

TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
MATEMAATIKA JA STATISTIKA INSTITUUT

Ekke-Markus Muttika
Tulemusi τ -arvudest polünoomide suhtes

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Mart Abel, PhD,
Reyna Maria Pérez Tiscareño, PhD

TARTU 2023

TULEMUSI τ -ARVUDEST POLÜNOOMIDE SUHTES

Bakalaureusetöö

Ekke-Markus Muttika

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse τ -arvude leidumist teatud tüüpi polünoomide suhtes. Töös püütakse jätkata Abeli, Laueri ja Redi artikli *About the number of τ -numbers relative to polynomials with integer coefficients* uurimistööd. Kirjeldatakse meetodeid, kuidas otsiti τ -arve polünoomide suhtes ning luuakse seos τ -arvude leidumise ning vastava kongruentside süsteemi lahenduvuse vahel.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria

Märksõnad: τ -arvud, polünoomid, τ -arvud polünoomi suhtes, anti- τ -arvud.

RESULTS ABOUT τ -NUMBERS RELATIVE TO POLYNOMIALS

Bachelors' thesis

Ekke-Markus Muttika

Abstract

In this Bachelors' thesis τ -numbers relative to certain polynomials are studied in an attempt to continue the research of Abel, Lauer and Redi in their article *About the number of τ -numbers relative to polynomials with integer coefficients*. This thesis includes methods how to find τ -numbers relative to polynomials and demonstrates a link between the existence of τ -numbers and the solvability of an appropriate system of congruences.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory

Key Words: τ -numbers, refactorable numbers, τ -numbers relative to polynomial, anti- τ -numbers.

Sisukord

Sissejuhatus	4
1 Põhimõisted ja eelnevad tulemused	6
1.1 τ -arvudega seotud definitsioonid ja teoreemid	6
1.2 Antud teemal eelnevalt avaldatud tulemused	7
2 τ-arvude otsimine polünoomide suhtes	9
2.1 Esialgne otsimine	9
2.2 Edukam otsimismeetod	10
2.3 Lahendite jaotusest	13
3 Teoreem lahendite leidumisest	16
Kokkuvõte	20
Viited	21
Lisa 1. τ-arvu kanoonilises kujus esinevate algarvude astendajate a ja b paaride (a, b) paiknemise graafikud	22
Lisa 2. τ-arvude otsimise kood	24
Lisa 3. Polünoomide ja τ-arvude tabelid	27

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö on uurimus arvuteooria valdkonnas. Töös uuritakse τ -arvude leidumist konkreetsete polünoomide suhtes ja kirjeldatakse efektiivseid meetodeid, kuidas arvutiga otsida neid τ -arve.

Hulk τ -arvud on naturaalarvude alamhulk, mille defineerisid esimestena Curtis Cooper ja Robert E. Kennedy aastal 1990. Positiivne täisarv n on τ -arv, kui $\tau(n) \mid n$, kus $\tau(n)$ on arvu n positiivsete täisarvuliste jagajate arv. Simon Colton taasavastas τ -arvud aastal 1999 ja püstitas mõned hüpoteesid. Neid uuris ja nende kehtivust tõestas Joshua Zelinsky ning samas artiklis lõi ta mõiste τ -arv polünoomi suhtes ning sellega seotud järgneva teoreemi.

Teoreem ([5], lk 14, Theorem 54). Iga täisarvuliste kordajatega polünoomi $Q(x)$ korral leidub lõpmata palju positiivseid täisarve n nii, et $\tau(n) \mid Q(n)$.

Käesolevas töös tegeletakse eelkõige viimase teoreemiga seotud probleemi (teoreemi 54 korrektsuse kontroll artiklis [3], lk. 46) uurimisega. Zelinsky tõestus eelpool toodud teoreemile ei olnud korrektne ning seetõttu on see teoreem jäänud senini tõestamata. Tõsisema katse selle teoreemi tõestamisel tegid Abel, Lauer ja Redi artiklis [1], kus tõestati, et kui täisarvuliste kordajatega polünoomi $Q(x)$ jaoks kehtib tingimus $|Q(0)Q(1)| \neq 1$, siis kehtib Zelinsky teoreemi väide. Lahitseks jäi küsimus selliste polünoomide $Q(x)$ klassi jaoks, mille korral $|Q(0)Q(1)| = 1$. Artiklis [1] toodi küll näiteid mõnedest sellesse klassi kuuluvatest polünoomidest, mille suhtes leidub lõpmata palju τ -arve, kuid üldjuhul jäi selle polünoomide klassi jaoks probleem lahitseks.¹ Käesolevas bakalaureusetöös pakutakse mõningat edasiminekut selle probleemi lahendamisel.

Esimeses peatükis tutvustame kõigepealt τ -arve ning nendega seotud vajalikke

¹Töö kirjutamise lõppfaasis sai teatavaks, et valmimisel on teadusartikkel, kus kirjeldatakse teatavat klassi polünoome, mille suhtes on ainukeseks τ -arvuks arv 1.

mõisteid ja kasulikke teoreeme. Seejärel kirjeldame ka eelnevaid avaldatud tulemusi. Need on põhiliselt artiklist [1] ja aluseks ülejäänud tööle.

Teises peatükis kirjeldame τ -arvude otsimist konkreetse kujuga polünoomide suhtes. Alustame kõige algelisemast otsimismeetodist ning seejärel põhjendame, kuidas arendasime edasi otsimisalgoritmi. Peale seda analüüsime, koos diagrammidega, leitud τ -arvude jaotust ning seda, kuidas oleks veel võimalik optimeerida τ -arvude otsimist polünoomide suhtes.

Kolmandas peatükis näitame, kuidas on seotud τ -arvude leidumine teatavate ruutpolünoomide teatava kongruentside süsteemi lahenduvusega. Selgitame, kuidas leitud τ -arvud polünoomide suhtes on kasulikud, et lahendada kongruentside süsteeme, mille lahendamiseks üldjuhul ei ole veel meetodeid teada.

Töö autor soovib ka eraldi tänada Tartu Ülikooli teadusarvutuste keskust, kelle HPC serverites saime pikalt jooksutada oma Pythoni programme. Ilma nende abita ei oleks saanud seda tööd teostada.

1 Põhimõisted ja eelnevad tulemused

Selles peatükis defineerime töös kasutatavad mõisted ja sõnastame kasulikud tulemused.

1.1 τ -arvudega seotud definitsioonid ja teoreemid

Definitsioon 1.1 ([4], lk. 52). Kui n on positiivne täisarv, siis tähistab $\tau(n)$ arvu n kõigi naturaalarvuliste jagajate arvu.

Teoreem 1.1 ([4], lk. 52). *Kui $n > 1$ ja on esitatud kanoonilisel kujul $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$, siis*

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_s + 1).$$

Teoreem 1.2 (Fermat' väike teoreem, [4], lk. 89). *Kui p on algarv ja a on täisarv, mis ei jagu arvuga p , siis*

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Järgmisena toome sisse τ -arvu mõiste, mille defineerisid esmalt Curtis Cooper ja Robert E. Kennedy aastal 1990.

Definitsioon 1.2 ([2], lk. 383). Positiivset täisarvu n nimetatakse τ -arvuks, kui arvu n naturaalarvuliste jagajate arv jagab arvu n ehk teisisõnu, kui $\tau(n) \mid n$.

Näiteks on τ -arv 8. Arvul 8 on 4 naturaalarvulist jagajat (1, 2, 4 ja 8) ning $4 \mid 8$.

Järeldus 1.1 ([3], lk. 12). *Leidub lõpmata palju τ -arve.*

Aastal 2002 uuris Joshua Zelinsky τ -arve lähemalt ning esitas mitu uut tulemust. Järgnevad mõisted on tema loodud.

Definitsioon 1.3 ([5], lk. 14). Positiivset täisarvu n nimetatakse anti- τ -arvuks, kui arvude n ja $\tau(n)$ suurim ühistegur on 1.

Definitsioon 1.4 ([5], lk. 14). Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom. Täisarvu n nimetatakse τ -arvuks polünoomi $Q(x)$ suhtes, kui $\tau(n) \mid Q(n)$.

Näiteks 5184 on τ -arv polünoomi $Q(x) = 1 + 3x - 3x^2$ suhtes, sest

$$\tau(5184) = 35 \mid -80606015 = Q(5184).$$

1.2 Antud teemal eelnevalt avaldatud tulemused

Zelinsky esitas oma artiklis järgneva teoreemi (seal teoreem 54) ja selle tõestuse.

Teoreem 1.3 ([5], lk 14). *Iga täisarvuliste kordajatega polünoomi $Q(x)$ korral leidub lõpmata palju positiivseid täisarve n nii, et $\tau(n) \mid Q(n)$.*

12 aastat hiljem näitas Lauer, et see tõestus ei olnud korrektne ([3], lk. 46) ja hetkel on see teoreem veel tõestamata. Siin peatükis me käsitleme, kuidas seda on osaliselt tõestatud.

Uurime kitsamaid juhtusid, kus analoogne teoreem kehtib.

Olgu meil polünoom $Q(x)$ kujul

$$Q(x) = a_k x^k + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

kus a_0, a_1, \dots, a_k on täisarvud ja $k \in \mathbb{N}$. Kui a_0 ehk vabaliige on võrdne nulliga, siis leidub lõpmata palju täisarve n nii, et $\tau(n) \mid Q(n)$, sest iga τ -arv on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes.

Tarvis on veel uurida juhtusid, kus vabaliige on nullist erinev. Seda tegid Abel, Lauer ja Redi oma artiklis [1]. Järgnev on nende tõestatud tulemus.

Teoreem 1.4 ([1], lk. 111). *Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom. Kui $|Q(0)Q(1)| \neq 1$, siis leidub lõpmata palju τ -arve polünoomi $Q(x)$ suhtes.*

Uurimata on veel polünoomid, kus $|Q(0)| = 1$ ja $|Q(1)| = 1$ ehk sellised, kus vabaliige on kas 1 või -1 ning kõigi kordajate summa on kas 1 või -1 .

Meile on veel abiks järgnevad tulemused.

Lemma 1.1 ([1], lk. 112). *Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom mille korral $|Q(0)| = 1$. Kui positiivne täisarv n on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes, siis n on anti- τ -arv.*

Lause 1.1 ([1], lk. 112). *Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom. Kui leidub anti- τ -arv $n > 1$, mis on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes, siis leidub lõpmata palju selliseid anti- τ -arve, mis on τ -arvud polünoomi $Q(x)$ suhtes.*

2 τ -arvude otsimine polünoomide suhtes

Tahtsime koguda informatsiooni ja uurida millised naturaalarvud on τ -arvud selliste polünoomide suhtes, mis rahuldavad tingimust $|Q(0)Q(1)| = 1$.

Teoreem 2.1. *Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega mittekonstantne polünoom, mis rahuldab tingimust $|Q(0)| = 1$. Kui leidub positiivne täisarv $n > 1$, mis on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes, siis leidub lõpmata palju τ -arve polünoomi $Q(x)$ suhtes.*

Tõestus. Kui n on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes, siis lemmast 1.1 järelneb, et n on anti- τ -arv. Järelikult lause 1.1 järgi leidub lõpmata palju selliseid anti- τ -arve, mis on τ -arvud polünoomi $Q(x)$ suhtes. \square

Tänu teoreemile 2.1 teame, et kui suudame leida ühe arvust 1 suurema τ -arvu antud polünoomi suhtes, siis leidub lõpmata palju τ -arve selle polünoomi suhtes.

