpinna suhtes, siis võrdub see kiirusega v_G.

Kinemaatilistes paarides esineva hõõrdumise ületamiseks vajalikud võimsused väljenduvad järgmiselt: $N_A = F_A r_A |\omega_1|$, $N_B = F_B r_B |\omega_{21}|$, $N_D = F_D r_D |\omega_3|$, $N_G = F_G r_G |\omega_4|$, $N_C = F_C r_C |\omega_{32}|$, $N_E = F_E r_E |\omega_{42}|$ ja $N_N = F_N v_G$.

Toodud seostes tähistavad r_A, r_B, r_C, r_D, r_E ja r_G vastavate šarniiritappide raadiusi. Asetades ülaltoodud valemitesse hõõrdejõudude avaldised ja suhteliste kiiruste absoluutväärtused, saame: $N_A = f_A P_A r_A |\omega_1|$, $N_B = f_B P_B r_B (|\omega_2| + |\omega_1|)$, $N_D = f_D P_D r_D |\omega_3|$, $N_G = f_G P_G r_G |\omega_4|$, $N_C = f_C P_C r_C (|\omega_3| + |\omega_2|)$, $N_E = f_E P_E r_E (|\omega_4| + |\omega_2|)$ ja $N_N = f_N P_N v_G$.

Nii saadud valemites võib nurkkiirusi asendada kiirusplaanist (joon. 686, *b*) leitavate väärtustega. Hõõrdejõudude üldvõimsus N_h võrdub mis tahes hetkel alljärgneva summaga:

$$N_h = \Sigma N_i = N_A + N_B + N_C + N_D + N_E + N_G + N_N.$$

Konstrueerides võimsuse N_h diagrammi mehhanismi ühe tsükli kohta, võime leida hõõrdumisele kuluva võimsuse keskväärtuse $N_{h\,keskm.}$. Seepeale, aluseks võttes kasuliku koormuse jõud, määrame igal hetkel nende ületamiseks vajaliku võimsuse N_k. Vastavalt diagrammilt saame kasuliku koormuse keskmise võimsuse $N_{k\,keskm.}$

Keskmise motoorsete jõudude võimsuse $N_{m\ keskm.}$ saame seosest

$$N_{m\ keskm.} = N_{k\ keskm.} + N_{h\ keskm.}$$

ja mehhanismi üldise kasuteguri vastavalt võrrandist (20.19)

$$\eta = 1 - \frac{N_{h\ keskm.}}{N_{m\ keskm.}}. \qquad (20.23)$$

3°. Käsitleme nüüd kõrgemate paaridega mehhanisme. Olgu näiteks ülesandeks leida joonisel 688 kujutatud hammasmehhanismi kasutegur. Kui arvesse võtta ainult hõõrdejõude, tuleb kasuteguri leidmiseks määrata nii liugehõõrdekaod laagrites O_1 ja O_2 kui ka liuge- ning veerehõõrdekaod hambumises.

Laagrites O_1 ja O_2 esineva hõõrdumise ületamiseks vajalikud hetkelised võimsused saame seostest

$$N_h' = M^{O_1}{}_h\,|\omega_1| \quad \text{ja} \quad N_h'' = M^{O_2}{}_h\,|\omega_2|,$$

kus $M^{O_1}{}_h$ ja $M^{O_2}{}_h$ tähistavad vastavates laagrites mõjuvate liugehõõrdejõudude momentide absoluutväärtusi. Viimased arvutatakse § 89 toodud valemitega.

Hambumises esineva liugehõõrdumise ületamiseks vajaliku hetkelise võimsuse N'''_h arvutame valemiga

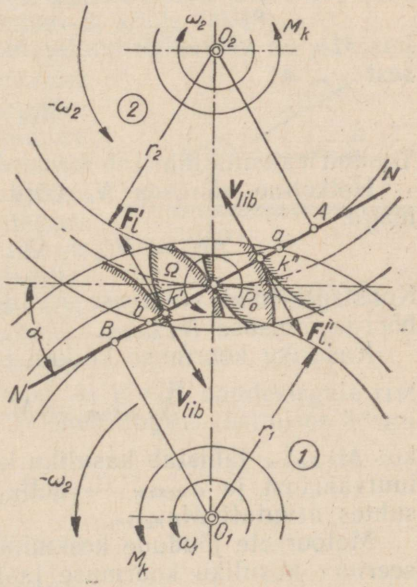
$$N'''_h = F_l v_{lib.}, \qquad (20.24)$$

kus F_l on hammaste vahel esinev liugehõõrdejõud ja $v_{lib.}$ — hammaste suhteline libisemiskiirus.

Liugehõõrdejõu F_l arvutame omakorda tuntud valemiga

$$F_l = P_{12} f,$$

kus P_{12} tähistab hamba *1* poolt hambale *2* ülekantavat jõudu ja f — hõõrdetegurit kontaktpunktis. Siinjuures on eeldatud, et korraga hambub üksainus hambapaar ja et ülekantav jõud on sihitud piki nor-



Joon. 688.

maali *NN*. Jõu P_{12} suuruse võib määrata tavaliste, varemkäsitletud meetoditega.

Võrrandi (20.24) võib seega kirjutada järgmiselt:

$$N'''_h = P_{12} f v_{lib.}.$$

Libisemiskiiruse väärtuse saame seosest

$$v_{lib.} = (|\omega_1| + |\omega_2|)\,(P_0 k),$$

kus $(P_0 k)$ tähistab kaugust hambumispooluse P_0 ja kontaktpunktide k' või k'' vahel. Jooniselt 688 selgub, et libisemiskiiruse suund on hambumissirge lõikudes aP_0 ja $P_0 b$ erinev (vrd. kiirusvektori suunda punktides k' ja k''). Vastavalt sellele muutuvad ka hõõrdejõudude suunad.

Hambumises esineva liugehõõrde ületamiseks vajatakse seega hetkelist võimsust

$$N'''_h = P_{12} f (|\omega_1| + |\omega_2|)\,(P_0 k).$$

Hetkeline võimsus $N^{IV}{}_h$, mis tuleb kulutada hambumises asetleidva veerehõõrdumise kompenseerimiseks, saadakse valemist (vt. § 91, 3°):

$$N^{IV}{}_h = M_{vh} |\Omega| = M_{vh} (|\omega_1| + |\omega_2|),$$

kus M_{vh} on veerehõõrdumise moment, mille väärtus leitakse seosest

$$M_{vh} = P_{12} k.$$

Toodud valemis tähistab k veerehõõrdetegurit.

Hetkeline võimsus N_h võrdub ülalarvutatud võimsuste summaga:

$$N_h = N'_h + N''_h + N'''_h + N^{IV}{}_h.$$

Konstrueerinud võimsuse N_h diagrammi, leiame sealt keskmise hõõrdevõimsuse $N_{h\,keskm.}$.

Kasuliku koormuse keskmise võimsuse leiame seosest

$$N_{k\,keskm.} = M_{k\,keskm.} |\omega_{keskm.}|,$$

kus $M_{k\,keskm.}$ tähistab kasuliku koormuse keskmise momendi absoluutväärtust ja $\omega_{keskm.}$ — selle võlli keskmist nurkkiirust, mille suhtes arvutati $M_{k\,keskm.}$

Motoorsete jõudude keskmine võimsus $N_{m\,keskm.}$ peab kompenseerima kasuliku koormuse ja hõõrdetakistuste keskmised võimsused:

$$N_{m\,keskm.} = N_{k\,keskm.} + N_{h\,keskm.}$$

ning järelikult käsitletava hammasmehhanismi üldkasutegur on arvutatav valemiga

$$\eta = 1 - \frac{N_{h\ keskm.}}{N_{m\ keskm.}}.$$

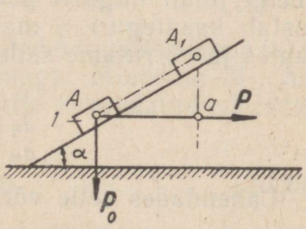
Ligikaudsetes arvutustes, kus võetakse arvesse ainult kadusid, mis tekivad hammaste suhtelisel libisemisel, võib kasutada järgmist lähendusvalemit

$$\eta = 1 - \frac{f\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{z_1} \pm \frac{1}{z_2}\right).$$

Selles valemis tähistab f hõõrdetegurit, ε — katteteguri, z_1 ja z_2 — hammaste arve indeksiga näidatud ratastel. Välishambumise puhul tuleb sulgudes kasutada plussmärki, kuna sisehambumisel kehtib miinusmärk. Lisaks sellele tuleb sisehambumise puhul z_1 all mõista väiksema ratta hammaste arvu.

Praktikas määratakse hammasrataste kasutegurid tavaliselt katselisel teel. Ligikaudsetes arvutustes võib kasutada järgmisi kasuteguri keskmisi väärtusi: lihvitud hammaste puhul $\eta = 0{,}99$, lõigatud hammaste puhul $\eta = 0{,}975$ kuni 0,985, kaldhammastega ratastel $\eta = 0{,}97$ kuni 0,975 jne. Hammasülekannete kasuteguri määramise kohta võib täpsemaid andmeid leida entsüklopeedilisest käsiraamatust «Машиностроение» 2. köide (1948).

4°. Kruvimehhanismide kasutegurid määratakse ligikaudselt, kasutades kaldpinna kasuteguri arvutamiseks tuletatud valemeid. Keerme keskmine kruvijoon asendatakse sel juhul kaldpinnaga, mutter aga liuguriga *1* (joon. 689). Neis tingimusis võib kasuteguri valemeid tuletada järgmiselt. Liikugu liugur *1*, millele mõjub vertikaalsihiline püsiv kasulik koormus P_0, asendist A asendisse A_1. Seda liikumist põhjustagu püsiva väärtusega horisontaalne motoorne jõud P. Tõmbame punktist A_1 jõu P kandesirgele ristsirge A_1a. Jõu P kasulik töö, mis seisneb liuguri tõstmises kõrgusele A_1a, saadakse valemiga



Joon. 689.

$$A_k = P_0(A_1a).$$

Motoorse jõu P tööks on seejuures

$$A_m = P(Aa).$$

Võrrandi (20.11) põhjal võime nüüd arvutada kasuteguri

järgmiselt:

$$\eta = \frac{A_k}{A_m} = \frac{P_0(A_1a)}{P(Aa)} = \frac{P_0}{P}\operatorname{tg}\alpha.$$

Paragrahvis 88 tuletatud võrrandist (17.23) selgub, et

$$P = P_0\operatorname{tg}(\alpha+\varphi),$$

kus φ tähistab hõõrdenurka. Järelikult

$$\eta = \frac{P_0\operatorname{tg}\alpha}{P_0\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}. \qquad (20.25)$$

Juhul kui liugur jõu $\boldsymbol{P}_0$ toimel laskub, arvutatakse kasutegur valemiga

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)}{\operatorname{tg}\alpha}, \qquad (20.26)$$

sest antud juhul $P = P_0\operatorname{tg}(\alpha-\varphi)$ ja jõud $\boldsymbol{P}_0$ osutub motoorseks.

Võrrandist (20.25) selgub, et kaldpinna kasutegur on liuguri tõusval liikumisel null siis, kui $\alpha = 0$ ja kui $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Intervallis $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} - \varphi$ on kasutegur positiivne. Kui $\alpha > \frac{\pi}{2} - \varphi$, muutub kasutegur negatiivseks ja jõud $\boldsymbol{P}$ ei suuda ühelgi juhul liugurit paigalt nihutada. Et leida nurka α, millele vastab kasuteguri η maksimaalne väärtus, võtame η tuletise α suhtes ja võrrutame selle nulliga:

$$\frac{d\eta}{d\alpha} = \frac{d\left[\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha+\varphi)}\right]}{d\alpha} = 0.$$

Lahendades selle võrrandi α suhtes leiame, et

$$\alpha = 45° - \frac{\varphi}{2}.$$

Kasutegur on seega maksimaalne juhul, kui kaldpind moodustab horisontaaliga nurga $\alpha = 45° - \frac{\varphi}{2}$.

Võrrandist (20.26) omakorda järgneb, et olukorras, kus liugur laskub piki kaldpinda jõu $\boldsymbol{P}_0$ mõjul, muutub kasutegur η negatiivseks, niipea kui $0 < \alpha < \varphi$. Liugur saab jõu $\boldsymbol{P}_0$ mõjul liikuda ainult siis, kui $\varphi < \alpha < \frac{\pi}{2}$, kuna sel juhul on kaldpinna kasutegur positiivne.

Saab tõestada, et juhul kui liugur tõuseb kaldpinnal, mille tõusunurk on väiksem hõõrdenurgast φ, on kasutegur alati väik-

sem kui 0,5. Tõepoolest, juba olukorras, kus $\alpha = \varphi$, annab võrrand (20.25)

$$\eta = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi(1 - \operatorname{tg}^2\varphi)}{2\operatorname{tg}\varphi} = 0{,}5 - \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{2}.$$

Ülaltuletatud valemeid kasutatakse ka kruvimehhanismide ja tiguülekannete puhul kasuteguri ligikaudseks määramiseks. Kui vedavaks lüliks on tigu, tuleb rakendada valemit (20.25). Vedava tiguratta puhul kasutatakse valemit (20.26). Kõik järeldused, mis nendest valemitest tulenesid kaldpinna arvutuses, kehtivad ka kruvimehhanismide ja tiguülekande puhul.

5°. Käsitleme nüüd kasuteguri määramist planetaarmehhanismides, võttes arvutusobjektiks joonisel 690, *a* toodud planetaarreduktori.

Uurime kõigepealt, kuidas suhtuvad mehhanismile kui tervikule rakendatud jõud ja momendid nendesse jõududesse ja momentidesse, mis koormavad tema üksikuid lülisid. Tähistame vedavale rattale *1* mõjuva momendi tähisega M_1, veetavale raamile H toimiva momendi tähisega M_H ja paiksele rattale *3* rakendatud momendi (reaktiiv- või tugimomendi) tähisega M_3. Kui jätta kõrvale hambumistes ja laagrites esinevad hõõrdekaod, võib kogu mehhanismi võimsuste bilansivõrrandi kirjutada järgmisel kujul:

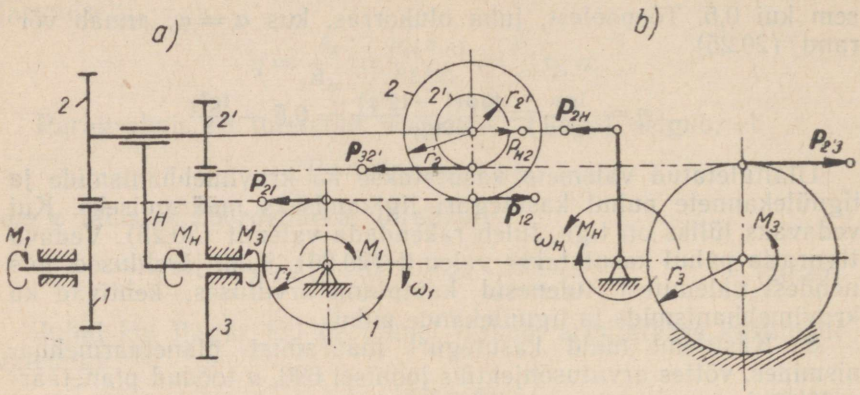
$$M_1\omega_1 + M_H\omega_H = 0. \qquad (20.27)$$

Võrrandis (20.27) on meil tegemist mehhanismi siseneva ja sealt väljuva võimsuse algebralise summaga. Momente M_1, M_H ja M_3 seob aga omavahel ka mehhanismile rakendatud välismomentide tasakaalu tingimus

$$M_1 + M_H + M_3 = 0. \qquad (20.28)$$

Võrrandites (20.27) ja (20.28) figureerivaid momente võib alati avaldada rataste raadiuste ja vastavate ringjõudude korrutiste näol. Selleks vaatleme mehhanismi koostisse kuuluvate üksiklülide tasakaalu küsimust.

Koostame reduktori iga lüli kohta skeemi selle profiilitasapinnas (joon. 690, *b*). Rattale *1* mõjub moment M_1 ja ratta *2* poolt rakendatud jõud $\boldsymbol{P}_{21}$. Satelliitidest *2* ja *2'* moodustatud lüli koormab ratta *1* reaktsioon $\boldsymbol{P}_{12}$, ratta *3* poolt rakendatud jõud $\boldsymbol{P}_{32}$, ja raami H jõud $\boldsymbol{P}_{H2}$. Raamile H mõjub omakorda moment M_H ja satelliitidest moodustatud lüli reaktsioon $\boldsymbol{P}_{2H}$. Lõpuks, lüli *3* on koormatud momendiga M_3 ja satelliitidest koosneva lüli reaktsiooniga $\boldsymbol{P}_{2'3}$. Kõiki ülalloetletud jõudusid saab avaldada vastavate momentide ja rataste *1*, *2*, *2'* ning *3* raadiuste r_1, r_2, r_2' ja r_3 kaudu. Lülide *1*, *H* ja *3* tasakaalutingimuste põhjal võime kirjutada:



Joon. 690.

$$P_{21} = \frac{M_1}{r_1}, \tag{20.29}$$

$$P_{2H} = \frac{M_H}{r_1 + r_2} \tag{20.30}$$

ja

$$P_{2'3} = \frac{M_3}{r_3}. \tag{20.31}$$

Satelliitidest koosneva lüli tasakaaluvõrrandid võimaldavad hõlpsasti määrata jõudude $\boldsymbol{P}_{32'}$ ja $\boldsymbol{P}_{H2}$ suurust ning suunda. Tõepoolest, tasakaalutingimusest

$$P_{12} r_2 = P_{32'} r_{2'}$$

järgneb, et

$$P_{32'} = P_{12} \frac{r_2}{r_{2'}}. \tag{20.32}$$

Tasakaalutingimus

$$P_{12}(r_2 - r_{2'}) = P_{H2} r_{2'}$$

annab omakorda

$$P_{H2} = P_{12} \frac{r_2 - r_{2'}}{r_{2'}}. \tag{20.33}$$

Lisaks sellele kehtivad endastmõistetavad seosed:

$$\boldsymbol{P}_{12} = -\boldsymbol{P}_{21}, \quad \boldsymbol{P}_{H2} = -\boldsymbol{P}_{2H} \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{P}_{32'} = -\boldsymbol{P}_{2'3}. \tag{20.34}$$

Mehhanismi lülidele mõjuvate jõudude ja lülide nurkkiiruste vahel kehtiva seose saab avaldada võrrandi (11.12) abil. Viimase põhjal

$$i_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = (-1)^2 \frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}} = \frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}}. \qquad (20.35)$$

Võrrandist (20.32) selgub, et

$$\frac{r_2}{r_{2'}} = \frac{P_{32'}}{P_{12}}.$$

Võrrandi (20.35) võib seetõttu kirjutada ka järgmisel kujul:

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{P_{32'} r_3}{P_{12} r_1},$$

millest järgneb, et

$$P_{12} r_1 (\omega_1 - \omega_H) = P_{32'} r_3 (\omega_3 - \omega_H) = -P_{32'} r_3 \omega_H, \qquad (20.36)$$

sest paikse ratta *3* nurkkiirus $\omega_3 = 0$.

Et $M_1 = P_{12} r_1$ ja $M_3 = P_{3'2} r_3$, siis võime võrrandi (20.36) alusel kirjutada, et

$$M_1 (\omega_1 - \omega_H) = -M_3 \omega_H \qquad (20.37)$$

ehk

$$N_1^H = -N_3^H. \qquad (20.38)$$

Võrrandite (20.37) ja (20.38) paremad ja vasakud pooled kujutavad kummaski hambuvas rattapaaris mõjuvaid võimsusi olukorras, kus mehhanismi raam *H* on tinglikult seisatud. Rattapaari hambumises esinev võimsus võrdub seega antud ratta poolt ülekantava momendi ja raami suhtes arvutatud ratta relatiivse nurkkiiruse korrutisega. Käsitletavat võimsust nimetatakse *hambumisvõimsuseks*.

Hambumisvõimsus iseloomustab mehhanismi võimalikke kadusid. Mida suuremaks see kujuneb, seda suuremad on kaod ja seda madalamaks muutub ka mehhanismi kasutegur.

6°. Planetaarmehhanismi vedavaks lüliks võib olla kas üks tema tsentraalratastest või ka raam *H*. Teine tsentraalratas on sel juhul liikumatu. Juhul kui vedavaks lüliks on lüli *1* (joon. 690, *a*), osutub sellel rattal mõjuv võimsus N_1 motoorseks. Kasuliku koormuse võimsus N_k saadakse sel puhul raamilt *H*, kusjuures tema väärtuseks kujuneb

$$N_k = N_1 - N_h.$$

N_h tähistab siin võimsust, mis on vajalik hõõrdumiste ületamiseks kinemaatilistes paarides.

Võimsust N_h saab arvutada, lähtudes hambumisvõimsusest, s. t. võimsusest N_1^H, mida reduktor üle kannaks raami *H* seiskava pööratud liikumise puhul.

Planetaarmehhanismis, millel ratas *1* on vedav ja raam *H* veetav, arvutatakse kasutegur η_{1H} valemiga

$$\eta_{1H} = \frac{N_1 - N_h}{N_1}. \tag{20.39}$$

Hõõrdevõimsuse N_h saab avaldada hambumisvõimsuse $N_1{}^H$ ja kadude koefitsiendi φ_H kaudu [vt. § 104, 1°, valem (20.14)]. Olukorras, kus ratas *1* on pööratud liikumises vedavaks rattaks, saame:

$$N_h = |N_1{}^H|\,\varphi_H. \tag{20.40}$$

Kui ratas *1* osutub pööratud liikumisel veetavaks, kehtib seos

$$N_h = |N_1{}^H|\,\frac{\varphi_H}{1-\varphi_H}. \tag{20.41}$$

Juhul kui liikumatu raami juures arvutatud reduktori üldkasutegur $\eta_H > 0{,}9$ ja seega $\varphi_H < 0{,}1$, võib praktika jaoks küllaldase täpsusega kasutada valemit (20.40), sõltumatult sellest, kas ratas *1* on pööratud liikumises vedav või veetav. Tuleb rõhutada, et valemites (20.40) ja (20.41) esineb võimsuse $N_1{}^H$ absoluutväärtus. Kui silmas pidada võrdust (20.37), võib võrrandile (20.40) anda veel järgmise kuju:

$$N_h = |N^H{}_1|\,\varphi_H = |M_1(\omega_1 - \omega_H)|\,\varphi_H. \tag{20.42}$$

Olukorras, kus vedava lüli funktsioone täidab raam *H*, osutub rattal *1* mõjuv võimsus N_1 kasuliku koormuse võimsuseks ja raami *H* võimsus N_H — motoorseks võimsuseks. Viimane on antud võrrandiga

$$N_H = N_1 + N_h.$$

Vedava raamiga *H* ja veetava rattaga *1* mehhanismi kasutegur η_{H1} arvutatakse valemiga

$$\eta_{H1} = \frac{N_1}{N_1 + N_h}, \tag{20.43}$$

kusjuures võimsuse N_h võib määrata võrrandiga (20.42).

Võrrandi (20.42) võib kirjutada veel järgmiselt:

$$N_h = \left|M_1\omega_1\,\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_1}\right|\varphi_H = N_1|\,(1 - i_{H1})|\,\varphi_H, \tag{20.44}$$

sest et

$$\frac{\omega_H}{\omega_i} = i_{H1}.$$

Asetades N_h avaldise võrranditesse (20.39) ja (20.43), saame:

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})|\varphi_H \tag{20.45}$$

ja

$$\eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})|\varphi_H}. \tag{20.46}$$

Saadud kasuteguri arvutusvalemid on ainult ligikaudsed, sest hambumisvõimsuste määramisel ei võetud arvesse hõõrdekadusid. Enamikul juhtudel annavad need valemid tulemusi, mis kasutegurite tõelistest väärtustest erinevad ainult tühisel määral. Erandi moodustavad siinjuures mehhanismid, kus pööratud liikumise ülekandetegur i^H_{13} erineb vähe ühest. Säärased mehhanismid võivad kujuneda isepidurduvaiks ja valemitega (20.45) ning (20.46) arvutatud kasutegurid ei vasta alati nende tegelikele väärtusile.

Näitena määrame kasuteguri joonisel 690, *a* kujutatud mehhanismile, millel $z_1 = 40$, $z_2 = 50$, $z_{2'} = 30$ ja $z_3 = 60$. Oletame, et iga rattapaari kasutegur $\eta = 0{,}95$.

Arvutame kõigepealt ülekandeteguri i_{H1} [vt. valem (11.14)]:

$$i_{H1} = \frac{1}{i_{1H}} = \frac{1}{1 - i^H_{13}} = \frac{1}{1 - (-1)^2 \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}} = \frac{1}{1 - \frac{50 \cdot 60}{40 \cdot 30}} = -\frac{2}{3}.$$

Reduktori üldkasutegur η_H on liikumatu raami puhul antud seosega [vt. valem (20.17)]:

$$\eta_H = \eta_{12} \cdot \eta_{2'3} = (0{,}95)^2 = 0{,}9.$$

Sellest järgneb, et kadude koefitsient

$$\varphi_H = 1 - \eta_H = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Asetades saadud i_{H1} ja φ_H väärtused võrranditesse (20.45) ja (20.46), saame vastavalt

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})|\varphi_H = 1 - \left(1 + \frac{2}{3}\right) 0{,}1 = 0{,}833$$

ja

$$\eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})|\varphi_H} = \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{2}{3}\right) 0{,}1} = 0{,}856.$$

Teise näitena käsitleme joonisel 396 kujutatud mehhanismi. Olgu hammaste arvud vastavalt $z_{2'} = 10$, $z_3 = 20$, $z_{3'} = 10$ ja $z_4 = 40$. Iga rattapaari kasutegur olgu $\eta = 0{,}95$. Ülekandeteguri saame valemist

$$i_{H2'} = \frac{1}{i_{2'H}} = \frac{1}{1 - (-1)\frac{z_3 z_4}{z_{2'} z_{3'}}} = \frac{1}{1 + \frac{20 \cdot 40}{10 \cdot 10}} = \frac{1}{9}.$$

Silmas pidades, et $\varphi_H = 1 - \eta_H = 1 - (0{,}95)^2 = 0{,}1$, võime arvutada kogu reduktori kasuteguri valemiga

$$\eta_{1H} = \eta_{12}\eta_{2'H} = \eta_{12}[1 - |(1 - i_{H1})|\varphi_H] =$$
$$= 0{,}95\left[1 - \left(1 - \frac{1}{9}\right)0{,}1\right] = 0{,}855.$$

Kasutegur η_{H1} saadakse analoogiliselt valemist

$$\eta_{H1} = \eta_{21}\eta_{H2'} = \frac{\eta_{21}}{1 + |(1 - i_{H1})|\varphi_H} = \frac{0{,}95}{1 + \left(1 - \frac{1}{9}\right)0{,}1} = 0{,}872.$$

Toodud kasuteguri määramise meetodi on välja töötanud V. N. Kudrjavtsev ja T. S. Žegalova. Üksikasjalisemalt on kasutegurite arvutamise ja planetaarmehhanismides mõjuvate jõudude määramise küsimusi arendatud L. N. Rešetovi, V. V. Dobrovolski, R. M. Brumbergi, V. N. Kudrjavtsevi, S. N. Koževnikovi jt. töödes.

Näide 13. Leida tiguülekande kasutegur juhul, kui tigu samm $t = 100$ mm, tigu keskjoone raadius $r = 60$ mm, hõõrdetegur $f = 0{,}1$.

Tigukeerme kaldenurk α saadakse valemist

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{t}{2\pi r} \approx 15°,$$

hõõrdenurga φ aga määrab seos

$$\varphi = \operatorname{arctg} 0{,}1 \approx 6°.$$

Kui vedavaks lüliks on tigu, leitakse ülekande kasutegur valemiga (20.25). Saame:

$$\eta_{tr} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} = \frac{\operatorname{tg} 15°}{\operatorname{tg} 21°} = \frac{0{,}267}{0{,}383} \approx 0{,}7.$$

Vedava tiguratta puhul tuleb samaks otstarbeks kasutada seost (20.26). Saame:

$$\eta_{rt} = \frac{\operatorname{tg}(\alpha - \varphi)}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\operatorname{tg} 9°}{\operatorname{tg} 15°} = \frac{0{,}158}{0{,}267} \approx 0{,}63.$$

XXI peatükk

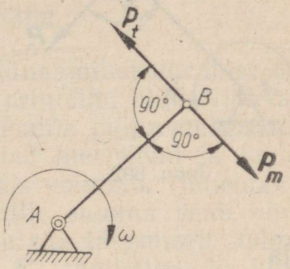
JÕUDUDE JA MASSIDE REDUTSEERIMINE MASINATES

§ 106. Redutseeritud jõud ja momendid

1°. Mehhanismide ja masinate dünaamikat käsitleva jao esimeses osas vaadeldi mehhanismidele ja masinatele mõjuvaid jõudusid ja anti nende arvutamiseks vajalikud meetodid. Siirdume

nüüd mehhanismide ja masinate liikumisega seotud küsimuste juurde.

Masina või mehhanismi antud jõududest põhjustatud liikumise uurimisel on otstarbekas kõik mõjuvad jõud asendada mehhanismi või masina ühele lülile rakendatud jõududega. Seejuures peab vaadeldava võimaliku nihke juures asendavate jõudude poolt tehtav töö või arendatav võimsus võrduma uuritava mehhanismi lülidele tegelikult rakendatud jõudude poolt tehtud tööde või arendatud võimsuste summaga. Toodud tingimusele vastavaid asendavaid jõudusid nimetatakse *redutseeritud* (taandatud) jõududeks.



Joon. 691.

Lüli, millele on rakendatud redutseeritud jõud, nimetatakse *redutseerimislüliks (taandamislüliks)* ja redutseeritud jõudude rakenduspunkti — *redutseerimispunktiks (taandamispunktiks)*.

Kuna masinagregaat moodustab ühe liikuvusastmega süsteemi, siis on ilmne, et tema liikumise määramiseks piisab ühe lüli liikumisseaduse tundmisest. Sääraseks lüliks valitakse tavaliselt kas töömasina vedav võll või jõumasina veetav lüli. Sellele lülile on otstarbekas redutseerida ka kõik agregaadis toimivad jõud. Selle asemel, et vaadelda kogu masinagregaadile mõjuvat jõudude kompleksi, võib uurida ainult ühte lüli, näiteks vänta AB (joon. 691), millele on punktis B rakendatud kaks vända teljega ristuvat jõudu: redutseeritud motoorne jõud $\boldsymbol{P}_m$ ja redutseeritud takistusjõud $\boldsymbol{P}_t$. Seejuures peab jõud $\boldsymbol{P}_m$ tegema tööd A_m, mis võrdub kõikide motoorsete jõudude poolt tehtud tööde summaga, või arendama võimsust N_m, mis vastab kõikide motoorsete jõudude koguvõimsusele. Redutseeritud takistusjõud $\boldsymbol{P}_t$ peab omakorda tegema kõikide takistusjõudude tööde summaga võrduvat tööd A_t või arendama võimsust, mis on võrdne takistusjõudude koguvõimsusega.

2°. Redutseeritud jõudude või momentide määramiseks kasutatava võrrandi võib üldjuhul kirjutada järgmiselt:

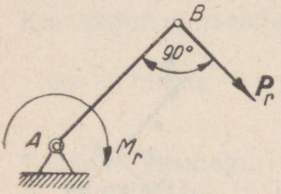
$$N_r = \sum_1^k N_i. \tag{21.1}$$

Selles võrrandis tähistab N_r redutseeritud jõu või momendi poolt arendatavat võimsust ja N_i — indeksiga näidatud lülile mõjuvate ja redutseerimisele kuuluvate jõudude või momentide võimsust.

Võimsuse N_r võib esitada järgmisel kujul:

$$N_r = P_r v_B = M_r \omega, \tag{21.2}$$

kus P_r tähistab redutseerimislüli punkti B taandatud jõu suurust (joon. 692). Sõltuvalt olukorrast võib taandatud jõuks olla nii redutseeritud motoorne jõud $\boldsymbol{P}_m$ kui ka redutseeritud takistusjõud $\boldsymbol{P}_t$ (joon. 691); $\boldsymbol{v}_B$ tähistab redutseerimispunkti B kiirust, M_r — redutseeritud momenti ja ω — redutseerimislüli nurkkiirust.



Joon. 692.

Redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}_r$ ja redutseeritud momendi M_r võib seega avaldada järgmiselt:

$$P_r = \frac{\sum_1^k N_i}{v_B} \tag{21.3}$$

ja

$$M_r = \frac{\sum_1^k N_i}{\omega}. \tag{21.4}$$

Summa $\sum_1^k N_i$ võib arendatud kujul kirjutada järgmiselt:

$$\sum_1^k N_i = \sum_1^k P_i v_i \cos \alpha_i + \sum_1^k M_i \omega_i, \tag{21.5}$$

kus $\boldsymbol{P}_i$ ja M_i tähistavad lülile i rakendatud jõude ja momente, $\boldsymbol{v}_i$ — jõu $\boldsymbol{P}_i$ rakenduspunkti kiirust, ω_i — lüli i nurkkiirust ja α_i — nurka, mille jõud $\boldsymbol{P}_i$ moodustab kiirusvektoriga $\boldsymbol{v}_i$.

Asendades $\sum_1^k N_i$ väärtuse seosest (21.5) võrranditesse (21.3) ja (21.4), saame

$$P_r = \sum_1^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{v_B} \tag{21.6}$$

ja

$$M_r = \sum_1^k P_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + \sum_1^k M_i \frac{\omega_i}{\omega}. \tag{21.7}$$

Võrranditest (21.6) ja (21.7) võib järeldada, et juhul kui mehhanismile rakendatud jõud ja momendid on mehhanismi kõikides asendites teada, sõltuvad redutseeritud jõud $\boldsymbol{P}_r$ ja redutseeritud moment M_r ainuüksi kiiruste suhetest. Nagu näidati mehhanismide kinemaatikas, olenevad viimased omakorda ainult mehhanismi konfiguratsioonist, s. t. tema lülide asenditest.

Võrrandite (21.6) ja (21.7) põhjal võib ennustada, et etteantud jõudude $\boldsymbol{P}_i$ ja momentide M_i korral ei tekita redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}_r$ või momendi M_r leidmine erilisi raskusi. Jõudude ja momentide redutseerimiseks tuleb iga uuritava asendi jaoks konstrueerida kiirusplaan ja avaldada võrrandites (21.6) ning (21.7) esinevad kiiruste suhted kiirusplaani vastavate lõikude suhete kaudu.

§ 107. N. J. Žukovski kang

1°. Jõudude arvutust ja mehhanismide dünaamilist uurimist on alati võimalik teostada mõeldavate nihete printsiibi abil. Nimetatud printsiip väidab, et juhul kui mehhanismile mõjuvatele etteantud jõududele lisada veel lülides tekkivad inertsjõud ja anda seepeale kogu süsteemile selle antud asendis võimalik (mõeldav) nihutus, siis tekib rida elementaartöid, mille summa peab võrduma nulliga. Analüütiliselt võib seda kujutada järgmiselt. Olgu süsteemile rakendatud jõud $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \ldots, \boldsymbol{P}_n$, sealhulgas ka lülides mõjuvad inertsjõud. Tähistame antud hetkel võimalike nihete projektsioonid jõudude $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ sihis vastavalt $\delta p_1, \delta p_2, \delta p_3, \ldots, \delta p_n$. Juhul kui mehhanismi kõik sidemed jäävad lukustatuks, peab võimalike (mõeldavate) nihete printsiibi põhjal

$$\sum_1^n P_i \delta p_i = 0 \tag{21.8}$$

ehk arendatud kujul

$$P_1 \delta p_1 + P_2 \delta p_2 + P_3 \delta p_3 + \ldots + P_n \delta p_n = 0. \tag{21.9}$$

Kuna mehhanism on moodustatud sundliikuvusega kinemaatilisest ahelast ja kuna me oletasime, et mehhanismi sidemed ei sõltu ajast, siis on ilmne, et mehhanismi tegelikud paigutused kuuluvad võimalike (mõeldavate) nihete hulka. Seetõttu võib võrrandi (21.8) kirjutada ka alljärgnevalt:

$$\sum_1^n P_i dp_i = 0 \tag{21.10}$$

ehk

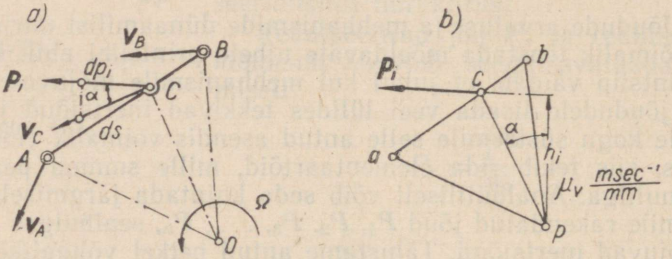
$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \ldots + P_n dp_n = 0, \tag{21.11}$$

kus $dp_1, dp_2, dp_3, \ldots, dp_n$ tähistavad tegelike paigutuste projektsioone lülidele rakendatud jõudude sihis.

2°. Uurime nüüd, kuidas võib kujutada mingi võrrandisse (21.11) kuuluva jõu $\boldsymbol{P}_i$ elementaartööd. Olgu jõud $\boldsymbol{P}_i$ rakendatud lüli AB punktis C ja olgu meil punktide A ning B kiirused teada (joon. 693, *a*). Punkti C tegelik elementaarpaigutus toimub kiirusvektori $\boldsymbol{v}_C$ sihis. Viimast saab hõlpsasti määrata, kui konstrueerida

hetkeline kiiruste tsenter O, mis asub punktides A ja B mõjuvatele kiirustele v_A ning v_B tõmmatud ristsirgete lõikepunktis. Ühendades nüüd punktid C ja O sirglõiguga ning konstrueerides sellele punktis C ristsirge, saame kiiruse v_C kandesirge. Kiiruse v_C suund sõltub hetkelise nurkkiiruse Ω märgist. Punkti C tegeliku paigutuse siht ühtib selle punkti kiiruse v_C sihiga. Jõu P_i elementaartöö dA_i on antud seosega

$$dA_i = P_i dp_i. \tag{21.12}$$



Joon. 693.

Võrrandis (21.12) esineva paigutuse projektsiooni dp_i võib avaldada järgmiselt:

$$dp_i = ds \cos \alpha,$$

kus α tähistab kiiruse v_C ja jõu P_i vahel esinevat nurka. Asendades dp_i avaldise võrrandisse (21.12), saame:

$$dA_i = P_i ds \cos \alpha,$$

ehk silmas pidades, et $ds = v_C dt$,

$$dA_i = P_i v_C \cos \alpha \, dt. \tag{21.13}$$

Kiirust v_C on mugav leida lüli AB kiirusplaanist. Konstrueerime meelevaldselt valitud mastaabis μ_v lüli AB pööratud kiirusplaani (joon. 693, *b*). Punkti C kiirust kujutab plaanis lõik pc. Viimane lähtub kiirusplaani poolusest p ja on sihitud risti kiirusega v_C, kusjuures

$$v_C = \mu_v (pc).$$

Asetame kiiruse v_C leitud väärtuse võrrandisse (21.13). Saame:

$$dA_i = P_i \mu_v (pc) \cos \alpha \, dt. \tag{21.14}$$

Kanname nüüd jõu P_i lüli skeemilt üle kiirusplaani punkti c ja tõmbame tema kandesirgele poolust p läbiva ristsirge h_i. Üle-

kandmisel säilitame nii jõu P_i suuruse kui ka suuna. Lihtne on näha, et lõigu pc ja ristsirge h_i vahel tekkinud nurk võrdub nurgaga α. Tõepoolest, lõik pc ristub kiiruse v_C sihiga ja lõik h_i — jõu P_i kandesirgega. Jooniselt 693, *b* selgub, et

$$h_i = (pc)\cos\alpha.$$

Asetades h_i avaldise võrrandisse (21.14), saame:

$$dA_i = P_i h_i \mu_v dt.$$

Jõu P_i korrutis õlaga h_i kujutab endast selle jõu momenti $M_p(P_i)$ kiirusplaani pooluse p suhtes. Kuna kõik plaanis esinevad kiirused on pööratud ühes ja samas suunas, siis ühtib kõikide jõudude puhul momendi märk vastava elementaartöö märgiga. Järelikult

$$dA_i = M_p(P_i)\mu_v dt. \qquad (21.15)$$

Mehhanismi lülile mõjuva jõu elementaartöö on seega võrdeline sama jõu momendiga kiirusplaani pooluse suhtes. Momendi arvutamiseks tuleb jõud seejuures üle kanda kiirusplaani vastavasse punkti.

Analoogilisi elementaartöö avaldisi võib endastmõistetavalt saada ka mehhanismi teistele lülidele mõjuvate jõudude puhul. Seetõttu võib võrrandi (21.10) kirjutada alljärgneval kujul:

$$\mu_v dt \sum_1^n M_p(P_i) = 0 \qquad (21.16)$$

ehk

$$M_p(P_1)\mu_v dt + M_p(P_2)\mu_v dt + \ldots + M_p(P_n)\mu_v dt = 0. \qquad (21.17)$$

Koondades nullist erineva ühise kordaja $\mu_v dt$, saame:

$$\sum_1^n M_p(P_i) = 0 \qquad (21.18)$$

ehk

$$M_p(P_1) + M_p(P_2) + M_p(P_3) + \ldots + M_p(P_n) = 0. \qquad (21.19)$$

3°. Võrrandile (21.19) võib anda järgmise geomeetrilise tõlgenduse.

Kanname kõik antud hetkel mehhanismi lülidele mõjuvad jõud, seehulgas ka inertsjõud, pööratud kiirusplaani samanimelistesse punktidesse. Ülekandmisel säilitame nii jõudude suurused kui ka nende suunad. Seepeale koostame kõikide ülekantud jõudude kohta momentide võrrandi (21.19) kiirusplaani pooluse suhtes, käsitledes kiirusplaani kui teatavat jäika k a n g i, mille toetuspunkt asub pooluses ja mis on kõikide vaadeldavate jõudude toimel tasakaalus. Mõeldavate nihete printsiibi säärane geomeet-

riline tõlgendus osutub mehhanismide dünaamika paljude ülesannete lahendamisel väga otstarbekaks. Käsitletud meetodit nimetatakse tema autori, suure vene mehaaniku N. G. Žukovski nime järgi *Žukovski meetodiks* ja kiirusplaanist moodustatud jäika kangi — *Žukovski kangiks.*

Žukovski meetodit võib kasutada mis tahes jõu suuruse leidmiseks, kui on teada selle rakenduspunkt ja siht ning etteantud mehhanismile mõjuvate kõikide ülejäänud jõudude suurused, sihid ja rakenduspunktid. Tõepoolest, võrrandis (21.19) esineb sel puhul üksainus tundmatu — otsitava jõu suurus, mille leidmine ei tekita mingeid raskusi.

Märgime veel lõpuks, et olukorras, kus mehhanismile mõjuvad peale jõudude $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{P}_2$, ..., $\boldsymbol{P}_n$ veel jõupaarid momentidega M_1, M_2, ..., M_n, kujuneb võrrand (21.10) järgmiseks:

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + P_3 dp_3 + \ldots + P_n dp_n + \\ + M_1 d\varphi_1 + M_2 d\varphi_2 + M_3 d\varphi_3 + \ldots + M_n d\varphi_n = 0,$$

kus $d\varphi_1$, $d\varphi_2$, $d\varphi_3$, ..., $d\varphi_n$ tähistavad nende lülide pöördenurki, millele mõjuvad momendid M_1, M_2, M_3, ..., M_n.

Iga momenti M_i saab käsitleda kui teatava jõupaari momenti, kusjuures paari õlaks võib võtta vastava lüli pikkuse l_i. Paari moodustavate jõudude suuruseks kujuneb sel juhul

$$P_i^0 = \frac{M_i}{l_i}.$$

Jõud $\boldsymbol{P}^0{}_i$ ja $-\boldsymbol{P}^0{}_i$ tuleksid rakendada lüli pikkust l_i kiirusplaanis esindava lõigu k_i otspunktidesse. Selle asemel võib aga kiirusplaani koormata momendiga M'_i, mille suuruse annab seos

$$M'_i = P^0{}_i k_i = M_i \frac{k_i}{l_i}.$$

Tuleb silmas pidada, et momendi M'_i märk säilib, kui lõigu k_i suund (tähtede järjestus) ühtib lõigu l_i suunaga. Vastasel korral tuleb tema märki muuta.

§ 108. Redutseeritud jõudude ja tasakaalustavate jõudude määramine Žukovski meetodi abil

1°. Rakendame Žukovski meetodit tasakaalustavate jõudude ja redutseeritud jõudude (või vastavate momentide) määramiseks. Meenutame, et *antud punkti redutseeritud jõuks nimetatakse jõudu, mille töö vaadeldava mõeldava nihutuse juures võrdub kõikide mehhanismile rakendatud jõudude poolt tehtud tööga* (vt. § 106, 1°).

Mõjugu mehhanismile näiteks jõud $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, kusjuures mehhanism ei ole nende toimel tasakaalus. Ülesandeks on leida redutseeritud jõud. Kui tähistada seda jõudu tähisega P_r ja tema rakenduspunkti elementaarnihutuse projektsiooni jõu sihile — tähisega dp_r, siis jõu P_r elementaartöö väljendub järgmiselt:

$$P_r dp_r = \sum_1^n P_i dp_i. \tag{21.20}$$

Kui kanda nii redutseeritud jõud P_r kui ka jõud $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ üle kiirusplaani vastavatesse punktidesse ja rakendada Žukovski meetodit, siis võib võrrandi (21.20) asemel kirjutada

$$M_p(P_r) = \sum_1^n M_p(P_i). \tag{21.21}$$

See võrrand näitab, et redutseeritud jõu moment kiirusplaani pooluse p suhtes võrdub kõikide antud jõudude momentide summaga sama punkti suhtes.

Kui eeldada, et tasakaalustav jõud P_t (vt. § 99, 1°) on redutseeritud jõuga P_r võrdne, kuid vastassuunaline ja rakendatud samasse punkti, s. t.

$$P_t = -P_r, \tag{21.22}$$

siis selgub võrranditest (21.22) ja (21.20), et

$$P_t dp_t = -P_r dp_r = -\sum_1^n P_i dp_i.$$

Kui lisaks jõududele $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ rakendada mehhanismile veel tasakaalustav jõud P_t, tekib mehhanismi tasakaal, mistõttu

$$P_1 dp_1 + P_2 dp_2 + \ldots + P_n dp_n + P_t dp_t = 0$$

ehk

$$P_t dp_t + \sum_1^n P_i dp_i = 0. \tag{21.23}$$

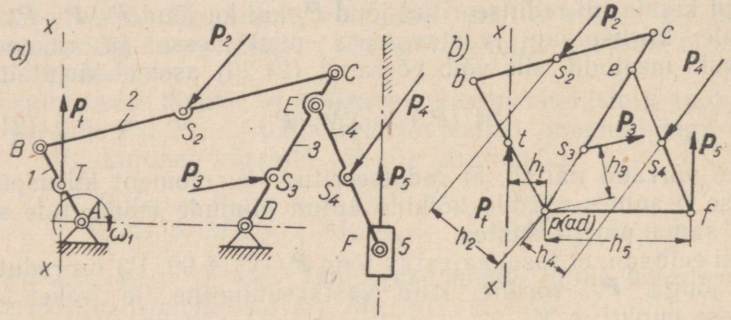
Kangimeetodi rakendamisel võib selle võrrandi asendada järgmise seosega:

$$M_p(P_t) + \sum_1^n M_p(P_i) = 0. \tag{21.24}$$

Seega, kui mehhanismile mõjuvad tuntud jõud $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$, mille toimel mehhanism ei ole tasakaalus, siis võib alati leida neid jõude tasakaalustava jõu P_t. Selleks tuleb kirjutada kõikide nimetatud jõudude momentide võrrand kiirusplaani pooluse suhtes. Jõu P_t kandesirge ja tema rakenduspunkt peavad seejuures ühtima jõu P_r vastavate elementidega.

Määranud jõu P_t ja muutnud selle suuna vastupidiseks, saame redutseeritud jõu P_r.

2°. Käsitleme joonisel 694, *a* kujutatud mehhanismi tasakaalustava jõu määramist. Mõjugu mehhanismile rida välisjõude P_2, P_3, P_4 ja P_5. On ilmne, et üldjuhul, kus jõud on valitud meelevaldselt, ei saa mehhanism kui teatava liikuvusega süsteem jääda tasakaalu. Mehhanismi tasakaalustamiseks tuleb talle mingis valitud punktis rakendada tasakaalustav jõud P_t. Valime tasakaalustava jõu rakenduspunktiks vedaval lülil paikneva punkti T ja anname



Joon. 694.

ette jõu kandesirge *xx*. Tasakaalustava jõu leidmiseks rakendame Žukovski meetodit. Konstrueerime mehhanismi pööratud kiirusplaani (joon. 694, *b*), kasutades meelevaldset mastaapi. Kanname kõik mehhanismile mõjuvad jõud, sealhulgas ka tasakaalustava jõu P_t üle kiirusplaani samanimelistesse punktidesse. Seepeale koostame kiirusplaani pooluse p suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi. Saame:

$$M_p(P_2) + M_p(P_3) + M_p(P_4) + M_p(P_5) + M_p(P_t) = 0.$$

Tähistades jõudude P_t, P_2, P_3, P_4 ja P_5 õlgu kiirusplaani pooluse p suhtes vastavalt h_t, h_2, h_3, h_4 ja h_5, saame:

$$P_2h_2 - P_3h_3 - P_4h_4 + P_5h_5 - P_th_t = 0.$$

Momentide märgid valime sõltuvalt suunast, milles nad püüavad pöörata kiirusplaanist moodustatud kangi ümber pooluse p. Ilmutame nüüd otsitava tasakaalustava jõu suuruse. Saame:

$$P_t = \frac{P_2h_2 - P_3h_3 - P_4h_4 + P_5h_5}{h_t}. \qquad (21.25)$$

Vektori P_t suund määratakse pärast eeltoodud võrrandiga ettenähtud numbriliste arvutuste sooritamist. Kui võrrandist (21.25) saadud P_t osutub positiivseks, on arvutuse algul eeldatud tasakaalustava jõu suund õige. Vastasel korral tuleb talle aga

anda v a s t u p i d i n e suund. Jagades seose (21.25) parema poole liige-liikmelt õlaga h_t, saame

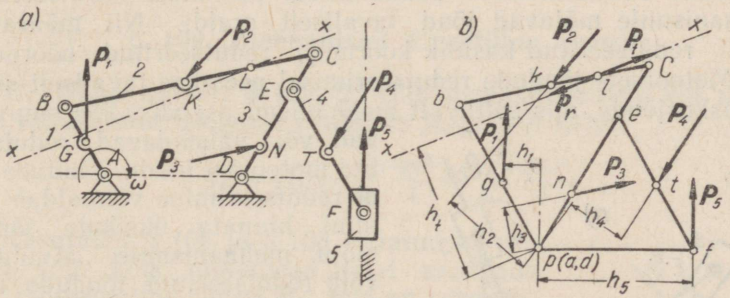
$$P_t = P_2 \frac{h_2}{h_t} - P_3 \frac{h_3}{h_t} - P_4 \frac{h_4}{h_t} + P_5 \frac{h_5}{h_t}. \qquad (21.26)$$

Tasakaalustava jõu suurus võrdub seega mehhanismile mõjuvate jõudude ja kiirusplaanist võetavate vastavate joonlõikude suhete $\frac{h_2}{h_t}$, $\frac{h_3}{h_t}$, $\frac{h_4}{h_t}$ ning $\frac{h_5}{h_t}$ korrutiste algebralise summaga.

Esitatud meetod on ilmselt üldine ja kehtib mis tahes klassi ning liiki kuuluvate mehhanismide puhul.

3°. Redutseeritud jõu määramise ülesanne lahendatakse analoogiliselt. Mõjugu näiteks joonisel 695, *a* toodud mehhanismile rida jõudusid P_1, P_2, P_3, P_4, P_5. Ülesandeks on leida lülile 2 rakendatud redutseeritud jõud P_r. Redutseeritud jõu rakenduspunkt L ja tema kandesirge xx on seejuures ette antud. Rakendame seost (21.22), millest nähtub, et redutseeritud jõud P_r võrdub suuruselt tasakaalustava jõuga P_t, kuid on sellega vastassuunaline.

Konstrueerime mehhanismi pööratud kiirusplaani (joon. 695, *b*) ning rakendame sellele kõik mehhanismile mõjuvad jõud ja



Joon. 695.

tasakaalustava jõu P_t. Viimase rakenduspunktiks on lõigu *bc* punkt *l*. Seepeale, nagu ülal näidati, koostame kiirusplaani pooluse *p* suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi. Saame:

$$P_t = -P_1 \frac{h_1}{h_t} + P_2 \frac{h_2}{h_t} - P_3 \frac{h_3}{h_t} - P_4 \frac{h_4}{h_t} + P_5 \frac{h_5}{h_t}.$$

Kasutades tingimust (21.22), määrame redutseeritud jõu P_r väärtuse:

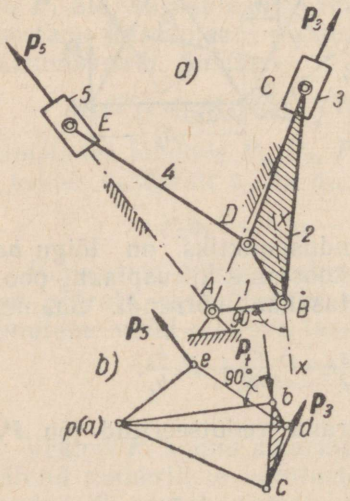
$$P_r = P_1 \frac{h_1}{h_t} - P_2 \frac{h_2}{h_t} + P_3 \frac{h_3}{h_t} + P_4 \frac{h_4}{h_t} - P_5 \frac{h_5}{h_t}.$$

Redutseeritud jõu arvutamine taandub seega tasakaalustava jõu leidmiseks kiirusplaani abil. Redutseeritud jõu saamiseks tuleb ainult leitud tasakaalustava jõu suund muuta vastupidiseks.

