I. Zaitsev

KÕRGEM MATEMAATIKA

Õpik
tehnikumidele

Eesti Riiklik Kirjastus

A-21912

I. ZAITSEV

KÕRGEM MATEMAATIKA

ÕPIK TEHNIKUMIDELE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1958

Originaali tiitel:

И. Л. Зайцев.

Курс высшей математики для техникумов.

Под редакцией Г. С. Бараненкова.

Издание второе, исправленное.

Допущено Управлением средних специальных учебных заведений Министерства высшего образования СССР в качестве учебника для техникумов.

Государственное издательство
технико-теоретической литературы.
Москва 1956.

Tõlkinud H. Kiiler.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
42794

EESSÕNA.

Käesolev õpik on kirjutatud kooskõlas Kõrgema Hariduse Ministeeriumi poolt 1952. a. kinnitatud matemaatika programmiga tehnikumidele. Erandi moodustavad kaks osa: joone kõverus ja diferentsiaalvõrrandid, mis on paigutatud õpikusse sel põhjusel, et üldtehniliste ja eriainete õppejõud kasutavad tihti mõisteid ja valemeid nendest osadest.

Lisaks teooriale on õpikus ka näiteid ja ülesandeid. Ülesannete arv ja nende lahendamise raskusaste on toodud sellise arvestusega, et oleks võimalik kindlalt kinnistada õpitav materjal.

Raamatu kirjutamisel on pööratud erilist tähelepanu sellele, et käsitletav materjal oleks arusaadav 16—17 a. vanustele õpilastele, kes omavad ettevalmistust keskkooli 8—9 klassi ulatuses. Selle saavutamiseks on käsitletud materjal sõnastatud võimalikult lihtsas keeles ja matemaatiliste aluste selgitamine toimub induktiivse meetodiga. Nii näiteks alustatakse sirgjoone teooria käsitlemist sirge asendi erijuhtumitest — koordinaattelgedega paralleelsetest sirgetest; diferentsiaali ja integraali mõiste selgitamisele eelnevad näited jne.

Arvestades tehnikumi õpilaste ettevalmistuse taset, samuti ka äärmiselt piiratud õppetundide arvu (90 tundi), mis on ette nähtud kõrgema matemaatika programmi läbivõtmiseks tehnikumides, jätsin ma välja ranged tõestused, millede omandamine valmistab õpilastele suuri raskusi, ja piirdusin neil juhtumitel geomeetriliste illustratsioonidega või näidete uurimisega.

Kasutan juhust ja avaldan südamlikku tänu V. P. Minorskile, kes andis mulle palju metoodilisi näpunäiteid.

Autor.

TASAPINNALISE ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA ALGED.

I peatükk.

KOORDINAATIDE MEETOD.

§ 1. Analüütilise geomeetria aine. Analüütilise geomeetria aineks on geomeetriliste kujundite (joonte, kehade, pindade jne.) tundmaõppimine erilise meetodi, nn. *koordinaatide meetodi* abil. Seejuures leiab laialdast rakendamist algebra.

Ka elementaargeomeetrias kasutatakse mõnikord algebra meetodeid, näiteks kolmnurga pindala määramisel kolme külje kaudu või korrapärase kõõlhulknurga külgede pikkuste arvutamisel jne. Kuid algebra meetodite rakendusala geomeetrias muutus märksa laiemaks koordinaatide meetodi sissetoomisega, mis võimaldas uurida mitte üksnes geomeetriliste kehade kuju ja mõõtmeid, vaid ka nende asendit tasapinnal ning ruumis.

Analüütiline geomeetria koosneb kahest osast. Esimene osa — *tasapinnaline analüütiline geomeetria*, teine osa — *ruumiline analüütiline geomeetria.*

Käesolevas raamatus anname elementaarse ülevaate ainult tasapinnalisest analüütilisest geomeetriast.

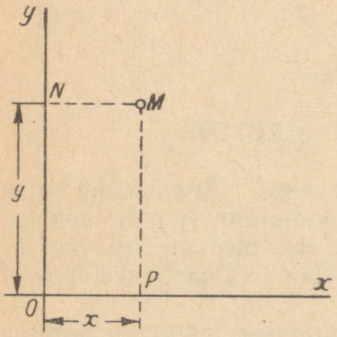
§ 2. Descartes'i tasapinnaline ristkoordinaatide süsteem. Võtame tasapinnal kaks teineteisega ristuvat sirget, nimetame neid x-teljeks ja y-teljeks (joon. 1), ning meelevaldse punkti M. Tõmbame sellest punktist ristsirged MN ja MP vastavalt y-teljele ja x-teljele. Valinud mingisuguse pikkusühiku ja mõõtnud sellega lõigud NM ja PM, saame arvud:

$$x = NM = OP,$$
$$y = PM = ON.$$

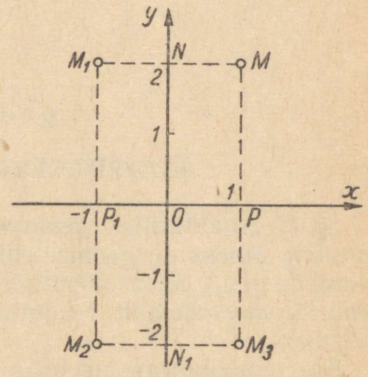
Neid arve x ja y, mis määravad punkti M asukoha antud x-telje ja y-telje suhtes, nimetatakse punkti M koordinaati-

deks. Need kirjutatakse tavaliselt sulgudesse punkti tähise järele: $M(x; y)$, kusjuures esimesele kohale kirjutatakse koordinaat x ja seejärel koordinaat y.

Olgu näiteks valitud pikkusühiku puhul $x = OP = 1$ ühik ja $y = ON = 2$ ühikut. Siis ütleme, et punkti M koordinaadid on $M(1; 2)$.



Joon. 1.



Joon. 2.

Kuid nüüd kerkib üles küsimus: kas tasapinnal pole rohkem punkte, milledel oleksid samad koordinaadid mis punktil M. Joonisel 2 on näidatud, et punktid M, M_1, M_2 ja M_3 asetsevad kõik ühe pikkusühiku kaugusel y-teljest ja kahe ühiku kaugusel x-teljest. Tekib määramatus: neljal punktil on ühesugused koordinaadid (1; 2). Et kõrvaldada seda puudust, täpsustame punktide tasapinnaliste ristkoordinaatide definitsiooni.

Punkti M koordinaadiks x nimetatakse arvu, mis näitab punkti M kaugust y-teljest ja on võetud plussmärgiga, kui punkt M asetseb y-teljest paremal pool, ning miinusmärgiga, kui punkt M asetseb y-teljest vasakul pool.

Punkti M koordinaadiks y nimetatakse arvu, mis näitab punkti M kaugust x-teljest ja on võetud plussmärgiga, kui punkt M asetseb x-teljest üleval pool, ning miinusmärgiga, kui punkt M asetseb x-teljest allpool.

Nüüd on punktidel M, M_1, M_2 ja M_3 joonisel 2 juba erinevad ning üheselt määratud koordinaadid: $M(1; 2)$, $M_1(-1; 2)$, $M_2(-1; -2)$, $M_3(1; -2)$.

Niisiis, et määrata mistahes punkti asukohta tasapinnal koordinaatide x ja y abil, on vaja:

1) ehitada kaks teineteisega ristuvat sirget, milliseid nimetatakse *koordinaattelgedeks* (x-telg, y-telg), lõikepunktiga O, mida nimetatakse *koordinaatide alguseks*;

2) valida pikkusühik;

3) märkida kummalgi koordinaatteljel positiivne suund (joonisel tähistatakse positiivne suund noolega).

Kogu seda konstruktsiooni nimetatakse *Descartes'i tasapinnaliseks ristkoordinaatide süsteemiks* analüütilise geomeetria looja prantsuse matemaatiku Descartes'i (1596—1650) nime järgi.

Koordinaati x nimetatakse *abstsissiks* ja koordinaati y *ordinaadiks*.

Nagu ülaltoodust selgub, vastab Descartes'i tasapinnalises ristkoordinaatide süsteemis *tasapinna igale punktile kaks arvu* x ja y (punkti koordinaadid), mis määravad punkti asukoha tasapinnal, ja ümberpöördult, *igale reaalarvude paarile* x *ja* y *vastab tasapinna üks punkt.* Punktide ja nende punktide koordinaatide vahel toodud sõltuvuse tõttu on tavaks öelda „on antud punkti M koordinaadid" asemel „on antud punkt $M(a\,;\,b)$" või „Leida punkti M koordinaadid" asemel „leida punkt $M(x\,;\,y)$".

Harjutusi.

1. Ehitada punktid $A(3\,;\,5)$, $B(-3\,;\,4)$, $C(5\,;\,-1)$, $D(-2\,;\,-4)$, $E(0\,;\,2)$, $F(2\,;\,0)$, $K(-3\,;\,0)$, $L(0\,;\,-4)$ ja $O(0;\,0)$.

2. On antud punkt $A(3\,;\,2)$. Leida x-telje suhtes punkti A-ga sümmeetrilise punkti B koordinaadid ja y-telje suhtes punkti B-ga sümmeetrilise punkti C koordinaadid. Ehitada need kolm punkti.

3. Ristküliku küljed on 6 cm ja 10 cm. Leida tema tippude koordinaadid, võttes koordinaattelgedeks sirged, mis on paralleelsed ristküliku külgedega ja poolitavad need.

4. On antud 8 cm pikkuse küljega ruut. Ruudu diagonaalid on koordinaattelgedeks. Leida tippude koordinaadid.

§ 3. Kahe punkti vaheline kaugus. Olgu antud kaks punkti $A(x_1\,;\,y_1)$ ja $B(x_2\,;\,y_2)$ (joon. 3); leida nende punktide vaheline kaugus.

Joonistame punktidest A ja B x-teljele ristsirged AA_1 ja BB_1 ning tõmbame $AC \parallel Ox$. Pythagorase teoreemi järgi leiame kolmnurgast ABC:

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}. \qquad (1)$$

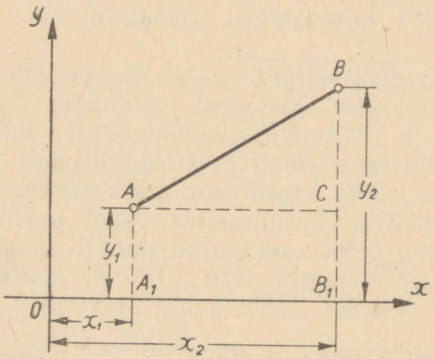
Jooniselt näeme, et

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1, \\ CB &= B_1B - B_1C = B_1B - A_1A = y_2 - y_1. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Asetades võrdusest (2) AC ja CB väärtused avaldisse (1) ning tähistades AB tähega d, saame:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (3)$$

Võib tõestada, et valem (3) on õige punktide A ja B mistahes asendi puhul tasapinnal.



Joon. 3.

N ä i d e. Leida punktide $A(-3\,;\,5)$ ja $B(1\,;\,2)$ vaheline kaugus.

L a h e n d u s. Ülesande tingimuste põhjal $x_1 = -3$, $y_1 = 5$, $x_2 = 1$; $y_2 = 2$. Asendanud need koordinaadid valemisse (3), saame:

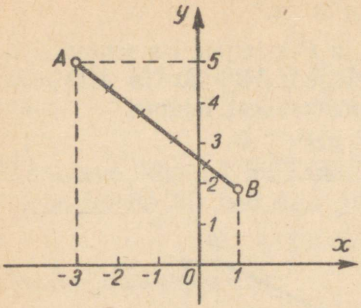
$$AB = \sqrt{[1 - (-3)]^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{4^2 + (-3)^2} =$$

$$= \sqrt{25} = 5.$$

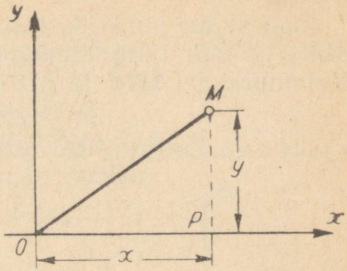
Lahendame sellesama näite graafiliselt. Selleks ehitame antud punktid A ja B (joon. 4), ning mõõtnud sirglõigu AB, leiame, et $AB = 5$.

Kui üheks punktiks on koordinaatide algus $O(0\,;\,0)$ ja teiseks punkt $M(x\,;\,y)$, siis valemil (3) on kuju

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4)$$



Joon. 4.



Joon. 5.

Valemi (4) võib saada ka joonise 5 abil, rakendades Pythagorase teoreemi kolmnurga OMP kohta.

Harjutusi.

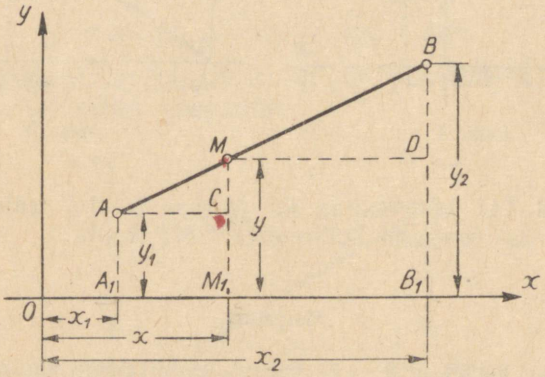
1. Leida punkti $M(6;-8)$ kaugus koordinaatide algusest.
2. Leida järgmiste punktide vaheline kaugus: 1) $A(14;12)$ ja $B(8;4)$, 2) $M(-2;4)$ ja $N(2;1)$, 3) $C(0;4)$ ja $D(3;0)$.
3. Leida analüütiliselt ja graafiliselt punkte $A(-10;-10)$ ja $B(2;-1)$ ühendava sirglõigu pikkus.
4. Leida kolmnurga külgede pikkused, kui tema tippude koordinaadid on $A(3;2)$, $B(-1;-1)$ ja $C(11;-6)$.
5. Näidata, et kolmnurk tippudega $A(-5;2)$, $B(3;6)$ ja $C(4;-6)$ on võrdhaarne.
6. Näidata, et kolmnurk tippudega $A(1;2)$, $B(3;4)$ ja $C(-1;4)$ on täisnurkne.
7. Leida abstsissteljel punkt A, mis asetseb punktist $B(4;6)$ kümne pikkusühiku kaugusel. Selgitada graafiliselt, miks saadakse kaks lahendit.
8. On antud võrdkülgse kolmnurga kaks tippu $O(0;0)$ ja $A(2\sqrt{3};0)$. Leida kolmas tipp B.
9. Leida punkt, mille kaugused punktidest $O(0;0)$, $A(-4;0)$ ja $B(0;8)$ on võrdsed.
10. Leida ordinaatteljel punkt, mille kaugused punktidest $A(10;8)$ ja $B(-6;4)$ on võrdsed.
11. Leida punkt, mille kaugus x-teljest ja punktist $A(-5;2)$ on kümme pikkusühikut.
12. Leida punkt, mille kaugused koordinaattelgedest ja punktist $A(1;2)$ on võrdsed.

§ 4. Sirglõigu jaotamine antud suhtes. Olgu antud punktid $A(x_1;y_2)$ ja $B(x_2;y_2)$ (joon. 6). Leida punkt $M(x;y)$, mis jaotab sirglõigu AB suhtes:

$$AM : MB = m : n.*$$

Joonestame punktidest A, M ja B x-teljele ristsirged AA_1, MM_1 ja BB_1 ning tõmbame sirged $AC \parallel Ox$ ja $MD \parallel Ox$. Kolmnurkade AMC ja MBD sarnasusest leiame:

$$\frac{AC}{MD} = \frac{CM}{DB} = \frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}. \tag{1}$$



Joon. 6.

Kuid

$$\left.\begin{aligned} AC &= A_1M_1 = OM_1 - OA_1 = x - x_1, \\ MD &= M_1B_1 = OB_1 - OM_1 = x_2 - x, \\ CM &= M_1M - M_1C = M_1M - A_1A = y - y_1, \\ DB &= B_1B - B_1D = B_1B - M_1M = y_2 - y. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Asetades avaldised (2) võrdesse (1), saame:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{m}{n}. \tag{3}$$

Lühiduse mõttes asendame $\frac{m}{n} = \lambda$. Siis saame võrdustest (3) kaks võrrandit:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda, \tag{4}$$

---

* Suhe $\frac{m}{n}$ on positiivne, kui punkt M asetseb sirglõigul AB. Juhul, kui punkt M asetseb sirglõigu AB pikendusel, on suurus $\frac{m}{n}$ negatiivne (vt. Привалов И. И., Аналитическая геометрия, 1954, § 6).

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda. \tag{5}$$

Võrrandist (4) leiame x. Vabastades võrrandi nimetajast, saame:

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x.$$

Kanname liikmed, mis sisaldavad x, võrrandi vasakule poolele, teised liikmed aga paremale poolele:

$$x + \lambda x = x_1 + \lambda x_2.$$

Toome x sulgude ette:

$$x(1 + \lambda) = x_1 + \lambda x_2,$$

siit

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Analoogiliselt leiame võrrandist (5)

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Niisiis, selle punkti $M(x\,;\,y)$ koordinaadid, mis jaotab punktide $A(x_1\,;\,y_1)$ ja $B(x_2\,;\,y_2)$ vahelise sirglõigu suhtes $m : n = \lambda$, määratakse valemitega:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \tag{6}$$

Võib näidata, et valemid (6) kehtivad punktide A ja B mistahes asendi puhul tasapinnal.

Erijuhul, kui sirglõik AB poolitatakse, s. t. jaotatakse suhtes 1 : 1, saame $\lambda = 1 : 1 = 1$, ning seepärast

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \tag{7}$$

Kui valemis (6) asendada λ suhtega $\frac{m}{n}$, siis saame:

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{n + m}, \qquad y = \frac{ny_1 + my_2}{n + m}. \tag{8}$$

Valemit (8) rakendatakse sageli mehhaanikas homogeensete kehade raskuskeskme asukoha määramisel või paralleelsete jõudude resultantjõu rakenduspunkti otsimisel.

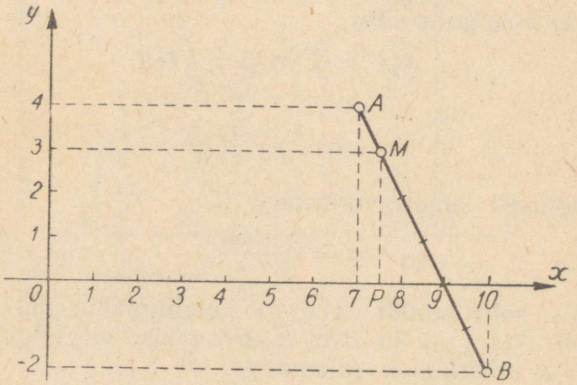
Näide. On antud punktid $A(7\,;4)$ ja $B(10\,;-2)$. Punkt M jaotab sirglõigu AB suhtes $AM : MB = 0{,}2$. Leida punkt M.

L a h e n d u s. Ülesande tingimuste põhjal $x_1 = 7$, $y_1 = 4$, $x_2 = 10$, $y_2 = -2$, $\lambda = 0{,}2$. Asendades need suurused valemisse (6), saame:

$$x = \frac{7 + 0{,}2 \cdot 10}{1 + 0{,}2} = \frac{9}{1{,}2} = 7{,}5,$$

$$y = \frac{4 + 0{,}2(-2)}{1 + 0{,}2} = \frac{3{,}6}{1{,}2} = 3.$$

Niisiis, otsitav punkt on $M(7{,}5\,;\,3)$.



Joon. 7.

Lahendame sama näite graafiliselt. Selleks ehitame punktid A ja B (joon. 7) ning jaotame sirglõigu AB kuueks võrdseks osaks. Paigutades ühe sellise osa sirglõigule AB punktist A, saame punkti M, mis jaotabki sirglõigu AB suhtes $1 : 5 = 0{,}2$. Mõõtes lõigud OP ja PM, leiame punkti M koordinaadid:

$$OP = x = 7{,}5;\ PM = y = 3.$$

Harjutusi.

1. Leida punkte A ja B ühendava sirglõigu keskpunkt.

1) $A(3\,;\,5)$ ja $B(7\,;\,9)$, 2) $A(0\,;\,-12)$ ja $B(8\,;\,0)$.

2. On antud rööpküliku nelja tipu koordinaadid:

$A(-1\,;\,-1)$, $B(1\,;\,1)$, $C(2\,;\,-1)$ ja $D(0\,;\,-3)$.

Leida diagonaalide AC ja BD pikkused ning diagonaalide lõikepunkt.

3. Kolmnurga ABC tippude koordinaadid on

$$A(3;7),\ B(5;2) \text{ ja } C(-1;3).$$

Leida tipust B tõmmatud mediaani pikkus.

4. Leida sirglõigu AB otspunkt B, kui on antud: sirglõigu alguspunkt $A(7;-4)$ ja keskpunkt $C(-1;3)$.

5. On antud rööpküliku kaks naabertippu $A(4;2)$ ja $B(5;7)$ ning diagonaalide lõikepunkt $M\left(\frac{1}{2};3\right)$. Leida teised tipud.

6. Punkte $A(6;4)$ ja $B(1;9)$ ühendaval sirglõigul asetseb punkt M, mis jaotab antud sirglõigu nii, et $AM:MB=2:3$. Leida punkt M. Anda analüütiline ja graafiline lahendus.

7. Leida punktid, mis jaotavad punktide $M(-3;-7)$ ja $N(10;2)$ vahelise sirglõigu kolmeks võrdseks osaks.

8. Punkt $C(-2;1)$ jaotab sirglõigu AB suhtes $AC:CB=2$. Leida sirglõigu otspunkti B koordinaadid, kui alguspunkti A koordinaadid on $(10;5)$.

9. Punkti $A(2;5)$ on rakendatud mass 2 kg, punkti $B(12;0)$ mass 3 kg. Leida nende masskese.

10. Leida kolmnurga mediaanide lõikepunkti koordinaadid, kui on teada kolmnurga tippude koordinaadid $A(1;4)$, $B(-5;0)$ ja $C(-2;-1)$.

11. On antud homogeense kolmnurkse plaadi tipud $A(4;-2)$, $B(1;5)$ ja $C(-2;0)$. Leida selle plaadi raskuskese.

12. On antud kolmnurga kahe tipu koordinaadid $A(0;5)$, $B(5;3)$ ja kolmnurga mediaanide lõikepunkt $M(1;3)$. Leida kolmnurga kolmanda tipu koordinaadid.

II peatükk.

JOONED JA NENDE VÕRRANDID.

§ 5. Jäävad ja muutuvad suurused. Uurides mingisugust protsessi praktikas või tehnikas, kohtame kahte liiki suurusi: jäävaid ja muutuvaid.

Jäävaks suuruseks nimetatakse sellist suurust, mis mingisuguse protsessi uurimise käigus ei muuda oma väärtust. Jäävateks suurusteks on näiteks ühe ja sama ringjoone raadiuse pikkus, puhta vee keemistemperatuur konstantsel rõhul jne.

Jäävaid suurusi tähistatakse tavaliselt ladina tähestiku algustähtedega: a, b, c, d jne.

Muutuvaks suuruseks nimetatakse sellist suurust, mis uuritava protsessi tingimustes muudab oma väärtust. Muutuvateks suurusteks on näiteks korrapärase kõõlhulknurga ümbermõõt tema külgede arvu suurendamisel, metallvarva pikkus tema soojendamisel jne.

Muutuvaid suurusi tähistatakse ladina tähestiku viimaste tähtedega: x, y, z, samuti ka tähtedega t, u, v, w.

Sageli võib üks ja sama suurus ühtedel tingimustel olla jääv, teistel tingimustel aga muutuv suurus. Näiteks korrapärase kõõlhulknurga apoteem on jääv suurus; selle hulknurga külgede arvu piiramatul kahekordistamisel saab apoteemist aga muutuv suurus.

