

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ALUSTATUD 1893. a.

VIHİK № 74 ВЫПУСК

ОСНОВАНЫ в 1893 г.

ASTRONOOMIA-, FÜÜSIKA-
JA KEEMIA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО АСТРОНОМИИ,
ФИЗИКЕ И ХИМИИ



TARTU 1959

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
VIHK 74 ВЫПУСК

**ASTRONOMIA-, FÜÜSIKA-
JA KEEMIA-ALASEID TÖID**

**ТРУДЫ ПО АСТРОНОМИИ,
ФИЗИКЕ И ХИМИИ**

TARTU 1959

Redaktsioonikolleegium:

G. Kangro, P. Kard (vast. toimetaja), K. Rebane, N. Rägo, V. Palm.
E. Uuspõld ja A. Pravdin (sekretärid).

Редакционная коллегия:

Г. Кангро, П. Кард (отв. редактор), К. Ребане, Н. Ряго, В. Пальм
Э. Ууспыльд и А. Правдин (секретари)

ЭЛЛИпсоИДЫ СКОРОСТЕЙ ЗВЕЗД И ПРОБЛЕМА ЗВЕЗДНОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Проф., канд. физ.-мат. наук Г. Я. Роотсмяз

Кафедра астрономии и геофизики

1. Введение

В некоторых исследованиях звездной космогонии рассматриваются взаимные положения в пространстве скоростей центроидов различных групп звезд, подразделенных по абсолютной величине, спектру и по другим физическим признакам. Как было выяснено в соответствующих исследованиях [1—5], положения центроидов в пространстве скоростей, особенно в проекции на плоскость галактического экватора, имеют большое значение для выявления некоторых закономерностей эволюции звезд. Но в настоящей работе мы будем рассматривать не столько расположение центроидов групп звезд, сколько распределение скоростей самих звезд относительно соответственных групповых центроидов в пространстве скоростей. Наглядным и конкретным введением в данную область исследования, как бы в «живом виде» [6, 30], является рассмотрение и анализ «диаграмм рассеяния» скоростей, представляющих собой диаграммы проекций пространственных скоростей на главных плоскостях $\dot{T}R$ и $\dot{T}Z$ галактически-радиальной системы координат. Такие диаграммы — проекции тел скоростей звезд на две главные плоскости представлены на рисунках 1—15. Ось T галактически-радиальной системы координат направлена приблизительно по вектору галактического вращения с галактической долготой $l = 61^\circ,5$ [4, 141; 7], вторая ось R ориентирована по галактическому радиусу в направлении $l = 151^\circ,5$, противоположном галактическому центру ($l_0 = 331^\circ,5$), а третья ось Z направлена в северный полюс галактического экватора. Конец проекции вектора скорости звезды представлен в виде точки, а начало его совпадает с центроидом рассматриваемой звездной группы. Положение Солнца взято в начале координат, а проекции центроидов соответственных групп звезд представлены квадратиками.

Рис. 1—15. Распределение проекций скоростей в плоскостях $\dot{T}\dot{R}$ и $\dot{T}\dot{Z}$ для групп звезд, подразделенных по спектральному типу и по абсолютной величине (звезды-гиганты и звезды главной последовательности).

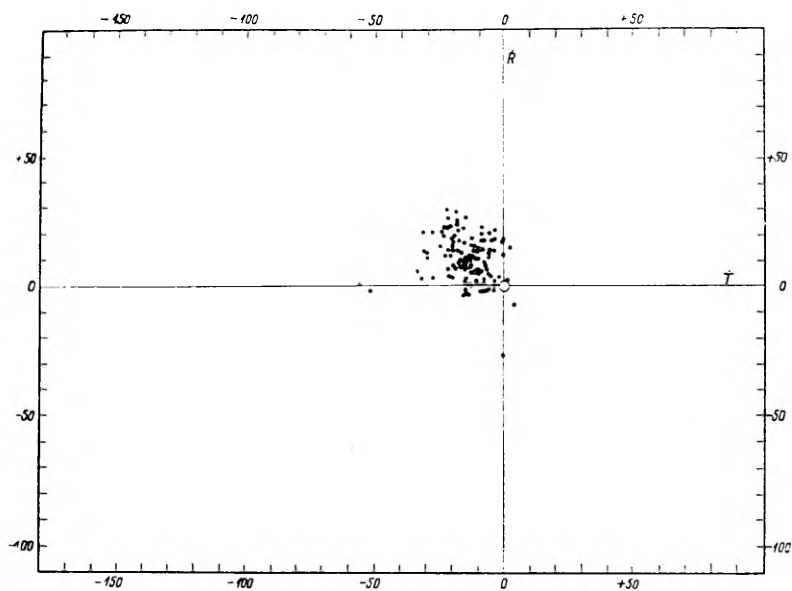


Рис. 1. В-звезды.

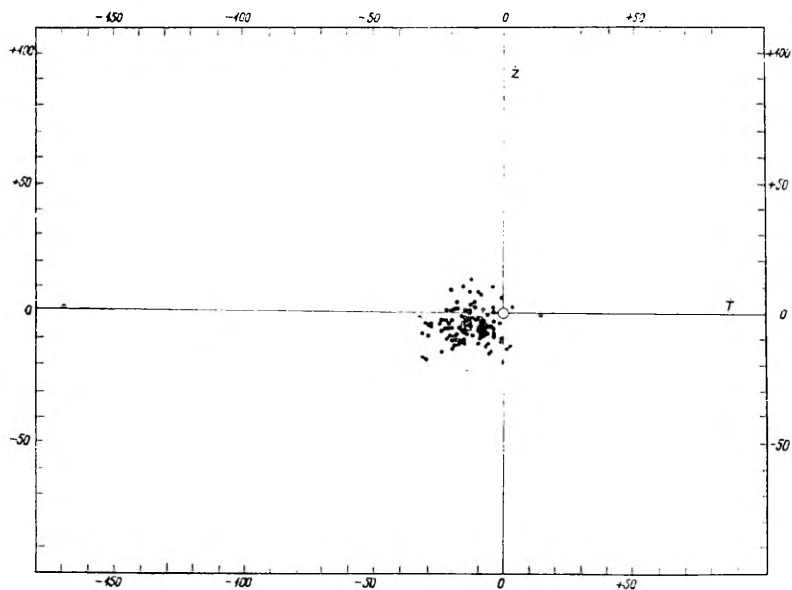


Рис. 2. В-звезды.

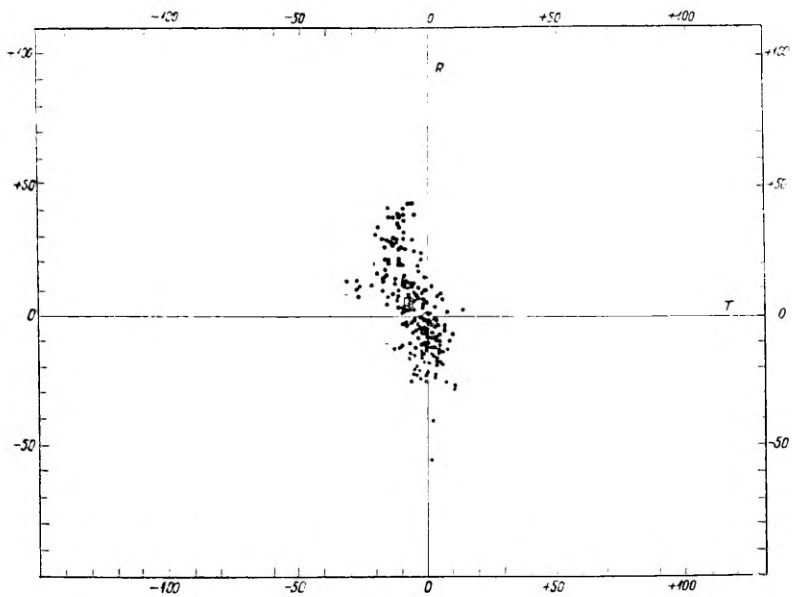


Рис. 3. А-звезды.

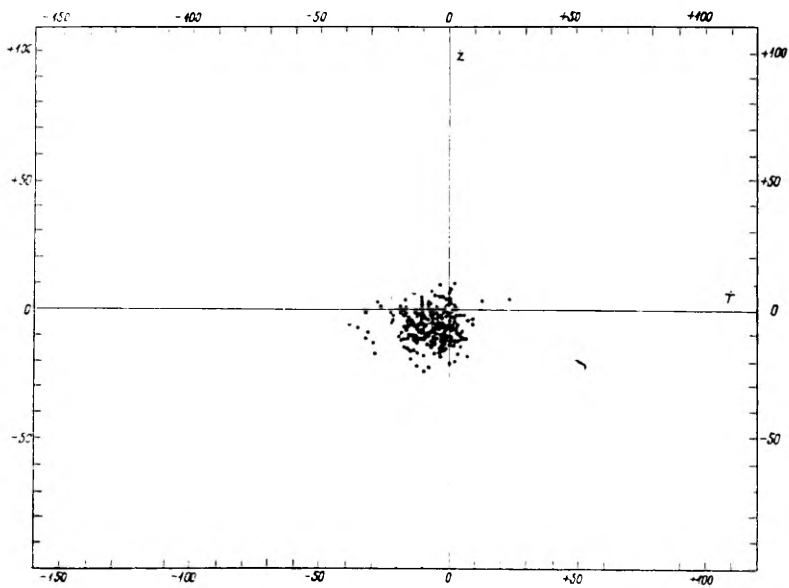


Рис. 4. А-звезды.

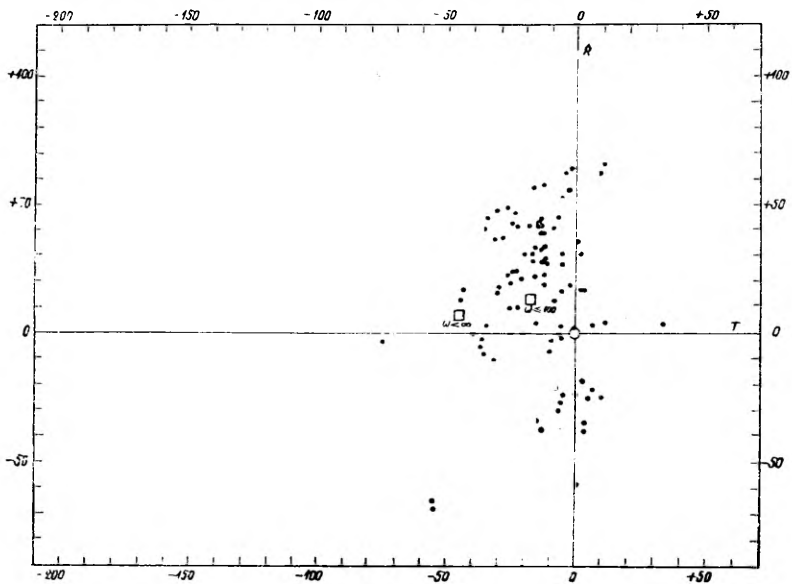


Рис. 5. dF-звезды.

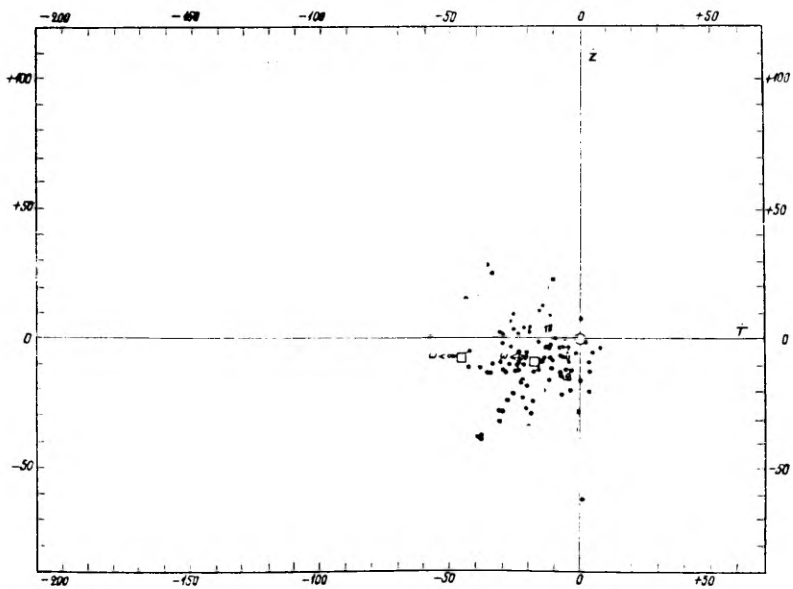


Рис. 6. dF-звезды.

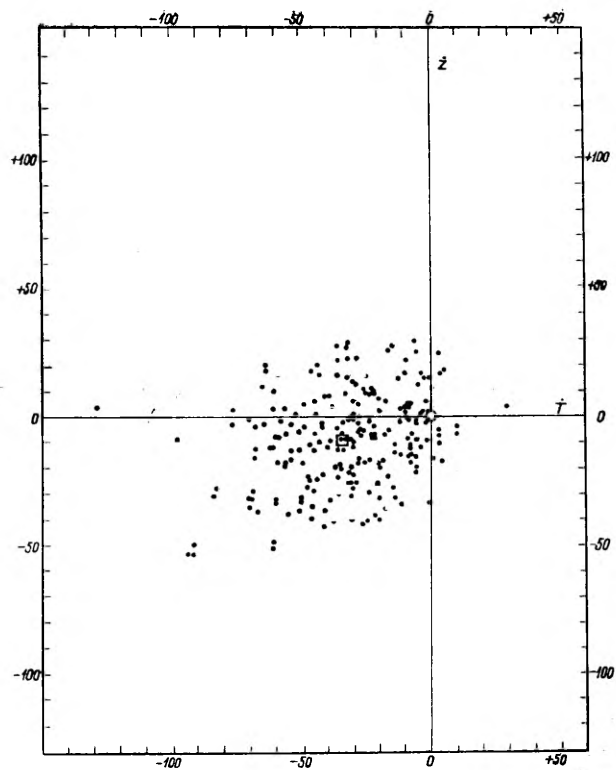


Рис. 8. dG- и dK-звезды.

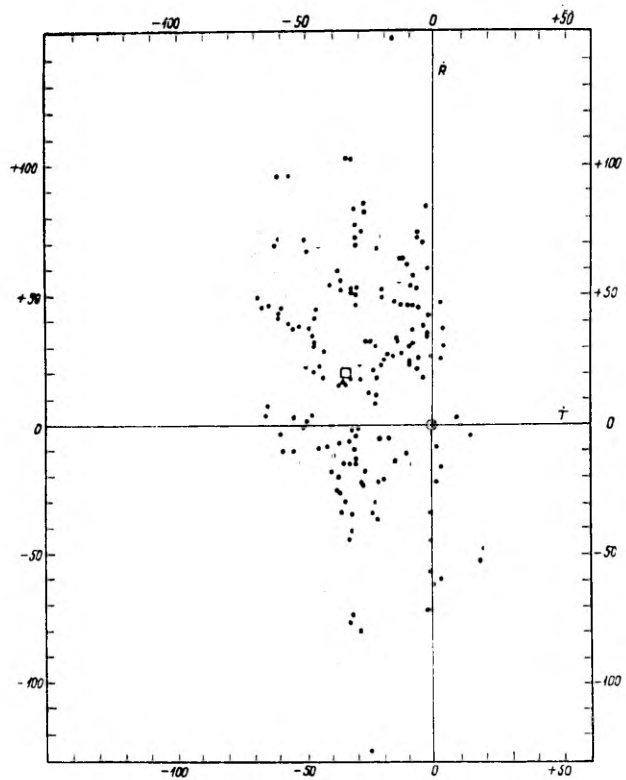


Рис. 7. dG- и dK-звезды.

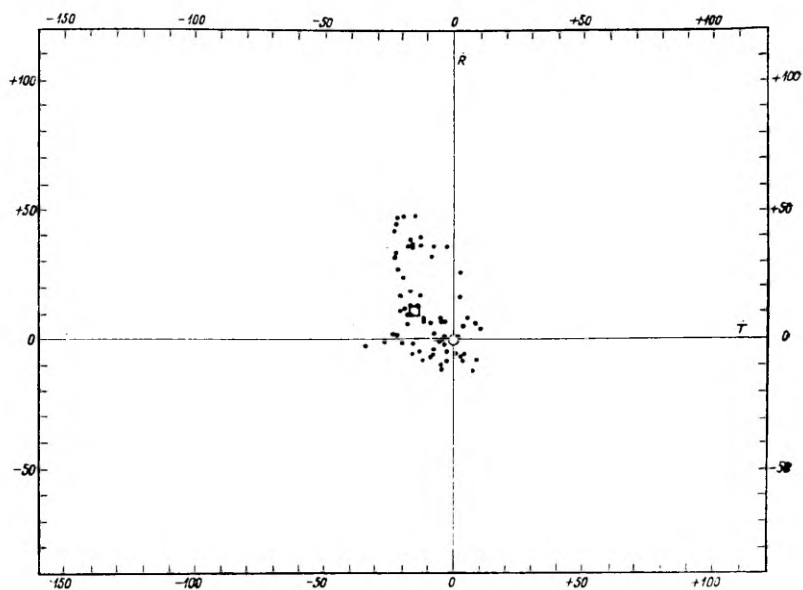


Рис. 9. gF-звезды.

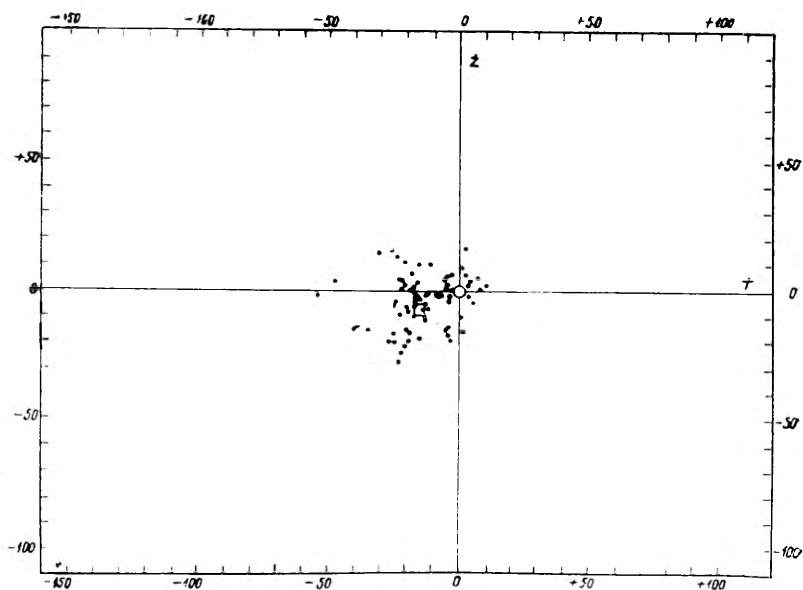


Рис. 10. gF-звезды.

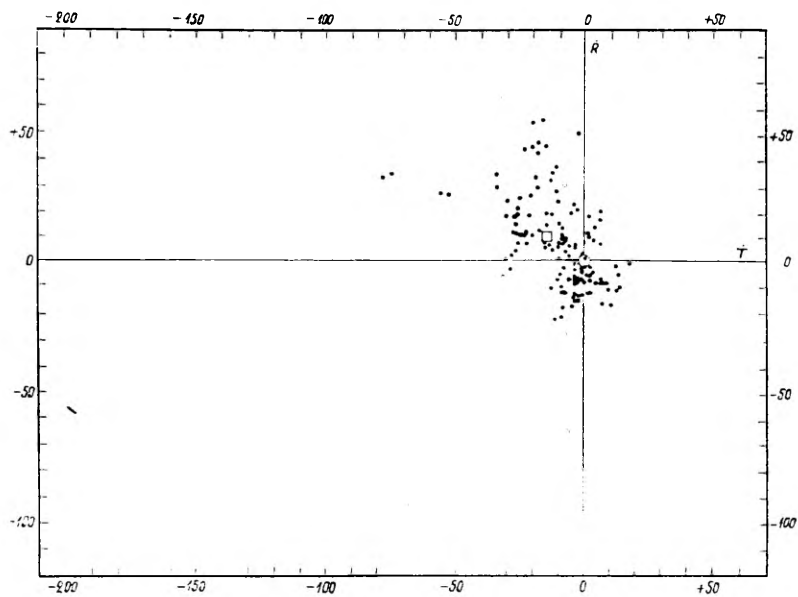


Рис. 11. gG-звезды.

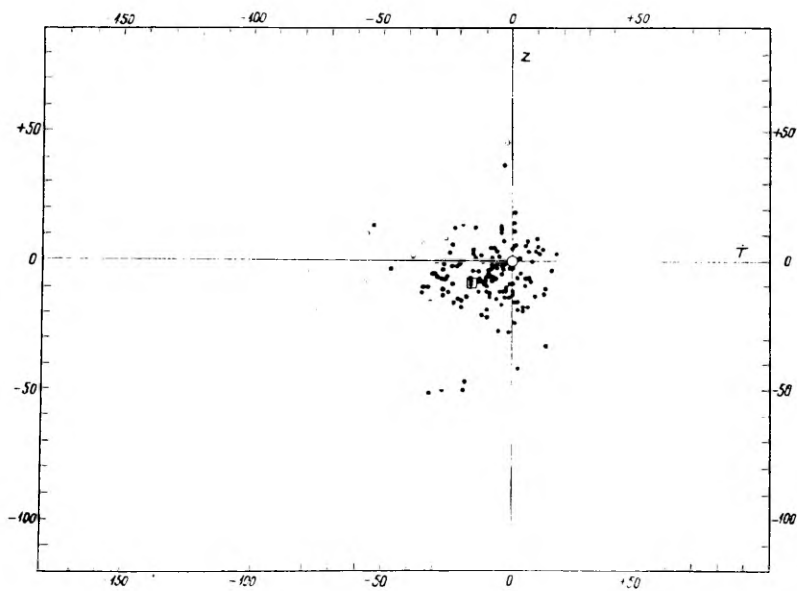


Рис. 12. gG-звезды.

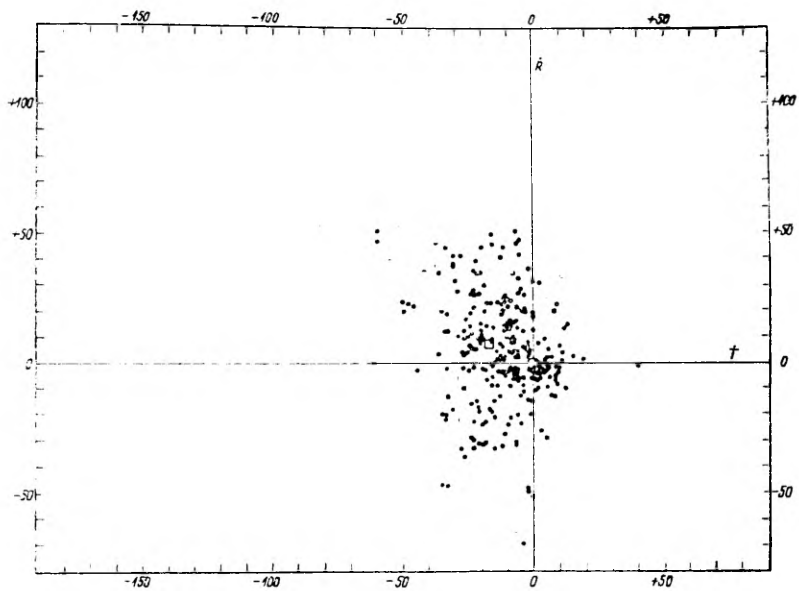


Рис. 13. gK-звезды.

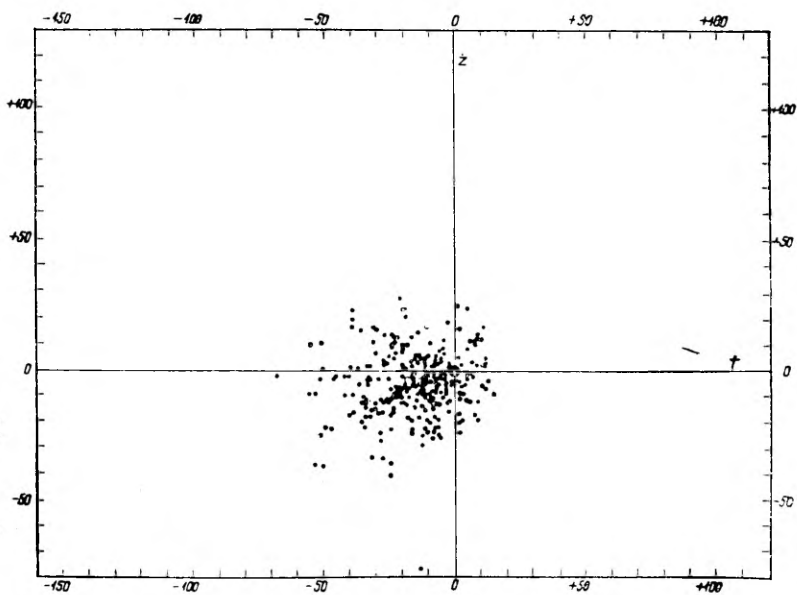


Рис. 14. gK-звезды.

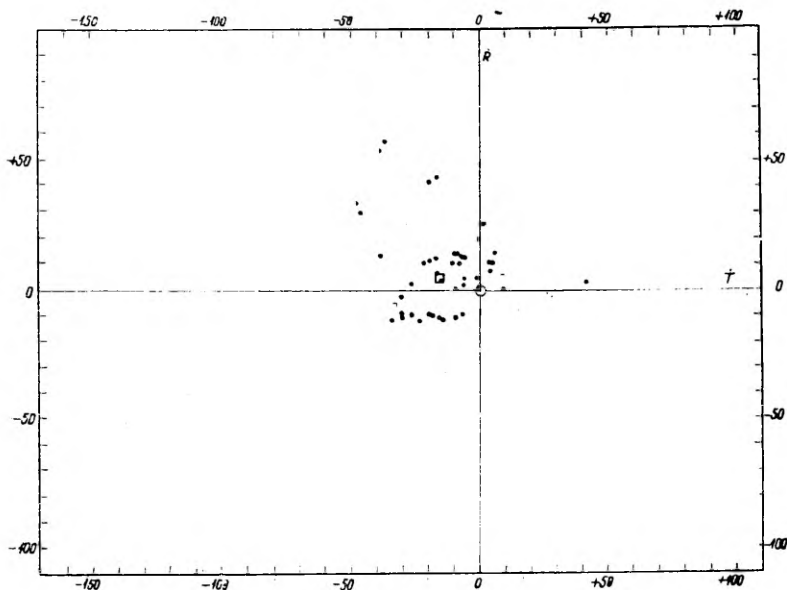


Рис. 15. gM -звезды.

В качестве первоначального источника материала относительно скоростей звезд в настоящем исследовании, начатом уже много лет назад, был использован каталог пространственных скоростей, составленный под руководством В. Г. Фесенкова [8]. В дальнейшем для изучения вопроса были привлечены и другие источники пространственных скоростей звезд. Для построения диаграмм рассеяния скоростей весь материал пространственных скоростей каталога [8] был обработан следующим образом. Компоненты скоростей, которые в упомянутом каталоге даны в экваториальной гелиоцентрической прямоугольной системе координат — мы их обозначили через ξ , η , ζ , — были преобразованы при помощи соответственных формул в галактические и галактически-радиальные компоненты скоростей, соответственно x , y , z и T , \dot{R} , \dot{Z} . Эти формулы следующие [5]:

$$x = 0,193\dot{\xi} - 0,981\eta + 0,000\dot{\zeta} \quad (1)$$

$$y = 0,442\dot{\xi} + 0,087\eta + 0,893\dot{\zeta} \quad (2)$$

$$z = 0,876\dot{\xi} - 0,172\eta + 0,451\dot{\zeta} \quad (3)$$

$$T = 0,477x + 0,879y \quad (4)$$

$$\dot{R} = -0,879x + 0,477y \quad (5)$$

$$\dot{Z} = z. \quad (6)$$

Координаты T , R , Z и послужили для построения наших диаграмм (рис. 1—15). Выбор галактически-радиальной системы координат для интерпретации распределений скоростей звезд является особенно выгодным и целесообразным ввиду соответствия осей координат этой системы главным ориентировочным направлениям строения звездной системы.

Изучая предварительно свойства тела скоростей звезд по его проекциям на плоскостях $\dot{T}\dot{R}$ и $\dot{T}\dot{Z}$, нетрудно заметить (рис. 1—15), что тело скоростей наиболее вытянуто приблизительно по направлению оси \dot{R} и наименее по направлению оси \dot{Z} . Таким образом получается наглядное представление о трехосном эллипсоиде распределения пространственных скоростей звезд.

На наших диаграммах четко выявлены и некоторые другие особенности распределения скоростей звезд. Простое рассмотрение и сравнение этих диаграмм между собой уже очень много дает для изучения свойств тел скоростей различных групп звезд. Так, у групп В и А звезд (рис. 1—4) дисперсия скоростей самая малая, причем у В звезд распределение точек скоростей более округленное, более сферическое, чем у А звезд. У последних распределение точек скоростей более продолговатое, эллипсоидальное, вытянутое приблизительно по направлению оси \dot{R} .

Звезды-гиганты (рис. 9—15) имеют большую дисперсию скоростей, чем В и А звезды, но значительно меньшую, чем звезды-карлики (рис. 5—8). Особенный вид имеет диаграмма рассеяния скоростей у звезд-карликов типа F (рис. 5, 6). В пределах пространственных скоростей 100 км/сек рассеяние точек скоростей у dF звезд меньше, чем у dG и dK карликов, но если взять все dF звезды — все их точки скоростей на нашей диаграмме не помещаются —, то рассеяние скоростей у dF звезд получается гораздо большее, чем у карликов поздних спектральных типов dG и dK. Объясняется это тем, что в числе dF карликов встречается сравнительно много «звезд с большими скоростями». Весьма вероятно, что такие звезды относятся к субкарликам, которые имеют большие скорости относительно Солнца и большие дисперсии скоростей [9].

Далее можно заметить, что распределение точек скоростей на наших диаграммах, как правило, является асимметричным относительно соответственного центроида. При этом ясно выступают некоторые особые свойства этого распределения. Одно из них состоит в том, что место наибольшей густоты точек скоростей на основной галактической плоскости не совпадает с центроидом, а смещено относительно центроида в направлении галактического вращения. Это особенно ясно видно в случае G и K гигантов (рис. 11 и 13). Такое явление имеет место в большинстве случаев и находит себе выражение в положительном знаке ($\beta > 0$) коэффициента асимметрии [10; 11] распределения проекций точек

скоростей на оси T , приблизительно совпадающей с направлением галактического вращения. При рассмотрении диаграмм создается впечатление, что место наибольшей густоты точек скоростей находится как бы в «авангарде», по некоторой дуге, расположенной поперечно направлению вектора галактического вращения, тогда как в «арьергарде» имеет место разрежение точек скоростей звезд. В результате получается такая картина, в которой совокупность точек скоростей на галактической плоскости симметрии напоминает раскрытые крылья бабочки или птицы, причем густота точек скоростей за центроидом значительно меньше, чем по направлению крыльев (см., например, рис. 13) На это явление уже было указано некоторыми авторами, и были сделаны попытки его динамической интерпретации [6, 60—63; 12, 51; 28, 451].

Явление асимметрии звездных скоростей на основании вышеупомянутого материала [8] было нами подробно изучено. Между прочим было показано, что явление асимметрии звездных движений становится заметным начиная не с какой-нибудь определенной довольно большой скорости, как это иногда предполагали раньше [13], но начинает проявляться уже при сравнительно малых скоростях, например уже при пространственной скорости относительно центроида, равной 20 км/сек.

Тема настоящей работы тесно соприкасается с вопросом асимметрии звездных движений; однако ее задача состоит в изучении не асимметрии, а эллипсоидальности распределения скоростей звезд, которое весьма отчетливо и эффектно вырисовывается на общем фоне асимметрического распределения звездных скоростей.

2. Элементы эллипсоидов скоростей звезд

Для изучения распределения скоростей звезд более точным математическим способом мы прибегаем к методу эллипсоидов скоростей. Обозначив компоненты скоростей звезд относительно центроида в галактической прямоугольной системе координат через x, y, z , мы можем представить их распределение в обобщенном виде при помощи ряда Шарлье [14; 15]

$$\Phi(x, y, z) = \varphi_0(x, y, z) + \sum_{i+j+k=3}^{\infty} A_{ijk} \frac{\partial^{i+j+k} \varphi_0}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k}, \quad (7)$$

где

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 (2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} + \frac{z^2}{\sigma_3^2} \right)} \quad (8)$$

есть обобщенная на три измерения функция нормального распределения.

Характеристики распределения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и A_{ijk} определяются из моментов координат скоростей. При $A_{ijk} = 0$ распределение переходит в более частный случай (8). Тогда поверхности равной частоты точек скоростей представляют собой в фазовом пространстве поверхности эллипсоидов, что очевидно из формулы (8). Закон эллипсоидального распределения скоростей звезд был впервые введен Шварцшильдом [16] и представляет собой обобщенный закон сферического распределения Максвелла.

Наша первоначальная задача заключается в определении элементов эллипсоидов скоростей, которыми являются: 1) гелиоцентрические координаты центров эллипсоидов в пространстве скоростей, 2) величины осей эллипсоидов в единицах км/сек. и 3) направления осей эллипсоидов. Наибольшая ось эллипсоидов ориентирована по направлению так называемой линии вертексов, в общем не отличаясь много от направления галактического радиуса. Коэффициенты A_{ijk} могут иметь значительную величину, что обуславливает отличие рассматриваемого распределения скоростей от эллипсоидального распределения. Рассматривая в настоящей главе только эллипсоидальное распределение скоростей, мы этим самым оставляем в стороне члены ряда (7) с характеристиками более высокого, чем второго порядка, как асимметрия и эксцесс, которые рассматриваются нами в особой статье. В настоящей работе также не приведены гелиоцентрические координаты центров эллипсоидов в пространстве скоростей, которые идентичны с координатами центроидов соответствующих группировок звезд. Величины их даны в другой нашей работе [5].

При определении элементов эллипсоида скоростей обычно исходят из гелиоцентрических координат скоростей звезд. Сперва выводят гелиоцентрические координаты центров эллипсоидов, причем эти центры тождественны с центроидами соответственных звездных групп. Далее определяют размеры осей эллипсоида как дисперсии проекций скоростей на соответственных осях и, наконец, направления этих осей. Для определения размеров и направлений осей эллипсоида приходится решать кубическое уравнение относительно некоторой вспомогательной величины t :

$$D(t) = \begin{vmatrix} N_{200} - t & N_{110} & N_{101} \\ N_{110} & N_{020} - t & N_{011} \\ N_{101} & N_{011} & N_{002} - t \end{vmatrix} = 0, \quad (9)$$

где через N обозначены моменты второго порядка компонентов скоростей относительно центра эллипсоида. Так, например,

$$N_{200} = \overline{x^2}, \quad N_{110} = \overline{xy},$$

$$N_{101} = \overline{xz}; \quad N_{020} = \overline{y^2}, \text{ и т. д.}$$

Вывод элементов эллипсоида скоростей на основании материала пространственных скоростей звезд производится следующим образом.

Обозначив моменты компонентов скоростей относительно центра эллипсоида какой-нибудь выбранной группы звезд через N , а относительно Солнца через N' , мы для перехода от Солнца к центру эллипсоида имеем следующие формулы преобразований:

$$N_{200} = N_{200} - N_{100}'^2 \quad (10)$$

$$N_{020} = N_{020} - N_{010}'^2 \quad (11)$$

$$N_{002} = N_{002} - N_{001}'^2 \quad (12)$$

$$N_{110} = N_{110} - N_{100}' N_{010}' \quad (13)$$

$$N_{101} = N_{101} - N_{100}' N_{001}' \quad (14)$$

$$N_{011} = N_{011} - N_{010}' N_{001}' \quad (15)$$

Если x, y, z представляют компоненты скоростей звезд относительно центра эллипсоида, а x', y', z' — относительно Солнца, то формулы преобразований (10—12) и (13—15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \overline{x^2} &= \overline{x'^2} - \overline{(x')^2} \\ \overline{y^2} &= \overline{y'^2} - \overline{(y')^2} \\ \overline{z^2} &= \overline{z'^2} - \overline{(z')^2} \end{aligned} \quad (16)$$

и т. д.

Надобность в этих формулах, конечно, отпадает, если компоненты скоростей относительно Солнца уже индивидуально преобразованы в компоненты относительно центроида.

Далее на основании моментов N определяют величины

$$p = -(N_{200} + N_{020} + N_{002}) \quad (17)$$

$$q = N_{200}N_{020} + N_{200}N_{002} + N_{020}N_{002} - (N_{110}^2 + N_{101}^2 + N_{011}^2) \quad (18)$$

$$r = N_{200}N_{011}^2 + N_{020}N_{101}^2 + N_{002}N_{110}^2 - N_{200}N_{020}N_{002}. \quad (19)$$

при помощи которых и составляется кубическое уравнение (9) в виде

$$t^3 + pt^2 + qt + r = 0. \quad (20)$$

Решения t_1, t_2, t_3 этого уравнения дают возможность найти величины полуосей эллипсоида в виде дисперсий скоростей по соответственным осям при помощи соотношений¹:

$$\begin{aligned} a &= \sigma_1 = \sqrt{\overline{t_1}} \\ b &= \sigma_2 = \sqrt{\overline{t_2}} \\ c &= \sigma_3 = \sqrt{\overline{t_3}}. \end{aligned} \quad (21)$$

¹ Собственно по теории эллипсоида скоростей полуоси его равны соответственным дисперсиям скоростей, умноженным на $\sqrt{2}$. Но мы принимаем условно за полуоси величины $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, пропорциональные указанным.

При этом $a = \sigma_1$ есть наибольшая полуось эллипсоида, направление которой соответствует направлению линии вертексов и не особенно много отличается от направления галактического радиуса; $c = \sigma_3$ есть малая полуось и $b = \sigma_2$ промежуточная полуось эллипсоида, направленная приблизительно по вектору галактического вращения.

Для определения ориентации осей эллипсоида скоростей в пространстве мы имеем соотношение

$$\frac{l}{D_{200}} = \frac{m}{D_{110}} = \frac{n}{D_{101}} = \frac{1}{\sqrt{D_{200}^2 + D_{110}^2 + D_{101}^2}} \quad (22)$$

или два других аналогичных соотношения.

Здесь l, m, n представляют собой косинусы углов, образуемых направлением оси эллипсоида с осями x, y, z прямоугольной галактической системы координат, а выражения $D_{200}, D_{110}, D_{101}$ суть адьюнкты детерминанта в уравнении (9) соответственно членам первой горизонтальной строки. Таким образом имеем:

$$D_{200} = \begin{vmatrix} (N_{020} - t) & N_{011} \\ N_{011} & (N_{002} - t) \end{vmatrix} \quad (23)$$

$$D_{110} = \begin{vmatrix} N_{101} & N_{110} \\ (N_{002} - t) & N_{011} \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$D_{101} = \begin{vmatrix} N_{110} & (N_{020} - t) \\ N_{101} & N_{011} \end{vmatrix} \quad (25)$$

Для определения направлений осей эллипсоида используем формулы косинусов углов направления:

$$l = \cos L \cos B = \frac{D_{200}}{D_1} \quad (26)$$

$$m = \sin L \cos B = \frac{D_{110}}{D_1} \quad (27)$$

$$n = \sin B = \frac{D_{101}}{D_1}, \quad (28)$$

где D_1 означает квадратный корень из суммы квадратов миноров, так что

$$D_1^2 = D_{200}^2 + D_{110}^2 + D_{101}^2 \quad (29)$$

а L и B — сферические координаты в виде галактической долготы и широты точки пересечения продолжения оси эллипсоида с небесной сферой.

При помощи предыдущих формул легко определяются L и B . Так как знак $\cos B$ всегда положительный, то $\cos L$ имеет знак D_{200} и $\sin L$ имеет знак D_{110} . Таким образом можно однозначно

определить галактические координаты L и B по формулам, вытекающим из соотношений (26—28):

$$\tan L = \frac{D_{110}}{D_{200}} \quad (30)$$

$$\tan B = \frac{D_{101}}{D_{200}} \cos L = \frac{D_{101}}{D_{110}} \sin L. \quad (31)$$

Дуга большого круга небесной сферы, которая соединяет точки пересечения продолжений двух каких-нибудь осей эллипсоида, должна равняться 90° а косинус дуги должен равняться нулю, что проверяется при помощи контрольной формулы

$$\sin B_1 \sin B_2 + \cos B_1 \cos B_2 \cos (L_2 - L_1) = 0 \quad (32)$$

Для определения средних ошибок величин σ , L , B нужно сперва найти средние ошибки моментов $\overline{x^2}$, $\overline{xy^2}$, \overline{xz} и т. д. согласно формулам

$$\varepsilon^2(\overline{x^2}) = n^{-1}[\overline{x^4} - (\overline{x^2})^2] \quad (33)$$

$$\varepsilon^2(\overline{xy}) = n^{-1}[\overline{x^2y^2} - (\overline{xy})^2] \quad (34)$$

$$\varepsilon^2(\overline{xz}) = n^{-1}[\overline{x^2z^2} - \overline{xz}^2]. \quad (35)$$

а затем можно использовать формулы (действительные, если направления осей эллипсоидов не очень сильно отличаются от направления осей координат)

$$\varepsilon(\sigma_1) = \frac{1}{2\sigma_1} \varepsilon(\overline{x^2}) \quad (36)$$

$$\varepsilon(L_1) = \frac{\varepsilon(\overline{xy})}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \quad (37)$$

$$\varepsilon(B_1) = \frac{\varepsilon(\overline{yz})}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} \quad (38)$$

и т. д.,

где n число звезд в группе, и вычислить средние ошибки для σ_1 , L_1 , B_1 и т. д. Здесь индекс 1 относится к большой полуоси эллипсоида.²

Можно использовать и приближенные формулы

$$\varepsilon(\sigma_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (36')$$

$$\varepsilon(L_1) = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (37')$$

$$\varepsilon(B_1) = \frac{\sigma_1 \sigma_3}{\sigma_1^2 - \sigma_3^2} \frac{1}{\sqrt{n}}. \quad (38')$$

² См. также работу П. П. Паренаго [6, 31—32]. В этой работе большая и малая полуоси обозначены соответственно индексами 3 и 1, в то время как в «Курсе звездной астрономии» [17, 140] порядок обозначений осей такой же, как в настоящем изложении.

Эти формулы справедливы в случае шварцшильдовского распределения скоростей.

Таблица 1

Элементы эллипсоидов скоростей, вычисленные на основании данных каталога [8]. $n = 1350$; $w \leq 80$ км/сек

Sp	n	\bar{M}	σ_1	σ_2	σ_3	$\bar{\sigma}$	$\underline{\sigma}$
B	127	-1,0	13,5	11,0	8,6	11,0	10,8
A	219	+1,5	20,0	8,5	8,8	12,4	11,4
dF	166	+3,6	30,1	19,6	14,7	21,5	20,5
dG	114	+4,9	35,8	26,4	18,3	26,8	25,9
dK	103	+5,7	38,1	25,2	18,6	27,3	26,1
gF	49	+0,3	23,1	16,0	8,2	15,8	14,8
gG	168	+0,3	26,2	18,0	15,7	20,0	19,5
gK	311	+0,8	23,8	18,1	14,3	18,7	18,3
gM	93	+0,2	23,5	18,7	17,2	19,8	19,6

Sp	V	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_R}{\sigma_1}$	$S = \frac{\sqrt{\sigma_2 \sigma_3}}{\sigma_1}$	L_1	B_1
B	1,3	0,81	0,64	0,72	322°;1	+9°;8
A	1,5	0,42	0,44	0,43	350°;0	-1°;2
dF	8,6	0,65	0,49	0,56	333°;5	-1°;0
dG	17,3	0,74	0,51	0,61	336°;5	-5°;6
dK	17,9	0,66	0,49	0,57	324°;0	-4°;5
gF	3,0	0,69	0,35	0,49	338°;9	+4°;1
gG	7,4	0,69	0,60	0,64	357°;7	+3°;8
gK	6,2	0,76	0,60	0,68	340°;3	-4°;5
gM	7,6	0,80	0,73	0,76	325°;0	-9°;7

В настоящей работе подготовительная часть обработки эллипсоидов скоростей, определение моментов, была большею частью выполнена следующим образом. Так как в каталоге пространственных скоростей [8] непосредственно не даны галактические координаты скоростей звезд, то они были вычислены из экваториальных гелиоцентрических скоростей при помощи формул преобразований (1—3). Затем были вычислены гелиоцентрические галактические координаты скоростей центроидов рассматриваемых звездных групп. Далее вычислялись координаты скоростей отдельных звезд относительно центроида таким образом, что к компонентам скоростей звезд относительно Солнца прибавлялись компоненты скорости Солнца относительно центроида. Отсюда можно было непосредственно вычислить центральные моменты компонентов скоростей и применить метод определения эллипсоидов

дов скоростей. Кроме того, вычислялись пространственные скорости звезд w относительно центроида, что позволило ограничивать материал некоторым верхним пределом.

