

N. RÕBKIN

TRIGONOMEETRIA

ÜLESANNETE KOGU

X KLASSILE

RK

„Pedagoogiline Kirjandus“

• Tallinn

N. RÕBKIN

TRIGONOMEETRIA

ÜLESANNETE KOGU

ÜHES TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST
NÕUDVATE GEOMEETRILISTE
ÜLESANNETEGA

KESKKOOLI X KLASSILE

Kõrgetasemelise kontrollkoostööks

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1949

Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud.



18477
A-17863

AARHIIVKOGU

ESIMENE OSA.

TRIGONOMEETRIA.

§ 1. Kaarte ja nurkade mõõtmine.

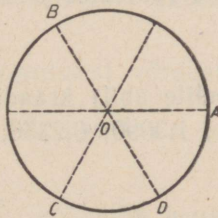
Nurga ja kaare mõistete üldistamine.

G M

1. Kui suure nurga võrra pöördub 4 tunni jooksul kella tunniosuti? minutiosuti?

G 2. Masinaratas teeb 2 sekundis 6 tiiru. Mitme kraadi võrra pöördub ratas 1 sekundis? 10 sekundis?

G 3. Hammasrattal on 72 hammast. Mitme kraadi võrra pöördub ratas, kui ta pöördub 1; 30; 144; 300 hamba võrra?



Joon. 1.

M

4. Joonestada liikuva raadiuse asend, kui nurk on: $+45^{\circ}$; -30° ; $+225^{\circ}$; -135° ; -90° ; $+450^{\circ}$; -810° ; $+2070^{\circ}$. Mis-suguste antud nurkade liikuivad raadiused ühtivad üksteisega?

M 5. Väljendada kraadides kaarte summa: $\sphericalangle ABCAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CDA$ (joon. 1).

M 6. Anda nende nurkade üldavaldis, mille liikuv raadius on asendis: 1) OB ; 2) OD (joon. 1), ja leida nende nurkade mõned eriväärtused.

Radiaanmõõt.

M 7. 1) Ringi raadius on 5 cm. Arvutada 18° -se kaare pikkus.

2) Avaldada α° -se kaare pikkus, kui ringi raadius on R .

H 8. 1) Arvu π abil väljendada radiaanides järgmised kaared: a) 30° ; b) 45° ; c) 60° ; d) 135° ; e) 15° ; f) $22^\circ 30'$; g) 36° ; h) 75° ; i) 108° ; k) 150° ; l) $157^\circ 30'$; m) 162° .

2) Väljendada radiaanides: a) 51° ; b) 27° ; c) $76^\circ 30'$; d) $12^\circ 30'$; e) $28^\circ 42'$; f) $73^\circ 21'$; g) 117° ; h) $216^\circ 13'$.

3) Väljendada radiaanides korrapärase kolmnurga, nelinurga, viisnurga, kuusnurga ja n -nurga sisenurgad.

M 9. 1) Väljendada kraadides ja minuteis nurgad, mille suurused on 1,5; 2; 0,75 radiaani, ja samuti $\frac{\pi}{6}$; $\frac{2}{3}\pi$; $1\frac{1}{2}\pi$;

$\frac{\pi}{8}$; $\frac{3}{4}\pi$; $1\frac{1}{5}\pi$ radiaani.

H 2) Väljendada (tabelite abil) kraadimõõdus nurgad, mille radiaanmõõt on 0,6981; 1,3090; 0,2356; 1,0071; 3,8048; 0,48; 1,3; 0,8.

Nurkkiirus.

F 10. Ratas, mille raadius on 1,2 m, teeb minutis 300 tiiru.

1) Leida ratta nurkkiirus ω (nurkkiirust väljendatakse ühikuis $\frac{\text{radiaan}}{\text{sekund}}$).

2) Leida ratta niisuguse punkti joonkiirus, mille kaugus keskpunktist on 20 cm.

3) Leida ratta piirdel asetseva punkti joonkiirus.

4) Tõestada, et keskpunktist kaugusel r asetseva punkti joonkiirus on $r\omega$.

F 11. Võlli nurkkiirus on 21 $\frac{\text{radiaan}}{\text{sekund}}$. Arvutada võlli tiirude arv minutis.

§ 2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel.

M 1. Missuguses veerandis on kõik trigonomeetrilised funktsioonid positiivsed? Kas on olemas veerandit, milles kõik funktsioonid on negatiivsed?

M 2. Missugused kolmnurga nurga trigonomeetrilised funktsioonid võivad olla negatiivsed ja nimelt millal?

M 3. Missugused märgid on kolmnurga poole nurga trigonomeetrilistel funktsioonidel?

M 4. Missuguses vahemikus muutub avaldise $1 + \sin x$ väärtus?

M 5. Missugused järgmistest võrdustest on võimalikud:

1) $\sin a = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{1}{2}(a+b)}$; 2) $\cos \beta = a + \frac{1}{a}$; 3) $\sec a = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}$?

M 6. Kas murd $\frac{\cos x}{\sec x}$ võib olla negatiivne?

Lihtsustada avaldised ülesandeis 7—13:

H 7. $a \cdot \sin 0^\circ + b \cdot \cos 90^\circ + c \cdot \tan 180^\circ$.

H 8. $a \cdot \tan 0^\circ + b \cdot \cot \frac{\pi}{2} + c \cdot \sec 0^\circ$.

H 9. $a \cdot \cos 0^\circ + b \cdot \cos 180^\circ + c \cdot \cos 360^\circ$.

10. $a^2 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 2ab \cdot \sec \pi - b^2 \cdot \sin \frac{3}{2} \pi.$

11. $a^2 \cdot \operatorname{cosec} 90^\circ - 2ab \cdot \sin 180^\circ + b^2 \cdot \operatorname{cosec} 270^\circ.$

12. $a^2 \cdot \sin 2\pi + 2ab \cdot \cos \frac{3}{2} \pi + b^2 \cdot \tan 2\pi.$

13. $a^3 \cdot \cot 270^\circ + b^3 \cdot \tan 90^\circ.$

M 14. Ringis, mille raadius on 5 cm, ehitada nurgad 30° ; 120° ; 225° ; -30° ; -120° ; -560° ja nende nurkade neli trigonomeetrilist lõiku. Mõõtnud trigonomeetrilised lõigud veaga mitte üle 1 mm, arvutada järgmiste funktsioonide väärtused (veaga mitte üle 0,1):

1) $\tan 30^\circ$; 2) $\cos 120^\circ$; 3) $\sin 225^\circ$; 4) $\cos(-30^\circ)$;
5) $\tan(-120^\circ)$; 6) $\cot(-560^\circ)$.

15. Määrata iga järgmise vahe märk:

1) $\sin 20^\circ - \sin 21^\circ$; 2) $\cos 20^\circ - \cos 21^\circ$; 3) $\tan 20^\circ - \tan 21^\circ$;
4) $\cot 20^\circ - \cot 21^\circ$; 5) $\cos 20^\circ - \cos 120^\circ$;
6) $\sin 120^\circ - \sin 240^\circ$; 7) $\tan 120^\circ - \tan 40^\circ$; 8) $\cot 30^\circ - \cot 130^\circ$.

M 16. Missugusel funktsioonil igas järgmises paaris on suurem väärtus: 1) $\sin 20^\circ$ või $\cos 20^\circ$? 2) $\sin 50^\circ$ või $\cos 50^\circ$? 3) $\tan 40^\circ$ või $\cot 40^\circ$? 4) $\tan 50^\circ$ või $\cot 50^\circ$?

Nurkade ehitamine ja arvutamine.

M 17. Ehitada nurgad, mille siinused on: 1) 0,6; 2) $-\frac{1}{2}$.
Leida nurkade suurused (veaga mitte üle 1°).

M 18. Ehitada nurgad, mille koosinused on: 1) $\frac{2}{3}$; 2) $-0,4$.

M 19. Ehitada nurgad, mille tangensid on: 1) 1,5; 2) -1 .

20. Ehitada nurgad, mille kootangensid on: 1) -2 ;
2) 1.

21. Nurga antud üldavaldise järgi kirjutada tema positiivsed eriväärtused, mis on väiksemad kui 360° (2π):

- 1) $x = 15^\circ + n \cdot 120^\circ$; 2) $x = -60^\circ + n \cdot 360^\circ$;
3) $x = -10^\circ + n \cdot 60^\circ$; 4) $x = \pm 120^\circ + n \cdot 720^\circ$;
5) $x = \pm \frac{\pi}{6} + n \cdot \pi$; 6) $x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi$;
7) $x = (-1)^n \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$; 8) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} \pm n \cdot \pi$.

22. Kirjutada järgmiste võrrandite üldlahendid, leides nurgad ehitamise ja mõõtmise teel (veaga mitte üle 1°):

- 1) $\tan x = 2,6$; 2) $\tan x = -0,8$; 3) $\cos x = 0,9$;
4) $\cos x = -\frac{2}{3}$; 5) $\sin x = 0,25$; 6) $\sin x = -\frac{5}{7}$.

Ülesandeis 23—31 arvutada võrrandis esineva trigonomeetrilise funktsiooni väärtus ja ehitada nurgad.

23. $\sin^2 x - 3 = 2 \sin x$. 24. $\cos^2 x + \cos x = 1$.
25. $6 \sin^4 x = 1 - \sin^2 x$. 26. $\sin^2 x = 2 \sin x$.
27. $\tan^2 x = 2 \tan x$. 28. $\sec^2 x = 2 \sec x$.
29. $\cot^3 x + 4 \cot x = 0$. 30. $\frac{2}{1 + \tan x} = 0$.
31. $(\cos x - 2) \cdot (2 \operatorname{cosec} x + 1) = 0$.

Tsüklomeetrilised funktsioonid.

32. Järgmisist võrrandeist avaldada x tsüklomeetriliste funktsioonide kaudu: 1) $\tan x = m$; 2) $\cos x = m$; 3) $\sin x = m$. Missugused on arvu m võimalikud väärtused igas eelmises võrrandis?

33. Kirjutada ümber järgmised võrdused tsüklomeetriliste funktsioonide abil:

- 1) $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; 2) $\sin(-45^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

- 4) $\cos 90^\circ = 0$; 5) $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$; 6) $\tan 0^\circ = 0$;
 7) $\cot 30^\circ = \sqrt{3}$; 8) $\cot 0^\circ = \infty$; 9) $\sin x = 0,23$;
 10) $\cos x = 0,5762$; 11) $\tan x = 0,468$; 12) $\cot x = 1,237$.

34. Kasutades tabelleid väljendada kraadides ja radiaanides: 1) $\arcsin 0,7314$; 2) $\arccos 0,3987$; 3) $\arctan 3,677$ ja 4) $\text{arc cot } 0,5117$.

35. Järgmisist võrrandest leida x :

- 1) $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$; 2) $\arccos x = \frac{\pi}{6}$; 3) $\arctan x = \frac{\pi}{3}$;
 4) $\arcsin \frac{x}{3} = a$; 5) $\arccos \frac{x}{a} = \frac{b}{c}$; 6) $\arctan \frac{1}{x} = a$.

36. Ehitada:

- 1) $\arcsin 0,8$; 2) $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$; 3) $\arccos \frac{2}{3}$;
 4) $\arccos(-0,75)$; 5) $\arctan \frac{1}{2}$; 6) $\arctan(-1,5)$;
 7) $\arctan 1,2$; 8) $\text{arc cot }(-0,6)$; 9) $\text{arc sec } 1\frac{1}{2}$;
 10) $\text{arc cosec }(-2)$.

§ 3. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed.

Avaldada nurga α trigonomeetrilised funktsioonid:

- M 1. $\sin \alpha$ kaudu. M 2. $\cos \alpha$ kaudu.
 M 3. $\tan \alpha$ kaudu. M 4. $\cot \alpha$ kaudu.

Leida nurga α trigonomeetrilised funktsioonid, kui:

5. $\sin \alpha = 0,8$. 6. $\sin \alpha = -0,3$. 7. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$.
 8. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. 9. $\tan \alpha = \sqrt{5}$. 10. $\tan \alpha = -\frac{9}{40}$.
 11. $\cot \alpha = \frac{8}{15}$. 12. $\cot \alpha = -3$. 13. $\sec \alpha = 3$.

$$14. \sec a = -1\frac{9}{20}. \quad 15. \operatorname{cosec} a = 2,6. \quad 16. \operatorname{cosec} a = -\sqrt{3}.$$

Oletades, et $0 < b < a$, leida nurga a trigonomeetrilised funktsioonid ülesannete 17–19 andmeil:

$$17. \sin a = \frac{a-b}{a+b}. \quad 18. \cos a = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \quad 19. \tan a = \frac{a}{b}.$$

Leida nurga a trigonomeetrilised funktsioonid, kui:

$$20. a \text{ on positiivne teravnurk ja } \tan a = 4\frac{19}{20}.$$

$$21. a \text{ on kolmnurga nurk ja } \cos a = -0,28.$$

$$22. a \text{ on III veerandi nurk ja } \sin a = -\frac{12}{13}.$$

$$23. a \text{ on IV veerandi nurk ja } \cot a = -1,05.$$

Lihtsustada avaldised ülesandeis 24–52.

$$24. 1 - \sin^2 a. \quad 25. 1 - \cos^2 a.$$

$$26. \frac{\sin^2 a}{1 + \cos a}. \quad 27. \frac{\cos^2 a}{\sin a - 1}.$$

$$28. \sin^2 a + \cos^2 a + \tan^2 a. \quad 29. \sec^2 a - \tan^2 a - \sin^2 a.$$

$$30. a) \frac{\sin a \cdot \sin \beta}{\cos a \cdot \cos \beta}; \quad 31. a) \frac{1 - \sin^2 a}{1 - \cos^2 a};$$

$$b) \frac{\cos a \cdot \cos \beta}{\sin a \cdot \sin \beta}. \quad b) \frac{\cos^2 a - 1}{\sin^2 a - 1}.$$

$$32. \sin a \cdot \cot a. \quad 33. \cos a \cdot \tan a.$$

$$34. \tan a \cdot \operatorname{cosec} a. \quad 35. \sin a \cdot \sec a.$$

$$36. \cos a \cdot \operatorname{cosec} a. \quad 37. \cot a \cdot \sec a.$$

$$38. \sin a : \tan a. \quad 39. \tan a : \cot a.$$

$$40. 1 - \cos^2 a + \sin^2 a. \quad 41. 1 - \sin^2 a + \cot^2 a \cdot \sin^2 a.$$

$$42. (1 + \tan^2 a) \cdot \cos^2 a.$$

$$43. (\tan a \cdot \cos a)^2 + (\cot a \cdot \sin a)^2.$$

$$44. (\tan a \cdot \operatorname{cosec} a)^2 - 1.$$

$$45. \sin^2 a \cdot \sec^2 a + \sin^2 a + \cos^2 a.$$

$$46. \frac{\sin a \cdot \sin \beta}{\cos a \cdot \cos \beta} \cdot \tan a \cdot \cot \beta + 1.$$

$$47. \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \cdot \cot \alpha \cdot \cot \beta + 1.$$

$$48. \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot \cot \alpha.$$

$$49. \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}.$$

$$50. \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\cot \alpha + \cot \beta}.$$

$$51. (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - (\tan \alpha - \cot \alpha)^2.$$

$$52. \frac{\cos^2 \alpha - \cot^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha}.$$

53. $\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ avaldada: a) $\sin \alpha$ kaudu ja b) $\cos \alpha$ kaudu.

54. $\tan \alpha + \cot \alpha$ avaldada $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu.

55. $\frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha}$ avaldada $\tan \alpha$ kaudu.

56. $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ avaldada $\cot \alpha$ kaudu.

57. $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$ avaldada: a) $\tan \alpha$ kaudu ja b) $\cot \alpha$ kaudu.

58. $\frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$ avaldada: a) $\tan \alpha$ kaudu ja b) $\cot \alpha$ kaudu.

59. $\sec \alpha$ avaldada $\cot \alpha$ kaudu, kui α on IV veerandi nurk.

60. Arvutada $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$, kui $\tan \alpha = \frac{5}{4}$.

61. Määrata $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$, kui $\sin \alpha + \cos \alpha = m$.

62. Määrata $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$ ja $\tan^3 \alpha + \cot^3 \alpha$, kui $\tan \alpha + \cot \alpha = m$.

Tõestada samasused ülesandeis 63—92.

$$63. \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha.$$

$$64. \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

$$65. \frac{\sec \alpha - 1}{\tan \alpha} = \frac{\tan \alpha}{\sec \alpha + 1}.$$

66. $\sin^2 a - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 a.$
67. $\tan^2 a - \cot^2 a = \sec^2 a - \operatorname{cosec}^2 a.$
68. $\frac{\tan^2 a - \cot^2 a}{\sin^2 a - \cos^2 a} = \sec^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a.$
69. $\frac{\tan a + \tan \beta}{\cot a + \cot \beta} = \tan a \cdot \tan \beta.$
70. $\frac{\sin a + \cos a}{\sec a + \operatorname{cosec} a} = \sin a \cdot \cos a.$
71. $\frac{\sin a + \cot a}{\tan a + \operatorname{cosec} a} = \sin a \cdot \cot a.$
72. $\frac{\sec a \cdot \cot a - \operatorname{cosec} a \cdot \tan a}{\cos a - \sin a} = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a.$
73. $\frac{\sin a + \cos a}{\sin a - \cos a} = \frac{\sec a + \operatorname{cosec} a}{\sec a - \operatorname{cosec} a}.$
74. $\frac{1 + \sin a}{1 + \cos a} \cdot \frac{1 + \sec a}{1 + \operatorname{cosec} a} = \tan a.$
75. $\frac{1 - \sin a}{1 - \cos a} \cdot \frac{1 + \sec a}{1 + \operatorname{cosec} a} = \cot^3 a.$
76. $\frac{\tan a}{1 - \tan^2 a} \cdot \frac{\cot^2 a - 1}{\cot a} = 1.$
77. $\frac{1}{1 + \tan^2 a} + \frac{1}{1 + \cot^2 a} = 1.$
78. $\frac{\sin^2 a}{\sec^2 a - 1} + \frac{\cos^2 a}{\operatorname{cosec}^2 a - 1} = 1.$
79. $\operatorname{cosec} a - \sin a = \cos a \cdot \cot a.$
80. $\tan a + \cot a = \sec a \cdot \operatorname{cosec} a.$
81. $\sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = \sec^2 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a.$
82. $\sec^2 a (\operatorname{cosec}^2 a - 1) = \operatorname{cosec}^2 a.$
83. $1 + \sin a + \cos a + \tan a = (1 + \cos a) (1 + \tan a).$
84. $(\sin a - \operatorname{cosec} a) (\cos a - \sec a) = \sin a \cdot \cos a.$
85. $(\sin a + \tan a) (\cos a + \cot a) =$
 $= (1 + \sin a) (1 + \cos a).$
86. $\sin a (1 + \tan a) + \cos a (1 + \cot a) = \sec a + \operatorname{cosec} a.$
87. $\sin^3 a (1 + \cot a) + \cos^3 a (1 + \tan a) = \sin a + \cos a.$
88. $\tan^3 a \cdot \operatorname{cosec}^2 a - \operatorname{cosec} a \cdot \sec a + \cot^3 a \cdot \sec^2 a =$
 $= \tan^3 a + \cot^3 a.$

$$89. \sec^2 a + \operatorname{cosec}^2 a = (\tan a + \cot a)^2.$$

$$90. \left(\frac{\sin a + \tan a}{\operatorname{cosec} a + \cot a} \right)^2 = \frac{\sin^2 a + \tan^2 a}{\operatorname{cosec}^2 a + \cot^2 a}.$$

$$91. \tan^2 a - \sin^2 a = \tan^2 a \cdot \sin^2 a.$$

$$92. \sqrt{\frac{1 + \sin a}{1 - \sin a}} - \sqrt{\frac{1 - \sin a}{1 + \sin a}} = 2 \tan a.$$

Lahendada võrrandid 93—113. Ehitanud võrrandist leitud funktsiooni väärtuse järgi nurga ja mõõtnud selle maliga (veaga mitte üle 10°), anda vastus üldkujul.

$$93. \sin^2 x = 1 + \cos^2 x.$$

$$94. \sin x \cdot \tan x = \frac{3}{2}.$$

$$95. \sin x = \cot x.$$

$$96. \cos x - 1 + 2 \sin x \cdot \tan x = 0.$$

$$97. \sin^2 x + \cos x = 0.$$

$$98. \sec x = \tan^2 x.$$

$$99. 2 \cos^2 x = 3 \sin x + 2.$$

$$100. \tan x - \cot x = \frac{3}{2}.$$

$$101. \cos x = 2 \tan x.$$

$$102. \operatorname{cosec} x - \sin x = \frac{1}{2} \cot x.$$

$$103. 2 \tan x = -3 \operatorname{cosec} x.$$

$$104. 2 \sec x = \operatorname{cosec} x.$$

$$105. 2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x = 3.$$

$$106. 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1.$$

$$107. \sin^4 x - \cos^4 x = 0,5.$$

$$108. 1 + \sin x \cos x - \sin x - \cos x = 0.$$

Lahendada siinuse ja koosinuse suhtes homogeensed või sellistele taanduvad võrrandid:

$$109. \sin x = \cos x.$$

$$110. \sin x - \sqrt{3} \cos x = 0.$$

$$111. 3 \sin^2 x = \cos^2 x.$$

$$112. \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3 \cos^2 x.$$

$$113. 1 - 3 \cos^2 x = 2 \sin x \cos x.$$

§ 4. Täiendus- ja kõrvunurkade funktsioonid.

1. Taandada 45° -st väiksemale nurgale:

1) $\sin 73^\circ$;

3) $\tan 69^\circ 25' 40''$;

2) $\cos 80^\circ 40'$;

4) $\cot 59^\circ 59'$.

2. Taandada teravnurga samanimelisteks funktsioonideks:

1) $\sin 112^\circ 20'$;

3) $\tan 108^\circ 48' 36''$;

2) $\cos 99^\circ 25' 35''$;

4) $\cot 140^\circ 40'$.

3. Taandada 45° -st väiksemale nurgale:

1) $\sin 121^\circ 40'$;

5) $\tan 160^\circ 27' 32''$;

2) $\sin 163^\circ 35'$;

6) $\tan 106^\circ 32'$;

3) $\cos 158^\circ 17'$;

7) $\cot 120^\circ 28' 40''$;

4) $\cos 98^\circ 21'$;

8) $\cot 140^\circ 42'$.

Lihtsustada avaldised:

$$4. \frac{\tan(180^\circ - \alpha)}{\cot(90^\circ - \alpha)}.$$

$$5. \frac{\cos^2(90^\circ - \alpha) - 1}{\cos(180^\circ - \alpha)}.$$

$$6. \sin(\pi - \alpha) \cdot \cot(\pi - \alpha).$$

$$7. \frac{\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

$$8. \sin(90^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ + \alpha) + 2 \cos(180^\circ - \alpha).$$

$$9. \cos(90^\circ - \alpha) + \cos(90^\circ + \alpha).$$

$$10. \tan 43^\circ \cdot \tan 45^\circ \cdot \tan 47^\circ.$$

$$11. \cos(180^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ + \alpha) \cdot \tan(180^\circ - \alpha) \cdot \cot(90^\circ + \alpha).$$

$$12. \tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \cdot \cot(\pi - \alpha) + \cot(\pi - \alpha) \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

$$13. \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \tan(\pi - \alpha)}{\cot\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \sin(\pi - \alpha)}$$

$$14. \frac{\tan(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \tan(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \cot(90^\circ + \alpha) \tan(90^\circ + \alpha)}$$

$$15. \text{ Näidata, et } \sin(45^\circ + \alpha) = \cos(45^\circ - \alpha); \\ \cos(45^\circ + \alpha) = \sin(45^\circ - \alpha) \text{ jne.}$$

§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid.

Trigonomeetriliste funktsioonide tabelite abil leida järgmiste funktsioonide numbrilised väärtused:

$$1. \begin{array}{lll} 1) \sin 15^\circ; & 2) \sin 45^\circ; & 3) \sin 60^\circ; \\ 4) \sin 73^\circ; & 5) \sin 38^\circ 30'; & 6) \sin 69^\circ 24'; \\ 7) \sin 11^\circ 50'; & 8) \sin 87^\circ 10'. & \end{array}$$

$$2. \begin{array}{lll} 1) \tan 20^\circ; & 2) \tan 45^\circ; & 3) \tan 85^\circ; \\ 4) \tan 72^\circ 30'; & 5) \tan 17^\circ 42'; & 6) \tan 53^\circ 13'; \\ 7) \tan 20^\circ 48'; & 8) \tan 83^\circ 07'; & 9) \tan 85^\circ 28'; \\ 10) \tan 88^\circ 30'; & 11) \tan 89^\circ 48'; & 12) \tan 89^\circ 59'. \end{array}$$

$$3. \begin{array}{lll} 1) \cos 65^\circ; & 2) \cos 45^\circ; & 3) \cos 30^\circ; \\ 4) \cos 73^\circ; & 5) \cos 38^\circ 30'; & 6) \cos 20^\circ 24'; \\ 7) \cos 61^\circ 10'; & 8) \cos 78^\circ 46'; & 9) \cos 2^\circ 52'; \\ 10) \cos 1^\circ 20'. & & \end{array}$$

$$4. \begin{array}{lll} 1) \cot 20^\circ; & 2) \cot 45^\circ; & 3) \cot 37^\circ 30'; \\ 4) \cot 71^\circ 24'; & 5) \cot 69^\circ 13'; & 6) \cot 19^\circ 37'; \\ 7) \cot 88^\circ 15'; & 8) \cot 5^\circ; & 9) \cot 2^\circ 27'; \\ 10) \cot 90^\circ; & 11) \cot 1^\circ 53'. & \end{array}$$

Leida teravnurgad, kui on antud nende järgmised funktsioonide väärtused:

$$5. \begin{array}{ll} 1) \sin \alpha = 0,3420; & 2) \sin \beta = 0,5948; \\ 3) \sin \gamma = 0,842; & 4) \sin x = 0,9293; \\ 5) \sin y = 1,0024; & 6) \sin z = 0,3932. \end{array}$$

6. 1) $\tan \alpha = 0,4452$;
 3) $\tan \gamma = 2,675$;
 5) $\tan y = 5,558$;
 7) $\tan u = 0,42$;
 9) $\tan w = 6,63$.

2) $\tan \beta = 11,43$;
 4) $\tan x = 0,5452$;
 6) $\tan z = 0,5$;
 8) $\tan v = 12,9$;

7. 1) $\cos \alpha = 0,891$;
 3) $\cos \gamma = 0,6361$;
 5) $\cos y = 0,8189$;

2) $\cos \beta = 0,910$;
 4) $\cos x = 1,0008$;
 6) $\cos z = 0,4485$.

8. 1) $\cot \alpha = 2,747$;
 3) $\cot \gamma = 1,768$;
 5) $\cot y = 0,6946$;
 7) $\cot u = 7,115$;
 9) $\cot w = 20$.

2) $\cot \beta = 0,4142$;
 4) $\cot x = 1,4948$;
 6) $\cot z = 1,6946$;
 8) $\cot v = 10,23$;

Leida tabelite abil järgmised nürinurkade funktsioonide väärtused:

9. $\sin 105^\circ$; $\sin 172^\circ 08'$; $\sin 140^\circ 15'$; $\sin 115^\circ 22'$.
 10. $\cos 118^\circ$; $\cos 156^\circ 30'$; $\cos 98^\circ 42'$; $\cos 169^\circ 17'$.
 11. $\tan 121^\circ$; $\tan 160^\circ 24'$; $\tan 101^\circ 41'$; $\tan 147^\circ 39'$.
 12. $\cot 175^\circ$; $\cot 124^\circ 30'$; $\cot 171^\circ 13'$; $\cot 111^\circ 11'$.

§ 6. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

T ä h i s t u s i. Täisnurkses kolmnurgas ABC nurk $A = \alpha$, nurk $B = \beta$, nurk $C = 90^\circ$, kaatet $BC = a$, kaatet $AC = b$ ja hüpotenuus $AB = c$.

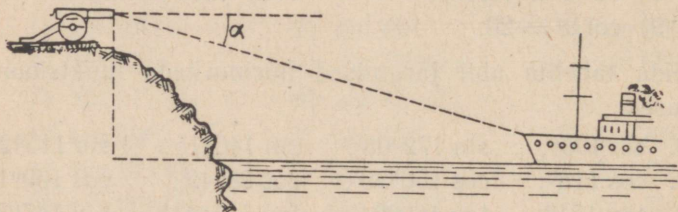
E 1. On antud täisnurkne kolmnurk ABC . Arvutada:
 1) $\sin \alpha$ ja $\tan \alpha$, kui $a = 48$ cm ja $c = 50$ cm; 2) $\tan \alpha$ ja $\cos \alpha$, kui $a = 15$ m ja $b = 20$ m; 3) $\tan \beta$ ja $\cos \beta$, kui $b = 8,4$ cm ja $c = 8,5$ cm.

E 2. Täisnurkse kolmnurga ABC külgede pikkused sentimeetris väljenduvad arvudega $a = 7\frac{1}{5}$ ja $c = 17$. Arvutada nurga β funktsioonid.

3. Arvutada täisnurkses kolmnurgas ABC : 1) kaatet a , kui on antud hüpotenuus $c = 30,6$ cm ja $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; 2) hüpotenuus c , kui on antud $a = 51$ cm ja $\sin \alpha = 0,75$.

4. Arvutada täisnurkse kolmnurga ABC kaatet a , kui: 1) $b = 14$ m ja $\tan \alpha = 0,72$; 2) $b = 20,4$ dm ja $\tan \alpha = 1,5$.

5. Õhulaev sattus helgiheitja kiirtekimpu, kui helgiheitja telg moodustas rõhttasapinnaga nurga 47° . Samal hetkel oli õhulaeva kaugus helgiheitjast $3,5$ km. Arvutada: 1) õhulaeva kõrgus maapinnast, 2) õhulaeva rõhtne kaugus helgiheitjast (vastuste murdosad ümardada kahekohalisteks).



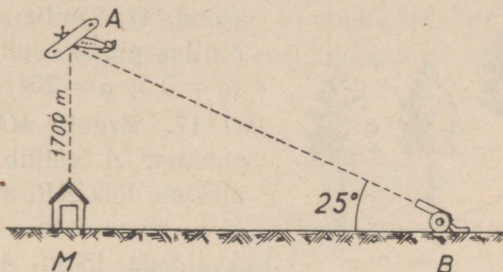
Joon. 2.

6. Patarei on paigutatud 150 m kõrgusele kaljule. Merel ujuva märgi (joon. 2) alangnurk leiti olevat 9° . Kui suur on märgi kaugus patareist (rõhtsihis)?

7. Kindlustisest, mille suurtükid asetsevad 330 m kõrgemal merepinnast, on näha allveelaeva periskoop 1500 m kaugusel. Leida nurk, mille võrra tuleb pöörata suurtükiraudu rõhtsihist allapoole, et nad oleksid suunatud allveelaevale.

8. Lennukilt signaliseeritakse patareile, et lennuk on parajasti märgi kohal 1700 m kõrgusel (joon. 3). Samal hetkel leiab vaatleja patareis, et lennuki kõrgusnurk on 25° . Arvutada patarei kaugus märgist (rõhtsihis).

9. Jõe laiuse määramiseks võetakse jõe ühel kaldal otse vee lähedal baas AB , mille pikkus on a . Teisel kaldal vee läheduses kasvav puu C on näha baasi ühest otspunktist suunas, mis on risti baasiga, ja teisest otspunktist suunas, mis baasiga moodustab nurga β . Arvutada jõe laius, kui $a = 42$ m ja $\beta = 25^{\circ}28'$.



Joon. 3.

10. Punktis, mis asetseb a meetri kaugusel torni jala keskpunktist, on torni tipu kõrgusnurk α . Arvutada torni kõrgus ($a = 86,6$; $\alpha = 22^{\circ}17'$).

11. Vaatamisel aknast, mille kõrgus maapinnast on $h = 12$ m, on jõekallaste alangnurgad $\alpha_1 = 17^{\circ}$ ja $\alpha_2 = 45^{\circ}$. Kummagi nurga tasapind on risti jõe sihiga. Arvutada jõe laius.

12. Mägiraudtee tõuseb tee pikkuse iga 30 m kohta 1 m võrra. Leida raudtee tõusunurk.

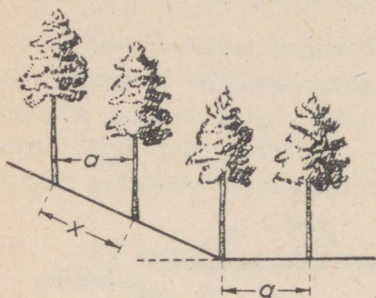
13. Sammunud mäkke 1050 m, oli jalakäija tõusnud 90 m kõrgusele mäejala tasapinnast. Leida mäenõlva tõusunurk (keskmise).

14. Nivelleerimisel tehti kindlaks, et ühtlaselt tõusev tänav tõuseb oma pikkuse 728 m kohta 37,4 m võrra. Leida tänava tõusunurk ja rõhtprojektsiooni pikkus.

15. Künkale on püstitatud a meetri pikkune latt. Mingist punktist, mis asetseb künkajala tasapinnal b meetri kaugusel

lati ülemisest otsast, on see ots näha rõhttasapinnaga nurgi α . Avaldada ja arvutada künka kõrgus ($a=2$; $b=14$; $\alpha=63^{\circ}18'$).

16. Puud kavatsetakse istutada a meetri kaugusele üksteisest. Kui kaugusele üksteisest tuleb kaevata augud



Joon. 4.

puude istutamiseks mäenõlval (joon. 4), mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on α ($a=3,5$; $\alpha=25^{\circ}18'$)?

M 17. Sirgel MN olevast punktist A väljub a meetri pikkune lõik AB , mis sirgega MN moodustab nurga α . Avaldada lõigu AB projektioon sirgel MN ja jälgida selle projektiooni muutumist

nurga α muutudes 90° -st 0° -ni ja vastupidi: 0° -st 90° -ni.

G 18. Ehitis, mille kõrgus on 30 m, heidab 45 m pikkuse varju. Arvutada päikese kõrgus.

19. Keskpäeval, kui päikese kõrgus on 28° , heidab vabrikukorsten 76 m pikkuse varju. Arvutada korstna kõrgus.

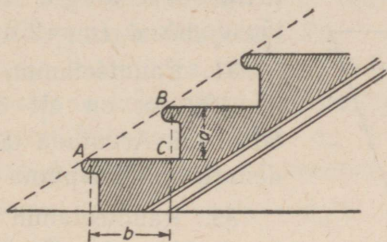
F 20. Kui kõrgel on päike, kui: 1) seisva inimese vari on kaks korda lühem kui inimese kõrgus; 2) vari on kaks korda pikem kui inimese kõrgus ja 3) vari on $2\frac{1}{2}$ korda pikem kui inimese kõrgus?

F 21. Püsti seisva varda vari on $\frac{1}{n}$ võrra lühem kui varras. Kui kõrgel on päike ($n=10,5$)?

G 22. Haubits H , mis 2500 m kauguselt tulistab märki T , sai käsu tuli üle kanda 1500 m kaugusel märgist T asetsevale märgile S . Missuguse nurga võrra peab pöörama suurtükki, kui sirge ST on risti sirgega HT ?

23. Kaks punkti, mis ühtaegu väljuvad täisnurga tipust, liiguvad ühtlaselt üks mööda täisnurga üht haara ja teine mööda teist haara; üks punkt kulgeb a meetrit ja teine b meetrit sekundis. Kui suuri nurgi φ esimese punkti liikumise suunaga on temast näha teine punkt?

24. Kivist majatrepi (joon. 5) iga käik (s. o. trepiosa kahe platvormi vahel) sisaldab 15 trepiastet. Iga astme laius $b = 27$ cm ja kõrgus $a = 18$ cm. Leida trepi tõusunurk.



Joon. 5.

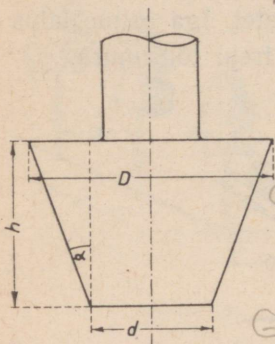
25. Majatrepi astme laius on 25 cm. Kui suur peab olema trepiastme kõrgus, et trepi tõusunurk oleks 40° ?

26. Kaks sirget tänavat lõikub teineteisega nurgi $51^\circ 50'$. Ühte neist on vaja 1625 m kaugusel lõikumiskohast lühimat teed mööda ühendada teisega. Arvutada selle põiktänava pikkus.

