ЭСТОНСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

А. РУУБЕЛЬ

ОБОБЩЕННАЯ АКСОНОМЕТРИЯ

ТАРТУ 1967

ЭСТОНСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

А. РУУБЕЛЬ

ОБОБЩЕННАЯ АКСОНОМЕТРИЯ

ТАРТУ 1967

Эстонская сельскохозяйственная академия
г. Тарту, ул. Рийа, I2
А. Руубель
ОБОБЩЕННАЯ АКСОНОМЕТРИЯ
На русском языке

Редактор: Я. Габович

Подписано к печати I3 УI 1967 г. Бумага 60x84/I6 см.
Печ. л. 0,88. Уч. л. 0,63. Тираж 500. МВ 05573. Зак. № 90.
Ротапринт ЭСХА, ЭССР, г. Тарту, ул. Рийа, I2
Цена 2 коп.

I. <u>Введение</u>. В настоящей брошюре рассматривается аксонометрия, основанная на обобщенной (в общем случае криволинейной) системе координат и на обобщенном (в общем случае криволинейном) проектировании.

Предполагается, что отображение (а также аксонометрический комплексный чертеж) точки получается при помощи построения в проекции т. н. обобщенной координатной ломаной, состоящей из дуг координатных линий (подобно случаю обычной аксонометрии). Поэтому в работе изучаются в первую очередь проекции координатных линий и их шкал.

Исследования проводятся аналитически.

Выводятся критерии, по которым можно наперед определить тип координатной сетки в проекции. Результаты даются в виде теорем. Рассматриваются следующие типы сеток координатных линий: I) постоянные сетки с постоянными шкалами (регулярные и нерегулярные сетки), 2) постоянные сетки с непостоянными шкалами, 3) непостоянные сетки.

Ставятся некоторые вопросы, связанные с формулированием и решением обратной задачи аксонометрии, соответственно типам сеток, и дается одна общая схема решения обратной задачи аксонометрии. В качетсве примера рассматривается решение обратной задачи аксонометрии в случае регулярных постоянных сеток с постоянными шкалами.

2. <u>Данные прямой задач аксонометрии и проекции координатных линий</u>. Пусть заданы произвольная система координат x_1, x_2, x_3 поверхность проекции $\Pi(x_1, x_2, x_3) = 0$ и семейство проектирующих, определяемых параметрическими уравнениями $x_i = x_i^0 + f_i(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$, где $i = 1, 2, 3$, $\bar{P}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ – проектируемая точка, а t – текущий параметр. Тогда через лю-

бую точку $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ пространства проходят три координатные линии l_1, l_2, l_3 (линии, по каждой из которых меняется только одна координата), причем координатная линия l_i определяется системой уравнений

$$(1)\quad \begin{cases} x_i = x_i^0 + u_i, & \text{где } i, k, m = 1, 2, 3, \\ x_k = x_k^0, & \text{причем } i \neq k \neq m. \\ x_m = x_m^0, \end{cases}$$

Проекция l_i' линии l_i определяется системой

$$(2)\quad \begin{cases} x_i' = x_i^0 + u_i + f_i(t, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \\ x_k' = x_k^0 + f_k(t, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \\ x_m' = x_m^0 + f_m(x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \\ \Pi(x_i', x_k', x_m') = 0. \end{cases}$$

Из этой системой можно исключить t.

3. Типы координатных сеток. При проектировании совмещаются проекции всех точек одной и той же проектирующей. Если при совмещении точек в проекции соответствующие координатные линии, проходящие через эти точки, также совмещаются в проекции, то мы получим в проекции постоянную сетку координатных линий или постоянную аксонометрическую сетку, в противном случае получаем непостоянную сетку координатных линий. В случае постоянной сетки через каждую точку плоскости проекции проходит одна и только одна линия каждой из трех семейств проекций координатных линий, а в случае непостоянной сетки бесконечное множество. Это является основным подразделением сеток. Постоянные сетки разделяются еще на постоянные сетки с постоянными шкалами и постоянные сетки с непостоянными шкалами, смотря по тому, совмещаются или не совмещаются в проекции вместе с совмещением проекций координатных линий также проекции одинаковых равномерных шкал, взятых на них.