Таблица 2

Элементы эллипсоидов скоростей, представленные на основании работы Вильсона и Раймонда [18]. $n = 4112$.

Группа	σ_1	σ_2	σ_3	$\bar{\sigma}$	V	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$	L_1	B_1
$w = 0-25$	10,8	9,1	7,5	9,0	0,7	0,84	0,69	354°	-2°
25-45	24,2	16,5	14,0	17,8	5,6	0,68	0,58	344	0
45-65	40,6	27,4	21,5	28,8	23,9	0,67	0,53	337	+2
65-100	61,5	32,1	29,7	38,8	58,6	0,52	0,48	333	+2
100-	125,4	94,6	58,9	88,7	69,9	0,75	0,47	321	+3
$w \leq 65$	21,5	15,2	12,1	15,8	3,9	0,71	0,56	344°	0°
100	25,3	17,4	13,6	18,2	6,0	0,69	0,54	343	0
Все	28,1	20,4	14,8	20,4	8,5	0,73	0,53	343	0
Oe-B5	13,5	11,4	9,2	11,2	1,4	0,84	0,68	347°	-17°
B7-A3	16,5	11,4	8,1	11,6	1,5	0,69	0,49	340	+3
A5-F5	26,2	18,1	12,5	18,1	5,9	0,69	0,48	345	-1
dF8-dG5	46,3	34,7	23,2	33,4	37,3	0,75	0,50	331°	+6
dK0-dM	48,6	29,9	23,0	32,2	33,4	0,62	0,47	336	+2
gF8-gG5	26,5	20,6	14,3	19,8	7,8	0,78	0,54	353°	-3
gK0-2	28,3	19,9	15,5	20,6	8,7	0,70	0,55	344	-2
gK5-gM	24,7	20,6	16,0	20,1	8,1	0,83	0,65	331	0
$M > 3,0$	48,0	31,7	22,0	32,2	33,5	0,66	0,48	335	+4
$M < 3,0$	23,0	16,6	12,7	16,7	4,7	0,72	0,55	345	-2

Результаты вычислений элементов эллипсоидов скоростей на основании данных каталога пространственных скоростей [8] представлены в табл. 1. В основу вычислений были положены компоненты скоростей звезд, для которых полные скорости относительно центроида заключаются в пределах: 1) $w \leq 60$ и 2) $w \leq 80$ км/сек. В таблице даны элементы эллипсоидов лишь соответственно второму случаю, $w \leq 80$ км/сек, но все результаты вычислений использованы для изображения размеров эллипсоидов графически на рисунке 16. Обозначения в таблицах (1-4) следующие: n — число звезд в группе; M — средняя абсолютная величина звезд группы; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — оси эллипсоида скоростей, $\bar{\sigma}$ — их среднее арифметическое и $\underline{\sigma}$ — среднее геометрическое; V — объем эллипсоидов скоростей, за единицу которого принят объем эллипсоида с $\underline{\sigma} = 10 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$; L_1, B_1 — галактическая долгота и широта точки пересечения большой оси эллипсоида с небесной сферой.

Элементы эллипсоидов скоростей на основании данных Нордрстрема [19]

Sp	<i>n</i>	<i>M</i>	\bar{M}	σ_1	σ_2	σ_3	$\varepsilon(\sigma)$	$\sqrt{\overline{\sigma^2}}$	$\bar{\sigma}$
Главная последовательность									
A	446	$M \leq +0,8$	+0,3	16,1	11,8	9,6	$\pm 1,1$	12,8	12,5
"	401	$M \geq +0,9$	+1,5	18,8	9,2	10,8	1,2	13,6	12,9
dF	346	$M \geq +3,0$	+3,8	27,0	17,0	15,2	1,9	20,4	19,7
dG	206	$M \leq +4,6$	+3,8	43,1	29,2	19,9	4,1	32,1	30,7
"	208	$M \geq +4,7$	+5,5	49,1	32,3	13,4	4,3	34,8	31,6
dK	228	$M > +3,5$	+6,4	39,5	28,4	20,8	3,7	30,6	29,4
dM	40	$M > +5$	+8,7	59,1	8,4	23,8	9,3	37,4	30,5

Звезды-гиганты

gF	125	$M \leq +0,9$	-0,6	20,4	13,3	8,2	$\pm 1,9$	14,9	14,1
"	366	$+1,0 \leq M \leq +2,0$	+2,1	20,5	16,5	12,7	1,5	16,9	16,6
gG	170	$M \leq +0,5$	-0,4	18,3	13,5	16,3	2,2	16,2	16,0
"	174	$M \geq +0,6$	+1,4	21,8	15,7	16,0	2,4	18,0	17,8
gK	236	$M \leq -0,8$	-1,3	17,1	12,3	15,0	1,8	14,9	14,8
"	333	$-0,7 \leq M \leq -0,1$	-0,3	22,7	14,8	18,4	1,8	18,9	18,6
"	381	$0,0 \leq M \leq +0,9$	+0,4	26,0	17,5	18,9	1,9	21,1	20,8
"	316	$+1,0 \leq M \leq +3,5$	+1,7	33,7	18,3	19,7	2,4	24,9	23,9
gM	117	$M < -0,7$	-1,2	21,7	18,6	14,5	3,2	18,5	18,3
"	122	$M \geq -0,6$	-0,1	29,8	21,0	19,6	3,9	23,9	23,3

Sp	<i>M</i>	$\bar{\sigma}$	<i>V</i>	$\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$	$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$	$\frac{\sqrt{\sigma_2 \sigma_3}}{\sigma_1}$	<i>L</i> ₁
----	----------	----------------	----------	-----------------------------	-----------------------------	---	-----------------------

Главная последовательность

A	$M \leq +0,8$	12,2	1,8	0,73	0,60	0,66	$357^\circ,2 \pm 10^\circ,0$
"	$M \geq +0,9$	12,3	1,9	0,49	0,57	0,53	6,3 5,4
dF	$M \geq +3,0$	19,1	7,0	0,63	0,56	0,60	350,0 8,0
dG	$M \leq +4,6$	29,2	25,0	0,68	0,46	0,56	323,9 12,0
"	$M \geq +4,7$	27,7	21,3	0,66	0,27	0,42	352,5 9,9
dK	$M > +3,5$	28,4	23,3	0,72	0,53	0,62	335,5 13,6
dM	$M > +5$	22,7	11,7	0,14	0,39	0,23	343,3 11,5

Звезды-гиганты

gF	$M \leq +0,9$	13,2	2,3	0,66	0,40	0,51	$321^\circ,1 \pm 12^\circ,1$
"	$+1,0 \leq M \leq +2,9$	16,3	4,3	0,80	0,62	0,71	312,0 15,1
gG	$M \leq +0,5$	15,9	4,0	0,74	0,89	0,81	341,2 20,3
"	$M \geq +0,6$	17,6	5,5	0,72	0,73	0,73	329,2 16,7
gK	$M \leq -0,8$	14,7	3,2	0,72	0,88	0,79	342,9 13,6
"	$-0,7 \leq M \leq -0,1$	18,4	6,2	0,65	0,81	0,73	338,6 10,5
"	$0,0 \leq M \leq +0,9$	20,5	8,6	0,67	0,73	0,70	333,2 9,1
"	$+1,0 \leq M \leq +3,5$	23,0	12,1	0,54	0,58	0,56	340,3 6,7
gM	$M \leq -0,7$	18,1	5,9	0,86	0,67	0,76	326,2 22,9
"	$M \geq -0,6$	23,0	12,3	0,70	0,66	0,68	348,3 19,3

Некоторые кинематические характеристики групп разных типов звезд соответственно более детальному подразделению по спектру (на основании данных П. П. Паренга [6] $n = 2968$)

Sp	n	σ_1	σ_2	σ_3	$\varepsilon(\sigma)$	σ	V	$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$	L
B0-5	40	9,7	7,6	4,8	$\pm 0,5$	7,1	0,4	0,50	$350^\circ \pm 57^\circ$
B7-A2	53	16,2	10,5	5,5	1,4	9,8	0,9	0,34	360 ± 11
A3-8	61	19,1	9,3	7,9	0,7	11,2	1,4	0,41	350 ± 6
A9-dF1	110	23,9	12,8	9,5	0,6	14,1	2,8	0,40	349 ± 11
dF2-4	180	26,8	17,0	11,7	0,8	17,6	5,4	0,44	330 ± 8
dF5-7	177	31,8	21,4	16,7	0,9	22,4	11,2	0,53	324 ± 25
dF8-dG2	188	46,0	27,5	22,6	2,1	30,2	27,5	0,49	345 ± 8
dG3-7	113	49,7	29,6	27,3	2,3	34,3	40,4	0,55	330 ± 10
dG8-dK2	100	52,0	30,5	22,9	2,2	33,1	36,3	0,44	333 ± 8
dK3-6	121	50,6	29,2	22,6	1,7	32,2	33,4	0,45	341 ± 9
dM	170	45,7	25,6	22,5	1,3	29,8	26,5	0,49	334 ± 7
gA	15	22	13	9	—	13,7	2,6	0,41	355 ± 1
gF	44	28	15	9	—	15,6	3,8	0,32	342 ± 1
gG0-8	345	25,6	17,9	14,6	0,6	18,9	6,8	0,55	340 ± 10
gG9-gK1	261	30,5	20,5	15,7	0,7	21,4	9,5	0,51	349 ± 7
gK2-5	394	30,6	20,5	17,3	0,7	21,6	10,1	0,57	342 ± 6
gM	266	31,2	22,5	16,3	0,7	22,6	11,5	0,52	335 ± 12
sd	51	36,5	25,7	22,7	2,8	27,7	21,2	0,62	320 ± 79
subg	61	46,1	28,3	23,3	2,0	31,2	30,4	0,50	330 ± 17
cO-cB5	35	12,0	10,5	8,6	1,0	10,2	1,1	0,72	364 ± 73
cF0-cM1	56	11,1	10,7	7,1	0,5	9,4	0,8	0,64	344 ± 1
cF0-cM11	82	14,6	8,7	7,2	0,9	9,7	0,9	0,49	347 ± 9
r var	45	37,8	23,1	18,7	3,0	25,1	15,8	0,50	334 ± 12

Сводные группы

B0-5	40	9,7	7,6	4,8	0,5	7,1	0,4	0,49	350 ± 57
B7-dF1	224	21,0	11,3	8,6	0,3	12,7	2,0	0,41	351 ± 4
dF2-7	357	29,4	18,9	15,2	0,6	20,4	8,5	0,52	327 ± 12
dF8-dM	692	48,3	28,6	23,9	0,8	32,1	33,0	0,49	338 ± 4
gF-gA	59	26,8	14,2	10,3	1,3	15,8	3,9	0,38	345 ± 6
subg+sd	112	42,5	27,1	23,7	1,5	30,1	27,3	0,56	327 ± 18
g	1266	29,5	20,5	16,2	0,3	21,4	9,8	0,55	342 ± 4
sg	173	12,7	10,2	7,7	0,4	10,0	1,0	0,61	346 ± 18
r var	45	37,8	23,1	18,7	3,0	25,1	15,8	0,50	334 ± 12

Для общей дискуссии относительно проблемы о закономерностях кинематических характеристик в связи с эллипсоидами

скоростей мы, кроме приведенного материала (табл. 1), привлекли для этой цели еще другие источники (см. таблицы 2—4).

В таблице 2 приведены некоторые данные, частью обработанные нами, из работы Вилсона и Раймонда [18]. Здесь звезды подразделены на группы по пространственной скорости и по спектру, а также по признаку принадлежности их к группе карликов и гигантов.

Таблица 3 составлена на основании данных Нордстрема [19], полученных им из радиальных скоростей 4177 звезд. Звезды здесь подразделены по принадлежности их к главной последовательности и к гигантам, по спектру и более детально по абсолютной величине, что имеет особенную ценность для решения эволюционной задачи.

3. Закономерности параметров эллипсоидального распределения скоростей звезд и их значение для эволюционной проблемы

А. Размеры эллипсоидов скоростей

Анализ данных таблиц (1—4) дает возможность выявить ряд закономерностей в элементах эллипсоидов последовательных однородных звездных групп и сделать некоторые заключения о их генетически-эволюционном характере. Эти закономерности, по-видимому, имеют существенное значение для выяснения путей развития нормальных, стационарных звезд.

Что касается размеров эллипсоидов скоростей, то у звезд главной последовательности средние величины их полуосей и объемов выявляют постепенное возрастание в порядке спектральной последовательности от В до G. На рисунке 16 представлены размеры эллипсоидов скоростей звезд, сгруппированных по спектру и абсолютной величине. Начало и конец вектора, изображенного на рисунке, представляют размеры ($\bar{\sigma}$) эллипсоида, соответственно двум вышеупомянутым случаям, когда полная скорость звезд относительно центроида соответственно меньше 60 и 80 км/сек.

В нижней части рисунка 16 сопоставлены числа таблицы 1 с числами таблиц 2 (Вилсон и Раймонд), 3 (Нордстрем) и 4 (Паренаго). Рассматривая приведенный на рисунке материал, можем заметить, что эллипсоиды скоростей звезд-карликов типа G и K, вычисленные нами на основании пространственных скоростей [8], имеют немного меньшие размеры, чем эллипсоиды, данные другими авторами, в то время как такое различие в случае звезд-гигантов незаметно. Объясняется это, вероятно, селекцией звезд по пространственным скоростям ($\omega \leq 80$ км/сек) в нашем выборе звезд.

Представленные результаты сравнимы между собой лишь до известной степени, так как числа звезд, входящие в вычисления, условия выбора группировок звезд и методы обработки эллип-

соидов скоростей несколько различаются между собой. Но тем не менее сопоставленные на рисунке 16 результаты разных источников показывают ясно выраженное единство в отношении закономерностей размеров эллипсоидов скоростей разных однородных звездных групп.

Кроме указанной закономерности, у звезд главной последовательности обращает на себя также внимание одна деталь, которая с первого взгляда мало заметна, но, возможно, имеет существенное значение. Начиная со спектрального типа G размеры эллипсоидов скоростей звезд у последующих групп не возрастают, но начинают уменьшаться. Эта закономерность выявляется не по всем данным, но в таблице 4 она хорошо выражена и еще более усиливается, если учесть наблюдательную селекцию материала. Согласно таблице 4, наибольшие значения размеров эллипсоидов скоростей $\sigma = 34,3$ км/сек и $V = 40,4$, соответствуют группе dG3—7 У последующих групп звезд главной последовательности как дисперсия скоростей, так и объем тел скоростей постепенно уменьшаются, что должно указывать в общем на более позднее происхождение этих звезд. Этот факт несомненно находится в связи с разделением главной последовательности на две части [6; 20].

Изучение кинематических характеристик групп звезд с различными физическими свойствами обнаружило известные закономерности и привело к выдвигению некоторых критериев, согласно которым можно определить с достаточной уверенностью относительные возрасты звезд и этим самым указать пути их эволюции [3; 4; 5]. Так, по двум из этих критериев звезды относительно тем более позднего происхождения, тем более молоды, чем больше в среднем линейная скорость галактического вращения рассматриваемой группы звезд (T -критерий) и чем меньше дисперсии скоростей звезд относительно их центроида (σ -критерий). Некоторыми исследователями, в том числе и автором, были представлены гипотезы для обоснования этих критериев на основании общих динамических закономерностей звездной системы [5].

Из предыдущего с очевидностью можно заключить об эволюционных путях звезд главной последовательности — от типа В и А до типа G и далее высказать некоторое предположение о генетической связи между субгигантами, или надкарликами, и обыкновенными карликами более поздних спектральных классов (табл. 4). Эти заключения оказываются аналогичными тем, которые можно делать на основании диаграммы скоростей центроидов однородных звездных групп на галактической плоскости симметрии \vec{TR} [5, рис. 1]. Звезды спектрального класса В и А пребывают в стадии раннего развития, в молодом возрасте, по отношению к совокупности всех здесь рассматриваемых звезд. Звезды dF и особенно звезды dG оказываются значительно более старыми, в то время как среди звезд dG, dK и особенно dM звезд могут встре-

чаться звезды более позднего происхождения, чем карлики первой части главной последовательности.

Рассматривая элементы эллипсоидов скоростей звезд верхней части главной последовательности и звезд-гигантов в одной совокупности, можно легко обнаружить ясно выраженную последовательность (табл. 4): $B \rightarrow A \rightarrow gF \rightarrow (gG, gK, GM)$ в возрастающем порядке размеров эллипсоидов. Закономерность этой последовательности без исключений видна по всем материалам, использованным нами, но с особенной отчетливостью она выражается на основании данных Нордстрема и Паренаго (табл. 3 и 4; рис. 16), принимая в этом случае вполне определенный вид: $B \rightarrow A \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$.

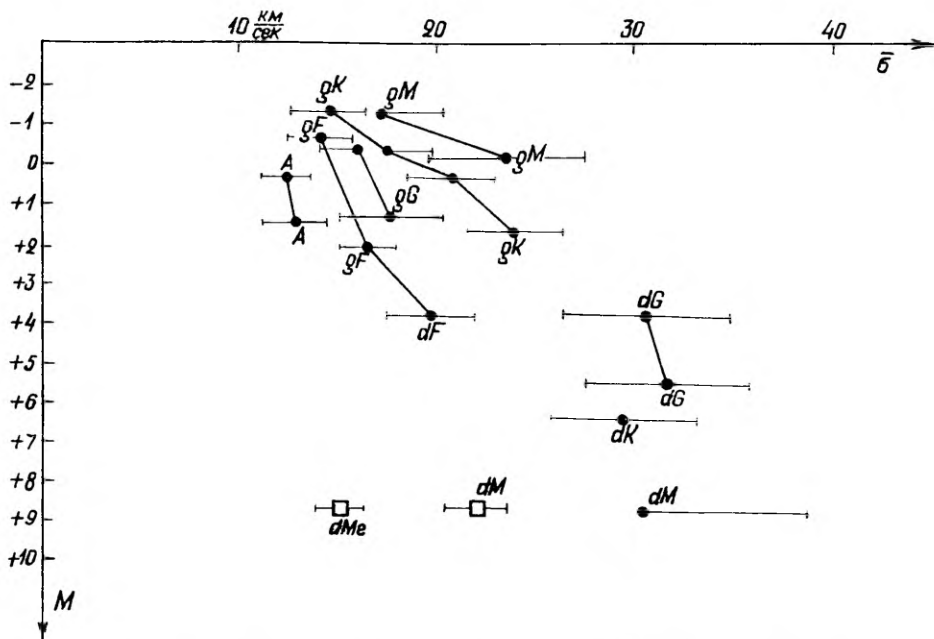


Рис. 17. Диаграмма размеров эллипсоидов скоростей соответственно спектру и абсолютной величине, составленная на основании данных труда [19].

Надо думать, что это указывает на эволюционный путь звезд-гигантов. Существование указанной последовательности заставляет нас истолковать ее в генетическом смысле таким образом, что те белые гиганты, которые имеют большие массы и сравнительно небольшие моменты вращения, способны на своем эволюционном пути превращаться в желтые и красные гиганты. Детально этот вопрос уже рассматривался с астрофизической точки зрения [21].

Итак, в связи с предыдущим можно отсюда усмотреть такой вывод, что дальнейший путь развития белых гигантов разветв-

ляется по двум главным направлениям — по линии главной последовательности и в сторону гигантов, в зависимости от начальных условий, вероятно главным образом от величины начальной массы и момента вращения развивающихся звезд. Эта проблема весьма интересна и должна изучаться и с количественной стороны.

Остановимся на детальном рассмотрении указанной закономерности на основании конкретного материала. Представим данные таблицы 3 (Нордстрем) посредством диаграммы (рис. 17), для составления которой были использованы результаты наших вычислений на основании данных в работе Нордстрема [19]. По оси абсцисс отложены средние значения из трех осей эллипсоидов скоростей соответственно отдельным группировкам звезд по спектру, а по оси ординат представлены их средние абсолютные величины.

При каждой группировке звезд отмечена средняя квадратическая «ошибка» дисперсии скоростей в виде отрезка прямой (табл. 3). Она примерно в 2 раза больше средней ошибки $\bar{\sigma}$. Соединяя между собой группировки звезд одноименных спектральных типов звезд-гигантов сплошной линией, мы получаем регулярные графики, закономерности которых четко выявляются на рисунке. Отдельным спектральным типам соответствуют отдельные графики, исходящие веерообразно как будто из одной точки, которую можно представить наверху на краю нашего рисунка. При этом графики звезд-гигантов располагаются слева направо в порядке, соответствующем спектральным типам в обыкновенной спектральной последовательности. Весьма вероятно, что закономерная последовательность графиков и распределение группировок звезд в каждом из них отражает существенно закономерности путей развития звезд-гигантов.

Желая установить стадии развития звезд в том порядке, в каком они действительно следуют одна за другой по путям эволюции, следует в диаграмме 17 по какой-нибудь линии «изомассы», т. е. по линии, параллельной или приблизительно параллельной оси абсцисс и пересекающей отдельные графики групп звезд-гигантов, переместиться слева направо. Отсюда видно, что направление пути развития гигантских звезд можно при помощи соответственных спектральных обозначений представить в виде:

$$A \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM.$$

В этой последовательности не указан спектральный класс В; но его можно сюда внести, не нарушая правильности закона. В самом деле, для ранних В звезд (В0-5) из соответствующих данных [6, 35] мы имеем $\bar{\sigma} = 7,4$. На диаграмме 17 место В звезд должно лежать слева от места А звезд и немного выше последнего.

Так как графики для отдельных спектральных типов не параллельны между собой, а продолжения их сходятся как будто в од-

ном месте, то из этого следует, что скорость перехода одного состояния или стадии развития звезды в другое состояние происходит тем более быстро, чем больше первоначальная масса звезды. При весьма больших массах, какие встречаются у сверх-гигантов, смена одного эволюционного состояния другим происходит с наибольшей быстротой.

Эти выводы, по-видимому, согласуются с фактами, особенно с результатами наблюдений звездных ассоциаций. Как указал В. А. Амбарцумян [22, 19], горячие гиганты в звездных ассоциациях несомненно находятся в родстве со сверхгигантами поздних спектральных типов:

«В некоторые О-ассоциации входят сверхгиганты самых поздних спектральных типов, среди которых выделяются полуправильные и неправильные переменные. Среди представителей этого класса объектов выделяется гранатовая звезда μ Цефея, которая определенно входит в хорошо изученную расширяющуюся ассоциацию Цефей II. Интересно, что изученная Бидельманом ассоциация вокруг h и γ Персея, не содержащая заметной газовой туманности, в то же время имеет в своем составе ряд красных сверхгигантов, большинство которых является полуправильными переменными. Вместе с тем в этой ассоциации наблюдается наиболее высокий процент звезд типа В с эмиссионными линиями. Указанные выше примеры позволяют сделать заключение о несомненном родстве горячих гигантов и сверхгигантов поздних типов».

Можно думать, что сверхгиганты поздних типов встречаются в более старых ассоциациях, которыми следует считать такие, в которых, подобно h и γ Персея, незаметна диффузная материя, потраченная по нашему мнению на создание звездных образований ассоциации. Если в молодых ассоциациях красные сверхгиганты либо вовсе не встречаются, либо встречаются в малом относительно количестве, то отсюда можно заключить, что белые сверхгиганты в своем дальнейшем развитии превращаются действительно в красные, т. е. в гиганты более позднего спектрального типа.

Далее надо полагать, что сверхгиганты поздних типов, как например μ Цефея, являются звездами, имеющими наибольшие массы среди других членов ассоциации. Так как звезды одной и той же ассоциации образовались приблизительно одновременно, во всяком случае в продолжение недолгого промежутка времени в сравнении с периодом развития Галактики, то наибольшая первоначальная масса обуславливает на эволюционном пути звезды наиболее позднюю, авансированную стадию развития в виде красного сверхгиганта. Хотя существование ассоциации относительно непродолжительно, но за промежуток времени ее существования у ее звезд могли уже выявиться различия физических характеристик в зависимости от первоначальных значений масс звезд, входящих в состав ассоциации. В случае же обыкновенных гигантов, т. е. в случае звезд более малых масс, для выявления таких

различий физических характеристик потребовалось значительно больше времени, именно такой период, за который уже могут значительно изменяться кинематические характеристики звезд.

В связи с развитием идей об эволюционных путях звезд-гигантов, как это указано в предыдущем, весьма важно с точки зрения развития рассмотреть и вопрос о различии природы компонентов двойных звезд. Известно, что в случае звезд-гигантов, приблизительно до абсолютной величины $M = +3$, компоненту с большей массой и большей светимости соответствует более поздний спектральный тип, в то время как у звезд главной последовательности в общем, кажется, выражается обратный закон³ Эти замечательные результаты исследования физических характеристик двойных звезд, по-видимому, находятся в согласии с нашими выводами о путях эволюции звезд, в особенности звезд-гигантов. Вероятность, что двойные звезды могут образоваться путем деления или путем захвата, в общем очень мала; поэтому следует считать правильным предположения, что компоненты двойных звезд образуются почти одновременно и совместно из ступеней диффузного вещества. Из факта одновременности начала звездной эволюции компонентов двойной звезды можно заключить, что за один и тот же промежуток времени — от зарождения звезды до настоящего момента — компоненты звезды прошли относительно неравные пути эволюции и достигли различных ступеней развития, что выражается и в различии их физических характеристик.

Обратим далее внимание на правую нижнюю часть рисунка 17, где представлены группы звезд-карликов более поздних спектральных типов. Число звезд, относящихся к этим группам, невелико, в виду чего положение соответствующих точек на рисунке довольно неточное. Можно отметить, что в то время, когда gF и dF звезды образуют последовательность тесно связанных групп, этого нельзя сказать о группах соответственно gG и dG звезд и т. д. Бросается в глаза также большой скачок между группами dF и dG , что еще раз подтверждает разделение главной последовательности на две части [20].

Что касается взаимного расположения точек dG , dK , dM , то более красные карлики имеют меньшую дисперсию скоростей. Из данных Нордстрема этого не видно, но нужно иметь в виду, что дисперсия скоростей карликов, особенно группы dM , благодаря селекции этих звезд по собственным движениям оказывается сильно завышенной. Более детальное и критическое рассмотрение этого вопроса Р. Б. Шацовой [23], Деле [24], Я. Э. Эйнасто [28—30] и другими [25—27] привели к переопределению дисперсии скоростей dM карликов и dMe звезд с эмиссионными линиями

³ На I Пленуме комиссии по звездной астрономии Астрономического Совета АН СССР 18-го мая 1955 г. в Москве А. Н. Дейчем и П. Г. Куликовским были представлены интересные доклады на близкую тему «Физические характеристики широких звездных пар».

в спектре, причем для них была найдена значительно меньшая дисперсия скоростей. Так, Эйнасто [28] на основании тангенциальных скоростей всех 347 звезд типа dM в списках Высотского [31] получил для пространственных скоростей $\sigma = 22,0 \pm 1,3$ км/сек, а для 82 dMe звезд, пользуясь радиальными и тангенциальными скоростями, нашел $\sigma = 15,2 \pm 0,9$ км/сек. [29]. Места групп звезд Высотского, соответствующие упомянутым значениям дисперсии скоростей, показаны в нашей диаграмме (рис. 17) квадратиками. Судя по работе Я. Э. Эйнасто [28], точку dK звезд на диаграмме следует также сместить влево, но не так много, как точку dM звезд. Из полученной таким образом диаграммы для групп звезд-карликов поздних спектральных типов можно сделать некоторые выводы относительно эволюционной последовательности этих звезд. Так, звезды группы dMe с эмиссионными линиями в спектрах должны быть причисляемы к молодым звездным формациям. На это указывает малая дисперсия скоростей и малая скорость относительно Солнца [27, 294], помимо их видимой природной связи с переменными звездами типа T Тельца, которые несомненно являются молодыми звездами, так как связаны со звездными ассоциациями. По кинематическим характеристикам возраст dMe звезд кажется такого же порядка, как возраст A и F звезд. Так как около 25% всех M-карликов имеют эмиссионные линии в спектрах, то отсюда следует, что их «эмиссионная стадия» развития должна быть довольно продолжительной. За этот промежуток времени кинематические элементы звезд в соответствии с изменением динамических условий в Галактике вероятно могут измениться настолько, что возможно их выявить из наблюдений.

Исходя из сравнения кинематических характеристик звезд-карликов поздних спектральных типов, кажется допустимым предположение, что звезды dMe превращаются в обычные звезды-карлики dM, путь развития которых в дальнейшем, быть может, приводит их к типу dK и даже dG звезд.

Последние однако вероятнее всего происходят от dF звезд или субгигантов. Но при этом возникает вопрос о существовании генетической связи этих звезд с субгигантами, предположенной некоторыми астрофизиками. На основании одних только кинематических характеристик трудно решить вопрос, имеется ли тут связь. Судя по дисперсиям скоростей, dG звезды явно старше dF звезд. Старше ли они субгигантов, с полной уверенностью заключить нельзя. Но какое-то генетическое родство тут вероятно существует. При современном состоянии данных о кинематике этих звезд следует ожидать решения вопроса от теоретической астрофизики, разрабатывающей на основании экспериментальных данных теорию строения и развития этих звезд.

Б. О форме эллипсоидов скоростей

Форма эллипсоидов скоростей в качестве кинематической характеристики звезд определяется отношением размеров их осей или дисперсий скоростей по направлениям соответственных осей. Известно, что в общем имеет место соотношение: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. В самом деле, у звездных групп, приведенных в таблицах 1—4, σ_1 всегда соответствует наибольшей полуоси эллипсоида. Но любопытно, что это правило имеет исключение в случае углеродных звезд, у которых наибольшая ось эллипсоида скоростей направлена приблизительно перпендикулярно к основной галактической плоскости [32]. Далее, хотя обычно $\sigma_2 > \sigma_3$, но в некоторых случаях, как у А звезд (табл. 1 и 3), у R и N звезд [6, 36], а также у G- и K-гигантов у Нордстрема (табл. 3) имеет место обратное отношение: $\sigma_2 < \sigma_3$. В последнем случае у нас (табл. 1), у Вилсона и Раймонда (табл. 2), а также у П. П. Паренаго [6, 35] получаются противоположные результаты, почему возникает вопрос о причине этого противоречия между данными Нордстрема [19, 170] и других авторов.

Форму эллипсоида мы можем характеризовать мерой продолговатости, или вытянутости, за которую можно принять отношения

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \text{ или } S = \frac{\sqrt{\sigma_2 \sigma_3}}{\sigma_1}, \text{ а также мерой сжатия } C = \frac{\sqrt{\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1}}{\sqrt{\sigma_2 \sigma_3}} = 1 - \frac{1}{S}.$$

Так, например, для G-карликов (табл. 1) мы имеем в км/сек:

$$\sigma_1 = 35,8; \quad \sigma_2 = 26,4; \quad \sigma_3 = 18,3; \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = 26,8;$$

$$\underline{\sigma} = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3)^{\frac{1}{3}} = 25,8; \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2)} = 27,8;$$

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0,51; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = 0,74; \quad S = 0,61; \quad C = -0,64.$$

Отрицательный знак для сжатия C показывает, что эллипсоид в действительности не «сжат», как земной эллипсоид, а вытянут по направлению главной оси $a = \sigma_1$, как это обыкновенно бывает. Особенно большая вытянутость эллипсоида скоростей звезд заметна у следующих групп: А (табл. 1 и 4); $B_7 - dF_1, gF - gA$ (табл. 4); dG ($M \geq 4,7$), dM (табл. 3), в каких случаях

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} \leq 0,45. \text{ Особенной своеобразностью отличается по Нордстрему}$$

эллипсоид группы М-карликов (табл. 3), для которого промежуточная ось σ_2 очень мала в сравнении с другими осями. Из его данных получается отношение 6 : 1 : 2. У Паренаго [6, 35] в этом случае отношения осей равны 9 : 5 : 4, что соответствует нормальному положению. Но средняя величина дисперсии $\bar{\sigma}$ у обоих авторов составляет 31 км/сек. Однако есть основание предполагать, что эта величина вследствие селекции скоростей завышена. Самые

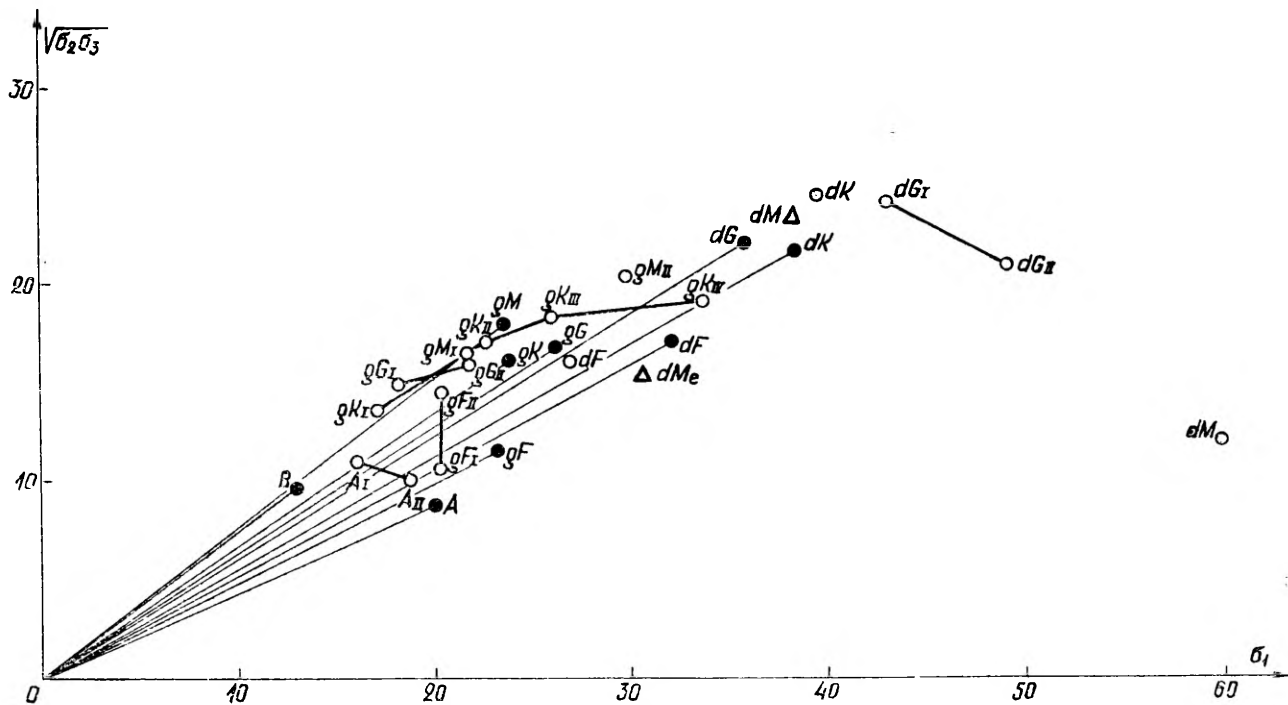


Рис. 18. Соотношение между размерами и формой эллипсоидов скоростей.

экрюглые, наиболее приближающиеся к сферической форме эллипсоиды скоростей имеют как ранние, белые гиганты, так и поздние гиганты (В и gM звезды). В этих случаях отношение осей равно 10:8:7. Отношение размеров осей эллипсоидов скоростей у гигантов в среднем приблизительно равно 10:7:6, в то время как у звезд главной последовательности, начиная со звезд спектрального класса А, эллипсоиды отличаются большей вытянутостью по оси σ_1 , т. е. по направлению вертексов. Такая зависимость формы эллипсоида от абсолютной величины звезд распространяется далее и на отдельные подгруппы звезд, подразделенных по абсолютной величине. Разделение по абсолютной величине, имеющие вообще важное значение при изучении вопросов звездной эволюции, показано в таблице 3. Из этой таблицы видно, что существует определенная корреляция между отношением

$\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$, а также $\frac{\sqrt{\sigma_2\sigma_3}}{\sigma_1}$, и средней абсолютной величиной M звездных подгрупп таким образом, что с уменьшением светимости звезд указанное отношение осей эллипсоидов скоростей в общем уменьшается. Это хорошо иллюстрируется соответствующими диаграммами (рис. 18 и 19).

На этих рисунках сопоставлены двояким способом данные о звездных группах по таблице 1 (черные кружочки) и по таблице 3 (белые кружочки), причем латинскими цифрами (рис. 18) обозначены подгруппы у Нордстрема (табл. 3) в порядке убывания светимости или возрастания абсолютной величины. На рисунке 18 мерой вытянутости, согласно с предыдущим, является тангенс угла, составленного направлением точки на рисунке с осью σ_1 . Рисунок 19 дает представление только о форме эллипсоида, а рис. 18 также о его размерах. Эллипсоиды скоростей у более слабых звезд более вытянуты по оси σ_1 , что заметно у подгрупп звезд типа А, dG и других, за исключением звезд типа F. На рисунке 18 бросается в глаза особенно большое различие в положении группы dM звезд. Эти звезды (табл. 3) вероятно сильно селектированы по скорости. На этом же рисунке на основании более новых данных неселектированного материала представлены в виде треугольников группы dM и dMe звезд [27, 294], положения которых хорошо согласуются с нашими представлениями об эволюционных отношениях звезд второй части главной последовательности.

Из данных П. П. Паренаго (табл. 4) можно вывести для карликов от dF до dM отношение $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 0,48$, для гигантов от G до M 0,54 и для сверхгигантов 0,61. Эти результаты показывают ту же закономерность, т. е. что с увеличением светимости звезд увеличивается и отношение $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$, чему соответствует меньшая вытянутость эллипсоида скоростей по направлению оси σ_1 . Наоборот, эллипсоиды скоростей абсолютно более слабых звезд имеют более

продолговатую, вытянутую форму в направлении большой оси эллипсоида.

Здесь возникает вопрос, от чего зависит указанная закономерность, от светимости ли, т. е. главным образом от массы звезд или от других факторов — например, от асимметрии звездных скоростей. Следует ожидать, что асимметрия должна увеличивать $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, т. е. уменьшать вытянутость эллипсоида.

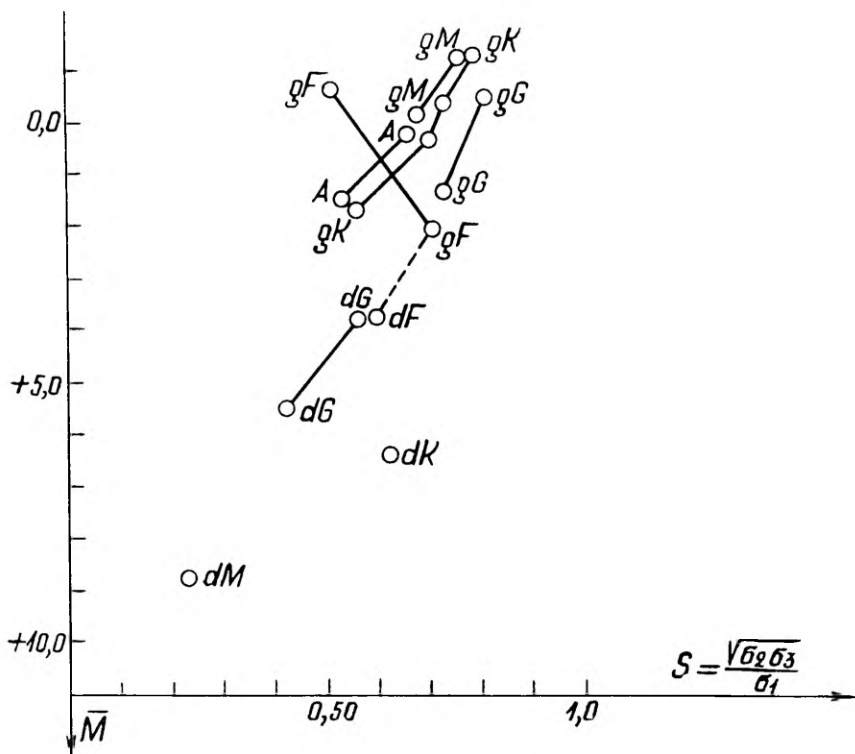


Рис. 19. Соотношение между формой эллипсоидов скоростей и средней абсолютной величиной звезд.

Но возможно, что обнаруженная закономерность является просто результатом случайных наблюдательных ошибок скоростей и селекции материала по ω . Действительно, наблюдательные ошибки уменьшают вытянутость эллипсоида, что сказывается больше всего у звезд с малой дисперсией скорости, т. е. у звезд с большой светимостью. Наблюдательная же селекция, имеющая место в основном у звезд с малой светимостью, уменьшает частоту с меньшим ω и увеличивает вытянутость эллипсоида. Правда с другой стороны, отбрасывание звезд с большими ω в какой-то мере компенсирует влияние наблюдательной селекции по ω . Хо-

рошей иллюстрацией влияния на эллипсоид скоростей селекции по ω служат данные таблицы 2.

Отметим еще, что согласно данным таблиц 1 и 2 у звезд-гигантов отношение $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ возрастает в порядке спектральной последовательности, но по данным Нордстрема и Паренаго (табл. 3 и 4) эта зависимость, по-видимому, не получает отчетливого выражения.

В заключение этого раздела рассмотрим при помощи надлежащей диаграммы, как форма и размеры эллипсоида скоростей варьируют в зависимости от разделения звезд по спектру. Воспользуемся для этого диаграммой (рис. 20), в которой по данным таблицы 4 представлены оси эллипсоида скоростей σ_3 и σ_1 соответственно на вертикальной и горизонтальной осях прямоугольной системы координат. Соединяя концы отрезков σ_3 и σ_1 прямыми, мы для соответственных групп звезд получаем меры вытянутости $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ в виде тангенса угла наклона прямой к оси σ_1 . Если вместо отноше-

ния $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ взять отношение $\frac{\sqrt{\sigma_2\sigma_3}}{\sigma_1}$, то общие выводы от этого существенно не изменятся. Параллельность отрезков прямых соответствует подобию фигур эллипсоидов. Такое графическое представление элементов эллипсоида скоростей весьма наглядно и целесообразно, так как вместе с размерами эллипсоида оно информирует нас и о форме его. Представленная здесь диаграмма не отличается особенной полнотой. С помощью ее представлены только типичные случаи, имеющие особенное значение. Укажем на некоторые выводы, вытекающие из рассмотрения диаграммы.

В большинстве случаев эллипсоиды скоростей характеризуются близким подобием фигур. От общего правила резко отступают только звезды типа R и N [6, 36] и в особенности углеродные звезды [32, 38], группам которых соответствуют прерывистые прямые на рисунке 20. Судя по диаграмме, некоторую тенденцию к такой фигуре эллипсоида скоростей проявляют межзвездный газ и сверхгиганты типа G 0—8.

С генетической точки зрения большой интерес представляют и последовательности групп звезд-карликов типа F, G и M. Форма эллипсоидов скоростей упомянутых групп почти одинакова; но, что касается размеров эллипсоидов, то переход от группы dF 5—7 к группе dF 8 — dG 2, к которой по спектру относится и Солнце, совершается относительно большим скачком. В этом промежутке помещается почти эллипсоид субгигантов. В соответствии с этим кажется вероятным генетическое сродство между звездами «солнечной группы» и субгигантами, что может иметь значение для космогонической гипотезы образования Солнца и солнечной системы. Это подтверждается и близостью положения центроида субгигантов по T -координате в пространстве скоростей с положением центроида группы dF 8 — dG 2 [5, рис. 1].