27. Väljaspool ringjoont, mille keskpunkt on Q , asetseva punkti kaugus keskpunktist on $AO = c = 2,53$ m. Punkti A on joonestatud ringjoonele puutuja AC , mis sirgega AO moodustab nurga $\alpha = 38^\circ 46'$. Leida raadiuse (r) ja puutuja lõigu (x) pikkused.

28. Avaldada täisnurkse kolmnurga ümber joonestatud ringjoone raadius, kui kolmnurga kaatet on a detsimeetrit ja selle lähisnurk on β .

29. Joonisel 6 kujutatud võlli koonilise osa moodustaja tõus on 12%, s. o. kõrguse iga 100 mm kohta raadius suureneb 12 mm võrra. Leida moodustaja tõusunurk α ja läbimõõt D ($h=105$ mm, $d=80$ mm).



Joon. 6.

30. Joonisel 6. antud tüvikoonuse põhjade läbimõõdud on d ja D . Koonuse moodustaja tõus on $1:n$. Leida tüvikoonuse kõrgus h ja moodustaja tõusunurk α ($n=20$).

31. Raudteetamm, mille kõrgus on 120 m, on alt 360 m ja ülalt 60 m lai. Arvutada tammi nõlva kaldeenurk rõhttasapinna suhtes.

32. Raudteetamm on ülalt 60 m ja alt 240 m lai. Tammi nõlvad moodustavad rõhttasapinnaga nurga 35° . Arvutada tammi kõrgus.

33. Võrdhaarse trapetsi kujulise ristlõikega tammi nõlva kaldeenurgale on ehitamisel antud suurim võimalik väärtus $\varphi=39^\circ$. Trapetsi alumine alus $a=10$ m ja kõrgus $h=3$ m. Leida trapetsi ülemine alus.

34. Võrdhaarse kolmnurga aluse b ja haara a järgi leida tema alusnurk ($b=28,13$; $a=17,53$).

35. Võrdhaarse kolmnurga aluse b ja kõrguse h järgi leida tema tipunurk ($b=31,26$; $h=20,75$).

36. Ringjoone raadiuse R ja kaare a järgi leida sellele kaarele vastav kõõl ($R=4,175$; $a=37^\circ 42'$).

37. Ringis, mille raadius $R=35,8$ dm, on joonestatud kõõl, mille pikkus $a=28,7$ dm. Leida kõõlule vastava kaare suurus kraadides ja minuteis ning kõõlu kaugus keskpunktist.

38. Kõõlu pikkus on $\frac{3}{4}$ ringi läbimõõdust. Leida kõõlule vastava kaare suurus kraadides ja minuteis.

39. Kõõl jaotab ringjoone kaheks osaks, mille suhe on $m:n$. Ringjoone pikkus on c . Leida kõõlu kaugus keskpunktist ($m:n=3:7$; $c=120$).

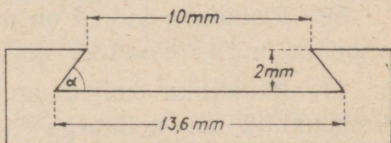
40. Piirdenurk α toetub kõõlule, mille pikkus on a sentimeetrit. Avaldada ringi raadius.

41. On antud kaks jõudu: $P=4,372$ kG ja $Q=5,645$ kG, mis on suunatud risti teineteisega. Kui suur on resultant ja kui suure nurga ta moodustab jõuga P ?

42. Võrdhaarse kolmnurga alus on b detsimeetrit ja alusnurk on α . Avaldada kolmnurga übermõõt.

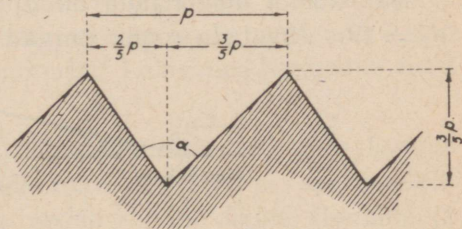
43. Võrdhaarse kolmnurga alus on b detsimeetrit ja haarale joonestatud kõrgus on h detsimeetrit. Avaldada kolmnurga alusnurk.

44. Joonisel 7 on kujutatud nuudi ristlõige. Arvutada nuudi külgede kaldenurk α põhja suhtes.



Joon. 7.

45. Joonisel 8 on kujutatud suurtükiluku keermestik. Arvutada selle keermestiku lõikamiseks vajaliku noa teritusnurk α .



Joon. 8.

46. Kolm punkti A , B ja C asetsevad nii, et kaardil nende vahelised kaugused on kujutatud lõikudega $AB=0,85$ dm,

$AC=1,20$ dm ja $BC=1,20$ dm. Punkt B asetseb täpselt põhja suunas punktist A . Leida suund punktist A punkti C .

F 47. Sirge kangi õlgade pikkused on 5 dm ja 15 dm. Mitme detsimeetri võrra tõuseb (püstsuunas) kangi kumbki ots, kui kangi pöörata rõhtseisust 1) 40° , 2) 60° ja 3) 90° võrra?

G 48. Laev liikus alloleva tabeliga kirjeldatud teed mööda. Arvutada kaugused, mille võrra laev liikus lähtekohast põhja poole ja ida poole.

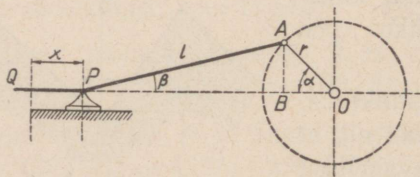
Suund	Kulgetud tee pikkus kilomeetris
23° NO	10
37° NO	13
82° NO	15

M 49. Ristküliku külgede a ja b järgi leida nurgad, mis ta diagonaal moodustab külgedega ($a = 75,2$ dm; $b = 63,6$ dm).

E 50. Ristküliku küljed on a ja b . Leida tema diagonaalide vaheline nurk ($a = 13,5$ dm; $b = 7,4$ dm).

51. Ristküliku küljed on a ja b sentimeetrit. Külgede keskpunktid on nelinurga tippudeks. Leida nurgad, mis selle nelinurga küljed moodustavad ristküliku külgedega ($a = 23,76$; $b = 58,28$).

52. Rombi diagonaalid on d_1 ja d_2 sentimeetrit ($d_1 = 28$; $d_2 = 49$). Arvutada rombi nurgad.



Joon. 9.

F T 53. 1) AP (joon. 9) on mootori keps ja OA on selle ristpea. Leida lõikude OB ja AB pikkused, kui $OA = r = 0,4$ m

ja nurk $\alpha = 30^\circ$. Seejärel arvutada nurk APB ja kepsu projektsiooni PB pikkus teljel OP , teades, et kepsu pikkus $l = 2$ m.

2) Tõestada, et nurkade α ja β vahel, mis keps ja ristpea moodustavad rõhttasapinnaga, valitseb seos

$$\sin \beta = \frac{r}{l} \sin \alpha.$$

3) Leida nurga α mõnedele väärtustele vastavad nurga β väärtused, kui $\frac{r}{l} = \frac{1}{5}$ ($\alpha = 0^\circ; 10^\circ; 20^\circ; 30^\circ; 40^\circ; 50^\circ; 60^\circ; 70^\circ; 80^\circ; 90^\circ$).

4) Miks nurk β omandab (selle ülesande p. 2 antud valemi järgi) suurima väärtuse, kui $\alpha = 90^\circ$?

5) Kui suur on nurk β , kui keps ja ristpea on risti teineteisega?

6) Olgu punkt P asendis Q , kui $\alpha = 0$. Näidata, et kepsupea nihet $QP = x$ võib arvutada valemi

$$x = r(1 - \cos \alpha) + l(1 - \cos \beta)$$

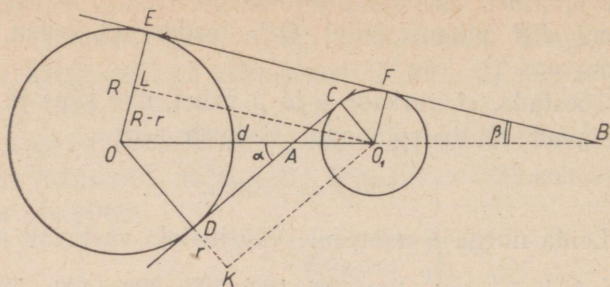
järgi.

Arvutada suurus x ülalantud nurga α väärtuste puhul (p. 3), kui ristpea pikkus $r = 300$ mm ja kepsu pikkus $l = 1500$ mm.

54. On antud ring, mille raadius on r sentimeetrit. Punktist, mille kaugus keskpunktist on a sentimeetrit, on ringile joonestatud kaks puutujat. Leida nendevaheline nurk ($r = 3,35$; $a = 8,32$).

55. Kahe ringi (joon. 10) keskpunktide vaheline kaugus on d sentimeetrit ning nende raadiused on R ja r sentimeetrit. Leida nurgad α ja β , mis nende ringide ühine sisemine ja ühine välimine puutuja moodustavad nende keskpunkte läbiva sirgega ($R = 3,065$; $r = 1,007$; $d = 6,245$).

56. 5 dm pikkuse raadiusega ringjoone punktist A on joonestatud kaks kõõlu pikkustega 7 dm ja 8 dm. Arvutada



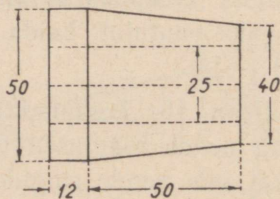
Joon. 10.

nende kõõlude vaheline nurk, käsitledes kahte juhtumit: kui kõõlud asetsevad 1) üks ühel ja teine teisel pool raadiust AO ning 2) ühel ja samal pool seda.

E 57. Võrdhaarse kolmnurga alusele joonestatud kõrgus on h detsimeetrit ja haarale joonestatud kõrgus on h_1 detsimeetrit. Leida kolmnurga alusnurk ($h = 2,5$; $h_1 = 3$).

B 58. Võrdhaarse kolmnurga haar on a sentimeetrit ja tipunurk on β . Avaldada kolmnurga ümber ja sisse joonestatud ringjoonte raadiused (R ja r).

B 59. Täisnurkse kolmnurga kaatet on b meetrit ja hüpoteenuusile joonestatud kõrgus on h meetrit. Leida kolmnurga üks teravnurk ning seejärel teine kaatet a ja hüpoteenuus c .



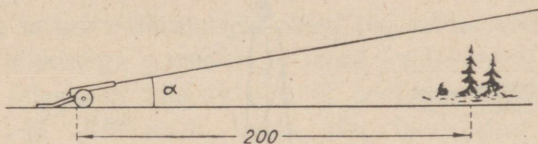
Joon. 11.

E 60. Arvutada joonisel 11 kujutatud puksi koonilise osa (telglõikel olevate) moodustajate vaheline nurk.

61. Arvutada (10^0 -se täpsusega) järgmiste tüvikoonuse-
kujuliste treitud esemete moodustajate vahelised nurgad:

Suurem läbimõõt mm-eis	50	75	75	75	100	100
Väiksem „ „	25	25*	50	50	25	25
Koonuse pikkus „	50	75	75	25	40	25

62. Maakera läbimõõdu järgi, mille pikkus on 12740 km, ja koha geograafilise laiuse φ järgi leida selle koha geograafilise paralleeli pikkus ($\varphi = 57^{\circ}04'33''$).



Joon. 12.

63. Kui suur peab olema suurtüki tõstenurk α (joon. 12), kui suurtükk peab laskma üle metsa, mis on suurtükist 200 m kaugusel, ja mille puuladvad ulatuvad 15 m üle suurtüki tasapinna? Arvutamisel lisatakse varjendi (praegusel juhul metsa) kõrgusele 1% suurtüki ja varjendi vahelisest kaugusest.

64. Suurtükki ja märki ühendav sirge moodustab rõhttasapinnaga nurga, mida nimetatakse märgi kõrgusnurgaks. Arvutada märgi kõrgusnurk, kui märk asetseb 65 meetrit kõrgemal suurtüki tasapinnast ja kaardil, mille mõõt on $\frac{1}{10000}$, märgi kaugus suurtükist on 31,5 cm.

65. Punktide A ja B kaugus teineteisest on 15 cm. Punktide ees asetseb tasapeegel, mille kaugus ühest punktist on $a = 5$ cm ja teisest on $b = 7$ cm. Kui suur on niisuguse kiire langemisnurk, mis, lähtunud punktist A , pärast peegeldumist läbib punkti B ?

§ 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine.

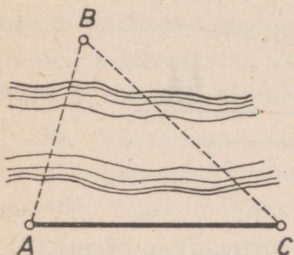
Siinusetoreem.

1. Lahendada kolmnurk järgmiste andmete järgi:

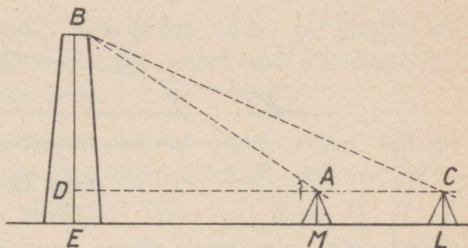
1) $a = 109$; $\beta = 33^{\circ}24'$; $\gamma = 66^{\circ}59'$;

2) $c = 16$; $\alpha = 143^{\circ}08'$; $\beta = 22^{\circ}37'$.

2. On vaja määrata tehase A kaugus teisel pool jõge asetsevast raudteejaamast B (joon. 13). On teada, et $AC = 100$ m, $\angle BAC = 74^{\circ}$ ja $\angle BCA = 44^{\circ}$.



Joon. 13.

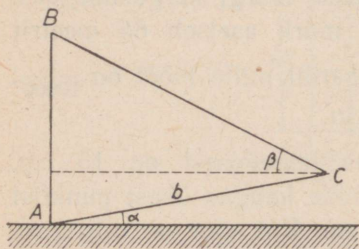


Joon. 14.

3. Ligipääsmatu vabrikukorstna kõrguse määramiseks mõõdeti baas $AC = 11$ m, mille pikendus läbib korstna jalga (joon. 14), ning nurgad $BAD = 49^{\circ}$ ja $BCD = 35^{\circ}$. Nurgamõõtja kõrgus oli 1,37 m. Kui kõrge on korsten?

M

4. Vertikaalse eseme AB kõrguse määramiseks võeti tema aluspunktis A algav baas AC , mille pikkus on b meetrit ja mis punkti A punkti C suunas tõuseb nurgi α° röhhtasapinna suhtes (joon. 15). Baasi otspunktist B eseme tipp C on näha kõrgusnurgas β° . Avaldada eseme kõrgus.



Joon. 15.

5. Mäenõlval, mis rõhttasapinnaga moodustab nurga β° , kasvab puu, mis heidab varju nõlva suurima kalde sihis. Päikese α° -se kõrguse puhul on puu varju pikkus l meetrit. Avaldada puu kõrgus.

6. Rööpküliliku ühe diagonaali pikkus on d ning ta jaotab rööpküliliku nurga osadeks α° ja β° . Avaldada rööpküliliku küljed.

7. On antud kolmnurga külg a ning selle lähisnurgad β° ja γ° . Avaldada kolmnurga kõigi nurkade poolitajad l_a , l_b ja l_c .

8. Jõe laiuse määramiseks võeti jõe kaldal vee läheduses baas AB pikkusega c meetrit ja teisel kaldal valiti viseerimiseks vee läheduses kasvav puu C ; seejärel mõõdeti nurgad $CAB = \alpha$ ja $ABC = \beta$. Leida jõe laius puu C kohal ($c = 400$; $\alpha = 45^{\circ}$; $\beta = 30^{\circ}$).

9. Kolmnurgas ABC on antud: $\angle A = \alpha^{\circ}$, $\angle C = \gamma^{\circ}$ ja kõrgus $AD = h_a$ meetrit. Avaldada kolmnurga küljed.

Kolmnurga pindala.

10. Kolmnurga ABC pindala määramiseks mõõdeti tema küljed a ja b ning nende vaheline nurk γ . Leida kolmnurga pindala ($a = 125$ m; $b = 160$ m; $\gamma = 52^{\circ}$).

11. Võrdhaarse kolmnurga haar on b ja tipunurk on α . Leida kolmnurga pindala ($b = 10$ m; $\alpha = 75^{\circ}20'$).

12. Kolmnurga küljed a ja b on muutumatud, nende vaheline nurk γ aga muutub vahemikus 0° kuni 180° . Mis suguse nurga γ väärtuse puhul omandab kolmnurga pindala suurima väärtuse?

13. Tõestada, et rööpküliliku pindala võrdub tema kahe lähiskülje ja nendevahelise nurga siinuse korrutisega.

14. Tõestada, et iga nelinurga pindala võrdub tema diagonaalide ja nende vahelise nurga siinuse korrutisega.

15. Rombi külje a ja nurga α järgi leida tema pindala ($a = 7,5$ cm; $\alpha = 22^\circ 10'$).

16. Ristküliku diagonaali d ja diagonaalide vahelise nurga φ kaudu avaldada ristküliku pindala Q . Leida pindala Q suurim väärtus nurga φ muutumisel 0° -st 180° -ni.

17. Trapetsi alused on a ja b , haar on c ning selle lähisnurk on α . Avaldada trapetsi pindala.

18. Rööpküliku pindala on 12 dm², ta küljed on $a = 3,7$ dm ja $b = 4,2$ dm. Arvutada rööpküliku nurgad.

19. Kolmnurga pindala on $71,24$ cm², ta küljed on $a = 15$ cm ja $b = 13$ cm. Leida nende külgede vaheline nurk.

20. Maatükil on kolmnurga kuju, mille üks külg on c ning teised küljed moodustavad sellega nurgad α ja β . Leida maatüki pindala ($c = 20$ m; $\alpha = 65^\circ 30'$; $\beta = 84^\circ 30'$).

21. Metsatüki kaks sirgjoonelist piirjoont ühinevad nurgi $BAC = \alpha$. Sirgjoone DE abil, mis küljega AC moodustab nurga $AED = \gamma$, on vaja metsatükist eraldada osa DAE , mille pindala on Q . Seda sirget on kerge ajada, kui on teada külgede AE ja AD pikkused. Leida nende külgede pikkused.

22. Kolmnurgas ABC on teada: nurk $C = \gamma$ ning tippudest A ja B joonestatud kõrgused h_a ja h_b . Avaldada kolmnurga pindala.

23. Avaldada kolmnurga pindala nurkade α ja β ning kõrguse h_b kaudu.

Koosinuseteoreem.

24. Kolmnurgas ABC on antud: $b = 7$, $c = 10$ ja $\alpha = 56^\circ 29'$. Leida külg a .

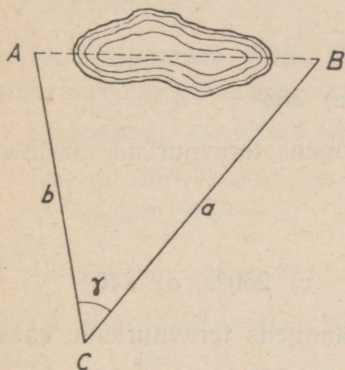
25. Lahendada kolmnurk ABC järgmiste andmete järgi:

1) $a = 10$; $b = 15$; $\gamma = 123^{\circ}17'$;

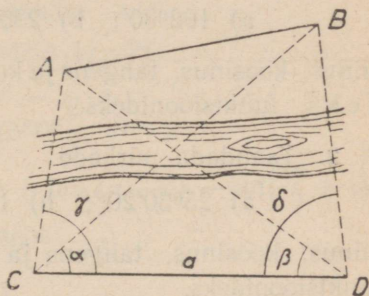
2) $a = 0,2$; $c = 0,6$; $\beta = 23^{\circ}28'$;

3) $c = 40$; $a = 100$; $\beta = 16^{\circ}28'$.

26. Punktid A ja B asetsevad nii, et nende vahelise kauguse otsene mõõtmine on takistatud (joon. 16). Selle kauguse kaudseks määramiseks valiti kolmas punkt C nii, et mõlemad punktid on nähtavad sellest punktist ja neisse võib



Joon. 16.



Joon. 17.

pääseda sellest punktist; seejärel mõõdeti kaugused $BC = a$ ja $AC = b$ ning nurk $ACB = \gamma$. Arvutada kaugus AB ($a = 100$ m; $b = 80$ m; $\gamma = 48^{\circ}57'$).

27. Kolmnurgas ABC on antud küljed $a = 3$, $b = 4$ ja $c = 6$. Arvutada nurk γ .

28. Rööpküliku küljed on 4 m ja 5 m ning üks nurk on 52° . Arvutada rööpküliku diagonaalid.

29. Ainepunktile on rakendatud jõud $P = 100$ kG ja $Q = 200$ kG, mis moodustavad teineteisega nurga $\alpha = 50^{\circ}$. Arvutada resultandi R suurus ning nurgad, mis ta moodustab jõududega P ja Q .

M 30. Ligipääsmatute punktide A ja B (joon. 17) vahelise kauguse määramiseks mõõdeti baas CD , mis ei kulge punktide A ja B vahelt ja mille pikkus on a meetrit, ning nurgad $ACD = \gamma$, $BCD = \alpha$, $ADC = \beta$ ja $BDC = \delta$. Arvutada kaugus AB , kui $a = 2000$, $\alpha = 52^{\circ}40'$, $\beta = 42^{\circ}01'$, $\gamma = 86^{\circ}40'$ ja $\delta = 81^{\circ}15'$.

§ 8. Taandamisvalemid.

M 1. Taandada nurkade

a) $162^{\circ}30'$; b) 230° ; c) 335°

siinus, koosinus, tangens ja kootangens teravnurkade samadeks funktsioonideks.

M 2. Taandada nurkade

a) $25^{\circ}30'20''$; b) 130° ; c) 250° ; d) 340°

siinus, koosinus, tangens ja kootangens teravnurkade kaask-funktsioonideks.

M 3. Taandada nurkade

a) 75° ; b) 150° ; c) 200° ; d) 315°

trigonomeetrilised funktsioonid funktsioonideks, mille argumendid ei ületa 45° .

Taandada vähimale positiivsele argumendile:

- | | |
|---|---|
| H 4. a) $\sin 2000^{\circ}$; | b) $\sin (-1000^{\circ})$; |
| c) $\cos 1500^{\circ}$; | d) $\cos (-2900^{\circ})$. |
| H 5. e) $\tan 600^{\circ}$; | f) $\tan (-40^{\circ})$; |
| g) $\cot 1305^{\circ}$; | h) $\cot (-300^{\circ})$. |
| H 6. i) $\sec 1900^{\circ}$; | k) $\sec (-2150^{\circ})$; |
| l) $\operatorname{cosec} 500^{\circ}$; | m) $\operatorname{cosec} (-80^{\circ})$. |

7. a) $\sin(-7,3\pi)$; b) $\cos \frac{34}{9} \pi$;
 c) $\tan(-\frac{79}{11} \pi)$; d) $\operatorname{cosec}(-0,6\pi)$.

Arvutada:

8. a) $\sin(-1350^\circ)$; b) $\cos 720^\circ$;
 c) $\tan 900^\circ$; d) $\cot(-450^\circ)$.

9. a) $\sin \frac{19}{6} \pi$; b) $\cos \frac{11}{2} \pi$;
 c) $\tan \frac{16}{3} \pi$; d) $\sec 9\pi$.

10. Väljendada nurga 50° trigonomeetrilised funktsioonid tema kõrvunurga funktsioonide kaudu.

Lihtsustada avaldised ülesandeis 11—21:

11. $\sin(90^\circ + \alpha) + \cos(180^\circ - \alpha) +$
 $+ \tan(270^\circ + \alpha) + \cot(360^\circ - \alpha)$.

12. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(\pi - \alpha) + \tan(\pi - \alpha) - \cot\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$.

13. $\sin^2(270^\circ - \alpha) + \sin^2(360^\circ - \alpha)$.

14. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \tan(2\pi - \alpha)$.

15. $a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$.

16. $\frac{\sin(-\alpha) \cdot \tan(-\alpha)}{\cos(-\alpha) \cdot \cot(-\alpha)}$.

17. $\frac{\operatorname{cosec}(-\alpha) \cdot \operatorname{cosec}(90^\circ + \alpha)}{\sec(-\alpha) \cdot \sec(180^\circ + \alpha)}$.

18. $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cdot \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\tan(\pi - \alpha) \cdot \sec(2\pi - \alpha)}$.

19. $\sin 160^\circ \cdot \cos 110^\circ + \sin 250^\circ \cdot \cos 340^\circ +$
 $+ \tan 110^\circ \cdot \tan 340^\circ$.

20. $\frac{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \tan 132^\circ \cdot \operatorname{cosec} 222^\circ \cdot \sin 90^\circ}{\cos(180^\circ + \alpha) \cdot \sec 312^\circ \cdot \cot 48^\circ \cdot \cos 180^\circ}$.

21. $\frac{\tan(270^\circ - \alpha) \cdot \sin 130^\circ \cdot \operatorname{cosec} 220^\circ \cdot \sin 270^\circ}{\cot(180^\circ - \alpha) \cdot \cos 50^\circ \cdot \sec 320^\circ \cdot \cos 360^\circ}$.

22. Teisendada järgmiste nurkade trigonomeetrilised funktsioonid:

a) $\alpha - 90^\circ$; b) $\alpha - 180^\circ$; c) $\alpha - 270^\circ$; d) $\alpha - 360^\circ$.

23. Leida $\cos x$ võrrandist

$$3 \sin^2 (360^\circ - x) - 7 \sin (x - 90^\circ) + 3 = 0.$$

24. Leida $\sin x$, kui

$$\sin \left(x - \frac{\pi}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{2} = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right).$$

25. Leida $\tan x$ võrrandist

$$\sin (2\pi - x) \cos (\pi - x) + \sin^2 \left(\frac{3}{2}\pi - x \right) - \sin^2 (2\pi - x) = 0.$$

Lahendada võrrandid (ülesandeis 26–30):

26. $\sin^2 (270^\circ - x) + 2 \cos (360^\circ - x) = 3.$

27. $\sin (x - 90^\circ) = -\sin (x - 180^\circ).$

28. $\cos (\pi + x) = -\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$

29. $\tan (x + \pi) = \tan \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$

30. $\sin (x + 90^\circ) = -\cot (360^\circ - x).$

§ 9. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid.

Summa ja vahe siinus ja koosinus.

1. Arvutada $\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)$, kui $\sin \alpha = 0,625$ ja $\sin \beta = 0,8$.

2. Arendada ja lihtsustada:

a) $\sin (\alpha + 60^\circ) + \sin (\alpha - 60^\circ);$

b) $\cos (30^\circ + \alpha) - \cos (30^\circ - \alpha).$

3. On antud: $\cos \alpha = 0,6$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Arvutada $\sin (\alpha + 30^\circ)$.

- M 4. On antud: $\sin \alpha = \sqrt{0,2}$; $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Arvutada $\cos(60^\circ + \alpha)$.
- M 5. On antud: $\cos \alpha = 0,5$; $\sin \beta = -0,4$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$; $180^\circ < \beta < 270^\circ$. Arvutada $\sin(\alpha - \beta)$ ja $\cos(\alpha + \beta)$.
- M 6. On antud: $\sin \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = -\frac{3}{4}$; α on II veerandi ja β on III veerandi nurk. Arvutada $\sin(\alpha + \beta)$ ja $\cos(\alpha - \beta)$.
- M 7. Arvutada $\sin(\alpha + \beta)$, kui $\sin \alpha = 0,6$ ja $\sin \beta = 0,8$.
- M 8. α ja β on positiivsed teravnurgad:
 $\cos \alpha = \frac{1}{7}$; $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14}$. Arvutada $\cos \beta$.
- M 9. Arvutada:
 a) $\sin 75^\circ$, asendades 75° summaga $45^\circ + 30^\circ$;
 b) $\sin 15^\circ$ ja $\cos 15^\circ$, asendades 15° vahega $45^\circ - 30^\circ$.
- M 10. Rakendada $\sin(\alpha \pm \beta)$ ja $\cos(\alpha \pm \beta)$ arendamise valemid juhtudele: a) $\alpha = 0^\circ$; 90° ; 180° ; 270° ; 360° ;
 b) $\beta = 90^\circ$; 180° ; 270° ; 360° ; c) $\alpha = \beta$.
- TK 11. Kui α ja β on positiivsed nurgad ning $\alpha + \beta < 90^\circ$, siis $\sin(\alpha + \beta) < \sin \alpha + \sin \beta$. Tõestada see lause 1) joonise abil ja 2) valemi abil.
- M 12. $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ja $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ väljendada a) $\tan \alpha$ ja $\tan \beta$ abil; b) $\cot \alpha$ ja $\cot \beta$ abil.
- M 13. Arendada $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ ja $\cos(\alpha + \beta + \gamma)$.
- M 14. On antud: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\sin \beta = \frac{12}{13}$; $\sin \gamma = \frac{7}{25}$, kus α , β ja γ on teravnurgad. Arvutada $\sin(\alpha + \beta + \gamma)$ ja $\cos(\alpha + \beta - \gamma)$.

Summa ja vahe tangens.

- M 15. Arendada ja lihtsustada $\tan(45^\circ \pm \alpha)$.
- M 16. Arvutada $\tan 105^\circ [= \tan(60^\circ + 45^\circ)]$.
- M 17. On antud: $\tan \alpha = 3$. Arvutada $\tan(45^\circ - \alpha)$.

M. 18. On antud: $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ ja $\tan \beta = -2$. Arvutada $\tan(\alpha + \beta)$ ja $\cot(\alpha - \beta)$.

M 19. $\tan(\alpha \pm \beta)$ väljendada $\cot \alpha$ ja $\cot \beta$ kaudu.

M 20. $\cot(\alpha \pm \beta)$ väljendada a) $\cot \alpha$ ja $\cot \beta$ kaudu;
b) $\tan \alpha$ ja $\tan \beta$ kaudu.

M 21. Arendada $\tan(\alpha + \beta + \gamma)$.

Lihtsustada järgmised avaldised (ülesandeis 22—26):

22. $\frac{\sin(\alpha - \beta) + 2 \cos \alpha \sin \beta}{2 \cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha - \beta)}$ 23. $\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$

24. $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$ 25. $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}$

26. $\frac{\sin(45^\circ + \alpha) - \cos(45^\circ + \alpha)}{\sin(45^\circ + \alpha) + \cos(45^\circ + \alpha)}$

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 27—37):

T 27. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

T 28. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$.

T 29. $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta$.

T 30. $(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot (\sin \beta - \cos \beta) =$
 $= \sin(\beta - \alpha) - \cos(\beta + \alpha)$.

T 31. $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta - \cos(\alpha + \gamma) \cdot \sin \gamma =$
 $= \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos \beta - \sin(\alpha + \gamma) \cdot \cos \gamma$.

T 32. a) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$

b) $\frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

T 33. $\cot \alpha - \cot 2\alpha = \operatorname{cosec} 2\alpha$.

T 34. $\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\alpha}{2}$.

T 35. $\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha - \tan \beta =$
 $= \tan(\alpha + \beta) \cdot \tan \alpha \cdot \tan \beta$.

T 36. $\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0$.

37. $\frac{1}{2} (\cos a + \sqrt{3} \cdot \sin a) = \cos (60^\circ - a)$.

38. Kui $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$, kusjuures α ja β on teravnurgad, siis $\alpha + \beta = 45^\circ$. Tõestada see.

39. Kui α , β ja γ on teravnurgad, mille tangensid on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ ja $\frac{1}{8}$, siis $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$. Tõestada see.

40. On antud: $\cot \alpha = \frac{3}{4}$, $\cot \beta = \frac{1}{7}$, α ja β on teravnurgad. Tõestada, et $\alpha + \beta = 135^\circ$.

Lahendada järgmised võrrandid (ülesandeis 41—54):

41. $\sin (x + 30^\circ) + \cos (x - 30^\circ) = 0$.

42. $\cos (\alpha + x) \cdot \cos (\alpha - x) + 0,75 = \cos^2 \alpha$.

43. $\cos (\alpha - \beta) \cdot \sin (\gamma - x) = \cos (\alpha + \beta) \cdot \sin (\gamma + x)$.

44. $\tan (x + 45^\circ) + \tan (x - 45^\circ) = 2 \cot x$.

45. $\sin (x + \alpha) + \sin (x - \alpha) = \cos \alpha$.

46. $\sin (\alpha - x) : \cos (\alpha + x) = a : b$.

47. $\tan (x + \alpha) \cdot \tan (x - \alpha) = m$.

48. $\sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x \cdot \sin x$.

49. $\sin x \cdot \sin 2x = \cos x \cdot \cos 2x$.

50. $\cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 5x$.

51. $\sin (\alpha + x) - \cos x \cdot \sin \alpha = \cos \alpha$.

52. $2 \sin x = \sin (45^\circ - x)$.

53. $\sin (45^\circ - x) = \frac{1}{2} \cos (45^\circ + x)$.

54. $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x\right) + \sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{2}$.

§ 10. Kordse ja murrulise argumendi trigonomeetrilised funktsioonid.

Kordse argumendi funktsioonid.

- M 1. Arvutada: a) $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$, kui $\sin \alpha = 0,8$;
b) $\tan 2\alpha$, kui $\tan \alpha = -3$.
- M 2. Võrdhaarse kolmnurga alusnurga siinus on $\frac{5}{13}$. Arvutada tipunurga siinus ja koosinus.
- T 3. Kui $0^\circ < \alpha < 45^\circ$, siis $\sin 2\alpha < 2 \sin \alpha$. Tõestada see lause: 1) joonise abil ja 2) $\sin 2\alpha$ valemi abil.
- M 4. On antud: $\sin \alpha = 0,8$; $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Arvutada $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$.
- M 5. On antud: $\cos \alpha = \sqrt{\frac{1}{3}}$; $270^\circ < \alpha < 360^\circ$. Arvutada $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$.
- M 6. On antud $\tan \alpha = 3$. Arvutada $\tan 2\alpha$.
- M 7. $\sin 2\alpha$ ja $\cos 2\alpha$ väljendada: a) ainult $\sin \alpha$ kaudu;
b) ainult $\cos \alpha$ kaudu.
- M 8. $\cot 2\alpha$ väljendada: a) $\cot \alpha$ kaudu ja b) $\tan \alpha$ kaudu.
- M 9. $\sec 2\alpha$ väljendada $\sec \alpha$ kaudu.
- M 10. a) $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väljendada $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$ kaudu;
b) $\tan \alpha$ väljendada $\tan \frac{\alpha}{2}$ kaudu.
- M 11. $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ väljendada $\tan \frac{\alpha}{2}$ kaudu.
- M 12. Näidata, et nurga α kõik trigonomeetrilised funktsioonid väljenduvad ratsionaalselt $\tan \frac{\alpha}{2}$ kaudu.
- M 13. On antud $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$. Arvutada $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$.
- M 14. On antud $\cot \alpha = \sqrt{2} + 1$. Arvutada $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ ja $\tan 2\alpha$.

- M 15. Väljendada $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ ja $\tan 3\alpha$ vastavalt $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ ja $\tan \alpha$ kaudu.
- M 16. $\sin 4\alpha$ ja $\cos 4\alpha$ väljendada $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu.

Murrulise argumendi funktsioonid.

- M 17. Arvutada $\sin \frac{\alpha}{2}$, $\cos \frac{\alpha}{2}$ ja $\tan \frac{\alpha}{2}$, kui $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ja $\sin \alpha = -0,6$.
- M 18. Arvutada nurga 15° siinus, koosinus, tangens ja kootangens, võttes $15^\circ = \frac{30^\circ}{2}$. (Võrrelda tulemusi § 9 ülesandes 9 leitud tulemustega.)
- M 19. Arvutada nurga $22^\circ 30'$ ($= \frac{45^\circ}{2}$) siinus, koosinus, tangens ja kootangens.
- M 20. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga koosinus on $-\frac{7}{25}$. Arvutada alusnurga siinus ja koosinus.
- M 21. Arvutada $\sin \frac{\alpha}{4}$, kui $450^\circ < \alpha < 540^\circ$ ja $\sin \alpha = \frac{336}{625}$.
- M 22. Arvutada $\cot \frac{\alpha}{4}$, kui $45^\circ < \alpha < 90^\circ$ ja $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.
- M 23. Kui $\cos \alpha = \frac{40}{41}$ ja $\cos \beta = \frac{60}{61}$, kusjuures α ja β on positiivsed teravnurgad, siis $\sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{1}{41 \cdot 61}$. Kontrollida see.
- M 24. Kontrollida, kas $\tan 7^\circ 30' = \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2$.
- M 25. $\sin \frac{\alpha}{2}$ ja $\cos \frac{\alpha}{2}$ väljendada $\sin \alpha$ kaudu.
- M 26. $\tan \frac{\alpha}{2}$ ja $\cot \frac{\alpha}{2}$ väljendada vastavalt $\tan \alpha$ ja $\cot \alpha$ kaudu.
- M 27. Arvutada $\tan \frac{\alpha}{2}$, kui $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ ja $\tan \alpha = \frac{4}{3}$.