Kuid jäävate suuruste hulgas leidub ka selliseid, mis säilitavad oma väärtuse mistahes tingimustel; neid nimetatakse *absoluutselt jäävateks* suurusteks. Näiteks kolmnurga sisenurkade summa või ringjoone pikkuse ja diameetri suhe on absoluutselt jäävad suurused.

§ 6. Muutuvate suuruste vaheline funktsionaalne sõltuvus. Kaks muutuvat suurust võivad olla teineteisega seotud nii, et ühe suuruse igale väärtusele vastab teise suuruse kindel väärtus.

Võtame näiteks võrrandi

$$S = 4{,}9t^2, \qquad (1)$$

mis väljendab langeva keha poolt läbitud tee pikkuse S ja langemise aja t vahelist sõltuvust. Anname langemise ajale t mingisuguse arvulise väärtuse, siis läbitud tee pikkus S saab vastava väärtuse; näiteks:

kui $t = 2$, siis $S = 4{,}9 \cdot 2^2 = 19{,}6$,
„ $t = 3$, „ $S = 4{,}9 \cdot 3^2 = 44{,}1$,
„ $t = 4$, „ $S = 4{,}9 \cdot 4^2 = 78{,}4$ jne.

Seega vastab t igale väärtusele võrrandis (1) kindel S väärtus.

Sellist sõltuvust muutuvate suuruste vahel nimetatakse *funktsionaalseks sõltuvuseks.*

Muutuvatel suurustel on toodud näites eri tähendus: ühele nendest suurustest, nimelt suurusele t, andsime väärtusi vabalt, kuna teine suurus S sai seejuures oma väärtuse sõltuvalt muutujast t.

Esimest suurust (t) nimetatakse *sõltumatuks muutujaks* ehk *argumendiks*, teist suurust (S) — *sõltuvaks muutujaks* ehk *funktsiooniks.*

Vaatleme teist näidet. Olgu antud võrrand

$$y = \pm \sqrt{x}. \qquad (2)$$

Siin vastab igale lubatud x väärtusele kaks y väärtust; näiteks:

kui $x = 1$, siis $y = \pm 1$,
„ $x = 4$, „ $y = \pm 2$,
„ $x = 9$, „ $y = \pm 3$ jne.

Seega määrab võrrand (2) y kui x funktsiooni ja väljendab funktsionaalset sõltuvust muutuvate suuruste x ja y vahel.

Definitsioon. *Muutuvat suurust x nimetatakse sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks, kui ta võib saada ülesande tingimuste piires meelevaldseid väärtusi.*

Muutuvat suurust y nimetatakse muutuja x funktsiooniks, kui x igale lubatud väärtusele vastab üks või mitu y kindlat väärtust.

Näide 1. Ringi pindala

$$S = \pi r^2.$$

Selles võrduses vastab r igale väärtusele suuruse S kindel väärtus; järelikult on ringi pindala raadiuse funktsioon ja võrdus ise väljendab funktsionaalset sõltuvust nende muutujate vahel.

Näide 2. Kui keha liigub sirgjooneliselt ühtlase kiirusega v, siis läbitud tee pikkus

$$S = vt.$$

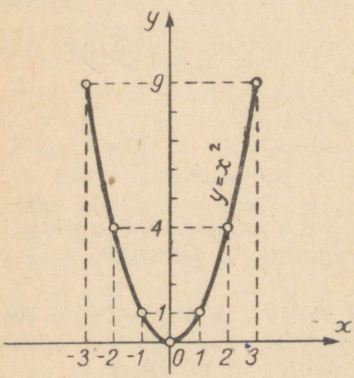
Siin saab läbitud tee pikkus S kindla väärtuse olenevalt t väärtusest; seega S on aja t funktsioon.

§ 7. Jooned ja nende võrrandid. Algebra kursusest teame, et funktsiooni määrava võrrandi järgi saab ehitada joone, mida nimetatakse *funktsiooni graafikuks.*

Olgu antud näiteks võrrand $y = x^2$, mis määrab suuruse y suuruse x funktsioonina.

Koostame x väärtuste ja nendele vastavate y väärtuste tabeli:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9



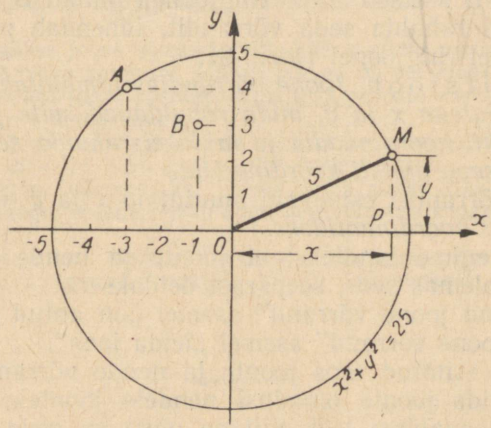
Joon. 8.

Igale selles tabelis esitatud x ja y väärtuste paarile vastab tasapinnal üks punkt. Ehitanud need punktid (joon. 8) ja ühendanud need sujuva kõveraga, saame funktsiooni $y = x^2$ graafiku. See graafik, nagu näha, kujutab kõverat, mille kõikidel punktidel on ühine omadus, ja nimelt, iga punkti ordinaat võrdub vastava abstsissi ruuduga. Joont, mille kõikidel punktidel on üks ja sama omadus, nimetatakse nende punktide *geomeetriliseks kohaks.*

Sellest näitest selgub, et *võrrandile muutujatega x ja y vastab tasapinnal teatud joon kui nende punktide geomeetriline koht, mille koordinaadid rahuldavad antud võrrandit.*

Vastupidi, *tasapinnal asetsevale joonele, mis kujutab ühe ja sama omadusega punktide geomeetrilist kohta, vastab teatud võrrand muutujatega x ja y.* Selgitame seda näitega.

Olgu antud tasapinnal ringjoon keskpunktiga koordinaatide alguses ja raadiusega, mille pikkus on 5 ühikut (joon. 9). Geomeetria algkursusest on teada, et see ringjoon on keskpunktist 5 pikkusühiku kaugusel asetsevate punktide geomeetriline koht. Võtame ringjoonel vabalt



Joon. 9.

punkti $M(x\,;\,y)$. Eelduse kohaselt $OM = 5$; teiselt poolt, valemi (4) § 3 järgi

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Järelikult, selle ringjoone mistahes punkti puhul kehtib võrdus:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 5$$

ehk

$$x^2 + y^2 = 25. \qquad (1)$$

Seega vastab ringjoonele, mille raadiuse pikkus on 5 ühikut ja mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguses, võrrand (1).

Võrrand (1) määrab üheselt antud ringjoone ja seepärast nimetatakse seda antud *ringjoone võrrandiks.*

Teades ringjoone võrrandit (1), võib leida, kas antud

punktid, näiteks $A(-3;4)$ ja $B(-1;3)$ asetsevad ringjoonel või mitte. Selleks tuleb kontrollida, kas punktide A ja B koordinaadid rahuldavad võrrandit (1). Asetades need võrrandisse (1) x ja y asemele, saame:

punkti A puhul: $(-3)^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$,
punkti B puhul: $(-1)^2 + 3^2 = 1 + 9 \neq 25$.

Punkti A koordinaadid rahuldavad võrrandit (1), tähendab punkt A asetseb antud ringjoonel; punkti B koordinaadid aga ei rahulda seda võrrandit, tähendab punkt B ei asetse sellel ringjoonel (joon. 9).

Definitsioon. *Joone võrrandiks nimetatakse võrrandit muutujatega x ja y, mida rahuldavad selle joone mistahes punkti koordinaadid ja mida ei rahulda sellel joonel mitte asetseva punkti koordinaadid.*

Joone võrrandis esinevaid muutujaid x ja y nimetatakse *jooksvateks koordinaatideks.*

Seega tegime kindlaks, et joonte ja nende võrrandite vahel on olemas seos, seepärast öeldakse:

„on antud joone võrrand" asemel „on antud joon",

„leida joone võrrand" asemel „leida joon".

Eespool esitatud seos joonte ja nende võrrandite vahel lubab uurida joonte omadusi nendele joontele vastavate võrrandite analüüsi teel. Siit on pärit ka meie poolt õpitava aine nimetus — analüütiline geomeetria.

Näide 1. Kas punkt $A(-2;4)$ asetseb joonel $y = x^2$?

Lahendus. Asendades antud võrrandis x ja y punkti $A(-2;4)$ koordinaatidega, saame samasuse:

$$4 = (-2)^2 = 4.$$

Järelikult punkt A asetseb antud joonel.

Näide 2. On antud joon $y = -3x + 1$ ja sellel punkt A, mille abstsiss on -1. Leida selle punkti ordinaat.

Lahendus. Kuna punkt A asetseb antud joonel, siis tema koordinaadid peavad rahuldama antud võrrandit. Üks koordinaat $x = -1$. Et leida teist koordinaati, s. t. koordinaati y, asendame võrrandis x tema väärtusega. Saame:

$$y = -3(-1) + 1 = 4.$$

Seega punkti A ordinaat on 4.

Harjutusi.

1. On antud joon $y = \frac{1}{2}x + 2$. Leida, kas punktid $A(2;3)$, $B(3;3)$, $C(4;4)$ asetsevad sellel sirgel?

2. Joonel $4x - 5y = 8$ asetsevad punktid $A(2;y)$ ja $B(x;4)$. Leida kummagi punkti tundmatu koordinaat.

3. Leida sellise joone võrrand, mille kõik punktid asetsevad koordinaattelgedest võrdsel kaugusel. Ehitada see joon.

4. Teatud joone mistahes punktide ordinaadid on 4 korda suuremad nende punktide abstsissidest. Leida selle joone võrrand ja ehitada joon.

5. Leida sellise joone võrrand, mille kõik punktid asetsevad punktist $O(0;0)$ 2 ühiku kaugusel. Millise kujuga on see joon?

6. Leida sellise joone võrrand, mille kõik punktid asetsevad punktist $M(2;-3)$ 4 ühiku kaugusel.

7. Teatud joone kõik punktid on võrdsel kaugusel kahest punktist $A(-2;1)$ ja $B(-1;-3)$. Leida selle joone võrrand.

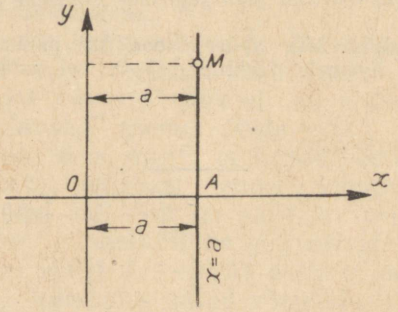
8. Leida joone võrrand, kui joonel liigub punkt $M(x;y)$ nii, et selle punkti kaugus x-teljest jääb kogu aeg võrdseks kaugusega punktist $F(0;-2)$.

9. Määrata punkti $M(x;y)$ trajektoor, kui punkt oma liikumisel jääb kaks korda ligemale punktile $A(1;0)$ kui punktile $B(4;0)$.

III peatükk.

SIRGJOON.

§ 8. Koordinaattelgedega paralleelsete sirgete võrrandid. Võtame y-teljega paralleelse sirge, mis asetseb sellest teljest kaugusel a (joon. 10).



Joon. 10.

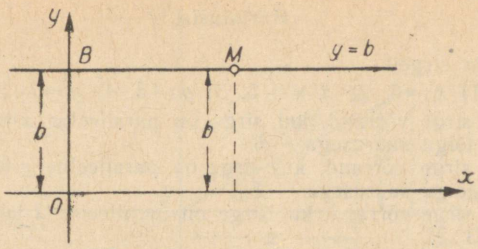
Selle sirge kõik punktid asetsevad ordinaatteljest võrdsel kaugusel — kaugusel a. Järelikult sirge AM iga punkti abstsiss on üks ja seesama, nimelt:

$$x = a, \qquad (1)$$

kusjuures aga nende punktide ordinaadid on erinevad. Seega määrab võrrand (1) üheselt y-teljega paralleelse sirge ja on seetõttu selle sirge *võrrandiks*.

Võtame nüüd x-teljega paralleelse sirge, mis asetseb sellest teljest kaugusel b (joon. 11). Selle sirge kõik punktid asetsevad x-teljest võrdsel kaugusel — kaugusel b, s. t. sirge BM mistahes punktil on erinevate abstsisside juures üks ja sama ordinaat, ja nimelt:

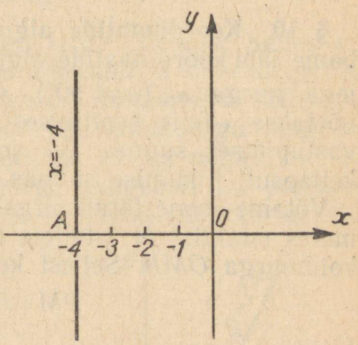
$$y = b. \qquad (2)$$



Joon. 11.

Nagu siit nähtub, määrab võrrand (2) üheselt x-teljega paralleelse sirge ja on seetõttu selle sirge *võrrandiks*.

Võrrandite (1) ja (2) järgi võib ehitada neile võrranditele vastavad sirged. Olgu näiteks antud sirge $x = -4$. Paigutades x-teljele lõigu $OA = -4$ (joon. 12) ja tõmmates läbi punkti A y-teljega paralleelse sirge, saame otsitava sirge.



Joon. 12.

§ 9. Koordinaattelgede võrrandid. Võtame y-teljega paralleelse sirge võrrandi:

$$x = a$$

ja vähendame selles võrrandis suuruse a absoluutväärtust, siis ligineb selle võrrandiga määratud sirge y-teljele, jäädes viimasega kogu aeg paralleelseks. Kui $a = 0$, siis sirge ühtib y-teljega. Võrrand

$$x = 0$$

on *y-telje võrrandiks.*

Kui aga x-teljega paralleelse sirge võrrandis

$$y = b$$

vähendame suuruse b absoluutväärtust, siis ligineb see sirge x-teljele, jäädes viimasega paralleelseks. Kui $b = 0$, siis ühtib sirge x-teljega. Seega võrrand

$$y = 0$$

on *x-telje võrrandiks.*

1. Ehitada sirged

1) $x = 3$, 2) $x = -5$, 3) $y = 3$, 4) $y = -2$.

2. Leida sirge võrrand, kui sirge on paralleelne x-teljega ja lõikab y-teljelt lõigu suurusega -5.

3. Leida sirge võrrand, kui sirge on paralleelne y-teljega ja lõikab x-teljelt lõigu suurusega -2.

4. Leida sirge võrrand, kui sirge on paralleelne x-teljega ja läbib punkti $A(-3; 2)$.

5. Leida y-teljega paralleelse sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(-3; -1)$.

6. Ruudu külje pikkus on 12. Leida kõikide külgede võrrandid, kui koordinaattelgedeks võtta ruudu külgedega paralleelsed sirged, mis läbivad ruudu keskpunkti.

7. Ristküliku küljed on 6 ja 8 ning ühtivad koordinaattelgedega. Leida selle ristküliku külgede võrrandid juhul, kui ristkülik asetseb esimeses veerandis.

§ 10. Koordinaatide algust läbiva sirge võrrand. Tõmbame läbi koordinaatide alguse sirge, mis moodustab x-teljega nurga α ($\alpha \neq 90°$) (joon. 13). Positiivne nurk α võetakse x-telje positiivsest suunast kellaosuti liikumisele vastupidises suunas (vt. joon. 13), negatiivne nurk aga kellaosuti liikumise suunas.

Võtame joonestatud sirgel vabalt punkti $M(x; y)$. Tõmmates punktist M x-teljele ristsirge MP, saame täisnurkse kolmnurga OMP. Sellest kolmnurgast leiame:

$$PM = OP \tan \alpha. \tag{1}$$

Kuid

$$OP = x \text{ ja } PM = y,$$

seega saab võrdus (1) järgmise kuju:

$$y = x \tan \alpha.$$

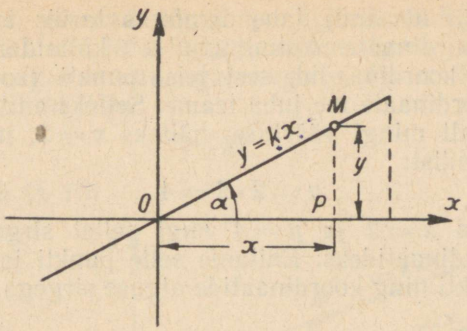
Tähistame

$$\tan \alpha = k, \tag{2}$$

siis saame

$$y = kx.$$

Seega rahuldavad sirge OM mistahes punkti koordinaadid saadud võrrandit. Saab näidata, et iga väljaspool sirget OM asetseva punkti koordinaadid ei rahulda seda võrrandit. Seetõttu nimetatakse saadud võrrandit sirge OM võrrandiks.



Joon. 13.

Niisiis,

$$y = kx$$

on *koordinaatide algust läbiva sirge võrrand.* Selles võrrandis on x ja y *jooksvad koordinaadid* ja k — *sirge tõus.*

Definitsioon. *Sirge tõusuks nimetatakse selle sirge ja x-telje positiivse suuna vahelise kaldenurga tangensit.*

Suurus k võib olla nii positiivne kui ka negatiivne. Kui α on teravnurk, siis selle nurga tangensil on positiivne väärtus; kui aga α on nürinurk — negatiivne väärtus. Seepärast on suurus k sirge võrrandis positiivne, kui α on teravnurk, ja negatiivne, kui α on nürinurk.

Teades sirge $y = kx$ tõusu, võib määrata sirge asendi.

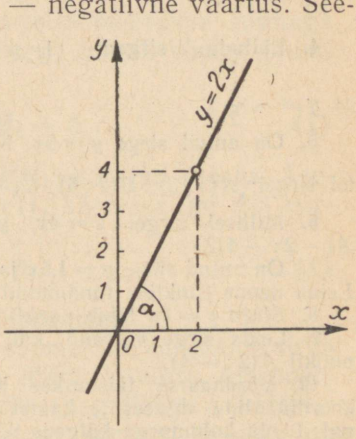
Olgu tarvis ehitada sirge $y = 2x$.

Selleks leiame nurga α suuruse tingimusest:

$$k = \tan \alpha = 2,$$

millest

$$\alpha = 63°26'.$$



Joon. 14.

Ehitades punkti O juurde leitud nurga, saamegi otsitava sirge (joon. 14).

Selle sirge võib ehitada ka lihtsamal viisil.

On teada, et sirge asend määratakse kahe punkti abil,

seepärast on ülesande lahendamiseks tarvis teada nende punktide koordinaate. Antud juhul on küllaldane määrata ühe punkti koordinaadid, sest teise punkti (koordinaatide alguse) koordinaate me juba teame. Selleks anname suurusele x vabalt mingi väärtuse, näiteks $x = 2$, ning leiame sirge võrrandist:

$$y = 2 \cdot 2 = 4.$$

Väärtused $x = 2$ ja $y = 4$ ongi sellel sirgel asetseva punkti koordinaatideks. Ehitame selle punkti ja ühendame saadud punkti ning koordinaatide alguse sirgega (joon. 14).

Harjutusi.

1. Leida koordinaatide algust läbiva sirge võrrand, kui sirge moodustab x-telje positiivse suunaga ühe järgnevatest nurkadest:

1) 45°, 2) 30°, 3) 135°, 4) 0°, 5) 180°.

2. Sirge on antud võrrandiga $y = kx$. Milline on sirge asend, kui:

1) $k = 0$, 2) $k = 1$, 3) $k = -1$?

3. Millise nurga moodustavad järgmised sirged x-telje positiivse suunaga:

1) $y = \sqrt{3}x$, 2) $y = \frac{2}{3}x$, 3) $y = -2x$?

4. Ehitada sirged: 1) $y = 2x$, 2) $y = \frac{1}{2}x$, 3) $y = -2x$, 4) $y = -\frac{1}{2}x$.

5. On antud sirge $y = 3x$. Kas järgmised punktid asetsevad sellel sirgel: $A(1\,;3)$, $B(2\,;5)$, $C(-\frac{1}{3}\,;-1)$?

6. Millisel sirgel $y = 4x$, $y = -3x$ ja $y = 2x$ asetseb punkt $A(-2\,;-4)$?

7. On antud sirge $y = 1{,}5x$ ja sellel punktid $A(x\,;6)$ ja $B(-2\,;y)$. Leida nende punktide tundmatud koordinaadid.

8. Sirge $y = kx$ läbib punkti $A(-1\,;5)$. Leida sirge tõus.

9. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib koordinaatide alguse ja punkti $A(2\,;-4)$.

10. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga teravnurga tipp asetseb koordinaatide alguses ja kaatet pikkusega 10 x-telje positiivsel suunal. Leida kolmnurga külgede võrrandid.

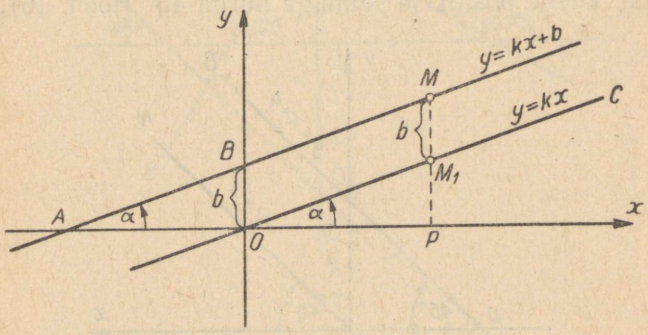
11. Ehitada punktid $A(-6\,;0)$ ja $B(0\,;3)$ ning ristkülik $OACB$. Leida ristküliku külgede ja diagonaali OC võrrandid.

12. Koordinaatide algusesse on rakendatud jõud, mille komponendid 5 ja -2 on suunatud vastavalt mööda x- ja y-telge. Kirjutada selle sirge võrrand, mida mööda on suunatud jõud, ning ehitada see sirge.

§ 11. Sirge võrrand tõusu ja algordinaadiga. Olgu antud sirge OC, mis läbib koordinaatide alguse ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α (joon. 15). Selle sirge võrrandil on kuju

$$y = kx,$$

kus $k = \tan \alpha$ (§ 10).



Joon. 15.

Tõmbame sirge $AB \parallel OC$, mis lõikab y-teljelt lõigu $OB = b$. Sirge AB moodustab x-telje positiivse suunaga niisama suure nurga α. Olgu $M(x\,;\,y)$ vabalt võetud punkt sirgel AB. Jooniselt 15 leiame:

$$y = PM = PM_1 + b, \qquad (1)$$

kuid kolmnurgast OPM_1 saame: $PM_1 = x \cdot \tan \alpha = kx$. Asetades PM_1 väärtuse võrdusesse (1), saame sirge AB võrrandi kujul:

$$y = kx + b, \qquad (2)$$

kus k on *sirge tõus* ja b — *algordinaat*.

Märgime, et sirge $y = kx + b$ saame, kui nihutame sirge $y = kx$ (joon. 15) kõiki punkte lõigu b võrra ülespoole (positiivse b korral) või allapoole (negatiivse b korral).

Koordinaatide algust läbiva sirge võrrand $y = kx$ on võrrandi (2) erijuhus, kus $b = 0$.

Teades tõusu k ja algordinaati b, võib määrata sirge asendi. Olgu näiteks tarvis ehitada sirge

$$y = x + 4.$$

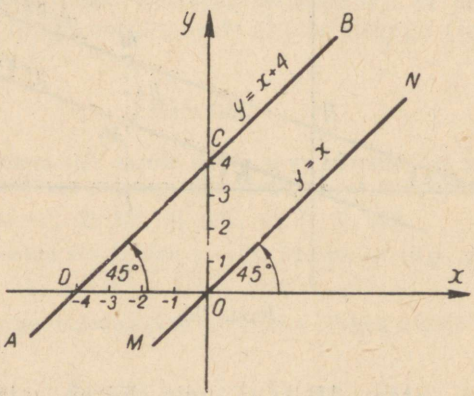
Antud võrrandist nähtub, et

$$\tan \alpha = 1,$$

millest

$$\alpha = 45°.$$

Tõmbame läbi koordinaatide alguse sirge MN, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 45° (joon. 16).