Tasakaalustavaid või redutseeritud jõudusid tuleb määrata juhul, kui otsitakse vedavatele lülidele mõjuvaid väändemomente või jõudusid, veetavatele lülidele toimivaid takistusmomente või vastavaid jõudusid jne. Žukovski kangi meetod võimaldab otsitavaid jõude määrata väga lihtsalt, kiirusplaani pooluse suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi abil. Kui samade ülesannete lahendamiseks kasutada jõuplaanide meetodit, siis tuleks järjestikku määrata kõikides paarides valitsevad koormused, s. t. teostada kogu mehhanismi täielik jõudude arvutus.

Žukovski kangi meetodi rakendamisel tuleb kiirusplaan konstrueerida p ö ö r a t u d k u j u l. On ilmne, et kasutada saaks ka pööramata kiirusplaani. Sel puhul tuleks aga ühes ja samas suunas 90° võrra pöörata kõiki kiirusplaani kantavaid jõudusid.

4°. Lihtne on näha, et N. J. Žukovski meetod on võrrandite (21.6) ja (21.7) geomeetriliseks tõlgenduseks, mis võimaldab erakordselt lihtsalt ja elegantselt määrata redutseeritud jõude ning momente. Mehhanismide dünaamilisel uurimisel redutseeritakse mehhanismile mõjuvad jõud tavaliselt eraldi. Nii määratakse eraldi redutseeritud kasulik koormus, redutseeritud hõõrdejõud jne. Motoorsete jõudude redutseerimisel peetakse tavaliselt silmas ka raskusjõude, mis sõltuvalt mehhanismi asendist kas suurendavad või vähendavad redutseeritud motoorset jõudu. Jõudude eraldi redutseerimine võimaldab paremini hinnata üksikute jõudude mõju mehhanismile. Muuhulgas võib redutseeritud jõudude najal, kui neil on ühine kandesirge, alati määrata ka mehhanismi kasutegurit. Kui on määratud redutseeritud motoorne jõud P_m, redutseeritud kasulik koormus P_k ja redutseeritud hõõrdejõud P_h, saab kasuteguri η arvutada võrrandite (20.11) ja (20.13) põhjal järgmiselt:



Joon. 696.

$$\eta = \frac{P_k}{P_m} \qquad (21.27)$$

ehk

$$\eta = 1 - \frac{P_h}{P_m}. \qquad (21.28)$$

Näide 14. Joonisel 696, *a* on kujutatud lisakepsuga mootori mehhanismi kinemaatiline skeem. Lülidele *3* ja *5* mõjuvad jõud P_3 ja P_5. Ülesandeks on leida vända *1* punkti *B* rakendatud tasakaalustav jõud P_t, mille kandesirge *xx* peab ristuma sihiga *AB*.

Konstrueerime pööratud kiirusplaani meelevaldses mastaabis (joon. 696, *b*) ja rakendame selle punktidesse *c* ning *e* jõud P_3 ja P_5. Läbi punkti *b* tõmbame tasakaalustava jõu P_t kandesirge *xx*. Seepeale koostame kiirusplaani pooluse *p* suhtes arvutatud momentide tasakaaluvõrrandi. Saame:

$$M_p(P_t) + M_p(P_3) + M_p(P_5) = 0.$$

Arvutades võrrandis esinevad momendid, kusjuures jõudude P_t, P_3 ja P_5 õlad avalduvad kiirusplaani vastavate lõikude näol, saame

$$-P_t(pb) + P_3(pc) + P_5(pe) = 0.$$

Viimasest järgneb, et

$$P_t = P_3\left(\frac{pc}{pb}\right) + P_5\left(\frac{pe}{pb}\right).$$

Kuna võrrandi parem pool on positiivne, siis on meie poolt algul meelevaldselt valitud jõu P_t suund õige. Saadud jõu P_t rakendame mehhanismi vändale punkti *B*.

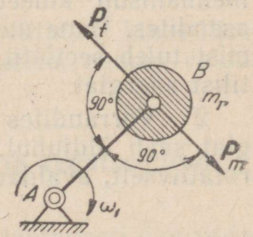
Punkti *B* redutseeritud jõud P_r võrdub suuruselt tasakaalustava jõuga P_t, kuid on vastupidiselt suunatud.

§ 109. Mehhanismi kineetiline energia

1°. Nagu näidati § 102, 2° võib mehhanismidele või masinatele rakendatud hoolause avaldada järgmisel kujul:

$$A_m - A_t = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (21.29)$$

Kasutades § 106 ja § 108 esitatud meetodeid, võib kõik motoorsed jõud asendada ühe redutseeritud jõuga P_m, mis on rakendatud redutseerimiseks valitud lüli *AB* punkti *B* (joon. 697). Samal viisil võib asendada ka kõik takistusjõud, rakendades redutseeritud takistusjõu P_t lüli *AB* samasse punkti *B*.



Joon. 697.

Redutseeritud jõude võib asendada ka võllile *A* taandatud momentidega. Selleks piisab redutseeritud jõudude korrutamisest nende õlaga punkti *A* suhtes.

Eeldades, et redutseeritud jõud või momendid on teada, võime hoolause näol esinevale mehhanismi liikumisvõrrandile anda järgmise kuju:

$$A_{P_m} - A_{P_t} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (21.30)$$

Võrrandis (21.30) tähistab A_{P_m} redutseeritud motoorse jõu P_m tööd, A_{P_t} — redutseeritud takistusjõu P_t tööd ja $\sum \frac{mv^2}{2}$ — mehhanismi kineetilist energiat. Võrrandi vasaku poole võib väljendada ka vastavate redutseeritud momentide poolt tehtud tööde kaudu. Sel puhul saaksime

$$A_{M_m} - A_{M_t} = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (21.31)$$

Võrrandis (21.31) tähistab A_{M_m} motoorsete jõudude redutseeritud momendi M_m tööd, A_{M_t} — takistusjõudude redutseeritud momendi M_t tööd ja $\sum \frac{mv^2}{2}$ — mehhanismi kineetilist energiat.

Kasutame kineetilise energia tähistamiseks uusi tähiseid:

$$T_0 = \frac{\Sigma m v_0^2}{2}, \quad T = \frac{\Sigma m v^2}{2}.$$

Võrrandid (21.30) ja (21.31) kujunevad nüüd järgmisteks:

$$A_{P_m} - A_{P_t} = T - T_0 \qquad (21.32)$$

ja

$$A_{M_m} - A_{M_t} = T - T_0. \qquad (21.33)$$

Kui redutseeritud jõud või momendid on antud redutseerimispunkti teepikkuse või vastavalt redutseerimislüli pöördenurga funktsioonidena, ei põhjusta nende töö arvutamine etteantud intervallis erilisi raskusi. Võrrandite (21.32) ja (21.33) vasakul poolel esinevat tööde vahet saab seega alati määrata. Siirdudes nimetatud võrrandite paremate poolte juurde, näeme, et seal esinevad mehhanismi kineetilise energia väärtused tema vaadeldavates asendites. Enne mehhanismi liikumisvõrrandi lahendamisele asumist tuleb seetõttu selgitada, kuidas määrata mehhanismi kineetilist energiat.

2°. Võrrandites (21.32) ja (21.33) figureerivat kineetilist energiat saab üldjuhul, kus lülid liiguvad nii translatoorselt kui ka rotatiivselt, avaldada järgmiselt:

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^k (m_i v_i^2 + I_i \omega_i^2). \qquad (21.34)$$

Selles võrrandis tähistab m_i lüli i massi, v_i — sama lüli masskeskme kiirust, I_i — lüli i inertsmomenti masskeset läbiva telje suhtes ja ω_i lüli nurkkiirust.

Tõestame, et seos (21.34) väljendab kogu mehhanismi kineetilist energiat. Selleks käsitleme mehhanismi üksiklülide kineetilise energia arvutust.

Translatoorselt liikuva lüli kineetiline energia on antud seosega

$$T = \frac{mv^2_S}{2}.$$

Selles valemis tähistab m lüli massi ja v_S — tema masskeskme kiirust. Pöörleva lüli kineetiline energia avaldub järgmiselt:

$$T = \frac{I\omega^2}{2},$$

kus I tähistab lüli inertsmomenti pöörlemistelje suhtes ja ω — lüli nurkkiirust.

Liitliikumisega lüli kineetiline energia saadakse valemist

$$T = \frac{I_P\omega^2}{2}. \qquad (21.35)$$

I_P tähistab siin lüli inertsmomenti hetkelist kiiruste tsentrit läbiva telje suhtes. Nimetatud inertsmomendi saab avaldada lüli masskeset S läbiva telje suhtes arvutatud inertsmomendi I_S kaudu:

$$I_P = I_S + ml^2_{PS}. \qquad (21.36)$$

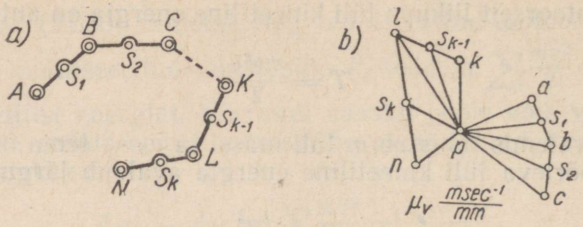
Võrrandis (21.36) tähistab l_{PS} lüli masskeskme S ja tema hetkelise kiiruste tsentri P vahelist kaugust. Asetades seosest (21.36) leitud I_P väärtuse valemisse (21.35) ja pidades silmas, et $\omega l_{PS} = v_S$, saame tuntud valemi, mis võimaldab määrata liitliikumisega lüli kineetilist energiat:

$$T = \frac{I_S\omega^2}{2} + \frac{mv^2_S}{2}. \qquad (21.37)$$

Liites mehhanismi üksiklülide kohta arvutatud kineetilised energiad ja muutes vastavalt kasutatud tähiseid, saame valemi (21.34).

§ 110. Mehhanismi redutseeritud mass ja redutseeritud inertsmoment

1°. Ühe liikuvusastmega mehhanismil on teatavasti üks vedav lüli, mille võib alati valida redutseerimislüliks. Olgu vaadeldav kinemaatiline ahel (joon. 698, *a*) ühe liikuvusastmega. Valime ahela ühe lüli, näiteks lüli AB, redutseerimislüliks. Redutseerimispunktiks võtame nimetatud lüli punkti B. Jagame ja korrutame võrrandi (21.34) paremat poolt redutseerimispunkti B kiiruse ruuduga v^2_B ja toome suuruse $\frac{v^2_B}{2}$ sulgude ette. Saame:



Joon. 698.

$$T=\frac{v_B^2}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{v_B}\right)^2+I_1\left(\frac{\omega_1}{v_B}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{v_B}\right)^2+I_2\left(\frac{\omega_2}{v_B}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+m_k\left(\frac{v_k}{v_B}\right)^2+I_k\left(\frac{\omega_k}{v_B}\right)^2\right]. \qquad (21.38)$$

Kineetiline energia on võrrandis (21.38) avaldatud redutseerimispunkti kiiruse v_B funktsioonina. Teda on võimalik aga avaldada ka redutseerimislüli nurkkiiruse ω_1 funktsioonina. Sel puhul tuleb võrrandi (21.37) paremat poolt jagada ja korrutada lüli AB nurkkiiruse ruuduga ω_1^2. Saame

$$T=\frac{\omega_1^2}{2}\left[m_1\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2+I_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2+I_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+m_k\left(\frac{v_k}{\omega_1}\right)^2+I_k\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2\right]. \qquad (21.39)$$

Tähistame nüüd võrrandis (21.38) nurksulgudes esineva suuruse tähisega m_r ja võrrandi (21.39) vastava suuruse — tähisega I_r. Tähendab,

$$m_r=m_1\left(\frac{v_1}{v_B}\right)^2+I_1\left(\frac{\omega_1}{v_B}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{v_B}\right)^2+I_2\left(\frac{\omega_2}{v_B}\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+m_k\left(\frac{v_k}{v_B}\right)^2+I_k\left(\frac{\omega_k}{v_B}\right)^2, \qquad (21.40)$$

$$I_r=m_1\left(\frac{v_1}{\omega_1}\right)^2+I_1\left(\frac{\omega_1}{\omega_1}\right)^2+m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2+I_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2+\ldots$$
$$\ldots+m_k\left(\frac{v_k}{\omega_1}\right)^2+I_k\left(\frac{\omega_k}{\omega_1}\right)^2. \qquad (21.41)$$

Seostest (21.40) ja (21.41) nähtub, et suurusel m_r on massi dimensioon, kuna suurus I_r osutub dimensioonilt inertsmomendiks. Seega kujutab m_r teatavat tinglikku, punkti B kontsentreeritud massi, mille kineetiline energia võrdub igas vaadeldavas asendis kogu ahela $ABC\ldots KLN$ kineetilise energiaga (s. o. ahela

lülide kineetiliste energiate summaga). Massi m_r nimetatakse kinemaatilise ahela *redutseeritud massiks.*

Seosest (21.40) võib järeldada, et redutseeritud mass on muutuv suurus, sõltudes joon- ja nurkkiiruste suhete ruutudest. Seetõttu on redutseeritud mass alati positiivne ja tema suurus oleneb nagu redutseeritud jõudki ainult mehhanismi asendist.

Seosega (21.41) defineeritud suurus I_r kujutab endast lülile *AB redutseeritud* kinemaatilise ahela *inertsmomenti.* Võib kujutleda, et see inertsmoment kuulub lüliga *AB* koos pöörlevale fiktiivsele kehale, mille kineetiline energia kõigis kinemaatilise ahela vaadeldavais asendeis võrdub ahela lülide kineetiliste energiate summaga.

2°. Asetades m_r ja I_r väärtused valemitesse (21.38) ja (21.39) ning arvesse võttes valemit (21. 34), saame:

$$T=\sum_1^k\left(\frac{m_i v_i^2+I_i\omega_i^2}{2}\right)=\frac{v_B^2}{2}\sum_1^k\left[m_i\left(\frac{v_i}{v_B}\right)^2+I_i\left(\frac{\omega_i}{v_B}\right)^2\right]=\frac{m_r v_B^2}{2};\quad (21.42)$$

$$T=\sum_1^k\left(\frac{m_1 v_i^2}{2}+\frac{I_i\omega_i^2}{2}\right)=\frac{\omega_1^2}{2}\sum_1^k\left[m_i\left(\frac{v_i}{\omega_1}\right)^2+I_i\left(\frac{\omega_i}{\omega_1}\right)^2\right]=\frac{I_r\omega_1^2}{2}.\quad (21.43)$$

Redutseeritud massi m_r ja redutseeritud inertsmomendi I_r võib avaldada ka kiirusplaani vastavate lõikude kaudu (joon. 698, *b*). Saame:

$$m_r=m_1\left(\frac{ps_1}{pb}\right)^2+\frac{I_1}{l^2_{AB}}\left(\frac{ab}{pb}\right)^2+m_2\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2+\frac{I_2}{l^2_{BC}}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2+\ldots$$

$$\ldots+m_k\left(\frac{ps_k}{pb}\right)^2+\frac{I_k}{l^2_{LN}}\left(\frac{ln}{pb}\right)^2,$$

$$I_r=m_1 l^2_{AB}\left(\frac{ps_1}{pb}\right)^2+I_1\frac{l^2_{AB}}{l^2_{AB}}\left(\frac{ab}{pb}\right)^2+m_2 l^2_{AB}\left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2+$$

$$+I_2\frac{l^2_{AB}}{l^2_{BC}}\left(\frac{bc}{pb}\right)^2+\ldots+m_k l^2_{AB}\left(\frac{ps_k}{pb}\right)^2+I_k\frac{l^2_{AB}}{l^2_{LN}}\left(\frac{ln}{pb}\right)^2,$$

sest et

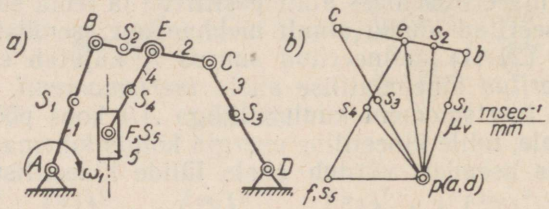
$$v_{s1}=\mu_v(ps_1),\quad v_{s2}=\mu_v(ps_2),\ \ldots,\ v_{sk}=\mu_v(ps_k);$$

$$\omega_1=\mu_v\frac{(ab)}{l_{AB}};\quad \omega_2=\mu_v\frac{(bc)}{l_{BC}},\ \ldots,\ \omega_k=\mu_v\frac{(ln)}{l_{LN}}$$

ja $v_B=\mu_v(pb)$, kus μ_v tähistab kiirusplaani mastaapi.

Nagu ülal näidati, valitakse redutseerimislüliks tavaliselt mehhanismi vedav vänt (joon. 697). Lülile *AB* mõjuvad seega üldjuhul muutuvad jõud $\boldsymbol{P}_m$ ja $\boldsymbol{P}_t$. Tema mass m_r, mis on koondatud punkti *B*, osutub üldjuhul samuti muutuvaks.

Näide 15. Määrata joonisel 699, *a* näidatud asendis oleva mehhanismi kineetiline energia, redutseeritud mass ja redutseeritud inertsmoment, kui mehhanismi moodustavate lülide massid ja inertsmomendid on teada. Masskeskmete kiirused ja lülide nurkkiirused on antud joonisel 699, *b* toodud kiirusplaani näol. Redutseerimislüliks on valitud lüli *AB*.



Joon. 699.

Mehhanismi kogu kineetilise energia leiame valemiga (21.34):

$$T = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2} + \frac{I_4\omega_4^2}{2} + \frac{m_4v_4^2}{2} + \frac{m_5v_5^2}{2}.$$

I_2 ja I_4 tähistavad siin lülide *2* ja *4* inertsmomente masskeskmeid S_2 ja S_4 läbivate telgede suhtes, I_1 ja I_3 — lülide *1* ja *3* inertsmomente punkte *A* ja *D* läbivate telgede suhtes; ω_1, ω_2, ω_3 ja ω_4 — lülide *1, 2, 3* ja *4* nurkkiirusi; v_2, v_4 ja v_5 — lülide *2, 4* ja *5* masskeskmete kiirusi ja m_2, m_4 ning m_5 — lülide *2, 4* ja *5* masse. Kuna redutseerimislüliks on valitud lüli *AB*, saab mehhanismi kineetilise energia avaldada valemi (21.39) põhjal järgmiselt:

$$T = \frac{\omega_1^2}{2}\left[I_1 + I_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2 + I_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 + I_4\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2 + m_4\left(\frac{v_4}{\omega_1}\right)^2 + m_5\left(\frac{v_5}{\omega_1}\right)^2\right].$$

Tähistades redutseeritud inertsmomendi tähisega I_r, võime valemi (21.41) alusel kirjutada:

$$I_r = I_1 + I_2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 + m_2\left(\frac{v_2}{\omega_1}\right)^2 + I_3\left(\frac{\omega_3}{\omega_1}\right)^2 + I_4\left(\frac{\omega_4}{\omega_1}\right)^2 + m_4\left(\frac{v_4}{\omega_1}\right)^2 + m_5\left(\frac{v_5}{\omega_1}\right)^2.$$

Redutseeritud inertsmomendi arvutamisel saab kasutada ka kiirusplaani vastavaid lõike (joon. 699, *b*). Selleks määrame kõikide kineetilise energia avaldisse kuuluvate joon- ja nurkkiiruste väärtused. Saame:

$$\omega_1 = \frac{\mu_v(pb)}{l_{AB}}; \quad \omega_2 = \frac{\mu_v(bc)}{l_{BC}}; \quad \omega_3 = \frac{\mu_v(pc)}{l_{CD}};$$

$$\omega_4 = \frac{\mu_v(fe)}{l_{EF}}; \quad v_2 = \mu_v(ps_2); \quad v_4 = \mu_v(ps_4);$$

$$v_5 = \mu_v(ps_5).$$

Asetades need suurused redutseeritud inertsmomendi arvutusvalemisse, saame tulemuseks:

$$I_r = I_1 + I_2 \frac{l^2_{AB}}{l^2_{BC}} \left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + m_2 l^2_{AB} \left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + I_3 \frac{l^2_{AB}}{l^2_{CD}} \left(\frac{pc}{pb}\right)^2 +$$

$$+ I_4 \frac{l^2_{AB}}{l^2_{EF}} \left(\frac{fe}{pb}\right)^2 + m_4 l^2_{AB} \left(\frac{ps_4}{pb}\right)^2 + m_5 l^2_{AB} \left(\frac{ps_5}{pb}\right)^2.$$

Mehhanismi kineetilise energia võib avaldada ka tema redutseeritud massi m_r kaudu. Seejuures võib redutseerimispunktiks valida lüli AB mis tahes punkti. Kui kasutada selleks näiteks punkti B, avaldub kineetiline energia järgmiselt:

$$T = \frac{m_r v_B^2}{2},$$

kus $m_r = \frac{I_r}{l^2_{AB}}$ tähistab mehhanismi redutseeritud massi.

Redutseeritud massi saab avaldada ka otseselt, kiirusplaani (joon. 699, *b*) vastavate lõikude kaudu. Tulemuseks kujuneb

$$m_r = \frac{I_1}{l^2_{AB}} + \frac{I_2}{l^2_{BC}} \left(\frac{bc}{pb}\right)^2 + m_2 \left(\frac{ps_2}{pb}\right)^2 + \frac{I_3}{l^2_{CD}} \left(\frac{pc}{pb}\right)^2 +$$

$$+ \frac{I_4}{l^2_{EF}} \left(\frac{fe}{pb}\right)^2 + m_4 \left(\frac{ps_4}{pb}\right)^2 + m_5 \left(\frac{ps_5}{pb}\right)^2.$$

Valemis esinevate lõikude pikkusi võib mõõta kiirusplaanist otse millimeetrites, plaani mastaabiga korrutamata, sest lõikude teineteisega jagumisel mastaabid niikuinii koonduvad.

XXII peatükk

MASINAGREGAADI LIIKUMISE UURIMINE

§ 111. Liikumisvõrrandid

1°. Nagu ülal (§ 1, 3°) selgitati, mõistetakse masinagregaadi all jõumasinast, ülekandemehhanismist ja töömasinast koosnevat kompleksi. Masinagregaadi moodustavad näiteks sisepõlemismootor koos kolbpumbaga, elektrimootor ja metalle survega töötlev ekstsenterpress, elektrimootor ja rotatsioonpump, sisepõlemis-kolbmootor ja elektrigeneraator jne.

Paragrahvides 83 ja 84 näidati, et nii motoorsed jõud kui ka kasulik koormus võivad sõltuda kas üheaegselt või eraldi võetuna mehhanismi vedava lüli asendist ja selle nurkkiirusest. Näiteks kolbmootorist ja kolbpumbast moodustatud agregaadis sõltub motoorne jõud ja kasulik koormus vedavate lülide asendist. Agregaadis, mille moodustavad elektrimootor ja metalle survega töötlev ekstsenterpress, sõltuvad motoorsed jõud vedava lüli nurkkiirusest ja neid võib graafiliselt kujutada vastava mehaanilise karakteristikuna (vt. § 84, 2°). Mis puutub ekstsenterpressi, siis

võib siin küllaldase täpsusega oletada, et kasulik koormus sõltub ainult pressi vedava lüli asendist. Masinagregaadis elektrimootor — rotatsioonpump sõltuvad nii motoorsed jõud kui ka kasulik koormus vastavate masinate vedavate lülide nurkkiirusest. Lõpuks, kui vaadelda sisepõlemis-kolbmootorist ja elektrigeneraatorist koosnevat agregaati, siis selgub, et motoorset jõudu võib küllaldase täpsusega lugeda sõltuvaks ainult mootori vedava lüli asendist, kuna kasuliku koormuse suurus on määratud generaatori võlli nurkkiirusega.

Masinagregaadi redutseeritud inertsmoment I_r võib olla kas konstantne või sõltuv vedava lüli asendist. Näiteks elektrimootoril, rotatsioonpumbal, elektrigeneraatoril, turbiinil jne. on redutseeritud inertsmoment püsiv, s. t. $I_r = \text{const}$. Ekstsenterpressil, kolbmootoril, höövelpingil jne. sõltub redutseeritud inertsmoment vedava lüli pöördenurgast φ, s. t. $I_r = I_r(\varphi)$.

Masinagregaadi liikumise uurimine on seega keeruline ülesanne, mis haarab erinevate jõukarakteristikute ja inertsmomentidega masinatest koosnevat kompleksi.

2°. Masinagregaadi liikumisvõrrandi võib kirjutada hoolause näol [vt. § 102, 2°, (20.1)]:

$$A_m - A_t = \sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2}. \qquad (22.1)$$

Kui redutseerida kõik jõud ja massid valitud redutseerimislülile, saame võrrandile (22.1) anda järgmise kuju:

$$A_{P_m} - A_{P_t} = \frac{m_r v^2}{2} - \frac{m_{r0} v_0^2}{2}, \qquad (22.2)$$

kus A_{P_m} tähistab redutseeritud motoorse jõu tööd vaadeldaval liikumisel, A_{P_t} — redutseeritud takistusjõu tööd samal liikumisel, m_r ja m_{r0} — redutseeritud masse vaadeldava liikumise lõpp- ja algasendis ja v ning v_0 — vaadeldava liikumise algusele ja lõpule vastavaid redutseerimispunkti kiirusi.

Tähistades tööde vahe tähega A, võime kirjutada

$$A = \frac{m_r v^2}{2} - \frac{m_{r0} v_0^2}{2}. \qquad (22.3)$$

Mõnedel juhtudel on hoolauset mugavam väljendada redutseeritud momentide M_m ja M_t ning mehhanismi redutseeritud inertsmomendi I_r kaudu:

$$A_{M_m} - A_{M_t} = \frac{I_r \omega^2}{2} - \frac{I_{r0} \omega_0^2}{2}. \qquad (22.4)$$

Kui tähistada $A_{M_m} - A_{M_t} = A$, siis saame:

$$A = \frac{I_r\omega^2}{2} - \frac{I_{r0}\omega_0^2}{2}. \qquad (22.5)$$

3°. Masinagregaadi liikumisvõrrandina võib kasutada ka analüütilisest mehaanikast tuntud Lagrange'i teist võrrandit.

Tähistame redutseeritud motoorsete ja redutseeritud takistusjõudude vahe tähega P, s. t.

$$P = P_m - P_t.$$

Hoolause võib sel juhul kirjutada järgmiselt:

$$dA = Pds = dT, \qquad (22.6)$$

kus dA tähistab redutseeritud jõu elementaartööd, ds — redutseerimispunkti elementaarpaigutust ja dT — masinagregaadi kineetilise energia elementaarset juurdekasvu.

Asetades võrrandisse (22.6) kineetilise energia väärtuse, saame

$$P = \frac{dT}{ds} = \frac{d\left(\frac{m_r v^2}{2}\right)}{ds}, \qquad (22.7)$$

kus redutseeritud mass m_r on üldjuhul muutuv suurus, sõltudes teepikkusest s. Edasi võime kirjutada, et

$$\frac{d\left(\frac{m_r v^2}{2}\right)}{ds} = m_r \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} + \frac{v^2}{2}\frac{dm_r}{ds}.$$

Et aga

$$\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{ds} = \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dt} = \frac{dv}{dt},$$

siis kujuneb võrrand (22.7) järgmiseks:

$$P = m_r \frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{2}\frac{dm_r}{ds}. \qquad (22.8)$$

Saadud liikumisvõrrandile võib anda teise kuju, kui lähtuda redutseeritud momendist M, redutseeritud inertsmomendist I_r ja redutseerimislüli nurkkiirusest ω. Sel juhul saaksime

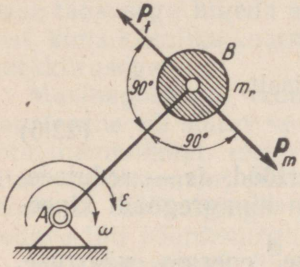
$$M = I_r \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2}\frac{dI_r}{d\varphi}, \qquad (22.9)$$

kus φ tähistab redutseerimislüli pöördenurka. Toodud võrrandi tuletamisel on lähtutud võrrandiga (22.7) analoogilisest seosest

$$M = \frac{dT}{d\varphi} = \frac{d\left(\frac{I_r\omega^2}{2}\right)}{d\varphi}. \qquad (22.7')$$

§ 112. Kiiruste, kiirenduste ja liikumisaja määramise põhivõrrandid

1°. Käsitleme nüüd masinagregaadi kiiruste, kiirenduste ja liikumisaja määramist. Kui redutseeritud jõud on asendi funktsioonid, siis on kiiruste, kiirenduste ja liikumisaja arvutamisel kõige otstarbekam kasutada hoolause kujul kirjutatud liikumisvõrrandit. Olgu antud redutseerimislüli (joon. 700) ja redutseeritud motoorse jõu, redutseeritud takistusjõu ning redutseeritud massi sõltuvus redutseerimislüli teepikkusest: $P_m = P_m(s)$, $P_t = P_t(s)$, $m_r = m_r(s)$. Tööd A_{P_m} ja A_{P_t} ning nende vahe kui teepikkuse s funktsioonid leitakse tavalisel viisil:



Joon. 700.

$$A = A_{P_m} - A_{P_t} = \int_{s_0}^{s} (P_m - P_t)\,ds = \int_{s_0}^{s} P ds.$$

Võrrand (22.3) kujuneb seega järgmiseks:

$$\int_{s_0}^{s} P ds = \frac{m_r v^2}{2} - \frac{m_{r0} v_0^2}{2}. \tag{22.10}$$

Võrrandis (22.10) tähistavad m_{r0} ja v_0 vastavalt redutseerimispunkti redutseeritud massi ja tema kiirust algasendis.

Võrrandist (22.10) saame:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_r} \int_{s_0}^{s} P ds + \frac{m_{r0} v_0^2}{m_r}}. \tag{22.11}$$

Kui algasend vastab agregaadi käivitusmomendile, siis $v_0 = 0$ ja otsitav kiirus avaldub võrrandiga

$$v = \sqrt{\frac{2}{m_r} \int_{s_0}^{s} P ds}. \tag{22.12}$$

Võrrandid (22.11) ja (22.12) määravad redutseerimispunkti kiiruse sõltuvuse sama punkti teepikkusest, s. t. funktsiooni $v = v(s)$.

2°. Agregaadi liikumisaja leidmiseks võime lähtuda seosest

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Viimasest järgneb, et

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{1}{v} ds. \tag{22.13}$$

Asendades v tema väärtusega võrrandist (22.11), saame:

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m_r}\int_{s_0}^{s} P ds + \frac{m_{r_0} v_0^2}{m_r}}}. \qquad (22.14)$$

Juhul kui aja arvestus toimub agregaadi käivitusmomendist alates, muutub võrrand (22.14) järgmiseks:

$$t = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2}{m_r}\int_{s_0}^{s} P ds}}. \qquad (22.15)$$

Leidnud seosed $v = v(s)$ ja $t = t(s)$, võime teepikkuse s elimineerimisega saada sõltuvuse $v = v(t)$ (vt. § 36 ja 37).

3°. Redutseerimispunkti täiskiirenduse $\boldsymbol{a}$ arvutamisel võib lähtuda selle lahutamisest normaal- ja tangentsiaalkomponendiks:

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^n + \boldsymbol{a}^t. \qquad (22.16)$$

Normaalkiirenduse suuruse saab teatavasti arvutada valemiga

$$a^n = \frac{v^2}{l_{AB}}, \qquad (22.17)$$

kus l_{AB} tähistab redutseerimislüli pikkust.

Redutseerimispunkti tangentsiaalkiirendus on määratud tuntud seosega

$$a^t = \frac{dv}{dt}. \qquad (22.18)$$

Tangentsiaalkiirenduse suuruse leidmiseks tuleb seega diferentseerida funktsiooni $v = v(t)$ (vt. § 36 ja 37).

Ülalesitatust selgub, et kiiruste, kiirenduste ja liikumisaja määramise ülesanne on lahendatav ainult siis, kui on teada redutseerimispunkti algkiirus v_0 ja redutseeritud massi algväärtus m_{r0}.

4°. Kui lähtuda liikumisvõrrandist (22.5), kujunevad liikumisaega t, nurkkiirust ω ja nurkkiirendust ε määravad võrrandid järgmisteks.

Liikumisaeg on arvutatav võrrandiga

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\omega} d\varphi, \qquad (22.13')$$

kus φ tähistab redutseerimislüli pöördenurka ja φ_0 — pöördenurga algsuurust.

Nurkkiiruse määramiseks tuleb kasutada seost

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{I_r}\int_{\varphi_0}^{\varphi} M d\varphi + \frac{I_{r0}\omega_0^2}{I_r}}, \qquad (22.11')$$

kus $M = M_m - M_t$ tähistab motoorsete jõudude ja takistusjõudude redutseeritud momentide vahet ja I_r ning I_{r0} — redutseeritud inertsmomente, mis vastavad nurkkiiruste väärtustele ω ja ω_0.

Nurkkiirendus saadakse seosest

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\varphi}, \qquad (22.18')$$

kusjuures $\frac{d\omega}{d\varphi}$ võib saada funktsiooni $\omega = \omega(\varphi)$ diferentseerimise teel (vt. § 36).

§ 113. Agregaadi liikumise uurimine diagrammi $T = T(I_r)$ abil

1°. Tehniliste ülesannete enamiku juures on nii redutseeritud motoorne jõud kui ka takistusjõud antud graafikute näol. Graafikute kujul on teada ka redutseeritud inertsmomendi kulgemine. Seetõttu tuleb § 112 tuletatud kiiruse, kiirenduse ja liikumisaja määramise võrrandid lahendada grafoanalüütiliselt, diagrammi $T = T(I_r)$ abil. Viimane määrab seose agregaadi kineetilise energia T ja tema redutseeritud inertsmomendi I_r vahel.

Olgu ülalesitatud üldiste meetodite abil määratud redutseeritud motoorne jõud P_m, redutseeritud takistusjõud P_t ja redutseeritud mass m_r (joon. 700). Motoorsete ja takistusjõudude redutseeritud momendid kujunevad sel puhul järgmisteks:

$$M_m = P_m l_{AB} \text{ ja } M_t = P_t l_{AB},$$

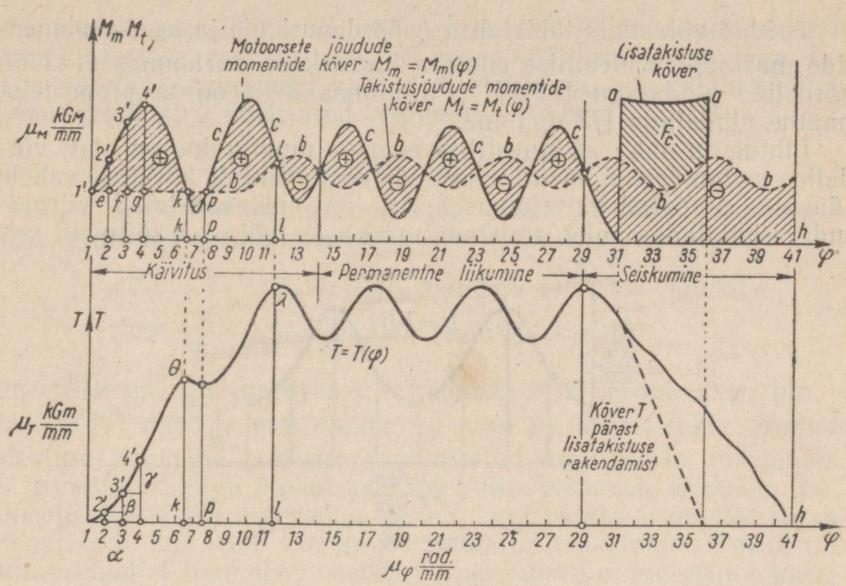
kuna redutseeritud inertsmomendi võib arvutada seosest

$$I_r = m_r l^2_{AB}.$$

Olgu moment M_m antud graafikuga $M_m = M_m(\varphi)$ (joon. 701), mis näitab momendi M_m kulgemist redutseerimislüli AB (joon. 700) pöördenurga φ funktsioonina. Graafikuga on antud ka moment $M_t = M_t(\varphi)$ (joon. 701) ja redutseeritud inertsmoment $I_r = I_r(\varphi)$ (joon. 702).

Redutseeritud momendi M_m töö masina kogu liikumisaja vältel on antud võrrandiga

$$A_{M_m} = \int M_m d\varphi$$



Joon. 701.

ja ta võrdub kõvera $M_m = M_m(\varphi)$, φ-telje ja alg- ning lõppordinaatidega piiratud pindala ja vastavate mastaapide korrutisega. Redutseeritud momendi M_t töö saadakse võrrandist

$$A_{M_t} = \int_0^\varphi M_t d\varphi$$

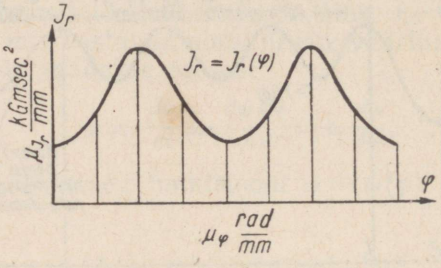
ja tema arvutamiseks tuleb kõvera $M_t = M_t(\varphi)$, φ-telje ja algning lõppordinaatide poolt eraldatud pindala korrutada vastavate mastaapidega. Võrrandi (21.33) põhjal võrdub mehhanismi kineetilise energia juurdekasv kõverate $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ poolt piiratud pindalade vahe ja vastavate mastaapide korrutisega. Nii näiteks on redutseeritud momendi M_m töö piirkonnas *1—2* võrdne pindala $[11'2'2]$ mm² ja momentide ning pöördenurkade mastaapide korrutisega. Redutseeritud momendi M_t töö arvutamiseks samas piirkonnas tuleb pindala $[11'e2]$ mm² korrutada samade mastaapidega. Kineetilise energia juurdekasv ΔT_{12} on seega määratud kui pindala $[1'2'e]$ mm² ja ülalnimetatud mastaapide korrutis. Seega

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_\varphi \mu_M \{\text{pindala } [11'2'2] -$$

$$- \text{pindala } [11'e2]\} = \mu_\varphi \mu_M \text{ pindala } [1'2'e].$$

Toodud võrrandis tähistab μ_φ pöördenurkade ja μ_M — momentide mastaapi. Kineetilise energia juurdekasv piirkonnas *2—3* on võrdeline pindalaga [*e2'3'f*]. Piirkonnas *3—4* on ta proportsionaalne pindalaga [*f3'4'g*] jne.

Lihtne on näha, et kineetilise energia muutumine on alati võrdeline motoorsete momentide ja takistusmomentide kõverate vahele jäävate pindaladega (joonisel 701 on vastavad alad viirutatud). Pindaladele tuleb omistada märk «+» või «—» sõltuvalt sel-



Joon. 702.

lest, missugune töö on ülekaalus, kas motoorsete momentide või takistusmomentide oma. Näiteks piirkonnas *1—k* asub motoorsete momentide kõver takistusmomentide kõverast kõrgemal, mistõttu kineetilise energia juurdekasv tuleb lugeda positiivseks. Vastupidi, piirkonnas *l—14* on kineetilise energia juurdekasv negatiivne jne. Mehhanismi kogu liikumisaja kohta võetuna (s. o. punktist *1* punktini *h*) võrdub kineetilise energia juurdekasv nulliga, sest redutseerimispunkti kiirus on nii liikumise algul kui ka selle lõpul null. Plussiga tähistatud viirutatud pindalade summa peab seega võrduma miinusmärki kandvate viirutatud pindalade summaga. Sama peab kehtima ka piirkonnas *14—29,* mis vastab permanentsele liikumisele, kuna sel juhul taastub redutseerimispunkti kiirus iga täistsükli järel.

2°. Viirutatud pindalade mõõtmine võimaldab hõlpsasti konstrueerida diagrammi $T = T(\varphi)$, mis näitab redutseerimislüli AB kineetilise energia muutumist sõltuvalt pöördenurgast φ.

Alustame konstruktsiooni asendist *1*. Mõõdame pindala [*1'2'e*] suuruse ruutmillimeetrites. Olgu selleks F_{12} mm^2. Kineetilise energia juurdekasvu ΔT_{12} saame määrata järgmiselt:

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_\varphi \mu_M \text{ pindala } [1'2'e] = \mu_\varphi \mu_M F_{12}.$$

Selles valemis tähistab μ_M momentide M_m ja M_t mastaapi ning μ_φ — lüli AB pöördenurga φ mastaapi. Kuna mehhanism alustas liikumist punktile *1* vastavast asendist, siis on ilmne, et tema kineet-

tilise energia algväärtus oli null. Asendisse *2* jõudnud mehhanismi kogu kineetilise energia varu on seega määratud suurusega T_2. Selle väärtuse kannamegi valitud mastaabis μ_T joonestatud lõigu a näol punktist *2* püstitatud ordinaadile. Seega:

$$T_2 = \mu_\varphi \mu_M F_{12} = \mu_T(a).$$

Edasi mõõdame ruutmillimeetrites pindala $[e2'3'f]$. Analoogiliselt eelnevaga võime kirjutada:

$$\Delta T_{23} = T_3 - T_2 = \mu_\varphi \mu_M \{\text{pindala } [1'3'f] - \text{pindala } [1'2'e]\} = \mu_\varphi \mu_M \text{ pindala } [e2'3'f] = \mu_\varphi \mu_M F_{23}.$$

Kineetilise energia juurdekasv piirkonnas *2—3* võrdub seega pindala $[e2'3'f]$ mm² ja mastaapide μ_φ ning μ_M korrutisega. Saadud tulemuse kanname punktist *3* püstitatud ordinaadile mastaabis μ_T joonestatud lõigu β näol, mis tuleb liita eelnevale lõigule a jne. Kineetilise energia diagramm tõuseb, kuni redutseerimislüli jõuab asendisse *k*, kus tekib tähega Θ tähistatud maksimum. Edasi, redutseerimislüli liikumisel asendist *k* asendisse *p* kineetiline energia väheneb, sest piirkonnale *k—p* vastav viirutatud pindala on negatiivne. Alates punktist *p* hakkab kineetiline energia uuesti kasvama, suurenedes kuni asendini *l*, kus energiakõveral esineb uus, tähega λ märgitud tipp jne. Piirkonnas *14—29*, mis vastab permanentsele liikumisele, muutub kõver perioodiliseks, läbides järjekorras maksimume ja miinimume. Perioodi kestuseks on mehhanismi üks tsükkel. Asendis *29* leiab aset kõvera *T* viimne maksimum, millele järgneb kineetilise energia kahanemine, sest piirkonnas *29—h* mõjuvad ainult takistusjõud. Mehhanismi seiskumisele vastav punkt *h* saadakse, kui lahutada kineetilise energia kõvera $T = T(\varphi)$ ordinaatidest järk-järgult lõikusid, mis on võrdelised takistusmomendi kõvera poolt eraldatud pindaladega piirkonnas *29—h*. Seiskumise hetkel on mehhanismi poolt käivitusfaasis varutud kineetiline energia täielikult ära kulutatud. Endastmõistetavalt saab varutud kineetilise energia kulutamist lisatakistuste (pidurite) juurdelülitamise teel kiirendada. Näiteks joonisel 701 täisjoonega *aa* näidatud lisatakistus põhjustab kineetilise energia palju intensiivsemat kulutamist, mistõttu mehhanism seiskub juba asendis *36*. Vastav kineetilise energia kõvera kulgemine on näidatud katkestatud joonega. Seejuures on lihtne arvutada mehhanismi pidurdamiseks vajalikku tööd, mis on võrdeline pindalaga F_C mm² (joon. 701). Täielik pidurdustöö A_p on antud valemiga

$$A_p = \mu_\varphi \mu_M F_C.$$

Kineetilise energia diagrammi $T = T(\varphi)$ abil saab seega mää-

rata redutseerimislüli AB täielikku pöördenurka φ juhul, kui motoorsete ja takistusjõudude momendid on teada. Käsitletud näites võrdub see nurk abstsisstelje lõiguga $(1—h)$, korrutatult mastaabiga μ_φ.

3°. Siirdume nüüd redutseerimislüli AB nurkkiiruste määramisele, kasutades selleks mehhanismi kineetilise energia avaldist [vt. valem (21.43)]:

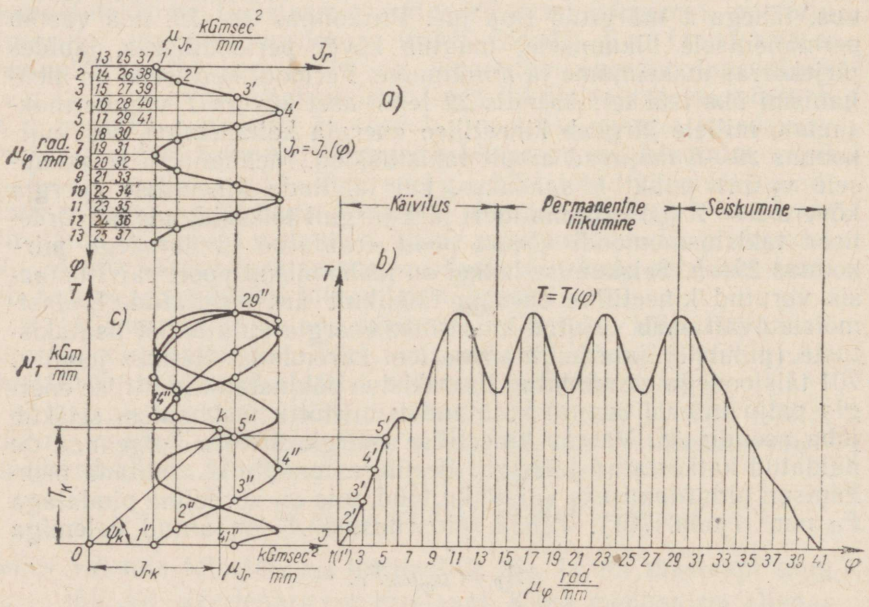
$$T = \frac{I_r \omega^2}{2}. \tag{22.19}$$

Toodud võrrandis tähistab I_r redutseeritud inertsmomenti ja ω — redutseerimislüli kiirust. Konstrueerime diagrammi $I_r = I_r(\varphi)$, mis määrab redutseeritud inertsmomendi sõltuvuse pöördenurgast φ (joon. 702). Võrrandile (22.19) saab anda järgmise kuju:

$$\omega^2 = \frac{2T}{I_r}, \tag{22.20}$$

millest selgub, et lüli AB nurkkiiruse ruut on igal hetkel võrdeline masina kineetilise energia T ja tema redutseeritud inertsmomendi suhtega.

Nimetatud suhte väärtuste määramiseks konstrueerime redutseeritud inertsmomendi $I_r = I_r(\varphi)$ (joon. 703, *a*) ja kineetilise ener-



Joon. 703.

gia $T = T(\varphi)$ (joon. 703, *b*) diagrammid. Konstruktsiooni hõlbustamiseks pöörame diagrammi $I_r = I_r(\varphi)$ 90° võrra, joonestades ordinaattelje, millele on kantud redutseeritud inertsmomendi I_r väärtused, horisontaalselt, ja abstsisstelje, mis kannab pöördenurga φ väärtusi, vertikaalselt. Kuna kõver $I_r = I_r(\varphi)$ iga tsükli järel kordub, võib tema konstrueerimisel piirduda ü h e täistsükli väljajoonestamisega, nagu on näidatud joonisel 703, *a*. Fikseerime diagrammil $I_r = I_r(\varphi)$ punkti $1'$, mis vastab kineetilise energia diagrammi $T = T(\varphi)$ samanimelisele punktile (joon. 703, *b*). Tõmbame esimesest punktist vertikaali ja teisest — horisontaali, kuni need lõikuvad punktis $1''$. Seepeale fikseerime diagrammidel $I_r = I_r(\varphi)$ ja $T = T(\varphi)$ teineteisele vastavad punktid $2'$. Nendest tõmmatud vertikaal ja horisontaal lõikugu punktis $2''$. Analoogiliselt, punktidest $3'$ tõmmatud horisontaal ja vertikaal määravad punkti $3''$, läbi punktide $4'$ tõmmatud sirged annavad punkti $4''$ jne. Ühendades kõik leitud punktid $1''$, $2''$, $3''$ ... sujuva kõvera abil, saame diagrammi, mis näitab kineetilise energia T kulgemist redutseeritud inertsmomendi I_r funktsioonina, s. t. kõvera $T = T(I_r)$ (joon. 703, *c*). Jätkame kõvera konstrueerimist kuni mehhanismi liikumise lõpuni punktis *h* (joon. 701). On ilmne, et permanentsel liikumisel kujuneb konstrueeritav kõver suletuks, sest et suurused I_r ja T muutuvad selles piirkonnas perioodiliselt. Käivitusfaasis (piirkonnas *1—14*) asetsev kõver ei ühti seiskumisfaasi kõveraga (piirkond *29—h*) seetõttu, et kineetiline energia $T = T(\varphi)$ kulgeb nimetatud liikumisfaasides erinevalt.

4°. Valime kõveral $T = T(I_r)$ mingi punkti *k* ja ühendame selle koordinaatide alguspunktiga *O* (joon. 703, *c*). Tähistame tekkinud sirge *Ok* ja abstsisstelje vahelise nurga tähisega ψ_k. Kuna abstsisstaljele on kantud punktile *k* vastav redutseeritud inertsmoment I_{rk} (mastaabis μ_{I_r}) ja ordinaatteljele — samale punktile vastav kineetiline energia T_k (mastaabis μ_T), siis on ilmne, et nimetatud suuruste suhe määrab nurga ψ_k tangensi, s. t., et

$$\frac{T_k}{I_{rk}} = \frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_k. \qquad (22.21)$$

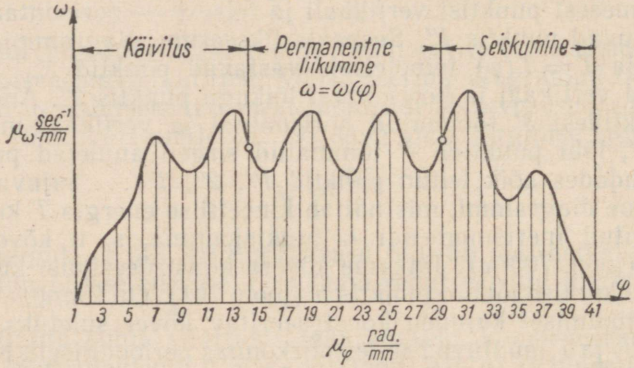
Ühendame järk-järgult kõik kõvera $T = T(I_r)$ punktid koordinaattelgede alguspunktiga *O* ja määrame seejuures tekkivad nurgad ψ_1, ψ_2, ψ_3, ... Rakendades nüüd seoseid (22.21) ja (22.20), võime arvutada lüli *AB* nurkkiiruste ruudud mehhanismi kõigis asendeis. Saame:

$$\omega_1^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_1, \quad \omega_2^2 = 2 \frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_2, \ldots \qquad (22.22)$$

Võrranditest (22.22) selgub, et lüli *AB* nurkkiirused on võrdelised nurkade ψ_1, ψ_2, ... tangensitest võetud ruutjuurtega:

$$\omega_1 = \sqrt{2\frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_1}, \qquad \omega_2 = \sqrt{2\frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_2}, \ldots \tag{22.23}$$

Seega on mehhanismi redutseerimislüli AB nurkkiiruse väärtused leitud. Kasutades saadud tulemusi, võib koostada diagrammi, mis näitab redutseerimislüli AB nurkkiiruse kulgemist nurga φ funktsioonina, s. t. konstrueerida kõvera $\omega = \omega(\varphi)$ (joon. 704).



Joon. 704.

5°. Liikumisaja t sõltuvuse nurgast φ, s. t. funktsiooni $t = t(\varphi)$ saab konstrueerida, kasutades võrrandit (22.13′).

Mis tahes ajavahemik liikumise algusest kuni hetkeni t_k on antud võrrandiga

$$t_k - t_1 = \int_{\varphi_1}^{\varphi_k} \frac{1}{\omega} d\varphi. \tag{22.24}$$

Seoses (22.24) esineva integraali võib määrata analüütiliselt või graafiliselt, niipea kui on teada suurus $\frac{1}{\omega}$ nurga φ funktsioonina. Viimast sõltuvust iseloomustava kõvera võib konstrueerida punktide kaupa, sest kiiruse ω väärtused on juba teada.

Redutseerimispunkti kiiruse suurus v_B on antud teatavasti valemiga $v_B = \omega l_{AB}$. Edasi saab määrata punkti B tangentsiaalkiirenduse a^t_B väärtuse [vt. valemid (22.18) ja (22.18′)]:

$$a^t_B = \varepsilon l_{AB} = \omega l_{AB} \frac{d\omega}{d\varphi} = v_B \frac{d\omega}{d\varphi}. \tag{22.25}$$

Võrrandi (22.25) parem pool on hõlpsasti määratav, sest et tuletise $\frac{d\omega}{d\varphi}$ võib leida kõvera $\omega = \omega(\varphi)$ (joon. 704) graafilise diferentseerimise teel.

Normaalkiirendus arvutatakse võrrandi (22.17) abil. Saame:

$$a^n_B = \frac{v^2_B}{l_{AB}} = \omega^2 l_{AB}. \qquad (22.26)$$

Määranud redutseerimispunkti B kiiruse v_B ja kiirenduse a_B, on kiirus- ja kiirendusplaanide abil lihtne leida lülide kiirusi, kiirendusi ja inertsjõude ning läbi viia masinagregaadi mehhanismides täielik jõudude arvutus ebaühtlaselt pöörleva redutseerimislüli tingimustes.

