

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

H.TAMMET

**PRAKTILISE
METROLOOGIA
ALGMED**

TARTU 1970

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL

H. Tammet

PRAKTILISE METROLOOGIA

ALGMED

II

Õppevahend

Tartu 1970

Eessõna.

Käesolevas brošüüris käsitletakse katseandmete statistilise töötlemise meetodeid.

Üliõpilastel, kellel on ees füüsika üldpraktikum, puudub juhuslike mõõtmisvigade omaduste mõistmiseks tarvilik teoreetiline ettevalmistus tõenäosusteoorias ja matemaatilises statistikas. Seda lünka peavad aitama täita kaks esimest sissejuhatava iseloomuga paragrahvi. Need paragrahvid on adresseeritud lugejale, kes on tõenäosuse mõistega vähesel määral varem kokku puutunud. Sissejuhatavale osale lisatud ülesandeid on soovitatav lahendada paralleelselt teooria õppimisega. Ülesannete eesmärgiks on teooria kinnitamise kõrval ka selle täiendamine.

Kui jätkub aega, on tõenäosusteooriat ja matemaatilist statistikat kasulikum õppida raamatutest, milles käsitletakse neid küsimusi põhjalikumalt [1, 2, 3].

Rakenduslik osa algab kolmandast paragrahvist. Siin pole teoreetilisele materjalile ülesandeid lisatud. Ülesannete lahendamist peab asendama katseandmete töötlemise praktika.

Metroloogia pole seni veel kujunenud kanoniseeritud seisukohtadega süsteemikindlaks teaduseks. Mitmesuguste mõõtmisvigade hindamise meetodite rakendatavustingimused on ebamäärased. Hinnangute usaldatavuse valimiseks pole üldse loogilist kriteeriumi. Niisuguste ebameeldivate asjaolude tõttu nõuab katseandmete statistiline töötlemine peale loogilise mõtlemisoscuse head intuitsiooni ja visa tööga omandatavaid kogemusi.

Nende jaoks, keda käesoleva brošüüri sisu ei rahulda, on viimastel lehekülgedel esitatud pikk täiendava kirjanduse annoteeritud loetelu.

Autor avaldab tänu kõigile, kelle märkused olid abiks käsikirja viimistlemisel, eriti aga dots. E. Tiidule.

§ 1. TÕENÄOSUSTEooria mõisted.

Juhuslikuks sündmuseks nimetatakse sündmust, mille toimumist või mittetoimumist pole võimalik kindlalt ennustada. Niisugune on näiteks sündmus: veereva täringu peatumisel jääb peale kuus silma.

Tähistame sooritatud katsete arvu tähega n ja sündmuse toimumiskordade arvu tähega k . Suhet k/n nimetatakse sündmuse suhteliseks sageduseks. Täringu kümnekordsel veeretamisel on kuue silma saamise suhteline sagedus kord 0,1, kord 0,4, kord 0,2 jne. Katsete arvu n piiramatul suurendamisel muutub väga ebatõenäoseks, et see suhteline sagedus erineks oluliselt väärtusest $1/6$. Arv $1/6$ on vaadeldava sündmuse tõenäosus. Sündmuse A tõenäosust tähistatakse $P\{A\}$. Võimatu sündmuse tõenäosus on null, kindla sündmuse tõenäosus üks.

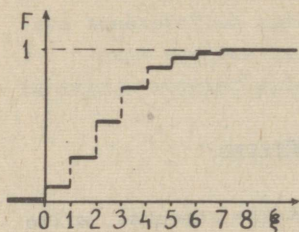
Juhuslikuks suuruseks nimetatakse suurust, mille väärtust pole võimalik kindlalt ennustada. Näide: täringu veeretamisel saadud silmade arv.

Sündmuse "juhuslik suurus x osutub väiksemaks kui kindel suurus ξ " tõenäosus sõltub kindla suuruse ξ valikust. Funktsiooni

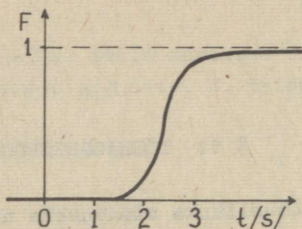
$$F_x(\xi) = P\{x < \xi\} \quad (1)$$

nimetatakse juhusliku suuruse x jaotusfunktsiooniks ehk kumulatiivseks jaotusfunktsiooniks.

Diskreetne juhuslik suurus võib omandada ainult diskreetseid väärtusi ja tema jaotusfunktsiooni graafik on trepikujuline. Joonisel 1 on täringu ühekordsel veeretamisel saadud silmade arvu jaotusfunktsiooni graafik.



Joon. 1.



Joon. 2.

Pideva juhusliku suuruse võimalikud väärtused paiknevad tihedalt. Pideva suuruse jaotusfunktsioon on pidev. Joonisel 2 on mingi viitsütiku viiteaja jaotusfunktsiooni graafik.

Poollõigu* $[a, b)$ tabamise tõenäosus

$$P\{a \leq x < b\} = F_X(b) - F_X(a), \quad (2)$$

sest vahemik $x < b$ on vahemiku $x < a$ ja poollõigu $a \leq x < b$ summa.

Kitsa vahemiku $(\xi, \xi + \Delta\xi)$ tabamise tõenäosus on diferentseeruva jaotusfunktsiooni korral ligikaudu võrdeline vahemiku laiuslega:

$$P\{\xi \leq x < \xi + \Delta\xi\} \approx f_X(\xi) \Delta\xi. \quad (3)$$

"Tabamistihedust" iseloomustavat võrdetegurit

$$f_X(\xi) = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{P\{\xi \leq x < \xi + \Delta\xi\}}{\Delta\xi} = \frac{dF_X(\xi)}{d\xi} \quad (4)$$

nimetatakse juhusliku suuruse x tõenäosustiheduseks punktis ξ . Funktsiooni $f_X(\xi)$ nimetatakse suuruse x tihedusfunktsiooniks.

* Poollõiguks nimetatakse ühelt poolt kinnist, teiselt poolt lahtist piirkonda.

Kui tihedusfunktsioon on olemas, siis

$$F_X(a) = \int_{-\infty}^a f_X(\xi) d\xi, \quad (5)$$

$$P\{a \leq x < b\} = \int_a^b f_X(\xi) d\xi, \quad (6)$$

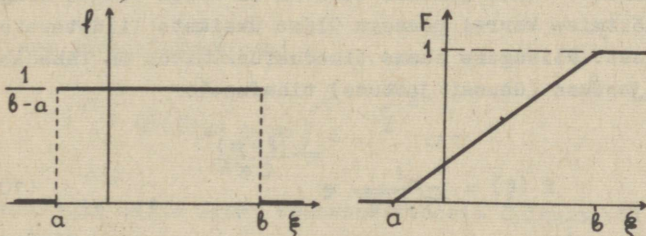
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\xi) d\xi = 1. \quad (7)$$

Diskreetse suuruse korral asendab tihedusfunktsiooni võimalike üksikväärtuste ξ_i tabamise tõenäosuste hulk

$$P_X(\xi_i) = P\{x = \xi_i\}. \quad (8)$$

Vaatleme kolme sageli esinevat jaotust.

1°. Ristkülikjaotuse ehk ühtlase jaotuse korral on suuruse x tõenäosustihedus kõigis vahemiku (a, b) punktides ühesugune, väljaspool vahemikku aga null. Ristkülikjaotuse tihedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni graafikud on kujutatud joonisel 3.



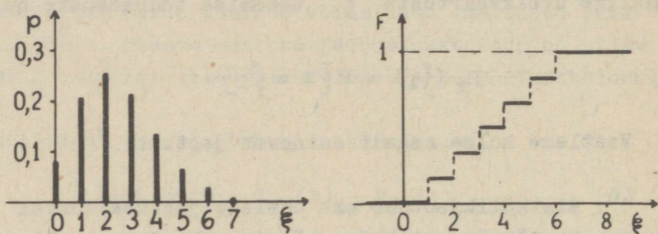
Joon. 3.

2°. Lähenegu praktiliselt lõpmatu poolestusajaga radioaktiivses preparaadis tõkestamatult kasvava ajavahemiku t vältel lagunevate tuumade arvu n ja ajavahemiku suhe n/t kindlale suurusele μ . Lagunemised toimuvad

juhuslikult ja teineteisest sõltumatult. Mitu tuuma läguneb ajaühikus? Otsitav x on diskreetne juhuslik suurus, tõenäosus, et $x = \xi$ (ξ on null või naturaalarv), avaldub järgnevalt:

$$p_x(\xi) = \frac{\mu^\xi}{\xi!} e^{-\mu} \quad (9)$$

Valem (9) kirjeldab Poissoni jaotust. Joonisel 4 on kujutatud Poissoni jaotuse $p_x(\xi)$ diagramm ja jaotusfunktsiooni graafik juhul $\mu = 2,5$. Tõenäosus $p_x(\xi)$ ei muutu ξ suurendamisel kunagi täpselt nulliks.



Joon. 4.

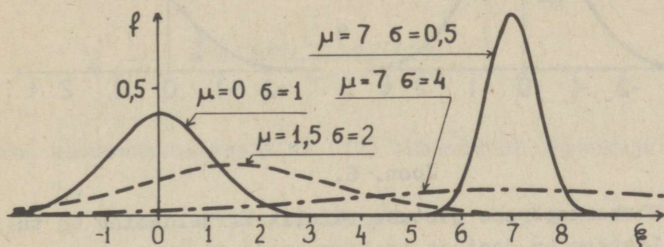
3^o. Suure arvu ühtlaselt väikeste sõltumatute^{*} juhuslike suuruste summa jaotuse iseloom ei sõltu teatud tingimuste täitmise korral peaaegu üldse üksikute liidetavate jaotustest. Niisuguse summa tihedusfunktsioon on lähedane normaaljaotuse (Gaussi jaotuse) tihedusele

$$f(\xi) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\xi - \mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (10)$$

kus μ ja σ on vabad parameetrid. Normaaljaotusfunktsioon ei kuulu elementaarfunktsioonide hulka.

* Juhuslik suurus on teistest juhuslikest suurustest sõltumatu siis, kui tema jaotus ei olene teiste juhuslike suuruste väärtustest.

Joonisel 5 on esitatud näitena mõned normaaltihedusfunktsiooni graafikud.



Joon. 5.

Kui ξ asemel valida muutujaks

$$t = \frac{\xi - \mu}{\sigma}, \quad (11)$$

siis normaaltihedusfunktsiooni valem lihtsustub:

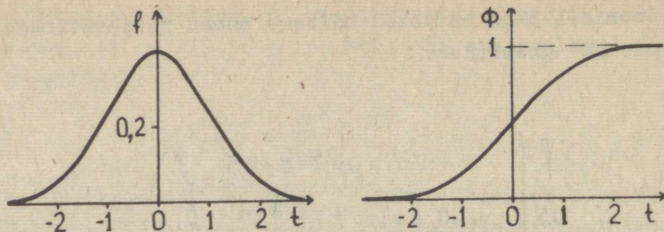
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}. \quad (12)$$

Vastava jaotusfunktsiooni

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{\tau^2}{2}} d\tau \quad (13)$$

tabeli võib leida igast tõenäosusteooria õpikust või käsi-
raamatust.

Joonisel 6 on kujutatud funktsioonide $f(t)$ ja $\phi(t)$
graafikud.



Joon. 6.

Ebakorrapärase jaotuse täielik kirjeldamine on tülikas. Lihtsam on jaotust iseloomustada üksikute arvudega, milleks võivad olla sobivalt valitud kvantiilid või momendid.

Juhusliku suuruse x p -kvantiiliks ehk protsentpunktiks nimetatakse niisugust väärtust $x = \xi_p$, mille korral

$$F_x(\xi_p) = p. \quad (14)$$

Funktsiooni $\xi = \xi_p(p)$ nimetatakse pöördjaotusfunktsiooniks ehk kvantiilfunktsiooniks. Tähtsaim kvantiil on mediaan

$$\lambda(x) = \xi_{0.5}. \quad (15)$$

Mediaan jagab x võimalike väärtuste hulga kaheks võrdtõenäoseks pooleks:

$$P\{x < \lambda\} = P\{\lambda \leq x\} = \frac{1}{2}. \quad (16)$$

Tõsiasi

$$P\{\xi_{0.5(1-\alpha)} \leq x < \xi_{0.5(1+\alpha)}\} = \alpha \quad (17)$$

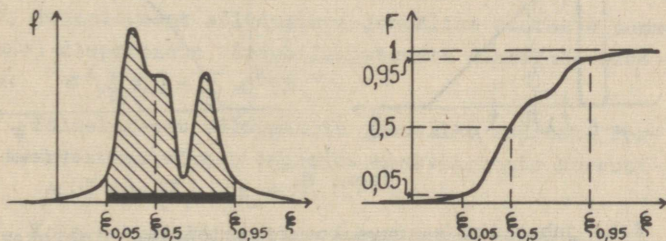
sõnastatakse järgnevalt: usaldatavusega α võib väita, et x asub piirkonnas $\left[\xi_{0,5(1-\alpha)}; \xi_{0,5(1+\alpha)} \right)$. Metroloogias arvutatakse piirkonna keskpunkt ja poollaius

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{\int \xi_{0,5(1-\alpha)} + \int \xi_{0,5(1+\alpha)}}{2} \\ \Delta_\alpha x &= \frac{\int \xi_{0,5(1+\alpha)} - \int \xi_{0,5(1-\alpha)}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ning kasutatakse avaldise (17) lühendatud leppekuju:

$$x = x_0 \pm \Delta_\alpha x. \quad (19)$$

Joonisel 7 on kujutatud ebakorrapärane tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon ning näidatud 5%, 50% ja 95% kvantiilid ja 90% usaldusvahemik. Viirutatud osasse jääb 90% kõvera $f_x(\xi)$ alusest pindalast.



Joon. 7.

Momentidest on tähtsaimad esimene algmoment

$$\mu(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi f_x(\xi), \quad (20)$$

mida nimetatakse keskvärtuseks ehk matemaatiliseks ooteväärtuseks, ja teine tsentraalmoment

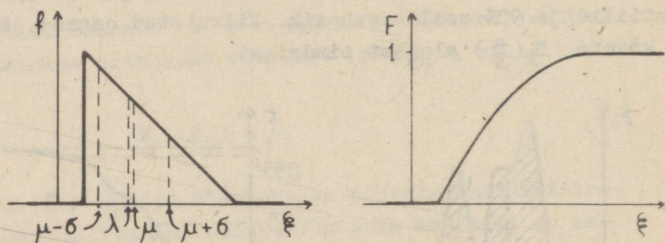
$$\sigma^2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi - \mu)^2 f_X(\xi) d\xi, \quad (21)$$

mida nimetatakse dispersiooniks. Diskreetse jaotuse korral asendatakse integraalid vastavate summadega.

Mõnede praktikas oluliste jaotuste korral momendid puuduvad (integraalid ei koonu).

Suurus $(x - \mu)^2$ iseloomustab juhusliku suuruse hälvet keskvärtusest. Dispersioon on suuruse $(x - \mu)^2$ keskvärtus. Ruutjuurt dispersioonist σ nimetatakse standardhälbeks ehk ruutkeskmiseks hälbeks.

Joonisel 8 on kujutatud ebasümmeetriline tihedusfunktsioon ja jaotusfunktsioon ning näidatud μ , λ , $\mu + \sigma$ ja $\mu - \sigma$.



Joon. 8.

Kahe juhusliku suuruse kovariatsiooniks nimetatakse segamomenti

$$\text{cov}(x, y) = \mu\{[x - \mu(x)][y - \mu(y)]\}. \quad (22)$$

Kahe juhusliku suuruse vahelise lineaarse sõltuvuse mõõduks on suhteline kovariatsioon

$$\rho(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma(x) \sigma(y)}, \quad (23)$$

mida nimetatakse korrelatsioonikordajaks. Korrelatsioonikordaja väärtused paiknevad lõigus $[-1; 1]$. Sõltumatute suuruste korral $\varrho(x, y) = 0$, lineaarselt sõltuvate suuruste $(ax + by = c)$ korral $|\varrho(x, y)| = 1$.

Keskvärtuse ja dispersiooni tähtsus tõenäosusteoorias ja selle rakendustes on tingitud nende suuruste omadustest:

1°. Konstandi c keskvärtus võrdub sama konstandiga:

$$\mu(c) = c.$$

2°. Konstandi dispersioon on null: $\sigma^2(c) = 0$.

3°. Konstantse kordaja võib tuua keskvärtuse märgi ette: $\mu(cx) = c\mu(x)$.

4°. Konstantse kordaja võib tuua dispersiooni märgi ette ruudus: $\sigma^2(cx) = c^2\sigma^2(x)$.

5°. Juhuslike suuruste (ka teineteisest sõltuvate) summa keskvärtus võrdub liidetavate keskvärtuste summaga: $\mu(\sum_i x_i) = \sum_i \mu(x_i)$.

6°. Teineteisest sõltumatute juhuslike suuruste summa (või vahe) dispersioon võrdub liidetavate dispersioonide summaga: $\sigma^2(\sum_i x_i) = \sum_i \sigma^2(x_i)$.

7°. Teineteisest sõltumatute juhuslike suuruste korrutise keskvärtus võrdub tegurite keskvärtuste korrutisega: $\mu(\prod_i x_i) = \prod_i \mu(x_i)$.

8°. Kahe juhusliku suuruse summa dispersioon võrdub liidetavate dispersioonide ja kahekordse kovariatsiooni summaga: $\sigma^2(x+y) = \sigma^2(x) + \sigma^2(y) + 2\varrho(x,y)\sigma(x)\sigma(y)$.

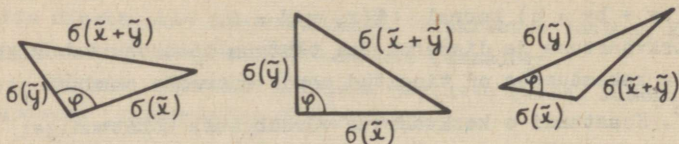
9°. Kahe juhusliku suuruse korrutise keskvärtus võrdub tegurite keskvärtuste korrutise ja kovariatsiooni summaga: $\mu(x,y) = \mu(x)\mu(y) + \varrho(x,y)\sigma(x)\sigma(y)$.

Kaheksanda omaduse valemi sarnasus koosinuslausega tingimusel

$$\cos \varphi = - \varrho(x,y) \quad (24)$$

võimaldab standardhälbeid geomeetriliselt liita. Öeldut

illustreerib joonis 9.



Joon. 9.

Üheksandast omadusest järeldub, et juhuslike suuruste suhte keskväertus ei võrdu keskväertuste suhtega, sest ja-gatis ja nimetaja pole sõltumatud. Metroloogias uuritavate juhuslike suuruste suhetel enamasti momendid puuduvad.