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 28—49):

28. a) $2 \sin (90^\circ - \alpha) \cdot \sin \alpha = \sin 2\alpha;$

b) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha.$

29. a) $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha;$

b) $\left(\sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2 = 1 - \sin \alpha.$

30. a) $\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \sin 2\alpha;$ b) $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha.$

31. $\cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cdot \cos 2\beta = 1.$

32. $\frac{\cos \alpha}{\sec \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha.$

33. $\frac{\cos^2 \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2} - \cot \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha.$

34. a) $\cot \alpha + \tan \alpha = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha;$

b) $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha.$

35. a) $\sin 2\alpha - \tan \alpha = \cos 2\alpha \cdot \tan \alpha;$

b) $\sin 2\alpha - \cot \alpha = -\cos 2\alpha \cdot \cot \alpha.$

36. $\frac{1}{1 - \tan \alpha} - \frac{1}{1 + \tan \alpha} = \tan 2\alpha.$

37. $\tan (\alpha + 45^\circ) + \tan (\alpha - 45^\circ) = 2 \tan 2\alpha.$

38. $2 \sin (45^\circ + \alpha) \cdot \sin (45^\circ - \alpha) = \cos 2\alpha.$

39. $\frac{1 - \tan^2 (45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2 (45^\circ - \alpha)} = \sin 2\alpha.$

40. $\sin 3\alpha \operatorname{cosec} \alpha - \cos 3\alpha \cdot \sec \alpha = 2.$

41. $4 \sin \alpha \cdot \sin (60^\circ - \alpha) \cdot \sin (60^\circ + \alpha) = \sin 3\alpha.$

42. $4 \cos \alpha \cdot \cos (60^\circ - \alpha) \cdot \cos (60^\circ + \alpha) = \cos 3\alpha.$

43. $\tan \alpha \cdot \tan (60^\circ - \alpha) \cdot \tan (60^\circ + \alpha) = \tan 3\alpha.$

44. $\frac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = -\cot \alpha.$

45. $\frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 60^\circ}{\tan^2 \alpha - \cot^2 60^\circ} = \tan 3\alpha \cdot 3 \cot \alpha.$

46. a) $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$;

b) $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

47. a) $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$;

b) $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

48. $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha} = \tan^2 \frac{\alpha}{2}$.

49. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \tan (45^\circ + \alpha)$.

50. Kui $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$, kusjuures α ja β on teravnurgad, siis $\alpha + 2\beta = 45^\circ$. Tõestada see.

51. Kui $\tan \alpha = \frac{1}{7}$ ja $\tan \beta = \frac{1}{3}$, siis $\cos 2\alpha = \sin 4\beta$.

Kontrollida see.

Lahendada järgmised võrrandid (ülesandeis 52—74):

52. $\sin x \cdot \cos x = 0,25$.

53. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0,5$.

54. $1 - \tan^2 x = 2 \tan x$.

55. $\sin 2x = \sin x$.

56. $a \cdot \sin x = b \cdot \cos \frac{x}{2}$.

57. $1 + \sin^2 2x = 4 \sin^2 x$.

58. $\cos 2x = \cos x$.

59. $\cos 2x = 2 \sin^2 x$.

60. $\tan 2x = \tan x$.

61. $\tan 2x = 3 \tan x$.

62. $a(1 + \cos x) = b \cdot \cos \frac{x}{2}$.

63. $1 - \cos x = \sin \frac{x}{2}$.

64. $a(1 + \cos x) = b \cdot \sin x$.

65. $1 - \cos x = \sin x$.

66. $1 + \sec x = m \cdot \tan^2 \frac{x}{2}$.

67. $1 + \sec x = \cot^2 \frac{x}{2}$.

68. $\sin 3x = 2 \sin x$.

69. $\cos 3x = 4 \cos^2 x$.

70. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$.

71. $\cos^3 x \cdot \sin 3x + \sin^3 x \cdot \cos 3x = \frac{3}{4}$.

Võrrandeis 72—74 enne kõike väljendada $\sin x$ ja $\cos x$ ülesandes 11 saadud valemite abil:

72. $\sin x + \cos x = 1 \frac{1}{4}$.

73. $4 \sin x + 3 \cos x = 2$.

74. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Abinurk.

Järgmistele avaldistele anda logaritmitav kuju ja lihtsustada (ülesanded 1—26):

1. a) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$; b) $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$;
c) $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$; d) $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$.
2. a) $\sin 5^\circ + \sin 20^\circ$; b) $\sin 3^\circ - \sin 5^\circ$;
c) $\cos 3^\circ 15' + \cos 17^\circ$; d) $\cos 5^\circ - \cos 25^\circ$.
3. a) $\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$;
b) $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$.
4. a) $\frac{\sin 25^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 25^\circ - \sin 15^\circ}$; b) $\frac{\cos \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha - \cos \beta}$.
5. a) $\sin 20^\circ + \cos 40^\circ$; b) $\cos 20^\circ - \sin 20^\circ$;
c) $\sin \alpha - \cos \beta$.
6. a) $\sin \alpha + \cos \alpha$; b) $\sin \alpha - \cos \alpha$.
7. a) $\tan \alpha \pm \tan \beta$; b) $\cot \alpha \pm \cot \beta$; c) $\tan \alpha + \cot \beta$;
d) $\cot \alpha \pm \tan \beta$.
8. a) $\tan \alpha + \cot \alpha$; b) $\tan \alpha - \cot \alpha$.
9. a) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; b) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$.
10. a) $\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta$; b) $\cot^2 \alpha - \cot^2 \beta$;
c) $\tan^2 \alpha - \cot^2 \beta$; d) $\tan^2 \alpha - \cot^2 \alpha$.
11. a) $1 + \sin \alpha$; b) $\sin \alpha - 1$; c) $1 - 2 \sin^2 \alpha$;
d) $1 - 2 \cos^2 \alpha$.
12. $\sin \alpha + \tan \alpha$.
13. $\tan \alpha - \sec \alpha$.
14. $\operatorname{cosec} \alpha - \cot \alpha$.
15. a) $1 \pm \tan \alpha$; b) $1 \pm \cot \alpha$.
16. $1 \pm \tan \alpha \cdot \cot \beta$.
17. a) $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}$;
b) $\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}$.

18. $\sqrt{\tan \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{\tan \alpha - \sin \alpha}$.
19. a) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \beta \cdot \cos \beta$;
b) $\sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \cos \beta$.
20. a) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha$; b) $1 - \sin \alpha - \cos \alpha$.
21. $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$.
22. a) $1 + \tan \alpha + \sec \alpha$; b) $\sec \alpha + \tan \alpha - 1$.
23. a) $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \tan \alpha$;
b) $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \tan \alpha$.
24. a) $\tan \alpha + \cot \alpha + \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$;
b) $\tan \alpha - \cot \alpha - \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha$.
25. a) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$;
b) $\sin \alpha - \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$.
26. $\sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha$.

26 Hrajiv

Tõestada järgmised samasused (ülesandeis 27—38):

27. $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha - \cos \beta} = \cot \frac{\beta - \alpha}{2}$.

28. $\frac{\cot \alpha - \tan \beta}{\cot \alpha - \cot \beta} = \cot (\alpha + \beta) \cdot \tan \beta$.

29. a) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$;

b) $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$.

30. $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \tan (45^\circ + \alpha)$.

31. $\frac{\sec \alpha + \tan \alpha}{\sec \alpha - \tan \alpha} = \tan^2 \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$.

32. a) $\frac{\tan 2\alpha \cdot \tan \alpha}{\tan 2\alpha - \tan \alpha} = \sin 2\alpha$; b) $\frac{1}{1 + \tan \alpha \cdot \tan 2\alpha} = \cos 2\alpha$.

33. $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$ (kui $0^\circ < \alpha < 90^\circ$).

$$34. \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \tan \frac{\alpha}{2}.$$

$$35. a) (\sin \alpha + \sin \beta)^2 + (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$b) (\sin \alpha - \sin \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$36. a) 1 - \tan^2 \alpha \cdot \tan^2 \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta};$$

$$b) 1 - \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta = - \frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

$$37. \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha.$$

$$38. \tan 3\alpha - \tan 2\alpha - \tan \alpha = \tan 3\alpha \cdot \tan 2\alpha \cdot \tan \alpha.$$

Tõestada, et tingimusel $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ (näiteks kui α , β ja γ on kolmnurga sisenurgad) on kehtivad järgmised seosed (ülesandeis 39—49; nendele ülesannetele on vastustes antud näpunäited):

$$39. a) \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$b) \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$40. a) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$b) \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = -1 + 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$41. \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma = \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma.$$

$$42. \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \cot \alpha \cdot \cot \beta \cdot \cot \gamma + \operatorname{cosec} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \beta \cdot \operatorname{cosec} \gamma.$$

$$43. \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} = \cot \frac{\alpha}{2} \cdot \cot \frac{\beta}{2} \cdot \cot \frac{\gamma}{2}.$$

$$44. \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \cdot \tan \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$45. \cot \alpha \cdot \cot \beta + \cot \alpha \cdot \cot \gamma + \cot \beta \cdot \cot \gamma = 1.$$

$$46. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$47. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

$$48. \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma.$$

$$49. \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma.$$

Avaldised ülesandeis 50—59 teisendada korrutisteks, kasutades mõningate tuntud nurkade funktsioone:

$$50. 1 + 2 \sin \alpha.$$

$$51. 1 - 2 \cos \alpha.$$

$$52. \sqrt{3} - 2 \sin \alpha.$$

$$53. a) \sqrt{2} + 2 \cos \alpha;$$

$$54. 3 - 4 \sin^2 \alpha.$$

$$b) \sqrt{2} \cdot \sin \alpha - 1.$$

$$55. 3 - 4 \cos^2 \alpha.$$

$$56. 1 - 3 \tan^2 \alpha.$$

$$57. 3 - \cot^2 \alpha.$$

$$58. 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha.$$

$$59. a) \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha;$$

$$b) \cos \alpha - \cos 2\alpha + \cos 3\alpha.$$

60. Teisendada järgmised avaldised, kasutades abinurka:

$$1) \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$2) \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \text{ kui } p > 2\sqrt{q} > 0.$$

61. Eeldades, et $a > b > 0$, teisendada järgmised avaldised abinurga abil:

$$1) \frac{a+b}{a-b}; \quad 2) \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}; \quad 3) \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

62. Rakendada abinurga võtte

$$x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$$

arvutamiseks.

Lahendada järgmised võrrandid (63—75), teisendanud enne funktsioonide summa või vahe korrutiseks:

$$63. \sin 3x + \sin x = 0.$$

$$64. \cos 4x + \cos x = 0.$$

$$65. \sin 5x = \sin x.$$

$$66. \cos 2x = \cos x.$$

$$67. \cos 3x = \sin x.$$

$$68. \sin x + \cos x = 1.$$

$$69. \cos x - \sin x = 1 : \sqrt{2}.$$

$$70. \tan x + \cot x = 2(1 + \sqrt{5}).$$

$$71. \tan x - \cot x = 2(1 - \sqrt{2}).$$

$$72. \cot 2x - \cot 4x = 2.$$

$$73. \tan x + \tan 3x = \sec x \cdot \sec 3x.$$

$$74. \cos x + \cos 3x = \cos 2x.$$

$$75. \sin 3x = \sin 2x - \sin x.$$

§ 12. Logaritmidete tabelite kasutamine trigonomeetriliste avaldiste arvutamiseks ja nurkade leidmiseks.

Selle paragrahvi, samuti ka § 13 ja 14 ülesannete vastused on antud neljakohaliste tabelite järgi. Kuid ülesannete lahendamisel võib kasutada ka viiekohalisi tabeleid. Seejuures peab aga silmas pidama, et siis vastus võib erineda raamatus antud vastusest viimase koha 1—2 ühiku võrra.

Leida tabelite abil:

$$1. a) \log \sin 21^{\circ}37';$$

$$c) \log \sin 21^{\circ}11';$$

$$e) \log \sin 53^{\circ};$$

$$2. a) \log \cos 32^{\circ}08';$$

$$c) \log \cos 44^{\circ}53'36'';$$

$$e) \log \cos 30^{\circ}48';$$

$$3. a) \log \tan 27^{\circ}41';$$

$$c) \log \tan 70^{\circ}42'53'';$$

$$e) \log \tan 52^{\circ}12'';$$

$$4. a) \log \cot 80^{\circ}53';$$

$$c) \log \cot 77^{\circ}21';$$

$$e) \log \cot 87^{\circ}59'34'';$$

$$b) \log \sin 63^{\circ}42';$$

$$d) \log \sin 47^{\circ}12';$$

$$f) \log \sin 1^{\circ}23'18''.$$

$$b) \log \cos 50^{\circ}22';$$

$$d) \log \cos 62^{\circ}47';$$

$$f) \log \cos 89^{\circ}36'20''.$$

$$b) \log \tan 16^{\circ}07';$$

$$d) \log \tan 14^{\circ}15'';$$

$$f) \log \tan 89^{\circ}10'16''.$$

$$b) \log \cot 20^{\circ}26'48'';$$

$$d) \log \cot 45^{\circ}36'';$$

$$f) \log \cot 15^{\circ}40''.$$

Leida teravnurk x , kui on antud:

5. $\log \sin x =$ a) 9,4001 — 10; b) 9,8634 — 10;
c) 9,6747 — 10; d) 9,9341 — 10;
e) 9,8711 — 10; f) 7,8662 — 10.
6. $\log \cos x =$ a) 9,8615 — 10; b) 8,9301 — 10;
c) 9,9497 — 10; d) 9,8493 — 10;
e) 9,8080 — 10; f) 8,0584 — 10.
7. $\log \tan x =$ a) 8,7865 — 10; b) 0,0066;
c) 9,4608 — 10; d) 0,0771;
e) 0,0002; f) 7,3500 — 10.
8. $\log \cot x =$ a) 1,0367; b) 9,5018 — 10;
c) 0,3738; d) 9,3387 — 10;
e) 9,9999 — 10; f) 8,0000 — 10.

Leida logaritmid tabelite abil:

9. a) $\sin 20^\circ$; b) $\cos 47^\circ 36'$; c) $\tan 75^\circ 36'$;
d) $\cot 15'$; e) $\sec 40^\circ$; f) $\operatorname{cosec} 53^\circ 03'$.
10. a) $\sin 230^\circ$; b) $\cos 740^\circ$; c) $\tan (-250^\circ 10')$;
d) $\cot 1000^\circ 15'$; e) $\sec (-100^\circ)$; f) $\operatorname{cosec} 500^\circ 18'$.

Leida teravnurk x , kui on antud:

11. a) $\sin x = \frac{4}{7}$; b) $\cos x = 0,38934$; c) $\tan x = 4$;
d) $\cot x = 10$; e) $\sec x = 1,5$; f) $\operatorname{cosec} x = 2,65047$;
g) $\sin x = \frac{1}{2} \sin 20^\circ$; h) $\cot x = 3 \cot 48^\circ$.

Leida nurgad vahemikust 0° kuni 360° , kui on antud:

12. $\sin x = \frac{5}{11}$.

13. $\sin x = -0,682$.

14. $\cos x = 0,76213$.

15. $\cos x = -0,5688$.

16. $\tan x = \frac{176}{353}$.

17. $\tan x = -2,48$.

18. $\cot x = 5$.

19. $\cot x = -0,731$.

20. $\sec x = 15$.

21. $\sec x = -2,5$.

22. $\operatorname{cosec} x = 10$.

23. $\operatorname{cosec} x = -1\frac{2}{7}$.

Ülesandeis 24—31 leida absoluutväärtuselt väikseim nurk x (positiivne või negatiivne):

- π 24. $\tan x = \tan 40^\circ + \tan 70^\circ$.
 π 25. $\cot x = 1 + \sin 23^\circ 15'$.
 π 26. $\cos x = 1 - \cot 66^\circ 12'$.
 π 27. $\sin x = \sin 37^\circ 15' - 1$.
 π 28. $\cos x = 1 + \tan 117^\circ$.
 π 29. $\tan x = \sin 44^\circ + \cos 166^\circ$.
 π 30. $\cot(-x) = 1 - \cos(-20^\circ) \cdot \sec 70^\circ 46'$.
 π 31. $\sin(x + 180^\circ) = \sqrt[3]{-\tan 152^\circ}$.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused (ülesandeis 32—34):

- π 32. $(a^2 - b^2) \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$, kui $a = 7,3862$; $b = 5,2138$;
 $\alpha = 42^\circ 26'$; $\beta = 68^\circ 34'$.
 M 33. $(a + \sin a) \cdot (a + \cos a)$, kui $a = 0,001$ ja $a = 143^\circ 12'$.
 M 34. $a^2 \cdot \sec a \cdot \sqrt[4]{-\tan 2a}$, kui $a = 0,0204$ ja $a = 67^\circ 34'$.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused x (ülesandeis 35—41), teisendanud nad enne korrutisteks:

- π 35. $x = \pi \cdot (\sin 30^\circ 53' 30'' + \sin 80^\circ 24')$.
 π 36. $x = \frac{\sqrt[3]{0,0001}}{\cos 16^\circ 41' - \sin 49^\circ 10'}$.
 π 37. $x = \left(16 \frac{768}{815}\right)^2 \cdot (1 + \sin 11^\circ 07')$.
 π 38. $x = \sqrt{2} \cdot (1 - \tan 61^\circ 39')$.
 π 39. $x = \sqrt[4]{0,005} \cdot (1 + 2 \sin 41^\circ 19')$.
 π 40. $x = 2,7148^3 \cdot \sqrt{3 - 4 \cos^2 72^\circ 05'}$.
 π 41. $x = \sqrt{a^2 \cdot \sin^2 \alpha + b^2 \cdot \cos^2 \alpha}$, kui
 $a = 0,0148$, $b = 0,0040$ ja $\alpha = 36^\circ 15'$.

Täisnurksete kolmnurkade lahendamine.

42—57. Täisnurksete kolmnurkade lahendamise põhijuh-
tumid.

I. On antud hüpotenuus ja teravnurk:

42. $c = 9,35$; $A = 65^{\circ}14'$. E 43. $c = 627$; $A = 23^{\circ}30'$.
 44. $c = 0,7979$; $A = 66^{\circ}36'$. E 45. $c = 3,644$; $A = 50^{\circ}02'$.

II. On antud kaatet ja teravnurk:

46. $a = 6,37$; $A = 4^{\circ}35'$. E 47. $a = 18,003$; $B = 43^{\circ}$.
 48. $b = 0,1738$; $A = 35^{\circ}55'$. E 49. $b = 0,2954$; $B = 25^{\circ}37'$.

III. On antud hüpotenuus ja kaatet:

50. $c = 65$; $a = 16$. E 51. $c = 113$; $b = 15$.
 52. $c = 697$; $a = 528$. E 53. $c = 1710,2$; $b = 823$.

IV. On antud kaatetid:

54. $a = 261$; $b = 380$. E 55. $a = 156$; $b = 133$.
 56. $a = 0,09783$; $b = 0,1003$. E 57. $a = 12,06$; $b = 6,919$.

58—69. Võrdhaarne kolmnurk.

Tähistusi: a ja c — haarad; b — alus; A ja C —
alunurgad; B — tipunurk; h — alusele joonestatud kõrgus;
 h_1 — haarale joonestatud kõrgus; $2p$ — übermõõt; S —
pindala.

Lahendada võrdhaarne kolmnurk järgmisil andmeil:

58. $a = 797,9$; $A = 66^{\circ}36'24''$. E 59. $a = 627$; $B = 133^{\circ}$.
 60. $b = 15,65$; $A = 59^{\circ}45'20''$. E 61. $b = 5,529$; $B = 51^{\circ}11'$.
 62. $a = 8,757$; $b = 13,958$. E 63. $b = 925,2$; $h = 721,4$.
 64. $A = 65^{\circ}40'$; $h_1 = 20$. E 65. $b = 130,7$; $S = 1955$.
 66. $B = 73^{\circ}54'$; $S = 45,04$. E 67. $2p = 40,65$; $A = 72^{\circ}46'$.
 68. $S = 250$; $a : b = 7 : 4$. E 69. $S = 56$; $a = 14$.

§ 13. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmide abil.

Tähistusi: a, b ja c — kolmnurga küljed; A, B ja C — nende külgede vastasnurgad; S — pindala; $2p$ — ümbermõõt; R — ümberjoonestatud ringjoone raadius; r — sissejoonestatud ringjoone raadius; h_a, l_a ja m_a — küljele a vastav kõrgus, nurgapoolitaja ja mediaan.

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamise põhijuhtumid.

I. On antud külg ja kaks nurka:

- | | | |
|-----------------|--------------------------|-----------------------|
| 1. $a = 370;$ | $B = 86^{\circ}03';$ | $C = 50^{\circ}56'.$ |
| 2. $a = 450;$ | $A = 87^{\circ}55';$ | $B = 10^{\circ}53'.$ |
| 3. $a = 951;$ | $B = 126^{\circ}43';$ | $C = 13^{\circ}41'.$ |
| 4. $a = 97,52;$ | $A = 102^{\circ}48';$ | $C = 21^{\circ}06'.$ |
| 5. $b = 13,02;$ | $A = 11^{\circ}48'45'';$ | $B = 133^{\circ}42'.$ |
| 6. $c = 15,94;$ | $A = 51^{\circ}38';$ | $B = 18^{\circ}19'.$ |

II. On antud kaks külge ja nendevaheline nurk:

- | |
|---|
| 7. $a = 510; b = 317; C = 76^{\circ}19'.$ |
| 8. $a = 225; b = 800; C = 36^{\circ}44'.$ |
| 9. $a = 2,29; c = 1,69; B = 29^{\circ}52'.$ |
| 10. $b = 28; c = 42; A = 124^{\circ}.$ |
| 11. $a = 30,991; c = 69,01; B = 87^{\circ}48'.$ |
| 12. $b = 40,33; c = 32,11; A = 73^{\circ}40'.$ |

III. On antud kaks külge ja ühe antud külje vastasnurk:

- | |
|--|
| 13. $a = 87; b = 65; A = 75^{\circ}45'.$ |
| 14. $a = 34; b = 93; A = 14^{\circ}15'.$ |
| 15. $a = 24; b = 83; A = 26^{\circ}45'.$ |
| 16. $b = 360; c = 309; C = 21^{\circ}14'25''.$ |
| 17. $a = 13,9; c = 8,43; A = 126^{\circ}43'.$ |

18. $a = 0,437$; $b = 1,299$; $B = 11^{\circ}03'$.
19. $a = 13,81$; $c = 8,14$; $C = 14^{\circ}36'$.
20. $b = 263$; $c = 215$; $B = 70^{\circ}15'$.
21. $a = 19,06$; $b = 28,19$; $A = 31^{\circ}17'$.
22. $a = 457,1$; $b = 169,9$; $B = 21^{\circ}49'$.
23. $a = 2579$; $c = 10$; $A = 130^{\circ}22'$.

IV. On antud kolm külge:

24. $a = 19$; $b = 34$; $c = 49$.
25. $a = 89$; $b = 321$; $c = 395$.
26. $a = 44$; $b = 483$; $c = 485$.
27. $a = 0,099$; $b = 0,101$; $c = 0,158$.
28. $a = 172,5$; $b = 1135$; $c = 1205$.
29. $a = 421,6$; $b = 409,8$; $c = 335,9$.
30. $a = 1,2357$; $b = 2,346$; $c = 3,456$.

Kaldnurksete kolmnurkade lahendamise erijuhtumeid.

31. $R = 7,92$; $A = 113^{\circ}17'$; $B = 48^{\circ}16'$.
32. $S = 501,9$; $A = 15^{\circ}28'$; $B = 45^{\circ}$.
33. $h_a = 5,37$; $B = 115^{\circ}10'$; $C = 5^{\circ}08'$.
34. $l_a = 0,758$; $B = 98^{\circ}31'$; $C = 4^{\circ}25'$.
35. $a + b = m = 488,8$; $A = 70^{\circ}24'$; $B = 40^{\circ}16'$.
36. $a - b = n = 23$; $A = 108^{\circ}$; $B = 18^{\circ}$.
37. $h_a + h_b = m = 1,381$; $A = 102^{\circ}32'$; $B = 58^{\circ}17'$.
38. $h_b - h_c = n = 60,8$; $B = 46^{\circ}24'$; $C = 80^{\circ}28'$.
39. $2p = 420,7$; $A = 24^{\circ}37'$; $B = 52^{\circ}31'$.
40. $r = 5$; $A = 22^{\circ}37'$; $B = 39^{\circ}18'$.
41. $c = 1,230$; $a : b = 3 : 4$; $B = 48^{\circ}$.
42. $a = 63,51$; $b : c = 9 : 11$; $A = 95^{\circ}30'$.
43. $c = 226,8$; $h_c : b = 63 : 65$; $B = 17^{\circ}04'$.
44. $a = 15,98$; $A = 46^{\circ}20'$; $b = a_c$ (a_c on a projektsioon küljel c).

45. $b = 29$; $l_c = 31$; $A = 68^{\circ}43'$.
46. $S = 2423$; $a = 42,5$; $B = 124^{\circ}38'$.
47. $a = 32$; $b = 25$; $A = 2B$.
48. $a + b = 36,5$; $R = 19,06$; $A - B = 19^{\circ}31'$.
49. $a + b = m = 2147$; $c = 353$; $C = 13^{\circ}41'$.
50. $a - b = n = 6,45$; $c = 18,3$; $C = 53^{\circ}40'$.
51. $a + b = m = 14,31$; $c = 5,18$; $A = 102^{\circ}38'$.
52. $a - b = n = 6,232$; $c = 15,14$; $A = 78^{\circ}40'$.
53. $S = 15$; $ab = 48$; $\sin A = \cos B$.
54. $h_b = 60$; $h_c = 36$; $a : R = \cos A$.
55. $a = 23$; $b = 45$; $R = 25,09$.
56. $a = 120$; $b = 29$; $h_c = 23,76$.
57. $a = 6$; $b = 8$; $S = 12$.
58. $b = 98$; $c = 76$; $m_c = 68$.
59. $a = 20$; $b = 12$; $m_c = 14$.
60. $h_a = 8$; $h_b = 12$; $h_c = 18$.
61. $b = 42$; $c = 28$; $l_a = 12,81$.

§ 14. Trigonomeetrilised võrrandid.

Võrrandeist 1—12 leida x : 1) üldkujul ja 2) vahemikus 0° kuni 360° (0 kuni 2π).

1. $3 \sin x = 2 \cos^2 x$.
2. $\sin x = \cot x$.
3. $3 + 2 \cos x = 4 \sin^2 x$.
4. $\sin x = -\cos x$.
5. $\tan x = 3 \cot x$.
6. $\tan x = 2 \sin x$.
7. $\cot x = 3 \cos x$.
8. $\operatorname{cosec} x = 2 \sin x$.
9. $\sin 3x = 0,5$.
10. $\cot \frac{2x}{5} = 1$.
11. $3 \tan^2 \frac{x}{3} = 1$.
12. $2 \sin \left(\frac{x}{6} - \frac{\pi}{2} \right) = 1$.
13. Leida seos nurkade α ja β vahel järgmistel juhtudel:
 - 1) $\sin \alpha = \sin \beta$; 2) $\cos \alpha = \cos \beta$; 3) $\tan \alpha = \tan \beta$;
 - 4) $\cot \alpha = \cot \beta$; 5) $\sin \alpha = -\sin \beta$; 6) $\cos \alpha = -\cos \beta$;

- 7) $\tan \alpha = -\tan \beta$; 8) $\cot \alpha = -\cot \beta$; 9) $\sin \alpha = \cos \beta$;
 10) $\sin \alpha = -\cos \beta$; 11) $\tan \alpha = \cot \beta$; 12) $\tan \alpha = \cot \beta$.

Lahendada järgmised võrrandid (14—73):

14. $\cot 10x = 0$.
 15. $(\cos x)^{\sin x} = 1$.
 16. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$.
 17. $a(\sin x + \cos x)^2 = b \sin 2x$.
 18. $\tan px + \tan qx = 0$.
 19. $\sin 3x = -\cos x$.
 20. $\sin 5x \cdot \tan 4x \cdot \cos 2x = 0$.
 21. $a \sin x + b \cos x = 0$.
 22. $\sin x + \cos x = \operatorname{cosec} x$.
 23. $5 \cos 2x = 4 \sin x$.
 24. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
 25. $\sin(m+x) + \sin x = \cos \frac{m}{2}$.
 26. $\sin 3x + \sin 2x + \sin x = 0$.
 27. $\frac{\tan 2x}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan 2x} = 2,5$.
 28. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = \sqrt{a^2 + b^2}$.
 29. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = c$.
 30. $2 \sin x - 9 \cos x = 7$.
 31. $\frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$.
 32. $14,36 \sin x + 23 \cos x = 26,02$.
 33. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.
 34. $\tan^2 x + \cot^2 x = 2$.
 35. $\sec x = \sin x + \cos x$.
 36. $\sin x + \cos x = \sec x + \operatorname{cosec} x$.
 37. $\frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2 - \tan x$.
 38. $\tan x + \cot x = \sec 80^\circ$.

Ex bibl. univ. Tartu

39. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.
40. $(4 - \sqrt{3})(\sec x + \operatorname{cosec} x) = 4(\sin x \cdot \tan x + \cos x \cdot \cot x)$.
41. $\sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ) = \sin 30^\circ$.
42. $\tan x + \tan(45^\circ + x) = 2$.
43. $\cos(a - b) \cdot \sin(c - x) = \cos(a + b) \cdot \sin(c + x)$.
44. $\tan 2x = \tan(x - 45^\circ) \cdot \tan x \cdot \tan(x + 45^\circ)$.
45. $\sec^2 x + 3 \sec x \cdot \operatorname{cosec} x + \operatorname{cosec}^2 x = 4$.
46. $\tan 3x = \sin 6x$.
47. $\sqrt{2} \cdot \cos 2x = \cos x + \sin x$.
48. $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.
49. $2 \sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.
50. $\sin^2 2x - \sin^2 x = \sin^2 30^\circ$.
51. $\cos 4x + \cos 2x + \cos x = 0$.
52. $\cos x - \cos 2x = \sin 3x$.
53. $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = a \cdot \sin 2x - b \cdot \cos 2x$.
54. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.
55. $\cot(\pi - 3x) = \tan(x - \pi)$.
56. $\cos \frac{x}{2} + \cos x = 1$.
57. $\operatorname{cosec} x = \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$.
58. $\sec^2 \frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2} = 16 \cot x$.
59. $8 \tan^2 \frac{x}{2} = 1 + \sec x$.
60. $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = 1 + \sin 2x$.
61. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.
62. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = 0$.
63. $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cdot \cos 7x$.

Võrrandis (64—73) esinevad murdavaldised tuleb enne taandada (vastasel korral tekivad vöörlahendid):

$$\# 64. \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} = 0.$$

$$\# 65. \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x} = 0.$$

$$\# 66. \tan x \cdot \cot 2x = 0.$$

$$\# 67. \sin 3x \cdot \cot x = 0.$$

$$\# 68. \frac{\sin 2x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\cos 2x}.$$

$$\# 69. \frac{1 + \cos 2x}{2 \cos x} = \frac{\sin 2x}{1 - \cos 2x}.$$

$$\# 70. \frac{1 - \cos 2x}{2 \sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

$$\# 71. \cot x \cdot \tan 2x - \tan x \cdot \cot 2x = 2.$$

$$\# 72. \sin 3x \cdot \tan 2x \cdot \sec x = 0.$$

$$\# 73. 3 \sin x = 1 - \sqrt{3 \cos^2 x - 2}.$$

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid (74—95):

$$M 74. \text{Leida } \sin x \text{ ja } \sin y, \text{ kui } \sin x + \sin y = 0,2 \text{ ja } \cos x + \cos y = -0,2.$$

$$M 75. \text{Leida } \cos x \text{ ja } \cos y \text{ võrrandisüsteemist:}$$

$$\cos(x + y) = \frac{1}{6} (1 - 2\sqrt{6}); \quad \cos(x - y) = \frac{1}{6} (1 + 2\sqrt{6}).$$

$$M 76. \text{Leida } \tan x \text{ ja } \tan y, \text{ kui } x + y = 45^\circ \text{ ja } \tan x + \tan y = 10.$$

$$M 77. \text{Võrrandisüsteemist}$$

$$a = x \cdot \sin \alpha; \quad b = x \cdot \sin \beta; \quad \alpha + \beta = \varphi$$

avaldada x arvude a , b ja φ kaudu.

$$M 78. \text{Leida } x \text{ ja } y, \text{ kui } \sin(x - y) = \cos(x + y) = \frac{1}{2}.$$

Leida t e r a v n u r g a d järgmistest võrrandisüsteemidest (79—95):

$$\# 79. \sin x \cdot \cos y = 0,36; \quad \cos x \cdot \sin y = 0,14.$$

$$\# 80. \sin x \cdot \sin y = 0,36; \quad \cos x \cdot \cos y = 0,14.$$

$$\# 81. x + y = \alpha; \quad \sin x + \sin y = a.$$

$$82. x + y = 77^{\circ}; \cos x - \cos y = 0,4898.$$

$$83. x + y = a; \sin x \cdot \sin y = a.$$

$$84. x - y = 48^{\circ}20'; \cos x \cdot \cos y = 0,48967.$$

$$85. x + y = a; \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}.$$

$$86. x + y = 96^{\circ}38'; \frac{\cos x}{\cos y} = \frac{5}{3}.$$

$$87. x + y = a; \tan x + \tan y = a.$$

$$88. x - y = 31^{\circ}; \tan x - \tan y = 0,74.$$

$$89. x + y = a; \tan x \cdot \tan y = a.$$

$$90. x - y = 5^{\circ}; \tan x \cdot \tan y = 0,8391.$$

$$91. x + y = a; \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{m}{n}.$$

$$92. x - y = 3^{\circ}46'; \frac{\tan x}{\tan y} = \frac{11}{9}.$$

$$93. 2 \sin x + \cos y = 1; 16 \sin^2 x + \cos^2 y = 4.$$

$$94. x + y + z = 180^{\circ}; \tan x \cdot \tan y = 2; \tan y \cdot \tan z = 3.$$

$$95. x + y + z = 180^{\circ}; \tan x \cdot \tan y = 3; \tan y \cdot \tan z = 14.$$

§ 15. Tsüklomeetriselised funktsioonid.

(Vt. ka § 2, nr. 32—36.)

Näpunäide. Järgmiste ülesannete lahendamisel peab meeles pidama neid vahemikke, milles on kokku lepitud vaadelda tsüklomeetriseliste funktsioonide väärtusi, ja heitma kõrvale need lahendid, mis ei kuulu neisse vahemikesse.

Leida järgmiste avaldiste väärtused (1—16):

$$1. 1) \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right); 2) \operatorname{arcsec} 2; 3) \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$2. 1) \sin\left(\operatorname{arc cot} \frac{\sqrt{3}}{3}\right); 2) \cos\left(2 \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$3) \tan\left(\operatorname{arc cos} \frac{1}{2}\right).$$

A 3. 1) $\cot [\arcsin (-1)]$; 2) $\sin(3 \arccos \frac{\sqrt{3}}{2})$;
 3) $\cos [2 \arcsin (-\frac{\sqrt{2}}{2})]$.

H4. 1) $\cos (\arccos x)$; 2) $\sin (\arctan \frac{3}{4})$;
 3) $\sin [\arctan (-2)]$.

H5. 1) $\sin (\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2})$; 2) $\cos (\arccos \frac{1}{2})$;
 3) $\tan (\arctan \sqrt{3})$.

H6. 1) $\arccot (\cot \frac{4\pi}{5})$; 2) $\arctan (\tan x)$;
 3) $\arccos (\sin \frac{\pi}{7})$.

H7. 1) $\sin (\arccos 0,8)$; 2) $\cos (\arcsin \frac{8}{17})$;
 3) $\tan (\arcsin \frac{3}{5})$.

H8. 1) $\sin (\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2})$;
 2) $\cos (\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$.

H9. 1) $\tan (\arctan 2 + \arctan \frac{1}{2})$;
 2) $\tan (\arctan x + \arctan \frac{1}{x})$.