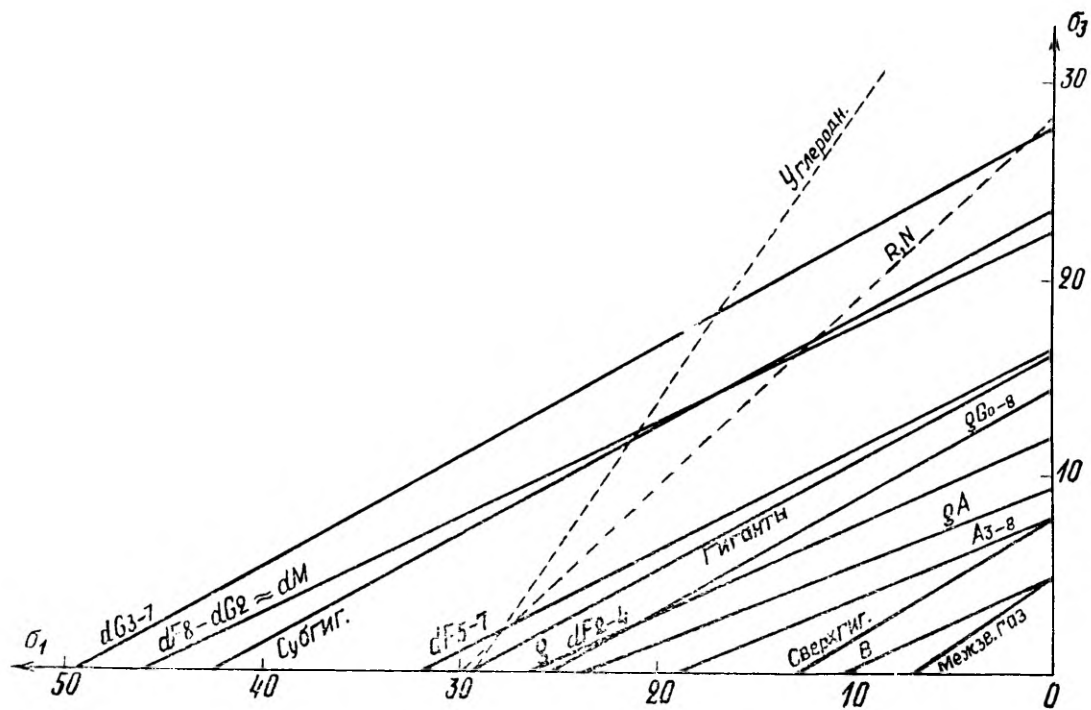


Рис 20. Форма и размеры эллипсоидов скоростей звездных групп на основании данных труда [6].

В. Ориентация в пространстве осей эллипсоидов скоростей

Кроме размеров и формы эллипсоидов скоростей звезд мы рассмотрим также и ориентацию их осей, которая определяется их направлением, т. е. сферическими координатами L и B точки вертекса. Под вертексом мы в данном случае подразумеваем точку пересечения продолжения большой оси эллипсоида с небесной сферой. В частности мы имеем в виду вертекс в области созвездия Стрельца, недалеко от места галактического центра. Закономерности, выявленные в отношении положения вертексов различных группировок звезд, в настоящее время, возможно, еще труднее космогонически истолковать, чем закономерности в отношении размеров и формы эллипсоидов скоростей, о чем говорилось выше.

Некоторые исследователи с осторожностью и сомнением относятся к вопросу, существует ли вообще какое-нибудь отчетливо выраженное соотношение между положением вертекса и светимостью и спектром звезд. Так, Х. Нордстрем на основании обширного обработанного им материала радиальных скоростей звезд высказывается по этому вопросу следующим образом: «Что касается долготы вертекса, то полученные значения ее величины очень разбросаны в пределах некоторых звездных классов, так что нет определенных указаний на существование правильного изменения

L в зависимости от \bar{M} » [19, 171]. Но, с другой стороны, по П. П. Паренаго «положение вертекса зависит от абсолютной величины звезд: звезды-гиганты дают $L = 344^\circ$; звезды-карлики дают $L = 330^\circ$; галактическая же широта получается около нуля в обоих случаях» [17, 131]. Далее в указанном месте П. П. Паренаго упоминает, что «элементы эллипсоидального распределения звездных скоростей почти не зависят от спектрального класса (если исключить звезды класса В и gM) и от положения звезд на небесной сфере».

Для разъяснения таких видимо противоречивых высказываний и раскрытия предполагаемых закономерностей, связанных с положением вертекса, надо подвергнуть весь имеющийся материал более детальному анализу. Известно, что галактические долготы вертексов разных групп звезд в общем больше долготы галактического центра, принимаемой равной 330° [17, 287]. В настоящем случае нашей непосредственной задачей не является объяснение причины отклонения вертекса от галактического центра. Этот вопрос, дискутированный в работах некоторых авторов [33—35], вероятно, может быть разрешен в дальнейшем в связи с космогоническими представлениями о динамическом развитии галактической системы. В настоящем мы должны ограничиться лишь указанием некоторых найденных закономерностей, по всей вероятности, имеющих космогонический смысл, хотя еще не вполне выясненный.

На рисунке 21 представлена зависимость между долготой вертекса и абсолютной величиной звезд различных спектральных

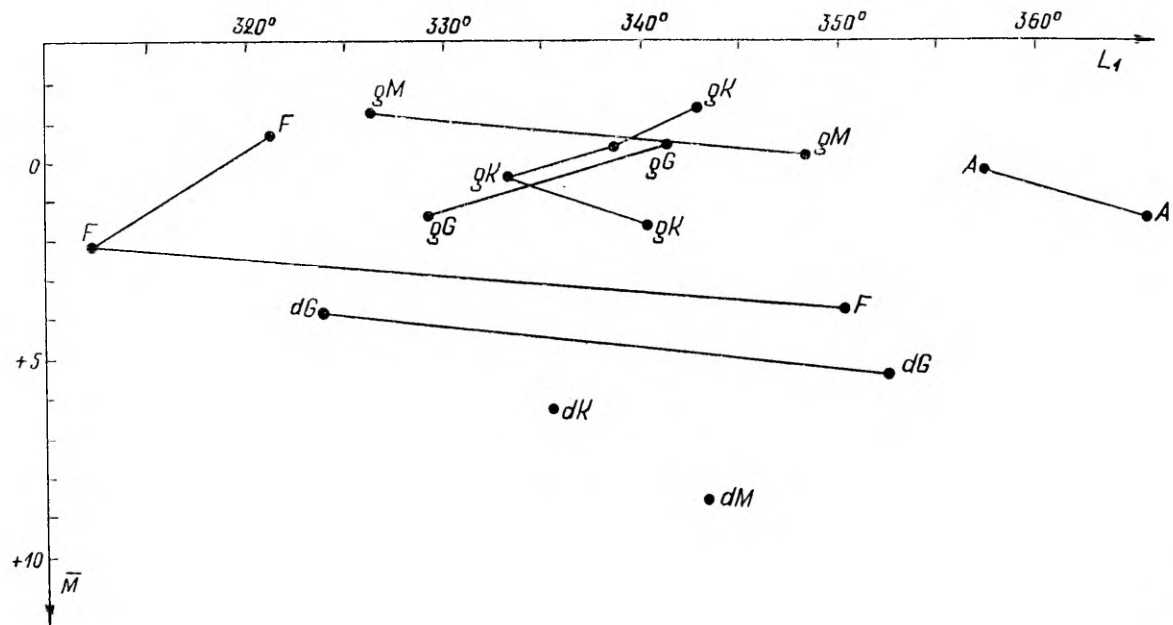


Рис. 21. Зависимость между долготой вертекса и абсолютной величиной звезд разных спектральных типов по данным труда [19].

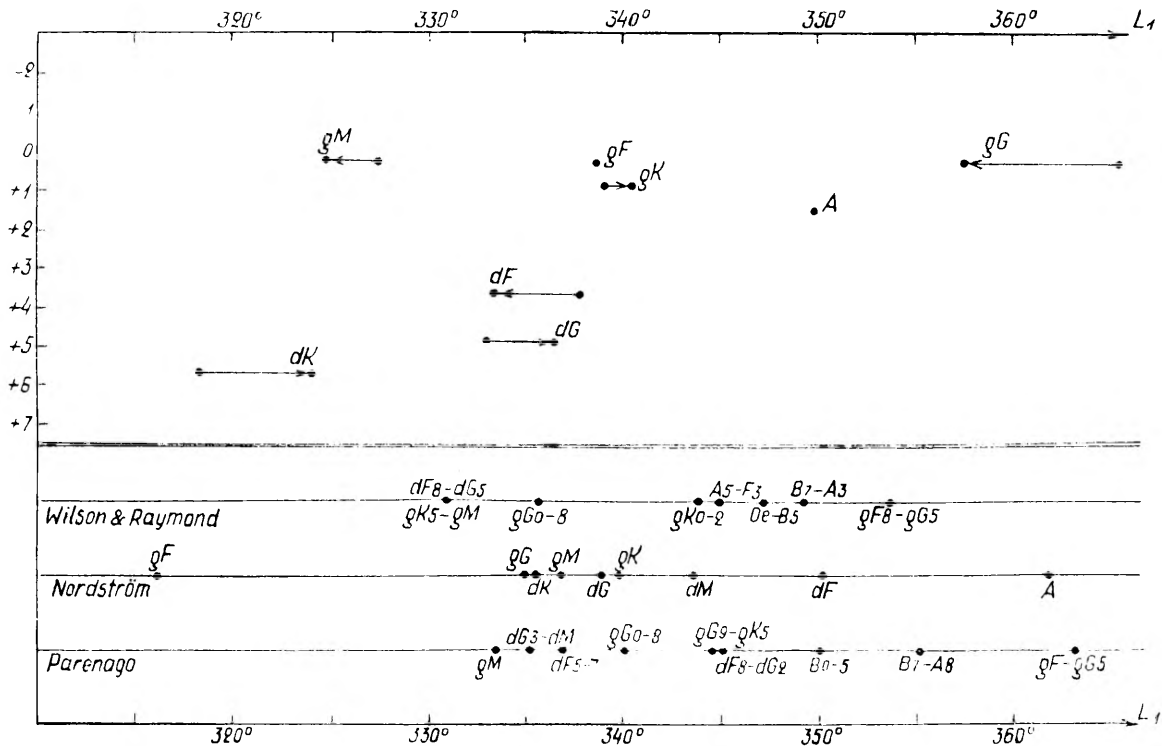


Рис. 22. Положения вертексов по галактической долготе соответственно группам звезд по спектру и абсолютной величине. Сопоставление результатов с данными других авторов.

групп (табл. 3). Отсюда видно, что у звезд-гигантов, кроме типа gM , с увеличением светимости долгота вертекса возрастает. У звезд же главной последовательности заметно обратное явление — по мере увеличения светимости долгота вертекса убывает. Данные о В-звездах здесь отсутствуют. Далее на рисунке 22 представлены положения вертексов по галактической долготе в зависимости от спектра и абсолютной величины звезд (табл. 1). В нижней части рисунка сопоставлены положения вертекса по долготе для разных звездных групп по данным Вилсона и Раймонда (табл. 2), Нордстрема (табл. 3) и П. П. Паренаго (табл. 4). Стрелкой показано смещение вертекса соответственно пределам пространственной скорости звезд 60 км/сек и 80 км/сек. Из диаграммы видно, что у звезд главной последовательности с увеличением показателя цвета долгота вертекса в общем убывает. У звезд-гигантов поздних спектров наблюдается то же самое явление. Звезды класса F занимают особое положение. Данные о положении вертекса В-звезд в таблице 1 кажутся неуверенными (они отмечены двоеточием), и само положение на рисунке 22 не представлено. У Нордстрема положение вертекса для gF -звезд имеет слишком большое расхождение. В общем кажется вероятным, что более молодые звезды в какой-либо последовательности имеют большую галактическую долготу вертекса. С этой точки зрения должно быть понятно положение вертекса для G-гигантов, так как их группа содержит значительное число сверхгигантов, которые являются более молодыми звездами. Но этот вопрос нуждается в дальнейшем изучении.

Для подтверждения того, что указанные закономерности в отклонениях вертекса представляются действительно имеющими место, попытаемся решить вопрос другим способом. Для изучения распределения пространственных скоростей по разным отдельным группам звезд кроме метода эллипсоидов скоростей нами были применены и другие, более конкретные методы изучения тел скоростей звезд. Исходя из материала пространственных скоростей [8], нами были вычислены компоненты скоростей, параллельные трем взаимно перпендикулярным осям галактической системы координат. Из этих компонентов были выведены положения центроидов разных групп звезд и положения отдельных звезд относительно соответственных центроидов в пространстве скоростей. Затем из этих данных были найдены также положения апексов на небесной сфере для отдельных звезд. В качестве примера мы приводим здесь распределение апексов движения 1464 звезд совокупности разных типов (рис. 23). Здесь знак \odot означает апекс Солнца, \bullet — апекс звезд в пределах $\omega \leq 80$ км/сек, а \circ — в пределах $\omega > 80$ км/сек, относительно общего центроида рассмотренной совокупности звезд.

Из аналогичных диаграмм, построенных для разных групп звезд, были графическим способом предварительно выведены положения вертексов в галактических сферических координатах как

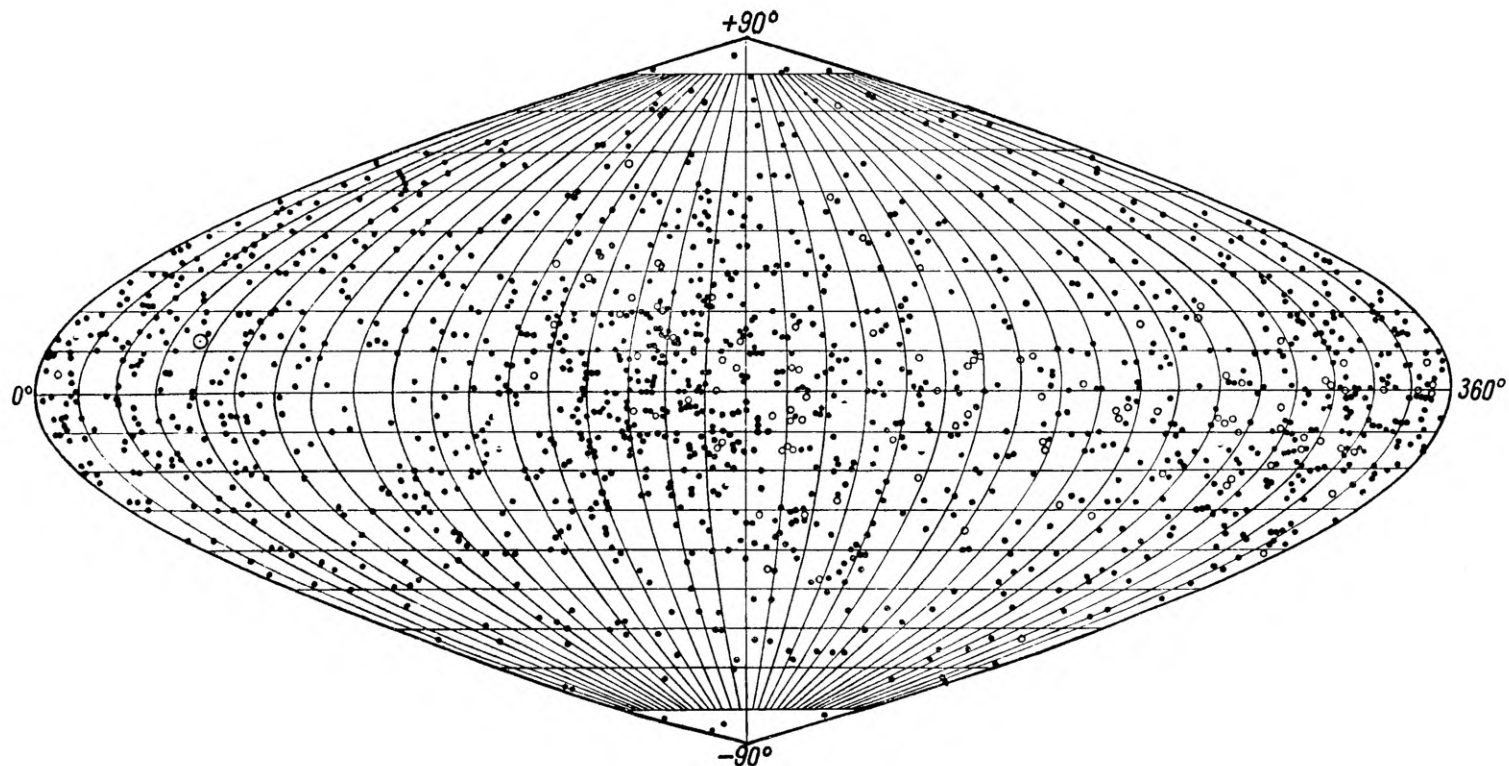


Рис. 23. Распределение апексов движений звезд на небесной сфере, составленное на основании данных каталога пространственных скоростей [8]. Число звезд $n = 1464$. \odot — апекс движения Солнца, \bullet — апекс движения звезд в пределах пространственной скорости $\psi \leq 80$ км/сек, \circ — то же для остальных звезд, имеющих большую скорость.

места наибольшей густоты апексов. Так как вертексы вообще недалеко отстоят от галактического экватора, то в первом приближении было принято, что они лежат на галактическом экваторе. Получив для какой-либо группы звезд галактическую долготу вертекса и отметив точку его на сфере, вокруг этой точки мы описываем большой круг, проходящий через оба галактические полюсы — северный и южный. Этот большой круг разделяет всю сферу на две полусферы, в полюсах которых соответственно находится главный вертекс в области созвездия Стрельца и антивертекс в области созвездия Ориона. Взяв далее для всех звезд, апексы которых расположены внутри первой полусферы, их компоненты скоростей, сложив их и разделив сумму на число всех апексов на данной полусфере, мы таким образом получили средние всех компонентов скоростей в прямоугольной галактической системе координат. Отсюда далее легко найти величину и направление среднего вектора скорости, соответствующего данной полусфере. Аналогичная обработка была проделана и для противоположной полусферы. В иных случаях полученные средние векторы, соответственно двум противоположным полусферам, оказались не совсем симметричными относительно центроида. Затем оба вектора, соответственно двум полусферам, были соединены в один, и таким образом был получен окончательно средний вектор скоростей для данной группы звезд. В результате получились направления векторов, в общем не много отличающиеся от начальных направлений вертексов, как это видно из таблицы 5. Здесь L_0 — исходное, L — полученное значение галактической долготы вертекса; B — его галактическая широта; \bar{v} — средняя величина вектора скорости по направлению вертекса, считая от центроида как начала; n — число звезд в группе. Пространственные скорости, считаемые от центроида, заключаются в пределах 80 км/сек.

Для большей наглядности полученные результаты представлены графически (рис. 24) таким образом, что центроиды отдельных звездных групп все совмещены в одной точке. Средние векторы скоростей представлены совпадающими с галактической плоскостью, что вообще мало отличается от действительности. По этому же методу были определены средние векторы скоростей и в первой, и в третьей четверти галактических долгот.

Особенный интерес представляют закономерности в распределении вертексов и значений величины среднего вектора скорости для различных групп звезд, причем звезды-карлики и звезды-гиганты рассматриваются отдельно. Следует обратить особое внимание на четвертый квадрант (рис. 24), где обычно представляют положения или направления вертексов.

В результате описанной трудоемкой обработки материала были выявлены следующие коррелятивные связи между долготой вертекса и спектральным классом.

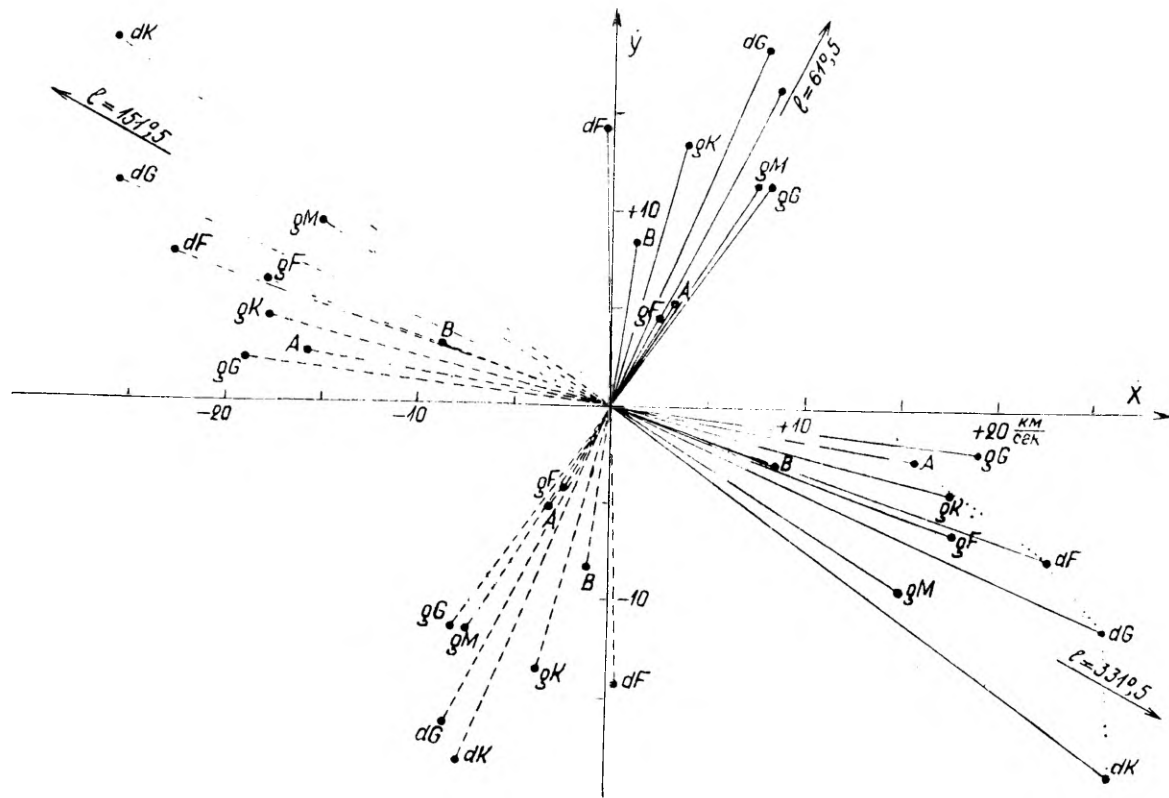


Рис. 24. Проекция среднего вектора скорости на галактической плоскости симметрии (экватора) соответственно группам звезд-гигантов и звезд главной последовательности.

У звезд-гигантов в порядке gG, gK и gM галактическая долгота «вертекса» последовательно убывает, в то время как размеры среднего вектора скоростей мало варьируют.

Т а б л и ц а 5

	L_0	L	B	\bar{v} км/сек	n
B	345°	341° .1	+ 5° .0	9,2	126
A	345	349 ,4	+ 0 ,8	15,7	218
dF	345	340 ,9	+ 1 ,2	24,2	167
dG	345	335 ,9	- 4 ,2	28,4	110
dK	345	324 ,7	- 7 ,2	30,0	103
gF	340°	341° .1	- 3° ,7	18,8	49
gG	345	353 ,4	+ 4 ,2	19,2	108
gK	345	346 .0	- 1 ,7	18,1	310
gM	325	327 ,4	- 7 ,9	17,6	93

У звезд главной последовательности типа A, dG, dK замечается аналогичное явление — долгота вертекса постепенно убывает с возрастанием показателя цвета звезд. Вместе с этим средний вектор скоростей звезд также увеличивается. Из-за недостаточности и недифференцированности материала здесь на первый взгляд не выявляется разделение главной последовательности на две части. Получается так, будто первая часть главной последовательности распространяется включительно до звезд типа dK. С точки зрения генетики звезд отсюда следует, что более красные звезды главной последовательности имеют более раннее происхождение, т. е. являются более старыми звездами в сравнении с белыми, из чего последовательность этапов развития соответствовала бы схеме: A → dF → dG → dK. Но из этого нельзя заключить, что развитие всякой звезды, с различными начальными условиями, должно непременно следовать указанному порядку. Мы видели выше, что, по всей вероятности, часть звезд-карликов главной последовательности представляет собой молодые звезды.

Звезды типа F занимают в отношении положения их вертекса особое положение, причем звезды dF и gF составляют по указанному признаку одну группу. Но средний вектор \bar{v} dF-звезд немного больше, чем у gF-звезд. Указанное кинематическое сродство между гигантами и карликами спектрального типа F находит подтверждение и по другим кинематическим признакам указанных звезд (см. например рисунок 17). Для звезд-гигантов и звезд главной последовательности обнаруживается свой особенный, специфический закон распределения вертексов. В общем кажется вероятным, как было уже указано выше, что звезды более молодого возраста имеют большую галактическую долготу вертекса, и наоборот. Этот критерий относительного возраста звезд мог бы называться L -критерием.

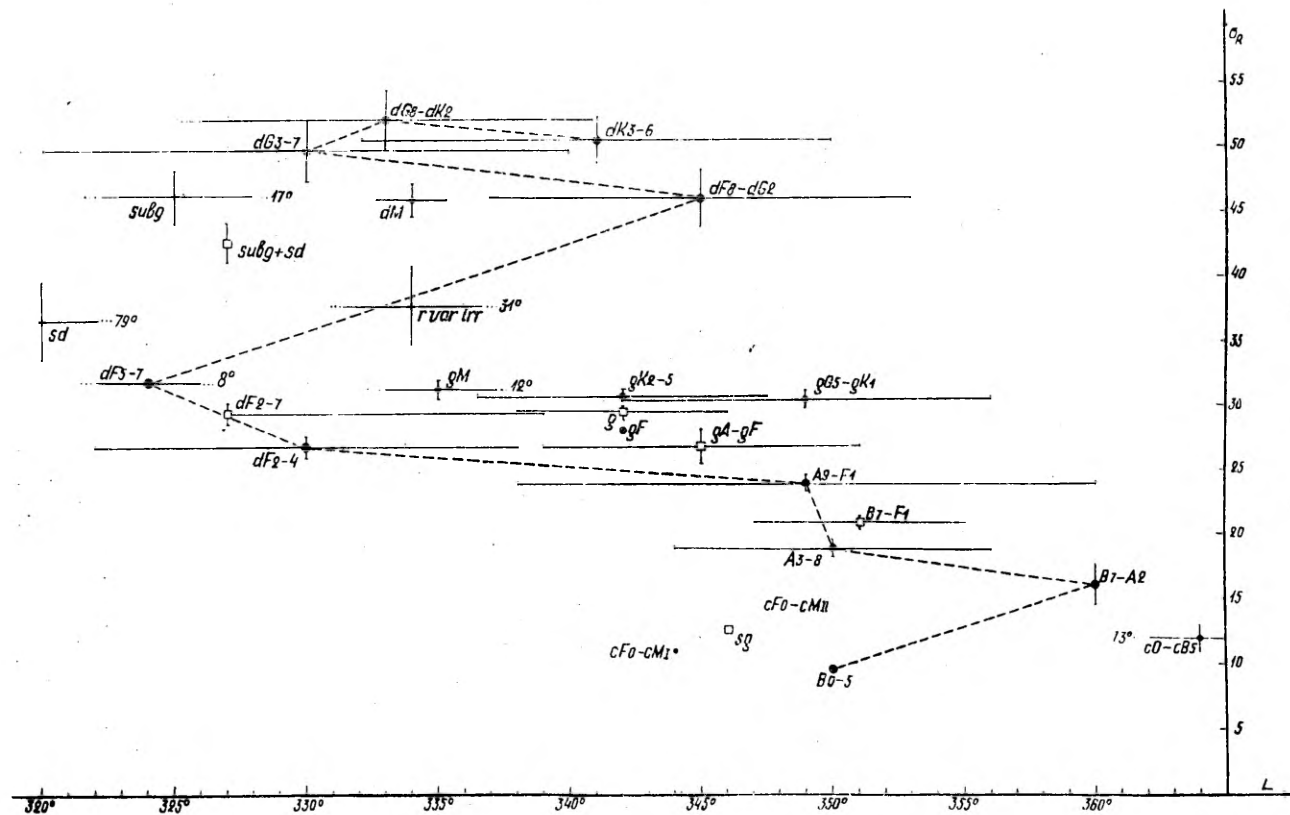


Рис. 25. Соотношения между долготой вертекса и величиной большой полуоси эллипса скоростей звезд, подразделенных на группы по спектру и абсолютной величине.

Наконец, для обзора соотношений между долготой вертекса и размерами эллипсоидов скоростей, воспользуемся диаграммой (рис. 25), где по оси абсцисс отложены галактические долготы (L), а по оси ординат большие полуоси (σ_1) эллипсоидов скоростей⁴. Диаграмма построена на основании более современных данных, какими являются числа таблицы 1 в статье П. П. Паренаго [6]. На рисунке 25 для положений центроидов групп звезд их средние квадратические ошибки изображены отрезками прямых. Группы звезд главной последовательности соединены между собой прерывистой линией. Рассмотрение ее показывает нам, что начиная с группы В7—А2 до группы dF5—7 галактическая долгота вертекса последовательных групп убывает. Этой последовательности, по-видимому, соответствует и последовательность увеличения возрастов звезд. Начиная с последней упомянутой группы, переход к «солнечной» группе dF8—dG2 происходит большим скачком в обратном порядке, т. е. в направлении увеличения галактической долготы; затем у последующих групп следует уменьшение долготы вертекса, хотя это совершается не с полной определенностью, а в пределах ошибок положений вертексов. Можно полагать, что распределение групп последней части главной последовательности в какой-то мере отражает ее кинематическую и, вероятно, генетическую неоднородность. Звезды групп карликов М, субгигантов и надкарликов имеют приблизительно одинаковую величину полуосей эллипсоидов и, вероятно, имеют также возраст одинакового порядка. Ничто, по-видимому, не говорит против того, чтобы, по крайней мере, часть субгигантов и надкарликов может иметь генетическую связь со звездами второй части главной последовательности.

Что касается групп звезд-гигантов более поздних спектральных типов, то можно констатировать две закономерности: соответственно увеличению показателя цвета звезд постепенно уменьшается долгота вертекса и возрастает величина большой полуоси эллипсоида скоростей, хотя это выявляется приблизительно, только в пределах «ошибок». Указанной последовательности, по нашему представлению, соответствует последовательность увеличения относительных возрастов звезд.

4. Общие выводы исследования эллипсоидов скоростей звезд

Результаты исследования закономерностей элементов эллипсоидов скоростей и сделанные из них выводы о направлении эволюции звезд приводятся ниже.

1. У звездных групп главной последовательности соответственно спектральным типам В, А, dF, dG наблюдается постепенное увеличение размеров эллипсоидов скоростей. Этой последова-

⁴ У П. П. Паренаго [6] обозначены через σ_3

тельности соответствует последовательность этапов развития звезд от более раннего к более позднему. Из этого следует, что В и А звезды являются самыми молодыми в рассматриваемой последовательности, а dG-звезды суммарно самыми старыми. Но начиная с группы звезд-карликов типа G (с коллектива dG3—dG7), у последующих групп замечается постепенное уменьшение размеров эллипсоидов скоростей. Это заметно у звезд-карликов типа K, M и в особенности типа Me. Согласно указанным кинематическим характеристикам приходится, по крайней мере, часть коллектива таких звезд причислять к категории более молодых звезд, что подтверждается и изучением их физической природы.

Таким образом, рассмотрение соотношений между размерами эллипсоидов скоростей звездных групп главной последовательности приводит к выводу, что главная последовательность в отношении кинематики и генетики звезд разделяется на неоднородные части, как это было обнаружено и на основании анализа тангенциальных скоростей [28—30].

2. Эллипсоид скоростей звезд-гигантов по объему в три раза меньше эллипсоида звезд-карликов. Принимая за критерий возраста звезд размеры эллипсоидов скоростей, нам следует отсюда заключить, что звезды-гиганты в общем моложе звезд-карликов. Этот вывод находится в согласии и с результатами, полученными на основании других критериев кинематического характера.

3. Звезды-гиганты образуют свою собственную, отдельно от звезд главной последовательности закономерную последовательность. Размеры эллипсоидов скоростей тем больше, чем большее значение имеет показатель цвета звезд, чем цвет звезд более красный. Таким образом, генетически-эволюционная последовательность гигантов в общем выражается схемой: $gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$, показывающей ход этапов развития этих звезд.

4. Звезды В и А, как «белые гиганты», по объемам своих эллипсоидов скоростей хорошо умещаются в прогрессирующий ряд и с другими гигантами, почему имеет место и расширенная последовательность: $(B, A) \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$. Здесь эллипсоид скоростей В-звезд имеет наименьшие размеры в сравнении с эллипсоидами скоростей остальных гигантов. Поэтому становится весьма вероятным вывод, что «белые гиганты» представляют собой более раннюю стадию развития других гигантов.

5. Субгиганты по объему эллипсоидов скоростей весьма сходны с карликами более поздних спектральных типов. На основании этого может возникнуть вопрос о возможной генетической связи по крайней мере между частью совокупности этих карликов и субгигантами.

6. Сверхгиганты сходны по кинематике с белыми гигантами спектральных типов В0—А2 и, вероятно, молоды.

7. Красные переменные звезды большой светимости кажутся имеющими генетическое сродство с обыкновенными гигантами, образуя, вероятно, их ветвь или этап эволюции.

8. Эллипсоиды скоростей группировок звезд-гигантов в пределах пространственных скоростей $w < 80$ км/сек относительно соответственных центроидов отличаются тем меньшею мерою вытянутости, чем большую величину имеет показатель цвета звезд. Другими словами, более округлым эллипсоидам скоростей соответствует более красный цвет звезд. Вероятно, у звезд-гигантов форма эллипсоидов скоростей является одним из кинематических критериев, по которому можно оценить относительный возраст звезд, причем красные гиганты являются более старыми в сравнении с белыми гигантами. У звезд главной последовательности, не считая В-звезд, возможно существует аналогичное соотношение, но оно не столь ясно выражено.

9. В-звезды по форме эллипсоида скоростей почти не отличаются от гигантов, в особенности от гигантов с более поздним спектральным классом, но отличаются от них по гораздо меньшему объему эллипсоида. Поэтому критерий размеров эллипсоида скоростей указывает на более позднее происхождение В-звезд.

10. Галактическая широта вертексов всех рассмотренных групп звезд мала.

11. Галактическая долгота вертекса сводной группы карликов меньше долготы вертекса сводной группы гигантов. При этом в каждой такой группе, подразделенной на подгруппы по спектру, как у карликов, так и у гигантов долгота вертекса возрастает в соответствии с уменьшением показателя цвета звезд. Еще больше галактическая долгота вертекса у А-звезд. Таким образом получаются закономерные последовательности групп звезд, указывающие на применимость долготы вертекса в качестве критерия относительного возраста звезд.

12. Подразделив звезды на группы по величине пространственных скоростей относительно центроида, мы находим, что с увеличением предельного значения пространственных скоростей звезд у соответствующих групп галактическая долгота вертекса постепенно убывает.

13. Метод эллипсоидов скоростей звезд как метод последовательности во времени кинематических характеристик дает возможность оценить относительные средние возрасты звезд с различными физическими характеристиками и определить последовательности этапов развития звезд на фоне развития всей галактической звездной системы. Применением этого метода к изучению звездных движений создается представление о направлениях эволюционных путей звезд.

Автор считает своим долгом поблагодарить М. Г. Куль, С. А. Кутузова и Х. Т. Ээлсалу за оказанную ими помощь при техническом оформлении рукописи работы.

Автор глубоко благодарен Г. Г. Кузмину и Я. Э. Эйнасто за внимательный просмотр текста рукописи и за сделанные ими при этом ценные указания.

Поступило
14 XI 1958

Литература

1. Роотсмязэ Т. Я., О некоторых новых закономерностях движений звезд. Ежегодник-календарь Тартуск. Астр. obs., на эст. языке, 1938.
2. Роотсмязэ Т. Я., Новые идеи в связи с проблемой эволюции звезд. Ежегодник-календарь Тартуск. Астр. obs., на эст. языке, 1943.
3. Роотсмязэ Т. Я., Космогонические выводы из статистики скоростей звезд. Доклад на научной сессии Тартуск. ун-та. Ежегодник-календарь Тартуск. Астр. obs., на эст. языке, 1946.
4. Роотсмязэ Т. Я., Кинематические характеристики и проблема эволюции звезд-гигантов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 37, 1955.
5. Роотсмязэ Т. Я., Проблема эволюции звезд в связи с закономерностями их кинематики. Публ. Тартуск. Астр. obs. (в печати).
6. Паренаго П. П., Исследование пространственных скоростей звезд. Труды ГАИШ, 1951, 20, 26—80.
7. Strömberg, G., Mt. W. Contr., 293 = Ap. J. 61, 1925.
8. Каталог экваториальных компонентов скоростей 1470 звезд, под руководством В. Г. Фесенкова. Труды Гос. Астрофиз. Института, 1926, 3, вып. 2.
9. Паренаго П. П., Движение белых карликов и субкарликов. Сообщ. ГАИШ, 30, 1949.
10. Charlier, C. V. L., Vorlesungen über die Grundlage der math. Statistik, Lund, 1920.
11. Trumpler, R. J. and Weaver, H. F., Statistical astronomy, Univ. of California, 1953.
12. Vyssotsky, A. N. and Williams, E. T. R., Publ. Leander McCormick Obs., 10, 1948.
13. Oort, J. H., The stars of high velocity. Publ. Astr. Laboratory Groningen, 40, 1926.
14. Charlier, C. V. L., Memoirs of the University of California, 7, 1926.
15. Pahlen, E., Lehrbuch der Stellarstatistik, Leipzig, 1937.
16. Schwarzschild, K., Nachr. d. Kgl. Ges. der Wissenschaften zu Göttingen, S. 614 ff., 1907.
17. Паренаго П. П., Курс звездной астрономии, изд. 3-е, 1954.
18. Wilson, R. E. and Raymond, H., The space motions of 4233 stars, A. J., 40, 14, 1930.
19. Nordström, H., A study of stellar motions, based on radial velocities, Lund Medd., Ser. II, 79, 1936.
20. Паренаго П. П., Вопросы космогонии, 1954, т. II, 261—268.
21. Масевич А. Г., Вопросы космогонии, 1957, т. V, 149—180.
22. Амбарцумян В. А., Вводный доклад на симпозиуме по эволюции звезд, изд. АН СССР, Москва, 1952.
23. Шацова Р. Б., Астр. журн. 29, 568, 1952.
24. Delhaye, J., Sur les propriétés cinématiques des étoiles naines de type M à raies d'émission, C. R. Acad. Sci. (Paris), 237, 294, 1953.

25. Mumford, G. S., The motions and distribution of dwarf M Stars, A. J., **61**, No. 1939, June 1956.
26. Dyer, E. R., Jr, An analysis of the space motions of red dwarf stars, A. J., **61**, 1956.
27. Gliese, W., Die Geschwindigkeitsverteilung der M-Zwerges mit Emissionslinien, Zs. f. Aph., Bd. **45**, 293—301, 1958.
28. Эйнасто Я. Э., О кинематической структуре главной последовательности, Публ. Тартуск. Астр. обс., **32**, № 6, 1954.
29. Эйнасто Я. Э., О кинематике Ме-карликов. Публ. Тартуск. Астр. обс., **33**, № 1, 1955
30. Эйнасто Я. Э., О кинематике звезд второй части главной последовательности; Труды 4-го совещ. по вопросам космогонии, 1955, 479—482.
31. Vyssotsky, A. N., Ap. J. **97**, 381, 1943; **104**, 234, 1946; **116**, 117, 1952.
32. Икауниекс Я. Я., Труды Инст. физики АН Латв. ССР, IV, Рига, 1952, Астр. журн. **29**, № 6, 1952.
33. Shiveshwarkar, M. N., **95**, 655, 1935.
34. Heckman, O., M. N., **96**, 67, 1935.
35. Lindblad, B., M. N., **96**, 69, 1935.

TÄHTEDE KIIRUSTE ELLIPSOIDID JA TÄHEEVOLUTSIOONI PROBLEEM

Prof., füüs.-mat. tead. kand. **T. Rootsmäe**

Astronoomia ja geofüüsika kateeder

Re s ü m e e

Käesoleva uurimuse iseloom on tähestatistiline, mistõttu selle teostamisel tuli rakendada statistilise astronoomia meetodeid. Uurimus kujutab enesest üht jätku autori poolt seni avaldatud töödest tähtede kinemaatiliste karakteristikute alal [1—5]. Kinemaatiliste karakteristikutena on töös käsitletud kiiruste ellipsoidide elemente, milleks on ellipsoidide telgede mõõtmed, suhted ja suunad; neist oleneb ellipsoidide ruumala suurus kiiruste ruumis, kuju ja orientatsioon (eriverteksite galaktilised pikkused). Arvutuste aluseks olid tähtede ruumkiiruste komponentide andmed [8] ja mitmete autorite andmed nende töödes [6; 18; 19; 29]. Järgnevas on esitatud uurimise tulemused kiiruste ellipsoidide elementide seaduspärasustest ja neist tehtud järeldused tähtede evolutsiooni käigu suundade määramiseks.

1. Põhijada täherühmadel vastavalt spektritüüpide järjestusele B, A, dF, dG võib täheldada kiiruste ellipsoidide mõõtmete järgset kasvamist. Sellele järjestusele vastab tähtede evolutsiooni kõik varasemalt hilisema astme suunas. Eelnevast järgneb, et vaadeldava järjestuse piires on B ning A tähed noorimad ja dG tähed üldiselt vanimad. Kuid kääbustähtede G tüübi rühmast (kollektiivist dG3-7) alates võib järgmistel rühmadel tähele panna kiiruste ellipsoidide suuruse järkjärgulist kahanemist. See on märgatav kääbustähtede K, M ja eriti Me tüübi puhul (joon. 17). Vastavalt sellele tuleb vähemalt osa selliste tähtede kogumikust lugeda nooremate tähtede hulka kuuluvaks, mida kinnitab ka nende tähtede astrofüüsikaline uurimine.

Nii viib meid põhijada täherühmade kiiruste ellipsoidide mõõtmete käsitus otsusele, et kinemaatilisel ja geneetilisel jagunel põhijada mittehomoenseiks osadeks, nagu see ilmnes ka tähtede tangentsiaalsete kiiruste analüüsimisel [28—30].

2. Hiidtähtede kiiruste ellipsoid on ruumalalt kääbustähtede omast kolm korda väiksem. Lugesdes tähtede suhtelise vanuse

kriteeriumiks nende kiiruste ellipsoidide suurused ehk mõõtmed, me järeldame sellest, et hiidtähed on kääbustähtedest üldiselt nooremad. Seesugune väide on kooskõlas ka tulemustega, mis on saadud teiste kinemaatilise iseloomuga kriteeriumide põhjal.

3. Eraldi põhijada tähtedest moodustavad ka hiidtähed oma erilise seaduspärase jada ehk järjestuse. Hiidtähtede kiiruste ellipsoidide mõõtmed on seda suuremad, mida suuremad on nende värvusindeksid, see tähendab, mida punasemad on tähed. Niiviisi avaldub hiidude geneetilis-evolutsiooniline järjestus üldiselt järgmise skeemi abil: $gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$, mis näitab nende tähtede arenguastmete käiku.

4. B ja A tähed kui «valged hiidud» sobivad kiiruste ellipsoidide mahult hästi ka teiste hiidude progresseeruvasse ritta, mispärast on kehtiv laiendatud evolutsiooniline järjestus $B \rightarrow A \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$. Vastavalt sellele reale on B tähtede kiiruste ellipsoid väiksem (joon. 1, 2, 16, 18, 20) Sellest tuleneb väga tõenäoline järeldus, et «valged hiidud» esindavad teiste hiidude varasemat arengustaadiumi.

5. Allhiidud sobivad kiiruste ellipsoidide mahult hilisemate spektriliikide punakate kääbustega (joon. 20). Sel põhjusel paistab tõenäolisena, et vähemalt nende kääbustähtede kogumiku osa ja allhiidude vahel on olemas geneetiline seos või sugulus.

6. Ülihiidud on kinemaatika poolest sarnased $B0-A2$ spektritüüpi valgete hiidudega (joon. 20) ja on tõenäoliselt noored.

7. Suure valgusvõimsusega punased muutlikud tähed näivad harilike hiidudega omavat geneetilist, päritolulist sugulust; nad moodustavad arvatavasti nende haru või evolutsiooni etapi.

8. Hiidtähtede rühmade kiiruste ellipsoidid, juhul kui ruumkiirused on võetud piirides $\omega < 80$ km/sec vastavate rühmade tsentroidide suhtes, omavad seda väiksemat lapikuse ehk lamelduse mõõtu, s. t. on seda ümaramad, mida suuremad on tähtede värvusindeksid ja mida punasemad on tähed. Tõenäoliselt on hiidtähtedel kiiruste ellipsoidi kuju üks kriteeriumidest, mille järgi võib üldiselt hinnata tähtede suhtelist iga, kusjuures punased hiidud on teiste hiidudega võrreldes vanemad. Põhijada tähtedel, jättes kõrvale B tähed, on analoogiline seos võib-olla ka olemas, kuid ei tule nii selgesti esile.