Если в случае постоянной сетки с постоянными шкалами, равномерным шкалам пространства соответствуют и в проекции равномерные шкалы, то будем говорить о постоянной регулярной сетке координатных линий.

Теорема I. Постоянство или непостоянство сетки, а также постоянство или непостоянство шкал в проекции определяются уравнениями проектирующих, данными в системе координат, рассматриваемой в аксонометрии, независимо от типа координатной системы и от плоскости проекции. Регулярность или нерегулярность сетки определяется ураненими проектирующих и плоскости проекции. Доказательство первой части теоремы основывается на двух обстоятельствах: I) Вопрос о том, проходит ли проектирующая, проведенная через точку одной координатной линии, также через некоторые точки определенных других координатных линий, и через какие именно, зависит только от проектирующих. 2) Удовлетворяют ли точки данному уравнению - это зависит только от формы уравнения, а не от системы координат. Вторая часть теоремы доказывается тем, что форма проекции фигуры зависит как от проектирующих, так и от плоскости проекции.

4. Критерии для определения типа координатной сетки

Теорема 2. (Основная теорема сеток координатных линий).

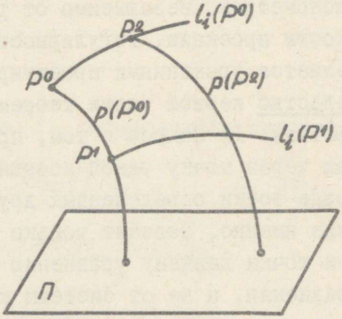
Необходимым и достаточным условием для получения в проекции постоянной сетки координатных линий является удовлетворяемость трех систем уравнений следующего типа:

$$(3)\quad \begin{cases} u_i + f_i(t_1, x_i^0, x_k^0, x_m^0) = u_i + f_i(\tau_i, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \\ f_k(t_1, x_i^0, x_k^0, x_m^0) = f_k(\tau_i, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \\ f_m(t_1, x_i^0, x_k^0, x_m^0) = f_m(\tau_i, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \end{cases}$$

при любых заданных значениях x_i^0, x_k^0, x_m^0, t_1 и u_i и при выбираемых значениях τ_i и u_i причем $i, k, m = 1,2,3$, но $i \neq k \neq m$. Удовлетворяемость системы, соответствующей только одному значению i, обеспечивает совпадение проекций только одних координатных линий. Если $U_i = u_i$, то шкалы постоянны, если $U_i \neq u_i$ то шкалы непостоянны.

Доказательство. Пусть уравнения проектирующих

$$x_i = x_i^0 + f_i(t, x_1^0, x_2^0, x_3^0), \qquad \text{где } i = 1, 2, 3, \text{ (черт. I)}.$$



Черт. I.

Берем на одной и той же проектирующей две точки $P^0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ и $P^1[x_1^0 + f_1(t_1, x_1^0, x_2^0, x_3^0), x_2^0 + f_2(t_1, x_1^0, x_2^0, x_3^0), x_3^0 + f_3(t_1, x_1^0, x_2^0, x_3^0)]$.

Проводим через эти точки одни какие нибудь координатные линии $l_i(P^0)$ и $l_i(P^1)$; они определяются следующими уравнениями:

$$(4) \quad l_i(P^0) \begin{cases} x_i = x_i^0 + u_i, \\ x_k = x_k^0, \\ x_m = x_m^0, \end{cases} \qquad (5) \quad l_i(P^1) \begin{cases} x_i = x_i^0 + f_i(t_1, x_i^0, x_k^0, x_m^0) + U_i, \\ x_k = x_k^0 + f_k(t_1, x_i^0, x_k^0, x_m^0), \\ x_m = x_m^0 + f_m(t_1, x_i^0, x_k^0, x_m^0). \end{cases}$$

Возьмем на координатной линии $l_i(P^0)$ некоторую точку $P^2(x_1^0 + u_i, x_2^0, x_3^0)$, соответствующую определенному значению

u_i и проведем через нее проектирующую $p(P^2)$ с уравнениями

$$(6)\quad \begin{cases} x_i = x_i^0 + u_i + f_i(\tau_i, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0) \\ x_k = x_k^0 + f_k(\tau_i, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0) \\ x_m = x_m^0 + f_m(\tau_i, x_i^0 + u_i, x_k^0, x_m^0), \end{cases}$$

где τ_i текущий параметр этой проектирующей.