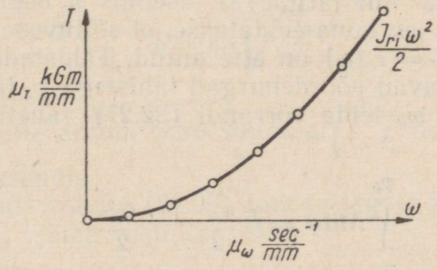
Olukorras, kus jõud sõltuvad ainult redutseerimislüli asendist, on seega diagrammi $T = T(I_r)$ ja järgnevate grafoanalüütiliste arvutuste abil võimalik täielikult ja täpselt uurida agregaadi liikumist. Juhul kui motoorsed jõud või takistusjõud sõltuvad kiirusest, siis ei saa küsimust diagrammi $T = T(I_r)$ abil lahendada, vaid tuleb rakendada teatavaid lähendusmeetodeid, mis esitatakse allpool (vt. § 114, 4°).

§ 114. Agregaadi liikumise uurimine diagrammi $T = T(\omega)$ abil

1°. Agregaadi liikumist saab uurida ka diagrammi $T = T(\omega)$ abil, mis määrab kineetilise energia sõltuvuse redutseerimislüli nurkkiirusest ω.

Lähtudes võrrandist (22.7′) võime kirjutada, et

$$M d\varphi = dT = d\left(I_r \frac{\omega^2}{2}\right), \qquad (22.27)$$



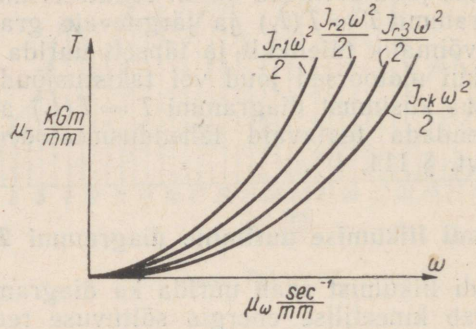
Joon. 705.

mis pole midagi muud, kui hoolause diferentsiaalkujul. M tähistab siin redutseeritud motoorse momendi M_m ja redutseeritud takistusmomendi M_t vahet, s. t. $M = M_m - M_t$.

Võrrandis (22.27) esinev agregaadi redutseeritud inertsmoment I_r on üldjuhul muutuv suurus, sõltudes redutseerimislüli pöördenurgast φ, s. t. $I_r = I_r(\varphi)$. Kuna agregaadi kineetiline energia

$$T = \frac{I_r \omega^2}{2}, \tag{22.28}$$

kus ω tähistab redutseerimislüli nurkkiiruse jooksvat väärtust, siis võib igas etteantud asendis i konstrueerida kõvera $T = T(\omega)$. Viimane kujutab endast parabooli tipuga koordinaatide algus-punktis (joon. 705). Teades sõltuvust $I_r = I_r(\varphi)$, saab konstrueerida paraboolide parve (joon. 706), milles iga parabool vastab



Joon. 706.

teatavale I_r väärtusele I_{r1}, I_{r2}, I_{r3}, ... I_{rk}.

Kui oletada, et redutseerimislüli asendis i on nurkkiirus ω_i teada, siis sama lüli järgnevas asendis k osutub tundmatuks ainult nurkkiirus ω_k, kuna eeldatakse, et sõltuvused $M_m = M_m(\varphi)$, $M_t = M_t(\varphi)$ ja $I_r = I_r(\varphi)$ on ette antud. Tähistades valitud asenditele i ja k vastavad pöördenurgad tähistega φ_i ja φ_k, võime otsitava nurkkiiruse ω_k leida võrrandi (22.27) vahetu integreerimise teel:

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M d\varphi = I_k \frac{\omega_k^2}{2} - I_i \frac{\omega_i^2}{2}. \tag{22.29}$$

Võrrandi (22.29) vasak pool arvutatakse kõverate $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ poolt eraldatud pindalade vahest. Parema poole teise liikme määramine ei tee mingeid raskusi, kuna meie käsutuses on suurused I_i ja ω_i. Teades lisaks sellele

veel suurust I_k, võime arvutada tundmatu ω_k seosest

$$\omega_k = \sqrt{\frac{I_i}{I_k}\omega_i^2 + \frac{2}{I_k}\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M d\varphi}. \tag{22.30}$$

Pärast seda, kui redutseerimislüli nurkkiirus asendis k on määratud, võib analoogiliste arvutustega leida tema väärtuse mingis järgnevas asendis m ja edasi — kogu redutseerimislüli uuritava pöördenurga ulatuses.

Ülesande võib lahendada ka graafiliselt. Selleks tuleb konstrueerida ülalkirjeldatud paraboolide parv, millest leitakse redutseerimislüli nurkkiirus ω lüli igas meelevaldses asendis [1].

2°. Selle asemel, et konstrueerida arvutustööd komplitseerivat paraboolide parve $T_i = I_{ri}\frac{\omega^2}{2}$, kus $i = 1, 2, \ldots, n$, võib piirduda üheainsa parabooli konstrueerimisega. Selleks tuleb aga kasutada teatavat fiktiivset, kuid suuruselt konstantset agregaadi redutseeritud inertsmomenti I_0.

Valime teatava meelevaldse, kuid konstantse redutseeritud inertsmomendi I_0 nii, et agregaadi igas asendis oleks täidetud kineetilise energia võrdsuse tingimus

$$\frac{I_0\omega_0^2}{2} = \frac{I_r\omega^2}{2}. \tag{22.31}$$

Ülaltoodud tingimuses tähistab ω_0 teatavat fiktiivset, meie poolt eelnevalt valitud redutseeritud inertsmomendile I_0 vastavat redutseerimislüli nurkkiirust. Tingimusest (22.31) järgneb, et tegelik nurkkiirus ω on fiktiivse nurkkiirusega seotud järgmiselt:

$$\omega = \omega_0\sqrt{\frac{I_0}{I_r}}. \tag{22.32}$$

Kuna I_0 on ette antud, saab suuruse $\sqrt{\frac{I_0}{I_r}}$ arvutada redutseerimislüli igas asendis.

Pöördudes nüüd seose (22.29) juurde tagasi ja silmas pidades võrdust (22.31), võime kirjutada, et

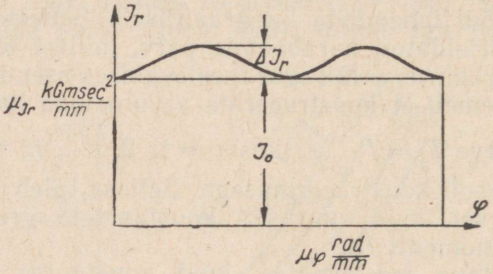
$$A_{ik} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M d\varphi = I_0\frac{\omega_{0k}^2}{2} - I_0\frac{\omega_{0i}^2}{2}. \tag{22.33}$$

[1] Käsitletud meetodi autoriks on V. A. Zinovjev.

Saadud tulemus pole midagi muud kui hoolause, kus esineb teatav konstantne redutseeritud inertsmomendi väärtus I_0.

Nagu ülal märgiti, võib I_0 väärtuse valida meelevaldselt. Tehniliste arvutuste hõlbustamiseks võib näiteks valida $I_0 = 1$. Juhul kui redutseeritud inertsmomendile I_0 anda funktsiooni $I_r = I_r(\varphi)$ minimaalne väärtus (joon. 707), siis juurdekasvu ΔI_r väikeste väärtuste puhul võib ilmselt oletada, et

$$\sqrt{\frac{I_0}{I_r}} \approx 1.$$



Joon. 707.

Nurkkiiruse ω_0 võib sel puhul lugeda ligikaudu võrdseks nurkkiirusega ω [vt. võrrand (22.32)].

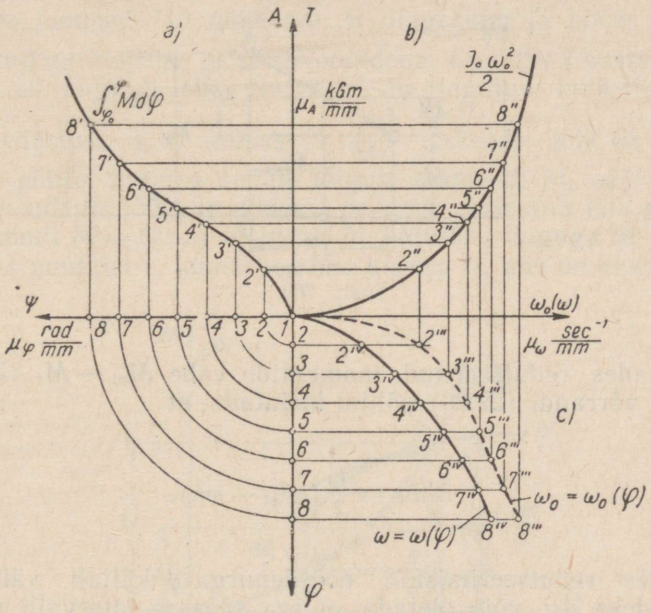
3°. Selleks et võrrandist (22.33) määrata nurkkiirust ω_0 kui nurga φ funktsiooni, s. t., et leida seost $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$, tuleb töö A avaldada pöördenurga φ kaudu. Teisiti öeldes, tuleb konstrueerida diagramm $A = A(\varphi)$. Lisaks sellele tuleb nurkkiiruse ω_0 funktsioonina avaldada veel kineetiline energia T_0. Kui moment M on antud graafiku $M = M(\varphi)$ näol, saab diagrammi, mis iseloomustab töö A sõltuvust pöördenurgast φ (joon. 708, *a*), konstrueerida graafilise integreerimise teel, tuginedes seosele

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi} M d\varphi,$$

kus φ_0 tähistab redutseerimislüli pöördenurka tema algasendis. Joonisel 708 on käsitletud agregaadi liikumist alates tema käivitamismomendist, millele vastab asend *1*. Valides konstantse inertsmomendi I_0 väärtuse, konstrueerime diagrammi $T_0 = T_0(\omega_0)$ (vt. joon. 708, *b*), lähtudes sõltuvusest

$$T_0 = \frac{I_0 \omega_0^2}{2}.$$

Funktsiooni $T_0 = T_0(\omega_0)$ kujutab punktist *1* lähtuv parabool. Joonisel 708, *a* toodud diagrammi $A = A(\varphi)$ φ-telje punktidest *2*, *3*, *4*, ... tõmbame vertikaalsirged, mis lõikuvad kõveraga $A = A(\varphi)$ punktides *2'*, *3'*, *4'* ... Nimetatud punktidest lähtudes tõmbame omakorda horisontaalsirged, mis lõikudes kõveraga $T_0 = T_0(\omega_0)$ (joon. 708, *b*) fikseerivad sellel punktid *2''*, *3''*, *4''*, ... Viimastest alates veame uued vertikaaljooned ning otsime

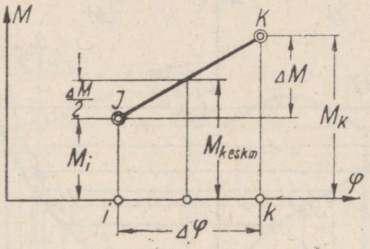


Joon. 708.

nende lõikepunktid *2'''*, *3'''*, *4'''*, ... horisontaalsirgetega, mis on eelnevalt tõmmatud allasuunduva φ-telje punktidest *2*, *3*, *4*, ... (joon. 708, *c*). Seejuures tekkivad horisontaalsed lõigud *2—2'''*, *3—3'''*, *4—4'''*, ... vastavad redutseerimislüli nurkkiirusele ω_0 asendites *2*, *3*, *4*, ... Kõver $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$ on katkestatud joonega kujutatud diagrammi parempoolses alumises kvadrandis (joon. 708, *c*). Pärast diagrammi $\omega_0 = \omega_0(\varphi)$ konstrueerimist ei tee tegeliku nurkkiiruse diagrammi $\omega = \omega(\varphi)$ koostamine enam raskusi. Selleks tuleb kasutada seost (22.32). Joonisel 708, *c* on funktsioon $\omega = \omega(\varphi)$ kujutatud täisjoonega. Lõigud $2 - 2^{IV}$, $3 - 3^{IV}$, $4 - 4^{IV}$, ... on võrdelised redutseerimislüli nurkkiirusega ω asendites *2*, *3*, *4*, ...

Liikumisaja diagrammi konstrueerimine ja redutseerimislüli nurkkiiruste leidmine võib seejärel toimuda § 113 käsitletud meetodite abil.

4°. Uurime nüüd agregaadi liikumist olukorras, kus redutseeritud momendid M_m ja M_t sõltuvad redutseerimislüli nurkkiirusest ω, s. t., kus $M_m = M_m(\omega)$ ja $M_t = M_t(\omega)$ on etteantud funktsioonid. Redutseeritud inertsmoment I_r olgu seejuures püsiva suurusega, s. t. $I_r = \text{const}$.



Joon. 709.

Tähistades redutseeritud momentide vahe $M_m - M_t$ tähisega M, võime võrrandi (22.29) põhjal kirjutada, et

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M d\varphi = \frac{I_r}{2}(\omega^2_k - \omega^2_i). \qquad (22.34)$$

Jagades redutseerimislüli pöördenurga φ küllalt väikesteks intervallideks $\Delta\varphi$, võib oletada, et iga säärase intervalli piirides sõltub moment M nurgast φ ligikaudu lineaarselt. Näiteks intervallis, mis eraldab asendeid i ja k (joon. 709), võib sel puhul momendi M keskväärtuse arvutamiseks kasutada seost

$$M_{keskm.} = \frac{M_i + M_k}{2} = M_i + \frac{\Delta M}{2},$$

kus

$$\Delta M = M_k - M_i.$$

Teatava lähendusega võib seega kirjutada, et

$$\int_{\varphi_i}^{\varphi_k} M d\varphi \approx M_{keskm.}\Delta\varphi = M_i\Delta\varphi + \frac{\Delta M}{2}\Delta\varphi. \qquad (22.35)$$

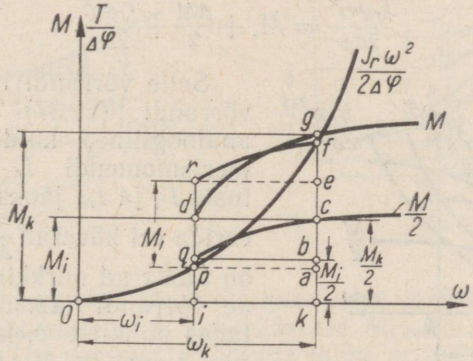
Võrrand (22.34) kujuneb nüüd järgmiseks:

$$M_i \Delta\varphi + \frac{\Delta M}{2} \Delta\varphi = \frac{I_r}{2} (\omega^2_k - \omega^2_i). \qquad (22.36)$$

Graafilise lahenduse hõlbustamiseks anname talle alljärgneva kuju:

$$\frac{I_r \omega_k^2}{2\Delta\varphi} = M_i + \frac{\Delta M}{2} + \frac{I_r \omega_i^2}{2\Delta\varphi}. \qquad (22.37)$$

Olgu joonisel 710 momendi M diagramm ja kõver $\frac{T}{\Delta\varphi} = \frac{I_r \omega^2}{2\Delta\varphi}$ kujutatud nurkkiiruse ω funktsioonidena. Asendile i vastavat nurkkiirust ω_i kujutab Oi. Nurgaga $\Delta\varphi$ jagatud kineetilise energia T_i väärtust, s. t. suurust $\frac{I_r \omega_i^2}{2\Delta\varphi}$ esindab lõik ip. Võrrandi (22.37) põhjal liidame sellele lõigule momendi M_i väärtuse. Selleks pikendame lõiku ip pikkuse pr võrra. Liidetud lõik pr võrdub diagrammil $M = M(\omega)$ momenti M_i kujutava lõiguga id. Seepeale, lähtudes punktist r, konstrueerime kõvera rf, mis on ekvidistantne



Joon. 710.

kõvera $\frac{M}{2} = \frac{1}{2} M(\omega)$ lõiguga qc. Ekvidistantse kõvera ja kõvera $\frac{I_r \omega^2}{2\Delta\varphi}$ lõikepunktist f laseme nüüd abstsissteljele ristsirge gk. Lõik Ok kujutab nurkkiirust ω_k ja lõik kg — momenti M_k. Konstruktsioonist on lihtne näha, et

$$(kf) = (ka) + (ae) + (ef).$$

Kuna aga $(ka) = (ip)$, $(ae) = (pr)$ ja $(ef) = (bc)$, siis saame kirjutada veel, et

$$(kf) = (pr) + (bc) + (ip).$$

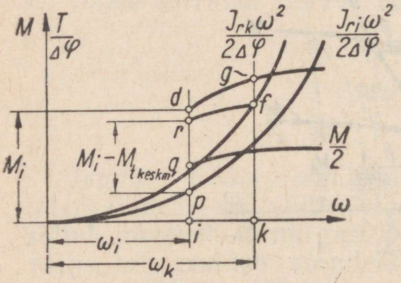
Lõik pr kujutab momenti M_i. Mis puutub lõiku bc, siis võib selle avaldada järgmiselt:

$$(bc) = (kc) - (iq).$$

Kuna lõik kc kujutab momenti $\frac{M_k}{2}$ ja lõik iq — momenti $\frac{M_i}{2}$, siis selgub, et lõigule bc vastab moment $\frac{\Delta M}{2} = \frac{M_k}{2} - \frac{M_i}{2}$. Lõik ip kujutab suurust $\frac{I_r\omega_i^2}{2\Delta\varphi}$. Võrrandi (22.37) põhjal tuleb seega järeldada, et lõigule kf vastab suurus $\frac{I_r\omega_k^2}{2\Delta\varphi}$. Mis puutub lõiku Ok, siis vastab see nurkkiirusele ω_k.

5°. Juhul kui redutseeritud inertsmoment I_r ei ole konstantne, vaid sõltub redutseerimislüli pöördenurgast φ, s. t., kui $I_r = I_r(\varphi)$, kujuneb võrrand (22.37) järgmiseks:

$$\frac{I_{rk}\omega_k^2}{2\Delta\varphi} = M_i + \frac{\Delta M}{2} + \frac{I_{ri}\omega_i^2}{2\Delta\varphi}. \qquad (22.38)$$



Joon. 711.

Selle võrrandi lahendamine on võrrandi (22.37) lahendamisega analoogiline, kuid redutseeritud inertsmomendi I_r kõikide väärtuste I_{ri} ja I_{rk} jaoks tuleb konstrueerida eri kõverad $\frac{T}{\Delta\varphi}$. Joonisel 711 on näidatud nurkkiiruse ω_k leidmine võrrandi (22.38) alusel. Lähtudes punktist p, kanname joonisele momenti M_i kujutava lõigu pr ja tõmbame punktist r algava kõvera rf, mis on ekvidistantne kõveraga $\frac{M}{2} = \frac{M}{2}(\omega)$. Punktist f, kus kõverad rf ja $\frac{I_{rk}\omega^2}{2\Delta\varphi}$ omavahel lõikuvad, langetame abstsisstelje ristsirge fk. Lõik Ok kujutab nurkkiirust ω_k ja lõik kg — momenti M_k.

6°. Agregaadi liikumise uurimisel on real juhtudel motoorne moment M_m määratud nurkkiiruse ω funktsioonina, kusjuures aga redutseeritud takistusmoment M_t sõltub pöördenurgast φ. Sel juhul eeldatakse, et intervallis $\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_i$ võib motoorse momendi M_m ja takistusmomendi M_t avaldada järgmiselt:

$$M_m \approx M_{m\ keskm.} = M_i + \frac{\Delta M}{2}$$

ja

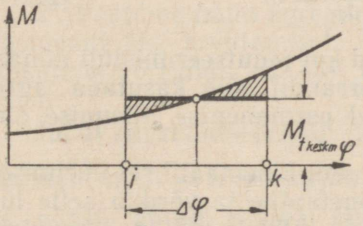
$$M_t \approx M_{t\ keskm.},$$

kusjuures $\Delta M = M_k - M_i$.

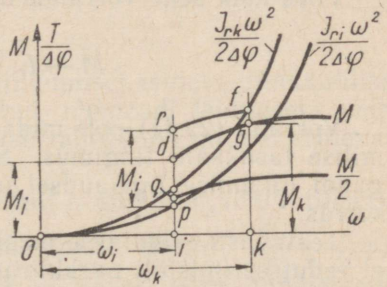
Agregaadi liikumisvõrrand kujuneb seega alljärgnevaks:

$$(M_i - M_{t\ keskm.}) + \frac{\Delta M}{2} = \frac{I_{rk}\omega_k^2}{2\Delta\varphi} - \frac{I_{ri}\omega_i^2}{2\Delta\varphi}. \qquad (22.39)$$

Võrrandit (22.39) võib lahendada ülal esitatud meetoditega, kuid eelnevalt tuleb diagrammi $M_t = M_t(\varphi)$ alusel määrata igas intervallis $\Delta\varphi$ kehtiv takistusmomendi keskmine väärtus $M_{t\ keskm.}$ ja kanda vastavale ordinaadile momentide vahe $M_i - M_{t\ keskm.}$. Näiteks, kui on antud diagramm $M_t = M_t(\varphi)$ (joon. 712), võime

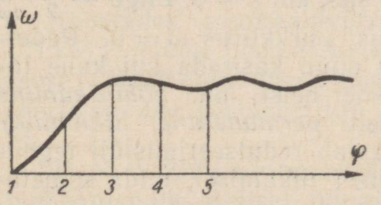


Joon. 712.

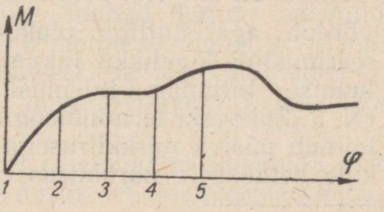


Joon. 713.

pindalade võrdsustamise meetodit kasutades määrata intervallile *ik* vastava takistusmomendi keskväärtuse $M_{t\ keskm.}$. Seepeale kanname joonisele 713 punktist *p* lähtuva lõigu *pr*, mis kujutab vahet $M_i - M_{t\ keskm.}$, ja konstrueerime diagrammiga $\frac{M}{2} = \frac{1}{2} M(\omega)$ ekvidistantselt kulgeva kõvera *rf*. Punktist *f* abstsissteljele tõmmatud ristsirge määrab nurkkiirust ω_k kujutava lõigu *Ok*. Korrates too-



Joon. 714.



Joon. 715.

dud konstruktsiooni üksteisele järgnevates intervallides $\Delta\varphi$, võime koostada kõverad $\omega = \omega(\varphi)$ (joon. 714) ja $M = M(\varphi)$ (joon. 715). Seejärel võib § 113 käsitletud meetoditega määrata kõik ülejäänud, agregaadi liikumist iseloomustavad parameetrid [1].

§ 115. Agregaadi liikumise uurimine N. J. Žukovski meetodiga

1°. Agregaadi liikumist võib uurida ka N. J. Žukovski poolt loodud meetodiga.

Kirjutame masina liikumisvõrrandi momentide võrrandi kujul [vt. § 114, võrrand (22.9)]:

$$M = I_r \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi}. \qquad (22.40)$$

Viies kõik selle võrrandi liikmed vasakule poole, saame:

$$M - I_r \frac{d\omega}{dt} - \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi} = 0. \qquad (22.41)$$

Võrrand (22.41) pole midagi muud kui redutseerimislüli dünaamilise tasakaalu tingimus. Seda võrrandit võib kasutada agregaadi liikumise ligikaudsel uurimisel permanentse liikumise olukorras.

Teatavasti eeldatakse masinagregaadi kinemaatilisel uurimisel, et redutseerimislüli nurkkiirus on konstantne ja võrdub selle lüli keskmise nurkkiirusega. Seetõttu ei ole lülidele mõjuvad arvutuslikud dünaamilised koormused küllalt täpsed.

Dünaamiliste koormuste täpsemaks arvestamiseks võib käsitletaval juhul rakendada N. J. Žukovski meetodit, mille alusel antud lüli tegelik liikumine lahutatakse kaheks tingliikumiseks.

Üldjuhul on redutseerimislülil igas etteantud asendis teatav nurkkiirus ω ja teatav nurkkiirendus $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Võrrandis (22.41) esinev liige $-I_r \frac{d\omega}{dt}$ muutub nulliks redutseerimislüli ühtlasel pöörlemisel, s. t. siis, kui $\varepsilon = 0$. Liige $-\frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi}$ võrdub aga nulliga olukorras, kus nurkkiirus $\omega = 0$. Redutseerimislüli tegelikku liikumist võib nüüd käsitada kui kahe liikumise liitumise tulemust. Esimene neist, nn. *põhiliikumine* (N. J. Žukovski terminoloogia kohaselt *permanentne liikumine*) toimub püsiva nurkkiirusega, mis vastab redutseerimislüli tegelikule hetkelisele nurkkiirusele ω. Teisel liikumisel, mida nimeta-

[1] § 114, 4—6° esitatud meetodi on välja töötanud V. A. Zinovjev.

takse *lisa-* ehk *algliikumiseks*, on nurkkiirus null, kusjuures aga nurkkiirendus võrdub lüli tegeliku nurkkiirendusega $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$.

Pöörleva lüli liikumise säärase tingliku lahutamise tulemusel saadakse kaks dünaamilist momenti, mida kujutavad võrrandi (22.41) teine ja kolmas liige. Tähistades need momendid vastavalt M_{il} ja M_{ip}, võime võrrandi (22.41) kirjutada järgmiselt:

$$M + M_{il} + M_{ip} = 0, \tag{22.42}$$

kusjuures

$$M_{ip} = -\frac{\omega^2}{2}\frac{dI_r}{d\varphi} \tag{22.43}$$

kujutab inertsjõudude redutseeritud momenti põhiliikumises ja

$$M_{il} = -I_r\frac{d\omega}{dt} \tag{22.44}$$

— sama momenti lisaliikumises.

2°. Peatume nüüd agregaadi põhiliikumisel esineva dünaamilise momendi M_{ip} arvutamisel. Nimetatud momendi leidmiseks võib kasutada võrrandit (22.43), mida saab lahendada mitmel erineval viisil.

Juhul kui redutseeritud inertsmoment I_r on antud analüütiliselt, funktsiooni $I_r = I_r(\varphi)$ kujul, on lihtne saada tuletist $\frac{dI_r}{d\varphi} = f(\varphi)$ ja edasi, antud püsiva nurkkiiruse ω juures leida funktsiooni $M_{ip} = M_{ip}(\varphi)$. Kui aga funktsioon $I_r = I_r(\varphi)$ on antud graafiku kujul, saab tuletise $\frac{dI_r}{d\varphi}$ leida graafilise diferentseerimise teel. Graafiku $M_{ip} = M_{ip}(\varphi)$ konstrueerimine ei tekita seejärel enam raskusi.

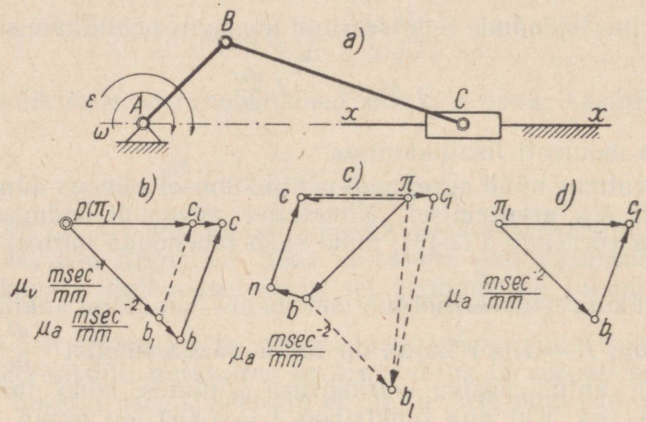
Momendi M_{ip} võib arvutada ka Žukovski kangi abil (vt. § 108). Selleks määratakse kõikide lülide inertsjõud olukorras, kus redutseerimislüli pöörleb püsiva nurkkiirusega ω. Seepeale konstrueeritakse pööratud kiirusplaan — Žukovski kang, ja fikseeritakse sellel kõikide inertsjõudude rakenduspunktid.

Koostades tasakaaluvõrrandi § 108 toodud kujul [võrrand (21.24)], leiame tasakaalustava jõu või momendi. Edasi arvutame seose (21.22) abil inertsjõudude redutseeritud jõu või momendi. Inertsjõudude redutseeritud moment ongi otsitavaks momendiks M_{ip}.

3°. N. J. Žukovski meetodit on eriti ratsionaalne kasutada just mehhanismide üldisel dünaamilisel uurimisel, sealhulgas ka jõudude määramisel.

Nagu ülal näidati, eeldatakse jõudude arvutamisel, et vedava lüli (redutseerimislüli) nurkkiirus ω on püsiv, võrdudes permanentse liikumisfaasi keskmise nurkkiirusega. Jõudude arvutus toimub seega mehhanismi p õ h i l i i k u m i s e olukorras, kus nurkkiirendus $\varepsilon = 0$. Selles liikumises määratakse kõik lülide inertsjõud, kinemaatiliste paaride reaktsioonid ja lülidele mõjuvad jõud.

Pärast seda võib võrrandi (22.41) abil määrata vedava lüli nurkkiirenduse $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$. Viimane põhjustab mehhanismi kõikides lülides lisakiirendusi, mistõttu neis tekivad ka lisa-inertsjõud. Viimaseid saab määrata niipea, kui on selgunud nurkkiirendusest ε põhjustatud lülide lisakiirendused.



Joon. 716.

Lisakiirenduste ja lülide täielike kiirenduste leidmine on lihtne, kui rakendada selleks N. J. Žukovski meetodit ja lahutada mehhanismi liikumine põhi- ning lisaliikumiseks.

Demonstreerime seda joonisel 716, *a* kujutatud väntmehhanismi näitel. Konstrueerime mehhanismi põhiliikumise kiirus- ja kiirendusplaanid (joon. 716, *b* ja *c*) eeldades, et $\omega = \text{const}$. ja seetõttu $\frac{d\omega}{dt} = 0$. Kiirendused on joonisel 716, *c* näidatud täisjoonega.

Määranud võrrandi (22.41) abil nurkkiirenduse $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, vaatleme mehhanismi lisaliikumist, kus $\omega = 0$. Kui mehhanismi veetava lüli kiirus on null, siis võrduvad nulliga ka tema kõikide teiste lülide kiirused. Säärases mehhanismis puuduvad järelikult normaalkiirendused, s. t. mehhanismi kõikidel punktidel on ainult t a n g e n t s i a a l k i i r e n d u s. Tangentsiaalkiirendusvektorid

aga ühtivad oma sihilt alati kiirusvektoritega. Lisakiirenduste plaan (joon. 716, *d*) peab seega olema kiirusplaaniga (joon. 716, *b*) geomeetriliselt sarnane. Lõik $\pi_l b_l$ kujutab mastaabis μ_a punkti B lisatangentsiaalkiirendust $\boldsymbol{a}^t_{Bl}$, s. t.

$$a^t_{Bl} = \mu_a(\pi_l b_l).$$

Lõik $\pi_l c_l$, võetuna samas mastaabis, esindab punkti C lisakiirendust $\boldsymbol{a}_{Cl}$. Seega:

$$a_{Cl} = \mu_a(\pi_l c_l)$$

jne.

On ilmne, et kiirusplaani (joon. 716, *b*) ja lisakiirenduste plaani (joon. 716, *d*) geomeetrilise sarnasuse tõttu ei pruugi viimast eraldi konstrueeridagi, vaid piisab kiirusplaani mõningast täiendamisest (vt. kriipsjoon joonisel 716, *b*).

Pärast lisakiirenduste leidmist võib arvutada mehhanismi lülide täielikud kiirendused. Selleks tuleb põhiliikumise kiirendusplaani vektoritele (joon. 716, *c*) geomeetriliselt liita lisakiirendusplaanist (joon. 716, *d*) võetavad vastavad kiirendusvektorid. Joonisel 716, *c* on see vektorite liitmine näidatud kriipsjoonega.

Punkti B kiirendusvektoriga $\boldsymbol{a}_B$, s. t. lõiguga πb on liidetud lisakiirendust $\boldsymbol{a}^t_{Bl}$ kujutav lõik bb_l, mis võrdub joonisel 716, *d* esineva lõiguga $\pi_l b_l$. Edasi, punkti C kiirendusvektorit $\boldsymbol{a}_C$ kujutava lõiguga πc on liidetud lisakiirendusvektorite $\boldsymbol{a}_{Cl}$ vastav lõik cc_l. Viimane võrdub pikkuselt lõiguga $\pi_l c_l$ jooniselt 716, *d*.

Punkti B täieliku kiirenduse $\boldsymbol{a}_B$ väärtus saadakse seosest

$$a_B = \mu_a(\pi b_l).$$

Punkti C täieliku kiirenduse $\boldsymbol{a}_C$ suurus arvutatakse analoogiliselt:

$$a_C = \mu_a(\pi c_l).$$

Pärast täielikkude kiirenduste leidmist on lihtne arvutada kõikide lülide inertsjõud ja teha kõik vajalikud muudatused esialgses jõudude arvutuses, mille juures oletati, et vedava lüli nurkkiirus on püsiv.

XXIII peatükk

MASINATE KÄIGU EBAÜHTLUS

§ 116. Ülesande üldine asetus

1°. Siirdume masinate dünaamika järgmise tähtsa ülesande juurde — ülesande juurde, mis käsitleb masina lülidele mõjuvate jõudude ning nende kiiruste ja kiirenduste vaheliste optimaalsete suhete määramist.

Nagu eelmisest peatükist selgus, on masina või mehhanismi vedava lüli kiirus üldjuhul muutuv suurus. Vedava lüli kiiruse kõikumine põhjustab kinemaatilistes paarides dünaamiliste lisakoormuste tekkimist, vähendab masina üldist kasutegurit ja tema töökindlust. Lisaks sellele võivad kiiruse kõikumised mõnedel juhtudel kutsuda masina lülides esile tunduvaid elastseid võnkumisi. Viimased on aga ebasoovitavad nii lülide tugevuse kui ka elastseteks võnkumisteks kulutatava võimsuse seisukohast. Kiiruse kõikumised võivad lõpuks põhjustada veel häireid masina poolt sooritatavas tehnoloogilises protsessis.

Vaadeldes permanentsel liikumisel esinevaid vedava lüli kiiruse kõikumisi, võib täheldada, et need kuuluvad kahte erinevasse tüüpi.

Tõepoolest, nagu varem näidati, kehtib enamiku masinate juures motoorsete tööde ja takistustööde võrdsus ainult permanentse liikumise ühe täistsükli kohta. Tsükli igal jooksval hetkel seda võrdsust aga ei ole, mistõttu masina vedav lüli liigub tsükli jooksul ebaühtlaselt. Kuna masina kineetiline energia taastub permanentsel liikumisel iga täistsükli järel, siis on ilmne, et ka vedava lüli kiirus muutub perioodiliselt koos tsüklite kulgemisega. Ülalkäsitletud kiiruse kõikumist nimetatakse seetõttu kiiruse *perioodiliseks* kõikumiseks.

Masina kiiruse perioodiliseks kõikumiseks nimetatakse seega kõikumist, mille puhul masina kõikide lülide kiirused muutuvad tsükliliselt, taastades iga tsükli järel oma algväärtused, sõltumatult lülide asenditest.

Lisaks kiiruse perioodilisele kõikumisele esineb masinates veel kiiruse *aperioodiline* muutumine. Viimase võivad esile kutsuda mitmesugused põhjused, nagu kasuliku koormuse või kahjulike takistuste järsk muutumine, masinale lisamasside juurdelülitamine jne. Masinale mõjuva koormuse järsk muutus toob kaasa ka vedava lüli kiiruse järsu muutumise. Kuna kiiruse säärasel kõikumisel puudub tsükliline iseloom, siis nimetatakse seda kiiruse aperioodiliseks kõikumiseks. Masinates esineb tavaliselt mõlemat liiki kiiruse kõikumisi.

2°. Kiiruse kõikumine võib masina permanentsel liikumisel võtta ulatuse, mis on masina normaalsete töötingimuste seisu-

kohast lubamatu. Seega kerkib probleem, kuidas hoida kiiruse kõikumist varem etteantud piirides. Kiiruse kõikumise reguleerimise küsimus masina või mehhanismi permanentsel liikumisel on tehnikas suure tähtsusega just seetõttu, et enamikul masinatest vastab see liikumise faas normaalsele töörežiimile, kus masin teeb kasulikku tööd.

Masina permanentsel liikumisel esineva kiiruse perioodilise kõikumise reguleerimine toimub tavaliselt masina lülide masside sobiva valikuga. Lülide massid tuleb valida nii, et nad suudaksid *akumuleerida* kogu masina kineetilise energia juurdekasvu liikumistsükli selles osas, kus motoorsete jõudude töö ületab takistustöö. See lülide masside poolt akumuleeritud energia tagastatakse masinale tsükli nendes osades, kus takistustöö on motoorsest tööst suurem.

Lülide massidele sobivate väärtuste andmisega saab seega reguleerida permanentsel režiimil esinevat perioodilist kiiruse kõikumist. Aperioodilist kiiruse kõikumist õnnestub masside valikuga reguleerida aga ainult siis, kui see kõikumine on väga väike. Juhul kui aperioodiline kiiruse kõikumine on suure ulatusega, lahendatakse tema leevendamise küsimus spetsiaalsete mehhanismide abil, mis reguleerivad kas motoorsete või takistusjõudude kulgemise seadust. Sääraseid reguleerivaid mehhanisme nimetatakse *regulaatoriteks* (vt. XXIV peatükk).

Alustame masina liikumise reguleerimisküsimuste käsitlust permanentsel režiimil esineva kiiruse perioodilise kõikumise reguleerimisvõimaluste uurimisega.

§ 117. Masina keskmine kiirus ja käigu ebaühtluse tegur

1°. Permanentsel liikumisel esineva kiiruse perioodilise kõikumise uurimise hõlbustamiseks võtame kasutusele *masina redutseerimislüli keskmise kiiruse mõiste.* Olgu veel märgitud, et kogu edasine käsitlus kehtib ainult permanentsel liikumisel.

Olgu s teepikkus, mille läbib redutseerimislülil valitud punkt B, liikudes ühe täistsükli jooksul asendist i asendisse k. Täistsükli kestuse tähistame tähega t. *Tegelikuks keskmiseks kiiruseks* $v_{keskm.}$ nimetatakse säärase ühtlase liikumise kiirust, mille puhul punkt B läbiks aja t jooksul sama teepikkuse s.

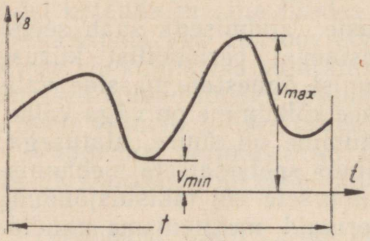
Kuna $dt = \frac{ds}{v}$, siis $t = t_k - t_i = \int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v}$. Sellest järgneb, et

$$v_{keskm.} = \frac{s}{\int_{s_i}^{s_k} \frac{ds}{v}}. \qquad (23.1)$$

Praktikas asendatakse tegelik keskmine kiirus sageli tinglikult kiiruse aritmeetilise keskväärtusega, kirjutades, et

$$v_{keskm.} = \frac{v_{max} + v_{min}}{2}, \qquad (23.2)$$

kusjuures v_{max} ja v_{min} tähistavad vastavalt punkti B kiiruse maksimaalset ja minimaalset väärtust (joon. 717). Väga ühtlase käiguga masinatel on erinevus ülaldefineeritud keskmiste kiiruste vahel tähtsusetu. Seetõttu kasutatakse arvutustes tavaliselt seda keskmist kiirust, mis antud juhul on ülesande lahendamise seisukohast mugavam.



Joon. 717.

Jõu- või töömasina passis on tavaliselt fikseeritud masina tinglik keskmine kiirus, kusjuures seda nimetatakse seal *nominaal-* ehk *nimikiiruseks.*

Ebaühtlase käiguga masinate arvutamisel tuleb eelistada tegeliku keskmise kiiruse kasutamist.

Jagades punkti B kiiruse maksimaalse ja minimaalse väärtuse vahe (joon. 717) keskmise kiirusega, saadakse nn. *masina käigu ebaühtluse tegur* δ. Tähendab

$$\delta = \frac{v_{max} - v_{min}}{v_{keskm.}}. \qquad (23.3)$$

On ilmne, et mida väiksem on kiiruse ekstreemväärtuste v_{max} ja v_{min} vahe, seda ühtlasemalt pöörleb ka masina vedav lüli. Permanentsel režiimil liikuva masina käigu perioodilise reguleerimise ülesanne seisneb masina masside ja temale mõjuvate jõudude säärase vahekorra valikus, mille puhul masina käigu ebaühtluse tegur δ ei ületaks teatavat, varem etteantud piirväärtust. Praktikas kõigub etteantava teguri δ väärtus väga suurtes piirides.

Masina keskmist kiirust ja tema käigu ebaühtluse tegurit on mugavam avaldada redutseerimislüli pöördenurkade ja tema nurkkiiruse kaudu. Analoogia põhjal seostega (23.1)—(23.3) võime tegeliku keskmise nurkkiiruse $\omega_{keskm.}$ avaldise kirjutada järgmiselt:

$$\omega_{keskm.} = \frac{\varphi}{\varphi_k}. \qquad (23.4)$$
$$\int_{\varphi_i}^{} \frac{d\varphi}{\omega}$$

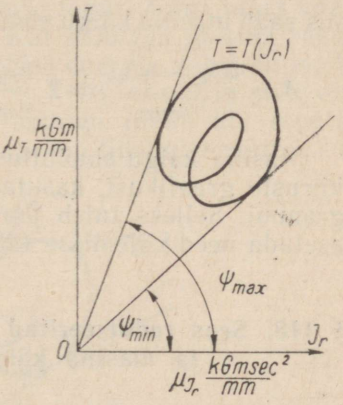
Nurkkiiruse keskmiseks aritmeetiliseks kujuneb

$$\omega_{keskm.} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}. \qquad (23.5)$$

Käigu ebaühtluse tegur δ on defineeritud järgmiselt:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{keskm.}}. \qquad (23.6)$$

2°. Kui diagramm $T = T(I_r)$ on konstrueeritud masina kogu liikumisaja kohta (vt. § 113), ei tee δ väärtuse leidmine liikumise permanentsel faasil mingeid raskusi. Vaatleme permanentsele liikumisele vastavat kõvera $T = T(I_r)$ osa (joon. 718). Nagu varem selgitati, on see kõvera osa suletud. Valemist (22.23) võib järeldada, et permanentse liikumise maksimaalne nurkkiirus ω_{max} vastab § 113, 4° defineeritud nurgale ψ_{max}. Minimaalne nurkkiirus ω_{min} vastab analoogiliselt nurgale ψ_{min}. Nimetatud nurkade määramiseks tõmbame punktist O lähtudes kõvera $T = T(I_r)$ suletud osale kaks puutujat. Üks puutujatest moodustab abstsissteljega nurga ψ_{max} ja teine — nurga ψ_{min}. Võrrandi (22.22) põhjal võime kirjutada:



Joon. 718.

$$\left.\begin{aligned} \omega^2_{max} &= 2\frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_{max}, \\ \omega^2_{min} &= 2\frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \operatorname{tg} \psi_{min}, \end{aligned}\right\} \qquad (23.7)$$

kus ω_{max} ja ω_{min} tähistavad nagu varemgi redutseerimislüli nurkkiiruse ekstreemväärtusi permanentse liikumise ühes tsüklis.

Masina käigu ebaühtluse tegur δ avaldub teatavasti järgmiselt (vt. valem 23.6):

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{keskm.}}. \qquad (23.8)$$

Korrutades valemis (23.8) esineva murru nimetajat ja lugejat suurusega $(\omega_{max} + \omega_{min})$, saame:

$$\delta = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})\ (\omega_{max} + \omega_{min})}{\omega_{keskm.}\ (\omega_{max} + \omega_{min})} = \frac{\omega^2_{max} - \omega^2_{min}}{2\omega^2_{keskm.}}, \qquad (23.9)$$

sest et $(\omega_{max} + \omega_{min}) = 2\omega_{keskm.}$ [vt. valem (23.5)]. Asendades valemis (23.9) esinevad suurused ω^2_{max} ja ω^2_{min} valemitest (23.7) võetud väärtustega, saame

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_{I_r}} \frac{\operatorname{tg} \psi_{max} - \operatorname{tg} \psi_{min}}{\omega^2_{keskm.}}. \qquad (23.10)$$

Nurgad ψ_{max} ja ψ_{min} mõõdetakse vahetult diagrammilt, kuna nurkkiirus $\omega_{keskm.}$ arvutatakse valemiga (23. 4). Kui võtta

$$\omega_{keskm.} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2},$$

siis saab masina käigu ebaühtluse teguri avaldada järgmiselt:

$$\delta = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{keskm.}} = 2\,\frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{max} + \omega_{min}} = 2\,\frac{\sqrt{\operatorname{tg} \psi_{max}} - \sqrt{\operatorname{tg} \psi_{min}}}{\sqrt{\operatorname{tg} \psi_{max}} + \sqrt{\operatorname{tg} \psi_{min}}}.$$

Masina käigu ebaühtluse teguri võib määrata aga ka vahetult kiiruste graafikust, kasutades näiteks joonisel 717 kujutatud diagrammi. Selleks tuleb jooniselt mõõta v_{max} ja v_{min} väärtused ja asetada need valemisse (23.3).

§ 118. Seos redutseeritud inertsmomendi, redutseeritud jõudude ja masina käigu ebaühtluse teguri vahel

1°. Uurime redutseeritud inertsmomendi, redutseeritud jõudude ja masina käigu ebaühtluse teguri vahel kehtivat seost. Lahendades võrrandid (23.5) ja (23.6) ω_{max} ja ω_{min} suhtes, leiame, et

$$\omega_{max} = \omega_{keskm.}\left(1 + \frac{\delta}{2}\right) \text{ ja } \omega_{min} = \omega_{keskm.}\left(1 - \frac{\delta}{2}\right). \qquad (23.11)$$

Tõstes nende võrrandite mõlemad pooled ruutu, saame:

$$\left.\begin{aligned} \omega^2_{max} &= \omega^2_{keskm.}\left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{keskm.}(1 + \delta), \\ \omega^2_{min} &= \omega^2_{keskm.}\left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{keskm.}(1 - \delta). \end{aligned}\right\} \qquad (23.12)$$

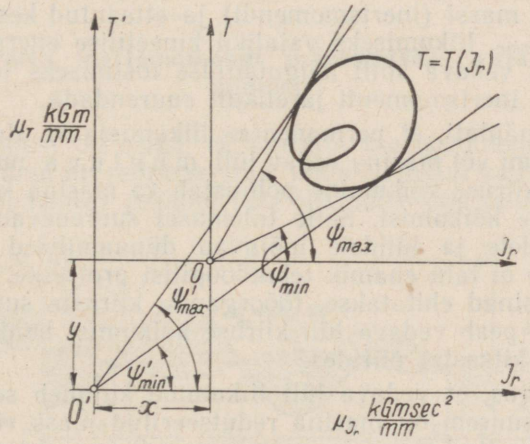
Väga ühtlase käiguga masinate puhul, kus δ on väikene, võib liikme $\frac{\delta^2}{4}$ kõrvale jätta. Vastupidi, suure ebaühtlusteguri δ puhul tuleb seda liiget arvestada. Asendades võrrandites (23.12) esinevad nurkkiirused ω_{max} ja ω_{min} seostest (23.7) võetud väärtustega, saame:

$$2\frac{\mu_T}{\mu_{I_r}}\operatorname{tg}\psi_{max} = \omega^2_{keskm.}\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{keskm.}(1+\delta),$$
$$2\frac{\mu_T}{\mu_{I_r}}\operatorname{tg}\psi_{min} = \omega^2_{keskm.}\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{keskm.}(1-\delta),$$

millest järgneb, et

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\psi_{max} &= \frac{\mu_{I_r}}{2\mu_T}\omega^2_{keskm.}\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{I_r}}{\mu_T}\omega^2_{keskm.}(1+\delta),\\ \operatorname{tg}\psi_{min} &= \frac{\mu_{I_r}}{2\mu_T}\omega^2_{keskm.}\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{I_r}}{\mu_T}\omega^2_{keskm.}(1-\delta).\end{aligned}\right\} \quad (23.13)$$

Võrrandid (23.13) võimaldavad leida etteantud keskmise nurkkiiruse $\omega_{keskm.}$ ja masina käigu ebaühtluse teguri δ mis tahes väärtustele vastavaid nurki ψ_{max} ja ψ_{min}. Kui sõltuvus masina redutseeritud inertsmomendi ja tema kineetilise energia vahel on teada, s. t. kui on konstrueeritud diagramm $T = T(I_r)$, siis saab alati vastata küsimusele, kuidas muuta neid suurusi juhul, kui muutub masina käigu ebaühtluse tegur δ. Olgu antud liikumise permanent-



Joon. 719.

sele faasile vastav diagramm $T = T(I_r)$ (joon. 719) ja olgu kineetilise energia ning redutseeritud inertsmomendi antud väärtustele vastavaks käigu ebaühtluse teguriks δ. Nurkade ψ_{max} ja ψ_{min} all tõmmatud puutujad lõikuvad koordinaatide alguspunkti O.

Anname käigu ebaühtluse tegurile mingi uue väärtuse δ' ja arvutame võrranditega (23.13) sellele vastavad nurgad ψ'_{max} ja ψ'_{min}. Käigu ebaühtluse teguri uue väärtuse puhul peavad kõve-

rale $T = T(I_r)$ tõmmatud puutujad moodustama abstsissteljega nurgad ψ'_{max} ja ψ'_{min}. Konstrueerime need puutujad (joon. 719) ja määrame nende lõikepunkti O'. See punkt peab nüüd kujunema diagrammi $T = T(I_r)$ koordinaatide uueks alguspunktiks. Ebaühtluse teguri δ muutmine toob seega kaasa ülemineku koordinaatteljestikust TOI_r uude, eelmisega paralleelsesse teljestikku $T'O'I'_r$. Nimetatud ülemineku juures suureneb masina kineetiline energia suuruse T_0 võrra ja tema redutseeritud inertsmoment saab juurdekasvu I_0, mis on vajalikud selleks, et masin saaks töötada uue ebaühtlusteguriga δ'. Joonisel 719 kujutab mastaabis μ_T joonestatud lõik y kineetilist lisaenergiat T_0; lisainertsmomendile I_0 vastab aga mastaabis μ_{I_r} joonestatud lõik x. Seega

$$I_0 = \mu_{I_r} x \quad \text{ja} \quad T_0 = \mu_T y.$$

Konstruktsioonist võib otseteed järeldada, et mida väiksem on käigu ebaühtluse tegur δ, seda väiksemaks kujuneb nurkade ψ_{max} ja ψ_{min} vahe ja seda kaugemale kõvera $T = T(I_r)$ permanentsele liikumisfaasile vastavast osast nihkub koordinaattelgede alguspunkt. Ebaühtlusteguri δ vähenemine põhjustab seega masina redutseeritud massi (inertsmomendi) ja etteantud keskmise nurkkiirusega $\omega_{keskm.}$ liikumiseks vajaliku kineetilise energia suurenemist. Masina vedava võlli käiguühtluse tõstmiseks tuleb masina redutseeritud inertsmomenti järelikult suurendada.

2°. Ülal näidati, et permanentse liikumisfaasi üldjuhul pöörleb mehhanismi või masina vedav lüli m u u t u v a nurkkiirusega. Vedava lüli kiiruse kõikumine põhjustab ka masina kõikide teiste lülide kiiruste kõikumisi. Selle tulemusel suurenevad kinemaatilistele paaridele ja lülidele mõjuvad dünaamilised koormused. Lisaks sellele ei talu enamik tehnoloogilisi protsesse, mille sooritamiseks masinad ehitatakse, tööorganite kiiruste suuri muutusi. Neil põhjusil peab vedava lüli kiiruse kõikumist hoidma teatavates, küllaltki kitsastes piirides.

Edasi selgus, et vedava lüli liikumine kujuneb seda ühtlasemaks, mida suurem on masina redutseeritud mass või inertsmoment. Redutseeritud massi ja inertsmomendi suurendamiseks tuleb suurendada mehhanismi üksikute lülide masse. Praktiliselt toimub masside suurendamine sel teel, et ühele masina võllidest kinnitatakse etteantud inertsmomendiga lisadetail. Seda detaili nimetatakse masina *hoorattaks*. Hooratta ülesandeks on seega reguleerida vedava lüli kiiruse perioodilist kõikumist, mida põhjustavad mehhanismi enda omadused või motoorsete ja takistusjõudude suhte perioodilised muutumised.

Hooratta massi ja inertsmomendi sobiva valikuga on võimalik masina vedava lüli liikumist reguleerida nii, et selle kiiruse

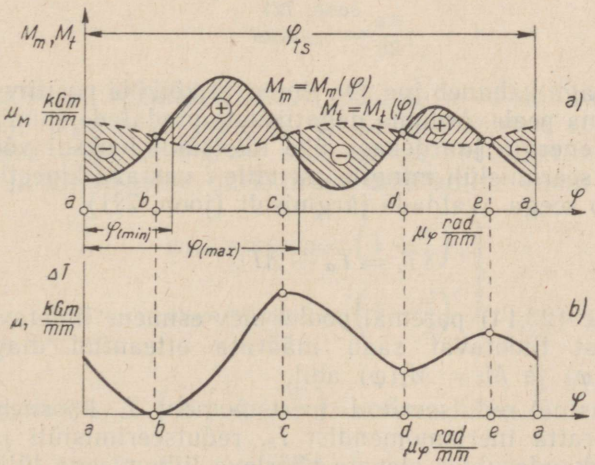
kõikumine teatava keskväärtuse ümber ei ületa varem etteantud piiri.

