

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI

# TOIMETISED

УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ

ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

627

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ  
И ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED  
УЧЕННЫЕ ЗАПИСКИ  
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА  
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS  
ALUSTATUD 1893.a. VIHK 627 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

**ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ  
И ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ**

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid  
Труды по математике и механике



TARTU 1982

Redaktionskolleegium:

Ü. Leplik (esimees), L. Ainola, K. Kenk, M. Kiip, Ü. Lumiste,  
A. Reimers, E. Tamm.

Редакционная коллегия:

Г. Лелик (председатель), Л. Айнала, К. Кенк, К. Кильп, В. Лумисте,  
Э. Реймерс, Э. Тамме.

СОДЕРЖАНИЕ

A. Sawczuk, On the mechanics of plastic structures . .	3
Ü. Leplik, Оптимальное проектирование круглых и кольцевых пластин из нелинейно-вязкого материала . . . .	9
H. Толлина, M. Хейнлоо, Расчет и оптимизация армированных многослойных сферических сосудов . . . . .	17
K. Соонетс, Оптимальное проектирование консольной балки при поперечном ударе о ее свободный конец. .	24
A. Салувере, Автоматизированный расчет жестко-пластических ступенчатых круглых и кольцевых пластин при динамическом нагружении . . . . .	35
Я. Леллеп, К оптимальному проектированию пластических балок при больших прогибах . . . . .	43
Я. Леллеп, Параметрическая оптимизация пластических балок . . . . .	50
Г. Оленев, Деформация жестко-пластической цилиндрической оболочки при импульсной нагрузке . . . . .	57
Г. Оленев, Об оптимальном расположении нескольких дополнительных опор к жестко-пластической цилиндрической оболочке при импульсном нагружении . . . .	66
В. Кярс, К. Кенк, Об учете упрочнения при оптимальном проектировании . . . . .	72
К. Кенк, О сложном нагружении трансляционно упрочняющегося материала . . . . .	80
Г. Арясов, Б. Исупович, О приближенном методе расчета свободных колебаний упругих систем . . . . .	84
О. Смаде, А. Хайтин, Учет связей в методе уравнения возможной мощности (УВМ) . . . . .	90
А. Хайтин, Об одном выводе дифференциальных уравнений движения механической системы . . . . .	96
Т. Пейлман, В. Энгельбрехт, О решении двумерных уравнений переноса переходных волновых процессов методом преобразования Фурье . . . . .	107

## ON THE MECHANICS OF PLASTIC STRUCTURES

A. Sawczuk

Polish Academy of Sciences\*

1. Mechanics constitutes an important branch of natural sciences, involving both intellectual and engineering effort. The intellectual side relates to discovering, in association with other disciplines like physics, geology, astronomy, to mention a few, the principal laws of nature and in association with mathematics to arrive at an appropriate description of these laws developing, moreover, suitable methods of resolving the systems of equations obtained. The engineering aspect of mechanics is ment here as an effective application of the discovered laws to create new objects of technological character in a service to the humanity. Let invoking buildings, bridges, airplanes and spatial structures, material processing technologies, machines and nuclear power stations, serve as an illustration of this applied side of mechanics.

Any theory of structures, thus a theory concerning the behavior of specific geometrical and material objects subjected to mechanical, thermal, magnetic and various other external and internal agencies is closely related to the analytical and to the continuum mechanics.

The theory of plastic structures is a specialized branch concerned with a particular behavior of engineering materials by taking into account their ductility, commonly referred to as plasticity, thus a property of developing and preserving permanent deformations at a certain level of stress.

2. The mechanics of plastic solids has multiple applications in various branches of engineering and technology. Its methods allow, for example, to conceive and calculate the processes of metal forming, to establish the safety factor against failure or excessive deformations of ductile

---

\* Настоящая статья написана по просьбе ТГУ. Перевод этой статьи на эстонский язык публикуется также в журнале "Горизонт".

structures, to foresee the flow of granular media and the dimensioning of foundations of building, to study the avalanches of earth and snow. The number of domains of applications is more extensive. There is an observed tendency and a need to introduce more and more into design procedures the methods of analysis furnished by the theory of plasticity and its specialized disciplines as visco-plasticity, thermo-plasticity, theory of limit analysis, or dynamics of plastic structures.

Methods accounting for the plastic behavior of materials are, generally speaking, not yet sufficiently applied in engineering, contrary to the necessity the real materials, possessing properties of ductility and internal energy dissipation, might require. The reasoning based on the linear elasticity, sufficiently appropriate in preceding periods of machines and building design, is yet often employed even beyond the range of applicability of such a behavior, and it results in linear differential equations and in the principle of superposition of effects. The main reason for this fact is the wealth of information accumulated during decades as regards the elastic behavior and presence of accessible to engineers routine techniques and tables of solutions helping in conceiving and design of structures.

It is perhaps worthwhile to mention that the theory of elasticity is relatively new in engineering, its developments and mathematical rigour originate from the beginning of the 19th century. A great number of remarkable structures and machines were realised earlier, often employing the notion of failure as the basis for construction. The notion of collapse is, however, closely associated with the plastic behavior.

3. The mechanics of plastic solids and structures is an intellectual discipline strongly motivated by applications.

For a theory of mechanical behavior becomes a useful, reliable and effective tool in hands of an engineer certain requirements have to be satisfied.

a) In the first place a theory must be sound in this sense that it is well founded and developed analytically, being at the same time suitably verified experimentally as to the assumed mechanical and thermal properties. The assumptions clearly stated and the mathematical structure well

transparent make the basic points for constructing a rational theory.

b) Secondly a theory should be furnished with appropriate methods allowing to solve the initial and boundary value problems for the governing, usually partial and nonlinear differential equations, synthesising the behavior of solids and structures. The methods, analytical or numerical, have to be applied to solving a sufficient number of pertinent, not solely illustrative or purely academic problems, so as a structural engineer could appreciate the relevance of the theory and its utility for developing his intuition and creativeness.

c) The third and essential point for an effective implementation of a theory is a presentation of the results obtained in a form accessible to structural designers, thus as algorithms, computer programs and manuals containing formulas, tables and design guides.

It is also important to note that an implementation of the results obtained employing new mechanical models are often hindered by the codes and regulations imposed by the professional or governmental organisations responsible for developing the codes and therefore defending the vital interests of the public against abusive or irresponsible decisions of engineers. It is essential thus for a scientist, aware of his responsibilities with respect to the human society, not to neglect or disregard this pertinent part of the creativity as codes for rational designs. Modern world requires universal standards and codes of design. The plasticity has already in some specific domains its international regulations.

4. The mechanics of plastic materials developed during the last decades several specialized branches of importance for the rational design of structures and technological processes. The results obtained allow to judge, for example, redistributions of stress due to the material ductility in comparison with the solutions of analogous elastic problems or those concerning the instability of structures.

The most developed and now almost closed, as far as the fundamental theorems and methods are concerned, is the domain interested in what is the load magnitude an ideally plastic structure can support. Or in other words: when a

structure designed to remain safe under the given loads increasing in proportion, transforms into a mechanism with one or more degrees of freedom. The basic theorems concerning the limit analysis, thus the behavior of a structure at collapse, were formulated some decenies ago and methods as well as solutions regarding specific structures were justified. Essential contributions to this branch of plasticity have their sources in England, in the United States, in the Soviet Union and in Poland. Our attention was focussed mostly on plates and to some extend on shells. The branch is of pertinence for specifying the safety factor of a structure against collapse.

Another fairly well established domain, with theorems formulated either before the Second World War in Austria or not long after elsewhere, is the theory of elastic-perfectly plastic continua subjected to external agencies varying in time not necessarily according to a specific rule. This is the theory of shakedown, which is of importance for many technological processes, for behavior of structures subjected to seismic actions and, in general, to random agencies, as for example off-shore and naval structures. Many questions are still open in this theory as regards dynamic loadings, thermal agencies and phase changes in metals. The theory is fairly closed as far as elastic-plastic beams and frames are concerned. Contributions originated in England, the Netherlands, the Soviet Union and Italy are to be mentioned. Our efforts in Poland in this domain continue, both theoretical and experimental.

An important domain of mechanics of plastic structures is that considering so-called post-yield behavior. It is not always so that the collapse load calculated according to the limit analysis theory is of relevance for design. It might happen that due to the continuing plastic deformation a structure at collapse can either sustain further loading or becomes unstable and fails in a catastrophic manner. An appropriate analysis of such behaviors requires a closer look on the geometrical relations, thus accounting for differences between the undeformed and deformed configurations. This fairly recently developed domain encounters significant mathematical difficulties due to the nonlinearity of resulting equations and to questions related to the stability of plastic deformation processes in the large strain or displacement range. It

is worthwhile to point out that in Estonia these questions were studied early when considering the influence of geometry changes on the load-carrying capacity of structures. The attention paid to the post-yield behavior in the United States, England and Poland is also to be mentioned. Our approach is strongly based on the nonlinear continuum mechanics.

Dynamics of plastic structures constitutes an important and still developing field. The interest is provoked by the necessity of responding the question what magnitude of pressure pulses or initial velocities can sustain a plastic structure or what is its final permanent deformation after the plastic motion ceases. All this is related to the absorption of energies introduced from exterior and their dissipation in the process of plastic deformation. The questions are of importance in the cases of blast loading, for example safety of nuclear power stations, collision of vehicles, both automobiles and naval structures thus, in general, to estimate the crashworthiness of structures as regards protection of the human life. In principle, the dynamics of structures has to take into account the large displacements due to impacts and account properly for the geometry changes when computing the energy dissipation. This makes the problems fairly sophisticated. The domain nowadays attract a great attention in the United States, in the Soviet Union, in England and in Poland. Contributions of Estonian mechanicians are to be noticed since they very early remarked the pertinence and the intellectual aspects of the problem. Our interest is focussed on an appropriate accounting for the large strains in order to produce methods allowing to estimate the permanent displacements. Thus again the relation of nonlinear structural mechanics to nonlinear continuum mechanics can be noticed.

5. The main domains of the mechanics of plastic structures stretched it is necessary not to forget about other specialized fields and to mention these branches which are now beginning to develop or which likely should be kept in mind.

This is the place to mention the optimization of structures made of elastic-plastic materials. The question is here, for example, what should be the shape of a structure, what is the most suitable arrangement of supports, what should

be arrangement of fibers in composite plastic materials which assure the lowest material consumption, the desired shape or guarantee the stability of an optimal structure. In this domain, besides the variational techniques an important place occupy modern mathematical methods, mentioning for example the control theory. The optimization of plastic structures attracts attention of various research centers in the United States, in the Soviet Union to mention only Estonia, in Australia, Hungary, France, Germany and elsewhere.

6. In concluding these personal remarks and thus necessarily based and characteristic to my own sensibility as to the pertinence of mechanics of plastic structures it is, however, necessary to mention at least few domains of plasticity which are being developed due to the technological needs, directed toward making the human life more comfortable and more safe. The theory of large elastic-plastic deformations, thermo-plasticity, plasticity under cyclic loadings, accounting for the random character of material properties and external actions, studies on the bifurcation and stability at large strains, combined actions of magnetic and electrical fields on the plastic behavior, the soil-structure and fluid-structure interactions when accounting for seismic phenomena, interaction of plasticity and damage represent but only a limited number of technologically important domains of the mechanics of plastically isotropic or anisotropic solids and structures. It was intended to show that plasticity is a living domain of mechanics, with creative perspectives and related to pertinent technological applications. Not only it gives, in association with the other branches of physics, chemistry, geology a broad scope of research related closely to applied mathematics but also it requires a constant effort toward bringing the results into the reach of a structural analyst. There are important tasks ahead in order to implement the results obtained and verified by thoughtful experiments into various branches of modern technology. An inclusion of well founded results of plastic analysis into international design codes constitutes also a domain requiring a close collaboration of mechanicians and engineers on the global scale, in the world relieved from the obstacles preventing the circulation of scientific ideas and research results, in the world encouraging joint intellectual effort.

Fortunately for mechanicians such an international collaboration exists, as the experience of our lives proves.

## ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ИЗ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОГО МАТЕРИАЛА

Ю. Лепик

Тартуский государственный университет

Задача оптимального проектирования нелинейно-вязких кольцевых пластин при импульсном нагружении исследовалась в [2], где на основании методики работы [4] были выведены основные уравнения и предложен метод решения оптимизационной задачи. В данной работе предлагается алгоритм проведения вычислений, несколько отличающийся от схемы, приведенного в [2]. Достоверность его демонстрируется при помощи одного конкретного численного примера.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим круглую или кольцевую пластину. Прогибы ее будем считать осесимметричными. Ограничимся случаем идеализированной трехслойной пластины (пластина типа "сэндвич"). Толщину несущих слоев  $h$  будем считать функциями от координаты  $r$ ; эта величина изменяется в рамках ограничений  $h_1(r) \leq h(r) \leq h_2(r)$ . Общая толщина пластины  $\mathcal{D}$  является постоянной.

Допустим, что пластина изготовлена из нелинейно-вязкого материала, подчиняющегося закону

$$\dot{\epsilon}_{ij} = B^{1/n} (\lambda_{ns} \lambda_{ns})^{\frac{1-n}{2n}} \lambda_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{ii} = 0. \quad (I.1)$$

Здесь  $\lambda_{ij}$  - девиатор напряжений,  $B$  и  $n$  - положительные константы материала, причем  $0 < n < 1$ .

Переходя к напряжениям  $\sigma_{ij}$  при помощи соотношений  $\lambda_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}_{kk} \delta_{ij}$  и учитывая, что  $\bar{\sigma}_{33} = 0$ , получим

$$\bar{\sigma}_{11} = \frac{1}{B} (2\dot{\epsilon}_{11} + \dot{\epsilon}_{22}) (\bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij})^{\frac{n-1}{2}}, \quad \bar{\sigma}_{22} = \frac{1}{B} (2\dot{\epsilon}_{22} + \dot{\epsilon}_{11}) (\bar{\epsilon}_{ij} \bar{\epsilon}_{ij})^{\frac{n-1}{2}}. \quad (I.2)$$

Константы  $B$  и  $n$  могут быть определены из опыта одноосного растяжения: так как  $\epsilon_{22} = 0$ ,  $\dot{\epsilon}_{22} = \dot{\epsilon}_{33} = -\frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{11}$ , то из первого уравнения системы (I.2) получим

$$B\epsilon_{11} = \left(\frac{\nu}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \dot{\epsilon}_{11}^n. \quad (\text{I.3})$$

Допустим, что силовая нагрузка отсутствует. Тогда уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial(\kappa M_1^*)}{\partial \kappa} - M_2^* = \kappa Q^*, \quad \frac{\partial(\kappa Q^*)}{\partial \kappa} = 2\varrho h \kappa \dot{\omega}. \quad (\text{I.4})$$

Здесь  $M_1^*$ ,  $M_2^*$  - изгибающие моменты,  $Q^*$  - перерезывающая сила,  $\varrho$  - плотность материала слоев (плотность заполнителя пренебрегаем),  $\omega$  - прогиб.

В случае идеализированной трехслойной пластины имеем

$$M_1^* = 2h b \epsilon_{11}^*, \quad M_2^* = 2h b \epsilon_{22}^*. \quad (\text{I.5})$$

Гипотезы Кирхгофа дают

$$\dot{\epsilon}_{11} = \mp \frac{\varrho}{\kappa} \frac{\partial^2 \dot{\omega}}{\partial \kappa^2}, \quad \dot{\epsilon}_{22} = \mp \frac{\varrho}{2\kappa} \frac{\partial \dot{\omega}}{\partial \kappa}, \quad (\text{I.6})$$

где знаки " $\pm$ " соответствуют нижнему и верхнему слоям пластины (ось  $x$  направим вниз).

Разделим переменные, предполагая, что

$$\dot{\omega}(\kappa, t) = \dot{\phi}(t) v(\kappa). \quad (\text{I.7})$$

Уравнения движения (I.4) с учетом (I.7) принимают вид

$$\dot{\phi} + \lambda^2 \phi^n = 0, \quad (\text{I.8})$$

$$\frac{d(\kappa M_1)}{d\kappa} - M_2 = Q\kappa, \quad \frac{d}{d\kappa}(\kappa Q) = -2\varrho \lambda^2 h \kappa v, \quad (\text{I.9})$$

где

$$M_i = M_i^* \dot{\phi}^{-n}, \quad i = 1, 2; \quad Q = Q^* \dot{\phi}^{-n}. \quad (\text{I.10})$$

Величина  $\lambda^2$  является собственным значением системы (I.4).

Интегрируя уравнение (I.8) при  $\dot{\phi}(0) = 1$ , находим

$$\dot{\phi}^{1-n} = 1 - (1-n)\lambda^2 t, \quad (n < 1) \quad (\text{I.11})$$

Движение прекращается в момент времени

$$t_f = \frac{2}{(1-n)\lambda^2}. \quad (\text{I.12})$$

Начальная кинетическая энергия для несущих слоев равняется

$$K_0 = 2\pi \varrho \int_0^R h v^2 \kappa d\kappa. \quad (\text{I.13})$$

Средний остаточный прогиб  $u_{cp}$  определим по формуле

$$u_{cp} = 2 \left( \int_0^R \pi \rho \dot{\omega}^2(r, t_f) h r dr \right)^{1/2}. \quad (I.14)$$

С учетом соотношений (I.7) и (I.II) находим

$$u_{cp} = \frac{\sqrt{2 \mathcal{K}_0}}{(2-n)\lambda^2}. \quad (I.15)$$

Для определения моментов  $M_1$  и  $M_2$  получим формулы

$$\begin{aligned} M_1 &= -\frac{1}{2^n B} \left( 2 \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right) h \mathcal{D}^{n+1} \mathcal{F}^{\frac{n-1}{2}}, \\ M_2 &= -\frac{1}{2^n B} \left( \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dv}{dr} \right) h \mathcal{D}^{n+1} \mathcal{F}^{\frac{n-1}{2}}, \end{aligned} \quad (I.16)$$

где

$$\mathcal{F} = \left( \frac{d^2 v}{dr^2} \right)^2 + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \frac{d^2 v}{dr^2} + \left( \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} \right)^2.$$

Оптимизационную задачу поставим теперь в следующем виде. Рассмотрим конструкции с одинаковым собственным числом  $\lambda^2$  и с одинаковой начальной кинетической энергией (I.13)\*. Требуется найти такое распределение толщин слоев  $h(r)$ , при котором объем последних

$$V = 4\pi \int_0^R h r dr \quad (I.17)$$

был бы минимален. При этом должны быть удовлетворены уравнения (I.9) и неравенства  $h_1 \leq h(r) \leq h_2$ .

## 2. Основные уравнения и метод решения

Поставленную в §I оптимизационную задачу решаем методами вариационного исчисления. Так как подробности этого подхода изложены в [2, 3], то ограничимся здесь лишь написанием основных результатов. Целесообразно перейти к следующим безразмерным величинам

$$\begin{aligned} x &= \frac{r}{R}, & y &= \frac{v}{L}, & \kappa &= \frac{h}{h_1}, & \gamma &= \frac{h_2}{h_1}, \\ m_i &= \frac{2^n B R^{2n} M_i}{\mathcal{D}^{n+1} h_1 L^n}, & i &= 1, 2, & q &= \frac{2^n B R^{2n+1} Q}{\mathcal{D}^{n+1} h_1 L^n}, \\ A &= \frac{4\pi}{\rho \lambda^2 L^2}, & \frac{\mathcal{E}}{A} &= \frac{2^{1-n}}{4\pi B} \left( \frac{\mathcal{D}L}{R^2} \right)^{n+1} \end{aligned} \quad (2.1)$$

\*Так как  $\mathcal{K}_0 = \text{const}$ , то из формулы (I.15) вытекает, что вместо величины  $u_{cp}$  мы можем задавать собственное число  $\lambda^2$ .

Здесь  $L$  — масштабный множитель, который можем выбрать по своему усмотрению (например,  $L = \mathcal{D}$  или  $L = R$ ).

Далее следует различать два следующих случая.

а) Допустим, что на некотором участке  $x \in (x^*, x^{**})$  величина  $\mathcal{H}$  достигает или верхнюю или нижнюю границу, т.е.  $\mathcal{H}(x) \equiv \gamma = \text{const}$  или  $\mathcal{H}(x) \equiv 1$ . В этом случае придется интегрировать следующую систему (здесь и в дальнейшем штрихами обозначены производные по  $x$ ):

$$\begin{aligned} \gamma_1 y''' &= y'' + \frac{2}{x} y' - \gamma_2 - \frac{1}{\mathcal{H}} q x \varphi^{\frac{1-n}{2}}, \\ (xq)' &= -\frac{4}{\delta} \mathcal{H} x y, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= x \left[ 2 + \frac{n-1}{2\varphi} \left( 2y'' + \frac{y'}{x} \right)^2 \right], \\ \gamma_2 &= 3y'' + \frac{n-1}{2\varphi} \left( 2y'' + \frac{y'}{x} \right) \left( y''^2 + \frac{y'}{x} y'' - \frac{2}{x^2} y'^2 \right), \\ \varphi &= y''^2 + \frac{y'}{x} y'' + \left( \frac{y'}{x} \right)^2. \end{aligned}$$

б) Если  $1 < \mathcal{H}(x) < \gamma$ , то получим систему

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y'}{2x} + \sqrt{\left( \frac{A+y^2}{\sigma} \right)^{\frac{2}{n+1}} - \frac{3y'^2}{4x^2}}, \\ m_1' &= -\frac{y'' - \frac{y'}{x}}{2xy'' + y'} m_1 + q, \quad (xq)' = \frac{4}{\delta} \frac{x y \varphi^{\frac{1-n}{2}} m_1}{2y'' + \frac{y'}{x}}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Из этой системы определим функции  $y(x)$ ,  $m_1(x)$  и  $q(x)$ . После этого вычислим из уравнения

$$m_1 = - \left( 2y'' + \frac{y'}{x} \right) \mathcal{H} \varphi^{\frac{n-1}{2}},$$

безразмерную толщину  $\mathcal{H}(x)$  и проверим, выполнены ли неравенства  $1 < \mathcal{H} < \gamma$ .

К этим уравнениям принадлежат еще краевые условия для  $y$ ,  $y'$ ,  $m_1$  и  $q$ . Эту краевую задачу можно решать по следующей схеме:

1) Задаем параметры материала  $\varphi$ ,  $B$ ,  $n$ , размеры конструкции  $R$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $h_1$ ,  $h_2$  (в случае кольцевой пластины придется задавать и внутренний радиус  $b$ ), собственное число  $\lambda^2$  и конкретизируем  $L$ .

2) Вычисляем коэффициенты  $A$  и  $\delta$  по формулам (2.1).

3) Переходим к решению краевой задачи. Из величин  $y$ ,  $y'$ ,  $m_1$ ,  $q$  двое являются при  $x = \beta = b/R$  неизвестными. Выбираем для них некоторые значения и интегрируем уравнения (2.2) – (2.3) численно.

4) Применяя методы нелинейного программирования, найдем такие значения на крае  $x = \beta$ , чтобы краевая задача была бы решена с необходимой точностью.

5) Так как мы ограничились лишь случаем малых прогибов, то должно быть  $w(1, t_f) \leq 0,5 \mathcal{D}$ . Учитывая формулы (I.7), (I.II) – (I.I2), можем это требование написать в форме

$$w(1, t_f) = w(1) \int_0^{t_f} \phi(t) dt = \frac{L y(1)}{\lambda^2 (2 - \nu)} \leq 0,5 \mathcal{D}. \quad (2.4)$$

Если неравенство (2.4) не выполняется, то придется немного увеличить выбранное значение  $\lambda^2$  и повторить весь расчет.

6) Наконец вычислим интеграл

$$J = \int_{\beta}^1 \mathcal{H} x y^2 dx \quad (2.5)$$

и начальную кинетическую энергию по формуле

$$\mathcal{H}_0 = 2 \pi \rho L^2 h_1 J. \quad (2.6)$$

### 3. Пример

В качестве примера рассмотрим кольцевую пластину, внутренний край которой заделан, а внешний свободен. Граничными условиями являются  $y(\beta) = y'(\beta) = 0$ ,  $m(1) = q(1) = 0$ . Пусть пластина имеет следующие размеры:  $R = 0,3 \text{ м}$ ,  $b = 0,06 \text{ м}$ ,  $\mathcal{D} = 0,03 \text{ м}$ ,  $h_1 = 0,003 \text{ м}$ ,  $h_2 = 0,006 \text{ м}$ ; следовательно  $\beta = 0,2$ ;  $\nu = 2$ . Для материала выбираем мягкую сталь с определяющим уравнением

$$\sigma_{11} = 223 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}_{11}}{40} \right)^{0,2} \right] \frac{\mu \text{н}}{\text{м}^2} \quad (3.1)$$

Вид уравнений (I.3) и (3.1) различен, поэтому придется найти для (3.1) наилучшее приближение типа (I.3). Для этого применим методика, предложенную в работе [5]. В результате этих вычислений находим, что  $n = 0,1$  и  $B = 4,05 \cdot 10^{-9}$ ; кроме того имеем  $\varphi = 7800 \text{ кг/м}^3$ . Выбираем еще  $\lambda^2 = 5000$ ,  $L = \mathcal{D}$ . Вычисляя коэффициенты  $A$  и  $B$  по формулам (2.1), получим  $A = 3,58 \cdot 10^{-4}$ ,  $B = 82,83$ .

Задаем некоторые начальные значения для  $m_1(\beta)$  и  $q(\beta)$ . Критерий качества берем в виде

$$F = \max \left| \frac{m(1)}{m(\rho)}, \frac{q(1)}{q(\rho)} \right|. \quad (3.2)$$

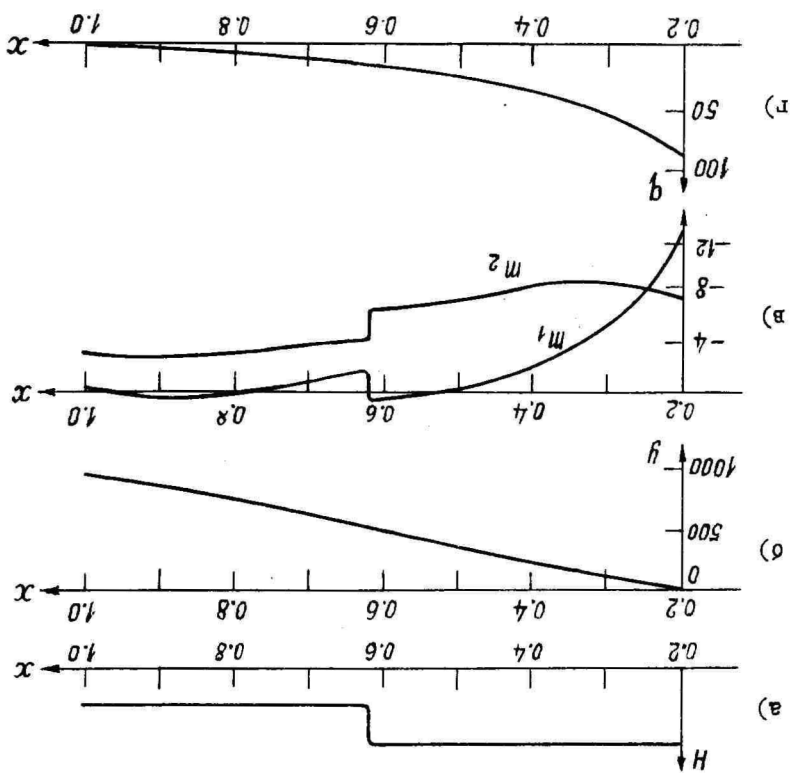
Если величина  $F$  достаточно близка к нулю, то краевую задачу можно считать решенной. Для нахождения минимума функционала  $F$  традиционные методы нелинейного программирования не подходят, так как этот функционал может иметь неаналитический минимум, причем вблизи точки минимума значения  $F$  изменяются довольно резко (фиг. 1<sup>\*</sup>). Вследствие этого для нахождения минимума был применен "метод оврагов" [1]. Система уравнений (2.2) - (2.3) была интегрирована методом Рунге-Кутты с шагом  $\Delta x = 0,01$ . Проведенные вычисления дали значения  $m_1(\rho) = -12,80$ ,  $q(\rho) = 84,02$ . Изменение толщины несущих слоев, распределение безразмерного прогиба  $y$ , изгибающих моментов  $m_1, m_2$  и перерезывающей силы  $q$  как функции координаты  $x$  даны на фиг. 2.

Вычисляя интеграл  $J$  согласно формуле (2.5), получим  $J = 0,232 \cdot 10^6$ . Для начальной кинетической энергии находим на основании (2.6) значение  $\mathcal{K}_0 = 2762,9 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . Наибольшая начальная скорость равняется  $v(1) = \mathcal{D}y(1) = 28,56 \text{ м/с}$ . Средний остаточный прогиб найдем согласно формуле (1.15) и получим  $u_{cp} = 0,0078$ . Интересно вычислить еще наибольший остаточный прогиб: применяя для этого формулу (2.4), получим  $w(1, t_f) = 0,003 \text{ м}$ , следовательно, и неравенство в (2.4) выполняется. Для времени движения получим из формулы (1.12)  $t_f = 2,22 \cdot 10^{-4} \text{ с}$ .

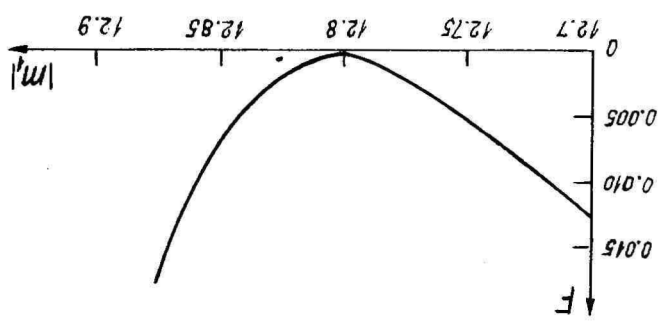
---

\* При составлении диаграммы из фиг. 1 были заданы значения для  $m_1$ , а оптимальные значения для  $q$  и функционал  $F$  были найдены методом одномерного поиска.

Фиг. 2.  
15



Фиг. 1.



## Литература

1. Гельфанд И.М., Цетлин М.Л., О некоторых способах управления сложными системами. Успехи матем. наук, 1962, 17, № 1.
2. Лепик Ю.Р., Оптимальное проектирование нелинейно-вязких кольцевых пластин при импульсном нагружении. Труды XII всесоюзной конф. по теории оболочек и пластин, III, Ереван, 1980, 5 - Ю.
3. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, изд. "Валгус", 1982, 196 стр.
4. Мруз З., Лепик Ю.Р., Оптимальное проектирование конструкций при импульсном нагружении. Механика полимеров, 1977, № 6, 1021 - 1028.
5. Symonds P.S., Finite elastic and plastic deformations of pulse loaded structures by an extended mode technique. Int. J. Mech. Sci, 1980, 22, 597-605.

### Optimal design of nonlinear-viscous and annular plates

Ü. Lepik

#### Summary

Optimal design of circular and annular plates with a sandwich cross-section is considered. Initial kinetic energy and mean deflection are prescribed. Constitutive equations of the material have the form (1.1). The thickness of carrying layers is regarded as a design variable, it is constrained from above and below. Time and spacial variable are separated according to the formula (1.7). The volume of the carrying layers is to be minimized.

The problem in question is solved by the method of calculus of variations. A procedure for carrying out the calculations is proposed. A numerical example (annular plate for which the inner boundary is clamped, the outer - free) is given.