H10. $\tan (\arctan \frac{2a-b}{b\sqrt{3}} + \arctan \frac{2b-a}{a\sqrt{3}})$.

H11. $\sin (\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{8}{17})$.

H12. $\cos (\arccos \frac{9}{\sqrt{82}} + \operatorname{arccosec} \frac{\sqrt{41}}{4})$.

H13. $\cos (2 \arcsin \frac{2}{7})$. H 14. $\sin (2 \arcsin m)$.

H 15. $\tan (3 \arctan \frac{1}{4})$. H 16. $\sin (2 \arctan m)$.

Kontrollida järgmiste võrduste kehtivust (17—31):

17. a) $\arcsin \frac{3}{5} = \arccos \frac{4}{5}$;

b) $\arcsin \sqrt{\frac{a}{a+b}} = \arctan \sqrt{\frac{a}{b}}$.

18. $\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13} = \frac{\pi}{2}$.

19. $\arccos \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{7} = \arccos \left(-\frac{11}{14}\right)$.

20. $\arcsin 0,6 - \arcsin 0,8 = -\arcsin 0,28$.

21. $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

22. $\operatorname{arccot} \frac{1}{7} + \operatorname{arccot} \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

23. $2 \arccos a = \arccos (2a^2 - 1)$.

24. $2 \arcsin m = \arccos (1 - 2m^2)$.

25. $2 \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{4} = \arctan \frac{32}{43}$.

26. $\arccos \sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos \frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$.

27. $2 \arctan \sqrt{\frac{x}{a}} = \arccos \frac{a-x}{a+x}$.

28. $\arcsin \frac{4}{5} + \arccos \frac{2}{\sqrt{5}} = \operatorname{arccot} \frac{2}{11}$.

29. $\arctan m + \arctan n = \arccos \frac{1-mn}{\sqrt{(1+m^2)(1+n^2)}}$

30. $\operatorname{arccot} \sqrt{3} + \operatorname{arccot} (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$.

31. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arctan \frac{\sqrt{2}}{2} = \arctan (\sqrt{2} + 1)^2$.

Lahendada järgmised võrrandid (32—44):

32. $\arctan (1+x) + \arctan (1-x) = \frac{\pi}{4}$.

33. $\arccos (x-1) = 2 \arccos x$.

$$\# 34. \operatorname{arc} \tan x = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x}.$$

$$\# 35. \operatorname{arc} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{arc} \tan (x - 1).$$

$$\# 36. \operatorname{arc} \sin 2x = 3 \operatorname{arc} \sin x.$$

$$\# 37. x = \operatorname{Arc} \sin (\cos x).$$

$$\# 38. 2x = \operatorname{arc} \cot (\tan x).$$

$$\# 39. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\# 40. \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \sin x \sqrt{3} = \frac{\pi}{2}.$$

$$\# 41. \operatorname{arc} \cos x + \operatorname{arc} \cos (1 - x) = \operatorname{arc} \cos (-x).$$

$$\# 42. \operatorname{arc} \tan x + \operatorname{arc} \tan 3x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\# 43. \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc} \tan \frac{1}{x+1} = \operatorname{arc} \tan a.$$

$$\# 44. \operatorname{arc} \tan x + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sec 5x = \frac{\pi}{4}.$$



TEINE OSA.

**TRIGONOMEETRIA RAKENDAMIST NÕUD-
VAID GEOMEETRILISI ÜLESANDEID.**

§ 15a. Planimeetria.

Korrapäraseid hulknurgad.

E 1. Ringisse joonestatud korrapärase n -nurga antud külje a kaudu avaldada ringi ümber joonestatud korrapärase n -nurga külge b .

E 2. Arvutada korrapärase 7-nurga diagonaalide pikkused, kui 7-nurga külge on 10 cm.

E 3. Avaldada korrapärase n -nurga lühima diagonaali pikkus, kui n -nurga külge on a cm.

E 4. Korrapärase n -nurga külje a kaudu avaldada selle n -nurga pikima diagonaali pikkus kahel juhul: 1) kui n on paarisarv ja 2) kui n on paaritu arv.

Hulknurga pindala.

E 5. Ristküliku diagonaalid moodustavad teineteisega nurga $75^{\circ}22'$; ristküliku pindala on 562 m^2 . Arvutada ristküliku küljed.

6. Ringi ümber, mille raadius on r , on joonestatud romb, mille teravnurk on α . Leida rombi pindala ($r=5$; $\alpha=36^{\circ}47'$).

7. Võrdhaarse kolmnurga pindala on Q ja tipunurk on β . Leida kolmnurga kõrgus ($Q=450$; $\beta=73^{\circ}$).

8. Võrdhaarse kolmnurga pindala on Q m² ja alus on b m. Leida kolmnurga tipunurk ($Q=1956$; $b=130,7$).

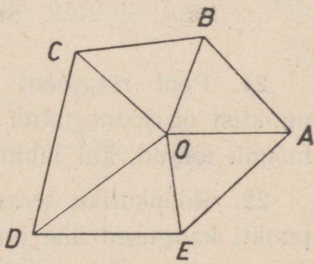
9. Korrapärase n -nurga külje a järgi avaldada ja arvutada n -nurga pindala: 1) $n=7$; $a=20$; 2) $n=8$; $a=1$; 3) $n=12$; $a=10$.

10. Ringisse, mille raadius on R , on joonestatud korrapärane n -nurk. Avaldada ja arvutada n -nurga pindala: 1) $n=12$; $R=7$; 2) $n=5$; $R=7$.

11. Ringi ümber, mille raadius on R , on joonestatud korrapärane n -nurk. Avaldada n -nurga pindala.

12. Trapetsi alused on 25 cm ja 15 cm, haar on 12 cm ning haara ja suurema aluse vaheline nurk on 50° . Arvutada trapetsi pindala.

13. Maamõõtja mõõtis viienurgelise maa-ala nn. polaarsel viisil (joon. 18). Lähtudes punktist O (poolus) ta mõõtis kaugused $OA=43$ m, $OB=36$ m, $OC=41$ m, $OD=56$ m ja $OE=34$ m ning nurgad $\angle AOB=65^{\circ}30'$, $\angle BOC=71^{\circ}20'$, $\angle COD=80^{\circ}$ ja $\angle DOE=61^{\circ}35'$.



Joon. 18.

Arvutada maa-ala pindala.

14. Avaldada võrdhaarse trapetsi pindala, kui trapetsi diagonaal on a ja diagonaal moodustab alustega nurga a .

15. Korrapärase 6-nurga külg on 84 cm; arvutada temaga pindvõrdse korrapärase 7-nurga külg.

16. Korrapärasel 9-nurgal ja 10-nurgal on võrdsed ümbermõõdud. Leida, kuidas suhtuvad nende pindalad.

Ringi osade pindalad.

17. Arvutada sektori pindala, kui sektori raadius on 8 cm ja temasse joonestatud ringi raadius on 2 cm.

18. Arvutada segmendi pindala, kui on antud ta raadius r ja kaar α : 1) $r = 4,73$; $\alpha = 46^{\circ}44'$; 2) $r = 12$; $\alpha = 29^{\circ}38'$.

19. Kõõl, mille pikkus on a cm, jaotab ringi, mille raadius on R cm, kaheks segmendiks. Leida väiksema segmendi pindala ($a = 3,5$; $R = 6,2$).

20. Ringis, mille raadius on R cm, on joonestatud kaks paralleelset kõõlu; kummalegi kõõlule vastav kaar on α° . Avaldada kõõlude vahel asetseva ringi osa pindala.

Segaülesandeid.

21. Pool ringjoont on jaotatud suhtes 4:7 ja jaotuspunktist on joonestatud ristsirge läbimõõdule. Arvutada läbimõõdu lõigud, kui läbimõõdu pikkus on 11 cm.

22. Rööpküliku teravnurk on a ning diagonaalide lõikepunkti kaugused ühe nurga haaradest on a ja b . Avaldada diagonaalide pikkused ja rööpküliku pindala.

23. Kolm ringi, millede raadiused on 1 m, 2 m ja 3 m, puutuvad üksteist. Arvutada nende vahelise tasapinnatüki pindala.

24. Rombi külg on tema diagonaalide keskmine võrdeline. Leida rombi teravnurk.

§ 16. Sirged ja tasapinnad.

Rist- ja kaldlõigud tasapinnani.

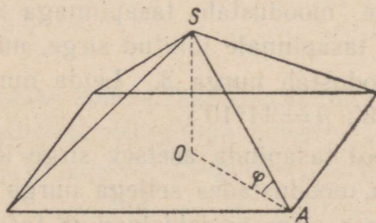
M 5
1. Punktist M tasapinnani P juhitud ristlõigu ja kaldlõigu vaheline nurk on α . Kaldlõigu pikkus on a . Leida punkti M kaugus tasapinnast P ($a = 11,22$; $\alpha = 72^{\circ}54'$).

6
2. Tasapinnani on juhitud ristlõik, mille pikkus on p ; tema aluspunkt on võetud tasapinnal joonestatud ringjoone keskpunktiks; ringjoone raadius on r . Leida ristlõigu ning tema otspunkti ja ringjoone mingit punkti ühendava lõigu vaheline nurk ($p = 4,54$; $r = 8$).

7
3. Ruudu külge $AB = a = 30$. Ruudu keskpunktist O on juhitud ristsirge ruudu tasapinnale. Ristsirgel on võetud lõik $OM = d = 20$ ja punktist M on juhitud ristlõik MC küljeni AB . Arvutada nurk x lõigu MC ja tema projektsiooni OC vahel.

8
4. Arvutada kuubi diagonaali ja tahu vaheline nurk.

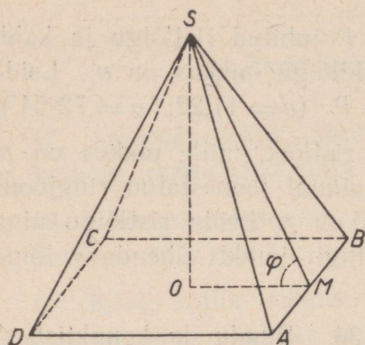
9
5. Ruudukujulise põhjaga silosüvendile on tarvis ehitada korrapärase 4-nurkse püramiidi kujuline katus. Põhi-



Joon. 19.

serv on 6,5 m. Katuse kõrgus peab olema 2,5 m. Arvutada sarika SA pikkus ja sarika kaldenurk põhitahu suhtes (joon. 19).

6. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on 7 cm ja põhiserv on 8 cm. Kui suur on külgserva ja põhitahu vaheline nurk?



Joon. 20.

7. Telk, millel on korrapärase nelinurkse püramiidi kuju, koosneb presendiga ületõmmatud neljast latist (joon. 20). Telgi kõrgus SO on 2,4 m; kahe kõrvuti oleva lati aluspunktide kaugus teineteisest on $AB = 2$ m. Leida telgi tipu kaugus SM põhiserva keskpunktist (s. o. püramiidi apoteem) ja tema kaldenurk põhja suhtes.

8. Korrapärase kolmnurga ABC külg on a . Kolmnurgasse joonestatud ringi keskpunktist O võetakse sirge risti kolmnurga tasapinnaga; ristsirgel võetakse punkt M nii, et $MA = a$; seejärel asetatakse punktist M küljeni AC ristlõik MD . Arvutada lõigu MD ja kolmnurga ABC tasapinna vaheline nurk φ .

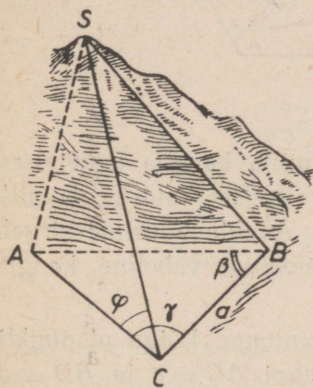
9. Kaldsirge moodustab tasapinnaga nurga α ; selle nurga tipust on tasapinnale juhitud sirge, mis kaldsirge projektsiooniga moodustab nurga β . Leida nurk nende sirgete vahel ($\alpha = 43^\circ 53'$; $\beta = 11^\circ 10'$).

10. Väljaspool tasapinda asetsev sirge lõikub tasapinnal asetseva sirgega, moodustades sellega nurga α . Viimane sirge moodustab esimese sirge projektsiooniga tasapinnal nurga β . Leida esimese sirge ja tasapinna vaheline nurk ($\alpha = 8^\circ 26'$; $\beta = 5^\circ 40'$).

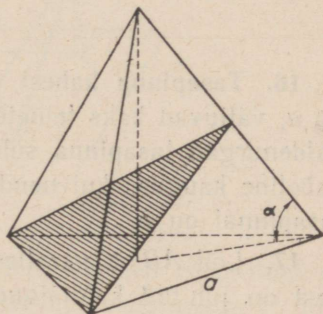
11. Kolmnurga küljed on a , b ja c . Kolmnurga ümber joonestatud ringi keskpunktist on võetud kolmnurga tasapinna ristlõik h . Leida nurgad, mida moodustavad selle

tasapinnaga ristlõigu otspunkti kolmnurga tippudega ühendavad lõigud ($h=60$; $a=30$; $b=5$; $c=29$).

12. Sirge teeosa BC , mille pikkus on a meetrit, kulgeb mööda rõhtsat maapinda. Tee kõrval asetseb mägi, mille tipu kõrgusnurk punktis C on φ (joon. 21). Tipu S projektsioon maapinnal on punkt A . Lõik BC moodustab oma otspunktidest punkti A juhitud kiirtega nurgad $\angle ACB = \gamma$ ja $\angle ABC = \beta$. Leida mäe kõrgus ($a=400$; $\beta=40^{\circ}10'$; $\gamma=60^{\circ}40'$; $\varphi=50^{\circ}50'$).



Joon. 21.



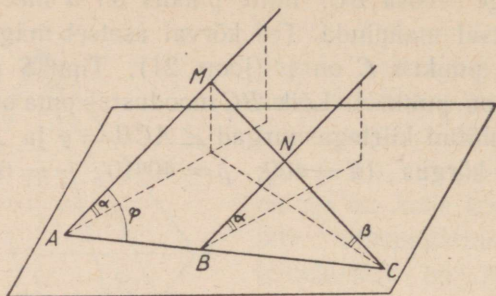
Joon. 22.

13. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhitahuga nurga α (joon. 22). Leida läbi põhiserva ja külgserva keskpunkti juhitud lõike pindala.

14. Lõigu $AB = a = 13$ cm otspunktide kaugused tasapinnast on $m = 5$ cm ja $n = 8$ cm. Leida nurk lõigu ja tasapinna vahel (2 juhtu).

15. Tasapinna kahest punktist väljuvad kaks paralleelset kaldsirget AM ja BN , mis tasapinnaga moodustavad nurga α (joon. 23); sirge MN , lõikudes kaldsirgetega

täisnurkselt, moodustab tasapinnaga nurga β . Avaldada sirgete AB ja AM vaheline nurk φ .



Joon. 23.

16. Tasapinna kahest punktist, mille kaugus teineteisest on a , väljuvad kaks teineteisega paralleelset kaldsirget, mille kaldenurgad tasapinna suhtes on φ . Avaldada nende sirgete vaheline kaugus, kui nende projektsioonide vaheline kaugus tasapinnal on b .

17. Lõik AB on paralleelne tasapinnaga. Lõigu otspunktidest on juhitud kaldlõigud tasapinnani $AC = c$ ja $BD = d$. Kaldlõik AC moodustab tasapinnaga nurga α . Leida kaldlõigu BD ja tasapinna vaheline nurk ($c = \sqrt{6}$; $d = 3$; $\alpha = 60^\circ$).

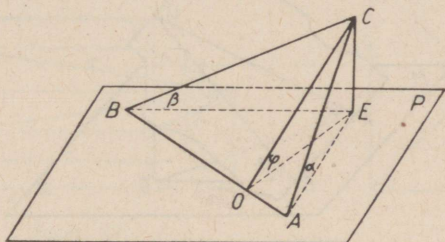
18. Tasapinnaga paralleelse lõigu otspunktidest on võetud tema kaks ristsirget, mis tasapinnaga moodustavad nurgad α ja β ($\alpha > \beta$). Lõigu pikkus on a ning ristsirgete ja tasapinna lõikepunktide kaugus teineteisest on b . Avaldada lõigu kaugus tasapinnast (2 juhtu).

19. Kaks sirglõiku, mis on piiratud kahe paralleelse tasapinnaga, suhtuvad nagu 2:3. Nurgad, mis need lõigud moodustavad tasapindadega, suhtuvad nagu 2:1. Arvutada need nurgad.

§ 17. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad.

1. On antud kahetahuline nurk α . Punktist, mis asetseb nurga ühel tahul kaugusel a nurga servast, on juhitud ristlõik teise tahuni. Leida ristlõigu pikkus ($a = 6,06$; $\alpha = 41^{\circ}55'$).

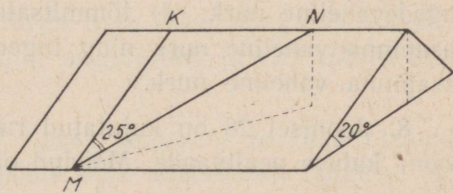
2. 1) Täisnurkne kolmnurk ABC asetseb nii, et ta hüpotenuus on tasapinnal P ning kaatetid moodustavad tasapinnaga P nurgad α ja β (joon. 24). Avaldada tasapindade ABC ja P vaheline nurk φ .



Joon. 24.

2) Kolmnurga ABC üks külge (AB) asetseb tasapinnal P . Teised küljed (CA ja CB) moodustavad tasapinnaga P nurgad α ja β , mille tangensid on vastavalt $\frac{1}{3}$ ja $\frac{1}{4}$; nende külgede projektsioonid sel tasapinnal on risti teineteisega. Arvutada tasapinna ABC kaldenurk tasapinna P suhtes.

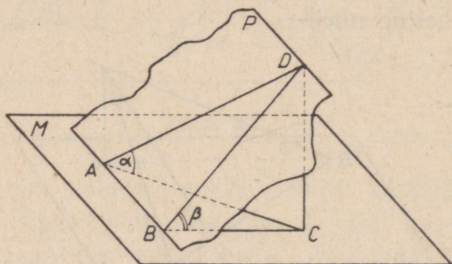
3. Katusel, mille kaldenurk rõhttasapinna suhtes on 20° , on juhitud sirge MN (joon. 25) nurgi 25° langusjoonega MK (tasapinna langusjooneks nimetatakse seda tasapinna sirget, mis on risti samal tasapinnal võetud rõhtsa sirgega). Arvutada sirge MN ja rõhttasapinna vaheline nurk x .



Joon. 25.

4. Mõõda mäenõlva, mille kaldenurk on 32° , kulgeb tee, mis langusjoonega moodustab 45° -se nurga (vt. ülesannet 3). Arvutada tee tõusnurk.

5. Tasapinna M punktist A on võetud sirge AD , mis tasapinnaga moodustab nurga α (joon. 26). Läbi AD on juhitud tasapind P nurgi $DBC = \beta$ tasapinnaga M . Avaldada sirge AD ning tasapindade M ja P lõikesirge vaheline nurk.



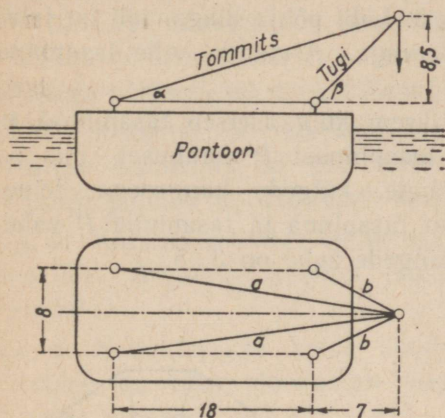
Joon. 26.

6. Korrapärase n -nurkse püramiidi kõrgus on kaks korda väiksem kui püramiidi põhiserv. Avaldada põhja ja külgtahu vaheline kahetahuline nurk φ .

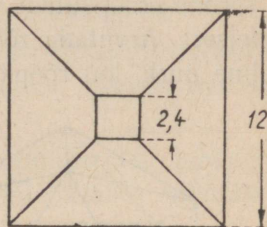
7. Joonisel 27 on antud ujuva pontoonkraana (pontoon on lamedapõhjaline raudpaat) kõrvaltvaade ja pealtvaade. Mõõdud on antud meetreis. Arvutada: a) tõmmitsate pikkus a ja tugede pikkus b ; b) tõmmitsate ja tugede kaldenurgad pontooni rõhtsa pinna suhtes; c) tõmmitsatevaheline nurk ja tugedevaheline nurk; d) tõmmitsate tasapinna ja pontooni tasapinna vaheline nurk ning tugede tasapinna ja pontooni tasapinna vaheline nurk.

8. Joonisel 28 on kujutatud ruudukujulise põhiplaaniga hoonet katuse pealtvaade. Mõõdud on antud meetreis. Katuse ülemine, rõhtne osa asetseb $\frac{1}{3}$ hoone laiuse kõrgusel (lugedes

katuse põhjast). Kõigi nelja katuse külje kaldenurgad rõhttasapinna suhtes on võrdsed. Arvutada katuse külgede kaldenurk.



Joon. 27.



Joon. 28.

9. On antud täisnurkse kolmnurga hüpotenuus a ja teravnurk α . Avaldada täisnurka tipu kaugus tasapinnast, mis läbib hüpotenuusi ja moodustab kolmnurga tasapinnaga nurga φ .

10. Püramiidi põhjaks on korrapärase kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga ja teised külgtahud moodustavad põhitahuga kumbki nurga α . Kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel?

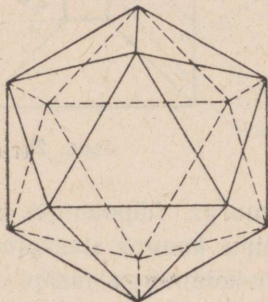
11. Sirge AB on paralleelne tasapinnaga P . Sirge CD moodustab sirgega AB nurga α ja tasapinnaga P nurga φ . Avaldada tasapinna P ning sirgeid AB ja CD läbiva tasapinna vaheline nurk.

12. Risttahuka ühest tipust väljuvate servade otspunktid on ühendatud sirglõikude abil. Risttahuka tahkudel tekkinud kolmnurkade pindalad on 4 dm^2 , 6 dm^2 ja 12 dm^2 .

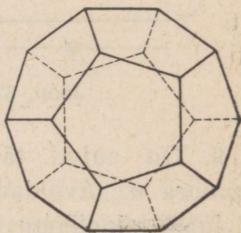
Arvutada ühenduslõike läbiva tasapinna ja risttahuka väiksema põhja vaheline nurk.

13. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv ja külgserv suhtuvad nagu $\sqrt{3} : \sqrt{2}$. Läbi põhja diagonaali on juhitud tasapind rööbiti külgservaga. Arvutada selle tasapinna ja põhitahu vaheline nurk.

14. Rööpküliku üks väiksem külg asetseb tasapinnal P , tema vastaskülg asetseb tasapinnast P kaugusel, mis on võrdne rööpküliku suuremate külgede kaugusega teineteisest. Arvutada rööpküliku tasapinna ja tasapinna P vaheline nurk, kui rööpküliku külgede suhe on $3 : 5$.



Joon. 29.



Joon. 30.

15. Arvutada: 1) korrapärase tetraeedri; 2) korrapärase oktaeedri; 3) korrapärase ikosaeedri (joon. 29); 4) korrapärase dodekaeedri (joon. 30) lähistahkude vahelised nurgad.

§ 18. Kujundi projektsiooni pindala.

1. Rööpküliku pindala $Q = 50 \text{ cm}^2$. Tema tasapind moodustab projektsioonipinnaga 30° -se nurga. Rööpküliku üks külg asetseb projektsioonipinnal. Arvutada rööpküliku projektsiooni pindala.

2. Läbi kolmnurkse püstprisma põhiserva on juhitud tasapind, mis lõikub vastasoleva külgservaga ja moodustab põhitahuga 45° -se nurga. Avaldada lõike pindala, kui põhja pindala on Q .

3. Läbi korrapärase kolmnurkse prisma põhiserva on juhitud lõiketaspind, mis moodustab põhitahuga nurga α . Prisma põhiserv on a . Avaldada lõike pindala.

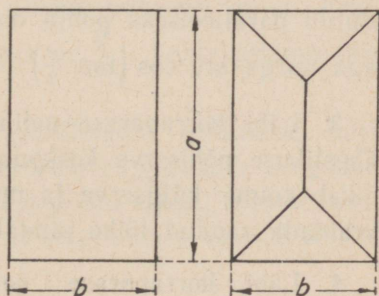
4. Korstnal on korrapärase nelinurkse prisma kuju. Katuse kaldenurk on 32° . Katusesse korstna jaoks jäetud avause pindala on 2100 cm^2 . Arvutada korstna laius.

5. Korstna ristlõige on $40 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$. Katuse kaldenurk on 35° . Arvutada korstna jaoks katusesse jäetud avause pindala.

6. Neljaküljeline katus katab 28 -ruutmeetrilist pindala. Katuse iga külge moodustab laega nurga $32^\circ 53'$. Arvutada katuse pindala.

7. Neljaküljelise katuse küljel on võrdhaarse trapetsi kuju, mille alused on 10 m ja 6 m ning kõrgus on 5 m . Katuse külje projektsiooni pindala lae tasapinnal on 32 m^2 . Leida katuse külje kaldenurk ja katuse harja kõrgus laest.

8. Joonisel 31 on kujutatud ühe- ja neljaküljelise katuse ristküliku-kujulised põhijoonised. Ristkülikute küljed on a ja b ning mõlema katuse külgede kaldenurgad on α . Kumma katuse värvimiseks kulub rohkem värvi?



Joon. 31.

9. Pinna valgustustugevus oleneb valguskiirte ja valgustatava pinna vahelisest nurgast. Olgu valgustatava tasapinnatüki pindala Q ja moodustagu valguskiired selle tasapinnaga nurga α . Kui

suurele pinnale langeksid samad kiired, kui valgustatav tasapind oleks risti kiirtega? Kas see pind on endisest suurem või väiksem? Kas pind on endisest tugevamini või nõrgemini valgustatud?

10. Kui suurt rōhttasapinna osa saab katta katusega, mille kaldenurk on $27^{\circ}30'$ ja pindala on 120 m^2 ?

§ 19. Rōōptahukad, prismad, pūramiidid ja nende pindalad.

Rōōptahukad ja prismad.

1. Risttahuka diagonaal moodustab tema servadega nurgad α , β ja γ .

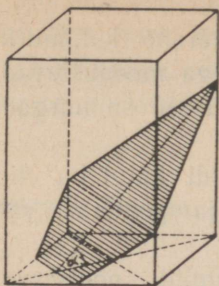
1) Tōestada, et $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

2) Arvutada γ , kui $\alpha = 31^{\circ}10'$ ja $\beta = 69^{\circ}09'$.

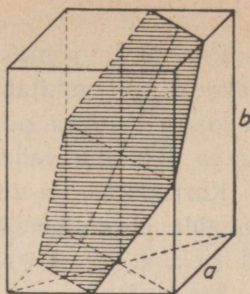
2. Kui korrapārast nelinurkset prismat lõigata nii, et lõikena tekib romb, mille teravnurk on α , siis lõiketasapind osutub paralleelseks põhja diagonaaliga ja moodustab põhjaga nurga $\arccos\left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)$. Tōestada see lause.

3. Lābi korrapārase nelinurkse prisma (joon. 32) kahe lähestikuse põhiserva keskpunktide on juhitud tasapind, mis lõikab kolme külgserva ja moodustab pōhitahuga nurga α . Avaldada saadud lõike pindala.

4. Lābi korrapārase nelinurkse prisma (joon. 33) telje keskpunkti ja kahe lähestikuse põhiserva keskpunktide on juhitud tasapind. Teades, et põhiserv on a ja külgserv on b , avaldada: 1) saadud lõike pindala ja 2) lõiketasapinna ja pōhitahu vaheline nurk.



Joon. 32.



Joon. 33.

5. Nelinurkse püstprisma põhjaks on romb, mille teravnurk on α . Kuidas peab lõikama seda prisma, et lõikena tekiks ruut, mille tipud asetsevad prisma külgservadel?

6. Risttahuka diagonaal d moodustab põhjaga nurga β . Põhja diagonaali ja põhiserva vaheline nurk on α . Leida risttahuka külgpindala ($\alpha = 21^{\circ}35'$; $\beta = 54^{\circ}24'$; $d = 17,89$ m).

7. Püströöptahuka põhjaks on romb, mille väiksem diagonaal on d ja teravnurk on α . Rööptahuka kõrgus on $\frac{d}{2}$. Leida rööptahuka täispindala ($d = 25,87$; $\alpha = 75^{\circ}20'$).

8. Korrapärase viisnurkse prisma põhiserv on a , põhja diagonaal on d ja prisma kõrgus on $\frac{d}{4}$. Leida prisma täispindala ($a = 23,79$ m).

9. Püstprisma põhjaks on võrdhaarne kolmnurk, mille haar on a ja tipunurk on α . Võrdsete külgtahkude diagonaalid, mis väljuvad ühest ja samast põhja tipust, moodustavad teineteisega nurga β . Leida prisma külgpindala ($a = 97,84$ cm; $\alpha = 63^{\circ}28'$ ja $\beta = 39^{\circ}36'$).

10. Prisma põhjaks on korrapärase kolmnurk, mille külg on a . Ühe põhja ühe tipu projektsioon asetseb teise põhja keskpunktis. Külgservad moodustavad põhitahuga nurga α . Avaldada prisma külgpindala.

Püramiid.

11. Püramiidi põhjaks on korrapärase kolmnurk. Üks külgtahk on risti põhitahuga, teised aga moodustavad põhitahuga kumbki nurga φ . Leida, kui suured on nurgad külgservade ja põhitahu vahel ($\varphi = 30^\circ$).

12. Korrapärase n -nurkse püramiidi külgtahu tipunurk on α . Leida püramiidi külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad ($n = 4$; $\alpha = 60^\circ$).

13. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgserv moodustab põhitahuga nurga α . Püramiidisse on kujundatud kuup nii, et ta neli tippu asetsevad püramiidi apoteemidel. Avaldada kuubi serv.

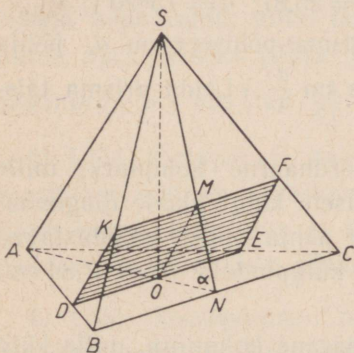
14. Korrapärase kolmnurkse püramiidi põhiserv on a ja moodustab külgservaga nurga α . Avaldada läbi püramiidi külgserva ja kõrguse juhitud lõike pindala.

15. Korrapärase nelinurkse püramiidi apoteem on c ja diagonaallõike pindala on P . Leida püramiidi külge- ja põhitahu vaheline nurk ning põhiserv ($c = 5$; $P = 15$).

16. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrguse ja põhiserva suhe on $m : n$. Läbi põhitahu diagonaali on juhitud

kaldtasapind nii, et lõike pindala võrdub diagonaallõike pindalaga. Leida lõike- tasapinna ja põhitahu vaheline nurk ($m : n = 1 : \sqrt{6}$).

17. Korrapärase kolmnurkse püramiidi (joon. 34) põhiserv on a ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on α . Püramiidi lõike $DEFK$ tasapind läbib põhja keskpunkti



Joon. 34.

ja on rööbiti püramiidi kiivsete servadega SA ja BC . Leida selle lõike pindala ($a = 3$; $\alpha = 70^\circ$).

18. Korrapärase nelinurkse püramiidi külge ja põhitahu vaheline nurk on α . Püramiid on lõigatud põhiserva läbiva tasapinnaga, mis põhitahuga moodustab nurga β . Põhiserv on a . Avaldada lõike pindala.

Projektsiooni pindala lause rakendamine püramiidi pindala arvutamiseks.

19. Kui mingi püramiidi kõik külgtahud moodustavad põhitahuga võrdsed nurgad α , siis:

$$S_{\text{külg}} = \frac{Q}{\cos \alpha} \quad \text{ja} \quad S_{\text{täis}} = \frac{2Q \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha},$$

kus S on püramiidi pindala ja Q on põhja pindala. Tõestada see lause.

20. (Suuline.) Püramiidi põhjaks on täisnurkne kolmnurk, mille kaatedid on 6 cm ja 8 cm. Püramiidi kõik külge ja põhitahu vahelised nurgad on 60° . Arvutada külgpindala.

21. 1) (Suuline.) Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ning külge ja põhitahu vaheline nurk on 60° . Avaldada külgpindala.

2) On antud kaks korrapärast püramiidi, üks kolme ja teine kuusnurkne. Kummagi püramiidi põhiserv on a ning külge ja põhitahu vaheline nurk on 30° . Avaldada kummagi püramiidi külgpindala.

22. Kolmnurkse püramiidi põhiservad on 13 cm, 14 cm ja 15 cm ning kõik külge ja põhitahu vahelised nurgad on 60° . Arvutada püramiidi külgpindala.

23. Torn on kaetud korrapärase kaheksanurkse püramiidi kujulise katusega. Püramiidi külge ja põhitahu vahelised nurgad on 60° . Põhiserv on 1,23 m. Mitu ruutmeetrit plekki kulub katuse katmiseks?

24. Korrapärase püramiidi põhja pindala on 168 cm^2 ja külgpindala on 200 cm^2 . Arvutada külge- ja põhitahu vaheline nurk.
25. (Suultne.) Korrapärase nelinurkse püramiidi külge- ja põhitahu vaheline nurk on α . Põhiserv on a . Avaldada külgpindala.
26. Korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus on h ning külge- ja põhitahu vaheline nurk on α . Avaldada püramiidi täispindala.
27. Püramiidi põhjaks on romb, mille külge on a ja teravnurk on α . Püramiidi kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on φ . Avaldada püramiidi täispindala.
28. Korrapärase n -nurkse püramiidi apoteem on k ja moodustab põhitahuga nurga α . Leida püramiidi täispindala ($n=12$; $k=36,3$; $\alpha=35^{\circ}40'$).
29. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alused on a ja b ($b > a$). Kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on α . Avaldada püramiidi täispindala.
30. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille diagonaal on l ja moodustab suurema alusega nurga α . Kõik külge- ja põhitahu vahelised nurgad on φ . Avaldada püramiidi täispindala.

Püramiidi pindala.

31. Korrapärase nelinurkse püramiidi põhiserv on a ja külgetahu tipunurk on α . Avaldada püramiidi täispindala.
32. Korrapärase n -nurkse püramiidi põhiserv on a ning külgeserva ja põhitahu vaheline nurk on α . Avaldada püramiidi täispindala.
33. Kolmnurkse püramiidi tipu juures olevad tasanurgad on α , α ja β . Külgeserv, mis on võrdsete nurkade ühiseks

haaraks, on a ja on risti põhitahuga. Avaldada püramiidi külgpindala.

34. Püramiidi põhjaks on ruut, mille külg on a . Kaks külgtahku on risti põhitahuga ja teised kaks külgtahku moodustavad põhitahuga nurgad α . Avaldada püramiidi külg- ja täispindala.

35. Püramiidi põhjaks on ristkülik. Kaks külgtahku on risti põhitahuga ja teised kaks külgtahku moodustavad põhitahuga nurgad α ja β . Püramiidi kõrgus on h . Avaldada püramiidi külgpindala.

36. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk on α . Kaks külgtahku (näiteks need, mis hõlmavad nurka α) on risti põhitahuga ja kumbki ülejäänud tahk moodustab põhitahuga nurga φ . Avaldada püramiidi külgpindala.

Tüvipüramiid.

37. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi külgserv on c ning põhiservad on a ja b ($a > b$). Avaldada tüvipüramiidi kõrgus.

38. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi suurem ja väiksem põhiserv suhtuvad nagu $m:n$ ning külgservad moodustavad põhitahuga nurga α . Püramiid on lõigatud tasapinnaga, mis läbib suuremat põhiserva ja tema vastas asetsevat väiksemat põhiserva. Kui suure nurga moodustab see tasapind püramiidi põhjaga?

39. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi kõrgus on h ning põhiservad on a ja b ($a > b$). Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

40. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b ($a > b$) ning külgserv moodustab põhjaga nurga α . Avaldada tüvipüramiidi täispindala.