Hooratas moodustab nagu masina lülide kineetilise energia teatava akumulaatori, mis liikumise kiirenemisel energiat talletab ja seda käigu aeglustumise momentidel masinale tagasi annab. Mõnedes töömasinates, kus kasulik koormus muutub perioodiliselt väga suurtes piirides (purustajad, valtsimismasinad jne.), akumuleerib hooratas kiirendatud liikumise ajal, s. t. kasuliku koormuse vähenemisel, väga suuri kineetilise energia varusid. Hoorattasse varutud kineetiline energia võimaldab kasuliku koormuse üksikuid tippväärtusi ületada, ilma et jõumasina võimsust oleks tarvis suurendada.

Hooratta geomeetriline kuju võib teoreetiliselt olla meelevaldne. Kuid konstruktiivsetel ja tehnoloogilistel põhjustel on kõige sobivamaks osutunud hooratas kujundada kas raskepõialise kettana, kodaratega varustatud rattana või anda talle üldjuhul inertspeatelgede suhtes sümmeetriline kuju. Sel puhul on kõige lihtsam viia hooratta üks tsentraalsetest inertspeatelgedest ühtimisse tema pöörlemisteljega, mis väldib lisakoormuste tekkimist hooratast kandva võlli laagrites.

§ 119. Hooratta inertsmomendi määramiseks vajalikud lähteandmed

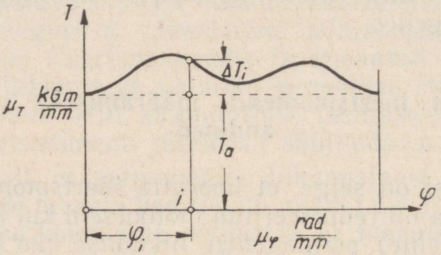
1°. Eeltoodust on selge, et hooratta inertsmomendi määramiseks peab teadma nii redutseeritud motoorseid kui ka takistusjõude (või nende momente) permanentse liikumise ühe täistsükli ulatu-



Joon. 720.

ses. Joonisel 720, *a* ongi kujutatud redutseeritud motoorsete momentide M_m ja takistusmomentide M_t sõltuvused redutseerimislüli pöördenurgast φ, s. t. kõverad $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ ühele täistsüklile vastava lõigu φ_{ts} ulatuses. Kuna hooratta inertsmoment kui otsitav suurus ei ole teada, siis ei saa ka konstrueerida kineetilise energia diagrammi $T = T(\varphi)$. Tõepoolest, meil puuduvad andmed momentide M_m ja M_t kulgemise kohta masina käivitusfaasis ega ole ka teada, kui suur on masina täielik redutseeritud inertsmoment I_r. Seetõttu ei saa määrata permanentse liikumisfaasi alghetkeks masina poolt akumuleeritud kineetilist energiat T_a (joon. 721). Kuid kineetilise energia muutumist permanentse liikumise ühe täistsükli vältel ΔT saab etteantud diagrammide $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ (joon. 720, *a*) najal alati määrata.

Diagrammi $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ (joon. 720, *b*) konstrueerimiseks määrame kõverate $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ vahele jääva pindala nii, nagu seda tehti § 109 (joonisel 720, *a* on käsitletavad pindalad viirutatud). Diagrammi $\Delta T = \Delta T(\varphi)$ konstrueerimist on mugav alustada punktist *b*. Piirkonnas *bc* kineetiline energia kasvab, piir-



Joon. 721.

konnas *cd* aga kahaneb jne. On ilmne, et kõikide positiivsete pindalade summa peab võrduma negatiivsete pindalade summaga, sest kineetilise energia juurdekasv ühe täistsükli jooksul võrdub nulliga. Redutseerimislüli mingile asendile *i* vastava kineetilise energia T_i saab seega avaldada järgmiselt (joon. 721)

$$T_i = T_a + \Delta T_i. \qquad (23.14)$$

Avaldise (23.14) paremal poolel olev esimene liidetav on tundmatu. Teist liidetavat saab määrata etteantud diagrammide $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ abil.

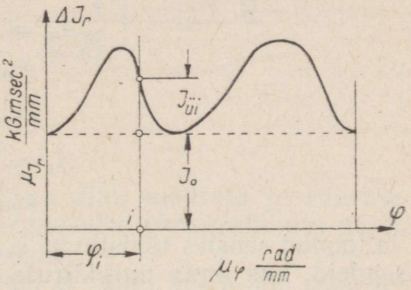
2°. Masina redutseeritud inertsmoment I_r koosneb kolmest osast: hooratta inertsmomendist I_h, redutseerimislüli ja temaga kindlas ülekandesuhtes olevate pöörleva liikumisega lülide inertsmomendist I_0 ja lõpuks kõikide ülejäänud lülide inertsmomendist

$I_{\ddot{u}}$. Asendis i võib masina täie redutseeritud inertsmomendi I_{ri} avaldada seega järgmiselt (joon. 723):

$$I_{ri} = I_h + I_0 + I_{\ddot{u}i} = I_h + \Delta I_{ri}. \tag{23.15}$$

Inertsmomendi avaldises on kaks esimest liiget alati püsiva väärtusega, kuna kolmas sõltub üldjuhul pöördenurgast φ, s. t. $I_{\ddot{u}} = I_{\ddot{u}}(\varphi)$. Hooratta inertsmoment I_h on tundmatu suurus.

Suurust $\Delta I_r = I_0 + I_{\ddot{u}}$ saab masina permanentse liikumisfaasi ühe täistsükli kohta § 110 toodud meetodiga alati leida. Diagrammi $\Delta I_r = \Delta I_r(\varphi)$ kujutab joonis 722. Samal joonisel on näidatud ka püsiv inertsmoment I_0 ja fikseeritud $I_{\ddot{u}i}$ väärtus redutseerimislüli meelevaldselt valitud asendis i. Diagramm $I_r = I_r(\varphi)$, mis näitab masina täieliku redutseeritud inertsmomendi I_r sõltuvust redutseerimislüli pöördenurgast φ, on toodud joonisel 723. Seejuures on silmas peetud seost (23.15).



Joon. 722.

3°. Hooratta inertsmomendi I_h leidmiseks peab teadma redutseerimislüli keskmist nurkkiirust $\omega_{keskm.}$. Eeldatakse, et see võrdub nominaalse nurkkiirusega, s. t. nurkkiirusega, mis on toodud jõu- või töömasina passis (vt. § 117, 1°).

Nurkkiirus $\omega_{keskm.}$ saadakse valemist

$$\omega_{keskm.} = \frac{\pi n}{30},$$

kus n tähistab redutseerimislüli pöörete arvu minutis.

Edasi, nagu § 117 näidati, valitakse masinale soovitav käigu ebaühtluse tegur δ. Pärast seda ei tee redutseerimislüli maksimaalse ja minimaalse nurkkiiruse määramine enam raskusi:

$$\left.\begin{aligned} \omega_{max} &= \omega_{keskm.}\left(1+\frac{\delta}{2}\right), \\ \omega_{min} &= \omega_{keskm.}\left(1-\frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{23.16}$$

ja

$$\left.\begin{aligned} \omega^2_{max} &= \omega^2_{keskm.}\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{keskm.}(1+\delta), \\ \omega^2_{min} &= \omega^2_{keskm.}\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega^2_{keskm.}\ (1-\delta). \end{aligned}\right\} \tag{23.17}$$

4°. Kineetilise energia T, redutseeritud inertsmomendi I_r ja nurkkiiruste ω_{max} ning ω_{min} vahelise seose võib tuletada hoolause kujul kirjutatud masina liikumisvõrrandist [vt. võrrand (22.4)]. Saame:

$$A_m - A_t = \frac{I_{r(max)}\omega^2_{max}}{2} - \frac{I_{r(min)}\omega^2_{min}}{2}. \qquad (23.18)$$

Võrrandis (23.18) esinevaid töid A_m ja A_t saab omakorda avaldada järgmiselt

$$A_m = \int_{\varphi_{(min)}}^{\varphi_{(max)}} M_m d\varphi,$$

$$A_t = \int_{\varphi_{(min)}}^{\varphi_{(max)}} M_t d\varphi.$$

Ülaltoodud seostes tähistavad $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$ redutseerimislüli neid asendeid, kus tema nurkkiiruse väärtuseks on vastavalt ω_{max} ja ω_{min}. Juhul kui need asendid on teada, saab vahet $A = A_m - A_t$ leida kõverate $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ (joon. 720, *a*) ning nurkadele $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$ vastavate ordinaatide poolt piiratud pindala F kaudu. Tõepoolest, määranud pindala F suuruse ruutmillimeetrites, võime kirjutada, et

$$A = \mu_M \mu_\varphi F.$$

Võrrandis (23.18) figureerivad suurused $I_{r(max)}$ ja $I_{r(min)}$ tähistavad asenditele $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$ vastavaid redutseeritud inertsmomentide väärtusi (joon. 723).

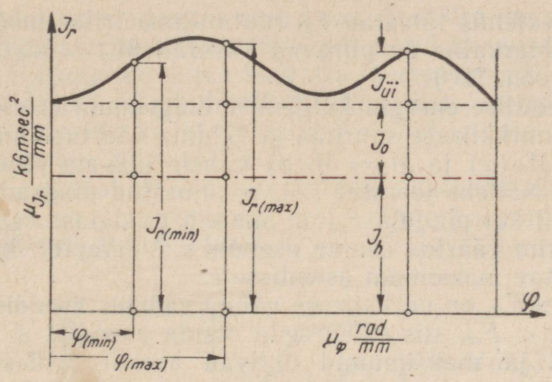
Anname nüüd võrrandile (23.18) uue kuju, mille juures on silmas peetud seoseid (23.15) ja (23.17):

$$A = \frac{(I_h + I_0 + I_{\ddot{u}(max)})\omega^2_{keskm.}(1+\delta)}{2} - \frac{(I_h + I_0 + I_{\ddot{u}(min)})\omega^2_{keskm.}(1-\delta)}{2}. \qquad (23.19)$$

Lahendades võrrandi (23.19) I_h suhtes, saame:

$$I_h = \frac{A}{\omega^2_{keskm.}\delta} - I_0 - \frac{I_{\ddot{u}(max)}(1+\delta) - I_{\ddot{u}(min)}(1-\delta)}{2\delta}. \qquad (23.20)$$

Võrrandist (23.20) selgub, et juhul kui on teada nurgad $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$, milledele vastavad redutseerimislüli nurkkiirused ω_{max} ja ω_{min}, ei tee hooratta inertsmomendi leidmine raskusi. Tõepoo-



Joon. 723.

lest, suurusi A, $I_{ü(max)}$ ja $I_{ü(min)}$ saab alati määrata ja suurused $\omega_{keskm.}$, δ ning I_0 on ette antud. Järgnevates paragrahvides näidatakse, kuidas leida nurki $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$.

Võrrandit (23.20) uurides selgub, et juhul kui lülide redutseeritud inertsmoment $I_ü$ on konstantne, võrrand lihtsustub. Saame:

$$I_h = \frac{A}{\omega^2_{keskm.}\delta} - (I_0 + I_ü). \qquad (23.21)$$

Mõnedes praktilistes arvutustes võib juhul, kui suurus $I_0 + I_ü$ on võrrandi (23.21) esimese liikmega võrreldes väikene, kasutada lähendusvalemit

$$I_h \approx \frac{A}{\omega^2_{keskm.}\delta}. \qquad (23.22)$$

5°. Kasutades võrrandeid (23.21) ja (23.22), on lihtne määrata nurki $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$. Tõepoolest, olukorras kus inertsmoment $I_ü$ on püsiv suurus, vastab nurkkiirusele ω_{max} kineetilise energia maksimumväärtus T_{max} ja nurkkiirusele ω_{min} — kineetilise energia miinimumväärtus T_{min}. Näiteks joonisel 720 vastavad nurkkiiruse miinimumväärtustele asendid b ja d ning nurkkiiruse maksimumväärtustele — asendid c ja e. On ilmne, et nurkkiiruse vähimale väärtusele vastab asend b ja tema suurimale väärtusele asend c, sest et nendes asendites on kineetilise energia sügavaim miinimum ja suurim maksimum. Võrrandis (23.22) esinev tööde vahe A tuleb seetõttu arvutada järgmiselt:

$$A = \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_m d\varphi - \int_{\varphi_b}^{\varphi_c} M_t d\varphi = \mu_M \mu_\varphi F_{bc}.$$

Arvutusvalemis tähistab F_{bc} ruutmillimeetrites mõõdetud pindala, mida intervallis bc piiravad kõverad $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ (joon. 720).

Kui kineetilise energia kulgemise diagrammi ei ole konstrueeritud, saab nurkkiiruse suurima ja vähima väärtuse määrata kõverate $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$ vahele jäävate pindalade võrdlemise teel. Näiteks joonisel 720, *a* kujutatud diagrammidest ilmneb, et juhul kui pindala F_{cd} on suurem pindalast F_{de}, peab nurkkiiruse suurim väärtus asuma asendis *c*. Vastupidi, kui $F_{cd} < F_{de}$, siirdub otsitav maksimum asendisse *e*.

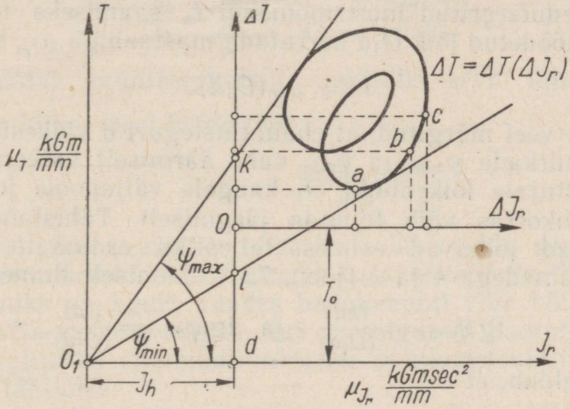
Kui $F_{bc} > F_{cd}$, on nurkkiiruse vähim väärtus asendis *b* ja vastupidi, kui $F_{bc} < F_{cd}$, siis tuleb seda otsida asendist *d*. Nurkkiiruse miinimumid ja maksimumid ühtivad asendi poolest kineetilise energia vastavate ekstreemväärtustega ainult sel juhul, kui redutseeritud inertsmoment $I_{\bar{u}} = \text{const}$. Kui see on aga muutuv, s. t. kui $I_{\bar{u}} = I_{\bar{u}}(\varphi)$, tuleb hooratta inertsmomendi arvutamiseks kasutada võrrandit (23.20). Seejuures ei lange nurkkiiruse ja kineetilise energia ekstreemväärtused asenditelt ühte, vaid on teineteise suhtes nihutatud, nagu joonisel 720 on skemaatiliselt näidatud. Juhul kui nurkkiiruse ja kineetilise energia ekstreemumite suhteline nihutus on väikene, võib nurkkiiruse suurimat ja vähimat väärtust otsida ka redutseeritud momentide kõverate vahele jäävate pindalade võrdlemise teel piirkonnas, mis vastab nurkadele $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$. Praktilistes inseneriarvutustes, kus kiiruse ja kineetilise energia ekstreemväärtuste vahelised nihutused on väga väikesed, on pindalade võrdlemise meetod täiesti kasutuskõlblik.

§ 120. Hooratta inertsmomendi arvutamine diagrammi $T = T(I_r)$ abil

1°. Hooratta inertsmomendi arvutamisel on lähteandmeteks kõigepealt masina käigu ebaühtluse tegur δ ja masina keskmine nurkkiirus ω_{keskm}. Lisaks sellele on ette antud redutseeritud motoorsete ja takistusmomentide diagrammid ning redutseeritud inertsmomendi diagramm — kõik vedava lüli pöördenurga funktsioonidena. Tuleb rõhutada, et hooratta inertsmomendi arvutamisel diagrammi $T = T(I_r)$ abil ei tohi motoorsete jõudude või takistusjõudude diagrammidesse tuua inertsjõude. Redutseeritud momentide diagrammid koostatakse ainult permanentse liikumise ühe tsükli kohta. Järelikult annab § 119 näidatud, pindalade arvutamisele rajatud integreerimine pildi ainult masina või mehhanismi kineetilise energia muutumisest (juurdekasvu kulgemisest ühe tsükli jooksul). Tähistame nimetatud juurdekasvu tähisega ΔT [vt. võrrand (23.14)]. Edasi, meil on küll teada masina kõikide lülide massid ja inertsmomendid, kuid puudub hooratta inertsmoment, mis

selles ülesandes on otsitavaks suuruseks. Seetõttu me saame määrata ainult redutseeritud inertsmomendi juurdekasvu ΔI_r [vt. võrrand (23.15)]. Kuna me ei tea hooratta inertsmomenti ega masina poolt käivitusfaasis akumuleeritud kineetilist energiat, siis ei saa me konstrueerida ka diagrammi $T = T(I_r)$, vaid peame piirduma diagrammiga $\Delta T = \Delta T(\Delta I_r)$.

Muutuvat suurust ΔI_r saab arvutada, lähtudes lülide etteantud massidest ja inertsmomentidest ning kasutades mehhanismi kiirusplaani (vt. § 110).



Joon. 724.

2°. Masina permanentse liikumisfaasi ühte tsüklit haarava diagrammi $\Delta T = \Delta T(\Delta I_r)$ koostamiseks piisab kineetilise energia juurdekasvu ja redutseeritud inertsmomendi muutuste tundmisest. Kanname kineetilise energia juurdekasvu ΔT väärtused ordinaatteljele, alates punktist O (joon. 724). Redutseeritud inertsmomendi muutused ΔI_r aga kanname abstsissteljele. Ühendades saadud punktid a, b, c jne. sujuva kõveraga, saame masina permanentsele liikumisfaasile vastava diagrammi $\Delta T = \Delta T(\Delta I_r)$.

Hooratta redutseeritud inertsmomendi I_h leidmiseks rakendame võrrandeid (23.13). Saame:

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \frac{\mu_{Ir}\omega^2_{keskm.}}{2\mu_T}\left(1+\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{Ir}}{2\mu_T}\omega^2_{keskm.}(1+\delta)$$

ja

$$\operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{\mu_{Ir}\omega^2_{keskm.}}{2\mu_T}\left(1-\delta+\frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_{Ir}}{2\mu_T}\omega^2_{keskm.}(1-\delta).$$

Asetades ülaltoodud võrranditesse $\omega_{keskm.}$ ja δ etteantud väärtused, arvutame nurgad ψ_{max} ja ψ_{min}. Seejärel tõmbame kõverale $\Delta T = \Delta T(\Delta I_r)$ kaks puutujat. Esimene neist peab abstsissteljega moodustama nurga ψ_{max} ja teine — nurga ψ_{min}. Olgu O_1 nimetatud puutujate lõikepunkt (joon. 724). See punkt on koordinaatide alguseks diagrammile $T = T(I_r)$, mis iseloomustab masina või mehhanismi kogu kineetilise energia T sõltuvust tema täielikust redutseeritud inertsmomendist I_r. Täieliku redutseeritud inertsmomendi leidmiseks masina pealüli mis tahes asendis tuleb järelikult diagrammi abstsisse lugeda alates uuest alguspunktist O_1. Hooratta redutseeritud inertsmomendi I_h saamiseks tuleb millimeetrites mõõdetud lõik O_1d korrutada mastaabiga μ_{I_r}, s. t.

$$I_h = \mu_{Ir}(O_1d).$$

3°. Olgu veel märgitud, et ebaühtlusteguri δ väikeste väärtuste puhul on nurkade ψ_{max} ja ψ_{min} vahe äärmiselt väikene. Seetõttu langeb puutujate lõikepunkt O_1 kaugele väljapoole joonist. Niisuguses olukorras võib toimida järgmiselt. Tähistame punktid, kus puutujad lõikuvad esimese teljestiku ordinaatteljega $O\Delta T$ vastavalt tähtedega k ja l (joon. 724). Jooniselt ilmneb, et

$$\operatorname{tg}\psi_{max} = \frac{(kd)}{(O_1d)} \quad \text{ja} \quad \operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{(ld)}{(O_1d)},$$

millest järeldub, et

$$\operatorname{tg}\psi_{max} - \operatorname{tg}\psi_{min} = \frac{(kd)-(ld)}{(O_1d)} = \frac{(kl)}{(O_1d)}.$$

Asetades äsjaleitud tangensite vahe võrrandisse (23.10), saame:

$$\delta = \frac{\mu_T(kl)}{\mu_{Ir}(O_1d)} \cdot \frac{1}{\omega^2_{keskm.}}.$$

Kui silmas pidada, et $\mu_{Ir}(O_1d) = I_h$, siis saame lõplikult:

$$I_h = \frac{\mu_T(kl)}{\omega^2_{keskm.}\delta}. \qquad (23.23)$$

Hooratta redutseeritud inertsmomendi saab seega leida kõverale $\Delta T = \Delta T(\Delta I_r)$ tõmmatud puutujate poolt ordinaatteljel $O\Delta T$ määratud lõigu kl kaudu.

4°. Juhul kui hooratas istub redutseerimislüliga ühisel võllil, võrdub tema pöörlemistelje suhtes arvutatud inertsmoment ülalarvutatud redutseeritud inertsmomendiga, s. t.

$$I = I_h.$$

Kuigi hooratas kujundatakse tavaliselt rattana, mille massiivset pöida ühendavad rummuga kodarad, võib inertsmomendi arvu-

tuse seisukohalt oletada, et hooratta mass on ühtlaselt jaotatud pöia ristlõike raskuskeset läbivale ringjoonele, mille raadiuseks olgu R. Hooratta inertsmomendi võib sel juhul avaldada alltoodud kujul:

$$I = mR^2 = \frac{G}{g}\frac{D^2}{4}, \tag{23.24}$$

kus $D = 2R$ tähistab pöia ristlõike raskuskeset läbiva ringjoone diameetrit. Võrrandite (23.23) ja (23.24) põhjal võime kirjutada:

$$GD^2 = \frac{4g\mu_T(kl)}{\omega^2_{keskm}\,\delta} = \frac{3600g\mu_T(kl)}{\pi^2 n^2 \delta},$$

kus n tähistab redutseerimislüli pöörete arvu minutis. Kuna $\frac{g}{\pi^2} \approx 1$, siis võime veel kirjutada:

$$GD^2 = \frac{3600\mu_T(kl)}{n^2\delta}. \tag{23.25}$$

Hooratta pöia kaalu korrutist tema läbimõõdu ruuduga nimetatakse *hoomomendiks* ehk *hooratta karakteristikuks*. Hoomomendi dimensiooniks on kgm^2. Teades hoomomenti võib hõlpsasti arvutada hooratta raskuse niipea, kui on selgunud hooratta läbimõõt. Viimane valitakse enamikul juhtudel puhtkonstruktiivsetest kaalutlustest lähtudes.

Juhul kui hooratast ei asetata pealüli võllile, vaid mõnele i-ga tähistatud masina lülile, siis tuleb alati rahuldada alljärgnevat kineetilise energia võrdsuse tingimust:

$$\frac{I_h\omega^2}{2} = \frac{I_i\omega^2{}_i}{2}, \tag{23.26}$$

kus I_i tähistab lülile i kinnitatud hooratta inertsmomenti ja ω_i — nimetatud lüli nurkkiirust.

Tingimusest (23.26) järgneb, et

$$I_i = I_h\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^2. \tag{23.27}$$

Mida suurem on lüli i nurkkiirus, seda väiksem peab järelikult olema temale kinnitatud hooratta inertsmoment. Seetõttu on hooratta kaalu vähendamise seisukohast otstarbekas monteerida ta suure pöörlemiskiirusega lülile.

Võrrandist (23.27) võib veel järeldada, et selleks, et inertsmoment I_i kujuneks konstantseks suuruseks, peab ülekandesuhe $\frac{\omega}{\omega^i}$ olema püsiva väärtusega. Hooratta võib seega monteerida ainult

säärastele lülidele, mida pealüliga seovad püsiva ülekandesuhtega mehhanismid (näit. hammasrattad, tiguülekanne jne.).

Hooratast mõnele mehhanismi lülile monteerides tuleb veel silmas pidada seda lüli pealüliga ühendava kinemaatilise ahela jäikust. Ahela väikese jäikuse korral võivad tekkivad elastsed võnkumised olla nii intensiivsed, et hooratas ei saa täita oma ülesannet.

§ 121. Hooratta inertsmomendi määramine jääkmomentide diagrammist

1°. Hooratta inertsmomenti saab veel määrata Lagrange'i teise võrrandi kujul kirjutatud masina liikumisvõrrandist lähtudes. Võrrandi (22.9) põhjal kehtib seos

$$M_m - M_t = I_r \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dI_r}{d\varphi}. \tag{23.28}$$

Momentide vahet $M_m - M_t$ nimetame *jääkmomendiks*. Viimase suurust saab alati leida, kui on teada $M_m = M_m(\varphi)$ ja $M_t = M_t(\varphi)$. Joonisel 725, *a* on toodud vastavad kõverad, joonisel 725, *b* aga jääkmomendi $M = M(\varphi)$ kõver.

Asetades võrrandisse (23.28) I_r väärtuse seosest (23.15), saame:

$$M = (I_h + \Delta I_r) \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{d(\Delta I_r)}{d\varphi}, \tag{23.29}$$

sest $I_h = \text{const.}$ ja $\frac{dI_h}{d\varphi} = 0$.

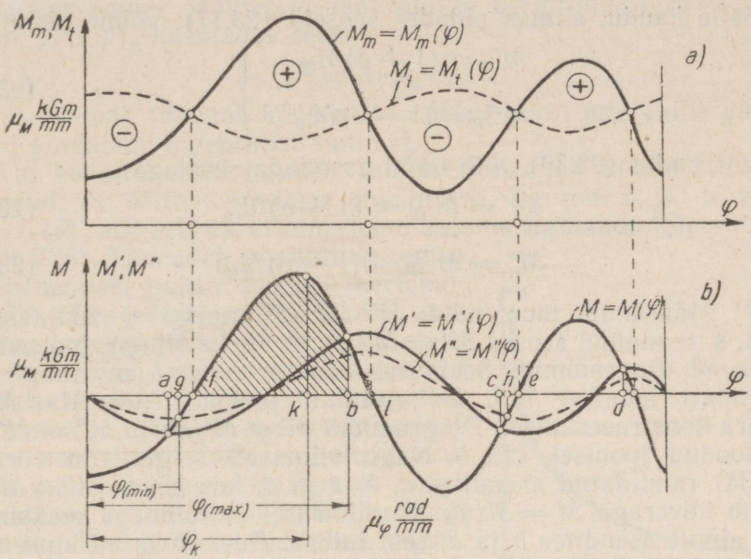
Vaatleme masina asendeid, kus redutseerimislüli nurkkiirus on ω_{max} ja ω_{min}. Neis asendites nurkkiirendus

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Võrrand (23.29) tuleb nimetatud asendites seega kirjutada järgmiselt:

$$\left.\begin{aligned} M' &= \frac{\omega^2_{max}}{2} \frac{d(\Delta I_r)}{d\varphi} \\ \text{või vastavalt} \qquad & \\ M'' &= \frac{\omega^2_{min}}{2} \frac{d(\Delta I_r)}{d\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{23.30}$$

M' ja M'' all tuleb seejuures mõista jääkmomendi väärtust asendites $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$, kus redutseerimislüli nurkkiirus läbib ühe oma maksimumidest või miinimumidest.



Joon. 725.

2°. Võrrandite (23.30) paremate poolte määramiseks võib kasutada § 115 käsitletud N. J. Žukovski meetodit. Tõepoolest, võrrandist (22.43) selgub, et

$$\left.\begin{aligned} M'_{ip} &= -\frac{\omega^2_{max}}{2}\frac{d(\Delta I_r)}{d\varphi} \\ \text{ja} \qquad M''_{ip} &= -\frac{\omega^2_{min}}{2}\frac{d(\Delta I_r)}{d\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{23.31}$$

kusjuures M'_{ip} ja M''_{ip} tähistavad vastavalt lülide inertsjõudude momente masina põhiliikumistes, s. t. liikumistes püsiva nurkkiirusega ω_{max} ja ω_{min}.

Momentide M'_{ip} ja M''_{ip} väärtusi saab leida, kui teha masinale jõudude arvutus. Selleks tuleb arvutada kõik lülide inertsjõud eeldusel, et nurkkiirused on konstantsed, ja seepeale kas N. J. Žukovski kangi (vt. § 107) või jõudude ning momentide redutseerimise võrrandi abil (vt. § 108) momendid M'_{ip} ja M''_{ip}.

Masina dünaamilisele arvutusele eelneb tavaliselt jõudude arvutus, kus vedava lüli nurkkiiruse väärtuseks loetakse $\omega_{keskm.}$. Seetõttu võib momentide M'_{ip} ja M''_{ip} leidmiseks kasutada ka jõudude arvutuses saadud momenti M_{ip}, mis oli antud seosega

$$M_{ip} = -\frac{\omega^2_{keskm.}}{2}\frac{d(\Delta I_r)}{d\varphi}. \tag{23.32}$$

Selle kaudu, silmas pidades seoseid (23.17), võime kirjutada:

$$\left.\begin{aligned} M'_{ip} &= (1+\delta)M_{ip} \\ \text{ja} \qquad M''_{ip} &= (1-\delta)M_{ip}. \end{aligned}\right\} \tag{23.33}$$

Võrrandid (23.30) võib nüüd asendada seostega

$$M' = M'_{ip} = (1+\delta)M_{ip} \tag{23.34}$$

ja

$$M'' = M''_{ip} = (1-\delta)M_{ip}. \tag{23.35}$$

3°. Määranud momendid M' ja M'' nurga φ funktsioonidena, s. t. saanud seosed $M' = M'(\varphi)$ ja $M'' = M''(\varphi)$, joonestame vastavad diagrammid. Seejuures kasutame sama mastaapi mis rakendati joonisel 725, *b* kujutatud jääkmomendi $M = M(\varphi)$ kõvera konstrueerimisel. Diagrammid $M' = M'(\varphi)$ ja $M'' = M''(\varphi)$ on toodud joonisel 725, *b*. Nagu viimaselt selgub, on võrrand (23.34) rahuldatud asendites *a, b, c* ja *d,* kus kõver $M' = M'(\varphi)$ lõikub kõveraga $M = M(\varphi)$. Nurkkiirusel ω võib aga maksimum olla ainult asendites *b* ja *d,* sest intervallides *fb* ja *ed* kineetiline energia kasvab. Nurkkiiruse suurima väärtuse saab praktika jaoks küllaldase täpsusega kindlaks teha, kui võrrelda omavahel pindalasid $(F_{bl} + F_{ed})$ ja F_{le}, mis intervallis *bd* jäävad kõvera $M = M(\varphi)$ ja φ-telje vahele (joon. 725, *b*). Juhul kui

$$F_{le} > F_{bl} + F_{ed},$$

esineb suurim nurkkiirus asendis *b*. Kui aga

$$F_{le} < F_{bl} + F_{ed},$$

tuleb nurkkiiruse suurimat väärtust otsida asendist *d*.

Üldreegel nurkkiiruse suurima väärtuse leidmiseks on järgmine: kui kahe maksimumi vahel paiknevas intervallis on jääkpindade algebraline summa positiivne, asub suurim väärtus intervalli paremal piiril ja vastupidi, kui nimetatud summa on negatiivne, tuleb meid huvitavat ekstreemväärtust otsida intervalli vasakust otsast.

Analoogiliselt toimub ka vähima väärtuse leidmine. Joonisel 725, *b* katkestatud joonega konstrueeritud kõvera $M'' = M''(\varphi)$ põhjal selgub, et miinimume tuleb otsida asenditest *g* ja *h,* mis vastavad kõverate $M'' = M''(\varphi)$ ja $M = M(\varphi)$ lõikumisele. Vähim väärtus leitakse jääkpindade võrdlemise teel.

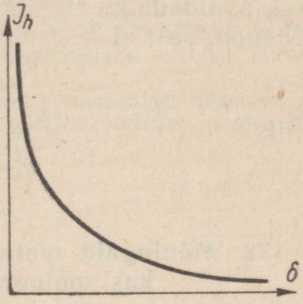
Kui nurkkiiruse väärtustele ω_{max} ja ω_{min} vastavad nurgad $\varphi_{(max)}$ ja $\varphi_{(min)}$ asuvad näiteks punktides *b* ja *g* (joon. 725, *b*), siis hooratta inertsmomendi I_h edasine arvutus toimub juba valemitega (23.20), (23.21) või (23.22), sõltuvalt nõutavast arvutustäpsusest.

Valemites esinev jääktöö A määratakse diagrammilt $M = M(\varphi)$ (joon. 725, *b*), kasutades seost

$$A = \mu_M \mu_\varphi F_{gb},$$

kus F_{gb} (mm²) tähistab kõvera $M = M(\varphi)$ poolt intervallis gb piiratud pindalade algebralist summat.

Kui konstrueerida graafik, mis iseloomustab hooratta inertsmomendi I_h sõltuvust käigu ebaühtluse tegurist δ, s. t. kõver $I_h = I_h(\delta)$, siis selgub, et nimetatud seos on ligikaudu hüperboolne (joon. 726). Tähendab, ebaühtluse teguri δ lähenemisel nullile kasvab inertsmoment I_h väga intensiivselt. Väikeste ebaühtluse tegurite puhul on nende väärtuse edasine vähendamine seetõttu seotud hooratta inertsmomendi tunduva suurendamisega, mis on aga konstruktiivselt ebasoovitav. Selle asjaolu sunnil tuleb mõnikord suure inertsmomendiga hoorataste kasutamisest loobuda, kuigi need tagaksid väikese ebaühtluse teguri.



Joon. 726.

4°. Kui hooratta inertsmoment I_h on teada, võib etteantud nurkkiiruse ω_{max} ja diagrammi $M = M(\varphi)$ abil (joon. 725, *b*) leida mis tahes pöördenurgale φ vastava nurkkiiruse ω ja konstrueerida graafiku $\omega = \omega(\varphi)$. Olgu näiteks ülesandeks leida pöördenurgale φ_k vastavas asendis k valitsev tegelik nurkkiirus ω_k.

Kirjutame hoolause intervallis kb. Saame:

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M d\varphi = (I_h + \Delta I_{r_b}) \frac{\omega^2_{max}}{2} - (I_h + \Delta I_{r_k}) \frac{\omega_k^2}{2},$$

millest võib hõlpsasti ilmutada nurkkiiruse ω_k:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{I_h + \Delta I_{r_b}}{I_h + \Delta I_{r_k}} \omega^2_{max} - \frac{2}{I_h + \Delta I_{r_k}} \int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M d\varphi}.$$

Ülaltoodud võrrandites on kasutatud järgmisi tähiseid:

ΔI_{r_b} — mehhanismi kõikide lülide (välja arvatud hooratas) redutseeritud inertsmoment maksimaalsele nurkkiirusele ω_{max} vastavas asendis *b*;

ΔI_{r_k} — kõikide lülide (välja arvatud hooratas) redutseeritud inertsmoment uuritavas asendis *k*;

I_h — hooratta redutseeritud inertsmoment.

Integral $\int_{\varphi_k}^{\varphi_b} M d\varphi$ on võrdeline kõvera $M = M(\varphi)$ poolt intervallis kb eraldatud pindalaga.

Nurkkiiruse väärtused nurga φ teiste väärtuste puhul määratakse analoogiliselt ja saadud tulemuste põhjal konstrueeritakse lõpuks kõver $\omega = \omega(\varphi)$.

Võrrandis, mida kasutasime ω_k arvutamiseks, võib nurkkiiruse ω_{max} avaldada ka etteantud nurkkiiruse $\omega_{keskm.}$ ja ebaühtluse teguri δ kaudu, sest et

$$\omega_{max} = \omega_{keskm.}\left(1+\frac{\delta}{2}\right)$$

ning

$$\omega^2_{max} \approx \omega^2_{keskm.}(1+\delta).$$

§ 122. Mõningaid teatmeid hoomasside arvutamisest olukorras, kus motoorne moment sõltub kiirusest

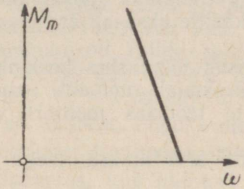
1°. Ülal (§ 114) käsitleti mõningaid masinagregaadi liikumise juhte, kus motoorne moment sõltus kiirusest. Üldiselt on sääraste masinagregaatide liikumise uurimine väga keerukas. Hoomasside arvutamine nimetatud olukorras osutub aga veelgi komplitseeritumaks. Ülesande üldist lahendit ei ole seni õnnestunud leida. Käesolevas raamatus piirdutakse ainult üksikute eriküsimuste lahendamisega.

Praktikas kasutatakse sageli masinagregaate, kus jõumasinateks on elektrimootorid, mille poolt arendatud motoorsed momendid sõltuvad rootori pöörlemiskiirusest. Elektrimootori poolt arendatud pöördemomendi sõltuvust tema rootori nurkkiirusest nimetatakse mootori *mehaaniliseks karakteristikuks*.

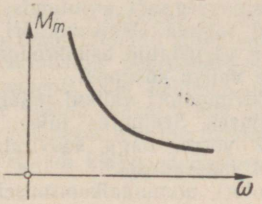
Mehaaniliste omaduste poolest võib elektrimootoreid liigitada kolme gruppi: haruvoolukarakteristikuga (šuntkarakteristikuga) mootorid, peavoolukarakteristikuga mootorid ja asünkroonmootorid. Joonisel 727 on kujutatud haruvoolumootori karakteristik, joonisel 728 — peavoolumootori karakteristik ja joonisel 729 — asünkroonmootori karakteristik.

Erinevalt joonisel 729 kujutatud karakteristikust on joonistel 727 ja 728 näidatud karakteristikud langeva iseloomuga. Langevaid mehaanilisi karakteristikuid nimetatakse püsivateks (stabiilseteks). Seda nimetust põhjustab asjaolu, et säärase karakteristikuga mootor püüab alati säilitada teatavat, antud koormusest sõltuvat pöörlemiskiirust. Kui püsiva koormuse puhul pöörlemiskiirus mingil põhjusel muutub, siis häiritakse agregaadi liikumisel kujunenud normaalset motoorsete jõudude ja takistusjõudude vahekorda. Selle tulemusel tekib jõupaar, mis püüab agregaadi endist kiirust taastada. Näiteks juhul, kus ülalnimetatud vahekorda iseloomustab motoorse momendi ja takistusmomendi võrdsus, kaasub nurkkiiruse muutumisele mootori momendi suurenemine või vähenemine, mille tulemusel tekibki algolukorda taastada püüdev jõupaar.

2°. Siirdudes joonisel 729 toodud asünkroonmootori karakteristiku juurde, näeme, et seda ei saa pidada kogu ulatuses stabiilseks. Tõepoolest, vasakul pool mootori maksimaalset momenti määravast punktist on kõveral põhiliselt tõusev iseloom. Asünkroonmootorit tuleb seetõttu käivitada kas tühikäigul, või siis koormusega, mis on väiksem karakteristiku vasakus osas olevast minimaalsest



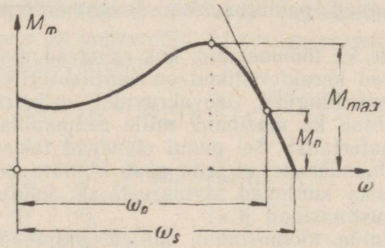
Joon. 727.



Joon. 728.

momendist. Karakteristiku parempoolne osa, nagu jooniselt 729 selgub, on langev. Kiirustel, mis ületavad maksimaalsele pöördemomendile vastava kiiruse, töötab asünkroonmootor seega stabiilselt.

Asünkroonmootoriga varustatud masinagregaadi permanentsel liikumisel on agregaadi nominaalkiirus määratud just karakteristiku stabiilse osaga, mis tagab agregaadile vajaliku töökindluse.



Joon. 729.

Praktilistes arvutustes loetakse asünkroonmootori karakteristiku parempoolne osa agregaadi normaalse tööpiirkonna ulatuses ligikaudu lineaarseks. Seetõttu saab teda nimetatud intervallis avaldada järgmise lineaarvõrrandi abil:

$$M_m = M_0 - c\omega, \tag{23.36}$$

kus c tähistab sirge tõusu iseloomustavat konstanti ning M_0 — tinglikku momenti, mis vastab agregaadi tööpiirkonnas karakteristikut asendava sirge ja ordinaattelje lõikepunktile. Konstant c on määratud seosega

$$c = \frac{M_0}{\omega_s}, \tag{23.37}$$

kus ω_s tähistab maksimaalset nurkkiirust (sünkroonkiirust), mis vastab elektrimootori ideaalsele tühikäigule nulliga võrduva tingkoormuse juures.

Karakteristikut lähendava sirge konstrueerimisel on meil seega teada tema abstsissteljel asuv punkt. Teise punkti võib leida elektrimootori kataloogi andmete alusel, kus on märgitud mootori nominaalne pöörlemiskiirus ja seejuures mootori poolt arendatav pöördemoment. Lisaks sellele leiab kataloogist mootori maksimaalselt lubatava momendi ja nominaalmomendi vahelise suhte.[1]

[1] Vt. näiteks Краткий технический справочник, ч. II, стр. 277 и 278 Гостехиздат, 1950.

Masinagregaadi arvutamisel on üheks põhiülesandeks agregaadi normaalset tööd tagava elektrimootori valik. Kuna rõhuv enamus tööstuslikke agregaate on varustatud asünkroonmootoritega, siis käsitletakse alljärgnevas ainult viimaste valiku küsimust.

Elektrimootori valikul määratakse selle võimsus töömasina keskmise koormuse alusel. Seejuures tuleb takistusjõudude keskmist momenti suurendada 15—25% võrra, nagu soovitatakse elektriajamite teoorias mootori võimsuse esialgsel määramisel.[2]

Mootori nominaalkoormusele vastav moment arvutatakse seega alljärgneva valemi abil:

$$M_m = kM_{t\ keskm.} \qquad (23.38)$$

Valemis tähistab k numbrilist tegurit, mis valitakse piirides $1{,}15 \leqslant k \leqslant 1{,}25$ ja $M_{t\ keskm.}$ — mootori võllile redutseeritud takistusmomendi keskmist väärtust.

3°. Töömasinate mehaanilised karakteristikud on väga mitmesuguse kujuga, olenedes paljudest kinemaatilistest parameetritest.

Suurel osal töömasinatest sõltuvad rakendatud jõud mehhanismi lülide asenditest. Säärasteks masinateks on näiteks kolbkompressorid ja -pumbad, metallikäärid, kaevanduste tõstukid, kiikuvad konveierid (kiik-konveierid), ekskavaatorid, greiferkraanad, painutusmasinad, ekstsenterpressid, sepistamismasinad jt.

Sageli kasutatakse ka töömasinaid, kus esinevad masina kiirusest sõltuvad jõud. Kiirusest sõltuvad karakteristikud on ventilaatoritel, ekshausteritel, tsentrifugaalpumpadel, tsentrifuugidel, laevakruvidel, eelketrusmasinatel jt.

Küllalt sageli kohtab ka masinaid, mille mehaanilised karakteristikud sõltuvad töödeldavast materjalist. Sel puhul olenevad takistusjõud ajast ja sageli on see sõltuvus nii ebamäärane, et teda saab hinnata ainult väga ligikaudselt. Sääraste masinate hulka kuuluvad kivipurustajad, kuulveskid, toornahalt verinahka eemaldavad laustmasinad jt.

Eraldi tuleb mainida töömasinaid, millele mõjuvad järsud, lühikese kestusega koormused. Neid masinaid nimetatakse löökkoormusega töötavateks masinateks. Siia kuuluvad näiteks valtspingid, pressid, külmstantsimisautomaadid jt. Sageli oletatakse, et löökkoormusega töötavates masinates on mõjuvad jõud kogu lühikese töökäigu ulatuses konstantsed. Jõude loetakse püsivateks (kuid suuruselt tunduvalt väiksemateks) ka nimetatud masinate tühikäigul, s. o. ajavahemikus, mis lahutab kahte teineteisele järgnevat tööoperatsiooni. Masinate koormuse hüppelised muutused sõltuvad kas masina lülide asenditest või ajast.

Me ei käsitle siin masinaid, millede mehaanilised karakteristikud olenevad korraga mitmetest kinemaatilistest parameetritest, kuigi ka sääraseid masinaid praktikas esineb.

4°. Senistes hooratta inertsmomendi arvutustes eeldati, et üks redutseeritud momentidest on püsiv ja võrdub teise momendi keskväärtusega masina ühe tsükli ulatuses. Käesoleval juhul ei ole meil õigust samalaadse arvutuse juures nii toimida. Me peame seekord arvesse võtma nii mootori kui ka töömasina mehaanilisi omadusi. Seetõttu tuleb agregaadi käigu ebaühtluse teguri valikul silmas pidada mitte ainult töömasina poolt sooritatava tehnoloogilise protsessi nõudeid, vaid ka asjaolu, et elektrimootorid ei talu kiiruse suurt kõikumist. Viimast piirab teatavasti lubatav minimaalne pöörlemiskiirus, millest ülal juba räägiti. Seega, kui agregaadi käigu ebaühtluse tegur on töömasina tehnoloogilise protsessi alusel määratud, tuleb pärast agregaadile vajaliku elektrimootori valikut veel kontrollida, kas nimetatud tegur ka mootorile sobib. Mõnikord võib juhtuda, et käigu ebaühtluse teguri väärtust tuleb kontrolli tulemusel vähendada.

[2] Vt. näiteks V. K. Popov, Основы электропривода, Госэнергоиздат, 1945.

Peatume nüüd agregaadi hoomasside arvutusel. Oletame, et motoorse momendi kulgemine sõltuvalt pealüli kiirusest on teada. Samuti olgu antud ka takistusmomendi sõltuvus kas ajast või redutseerimislüli pöördenurgast. Mis puutub mehhanismi lülide redutseeritud inertsmomenti, siis eeldame lihtsuse mõttes, et see võrdub nulliga. Säärasele eeldusele vastab olukord, kus hooratta inertsmoment I_h on agregaadi ülejäänud lülide redutseeritud inertsmomendist I_r tunduvalt suurem. Lõpuks oletame veel, et agregaadi käigu ebaühtluse tegur ja redutseerimislüli nominaalkiirus on antud.

5°. Olukorras, kus mootori mehaaniline karakteristik on antud redutseerimislüli nurkkiiruse funktsioonina $M_m = M_m(\omega)$, töömasina mehaaniline karakteristik aga sõltub ajast $M_t = M_t(t)$, ning agregaadi redutseeritud inertsmoment I_h on konstantne, võrdudes hooratta inertsmomendiga I_h, kehtib nimetatud suuruste vahel seos

$$M_m(\omega) - M_t(t) = I_h \frac{d\omega}{dt}, \tag{23.39}$$

kusjuures $\frac{d\omega}{dt}$ on redutseerimislüli nurkkiirendus.

Oletame, et motoorse momendi sõltuvus nurkkiirusest on lineaarne: $M_m = M_0 - c\omega$, kus M_0 ja c on konstandid. Liikumisvõrrandiks on sel puhul alljärgnev lineaarne diferentsiaalvõrrand:

$$M_0 - c\omega - M_t(t) = I_h \frac{d\omega}{dt} \tag{23.40}$$

ehk

$$\frac{d\omega}{dt} + \frac{c}{I_h}\omega = \frac{M_0 - M_t(t)}{I_h}. \tag{23.41}$$

Kasutades lihtsustavat tähistusviisi

$$\frac{c}{I_h} = p \text{ ja } \frac{M_0 - M_t(t)}{I_h} = q(t), \tag{23.42}$$

võime kirjutada:

$$\frac{d\omega}{dt} + p\omega = q(t). \tag{23.43}$$

Korrutades võrrandi (23.43) mõlemaid pooli integreerimisteguriga e^{pt}, saame:

$$e^{pt}\frac{d\omega}{dt} + pe^{pt}\omega = e^{pt}q(t),$$

millele järgneb

$$d(e^{pt}\omega) = e^{pt}q(t)\,dt. \tag{23.44}$$

Olgu agregaadi lähteasendis $t = t_0$ ja $\omega = \omega_0$. Võrrandi (23.44) integreerimise tulemuseks kujuneb sel puhul

$$e^{pt}\omega - e^{pt_0}\omega_0 = \int_{t_0}^{t} q(t)\, e^{pt}\, dt,$$

kus t ja ω on vastavalt aja ja redutseerimislüli nurkkiiruse jooksvad väärtused.

Jagades ülaltoodud võrrandi veel suurusega e^{pt}, saame lõplikult

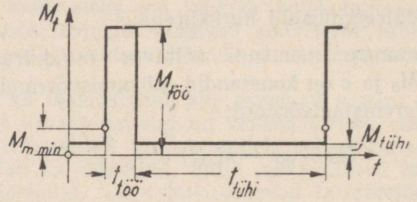
$$\omega = e^{p(t_0 - t)} \cdot \omega_0 + e^{-pt} \int_{t_0}^{t} q(t)\, e^{pt}\, dt. \tag{23.45}$$

Redutseerimislüli nurkkiiruse sõltuvus ajast on seega leitud. Üldjuhul võib võrrandi (23.45) lahendamiseks kasutada kas graafilisi meetodeid või numbrilise integreerimise võtteid. Kui aga $q = q(t)$ on ratsionaalne funktsioon, siis, nagu integraalarvutusest teada, saab võrrandis (23.45) esinevat integraali alati leida ja seega sõltuvust $\omega = \omega(t)$ täpselt määrata.

6°. Käsitleme nüüd mõningaid praktilisi ülesandeid, mida tuleb eelmises punktis fikseeritud tingimustes lahendada.

Töömasinad, mille mehaaniline karakteristik sõltub ajast, töötavad teatava kindla tsükli alusel. Tavaliselt jagatakse see tsükkel kahte ossa: esimest nimetatakse seejuures töökäiguks ja teist — tühikäiguks. Lühikese töökäigu juures koormatakse agregaati suurte välisjõududega; tunduvalt pikemal tühikäigul tuleb mootoril ületada aga suhteliselt väikest koormust, mida põhjustavad peamiselt hõõrdejõud.

Et tühikäigu koormus on suhteliselt väikene, loetakse takistusjõudude redutseeritud moment tsükli selles osas sageli ligikaudu konstantseks. Redutseeritud takistusmomendi diagramm kujuneb seetõttu sääraseks, nagu on näidatud joonisel 730.



Joon. 730.

Käsitletavat tüüpi agregaatide projekteerimisel tuleb lahendada hoomasside arvutamise ülesanne nii, et redutseerimislüli nurkkiirus kõiguks varem etteantud piirides. Hooratta inertsmomendi määramisel tuleb neil juhtudel lähtuda tingimusest, et redutseerimislüli nurkkiirus langeks töökäigu jooksul etteantud väärtuselt ω_{max} etteantud väärtuseni ω_{min}. Töökäigule järgneva tühikäigu lõpuks peab redutseerimislüli esialgne nurkkiirus olema täielikult taastatud.

7°. Enne kui siirduda hoomasside arvutuse juurde, näitame, kuidas valida mootorit töömasinale, mille mehaaniline karakteristik on toodud joonisel 730.

Pärast tsükli keskmise takistusmomendi $M_{t\,keskm.}$ määramist võib mootori nominaalse momendi M_{mn} arvutada seosest

$$M_{mn} = kM_{t\,keskm.},$$

kus koefitsient k kõikus teatavasti piirides 1,15 kuni 1,25. Mootori nominaalne moment valitakse tsükli keskmisest takistusmomendist seega 15—25% suurem.

Oletame nüüd, et antud juhul kasutatakse asünkroonmootorit, mida võib valida nii, nagu näidatud punktis 2°. Karakteristiku stabiilses osas saame kasutada meile juba tuntud võrrandit (23.36):

$$M_m = M_0 - c\omega,$$

kus kõik suurused tuleb lugeda teatavale lülile redutseerituiks.

Hooratta inertsmomendi I_h arvutamisel peab teadma redutseerimislüli nurkkiirusi ω_{max} ja ω_{min}. Kui töömasina tehnoloogiline protsess sääraseid piire ei

fikseeri, võib need ise kindlaks määrata järgmiselt. Redutseerimislüli minimaalne nurkkiirus ω_{min} määratakse mootori lubatava maksimaalse momendi $M_{m\,max}$ alusel. Viimane võetakse mootori kataloogist ja temale vastav nurkkiirus leitakse mehaanilisest karakteristikust. Maksimaalne nurkkiirus ω_{max} määratakse töömasina tühikäigumomendi $M_{tühi}$ alusel. Seejuures on soovitav võtta $M_{m\,min}$ 5—10% suurem kui $M_{tühi}$, sest olukorras, kus $M_{tühi}$ ja ω_{max} teineteisele täpselt vastavad, kuluks redutseerimislüli nurkkiiruse taastamiseks teoreetiliselt võttes lõputult pikk ajavahemik.

8°. Rakendame nüüd meie poolt esitatud hooratta inertsmomendi määramise meetodit järgmisel erijuhul. Joonis 730 kujutab töömasina mehaanilist karakteristikut, millel on astmeline iseloom. Oletame, et nimetatud diagrammis esinevad momendid on ümber arvutatud mootori võllile. Sel puhul on redutseerimislüliks otstarbekas valida mootori võll. Ülesande lahendamiseks võib kasutada võrrandit (23.45), kuid antud erijuhtu on lihtsam lahendada iseseisvalt.