## РАСЧЕТ И ОПТИМИЗАЦИЯ АРМИРОВАННЫХ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СОСУДОВ

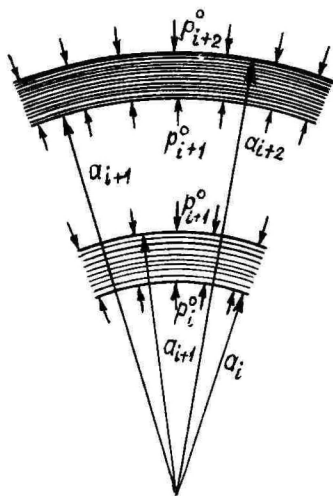
Н.Я. Толпина, М.Л. Хейнлоо

Тартуский государственный университет

Технический прогресс и экономические соображения приводят ко все более и более жестким требованиям на условия работы конструкций. Во многих случаях традиционные конструкций из однородных материалов не удовлетворяют предъявленным требованиям и тогда возникает задача о создании композитной конструкции, предназначенной для выполнения заданной цели и обладающей определенными оптимальными свойствами по сравнению с другими конструкциями данного типа.

В данной работе подобного типа задача рассматривается применительно к многослойным сферическим сосудам, армированным с большим количеством сферических оболочек.

Пусть рассматриваемый сферический сосуд представляет собой набор из  $N$  связанных между собой концентрических слоев, которые армированы с большим количеством сферических оболочек (см. фиг. I). Предполагается, что сферический сосуд нагружен внутренним и внешним давлениями.



Фиг. I.

Введем безразмерные величины:

$$\psi_i = \frac{\psi_i^c}{p^c}; \quad r_i = \frac{r_i}{l}; \quad \omega_i = \frac{S a_i}{S_i}; \quad E_{a_i} = \frac{E_{a_i}^o}{p}; \quad E_{c_i} = \frac{E_{c_i}^o}{p};$$

$$\nu_{a_i}; \nu_{c_i}; \quad \nu_i = \frac{\nu_i^o}{p}; \quad \sigma_{\theta i} = \frac{\sigma_{\theta i}^o}{p}; \quad \sigma_{r i} = \frac{\sigma_{r i}^o}{p}; \quad \alpha_i = \frac{a_i}{l};$$

$$\alpha_{N+1} = \frac{b}{\ell}; \quad u_i = \frac{u_i^0}{\ell}; \quad p_{N+1} = \frac{p_{N+1}^0}{p}; \quad \varepsilon_{ri}; \quad \varepsilon_{\theta i}; \quad \varepsilon_{\varphi i};$$

$$\sigma_{ci}^* = \frac{\sigma_{ci}^{*0}}{p}; \quad \sigma_{ai}^* = \frac{\sigma_{ai}^{*0}}{p},$$

где  $p, \ell$  - характерные давление и линейный размер;  $\psi_i^0$  - функция напряжения в  $i$ -ом слое ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) слое;  $q_i (a_i \leq q_i \leq a_{i+1})$  - текущий радиус в пределах  $i$ -го слоя (см. фиг. I);  $S_{ai}, S_i$  - площади поперечного сечения арматуры (сферических оболочек) и  $i$ -го слоя;  $E_{ai}, E_{ci}$  - модули Юнга арматуры и связующего;  $\nu_{ai}, \nu_{ci}$  - коэффициенты Пуассона арматуры и связующего;  $p_i^0$  - реактивное давление на внутренней поверхности  $i$ -го слоя;  $\sigma_{ri}, \sigma_{\theta i} = \sigma_{\varphi i}, \varepsilon_{ri}, \varepsilon_{\theta i} = \varepsilon_{\varphi i}, u_i$  - компоненты напряжений, деформаций и смещений в  $i$ -ом слое;  $a_i$  - внутренний радиус  $i$ -го слоя;  $b, p_{N+1}$  - внешний радиус и наружное давление составного сферического сосуда;  $\sigma_{ci}^{*0}, \sigma_{ai}^{*0}$  - пределы текучести для связующего и арматуры.

Для слоя с номером  $i$  справедливо уравнение равновесия [I]

$$\frac{d\sigma_{ri}}{dr_i} + \frac{2}{r_i}(\sigma_{ri} - \sigma_{\theta i}) = 0. \quad (I.1)$$

Это уравнение удовлетворяется, если напряжения выразить через функцию напряжения  $\psi_i$  так:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\psi_i}{dr_i} + \frac{\psi_i}{r_i} \right) = \sigma_{\theta i}; \quad r_i \sigma_{ri} = \psi_i. \quad (I.2)$$

Компоненты деформаций вычисляются по формулам [I]:

$$\varepsilon_{ri} = \frac{du_i}{dr_i}; \quad \varepsilon_{\varphi i} = \varepsilon_{\theta i} = \frac{u_i}{r_i}. \quad (I.3)$$

Исключая из формул (I.3) перемещение  $u_i$ , получаем следующее уравнение совместности деформаций:

$$\varepsilon_{\theta i} - \varepsilon_{ri} + r_i \frac{d\varepsilon_{\theta i}}{dr_i} = 0. \quad (I.4)$$

В случае анизотропного тела с центральной симметрией закон Гука записывается следующим образом [2]:

$$\varepsilon_{ri} = a_{11i} \sigma_{ri} + (a_{12i} + a_{13i}) \sigma_{\theta i},$$

$$\varepsilon_{\theta i} = \varepsilon_{\varphi i} = a_{12i} \sigma_{ri} + (a_{13i} + a_{22i}) \sigma_{\theta i}, \quad (I.5)$$

где коэффициенты  $a_{11i}$ ,  $a_{12i}$ ,  $a_{13i}$ ,  $a_{22i}$  в данной работе вычисляются согласно теории армирования [3] по следующим формулам:

$$a_{11i} = \frac{1}{[1 + (n_i - 1)\omega_i] E_{ci}} ;$$

$$a_{22i} = \frac{[\omega_i + n_i(1 - \omega_i)][1 + (n_i - 1)\omega_i] - (n_i \nu_{ci} - \nu_{ai})^2 \omega_i (1 - \omega_i)}{[1 + (n_i - 1)\omega_i] n_i E_{ci}} \quad (I.6)$$

$$a_{12i} = a_{13i} = - \frac{\nu_{ci}(1 - \omega_i) + \nu_{ai}\omega_i}{[1 + (n_i - 1)\omega_i] E_{ci}} ,$$

где

$$n_i = \frac{E_{ai}}{E_{ci}} .$$

Подставив выражения (I.5) в уравнение (I.4) и пользуясь формулами (I.2), найдем, что функция напряжений должна удовлетворять следующему уравнению:

$$\psi_i'' + \frac{a_{13i} + 2a_{22i} + a_{12i}}{(a_{13i} + a_{22i}) r_i} \psi_i' - \frac{2a_{11i} + a_{12i} + a_{13i}}{(a_{13i} + a_{22i}) r_i^2} \psi_i = 0. \quad (I.7)$$

(Штрих обозначает производную по  $r_i$ ). Частные решения уравнения (I.7) ищем в виде

$$\psi_i = r_i^{\kappa_i}. \quad (I.8)$$

Подставляя (I.8) в (I.7) получим после сокращения на  $r_i^{\kappa_i - 2}$ , что  $\kappa_i$  должен удовлетворять следующему квадратичному уравнению:

$$(a_{13i} + a_{22i})\kappa_i^2 + (a_{22i} + a_{12i})\kappa_i - (2a_{11i} + a_{12i} + a_{13i}) = 0$$

которое имеет два решения

$$\kappa_{1i} = \frac{-(a_{22i} + a_{12i}) + \sqrt{(a_{22i} + a_{12i})^2 + 4(a_{13i} + a_{22i})(2a_{11i} + a_{12i} + a_{13i})}}{2(a_{13i} + a_{22i})} ;$$

$$\kappa_{2i} = \frac{-(a_{22i} + a_{12i}) - \sqrt{(a_{22i} + a_{12i})^2 + 4(a_{13i} + a_{22i})(2a_{11i} + a_{12i} + a_{13i})}}{2(a_{13i} + a_{22i})} \quad (I.9)$$

Подставляя (I.6) в (I.9) получим для  $\kappa_{1i}$  и  $\kappa_{2i}$  окончательные выражения в виде:

$$\kappa_{1i} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 8 \frac{f_i}{g_i}}); \quad \kappa_{2i} = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 + 8 \frac{f_i}{g_i}}), \quad (\text{I.10})$$

где

$$f_i = [1 - \nu_{ci}(1 - \omega_i) - \nu_{ai}\omega_i] n_i;$$

$$g_i = [\omega_i + n_i(1 - \omega_i)][1 + (n_i - 1)\omega_i] -$$

$$- (n_i \nu_{ci} - \nu_{ai})^2 \omega_i(1 - \omega_i) - [\nu_{ci}(1 - \omega_i) + \nu_{ai}\omega_i] n_i.$$

Из независимых частных решений

$$\Psi_{1i} = r_i^{\kappa_{1i}}; \quad \Psi_{2i} = r_i^{\kappa_{2i}}$$

составим следующее общее решение для уравнения (I.7):

$$\Psi_i = C_{1i} \Psi_{1i} + C_{2i} \Psi_{2i}. \quad (\text{I.11})$$

Подставляя (I.11) в (I.2) получим для вычисления напряжений  $\sigma_{ri}$  и  $\sigma_{\theta i}$  следующие формулы:

$$\sigma_{ri} = C_{1i} r_i^{\kappa_{1i}-1} + C_{2i} r_i^{\kappa_{2i}-1};$$

$$\sigma_{\theta i} = \frac{1}{2} [C_{1i}(\kappa_{1i} + 1) r_i^{\kappa_{1i}-1} + C_{2i}(\kappa_{2i} + 1) r_i^{\kappa_{2i}-1}]. \quad (\text{I.12})$$

Для вычисления смещений  $u_i$  из (I.3) и (I.5) получим такие формулы:

$$u_i = C_{1i} A_{1i} + C_{2i} A_{2i}, \quad (\text{I.13})$$

где

$$A_{1i}(r_i) = r_i^{\kappa_{1i}} \left[ a_{12i} + \frac{1}{2} (a_{13i} + a_{22i})(\kappa_{1i} + 1) \right];$$

$$A_{2i}(r_i) = r_i^{\kappa_{2i}} \left[ a_{12i} + \frac{1}{2} (a_{13i} + a_{22i})(\kappa_{2i} + 1) \right].$$

В (I.12) и (I.13) константы  $C_{1i}$ ,  $C_{2i}$  определяются из следующих граничных условий:

$$\sigma_{ri}(\alpha_i) = -p_i; \quad \sigma_{rN}(\alpha_{N+1}) = -p_{N+1};$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

и равны:

$$C_{1i} = D_{1i} D_i^{-1}; \quad C_{2i} = -D_{2i} D_i^{-1},$$

где

$$D_{1i} = \nu_i \alpha_{i+1}^{\kappa_{2i}-1} - \nu_{i+1} \alpha_i^{\kappa_{2i}-1};$$

$$D_{2i} = \nu_i \alpha_{i+1}^{\kappa_{1i}-1} - \nu_{i+1} \alpha_i^{\kappa_{1i}-1};$$

$$D_i = \alpha_i^{\kappa_{2i}-1} \alpha_{i+1}^{\kappa_{1i}-1} - \alpha_{i+1}^{\kappa_{2i}-1} \alpha_i^{\kappa_{1i}-1}.$$

Пользуясь условиями сопряжения

$$u_\delta(\alpha_{\delta+1}) = u_{\delta+1}(\alpha_{\delta+1}); \quad (\delta = 1, 2, \dots, N-1)$$

получим следующую систему уравнений для определения реактивных давлений  $\nu_j$  ( $j = 2, 3, \dots, N$ ):

$$d_{1\delta} \nu_\delta + \nu_{\delta+1} + d_{2\delta} \nu_{\delta+2} = 0 \quad (\text{I.I4})$$

$$\delta = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$d_{1\delta} = H_{1\delta} S_\delta^{-1}; \quad d_{2\delta} = H_{2\delta} S_\delta^{-1}$$

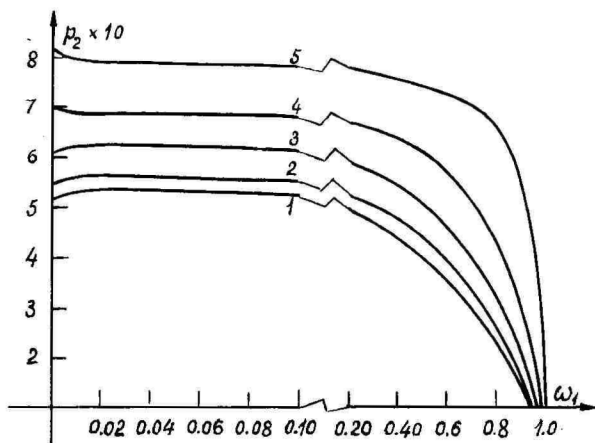
$$H_{1\delta} = \alpha_\delta [A_{1\delta}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_{\delta+1}^{\kappa_{2\delta}} - A_{2\delta}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_{\delta+1}^{\kappa_{1\delta}}] D_{\delta+1};$$

$$H_{2\delta} = \alpha_{\delta+2} [A_{1,\delta+1}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_{\delta+1}^{\kappa_{2,\delta+1}} - A_{2,\delta+1}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_{\delta+1}^{\kappa_{1,\delta+1}}] D_\delta;$$

$$S_\delta = \alpha_{\delta+1} \left\{ [A_{2\delta}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_\delta^{\kappa_{1\delta}} - A_{1\delta}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_\delta^{\kappa_{2\delta}}] D_{\delta+1} + \right. \\ \left. + [A_{2,\delta+1}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_{\delta+2}^{\kappa_{1,\delta+1}} - A_{1,\delta+1}(\alpha_{\delta+1}) \alpha_{\delta+2}^{\kappa_{2,\delta+1}}] D_\delta \right\}.$$

Формулы (I.I2) - (I.I4) позволяют определить напряжения и смещения в каждом слое рассматриваемого сферического сосуда.

В качестве примера приводим график зависимости  $\nu_2$  от  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в случае следующих значений параметров  $N = 2$ ;  $E_{c1} = 10^3$ ;  $E_{c2} = 2 \cdot 10^3$ ;  $\nu_{\alpha 1} = 0.3$ ;  $\nu_{\alpha 2} = 0.3$ ;  $\nu_{c1} = 0.25$ ;  $\nu_{c2} = 0.25$ ;  $\nu_1 = 100$ ;  $\nu_2 = 10$ ;  $\nu_3 = 0$ ;  $\alpha_1 = 1.00$ ;  $\alpha_2 = 1.10$ ;



Фиг. 2.

$\alpha_3 = 1.20$ ; приведенный на фиг. 2. На этом рисунке цифры 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 параметра  $\omega_2$ .

В заключение находим максимально допустимое значение внутреннего давления  $p_1$  в области упругих деформации в зависимости от  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Область упругих деформаций для связующего определим соотношением

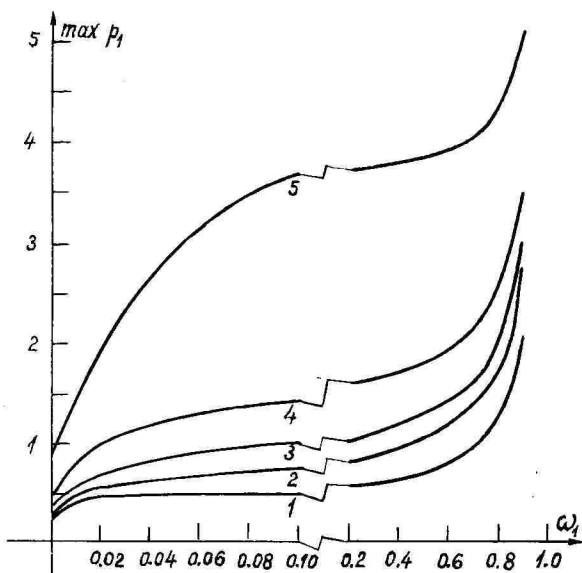
$$\max_{\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}} |\varepsilon_{\theta i} - \varepsilon_{r i}|_c = \frac{1 + \nu_{ci}}{E_{ci}} \max_{\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}} |\sigma_{\theta i} - \sigma_{r i}|_c \leq \frac{1 + \nu_{ci}}{E_{ci}} \sigma_{ci}^*$$

Аналогичные соотношения имеем для арматуры сферических оболочек

$$\max_{\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}} |\varepsilon_{\theta i} - \varepsilon_{r i}|_a = \frac{1 + \nu_{ai}}{E_{ai}} \max_{\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}} |\sigma_{\theta i} - \sigma_{r i}|_a \leq \frac{1 + \nu_{ai}}{E_{ai}} \sigma_{ai}^*$$

Так как связующее и арматура по предположению теории армирования [3] деформируются вместе, то область упругих деформаций армированного слоя может быть определен неравенствами

$$\begin{aligned} \max_{\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}} |\varepsilon_{\theta i} - \varepsilon_{r i}| &= \max_{\alpha_i \leq r_i \leq \alpha_{i+1}} |(a_{22i} - a_{11i})\sigma_{\theta i} + (a_{12i} - a_{11i})\sigma_{r i}| \leq \\ &\leq \min \left[ \frac{1 + \nu_{ci}}{E_{ci}} \sigma_{ci}^*, \frac{1 + \nu_{ai}}{E_{ai}} \sigma_{ai}^* \right], \end{aligned}$$



Фиг. 3.

которые и позволяют решать поставленную задачу. На фиг. 3 при следующих значениях параметров:  $N = 2$ ;  $E_{c1} = 10^3$ ;  $E_{c2} = 2 \cdot 10^3$ ;  $\nu_{a1} = \nu_{a2} = 0.3$ ;  $\nu_{c1} = \nu_{c2} = 0.25$ ;  $n_1 = 100$ ;  $n_2 = 10$ ;  $\nu_3 = 0$ ;  $\alpha_1 = 1.00$ ;  $\alpha_2 = 1.10$ ;  $\alpha_3 = 1.20$ ;  $\sigma_{c1}^* = 1$ ;  $\sigma_{c2}^* = 2$ ;  $\sigma_{a2}^* = 20$ ;  $\sigma_{a1}^* = 100$  приведены графики зависимости  $\max p_1$  от  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (цифры 1, 2, 3, 4, 5 соответствуют значениям 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 параметра  $\omega_2$ ).

#### Литература

1. Тимошенко С.П., Теория упругости. М., 1937.
2. Лехницкий С.Г., Теория упругости анизотропного тела. М., 1950.
3. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А., Сопротивление полимерных и композитных материалов. Рига, 1980.

# Computation and optimization of reinforced multilayered spherical vessels

N.J. Tolpina, M.L. Heinloo

## Summary

The formulae for computation of stresses and displacements in reinforced multilayered spherical vessels are found in this work. By use of these formulae we solve the problem of maximization of internal pressure of the vessel.

# ОПТИМАЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ О ЕЁ СВОБОДНЫЙ КОНЕЦ

К. Соонетс

Тартуский государственный университет

Задача об ударе по концу консольной балки была рассмотрена Е. Парксом [5]. Вопросы приемлемости приближенного решения той же задачи исследовались в [4]. В статье [6] учитывается при движении балки еще влияние демпфирующей среды.

В настоящей работе изучается движение двухступенчатой консольной балки и определяется такое распределение высот ступеней балки, при котором остаточный прогиб на свободном конце минимален. Приводятся точное и приближенное решения.

## 1. Исходные уравнения и метод решения.

Рассмотрим консольную балку двухступенчатой высоты ширины  $B$  (остальные размеры указаны на фиг. 1). Материал балки считается идеально жестко-пластическим с пределом текучести  $\sigma_0$  и плотностью  $\rho$ . На свободный конец балки падает груз массы  $G_0$  со скоростью  $v_0^*$ . Требуется определить протяженность  $A$  тонкой части и отношение высот  $\gamma = H_1/H_2$  так, чтобы среди балок постоянного объема  $V$  остаточный прогиб на

свободном конце оказался минимальным.

Дальнейшие рассуждения проведем в безразмерных величинах

$$x = \frac{x}{L}, \quad a = \frac{A}{L}, \quad t = \frac{\tau}{\tau_0}, \quad \tau_0 = \frac{BL^3 \sigma_0^*}{\sigma_0 V},$$

$$m = \frac{M}{M_0}, \quad q = \frac{QL}{M_0}, \quad g = \frac{4G_0}{\sigma_0 V},$$

где  $\tau$  - время,  $W$  - прогиб,  $M$  - изгибающий момент,  $Q$  - перерезывающая сила. Предельный момент тонкой части равен  $M_0 = = \frac{1}{4} \sigma_0^* W^2$ ; используется еще величина  $\Delta = 1 + a(\gamma - 1)$ . Приведенная высота балки примет вид

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x < a \\ \gamma, & a \leq x \leq 1. \end{cases}$$

В дальнейшем штрих будет обозначать производную по координате  $x$ , точка - по времени  $t$ . Дифференциальные уравнения движения элемента балки примут вид

$$m' = q; \quad q' = \Delta h(x) \ddot{w} \quad (I)$$

с начальными и граничными условиями

$$m(0, t) = 0; \quad q(0, t) = -g \Delta^2 \dot{w}(0, t);$$

$$\dot{w}(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = 0; \quad \dot{w}(0, 0) = 1.$$

Изгибающий момент не может превышать предельного момента на обоих участках:

$$|m(x, t)| \leq \begin{cases} 1, & x < a \\ \gamma^2, & x \geq a \end{cases}$$

и равенство имеет место в пластических сечениях. В сечении  $x = a$  должны выполняться условия непрерывности величин  $m$  и  $q$ .

Опишем коротко методику решения задачи. После задания кинематически возможного поля скоростей прогиба  $\dot{w}$  интегрируются уравнения (I). Дополнительные условия для момента  $m$  дают возможность определить неизвестные величины, входящие в выражение  $\dot{w}$ . Путем интегрирования выражения  $\dot{w}$  по времени найдем распределение прогибов по длине балки в каждой фазе и наконец вычислим в момент прекращения движения балки  $t_f$  остаточный прогиб на свободном конце путем суммирования прогибов в отдельных фазах деформирования. Затем решим оптимизационную задачу по двум параметрам  $a$  и  $\gamma$ .

Описанная методика демонстрируется и в статьях [2, 3].

## 2. Возможные схемы движения балки.

На первом этапе движения от свободного конца балки начинает двигаться пластический шарнир  $s = s(t)$  и дойдет до сечения  $x = a$ . При этом  $m(s, t) = -1$ . Поле скоростей показано на фиг. 2а:

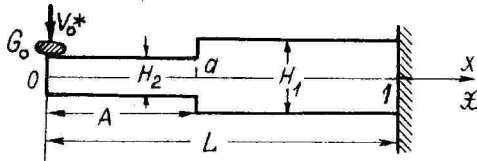
$$\dot{w}(x, t) = \begin{cases} v_0(t)(1 - \frac{x}{s}), & x < s \\ 0, & x \geq s. \end{cases} \quad (2)$$

На втором этапе возможны различные механизмы движения в зависимости от соотношения параметров  $a$ ,  $\gamma$  и  $g$ .

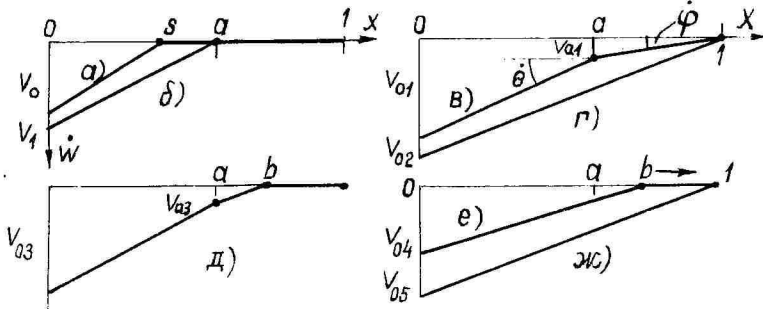
1) В сечении  $x = a$  сохранится стационарный шарнир и поле скоростей имеет вид (фиг. 2б):

$$\dot{w} = \begin{cases} v_1(t)(1 - \frac{x}{a}), & x < a \\ 0, & x \geq a. \end{cases} \quad (3)$$

Тогда  $m(a) = -1$  и  $|m(x)| < \gamma^2$  при  $x > a$ . Движение тонкой части (и всей балки) прекращается в момент  $t_f$ , когда  $v_1(t_f) = 0$ .



Фиг. 1.



Фиг. 2.

2) Кроме шарнира в сечении  $x = a$  возникает шарнир в заделке и  $m(a) = -1$ ,  $m(1) = -\gamma^2$ . Балка расчленяется на два звена, поворачивающихся как твердые стержни. Первая фаза длится до тех пор, пока угловые скорости звеньев становятся равными. Этот момент времени  $t_2$  определится из условия  $\dot{\omega}'(a_-, t_2) = \dot{\omega}'(a_+, t_2)$ . Шарнир в сечении  $x = a$  исчезнет и во второй фазе балка поворачивается вокруг заделки до остановки.

Поля скоростей имеют вид (фиг. 2 в, г):

I фаза:

II фаза:

$$\dot{\omega} = \begin{cases} \nu_{a1} + (\nu_{o1} - \nu_{a1})\left(1 - \frac{x}{a}\right); \\ \nu_{a1} \frac{1-x}{1-a}; \end{cases} \quad \dot{\omega} = \nu_{o2}(1-x). \quad (4)$$

3) Механизм движения распадается на три фазы. В первой фазе имеются стационарные шарниры в сечениях  $x = a$  и  $x = b_0$ , где  $a < b_0 < 1$ . Эта фаза длится до момента  $t_{31}$ , когда угловые скорости звеньев становятся равными и может быть найден из условия  $\nu_{o3}(b_{0-}) = \nu_{a3}(b_{0+})$ .

Во второй фазе шарнир в сечении  $x = a$  исчезнет, а второй шарнир перемещается к заделке по закону  $b = b(t)$ . Фаза закончится в тот момент, когда  $b = 1$ .

В третьей, заключительной фазе имеется стационарный шарнир в заделке до остановки балки. Поля скоростей следующие (фиг. 2 д, е, ж):

I фаза:

II и III фазы:

$$\dot{\omega} = \begin{cases} \nu_{a3} + (\nu_{o3} - \nu_{a3})\left(1 - \frac{x}{a}\right); \\ \nu_{a3} \frac{b_0 - x}{b_0 - a}; \\ 0. \end{cases} \quad \dot{\omega} = \begin{cases} \nu_{o4}\left(1 - \frac{x}{b}\right); \\ 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\dot{\omega} = \nu_{o5}(1-x).$$

### 3. Анализ механизмов движения.

Первый этап. Проинтегрируем уравнения (I) с учетом (2). Дифференциальными уравнениями для определения  $\nu_0(t)$  и  $\lambda(t)$  служат уравнения  $m(\lambda) = -1$  и  $q(\lambda) = 0$  с начальными условиями  $\nu_0(0) = 1$ ,  $\lambda(0) = 0$ . Окончательно имеем

$$\nu_0 = \frac{2g\Delta}{\Delta + 2g\Delta}, \quad t = \frac{g\delta^2\Delta^2}{3(\Delta + 2g\Delta)}. \quad (6)$$

Отсюда узнаем момент времени  $t_0$ , когда  $\lambda = a$  и  $v_0(t_0)$ . Нахождение  $w(x, t)$  непосредственным интегрированием по  $t$  затруднительно. Поэтому представим скорость  $\dot{w}$  в виде  $\dot{w} = -\dot{s} \partial w / \partial \lambda$ , откуда  $\partial w / \partial \lambda = \dot{w} / \dot{s}$ . В правую часть подставим выражение (2) и из (6)  $\dot{s}$  и после интегрирования по  $\lambda$  найдем

$$w(0, t_0) = \frac{2}{3} g^2 \Delta^3 \left[ \ln \left( 1 + \frac{a}{2g\Delta} \right) - \frac{a(a + 4g\Delta)}{2(a + 2g\Delta)^2} \right]. \quad (7)$$

Первый механизм второго этапа возможен, если  $|m(1)| < \gamma^2$ , т.к.  $m(x)$  изменяется монотонно при поле скорости (3). Это даст в области параметров  $a$  и  $\gamma$  ограничение

$$6g\Delta + 3a(1 - 2g\gamma^2\Delta) - a^2(2\gamma^2 + 1) < 0.$$

Функция  $v_1(t)$  находится из дифференциального уравнения  $m(a) = -1$  с начальным условием  $v_1(t_0) = v_0(t_0)$ . Движение прекращается в момент времени  $t_f$ , когда  $v_1(t_f) = 0$ . После интегрирования (3) по времени получим приращение прогиба в точке  $x = 0$  за время  $t_f - t_0$  в виде

$$w_{11} = \frac{2ag^2\Delta^3(a + 3g\Delta)}{3(a + 2g\Delta)^2}. \quad (8)$$

Полный прогиб на свободном конце  $f = w(0, t_0) + w_{11}$ .

Второй механизм возможен, если в первой фазе  $m'(x) < 0$ ,  $m''(x) > 0$  на отрезке  $[0, 1]$  и  $\dot{v}_{a1} > 0$ . Эти требования дают ограничение  $\dot{v}_{a1} + (a + 2g\Delta)\dot{v}_{o1} < 0$ . Величины  $v_{o1}$  и  $v_{a1}$  определяются из дифференциальных уравнений  $m(a) = -1$ ,  $m(1) = -\gamma^2$  с начальными условиями  $v_{o1}(t_0) = v_0(t_0)$ ,  $v_{a1}(t_0) = 0$ . Окончательно будем иметь для первой фазы

$$t_2 - t_0 = \frac{(1-a)v_0(t_0)}{\dot{v}_{a1} - (1-a)\dot{v}_{o1}}; \quad v_{o1}(t_2) = v_0(t_0) + \dot{v}_{o1}(t_2 - t_0);$$

$$\dot{v}_{o1} = 2 \cdot \frac{2\gamma\Delta + (3-2\gamma\Delta)a - 6(\gamma^2-1)a^2\Delta}{(a+2g\Delta)a^2\Delta^2};$$

$$\dot{v}_{a1} = 2 \cdot \frac{6(a\gamma^2-1)g\Delta + (2\gamma^2+1)a^2 - 3a}{(a+2g\Delta)(1-a)a^2\Delta};$$

$$w_{21} = \frac{1}{2}(t_2 - t_0)[2v_0(t_0) + \dot{v}_{o1}(t_2 - t_0)]. \quad (9)$$

Во второй фазе для определения  $v_{02}$  используется условие  $m(1) = -\gamma^2$  и окончательно

$$\dot{v}_{02} = -\frac{3\gamma^2}{\Delta[1 + 3g\Delta + (\gamma - 1)(1 - a)^3]}; \quad t_f = t_2 + \frac{v_{01}(t_2)}{|\dot{v}_{02}|};$$

$$\omega_{22} = \frac{v_{01}^2(t_2)}{2|\dot{v}_{02}|}. \quad (10)$$

Полный остаточный прогиб при втором механизме движения равен (см. формулы (7), (9), (10))  $f = \omega(0, t_0) + \omega_{21} + \omega_{22}$ .