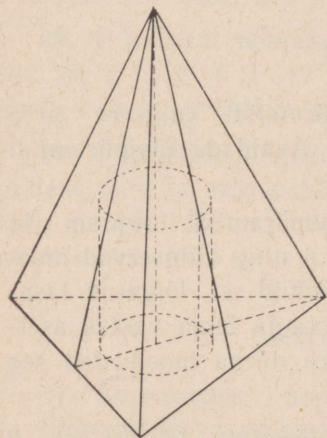
41. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi põhjade pindalade suhe on m^2 , apoteem on k ning apoteemi ja kõrguse vaheline nurk on α . Avaldada tüvipüramiidi külgpindala.

42. On antud korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kõrgus h ning nurgad α ja β , mis suurem põhi moodustab külgservaga ja tüvipüramiidi diagonaaliga. Leida tüvipüramiidi külgpindala ($h = 25$; $\alpha = 50^\circ 15'$; $\beta = 35^\circ$).

§ 20. Silinder, koonus, tüvikoonus ja nende pindalad.

Silinder.

1. Võrdkülgse telglõikega silindri ülemise põhja piirde punkt on ühendatud alumise põhja piirde punktiga. Nendes punktidesse juhitud raadiuste vaheline nurk (mõeldakse kiivsirgete vahelist nurka) on 30° . Arvutada ühendussirge ja silindri telje vaheline nurk.



Joon. 35.

2. Võrdkülgse telglõikega silindri põhja raadius on R . Ülemise põhja piirde punkt on ühendatud alumise põhja piirde punktiga sirge abil, mis põhja tasapinnaga moodustab nurga α . Avaldada selle sirge lühim kaugus silindri teljest.

3. Silindrile on juhitud puutuja, mis põhja tasapinnaga moodustab nurga α . Avaldada alumise põhja keskpunkti kaugus sellest sirgest, kui põhja raadius on R ja põhja keskpunkti kaugus puutepunktist on d .

4. Korrapärase kolmnurkse püramiidi külgserv on b ja moodustab põhitahuga nurga α . Sellesse püramiidi on kujundatud silinder nii, et ta põhi asetseb püramiidi põhitahul (joon. 35). Avaldada silindri kõrgus.

Koonus.

5. Koonuse põhja raadius on R ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja moodustab kõrgusega nurga φ . Avaldada lõike pindala.

6. Koonus asetseb kahe paralleelse tasapinna vahel nii, et ta põhi asetseb ühel neist ja tipp teisel. Koonuse moodustaja ja kõrguse vaheline nurk on α . Kõrgust poolitab sirge, mis temaga moodustab nurga β ja lõikab koonuse külgpinda kahes punktis. Paralleelsete tasapindade vahel asetsev selle sirge lõik on a . Avaldada selle sirge lõik, mis asetseb seespool koonuse külgpinda.

7. Koonusesse, mille moodustaja on l ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α , on kujundatud kuup. Avaldada kuubi serv.

8. Koonuse põhja raadius on R ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonusesse on kujundatud kolmnurkne võrdsete servadega püstprisma nii, et ta põhi asetseb koonuse põhja tasapinnal. Avaldada prisma servade pikkus.

Koonuse pindala.

9. Koonuse moodustaja a ja põhja vaheline nurk on α . Avaldada koonuse täispindala.

10. Koonuse külgpindala on kolm korda suurem kui ta põhja pindala. Leida moodustaja ja põhja vaheline nurk.

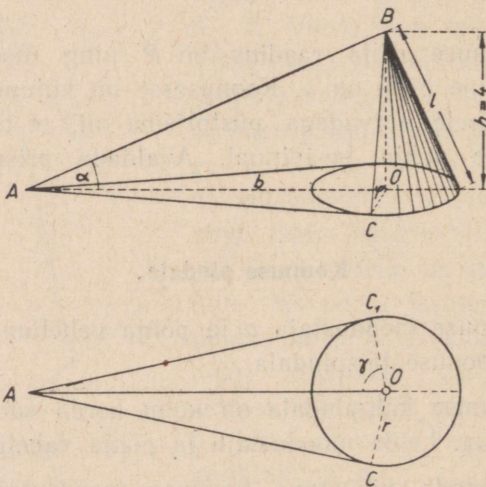
11. Arvutada niisugune koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, mille puhul koonuse telglõike pindala on neli korda väiksem kui täispindala.

12. Avaldada koonuse täispindala, kui ta moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning telglõike pindala on Q .

13. Läbi koonuse kahe moodustaja, mis teineteisega moodustavad nurga φ , on juhitud tasapind, mis koonuse põhjaga moodustab nurga α . Lõike pindala on S . Leida koonuse kõrgus ($\varphi = 52^{\circ}16'$; $\alpha = 33^{\circ}10'$; $S = 617,5 \text{ cm}^2$).

14. Koonuse põhja raadius on r ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonus on lõigatud tasapinnaga, mis läbib koonuse tippu ja moodustab kõrgusega nurga δ . Leida koonuse külgpindala ja lõike pindala ($r = 2,3 \text{ m}$; $\alpha = 42^{\circ}27'$; $\delta = 36^{\circ}21'$).

15. Muldvallil on joonisel 36 näidatud kuju. On antud: $\frac{h}{b} = \frac{1}{n} = 0,05$; $\frac{h}{r} = \frac{1}{m} = \frac{2}{3}$; $h = 4 \text{ m}$. Arvutada: 1) b ; 2) r ; 3) $\alpha = \angle BAO$; 4) $\varphi = \angle BCO$; 5) γ ; 6) valli põhja pindala; 7) valli külgpindala.



Joon. 36.

16. Koonuse külgpindala on S ja moodustaja on a . Leida koonuse telglõike tipunurk ($S = 81,312 \text{ m}^2$; $a = 10 \text{ m}$).

17. Koonuse kõrgus on H ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonuse külgpind on jaotatud pooleks tasapinnaga, mis on risti kõrgusega. Avaldada: 1) lõiketasa-pinna kaugus koonuse tipust; 2) külgpinna osade suhe ($\alpha = 60^\circ$).

18. Koonuse telglõike tipunurk on α . Avaldada koonuse külgpinnalaotuse kesknurk. [Näited: 1) võrdkülgse telglõikega koonus; 2) $\alpha = 70^\circ 24'$.]

Tüvikoonus.

19. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r . Moodustaja kaldenurk esimese põhja suhtes on α . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

20. Tüvikoonuse kõrgus on tema põhjade raadiuste keskmine võrdeline; raadiuste summa on m . Moodustaja kaldenurk põhja tasapinna suhtes on α . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

21. Läbi tüvikoonuse kahe moodustaja, mille vaheline nurk on β , on paigutatud tasapind, mis koonuse põhju lõikab mööda kõõle, mille pikkused on m ja n ($m > n$). Kummalegi kõõlule vastav kaar on a . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

22. Tüvikoonus, mille põhjade raadiused on R ja r , on lõigatud tasapinnaga, mis põhjaga moodustab nurga β . Lõiketaspind lõikab kummagi põhja piirdejoonest kaare δ . Avaldada lõike pindala.

23. Tüvikoonuse kõrgus on h ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Moodustaja on risti telglõike diagonaalsirgega, mis läbib tema ülemist otspunkti. Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

24. Tüvikoonuse alumise ja ülemise põhja pindalad ning külgpindala suhtuvad nagu $m:n:p$. Avaldada moodustaja ja alumise põhja vaheline nurk.

25. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on risti teineteisega. Moodustaja on l ning tema ja alumise põhja vaheline nurk on α . Leida tüvikoonuse külge- ja täispindala ($l=12$; $\alpha=70^{\circ}20'$).

26. Tüvikoonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning põhjade pindalad on Q ja q . Avaldada tüvikoonuse külgpindala.

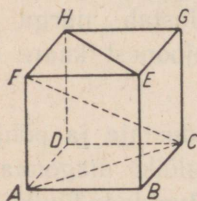
§ 21. Ruumalade arvutamine.

Rööptahukas.

1. Risttahuka diagonaal l moodustab põhja tasapinnaga nurga φ . Põhja diagonaalide vaheline teravnurk on β . Avaldada risttahuka ruumala.

2. Risttahuka põhja diagonaal $d=7,5$ dm, põhja diagonaalide vaheline nurk $\alpha=35^{\circ}27'$ ning põhja suuremat külge läbiva diagonaaltasapinna ja põhja vaheline nurk $\beta=57^{\circ}33'$. Arvutada risttahuka ruumala.

3. Püströöptahuka põhja teravnurk on α ning küljed on a ja b . Rööptahuka väiksem diagonaal võrdub põhja suurema diagonaaliga. Avaldada rööptahuka ruumala.



Joon. 37.

4. Püströöptahuka (joon. 37) põhjaks on rööpkülik, mille diagonaal $AC=d$, külge $CB=\frac{1}{4}AC$ ja $\angle ABC=\alpha$. Rööptahuka diagonaal FC moodustab põhja tasapinnaga nurga φ . Leida rööptahuka ruumala ning põhja diagonaalide AC ja EH vaheline nurk ($d=14,28$ dm; $\alpha=106^{\circ}06'$; $\varphi=57^{\circ}47'$).

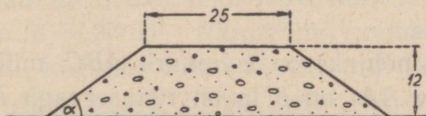
5. Rööptahuka ühest tipust väljuvad servad on a , b ja c ; servad a ja b on risti teineteisega ning serv c moodustab kummagagi nurga α . Avaldada rööptahuka ruumala ning serva c ja ristküliku tasapinna vaheline nurk ($\alpha = 120^\circ$).

Prisma.

6. Korrapärase nelinurkse prisma diagonaal moodustab külgtahuga nurga α ; prisma põhiserv on a . Avaldada prisma ruumala.

7. Läbi korrapärase nelinurkse prisma alumise põhja diagonaali ja ülemise põhja tipu on juhitud tasapind, mis kahte lähiskülgtahku lõikab mööda sirgeid, mis teineteisega moodustavad nurga $\alpha = 58^\circ 48'$. Prisma põhiserv on $a = 6,4$ cm. Arvutada prisma ruumala.

8. Korrapärase kolmnurkse prisma ülemise põhja kaks tippu on ühendatud nende vastas asetsevate alumise põhja külgede keskpunktidega. Ühendussirgete vaheline nurk, mille sisepiirkond on pööratud põhja poole, on α ; prisma põhiserv on a . Avaldada prisma ruumala.



Joon. 38.

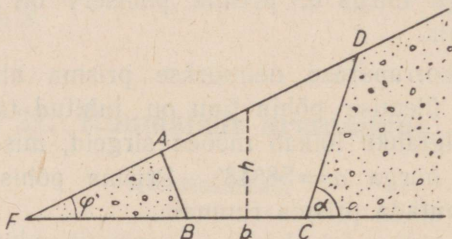
9. Joonisel 38 on kujutatud raudtee muldkeha ristlõige. Nurk on määratud võrdusega $\tan \alpha = \frac{2}{3}$. Mitu kuupmeetrit mulda sisaldab muldkeha 1 jooksev meeter? Mõõdud on joonisel antud meetreis.

10. Püstprisma põhjaks on kolmnurk ABC , mille külg $AC = b = 38,03$ dm, külg $BC = a = 34,84$ dm ja nurk

$ACB = \gamma = 58^{\circ}22'$. Prisma külgserv võrdub kolmnurga ABC kõrgusega h_c . Arvutada prisma ruumala.

11. Püstprisma kõrgus $h = 20$ dm. Prisma põhjaks on ringi ümber kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk $\alpha = 45^{\circ}42'$; ringi raadius $r = 6,15$ dm. Avaldada ja arvutada prisma ruumala.

12. Maa-alale, mille pinna kaldenurk rõhttasapiina suhtes on $\varphi = 18^{\circ}30'$ (joon. 39), tahetakse kaevata süvend.



Joon. 39.

Süvendi külgede kaldenurk peab olema $\alpha = 68^{\circ}10'$, süvendi alumine laius $b = 14,2$ m ja sügavus keskkohal $h = 9,2$ m. Mitu kuupmeetrit mulda tuleb süvendi 1 jooksva meetri kohta?

13. Prisma põhjaks on kolmnurk ABC , milles $BC = a$ ja $AB = AC$. Serv AA_1 on b ja on risti servaga BC ; kahetahuline nurk serva AA_1 juures on α . Avaldada prisma ruumala.

Püramiid.

14. Korrapärase n -nurkse püramiidi külgserv b moodustab põhja tasapinnaga nurga β . Leida püramiidi ruumala ($n = 8$; $b = 3,5$; $\beta = 78^{\circ}39'$).

15. Korrapärase nelinurkse püramiidi külgserv on b ja külgtahu tipunurk on α . Avaldada püramiidi ruumala.

16. Avaldada püramiidi ruumala, kui ta kõrgus on h , külgservad moodustavad põhitahuga nurga φ ning põhjaks on kolmnurk, mille kaks nurka on α ja β .

17. Kolmnurkse püramiidi kaks külgtahku on võrdhaarsed täisnurksed kolmnurgad, millel on võrdsed hüpotenuusid b , mis teineteisega moodustavad nurga α . Avaldada püramiidi ruumala.

18. Püramiidi põhjaks on trapets, mille haarad on võrdsed väiksema alusega a ja teravnurgad on α . Püramiidi külgservad moodustavad põhitahuga võrdsed nurgad φ . Avaldada püramiidi ruumala.

19. Püramiidi põhjaks on võrdhaarne trapets, mille alused on a ja b ($a > b$) ning diagonaalide mittevõrdsete lõikude vaheline nurk on α . Püramiidi kõrguse aluspunkt asetseb põhja diagonaalide lõikepunktis. Kahetahulised nurgad, mille servadeks on trapetsi alused, suhtuvad nagu 1:2. Avaldada püramiidi ruumala.

20. Püramiidi $SABCD$ põhjaks on rööpkülik $ABCD$. Servad SB ja SD on risti põhiservadega BC ja AD ning moodustavad põhitahuga nurga φ . Avaldada püramiidi ruumala, kui rööpküliku teravnurk on α ja pindala on P .

21. Püramiidi $SABC$ tahu ABC nurk A on $\alpha = 72^\circ 36'$ ja nurk B on $\beta = 47^\circ 23'$. Püramiidi ruumala $V = 317 \text{ cm}^3$. Püramiid on lõigatud tasapinnaga, mis läbib serva SC ja kolmnurga ABC nurga C poolitajat. Missuguseiks osadeks jaotab see tasapind püramiidi ruumala?

22. Korrapärase tetraeedri serva läbiv tasapind jaotab tetraeedri ruumala suhtes 3:5. Missuguseiks osadeks see tasapind jaotab tetraeedri kahetahulise nurga?

Tüvipüramiid.

23. Tiigi süvendil on korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi kuju. Põhiservad on $a = 14 \text{ m}$ ja $b = 10 \text{ m}$. Külgtah-

kude kaldenurk põhitahu suhtes $\alpha = 38^\circ$. Kui palju vett võib süvend mahutada?

24. Korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b ning külgtahu teravnurk on α . Leida tüvipüramiidi ruumala ($a = 25,7$; $b = 15,2$; $\alpha = 65^\circ 12'$).

25. Korrapärase n -nurkse tüvipüramiidi põhiservad on a ja b . Külgservade kaldenurk põhitahu suhtes on α . Avaldada tüvipüramiidi ruumala.

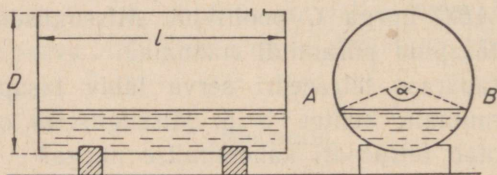
Silinder.

26. Silindri külgpinnalaotus on ristkülik, mille diagonaal d moodustab alusega nurga α . Avaldada silindri ruumala.

27. Silindri põhjal on võetud kõõl, mille pikkus on a . Temale vastav kaar on α . Silindri kõrgus on h . Leida silindri ruumala ($a = 4,8$ dm; $\alpha = 26^\circ 32'$; $h = 23$ dm).

28. Võrdkülgse telglõikega silindri põhjasse on kujundatud korrapärane n -nurk, mille külg on a . Avaldada silindri ruumala.

29. Rõhtsalt asetsev silindrikujuline paak on osaliselt täidetud vedelikuga (joon. 40). Kaarele AB vastab nurk



Joon. 40.

$\alpha = 135^\circ$. Paagi sisemine läbimõõt $D = 1,7$ m ja sisemine pikkus $l = 3,5$ m. Arvutada vedelikuhulk.

30. Silindrilise toru kõrgus on H . Kui läbi toru välis-
pinna moodustaja juhtida kaks tasapinda, mis puutuvad
tema sisepinda, siis nende tasapindade vaheline nurk on α
ning kõõl, mis ühendab nende tasapindade ja toru põhja
sisemise ringjoone puutepunkte, on b . Avaldada toru seinte
ruumala.

31. Kui silindri põhjasse kujundatud korrapärase n -nurga
külje otspunktid ühendada teise põhja keskpunktiga, siis tekib
võrdhaarne kolmnurk, mille pindala on Q ja tipunurk on α .
Avaldada silindri ruumala.

Koonus.

32. Peene liiva vaba pinna kaldenurk $\varphi = 31^\circ$. Liivakuh-
jal on koonuse kuju, mille põhja übermõõt $c = 11$ m. Liiva
erikaal $d = 1,6$. Avaldada ja arvutada kuhja kaal.

33. Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk $\alpha =$
 $= 18^\circ 45' 50''$, moodustaja pikkus $l = 36,17$ dm. Arvutada
koonuse ruumala.

34. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning
kõrgus on h . Avaldada koonuse ruumala.

35. Koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk on α ning
põhja raadius on R . Avaldada koonuse täispindala ja
ruumala.

36. Koonuse telglõike tipunurk on α . Telglõike ümber
kujundatud ringjoone raadius on R . Avaldada koonuse
ruumala.

37. Koonuse põhjal võetud kõõlule a vastab kaar α . Koo-
nuse kõrguse ja moodustaja vaheline nurk on β . Avaldada
koonuse ruumala.

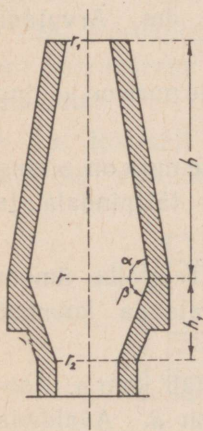
38. Koonuse moodustaja ja kõrguse vahe $d = 2,5$ m ning
nende vaheline nurk $\alpha = 42^\circ 38'$. Avaldada ja arvutada
koonuse ruumala.

39. Kaks koonust asetseb ühel ning samal pool nende ühist põhja, mille raadius $R = 5,38$ dm. Ühe koonuse moodustaja kaldenurk põhja suhtes $\alpha = 74^{\circ}28'$ ja teise oma $\beta = 60^{\circ}12'$. Avaldada ja arvutada koonuste külgpindade vaheline ruumala.

Tüvikoonus.

40. Tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r . Moodustaja ja esimese põhja vaheline nurk on α . Avaldada tüvikoonuse ruumala.

41. Tüvikoonuse põhjade pindalade suhe on 4, moodustaja on l ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on φ . Avaldada koonuse ruumala.



Joon. 41.

42. Joonisel 41 on kujutatud kõrgahju telglõige. Ahju õõne moodustavad kaks tüvikoonust. Ülemise ja alumise ava raadiused on r_1 ja r_2 . Moodustajate kaldenurgad põhja suhtes on α ja β . Ahju õõne ruumala on V . Avaldada ja arvutada tüvikoonuste ühise põhja raadius r ning nende kõrgused h ja h_1 ($2r_1 = 4,2$ m; $2r_2 = 4,9$ m; $\alpha = 86^{\circ}$; $\beta = 76^{\circ}$; $V = 572,6$ m³).

43. Tüvikoonuses asetseb koonus, mille põhjaks on tüvikoonuse väiksem põhi, kõrguseks on tüvikoonuse kõrgus ja moodustajad on paralleelsed tüvikoonuse moodustajatega. Tüvikoonuse moodustaja $a = 24,9$ dm ja moodustajate vaheline suurim nurk $\alpha = 65^{\circ}49'$. Avaldada ja arvutada tüvikoonuse ruumala.

44. Tüvikoonuse telglõike diagonaalid on risti teineteisega, moodustaja on l ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Avaldada ja arvutada tüvikoonuse ruumala ($l = 12$; $\alpha = 70^\circ 20'$).

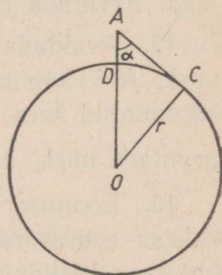
§ 22. Kera ja selle osad.

Kera.

1. Maakera raadius on (ligikaudu) 6370 km. Moskva asetseb paralleelringjoonel, mille geograafiline laius on 56° . Arvutada selle paralleeli raadius.

2. Maakera raadius on 6370 km. Arvutada pöörjoone (laius $23^\circ 27'$) ja polaarjoone (laius $66^\circ 33'$) pikkus.

3. Vaatleja, asetsedes mäetipus A (joon. 42), mõõtis püstsirge AD ja silmapiirile suunatud vaatekiire AC vahelise nurga $DAC = \alpha$. Teades maakera raadiust r avaldada mäe kõrgus $AD = x$.



Joon. 42.

4. Kerasse, mille ruumala $V = 53,37 \text{ dm}^3$, on kujundatud koonus. Koonuse põhja läbimõõdu otspunktidesse juhitud moodustajate vaheline nurk $\alpha = 42^\circ 18'$. Avaldada ja arvutada koonuse ruumala.

5. Koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk $\alpha = 35^\circ 18'$. Leida koonuse ja tema ümber kujundatud kera ruumalade suhe.

6. Korrapärase n -nurkse püramiidi põhiseriv on a ning põhi- ja külgtahu vaheline nurk on φ . Avaldada püramiidisse kujundatud kera raadius.

7. Korrapärase n -nurkse püramiidi põhiseriv on a ning külgserva ja põhitahu vaheline nurk on α . Avaldada ja arvu-

tada püramiidi ümber kujundatud kera raadius ($n=8$; $a=3,5$; $\alpha=58^{\circ}37'$).

8. Püramiidi põhjaks on romb, mille külg on a ja teravnurk on α . Külgtahkude ja põhitahu vahelised nurgad on võrdsed nurgaga φ . Avaldada püramiidisse kujundatud kera raadius.

9. Koonuse põhja ümbermõõt on C ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Avaldada koonuse ja temasse kujundatud kera puutejoone pikkus.

10. Kera pinna punktist väljub kolm võrdset kõõlu, mis üksteisega moodustavad võrdsed nurgad. Avaldada kõõlude pikkus, kui nende vaheline nurk on α ja kera raadius on R .

11. Koonuse põhja pindala, koonusesse kujundatud kera pindala ja koonuse külgpindala moodustavad aritmeetilise jada. Arvutada moodustaja ja põhja vaheline nurk.

12. Avaldada koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk, kui koonuse ruumala on m korda suurem temasse kujundatud kera ruumalast. (Leida arvu m väikseim väärtus; arvutada nurk, kui $m=2\frac{1}{4}$.)

13. Koonuse teljega ristuv lõige, mis koonuse jaotab kaheks ruumvõrdseks osaks, läbib koonuse ümber kujundatud kera keskpunkti. Arvutada moodustaja ja põhja vaheline nurk.

14. Nelja kera ümber, mis asetsevad nii, et iga kera puutub kokku kõigi teistega, on kujundatud koonus. Arvutada koonuse telglõike tipunurk.

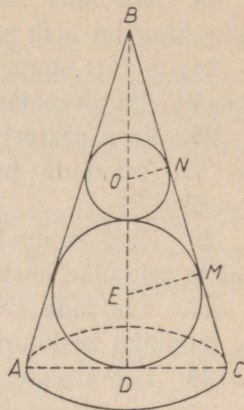
15. Kera ümber on kujundatud tüvikoonus, mille külgpindala ja kera pindala suhe on $m:n$. Avaldada ja arvutada moodustaja ja suurema põhja vaheline nurk ($m:n=2:1$).

16. Avaldada tüvikoonuse ümber kujundatud kera raadius, kui tüvikoonuse põhjade raadiused on R ja r ning moodustaja ja alumise aluse vaheline nurk on α .

17. Tüvikoonusesse, mille põhjade raadiused on r_1 ja r_2 ($r_1 > r_2$), on kujundatud kera. Avaldada: 1) kera pindala ning 2) koonuse moodustaja ja põhja vaheline nurk.

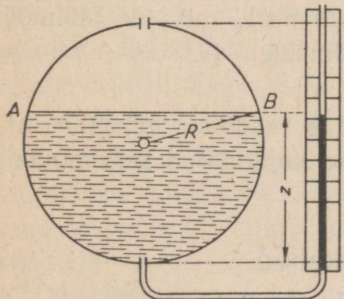
18. Koonusesse on kujundatud kaks kera nii, et nad puutuvad teineteist ning koonuse põhja pinda ja külgpinda (joon. 43). Kerade raadiuste EM ja OM suhe on $m:n$. Avaldada ja arvutada koonuse telglõike tipunurk ($m:n=3:1$).

19. Koonuse põhja raadius on R ning moodustaja ja põhja vaheline nurk on α . Koonusesse on kujundatud rida keri nii, et esimene neist puutub koonuse külgpinda ja põhja pinda, iga järgmine aga koonuse külgpinda ja eelmist kera. Leida kerade ruumalade summa piirväärtus kerade arvu piiramatul kasvamisel.



Joon. 43.

Kera osad.



Joon. 44.

20. Kerakujulisse paaki on valatud vedelikku, mille erikaal on d . Kaare AB (joon. 44) suurus on φ . Paagi sisemine raadius on R . Avaldada vedeliku kaal.

21. Gaasisäilitil on ülalt sfääri segmendiga kaetud silindri kaju. Silindri sisemised mõõdud on: läbimõõt 24 m, kõrgus 6 m. Silindrit

katva sfääri segmendi telglõike kaar on $73^{\circ}44'$. Arvutada säiliti ruumala.

22. Arvutada kera kihi telglõike kaar, kui kihil on võrd-
sed põhjad ja ta külgpindala võrdub põhjade pindalade
summaga.

23. Avaldada sfääri segmendi pindala, kui ta telg-
lõike kaar on a ja sellele vastav kõõl on a .

24. Sfääri segmendi telglõike kaar $\alpha = 65^{\circ}28'$ ja raadius
 $R = 24$ dm. Avaldada ja arvutada sfääri segmendi pindala.

25. Kera sektori telglõike kaar on a ja temale vastav kõõl
on b . Avaldada ja arvutada sektori ruumala ($b = 25,13$;
 $\alpha = 63^{\circ}17'$).

26. Kera ruumala on V . Avaldada kera sektori ruumala,
kui ta telglõike kesknurk on α .

27. Avaldada kera sektori täispindala, kui ta raadius on R
ja telglõike kesknurk on α .

28. Koonusesse on kujundatud kera. Koonuse külginna
ja kera puutejoon jaotab kera pinna osadeks, mille suhe on
 $m:n$. Leida koonuse moodustaja ja telje vaheline nurk
($m:n = 1:3$).

29. Ringi sektor, mille kaar on a (väiksem kui 180°),
pöörleb ringi läbimõõdu ümber, mis asetseb väljaspool sek-
torit. Pöördkeha ruumala suhtub sama raadiusega kera ruum-
alaga nagu $m:n$. Leida väiksem nurk, mis see läbimõõt
moodustab sektori äärmiste raadiustega ($\alpha = 90^{\circ}$; $m:n =$
 $= \sqrt{3}:\sqrt{8}$).

30. Kera sektori raadius on R ja raadiuste vaheline suu-
rim nurk on α . Avaldada sektorisse kujundatud kera pindala
ja ruumala.

§ 23. Pöördkehad.

Silindrist ja koonusest koosnevaid pöördkehi.

1. Kolmnurgas on antud: külg a ning nurgad B ja C .
Avaldada kolmnurga pöörlemisel antud külje ümber tekkiva
keha pindala ja ruumala.

2. Võrdhaarse kolmnurga pindala $Q = 50 \text{ dm}^2$ ja tipunurk $\beta = 100^\circ 24'$. Kolmnurk pöörleb sirge ümber, mis läbib tema aluse ühte otspunkti ja on risti alusega. Avaldada ja arvutada pöördkeha täispindala.

3. Kolmnurk ABC pöörleb sirge ümber, mis läbib tippu A ja on rööbiti küljega BC . Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala, kui $BC = a = 23,54 \text{ dm}$, külje AB projektsioon pöörlemisteljel on $b = 7,33 \text{ dm}$ ning külje AB ja telje vaheline nurk $\alpha = 18^\circ 36'$.

4. Korrapärase kolmnurk pöörleb telje ümber, mis, jäädes väljapoole kolmnurka, läbib tema külje otspunkti ja moodustab selle küljega teravnurga α . Avaldada pöördkeha pindala.

5. Võrdhaarne kolmnurk, mille haar on b ja tipunurk on α , pöörleb oma haara ümber. Leida pöördkeha ruumala ja pindala ($\alpha = 120^\circ$).

6. Romb, mille külg on a ja teravnurk on α , pöörleb teravnurga tippu läbiva telje ümber, mis on risti rombi küljega. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala.

7. Tasane sik-sakiline joon koosneb n võrdsest lõigust, mis üksteisega moodustavad võrdsed nurgad α . See joon pöörleb telje ümber, mis läbib ta ühte otspunkti ja on rööbiti nurga α poolitajaga. Avaldada pöördkeha pindala.

8. Kolmnurgas on antud küljed b ja c ning nendevaheline nurk α . Kolmnurk pöörleb telje ümber, mis, jäädes väljapoole kolmnurka, läbib nurga α tippu ning moodustab võrdsed nurgad külgedega b ja c . Avaldada pöördkeha ruumala.

9. Kolmnurgas on antud külg a ning selle lähisnurgad α ja $90^\circ + \alpha$. Kolmnurk pöörleb küljele a juhitud kõrguse ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

10. Poolringjoonel, mille läbimõõt on $AB = 2R$, on võetud kaar $BC = a$ (väiksem kui 90°). Punktist C on juhitud

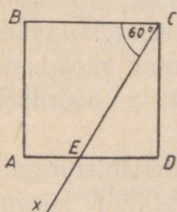
puutuja lõik CD kuni läbimõõdu pikenduseni, peale selle on punkt C ühendatud veel punktiga A . Kolmnurk ACD pöörleb külje AD ümber. Avaldada pöördkeha ruumala.

11. On antud kolmnurga ABC nurgad. Kolmnurk pöörleb järgemööda oma külgede a , b ja c ümber. Leida, kuidas üksteisega suhtuvad tekkinud pöördkehade ruumalad V_a , V_b ja V_c .

12. Võrdhaarne kolmnurk, mille tipunurk $\alpha = 54^\circ 16'$, ja võrdkülgne kolmnurk, millel on ühine alus $b = 25,34$ cm, asetsevad ühel ja samal tasapinnal¹. Nendest kolmnurkadest koosnev kujund pöörleb telje ümber, mis läbib kolmnurkade ühte ühist tippu ja on paralleelne võrdhaarne kolmnurga kõrgusega. Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala ja pindala.

13. Täisnurkse kolmnurga pindala on S ja üks teravnurk on α . Kolmnurk pöörleb ümber sirge, mis on kolmnurga tasapinnas hüpotenuusiga risti ja läbib nurga α tippu. Avaldada pöördkeha ruumala.

14. Ristkülik pöörleb ümber sirge, mis läbib tema ühte tippu, on diagonaaliga d risti ja moodustab ristküliku küljega nurga α . Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala ja pindala ($d = 34,06$ m; $\alpha = 56^\circ 14'$).



Joon. 45.

15. Läbi ruudu $ABCD$ tippu C (joon. 45) on juhitud sirge Cx , mis küljega $BC = a$ moodustab nurga $BCx = 60^\circ$ ja lõikab külge AD punktis E . Avaldada nelinurga $CBAE$ pöörlemisel telje Cx ümber tekkiva keha ruumala.

¹ Üks ühel pool ja teine teisel pool nende ühist alust. Tõlkija.

16. Täisnurkse kolmnurga übermõõt $2p = 27,42$ dm ja üks nurk $\alpha = 41^{\circ}16'$. Kolmnurk pöörleb oma hüpotenuusi ümber. Avaldada ja arvutada pöördkeha ruumala.

17. Ringi ümber, mille raadius on r , on kujundatud täisnurkne trapets, mille teravnurk on α . Trapets pöörleb oma väiksema haara ümber. Avaldada pöördkeha külgpindala.

18. Rööpküliku nürinurga tipust väljuv diagonaal moodustab rööpküliku väiksema küljega nurga β ; suuremate külgede vaheline kaugus on h ja rööpküliku teravnurk on α . Rööpkülik pöörleb telje ümber, mis läbib teravnurga tippu ja on paralleelne mainitud diagonaaliga. Avaldada pöördkeha ruumala.

19. Paarisarvilise külgede arvuga (n) korrapärase hulknurk pöörleb kahe teineteise vastas asetseva tipu ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse r kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse R kaudu ja 3) hulknurga külje a kaudu.

20. Paarisarvilise külgede arvuga (n) korrapärase hulknurk pöörleb kahe teineteise vastas asetseva külje keskpunktide ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse r kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse R kaudu ja 3) hulknurga külje a kaudu.

21. Paarituurvilise külgede arvuga (n) korrapärase hulknurk pöörleb ühe külje keskpunkti ja tema vastas asetseva tipu ühendussirge ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala: 1) hulknurgasse joonestatud ringi raadiuse r kaudu, 2) hulknurga ümber joonestatud ringjoone raadiuse R kaudu ja 3) hulknurga külje a kaudu.

Kera osi sisaldavaid pöördkehi.

22. Ringi segment, mille raadius on R ja kaar on a , pöörleb kaare otspunktisse juhitud läbimõõdu ümber. Avaldada pöördkeha ruumala ja pindala.

23. Ringi sektor, mille raadius on r ja kesknurk on α , pöörleb läbimõõdu ümber, mis sektori kesknurga poolitajaga moodustab nurga β . Avaldada pöördkeha ruumala.

24. Ringi sektor, mille kesknurk on α , pöörleb läbimõõdu ümber, mis on risti kesknurga poolitajaga. Sektori pindala on Q . Leida pöördkeha ruumala ($\alpha = 70^{\circ}36'$; $Q = 211,8$).

25. Kera läbimõõdu otspunktist on juhitud kõõl nii, et pind, mille kõõl moodustab pööreldes läbimõõdu ümber, jaotab kera kaheks ruumvõrdseks osaks. Arvutada kõõlu ja läbimõõdu vaheline nurk α .

26. Ringi segment, mille kaar on a ja kõõl on a , pöörleb kõõluga paralleelse läbimõõdu ümber. Avaldada pöördkeha pindala ja ruumala.

94
—
r7
—
37

Trigonomeetriliste funktsioonide tabel.

°	sin	tan	cot	cos	°
0	0,000	0,000	∞	1,000	90
1	0,017	0,017	57,290	1,000	89
2	0,035	0,035	28,636	0,999	88
3	0,052	0,052	19,081	0,999	87
4	0,070	0,070	14,301	0,998	86
5	0,087	0,087	11,430	0,996	85
6	0,105	0,105	9,514	0,995	84
7	0,122	0,123	8,144	0,993	83
8	0,139	0,141	7,115	0,990	82
9	0,156	0,158	6,314	0,988	81
10	0,174	0,176	5,671	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,904	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
°	cos	cot	tan	sin	°

Vastused.

§ 1.

1. -120° ; -1440° . 2. 1080° ; $10\ 800^\circ$. 3. 5° ; 150° ; 720° ; 1500° . 5. 360° .
6. 1) $120^\circ + n \cdot 360^\circ$; 2) $-60^\circ + n \cdot 360^\circ$ või $300^\circ + n \cdot 360^\circ$;
1) 120° , 480° , 840° , ...
7. 1) 1,57 cm; 2) $\frac{\pi R \alpha}{180}$. 8. 1) a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{3}$; d) $\frac{3}{4} \pi$; e) $\frac{\pi}{12}$;
f) $\frac{\pi}{8}$; g) $\frac{\pi}{5}$; h) $\frac{5}{12} \pi$; i) $\frac{3}{5} \pi$; k) $\frac{5}{6} \pi$; l) $\frac{7}{8} \pi$; m) $0,9\pi$.
- 2) a) 0,8901; b) 0,4712; c) 1,3352; d) 0,2182; e) 0,5009; f) 1,2802;
g) 2,0420; h) 3,7737. 3) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3}{5} \pi$; $\frac{2}{3} \pi$; $\frac{\pi(n-2)}{n}$.
9. 1) $85^\circ 57'$; $114^\circ 35'$; $42^\circ 58'$; 30° ; 120° ; 270° ; $22^\circ 30'$; 135° ; 216° .
2) 40° ; 75° ; $13^\circ 30'$; $57^\circ 42'$; 218° ; $27^\circ 30'$; $74^\circ 29'$; $45^\circ 50'$.
10. 1) $10\pi \approx 31,4$; 2) 6,28 m/sec; 3) 37,7 m/sec. 11. ≈ 200 .