Koostame antud tingimustele (joon. 730) vastava redutseerimislüli liikumise võrrandi:

$$(M_0 - c\omega)dt - M_{töö}\,dt = I_h d\omega. \tag{23.46}$$

Kasutades tähistust

$$M'_0 = M_0 - M_{töö}, \tag{23.47}$$

saame pärast muutujate eraldamist

$$dt = I_h \frac{d\omega}{M'_0 - c\omega}.$$

Fikseerides redutseerimislüli nurkkiiruse lubatavad piirväärtused ω_{max} ja ω_{min} ning tähistades tsükli töö- ja tühikäiku määravad ajavahemikud vastavalt $t_{töö}$ ning $t_{tühi}$, võime kirjutada

$$t_{töö} = I_h \int_{\omega_{max}}^{\omega_{min}} \frac{d\omega}{M'_0 - c\omega}.$$

Integreerinud selle võrrandi, võime arvutada hooratta inertsmomendi:

$$I_h = \frac{ct_{töö}}{\ln \dfrac{M'_0 - c\omega_{max}}{M'_0 - c\omega_{min}}}. \tag{23.48}$$

Tühikäigu parameetritest lähtudes saaksime analoogiliselt

$$I'_h = \frac{ct_{tühi}}{\ln \dfrac{M''_0 - c\omega_{min}}{M''_0 - c\omega_{max}}}, \tag{23.49}$$

kus

$$M''_0 = M_0 - M_{tühi}. \tag{23.50}$$

Kui arvutustulemuste võrdlemisel selgub, et $I_h < I'_h$, tuleb hooratta lõplikuks inertsmomendiks valida I_h. Kui aga $I_h > I'_h$, ei suuda mootor tühikäigu jooksul redutseerimislüli nurkkiirust taastada. Sel juhul tuleb agregaadile valida võimsam mootor, kogu eelnevat arvutust korrata ning lõpuks uuesti võrrelda tulemusi I_h ja I'_h.

Võib toimida ka teisiti: jätta esialgselt valitud mootor, kuid vähendada kiiruse maksimaalväärtust nii, et see tühikäigu lõpuks oleks agregaadi poolt saavutatav.

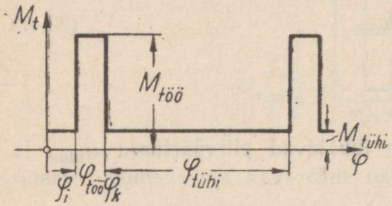
Üldisemate lähteandmete puhul, mida kasutati võrrandi (23.40) koostamisel, on hooratta inertsmomendi määramise ülesanne samuti lahendatav. Seejuures aga tekivad võrrandid, mida õnnestub lahendada ainult järkjärgulise lähendamise meetodil.

9°. Siirdume nüüd analoogilise ülesande lahendamisele olukorras, kus motoorne moment vastab endiselt võrrandile $M_m = M_0 - c\omega$, takistusmoment M_t aga sõltub redutseerimislüli pöördenurgast φ, s. o. $M_t = M_t(\varphi)$. Redutseeritud inertsmomendi loeme antud juhul konstantseks.

Redutseerimislüli nurkkiiruse ω leidmiseks tuleb seekord lahendada diferentsiaalvõrrand

$$(M_0 - c\omega)\,d\varphi - M_t(\varphi)\,d\varphi = d\left(I_h \frac{\omega^2}{2}\right). \tag{23.51}$$

Viimane ei ole täpsete meetoditega integreeritav, lahendamiseks sobivaid lähendusmeetodeid aga käsitleti juba XXII peatükis. Seetõttu ei peatu me siin selle küsimuse juures pikemalt.



Joon. 731.

Juhul kui takistusmoment kulgeb joonisel 731 toodud diagrammi kohaselt, saab redutseerimislüli nurkkiiruse ja agregaadile vajaliku hooratta inertsmomenti arvutada täpsete meetoditega. Lahenduse käik on eelmises punktis toodud arvutustega analoogiline, mistõttu alljärgnevas kõikide üksikasjade juures ei peatuta.

Kuna takistusmoment on redutseerimislüli pöördenurga intervallis $\varphi_i\varphi_k$ konstantne (joon. 731), saab võrrandit (23.51) φ_i ja φ_k vahel integreerida. Tulemuseks kujuneb

$$\varphi_{töö} = \varphi_k - \varphi_i = I_h \int_{\omega_{max}}^{\omega_{min}} \frac{\omega\,d\omega}{M'_0 - c\omega}, \tag{23.52}$$

kus

$$M'_0 = M_0 - M_{töö}. \tag{23.53}$$

Arvutanud võrrandis (23.52) esineva integraali, võime kirjutada

$$I_h = \frac{c^2\varphi_{töö}}{c(\omega_{max} - \omega_{min}) + M'_0 \ln \dfrac{M'_0 - c\omega_{max}}{M'_0 - c\omega_{min}}}. \tag{23.54}$$

Tühikäigule vastavate parameetritega arvutades saaksime analoogiliselt:

$$I'_h = \frac{c^2\varphi_{tühi}}{c(\omega_{min} - \omega_{max}) + M''_0 \ln \dfrac{M''_0 - c\omega_{min}}{M''_0 - c\omega_{max}}}, \tag{23.55}$$

kus

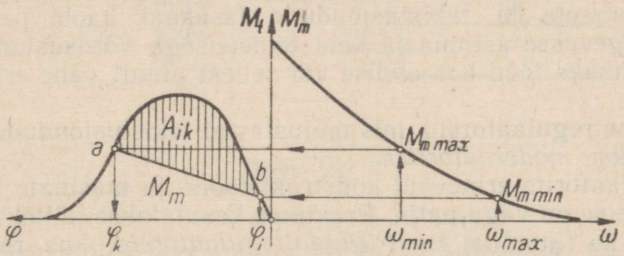
$$M''_0 = M_0 - M_{tühi}$$

ja $\varphi_{tühi}$ tähistab tühikäigule vastavat redutseerimislüli pöördenurka.

Hooratta inertsmomendi lõplik valik toimub eelmises punktis toodud kaalutluste alusel, mistõttu piirdume ülaltooduga.

10°. Käsitleme nüüd veel viimast küsimust — hoomasside ligikaudset arvutamist üldisemate lähteandmete alusel. Mootori mehaanilist karakteristikut kujutagu seekord joonisel 732 toodud diagramm. Samal joonisel on antud ka töömasina karakteristik. Agregaadi kõikide lülide redutseeritud inertsmomendi loeme hooratta inertsmomendiga I_h võrreldes tühiseks. Ülesandeks on leida redutseerimislüli etteantud kiiruste ekstreemväärtustele ω_{max} ja ω_{min} vastav hooratta inertsmoment I_h.

Meie käsutuses olevate andmete põhjal saab määrata agregaadi töötamisel mootori poolt arendatava maksimaalse ja minimaalse pöördemomendi. Tähistame need momendid vastavalt $M_{m\,max}$ ja $M_{m\,min}$. Nimetatud momentide leidmiseks kasutame ära asjaolu, et redutseerimislüli nurkkiiruste ekstreemväärtustele vastavates asendites peavad motoorne ja takistusmoment olema omavahel võrdsed, sest redutseerimislüli nurkkiirendus on nendes asendites null. Ülalkäsitletud asjaolu võimaldab meil hõlpsasti määrata nurkkiiruse ekstreemväärtustele vastavaid redutseerimislüli asendeid φ_i ja φ_k. See ülesanne lahendatakse graafiliselt, nagu on näidatud joonisel 732.



Joon. 732.

Lahenduskäigu jätkamiseks teeme lihtsustava oletuse, mille kohaselt motoorse momendi sõltuvus redutseerimislüli nurkkiirusest on piirkonnas $\varphi_i\ \varphi_k$ lineaarne (joon. 732).

Hooratta inertsmomendi I_h leidmiseks võib nüüd kasutada valemit

$$I_h = \frac{2A_{ik}}{\omega^2_{max} - \omega^2_{min}} = \frac{A_{ik}}{\omega^2_{keskm}\,\delta}, \qquad (23.57)$$

kus A_{ik} tähistab jääktööd intervallis $\varphi_i\varphi_k$. Jääktöö väärtus leitakse joonisel 732 viirutatud pindala kaudu.

Saadud tulemus osutub seda täpsemaks, mida kitsam on intervall $\varphi_i\varphi_k$ ja mida väiksem on nurkkiiruse etteantud kõikumine. Toodud arvutusmeetod annab alati täpsemaid tulemusi kui arvutus, mis on rajatud eeldusele, et motoorne moment on permanentses liikumisfaasis kogu tsükli ulatuses püsiv.

Juhul kui tahetakse saada veelgi täpsemaid tulemusi, tuleb XXII peatükis käsitletud meetoditega konstrueerida redutseerimislüli nurkkiiruse diagramm intervallis $\varphi_i\varphi_k$. Viimasest selgub, kas ω_{max} ja ω_{min} jäävad etteantud piiridesse. Kui ilmneb, et ω_{max} ja ω_{min} tegelikud väärtused etteantuist tunduvalt erinevad, tuleb hooratta inertsmomenti kas suurendada või vähendada. Seepeale kontrollitakse uuesti kiirusi jne. Kuna hooratta inertsmomendi määramisel ei nõuta erilist täpsust, osutub säärane kontroll tavaliselt liigseks.

XXIV peatükk

LÜHITEATMEID REGULAATORITE TEOORIAST

§ 123. Ülesande üldine asetus

1°. Nagu § 116, 2° näidati, tuleb nii permanentse liikumise faasis kui ka üleminekurežiimidel esinevate kiiruse aperioodiliste kõikumiste leevendamiseks masina vedav lüli ühendada erilise mehhanismiga, mida nimetatakse *kiiruse regulaatoriks*. Regulaatori ülesandeks on hoida masina vedava võlli kiiruse aperioodilised kõikumised teatavates kindlates piirides. See saavutatakse motoorsete ja takistusjõudude tasakaalustamise teel. Näiteks kui kasulik koormus mõnel põhjusel väheneb ja masina käik hakkab kiirenema, peab regulaator automaatselt vähendama motoorseid jõude. Vastupidi, kui takistusjõud kasvavad ja masina käik seetõttu aeglustub, peab regulaator motoorseid jõude suurendama. Seega, niipea kui motoorsete ja takistusjõudude tasakaal kaob, peab regulaator tegevusse astuma ja neid teineteisega võrdsustama nii, et masin jätkaks tööd kas endise või sellest ainult vähe erineva kiirusega.

Kiiruse regulaatoreid, mis mõjustavad takistusjõudude suurust, nimetatakse *moderaatoriteks*.

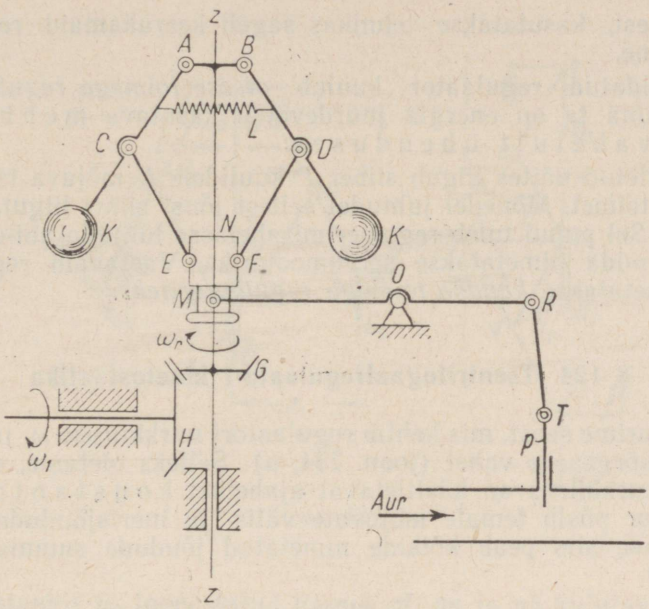
Regulaatorite erinevaid konstruktsioone ja masinate reguleerimise skeeme on väga palju. Praktikas kasutatakse näiteks tasapinnalisi ja ka ruumilisi *tsentrifugaalregulaatoreid*, kus reguleeriva jõuna toimib tsentrifugaalne inertsjõud. Kasutatakse ka nn. *inertsregulaatoreid*, mis rakendavad tangentsiaalset inertsjõudu jne.

2°. Käsitleme reguleerimisprotsessi tsentrifugaalregulaatori mehhanismi näitel. Regulaatori skeem on toodud joonisel 733. Regulaator koosneb kahest raskest kuulist K, mis on kinnitatud lülide AC ja BD külge. Viimased on šarniirselt ühendatud lülidega CE ja DF, mis omakorda on šarniiride abil seotud muhviga N. Muhv N liigub translatoorselt piki juhtsirget zz. Lülisid AC ja BD seob omavahel vedru L, mis püüab kuule K koomale tõmmata. Regulaator saab pöörleva liikumise masina vedavalt võllilt koonushammasrataste paari H ja G kaudu. Kui masina vedava võlli nurkkiirus on ω_1, siis regulaatori nurkkiiruseks kujuneb

$$\omega_r = \omega_1 \frac{1}{i_{1r}},$$

kus i_{1r} tähistab ülekandesuhet vedava võlli ja regulaatori vahel.

Vedava lüli nurkkiiruse ω_1 erinevate väärtuste puhul asub muhv N eri asendites. Muhviga on ühendatud mehhanism, mis suurendab või vähendab energia juurdevoolu masinasse. See mehhanism



Joon. 733.

koosneb meie näites hoobadest *OR*, *RT* ja siibrist *P*. Hoova *OR* sõrm *M* asub muhvi *N* juhtsoones. Oletame, et kasuliku koormuse vähenemise tõttu regulaatori nurkkiirus ω_r suurenes. Kasvanud tsentrifugaaljõu toimel püüavad kuulid *K* regulaatori pöörlemisteljest *zz* eemalduda ja muhv *N* tõstetakse kõrgemale. Hoob *RT* surub seejuures siibrile *P*. Viimane hakkab laskuma ja vähendab seega kanali ristlõiget, millekaudu masinasse pääseb töötav vedelik või gaas. Selle tagajärjel motoorsed jõud vähenevad, nurkkiirus ω_r langeb ja muhv *N* hakkab laskuma. Muhvi laskumisele aga kaasub siibri *P* avanemine, mistõttu masinasse suubuva energia juurdevool suureneb ja kogu reguleerimisprotsess kordub algusest peale uuesti. Regulaatori töötamine kujutab endast seega teatavat võnkumisnähet.

Regulaator reageerib masina vedava võlli nurkkiiruse muutumistele automaatselt ja annab ühtlasi ka reguleeriva organi nihutamiseks vajalikku energiat. Tuleb märkida, et kirjeldatud reguleerimisviisi puuduseks on asjaolu, et koormuse vähenemise järel kujuneb masina nurkkiirus suuremaks kui see, mis valitses enne koormuse langust: masin liigub küll permanentses faasis, kuid tema kiirus on erinev, ja nimelt suurem kui reguleerimisprotsessi alguses. Et vältida stabiliseeritud kiiruse sõltumist masina

koormusest, kasutatakse tehnikas sageli keerukamaid reguleerimisskeeme.

Kirjeldatud regulaator kuulub *otsese toimega regulaatorite* tüüpi, kuna ta on energia juurdevoolu käsutava mehhanismiga vahetult ühenduses.

Käsitletud näites liigub siiber P kuulidele K mõjuva tsentrifugaaljõu toimel. Mõnedel juhtudel sellest jõust siibri liigutamiseks ei piisa. Sel puhul tuleb reguleerimisahelasse lülitada abi-energiaallikas, mida nimetatakse servomootoriks. Vastavaid regulaatoreid nimetatakse *kaudse toimega regulaatoriteks.*

§ 124. Tsentrifugaalregulaatori kinetostaatika

1°. Uurime seost, mis kehtib regulaatori nurkkiiruse ω_r ja muhvi N tõusukõrguse z vahel (joon. 734, *a*). Selleks oletame, et regulaatori nurkkiirus on käsitletaval ajahetkel konstantne. Kui regulaator püsib temale mõjuvate välis- ja inertsjõudude toimel tasakaalus, siis peab kõikide nimetatud jõudude summa olema null, s. t.

$$\sum_1^n \boldsymbol{P} = 0.$$

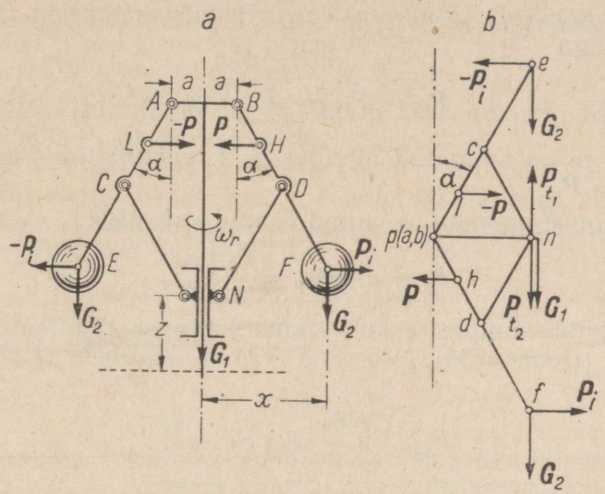
Tähistame kuulide E ja F inertsjõud vastavalt $\boldsymbol{P}_i$ ja $-\boldsymbol{P}_i$. Regulaatori lülide inertsjõud, mis on tühised võrreldes kuulide inertsjõududega, jätame kõrvale. Arvestamata jäävad esialgu ka kinemaatilistes paarides tekkivad hõõrdejõud. Püsiva nurkkiiruse ω_r puhul tasakaalustuvad omavahel ka muhvile N mõjuvad inertsjõud. Peale inertsjõudude mõjuvad regulaatorile veel kuulide raskused $\boldsymbol{G}_2$, muhvi raskus $\boldsymbol{G}_1$ ja vedru tõmbejõud $\boldsymbol{P}$ ning $-\boldsymbol{P}$.

Määrame raskusjõududest ja vedru tõmbest põhjustatud muhvile mõjuva redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}_{r1}$. Selleks konstrueerime regulaatori mehhanismi pööratud kiirusplaani (joon. 734, *b*), rakendame selle vastavatesse punktidesse jõud $\boldsymbol{P}$, $-\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{G}_1$, $\boldsymbol{G}_2$ ja $\boldsymbol{P}_{t1}$ ning koostame kõikide jõudude poolt tekitatud momentide tasakaaluvõrrandi kiirusplaani pooluse p suhtes. Saame:

$$-G_1(pn) - G_2(pf)\sin\alpha - G_2(pe)\sin\alpha - P(pl)\cos\alpha - P(ph)\cos\alpha + P_{t1}(pn) = 0, \qquad (24.1)$$

kus P_{t1} tähistab tasakaalustavat jõudu. Kuna $pf = pe$ ja $pl = ph$, siis võrrand (24.1) lihtsustub. Ilmutades tasakaalustava jõu P_{t1}, leiame, et

$$P_{t1} = G_1 + 2G_2\left(\frac{pf}{pn}\right)\sin\alpha + 2P\left(\frac{ph}{pn}\right)\cos\alpha. \qquad (24.2)$$



Joon. 734.

Mastaabis μ_v joonestatud lõigud pf, pn ja ph kujutavad punktide F, N ja H kiirusi $\boldsymbol{v}_F$, $\boldsymbol{v}_N$ ja $\boldsymbol{v}_H$:

$$v_F = \mu_v(pf), \quad v_N = \mu_v(pn), \quad v_H = \mu_v(ph).$$

Võrrandi (24.2) saab seetõttu kirjutada veel järgmiselt:

$$P_{t1} = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin\alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos\alpha.$$

Redutseeritud jõud $\boldsymbol{P}_{r1}$ on moodulilt võrdne tasakaalustava jõuga $\boldsymbol{P}_{t1}$, s. t.

$$P_{r1} = P_{t1} = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin\alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos\alpha, \qquad (24.3)$$

kuid märgilt on ta viimasega vastupidine, olles suunatud vertikaalselt alla.

Inertsjõududest $\boldsymbol{P}_i$ ja $-\boldsymbol{P}_i$ põhjustatud redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}_{r2}$ moodul ja suund määratakse analoogiliselt. Tasakaalutingimus annab

$$\boldsymbol{P}_i(pf)\cos\alpha + P_i(pe)\cos\alpha - P_{t2}(pn) = 0, \qquad (24.4)$$

kus $\boldsymbol{P}_{t2}$ on tasakaalustav jõud.

Võrrandist (24.4) saame:

$$P_{t2} = 2P_i\left(\frac{pf}{pn}\right)\cos\alpha \text{ ehk } P_{t2} = 2P_i \frac{v_F}{v_N}\cos\alpha,$$

sest et $v_F = \mu_v(pf)$ ja $v_N = \mu_v(pn)$. Redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}_{r2}$ mooduliks on seega

$$P_{r2} = P_{t2} = 2P_i \frac{v_F}{v_N} \cos \alpha, \tag{24.5}$$

kusjuures ta on suunatud alt üles, s. t. vastupidiselt tasakaalustava jõuga $\boldsymbol{P}_{t2}$.

Inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$ moodul on antud tuntud valemiga

$$P_i = m_2 \omega^2_r x = \frac{G_2}{g} \omega^2_r x,$$

kus x tähistab kuulide raskuskeskme kaugust regulaatori pöörlemisteljest (joon. 734). Võrrand (24.5) kujuneb nüüd järgmiseks:

$$P_{r2} = 2 \frac{G_2}{g} \omega^2_r x \cos \alpha \frac{v_F}{v_N}. \tag{24.6}$$

Regulaatori tasakaalu puhul peab muhvile redutseeritud jõudude summa olema null, s. t.

$$\boldsymbol{P}_{r1} + \boldsymbol{P}_{r2} = 0. \tag{24.7}$$

Võrrandis (24.7) esinevat redutseeritud jõudu $\boldsymbol{P}_{r1}$ nimetatakse *regulaatori toetusjõuks*. Seda nimetust selgitab asjaolu, et mittepöörleva regulaatori muhvi tõstmiseks tuleb viimasele rakendada toetusjõuga $\boldsymbol{P}_{r1}$ suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine tõstejõud. Võrranditest (24.3) ja (24.7) on näha, et regulaatori toetusjõud sõltub muhvi N koordinaadist z ja on muhvi igas asendis tasakaalustatud kuulide redutseeritud inertsjõuga $\boldsymbol{P}_{r2}$. Viimase suurus aga sõltub samuti muhvi N koordinaadist z. Seega

$$P_{r1} = P_{r1}(z) \quad \text{ja} \quad P_{r2} = P_{r2}(z).$$

Jõudu $\boldsymbol{P}_{r2}$ nimetatakse *regulaatori muhvile redutseeritud inertsjõuks*.

Asetades võrrandisse (24.7) $\boldsymbol{P}_{r1}$ ja $\boldsymbol{P}_{r2}$ väärtused võrranditest (24.3) ja (24.6), saame:

$$G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos \alpha - 2 \frac{G_2}{g} \omega^2_r x \cos \alpha \frac{v_F}{v_N} = 0. \tag{24.8}$$

Kasutame nüüd järgmisi, kirjutusviisi lihtsustavaid tähiseid:

$$A = 2 \frac{G_2}{g} x \cos \alpha \frac{v_F}{v_N} \tag{24.9}$$

ja

$$B = G_1 + 2G_2 \frac{v_F}{v_N} \sin \alpha + 2P \frac{v_H}{v_N} \cos \alpha. \tag{24.10}$$

Võrrand (24.8) kujuneb nende tähistega järgmiseks:

$$A\omega^2_r - B = 0. \tag{24.11}$$

Seos (24.11) kujutab regulaatori tasakaaluvõrrandit olukorras, kus hõõrdejõud võib kõrvale jätta.

Seosed (24.9) ja (24.10) näitavad, et suurused A ja B sõltuvad regulaatori mehhanismi lülide asendist. Käsitledes neid näiteks kui regulaatori muhvi asendi z funktsioone, võime võrrandi (24.11) kirjutada järgmisel kujul:

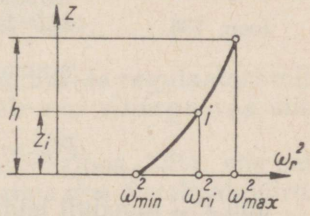
$$A(z)\omega^2_r - B(z) = 0. \tag{24.12}$$

Viimasest järgneb, et

$$\omega^2_r = \frac{B(z)}{A(z)}. \tag{24.13}$$

Muhvi igale tasakaaluasendile z vastab seega täielikult määratud nurkkiirus ω_r. Viimast nimetatakse regulaatori *tasakaalunurkkiiruseks*.

2°. Kasutades võrrandeid (24.9), (24.10) ja (24.13) ning kiirusplaani, võib konstrueerida muhvi paigutuste sõltuvust tasakaalunurkkiiruse ruudust iseloomustava kõvera, s. t. kõvera $z = z(\omega^2_r)$ (joon. 735). Seda kõverat nimetatakse regulaatori tasakaalukõveraks ja ta kulgeb tavaliselt joonisel 735 näidatud kujul. Tasakaalukõvera abil saab alati leida etteantud nurkkiirusele ω_r vastava muhvi asendi z. Näiteks nurkkiiruse väärtusele ω_{ri} vastab kõvera $z = z(\omega^2_r)$ punkt i ja järelikult — muhvi asend z_i.



Joon. 735.

Kui tasakaalukõver on konstrueeritud regulaatori muhvi kogu käigu h ulatuses, siis ei tee regulaatori tasakaalukiiruse minimaalse väärtuse ω_{min} ja maksimaalse väärtuse ω_{max} leidmine raskusi, kuna need vastavad muhvi piirasendeile.

Suurust

$$\varepsilon = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_{keskm.}}, \tag{24.14}$$

kus

$$\omega_{keskm.} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2} \tag{24.15}$$

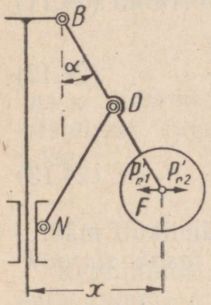
nimetatakse *regulaatori ebaühtluse teguriks*.

Seostest (24.14) ja (24.15) on näha, et regulaatori ebaühtluse teguri saab avaldada ka järgmiselt:

$$\varepsilon = \frac{\omega^2_{max} - \omega^2_{min}}{2\omega^2_{keskm.}}. \qquad (24.16)$$

3°. Mõnede arvutuste juures on otstarbekam regulaatorile mõjuvad jõud redutseerida mitte muhvile, vaid kuuli F tsentrisse (joon. 736), andes neile tsentrifugaaljõu $\boldsymbol{P}_i$ sihi.

Olgu redutseerimise tulemusel punktis F mõjuvad jõud seekord $\boldsymbol{P}'_{r1}$ ja $\boldsymbol{P}'_{r2}$. Tasakaalutingimuseks kujuneb sel juhul



Joon. 736.

$$\boldsymbol{P}'_{r1} + \boldsymbol{P}'_{r2} = 0. \qquad (24.17)$$

Analoogiliselt eeltooduga tähistab $\boldsymbol{P}'_{r1}$ ka siin muhvi ja kuulide raskuste $\boldsymbol{G}_1$ ja $\boldsymbol{G}_2$ ning vedrude tõmmete $\boldsymbol{P}$ ja $-\boldsymbol{P}$ redutseerimisel tekkivat jõudu. Inertsjõudude $\boldsymbol{P}_i$ ja $-\boldsymbol{P}_i$ redutseerimise tulemust tähistab $\boldsymbol{P}'_{r2}$.

Redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}'_{r1}$ väärtuse leidmiseks piisab võrrandi (24.3) kõikide liikmete korrutamisest muhvi N kiiruse v_N ja punkti F kiiruse v_F horisontaalprojektsioonide suhtega, s. t. suurusega $\frac{v_N}{v_F \cos\alpha}$. Saame:

$$P'_{r1} = \frac{G_1 v_N}{v_F \cos\alpha} + 2G_2 \operatorname{tg}\alpha + 2P\frac{v_H}{v_F}. \qquad (24.18)$$

Jõu $\boldsymbol{P}'_{r2}$ mooduli leidmiseks korrutame võrrandi (24.6) paremat poolt sama suhtega. Tulemuseks kujuneb:

$$P'_{r2} = 2\frac{G_2}{g}\omega_r^2 x. \qquad (24.19)$$

Jõud $\boldsymbol{P}'_{r1}$ ja $\boldsymbol{P}'_{r2}$ on vastassuunalised.

Asendades võrrandis (24.17) esinevad jõud $\boldsymbol{P}'_{r1}$ ja $\boldsymbol{P}'_{r2}$ võrranditest (24.18) ja (24.19) võetud väärtustega, saame *regulaatori tasakaaluvõrrandi* alljärgneval kujul:

$$\frac{G_1 v_N}{v_F \cos\alpha} + 2G_2 \operatorname{tg}\alpha + 2P\frac{v_H}{v_F} - 2\frac{G_2}{g}\omega_r^2 x = 0. \qquad (24.20)$$

Kasutades lihtsustavaid tähiseid

$$D = 2\frac{G_2}{g}x \qquad (24.21)$$

ja

$$C = \frac{G_1 v_N}{v_F \cos\alpha} + 2G_2 \operatorname{tg}\alpha + 2P\frac{v_H}{v_F} = P'_{r1}, \qquad (24.22)$$

kirjutame võrrandi (24.20) järgmisel kujul:

$$D\omega_r^2 - C = 0. \qquad (24.23)$$

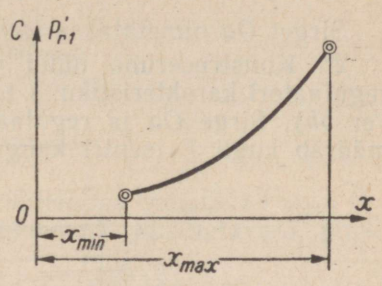
Saadud tulemus on samuti regulaatori tasakaaluvõrrand olukorras, kus hõõrdejõud võib kõrvale jätta.

Suurused D ja C on kuulide raskuskeskmete ja regulaatori pöörlemistelje vahelise kauguse x funktsioonid:

$$D = D(x) \quad \text{ja} \quad C = C(x).$$

Võrrandist (24.23) järgneb, et

$$\omega_r^2 = \frac{C(x)}{D(x)}. \qquad (24.24)$$



Joon. 737.

Sõltuvust $C = C(x)$ ehk $P'_{r1} = P'_{r1}(x)$ iseloomustavat diagrammi nimetatakse *regulaatori karakteristikuks*. Joonisel 737 on näidatud nimetatud kõvera üks võimalikke kujusid.

§ 125. Regulaatori stabiilsus

1°. Regulaatori karakteristiku abil saab uurida regulaatori mitmeid tähtsaid omadusi, mille käsitlemisele me alljärgnevas siirdumegi.

Kui vaadata regulaatori tasakaalukõverat (joon. 735), siis selgub, et muhvi asendile $z = 0$ vastab minimaalne tasakaalukiirus ω_{min}. Muhvi ülemisele piirasendile ($z = h$, kus h tähistab muhvi käiku) aga vastab tasakaalukiiruse maksimaalne väärtus ω_{max}. Regulaatori ebaühtluse tegur, mis valemi (24.16) põhjal avaldub järgmiselt

$$\varepsilon = \frac{\omega^2_{max} - \omega^2_{min}}{2\omega^2_{keskm.}}, \qquad (24.25)$$

sõltub järelikult kiiruse piiridest, mille juures regulaator võib töötada.

Võrrandist (24.19) on näha, et redutseeritud jõu $\boldsymbol{P}'_{r2}$ moodul võrdub kuulide inertsjõudude moodulite summaga:

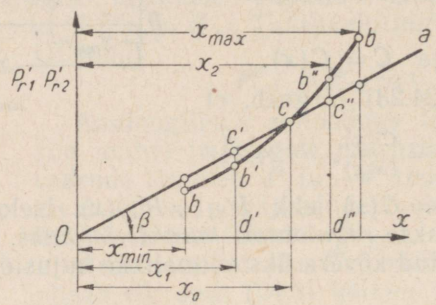
$$P'_{r2} = 2\frac{G_2}{g}\omega_r^2 x.$$

Püsiva kiiruse ω_r juures on jõud $\boldsymbol{P}'_{r2}$ võrdeline kaugusega x ja sõltuvust $P'_{r2} = P'_{r2}(x)$ iseloomustab sirgjoon Oa (joon. 738). Viimane läbib koordinaatide alguse ja tema kaldenurga tangens saadakse seosest

$$\operatorname{tg}\beta = 2\frac{G_2}{g}\omega_r^2.$$

Sirget *Oa* nimetatakse *tsentrifugaaljõu sirgeks.*

2°. Konstrueerime nüüd veel samas mastaabis joonestatud regulaatori karakteristiku, s. t. seose $P'_{r1} = P'_{r1}(x)$ (joon. 738, kõver *bb*). Sirge *Oa* ja regulaatori karakteristiku *bb* lõikepunkt *c* määrab kuuli *F* tsentri kauguse pöörlemisteljest x_0, mis vastab



Joon. 738.

regulaatori tasakaaluasendile k o n s t a n t s e nurkkiiruse ω_r juures. Tõepoolest, nimetatud asendis on jõud $\boldsymbol{P}'_{r1}$ ja $\boldsymbol{P}'_{r2}$ omavahel võrdsed. Viime nüüd regulaatori tasakaaluasendist välja, vajutades näiteks tema muhvile. Selle tõttu lähenevad kuulide tsentrid teineteisele ning nende kauguseks regulaatori pöörlemisteljest kujuneb $x_1 < x_0$. Kui jätta regulaator nüüd omapead töötama, siis mõjub temale tsentrifugaaljõud $\boldsymbol{P}'_{r2}$, mille suurus on määratud ordinaadiga $d'c'$. Viimane on jõule $\boldsymbol{P}'_{r1}$ vastavast ordinaadist $d'b'$ suurem. Tsentrifugaaljõu ülekaalu tõttu surutakse kuulid uuesti laiali ja nad liiguvad endisesse, punktile *c* vastavasse tasakaaluasendisse.

Vastupidi, kui muhvi tõsta, eemalduvad kuulid teineteisest ja liiguvad näiteks asendisse, mida iseloomustab kaugus pöörlemisteljest $x_2 > x_0$. Omapead jäetud regulaatorile mõjub seekord jõud $\boldsymbol{P}'_{r1}$ (ordinaat $d''b''$), mis on vastavast tsentrifugaaljõust $\boldsymbol{P}'_{r2}$ (ordinaat $d''c''$) suurem. Kuulid tõmbuvad järelikult koomale, kuni saavutavad uuesti punktile *c* vastava tasakaaluasendi.

Regulaatori tasakaal on s t a b i i l n e seega juhul, kui tema karakteristik kulgeb k u n i punktini *c* a l l p o o l tsentrifugaaljõu sirget ja p ä r a s t punkti *c* — p e a l p o o l nimetatud sirget. Kuna regulaator töötab teatavas kiiruste intervallis, mida iseloomustab ebaühtlustegur ε, siis ülalformuleeritud stabiilsuse kriteerium peab olema täidetud kõikide tsentrifugaaljõu sirgete juures, mis paiknevad valemitega

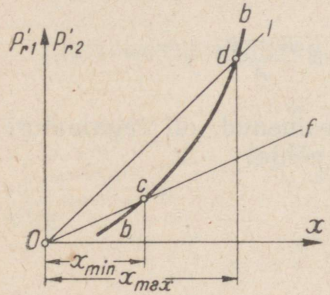
$$P'_{r2(max)} = 2\frac{G_2}{g}\omega^2_{max}x$$

ja

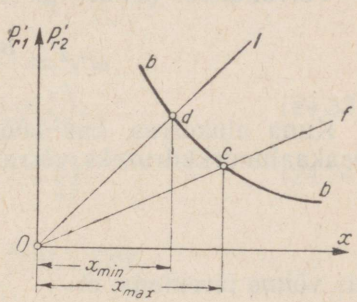
$$P'_{r2(min)} = 2\frac{G_2}{g}\omega^2_{min}x$$

määratud piirasendite vahel. Toodud valemites tähistavad ω_{max} ja ω_{min} regulaatori nurkkiiruse konstantsetena käsitletavaid piirväärtusi.

Joonisele 739 on kantud regulaatori karakteristik *bb* ja tsentrifugaaljõudude $P'_{r2(max)}$ ning $P'_{r2(min)}$ sirged *Ol* ja *Of*. On ilmne, et säärase karakteristikuga regulaator on s t a b i i l n e kõikide tsentrifugaaljõudude sirgete puhul, mis kulgevad piirasendite *Ol* ja *Of* vahel. Tema tasakaaluasendid paiknevad sel juhul intervallis x_{min} kuni x_{max}. Regulaatoreid, mis vastavad ülaltoodud tingimustele, nimetatakse *stabiilseteks* ehk *staatilisteks* regulaatoriteks.



Joon. 739.



Joon. 740.

Joonisel 740 on kujutatud karakteristik *bb*, mille juures stabiilsuse tingimused e i o l e k o g u i n t e r v a l l i s x_{min} kuni x_{max} t ä i d e t u d. Sääraseid regulaatoreid nimetatakse *ebastabiilseteks* regulaatoriteks.

Juhul kui kauguse x mis tahes väärtusele vastab alati üks ja sama tasakaalunurkkiirus, s. t. kui regulaatori tasakaalukõveraks on ordinaatteljega paralleelne sirge, siis $\omega_{max} = \omega_{min}$ ja $\varepsilon = 0$. Säärasel piirjuhul langeb regulaatori karakteristik ühte tsentrifugaaljõu sirgega ja regulaator on igas asendis dünaamiliselt tasakaalus. Säärast regulaatorit nimetatakse *astaatiliseks*. Teoreetiliselt säilitab astaatiline regulaator konstantse nurkkiiruse muhvi kõikides asendites. Praktiliseks kasutamiseks on astaatilised regulaatorid aga vähekõlblikud, sest nad ei ole dünaamiliselt stabiilsed. Juhul kui neid aga kasutatakse, peab reguleerimisskeem olema täiendatud vastavate lisaseadmetega.

§ 126. Regulaatori tundetus

1°. Uurides regulaatorite tasakaaluseisu, ei võetud eelmistes paragrahvides arvesse hõõrdejõudude mõju. Muhvile redutseeritud täishõõrdejõud $\boldsymbol{F}$ on alati suunatud vastu muhvi liikumise kiirust. Muhvi tõusmisel on jõud $\boldsymbol{F}$ seega suunatud allapoole, muhvi laskumisel aga ülespoole. Hetkel, mil muhv alustab tõusmist, kehtib seega tingimus

$$A\omega''_r{}^2 - B - F = 0, \tag{24.26}$$

kus ω_r'' tähistab tasakaalunurkkiiruse piirväärtust tõusul.

Hetkel, mil algab muhvi laskumine, kehtib analoogiline seos

$$A\omega'_r{}^2 - B + F = 0, \tag{24.27}$$

kusjuures ω_r' on regulaatori tasakaalunurkkiiruse piirväärtus laskumisel.

Võrranditest (24.26) ja (24.27) selgub, et

$$\omega''_r{}^2 = \frac{B+F}{A} \text{ ja } \omega'_r{}^2 = \frac{B-F}{A}.$$

Kuna olukorras, kus hõõrdumist ei esinenud, oli regulaatori tasakaalunurkkiiruseks võrrandi (24.13) põhjal

$$\omega_r{}^2 = \frac{B}{A},$$

siis võime järeldada, et

$$\omega_r' \leqslant \omega_r \leqslant \omega_r''.$$

Tähendab, et nurkkiiruse ω_r iga väärtuse juures, ehk teiste sõnadega, regulaatori muhvi igas asendis võib masina nurkkiirus teatavas intervallis kõikuda, ilma et regulaator sellele muhvi asendi muutmisega reageeriks.

2°. Regulaatori ülalkäsitletud omadust võib graafiliselt kujutada järgmisel viisil. Konstrueerime väärtustele ω_r, ω_r' ja ω_r'' vastavad tasakaalukõverad (joon. 741). Kõverate $\omega'_r{}^2(z)$ ja $\omega''_r{}^2(z)$ vahel asuvat piirkonda nimetatakse regulaatori *tundetuse piirkonnaks*. Regulaatori muhv jääb nimetatud piirkonnas toimuvate kiiruse kõikumiste puhul liikumatuks.

Regulaatori tundetuse hindamiseks kasutatakse nn. *tundetuse tegurit* η, mis on määratud järgmiselt:

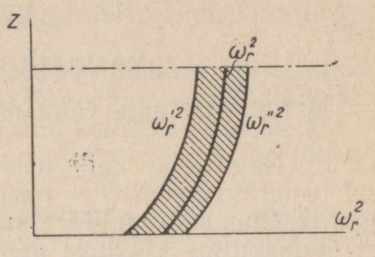
$$\eta = \frac{\omega''_r - \omega'_r}{\omega_r}. \tag{24.28}$$

Seejuures eeldatakse, et

$$\omega_r \approx \frac{\omega'_r + \omega''_r}{2}. \qquad (24.29)$$

Regulaatori tundetuse teguri võib seetõttu avaldada veel järgmiselt:

$$\eta = \frac{\omega''^2_r - \omega'^2_r}{2}. \qquad (24.30)$$



Joon. 741.

Võrrandite (24.28) ja (24.29) põhjal võib kirjutada, et

$$\omega_r'' = \omega_r\left(1+\frac{\eta}{2}\right) \qquad (24.31)$$

ja

$$\omega_r' = \omega_r\left(1-\frac{\eta}{2}\right). \qquad (24.32)$$

Ligikaudselt kehtivad veel seosed

$$\omega''_{max} = \omega_{max}\left(1+\frac{\eta}{2}\right), \qquad (24.33)$$

$$\omega'_{min} = \omega_{min}\left(1-\frac{\eta}{2}\right) \qquad (24.34)$$

ning

$$\omega_r = \frac{\omega''_{max} + \omega'_{min}}{2} = \frac{\omega_{max} + \omega_{min}}{2}.$$

Regulaatori tegeliku ebaühtlusteguri ε_t võib nüüd avaldada järgmiselt:

$$\varepsilon_t = \frac{\omega''_{max} - \omega'_{min}}{\omega_r}. \qquad (24.35)$$

Asendades selles definitsioonis ω''_{max} ja ω'_{min} nende väärtustega, mis on võetud valemitest (24.33) ja (24.34), saame

$$\varepsilon_t = \frac{\omega_{max}\left(1+\frac{\eta}{2}\right) - \omega_{min}\left(1-\frac{\eta}{2}\right)}{\omega_r} = \frac{\omega_{max} - \omega_{min}}{\omega_r} + \eta = \varepsilon + \eta. \qquad (24.36)$$

Regulaatori tegelik ebaühtlustegur ε_t võrdub seega hõõrdevaba regulaatori ebaühtlusteguri ε ja tema tundetusteguri η summaga.

XXV peatükk

MASINATE TASAKAALUSTAMINE

§ 127. Masinate vundamendil tasakaalustamise ülesanne

1°. Nagu juba teada, tekivad masina või mehhanismi liikumisel tema kinemaatilistes paarides dünaamilised koormused. Kuna igal mehhanismil on üks liikumatu lüli — kinnislüli, siis on ilmne, et dünaamiline koormus mõjub ka sellele. Kinnislüli kaudu aga kantakse dünaamiline koormus edasi masina või mehhanismi vundamendile. Mehhanismi liikumisel esinevad dünaamilised koormused on lisahõõrdejõudude tekitajaiks kinemaatilistes paarides, nad kutsuvad lülides ja vundamendis esile vibratsioone ning põhjustavad mehhanismi üksikutes lülides lisapingete tekkimist. Mehhanismide projekteerimisel tuleb seetõttu lülide massid nii valida, et dünaamilised koormused kas täielikult või vähemalt osaliselt kaoksid. Käsitletavat küsimust nimetatakse mehhanismi *masside tasakaalustamise* probleemiks. Kuna dünaamiliste koormuste määramisel kasutatakse peamiselt kinetostaatika võtteid, siis nimetatakse seda küsimust mõnikord ka masina või mehhanismi *inertsjõudude tasakaalustamiseks.*

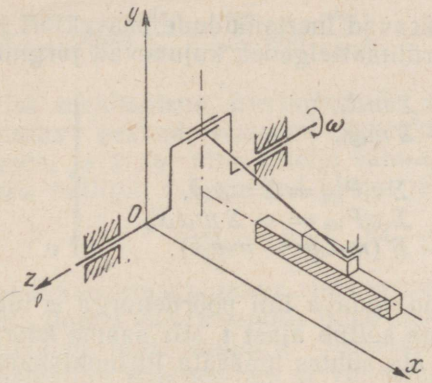
Masinates või mehhanismides tekkivate inertsjõudude tasakaalustamise probleemi võib jagada kaheks ülesandeks. Esimeseks neist on masina või mehhanismi poolt v u n d a m e n d i l e ülekantava koormuse tasakaalustamise küsimus. Teiseks ülesandeks on aga k i n e m a a t i l i s t e s p a a r i d e s tekkivate dünaamiliste koormuste kaotamise probleem.

2°. Käsitleme masina kinnislülile ja vundamendile mõjuvate dünaamiliste koormuste tasakaalustamise küsimust. On selge, et masinas esinevad dünaamilised jõud püüavad masina vundamenti mitmesugustes suundades nihutada. Need nihutused kantakse üle vundamenti ümbritsevale keskkonnale ja nad tekitavad selles mitmesuguseid vibratsioone. Vundamendi ja seda ümbritseva keskkonna võnkumised võivad mõnedes tingimustes põhjustada koguni vundamendi purunemist. Lisaks sellele kulub vibratsioonide tekitamiseks teatav osa mehhanismi energiast, mistõttu tema kasutegur väheneb.

Vundamendile mõjuvate dünaamiliste koormuste tasakaalustamise küsimus muutus tehnikas aktuaalseks seoses kiirekäiguliste mootorite kasutuselevõtmisega. Esimesed uurimistööd, mis seda küsimust käsitlesid, on pärit XIX sajandist. Seejuures uuriti peamiselt just mootori mehhanismide tasakaalustamise probleemi. Kaasaegse tehnika taseme juures kohtab kiirekäigulisi masinaid ja mehhanisme aga kõigis masinaehituse harudes, mistõttu inertsjõudude mõju vundamendile ja nende tasakaalustamise probleem

on tänapäeval masinate ja mehhanismide projekteerimisel kujunenud väga tähtsaks küsimuseks.

3°. Uurime nüüd, missuguseks lihtsamaks jõudude süsteemiks võib mehhanismi inertsjõude taandada. Elementaarsest staatikast on teada, et kõiki jäigale kehale rakendatud jõudude süsteeme võib redutseerida üheks, meelevaldselt valitud punkti rakendatud jõuks ja üheks jõupaariks. Seejuures võrdub selle jõu vektor antud jõududesüsteemi peavektoriga ja jõupaari moment — antud süsteemi peamomendiga valitud redutseerimistsentri suhtes. Rakendades jäigastamise printsiipi, võib ka kogu mehhanismile mõjuvad inerts-



Joon. 742.

jõud redutseerida jõuks ja jõupaariks. Valime taandamistsentriks mehhanismi mingi punkti O ja asetame sinna ühtlasi ka ristkoordinaadistiku xyz alguspunkti (joon. 742). Olgu märgitud, et punkt O on otstarbekas paigutada vedava lüli pöörlemisteljele. Inertsjõudude süsteemi peavektori $\boldsymbol{P}_j$ projektsioonid koordinaattelgedel väljenduvad järgmiselt:

$$P_{jx} = -\Sigma m_i \ddot{x}_i,$$

$$P_{jy} = -\Sigma m_i \ddot{y}_i,$$

$$P_{jz} = -\Sigma m_i \ddot{z}_i.$$

Toodud seostes tähistab m_i punkti i massi. Tähistega $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$ ja $\ddot{z}_i$ on tähistatud punkti i kiirenduse projektsioonid telgedel x, y ja z. Nimetatud projektsioonid võrduvad teatavasti vastavate koordinaatide teise tuletisega aja suhtes. Koordinaatide alguse suhtes arvutatud inertsjõudude peamomendi $\boldsymbol{M}_j$ projektsioonideks x-, y- ja z-teljel on vastavalt

$$M_{jx} = \Sigma(y_i P_{jiz} - z_i P_{jiy}) = -\Sigma m_i(y_i\ddot{z}_i - z_i\ddot{y}_i),$$
$$M_{jy} = \Sigma(z_i P_{jix} - x_i P_{jiz}) = -\Sigma m_i(z_i\ddot{x}_i - x_i\ddot{z}_i),$$
$$M_{jz} = \Sigma(x_i P_{jiy} - y_i P_{jix}) = -\Sigma m_i(x_i\ddot{y}_i - y_i\ddot{x}_i).$$

Juhul kui uuritav mehhanism on tasapinnaline, soovitatakse üks telgedest, näiteks z-telg orienteerida nii, et see ristuks mehhanismi liikumise tasapinnaga. Teljed Ox ja Oy asuvad sel puhul liikumistasapinnas. Tasapinnalise mehhanismi puhul saame neis tingimusis

$$P_{jiz} = 0$$

ja seosed, mis määravad inertsjõudude peavektori ja peamomendi projektsioonid koordinaattelgedel, kujunevad järgmisteks:

$$\left.\begin{aligned} P_{jx} &= -\Sigma m_i\ddot{x}_i, \\ P_{jy} &= -\Sigma m_i\ddot{y}_i, \\ P_{jz} &= 0, \\ M_{jx} &= -\Sigma z_i P_{jiy} = \Sigma m_i z_i\ddot{y}, \\ M_{jy} &= \Sigma z_i P_{jix} = -\Sigma m_i z_i\ddot{x}_i, \\ M_{jz} &= -\Sigma(m_i x_i\ddot{y}_i - m_i y_i\ddot{x}). \end{aligned}\right\} \qquad (25.1)$$

Kuna x_i ja y_i on vedava lüli pöördenurga φ funktsioonid, viimane omakorda aga sõltub ajast t, siis saame koordinaatide x_i ja y_i teised tuletised aja suhtes määrata liitfunktsioonide tuletamise reegli kohaselt:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{dx_i}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \omega\frac{dx_i}{d\varphi},$$

kus $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ on mehhanismi vedava lüli kiirus. Edasi,

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{d\varphi^2}\frac{d\varphi}{dt}\omega + \frac{dx_i}{d\varphi}\frac{d\omega}{dt};$$

et aga $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ ja $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$, siis

$$\ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dx_i}{d\varphi}\varepsilon.$$

Analoogiliselt saame

$$\ddot{y} = \frac{d^2y_i}{d\varphi^2}\omega^2 + \frac{dy_i}{d\varphi}\varepsilon.$$

Asetades $\ddot{x}$ ja $\ddot{y}$ saadud avaldised valemitesse (25.1), saame:

$$\left.\begin{aligned}
P_{jx} &= -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi}, \\
P_{jy} &= -\omega^2 \sum m_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi}, \\
M_{jx} &= \omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi}, \\
M_{jy} &= -\omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi}, \\
M_{jz} &= \omega^2 \left(\sum m_i y_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} - \sum m_i x_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} \right) + \\
&\quad + \varepsilon \left(\sum m_i y_i \frac{dx_i}{d\varphi} - \sum m_i x_i \frac{dy_i}{d\varphi} \right).
\end{aligned}\right\} \qquad (25.2)$$

Tasapinnalise mehhanismi inertsjõudude süsteemi täielikuks tasakaalustamiseks peavad süsteemi peavektori projektsioonid koordinaattelgedel ja x-, y- ning z-telje suhtes arvutatud peamomendid võrduma nulliga, s. t. peavad olema täidetud tingimused:

$$P_{jx} = 0, \qquad P_{jy} = 0, \qquad M_{jx} = 0, \qquad M_{jy} = 0, \qquad M_{jz} = 0.$$

Mehhanismi liikumistasapinnaga ristuva z-telje suhtes arvutatud momendi M_{jz} toimet vundamendile tuleb käsitleda koos motoorsete ja takistusmomentide mõjuga. Nimetatud momentide osa masina liikumisrežiimi kujunemises ja vundamendile ning kinnislülile mõjuvas dünaamilises koormuses uuriti juba eelmistes peatükkides. Seetõttu võtame siin edasise vaatluse alla ainult järgmised võrrandid:

$$\begin{aligned} P_{jx} &= 0, \quad P_{jy} = 0, \\ M_{jx} &= 0, \quad M_{jy} = 0 \end{aligned}$$

ehk

$$\begin{aligned}
-\omega^2 \sum m_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0, \\
-\omega^2 \sum m_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0, \\
\omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} + \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} &= 0, \\
-\omega^2 \sum m_i z_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} - \varepsilon \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} &= 0.
\end{aligned}$$

Toodud võrrandeid saab nurkkiiruse ω ja nurkkiirenduse ε mis tahes väärtuste puhul rahuldada ainult siis, kui kõik võrrandites esinevad summad eraldi võetuna võrduvad nulliga, ehk teisiti öeldes, kui on täidetud tingimused

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(I)} \quad \sum m_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} = 0,\\
&\text{(II)} \quad \sum m_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} = 0,\\
&\text{(III)} \quad \sum m_i z_i \frac{d^2x_i}{d\varphi^2} = 0,\\
&\text{(IV)} \quad \sum m_i z_i \frac{d^2y_i}{d\varphi^2} = 0,\\
&\text{(V)} \quad \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0,\\
&\text{(VI)} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0,\\
&\text{(VII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0,\\
&\text{(VIII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (25.3)$$

Masina täielikuks tasakaalustamiseks tuleb seega tema lülide massid ja mõõted valida nii, et võrrandid (25.3) oleksid rahuldatud. Nimetatud võrrandeid ligemalt uurides aga selgub, et nelja esimest võrrandit (I—IV), kus esinevad teised tuletised, võib saada ülejäänud võrrandeid (V—VIII) nurga φ suhtes tuletades. Seetõttu on ilmne, et juhul kui neli viimast võrrandit on rahuldatud, siis on seda ka neli esimest. Järelikult piisab, kui piirduda ainult järgnevate tingimuste käsitlemisega:

$$\left.\begin{aligned}
&\text{(V)} \quad \sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0,\\
&\text{(VI)} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0,\\
&\text{(VII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = 0,\\
&\text{(VIII)} \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (25.4)$$

Võrrandite (25.4) lihtsustamiseks vaatleme avaldusi

$$\Sigma m_i x_i = m x_S \quad \text{ja} \quad \Sigma m_i y_i = m y_S.$$

Toodud avaldised kujutavad endast mehhanismi kõikide *masside staatilisi momente* ja neid võib avaldada kui mehhanismi lülide kogumassi m ja tema üldise masskeskme vastavate koordinaatide x_S ja y_S korrutisi. Tuletades neid avaldisi φ suhtes, saame:

$$\sum m_i \frac{dx_i}{d\varphi} = m \frac{dx_S}{d\varphi} \quad \text{ja} \quad \sum m_i \frac{dy_i}{d\varphi} = m \frac{dy_S}{d\varphi}.$$

Asetades saadud tulemused kahte esimesse võrrandisse (25.4), saame alljärgnevad vajalikud tingimused

$$m \frac{dx_S}{d\varphi} = 0 \quad \text{ja} \quad m \frac{dy_S}{d\varphi} = 0$$

ehk, kuna $m \neq 0$, siis võime kirjutada:

$$\frac{dx_S}{d\varphi} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{dy_S}{d\varphi} = 0. \tag{25.5}$$

Vaatleme nüüd avaldisi

$$\Sigma m_i z_i x_i \quad \text{ja} \quad \Sigma m_i z_i y_i.$$

Need summad kujutavad endast nn. tsentrifugaal-inertsmomente tasapindade xz ja yz suhtes. Tähistame neid vastavalt A ja B ning võtame nende tuletised nurga φ suhtes. Kui silmas pidada, et $\frac{dz_i}{d\varphi} = 0$, siis saame:

$$\sum m_i z_i \frac{dx_i}{d\varphi} = \frac{dA}{d\varphi} \quad \text{ja} \quad \sum m_i z_i \frac{dy_i}{d\varphi} = \frac{dB}{d\varphi}.$$

Asetades saadud tulemused võrranditesse (VII) ja (VIII), leiame, et

$$\frac{dA}{d\varphi} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{dB}{d\varphi} = 0. \tag{25.6}$$

Inertsjõudude tasakaalustamiseks on vajalik, et võrrandid (25.5) ja (25.6) oleksid rahuldatud. Viimastest aga selgub vahetult, et tasapinnalise mehhanismi inertsjõudude tasakaalustamiseks peab täitma alljärgnevad tingimused:

$$\begin{aligned} x_S &= \text{const.}, \\ y_S &= \text{const.}, \\ A &= \text{const.}, \\ B &= \text{const.} \end{aligned} \tag{25.7}$$

Tingimusi (25.7) analüüsides tuleme järeldusele, et inertsjõudude peavektori tasakaalustamiseks tasapinnalises mehhanismis on vajalik ja piisav mehhanismi massid nii valida, et mehhanismi kõikide lülide üldine masskese jääks liikumatuks. Telgede Ox ja Oy suhtes arvutatud peamomentide tasakaalustamiseks on aga vajalik ja piisav, kui masside valikul silmas pidada, et mehha-

nismi tsentrifugaalinertsmomendid tasapindade *xz* ja *yz* suhtes oleksid konstantsed.