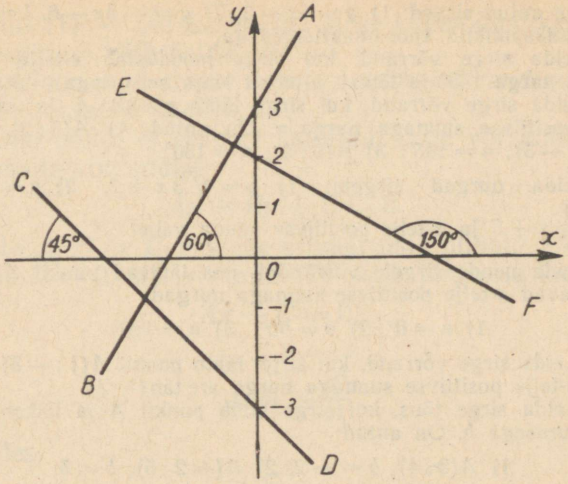
Joon. 16.

Nagu võrrandist on näha, lõikab sirge $y = x + 4$ y-telge punktis C, mis asetseb nelja pikkusühiku kaugusel koordinaatide algusest. Seepärast ongi sirge AB, mis läbib punkti C ja on paralleelne sirgega MN, otsitavaks sirgeks.

Kuid lihtsam on ehitada sirget tema kahe punkti järgi. Nendeks punktideks on kohane valida sirge ja koordinaattelgede lõikepunktid, mis leitakse järgmisel viisil. Võtame antud võrrandis $x = 0$, saame $y = 4$. Tähendab, sirge lõikab y-telge punktis $C(0\,;4)$. Võtame $y = 0$ ja leiame, et $x = -4$. Tähendab, sirge lõikab x-telge punktis $D(-4\,;0)$. Ehitame joonisel punktid C ja D ning tõmbame neist läbi otsitava sirge.

N ä i d e. Leida joonisel 17 kujutatud sirgete AB, CD ja EF võrrandid.

L a h e n d u s. Et leida antud sirgete võrrandeid, tuleb määrata suurused k ja b, ning seejärel asetada nende väärtused võrrandisse $y = kx + b$.



Joon. 17.

Sirge AB jaoks $k = \tan 60° = \sqrt{3}$, $b = 3$;
„ CD „ $k = \tan (180° - 45°) = \tan 135° = -1$,
$b = -3$;

„ EF „ $k = \tan 150° = -\tan 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = 2$.

Järelikult nende sirgete võrranditeks on:

AB: $y = \sqrt{3}x + 3$,

CD: $y = -x - 3$,

EF: $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

Harjutusi.

1. Ehitada sirged:
1) $y = 3x + 2$,
2) $y = 3x - 2$,
3) $y = -3x + 2$,
4) $y = -3x - 2$.

2. Millisel sirgel:

1) $y = -3x + 1$, 2) $y = \frac{5}{2}x - \frac{1}{2}$, 3) $y = -8x - 10$

asetseb punkt $(-1; -2)$?

3. On antud sirge $y = 5x - 2$ ja sellel punkt, mille abstsiss on 1. Leida selle punkti ordinaat.

4. Sirgel $y = -2x + 1$ asetseb punkt, mille ordinaat on 5. Leida selle punkti abstsiss.

5. On antud sirged: 1) $y = 4x - 2$, 2) $y = -3x - 6$. Leida nende sirgete lõikepunktid koordinaattelgedega.

6. Leida sirge võrrand, kui sirge moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 135° ja lõikab y-teljelt lõigu suurusega -5.

7. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti A ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α. On antud: 1) $A(0;2)$, $\alpha = 45°$; 2) $A(0;-3)$, $\alpha = 135°$; 3) $A(0;4)$, $\alpha = 150°$.

8. Leida nurgad sirgete: 1) $y = \sqrt{3}x + 2$, 2) $y = -x - 3$, 3) $y = \frac{1}{2}x + 5$ ja x-telje positiivse suuna vahel.

9. Leida nende sirgete võrrandid, mis läbivad punkti $A(2;5)$ ja moodustavad x-telje positiivse suunaga nurgad:

1) $\alpha = 0°$, 2) $\alpha = 90°$, 3) $\alpha = 180°$.

10. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(1;-3)$ ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga $\operatorname{arc\,tan}(-2)$.

11. Leida sirge tõus, kui sirge läbib punkti A ja lõikab y-teljelt lõigu suurusega b. On antud:

1) $A(3;4)$, $b = -2$; 2) $A(-2;5)$, $b = 5$.

12. Ruudu kaks külge ühtivad koordinaattelgede positiivsete suundadega. Leida ruudu diagonaalide võrrandid, kui ruudu külje pikkus on 12.

13. Leida ruudu külgede võrrandid, kui ruudu diagonaalid on koordinaattelgedeks. Ruudu külje pikkus on 4.

14. Ruudu külje pikkus on $4\sqrt{2}$. Leida ruudu külgede ja diagonaalide võrrandid, kui üks ruudu tippudest asetseb koordinaatide alguses ja diagonaal ühtib y-telje positiivse suunaga.

§ 12. Sirge võrrandi üldkuju. Eelnevates paragrahvides oli esitatud sirge võrrandite järgmised kujud:

y-teljega paralleelse sirge võrrand:

$$x = a, \text{ kus } a \neq 0, \tag{1}$$

x-teljega paralleelse sirge võrrand:

$$y = b, \text{ kus } b \neq 0, \tag{2}$$

y-telje võrrand:

$$x = 0, \tag{3}$$

x-telje võrrand:

$$y = 0, \tag{4}$$

koordinaatide algust läbiva sirge võrrand:

$$y = kx, \tag{5}$$

sirge võrrand tõusu ja algordinaadiga:

$$y = kx + b. \tag{6}$$

Võrrandid (1) — (6) kujutavad sirge kõikvõimalikke asendeid, seepärast võib öelda, et

iga sirgjoon määratakse esimese astme võrrandiga jooksvate koordinaatide suhtes.

Näitame nüüd, et eespool esitatud sirge võrrandi kujud võime saada võrrandist

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

kordajate A, B ja C mõnede eriväärtuste puhul.

I. Kui $B = 0$, siis võrrand (7) saab järgmise kuju:

$$Ax + C = 0,$$

millest

$$x = -\frac{C}{A}.$$

Asendades

$$-\frac{C}{A} = a,$$

saame

$$x = a.$$

Võrrand $Ax + C = 0$ on y-teljega paralleelse sirge võrrand.

II. Kui $A = 0$, siis

$$By + C = 0,$$

siit

$$y = -\frac{C}{B}.$$

Asendades

$$-\frac{C}{B} = b,$$

saame

$$y = b.$$

Võrrand $By + C = 0$ määrab x-teljega paralleelse sirge.

III. Kui $B = 0$ ja $C = 0$, siis

$$Ax = 0,$$

siit

$$x = 0.$$

IV. Kui $A = 0$ ja $C = 0$, siis

$$By = 0,$$

siit

$$y = 0.$$

V. Kui $C = 0$, siis

$$Ax + By = 0,$$

siit

$$y = -\frac{A}{B}x.$$

Asendades

$$-\frac{A}{B} = k,$$

siis

$$y = kx.$$

Võrrand $Ax + By = 0$ määrab koordinaatide algust läbiva sirge.

VI. Kui võrrandi (7) üksk̀i kordajatest ei võrdu nulliga, siis ka sellel juhul võib teda teisendada meile tuntud sirge võrrandi kujusse. Leiame võrrandist (7) y väärtuse:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Asendades

$$-\frac{A}{B} = k$$

ja

$$-\frac{C}{B} = b,$$

võime kirjutada

$$y = kx + b.$$

Järelikult sisaldab võrrand

$$Ax + By + C = 0$$

kõiki meie poolt varem vaadeldud sirge võrrandeid; seepärast nimetatakse seda *sirge võrrandi üldkujuks.*

Niisiis, *iga esimese astme võrrand*

$$Ax + By + C = 0$$

määrab kordajate A, B ja C mistahes väärtuste puhul sirgjoone.

N ä i d e 1. Ehitada sirge $2x - 5y + 10 = 0$.

L a h e n d u s. Kõige lihtsam on ehitada sirget tema kahe punkti järgi, mis asetsevad koordinaattelgedel. Sirge ja

x-telje lõikepunkti ordinaat võrdub nulliga; et leida selle punkti abstsissi, võtame antud võrrandis $y = 0$; saame:

$$2x + 10 = 0,$$

millest

$$x = -5.$$

Seega on ühe otsitava punkti koordinaadid $(-5\,;\,0)$.

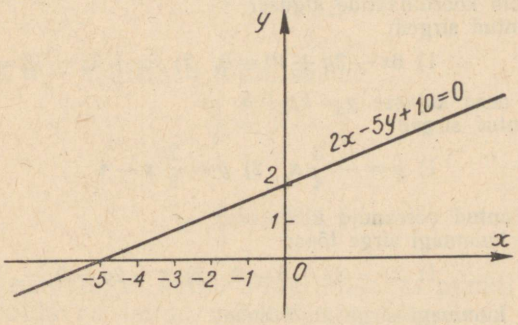
Samal viisil leiame sirge ja y-telje lõikepunktide koordinaadid. Selleks võtame antud võrrandis $x = 0$, siis

$$-5y + 10 = 0,$$

millest

$$y = 2.$$

Teise punkti koordinaadid on järelikult $(0\,;\,2)$. Ehitanud need punktid, tõmbame läbi nende punktide otsitava sirge (joon. 18).



Joon. 18.

N ä i d e 2. Leida sirge $4x + 6y - 3 = 0$ tõus ja algordinaat.

L a h e n d u s. Anname sellele võrrandile kuju $y = kx + b$; selleks avaldame:

$$6y = -4x + 3,$$

millest

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}.$$

Võrreldes saadud võrrandit võrrandiga $y = kx + b$, leiame:

$$k = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{2}.$$

Sirge tõusu võib leida ka võrdusest (8). Selleks, nagu näeme, tuleb *sirge võrrandi üldkujus x kordaja jagada y kordajaga ja jagatis võtta vastandmärgiga.* Seega antud näites

$$k = -\frac{A}{B} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}.$$

Harjutusi.

1. Ehitada sirged:

1) $3x - 4y + 12 = 0$, 2) $4x + 5y + 20 = 0$, 3) $3x - 4y = 0$.

2. On antud sirged $5x - 3y + 2 = 0$ ja $4x + 5y = 0$. Kumb neist sirgetest läbib koordinaatide alguse?

3. On antud sirged:

1) $6x - 3y + 10 = 0$, 2) $5x + 8y - 15 = 0$.

Teisendada need kujusse $y = kx + b$.

4. On antud sirged:

1) $y = -\frac{3}{4}x$, 2) $y = \frac{2}{3}x - 4$.

Teisendada antud võrrandid üldkujusse.

5. Leida kummagi sirge tõus:

1) $2x - 3y + 5 = 0$, 2) $x + 2y = 0$.

6. Leida kummagi sirge algordinaat:

1) $2x - 9y - 6 = 0$, 2) $5x + 2y = 0$.

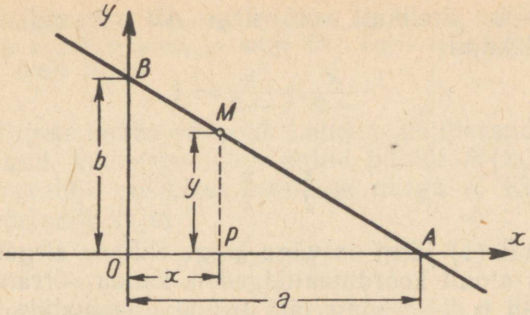
7. Leida sirge $5x + 6y - 15 = 0$ algordinaat ja selle sirge ning x-telje positiivse suuna vaheline kaldenurk.

8. Näidata, et sirgjoon on kahest antud punktist võrdsel kaugusel asetsevate punktide geomeetriline koht.

§ 13. Sirge võrrand telglõikudes. Koordinaattelgi lõikava sirge asend määratakse lõikudega, millised see sirge lõikab ära koordinaattelgedelt. Seda võib peegeldada ka sirge võrrand.

Olgu antud sirge, mis lõikab koordinaattelgedelt ära lõigud $OA = a$ ja $OB = b$ (joon. 19).

Võtame sellel sirgel vabalt punkti $M(x; y)$ ja tõmbame $MP \perp Ox$. Kolmnurkade PMA ja OBA sarnasusest saame:



Joon. 19.

$$\frac{PM}{OB} = \frac{PA}{OA}$$

ehk

$$\frac{y}{b} = \frac{a-x}{a}.$$

Jagades $a - x$ liikmeti a-ga, saame

$$\frac{y}{b} = 1 - \frac{x}{a},$$

millest

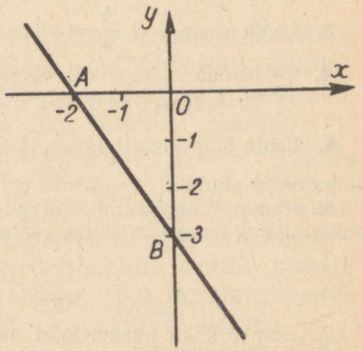
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (1)$$

Saab näidata, et antud sirge mistahes punkti koordinaadid rahuldavad leitud võrdust ning seepärast tuleb seda vaadelda kui sirge AB võrrandit.

Võrrand (1) sisaldab sirge poolt koordinaattelgedelt eraldatud lõike a ja b. Seepärast nimetatakse seda võrrandit *sirge võrrandiks telglõikudes*.

Suurused a ja b võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed, olenevalt sellest, millises suunas asetsevad lõigud a ja b koordinaatide algusest.

Näiteks, olgu antud sirge AB (joon. 20). Siin $a = -2$



Joon. 20.

ja $b = -3$; järelikult võib sirge AB võrrandi kirjutada järgmisel kujul:

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{-3} = 1$$

ehk

$$-\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1.$$

Võrrandi (1) järgi on väga kerge ehitada sirget. Selleks on tarvis ainult koordinaattelgedele kanda võrrandist võetud lõigud a ja b ning läbi nende otspunktide tõmmata sirge.

Märgime, et sirge võrrandit telglõikudes on kerge saada sirge võrrandi üldkujust: $Ax + By + C = 0$, kui selle kõik kordajad on nullist erinevad (vastasel korral sirge võrrandil telglõikudes pole mõtet).

Harjutusi.

1. Ehitada sirged:

$$1)\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,\quad 2)\ -\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$$

$$3)\ -\frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1,\quad 4)\ \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1.$$

2. Sirge läbib punkte A ja B:
   1) $A(0;2)$, $B(4;0)$; 2) $A(-2;0)$, $B(0;-1)$; 3) $A(0;3)$, $B(-2;0)$.
   Leida sirge võrrand telglõikudes.

3. Leida sirge $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ koordinaattelgede vahelise lõigu pikkus.

4. Teisendada järgmised võrrandid sirge võrrandeiks telglõikudes:
   1) $2x + 3y - 6 = 0$, 2) $x - 6y + 6 = 0$, 3) $2x - y - 1 = 0$.

5. Leida koordinaattelgede ja sirge $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$ poolt moodustatud kolmnurga pindala.

6. Rombi diagonaalid ühtivad koordinaattelgedega. Leida rombi pindala, kui tema ühe külje võrrand on

$$\frac{x}{2,5} + \frac{y}{10} = 1.$$

7. Rombi kaks naabertippu asetsevad punktides $(5;0)$ ja $(0;8)$. Leida rombi kõikide külgede võrrandid telglõikudes, kui rombi diagonaalid ühtivad koordinaattelgedega.

8. Koordinaattelgede vahelise sirglõigu pikkus on $3\sqrt{2}$ ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 135°. Leida selle sirge võrrand telglõikudes (kaks juhtu).

§ 14. Sirgete kimbu võrrand. Lahendame ülesande: leida sirge võrrand, kui sirge läbib antud punkti $M(x_1 ; y_1)$ ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga α. Kirjutame otsitava võrrandi kujul

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Ülesande lahendamiseks on tarvis leida k ja b väärtused ja asetada need seejärel võrrandisse (1). Kuna suurus α on antud, siis suurus k määratakse võrdusest $k = \tan \alpha$. Suuruse b määramiseks kasutame asjaolu, et punkt M asetseb sirgel (1) ja järelikult selle punkti koordinaadid rahuldavad sirge võrrandit.

Asendades võrrandis (1) x, y ja k vastavalt nende väärtustega, saame:

$$y_1 = kx_1 + b,$$

millest

$$b = y_1 - kx_1.$$

Võrrandi (1) võime kirjutada kujul

$$y = kx + y_1 - kx_1.$$

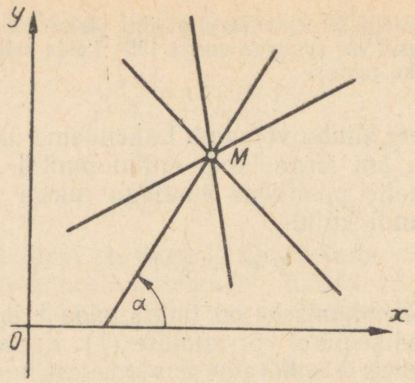
Teisendame seda võrrandit. Selleks kanname y_1 võrrandi vasakule poolele ja toome k sulgude ette:

$$y - y_1 = k(x - x_1). \qquad (2)$$

Võrrandis (2) omab k üheselt määratud konkreetset väärtust. Oletame nüüd, et punkti $M(x_1 ; y_1)$ läbiva sirge kaldenurk α muutub, siis võrrandis (2) suuruse $x - x_1$ ees olev kordaja saab erinevaid väärtusi. Sel juhul ei määra võrrand (2) mitte ainult ühte antud punkti M läbivat sirget, vaid seda punkti läbivate sirgete hulka.

Ühte punkti läbivate kõikide sirgete kogu nimetatakse *sirgete kimbuks* tsentriga selles punktis. Seega võib võrrandit (2) muutuva suurusega k vaadelda kui antud punkti läbivate *sirgete* (välja arvatud sirge, mis on paralleelne ordinaatteljega) *kimbu võrrandit* (joon. 21).

Et eraldada sellest kimbust sirge, mis moodustab x-teljega antud nurga, on tarvis võrrandis (2) k asendada tema



Joon. 21.

arvulise väärtusega. Läbigu näiteks sirgete kimp punkti $M(2\,;-5)$, siis on tema võrrand:

$$y+5=k(x-2).$$

Valime sellest kimbust sirge, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga $\alpha=45°$; siis

$$k=\operatorname{tan}45°=1$$

ja me saame järgmise võrrandi

$$y+5=x-2,$$

ehk

$$x-y-7=0.$$

Harjutusi.

1. On antud sirgete kimbu võrrand $y+2=k(x-6)$. Leida punkti koordinaadid, millist läbib see kimp.

2. On antud sirgete kimbu võrrand $y-4=k(x+3)$. Kas see kimp läbib punkti $(-3\,;4)$?

3. Leida punkti $(-6\,;-9)$ läbivate sirgete kimbu võrrand.

4. Punkti $(2\,;-7)$ läbivate sirgete kimbu võrrandist üks sirge moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 60° ja teine nurga 150°. Leida nende sirgete võrrandid.

5. Leida punkti $(-1\,;8)$ läbivate sirgete võrrandid, kui sirged moodustavad x-telje positiivse suunaga nurgad: 45°, 30°, 135°, 180°.

6. Leida punkti $(10\,;-2)$ läbiva sirge võrrand, kui sirge moodustab x-telje positiivse suunaga nurga:

1) $\operatorname{arc\,tan}3$, 2) $\operatorname{arc\,tan}(-2)$.

7. Võrdhaarse kolmnurga kõrgus ühtib y-telje positiivse suunaga ja alus x-teljega. Leida kolmnurga haarade võrrandid, kui üks neist moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 135° ja kolmnurga kõrgus on 5.

8. Võrdkülgse kolmnurga kõrgus on $6\sqrt{3}$ ja asetseb y-telje positiivsel suunal, alus aga x-teljel. Leida kolmnurga külgede võrrandid.

9. Leida võrdhaarse trapetsi haarade võrrandid, teades, et trapetsi aluste pikkused on 10 ja 6 ning haarad moodustavad alusega nurga 60°. Koordinaattelgedeks on trapetsi suurem alus (x-telg) ja trapetsi sümmeetriatelg (y-telg). Vaadelda kahte juhtu.

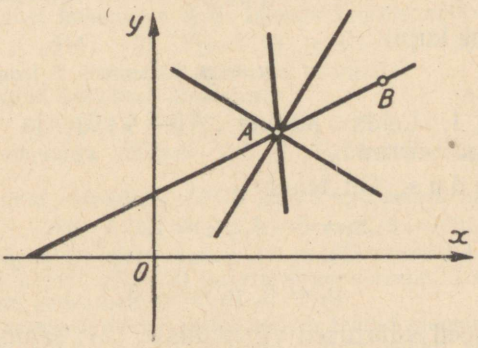
§ 15. Kahte antud punkti läbiva sirge võrrand. Olgu antud kaks punkti $A(x_1 ; y_1)$ ja $B(x_2 ; y_2)$; leida neid punkte läbiva sirge võrrand.

Kui võtta üks punkt, näiteks A, siis läbi selle punkti võib panna sirgete kimbu, mille võrrand on:

$$y - y_1 = k(x - x_1), \qquad (1)$$

kus k igale väärtusele vastab üks sirge.

Eraldame sellest kimbust sirge, mis läbib ka punkti B (joon. 22). Et leida selle sirge võrrandit, on vaja teada



Joon. 22.

tema tõusu. Võtame arvesse, et punkt B asetseb otsitaval sirgel ning seepärast peavad tema koordinaadid muutma võrrandi (1) samasuseks k puhul, mis võrdub otsitava sirge tõusuga. Asendades võrrandis (1) jooksvad koordinaadid x ja y punkti B koordinaatidega, saame:

$$y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1),$$

millest leiame otsitava sirge tõusu:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Võrrandi (1) võib kirjutada nii:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Jagades võrrandi mõlemad pooled vahega $y_2 - y_1$, saame:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \qquad (2)$$

kus x ja y on jooksvad koordinaadid. Võrdus (2) on kahte antud punkti läbiva sirge võrrandiks. See on (nagu sirge võrrand telglõikudeski) sirge võrrandi erikuju.

Kui $x_1 = x_2$ või $y_1 = y_2$, siis kaotab valem (2) oma mõtte, kuna nulliga jagada ei saa. Neil juhtudel asetsevad punktid A ja B kas y-teljega paralleelsel sirgel või x-teljega paralleelsel sirgel. Esimesel juhul kirjutatakse sirge võrrand kujul

$$x = x_1,$$

teisel juhul kujul

$$y = y_1.$$

N ä i d e 1. Leida punkte $A(-4;6)$ ja $B(2;-3)$ läbiva sirge võrrand.

L a h e n d u s. On teada:

$$x_1 = -4,\ x_2 = 2$$

ja

$$y_1 = 6,\ y_2 = -3.$$

Asetame need väärtused võrrandisse (2); saame:

$$\frac{y - 6}{-3 - 6} = \frac{x + 4}{2 + 4}$$

ehk

$$\frac{y - 6}{-9} = \frac{x + 4}{6}.$$

Korrutades viimase võrduse mõlemad pooled -18-ga, saame:

$$2y - 12 = -3x - 12,$$

millest

$$3x + 2y = 0.$$

Näide 2. Sirge läbib punktid $A(3;2)$ ja $B(5;2)$. Leida selle sirge võrrand.