§ 2.

1. Esimeses; ei. 4. 0-st 2-ni. 5. Ainult 1-ne. 6. Ei.
7. 0. 8. c. 9. $a - b + c$. 10. $(a - b)^2$. 11. $a^2 - b^2$. 12. 0. 13. $\pm \infty$.
14. 1) 0,6; 2) $-0,5$; 3) $-0,7$; 4) 0,9; 5) 1,7; 6) $-2,7$.
15. 1, 3, 7 — negatiivsed; 2, 4, 5, 6, 8 — positiivsed.
16. 1) $\cos 20^\circ$; 2) $\sin 50^\circ$; 3) $\cot 40^\circ$; 4) $\tan 50^\circ$.

21. 1) 15° ; 135° ; 255° ; 2) 300° ; 3) 50° ; 110° ; 170° ; 230° ; 290° ; 350° ;

4) 120° ; 5) $\frac{\pi}{6}$; $\frac{5}{6}\pi$; $1\frac{1}{6}\pi$; $1\frac{5}{6}\pi$; 6) $\frac{\pi}{12}$; $1\frac{5}{12}\pi$; 7) 45° ; 135° ;

8) $\frac{\pi}{3}$; $\frac{2}{3}\pi$.

22. 1) $69^\circ + n \cdot 180^\circ$; 2) $-39^\circ + n \cdot 180^\circ$; 3) $\pm 26^\circ + n \cdot 360^\circ$;

4) $\pm 132^\circ + n \cdot 360^\circ$; 5) $15^\circ + n \cdot 360^\circ$ ja $165^\circ + n \cdot 360^\circ$

või $(-1)^n \cdot 15^\circ + n \cdot 180^\circ$; 6) $-45^\circ + n \cdot 360^\circ$

ja $-135^\circ + n \cdot 360^\circ$ või $(-1)^{n+1} \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$.

23. $\sin x = -1$. 24. $\cos x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. 25. $\sin x = \frac{1}{\pm\sqrt{3}}$.

26. $\sin x = 0$. 27. $\tan x = 0$; 2. 28. $\sec x = 2$.

29. $\cot x = 0$. 30. $\tan x = \pm \infty$. 31. Võimatu.

32. 1) $\arctan m + n \cdot 180^\circ$, kus m on mistahes arv;

2) $\pm \arccos m + n \cdot 360^\circ$, $-1 \leq m \leq 1$;

3) $(-1)^n \arcsin m + n \cdot 180^\circ$, $-1 \leq m \leq 1$.

33. 1) $\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$; 2) $-45^\circ = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

3) $\frac{\pi}{4} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $90^\circ = \arccos 0$; 5) $-\frac{\pi}{4} = \arctan (-1)$;

6) $0^\circ = \arctan 0$; 7) $30^\circ = \text{arccot } \sqrt{3}$; 8) $0^\circ = \text{arccot } \infty$;

9) $x = \arcsin 0,23$; 10) $x = \arccos 0,5762$; 11) $x = \arctan 0,468$;

12) $x = \text{arccot } 1,237$.

34. 1) 47° ehk $0,8203$; 2) $66^\circ 30'$ ehk $1,1606$;

3) $74^\circ 47'$ ehk $1,3052$; 4) $62^\circ 54'$ ehk $1,0978$.

35. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 3) $\sqrt{3}$; 4) $3 \sin a$; 5) $a \cos \frac{b}{c}$; 6) $\frac{1}{\tan a}$.

§ 3.

Ülesande nr.	1	2	3	4
$\sin \alpha$	$(\sin \alpha)$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\pm \frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$(\cos \alpha)$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$(\tan \alpha)$	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$(\cot \alpha)$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \cot^2 \alpha}$
Ülesande nr.	5	6	7	8
$\sin \alpha$	$(0,8)$	$(-0,3)$	$\pm \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\pm \frac{4}{5}$
$\cos \alpha$	$\pm 0,6$	$\pm \frac{\sqrt{91}}{10}$	$\left(\frac{2}{3}\right)$	$\left(-\frac{3}{5}\right)$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{4}{3}$	$\mp \frac{3}{\sqrt{91}}$	$\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$	$\mp \frac{4}{3}$
$\cot \alpha$	$\pm 0,75$	$\mp \frac{\sqrt{91}}{3}$	$\pm \frac{2}{\sqrt{5}}$	$\mp \frac{3}{4}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{5}{3}$	$\pm \frac{10}{\sqrt{91}}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$1,25$	$-\frac{10}{3}$	$\pm \frac{3}{\sqrt{5}}$	$\pm \frac{5}{4}$

Ülesande nr.	9	10	11	12
$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{\frac{5}{6}}$	$\mp \frac{9}{41}$	$\pm \frac{15}{17}$	$\pm \sqrt{0,1}$
$\cos \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{6}}$	$\pm \frac{40}{41}$	$\pm \frac{8}{17}$	$\mp \sqrt{0,9}$
$\tan \alpha$	$(\sqrt{5})$	$(-\frac{9}{40})$	$\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{3}$
$\cot \alpha$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$-\frac{40}{9}$	$(\frac{8}{15})$	(-3)
$\sec \alpha$	$\pm \sqrt{6}$	$\pm \frac{41}{40}$	$\pm \frac{17}{8}$	$\pm \frac{\sqrt{10}}{3}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \sqrt{\frac{6}{5}}$	$\mp \frac{41}{9}$	$\pm \frac{17}{15}$	$\pm \sqrt{10}$
Ülesande nr.	13	14	15	16
$\sin \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{8}}{3}$	$\pm \frac{21}{29}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\cos \alpha$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{20}{29}$	$\pm \frac{12}{13}$	$\pm \sqrt{\frac{2}{3}}$
$\tan \alpha$	$\pm \sqrt{8}$	$\mp \frac{21}{20}$	$\pm \frac{5}{12}$	$\mp \sqrt{\frac{1}{2}}$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{1}{\sqrt{8}}$	$\mp \frac{20}{21}$	$\pm 2,4$	$\mp \sqrt{2}$
$\sec \alpha$	(3)	$(-1 \frac{9}{20})$	$\pm \frac{13}{12}$	$\pm \sqrt{\frac{3}{2}}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\pm \frac{3}{\sqrt{8}}$	$\pm \frac{29}{21}$	$(2,6)$	$(-\sqrt{3})$

Ülesande nr.	17	18	19	20
$\sin \alpha$	$\left(\frac{a-b}{a+b}\right)$	$\pm \frac{b}{a}$	$\pm \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{99}{101}$
$\cos \alpha$	$\pm \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$	$\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$	$\pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{20}{101}$
$\tan \alpha$	$\pm \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$	$\pm \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\left(\frac{a}{b}\right)$	$\left(4\frac{19}{20}\right)$
$\cot \alpha$	$\pm \frac{2\sqrt{ab}}{a-b}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$	$\frac{b}{a}$	$\frac{20}{99}$
$\sec \alpha$	$\pm \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$	$\frac{101}{20}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{a+b}{a-b}$	$\pm \frac{a}{b}$	$\pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$	$\frac{101}{99}$
Ülesande nr.	21	22	23	
$\sin \alpha$	0,96	$\left(-\frac{12}{13}\right)$	$-\frac{20}{29}$	
$\cos \alpha$	(-0,28)	$-\frac{5}{13}$	$\frac{21}{29}$	
$\tan \alpha$	$-\frac{24}{7}$	$\frac{12}{5}$	$-\frac{20}{21}$	
$\cot \alpha$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{5}{12}$	(-1,05)	
$\sec \alpha$	$-\frac{25}{7}$	$-\frac{13}{5}$	$\frac{29}{21}$	
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{25}{24}$	$-\frac{13}{12}$	-1,45	

24. $\cos^2 \alpha$. 25. $\sin^2 \alpha$. 26. $1 - \cos \alpha$.
 27. $-(1 + \sin \alpha)$. 28. $\sec^2 \alpha$. 29. $\cos^2 \alpha$.
 30. a) $\tan \alpha \cdot \tan \beta$; b) $\cot \alpha \cdot \cot \beta$. 31. a) $\cot^2 \alpha$; b) $\tan^2 \alpha$.
 32. $\cos \alpha$. 33. $\sin \alpha$. 34. $\sec \alpha$. 35. $\tan \alpha$. 36. $\cot \alpha$.
 37. $\operatorname{cosec} \alpha$. 38. $\cos \alpha$. 39. $\tan^2 \alpha$.
 40. $2 \sin^2 \alpha$. 41. $2 \cos^2 \alpha$. 42. 1. 43. 1.
 44. $\tan^2 \alpha$. 45. $\sec^2 \alpha$. 46. $\sec^2 \alpha$. 47. $\operatorname{cosec}^2 \beta$.
 48. $\operatorname{cosec}^2 \alpha$. 49. $\sin \alpha \cdot \cos \alpha$. 50. $\tan \alpha \cdot \tan \beta$. 51. 4.

52. $\cot^6 \alpha$. 53. a) $2 \sin^2 \alpha - 1$; b) $1 - 2 \cos^2 \alpha$. 54. $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha}$.
 55. $\frac{1 + \tan^2 \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$. 56. $\frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$. 57. a) $\frac{\tan \alpha - 1}{\tan \alpha + 1}$; b) $\frac{1 - \cot \alpha}{1 + \cot \alpha}$.
 58. a) $\frac{\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$; b) $\frac{\cot \alpha}{\cot^2 \alpha - 1}$. 59. $\sec \alpha = -\frac{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}{\cot \alpha}$.
 60. 9. 61. $\frac{m^2 - 1}{2}$. 62. $m^2 - 2$ ja $m^3 - 3m$.

93. $\pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ$. 94. $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 95. $\pm 52^\circ + n \cdot 360^\circ$. 96. $n \cdot 360^\circ$.
 97. $\pm 128^\circ + n \cdot 360^\circ$. 98. $\pm 52^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 99. $n \cdot 180^\circ$. 100. $63^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $-27^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 101. $(-1)^n \cdot 24^\circ 28' + n \cdot 180^\circ$.
 102. $\pm 90^\circ + n \cdot 360^\circ$ ja $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 103. $\pm 120^\circ + n \cdot 360^\circ$. 104. $27^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 105. $\pm (-1)^n \cdot 45^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 106. $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $\pm 150^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 107. $\pm (-1)^n \cdot 60^\circ + n \cdot 180^\circ$. 108. $n \cdot 360^\circ$ ja $90^\circ + n \cdot 360^\circ$.
 109. $45^\circ + n \cdot 180^\circ$. 110. $60^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 111. $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$. 112. $45^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $-72^\circ + n \cdot 180^\circ$.
 113. $70^\circ + n \cdot 180^\circ$ ja $-36^\circ + n \cdot 180^\circ$.

§ 4.

1. 1) $\cos 17^\circ$; 2) $\sin 9^\circ 20'$; 3) $\cot 20^\circ 34' 20''$;
 4) $\tan 30^\circ 01'$.
 2. 1) $\sin 67^\circ 40'$; 2) $-\cos 80^\circ 34' 25''$; 3) $-\tan 71^\circ 11' 24''$;
 4) $-\cot 39^\circ 20'$.
 3. 1) $\cos 31^\circ 40'$; 2) $\sin 16^\circ 25'$; 3) $-\cos 21^\circ 43'$;
 4) $-\sin 8^\circ 21'$; 5) $-\tan 19^\circ 32' 28''$; 6) $-\cot 16^\circ 32'$;
 7) $-\tan 30^\circ 28' 40''$; 8) $-\cot 39^\circ 18'$.

4. — 1. 5. $\cos \alpha$. 6. — $\cos \alpha$. 7. — $\sec \alpha$. 8. 0. 9. 0. 10. 1. 11. — $\sin^2 \alpha$.
 12. 0. 13. $2 \cos \alpha$. 14. 1.

§ 5.

- | | | | |
|---------------|---------------|---------------|--------------|
| 1. 1) 0,2588; | 2. 1) 0,3640; | 3. 1) 0,4226; | 4. 1) 2,747; |
| 2) 0,7071; | 2) 1; | 2) 0,7071; | 2) 1; |
| 3) 0,8660; | 3) 11,43; | 3) 0,8660; | 3) 1,3032; |
| 4) 0,9563; | 4) 3,172; | 4) 0,2924; | 4) 0,3365; |
| 5) 0,6225; | 5) 0,3191; | 5) 0,7826; | 5) 0,3796; |
| 6) 0,9361; | 6) 1,3375; | 6) 0,9373; | 6) 2,805; |
| 7) 0,2051; | 7) 0,3799; | 7) 0,4823; | 7) 0,0305; |
| 8) 0,9988. | 8) 8,284; | 8) 0,1948; | 8) 11,43; |
| | 9) 12,61; | 9) 0,9987; | 9) 23,37; |
| | 10) 38,19; | 10) 9,9997. | 10) 0; |
| | 11) 286,5; | | 11) 30,41. |
| | 12) 3438. | | |

5. 1) 20° ; 2) $36^\circ 30'$; 3) $57^\circ 21'$; 4) $68^\circ 20'$; 5) võimatu; 6) $23^\circ 09'$.
 6. 1) 24° ; 2) 85° ; 3) $69^\circ 30'$; 4) $28^\circ 36'$; 5) $79^\circ 48'$; 6) $26^\circ 34'$;
 7) $22^\circ 47'$; 8) $85^\circ 34'$; 9) $81^\circ 25'$.

7. 1) 27° ; 2) $24^\circ 30'$; 3) $50^\circ 30'$; 4) võimatu; 5) $35^\circ 02'$; 6) $63^\circ 21'$.
 8. 1) 20° ; 2) $67^\circ 30'$; 3) $29^\circ 29'$; 4) $33^\circ 47'$; 5) $55^\circ 13'$; 6) $30^\circ 33'$;
 7) 8° ; 8) $5^\circ 35'$; 9) $2^\circ 52'$.

9. 0,9659; 0,1368; 0,6395; 0,9036.

10. — 0,4695; — 0,9171; — 0,1513; — 0,9825.

11. — 1,6643; — 0,3561; — 4,836; — 0,6334.

12. — 11,43; — 0,6873; — 6,472; — 0,3876.

§ 6.

1. 1) $\sin \alpha = 0,96$; $\tan \alpha = 3 \frac{3}{7} \approx 3,429$; 2) $\tan \alpha = 0,75$; $\cos \alpha = 0,8$;

3) $\tan \beta \approx 6,462$; $\cos \beta \approx 0,1529$.

2. $\sin \beta = \frac{77}{85}$; $\cos \beta = \frac{36}{85}$; $\tan \beta = 2 \frac{5}{36}$; $\cot \beta = \frac{36}{77}$. 3. 1) 20,4 cm;

2) 68 cm.

4. 1) 10,08 m; 2) 30,6 dm. 5. 1) 2,56 km; 2) 2,39 km. 6. 947 m.
 7. $12^{\circ}43'$. 8. $3646,5 \text{ m} \approx 3647 \text{ m}$. 9. 20 m. 10. $35,5 \text{ m}$.
 11. $27,25 \text{ m}$. 12. $1^{\circ}54'$.
 13. $4^{\circ}55'$. 14. $2^{\circ}57'$; 727 m. 15. $b \sin \alpha - a = 10,5 \text{ m}$.
 16. $3,9 \text{ m}$. 18. $33^{\circ}41'$. 19. $\approx 40 \text{ m}$.

20. 1) $63^{\circ}26'$; 2) $26^{\circ}34'$; 3) $21^{\circ}48'$. 21. $\arctan \frac{n}{n-1} = 47^{\circ}52'$.

22. $30^{\circ}58'$. 23. $\varphi = \arctan \frac{b}{a}$. 24. $33^{\circ}41'$.

25. 21 cm. 26. 1278 m. 27. $r = 1,58 \text{ m}$; $x = 1,97 \text{ m}$.

28. $\frac{a}{2 \cos \beta}$. 29. $6^{\circ}51'$; 105,2 mm. 30. $h = 10(D - d)$; $2^{\circ}52'$.

31. $38^{\circ}40'$. 32. 63 m. 33. 2,6 m.

34. $36^{\circ}39'$. 35. $73^{\circ}58'$. 36. 2,698.

37. $47^{\circ}16'$; 32,8 m. 38. $97^{\circ}10'$.

39. $\frac{c}{2\pi} \cdot \cos \frac{180^{\circ} m}{m+n} \approx 11,2$. 40. $\frac{a}{2 \sin \alpha}$.

41. $52^{\circ}15'$; 7,141 kg. 42. $b(1 + \sec \alpha)$. 43. $\arcsin \frac{h}{b}$.

44. $48^{\circ}47''$. 45. $78^{\circ}42'$.

46. $69^{\circ}15'$ põhjasuunaga.

47.

α	5 dm	15 dm
40°	3,2 dm	9,6 dm
60°	4,3 "	13,0 "
90°	5 "	15 "

48. 26,6 km ida suunas ja 21,7 km põhja suunas. 49. $40^{\circ}13'$ ja $49^{\circ}47'$.

50. $57^{\circ}28'$. 51. $67^{\circ}49'$ ja $22^{\circ}11'$. 52. $120^{\circ}30'$ ja $59^{\circ}30'$.

53. 1) $OB \approx 0,35 \text{ m}$; $AB = 0,2 \text{ m}$; $\beta = 5^{\circ}44'$; $BP \approx 1,99$;

3) 0; $1^{\circ}59'$; $3^{\circ}55'$; $5^{\circ}44'$; $7^{\circ}23'$; $8^{\circ}49'$; $9^{\circ}59'$; $10^{\circ}50'$; $11^{\circ}22'$; $11^{\circ}32'$;

5) $11^{\circ}19'$; 6) 0; 5 mm; 22 mm; 48 mm; 83 mm; 125 mm; 173 mm;
 224 mm; 277 mm; 330 mm.

54. $47^{\circ}30'$. 55. $\alpha = 40^{\circ}42'$; $\beta = 19^{\circ}14'$.

56. 1) $82^{\circ}27'$; 2) $8^{\circ}43'$. 57. $53^{\circ}08'$.

58. $R = \frac{a}{2 \cos \frac{\beta}{2}}$; $r = a \sin \frac{\beta}{2} \tan \left(45^{\circ} - \frac{\beta}{4} \right)$.

59. $a = \arcsin \frac{h}{b}$; $a = \frac{h}{\cos \alpha}$; $c = \frac{b}{\cos \alpha}$. 60. $11^{\circ}26'$.
 61. 28° ; 37° ; 19° ; 53° ; 86° ; 113° . 62. $21\ 750$ km.
 63. $4^{\circ}52'$. 64. $1^{\circ}11'$. 65. $51^{\circ}05'$.

§ 7.

1. 1) $b = 61$; $c = 102$; 2) $a = 39$; $b = 25$. 2. $78,7$ m. 3. $21,1$ m.
 4. $\frac{b \sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$. 5. $\frac{l \sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}$. 6. $\frac{d \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$ ja $\frac{d \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.
 7. $l_b = \frac{a \sin \gamma}{\sin(\frac{\beta}{2} + \gamma)}$; $l_c = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \frac{\gamma}{2})}$; $l_a = \frac{a \sin \beta \sin \gamma}{\sin(\beta + \gamma) \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$.
 8. $\frac{c \sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \approx 146,4$ m.
 9. $a = \frac{h_a \sin \alpha}{\sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)}$; $b = \frac{h_a}{\sin \gamma}$; $c = \frac{h_a}{\sin(\alpha + \gamma)}$.
 10. 7880 m². 11. $\frac{1}{2} b^2 \sin \alpha \approx 48$ m². 12. $\gamma = 90^{\circ}$ puhul.
 15. $a^2 \sin \alpha \approx 21$ cm².
 16. $\frac{d^2 \sin \varphi}{2}$; maksimum on $\frac{d^2}{2}$, kui $\varphi = 90^{\circ}$.
 17. $\frac{a+b}{2} \cdot c \sin \alpha$. 18. $50^{\circ}33'$ ja $129^{\circ}27'$. 19. $46^{\circ}57'$ ja $133^{\circ}03'$.
 20. $362,2$ m². 21. $AE = \sqrt{\frac{2Q \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha \sin \gamma}}$; $AD = \sqrt{\frac{2Q \sin \gamma}{\sin \alpha \sin(\alpha + \gamma)}}$.
 22. $\frac{h_a h_b}{2 \sin \gamma}$. 23. $\frac{h_b^2 \sin \beta}{2 \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}$. 24. $a = 8,5$.
 25. 1) $c = 22$; $\alpha = 22^{\circ}12'$; $\beta = 34^{\circ}31'$; 2) $b = 0,4$; $a = 11^{\circ}29'$;
 $\gamma = 145^{\circ}03'$; 3) $b = 63$; $a = 153^{\circ}16'$; $\gamma = 10^{\circ}16'$.
 26. 77 m. 27. $117^{\circ}17'$. 28. $8,2$ m ja $4,0$ m.
 29. 275 kg; $16^{\circ}17'$ ja $33^{\circ}43'$. 30. 1633 m.

§ 8.

1. $\cos 162^{\circ}30' = -\cos 17^{\circ}30'$. 2. $\sin 340^{\circ} = -\cos 70^{\circ}$.
 3. $\sin 75^{\circ} = \cos 15^{\circ}$; $\sin 150^{\circ} = \sin 30^{\circ}$.
 4. a) $-\sin 20^{\circ}$; b) $\cos 10^{\circ}$; c) $\sin 30^{\circ}$; d) $\cos 20^{\circ}$.

5. e) $\cot 30^\circ$; f) $-\tan 40^\circ$; g) $\cot 45^\circ$; h) $\tan 30^\circ$.
 6. i) $-\operatorname{cosec} 10^\circ$; k) $\sec 10^\circ$; l) $\operatorname{cosec} 40^\circ$; m) $-\sec 10^\circ$.
 7. a) $\cos 0,2\pi$; b) $\cos \frac{2}{9}\pi$; c) $-\tan \frac{2}{11}\pi$; d) $-\sec 0,1\pi$.
 8. a) 1; b) 1; c) 0; d) 0. 9. a) $-\frac{1}{2}$; b) 0; c) $\sqrt{3}$; d) -1 .
 10. $\cos 50^\circ = -\cos 130^\circ$. 11. $-2 \cot \alpha$. 12. $2 \cos \alpha$. 13. 1.
 14. -1 . 15. $a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha$. 16. $-\tan^3 \alpha$.
 17. $\cot \alpha$. 18. $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$. 19. 0. 20. $\cot^2 42^\circ$.
 21. $-\cot^2 40^\circ$.
 22. $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos \alpha$; $\cos(\alpha - 180^\circ) = -\cos \alpha$;
 $\tan(\alpha - 360^\circ) = \tan \alpha$.
 23. $\cos x = -\frac{2}{3}$. 24. $\sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. 25. $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. 26. $n \cdot 360^\circ$.
 27. $135^\circ + n \cdot 180^\circ$. 28. $\frac{\pi}{4} + \pi n$. 29. $\pi \cdot n \pm \frac{\pi}{4}$. 30. $(2k + 1) \cdot 90^\circ$.

§ 9.

1. -1 . 2. a) $\sin \alpha$; b) $-\sin \alpha$. 3. $0,4 \sqrt{3} + 0,3$.
 4. $\sqrt{0,2} - \sqrt{0,15}$. 5. $0,2 + \sqrt{0,63}$; $-\sqrt{0,21} - \sqrt{0,12}$.
 6. $\frac{1}{12}(\sqrt{35} - 6)$; $\frac{1}{12}(3\sqrt{5} - 2\sqrt{7})$. 7. ± 1 ; $\pm 0,28$. 8. $\frac{1}{2}$.
 9. a) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$; $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; b) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$; $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$.
 12. a) $\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}$ ja $\frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$; b) $\frac{\cot \beta - \cot \alpha}{\cot \beta + \cot \alpha}$ ja
 $\frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \alpha \cot \beta - 1}$.
 13. $\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma -$
 $-\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$;
 $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma -$
 $-\cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$.
 14. $\frac{56}{65}$ ja $\frac{57}{1625}$. 15. $\frac{1 \pm \tan \alpha}{1 \mp \tan \alpha}$. 16. $-(2 + \sqrt{3})$. 17. $-\frac{1}{2}$.

18. -1 ja $\frac{1}{7}$. 19. $\frac{\cot \beta \pm \cot \alpha}{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}$. 20. a) $\frac{\cot \alpha \cdot \cot \beta \mp 1}{\cot \beta \pm \cot \alpha}$;
 b) $\frac{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha \pm \tan \beta}$.
21. $\frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \cdot \tan \beta \cdot \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta - \tan \beta \cdot \tan \gamma - \tan \gamma \cdot \tan \alpha}$. 22. $\tan(\alpha + \beta)$.
23. $\tan \alpha \cdot \tan \beta$. 24. $\tan \alpha \cdot \cot \beta$. 25. $\cot \alpha \cdot \cot \beta$.
26. $\tan \alpha$. 41. $-45^\circ + n \cdot 180^\circ$. 42. $(-1)^n \cdot 60^\circ + n \cdot 180^\circ$.
43. $x = \arctan(\tan \alpha \tan \beta \tan \gamma) + n \cdot 180^\circ$. 44. $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$;
 $\frac{\pi}{2}(2n + 1)$.
45. $x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$; $150^\circ + n \cdot 360^\circ$.
46. $x = \arctan \frac{a - b \cdot \tan \alpha}{a \cdot \tan \alpha - b} + \pi n$.
47. $x = \arctan \left(\pm \sqrt{\frac{m + \tan^2 \alpha}{1 + m \tan^2 \alpha}} \right) + \pi n$. 48. $x = 180^\circ \cdot n$ ehk $x = \pi n$.
49. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \cdot n$. 50. $x = n \cdot 90^\circ$; $n \cdot 60^\circ$. 51. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
52. $14^\circ 38' + n \cdot 180^\circ$. 53. $45^\circ + n \cdot 180^\circ$. 54. $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

§ 10.

1. a) $\pm 0,96$; $-0,28$; b) $\frac{3}{4}$. 2. $\frac{120}{169}$; $-\frac{119}{169}$.
4. $-0,96$; $-0,28$. 5. $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$; $-\frac{1}{3}$. 6. $-\frac{3}{4}$.
7. a) $\pm 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$; $1 - 2 \sin^2 \alpha$;
 b) $\pm 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$; $2 \cos^2 \alpha - 1$.
8. a) $\frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$; b) $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \tan \alpha}$. 9. $\frac{\sec^2 \alpha}{2 - \sec^2 \alpha}$.
10. a) $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$; $\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$.
11. $\frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$; $\frac{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2}}$. Näpunäide. Algul kirjutame:

$$\sin \alpha = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \text{ ja } \cos \alpha = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

12. Et $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ kaudu teised funktsioonid väljenduvad ratsionaalselt, siis piisab $\sin \alpha$ ja $\cos \alpha$ käsitlemisest; nende kohta vaata aga ülesande 11 lahendust.

13. $\frac{12}{13}$; $\frac{5}{13}$; 2,4. 14. $\frac{1}{2} \sqrt{2}$; $\frac{1}{2} \sqrt{2}$; 1.

15. $3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$; $4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$; $\frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$.

16. $4 \sin \alpha \cdot \cos^3 \alpha - 4 \cos \alpha \cdot \sin^3 \alpha$; $\cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$.

17. $\sqrt{0,9}$; $-\sqrt{0,1}$; -3 .

18. $\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$; $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $2 - \sqrt{3}$; $2 + \sqrt{3}$.

19. $\frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$; $\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$; $\sqrt{2} - 1$; $\sqrt{2} + 1$.

20. $\frac{3}{5}$ ja $\frac{4}{5}$. 21. $\frac{4}{5}$. 22. $\sqrt{5} - 2$.

25. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ ja $2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \alpha$; siit leiame:

$$\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \text{ ja } \sin \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}.$$

Nende võrduste abil leiame nii $\sin \frac{\alpha}{2}$ kui $\cos \frac{\alpha}{2}$ jaoks neli väärtust. Kuid kui mingi uue tingimuse lisamisega saab võimalikuks määrata märk kummagi juuravaldise ees, siis ülesandel on ainult üks lahend.

26. $\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}{\tan \alpha}$; $\cot \alpha \pm \sqrt{\cot^2 \alpha + 1}$. 27. -2 .

52. $x = 15^\circ + n \cdot 180^\circ$; $75^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}$.

53. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. 54. $x = 22^\circ 30' + n \cdot 90^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n$.

55. $x = \pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.

56. $x_1 = \pm 2 \arccos 0 + 4\pi n$; $x_2 = 2 \cdot (-1)^n \arcsin \frac{b}{2a} + 2\pi n$.

57. $x = \pm 45^\circ + n \cdot 360^\circ$; $\pm 135^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $45^\circ + m \cdot 90^\circ$.

58. $x_1 = n \cdot 360^\circ$; $x_2 = \pm 120^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = n \cdot 360^\circ$; $m \cdot 120^\circ$.
59. $x = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$. 60. $x = \pi n$. 61. $x = \pi n$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$.
62. $x_1 = \pm 2 \arccos 0 + 4\pi n$; $x_2 = \pm 2 \arccos \frac{b}{2a} + 4\pi n$.
63. $x = n \cdot 360^\circ$; $60^\circ + n \cdot 720^\circ$; $300^\circ + n \cdot 720^\circ$.
64. $x_1 = \pm 2 \arccos 0 + 4\pi n$; $x_2 = 2 \arccos \frac{a}{b} + 2\pi n$. 65. $x = 2\pi n$;
 $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
66. $x = \pm \arccos \frac{m - 2 \pm \sqrt{m(m-8)}}{2(m+1)} + 2\pi n$.
67. $x_1 = x_2 = \pi(2n+1)$; $x_3 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$.
68. $x = n \cdot 180^\circ$; $\pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$. 69. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.
70. $x = \pm 45^\circ + n \cdot 360^\circ$; $\pm 135^\circ + n \cdot 360^\circ$; $\pm 30^\circ + n \cdot 360^\circ$;
 $\pm 150^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = 45^\circ + m \cdot 90^\circ$; $\pm 30^\circ + m \cdot 180^\circ$.
71. $x_1 = x_2 = \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}$. 72. $72^\circ 52' + n \cdot 360^\circ$ ja $17^\circ 08' + n \cdot 360^\circ$.
73. $119^\circ 34' + n \cdot 360^\circ$ ja $-13^\circ 18' + n \cdot 360^\circ$.
74. $90^\circ + n \cdot 360^\circ$ ja $30^\circ + n \cdot 360^\circ$.

§ 11.

1. a) $\sqrt{1,5}$; b) $\sin 18^\circ$; c) 0; d) $-\sin 18^\circ$.
2. a) $2 \sin 12^\circ 30' \cdot \cos 7^\circ 30'$; b) $-2 \sin 1^\circ \cdot \cos 4^\circ$;
c) $2 \cos 10^\circ 07' 30'' \cdot \cos 6^\circ 52' 30''$; d) $2 \sin 15^\circ \cdot \sin 10^\circ$.
3. a) $\cos \alpha$; b) $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$. 4. a) $\frac{\tan 20^\circ}{\tan 5^\circ}$; b) $\cot \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cot \frac{\beta - \alpha}{2}$.
5. a) $2 \sin 35^\circ \cdot \cos 15^\circ$; b) $\sqrt{2} \cdot \sin 25^\circ$;
c) $2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} - 45^\circ \right) \cdot \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} + 45^\circ \right)$.
6. $\sqrt{2} \cdot \cos (\alpha - 45^\circ)$; $\sqrt{2} \sin (\alpha - 45^\circ)$. ehk $\sin \alpha \pm \cos \alpha =$
 $= \sqrt{2} \cdot \sin (\alpha \pm 45^\circ)$.
7. a) $\frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}$; b) $\frac{\sin (\beta \pm \alpha)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$; c) $\frac{\cos (\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$; d) $\frac{\cos (\alpha \mp \beta)}{\sin \alpha \cdot \cos \beta}$.

8. a) $2 \operatorname{cosec} 2\alpha$; b) $-2 \cot 2\alpha$.

9. a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$; b) $\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)$.

10. a) $\frac{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$; b) $\frac{\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}$;

c) $-\frac{\cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta}$; d) $-4 \cot 2\alpha \cdot \operatorname{cosec} 2\alpha$.

11. a) $2 \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $-2 \sin^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$; c) $\cos 2\alpha$; d) $-\cos 2\alpha$.

12. $2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \alpha$. 13. $\tan\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$. 14. $\tan \frac{\alpha}{2}$.

15. a) $\frac{\sin(45^\circ \pm \alpha)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \alpha}$; b) $\frac{\sin(\alpha \pm 45^\circ)}{\sin 45^\circ \cdot \sin \alpha}$.

Näpunäide. $1 = \tan 45^\circ = \cot 45^\circ$.

16. $\frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\cos \alpha \cdot \sin \beta}$. 17. a) $2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)$; b) $2 \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.

18. $2 \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sqrt{\tan \alpha}$.

19. a) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta)$; b) $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$.

20. a) $\sqrt{8} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$; b) $\sqrt{8} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 45^\circ\right)$.

Näpunäide. Esmalt asendame $1 + \cos \alpha$ ja $1 - \cos \alpha$.

21. $-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha$. 22. a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

23. a) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ + \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$; b) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sin(45^\circ - \alpha)}{\cos \alpha} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

24. a) $\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$; b) $\frac{\sin(\alpha - 45^\circ)}{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$.

25. a) $4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$; b) $4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$.

Näpunäide. Avaldame $\sin(\alpha + \beta)$ nurga $\frac{\alpha + \beta}{2}$ funktsioonide kaudu.

26. $4 \cos \alpha \cdot \sin \frac{3\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$.

39. Esmalt kõrvaldame nurga γ (vasakul poolel), teisendame saadud avaldise ja taastame γ . 40. Sama võtte nagu ülesandes 39.