2.1 Esialgne otsimine

Alustasime väga lihtsalt. Erinevate polünoomide suhtes kontrollisime järjest läbi naturaalarve alates arvust 2 kuni kas esimese sellise naturaalarvuni, mis osutus τ -arvuks antud polünoomi suhtes või kuni arvuni 10^8 (kui eelnevalt ühtegi τ -arvu antud polünoomi suhtes ei leidunud). Selle jaoks kasutasime programmeerimiskeelt Python, milles kirjutatud programmi (lisa 2) abil kontrollisime fikseeritud polünoomi $Q(x)$ jaoks läbi kõik naturaalarvud kuni suurusjärguni 10^8 . Programm katkestas töö kohe, kui leidis esimese τ -arvu polünoomi $Q(x)$ suhtes.

Selline otsimine oli väga töömahukas ja harva edukas. Üldiselt õnnestus leida τ -arv polünoomi suhtes esimese 10^8 naturaalarvu seas katsetes läbi proovitud polünoomidest vähem kui 20% jaoks. Mitmed esimesed leitud τ -arvud polünoomide suhtes olid suured ($>10^7$), mis vihjas sellele, et tõenäoliselt on mitmete polünoomide suhtes

esimene leiduv τ -arv liiga suur selleks, et seda otsida kõigi naturaalarvude järjest läbikontrollimise teel.

Me uurisime polünoomi suhtes τ -arvude algtegureid ja nende astmeid ning nägime, et ei algtegurid ega nende astmete tegurid, mis on suuremad arvust 1, ei osutu konkreetse polünoomi väärtusteks täisarvulistel argumentidel. See ütleb, et neid ei ole niisama lihtne vaid polünoomi teades „ette ennustada“, erinevalt Abeli, Laueri, Redi artiklis vaadeldud juhtudest, kus τ -arvud polünoomi suhtes tekitati kas $Q(1)$ või vabaliikme kaudu.

2.2 Edukam otsimismeetod

Kõigi vahemikus 2 kuni 10^8 olevate naturaalarvude järjest läbikontrollimine osutus ikkagi kasulikuks. Panime tähele, et paljudel polünoomide suhtes leitud τ -arvudel oli ühine omadus – nendel oli täpselt kaks algtegurit, mis osutusid enamusel juhtudest arvudeks 2 ja 3. See viis ideele otsida τ -arve kujul $2^a 3^b$, kus a ja b on mingid positiivsed täisarvud. Osutus, et kõigi programmi abil läbi kontrollitud polünoomide jaoks, mille suhtes leidis τ -arve teistsugusel kujul, õnnestus edasi otsides leida ka τ -arv kujul $2^a 3^b$. Hilisem uurimine näitas, et nende seas oli palju arve kujul $2^{p-1} 3^{q-1}$, kus p ja q on kolmest suuremad paarikaupa erinevad algarvud.

See oli põhimotivatsiooniks, et otsida polünoomide suhtes τ -arve palju kitsamalt. See tähendab, et kõikide positiivsete täisarvude läbiproovimise asemel proovida läbi vaid arve kujul $2^a 3^b$.

Töö käigus tekkisid järgmised hüpoteesid.

Hüpotees 2.1. *Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom, mis rahuldab tingimust $|Q(0)Q(1)| = 1$. Kui leidub ühest suurem naturaalarv, mis on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes, siis leidub ka τ -arv kujul $2^a 3^b$ polünoomi $Q(x)$ suhtes, kus a ja b on positiivsed paarisarvud.*

Hüpotees 2.2. Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom, mis rahuldab tingimust $|Q(0)Q(1)| = 1$. Kui leidub ühest suurem naturaalarv, mis on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes, siis leidub ka τ -arv kujul $2^{p-1}3^{q-1}$ polünoomi $Q(x)$ suhtes, kus p ja q on kolmest suuremad paarikaupa erinevad algarvud.

Uurides lähemalt, millised võivad astendajad a ja b olla, õnnestus tõestada järgmised lemmad.

Lemma 2.1. Olgu a ja b mingid positiivsed täisarvud. Kui 2^a3^b on τ -arv mingi polünoomi $Q(x)$ suhtes ja $|Q(0)| = 1$, siis a ja b on kindlasti paarisarvud.

Tõestus. Tähistame $n = 2^a3^b$ ja $Q(x) = a_kx^k + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Kuna $|Q(0)| = 1$, siis $|a_0| = 1$. Arv n on ilmselt paarisarv ja selletõttu on ka $a_kn^k + \dots + a_2n^2 + a_1n$ paaris. Võttes juurde, et $|a_0| = 1$, siis järeldub, et $Q(n)$ on kindlasti paaritu.

Me teame, et $\tau(n)|Q(n)$, järelikult ka $\tau(n)$ on paaritu. Teoreemist 1.1 saame, et $\tau(n) = (a+1)(b+1)$. Sellest järeldub, et $(a+1)$ ja $(b+1)$ on paaritud ehk a ja b on paarisarvud. \square

Lemma 2.2. Olgu a ja b mingid positiivsed täisarvud. Kui 2^a3^b on τ -arv mingi polünoomi $Q(x)$ suhtes ja $|Q(0)| = 1$, siis $a \not\equiv 2 \pmod{3}$ ja $b \not\equiv 2 \pmod{3}$.

Tõestus. Olgu $Q(x)$ täisarvuliste kordajatega polünoom, mis rahuldab tingimust $|Q(0)| = 1$. Olgu a ja b mingid positiivsed täisarvud nii, et $n = 2^a3^b$ on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes.

Lemmast 1.1 järeldub, et n on anti- τ -arv ehk arvude n ja $\tau(n)$ suurim ühistegur on 1. On ilmne, et 3 on üks arvu n teguritest, järelikult $3 \nmid (a+1)(b+1) = \tau(n)$. Sellest saame, et

$$a + 1 \not\equiv 0 \pmod{3},$$

$$b + 1 \not\equiv 0 \pmod{3}.$$

Need kongruentsid on samaväärsed kongruentsidega

$$a \not\equiv 2 \pmod{3},$$

$$b \not\equiv 2 \pmod{3}.$$

□

Asume hüpoteese kontrollima. Uue programmiga käisime läbi naturaalarvude paare ning tulemused olid palju paremad. Katsetatud polünoomide suhtes leidsime τ -arvu umbes 85% polünoomide korral ning umbes 80% polünoomide korral leidsime ka τ -arvu kujul $2^{p-1}3^{q-1}$.

Selline läbikäimine leidis väiksemad τ -arvud palju kiiremini üles. Kui polünoomi suhtes leidis τ -arv, siis see oli enamikul juhtudel kujul $2^{p-1}3^{q-1}$, aga kui esimene τ -arv ei olnud selline, siis edasi katsetades järgmisi astmeid, leidis üldiselt ka sellel kujul τ -arv.

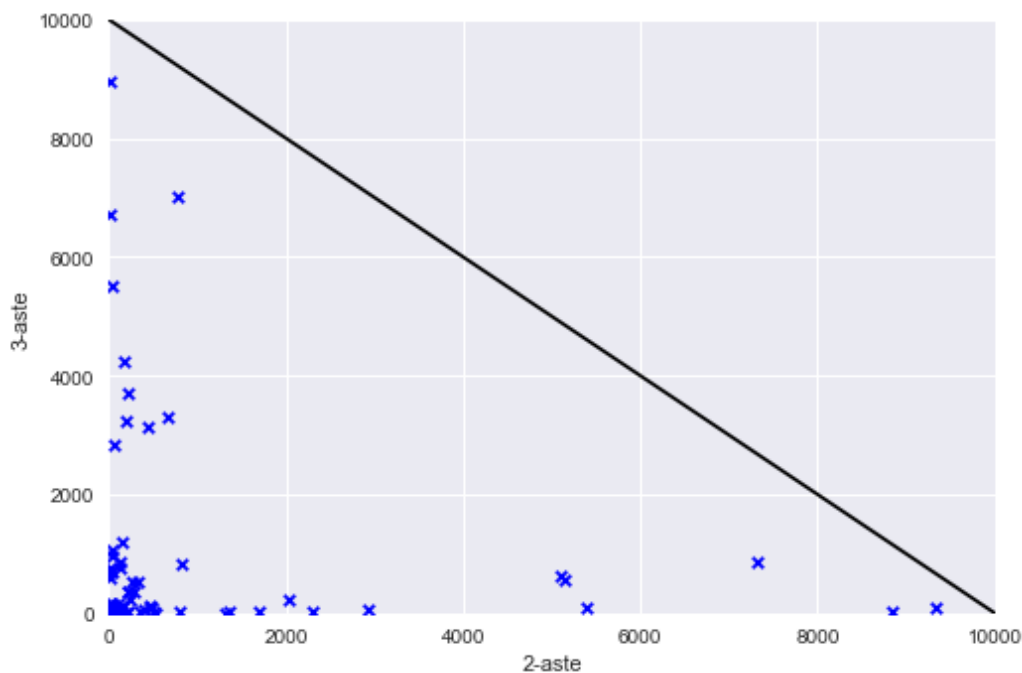
Mitmete polünoomide suhtes leidis esimene τ -arv alles väga suurte astmete korral, aga enamuse puhul olid astmepaarid väikesed. Et teha programmi veelgi efektiivsemaks, kasutasime diagonaalset iteratsiooni, et läbi kontrollida naturaalarvupaare. See tähendab, et lõpuks kontrollisime läbi kõik paarisarvupaarid (a, b) nii, et $a + b < 20000$. Kui eelnevalt kontrollisime läbi ainult naturaalarvud kuni 10^8 , siis nüüd olid suurimad kontrollitavad naturaalarvud suurusjärgus 10^{9540} .

Otsisime ka samade polünoomide suhtes τ -arve kujul 2^a5^b ja 3^a5^b . Selliseid τ -arve leidis umbes sama palju kui τ -arve kujul 2^a3^b . Mõnel polünoomil mille suhtes ei leidnud τ -arvu kujul 2^a3^b õnnestus leida τ -arv kujul 2^a5^b või 3^a5^b . Mitme polünoomi korral olid erineval kujul τ -arvude astmed väga erineva suurusjärguga. See tähendab, et kui mingil polünoomil oli esimene leitud τ -arv kujul 2^a3^b selline, kus a või b on väga suur, siis võis esimene τ -arv kujul 2^a5^b või 3^a5^b olla selline kus mõlemad astendajad a ja b on väikesed.

Kõik leitud τ -arvud uuritud polünoomide suhtes on ära toodud lisas 3. Kasutatud Pythoni programmi leiab lisast 2.

2.3 Lahendite jaotusest

Kõige põhjalikumalt otsisime lahendeid kujul $2^a 3^b$. Koostasime kõikidest leitud lahendite a ja b paaridest järgmise hajuvusdiagrammi.