Lahendus. Kuna antud punktide ordinaadid on võrdsed, siis järeldame, et otsitav sirge on paralleelne x-teljega ja seepärast selle sirge võrrand on $y = 2$.

Harjutusi.

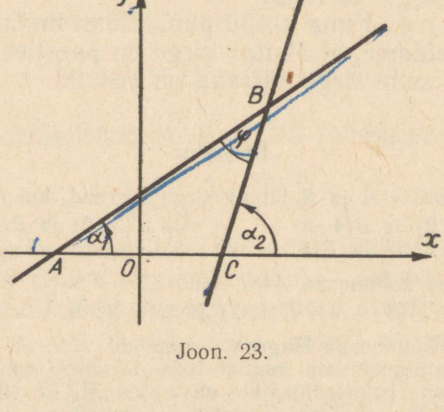
1. Leida punkte A ja B läbiva sirge võrrand, kui on antud:
   1) $A(1;2)$ ja $B(4;3)$ 3) $A(0;0)$ ja $B(4;-1)$
   2) $A(-2;3)$ ja $B(5;-3)$ 4) $A(-2;-3)$ ja $B(-2;5)$.
2. On antud kolmnurga ABC tipud:
   $$A(3;-1),\ B(4;2) \text{ ja } C(-2;0).$$
   Leida selle kolmnurga külgede võrrandid.
3. Maatüki plaanile on kantud kahe teetähise asukohad, millede koordinaadid on ristkoordinaatide süsteemis $M_1(30;40)$, $M_2(50;80)$. Leida sirge M_1M_2 ja plaani abstsisstelje positiivse suuna vaheline kaldenurk.
4. Leida lõigud, mis punkte $(2;3)$ ja $(4;1)$ läbiv sirge eraldab koordinaattelgedelt.
5. On antud kolmnurga ABC tippude koordinaadid:
   $$A(4;-2),\ B(-1;5) \text{ ja } C(-5;-3).$$
   Leida tipust A tõmmatud mediaani võrrand.
6. On antud kolmnurk tippudega
   $$A(2;4),\ B(0;2) \text{ ja } C(4;-2).$$
   Leida kolmnurga külgede AC ja BC keskpunkte läbiva sirge võrrand.
7. On antud rööpküliku $ABCD$ kolme tipu koordinaadid:
   $$A(-1;2),\ B(-2;-2) \text{ ja } C(5;-2).$$
   Leida rööpküliku diagonaalide AC ja BD võrrandid.
8. Leida punkti $(3;-2)$ läbiva sirge võrrand, kui sirge lõikab x-teljelt lõigu suurusega 5.
9. Sirgjooneliselt liikuv punkt asetses teatud ajamomentidel punktides $(5;2)$ ja $(-1;-2)$. Määrata liikuva punkti asukoht, kui ta jõuab x-teljele.

§ 16. Nurk kahe sirge vahel. Olgu antud kahe sirge võrrandid:

$$y = k_1x + b_1,$$
$$y = k_2x + b_2,$$

kus k_1, k_2, b_1 ja b_2 omavad üheselt määratud konkreetseid väärtusi. Tuletame valemi nende sirgete vahelise nurga määramiseks.

Tähistame antud sirgete ja x-telje positiivse suuna vahelised nurgad tähtedega α_1 ja α_2 ning nende sirgete vahelise nurga tähega φ (joon. 23).



Joon. 23.

Nurk α_2 kui kolmnurga ABC välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuolevate sisenurkade summaga, s. t.

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi,$$

millest

$$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Kui nurgad on omavahel võrdsed, siis on võrdsed ka nende nurkade tangensid, seepärast

$$\tan \varphi = \tan (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Rakendades kahe nurga vahe tangensi valemit, saame

$$\tan \varphi = \frac{\tan \alpha_2 - \tan \alpha_1}{1 + \tan \alpha_1 \tan \alpha_2}.$$

Kuid

$$\tan \alpha_1 = k_1 \text{ ja } \tan \alpha_2 = k_2,$$

seepärast

$$\tan \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (1)$$

Määrates valemi (1) järgi $\tan \varphi$ suuruse, saame leida ka nurga φ.

N ä i d e. Leida nurk sirgete $2x - 3y + 6 = 0$ ja $x + 5y - 2 = 0$ vahel.

L a h e n d u s. Antud võrranditest leiame nende sirgete tõusud (§ 12):

$$k_1 = \frac{2}{3} \text{ ja } k_2 = -\frac{1}{5}.$$

Vastavalt valemile (1) saame:

$$\operatorname{tan}\varphi = \frac{-\frac{1}{5} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{-\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = -1,$$

millest

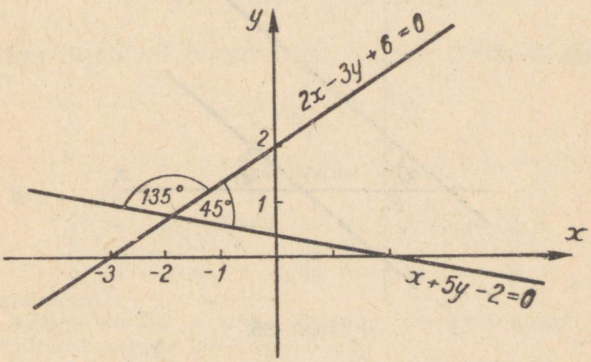
$$\varphi = \operatorname{arc\,tan}\,(-1) = 135°.$$

Saadud nurk sirgete vahel on nürinurk. Kuid kui võtta

$$k_1 = -\frac{1}{5} \text{ ja } k_2 = \frac{2}{3},$$

siis arvutades $\operatorname{tan}\varphi_1$ sama valemi (1) abil, saame:

$$\operatorname{tan}\varphi_1 = \frac{\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{5}\right)}{1 + \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{5}}{1 - \frac{2}{15}} = \frac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}} = 1,$$



Joon. 24.

millest $\varphi_1 = 45°$. Saame teravnurga, mis on varem leitud nürinurga kõrvunurgaks (joon. 24). Nurga esimene ja teine väärtus ongi ülesande vastuseks.

1. Leida teravnurk järgmiste sirgete vahel:

1) $y = 2x + 3$ ja $y = x - 2$,

2) $3x - y + 6 = 0$ ja $x - y + 4 = 0$,

3) $\frac{y}{8} - \frac{x}{4} = 1$ ja $\frac{x}{2} + \frac{y}{0{,}8} = 1$,

4) $y + 5 = 3x$ ja $y - 2 = 0$.

2. Leida nurk sirge $2x - 3y + 6 = 0$ ja punkte $(4; -5)$ ja $(-3; 2)$ läbiva sirge vahel.

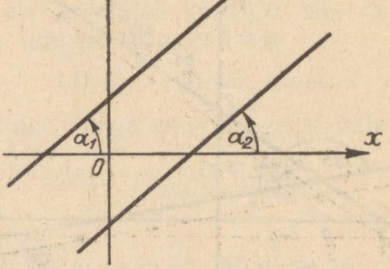
3. Millise nurga all lõikuvad sirged:

1) $x - 2y - 2 = 0$ ja $y = \frac{1}{2}x + 3$,

2) $3x + y - 2 = 0$ ja $x - 3y + 1 = 0$?

4. Kaks sirget lõikuvad punktis $(2; -1)$. Üks nendest sirgetest läbib koordinaatide alguse, teine aga punkti $(5; 1)$. Leida teravnurk nende sirgete vahel.

§ 17. Sirgete paralleelsuse tingimus. Kui kaks sirget on teineteisega paralleelsed, siis moodustavad nad x-telje positiivse suunaga võrdsed nurgad α_1 ja α_2 (joon. 25).



Joon. 25.

Nurkade α_1 ja α_2 võrdsusest järeldub:

$$\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$$

ehk

$$k_1 = k_2.$$

Vastupidi, kui $k_1 = k_2$, s. o. $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_2$, siis

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Kuid see tähendab, et antud sirged on paralleelsed.

Seega, *kui sirged on üksteisega paralleelsed, siis nende tõusud on võrdsed (ja vastupidi).*

N ä i d e. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(-2;6)$ ja on paralleelne sirgega $5x + 3y - 7 = 0$.

L a h e n d u s. Punkti A läbib sirgete kimp, mis sisaldab ka otsitavat sirget. Järelikult kirjutame kõigepealt välja punkti A läbivate sirgete kimbu võrrandi [(2) § 14]

$$y - 6 = k(x + 2).$$

Seejärel leiame ülesandes antud sirge võrrandist tõusu; rakendades võrdust (8) § 12, saame:

$$k = -\frac{5}{3}.$$

Sirgete paralleelsuse tingimuse põhjal peab otsitava sirge tõus olema samuti $-\frac{5}{3}$.

Asendame leitud väärtuse $k = -\frac{5}{3}$ sirgete kimbu võrrandisse:

$$y - 6 = -\frac{5}{3}(x + 3).$$

Tehes vajalikud teisendused, saame otsitava sirge võrrandi:

$$5x + 3y - 8 = 0.$$

Harjutusi.

1. Kas sirged

1) $2x + 3y - 7 = 0$ ja $2x + 3y + 9 = 0$
2) $y = 2x + 3$ ja $4y - 8x = 1$
3) $3x - 5y = 0$ ja $6x - 9y + 5 = 0$

on paralleelsed?

2. Millega võrdub a sirge võrrandis $y = ax + 4$, kui see sirge on paralleelne sirgega $2y - 3x - 5 = 0$.

3. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(2;3)$ ja on paralleelne sirgega $y = 2x + 5$.

4. Sirge läbib punkti $(-2;-1)$ ja on paralleelne sirgega $2x - y = 5$. Leida sirge võrrand.

5. Punkt liigub mööda sirget, mis on paralleelne sirgega $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1$ ja läbib mingil ajamomendil punkti $A(-1;8)$. Leida sirge võrrand, mida mööda liigub punkt.

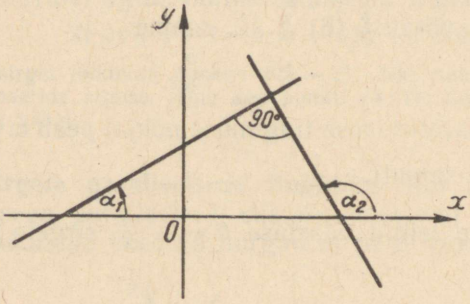
6. On antud punktid $A(3;5)$ ja $B(-3;4)$. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $C(-2;1)$ ja on paralleelne AB-ga.

7. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(2;5)$ ja on paralleelne sirgega, millel asetsevad punktid $(-4;3)$ ja $(-4;1)$.

8. Sirgega $4x-5y-9=0$ paralleelne sirge lõikab y-telge punktis, mis asetseb 3 pikkusühiku võrra kõrgemal koordinaatide algusest. Leida selle sirge võrrand.

9. Leida sirge võrrand, kui sirge lõikab x-teljelt lõigu pikkusega 5 ja on paralleelne sirgega $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

§ 18. Sirgete ristseisu tingimus. Olgu antud kaks sirget, mis moodustavad x-telje positiivse suunaga nurgad α_1 ja α_2 ning on teineteisega risti (joon. 26).



Joon. 26.

Sel juhul

$$\alpha_2 = 90° + \alpha_1,$$

millest

$$\tan \alpha_2 = \tan (90° + \alpha_1),$$

kuid

$$\tan (90° + \alpha_1) = -\cot \alpha_1 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}.$$

Järelikult

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1}$$

ehk

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (1)$$

Vastupidi, kui

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},$$

siis

$$\tan \alpha_2 = -\frac{1}{\tan \alpha_1} = -\cot \alpha_1 = \tan (90° + \alpha_1),$$

millest

$$\alpha_2 = 90 + \alpha_1,$$

s. t. antud sirged on teineteisega risti.

Seega, *kui sirged on teineteisega risti, siis nende tõusud on absoluutväärtuse poolest teineteise pöördarvud ja märkidelt vastupidised (ja ümberpöördult).*

Nii näiteks, kui ühe sirge tõus on $\frac{2}{5}$, siis ristsirge tõus on $-\frac{5}{2}$.

N ä i d e. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(-3;5)$ ja on risti sirgega $4x - 3y - 10 = 0$.

L a h e n d u s. Punkti A läbib sirgete kimp, mille hulgas asetseb ka otsitav sirge. Seepärast kirjutame kõigepealt välja selle kimbu võrrandi

$$y - 5 = k(x + 3). \qquad (2)$$

Et eraldada sellest kimbust otsitav sirge, tuleb leida otsitava sirge tõus k_1, mis on seotud antud sirge tõusuga k_2 võrdusega (1). Kuid $k_2 = \frac{4}{3}$; järelikult $k_1 = -\frac{3}{4}$.

Asetades võrrandis (2) k asemele tema väärtuse k_1, saame:

$$y - 5 = -\frac{3}{4}(x + 3).$$

See ongi otsitava sirge võrrand. Teisendades seda võrrandit, leiame:

$$4y - 20 = -3x - 9$$

ehk

$$3x + 4y - 11 = 0.$$

Harjutusi.

1. Kas sirged:

1) $3x - y - 3 = 0$ ja $x + 3y - 17 = 0$,
2) $2x + 5y - 6 = 0$ ja $5x + 2y - 3 = 0$

on teineteisega risti?

2. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(2;7)$ ja on risti sirgega $3x - 2y - 8 = 0$.

3. Punktist $(-2;-3)$ on sirgele $x-2y+3=0$ tõmmatud ristsirge. Leida ristsirge võrrand.

4. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib antud punkti $(-2;-1)$ ja on risti sirgega $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$.

5. Leida sirge võrrand, kui sirge lõikab y-teljelt lõigu suurusega 5 ja on risti sirgega $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$.

6. On antud kolmnurga ABC tippude koordinaadid:

$$A(3;4),\ B(2;5) \text{ ja } C(7;6).$$

Leida küljele AC tõmmatud kõrguse võrrand.

7. Leida punkte $(4;3)$ ja $(-2;5)$ ühendava lõigu keskristsirge võrrand.

8. Rombi vastastipud asetsevad punktides $(5;7)$ ja $(3;3)$. Leida rombi diagonaalide võrrandid.

§ 19. Sirgete lõikumine. Olgu antud kaks sirget, mis on määratud võrranditega:

$$Ax+By+C=0,$$
$$A_1x+B_1y+C_1=0.$$

Tuleb leida nende sirgete lõikepunkt.

Kuna antud sirgete lõikepunkt on nende sirgete ühiseks punktiks, siis selle punkti koordinaadid peavad rahuldama nii esimest kui ka teist võrrandit, s. t. need koordinaadid peavad olema antud võrrandite ühisteks lahenditeks.

Selleks et leida neid lahendeid, tuleb, nagu algebrast teada, *lahendada antud võrrandid koos,* vaadeldes neid võrrandisüsteemina.

N ä i d e 1. Leida sirgete

$$2x+3y-12=0 \text{ ja } x-y-1=0$$

lõikepunkt.

L a h e n d u s. Lahendame antud võrrandid võrrandisüsteemina. Korrutades teist võrrandit kolmega ja liites tulemuse esimese võrrandiga, saame:

$$\begin{array}{r} 2x+3y-12=0 \\ +\ 3x-3y-3=0 \\ \hline 5x\qquad -15=0, \end{array}$$

millest

$$x=3.$$

Teades x väärtust, leiame näiteks teisest võrrandist y väärtuse:

$$y = x - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Näide 2. Leida sirgete

$$2x - 5y + 8 = 0 \text{ ja } 4x - 10y - 3 = 0$$

lõikepunkt.

Lahendus. Korrutades esimese võrrandi kõiki liikmeid -2-ga ja liites tulemuse teise võrrandiga, leiame:

$$\begin{array}{r} -4x + 10y - 16 = 0 \\ +\quad 4x - 10y - 3 = 0 \\ \hline -19 = 0, \end{array}$$

mis on aga võimatu. Tähendab antud võrrandisüsteem ei oma lahendeid ja seepärast nende võrranditega määratud sirgetel ei ole ühiseid punkte, s. t. antud sirged on paralleelsed.

Samale järeldusele võime tulla ka siis, kui võrrelda antud sirgete tõuse.

Harjutusi.

1. Leida sirge $4x - 3y - 10 = 0$ ja koordinaattelgede lõikepunktide koordinaadid.
2. Leida kahe sirge lõikepunkt:

   1) $3x - 2y - 4 = 0$ ja $x + 3y - 5 = 0$;
   2) $x - 5y + 7 = 0$ ja $15y - 3x - 4 = 0$.

3. Näidata, et sirged $7x - 9y + 15 = 0$ ja $13x + 12y - 20 = 0$ lõikuvad punktis, mis asetseb y-teljel.
4. Leida kolmnurga tippude koordinaadid, kui on antud kolmnurga külgede võrrandid:

$$y = 2x - 1, \quad 2y - x = 3, \quad 3y + 2x - 5 = 0.$$

5. Leida punkt, milles punkte $A(4\,;\,1)$ ja $B(-1\,;\,-4)$ ühendav sirge lõikab abstsisstelge.
6. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $A(2\,;\,5)$ ja sirgete $3x - y = 0$ ning $2x + 5y - 17 = 0$ lõikepunkti B.
7. Sirgete

$$2x - y - 3 = 0 \text{ ja } x - 3y - 4 = 0$$

lõikepunkti läbib sirge, mis on paralleelne sirgega $x + y = 1$. Leida selle sirge võrrand.

8. Läbi sirgete

$$x + 2y + 2 = 0 \text{ ja } 3x + 4y + 9 = 0$$

lõikepunkti on tõmmatud ristsirge sirgele $2x + 3y - 6 = 0$. Leida selle ristsirge võrrand.

9. On antud kolmnurga külgede võrrandid:

$$2x - 5y = 3,\ x + 3y = 7 \text{ ja } 3x - 2y + 1 = 0.$$

Leida küljele $2x - 5y = 3$ tõmmatud kõrguse võrrand.

10. On antud kolmnurk, mille külgede võrrandid on

$$3x + 2y - 5 = 0,\ 3x - y - 11 = 0,\ 3x + y - 1 = 0.$$

Leida külje $3x + 2y - 5 = 0$ keskristsirge võrrand.

11. Rombi diagonaalid lõikuvad punktis $(5; 1)$. Rombi ühe diagonaali ja ühe külje võrrandid on vastavalt

$$y - x + 4 = 0 \text{ ja } 3y - x - 6 = 0.$$

Leida rombi tippude koordinaadid.

Segaülesandeid.

1. Leida sirge $3x + 4y = 8$ lõikepunktid koordinaattelgedega.
2. Näidata, et sirged

$$4x + 3y - 5 = 0,\ 3x - y + 6 = 0 \text{ ja } 2x - y + 5 = 0$$

lõikuvad ühes punktis.

3. x-teljega paralleelne sirge, mis kulgeb 4 ühiku võrra x-teljest kõrgemal, lõikab sirget $3x - 4y + 5 = 0$. Leida nende sirgete lõikepunkt.

4. Näidata, et sirge, millel asetsevad punktid $(-3; 6)$ ja $(2; -4)$ läbib koordinaatide alguse.

5. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(3; -5)$ ja lõikab x-teljelt lõigu pikkusega -2.

6. Kontrollida, kas punktid $A(1; 3)$, $B(5; 7)$ ja $C(10; 12)$ asetsevad ühel sirgel.

7. Leida sirge $4x + 3y + 12 = 0$ koordinaattelgede vahelise lõigu pikkus.

8. Kui suur on punkti C ordinaat, kui punkt C asetseb ühel sirgel punktidega $A(-8; -6)$ ja $B(-3; -1)$ ning ta abstsiss on 5.

9. Leida sirge võrrand, kui sirge läbib punkti $(-3; 4)$ ja on paralleelne koordinaattasapinna esimese veerandi nurgapoolitajaga.

10. Leida koordinaattasapinna esimese veerandi nurgapoolitajal punkt, mille kaugus punktist $M(-2; 0)$ on 10.

11. Missuguse m väärtuse puhul sirge $y = mx + 3$ läbib sirgete $2x - y + 1 = 0$ ja $y = x + 5$ lõikepunkti?

12. Ruudu vastastipud asetsevad punktides $(-2; 5)$ ja $(2; 8)$. Leida ruudu diagonaali pikkus ja diagonaalide võrrandid.

13. Ruudu $ABCD$ kaks naabertippu asetsevad punktides $A(-5; 4)$ ja $D(-3; 2)$. Ruudu diagonaal AC on paralleelne x-teljega. Leida ruudu ülejäänud kahe tipu koordinaadid.

14. On antud kolmnurga külgede võrrandid:

$$x + 2y - 2 = 0,\ 2x + y - 13 = 0 \text{ ja } x - 2y + 6 = 0.$$

Näidata, et see on täisnurkne kolmnurk ja leida ümberjoonestatud ringjoone raadius.

15. On vaja joonestada sirge, mis läbib punkti $(30; 50)$ ja moodustab ristkoordinaatide süsteemi x-telje positiivse suunaga nurga $45°$. Kui kaugel x-teljest tuleb võtta kaks punkti, mis asetsevad ordinaatteljest kaugusel 1 ja 3, et otsitav sirge neid läbiks?

16. Leida kaldenurgad kolmnurga ABC külgede ja x-telje positiivse suuna vahel, kui kolmnurga tipud asetsevad punktides $A(1;3)$, $B(6;1)$ ja $C(-1;-3)$.

17. Kaks sirget lõikuvad punktis $(2;-5)$. Leida nende sirgete vaheline teravnurk, kui üks sirgetest läbib punkti $(1;-3)$ ja teine punkti $(4;1)$.

18. On antud kaks sirget $y = 2x + 1$ ja $3x - 2y - 5 = 0$. Määrata kaugus punktide vahel, kus antud sirged lõikuvad sirgega $x - y - 3 = 0$.

19. Läbi punkti $(-5;3)$ on tõmmatud sirge nii, et selle sirge koordinaattelgede vaheline lõik jaotub antud punktis pooleks. Leida selle sirge võrrand.

20. Läbi punkti $(-4;-3)$ on tõmmatud sirge nii, et ta lõikab koordinaattelgedelt ära võrdsed lõigud. Leida selle sirge võrrand.

21. Kolmnurga külg pikkusega 10 asetseb x-teljel. Üks kolmnurga tippudest on punktis $(4;6)$. Leida kolmnurga külgede võrrandid, kui üks kolmnurga külgedest lõikab abstsisstelje ära lõigu pikkusega -2 (kaks juhtu).

22. On antud kolmnurk ABC tippudega

$$A(8;4),\ B(-2;6) \text{ ja } C(4;0).$$

Punktist D, mis jaotab külje BC suhtes $BD : DC = 2 : 1$, on tõmmatud sirge läbi külje AB keskpunkti E. Leida lõigu DE võrrand ja pikkus.

23. On antud kaks punkti $A(-4;-3)$ ja $B(1;2)$. Leida sirgele AB tõmmatud ristjoone võrrand, kui see ristjoon läbib punkti C, mis jaotab sirglõigu AB suhtes $AC : CB = 1 : 2$.

24. Kolmnurkse homogeense plaadi kaks tippu asetsevad punktides $A(6;0)$ ja $B(-8;-2)$ ning plaadi raskuskese punktis $M(1;2)$. Leida selle plaadi kolmanda tipu koordinaadid.

25. Kolmes punktis $A(-1;0)$, $B(-2;4)$ ja $C(4;-5)$ on rakendatud koormised vastavalt 30 kG, 50 kG ja 70 kG. Leida selle süsteemi raskuskese.

26. On antud kolmnurk ABC tippudega

$$A(-5;-1),\ B(-1;4) \text{ ja } C(3;2).$$

Tipust A on tõmmatud küljega BC paralleelne sirge ja tipust B küljele BC ristsirge. Leida tõmmatud joonte lõikepunkti koordinaadid.