Третий механизм реализуется, если уравнение  $m(b_0) = -\gamma^2$  имеет действительное решение  $a < b_0 < 1$ . Величины  $b_0$ ,  $v_{03}$ ,  $v_{02}$  для первой фазы определяются из трех уравнений  $m(a) = -1$ ,  $q(b_0) = 0$ ,  $m(b_0) = -\gamma^2$ . Наконец найдем приращение прогиба  $\omega_{31}$ .

Во второй фазе шарнир в сечении  $x = a$  исчез, а второй шарнир перемещается к заделке и общий ход рассуждений похож первому этапу. Величины  $b(t)$  и  $v_{04}(t)$  находятся из условий  $m(b) = -\gamma^2$ ,  $q(b) = 0$ . Приращение прогиба  $\omega_{32}$  за вторую фазу целесообразно найти путем численного интегрирования.

В третьей фазе найдем скорость конца балки  $v_{05}$  с помощью условия  $m(1) = -\gamma^2$  и затем приращение прогиба  $\omega_{33}$ . Наконец получим и полный остаточный прогиб.

#### 4. Модальное решение.

С целью оценки приемлемости и точности модального решения были проведены необходимые расчеты (см. также [1, 2, 3]). Как известно, точность модального решения существенно зависит от выбора поля начальных скоростей [4]. Поэтому сравниваются и различные поля скоростей.

Поле скоростей прогиба задаем в форме (фиг. 2в)

$$\dot{w}(x, t) = \begin{cases} (1-a)\dot{\theta} + (a-x)\dot{\varphi}, & 0 \leq x \leq a \\ (1-x)\dot{\theta} & , \quad a \leq x \leq 1, \end{cases} \quad (11)$$

где  $\dot{\theta}$  и  $\dot{\varphi}$  угловые скорости звеньев балки.

Подставляя  $\dot{w}$  в (1) и интегрируя их по  $x$  с учетом крайних условий и условий непрерывности при  $x = a$ , находим

$$\begin{aligned} m(1) - m(a) &= f_1 S + g_1 T, \\ m(a) &= f_2 S + g_2 T, \end{aligned} \quad (12)$$

$$f_1 = \frac{\Delta}{3}(1-a)^2[3(a+g\Delta)+\gamma(1-a)]; \quad g_1 = \frac{\alpha\Delta}{2}(1-a)(a+2g\Delta);$$

$$f_2 = g_1; \quad g_2 = \frac{\alpha^2\Delta}{3}(a+3g\Delta); \quad S = \ddot{\theta} = \text{const}; \quad T = \ddot{\varphi} = \text{const}.$$

Постоянство ускорений характерно методу модальных решений.

Возможны три типа решения в зависимости от соотношения параметров  $\alpha$ ,  $\gamma$  и  $g$ .

I тип. Пластический шарнир возникает лишь в сечении  $x = I$  (фиг. 2г) и  $m(I) = -\gamma^2$ ,  $|m(a)| \leq 1$ . Из уравнений (I2) находим угловые ускорения и ограничение, при котором I тип реализуется:

$$S = T = -\frac{\gamma^2}{f_1 + 2f_2 + g_2}, \quad |(f_2 + g_2)S| \leq 1.$$

II тип. Деформируется лишь тонкий участок балки (фиг. 2б) и по условиям  $|m(I)| \leq \gamma^2$ ,  $m(a) = -1$  следует из (I2), что

$$S = 0, \quad T = -\frac{1}{g_2}, \quad |(g_1 + g_2)T| \leq \gamma^2.$$

III тип. Шарниры возникают в сечениях  $x = a$  и  $x = I$  и из (I2) найдем  $S$  и  $T$ . Добавится еще требование, чтобы  $0 < \lambda < 1$ , где  $\lambda = \ddot{\theta}/\ddot{\varphi} = S/T$  (это равенство характерно методу модальных решений).

Интегрируем дважды по времени уравнения  $\ddot{\theta} = S$ ,  $\ddot{\varphi} = T$  с учетом начальных условий  $\theta(0) = \varphi(0) = 0$ ,  $\dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$ ,  $\dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$ , где  $\dot{\theta}_0$  и  $\dot{\varphi}_0$  начальные угловые скорости. Момент прекращения движения определим из условия  $\dot{\theta}(t_f) = 0$ . Остаточный прогиб на свободном конце выразится окончательно в виде

$$f_M = w(0, t_f) = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2|T|} [(1-a)\lambda + \alpha],$$

где при I типе  $\lambda = 1$ , при II -  $\lambda = 0$ , при III -  $\lambda = S/T$ .

Начальное поле скоростей прогиба  $\partial W(x, 0)/\partial t = U(x)$  выбиралось четырьмя способами: 1) начальная кинетическая энергия системы балка - груз приравнялась кинетической энергии системы при поле скоростей в модальной форме

$$G_0 v_0^{*2} = \int_0^A \varrho B H_2 U^2 dx + \int_A^L \varrho B H_1 U^2 dx + G_0 U^2(0);$$

2) приравнялись начальные импульсы; 3) приравнялись моменты импульса относительно заделки; 4) использовался метод Мартина-Саймондса [4], согласно которому в данной задаче

$$G_0 U(0) v_0^* = \int_0^A \varrho v H_2 U^2 dX + \int_A^L \varrho v H_1^2 U^2 dX + G_0 U^2(0).$$

Отсюда получим в безразмерных величинах

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{3g\Delta[(1-a)\lambda + a]}{\lambda(1-a)\{\lambda(1-a)[\gamma(1-a) + 3(a+g\Delta)] + 3a(a+2g\Delta)\} + a^2(a+3g\Delta)}.$$

### 5. Анализ результатов.

Из 2. пункта явствует, что все механизмы движения заканчиваются модальной формой движения. Доля прогиба первого этапа  $w(t_0)$  (нестационарный шарнир в тонкой части) в образовании суммарного прогиба  $f$  существенно зависит от параметра  $g$ . В таблице 1 приведены максимальные процентные отношения  $w(t_0):f$  и  $t_0:t_f$  при  $a \rightarrow 1$ .

С ростом  $g$  точность модального решения повышается. Хорошее согласие в прогибах точного и модального решений имеется в тех областях плоскости  $a-\gamma$ , где совпадают следующие механизмы точного и типы модального решений: 1 - II, 2 - I, 3 - I и точность модального решения значительно ухудшается при совпадении 1 - I, 2 - II, 3 - II. С ростом значений  $g$  область хорошего согласия модального решения с точным расширяется. При малых  $g$  область хорошего согласия узкая и имеет место при сравнительно больших значениях  $a$  и малых  $\gamma$ . Точность модального решения наибольшая, если поле начальных скоростей выбирается способом Мартина-Саймондса. В таблице 2 приведены отношения модального решения к точному при их максимальном расхождении в зависимости от способа выбора начальных скоростей.

Таблица 1

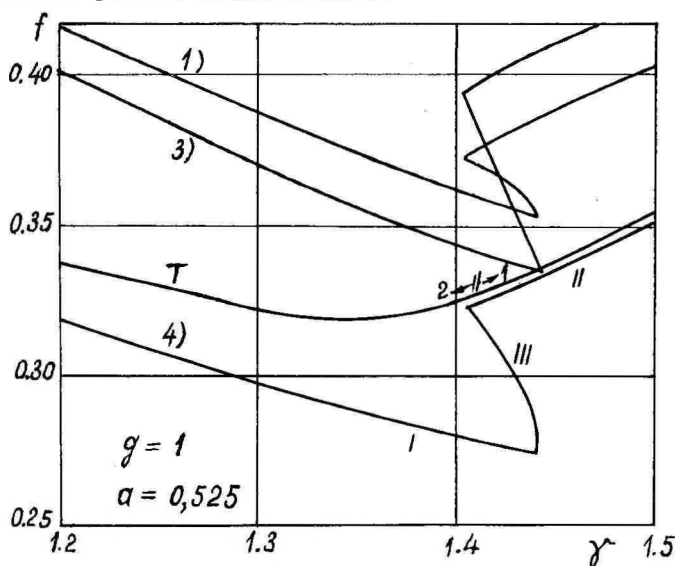
$g$	10	I	0,5	0,1	0,05
$w(t_0):f$	2	20	25	50	66
$t_0:t_f$	I	10	12	20	30

Таблица 2

$g$	10	I	0,2
1) кинет. эн.	1,03	1,20	2,00
2) импульс	0,96	0,70	0,50
3) мом. имп.	1,03	1,20	0,70
4) Мартин-Саймондс	0,99	0,82	I-I 0,78
		0,98	I-II

На фиг. 3 показана зависимость прогиба  $f$  при фиксированном  $a$ : приведены точное решение (т) и модальные решения (порядковые номера соответствуют номерам в таблице 2). Указаны

также механизмы движения балки. Как видно, в узкой области модальное решение неединственное.



Фиг. 3.

Точка минимума остаточного прогиба  $f_T$  или  $f_M$  на плоскости  $\alpha$ - $\gamma$  обозначена через  $S(\alpha_0, \gamma_0)$ . Индексы т и м обозначают соответственно точное и модальное решения. Модальное решение приведено по способу Мартина-Саймондса. Остаточный прогиб балки постоянной высоты обозначен через  $f_c$ . В таблице 3 приведены данные об оптимальных решениях; значения прогиба  $\omega_M$  вычислены в точке  $(\alpha_{от}, \gamma_{от})$  и значения  $\omega_T$  в точке  $(\alpha_{ом}, \gamma_{ом})$ .

Таблица 3

$g$	$\alpha_{от}$	$\gamma_{от}$	$f_T : f_{Tc}$	$\omega_M : f_T$	$\alpha_{ом}$	$\gamma_{ом}$	$f_M : \omega_T$
1,0	0,50	1,41	0,74	0,98	0,51	1,41	1,00
I	0,54	1,34	0,84	0,90	0,55	1,37	0,99
0,5	0,64	1,24	0,89	0,85	0,75	1,18	0,97
0,2	0,76	1,16	0,94	0,76	0,84	1,12	0,89
0,1	0,78	1,15	0,97	0,67			
0,05	0,88	1,08	0,98	0,63			

При малых  $g$  не имеет практического смысла проектирование балки ступенчатой высоты.

Оптимальное точное решение реализуется при 2) механизме движения. Прогобы меняются медленно в сравнительно большой окрестности оптимальной точки  $C$ . Это открывает определенную свободу при оптимальном проектировании балки. Хотя модальное решение по Мартину-Саймондсу даст наименьшие прогибы на границе области неединственного решения при I типе решения (см. фиг. 3), то сравнение с точным решением показывает, что за оптимальное решение следует выбрать точку, в которой происходит переход на II тип решения. Это происходит на так называемой кривой оптимальности, уравнение которой следует из уравнений (12), если там принимать  $S=0$ ,  $m(1)=-\gamma^2$ ,  $m(a)=-1$ . Будем иметь

$$2\gamma^2 a(a+3g\Delta) + a^2 - 3a - 6g\Delta = 0.$$

Вдоль этой кривой меняются прогибы около оптимальной точки  $C_M$  медленно в сравнительно широком диапазоне.

Выбирая начальное поле скоростей по другим способам, следует оптимальную точку выбрать также на границе области неединственности решения, но точность решения ниже. Способы 1) и 3) дают завышенные, способ 2) - заниженные оценки для прогиба.

В заключение можно сказать, что метод модальных решений даст вполне приемлемую точность при решении оптимизационной задачи и при этом математически значительно проще точного решения.

#### Литература

1. Соонетс К., Хартикайнен А., Оптимизация динамически нагруженной жестко закрепленной балки ступенчато-переменной толщины. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1979, 487, 45-51.
2. Соонетс К., Оптимизация формы импульсивно нагруженной двухступенчатой жестко заделанной балки. Уч. зап. Тартуского ун-та, 1981, 564, 24-34.
3. Lepik Ü., Optimal design of rigid-plastic simply supported beams under impulsive loading. Int. J. Solids Structures, 1981, 17, 617-629.
4. Martin J.B., Symonds P.S., Mode approximation for impulsively loaded rigid-plastic structures. J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE, 1966, 92, 43-66 (русский перевод в сб. "Механика", 1973, № 5, 128-149).

5. Parkes E. W., The permanent deformation of a cantilever struck transversely at its tip. Proc. Roy. Soc., London, 1955, A 228, 462-476.
6. Ramu S.A., Rao P.N., Motion of a rigid plastic cantilever in a damping medium under transverse impact. Int. J. Non-Linear Mechanics, 1976, 11, 355-364.

Optimal design of a cantilever beam, struck transversely at its free end

K. Soonets

Summary

A two-stepped cantilever beam under dynamic loading is discussed. The material of the beam is regarded as rigid plastic. Optimal values of beam parameters for which the permanent deflections are minimal must be found on the condition that the volume of the beam is prescribed. For the problem in question exact and mode form solutions are found. It follows from the calculations that the method of mode form motions guarantees the exactness which is fully sufficient for practice.

АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ РАСЧЕТ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКИХ  
СТУПЕНЧАТЫХ КРУГЛЫХ И КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН ПРИ  
ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

А. Салупере

Тартуский государственный университет

В настоящее время в технике часто применяют ступенчатые пластинки, так как технология изготовления таких пластинок значительно проще чем пластинок плавно изменяющейся толщины.

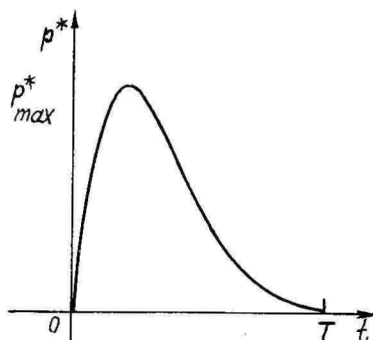
При динамической нагрузке и использовании модели жестко-пластического материала целесообразно применить условие текучести Треска. Этой проблемой занимались В.Н. Мазалов и Ю.В. Немировский [1]. Но и в этом случае возникают математические трудности, так как неизвестно, какая комбинация пластических режимов реализуется. Поэтому целесообразно составить пакет программ, который сам выбирает режимы и проведет вычисления. Это и есть цель настоящей работы.

В первом параграфе дается постановка задачи и представляются основные уравнения, во втором параграфе интегрируются основные уравнения.

I. Постановка задачи и основные уравнения

Рассмотрим круглую пластинку с кусочно-постоянным поперечным сечением. Пластика может иметь круговое отверстие в середине, т.е. она может быть и кольцевой пластиной. Считаем, что толщина пластинки  $h(x)$  может иметь только два значения:  $h_1$  или  $h_2$  т.е. функция  $h(x)$  имеет на отрезке  $[0, R]$ , где  $R$  радиус пластинки (при кольцевых пластинах на отрезке  $[d, R]$ , где  $d$  внутренний радиус пластинки), только один разрыв. На пластинку действует перпендикулярная динамическая нагрузка  $p^*$  (фиг. 1), которая имеет следующий вид:

$$p^*(t) = \begin{cases} be^{-\alpha t} \sin \omega t, & \text{если } t \leq T \\ 0, & \text{если } t > T. \end{cases} \quad (I)$$



Фиг. I.

Уравнения движения представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\kappa Q^*)}{\partial \kappa} &= -\kappa(p^* - \mu \frac{\partial^2 w^*}{\partial t^2}), \\ \frac{\partial(\kappa M_\kappa^*)}{\partial \kappa} &= M_\theta^* + \kappa Q. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $M_\kappa^*$  - радиальный изгибающий момент,  $M_\theta^*$  - тангенциальный изгибающий момент,  $\mu$  - масса пластинки на единицу площади,  $Q^*$  - перерезывающая сила,  $p^*$  - нагрузка и  $w^*$  - прогиб пластинки.

Целесообразно перейти к следующим безразмерным величинам:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{t}{T}, & x &= \frac{r}{R}, & y &= \frac{h_1}{h_2}, & \alpha &= \frac{a}{R}, & \delta &= \frac{d}{R}, \\ M &= \frac{4M^*}{\sigma_0 h_2^2}, & Q &= \frac{4RQ^*}{\sigma_0 h_2^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\sigma_0$  - предел текучести материала.

При решении оптимизационной задачи считаем  $V = const$ . Объем пластинки можем выразить в виде

$$V = \pi R^2 h_2 \Delta, \quad (4)$$

где  $\Delta = \psi(\alpha, \delta, y)$  является функцией, характеризующей форму пластинки. Из выражения объема (4) можем теперь найти

$$h_2 = \frac{V}{\pi R^2 \Delta}. \quad (5)$$

Безразмерные величины  $\rho$  и  $\omega$  введем формулами

$$\rho = \frac{2\pi^2 R^6 \rho^*}{3\sigma_0 V^2}, \quad \omega = \frac{2\pi g R^4 \omega^*}{3\sigma_0 V T^2}. \quad (6)$$

В задачах динамического изгиба величина  $h_2$  задана, а  $V \neq \text{const}$ . Безразмерные величины  $\tau, x, \gamma, \alpha, \delta, M$  и  $Q$  вычислим по формулам (3), а величины  $\rho$  и  $\omega$  введем теперь в виде

$$\rho = \frac{2R^2 \rho^*}{3\sigma_0 h_2^2}, \quad \omega = \frac{2gR^2 \omega^*}{3\sigma_0 T^2 h_2}. \quad (7)$$

Уравнения движения в безразмерных величинах примут следующий вид:

$$\begin{aligned} (xQ)' &= -6x [\Delta^2 \rho - h(x)\Delta \dot{\omega}], \\ (xM_1)' &= M_2 + xQ, \end{aligned} \quad (8)$$

причем  $M_1$  означает здесь и в дальнейшем радиальный изгибающий момент,  $M_2$  - тангенциальный изгибающий момент, штрих - дифференцирование по координате  $x$  и точка - дифференцирование по времени  $\tau$ , а символ  $h(x)$  имеет следующее значение:

$$h(x) = \begin{cases} \gamma, & \text{если } x \in [0, \alpha], \\ 1, & \text{если } x \in [\alpha, 1]. \end{cases} \quad (9)$$

После перехода к безразмерному времени  $\tau$  функция нагрузка-время имеет следующий вид:

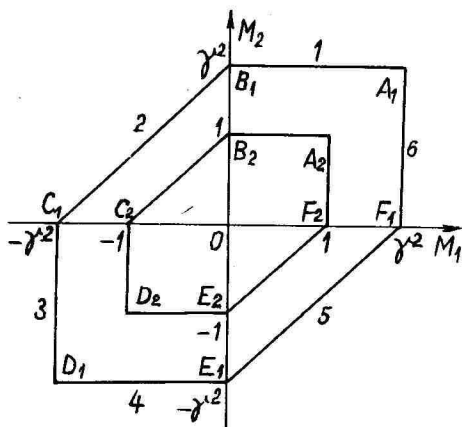
$$\rho^*(\tau) = \begin{cases} b \exp\left[-\frac{\pi\tau}{\tan(\pi\tau_*)}\right] \sin \pi\tau, & \text{если } \tau \in [0, 1], \\ 0, & \text{если } \tau > 1, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$b = \rho^*_{\max} \frac{\exp\left[\frac{\pi\tau_*}{\tan(\pi\tau_*)}\right]}{\sin(\pi\tau_*)} \quad (11)$$

и по экспериментальным данным  $\tau_* = 0,2$ . Легко видеть, что уравнения (8) применимы как для решения оптимизационных задач, так и для задач динамического изгиба, если в последнем случае взять  $\Delta = 1$ .

Материал пластинки считаем жестко-пластическим и подчиненным условию текучести Треска (фиг. 2).



Фиг. 2.

Уравнение произвольной стороны шестиугольника Треска можно написать в виде

$$AM_1 + BM_2 = M_s \quad (I2)$$

где предельный момент

$$M_s = \begin{cases} \gamma^2, & \text{если } x \in [0, \alpha], \\ 1, & \text{если } x \in [\alpha, 1], \end{cases} \quad (I3)$$

а  $A$  и  $B$  - множители, которые могут иметь значения  $I$ ;  $0$  или  $-I$ . Например, на стороне  $A_1B_1$  и на  $A_2B_2$  имеем  $A = 0$  и  $B = I$ .

По ассоциированному закону течения

$$\dot{x}_1 = \lambda \frac{\partial F}{\partial M_1} = \lambda A, \quad \dot{x}_2 = \lambda \frac{\partial F}{\partial M_2} = \lambda B. \quad (I4)$$

Так как  $\dot{x}_1 = -\partial^2 w / \partial x^2$  и  $\dot{x}_2 = -(1/\kappa) \partial w / \partial x$ , то получим дифференциальное уравнение:

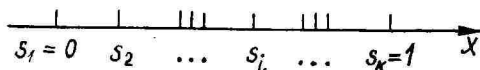
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\eta}{\kappa} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (I5)$$

где  $\eta = \frac{A}{B}$ , из которого можно найти прогиб пластинки.

## 2. Интегрирование основных уравнений

Предположим теперь, что с начала нагружения прошел промежуток времени  $\tau < T$  и в пластинке возникло  $\kappa - 1$  кольцевых зон, которые находятся в разных пластических состояниях.

Пусть эти зоны разделяются окружностями радиуса  $\lambda_1, \dots, \lambda_\kappa$  (фиг. 3), причем  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_\kappa = 1$ .



Фиг. 3.

Введем функцию

$$\Phi(x, \eta_i) = \begin{cases} \ln x, & \text{если } \eta_i = -1, \\ x, & \text{если } \eta_i = 0, \\ 0, & \text{если } \eta_i \rightarrow \pm \infty, \end{cases} \quad (16)$$

где  $\eta_i$  - значение величины  $\eta$  на отрезке  $[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ ;  $\eta = -1$  показывает, что мы находимся на наклонной стороне шестиугольника Треска,  $\eta = 0$  - что на горизонтальной стороне и  $\eta \rightarrow \pm \infty$ , что на вертикальной стороне. При помощи функции  $\Phi$  сможем написать выражение для скорости прогиба в момент времени  $\tau$ ; если  $x \in [\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ , то

$$\dot{w}(x, \tau) = C_1(\tau) + \sum_{i=2}^{j-1} C_i(\tau) [\Phi(\lambda_i, \eta_i) - \Phi(\lambda_{i-1}, \eta_i)] + C_j(\tau) [\Phi(x, \eta_j) - \Phi(\lambda_{j-1}, \eta_j)], \quad (17)$$

где  $C_i(\tau)$  зависит только от времени,  $C_1(\tau) = \dot{w}(0, \tau)$  и индекс  $i$  показывает, в какой зоне мы находимся. Дифференцируем теперь выражение (17) по времени  $\tau$ , получим ускорение

$$\ddot{w}(x, \tau) = \sum_{i=1}^j [a_i \dot{C}_i(\tau) + b_i \dot{s}_i(\tau)]. \quad (18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ \dots \dots \dots \\ a_i &= \Phi(\lambda_i, \eta_i) - \Phi(\lambda_{i-1}, \eta_i), \\ \dots \dots \dots \\ a_j &= \Phi(x, \eta_j) - \Phi(\lambda_{j-1}, \eta_j), \end{aligned} \quad (19)$$

и

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -C_2(\tau) \partial \Phi / \partial \Delta_1, \\
 b_i &= \partial \Phi / \partial \Delta_i [C_i(\tau) - C_{i+1}(\tau)], \\
 b_j &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

Обозначим теперь стороны шестиугольника Треска АВ, ВС, ..., FA соответственно через 1, 2, ..., 6 (фиг. 2) и перепишем уравнение (12) в виде

$$\rho_{1j} M_1 + \rho_{2j} M_2 = M_s, \tag{21}$$

где  $j = 1, 2, \dots, 6$  и  $\rho_{ij}$  имеет значения 1; 0 или -1. Теперь

$$\eta_j = \frac{\rho_{1j}}{\rho_{2j}} \tag{22}$$

и из уравнения (21) можно получить

$$M_2 = \frac{M_s}{\rho_{2j}} - \eta_j M_1. \tag{23}$$

Предполагаем теперь по-прежнему, что с начала нагружения прошел промежуток времени  $\tau$  и  $x \in [A_{j-1}, A_j]$ . Введем еще функцию

$$\begin{aligned}
 I_{\Phi}(x, \eta_i) &= \int x \Phi(x, \eta_i) dx = \\
 &= \begin{cases} x^2/2 (\ln x - 0,5), & \text{если } \eta_i = -1, \\ x^3/3, & \text{если } \eta_i = 0, \\ 0, & \text{если } \eta_i \rightarrow \pm \infty. \end{cases}
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

Определяя значение момента  $M_2$  из выражения (23) и учитывая, что  $M_s = h^2(x)$ , получим после интегрирования уравнений движения (8) следующие равенства:

$$\begin{aligned}
 x Q(x) &= A_{j-1} Q(A_{j-1}) - 3 \Delta^2 \rho(\tau) (x^2 - A_{j-1}^2) + 3 \Delta h(x) \cdot \\
 &\cdot \left\{ \sum_{i=1}^{j-1} [a_i \dot{C}_i(\tau) + b_i \dot{\Delta}_i(\tau)] (x^2 - A_{j-1}^2) + 2 \dot{C}_j(\tau) [I_{\Phi}(x, \eta_j) - \right. \\
 &\left. - I_{\Phi}(A_{j-1}, \eta_j) - \frac{1}{2} \Phi(A_{j-1}, \eta_j) (x^2 - A_{j-1}^2)] \right\}, \\
 x M_1(x) &= A_{j-1} M_1(A_{j-1}) + \rho_{2k} h^2(x) (x - A_{j-1}) + A_{j-1} Q(A_{j-1}) (x - A_{j-1}) - \\
 &- (x - A_{j-1})^2 \left\{ \Delta^2 \rho(\tau) (x + 2A_{j-1}) + \Delta h(x) \left[ \sum_{i=1}^{j-1} (a_i \dot{C}_i(\tau) + b_i \dot{\Delta}_i(\tau)) \cdot \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\cdot(x+2\Delta_{j-1}) + \dot{C}_j(\tau) \left( \frac{1}{2} \langle x^2 + 2x\Delta_{j-1} + 3\Delta_{j-1}^2 \rangle - \Delta_{j-1} \langle x + 2\Delta_{j-1} \rangle \right) \Big\},$$

если  $\kappa = 1\sqrt{4}$ ,

$$M_2(x) = \beta_{1\kappa} h^2(x) - x Q(x), \quad \text{если } \kappa = 3\sqrt{6}, \quad (25)$$

$$M_4(x) = M_4(\Delta_{j-1}) + \beta_{2\kappa} h^2(x) \ln \frac{x}{\Delta_{j-1}} + \Delta_{j-1} Q(\Delta_{j-1}) \ln \frac{x}{\Delta_{j-1}} - 3\Delta_{j-1}^2 \rho(\tau) \cdot$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{2} (x^2 - \Delta_{j-1}^2) - \Delta_{j-1}^2 \ln \frac{x}{\Delta_{j-1}} \right] + 3\Delta h(x) \left\{ \sum_{i=2}^{j-1} [a_i \dot{C}_i(\tau) + b_i \dot{\lambda}_i(\tau)] \cdot \right.$$

$$\cdot \left[ \frac{1}{2} (x^2 - \Delta_{j-1}^2) - \Delta_{j-1}^2 \ln \frac{x}{\Delta_{j-1}} \right] + \dot{C}_j(\tau) \left[ \frac{x^2}{2} (\ln x - 0,5) - \frac{\Delta_{j-1}^2}{2} \cdot \right.$$

$$\cdot (\ln \Delta_{j-1} - 0,5) - \frac{1}{2} (x^2 - \Delta_{j-1}^2) \ln \Delta_{j-1} + \frac{\Delta_{j-1}^2}{2} \ln \frac{x}{\Delta_{j-1}} \Big\},$$

если  $\kappa = 2\sqrt{5}$ .

Для определения прогиба пластинки  $w(x, \tau)$  надо найти

1) радиусы окружностей  $\Delta_2, \Delta_3, \dots, \Delta_{n-1}$ , на которых происходит переход от одного режима к другому;

2) константы интегрирования  $C_1(\tau), C_2(\tau), \dots, C_n(\tau)$ ;

3) значение момента  $M_1$  в начале движения,  $M_1(0) = \bar{M}$ .

Таким образом, искомым величин у нас  $2n-1$ . Для их нахождения имеем следующие условия.

1) На каждой окружности, разделяющей зоны разных пластических состояний, момент  $M_1$  должен быть непрерывным:

$$\varphi_{1i}(\bar{M}, C_1, \dots, C_i, \Delta_2, \dots, \Delta_i), \quad i = 2, \dots, n-1. \quad (26)$$

2) На каждой шарнирной окружности должно быть удовлетворено условие  $\dot{w} + \dot{\lambda} w' = 0$  и на каждой нешарнирной окружности - условие  $\dot{w}' = 0$ , т.е.

$$\varphi_{2i}(C_1, \dots, C_i, \Delta_2, \dots, \Delta_{i-1}) = 0, \quad (27a)$$

если  $\Delta_i$  - радиус шарнирной окружности и

$$\varphi_{2i}(C_i, C_{i+1}, \Delta_i) = 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad (27b)$$

если  $\Delta_i$  является радиусом нешарнирной окружности.

3) Краевые условия:

а) для момента  $M_1$  должно быть

$$\varphi_3(\bar{M}, C_1, \dots, C_n, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}) = 0, \quad (28a)$$

б) для перерезывающей силы  $Q$

$$\varphi_4(C_1, \dots, C_n, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}) = 0, \quad (28b)$$

в) для скорости  $\dot{\omega}$

$$\varphi_5(C_1, \dots, C_n, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}) = 0. \quad (28в)$$

Таким образом количество уравнений для нахождения неизвестных тоже будет  $2n-1$ .

Рассмотрим теперь, что случится, если мы будем нагружать пластинку. До момента  $\tau_1$ , который соответствует предельной нагрузке  $p_1$ , пластинка остается жесткой. В момент времени  $\tau$  возникает шарнирная окружность. Имеются две возможности для ее возникновения: 1) в сечении  $x=a$  или 2) в сечении  $x=0$ . До момента  $\tau_2$  это шарнирная окружность остается стационарной, а затем она начинает перемещаться в направлении внешнего края пластинки. В дальнейшем возможны еще следующие случаи: 1) возникают новые шарнирные окружности, которые тоже могут быть подвижными, 2) шарнирные окружности начинают перемещаться в направлении центра пластинки, 3) шарнирные окружности исчезают. Программа для ЭВМ составлена так, что она сама выбирает реализуемые режимы, вычисляет координаты шарнирных окружностей, проверяет неравенства для изгибающих моментов, находит конечные моменты фаз, прогибы в конце каждой фазы, момент окончания движения пластинки, окончательный прогиб пластинки и, наконец, оптимальные параметры пластинки. Описание такой программы и результаты вычислений будут опубликованы в будущем.

#### Литература

1. Мазалов В.Н., Немировский Ю.В., Динамика тонкостенных пластических конструкций. Сб. Механика, 1975, № 5, 155 - 248.

## Automatic calculation of rigid-plastic stepped circular and annular plates for dynamic loading

A. Salupere

### Summary

Rigid-plastic stepped circular and annular plates are considered. A dynamic load, which varies in time according to Fig. 1, is applied. The yield condition is taken in the form of Tresca-Saint-Venant. Two kinds of problems are considered: 1) plastic bending, 2) optimal design of plates (in this case the volume of the plate is specified).

By solving these problems a lot of different plastic regimes appear. For all these regimes the equations of motion are integrated. The sequence of proper regimes will be chosen by computer. Continuity conditions between different regimes are satisfied automatically.