Keskväertus ja dispersioon ei fikseeri jaotusseadust. Kõikvõimalike ühe ja sama keskväertusega $\mu(x)$ ning ühe ja sama dispersiooniga $\sigma^2(x)$ jaotuste korral kehtib Tšebšõvi võrratus:

$$P\{|x - \mu| \leq \alpha \sigma\} > 1 - \frac{1}{\alpha^2}, \quad (25)$$

kus α on suvaline positiivne arv.

Ristkülikjaotuse korral on $\mu = \lambda = (a+b)/2$ ja $\sigma^2 = (b-a)^2/12$.

Poissoni jaotuse keskväertus on kooskõlas valemis (9) kasutatud tähistustega: $\mu(x) = \mu$. Dispersioon $\sigma^2 = \mu$, mediaan $\lambda < \mu$.

Normaaljaotuse keskväertus ja dispersioon on kooskõlas valemis (10) kasutatud tähistustega, $\lambda = \mu$. Normaaljaotuse korral on $\mu - \sigma \approx \xi_{0,16}$, $\mu + \sigma \approx \xi_{1-0,16}$ ja $P\{\mu - \sigma < x < \mu + \sigma\} \approx 0,68$.

Võrdus $\lambda = \mu$ kehtib kõigi keskväertust omavate sümmeetriliste jaotuste korral.

Eespool oli nimetatud normaaljaotuse tekkimise tingimus. See tingimus järeldub Laplace'i, Gaussi, Ljapunovi,

Lindebergi ja veel mitme matemaatiku poolt järk-järgult täiustatud tsentraalsest piirteoreemist. Olgu x_i lõplike dispersioonidega sõltumatud juhuslikud suurused ja

$$x'_i = \begin{cases} x_i, & \text{kui } |x_i - \mu(x_i)| \leq \varepsilon \sigma(X) \\ \mu(x_i), & \text{kui } |x_i - \mu(x_i)| > \varepsilon \sigma(X), \end{cases}$$

kus ε on mingi positiivne arv ning $X = \sum_{i=1}^n x_i$. Tähis-

tame $\Delta = \sigma^2(X) - \sum_{i=1}^n \sigma^2(x'_i)$. Kui kõikvõimalike

väärtuste korral $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{\sigma^2(X)} = 0$, siis läheneb X jaotus

liidetavate arvu piiramatul suurendamisel normaaljaotusele. Liidetavate jaotused võivad normaaljaotusest hoopiski erineda. Tsentraalse piirteoreemi tõestamisel võib lähtuda ka ülaltoodust erinevalt formuleeritud eeldustest.

Shannon (1948.a.) ja Halfin (1958.a.) näitasid, et normaalne jaotusseadus sisaldab juhusliku suuruse kohta vähem informatsiooni kui mistahes teine sama dispersiooniga jaotusseadus.³ See omadus vabandab (aga ei õigusta) normaaljaotuse hüpoteesi tundmatu jaotusseaduse korral.

Küsimused ja ülesanded:

1. Sooritage "Kulli ja kirja" mängu katse. Kui suur oli "kirja" suhteline sagedus 5, 10 ja 20 viske korral?

2. Kui suur on tõenäosus, et "Kulli ja kirja" mängus tuleb 10 viske korral alati "kiri"?

3. Tõenäosus, et tänaval 30 esimest vastutulejat on kõik meessoost, näib olevat $(0,5)^{30} \approx 10^{-9}$. Miks tegelikult kirjeldatud sündmus ei ole nii haruldane?

³ Informatsiooni mõõduks on integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\xi) \log f_X(\xi) d\xi + \text{const.}$$

4. Leidke näiteks sündmus, mille tõenäosus on 0,2, ja sündmus, mille tõenäosus on -0,5!

5. Millise omaduse tõttu on täringu kindlale tahule langemise tõenäosus täpselt 1/6? Kuidas ehitada väliselt õige täringuga sarnast "valetäringut", mis garanteeriks täringumängus maksimaalse edu?

6. Jaotusfunktsiooni tabelis on andmed: $F(-\infty) = 0,2$; $F(1) = 0,5$; $F(2) = 0,4$; $F(\infty) = 1,5$. Milliseid viigu on võimalik nendes andmetes kindlaks teha?

7. Olgu "Kulli ja kirja" mängus "kulli" korral $x = 0$, "kirja" korral $x = 1$. Koostage $F_x(\xi)$ graafik ühe viske tulemuse jaoks! Koostage jaotusfunktsiooni graafik kahe viske tulemuste summa jaoks!

8. Koostage kahe täringu heitmisel saadud silmade x jaotuse $p_x(\xi)$ diagramm ja jaotusfunktsiooni graafik!

9. Millisele jaotusseadusele allub:

a) 4-kohalisest logaritmade tabelist huupi valitud arvu ümardamisviga;

b) ühe minuti jooksul stsintilloskoobis registreeritud sähvatuste arv;

c) rosinate arv rosinakuklis;

d) 100 kuni 110 grammise kartuli mass?

10. Mis võib põhjustada maanteel sõitvale autole kindlas ajavahemikus vastutulevate autode arvu jaotuse erinevust Poissoni jaotusest?

11. Koostage riskülikjaotuse tihedusfunktsiooni ja jaotusfunktsiooni avaldised!

12. Bussipeatusse, kus liiklusintervall peaks olema 10 min., tuleb juhuslikul momendil $t = 0$ reisija ja jääb bussi ootama. Reisija hindab ootamise ajal pidevalt veel oodata jääva aja t' keskväärtust $\mu(t')$ ja tõenäosust $P\{t' < 5 \text{ min.}\}$. Mida otsustab ootaja kriitilistel momentidel $t = n \cdot 10 \text{ min.}$? Joonistage graafik, kus on näidatud $\mu(t')$ ja $P\{t' < 5 \text{ min.}\}$ sõltuvus oodatud ajast, kui

reisija lahkus peatusest 30 minuti pärast jalgsi!

13. Kui suur on joonisel 4 kirjeldatud jaotuse korral sündmuse $x = \mu$ tõenäosus ja suuruse x tõenäosustihedus punktis $x = \mu$? Kui suur on pideva jaotuse korral sündmuse $x = \lambda$ tõenäosus?

14. Tuletage ristkülikjaotuse dispersiooni valem?

15. Ristkülikjaotus $a = -1$ ja $b = 1$. Leidke keskväär-tus, mediaan, dispersioon ja standardhälve!

16. Sõltumatud suurused x ja y alluvad mõlemad eelmises ülesandes kirjeldatud jaotusseadusele. Koostage juhusliku suuruse $z = x + y$ tihedusfunktsiooni ning jaotusfunktsiooni avaldised ja graafikud! Leidke x , y ja z jaoks 50% ja 99% usaldusvahemik! Kuidas suhtub z usaldusvahemiku laius x ja y usaldusvahemike laiuste summasse?

17. Leidke põhjendus tõsiasjale, et normaalselt jaotatud suuruste summa jaotus on alati normaalne!

18. x on jaotatud normaalselt, $\mu(x) = 0$ ja $\sigma(x) = 10$. Leidke ilma $\phi(t)$ tabelit kasutamata ligikaudselt vahemiku $(-1; 1)$ tabamise tõenäosus!

19. Leidke normaalselt jaotatud suuruse ($\mu = 10$; $\sigma = 2$) 0,1% ja 90% kvantilid ja avaldage selle suuruse 99% usaldusvahemik valemi (19) kohaselt!

20. Leidke $P\{|x - \mu| < 3\sigma\}$ ristkülikjaotuse ja normaaljaotuse korral. Mida võib öelda selle tõenäosuse kohta siis, kui jaotusseadus pole teada?

21. Leidke näiteid negatiivse ja positiivse kovariatsiooniga juhuslike suuruste paaride kohta!

$$22. \sigma^2(x + x) = \sigma^2(x) + \sigma^2(x) = 2 \sigma^2(x); \\ \sigma^2(x + x) = \sigma^2(2x) = 4 \sigma^2(x); \quad 2 = 4. \quad \text{Kus on viga?}$$

23. Avaldage $\sigma^2(x - x)$ ja $\sigma^2(x - y)$ sõltumatute suuruste x ja y dispersioonide kaudu!

24. Kui suur on $\xi(x, y)$ joonisel 9 esitatud näidete korral?

§ 2. MATEMAATILISE STATISTIKA MÕISTED.

Tõenäosusteooria on otseselt rakendatav vaid ette teada olevate jaotusseaduste korral. Juhuslike suuruste empiiriline uurimine on matemaatilise statistika ülesanne.

Juhusliku suuruse x kohta täieliku informatsiooni saamiseks oleks tarvilik väärtuse lõpmatukordne määramine, mis annaks x kõikvõimalike väärtuste kujutletava üldkogumi. Väärtuse n -kordsel määramisel saadud tulemuste lõplikku kogumit x_1, x_2, \dots, x_n nimetatakse väljavõtteks (üldkogumist). Väärtused x_1, x_2, \dots on väljavõtte komponendid, komponentide arv n on väljavõtte maht.

Järjestatud väljavõtet

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad (26)$$

nimetatakse variatsioonreaks. Sulgudes asuv indeks on komponendi järg. Järg ei pruugi kokku langeda esialgse, näiteks kronoloogilise, rea sulgudeta kirjutatava indeksiga.

Empiiriliseks jaotusfunktsiooniks nimetatakse trepp-funktsiooni

$$F_x^{(n)}(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \xi \leq x_{(1)} \\ \frac{1}{n}, & \text{kui } x_{(1)} < \xi \leq x_{(i+1)} \\ 1, & \text{kui } x_{(n)} < \xi \end{cases} \quad (27)$$

n komponendi korduval määramisel saadakse iga kord uus konkreetne väljavõte, uus variatsioonrida ja uus empiiriline jaotusfunktsioon. 1933.a. tõestas Glivenko, et väljavõtete mahu piiramatult suurendamise korral kõik empiirilised jaotusfunktsioonid lähenevad juhusliku suuruse x

jaotusfunktsioonile:

$$P \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\xi} \left| F_x(\xi) - F_x^{(n)}(\xi) \right| = 0 \right\} = 1. \quad (28)$$

Matemaatilisel statistikal on kaks teineteisega tihedalt seotud põhiülesannet:

1°. Juhuslike suuruste jaotuste parameetrite hindamine.

2°. Juhuslike suuruste kohta püstitatud hüpoteeside kontrollimine.

Kummagi ülesande korral annab lähteandmed konkreetne väljavõte.

Juhusliku suuruse jaotuse parameetri punkthinnanguks võetakse väljavõtte komponentide sobivalt valitud funktsioon. Kõiki väljavõtte komponentide funktsioone nimetatakse statistikuteks. Statistikuteks on näiteks aritmeetiline keskmine $m_n = \sum_{i=1}^n x_i/n$, väljavõtte suurim komponent $\max_i x_i = x_{(n)}$, haare ehk variatsiooniuulatus $w_n = \max_i x_i - \min_i x_i = x_{(n)} - x_{(1)}$. Kindla järjega i komponenti $x_{(i)}$ nimetatakse i -ndaks järjestatistikuks. Paaritu mahuga väljavõtte korral nimetatakse kesmist järjestatistikut $l_n = x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ empiiriliseks mediaaniks. Paarismahu korral valitakse empiiriliseks mediaaniks suvaline arv vahemikust $(x_{n/2}, x_{1+n/2})$, tavaliselt vahemiku keskpunkt.

Indeks n statistiku tähise juures näitab väljavõtte mahtu.

Ühe ja sama parameetri hindamiseks võib kasutada erinevaid statistikuid. Näiteks keskväertuse $\mu(x)$ hinnanguks võib olla nii aritmeetiline keskmine m_n kui ka empiiriline mediaan l_n . Sobivama statistiku valimiseks on tarvis tunda hinnangute omadusi.

Väljavõtte komponendid on juhuslikud suurused ja nende funktsioon omandab iga uue konkreetse väljavõtte korral

uue väärtuse. Statistlik on juhuslik suurus, mis saab väljavõtte realiseerimisel konkreetse väärtuse. Statistikut kui juhuslikku suurust kirjeldatakse statistiku jaotusseaduse parameetritega $\mu(\xi_n)$, $\sigma^2(\xi_n)$, $\lambda(\xi_n)$ jne. Statistikutute parameetreid ei tohi segi ajada juhusliku suuruse x parameetritega.²²

Keskväertust omav statistika ξ_n on suuruse x parameetri γ nihutamata hinnang siis, kui

$$\mu(\xi_n) = \gamma. \quad (29)$$

Hinnang on konsistentne, kui sõltumatult $\varepsilon > 0$ valikust

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\xi_n - \gamma| > \varepsilon\} = 0. \quad (30)$$

Vähimruutude meetodi korral võetakse hinnangu ebatäpsuse mõõduks hinnangu vea ruudu keskväertus

$$S^2(\xi_n) = \mu[(\xi_n - \gamma)^2]. \quad (31)$$

Teatud tingimustel²³ rahuldab iga nihutamata hinnangu ebatäpsus võrratust

$$S^2(\xi_n) \geq S_0^2(\gamma) = \frac{1}{n I(\gamma)}, \quad (32)$$

kus $I(\gamma)$ on väljavõtte ühes komponendis sisalduv informatsioon²⁴ parameetri γ kohta. Valemi (32) on Fréchet' (1943. a.), Rao (1945. a.) ja Grameri (1946. a.) tuletatud informatsioonivõrratuse erijuht.

²² Niisugune oht on statistiku m_n (aritmeetiline keskmine) korral.

²³ Tingimuste sõnastus on komplitseeritud. Normaalkaotuse puhul on nad täidetud, riskülikkaotuse puhul mitte.

²⁴ See Fischeri poolt 1921. a. tarvitusele võetud mõiste erineb informatsiooniteoorias kasutatavast informatsiooni mõistest.

Suhet

$$\xi(\xi_n) = \frac{s_0^2(\gamma^t)}{s^2(\xi_n)} \quad (33)$$

nimetatakse hinnangu ξ_n efektiivsuseks. Kui $\xi(\xi_n) = 1$, siis on hinnang ξ_n efektiivne, kui $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi(\xi_n) = 1$, siis asümptootiliselt efektiivne.

Statistikut, mis sisaldab väljavõttes γ^t kohta sisalduvat informatsiooni täielikult, nimetatakse γ^t piisavaks hinnanguks. Pärast piisava hinnangu arvutamist võib väljavõtte "hävitada" parameetri γ^t kohta informatsiooni kaotamata. Efektiivne hinnang on informatsioonivõrratuse kehtivustingimustel alati piisav, piisav hinnang aga ei pruugi olla efektiivne.

Väljavõte on n-komponendiline juhuslik suurus. Tema tihedusfunktsioon on n-mõõtmelise ruumielemendi tabamistõenäosuse ja ruumala suhe. Sõltumatute komponentidega juhusliku suuruse tihedusfunktsioon võrdub komponentide tihedusfunktsioonide korrutisega:

$$\Psi(\xi_1, \gamma^t) = f_{x_1}(\xi_1, \gamma^t) \cdot f_{x_2}(\xi_2, \gamma^t) \cdot \dots \cdot f_{x_n}(\xi_n, \gamma^t). \quad (34)$$

Matemaatilise statistika ülesannetes on ξ_1 väärtusteks konkreetse väljavõtte komponendid x_1 ja funktsiooni argumentiks jääb muutuv suurus γ^t . Funktsiooni $\Psi(x_1, \gamma^t) = \Psi(\gamma^t)$ nimetatakse tõepärasusfunktsiooniks. Tundmatu parameetri γ^t tõepäraseimaks väärtuseks nimetatakse väärtust $\gamma^t = g$, mille juures $\Psi(\gamma^t)$ on maksimaalne. Maksimumi tingimust

$$\frac{\partial [\ln \Psi(x_1, \gamma^t)]}{\partial \gamma^t} = 0 \quad (35)$$

nimetatakse tõepärasusvõrrandiks. Kui parameetri jaoks on olemas efektiivne hinnang, siis on see tõepärasusvõrrandi ainsaks lahendiks. Ülalkirjeldatud maksimaalse tõepärasuse meetod on hinnanguvalemite tuletamisel kõige tarvitatavam.

Vähimaruutude meetod järeldub maksimaalse tõepärasuse meetodist normaaljaotuse eeldusel. Kahjuks pole maksimaalse tõepärasuse meetod kitsendavate eelduste tõttu päris universaalne.

Punkthinnang ei kirjelda iseenele täpsust. Kui hinnangu täpsuse hindamiseks kasutada teist punkthinnangut, siis jääb hindamata veel hinnangu täpsuse hinnangu täpsus jne. lõpmatuseni. "Nõiaringist" aitab välja vahemikhinnangute meetod, mis on tihedalt seotud matemaatilise statistika teise põhiülesande, statistiliste hüpoteeside kontrollimisega. Püstitame hüpoteesi: hindamisele kuuluv näitav y^t asub mingite statistikutel g_- ja g_+ poolt piiratud vahemikus. Hüpoteesi kontrollimise eeskirja nimetatakse testiks. Testi abil määratakse tõenäosus selleks, et hüpotees ei ole ekslik

$$P\{g_- \leq y^t \leq g_+\} = \alpha. \quad (36)$$

Sageli valitakse ette tõenäosus α ja konstrueeritakse vastavad statistikud g_- ning g_+ . Koostatud avaldis ongi vahemikhinnang, $[g_-, g_+]$ on usaldusvahemik[■] ehk usalduspiirkond ja α on usaldatavus. Eksimise tõenäosust $1 - \alpha$ nimetatakse olulisuse nivooks. Hinnangu kokkuleppeiline kirjutusviis metroloogias on järgmine:

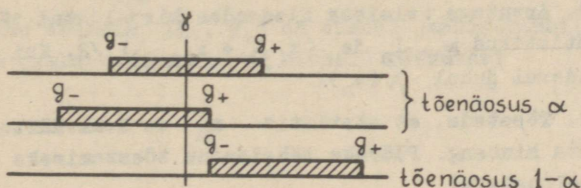
$$y^t = y_0^t \pm \Delta_\alpha y^t, \quad (37)$$

kus

$$\left. \begin{aligned} y_0^t &= \frac{g_+ + g_-}{2}, \\ \Delta_\alpha y^t &= \frac{g_+ - g_-}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

■ Pideva jaotuse korral pole mõtet lahtist vahemikku, poollõiku ja lõiku üksteisest eristada.

Valemities (17...19) olid otspunktid kindlad ja vahemikku langev suurus juhuslik, valemities (36...38) on aga vahemikus asuv suurus kindel ja vahemiku otspunktid juhuslikud. Kui märkiviskaja tabab väikese palliga põrandal asuvat karpi tõenäosusega α , siis on olukord analoogiline valemi (17) abil kirjeldatavaga. Kui α on tõenäosus katta põrandal asuvat palli visatava karbiga, siis on olukord analoogiline vahemikhinnanguga. Seetõttu peab valemities (36, 37) sõnastama järgnevalt: "Vahemik $[g_-, g_+)$ katab suuruse γ tõenäosusega α ." Üeldut illustreerib joonis 10.