Для того, чтобы проектирующая $p(P^2)$ проектировала также некоторую точку линии $l_i(P^1)$ необходимо и достаточно, чтобы линии $l_i(P^1)$ и $p(P^2)$ имели общую точку, т. е. чтобы правые части соответствующих уравнений систем (5) и (6) были равны при заданных значения $x_i^0, x_k^0, x_m^0, t_1,$ u_i и при выбираемых значениях τ_i и U_i. Отсюда и получаются равенства, данные в теореме, и теорема доказана. Отсюда, кроме того, видно, что при $U_i = u_i$ и только при этом условии совпадают также шкалы.

На основании этой основной теоремы легко доказываются следующие теоремы:

<u>Теорема 3</u>

Проектирующие с уравнениями $x_i = x_i^0 + f_i(t)$, где $i = 1,2,3$, дают в проекции постоянную сетку координатных линий с постоянными шкалами, проектирующие $x_i = x_i^0 + f_i(t, x_i^0)$ дают постоянную сетку с непостоянными шкалами.

<u>Доказательство</u>. При определенном значении i в обоих этих случаях два последние уравнения системы (3) удовлетворяются при $\tau_i = t_1$ так как x_i^0 а тем самым и $x_i^0 + u_i^0$ по условиям теоремы в этих уравнениях отсутствуют. Первое же уравнение удовлетворяется при $\tau_i = t_1$ и $U_i = u_i + f_i(t_1, x_i^0 + u_i) - f_i(t_1, x_i^0)$. Получается постоянная сетка, но непостоянная шкала. В частном случае, когда f_i зависит только от t имеет $U_i = u_i$ и получаем постоянную шкалу.

Что условия теоремы 3 не являются необходимыми для получения постоянной сетки, в этом можно убедится на примере проектирующих $x_i = t(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0)$, где i =I, 2, 3. В этом случае $f_i = t(x_1^0 + x_2^0 + x_3^0) - x_i^0$, (3) удовлетворяется при $\tau_i = t_1$ и $U_i = u_i(1+t_1)$. И так, по теореме 2 мы и в этом случае получаем постоянную сетку с непостоянными шкалами.

Теорема 4.

Когда при одном из значений i выполнено условие $f_i = 0$, а f_k и f_m не зависят от x_i то в проекции получается постоянная сетка координатных линий, причем шкалы линий l_i' постоянны, а шкалы других координатных линий в проекции в общем случае непостоянны.

Доказательство. В случае координатных линии l_i система уравнений (3) обращается в следующую:

$$
(3а)\quad \begin{cases} U_i = u_i \\ f_k(t_1, x_k^0, x_m^0) = f_k(\tau_i, x_k^0, x_m^0), \\ f_m(t_1, x_m^0, x_k^0) = f_m(\tau_i, x_m^0, x_k^0), \end{cases}
$$

а в случае других координатных линий в следующую:

$$
(3б)\quad \begin{cases} U_k + f_k(t_1, x_k^0, x_m^0) = u_k + f_k(\tau, x_k^0 + u_k, x_m^0), \\ f_m(t_1, x_m^0, x_k^0) = f_m(x_m^0, x_k^0 + u_k), \end{cases}
$$

или в уравнения, получаемые из последних перестановкой индексов k и m.

Система (3а) удовлетворяется при $\tau = t_1$ и $U_i = u_i$. Система (3б) состоит их двух уравнений с двумя неизвестными, которые этой системой определяются, причем в общем случае $U_k \neq u_k$.

Пример I. Проектирование с проектирующими $x_i = x_i^0 + a_i t$ где i = I, 2, 3, дает по теореме 3 в любой системе координат постоянные сетки с постоянными шкалами. Сюда относятся прямолинейное параллельное проектирование - в случае декартовых координат, проектирования при помощи конических, сферических, цилиндрических винтовых линий, окружностей и архимедивых спиралей в случаях цилиндрических и сферических координат и т. д.