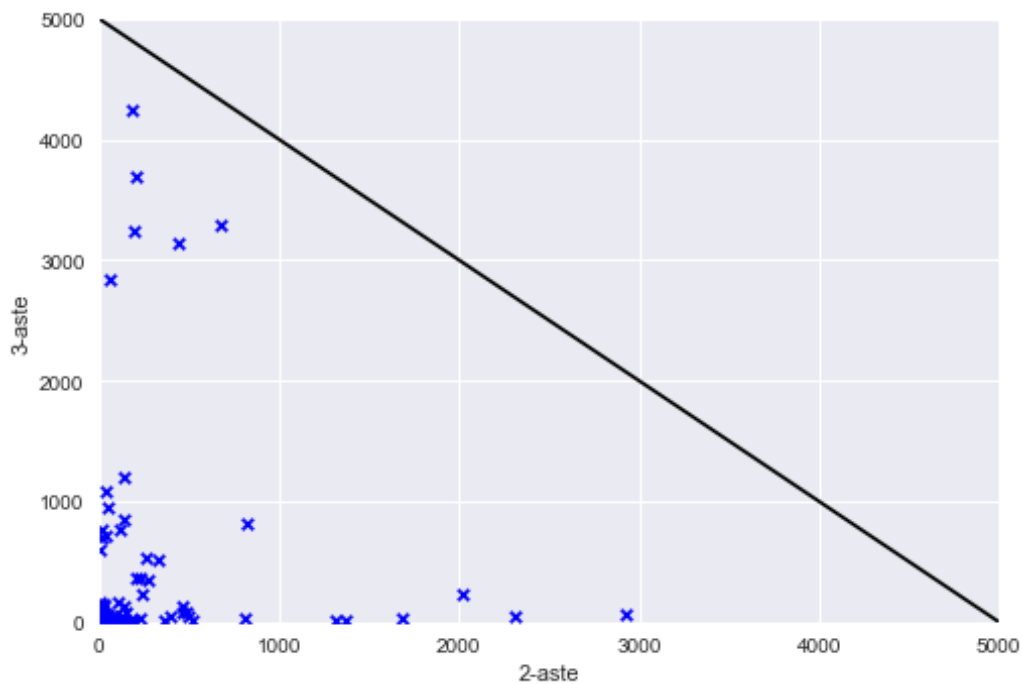


Joonis 1: astendajate paarid suurusjärgus $10^4 \times 10^4$

Iga rist joonisel 1 tähistab esimest leitud τ -arvu (kujul $2^a 3^b$) mingi uuritavat tüüpi polünoomi suhtes. See aitab illustreerida, kuidas lahendeid otsiti. Iga polünoomi jaoks otsiti τ -arve diagonaalmeetodil seni, kuni said läbi kontrollitud kõik sellised arvud $2^a 3^b$, kus $a + b < 10000$. Joonisel kirjeldavad neid kõik arvupaarid (a, b) , mis jäävad peadiagonaalist (must joon) allapoole.

Jooniselt 1 on ka näha, et lahendid asetsevad pigem graafiku telgede lähedal. See tähendab, et kui ühe arvu astendaja on väga suur, siis teise astendaja on tõenäoliselt väike.

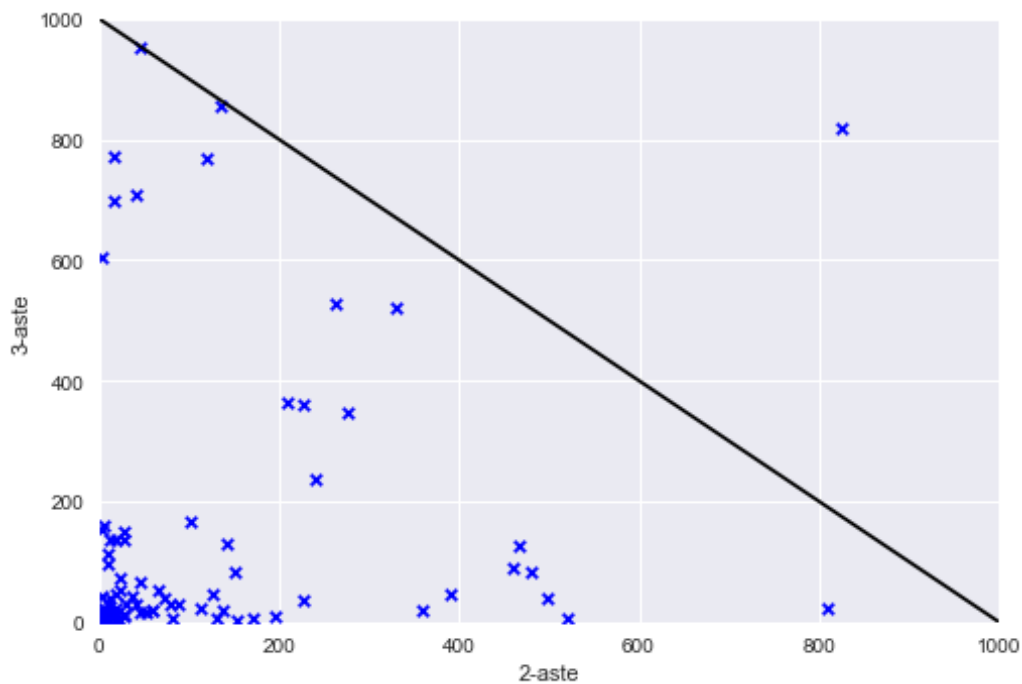
Uurisime ka leitud τ -arve 5000×5000 ruudus, kus on kõik võimalikud astendajapaarid läbi proovitud.



Joonis 2: astendajate paarid suurusjärgus 5000×5000

Jooniselt 2 on näha seaduspära, mis esialgselt motiveeris naturaalarvupaaride diagonaalhaaval läbimist. Siin jäävad kõik τ -arvud tõmmatud peadiagonaali alla. Seega, kui soovime leida ainult selles suurusjärgus lahendeid, siis on mõttekas esmalt kontrollida läbi sellised astendajapaarid a ja b , kus $a + b < 5000$.

Kui välja jätta väga väikeste mõõtmetega graafikud ($n \times n$, $n \leq 30$), siis meie leitud τ -arvudest jäävad astendajate paaridest enamus peadiagonaali alla, sõltumata suurusjärgu valikust.



Joonis 3: astendajate paarid suurusjärgus $10^3 \times 10^3$

Jooniselt 3 on aga näha, et kõik astmepaarid ei pruugi igas mõõtkavas jääda peadiagonaali alla. Siit paistab ka, et enamus lahendeid on väikesed. Kui eesmärk on otsida lahendeid mitmete polünoomide jaoks, siis diagonaalne läbikontrollimine on väga hea, sest see kontrollib kõigepealt läbi astmepaarid, kus mõlemad astmed on väikesed.

Veel jooniseid väiksemate suurusjärgudega leiab lisast 1. Nendel on samamoodi enamus astendajapaare peadiagonaali all.

3 Teoreem lahendite leidumisest

Tahtsime läbi kontrollida kõik teist järku polünoomid, mille pealiikme kordaja on vahemikus $(-50, 50)$. On kerge märgata, et täisarvuliste kordajatega teist järku polünoom $Q(x)$, mis rahuldab tingimust $|Q(0)Q(1)| = 1$, peab olema kas kujul $Q(x) = -ax^2 + ax - 1$, $Q(x) = ax^2 + (a - 2)x - 1$ või $Q(x) = ax^2 + (a + 2)x + 1$, kus a on nullist erinev täisarv.

Sõnastame teoreemi, mis seob τ -arvu leidumise teatava polünoomi suhtes vastava kongruentside süsteemi lahenduvusega.

Teoreem 3.1. *Olgu $Q(x)$ täisarvuliste nullist erinevate kordajatega polünoom ja $n = b^{p-1}c^{q-1}$ naturaalarv, kus b, c, p ja q on paarikaupa erinevad algarvud. Siis n on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes parajasti siis, kui on lahenduv kongruentside süsteem*

$$\begin{cases} Q(c^{q-1}) \equiv 0 \pmod{p} \\ Q(b^{p-1}) \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et $n = b^{p-1}c^{q-1}$ on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes. Fermat' väikesest teoreemist saame, et $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ja $c^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Korrutame saadud kongruentside mõlemad pooled vastavalt arvudega c^{q-1} ja b^{p-1} , siis saame

$$b^{p-1}c^{q-1} \equiv 1 \cdot c^{q-1}, \pmod{p}$$

$$b^{q-1}c^{p-1} \equiv 1 \cdot b^{p-1} \pmod{q}$$

ehk

$$n \equiv c^{q-1} \pmod{p},$$

$$n \equiv b^{p-1} \pmod{q}.$$

Teame, et n on τ -arv $Q(x)$ suhtes. Järelikult $\tau(n) \mid Q(n)$ ehk teoreemi 1.1 järgi $pq \mid Q(n)$. Järelduvad kongruentsid

$$Q(n) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$Q(n) \equiv 0 \pmod{q}.$$

Kui asendame eelnevalt suuruse n jaoks leitud saadud kongruentsid polünoomi $Q(x)$ avaldisse, siis saame tulemuseks uue kongruentside süsteemi

$$Q(n) \equiv Q(c^{q-1}) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$Q(n) \equiv Q(b^{p-1}) \equiv 0 \pmod{q},$$

mis moodustavadki otsitava kongruentside süsteemi.

Püüavus. Eeldame, et kongruentside süsteem

$$\begin{cases} Q(c^{q-1}) \equiv 0 \pmod{p} \\ Q(b^{p-1}) \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}$$

on lahenduv. Vaja on näidata, et $\tau(n) \mid Q(n)$. Rakendades samamoodi Fermat' väikest teoreemi, saame kongruentsid

$$n \equiv c^{q-1} \pmod{p},$$

$$n \equiv b^{p-1} \pmod{q}.$$

Asendame need oma kongruentside süsteemi

$$\begin{cases} Q(n) \equiv Q(c^{q-1}) \equiv 0 \pmod{p} \\ Q(n) \equiv Q(b^{p-1}) \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}.$$

Järelikult $p \mid Q(n)$ ja $q \mid Q(n)$. Nendest tuleb, et $pq \mid Q(n)$ ja kuna $\tau(n) = pq$, siis ka $\tau(n) \mid Q(n)$, millega olemegi näidanud, et n on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes. \square

Töö käigus uurisime kõige põhjalikumalt ruutpolünoome ning τ -arve kujul $n = 2^{p-1}3^{q-1}$ nende polünoomide suhtes. Sõnastame teoreemi 3.1 järelduse.

Järeldus 3.1. *Olgu a nullist erinev täisarv ja polünoom $Q(x) = -ax^2 + ax - 1$. Naturaalarv $n = 2^{p-1}3^{q-1}$, kus p ja q on kolmest suuremad paarikaupa erinevad algarvud, on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes parajasti siis, kui on lahenduv kongruentside süsteem*

$$\begin{cases} -a3^{q-1}(3^{q-1} - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ -a2^{p-1}(2^{p-1} - 1) - 1 \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}.$$

Tõestus. Analooiline teoreemi 3.1 tõestusele. \square

Töö kirjutamise hetkel ei ole teada meetodeid, mis võimaldaksid üldjuhul lahendada järelduses 3.1 toodud kongruentsides süsteemi. Oleme leidnud küll ohtralt τ -arvude näiteid erinevate teist järku polünoomide jaoks. Need τ -arvud on ka lahendid vastavatele kongruentside süsteemile. Kuigi üldiselt me sellist kongruentside süsteemi lahendada ei oska, siis oleme näidanud, et mitmed sellised süsteemid on lahenduvad ja leidnud ka lahendid.

Sõnastame ka järeldused juhtude $Q(x) = ax^2 - (a - 2)x - 1$ ja $Q(x) = ax^2 - (a + 2)x + 1$ jaoks.