Joon. 10.

Vahemikhinnang ei sisalda tavaliselt kogu väljavõttes leiduvat informatsiooni, seda eriti suure usaldatavuse puhul. Seepärast peab vahemikhinnangute kasutamisel hoolitsema alginformatsiooni (eelteadmised, väljavõtte komponentide või piisavate statistikute väärtused) otse se säilimise või restaureeritavuse eest.

Kaasaegses metrooloogias on vahemikhinnangute meetod punkthinnangute meetodit pea täielikult välja tõrjumas.

Jaotuseaduse parameetrite hindamiseks on tarvis aprioorse iseloomuga eelteadmisi uuritava juhusliku suuruse kohta. Enne kui lugeda väljavõtte aritmeetilist keskmist m_n suuruse x keskväertuse hinnanguks, peab teadma, kas keskväertus üldse eksisteerib. Väljavõtte järgi empiirilisel otsust teha pole kahjuks põhimõtteliselt võimalik. Seetõttu pööratakse järjest rohkem tähe-

lepanu mitteparameetrilise statistika meetoditele. Mitteparameetrilise vahemikhinnangu korral on hinnatavaks suuruseks mingi kvantiil, näiteks mediaan, radadeks g_- ja g_+ on testi abil määratavad järjestatistikud.

Küsimused ja ülesanded.

1. Koostage väljavõtte (1,18; -0,27; 0,10; -2,30; -0,97; -1,21; 0,21; -0,16; -0,20; 1,22; -1,16) variatsioonirida ja empiirilise jaotusfunktsiooni graafik. Võrrelge seda normaaljaotuse ($\mu = 0$, $\sigma = 1$) graafikuga! (Kirjeldatud väljavõtte on saadud nimetatud jaotusega juhuslike arvude tabelist.)

2. Arvutage eelmises ülesandes kirjeldatud väljavõtte statistikud m_n , l_n ja $(x_{(3)} + x_{(n-2)}) / 2$. Kui suur on vaadeldaval juhul $\mu(m_n)$?

3. Tõestada, et statistik m_n on keskväärtuse nihutamata hinnang. Pöörake tähelepanu tõestamiseks vajalikele eeldustele!

4. Kuidas leida Glivenko teoreemi alusel kvantiili ξ_p veenvat hinnangut?

5. Tuletage $S_0^2(\mu)$ valem normaaljaotuse jaoks!

6. Leidke keskväärtuse hinnangu m_n dispersioon normaaljaotuse korral!

7. Sõnastage ja tõestage Tšebõšovi teoreem (suurte arvude seadus):

$$P\{|m_n - \mu| < \varepsilon\} > 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}, \quad (39)$$

kus ε on kuidahes väike positiivne arv. Lähtuge Tšebõšovi võrratusest ja dispersioonide liitmise reeglist!

8. Leidke näiteid efektiivsete hinnangute ja mitteefektiivsete nihutamata hinnangute kohta!

9. Sõltumatute komponentidega normaalse väljavõtte tihedusfunktsiooni valemile saab anda kuju:

$$\varphi = (\sigma \sqrt{2\pi})^{-n} e^{-\frac{n\mu}{2\sigma^2}(2m_n - \mu)} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n \xi_i^2} \quad (40)$$

Kuidas võimaldab avaldis (40) tõestada μ hinnangu m_n piisavust?

10. Kui valemis (40) μ ja σ lugeda argumentideks ja ξ_i parameetriteks, siis on $\varphi(\mu, \sigma)$ tõepärasusfunktsioon. Tuletage μ hinnangu valem maksimaalse tõepärasuse meetodil!

11. Kuidas sõnastada mõõtmistulemuse hinnangut $U = (1,183 \pm 0,012_{99\%}) V$?

12. Kas vahemik $[g_-, g_+)$ on tuntud jaotusetüübi, väljavõtte ja usaldatavuse korral üheselt määratav?

§ 3. MÕÕTMISVEAD.

Olgu mõõdetav suurus X ajast sõltumatu. Mõõtmistulemus x on juhuslik suurus, mis erineb tundmatust X tundmatuks jääva mõõtmisvea võrra. n -kordsel mõõtmisel saame n -komponendilise mõõtmistulemuste väljavõtte: $x_1, x_2, \dots, x_1, \dots, x_n$. Mõõtmistulemus näib kindla suurusena vaid siis, kui haare on lugemi ümardamisveast väiksem.

Mõõdetava suurusega seatakse vastavusse tavaliselt keskvärtus $\mu(x)$, mida saab väljavõtte järgi hinnata.³ Vahet $\mu(x) - X$ nimetatakse süstemaatiliseks mõõtmisveaks, vahesid $x_1 - \mu(x) - X$ juhuslikeks mõõtmisvigadeks. Kui mõõtmistulemusel keskvärtus puudub, siis seatakse mõõdetava suurusega samasugusesse vastavusse mediaan $\lambda(x)$. Viimane kokkulepe on mõnel juhul õigem ka siis, kui keskvärtus on olemas.

³ Keskvärtust $\mu(x)$ ei tohi segi ajada täpselt teada oleva väljavõttekeskmise m_n -ga.

Süsteematacilisel veal võib olla mitu põhjust:

- 1°. Mõõtmismeetodi ebatäielikkus ja arvutusvalemite ebatäpsus (teoreetiline viga).
- 2°. Lähteandmete ja konstantide ebatäpsus (lähteveiga).
- 3°. Kasutatavate mõõtude ja mõõteriistade ebatäpsus (süsteemataciline riistaviga).
- 4°. Häirete ja välistingimuste ebasoodne mõju (süsteemataciline häireveiga).
- 5°. Silmapetted ja eksitavad harjumused (subjektiivne süsteemataciline viga).

Teoreetilise vea hindamine ja vähendamine on iga eksperimendi jaoks spetsiifiline füüsikaline probleem, mis nõuab nii teooria kui ka katsetehnika põhjalikku tundmist. Mõnel juhul saab teoreetilist viga avastada empiirilisel. Selleks tuleb ühte ja sama suurust mõõta erinevate meetodite abil. Mõõtmistulemusi võrreldakse §-s 14 kirjeldatud võtetega, oluline erinevus viitab teoreetilise vea võimalikkusele.

Lähtevea hinnang peab sisalduma lähteandmetes. Veahinnanguta andmed pole kvaliteetsed. Lähteveiga pole võimalik lähteandmete kasutamisest loobumata kõrvaldada. Seetõttu võib lähteveiga eksitada ka vilunuimat eksperimentaatorit. Näiteks Millikani tuntud katsetest (58 sõltumatut mõõtmistulemust) võib Studenti testi (vt. § 6) abil leida elektroni laengu mõõtmistulemuste keskvaartuse $e = (4,7808 \pm 0,0054_{99\%}) 10^{-10}$ LÜ. Pärast täpsete röntgen-difraktsioonvõrede valmistamist ja pikkuse X-ühiku ning Avogadro arvu korrigeerimist leiti Faraday ja Avogadro arvu järgi elementaarlaengu täpsem väärtus. Ilmnes, et Millikani tulemuse viga on näidatud vahemiku poollaiusest neli korda suurem. Hilisem analüüs selgitas, et Millikan oli lähtunud õhu sisehõõrdeteguri ebatäpsusest väärtusest.

Süsteematacilist riistaviga hinnatakse kasutatavate mõõtevahendite skaalaandmete ja tunnistuste järgi. Süste-

maatulist riistaviga saab täielikult kõrvaldada ainult siis, kui eksperimentaatoril on võimalus kasutada ühikute süsteemi fikseerivaid algetalone. Tavaliselt on riistaviga kõrvaldamatu. Erandiks on nurgamõõtmised, sest nurgaühikud on defineeritud etalonita. Riistavea vähendamiseks on tarvis mõõtevahendeid täpsemini taadelda (koostades parandite tabelleid) või kasutada täpsemaid riistu. Riistade korrasoleku kontrolliks on kasulik võrrelda omavahel ka võrdtäpseid riistu.

Lähteveiga ja riistaviga kokku moodustavad nullvea, mida eksperimentaator kõrvaldada ei saa ja mille ülemmäär on võrdlusmõõduks kõigi teiste vigade hindamisel. Maksimaalse täpsuse taotlemisel püütakse muuta kõik teised vead nullveast suurusjärgu võrra väiksemaks. Kontrollitavate vigade edasine vähendamine oleks mõttetu.

Häirevea hindamise ja kõrvaldamise oskus on eksperimentikunsti tähtsaim koostisosa, üldretsepti selleks ei ole. Häireveiga on sageli ebastabiilne ja põhjustab süstemaatilise vea ajalist muutlikkust.

Kahtluse korral, et esineb subjektiivne süstemaatiline viga, lastakse mõõtmisi korrata mitmel vaatlejal ja võrreldakse tulemusi statistiliste meetodite abil.

Juhuslike vigade põhjusteks võivad olla kontrollimatud muutlikud häired, mõõtmisprotseduuri kontrollimatud varieerumised, soojuslikud fluktuatsioonid, juhuslikud subjektiivsed eksitused. Juhuslike vigu ei analüüsita tavaliselt tekkepõhjuse järgi, vaid uuritakse empiiriliselt matemaatilise statistika meetodite abil.

Järgnevates juhuslike vigade analüüsile pühendatud paragrahvides eeldatakse kõikjal, et iga üksiku vaatlustulemuse juhuslik viga ei sõltu teistest tulemustest (kovariatsioon on null) ning juhuslike vigade jaotus ei sõltu ajast. Tuleb silmas pidada, et kõik kirjeldatavad vaatlusandmete töötlemise meetodid (välja arvatud § 14) ei mõjuta ega võimalda hinnata süstemaatilisi vigu.

Juhuslike vigade teooria on pika aja jooksul paljude

nimekate teadlaste poolt peensuseni välja arendatud. Rahuldava vastuseta on aga jäänud tähtsaim küsimus: kuidas teha kindlaks vigade jaotusseadust? Jaotusfunktsiooni ran-ge empiirilise hinnangu annab Kolmogorovi test (Kolmogorov, 1933.a.). Hinnangu saamiseks on tarvis:

1°. Leida valemi (29) abil empiiriline jaotusfunktsioon $F_x^{(n)}(\xi)$.

2°. Leida tabelist 1 suuruse $D_{n,\alpha}$ väärtus.

Tabel 1

| n | $\alpha=90\%$ | $\alpha=95\%$ | $\alpha=99\%$ | n | $\alpha=90\%$ | $\alpha=95\%$ | $\alpha=99\%$ |
|----|---------------|---------------|---------------|------|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| 6 | 0,468 | 0,519 | 0,617 | 40 | 0,189 | 0,210 | 0,252 |
| 7 | 0,436 | 0,483 | 0,576 | 45 | 0,179 | 0,198 | 0,238 |
| 8 | 0,410 | 0,454 | 0,542 | 50 | 0,170 | 0,188 | 0,226 |
| 10 | 0,369 | 0,409 | 0,489 | 60 | 0,155 | 0,172 | 0,207 |
| 12 | 0,338 | 0,375 | 0,449 | 70 | 0,144 | 0,160 | 0,192 |
| 15 | 0,304 | 0,337 | 0,404 | 80 | 0,135 | 0,150 | 0,179 |
| 20 | 0,265 | 0,294 | 0,352 | 90 | 0,128 | 0,141 | 0,169 |
| 25 | 0,238 | 0,264 | 0,317 | 100 | 0,121 | 0,134 | 0,161 |
| 30 | 0,218 | 0,242 | 0,290 | | 1,22 | 1,36 | 1,63 |
| 35 | 0,202 | 0,224 | 0,269 | >100 | $\frac{1,22}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1,36}{\sqrt{n}}$ | $\frac{1,63}{\sqrt{n}}$ |

3°. Joonistada graafikud $F_x^{(n)}(\xi) - D_{n,\alpha}$ ja $F_x^{(n)}(\xi) + D_{n,\alpha}$. Graafikute vahele jääv riba katab tundmatu tõelise jaotusfunktsiooni graafiku üleni tõenäosusega α .

Jaotusfunktsiooni empiiriline hinnang on ligikaudne ja ei võimalda teha otsust keskväärtuse olemasolu ja teiste oluliste küsimuste kohta. Mõnel juhul saab jaotusseadust ära arvata füüsikaliste kaalutluste alusel. Sageli peab aga leppima mingi tüüpoletusega, näiteks: vigade jaotus on arvatavasti ligilähedaselt normaalne. Kuna praktikas võib esineda esimesel pilgul normaaljaotusega sarnanevaid halbade omadustega jaotusi, siis selline oletus on

vaatlusandmete töötlemisel kahtlane vundament.

Vaatleme lihtsat näidet. Olgu suuruse y jaotus normaalne ($\mu = 10$, $\sigma = 1$). Mõõtmisele kuulugu suurus $x = 1/y$. Juhuslik suurus x keskvärtust ei oma, tema tihedusfunktsiooni graafik on aga peaaegu eristamatu normaaltihedusfunktsiooni ($\mu = 0,1$, $\sigma = 0,01$) graafikust. Kui eksperimentaatoril x jaotuse kohta eelinformatsiooni pole, siis mõõtmistulemuste alusel erinevust normaaljaotusest avastada ei õnnestu. Kui eksperimentaator püüab mõõtmistulemuste järgi hinnata x olematut (lõpmatu suurt!) keskvärtust, saab ta teadmatult tulemuse, mis kõlbab hoopis mediaani hinnanguks. Väljavõtte mahu väga tugeva suurendamise korral hakkaks vaadeldavat tüüpi jaotuse korral hinnangu täpsus aga vastu ootusi halvenema. Seda ei juhtuks, kui eksperimentaator loeks mõned täiesti korrektsed vaatlustulemused ekseteks §-s 7 käsitletavate eeskirjade järgi.

Pole raske välja mõelda veelgi kurioossemaid näiteid. Kui eespool kirjeldatud x jaotuse tihedusfunktsioon lugeda alates sobivalt valitud ξ väärtusest identselt nulliks, võib saada jaotuse, mis on peaaegu eristamatu normaaljaotusest, kuid mille keskvärtus on mediaanist näiteks kümme korda suurem ning paikneb piirkonnas, kus $f(\xi)$ on praktiliselt null. Üldtuntud kurioosete omadustega on veel graafiku poolest normaaljaotusega sarnanev Cauchy jaotus [6, lk. 106...107; 1, lk. 117...118].

§ 4. TUNDMATU JAOTUS.

Allpool kirjeldatakse mitteparameetrilise statistika lihtsaimat, märgitestiks^{*} nimetatavat meetodit. Märgitest kasutab vaatlusandmetes sisalduvat informatsiooni tavaliselt ebataielikult; teda tarvitatakse siis, kui teised

^{*} Nimetus on seotud märgitesti siin mitte käsitletava rakendusega väljavõtetevahelise süstemaatilise erinevuse tõestamiseks.

meetodid pole ilmselt õigustatud.

Tundmatu jaotusseaduse korral pole alust keskväär-
se olemasolu eeldada. Seame mõõdetava suurusega vastavusse
mõõtmistulemuse mediaani $\lambda(x)$, mille hindamisele asumegi.

Oletame, et x jaotus on pidev. Siis on kõik üksik-
tulemused üksteisest erinevad ja arutlused lihtsustuvad.
Koostame üksiktulemustest variatsioonrea

$$x_{(1)} < x_{(2)} < \dots < x_{(i)} < \dots < x_{(n)} \quad (41)$$

ja püüame määrata sündmuse $\lambda(x) < x_{(k)}$ tõenäosust $P_k^{(n)}$.
Tähistame sündmuse $\lambda(x) < x_{(1)}$ tõenäosuse $p_1^{(n)}$, sündmu-
se $x_{(1)} < \lambda(x) < x_{(2)}$ tõenäosuse $p_2^{(n)}$, sündmuse
 $x_{(2)} < \lambda(x) < x_{(3)}$ tõenäosuse $p_3^{(n)}$ jne. Sündmus $\lambda(x) < x_{(k)}$
on loetletud sündmuste summa ja

$$P_k^{(n)} = p_1^{(n)} + p_2^{(n)} + \dots + p_k^{(n)}. \quad (42)$$

$p_1^{(n)}$ on sündmuse "kõik üksiktulemused on mediaanist
suuremad" tõenäosus. Tõenäosus, et üks kindel üksiktulemus,
näiteks x_3 , on mediaanist suurem, on mediaani definitsioo-
ni kohaselt $1/2$. Kuna n üksiktulemust on üksteisest sõl-
tumatud, siis $p_1^{(n)} = 2^{-n}$. Tõenäosus, et üks kindel üksik-
tulemus on mediaanist väiksem, ülejäänud $n-1$ aga kõik suu-
remad, on samuti 2^{-n} . Tõenäosuse $p_2^{(n)}$ leidmisel peame ar-
vestama n sellist olukorda, sest igauks n -st üksiktule-
musest võib olla mediaanist väiksem. Seega $p_2^{(n)} = n \cdot 2^{-n}$.
Tõenäosus, et kaks kindlat üksiktulemust, näiteks x_2 ja
 x_4 , on mediaanist väiksemad, ülejäänud $n-2$ tükki aga suu-
remad, on ikka 2^{-n} . $p_3^{(n)}$ leidmisel tuleb aga arvesse nii
palju võimalusi, kui palju on erinevaid kombinatsioone n
elemendist 2-kaupa.* Seega $p_3^{(n)} = \binom{2}{n} 2^{-n}$. Nii edasi

* Kombinatsioonide arv n elemendist m -kaupa

$$\binom{m}{n} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \quad (43)$$

arutledes leiame, et $P_k^{(n)} = \binom{k-1}{n} 2^{-n}$ ja

$$P_k^{(n)} = [1 + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \dots + \binom{k-1}{n}] \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (44)$$

Sama mõttekäigu rakendatavus üksiktulemuste kahaneva järjestuse kohta lubab kirjutada

$$P\{\lambda(x) > x_{(n+1-k)}\} = P\{\lambda(x) < x_{(k)}\} = P_k^{(n)}, \quad (45)$$

sest $x_{(n+1-k)}$ on kahaneva järjestuse k -s element. Tingimusel $k \leq n/2$ valemis (45) esinevad sündmused ei lõiku ja nende summa tõenäosus on $2 P_k^{(n)}$. Selle liitsündmuse vastandsündmuse tõenäosuse avaldis

$$P\{x_{(k)} \leq \lambda(x) \leq x_{(n+1-k)}\} = 1 - 2 P_k^{(n)} = \alpha \quad (46)$$

ongi mediaani otsitav vahemikhinnang usaldatavusega α .

Diskreetse jaotuse puhul jõuaksime veidi tülikamate arutlustega sama eeskirjani.