9. B ja gM tähtede rühmade kiiruste ellipsoidid on kujult peaaegu sarnased, kuid nende mõõtmed on B tähtedel tunduvalt väiksemad. Ellipsoidide ruumala kriteeriumist aga tuleb sel juhul järeldada B tähtede hilisemat päritolu võrreldes gM tähtedega.

10. Kõigi käsitletud täherühmade verteksite galaktiline laius on väike.

11. Kääbuste üldrühma verteksi galaktiline pikkus on tunduvalt väiksem hiidude üldrühma verteksi galaktilise pikkusega võrreldes. Seejuures igas niisuguses rühmas, mis on jaotatud allrühmadeks spektri järgi, nii kääbustel kui ka hiidudel, kasvab verteksi galaktiline pikkus vastavalt värvusindeksi kahane-

misele. Veel suurem on verteksi pikkus A tähtedel. Nõndaviisi saadakse täherühmadel seaduspärased järjestused, mis näitavad, et verteksi pikkus on kasutatav tähtede suhtelise vanuse kriteeriumina.

12. Jagades tähed rühmadeks nende ruumkiiruste järgi, kusjuures ruumkiirused võetakse tsentroidi suhtes, me paneme tähele, et ühes tähtede ruumkiiruste piirväärtuse kasvamisega vastavate rühmade verteksiite galaktiline pikkus järk-järgult kahe-neh.

13. Tähtede kiiruste ellipsoidide meetod kui kinemaatiliste karakteristikute ajalise järjestuse meetod võimaldab hinnata mitmesuguste füüsikaliste omadustega tähtede keskmist suhtelist vanust ja määrata tähtede evolutsiooni astmete järjestus tähesüsteemi arengu taustal. Seesuguse meetodi rakendamisega tähtede liikumise uurimiseks saavutatakse kujutlus tähtede arenemisteede suundadest.

THE VELOCITY ELLIPSOIDS OF STARS AND THE PROBLEM OF STELLAR EVOLUTION

T. Rootsmäe

Summary

The present investigation is a continuation by the author of his works, hitherto published [1—5], on the kinematical characteristics of the stars. The elements of the velocity ellipsoids consisting of the sizes, ratios and directions of their axes and determining respectively the volume, form and orientation (the galactic longitudes of the group vertices) of the ellipsoids form the kinematical characteristics considered in this paper. The data on the components of the space velocities of stars [8] as well as the data belonging to several other authors [6, 18, 19, 29] served as the basis of the computations. The results of the investigation on the regularities of the elements of the velocity ellipsoids and the conclusions bearing on the determination of the tendency of stellar evolution are outlined as follows:

1. In the case of the main sequence star groups arranged in the order of spectral types B, A, dF, dG a gradual growth of the sizes of the velocity ellipsoids can be noticed. To this order corresponds the evolutionary path in the direction from the earlier to the later stage. It follows that within the limits of the sequence considered B and A stars are the youngest and dG stars generally the oldest. But from the G star group (group dG 3—7) onwards a gradual diminution of the size of the velocity ellipsoid can be detected. This reveals itself in the case of dwarf K, M and, especially, Me stars (fig. 17). According to this, at least a part of the stars are to be considered as belonging to the younger stars, a fact supported by the astrophysical investigation of these stars.

So the analysis of the sizes of the velocity ellipsoids of the main groups leads us to the conclusion, that the main sequence kinematically and genetically divides into nonhomogeneous parts as established from the analysis of the tangential velocities of stars [28—30].

2. The velocity ellipsoid of the giant stars is by its volume three times smaller than that of the dwarfs. Considering the sizes of the velocity ellipsoid to represent a criterion of the relative age of the stars, the conclusion that, in general, the giants are younger than the dwarfs can be drawn. This is in agreement with the results obtained by means of other kinematical criterions.

3. Apart from the main sequence the giant stars form their own specific sequence. The sizes of the velocity ellipsoids of the giants are the larger the greater are their colour indices, i.e. the redder are these stars. Hence, the genetic and evolutionary sequence of the giants can be expressed by the general scheme $gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$, which shows their evolutionary stages.

4. B and A stars as «white giants» fit in well with the progressive range of other giants as to the volumes of the velocity ellipsoids. Therefore the extended evolutionary sequence $B \rightarrow A \rightarrow gF \rightarrow gG \rightarrow gK \rightarrow gM$ should exist. In accordance with this order the velocity ellipsoid of the B stars turns out to be the smallest (figs. 1, 2, 16, 18, 20). It leads to the highly probable conclusion that the «white giants» represent the earliest evolutionary stage of the other giants.

5. By the volume of their velocity ellipsoids the subgiants fit it with the late type dwarfs (fig. 20) For this reason it seems probable that there is a genetic affinity between subgiants and at least a part of these dwarfs.

6. The supergiants are kinematically similar to the white giants of the type B0—A2 (fig. 20) and are probably young.

7. The red variable stars of high luminosity seem to be genetically related to the ordinary giants, they probably form an evolutionary stage or branch of the latter.

8. When the space velocities are limited to the values $w \leq 80$ km/sec with respect to the centroids of the corresponding groups the velocity ellipsoids of the groups of the giants possess the lower degree of flattening i. e. are the more globular the greater the colour indices and the redder the stars. Apparently the form of the velocity ellipsoid of the giants represents a criterion for the estimation of the relative age of these stars, the red giants being older than the others. As for the main sequence stars, apart from B stars, a similar relation exists probably but is not so striking.

9. The velocity ellipsoids of B and gM star groups are similar by their forms but the sizes of the velocity ellipsoids of B stars are considerably smaller. Hence, the criterion of the volume of ellipsoids points out that B stars are of more recent origin than gM stars are.

10. The galactic latitude of vertices of every star group under consideration is small.

11. The galactic longitude of the vertex of the entire group of the dwarfs is considerably smaller than that of the entire group of the giants. If we divide every such group, both dwarfs and giants, in subgroups according to the spectrum, the longitude of the vertex increases with decreasing colour index. The galactic longitude of the vertex of the A stars is still greater. So we find the systematic trends which indicate that it is possible to use the longitude of the vertex as a criterion for the relative ages of the stars.

12. If we divide the stars into groups according to their space velocities referred to the centroid we notice that the greater becomes the limiting space velocity in the group the smaller becomes the galactic longitude of the vertex of that group.

13. The method of the velocity ellipsoids of the stars developed as a method for arranging kinematical characteristics as successions enables us to estimate the mean relative age of the stars with different physical properties, and to establish the order of the evolutionary stages on the background of the evolution of the stellar system. By applying such a stellar kinematical method a picture of the evolutionary trends of the stars can be drawn.

МЕТОД ВАРЬИРОВАНИЯ ТОЛЩИН СЛОЕВ ПРОСВЕТЛЯЮЩЕГО ОПТИЧЕСКОГО ПОКРЫТИЯ

Доцент, канд. физ.-мат. наук П. Г. Кард

Введение

Теория многослойных просветляющих оптических покрытий разработана до сих пор недостаточно. Главный недостаток состоит в ограниченности средств, которые позволили бы теоретически спроектировать оптимальный состав просветляющего покрытия в каждом конкретном случае. Существуют, конечно, удобные формулы, по которым можно вычислить просветляющую способность покрытия, элементы которого заданы; но каким образом следует выбрать эти элементы (т. е. показатели преломления слоев и их толщины), чтобы получить наилучшее покрытие, об этом теория говорит до сих пор скупо. Этим обусловлено то, что на практике (см., например, [1]) наиболее выгодный состав покрытия подбирается в значительной мере эмпирически. Несмотря на то, что на этом пути уже достигнуто много хороших результатов, близких, по-видимому, к максимально достижимому, следует считать весьма желательным и актуальным дальнейшее усовершенствование теории. Улучшенная теория позволила бы дать обоснованную оценку уже имеющимся успехам и указала бы, возможно, на новые, еще неиспользованные варианты покрытий.

Теоретический расчет оптимального просветляющего покрытия осуществляется весьма просто в том случае, если оптические толщины всех слоев заданы. Именно, чтобы подобрать наилучшие значения показателей преломления слоев, нужно вычислить минимум усредненного по спектру значения величины $\frac{R}{D}$ (R и D — энергетические коэффициенты отражения и пропускания). В статье автора [2] этот способ применен для расчета двух-, трех- и четырехслойных покрытий, состоящих из слоев равной оптической толщины (четвертьволновых в середине шкалы частот того участка спектра, для которого предназначается покрытие). Остается, однако, вопрос: какой выбор толщин слоев является оптимальным? До сих пор теория не может дать на этот вопрос обоснованного ответа. Турнер [3] в 1950 г. рекомендовал пользоваться для двух- и трехслойных покрытий отношениями толщин

1:2 и 1:2 3; неравные толщины выбираются и в работе [1]. Поэтому возникает проблема теоретического варьирования толщин слоев с целью получить наиболее выгодный результат. Несмотря на принципиальную простоту постановки проблемы, она оказывается очень трудной. Непосредственное варьирование толщин

слоев с целью получения минимума $\frac{\bar{R}}{D}$ приводит к очень сложной системе трансцендентных уравнений. Решение этой системы, конечно, возможно, но требует такой затраты вычислительного труда, что этот путь нельзя признать оправданным.

В настоящей статье показано, что эти трудности можно обойти с помощью очень простого графического приема, позволяющего со значительной степенью уверенности выбирать толщины слоев наиболее выгодным образом. Конечно, с увеличением числа слоев сложность (практическая, но не принципиальная) метода возрастает, однако его польза несомненна при любом разумном числе слоев.

1. Вывод основных формул

В качестве исходной формулы возьмем выведенную в [2] приближенную формулу, которую в проблеме просветления можно считать практически точной:

$$\frac{R}{D} = |v_0 + v_1 e^{2i\alpha_1} + v_2 e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2)} + \dots + v_N e^{2i(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N)}|^2 \quad (1)$$

Здесь N есть число слоев покрытия, перенумерованных 1, 2 ... N в направлении падения света (причем падение света считается нормальным),

$$v_k = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{k+1}}{n_k}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$\alpha_k = k_0 n_k d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

В формулах (2) и (3) $n_0, n_1, \dots, n_N, n_{N+1}$ суть показатели преломления слоев и ограничивающих сред, k_0 — волновое число в вакууме, d_k — толщина k -ого слоя. Из (2) вытекает, что

$$v_0 + v_1 + \dots + v_N = \frac{1}{2} \ln \frac{n_{N+1}}{n_0} \equiv u_0 \quad (4)$$

есть величина, независимая от элементов слоев.

Положим длину участка спектра, в котором покрытие должно быть просветляющим, равной одной октаве (что соответствует, примерно, видимой области) и обозначим

$$\alpha_k = g_k \alpha, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

где

$$\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}, \quad (6)$$

а числа g_k характеризуют толщины слоев (так, если $g_k = 1$, то k -ой слой четвертьволновой в середине спектра). Дисперсию мы учитывать не будем, т. е. числа v_k будем считать не зависящими от α . Обозначая

$$\frac{\bar{R}}{D} = \frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{R}{D} d\alpha, \quad (7)$$

введем величину

$$s = \frac{u_0^2 - \frac{\bar{R}}{D}}{u_0^2}, \quad (8)$$

которую назовем качеством просветления. Для оправдания этого названия заметим, что без покрытия $\frac{R}{D} = u_0^2$ с той же точностью, с какой верна формула (1); следовательно, наличие какого бы то ни было просветления (в среднем по спектру) характеризуется неравенством $0 < s < 1$, причем чем больше s , тем лучше просветление. Если же качество просветления отрицательно ($s < 0$), то не только нет никакого просветления, но имеет место увеличение отражения. Нас интересуют, конечно, значения s , возможно близкие к единице.

Учитывая (5), перепишем (1) в виде:

$$\frac{R}{D} = \sum_{k, l=0}^N v_k v_l \cos(2g_{kl}\alpha), \quad (9)$$

где

$$g_{kl} = g_{lk} = |(g_0 + g_1 + \dots + g_k) - (g_0 + g_1 + \dots + g_l)|, \quad (10)$$

и

$$g_0 = 0.$$

Подставляя (9) в (7) и интегрируя, находим:

$$\frac{\bar{R}}{D} = \sum_{k, l=0}^N v_k v_l \frac{\sin\left(\frac{\pi g_{kl}}{3}\right) \cos(\pi g_{kl})}{\frac{\pi g_{kl}}{3}}. \quad (11)$$

Обозначая

$$v'_k = \frac{v_k}{u_0}, \quad (12)$$

так что

$$\sum_{k=0}^N v'_k = 1, \quad (13)$$

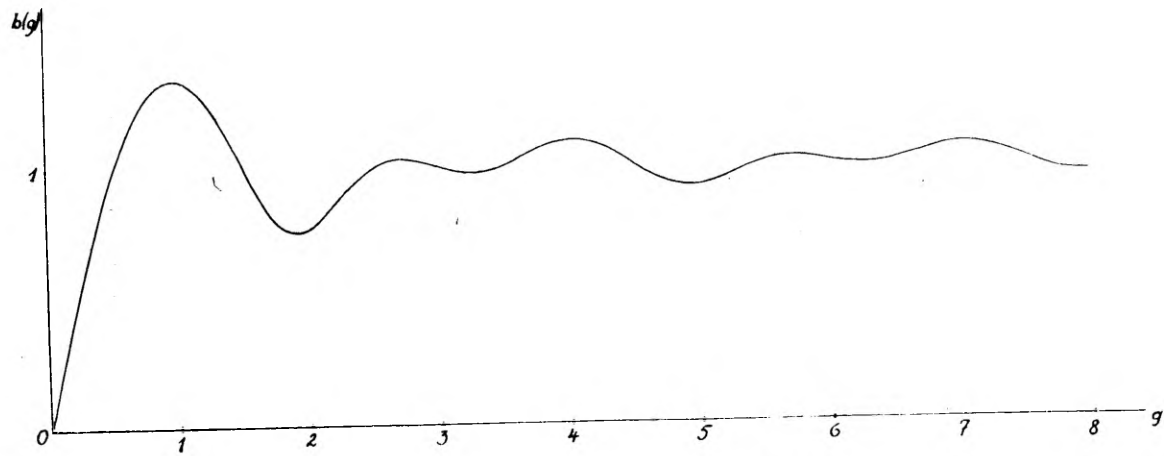


Рис. 1. График функции $b(g) = \sqrt{1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi g}{3}\right) \cos \pi g}{\frac{\pi g}{3}}}$

и подставляя (11) в (8), находим:

$$s = \sum_{k, l=0}^N \left[1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi g_{kl}}{3}\right) \cos(\pi g_{kl})}{\frac{\pi g_{kl}}{3}} \right] v_k v_l \quad (14)$$

Если обозначим

$$b_{kl} = \sqrt{1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi g_{kl}}{3}\right) \cos(\pi g_{kl})}{\frac{\pi g_{kl}}{3}}} \quad (15)$$

то

$$s = \sum_{k, l=0}^N b_{kl}^2 v_k v_l. \quad (16)$$

Согласно (15), числа b_{kl} суть значения функции

$$b(g) = \sqrt{1 - \frac{\sin\left(\frac{\pi g}{3}\right) \cos(\pi g)}{\frac{\pi g}{3}}}, \quad (17)$$

соответствующие значениям аргумента $g = g_{kl}$. График этой функции дан на рис. 1. Он понадобится нам в дальнейшем.

Нашей целью является теперь найти путем варьирования элементов покрытия максимум качества просветления s . В формуле (16) величины v_k' зависят, согласно (2) и (12), от показателей преломления, а величины b_{kl} , согласно (5) и (15) от толщин слоев.

Так как непосредственное варьирование толщин слоев приводит к очень сложным уравнениям, то мы будем вначале считать их произвольными, но неопределенными; а чтобы впоследствии удобно было придать им конкретные наиболее выгодные значения, будем вести варьирование показателей преломления (т. е. величин v_k') графическим методом. Мы увидим ниже, что этот метод способен дать достаточно прозрачную картину зависимости максимального значения s от толщины слоев.

2. Геометрическая интерпретация проблемы

Итак, согласно вышесказанному, будем считать толщины слоев, следовательно, и величины b_{kl} заданными некоторым произвольным образом. Введем в рассмотрение N -мерное евклидово пространство и возьмем в нем $N + 1$ точек B_0, B_1, \dots, B_N таким образом, чтобы $\overline{B_k B_l} = b_{kl}$ ($k, l = 0, 1, \dots, N$) (заметим, что $b_{kl} = 0$ тогда и только тогда, если $k = l$). Эти точки можно счи-

тать вершинами N -мерного симплекса, т. е. фигуры, аналогичной плоскому треугольнику и трехмерному тетраэдру. Гипергрань (т. е. $(N - 1)$ -мерную ячейку) симплекса, противоположащую вершине B_k , обозначим через β_k . Опишем вокруг симплекса гиперсферу, центр которой обозначим через O и радиус через r

Для дальнейшего важна следующая чисто-геометрическая теорема. Пусть V произвольная точка в нашем N -мерном пространстве. Обозначим векторы $\overrightarrow{VB_k}$ через x_k . Далее, высоты симплекса обозначим через h_k , а расстояния точки V от гиперграней β_k через p_k , причем p_k следует считать положительным, если перпендикуляры из точек B_k и V (т. е. h_k и p_k) на гипергрань β_k идут параллельно, и отрицательным, если антипараллельно. Тогда, если обозначим еще

$$\frac{p_k}{h_k} = v_k, \quad (18)$$

то:

$$1) \quad \sum_{k=0}^N v_k = 1, \quad (19)$$

$$2) \quad \sum_{k=0}^N v_k x_k = 0.^1 \quad (20)$$

¹ Приведем доказательство этой теоремы, любезно сообщенное автору тов. Ю. Лумисте: обозначая верхними индексами 1, 2, ... N составляющие векторов x_k в какой-либо декартовой системе координат, напишем соотношение:

$$\begin{vmatrix} x_0^1 & x_0^2 & \dots & x_0^N & x_0^i \\ x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^N & x_1^i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_N^1 & x_N^2 & \dots & x_N^N & x_N^i \end{vmatrix} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Его можно представить в виде:

$$\sum_{k=0}^N X_k x_k^i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

где X_k означает адъюнкту определителя, соответствующую элементу x_k^i последнего столбца. То же можно написать в векторной форме: $\sum_{k=0}^N X_k x_k = 0$.

Пусть $\sum_{k=0}^N X_k = X$; тогда $\sum_{k=0}^N \frac{X_k}{X} = 1$ и $\sum_{k=0}^N \frac{X_k}{X} x_k = 0$. Следовательно, остается

доказать, что $\frac{X_k}{X} = \frac{p_k}{h_k}$. Справедливость этого равенства вытекает, в самом деле, из того, что X_k равно $N!$ -кратному объему симплекса, вершины которого

Мы намеренно ввели в (18) обозначения v_k' вследствие чего соотношение (19) совпадает с (13). Это позволяет считать точку V геометрическим образом совокупности чисел v_0' v_N' . Более того, покажем, что s также имеет здесь простую интерпретацию.

Так как $b_{kl}^2 = |\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l|^2 = \mathbf{x}_k^2 + \mathbf{x}_l^2 - 2\mathbf{x}_k\mathbf{x}_l$, то

$$s = \sum_{k,l=0}^N b_{kl}^2 v_k v_l = \sum_{k,l=0}^N (\mathbf{x}_k^2 + \mathbf{x}_l^2) v_k v_l - 2 \sum_{k,l=0}^N v_k v_l \mathbf{x}_k \mathbf{x}_l.$$

Последний член равен здесь (см. (20)) нулю, так что

$$s = \sum_{k,l=0}^N v_k v_l \mathbf{x}_k^2 + \sum_{k,l=0}^N v_k v_l \mathbf{x}_l^2 = 2 \sum_{k=0}^N v_k \mathbf{x}_k^2$$

Итак,

$$s = 2 \sum_{k=0}^N v_k \mathbf{x}_k^2. \quad (21)$$

До сих пор точка V была произвольной. Покажем, что максимум s получается тогда, когда V совпадает с центром O описанной вокруг симплекса гиперсферы. В самом деле, обозначив $\overrightarrow{OB}_k = \mathbf{x}_k^0$ и $\overrightarrow{OV} = \mathbf{d}$, так что $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0 - \mathbf{d}$, находим из (21):

$$s = 2 \sum_{k=0}^N v_k (\mathbf{x}_k^0 - \mathbf{d})^2 = 2 \sum_{k=0}^N (v_k \mathbf{x}_k^{02} - 2v_k \mathbf{x}_k^0 \mathbf{d} + v_k \mathbf{d}^2).$$

В первом члене $\mathbf{x}_k^{02} = r^2$; во втором члене можно заменить $\mathbf{x}_k^0 = \mathbf{x}_k + \mathbf{d}$. Тогда, учитывая (19) и (20), находим:

$$s = 2r^2 - 4\mathbf{d} \sum_{k=0}^N v_k \mathbf{x}_k - 4d^2 \sum_{k=0}^N v_k + 2d^2,$$

т. е.

$$s = 2(r^2 - d^2). \quad (22)$$

Следовательно, максимуму s соответствует $d = 0$, т. е. совпадение V с O , что и требовалось доказать. Тогда

$$s_{max} = 2r^2 \quad (23)$$

Как показывает практика вычислений (см. [2]), при определении максимума s путем варьирования v_k' величина v_0' получается часто настолько малой, что показатель преломления первого слоя (в случае $n_0 = 1$, что практически наиболее важно) оказывается

суть $B_0, B_1, \dots, B_{k-1}, V, B_{k+1}, \dots, B_N$, а X равно $N!$ -кратному объему симплекса вершины которого суть B_0, B_1, \dots, B_N . Так как оба симплекса имеют

общее основание — гипергрань β_k , высоты же их суть ρ_k и h_k , то $\frac{X_k}{X} = \frac{\rho}{h_k}$

что и требовалось доказать.

слишком близким к единице и поэтому нереализуемым. Поэтому часто бывает нужно фиксировать v_0' и варьировать только остальные v_k' . Для этого случая наш графический метод также дает простое решение. Пусть O_0 есть какая-либо точка на прямой, проведенной из O перпендикулярно гиперплоскости β_0 . Возьмем, далее, перпендикулярно к этой прямой $(N-1)$ -мерную гиперплоскость

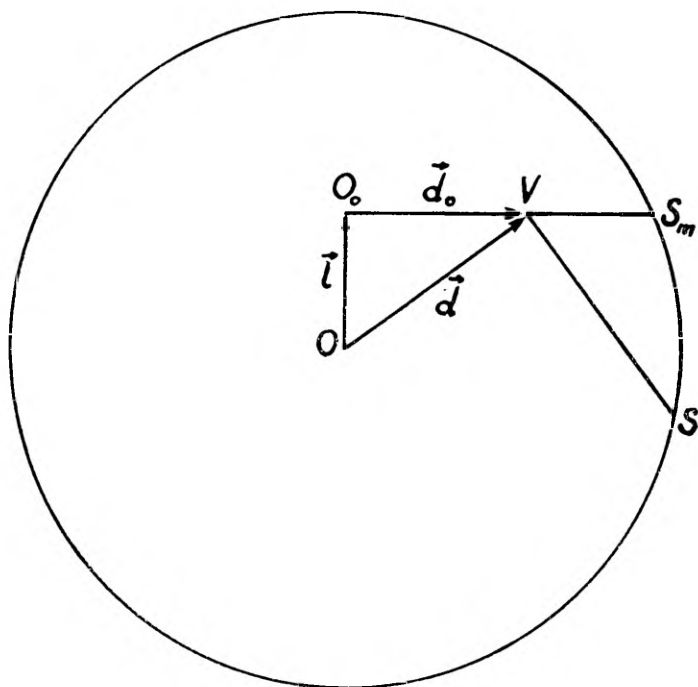


Рис. 2.

через точку O_0 . Тогда, выбирая V где-либо в этой гиперплоскости, будем иметь везде фиксированное значение v_0' , определяемое положением точки O_0 . Покажем, что максимум (относительный) s будет тогда, если V совпадает с O_0 . В самом деле, пусть $\vec{OO}_0 = l$, $\vec{O_0V} = d_0$, так что $\vec{OV} = d = l + d_0$. Тогда $d^2 = l^2 + d_0^2$ и (22) дает:

$$s = 2(r^2 - l^2 - d_0^2). \quad (24)$$

Так как l фиксировано выбором O_0 , то относительный максимум s будет при $d_0 = 0$, т. е. в том случае, если V совпадает с O_0 . На рис. 2 показано сечение гипертсферы двумерной плоскостью, проходящей через V , O и O_0 . Очевидно, максимальное значение s при

фиксированном v_0' получается как удвоенный квадрат длины перпендикуляра к OO_0 , проведенного из O_0 до пересечения с гиперсферой (т. е. $s_{max} = 2 \sqrt{O_0 S_m^2}$)

Обобщая предыдущее рассуждение, легко прийти к следующему общему правилу для нахождения относительного максимума s , если некоторые из величин $v_0', v_1', \dots, v_{N'}$, фиксированы, а остальные варьируются. Пусть, например, фиксированы $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}$, а остальные $N + 1 - m$ аргументов

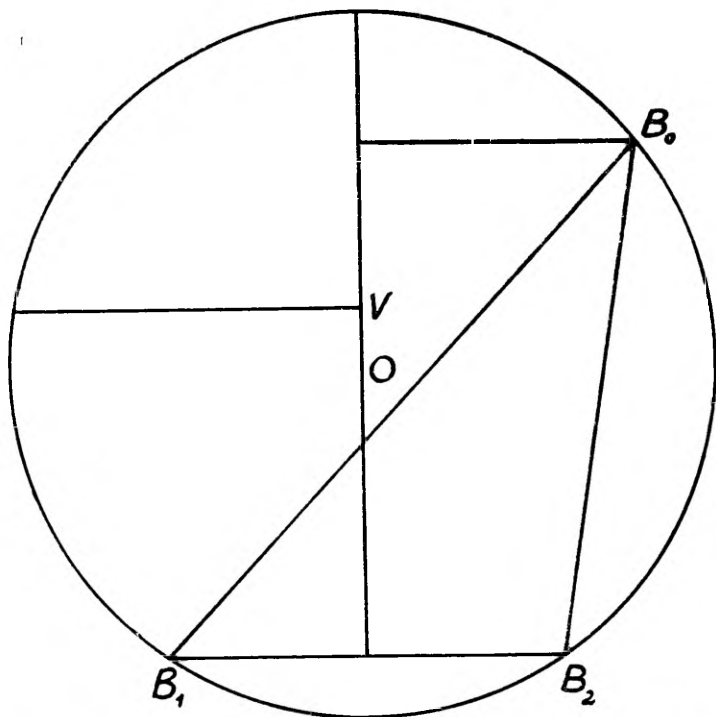


Рис. 3а. График двухслойного покрытия с $g_1 = 1, g_2 = 2$.

варьируются² Тогда нужно провести через точку O m -мерную гиперплоскость, перпендикулярную к гиперграням $\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \dots, \beta_{k_m}$ симплекса. Любая точка O_m на этой гиперплоскости фиксирует определенным образом значения $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}$, причем, наоборот, всегда можно найти на этой гиперплоскости точку, соответствующую заданным значениям $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}$. Те же значения $v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_m}$ имеют место и в любой точке V , взятой на

² Конечно, число независимо варьируемых аргументов равно только $N - m$, так как условие (13) должно выполняться постоянно.

$(N - m)$ -мерной гиперплоскости, проведенной из точки O_m перпендикулярно предыдущей гиперплоскости (точка O_m является единственной общей точкой обеих гиперплоскостей). Таким образом, фиксировав v_{k_1} , v_{k_2} , v_{k_m} , мы имеем $N - m$ степеней свободы для выбора точки V в $(N - m)$ -мерной гиперплоскости, что соответствует варьированию оставшихся $N - m$ независимых аргументов. Формула (24) сохраняет свой вид:

$$s = 2(r^2 - l_m^2 - d_m^2), \quad (25)$$

где $l_m = \overline{OO_m}$ и $d_m = \overline{O_m V}$. Очевидно, относительный максимум s получается при совпадении V с O_m .

3. Обсуждение метода и примеры

Изложенный в п. 2 метод нахождения максимума s путем геометрического построения не является, строго говоря, методом варьирования толщин слоев покрытия, так как задание толщин слоев является предварительным условием для выполнения конкретного построения, варьируемыми же величинами в каждом конкретном построении являются лишь показатели преломления

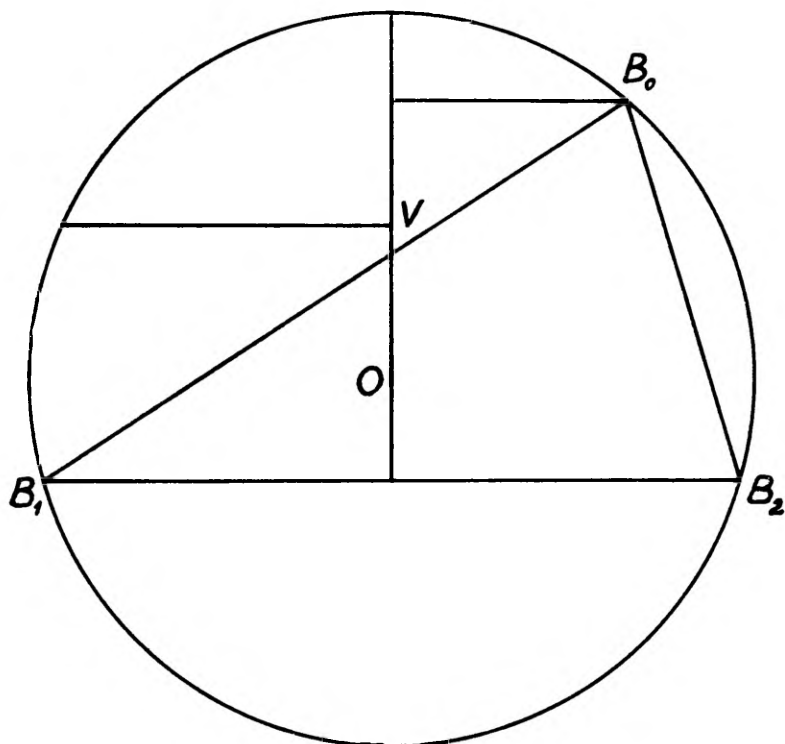


Рис. 36. График двухслойного покрытия с $g_1 = g_2 = 1$.

слоев. Тем не менее, можно считать этот метод также методом (непрямого) варьирования толщин слоев, так как (при не слишком большом числе слоев) построение гораздо проще вычисли-

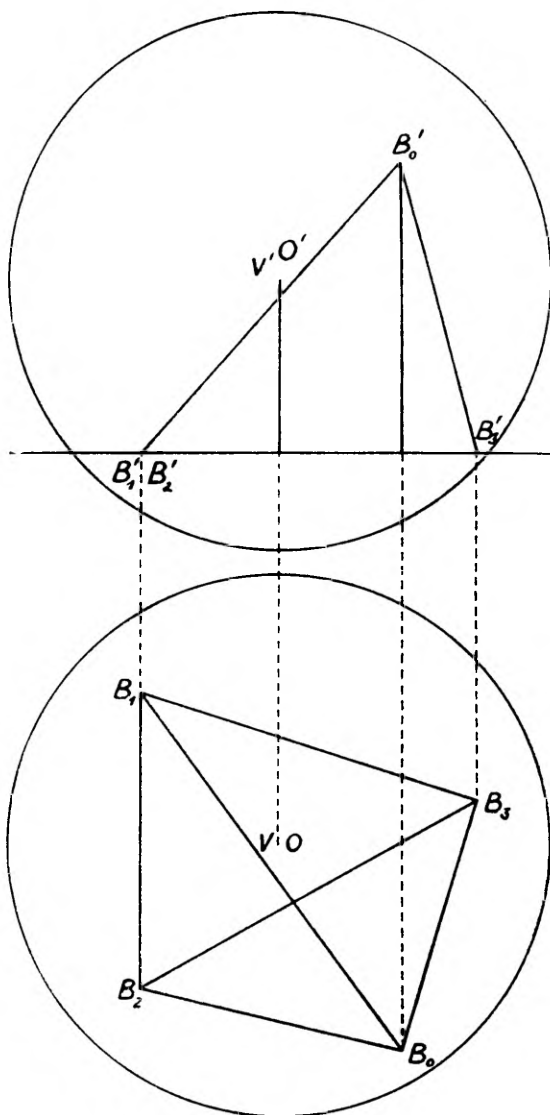


Рис. 4а. График трёхслойного покрытия с $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 3$.

тельной процедуры; сравнительно легко оно допускает достаточное число проб. Еще более важно, однако, то, что благодаря наглядности построения (по крайней мере при $N = 2$ и $N = 3$) нет нужды делать пробы вслепую, наугад, так как требование,

чтобы радиус описанной вокруг симплекса гиперсферы был возможно больше (согласно (23)), подсказывает приблизительно наилучшее соотношение длин ребер симплекса, а отсюда, с помощью функции $b(g)$ (рис. 1), и значения чисел g_k , определяющих толщины слоев.

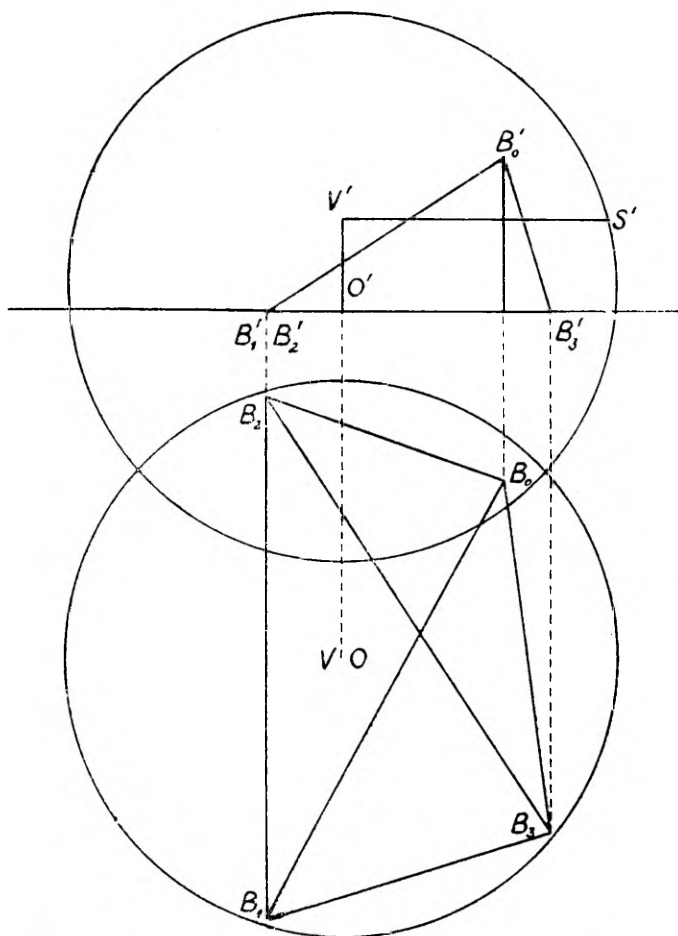


Рис. 46. График трёхслойного покрытия с $g_1 = g_2 = g_3 = 1$.

Так, в случае $N=2$ (двуслойное покрытие) симплексом является треугольник со сторонами $b_{12} = b(g_2)$ (основание) и $b_{01} = b(g_1)$ и $b_{02} = b(g_1 + g_2)$ (боковые стороны). Так как (при $n_0 = 1$) v_0' должно быть положительно (иначе было бы $n_1 < 1$) и достаточно велико (иначе n_1 был бы слишком близок к единице), угол при вершине B_0 треугольника должен быть острым и притом возможно меньшим. Кроме того, наивозможное увели-

чение радиуса r требует, чтобы треугольник был тупоугольным. Эти требования ведут к тому, что b_{12} и b_{02} должны быть возможно малы, а b_{01} возможно велико. Этим условиям лучше всего удовлетворяет выбор (см. рис. 1) $g_1 = 1$, $g_2 = 2$ (для удобства здесь произведено округление до целых чисел) Этот выбор сов-

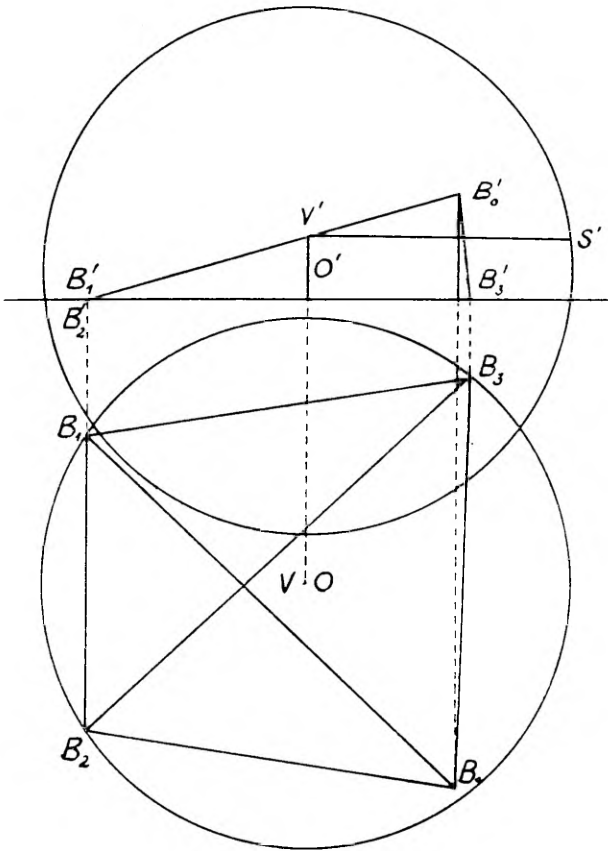


Рис. 4в. График трёхслойного покрытия с $g_1 = 1$, $g_2 = 2$, $g_3 = 1$.

падает с предложением Турнера [3]. График показан на рис. 3а. Не фиксируя v_0' , имеет отсюда $v_0' = 0,57$ и $s_{max} = 0,92$; если же выберем $v_0' = 0,68$, то $s_{max} = 0,91$. На рис. 3б дано построение для случая $g_1 : g_2 = 1 : 1$. Здесь получается $s_{max} = 0,99$, однако $v_0' = 0,27$; а если взять опять $v_0' = 0,68$, то $s_{max} = 0,82$. Отсюда видно, что этот выбор хуже предыдущего. Вообще почти несомненно, что выбор $g_1 : g_2 = 1 : 2$ является наилучшим.

Аналогичные, хотя несколько более сложные соображения применимы и в случае $N = 3$. На рис. 4 приведены три построения (в ортогональной проекции): а) $g_1 : g_2 : g_3 = 1 : 2 : 3$. Это

даёт $v_0' = 0,60$ и $s_{max} = 0,96$; б) $g_1 : g_2 : g_3 = 1 : 1 : 1$. Это даёт $v_0' = 0,16$ и $s_{max} = 1,00$. Если же принять и здесь $v_0' = 0,60$, то $s_{max} = 0,94$; в) $g_1 : g_2 : g_3 = 1 : 2 : 1$. Здесь $v_0' = 0,27$ и $s_{max} = 0,94$, а если $v_0' = 0,60$, то $s_{max} = 0,92$.

Из этих результатов кажется весьма вероятным, что наилучшее просветление даёт $g_1 : g_2 : g_3 = 1 : 2 : 3$. Однако выбор $g_1 : g_2 : g_3 = 1 : 2 : 1$ (случай в) также даёт почти такие же результаты. Для этого случая характерно ещё то, что (см. рис. 4в) вследствие малой высоты тетраэдра изменение v_0' мало влияет на значение s_{max} . Эта особенность может быть иногда полезна; кроме того, выбор в) может оказаться предпочтительнее выбора а) в тех случаях, где показатели преломления слоев будут легче реализоваться с помощью этого выбора (так как, при одинаковых значениях v_0' , т. е. показателя преломления первого слоя, показатели преломления остальных слоев будут в случаях а) и в) получаться различными).

Случай четырехслойного покрытия значительно сложнее, хотя и здесь соответствующее построение не слишком громоздко. Однако в этой статье мы этого случая (а также случаев $N > 4$) рассматривать не будем.

Поступило
16 I 1958

Литература

1. Крылова Т. Н., Соколова Р. С., Опт. и спектр., 1957, 2, 254.
2. Кард П. Г., Опт. и спектр., 1957, 2, 245.
3. Turner, A. F., J. phys. et radium, 1950, 11, 444.

SELGENDAVA OPTILISE KATTE KIHITIDE PAKSUSTE VARIEERIMISE MEETOD

Dotsent, füüs.-mat. tead. kand. P Kard

Teoreetilise füüsika kateeder

R e s ü m e e

Olgu R ja D mitmekihilise selgendava kattega kaetud optilise pinna peegeldumise ja läbilaskvuse koefitsiendid (valguse normaalse langemise juhul), R_0 ja D_0 — samad suurused katmata pinna jaoks. Olgu edasi \overline{R} keskmine $\frac{R}{D}$ väärtus, mis on võetud üle mingi spektrivahemiku (näiteks üle kogu nähtava spektri). On kohane katte selgendava mõju mõõduna defineerida suurus

$$s = 1 - \frac{\overline{R}}{D} / \frac{R_0}{D_0} \quad (1)$$

Mida suurem on s väärtus, seda parem on kate. Seetõttu omab tähtsust s maksimumi leidmine.

s oleneb kõigi kihitide murdumisnäitajatest ja paksustest järgmiselt:

$$s = \sum_{k, l=0}^N b_{kl}^2 \nu_k \nu_l \quad (2)$$

kus N on kihitide arv,

$$\nu_k = \ln \frac{n_{k+1}}{n_k} / \ln \frac{n_{N+1}}{n_0} \quad (3)$$

ja

$$b_{kl} = \sqrt{1 - \frac{\sin [g_{kl}(\alpha_2 - \alpha_1)]}{g_{kl}(\alpha_2 - \alpha_1)} \cos [g_{kl}(\alpha_2 + \alpha_1)]} \quad (4)$$

Valemites (3) ja (4) n_0 ja n_{N+1} tähendavad lähte- ja tagakeskkonna murdumisnäitajaid, kuna n_1, n_2, \dots, n_N on kõigi kihitide murdumisnäitajad, nummerdatud valguse langemise suunas. Edasi,

$$g_{kl} = g_{lk} = |(g_0 + g_1 + \dots + g_k) - (g_0 + g_1 + \dots + g_l)|, \quad (5)$$

kus $g_0 = 0$ ja ülejäänud g_k on arvud, mis määravad kihtide paksumused valem

$$g_k = \frac{k_0 n_k d_k}{\alpha} \quad (6)$$

järgi. Lõpuks, k_0 on lainearv vaakuumis, d_k on k -nda kihi paksumus ja α on dimensioonitu muutuja, mis on võrdeline k_0 -ga. Vaadeldav spektrivahemik on $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Kuigi valem (2) on ligikaudne, annab ta praktiliselt täpsed tulemused, sest tema täpsus on väga suur.

Kui kõigi kihtide paksumused on fikseeritud, siis on s maksimumi leidmine väga lihtne. v_k' -de määramine taandub siis lihtsale lineaarsete võrrandite süsteemile. Vastupidi, kihtide paksumuste otsene varieerimine on väga keerukas protseduur.

Seetõttu on parem siin rakendada järgmist kaudset meetodit. Valides prooviks ette arvud g_1, g_2, \dots, g_N , võtame N -mõõtelises eukleidilises ruumis punktid B_0, B_1, \dots, B_N nii, et $\overline{B_k B_l} = b_{kl}$. Tähistame selle simpleksi tipu B_k vastas oleva hüpertahu β_k -ga, simpleksi ümber kujundatud hüperkera raadiuse r -ga ja selle hüperkera tsentri O -ga.

Olgu edasi V mingi meelevaldne punkt selles N -mõõtelises ruumis. Tähistame $\overline{OV} = d$. Siis, võttes

$$v_k = \frac{p_k}{h_k}, \quad (7)$$

kus h_k on B_k kaugus β_k -st ja p_k on V kaugus β_k -st, saame:

$$s = 2(r^2 - d^2) \quad (8)$$

See valem näitab, et s maksimum, $s_{max} = 2r^2$, saadakse siis, kui $d = 0$, s. o. $V \equiv O$. Valem (7) annab vastavad v_k' -de väärtused. Ühel tähtsamal juhul, nimelt $n_0 = 1$ korral, on sageli tarvis fikseerida v_0' , sest muidu n_1 saab liiga väike. Siis tuleb valida V mitte samas, kus on O , vaid sobivas kohas ristjoonel, mis on tõmmatud O -st β_0 -le.