Järeldus 3.2. *Olgu a nullist erinev täisarv ja polünoom $Q(x) = ax^2 - (a - 2)x - 1$. Naturaalarv $n = 2^{p-1}3^{q-1}$, kus p ja q on kolmest suuremad paarikaupa erinevad algarvud, on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes parajasti siis, kui on lahenduv kongruentside süsteem*

$$\begin{cases} a3^{q-1}(3^{q-1} - 1) + 2 \cdot 3^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ a2^{p-1}(2^{p-1} - 1) + 2 \cdot 2^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{q} \end{cases}.$$

Järeldus 3.3. Olgu a nullist erinev täisarv ja polünoom $Q(x) = ax^2 - (a+2)x + 1$.
 Naturaalarv $n = 2^{p-1}3^{q-1}$, kus p ja q on kolmest suuremad paarikaupa erinevad
 algarvud, on τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes parajasti siis, kui on lahenduv kong-
 ruentside süsteem

$$\begin{cases} a3^{q-1}(3^{q-1} - 1) - 2 \cdot 3^{q-1} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \\ a2^{p-1}(2^{p-1} - 1) - 2 \cdot 2^{p-1} + 1 \equiv 0 \pmod{q} \end{cases} .$$

Tõestus. Analoogiline teoreemi 3.1 tõestusele. □

Kokkuvõte

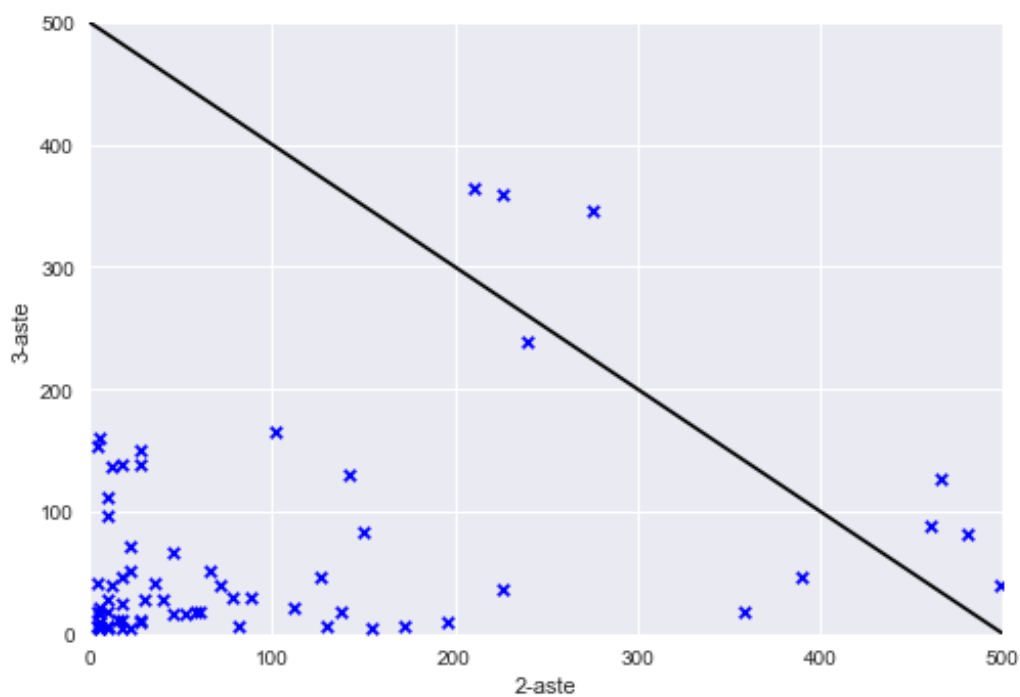
Töös uurisime τ -arvude leidumist konkreetsete polünoomide suhtes ja koostasime uue kiirema algoritmi, et otsida neid τ -arve. Sõnastasime kaks hüpoteesi, mille tõestamisega saaks seda tööd veel jätkata. Meie leitud seosed τ -arvude leidumise ja teatavate kongruentside süsteemide lahenduvuse vahel on kasulikud ka selleks, et τ -arvude leidumise/mitteleidumise põhjal otsustada nende kongruentside süsteemide lahenduvuse/mittelahenduvuse üle.

Selle töö andmed ei ole täielikud. Kuna soov oli uurida, kas leidub lõpmata palju τ -arve kontrollitava polünoomi suhtes, siis piisas sellest, et leidsime esimese arvust 1 suurema τ -arvu. Sellepärast lõpetab siin kasutatud Pythoni programm ühe polünoomi jaoks lahendite otsimise peale esimese leidmist. Võimalik, et järgnevate lahendite uurimine on kasulik, et paremini mõista τ -arvude polünoomide suhtes leidumist ja nende jaotust.

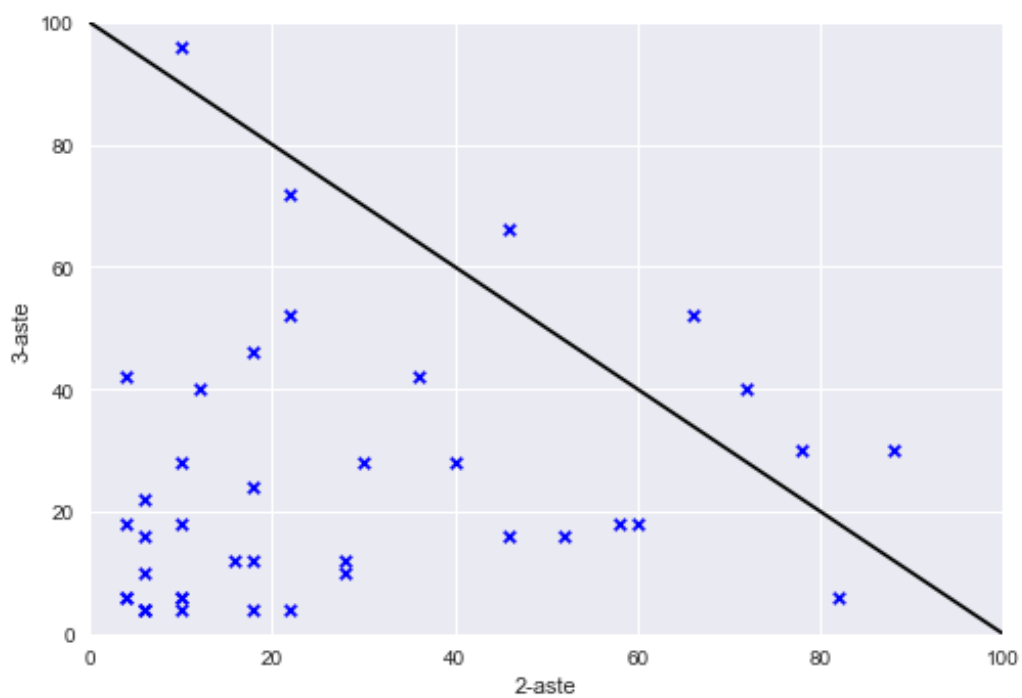
Viited

- [1] M. Abel, H. Lauer ja E. Redi, *About the number of τ -numbers relative to polynomials with integer coefficients*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **25**(2021), no.1 , 107–117.
- [2] R.E. Kennedy ja C.N. Cooper, *Tau Numbers, Natural Density, And Hardy And Wright's Theorem 437*, Internat. J. Math. Math. Sci. **13**(1990), no.2, 383–386.
- [3] H. Lauer, *Ülevaade τ -arvudest*, Magistritöö, Tallinna Ülikool, Tallinn, 2014, 60 lk.
- [4] E. Redi, *Arvuteooria*, kirjastus Avita, Tallinn, 1998.
- [5] J. Zelinsky, *Tau numbers: a partial proof of a conjecture and other results*, J. Integer Seq. **5**(2) (2002), Article 02.2.8, 17 lk.

Lisa 1. τ -arvu kanoonilises kujus esinevate algarvude astendajate a ja b paaride (a, b) paiknemise graafikud



Joonis 4: astendajate paarid suurusjärgus 500×500



Joonis 5: astendajate paarid suurusjärgus 100×100

Lisa 2. τ -arvude otsimise kood

```
import sympy
polunoomid = [[-1, -1, 1]]
def evaluate(x, p):
    sum = 0
    for i in range(len(p)):
        sum += p[i] * x ** i
    return sum
astendatav1 = 2
astendatav2 = 3
labimisarv = 100
for poly in polunoomid:
    for k in range(-50, 51):
        uusnoom = poly.copy()
        for l in range(1, len(poly)):
            if (l == 1):
                uusnoom[l] = int(uusnoom[l] * (k-2))
            else:
                uusnoom[l] = int(uusnoom[l] * k)
        for i in range(1, labimisarv + 1):
            for j in range(0, i):
                astel = (i - j) * 6
                aste2 = (j + 1) * 6
                vaartustus = evaluate(astendatav1 ** int(
                    astel) * astendatav2 ** int(aste2),
                    uusnoom)
                if (vaartustus % (int(astel + 1) * int(
```

```

aste2 + 1)) == 0):
    if sympy.isprime(aste1 + 1) and sympy.
        isprime(aste2 + 1):
            print(str(uusnoom),
                  ", " + str(astendatav1) + "^"
                  + str(aste1) + "*" + str(
                    astendatav2) + "^" + str(
                    aste2),
                  ", " + str((aste1 + 1) * (
                    aste2 + 1)) + " ISPRIME")
            break;
    else:
        print(str(uusnoom),
              ", " + str(astendatav1) + "^"
              + str(aste1) + "*" + str(
                astendatav2) + "^" + str(
                aste2),
              ", " + str((aste1 + 1) * (
                aste2 + 1)))
    else:
        if (i == labimisarv and j == i - 1):
            print(str(uusnoom), "null")
else:
    for j in range(0, i):
        aste1 = (i - j) * 6 + 4
        aste2 = (j + 1) * 6 + 4
        vaartustus = evaluate(astendatav1 **
                               int(aste1) * astendatav2 ** int(
                               aste2), uusnoom)

```

```

if (vaartustus % (int(aste1 + 1) * int(
aste2 + 1)) == 0):
    if sympy.isprime(aste1 + 1) and
sympy.isprime(aste2 + 1):
        print(str(uusnoom),
              ", " + str(astendatav1) +
              "^" + str(aste1) + "*"
              + str(astendatav2) +
              "^" + str(aste2),
              ", " + str((aste1 + 1) * (
              aste2 + 1)) + "
              ISPRIME")
            break;
    else:
        print(str(uusnoom),
              ", " + str(astendatav1) +
              "^" + str(aste1) + "*"
              + str(astendatav2) +
              "^" + str(aste2),
              ", " + str((aste1 + 1) * (
              aste2 + 1)))
        else:
            if (i == labimisarv and j == i - 1)
                :
                    print(str(uusnoom), "null")
            else: continue
break

```

Lisa 3. Polünoomide ja τ -arvude tabelid

Polünoom $Q(x)$	τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes	Kas mõlemad astendajad on ühe võrra väiksemad mingist algarvust?
$-50x^2 + 50x - 1$	$2^{5136} \cdot 3^{576}$	ei
$-49x^2 + 49x - 1$	$2^{58} \cdot 3^{18}$	jah
$-47x^2 + 47x - 1$	$2^{28} \cdot 3^{5500}$	jah
$-46x^2 + 46x - 1$	$2^{276} \cdot 3^{346}$	jah
$-45x^2 + 45x - 1$	$2^{826} \cdot 3^{820}$	jah
$-44x^2 + 44x - 1$	$2^{46} \cdot 3^{952}$	jah
$-43x^2 + 43x - 1$	$2^{72} \cdot 3^{40}$	jah
$-42x^2 + 42x - 1$	$2^{28} \cdot 3^{10}$	jah
$-41x^2 + 41x - 1$	$2^{16} \cdot 3^{12}$	jah
$-40x^2 + 40x - 1$	$2^{786} \cdot 3^{7030}$	ei
$-40x^2 + 40x - 1$	$2^{808} \cdot 3^{12042}$	jah
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{120} \cdot 3^{768}$	ei
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{1686} \cdot 3^{22}$	ei
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{210} \cdot 3^{3700}$	jah
$-38x^2 + 38x - 1$	$2^{130} \cdot 3^6$	jah
$-37x^2 + 37x - 1$	$2^{18} \cdot 3^4$	jah
$-36x^2 + 36x - 1$	$2^{262} \cdot 3^{528}$	ei
$-35x^2 + 35x - 1$	$2^{460} \cdot 3^{88}$	jah
$-34x^2 + 34x - 1$	$2^{2308} \cdot 3^{42}$	jah
$-33x^2 + 33x - 1$	$2^{60} \cdot 3^{18}$	jah
$-32x^2 + 32x - 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$-31x^2 + 31x - 1$	$2^{10} \cdot 3^6$	jah