41. Võrduses $\tan(\alpha + \beta) = -\tan \gamma$ avame sulud ja vabastame võrduse nimetajaist.
42. Rakendades sama võtet, mis ülesandes 39, asendame vasaku poole avaldisega $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} - \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$; seejärel peale mõningate teisenduste saame avaldise

$$\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot (\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta) + 1}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)} \text{ jne.}$$

43. Võrduses $\cot\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right) = 1 : \cot \frac{\gamma}{2}$ avame sulud ja vabastame võrduse nimetajaist. 44. Sama võte, mis ülesandes 43.
45. Sama võte, mis ülesandes 41. 46. Sama võte, mis ülesandes 39. Algul saame $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2(\alpha + \beta)$, seejärel avame sulud ning asendame $\sin^2 \alpha$ ja $\sin^2 \beta$ avaldistega $1 - \cos^2 \alpha$ ja $1 - \cos^2 \beta$ jne.
47. Sama võte, mis eelmises ülesandes. Algul saame $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2(\alpha + \beta)$, seejärel avame sulud ning asendame $\sin^2 \alpha$ ja $\sin^2 \beta$ avaldistega $1 - \cos^2 \alpha$ ja $1 - \cos^2 \beta$ jne.
48. Sama võte, mis ülesandes 39. Algul saame
- $$2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - 2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) \text{ jne.}$$
49. Sama võte, mis eelmises ülesandes.
50. $4 \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. 51. $4 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right)$.
52. $4 \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.
53. a) $4 \cos\left(22^\circ 30' + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(22^\circ 30' - \frac{\alpha}{2}\right)$;
 b) $\sqrt{8} \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 22^\circ 30'\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2} - 22^\circ 30'\right)$.
54. $3 - 4 \sin^2 \alpha = 4(\sin^2 60^\circ - \sin^2 \alpha) = 4 \sin(60^\circ + \alpha) \cdot \sin(60^\circ - \alpha)$.
55. $4 \sin(\alpha + 30^\circ) \cdot \sin(\alpha - 30^\circ)$. 56. $\frac{4 \sin(30^\circ + \alpha) \cdot \sin(30^\circ - \alpha)}{\cos^2 \alpha}$.
57. $\frac{4 \sin(\alpha + 30^\circ) \cdot \sin(\alpha - 30^\circ)}{\sin^2 \alpha}$.
58. $4 \cos \alpha \cdot \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$.
59. a) $4 \sin 2\alpha \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} + 30^\circ\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 30^\circ\right)$;

$$b) 4 \cos 2\alpha \cdot \sin \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \sin \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$60. 1) \left| \frac{a}{\cos \varphi} \right|, \text{ kus } \varphi = \arctan \frac{b}{a}; 2) p \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} = \sqrt{q} \cdot \cot \frac{\varphi}{2},$$

$$\text{kus } \sin \varphi = \frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

$$61. \text{ Viies } a \text{ sulgude ette ja võttes } \frac{b}{a} = \cos \varphi, \text{ saame:}$$

$$1) \cot^2 \frac{\varphi}{2}; 2) 2 \sqrt{a} \cdot \sin \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right); 3) 2 \operatorname{cosec} \varphi.$$

$$62. x = \sqrt{(a+b)^2 - 2ab(1 + \cot \gamma)} = \dots = (a+b) \cdot \cos \varphi, \text{ kusjuures}$$

$$\sin \varphi = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$63. x = n \cdot 90^\circ; 90^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 64. x = 36^\circ + n \cdot 72^\circ; 60^\circ + n \cdot 120^\circ.$$

$$65. x = n \cdot \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} + n \cdot \frac{\pi}{3}. \quad 66. x = n \cdot 120^\circ; n \cdot 360^\circ.$$

$$67. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} \cdot n.$$

$$68. \sqrt{2} \cdot \sin(x + 45^\circ) = 1; x = n \cdot 360^\circ; 90^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Harjutus. Lahendada antud võrrand, kasutades mõlema poole ruutu tõstmise võtet, ja leida võõrlahendid saadud lahendite ($x = n \cdot 90^\circ$) hulgest.

$$69. x = -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \quad 70. x = 9^\circ + n \cdot 180^\circ; 81^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$71. x = 33^\circ 45' + n \cdot 90^\circ.$$

$$72. x = 7^\circ 30' + n \cdot 90^\circ; 37^\circ 30' + n \cdot 90^\circ \text{ ehk } x = n \cdot \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{24}.$$

$$73. x_1 = x_2 = 22^\circ 30' + n \cdot 90^\circ. \quad 74. x = 45^\circ + n \cdot 90^\circ; \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

$$75. x = n \cdot \frac{\pi}{2}; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

§ 12.

$$1. a) \bar{1},5663; b) \bar{1},9525; c) \bar{1},5580; d) \bar{1},8655; e) \bar{1},9024; f) \bar{2},3844.$$

$$2. a) \bar{1},9278; b) \bar{1},8047; c) \bar{1},8503; d) \bar{1},6602; e) \bar{1},9340; f) \bar{3},8378.$$

$$3. a) \bar{1},7199; b) \bar{1},4608; c) 0,4561; d) \bar{1},3969; e) \bar{2},1814; f) \bar{1},8396.$$

$$4. a) \bar{1},2054; b) 0,4285; c) \bar{1},3511; d) \bar{1},9999; e) \bar{2},5447; f) 2,3415.$$

5. a) $14^{\circ}33'$; b) $46^{\circ}54'$; c) $28^{\circ}13'$; d) $59^{\circ}14'$; e) 48° ; f) $25^{\circ}16''$.
 6. a) $43^{\circ}22'20''$; b) $85^{\circ}07'$; c) $27^{\circ}03'$; d) $45^{\circ}01'$; e) $50^{\circ}40''$; f) $89^{\circ}20'40''$.
 7. c) $16^{\circ}07'$; d) $50^{\circ}03'$; e) $45^{\circ}01'$; f) $7^{\circ}43''$.
 8. c) $25^{\circ}55'$; d) $77^{\circ}41'40''$; e) $45^{\circ}36''$; f) $89^{\circ}25'37''$.
 9. a) 0,342; b) 0,6743; c) 3,891; d) 229,14; e) 1,304; f) 1,251.
 10. a) $-0,7661$; b) 0,9397; c) $-2,773$; d) $-0,181$; e) $-5,76$; f) 1,564.
 11. a) $34^{\circ}51'$; b) $67^{\circ}05'$; c) $75^{\circ}58'$; d) $5^{\circ}43'$; e) $48^{\circ}11'$; f) $22^{\circ}10'$; g) $9^{\circ}51'$; h) $20^{\circ}19'$.
 12. $27^{\circ}02'$; $152^{\circ}58'$. 13. 223° ; 317° . 14. $40^{\circ}21'$; $319^{\circ}39'$. 15. $124^{\circ}40'$; $235^{\circ}20'$.
 16. $26^{\circ}30'$; $206^{\circ}30'$. 17. $111^{\circ}58'$; $291^{\circ}58'$. 18. $11^{\circ}19'$; $191^{\circ}19'$.
 19. $126^{\circ}10'$; $306^{\circ}10'$. 20. $86^{\circ}11'$; $273^{\circ}49'$. 21. $113^{\circ}35'$; $246^{\circ}25'$.
 22. $5^{\circ}44'$; $174^{\circ}16'$. 23. $231^{\circ}03'$; $308^{\circ}57'$. 24. $74^{\circ}25'$. 25. $35^{\circ}38'$. 26. $56^{\circ}01'$.
 27. $-23^{\circ}15'$. 28. $164^{\circ}17'$. 29. $-15^{\circ}25'$. 30. $28^{\circ}21'$. 31. $-54^{\circ}07'$.
 32. 103,6.
 33. $-0,48$. 34. 0,00109. 35. 4,887. 36. 0,2307. 37. 342,6.
 38. $-1,208$. 39. 0,617. 40. 32,24. 41. 0,09326.

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>S</i>
42.	8,49	3,916	9,35	$65^{\circ}14'$	$24^{\circ}46'$	16,63
43.	250	575	627	$23^{\circ}30'$	$66^{\circ}30'$	71 880
44.	0,7323	0,317	0,7979	$66^{\circ}36'$	$23^{\circ}24'$	0,116
45.	2,792	2,34	3,644	$50^{\circ}02'$	$39^{\circ}58'$	3,267
46.	6,37	79,45	79,7	$4^{\circ}35'$	$85^{\circ}25'$	253
47.	18,003	16,79	24,64	47°	43°	151,2
48.	0,1259	0,1738	0,2146	$35^{\circ}55'$	$54^{\circ}05'$	0,01094
49.	0,6162	0,2954	0,6832	$64^{\circ}23'$	$25^{\circ}37'$	0,0910
50.	16	63	65	$14^{\circ}15'$	$75^{\circ}45'$	504
51.	112	15	113	$82^{\circ}22'20''$	$7^{\circ}37'40''$	840
52.	528	455,8	697	$49^{\circ}15'$	$40^{\circ}45'$	120 300
53.	1500	823	1710,2	$61^{\circ}18'$	$28^{\circ}42'$	617 250
54.	261	380	461	$34^{\circ}29'$	$55^{\circ}31'$	49 590
55.	156	133	205	$49^{\circ}33'$	$40^{\circ}27'$	10 374
56.	0,09783	0,1003	0,1401	$44^{\circ}17'$	$45^{\circ}43'$	0,004906
57.	12,06	6,919	13,9	$60^{\circ}09'$	$29^{\circ}51'$	41,73

58. $B = 46^{\circ}48'$; $b = 633,8$; $S = 232\ 100$. 59. $A = 23^{\circ}30'$; $b = 1150$;
 $S = 143\ 800$.
60. $B = 60^{\circ}30'$; $a = 15,53$; $S = 105$. 61. $A = 64^{\circ}39'$; $a = 6,398$;
 $S = 15,95$.
62. $A = 37^{\circ}12'$; $B = 105^{\circ}36'$; $S = 36,93$. 63. $A = 57^{\circ}19'$; $B = 65^{\circ}22''$;
 $a = 856,7$; $S = 333\ 700$.
64. $B = 48^{\circ}40'$; $b = 22,41$; $a = 27,25$; $S = 278,2$. 65. $A = 24^{\circ}36'$;
 $B = 130^{\circ}48'$; $a = 71,86$.
66. $A = 53^{\circ}03'$; $a = 9,68$; $b = 11,64$. 67. $B = 34^{\circ}28'$; $a = 15,68$;
 $b = 9,29$; $S = 69,58$.
68. $A = 73^{\circ}24'$; $B = 33^{\circ}12'$; $a = 30,20$; $b = 17,27$. 69. $B_1 = 34^{\circ}51'$;
 $B_2 = 145^{\circ}09'$; $A_1 = 72^{\circ}34'30''$; $A_2 = 17^{\circ}25'30''$; $b_1 = 8,39$; $b_2 =$
 $= 26,72$.

Näpunäide. Nurga B kohta saame $\sin B = \dots$ ja $0^{\circ} < B < 180^{\circ}$,
kuid selles vahemikus antud siinuse väärtusele vastab kaks nurka.
Selgitada lahenduse kahesust ka geomeetriliselt.

§ 13.

	a	b	c	A	B	C	S
1.	(370)	541	421	43 ⁰⁰ 1'	(86 ⁰⁰ 3')	(50 ⁰⁰ 56')	77 710
2.	(450)	85	445	(87 ⁰⁵ 5')	(10 ⁰⁵ 3')	81 ¹² 2'	18 900
3.	(951)	1196	353	39 ⁰³ 6'	(126 ⁰⁴ 3')	(13 ⁰⁴ 1')	134 550
4.	(97,52)	83,01	36,00	(102 ⁰⁴ 8')	56 ⁰⁰ 6'	(21 ⁰⁰ 6')	1457
5.	3,863	(13,02)	10,7	(11 ⁰⁴ 8')	(133 ⁰⁴ 2')	34 ⁰³ 0'	14,91
6.	13,3	5,334	(15,94)	(51 ⁰³ 8')	(18 ¹⁹ 1')	110 ⁰³ 3'	33,33
7.	(510)	(317)	532,9	68 ⁰² 3'	35 ⁰¹ 8'	(76 ⁰¹ 19')	78 540
8.	(225)	(800)	634,1	12 ⁰¹ 5'	131 ⁰⁰ 1'	(36 ⁰⁴ 4')	53 830
9.	(2,29)	1,17	(1,69)	104 ⁰³ 3'	(29 ⁰⁵ 2')	45 ⁰³ 5'	0,964
10.	62,17	(28)	(42)	(124 ⁰)	21 ⁰⁵ 6'	34 ⁰⁴ 4'	487,5
11.	(30,99)	74,6	(69,01)	24 ⁰³ 2'	(87 ⁰⁴ 8')	67 ⁰⁴ 0'	1069
12.	43,92	(40,33)	(32,11)	(73 ⁰⁴ 0')	61 ⁰⁴ 6'	44 ⁰³ 4'	621,4

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>S</i>
13.	(87)	(65)	76	(75°45')	46°24'	57°51'	2394
14.	(34)	(93)	{ 65 115,3	(14°15')	{ 137°41' 42°19'	{ 28°04' 123°26'	{ 744 1320
15.	(24)	(83)	—	(26°45')	—	—	—
16.	{ 55,42 615,7	(360)	(309)	{ 3°44' 133°48'	{ 155°02' 24°58'	(21°14')	{ 3613 40 150
17.	(13,9)	7,102	(8,43)	(126°43')	24°11'	29°06'	24
18.	(0,437)	(1,299)	1,726	3°42'	(11°03')	165°15'	0,07309
19.	(13,81)	{ 20,72 6,004	(8,14)	{ 25°19' 154°41'	140°05'	(14°36')	{ 36,27 10,45
20.	240,8	(263)	(215)	59°29'	(70°15')	50°16'	24 350
21.	(19,06)	(28,19)	{ 36,31 11,88	(31°17')	{ 50°10' 129°50'	{ 98°33' 18°53'	{ 265,8 86,95
22.	(457,1)	(169,9)	{ 427,4 421,4	{ 89° 91°	(21°49')	{ 69°11' 67°11'	{ 36 300 35 790
23.	(2579)	2572	(10)	(130°22')	49°28'	0°10'	9800
24.	(19)	(34)	(49)	16°26'	30°24'	133°10'	235,6
25.	(89)	(321)	(395)	7°58'	29°58'	142°04'	8783
26.	(44)	(483)	(485)	5°12'	84°48'	90°	10 626
27.	(0,099)	(0,101)	(0,158)	37°22'	38°16'	104°22'	0,004844
28.	(172,5)	(1135)	(1205)	7°44'	62°16'	110°	91 980
29.	(421,6)	(409,8)	(335,9)	68°02'	64°20'	47°38'	63 830
30.	(1,235)	(2,346)	(3,456)	10°52'	20°58'	148°10'	0,7639

$$31. C = 18^{\circ}27'; \quad a = 2R \sin A = 14,55; \quad b = 2R \sin B = 11,82;$$

$$c = 2R \sin C = 5,01; \quad S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C = 26,60.$$

$$32. C = 119^{\circ}32'; \quad a = \sqrt{\frac{2S \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C}} = 20,9; \quad b = 55,3; \quad c = 68,1.$$

$$33. A = 59^{\circ}42'; \quad a = \frac{h_a \cdot \sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 57,25; \quad b = \frac{h_a}{\sin C} = 60,01;$$

$$c = \frac{h_a}{\sin B} = 5,933; \quad S = \frac{h_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} = 153,7.$$

$$34. A = 77^{\circ}04'; \quad a = \frac{l_a \sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cdot \cos \frac{B-C}{2} = 7,406;$$

$$b = \frac{l_a}{\sin C} \cos \frac{B-C}{2} = 7,204; \quad c = \frac{l_a}{\sin B} \cos \frac{B-C}{2} = 0,585;$$

$$S = \frac{l_a^2}{2} \cdot \frac{\sin A}{\sin B \cdot \sin C} \cos^2 \frac{B-C}{2} = 1,296.$$

$$35. a = \frac{m}{2} \cdot \sin A \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}; \quad b = \frac{m}{2} \cdot \sin B \cdot \sec \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2};$$

$$c = m \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \sec \frac{A-B}{2}; \quad S = \frac{m^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \tan \frac{C}{2} \cdot \sec^2 \frac{A-B}{2};$$

$$C = 69^{\circ}20'; \quad a = 290,2; \quad b = 199,1; \quad c = 288,1; \quad S = 27\,020.$$

Näpunäide. Saame $m = 2R (\sin A + \sin B) = \dots$, kust määrame $2R$; seejärel koostame külgede avaldised $2R$ abil.

$$36. C = 54^{\circ}; \quad a = \frac{n}{2} \cdot \sin A \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2} = 34,07;$$

$$b = \frac{n}{2} \cdot \sin B \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2} = 11,07;$$

$$c = n \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A-B}{2} = 28,98;$$

$$S = \frac{n^2}{4} \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cot \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec}^2 \frac{A-B}{2} = 155.$$

$$37. C = 19^{\circ}11'; \quad c = \frac{m}{2} \sec \frac{C}{2} \sec \frac{A-B}{2} = 0,7554; \quad b = 1,958; \quad a = 2,247;$$

$$S = 0,722. \quad \text{Näpunäide. } m = c (\sin A + \sin B).$$

$$38. A = 53^{\circ}08'; \quad a = n : 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{C-B}{2} = 232; \quad b = 210; \quad c = 286;$$

$$S = 24\,020.$$

$$39. C = 102^{\circ}52'; \quad a = p \cdot \sin \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2} = 80,22;$$

$$b = p \cdot \sin \frac{B}{2} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{C}{2} = 152,7; \quad c = p \cdot \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} = 187,6;$$

$$S = p^2 \cdot \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} = 5974.$$

Näpunäide. 1. viis. $2p = 2R (\sin A + \sin B + \sin C) =$

$$= 8R \cdot \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}; \quad \text{siit } 2R = \frac{\frac{p}{2}}{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

mida kasutamegi arvutamisel ja mille abil koostame külgede avaldised ja seejärel pindala avaldise.

2. viis. Külje AC pikendustel võtame lõigud $CE = CB$ ja $AD = AB$ ning ühendame punktid D ja E punktiga B ; kolmnurgas DBE külj $DE = 2p$, nurk $D = \frac{A}{2}$ ja nurk $E = \frac{C}{2}$. Võrdhaarsest kolm-

nurgast BCE leiame: $a = \frac{BE}{2} : \cos \frac{C}{2}$; BE määramiseks kolmnurgast DBE leiame:

$$BE : 2p = \sin \frac{A}{2} : \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{C}{2} \right) = \sin \frac{A}{2} : \cos \frac{B}{2}.$$

Sel viisil määrame külje a ; külgede b ja c avaldised koostame analoogia põhjal.

$$40. C = 118^{\circ}05'; c = r \cdot \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{B}{2};$$

$$b = r \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2}; a = r \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{cosec} \frac{C}{2};$$

$$S = r^2 \cdot \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}.$$

Otstarbekam on kasutada arvutamiseks külgede lõike (x, y, z) tippudest (A, B, C) kuni puutepunktideni; siis saame: $x = 25$, $y = 14$ ja $z = 3$; seejärel leiame: $a = z + y = 17$, $b = z + x = 28$, $c = x + y = 39$ ja $S = r(x + y + z) = 5 \cdot 42 = 210$.

$$41. A = 33^{\circ}53'; C = 98^{\circ}07'; a = 0,6927; b = 0,9236; S = 0,3167.$$

$$42. C = 47^{\circ}26'; B = 37^{\circ}04'; b = 38,47; c = 47; S = 89,7.$$

$$43. A_1 = 75^{\circ}44'; C_1 = 87^{\circ}12'; a_1 = 220,2; b_1 = 66,66; S_1 = 73,30;$$

$$A_2 = 104^{\circ}15'; C_2 = 58^{\circ}41'; a_2 = 257; b_2 = 77,94; S_2 = 8569.$$

$$44. B = 35^{\circ}53'; C = 97^{\circ}47'; b = 12,95; c = 21,905; S = 102,6.$$

$$45. B = 10^{\circ}02'; C = 101^{\circ}15'; a = 155,2; c = 163,4; S = 2207.$$

$$46. A = 12^{\circ}08'; C = 43^{\circ}14'; b = 166,5; c = 138,6.$$

$$47. A = 100^{\circ}25'; B = 50^{\circ}12'; C = 29^{\circ}23'; c = 15,96; S = 196,2.$$

$$48. A = 38^{\circ}49'; B = 19^{\circ}18'; C = 121^{\circ}53'; a = 23,84; b = 12,66; c = 32,32; S = 127,5.$$

$$49. A = 126^{\circ}43'; B = 39^{\circ}36'; a = 1196; b = 951; S = 134 550.$$

$$\text{Näpunäide. } \frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C}; \text{ siit } \cos \frac{A-B}{2} = \frac{m}{c} \cdot \sin \frac{C}{2},$$

mille abil leiame $\frac{A-B}{2}$; teades aga $\frac{A+B}{2}$ ja $\frac{A-B}{2}$, leiame A ja B .

$$50. A = 80^{\circ}38'; B = 45^{\circ}42'; a = 22,41; b = 15,96; S = 146,8.$$

$$51. B = 41^{\circ}05'; C = 36^{\circ}17'; a = 8,556; b = 5,762; S = 14,58.$$

Näpunäide. 1. viis. Mollweide esimese valemi järgi

$$\begin{aligned} \frac{m}{c} &= \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}(A+B)}; \text{ siit saame } \frac{m+c}{m-c} = \\ &= \frac{2 \cos \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B} = \cot \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}, \end{aligned}$$

mis võimaldab leida nurga B .

2. viis. Korrutades teineteisega

$$\begin{aligned} \tan \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \text{ ja } \tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \text{ saame:} \\ \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} &= \frac{p-c}{p}, \text{ kuid } \frac{p-c}{p} = \frac{2(p-c)}{2p} = \frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{m-c}{m+c}. \end{aligned}$$

$$52. B = 37^{\circ}44'; \quad C = 63^{\circ}36'; \quad a = 16,58; \quad b = 10,35; \quad S = 76,83.$$

Näpunäide. 1. viis. Mollweide teise valemi järgi

$$\begin{aligned} \frac{n}{c} &= \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}(A+B)}; \text{ siit saame } \frac{c+n}{c-n} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}A \cdot \cos \frac{1}{2}B}{2 \cos \frac{1}{2}A \cdot \sin \frac{1}{2}B} = \\ &= \tan \frac{A}{2} \cdot \cot \frac{B}{2}, \text{ mis võimaldab leida nurga } B. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ viis. Jagades } \tan \frac{A}{2} \text{ ja } \tan \frac{B}{2}, \text{ saame } \tan \frac{A}{2} : \tan \frac{B}{2} = \\ = \frac{p-b}{p-a}; \text{ kuid } \frac{p-b}{p-a} = \frac{2(p-b)}{2(p-a)} = \frac{c+a-b}{c+b-a} = \frac{c+n}{c-n}. \end{aligned}$$

$$53. A = 115^{\circ}39'; \quad B = 25^{\circ}40'; \quad C = 38^{\circ}41'; \quad a = 9,99; \quad b = 4,80; \quad c = 6,931.$$

$$54. A = 26^{\circ}34'; \quad B = 30^{\circ}04'; \quad C = 123^{\circ}22'; \quad a = h_c; \quad \sin B = 71,84; \\ c = h_b; \quad \sin A = 134,16; \quad b = c \cdot 0,6 = 80,49; \quad S = 0,5 \cdot c \cdot h_c = 2415.$$

Näpunäide. $\tan A = 0,5; \quad b : c = h_c : h_b = 3 : 5.$

$$55. A = 27^{\circ}16'; \quad B_1 = 63^{\circ}42'; \quad C_1 = 89^{\circ}02'; \quad c_1 = 50,19; \quad S_1 = 517,4; \\ B_2 = 116^{\circ}18'; \quad C_2 = 36^{\circ}26'; \quad c_2 = 29,81; \quad S_2 = 307.$$

$$56. B = 11^{\circ}25'; \quad A_1 = 55^{\circ}02'; \quad C_1 = 113^{\circ}33'; \quad c_1 = 134,2; \\ S_1 = 0,5 \cdot c_1 \cdot h_c = 1595; \quad A_2 = 124^{\circ}59'; \quad C_2 = 43^{\circ}36'; \quad c_2 = 101; \\ S_2 = 1200.$$

57. $C_1 = 30^\circ$; $B_1 = 103^\circ 04'$; $A_1 = 46^\circ 56'$; $c_1 = 4,106$; $C_2 = 150^\circ$;
 $B_2 = 17^\circ 12'$; $A_2 = 12^\circ 48'$; $c_2 = 13,53$. (Vastuse kahesust selgitada
 joonisega.)

58. $A = 30^\circ 24'$; $B = 99^\circ 45'$; $C = 49^\circ 51'$; $a = 50,32$; $S = 1884$.

59. $A = 83^\circ 25'$; $B = 36^\circ 35'$; $C = 60^\circ$; $c = 17,434$; $S = 103,9$.

Näpunäide. Pikendanud mediaani CD lõigu $DE = CD$ võrra ja
 ühendanud punktid B ja E , leiame kolmnurgast CBE nurga $\sphericalangle CBE$.

60. $A = 127^\circ 10'$; $B = 32^\circ 05'$; $C = 20^\circ 45'$; $a = h_b : \sin C = 33,88$;
 $b = h_a : \sin C = 22,59$; $c = h_a : \sin B = 15,06$; $S = 135,5$.

Näpunäide. Saame võrde $a : b : c = \frac{2S}{8} : \frac{2S}{12} : \frac{2S}{18} = 9 : 6 : 4$, mis
 võimaldab leida nurgad.

61. $A = 135^\circ 11'$; $B = 27^\circ 07'$; $C = 17^\circ 42'$; $a = 64,93$; $S = 414,5$.

Näpunäide. Kolmnurkade pindalade võrdlemisest saame:

$$\frac{bc}{2} \cdot \sin A = \frac{bl_a}{2} \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{cl_a}{2} \cdot \sin \frac{A}{2}; \text{ siit leiame, et } \cos \frac{A}{2} = \frac{(b+c)l_a}{2bc}.$$

§ 14.

1. a) $x = 30^\circ + n \cdot 360^\circ$; $150^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = \pi n + (-1)^n \frac{\pi}{6}$;

b) $x = 30^\circ$, 150° ehk $x = \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$.

2. a) $x = \pm 51^\circ 50' + n \cdot 360^\circ$; b) $x = 51^\circ 50'$; $308^\circ 10'$.

3. a) $x = \pm 72^\circ + n \cdot 360^\circ$; $\pm 144^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = \pm \frac{2\pi}{5} + 2\pi n$;

$\pm \frac{4\pi}{5} + 2\pi n$;

b) $x = 72^\circ$, 144° , 216° , 288° ehk $x = \frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$, $\frac{8\pi}{5}$.

4. a) $x = -45^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; b) $x = 135^\circ$, 315° ehk

$x = \frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$.

5. a) $x = \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$ ehk $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$; b) $x = 60^\circ$, 120° , 240° ,

300° , ehk $x = \frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$.

6. a) $x = n \cdot 180^\circ$; $\pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ$ ehk $x = \pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$;
 b) $x = 0^\circ, 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ, 360^\circ$ ehk $x = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$.
7. a) $x = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$; $19^\circ 28' + n \cdot 360^\circ$; $160^\circ 32' + n \cdot 360^\circ$;
 b) $x = 19^\circ 28', 90^\circ, 160^\circ 32', 270^\circ$.
8. a) $x = \pm 45^\circ + n \cdot 360^\circ$; $\pm 135^\circ + n \cdot 360^\circ = 45^\circ + m \cdot 90^\circ$ ehk
 $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot m$; b) $x = 45^\circ, 135^\circ,$
 $225^\circ, 315^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.
9. a) $x = 10^\circ + n \cdot 120^\circ$; $50^\circ + n \cdot 120^\circ$ ehk $x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$; $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} \cdot n$;
 b) $x = 10^\circ, 50^\circ, 130^\circ, 170^\circ, 250^\circ, 290^\circ$
 ehk $x = \frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{13\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{25\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}$.
10. a) $x = 112^\circ 30' + n \cdot 45^\circ$ ehk $x = \frac{5\pi}{8} + \frac{5\pi}{2} \cdot n$; b) $x = 112^\circ 30'$ ehk
 $x = \frac{5\pi}{8}$.
11. a) $x = (6n \pm 1) \cdot 90^\circ$ ehk $x = (6n \pm 1) \frac{\pi}{2}$; b) 90° ehk $\frac{\pi}{2}$.
12. a) $x = (3n \pm 1) \cdot 4\pi$; b) ei ole.
13. 1) $\alpha - \beta = 2n \cdot 180^\circ$; $\alpha + \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ$;
 2) $\alpha \pm \beta = n \cdot 360^\circ$; 3) $\alpha - \beta = n \cdot 180^\circ$; 4) $\alpha - \beta = n \cdot 180^\circ$;
 5) $\alpha + \beta = 2n \cdot 180^\circ$; $\alpha - \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ$;
 6) $\alpha \pm \beta = (2n + 1) \cdot 180^\circ$;
 7) $\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ$; 8) $\alpha + \beta = n \cdot 180^\circ$;
 9) $\alpha \pm \beta = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$; 10) $\alpha \pm \beta = 270^\circ + n \cdot 360^\circ$;
 11) $\alpha + \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$; 12) $\alpha - \beta = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$.

Näpunäide. Viinud cot β võrrandi vasakule poole, teisendame selle korrutiseks või murruks.

14. $(2k + 1) \cdot 9^\circ$. 15. $k \cdot 180^\circ$. 16. $(2k + 1) \cdot 60^\circ$.

17. $\sin 2x = \frac{a}{b-a}$. Võrrandil on lahendid, kui $a \leq \frac{b}{2}$.

18. $\frac{k}{p+q} \cdot 180^\circ$.

$$19. (4k - 1) \cdot 45^\circ \text{ ja } (4k + 3) \cdot 22^\circ 30'.$$

$$20. k \cdot 36^\circ \text{ ja } k \cdot 45^\circ.$$

$$21. x = \arctan \left(-\frac{b}{a} \right) + n \cdot 180^\circ.$$

$$22. (2k + 1) \cdot 90^\circ \text{ ja } 45^\circ + k \cdot 180^\circ.$$

$$23. (-1)^n \arcsin \frac{-2 \pm \sqrt{54}}{10} + n \cdot 180^\circ.$$

$$24. \pm 2 \arccos \frac{\sqrt{17} - 1}{4} + n \cdot 720^\circ.$$

$$25. k \cdot 180^\circ + (-1)^k 30^\circ - \frac{m}{2}.$$

$$26. k \cdot 90^\circ \text{ ja } \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ.$$

$$27. k \cdot 180^\circ. \quad 28. \tan x_1 = \tan x_2 = \frac{a}{b}.$$

$$29. x = \arctan \frac{a}{b} \pm \arccos \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 2n\pi, \text{ kusjuures } c^2 \leq a^2 + b^2.$$

$$30. x_1 = 126^\circ 52' + n \cdot 360^\circ; \quad x_2 = -151^\circ 56' + n \cdot 360^\circ.$$

$$31. x = n \cdot 360^\circ; \quad -126^\circ 52' + n \cdot 360^\circ.$$

$$32. x = 31^\circ 59' \pm 16^\circ 20' + n \cdot 360^\circ.$$

$$33. x = 15^\circ + n \cdot 360^\circ; \quad 105^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Näpunäide. Jagades võrrandi mõlemad pooled 2-ga saame:
 $\cos(x - 60^\circ) = \cos 45^\circ.$

$$34. x_1 = x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \cdot n. \quad 35. x = n \cdot 180^\circ; \quad 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$36. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n.$$

$$37. x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ.$$

Näpunäide. Viinud kõik liikmed võrrandi vasakule poole ja ühendanud nad üheks murruks, taandame selle avaldisega $1 + \sin x$.

$$38. x = 10^\circ 10' + n \cdot 180^\circ; \quad 79^\circ 50' + n \cdot 180^\circ.$$

$$39. \frac{\pi}{4} + x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n. \quad 40. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad \frac{\pi}{3} + \pi n.$$

$$41. x = \pm 60^\circ + n \cdot 360^\circ; \quad \pm 120^\circ + n \cdot 360^\circ \quad \text{ehk } \pm 60^\circ + m \cdot 180^\circ.$$

$$42. x = 75^\circ + n \cdot 180^\circ; \quad 15^\circ + n \cdot 180^\circ. \quad 43. \tan x = \tan a \cdot \tan b \cdot \tan c.$$

$$44. x = n \cdot 180^\circ; \quad \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ \quad \text{ehk } m \cdot 60^\circ.$$

$$45. x = -15^\circ + n \cdot 180^\circ; \quad -75^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

$$46. x = n \cdot 60^\circ; \quad 15^\circ + n \cdot 30^\circ.$$

$$47. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad -\frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n. \quad 48. x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$49. x_1 = x_2 = 90^\circ + n \cdot 180^\circ; \quad x_3 = 45^\circ + n \cdot 90^\circ.$$

$$50. x = \pm 18^\circ + n \cdot 360^\circ; \quad \pm 162^\circ + n \cdot 360^\circ; \quad \pm 54^\circ + n \cdot 360^\circ; \\ \pm 126^\circ + n \cdot 360^\circ \text{ ehk } m \cdot 180^\circ \pm 18^\circ; \quad m \cdot 180^\circ \pm 54^\circ.$$

$$51. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm \frac{2\pi}{9} + n \cdot \frac{2\pi}{3}.$$

Näpunäide. Avaldis $\cos 4x + \cos 2x$ teisendada korrutiseks.

$$52. x = n \cdot 120^\circ; \quad -90^\circ + n \cdot 360^\circ; \quad 45^\circ + n \cdot 180^\circ.$$

Näpunäide. $\cos x - \cos 2x$ teisendada korrutiseks ja $\sin 3x$ arendada kui $\sin 2\left(\frac{3x}{2}\right)$.

$$53. \cos \frac{3x}{2} = 0; \quad \tan \frac{x}{2} = \frac{b}{a}.$$

$$54. x = \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad \pi n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}.$$

Näpunäide. Teisendanud $\sin x + \sin 3x$ ja $1 + \cos 2x$ korrutis- teks ja teinud veel mõned teisendused, saame võrrandi

$$\cos x \cdot (1 + 2 \cos x) (1 - 2 \sin x) = 0.$$

$$55. x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Näpunäide. Antud võrrand taandub võrrandiks $\frac{\cos 2x}{\sin 3x \cdot \cos x} = 0$.

$$56. \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{17-1}}{4}; \quad x = \pm 77^\circ 20' + n \cdot 720^\circ.$$

$$57. x = 2\pi n; \quad x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi n.$$

$$58. x = \frac{\pi}{2} \cdot n + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{12}.$$

Näpunäide. Vasaku poole teisendame murruks $\frac{4}{\sin^2 x}$.

$$59. \cos x_1 = \cos x_2 = \frac{1}{3}; \quad x_1 = x_2 = \pm 70^\circ 32' + n \cdot 360^\circ.$$

$$60. x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n; \quad x_2 = x_3 = \pi n.$$

Näpunäide. $1 + \sin 2\alpha = (\cos \alpha + \sin \alpha)^2$.

61. $x_1 = x_2 = n \cdot 90^\circ$; $x_3 = \pm 30^\circ + n \cdot 180^\circ$ või $x = n \cdot 90^\circ$; $n \cdot 180^\circ$;
 $30^\circ + n \cdot 60^\circ$.

Näpunäide. $\sin^2 3x - \sin^2 x$ lahutame tegureiks.

62. $x = n \cdot 60^\circ$; $\pm 35^\circ 16' + n \cdot 180^\circ$.

Näpunäide. Esitanud antud võrrandi kujul $\tan x + \tan 2x = -\tan 3x$, arendame $\tan 3x$ kui $\tan(x + 2x)$. Uuest võrrandist saame järgmised kaks võrrandit: 1) $\tan x + \tan 2x = 0$ ja 2) $1 = -1 : (1 - \tan x \cdot \tan 2x)$. Võrrandist 1 leiame, et $\sin 3x = 0$. ja võrrandist 2 leiame, et $\tan x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$.

63. $x = n \cdot \frac{\pi}{8}$; $n \cdot \frac{\pi}{4}$.

Näpunäide. Korrutanud võrrandi mõlemad pooled 2-ga, kasutame võrdust $2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$.

64. $x = 45^\circ + n \cdot 180^\circ$; $90^\circ + n \cdot 180^\circ$. 65. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$.

66. $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$. 67. $x = \pm 60^\circ + n \cdot 180^\circ$; $90^\circ + n \cdot 180^\circ$.

68. $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$. 69. $x_1 = 90^\circ + n \cdot 180^\circ$; $x_2 = x_3 = 90^\circ + n \cdot 360^\circ$.

70. $x_1 = \pi n$; $x_2 = x_3 = 2\pi n$. 71. $\tan x = \pm (\sqrt{2} + 1)$; $\pm (\sqrt{2} - 1)$;
 $x = \pm \frac{3}{8}\pi + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{8} + \pi n$ ehk $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} m$.

72. $x = n \cdot 60^\circ$; $n \cdot 180^\circ$.

Näpunäide. $\tan 2x$ asendame avaldisega $\frac{2 \sin x \cos x}{\cos 2x}$.

73. $x = \pi n$. 74. 1) $\sin x = 0,8$; $\sin y = -0,6$; 2) $\sin x = -0,6$;
 $\sin y = 0,8$.

Näpunäide. Tõstame ruutu $\sin y = 0,2 - \sin x$ ja $\cos y = -0,2 - \cos x$ ning liidame nad liikmeti.

75. 1) $\cos x = \frac{1}{2}$; $\cos y = \frac{1}{3}$; 2) $\cos x = -\frac{1}{2}$; $\cos y = -\frac{1}{3}$;
 3) $\cos x = \frac{1}{3}$; $\cos y = \frac{1}{2}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{3}$; $\cos y = -\frac{1}{2}$.

Näpunäide. Liites ja lahutades liikmeti antud võrrandid avaldame neist $\cos y$ ja $\sin y$ ning liidame nende ruudud.

76. 1) $\tan x = 5 + \sqrt{34}$, $\tan y = 5 - \sqrt{34}$; 2) $\tan x = 5 - \sqrt{34}$,
 $\tan y = 5 + \sqrt{34}$.

77. $x^2 = \frac{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \varphi}{\sin^2 \varphi}$.

Näpunäide. Võtnud $\cos(\alpha + \beta) = \cos \varphi$ avame sulud, avaldame $\cos \alpha$ ja $\cos \beta$ vastavalt $\sin \alpha$ ja $\sin \beta$ kaudu ning asendame $\sin \alpha$ ja

$\sin \beta$ avaldistega $\frac{a}{x}$ ja $\frac{b}{x}$.