Kirjeldatud graafiline protseduur on täpselt ekvivalentne s maksimumi numbrilise arvutamisega, kui kihtide paksumused on fikseeritud ja kihtide murdumisnäitajad on varieeritavad. Sellest hoolimata omab see protseduur mõningaid eeliseid. Esiteks, ta on mõnevõrra lihtsam (vähemalt $N = 2$ ja $N = 3$ korral). Edasi, väga tähtis on see fakt, et siin pole vajadust valida kihtide paksumusi huupi, vaid, tänu konstruktsiooni selgusele, kihtide paksumuste parim valik (mis annab suurima võimaliku s maksimumi) on suurelt osalt ette näha. Igal juhul vajalike proovide arv on väike. Seetõttu võime vaadelda esitatud protseduuri kui kihtide paksumuste (kaudse) varieerimise meetodit.

Kahe- ja kolmekihiliste katete erijuhtudel on näidatud, et kõige kasulikumad kihtide optiliste paksumuste suhted ($n_0 = 1$ korral) on 1:2 ja 1:2:3 ning 1:2:1. 1 tähendab siin, et vastav kiht on sageduste skaala keskel veerandlainne paksumus.

A METHOD OF VARYING THE THICKNESSES OF LAYERS OF ANTIREFLECTING OPTICAL COATINGS

P. Kard

Summary

Denote by R, D the reflectance and transmittance (in the case of normal incidence) of an optical surface coated with multilayer antireflecting film and by R_0, D_0 the same quantities for the uncoated surface. Let then $\overline{\frac{R}{D}}$ be the averaged value of $\frac{R}{D}$ over a spectral interval (e. g. over the whole visible spectrum). It is convenient to define the quantity

$$s = 1 - \frac{\overline{R}}{D} / \frac{R_0}{D_0} \quad (1)$$

as the measure of antireflecting power of the coating. The greater the value of s , the better is the coating. It is therefore important to find the maximum of s .

s depends on refractive indices and on the thicknesses of all layers, as follows:

$$s = \sum_{k,l=0}^N b_{kl}^2 \mathcal{V}_k \mathcal{V}_l, \quad (2)$$

where N is the number of layers,

$$\mathcal{V}_k = \ln \frac{n_{k+1}}{n_k} / \ln \frac{n_{N+1}}{n_0} \quad (3)$$

and

$$b_{kl} = \sqrt{1 - \frac{\sin [g_{kl}(\alpha_2 - \alpha_1)]}{g_{kl}(\alpha_2 - \alpha_1)} \cos [g_{kl}(\alpha_2 + \alpha_1)]}. \quad (4)$$

In formulas (3) and (4) n_0 denotes the refractive index of the medium of incidence, and n_{N+1} the refractive index of the backing medium, whereas n_1, n_2, \dots, n_N are the refractive indices of all layers, numbered in the direction of incident light. Further,

$$g_{kl} = g_{lk} = |(g_0 + g_1 + \dots + g_k) - (g_0 + g_1 + \dots + g_l)|, \quad (5)$$

where $g_0 = 0$ and the other g_k 's are numbers specifying the thicknesses of layers, according to

$$g_k = \frac{k_0 n_k d_k}{\alpha} \quad (6)$$

Finally, k_0 is the vacuum wave number, d_k is the thickness of the k -th layer, and α is a dimensionless variable proportional to k_0 . The spectral interval considered is $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$.

Although the formula (2) is an approximate one, it gives practically exact results, as its accuracy is very high.

If the thicknesses of all layers are fixed, the problem of finding the maximum of s becomes very simple. The determination of v_k 's is then reduced to a simple system of linear equations. On the contrary, the direct variation of the thicknesses of layers is a very cumbersome procedure.

Therefore it is better to apply here the following indirect method. Setting on trial the values of g_1, g_2, \dots, g_N take in a N -dimensional Euclidean space the points B_0, B_1, \dots, B_N in such a manner, that $B_k B_l = b_{kl}$. Denote the hyperface of this simplex opposite to vertex B_k by β_k , the radius of the circumscribed hypersphere by r and the center of this hypersphere by O .

Let further V be an arbitrary point in our N -dimensional space. Denote $OV = d$. Then assuming

$$v_k = \frac{p_k}{h_k}, \quad (7)$$

where h_k is the distance of B_k from β_k , and p_k the distance of V from β_k , we obtain:

$$s = 2(r^2 - d^2). \quad (8)$$

This formula shows that the maximum of s , $s_{max} = 2r^2$, is attained when $d = 0$, i. e. $V \equiv O$. The formula (7) gives corresponding values of v_k 's. In the case of the greatest interest, $n_0 = 1$, it is often necessary to fix v_0 , since otherwise n_1 becomes too small. For this purpose one must choose V not in O , but in an appropriate point on the normal from O to β_0 .

The graphical procedure described above is exactly equivalent to numerical computation of the maximum value of s when the thicknesses of layers are fixed, and refractive indices of layers are varying. Nevertheless it has some advantages. First, it is somewhat simpler (at least in the cases of $N = 2$ and $N = 3$). Further, very important is the fact that one has no need to choose the thicknesses of layers at random, but owing to the clearness of the construction the best choice of the thicknesses of layers (giving as great a maximum value of s as possible) is rather obvious. At any rate only a few trials are needed. Therefore we

can consider the proposed procedure as a method of (indirect) variation of the thicknesses of layers.

In particular, it is shown that the best ratios of the optical thicknesses of layers are (when $n_0 = 1$) for $N = 2$ 1:2, and for $N = 3$ 1:2:3 or 1:2:1. Here 1 stands for the quarter-wave thickness in the middle of frequency scale.

МЕТОД РАСЧЕТА МЕТАЛЛО-ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

О. Кеерберг и канд. физ.-мат. наук К. Ребане

Кафедра теоретической физики

В работе [1] был дан метод расчета диэлектрических покрытий с непрерывным показателем преломления. В настоящей заметке кратко обсуждаются некоторые результаты расчетов, проведенных по этому методу, и дается обобщение метода на металло-диэлектрические покрытия¹

1. По формулам работы [1] были проведены расчёты зависимости $\alpha = \frac{R}{D}$ где R и D — энергетические коэффициенты отражения и пропускания, от толщины покрытия n для простейших зависимостей показателя преломления слоя $n(x)$ от координаты.

Некоторые из полученных результатов приведены на рис. 1.

Для тонких покрытий с толщиной $h \lesssim 0,1 \div 0,2\lambda_0$ (λ_0 — длина волны в пустоте) вычисления проводились путем решения уравнения (1.2)² как с помощью степенных рядов, так и с использованием таблиц функций Эйри [3]. Для больших значений h вычисления проводились только с помощью таблиц функций Эйри.

Из кривых, приведенных на рис. 1, а также из результатов других вычислений, проведенных для аналогичных видов $n(x)$ (например, для $n(x) = (\gamma + \beta x)^{3/2}$), следует, что слой с показателем преломления, возрастающим монотонно и без резких скачков, уменьшает коэффициент отражения. При увеличении толщины слоя от нуля до $h \approx 0,20 \div 0,25\lambda_0$ α монотонно убывает, пока не достигнет значений, несколько меньших α_1 , где α_1 — отношение R/D при непосредственном переходе света из среды с показателем преломления n_v (у нас $n_v = 1$) в среду с показателем преломления n_1 . При дальнейшем увеличении h α начинает коле-

¹ Когда настоящая работа была уже закончена, вышла из печати монография Л. М. Бреховских [2], в которой имеется много полезного материала по вопросам, весьма близким к нашей задаче.

² Здесь и в дальнейшем I означает формулу из работы [1].

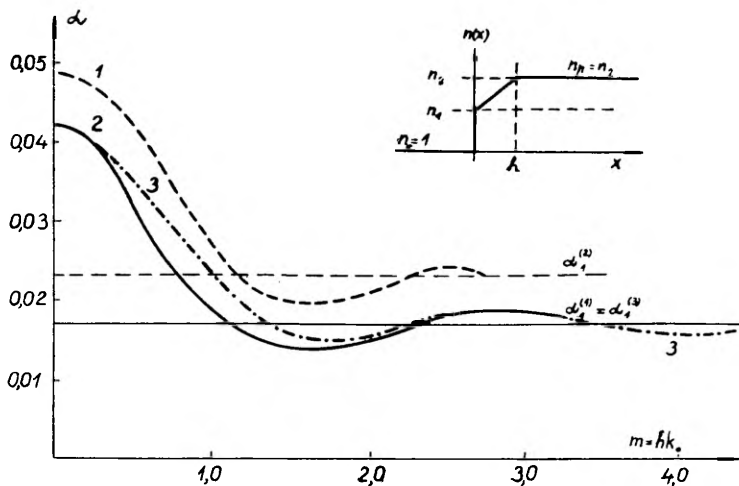


Рис. 1. Зависимость $\alpha = \frac{R}{D}$ от толщины покрытия. Для кривых 1 и 2 $n(x) = n_1 + \frac{n_p - n_1}{h} x$. В случае 1 $n_1 = 1,3$, $n_p = 1,5$; в случае 2 $n_1 = 1,35$, $n_p = 1,55$. Для 3 $n^2(x) = n_1^2 + \frac{n_p^2 - n_1^2}{h} x$, где $n_1 = 1,3$, $n_p = 1,5$.³ Прямые $\alpha_1^{(1)} = \alpha_1^{(3)}$ и $\alpha_1^{(2)}$ соответствуют значениям α при непосредственном переходе света из среды с показателем преломления $n_p = 1$ в среду с показателем преломления n_1 .

баться с небольшой и все убывающей амплитудой около значения α_1 .

Большого уменьшения α не получается, но при отражении в с е х волн, для которых толщина обработанного слоя превышает четверть длины волны, уменьшение α практически одинаково (рис. 2) (в разобранных случаях немногим более двух раз).

2. Обобщение метода [1] на металло-диэлектрические покрытия

Пусть имеется оптически изотропная среда, которая характеризуется показателем преломления $n(x)$, показателем поглощения $\kappa(x)$ и магнитной проницаемостью $\mu(x)$, являющимися кусочно-непрерывными функциями только одной координаты x . Первые две характеристики объединим в комплексный показатель преломления $\bar{n}(x) = n(x)(1 - i\kappa(x))$. Будем считать, что такая среда — металлодиэлектрическое покрытие — находится между двумя диэлектрическими средами с постоянными показателями преломления.

³ Кривая 2 рассчитана студентом Б. Кантором, 3 — студентом Х. Йыги.

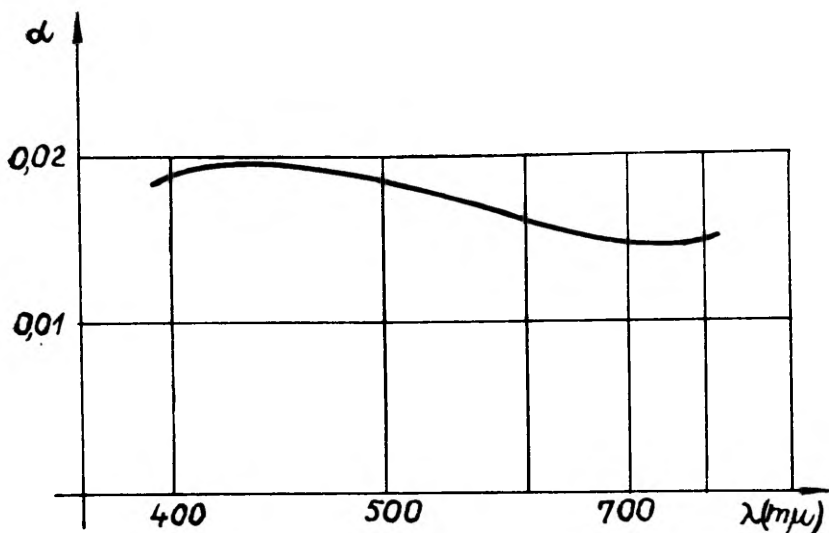


Рис. 2. Зависимость $\alpha(\lambda)$ для покрытия с линейно изменяющимся показателем преломления при $n_v = 1,0$, $n_1 = 1,3$, $n_p = 1,5$, $h = 2,10^{-5}$ см (Ср. рис 1 кривая 2).

В направлении оси x распространяется плоская и плоско поляризованная монохроматическая световая волна. Задача заключается в нахождении долей световой энергии, отраженной от покрытия, поглощенной в нем и прошедшей через него.

Путь решения этой задачи в основном такой же, как в случае диэлектрического покрытия. Поэтому мы не будем ниже приводить в полном объеме всех рассуждений и промежуточных формул, уже имеющих в [1]. Мы остановимся подробнее лишь на тех этапах вывода, которые выходят за рамки рассмотрения упомянутой работы.

Также, как в [1], будем исходить из системы уравнений Максвелла. Мы положим:

$$\vec{D} = \varepsilon(x)\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu(x)\vec{H}, \quad \rho = 0. \quad (1)$$

Уравнения Максвелла принимают вид:

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\vec{E} + \frac{\varepsilon(x)}{c}\dot{\vec{E}} \quad (a)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu(x)}{c}\dot{\vec{H}} \quad (b) \quad (2)$$

Имея в виду, что свет, падающий под прямым углом, не изменяет в покрытии направления своего распространения, мы мо-

жем принять без ограничения общности, что только z -компонента электрического вектора отлична от нуля. Кроме того, учтем, что в нашем случае, $\text{div } \vec{E} = 0$, и будем искать зависимость от времени в виде $E_z(x, t) = E(x)e^{i\omega t}$

Система (2) сводится тогда к уравнению для определения $E_z(x)$:

$$\frac{d^2 E_z}{dx^2} - \frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} \frac{dE_z}{dx} + \mu(x) \bar{k}(x)^2 E_z = 0, \quad (3)$$

где

$$\bar{k}(x) \equiv \frac{\omega}{c} \bar{n}(x) = \frac{\omega}{c} n(x) (1 - ix(x));$$

$$(\bar{k}^2(x) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(x) - \frac{i4\pi}{c^2} \omega\sigma(x))$$

Если $\mu(x) \neq \text{const}$, то дифференциальное уравнение (3) содержит и первую производную $\frac{dE_z}{dx}$. В этом случае определитель Вронского $W(x)$ перестает быть постоянным и согласно формуле Лиувилля мы имеем:

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^x \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} dx} = W(x_0) \frac{\mu(x)}{\mu(x_0)} \quad (4)$$

Существенным является правильный учет условий непрерывности на границах между слоями [1]. Из непрерывности касательной составляющей \vec{E} следует непрерывность решения уравнения (3) $E_z(x)$. Для получения второго условия непрерывности рассмотрим уравнение (2b), которое в нашем случае можно записать в виде:

$$\frac{dE_z(x)}{dx} - \frac{i\omega}{c} \mu(x) H_y(x) = 0. \quad (5)$$

Отсюда видно, что из непрерывности тангенциальной составляющей \vec{H} следует непрерывность величины $\frac{1}{\mu(x)} \cdot \frac{dE_z(x)}{dx}$. Если $\mu(x)$ непрерывна, то мы имеем в качестве второго условия просто требование непрерывности первой производной $\frac{dE_z(x)}{dx}$, также как в случае диэлектрического покрытия ($\sigma = 0$, $\mu(x) = 1$). Если же $\mu(x)$ претерпевает скачок, то соответствующий скачок должна претерпевать и $\frac{dE_z}{dx}$.

В силу условий непрерывности E_z и $\frac{dE_z}{dx}$ связь между коэффициентами в общем решении (I. 4) перед покрытием и за ним можно записать в виде матричного выражения, по внешнему виду полностью совпадающего с (I. 8):

$$\begin{pmatrix} a_N \\ b_N \end{pmatrix} = \hat{c}^{(N-1)} \hat{c}^{(N-2)} \hat{c}^{(1)} \hat{c}^{(0)} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \equiv \hat{C}^{(N)} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

но элементы матриц $\hat{c}^{(k)}$ определены теперь по-другому:

$$c_{11}^{(k)} = E_{1,k}(x_{k+1} - x_k), \quad c_{12}^{(k)} = E_{2,k}(x_{k+1} - x_k), \quad (7)$$

$$c_{21}^{(k)} = \frac{\mu_p(x_{k+1})}{\mu_v(x_{k+1})} E'_{1,k}(x_{k+1} - x_k), \quad c_{22}^{(k)} = \frac{\mu_p(x_{k+1})}{\mu_v(x_{k+1})} E'_{2,k}(x_{k+1} - x_k).$$

Здесь μ_p и μ_v означают соответственно предельные значения слева и справа. Если $\mu(x)$ — непрерывная функция, то выражения для $c_{ij}^{(k)}$ по внешнему виду полностью совпадают с (I. 7). Но здесь $c_{ij}^{(k)}$ комплексны и если $\mu(x) \neq \text{const.}$, то $\text{Det } \hat{c}^{(k)} \neq 1$. В силу (6) (7) и (4) мы имеем (как при непрерывной, так и при прерывной $\mu(x)$):

$$\text{Det } \hat{c}^{(k)} = \frac{\mu_p(x_{k+1})}{\mu_v(x_k)}, \quad (8)$$

а для определителя матричного произведения

$$\text{Det } \hat{C}^{(k)} = \frac{\mu_p}{\mu_v}, \quad (9)$$

где μ_v и μ_p — магнитные проницаемости однородных диэлектрических сред соответственно слева и справа от покрытия.

Если матрица $\hat{C}^{(N)}$ вычислена, то дальнейшие рассуждения для нахождения энергетических коэффициентов отражения R и пропускания D остаются прежними. При проведении выкладок следует лишь иметь в виду, что матричные элементы $C_{ij}^{(N)}$ теперь комплексны. Кроме того, вследствие (9) элементы обратной матрицы B_{ij} (I. 16) определяются теперь выражениями:

$$\begin{aligned} B_{11} &= C_{22}^{(N)} \frac{\mu_v}{\mu_p} & B_{12} &= -C_{12}^{(N)} \frac{\mu_v}{\mu_p} \\ B_{21} &= -C_{21}^{(N)} \frac{\mu_v}{\mu_p} & B_{22} &= C_{11}^{(N)} \frac{\mu_v}{\mu_p}, \end{aligned} \quad (10)$$

отличаясь от соответствующих выражений [1] множителем $\frac{\mu_v}{\mu_p}$,

Формулы для амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн A_N , B_N и G_0 , а также для R и D , выраженные через матричные элементы (10), остаются прежними ((I. 14), (I. 18)).

Представим комплексные матричные элементы в виде

$$C_{ij}^{(N)} = C_{ij} + i\bar{C}_{ij}, \quad (11)$$

где C_{ij} , \bar{C}_{ij} — вещественны.

С учетом (10) мы получаем ((I. 18)):

$$|A_N|^2 = \frac{1}{4} |G_0|^2 \left(\frac{\mu_V}{\mu_P} \right)^2 (F + H), \quad (12)$$

$$|B_N|^2 = \frac{1}{4} |G_0|^2 \left(\frac{\mu_V}{\mu_P} \right)^2 (F - H), \quad (13)$$

где

$$F \equiv C_{22}^2 + \bar{C}_{22}^2 + \left(\frac{k_p}{k_v} \right)^2 (C_{11}^2 + \bar{C}_{11}^2) + k_p^2 (C_{12}^2 + \bar{C}_{12}^2) + \\ + \frac{1}{k_v^2} (C_{21}^2 + \bar{C}_{21}^2) + 2k_p (\bar{C}_{22} C_{12} - C_{22} \bar{C}_{12}) + 2 \frac{k_p}{k_v} (C_{11} \bar{C}_{21} - \bar{C}_{11} C_{21})$$

и

$$H \equiv \frac{2}{k_v} (C_{22} \bar{C}_{21} - \bar{C}_{22} C_{21}) + 2 \frac{k_p}{k_v} (C_{11} C_{22} + \bar{C}_{11} \bar{C}_{22} - C_{12} C_{21} - \\ - \bar{C}_{12} \bar{C}_{21}) + 2 \frac{k_p}{k_v} (\bar{C}_{11} C_{12} - C_{11} \bar{C}_{12})$$

Мы имеем для энергетических коэффициентов отражения R , пропускания D и поглощения $P = 1 - (R + D)$:

$$R = \frac{|B_N|^2}{|A_N|^2}, \quad (14)$$

$$D = \frac{n_p \mu_V |G_0|^2}{n_v \mu_P |A_N|^2}, \quad (15)$$

$$P = \frac{|A_N|^2 - |B_N|^2 - \frac{n_p \mu_V}{n_v \mu_P} |G_0|^2}{|A_N|^2} \quad (16)$$

Формулы (14), (15) и (16) вместе с (12) и (13) являются окончательными расчетными формулами. (Введение отношения $a = \frac{R}{D}$ здесь не целесообразно).

Для иллюстрации метода рассмотрим простейший случай — слой с постоянным комплексным показателем преломления ($n(x) = n(1 - ix)$).

Для матричных элементов мы имеем:

$$\begin{aligned}
 c_{11} &= \operatorname{ch} mn\kappa \cos mn, & \bar{c}_{11} &= \operatorname{sh} mn\kappa \sin mn, \\
 c_{12} &= \frac{1}{k_0 n (1 + \kappa^2)} (\operatorname{ch} mn\kappa \sin mn + \kappa \operatorname{sh} mn\kappa \cos mn), \\
 \bar{c}_{12} &= \frac{1}{k_0 n (1 + \kappa^2)} (\kappa \operatorname{ch} mn\kappa \sin mn - \operatorname{sh} mn\kappa \cos mn), \\
 c_{21} &= k_0 n (-\operatorname{ch} mn\kappa \sin mn + \kappa \operatorname{sh} mn\kappa \cos mn), \\
 \bar{c}_{21} &= k_0 n (\kappa \operatorname{ch} mn\kappa \sin mn + \operatorname{sh} mn\kappa \cos mn), \\
 c_{22} &= \operatorname{ch} mn\kappa \cos mn, & \bar{c}_{22} &= \operatorname{sh} mn\kappa \sin mn,
 \end{aligned} \tag{17}$$

где k_0 — волновое число в пустоте и m — толщина слоя, выраженном в длинах волн $m = hk_0$.

Если покрытие состоит лишь из одного такого слоя между двумя однородными прозрачными средами, то R и D даются выражениями:

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{1}{K} (\alpha_{(-)} \operatorname{sh}^2 mn\kappa + \beta_{(+)} \sin^2 mn + 2\gamma_{(-)} \operatorname{ch} mn\kappa \operatorname{sh} mn\kappa + \\
 &\quad + \vartheta_{(-)} \sin 2mn + \varphi_{(-)}) \\
 D &= \frac{4}{K} \frac{n_p}{n_v},
 \end{aligned} \tag{18}$$

где

$$K \equiv \alpha_{(+)} \operatorname{sh}^2 mn\kappa + \beta_{(-)} \sin^2 mn + 2\gamma_{(+)} \operatorname{ch} mn\kappa \operatorname{sh} mn\kappa + \vartheta_{(+)} \sin 2mn + \varphi_{(+)}$$

и введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{(\pm)} &\equiv \frac{1}{n^2 (1 + \kappa^2)} \left\{ \frac{n^4}{n_v^2} (1 + \kappa^2)^2 + n^2 (1 + \kappa^2) \left(\frac{n_p^2}{n_v^2} + 1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + n_p^2 \pm 4 \frac{n_p}{n_v} n^2 \right\}, \\
 \beta_{(\pm)} &\equiv \frac{1}{n^2 (1 + \kappa^2)} \left\{ \frac{n^4}{n_v^2} (1 + \kappa^2)^2 - n^2 (1 + \kappa^2) \left(\frac{n_p^2}{n_v^2} - 1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + n_p^2 \pm 4 \frac{n_p}{n_v} n^2 \kappa^2 \right\}, \\
 \gamma_{(\pm)} &\equiv \frac{1}{n (1 + \kappa^2)} \left\{ n^2 \frac{n_p \pm n_v}{n_v^2} (1 + \kappa^2) + \frac{n_p n_v \pm n_p^2}{n_v} \right\}, \\
 \vartheta_{(\pm)} &\equiv \frac{\kappa}{n (1 + \kappa^2)} \left\{ n^2 \frac{n_p \pm n_v}{n_v^2} (1 + \kappa^2) - \frac{n_p n_v \pm n_p^2}{n_v} \right\}, \\
 \varphi_{(\pm)} &\equiv \frac{n_p}{n_v} \left(\frac{n_p}{n_v} \pm 2 \right) + 1.
 \end{aligned} \tag{19}$$

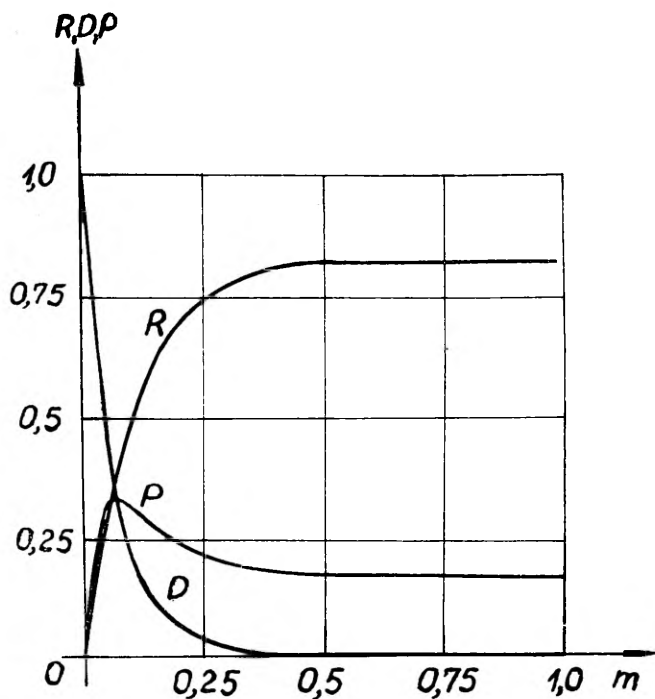


Рис. 3. R , D и $P = 1 - (R + D)$ в зависимости от толщины металлического слоя с постоянным показателем преломления. $n_p = n_v = 1$; $n = 1,44$; $n \cdot \kappa = 5,23$ (алюминий).

На рис. 3 приведены результаты расчета R , D и P в зависимости от толщины слоя для $n_p = n_v = 1,0$; $n = 1,44$; $n \cdot \kappa = 5,23$. (алюминий, [4] стр. 356).

Нетрудно убедиться в том, что при неограниченном возрастании толщины слоя ($m \rightarrow \infty$) выражения (18) переходят в известную формулу Френеля ([4] стр. 355).

Поступило
16 I 1958

Литература

1. Ребане К. К., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, 62, 180—191.
2. Бреховских Л. М., Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957.
3. Смирнов А. Д., Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций, Изд. АН СССР, 1955.
4. Борн М., Оптика, ГНТИ Украины, Харьков—Киев, 1937.

PIDEVALT MUUTUVATE OPTILISTE KARAKTERISTIKU- TEGA METALLO-DIELEKTRILISTE KATETE ARVUTUSMEETOD

O. Keenberg ja füüs.-mat. tead. kand. K. Rebane

Resümee

Töös [1] oli välja töötatud meetod pidevalt muutuva murdu-
misnäitajaga dielektriliste katete arvutamiseks. Käesolevas artik-
lis on lühidalt vaadeldud mõningaid sellel meetodil teostatud
arvutuste tulemusi ja antud meetodi üldistus metalseid kihte sisal-
dava katte juhule.

A METHOD OF COMPUTATION OF METALLINE DIELECTRIC COATINGS WITH CONTINUOUS OPTICAL PARAMETERS

O. Keerberg, K. Rebane

S u m m a r y

In a previous paper [1] a method was developed for calculating reflection and transmission coefficients of dielectric coatings with continuous refractive index. In the present paper some results of the calculations performed by making use of this method are discussed and a generalization of the method for the metalline coatings is given.

AMPLITUUDFILTRITE JA DIAFRAGMADE MÖJUST DIFRAKTSIOONPILDILE. II

L. Tuvikene

Teoreetilise füüsika kateeder

Töös [1] oli vaadeldud ühtlase läbilaskvusega diafragma kaju arvutamist vastavast integraalvõrrandist fokaaltasandil etteantud amplituudijaotuse korral.

Käesolevas artiklis käsitletakse nimetatud probleemi üldisemalt, lähtudes amplituudijaotusest ekstrapokaalses ruumis (intra- ja ekstrapokaalsetel tasanditel) Uuritakse ka seda, kas valguspunkti ekstrapokaalne pilt antud ava korral on realiseeritav mõne teise ava fokaalse pildina.

Tuleb märkida, et autoril ei ole õnnestunud nimetatud küsimuste kohta leida andmeid kirjandusest.

1. Fresneli difraktsioon. Intra- ja ekstrapokaalsed difraktsioonkujundid

Difraktsiooniteoorias tuntud Kirchhoff'i ligikaudset valemit ([2], lk. 154) võib esitada Fresneli difraktsiooni korral järgmiselt

$$u(R, \alpha, \beta) = \int \int_{(\text{üle ava})} e^{-ik\Phi(\xi, \eta)} d\xi d\eta, \quad (1.1)$$

kus

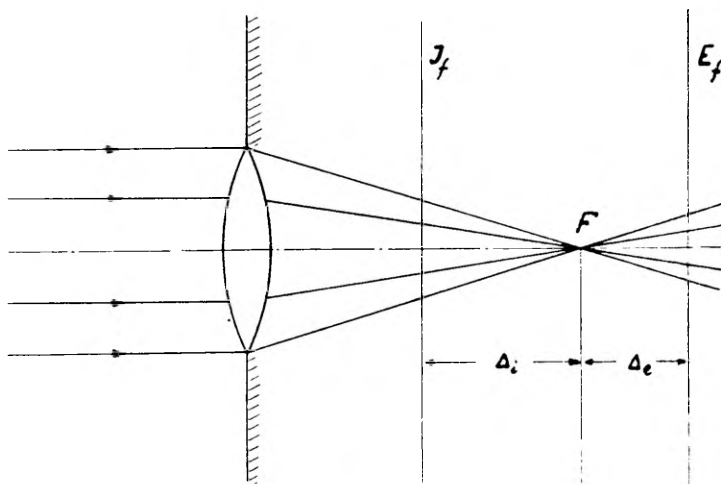
$$\Phi(\xi, \eta) = -\alpha \xi - \beta \eta + \frac{1}{2} \frac{\xi^2 + \eta^2}{R} - \frac{1}{2} \frac{(\alpha \xi + \beta \eta)^2}{R} + \quad (1.2)$$

kus α, β esitavad ava tsentrist difraktsiooni vaatluspunkti M viiva raadiusvektori R sihikoosinusi; ξ, η on ava punkti koordinaadid,

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — kasutatava valguse lainepikkus. $u(R, \alpha, \beta)$ on võnkeamplituud punktis $M(R, \alpha, \beta)$ Valemis (1.1) koos arendusega (1.2) on arvestatud, et avale langevad tasapinnalised lained risti ava tasapinnaga. Kui $R \rightarrow \infty$, siis valem (1.1) koos arendusega (1.2) määrab Fraunhoferi difraktsiooni ehk fokaalse difraktsiooni. Välja nihkudes pikksilma objektiiv fokaaltasapinnast ekstra- või intrafokaalsesse ruumi saab R lõplikuks ja valem

(1.1) määrab Fresneli difraktsiooni. Intensiivsus punktis $M(R, \alpha, \beta)$ avaldub valemiga $I(R, \alpha, \beta) = uu^*$

Selleks et määrata intensiivsuse jaotust intra- ja ekstrapokaal- ses ruumis või intra- ja ekstrapokaalsetel tasanditel (vt. joonis 1), s. o. tasanditel, mis on risti objektiivläätsse optilise peateljega ja asuvad mõnesugusel kaugusel Δ fookusest F , on otstarbekohane amplituudijaotust $u(R, \alpha, \beta)$ või I siduda väljanihke suurusega Δ fokaaltasandist ja objektiivi fookuse kaugusega f . Eelneva põhjal on loomulik arvata, et u (või I) sõltuvus Δ -st saab olema R kaudu. Vastava transformatsioonivalemi tuletamine on seotud läätsse valemiga. Olgu läätses lõpmata õhuke kumerlääts (fookuse kaugusega f), mille paigutame ekraani avasse.



Joon. 1.

Artiklit [3] silmas pidades võib väita, et difraktsioonkujundid eksisteerivad nii ekraani ees ruumis kui ka ekraani taga. Vaadeldes nüüd difraktsioonpilte (vt. joonis 2) ruumiosas I (ekraani ees) lõpmatuseni kuni fokaaltasandini, saame nad läätsse abil transformeerida ruumiosas II — ekstrapokaalsesse ruumi fokaaltasandist kuni lõpmatuseni. Läätsse valemist

$$a = \frac{f \cdot k}{f - k} \approx R,$$

kus joonise 2 järgi

$$f - k = 1 < 0.$$

Seega

$$R = \frac{f(f - \Delta)}{\Delta}, \quad \Delta < 0 \tag{1.3a}$$

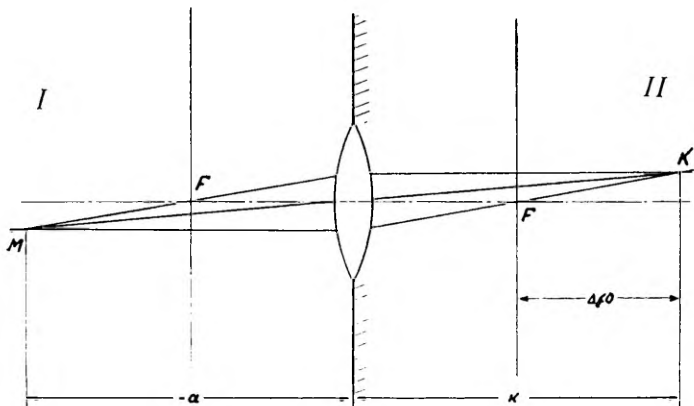
Analoogilise valemi võib tuletada ka punktide transformeermiseks intrafokaalsesse ruumi. Arvestades, et siin on tegu ebakujutise teisendamisega, saame

$$R = \frac{f(f - \Delta)}{\Delta}, \Delta > 0. \quad (1.3b)$$

Olles arvutanud valemi (1.1) alusel amplituudijaotuse u ja püstitanud intensiivsuse jaotuse $I(R, \alpha, \beta)$ (ilma läätseta), ning tehes viimases asenduse (1.3)¹, saamegi otsitava intensiivsuse avaldise kujul

$$I = I \left[\frac{f(f - \Delta)}{\Delta}, \alpha, \beta \right]. \quad (1.4)$$

Kui valemis (1.4) anda Δ -le positiivseid väärtusi, siis I määrab intensiivsuse jaotuse intrafokaalses ruumis (intrafokaalsed difraktsioonkujundid). Andes Δ -le aga negatiivseid väärtusi, saame valemist (1.4) arvutada kõik ektrafokaalsed difraktsioonkujundid.



Joon. 2.

Transformatsioonivalemite (1.3a) ja (1.3b) erinevusest (Δ märgis) võib järeldada, et intrafokaalsed ja ektrafokaalsed difraktsioonkujundid ei ole üldiselt paigutatud sümmeetriliselt fokaaltasandi suhtes.

2. Ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone arvutamisest, kui amplituudijaotus on ette antud intra- või ektrafokaalsel tasandil

Kirchhoff'i valemit (1.1) võib intra- ja ektrafokaalse ruumi peatelje lähedaste punktide jaoks küllaldase täpsusega esitada kujul:

¹ Asenduse (1.3) teostamine intensiivsuse avaldises nõuab avasse läätse asetamist fookusekaugusega f .

$$u(l, v, \omega) = \int_{-a}^{+a} e^{iv\xi} e^{-il\xi^2} d\xi \int_{-\eta_0(\xi)}^{+\eta_0(\xi)} e^{i\omega\eta - il\eta^2} d\eta, \quad (2.1)$$

kus $v = ka$, $\omega = k\beta$; $l(\Delta) = \frac{k}{2R} = \frac{k}{2} \frac{\Delta}{f(f-\Delta)}$, $\eta_0(\xi)$ määrab ühtlase läbilaskvusega ava äärejoone kuju ja $u(l, v, \omega)$ on amplituudijaotus l -ga fikseeritavas (või Δ -ga fikseeritavas) intravõi ekstrasfokaalses tasandis.

Edasi tähistame

$$P(\xi, \omega, l) = e^{-il\xi^2} \int_{-\eta_0(\xi)}^{+\eta_0(\xi)} e^{i\omega\eta - il\eta^2} d\eta \quad (2.2)$$

ja defineerime uue funktsiooni P_0 järgmiselt

$$P_0(\xi, \omega, l) = \begin{cases} P(\xi, \omega, l) & \text{kui } -a < \xi < +a, \\ 0 & \text{kui } |\xi| > a. \end{cases}$$

Siis võrrand (2.1) laseb end esitada kujul

$$u(l, v, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_0(\xi, \omega, l) e^{iv\xi} d\xi. \quad (2.3)$$

Seost (2.3) võib vaadelda kui võrrandit P_0 määramiseks etteantud ekstrasfokaalse amplituudijaotuse $u(l, v, \omega)$ korral. Rakendades võrrandile (2.3) Fourier' transformatsiooni, saame

$$P_0(\xi, \omega, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(l, v, \omega) e^{-iv\xi} dv. \quad (2.4)$$

Ava äärejoone $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks saab kasutada võrdust (2.2), kui asetada viimasesse P asemele P_0 , mis on arvatud võrrandist (2.4). $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks on otstarbekohane võrduse (2.2) paremas pooles esinevat integraali teisendada. Selgub, et nimetatud integraal avaldub trigonomeetriliste funktsioonide ja Fresneli integraalide kaudu.

Erijuht: amplituudijaotus on etteantud lõikes $\omega = 0$ ükskõik millise $l \neq 0$ ($\Delta \neq 0$) korral, s. o. $u = u(l, v, 0)$.

Võrrandist (2.4) määrame $P_0(\xi, 0, l)$ ja vastava ava äärejoone $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks saame võrrandi (2.2) kujul

$$P(\xi, 0, l) = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2l}} e^{-il\xi^2} \left[C \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\} - iS \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\} \right], \quad (2.5)$$

kus $C\{\}$, $S\{\}$ on Fresneli integraalid.

Võrrandiga (2.5) on samaväärne järgmine võrrandsüsteem:

$$\begin{aligned} \cos(l\xi^2) P_r(\xi, 0, l) \mp \sin(l\xi^2) P_{im}(\xi, 0, l) = \\ = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2l}} C \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\begin{aligned} \sin(l\xi^2) P_r(\xi, 0, l) \pm \cos(l\xi^2) P_{im}(\xi, 0, l) = \\ = -2 \sqrt{\frac{\pi}{2l}} S \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_0(\xi) \right\}, \end{aligned} \quad (2.6b)$$

mis on saadud võrrandist (2.5) reaalse ja imaginaarse eraldamise teel ning arvestades, et $P = P_r \pm iP_{im}$

N ä i d e.

On antud Fresneli difraktsiooni võnkeamplituudi avaldis järgmisel konkreetsel kujul:

$$u(v, 0, l) = A - iB, \quad (2.7)^2$$

kus

$$A = \pi a^2 \left\{ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_1 + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_2 \right\}, \quad (2.8)$$

$$B = \pi a^2 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_1 - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} F_2 \right\}$$

$$F_1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{y}\right)^{2n+1} J_{2n+1}(y), \quad (2.9)$$

$$F_2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{z}{y}\right)^{2n} J_{2n}(y).$$

Need read koonduvad, kui $z < y$,

kus

$$z = \frac{k}{R} a^2, \quad y = va, \quad a = \text{konst.} \quad (2.10)$$

Teostame amplituudivalemite (2.7)–(2.10) asenduse transformatsiooni eeskirjade (1.3) kohaselt, s. o. asendades

$$z = \frac{k}{R} a^2 = ka^2 \frac{\Delta}{f(f-\Delta)} = 2a^2 l(\Delta)$$

saamegi konkreetsed amplituudijaotused intra- või ekstrapokaalse ruumi jaoks.

² Amplituudijaotus valemitega (2.7)–(2.10) on tuletatud Lommel'i poolt (vt. [4]).

Rakendades antud $u(l, v, 0)$ -le transformatsiooni (2.4) saame

$$P(\xi, 0, l) = \begin{cases} P_r - iP_{im} & -a < \xi < +a \\ 0 & |\xi| > a, \end{cases}$$

kus

$$P_r = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} a^2 \left\{ \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} z^{2n+1}}{a^{2(2n+1)} \Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n+\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} (z)^{2n}}{a^{2(2n)} \Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n-\frac{1}{2}} \right\} \\ P_{im} = \frac{2\pi}{2} a^2 \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+\frac{1}{2}} z^{2n+1}}{a^{2(2n+1)} \Gamma\left(2n+\frac{3}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n+\frac{1}{2}} - \right. \\ \left. - \frac{\cos\left(\frac{1}{2}z\right)}{\frac{1}{2}z} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-\frac{1}{2}} z^{2n}}{a^{2(2n)} \Gamma\left(2n+\frac{1}{2}\right)} (a^2 - \xi^2)^{2n-\frac{1}{2}} \right\} \quad (2.11)$$

Asendades P_r, P_{im} kujul (2.11) võrdustesse (2.6) ja arendades võrduste (2.6) mõlemad pooled ritta intra- ja ekstrapokaalust iseloomustava parameetri l (või Δ) astmete järgi, saame vastavate kordajate võrdlemise tulemusena võrdused:

$$(a^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}} = \eta_0(\xi) \\ (a^2 - \xi^2)^{\frac{3}{2}} = \eta_0^3(\xi) \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

Siit selgub, et otsitav ava äärejoon on ringjoon $\eta_0(\xi) = (a^2 - \xi^2)^{\frac{1}{2}}$ (raadiusega a)

Samasugusele tulemusele võib jõuda ka η_0 numbrilisel arvutamisel näiteks võrrandist (2.5a), fikseerides numbriliselt l (või Δ).

3. Intra- või ekstrafokaalse difraktsioonefekti ja fokaalse difraktsioonefekti ekvivalentsusest

On kehtivad amplituudijaotused: intra- ja ekstrafokaalse ruumi jaoks

$$u_{i.f.} = u(l, v, \omega) = \int_{-a}^{+a} e^{iv\xi - il\xi^2} d\xi \int_{-\eta_1(\xi)}^{\eta_1(\xi)} e^{i\omega\eta - il\eta^2} d\eta,$$

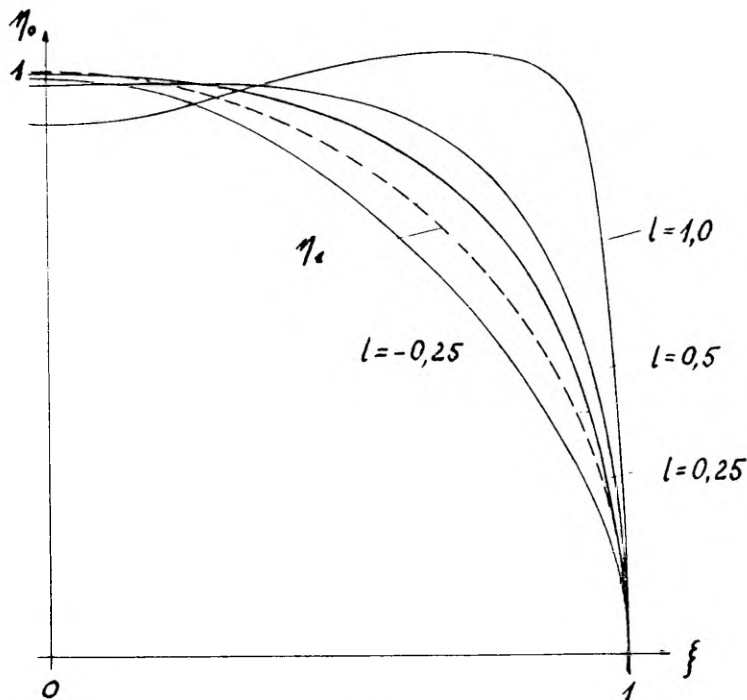
(kus $\eta_1(\xi)$ on ava äärejoon, mis on seotud intra või ekstrafokaalse pildiga) ja fokaaltasandi jaoks

$$u_f = u(v, \omega) = \int_{-a}^{+a} e^{iv\xi} d\xi \int_{-\eta_0(\xi)}^{+\eta_0(\xi)} e^{i\omega\eta} d\eta = 2 \int_{-a}^{+a} \frac{\sin \omega \eta_0(\xi)}{\omega} e^{iv\xi} d\xi,$$

(kus $\eta_0(\xi)$ on ava äärejoon, mis on seotud fokaalse pildiga)
Nõuame, et

$$u_{i.f.} = u_f \quad (3.1)$$

kehtiks iga ω, l korral.