$-30x^2 + 30x - 1$	$2^{18} \cdot 3^{46}$	jah
$-29x^2 + 29x - 1$	$2^{66} \cdot 3^{52}$	jah
$-28x^2 + 28x - 1$	$2^{46} \cdot 3^{16}$	jah
$-27x^2 + 27x - 1$	$2^{22} \cdot 3^4$	jah
$-24x^2 + 24x - 1$	$2^{18} \cdot 3^{138}$	jah
$-23x^2 + 23x - 1$	$2^{226} \cdot 3^{36}$	jah
$-22x^2 + 22x - 1$	$2^{226} \cdot 3^{360}$	ei
$-22x^2 + 22x - 1$	$2^{5110} \cdot 3^{624}$	ei
$-22x^2 + 22x - 1$	$2^{9328} \cdot 3^{78}$	ei
$-22x^2 + 22x - 1$	$2^{474} \cdot 3^{10252}$	ei
$-22x^2 + 22x - 1$	$2^{7366} \cdot 3^{10392}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{112} \cdot 3^{22}$	jah
$-20x^2 + 20x - 1$	$2^{40} \cdot 3^{28}$	jah
$-19x^2 + 19x - 1$	$2^{46} \cdot 3^{66}$	jah
$-18x^2 + 18x - 1$	$2^{438} \cdot 3^{3142}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$-15x^2 + 15x - 1$	$2^{12} \cdot 3^{136}$	jah
$-14x^2 + 14x - 1$	$2^{810} \cdot 3^{22}$	jah
$-13x^2 + 13x - 1$	$2^{22} \cdot 3^{52}$	jah
$-12x^2 + 12x - 1$	$2^4 \cdot 3^{42}$	jah
$-11x^2 + 11x - 1$	$2^6 \cdot 3^{16}$	jah
$-10x^2 + 10x - 1$	$2^{172} \cdot 3^6$	jah
$-9x^2 + 9x - 1$	$2^{1318} \cdot 3^{10}$	jah
$-7x^2 + 7x - 1$	$2^{36} \cdot 3^{42}$	jah
$-6x^2 + 6x - 1$	$2^{2926} \cdot 3^{58}$	jah
$-5x^2 + 5x - 1$	$2^{5038} \cdot 3^{11518}$	jah
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^6 \cdot 3^{160}$	ei

$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{390} \cdot 3^{46}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{2022} \cdot 3^{238}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{190} \cdot 3^{3246}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{7326} \cdot 3^{862}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{22} \cdot 3^{8958}$	ei
$-3x^2 + 3x - 1$	$2^{330} \cdot 3^{522}$	jah
$-2x^2 + 2x - 1$	$2^{12} \cdot 3^{40}$	jah
$1x^2 - 1x - 1$	$2^{358} \cdot 3^{18}$	jah
$2x^2 - 2x - 1$	$2^{10} \cdot 3^{96}$	jah
$3x^2 - 3x - 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$4x^2 - 4x - 1$	$2^{136} \cdot 3^{856}$	jah
$5x^2 - 5x - 1$	$2^{78} \cdot 3^{30}$	jah
$6x^2 - 6x - 1$	$2^{16} \cdot 3^{772}$	jah
$7x^2 - 7x - 1$	$2^{22} \cdot 3^{72}$	jah
$8x^2 - 8x - 1$	$2^4 \cdot 3^{18}$	jah
$9x^2 - 9x - 1$	$2^{466} \cdot 3^{126}$	jah
$10x^2 - 10x - 1$	$2^6 \cdot 3^{22}$	jah
$11x^2 - 11x - 1$	$2^{28} \cdot 3^{12}$	jah
$12x^2 - 12x - 1$	$2^{142} \cdot 3^{130}$	ei
$12x^2 - 12x - 1$	$2^{142} \cdot 3^{1200}$	ei
$12x^2 - 12x - 1$	$2^{1366} \cdot 3^{12}$	jah
$13x^2 - 13x - 1$	$2^{196} \cdot 3^{10}$	jah
$14x^2 - 14x - 1$	$2^{138} \cdot 3^{18}$	jah
$16x^2 - 16x - 1$	$2^{10} \cdot 3^{18}$	jah
$17x^2 - 17x - 1$	$2^{30} \cdot 3^{28}$	jah
$18x^2 - 18x - 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$20x^2 - 20x - 1$	$2^{240} \cdot 3^{238}$	jah

$21x^2 - 21x - 1$	$2^{40} \cdot 3^{708}$	jah
$22x^2 - 22x - 1$	$2^{498} \cdot 3^{40}$	jah
$23x^2 - 23x - 1$	$2^{10} \cdot 3^4$	jah
$24x^2 - 24x - 1$	$2^6 \cdot 3^{10}$	jah
$25x^2 - 25x - 1$	$2^{82} \cdot 3^6$	jah
$26x^2 - 26x - 1$	$2^{52} \cdot 3^{16}$	jah
$27x^2 - 27x - 1$	$2^{10} \cdot 3^{28}$	jah
$28x^2 - 28x - 1$	$2^4 \cdot 3^{6718}$	jah
$30x^2 - 30x - 1$	$2^{102} \cdot 3^{166}$	jah
$31x^2 - 31x - 1$	$2^{126} \cdot 3^{46}$	jah
$32x^2 - 32x - 1$	$2^{15678} \cdot 3^{1222}$	jah
$33x^2 - 33x - 1$	$2^{18} \cdot 3^{12}$	jah
$35x^2 - 35x - 1$	$2^{10} \cdot 3^{112}$	jah
$36x^2 - 36x - 1$	$2^{88} \cdot 3^{30}$	jah
$37x^2 - 37x - 1$	$2^{28} \cdot 3^{138}$	jah
$38x^2 - 38x - 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$39x^2 - 39x - 1$	$2^{520} \cdot 3^6$	jah
$41x^2 - 41x - 1$	$2^{5392} \cdot 3^{96}$	jah
$43x^2 - 43x - 1$	$2^{18} \cdot 3^{24}$	ei
$43x^2 - 43x - 1$	$2^{150} \cdot 3^{84}$	ei
$43x^2 - 43x - 1$	$2^{210} \cdot 3^{364}$	ei
$43x^2 - 43x - 1$	$2^4 \cdot 3^{606}$	jah
$44x^2 - 44x - 1$	$2^{16} \cdot 3^{700}$	jah
$45x^2 - 45x - 1$	$2^{28} \cdot 3^{150}$	jah
$46x^2 - 46x - 1$	$2^{10} \cdot 3^6$	jah
$47x^2 - 47x - 1$	$2^{8836} \cdot 3^{30}$	jah
$48x^2 - 48x - 1$	$2^{154} \cdot 3^4$	ei

$48x^2 - 48x - 1$	$2^4 \cdot 3^{154}$	ei
$48x^2 - 48x - 1$	$2^{672} \cdot 3^{3294}$	ei
$48x^2 - 48x - 1$	$2^{180} \cdot 3^{4252}$	jah
$50x^2 - 50x - 1$	$2^{480} \cdot 3^{82}$	ei
$50x^2 - 50x - 1$	$2^{36} \cdot 3^{1078}$	ei
$50x^2 - 50x - 1$	$2^{60} \cdot 3^{2842}$	jah

Tabel 1: τ -arvud, kujul $2^a 3^b$, polünoomide kujul $ax^2 - ax - 1$ suhtes.

Polünoom $Q(x)$	τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes	Kas mõlemad astendajad on ühe võrra väiksemad mingist algarvust?
$-50x^2 + 48x + 1$	$2^{100} \cdot 3^{36}$	jah
$-49x^2 + 47x + 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$-48x^2 + 46x + 1$	$2^{282} \cdot 3^{18}$	jah
$-46x^2 + 44x + 1$	$2^{430} \cdot 3^{1116}$	jah
$-45x^2 + 43x + 1$	$2^{886} \cdot 3^{12}$	jah
$-44x^2 + 42x + 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$-43x^2 + 41x + 1$	$2^{120} \cdot 3^{378}$	ei
$-43x^2 + 41x + 1$	$2^{280} \cdot 3^{330}$	jah
$-42x^2 + 40x + 1$	$2^{18} \cdot 3^{412}$	ei
$-42x^2 + 40x + 1$	$2^{360} \cdot 3^{9358}$	ei
$-41x^2 + 39x + 1$	$2^{5050} \cdot 3^{2392}$	jah
$-40x^2 + 38x + 1$	$2^{9598} \cdot 3^{238}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{94} \cdot 3^4$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^4 \cdot 3^{94}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{24} \cdot 3^{102}$	ei

$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{102} \cdot 3^{484}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{238} \cdot 3^{430}$	jah
$-38x^2 + 36x + 1$	$2^{4408} \cdot 3^{78}$	jah
$-37x^2 + 35x + 1$	$2^{16} \cdot 3^{132}$	ei
$-37x^2 + 35x + 1$	$2^{208} \cdot 3^{48}$	ei
$-37x^2 + 35x + 1$	$2^{322} \cdot 3^{40}$	ei
$-36x^2 + 34x + 1$	$2^{28} \cdot 3^{12}$	jah
$-35x^2 + 33x + 1$	$2^6 \cdot 3^{136}$	jah
$-34x^2 + 32x + 1$	$2^{378} \cdot 3^{12}$	jah
$-33x^2 + 31x + 1$	$2^{108} \cdot 3^{3832}$	jah
$-32x^2 + 30x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{12}$	jah
$-31x^2 + 29x + 1$	$2^{102} \cdot 3^{2128}$	jah
$-30x^2 + 28x + 1$	$2^{28} \cdot 3^{178}$	jah
$-29x^2 + 27x + 1$	$2^{18} \cdot 3^4$	jah
$-28x^2 + 26x + 1$	$2^{40} \cdot 3^{22}$	jah
$-27x^2 + 25x + 1$	$2^{9798} \cdot 3^{162}$	ei
$-26x^2 + 24x + 1$	$2^{502} \cdot 3^{10}$	jah
$-25x^2 + 23x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{108}$	jah
$-24x^2 + 22x + 1$	$2^{16} \cdot 3^{46}$	jah
$-23x^2 + 21x + 1$	$2^{10} \cdot 3^6$	jah
$-22x^2 + 20x + 1$	$2^{330} \cdot 3^{1680}$	ei
$-21x^2 + 19x + 1$	$2^6 \cdot 3^{10}$	jah
$-20x^2 + 18x + 1$	$2^{682} \cdot 3^{46}$	jah
$-19x^2 + 17x + 1$	$2^{42} \cdot 3^4$	jah
$-18x^2 + 16x + 1$	$2^{228} \cdot 3^{30}$	jah
$-17x^2 + 15x + 1$	$2^{228} \cdot 3^{352}$	jah
$-16x^2 + 14x + 1$	$2^{456} \cdot 3^{7590}$	jah

$-15x^2 + 13x + 1$	$2^{36} \cdot 3^{462}$	jah
$-14x^2 + 12x + 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{1908} \cdot 3^{136}$	ei
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{11898}$	ei
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{4792} \cdot 3^{7806}$	ei
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{18768} \cdot 3^{40}$	ei
$-12x^2 + 10x + 1$	$2^{348} \cdot 3^{862}$	jah
$-10x^2 + 8x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{16}$	jah
$-9x^2 + 7x + 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$-8x^2 + 6x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{976}$	jah
$-7x^2 + 5x + 1$	$2^{3450} \cdot 3^{1282}$	ei
$-7x^2 + 5x + 1$	$2^{7728} \cdot 3^{52}$	ei
$-6x^2 + 4x + 1$	$2^{82} \cdot 3^{12}$	jah
$-5x^2 + 3x + 1$	$2^{58} \cdot 3^{418}$	jah
$-4x^2 + 2x + 1$	$2^{10} \cdot 3^4$	jah
$-3x^2 + 1x + 1$	$2^{520} \cdot 3^{42}$	jah
$-2x^2 + 0x + 1$	$2^{646} \cdot 3^{862}$	jah
$-1x^2 - 1x + 1$	$2^{28} \cdot 3^{10}$	jah
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{390} \cdot 3^{46}$	ei
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{2022} \cdot 3^{238}$	ei
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{7326} \cdot 3^{862}$	ei
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{22} \cdot 3^{8958}$	ei
$1x^2 - 3x + 1$	$2^4 \cdot 3^{10}$	jah
$2x^2 - 4x + 1$	$2^{1758} \cdot 3^{192}$	jah
$3x^2 - 5x + 1$	$2^{1468} \cdot 3^{312}$	ei
$3x^2 - 5x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{3406}$	jah
$5x^2 - 7x + 1$	$2^{66} \cdot 3^{12}$	jah