78. 1) $x = 45^\circ + (m + n) \cdot 180^\circ$, $y = 15^\circ + (m - n) \cdot 180^\circ$;

2) $x = 105^\circ + (m + n) \cdot 180^\circ$, $y = -45^\circ + (m - n) \cdot 180^\circ$;

3) $x = -15^\circ + (m + n) \cdot 180^\circ$, $y = -45^\circ + (m - n) \cdot 180^\circ$;

4) $x = 45^\circ + (m + n) \cdot 180^\circ$, $y = -105^\circ + (m - n) \cdot 180^\circ$.

79. 1) $x = 21^\circ 21' 15''$, $y = 8^\circ 38' 45''$; 2) $x = 81^\circ 21' 15''$, $y = 68^\circ 38' 45''$.

80. 1) $x = 81^\circ 21' 15''$, $y = 21^\circ 21' 15''$; 2) $x = 21^\circ 21' 15''$, $y = 81^\circ 21' 15''$.

81. x ja y leiame nende poolsumma ja poolvahe järgi: 1) esimese võr-

randi järgi on $\frac{x + y}{2} = \frac{\alpha}{2}$; 2) teise võrrandi esitame kujul

$$2 \sin \frac{x + y}{2} \cdot \cos \frac{x - y}{2} = a \text{ ja leiame sellest } \frac{x - y}{2}.$$

82. $x = 15^\circ 20'$, $y = 61^\circ 40'$. 83. x ja y leiame nende summa ja vahe järgi: 1) $x + y$ on antud; 2) $x - y$ leiame teisest võrrandist, kui korrutame ta mõlemad pooled 2-ga ja $2 \sin x \cdot \sin y$ asendame avaldisega $\cos(x - y) - \cos(x + y)$.

84. $x = 60^\circ$, $y = 11^\circ 40'$.

85. Esimesest võrrandist saame $\frac{1}{2}(x + y) = \frac{1}{2}a$ ja teisest võrrandist

leiame, et $\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{m + n}{m - n}$ ehk $\frac{\tan \frac{1}{2}(x + y)}{\tan \frac{1}{2}(x - y)} = \frac{m + n}{m - n}$,

millest leiame $\frac{1}{2}(x - y)$.

86. $x = 35^\circ 46'$, $y = 60^\circ 52'$.

87. Teise võrrandi võib esitada kujul $\frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y} = a$, millest saame

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{a} \cdot \sin(x + y) \text{ ehk } \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{a} \cdot \sin a.$$

Korrutanud nüüd võrrandi mõlemad pooled 2-ga ja asendanud $2 \cos x \cdot \cos y$ avaldisega $\cos(x + y) + \cos(x - y)$, võime leida $x - y$.

88. $x = 44^{\circ}20'$, $y = 13^{\circ}20'$.

89. Esitanud teise võrrandi kujul $\frac{\sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{a}{1}$, saame sellest:

$$\frac{\cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y}{\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y} = \frac{1+a}{1-a} \text{ ehk } \frac{\cos(x-y)}{\cos(x+y)} = \frac{1+a}{1-a}.$$

Viimasest võrrandist leiame $x - y$.

90. $x = 45^{\circ}$, $y = 40^{\circ}$.

91. Teisest võrrandist leiame, et $\frac{\tan x + \tan y}{\tan x - \tan y} = \frac{m+n}{m-n}$ ehk

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{m+n}{m-n}, \text{ millest leiame } x - y.$$

92. 1) $x = 22^{\circ}25'$, $y = 18^{\circ}39'$; 2) $x = 71^{\circ}21'$, $y = 67^{\circ}35'$.

93. $x = 45^{\circ}$, $y = 135^{\circ}$.

94. $\tan x = 1$; $\tan y = 2$; $\tan z = 3$; $x = 45^{\circ}$; $y = 63^{\circ}26'$; $z = 71^{\circ}34'$.

Näpunäide. $\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \cdot \tan y \cdot \tan z$.

95. $x = 30^{\circ}58'$; $y = 78^{\circ}41'$; $z = 70^{\circ}21'$. (Vt. ülesanne 94.)

§ 15.

1. 1) $-\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{3}$; 3) $\frac{3}{4}\pi$.

2. 1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$.

3. 1) -1; 2) 1; 3) 0.

4. 1) x ; 2) $\pm \frac{3}{5}$; 3) $-\frac{2}{\sqrt{5}}$.

5. 1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\sqrt{3}$.

6. 1) $\frac{4\pi}{5}$; 2) $x + \pi n$; 3) $\frac{5\pi}{14}$.

7. 1) 0,6; 2) $\frac{15}{17}$; 3) $\frac{3}{4}$. 8. 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$. 9. 1) ∞ ; 2) ∞ .

10. $\sqrt{3}$.

11. $\frac{77}{85}$.

12. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

13. $\frac{41}{49}$.

14. $2m\sqrt{1-m^2}$.

15. $\frac{47}{52}$.

16. $\frac{2m}{1+m^2}$.

32. $\pm \sqrt{2}$.

33. 0; $\frac{1}{2}$.

34. $\pm \sqrt{3}$.

35. $\sqrt{2}$.

36. 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. 37. $\frac{\pi}{4} + \pi n$.

$$38. \pm \frac{\pi}{6}. \quad 39. \sqrt{\frac{2(5 - 2\sqrt{2})}{17}}. \quad 40. \frac{1}{2}. \quad 41. 0; \frac{1}{2}.$$

$$42. \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 43. \pm \sqrt{\frac{2}{a}}. \quad 44. \pm \frac{1}{3}.$$

§ 15a.

1. $a \sec \frac{180^\circ}{n}$. 2. 18,02 cm ja 22,47 cm. 3. $2a \cos \frac{180^\circ}{n}$.
4. 1) $2R = a \operatorname{cosec} \frac{180^\circ}{n}$; 2) $\frac{a}{2} \operatorname{cosec} \frac{90^\circ}{n}$. 5. 26,97 m ja 20,84 m.
6. $4r^2 \operatorname{cosec} a = 167$. 7. $\sqrt{Q \cot \frac{\beta}{2}} = 24,66$. 8. $\beta = 2 \operatorname{arc} \tan \frac{b^2}{4Q} = 130^\circ 47'$.
9. $\frac{1}{4} na^2 \cot \frac{180^\circ}{n}$; 1) 1453; 2) 4,829; 3) 1120. 10. $\frac{1}{2} nR^2 \sin \frac{360^\circ}{n}$;
1) 147; 2) 116,5. 11. $nR^2 \tan \frac{180^\circ}{n}$. 12. 183,8. 13. $\approx 41a$.
14. $a^2 \sin a \cdot \cos a = \frac{a^2}{2} \sin 2a$.
15. 71 cm. 16. $S_9 : S_{10} = 10 \cot 20^\circ : 9 \cot 18^\circ = 0,992$. 17. 21,75 cm².
18. $\pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ} - \frac{r^2}{2} \sin \alpha$; 1) 0,98; 2) 1,63. 19. $\frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$;
 $\alpha = 2 \operatorname{arc} \sin \frac{a}{2R}$; 0,59 cm².
20. $R^2 \left[\frac{\pi(180^\circ - \alpha)}{180^\circ} + \sin \alpha \right]$. 21. 3,215 cm ja 7,785 cm.
22. $S = \frac{4ab}{\sin \alpha}$; $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$;
 $d_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha} \cdot \frac{2}{\sin \alpha}$.
23. $6 - \pi \frac{90^\circ + \alpha}{72^\circ} = 0,4643$; α on suurema ringjoone puutepunktide vaheline kaar.
24. 30°.

§ 16.

1. 3,299. 2. $\text{arc tan } \frac{r}{p} = 60^{\circ}26'$. 3. $\text{arc tan } \frac{2d}{a} = 53^{\circ}08'$.
 4. $35^{\circ}16'$. 5. 5,2 m; $28^{\circ}33'$. 6. $51^{\circ}03'$.
 7. 2,6 m; $67^{\circ}23'$. 8. $70^{\circ}32'$. 9. $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos \varphi$; $\varphi = 45^{\circ}$.
 10. $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$; $\varphi = 6^{\circ}15'$. 11. $x = y = z = \text{arc tan } \frac{4hS}{abc}$; $75^{\circ}52'$.
 12. $322,5 \text{ m} \cdot \frac{a \sin \beta \tan \varphi}{\sin(\gamma + \beta)}$. 13. $\frac{a^2}{\sqrt{3}} \sqrt{4 + \tan^2 \alpha}$.
 14. $\text{arc sin } \frac{n \mp m}{a}$; $13^{\circ}21'$; 90° . 15. $\varphi = \text{arc tan } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

Näpunäide. Paralleelsete kaldsirgete ja lõikaja lõikepunktid tasapinnaga asetsevad ühel sirgel.

16. $\sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}$. 17. $\text{arc sin } \frac{c \sin \alpha}{d}$; 45° .
 18. 1) $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}$; ristsirgete ja antud tasapinna lõikepunktid asetsevad ühel ja samal pool tasapinda, mis on juhitud läbi antud lõigu risti antud tasapinnaga. 2) $\sqrt{b^2 - a^2} \cdot \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$; ristsirgete ja antud tasapinna lõikepunktidest asetseb üks ühel pool ja teine teisel pool tasapinda, mis on juhitud läbi antud lõigu risti antud tasapinnaga.

Näpunäide. Projitseerime antud lõigu ja temale juhitud ristsirged antud tasapinnale; seejärel ehitame täisnurkse kolmnurga, mille hüpotenuusiks on b ja mille üks kaatet on paralleelne lõigu a projektsiooniga.

19. $41^{\circ}25'$ ja $82^{\circ}50'$.

§ 17.

1. $a \tan \alpha = 5,441$. 2. 1) $\varphi = \text{arc sin } \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}$; 2) $\varphi = 22^{\circ}37'$.
 3. $x = 18^{\circ}04'$; $\sin x = \sin 20^{\circ} \cos 25^{\circ}$. 4. 22° . 5. $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.
 6. $\frac{180^{\circ}}{n}$. 7. a) 26,7 m; 11,7 m; b) $\alpha = 18^{\circ}33'$; $\beta = 46^{\circ}31'$; c) $17^{\circ}14'$; 40° ; d) $18^{\circ}47'$; $50^{\circ}32'$.

8. $39^{\circ}48'$. 9. $\frac{a}{2} \sin 2\alpha \cdot \sin \varphi$. 10. $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$; $\tan y = \frac{1}{2} \tan \alpha$.
 11. $x = \arcsin \left(\frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \right)$. 12. $73^{\circ}24'$. 13. 30° .
 14. $\varphi = \arcsin 0,6 = 36^{\circ}52'$. 15. 1) $70^{\circ}32'$; 2) $109^{\circ}28'$; 3) $138^{\circ}12'$.

Näpunäide. Ülesanne taandub niisuguse korrapärase viisnurkse püramiidi külgtahkude vahelise nurga arvutamiseks, mille kõik servad on võrdsed. 4) $116^{\circ}34'$. *Näpunäide.* Ülesanne taandub niisuguse korrapärase kolmnurkse püramiidi külgtahkude vahelise nurga arvutamiseks, mille külgtahu tipunurk on 108° .

§ 18.

1. $43,3 \text{ cm}^2$. 2. $Q \sqrt{2}$. 3. $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4 \cos \alpha}$. 4. $42,2 \text{ cm}$.
 5. 1953 cm^2 . 6. $33,35 \text{ m}^2$. 7. $36^{\circ}52'$; 3 m.
 8. Ühepalju. 9. $Q \sin \alpha$; väiksem; heledamalt. 10. $106,4 \text{ m}^2$.

§ 19.

1. $67^{\circ}56'$. 3. $\frac{7a^2}{8 \cos \alpha}$. 4. 1) $\frac{3a}{4} \sqrt{a^2 + 2b^2}$; 2) $\arcsin \frac{b \sqrt{2}}{a}$.
 5. Lõiketaspind on paralleelne põhja suurema diagonaaliga ja moodustab põhitahuga nurga $\arcsin \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)$.
 6. $d^2 \sqrt{2} \cdot \sin 2\beta \cdot \sin (45^{\circ} + \alpha) \approx 393,1 \text{ m}^2$. 7. $d^2 \cot \frac{\alpha}{4} \approx 1963 \text{ m}^2$.
 8. $5a^2 \cot 36^{\circ} \cdot \cos^2 27^{\circ} \approx 3092 \text{ m}^2$.
 9. $4a^2 \operatorname{cosec} \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \left(45^{\circ} - \frac{\alpha}{4} \right) \cdot \sqrt{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}} \approx 34\,700 \text{ cm}^2$.
 10. $\frac{1}{3} a^2 \sqrt{3} \sec \alpha \cdot (1 + \sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha})$.
 11. $x = \arcsin \left(\frac{1}{2} \tan \varphi \right) = 16^{\circ}06'$; $y = \arcsin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tan \varphi \right) = 26^{\circ}34'$.
 12. $x = \arcsin \left(\cot \frac{180^{\circ}}{n} \tan \frac{\alpha}{2} \right) = 54^{\circ}44'$. 13. $\frac{a \sin \alpha}{2 \sin (\alpha + 45^{\circ})}$.

$$14. \frac{1}{4} a^2 \sec a \cdot \sqrt{\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)}.$$

$$15. x = \frac{1}{2} \arcsin \frac{p\sqrt{2}}{c^2} = 29^\circ 02' \quad \text{või } x = 60^\circ 58';$$

$$y = 2c \cos x = 8,743 \quad \text{või } y = 48,53.$$

$$16. \tan\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{m\sqrt{2}}{n}; \quad \varphi = 90^\circ - 2 \arcsin \frac{m\sqrt{2}}{n} = 30^\circ.$$

$$17. \frac{a^2}{9\sqrt{3}} \sqrt{4 + \tan^2 \alpha} = 1,962. \quad 18. a^2 \frac{\sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2(\alpha + \beta)}. \quad 20. 48 \text{ cm}^2.$$

$$21. 1) 2a^2; \quad 2) \frac{a^2}{2}; \quad 3) a^2. \quad 22. 168 \text{ cm}^2. \quad 23. 14,61 \text{ cm}^2. \quad 24. 32^\circ 51'.$$

$$25. a^2 \sec \alpha. \quad 26. 4h^2 \cot \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2}. \quad 27. 2a^2 \sin \alpha \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \varphi.$$

$$28. 2nk^2 \cos \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \tan \frac{180^\circ}{n} = 6239. \quad 29. (a + b) \sqrt{ab} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sec \alpha.$$

$$30. l^2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \sec \varphi. \quad 31. a^2 \sqrt{2} \cdot \sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}.$$

$$32. \frac{na^2}{4 \sin \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos \alpha} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$\text{ehk } \frac{na^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n} \sqrt{1 + \frac{\tan^2 \alpha}{\cos^2 \frac{180^\circ}{n}}}.$$

$$33. a^2 \sec^2 \alpha \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$34. a^2 \cot\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right); \quad a^2 \sqrt{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec}\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right).$$

$$35. \frac{2h^2}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(45^\circ - \frac{\beta}{2}\right).$$

$$36. a^2 \sin \alpha \cdot \cot\left(45^\circ - \frac{\varphi}{2}\right). \quad 37. \sqrt{c^2 - \frac{(a-b)^2}{4} \operatorname{cosec}^2 \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$38. \tan \varphi = \tan \alpha \cdot \frac{m-n}{m+n} \sqrt{2}; \quad \varphi = \arcsin\left(\tan \alpha \cdot \frac{m-n}{m+n} \sqrt{2}\right).$$

$$39. \frac{n(a+b)}{2} \sqrt{\frac{(a-b)^2}{4} \cot^2 \frac{180^\circ}{n} + h^2 + n \frac{a^2 + b^2}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}}.$$

$$40. \frac{n(a^2 - b^2)}{4 \sin \frac{180^\circ}{n}} \sqrt{\tan^2 \alpha + \cos^2 \frac{180^\circ}{n}} + \frac{n(a^2 + b^2)}{4} \cot \frac{180^\circ}{n}.$$

$$41. nk^2 \frac{m+1}{m-1} \sin \alpha \tan \frac{180^\circ}{n}. \quad 42. 2h^2 \cot \beta \cdot \sqrt{2 + \cot^2 \alpha} = 2928.$$

§ 20.

1. $\tan \varphi = \sin 15^\circ$; $\varphi = \arcsin(\sin 15^\circ) = 14^\circ 31'$.

2. $R \operatorname{cosec} \alpha \sqrt{1 - \cos 2\alpha}$.

3. $\sqrt{R^2 \sin^2 \alpha + d^2 \cos^2 \alpha}$.

Näpunäide. Olgu põhja keskpunkt O , puutepunkt A , puutuja ja põhja tasapinna lõikepunkt B , punkti A läbiva moodustaja alumine otspunkt C ja punktist O sirgele AB juhitud ristlõik OD . Siis on $\angle ABC = \alpha$, $OA = d$ ja $OC = R$. Ühendades punktid C ja D saame kolmnurgas ODC tipu C juures täisnurga.

4. $\frac{b \sin 2\alpha}{2\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}$.

5. $\left(\frac{R}{\cos \alpha \cdot \cos \varphi}\right)^2 \sin \alpha \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}$.

6. $\frac{a}{4} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot \sin 2\beta}{\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha)}$. *Näpunäide.* Otsitava lõigu leiame osade kaupa.

7. $\frac{l \sin \alpha \sqrt{2}}{\sqrt{2} + \tan \alpha} = l \sin \alpha \sin^2 \varphi$, kusjuures φ leiame võrdsusest $\frac{\tan \alpha}{\sqrt{2}} = \cot^2 \varphi$.

8. $\frac{R \sin \alpha \cdot \sin 60^\circ}{\sin(\alpha + 60^\circ)}$. 9. $2\pi a^2 \cos \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 10. $70^\circ 32'$.

11. $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$; $\alpha = 2 \arcsin \frac{\pi}{4} = 76^\circ 17'$. 12. $\pi Q \cot \frac{\alpha}{2}$.

13. $\sin \alpha \sqrt{S \cot \frac{\varphi}{2}} = 19,42 \text{ cm}$. 14. $22,52 \text{ m}^2$; $4,442 \text{ m}^2$.

15. 1) $b = nh = 80 \text{ m}$; 2) $r = mh = 6 \text{ m}$; 3) $\alpha = \arcsin \frac{1}{n} = 2^\circ 52'$;

4) $\varphi = \arcsin \frac{2}{3} = 33^\circ 41'$; 5) $\gamma = \arcsin \frac{m}{n} = 85^\circ 42'$;

6) $537,9 \text{ m}^2$; 7) $646,5 \text{ m}^2$.

16. $\sin \frac{x}{2} = \frac{S}{\pi a^2}$; $x = 2 \arcsin \frac{S}{\pi a^2} = 30^\circ$.

17. 1) $H \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = H \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) tipupoolne osa suhtub põhjapoolse

osaga nagu $\cos^2 \frac{\alpha}{2} : \sin^2 \frac{\alpha}{2}$. Võrdkülgse telglõikega koonuse puhul saame: 1) $x = \frac{3}{4}$

moodustajast; 2) 3 : 1. *Näpunäide.* Sarnaste koonuste külgpindalad suhtuvad nagu koonuste kõrguste ruudud.

18. $360^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$; 1) 180° ; 2) $207^\circ 31'$. 19. $\frac{\pi(R^2 - r^2)}{\cos \alpha}$.

20. $\frac{\pi m^2}{\sqrt{1 + 3 \sin^2 \alpha}}$. 21. $\frac{\pi(m^2 - n^2)}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}$. 22. $\frac{(R^2 - r^2) \sin \delta}{2 \cos \beta}$.

23. $\pi h^2 \sec \alpha$. 24. $\cos \varphi = \frac{m - n}{p}$. 25. $S_{\text{kiilg}} = \pi l^2 \sin \alpha = 426$;

$S_{\text{tüüs}} = 2\pi l^2 \sin \left(\frac{\alpha}{2} + 15^\circ\right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - 15^\circ\right) = 652$. 26. $\frac{Q - q}{\cos \alpha}$.

§ 21.

1. $\frac{1}{2} l^3 \sin \beta \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi$. 2. $\frac{1}{2} d^3 \sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \tan \beta = 58,1$.

3. $2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}$.

4. $\frac{1}{4} d^3 \sin \left[\alpha + \arcsin \left(\frac{\sin \alpha}{4} \right) \right] \tan \varphi = 1000 \text{ dm}^3$; 30° .

5. $V = abc \sqrt{-\cos 2\alpha}$; $\alpha = 45^\circ$. 6. $\frac{a^3}{\sin \alpha} \sqrt{\cos 2\alpha}$.

7. $\frac{a^3 \sqrt{2 \cos \alpha}}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} = 271,8 \text{ cm}^3$.

8. $\frac{3a^3}{8 \sin \frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)}$. 9. 516 m^3 .

10. $V = \frac{a^2 b^2 \sin^2 \gamma}{2(a + b) \cos \varphi} = 17 850 \text{ dm}^3$. *Näpunäide.* $a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma =$
 $= (a + b)^2 \cos^2 \varphi$, kus $\sin \varphi = \frac{2 \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2}}{a + b}$ (vt. § 11, nr. 62).

11. $\frac{4r^2 h \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha} = 3,627 \text{ m}^3$.

12. *Näpunäide.* Algul avaldame kolmnurga FCD pindala ja seejärel kolmnurga FAB pindala:

$$\frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \varphi}{\sin(\alpha + \varphi) \cdot \sin(\alpha - \varphi)} \left[\left(h^2 \cot^2 \varphi + \frac{b^2}{4} \right) \cot \alpha + hb \right].$$

13. *Näpunäide.* Avaldada ruumala ristlõike pindala kaudu:

$$\frac{a^2 b^2}{4} \cdot \cot \frac{\alpha}{2}.$$

14. $\frac{1}{6} nb^3 \cdot \cos^2 \beta \cdot \sin \beta \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = 1,535 \text{ m}^3.$

15. $\frac{4}{3} b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}.$

16. $\frac{2}{3} h^3 \cot^2 \varphi \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta).$ 17. $\frac{b^3}{6} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}.$

18. $\frac{2}{3} a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \tan \varphi.$ 19. $\frac{1}{24} (a + b)^2 \sqrt{a(a - 2b)} \cdot \tan^2 \frac{\alpha}{2}.$

20. $\frac{1}{6} P \sqrt{P \tan \alpha \cdot \tan \varphi}.$

Näpunäide. Olgu püramiidi kõrguse aluspunkt E . Siis joon BED on sirgjoon, mis on risti sirgetega BC ja AD .

21. $V_A = \frac{V \sin \beta}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = 148,9.$ *Näpunäide.* $V_A : V_B =$

$$= \sin B : \sin A.$$

22. $45^\circ 18'$ ja $25^\circ 14'$.

23. $V = \frac{a^3 - b^3}{6} \tan \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \varphi \tan \alpha$, kus $\sin^2 \varphi = \frac{b^3}{a^3}$; $V = 227 \text{ m}^3.$

24. $V = \frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha} = \frac{a^3 \cos^2 \varphi}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}$, kus $\sin \varphi =$
 $= \sqrt{\frac{b^3}{a^3}}$; $V = 4304.$

25. $\frac{n(a^3 - b^3) \cot \frac{180^\circ}{n}}{24 \sin \frac{180^\circ}{n}} \cdot \tan \alpha.$ 26. $\frac{d^3 \cos \alpha \cdot \sin 2\alpha}{8\pi}.$

27. $\frac{\pi a^2 h}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 7900 \text{ dm}^3.$ 28. $\frac{\pi a^3}{4 \sin^3 \frac{180^\circ}{n}}.$

$$29. V = \frac{D^3}{8} \cdot \frac{\pi\alpha}{180} \cdot \frac{\sin(45^\circ - \varphi)}{\cos 45^\circ \cdot \cos \varphi} \cdot d,$$

$$\text{kus } \tan \varphi = \frac{\sin \alpha \cdot 180}{\pi\alpha}; \quad V \approx 2,1 \text{ m}^3.$$

$$30. \frac{\pi b^3 H}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$31. V = \frac{\pi Q}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin^3 \frac{180^\circ}{n}} \sqrt[3]{Q \tan \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{180^\circ}{n} + \frac{\alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{180^\circ}{n} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

$$32. \frac{c^3 d \tan \varphi}{24\pi^2} \approx 5,4 \text{ t.} \quad 33. \frac{\pi}{3} l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad 34. \frac{\pi h^3}{3} \cot^2 \alpha.$$

$$35. S = \frac{2\pi R^2}{\cos \alpha} \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}; \quad V = \frac{\pi R^3}{3} \tan \alpha.$$

$$36. \frac{\pi R^3}{3} \sin^3 \alpha \cdot \cot \frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3} \pi R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$37. \frac{\pi a^3 \cot \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}, \quad 38. \frac{\pi d^3 \cot \alpha}{3 \tan^3 \frac{\alpha}{2}} = 299 \text{ m}^3.$$

$$39. \frac{\pi R^3 \sin(\alpha - \beta)}{3 \cos \alpha \cos \beta} = 302 \text{ dm}^3. \quad 40. \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3) \tan \alpha.$$

$$41. \frac{7}{6} \pi l^3 \sin 2\varphi \cos \varphi.$$

$$42. r = \sqrt[3]{\frac{\frac{3}{\pi} V + r_1^3 \tan \alpha + r_2^3 \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta}} = 3,45 \text{ m};$$

$$h_1 = (r - r_1) \tan \alpha = 19 \text{ m}; \quad h_2 = (r - r_2) \tan \beta = 4 \text{ m}.$$

$$43. \frac{7}{6} \pi a^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2} = 28 030 \text{ dm}^3. \quad 44. \frac{\pi}{12} l^3 \sin \alpha (2 - \cos 2\alpha) = 1182.$$

§ 22.

$$1. 3562 \text{ km.} \quad 2. 36 710 \text{ km}; \quad 15 930 \text{ km.} \quad 3. \frac{2r \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}.$$

$$4. \frac{V}{2} \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 10,52 \text{ dm}^3. \quad 5. \frac{\sin^2 2\alpha \cdot \cos^2 \alpha}{2} = 0,2896.$$

$$6. \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\varphi}{2} \cot \frac{180^\circ}{n}. \quad 7. \frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n} \sin 2\alpha} = 5,145 \text{ m}.$$

$$8. \frac{a}{2} \sin \alpha \tan \frac{\varphi}{2}. \quad 9. 2C \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$10. x = 2R \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ \cdot \sqrt{\sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Näpunäide. Juhtinud läbi kõõlude ühise punkti veel läbimõõdu ja tähistanud kõõlu pikkuse tähega x , avaldame kõõlu otspunkti kauguse läbimõõdust. See on $x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$. Ühendanud läbimõõdu otspunkti kõõlu otspunktiga, koostame võrrandi: $x \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = 2R \cdot x \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cosec} 60^\circ$.

$$11. 70^\circ 32'.$$

$$12. \tan \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}; \quad \alpha_1 = 78^\circ 28'; \quad \alpha_2 = 60^\circ; \quad m = 2$$

(väikseim).

$$13. \sin \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}; \quad \alpha = 52^\circ 32'. \quad 14. \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \alpha = 70^\circ 32'.$$

$$15. \sin \alpha = \sqrt{\frac{n}{m}}; \quad (\alpha = 45^\circ). \quad 16. \frac{\sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr \cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}.$$

$$17. 1) 4\pi r_1 r_2; \quad 2) \cos z = \frac{r_1 - r_2}{r_1 + r_2} \text{ ehk } \tan \frac{z}{2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}}.$$

$$18. \sin \frac{ABC}{2} = \frac{m - n}{m + n}.$$

$$19. \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\tan^3 \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^6 \frac{\alpha}{2}} \text{ ehk } \frac{2}{3} \pi R^3 \tan 2\varphi, \text{ võttes } \tan^3 \frac{\alpha}{2} = \tan \varphi.$$

$$20. \frac{4}{3} \pi R^3 d \cos^4 \frac{\varphi}{4} \left(3 - 2 \cos^2 \frac{\varphi}{4}\right). \quad 21. 3652 \text{ m}^3.$$

$$22. \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1; \quad \alpha = 48^\circ 54'. \quad 23. \frac{\pi a^2}{4} \sec^2 \frac{\alpha}{4}.$$

$$24. 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{4} = 573,6 \text{ dm}^2. \quad 25. \frac{\pi b^3 \tan \frac{\alpha}{4}}{12 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 4280 \text{ dm}^3.$$

$$26. V \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{4}. \quad 27. \frac{\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \varphi}, \text{ kus } \tan \varphi = \sqrt{2 \tan \frac{\alpha}{4}}.$$

$$28. \sin \alpha = \frac{n - m}{n + m}; \quad (\alpha = 30^\circ).$$

$$29. \sin \left(x + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{m}{n} \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}; \quad (x = 15^\circ).$$

$$30. \frac{\pi R^3 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}{6 \cos^6 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}; \quad \frac{\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^4 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{4} \right)}.$$

§ 23.

$$1. S = \pi a^2 \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C \cdot \cos \frac{1}{2} (B - C)}{\sin (B + C) \cdot \cos \frac{1}{2} (B + C)}; \quad V = \frac{\pi a^3}{3} \cdot \frac{\sin^2 B \cdot \sin^2 C}{\sin^2 (B + C)}.$$

$$2. 4\pi Q \cot \left(45^\circ - \frac{\beta}{4} \right) = 1736 \text{ dm}^2.$$

$$3. \frac{2}{3} \pi a b^2 \tan^2 a = 300 \text{ dm}^3. \quad 4. 2\pi a^2 \sqrt{3} \cdot \sin (30^\circ + a).$$

$$5. \frac{1}{3} \pi b^3 \sin^2 a; \quad 4\pi b^2 \sin a \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{4} \right); \quad \text{kui } a = 120^\circ;$$

$$V = \frac{\pi b^3}{4}; \quad S = \frac{1}{2} \pi b^2 \sqrt{3} (\sqrt{3} + 1). \quad 6. 8\pi a^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$2\pi a^3 \sin a \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}. \quad 7. \pi a^2 n^2 \sin \frac{\alpha}{2}. \quad 8. \frac{\pi}{3} \cdot bc(b + c) \sin a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$9. \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a^3 \tan 2a}{\cos 2a}.$$

$$10. \frac{2}{3} \pi R^3 \tan a \cdot \sin a \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$11. V_a : V_b : V_c = \operatorname{cosec} A : \operatorname{cosec} B : \operatorname{cosec} C.$$

$$12. V = \frac{\pi b^3 \sin \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{4 \sin 30^\circ \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = 47\,090 \text{ cm}^3;$$

$$S = \frac{4\pi b^2}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(15^\circ + \frac{\alpha}{4} \right) \cos \left(15^\circ - \frac{\alpha}{4} \right) = 8460 \text{ cm}^2.$$

$$13. \frac{4}{3} \pi (1 + \cos^2 a) \sqrt{\frac{S^3}{\sin 2a}}.$$

$$14. \frac{1}{2} \pi d^3 \sin 2a = 57\,380 \text{ m}^3; \quad 4\pi d^2 \cdot \sin 45^\circ \cos (45^\circ - a) = 10\,110 \text{ m}^2.$$

15. $\frac{10 - 3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \pi a^3$. 16. $\frac{\pi r^3 \sqrt{2} \tan \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \alpha}{3 \cos^3 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} = 378,4 \text{ dm}^3$.
17. $\frac{8\pi r^2}{\sin^2 \alpha} \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. 18. $\frac{2\pi h^3}{\sin(\alpha + \beta)} \cdot \left(\frac{\sin \beta}{\sin \alpha}\right)^2$.
19. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \sec \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \sec \frac{180^\circ}{n}$;
 2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cos^2 \frac{180^\circ}{n}$;
 3) $S = \pi a^2 \cot^2 \frac{180^\circ}{n} \cdot \sec \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi}{6} a^3 \cot^3 \frac{180^\circ}{n} \sec \frac{180^\circ}{n}$.
20. 1) $S = 2\pi r^2 \left(2 + \tan^2 \frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3} \pi r^3 \left(2 + \tan \frac{180^\circ}{n}\right)$;
 2) $S = 2\pi R^2 \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right)$; $V = \frac{2}{3} \pi R^3 \cos \frac{180^\circ}{n} \left(1 + \cos^2 \frac{180^\circ}{n}\right)$;
 3) $S = \pi a^2 \left(\cot^2 \frac{180^\circ}{n} + 0,5\right)$; $V = \frac{\pi a^3}{6} \cot \frac{180^\circ}{n} \left(\cot^2 \frac{180^\circ}{n} + 0,5\right)$.
21. 1) $S = 4\pi r^2 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \sec^2 \frac{180^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3} \pi r^3 \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \cdot \sec^2 \frac{180^\circ}{n}$;
 2) $S = 4\pi R^2 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \cos^4 \frac{90^\circ}{n} \cos \frac{180^\circ}{n}$;
 3) $S = \frac{\pi a^2}{4} \cdot \cot^2 \frac{90^\circ}{n}$; $V = \frac{\pi a^3}{24} \cot \frac{180^\circ}{n} \cdot \cot^2 \frac{90^\circ}{n}$.
22. $V = \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \sin^4 \frac{\alpha}{2}$; $S = 8\pi R^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{4}$.
23. $\frac{4}{3} \pi r^3 \sin \beta \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$.
24. $2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}\right) =$
 $= 2Q \cdot \frac{360^\circ}{\alpha} \cdot \sin \left(\frac{\alpha}{2} + \varphi\right) \cdot \operatorname{cosec} \varphi = 4259 \left(\text{kusjuures } \tan \varphi = \frac{1}{2}\right)$.
25. $\cos \alpha = \sqrt[4]{\frac{1}{2}}$; $\alpha = 32^\circ 47'$. 26. $\pi a^2 \cdot \cot \frac{\alpha}{4}$; $\frac{\pi a^3}{6}$.

Sisukord.

I osa.

Trigonomeetria.

	Lk.
§ 1. Kaarte ja nurkade mõõtmine	3
§ 2. Trigonomeetriliste funktsioonide muutumine nurga muutumisel	5
§ 3. Ühe ja sama nurga trigonomeetriliste funktsioonide vahelised seosed	8
§ 4. Täiendus- ja kõrvnurkade funktsioonid	13
§ 5. Trigonomeetriliste funktsioonide tabelid	14
§ 6. Täisnurksete kolmnurkade lahendamine	15
§ 7. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine	26
§ 8. Taandamisvalemid	30
§ 9. Nurkade summa ja vahe trigonomeetrilised funktsioonid	32
§ 10. Kordse ja murrulise argumendi trigonomeetrilised funktsioonid	36
§ 11. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe teisendamine korrutiseks. Abinurk	41
§ 12. Logaritmid tabelite kasutamine trigonomeetriliste avaldiste arvutamiseks ja nurkade leidmiseks	44
§ 13. Kaldnurksete kolmnurkade lahendamine logaritmid abil	48
§ 14. Trigonomeetrilised võrrandid	50
§ 15. Tsükloomeetrilised funktsioonid	54

II osa.

Trigonomeetria rakendamist nõudvaid geomeetrilisi ülesandeid.

§ 15a. Planimeetria	58
§ 16. Sirged ja tasapinnad	61
§ 17. Kahetahulised ja mitmetahulised nurgad	65
§ 18. Kujundi projektsiooni pindala	68
§ 19. Rööptahukad, prismad, püramiidid ja nende pindalad	70
§ 20. Silinder, koonus, tüvikoonus ja nende pindalad	76
§ 21. Ruumalade arvutamine	80
§ 22. Kera ja selle osad	87
§ 23. Pöördkehad	90
Trigonomeetriliste funktsioonide tabel	95
Vastused	96

Tõlkinud K. Ratassepp.

Vastutav toimetaja A. Humal.

Keeleline toimetaja E. Kivistik.

Ladumisele antud 19. II 1949. Trükkimisele antud 29. IV 1949. Trükiarv 7000. Paber 56×79, 1/16. Trükipoognaid 8,5. Trükitähti trükipoognas 42.218. Arvutuspoognaid 9. MB-01808. Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Vallikraavi 4. Tellimise nr. 536.

На эстонском языке.

Н. Рыбкин. Сборник задач по тригонометрии для X класса.

Õiendusi.

	On trükitud:	Peab olema:
Lk. 76, rida 10 ülalt	üemise	ülemise
„ 118, „ 14 „	$\frac{cl_a}{2}$	$\frac{cl_a}{2}$
„ 121, „ 7 alt	$\frac{\sqrt{17-1}}{4}$;	$\frac{\sqrt{17-1}}{4}$;

Lk-l 129 alt viimane rida jätkub katkestamatult esimese reaga

lk-l 130; nii tuleb lugeda: „ $x = \frac{3}{4}$ moodustajast;“ jne.

Vead esinevad trükikoja süül.

Rbl. 4.15

A-17863

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00463061 4

49 598