Joon. 3.

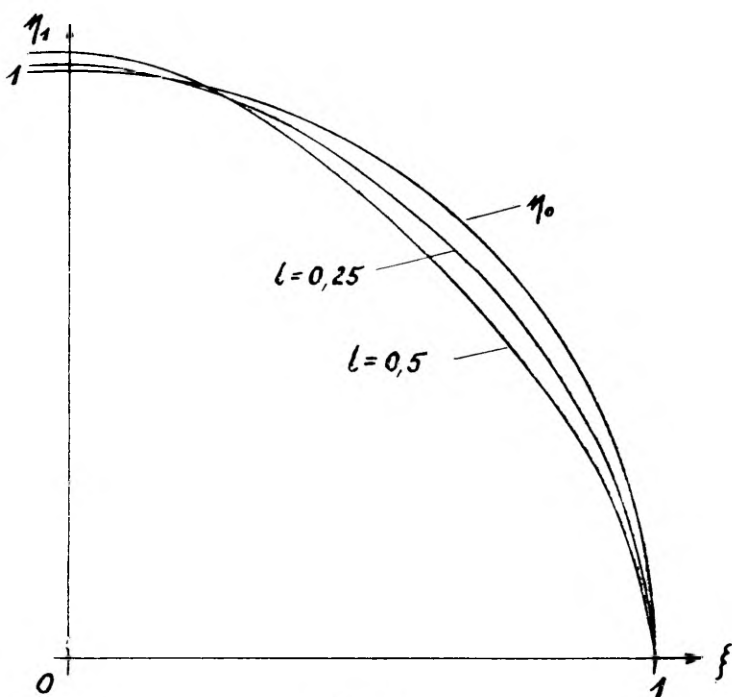
Vaatleme seost (3.1) lõike $\omega = 0$ jaoks. Saame

$$e^{-i l \xi^2} \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \left[C \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2l}} \eta_1(\xi) \right\} - iS \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_1(\xi) \right\} \right] = \eta_0(\xi). \quad (3.2)$$

Võrdusega (3.2) määratud $\eta_0(\xi)$ on üldiselt kompleksne, seepärast arvestame kitsendava tingimusena $\eta_0(\xi)_{im} = 0$. Võrrand reaalse $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks kujuneb siis järgmiseks:

$$\eta_0(\xi)_{\omega=0} = \sqrt{\frac{\pi}{2l}} C \left\{ \sqrt{\frac{2l}{\pi}} \eta_1(\xi) \right\} \left[\cos l \xi^2 + \frac{\tan(l \xi^2)}{\cos(l \xi^2)} \right] \quad (3.3)$$

Võrrandist (3.3) $\eta_0(\xi)$ arvutamiseks on tarvis ette anda $\eta_1(\xi)$ ja intra- või ekstrapokaalsust karakteriseeriva parameetri l (või l) väärtused. Arvutustulemused on antud joonisel 3.



Joon. 4.

Mis puutub aga võrrandist (3.3) $\eta_1(\xi)$ arvutamisse etteantud $\eta_1(\xi)$ korral, siis tuleb märkida, et sellel ülesandel ei ole iga l korral reaalselt lahendit $\eta_1(\xi)$. Peale selle on η_1 üldiselt mitmene. Mõned reaalsed $\eta_1(\xi)$ graafikud on antud joonisel 4.

Saadud tulemustest võib järeldada, et valguspunkti intra- või ekstrapokaalne pilt ($l \neq 0$) diafragma $\eta_1(\xi)$ korral on realiseeri-

tav vähemalt ühes lõikes $\omega = \text{konst.}$ diafragma $\eta_0(\xi)$ fokaalse pildina. See aga tähendab Fresneli difraktsiooniülesande taandamist Fraunhoferi difraktsiooniülesandeks.

Saabunud
16. I 1958.

Kirjandus

1. Tuvikene, L., Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1958, **62**, 192—218.
2. Born, M., Optik, Berlin, 1933, 147—156.
3. Нёпф, Н., Z. Phys., 1952, **131**, 290—304.
4. Стретт, Дж. В. Волновая теория света, Москва, 1940, 102—105.

ДЕЙСТВИЕ АМПЛИТУДНЫХ ФИЛЬТРОВ И ДИАФРАГМ НА ДИФРАКЦИОННУЮ КАРТИНУ. II

Л. М. Тувикене

Кафедра теоретической физики

Резюме

В работе [1] рассматривались возможности расчета диафрагмы по заданному распределению амплитуды на фокальной плоскости.

В настоящей работе данная проблема рассматривается в более общем виде. Именно, распределение амплитуды u задается на какой-нибудь интра- или экстрафокальной плоскости; отсюда выводятся уравнения (2.4), (2.5) для вычисления соответствующей диафрагмы $\eta_0(\xi)$.

Даны формулы преобразования (1.3) для сведения дифракции Френеля к интра- или экстрафокальной дифракции. В этих формулах Δ обозначает смещение с фокальной плоскости, f — фокусное расстояние линзы.

В статье рассмотрен также вопрос об эквивалентности экстрафокального и фокального дифракционных эффектов.

ÜBER DIE WIRKUNG DER AMPLITUDENFILTER UND DIAPHRAGMEN AUF DAS BEUGUNGSBILD. II

L. Tuvikene

Zusammenfassung

In der Arbeit [1] wurden verschiedene Möglichkeiten der Diaphragmenberechnung im Falle beschrieben, wenn die Amplitudenverteilung auf einer Brennebene vorgegeben ist.

In der vorliegenden Untersuchung werden die erwähnten Probleme allgemeiner behandelt: die Amplitudenverteilung u wird auf einer extrafokalen Ebene vorgegeben. Zur Berechnung des Diaphragmas $\eta_0(\xi)$ werden die Gleichungen (2.4) und (2.5) abgeleitet.

In dem Artikel wird auch die Äquivalenzfrage der extrafokalen und fokalen Beugungseffekte behandelt.

К ВЫБОРУ ПАРАМЕТРОВ СЕКТОРНОГО ЦИКЛОТРОНА

Ю. Я. Лембра

Кафедра теоретической физики

Рабинович и Мороз предложили магнитную систему секторного циклотрона [1], элемент периодичности которой состоит из 2 секторов с различными значениями напряженности магнитного поля: в одном секторе имеется однородное поле H , в другом — неоднородное поле κH ($\kappa < 1$)

Исходя из уменьшения частоты вертикальных колебаний иона с ростом энергии иона в секторном циклотроне, авторы [2] пришли к выводу, что наиболее вредные резонансы вертикальных колебаний могут быть устранены, если в начале ускорения выполняется условие:

$$\frac{\omega_z}{\omega} < \frac{1}{2} \text{ при } \zeta = 1, \quad \xi = 0. \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем мы придерживаемся следующих стандартных обозначений [2].

ω_z — частота вертикальных колебаний иона;

ω — частота обращения иона;

ζ — полная энергия иона в единицах энергии покоя;

$\xi = R_m \frac{d\Theta}{dR_m}$, где R_m минимальное расстояние от орбиты к

центру машины и Θ — полярный угол;

N — число элементов периодичности на оборот;

μ_z — изменение фазы вертикальных колебаний иона на эле-

мент периодичности. Отметим, что $\frac{N\mu_z}{2\pi} = \frac{\omega_z}{\omega}$

Далее, путем исследования $\left[\left(\frac{\omega_z}{\omega} \right) \Big|_{\zeta=1, \xi=0} \right]_{\max}$, при котором κ рассматривается как параметр, авторы [2] нашли, что в предельном случае $N \rightarrow \infty$ условие (1) может быть выполнено при соблюдении неравенства

$$\kappa^2 - 3\kappa + 1 < 0, \text{ т. е. } \kappa > 0,382.$$

В настоящей заметке исследуем этот вопрос несколько подробнее в связи с тем, что в некоторых случаях (напр., параметр ξ выби-

рается из соображения получить желательный ход функции $\cos \mu_z$) надо в начале ускорения удовлетворить условию

$$\frac{\omega_z}{\omega} > \frac{1}{2} \text{ при } \zeta = 1, \xi = 0. \quad (2)$$

Для представления результата этого исследования в наиболее ясной форме целесообразно применить следующий приближенный расчет.

Полагая $\zeta = 1$ и $\xi = 0$ в выражении для $\cos \mu_z$, которое можно вывести обычными методами теории сильнофокусирующих ускорителей (см. [2], формулу (10)), и ограничиваясь членами порядка $\left(\frac{\pi}{N}\right)^2$, получим:

$$\cos \mu_z = 1 - 2(1 - \kappa \zeta_M)(\zeta_M - 1) \frac{\pi^2}{N^2} = 1 - \frac{2(f - \kappa)(1 - f)}{f^2} \frac{\pi^2}{N^2}, \quad (3)$$

где мы сочли удобным вместе с параметром ζ_M ввести параметр

$$f = \frac{1}{\zeta_M} = \frac{\langle H \rangle_0}{H} \quad (4)$$

В выражении (4) $\langle H \rangle_0$ обозначает среднюю начальную напряженность магнитного поля вдоль орбиты.

Из (4) вытекает в указанном нами приближении, что

$$\frac{\omega_z}{\omega} = \sqrt{(1 - \kappa \zeta_M)(\zeta_M - 1)} = \frac{\sqrt{(f - \kappa)(1 - f)}}{f} \quad (5)$$

Теперь можно условиям (1) и (2), которые нужно учитывать при выборе параметров секторного циклотрона, дать вид:

$$\kappa \geq \tilde{\kappa} \text{ для } \frac{\omega_z}{\omega} \leq \frac{1}{2} \text{ при } \zeta = 1, \xi = 0, \quad (6)$$

где

$$\tilde{\kappa} = \frac{f \left(1 - \frac{5}{4} f\right)}{1 - f} \quad (7)$$

Функция $\tilde{\kappa}$ имеет максимум $\tilde{\kappa}_{\max} = 0,382$ при $f = 0,553$. Следовательно, при $\kappa > \tilde{\kappa}_{\max}$ независимо от f неравенство (1) выполняется.

В заключение отметим, что (5) является приближенным аналитическим выражением для графиков рис. 9 [2]. Из (5) можно легко аналитически вывести формулу (25) работы [2].

Автор выражает благодарность Д. М. Каминкеру за обсуждение результатов.

Поступило
15 V 1959

Литература

- 1 Мороз Е. М., Рабинович М. С., Proc. CERN Symp., 1956, 1, 547; см. также приложение к журналу «Атомная энергия», 1957, № 4, 27.
- 2 Мороз Е. М., Рабинович М. С., Приборы и техника эксперимента, 1957, № 1, 15.

SEKTORILISE TSÜKLOTRONI PARAMEETRITE VALIKUST

J. Lembra

Teoreetilise füüsika kateeder

Resümee

Rabinovitš ja Moroz [1,2] esitasid sektorilise tsüklotroni magnetilise süsteemi, mille perioodsuse element koosneb 2 sektorist homogeense magnetivälja tugevuse erinevate väärtustega: H ja κH ($\kappa < 1$). Käesolevas töös on näidatud, et sektorilise tsüklotroni parameetrite valikul arvestatav tingimus kiirendamise algul

$\frac{\omega_z}{\omega} \leq \frac{1}{2}$ taandub perioodsuse elementide arvu küllaldase suuruse

korral tingimuseks $\kappa \geq \tilde{\kappa}$, kus $\tilde{\kappa} = \frac{f \left(1 - \frac{5}{4} f \right)}{1 - f}$ ja $f = \frac{\langle H \rangle_0}{H} \omega_z$ on iooni vertikaalvõnkumiste sagedus, ω — iooni tiirlemissagedus, $\langle H \rangle_0$ — keskmine magnetivälja tugevus piki iooni orbiiti kiirendamise algul.

ON THE CHOICE OF THE PARAMETERS OF A CYCLOTRON WITH A SECTIONED MAGNET SYSTEM

J. Lembra

S u m m a r y

Rabinovich and Moroz [1, 2] suggested a cyclotron with a sectioned magnetic system an element of whose periodicity consists of 2 sections with different values of homogeneous magnetic field: H and κH ($\kappa < 1$). It is shown in this paper that the initial condition for the choice of the parameters of the above-

mentioned cyclotron $\frac{\omega_z}{\omega} \leq \frac{1}{2}$ is reduced in the case of a great number of elements of periodicity to the condition $\kappa \geq \tilde{\kappa}$ where

$\tilde{\kappa} = \frac{f \left(1 - \frac{5}{4} f\right)}{1 - f}$ and $f = \frac{\langle H \rangle_0}{H}$ ω_z and ω are frequencies of the vertical oscillations and of the revolution of the ion, $\langle H \rangle_0$ is the initial mean magnetic field along the orbit of the ion.

ВЫВОД ПРИБЛИЖЕННОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ Q_r В СЕКТОРНОМ ЦИКЛОТРОНЕ

Ю. Я. Лембра

Кафедра теоретической физики

Целью настоящей работы является вывод приближенной формулы для Q_r (число радиальных колебаний иона на оборот) в секторном циклотроне [1, 2], работающем в фазотронном режиме, и применение этой формулы в некоторых частных случаях. Под фазотронным режимом мы подразумеваем здесь режим работы секторного циклотрона, при котором период ускоряющего электрического поля изменяется по определенному закону.

1. Исходим из условия резонансного ускорения в следующем безразмерном виде:

$$\frac{\zeta}{\eta} = \delta, \quad (1)$$

где $\zeta = \frac{E}{E_0}$, $\eta = \frac{\langle H \rangle}{\langle H \rangle_0}$, $\delta = \frac{T}{T_0}$, E — полная энергия равновесного иона, $\langle H \rangle$ — среднее значение напряженности магнитного поля вдоль равновесной орбиты, T — период ускоряющего электрического поля. Индекс 0 введен для обозначения начальных значений.

Из геометрии секторного циклотрона, элемент периодичности магнитной системы которого состоит из двух секторов с различными значениями однородного магнитного поля H (сектор 1) и κH ($\kappa < 1$, сектор 2), вытекает, что

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{2\pi H}{N \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) \langle H \rangle_0} \\ \nu_1 + \nu_2 &= \frac{2\pi}{N}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где ν_1 и ν_2 углы поворота траектории равновесного иона в секторах 1 и 2, а N — число элементов периодичности на один оборот иона.

Учитывая (1) и (2), найдем зависимость величин ν_1 и ν_2 от энергии:

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{1 - \frac{\kappa\delta}{f\xi}}{1 - \kappa} \\ \nu_2 &= \frac{2\pi}{N} \cdot \frac{\kappa \left(\frac{\delta}{f\xi} - 1 \right)}{1 - \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $\hat{f} = \frac{\langle H \rangle_0}{H}$

Для параметров, характеризующих вертикальную и радиальную фокусировку, остаются справедливыми соответствующие формулы из [1, 2] при условии, что ν_1 и ν_2 взяты из (3):

$$\begin{aligned} \cos \mu_z &= 1 - (1 - \kappa) \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 \xi^2}{A_2^2 - B_1^2 \xi^2} + \\ &+ \frac{(1 - \kappa)^2}{2\kappa} \nu_1 \nu_2 \frac{A_1^2 - B_2^2 \xi^2}{A_2^2 - B_1^2 \xi^2} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \cos \mu_r &= \cos \nu_1 \cos \nu_2 - \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 + \\ &+ (1 - \kappa) \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right) \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 \xi^2}{A_2^2 - B_1^2 \xi^2} + \\ &+ \frac{(1 - \kappa)^2}{2\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \frac{A_1^2 - B_2^2 \xi^2}{A_2^2 - B_1^2 \xi^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2} \sin \frac{\nu_2}{2} - \frac{\pi}{N} \frac{\kappa}{f} \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \left(\cos \frac{\nu_1}{2} \sin \frac{\nu_2}{2} - \frac{\sin \frac{\pi}{N}}{1 - \kappa} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta}{\xi} \right) \right)}{\sin \frac{\pi}{N} - (1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2} + \frac{\pi}{N} \frac{\kappa}{f} \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \cdot \cos \frac{\nu_1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta}{\xi} \right)} \\ A_2 &= \frac{\sin \frac{\pi}{N} - (1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_2}{2} + \frac{\pi}{N} \frac{\kappa}{f} \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \cdot \cos \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_2}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta}{\xi} \right)}{\sin \frac{\pi}{N} - (1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2} + \frac{\pi}{N} \frac{\kappa}{f} \frac{\xi^2 - 1}{\xi} \cos \frac{\nu_1}{2} \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\delta}{\xi} \right)} \\ B_1 &= \frac{(1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2} \sin \frac{\nu_2}{2}}{\sin \frac{\pi}{N} - (1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2}}, \quad B_2 = \frac{\sin \frac{\pi}{N} - (1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2} \cos \frac{\nu_2}{2}}{\sin \frac{\pi}{N} - (1 - \kappa) \sin \frac{\nu_1}{2}} \\ \xi &= R_m \frac{d\theta}{d\kappa_m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Здесь μ_z и μ_r — изменения фазы вертикальных и радиальных колебаний на элемент периодичности, R_m — минимальное расстояние от орбиты до центра ускорителя, θ — полярный угол.

Нас интересует главным образом случай, при котором параметр ξ выбирается таким образом, чтобы $\cos \mu_z$ был в широкой области энергий ξ постоянным, поскольку при этом устраняются

наиболее вредные резонансы, приводящие к раскачке вертикальных колебаний (ср. [4]). Поэтому определяем ξ из (4) и подставляем в (5):

$$\begin{aligned} \cos \mu_r = & \cos \nu_1 \cos \nu_2 - \frac{1 + \kappa^2}{2\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 + (1 - \kappa) (\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \\ & + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa}) \frac{(1 - \cos \mu_z) A_2 B_1 + \frac{(1 - \kappa)^2}{2\kappa} \nu_1 \nu_2 A_1 B_2}{(1 - \kappa) \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) A_2 B_1 + \frac{(1 - \kappa)^2}{2\kappa} \nu_1 \nu_2 (A_2 B_2 - A_1 B_1)} + \\ & + \frac{(1 - \kappa)^2}{2\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \frac{(1 - \cos \mu_z) (A_1 B_1 - A_2 B_2) + (1 - \kappa) \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) A_1 B_2}{(1 - \kappa) \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) A_2 B_1 + \frac{(1 - \kappa)^2}{2\kappa} \nu_1 \nu_2 (A_2 B_2 - A_1 B_1)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Разложим $\cos \mu_r$ в ряд, ограничиваясь членами порядка $\left(\frac{\pi}{N}\right)^2$. Введем обозначения:

$$\nu_1 = \frac{2\pi}{N} F; \quad \nu_2 = \frac{2\pi}{N} G. \quad (8)$$

Приведем некоторые промежуточные результаты:

$$\begin{aligned} \cos \mu_r = & 1 - \frac{2\pi^2}{N^2} \left\{ F^2 + G^2 + \frac{1 + \kappa^2}{\kappa} FG - A_1' \frac{(1 - \kappa)}{\kappa} (\kappa F + G) + \right. \\ & \left. + (1 - \cos \mu_z) \left[\frac{FG}{3} \cdot \frac{F + \kappa G}{\kappa F + G} - \frac{1}{4} (B_1'' - B_2'' + A_1' B_1') \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Величины A_1' , B_1' , B_1'' и B_2'' возникают при разложении в ряд величин A_1 , B_1 и B_2 . Расчет показывает, что достаточными приближениями в нашем случае являются:

$$\left. \begin{aligned} A_1 = A_1' \frac{\pi}{N} &= \frac{\left[(1 - \kappa) FG - \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} (F + \kappa G) \frac{dF}{d\zeta} \right] \cdot \frac{\pi}{N}}{\kappa F + G - (1 - \kappa) \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} \frac{dF}{d\zeta}} \\ A_2 &= 1 \\ B_1 = B_1' \frac{\pi}{N} \left(1 + \frac{B_1'' \pi^2}{N^2} \right) &= \\ = \frac{(1 - \kappa) FG}{\kappa F + G} \frac{\pi}{N} \cdot \left[1 + \frac{FG}{6} \frac{2F + (3 - \kappa) G}{\kappa F + G} \cdot \frac{\pi^2}{N^2} \right] \\ B_2 = 1 + B_2'' \frac{\pi^2}{N^2} &= 1 + \frac{(1 - \kappa) FG^2}{2(\kappa F + G)} \frac{\pi^2}{N^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

С учётом (3), (8) и (10) найдем из (9):

$$\cos \mu_r = 1 - \frac{2 \cdot \frac{\pi^2}{N^2}}{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[\ln \left(\frac{\delta}{\zeta} \right) \right]} \left[1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{4(1 - \kappa)^2} \left(\frac{f\zeta}{\delta} - \kappa \right) \left(1 - \frac{f\zeta}{\delta} \right) \right] \quad (11)$$

При $\mu_r \ll \pi$ получаем из (11) для $Q_r = \frac{N\mu_r}{2\pi}$ следующее приближенное выражение:

$$Q_r^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[\ln \left(\frac{\delta}{\zeta} \right) \right]}} \cdot \left[1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{4(1 - \kappa)^2} \left(\frac{f\zeta}{\delta} - \kappa \right) \left(1 - \frac{f\zeta}{\delta} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Выражение (12) показывает, что $Q_r^{(1)}$ состоит из двух сомножителей. Первый сомножитель

$$Q_r^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta} \frac{d}{d\zeta} \left[\ln \left(\frac{\delta}{\zeta} \right) \right]}} \quad (13)$$

зависит только от энергии ζ и величины δ , характеризующей модуляцию периода ускоряющего электрического поля (отметим, что в наших обозначениях глубина модуляции периода ускоряющего электрического поля определяется выражением $\delta - 1$). Второй сомножитель зависит, кроме этих величин, еще от κ и f , характеризующих геометрию магнита, и от $\cos \mu_z$, характеризующего вертикальную фокусировку. Легко убедиться, что второй сомножитель мало отличается от 1 (его максимальное значение

равняется $\sqrt{1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{16}}$). Следовательно, в основных чертах Q_r описывается простой функцией (13). В частном случае $\delta \equiv 1$ (циклотронный режим), получим из (13) ранее известную формулу:

$$Q_r^{(0)} = \zeta. \quad (13')$$

Укажем дополнительно на два пути для вывода (13):

1) можно разложить (5) в ряд, ограничиваясь членами порядка $\left(\frac{\pi}{N}\right)^2$ и рассматривая ξ независимым от $\frac{\pi}{N}$. В ходе вычисления ξ сократится и не войдет в конечный результат (13);

2) можно исходить из качественных соображений, подобных тем, которые применяются для вывода (13'). При этом вычисляют из (1) показатель n для среднего магнитного поля вдоль равновесной орбиты и считают $Q_r = \sqrt{1 - n}$, полагая, что фокусирующие элементы, которые введены для получения вертикальной фокусировки, слабо влияют на радиальную фокусировку.

При выводе (12) мы предполагали $\mu_r \ll \pi$. Однако, как показывают численные расчеты, проведенные по (5), формула (12) является хорошим приближением даже при значениях μ_r , превышающих $\frac{\pi}{2}$ когда формула (11) становится неточной. Это обстоятельство указывает на то, что в разложении $\cos \mu_r$ третий

член близок к $\frac{2}{3} \left[\frac{\pi Q_r^{(1)}}{N} \right]^4$

Важность формул (12) и (13) заключается в том, что они позволяют определить качественный ход величины Q_r и тем способствуют проектированию ускорителей с наперед заданными параметрами, учитывая, в частности, проблему вывода пучка.

II. Рассмотрим применение формул (12) и (13) в некоторых частных случаях.

а) Выберем условия ускорения:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \text{const} && \text{при } 1 < \zeta < \zeta_* \\ \frac{K\omega^2}{E} &= \text{const} && \text{при } \zeta_* < \zeta < \zeta_k \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Индекс k здесь и в дальнейшем введен для обозначения конечных величин, ω — угловая частота обращения равновесного иона, K — коэффициент, входящий в хорошо известное соотношение [3]:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -K \frac{\Delta E}{E} \quad (15)$$

Можно показать, что выкладки, приводящие к (15), остаются в силе для случая любого циклического ускорителя, если в [3] под r и H понимать соответственно средний радиус равновесной орбиты и среднюю напряженность магнитного поля вдоль равновесной орбиты.

В режиме, описываемом условием $\frac{K\omega^2}{E} = \text{const}$, амплитуда малых фазовых колебаний остается постоянной, если только не меняется равновесная разность потенциалов.

Найдем величину δ при условиях (14). Из первого условия (14) сразу вытекает:

$$\delta = 1 \quad 1 < \zeta < \zeta_* \quad (16)$$

Второе условие (14) дает после подстановки в (15) и интегрирования:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2K_*}{\zeta_*}(\zeta - \zeta_*)}} \quad \zeta_* < \zeta < \zeta_k, \quad (16')$$

где K_* обозначает значение K при $\zeta = \zeta_*$.

Мы полагаем здесь и также в п. II б, что в широкой области энергии $\zeta_* < \zeta < \zeta_k$ параметр ξ выбирается так, чтобы получить $\cos \mu_z = \text{const}$, а в промежутке $1 < \zeta < \zeta_*$ $\cos \mu_z$ определяется по какому-то заданному закону $\xi(\zeta)$, обеспечивающему непрерывность ξ при $\zeta = \zeta_*$ и выполнение условия $\xi(1) = 0$. Однако, так как в практически интересных случаях $\cos \mu_z$ меняется сравнительно мало, можно и в промежутке $1 < \zeta < \zeta_*$ применить (12) с учётом зависимости $\cos \mu_z(\zeta)$

Подставляя δ из (16) и (16') в (12) и (13), имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{(0)} &= \zeta & 1 < \zeta < \zeta_* \\ Q_r^{(0)} &= \zeta \sqrt{\frac{1 - \frac{2K_*}{\zeta_*}(\zeta - \zeta_*)}{1 + \frac{K_*}{\zeta_*}(\zeta^3 - 3\zeta + 2\zeta_*)}} & \zeta_* < \zeta < \zeta_k \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{(1)} &= Q_r^{(0)} \left[1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{4(1 - \varkappa)^2} (f\zeta - \varkappa)(1 - f\zeta) \right]^{\frac{1}{2}} & 1 < \zeta < \zeta_* \\ Q_r^{(1)} &= Q_r^{(0)} \left[1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{4(1 - \varkappa)^2} \left(f\zeta \sqrt{1 - \frac{2K_*}{\zeta_*}(\zeta - \zeta_*)} - \varkappa \right) \right. \\ & \quad \left. \left(1 - f\zeta \sqrt{1 - \frac{2K_*}{\zeta_*}(\zeta - \zeta_*)} \right) \right]^{\frac{1}{2}} & \zeta_* < \zeta < \zeta_k. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

При $\zeta = \zeta_*$ имеет место скачок величины Q_r , обусловленный тем, что производная от функции δ меняется в точке $\zeta = \zeta_*$ скачкообразно. Из (17) найдем приближенную величину этого скачка:

$$Q_r(\zeta_* + 0) - Q_r(\zeta_* - 0) = \Delta Q_r^* = \zeta_* \left(\frac{1}{\sqrt{1 + K_*(\zeta_*^2 - 1)}} - 1 \right), \quad (19)$$

откуда получим при условии $|K_*(\zeta_*^2 - 1)| \ll 1$ (мы считаем, что это условие обычно выполняется)

$$\Delta Q_r^* = -\frac{1}{2} K_* \zeta_* (\zeta_*^2 - 1). \quad (19')$$

$Q_r^{(0)}$ имеет экстремальные значения при ζ , являющихся решениями кубического уравнения:

$$\zeta^3 - \frac{12K_*}{(1+2K_*)\zeta_*} \zeta^2 + 9\zeta - \frac{2(1+2K_*)\zeta_*}{K_*} = 0 \quad (20)$$

С точки зрения легкости обеспечения вывода пучка из секторного циклотрона представляет интерес выбирать параметры K_* и ζ_* таким образом, чтобы в конце ускорения значение Q_r приблизилось к резонансному значению. Для исследования этого вопроса целесообразно найти из (17) выражение для K_* :

$$K_* = \left[\frac{L_{Q_r^{(0)}}(\zeta_k)}{\zeta_*} - 2 \right]^{-1}, \quad (21)$$

где

$$L_{Q_r}(\zeta) = \zeta \cdot \frac{(Q^2 + 2)\zeta^2 - 3Q^2}{\zeta^2 - Q^2} \quad (22)$$

Первыми целыми или полуцелыми резонансными значениями могут быть $Q_r^{(0)} = \frac{1}{2}; 1; \frac{3}{2}$. В дальнейшем случай $Q_r^{(0)} = \frac{1}{2}$ не рассматривается, так как при этом требуется более глубокая моду-

ляция периода ускоряющего электрического поля. Также исключаем из рассмотрения очевидное $Q_r^{(0)} = 1$ в начале ускорения.

Подставляя $Q_r^{(0)} = 1$ и $Q_r^{(0)} = \frac{3}{2}$ в (22), найдем:

$$\left. \begin{aligned} L_1(\zeta) &= 3\zeta \\ L_{\frac{3}{2}}(\zeta) &= \zeta \frac{(17\zeta^2 - 27)}{4\zeta^2 - 9} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

На рис. 1 изображена зависимость K_* от ζ_* для получения $Q_{r,k}^{(0)} = 1$ (кривая I) и $Q_{r,k}^{(0)} = \frac{3}{2}$ (кривая II) в случае $\zeta_* = 1$. Как показывает анализ и как видно из рис. 1, кривая II имеет максимум $(K_*)_{\max} = 0,104$ при $\zeta_k = 2,08$. При $\zeta_k = 2,08$ $Q_r^{(0)} = \frac{3}{2}$ является одновременно максимальным значением функции $Q_r^{(0)}$. При $K_* \geq 0,104$ максимумы $(Q_r^{(0)})_{\max} \leq 1,5$. Из вышеизложенного вытекают следующие следствия:

1) в промежутке $1 < \zeta_k < 2,08$ можно K_* (по кривой II) выбрать так, чтобы резонанс $Q_r = \frac{3}{2}$ возникал только в конце ускорения;

2) в промежутке $1 < \zeta_k < 3,88$ можно K_* (по кривой I) выбрать так, чтобы резонанс $Q_r = 1$ возникал в конце ускорения с отсутствием резонанса $Q_r = \frac{3}{2}$ в процессе ускорения.

Следствия 1 и 2 остаются справедливыми также и в случае $1 < \zeta_* < 1,5$, так как в выражение $Q_r^{(0)}$ входят K_* и ζ_* только в виде комбинации $(1 + 2K_*) \frac{\zeta_*}{K_*}$ которая по (21) равняется $L_{Q_r^{(0)}}(\zeta_k)$, т. е. не зависит от ζ_* .

б) Выберем другие условия ускорения:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \text{const} && \text{при } 1 < \zeta < \zeta_* \\ K &= \text{const} \neq 0 && \text{при } \zeta_* < \zeta < \zeta_k. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Из условия (24) найдем с учётом (15) величину δ :

$$\left. \begin{aligned} \delta &= 1 && 1 < \zeta < \zeta_* \\ \delta &= \left(\frac{\zeta}{\zeta_*} \right)^{K_*} && \zeta_* < \zeta < \zeta_k. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Подставляя (25) в (12) и (13), имеем:

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{(0)} &= \zeta && 1 < \zeta < \zeta_* \\ Q_r^{(0)} &= \frac{\zeta}{\sqrt{1 + K_* (\zeta^2 - 1)}} && \zeta_* < \zeta < \zeta_k; \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{(1)} &= Q_r^{(0)} \left[1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{4(1 - \kappa)^2} (f\zeta - \kappa)(1 - f\zeta) \right]^{\frac{1}{2}} & 1 < \zeta < \zeta_* \\ Q_r^{(1)} &= Q_r^{(0)} \left[1 + \frac{1 - \cos \mu_z}{4(1 - \kappa)^2} (f\zeta_*^{K_*} \zeta^{1-K_*} - \kappa)(1 - f\zeta_*^{K_*} \zeta^{1-K_*}) \right]^{\frac{1}{2}} & \zeta_* < \zeta < \zeta_k \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Из (17) и (26) видно, что величина скачка $Q_r^{(0)}$ одинакова в режимах (14) и (24) при условии выбора одинаковых K_* и ζ_* в обоих режимах. Из (17), (18), (26) и (27) также вытекает,

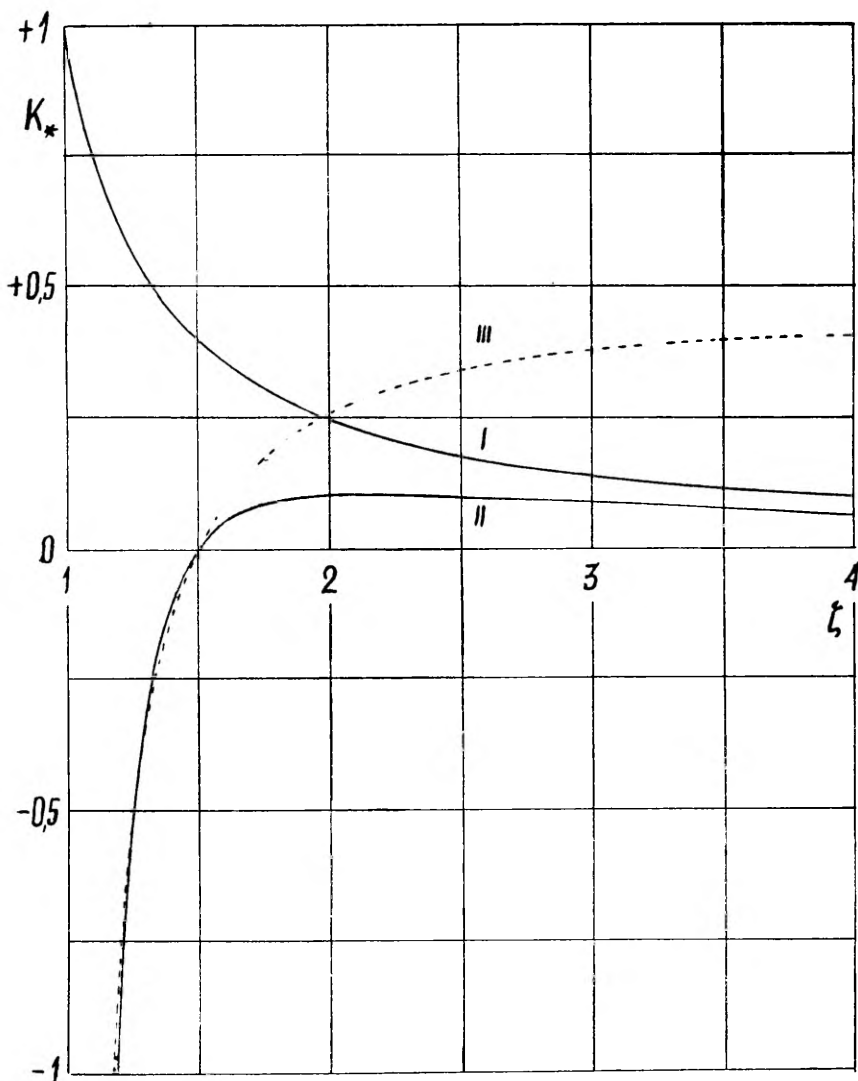


Рис. 1.

что режимы (14) и (24) дают одинаковые результаты при $K_* = -\frac{1}{2}$ и $K_* = 0$. Кроме того, из (17) и (26) легко аналитически вывести, что для всех ζ_* и ζ , при которых $Q_r^{(0)}$ имеет физический смысл, при $-\frac{1}{2} < K_* < 0$ в режиме (14) $Q_r^{(0)}$ больше, чем в режиме (24), а при $K_* < -\frac{1}{2}$ и $K_* > 0$ в режиме (14) $Q_r^{(0)}$ меньше, чем в режиме (24).

Как и в предыдущем примере, выбираем параметр K_* таким образом, чтобы в конце ускорения значение Q_r приблизилось к резонансному значению. Аналогично п. IIa найдем из (26):

$$K_* = \frac{\zeta_k^2 - (Q_r^{(0)})^2}{(Q_r^{(0)})^2 (\zeta_k^2 - 1)} \quad (28)$$

Рассмотрим этот вопрос в случае $K_* < 1$. Случай $K_* > 1$ практически менее интересен, поскольку при этом потребуются более глубокая модуляция периода ускоряющего электрического поля. Так как в случае $K_* < 1$ $Q_r^{(0)}$ начинает расти от значения 1, то ближайшее полуцелое резонансное значение $Q_r^{(0)} = \frac{3}{2}$. Подставляя это значение в (28), получим:

$$K_* = \frac{4\zeta_k^2 - 9}{9(\zeta_k^2 - 1)}. \quad (29)$$

График функции (29) представлен на рис. 1 (кривая III). Представляет интерес сравнивать режимы (14) и (24) с учётом получения $Q_{r,k}^{(0)} = \frac{3}{2}$. Режим (24) обладает тем преимуществом, что в нем не существует предельной энергии, которая в режиме (14) равняется $\zeta_k = 2,08$. Однако для получения энергии $1,5 < \zeta_k < 2,08$ режим (14) может оказаться более подходящим, так как он требует менее глубокой модуляции периода ускоряющего электрического поля.

В заключение резюмируем основные результаты статьи.

В п. I нами были получены простые приближенные формулы (12) и (13) для вычисления Q_r в секторном циклотроне, работающем в фазотронном режиме. В п. II рассмотрено применение этих формул к некоторым частным случаям [условия ускорения определяются соотношениями (14) и (24)]. Далее в п. II сделано предложение выбирать параметр K из хорошо известного соотношения (15) таким образом, чтобы в конце ускорения величина Q_r приблизилась к резонансному значению для облегчения вывода пучка.

Автор выражает благодарность Д. М. Каминкеру за обсуждение результатов.

Литература

1. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович, Proc. CERN Symp. 1, 547 (1956); см. также приложение к журналу «Атомная энергия» № 4, 27 (1957).
2. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович. Приборы и техника эксперимента, № 1, 15 (1957).
3. D. Bohm, L. Foldy. Phys. Rev. 72, 649 (1947), см. перевод в сб. «Резонансные циклические ускорители элементарных частиц», ИЛ 1950.
4. Ю. Я. Лембра, предыдущая статья этого выпуска.

Поступило
19 V 1959

Q_r LIGIKAUDSE VALEMI TULETAMINE SEKTORILISE TSÜKLOTRONI JUHUL

J. Lembra

Teoreetilise füüsika kateeder

Resümee

Käesolevas töös on tuletatud lihtne ligikaudne valem suuruse Q_r (iooni radiaalsete betatronvõnkumiste arv tiiru kohta) arvutamiseks kiirendava elektrivälja perioodi modulatsiooni omava sektorilise tsüklotroni juhul. Tuletatud valemit on rakendatud erijuhtudel, milles kiirendamise tingimused on esitatud valemitega (14) ja (24). Nende erijuhtude analüüsi alusel on tehtud ettepanek parameetri K valikuks tuntud seosest (15) sel viisil, et kiirendamise lõpul suurus Q_r läheneks resonantsväärtusele ionide deflektsiooni kergendamise eesmärgil.

THE DERIVATION OF APPROXIMATE FORMULA FOR Q_r IN THE CYCLOTRON WITH SECTIONED MAGNETIC SYSTEM

J. Lembra

Summary

A simple approximate formula is derived for Q_r (the number of radial betatron oscillations of the ion per revolution) in the cyclotron with sectioned magnet system in the case of frequency modulation of accelerating electric field. Applications are given for some particular laws of frequency modulation. It is suggested to choose the parameter K in the well-known relation $\Delta\omega/\omega = -K\Delta E/E$ (see ref. [3]) so that the Q_r value at the end of acceleration should approach a resonance value to facilitate the deflection of the ion beam.

К РАСЧЕТУ РЕГЕНЕРАТИВНОГО ДЕФЛЕКТОРА

Ю. Я. Лембра

Кафедра теоретической физики

Коуэн и Кру [1] рассматривают применение регенеративного дефлектора [2, 3] для ускорителей, в которых частицы движутся в магнитных периодических системах. Для расчета параметров, характеризующих действие дефлектора с одним узким регенератором они получили неудобные для практического использования рекуррентные формулы. В настоящей работе предложен метод непосредственного расчета этих параметров. Рассмотрено также применение полученных формул к слабофокусирующим ускорителям с прямолинейными участками и к секторному циклотрону.

1. Действие дефлектора на каждом обороте

Сперва рассмотрим режим, в котором дефлектор действует на каждом обороте. Радиальные и вертикальные колебания можно описывать матрицами $C_{r,z}$, которые преобразуют вектор $\vec{\rho}$ (соотв. z), компонентами которого являются радиальные (вертикальные) отклонения и скорость, при входе частицы в регенератор в начале m -го оборота в вектор $\vec{\rho}(z)$ при входе частицы в регенератор в начале $(m+1)$ -го оборота. В случае узкого регенератора можно $C_{r,z}$ представить в виде

$$C_{r,z} = A_{r,z}^N B(\pm T), \quad (1)$$

где $A_{r,z}$ преобразует вектор $\vec{\rho}(z)$ невозмущенного движения от начала очередного элемента периодичности к началу следующего элемента периодичности. N — число элементов периодичности на один оборот. $B(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ T & 1 \end{pmatrix}$, где T — параметр, зависящий от конкретной конструкции регенератора и выбора независимой переменной. Знак минус относится к индексу r , а плюс к индексу z .

Для исследования вопроса о раскачке радиальных колебаний и сохранения устойчивости вертикальных колебаний надо вычис-

лить следы матриц $C_{r,z}$ и те значения T , при которых $\text{Sp } C_r = 2$ и $\text{Sp } C_z = \pm 2$. Обозначим эти значения соответственно через T_{r1}^+ и T_{z1}^\pm .

Вычисляя $A_{r,z}^N$ непосредственно (см. напр. [4]), найдем:

$$\frac{1}{2} \text{Sp } C_r = \cos N\mu_r - \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} A_{r12} \equiv \text{ch } \Lambda_1^+ \quad (2)$$

($e^{\Lambda_1^+}$ называется коэффициентом усиления радиальных колебаний [3]),

$$\frac{1}{2} \text{Sp } C_z = \cos N\mu_z + \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} A_{z12} \equiv \cos \lambda_1, \quad (3)$$

где $\mu_{r,z}$ — изменение фазы радиальных (вертикальных) колебаний на элемент периодичности для невозмущенного движения ($\cos \mu_{r,z} = \frac{1}{2} \text{Sp } A_{r,z}$) и $(A_{r,z})_{12}$ — правый верхний элемент матрицы $A_{r,z}$. Формулы (2) и (3) имеют место при условии $\det A_{r,z} = 1$.

Согласно (2) и (3):

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^+ &= -\frac{2 \sin \mu_r}{A_{r12}} \text{tg } \frac{N\mu_r}{2} \\ T_{z1}^+ &= \frac{2 \sin \mu_z}{A_{z12}} \text{tg } \frac{N\mu_z}{2}; \quad T_{z1}^- = -\frac{2 \sin \mu_z}{A_{z12}} \text{ctg } \frac{N\mu_z}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Формулы (4) непосредственно показывают, как T_{r1}^+ и T_{z1}^\pm зависят от величин, характеризующих невозмущенное движение.

Если можно найти T , при котором одновременно выполняются условия $\text{ch } \Lambda_1^+ > 1$ и $|\cos \lambda_1| < 1$, т. е.

$$T/T_{r1}^+ > 1 \quad (5)$$

$$T/T_{z1}^\pm < 1, \quad (6)$$

то действие дефлектора является возможным. Из (4) вытекает, что (6) определяет открытый промежуток между T_{z1}^+ и T_{z1}^- . Для одновременного удовлетворения (5) и (6) T_{r1}^+ должен находиться в этом промежутке. При невыполнении этого условия природа невозмущенного движения такова, что невозможно устройство дефлектора вышеописанного типа и надо искать другие режимы. Одна из возможностей [1] рассмотрена ниже.

2. Действие дефлектора через один оборот

Рассмотрим режим, в котором дефлектор действует через один оборот, т. е. если частица попадает в регенератор на m -ом обороте, то она не попадает в регенератор на следующем $(m + 1)$ -ом обороте и попадает снова в регенератор на $(m + 2)$ -ом обороте.