Masinaehituse praktikas täidetakse ülaltoodud tingimusi mehhanismide tasakaalustamisel tavaliselt ainult osaliselt, olenevalt konkreetsest ülesandest. Mõnedes mehhanismides tasakaalustatakse näiteks täielikult ainult inertsjõudude peavektor, teistes aga ainult inertsjõudude momendid ja osaliselt ka peavektor jne. Käesoleva peatüki järgnevates paragrahvides käsitletakse nii tasakaalustamise teooria üldisi kui ka spetsiaalseid, ligikaudseid lahendusi andvaid meetodeid.

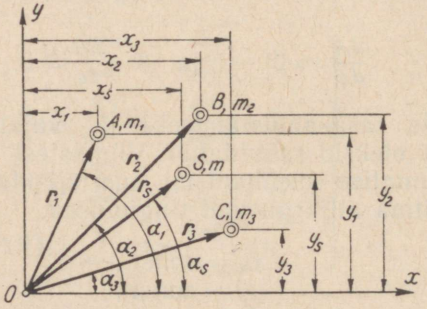
§ 128. Mehhanismi üldise masskeskme asukoha leidmine

1°. Nagu näidati eelmises paragrahvis, tuleb mehhanismi inertsjõudude süsteemi peavektori tasakaalustamiseks saavutada mehhanismi üldise masskeskme liikumatus.

Käesolevas paragrahvis käsitleme mehhanismi üldise masskeskme asukoha määramist.

Selgitame kõigepealt, kuidas määrata sääraste kehade üldist masskeset, millede masskeskmed üksikult võetuna asuvad kõik ühes ja samas tasapinnas.

Olgu näiteks antud kolm punkti *A*, *B* ja *C*, kuhu on koondunud massid m_1, m_2 ja m_3 (joon. 743). Ülesandeks on leida nimetatud masside üldine masskese *S*.



Joon. 743.

Valime etteantud punktide *A*, *B* ja *C* poolt määratud tasapinnal mingi meelevaldse punkti *O* ning tõmbame koordinaatteljed *Ox* ja *Oy*. Punktide *A*, *B*, *C* ja *S* raadiusvektorid punkti *O* suhtes olgu tähistatud vastavalt $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$ ja $\boldsymbol{r}_S$ ning raadiusvektorite ja abstsisstelje vahel tekkivad nurgad α_1, α_2, α_3 ja α_S. Punktide

A, B, C ja S koordinaatideks olgu vastavalt (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) ja (x_S, y_S).

Üldise masskeskme S koordinaadid on määratud tuntud valemitega

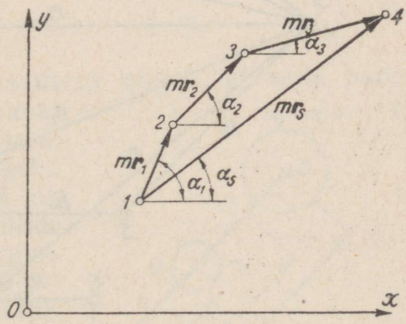
$$x_S = \frac{\sum_1^3 m_i x_i}{m}, \qquad y_S = \frac{\sum_1^3 m_i y_i}{m},$$

kus $m = m_1 + m_2 + m_3$ ja $\sum_1^3 m_i x_i$ ning $\sum_1^3 m_i y_i$ kujutavad masside m_1, m_2 ja m_3 staatilisi momente telgede Oy ja Ox suhtes.

Ülaltoodud valemeid saab asendada üheainsa vektoriaalse seosega:

$$r_S = \frac{\sum_1^3 m_i r_i}{m}.$$

Arvutame korrutised $m_1\mathbf{r}_1$, $m_2\mathbf{r}_2$ ja $m_3\mathbf{r}_3$ ning konstrueerime meelevaldses mastaabis nende geomeetrilise summa (joon. 744). Valitud mastaabis kujutab viimast vektor $m\mathbf{r}_S$. Olgu selle vektori ja abstsisstelje vaheline nurk α_S.



Joon. 744.

Järelikult selleks, et leida masspunktide A, B ja C üldist masskeset S, tuleb nimetatud punktid, millede massid olgu vastavalt m_1, m_2 ja m_3, ühendada mingi meelevaldse punktiga O. Seepeale tuleb määrata korrutised m_1r_1, m_2r_2 ja m_3r_3 ning kanda nende väärtused meelevaldses mastaabis joonisele nii, et nad kulgeksid paralleelselt vastavate vektoritega r_1, r_2 ja r_3 (joon. 744). Saadud vektorite geomeetriline summa määrabki joonisel kasutatud mastaabis vektori $m\mathbf{r}_S$. Vektori $m\mathbf{r}_S$ ja abstsisstelje vahel tekib otsitav nurk α_S. Teades vektori $m\mathbf{r}_S$ moodulit ja massi m, mis on antud seosega

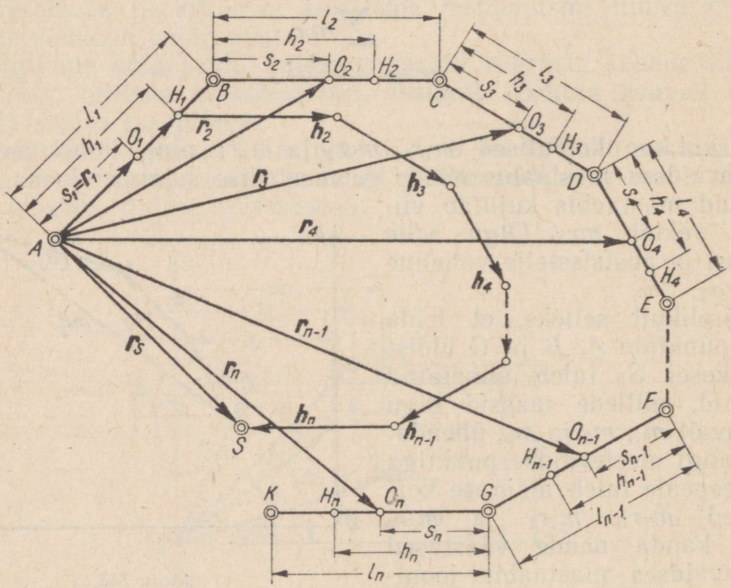
$$m = m_1 + m_2 + m_3,$$

võime hõlpsasti leida vektori r_S. Kandes nüüd joonisele punktist O lähtuva ja abstsissteljega nurka as moodustava lõigu r_S, saame otsitava masskeskme S asukoha (joon. 743).

2°. Üldjuhul on masspunktide m_1, m_2, m_3, ... m_n tsentri asukohta määrava kohavektori r_S arvutusvalem järgmine:

$$r_S = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \ldots + m_n r_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_i r_i}{\sum_1^n m_i}. \qquad (25.8)$$

Selle valemi abil saab leida mis tahes kinemaatilise ahela masstsentri asukoha. Olgu näiteks antud n lülist koosnev kinemaatiline ahel $ABC \ldots FGK$ (joon. 745). Ahela lülide pikkusteks



Joon. 745.

olgu vastavalt l_1, l_2, $l_3 \ldots l_n$. Edasi olgu O_1, O_2, O_3, ... O_n lülide masskeskmed ja s_1, s_2, s_3, ... s_n nende kaugused lülide algšarniiridest. Viimasteks loeme žarniire, mida ahelat kellaosuti suunas läbides igal lülil esimesena kohtab. Ülesandeks on leida selle ahela üldine masskese s.

Tõmbame punktist A lähtudes masskeskmetesse O_1, O_2, O_3, ... O_n suunduvad vektorid $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, ... $\boldsymbol{r}_n$. Valemi (25.8) põhjal saame

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3 + \ldots + m_{n-1}\boldsymbol{r}_{n-1} + m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_{n-1} + m_n}.$$

Avaldades selles valemis esinevad kohavektorid $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$, $\boldsymbol{r}_3$, ... $\boldsymbol{r}_n$ vektorite $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$, $\boldsymbol{s}_3$, ... $\boldsymbol{s}_n$ ja $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$, $\boldsymbol{l}_3$, ... $\boldsymbol{l}_n$ kaudu:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \boldsymbol{s}_1,\\
\boldsymbol{r}_2 &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{s}_2,\\
\boldsymbol{r}_3 &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{s}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\boldsymbol{r}_n &= \boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 + \ldots + \boldsymbol{l}_{n-1} + \boldsymbol{s}_n,
\end{aligned}$$

saame

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{s}_1 + m_2(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{s}_2) + \ldots + m_n(\boldsymbol{l}_1 + \boldsymbol{l}_2 + \boldsymbol{l}_3 + \ldots + \boldsymbol{l}_{n-1} + \boldsymbol{s}_n)}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n}.$$

Avades sulud ja grupeerides liikmed, leiame, et

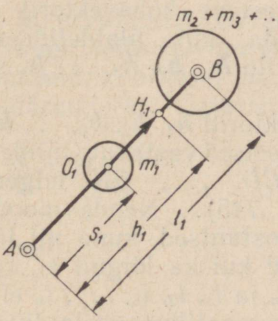
$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{s}_1 + (m_2 + m_3 + \ldots + m_n)\boldsymbol{l}_1}{m} + \frac{m_2\boldsymbol{s}_2 + (m_3 + m_4 + \ldots + m_n)\boldsymbol{l}_2}{m} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m_{n-1}\boldsymbol{s}_{n-1} + m_n\boldsymbol{l}_{n-1}}{m} + \frac{m_n\boldsymbol{s}_n}{m}, \qquad (25.9)$$

kusjuures

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_n.$$

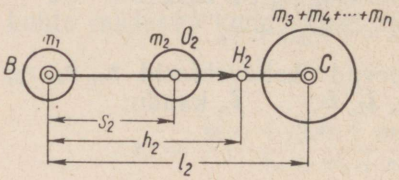
Võrrandit (25.9) ligemalt vaadates selgub, et selle parema poole esimene liige kujutab teatavat vektorit $\boldsymbol{h}_1$, mis punkti A suhtes määrab lüli AB masstsentri asukoha juhul, kui oletada, et punkti A on koondunud kõikide eelnevate lülide massid, punkti B — kõikide järgnevate lülide massid ning punkti O_1 — lüli AB enda mass m_1 (joon. 746). Kuna AB on ahela esimene lüli, võrdub punkti A koondunud mass nulliga. Järgnevate lülide *2, 3, 4, ...*, n kogumassiks on $m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_n$. Punkti O_1 tuleb lüli AB tegelik mass m_1. Selle tingliku massidejaotuse keskme leidmiseks võime rakendada valemit (25.8). Saame:



Joon. 746.

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1\boldsymbol{s}_1 + (m_2 + m_3 + m_4 + \ldots + m_n)\boldsymbol{l}_1}{m}.$$

Võrreldes saadud tulemust võrrandi (25.9) esimese liikmega, tuleb konstateerida nende identsust. Seega kujutab võrrandi (25.9) esimene liige tõepoolest vektorit $\boldsymbol{h}_1$, mis määrab teatava fiktiivse masskeskme H_1 asukoha.



Joon. 747.

Lüliga BC toimime analoogiliselt. Oletame, et punkti B on koondunud kõikide eelmiste lülide massid (käesoleval juhul lüli AB mass m_1) ja punkti C — kõikide järgnevate lülide massid (käesoleval juhul $m_3 + m_4 + m_5 + \ldots + m_n$). Lüli BC massi m_2 jätame punkti O_2 (joon. 747). Säärase massidejaotuse tsentri H_2 asukoht on määratud võrrandi (25.9) teisele liikmele vastava vektoriga $\boldsymbol{h}_2$. Saame

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2\boldsymbol{s}_2 + (m_3 + m_4 + \ldots + m_n)\boldsymbol{l}_2}{m},$$

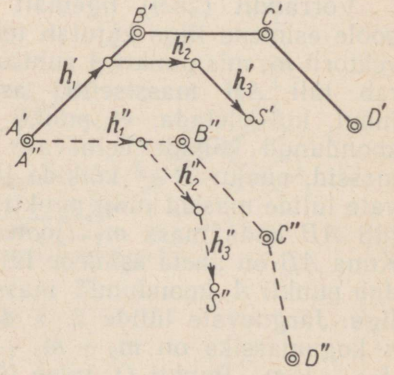
sest et tinglikult punkti B koondatud massi m_1 staatiline moment on null.

Jätkates sama arutlust ka kõikide ülejäänud lülide juures, tuleme järeldusele, et võrrandi (25.9) võib esitada järgmisel kujul:

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3 + \ldots + \boldsymbol{h}_n, \qquad (25.10)$$

s. t. kinemaatilise ahela üldise masskeskme kohavektorit võib käsitada kui ülaldefineeritud vektorite $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$, ... $\boldsymbol{h}_n$ summat.

Vektorid $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$, ... $\boldsymbol{h}_n$ on paralleelsed vastavate lülide AB, BC, CD, ..., GK telgedega (joon. 745). Nende moodulid on konstantsed, kuna nii lülide massid kui ka lõigud s_1, s_2, s_3, ..., s_n ja l_1, l_2, l_3, ..., l_n ei sõltu kinemaatilise ahela liikumisest. Kinemaatilise ahela üldise masskeskme määramine taandub seega konstantsete moodulitega ja vastavate lülide telgedega paralleelselt sihitud vektorite geomeetriliseks liitmiseks.



Joon. 748.

Võrrandi (25.10) võib lühendatud kujul kirjutada järgmiselt:

$$\boldsymbol{r}_S = \sum_1^n \boldsymbol{h}_i. \qquad (25.11)$$

Joonisel 748 on näidatud kinemaatilise ahela $ABCD$ üldise masskeskme S määramine ahela kahes asendis — $A'B'C'D'$ ja $A''B''C''D''$. Mõlemale asendile vastavad masskeskmed S' ja S'' on määratud vektorite $\boldsymbol{h}'$ ja $\boldsymbol{h}''$ abil. Punkte $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$ (joon. 745) nimetatakse *peapunktideks* ja vektoreid $\boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \boldsymbol{h}_3, \ldots, \boldsymbol{h}_n$ — *peapunktide vektoriteks.*

3°. Kasutame nüüd ülaltoodud meetodit šarniirnelilüliku $ABCD$ uurimiseks (joon. 749). Olgu antud lülide pikkused l_1, l_2, l_3 ja nende masskeskmete O_1, O_2, O_3 kaugused s_1, s_2, s_3 vasakutest šarniiridest. Alguspunktiks valime punkti A ning ühendame ta sirgete abil punktidega O_1, O_2 ja O_3. Saadud vektorid $\overline{AO_1}$, $\overline{AO_2}$ ja $\overline{AO_3}$ tähistame vastavalt $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ ja $\boldsymbol{r}_3$. Kui lülide massid on m_1, m_2, m_3 ja nende summa — m, siis võrrandi (25.8) alusel võime kirjutada, et

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m}.$$

Kasutades võrrandeid (25.9) ja (25.10), saame

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{m_1\boldsymbol{s}_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{l}_1}{m} + \frac{m_2\boldsymbol{s}_2 + m_3\boldsymbol{l}_2}{m} + \frac{m_3\boldsymbol{s}_3}{m} = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3.$$

Selgitame nüüd vektorite $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ ja $\boldsymbol{h}_3$ arvutamist. Oletame, et lüli masskeskmesse O_1 on rakendatud kogu selle lüli mass m_1 ja punkti B — kõikide ülejäänud lülide massid, s. o. $m_2 + m_3$.

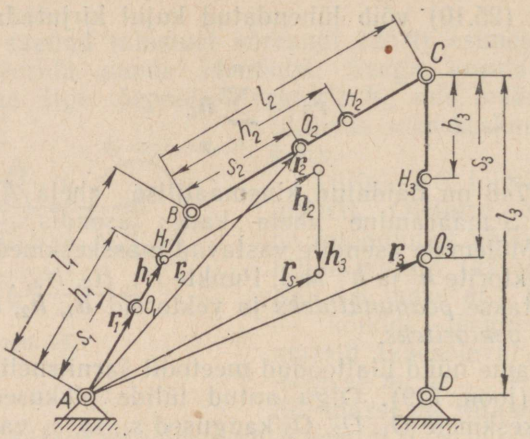
Säärase massidejaotuse tsentri määramiseks kirjutame võrrandi

$$m\boldsymbol{h}_1 = m_1\boldsymbol{s}_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{l}_1,$$

millest leiame, et

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m_1\boldsymbol{s}_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{l}_1}{m}. \qquad (25.12)$$

Kuna kõikide masside asukohad paiknevad ühel ja samal sirgel AB, siis peab sellel punktide O_1 ja B vahel asuma ka lüli 1 ning temale liidetud masside m_2 ja m_3 ühine tsenter H_1. Vektori $\boldsymbol{h}_1$ arvutusvalemis ei figureeri punkti A koondunud masse, sest nimetatud punktist vasakul ei ole mehhanismil lülisid. Punkt H_1 on seega lüli AB peapunktiks ja vektor $\boldsymbol{h}_1$ — peapunkti vektoriks.



Joon. 749.

Arvutame nüüd lüli *2* peapunkti H_2. Selleks koondame punkti C kõikide lülile *2* järgnevate lülide massid, s. o. käesoleval konkreetsel juhul massi m_3, punkti B aga kontsentreerime kõikide eelnevate lülide massid — antud juhul lüli *1* massi m_1. Määrame saadud massidejaotuse tsentri, kirjutades, et

$$m\boldsymbol{h}_2 = m_2\boldsymbol{s}_2 + m_3\boldsymbol{l}_2.$$

Viimasest saame:

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2\boldsymbol{s}_2 + m_3\boldsymbol{l}_2}{m}. \qquad (25.13)$$

Lüli *2* peapunkt H_2 ja selle vektor $\boldsymbol{h}_2$ on seega määratud. Lüli *3* juurde siirdudes koondame kõikide eelnevate lülide massid, s. t. massid m_2 ja m_1 punkti C ja kirjutame võrrandi

$$m\boldsymbol{h}_3 = m_3\boldsymbol{s}_3,$$

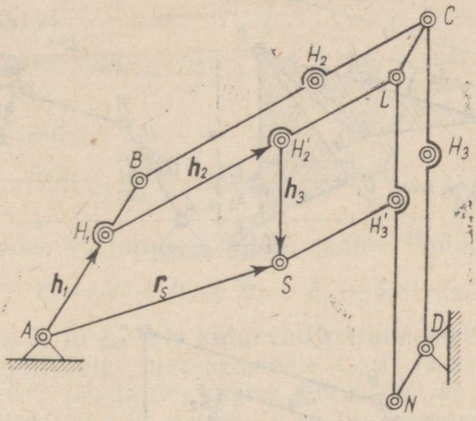
millest ilmutame lüli *3* peapunkti H_3 vektori $\boldsymbol{h}_3$:

$$\boldsymbol{h}_3 = \frac{m_3\boldsymbol{s}_3}{m}.$$

Määranud vektorid $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ ja $\boldsymbol{h}_3$, moodustame nende geomeetrilise summa $\boldsymbol{r}_S$ (joon. 749). Vektori $\boldsymbol{h}_3$ või $\boldsymbol{r}_S$ lõpp-punkt annabki mehhanismi otsitava üldise masskeskme S. Et mehhanismi liikumisel jäävad kõik peapunktid lülide suhtes paigale, siis ei ole masskeset S mehhanismi mis tahes asendis raske määrata. Selleks tuleb konstrueerida konstantsetest lõikudest h_1, h_2 ja h_3 koosnev murtud joon, mille küljed on paralleelsed mehhanismi vastavate lülidega.

Kirjeldatud viisil saab määrata m i s t a h e s klassi kuuluvate mehhanismide üldise masskeskme trajektoori.

4°. Selleks et lihtsustada mehhanismi *ABCD* masskeskme kiiruse, kiirenduse ja inertsjõudude edasist uurimist, võib nimetatud masskeskme liikumist käsitada kui teatavasse täiendatud mehhanismi kuuluva punkti *S* liikumist. Täiendatud mehhanism saadakse põhimehhanismile *ABCD* kolme diaadi (II klassi grupi) juurdeliitmise teel.



Joon. 750.

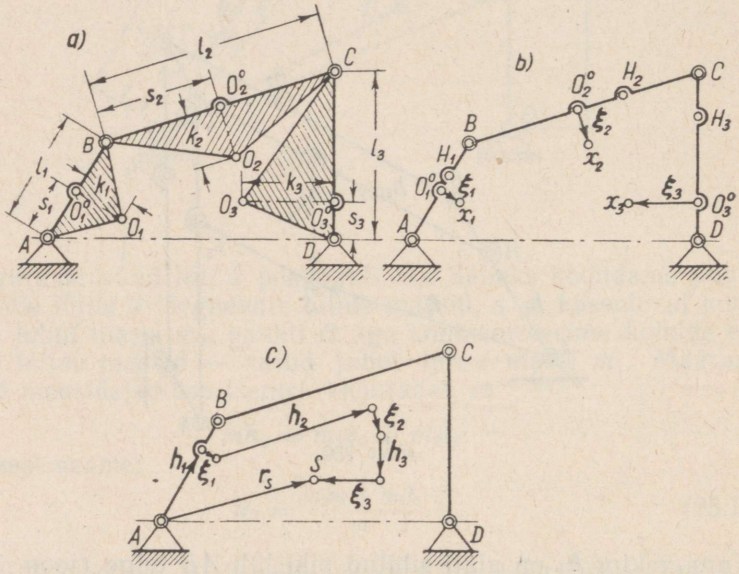
Kuna vektor $\boldsymbol{h}_1$ on alati sihitud piki lüli *AB* telge (joon. 750), siis liigub see vektor nimetatud lüliga koos, ühe ja sama nurkkiirusega. Liidame punktides H_1 ja *C* mehhanismi külge diaadi CLH_1, mille lülide pikkused on järgmised: $CL = AB - h_1$ ja $H_1L = BC$. Valitud mõõdete tõttu on uue grupi lülid *CL* ja H_1L alati paralleelsed põhimehhanismi vastavate lülidega *AB* ja *BC*. Kui nüüd lülile H_1L kanda peavektor $\boldsymbol{h}_2$, siis määrab selle lõpp-punkt H'_2 lülide *AB* ja *BC* masskeskme, mis teatavasti saadakse vektorite $\boldsymbol{h}_1$ ja $\boldsymbol{h}_2$ liitmise teel.

Punktides *D* ja *L* liidame mehhanismiga teise diaadi *DNL*. Viimase lülide pikkused on valitud järgmiselt: $DN = CL$ ja $LN = CD$. Seetõttu on lülid *LN* ja *CD* ning *ND* ja *AB* alati omavahel paralleelsed. Lähtudes punktist *L* kanname lülile *LN* lõigu LH'_3 pikkusega h_3 ja punktides H'_2 ning H'_3 ühendame mehhanismiga kolmanda diaadi $H'_2SH'_3$. Viimase lülide pikkusteks on

$$H'_2S = h_3 \text{ ja } H'_3S = BC - h_2.$$

Lülid H'_3S ja H'_2S on alati vastavalt paralleelsed põhimehhanismi lülidega BC ja CD.

Nüüd on lihtne näha, et täiendatud mehhanismi punkt S ühtib põhimehhanismi kõikides võimalikkudes asendites selle üldise masskeskmega, mis on määratud vektorite $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ ja $\boldsymbol{h}_3$ summaga. Täiendava mehhanismi punkti S trajektoor on seega põhimehhanismi masskeskme trajektooriks. Sama kehtib ka nimetatud punkti kiiruse ja kiirenduse kohta.



Joon. 751.

5°. Ülalkäsitletud juhtudel paiknesid lülide masskeskmed alati nende pikitelgedel. Uurime nüüd, kuidas tuleb mehhanismi üldist masskeset otsida olukorras, kus lülide masskeskmed paiknevad meelevaldselt. Olgu antud mehhanism $ABCD$ (joon. 751, *a*), mille lüli AB masskese asub punktis O_1, lüli BC masskese — punktis O_2 ja lüli CD masskese — punktis O_3. Konstrueerime lülide pikitelgedele AB, BC ja CD punktidest O_1, O_2 ja O_3 lähtuvad ristsirged $O_1O^0_1$, $O_2O^0_2$ ja $O_3O^0_3$. Olgu k_1, k_2 ja k_3 saadud ristsirgete pikkused. Kaugused AO^0_1, BO^0_2 ja CO^0_3 tähistame s_1, s_2 ja s_3, lülide AB, BC ja CD pikkused aga l_1, l_2 ja l_3. Ühendame nüüd punktid O_1, O_2 ja O_3 sirgete abil punktiga A, tähistades tekkinud vektorid tähistega $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ ja $\boldsymbol{r}_3$. Lülide massid olgu vastavalt m_1, m_2 ja m_3

ning mehhanismi kogumass m. Võrrandi (25.8) põhjal võime kirjutada:

$$r_S = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m}.$$

Kuna aga

$$r_1 = s_1 + k_1,\ r_2 = l_1 + s_2 + k_2,\ r_3 = l_1 + l_2 + s_3 + k_3,$$

siis

$$r_S = \frac{m_1(s_1 + k_1) + m_2(l_1 + s_2 + k_2) + m_3(l_1 + l_2 + s_3 + k_3)}{m},$$

millest järgneb, et

$$r_S = \frac{m_1 s_1 + (m_2 + m_3) l_1}{m} + \frac{m_1 k_1}{m} + \frac{m_2 s_2 + m_3 l_2}{m} + \frac{m_2 k_2}{m} + \frac{m_3 s_3}{m} + \frac{m_3 k_3}{m}.$$

Kasutades tähiseid

$$\frac{m_1 k_1}{m} = \xi_1, \quad \frac{m_2 k_2}{m} = \xi_2, \quad \frac{m_3 k_3}{m} = \xi_3$$

ja silmas pidades võrrandit (25.10), saame lõplikult

$$r_S = h_1 + h_2 + h_3 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3.$$

Vektorid ξ_1, ξ_2 ja ξ_3, mis kulgevad paralleelselt vektoritega k_1, k_2 ja k_3, on fiktiivsete masskeskmete x_1, x_2 ja x_3 raadiusvektoriteks punktide O^0_1, O^0_2 ja O^0_3 suhtes (joon. 751, *b*). Nad on saadud eeldusel, et lülide massid m_1, m_2 ja m_3 on koondunud punktidesse O_1, O_2 ja O_3, kuna punktides O^0_1, O^0_2 ja O^0_3 paiknevad massid $(m - m_1)$, $(m - m_2)$ ja $(m - m_3)$. Liites saadud vektorid meelevaldses järjestuses, leiame kogu mehhanismi üldise masskeskme S (joon. 751, *c*).

6°. Esitatud meetod lihtsustab tunduvalt väntmehhanismi inertsjõudude peavektori leidmist. Olgu antud desaksiaalne väntmehhanism ABC, mille vända AB raadius olgu R ja kepsu pikkus L (joon. 752). Ülesandeks on leida mehhanismi masskese S. Vända mass olgu m_1, kepsu mass m_2 ja translatoorselt liikuva liuguri mass m_3. Määrame peapunktide vektorid h_1, h_2 ja h_3. Vända AB masskese asugu punktis O_1, tema kaugus tsentrist A olgu s_1. Koondame punkti B kõik järgnevad massid, punkti A aga kõik eelnevad massid. Kuna AB on mehhanismi esimene lüli, siis võrdub punkti A tulev mass nulliga. Punkti B koondub mass $m_2 + m_3$ ja punkti O_1 — mass m_1. Vektorit h_1 määrava võrrandi kirjutame järgmiselt:

$$m h_1 = m_1 s_1 + (m_2 + m_3) R.$$

Viimasest selgub, et

$$h_1 = \frac{m_1 s_1 + (m_2 + m_3) R}{m}. \qquad (25.14)$$

Vektori $\boldsymbol{h}_1$ moodul võrdub kaugusega punkti A ja esimese peapunkti H_1 vahel.

Vaatleme nüüd kepsu BC. Kujutleme, et punkti B on koondunud kõikide eelnevate lülide massid, s. t. vända mass m_1. Punktis O_2 asugu kepsu BC mass ja punktis C — kõikide järgnevate lülide massid, praktiliselt seega mass m_3. Vektori $\boldsymbol{h}_2$ leidmiseks kirjutame võrrandi

$$m\boldsymbol{h}_2 = m_2\boldsymbol{s}_2 + m_3\boldsymbol{L},$$

millest järgneb, et

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2\boldsymbol{s}_2 + m_3\boldsymbol{L}}{m}. \qquad (25.15)$$

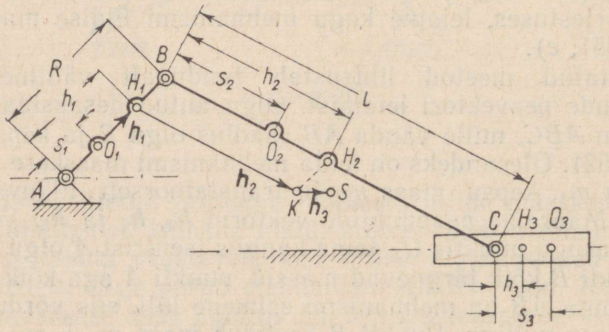
Translatoorselt liikuva liuguri puhul tuleb vektori $\boldsymbol{h}_3$ arvutamiseks koondada punkti C mass $m_1 + m_2$. Punktist C kaugusel s_3 paiknevasse lüli masskeskmesse O_3 asetame massi m_3. Vektori $\boldsymbol{h}_3$ arvutamiseks kirjutame, et

$$m\boldsymbol{h}_3 = m_3\boldsymbol{s}_3,$$

millest saame:

$$\boldsymbol{h}_3 = \frac{m_3\boldsymbol{s}_3}{m}.$$

Eeltoodu põhjal on vektor $\boldsymbol{h}_1$ sihitud alati piki lüli AB telge, vektor $\boldsymbol{h}_2$ on paralleelne lüli BC teljega ja vektor $\boldsymbol{h}_3$ — liuguri C liikumisteljega. Üldise masskeskme S leidmiseks kanname lülile

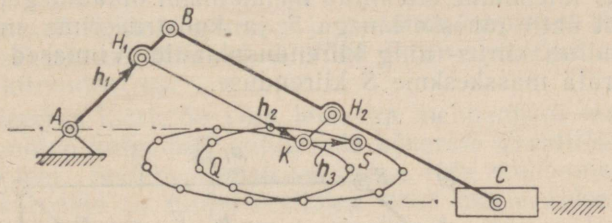


Joon. 752.

AB, lähtudes punktist A, vektori $\boldsymbol{h}_1$ (joon. 752). Saame peapunkti H_1. Lähtudes sellest konstrueerime rööpjoone lülile BC ja kanname sellele vektori $\boldsymbol{h}_2$. Punktist K tõmbame translatsioonipaari teljega

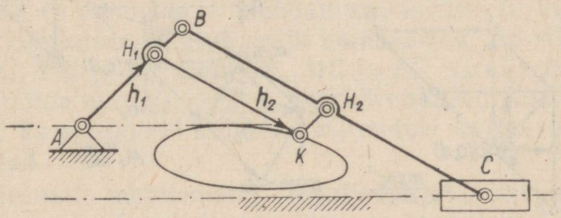
paralleelselt kulgeva sirge ja kanname sellele vektori $\boldsymbol{h}_3$. Nii leitud punkt S ongi mehhanismi ABC üldine masskese.

Uurime nüüd üldise masskeskme paigutusi mehhanismi liikumisel. Kuna vektor $\boldsymbol{h}_3$ jääb mehhanismi mis tahes asendis alati translatsioonipaari teljega paralleelseks, siis kujundavad selle vektori kõik punktid ühe ja sama trajektoori. Seda teeb muuhulgas ka punkt K, mille trajektoor on punkti S trajektoori suhtes ainult pikkuse h_3 võrra nihutatud (joon. 753). Seega, kui masskeskme S



Joon. 753.

trajektooriks on mingi kõver Q, siis punkti K trajektooriks kujuneb sama kõver. Viimane on aga nihutatud eelmisest kauguse $KS = h_3$ võrra vasakule. Kuna peale selle lõik BH_2 on võrdne ja paralleelne lõiguga H_1K, siis tuleb järeldada, et kujund H_1BH_2K



Joon. 754.

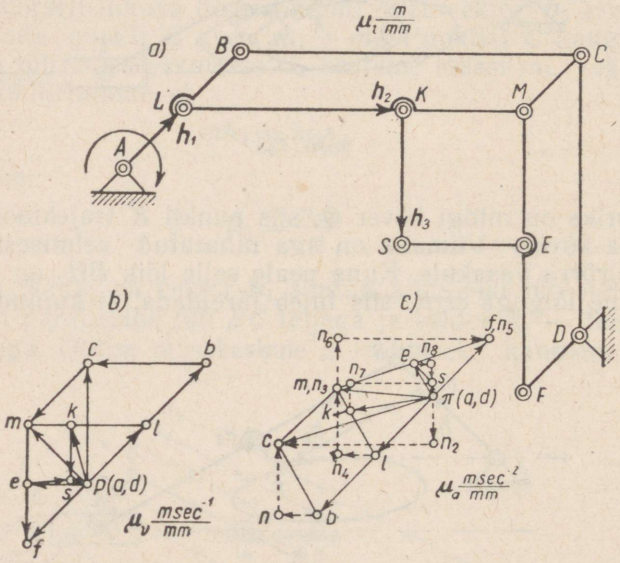
on rööpkülik, mille küljed on konstantse pikkusega ($H_1B = KH_2$ ja $BH_2 = H_1K$), kuid mille nurgad on muutuva suurusega. Punkti K trajektoori konstrueerimiseks liidame põhimehhanismi ABC külge 1. modifikatsiooni diaadi H_1KH_2 (joon. 754). Viimase lülide pikkusteks on vastavalt H_1K ja H_2K. Täiendatud mehhanismi punkti K trajektoor vastab lõigu KS võrra vasakule nihutatud põhimehhanismi masskeskme trajektoorile (joon. 753).

Esitatud meetodit võib rakendada masskeskme asukoha ja trajektoori määramiseks mis tahes klassi kuuluvate mehhanismide juures.

§ 129. Mehhanismi resulteeriva inertsjõu leidmine

1°. Eelmises paragrahvis näidati, et mehhanismi üldist masskeset ja selle trajektoori saab alati määrata peapunktide vektorite $\boldsymbol{h}$ ja põhimehhanismile juurdeliidetud täiendavate diaadide abil. Tõestame nüüd, et teades masskeskme liikumise seadust, saab alati määrata kogu mehhanismi resulteerivat inertsjõudu ja selle mõju masina kinnislülile ning vundamendile.

Selleks täiendame etteantud mehhanismi diaadidega, mille üks punktidest ühtib masskeskmega S, ja konstrueerime mehhanismi reas asendites kiirus- ning kiirendusplaanid. Viimased võimaldavad määrata masskeskme S kiirenduse.



Joon. 755.

Joonisel 755, *b* on näidatud kolme diaadiga täiendatud šarniirnelilüliku *ABCD* pööratud kiirusplaan. Joonis 755, *c* kujutab sama mehhanismi kiirendusplaani. Mehhanismi masskeskme liikumine vastab šarniiri S liikumisele. Mastaabis μ_v võetud kiirusplaani lõik ps kujutab punkti S kiirust v_S (joon. 755, *b*), kuna kiirendusplaani lõik πs võetuna mastaabis μ_a vastab punkti S kiirendusele a_S (joon. 755, *c*). Tähendab

$$v_S = \mu_v(ps)$$

ja

$$a_S = \mu_a(\pi S).$$

Teades üldise masskeskme kiirendust, võime hõlpsasti leida kogu mehhanismi resulteeriva inertsjõu (inertsjõudude peavektori). On ilmne, et viimane saadakse seosest

$$\boldsymbol{P}_i = -m\boldsymbol{a}_S = -m\mu_a(\overline{\pi S}),$$

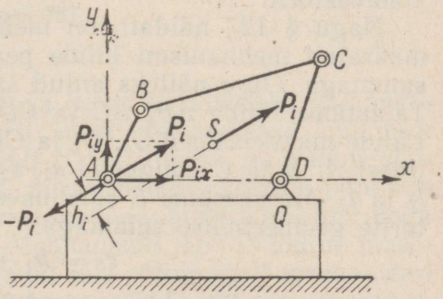
kus m tähistab lülide kogumassi ja $\boldsymbol{a}_S$ kiirendusplaani abil määratavat masskeskme S kiirendust. Jõud $\boldsymbol{P}_i$ on suunatud alati vastu punkti S kiirendust $\boldsymbol{a}_S$.

Resulteeriva inertsjõu võib leida ka mehhanismi masskeskme projektsioonide kulgemist kujutavate kõverate graafilise diferentseerimise teel. Selleks konstrueeritakse rida mehhanismi masskeskme asendeid ja projekteeritakse need meelevaldselt valitud ristkoordinaattelgedele x ning y. Projektsioonide põhjal saame koostada kaks diagrammi, mis kujutavad masskeskme projektsioonide paigutusi valitud telgedel. Diagrammide kahekordse graafilise diferentseerimise teel leitakse masskeskme kiirenduse projektsioonid. Viimaste abil on mehhanismi masskeskme kiirendust juba lihtne määrata. Graafilise diferentseerimise meetodit võib soovitada keerukate paljulüliliste mehhanismide uurimisel, kus kiirendusplaanide konstrueerimine tekitab tõsiseid tehnilisi raskusi.

Märgime, et vaadeldava mehhanismi kiirus- ja kiirendusplaanide konstrueerimine muutub palju hõlpsamaks, kui silmas pidada, et lülide BC, LM ja SE ning AB, MC ja FD paralleelsuse tõttu on nimetatud lülide nurkkiirused ja nurkkiirendused võrdsed. Seetõttu on võrdsed ka vastavaid suhtelisi kiirendusi kujutavad kiirendusplaani lõigud.

2°. Määranud mehhanismi resulteeriva inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$, võime lahendada rea vundamendi tugevuse ja stabiilsuse küsimustega seotud ülesandeid.

Olgu näiteks vundamendil Q asuva tasapinnalise mehhanismi $ABCD$ masskeskmesse S rakendatud resulteeriv inertsjõud $\boldsymbol{P}_i$ joonisel 756 kujutatud asendis teada. Kanname jõu $\boldsymbol{P}_i$ rakenduspunkti üle koordinaatide alguseks valitud punkti A. Selleks rakendame punkti A kaks võrdset kuid vastupidist jõudu $\boldsymbol{P}_i$ ja $-\boldsymbol{P}_i$. Vundamendile mõjub lõplikult seega punkti A



Joon. 756.

rakendatud jõud $\boldsymbol{P}_i$ ja inertsjõudude paar, mille momendi saab seosest

$$M_i = P_i h_i,$$

kus h_i on jõu $\boldsymbol{P}_i$ õlg punkti A suhtes.

Lahutame punkti A rakendatud jõu x- ja y-telje sihilisteks komponentideks $\boldsymbol{P}_{ix}$ ning $\boldsymbol{P}_{iy}$. Jõu $\boldsymbol{P}_{ix}$ mõjul püüab vundament nihkuda horisontaalsihis, kuna jõud $\boldsymbol{P}_{iy}$ püüab vundamenti liigutada vertikaalsihis. Mõlema nimetatud jõu suurus ja suund on perioodiliselt muutuvad. Seetõttu hakkab vundament kahes ristuvas sihis võnkuma sagedusega, mis sõltub mehhanismi pöörlemiskiirusest. Lisaks sellele mõjub vundamendile inertsjõudude paar momendiga M_i. Viimane kulgeb samuti perioodiliselt ja põhjustab vundamendi võnkumist ümber mehhanismi liikumistasapinnaga ristuva telje. Vundamendi tugevusarvutusel tuleb kõiki neid võnkumisi arvesse võtta. Peale selle tuleb ülalkäsitletud jõudu ja momenti silmas pidada ka vundamendi ja mehhanismi stabiilsuse selgitamisel.

§ 130. Mehhanismi inertsjõudude tasakaalustamine

1°. Juhul kui piirdutakse ainult tasapinnalise mehhanismi inertsjõudude peavektori tasakaalustamisega (kõrvale jättes inertsjõudude momendi), siis, nagu ülal näidati [vt. valem (25.7)], piisab mehhanismi üldise masskeskme S kinnistamisest, s. t. tingimuse

$$x_S = \text{const.} \quad \text{ja} \quad y_S = \text{const.} \tag{25.16}$$

täitmisest.

Kahte skalaarset tingimust (25.16) võib asendada ühe vektoriaalse tingimusega

$$\boldsymbol{r}_S = \text{const.}, \tag{25.17}$$

kus $\boldsymbol{r}_S$ nagu varemgi tähistab mehhanismi üldise masskeskme kohavektorit.

Nagu § 127 näidati, on mehhanismi masskeskme kohavektor määratud mehhanismi lülide peapunktide vektorite geomeetrilise summaga. Olgu näiteks antud šarniirnelilülik $ABCD$ (joon. 749). Tähistame lülide AB, BC ja CD massid tähistega m_1, m_2 ja m_3. Lülide masskeskmed O_1, O_2 ja O_3 paiknegu vastavate lülide punktidest A, B ja C kaugustel s_1, s_2 ja s_3. Lülide pikkusteks olgu l_1, l_2 ja l_3. Masskeskme S raadiusvektor $\boldsymbol{r}_S$ võrdub peapunktide vektorite geomeetrilise summaga:

$$\boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3.$$

Seejuures on lüli AB peapunkti H_1 vektor $\boldsymbol{h}_1$ antud valemiga (25.12):

$$\boldsymbol{h}_1 = \frac{m\boldsymbol{s}_1 + (m_2 + m_3)\boldsymbol{l}_1}{m_1 + m_2 + m_3},$$

lüli BC peapunkti H_2 vektori $\boldsymbol{h}_2$ määrab valem (25.13):

$$\boldsymbol{h}_2 = \frac{m_2\boldsymbol{s}_2 + m_3\boldsymbol{l}_2}{m_1 + m_2 + m_3}$$

ja vektor $\boldsymbol{h}_3$ on arvutatav seosega

$$\boldsymbol{h}_3 = \frac{m_3\boldsymbol{s}_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

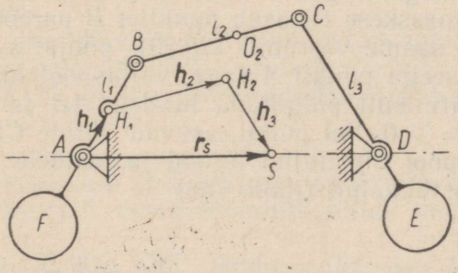
Vektor $\boldsymbol{h}_1$ on paralleelne lüliga AB, vektor $\boldsymbol{h}_2$ — lüliga BC ja vektor $\boldsymbol{h}_3$ — lüliga CD.

Tingimuse (25.17) rahuldamiseks peab kehtima seos

$$\boldsymbol{h}_1 + \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_3 = \text{const}. \qquad (25.18)$$

Toodud tingimust saab täita, kui valida vektorite $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ ja $\boldsymbol{h}_3$ moodulid nii, et nimetatud vektoritest moodustatud hulknurk oleks geomeetriliselt sarnane mehhanismi lülide telgede poolt kujundatud hulknurgaga $ABCD$ (joon. 757). Säärase valiku puhul peavad moodulid h_1, h_2 ja h_3 rahuldama võrdeid

$$\frac{h_1}{l_1} = \frac{h_2}{l_2} = \frac{h_3}{l_3}. \qquad (25.19)$$



Joon. 757.

Tõepoolest, kui vektorid $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ ja $\boldsymbol{h}_3$ on paralleelsed vastavate külgedega AB, BC ja CD, kujuneb neist moodustatud hulknurk nagu teiseks šarniirnelilülikuks AH_1H_2S. Viimane on põhimehhanismiga geomeetriliselt sarnane, mistõttu tema kõikide punktide trajektoorid on põhimehhanismi vastavate punktide trajektooridega samuti geomeetriliselt sarnased. Mehhanismi $ABCD$ üldine masskese S asub sel puhul sirgel AD ja on seal sõltumatult mehhanismi asendist liikumatu. Sellega on tingimus (25.16) või temaga samaväärne nõue (25.17) täidetud ja šarniirnelilüliku inertsjõud tasa-

kaalustatud. Mehhanismi tasakaalu ei häiri muidugi punkti S asend sirgel AD, paiknegu see sees- või väljaspool lõiku AD.

Asetades võrretesse (25.19) suuruste h_1, h_2 ja h_3 väärtused, võime etteantud lülipikkuste l_1, l_2 ja l_3 puhul saada kaks võrrandit:

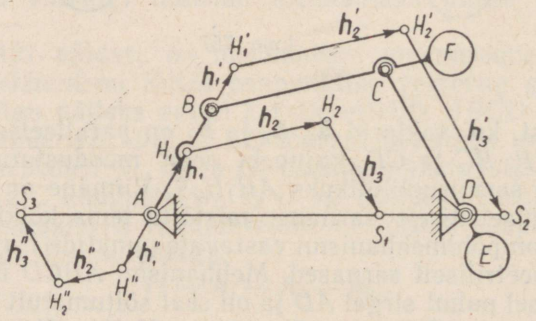
$$m_1 s_1 = -\frac{m_2 l_1}{l_2}(l_2 - s_2) \qquad (25.20)$$

ja

$$m_2 s_2 = -\frac{m_3 l_2}{l_3}(l_3 - s_3). \qquad (25.21)$$

Nendest võrranditest selgub kõigepealt, et lülide masside sobivale valikule rajatud tasakaalustamise meetod annab lõpmata palju võimalikke lahendeid. Tõepoolest, toodud kaks võrrandit seovad omavahel kuut muutujat: m_1, m_2, m_3, s_1, s_2 ja s_3. Nelja neist võib järelikult valida meelevaldselt.

Võrranditest (25.20) ja (25.21) selgub veel, et juhul kui üks kolmest kaugusest s_1, s_2 või s_3 on valitud nii, et vastava lüli masskese asub šarniiride vahel, siis ülejäänud kaks kaugust ulatuvad lüli äärmistest šarniiridest üle. Silmas pidades, et masskeskme viimine lüli šarniiride vahelt välja vastab lüli külge vastukaalu (lisamassi) kinnitamisele, võib öelda, et šarniirnelilüliku resulteeriva inertsjõu tasakaalustamiseks tuleb tema kahele lülile kinnitada vastukaalud. Näiteks juhul, kui $s_3 > l_3$, s. t. kui vastukaal E on kinnitatud lüli CD külge, selgub võrrandist (25.21), et $s_2 > 0$. See näitab, et lüli BC masskese O_2 asub punktist B paremal. Kui seejuures $s_2 < l_2$, siis saame võrrandi (25.20) põhjal $s_1 < 0$. Lüli AB masskese asub seega punkti A taga, väljaspool lüli. Vastukaalud E ja F tuleb järelikult paigutada lülidele AB ja CD. Juhul kui $s_2 > l_2$, saame $s_1 > 0$. Sel puhul asuvad lülide CD ja BC masskeskmed väljaspool nimetatud lülisid ja nendele tuleb järelikult kinnitada ka vastukaalud (joon. 758).



Joon. 758.

2°. Praktilistes arvutustes lahendatakse lülide masside valiku ja nende masskeskmete paigutuse küsimus järgmiselt. Ühe lüli mass ja selle kese valitakse oma äranägemisel. Kahe ülejäänud lüli massid ja nende masskeskmete kaugused arvutatakse seepeale võrrandite (25.20) ja (25.21) abil. Kui näiteks ette anda suurused m_3 ja s_3, saame võrrandiga (25.21) hõlpsasti arvutada korrutise $m_2 s_2$. Ühe neist teguritest valime oma äranägemisel, silmas pidades s_2 juures figureerivat märki. Asetades saadud tulemused võrrandisse (25.20), leiame korrutise $m_1 s_1$. Nagu varemgi, valime ka siin ühe teguritest meelevaldselt, arvestades seejuures kauguse s_1 ees seisva märgiga. Ülalkirjeldatud viisil oleks tulnud toimida ka juhul, kui arvutuse esimesel etapil oleks meelevaldselt valitud suurusteks olnud m_2 ja s_2 või m_1 ja s_1.

Lihtne on näha, et erinevate lähtetingimuste juures võib saada erinevaid tasakaalustamisskeeme ja mehhanismi üldine masskese S võib tulla sirge AD mis tahes punkti sees- või väljaspool lõiku AD (vt. joon. 758). Mehhanism on endastmõistetavalt tasakaalustatud masskeskme kõige kolme asendi S_1, S_2 ja S_3 puhul (joon. 758). Kuid on ilmne, et asenditele S_2 ja S_3 vastavatel juhtudel, kus masskese asub väljaspool lõiku AD, tuleb vastukaalud asetada šarniiridest väga kaugele, mis on konstruktiivselt ebasoodus. Masskeskme S paiknemine väljaspool lõiku AD põhjustab veel raskusjõudude ebaühtlast jaotust tugedel ja on ebasoodus ka mehhanismi stabiilsuse seisukohalt. Seetõttu tuleb konstruktiivselt sobivamateks lugeda variante, kus masskese S asub šarniiride A ja D vahel.

Masskeskme asendi võib igal konkreetsel juhul määrata ette sõltuvalt konstruktsiooni poolt esitatud nõudeist.

Tingimus (25.17) on täidetud muuhulgas ka siis, kui

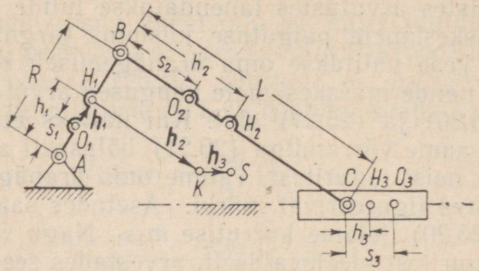
$$r_S = 0.$$

Mehhanismi masskese asub sel juhul punktis A. See lahendus on aga seotud praktiliselt vastuvõtmatute lülide mõõtmete ja massidega.

3°. Väntmehhanismis ABC vända raadiusega R ja kepsu pikkusega L (joon. 759) tuleb resulteeriva inertsjõu tasakaalustamiseks tingimuse (25.17) põhjal muuta liikumatuks punkt S või sellega samaväärne punkt K. Teoreetiliseks võimaluseks oleks siin punkti K viimine tsentrisse A kui väntmehhanismi ainsasse liikumatusse punkti. Seega tuleks siin rahuldada tingimus $r_S = 0$, mis on võimalik aga ainult siis, kui mõlemad vektorid $\boldsymbol{h}_1$ ja $\boldsymbol{h}_2$ üksikult võetuna võrduvad nulliga, s. t. kui

$$\boldsymbol{h}_1 = 0 \text{ ja } \boldsymbol{h}_2 = 0.$$

Asetades nendesse tingimustesse h_1 ja h_2 väärtused võrranditest (25.14) ja (25.15), saame:



Joon. 759.

$$m_1 s_1 + (m_2 + m_3) R = 0$$

ja

$$m_2 s_2 + m_3 L = 0.$$

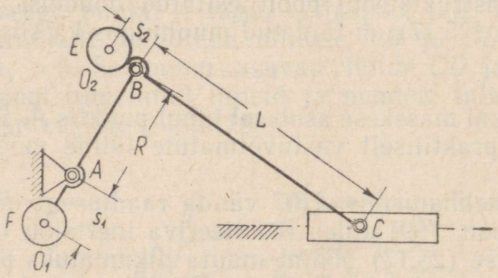
Toodud võrranditest võib arvutada lülide AB ja BC masskeskmete O_1 ja O_2 kaugused s_1 ja s_2 punktidest A ja B. Saame:

$$s_1 = -\frac{m_2 + m_3}{m_1} R \qquad (25.22)$$

ja

$$s_2 = -\frac{m_3}{m_2} L. \qquad (25.23)$$

Nagu selgub, on s_1 ja s_2 mõlemad negatiivsed, s. t. masskeskmed O_1 ja O_2 peavad paiknema punktidest A ja B vasakul.