1939.a. koostas Nair funktsiooni $\alpha(k, n)$ tabeli. Tabelist 2 võib leida etteantud k järgi väikseima võimaliku üksiktulemuste arvu n , mille korral usaldatavus on vähemalt 90%, 95% või 99%.

Võtame kokku mediaani hindamise reeglid:

1^o. Valime usaldatavuse ($\alpha = 90\%$, 95% või 99%).

2^o. Sooritame $\alpha = 90\%$ korral vähemalt 5, $\alpha = 95\%$ korral vähemalt 6, $\alpha = 99\%$ korral vähemalt 8 mõõtmist. Eksete mõju vältimiseks on soovitatav sooritada vähemalt 8 ($\alpha = 90\%$), 9 ($\alpha = 95\%$) või 12 ($\alpha = 99\%$) mõõtmist. Mõõtmiste arvu suurendamine on kasulik, sest see vähendab veaintervalli. On tarvis, et üksiktulemuste arv langeks kokku tabeli 2 vastavas veerus esinevate arvudega.

3^o. Vaatame tabelist 2, milline on valitud α ja n korral k väärtus.

| k | α (%) | | | k | α (%) | | | k | α (%) | | |
|----|--------------|----|----|----|--------------|----|----|----|--------------|----|----|
| | 90 | 95 | 99 | | 90 | 95 | 99 | | 90 | 95 | 99 |
| 1 | 5 | 6 | 8 | 13 | 35 | 37 | 42 | 25 | 62 | 65 | 71 |
| 2 | 8 | 9 | 12 | 14 | 37 | 40 | 44 | 26 | 65 | 67 | 73 |
| 3 | 11 | 12 | 15 | 15 | 40 | 42 | 47 | 27 | 67 | 70 | 76 |
| 4 | 13 | 15 | 18 | 16 | 42 | 44 | 49 | 28 | 69 | 72 | 78 |
| 5 | 16 | 17 | 21 | 17 | 44 | 47 | 52 | 29 | 71 | 74 | 80 |
| 6 | 18 | 20 | 24 | 18 | 47 | 49 | 54 | 30 | 74 | 77 | 83 |
| 7 | 21 | 23 | 26 | 19 | 49 | 51 | 57 | 31 | 76 | 79 | 85 |
| 8 | 23 | 25 | 29 | 20 | 51 | 54 | 59 | 32 | 78 | 81 | 87 |
| 9 | 26 | 28 | 32 | 21 | 53 | 56 | 61 | 33 | 80 | 83 | 90 |
| 10 | 28 | 30 | 34 | 22 | 56 | 58 | 64 | 34 | 82 | 86 | 92 |
| 11 | 30 | 33 | 37 | 23 | 58 | 61 | 66 | 35 | 85 | 88 | 94 |
| 12 | 33 | 35 | 39 | 24 | 60 | 63 | 69 | 36 | 87 | 90 | 97 |

4°. Leiame üksiktulemuste kasvavast järjestusest k-nda arvu $x_{(k)}$ ja kahanevast järjestusest k-nda arvu $x_{(n+1-k)}$.

5°. Arvutame:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{x_{(n+1-k)} + x_{(k)}}{2} \\ \Delta_{\alpha} x &= \frac{x_{(n+1-k)} - x_{(k)}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

6°. Kirjutame vastuse:

$$\lambda(x) = x_0 \pm \Delta_{\alpha} x \quad (48)$$

Näide:

Olgu nõutav usaldatavus 95%. Sooritame 9 mõõtmist, mille tulemused olgu

1,8; 1,7; 1,9; 1,8; 2,2; 1,7; 1,9; 1,9; 1,5.

Tabeli 2 kohaselt on $\alpha = 95\%$ ja $n = 9$ korral $k = 2$. Kasvavas järjestuses teine tulemus on 1,7; kahanevas järjestuses 1,9. $x_0 = (1,9 + 1,7)/2 = 1,8$, $\Delta_{95\%} x = (1,9 - 1,7)/2 = 0,1$. $\lambda(x) = 1,8 \pm 0,1_{95\%}$.

Kirjeldataud testil on kaks olulist voorust:

1^o. Ta on põhjendatud ükskõik millise jaotuse korral.

2^o. Vaatlusandmete töötlemine on lihtne ja arvutus-töö maht minimaalne.

Sageli esineva normaaljaotuse korral annab märgitest aga ~30% liialdatud veshinnangu ja raiskab sellega mõõtmistulemustes sisalduvat informatsiooni.

§ 5. POISSONI JAOTUS. RISTKÜLJKJAOTUS.

Radioaktiivsete lagunemiste loendamisel ja mõne muu katse puhul alluvad tulemused Poissoni jaotusele (valem 9, näide joonisel 4). Poissoni jaotuse teoreetilise tõestata-vuse korral vaatlusandmete töötlus lihtsustub, sest jaotus-seaduses (9) on üksainus tundmatu parameeter: keskväertus μ . Dispersioon võrdub keskväertusega ja standardhälve ruutjuurega keskväertusest.

Keskväertuse parimaks hinnanguks on kogu mõõtmissee-ria summaarne tulemus x . Mõõtmissee-ria jagamisel osadeks ja osatulemuste keskmistamisel ei ole mõtet. Standardhälbe hinnang on \sqrt{x} ja mõõtmistäpsust iseloomustava suhtelise standardhälbe σ/μ hinnang on $1/\sqrt{x}$. Hinnangute täpsus on seda parem, mida suurem on x . Kui $x = 100$, siis $\sigma/\mu = 10\%$, kui $x = 1000$, siis $3,2\%$.

Poissoni jaotus on asümmeetriline (vt. joon. 4), mis-tõttu keskväertuse punkthinnang x_0 ei paikne keskväertuse hinnanguvahemiku keskel:

$$\mu = x_0 \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \Delta_{\alpha} x \quad (49)$$

$\Delta_{\alpha}^{+}x$ ja $\Delta_{\alpha}^{-}x$ on erinevad. $\Delta_{\alpha}^{+}x$ ja $\Delta_{\alpha}^{-}x$ väärtused $x = 0 \dots 50$ puhul on näidatud tabelis 3.

Tabel 3

| x | $\alpha = 90\%$ | | $\alpha = 95\%$ | | $\alpha = 99\%$ | |
|----|-----------------|------|-----------------|------|-----------------|------|
| | + | - | + | - | + | - |
| 0 | 3,0 | 0 | 3,7 | 0 | 5,3 | 0 |
| 1 | 3,7 | 0,9 | 4,6 | 1,0 | 6,4 | 1,0 |
| 2 | 4,3 | 1,6 | 5,2 | 1,8 | 7,3 | 1,9 |
| 3 | 4,8 | 2,2 | 5,8 | 2,4 | 8,0 | 2,7 |
| 4 | 5,2 | 2,6 | 6,2 | 2,9 | 8,6 | 3,3 |
| 5 | 5,5 | 3,0 | 6,7 | 3,4 | 9,2 | 3,9 |
| 6 | 5,8 | 3,4 | 7,1 | 3,8 | 9,7 | 4,5 |
| 7 | 6,2 | 3,7 | 7,4 | 4,2 | 10,1 | 5,0 |
| 8 | 6,4 | 4,0 | 7,7 | 4,5 | 10,6 | 5,4 |
| 10 | 7,0 | 4,6 | 8,4 | 5,2 | 11,4 | 6,3 |
| 12 | 7,4 | 5,1 | 9,0 | 5,8 | 12,1 | 7,4 |
| 14 | 7,9 | 5,5 | 9,5 | 6,3 | 12,8 | 7,8 |
| 16 | 8,3 | 6,0 | 10,0 | 6,8 | 13,5 | 8,4 |
| 18 | 8,7 | 6,4 | 10,5 | 7,3 | 14,1 | 9,1 |
| 20 | 9,1 | 6,7 | 10,9 | 7,8 | 14,7 | 9,6 |
| 22 | 9,4 | 7,1 | 11,3 | 8,2 | 15,2 | 10,2 |
| 24 | 9,8 | 7,4 | 11,7 | 8,6 | 15,7 | 10,7 |
| 26 | 10,1 | 7,8 | 12,1 | 9,0 | 16,3 | 11,3 |
| 28 | 10,4 | 8,1 | 12,5 | 9,4 | 16,7 | 11,8 |
| 30 | 10,7 | 8,4 | 12,8 | 9,8 | 17,2 | 12,2 |
| 35 | 11,4 | 9,1 | 13,7 | 10,6 | 18,3 | 13,4 |
| 40 | 12,1 | 9,8 | 14,5 | 11,4 | 19,4 | 14,4 |
| 45 | 12,7 | 10,4 | 15,2 | 12,2 | 20,3 | 15,4 |
| 50 | 13,3 | 11,0 | 15,9 | 12,9 | 21,3 | 16,3 |

Mõõtmistulemuse suurenemisel asümmeetria tasandub ja Poissoni jaotus läheneb normaaljaotusele. Siis võib kasutada vahemikhinnangu tavalist vormi (valem 37), arvutades normaaljaotusfunktsiooni abil:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{90\%}^x &= 1,65 \sqrt{x} , \\ \Delta_{95\%}^x &= 1,96 \sqrt{x} , \\ \Delta_{99\%}^x &= 2,58 \sqrt{x} . \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Näide: Ühes ruumalaühikus õhus loendati 42 tolmutera. Kui suur on tolmuterade numbriline tihedus õhus? Tabelist 3 leiame $\Delta_{95\%}^+ = 15$ ja $\Delta_{95\%}^- = 12$. 95% usaldatavusega võib väita, et otsitav tihedus on $42 \pm_{-12}^{+15}$ tolmutera ruumalaühikus.

Näide: Geigeri loendur loendas 10 minuti jooksul 231 impulssi, järgneva 16 minuti jooksul 357 impulssi ja edasise 15 minuti jooksul veel 339 impulssi. Kui suur on impulsside keskmine sagedus? Et vajalik on ainult üks x väärtus, mis peab aga olema võimalikult suur, siis liidame läheteandmed, saades 41 minuti kohta 927 impulssi. Valemi (50) kohaselt on 41 minuti impulsside arvu keskväärtus $927 \pm 1,96 \sqrt{927}_{95\%} = 927 \pm 60_{95\%}$. Sageduse leidmiseks ja game selle suuruse ajavahemiku pikkusega ja saame tulemuseks $22,6 \pm 1,5_{95\%}$ imp/min.

Ristkülikjaotusele (joonis 3) allub kuiva hõõrdumise tõttu pidurduva võnkuva süsteemi (näiteks mõõteriista osuti) peatusasend. Ristkülikjaotuse parameetrite piisavad hinnangud sõltuvad ainult minimaalsest ja maksimaalsest üksiktulemusest $x_{(1)}$ ja $x_{(n)}$. Jaotuse keskpunkti $\mu = \lambda = (a + b)/2$ (vt. joon. 3) parima hinnangu

$$c_n = \frac{x_{(n)} + x_{(1)}}{2} \quad (51)$$

standardhälve

$$\sigma(c_n) = \frac{b - a}{\sqrt{2(n+1)(n+2)}} \quad (52)$$

on ligikaudu pöördvõrdeline üksiktulemuste arvuga n^* . Jaotuse ulatuse b-a optimaalseks hinnanguks on statistik

$$\frac{n+1}{n-1} [x_{(n)} - x_{(1)}]. \quad (53)$$

Statistik c_n sobib ka teiste järsult lõigatud tihedusfunktsiooniga sümmeetriliste lõplike jaotuste keskpunkti-hinnanguks. Niisugused on näiteks mehhaanilisest lõtkust tingitud mõõtmisvea kahetipuline jaotus ja vahelduvvooluhäirest põhjustatud kontaktjääklaengute seekansjaotus. Kahel viimasel juhul on statistik m_n keskpunkti hinnanguks hoopiski ebasobiv.

§ 6. NORMAALJAOTUS.

Normaaljaotus on kõige tuntum mõõtmisvigade jaotus. Tsentraalse piirteoreemi kohaselt eeldatakse teda siis, kui mõõtmisviga koosneb paljudest väikestest lõpliku keskvaartuse ja dispersiooniga komponentidest, mille hulgas pole domineerivat. Normaaljaotusele alluvad täpselt soojuslikud fluktuatsioonid.

Mõõtmistulemuse hindamiseks kasutatakse statistik m_n on moodustatud n juhusliku liidetava summast ja tema jaotus on ligikaudu normaalne sõltumatult x jaotusest (kui vaid x omab keskvaartust ja dispersiooni). Seetõttu kasutatakse normaaljaotushüpoteesi sageli ka siis, kui üksiktulemuste jaotus erineb normaalsest või on tundmatu.

Normaaljaotuse keskvaartuse ja sellega võrdse mediaani nihutamata konsistentne efektiivne hinnang on statistik

$$\underline{m_n = \sum_{i=1}^n x_i / n.}$$

* Hinnangu m_n standardhälve on pöördvõrdeline ruutjuurega üksiktulemuste arvust. Seepärast on m_n statistikust c_n halvem hinnang.

Dispersiooni hinnanguvalemitest on kõige lihtsamalt mõistetav järgmine:

$$s_{n0}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} . \quad (54)$$

See valem pole kasutuskõlblik, kuna μ on tundmatu. Asendades valemis (54) μ tema hinnanguga m_n , saaksime nihutatud (vähendatud) hinnangu, sest üksiktulemused on m_n -le lähedasemad kui μ -le. Parimaks nihutamata hinnanguks osutub statistik

$$s_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_n)^2}{n - 1} . \quad (55)$$

Statistik s_n^2 ei ole kahjuks dispersiooni efektiivne hinnang. Hinnang

$$\hat{s}_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_n)^2}{n} \quad (56)$$

on efektiivne, kuid juba nimetatud põhjusel nihutatud, mistõttu teda kasutatakse harva.

Kuna $[\mu(s_n)]^2 \neq \mu(s_n^2)$, siis s_n keskväertus ei võrdu standardhälbega ja statistik s_n osutub standardhälbe nihutatud hinnanguks. Standardhälbe nihutamata hinnanguks on statistik

$$s_n' = k_n s_n, \quad (57)$$

kordaja k_n väärtused on toodud tabelis 4.

Tabel 4

| | | | | | | | | | | | |
|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 25 | 100 |
| k_n | 1,25 | 1,13 | 1,09 | 1,06 | 1,05 | 1,04 | 1,04 | 1,03 | 1,03 | 1,01 | 1,00 |

Statistikute s_n^2 ja s_n' arvutamine on tülikas, seepärast pakuvad huvi ka väiksema efektiivsusega, kuid lihtsamalt arvutatavad standardhälbe hinnangud. Mõnel juhul leiab kasutamist standardhälbe nihutamata hinnang

$$s_n'' = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m_n|}{\sqrt{\frac{2}{\pi}} n (n-1)} . \quad (58)$$

Informatsiooni kao hinnangu s_n'' kasutamisel kompenseerib üksikmõõtmiste arvu suurendamine $\approx 14\%$ võrra. Kõige mugavam standardhälbe hinnang on aga haarde $w_n = x_{\max} - x_{\min}$ järgi arvutatav statistik

$$s_n^w = \frac{w_n}{d_n} . \quad (59)$$

Kordaja d_n väärtused on näidatud tabelis 5.

Tabel 5

| | | | | | | | | | |
|---------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| d_n | 1,13 | 1,69 | 2,06 | 2,33 | 2,53 | 2,70 | 2,85 | 2,97 | 3,08 |
| $\sqrt{nd_n}$ | 1,6 | 2,9 | 4,1 | 5,2 | 6,2 | 7,2 | 8,1 | 8,9 | 9,7 |
| n | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 |
| d_n | 3,17 | 3,26 | 3,34 | 3,41 | 3,47 | 3,53 | 3,59 | 3,64 | 3,73 |
| $\sqrt{nd_n}$ | 10,5 | 11,3 | 12,1 | 12,8 | 13,4 | 14,1 | 14,8 | 15,4 | 16,7 |

Informatsiooni kao hinnangu s_n^w kasutamisel kompenseerib üksiktulemuste arvu suurendamine väärtuselt n (statistiku s_n' korral) tabelis 6 näidatud väärtuseni n_w .

Tabel 6

| | | | | | | | | |
|-------|---|---------|----|----|----|----|----|----|
| n | 2 | 3...8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| n_w | 2 | $n + 1$ | 11 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |

Vaadeldud statistikud on üksiktulemuse dispersiooni või standardhälbe hinnangud. Mõõdetava suurusega seatakse aga vastavusse aritmeetiline keskmine m_n , mille dispersioon on x dispersioonist n korda väiksem ja standardhälve x standardhälbest \sqrt{n} korda väiksem. Valemite (55...59) järgi arvutatud suurus tuleb jagada veel n või \sqrt{n} -ga. Tarvitavamad vahetult kasutatavad arvutusvalemid on järgmised:

$$s^2(m_n) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_n)^2}{n(n-1)}, \quad (60)$$

$$s'(m_n) = k_n s(m_n), \quad (61)$$

$$s^w(m_n) = \frac{w_n}{\sqrt{n} d_n}. \quad (62)$$

Kordaja $\sqrt{n} d_n$ väärtused on näidatud tabelis 5. Lõigus $3 \leq n \leq 10$ on need kordajad ligikaudu võrdsed arvuga n , mis lubab kasutada ligikaudset (viga kuni 4%) valemit

$$s^w(m_n) = \frac{w_n}{n}. \quad (63)$$

Empiirilise mediaani l_n kasutamine keskväärtuse hinnanguks arvutuste lihtsustamise eesmärgil pole tavaliselt õigustatud, sest l_n dispersioon on m_n dispersioonist $\pi/2$ korda suurem. Õeldu ei pruugi kehtida teiste

jaotusseaduste korral.

Vahemikhinnangute koostamisel kasutatakse juba kirjeldatud statistikuid. Kõige täielikumalt kasutab üksiktulemustes sisalduvat informatsiooni Studenti^{***} test, mille kohaselt on vahemiku keskpunkt

$$\bar{x}_0 = \bar{m}_n \quad (64)$$

ja poollaius

$$\Delta_{\alpha} x = t_{n,\alpha} s(m_n)^{***} . \quad (65)$$

Studenti jaotuse kvantili $t_{n,\alpha}$ väärtuse saab üksiktulemuste arvu n ja usaldatavuse α järgi leida tabelist 7.

Märksa vähem arvutustööd nõuab Student-Lordi (Lord, 1947.a.) test, mille kohaselt vahemiku keskpunktiks on ikka \bar{m}_n , poollaius aga avaldub haarde kaudu:

$$\Delta_{\alpha} x = t_{n,\alpha}^{(w)} w_n . \quad (66)$$

Kordaja $t_{n,\alpha}^{(w)}$ väärtused on näidatud tabelis 8.