Пример 2. Центральное прямолинейное проектирование определяется в системе декартовых координат уравнениями $x_i = x_i^0 + t(x_i^0 - s_i)$, где $i = 1,2,3$ и $S(s_1, s_2, s_3)$ - центр проектирования. По теореме 3 здесь получается постоянная сетка с непостоянными шкалами.

Пример 3. Круговое проектирование в декартовой системе координат, когда ось x_1 служит осью центров, определяется уравнениями

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 \\ x_2 = \sqrt{x_2^{0^2} + x_3^{0^2}}\,\cos t, \\ x_3 = \sqrt{x_2^{0^2} + x_3^{0^2}}\,\sin t. \end{cases}$$

По теореме 4 здесь постоянная сетка, причем шкалы линий, параллельных Ox_1, дают в проекции постоянные шкалы, другие же координатные линии - непостоянные шкалы.

5. Обратная задача аксонометрии

По заданным типам координатной системы и проектирующих, а также по проекции некоторой конфигурации точек, координаты которых в этой пространственной системе координат известны, определить эту конфигурацию, взаимное расположение проектирующих и этой конфигурации в пространстве, а также их расположение относительно заданной плоскости проекции по крайней мере с точностью до известного преобразования. При этом конфигурацию точек выбрать так, чтобы эта конфигурация (или част ее) определила координатные линии со шкалами в пространстве, а проекция конфигурации - их проекции.

План решения задачи может быть следующим:

I) Изучение условий выбора конфигурации и выбор ее. Это приводит, в основном, к таким предварительным задачам, как а)выяснение типа аксонометрической сетки; б) какие линии могут дать координатные линии в проекции; в) как провести измерения по координатным линиям в проекции; г) из скольких точек должна состоять конфигурация в проекции, как выбирать точки и можно ли проекции всех точек конфигурации выбрать совершенно произвольно, или необходимо соблюдать при этом какие-нибудь органичения.

При решении этих вопросов нужно сравнивать числа свободных параметров проектирующего аппарата и проекции конфигурации. Уравнения проектирующих и плоскости проекции можно выписать в данной системе координат с пока неизвестными параметрами.

2) Уравнения проектирующих мы определим по координатам совмещенных в проекции точек. Для нахождения этих координат мы проведем в проекции координатную ломаную, начальная и конечная точка которой совпадают, например, в точке O' (в случае надобности несколько таких ломаных) и измеряем звенья ломаной по их шкалам. Таким образом полученные координаты мы можем подставить в уравнения общего вида проектирующих и отсюда вычислить параметры уравнений.

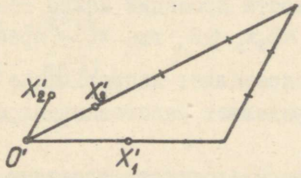
3) Определение уравнения поверхности можно провести аналитически. Определим аналитически некоторые величины, связанные с проекцией конфигурации. Результаты содержат пока неизвестные параметры поверхности проекции. Приравнивая полученные выражения к результатам измерения (или вычисления) этих величин по чертежу, мы получим систему уравнений для определения неизвестных параметров уравнения поверхности проекции. Отсюда выясняется также, с какой точностью эти параметры определяются.

<u>Пример</u>. Пусть даны уравнения проектирующих $x_i = x_i^0 + a_i t$, где i = I, 2, 3, а a_i постоянные. Пусть уравнение поверхности проекции есть $b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 1$. Рассмотрим случаи а) декартовых и б) цилиндрических координат, где $(x_1, x_2, x_3) \equiv (r, \varphi, z)$, принимая в последнем случае $b_1 = b_2 = 0$ (или $b_1 = b_3 = 0$), чтобы эта поверхность проекции была плоскостью. По теореме 3 аксонометрическая сетка будет постоянной, легко доказывается, что она будет и регулярной.

Рассмотрим эти случаи отдельно.

а) Решение обратной задачи обычной параллельной аксонометрии. Примем конфигурацию точек, состоящую из начала координат и масштабных точек координатных осей. Как известно, мы можем выбрать проекции O', X'_1, X'_2 и X'_3 этих точек произвольно (но только так, чтобы никакая тройка из них не лежала на одной прямой).

Нахождение проектирующих (черт. 2). Проведем в проекции



Черт. 2.