$6x^2 - 8x + 1$	$2^{30} \cdot 3^4$	jah
$7x^2 - 9x + 1$	$2^6 \cdot 3^{142}$	ei
$7x^2 - 9x + 1$	$2^{292} \cdot 3^{16}$	jah
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{52} \cdot 3^{766}$	ei
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{52} \cdot 3^{1078}$	ei
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{52} \cdot 3^{7630}$	ei
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{1936} \cdot 3^{6730}$	ei
$9x^2 - 11x + 1$	$2^{5668} \cdot 3^{18}$	jah
$10x^2 - 12x + 1$	$2^{58} \cdot 3^{10}$	jah
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{504} \cdot 3^{138}$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{3774} \cdot 3^{228}$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{8554} \cdot 3^4$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^4 \cdot 3^{12094}$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{24} \cdot 3^{15270}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{76} \cdot 3^{36}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{286} \cdot 3^{120}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{736} \cdot 3^{1426}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{3766} \cdot 3^{40}$	jah
$13x^2 - 15x + 1$	$2^{40} \cdot 3^{46}$	jah
$14x^2 - 16x + 1$	$2^6 \cdot 3^{16}$	jah
$15x^2 - 17x + 1$	$2^{640} \cdot 3^{18}$	jah
$16x^2 - 18x + 1$	$2^{82} \cdot 3^{7288}$	ei
$16x^2 - 18x + 1$	$2^{7962} \cdot 3^4$	jah
$17x^2 - 19x + 1$	$2^{166} \cdot 3^{30}$	jah
$18x^2 - 20x + 1$	$2^{1282} \cdot 3^{10}$	jah
$19x^2 - 21x + 1$	$2^{16} \cdot 3^6$	jah
$20x^2 - 22x + 1$	$2^{22} \cdot 3^{12}$	jah

$21x^2 - 23x + 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$23x^2 - 25x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{22}$	jah
$26x^2 - 28x + 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$27x^2 - 29x + 1$	$2^{96} \cdot 3^{18}$	jah
$28x^2 - 30x + 1$	$2^6 \cdot 3^{22}$	jah
$29x^2 - 31x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{10}$	jah
$30x^2 - 32x + 1$	$2^{178} \cdot 3^{40}$	jah
$31x^2 - 33x + 1$	$2^4 \cdot 3^{30}$	jah
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{318} \cdot 3^{340}$	ei
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{3376}$	ei
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{3538} \cdot 3^{4120}$	ei
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{17148} \cdot 3^{340}$	ei
$33x^2 - 35x + 1$	$2^{22} \cdot 3^6$	jah
$34x^2 - 36x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{18}$	jah
$35x^2 - 37x + 1$	$2^6 \cdot 3^{508}$	jah
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{114} \cdot 3^4$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^4 \cdot 3^{114}$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{954} \cdot 3^4$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^4 \cdot 3^{954}$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{568} \cdot 3^{574}$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{2062} \cdot 3^4$	jah
$37x^2 - 39x + 1$	$2^{526} \cdot 3^{70}$	ei
$39x^2 - 41x + 1$	$2^{570} \cdot 3^{106}$	jah
$40x^2 - 42x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{2232}$	ei
$40x^2 - 42x + 1$	$2^{196} \cdot 3^{5302}$	jah
$41x^2 - 43x + 1$	$2^{78} \cdot 3^4$	jah
$42x^2 - 44x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{130}$	jah

$43x^2 - 45x + 1$	$2^{928} \cdot 3^{10}$	jah
$44x^2 - 46x + 1$	$2^{30} \cdot 3^{12}$	jah
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{142}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{516} \cdot 3^{40}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{532}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{688}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{1360}$	jah
$46x^2 - 48x + 1$	$2^{22} \cdot 3^4$	jah
$47x^2 - 49x + 1$	$2^{46} \cdot 3^6$	jah
$48x^2 - 50x + 1$	$2^{126} \cdot 3^{58}$	jah
$49x^2 - 51x + 1$	$2^{9618} \cdot 3^{706}$	ei

Tabel 2: τ -arvud, kujul $2^a 3^b$, polünoomide kujul $ax^2 - (a+2)x + 1$ suhtes.

Polünoom $Q(x)$	τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes	Kas mõlemad astendajad on ühe võrra väiksemad mingist algarvust?
$-50x^2 + 48x + 1$	$2^{100} \cdot 3^{36}$	jah
$-49x^2 + 47x + 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$-48x^2 + 46x + 1$	$2^{282} \cdot 3^{18}$	jah
$-46x^2 + 44x + 1$	$2^{430} \cdot 3^{1116}$	jah
$-45x^2 + 43x + 1$	$2^{886} \cdot 3^{12}$	jah
$-44x^2 + 42x + 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$-43x^2 + 41x + 1$	$2^{120} \cdot 3^{378}$	ei
$-43x^2 + 41x + 1$	$2^{280} \cdot 3^{330}$	jah
$-42x^2 + 40x + 1$	$2^{18} \cdot 3^{412}$	ei

$-42x^2 + 40x + 1$	$2^{360} \cdot 3^{9358}$	ei
$-41x^2 + 39x + 1$	$2^{5050} \cdot 3^{2392}$	jah
$-40x^2 + 38x + 1$	$2^{9598} \cdot 3^{238}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{94} \cdot 3^4$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^4 \cdot 3^{94}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{24} \cdot 3^{102}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{102} \cdot 3^{484}$	ei
$-39x^2 + 37x + 1$	$2^{238} \cdot 3^{430}$	jah
$-38x^2 + 36x + 1$	$2^{4408} \cdot 3^{78}$	jah
$-37x^2 + 35x + 1$	$2^{16} \cdot 3^{132}$	ei
$-37x^2 + 35x + 1$	$2^{208} \cdot 3^{48}$	ei
$-37x^2 + 35x + 1$	$2^{322} \cdot 3^{40}$	ei
$-36x^2 + 34x + 1$	$2^{28} \cdot 3^{12}$	jah
$-35x^2 + 33x + 1$	$2^6 \cdot 3^{136}$	jah
$-34x^2 + 32x + 1$	$2^{378} \cdot 3^{12}$	jah
$-33x^2 + 31x + 1$	$2^{108} \cdot 3^{3832}$	jah
$-32x^2 + 30x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{12}$	jah
$-31x^2 + 29x + 1$	$2^{102} \cdot 3^{2128}$	jah
$-30x^2 + 28x + 1$	$2^{28} \cdot 3^{178}$	jah
$-29x^2 + 27x + 1$	$2^{18} \cdot 3^4$	jah
$-28x^2 + 26x + 1$	$2^{40} \cdot 3^{22}$	jah
$-27x^2 + 25x + 1$	$2^{9798} \cdot 3^{162}$	ei
$-26x^2 + 24x + 1$	$2^{502} \cdot 3^{10}$	jah
$-25x^2 + 23x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{108}$	jah
$-24x^2 + 22x + 1$	$2^{16} \cdot 3^{46}$	jah
$-23x^2 + 21x + 1$	$2^{10} \cdot 3^6$	jah
$-22x^2 + 20x + 1$	$2^{330} \cdot 3^{1680}$	ei

$-21x^2 + 19x + 1$	$2^6 \cdot 3^{10}$	jah
$-20x^2 + 18x + 1$	$2^{682} \cdot 3^{46}$	jah
$-19x^2 + 17x + 1$	$2^{42} \cdot 3^4$	jah
$-18x^2 + 16x + 1$	$2^{228} \cdot 3^{30}$	jah
$-17x^2 + 15x + 1$	$2^{228} \cdot 3^{352}$	jah
$-16x^2 + 14x + 1$	$2^{456} \cdot 3^{7590}$	jah
$-15x^2 + 13x + 1$	$2^{36} \cdot 3^{462}$	jah
$-14x^2 + 12x + 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{1908} \cdot 3^{136}$	ei
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{11898}$	ei
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{4792} \cdot 3^{7806}$	ei
$-13x^2 + 11x + 1$	$2^{18768} \cdot 3^{40}$	ei
$-12x^2 + 10x + 1$	$2^{348} \cdot 3^{862}$	jah
$-10x^2 + 8x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{16}$	jah
$-9x^2 + 7x + 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$-8x^2 + 6x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{976}$	jah
$-7x^2 + 5x + 1$	$2^{3450} \cdot 3^{1282}$	ei
$-7x^2 + 5x + 1$	$2^{7728} \cdot 3^{52}$	ei
$-6x^2 + 4x + 1$	$2^{82} \cdot 3^{12}$	jah
$-5x^2 + 3x + 1$	$2^{58} \cdot 3^{418}$	jah
$-4x^2 + 2x + 1$	$2^{10} \cdot 3^4$	jah
$-3x^2 + 1x + 1$	$2^{520} \cdot 3^{42}$	jah
$-2x^2 + 0x + 1$	$2^{646} \cdot 3^{862}$	jah
$-1x^2 - 1x + 1$	$2^{28} \cdot 3^{10}$	jah
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{390} \cdot 3^{46}$	ei
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{2022} \cdot 3^{238}$	ei
$0x^2 - 2x + 1$	$2^{7326} \cdot 3^{862}$	ei

$0x^2 - 2x + 1$	$2^{22} \cdot 3^{8958}$	ei
$1x^2 - 3x + 1$	$2^4 \cdot 3^{10}$	jah
$2x^2 - 4x + 1$	$2^{1758} \cdot 3^{192}$	jah
$3x^2 - 5x + 1$	$2^{1468} \cdot 3^{312}$	ei
$3x^2 - 5x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{3406}$	jah
$5x^2 - 7x + 1$	$2^{66} \cdot 3^{12}$	jah
$6x^2 - 8x + 1$	$2^{30} \cdot 3^4$	jah
$7x^2 - 9x + 1$	$2^6 \cdot 3^{142}$	ei
$7x^2 - 9x + 1$	$2^{292} \cdot 3^{16}$	jah
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{52} \cdot 3^{766}$	ei
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{52} \cdot 3^{1078}$	ei
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{52} \cdot 3^{7630}$	ei
$8x^2 - 10x + 1$	$2^{1936} \cdot 3^{6730}$	ei
$9x^2 - 11x + 1$	$2^{5668} \cdot 3^{18}$	jah
$10x^2 - 12x + 1$	$2^{58} \cdot 3^{10}$	jah
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{504} \cdot 3^{138}$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{3774} \cdot 3^{228}$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{8554} \cdot 3^4$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^4 \cdot 3^{12094}$	ei
$11x^2 - 13x + 1$	$2^{24} \cdot 3^{15270}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{76} \cdot 3^{36}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{286} \cdot 3^{120}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{736} \cdot 3^{1426}$	ei
$12x^2 - 14x + 1$	$2^{3766} \cdot 3^{40}$	jah
$13x^2 - 15x + 1$	$2^{40} \cdot 3^{46}$	jah
$14x^2 - 16x + 1$	$2^6 \cdot 3^{16}$	jah
$15x^2 - 17x + 1$	$2^{640} \cdot 3^{18}$	jah