Näide: Olgu mõõtmistulemused järgmised: 9,4; 8,2; 10,7; 11,5; 8,1; 10,0; 12,0; 9,7; 10,8; 9,0; 10,3; 10,7^{***}. Studenti testi kasutamisel peame arvutama üksiktulemuste aritmeetilise keskmise $m_{12} = 10,03$ ja statistiku

$s(m_{12}) = \sqrt{\frac{16,3}{12 \cdot 11}} = 0,35$. Tabeli 7 järgi $t_{12,95\%} = 2,2$,

$\Delta_{95\%} x = 2,2 \cdot 0,35 = 0,77$ ja $\mu = 10,03 \pm 0,77_{95\%}$. Student-Lordi testi kasutamisel arvutame $m_{12} = 10,03$

^{**} Inglise matemaatik Gosset avaldas 1908.a. selle testi teooria Studenti varjunime all.

^{***} Tavaliselt tabuleeritakse $t_{f,\alpha}$, kus $f = n-1$ on vabadusastmete arv. Siis $\Delta_{\alpha} x = t_{n-1,\alpha} s(m_n)$.

^{****} Need arvud on väljavõtte normaaljaotusega ($\mu = 10,0$, $\sigma = 1,0$) kogumist, seega $\sigma(m_{12}) = 0,29$.

Tabel 7

| n=f+1 | α | | | n=f+1 | α | | |
|-------|----------|------|------|----------|----------|------|------|
| | 90% | 95% | 99% | | 90% | 95% | 99% |
| 2 | 6,31 | 12,7 | 63,7 | 15 | 1,76 | 2,14 | 2,98 |
| 3 | 2,92 | 4,30 | 9,92 | 16 | 1,75 | 2,13 | 2,95 |
| 4 | 2,35 | 3,18 | 5,84 | 17 | 1,75 | 2,12 | 2,92 |
| 5 | 2,13 | 2,78 | 4,60 | 18 | 1,74 | 2,11 | 2,90 |
| 6 | 2,02 | 2,57 | 4,03 | 20 | 1,73 | 2,09 | 2,86 |
| 7 | 1,94 | 2,45 | 3,71 | 22 | 1,72 | 2,08 | 2,83 |
| 8 | 1,89 | 2,36 | 3,50 | 25 | 1,71 | 2,06 | 2,80 |
| 9 | 1,86 | 2,31 | 3,36 | 30 | 1,70 | 2,05 | 2,76 |
| 10 | 1,83 | 2,26 | 3,25 | 35 | 1,69 | 2,03 | 2,73 |
| 11 | 1,81 | 2,23 | 3,17 | 40 | 1,68 | 2,02 | 2,71 |
| 12 | 1,80 | 2,20 | 3,11 | 50 | 1,68 | 2,01 | 2,68 |
| 13 | 1,78 | 2,18 | 3,05 | 100 | 1,66 | 1,98 | 2,63 |
| 14 | 1,77 | 2,16 | 3,01 | ∞ | 1,64 | 1,96 | 2,58 |

Tabel 8

| n | α | | | n | α | | |
|----|----------|-------|-------|----|----------|-------|-------|
| | 90% | 95% | 99% | | 90% | 95% | 99% |
| 2 | 3,157 | 6,353 | 31,83 | 11 | 0,170 | 0,210 | 0,302 |
| 3 | 0,885 | 1,304 | 3,008 | 12 | 0,158 | 0,194 | 0,277 |
| 4 | 0,529 | 0,717 | 1,316 | 13 | 0,147 | 0,181 | 0,256 |
| 5 | 0,388 | 0,507 | 0,843 | 14 | 0,138 | 0,170 | 0,239 |
| 6 | 0,312 | 0,399 | 0,628 | 15 | 0,131 | 0,160 | 0,224 |
| 7 | 0,263 | 0,333 | 0,507 | 16 | 0,124 | 0,151 | 0,212 |
| 8 | 0,230 | 0,288 | 0,429 | 17 | 0,118 | 0,144 | 0,201 |
| 9 | 0,205 | 0,255 | 0,374 | 18 | 0,113 | 0,137 | 0,191 |
| 10 | 0,186 | 0,230 | 0,333 | 20 | 0,104 | 0,126 | 0,175 |

ja leiame haarde $12,0 - 8,1 = 3,9$. $t_{12,95\%}^{(w)} = 0,194$, siit $\Delta_{95\%} x = 0,194 \cdot 3,9 = 0,76$ ja $\mu = 10,03 \pm 0,76_{95\%}$. See, et Student-Lordi testi järgi saime väiksema Δx hinnangu, on juhus. Vastupidine olukord on tõenäolisem.

Samade mõõtmistulemuste töötlemisel veel lihtsama märgitesti abil saaksime tulemuseks $9,9 \pm 0,9_{95\%}$.

Milline test on vaatlusandmete töötlemisel otstarbekaim? Vastus sõltub konkreetsetest asjaoludest. Võtame kokku erinevate testide otstarbekust määravad omadused:

1^o. Studenti test on ratsionaalne siis, kui statistiku $s(m_n)$ arvutamine on ühe-kahe lissamõõtmise sooritamisest lihtsam. Vastasel juhul on tarvis hinnata Student-Lordi testi lubatavust.

2^o. Student-Lordi test on lubatav tingimusel, et jaotus on rangelt normaalne, eksete oht puudub ja üksiktulemuste arv ei ületa kahtkümmet. Suure mõõtmistulemuste arvu korral raiskab Student-Lordi test liiga palju informatsiooni (vt. tabel 6) ja muutub väga tundlikuks normaaljaotusest kõrvalekaldumiste suhtes. Studenti test on erinevuste suhtes normaaljaotusest märksa tundetum. Normaaljaotusest oluliselt erineva jaotuse korral on aga range ainult märgitest.

3^o. Märgitesti tuleb eelistada juhul, kui Student-Lordi testi õigustatus on kaheldav ja kui mõõtmiste arvu kokkuhoid Studenti testi valimisel (vt. tabel 9) ei kompenpeeriks arvutustöö suurenemist. Tabelis 9 tähistab n_0 väljavõtte mahtu märgitesti kasutamisel, n_0 aga väljavõtte minimaalset mahtu, mille korral hinnang Studenti testi järgi oleks parem. Arvutustöö ökonoomia õigustab mõnel juhul märgitesti kasutamist ka rangelt normaalse jaotuse korral.

Testavasti pole normaaljaotushüpoteesi empiirilisel võimalik tõestada. Küll on aga võimalik empiirilisel kontrollida normaaljaotushüpoteesi usutavust. Kõige lihtsam on lähtuda jaotuse iseloomust olenevate statistikute

Tabel 9

 $\alpha = 90\%$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| n | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 40 | 42 | 44 | 47 | 49 |
| n_0 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 | 16 | 18 | 21 | 21 | 23 | 25 | 25 | 27 | 29 | 28 | 31 |

 $\alpha = 95\%$

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| n | 6 | 9 | 12 | 15 | 17 | 20 | 23 | 25 | 28 | 30 | 33 | 35 | 37 | 40 | 42 | 44 | 47 | 49 |
| n_0 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 15 | 17 | 18 | 19 | 20 | 23 | 25 | 25 | 27 | 30 | 29 | 32 |

 $\alpha = 99\%$

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| n | 8 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 26 | 29 | 32 | 34 | 37 | 39 | 42 | 44 | 47 | 49 |
| n_0 | 7 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 19 | 20 | 22 | 24 | 25 | 27 | 28 | 31 | 31 | 34 |

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n_0} = \frac{\pi}{2}$$

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - m_n|}{n \hat{s}_n} \quad (67)$$

ja

$$g = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - m_n)^3}{n \hat{s}_n} \quad (68)$$

väärtustest. Kui $n \rightarrow \infty$, siis normaaljaotuse puhul $d \rightarrow \sqrt{2/\pi}$ ja $g \rightarrow 0$. Kui d väärtus ei ole tabelis 10 näidatud vahemikus või g väärtus ületab tabelis 11 näidatud arvu, siis on normaaljaotushüpoteesi usutavus väiksem kui 10%.

Tabel 10

| | | | | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n | 11 | 16 | 21 | 31 | 41 | 51 | 101 | 201 |
| d_{\min} | 0,715 | 0,724 | 0,730 | 0,740 | 0,747 | 0,752 | 0,764 | 0,774 |
| d_{\max} | 0,907 | 0,888 | 0,877 | 0,862 | 0,854 | 0,848 | 0,834 | 0,823 |

Tabel 11

| | | | | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| n | 25 | 30 | 35 | 40 | 50 | 80 | 100 | 200 |
| ξ_{\max} | 0,711 | 0,661 | 0,621 | 0,587 | 0,533 | 0,432 | 0,389 | 0,280 |

§ 7. EKSETE TSENSUUR.

Eksperimentaatori hoolikus võib ekse tõenäosuse muuta väga väikeseks, kuid mitte täpselt nulliks. Eksete võimalust peab alati silmas pidama. Avastamata ekse tõenäosus peab olema vähemalt suurusjärg väiksem vahest $1 - \alpha$, kus α on hinnangu usaldatavus. Vastasel juhul eksed vähendaksid reaalselt usaldatavust.

Oletame, et mõõtmistulemuste x_i hulgas võib olla üks avastamata jäänud ekse. Kui ekse on oluline, siis on ta kindlasti variatsioonrea äärmine liige: $x_{(1)}$ või $x_{(n)}$. Ekse empiiriliseks tunnuseks on ebatavaliselt suur erinevus variatsioonrea naaberliikmest: $x_{(2)} - x_{(1)}$ või $x_{(n)} - x_{(n-1)}$. Kui suure erinevuse korral on alust tulemust ekseks tunnistada? Sellele küsimusele saab vastata ainult tuntud jaotusseaduse korral.

Võtame suhtelise hälbe mõõduks statistikud

$$f_+ = \frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{w_n}, \quad (69)$$

$$f_{-} = \frac{x(2) - x(1)}{w_n} . \quad (70)$$

Tabelis 12 on näidatud nende statistikute kriitiline väärtus normaaljaotuse korral. α on tulemuse ekseks tunnistamise usaldatavus. Kasutatakse ka teiselaadilisi ekseteste, vajalikud tabelid võib leida kogumikust [33].

Tabel 12

| n | $\alpha = 90\%$ | $\alpha = 95\%$ | $\alpha = 99\%$ | n | $\alpha = 90\%$ | $\alpha = 95\%$ | $\alpha = 99\%$ |
|---|-----------------|-----------------|-----------------|----|-----------------|-----------------|-----------------|
| 3 | 0,89 | 0,94 | 0,99 | 10 | 0,35 | 0,41 | 0,53 |
| 4 | 0,68 | 0,77 | 0,89 | 11 | 0,33 | 0,39 | 0,50 |
| 5 | 0,56 | 0,64 | 0,78 | 12 | 0,32 | 0,38 | 0,48 |
| 6 | 0,48 | 0,56 | 0,70 | 15 | 0,29 | 0,34 | 0,44 |
| 7 | 0,43 | 0,51 | 0,64 | 20 | 0,25 | 0,30 | 0,39 |
| 8 | 0,40 | 0,47 | 0,59 | 24 | 0,23 | 0,28 | 0,37 |
| 9 | 0,37 | 0,44 | 0,56 | 30 | 0,22 | 0,26 | 0,34 |

Eksete tsenseerimisel peab testi ja usaldatavuse vahelima enne katseandmetega tutvumist. Kui testi statistik on kriitilisest väärtusest suurem, siis tõmmatakse ekseks tunnistatud üksiktulemus mõttmisprotokollis enne katseandmete edasist töötlemist maha.

Eksete tsenseerimisel praagitakse tõenäosusega $1 - \alpha$ ka õiged mõttmistulemusi. See pole aga eriti ohtlik. Kui normaaljaotusest veidi erineva jaotuse korral kavatsetakse katseandmeid töödelda normaaljaotushüpoteesi alusel, siis on suurte hälvetega õigete üksiktulemuste praakimine isegi soodus: eksetesti abil tsenseeritud jaotus omab alati mediaanile lähedast keskvaartust ja kolmandas paragrahvis kirjeldatud kurioosumite võimalus on likvideeritud.

Tsensuuri positiivsete omaduste tõttu kasutatakse vahel üldist tsensuuri: variatsioonreast tõmmatakse kum-

maltki poolt maha üks-kaks liiget, olenemata nende väärtustest. Mõõtmistulemust hinnatakse ülejäänud liikmete järgi. Vastavalt täpsustatud punkthinnanguvalemeid võib leida tabelite kogumikust [34].

§ 8. SUMMA VIGA. LIITVIGA.

Olgu teada kahe füüsilise suuruse mõõtmistulemused $X = x_0 + \Delta_\alpha x$, $Y = y_0 + \Delta_\beta y$ ja olgu ülesandeks leida summa $Z = X + Y$ hinnang $Z = z_0 + \Delta_\gamma z$. Praktikas igal sammul esinev ülesanne osutub seda keerukamaks, mida põhjalikumalt teda analüüsitakse. Seni pole täielikult rahuldavat lahenduseeskirja leitudki.

z_0 määramisel ei teki vaidlusi. Kuna summa keskvärtus on liidetavate keskvärtuste summa, siis

$$z_0 = x_0 + y_0. \quad (71)$$

$\Delta_\gamma z$ määramiseks tuntakse üldiselt kahte kahtlustärravalt lihtsustatud meetodit:

I. Sõltumatute suuruste summa dispersioon $\sigma^2(z)$ võrdub liidetavate dispersioonide summaga $\sigma^2(x) + \sigma^2(y)$. Olgu usaldatavused α ja β teineteisega võrdsed. Kui x , y ja z omavad keskvärtust ja dispersiooni ja alluvad ühte tüüpi jaotusseadusele ning kummagi suuruse üksikmõõtmiste arv oli suur, siis $\Delta_\alpha x = \alpha \sigma(x)$, $\Delta_\alpha y = \alpha \sigma(y)$ ja $\Delta_\alpha z = \alpha \sigma(z)$, kus α on üks ja sama usaldatavusest sõltuv tegur. Niisugustel eeldustel on

$$\Delta_\alpha z = \sqrt{\Delta_\alpha^2 x + \Delta_\alpha^2 y}. \quad (72)$$

Kui Z on suurema arvu liidetavate summa $Z = X_1 + X_2 + X_3 + \dots$, siis

$$\Delta_\alpha z = \sqrt{\Delta_\alpha^2 x_1 + \Delta_\alpha^2 x_2 + \Delta_\alpha^2 x_3 + \dots} \quad (73)$$

II. Tõenäosuse α piirides kõige ebasoodsamal juhul on x_0 viga kas $-\Delta_\alpha x$ või $\Delta_\alpha x$. Tõenäosuse β piirides kõige ebasoodsamal juhul on y_0 viga kas $-\Delta_\beta y$ või $\Delta_\beta y$. Tõenäosuse α, β piirides kõige ebasoodsama vigade kombinatsiooni korral on z_0 viga $\pm(\Delta_\alpha x + \Delta_\beta y)$. Valemi

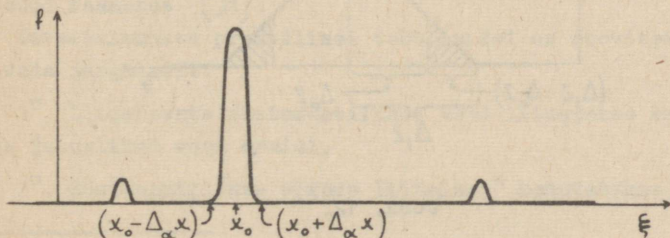
$$\Delta_{\alpha\beta} z = \Delta_\alpha x + \Delta_\beta y \quad (74)$$

kasutamisel pole võimalik eksida veshinnangu kitsendamise suunas. Suurema arvu liidetavate korral on

$$\begin{aligned} \Delta_x z &= \Delta_{\alpha_1} x_1 + \Delta_{\alpha_2} x_2 + \Delta_{\alpha_3} x_3 + \dots, \\ y^k &= \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \dots \end{aligned} \quad (75)$$

Üheksa võrdse liidetava korral annab valem (75) kolm korda laiemat veavahemiku kui valem (73) ja seejuures märksa väiksema usaldatavuse! Nii suur erinevus sunnib kirjeldatud meetodite omadusi lähemalt analüüsima.

Teine meetod erineb esimesest soodsalt kitsendavate eelduste puudumise poolest. Nagu näitest selgus, varitseb siin aga oht veavahemiku laiust suurelt üle hinnata. Kas II meetodi korral hinnatakse viga alati üle? Vastus on eitav: kui suurused alluvad joonisel 11 kujutatud tihedusfunktsiooniga jaotusele, siis annab valem (74) täpse veshinnangu, valem (72) hindaks aga viga alla.



Joon. 11.

Toodud näide on kunstlik: praktikas niisugust olukorda ei esine. Põhimõtteliselt selgitab ta aga hästi meetodi I kasutamisel varitsevat ohtu.

Märksa loomulikumale Cauchy jaotusele alluvate suuruste summa veavahemiku poollaiuse range valem on $\Delta_\alpha z = \Delta_\alpha x_1 + \Delta_\alpha x_2 + \dots$. Ka sel juhul on I meetod ilmselt lubamatu.

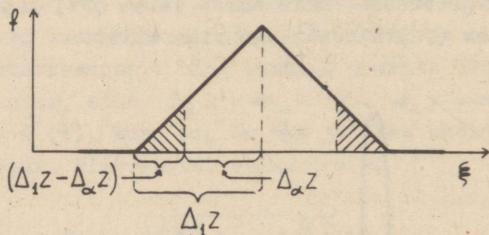
Olukorra täielikumaks iseloomustamiseks vaatleme veel üht, veidi vähem kunstlikku näidet. Allugu x ja y ühele ja samale täpselt tuntud ristkülikjaotusele. Sel puhul $\Delta_\alpha x = \Delta_\alpha y$, valemi (72) järgi leiame

$$\Delta_\alpha z = \sqrt{2} \Delta_\alpha x, \quad (76)$$

valemi (74) järgi:

$$\Delta_\alpha z^2 = 2 \Delta_\alpha x. \quad (77)$$

Kuna jaotus on tuntud, saab leida ka range tulemuse. Usaldusvahemiku poollaiuse $\Delta_\alpha x$ ja jaotusvahemiku poollaiuse $\Delta_1 x = (b-a)/2$ suhe on tihedusfunktsiooni konstantsuse tõttu α , siit $\Delta_1 x = \Delta_\alpha x / \alpha$. $z = x + y$ allub Simpsoni jaotusele (joonis 12), mille vahemiku poollaius $\Delta_1 z = 2 \Delta_1 x = 2 \Delta_\alpha x / \alpha$.



Joon. 12.