произвольную допустимую координатную ломаную, начало и конец которой лежат в точке O'. Измеряя ее отрезки в соответсвенных единицах и соблюдая направленность аксонометрических осей, находим координаты p_1, p_2, p_3 некоторой точки, совпадающей в проекции с проекцией точки О. По уравнениям проектирующих видно, что $a_1 : a_2 : a_3 = p_1 : p_2 : p_3$ (на чертеже $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и $p_3 = -4$).

Отсюда уравнения проектирующих: $x_i = x_i^0 + p_i t$, где $i = 1.2.3$.

Нахождение уравнения плоскости проекции: Определим длины отрезков $O'X'_1$, $O'X'_2$ и $O'X'_3$ как по проекции $[d_1, d_2, d_3]$, так и аналитически по уравнениям проекций координатных линий, из которых исключено t, мы получим

$$\overrightarrow{O'X'_i}\ [a_i(1 + B_i)u_i,\ a_k B_i u_i,\ a_m B_i u_i]$$

где $i, k, m = 1.2.3$; $i \neq k \neq m$ и где

$$B_i = \frac{-b_i}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$$

Из длин этих векторов получим уравнения:

$$a_i^2 (1 + B_i)^2 + a_k^2 B_i^2 + a_m^2 B_i^2 = \left(\frac{d_i}{u_i}\right)^2, \quad \text{где } i = 1.2.3.$$

Отсюда определяем B_i и согласуем результаты с другими да ными чертежа. Значения b_1, b_2 и b_3 определяем по уравнения

$B_i = \dfrac{-b_i}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}$ Эта система однородных уравнений определяет b_1, b_2 и b_3 только с точностью до пропорциональности и дает: $b_1 : b_2 : b_3 = B_1, B_2, B_3$.

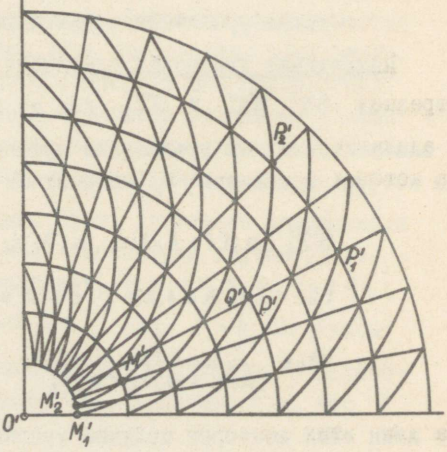
Уравнение плоскости проекции можно теперь написать в виде $\lambda B_1 x_1 + \lambda B_2 x_2 + \lambda B_3 x_3 - 1 = 0$, где λ - произвольное постоянное. Это уравнение определяет направляющие косинусы нормали плоскости, но не определяет расстояния плоскости до начала координат.

Исходя из заданной плоскости проекции, мы можем теперь построить в пространстве нормаль плоскости и саму плоскость а потом по уравнениям проектирующих можем построить эти прое тирующие.

б) Решение обратной задачи линейной аксонометрии в цилин рических координатах.

Пусть $(x_1, x_2, x_3) = (r, \varphi, z)$.

Координатными линиями является теперь центральные прямые, концентрические окружности с тем же центром и спирали Архимеда (черт. 3). В этом случае для получения координат некоторой точки, совмещающейся в проекции с Q', проведена обобщенная координатная ломаная $Q'P_1'P_2'P'$, причем $P' = Q'$. Измеряем звенья этой ломаной в единицах, заданных на чертеже масштаб-



Черт. 3.

ной обобщенной координатной ломаной $O'M_1'M_2'M'$. Так мы получим разности координат q_1, q_2 и q_3 двух произвольных совпадающихся в проекции точек P и Q , которые с другой стороны равны a_1t, a_2t и a_3t. Отсюда $a_1 : a_2 : a_3 = q_1 : q_2 : q_3$. По чертежу $q_1 = 2$, $q_2 = 2$ и $q_3 = -2$ и $a_1 : a_2 : a_3 = 1 : 1 : -1$. Уравнения проектирующих являются следующими:

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0 + t, \\ x_2 = x_2^0 + t, \\ x_3 = x_3^0 - t. \end{cases}$$

Уравнение плоскости проекции можно найти на основании данных общих указаний, причем известно уже что $b_1 = b_2 = 0$.

Цена 2 коп.