## К ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТИРОВАНИЮ ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК ПРИ БОЛЬШИХ ПРОГИБАХ

Я. Леллеп

Тартуский государственный университет

Наряду с многочисленными работами по оптимизации упругих элементов конструкций в последнее время в научной литературе освещаются и проблемы оптимального проектирования пластических балок, пластин и оболочек. Особое значение имеют эти проблемы в случае динамического нагружения [5], а также при работе конструкций в стадии конечных пластических перемещений.

Существуют несколько подходов к постановке, математической формулировке и решению задач оптимизации с учетом умеренно больших прогибов. В статье [7] была разработана и в [4] обобщена т.н. параметрическая задача оптимизации. В этих задачах управляющие переменные являются постоянными, характе-

ризующими внешних воздействий или геометрию конструкции. Следует отметить, что значительная часть решенных пока задач оптимального проектирования неупругих балок, пластин и оболочек в случае динамического нагружения [5] также принадлежит в класс параметрических задач.

В [6] и [8] был разработан иной подход к учету геометрической нелинейности при оптимальном проектировании жестко-пластических балок и оболочек. В этих работах допускается, что прогибы оптимальной конструкции совпадают с прогибами соответствующей однородной конструкции. Однако множество задач, решимых этим методом, ограничено потому, что оптимальные проекты такого типа могут в некоторых случаях оказаться "не надежными". Будучи в математическом смысле оптимальными для фиксированного значения интенсивности внешней нагрузки, они все же могут не сопротивляться нагрузке, интенсивность которой меньше данного значения.

Ниже предлагается модифицированный (минимаксный) вариант этого подхода, который обеспечивает "надежность" оптимального проекта.

#### 1. Математическая формулировка минимаксной задачи

Рассмотрим жестко-пластическую балку длины  $l$ , подверженную действию распределенной поперечной нагрузки и растягивающей осевой силы  $N$ . Допустим, что нагрузка распределена симметрично относительно центра балки и интенсивность ее  $P = \bar{p}R(x)$  где  $\bar{p}$  - некоторый постоянный параметр, но  $R(x)$  - заданная функция. Начало координатной оси  $Ox$  поместим в центр тяжести срединного сечения балки. Из-за симметрии будем в дальнейшем рассматривать лишь половину балки. Концы балки считаем жестко заделанными и поперечное сечение ее - идеальным трехслойным постоянной общей толщиной  $H$  и переменной толщиной несущих слоев  $d = d(x)$ .

Требуется найти такой проект балки (т.е. переменную толщину несущих слоев), при котором объем несущих слоев принимает минимальное "надежное" значение причем прогиб ее  $W = W(x, \bar{p})$  совпадает прогибом  $W_* = W_*(x, \bar{p})$  балки постоянной толщины  $d_*$ . Надежным считается проект такой балки, которая сопротивляется внешним нагрузкам интенсивностями  $\bar{p}R(x)$ , где  $\bar{p}$  принимает любое значение на отрезке  $[\bar{p}_0, \bar{p}_1]$ . За  $\bar{p}_0$  целесообразно выбирать несущую способность балки постоянной толщины  $d_*$ . Тогда несущая способность оптимальной балки будет автоматически больше или равна  $\bar{p}_0$ .

Критерий качества, подлежащее минимизации записывается таким образом в виде

$$J = \max_{\bar{r} \in [\bar{r}_0, \bar{r}_1]} \int_0^l d(x) dx. \quad (I.1)$$

Если в (I.1)  $\bar{r}_0 = \bar{r}_1$ , то приходим к задаче минимизации объема при заданной несущей способности; иными словами получим задачу в геометрически линейной постановке. Но если в (I.1) опускать операцию вычисления максимума, то задача сводится к задаче минимизации объема при заданных прогибах.

При минимизации функционала (I.1) следует удовлетворить основным уравнениям теории геометрически нелинейных пластических балок, которые представляются в виде [4], [7]

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= Q, & \frac{dQ}{dx} &= xN - \bar{r}R(x); & \frac{dW}{dx} &= Z; \\ \frac{dZ}{dx} &= -x, & \frac{dU}{dx} &= -\frac{1}{2}Z^2 + x \frac{\Phi_N}{\Phi_M}, \end{aligned} \quad (I.2)$$

где

$$x = -\frac{d^2 W_*}{dx^2}, \quad \Phi_N = \frac{\partial \Phi}{\partial N}, \quad \Phi_M = \frac{\partial \Phi}{\partial M}. \quad (I.3)$$

Величину  $x$  в формулах (I.2) и (I.3) рассмотрим как заданную функцию, а функция  $\Phi = \Phi(M, N, d)$  представляет кривую текучести (фиг. I).

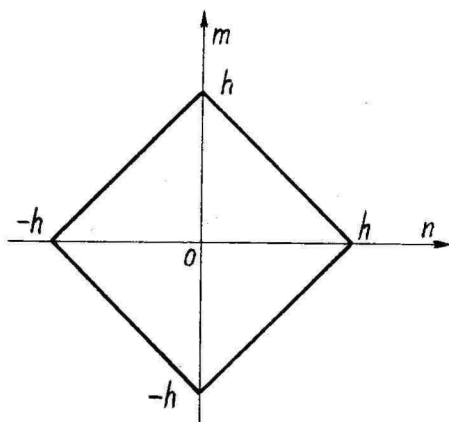
Для удобства введем следующие безразмерные величины

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{x}{l}, & m &= \frac{M}{M_0}, & n &= \frac{N}{N_0}, & h &= \frac{d}{d_*}, \\ q &= \frac{lQ}{M_0}, & \omega &= \frac{N_0 W}{M_0}, & z &= \frac{lN_0 Z}{M_0}, \\ u &= \frac{lN_0^2 U}{M_0^2}, & \kappa &= \frac{l^2 N_0 x}{M_0}, & r &= \frac{\bar{r} l^2}{M_0}. \end{aligned} \quad (I.4)$$

Теперь уравнения (I.2) примут вид

$$\begin{cases} m' = q, & q' = \kappa n - rR(\xi l), & \omega' = z, \\ z' = -\kappa, & u' = -\frac{1}{2}z^2 + \kappa, \end{cases} \quad (I.5)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $\xi$ ,  $b_0$  - предел текучести материала, а  $M_0 = b_0 d_* N$ ,  $N_0 = 2b_0 d_*$ .



Фиг. I.

Условие текучести для балки идеальным трехслойным сечением имеет вид  $|m| + |n| \leq h$  (фиг. I). Если потребовать дополнительно, что  $d(x) \leq d_*$  (оптимальная толщина несущих слоев не должна превышать заданную толщину), то получим следующие неравенства

$$|m| + n \leq h(\xi) \leq 1, \quad (I.6)$$

которым удовлетворяет безразмерная толщина несущих слоев.

## 2. Необходимые условия оптимальности

Сформулированную выше задачу, которая состоит в минимизации функционала

$$J_* = \max_{p \in [p_0, p_1]} \int_0^1 h(\xi) d\xi \quad (2.1)$$

с учетом ограничений (I.5) и (I.6) рассмотрим как негладкую задачу теории оптимального управления. Притом безразмерные изгибающий момент  $m$ , перерезывающая сила  $q$ , прогиб  $w$ , его наклон  $z$  и осевое перемещение  $u$  выступают в ролях фазовых переменных, а  $h$  является управлением.

Необходимое условие оптимальности для данной негладкой задачи можно записать в виде [I]

$$\max_h \min_p \Delta_p H(h) = 0, \quad (2.2)$$

где  $H(h)$  обозначает функцию Гамильтона

$$H(h) = -h + \psi_1 q + \psi_2 (\kappa v - \mu R(\xi l)) + \psi_3 z - \psi_4 \kappa + \psi_5 (\kappa - \frac{z^2}{2}) \quad (2.3)$$

и  $\Delta_h H$  следующее приращение

$$\Delta_h H = H(h) - H(h_0). \quad (2.4)$$

В формулах (2.3) и (2.4)  $\psi_1 - \psi_5$  - сопряженные переменные, удовлетворяющие сопряженной системе и условиям трансверсальности,  $h$  - любое допустимое управление и  $h_0$  - оптимальное управление. Максимум в (2.2) вычисляется по  $h$  с учетом ограничений (I.6), а минимум по  $\mu \in \mathcal{U}$ , где  $\mathcal{U}$  определяется как подмножество отрезка  $[\mu_0, \mu_1]$ :

$$\mathcal{U} = \{ \mu \in [\mu_0, \mu_1] : J_*(h_0) = J_0 \}, \quad (2.5)$$

где  $J_0$  обозначает оптимальное значение функционала (2.1). Очевидно в данном случае  $\mathcal{U}$  совпадает отрезком  $[\mu_0, \mu_1]$ .

Так как функция  $\Delta_h H(h)$  является выпуклой, то можно изменить порядок вычисления максимума и минимума [2]. Поэтому условие (2.2) приобретает вид

$$\min_{\mu} \max_h \Delta_h H = 0. \quad (2.6)$$

С помощью (I.6), (2.3) и (2.4) получим из (2.6)

$$h_0 = - \min_{\mu} \max_h (-h), \quad (2.7)$$

откуда с учетом непрерывности функции  $|m| = |m(\xi, \mu)|$  следует

$$h_0 = \max_{\mu \in [\mu_0, \mu_1]} |m(\xi, \mu)| + n. \quad (2.8)$$

Функция  $m$  в последней формуле удовлетворяет уравнением (I.5) при  $\omega = \omega_*$  (или  $h = 1$ ).

### 3. Оптимальный проект балки, нагруженной равномерно распределенным давлением

Решение системы (I.5) имеет в случае  $R \equiv 1$  и постоянной толщины ( $h \equiv 1$ ) вид [3]

$$\omega_* = \begin{cases} \frac{\mu}{2n} (1 - \xi^2) + \frac{2(1-n)}{n}, & \xi \in [0, \xi_0], \\ \frac{\mu}{n} (1 - \xi) \xi_0, & \xi \in [\xi_0, 1], \end{cases} \quad (3.1)$$

$$m = \begin{cases} 1 - n, & \xi \in [0, \xi_0], \\ -\frac{\mu}{2} (\xi - \xi_0)^2 + 1 - n, & \xi \in [\xi_0, 1], \end{cases}$$

где

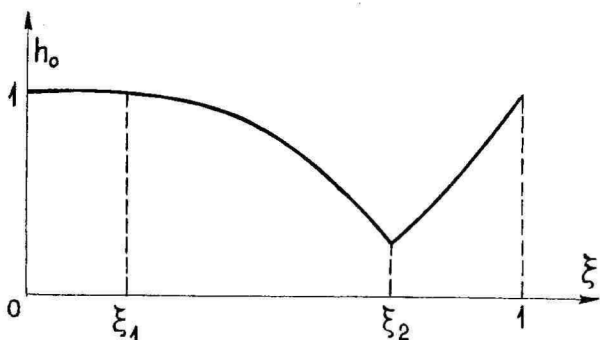
$$\xi_0 = 1 - \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu}}, \quad \nu_0 = 4(1 - \nu). \quad (3.2)$$

Подставляя функцию  $m$  от формулы (3.1) в (2.8) находим оптимальную толщину несущих слоев

$$\nu_0 = \begin{cases} 1, & \xi \in [0, \xi_1], \\ -\frac{\nu_1}{2}(\xi - \xi_1)^2 + 1, & \xi \in [\xi_1, \xi_2], \\ \frac{\nu_0 \xi^2}{2} + 2\nu - 1, & \xi \in [\xi_2, 1], \end{cases} \quad (3.3)$$

где

$$\xi_1 = 1 - \sqrt{\frac{\nu_0}{\nu_1}}, \quad \xi_2 = \frac{1}{\nu_0 + \nu_1} [\nu_1 \xi_1 + \sqrt{2\nu_0 \nu_1}]. \quad (3.4)$$



Фиг. 2.

Оптимальный проект балки описываемый формулами (3.1)–(3.4) представлен на фиг. 2 (здесь  $\nu = 0,2$ ;  $\nu_1 = 5$ ). Экономию найденного проекта выражаем в виде

$$e = \frac{J_*(h_0)}{J_*(1)}.$$

Табл. I.

$\nu_1$	3,2	3,6	4,0	4,4	4,8	5,2
$\xi_1$	0	0,057	0,106	0,147	0,183	0,215
$\xi_2$	0,707	0,716	0,723	0,730	0,736	0,742
$e$	0,688	0,712	0,732	0,749	0,763	0,776

Результаты вычислений представлены для некоторых значений величины  $\nu_1$  в таблице I. Таблица I соответствует случаю  $n = 0,2$ ;  $\nu_0 = 3,2$ . Вычисления показывают, что при малых значениях осевой силы оптимальный проект гарантирует экономию материала более двадцати процентов, если интенсивность поперечной нагрузки не превышает двухкратной несущей способности. При увеличении осевой силы получаемая экономия уменьшается.

#### Литература

1. Альсевич В.В., Необходимые условия оптимальности для минимаксных задач оптимизации. Дифференц. уравнения, 1976, т. 12, № 8, 1384-1391.
2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н., Введение в минимакс. М., "Наука", 1972.
3. Дикович И.Л., Статика упруго-пластических балок судовых конструкций. Л., "Судостроение", 1967.
4. Леллеп Я., Параметрическая оптимизация пластических балок. Настоящий сборник, стр. 50-57.
5. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, "Валгус", 1982.
6. Lellep J., Sawczuk A., Optimal Project of a Cylindrical Shell for Moderately Large Deflections. Struct. Contr. Proc. Int. IUTAM Symp., Ontario, 1979, Amsterdam, 1980, 431-446.
7. Lellep J., Parametrical Optimization of Plastic Beams in the Post-Yield Range. Int. J. Eng. Sci., 1982, vol. 20, N 1, 67-75.
8. Lellep J., Application of the Optimal Control Theory to Optimal Design of Plastic Beams in the Post-Yield Range. Bull. Acad. Polon. des Sci. Ser. sci. techn., 1981, vol. 29, N 3-4, 159-168.

On optimal design of plastic beams  
in the case of large deflections

J. Lellep

Summary

Problems of optimal design of rigid-plastic beams are considered by taking account of the post-yield behaviour. The beams under consideration are subjected to a distributed transverse pressure and axial tension. A mini-max optimization technique of plastic beams for a given deflected shape is developed. The deflection is required to be that of the beam of constant thickness in the post-yield range.

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ  
ПЛАСТИЧЕСКИХ БАЛОК

И. Леллеп

Тартуский государственный университет

Параметрические задачи оптимизации жестко-пластических балок с учетом геометрической нелинейности были рассмотрены в работе [4]. Предварительно неизвестные постоянные параметры, подверженные варьированию, характеризуют распределение внешних воздействий, неоднородность материала, площадь поперечного сечения балки или условия ее опирания. Развивая идеи статьи [4], ниже выводятся необходимые условия оптимальности для мультипараметрической задачи - т.е. для задачи, постановка которой содержит несколько неизвестных постоянных векторов.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим большие прогибы жестко-пластической балки длины  $l$ , подверженной действию распределенной поперечной нагрузки интенсивностью  $P$  и заданной осевой силы  $N$ . Допустим, что интенсивность поперечной нагрузки  $P = P(x, \mu_1, \dots, \mu_n)$  и площадь поперечного сечения балки  $S = S(x, \delta_1, \dots, \delta_q)$ . Предполагается, что функции  $P = P(x, \vec{\mu})$  и  $S = S(x, \vec{\delta})$  являются заданными дифференцируемыми функциями, а  $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  и  $\vec{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)$  обозначают неизвестные постоянные вектора. Пусть начало координатной системы, ось  $Ox$  которой совпадает с осью недеформированной балки, находится в левом конце балки.

Ищем проект балки, который минимизирует функционал

$$J = G(\vec{\mu}, \vec{\delta}) + \int_0^l F(W, U, \vec{\mu}, \vec{\delta}) dx \quad (I.1)$$

и удовлетворяет дополнительным ограничениям

$$\int_0^l E_i(W, U, \vec{\mu}, \vec{\delta}) dx \leq A_i, \quad i = 1, \dots, \kappa, \quad (I.2)$$

а также основным уравнениям теории умеренно больших прогибов. В формулах (I.1) и (I.2)  $W$  и  $U$  обозначают поперечное и осевое перемещение соответственно,  $A_i$  - заданные постоянные и  $E_i, F, G$  - заданные дифференцируемые функции.

Если, например,  $i = 1, G = 0, E_1 = S, F = W$ , то мы имеем задачу минимизации интегрального прогиба, причем объем балки не должен превышать заданной величины. Но если  $G = \mu = -P$  и  $E_1 = W, F = 0$ , то требуется найти максимальную интенсивность равномерно распределенной поперечной нагрузки, при которой усредненный прогиб не превышает заданной величины.

Решение поставленной задачи удовлетворяет уравнению равновесия

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + N \frac{d^2 W}{dx^2} + P = 0 \quad (I.3)$$

и условию текучести

$$\Phi(M, N, S) \leq 0, \quad (I.4)$$

где  $M$  обозначает изгибающий момент, а функция  $\Phi = \Phi(M, N, S)$  является кусочно-гладкой функцией [4]. Кроме (I.3) и (I.4) удовлетворяем также закону деформирования, геометрическим соотношениям и соответствующим краевым условиям.

Для простоты будем в данной работе применять теорию пластичности типа "деформации". Согласно этой концепции, вектор, составленный из компонентов деформации, является внешней нормалью поверхности текучести, если напряженное состояние соответствует некоторой точке на поверхности текучести, и равен нулю внутри поверхности текучести. Таким образом, в данном случае имеем

$$\varepsilon = \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial N}, \quad \alpha = \lambda^2 \frac{\partial \Phi}{\partial M}, \quad (I.5)$$

где  $\lambda^2$  - произвольный неотрицательный множитель. Так как будем учитывать умеренно большие прогибы, то компоненты деформации выражаются в виде

$$\varepsilon = \frac{dU}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dW}{dx} \right)^2, \quad \alpha = -\frac{d^2 W}{dx^2}. \quad (I.6)$$

Согласно вышесказанному, множитель  $\lambda^2 = 0$ , если напряженное состояние соответствует внутренней точке области, окруженной кривой текучести. Последняя является кусочно-гладкой, поэтому частные производные в (I.5) - кусочно-непрерывные функции.

Необходимые условия оптимальности будем выводить вариационными методами теории оптимального управления.

Введя для этого фазовые переменные

$$y_1 = M, \quad y_2 = \frac{dM}{dx}, \quad y_3 = W, \quad y_4 = \frac{dW}{dx}, \quad y_5 = U, \quad (I.7)$$

можно представить ограничения (I.3), (I.5) и (I.6) в виде

$$\begin{cases} y_1' = y_2, & y_2' = \lambda^2 N \Phi_M - P, & y_3' = y_4, \\ y_4' = -\lambda^2 \Phi_M, & y_5' = -\frac{1}{2} y_4^2 + \lambda^2 \Phi_N, \end{cases} \quad (I.8)$$

где штрих обозначает дифференцирование по  $x$  и

$$\Phi_M = \frac{\partial \Phi}{\partial M}, \quad \Phi_N = \frac{\partial \Phi}{\partial N}.$$

Выше было отмечено, что фазовые переменные удовлетворяют некоторым краевым условиям при  $x=0$  и  $x=l$ . Допустим, что существуют промежуточные точки  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ , в которых заданы значения некоторых фазовых координат. Отсюда получаем следующую систему краевых и промежуточных условий

$$y_i(0) = y_{0i}, \quad y_j(\Delta_m) = y_{mj}, \quad y_k(l) = y_{\kappa k}, \quad (I.9)$$

где  $m = 1, \dots, n$ ,  $i \in I_1$ ,  $j \in I_{2m}$ ,  $\kappa \in I_3$ .

Множества  $I_1, I_{2m}, I_3$  являются некоторыми подмножествами множества  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Если, например, левый конец балки шарнирно закреплён, то  $y_1(0) = y_3(0) = 0$  т.е.  $I_1 = \{1, 3\}$ . Аналогично, если в точках  $x = \Delta_1$  и  $x = \Delta_2$  расположены дополнительные опоры, то

$$I_{21} = I_{22} = \{1, 3\}.$$

Основные уравнения и предположения анализируются более подробно в [4] в случае  $p = q = n = n = 1$ . Этими предположениями будем пользоваться и в данной статье. Для краткости не будем их обсуждать. Отметим только, что фазовые переменные  $y_2$  и  $y_4$  могут иметь конечный скачок в точках  $x = \Delta_m, m = 1, \dots, n$ . За исключением этих случаев все фазовые переменные предполагаются непрерывными.

## 2. Необходимые условия оптимальности

Поставленную выше задачу можно рассматривать как специальную вариационную задачу теории оптимального управления с критерием качества (I.1) и ограничениями (I.2), (I.4), (I.8) и (I.9). Условие (I.4) означает, что могут возникать пластические зоны, где  $\dot{\Phi} = 0$  и жесткие зоны, где  $\dot{\Phi} < 0$ . Обозначим краевые точки пластических участков через  $x_{2i-1}, x_{2i}$  ( $i = 1, \dots, \kappa$ ). Так как ограничение  $\dot{\Phi} \leq 0$  является ограничением второго порядка [2], [4], то имеем

$$y_2(x_j) = Q_j, \quad Q_j = -\frac{\partial \Phi}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right)^{-1}, \quad j = 1, \dots, 2\kappa. \quad (2.1)$$

Введя новую переменную управления  $\theta$ , можно неравенство  $\dot{\Phi} \leq 0$  записать как равенство

$$\dot{\Phi}(y_1, N, S) + \theta^2 = 0. \quad (2.2)$$

Чтобы получить необходимые условия оптимальности рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} J = & G(\vec{\mu}, \vec{\sigma}) + \int_0^l \left( \sum_{j=1}^5 \varphi_j y_j' - H \right) dx + \sum_{i \in I_1} \eta_i (y_i(0) - y_{0i}) + \\ & + \sum_{m=1}^n \sum_{i \in I_{2m}} \nu_{im} (y_i(\Delta_m) - y_{\Delta mi}) + \sum_{i \in I_3} \varrho_i (y_i(l) - y_{li}) + \\ & + \sum_{j=1}^{2\kappa} \varphi_j (y_2(x_j) - Q_j), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $H$  - функция Гамильтона, представляемая в виде

$$H = -F + \psi_1 y_2 + \psi_2 (\lambda^2 N \Phi_M - P) + \psi_3 y_4 - \psi_4 \lambda^2 \Phi_M + \\ + \psi_5 (\lambda^2 \Phi_N - \frac{1}{2} y_4^2) + \sum_{i=1}^{\kappa} \psi_{0i} E_i + \varphi (\Phi + \theta^2). \quad (2.4)$$

Здесь  $\psi_1 - \psi_5, \nu_{im}, \eta_i, \varrho_i, \varphi_j, \varphi, \psi_{0i}$  - множители Лагранжа. Поскольку дополнительные ограничения (I.2) записаны в виде неравенств, то множители Лагранжа  $\psi_{0i}$  в (2.4) удовлетворяют условиям

$$\psi_{0i} \left( \int_0^l E(y_1, y_3, \vec{\lambda}, \vec{\theta}) dx - A_i \right) = 0, \quad i = 1, \dots, \kappa. \quad (2.5)$$

Вычислим полную вариацию функционала (2.3) по схеме [2],

[4]:

$$\Delta \int_0^l z dx = \sum_{i=0}^n \left( \int_{A_i}^{A_{i+1}} \delta z dx - [z(A_i)] \cdot \Delta A_i \right), \\ \Delta z(A_i \pm 0) = \delta z(A_i \pm 0) + z'(A_i \pm 0) \cdot \Delta A_i, \quad (2.6)$$

где  $\delta z$  - слабая вариация переменной  $z$  и  $\Delta A_i$  - приращения величин  $A_i$  ( $A_0 = 0, A_{n+1} = l$ ). Квадратные скобки обозначают конечные скачки фазовых переменных при  $x = A_i$ , т.е.

$$[z(A_i)] = z(A_i + 0) - z(A_i - 0). \quad (2.7)$$

Из уравнения  $\Delta I = 0$  получим следующие необходимые условия оптимальности:

а) для определения управлений  $\theta$  и  $\lambda$

$$\varphi \cdot \theta = 0, \quad \lambda ((\psi_2 N - \psi_4) \Phi_M + \psi_5 \Phi_N) = 0, \quad (2.8)$$

б) для неизвестных параметров

$$[\mathcal{H}(A_m)] \cdot \Delta A_m = 0, \quad m = 1, \dots, n;$$

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \mu_i} - \int_0^l \left( \frac{\partial H}{\partial \mu_i} + \frac{\partial H}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \mu_i} \right) dx \right\} \cdot \Delta \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (2.9)$$

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_j} - \int_0^l \left( \frac{\partial H}{\partial \sigma_j} + \frac{\partial H}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial \sigma_j} \right) dx - \sum_{i \in I_1} \eta_i \frac{\partial y_{0i}}{\partial \sigma_j} - \sum_{m=1}^n \sum_{i \in I_{2m}} \nu_i \frac{\partial y_{\Delta m i}}{\partial \sigma_j} - \sum_{i \in I_3} \varrho_i \frac{\partial y_{0i}}{\partial \sigma_j} - \sum_{i=1}^{2k} \varphi_i \frac{\partial a_i}{\partial \sigma_j} \right\} \cdot \Delta \sigma_j = 0, \quad j = 1, \dots, q.$$

Сопряженная система имеет традиционный вид

$$\psi_i' = -\frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (2.10)$$

Условия трансверсальности будут соответственно

а) в точке  $x=0$ :

$$\begin{aligned} \psi_i(0) &= 0, & i \in I_4, \\ \psi_i(0) &= \eta_i, & i \in I_1, \end{aligned} \quad (2.11)$$

б) в промежуточных точках  $x = \Delta_m, \quad m = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \psi_i(\Delta_m) &= 0, & i \in I_{2m}, & [y_i(\Delta_m)] \neq 0, \\ [\psi_i(\Delta_m)] &= 0, & i \in I_{2m}, & [y_i(\Delta_m)] = 0, \\ [\psi_i(\Delta_m)] &= \nu_i, & i \in I_{2m}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

в) в конечной точке  $x=l$ :

$$\begin{aligned} \psi_i(l) &= 0, & i \in I_3, \\ \psi_i(l) &= -\rho_i, & i \in I_3, \end{aligned} \quad (2.13)$$

г) в точках, разделяющих жесткие и пластические участки:

$$[\psi_2(x_j)] = \varphi_j, \quad [\psi_i(x_j)] = 0, \quad i \neq 2, \quad j = 1, \dots, 2k. \quad (2.14)$$

Рассмотрим условия оптимальности (2.8) более подробно. Так как в жесткой зоне  $\lambda = 0$ , то и  $\varphi = 0$ , но в пластической зоне имеем

$$\theta = 0, \quad (\psi_2 N - \psi_4) \Phi_M + \psi_5 \Phi_N = 0. \quad (2.15)$$

Отсюда видно, что пластическая часть балки соответствует особому участку оптимальной траектории в фазовом пространстве. Для ее изучения можно применить методы теории особых оптимальных управлений [1], [3].

Далее будем рассматривать практически важный случай, когда  $\partial F_*/\partial y_5 = 0$  и  $y_5$  не фиксировано в точке  $x=l$ , где

$$F_* = F - \sum_{i=1}^n \psi_{0i} E_i. \quad (2.16)$$

Из (2.10) с учетом (2.4), (2.13) и (2.16) следует, что в этом случае  $\psi_5 = 0$ . Последнее обстоятельство значительно упрощает исследование особых участков траектории.

Путем двукратного дифференцирования второго уравнения в (2.15) находим, что в пластических областях

$$\varphi = -\frac{1}{N} \frac{\partial F_*}{\partial y_3} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right)^{-1}; \quad \psi_3 = N \psi_1, \quad \psi_4 = N \psi_2. \quad (2.17)$$

С помощью (2.17) и (2.4) можно сопряженной системе (2.10) придать вид

$$\begin{cases} \psi_1' = \begin{cases} \frac{1}{N} \frac{\partial F_*}{\partial y_3} & (\text{в пластических зонах}), \\ 0 & (\text{в жестких зонах}), \end{cases} \\ \psi_2' = -\psi_1; \quad \psi_3' = \frac{\partial F_*}{\partial y_3}; \quad \psi_4' = -\psi_3. \end{cases} \quad (2.18)$$

Условия оптимальности (2.9) примут с учетом (2.4) и (2.11)–(2.14) вид

$$\begin{aligned} & [\psi_1(\lambda_m) y_2(\lambda_m) + \psi_3(\lambda_m) y_4(\lambda_m)] \cdot \Delta \lambda_m = 0, \quad m = 1, \dots, n, \\ & \left\{ \frac{\partial G}{\partial \mu_i} + \int_0^l \left( \frac{\partial F_*}{\partial \mu_i} + \psi_2 \frac{\partial P}{\partial \mu_i} \right) dx \right\} \cdot \Delta \mu_i = 0, \quad i = 1, \dots, p, \\ & \left\{ \frac{\partial G}{\partial \beta_j} + \int_0^l \left( \frac{\partial F_*}{\partial \beta_j} - \varphi \frac{\partial \Phi}{\partial \beta_j} \frac{\partial S}{\partial \beta_j} \right) dx - \sum_{i=1}^q \frac{\partial}{\partial \beta_j} (\psi_i(0) y_i(0) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{m=1}^n [\psi_i(\lambda_m)] y_i(\lambda_m) - \psi_i(l) y_i(l) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^{2k} [\psi_2(x_i)] \frac{\partial Q_i}{\partial \beta_j} \right\} \cdot \Delta \beta_j = 0, \quad j = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Уравнения (2.19) совместно с сопряженной системой (2.18), условиями трансверсальности (2.11)–(2.14), а также с основными уравнениями (1.8) и (1.9) позволяют найти оптимальные значения варьируемых параметров  $\lambda_m$  ( $m = 1, \dots, n$ ),  $\mu_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) и  $\beta_j$  ( $j = 1, \dots, q$ ). Если некоторые из них не фигурируют в математической формулировке задачи, то соответствующие уравнения в (2.19) удовлетворяются тождественно.

#### Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Особые оптимальные управления. М., "Наука", 1973.
2. Троицкий В.А., Оптимальные процессы колебаний механических систем. Л., "Машиностроение", 1976.
3. Bell D.J., Jacobson D.H., Singular Optimal Control Problems. Academic Press, 1975.
4. Lellep J., Parametrical Optimization of Plastic Beams in the Post-Yield Range. Int. J. Eng. Sci., 1982, Vol.20, N 1, 67–75.

## Parametrical optimization of plastic beams

J. Lellep

### Summary

Problems of parametrical optimal design of rigid-plastic beams are considered by taking account of the post-yield behaviour. The analysis is carried out for the beams loaded by a transverse pressure and axial tension. The parameters subjected to variation are certain constant quantities, which specify the optimal distribution of the external transverse pressure or non-homogeneity of the material as well as the cross-sectional area of the beam. Using variational methods of the optimal control theory, the results obtained earlier in 4 are extended to the multiparameter case.

### ДЕФОРМАЦИЯ ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКЕ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

В данной работе предпринята попытка описать деформацию заземленной с обоих концов жестко-пластической цилиндрической оболочки произвольной конечной длины, подверженной импульсному нагружению.

Как отмечается в обзоре [4], случаи импульсного нагружения цилиндрической оболочки в литературе фактически не изучены. В случае короткой оболочки имеется аналогия с соответствующим механизмом движения балки [3]. Эта аналогия уже не наблюдается в случае длинной оболочки.