Joonisel viirutatud pindala suhe kolmnurga üldpindalasse on $(\Delta_1 z - \Delta_\alpha z)^2 / \Delta_1^2 z$. See suhe näitab aga tõenäosust, et

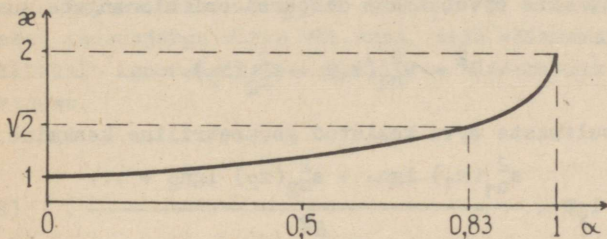
z langeks väljapoole vahemikku poollaiusega $\Delta_{\alpha} z$, niisugune tõenäosus on $1-\alpha$. Siit leiame $(\Delta_1 z - \Delta_{\alpha} z)^2 = (1-\alpha)\Delta_1^2 z$, $\Delta_{\alpha} z = (1-\sqrt{1-\alpha})\Delta_1 z$ ja

$$\Delta_{\alpha} z = \varkappa \Delta_1 z, \quad (78)$$

kus

$$\varkappa = 2 \frac{1-\sqrt{1-\alpha}}{\alpha}. \quad (79)$$

Joonisel 13 on kujutatud $\varkappa = \varkappa(\alpha)$ graafik.



Joon. 13.

$\alpha \approx 1$ puhul on $\varkappa \approx 2$, mis õigustab valemuid (77) ja (74). Valemile (76) vastab tulemus $\alpha = 83\%$ korral, kui aga α on väiksem, siis on summa viga veel väiksem!

Uemaid seisukohti mõõtmisvigade liitumise kohta on esitatud raamatus [31].

Katsetulemuste praktilisel töötlemisel on soovitatav talitada järgmiselt.

1°. Liidetavate süstemaatilised vead liidetakse eraldi ja juhuslikud vead eraldi.

2°. Süstemaatiliste vigade liitmisel³ kasutatakse II

³ Konkreetse mõõtmise süstemaatiline viga on kindel suurus. Sama mõõtmise kujutletavate uutes tingimustes kordamiste hulgas on süstemaatiline viga aga juhuslik ja teda saab kirjeldada matemaatilise statistika abil.

meetodit. Peaaegu ilma riskita võib aga tulemuse usaldatavuseks võtta mitte usaldatavuste korrutise, vaid kõige väiksema liidetavate veavahemike usaldatavuste hulgast. (Cauchy jaotusest halvemate omadustega jaotus on praktikas äärmiselt ebatõenäone.)

3°. Kui x_{01}, x_{02}, \dots on ühe ja sama arvu üksiktulemuste keskmised, siis kasutatakse juhuslike vigade liitmiseks valemit (73). Aritmeetilised keskmised alluvad piisavalt hästi normaaljaotusele, mis õigustab I meetodi kasutamist.

4°. Kui x_{01}, x_{02}, \dots on erineva arvu üksiktulemuste keskmised, siis arvutatakse dispersiooni hinnangute summa

$$s^2 = s_{n_1}^2(x_1) + s_{n_2}^2(x_2) + \dots \quad (80)$$

ja üksiktulemuste arvu kaalutud geomeetriline keskmine N:

$$\lg N = \frac{s_{n_1}^2(x_1) \lg n_1 + s_{n_2}^2(x_2) \lg n_2 + \dots}{s^2} \quad (81)$$

N väärtus ümardatakse allapoole täisarvuni, tabelist 7 otsitakse kordaja $t_{N,\alpha}$ ning arvutatakse

$$\Delta_{\alpha z} = t_{N,\alpha} s. \quad (82)$$

Kirjeldatud meetod [7] pole range, ühtaegu lihtsat ja range meetodit pole aga teada.

Sõltumatute mõõtmistulemuste vahe $Z = X - Y$ veavahe- miku laius on täpselt sama kui summa $X + Y$ korral.

Juhuslike suuruste sõltuvus muudaks kõik arvutused keerulisemaks, sõltuvate suuruste summa dispersiooni valem (§ 1, omadus 8°) sisaldab peale liidetavate dispersioonide kolmanda liikmena kahekordse kovariatsiooni. Positiivne korrelatsioon suurendab summa viga ja vähendab vahe viga, negatiivne korrelatsioon aga vastupidi. Kovariatsiooni hindamise probleem ei mahu käesoleva juhendi

kavasse ja sõltuvaid vigu sisaldavate andmete töötlemise juhiseid peab otsima põhjalikumatest käsiraamatutest.

Viimaseks ülesandeks katseandmete töötlemisel on süstemaatilise ja juhusliku vea hinnangute ühendamine liitvea hinnanguks. Tähistame juhusliku vea hinnanguvahemiku poollaiuse $\Delta_{\alpha}^{(j)}x$ ja süstemaatilise vea hinnanguvahemiku poollaiuse $\Delta_{\beta}^{(s)}x$. Hinnangute ühendamiseks kujutleme kahte liidetavat $x_0 \pm \Delta_{\alpha}^{(j)}x$ ja $0 \pm \Delta_{\beta}^{(s)}x$. Liitmise teostame II meetodi kohaselt. Liitvea hinnanguvahemiku usaldatavuseks loeme aga arvude α ja β hulgast väiksema.

Kui suurused $\Delta_{\alpha}^{(j)}x$ ja $\Delta_{\beta}^{(s)}x$ erinevad teineteisest suurusjärgu võrra või enam, siis väiksemat nendest lihtsalt ignoreeritakse ja liitvea hindamiseks pole tarvidust.

§ 9. FUNKTSIOONI VIGA.

Olgu tarvis leida suuruse $Z = Z(X, Y)$ hinnang mõõtmistulemuste $X = x_0 \pm \Delta_{\alpha}x$ ja $Y = y_0 \pm \Delta_{\beta}y$ järgi. Kui Z on argumentide lineaarfunktsioon $Z = aX + bY + c$, siis lahendatakse ülesanne eelmises paragrahvis kirjeldatud viisil. Konstandiga korrutamise reegel on lihtne:

$a(x_0 \pm \Delta_{\alpha}x) = ax_0 + a\Delta_{\alpha}x$. Mittelineaarse funktsiooni hindamine on aga hoopiski keeruline. Raskustest päästab allpool kirjeldatud lineariseerimise võtte, mis on ligikaudne, kuid garanteerib praktikas rahuldava täpsuse.

Mõõtmisvead muudavad funktsiooni argumente vähe, argumentide väikeste muutuste piires on aga praktilistes ülesannetes esinevad funktsioonid ligikaudselt lineaarsed. Selle omaduse kasutamiseks arendame funktsiooni $Z(X, Y)$ Tayloriga ritta ja jätame ära kõik teist ja kõrgemat järku liikmed:

$$Z(X, Y) = Z(x_0, y_0) + \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial X} (X - x_0) + \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial Y} (Y - y_0). \quad (83)$$

Valem (83) on seda täpsem, mida väiksemad on argumentide erinevused väärtustest x_0 ja y_0 . Lineariseeritud avaldis võimaldab tulemust hinnata eelmises paragrahvis kirjeldatud võtete abil. Kõigi variantide korral on

$$z_0 = Z(x_0, y_0). \quad (84)$$

Valemist (72) lähtudes saame arvutuseeskirja

$$\Delta_{\alpha} z = \sqrt{\left[\frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial X} \right]^2 \Delta_{\alpha}^2 x + \left[\frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial Y} \right]^2 \Delta_{\alpha}^2 y}, \quad (85)$$

valemist (74) lähtudes aga

$$\Delta_{\beta} z = \left| \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial X} \right| \Delta_{\beta} x + \left| \frac{\partial Z(x_0, y_0)}{\partial Y} \right| \Delta_{\beta} y, \quad (86)$$

kus β võib valida võrdseks väiksemaga usaldatavustest α ja β . Tarviduse korral lähtutakse valemitest (80...82).

Lineariseerimise täpsuse määramiseks tuleb hinnata Taylori rea teist järku liikmeid.

Astmefunktsiooni $Z = X^a Y^b$ osatuletised on aZ/X ja bZ/Y ning valemile (85) saab anda järgmise kuju:

$$\frac{\Delta_{\alpha} z}{|z_0|} = \sqrt{\left(a \frac{\Delta_{\alpha} x}{x_0} \right)^2 + \left(b \frac{\Delta_{\alpha} y}{y_0} \right)^2}, \quad (87)$$

valemile (86) aga järgmise kuju:

$$\frac{\Delta_{\beta} z}{|z_0|} = \left| a \frac{\Delta_{\beta} x}{x_0} \right| + \left| b \frac{\Delta_{\beta} y}{y_0} \right|. \quad (88)$$

$m_2 = \sum_{i=1}^{n_2} x_{2i}/n_2, \dots, m_k = \sum_{i=1}^{n_k} x_{ki}/n_k$, keskmiste dispersioonid on $\sigma^2(m_1) = \sigma^2(x)/n_1, \sigma^2(m_2) = \sigma^2(x)/n_2, \dots, \sigma^2(m_k) = \sigma^2(x)/n_k$.

Kirjeldatud väljavõtteid võib vaadelda osadena ühest suurest väljavõttest, mille maht on $n_0 = \sum_{i=1}^k n_i$, keskmine $m_0 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}/n_0$ ja dispersioon $\sigma^2(m_0) = \sigma^2(x)/n_0$.

Kuidas peaks arvutama keskmist m_0 ja dispersiooni $\sigma^2(m_0)$, kui teada oleks ainult osaväljavõtete keskmised m_1 ja dispersioonid $\sigma^2(m_1)$?

Kui teada oleks ka osaväljavõtete mahud n_i , siis annaks õige tulemuse valem

$$m_0 = \frac{\sum_{i=1}^k n_i m_i}{\sum_{i=1}^k n_i} \quad (89)$$

Arvud n_i võib asendada ükskõik milliste n_i -dega võrdeliste suurustega g_i :

$$m_0 = \frac{\sum_{i=1}^k g_i m_i}{\sum_{i=1}^k g_i} \quad (90)$$

See ongi kaalutud keskmise valem. Kordajaid g_i nimetatakse arvude m_i kaaludeks[§]. Kui $\sum_i g_i = 1$, siis on kaalud normeeritud ja $m_0 = \sum_i g_i m_i$.

Dispersioonid $\sigma^2(m_1)$ on pöördvõrdelised arvudega n_i . Seetõttu

$$g_i = \frac{\sigma^2}{\sigma^2(m_i)} \quad (91)$$

[§] Nimetus pärineb segamisülesannetest. Olgu näiteks n portsjoni üht ja sama ainet kaaludega p_i ja temperatuuridega T_i . Pärast portsjonite segamist on segu temperatuur $\sum_i p_i T_i / \sum_i p_i$.

kus α on suvaline konstant.

Dispersioonide seost

$$\frac{1}{\sigma^2(m_0)} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\sigma^2(m_i)} \quad (92)$$

on lihtne tõestada asenduse $\sigma^2(m_0) = \sigma^2(x)/n_0$ ja $\sigma^2(m_i) = \sigma^2(x)/n_i$ abil.

Valemid (90), (91) ja (92) on eespool püstitatud küsimuse vastus. Nendes valemities ei esine osaväljavõtete mahud n_i ja neid võib kasutada sõltumatult suuruste m_i tähendusest ja päritolust, kui vaid dispersioonid $\sigma^2(m_i)$ või dispersioonide omavahelised suhted on tuntud. Kui tuntud suurusteks on standardhälvetega võrreldised veavahemike poolalused Δm_i , siis asendatakse valemid (91) ja (92) valemitega

$$g_1 = \frac{\alpha}{\Delta^2 m_i}, \quad (93)$$

$$\frac{1}{\Delta^2 m_0} = \sum_{i=1}^K \frac{1}{\Delta^2 m_i}. \quad (94)$$

Kaalutud keskmise valemeid kasutatakse erineva täpsusega lähteandmete keskmistamiseks.

Näide: Olgu kahe erineva meetodi abil leitud ühe ja sama suuruse väärtused:

$$x_1 = 2,30 \pm 0,10_{95\%},$$

$$x_2 = 2,50 \pm 0,20_{95\%}.$$

Kummalgi juhul oli mõõtmisvigade jaotus ühte tüüpi ja neid hinnati ühe ja sama eeskirja kohaselt, mistõttu

$$\Delta_{95\%} x \sim \sigma(x). \text{ Arvutame } g_1 = 1/0,1^2 = 100; \quad g_2 = 1/0,2^2 = 25;$$

$$x_0 = (100 \cdot 2,3 + 25 \cdot 2,5) / 125 = 2,34; \quad \Delta_{95\%} x = 1 / \sqrt{100 + 25} =$$

= 0,09. Vastus:

$$x = 2,34 \pm 0,09_{95\%}$$

Nagu näha ei mõjuta vähetäpsete andmete (x_2) lisamine tulemust oluliselt. Lihtne aritmeetiline keskmine oleks märksa halvem kui täpsem üksiktulemus üksinda.

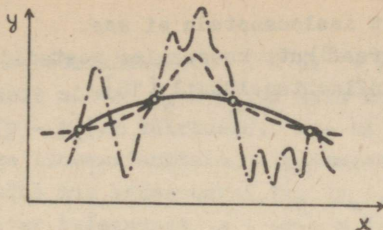
§ 11. GRAAFIKUD.

Vaatleme kõigepealt üksiku punkti kujutamist koordinaattasandil. Olgu punkti koordinaadid $x_0 \pm \Delta_\alpha x$ ja $y_0 \pm \Delta_\beta y$. Kanname tasandile punkti (x_0, y_0) ning joonistame selle ümber vearistküliku, mille külgedeks on sirged $x = x_0 - \Delta_\alpha x$, $x = x_0 + \Delta_\alpha x$, $y = y_0 - \Delta_\beta y$ ja $y = y_0 + \Delta_\beta y$. Vearistkülik katab kujutatava punkti tõelise asukoha usaldatavusega $\alpha \cdot \beta$.

Sageli on otstarbekas kanda koordinaattasandile ainult vearist, mille moodustavad koordinaattelgedega paralleelsed vearistkülikut poolitavad lõigud. Need lõigud ristuvad punktis (x_0, y_0) .

Vearistkülik ei ole optimaalne veapiirkond. Normaalkaotuse korral saab Studenti testile sarnaneva Hetellingi testi [14] abil konstrueerida veaellipsi, mille pindala on vearistküliku pindalast mõni protsent väiksem.

Graafiku joonistamisel läbi katsepunktide tuleb paratamatult tugineda füüsikalisele intuitsioonile. Läbi lõpliku arvu kindlate punktide võib tõmmata lõpmatu hulga põhimõtteliselt usnagi erinevaid kõveraid (vt. joonis 14), kusjuures puhtmatemaatiline teooria ei võimalda ühtegi neist teistele eelistada. Ühe kõvera muudavad teistest usutavamaks füüsikalised kaalutlused. Sageli on eelistatuim võimalikult "sile" kõver.

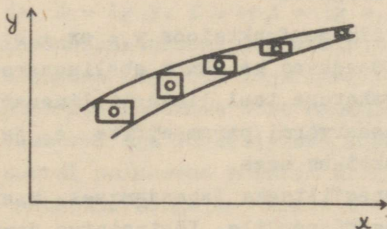


Joon. 14.

Väheolulise funktsiooni graafiku võib koostada "sil-mameetodil". Soovitav on talitada järgmiselt.

1^o. Kanname koordinaattasandile kõigi katsepunktide vearistkülikud.

2^o. Joonistame piirkõverad nii, et kõik vearistküli-kud jääksid nende vahele (vt. joonis 15). Piirkõverate vahelist riba nimetatakse veakoridoriks. Veakoridor on tõelise graafiku vahemikhinnang.



Joon. 15.

3^o. Veakoridori keskele joonistame füüsikaliselt usutava kujuga graafiku, mis on tõelise graafiku punkt-hinnang.

Iga katsepunkti ümbruses katab veakoridor tõelist graafikut usaldatavusega vähemalt γ . γ väärtus, mis võrdub väiksemaga usaldatavustest α ja β , märgitakse graafiku juurde. Kirjeldatud viisil koostatud veako-

ridori rangemalt iseloomustada ei saa.

Täpsemad graafikute koostamise meetodid põhinevad regressioon- ja konfluentanalüüsil [18].

§ 12. EMPIIRILISED VALEMID.

Järjekindlad algoritmilised meetodid empiiriliste valemite koostamiseks [18] on seotud suure arvutustööga. Kui aga ülesanne pole eriti oluline, siis võib eksperimentaatori intuitsioonile tuginedes katseandmete töötlemist tublisti lihtsustada. Katseandmete tabeli ja graafiku vaatlemisel peab eksperimentaator ära arvama, milline funktsioon võiks kõne alla tulla. Mitmesuguste funktsioonide graafikute näiteid võib leida teatmikust [30]. Pärast arvutatakse vabaks jäänud parameetrite väärtused. Vaatleme allpool mõnd tüüpilist erijuhtu:

1^o. Sobib lineaarfunktsioon $y = ax + b$. Nagu järgnevas selgub, teiseenduvad ka mõned ebalineaarsed funktsioonid muutujate vahetuse teel lihtsalt lineaarfunktsiooniks. Seetõttu on lineaarvormi parameetrite a ja b määramise ülesanne praktikas sage.

Ülesande graafiliseks lahendamiseks kantakse katsepunktid koordinaattasandile. Läbipaistva joonlaua abil valitakse sirge, mis möödub katsepunktidest võimalikult lähedalt. Selle sirge tõusu järgi leitakse parameeter a , sirge ja y -telje lõikepunkti järgi parameeter b .

Rangemat numbrilist lahendusviisi kirjeldatakse järgmises paragrahvis.

Kui füüsikalistel põhjustel $x = 0$ juures $y = 0$, siis on $b = 0$ ja sirge tõmmatakse täpselt läbi koordinaatistiku alguspunkti.

Kahe katsepunkti (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) korral leitakse parameetrid a ja b võrrandsüsteemist $y_1 = ax_1 + b$,

$$y_2 = ax_2 + b.$$

2°. Sobib paraboolfunktsioon $y = ax^2 + bx + c$. Kui on võimalik otseselt mõõta $y_0 = y_{x=0}$, siis arvutatakse abisuuruse $z = (y - y_0)/x$ väärtused. $z = ax + b$, a ja b määratakse nagu lineaarfunktsiooni parameetrid, $c = y_0$. Lugeses täpseks mõne muu katsepunkti (x_k, y_k) , saab kasutada lineariseerivat teisendust $z = (y - y_k)/(x - x_k)$, millest $z = ax + d$ ja $b = d - ax_k$. Vabaliige c määratakse võrrandi

$$\sum_{i=1}^n y_i = a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + nc$$

järgi.

Kui pole alust ühtki katsepunkti täpseks lugeda, siis on vabu parameetreid kolm ja funktsiooni ei saa lineaarsiks teisendada. Sel juhul peab kasutama keerulisemat arvutuseeskirja [17; 21; 29].