27. Leida joone võrrand, mida mööda peab liikuma punkt, mille lähteasend on määratud koordinaatidega $(3;8)$, et jõuda lühimat teed mööda sirgeni $y = \frac{1}{2}x - 1$. Millisesse punkti jõuab ta sellel sirgel ja kui pikk on läbitud tee?

28. Kaks teineteisega 45° nurga all lõikuvat sirget läbivad x-teljel asetseva punkti; sirge, mis moodustab x-telje positiivse suunaga väiksema nurga, on määratud võrrandiga $2x - 3y - 6 = 0$. Leida teise sirge võrrand.

29. On antud kolmnurga külgede võrrandid

$$2x - 3y + 11 = 0,\ 3x + y - 11 = 0,\ x + 4y = 0.$$

Leida nurk x-telje positiivse suuna ja küljele $x + 4y = 0$ tõmmatud mediaani vahel.

30. Sirge $x + 2y - 6 = 0$ koordinaattelgede vaheline lõik on jaotatud kolmeks võrdseks osaks. Jaotuspunktidest on tõmmatud ristsirged lõikumiseni y-teljega. Leida lõikepunktide koordinaadid.

31. Kolmnurgas ABC on antud külgede keskpunktid $M_1(1\,;\,1)$, $M_2(3\,;\,-5)$ ja $M_3(5\,;\,-3)$. Leida kolmnurga ABC külgede võrrandid.

32. On antud kolmnurga ABC kaks tippu $A(3\,;\,-1)$ ja $B(5\,;\,5)$, ning kolmnurga kõrguste lõikepunkt $N(6\,;\,2)$. Leida kolmnurga kolmanda tipu koordinaadid.

33. On antud kolmnurga külgede võrrandid:

$$x + y - 3 = 0,\ x = 0,\ 2x + y - 1 = 0.$$

Leida, kui pikk on küljele $x + y - 3 = 0$ tõmmatud kõrgus.

34. Arvutada rööpküliku pindala, teades rööpküliku külgede võrrandeid:

$$y = 2x + 1,\ y = 2x - 5,\ y = x - 2,\ y = x + 2.$$

35. Arvutada rombi pindala, teades rombi külgede võrrandeid:

$$y = 0,\ y = 4,\ y = \frac{4}{3}x,\ y = \frac{4}{3}x - \frac{20}{3}.$$

36. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga üks kaatet on paralleelne x-teljega ja asetseb temast kaugusel 8. Hüpotenuusi pikendus läbib koordinaatide alguse. Leida selle kolmnurga külgede võrrandid, kui kolmnurga kaateti pikkus on 6 ja kolmnurk asetseb koordinaattasapinna esimeses veerandis (kaks juhtu).

37. Ruudu keskpunkti koordinaadid on $(3\,;\,-1)$ ning kahe külje võrrandid on

$$x + 3y + 10 = 0 \text{ ja } 3x - y - 20 = 0.$$

Leida ruudu diagonaalide võrrandid.

38. Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on paralleelne x-teljega. Täisnurga tipp asetseb punktis $(8\,;\,20)$ ning üks teravnurga tipp y-teljel. Leida selle kolmnurga külgede võrrandid (kaks juhtu).

39. Korrapärase kolmnurga üks külg on paralleelne y-teljega ning lõikab x-teljelt lõigu -4. Selle külje vastastipp asetseb punktis $(2\,;\,0)$. Leida kolmnurga kõrguste võrrandid.

40. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus lõikab koordinaattelgi punktides $(-5\,;\,0)$ ja $(0\,;\,5)$ ning üks kaatetitest punktides $(-2\,;\,0)$ ja $(0\,;\,1)$. Teise kaateti pikendus lõikab x-teljelt lõigu suurusega 4. Leida selle kolmnurga tippude koordinaadid.

41. Rööpküliku ühest tipust väljuvate kahe külje ja diagonaali võrrandid on vastavalt:

$$x - y + 4 = 0,\ y = 5 \text{ ja } 5x + 2y - 15 = 0.$$

Leida selle rööpküliku kahe teise külje võrrandid, kui rööpküliku diagonaalid lõikuvad x-teljel.

42. Rombi $ABCD$ kaks vastastippu asetsevad punktides $A(1\,;\,3)$ ja $C(5\,;\,9)$ ning külje AD võrrand on $x - y + 2 = 0$. Leida rombi kahe ülejäänud tipu koordinaadid.

43. Ristküliku $ABCD$ kaks vastastippu asetsevad punktides $A(1\,;\,4)$ ja $C(5\,;\,6)$ ning külg CD moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 45°. Leida selle ristküliku pindala.

44. Rombi üks külg läbib koordinaatide alguse ja moodustab x-telje positiivse suunaga nurga $\operatorname{arc\,tan}\frac{4}{3}$, teise külje võrrand on $y = 8$. Leida rombi ülejäänud külgede võrrandid, kui rombi diagonaalid lõikuvad teineteisega abstsisssteljel asetsevas punktis.

45. On antud kolmnurk ABC tippudega

$$A(4\,;\,1),\ B(7\,;\,5) \text{ ja } C(-4\,;\,7).$$

Leida nurga A poolitaja ja külje BC lõikepunkt.

46. On antud kolmnurga tipud

$$A(-2\,;\,-8),\ B(3\,;\,-8) \text{ ja } C(3\,;\,-5).$$

Leida nurga B poolitaja võrrand.

47. Punktist $A(6\,;\,9)$ lähtuv valguskiir moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 45°. Jõudnud x-teljeni, peegeldub valguskiir tagasi. Leida langeva ja peegelduva kiire võrrandid.

48. Valguskiir on suunatud mööda sirget $y = \frac{2}{3}x - 4$; jõudnud x-teljeni, peegeldub valguskiir tagasi. Määrata peegelduva kiire võrrand.

49. Valguskiir, väljudes punktist $A(2\,;\,3)$, peegeldub tagasi x-teljelt ja jõuab punkti $B(5\,;\,8)$. Leida langeva ja peegelduva kiire võrrandid.

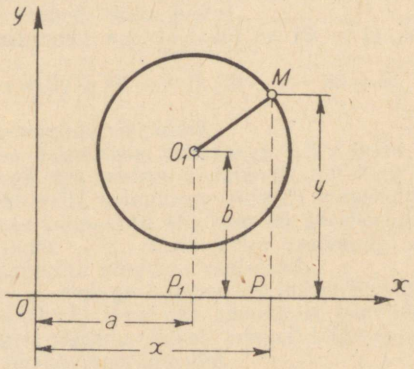
TRÜ Raamatukogu

IV peatükk.

TEIST JÄRKU KÕVERAD.

§ 20. Ringjoon ja selle võrrand. *Ringjooneks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, mis asetsevad võrdsel kaugusel ühest kindlast punktist, mida nimetatakse keskpunktiks.*

Kasutades seda definitsiooni, tuletame ringjoone võrrandi. Olgu ringjoone raadius r ja asetsegu ringjoone keskpunkt punktis $O_1(a\,;\,b)$. Võtame ringjoonel vabalt punkti $M(x\,;\,y)$ (joon. 27).



Joon. 27.

Kahe punkti vahelise kauguse valemi põhjal võime kirjutada:

$$O_1M = r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

ehk pärast võrduse mõlema poole ruutu tõstmist

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \qquad (1)$$

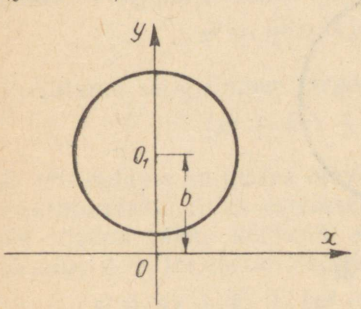
Kuna punkt M on meie poolt vabalt valitud ja raadius r on jääv suurus, siis võrdus (1) on õige ringjoone kõikide punktide jaoks, s. t. ringjoone mistahes punkti koordinaadid rahuldavad seda võrdust. Seega tuleb võrdust (1) vaadelda kui *ringjoone võrrandit.*

Võrrandis (1) a ja b on *ringjoone keskpunkti koordinaadid*, x ja y aga *jooksvad koordinaadid.*

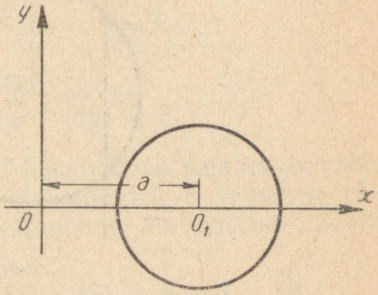
Kui $a = 0$, siis võrrand (1) saab järgmise kuju:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

ja määrab *ringjoone, mille keskpunkt asetseb y-teljel* (joon. 28).



Joon. 28.



Joon. 29.

Kui $b = 0$, siis saab võrrand (1) kuju:

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2$$

ja määrab *ringjoone, mille keskpunkt asetseb x-teljel* (joon. 29).

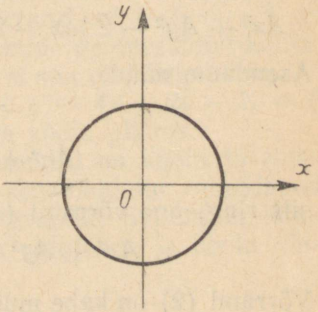
Lõpuks, kui $a = 0$ ja $b = 0$, siis teisendub võrrand (1) järgmiseks:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

ja määrab *ringjoone keskpunktiga koordinaatide alguses* (joon. 30).

Me võime alati ehitada ringjoone, kui on teada tema võrrand. Olgu näiteks tarvis ehitada ringjoon:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9.$$

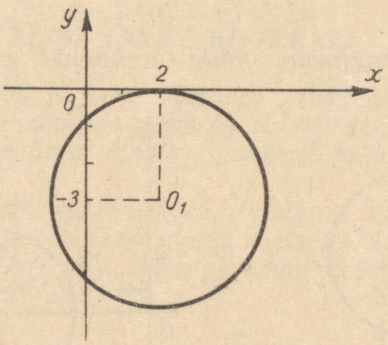


Joon. 30.

Kirjutame selle võrrandi järgmisel kujul:

$$(x-2)^2+[y-(-3)]^2=9.$$

Võrreldes seda võrrandit võrrandiga (1), näeme, et keskpunkti koordinaadid on $(2;-3)$ ja ringjoone raadius $r=3$. Ehitanud punkti $(2;-3)$, tõmbame sellest punktist raadiusega, mille pikkus on 3 ühikut, otsitava ringjoone (joon. 31).



Joon. 31.

§ 21. Ringjoone võrrand kui üldise teise astme võrrandi erikuju. Avades võrrandis (1) § 20 sulud, võime kirjutada:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2$$

ehk

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

Korrutades viimase võrduse kõiki liikmeid A-ga, saame:

$$Ax^2+Ay^2-2Aax-2Aby+Aa^2+Ab^2-Ar^2=0. \quad (1)$$

Asendame nüüd:

$$-2Aa=D,$$
$$-2Ab=E,$$
$$Aa^2+Ab^2-Ar^2=F,$$

siis ringjoone võrrand (1) saab kuju:

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0. \quad (2)$$

Võrrand (2) on kahe muutujaga üldise teise astme võrrandi erikuju. Tõepoolest, võrdleme võrrandit (2) üldise kahe

muutujaga teise astme võrrandiga, millel on, nagu teada, järgmine kuju:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (3)$$

Me näeme, et võrrand (2) erineb võrrandist (3) ainult selle poolest, et esimesel on x^2 ja y^2 kordajad võrdsed ning puudub korrutist xy sisaldav liige.

Niisiis, *ringjoon määratakse üldise kahe muutujaga teise astme võrrandiga, kui selles võrrandis x^2 ja y^2 kordajad on teineteisega võrdsed ning puudub korrutist xy sisaldav liige.*

Vastupidi, võrrand (2) määrab üldiselt rääkides ringjoone. Veendume selles näite varal. Olgu antud võrrand:

$$x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0.$$

Kirjutame selle ümber järgmiselt:

$$(x^2 + 4x) + (y^2 - 8y) = 5$$

ja teisendame sulgudes olevad kaksliikmed summa ja vahe täisruutudeks, liites esimesele kaksliikmele 4 ja teisele 16. Et võrdus jääks kehtima, suurendame ka paremat poolt summa $4 + 16$ võrra. Saame:

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = 5 + 4 + 16$$

ehk

$$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Viimane võrdus on niisuguse ringjoone võrrand, mille raadius on 5 ja keskpunkt asetseb punktis $(-2; 4)$.

Kuid esineb juhtumeid, kus kordajate mõnede väärtuste puhul võrrand (2) kujutab endast punkti või ei kujuta üldse mitte mingisugust kõverat. Näiteks, võrrand $x^2 + y^2 = 0$ määrab ainult punkti $(0; 0)$, võrrand $x^2 + y^2 = -4$ ei kujuta aga mitte mingisugust punktide geomeetrilist kohta, kuna reaalarvude ruutude summa ei saa olla negatiivne.

N ä i d e. On antud ringjoon $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ ja kõõl $x + y - 7 = 0$. Leida selle kõõlu pikkus.

L a h e n d u s. Kuna kõõlu otspunktid on kõõlu ja ringjoone ühised punktid, siis nende koordinaadid rahuldavad nii esimese kui ka teise joone võrrandit. Selleks et leida neid koordinaate, tuleb lahendada ringjoone ja kõõlu võrrandid koos. Asetades suuruse

$$y = 7 - x$$

ringjoone võrrandisse, saame:

$$x^2 + (7 - x)^2 - 4x + 2(7 - x) - 15 = 0$$

ehk

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 - 4x + 14 - 2x - 15 = 0$$

ehk lõpuks,

$$x^2 - 10x + 24 = 0.$$

Siit

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - 24} = 5 \pm 1,$$
$$x_1 = 5 - 1 = 4, \quad x_2 = 5 + 1 = 6.$$

Leiame y väärtuse:

$$y_1 = 7 - x_1 = 7 - 4 = 3,$$
$$y_2 = 7 - x_2 = 7 - 6 = 1.$$

Seega on kõõlu otspunktideks punktid $(4\,;\,3)$ ja $(6\,;\,1)$.

Kahe punkti vahelise kauguse valemi järgi võime määrata kõõlu pikkuse

$$d = \sqrt{(4 - 6)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}.$$

Harjutusi.

1. Ringjoone keskpunktiks on punkt O_1 ja raadiuseks r. Leida ringjoone võrrand, kui on antud:

1) $O_1(-1\,;\,2)$, $r = 5$, 2) $O_1(-2\,;\,-3)$, $r = \sqrt{5}$, 3) $O_1(0\,;\,5)$, $r = 6$.

2. Ehitada ringjooned:

1) $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$, 2) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 9$,
3) $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

3. Kas punktid $A(3\,;\,-1)$, $B(3\,;\,-9)$ ja $C(0\,;\,-3)$ asetsevad ringjoonel $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$?

4. On antud ringjoon $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 13$ ja sellel ringjoonel punkt, mille ordinaat võrdub nulliga. Leida selle punkti abstsiss.

5. Ringjoon keskpunktiga punktis O_1 läbib punkti A. Leida ringjoone võrrand, kui on antud:

1) $O_1(2\,;\,1)$, $A(5\,;\,5)$, 2) $O_1(-3\,;\,2)$, $A(-4\,;\,0)$.

6. Leida kahte punkti $A(-5\,;\,5)$ ja $B(1\,;\,3)$ läbiva ringjoone võrrand, kui raadius $r = \sqrt{10}$.

7. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon läbib punktid $A(2\,;\,4)$ ja $B(-2\,;\,0)$ ning keskpunkt asetseb x-teljel.

8. Leida ringjoone võrrand, kui ringjoon puudutab x-telge koordinaatide alguses ja läbib punkti $A(0\,;\,-8)$.

9. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$ keskpunkti koordinaadid ja raadiuse pikkus.

10. Ehitada ringjooned:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$, 3) $x^2 + y^2 - 12y + 11 = 0$,
2) $x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$, 4) $4x^2 + 4y^2 - 16x + 8y - 5 = 0$.

11. On antud ringjooned:

$$x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0 \text{ ja } x^2 + y^2 + 2x - 12y + 1 = 0.$$

Leida nende keskjoone võrrand (s. t. ringjoonte keskpunkte läbiva sirge võrrand).

12. Leida ringjoonte $x^2 + y^2 = 16$ ja $x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$ keskpunktide vaheline kaugus.

13. Leida ringjoone $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ diameetri võrrand, kui diameeter on paralleelne y-teljega.

14. On antud ringjoon $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$. Leida selle ringjoone diameetri võrrand, kui diameeter moodustab x-teljega nurga 45°.

15. On antud ringjoon $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$. Leida selle ringjoone diameetri võrrand, kui diameeter on risti kõõluga $2x - y + 3 = 0$.

16. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$ ja x-telje lõikepunktide koordinaadid.

17. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 4y - 1 = 0$ raadiuse võrrand, kui raadius on tõmmatud punkti $A(1; 4)$.

18. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 12x + 2y + 12 = 0$ puutuja võrrand, kui puutepunktiks on punkt $A(9; 3)$.

19. Leida sirge $y = x - 1$ ja ringjoone $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 5 = 0$ lõikepunktide koordinaadid.

20. Leida sirge $x = 3$ ja ringjoone $x^2 + y^2 + 3x - 6y - 9 = 0$ lõikepunktid.

21. Kuidas asetseb sirge $y - 6 = 0$ ringjoone $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ suhtes?

22. Leida ringjoonte $x^2 + y^2 = 10$ ja $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 30 = 0$ ühise kõõlu võrrand.

§ 22. Ellips ja selle võrrand.

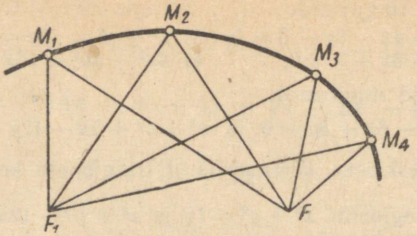
Ellipsiks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, kus iga punkti kauguste summa kahest antud punktist, mida nimetatakse fookusteks, on jääv suurus (ja suurem kui fookuste vaheline kaugus).

Olgu ellipsil võetud punktid M_1, M_2, M_3, M_4 jne. (joon. 32). Kui fookusi tähistada tähtedega F ja F_1, siis vastavalt antud definitsioonile võib kirjutada:

$$F_1M_1 + FM_1 = F_1M_2 + FM_2 = F_1M_3 + FM_3 = \\ = F_1M_4 + FM_4 = \text{const.} \qquad (1)$$

Punktide geomeetriline koht, mis vastab omadusele (1), ongi ellips.

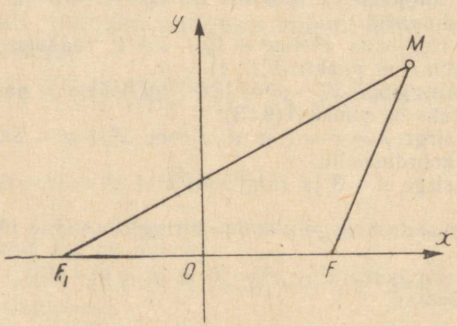
Koostame ellipsi definitsiooni põhjal ellipsi võrrandi. Selleks valime koordinaatide süsteemi järgmiselt. x-teljeks



Joon. 32.

võtame sirge, mis läbib fookusi F ja F_1, ja y-teljeks sirglõigu FF_1 keskristsirge (joon. 33). Tähistame fookuste vahelise kauguse F_1F $2c$-ga, siis on fookuste koordinaadid:

$$F(c\,;0) \text{ ja } F_1(-c\,;0).$$



Joon. 33.

Võtame ellipsil vabalt punkti $M(x\,;y)$. Tähistame iga punkti kauguste summa fookustest $2a$-ga, siis

$$FM + F_1M = 2a. \tag{2}$$

Kahe punkti vahelise kauguse valemi järgi leiame:

$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$
$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Nüüd anname võrdusele (2) järgmise kuju:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a, \tag{3}$$

mis kujutabki *ellipsi võrrandit* valitud koordinaatide süsteemis.

Lihtsustame võrrandit (3). Selleks kanname ühe juuravaldistest võrrandi paremale poolele:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Tõstame selle võrduse mõlemad pooled ruutu:

$$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2.$$

Avame sulud:

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2.$$

Koondame sarnased liikmed:

$$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} + 2cx$$

ehk

$$4a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} = 4a^2 + 4cx.$$

Taandades võrduse 4-ga ja tõstes võrduse mõlemad pooled ruutu, saame:

$$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = (a^2+cx)^2$$

ehk

$$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2.$$

Kanname kõik liikmed, mis sisaldavad suurusi x ja y, võrduse vasakule poolele, teised liikmed aga paremale poolele:

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

ehk

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad (4)$$

Kuid ellipsi definitsiooni põhjal

$$2c < 2a,$$

siit

$$c < a.$$

Viimasest võrratusest järeldub, et $a^2 - c^2 > 0$, ning seepärast võib seda tähistada suurusega b^2. Asetades selle suuruse võrdusesse (4), leiame:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \qquad (5)$$

Lõpuks, kui jagame viimase võrduse kõiki liikmeid avaldisega a^2b^2, siis saame lõplikult:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{6}$$

kus x ja y on ellipsi punktide jooksvad koordinaadid ja

$$b^2=a^2-c^2. \tag{7}$$

Võrrand (6) on *ellipsi võrrandi kanooniline kuju* *.

§ 23. Ellipsi võrrandi uurimine. Määrame kõigepealt võrrandist (5) § 22 y väärtuse. Selleks kanname b^2x^2 võrrandi paremale poolele ja jagame kõiki liikmeid suurusega a^2; saame:

$$y^2=\frac{a^2b^2-b^2x^2}{a^2}=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2},$$

siit

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \tag{1}$$

Samast võrrandist (5) leiame x väärtuse:

$$x^2=\frac{a^2b^2-a^2y^2}{b^2}=\frac{a^2(b^2-y^2)}{b^2},$$

järelikult,

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}. \tag{2}$$

Vaatleme nüüd võrdusi (1) ja (2).

I. Olgu

$$|x|<a\ **.$$

Siis saame võrduses (1) juuritavaks positiivse arvu ja y omab kahte väärtust, mis on absoluutväärtuselt võrdsed ja märkidelt vastupidised. See tähendab, et x igale väärtusele vastab ellipsil kaks punkti, mis on sümmeetrilised x-telje suhtes.

Olgu nüüd $|y|<b$.

---

* Võrrandi (6) saime võrrandist (3), kui tõstsime selle kaks korda ruutu. Üldiselt võivad aga sel juhul tekkida võõrlahendid. Saab näidata, et võrrandil (6) ei ole võõrlahendeid, s. t. mistahes punkt, mille koordinaadid rahuldavad võrrandit (6), asetseb ellipsil.

** $|x|$ tähendab, et võetakse x absoluutväärtus; seega tuleb võrratust $|x|<a$ lugeda järgnevalt: x on absoluutväärtuselt väiksem kui a.

Nagu näeme võrdusest (2), vastab siis y igale väärtusele kaks x väärtust, mis on absoluutväärtuselt võrdsed, kuid märkidelt vastupidised. Siit järeldub, et igale y väärtusele vastab ellipsil kaks punkti, mis on sümmeetrilised y-telje suhtes.

Öeldust järeldame, et *ellips*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

on sümmeetriline koordinaattelgede suhtes.

II. Leiame ellipsi lõikepunktid x-teljega.

Olgu

$$y=0,$$

siis saame võrdusest (2):

$$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2}=\pm a.$$

Siit järeldub: *ellips lõikab x-telge kahes punktis, millede koordinaadid on* $(a\,;0)$ *ja* $(-a\,;0)$ (punktid A ja A_1 joonisel 34).