Для осуществления такого типа дефлектора должны выполняться условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [A_r^N B(-T)] &\equiv -\operatorname{ch} \Lambda_1^- < -1 \\ \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [A_r^{2N} B(-T)] &\equiv \operatorname{ch} \Lambda_2^+ > 1 \\ \frac{1}{2} \operatorname{Sp} [A_z^{2N} B(T)] &\equiv \cos \lambda_2; |\cos \lambda_2| < 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Аналогично п. 1 найдем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Lambda_1^- &= -\cos N\mu_r + \frac{T}{2} \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} A_{r12} \\ \operatorname{ch} \Lambda_2^+ &= \cos 2N\mu_r - \frac{T}{2} \frac{\sin 2N\mu_r}{\sin \mu_r} A_{r12} \\ \cos \lambda_2 &= \cos 2N\mu_z + \frac{T}{2} \frac{\sin 2N\mu_z}{\sin \mu_z} A_{z12} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для выполнения (7) должно быть

$$T/T_{r1}^- > 1; \quad T/T_{r2}^+ > 1 \quad (9)$$

$$T/T_{z2}^\pm < 1, \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^- &= \frac{2 \sin \mu_r}{A_{r12}} \operatorname{ctg} \frac{N\mu_r}{2}; \quad T_{r2}^+ = -\frac{2 \sin \mu_r}{A_{r12}} \operatorname{tg} N\mu_r \\ T_{z2}^+ &= \frac{2 \sin \mu_z}{A_{z12}} \operatorname{tg} N\mu_z; \quad T_{z2}^- = -\frac{2 \sin \mu_z}{A_{z12}} \operatorname{ctg} N\mu_z. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из (9)—(11) видно, что такой режим дефлектора можно осуществить, если параметры T_{r1}^- , T_{r2}^+ имеют одинаковый знак и находятся в открытом промежутке между T_{z2}^+ и T_{z1}^- .

Хотя выполнение (6) и (10) обеспечивает отсутствие бесконечного увеличения амплитуды вертикальных колебаний, все же может возникать некоторое расширение пучка в вертикальном направлении. Этот вопрос можно исследовать, например методом огибающих [5].

Рассмотрим применение выше приведенных формул в некоторых частных случаях.

3. Применение к слабофокусирующим ускорителям с прямолинейными участками

Элемент периодичности состоит из прямолинейного участка длины L и магнитного сектора с показателем спада напряженности магнитного поля n и радиусом кривизны равновесной орбиты R . Допустим, что регенератор длины l и с постоянным радиальным градиентом напряженности магнитного поля $\frac{dH}{dr}$, который начинается от равновесной орбиты, расположен у входа в прямолинейный участок [1].

Здесь и в дальнейшем выбираем в качестве независимой переменной длину дуги равновесной орбиты. Тогда [1]:

$$T = -\frac{l}{H_0 R} \frac{dH}{dr}$$

(H_0 — напряженность магнитного поля вдоль равновесной орбиты в магнитном секторе)

$$\cos \mu_{r,z} = \cos \frac{2\pi}{N} \omega_{r,z} - \frac{\omega_{r,z} L}{2R} \sin \frac{2\pi}{N} \omega_{r,z} \quad (12)$$

$$(A_{r,z})_{12} = \frac{R}{\omega_{r,z}} \sin \frac{2\pi}{N} \omega_{r,z} + L \cos \frac{2\pi}{N} \omega_{r,z}, \quad (13)$$

где

$$\omega_r = \sqrt{1-n}; \quad \omega_z = \sqrt{n}.$$

Подставляя (13) в (4) и (11), найдем:
для режима п. 1

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^+ &= -\frac{2\sqrt{1-n} \sin \mu_r \operatorname{tg} \frac{N\mu_r}{2}}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{1-n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}} \\ T_{z1}^+ &= \frac{2\sqrt{n} \sin \mu_z \operatorname{tg} \frac{N\mu_z}{2}}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}} \\ T_{z1}^- &= -\frac{2\sqrt{n} \sin \mu_z \operatorname{ctg} \frac{N\mu_z}{2}}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и для режима п. 2

$$\left. \begin{aligned}
 T_{r1}^- &= \frac{2 \sqrt{1-n} \sin \mu_r \operatorname{ctg} \frac{N \mu_r}{2}}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{1-n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}} \\
 T_{r2}^+ &= - \frac{2 \sqrt{1-n} \sin \mu_r \operatorname{tg} N \mu_r}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{1-n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n}} \\
 T_{z2}^+ &= \frac{2 \sqrt{n} \sin \mu_z \operatorname{tg} N \mu_z}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}} \\
 T_{z2}^- &= - \frac{2 \sqrt{n} \sin \mu_z \operatorname{ctg} N \mu_z}{\left(1 + \frac{L}{R} \sqrt{n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}\right) R \sin \frac{2\pi}{N} \sqrt{n}}
 \end{aligned} \right\} (15)$$

Отметим, что вместо громоздких формул для T_{r1}^\pm , T_{r2}^\pm , T_{z1}^\pm и T_{z2}^\pm (см. формулы (33), (36), (40)–(42) из [1]) мы получили удобные для практических расчетов формулы (14) и (15)

При небольших значениях $\frac{L}{2R}$ (что обычно встречается) получаем из (12):

$$\mu_{r,z} = \omega_{r,z} \left(\frac{2\pi}{N} + \frac{L}{2R} \right) \quad (16)$$

Подставляя (16) в (14) и (15), найдем:
для режима п. 1

$$\left. \begin{aligned}
 T_{r1}^+ &= - \frac{2 \sqrt{1-n}}{R} \left(1 - \frac{L^*}{2NR} \sqrt{1-n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n} \right) \times \\
 &\quad \times \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{1-n}}{2} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right] \\
 T_{z1}^+ &= \frac{2 \sqrt{n}}{R} \left(1 - \frac{L^*}{2NR} \sqrt{n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n} \right) \times \\
 &\quad \times \operatorname{tg} \left[\frac{\sqrt{n}}{2} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right] \\
 T_{z1}^+ &= - \frac{2 \sqrt{n}}{R} \left(1 - \frac{L^*}{2NR} \sqrt{n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n} \right) \times \\
 &\quad \times \operatorname{ctg} \left[\frac{\sqrt{n}}{2} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right],
 \end{aligned} \right\} (17)$$

и для режима п. 2

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^- &= \frac{2\sqrt{1-n}}{R} \left(1 - \frac{L^*}{2NR} \sqrt{1-n} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n} \right) \times \\ &\quad \times \operatorname{ctg} \left[\frac{\sqrt{1-n}}{2} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right] \\ T_{r2}^+ &= -\frac{2\sqrt{1-n}}{R} \left(1 - \frac{L^* \sqrt{1-n}}{2NR} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{1-n} \right) \times \\ &\quad \times \operatorname{tg} \left[\sqrt{1-n} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right] \\ T_{z2}^+ &= \frac{2\sqrt{n}}{R} \left(1 - \frac{L^* \sqrt{n}}{2NR} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n} \right) \operatorname{tg} \left[\sqrt{n} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right] \\ T_{z2}^- &= -\frac{2\sqrt{n}}{R} \left(1 - \frac{L^* \sqrt{n}}{2NR} \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{N} \sqrt{n} \right) \operatorname{ctg} \left[\sqrt{n} \left(2\pi + \frac{L^*}{2R} \right) \right], \end{aligned} \right\} (18)$$

где $L^* = NL$.

Из (17) и (18) получаем при $L^* = 0$ известные формулы для слабофокусирующих ускорителей без прямолинейных участков.

4. Применение к секторному циклотрону

Элемент периодичности состоит из участков с различными значениями напряженности магнитного поля: в одном секторе имеется однородное магнитное поле напряженности H (этот сектор называем в дальнейшем сектором 1), а в другом секторе однородное магнитное поле напряженности κH ($\kappa < 1$) (в дальнейшем: сектор 2) [6].

а) Допустим, что регенератор с угловым раствором θ_1 образуется у входа в сектор 1 путем введения возмущающего показателя $n_1 = -\frac{r}{H} \frac{\partial H}{\partial \varrho}$ по наружную сторону от равновесной орбиты.

В выражении для n_1 радиус кривизны равновесной орбиты в секторе 1 обозначен через r , а дифференцирование по направлению главной нормали к равновесной орбите обозначено через $\frac{\partial}{\partial \varrho}$.

Для получения матрицы C_r надо A_r^N умножить справа на матрицу:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & r \sin \theta_1 \\ -\frac{\sin \theta_1}{r} & \cos \theta_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \sqrt{1-n_1} & \frac{r}{\sqrt{1-n_1}} \sin \theta_1 \sqrt{1-n_1} \\ -\frac{\sqrt{1-n_1}}{r} \sin \theta_1 \sqrt{1-n_1} & \cos \theta_1 \sqrt{1-n_1} \end{pmatrix},$$

которая при небольших θ_1 принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\theta_1 n_1}{r} & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично для получения C_z надо A_z^N умножить справа на матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & r\theta_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \theta_1 \sqrt{n_1} & \frac{r}{\sqrt{n_1}} \sin \theta_1 \sqrt{n_1} \\ -\frac{\sqrt{n_1}}{r} \sin \theta_1 \sqrt{n_1} & \cos \theta_1 \sqrt{n_1} \end{pmatrix},$$

которая при небольших θ_1 принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\theta_1 n_1}{r} & 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно, необходимый для (1) параметр $T = -\frac{n_1 \theta_1}{r}$

После вычисления матриц $A_{r,z}$, которые являются в данном случае матрицами одного элемента периодичности для невозмущенного движения, составленные в таком порядке, что первый справа сомножитель описывает невозмущенное движение в секторе 1, и подстановки в (2)–(4), (8) и (11), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} A_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-x}{x} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{x} \right) \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\nu_1 - \frac{1-x}{x} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{x} \right) \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} (19)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^+ &= -\frac{2 \sin \mu_r \operatorname{tg} \frac{N\mu_r}{2}}{r \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-x}{x} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{x} \right)} \\ T_{z1}^+ &= \frac{2 \sin \mu_z \operatorname{tg} \frac{N\mu_z}{2}}{r \left(\nu_1 - \frac{1-x}{x} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{x} \right)} \\ T_{z1}^- &= -\frac{2 \sin \mu_z \operatorname{ctg} \frac{N\mu_z}{2}}{r \left(\nu_1 - \frac{1-x}{x} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{x} \right)}, \end{aligned} \right\} (20)$$

и для режима п. 2

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Lambda_1^- &= -\cos N\mu_r - \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right) \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \operatorname{ch} \Lambda_2^+ &= \cos 2N\mu_r + \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right) \frac{\sin 2N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_2 &= \cos 2N\mu_z - \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\nu_1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) \frac{\sin 2N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} (21)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^- &= \frac{2 \sin \mu_r \operatorname{ctg} \frac{N\mu_r}{2}}{r \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right)} \\ T_{r2}^+ &= -\frac{2 \sin \mu_r \operatorname{tg} N\mu_r}{r \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right)} \\ T_{z2}^+ &= \frac{2 \sin \mu_z \operatorname{tg} N\mu_z}{r \left(\nu_1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right)} \\ T_{z2}^- &= -\frac{2 \sin \mu_z \operatorname{ctg} N\mu_z}{r \left(\nu_1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right)}, \end{aligned} \right\} (22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \cos \mu_r &= \cos \nu_1 \cos \nu_2 - \frac{1+\kappa^2}{2\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 + \\ &\quad + \frac{1-\kappa}{2} \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right) \left(\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2 \right) + \\ &\quad + \frac{(1-\kappa)^2}{2\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2; \\ \cos \mu_z &= 1 - \frac{1-\kappa}{2} \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) \left(\operatorname{tg} \gamma_1 + \operatorname{tg} \gamma_2 \right) + \\ &\quad + \frac{(1-\kappa)^2}{2\kappa} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \gamma_2. \end{aligned} \right\} (23)$$

В формулах (19)—(23) $\nu_1(\nu_2)$ — угол поворота равновесной орбиты в секторе 1 (2); $\gamma_1(\gamma_2)$ — угол между нормалью к граничной линии секторов и касательной к равновесной орбите для перехода из сектора 2 (1) в сектор 1 (2) по вращению пучка. Угол γ считается положительным (отрицательным), если часть равновесной орбиты в секторе 2 и центр кривизны части равно-

весной орбиты в секторе 1 находятся по одну (по разные стороны) от нормали к граничной линии секторов [6].

б) Допустим, что регенератор с угловым раствором θ_2 образуется у входа в сектор 2 путем введения возмущающего градиента $n_2 = -\frac{r}{x^2 H} \cdot \frac{\partial(xH)}{\partial \varrho}$ по наружную сторону от равновесной орбиты. Как показывает аналогичный п. 4а расчет, в данном случае $T = -\frac{x n_2 \theta_2}{r}$ Под $A_{r,z}$ надо здесь подразумевать матрицы одного элемента периодичности для невозмущенного движения, составленные в таком порядке, что первый справа множитель описывает невозмущенное движение в секторе 2. По сравнению с случаем п. 4а в матричном элементе с индексами 12 появляется $\operatorname{tg} \gamma_1$ вместо $\operatorname{tg} \gamma_2$. Таким образом, формулы этого пучка можно получить из соответствующих формул п. 4а подстановкой явно входящего $\operatorname{tg} \gamma_2 \rightarrow \operatorname{tg} \gamma_1$ и $n_1 \theta_1 \rightarrow x n_2 \theta_2$. Например, для режима п. 1 получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Lambda_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{x n_2 \theta_2}{2} \left(\sin v_1 \cos v_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-x}{x} \sin v_1 \sin v_2 \operatorname{tg} \gamma_1 + \frac{\cos v_1 \sin v_2}{x} \right) \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \frac{x n_2 \theta_2}{2} \left(v_1 - \frac{1-x}{x} v_1 v_2 \operatorname{tg} \gamma_1 + \frac{v_2}{x} \right) \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} (19')$$

и т. д.

с) Допустим, что регенератор, аналогичный конструкции п. 4а, образуется у выхода из сектора 1. Соответствующие параметры обозначим через n_1' и θ_1' . Из физических соображений ясно, что величины Λ_1^\pm , Λ_2^\pm , λ_1 и λ_2 не зависят от того, в каком направлении движется частица в данной магнитной системе. Следовательно, случай «регенератор в конце сектора 1 при движении частицы в данном направлении» эквивалентен случаю «регенератор в начале сектора 1 при движении частицы в обратном направлении». Таким образом, в вычислениях п. 4а надо в целях получения формул этого пункта везде подставить: $\operatorname{tg} \gamma_1 \rightarrow \operatorname{tg} \gamma_2$, $\operatorname{tg} \gamma_2 \rightarrow \operatorname{tg} \gamma_1$, $n_1 \rightarrow n_1'$ и $\theta_1 \rightarrow \theta_1'$. Напр. для режима п. 1 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Lambda_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\sin v_1 \cos v_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-x}{x} \sin v_1 \sin v_2 \operatorname{tg} \gamma_1 + \frac{\cos v_1 \sin v_2}{x} \right) \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \\ &\quad - \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(v_1 - \frac{1-x}{x} v_1 v_2 \operatorname{tg} \gamma_1 + \frac{v_2}{x} \right) \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} (19'')$$

и т. д.

д) Допустим, что регенератор, аналогичный конструкции п. 4б, образуется у выхода из сектора 2.

Соответствующие параметры обозначим через n_2' и θ_2' . С учетом сказанного в начале п. 4с получим формулы этого пункта из соответствующих формул п. 4б с подстановкой $\text{tg } \gamma_1 \rightarrow \text{tg } \gamma_2$, $\text{tg } \gamma_2 \rightarrow \text{tg } \gamma_1$, $n_2 \rightarrow n_2'$ и $\theta_2 \rightarrow \theta_2'$.

Напр., для режима п. 1 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \text{ch } \lambda_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{\kappa n_2 \theta_2}{2} \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \text{tg } \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right) \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \\ &\quad - \frac{\kappa n_2 \theta_2}{2} \left(\nu_1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \nu_1 \nu_2 \text{tg } \gamma_2 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right) \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} (19''')$$

и т. д.

е) Представляет интерес сравнить величины возмущающих показателей, необходимых для получения одинакового коэффициента усиления радиальных колебаний при разных местоположениях регенераторов в случае равенства угловых растворов регенераторов ($\theta_1 = \theta_1' = \theta_2 = \theta_2'$). Для этого должно по (19), (19'), (19'') и (19''') выполняться условие:

$$\left. \begin{aligned} &\underbrace{n_1 \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \text{tg } \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right)}_{\text{начало сектора 1}} = \\ &= \underbrace{n_1' \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \text{tg } \gamma_1 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right)}_{\text{конец сектора 1}} = \\ &= \underbrace{\kappa n_2 \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \text{tg } \gamma_1 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right)}_{\text{начало сектора 2}} = \\ &= \underbrace{\kappa n_2' \left(\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \text{tg } \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right)}_{\text{конец сектора 2}} \end{aligned} \right\} (24)$$

Из (24) вытекает, что

$$n_1 = \kappa n_2'; \quad n_1' = \kappa n_2, \quad (25)$$

т. е. при сравнении регенераторов, находящихся вблизи одной и той же граничной линии секторов (одинаковые условия краевой фокусировки), в секторе 1 требуется для получения одинаковых

коэффициентов усиления радиальных колебаний по абсолютной величине $\frac{1}{\alpha}$ раз меньший возмущающий показатель, чем в секторе 2.

Для сравнения регенераторов, находящихся в одном и том же секторе вблизи разных граничных линий секторов, целесообразно переписать (24) в виде

$$\frac{n_1}{n_1'} = \frac{n_2}{n_2'} = \frac{\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_1 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\alpha}}{\sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\alpha}} \quad (26)$$

Для определенности допустим, что $\operatorname{tg} \gamma_1 < 0$ (радиальная фокусировка краевым магнитным полем) и $\operatorname{tg} \gamma_2 > 0$ (радиальная дефокусировка краевым магнитным полем). Тогда из (26) вытекает:

$$|n_1| < |n_1'|; \quad |n_2| < |n_2'|, \quad (27)$$

т. е. в регенераторе, находящемся вблизи граничной линии, где имеется радиальная фокусировка краевым магнитным полем, требуется для получения одинаковых коэффициентов усиления радиальных колебаний по абсолютной величине меньший возмущающий показатель, чем в регенераторе, находящемся вблизи граничной линии, где имеется радиальная дефокусировка краевым магнитным полем. Это обстоятельство физически понятно, так как вблизи граничной линии, где имеется радиальная фокусировка краевым магнитным полем, частицы находятся дальше от равновесной орбиты, чем вблизи граничной линии, где имеется радиальная дефокусировка краевым магнитным полем.

г) Рассмотрим случай, когда в конце ускорения ν_2 малая величина. Полагая $\sin \nu_2 \approx \nu_2$ и $\cos \nu_2 \approx 1$, можно упростить формулы пп. 4а—д. При этом в случае формул пп. 4б и 4д допустим, что весь сектор 2 по наружную сторону от равновесной орбиты занят регенератором ($\theta_2 = \theta_2' = \nu_2$).

Напр., из формул п. 4а для режима п. 1 получим:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} A_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\sin \nu_1 + \frac{1-\alpha}{\alpha} \nu_2 \sin \nu_1 \operatorname{tg} \gamma_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_2}{\alpha} \cos \nu_1 \right) \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \frac{n_1 \theta_1}{2} \left(\nu_1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{\alpha} \right) \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

■ т. д.

Формулы пп. 4b и 4d должны совпадать в данном случае, так как больше не существует разницы «регенератор в конце или в начале сектора 2». Напр., для режима п. 1 имеем:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Lambda_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{\alpha n_2 v_2}{2} \sin v_1 \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \frac{\alpha n_2 v_2 v_1}{2} \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^+ &= - \frac{2 \sin \mu_r \operatorname{tg} \frac{N\mu_r}{2}}{r \sin v_1} \\ T_{z1}^+ &= \frac{2 \sin \mu_z \operatorname{tg} \frac{N\mu_z}{2}}{r v_1}, \quad T_{z1}^- = - \frac{2 \sin \mu_z \operatorname{ctg} \frac{N\mu_z}{2}}{r v_1} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Аналогичные формулы получаются и для случая режима п. 2. Как в п. 4e можно здесь при условии $\theta_1 = \theta_1' = v_2$ заключить, что в регенераторе, находящемся в секторе 1 близи граничной линии, где имеется радиальная фокусировка краевым магнитным полем, требуется для получения одинаковых коэффициентов усиления радиальных колебаний меньший по абсолютной величине возмущающий показатель, чем в регенераторе, находящемся близи граничной линии, где имеется радиальная дефокусировка краевым магнитным полем.

Первое сравнение п. 4e (связанное с (25)) в данном случае не имеет больше физического смысла.

г) В целях определения границ применимости формул п. 4a—d и п. 4f нами были вычислены параметры, указанные в левых сторонах формул п. 4a—d и п. 4f, с учетом квадратичных членов относительно углового раствора регенератора. Напр., формулы п. 4a для режима п. 1 принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{ch} \Lambda_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{n_1 \theta_1}{2} \cdot \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \left[\sin v_1 \cos v_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\alpha}{\alpha} \sin v_1 \sin v_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos v_1 \sin v_2}{\alpha} + \right. \\ &\quad \left. + \theta_1 \left(\cos \mu_r - \cos v_1 \cos v_2 - \frac{1-\alpha}{\alpha} \cos v_1 \sin v_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\sin v_1 \sin v_2}{\alpha} \right) \right] \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \frac{n_1 \theta_1}{2} \cdot \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \left[v_1 - \frac{1-\alpha}{\alpha} v_1 v_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_2}{\alpha} + \theta_1 \left(\cos \mu_z + \frac{1-\alpha}{\alpha} v_2 \operatorname{tg} \gamma_2 - 1 \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Сравнение (19) и (31) показывает, что (19) дает достаточное приближение при условии

$$\left. \begin{aligned} & \left| \sin \nu_1 \cos \nu_2 + \frac{1-\kappa}{\kappa} \sin \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\cos \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right| \gg \\ & \gg \theta_1 \left| \cos \mu_r - \cos \nu_1 \cos \nu_2 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \cos \nu_1 \sin \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \right. \\ & \left. + \frac{\sin \nu_1 \sin \nu_2}{\kappa} \right|; \quad \left| \nu_1 - \frac{1-\kappa}{\kappa} \nu_1 \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 + \frac{\nu_2}{\kappa} \right| \gg \theta_1 \left| \cos \mu_z + \right. \\ & \left. + \frac{1-\kappa}{\kappa} \nu_2 \operatorname{tg} \gamma_2 - 1 \right| \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Аналогичные неравенства получим и для случаев п. 4b—d. Таким образом, соответствующим выбором углового раствора регенератора можно добиться выполнения неравенств типа (32) и следовательно применить формулы п. 4a—d.

Иначе обстоит дело в случае тех формул п. 4f, при которых угловой раствор регенератора задан. Выпишем соответствующие формулы для режима п. 1:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda_1^+ &= \cos N\mu_r + \frac{\kappa n_2 \nu_2}{2} \cdot \frac{\sin N\mu_r}{\sin \mu_r} \left(\sin \nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \cos \mu_r \right) \\ \cos \lambda_1 &= \cos N\mu_z - \frac{\kappa n_2 \nu_2}{2} \cdot \frac{\sin N\mu_z}{\sin \mu_z} \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \cos \mu_z \right) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{r1}^+ &= - \frac{2 \sin \mu_r \operatorname{tg} \frac{N\mu_r}{2}}{r \left(\sin \nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \cos \mu_r \right)} \\ T_{z1}^+ &= \frac{2 \sin \mu_z \operatorname{tg} \frac{N\mu_z}{2}}{r \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \cos \mu_z \right)}; \quad T_{z1}^- = - \frac{2 \sin \mu_z \operatorname{ctg} \frac{N\mu_z}{2}}{r \left(\nu_1 + \frac{\nu_2}{\kappa} \cos \mu_z \right)} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Аналогичные выражения получим и для режима п. 2. Сравнение (29) и (33) показывает, что (29) является достаточным приближением при выполнении условий:

$$\sin \nu_1 \gg \frac{\nu_2}{\kappa} |\cos \mu_r|; \quad \nu_1 \gg \frac{\nu_2}{\kappa} |\cos \mu_z| \quad (35)$$

(35) остается справедливым также в случае режима п. 2. При невыполнении (35) следует пользоваться формулами типа (33) и (34).

В качестве иллюстрации рассмотрим численный пример со следующими значениями параметров: $N=4$; $\kappa=0,3$; $\nu_1=1,417$ rad, $\nu_2=0,154$ rad, $\operatorname{tg} \gamma_1=-0,877$, $\operatorname{tg} \gamma_2=1,25$. Тогда $\cos \mu_r=-0,123$, $\cos \mu_z=0,550$. Так как μ_r близок к $\frac{\pi}{2}$, в дан-

ном случае применим режим п. 1. Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

	Регенератор			
	В начале сектора 1	В конце сектора 1	В секторе 2	
	по формулам п. 4 f			по (34)
rT_{r1}^+	-0,331	-0,663	-0,506	-0,541
rT_{z1}^+	-3,00	-1,64	-2,74	-2,29
rT_{z1}^-	0,553	0,301	0,505	0,421
Область rT удовлетворяющая (5) и (6)	от -3,00 до -0,331	от -1,64 до -0,663	от -2,74 до -0,506	от -2,29 до -0,541

Как видно из таблицы, в данном случае желательно для вычисления величин, характеризующих действие регенератора, находящегося в секторе 2, пользоваться формулами (34) вместо (30).

Для получения $e^{A_1^+} = 1,5$ при условии $\theta_1 = \theta_1' = \nu_2 = 0,154$ рад требуются показатели $n_1 = 3,65$, $n_1' = 7,31$, $n_2 = 19,9$ (последнее значение вычислено по (33))

Автор выражает благодарность Д. М. Каминкеру за обсуждение результатов.

Литература

1. S. Cohen, A. Crewe, Proc. CERN Symp. 1, 140 (1956), см. также Nucl. Instr. 1, 31 (1957).
2. J. L. Tuck, L. C. Teng, Bull. Am. Phys. Soc. 25, № 5, 17 (1950).
3. K. J. Le Couter, Proc. Phys. Soc. B 64, 1073 (1951), см. сокращенный перевод в «Пробл. совр. физики» № 4 (1956).
4. E. Courant, H. Snyder, Ann. Phys. (USA) 3, 1 (1958), см. перевод в «Пробл. совр. физики» № 4 (1958).
5. А. М. Балдин, В. В. Михайлов, М. С. Рабинович, ЖЭТФ 31, 993 (1956); см. также М. С. Рабинович, Основы теории синхрофазотрона. Труды ФИАН, т. 10, изд. АН СССР, М. 1958, гл. II и VI.
6. Е. М. Мороз, М. С. Рабинович, Proc. CERN Symp., 1, 547 (1956); см. также приложение № 4 к журналу «Атомная энергия», 27 (1957); Приборы и техн. эксперимента № 1, 15 (1957).

Поступило
20 VII 1959

REGENERATIIVSE DEFLEKTORI ARVUTUSEST

J. Lembra

Teoreetilise füüsika kateeder

R e s ü m e e

Cohen ja Crewe tuletavad rekurrentsed valemid kitsa regene-
raatori tegevust iseloomustavate parameetrite arvutamiseks kii-
rendajates, milles laetud osakesed liiguvad magnetilistes perioo-
dilistes süsteemides. Käesolevas töös on esitatud nimetatud para-
meetrite arvutamiseks otsene meetod, mis põhineb maatriksite
täisarvuliste astmete vahetul leidmisel (vt. näit. [4]). Tuletatud
valemeid on rakendatud 2 erijuhul: a) nõrgalt fokuseerivad kii-
rendajad sirgjooneliste sektsioonidega, b) sektoriline tsüklotron.

ON THE CALCULATION OF THE REGENERATIVE DEFLECTOR

J. Lembra

S u m m a r y

Cohen and Crewe derived recurrent formulae for the calculation of parameters characterizing the performance of the narrow regenerator in magnetic periodic systems. A direct method based on the calculation of integer power of matrices (see e. g. ref. [4]) is suggested in this paper for the calculation of above mentioned parameters. Applications are given for weak focusing accelerators with straight sections and for the cyclotron with the sectioned magnet system.

KROMATOGRAAFIA RAKENDATAVUSEST KOOBALTI MÄÄRAMISEL MULLAS

A. H. Suit ja L. Sööde
Anorgaanilise keemia kateeder

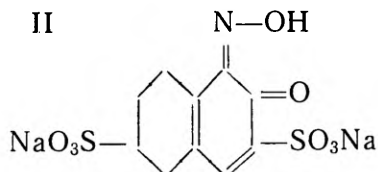
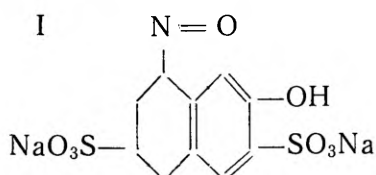
Mitmesuguste looduslike produktide uurimisel tekib sageli lähedaste omadustega katioonide eraldamise probleem. Sellistel juhtudel on kromatograafiline meetod andnud tavaliselt kõige paremaid tulemusi.

Üldiselt on katioonide eraldamist kationiitide abil raskem teostada nende väikese selektiivsuse tõttu [1], eriti aga siis, kui katioonid esinevad mikrohulkades.

Perspektiivsem on vastavate katioonide üleviimine mingisuguste kompleksanioonide koostisse, järgnevalt kromatografeerides. Näiteks on anioniitsel alumiiniumoksüüdil isegi lähedaste omadustega anioonid küllaltki erineva adsorbeeritavusega.

Koobalti mikrohulkade määramist on kõige otstarbekam teostada nitrooso-R-soola abil, nagu seda näitasid mitmete välismaiste ja nõukogude teadlaste tööd [2—6], sest reaktsioon on üsna spetsiifiline, moodustuv kompleksühend kõrge molaarse neeldumiskoeffitsiendiga ja ajaliselt püsiva värvusega. Segavaks on siinjuures ainult 1) reaktiivi liig oma värvusega ja 2) asjaolu, et ka teised katioonid (Cu²⁺ Ni²⁺ Fe²⁺) annavad komplekse, kuigi vähem stabiilseid.

Nitrooso-R-sool esineb kahel isomeersel kujul [2]:



Ainult kinoonoksiimne vorm (II) on võimeline reageerima raskete metallidega. Tautomeerne muundumine toimub kiiresti ja täielikult lahuse väiksemalgi leelistamisel. Neutraalses ja nõrgalt

Saadud leotistest sadestati SO_4^{2-} -ioonid baariumkloriidiga, filtriti, filtraat aurutati peaaegu kuivaks, lisati vett ja lahjendati mõõtkolvis märgini.

II. Analüüsi käik

Saadud leotisest võeti ühekordseks kromatografeerimiseks 15 ml koonilisse kolbi, lisati tsitraatpuhvrit, indikaatorina broom-tümoosinise lahust ja tilkhaaval naatriumhüdrosüüdi kuni nõrgalt leelise reaktsioonini. Nüüd lisati 0,5% nitrooso-R-soola lahust ja kuumutati keeval vesivannil 20 minuti vältel. Teiste metallide (Cu, Ni, Fe) komplekside lagundamiseks lisati lahjendatud lämmastikhapet (1:1) värvuse muutumiseni rohekaspruunist oranžiks, keedeti 45 sekundit, jahutati kohe külmas vees ja jäeti valguse eest kaitstult tunniks ajaks külma vette.

Kolonnina kasutati lihvitud klaaskraaniga büretti, mille läbimõõt oli 12 mm ja kõrgus 250 mm.

Ioniidina kasutati alumiiniumoksüüdi (kromatograafia jaoks, osakeste läbimõõduga 0,03—0,1 mm), mida aktiveeriti 1 N perkloorhappega. Peen fraktsioon eemaldati eelnevalt dekanteerimisega. Ioniidi kihi kõrgus kolonnis oli 5 cm.

Uuritav lahus voolutati läbi kolonni ja pesti seejärel veega. Reaktiivi liia eemaldamiseks pesti kuuma lämmastikhappega (1 N, temperatuur 80°C) ja järgnevalt veega. Voolutamiskiirus oli umbes 2,6 ml/min.

Tuleb mainida, et kirjeldatud tingimustes ei õnnestu reaktiivi liiga täielikult eemaldada. Ka annab koobalti kompleks veidi hajunud tsooni.

Orienteerivad katsed näitasid, et tunduvalt parema kvaliteediga tsoon saadakse kloriidide muutmisel enne kompleksi valmistamist nitraatideks. Selleks aurutati kloriide sisaldav jääk vesivannil kolm korda 2—3 ml kontsentreeritud lämmastikhappega kuivaks ja lahustati kindla hulga lämmastikhappe manulusel vees. Vajaliku pH saavutamiseks kuluvat puhverlahuse hulka määrati eelkatsetega, katsetes indikaatorit ei kasutatud.

Soolhappelist leotist ei ole võimalik päris kuivaks aurutada, sest tekkiv magneesiumoksükloriid nõuab lahustamiseks liiga suurt happeliiga. Töös toodud katsete andmed saadi soolhappelise lahuse kasutamisel.

Koobalti kompleksi punane tsoon elueeriti 2 N väävelhappega, kasutamata vaakuumi. Eluaat koguti 10-milliliitrisesse mõõtkolbi ja täideti märgini.

Saadud eluaadist võeti 5 ml fotometreerimiseks. Fotometreeriti tavalisel viisil fotomeetriga ΦM , kasutades rohelist valgusfiltrit M-50 ($496 \pm 20 \text{ m}\mu$).

Kaliibrimisgraafik koostati standardlahuse alusel, mis valmistati veevabast koobaltsulfaadist (anal. p. niklivaba, firma «Schering-Kahlbaum»).

Meetodi reprodutseeritavuse selgitamiseks määrati koobalti-sisaldus kahest Eesti NSV tüüpilisest mullast valmistatud mulla-leetises: I — nõrgalt leetunud kamarleetmuld A₁ 0—20 cm, proovi võtmise koht Kauksi; II — tugevasti leetunud kamarleetmuld A₁ 0—15 cm Võhandu jõe silla juurest.

Andmed katse tulemuste kohta on toodud tabelis 2.

Tabel 2 2

Muld	Katse nr.	Kaalutts g	Co μ g arvest. mulla kaaluti-se	Keskmine ³ happe lahustuvat Co %-des p 10 ⁴	Happes lahustuva Co sisaldus % p. 10 ⁴	Hälve keskmisest sisaldusest % p. 10 ⁴	Keskmine hälve $\bar{\Delta} \cdot 10^4$ ja keskmine ruut hälve $\sigma \cdot 10^4$
I	1.	10,1562	37,13	3,647	3,66	+0,01	$\bar{\Delta} \cdot 10^4 = 0,0267$
	2.		37,13		3,68	+0,03	
	3.		37,33		3,68	+0,03	
	4.	10,2109	37,33		3,64	-0,01	$\sigma \cdot 10^4 = \pm 0,0334$ suhteline hälve = $\pm 0,92\%$
	5.		37,17		3,64	-0,02	
	6.		36,67		3,58	-0,07	
II	7.	7,5362	26,00	3,457	3,45	-0,01	$\bar{\Delta} \cdot 10^4 = 0,019$
	8.		26,33		3,49	+0,03	
	9.	10,0930	34,67		3,44	-0,02	$\sigma \cdot 10^4 = \pm 0,023$
	10.		34,67		3,44	-0,02	
	11.	10,0632	35,60		3,48	+0,02	suhteline hälve = $\pm 0,69\%$
	12.		34,67		3,44	-0,02	

Tabel 3

Mulla nimetus	Leitud Co (μ g) 15 ml leetises		Erinevus μ g	Suhteline viga %-des lisandist
	Lisandiga 3 μ g	Lisandita		
III	14,60	11,65	2,95	-1,7
	14,60	11,65	2,95	-1,7
IV	15,60	12,65	2,95	-1,7
	15,60	12,65	2,95	-1,7

² Tabelis toodud andmed on arvatatud vastavalt A. M. Dõmovi ja teiste ettepanekule [10].

³ p — tõeline protsentuaalne sisaldus.

Mõninga kujutluse saamiseks meetodi tundlikkusest määrati koobaltisisaldus kahes mullaleotises ja samades leotistes, millele oli lisatud 3 μg koobaltit standardlahusena. Tulemused on antud tabelis 3, kusjuures muld III on nõrgalt leetunud kamarleetmuld A₁ 0—28 cm Viluste ja muld IV — keskmiselt leetunud kamarleetmuld A₂B₁ 18—37 cm Laiuse. Kõigil juhtudel saadi väiksemad tulemused.

Orienteerivad katsed näitasid, et karbonaatsetele muldadele ei ole meetod sellisel kujul rakendatav, sest kromatografeeritav lahus on liiga suure ioonse võimsusega.

Järeldused

1. Kromatografeerimine on rakendatav koobalti määramisel nitrooso-R-soola kompleksina soolhappelises mullaleotises.

2. Kromatografeerimine võimaldab fotometreerida koobalti kompleksi väikese, alati praktiliselt ühesuguse nitrooso-R-soola liia manulusel.

3. Kromatografeerimisest tingitud viga ei ületa fotometreerimisviga.

4. Kõikide operatsioonide puhul tuleb kasutada hoolikalt eelpuhastatud reaktiive.

5. Mõned partiid tööstuslikku Al₂O₃ (kromatograafia jaoks) on kirjeldatud katsete teostamiseks kõlbmatud, sest nad sisaldavad vees lahustuvaid sulfaate.

6. Karbonaatsete muldade puhul vajab meetodika teisendamist.

Saabunud
13. I 1958

Kirjandus

1. Александрова Л. С., Гапон Г. Б., Чмутов К. В., Теория и практика применения ионообменных материалов (сб. ст.), Москва, Изд. АН СССР, 1955, 16—27.
2. Малюга Д. П., Ж. аналит. химии, 1946, 1, 3, 176—185.
3. Малюга Д. П., Ж. аналит. химии, 1947, 2, 6, 323—327.
4. Толмачев В. Н., Автореф. дисс. канд. хим. н., ХГУ, 1950.
5. Длугач Р. Е., Дисс. канд. хим. н., Днепропетровск, 1954.
6. Сендел Э. В., Колориметрическое определение следов металлов, Госхимиздат, 1949, 271—274.
7. Verkhout, H. W., Jongen G. H., Chem. Weekbl., 1953, 49, 29, 506—508.
8. Jensen E., Anal. Chim. Acta, 1952, 7, 5, 561.
9. Пейве Я. В., Тр. конф. по микроэлементам 15—19. 03. 1950 г., Москва, Изд. АН СССР, 1952, 466—472.
10. Дымов А. М., Гусинская С. А., (Жорицкий В. Г., Шрейдер Ю. А. Зав. лаб., 1955, 21, 4, 504—506.

О ПРИМЕНИМОСТИ ХРОМАТОГРАФИИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОБАЛЬТА В ПОЧВАХ

А. Х. Суйт и Л. Сээде

Кафедра неорганической химии

Резюме

В работе исследована применимость хроматографического отделения при определении кобальта в солянокислых вытяжках из почв с помощью нитрозо-Р-соли. В качестве анионита в работе использована окись алюминия. Реактив элюируется из колонки горячей азотной кислотой почти полностью. Зона кобальтового комплекса остается при этом без изменения и элюируется впоследствии раствором серной кислоты. Элюат фотометрируется.

Ошибка хроматографирования не превышает ошибок фотометрирования. Обнаружена непригодность здесь некоторых партий промышленной окиси алюминия (для хроматографии) вследствие содержания в них воднорастворимого сульфата.

Примененная методика нуждается в видоизменении в случае карбонатных почв.

ÜBER DIE ANWENDBARKEIT DER CHROMATOGRAPHIE ZUR BESTIMMUNG VON KOBALT IN BODENPROBEN

A. H. Suit und L. Sööde

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird die Anwendbarkeit der Chromatographie zur Bestimmung von Kobalt in salzsauerem Extrakten einiger Böden mit Hilfe von Nitroso-R-salz untersucht. Als Anionit wurde das Aluminiumoxyd für chromatographische Zwecke verwendet.

Der Reagenzüberschuss lässt sich beinahe völlig aus der Kolonne mittels heisser Salpetersäure entfernen. Die rote Zone des Kobaltkomplexes wird dabei nicht angegriffen und lässt sich mit einer Schwefelsäurelösung ohne merklicher Verluste eluieren. Zur Bestimmung der Extinktion bediente man sich des Stufenphotometers ΦM (entspricht der Pulfrichschen Anordnung).

Die durch das Chromatographieren bedingten Fehler überschreiten nicht die Fehler des Photometrierens.

Die beschriebene Analysenmethode bedürft einer entsprechenden Modifizierung im Falle von karbonathaltigen Böden wegen zu grosser Ionenstärke der erhaltenen Untersuchungslösungen.

VASE SADESTUSKROMATOGRAAFILISEST MÄÄRAMISEST BENSIDIINIGA

K. Haldma ja E. Maasik

Anorgaanilise keemia kateeder

Kromatograafilise analüüsi rajas vene botaanik M. S. Tsvet 1903. a. Praeguse ajani on kromatograafilise analüüsi meetodid mitmekesistunud. Tuntakse adsorptsioon-, ionvahetus-, sadestus- ja termokromatograafiat. Oma lihtsuse tõttu leiab kromatograafia järjest rohkem rakendamist.

Sadestuskromatograafia põhineb raskesti lahustuvate sademete tekkel adsorbendi pinnal ja nende erinevatel lahustuvustel antud lahustites. Sadestuskromatograafial on rida eeliseid võrreldes ionvahetus- ja molekulaarkromatograafiaga. Sadestuskromatogrammis on tsoonide vahepiirid teravad, puuduvad segatsoonid. Sageli vahelduvad sademete tsoonid puhta adsorbendi tsooniga, mis annab veelgi rohkem võimalusi kvantitatiivseteks määramisteks [1].

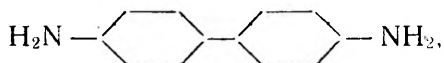
Schwab ja Dattler [2] näitasid, et ionvahetuskromatograafias kehtib ligikaudne seos tsooni laiuse ja sorbeerunud ainehulga vahel, kusjuures tsooni laius sõltub mitte ainult katioonide kontsentratsioonist, vaid ka nendega kaasnevatest anioonidest:

J. N. Gapon ja T. B. Gapon [3], uurides ionvahetuskromatograafiat, tegid järelduse, et tsooni laius on ligikaudselt võrdeline uuritava lahuse ionide kontsentratsiooniga. Nad leidsid seose tsooni laiuse ja läbivoolutatud lahuse ruumala vahel: $\lambda = \alpha V + \beta$. Võrrandis tähistab λ tsooni laiust, V — lahuse ruumala, α ja β on adsorptiivist sõltuvad konstandid.

Saadud tulemused viisid mitmeid autoreid mõttele kasutada ka sadestuskromatograafias kromatogrammi tsoonide laiuste mõõtmist ainete kvantitatiivseks määramiseks [1], [4], [5].

Käesoleva töö eesmärgiks oli selgitada võimalusi bensidiini kasutamiseks sadestuskromatograafilisel analüüsil vase kvalitatiivseks ja kvantitatiivseks määramiseks, ka mõningate lisandite juuresolekul.

Bensidiin ehk 4,4'-diaminodifenüül, valemiga



annab suhteliselt kergesti reaktsioone nii kationidega kui ka anioonidega [6], [7], [8], [9].

Bensidiini alkoholse lahuse lisamisel vasesoola vesilahusele tekib sinise värvusega sade, mille tekkereaktsiooni mehhanismi selgitab L. Kuhlberg [8].

Eksperimentaalne osa.

Kromatografeerimisel kasutati kolonne läbimõõduga 5 mm. Kolonni alumine ots suleti asbestvatist tampooniga. Adsorbendina kasutati kromatograafilist alumiiniumoksiidi. Katsete tulemusena leiti, et sobivam on kolonni täitmiseks kuiv meetod, sest märja meetodi puhul muutus kolonn liiga tihedaks ja läbivoolutamise aeg kujunes pikaks. Kolonni täitmisel puistati adsorbenti korraga 3,5 cm kõrguseni ja alles siis tambiti adsorbent klaaspulgaga kinni. Nii ei tekkinud kolonnis üksikuid adsorbendi kihte.