Отметим, что случай нагрузки прямоугольного типа, которой подвержена жестко-пластическая оболочка с предельной кривой в виде квадрата, был изучен в [7] и обобщен в [6] на случай динамического давления, равномерно распределенного на

некотором участке длины, расположенном симметрично относительно середины оболочки. В работе [2] дано полное исследование движения полубесконечной цилиндрической оболочки со свободным краем под действием кольцевой сосредоточенной нагрузки, а в работе [1] предпринята попытка описать поведение цилиндрической, защемленной с одного и свободной с другого конца оболочки, подвергнутой действию нагрузки прямоугольного типа.

### 1. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим жестко-пластическую цилиндрическую оболочку длины  $l$ , оба конца которой жестко заделаны. Пусть в начальный момент времени  $t=0$  оболочка не деформирована, но все ее точки, кроме опорных, имеют одинаковую скорость  $v_0$  по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки.

Введем следующие обозначения:

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0}, \quad \tau = \frac{M_0}{\mu l^2 v_0} t, \quad (I.1)$$

$$\omega = \frac{M_0}{\mu l^2 v_0^2}, \quad c^2 = \frac{4l^2}{hR}.$$

Здесь  $x$  - координата по образующей оболочки,  $h$  и  $R$  - толщина и радиус оболочки соответственно,  $\mu$  - поверхностная плотность оболочки,  $M = M(x, t)$ ,  $M_0$ ,  $N = N(x, t)$  и  $N_0$  - осевой и предельный осевой изгибающие моменты, окружная сила и предельная окружная сила на единицу длины соответственно,  $W = W(x, t)$  - прогиб по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки,  $t$  - время.

Учитывая (I.1), уравнения движения цилиндрической оболочки и начальные условия можно привести к следующему безразмерному виду:

$$m''(\xi, \tau) = \ddot{\omega}(\xi, \tau) - c^2 n(\xi, \tau), \quad (I.2)$$

$$\omega(\xi, 0) = 0, \quad \dot{\omega}(\xi, 0) = 1, \quad (I.3)$$

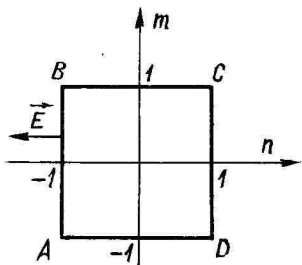
где штрихами и точками обозначено дифференцирование по  $\xi$  и  $\tau$  соответственно.

Добавим также краевое условие

$$m(0, \tau) = -1. \quad (I.4)$$

Вследствие симметрии задачи аналогичным краевым условиям  $m(1, \tau) = -1$  мы далее пользоваться не будем.

Будем пользоваться предложенным Ходжем [7] условием те-



Фиг. 1.

куности, при котором предельная кривая ограничивает квадрат  $|m| \leq 1$ ,  $|n| \leq 1$  (фиг. 1). Для цилиндрической оболочки, динамическое поведение которой описывается уравнением (1.2), вектор скоростей деформации имеет вид:

$$\vec{E} = \left\{ -n\dot{\psi}, -\frac{1}{c^2} n\dot{\psi}' \right\}. \quad (1.5)$$

Отметим, что механизмы движения существенно зависят от длины оболочки, а точнее от величины параметра  $c^2$ .

## 2. Деформация короткой оболочки

Для короткой оболочки, т.е. при небольших значениях параметра  $c^2$ , движение оболочки происходит в двух фазах.

Отметим, что результаты этого параграфа использовались в [5] для нахождения оптимального расположения дополнительной опоры к короткой оболочке при импульсном нагружении.

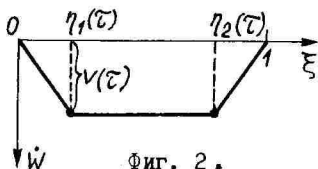
**Фаза II.** В первой фазе шарниры движутся от опор навстречу друг другу до встречи между собой. Из необходимого неравенства для изгибающего момента  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$  в течение всей этой фазы движения получим условие на величину параметра  $c^2$ , для которого действителен выбранный механизм движения.

Этот механизм и параметры движения показаны на фиг. 2. Так как в этом случае выполняются условия  $n\dot{\psi}'' = 0$  и  $n\dot{\psi}' > 0$  то, учитывая вид вектора течения (1.5) и принимая во внимание его ортогональность к предельной кривой, получим, что в продолжение первой фазы движения имеет место режим АВ из фиг. 1. Поэтому в уравнении (1.2) мы должны взять  $n = -1$ .

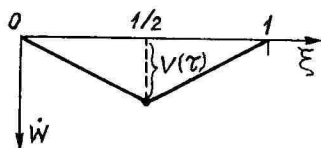
Поле скоростей для механизма движения, показанного на фиг. 2, записывается в виде

$$\dot{\psi}(\xi, \tau) = \begin{cases} v(\tau)\xi/\eta_1, & 0 \leq \xi \leq \eta_1(\tau), \\ v(\tau), & \eta_1(\tau) \leq \xi \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь и далее вследствие симметрии задачи относительно середины оболочки будем рассматривать только левую ее половину ( $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ ).



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Дифференцируя (2.1) по времени, подставляя полученный результат в (1.2) и дважды интегрируя с учетом (1.4) и условий

$$m(\eta_1, \tau) = 1, \quad m'(\eta_1, \tau) = m'(\frac{1}{2}, \tau) = 0,$$

получим дифференциальные уравнения для нахождения  $\eta_1$  и  $v$ :

$$2(1 - c^2\tau)\eta_1 \dot{\eta}_1 = 12 + c^2\eta_1^2, \quad (2.2)$$

$$\dot{v} = -c^2. \quad (2.3)$$

Интегрируя уравнения (2.2) и (2.3) и удовлетворяя при этом условиям

$$\eta_1(0) = 0, \quad v(0) = 1,$$

которые вытекают из начальных условий (1.3), находим

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{12\tau}{1 - c^2\tau}}, \quad v = 1 - c^2\tau. \quad (2.4)$$

Фаза II заканчивается в момент  $\tau_{11}$ , когда шарниры  $\eta_1$  и  $\eta_2$  встречаются, т.е. тогда, когда  $\eta_1(\tau_{11}) = \frac{1}{2}$ .

Поэтому

$$\tau_{11} = \frac{1}{48 + c^2}. \quad (2.5)$$

Заметим, что необходимое неравенство  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$  при  $0 \leq \tau \leq \tau_{11}$  выполняется тогда и только тогда, когда  $m'(0, \tau) = (12 - c^2\eta_1^2)/4\eta_1 \geq 0$  при  $0 \leq \tau \leq \tau_{11}$ , а это в свою очередь равносильно условию  $c^2 \leq 48$ , т.е. случаю, когда рассматривается "короткая" оболочка.

Ф а з а II. В течение этой фазы при  $\xi = \frac{1}{2}$  имеет место стационарный шарнир. Соответствующий механизм движения показан на фиг. 3, и поле скоростей для левой половины оболочки в этом случае записывается в виде:

$$\dot{w}(\xi, \tau) = 2v(\tau)\xi, \quad 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Аналогично предыдущему случаю находим, что в течение этой фазы имеет место режим АВ из фиг. 1, поэтому в уравнении (1.2) мы опять берем  $n = -1$ .

Дифференцируя (2.6) по времени, получим распределение ускорений. Подставляя полученный результат в (1.2) и дважды интегрируя с учетом (1.4) и условий

$$m\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 1, \quad m'\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 0,$$

находим, что

$$\dot{v} = -\frac{48 + 3c^2}{2}. \quad (2.7)$$

Из (2.4) и (2.5) вытекает, что

$$v(\tau_{11}) = \frac{48}{48 + c^2}.$$

С учетом этого из (2.7) получаем

$$v(\tau) = -\frac{48 + 3c^2}{2}\tau + \frac{3}{2} \quad \text{при } \tau \geq \tau_{11}.$$

Наконец, из условия  $v(\tau_{12}) = 0$  находим момент окончания движения

$$\tau_{12} = \frac{1}{16 + c^2}.$$

При этом условии  $c^2 \leq 48$  опять равносильно выполнению неравенства  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$  при  $\tau_{11} \leq \tau \leq \tau_{12}$ .

### 3. Деформация длинной оболочки

В случае "длинной" оболочки, т.е. оболочки, для которой выполняется условие  $c^2 > 48$ , ее движение происходит в трех фазах.

**Фаза 2I.** В начальной стадии движения имеет место снова механизм движения, показанный на фиг. 2 и заданный формулами (2.1). Однако, в этом случае фаза заканчивается не в момент встречи шарниров, а в момент  $\tau_{21}$ , когда производная изгибающего момента в заделке  $m'(0, \xi) = (12 - c^2\eta_1^2)/4\eta_1$ , уменьшаясь, достигнет нуля. Учитывая значение  $\eta_1(\tau)$  из (2.4), найдем теперь, что

$$\tau_{21} = \frac{1}{2c^2}. \quad (3.1)$$

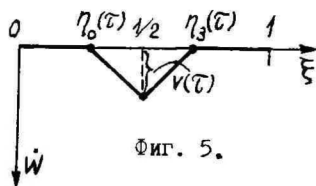
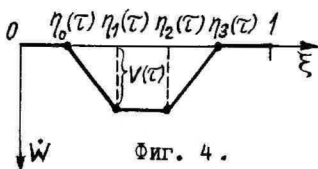
При этом  $\eta_1(\tau_{21}) = 2\sqrt{3}/c < 1/2$ , т.е. как и следовало ожидать, к моменту  $\tau_{21}$  шарниры еще не успевают встретиться.

Изгибающий момент в течение этой фазы также не превышает предельного.

**Фаза 22.** В начале этой фазы у заделок появляются новые шарниры  $\eta_0$  и  $\eta_3$ , которые начинают двигаться к середине оболочки. Механизм движения на этой стадии выберем, как показано на фиг. 4.

При этом имеем:

$$\dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq \xi \leq \eta_0(\tau) , \\ v(\tau) \frac{\xi - \eta_0}{\eta_1 - \eta_0} & , \quad \eta_0(\tau) \leq \xi \leq \eta_1(\tau) , \\ v(\tau) & , \quad \eta_1(\tau) \leq \xi \leq \frac{1}{2} . \end{cases} \quad (3.2)$$



На отрезке  $0 \leq \xi \leq \eta_0$  мы находимся на режиме F, где F - середина стороны AD квадрата ABCD (фиг. I), представляющего собой предельную кривую. При этом для  $0 \leq \xi \leq \eta_0$  имеют место равенства  $m(\xi, \tau) = -1$  и  $n(\tau, \xi) = 0$  и уравнение (2.1) на этом отрезке удовлетворяется тождественно.

На отрезке  $\eta_0 \leq \xi \leq 1/2$  выполняются условия  $\dot{w}'' = 0$  и  $\dot{w}' > 0$ , поэтому здесь мы находимся на стороне AB предельного квадрата и при решении уравнения (2.1) должны взять  $n = -1$ . Отметим, что при  $\xi = \eta_0$  происходит скачок величины окружной силы с нуля до минус единицы.

Дифференцируя (3.2) по времени, получим распределение ускорений. Для отрезка  $\eta_1 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$  аналогично предыдущему случаю, а также учитывая непрерывность функции  $v(\tau)$  при  $\tau = \tau_{21}$ , получим, что во время фазы 22

$$v(\tau) = 1 - c^2 \tau . \quad (3.3)$$

Интегрируя уравнение (1.2) на отрезке  $\eta_0 \leq \xi \leq \eta_1$  и принимая во внимание (3.3) и условия

$$m(\eta_0, \tau) = -1, \quad m(\eta_1, \tau) = 1, \quad m'(\eta_0, \tau) = m'(\eta_1, \tau) = 0,$$

после некоторых преобразований получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} (1-c^2\tau)z\dot{z} = 24 - c^2z^2, \\ (1-c^2\tau)z\dot{\eta}_1 = 12, \end{cases} \quad (3.4)$$

где  $z = \eta_1 - \eta_0$ .

Принтегрировав первое уравнение системы (3.4) с учетом (3.1) и условия  $z(\tau_{21}) = \eta_1(\tau_{21}) - \eta_0(\tau_{21}) = 2\sqrt{3}/c$ , получим

$$z(\tau) = \frac{2\sqrt{3}}{c} \sqrt{1 - 2(1 - c^2\tau)^2}. \quad (3.5)$$

После этого из второго уравнения системы (3.4) с учетом условия  $\eta_1(\tau_{21}) = 2\sqrt{3}/c$  находим, что для фазы 22

$$\eta_1(\tau) = \frac{\sqrt{6}}{c} \left[ \ln \frac{1 + \sqrt{1 - 2(-c^2\tau + 1)^2}}{\sqrt{2}(-c^2\tau + 1)} + \sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}) \right]. \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) находится  $\eta_0(\tau) = \eta_1(\tau) - z(\tau)$ .

Рассматриваемая фаза движения заканчивается в момент  $\tau_{22}$ , когда шарнир  $\eta_1$  достигает середины оболочки, т.е. когда шарниры  $\eta_1$  и  $\eta_2$  встречаются. Вычисления показывают, что

$$\tau_{22} = \left( 1 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{\alpha^2 + 1} \right) / c^2, \quad (3.7)$$

где  $\alpha = e^{\frac{c-2\sqrt{12}}{2\sqrt{6}}(1+\sqrt{2})}$ .

Изгибающий момент в течение этой фазы также не превышает предельного.

**Фаза 23.** Механизм движения для этой фазы деформирования показан на фиг. 5. Из вычислений следует, что шарнир  $\eta_0$  движется вправо. Для половины оболочки, где  $0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$ , поле скоростей записывается в виде:

$$n\dot{w}(\xi, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \xi \leq \eta_0(\tau), \\ n(\tau) \frac{\xi - \eta_0}{\frac{1}{2} - \eta_0}, & \eta_0(\tau) \leq \xi \leq \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.8)$$

На отрезке  $0 \leq \xi \leq \eta_0$  опять имеем  $m(\xi, \tau) = -1$  и  $n(\xi, \tau) = 0$ , а при  $\eta_0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$  имеет место равенство  $n = -1$ .

Дифференцируя (3.8) по времени, подставляя полученный результат в (1.2) и интегрируя последнее уравнение на отрезке  $\eta_0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}$  с учетом условий

$$m(\eta_0, \tau) = -1, \quad m\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 1, \quad m'(\eta_0, \tau) = m'\left(\frac{1}{2}, \tau\right) = 0,$$

приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{v} = -c^2 - \frac{12}{u^2}, \\ v\dot{u} = -c^2 u + \frac{12}{u}, \end{cases} \quad (3.9)$$

где  $u = \frac{1}{2} - \eta_0$ .

Выражая  $v$  из второго уравнения этой системы и подставляя это значение в первое уравнение, получим дифференциальное уравнение относительно  $u$

$$(12 - c^2 u^2) \frac{\ddot{u}}{u \dot{u}^2} = 0. \quad (3.10)$$

Можно показать, что  $u(\tau_{22}) = z(\tau_{22}) > 2\sqrt{3}/c$ , поэтому из уравнения (3.10) мы получаем, что  $\ddot{u} = 0$ .

Учитывая непрерывность функций  $\eta_0$ ,  $\dot{\eta}_0$  и  $v$  в момент времени  $\tau = \tau_{22}$ , при решении уравнения  $\ddot{u} = 0$ , а затем первого уравнения системы (3.9) получим, что для рассматриваемой фазы движения

$$\eta_0(\tau) = -A\tau + A\tau_2 - B + 1/2, \quad v(\tau) = -c^2\tau - \frac{12}{A(1/2 - \eta_0(\tau))} - \frac{12}{AB} + 1,$$

где

$$A = \frac{c(-\alpha^4 + 6\alpha^2 - 1)\sqrt{3}}{\alpha(\alpha^2 - 1)}, \quad B = \frac{2\sqrt{6}}{c} \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}.$$

Момент окончания движения  $\tau_{23}$ , определяемый из условия  $v(\tau_{23}) = 0$ , равен

$$\tau_{23} = \frac{1}{c^2} \left[ 1 - \frac{\alpha\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2}) + \alpha^2(1+\sqrt{2})} \right].$$

При этом можно показать, что  $\eta_0(\tau_{23}) = 1/2 - 2\sqrt{3}/c$ . Отметим также, что и при  $\tau_{22} \leq \tau \leq \tau_{23}$  выполняется неравенство  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$ .

#### Литература

1. Колесников С.М., Кострик В.К., Поведение жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием импульса внешнего давления. Прикл. механика, 1975, II, № 7, 63-69.
2. Кузин П.А., Шапиро Г.С., О влиянии свободного края на динамический изгиб жестко-пластической цилиндрической оболочки. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3, 84-94.

3. Леллеп Я., Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсивно нагруженной пластической балки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 52-57.
4. Мазалов В.Н., Немировский Ю.В., Динамика тонкостенных пластических конструкций. В сб. Пробл. динамики упруго-пластич. сред., М., 1975, 155-247.
5. Оленев Г., Оптимальное расположение дополнительной опоры к жестко-пластической короткой цилиндрической оболочке при импульсном нагружении. В сб. 350 лет математики в Тартуском университете. Тезисы докладов. Тарту, 1982, IOI-IO6.
6. Спорыкин А.Н., Хомяков Н.Д., О динамическом изгибе жестко-пластической цилиндрической оболочки под действием распределенного давления. Сб. науч. тр. Фак. прикл. мат. и мех. Воронеж. ун-та, 1971, I, 76-84.
7. Hodge, P.G., Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells. J. Mech. and Phys. Solids, 1955, 3, N 3, 376-388.

Deformation of a rigid-plastic cylindrical  
shell under impulsive loading

G. Olenev

Summary

A rigid-plastic cylindrical shell with clamped ends which is subjected to a prescribed initial velocity field is considered. Different regimes of motion are investigated. It has been shown that for "short" shells there are two phases of motion and for "long" shells - three phases.

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РАСПОЛОЖЕНИИ НЕСКОЛЬКИХ  
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ОПОР К ЖЕСТКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКЕ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ

Г. Оленев

Тартуский государственный университет

Наряду со способом уменьшения податливости конструкции путем оптимизации ее формы известен и другой путь, а именно: к конструкции можно подставить дополнительные опоры, выбирая их расположение так, чтобы при этом достигался минимум некоторой характерной величины, например, максимального или среднего остаточного прогиба.

В случае статических нагрузок задача оптимального расположения дополнительных опор изучалась в [9], [12-14]. Ряд задач такого типа в случае динамического нагружения рассмотрен в [4]. В [3], [10] некоторые результаты, полученные ранее для статических задач, были обобщены при помощи метода модальных движений на случай динамического нагружения, а в [5] на примере упругой балки, лежащей на двух опорах, оценивалась точность этого метода. В [11] была предпринята попытка получения условий оптимального расположения дополнительной опоры к жестко-пластической балке в случае задания начального поля скоростей при решении задачи в точной постановке. В [1] было определено оптимальное расположение дополнительной опоры к жестко-пластической защемленной с одного и шарнирно закрепленной с другого конца балке, подверженной импульсному нагружению. Эта задача с помощью вариационных методов теории оптимального управления исследовалась в [2]. В [8] эта же задача обобщалась на случай нескольких опор.

Задача оптимального расположения дополнительной опоры к защемленной с одного и свободно опертой с другого конца жестко-пластической короткой оболочке, подверженной импульсному нагружению, рассматривалась в [6]. Целью настоящей работы является обобщение результатов этой статьи на случай нескольких опор.

## 1. Постановка задачи и основные соотношения

Рассмотрим жестко-пластическую цилиндрическую оболочку длины  $l$ , концы которой могут быть как жестко заделаны, так и шарнирно закреплены. Установим к оболочке  $n$  круговых жестких опор (шпангоутов), расположенных на расстояниях  $S_1, S_2, \dots, S_n$  ( $S_1 < S_2 < \dots < S_n$ ) от одного из концов оболочки, в котором поместим начало координатной оси  $Ox$ , и препятствующих прогибанию оболочки в соответствующих точках. Введем обозначения  $S_0 = 0$  и  $S_{n+1} = l$ . Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  оболочка не деформирована, но все ее точки, кроме опорных, имеют одинаковую скорость  $v_0$  по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки. Необходимо найти такое расположение дополнительных опор, при котором максимальный прогиб оболочки достигал бы минимального значения.

Уравнения движения цилиндрической оболочки и начальные условия в безразмерной форме имеют вид:

$$m''(\xi, \tau) = \ddot{w}(\xi, \tau) - c^2 n(\xi, \tau), \quad (1.1)$$

$$m(\xi, 0) = 0, \quad \dot{w}(\xi, 0) = 1, \quad (1.2)$$

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \Delta_i = \frac{S_i}{l} \quad (i = 0, 1, \dots, n+1), \quad m = \frac{M}{M_0}, \quad n = \frac{N}{N_0}$$

$$\tau = \frac{M_0}{\mu l^2 v_0} t, \quad w = \frac{M_0}{\mu l^2 v_0^2} W, \quad c^2 = \frac{4l^2}{hR},$$

где  $x$  - координата по образующей оболочки,  $h$  и  $R$  - толщина и радиус оболочки соответственно,  $\mu$  - поверхностная плотность оболочки,  $M$ ,  $M_0$ ,  $N$  и  $N_0$  - осевой и предельный осевой изгибающий момент, окружная сила и предельная окружная сила на единицу длины соответственно,  $W$  - прогиб по направлению внутренней нормали к срединной поверхности оболочки,  $t$  - время. Штрихи и точки обозначают дифференцирование по  $\xi$  и  $\tau$  соответственно.

Будем пользоваться предложенным Ходжем [7] условием текучести, при котором предельная кривая ограничивает квадрат  $|m| \leq 1$ ,  $|n| \leq 1$ , а также ассоциированным с этим условием законом течения, согласно которому при всех встречающихся в дальнейшем механизмах движения в уравнении (1.1) мы должны взять  $n = -1$ .

## 2. Нахождение оптимального расположения опор

Рассмотрим сначала случай, когда оба конца оболочки жестко заделаны. Тогда на каждом отрезке  $\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) для первой фазы движения зададим поле скоростей в виде:

$$w(\xi, \tau) = \begin{cases} w_i(\tau) \frac{\xi - \Delta_i}{\eta_i - \Delta_i} & \Delta_i \leq \xi \leq \eta_i(\tau), \\ w_i(\tau) & \eta_i(\tau) \leq \xi \leq \theta_i(\tau), \\ w_i(\tau) \frac{\xi - \Delta_{i+1}}{\theta_i - \Delta_{i+1}} & \theta_i(\tau) \leq \xi \leq \Delta_{i+1}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Учитывая условия

$$m(\Delta_i, \tau) = -1, \quad i = 0, 1, \dots, n+1, \\ m(\eta_i, \tau) = m(\theta_i, \tau) = 1, \quad m'(\eta_i, \tau) = m'(\theta_i, \tau) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

а также принимая во внимание, что

$$\eta_i(0) = \Delta_i, \quad \theta_i(0) = \Delta_{i+1}, \quad w_i(0) = 1, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

при решении уравнения (1.1) с учетом (2.1) получим

$$\eta_i(\tau) = \Delta_i + \sqrt{\frac{12\tau}{1-c^2\tau}}, \quad \theta_i(\tau) = \Delta_{i+1} - \sqrt{\frac{12\tau}{1-c^2\tau}}, \\ w_i(\tau) = -c^2\tau + 1, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Для каждого отрезка  $\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}$  из условия  $\eta_i(\tau_{i1}) = \theta_i(\tau_{i1})$  найдем моменты  $\tau_{i1}$  окончания первой фазы движения:

$$\tau_{i1} = \frac{\kappa_i^2}{48 + c^2\kappa_i^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Здесь и далее  $\kappa_i = \Delta_{i+1} - \Delta_i$ .

Заметим, что необходимое условие  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$  для  $\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}$  и  $0 \leq \tau \leq \tau_{i1}$  выполняется тогда и только тогда, когда  $c^2\kappa_i^2 \leq 48$ . Поэтому здесь и в дальнейшем мы ограничимся оболочкой с "короткими" расстояниями  $\kappa_i$  между опорами, т.е. такой оболочкой, для которой  $c^2\kappa_i^2 \leq 48$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Поле скоростей прогиба на отрезке  $\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) для второй фазы движения запишем в виде:

$$w_i(\xi, \tau) = \begin{cases} w_i(\tau)(\xi - \Delta_i) / \left( \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} - \Delta_i \right), & \Delta_i \leq \xi \leq \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}, \\ w_i(\tau)(\xi - \Delta_{i+1}) / \left( \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} - \Delta_{i+1} \right), & \frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2} \leq \xi \leq \Delta_{i+1}. \end{cases} \quad (2.3)$$

Учитывая условия (2.2) и условия

$$m\left(\frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}, \tau\right) = -1, \quad m'\left(\frac{\Delta_i + \Delta_{i+1}}{2}, \tau\right) = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

при решении уравнения (I.I) с учетом (2.3) найдем, принимая во внимание непрерывность  $w_i(\tau)$  при  $\tau = \tau_{i2}$ , что при  $\tau \geq \tau_{i2}$

$$w_i(\tau) = -\frac{48 + 3c^2\kappa_i^2}{2\kappa_i^2} \tau + \frac{3}{2}.$$

Из условия  $w_i(\tau_{i2}) = 0$  находится время окончания движения  $\tau_{i2}$  оболочки на участке  $\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}$ :

$$\tau = \frac{\kappa_i^2}{16 + c^2\kappa_i^2}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Отметим, что условия  $c^2\kappa_i^2 \leq 48$  опять достаточно, чтобы для участка  $\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}$  в продолжение второй фазы движения выполнялось неравенство  $|m(\xi, \tau)| \leq 1$ .

Теперь уже нетрудно найти максимальные остаточные прогибы  $\alpha_i$  для всех частей оболочки:

$$\alpha_i(\kappa_i) = \max_{\Delta_i \leq \xi \leq \Delta_{i+1}} (\xi, \tau_{i2}) = \frac{64 + c^2\kappa_i^2}{2(16 + c^2\kappa_i^2)(48 + c^2\kappa_i^2)} \kappa_i^2, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Если  $R = \max_{0 \leq i \leq n} \kappa_i$ , то ввиду возрастания функций  $\alpha_i(\kappa_i)$  получим

$$\max_{0 \leq \xi \leq 1} (\xi, \tau_2) = \frac{64 + c^2R^2}{2(16 + c^2R^2)(48 + c^2R^2)} R^2,$$

где  $\tau_2 = \max_{0 \leq i \leq n} \tau_{i2}$ .

Поскольку мы стремимся минимизировать  $\max_{0 \leq \xi \leq 1} (\xi, \tau_2)$ , то для оптимального расположения опор минимальным должно быть выбрано  $R$ , а т.к.  $R \geq \frac{1}{n+1}$ , то для оптимального проекта

$$\kappa_i \text{ opt} = R \text{ opt} = \frac{1}{n+1}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

т.е.

$$\Delta_i \text{ opt} = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Если оба конца оболочки шарнирно закреплены, то, рассуждая аналогичным образом, приходим к следующему оптимальному расположению опор:

$$\Delta_{i1} \text{ opt} = \frac{4i - 2 + \sqrt{2}}{2(2n + \sqrt{2})}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при этом условия на длину внутренних участков оболочки остаются прежними:  $c^2 \kappa_i^2 \leq 48$ , а для крайних участков наше решение остается в силе, если выполняются неравенства

$$c^2 \kappa_i^2 \leq 6(3 + 2\sqrt{2}), \quad i = 0, n.$$

Если же конец  $\xi = 0$  оболочки заделан, а конец  $\xi = 1$  - шарнирно закреплен, то получаем, что

$$\Delta_{i2} \text{ opt} = \frac{4i}{4n + 2 + \sqrt{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

при этом решение справедливо, если

$$c^2 \kappa_i^2 \leq 48, \quad i = 0, 1, \dots, n-1; \quad c^2 \kappa_n^2 \leq 6(3 + 2\sqrt{2}).$$

#### Литература

1. Леллеп Я., Оптимальное расположение дополнительной опоры для импульсивно нагруженной пластической балки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 52-57.
2. Леллеп Я., Об условиях оптимальности расположения дополнительной опоры. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 564, 41-50.
3. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих балок с дополнительными опорами в случае динамического нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 430, 132-143.
4. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, 1982.
5. Оленев Г., Оптимальное расположение опор к упругой балке в случае импульсного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 564, 51-56.
6. Оленев Г., Оптимальное расположение дополнительной опоры к жестко-пластической короткой цилиндрической оболочке при импульсном нагружении. В сб. "350 лет математики в Тартуском университете. Тезисы докладов", Тарту, 1982, 101-106.

7. Hodge, P.G., Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells. *J. Mech. and Phys. Solids*, 1955, 3, № 3, 376-388.
8. Lellep, J., Optymatizacja położenia podpór belki sztywno-plastycznej obciążonej impulsem predkości. *Mech. teoret. i stosow.*, 1978, 16, № 4, 573-582.
9. Lepik, Ü., Optimal design of beams with minimum compliance. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1978, 13, № 1, 33-42.
10. Lepik, Ü., Application of the control theory for optimal design of nonelastic beams under dynamic loading. *Struct. control*, H. H. E. Leipholz, IUTAM, 1980, North-Holland Publishing Company, 447-457.
11. Lepik, Ü., On optimal design of rigid-plastic beams with additional supports in the case of impulsive loading. *Int. J. Non-Linear Mech.*, 1981, 16, № 1, 19-26.
12. Mróz, Z., Rozvany, G.I.N., Optimal design of structures with variable support conditions. *J. Optimiz. Theory and Appl.*, 1975, 15, № 1, 85-101.
13. Prager, W., Rozvany, G.I.N., Plastic design of beams: Optimal locations of supports and steps in yield moment. *Int. J. Mech. Sci.*, 1975, 17, № 10, 627-631.
14. Rozvany, G.I.N., Optimal design of flexural systems. Pergamon Press, 1976.

On the optimal location of several additional supports for a rigid-plastic cylindrical shell under impulsive loading

G. Olenev

Summary

A rigid-plastic cylindrical shell with clamped or free supported ends on  $n+2$  supports is considered. Two supports are on the edges of the shell. The locations of the additional supports are unfixed. The shell is subjected to the initial transverse impulse. Optimal locations of the additional supports are found on condition that the maximal residual deflection has a minimal value. The given solution is true for the shell with "short" distances between the supports.

## ОБ УЧЕТЕ УПРОЧНЕНИЯ ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ

Ю. Кирс, К. Кенк

Таллинский политехнический институт

При оптимальном проектировании конструкции следует максимально использовать способность материалов выдерживать без разрушения сравнительно высокие нагрузки. Это требует проведения расчета на базе теории пластичности. В подавляющем большинстве решенных задач материал предполагался жестко-идеально-пластическим [1, 2]. Но многие материалы существенно упрочняются при пластическом деформировании.

В настоящей работе рассмотрено оптимальное проектирование шарнирно опертой цилиндрической оболочки с учетом изотропного упрочнения.

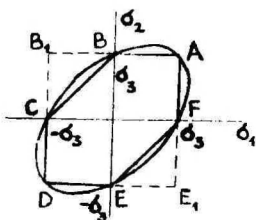
Для оболочки заданного объема, нагруженной равномерно распределенной внешней нормальной нагрузкой постоянной интенсивности, определено распределение толщины, обеспечивающее минимальность прогибов.