III. Leiame ellipsi lõikepunktid y-teljega.

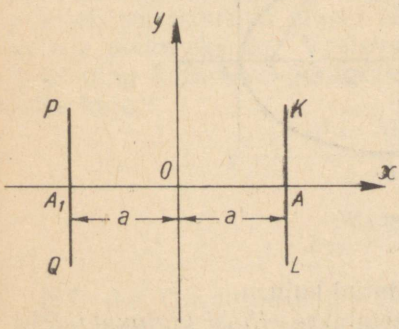
Olgu

$$x=0;$$

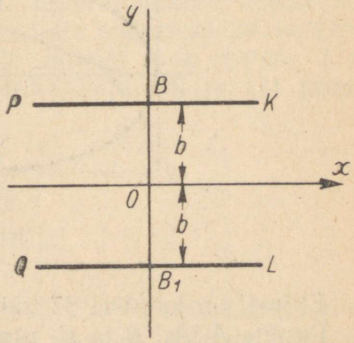
siis saame võrdusest (1):

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2}=\pm b.$$

Siit järeldame, et *ellips lõikab y-telge kahes punktis, millede koordinaadid on* $(0\,;b)$ *ja* $(0\,;-b)$ (punktid B ja B_1 joonisel 35).



Joon. 34.



Joon. 35.

IV. Omandagu x selliseid väärtusi, et

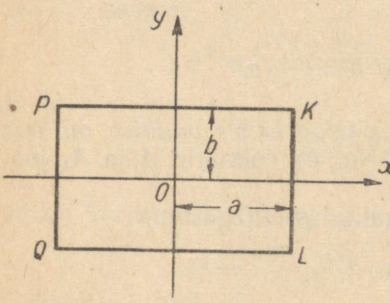
$$|x| > a; \tag{3}$$

siis juuritav avaldis võrduses (1) on negatiivne ja järelikult y väärtused on imaginaarsed. See tähendab, et ei ole ellipsi punkte, millede abstsissid rahuldavad tingimust (3), s. t., et ellips asetseb vöötmes, mida piiravad sirged $x = +a$ ja $x = -a$ (joonisel 34, sirged KL ja PQ).

Kui oletame, et

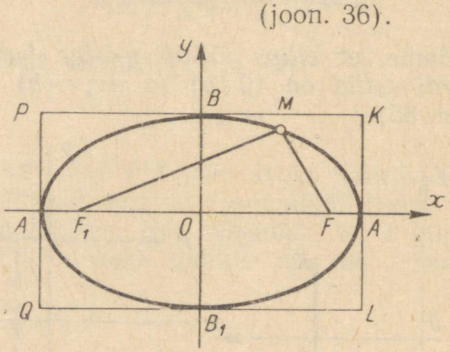
$$|y| > b, \tag{4}$$

siis saame võrdusest (2) ka suurusele x imaginaarsed väärtused. See kõneleb sellest, et punktid, mis rahuldavad tingimust (4), ei asetse ellipsil, s. t., et ellips on piiratud sirgetega $y = +b$ ja $y = -b$ (joonisel 35, sirged PK ja QL).



Joon. 36.

Öeldust järeldub, et *ellipsi kõik punktid asetsevad ristkülikus, mille küljed pikkustega 2a ja 2b on paralleelsed koordinaattelgedega ning mille diagonaalide lõikepunkt asetseb koordinaatide alguses* (joon. 36).



Joon. 37.

Ellipsil on joonisel 37 näidatud kuju.

Punkte A, A_1, B ja B_1 nimetatakse *ellipsi lagipunktideks*, punkti O aga *ellipsi keskpunktiks*. Sirglõiku $A_1A = 2a$

nimetatakse ellipsi *suurteljeks*, sirglõiku $B_1B = 2b$ aga ellipsi *väiketeljeks*. Sirglõike FM ja F_1M nimetatakse punkti M *raadiusvektoriteks*.

§ 24. Ellipsi ekstsentrilisus. *Ellipsi ekstsentrilisuseks nimetatakse fookuste vahelise kauguse ja suurtelje suhet, s. t.*

$$\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Ekstsentrilisust tähistatakse tavaliselt tähega e. Seega

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

Kuid vastavalt valemile (7) § 22

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Seepärast võib ekstsentrilisuse määramiseks kasutada järgmist võrdust:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \qquad (2)$$

Kuna $0 < c < a$ (§ 22), siis ellipsi ekstsentrilisus on ühest väiksem positiivne arv.

Ekstsentrilisus iseloomustab ellipsi kuju, mida on kerge näha valemist (2). Näiteks, kui vähendada suurust b, jättes a muutmata, siis vahe $a^2 - b^2$ suureneb, mistõttu suureneb ka murd valemi paremal poolel ja järelikult kasvab e. Täpselt samuti suureneb ekstsentrilisus suurtelje pikendamisel, s. t. a suurendamisel.

Meie vaatlesime ellipsit, kus $b < a$. Kui $b > a$, siis kujutab võrrand (6) § 22 ellipsit, mille fookused asetsevad y-teljel; sel juhul on ellipsi suurtelje pikkuseks $2b$ ja väiketelje pikkuseks $2a$. Vastavalt sellele saab valem (7) § 22 ning käesoleva paragrahvi valemid (1) ja (2) järgmise kuju:

$$a^2 = b^2 - c^2,$$

$$e = \frac{c}{b},$$

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}.$$

N ä i d e. On antud ellips $16x^2 + 25y^2 = 400$. Leida selle ellipsi telgede pikkused, lagipunktide ja fookuste koordinaadid ning ekstsentrilisus.

L a h e n d u s. Jagades antud võrrandi mõlemaid pooli 400-ga, saame:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

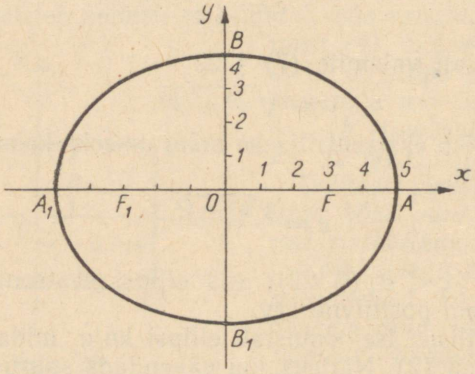
Siit

$$a^2 = 25,\ b^2 = 16$$

ja

$$a = 5,\ b = 4.$$

Seega ellipsi suurtelg $A_1A = 2a = 10$ ja väiketelg $B_1B = 2b = 8$ (joon. 38).



Joon. 38.

Ellipsi lagipunktide koordinaadid on:

$$A(5\,;\,0),\ A_1(-5\,;\,0),\ B(0\,;\,4),\ B_1(0\,;\,-4).$$

Et leida fookuste koordinaate, tuleb teada suurust $OF = c$. Võrdusest (7) § 22 saame:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$$

Järelikult fookuste koordinaadid on:

$$F(3\,;\,0) \text{ ja } F_1(-3\,;\,0).$$

Lõpuks leiame käesoleva paragrahvi valemi (1) põhjal:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

§ 25. Ellipsi seos ringjoonega. Eeldame, et ellipsi poolteljed on teineteisega võrdsed, s. t. $a = b$, siis ellipsi võrrand saab kuju

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ ehk } x^2+y^2=a^2.$$

Saadud võrrand, nagu teada, kujutab ringjoont, mille raadius on a.

Vaatame, kui suur on sel juhul ekstsentrilisus; võttes valemis (2) § 24

$$a=b,$$

saame

$$e=\frac{a^2-a^2}{a}=0.$$

Siit teeme järelduse, et *ringjoon on ellipsi erijuhus, kus poolteljed on teineteisega võrdsed ja järelikult ekstsentrilisus on võrdne nulliga.*

Harjutusi.

1. Leida ellipsi võrrandi kanooniline kuju, kui on antud ellipsi poolteljed $a=5$ ja $b=4$.

2. On antud ellips $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$. Leida selle ellipsi teljed ja fookuste vaheline kaugus.

3. Leida ellipsi $49x^2+24y^2=1176$ telgede pikkused ja fookuste koordinaadid.

4. Koostada ellipsi võrrand, kui tema kaks lagipunkti asetsevad punktides $(8;0)$ ja $(-8;0)$ ning fookuste koordinaadid on $(\pm 5;0)$.

5. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi fookuste koordinaadid on $(\pm 3;0)$ ja suurtelje pikkus 12.

6. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi väiketelje pikkus on 6 ja fookuste koordinaadid $(0;\pm 4)$.

7. Leida ellipsi $4x^2+9y^2=180$ ekstsentrilisus.

8. Leida ellipsi võrrandi kanooniline kuju, kui $2c=8$ ja $e=0{,}8$

9. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi fookuste koordinaadid on $(0;\pm 5)$ ja ekstsentrilisus võrdub $\frac{2}{3}$-ga.

10. Leida ellipsi võrrandi kanooniline kuju, kui ellipsi pooltelgede summa on 10 ja fookuste vaheline kaugus on $4\sqrt{5}$.

11. Kontrollida, kas punktid $A(0;2)$, $B(3;0)$ ja $C(1;2)$ asetsevad ellipsil $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

12. On antud ellips $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{12}=1$ ja sellel punkt, mille abstsiss on 3. Leida selle punkti ordinaat.

13. Leida ellipsi võrrandi kanooniline kuju, kui ellips läbib punkti $A(3;\sqrt{2})$ ja suurtelje pikkus $2a=2\sqrt{15}$.

14. Ellips, mille keskpunkt asetseb koordinaatide alguses ja fookused x-teljel, läbib kahte punkti A ja B. Leida ellipsi võrrand, kui on antud:

1) $A(\sqrt{5};\ \sqrt{6})$, $B(0;-2\sqrt{2})$; 2) $A(2\sqrt{5};2\sqrt{3})$, $B(-5;-3)$.

15. Leida kõõlu pikkus, kui kõõl läbib fookuse ja on risti ellipsi $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{16}=1$ suurteljega.

16. Leida ellipsi $4x^2+9y^2=36$ lõikepunktid sirgetega:

1) $2x+3y-6=0$, 2) $2x+3\sqrt{3}y=12$, 3) $y=x-6$.

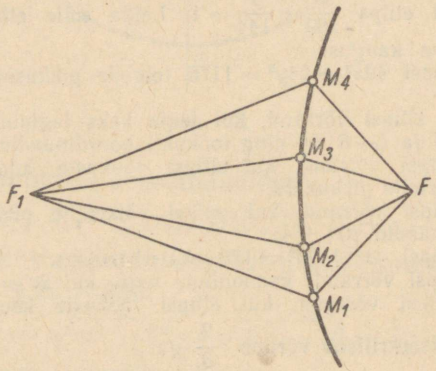
17. Sirge $2x+y-14=0$ lõikab ellipsit $4x^2+y^2=100$. Leida ellipsisse jääva sirglõigu pikkus.

18. Leida punkti M trajektoor, kui punkt jääb oma liikumise kestel kolm korda ligemale punktile $A(1;0)$ kui sirgele $x=9$.

19. Leida ellipsi ekstsentrilisus, kui fookuste vaheline sirglõik on väiketelje otspunktist näha täisnurga all.

§ 26. Hüperbool ja selle võrrand.

Hüperblooliks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, kus iga punkti kauguste vahe kahest antud punktist, mida nimetatakse fookusteks, on jääv suurus (see jääv suurus peab olema positiivne ja väiksem kui fookuste vaheline kaugus).



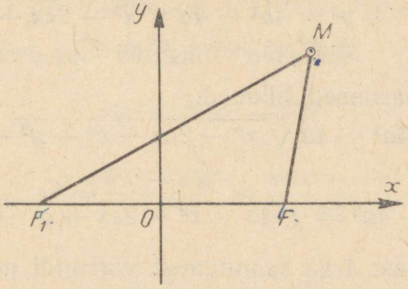
Joon. 39.

Asetsegu näiteks punktid M_1, M_2, M_3, M_4 hüperboolil, mille fookused paiknevad punktides F ja F_1 (joon. 39). Vastavalt hüperbooli definitsioonile võib kirjutada:

$$F_1M_1-FM_1=F_1M_2-FM_2=F_1M_3-FM_3=$$
$$=F_1M_4-FM_4=\text{const}. \qquad (1)$$

Tuletame hüperbooli võrrandi.

Võtame x-teljeks sirge, mis läbib antud punkte (fookuseid) F_1 ja F (joon. 40), y-teljeks aga sirglõigu F_1F keskristsirge.



Joon. 40.

Tähistame $F_1F = 2c$, siis fookuste koordinaadid on

$$F(c\,;0) \text{ ja } F_1(-c\,;0).$$

Võtame hüperboolil vabalt punkti $M(x\,;y)$ ja tähistame iga punkti kauguste vahe fookustest $2a$-ga, siis

$$F_1M - FM = \pm 2a\,^*. \qquad (2)$$

Kahe punkti vahelise kauguse valemi järgi leiame:

$$F_1M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$
$$FM = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Asendades võrduses (2) F_1M ja FM nendega võrdsete avaldistega, saame:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (3)$$

See ongi *hüperbooli võrrand* valitud koordinaatide süsteemis, kuna vastavalt võrdusele (1) kehtib ta hüperbooli mistahes punkti kohta.

Lihtsustame võrrandit (3). Selleks kanname ühe juuravaldise võrrandi paremale poolele:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

---

* Märk (+) võetakse juhul, kui $F_1M > FM$ ja märk (—), kui $F_1M < FM$.

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.$$

Avame sulud:

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}+ \\ +x^2-2cx+c^2+y^2.$$

Koondame sarnased liikmed:

$$2cx=4a^2\pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}-2cx$$

ehk

$$4cx-4a^2=\pm 4a\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2}.$$

Tõstame pärast 4-ga taandamist võrrandi mõlemad pooled uuesti ruutu; saame:

$$(cx-a^2)^2=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2).$$

Avame sulud:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

ehk

$$c^2x^2+a^4=a^2x^2+a^2c^2+a^2y^2.$$

Kanname liikmed, mis sisaldavad suurusi x ja y, võrrandi vasakule poolele, teised liikmed aga paremale poolele:

$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=a^2c^2-a^4,$$

siit

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2). \qquad (4)$$

Vastavalt hüperbooli definitsioonile

$$2c>2a,$$

siit

$$c>a. \qquad (5)$$

Tingimuse (5) järgi omab vahe c^2-a^2 ainult positiivset väärtust ja seepärast võime teda tähistada b^2-ga. Teinud seda võrduses (4), saame:

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2. \qquad (6)$$

Jagades viimase võrduse avaldisega a^2b^2, saame lõplikult:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (7)$$

kus x ja y on hüperbooli punktide jooksvad koordinaadid ja

$$b^2 = c^2 - a^2. \tag{8}$$

Võrdus (7) on *hüperbooli võrrandi kanooniline kuju* *.

§ 27. Hüperbooli võrrandi uurimine. Võrrandist (6) § 26 saame:

$$a^2y^2 = b^2x^2 - a^2b^2,$$

siit

$$y^2 = \frac{b^2x^2 - a^2b^2}{a^2} = \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2}$$

ja

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}. \tag{1}$$

Samast võrrandist (6) § 26 leiame:

$$x^2 = \frac{a^2y^2 + a^2b^2}{b^2} = \frac{a^2(y^2 + b^2)}{b^2}$$

ja

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2}. \tag{2}$$

Hüperbooli geomeetrilise kuju väljaselgitamiseks uurime võrrandeid (1) ja (2).

I. Leiame hüperbooli lõikepunktid x-teljega. Selleks oletame, et $y = 0$ ja võrrandist (2) saame:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2} = \pm a.$$

Siit järeldub: *hüperbool lõikab x-telge kahes punktis, millede koordinaadid on* $(a\,;0)$ *ja* $(-a\,;0)$ (joonisel 41, punktid A ja A_1).

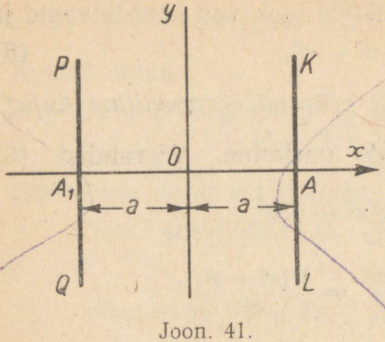
II. Olgu võrrandis (1)

$$|x| < a, \tag{3}$$

siis saab y imaginaarse väärtuse, see aga tähendab, et hüperboolil ei ole punkte, mis rahuldaksid tingimust (3). Järelikult, võõtmes, mis asetseb sirgete $x = +a$ ja $x = -a$ vahel (sirged PQ ja KL joonisel 41), ei ole hüperbooli

---

* Nii nagu ellipsi juures, saab ka siin näidata, et võrrand (7) on samaväärne võrrandiga (3), s. t. ei oma võõrlahendeid.



Joon. 41.

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$ punkte.

III. Olgu

$$|x| > a; \qquad (4)$$

siis võrdusest (1) leiame x igale väärtusele y kaks reaalset väärtust, mis on absoluutväärtuse poolest võrdsed, kuid märkide poolest erinevad. See aga tähendab, et x igale väärtusele, mis rahuldab võrratust (4), vastab meie kõveral kaks x-telje suhtes sümmeetrilist punkti.

Järelikult, *hüperbool* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *on sümmeetriline x-telje suhtes.*

Teiselt poolt, võrdusest (2) leiame y igale väärtusele x kaks reaalset väärtust, mis on absoluutväärtuse poolest võrdsed, kuid märkide poolest erinevad, s. t. et y igale väärtusele vastab hüperbooli graafikul kaks y-telje suhtes sümmeetrilist punkti.

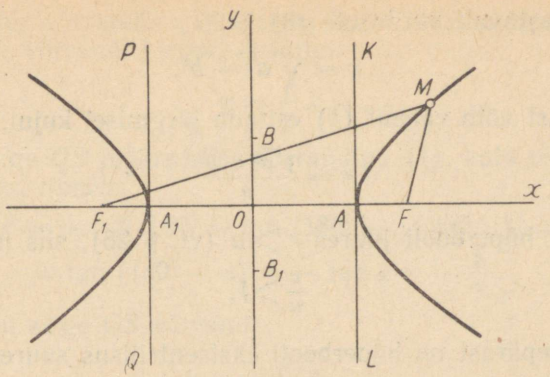
Järelikult, *hüperbool* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *on sümmeetriline y-telje suhtes.*

IV. Kui võrrandis (1) anda suurusele x väärtusi, mis asetsevad $+a$ ja $+\infty$ vahel, siis y muutub nullist kuni $\pm\infty$, s. t. antud juhul x igale väärtusele vastab kõveral kaks x-telje suhtes sümmeetrilist punkti, mis eemalduvad teineteisest seda rohkem, mida suurem on abstsissi väärtus. Seega võib öelda, et hüperbooli haru on lõputu ja asetseb sirgest $x = a$ paremal pool.

Kui aga anda suurusele x väärtusi, mis asetsevad $-a$ ja $-\infty$ vahel, siis muutub y jälle nullist kuni $\pm\infty$, mis tähendab, et siin, nii nagu eelmiselgi juhul, on hüperbooli haru lõputu, kuid asetseb sirgest $x = -a$ vasakul pool.

Seega, *hüperbool on kõver, mis moodustub kahest lõpmatusesse suunduvast harust.*

Kõigest öeldust järeldame, et hüperbool $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ moo-



Joon. 42.

dustub kahest y-telje suhtes sümmeetrilisest lõputust harust, milledest üks asetseb sirgest $x = +a$ paremal ja teine sirgest $x = -a$ vasakul pool. Kumbki nendest harudest on sümmeetriline x-telje suhtes (joon. 42).

Punkte $A(a\,;0)$ ja $A_1(-a\,;0)$ nimetatakse *hüperbooli lagipunktideks* ning punkti $O(0\,;0)$ — *hüperbooli keskpunktiks.*

Sirglõik $AA_1 = 2a$ kannab nimetust *hüperbooli reaaltelg,* et eristada teda teljest $BB_1 = 2b$, mida nimetatakse *imaginaarteljeks* *.

Sirglõike F_1M ja FM nimetatakse *punkti M raadiusvektoriteks.*

§ 28. Hüperbooli ekstsentrilisus. *Hüperbooli ekstsentrilisuseks nimetatakse fookuste vahelise kauguse ja reaaltelje pikkuse suhet, s. t.*

$$\frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Hüperbooli, nii nagu ellipsigi, ekstsentrilisust tähistatakse tähega e:

$$e = \frac{c}{a}. \qquad (1)$$

---

* Sirglõiku $BB_1 = 2b$ nimetatakse imaginaarteljeks, sest sellel teljel ei ole hüperbooli punkte.

Kuid vastavalt võrdusele (8) § 26

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

seepärast võib valemi (1) esitada järgmisel kujul:

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}. \qquad (2)$$

Kuna hüperbooli juures $c > a$ (vt. § 26), siis murd

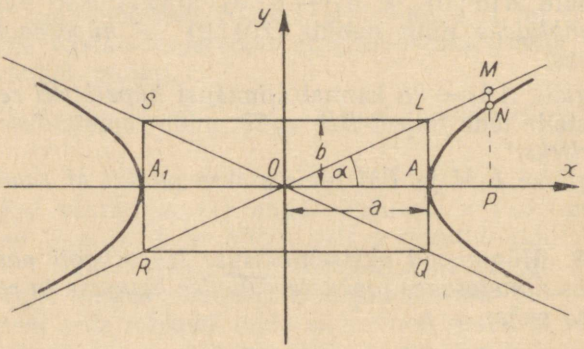
$$\frac{c}{a} > 1,$$

ning seepärast on hüperbooli ekstsentrilisus suurem ühest.

§ 29. Hüperbooli asümptoodid. Ehitame hüperbooli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

telgedele ristküliku $LQRS$ külgedega $2a$ ja $2b$ ning tõmbame diagonaalid LR ja QS, pikendades neid mõlemas suunas (joon. 43).



Joon. 43.

Kuna sirge LR läbib koordinaatide alguse, siis on tema võrrandiks:

$$y = kx. \qquad (1)$$

Kuid sirge tõus

$$k = \tan \angle LOA = \frac{AL}{OA} = \frac{b}{a}.$$

Asendades võrrandis (1) k tema leitud väärtusega, saame sirge LR võrrandi järgmisel kujul:

$$y = \frac{b}{a}x. \tag{2}$$

Ka sirge QS määratakse võrrandiga (1), kuid tema tõus on erinev, nimelt:

$$k = \tan \angle AOS = \tan (180° - \angle SOA_1) =$$
$$= \tan (180° - \alpha) = -\tan \alpha = -\frac{b}{a}.$$

Seega on sirge QS võrrand:

$$y = -\frac{b}{a}x. \tag{3}$$

Tavaliselt kirjutatakse võrrandid (2) ja (3) järgmisel kujul:

$$y = \pm \frac{b}{a}x. \tag{4}$$

Võrrandiga (4) väljendatud sirgete ja hüperbooli vahel on olemas seos; selgitame seda.

Võtame sirgel LR ja hüperboolil punktid M ja N, mis asetsevad koordinaattasapinna esimeses veerandis ja omavad üht ning sama abstsissi. Punkti M ordinaadiks on PM, mille tähistame Y-ga, erinevalt punkti N ordinaadist, mida märgime tähega y. Võrrandist (2) võib kirjutada:

$$Y = \frac{b}{a}x.$$

Hüperbooli võrrandist saame:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

Koostame vahe

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2})$$

ja vaatame, kuidas see muutub abstsissi kasvades. Selleks korrutame ja jagame viimase võrduse paremat poolt avaldisega $x + \sqrt{x^2 - a^2}$; saame:

$$Y - y = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{b[x^2 - (x^2 - a^2)]}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} =$$

$$= \frac{b(x^2 - x^2 + a^2)}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ba^2}{a(x + \sqrt{x^2 - a^2})} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Seega

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Kasvagu suurus x tõkestamatult, siis kasvab tõkestamatult ka viimase murru nimetaja, kuna aga murd ise kahaneb, lähenedes nullile. Kui pöörata tähelepanu joonisele 43, siis võib viimast fakti tõlgendada järgmiselt: abstsissi tõkestamatul kasvamisel tuleb hüperbool sirgele LR kuitahes lähedale, kuid ei lõika teda kusagil.