Kromatografeerimisel osutus parimaks järgmine meetod: kuivast Al_2O_3 -ga täidetud kolonnist voolutati läbi uuritav lahus, mille 3 ml-le oli lisatud 6 tilka 10%-list KCNS-lahust. Seejärel lisati kolonni sadestaja — bensidiini alkoholne lahus. Tekkisid küllalt sirgepiirilised värvunud tsoonid, millede laiust oli võimalik mõõta. Tsoonide laiuste mõõtmisel kasutati lugemismikroskoopi MUP-1 (mõõtmise täpsus 0,01 mm).

Tabel 1

Vase- lahuse hulk ml-tes	Cu hulk mg-des	Tsooni laius mm-tes					Keskmine
		1. katse	2. katse	3. katse	4. katse	5. katse	
0,5	0,5	2,49	2,49	2,44	2,44	2,44	2,46
	0,375	1,96	1,91	1,91	1,91	1,91	1,93
	0,25	1,22	1,32	1,27	1,32	1,32	1,29
	0,125	0,57	0,52	0,52	0,52	0,57	0,54
	0,05	0,26	0,32	0,32	0,26	0,32	0,30
	0,025	0,16	0,16	0,21	0,21	0,21	0,19
1,0	1,00	3,97	3,97	4,03	4,03	3,97	3,99
	0,75	3,45	3,49	3,49	3,45	3,45	3,47
	0,50	2,49	2,44	2,44	2,49	2,49	2,47
	0,25	1,48	1,48	1,48	1,48	1,43	1,47
	0,10	0,74	0,74	0,74	0,69	0,79	0,74
	0,05	0,37	0,37	0,42	0,42	0,37	0,39
2,0	2,00	Ei võimaldanud määrata					
	1,50	5,30	5,19	5,19	5,14	5,25	5,21
	1,00	3,55	3,45	3,55	3,50	3,50	3,51
	0,50	2,54	2,49	2,44	2,49	2,39	2,47
	0,20	1,32	1,38	1,38	1,43	1,48	1,40
	0,10	0,90	0,95	0,95	0,85	0,95	0,92

Katsed teostati mitmesuguste CuSO_4 lahuste hulcade ja mitmesuguste kontsentratsioonidega. Sadestajana kasutati 0,2—0,3 ml 2%-list bensidiinilahust. Tulemused on toodud tabelis 1.

Tabeli andmete põhjal koostati graafikud, kus abstsissiteljele kanti tsooni laius mm-tes, ordinaatteljele vase hulk mg-des.

Saadud graafikute põhjal määrati tuntud kontsentratsiooniga lahuste vasesisaldus mg-des (tabel 2). Voolutamisel võeti nii nendel kui ka edaspidistel katsetel uuritavat lahust 0,5 ml, sest eelnevatel määramistel saadi selle hulga kõige paremaid tulemusi.

Tabel 2

Jrk. nr.	Valmistatud lahuse Cu-sisaldus mg	Tsooni laius mm	Graafikult tsooni laiuse järgi leitud Cu-sisaldus mg	Erinevus	
				mg-des	%-des
1.	0,35	1,80	0,36	+0,01	+2,9
2.	0,35	1,75	0,35	0	0
3.	0,35	1,75	0,35	0	0
4.	0,30	1,54	0,31	+0,01	+3,3
5.	0,30	1,54	0,31	+0,01	+3,3
6.	0,30	1,54	0,31	+0,01	+3,3
7.	0,20	1,01	0,20	0	0
8.	0,20	1,01	0,20	0	0
9.	0,20	0,95	0,19	-0,01	-5,0

Neutraalsete soolade mõju selgitamiseks tsoonide laiustele valmistati NaCl -, Na_2SO_4 - ja NaNO_3 -lahused vastavalt ioonsete võimsuste $I = 1,0$, $I = 2,5$ ja $I = 2,0$ ning lisati neile erinevates kogustes vasesulfaadi standardlahust. Kromatograafiliste tsoonide laiusi võrreldi sama kontsentratsiooniga puhaste lahuste tsoonide laiustega. Tulemused on kantud tabelisse 3.

Tabel 3

Lisatud sool	Soolalahuse ml-te arv	Vase põhi- lahuse (1mg ml-s) ml-te arv	Kromatografeeritava vase hulk mg-des	Tsooni laius	
				Soolalahuse juurdelisamisel	Puhtal vasesoolal
NaCl	2,0	8,0	0,4	1,98	2,01
	6,0	4,0	0,2	1,03	1,01
	9,0	1,0	0,05	0,32	0,30
Na_2SO_4	2,0	8,0	0,4	2,01	2,01
	6,0	4,0	0,2	1,02	1,01
	9,0	2,0	0,05	0,31	0,30
NaNO_3	2,0	8,0	0,4	2,01	2,01
	6,0	4,0	0,2	1,03	1,01
	9,0	1,0	0,05	0,33	0,30

Nagu katsetest selgus, ei sega neutraalsed soolad vase määramist ja tsoonide laiuste vahe ei ületa $\pm 0,03$ mm.

Edasi püüti selgitada värviliste Ni^{2+} ja Co^{2+} mõju vase määramisele. Valmistati kunstlikud segud mitmesuguse Cu^{2+} , Ni^{2+} ja Co^{2+} kontsentratsioonide vahekorraga. Katsete tulemusena leiti, et Ni^{2+} ja Co^{2+} juuresolekul saab kromatogrammis tsoonide laiusi küllalt hästi mõõta (vaata tabelid 4 ja 5). sest Ni-ioon annab bensidiiniga heleda sinakasrohelise tsooni, Co-ioon roosa laialivalgunud tsooni. Kolonni ülemises osas asub tumesinine vase tsoon.

Tabel 4

Jrk. nr.	Katioonide sisaldus		Suhe Cu:Co	Tsooni laius	Märkusi
	Cu	Co			
1.	0,25	—	1:0	1,32	Tsoonide vahepiirid on selged
2.	0,25	0,25	1:1	1,32	
3.	0,25	1,25	1:5	1,37	
4.	0,25	1,75	1:7	1,32	
5.	0,25	2,50	1:10	1,48	Tsoonid on raskesti eraldatavad
6.	0,25	5,00	1:20	1,53	

Tabel 5

Jrk. nr.	Katioonide sisaldus		Suhe Cu:Ni	Tsooni laius	Märkusi
	Cu	Ni			
1.	0,25	—	1:0	1,32	Tsoonide vahepiirid selged
2.	0,25	0,25	1:1	1,37	
3.	0,25	0,75	1:3	1,32	
4.	0,25	1,25	1:5	1,48	Tsoonid on raskesti eraldatavad
5.	0,25	1,75	1:7	1,48	
6.	0,25	2,50	1:10	1,59	

Järeldused

1. Bensidiini saab kasutada vasesisalduse määramiseks sadestuskromatograafilisel meetodil. Kui võtta läbivoolutamisel 0,5 ml lahust, siis määramise täpsus on katsete andmeil $-5,0 - +3,3\%$. Suurema lahusehulga läbivoolutamisel on täpsus väiksem.

2. Kõige sirgepiirilised tsoonid vase määramisel bensidiiniga saadi sadestuskromatograafiliselt sellise läbivoolutamise järjekorra puhul, kus esialgne kromatogramm tekitati rodaniidi-

lahusega mõjutatud vasesoolalahuse läbivoolutamisel. Seejärel voolutati läbi bensidiinilahus.

3. Vase määramist nikli ja koobalti juuresolekul saab läbi viia rahuldavate tulemustega Cu- ja Ni-ioonide kontsentratsioonide suhtel 1 : 3 ning Cu- ja Co-ioonide kontsentratsioonide suhtel 1 : 7 Naatriumsoolad ionse võimsusega 0,2—2,0 ei mõjusta määramist.

Saabunud
13. I 1958

Kirjandus

1. Гапон Я. Н., Беленькая И. М., Коллоидн. ж., 1952, 5, 323.
2. Schwab, G. M., Dattler, O., Ang. Chem., 1938, 51, 709.
3. Гапон Е. Н., Гапон Т. Б., Ж. общ. химии, 1949, 3, 1627.
4. Копылова В. Д., Ольшанова К. М., Чмутов К. В., Ж. аналит. хим., 1956, 2, 167.
5. Шемякин Ф. М., Михалев П. Ф., Физико-химические периодические процессы, Изд. АН СССР, 1938.
6. Rüdiger, A., Nachweis, Bestimmung und Trennung der chemischen Elemente, Bern, 1936.
7. Тапанажев, А. А., Z. anorg. chem., 1924, 140, 323.
8. Kuhlberg, L., Mikrochemie, 1936, 20, 153.
9. Химические реактивы и препараты (справочник), М.—Л. 1952

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ МЕДИ ОСАДОЧНО-ХРОМАТОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ПРИ ПОМОЩИ БЕНЗИДИНА

К. Халдма и Э. Маасик

Кафедра неорганической химии

Резюме

В работе показана возможность быстрого определения микроколичеств меди (1,0—0,1 мг/мл) методом осадочной хроматографии на окиси алюминия. Осаждение производилось бензидином в присутствии малых количеств роданида калия. Широта зон зависела линейно от концентрации ионов меди. Лучшие результаты получались при объеме исследуемого раствора в количестве 0,5 мл; при этом расхождения данных отдельных опытов не превышали 5%. Концентрация ионов никеля в отношении 1 : 3 и кобальта в отношении 1 : 7 к концентрации ионов меди, а также присутствие нитрата, сульфата и хлорида натрия не мешает определению меди.

ÜBER DIE FÄLLUNGSSCHROMATOGRAPHISCHE BESTIMMUNG DES KUPFERS MIT HILFE VON BENZIDINUM

K. Haldma und E. Maasik

Zusammenfassung

Im Vorliegenden wird die Möglichkeit der schnellen Bestimmung von Mikromengen des Kupfers (0,1—1,00 mg/ml) mit Hilfe der Fällungsschromatographie auf Aluminiumoxyd gezeigt.

Die Fällung wurde durchgeführt mit Benzidin in Gegenwart von kleinen Mengen Rhodankalium. Die Breite der Zone ist in gewissen Grenzen eine lineare Funktion der Menge des enthaltenen Kupfers. Die besten Resultate wurden erzielt bei einem Volumen der Lösung von 0,5 ml. In diesem Falle die Differenz der Bestimmungen überschritt die Grenze $\pm 5\%$ nicht. Die Konzentration der Nickelionen im Verhältnis 1 : 3 und der Kobaltionen im Verhältnis 1 : 7 zu der Konzentration der Kupferionen sowie die Gegenwart von Natriumnitrat, -sulfat und -chlorid stört die Bestimmung nicht.

RASKEMETALLIDE SOOLADE KASUTAMISEST PARKAINETE KVANTITATIIVSEKS MÄÄRAMISEKS

E. Neufeld

Analüütilise keemia kateeder

Rida parkainete kvantitatiivse määramise meetodeid põhineb nende väljasadestamisel raskemetallide sooladega. Peamiselt kasutatakse selleks vase-, tina- plii- ja tsingisooli [9]. Need meetodid on kasutusel juba ammu, neid on mitmeti modifitseeritud, kuid nende täpsuse ja rakendatavuse kohta leiame kirjanduses vastandlikke arvamusi.

Käesoleva uurimise objektiks on neli tähtsamat eespool nimetatud liiki kuuluvatest parkainete kvantitatiivse määramise meetoditest — NSVL VIII Farmakopöa meetod, kus kasutatakse parkainete sadestamiseks vaskatsetaati [5], Risler — Beunat' [17] ja Hazanovitši meetodid, kus parkained sadestatakse stannokloriidiga, ja lõpuks Langi kolorimeetriline meetod [15] — parkained sadestatakse ammoniakaalse tsinkatsetaadi lahusega.

NSVL VIII Farmakopöa meetodit peetakse üldiselt ebatäpseks ja tülikaks [4], aga mõned autorid [1] siiski väidavad, et nimetatud meetod annab rahvusvahelise nahapulbrimeetodi [2] resultaadidega ühtivad andmed.

Käesolevas töös kasutati NSVL VIII Farmakopöa meetodi [5] uurimiseks peaaesjalikult tedremarana (*Potentilla tormentilla* Neck.) tinktuuri ja ussitatra (*Polygonum bistorta* L.) vedelekstrakti põhjusel, et vesiväljatõmmatised droogidest on selle meetodi järgi raskesti valmistatavad ega säili hästi.

Eelkõige püüti selgitada vase-parkainete sademe iseloomu. Selleks mõõdeti pipetiga igaks katseks 10 ml tinktuuri, alkohol aurutati, jääk lahustati vees ja parkained sadestati 4%-lise vaskatsetaadi lahusega. Kuumutati vesivannil umbes 15 minutit. Siis filtriti sade läbi kuiva kaalutud filtri. Sel viisil saadud vase-parkainete sadet pesti esimese kolme katse puhul 10 ml kuuma destilleeritud veega kuni vase reaktsiooni kadumiseni pesuvees (väheha hulga destilleeritud veega ei olnud seda võimalik teha). Järgmisel kolmel katsel pesti sadet 20 ml kuuma veega ja viimastel katsetel 40 ml kuuma veega. Ussitatra vedelekstraktiga toimiti analoogiliselt, võttes vaid igaks katseks 5 ml vedelekstrakti. Pestud

sademed kuivatati ja kaaluti. Resultaadid on toodud järgnevas tabelis 1.

Tabel 1

Materjalid	Sademe pesemiseks kasutatud kuuma vee hulk ml-tes	Vase-parkainete sademe kaal g-des	Vaseoksuüdi kaal g-des
Tedremarana tinktuur	10	0,5312	0,1792
		0,5211	0,2003
		0,5224	0,1603
	20	0,4935	
		0,4918	
		0,4994	
	40	0,4840	
		0,4818	
		0,4887	
Ussitra vedelekstrakt	10	1,2340	0,3416
		1,2300	0,3385
		1,2286	0,3125
	20	1,0922	
		1,0877	
		1,0905	
	40	1,0002	
		1,0102	
		0,9889	

10 ml veega pestud sademed pärast kuivatamist ja kaalumist põletati ja hõõgutati vaskoksuüdiks ning kaaluti uuesti. Et igaks katseks mõlemal juhul oli mõõdetud sama hulk ainet, pidi järelikult olema igal katsel enam-vähem sama ka vase-parkainete sademete kaal, samuti ka vaskoksuüdi kaal. Tegelikult näeme tabelist, et vase-parkainete sademete hulk on küllaltki erinev. Veel erinevam oli aga peale hõõgutamist jäänud vaskoksuüdi hulk. See tähendab, et vase-parkainete sade ei teki kindlates vahetordades, olenevalt mitmesugustest tingimustest võib vase-parkainete suhe sademes tugevasti erineda. Põhjus seisneb siin selles, et parkained ei moodusta raskemetallidega mitte sooli, vaid erilisi metall-adsorptsiooniühendeid [8], millede iseloom on vaatamata paljudele uurimustele lõplikult selgitamata. Dekkeri [9] ja Grasseri [6] järgi on tannaatide tekkimine nii parkaine kui ka sadestaja hulgast, lahusti iseloomust ja hulgast.

Tabelist 1 nähtub, et pesuvee hulga suurenedes väheneb tunduvalt vase-parkainete ühendi kaal. Pesuvee andis ferriammoo-

niumsulfaadi ja ka želatiinilahuse toimel nõrga positiivse reaktsiooni parkainetele.

Järgnevalt kontrolliti NSVL VIII Farmakopöa määramismetodi rakendatavust puhta tanniini ja autori poolt isoleeritud tedremarana ja ussitatra juurikate parkainete määramisel. Isoleeritud parkaine sisaldus ja kasutatava tanniini tanniinisaldus oli eelnevalt kontrollitud nahapulbri meetodil.

Tanniinikaalutised lahustati destilleeritud vees ja parkained määrati vastavalt eeskirjale. Igal paralleelkatsel püüti kõik operatsioonid võimalikult ühtlustada. Alljärgnevas tabelis 2 on toodud tanniini määramise resultaadid.

Tabel 2

Katse	Tanniinikaalutis g-des	Leiti NSVL VIII Farmakopöa järgi g-des	Erinevus
1	0,2110	0,2010	-0,0100
2	0,1573	0,1505	-0,0068
3	0,1048	0,0992	-0,0056
4	0,0937	0,0892	-0,0045

Kõigi nelja paralleelkatse resultaadid on madalamad lahustatud tanniinikaalutistest (tanniinikaalutised on ümber arvestatud puhtale tanniinile), millest järeldub, et vaskatsetaat ei sadesta tanniini täielikult või lahustub osa sademest veega pesemisel.

Isoleeritud tedremarana ja ussitatra parkainete üksikmääramiste resultaadid on esitatud tabelis 3.

Lahuses, mis sisaldas 0,2000 g tedremarana parkaineid, leiti NSVL VIII Farmakopöa meetodil keskmiselt vaid 0,1915 g, seega 4,2% vähem lahuse tõelisest parkainetesaldusest. Ussitatra parkaineid oli lahustatud 0,1925 g, leiti aga keskmiselt 4,1% vähem — 0,1845 g.

Et töötati kogu aeg samade pesuvee hulkadega ja kõik määramistingimused püüti võimalikult ühtlustada, on saadud andmed reprodutseeritavad $\pm 0,5\%$ piirides, kuid tõelisest parkainetesaldusest eranditult madalamad.

NSVL VIII Farmakopöa meetodi rakendatavuse uurimiseks parkainete määramisel droogides ja tema võrdlemiseks rahvusvahelise ühtlustatud nahapulbri meetodiga määrati Farmakopöa meetodil tedremarana ja ussitatra juurikate parkainetesaldus. Nimetatud droogide parkainetesaldus oli eelnevalt määratud nahapulbri meetodil, mille järgi tedremarana juurikad sisaldasid 19,9% parkaineid. NSVL VIII Farmakopöa meetodil aga leiti rea paralleelkatsete keskmisena tedremarana juurikate parkainetes-

Tabel 3

Katsse nr.	Lahustatud tedre- marana parkainet	Leiti NSVL VIII Farmakopöa järgi		Erine- vus	Lahustatud ussi- tatra parkainet	Leiti NSVL VIII Farmakopöa järgi		Erine- vus
		üksik- katsed	kesk- mine			üksik- katsed	kesk- mine	
1	0,2000	0,1920			0,1925	0,1820		
2		0,1930				0,1825		
3		0,1975				0,1860		
4		0,1906				0,1868	0,1845	-4,1%
5		0,1889	0,1915	-4,2%		0,1834		
6		0,1874				0,1875		
7		0,1973				0,1877		
8		0,1848				0,1828		
9		0,1905				0,1845		
10		0,1930				0,1821		

salduseks vaid 15,8% ja ussitatra juurikatel 17,9%. Seega, kui aluseks võtta nahapulbri meetodi resultaadid, saame NSVL VIII Farmakopöa meetodi järgi tedremarana juurikate parkainetesalduse tõelisest 11,7% ja ussitatra juurikate parkainetesalduse 10,1% võrra madalama. Üksikanalüüside absoluutne viga ulatus 3—4%-ni. Et isoleeritud parkainete määramisel oli erinevus väiksem (vt. tabel 3) kui droogide vesiväljatõmmatiste puhul, on tingitud Farmakopöa meetodi järgi ettenähtud droogide eelnevast töötlemisest, mille juures võib tekkida parkainete kadu.

NSVL VIII Farmakopöa meetodil teostatud määramised nii droogides kui ka tinktuuris ja vedelekstraktis, samuti katsed tanniini ja tedremarana ning ussitatra parkainetega toovad selgelt esile selle meetodi puudused. Autori katsed vase-parkainete sademete uurimisel näitavad, et vase-parkainete sademete koostis pole konstantne. Nad ei teki vastavalt stöhhiomeetrilistele vahekordadele ja on lahustuvad nii sadestaja kui ka parkaine lahuse liias.

Peale nimetatud puuduste on NSVL VIII Farmakopöa meetod väga tülikas ja aeganõudev. Ka hoolsa töö korral pole võimalik analüüsi teostada lühema ajaga kui kaks päeva. Ussitatra juurikate puhul aga kulub veel rohkem aega, sest ussitatra juurikad sisaldavad rohkesti tärklist, mis kuumas vees pundudes takistab filtreerimist.

Kõikide autori teostatud katsete resultaadi olid madalamad õigetest ja selle põhjused võivad olla järgmised.

1. Ekstraheerimine kõrgemal temperatuuril, mis termolabiilsete parkainete puhul põhjustab vigu parkainete lagunemise tõttu.

2. Droogipulbri käsitlemine tavalise eetriga, mis sisaldades vett ja alkoholi võib lahustada osa parkaineid.

3. NSVL VIII Farmakopöa järgi koondatakse analüüsi väl-

tel parkainete lahust mitu korda vesivannil. Pikemaajaline kuumutamine on kahjulik ka termostabiilsetele parkainetele.

Märgatav parkainete kadu tekib vase-parkainete sademe pesemisel veega.

5. Vaskatsetaat ei sadesta parkaineid täielikult.

6. NSVL VIII Farmakopöa meetodil parkaineid määrates on ette nähtud neli filtreerimist — üks läbi puuvilla, kolm läbi filterpaberi. Parkainete adsorptsiooni tagajärjel puuvillal ja filterpaberil võib siin tekkida parkainete kadu.

Kokkuvõttes võib öelda, et NSVL VIII Farmakopöa meetod parkainete kvantitatiivseks määramiseks ei ole sobiv meetod NSVL IX Farmakopöasse.

Risler-Beunat' meetodit ja Hazanovitši meetodit käsitleme koos, sest mõlemal juhul sadestatakse parkaineid stannokloriidiga, Risler-Beunat' järgi vesilahusest, Hazanovitši järgi aga 50%-lise alkoholiga valmistatud väljatõmmatisest.

Hazanovitši meetodi resultaate täpsuse kui ka analüüside teostamise tingimuste kohta puuduvad kirjanduses andmed.

Risler-Beunat' meetodi ja Hazanovitši meetodi uurimine viidi autori poolt läbi analoogiliselt NSVL VIII Farmakopöa meetodi uurimisega.

Esiteks määrati nimetatud meetoditel lahusesse viidud tanniini, tedremarana ja ussitatra juurikate parkainete kindlaid hulki. Vastavad kaalutised lahustati Risler-Beunat' meetodi jaoks destilleeritud vees, Hazanovitši meetodi jaoks aga 50%-lises alkoholis, mis eelnevalt kuumutati 55°-ni. Risler-Beunat' järgi leiti alati vähem parkaineid ja ka tanniini, kui oli võetud. Tanniini määramiste tulemused on tabelis 4.

Tabel 4

Katse nr.	Tanniini-kaalutis g-des	Leiti Risler-Beunat'i järgi	Erinevus	Tanniini-kaalutis g-des	Leiti Hazanovitši järgi	Erinevus
1	0,1893	0,1788	—0,0105	0,2081	0,1963	—0,0118
2	0,2004	0,1873	—0,1131	0,1992	0,1887	—0,0105
3	0,1953	0,1853	—0,0100	0,2074	0,1962	—0,0112

Tanniinikaalutised on ümber arvestatud puhtale tanniinile. Tabelist näeme, et tina-tanniini sademed on ebastabiilsemad kui vastavad vase-tanniini sademed (vt. tabel 2)

Isoleeritud tedremarana parkaineid leiame autori andmeil Risler-Beunat' järgi 4,5% ja ussitatra parkaineid 4,2% vähem, kui on tõeliselt. Kadu võis tekkida asjaolust, et tinakloriid ei sadesta parkaineid täielikult, tina-parkainete sademe lahustuvusest veega pesemisel ja parkainete adsorptsioonist filterpaberil.

Droogide vesiväljatõmmatistest võib aga kaasa sadeneda teisi lahuses leiduvaid aineid.

Ka Hazanovitši järgi leiti isoleeritud parkained mõlema parkaine puhul keskmiselt 5,8% vähem kui oli kaalutud.

Tina-parkainete sademete lahustuvust veega pesemisel selgitati analoogiliselt vase-parkainete sademete lahustuvusega. Andmed on toodud tabelis 5.

Tabel 5

Materjalid	Sademe pesemiseks kasutatud kuuma vee hulk ml-tes	Tina-parkainete sademe kaal g-des	Tinaoksuüdi kaal g-des
Tedremarana juurikad	5	0,1620	0,0553
		0,1620	0,0512
		0,1634	0,0528
	10	0,1548	
		0,1504	
		0,1512	
	20	0,1499	
		0,1487	
		0,1502	
Ussitatra juurikad	5	0,1792	0,0685
		0,1734	0,0612
		0,1785	0,0701
	10	0,1708	
		0,1673	
		0,1694	
	20	0,1645	
		0,1636	
		0,1658	

Näeme, et tina-parkainete sademete pesemisel veega lahustub tunduv osa sademest. Pesuvesi andis nõrga positiivse reaktsiooni parkainetele ja tinale. Tina-parkainete sademed näivad olevat konstantsema koostisega, sest kolmel paralleelkatsel tekkisid samast hulgast väljatõmmatisest peaaegu sama kaaluga sademed. Vase-parkainete sademetel näeme suuremat erinevust (vt. tabel 1).

Nahapulbri meetodiga võrdlemiseks teostati analoogiliselt NSVL VIII Farmakopöa meetodi uurimisele rida analüüse materjaliga, mille parkainetesisaldus eelnevalt oli määratud nahapulbri meetodil. Risler-Beunat' järgi leiti tedremarana juurikate parkainetesisalduseks keskmiselt 16,6% ja ussitatra juuri-

katel 18,7%. Nahapulbri meetodil saadud resultaate aluseks võttes on erinevus vastavalt — 6,7% ja — 5,1%. Hazanovitši meetodi järgi määratuna sisaldasid tedremarana juurikad keskmiselt 16,0% ja ussitatra juurikad 18,1% parkaineid. Seega võrreldes nahapulbri meetodi andmetega leitakse parkaineid tedremarana juurikate puhul 10,1% ja ussitatra juurikate puhul 8,1% vähem.

Madalamad resultaadid siin võivad olla osaliselt põhjustatud alkoholi kasutamisest parkainete ekstraheerimiseks. On teada [3], et alkohol võib mõningatele parkainetele mõjuda lagundavalt.

Kuigi Risler-Beunat' ja Hazanovitši meetodid võivad mõnede parkainete määramisel anda rahuldavaid tulemusi, on need, nagu näitavad käesolevas töös teostatud katsed, siiski juhusliku iseloomuga, sest stannokloriid, nagu teisedki metalli ühendid, ei anna parkainetega konstantse koostisega sademeid. Põhiliselt esinevad siin kõik vigade võimalused, mis on nimetatud eespool, NSVL VIII Farmakopöa meetodi uurimuse puhul, olenemata sellest, kas määramine teostatakse vesi- või alkohoolsest lahusest. Eeliseks võrreldes NSVL VIII Farmakopöa meetodiga on asjaolu, et analüüsi teostamine pole nii pikaldane. Hazanovitši meetodi järgi töötades on hea võimalus analüüside kordamiseks, sest alkohoolsed lahused säilivad hästi (kui mitte arvestada alkoholüüsi!). Ka mitmed ained, mis sadestuvad stannokloriidiga, ei lahustu alkoholis ega saa seega segada parkainete määramist.

Lõpuks käsitleme ühte uuematest parkainete kvantitatiivse määramise meetoditest — Langi kolorimeetrilist meetodit [15], mille järgi parkained sadestatakse ammoniakaalse tsinkatsetaadi lahusega ja hiljem väävelhappe abil lahusesse viiduna kolorimeetreeritakse. Mõned autorid [13, 14] soovivad seda meetodit kui lihtsat ja küllaldaselt täpset. On tehtud ettepanek võtta see meetod Saksa uude farmakopöasse [11]. Kuid F Gstirner [12] väidab 1956. a. teostatud uurimuse põhjal, et nimetatud meetod siiski jätab täpsuselt soovida. Nick [16] kasutas *Polygonum bistorta* parkainete määramisel kahekordset kolorimeetreerimist — enne ja pärast parkainete eemaldamist lahusest pliiatsetaadi abil.

Kolorimeetriliste parkainete kvantitatiivse määramise meetodite suurimaks puuduseks on tanniini standardlahuse kasutamine, sest erinevad parkained võivad kasutatavate värvreaktiividega erinevalt reageerida. Teiseks ei allu kõikide parkainete lahused Lambert-Beeri seadusele ja ka parkainete lahuste värvuse olenevus pH-st võib osutada segavaks [7].

Ammoniakaalset tsinkatsetaati kasutati parkainete sadestamiseks juba ammu. Parkainete-tsingi sade lagundati väävelhappega ja tiitriti kaaliumpermanganaadilahusega. See meetod aga tunnistati ebasobivaks peasjalikult parkainete erineva redutseerimisvõime tõttu kaaliumpermanganaadile. Langi järgi sadestab ammoniakaalne tsinkatsetaat ainult parkaineid. Teised

autorid on arvamisel, et ammoniakaalne tsinkatsetaat sadestab teisi taimedes leiduvaid aineid isegi suuremal määral kui vask- ja pliiatsetaadid [9, 10].

Käesolevas töös teostatud katsed tedremarana ja ussitatra juurikate parkainete sadestmisel ammoniakaalse tsinkatsetaadiga ilmnes, et ka tsinkatsetaat ei sadesta parkaineid täielikult. Filtraadis tekkis ferriammooniumsulfaadi toimele sinine värvus ja želatiin-keedusoola lahusega hägu, olgugi et tsinkatsetaat enam sadet ei andnud. Tsingi-parkainete sademed näitasid kalduvust lagunemisele, sest muutusid kiiresti värvuselt tumedaks. Arvatavasti on see tingitud leelisesest keskkonnast, mis tugevasti soodustab parkainete oksüdeerumist õhuhapniku toimele.

Tsingi-parkainete sademe uurimise resultaate näitab tabel 6.

Tabel 6

Materjalid	Sademe peemi- seks kasutatud kuuma vee hulk ml-tes	Tsingi-parkainete sademe kaal g-des	Tsinkoksüüdi- kaal g-des
Tedremarana juurikad	5	0,1245	0,0302
		0,1143	0,0295
		0,1093	0,0212
	10	0,1015	
		0,0995	
		0,0904	
	20	0,1003	
		0,0932	
		0,0887	
Ussitatra juurikad	5	0,1256	0,0185
		0,1501	0,0327
		0,1381	0,0252
	10	0,1036	
		0,1295	
		0,1115	
	20	0,1008	
		0,1012	
		0,1085	

Tabelist näeme, et ka tsingi-parkainete sade ei teki kindlates vahelkordades, kuna samades katsetingimustes parkainete samadest hulkadest tekkisid erineva kaaluga sademed. Ka peale põletamist ja hõõgutamist jäänud tsinkoksüüdi hulk oli erinev. Parkainete sadestumine ammoniakaalse tsinkatsetaadiga pole

kvantitatiivne ja sade lahustub märgatavalt ka veega pesemisel, mistõttu määramiste resultaadid võivad kujuneda õigetest madalamadeks.

Et uurida Langi kolorimeetrilise meetodi rakendatavust droogide parkainetesisalduse määramiseks ja et tema meetodit võrrelda rahvusvahelise nahapulbri meetodiga, määrati Langi järgi parkaineid tedremarana ja ussitatra juurikates, mille parkainetesisaldus nahapulbri meetodi järgi oli teada.

Autori katsed näitavad, et tedremarana juurikate parkainetesisaldus on Langi kolorimeetrilise meetodi järgi võrreldes nahapulbri meetodi andmetega 4,2% ja ussitatra juurikatel 5,2% madalam. Resultaadid on väljendatud tanniiniväärtustes. Väävelhappe abil lahustatud tsingi-parkainete sademete kolorimetreerimisel saadud üksikmääramiste resultaadid olid ühtelangevad, suuremad erinevused tekkisid aga igakordsel uuesti sadestamisel, mis veel kord tõendab, et tsinkatsetaat ei sadesta parkaineid ühtlaselt.

Langi kolorimeetriline meetod on võrdlemisi kiiresti teostatav, sest kasutatakse väga väikesi uuritava aine hulka (0,1 g), mistõttu ekstraheerimine toimub palju kiiremini kui teiste meetodite puhul. Ka ei kasutata siin aeglast filtreerimist, vaid sademed eraldatakse tsentrifuugides. Seega on kogu määramine teostatav võrdlemisi lühikese aja jooksul.

Kokkuvõttes näitab käesolev uurimus, et raskemetallide (Cu, Sn, Zn) soolad ei ole sobivateks reaktiivideks parkainete määramisel. Parimaks uuritud meetoditest tuleb pidada Langi kolorimeetrilist meetodit, mis võimaldab parkainetesisaldust määrata küll ainult suhtelise suurusena, kuid on võrreldes teiste meetoditega kergemini ja kiiremini teostatav (analüüs kestab 1—2 tundi) ning annab üksikanalüüsidel ühtlasemad resultaadid.

Saabunud :
16. I 1958.

Kirjandus

1. Болотников С. М., Шрайбер М. С., Аптечное дело, 1954, № 3, 10—11.
2. В Е М — Всесоюзный единый метод исследования в кожевнном производстве. Анализ дубильных материалов и экстрактов и контроль экстрактового производства. М.—Л. 1939, 78—90.
3. Воронцов Младший Н. Н., Химия природных дубильных веществ. ГИЛЛ, 1932, 5—9.
4. Глезин В. М., Аптечное дело, 1955, № 5, 43—48.
5. Государственная Фармакопея СССР VIII изд. Медгиз 1952, 643.
6. Грассер Г., Практическое руководство для химических лабораторий кожевнного производства, М. 1923.
7. Михайлов А. Н., Коллоидная химия таннидов. М.—Л. 1935, 49, 195, 244.
8. В e m m e l e n, J. van, Z. anorg. allgem. Chem., 1900, 23, 321.

9. Dekker, J., Die Gerbstoffe, Berlin 1913, 491.
10. Dragendorff, G., Die qualitative und quantitative Analyse von Pflanzen und Pflanzentheilen, Göttingen 1882, 40.
11. Friedrich, H., Pharmazie, 1954, 11, 940.
12. Gstirner, F., Pharmazie, 1956, 2, 157.
13. Herrman, K., Pharmazie 1952, 7, 320—325.
14. Künzel, A., Gerbereichemisches Taschenbuch, 6. Auflage, Dresden u. Leipzig 1955, 174.
15. Lang, W., Pharmazie 1951, 6, 137—140.
16. Nick, E., Pharmazie 1953, 11, 240—249.
17. Risler-Beunat, H., Z. f. anal. Chemie, 1863, 2, 287.

О ПРИМЕНЕНИИ СОЛЕЙ ТЯЖЕЛЫХ МЕТАЛЛОВ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДУБИЛЬНЫХ ВЕЩЕСТВ

Э. Нейфельд

Кафедра аналитической химии

Резюме

Метод Фармакопеи СССР для количественного определения дубильных веществ, по которому для осаждения дубильных веществ применяется ацетат меди, методы Risler-Beunat и Хазановича, по которым дубильные вещества осаждаются хлоридом олова, и колориметрический метод Lang, где дубильные вещества осаждают аммиачным раствором ацетата цинка, — являются важнейшими методами количественного определения дубильных веществ при помощи солей металлов. Методы VIII Фармакопеи СССР и Risler-Beunat применяются уже давно, подробно исследованы и подверглись видоизменению. Метод Хазановича и колориметрический метод Lang сравнительно новы и еще мало исследованы. Литературные данные о точности и применимости этих четырех методов часто противоречивы или вообще отсутствуют.

В настоящей работе выясняется характер осадков дубильных веществ с металлами, а вместе с этим точность и практическая применимость указанных методов для количественного определения дубильных веществ. Для опытов использовались корневища лапчатки (*Potentilla tormentilla* Neck.) и змеевика (*Polygonum bistorta* L.), изготовленные из них тинктура и экстракт, а также изолированные автором из указанного сырья чистые дубильные вещества и таннин. Опыты показали, что ацетат меди, хлорид олова и ацетат цинка не вполне осаждают дубильные вещества. Состав осадков непостоянный. В одинаковых условиях из одного и того же количества водной вытяжки лекарственного сырья, тинктуры, жидкого экстракта и из растворов чистого дубильного вещества получались осадки, которые после прокалки давали разные количества окиси меди, окиси олова и окиси цинка. Автор выяснил, что осадки указанных металлов с дубильными веществами заметно растворяются при промывании водой.

По сравнению с международным методом кожного порошка метод VIII Фармакопеи СССР обнаружил содержание дубильных веществ на 10% ниже среднего и дал очень неустойчивые

результаты. При определении с его помощью известных количеств изолированных дубильных веществ и таннина найдено в среднем на 4—5% меньше взятого (по весу). При анализе водных вытяжек лекарственного сырья большая ошибка обусловлена предварительной обработкой, предписываемой методом. Потери при этом имеют разный характер и причины.

Метод VIII Фармакопеи СССР слишком неудобен и длителен; продолжительность анализа достигает 2—3 дней. Учитывая все эти обстоятельства, он признан неподходящим для IX Фармакопеи СССР как метод количественного определения дубильных веществ.

По сравнению с международным методом кожного порошка метод Risler-Beunat дал заниженные результаты для корневища лапчатки в среднем на 6,5% и для корневища змеевика в среднем на 5%.

По методу Хазановича относительная ошибка при определении дубильных веществ для корневища лапчатки была — 10% и для корневища змеевика — 8%. Большая величина ошибки, чем по Risler-Beunat, может быть частично обусловлена употреблением для экстрагирования алкоголя, так как последний может оказывать на некоторые дубильные вещества разлагающее действие.

Из всех исследованных методов лучшим следует считать колориметрический метод Lang. Использование ацетата цинка для осаждения дубильных веществ имеет, на основании опытов автора, те же недостатки, как и применение соли, меди и олова. При стандартном растворе таннина результаты определения оказываются относительными. Все же при определении дубильных веществ лапчатки и змеевика по методу Lang полученные данные более близки к данным метода кожного порошка, и в этом существенно отличаются от данных, полученных при помощи других исследованных методов. Содержание дубильного вещества в корневище лапчатки по методу Lang на 4,8%, а в корневище змеевика в среднем на 5,2% меньше, чем по методу кожного порошка. Колориметрический анализ по методу Lang удобен на практике и требует для определения только 1—2 часа.

Поэтому данный метод следует предпочесть методам VIII Фармакопеи СССР, Risler-Beunat и Хазановича.

ÜBER DIE ANWENDUNG VON SCHWERMETALLSALZEN ZUR BESTIMMUNG DER GERBSTOFFE

E. NEUFELD

Zusammenfassung

Es wurden vier Gerbstoffbestimmungsmethoden geprüft — die Methode des VIII Arzneibuches der UdSSR, nach welcher die Gerbstoffe durch Kupferacetat gefällt werden, die Methoden von Risler-Beunat und Hazanowitsch, nach welchen die Gerbstoffe mit Zinnchlorür ausgefällt werden und die von Lang empfohlene kolorimetrische Methode, welche auf der Ausfällung der Gerbstoffe mit ammoniakalischer Lösung von Zinkacetat beruht.

Als Material für die Experimente wurden die Wurzeln von *Potentilla Tormentilla Neck.* und *Polygonum Bistorta L.*, *Tinctura Tormentillae*, *Extractum Bistortae fluidum* und vom Verfasser des Artikels aus obengenannten Pflanzenteilen isolierte reine Gerbstoffe und Tannin angewandt. Es wurde festgestellt, dass die Fällung von Gerbstoffen durch Kupferacetat, Zinnchlorür und ammoniakalischer Lösung von Zinkacetat nicht vollständig ist. Die Niederschläge haben keine konstante Zusammensetzung und geben beim Auswaschen mit Wasser bedeutende Mengen von Gerbstoffen an die Flüssigkeit ab.

Im Vergleich zu der internationalen Hautpulvermethode gaben die Methoden des VIII Arzneibuches der UdSSR, Risler-Beunat und Hazanowitsch bei der Gerbstoffbestimmung in den Pflanzen bis 10% niedrigere Resultate ab. Bei der Bestimmung gewisser aufgelöster Mengen von isolierten Gerbstoffen und Tannin war der Fehler — 4 bis 5%. Die Analysen nach den drei genannten Methoden gehen langsam vonstatten und sind zeitraubend (2—3 Tage)

Nach der Methode von Lange wurden im Vergleich zu der internationalen Hautpulvermethode die besten Resultate erzielt. Die Gerbstoffbestimmung nach Lang dauert nur 1—2 Stunden.

SISUKORD — ОГЛАВЛЕНИЕ

Т. Роотсмäэ, Эллипсоиды скоростей звезд и проблема звездной эволюции	3
T. Rootsmäe, Tähtede kiiruste ellipsoidid ja täheevolutsiooni probleem. <i>Resümee</i>	50
T. Rootsmäe, The Velocity Ellipsoids of Stars and the Problem of Stellar Evolution. <i>Summary</i>	53
П. Кард, Метод варьирования толщин слоев просветляющего оптического покрытия	56
P. Kard, Selgendava optilise katte kihtide paksuste varieerimise meetod. <i>Resümee</i>	70
P. Kard, A method of varying the thicknesses of layers of antireflecting optical coatings. <i>Summary</i>	72
О. Кеэрберг и К. Ребане, Метод расчета металло-диэлектрических покрытий с непрерывными оптическими характеристиками	75
O. Keenberg ja K. Rebane, Pidevalt muutuvate optiliste karakteristikutega metallo-dieektriliste katete arvutusmeetod. <i>Resümee</i>	83
O. Keenberg and K. Rebane, A method of computation of metalline dielectric coatings with continuous optical parameters. <i>Summary</i>	84
Л. Тувикене, Амплитудные фильтры и диафрагмы для дифракционных решеток. II	85
L. Tuvikene, Действие амплитудных фильтров и диафрагм на дифракционную картину. II. <i>Резюме</i>	94
L. Tuvikene, Über die Wirkung der Amplitudenfilter und Diafragmen auf das Beugungsbild. II. <i>Zusammenfassung</i>	95
Ю. Я. Лембра, К выбору параметров секторного циклотрона	96
J. Lembra, Sektorilise tsüklotroni parameetrite valikust. <i>Resümee</i>	98
J. Lembra, On the choice of the parameters of a cyclotron with a sectioned magnet system. <i>Summary</i>	99
Ю. Я. Лембра, Вывод приближенной формулы для Q_r в секторном циклотроне	100
J. Lembra, Q_r ligikaudse valemi tuletamine sektorilise tsüklotroni juhul. <i>Resümee</i>	110
J. Lembra, The derivation of approximate formula for Q_r in the cyclotron with sectioned magnetic system. <i>Summary</i>	111
Ю. Я. Лембра, К расчету регенераторного дефлектора	112
J. Lembra, Regeneratiivse deflektori arvutusest. <i>Resümee</i>	126
J. Lembra, On the calculation of the regenerative deflector. <i>Summary</i>	127

A. Suit ja L. Sööde, Kromatograafia rakendatavusest koobalti määramisel mullas	128
A. Суйт и Л. Сээде, О применимости хроматографии при определении кобальта в почвах. <i>Резюме</i>	133
A. Suit und L. Sööde, Über die Anwendbarkeit der Chromatographie zur Bestimmung von Kobalt in Bodenproben. <i>Zusammenfassung</i>	134
K. Haldma ja E. Maasik, Vase sadestuskromatograafilisest määramisest bensidiiniga	135
К. Халдма и Э. Маазик, Об определении меди осадочно-хроматографическим методом при помощи бензидина. <i>Резюме</i>	140
K. Haldma und E. Maasik, Über die fällungschromatographische Bestimmung des Kupfers mit Hilfe von Benzidinum. <i>Zusammenfassung</i>	141
E. Neufeld, Raskemetallide soolade kasutamiseks parkainete kvantitatiivseks määramiseks	142
Э. Нейфельд, О применении солей тяжелых металлов для количественного определения дубильных веществ. <i>Резюме</i>	152
E. Neufeld, Über die Anwendung von Schwermetallsalzen zur Bestimmung der Gerbstoffe. <i>Zusammenfassung</i>	154

Тартуский государственный университет

Тарту, ул. Юликооли, 18

ГРУДЫ ПО АСТРОНОМИИ, ФИЗИКЕ И ХИМИИ

На эстонском, русском, немецком и английском языках

Тоimetaja P. K a r d

Korrektorid E. U u s p õ i d, A. P r a v d i n ja L. B r a f m a n n

Лadumisele antud 31. III 1959. Trükkimisele antud 23. XI 1959. Paber 60×92, 1/16. Trükipoog-
naid 9,75. Trüklarv 700. MB-09229. Tellimuse nr. HH-1372

Hans Heidemann nim. trükkoda, Tartu, Ülikooli 17/19.