$16x^2 - 18x + 1$	$2^{82} \cdot 3^{7288}$	ei
$16x^2 - 18x + 1$	$2^{7962} \cdot 3^4$	jah
$17x^2 - 19x + 1$	$2^{166} \cdot 3^{30}$	jah
$18x^2 - 20x + 1$	$2^{1282} \cdot 3^{10}$	jah
$19x^2 - 21x + 1$	$2^{16} \cdot 3^6$	jah
$20x^2 - 22x + 1$	$2^{22} \cdot 3^{12}$	jah
$21x^2 - 23x + 1$	$2^6 \cdot 3^4$	jah
$23x^2 - 25x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{22}$	jah
$26x^2 - 28x + 1$	$2^4 \cdot 3^6$	jah
$27x^2 - 29x + 1$	$2^{96} \cdot 3^{18}$	jah
$28x^2 - 30x + 1$	$2^6 \cdot 3^{22}$	jah
$29x^2 - 31x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{10}$	jah
$30x^2 - 32x + 1$	$2^{178} \cdot 3^{40}$	jah
$31x^2 - 33x + 1$	$2^4 \cdot 3^{30}$	jah
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{318} \cdot 3^{340}$	ei
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{3376}$	ei
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{3538} \cdot 3^{4120}$	ei
$32x^2 - 34x + 1$	$2^{17148} \cdot 3^{340}$	ei
$33x^2 - 35x + 1$	$2^{22} \cdot 3^6$	jah
$34x^2 - 36x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{18}$	jah
$35x^2 - 37x + 1$	$2^6 \cdot 3^{508}$	jah
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{114} \cdot 3^4$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^4 \cdot 3^{114}$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{954} \cdot 3^4$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^4 \cdot 3^{954}$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{568} \cdot 3^{574}$	ei
$36x^2 - 38x + 1$	$2^{2062} \cdot 3^4$	jah

$37x^2 - 39x + 1$	$2^{526} \cdot 3^{70}$	ei
$39x^2 - 41x + 1$	$2^{570} \cdot 3^{106}$	jah
$40x^2 - 42x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{2232}$	ei
$40x^2 - 42x + 1$	$2^{196} \cdot 3^{5302}$	jah
$41x^2 - 43x + 1$	$2^{78} \cdot 3^4$	jah
$42x^2 - 44x + 1$	$2^{12} \cdot 3^{130}$	jah
$43x^2 - 45x + 1$	$2^{928} \cdot 3^{10}$	jah
$44x^2 - 46x + 1$	$2^{30} \cdot 3^{12}$	jah
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{142}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{516} \cdot 3^{40}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{532}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{10} \cdot 3^{688}$	ei
$45x^2 - 47x + 1$	$2^{46} \cdot 3^{1360}$	jah
$46x^2 - 48x + 1$	$2^{22} \cdot 3^4$	jah
$47x^2 - 49x + 1$	$2^{46} \cdot 3^6$	jah
$48x^2 - 50x + 1$	$2^{126} \cdot 3^{58}$	jah
$49x^2 - 51x + 1$	$2^{9618} \cdot 3^{706}$	ei

Tabel 3: τ -arvud, kujul $2^a 3^b$, polünoomide kujul $ax^2 - (a-2)x - 1$ suhtes.

Polünoom $Q(x)$	τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes	Kas mõlemad astendajad on ühe võrra väiksemad mingist algarvust?
$-50x^2 + 50x - 1$	$2^{22} \cdot 5^{42}$	jah
$-49x^2 + 49x - 1$	$2^{58} \cdot 5^{18}$	jah
$-48x^2 + 48x - 1$	$2^{30} \cdot 5^{676}$	jah

$-46x^2 + 46x - 1$	$2^{238} \cdot 5^{60}$	jah
$-45x^2 + 45x - 1$	$2^6 \cdot 5^{16}$	jah
$-44x^2 + 44x - 1$	$2^{640} \cdot 5^{1096}$	jah
$-43x^2 + 43x - 1$	$2^{82} \cdot 5^{10}$	jah
$-42x^2 + 42x - 1$	$2^{28} \cdot 5^{16}$	jah
$-41x^2 + 41x - 1$	$2^{16} \cdot 5^{12}$	jah
$-40x^2 + 40x - 1$	$2^{66} \cdot 5^{42}$	jah
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{70} \cdot 5^{76}$	ei
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{70} \cdot 5^{916}$	ei
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{1486} \cdot 5^{160}$	ei
$-39x^2 + 39x - 1$	$2^{346} \cdot 5^{3018}$	jah
$-38x^2 + 38x - 1$	$2^6 \cdot 5^{40}$	jah
$-37x^2 + 37x - 1$	$2^{1500} \cdot 5^{310}$	ei
$-37x^2 + 37x - 1$	$2^{658} \cdot 5^{1158}$	ei
$-37x^2 + 37x - 1$	$2^{5542} \cdot 5^{18}$	ei
$-37x^2 + 37x - 1$	$2^{15852} \cdot 5^{148}$	ei
$-37x^2 + 37x - 1$	$2^{940} \cdot 5^{15450}$	jah
$-35x^2 + 35x - 1$	$2^{2710} \cdot 5^{606}$	jah
$-34x^2 + 34x - 1$	$2^{126} \cdot 5^{3180}$	jah
$-33x^2 + 33x - 1$	$2^{18} \cdot 5^{78}$	jah
$-32x^2 + 32x - 1$	$2^{12} \cdot 5^{10}$	jah
$-31x^2 + 31x - 1$	$2^6 \cdot 5^{10}$	jah
$-30x^2 + 30x - 1$	$2^{18} \cdot 5^{52}$	jah
$-29x^2 + 29x - 1$	$2^{2850} \cdot 5^{630}$	jah
$-28x^2 + 28x - 1$	$2^{856} \cdot 5^{12}$	jah
$-27x^2 + 27x - 1$	$2^{22} \cdot 5^{526}$	ei
$-26x^2 + 26x - 1$	$2^{156} \cdot 5^{862}$	jah

$-25x^2 + 25x - 1$	$2^{58} \cdot 5^{66}$	jah
$-24x^2 + 24x - 1$	$2^{100} \cdot 5^6$	jah
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{330} \cdot 5^{318}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{46} \cdot 5^{1206}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{58} \cdot 5^{5770}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{1080} \cdot 5^{4950}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{366} \cdot 5^{6666}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$2^{11890} \cdot 5^{28}$	ei
$-19x^2 + 19x - 1$	$2^{12} \cdot 5^{46}$	jah
$-18x^2 + 18x - 1$	$2^{15280} \cdot 5^{418}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$2^{10} \cdot 5^6$	jah
$-16x^2 + 16x - 1$	$2^{46} \cdot 5^{382}$	jah
$-15x^2 + 15x - 1$	$2^{130} \cdot 5^{46}$	jah
$-14x^2 + 14x - 1$	$2^{5022} \cdot 5^{9076}$	ei
$-14x^2 + 14x - 1$	$2^{22} \cdot 5^{15612}$	ei
$-13x^2 + 13x - 1$	$2^{102} \cdot 5^{12730}$	ei
$-13x^2 + 13x - 1$	$2^{19938} \cdot 5^{22}$	ei
$-12x^2 + 12x - 1$	$2^{100} \cdot 5^{2880}$	ei
$-12x^2 + 12x - 1$	$2^{5352} \cdot 5^{432}$	ei
$-11x^2 + 11x - 1$	$2^{22} \cdot 5^{706}$	ei
$-11x^2 + 11x - 1$	$2^{862} \cdot 5^{16}$	jah
$-10x^2 + 10x - 1$	$2^{1792} \cdot 5^{4080}$	ei
$-10x^2 + 10x - 1$	$2^{190} \cdot 5^{5748}$	jah
$-9x^2 + 9x - 1$	$2^{58} \cdot 5^{4560}$	jah
$-8x^2 + 8x - 1$	$2^{606} \cdot 5^{78}$	jah
$-7x^2 + 7x - 1$	$2^{906} \cdot 5^{288}$	ei
$-7x^2 + 7x - 1$	$2^{16} \cdot 5^{1596}$	jah

$-6x^2 + 6x - 1$	$2^{36} \cdot 5^{142}$	ei
$-6x^2 + 6x - 1$	$2^{348} \cdot 5^{228}$	jah
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{118} \cdot 5^{118}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{496} \cdot 5^{496}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{1126} \cdot 5^{1288}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{2158} \cdot 5^{390}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{910} \cdot 5^{12630}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$2^{1630} \cdot 5^{13048}$	ei
$-2x^2 + 2x - 1$	$2^{40} \cdot 5^{36}$	jah
$1x^2 - 1x - 1$	$2^{1348} \cdot 5^{18}$	ei
$1x^2 - 1x - 1$	$2^{1348} \cdot 5^{3438}$	ei
$1x^2 - 1x - 1$	$2^{11380} \cdot 5^{318}$	ei
$2x^2 - 2x - 1$	$2^{36} \cdot 5^{10}$	jah
$3x^2 - 3x - 1$	$2^{9906} \cdot 5^{40}$	jah
$4x^2 - 4x - 1$	$2^{136} \cdot 5^{856}$	jah
$5x^2 - 5x - 1$	$2^{108} \cdot 5^{30}$	jah
$6x^2 - 6x - 1$	$2^{126} \cdot 5^{16}$	jah
$7x^2 - 7x - 1$	$2^{22} \cdot 5^{72}$	jah
$8x^2 - 8x - 1$	$2^{148} \cdot 5^{22}$	jah
$9x^2 - 9x - 1$	$2^{16} \cdot 5^{2296}$	jah
$10x^2 - 10x - 1$	$2^{7120} \cdot 5^{160}$	ei
$10x^2 - 10x - 1$	$2^{72} \cdot 5^{18466}$	ei
$11x^2 - 11x - 1$	$2^{148} \cdot 5^6$	jah
$12x^2 - 12x - 1$	$2^{312} \cdot 5^{10}$	jah
$13x^2 - 13x - 1$	$2^{16} \cdot 5^{10}$	jah
$14x^2 - 14x - 1$	$2^{30} \cdot 5^{280}$	jah
$15x^2 - 15x - 1$	$2^{598} \cdot 5^{60}$	jah

$16x^2 - 16x - 1$	$2^{2310} \cdot 5^{1060}$	jah
$17x^2 - 17x - 1$	$2^{72} \cdot 5^{112}$	jah
$18x^2 - 18x - 1$	$2^{106} \cdot 5^6$	jah
$19x^2 - 19x - 1$	$2^{270} \cdot 5^{36}$	jah
$20x^2 - 20x - 1$	$2^{12} \cdot 5^{738}$	jah
$21x^2 - 21x - 1$	$2^{46} \cdot 5^{100}$	jah
$22x^2 - 22x - 1$	$2^{72} \cdot 5^{130}$	jah
$23x^2 - 23x - 1$	$2^{126} \cdot 5^{1186}$	jah
$24x^2 - 24x - 1$	$2^{52} \cdot 5^{12}$	jah
$25x^2 - 25x - 1$	$2^{3040} \cdot 5^{108}$	jah
$27x^2 - 27x - 1$	$2^{10} \cdot 5^{16}$	jah
$28x^2 - 28x - 1$	$2^{180} \cdot 5^{400}$	jah
$29x^2 - 29x - 1$	$2^{12612} \cdot 5^{838}$	jah
$30x^2 - 30x - 1$	$2^{28} \cdot 5^{36}$	jah
$32x^2 - 32x - 1$	$2^{70} \cdot 5^6$	jah
$33x^2 - 33x - 1$	$2^{18} \cdot 5^{12}$	jah
$35x^2 - 35x - 1$	$2^{10} \cdot 5^{112}$	jah
$36x^2 - 36x - 1$	$2^{36} \cdot 5^{42}$	jah
$37x^2 - 37x - 1$	$2^{676} \cdot 5^{72}$	jah
$38x^2 - 38x - 1$	$2^{96} \cdot 5^{210}$	jah
$39x^2 - 39x - 1$	$2^{36} \cdot 5^{46}$	jah
$40x^2 - 40x - 1$	$2^{18910} \cdot 5^{726}$	jah
$41x^2 - 41x - 1$	$2^{166} \cdot 5^{526}$	ei
$41x^2 - 41x - 1$	$2^{1002} \cdot 5^{1222}$	ei
$41x^2 - 41x - 1$	$2^{16} \cdot 5^{9826}$	ei
$43x^2 - 43x - 1$	$2^{7998} \cdot 5^{72}$	ei
$43x^2 - 43x - 1$	$2^{1876} \cdot 5^{6316}$	jah

$44x^2 - 44x - 1$	$2^{330} \cdot 5^{16}$	jah
$45x^2 - 45x - 1$	$2^{340} \cdot 5^{418}$	ei
$45x^2 - 45x - 1$	$2^{718} \cdot 5^{150}$	jah
$46x^2 - 46x - 1$	$2^6 \cdot 5^{10}$	jah
$47x^2 - 47x - 1$	$2^{156} \cdot 5^{30}$	jah
$48x^2 - 48x - 1$	$2^{190} \cdot 5^{372}$	jah
$49x^2 - 49x - 1$	$2^{10} \cdot 5^{11566}$	ei

Tabel 4: τ -arvud, kujul $2^a 5^b$, polünoomide, kujul $ax^2 - ax - 1$, suhtes.