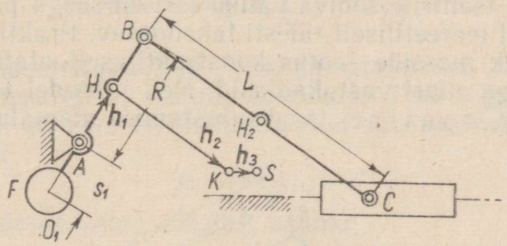


Joon. 760.

Kui liuguri C mass m_3 on ette antud, siis, valides kauguse s_2, võime võrrandiga (25.23) arvutada massi m_2. Viimane kujutab kepsu ja selle külge punktist B vasakule kinnitatud vastukaalu E massi (joon. 760). Massi m_2 leitud väärtuse asetame võrrandisse (25.22). Kui nüüd ette anda kauguse s_1, siis võib nimetatud

võrrandi abil leida vända ja selle külge liidetud vastukaalu F massi m_1. Vastupidi, kui ette anda massid m_1, m_2 ja m_3, võib võrrandite (25.22) ja (25.23) abil arvutada vända ja kepsu masskeskmete O_1 ning O_2 asukohti määravad kaugused s_1 ja s_2. Konstruktiivsetel põhjustel tuleks kepsu vastukaal asetada võimalikult punkti B lähedusse, s. t. s_2 tuleks valida võimalikult väikene. Nagu võrrandist (25.23) selgub, tuleks mass E sel puhul väga suur. See asjaolu põhjustaks tunduvaid lisakoormusi šarniirides ja liuguri juhtpindadel. Seetõttu kasutatakse väntmehhanismi säärast täielikku tasakaalustamist praktikas harva, hoolimata tema dünaamilistest eelistest.

Nagu šarniirmehhanismide juures, nii ka väntmehhanismi tasakaalustamisel võib lülide massid ja nende tsentrid valida nii, et vektorid $\boldsymbol{h}$ moodustaksid mehhanismile geomeetriliselt sarnase kujundi. Kuid erinevalt šarniirnelilülikust ei jää väntmehhanismi masskese seejuures liikumatuks, vaid saab juhtpinna teljega paralleelselt kulgeva vahelduvasuunalise liikumise. Mehhanismis jäävad nimetatud sihis mõjuvad inertsjõud seetõttu tasakaalustamata. Säärast osalist tasakaalustamist kasutatakse praktikas väga sagedasti (näiteks põllutöömasinates, mootorites jne.).



Joon. 761.

Selleks et mehhanismi masskese S või punkt K (joon. 761) liiguksid liuguri telje paralleelil, peab olema täidetud valemile (25.19) analoogiline sarnasustingimus

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R}{L}, \qquad (25.24)$$

kus R on vända AB raadius ja L — kepsu BC pikkus. Peapunktide vektorid moodustavad sel juhul nagu teise väntmehhanismi, mille vända raadiuseks on h_1 ja kepsu pikkuseks h_2. Selle mehhanismi vedav lüli h_1 liigub vända AB nurkkiirusega. Mehhanismi punkt K ja järelikult ka põhimehhanismi masskese S liiguvad liuguri teljega paralleelsel sirgel.

Asetades võrdesse (25.24) vektorite $\boldsymbol{h}_1$ ja $\boldsymbol{h}_2$ moodulid, saame:

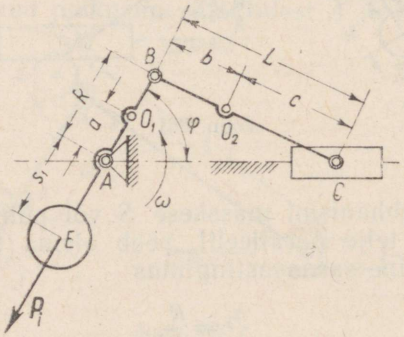
$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{m_1 s_1 + (m_2 + m_3) R}{m_2 s_2 + m_3 L} = \frac{R}{L}.$$

Praktilistes arvutustes on s_2, L ja R tavaliselt ette antud. Sel puhul saame

$$m_1 s_1 = -\frac{R}{L} m_2 (L - s_2). \qquad (25.25)$$

Juhul kui kepsu masskese on šarniiride B ja C vahel, s. t. kui $s_2 < L$, peab vända masskese O_1 asuma punktist A vasakul. Tõepoolest, suurus $m_1 s_1$ on võrrandi (25.25) põhjal nimetatud tingimustes negatiivne. Kui aga $s_2 > L$, siis $s_1 > 0$. Valides vända massi võrrandi (25.25) kohaselt, oleme saavutanud, et vundamendile mõjuvad ainult liuguri teljega paralleelsed inertsjõud, mistõttu mehhanism ja vundament püüavad nihkuda ainult selles suunas. Kirjeldatud tasakaalustamise moodust kasutatakse praktikas väga sagedasti, kuigi see lahendab probleemi ainult o s a l i s e l t. Liuguri telje suunas tasakaalustamata jäänud inertsjõud võivad seejuures mõnedel asjaoludel kujuneda väga suurteks.

4°. Mehhanismi inertsjõudude tasakaalustamine masside suuruse ja nende tsentrite sobiva valiku teel on seega paljude mehhanismide puhul teoreetiliselt täiesti lahendatav. Praktikas ei ole aga selleks vajalik masside jaotus konstruktiivselt alati realiseeritav või nõuab liiga suuri vastukaalusid. Neil juhtudel tuleb kasutada mehhanismide o s a l i s e tasakaalustamise võimalust.



Joon. 762.

Praktikas tasakaalustatakse näiteks väntmehhanismide puhul väga sagedasti ainult vända mass ja osa kepsu massist. Olgu näiteks antud väntmehhanism ABC (joon. 762). Kanname kepsu BC massi staatiliselt üle punktidesse B ja C (vt. § 95).

Punktidesse B ja C koondunud massid m_{2B} ja m_{2C} on määratud valemitega

$$\left.\begin{aligned} m_{2B} &= \frac{m_2 C}{b+c} \\ \text{ja} \\ m_{2C} &= \frac{m_2 b}{b+c}. \end{aligned}\right\} \qquad (25.26)$$

Vända AB massi m_1, mille kese asub punktis O, viime samuti staatiliselt üle punkti B. Vastava massi m_{1B} suuruse saame valemist

$$m_{1B} = m_1 \frac{a}{R}.$$

Kogu punkti B koondunud mass m_B on seega antud alljärgneva valemiga (siinjuures on silmas peetud, et $b + c = L$):

$$m_B = m_{1B} + m_{2B} = m_1 \frac{a}{R} + m_2 \frac{c}{L}. \qquad (25.27)$$

Selle massi tsentrifugaaljõu P_i suurus arvutatakse seosest

$$P_i = m_B \omega^2 R = \left(m_1 \frac{a}{R} + m_2 \frac{c}{L} \right) \omega^2 R. \qquad (25.28)$$

Saadud tsentrifugaaljõu tasakaalustamiseks tuleb vändale punktist A kaugusele s_1 asetada vastukaal E massiga m_v. Viimane on valitud nii, et tema tsentrifugaaljõud võrduks massi m_B tsentrifugaaljõuga:

$$P_i = m_v s_1 \omega^2.$$

Silmas pidades seost (25.28), saame

$$m_v s_1 = m_1 a + m_2 \frac{cR}{L}.$$

Valides ülalsaadud tingimuse kohaselt massi m_v ja kauguse s_1, võime tasakaalustada mehhanismi kõikide pöörlevate masside inertsjõud. Tasakaalustamata jäävad sel puhul horisontaalselt liikuvate masside inertsjõud ja inertsjõudude moment mehhanismi liikumistasapinnaga ristuva telje suhtes.

Translatoorselt liikuvate masside poolt tekitatud inertsjõudude tasakaalustamiseks asetatakse praktilistes arvutustes mõnikord vändale vastukaal E' massiga m'_v, mis on suurem kui m_v ja rahuldab tingimust

$$m_v' s_1 = m_B R + m_C R. \qquad (25.29)$$

Võrrandis (25.29) tähistab m_B punkti B taandatud vända ja kepsu masse. Mass m_C aga tähistab punkti C taandatud kepsu massi osa ja translatoorselt liikuva massi m_3 summat. Massid m_B ja m_C on seega määratud seostega

$$m_B = m_1 \frac{a}{R} + m_2 \frac{c}{L}$$

ja

$$m_C = m_3 + m_{2C}.$$

Asetades viimases võrrandis m_{2C} asemele selle väärtuse võrrandist (25.26) ja silmas pidades, et $b + c = L$, saame

$$m_C = m_3 + m_2 \frac{b}{L}.$$

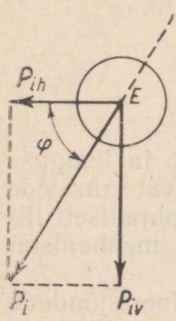
Saadud tulemusi võrrandisse (25.29) viies leiame, et

$$m_v' s_1 = m_1 a + (m_2 + m_3) R. \qquad (25.30)$$

Võrrandiga (25.30) arvutatud vastukaal tasakaalustab täielikult pöörlevad inertsjõud ja samuti ka osa translatoorselt liikuvate masside horisontaalsetest inertsjõududest. Seejuures aga tekib süsteemis uus, vertikaalselt suunatud inertsjõud. Tõepoolest, aksiaalses väntmehhanismis põhjustavad translatoorselt liikuvad massid inertsjõu, mille suurus saadakse seosest [vt. valem (7.43)]:

$$P_{iC} = -m_C a_C \approx m_C \omega^2 R \left(\cos \varphi + \frac{R}{L} \cos 2\varphi \right). \qquad (25.31)$$

Inertsjõudusid, mille suurus on võrdeline nurga φ koosinusega, nimetatakse *esimese järgu inertsjõududeks.* Inertsjõud, mille moodul on võrdeline nurga 2φ koosinusega, kujutavad endast *teise järgu inertsjõudusid.* Ligikaudses võrrandis (25.31) esinevad seega nii esimese kui ka teise järgu inertsjõud. Oleks me kirjutanud täpse võrrandi, siis oleks selles esinenud ka veel kõrgemat järku inertsjõudusid. Juhul kui kõrvale jätta nii teise kui ka kõrgemat järku inertsjõud, mis esimese järgu jõududest on tavaliselt väiksemad, siis kujuneb võrrand (25.31) järgmiseks:



Joon. 763.

$$P_{iC} \approx m_C \omega^2 R \cos \varphi. \qquad (25.32)$$

Vastukaal massiga m_v' tekitab mehhanismis inertsjõu $\boldsymbol{P}_i$, mille suurus on

$$P_i = -m_v' \omega^2 s_1.$$

Lahutades jõu $\boldsymbol{P}_i$ horisontaalseks ja vertikaalseks komponendiks (joon. 763) leiame, et nimetatud jõu horisontaalkomponendiks on

$$P_{ih} = -m_v' \omega^2 s_1 \cos \varphi,$$

kuna tema vertikaalkomponendiks kujuneb

$$P_{iv} = -m_v' \omega^2 s_1 \sin \varphi.$$

Asendades viimastes valemites esineva m_v' tema väärtusega võrrandist (25.30), saame

$$P_{ih} = (-m_1 a\omega^2 \cos\varphi) + (-m_2 R\omega^2 \cos\varphi) + (-m_3 R\omega^2 \cos\varphi) =$$
$$= -(m_B R\omega^2 + m_C R\omega^2)\cos\varphi \qquad (25.33)$$

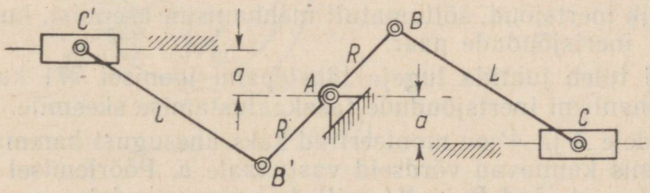
ja

$$P_{iv} = (-m_1 a\omega^2 \sin\varphi) + (-m_2 R\omega^2 \sin\varphi) +$$
$$+ (-m_3 R\omega \sin\varphi) = -(m_B R\omega^2 + m_C R\omega^2)\sin\varphi. \qquad (25.34)$$

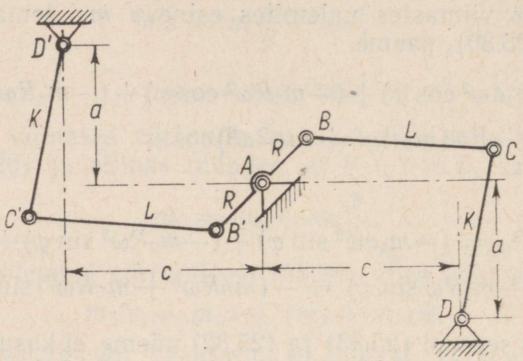
Võrreldes seoseid (25.33) ja (25.32) näeme, et kasutusele võetud vastukaal m_v' tasakaalustab kõigepealt punkti B koondatud pöörlevate masside inertsjõu. Tasakaalustatud on lisaks sellele veel punkti C redutseeritud translatoorselt liikuvate masside esimese järgu inertsjõud. Nagu võrrandist (25.34) selgub, tekib seejuures süsteemis aga uus vertikaalne inertsjõud, mis on võrdeline pöördenurga φ siinusega. Tasakaalustatud horisontaalse jõu asemele on järelikult tekkinud vertikaalne inertsjõud ehk, teiste sõnadega — translatoorselt liikuvate masside horisontaalne inertsjõud on asendatud vertikaalse inertsjõuga. Kirjeldatud tasakaalustamisviisi kasutatakse mõnikord mootorite, kompressorite, põllutöömasinate ja mitmesuguste muude mehhanismide projekteerimisel.

5°. Mõnedel juhtudel õnnestub praktikas inertsjõude osaliselt või isegi ka täielikult tasakaalustada sümmeetriliste mehhanismide kasutamise teel, kus sümmeetriliselt asetatud lülide massid on võrdsed. Säärane mehhanism tervikuna moodustab isetasakaalustuva süsteemi. Joonistel 764—769 on toodud mõnede sümmeetriliste mehhanismide skeemid, mida kasutatakse mäe- ning põllutöömasinates ja mujal. Joonistel 764 ja 765 kujutatud mehhanismides on šarniiris A mõjuvad inertsjõud täielikult tasakaalustatud. Inertsjõudude osalist tasakaalustamist šarniiris A tagavad joonistel 766—769 näidatud mehhanismid.

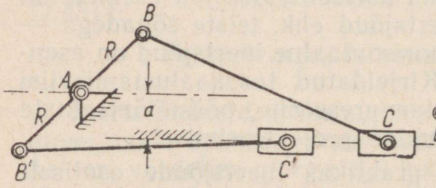
Väntmehhanismide tasakaalustamiseks võib soovitada skeemi, kus vänt ABB' paneb liikuma kaks sümmeetriliselt asetatud 2. modifikatsiooni diaadi (joon. 770). Sel puhul tasakaalustuvad täie-



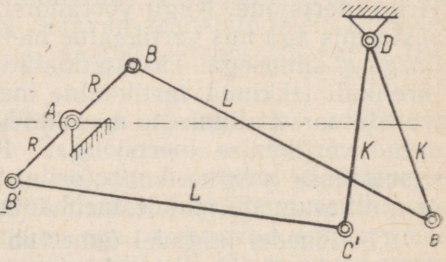
Joon. 764.



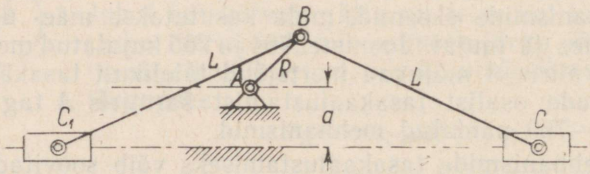
Joon. 765.



Joon. 766.



Joon. 767.

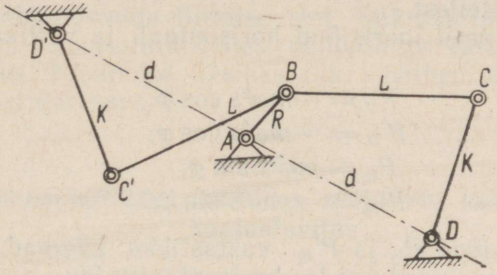


Joon. 768.

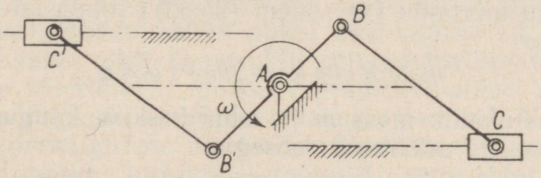
likult kõik inertsjõud, sõltumatult mehhanismi asendist, kuid tekib täiendav inertsjõudude paar.

Edasi tuleb juhtida lugeja tähelepanu joonisel 771 kujutatud väntmehhanismi inertsjõudude tasakaalustamise skeemile.

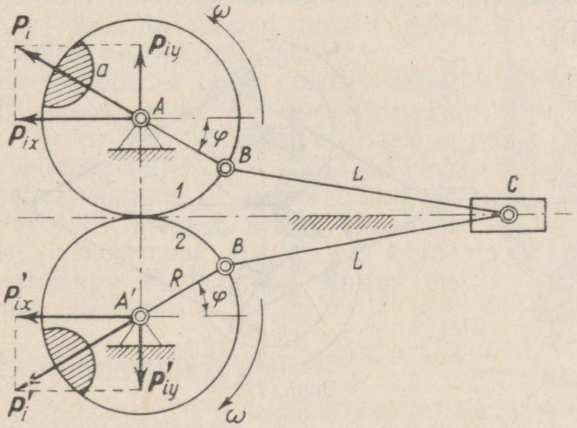
Võllidele A ja A' on monteeritud kaks ühesugust hammasratast *1* ja *2*, mis kannavad võrdseid vastukaale a. Pöörlemisel tekivad sel puhul inertsjõud $\boldsymbol{P}_i$ ja $\boldsymbol{P}_i'$, millede suurus saadakse seosest



Joon. 769.



Joon. 770.



Joon. 771.

$$P_i = P_i' = m\omega^2 s,$$

kus m tähistab vastukaalu a massi ja s — tema masskeskme kaugust pöörlemisteljest.

Lahutades need inertsjõud horisontaal- ja vertikaalkomponentideks, saame:

$$P_{ix} = -m\omega^2 s \cos\varphi,$$
$$P'_{ix} = -m\omega^2 s \cos\varphi,$$
$$P_{iy} = m\omega^2 s \sin\varphi,$$
$$P'_{iy} = -m\omega^2 s \sin\varphi.$$

Selgub, et jõud $\boldsymbol{P}_{iy}$ ja $\boldsymbol{P}'_{iy}$ vastastikku hävivad, jõud $\boldsymbol{P}_{ix}$ ja $\boldsymbol{P}'_{ix}$ aga liituvad, moodustades horisontaalse jõu

$$2P_{ix} = -2m\omega^2 s \cos\varphi.$$

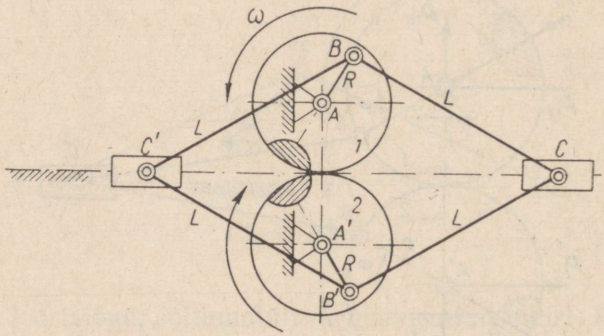
See jõud kandub üle mehhanismi šarniirile A ja tasakaalustab esimese järgu inertsjõu [vt. valem (25.32)] juhul, kui valida massid tingimuse

$$m_C\omega^2 R \cos\varphi = 2m\omega^2 s \cos\varphi$$

kohaselt. Vastukaalu mass m ja tema keskme kaugus pöörlemisteljest s on seega määratud seosega

$$ms = \frac{m_C}{2} R.$$

Selle skeemi kasutamisel ei teki mingit lisainertsjõudude paari. Skeem on kasutatav ü h e liuguriga masinate juures.



Joon. 772.

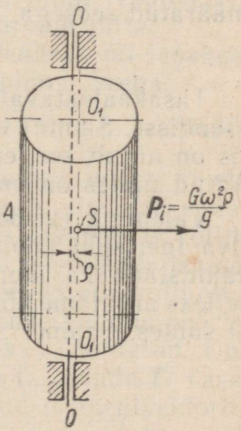
Joonisel 772 on kujutatud teine, analoogiline skeem, mis sobib k a h e liuguriga masinate tasakaalustamiseks. Selles skeemis kasutatavate vastukaalude arvutus ei tekita mingeid raskusi.

Käesolevas õpikus ei käsitleta inertsjõudude peamomendi komponentide tasakaalustamise küsimust (vt. § 126), kuna see ülesanne lahendatakse tavaliselt mitmete, paralleelsetes tasapindades liikuvate mehhanismide liitmise teel. Säärast lahendust kasutatakse näiteks mitmesilindrilistes, väntvõlliga varustatud sisepõlemismootorites. Küsimuse üksikasjalik käsitlus toimub mootorite dünaamika erikursuses.

§ 131. Kinemaatilistes paarides mõjuvate koormuste tasakaalustamine

1°. Kinemaatilistes paarides mõjuvate koormuste tasakaalustamine on üldjuhul seotud suurte praktiliste raskustega. Nimetatud probleemi lahendamiseks tuleb lülide massid valida nii, et dünaamilised koormused paarides kas täielikult või osaliseltki häviksid. Säärase masside valiku puhul aga kujunevad lülide mõõted ja nende kaalud tihti konstruktiivselt vastuvõtmatuiks. Seetõttu kasutatakse käsitletavat moodust peamiselt ainult raskete, suure kiirusega pöörlevate detailide tasakaalustamisel. Viimaste hulka kuuluvad kiirekäiguliste mootorite võllid, tsentrifuugide ja peksumasinate trumlid, turbiinide rootorid, separaatorite taldrikud, dünamomasinate ankrud, värtnad jne. Mõnede sääraste detailide pöörlemiskiirus ulatub 20 000—50 000 pöördeni minutis ja üle selle. Niisugustes töötingimustes on äärmiselt tähtis, et detailide massid oleksid pöörlemistelje suhtes õigesti asetatud.

Oletame näiteks, et G kg kaaluv detail A pöörleb ümber telje OO nurkkiirusega $\omega = \text{const}$. (joon. 773). Detaili A masskese S asugu seejuures teljel O_1O_1, mida eraldab pöörlemisteljest kaugus ϱ. Antud olukorras on ilmne, et võlli laagrid peavad kandma dünaamilist lisakoormust, mis võrdub tsentrifugaalinertsjõuga P_i. Viimase suurus on antud tuntud valemiga



Joon. 773.

$$P_i = mas = \frac{G}{g}\omega^2\varrho,$$

kus $m = \frac{G}{g}$ tähistab detaili A massi ja $as = \omega^2\varrho$ — detaili masskeskme S normaalkiirendust. Kui oletada näiteks, et $\varrho = 1$ mm, detaili pöörlemiskiirus $n = 10\,000$ p/min ja tema kaal $G = 10$ kg, siis kujuneb jõu P_i suuruseks ligikaudu

1 100 kg. Tähendab, juba masskeskme suhteliselt väikese ekstsentrisuse puhul tekivad võlli laagrites suured dünaamilised lisakoormused. Sel põhjusel tuleb kõik kiiresti pöörlevad detailid projekteerida nii, et dünaamilised koormused laagrites oleksid välditud.

2°. Teoreetilisest mehaanikast on teada, et pöörlev keha ei koorma dünaamiliselt oma tugesid juhul, kui tema masskese asub pöörlemisteljel ja see omakorda osutub pöörleva keha üheks peainertsteljeks.

Näitena käsitleme massidega m_1, m_2 ja m_3 varustatud võlli z tasakaalustamist (joon. 774, *a*). Asugu masside m_1, m_2 ja m_3 tsentrid kolmes, pöörlemisteljega z ristuvas tasapinnas T_1, T_2 ja T_3. Võlli nurkkiirus ω olgu konstantne. Nendes tingimustes tekivad inertsjõud

$$P_{i1} = m_1\omega^2\varrho_1; \quad P_{i2} = m_2\omega^2\varrho_2; \quad P_{i3} = m_3\omega^2\varrho_3.$$

Kanname kõik need jõud üle punkti O läbivasse, teljega z ristuvasse tasapinda T_0. Selleks tuleb punkti O rakendada kahekaupa võrdseid, kuid vastassuunalisi jõudusid, mille väärtusteks on $\boldsymbol{P}_{i1}$, $\boldsymbol{P}_{i2}$ ja $\boldsymbol{P}_{i3}$. Seejärel liidame kõik ülekantud jõud, konstrueerides jõudude hulknurga (joon. 774, *b*). Kuna jõud $\boldsymbol{P}_{i1}$, $\boldsymbol{P}_{i2}$ ja $\boldsymbol{P}_{i3}$ on võrdelised vastavate masside m ja kauguste korrutistega, võib jõudude hulknurga konstrueerimisel $\boldsymbol{P}_{i1}$, $\boldsymbol{P}_{i2}$ ja $\boldsymbol{P}_{i3}$ asemel kasutada korrutisi $m_1\varrho_1$, $m_2\varrho_2$ ja $m_3\varrho_3$. Tasakaalustava jõu U väärtus on määratud seosega

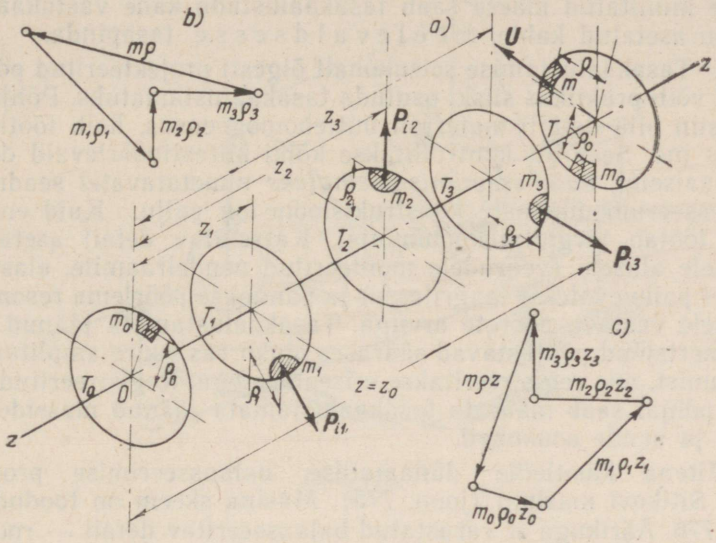
$$U = m\varrho\omega^2. \tag{25.35}$$

Tasakaalustavat massi m võib asetada piki võlli mis tahes asendisse. Samuti võib muuta tema kaugust pöörlemisteljest. Tähtis on ainult see, et m ja ϱ korrutis vastaks tingimusele (25.35). Antud näites on mass m paigutatud tasapinda T.

Valemiga (25.35) arvutatud vastukaal tasakaalustab resulteeriva inertsjõu poolt tekitatud dünaamilised koormused. Et tasakaalustada ka inertsjõudude momentidest tekitatud reaktsioone, selleks arvutame kõigepealt nimetatud momentide väärtused punkti O suhtes. Saame:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= m_1\varrho_1\omega^2 z_1, \\ M_2 &= m_2\varrho_2\omega^2 z_2, \\ M_3 &= m_3\varrho_3\omega^2 z_3, \\ M &= m\varrho\omega^2 z. \end{aligned}\right\} \tag{25.36}$$

Konstrueerime momentide hulknurga (joon. 774, *c*). Kuna kõikide jõupaaride tasapinnad sisaldavad endas telge zz, asub momentide hulknurk nimetatud teljega ristuvas tasapinnas. Momentvektorite suuna valime nii, et piki vektoreid vaadates toimuks



Joon. 774.

pöörlemine alati vastu kellaosuti liikumist. Kuna suurus ω^2 esineb võrrandites (25.36) kui konstantne kordaja, siis võime resulteeriva momendi arvutamisel selle suuruse esialgu kõrvale jätta.

Momentvektorite hulknurka sulgev vektor määrab nii tasakaalustava jõupaari momendi M_0 kui ka selle tasapinna. Seega:

$$M_0 = m_0 \varrho_0 z_0 \omega^2. \qquad (25.37)$$

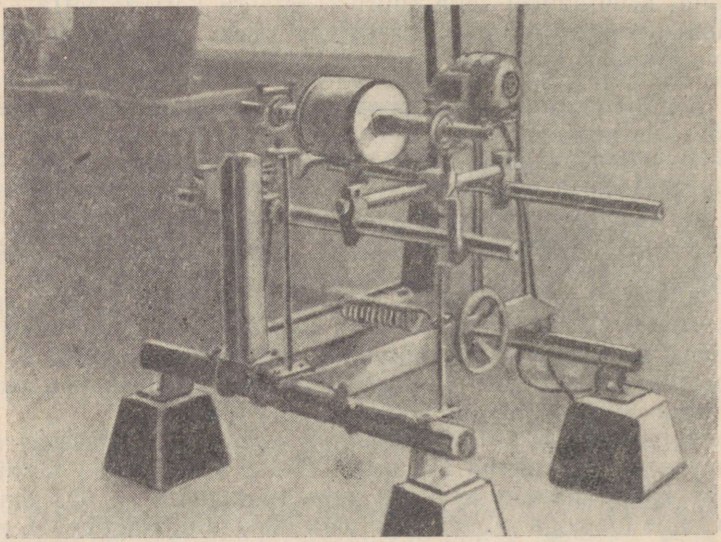
Tasakaalustava jõupaari tasapind on vektoriga $\overline{m_0 \varrho_0 z_0}$ täielikult määratud: ta on nimetatud vektoriga risti ja sisaldab endas telge zz. Tasakaalustavaid masse m_0 võib selles tasapinnas võllile kinnitada mis tahes punktis. Valime nimetatud vastukaalude asetamiseks tasapinnad T_0 ja T, mis asuvad teineteisest piki võlli etteantud kaugusel z_0. Nüüd tuleb massid m_0 ja nende kaugus pöörlemisteljest ϱ_0 valida nii, et võrrand (25.37) oleks rahuldatud. Ühe massidest m_0 paigutame tasapinda T_0, teise aga tasapinda T. Tasakaalustava jõupaari momendi märk on määratud momentvektorite hulknurka sulgeva vektori poolt.

Asetanud võllile kolm vastukaalu (neist kaks massiga m_0 ja üks massiga m), oleme tasakaalustanud kõik võllile kinnitatud massid. Kuna tasapinnas T on kaks vastukaalu — üks massiga m_0 ja teine massiga m, siis võib neid ühendada tingimusel, et uue vastukaalu inertsjõud võrduksid ühendatud vastukaalude inertsjõudude geomeetrilise summaga. Kokkuvõttes võib seega väita, et

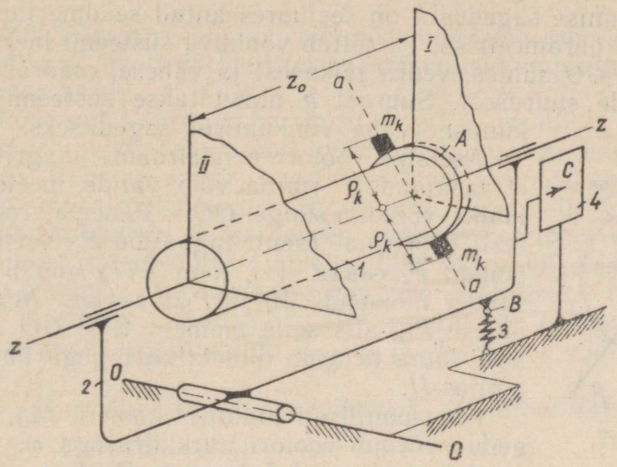
võllile kinnitatud masse saab tasakaalustada kahe vastukaaluga, mis on asetatud kahte m e e l e v a l d s e s s e tasapinda.

3°. Tasakaalustamise seisukohalt õigesti projekteeritud pöörlev detail võib praktikas siiski osutuda tasakaalustamatuks. Põhjuseks võib siin olla detaili materjali mittehomogeensus, halb töötlemistäpsus jne. Seetõttu kontrollitakse kõiki kiirestipöörlevaid detaile spetsiaalsetel, *balansseerimismasinateks* nimetatavatel seadmetel. Balansseerimismasinate konstruktsioone on palju. Kuid enamus neist töötab järgmisel põhimõttel. Katsetatav detail asetatakse elastsele alusele (vedrudele monteeritud pendelraamile, elastsetel alustel paiknevatesse laagritesse) ja pannakse pöörlema resonantskiirusele vastava pöörete arvuga. Tasakaalustamata jäänud masside inertsjõud põhjustavad säärases olukorras suure amplituudiga võnkumist, mis registreeritakse eriseadmetega. Registreeritud andmete põhjal saab määrata tasakaalustamata jäänud masside suurused ja nende asukohad.

Näitena käsitleme dünaamilise balansseerimise protsessi B. V. Šitikovi masinal (joon. 775). Masina skeem on toodud joonisel 776. Äärikuga *A* varustatud balansseeritav detail — rootor *1* — on asetatud pendelraami *2* laagritesse. Pendelraam saab vabalt võnkuda ümber telje *OO*. Raami teine ots on punktis *B* toetatud vedruga *3*. Vedru pingust saab reguleerida nii, et võll *zz* oleks katse algul horisontaalne. Pendelraami punkti *C* amplituud võn-



Joon. 775.



Joon. 776.

kumisel ümber telje *OO* kirjutatakse vastava teraviku abil tahmatud klaasile *4*.

Nagu ülal näidati, võib pöörlevale kehale mõjuva tsentrifugaaljõudude süsteemi asendada kahest kiivast jõust $\boldsymbol{P}_{i1}$ ja $\boldsymbol{P}_{i2}$ koosneva ekvivalentse süsteemiga (nn. jõuristiga). Jõud $\boldsymbol{P}_{i1}$ ja $\boldsymbol{P}_{i2}$ võib seejuures paigutada meelevaldselt valitud tasapindadesse *I* ja *II*. Käsitletavas näites läbib tasapind *I* ääriku *A* vertikaalse sümmeetriatasapinna. Jõudusid $\boldsymbol{P}_{i1}$ ja $\boldsymbol{P}_{i2}$ võib käsitada kui tsentrifugaaljõudusid, mida põhjustavad tasapindades *I* ja *II* paiknevad, pöörlemisteljest kaugusel ϱ_1 ja ϱ_2 olevad massid m_1 ja m_2 (nn. häirivad massid). Sel juhul kehtivad seosed

$$P_{i1} = m_1\omega^2\varrho_1 \quad \text{ja} \quad P_{i2} = m_2\omega^2\varrho_2.$$

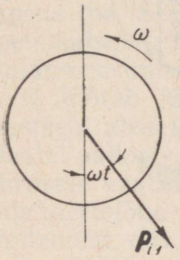
Asetame nüüd tasapindadesse *I* ja *II* massid m_I ja m_{II}, millede kaugused pöörlemisteljest olgu vastavalt r_I ja r_{II}. Kui need massid on valitud nii, et

$$m_1\varrho_1 = -m_1r_1 \quad \text{ja} \quad m_2\varrho_2 = -m_{II}r_{II},$$

siis hävivad kõik inertsjõud ja rootor on dünaamiliselt balansseeritud.

Kui viia pendelraam koos rootoriga tasakaalust välja (surudes pendelraami ühe otsa alla ja vabastades ta seejärel), hakkab raam ümber telje *OO* võnkuma. Õhutakistuse ja telje *OO* laagrites esineva hõõrdumise tõttu ning veel muudelgi põhjustel kustub see võnkumine võrdlemisi kiiresti.

Võnkumise sagedus k on seejuures antud seadme juures muutumatuks parameetriks. Ta sõltub võnkuva süsteemi inertsmomendist telje OO suhtes, vedru jäikusest ja vähesel määral ka takistusjõudude suurusest. Suurust k nimetatakse süsteemi omavõnkumise (vaba võnkumise) sageduseks.



Joon. 777.

Asetame rootori pendelraami laagritesse nii, et tasapind II (mille võib valida meelevaldselt) läbiks võnkumistelge OO. Paneme rootori kiiresti pöörlema. Tsentrifugaaljõu $\boldsymbol{P}_{i1}$ vertikaalkomponent $\boldsymbol{P}_{i1} \cos \omega t$ (vt. joon. 777) annab telje OO suhtes momendi $M_{i1} = P_{i1} z_0 \cos \omega t$. Mis puutub jõusse $\boldsymbol{P}_{i2}$, siis selle moment telje OO suhtes on null, kuna ta asub nimetatud teljega ühises tasapinnas II.

Harmooniliselt muutuv moment M_{i1}, mille sagedus võrdub rootori nurkkiirusega ω, põhjustab pendelraami sundvõnkumist. Rootori nurkkiiruse ω pideval langemisel väheneb ka häiriva momendi M_{i1} sagedus. Kui see läheneb süsteemi omavõnkumise sagedusele k, tekib resonants. Pendelraami võnkumise amplituud läbib seejuures maksimumi. Sundvõnkumiste teooriast on teada, et võnkumise amplituud A on resonantsi puhul võrdeline häiriva faktori intensiivsusega. Seega käesoleval juhul

$$A = \mu P_{i1},$$

kus μ on balansseerimismasina püsivate parameetritega määratud võrdelisuse tegur.

Kui antud masina tegur μ oleks teada, saaks tahmatud klaasile fikseeritud amplituudi A kaudu määrata tasapinnas I mõjuvat disbalanssi P_{i1}. See annaks võimaluse otsitava suuruse $m_I r_I$ leidmiseks.

Pööranud rootori laagrites ümber nii, et tasapind II tuleb tasapinna I kohale, kordame katset, mille alusel saab seekord määrata suuruse $m_{II} r_{II}$.

Lahendamata on seejuures aga jäänud jõudude $\boldsymbol{P}_{i1}$ ja $\boldsymbol{P}_{i2}$ kandesirge orientatsiooni küsimus. Me ei tea seetõttu, missugustele kohtadele tasapindades I ja II tuleb kinnitada vastukaalud massidega m_I ja m_{II}.

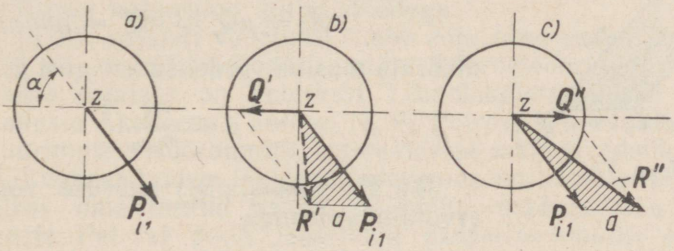
4°. Nimetatud küsimuse lahendamiseks võib kasutada järgmist võtet. Kinnitame balansseeritava detaili külge lisamassi m_k. Olgu ϱ_k selle kaugus pöörlemisteljest. Tavaliselt kasutatakse selleks plastiliinitükikest kaaluga G_k, mis surutakse vastu rootori välispinda. Joonisel 776 on see mass kinnitatud ääriku A välispinnale. Massi m_k nimetatakse korrigeerivaks massiks.

Alustame nüüd katset. Paneme rootori kiiresti käima, lülitame seejärel tema ajami välja ja laseme rootoril vabalt seiskumisfaa-

sis pöörelda. Pärast resonantsi läbimist mõõdame tahmatud klaasile teraviku C poolt fikseeritud maksimaalse amplituudi. Olgu selle väärtuseks A_1.

Kinnitame nüüd äärikule korrigeeriva massi m_k nii, et see asuks tasapinnas I, paiknedes rootori pöörlemisteljest zz kaugusel ϱ_k (joon. 776). Paneme rootori uuesti pöörlema ja mõõdame pendelraami võnkumise maksimaalse amplituudi. Olgu selle väärtuseks A_2. Lõpuks, kolmanda katse juures anname korrigeerivale massile m_k eelmise katse suhtes diametraalselt vastupidise asendi, jättes tema tasapinna I ja radiaalse kauguse ϱ_k endiseks. Käivitame rootori ja mõõdame uue maksimaalse amplituudi, milleks seekord olgu A_3. Saadud amplituudide A_1, A_2 ja A_3 alusel võib määrata suuruse m_1r_1.

Joonis 778, *a* kujutab häirivat jõudu $\boldsymbol{P}_{i1}$ esimesel katsel.



Joon. 778.

Joonisel 778, *b* on kujutatud teisel katsel mõjuv jõud $\boldsymbol{R}'$, mille juures ilmneb juba korrigeeriva massi mõju. Saame:

$$\boldsymbol{R}' = \boldsymbol{P}_{i1} + \boldsymbol{Q}' = m_1\boldsymbol{r}_1 + \frac{G_k}{g}\varrho_k = m_1\boldsymbol{r}_1 - m_k\varrho_k.$$

kus G_k tähistab korrigeeriva massi m_k kaalu.

Kolmandal katsel esinev jõud $\boldsymbol{R}''$ on näidatud joonisel 778, *c*. Sel korral

$$\boldsymbol{R}'' = m_1\boldsymbol{r}_1 - \frac{G_k}{g}\varrho_k = m_1\boldsymbol{r}_1 + m_k\varrho_k.$$

Asetame joonisel 778, *b* ja *c* viirutatud kolmnurgad teineteisele nii, et nende võrdsed küljed langeksid ühte (joon. 779). Saame rööpküliku $BCDE$, mille küljed a, b, c ja d ning diagonaalid on seotud tingimusega

$$2c^2 + 2d^2 = (BD)^2 + (CE)^2.$$

Pikkused d, CE, BD ja c on aga vastavalt võrdelised amplituutidega A_1, A_2, A_3 ja A_k. Need omakorda rahuldavad seoseid

$$A_1 = \mu P_{i1}, \quad A_2 = \mu R', \quad A_3 = \mu R'' \text{ ja } \quad A_k = \mu Q' = \mu Q'',$$

kus μ tähistab masina parameetritega määratud võrdetegurit.

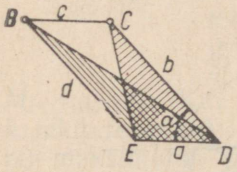
Seetõttu võime kirjutada

$$2A_k = A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2,$$

ehk

$$A_k = \sqrt{\frac{A_2^2 + A_3^2 - 2A_1^2}{2}}.$$

Saadud võrrandiga määratakse amplituud A_k, mis vastaks juhule, kus rootorile mõjuks ainuüksi korrigeeriva massi m_k inertsjõud Q' või Q''. Kuna mass m_k ja kaugus ϱ_k on teada, saame seosest



Joon. 779.

$$A_k = \mu Q' = \mu Q'' = \mu m_k \varrho_k$$

määrata masina võrdelisuse teguri μ:

$$\mu = \frac{A_k}{m_k \varrho_k}.$$

Jõu P_{i1} (disbalansi) suuruse võib nüüd arvutada valemiga

$$P_{i1} = \frac{A_1}{\mu} = \frac{A_1}{A_k} m_k \varrho_k = m_1 r_1.$$

Joonisel 778, a näidatud nurk α jõu P_{i1} ja korrigeeriva massi sihi vahel (teisel katsel) saadakse joonise 779 alusel koostatud valemist

$$\alpha = \arccos \frac{A_1^2 + A_k^2 - A_3^2}{2A_1 A_k}.$$

Viimane annab kaks võimalikku α väärtust: α_1 ja α_2. Valik nende vahel toimub katselisel teel. Vastukaal m_1 kinnitatakse rootorile (kaugusel r_1 selle pöörlemisteljest) algul nurga α_1, pärast nurga α_2 all. Sobivaks tuleb loomulikult lugeda seda vastukaalu asetust, mille puhul vibratsioon puudub ka kriitilise, s.o. resonantskiiruse läbimisel.

Pöörates rootori pingis ümber nii, et tasapinnad I ja II vahetavad kohad, võib samal viisil määrata tasapinnas II paikneva vastukaalu m_{II}. Disbalansi praktiliseks kõrvaldamiseks eemaldatakse balansseeritavalt detaililt nõutav osa massi (tavaliselt väljapuurimise teel) või moodustatakse vajalik vastukaal pealekeevitamise või jootmise abil.

§ 132. Nõukogude teaduse osast mehhanismide ja masinate dünaamika arengus

1°. Revolutsioonieelne vene mehhanismide ja masinate teooria koolkond pööras palju tähelepanu dünaamika küsimustele. Akadeemik P. L. Tšebõševi poolt avaldati XIX sajandi teisel poolel regulaatorite teooriale pühendatud teaduslik töö, kus uuriti regulaatorite üksikuid skeeme.

P. L. Tšebõšev pööras mehhanismide ja masinate dünaamika küsimustele suurt tähelepanu ka oma pedagoogilises tegevuses. Tema poolt Peterburi Ülikoolis loetud praktilise mehaanika kursuses käsitleti mitmeid mehhanismide ja masinate hõõrdumisega, masinate reguleerimise teooriaga ja lülide põrgetega seotud küsimusi.

Mehhanismide ja masinate dünaamika edasine areng on seotud automaatse reguleerimise teooria looja I. A. Võšnegradski klassikalisteks kujunenud uurimistöödega.

XIX ja XX sajandi vahetusel ilmub rida vene suurte teadlaste töid, mis on seotud hüdrodünaamilise hõõrdeteooriaga. Nimetatud teooria rajajaks on Peterburi Tehnoloogiainstituudi professor, Teaduste Akadeemia auliige N. P. Petrov, kes avaldas 1883. aastal uurimuse «Hõõrdumine masinates ja määrdevedeliku mõju sellele». Lugedes tapi ja laagri silinderpindu koaksiaalseteks, tuletab Petrov oma tuntud valemi hõõrdejõu määramiseks määritud laagris. Petrovi poolt läbiviidud eksperimentaalne kontroll andis tema teooriaga rahuldavalt kokkulangevaid tulemusi.

Hüdrodünaamilise hõõrdeteooria arenguloos moodustas järgneva suurema etapi 1904. aastal ilmunud N. J. Žukovski ja S. A. Tšaplõgini uurimistöö «Tapi ja laagri vahelise määrdekihi hõõrdumisest». Töö autoritel õnnestus anda määrdevedeliku liikumisvõrrandi täpse integreerimise meetod olukorras, kus tapp on täielikult määrdevedelikust ümbritsetud. Rea välismaiste uurijate analoogilised uurimused ilmusid alles 20 aastat hiljem.

Žukovski ja Tšaplõgini teooriat arendasid edasi ja täpsustasid oma töödes akadeemik L. S. Leibenson ja prof. N. I. Mertsalov.

Seega panid vene teadlaste koolkonna põhilised teoreetilised tööd aluse hüdrodünaamilise hõõrdumise teooriale, millel on tänapäeval eriline tähtsus laagrite arvutamisel.

N. J. Žukovski on mehhanismide ja masinate teooriasse puutuvate paljude uurimuste autoriks. Tema tööde seas on eriline positsioon mehhanismide kinemaatikat ja dünaamikat käsitleval uurimistööl pealkirjaga «Kinemaatilist ahelat hõlmavate dünaamiliste ülesannete taandamisest kangi tasakaalu küsimuseks» (1911. a.). Selles töös esitab N. J. Žukovski originaalse meetodi tasapinnaliste mehhanismide kiiruse ja kiirenduse leidmiseks. Seejärel, käsitades kiirusplaani kui jäika kangi, lahendab Žukovski selle

abil kõik mehhanismide kinetostaatika ja dünaamika põhilised ülesanded. Samas uurimuses on käsitletud ka hõõrdumise arvestamist kinetostaatika ülesannetes.

Žukovski poolt arendatud dünaamilise analüüsi meetodid on nii üldise iseloomuga, et nende alusel on võimalik esitada täielikult kogu tasapinnaliste mehhanismide dünaamika.

N. J. Žukovski on ühtlasi ka masinate reguleerimise teooriat käsitleva kursuse autoriks, mida ta luges Moskva Ülikoolis ja Kõrgemas Tehnikakoolis.

Nimetada tuleb ka K. E. Rerihi 1916. aastal avaldatud uurimistööd, milles esitatakse mitmesuguseid masinate liikumise uurimise meetodeid. Muuhulgas on seal käsitletud ka meetodit, mis on rajatud kineetilise energia ja redutseeritud inertsmomendi vahelist sõltuvust iseloomustavale diagrammile. Vaadeldavas töös on näidatud ka Lagrange'i võrrandi kasutamist muutuva redutseeritud massiga süsteemide arvutamisel. K. E. Rerih uuris veel masinate reguleerimise küsimust permanentse liikumise faasis lisahoomasside kasutamise abil.

Nimetatud ülesannete lahendamiseks rakendas K. E. Rerih peamiselt analüütilisi meetodeid, kasutades vastavate funktsioonide arendamist harmoonilisteks ridadeks.

Suureks panuseks mehhanismide ja masinate dünaamikasse on N. I. Mertsalovi kursus «Mehhanismide dünaamika» (1916. a.). Tuleb märkida, et kuni nimetatud teose ilmumiseni puudus maailmakirjanduses mehhanismide dünaamikat käsitlev süstemaatiline kursus. Wittenbaueri mehhanismide dünaamika kursus ilmus näiteks alles 1923. aastal. Seetõttu võib N. I. Mertsalovi raamatut pidada esimeseks suureks süstemaatiliseks tööks mehhanismide dünaamika alal. Raamatu peamise osa moodustab mehhanismide dünaamilise uurimise käsitlus. Masinate reguleerimise teooria ülesannete lahendamiseks ja etteantud jõududest põhjustatud masinate liikumise uurimiseks kasutas N. L. Mertsalov oma originaalset meetodit. Viimane oli rajatud N. J. Žukovski kangi rakendamisele, mille üksikutele osadele oli antud mehhanismi lülide mass. N. I. Mertsalov annab oma originaalsete meetoditega hooratta arvutamise ülesande uue lahendi, mis, nagu J. M. Gutjar hiljem näitas, on täpsem ja mugavam kui Wittenbaueri lahendus.

Töömasinate dünaamikat arendas oma töödes auakadeemik V. P. Gorjatškin. V. P. Gorjatškini ja tema õpilaste poolt lahendati põllutöömasinate dünaamika põhiküsimused ja uuriti mõningaid üldisi probleeme, mis käsitlesid masinate liikumise stabiilsuse teooriat, masinates esinevate löökide teooriat, masside, kiiruste ning jõudude suhteid masinates jne. V. P. Gorjatškin konstrueeris rea uusi aparaate masinates mõjuvate jõudude mõõtmiseks. Tänu V. P. Gorjatškini ja tema õpilaste suurtele eksperimentaalsetele töödele õnnestus katseliselt kindlaks teha mitmesuguste

põllutöömasinate ja -riistade liikumisrežiimid. V. P. Gorjatškini ja tema koolkonna uurimistööde tulemuste kokkuvõtted on avaldatud mitmeköitelises teoses «Põllutöömasinate teooria, konstruktsioon ja tootmine». Üks nimetatud väljaande köiteid, mis avaldati 1936. aastal, annab ülevaate kogu akadeemik V. P. Gorjatškini juhendamisel väljatöötatud eksperimentaalsest aparatuurist.

Seega võib kinnitada, et nii revolutsioonieelsete vene teadlaste (Tšebõšev, Võšnegradski, Petrov jt.) kui ka nõukogude epohhi teadlaste (Žukovski, Tšaplõgin, Mertsalov, Gorjatškin jt.) poolt loodi mehhanismide ja masinate dünaamika alal põhjapanevad teaduslikud tööd. Nimetatud töödele tuginedes areneski mehhanismide ja masinate dünaamika Nõukogude Liidus.

2°. Nõukogude koolkonna poolt lahendati kõigepealt rida tähtsaid ülesandeid masinates esinevate jõudude arvutamise alal.

Tasapinnaliste kinemaatiliste ahelate jõudude arvutuse esimese süstemaatilise käsitluse andsid N. G. Brujevitš ja G. G. Baranov 1935. aastal. N. G. Brujevitši töös on toodud tasapinnalistes mehhanismides esinevate jõudude arvutuse vektormeetod, kusjuures see on rajatud Assuri klassifikatsioonile. G. G. Baranov avaldas oma töös originaalse meetodi mitmesugustesse klassidesse kuuluvate tasapinnaliste mehhanismide jõudude arvutamiseks.

Hõõrdumist arvestav tasapinnaliste mehhanismide jõudude arvutus töötati välja mitmete teadlaste poolt. Nende seast nimetame G. A. Barsovi, kes on sel alal ilmunud esimese uurimistöö autoriks ja M. A. Skuridinit, kes nimetatud küsimust edasi arendas.