### 1. Модель материала

Экспериментально установлено, что для большинства материалов первоначальная поверхность текучести близка к поверхности Мизеса

$$s_{ij} s_{ij} = \frac{2}{3} \sigma_s^2,$$

где  $s_{ij}$  - девиатор напряжений и  $\sigma_s$  - предел текучести при одноосном растяжении. Эллипс, соответствующий поверхности Мизеса на плоскости ( $\sigma_1, \sigma_2$ ) представлен на фиг. 1, где  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  соответственно осевое и окружное напряжения.



Фиг. 1.

Близка к экспериментальной и поверхность Треска - шестиугольник ABCDEF.

В дальнейших расчетах пренебрегаем упругими деформациями. Компоненты скорости деформации вычислим из ассоциированного закона течения

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} \\ \dot{\epsilon}_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} \end{cases}, \quad (I.1)$$

где  $f=0$  - уравнение поверхности текучести. Нетрудно убедиться, что в случае поверхности Мизеса направление скорости пластической деформации в оболочке от точки к точке изменится, что существенно усложняет расчет. В случае поверхности Треска при рассматриваемой нагрузке допустимы режимы DE и EF, но расчет приводит к разрыву осевого перемещения U на центральной поверхности оболочки, что физически недопустимо.

Поэтому ниже применяется приближенная поверхность текучести в виде квадрата  $AB_1DE_1$  (фиг. I).

Рассматриваемой нагрузке во всех точках оболочки тогда соответствует режим представленный стороной  $DE_1$  и уравнение поверхности текучести можно принимать в виде

$$f = \sigma_2 + \sigma_3 = 0. \quad (I.2)$$

В случае изотропного упрочнения

$$\sigma_s = f_1(\mathcal{X}),$$

где  $\mathcal{X}$  - параметр упрочнения.

Для конкретности берем за меру упрочнения работу пластической деформации, т.е.  $\mathcal{X} = A_p$ .

Функцию упрочнения определим соотношением

$$A_p = B \sigma_s^2, \quad (I.3)$$

где B - постоянная материала.

Согласно (I.1), (I.2) и (I.3)

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_1 &= 0, \\ \dot{\epsilon}_2 &= \lambda, \\ \dot{A}_p &= \sigma_2 \dot{\epsilon}_2 = \sigma_2 \cdot \lambda = -\sigma_s \cdot \lambda = 2B \sigma_s \dot{\sigma}_s, \end{aligned} \quad (I.4)$$

откуда

$$\lambda = -2 \dot{\sigma}_s B.$$

Для дальнейшего целесообразно  $\sigma_s$  представить в виде

$$\sigma_s = \sigma_0 \varphi, \quad (I.5)$$

где  $\sigma_0$  исходный предел текучести.

Тогда

$$\lambda = -2 \dot{\sigma}_0 B \varphi. \quad (I.6)$$

## 2. Оптимальное проектирование цилиндрической оболочки

Рассмотрим цилиндрическую оболочку длиной  $2L$ , толщиной  $2H$  и радиусом центральной поверхности  $R$ . Ось  $Ox$  направим вдоль оболочки и ось  $Oz$  перпендикулярно к  $Ox$  в сторону центральной оси оболочки с началом координат на центральной поверхности на левом конце оболочки.

Тогда

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2}, \\ \dot{e}_2 = -\frac{\dot{W}}{R}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $U$  и  $W$  соответственно осевое перемещение и прогиб точки центральной поверхности.

Согласно (I.4)

$$\dot{e}_1 = \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} - z \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} = 0$$

и учитывая независимость  $U$  и  $W$  от  $z$  имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{U}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial^2 \dot{W}}{\partial x^2} = 0. \end{cases}$$

Интегрируя эти уравнения при начальных условиях

$$t=0, \quad U=W=\dot{U}=\dot{W}=0,$$

получим

$$\begin{cases} U=0 \\ W=c(t)x, \end{cases} \quad (2.2)$$

где функцию  $c(t)$  подлежит дополнительно определить.

Согласно (I.4), (I.6) и (2.1) имеем

$$\frac{\dot{W}}{R} = 2B\sigma_0\dot{\varphi},$$

а с учетом (2.2)

$$\varphi = 1 + \frac{c(t)x}{2BR\sigma_0}. \quad (2.3)$$

Уравнения движения оболочки запишем в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + p + \frac{N_\varphi}{R} &= 2\mu H \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где  $N_x, N_\varphi$  - мембранные усилия,  $M_x$  - изгибающий момент,  $p$  - интенсивность внешнего давления,  $\mu$  - плотность материала.

С учетом (I.2) и (I.5)

$$N_\varphi = \int_{-H}^H \sigma_2 dz = - \int_{-H}^H \sigma_0 \varphi dz = -2\sigma_0 \varphi H. \quad (2.5)$$

Переходим к безразмерным величинам

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{x}{L}, & h &= \frac{H}{H_0}, & w &= \frac{W}{H_0}, \\ n_1 &= \frac{N_x}{2\sigma_0 H_0}, & n_2 &= \frac{N_\varphi}{2\sigma_0 H_0}, & m &= \frac{M_x}{\sigma_0 H_0^2}, \\ q &= \frac{pL^2}{\sigma_0 H_0^2}, & a &= \frac{H_0}{R}, & \gamma &= \frac{L}{R}, & b &= \frac{\mu L^2}{\sigma_0}, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где  $H_0$  - заданная толщина на краю оболочки.

Тогда уравнения движения приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 m}{\partial y^2} + q + \frac{2n_2 \gamma^2}{a} &= 2bh \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

где согласно (2.2) и (2.5)

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{c(t) \gamma \cdot y}{a}, \\ n_2 &= -h\varphi, \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

а с учетом (2.3)

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 1 + \frac{c(t) \gamma \cdot y}{2B_1}, \\ B_1 &= B\sigma_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

Будем искать распределение толщины в виде

$$h = \kappa_0 + \kappa_1 y + \kappa_2 y^2 + \kappa_3 y^3. \quad (2.10)$$

Функция  $h$  должна удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} h|_{y=0} &= 1, \\ \frac{dh}{dy}|_{y=1} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

а также задан вперед объем оболочки

$$V = 8\pi R H_0 L \int_0^1 h dy. \quad (2.12)$$

Из условий (2.11) и (2.12) можно функцию  $h$  представить в виде

$$h = 1 - 3y + \frac{3}{2}y^2 + \kappa \left( \frac{3}{4}y - \frac{15}{8}y^2 + y^3 \right) + 3\rho y(1 - 0,5y), \quad (2.13)$$

где  $\kappa = \kappa_3$  и

$$\rho = \frac{V}{8\pi R H_0 L}.$$

Для оптимального проекта надо еще соответственно определить коэффициент  $\kappa$ . Для этого следует сперва интегрировать систему (2.7). С учетом условий

$$n_1|_{y=0} = 0, \quad m|_{y=0} = 0, \quad \frac{\partial m}{\partial y}|_{y=1} = 0,$$

получим

$$n_1 = 0$$

$$\begin{aligned} m = & \frac{q}{2}(2y - y^2) + \frac{q^2}{a} \left\{ (y^2 - 2y) + A_1(y^3 - 3y) + \right. \\ & + \frac{A_2}{4}(y^4 - 4y) + \frac{\kappa}{10}(y^5 - 5y) - \frac{c\chi}{6B_1}(y^3 - 3y) + \\ & + \frac{A_1 c\chi}{4B_1}(y^4 - 4y) + \frac{3A_2 c\chi}{40B_1}(y^5 - 5y) + \\ & + \left. \frac{\kappa c\chi}{30B_1}(y^6 - 6y) \right\} + \frac{2\ddot{c}b\chi}{a} \left\{ \frac{1}{6}(y^3 - 3y) + \right. \\ & + \left. \frac{A_1}{4}(y^4 - 4y) + \frac{3A_2}{40}(y^5 - 5y) + \frac{\kappa}{30}(y^6 - 6y) \right\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где  $\ddot{c} = \frac{d^2 c}{dt^2}$  и

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \rho - 1 + 0,25\kappa, \\ A_2 &= 1 - \rho - 1,25\kappa. \end{aligned} \right\}$$

С учетом (2.13) имеем

$$(M_x)_{max} = \sigma_s H^2$$

или при  $y = 1$

$$m = \varphi h^2. \quad (2.14)$$

Удовлетворяя (2.14), получим

$$\ddot{c} + Tc = s, \quad (2.15)$$

где

$$T = \frac{120a T_1}{B_1 \delta (28 - 108\rho + 5\kappa)},$$

$$S = \frac{120a S_1}{\delta y (28 - 108\rho + 5\kappa)},$$

$$T_1 = \frac{7\gamma^2}{60a} - \frac{9\rho\gamma^2}{20a} + \frac{\kappa\gamma^2}{48a} - \frac{(9\rho^2 + 1)}{8} -$$

$$- \frac{\kappa^2}{128} + \frac{3\rho}{4} + \frac{(3\rho + 1)\kappa}{16},$$

$$S_1 = \frac{(9\rho^2 + 1)}{4} + \frac{\kappa^2}{64} - \frac{3\rho}{2} + \frac{(1 - 3\rho)\kappa}{8} -$$

$$- \frac{9}{2} - \frac{\gamma^2}{4a} + \frac{5\rho\gamma^2}{4a} - \frac{3\kappa\gamma^2}{80a}.$$

Решение дифференциального уравнения (2.15) при начальных условиях  $c(0) = \dot{c}(0) = 0$  имеет вид

1) при  $T > 0$

$$c(t) = \frac{S_1 B_1}{T_1 \gamma} \left\{ 1 - \cos(t\sqrt{T}) \right\}, \quad (2.16)$$

2) при  $T < 0$

$$c(t) = \frac{S_1 B_1}{T_1 \gamma} \left\{ 1 - \operatorname{ch}(t\sqrt{-T}) \right\}. \quad (2.17)$$

Чтобы оба выражения (2.16) и (2.17) были минимальными в любой момент времени нужно, чтобы отношение  $S_1/T_1$  было минимальным и следовательно

$$T_1 \cdot \frac{dS_1}{d\kappa} = S_1 \cdot \frac{dT_1}{d\kappa}. \quad (2.18)$$

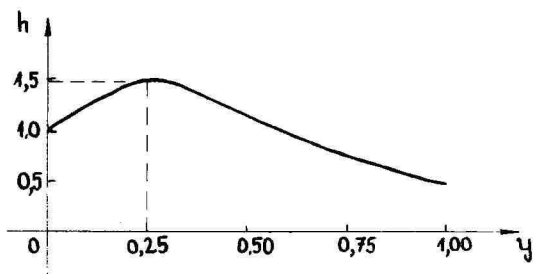
Это и есть условие для определения параметра  $\kappa$ , после вычисления которого полностью определен профиль оболочки. После несложных преобразований из условия (2.18) получим следующее квадратное уравнение для определения параметра  $\kappa$ :

$$\frac{7\kappa^2}{16} + \frac{\kappa(21\rho - 1)}{2} + \left\{ 20q + \frac{60qa(1+3\rho)}{y^2} - \frac{60a(1-3\rho)^2}{y^2} - \frac{40x^2(11\rho - 1)}{25a} + 57 - 246\rho - 135\rho^2 \right\} = 0.$$

Пример. Возьмем  $a = 0,1$ ,  $\rho = 1$ ,  $y = 1$  и  $q = 10$ , то получим  $\kappa = 5,54$  и для функций  $h$  выражение

$$h = 1 + 4,155y - 10,38y^2 + 5,54y^3.$$

Очевидно, что функция  $h$  имеет точку минимума при  $y = 1$ , причем  $h(1) = 0,32$ , и еще точку максимума при  $y \approx 0,25$ , причем  $h(0,25) = 1,47$ . График функций  $h = h(y)$  изображен на фигуре 2.



Фиг. 2.

Что касается уравнений (2.16) и (2.17), то реализуется (2.16), так как

$$T = \frac{0,35}{B, \delta}$$

## Литература

1. Кирс Ю., Оптимальное проектирование жестко-пластических оболочек вращения при динамической нагрузке. Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та. Пластичность конструкций, 487, II9-126.
2. Лепик Ю., Оптимальное проектирование неупругих конструкций в случае динамического нагружения. Таллин, "Валгус", 1982.

### Optimum Design of Cylindrical Shells Made of Isotropically Hardening Material

J. Kirs, K. Kenk

#### Summary

The designing of simply supported plastic cylindrical shells made of isotropically hardening material is examined. The shell is under the external dynamic normal pressure. The purpose is to determine such a function of thickness in which the normal deformations were as small as possible. The problem is solved by using the approximate yield-curve, the general form of the function of thickness being given as a polynomial. The parameter of hardening used is the plastic work of deformation.

О СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ ТРАНСЛЯЦИОННО  
УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА

К. Кенк

Таллинский политехнический институт

В работе [1] был предложен вариант теории пластичности, в котором элемент материала предполагался состоящим из подэлементов и для описания их поведения кроме поверхностей нагружения

$$(s_{ij}^k - \alpha_{ij}^k)(s_{ij}^k - \alpha_{ij}^k) = c_k^2 \quad (1)$$

были введены еще поверхности выключения

$$(s_{ij}^k - \rho_{ij}^k)(s_{ij}^k - \rho_{ij}^k) = D_k^2, \quad (2)$$

где  $k$  номер подэлемента. Подэлементы пронумерованы в порядке возрастания их исходных пределов текучести.

Пусть

$$D_k = c_{k+1}, \quad \rho_{ij}^k = \alpha_{ij}^{k+1}, \\ s_{ij} = s_{ij}^k, \quad \nu_{ij} = \sum \nu_{ij}^k,$$

где  $\nu_{ij}$  - пластическая деформация,  $s_{ij}$  - девиатор напряжений. В случае чисто трансляционного упрочнения рассмотрим модели для которых:

$$da_{ij} = ds_{ij} \quad \text{или} \quad (3)$$

$$da_{ij}^k = \frac{s_{ij} - \alpha_{ij}^k}{c_k} (s_{lm} - \alpha_{lm}^k) ds_{lm}, \quad (4)$$

если

$$\begin{cases} (s_{ij} - \alpha_{ij}^k)(s_{ij} - \alpha_{ij}^k) = c_k^2, \\ (s_{lm} - \alpha_{lm}^k) ds_{lm}^k > 0. \end{cases}$$

Очевидно, что (3) соответствует перемещению центров поверхностей в направлении нагружения, а (4) в направлении нормали к соответствующей поверхности нагружения.

Кроме того примем, что

$$da_{ij}^k = 0,$$

если

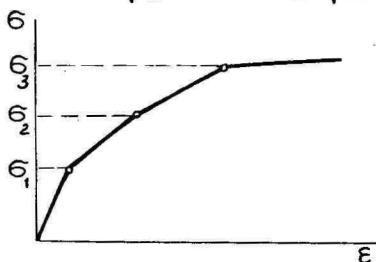
$$\begin{aligned} (s_{ij} - \alpha_{ij}^k)(s_{ij} - \alpha_{ij}^k) &< c_k^2 && \text{или} \\ (s_{ij} - \alpha_{ij}^k)(s_{ij} - \alpha_{ij}^k) &= c_k^2 \\ (s_{em} - \alpha_{em}^k) ds_{em} &\leq 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим в дальнейшем плоское напряженное состояние, возникающее, например, при совместном растяжении-сжатии и кручении тонкостенных трубчатых образцов.

На плоскости  $(\sigma, \sqrt{3}\tau)$  поверхности (I) и (II) представляют собою окружности. У трансляционно упрочняющегося материала радиусы их постоянны.

Пусть для упрощения анализа элемент материала состоит лишь из трех подэлементов и в случае простого растяжения диаграмма деформирования имеет вид (фиг. I), где

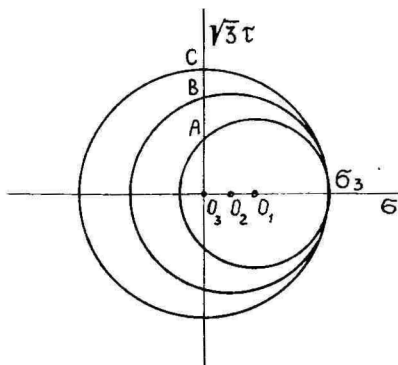
$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} c_1, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} c_2 \quad \text{и} \quad \sigma_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} c_3.$$



Фиг. I.

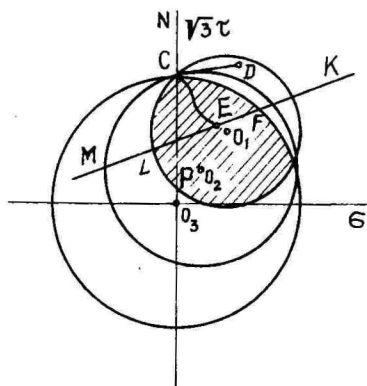
Рассмотрим сложное нагружение по программе: растяжение до  $\sigma_3$  - разгрузка - циклическое знакопеременное кручение.

Если  $\sigma_3 < 2\sigma_1$ , то разгрузка не сопровождается изменением пластичности деформации и поверхности нагружения после разгрузки расположены так, как показано на фиг. 2.



Фиг. 2.

При последующем кручении точка нагружения движется вдоль оси  $\tau$  в направлении точки А и до ее достижения наблюдается чисто упругое поведение. После достижения точки А начинают развиваться пластические деформации сдвига и сжатия. При варианте (3) отношение этих деформаций остается постоянным до достижения точки В. Там оно скачкообразно изме-



Фиг. 3.

няется, а начиная с точки  $C$  развиваются лишь деформации сдвига. Расположение поверхностей в момент достижения точки  $C$  показано на фиг. 3.

Заштрихованная область представляет собой область чисто упругого поведения. Следует отметить заметное уменьшение размеров и изменение формы области чисто упругого поведения после сложного нагружения. Качественно это соответствует эк-

периментам [3]. В точке нагружения наблюдается угловая точка.

Исследуем поведение материала при различных путях нагружения из точки  $C$ . Если продолжить нагружение по прямой  $CD$ , то для некоторых подэлементов (например первого) оно соответствует движению вовнутрь поверхности нагружения, т.е. разгрузке, хотя макроскопическое напряжение возрастает. Возможность разгрузки отдельных подэлементов в ходе активного нагружения после сложной предистории предполагается и в [2].

Если рассматривать нагружение по траектории  $CEFK$ , то в точке  $F$  сразу после упругого поведения включается третий подэлемент с малым упрочнением и происходит резкий переход к пластичности. В случае движения вдоль траектории  $CELM$  в точке включается первый элемент, обладающий сильным упрочнением. Этот элемент работает сравнительно долго и в результате получится довольно плавная диаграмма деформирования.

Выше уже отмечалось, что при нагружении вдоль  $CN$  развиваются лишь деформации сдвига. При использовании теории с одной поверхностью нагружения такое поведение возможно только после выхода центра поверхности на ось  $\tau$ . Но тогда при разгрузке по оси  $\tau$  и нагружении в обратную сторону также не должно наблюдаться изменение осевой деформации. В случае же применения модели с поверхностями выключения, в точке  $P$  возобновляется сокращение осевого размера.

В случае модели, основанной на (3), ширина петли пластического гистерезиса останется неизменной и образец при

знакопеременном кручении в каждом цикле получит постоянное сокращение.

Для модели (4) очевидно получается постепенное сокращение ширины петли пластического гистерезиса и постепенное уменьшение интенсивности сжатия, вплоть до полного его прекращения. Напомним, что этот эффект получится и в случае чисто кинематического упрочнения, хотя обычно сокращение петли связывают с изотропным упрочнением.

Из вышеизложенного видно, что даже при чисто кинематическом упрочнении теория, применяющая понятие поверхностей выключения, способна описать многие особенности поведения материала при сложном нагружении. При этом может оказаться, что для описания поведения конкретных материалов лучшие результаты дает комбинирование (3) и (4), как это предлагается в [3].

#### Литература

1. Кенк К., К теории знакопеременного нагружения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 564, 63-70.
2. Христианович С.А., Деформация упрочняющегося пластического материала. Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, 1974, № 2, I48-I74.
3. Phillips Aris, Lee Chong-Won., Yield surfaces and loading surfaces. Experiments and recommendations, Int. J. Solids and Struct., 1979, 15, № 2, 715-729.

#### On combined loading of kinematically hardening materials

K. Kenk

Summary

In this paper the theoretical analysis of the material behavior under combined loading is presented based on the theory of plasticity with the hypothesis of switching-out surfaces taken into account. In case of loading programme tension-unloading-cyclic torsion the following results have been obtained: (i) the possibility of the renewal of compressive strain in case of cyclic torsion, (ii) decrease of the breadth of the plastic hysteresis loop even for the

kinematically hardening material, (iii) the formation of corner points on the loading surface of a macroscopic element and (iv) unloading of particular subelements in case of the active loading of a macroscopic element.

## О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ

Г.П. Арясов, Б.Н. Ясулович  
Таллинский политехнический институт

В настоящее время приближенные методы эффективно применяются при оценке динамической прочности стержневых и пластинчатых систем. К числу таких методов относится метод конечных элементов (МКЭ). Как известно в МКЭ упругие свойства каждого элемента характеризуются матрицей жесткости (МЖ). Поэтому от степени точности используемых МЖ зависит точность решения задачи. В связи с этим представляет практический интерес оценка точности некоторых МЖ стержневых систем.

В данной работе рассмотрен один из подходов к оценке точности динамических МЖ, базирующийся на математической теории ошибок [1].

Точность вычисления динамической МЖ зависит от выбора функций формы конечного элемента [2].

Следовательно, точность вычисления узловых реактивных усилий можно принять в качестве критерия оценки точности окончательных результатов.

Реактивные усилия, являющиеся функциями частотного параметра  $\lambda$ , представим в виде степенного ряда:

$$R_{ij}(\lambda) = a_{ij} + b_{ij}\lambda^4 + c_{ij}\lambda^8 + d_{ij}\lambda^{12} + \dots, \quad (i, j = 1, 2, \dots, n), \quad (I)$$

где  $R_{ij}(\lambda)$  - динамическая реакция в  $i$ -ом узле от единичного гармонического смещения  $j$ -го узла,  $\lambda$  - частотный параметр,  $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, \dots$  - постоянные коэффициенты.

Для сходимости ряда (I) частотный параметр  $\lambda$ , согласно признаку Даламбера, должен удовлетворять условию:

$$\lambda \in B, \quad (2)$$

где  $B$  - параметр, характеризующий механические и геометрические свойства конечного элемента.

Определение частот собственных колебаний сводится к решению определителя  $D(\lambda)=0$  соответствующей системы однородных уравнений МКЭ, представляющей собой динамическую ММ всей конструкции.

Представим определитель  $D(\lambda)$  как функцию конечного множества узловых динамических реакций:

$$D(\lambda) = D(R_{11}, R_{12}, \dots, R_{nn}), \quad (3)$$

Такое представление определителя  $D(\lambda)$  как функции реактивных усилий  $R_{ij}(\lambda)$  позволяет выразить относительную ошибку в вычислении функции  $D(\lambda)$  в виде:

$$\delta = \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial R_{ij}} \ln D(R_{11}, R_{12}, \dots, R_{nn}) \right| / |\Delta R_{ij}|, \quad (4)$$

где  $|\Delta R_{ij}|$  - абсолютная погрешность определения реактивного усилия  $R_{ij}$ .

Другими словами, если известны погрешности  $|\Delta R_{ij}|$ , то по формуле (4) можно найти суммарную ошибку в вычислении функции (3).

С другой стороны относительная погрешность, определенная формулой (4), может быть представлена как функция одного аргумента, т.е. следующим образом:

$$\delta = \left| \frac{d}{d\lambda} \ln D(\lambda) / \Delta \lambda \right|, \quad (5)$$

где  $D(\lambda)$  - функция только частотного параметра  $\lambda$ ,  $|\Delta \lambda|$  - заданная ошибка определения частотного параметра  $\lambda$ .

Анализ результатов, полученных с помощью формулы (5) показал, что относительная погрешность  $\delta$  функции  $D(\lambda)$  в значительной степени зависит от номера определяемой частоты собственных колебаний. Так, при заданной ошибке в определении любой частоты порядка 20%, имеем погрешность вычисления функции  $D(\lambda)$  в области низких частот 15-20%, в области высоких частот 100-200% (Рис. 1а,б).

Теперь, получив общую относительную погрешность  $\delta$  функции  $D(\lambda)$  по заданной погрешности  $|\Delta \lambda|$  частотного параметра  $\lambda$ , определяем погрешности  $|\Delta R_i|$  реактивных усилий. Математически эта задача является неопределенной, так как заданную погрешность функции можно обеспечить, устанавливая раз-

личные значения предельных погрешностей ее аргументов. Для разрешения этой неопределенности воспользуемся принципом равных влияний [1], согласно которому все частные дифференциалы вида

$$\frac{\partial D(R_{11}, R_{12}, \dots, R_{nn})}{\partial R_{ij}} \Delta R_{ij}, \quad (6)$$

одинаково влияют на образование общей погрешности функций. В таком случае абсолютная погрешность вычисления реактивного усилия определится следующим образом:

$$|\Delta R_{ij}| = \frac{\delta \cdot D(\lambda)}{k \cdot n^2 \left| \frac{\partial D(R_{11}, R_{12}, \dots, R_{nn})}{\partial R_{ij}} \right|} \quad (7)$$

где  $k$  — число разнотипных конечных элементов расчетной модели,  $n$  — порядок динамической ММ конечного элемента.

В качестве примера рассмотрим систему перекрестных балок.

При заданных геометрических и механических параметрах системы устанавливаем условие (2) сходимости степенных рядов  $R_{ij}(\lambda)$ . По этому критерию (2) определяем число конечных элементов, на которые разбивалась система перекрестных балок. Принимаем диапазон частот  $\omega$  от 0 до 100 гц. Для 20% погрешности определения замыкающей частоты  $\omega$  в принятом частотном диапазоне (0+100 гц) погрешность вычисления составила 15-20%. При этом допустимые погрешности реактивных усилий, как следует из результатов расчета, должны лежать в пределах 1-2%.

Результаты расчета, а также график, иллюстрирующий распределение спектра частот в определенном диапазоне частот приведены соответственно в таблице 1 и на рисунке 2.

Эти результаты свидетельствуют о том, что для получения спектра основных частот с погрешностью не превышающей 20% значения замыкающей частоты, достаточно использовать в расчетной модели (РМ) исходной конструкции конечных элементов первого порядка. Соответственно для второй и третьей серий частот требуются применение конечных элементов второго и третьего порядка.

Таблица I

Значения частот собственных колебаний система перекрестных балок

Номер час- тоты	Точное решение		Приближенное решение по МКЭ									
	Час- тотн. пара- метр $\lambda$	Кругов. частота $\omega$ , рад/с	Конечный элемент I-го порядка			Конечный элемент 2-го порядка			Конечный элемент 3-го порядка			
			Частота $\omega$ , рад/с	Погрешн. частоты %	Погрешн. усилий %	Частота $\omega$ , рад/с	Погрешн. частоты %	Погрешн. усилий %	Частота $\omega$ , рад/с	Погрешн. частоты %	Погрешн. усилий %	
1	Сер. основн. частот	1,38	26,20	26,82	2,41	$(1-6)10^{-3}$	26,36	0,61	$(0-2)10^{-3}$	26,22	0,075	0
2		1,96	52,84	55,07	4,22	$(2-9)10^{-3}$	52,51	0,62	$(1-4)10^{-3}$	52,80	0,076	0
3		2,72	102,45	108,43	5,84	0,07-0,22	103,22	1,03	$(2-6)10^{-2}$	102,54	0,09	$(0-7)10^{-3}$
4		2,81	108,60	115,85	6,72	0,07-0,22	110,84	2,12	$(2-6)10^{-2}$	108,74	0,13	$(6-10)10^{-3}$
5		3,14	136,08	163,04	19,80	0,5-0,8	147,36	8,24	0,1-0,8	137,42	0,98	$(5-7)10^{-2}$
9	Гарм. 2- го пор.	4,85	322,98	-	-	-	381,65	18,16	2,4-4,7	335,32	3,82	0,9-1,2
10		5,19	370,78	-	-	-	462,68	24,78	3,9-6,3	391,91	5,70	1,9-2,8
11		5,34	392,43	-	-	-	498,31	26,98	4,1-6,4	420,61	7,18	2,9-3,2
13	"- 3-го	6,47	576,51	-	-	-	-	-	-	654,16	13,47	4,6-5,4
14		6,63	605,42	-	-	-	-	-	-	699,32	15,51	4,9-6,1
16	"- 4-го	7,41	754,74	-	-	-	-	-	-	919,12	27,78	7,8-8,4
17		7,84	845,78	-	-	-	-	-	-	1075,15	27,12	8,7-9,8

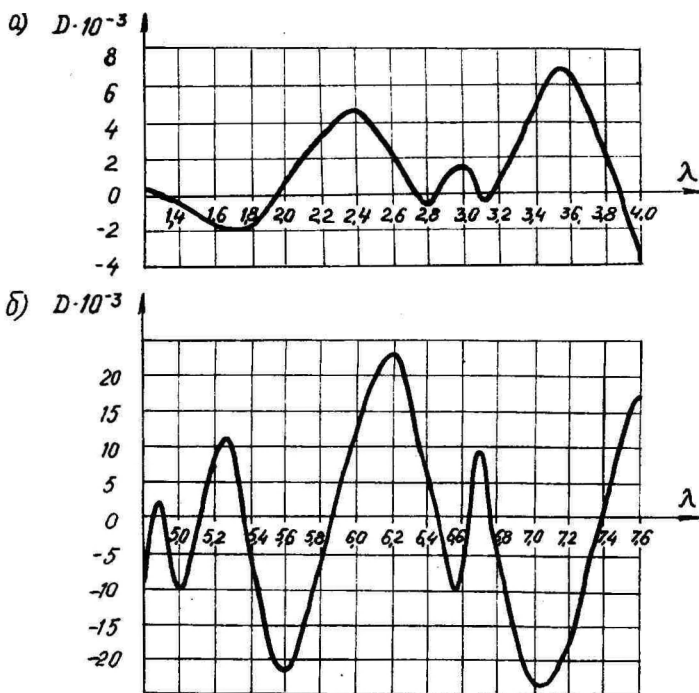


Рис. 1. График изменения детерминанта  $D(\lambda)$  однородных уравнений МКЭ для системы перекрестных балок: а) область низких частот; б) область высоких частот.

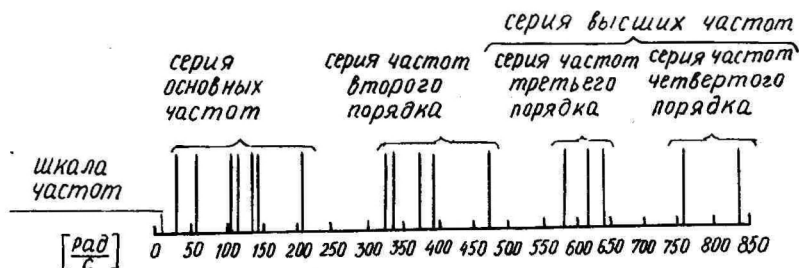


Рис. 2. Спектр круговых частот собственных колебаний системы перекрестных балок.

## Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики. Физматгиз, М., 1963.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Мир, М., 1975.

### The Approximate Method of Calculation of the Free Vibrations of Elastic Systems

G. Aryasov, B. Yasulovich

#### Summary

In this article the question of evaluation of precision of some dynamics stiffness matrices for the calculation of the frame structures natural frequencies is considered. The given question is solved on the basis of the mathematical theory of errors.