3°. Sobib astmefunktsioon $y = ax^x$. Arvutame abisuurused $Y = \lg y$ ja $X = \lg x$. $Y = \alpha X + \lg a$, α ja $\lg a$ määratakse nagu lineaarfunktsiooni parameetrid. Katseandmete töötlemist hõlbustab logaritmi-logaritmilise võrguga paber. Sellisele paberile kantakse otse punktid (x, y) , pikkused paberil osutuvad aga võrdelisteks logaritmidega. Astmefunktsiooni korral paiknevad punktid ühel sirgel, mille tõus võrdub astmenäitajaga α . Kordaja a väärtuse määrab sirge lõikepunkt vertikaaliga $x = 1$.

4°. Ühe suuruse muutmisel kindla sammu võrra muutub teine suurus alati ühe ja sama teguri kordselt. Sobib logaritmifunktsioon $y = a \lg x + b$ (või $x = a \lg y + b$). Arvutame abisuuruse $X = \lg x$ väärtused ja määrame a ja b nagu lineaarfunktsiooni parameetrid. Lineaar-logaritmilisel paberil paiknevad katsepunktid ühel sirgel, ülesande lahendamiseks on tarvis mõõta sirge tõus ja algordinaat.

5°. Eksponentfunktsioon $y = ae^{bx}$ teisendatakse lo-

garitmfunktsiooniks $x = \frac{1}{b} \ln y - \frac{\ln a}{b}$.

Üksikasjalikumaid juhtnööre empiiriliste valemite koostamiseks võib leida rasmatutest [10, 21, 27, 29, 30].

Kui leitud empiiriline valem ei rahulda, siis on soovitatav uurida vahe $\Delta = y_{\text{valem}} - y_{\text{katse}}$ graafikut. Funktsiooni $\Delta(x)$ jaoks koostatud empiiriline valem on esialgsele valemile parandiks.

Näide. Leida empiiriline valem, mis sobiks järgnevate andmetega:

| | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|
| x | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| y | 1,0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,1 | 6,2 | 7,4 | 8,8 | 10,3 | 12,0 |

Tabeli algosa kirjeldab hästi funktsioon $y = x$. Võib arvata, et empiirilises valemis peaks sisalduma niisugune liidetav. Arvutame $z = y - x$.

| | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|
| x | 4,0 | 5,0 | 6,0 | 7,0 | 8,0 | 9,0 | 10,0 |
| z | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,4 | 0,8 | 1,3 | 2,0 |

Seda sõltuvust võiks kirjeldada suure astmenäitajaga astmefunktsioon. Kanname punktid $z(x)$ logaritmi-logaritmilisele paberile. Nad paiknevad kaunis hästi ühel sirgel tõusuga 4,3 ja algordinaadiga 10^{-4} . Seega otsitavaks valemiks sobib

$$y = x + 10^{-4} x^{4,3}.$$

Jääb veel kontrollida valemi täpsust.

§ 13. REGRESSIOONSIRGE.

Olgu füüsikaliste suuruste Y ja X vaheline sõltuvus teoreetiliselt lineaarne. Katsepunktid (y_1, x_1) aga ei lange mõõtmisvigade tõttu täpselt ühele sirgele. Me võime valida koordinaattasandil "silvameetodil" punktidest lähedalt mööduva regressioonsirge ja määrata selle parameetrid a ning b . Kuidas iseloomustada valiku headust? Vastus on aluseks kavakindlale meetodile parima regressioonsirge valimiseks.

Kontrollime "silvameetodil" valitud parameetritega võrrandit $y = ax + b$ kõigis katsepunktides. Kui punkt ei asu sirgel, siis $y_1 \neq ax_1 + b$. Vahed

$$\Delta_1 = y_1 - (ax_1 + b) \quad (95)$$

kirjeldavad regressioonsirge täpsust. Meil on aga tarvis ühtset näitarvu. Eeldusel, et katsepunktid on vördtäpsed ja mõõtmisvead alluvad normaaljaotusele, on täpsuse kriitriumiks summa

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n \Delta_i^2. \quad (96)$$

Vähimruutude meetodi korral seatakse ülesandeks leida niisugused a ja b , et Δ^2 omandaks minimaalse võimaliku väärtuse. Miinimumi tingimuseks on võrrandid

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta^2}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial \Delta^2}{\partial b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

Arvutustöö lihtsustamiseks leitakse abisuurus

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n \quad (98)$$

ja uue muutuja z väärtused

$$z_i = x_i - \bar{x}. \quad (99)$$

Võrrandite (97) lahendusvalemid on nüüd järgmised:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n z_i y_i}{\sum_{i=1}^n z_i}, \\ b_n &= \sum_{i=1}^n y_i/n - a_0 \bar{x}. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

Juhuslike mõõtmisvigade hindamiseks arvutatakse Δ^2 (valem 95) ja kasutatakse Studenti testi[§]:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 \pm t_{n-1, \alpha} s_a \\ b &= b_0 \pm t_{n-1, \alpha} s_b \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

$$\left. \begin{aligned} s_a^2 &= \frac{\Delta^2}{(n-2) \sum_{i=1}^n z_i^2} \\ s_b^2 &= \frac{\Delta^2}{(n-2) n} \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Saab leida ka y vahemikhinnangu punktis $x = x_0$.

[§] Tähistus $t_{n-1} = t_{f-2}$ on kooskõlas varasema (tabel 7) kokkuleppega.

$$y = a_0 x_0 + b \pm t_{n-1}, s_{y, x_0}, \quad (103)$$

$$s_{y, x_0}^2 = s_a^2 x_0^2 + s_b^2. \quad (104)$$

Mittevõrdtäpsete lähteandmete töötlemisel on tarvis kõigepealt määrata katsepunktide kaalud g_i (vt. § 10). Katseandmete töötlemine on sarnane eelkirjeldatuga, ainult valemid (96, 98, 100, 102) kaotavad kehtivuse ja asenduvad järgnevatega:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^n g_i \Delta_i^2, \quad (105)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n g_i x_i}{\sum_{i=1}^n g_i}, \quad (106)$$

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n g_i z_i y_i}{\sum_{i=1}^n g_i z_i^2}, \\ b_0 &= \frac{\sum_{i=1}^n g_i y_i}{\sum_{i=1}^n g_i} - a_0 \bar{x}, \end{aligned} \right\} \quad (107)$$

$$\left. \begin{aligned} s_a^2 &= \frac{\Delta^2}{(n-2) \sum_{i=1}^n g_i z_i^2}, \\ s_b^2 &= \frac{\Delta^2}{(n-2) \sum_{i=1}^n g_i}. \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

Valemid (95, 97, 99, 101, 103, 104) kehtivad üldiselt.

Kui regressioonsirge peab kindlasti läbima koordinaatistiku alguspunkti, siis on punkti (0,0) kaal lõpmatu ja ülaltoodud valemid pole kasutatavad. Jätame katsepunktide nummerdamisel punkti (0,0) välja ja iseloomustame regressioonsirge $y_0 = ax_0$ headust endiselt parameetriga Δ^2 (valem 105).

Ekstreemumülesande lahendamisel saame valemi

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2} . \quad (109)$$

Valemid (101, 102, 108) asenduvad valemitega

$$a = a_0 \pm t_{n,\alpha} s_a , \quad (110)$$

$$s_a^2 = \frac{\Delta^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i^2} . \quad (111)$$

Keerukamate regressioonülesannete lahenduseeskirju võib leida raamatutest [17, 18, 29].

§ 14. SÜSTEMAATILINE NIHE.

Süsteemaatilise vea empiiriliseks avastamiseks soovitatakse mõõtmisi korrata erinevates tingimustes. Olgu nii viisi saadud kaks rida ühe ja sama füüsikalise suuruse mõõtmise tulemusi:

$$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_k ,$$

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_l .$$

Süsteemaatiline nihe on keskväärtuste vahe $\mu(x) - \mu(y)$ või mediaanide vahe $\lambda(x) - \lambda(y)$. Aritmeetilised keskmised $m_x(x)$ ja $m_y(y)$ erinevad mõõtmistulemuste juhuslikkuse tõttu teineteisest ka siis, kui süsteemaatiline nihe puudub. Kuidas selgitada, kas mõõtmistulemuste erinevus on tingitud juhusest või mitte?

Süsteemaatilise nihke identifitseerimiseks kasutatakse mitmesuguseid teste. Mõõtmistulemuste normaaljaotuse korral on kõige "tundlikum" Studenti test, mille puuduseks on arvutustöö suur maht. Väikese arvutustöö ja Studenti testiga peaaegu võrdse tundlikkuse poolest paistab silma mitteparameetiline Wilcoxon test (Wilcoxon, 1945; Mann ja Whitney, 1947), mis on põhjendatud igasuguse pideva jaotuse korral.

Tähistame x_i -ga need üksiktulemused, mille arv on väiksem, ja y_i -ga need, mille arv on suurem. Võrdse arvu korral valime tähistused juhuslikult. Koostame y -te variatsioonirea:

$$y(1), y(2), \dots \dots, y(\ell).$$

Kui x -d on y empiirilisest mediaanist valdavalt suuremad, siis nimetame nihkesuunaks suuna paremale, kui valdavalt väiksemad, siis suuna vasakule. Nüüd proovime kõiki x -e üksahaaval lisada y -te variatsiooniritta ja loeme iga kord ära, mitu y -t jääks proovitavast x -st nihkesuunda. Niiviisi leitud arvude summat u nimetatakse inversioonide arvuks.

Näide: Olgu x_i -d 3,93; 3,88; 4,01; 3,89 ja y_i -d 3,87; 3,96; 3,71; 3,82; 3,91; 3,86. y -te variatsioonirida on 3,71 3,82 3,86 3,87 3,91 3,96. Nihkesuund on ilmselt paremale. 3,93 nihkesuunas (paremale) jääks üks y väärtus (3,96), 3,88 paremale jääks kaks y väärtust, 4,01 paremale null y väärtust ja 3,89 paremale jääks kaks y väärtust.
 $u = 1 + 2 + 0 + 2 = 5$.

Usaldatavuse α , x -de arvu k ja y -te arvu ℓ järgi

leitakse tabelist 13 kriitiline arv $U_{\alpha, k, \ell}$. Juhul $u \leq U_{\alpha, k, \ell}$ on süstemaatilise nihke olemasolu tõestatud usaldatavusega vähemalt α . Juhul $u > U_{\alpha, k, \ell}$ või kui tabelis 13 seisab $U_{\alpha, k, \ell}$ kohal kriips, ei saa süstemaatilise nihke olemasolu valitud usaldatavusega väita: nihe võib olla juhuslik.

Tabel 13

$\alpha = 90\%$

| $k \backslash \ell$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 |
| 4 | | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 |
| 5 | | | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 | 17 | 18 | 20 | 22 |
| 6 | | | | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 23 | 25 | 27 |
| 7 | | | | | 13 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 |
| 8 | | | | | | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 |
| 9 | | | | | | | 25 | 28 | 31 | 35 | 38 | 41 | 45 |
| 10 | | | | | | | | 32 | 36 | 39 | 43 | 47 | 51 |
| 11 | | | | | | | | | 40 | 44 | 48 | 52 | 57 |
| 12 | | | | | | | | | | 49 | 53 | 58 | 63 |
| 13 | | | | | | | | | | | 58 | 63 | 68 |
| 14 | | | | | | | | | | | | 69 | 74 |
| 15 | | | | | | | | | | | | | 80 |

$\alpha = 95\%$

| $k \backslash l$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | - | - | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 4 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 5 | | | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 | 16 | 18 |
| 6 | | | | 7 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 | 21 | 23 |
| 7 | | | | | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 | 21 | 24 | 26 | 28 |
| 8 | | | | | | 15 | 18 | 20 | 23 | 26 | 28 | 31 | 33 |
| 9 | | | | | | | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 | 39 |
| 10 | | | | | | | | 27 | 31 | 34 | 37 | 41 | 44 |
| 11 | | | | | | | | | 34 | 38 | 42 | 46 | 50 |
| 12 | | | | | | | | | | 42 | 47 | 51 | 55 |
| 13 | | | | | | | | | | | 51 | 56 | 61 |
| 14 | | | | | | | | | | | | 61 | 66 |
| 15 | | | | | | | | | | | | | 72 |

 $\alpha = 99\%$

| $k \backslash l$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | - | - | - | - | - | - | - | - | 0 | 0 | 0 |
| 3 | - | - | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 | 13 | 15 |
| 7 | | | 6 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 | 17 | 19 |
| 8 | | | | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 | 22 | 24 |
| 9 | | | | | 14 | 16 | 18 | 21 | 23 | 26 | 28 |

| $k \backslash l$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|------------------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|
| 10 | | | | | | 19 | 22 | 24 | 27 | 30 | 33 |
| 11 | | | | | | | 25 | 28 | 31 | 34 | 37 |
| 12 | | | | | | | | 31 | 35 | 38 | 42 |
| 13 | | | | | | | | | 39 | 43 | 47 |
| 14 | | | | | | | | | | 47 | 51 |
| 15 | | | | | | | | | | | 56 |

Vaadeldud näite korral $U_{95\%;4;6} = 3$. Kuna $5 > 3$, siis 95% usaldatavusega süstemaatilise nihke olemasolu väita ei saa. Et aga $U_{90\%;4;6} = 5$, siis 90% usaldatavusega võib süstemaatilise nihke lugeda reaalseks.

Diskreetse jaotuse puhul komplitseerib Wilcoxon'i testi üksikute x_i -de ja y_i -de kokkulangemine. Usaldatavuse vähendamise ohtu ei ole järgneva lihtsa reegli rakendamisel. Kui x_i langeb kokku $y_{(k)}$ -ga, siis $y_{(k)}$ "poolitatakse", arvates x_i -st vasakule $k-1/2$ ja paremale $l-k+1/2$ y väärtust. Niiviisi loetud tinglik inversioonide arv ei pruugi olla täisarv, kuid see ei muuda testi praktilist eeskirja.

Ajas muutuvat süstemaatilist viga on võimalik kindlaks teha ka ühe mõõtmistulemuste rea järgi. Wilcoxon'i testi rakendamiseks jagatakse mõõtmistulemuste kronoloogiline rida lihtsalt kaheks osaks. Kui süstemaatilise vea sõltuvus ajast pole monotoonne, on parem kasutada seeria-testi (Stevens, 1939.a.; Wald ja Wolfowitz, 1940.a.), mis nagu Wilcoxon'i testki ei sõltu juhuslike vigade jaotusest.

Lähtume x -de kronoloogilisest järjekorrast x_1, x_2, \dots, x_n . Teeme kindlaks x empiirilise mediaani ja määrgime kronoloogilises reas iga $x_i < l(x)$ alla - ja iga $x_i > l(x)$ alla +. Keskmise liige ise jääb märgita. Seeriaks nimetatakse kõrvuti asuvate ühesuguste märkide

gruppi. Testi statistikuks on seeriade arv v . Näiteks jadas ++++---- on 2 seeriat, jadas +-+--- aga 6 seeriat. Ühenimeliste märkide koguarvu tähistame m ($m = \frac{n}{2}$ või $m = \frac{n-1}{2}$). Tabelis 14 on näidatud kriitiline seeriade arv $V_{\alpha, m}$.

Tabel 14

| m | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|-----------------|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| $\alpha = 95\%$ | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $\alpha = 99\%$ | - | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 13 |

Kui $v \leq V_{\alpha, m}$, siis on süstemaatiline muutumine tõestatud usaldatavusega α . Vastasel korral võib mõõtmistulemuste muutlikkus olla juhusest tingitud.

Juhuslike vigade normaaljaotuse korral võib kasutada suuremat arvutustööd nõudvat Abbe testi [13, 33].

Enam kui kahe mõõtmisseeria võrdlemiseks kasutatakse dispersioonanalüüsi meetodeid, millega tutvumiseks sobivad raamatud [3, 13].

§ 15. ARVUTUSSKEEMID.

Enamik kirjeldatud vaatlusandmete töötlemise meetoditest nõuab õige vähest arvutustööd. Veidi mahukam on vaid aritmeetilise keskmise, väljavõttedispersiooni, kaalutud keskmise ja regressioonsirge parameetrite arvutamine.

Vigu vältida ja tööd kergendada aitab ratsionaalne arvutusskeem. Järgnevas selgitame näidete varal, kuidas arvutusskeemi koostada. Esitatavad skeemid on mõeldud

pliiatsi, paberi ja arvutuslükatiga (soovitav ka arvelaud!) varustatud arvutajale.

Omaette probleem on tarviliku arvutustäpsuse valimine. Universaalne reegel "Arvutusviga olgu mõõtmisveest paarajasti üks suurusjärk väiksem" on pealtnäha lihtne, kuid vajab edukaks rakendamiseks kogemusi. Algaja võib (isikliku aja arvel!) arvutada igaks juhuks ühe tarbetu kümnendkoha.

1°. Keskväertuse ja aritmeetilise keskmise dispersiooni hindamine (valem 60). Valitakse kõigist x_1 -dest veidi väiksem ümmargune arv x_0 , arvutatakse vahed $x_1 - x_0$ ja nende keskmine $m(x_1 - x_0)$. Aritmeetiline keskmine $m(x) = x_0 + m(x_1 - x_0)$. Dispersiooni hindamiseks täiendatakse arvutustabelit kahe veeruga (vt. näide).

Näide:

| x_i | $x_i - x_0$ | $ x_i - m(x) $ | $[x_i - m(x)]^2$ | |
|----------|-------------|----------------|------------------|--------------------------------------|
| 122,42 | 0,42 | 0,76 | 0,58 | $x_0 = 122,00$ |
| 122,96 | 0,96 | 0,22 | 0,05 | $m(x) = \underline{123,18}$ |
| 123,43 | 1,43 | 0,25 | 0,06 | $s^2(m) = \frac{3,67}{10 \cdot 9} =$ |
| 123,09 | 1,09 | 0,09 | 0,01 | $= 0,0408$ |
| 122,19 | 0,19 | 0,99 | 0,98 | |
| 124,01 | 2,01 | 0,83 | 0,69 | $s(m) = \underline{0,20}$ |
| 122,81 | 0,81 | 0,63 | 0,40 | |
| 123,47 | 1,47 | 0,29 | 0,08 | |
| 124,08 | 2,08 | 0,90 | 0,81 | |
| 123,29 | 1,29 | 0,11 | 0,01 | |
| Σ | 11,75 | | 3,67 | |

2°. Kaalutud keskmise arvutamine (valemid 90, 93, 94). Valitakse samuti x_0 , arvutatakse vahed $x_i - x_0$, korrutised $g_i(x_i - x_0)$, korrutiste summa, kaalude summa, nende summade suhe. Lõpuks liidetakse see suhe x_0 -le. Ülejäänud operatsioonid ei vaja selgitamist.