Kuna sirged LR ja QS, aga samuti ka hüperbooli punktid, on x-telje suhtes sümmeetrilised, siis võib öelda, et ka koordinaattasapinna neljandas veerandis asetsev hüperbooli osa tuleb sirgele QS kuitahes lähedale, kuid ei lõika teda kusagil.

Järeldus, mille me tegime hüperbooli parempoolse haru kohta, kehtib ka hüperbooli vasakpoolse haru kohta, tänu sirgete (4) ja hüperbooli sümmeetrilisusele koordinaattelgede suhtes.

Sirgeid

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

nimetatakse *hüperbooli asümptootideks.*

Käesolevas paragrahvis öeldust võib teha järelduse, et hüperbool asetseb kõigi oma punktidega asümptootide poolt moodustatud tippnurkade sees ja ei välju kusagil nendest piiridest. Seda asjaolu võib kasutada hüperbooli ehitamiseks juhul, kui ei nõuta täpset hüperbooli, vaid piisab tema ligikaudsest kujutamisest; selleks tuleb joonestada asümptoodid ja järk-järgult asümptootidele lähenev sujuv kõverjoon.

N ä i d e. On antud hüperbool $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Leida, kas punkt $A(2\,;\,1,5)$ asetseb ühel hüperbooli asümptootidest.

L a h e n d u s. Antud võrrandist saame:

$$a = \sqrt{16} = 4,$$
$$b = \sqrt{9} = 3.$$

Järelikult, asümptootide võrrandid on:

$$y = \pm \frac{3}{4} x.$$

Kuna punkt A paikneb vastavalt ülesande tingimusele koordinaattasapinna esimeses veerandis, siis võib ta asetseda ainult asümptoodil, mis on määratud võrrandiga:

$$y = \frac{3}{4} x.$$

Asetades sellesse võrrandisse x ja y asemele punkti A koordinaadid, saame samasuse:

$$1{,}5 = \frac{3}{4} \cdot 2 = 1{,}5.$$

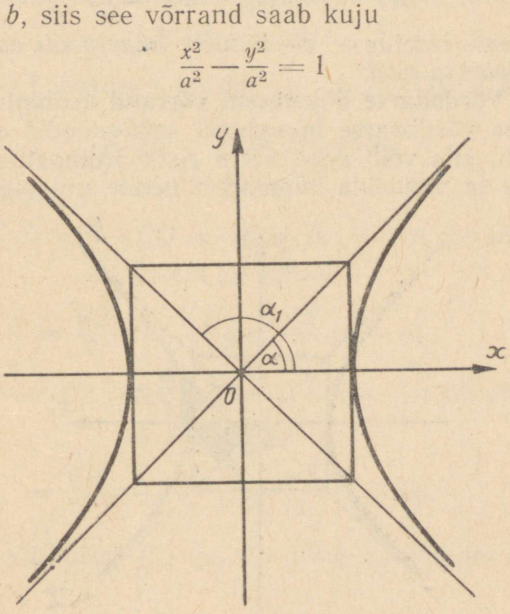
Tähendab, punkt A asetseb hüperbooli nimetatud asümptoodil.

§ 30. Võrdhaarne hüperbool. Kui hüperbooli võrrandis

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

võtta $a = b$, siis see võrrand saab kuju

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$



Joon. 44.

ehk

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (1)$$

Võrrand (1) määrab hüperbooli, mille poolteljed on teineteisega võrdsed. Sellist hüperbooli nimetatakse *võrdhaarseks*. Asümptootide võrrandid on sel juhul:

$$y = \pm x, \qquad (2)$$

kuna suhe

$$\frac{b}{a} = 1.$$

Nagu näeme võrrandist (2), on asümptootide tõusud $+1$ ja -1. Kui tähistada nurgad, mille moodustavad asümptoodid x-telje positiivse suunaga, vastavalt α ja α_1 (joon. 44), siis

$$\tan \alpha = 1 \text{ ja } \tan \alpha_1 = -1,$$

millest

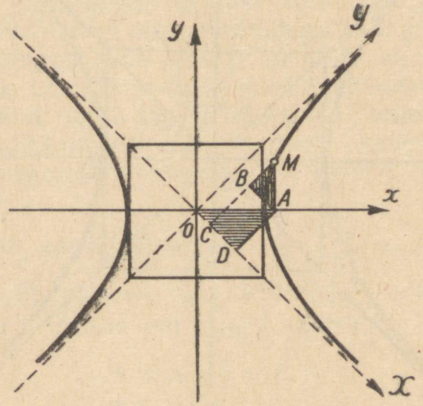
$$\alpha = 45° \text{ ja } \alpha_1 = 135°.$$

Järelikult, asümptootide vaheline nurk on:

$$\alpha_1 - \alpha = 135° - 45° = 90°.$$

Siit teeme järelduse: *võrdhaarse hüperbooli asümptoodid on teineteisega risti.*

§ 31. Võrdhaarse hüperbooli võrrand asümptootide suhtes. Kuna võrdhaarse hüperbooli asümptoodid on teineteisega risti, siis võib need võtta ristkoordinaatide süsteemi telgedeks ja vaadelda hüperbooli nende uute telgede suh-



Joon. 45.

tes. Tuletame võrdhaarse hüperbooli võrrandi selle juhu jaoks.

Olgu antud võrdhaarne hüperbool (joon. 45). Siis väljendub tema võrrand x- ja y-telje suhtes, nagu näitasime § 30, kujul

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{1}$$

Võttes hüperboolil vabalt punkti $M(x\,;\,y)$ ja ehitades selle koordinaadid, saame:

$$x = OA, \qquad y = AM.$$

Võtame nüüd koordinaattelgedeks hüperbooli asümptoodid: OX — abstsissteljeks, OY — ordinaatteljeks. Tõmmates uuele abstsisssteljele ristsirge MC, saame:

$$X = OC,\ Y = CM.$$

Avaldame punkti M uued koordinaadid X ja Y vanade koordinaatide x ja y kaudu. Selleks tõmbame punktist A $AB \perp CM$ ja $AD \perp OX$. Pöörame tähelepanu sellele, et tekkinud täisnurksetes kolmnurkades AMB ja AOD

$$\angle AMB = \angle AOD$$

kui ristuvate haaradega nurgad. Kuid $\angle AOD = 45°$; seepärast

$$\angle AMB = \angle AOD = 45°.$$

Jooniselt näeme:

$$X = OC = OD - CD = OD - BA = OA \cos 45° - \\ - AM \sin 45° = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} x - \frac{\sqrt{2}}{2} y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x - y), \tag{2}$$

$$Y = CM = CB + BM = DA + BM = OA \sin 45° + \\ + AM \cos 45° = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} x + \frac{\sqrt{2}}{2} y = \frac{\sqrt{2}}{2} (x + y). \tag{3}$$

Korrutades võrdused (2) ja (3) ning arvestades võrdust (1), saame:

$$XY = \frac{1}{2} (x^2 - y^2) = \frac{1}{2} a^2. \tag{4}$$

Tähistame lühiduse mõttes

$$\frac{a^2}{2} = m,$$

siis võrduse (4) võime kirjutada järgmiselt:

$$XY = m, \qquad (5)$$

kus m on jääv suurus.

See on võrdhaarse hüperbooli võrrand, kui koordinaattelgedeks võtta hüperbooli asümptoodid.

Nagu näha võrrandist (5), on muutujad X ja Y pöördvõrdelised suurused ja seepärast võib öelda, et *võrdhaarne hüperbool* $xy = m$ *kujutab endast muutuvate suuruste vahelise pöördvõrdelise sõltuvuse graafikut.*

Harjutusi.

1. Leida hüperbooli võrrand, kui on antud:
   1) $a = 6$, $b = 2$; 2) $a = 4$, $c = 5$; 3) $b = 5$, $c = 13$.

2. On antud hüperbool $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} = 1$. Leida hüperbooli teljed ja fookuste vaheline kaugus.

3. Leida hüperbooli $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ lagipunktide ja fookuste koordinaadid.

4. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookuste koordinaadid on $(\pm 4\,; 0)$ ja reaaltelje pikkus 6.

5. On antud hüperbool $24x^2 - 25y^2 = 600$. Leida hüperbooli fookuste koordinaadid, telgede pikkused ja ekstsentrilisus.

6. Leida hüperbooli võrrand, kui on antud:

$$1)\ c = 7, \quad e = \frac{7}{12}\sqrt{6}; \quad 2)\ b = 9, \quad e = 1{,}25.$$

7. Leida hüperbooli võrrand, kui

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}, \quad c = 15.$$

8. Kas järgmised punktid:
   $A(8\,; 6\sqrt{3})$, $B(6\,; 3\sqrt{5})$ ja $C(3\,; 2\sqrt{6})$ asetsevad hüperboolil

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1?$$

9. Leida hüperbooli võrrandi kanooniline kuju, kui hüperbool läbib punkti $A(9\,; -4)$ ja reaalpooltelg on 3.

10. Leida hüperbooli võrrandi kanooniline kuju, kui hüperbool läbib punkte $A(4; \sqrt{5})$ ja $B(-4\sqrt{3}; 5)$.

11. Leida hüperbooli $x^2 - 2y^2 = 6$ asümptootide võrrandid ja ekstsentrilisus.

12. Leida hüperbooli asümptootide võrrandid, kui x-teljel asetsevate fookuste vaheline kaugus on 10 ja lagipunktide vaheline kaugus 8.

13. Leida hüperbooli võrrand, kui x-teljel asetsevate fookuste vaheline kaugus on $10\sqrt{2}$ ja asümptootide võrrandid $y = \pm \frac{3}{4} x$.

14. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli fookuste koordinaadid on $(\pm 2; 0)$ ning asümptootideks on sirged $y = \pm \frac{3}{5} x$.

15. Punkt $A(10; 4{,}5)$ asetseb hüperboolil ja punkt $B(4; 3)$ ühel tema asümptootidest. Leida hüperbooli võrrandi kanooniline kuju.

16. Leida hüperbooli $x^2 - 2y^2 = 18$ ja sirge $x = 6$ lõikepunktid.

17. Leida hüperbooli $x^2 - 2y^2 = 4$ ja sirge $3x - 4y = 2$ lõikepunkt.

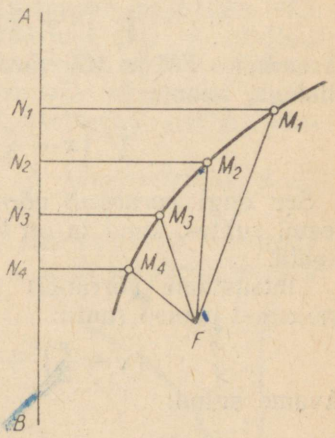
18. Leida hüperbooli $4x^2 - 5y^2 = 100$ asümptootide vaheline nurk.

19. Leida punkti $M(x; y)$ trajektoor, kui punkt jääb liikumise kestel kaks korda ligemale sirgele $x = 1$ kui punktile $(4; 0)$.

§ 32. Parabool ja selle kanooniline võrrand.

Paraboliks nimetatakse niisuguste punktide geomeetrilist kohta, kus iga punkti kaugused ühest kindlast punktist, mida nimetatakse fookuseks, ja sirgest, mida nimetatakse juhtjooneks, on võrdsed (tingimusel, et fookus ei asetse juhtjoonel).

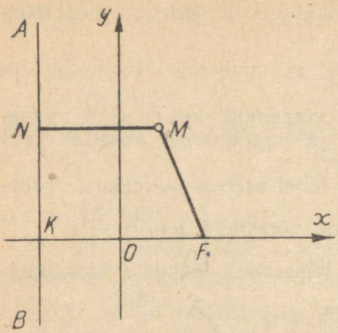
Asetsegu punktid M_1, M_2, M_3, M_4 paraboolil (joon. 46). Kui punkt F kujutab fookust ja sirge AB juhtjoont, siis vastavalt parabooli definitsioonile võime kirjutada:



Joon. 46.

$FM_1 = M_1N_1$, $FM_3 = M_3N_3$,
$FM_2 = M_2N_2$, $FM_4 = M_4N_4$.

Tuletame parabooli võrrandi. Selleks valime koordinaatide süsteemi, võttes x-teljeks sirge, mis on tõmmatud läbi punkti F (fookuse) risti juhtjoonega AB, ja y-teljeks sirge, mis läbib sirglõigu KF keskpunkti ja on viimasega risti (joon. 47).



Joon. 47.

Tähistame

$$KF = p;$$

siis fookuse F koordinaadid on $(\frac{p}{2}; 0)$. Võtame paraboolil vabalt punkti $M(x; y)$; selle punkti kaugused fookusest F ja juhtjoonest AB väljenduvad vastavalt lõikudega FM ja MN. Parabooli definitsiooni põhjal võime kirjutada:

$$FM = MN. \qquad (1)$$

Rakendades kahe punkti vahelise kauguse valemit ja võttes arvesse, et punkti N koordinaadid on $(-\frac{p}{2}; y)$, leiame:

$$FM = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

$$MN = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = x + \frac{p}{2}.$$

Asendades FM ja MN võrduses (1) nendega võrdsete avaldistega, saame:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}. \qquad (2)$$

See ongi *parabooli võrrand* valitud koordinaatide süsteemi suhtes, kuna ta on kehtiv mistahes parabooli punkti kohta.

Lihtsustame võrrandit (2). Selleks tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Avame sulud:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}.$$

Koondades sarnased liikmed, saame *parabooli võrrandi kanoonilise kuju*

$$y^2 = 2px\ *.$$

Suurust p nimetatakse *parabooli parameetriks.*

---

* Saab näidata, et võrrand (3) on samaväärne võrrandiga (2).

§ 33. Parabooli võrrandi uurimine. Võrrandist (3) § 32 leiame:

$$y = \pm \sqrt{2px}. \qquad (1)$$

Et selgitada meie kõvera geomeetrilist kuju, uurime võrrandit (1), eeldades, et $p > 0$.

I. Olgu

$$x = 0;$$

siis

$$y = \pm \sqrt{2p \cdot 0} = 0.$$

Siit järeldub: *parabool* $y^2 = 2px$ *läbib koordinaatide alguse.*

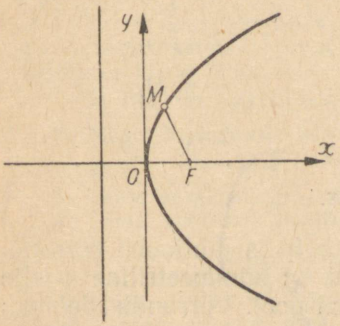
II. Anname suurusele x mingisuguse negatiivse väärtuse, siis y on imaginaarne arv. See aga tähendab, et paraboolil ei ole punkte, mis rahuldaksid esitatud tingimust.

Järelikult, *parabool* $y^2 = 2px$ *asetseb paremal pool y-telge.*

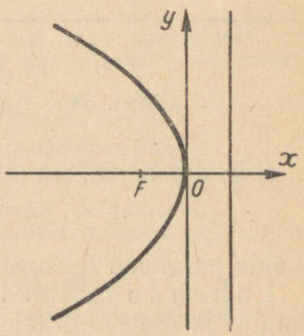
III. Anname suurusele x mingisuguse positiivse väärtuse, siis y saab kaks reaalset väärtust, mis on absoluutväärtuse poolest võrdsed, kuid märkide poolest erinevad. See tähendab, et x igale positiivsele väärtusele vastab paraboolil kaks punkti, millised asetsevad x-telje suhtes sümmeetriliselt.

Järelikult, *parabool* $y^2 = 2px$ *on sümmeetriline x-telje suhtes.*

IV. Kasvagu x tõkestamatult, siis vastavalt võrrandile (1) kasvab tõkestamatult ka $|y|$, s. t., et parabooli punktid,



Joon. 48.



Joon. 49.

nihkudes y-teljest paremale, eemalduvad ka x-teljest ülesja allapoole.

Seega, *parabool* $y^2 = 2px$ *koosneb y-teljest paremale poole suunduvast lõputust harust.*

Ülaltoodu põhjal võime kujutada parabooli, nagu on näidatud joonisel 48.

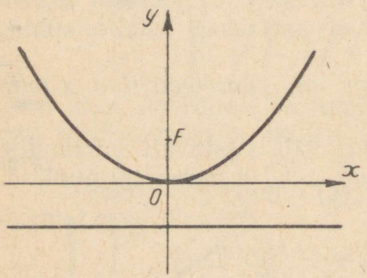
Punkti O nimetatakse *parabooli lagipunktiks*, sirglõiku FM — *parabooli punkti* M *raadiusvektoriks*, sirge OX on aga parabooli *sümmeetriateljeks*.

Võttes võrrandis (1) $p < 0$, siis y väärtused on reaalsed, kui $x \leqslant 0$. Sel juhul on parabooli haru suunatud koordinaatide algusest vasakule, nagu on näidatud joonisel 49, kuna juhtjoon asetseb parabooli lagipunktist paremal pool.

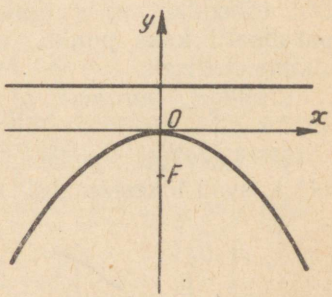
Parabool võib olla sümmeetriline ka y-telje suhtes; sel juhul asetseb parabooli fookus y-teljel ja juhtjooneks on x-teljega paralleelne sirge. Nagu näeme, vahetavad selle tingimuse juures koordinaatteljed oma osad ja parabooli võrrand saab kuju

$$x^2 = 2py,$$

kus $p > 0$, kui parabooli haru on suunatud üles (joon. 50), ja $p < 0$, kui parabooli haru on suunatud alla (joon. 51).



Joon. 50.



Joon. 51.

N ä i d e 1. On antud parabool

$$y^2 = 12x.$$

Leida parabooli fookuse koordinaadid ja juhtjoone võrrand.

L a h e n d u s. Antud parabool on sümmeetriline x-telje suhtes ja asetseb y-teljest paremal pool. Võrrandist leiame:

$$2p = 12,$$

millest

$$p = 6.$$

Fookuse kaugus koordinaatide algusest on $\frac{p}{2}$, seepärast fookuse abstsiss on $\frac{p}{2} = \frac{6}{2} = 3$. Seega asetseb fookus punktis

$$F(3\,;\,0).$$

Juhtjooneks on sirge, mis on paralleelne y-teljega ja asetseb viimasest kaugusel $\frac{p}{2} = 3$. Järelikult parabooli juhtjoone võrrand on $x = -3$.

N ä i d e 2. Lagipunktiga koordinaatide alguses asetseva parabooli fookus on punktis $(0\,;-4)$. Leida selle parabooli võrrand.

L a h e n d u s. Kuna antud parabool on sümmeetriline y-telje suhtes, siis otsitava võrrandi üldkuju on:

$$x^2 = 2py.$$

Võttes arvesse, et parabooli haru on suunatud alla, saame:

$$\frac{p}{2} = -4,$$

siit

$$p = -8.$$

Seega otsitava parabooli võrrand on:

$$x^2 = -16y.$$

Harjutusi.

1. Leida nelja parabooli võrrandid, kui nende lagipunktid asetsevad koordinaatide alguses, teades, et nende paraboolide fookuste koordinaadid on järgmised:
   1) $F(4\,;0)$, 2) $F(-2\,;0)$, 3) $F(0\,;3)$, 4) $F(0\,;-5)$.
2. Määrata järgmiste paraboolide fookuste koordinaadid:
   1) $y^2 = 10x$, 2) $y^2 = -12x$, 3) $x^2 = 8y$, 4) $x^2 = -10y$.
3. Leida parabooli $2y^2 - 5x = 0$ fookuse koordinaadid.
4. Leida kummagi parabooli fookuse koordinaadid ja juhtjoone võrrand:
   1) $y^2 = 4x$, 2) $x^2 = -8y$.
5. Leida paraboolide võrrandid, kui paraboolide lagipunktid asetsevad koordinaatide alguses ja juhtjoonteks on sirged:
   1) $x = -2$, 2) $x = 3$, 3) $y = 2{,}5$, 4) $y = -4$.

6. Lagipunktiga koordinaatide alguses asetseva parabooli juhtjooneks on sirge $2x + 5 = 0$. Leida selle parabooli võrrand ja fookuse koordinaadid.

7. Kontrollida, kas

1) punkt $(2 ; -2)$ asetseb paraboolil $y^2 = 2x$,

2) „ $(-1 ; \sqrt{5})$ „ „ $y^2 = 5x$?

8. Maapinnal asetseva paagi avast voolab vesi välja joana, mis kujutab endast parabooli $x^2 = -6y$ haru. Kui kaugel paagi servast langeb juga maapinnale, kui ava kõrgus on 1,5 m?

9. Leida 24 m pikkuse silla kaare kõrgus, kui kaarel on parabooli kuju, mille võrrand on $x^2 = -48y$.

10. Leida parabooli võrrand, kui parabooli lagipunkt asetseb koordinaatide alguses, sümmeetriateljeks on x-telg ja parabool läbib punkti $A(4 ; -2)$.

11. Leida parabooli võrrand, kui parabooli lagipunkt asetseb koordinaatide alguses, sümmeetriateljeks on y-telg ja parabool läbib punkti $A(-4 ; -2)$.

12. Läbi parabooli $y^2 = 10x$ fookuse on tõmmatud parabooli teljega ristuv kõõl. Leida kõõlu pikkus.

13. Leida paraboolil $y^2 = 5x$ punktid, mille koordinaadid on võrdsed.

14. Läbi parabooli $y^2 = 8x$ fookuse ja läbi tema punkti, mille abstsiss on 4,5 ning ordinaat positiivne, on tõmmatud lõikaja. Leida selle lõikaja võrrand.

15. Leida parabooli $y^2 = 9x$ lõikepunktid sirgetega:

1) $y = 2x + 1$, 2) $2y - 3x - 3 = 0$, 3) $y = 3x + 1$.

16. Leida kahe parabooli:

$$y^2 = 4x \text{ ja } x^2 = 4y$$

ühise kõõlu pikkus.

17. Läbi parabooli $y^2 = -4x$ on tõmmatud sirge, mis moodustab x-telje positiivse suunaga nurga 135°. Leida selle sirge võrrand ja tekkinud kõõlu pikkus.

§ 34. Nihutatud lagipunktiga parabooli võrrand, kui parabooli sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega. Võtame parabooli võrrandi

$$x^2 = 2py$$

ja avaldame sellest y suuruse x kaudu:

$$y = \frac{1}{2p} x^2. \qquad (1)$$

Tähistades võrrandis (1)

$$\frac{1}{2p} = A,$$

saame:

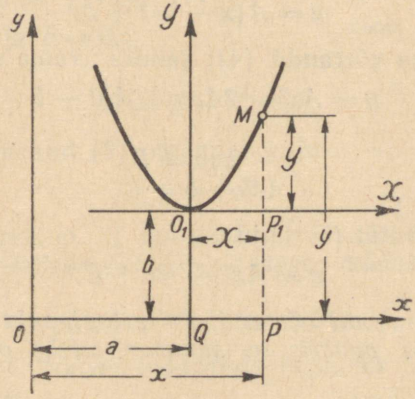
$$y = Ax^2. \qquad (2)$$

Võrrand (2) esitab parabooli, mille haru on suunatud

üles, kui $A > 0$,
alla, kui $A < 0$.