The precision of calculation of the nodal reactions is accepted as a criterion of evaluation.

It is shown that with the given finite element calculation scheme, depending on the required level of error in the definition of the natural frequencies, it is necessary to apply the dynamics stiffness matrices of the first, second and third order. For illustration a numerical example is given.

УЧЕТ СВЯЗЕЙ В МЕТОДЕ УРАВНЕНИЯ ВОЗМОЖНОЙ  
МОЩНОСТИ (УВМ)

О. Сильде, А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

Метод УВМ непосредственно применим при решении задач с голономными связями, а также с неголономными связями, уравнения которых линейны относительно обобщенных скоростей. В данной статье решается вопрос учета связей в общем случае при составлении дифференциальных уравнений движения механической системы.

Радиус-вектор  $\vec{r}_i$   $i$ -той точки механической системы в некоторой инерциальной системе отсчета можно выразить с помощью минимального числа (обозначим:  $n$ ) параметров — обобщенных координат  $q^r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ):  $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q^r, q^0)$ , где  $q^0$  заданная функция времени в случае нестационарных систем. Дифференцируя выражение  $\vec{r}_i$  по времени получим вектор скорости  $i$ -той точки:  $\dot{\vec{r}}_i = \partial \vec{r}_i / \partial q^r \dot{q}^r$  ( $r = 0, 1, \dots, n$ ), выраженный через обобщенные скорости (параметры скорости)  $\dot{q}^r$  и соответствующие базисные векторы  $\partial \vec{r}_i / \partial q^r$ .

В голономных системах  $n = s$  — числу степеней свободы системы, в неголономных прибавляются еще  $\ell$  уравнений связей, так что  $s = n - \ell$ . Если уравнения связей имеют вид:

$$a_\alpha^r(q^r, q^0) \dot{q}^r = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, \ell),$$

то можно выбрать  $s$  независимых параметров скорости  $v^j$  ( $j = 1, 2, \dots, s$ ) и соответствующих базисных векторов  $\vec{u}_{ij}(q^r)$  так, что вектор скорости

$$\dot{\vec{r}}_i = v^j \vec{u}_{ij} \quad (j = 0, 1, \dots, s), \quad (1)$$

где  $v^0$  — заданная функция времени. При этом параметры  $v^j$  выбираются, из условий:

$$\dot{q}^r = A_j^r(q^r) v^j. \quad (2)$$

Введем определения возможной  $\{\vec{v}_i\}$  и виртуальной  $\{\vec{v}_i\}^*$  скоростей  $i$ -той точки:

$$\{\vec{v}_i\} = \{v^j\} \vec{u}_{ij} = \{v^j\} \vec{u}_{ij} + v^0 \vec{u}_{i0}, \quad (3)$$

$$\{\vec{v}_i\}^* = \{v^j\}^* \vec{u}_{ij}, \quad \{\vec{v}_i\}^* = \{\vec{v}_i\} - \dot{\vec{r}}_i, \quad (4)$$

где  $\{v^g\}$  и  $\{v^g\}^*$  - произвольные числа.

Из уравнения мощности  $\sum m_i \vec{a}_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i$ , заменив в нем вектор скорости  $\vec{v}_i$  на  $\{\vec{v}_i\}$  (3) или  $\{\vec{v}_i\}^*$  (4), получим соответственно уравнение возможной или виртуальной мощности:

$$\sum m_i \vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ij} \{v^j\} = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ij} \{v^j\}, \quad (5)$$

$$\sum m_i \vec{a}_i \cdot \vec{u}_{ig} \{v^g\}^* = \sum \vec{F}_i \cdot \vec{u}_{ig} \{v^g\}^*, \quad (6)$$

или короче:  $E_j \{v^j\} = Q_j \{v^j\}$ ;  $E_g \{v^g\}^* = Q_g \{v^g\}^*$ .

Вследствие независимости параметров  $\{v^g\}$  или  $\{v^g\}^*$  имеем дифференциальные уравнения движения механической системы:

$$E_g - Q_g = 0, \quad (7)$$

к которым в случае нестационарной системы прибавляется уравнение для определения реакции нестационарной связи  $R_o$ :

$$E_o - Q'_o = R_o; \quad Q_o = Q'_o + R_o.$$

Таким образом, при решении задач по методу УВМ основным является выбор независимых параметров скорости  $v^g$  и выражение через них вектора скорости  $\vec{v}_i$ . Дальнейшее сводится к формальным выкладкам и для их облегчения в книге [I] дается ряд формул, уравнений и таблицы.

Пусть на механическую систему, для которой уже определены  $s$  параметров  $v^g$ , выражение для  $\vec{v}_i$  (I) и имеют место уравнения (7), налагаются связи, определяемые системой независимых дифференцируемых уравнений общего вида:

$$f^\alpha(q^r, v^g, \dot{v}^g, \dots, v^{(k_\alpha)g}, t) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l), \quad (8)$$

где  $v^{(k_\alpha)g} = d^{k_\alpha} v^g / dt^{k_\alpha}$ , производная по времени высшего порядка от  $v^g$ . Нашей целью и в этом случае является нахождение независимых параметров скорости при условиях (8) и получение соответствующего выражения для вектора  $\vec{v}_i$ .

Введем сокращенные обозначения:

$$v^{(k_\alpha)g} = a^{\alpha g} \quad \frac{\partial f^\alpha}{\partial a^{\alpha g}} = f_g^\alpha.$$

Продифференцируем уравнения (8):

$$\frac{df^\alpha}{dt} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^r} \dot{q}^r + \frac{\partial f^\alpha}{\partial v^g} \dot{v}^g + \dots + f_g^\alpha a^{\alpha g} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial t} = 0 \quad (9)$$

и зададимся вопросом: какие линейные выражения можно составить из частных производных в уравнениях (9) и параметров скорости  $v^g$  или их производных любого порядка по времени, которые были бы инвариантными (т.е. не изменили бы своего численного значения) при произвольных преобразованиях обоб-

ценных координат  $q^r$  и при линейных преобразованиях параметров скорости  $v^g$ :

$$v^g = A_g^g(q^r, t)v^g + A_0^g(q^r, t). \quad (10)$$

Все преобразования должны быть обратимыми и дифференцируемыми до нужного порядка. Приводимые здесь общие предписания должны удовлетворять требованию инвариантности и оставаться верными в частных случаях.

Оказывается, что можно для каждого уравнения (8) составить только одно выражение (один инвариант), удовлетворяющее требуемым условиям, именно:

$$f_g^{\alpha} v^g + f_0^{\alpha} = \psi^{\alpha}, \quad (11)$$

где  $\psi^{\alpha}$  инвариант, а  $f_0^{\alpha}$  величины, преобразуемые вместе с  $f_g^{\alpha}$ . Произвольность  $f_0^{\alpha}$  позволяет положить  $\psi^{\alpha} = 0$ .

Доказательство.

Если дать уравнения (9) в новых параметрах  $q^{r'}$  и  $v^{g'}$ , то они будут отличаться штрихами при индексах  $r$  и  $g$ . Выразим частные производные по параметрам со штрихами через частные производные по параметрам без штрихов, а также частные производные одних параметров по другим (частично это сделано в статье [2]). Анализ этих выражений показывает, что в общем случае нельзя получить других инвариантов кроме (11). Рассмотрим в уравнениях (9) член с  $\dot{a}^{\alpha g}$  (в новых параметрах  $\dot{a}^{\alpha g'}$ ). Из формул (10) дифференцированием получаем:

$$\dot{a}^{\alpha g'} = A_g^g \dot{a}^{\alpha g} + (\text{члены, не содержащие } \dot{a}^{\alpha g});$$

теперь  $f_{g'}^{\alpha} \dot{a}^{\alpha g'} = f_g^{\alpha} A_g^g \dot{a}^{\alpha g} + (\text{члены, не содержащие } \dot{a}^{\alpha g})$ .

Все другие члены в уравнениях (9) при преобразованиях нигде не дадут члена с  $\dot{a}^{\alpha g}$ ; отсюда следует, что

$$f_g^{\alpha} = A_g^g f_{g'}^{\alpha}. \quad (12)$$

Введем  $v^0 = v^{0'} = 1$  и перепишем (10) в виде:

$$v^{d'} = A_d^j v^j \quad (13)$$

здесь  $A_{g'}^0 = A_g^0 = 0$ , а  $A_{0'}^0 = A_0^0 = 1$ . Наряду с  $f_g^{\alpha}$  и  $f_{g'}^{\alpha}$  введем еще  $f_0^{\alpha}$  и  $f_{0'}^{\alpha}$ . Параметры  $v^j$  можно рассматривать как составляющие контравариантного вектора, подчиненные преобразованию (13). Нетрудно показать вследствие равенств (12) и (13), что  $f_j^{\alpha}$  можно рассматривать как составляющие ковариантного вектора в том же самом пространстве, подчиненные тому же самому преобразованию. Следовательно, по теории инвариантов (учтя  $v^0 = 1$ ) уравнения

$$f_g^\alpha v^g + f_0^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, l) \quad (I4)$$

являются инвариантными, что и требовалось.

Теперь имеется возможность из уравнений (I4) выразить  $l$  параметров  $v^\tau$  (допустим, что  $\tau = 1, 2, \dots, l$ ) через  $s-l$  остальных  $v^{\beta\rho}$  ( $\beta = 1, 2, \dots, s-l$ ):

$$v^\tau = -B_y^\tau (f_{l+\rho}^\tau v^{\beta\rho} + f_0^\tau) \quad (y = 1, 2, \dots, l);$$

здесь  $B_y^\tau = C_y^\tau / \det(f_c^\tau)$ ,

где  $C_y^\tau$  есть алгебраическое дополнение к члену  $f_c^\tau$  в  $\det(f_c^\tau)$ .

Из этого следует:

$$B_y^\tau f_c^\epsilon = \delta_y^\epsilon \quad \text{и} \quad B_y^\tau f_0^\delta = \delta_0^\delta \quad (\delta < l+1),$$

где  $\delta_y^\epsilon$  - символ Кронекера.

Умножая  $v^\tau$  на  $\vec{u}_{i\tau}$  и суммируя, получим:

$$\vec{v}_i = (-B_y^\tau f_{l+\rho}^\tau \vec{u}_{i\tau} + \vec{u}_{i, l+\rho}) v^{\beta\rho} - B_y^\tau f_0^\tau \vec{u}_{i\tau} + v^0 \vec{u}_{i0}. \quad (I5)$$

Таким образом, получили выражение для вектора  $\vec{v}_i$  в независимых параметрах скорости  $v^{\beta\rho}$ . Величины  $f_0^\alpha$  можно рассматривать как функции времени, но в случае необходимости их можно выразить из уравнений (I4):  $f_0^\alpha = -f_g^\alpha v^g$ . Следуя рассуждениям в книге [I], § 4.4 получим выражение для возможной скорости:

$$\{\vec{v}_i\} = (-B_y^\tau f_{l+\rho}^\tau \vec{u}_{i\tau} + \vec{u}_{i, l+\rho}) \{v^{\beta\rho}\} - B_y^\tau f_0^\tau \vec{u}_{i\tau} + v^0 \vec{u}_{i0};$$

здесь члены, не содержащие фигурных скобок, служат для определения мощности реакции нестационарной связи.

Аналогично получим для виртуальной скорости выражение:

$$\{\vec{v}_i\}^* = (-B_y^\tau f_{l+\rho}^\tau \vec{u}_{i\tau} + \vec{u}_{i, l+\rho}) \{v^{\beta\rho}\}^* \quad (I6)$$

Из уравнений связей (8) без дополнительных данных можем исследовать случай идеальных связей, т.е. таких связей, для которых

$$\sum \vec{R}_i \cdot \{\vec{v}_i\}^* = 0 \quad \text{или} \quad R_g \{v^g\}^* = 0, \quad (I7)$$

где  $\vec{R}_i$  - реакция связей на  $i$ -тую точку:

$$\vec{R}_i = \sum_\alpha \vec{R}_i^\alpha; \quad R_j^\alpha = \sum_i R_i^\alpha \cdot \vec{u}_{ij}; \quad R_j = \sum_\alpha R_j^\alpha.$$

Подставляя в равенство (I7) выражение (I6), получим:

$$(-B_y^\tau f_{l+\rho}^\tau R_\tau + R_{l+\rho}) \{v^{\beta\rho}\}^* = 0, \quad (I8)$$

где коэффициенты перед  $\{\dot{v}^{l+p}\}^*$  должны равняться нулю, так как параметры  $\{v^{l+p}\}^*$  - произвольные числа. Это дает для  $R_g$   $s-l$  условий

$$R_{l+p} = B_g^T f_{l+p}^* R_{\tau} . \quad (19)$$

Уравнения движения, не содержащие реакций связей, можно получить, например, так. Вследствие принципа освобожденности, после наложения связей (8), в уравнениях (7) необходимо учесть реакции  $R_g$ , имеем

$$E_g - Q_g = R_g . \quad (20)$$

Из (19) и (20) получаются уравнения

$$E_{l+p} - Q_{l+p} = (E_{\tau} - Q_{\tau}) B_g^T f_{l+p}^* . \quad (21)$$

Теперь  $s-l$  уравнений в (21) и соответственно  $l$  в (8) вместе с  $n$  уравнениями (2) образуют замкнутую систему уравнений для определения  $n$  координат  $q^i(t)$  и  $s$  параметров скорости  $v^j(t)$ . Затем из (20) определяются реакции  $R_g$ .

Можно поступить иначе. Условия (19) удовлетворятся, если положить

$$R_g = \lambda_{\alpha} f_g^{\alpha} . \quad (22)$$

Условия (19) заменой  $R_g$  на  $R_g^{\alpha}$  должны выполняться и для каждого уравнения  $f_g^{\alpha} = 0$ . Тогда правая сторона уравнений (22) для определенного значения  $\alpha$  равна  $R_g^{\alpha}$ . Дифференциальные уравнения механической системы следует переписать в виде:

$$E_g - Q_g = \lambda_{\alpha} f_g^{\alpha} . \quad (23)$$

Для вычисления  $\lambda_{\alpha}$  заменим в уравнениях (23) индекс  $g$  на  $\tau$  и умножим на  $B_{\tau}^T$ , получим:

$$\lambda_{\alpha} = (E_{\tau} - Q_{\tau}) B_{\tau}^T . \quad (24)$$

Подставляя значение  $\lambda_{\alpha}$  из (24) в уравнение (23) получим (21).

Если в уравнение виртуальной мощности

$$\Sigma (m_i \ddot{a}_i - \ddot{F}_i) \cdot \{\vec{a}_i\}^* = \Sigma \vec{R}_i \cdot \{\vec{a}_i\}^* \quad (25)$$

(где правая сторона по (17) равна нулю) подставить  $\{\vec{a}_i\}^*$  из равенства (16), то получаются те же самые уравнения (21).

Из уравнений (14) заменой параметра скорости  $v^j$  на  $\{v^j\}$  или  $\{v^j\}^*$ , получаются после исключения  $f_0^{\alpha}$  уравнения:

$$f_g^{\alpha} \{v^j\} - f_g^{\alpha} v^j = 0 \quad (26)$$

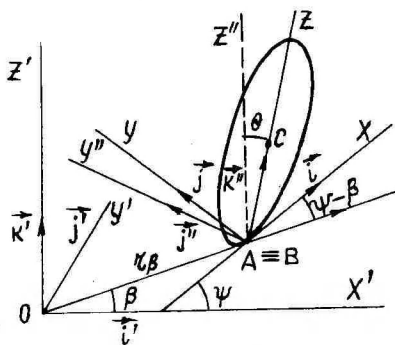
и

$$f_g^{\alpha} \{v\}^* = 0. \quad (27)$$

С помощью уравнений (26) можно из равенства (3) или уравнения (5) или с помощью (27) из (4) и (6) исключить  $\ell$  параметров скорости, оставшиеся будут независимыми.

Таким образом, получено решение задачи механики с произвольными уравнениями связей.

**Пример.** Качение симметричного диска на вращающейся карусели. Радиус диска  $a$ , постоянная угловая скорость карусели  $\omega_0$ . Фиг. I.



Фиг. I.

Координатная система  $Ox'y'z'$  неподвижная, орты  $\vec{i}'$ ,  $\vec{j}'$ ,  $\vec{k}'$ , горизонтальная плоскость  $Ox'y'$  совпадает с плоскостью карусели. Система  $Baxz$  (орты  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$ ), где ось  $Bx$  направлена по линии пересечения плоскостей диска и

карусели, ось  $Bz$  - по диаметру диска, движется вместе с диском, но не участвует в его собственном вращении. Точка  $C$  - центр диска,  $A$  - точка контакта диска с плоскостью карусели,  $B$  - соответствующая точка на карусели. Радиус-вектор  $\vec{r}_B = \vec{OB}$ ,  $|\vec{r}_B| = r$ , угол  $\beta$  - полярный,  $\psi$  - угол между ортами  $\vec{i}'$  и  $\vec{i}$ ,  $\theta$  - угол между ортами  $\vec{k}' = \vec{k}''$  и  $\vec{k}$ ,  $\varphi$  - угол собственного вращения диска (угол между ортом  $\vec{k}$  и некоторым вектором неизменно связанным с диском). Радиус-вектор точки  $M_i$ :  $\vec{r}_i = \vec{OM}_i$ ;  $\vec{AC} = \vec{\rho}_C = a\vec{k}$ ;  $\vec{CM}_i = \vec{c}_i$ . Пусть  $\vec{u}_n$  - орт в направлении  $\vec{r}_B$ ,  $\vec{u}_p$  перпендикулярен ему.

Угловая скорость диска:

$$\vec{\omega} = \theta \vec{i}' + \varphi \vec{j}' + \psi \vec{k}' = \theta \vec{i} + (\varphi + \psi \sin \theta) \vec{j} + \psi \cos \theta \vec{k},$$

угловая скорость системы  $Baxz$ :

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} - \varphi \vec{j}' \quad (28)$$

Обобщенными координатами будут  $r, \beta, \psi, \theta, \varphi$ ;

$$\vec{r}_i = \vec{r}_B + a\vec{k} + \vec{c}_i,$$

скорость  $i$ -той точки:

$$\vec{v}_i = \dot{r} \vec{u}_n + r \dot{\beta} \vec{u}_p + a \dot{\varphi} \vec{k}' + \vec{\omega} \times \vec{c}_i = \vec{\omega} \times (a\vec{k} + \vec{c}_i) + \dot{r} \vec{u}_n + r \dot{\beta} \vec{u}_p - a \dot{\varphi} \vec{i}, \quad (29)$$

так как  $\dot{\vec{k}} = \vec{\Omega} \times \vec{k} = (\vec{\omega} - \dot{\varphi} \vec{j}) \times \vec{k} = \vec{\omega} \times \vec{k} - \dot{\varphi} \vec{i}$ .  
 Параметрами скорости будут  $\dot{\kappa}$ ,  $\dot{\rho}$ ,  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ .

Связи, наложенные на диск:

- 1) точка А имеет скорость  $\kappa \omega_0 \vec{u}_\rho$ , т.е.  $(\dot{\kappa} \vec{u}_\kappa - a \dot{\varphi} \vec{i}) \cdot \vec{u}_\kappa = 0$ , так как  $\vec{c}_A = -a \vec{k}$ ;
- 2) относительная скорость т. В должна быть направлена по орту  $\vec{i}$ , т.е.  $[\dot{\kappa} \vec{u}_\kappa + \kappa (\dot{\rho} - \omega_0) \vec{u}_\rho] \cdot \vec{j} = 0$ , откуда получим уравнения связей:

$$\dot{\kappa} - a \dot{\varphi} \cos(\psi - \rho) = 0 \quad (30)$$

и

$$-\dot{\kappa} \sin(\psi - \rho) + \kappa (\dot{\rho} - \omega_0) \cos(\psi - \rho) = 0. \quad (31)$$

Вычислим уравнения (I4):

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} - a \dot{\varphi} \cos(\psi - \rho) + f_0^4 &= 0 \\ -\dot{\kappa} \sin(\psi - \rho) + \kappa \dot{\rho} \cos(\psi - \rho) + f_0^2 &= 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Из уравнений (32) вычислим параметры  $\dot{\kappa}$  и  $\dot{\rho}$  и подставим полученные выражения в формулу (29), получим:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times (a \vec{k} + \vec{c}_i) - f_0^4 \vec{u}_\kappa - [f_0^4 \operatorname{tg}(\psi - \rho) + f_0^2 / \cos(\psi - \rho)] \vec{u}_\rho. \quad (33)$$

Независимыми параметрами скорости будут  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ . С помощью уравнений (30) ÷ (32), исключив  $f_0^4$  и  $f_0^2$  из выражения (33), окончательно получим:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\varrho}_i + \kappa \omega_0 \vec{u}_\rho, \quad (34)$$

где  $\vec{\varrho}_i = \vec{B} \vec{M}_i = a \vec{k} + \vec{c}_i$ . Но формулу (34) можно получить непосредственно по теории кинематики. В этом и заключается преимущество УВМ. Если выбрать с самого начала независимые параметры скорости, например  $\dot{\psi}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$  или

$$\omega_1 = \dot{\theta}; \quad \omega_2 = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \sin \theta; \quad \omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta, \quad (35)$$

то все вычисления (29) ÷ (34) окажутся лишними. В нашем случае введение уравнений связей было сделано для иллюстрации теории. Но выбирая исходными обобщенные координаты, все эти вычисления необходимо выполнить.

Учтя нововведенные параметры  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , имеем:

$$\begin{aligned} \vec{v}_i &= \omega_1 (\vec{i} \times \vec{\varrho}_i) + \omega_2 (\vec{j} \times \vec{\varrho}_i) + \omega_3 (\vec{k} \times \vec{\varrho}_i) + \kappa \omega_0 \vec{u}_\rho, \\ \{\vec{v}_i\} &= \{\omega_1\} (\vec{i} \times \vec{\varrho}_i) + \{\omega_2\} (\vec{j} \times \vec{\varrho}_i) + \{\omega_3\} (\vec{k} \times \vec{\varrho}_i) + \kappa \omega_0 \vec{u}_\rho, \\ \{\vec{v}_i\} &= \{\omega_1\}^* (\vec{i} \times \vec{\varrho}_i) + \{\omega_2\}^* (\vec{j} \times \vec{\varrho}_i) + \{\omega_3\}^* (\vec{k} \times \vec{\varrho}_i). \end{aligned} \quad (36)$$

В ходе решения, исходя из формул (36), придется временно ввести и другие параметры. В конечных уравнениях увидим, какие из них остаются. Решение задачи на покоящейся плоскости (т.е. при  $\omega_0 = 0$ ) дается в книге [I], стр. 74÷77, пример 3-4 (там радиус диска  $\kappa = a$ ). Здесь учтем только прибавку, получаемую вследствие добавочного члена в выражении вектора скорости:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{id} &= \kappa \omega_0 \vec{u}_\rho; & \vec{a}_{id} &= \dot{\vec{v}}_{id}; \\ \{\dot{T}_d\}^* &= \sum m_i \vec{a}_{id} \cdot \{\vec{r}_i\}^*; \\ \{\vec{r}_i\}^* &= \{\vec{\omega}\}^* \times \vec{g}_i; & \{\vec{\omega}\}^* &= \{\omega_1\}^* \vec{i} + \{\omega_2\}^* \vec{j} + \{\omega_3\}^* \vec{k}; \\ \vec{a}_{id} &= i \omega_0 \vec{u}_\rho + \kappa \omega_0 \dot{\vec{u}}_\rho = \omega_0 (i \vec{u}_\rho - \kappa \beta \vec{u}_\kappa); \\ \{\dot{T}_d\}^* &= \sum m_i \omega_0 (i \vec{u}_\rho - \kappa \beta \vec{u}_\kappa) \cdot [\{\vec{\omega}\}^* \times \vec{g}_i] = \\ &= M a \omega_0 [i (\vec{k} \times \vec{u}_\rho) - \kappa \beta (\vec{k} \times \vec{u}_\kappa)] \cdot \{\vec{\omega}\}^*, \end{aligned}$$

так как

$$\sum m_i \vec{g}_i = M \vec{g}_e = M a \vec{k}.$$

Подставив вместо  $\{\omega\}^*$  его выражение, получим:

$$\begin{aligned} \{\dot{T}_d\}^* &= M a \omega_0 [-\kappa \cos(\psi - \rho) - \kappa \beta \sin(\psi - \rho)] \cos \theta \{\omega_1\}^* + \\ &+ M a \omega_0 [\kappa \sin(\psi - \rho) - \kappa \beta \cos(\psi - \rho)] \{\omega_2\}^*, \end{aligned} \quad (37)$$

так как  $\vec{i} \cdot (\vec{k} \times \vec{u}_\rho) = (\vec{i} \times \vec{k}) \cdot \vec{u} = -\vec{j} \cdot \vec{u}_\rho$  и т.д., а  $\vec{j} = \vec{j}'' \cos \theta + \vec{k}'' \sin \theta$ .

Полученные множители при  $\{\omega_1\}^*$  и т.д. в равенстве (37) следует прибавить соответственно к левым сторонам уравнений (15<sup>0</sup>) на стр. 77 книги [I]. Правые стороны не изменятся. Полученные три уравнения содержат переменные  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \theta, \psi, \kappa, \beta$ , но с помощью уравнений (30), (31), (35) и  $\omega_1 = \theta$ , можно исключить  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \psi$ , так что остаются три неизвестных:  $\theta, \kappa, \beta$ .

Пример, где уравнение связи не является линейным относительно параметров скорости, имеется в книге [I], стр. 146÷148 (пример 4-6).

## Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Таллин, "Валгус", 1979, 168 с.
2. О.Сильде и А.Хайтин, Движение механических систем при учете уравнений связей общего вида. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 95-100.

### Die Methode der Gleichung der möglichen Leistung mit Berücksichtigung der Bedingungen

O. Silde und A. Haitin

#### Zusammenfassung

Im vorliegenden Beitrag werden die Bewegungsgleichungen der Mechanik abgeleitet unter Berücksichtigung der allgemeinen Bedingungsgleichungen. Dazu wird zuerst eine Formel für den Geschwindigkeitsvektor des Punktes in unabhängigen Parametern abgeleitet.

### ОБ ОДНОМ ВЫВОДЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

А. Хайтин

Таллинский политехнический институт

1. В статье дается вывод дифференциальных уравнений движения механической системы со связями общего вида исходя из основного закона динамики и требования инвариантности этих уравнений по отношению к произвольному преобразованию координат. На основе полученных результатов показывается возможность вывода дифференциальных принципов механики и уравнения возможной мощности (УВМ), [1].

2. Пусть на рассматриваемую механическую систему налагаются  $m$  связей, выражающиеся независимой дифференцируемой

системой уравнений общего вида<sup>I</sup>

$$F^g(t, q_j^g, \dot{q}_j^g, \dots, q_j^{(h_g)}) = 0, \quad (1)$$

где  $q_j^{(h_g)} = d^{h_g} q_j^g / dt^{h_g}$ .

Допустим в движении системы уже учтены голономные связи, являющиеся частным случаем (1), тогда ее уравнения движения, в криволинейных координатах  $q_j^d$ , имеют вид

$$E_j - Q_j = 0 \quad (2)$$

или

$$(E_j - Q_j) \vec{u}^d = 0, \quad (3)$$

где  $E_j = \vec{k} \cdot \vec{u}_j$ ,  $Q_j = \vec{F} \cdot \vec{u}_j$ ,  $\vec{u}_j = \partial \vec{r} / \partial q_j^d$ ;  $\vec{k}$  и  $\vec{r}$  - соответственно, количество движения и радиус-вектор изображающей точки механической системы в 3N-мерном евклидовом пространстве (N - число материальных точек системы);  $\vec{F}$  - 3N-мерная сила, приложенная к этой точке;

$$\vec{u}_j \cdot \vec{u}_g^g = \delta_j^g, \quad (4)$$

$\delta_j^g$  - символ Кронекера.

Чтобы найти уравнения движения системы, учитывающие новые связи, будем следующим образом решать совместно уравнения (1) и (3).

При наложении на систему связей (1) базисные векторы  $\vec{u}^d$  (также и  $\vec{u}_j$ ) становятся зависимыми и, поэтому, из (3) уже не следуют уравнения (2). Найдя эту зависимость с помощью уравнений (1) и учтя ее в (3), получим новые уравнения движения.

Пусть в уравнениях (1) наивысший порядок производных  $h_g \leq h$ . Дифференцированием приведем уравнения (1) к одинаковому -  $h+1$  порядку, имеем

$$b_g^s \dot{a}^g = \Phi^s \quad (5)$$

или

$$b_d^s \vec{u}^d \cdot \dot{a}^g \vec{u}_g = \Phi^s, \quad (6)$$

где

$$b^s = \partial U^s / \partial \dot{q}_j^g = \partial F^s / \partial \dot{q}_j^g, \quad (7)$$

<sup>I</sup> Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам производится суммирование. Индексы принимают следующие значения:  $d, g, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $g, \chi, \zeta = 1, 2, \dots, m$ ;  $x = 1, 2, \dots, s$ ;  $s = n - m$ .

$$a^g = \binom{h}{g} g, \quad (8)$$

$U^g$  — обозначает функцию, которая получается из  $F^g$  перед ее последним дифференцированием,  $\Phi^g$  — функция не содержащая  $\dot{a}^g$ , ранг матрицы  $\binom{g}{g}$  равен  $m$ .

В (5) выделено, для дальнейших преобразований, именно выражение  $\binom{g}{g} \dot{a}^g$  с тем, чтобы результаты были инвариантны по отношению к произвольному преобразованию координат.

Из (5) выразим  $m$  переменных  $\dot{a}^x$  через остальные  $s=n-m$  переменных  $\dot{a}^{m+x}$ , имеем

$$\dot{a}^x = B_{m+x}^x \dot{a}^{m+x} + B_{\zeta}^x \Phi^{\zeta}. \quad (9)$$

Подставив (9) в (6), получим

$$\binom{g}{d} \ddot{u}^d \cdot \ddot{u}_{m+x} \dot{a}^{m+x} = 0 \quad (10)$$

и  $\binom{g}{d} \ddot{u}^d \cdot \ddot{u}_0 = \Phi^g$ , где новый базис

$$\ddot{u}_{m+x} = \ddot{u}_\chi B_{m+x}^x + \ddot{u}_{m+x} \quad (11)$$

$$\ddot{u}_0 = \ddot{u}_\chi B_{\zeta}^x \Phi^{\zeta}. \quad (12)$$

Для определения  $B_{m+x}^x$  и  $B_{\zeta}^x$  подставим (9) в (5), тогда имеем

$$\binom{g}{\chi} B_{m+x}^x + \binom{g}{m+x} = 0 \quad \text{и} \quad \binom{g}{\chi} B_{\zeta}^x = \delta_{\zeta}^g. \quad (13)$$

Пусть зависимость между  $\ddot{u}^j$  имеет вид:

$$c_j \ddot{u}^j = 0, \quad (14)$$

где  $c_j$  — неизвестные величины. Умножив (14) скалярно на  $\ddot{u}_{m+x}$ , имеем  $c_{m+x} = -c_\chi B_{m+x}^x$ . Подставив  $c_{m+x}$  в (14), получим:  $c_\chi \ddot{u}^\chi - c_\chi B_{m+x}^x \ddot{u}^{m+x} = 0$ , что выполняется, если положить:

$$\ddot{u}^\chi = B_{m+x}^x \ddot{u}^{m+x} \quad (15)$$

Подставив (15) в (3) и учтя независимость  $\ddot{u}^{m+x}$ , получим искомые уравнения движения системы:

$$(E_\chi - Q_\chi) B_{m+x}^x + E_{m+x} - Q_{m+x} = 0. \quad (16)$$

Найдем теперь реакции связей (I).