Võib väita, et mehhanismides esinevate jõudude arvutamise alal on nõukogude teadlaste poolt lahendatud kõik põhilised küsimused, mis puutuvad tasapinnalisi mehhanisme. Viimasel ajal on hakatud arendama jõudude arvutuse meetodeid, mis arvestavad asjaolu, et nn. tasapinnaliste mehhanismide lülid paiknevad tegelikult mitmes paralleelses tasapinnas, et üksikud kinemaatilised paarid kujutavad endast keerukaid konstruktsioone (väntvõllid, vändad jt.) ja et mehhanismi lülidele mõjuvate jõudude arvutamisel tuleb arvestada mitmele toele toetuvate võllide või konsoolselt laagerdatud väntade iseärasusi jne. Selles suunas on nõukogude teadlased teinud mitu uurimistööd. Nimetame nende hulgast siin A. P. Malõševi ja A. D. Nevski uurimusi.

V. V. Dobrovolskile kuulub staatiliselt määramatute süsteemide dünaamikat käsitlev uurimus, kus esitatakse nimetatud süsteemides rakendatavad jõudude arvutuse meetodid. Kogu uurimus on rajatud selle autori väljatöötatud mehhanismide üldisele klassifikatsioonile.

3°. Rida nõukogude teadlasi on uurinud masinate liikumisrežiimide küsimust. Masinate liikumist ja nende käigu reguleerimist käsitleb 1930. aastal avaldatud J. L. Nikolai töö. 1935. a. ilmunud I. I. Artobolevski uurimistöös käsitleti masinate käivitusfaasi, per-

manentse režiimi ja seiskumisfaasi uurimist olukorras, kus mõjuvad jõud sõltuvad lülide asenditest.

Kiirusest sõltuvate jõudude mõjul toimuvaid masina liikumisi uurisid oma töödes B. M. Abramov, I. I. Artobolevski, M. I. Bat, V. A. Zinovjev, A. N. Irošnikov, M. A. Skuridin jt. Nende autorite töödes esitatakse mitmeid analüütilisi ja grafoanalüütilisi lähendusmeetodeid masina liikumisvõrrandi lahendamiseks.

Hooratta inertsmomendi arvutamisele on nõukogude teadlased pühendanud palju uurimusi. Ülal juba mainiti sellealast N. I. Mertsalovi tööd. Mertsalovi meetodit arendas edasi J. M. Gutjar. I. I. Artobolevski lahendas hoomasside valiku ülesande Lagrange'i võrrandi alusel, kasutades redutseeritud momentide diagrammi. Seda meetodit täpsustasid ja arendasid edasi oma töödes L. I. Kremenstein, S. D. Petrovski, F. L. Litvin, A. A. Valkovski ja E. Fogelson.

Palju tähelepanu on nõukogude teadlased pööranud dünaamiliste koormuste tasakaalustamise probleemidele. Kinemaatilisi paare koormavate dünaamiliste jõudude tasakaalustamist käsitlevad L. P. Smirnovi, B. V. Šitikovi jt. uurimused. Nimetatud töödes on toodud pöörlevates detailides esinevate inertsjõudude grafoanalüütilised uurimismeetodid, esitatud mitut tüüpi balansseerimismasinate teooria ja antud kiirestipöörlevate detailide üldised tasakaalustamismeetodid. B. V. Šitikov on ühtlasi praktikas laialdaselt kasutatava originaalse balansseerimismasina loojaks.

Masinate vundamendil tasakaalustamise probleemiga on tegelnud nii jõu- kui ka mitmesuguste töömasinate eriteadlased. Autode ja lennukite sisepõlemismootorite tasakaalustamisküsimusi on oma töödes käsitlenud I. Š. Neiman, M. V. Semjonov, N. G. Brujevitš, J. D. Lvov jt. Töömasinate tasakaalustamisega tegeles peamiselt V. P. Gorjatškin koos oma õpilastega. Nende töödes on käsitletud mitmesuguseid põllutöömasinate, keemiatööstuse masinate jms. tasakaalustamise küsimusi.

Masinate vundamendil tasakaalustamise üldistele küsimustele on pühendatud V. A. Judini, M. V. Semjonovi, J. L. Geronimuse jt. uurimused. Nimetatud töödes tuuakse mehhanismides toimivate inertsjõudude määramiseks sobivad analüütilised ja grafoanalüütilised meetodid ning antakse vastukaalude valikuks küllaltki käepäraseid juhiseid. J. L. Geronimus lahendas tasakaalustamisprobleemi funktsiooni parima lähendamise meetodil.

Masinate ja mehhanismide kasuteguri määramisega on tegelnud suur hulk autoreid. Liitmasinate ja -mehhanismide kasuteguriga seotud üldisi küsimusi on uurinud oma töödes V. V. Dobrovolski. Nendes töödes on käsitletud masina mehaanilise kasuteguri mõistega seotud põhiküsimusi. Lisaks sellele uuris autor tehnikas suurt tähtsust omavat diferentsiaal-hammasreduktorite kasuteguri määramise küsimust.

Liitmasinate ja -mehhanismide kasutegurite arvutamisega tegelesid oma töödes ka H. F. Ketov ja N. I. Koltšin. Nad võtsid kasutusele nn. kadude koefitsiendi mõiste, mis võimaldab masina tööd hinnata väikeste kasulikkude koormuste puhul.

Diferentsiaal-hammasmehhanismide kasuteguri küsimust arendas üksikasjaliselt oma töödes G. G. Baranov. Olemasolevaid diferentsiaal-hammasmehhanismide kasutegurite määramise meetodeid aga täpsustas N. G. Brujevitš, käsitledes hõõrdejõudude mõju nimetatud mehhanismide kasutegurile.

Uusi meetodeid sel alal esitas veel M. A. Kreines. Tema töödes on arendatud meetodid, mis võimaldavad mitte ainult määrata diferentsiaal-hammasmehhanismide kasutegureid, vaid ühtlasi ka projekteerida sääraste mehhanismide kõige ratsionaalsemaid skeeme.

Kõne all olevate mehhanismide kasutegurite määramisega on tegelnud veel H. F. Ketov, A. A. Nikitin, V. N. Kudrjavtsev jt. Nimetatud teadlaste töödes on uuritud mitmeid mehhanismitüüpe ja arendatud nende kasutegurite määramise süstemaatilisi võtteid.

4°. Siirdudes kokkuvõtte tegemisele, tuleb märkida, et nõukogude teadlased on tublisti edasi viinud masinates esinevate dünaamiliste koormuste tasakaalustamise küsimust, andnud liitmasinate ja -mehhanismide mehaanilise kasuteguri mõistele üldise põhjenduse, tunduvalt arendanud diferentsiaal-hammasmehhanismide kasuteguri teoreetilise uurimise meetodeid ja teinud mõningaid katseid töömasinate energiabilansi uurimiseks. Masinale mõjuvate jõudude poolt põhjustatud liikumise uurimise alal on üksikasjaliselt välja töötatud grafoanalüütilised uurimismeetodid olukorras, kus jõud sõltuvad masina lülide asenditest. Lisaks sellele on arendatud mõningaid ligikaudseid liikumisvõrrandi integreerimisvõtteid juhu jaoks, kus jõud sõltuvad kiirusest. On esitatud uusi meetodeid masina hoomasside arvutamiseks.

Mehhanismide ja masinate dünaamika lähemateks ülesanneteks on masinate liikumise uurimine olukorras, kus temale mõjuvad jõud sõltuvad kiirusest, ajast ja paigutustest. Samuti tuleb arendada mitme vabadusastmega süsteemide ja mehhanismide dünaamikat. Uueks uurimisele tulevaks probleemiks on masinate energiabilansi ja selle hindamise küsimus. Erilist tähelepanu tuleb tulevikus pöörata masinate dünaamika eksperimentaalsele uurimisele. Esimeses järjekorras tuleb arendada masinates toimivate jõudude ja momentide katselise määramise meetodeid. Tähtsaks küsimuseks on samuti ka masina liikumisrežiimide eksperimentaalne uurimine neile mõjuvate jõudude, kiiruste ja masside mitmesuguste suhete juures.

5°. Käesolevas lühikeses ülevaates ei olnud võimalik anda täielikku ülevaadet mehhanismide ja masinate dünaamika nõukogude koolkonna arengust. Paljude autorite poolt viimase kolmekümne

aasta jooksul avaldatud töödes on nimetatud alal saadud suuri tulemusi. Nõukogude teadlaste tööd on tublisti ette jõudnud välismaa teadlaste uurimustest.

Nõukogude koolkonna teadlaste edusammud mehhanismide ja masinate teoorias, seehulgas ka mehhanismide ja masinate dünaamikas, ei lahenda aga kaugeltki veel mitte neid suuri probleeme, mida partei ja valitsus on masinaehituse teooria ja praktika ette seadnud. Meie kohuseks on luua kiirekäigulisi, suure tootlikkusega automaatmasinaid, mis määravad nõukogude tehnika kõrge taseme. Pole kahtlust, et nõukogude mehhanismideteadus lahendab edukalt kõik temale antud ülesanded.

AINEREGISTER

Abisilinderratas 395
Absoluutse viskoossuse tegur 515
Aeglustaja 318
Ainult translatsioonipaare sisaldav kolmelüliline kiilmehhanism 95
Aksiaalne (tsentreeritud) nukkmehhanism 49
Aksiaalne (tsentreeritud) väntmehhanism 44
Aksiaalsamm 385
Aksoid 386
Algkoonus 391
Alglüli 85
Algringjoon 306, 324
Algringjoon, töötlemisel 355
Aluslüli 117, 203
Aluskoonus 392
Alusringjoon 332
Aperioodiline kiiruse kõikumine 642
Archimedese tigu 403
Asendav kinemaatiline ahel 101
Asendav lüli 102
Asendav mass 539
Asendid (lülide) 168
Asenditingimused 414
Asenduspunkt 539
Assuri klassifikatsioon 112
Assuri punkt 201
Astaatiline regulaator 679
Aste (reduktori) 318
Astmeteta reduktor 525
Astmeteta ülekannet võimaldav frontaalne friktsioonmehhanism 61
Asünkroonmootor 662
Auto diferentsiaal 390
Automaatliin 11
Automaat-tehas 11
Autopiloodi neljalüliline roolimehhanism 106
Avatud kinemaatiline ahel 82

Balansseerimismasin 718
Bitsentroid 244, 249

Coriolise kiirendus 144, 186

Desaksiaalne (detsentreeritud) nukkmehhanism 49
Desaksiaalne (detsentreeritud) väntmehhanism 44
Desaksiaalsus 44, 438
Detsentreeritud (desaksiaalne) nukkmehhanism 49
Detsentreeritud (desaksiaalne) väntmehhanism 44
Diaad 115
Diferentsiaal (autol) 390
Diferentsiaalhammasmehhanism 55, 312
Diferentsiaalreduktor, suletud 320
Disbalanss 722
Dobrovolski valem 100
Dünaamiline (lisa)koormus 481, 715
Dünamograaf 482
Dünamomeeter 482, 484

Ebaühtluse tegur, käigu 644
Ebaühtluse tegur, regulaatori 675
Ekstsentrik 40
Ekstsentrikmehhanism 41
Ekstsentrikuga šarniirnelilülik 40
Ekvidistantsed kõverad 265, 292, 295, 296, 303
Elektriseadmetega mehhanism 66
Elliptiline friktsioonratas 135
Energiabilansi võrrand 582
Epitsükliline liikumine 315
Epitsükloid 368
Epitsükloid, pikendatud 353
Eripunkt 201, 203, 205, 558
Erisurve kontaktpunktis 401
Esimese järgu inertsjõud 710
Etteantud liikumisseaduse reprodutseerimine 408
Etteantud trajektoori reprodutseerimine 410
Euleri valem 528
Euler-Savary võrrand 165
Evolvent 329
Evolventfunktsioon 331
Evolvent-koonushambumine 392
Evolventkruvipind 382

Evolventne kaaskoonuspind 392
Evolvent, ringjoone 324, 328
Evolvent, sfääriline 392
Evolventtigu 406

Fiktiivne lüli 101
Fotoelektriline tajur 463
Friktsioonmehhanism 61
Friktsioonmehhanism, frontaalne, astmeteta ülekannet võimaldav 61
Friktsioonmehhanism, koonusratastega 61
Friktsioon-planetaarmehhanism 61
Friktsioonratas 61, 523
Friktsioonratas, elliptiline 135

Gabariitmõõted, minimaalsed 283
Globoidhambumine 404
Graafiline diferentseerimine 233
Graafiline integreerimine 238
Grupi modifikatsioonid 115
Grupp 109, 113, 548
Grupp, kolmehaarmeline 201
Gruppide struktuurivalemid 110, 126

Haardejõud 523
Haardekaar 526
Haardenurk 526
Haardetegur 519
Haardevaru tegur 524
Haare 115
Hambad, madalad 327
Hamba jala kõrgus 324
Hamba jalg 324
Hambakamm 347
Hamba kogukõrgus 324
Hamba paksus 325
Hamba pea 324
Hamba pea kõrgus 324
Hambaprofiili töötav osa 336
Hambatõukur 346
Hambavahe laius 325
Hambumine 52
Hambumine hammaslatiga 339
Hambumine, sirgete hammastega silindriline 52
Hambumise kestuse koefitsient 342
Hambumise samm 325
Hambumise sujuvuse koefitsient 342
Hambumisjoon, praktiline 336
Hambumisjoon, teoreetiline 336
Hambumiskaar 341, 372
Hambumisnurk 332, 335, 363
Hambumisnurk, montaažil 335
Hambumispoolus 332
Hambumisvõimsus 597
Hammaslatt 52, 339
Hammasmehhanism 52, 243, 305
Hammasmehhanism, ruumiline 56
Hammasmehhanism, tasapinnaline 52
Hammasratas 52
Hammasratas, kaldhammastega 382
Hammasratas, koonus- 386
Hammasratas, mitteümmargune silindriline 53
Hammasrataste lihtseeria (lihtrida) 309
Hammasratas, ümmargune silindriline 53
Hammasreduktor 55
Hammaste arv, minimaalne lubatav 350
Hammasülekanne 52
Harti suunavmehhanism 450
Helikoid, laotuv 400
Hetkeline kiirenduste tsenter 154
Hetkeline kiiruste tsenter 132
Hetkeline nurkkiirus 136
Hodograaf 231
Hoob 49
Hoolause 580
Hoomoment 657
Hooratas 648
Hooratta inertsmoment 649, 652, 654, 658, 661
Hooratta karakteristik 657
Hõõrdejõud 494
Hõõrdekaod liugehõõrdel 257
Hõõrdemehhanism 61
Hõõrdenurk 500
Hõõrderatas 61
Hõõrdering 514
Hõõrdetegur 498
Hõõrdetegur, redutseeritud (kuul- või rull-laagris) 523
Hõõrdetegur, vedelikulisel hõõrdumisel 515
Hõõrdumine, kuiv 494
Hõõrdumine, poolkuiv 494
Hõõrdumine, poolvedelikuline 494
Hõõrdumine, vedelikuline 494
Häiriv jõud 721
Häiriv mass 719
Häiriv moment 726
Hüdrauliliste seadmetega mehhanism 64, 65
Hüperboloidrattad 398
Hüpotsükliline liikumine 315
Hüpotsükloid 368

Impulstajur 462
Inertsjõud 480
Inertsjõud, esimese (teise) järgu 710
Inertsjõud, mehhanismi, resulteeriv 700
Inertsjõudude peamoment 702
Inertsjõudude peavektor 702

Inertsmoment, hooratta 649, 652, 654, 658, 661
Inertsmoment, redutseeritud 615
Inertsregulaator 670
Inertstajur 469
Inversor 449
Inversor, Lipkin-Peaucellier 450
Involutum 331
Isepidurdus 506, 512, 584
Isepidurduv (planetaar) reduktor 318

Jalgaderingjoon 324, 364
Jaotuskoonus 397
Jaotusringjoon 326, 355
Joonestavad mehhanismid 412
Joonkiirenduste mõõtmine 465
Joonkiiruste mõõtmine 460
Joonpaigutuste mõõtmine 455
Juhtmehhanismid 448
Juhtsoonega nukkmehhanism 52
Juurdekasvude meetod 236
Jõud, häiriv 721
Jõud, kasuliku koormuse 480
Jõud, motoorne 85, 480
Jõud, redutseeritud (taandatud) 601, 606
Jõud, takistus- 481
Jõud, tasakaalustav 564, 607
Jõudude ülekandmine 255
Jõumasin 9, 10
Jõuplaan 549, 558
Jääkmoment 658

Kaarhammastega koonusratas 397
Kaaskoonuspind, evolventne 392
Kaasmähisjoon 159, 161, 162, 249
Kaasmähiskõverate hambumisjoon 251
Kaastsentroid 136
Kadude koefitsient 583
Kahekordne (kaksik-) universaalliigend 442
Kahekäiguline tigu 403
Kahe liikuvusastmega kiilmehhanism 101
Kahelüliline mehhanism 37
Kahe nookuriga mehhanism 437
Kahe nookuriga šarniirnelilülik 39
Kahevändaline šarniirnelilülik 38
Kahjulik takistus 481
Kahjulik (kasutu) töö 481
Kaldenurk 382
Kaldhammastega hammasratas 382
Kaldhammastega koonus (hammas)ratas 397
Kaod liugehõõrdel 257
Karakteristik, hooratta 657
Karakteristik, mehaaniline 662
Karakteristik, regulaatori 677
Kasulik koormus (kasuliku koormuse jõud) 480, 481
Kasulik töö 481
Kasutegur, mehaaniline 583
Kattetegur 342
Kaudse toimega regulaator 672
Keps 38
Kepsukõverad 173, 176, 431, 434
Keskmine kiirus 643
Kiikuva kulissiga (kuliss)mehhanism 425, 438
Kiil-friktsioonrattad 524
Kiil-liugur 510, 512, 524
Kiilmehhanism 59, 124
Kiilmehhanism, kahe liikuvusastmega 101
Kiilmehhanism, kolmelüliline (ainult translatsioonipaare sisaldav) 95
Kiilmehhanism, ruumiline 94, 126
Kiilmehhanism, ühe liikuvusastmega 101
Kiirendus, Coriolise 144, 186
Kiirenduse mastaap 181
Kiirendus, normaal- 144
Kiirendusplaan 148
Kiirendusplaani poolus 148
Kiirendus, tangentsiaal- 144
Kiiruse kõikumine, aperioodiline 642
Kiiruse kõikumine, perioodiline 642
Kiiruse mastaap 179
Kiiruse muutumise koefitsient 423
Kiirus, keskmine 643
Kiirus, nominaalne 579, 644
Kiiruspiltide meetod 308
Kiirusplaan 146
Kiirusplaani poolus 146
Kiirusplaan, pööratud 179, 207, 604
Kiivad teljed 58
Kineetiline energia 611
Kineetiline hõõrdumine 496
Kinemaatiline ahel 9, 82, 85
Kinemaatiline ahel, avatud 82
Kinemaatiline ahel, staatiliselt määratud 546
Kinemaatiline ahel, suletud 83
Kinemaatiline diagramm 227, 270
Kinemaatiline element 8
Kinemaatiline lihtahel 82
Kinemaatiline liitahel 82
Kinemaatiline paar 8, 68
Kinemaatiline paar, kõrgem 79, 98
Kinemaatiline paar, madalam 79, 99
Kinemaatiline skeem 85, 241
Kinemaatilise paari klass 71
Kinemaatilise paari lukustamine 52, 79, 406

Kinemaatiliste paaride tingmärgid 79
Kinetostaatiline meetod 480
Kinnikiilumine juhtpindades 509
Kinnislüli 8, 37, 563
Kolmehaarmeline grupp 201
Kolmelüliline, ainult translatsioonipaare sisaldav kiilmehhanism 95
Kolmelüliline kruvimehhanism 95
Konsool 509
Kontaktpunkt 141
Konvoluuttigu 406
Koonusdiferentsiaalmehhanism 389
Koonusfriktsioonrattad 524
Koonushambumine, evolvent- 392
Koonushammasratas 386
Koonus(hammas)ratas-mehhanism 57, 108
Koonushõõrdrattad 387
Koonuslatt 57
Koonusnukkmehhanism 303
Koonusplanetaarmehhanism 389
Koonusratas, kaarhammastega 397
Koonusratas, kaldhammastega 397
Koonusratas, tasapinnaline 57
Koonusratastega friktsioonmehhanism 61
Koonus-sisehambumine 57
Koonusvälishambumine 57
Koormus, dünaamiline 715
Kopeerimismeetod 345
Korrigeeriv mass 720
Kriitiline survenurk 510
Kruvimehhanismid 60, 126, 445
Kruvimehhanism, kolmelüliline 95
Kruvipaar 76, 105
Kruvipind (evolvent-) 382
Kruvirattad 399
Kuiv hõõrdumine 494
Kujundav sirge 332
Kujundav tasapind 392
Kuliss 45
Kulissmehhanism 198, 219, 224, 438
Kulissmehhanism, kiikuva kulissiga 425, 438
Kulissmehhanism, neljalüliline 45
Kulissmehhanism, neljalüliline kahe liuguriga 46
Kulissmehhanism, pöörleva kulissiga 438
Kulutatud töö 481
Kõrgem kinemaatiline paar 79, 98
Kõva löök 276
Kõverusraadius 162
Kõverustsenter 164, 165, 329
Käigu ebaühtluse tegur 644
Käigukast 321
Käivitusaeg 578
Käänupoolus 157
Käänuringjoon 157, 164, 165, 166
Kümograaf 455

Laotuv helikoid 400
Latthambumine, silindriline 53
Laup-friktsioonrattad 525
Laupsamm 385
Lihtahel, kinemaatiline 82
Liigne liikuvusaste (vabadusaste) 96, 444
Liikumatu lüli 8, 563
Liikumine, epitsükliline 315
Liikumine, hüpotsükliline 315
Liikumine pausidega 373, 374
Liikumine, perioodiline 579
Liikumise faas (režiim), permanentne 578, 583
Liikumise poolus 142
Liikumise pööramise võte 263, 265, 266
Liikumise reprodutseerimine 243
Liikumise ülekandenurk 256, 258, 280
Liikumishõõrdumine 496
Liikumispausidega mehhanism 453
Liikumisseaduse ligikaudne reprodutseerimine 425
Liikumisseadus, vedava lüli 169
Liikumisvõrrand 618
Liikuv lüli 8
Liikuv telg 54
Liikuv tsentroid 159
Liikuvusaste 84, 85
Liikuvusaste (vabadusaste), liigne 96, 444
Liitahel, kinemaatiline 82
Lipkin-Peaucellier inversor 450
Lisakoormus, dünaamiline 715
Lisaliikumine 639
Lisa(sideme)tingimus 87
Liugehõõrdekaod 257
Liugehõõrdumine 495
Löök, kõva 276
Löök, pehme 276
Lüli, asendav 102
Lüli element 8
Lüli, fiktiivne 101
Lüli, liikumatu (paikne) 8
Lüli, liikuv 8
Lüli, vedav 85, 563
Lüli, veetav 85

Madalad hambad 327
Madalam kinemaatiline paar 79, 99
Magnetiline tahhomeeter 460, 461
Magnettajur 463
Malta risti mehhanism 55, 376
Masin 9

Masinagregaat 9
Masina liikumise koguaeg 578
Masinautomaat 11
Mass, häiriv 719
Masskese, mehhanismi 686, 688
Mass, korrigeeriv 720
Mass, redutseeritud 615
Mastaap, kiirenduse 181
Mastaap, kiiruse 179
Mastaap, pikkuse 168
Mehaaniline karakteristik 491, 662
Mehaaniline kasutegur 583
Mehaaniline transmissioon 10
Mehhanism 9, 85
Mehhanism, elektriseadmetega 66
Mehhanism, hüdrauliliste seadmetega 64, 65
Mehhanismide klassifitseerimine 111, 126
Mehhanismide perekonnad 87
Mehhanismi kinnikiilumine 256
Mehhanismi resulteeriv inertsjõud 700
Mehhanismi tsentrifugaalmoment 687
Mehhanismi üldine masskese 686, 688
Mehhanism, kahelüliline 37
Mehhanism, kahe nookuriga 437
Mehhanism, kiikuva kulissiga 425, 438
Mehhanism, malta ristiga 55, 376
Mehhanism, liikumispausidega 453
Mehhanism, mitteümmarguste h-ratastega 261
Mehhanism, neljalüliline 38
Mehhanism, neljalüliline nurkvarbadega 91
Mehhanism, painduva lüliga 62, 453
Mehhanism, pneumaatiliste seadmetega 64
Mehhanism, ruumiline 104, 126
Mehhanism, sfääriline 93, 126
Mehhanism, tasapinnaline 85, 87, 96, 97
Mehhanism, veerevate hoobadega 50, 261
Miinusrattad 355
Minimaalne lubatav hammaste arv 350
Minimaalsed gabariitmõõted 283
Mitteümmargune silinderhammasratas 53
Mitteümmarguste hammasratastega mehhanism 261
Moderaator 670
Moment, häiriv 720
Moment, motoorne 483
Moment, reaktiivne 483
Moment, tasakaalustav 564
Montaaži hambumisnurk 335
Motoorne jõud 85, 480
Motoorne moment 483
Muuteringjoon 157
Mõjujoon 137, 139
Mähisjoon 159
Mähisköver 159
Mähitav 159
Mähkija 159

Neljalüliline autopiloodi roolimehhanism 106
Neljalüliline kahe liuguriga kulissmehhanism 46
Neljalüliline kulissmehhanism 45
Neljalüliline mehhanism 38
Neljalüliline nurkvarbadega mehhanism 91
Normaalkiirendus 144
Nominaalkiirus 579, 644
Nurkkiirus, hetkeline 136
Nurkvarbadega neljalüliline mehhanism 91
Nihutustegur 357
Nookur 38, 437
Noolhammastega ratas 385
Normaalsamm 385
Nuki profiil 273, 290
Nukk 49, 273
Nukkmehhanism 49, 243, 264
Nukkmehhanism, aksiaalne (tsentreeritud) 49
Nukkmehhanism, desaksiaalne (detsentreeritud) 49
Nukkmehhanism, juhtsoonega 52
Nukkmehhanism, ruumiline 302
Nukkmehhanism, tasapinnalise taldrikuga 50
Nullhambumine 357
Nullrattad 327, 355
Nurkkiirenduse mõõtmine 468
Nurkkiiruse mõõtmine 461
Nurkpaigutuse mõõtmine 458

Oktoidhambumine 398
Otsese toimega regulaator 672
Otssamm 385

Paikne lüli 8, 563
Paikne telg 54
Paikne tsentroid 159
Painduva lüliga mehhanism 62, 453
Pantograaf 433
Pantograaf, Sylvesteri 433
Parasiithammasrattad 311
Passiivne sidemetingimus (side) 96
Pausidega liikumine 373, 374
Peaderingjoon 324, 364

Peamoment, inertsjõudude 702
Peapunkt 693
Peavektor, inertsjõudude 702
Pehme löök 276
Pendelmootor 483
Perioodiline kiiruse kõikumine 642
Perioodiline liikumine 579
Permanentse liikumise faas (permanentne režiim) 578, 583
Pidurseade 484
Pikendatud epitsükloid 353
Pikkuse mastaap 168
Planetaar-hammasmehhanism 55, 312, 314
Planetaarkäigukast 323
Planetaarreduktor 317
Plusshambumine 357
Plussrattad 355
Pneumaatiliste seadmetega mehhanism 64
Poolkuiv hõõrdumine 494
Poolvedelikuline hõõrdumine 494
Praktiline hambumisjoon 336
Praktiline profiil 265, 292, 295, 299, 303
Profiil, praktiline 265, 292, 295, 299, 303
Profiil, teoreetiline 265, 292, 299, 303
Põhiliikumine 638
Põrkmehhanism 56, 380
Päikeseratas 315
Pööratud kiirusplaan 179, 207, 604
Pöörleva kulissiga (kuliss-) mehhanism 438
Püsiva liikumise aeg 578

Reaktiivne moment 483
Reaktsioonid, kinemaatilistes paarides 548
Reduktor, astmeteta 525
Reduktor isepidurduv (planetaar-) 318
Redutseerimislüli 601, 612, 613
Redutseerimispunkt 601, 602, 613
Redutseeritud (taandatud) hõõrdetegur (kuul- või rull-laagris) 523
Redutseeritud (taandatud) inertsmoment 615
Redutseeritud (taandatud) jõud 601, 606
Redutseeritud (taandatud) mass 615
Regulaator 643, 670
Regulaator, astaatiline 679
Regulaator, inerts- 670
Regulaator, kaudse toimega 672
Regulaator, otsese toimega 672
Regulaator, staatiline (stabiilne) 679
Regulaator, tsentrifugaal- 670
Regulaatori ebaühtluse tegur 675
Regulaatori karakteristik 677
Regulaatori tasakaalukõver 675
Regulaatori tasakaalu nurkkiirus 675
Regulaatori toetusjõud 674
Regulaatori tundetuse tegur 680
Reohord 456
Ringjoon, alus- 332
Ringjoon, jalgade 324, 364
Ringjoon, jaotus- 326, 355
Ringjoon, peade 324, 364
Ringjoone evolvent 324, 328
Roberts-Tšebõševi teoreem 434
Roolimehhanism, autopiloodi, neljalüliline 106
Rotatsioonipaar 38, 76, 99, 105
Rulett 160, 366
Rullumismeetod 345, 354
Ruumiline hammasmehhanism 56
Ruumiline kiilmehhanism 94, 126
Ruumiline mehhanism 104, 126
Ruumiline nukkmehhanism 302
Ruumiline seitsmelüliline šarniirmehhanism 90
Ruumiline šarniirnelilülik 443
Ruumiline varbmehhanism 47

Samm, normaal- 385
Samm, ots- (laup-) 385
Samm, telg-(aksiaal-) 385
Sarnasustegur 433
Satelliit 315
Satelliitide raam 315
Seiskumisaeg 578
Seisuhõõrdejõud 499, 518
Seisuhõõrdenurk 496
Seisuhõõrdetegur 496, 518
Seisuhõõrdumine 496
Seitsmelüliline ruumiline šarniirmehhanism 90
Servomootor 672
Sfääriline evolvent 392
Sfääriline mehhanism 93, 126, 438
Sfääriline šarniirnelilülik 47
Sfääriliste mehhanismide struktuurivalem 107
Sidemereaktsioon 478, 496
Sidemetingimus (side) 69, 83
Sidemetingimus (side) passiivne 96
Silinderfriktsioonrattad 306
Silinderhammasratas, ümmargune 53
Silinderhammasrattad 306
Silindernukkmehhanism 302
Silindriline latthambumine 53
Sirgete hammastega silindriline hambumine 52
Sirg-juhtmehhanism 411, 449
Sisehambumine 53, 307, 337
Sisepaar 116

Sisselõige 349
Skeem, kinemaatiline 85, 241
Skeemi parameetrid 407, 413, 427
Somov-Malõševi valem 84, 105
Staatiline hõõrdumine 496
Staatiline (stabiilne) regulaator 679
Staatiliselt määratud kinemaatiline ahel 546
Struktuurivalem 83
Struktuurivalem, sfääriliste mehhanismide 107
Struktuurivalem, ühtne 89
Struktuurivalemid, gruppide 110, 126
Suletud diferentsiaalreduktor 320
Suletud kinemaatiline ahel 83
Survenurk, kriitiline 510
Suunavmehhanism, Harti 450
Suunavmehhanismid 448
Sylvesteri pantograaf 433
Šabloon 174
Šarniir-antiparallelogramm 42, 135
Šarniirmehhanism, ruumiline seitsmelüliline 90
Šarniirnelilülik 38, 208, 427, 434, 437
Šarniirnelilülik, ekstsentrikuga 40
Šarniirnelilülik, kahe nookuriga 39
Šarniirnelilülik, kahevändaline 38
Šarniirnelilülik, ruumiline 443
Šarniirnelilülik, sfääriline 47
Šarniirnelinurk (vt. ka šarniirnelilülik) 94, 208
Šarniir-parallelogramm 41
Šarniirsirgesti, Tšebõševi 42

Taandatud (redutseeritud) jõud 601, 606
Tahhogramm 465, 578
Tahhomeeter, magnetiline 460, 461
Tahhomeeter, tsentrifugaal- 461
Tajur 456, 458, 460, 468, 469, 482
Tajur, fotoelektriline 463
Tajur, impuls- 462
Tajur, inerts- 469
Tajur, magnetiline 463
Takistusjõud 481
Tangenskulissmehhanism 46
Tangentsiaalkiirendus 144
Tapphambumine 373
Tappmehhanism 375
Tasakaalu kõver, regulaatori 675
Tasakaalu nurkkiirus, regulaatori 675
Tasakaalustav jõud 564, 607
Tasakaalustav moment 564
Tasapinnaline hammasmehhanism 52
Tasapinnaline koonusratas 57
Tasapinnaline mehhanism 85, 87, 96, 97
Tasapinnalise taldrikuga nukkmehhanism 50
Teise järgu inertsjõud 710
Telg, liikuv 54
Telg, paikne 54
Telgsamm 385
Telgede vahe korrigeeritud hambumises 363
Teljed, kiivad 58
Teoreetiline hambumisjoon 336
Teoreetiline profiil 265, 292, 299, 303
Tetraad 120
Tigu 58, 402
Tigu, Archimedese 403
Tigu, evolvent- 406
Tigu, kahekäiguline 403
Tigu, konvoluut- 406
Tigu, ühekäiguline 403
Tigufrees 348
Tiguhambumise peatasapind 403
Tigukeere 58, 405
Tiguratas 58, 402
Tiguülekanne 107, 402
Toetusjõud, regulaatori 674
Topeltprofiil 296
Trajektoorid 168
Trajektoori reprodutseerimine 431
Translatsioonipaar 76, 99, 105
Transmissioon, mehaaniline 10
Triaad 117
Tsentraalratas 315
Tsentreeritud (aksiaalne) nukkmehhanism 49
Tsentreeritud (aksiaalne) väntmehhanism 44
Tsentrifugaaljõu sirge 678
Tsentrifugaalmoment, mehhanismi 687
Tsentrifugaalregulaator 670
Tsentrifugaaltahhomeeter 461
Tsentrite joon 137, 139
Tsentroid 132, 135, 162, 523
Tsentroidide hambumisjoon 249
Tsentroidiväline tapphambumine 373
Tsentroid, liikuv 159
Tsentroidmehhanism 50, 136, 243
Tsentroid, paikne 159
Tsükloid 324
Tsükloidprofiil 366
Tšebõševi šarniirsirgesti 42
Tšebõševi valem 97, 104
Toereaktsioonid 507
Tundel 456, 468, 469
Tundetuse tegur, regulaatori 680
Tõkestuskaar 375
Tõukur 49
Tähtmehhanism 55, 373, 375
Täienduskoonus 394

Täispöördetingimused 435
Täisreaktsioon 501
Töö, kahjulik 481
Töö, kasulik 481
Töö, kulutatud 481
Töömasin 9, 10
Tühikäik 584

Universaalliigend 438
Universaalliigend, kahekordne 90
(kaksikuniversaalliigend) 442

Vabadusaste (liikuvusaste) liigne 96, 444
Vabadusastmete arv 70, 83
Vahehammasratas 309, 311
Vahetatavuse tingimus 324
Varb 49
Varb-kruvimehhanism 60
Varbmehhanism 37
Varbmehhanism, ruumiline 47
Vedava lüli liikumisseadus 169
Vedav lüli 85, 563
Vedelikuline hõõrdumine 494
Vedelikulise hõõrdumise hõõrdetegur 515
Veerehõõrdemoment 518
Veerehõõrdetegur 518
Veerehõõrdumine 495
Veerevate hoobadega mehhanism 50, 261
Veetav lüli 85
Võnkepunkt 534, 542
Välishambumine 53, 307, 335
Välispaar 115
Vänt 38, 437
Väntmehhanism 43, 214, 227, 438
Väntmehhanism, aksiaalne (tsentreeritud) 44
Väntmehhanism, desaksiaalne (detsentreeritud) 44
Väändekaar 383
Väändemoment 484, 485, 486

Ühekäiguline tigu 403
Ühe liikuvusastmega kiilmehhanism 101
Ühtne struktuurivalem 89
Ülekandemehhanism 10
Ülekandesuhe 139, 307
Ülekandetegur 139
Ümmargune silinderhammasratas 53

Žukovski kang 606
Žukovski meetod 606, 638

NIMEDE REGISTER

Abramov B. M. 726
Amonton G. 496—498
Apuhtin G. I. 474
Artobolevski I. I. 33, 68, 331, 422, 471, 473, 507, 725, 726
Artobolevski S. I. 33, 472
Assur L. V. 30, 31, 34, 108, 122, 472, 473, 725

Baranov G. G. 32, 413, 471, 473, 476, 725, 727
Barsov G. A. 570, 725
Bat M. I. 726
Bernoulli D. 17
Blohh Z. S. 413, 422, 476
Boldõrjev V. V. 474
Brašman N. D. 18
Brujevitš N. G. 32, 211, 471—473, 725—727
Brumberg R. M. 600
Bunjakovski V. J. 20

Coulomb Ch. 496—498

Dimentberg F. M. 474
Dobrovolski V. V. 32, 89, 100, 413, 422, 471, 472, 473, 475, 476, 600, 725, 726

Edelstein B. V. 331
Euler L. 17, 18, 165, 496, 528

Fogelson E. 726
Frolov K. D. 17

Gavrilenko A. P. 25, 364
Gavrilenko V. A. 32, 406, 475
Geronimus J. L. 35, 290, 475, 726
Gohman H. J. 26, 35, 68, 471, 474
Golitsõn B. B. 466
Gorjatškin V. P. 29, 31, 32, 473, 482, 485, 724, 726
Gutjar J. M. 724, 726

Hart H. 450
Hermann J. 17
Hertz H. 521
Hudjakov P. K. 25
Husseinov N. D. 33

Ivanov A. P. 34
Irošnikov A. N. 726

Jegorov V. V. 474
Jeršov A. S. 18, 24
Judin V. A. 34, 68, 472, 473, 476, 726

Kalužnikov A. N. 474, 475
Kapustin I. I. 472
Ketov H. F. 34, 264, 474, 475, 727
Kirpitšov V. L. 24, 34
Kobrinski A. J. 476
Koltšin N. I. 34, 406, 474, 727
Kostitsõn V. T. 34, 476, 507, 510, 529
Kotelnikov A. P. 474
Koževnikov S. N. 34, 35, 68, 473, 474, 600
Kraft I. V. 18
Kreines M. A. 475, 727
Kremenštein A. I. 726
Kudrjavtsev V. N. 34, 364, 413, 475, 600, 727
Kulibin I. P. 17, 18

Lagrange J. L. 619, 726
Leibenson L. S. 723
Leonardo da Vinci 496
Lepikson H. 364
Levenson L. B. 34
Levitski N. I. 33, 413, 422, 427, 431, 476
Ligin V. N. 26
Lipkin 49, 450
Litvin F. L. 34, 264, 474, 726
Lomonossov M. V. 17, 18
Lvov J. D. 726

Malkin L. M. 475
Malõšev A. P. 33, 34, 84, 471, 473, 475, 725
Mertsalov N. I. 24, 25, 27—32, 471, 473, 723—726
Moroškin J. F. 474

Nartov A. K. 17
Neiman I. Š. 726
Nevski A. D. 725
Nikitin A. A. 727
Nikolai J. L. 725
Noskov N. I. 474
Novodvorski J. P. 413

Orlov F. J. 25
Ostrogradski M. V. 23

Peaucellier A. 49, 450
Petrokas L. V. 472
Petrov N. P. 23, 31, 516, 723, 725
Petrovski S. D. 726
Petrussevitš A. I. 364
Petuhhov I. J. 471
Pinsker I. S. 413
Polzunov I. I. 17, 18
Popov V. K. 664

Rabinovitš I. M. 458
Radzig A. A. 24
Rajevski N. P. 507
Reie 513
Rerih K. J. 24, 34, 724
Rešetov L. N. 32, 475, 600
Roberts H. A. 434, 452

Savary 165
Semjonov M. V. 34, 413, 726
Sidorov A. I. 25
Skornjakov-Pissarev G. G. 18
Skuridin M. A. 32, 570, 725, 726
Smirnov L. P. 32, 308, 726
Somov P. I. 26, 31, 83, 84, 471, 472
Soonvald E. 364
Stepanov B. I. 427
Suškov P. F. 485
Sylvester J. 433
Šaumjan G. A. 472, 476
Šitikov B. V. 718, 726
Šor J. B. 474

Zernov D. S. 34
Zinovjev V. A. 33, 211, 331, 473, 474, 631, 638, 726
Žegalova T. S. 364, 600
Želigovski V. A. 33
Žukovski N. J. 14, 25, 26, 29, 31, 471, 603, 606, 610, 638, 639, 723—725

Tavhelidze D. S. 33, 35, 474
Tšaplõgin S. A. 24, 29, 723, 725
Tšebõšev P. L. 14, 15, 19—23, 31, 42, 43, 49, 97, 431, 448, 452, 453, 471, 472, 476, 723, 725
Tšerepanov J. A. 17
Tšerepanov M. A. 17
Tšerkudinov S. A. 33, 413, 476
Tšuvikov A. T. 463

Valkovski A. A. 726
Vassiljenko I. F. 33
Vassiljev N. S. 471
Verhovski A. V. 474
Vjahhirev S. V. 34
Võšnegradski I. A. 23, 31, 723, 725

Weisbach 513
Wittenbauer F. 724

SISUKORD

Teise trüki eessõnast 3
Eessõna kolmandale trükile 5
Saateks eestikeelsele tõlkele 6
Sissejuhatus 7
§ 1. Põhilisi mõisteid ja definitsioone 7
§ 2. Lühikene ülevaade mehhanismide ja masinate teooria arengust Venemaal ja NSV Liidus 12

ESIMENE OSA

MEHHANISMIDE STRUKTUUR JA KINEMAATIKA

Esimene jagu

MEHHANISMIDE STRUKTUURIANALÜÜS JA KLASSIFIKATSIOON

I peatükk. **Mõningaid üldandmeid kaasaegsetest mehhanismidest** . . . 37
§ 3. Varbmehhanismid 37
§ 4. Nukkmehhanismid 49
§ 5. Hammasmehhanismid 52
§ 6. Kiil- ja kruvimehhanismid 59
§ 7. Friktsioonmehhanismid 61
§ 8. Painduvate lülidega mehhanismid 62
§ 9. Hüdrauliliste seadmetega mehhanismid 64
§ 10. Elektriseadmetega mehhanismid 66

II peatükk. **Kinemaatiliste ahelate struktuur** 68
§ 11. Kinemaatilised paarid ja nende liigitus 68
§ 12. Kinemaatiliste paaride skemaatiline kujutamine 79
§ 13. Kinemaatilised ahelad 82
§ 14. Kinemaatilise ahela üldjuhu struktuurivalem 83

III peatükk. **Mehhanismide struktuur** 85
§ 15. Mehhanismi liikuvusaste 85
§ 16. Mehhanismide perekonnad 87
§ 17. Tasapinnaliste mehhanismide struktuur 97
§ 18. Ruumiliste mehhanismide struktuurist 104

IV peatükk. **Mehhanismide klassifikatsioon** 108
§ 19. Mehhanismide moodustamise põhiprintsiip 108
§ 20. Kaasaegsed mehhanismide klassifitseerimise meetodid 111
§ 21. Tasapinnaliste mehhanismide struktuuriline klassifikatsioon . 112
§ 22. Mõningaid teatmeid ruumiliste mehhanismide struktuurilisest klassifikatsioonist 126

Teine jagu

MEHHANISMIDE UURIMINE JA PROJEKTEERIMINE

V peatükk. **Sissejuhatus tasapinnaliste mehhanismide kinemaatikasse** . 132
§ 23. Absoluutse ja relatiivse liikumise tsentroidid 132
§ 24. Lülide kiiruste vahel kehtivad seosed 136
§ 25. Mehhanismi lülide kiiruste ja kiirenduste leidmine 142
§ 26. Hetkeline kiirenduste tsenter. Käänuringjoon 153
§ 27. Mähitavad ja mähisjooned 159
§ 28. Tsentroidide ja kaasmähisjoonte kõverusest 162

VI peatükk. **Madalamate paaridega tasapinnaliste mehhanismide kinemaatiline uurimine plaanide meetodil** 168
§ 29. Gruppe moodustavate lülide asendid ja mehhanismi lülidele kuuluvate punktide trajektoorid 168
§ 30. Kiiruste ja kiirenduste leidmine diaadides (II klassi gruppides) 178
§ 31. Kolmanda klassi gruppide kiiruste ja kiirenduste leidmine . . 201

VII peatükk. **Madalamate paaridega lihtsate mehhanismide kinemaatiline uurimine** 208
§ 32. Šarniir-nelilülik 208
§ 33. Väntmehhanism 214
§ 34. Kulissmehhanismid 219
§ 35. Kiilmehhanismid 226

VIII peatükk. **Kinemaatilised diagrammid** 227
§ 36. Kinemaatiliste diagrammide konstrueerimine 227
§ 37. Mehhanismide kinemaatiline uurimine diagrammide meetodil . 232

IX peatükk. **Sissejuhatus tasapinnaliste mehhanismide projekteerimisse** 241
§ 38. Mehhanismide projekteerimise põhiülesanded 241
§ 39. Liikumise reprodutseerimine tsentroidide abil 243
§ 40. Liikumise reprodutseerimine kaasmähisjoonte abil 249
§ 41. Mehhanismides jõudude ülekandmist määravad geomeetrilised tingimused 255
§ 42. Veerevate hoobadega mehhanismid. Mitteümmarguste hammasratastega mehhanismid 261

X peatükk. **Nukkmehhanismide kinemaatiline uurimine ja projekteerimine** 264
§ 43. Paigutuste määramine 264
§ 44. Kiiruste ja kiirenduste määramine 270
§ 45. Projekteerimiseks vajalikud põhilähteandmed 273
§ 46. Nukkmehhanismide põhimõõdete valikust 280
§ 47. Nukiprofiilide projekteerimine 290
§ 48. Ruumiliste nukkmehhanismide projekteerimisest 302

XI peatükk. **Ümmargustest silinderratastest koosnevate hammasmehhanismide kinemaatiline uurimine ja projekteerimine** 305
§ 49. Lihtsate hammasmehhanismide kinemaatika 305
§ 50. Paljulüliliste hammasmehhanismide kinemaatika 309
§ 51. Mõningat tüüpi reduktorite ja käigukastide kinemaatika . . . 317
§ 52. Hammaste profileerimise põhiülesanded 323
§ 53. Põhilisi teatmeid evolventprofiilide üldteooriast 328
§ 54. Evolventprofiilide konstrueerimine 335
§ 55. Hambumiskaar ja kattetegur 340
§ 56. Evolventprofiiliga hammasrataste lõikamisest 345
§ 57. Sisselõige 349

§ 58. Latiprofiili omava lõikeriistaga lõigatavate evolventrataste profileerimisest 354
§ 59. Tsükloidprofiilide projekteerimine 366
§ 60. Tasapinnaliste hammasmehhanismide mõningaid erituüpe . . 374
§ 61. Kaldhammasrataste projekteerimine 381

XII peatükk. **Ruumiliste hammasmehhanismide kinemaatiline uurimine ja projekteerimine** 386
§ 62. Koonushammasrataste kinemaatika 386
§ 63. Koonusrataste hammaste profileerimine 391
§ 64. Hüperboloid- ja kruvirattad 398
§ 65. Tigumehhanism 402

XIII peatükk. **Madalamate paaridega tasapinnaliste mehhanismide projekteerimine** 406
§ 66. Projekteerimise põhilisi ülesandeid 406
§ 67. Mehhanismide projekteerimine etteantud asenditingimuste alusel 415
§ 68. Etteantud liikumisseaduse ligikaudne reprodutseerimine . . . 425
§ 69. Etteantud trajektoori reprodutseerimine 431
§ 70. Lülide täispöördetingimused 435

XIV peatükk. **Mõningate mehhanismide kinemaatiline uurimine** . . . 438
§ 71. Universaalliigend 438
§ 72. Kaksikuniversaalliigend 442
§ 73. Ruumiline šarniirnelilülik 443
§ 74. Kruvimehhanismid 445
§ 75. Suunavmehhanismid. P. L. Tšebõševi mehhanismid 448
§ 76. Painduvate lülidega mehhanismid 453
§ 77. Masinate kinemaatika uurimise eksperimentaalsetest meetoditest 455
§ 78. Nõukogude teaduse osa mehhanismide struktuuriteooria ja kinemaatika arenemises 470

TEINE OSA

MEHHANISMIDE JA MASINATE DÜNAAMIKA

Esimene jagu

MEHHANISMIDES MÕJUVATE JÕUDUDE ANALÜÜS

XV peatükk. **Sissejuhatus mehhanismide ja masinate dünaamikasse** . . 477
§ 79. Mehhanismide ja masinate dünaamika põhiülesanded 477
§ 80. Jõudude arvutuse ülesanded 479
§ 81. Mehhanismidele mõjuvad jõud 480
§ 82. Masinates mõjuvate jõudude eksperimentaalsest määramisest . 482

XVI peatükk. **Motoorsed jõud ja kasulikud koormused** 487
§ 83. Jõudude, tööde ja võimsuste diagrammid 487
§ 84. Masinate mehaanilised karakteristikud 491

XVII peatükk. **Hõõrdumine kinemaatilistes paarides ja mehhanismides** 493
§ 85. Hõõrdumise liigid 493
§ 86. Määrimata kehade liugehõõrdumine 495
§ 87. Hõõrdumine translatsioonipaaris 499
§ 88. Hõõrdumine kruvipaaris 511
§ 89. Hõõrdumine rotatsioonipaaris 513
§ 90. Määritud kehade liugehõõrdumine 515
§ 91. Veere- ja liugehõõrdumine kõrgemates kinemaatilistes paarides 517

§ 92. Friktsioonratas-mehhanismid 523
§ 93. Painduva niidi hõõrdumine 526

XVIII peatükk. **Lülide inertsjõud** 530
§ 94. Lülidele mõjuvate inertsjõudude määramine 530
§ 95. Asendavate masside meetod 539

XIX peatükk. **Jõudude arvutus tasapinnalises mehhanismis** 546
§ 96. Staatiliselt määratud kinemaatilised ahelad 546
§ 97. Diaadide (II klassi gruppide) kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramine 549
§ 98. Triaadide kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramine 558
§ 99. Mehhanismi vedavale lülile mõjuvate jõudude arvutus 563
§ 100. Hõõrdejõudude arvestamine kinemaatilistes paarides mõjuvate reaktsioonide määramisel 566
§ 101. Mehhanismides mõjuvate jõudude arvutus 571

Teine jagu

MASINATE DÜNAAMIKA

XX peatükk. **Masinate ja mehhanismide mehaaniline kasutegur** . . . 578
§ 102. Põhimõisteid. Masina liikumine 578
§ 103. Masina energiabilansi võrrand 581
§ 104. Mehaaniline kasutegur 583
§ 105. Kasuteguri arvutamine mehhanismides 588

XXI peatükk. **Jõudude ja masside redutseerimine masinates** 600
§ 106. Redutseeritud jõud ja momendid 600
§ 107. N. J. Žukovski kang 603
§ 108. Redutseeritud jõudude ja tasakaalustavate jõudude määramine Žukovski meetodi abil 606
§ 109. Mehhanismi kineetiline energia 611
§ 110. Mehhanismi redutseeritud mass ja redutseeritud inertsmoment 613

XXII peatükk. **Masinagregaadi liikumise uurimine** 617
§ 111. Liikumisvõrrandid 617
§ 112. Kiiruste, kiirenduste ja liikumisaja määramise põhivõrrandid . 620
§ 113. Agregaadi liikumise uurimine diagrammi $T = T(I_r)$ abil . . . 622
§ 114. Agregaadi liikumise uurimine diagrammi $T = T(\omega)$ abil . . . 629
§ 115. Agregaadi liikumise uurimine N. J. Žukovski meetodiga . . . 638

XXIII peatükk. **Masinate käigu ebaühtlus** 642
§ 116. Ülesande üldine asetus 642
§ 117. Masina keskmine kiirus ja käigu ebaühtluse tegur 643
§ 118. Seos redutseeritud inertsmomendi, redutseeritud jõudude ja masina käigu ebaühtluse teguri vahel 646
§ 119. Hooratta inertsmomendi määramiseks vajalikud lähteandmed . 649
§ 120. Hooratta inertsmomendi arvutamine diagrammi $T = T(I_r)$ abil 654
§ 121. Hooratta inertsmomendi määramine jääkmomentide diagrammist 658
§ 122. Mõningaid teatmeid hoomasside arvutamisest olukorras, kus motoorne moment sõltub kiirusest 662

XXIV peatükk. **Lühiteatmeid regulaatorite teooriast** 670
§ 123. Ülesande üldine asetus 670
§ 124. Tsentrifugaalregulaatori kinetostaatika 672

§ 125. Regulaatori stabiilsus 677
§ 126. Regulaatori tundetus 680

XXV peatükk. **Masinate tasakaalustamine** 682
§ 127. Masinate vundamendil tasakaalustamise ülesanne 682
§ 128. Mehhanismi üldise masskeskme asukoha leidmine 688
§ 129. Mehhanismi resulteeriva inertsjõu leidmine 700
§ 130. Mehhanismi inertsjõudude tasakaalustamine 702
§ 131. Kinemaatilistes paarides mõjuvate koormuste tasakaalustamine 715
§ 132. Nõukogude teaduse osast mehhanismide ja masinate dünaamika arengus 723
Aineregister 729
Nimede register 737

Иван Иванович Артоболевский
ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН
На эстонском языке
Оформление С. Лийберг

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja A. Korba
Kunstiline toimetaja R. Tungla
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid M. Pedajas ja V. Pillau

Ladumisele antud 15. VI 1960. Trükkimisele antud 17. XI 1960. Paber 60 × 92, 1/16. Trükipoognaid 46,5. Arvutuspoognaid 45,27. Trükiarv 3000. Tellimise nr. 6147. Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind rbl. 1.80

3—7

A
23693

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 01007654 7