Polünoom $Q(x)$	τ -arv polünoomi $Q(x)$ suhtes	Kas mõlemad astendajad on ühe võrra väiksemad mingist algarvust?
$-50x^2 + 50x - 1$	$3^{378} \cdot 5^{10}$	jah
$-48x^2 + 48x - 1$	$3^{148} \cdot 5^{102}$	jah
$-46x^2 + 46x - 1$	$3^{256} \cdot 5^{468}$	ei
$-46x^2 + 46x - 1$	$3^{10996} \cdot 5^{96}$	ei
$-46x^2 + 46x - 1$	$3^{17218} \cdot 5^6$	ei
$-45x^2 + 45x - 1$	$3^{8280} \cdot 5^{610}$	ei
$-45x^2 + 45x - 1$	$3^6 \cdot 5^{16678}$	ei
$-44x^2 + 44x - 1$	$3^{618} \cdot 5^{16}$	jah
$-43x^2 + 43x - 1$	$3^{46} \cdot 5^{2290}$	ei
$-42x^2 + 42x - 1$	$3^{16} \cdot 5^{120}$	ei
$-42x^2 + 42x - 1$	$3^{10} \cdot 5^{252}$	ei
$-42x^2 + 42x - 1$	$3^{28} \cdot 5^{492}$	ei
$-42x^2 + 42x - 1$	$3^{1300} \cdot 5^{4462}$	jah
$-41x^2 + 41x - 1$	$3^{16} \cdot 5^{12}$	jah

$-40x^2 + 40x - 1$	$3^{282} \cdot 5^{226}$	jah
$-39x^2 + 39x - 1$	$3^{10} \cdot 5^6$	jah
$-38x^2 + 38x - 1$	$3^{40} \cdot 5^{58}$	jah
$-37x^2 + 37x - 1$	$3^{78} \cdot 5^{988}$	ei
$-37x^2 + 37x - 1$	$3^{1050} \cdot 5^{22}$	jah
$-36x^2 + 36x - 1$	$3^{22} \cdot 5^{238}$	jah
$-35x^2 + 35x - 1$	$3^{508} \cdot 5^{1090}$	jah
$-34x^2 + 34x - 1$	$3^{4596} \cdot 5^{7822}$	jah
$-33x^2 + 33x - 1$	$3^{18} \cdot 5^{60}$	jah
$-32x^2 + 32x - 1$	$3^{232} \cdot 5^6$	jah
$-31x^2 + 31x - 1$	$3^6 \cdot 5^{10}$	jah
$-28x^2 + 28x - 1$	$3^{10} \cdot 5^{376}$	ei
$-28x^2 + 28x - 1$	$3^{696} \cdot 5^{28}$	ei
$-28x^2 + 28x - 1$	$3^{46} \cdot 5^{688}$	ei
$-28x^2 + 28x - 1$	$3^{856} \cdot 5^{12}$	jah
$-27x^2 + 27x - 1$	$3^{148} \cdot 5^{2950}$	ei
$-27x^2 + 27x - 1$	$3^{7792} \cdot 5^{306}$	jah
$-26x^2 + 26x - 1$	$3^{11176} \cdot 5^{126}$	jah
$-25x^2 + 25x - 1$	$3^{16} \cdot 5^6$	jah
$-24x^2 + 24x - 1$	$3^6 \cdot 5^{478}$	jah
$-23x^2 + 23x - 1$	$3^{2542} \cdot 5^{7068}$	jah
$-22x^2 + 22x - 1$	$3^{82} \cdot 5^{1500}$	ei
$-21x^2 + 21x - 1$	$3^{8766} \cdot 5^{7596}$	ei
$-20x^2 + 20x - 1$	$3^{28} \cdot 5^{40}$	jah
$-19x^2 + 19x - 1$	$3^{12} \cdot 5^{22}$	jah
$-18x^2 + 18x - 1$	$3^{1576} \cdot 5^{30}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$3^{48} \cdot 5^{10}$	ei

$-17x^2 + 17x - 1$	$3^{30} \cdot 5^{76}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$3^{678} \cdot 5^{10}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$3^{48} \cdot 5^{2152}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$3^{96} \cdot 5^{6670}$	ei
$-17x^2 + 17x - 1$	$3^{18408} \cdot 5^{826}$	ei
$-16x^2 + 16x - 1$	$3^{238} \cdot 5^{1678}$	ei
$-15x^2 + 15x - 1$	$3^{280} \cdot 5^{12}$	jah
$-14x^2 + 14x - 1$	$3^{106} \cdot 5^{492}$	ei
$-14x^2 + 14x - 1$	$3^{2128} \cdot 5^{148}$	jah
$-13x^2 + 13x - 1$	$3^{22} \cdot 5^{282}$	jah
$-12x^2 + 12x - 1$	$3^{460} \cdot 5^{292}$	jah
$-11x^2 + 11x - 1$	$3^{40} \cdot 5^{22}$	jah
$-10x^2 + 10x - 1$	$3^6 \cdot 5^{172}$	jah
$-8x^2 + 8x - 1$	$3^{606} \cdot 5^{78}$	jah
$-6x^2 + 6x - 1$	$3^{5160} \cdot 5^{382}$	ei
$-6x^2 + 6x - 1$	$3^{8088} \cdot 5^{982}$	jah
$-5x^2 + 5x - 1$	$3^{6160} \cdot 5^{138}$	ei
$-4x^2 + 4x - 1$	$3^{22} \cdot 5^{438}$	jah
$-3x^2 + 3x - 1$	$3^{2436} \cdot 5^{2658}$	jah
$-2x^2 + 2x - 1$	$3^{372} \cdot 5^{52}$	jah
$1x^2 - 1x - 1$	$3^{18} \cdot 5^{28}$	jah
$2x^2 - 2x - 1$	$3^{36} \cdot 5^{10}$	jah
$3x^2 - 3x - 1$	$3^{2608} \cdot 5^6$	jah
$4x^2 - 4x - 1$	$3^6 \cdot 5^{1606}$	jah
$5x^2 - 5x - 1$	$3^{58} \cdot 5^{10}$	jah
$6x^2 - 6x - 1$	$3^{136} \cdot 5^{556}$	jah
$7x^2 - 7x - 1$	$3^{390} \cdot 5^{36}$	ei

$7x^2 - 7x - 1$	$3^{436} \cdot 5^{136}$	ei
$7x^2 - 7x - 1$	$3^{22} \cdot 5^{1150}$	jah
$8x^2 - 8x - 1$	$3^{436} \cdot 5^{52}$	ei
$8x^2 - 8x - 1$	$3^{166} \cdot 5^{1006}$	ei
$8x^2 - 8x - 1$	$3^{6048} \cdot 5^{196}$	ei
$9x^2 - 9x - 1$	$3^{16} \cdot 5^{22}$	jah
$10x^2 - 10x - 1$	$3^{16} \cdot 5^{28}$	jah
$11x^2 - 11x - 1$	$3^{42} \cdot 5^{790}$	ei
$11x^2 - 11x - 1$	$3^{708} \cdot 5^{126}$	jah
$12x^2 - 12x - 1$	$3^{226} \cdot 5^{516}$	ei
$12x^2 - 12x - 1$	$3^{718} \cdot 5^{142}$	ei
$13x^2 - 13x - 1$	$3^{16} \cdot 5^{10}$	jah
$14x^2 - 14x - 1$	$3^{102} \cdot 5^{46}$	jah
$15x^2 - 15x - 1$	$3^{8446} \cdot 5^{102}$	jah
$16x^2 - 16x - 1$	$3^{2188} \cdot 5^{10}$	ei
$16x^2 - 16x - 1$	$3^{18} \cdot 5^{5170}$	jah
$17x^2 - 17x - 1$	$3^{898} \cdot 5^6$	ei
$17x^2 - 17x - 1$	$3^{1828} \cdot 5^{786}$	ei
$17x^2 - 17x - 1$	$3^{786} \cdot 5^{2130}$	jah
$18x^2 - 18x - 1$	$3^6 \cdot 5^{88}$	jah
$19x^2 - 19x - 1$	$3^{378} \cdot 5^{22}$	jah
$20x^2 - 20x - 1$	$3^{12} \cdot 5^{322}$	ei
$20x^2 - 20x - 1$	$3^{508} \cdot 5^{18}$	jah
$21x^2 - 21x - 1$	$3^{66} \cdot 5^{126}$	jah
$22x^2 - 22x - 1$	$3^{10150} \cdot 5^{760}$	jah
$23x^2 - 23x - 1$	$3^{10} \cdot 5^{88}$	jah
$24x^2 - 24x - 1$	$3^{10} \cdot 5^{12}$	jah

$25x^2 - 25x - 1$	$3^6 \cdot 5^{82}$	jah
$27x^2 - 27x - 1$	$3^{10} \cdot 5^{96}$	jah
$30x^2 - 30x - 1$	$3^{28} \cdot 5^{22}$	jah
$31x^2 - 31x - 1$	$3^{46} \cdot 5^6$	jah
$32x^2 - 32x - 1$	$3^{102} \cdot 5^{622}$	ei
$33x^2 - 33x - 1$	$3^{12} \cdot 5^{18}$	jah
$35x^2 - 35x - 1$	$3^{18} \cdot 5^{22}$	jah
$36x^2 - 36x - 1$	$3^{190} \cdot 5^{82}$	jah
$37x^2 - 37x - 1$	$3^{1156} \cdot 5^{9928}$	ei
$38x^2 - 38x - 1$	$3^{10} \cdot 5^6$	jah
$39x^2 - 39x - 1$	$3^{258} \cdot 5^{130}$	ei
$39x^2 - 39x - 1$	$3^6 \cdot 5^{520}$	jah
$42x^2 - 42x - 1$	$3^{70} \cdot 5^{238}$	jah
$43x^2 - 43x - 1$	$3^{16} \cdot 5^{438}$	jah
$44x^2 - 44x - 1$	$3^{7098} \cdot 5^{96}$	ei
$45x^2 - 45x - 1$	$3^{10} \cdot 5^{28}$	jah
$46x^2 - 46x - 1$	$3^6 \cdot 5^{10}$	jah
$47x^2 - 47x - 1$	$3^{178} \cdot 5^{16}$	jah
$48x^2 - 48x - 1$	$3^{22} \cdot 5^{180}$	jah
$49x^2 - 49x - 1$	$3^{96} \cdot 5^{16546}$	jah
$50x^2 - 50x - 1$	$3^{22} \cdot 5^{60}$	jah

Tabel 5: τ -arvud, kujul $3^a 5^b$ polünoomide kujul $ax^2 - ax - 1$,
suhtes.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Ekke-Markus Muttika,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Tulemusi τ -arvudest polünoomide suhtes“, mille juhendajad on Mart Abel ja Reyna Maria Pérez Tiscareño, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commons'i litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.
3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Ekke-Markus Muttika

09.05.2023