Введем обозначения

$$\dot{a}^{*x} = B_{m+x}^x \dot{a}^{m+x} \quad (17)$$

тогда можно  $\ddot{u}_{m+x} \dot{a}^{m+x}$  представить так

$$\ddot{u}_{m+x} \dot{a}^{m+x} = \ddot{u}_g \dot{a}^{*g}, \quad (18)$$

где учтено (II) и (I7), а

$$\dot{a}^{*g} = \dot{a}^{*l} \quad \text{при } g = \chi \quad \text{и} \quad \dot{a}^{*g} = \dot{a}^{m+x} \quad \text{при } g = m+x. \quad (I9)$$

Теперь (I0) с учетом (I8) принимает вид  $b_g^s \ddot{u}^d \cdot \ddot{u} \dot{a}^{*g} = 0$   
или

$$b_g^s \dot{a}^{*g} = 0. \quad (20)$$

Из (I0) имеем также

$$b_a^s \ddot{u}^d \cdot \ddot{u}_{m+x} = 0. \quad (2I)$$

Умножим (I6) на  $\dot{a}^{m+x}$ , а (20) на  $\lambda_g$ , тогда их разность дает:

$$(E_g - Q_g - \lambda_g b_g^s) \dot{a}^{*g} = 0. \quad (22)$$

Ввиду произвольности  $\dot{a}^{m+x}$  (см. (I0) и (2I)) и множителей  $\lambda_g$ , из (22) имеем

$$E_g - Q_g = \lambda_g b_g^s \quad \text{или} \quad (E_g - Q_g) \ddot{u}^g = \lambda_g b_g^s \ddot{u}^g. \quad (23)$$

С другой стороны, в силу принципа освобождаемости, можно каждую связь (I) учесть добавлением к (3) соответствующей реакции  $\vec{R}^g$ . Реакция же от всех связей будет их геометрическая сумма  $\vec{R} = \sum_{g=1}^m \vec{R}^g$ . Тогда имеем:

$$E_g - Q_g = R_g \quad \text{или} \quad (E_g - Q_g) \ddot{u}^g = \vec{R}. \quad (24)$$

Из сравнения (23) и (24) получим

$$R_g = \lambda_g b_g^s \quad \text{или} \quad \vec{R} = \lambda_g b_g^s \ddot{u}^g. \quad (25)$$

Выражение реакции (25) соответствует таким связям (I), которые принято называть идеальными. Если (23) умножить скалярно на  $\ddot{u}_{m+x}$  из (II), учесть (4) и (2I), то получим уравнения (I5), а умножив (23) скалярно на  $\vec{u}_\chi B_\zeta^\chi$  из (I2) и учтя (4) и (I3), получим

$$\lambda_\zeta = (E_\chi - Q_\chi) B_\zeta^\chi. \quad (26)$$

В связи с изложенным отметим некоторые обстоятельства.

Переменные  $\dot{a}^g$  играли лишь вспомогательную роль в процессе вывода (I6) и (26). Поэтому в качестве таковых возможно использовать и другие переменные, что в дальнейшем будет показано.

Движение механической системы, удовлетворяющее уравнения связей (I), может осуществляться и под действием других сил реакций нежели в (25). В этом случае изменятся уравнения движения (I6). Действительно, учтя в (22) выражение (25), имеем

$$(E_g - Q_g - R_g) \dot{a}^{*g} = 0. \quad (27)$$

В (27) можно реакциям  $R_{m+x}$ , входящим в сумму при  $\dot{a}^{m+x}$ , давать произвольные значения. Если они, исходя из каких-либо дополнительных соображений, выбраны, тогда соответствующие уравнения движения принимают вид  $E_{m+x} = Q_{m+x} + R_{m+x}$ , которые совместно с уравнениями (I) образуют замкнутую систему для определения  $q^j(t)$ . После этого, найдутся  $m$  реакций из условий:  $R_x = E_x - Q_x$ .

Пример I. На свободную материальную точку накладываем связь выражающаяся уравнением

$$F = v^2 + \kappa z - c = 0, \quad (I^0.1)$$

где  $\kappa$  и  $c$  - const,  $v$  - скорость точки. Найти движение точки.

До наложения связи (I<sup>0.1</sup>) движение точки определяется уравнениями

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad \ddot{z} = 0. \quad (I^0.2)$$

Дадим два решения.

1) Дифференцируя (I<sup>0.1</sup>), получим

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} + \kappa\dot{z} = 0. \quad (I^0.3)$$

Из (I<sup>0.3</sup>) в соответствии с (7) имеем

$$b_x = 2\dot{x}, \quad b_y = 2\dot{y}, \quad b_z = 2\dot{z}. \quad (I^0.4)$$

Уравнения вида (23) будут

$$m\ddot{x} = 2\lambda\dot{x}, \quad m\ddot{y} = 2\lambda\dot{y}, \quad m\ddot{z} = 2\lambda\dot{z}, \quad (I^0.5)$$

где  $m$  - масса точки.

После исключения  $\lambda$  из (I<sup>0.5</sup>) получим уравнения (I6):

$$\ddot{y} = \ddot{x}\dot{y}/\dot{x}, \quad \ddot{z} = \ddot{x}\dot{z}/\dot{x}. \quad (I^0.6)$$

При интегрировании уравнений (I<sup>0.6</sup>) найдем, что траекторией движения точки является прямая линия.

Движение точки можно найти, решая совместно уравнения (I<sup>0.6</sup>) с (I<sup>0.1</sup>) или (I<sup>0.3</sup>).

2) По (27) имеем

$$(m\ddot{x} - R_x)\dot{x}^* + (m\ddot{y} - R_y)\dot{y}^* + (m\ddot{z} - R_z)\dot{z}^* = 0. \quad (I^0.7)$$

В (I<sup>0.7</sup>) можно положить  $R_x = R_y = 0$ , тогда получим

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad R_z = m\ddot{z}. \quad (I^0.8)$$

Из (I<sup>0.3</sup>), учитывая (I<sup>0.8</sup>), найдем, что  $\ddot{z} = -\kappa/2$  и подставляя в (I<sup>0.8</sup>), имеем

$$R_{\bar{x}} = -\kappa m/2. \quad (I^0.9)$$

Если, например,  $\kappa = 2P/m$ , где  $P$  - вес точки, то (I<sup>0</sup>.8) с учетом (I<sup>0</sup>.9) дает

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0, \quad m\ddot{z} = -P. \quad (I^0.I0)$$

В этом случае (I<sup>0</sup>.I0) оказались уравнениями движения материальной точки в поле силы тяжести.

3. Вывод дифференциальных принципов механики. Умножим (6) на бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$  тогда

$$b_{\alpha}^{\beta} \vec{u}^{\alpha} \cdot \Delta a^{\beta} \vec{u}_{\beta} = \Delta \Phi^{\beta}, \quad (28)$$

где  $\Delta a^{\beta} = \dot{a}^{\beta} \cdot \Delta t$ ,  $\Delta \Phi^{\beta} = \dot{\Phi}^{\beta} \cdot \Delta t$ .

Зададим для того же момента  $t$  и промежутка  $\Delta t$  времени другую совокупность значений  $\Delta' a^{\beta}$ , имеем

$$b_{\alpha}^{\beta} \vec{u}^{\alpha} \cdot \Delta' a^{\beta} \vec{u}_{\beta} = \Delta' \Phi^{\beta}. \quad (29)$$

Отнимая (28) от (29), получим

$$b_{\alpha}^{\beta} \vec{u}^{\alpha} \cdot (\Delta' a^{\beta} - \Delta a^{\beta}) \vec{u}_{\beta} = \delta \Phi^{\beta}, \quad (30)$$

где  $\delta \Phi^{\beta} = \Delta' \Phi^{\beta} - \Delta \Phi^{\beta}$ . (31)

Производная по времени от радиуса-вектора изображающей точки имеет вид

$$\dot{\vec{\kappa}} = \dot{q}^{\beta} \vec{u}_{\beta} + \vec{u}_0, \quad (32)$$

где  $\vec{u}_{\beta} = \partial \vec{\kappa} / \partial q^{\beta}$  и  $\vec{u}_0 = \partial \vec{\kappa} / \partial t$ .

Дифференцируя (32) многократно по времени, получим

$$\overset{(h+1)}{\vec{\kappa}} = q^{\beta} \overset{(h+1)}{\vec{u}_{\beta}} + \vec{\psi}, \quad (33)$$

где  $\vec{\psi}$  - векторное выражение, не содержащее производных выше порядка  $h$ .

Умножив (33) на то же  $\Delta t$  что и в (28), имеем

$$\Delta \overset{(h)}{\vec{\kappa}} = \Delta a^{\beta} \vec{u}_{\beta} + \Delta \vec{\psi}. \quad (34)$$

Подставив в (34) совокупность переменных  $\Delta' a^{\beta}$ , получим

$$\Delta' \overset{(h)}{\vec{\kappa}} = \Delta' a^{\beta} \vec{u}_{\beta} + \Delta \vec{\psi}. \quad (35)$$

Записав разность

$$\Delta' \overset{(h)}{\vec{\kappa}} - \Delta \overset{(h)}{\vec{\kappa}} = \delta \overset{(h)}{\vec{\kappa}}, \quad (36)$$

и учтя (34) и (35), имеем

$$\delta \overset{(h)}{\vec{\kappa}} = (\Delta' a^{\beta} - \Delta a^{\beta}) \vec{u}_{\beta} = \delta a^{\beta} \vec{u}_{\beta}. \quad (37)$$

Пусть теперь  $\Delta' a^{\beta}$  - совокупность возможных значений

удовлетворяющих также (28), тогда из (31) следует

$$\delta\Phi^s = 0, \quad (38)$$

а из (30), учитывая (37) и (38), получим

$$b_a^s \ddot{u}^a \cdot \delta\tilde{\kappa}^{(k)} = 0. \quad (39)$$

Умножив (39) на  $\lambda_g$ , а (23) скалярно на  $\delta\tilde{\kappa}^{(k)}$  и учтя соответственно (25) и (39), получим

$$\vec{R} \cdot \delta\tilde{\kappa}^{(k)} = 0, \quad (40)$$

$$(E_g - a_g) \ddot{u}^g \cdot \delta\tilde{\kappa}^{(k)} = 0. \quad (41)$$

Уравнения (41) и условия (40) — идеальности реакций связей, выражают дифференциальный принцип Манжерона-Делеану, [2]. Отметим, что (38) получается и из ставящихся в этом принципе условий  $\delta t = \delta\tilde{\kappa} = \delta\tilde{\pi} = \dots = \delta\tilde{\kappa}^{(k)} = 0$ .

Вывод, данный с помощью  $\Delta q^g$  и  $\delta q^g$ , можно выполнить и с другими переменными. Например, если умножить (32) на  $\Delta t$ , тогда  $\Delta\tilde{\kappa} = \Delta q^g \ddot{u}_g + \ddot{u} \Delta t$ . Подставив в (28) вместо  $\Delta a^g \ddot{u}_g$  вектор  $\Delta q^g \ddot{u}_g$ , имеем  $b_a^s \ddot{u}^a \cdot \Delta q^g \ddot{u}_g = \Delta\varphi^s$ , где  $\Delta\varphi^s$  — неизвестная функция. Повторяя остальные выкладки аналогичные проделанным выше, придем к следующим результатам:

$$\vec{R} \cdot \delta\tilde{\pi} = 0, \quad (42)$$

$$(E_g - a_g) \ddot{u}^g \cdot \delta\tilde{\pi} = 0, \quad (43)$$

$$\text{где } \delta\tilde{\pi} = \delta q^g \ddot{u}_g. \quad (44)$$

Если уравнения связей (I) — голономные, то (43) выражает принцип Даламбера-Лагранжа, а (42) — условие идеальности связей по Лагранжу.

В случае нелинейных неголономных связей первого порядка, (43) и (42) совпадают с формулами, выражающими принцип Даламбера-Лагранжа и обобщенный принцип Герца-Гельдера, называемый условиями Аппеля-Четаева [3, 4, 5]. Последние заключены в (42), но их можно получить из условий аналогичных (39). Действительно, заменив в (39)  $\delta\tilde{\kappa}^{(k)}$  на  $\delta\tilde{\pi}$  из (44) и выполнив скалярное умножение, получим вид этих условий

$$b_a^s \delta q^g = 0, \quad (45)$$

где теперь  $b^s = \partial F^s / \partial \dot{q}^g$  и  $F^s(t, q^g, \dot{q}^g) = 0$ .

Следует отметить, что  $\delta q^g$  в (44) и (45) не есть те же вариации, которые получаются при формальном варьировании (I) и которые содержатся в (38). Здесь они выполняют такую же вспомогательную роль, что и  $\dot{a}^g$  или  $\delta \dot{q}^g$ .

4. Вывод УВМ. Используем теперь в качестве вспомогательных переменных параметры скорости  $\dot{q}^g$  (в данном случае это будут обобщенные скорости). Тогда (6) примет вид:

$$b_a^g \ddot{u}^a \cdot v^g \ddot{u}_g = \varphi^g, \quad (46)$$

где, в данном случае,  $v^g = \dot{q}^g$ ,  $\varphi^g$  — неизвестная функция.

В (46) имеем  $m$  уравнений, которым удовлетворяет множество скоростей  $v^g$ . Обозначив их через  $\{v^g\}$  — возможные скорости, имеем

$$b_a^g \ddot{u}^a \cdot \{v^g\} \ddot{u}_g = \varphi^g, \quad (47)$$

а (46) будем теперь рассматривать, как условия, в которых стоят действительные параметры скорости. Отнимая от (47) условия (46), имеем<sup>I</sup>

$$b_a^g \ddot{u}^a \cdot (\{v^g\} - v^g) \ddot{u}_g = 0 \quad (48)$$

или

$$b_g^g \{v^g\} - b_g^g v^g = 0. \quad (49)$$

Разность

$$(\{v^g\} - v^g) \ddot{u}_g = \{v^g\}^* \ddot{u}_g = \{\ddot{r}^g\}^* \quad (50)$$

есть виртуальная скорость. Умножив (49) на  $\lambda_g$  и подставив (50), получим условие идеальности связей в уравнении возможной мощности (УВМ) [I]:

$$\vec{R} \cdot \{\ddot{r}^g\}^* = 0, \quad (51)$$

где учтено (25).

Умножив (24) скалярно на  $\{\ddot{r}^g\}^*$  из (50), получим уравнение виртуальной мощности

$$(E_g - Q_g) \ddot{u}^g \cdot \{\ddot{r}^g\}^* = 0. \quad (52)$$

Уравнения движения (16) получим из (52), используя условия (48), куда необходимо подставить (50).

Таким образом при выводе уравнений движения механической системы стесненной связями, можно использовать различные вспомогательные переменные. В книге [I] и других статьях показаны преимущества использования УВМ перед другими методами при решении задач механики. Особенно это касается задач, в которых механические системы стеснены связями линейными относительно параметров скоростей. В этом случае оказывается возможным ввести минимальное число (равное числу сте-

<sup>I</sup> Условия (49) получены в [6] другим путем.

пеней свободы системы) параметров скоростей, тождественно удовлетворяющие уравнения связей. В следствие этого их не нужно рассматривать при составлении уравнений движения системы.

#### Литература

1. Гольст Г., Рельвик Х., Сильде О., Основные вопросы аналитической механики. Таллин, "Валгус", 1979, 168 с.
2. Доброзравов В.В., Основы механики неголономных систем. М., "Высшая школа", 1970, 270 с.
3. Поляхов Н.Н., О дифференциальных принципах механики, получаемых из уравнений движения неголономных систем. Вестн. Ленинград. ун-та, 1974, 106-224, 13.
4. Румянцев В.В., О совместимости двух основных принципов динамики и о принципе Четаева. В кн.: Проблемы аналитической механики, теорий устойчивости и управления. М., 1975, 258-267.
5. Румянцев В.В., О некоторых вариационных принципах механики. В кн.: Современные проблемы теоретической и прикладной механики. Тр. IV Всес. съезда по теоретической и прикладной механике. Киев, "Наукова думка", 1978, 74-90.
6. Сильде О., Хайтин А., Движение механических систем при учете уравнений связей общего вида. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 487, 95-100.

#### About the derivation of the differential equations of movement of the mechanical system

A. Haitin

#### Summary

In the paper the derivation of the differential equations of movement of the mechanical system is studied on the basis of the Newton's law and invariant demands. The mechanical systems with equations constraints of common appearance are discussed. The derivation of mechanical differential principles and possible power equations has been carried out on the basis of the results obtained.

О РЕШЕНИИ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ПЕРЕХОДНЫХ  
ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Т.А.Пейпман, Ю.К.Энгельбрехт  
Таллинский политехнический институт

Введение

Распространение продольных волн деформации в деформируемом твердом теле описывается асимптотическим уравнением переноса, которое в плоском случае выписывается в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} R(\beta(\zeta, \zeta, \eta)) = H \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2}, \quad (1)$$

где  $R$  - волновой оператор в осевом направлении;  $H$  - параметр дифракции;  $\beta$  - амплитудный фактор;  $\zeta, \zeta, \eta$  - лучевые координаты [1].

Волновой оператор может быть либо дифференциального

$$R = \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + a_{01} \beta \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + a_0 \beta + a_1 \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + a_2 \frac{\partial^2 \beta}{\partial \zeta^2} + a_3 \frac{\partial^3 \beta}{\partial \zeta^3} + \dots \quad (2)$$

либо интегро-дифференциального типа

$$R = \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + \int_{-\infty}^{\infty} K(\zeta - x) \frac{\partial \beta}{\partial x} dx, \quad (3)$$

где  $a_{01}, a_0$  и т.д. - известные постоянные коэффициенты и ядро  $K(x)$  - заданная функция. Ищем решение уравнения (1) при начальном условии:

$$\beta(\zeta, \zeta, \eta) \Big|_{\zeta=0} = A(\zeta)B(\eta). \quad (4)$$

Решение этой задачи в общем случае неизвестно [1]. В данной статье предлагается алгоритм численного решения данной двумерной задачи, базирующийся на дискретном преобразовании Фурье [2].

Метод анализа

Рассмотрим двумерное уравнение переноса (1) с волновым оператором

$$R = \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} + \text{sign}(1 + m_0) \beta \frac{\partial \beta}{\partial \zeta} - \Gamma^{-1} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \zeta^2}, \quad (5)$$

где  $\text{sign}(1 + m_0)$  зависит от упругих свойств материала и

$\Gamma$  – параметр диссипации. Выбор оператора в виде (5) не вносит никаких ограничений принципиального характера и метод применим также для других видов оператора  $R$ .

Для решения уравнения (I) с оператором (5) используется численный алгоритм, базирующийся на методе быстрого преобразования Фурье и на методе конечных разностей. Суть метода состоит в численном преобразовании переменных в пространство Фурье, где производные по  $\zeta$  и  $\eta$  можно найти аналитически. После численного возвращения в пространство оригиналов все производные определены с достаточной точностью [3]. Окончательный расчет производится в пространстве оригиналов, где только производные по  $\theta$  вычисляются методом конечных разностей, а остальные определены при помощи преобразования Фурье. Используется алгоритм быстрого преобразования Фурье [4, 5], гарантирующий минимальное время расчета на ЭВМ.

Если период функции  $\beta(\theta, \zeta, \eta)$  нормирован на участке  $[0, 2\pi]$  и этот интервал делен на  $N$  точки с шагом

$$\Delta\zeta = \Delta\eta = \frac{2\pi}{N}, \quad (6)$$

то можно определить дискретное преобразование Фурье функции по следующим формулам

$$B_1(\omega, \eta, \theta) = F_1\beta = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \beta(j \cdot \Delta\zeta, \eta, \theta) e^{-2\pi i j \omega / N}, \quad (7)$$

$$B_2(\zeta, \omega, \theta) = F_2\beta = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} \beta(\zeta, j \cdot \Delta\eta, \theta) e^{-2\pi i j \omega / N}, \quad (8)$$

где  $\omega = 0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ ;  $F_1$  и  $F_2$  – преобразования Фурье соответственно по координатам  $\zeta$  и  $\eta$ .

Формулы обратного преобразования получают вид

$$\beta(j \cdot \Delta\zeta, \eta, \theta) = F_1^{-1} B_1 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega} B_1(\omega, \eta, \theta) e^{2\pi i j \omega / N}, \quad (9)$$

$$\beta(\zeta, j \cdot \Delta\eta, \theta) = F_2^{-1} B_2 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\omega} B_2(\zeta, \omega, \theta) e^{2\pi i j \omega / N}, \quad (10)$$

где  $F_1^{-1}$  и  $F_2^{-1}$  обратные преобразования Фурье.

По этой схеме получим для производных по  $\zeta$  и  $\eta$  следующие выражения

$$\begin{aligned}
 \beta_{\zeta} &= F_1^{-1}(i\omega F_1 \beta) \\
 \beta_{\zeta\zeta} &= -F_1^{-1}(\omega^2 F_1 \beta) \\
 \beta_{\zeta\zeta\zeta} &= -F_1^{-1}(i\omega^3 F_1 \beta) \\
 \beta_{\eta\eta} &= -F_2^{-1}(\omega^2 F_2 \beta)
 \end{aligned}
 \tag{II}$$

Для вычисления производной по переменной  $\beta$  используем формулы конечных разностей, тогда уравнение (I) с волновым оператором (5) получит вид

$$\begin{aligned}
 \beta_{\zeta}(\zeta, \eta, \beta + \Delta\beta) - \beta_{\zeta}(\zeta, \eta, \beta) - \text{sign}(1+m_0)\Delta\beta \beta_{\zeta}^{-1}(\omega^2 F_1 \beta) + \\
 + \text{sign}(1+m_0)\Delta\beta [iF_1^{-1}(\omega F_1 \beta)]^2 + F_1^{-1}\Delta\beta iF_1^{-1}(\omega^3 F_1 \beta) = \\
 = -H\Delta\beta F_2^{-1}(\omega^2 F_2 \beta) .
 \end{aligned}
 \tag{I2}$$

Следовательно, на одном шаге по переменной  $\beta$  нам нужно в данном случае использовать алгоритм быстрого преобразования Фурье четыре раза. Шаг  $\Delta\beta$  по координате  $\beta$  выбирается согласно условию сходимости разностной схемы. Используя результаты изложенные в [2], определяем шаг  $\Delta\beta$  из условия

$$\Delta\beta < \frac{3 \cdot \Delta\zeta^3}{2\pi^2} \approx 0,1520 \cdot \Delta\zeta^3 .
 \tag{I3}$$

Согласно (I2) на слое  $(\beta + \Delta\beta)$  определяется производная  $\beta_{\zeta}$ . Функция  $\beta$  сама определяется численным интегрированием при помощи свертки функции  $\beta$  с функции  $f(\zeta) = 1$ .

Необходимо отметить, что в случае оператора интегро-дифференциального типа (3) можно применять эту же методику, учитывая при том, что свертке функций  $f$  и  $g$

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt
 \tag{I4}$$

соответствует в пространстве Фурье умножение изображений функций.

#### Численные результаты

Для проверки данного численного алгоритма рассмотрим решение уравнения

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial \beta \partial \zeta} = H \frac{\partial^2 \beta}{\partial \eta^2}
 \tag{I5}$$

при начальном условии

$$\beta(\zeta, \eta, 0) = \sin \zeta \cdot \exp(-\eta^2) .
 \tag{I6}$$

Аналитическое решение (I5), (I6) дано в [5] и [I]:

$$\beta = \exp(-\eta^2(1+16N^2\delta^2)^{-1})(1+16N^2\delta^2)^{-1/4} \sin(\zeta+\zeta_1) \quad (I7)$$

$$\zeta_1 = -\eta^2 4N\delta(1+16N^2\delta^2)^{-1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 4N\delta.$$

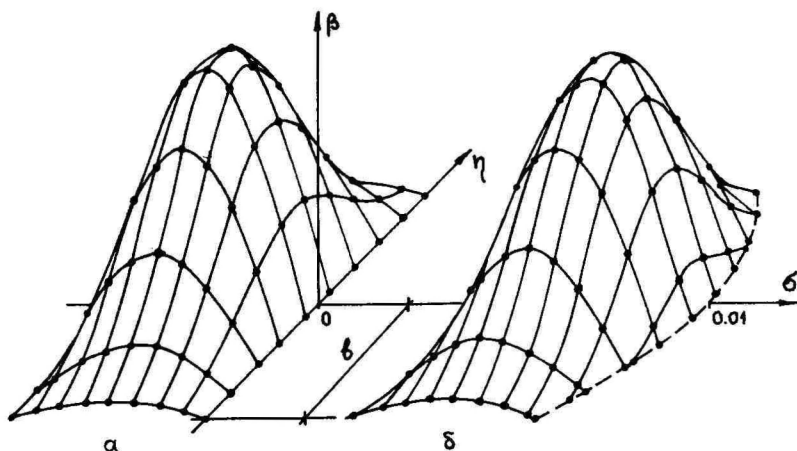
Коэффициент  $N$  вычисляется по формуле

$$N = \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \left( \frac{\tau_c}{b} \right)^2,$$

где  $\lambda$ ,  $\mu$  - константы Ляме,  $\tau_c$  - длина волны,  $b$  - полуширина пучка. В случае алюминия  $\lambda = 5,84 \cdot 10^{10} \text{ Нм}^{-2}$ ,  $\mu = 2,51 \cdot 10^{10} \text{ Нм}^{-2}$ . Выбираем  $\tau_c = 6,3 \text{ см}$ ,  $b = 2 \text{ см}$ . Данная длина волны соответствует частоте  $10^5 \text{ гц}$ . Шаг  $\Delta b$  выбран из условия (I3), что при  $\Delta \zeta = 0,196$  дает  $\Delta b = 0,0005$ .

На фиг. I-3 приведены результаты вычислений для координаты  $\delta = 0,01$ , что соответствует распространению волны дл 57 см. Различие численных результатов (точки на рисунке) с точным решением (сплошная линия) остается вне предела точности рисунка.

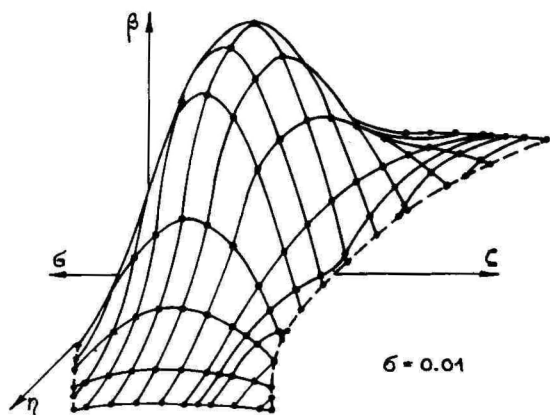
На фиг. I показаны начальная форма (фиг Ia) импульса и его профиль при  $\delta = 0,01$  (фиг. Ib). Так как задача линейная, показана только половина синусоидального импульса. Штриховой линией показаны искривленные поверхности равной



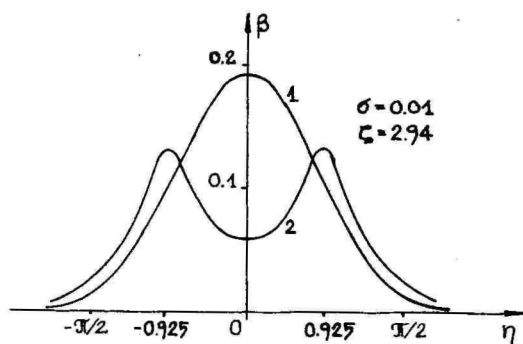
Фиг. I.

фазы. Хорошо заметно, как генерированная плоская волна раз-  
вивается в цилиндрическую расходящуюся волну.

Результаты расчета позволяют выявить определенную не-  
однородность в процессе изменения профиля. На фиг. 2 пред-  
ставлен этот же профиль волны, как на фиг. 1б, но с задней  
стороны. При  $\zeta = 2,94$  заметно, что максимум импульса нахо-  
дится не на оси пучка, а имеется два максимума при  $\eta =$   
 $= \pm 0,925$ . Это обуславливается влиянием изменения фазы на-  
чальной монохроматической волны. Действительно, из аналити-  
ческого решения (17) вытекает



Фиг. 2.



Фиг. 3.

$$\frac{\partial \beta}{\partial \eta} = -\frac{2\eta(1+16H^2\sigma^2)^{-1/4}}{1+16H^2\sigma^2} \exp\left\{-\frac{\eta^2}{1+16H^2\sigma^2} [\sin(\zeta+\zeta_1)+4H\sigma \cos(\zeta+\zeta_1)]\right\},$$

где  $\zeta_1 = \zeta_1(\eta)$  определяется из (17). Легко проверить, что при определенных значениях  $\sigma$   $\beta_\eta = 0$  также при  $\eta \neq 0$ . Эволюция профиля показана на фиг. 3, где линия 1 соответствует случаю  $\sigma = 0$ , линия 2 случаю  $\sigma = 0,01$ .

#### Литература

1. Энгельбрехт Ю.К., Нигул У.К., Нелинейные волны деформации, М., Наука, 1981, 256 с.
2. Fornberg, B., Whitham, G.B., A Numerical and Theoretical Study of Certain Nonlinear Wave Phenomena. Phil.Trans. Royal Soc. London A289, 373-404, 1978.
3. Fornberg, B., Pseudospectral Calculation on 2-D Turbulence and Nonlinear Waves. SIAM-AMS Proc, 1978, Vol. 11, 1-18.
4. Cooley, J.W., Lewis, P.A., Welch, P.D., The Fast Fourier Transform and Its Applications. IEEE Trans. on Education, Vol.12, №1, 27-34.
5. Рудено О.В., Солуян С.И., Теоретические основы нелинейной акустики. М., Наука, 1975, 288 с.

Two-dimensional evolution equations of transient waves - an algorithm analysis by means of Fourier transform

J. Engelbrecht, T. Peipman

#### Summary

An algorithm of a numerical calculation is developed for solving two-dimensional evolution equations that describes the wave propagation in a continuous medium. The algorithm uses a pseudospectral (Fourier transform) treatment of the space dependence together with a leap-frog scheme in time [2]. The fast Fourier transform algorithm is used for the numerical calculation of the discrete Fourier transform [4]. A linear two-dimensional evolution equation with a known analytical solution [2, 5] is solved numerically for verifying the algorithm. The results are presented graphically and a non-monotonous distortion of a sine-pulse is established.

Ученые записки Тартуского государственного университета.

Выпуск 627.

ВОПРОСЫ ПРОЧНОСТИ И ОПТИМИЗАЦИИ КОНСТРУКЦИЙ.

Труды по математике и механике.

На русском и английском языках.

Резюме на английском и немецком языках.

Тартуский государственный университет.

ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Оляиколи, 18.

Ответственный редактор М. Хейнлоо.

Корректоры Г. Оленьев, Х. Кюнка, А. Карусоо.

Подписано к печати 9.12.1982.

ЛВ 12939.

Формат 60x90/16.

Бумага писчая.

Машинопись. Ротапринт.

Учетно-издательских листов 6,32.

Печатных листов 7,0.

Тираж 400.

Заказ № 1295.

Цена 1 руб.

Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, 14.