Näide:

| x_i | Δx_i | $\Delta^2 x_i$ ($x10^{-10}$) | $g_i = \frac{1}{\Delta^2 x_i}$ ($x10^6$) | $x_i - x_0$ ($x10^{-5}$) | $g_i(x_i - x_0)$ ($x10^2$) |
|----------|--------------|-----------------------------------|---|-------------------------------|---------------------------------|
| 0,01281 | 0,00020 | 400 | 25 | 29 | 73 |
| 0,01252 | 0,00010 | 100 | 100 | 0 | 0 |
| 0,01260 | 0,00015 | 225 | 45 | 8 | 36 |
| Σ | | | 170 | | 109 |

$$x_0 = 0,01252; 109 \cdot 10^2 : 170 \cdot 10^6 = 0,00006;$$

$$m_0(x) = \underline{0,01258}; \Delta^2 m_0 = 1 : 170 \cdot 10^6 = 59 \cdot 10^{-10}$$

$$\Delta m_0 = \underline{0,00008}.$$

3°. Regressioonsirge parameetrite arvutamine (valemid 95...102). Piirdume ainult näitega.

Näide:

| x_i | y_i | z_i | $y_i z_i$ | z_i^2 | $a_0 x_i + b_0$ | $ \Delta_i $ | Δ_i^2 |
|-------|-------|-------|-----------------|---------|-----------------|--------------|--------------|
| 1,3 | 3,2 | -5,3 | -17,0 | 28,1 | 3,30 | 0,10 | 0,01 |
| 2,8 | 4,5 | -3,8 | -17,1 | 14,4 | 4,24 | 0,26 | 0,07 |
| 4,6 | 5,1 | -2,0 | -10,2 | 4,0 | 5,37 | 0,27 | 0,07 |
| 6,1 | 6,2 | -0,5 | -3,1 | 0,3 | 6,32 | 0,12 | 0,01 |
| 7,5 | 7,5 | 0,9 | 6,8 | 0,8 | 7,20 | 0,30 | 0,09 |
| 8,8 | 8,3 | 2,2 | 18,3 | 4,8 | 8,02 | 0,28 | 0,08 |
| 10,2 | 8,7 | 3,6 | 31,3 | 12,9 | 8,90 | 0,20 | 0,04 |
| 11,5 | 9,6 | 4,9 | 47,0 | 23,9 | 9,71 | 0,11 | 0,01 |
| 52,8 | 53,1 | | +103,4 -47,3 | 89,2 | | | 0,38 |
| | | | 56,1 | | | | |

$$\bar{x} = 52,8 : 8 = 6,6; \quad a_0 = 56,1 : 89,2 = 0,629;$$

$$b_0 = 53,1 : 8 - 0,629 \cdot 6,6 = 6,63 - 4,15 = 2,48;$$

$$s_a^2 = \frac{0,38}{6 \cdot 89} = 7,1 \cdot 10^{-4}; \quad s_b^2 = \frac{0,38}{6 \cdot 8} = 7,9 \cdot 10^{-3};$$

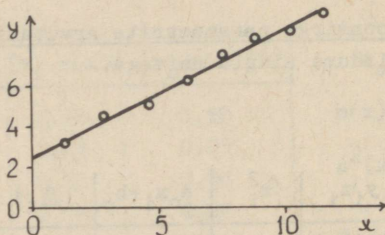
$$s_a = 0,027; \quad s_b = 0,09; \quad \Delta_{95\%} a = 2,6 \cdot 0,027 = 0,07;$$

$$\Delta_{95\%} b = 2,6 \cdot 0,09 = 0,23.$$

$$a = 0,63 \pm 0,07_{95\%},$$

$$b = 2,48 \pm 0,23_{95\%}.$$

Joonisel 16 on näidatud katsepunktid ja regressioon-sirge.



Joon. 16.

Arvutusskeemide koostamine ülejäänud juhtudel jääb lugeja ülesandeks.

TÄIENDAV KIRJANDUS.

I. Esimeses järjekorras soovitatav kirjandus.

1. Tiit, E. Tõenäosusteooria I. Tartu, 1968, 320 lk.
(TRÜ rotaprint.)

Õpiku esimesed 141 lk. sisaldavad tõenäosusteooria algmete üldarusaadava esituse koos materjali omandamist soodustavate ülesannetega. Õpikule on lisatud mõningaid statistilisi tabelleid.

2. Венцель Е. С. Теория вероятностей. "Наука", Москва, 1964, 576 стр.

Õpik paistab silma esituse ladususe ja kergelt-mõistetavuse poolest. Üks peatükk on pühendatud katseandmete töötlemisele.

3. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. "Наука", Москва, 1965, 511 стр.

Käesoleva juhendi I osas viidatud raamatu täiendatud väljaanne.

4. Большев Л. Н., Оценки статистические. Физический энциклопедический словарь Ш. Москва, 1963, стр. 572-577.

Lühidusele vaatamata üllatavalt täielik ülevaade hinnangute teooriast.

5. Нейман Ю. Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. "Наука", Москва, 1968, 448 стр.

Nõuab lugejalt matemaatilist ettevalmistust vaid keskkoolikursuse ulatuses, aine käsitus on aga märksa kaasaegsem ja sügavam kui enamikus kõrgemal matemaatikal baseeruvates õpikutes. Sobib eriti bioloogidele ja meedikutele, kes ei otsi "kokaretsseptuuri", vaid tunnevad tõsist huvi statistika vastu. Autor on tuntud ühena kaasaegse statistika rajajatest.

6. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. ИЛ, Москва, 1960, 434 стр.

Hea raamat esialgseks tutvumiseks klassikalise matemaatilise statistika teooriaga. Autoril on õnnestunud matemaatilist rangust ohverdamata esitada kogu materjal nii, et see on mõistetav spetsiaalsete matemaatiliste eelteadmisteta.

II. Bespool kirjeldatuga võrdse raskusastmega täiendav kirjandus.

7. Агекян Т. А. Основы теории ошибок для астрономов и физиков. "Наука", Москва, 1968, 148 стр.

Tõenäosusteooria ja vigade teooria konspektiivne õpik astronoomia ja füüsika eriala nooremate kursuste üliõpilastele. Autor piirdub vaatlusandmete töötlemise klassikaliste meetodite käsitlusega.

8. Худсон Д. Статистика для физиков. "Мир", Москва, 1967, 242 стр.

Käsiraamat nendele, keda huvitavad peamiselt parameetrilise matemaatilise statistika rakenduslikud tulemused.

9. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д., Математические методы в теории надежности. "Наука", Москва, 1965, 524 стр.

Sisaldab tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika aluste kokkusurutud esituse (ca 60 leheküljel).

10. Гутер Р. С., Овчинский В. В. Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. Физматгиз, Москва, 1962, 355 стр.

Sisaldab ülevaate tõenäosusteooriast ja klassikalisest mõõtmisvigade teooriast. Erilist tähelepanu on pööratud funktsioonide hindamisele vähimruutude meetodil ja empiiriliste valemite koostamise meetoditele. Raamatu väärtust suurendavad praktilised näited.

11. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. Госстатиздат, Москва, 1958, 268 стр.

Raamatus käsitletakse normaaljaotusega andmete töötlemist. Esitus on kergelt jälgitav ja rohket näidetega illustreeritud. Autor on üks kaasaegse matemaatilise statistika rajajatest.

12. Гнеденко Б. В., Беседы о математической статистике. "Знание", Москва, 1968, 48 стр.

Populaarne, samaaegselt aga suhteliselt kõrgetasemeline ülevaade matemaatilise statistika probleemidest.

13. Долинский Е. Ф. Погрешности измерений и обработка результатов измерений. "Машиностроение", Москва, 1967, 60 стр.

Äärmiselt konspektiivne mõõtmisvigade analüüsimise juhend, milles käsitletakse küllaltki komplitseeritud meetodeid, nagu regressioonanalüüsi ja dispersioonanalüüsi. Erilist tähelepanu on pööra-

III. Põhjalikum kirjandus.

14. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. ИЛ, Москва, 1956, 664 стр.

Nea käsiraamat matemaatilise statistika parameetriliste meetodite rakendajale. Ei nõua spetsiaalseid eelteadmisi.

15. Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). ГИТЛ, Москва, 1955, 556 стр.

Erineb eelmisest raamatust veidi teoreetilise kalla poolest. Autorid vaatlevad ka mitteparameetrilisi meetodeid.

16. Уилкс С. Математическая статистика. "Наука", Москва, 1967, 632 стр.

Aspirantidele ja teaduslikele töötajatele adresseeritud raamat, nõuab lugejalt põhjalikku matemaatilist ettevalmistust. Kasutatav nii õpikuna kui ka käsiraamatuna. Esituslaad on konspektiivne. Nea ülevaade statistika-alastest originaaltöödest. Bibliograafia ca 450 nimetust.

17. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. Физматгиз, Москва, 1962, 349 стр.

Tuntud nõukogude statistiku kirjutatud käsiraamat vaadeldakse vähimruutude meetodit kaasaegse matemaatilise statistika seisukohalt. Autor pöörab palju tähelepanu põhimõttelistele küsimustele, toob aga samal ajal hulgaliselt praktilisi näiteid ja esitab iga meetodi jaoks rakenduslike valemite ja arvutusreeglite kokkuvõtte.

18. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. "Наука", Москва, 1964, 184 стр.

Sisaldab regressioon- ja konfluentanalüüsi põhjaliku teoreetilise käsitlemise ja detailsed programmid füüsikaliste katsete tulemuste töötlemiseks. Viimane peatükk on pühendatud mõõtmiste täpsuse ja mahu planeerimisele. Kirjeldatavad arvutusmeetodid on töömahukad ja nõuavad elektronarvutite kasutamist. Raamatus vaadeldakse ka süstemaatiliste vigade olemasolu arvestavaid meetodeid. Lisana on toodud v^2 jaotuse tabel.

19. Яноши Л. Теория и практика обработки результатов измерений. "Мир", Москва, 1965, 1968, 462 стр.

Raamatu autor on tuntud ungari füüsik. Esimene peatükk sisaldab tõenäosusteooria omapärase esituse, teine peatükk on pühendatud matemaatilise statistika meetoditele, kolmas peatükk sisaldab näiteid tuumafüüsika-alaste mõõtmiste tulemuste töötlemisest. Bibliograafia 51 nimetust.

20. Jordan-Eggert. Handbuch der Vermessungskunde.

Mitmes trükis ilmunud mahukas (üle 3000 lehekülje) geodeesia käsiraamat, sisaldab põhjaliku ülevaate klassikalisest vigade teooriast.

21. Tamme, E. Arvutusmeetodid III. Tartu, 1967, 111 lk. (TRÜ rotaprint.)

Käsitletakse üksikasjalikult funktsioonide lähendamist vähimruutude meetodil.

IV. Lihtsamad õpikud ja käsiraamatud.

22. Velsker, K. Tõenäosusteooria ja matemaatilise statistika elemente. Täiendavaid teemasid koolimatemaatika-le. "Tallinn, "Valgus", 1967, lk. 3...57.

Keskkooliõpik, mis sisaldab käesoleva juhendi kasutajale tarvilikke eelteadmisi.

23. Soonets, K. Tõenäosusteooria ja matemaatiline statistika. Tartu, 1967, 193 lk. (TRÜ rotaprint.)

Majandusteaduskonna üliõpilastele adresseeritud õppevahend.

24. Лерман, А. Тõenäosusteooria ja matemaatilise statistika põhijooni. Tallinn, 1967, 88 lk. (TPI rotaprint.)

Eelnimetatuga võrdse ulatusega õppevahend.

25. Пустовалов Г. Е., Талалаева Е. В. Простейшие физические измерения и их обработка. МГУ, 1967, 156 стр.

Käsiraamat algajatele. Kirjeldatakse mõõtmistäpsuse hindamist, ligikaudseid arvutusi, arvutuslükati kasutamist, graafikute ja empiiriliste valemitte koostamist, lihtsamate mõõteriistade ehitust ja kasutamisreegleid.

26. Зайдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерений. "Наука", Москва, 1967, 89 стр.

Käesoleva juhendi esimeses osas viidatud brošüüri täiendatud väljaanne.

27. Уорсинг А., Гейфнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных. ИЛ, Москва, 1949, 363 стр.

Algajale eksperimentaatorile väga kasulik kit-

salt praktilise suunaga raamat. Matemaatilist ettevalmistust lugejalt ei nõuta. Autorid pööravad palju tähelepanu tabelite ja graafikute otsustarbeta vormistamise reeglitele, arvutustöö lihtsustamise võtetele jne. Üks peatükk on pühendatud periodogrammanalüüsile.

28. Урбах В. Ю. Биометрические методы. "Наука", Москва, 1964, 415 стр.

Praktiline käsiraamat, mis võimaldab statistilisi meetodeid rakendada ka nendel, kelle matemaatiline ettevalmistus piirdub aritmeetika ja koolialgebra algmetega.

V. Üldmatemaatilised ja spetsiaalsed raamatud.

29. Rägo, G. Kõrgem matemaatika I. Tallinn, ERK, 1962, 739 lk.

Traditsioonilise matemaatikakursuse kõrval käsitletakse ka mõõtmistulemuste töötlemist ja empiiriliste valemite koostamist.

30. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике.

Mitmes trükis ilmunud tuntud teatmiku viimane osa on pühendatud juhuslike vigade teooriale ja empiiriliste valemite koostamise meetoditele.

31. Võhandu, L. Arvutusmeetodid I. Tartu, 1962, 147 lk. (TRÜ rotaprint.)

Hea õpik praktilise arvutamisoskuse omandamiseks. Käsitletakse täpset ja ligikaudset arvutamist, arvutuslükati kasutamist ning võrrandite lahendamist. Lehekülgedelt 105-130 võib aga leida ülevaate matemaatilise statistika algmetest.

32. Новицкий П. В. Основы информационной теории измерительных устройств. "Энергия", Ленинград, 1968, 248 стр.

Esimene ülevaade uutest seisukohtadest metroloogias, mille kohaselt mõõtmistäpsust on kõige parem iseloomustada entroopia muuduga. Huvi pakuvad mõõtmisvigade jaotusseaduste katselise uurimise tulemused ja nendest tulenevad järeldused vigade liitumisseaduse kohta. Raamatule iseloomulik insener-tehniline lähenemisviis ei vähenda esitatavate seisukohtade põhimõttelist tähtsust.

33. Широков Ч. П. Общие вопросы метрологии. "Машиностроение", Москва, 1967, 96 стр.

Sobib täienduseks käesoleva juhendi esimesele osale.

VI. Tabelite kogumikud.

34. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики. "Наука", Москва, 1965, 464 стр.

Kõige universaalsemad Nõukogude Liidus ilmunud statistilised tabelid. Raamat sisaldab põhjalike teoreetilisi selgitusi (nõutav hea matemaatiline ettevalmistus) ja tabelite kasutamisjuhendeid (158-1 leheküljel). Bibliograafia: 56 nimetust tabelite kogumikke ja 149 nimetust artikleid ning raamatuid.

35. Суэн Д. Б. Сборник статистических таблиц. Вычисл. ц. АН СССР, Москва, 1966, 586 стр.

Autor on peatähelepanu pööranud vähem tuntud ja muudest kogumikest puuduvatele tabelitele. Raamat on heaks täienduseks eespool nimetatud kogumikule [34]. Tabelitele lisatud selgituste mõistmiseks on vaja head matemaatilist ettevalmistust.

36. Янко Я. Математико-статистические таблицы. Госстатиздат, Москва, 1961, 243 стр.

Kogumik sisaldab tuntumaid statistilisi tabelleid, mis on varustatud üksikasjalike selgituste, kasutamisjuhendite ja näidetega.

TABELITE LOETELU.

| | |
|---|----|
| 1. Kolmogorovi testi statistiku kriitilised väärtused [34] | 28 |
| 2. Mediaani usalduspiirid (märgitest) [34] | 32 |
| 3. Poissoni jaotuse keskvaartuse usalduspiirid (koostatud tabelite [34] abil) | 34 |
| 4. Standardhälbe hinnangu parandustegur [34] | 37 |
| 5. Variatsioonilulatuse keskvaartus. Kordajad dispersiooni hindamiseks variatsioonilulatuse järgi (koostatud tabelite [34] abil) | 38 |
| 6. Dispersiooni parima hinnangu ja lihtsustatud hinnangu võrdlus [34] | 39 |
| 7. Studenti jaotuse kvantiilid [35] | 41 |
| 8. Student-Lordi jaotuse kvantiilid [34] | 41 |
| 9. Märgitesti ja Studenti testi võrdlus. (Studenti jaotuse kvantiilide tabelist [34] on leitud väikseim võrratust $t/\sqrt{n_0} < r$ rahuldav n_0 ; r on märgitesti korral piiriks oleva järjestatiku keskvaartus | 43 |
| 10. Jaotuse normaalsuse kontrollimiseks kasutatava statistiku kriitilised väärtused [34] | 44 |
| 11. Jaotuse normaalsuse kontrollimiseks kasutatava statistiku g (empiirilise asümmeetria) kriitilised väärtused [34] | 44 |
| 12. Eksetesti statistikute kriitilised väärtused [34] | 45 |
| 13. Wilcoxon'i testi statistiku kriitilised väärtused [35] | 66 |
| 14. Kriitiline seeriade arv [35] | 69 |

Sisukord.

| | |
|---|----|
| Eessõna | 3 |
| § 1. Tõenäosusteooria mõisted | 5 |
| § 2. Matemaatilise statistika mõisted | 18 |
| § 3. Mõõtmisvead | 25 |
| § 4. Tundmatu jaotus | 29 |
| § 5. Poissoni jaotus. Ristkülikjaotus | 33 |
| § 6. Normaaljaotus | 36 |
| § 7. Eksete tsensuur | 44 |
| § 8. Summa viga. Iiditviga | 46 |
| § 9. Funktsiooni viga | 51 |
| § 10. Kaalutud keskmine | 53 |
| § 11. Graafikud | 56 |
| § 12. Empiirilised valemid | 58 |
| § 13. Regressioonsirge | 61 |
| § 14. Süstemaatiline nihe | 64 |
| § 15. Arvutusskeemid | 69 |
| Täiendav kirjandus | 73 |
| Tabelite loetelu | 82 |

X. Ф. Таммет

НАЧАЛА ПРАКТИЧЕСКОЙ МЕТРОЛОГИИ

II

На эстонском языке

Тартуский государственный университет
ЭССР, г. Тарту, ул. Оджооли, 18

Vastutav toimetaja E. Tamm
Korrektor M. Raissa

=====

TRÜ rotaprint 1970. Paljundamisele antud 28. V 1970.
Trükipoognaid 5,25. Tingtrükipoognaid 4,88. Arvestus-
poognaid 4,0. Trükiarv 1000. Paber 30 x 42. 1/4.
MB 04160. Tell. nr. 386.

Hind 20 kop.

1 - k5.

Hind 20 kop.

A

28344

II

193489

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00446604 3