Edaspidi me kasutame tihti võrrandit (2), mis esitab parabooli, mille lagipunkt on koordinaatide alguses ja sümmeetriatelg ühtib ordinaatteljega.

Vaatleme parabooli, mille lagipunkt asetseb punktis $O_1(a\,;\,b)$, sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega ja haru on suunatud üles (joon. 52).



Joon. 52.

Võtame paraboolil vabalt punkti $M(x\,;\,y)$. Tõmbame sellest ristsirge MP x-teljele, saame:

$$OP = x,\ PM = y.$$

Joonestame läbi O_1 sirged O_1X ja QY, mis on paralleelsed vastavalt x- ja y-teljega, ning oletame ajutiselt, et sirged O_1X ja O_1Y on uue koordinaatide süsteemi telgedeks. Tähistame selles süsteemis punkti M koordinaadid tähtedega X ja Y, s. t.

$$O_1P_1 = X \text{ ja } P_1M = Y.$$

Parabooli võrrand uues koordinaatide süsteemis on järgmine:

$$Y = AX^2, \qquad (3)$$

kus $A > 0$.

Et leida parabooli võrrandit endise koordinaatide süsteemi suhtes, tuleb X ja Y avaldada x ja y kaudu. Kuna

$$OQ = a \text{ ja } QO_1 = b,$$

siis

$$X = O_1P_1 = QP = OP - OQ = x - a,$$
$$Y = P_1M = PM - PP_1 = PM - QO_1 = y - b.$$

Asetades võrrandisse (3) leitud X ja Y väärtused, saame:

$$y - b = A(x - a)^2$$

ehk

$$y = A(x - a)^2 + b. \tag{4}$$

Lihtsustame võrrandit (4); selleks avame sulud. Saame:

$$y = Ax^2 - 2Aax + Aa^2 + b. \tag{5}$$

Tähistame:

$$-2Aa = B, \tag{6}$$
$$Aa^2 + b = C; \tag{7}$$

siis saab võrrand (5) kuju

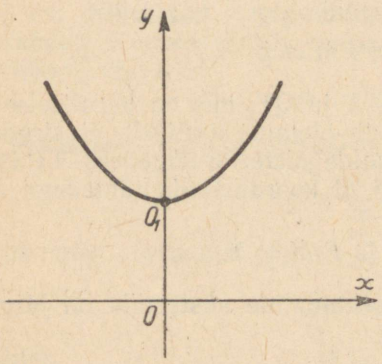
$$y = Ax^2 + Bx + C. \tag{8}$$

See on parabooli võrrand, mille lagipunkt asetseb tasapinna mingis punktis ja sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega.

Vaatleme erijuhte.

Olgu parabooli lagipunkti abstsiss $a = 0$; siis on võrrandis (6) suurus B samuti võrdne nulliga ja võrrand (8) saab kuju:

$$y = Ax^2 + C.$$



Joon. 53.

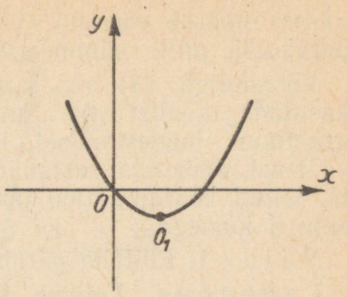
Saadud võrrand määrab parabooli, mille lagipunkt asetseb y-teljel, mis on samaaegselt ka parabooli sümmeetriateljeks (joon. 53).

Oletame, et üks parabooli punktidest (välja arvatud lagipunkt) asetseb koordinaatide alguses; siis peavad koordinaadid (0 ; 0) rahuldama võrrandit (8). Asendades selles x

ja y nullidega, leiame, et $C = 0$. Sel juhul võrrand (8) saab kuju

$$y = Ax^2 + Bx$$

ja määrab parabooli, mis läbib koordinaatide alguse (joon. 54).



Joon. 54.

Märgime, et ka võrrandit (2) võib vaadelda kui võrrandi (8) erijuhtu. Tõepoolest, võttes võrdustes (6) ja (7)

$$a = 0 \text{ ja } b = 0,$$

saame:

$$B = 0 \text{ ja } C = 0,$$

mille tõttu võrrand (8) omandab kuju:

$$y = Ax^2.$$

Öeldust järeldub, *et parabool, mille sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega või ühtib sellega, määratakse võrrandiga*

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

kus A, B ja C võivad omandada mistahes väärtusi, välja arvatud $A = 0$.

Veendume näite varal, et, ümberpöördult, võrrand (8) määrab parabooli, mille telg on paralleelne y-teljega.

Olgu antud võrrand

$$y = 2x^2 - 4x - 3. \tag{9}$$

Teisendame seda järgmiselt:

$$y = 2x^2 - 4x - 3 = 2x^2 - 4x + 2 - 5 = \\ = 2(x^2 - 2x + 1) - 5 = 2(x - 1)^2 - 5.$$

Siit

$$y + 5 = 2(x - 1)^2. \tag{10}$$

Olgu

$$y + 5 = Y, \\ x - 1 = X;$$

siis võrrand (10) saab kuju:

$$Y = 2X^2. \tag{11}$$

Võrrandil (11) on sama kuju mis võrrandil (2), see-

pärast määrab võrrand (11) ja järelikult ka võrrand (9) parabooli, mille sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega.

Võrrandiga (8) määratud parabooli ehitamiseks võib kasutada tavalist võtet, mida rakendatakse funktsioonide graafikute joonestamisel, nimelt: andes suurusele x rea väärtusi, arvutada vastavad y väärtused ja, kandes punktid leitud koordinaatide järgi tasapinnale, ühendada need sujuva joonega.

N ä i d e 1. Ehitada parabool $y = x^2 - 4x$.

L a h e n d u s. Leiame kõigepealt antud parabooli ja x-telje lõikepunktid; võttes $y = 0$, saame:

$$x^2 - 4x = 0, \text{ millest } x_1 = 0,\ x_2 = 4.$$

Kuna leitud punktid on sümmeetrilised parabooli telje suhtes, siis sellel teljel asetseva parabooli lagipunkti abstsiss on $\frac{0+4}{2} = 2$, ordinaat aga

$$y = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4.$$

Need kolm punkti on piisavad parabooli ligikaudseks kujutamiseks.

Parabooli täpsemaks kujutamiseks on vaja veel täiendavaid punkte. Koostame järgmise tabeli:

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

Ehitades need punktid ja ühendades need sujuva joonega, saame otsitava parabooli (joon. 55).

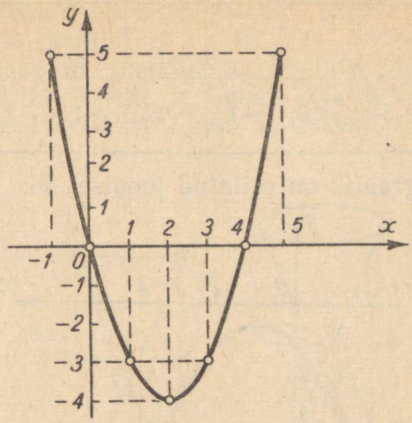
N ä i d e 2. Ehitada parabool $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$.

L a h e n d u s. Võrrandi

$$-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = 0$$

lahendid on imaginaarsed ja seepärast x-telg ei lõika antud parabooli. Sel juhul tuleb leida parabooli ja sirge

$$y = -1$$



Joon. 55.

lõikepunktide abstsissid (— 1 on antud parabooli võrrandi vabaliige).

Lahendades selleks võrrandsüsteemi

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 1 \\ y = -1, \end{cases}$$

saame:

$$-\frac{1}{2}x^2 + x - 1 = -1$$

ehk

$$x^2 - 2x = 0,$$

millest

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2.$$

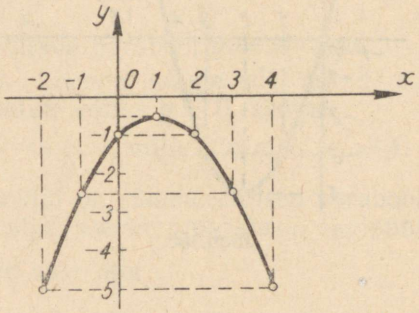
Kuna saadud punktid on sümmeetrilised parabooli telje suhtes, siis parabooli lagipunkti abstsiss on $\frac{0+2}{2} = 1$, ordinaat aga

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 1^2 + 1 - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Lisame nendele punktidele mõned täiendavad punktid. Koostame tabeli:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	$-2{,}5$	-1	$-0{,}5$	-1	$-2{,}5$	-5

Parabooli graafik on esitatud joonisel 56.



Joon. 56.

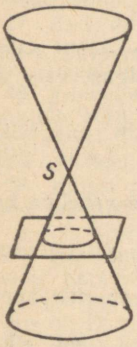
Harjutusi.

1. Leida järgmiste paraboolide lagipunkti koordinaadid:
   1) $y = 5x - x^2$,
   2) $y = 9 - x^2$,
   3) $y = x^2 - 4x - 5$,
   4) $y = x^2 - 2x + 1$,
   5) $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.
2. Ehitada paraboolid:
   1) $y = x^2 - 4$,
   2) $y = x^2 - 3x$,
   3) $y = x^2 - x - 2$,
   4) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{5}{3}$,
   5) $y = x^2 + 4x + 4$,
   6) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$,
   7) $y = 3x - \frac{3}{2}x^2 - 2$,
   8) $y = x^2 + 4$.

§ 35. Koonuslõiked. Ringjoont, ellipsit, hüperbooli ja parabooli väljendatakse, nagu me eelmistes paragrahvides kindlaks tegime, teise astme võrranditega jooksvate koordinaatide suhtes; seepärast nimetatakse neid *teist järku kõveraiks*. Teist järku kõveraid tundsid ja uurisid juba vanad kreeklased, kes vaatlesid neid kui püstringkoonuse ja tasapinna lõikumise tulemusi järgmisel neljal juhul.

I. Lõiketasapind on risti koonuse teljega; lõikena saadakse *ringjoon* (joon. 57).

II. Lõiketasapind moodustab koonuse teljega nurga, mis ei ole võrdne 90°-ga, ja lõikab kõiki koonuse moodustajaid ühel pool koonuse tippu S; lõikena saadakse *ellips* (joon. 58).



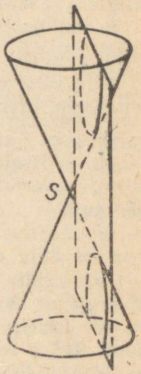
Joon. 57.



Joon. 58.



Joon. 59.



Joon. 60.

III. Lõiketasapind on paralleelne koonuse mingi moodustajaga; seejuures saadakse üks lõputu haru, mida nimetatakse *paraboliks* (joon. 59).

IV. Lõiketasapind lõikab koonuse mõlemat pinda; seejuures saadakse kaks lõputut haru, mis moodustavad *hüperbooli* (joon. 60).

Ringjoont, ellipsit, hüperbooli ja parabooli nimetatakse *koonuslõigeteks*.

Koonuslõikeid uuriti vanasti eranditult geomeetrilisel teel, mis tekitas aga suuri raskusi ning alles Descartes'ist alates, kes võttis tarvitusele koordinaatide meetodi, lihtsustus nende uurimine tunduvalt.

Segaülesandeid.

1. Ringjoonele $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 50 = 0$ on tõmmatud y-teljega paralleelne kõõl, mille kaugus y-teljest on 5. Leida kõõlu pikkus.
2. Hüperboolil $5x^2 - 4y^2 = 180$ võetud punkti abstsiss on 10. Määrata selle punkti kaugus hüperbooli fookustest.
3. Ellipsi ühe fookuse kaugused suurtelje otspunktidest on 7 ja 1. Leida ellipsi võrrandi kanooniline kuju.

4. Koostada ringjoone võrrand, kui ringjoone ühe diameetri otspunktid asetsevad punktides $A(-2;1)$ ja $B(0;3)$.

5. Määrata võrdhaarse hüperbooli ekstsentrilisus.

6. Leida ringjoone $x^2+y^2+8x+4y-16=0$ koordinaattelgedega ristuvate diameetrite võrrandid.

7. On antud ringjooned $x^2+y^2+4x-2y-15=0$ ja $x^2+y^2-6x+2y-7=0$. Kui suur on nurk, mille moodustab x-telg nende ringide keskjoonega?

8. Ellipsi pooltelgede vahe on 2 ja fookuste koordinaadid $(\pm 2\sqrt{6};\ 0)$. Leida ellipsi võrrand.

9. Leida ellipsi võrrand, kui ellipsi fookused asetsevad x-teljel ning poolitavad ellipsi lagipunktide ja koordinaatide alguse vahelised kaugused. Ellipsi väiketelg $2b=4\sqrt{3}$.

10. Ellipsisse on kujundatud ringjoon $x^2+y^2=16$, mis lõikab ellipsi suurtelge abstsisteljel asetsevates fookustes. Leida ellipsi võrrand.

11. Leida hüperbooli telgede pikkused, kui fookuste vaheline kaugus on 8 ja asümptootide vaheline nurk on täisnurk.

12. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperboolil on ellipsiga $x^2+2y^2=18$ ühised fookused ja ekstsentrilisus on 1,5.

13. Leida kõõlu pikkus, kui kõõl läbib fookust ja on risti hüperbooli $9x^2-16y^2=144$ reaalteljega.

14. Leida kõõlu pikkus, kui kõõl on tõmmatud läbi ellipsi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ fookuse risti suurteljega.

15. Läbi paraboli $y^2=2px$ fookuse on tõmmatud kõõl, mis on risti parabooli teljega. Leida kõõlu pikkus.

16. Hüperboolil $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ võetud punkti abstsiss on 12. Leida selle punkti raadiusvektorid.

17. Arvutada parabooli $y^2=4x$ sisse joonestatud korrapärase kolmnurga külgede pikkused.

18. Paraboolil $y^2=3x$ võetud punkti ordinaat on 2. Leida selle punkti kaugus fookusest.

19. Hüperbooli imaginaarpooltelg on 2 võrra suurem reaalpooltelgest ja üks hüperbooli asümptootidest läbib punkti $A(10;14)$. Leida hüperbooli võrrand.

20. Leida hüperbooli võrrand, kui asümptootide võrrandid on $y=\pm\frac{3}{5}x$ ja hüperbool läbib punkti $A(10;-3\sqrt{3})$.

21. Ringjoon $x^2+y^2=9$ läbib hüperbooli fookusi. Leida hüperbooli võrrand, kui hüperbooli asümptoodi ja x-telje positiivse suuna vaheline nurk on $\operatorname{arc\,tan} 2$.

22. Ringjoone $x^2+y^2=25$ sisse on kujundatud ellips, mille fookused asetsevad x-teljel. Ellips poolitab punktist $A(4;3)$ tõmmatud raadiuse. Leida selle ellipsi võrrand.

23. Ellipsisse $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{75}=1$ on kujundatud ristkülik, mille kaks vastaskülge läbivad ellipsi fookusi. Leida ristküliku külgede pikkused.

24. Ellipsi $9x^2 + 16y^2 = 144$ sisse on kujundatud ruut. Leida ruudu külje pikkus.

25. Mingi jõu mõjul liigub punkt M mööda ringjoont $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$. Jõu mõju lakkas momendil, kui punkt M asetses ringjoone punktis $A(2; 1)$. Määrata punkti edasine trajektoor.

26. Kahe ringjoone võrrandid on:

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0 \text{ ja } x^2 + y^2 - 4x - 6y + 3 = 0.$$

Näidata, et ringjoonte keskjoon on risti nende ühise kõõluga.

27. Kivi, mis visati katuselt paralleelselt horisondiga, langes maapinnale mööda parabooli $x^2 = -5y$. Kui kaugel viskepunktist tõmmatud vertikaaljoonest langes kivi maapinnale, kui maja kõrgus on 20 m?

28. y-teljega sümmeetriline parabool, mille lagipunkt asetseb koordinaatide alguses, lõikab ellipsit $x^2 + 4y^2 = 16$ punktides, mis asetsevad ellipsi fookusi läbivatel ja tema suurteljega ristuvatel kõõludel. Leida parabooli võrrand.

29. Ellipsi punkti raadiusvektorid on 2,6 ja 7,4; kõõl, mis väljub sellest punktist ja on risti suurteljega, on 4,8 ning selle võrrand on $x - 3 = 0$. Leida ellipsi võrrand.

30. Horisondi suhtes teravnurga all visatud kivi kujutas oma liikumisel parabooli kaare ja kukkus maha 16 m kaugusel lähtepunktist. Leida parabooli kanooniline võrrand, teades, et kivi suurim tõusukõrgus oli 12 m.

31. Simeiza observatooriumi reflektori paraboolse peegli diameeter on 1,02 m ja fookuse kaugus lagipunktist 5 m. Leida paraboolse väljalõike sügavus, mis tehti peegli valmistamisel tasaparalleelsest klaasplaadist.

32. Leida parabooli $y^2 = 8x$ punkt, mille kaugus fookusest on 20.

33. Parabool, mille lagipunkt asetseb koordinaatide alguses, on sümmeetriline x-telje suhtes. Määrata parabooli punkti $M(2; 4)$ raadiusvektor.

34. Parabooli $y^2 = 12x$ punkti M raadiusvektor on 6. Leida punkti M koordinaadid.

35. Paraboolil $y^2 = 4{,}5x$ on võetud punkt M, mille kaugus juhtjoonest on 9,125. Leida selle punkti kaugus parabooli lagipunktist.

36. Määrata ellipsi ekstsentrilisus, kui fookuste vaheline kaugus võrdub suurtelje ja väiketelje otspunktide vahelise kaugusega.

37. Leida ellipsi ekstsentrilisus, kui ellipsi suurtelg on kolm korda suurem väiketeljest.

38. Maakera meridiaan kujutab endast ligikaudu ellipsit, mille telgede suhe on 299 : 300. Määrata maakera meridiaani ekstsentrilisus.

39. Sirge $x - 10 = 0$ lõikab hüperbooli ja tema asümptooti vastavalt punktides A ja B. Leida selle hüperbooli võrrand, kui punkti B ordinaat on 5 ja antud sirge lõik, mis jääb hüperbooli sisse, on 8.

40. Leida hüperbooli asümptoodi ja reaaltelje vaheline nurk, kui hüperbooli lagipunktide kaugused koordinaatide algusest on $\frac{2}{3}$ fookuste ja koordinaatide alguse vahelistest kaugustest.

41. Ellipsi kaks lagipunkti ühtivad hüperbooli fookustega ja hüperbooli lagipunktid ellipsi fookustega. Leida hüperbooli võrrand, kui ellipsi võrrand on $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

42. Ringjoonele $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5 = 0$ on tõmmatud lõikaja $x - 2y - 3 = 0$. Leida antud ringjoone sisse joonestatud ristküliku külgede võrrandid, kui ristküliku üheks küljeks on antud lõikaja siseosa.

43. Leida ringjoone $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 5 = 0$ keskpunkti kaugus sirgest $2x + y - 3 = 0$.

44. Ringjoone $x^2 + y^2 - 8y - 9 = 0$ punktist $C(5; 4)$ on tõmmatud ristlõik diameetrile AB, mille otspunkt B asetseb punktis $(3; 8)$. Leida selle ristlõigu pikkus.

DIFERENTSIAAL- JA INTEGRAALARVUTUSE ALGED.

V peatükk.

PIIRVÄÄRTUSTE TEOORIA.

§ 36. Absoluutväärtus ja teoreeme selle kohta. Kursuse järgnevas osas tekib meil vajadus vaadelda seoseid mõnede avaldiste absoluutväärtuste vahel. Seepärast tuletame meelde arvu absoluutväärtuse definitsiooni ja selle mõistega ühenduses olevaid seoseid.

Definitsioon. *Positiivse arvu absoluutväärtuseks nimetatakse seda arvu ennast; negatiivse arvu absoluutväärtuseks nimetatakse seda arvu, võetud vastupidise märgiga.*

Arvu a absoluutväärtust tähistatakse nii: $|a|$.

Seega,

$$|8| = 8; \quad |-8| = 8;$$
$$|b| = b, \text{ kui } b > 0;$$
$$|b| = -b, \text{ kui } b < 0.$$

1. *Algebralise summa absoluutväärtus on kas väiksem kui liidetavate absoluutväärtuste summa või sellega võrdne.*

Näiteks:

a) $|2+4+6| = |12| = 12,$
$|2|+|4|+|6| = 2+4+6 = 12,$

järelikult

$$|2+4+6| = |2|+|4|+|6|;$$

b) $|-5-2| = |-7| = 7,$
$|-5|+|-2| = 5+2 = 7,$

järelikult

$$|-5-2| = |-5|+|-2|;$$

c) $|-5+2| = |-3| = 3,$
$|-5|+|2| = 5+2 = 7,$

s. o.

$$|-5+2|<|-5|+|2|.$$

2. *Kahe arvu vahe absoluutväärtus on kas suurem kui vähendatava ja lahutatava absoluutväärtuste vahe või sellega võrdne:*

Näiteks:

a) $|7-9|=|-2|=2,$
$|7|-|9|=7-9=-2,$

s. o.

$$|7-9|>|7|-|9|;$$

b) $|9-7|=|2|=2,$
$|9|-|7|=9-7=2,$

s. o.

$$|9-7|=|9|-|7|.$$

3. *Lõpliku arvu tegurite korrutise absoluutväärtus võrdub nende tegurite absoluutväärtuste korrutisega.*

Näiteks:

$$|(-3)\cdot 5\cdot(-2)|=|30|=30,$$
$$|-3|\cdot|5|\cdot|-2|=3\cdot 5\cdot 2=30,$$

s. o.

$$|(-3)\cdot 5\cdot(-2)|=|-3|\cdot|5|\cdot|-2|.$$

4. *Jagatise absoluutväärtus võrdub jagatava ja jagaja absoluutväärtuste jagatisega.*

Näiteks:

a) $\left|-\frac{15}{3}\right|=|-5|=5,$

$$\frac{|-15|}{|3|}=\frac{15}{3}=5,$$

s. o.

$$\left|-\frac{15}{3}\right|=\frac{|-15|}{|3|};$$

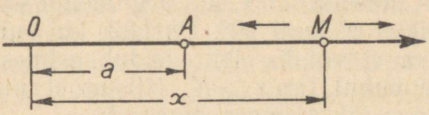
b) $\left|\frac{-20}{-5}\right|=|4|=4,$

$$\frac{|-20|}{|-5|}=\frac{20}{5}=4,$$

s. o.

$$\left|\frac{-20}{-5}\right|=\frac{|-20|}{|-5|}.$$

§ 37. Muutuva suuruse muutumise iseloom. Me teame (§ 5), et matemaatikas ja selle rakendustes esinevad muutuvad ja jäävad suurused. Koordinaatteljel Ox (joon. 61)



Joon. 61.

vastab jäävale suurusele a liikumatu punkt A, muutuvale suurusele x aga paremale või vasakule liikuv punkt M.

Muutuv suurus võib muutuda väga mitmesuguselt: kasvada, kahaneda, minna kasvamiselt üle kahanemisele jne. Muutuva suuruse muutumisseaduse võib anda tema arvuliste väärtuste jadaga. Saagu näiteks muutuja x järgmisi arvulisi väärtusi:

$$x = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots\ldots \qquad (1)$$

Muutumisseadus seisneb siin selles, et muutuja x iga uus väärtus on kaks korda suurem eelnevast.

Muutuvat suurust, mis muutumisprotsessis pidevalt kasvab või pidevalt kahaneb, nimetatakse *monotoonseks*. Sääraseks suuruseks on näiteks muutuja, mis saab väärtusi (1).

Iga mittemonotoonselt muutuvat suurust nimetatakse *kõikuvaks*. Näiteks muutuv suurus, mis muutub jadaga

$$1, 2, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{27}, \cdots$$

määratud seaduse järgi, on kõikuv. Selle jada liikmed vaheldumisi kord suurenevad kaks korda, kord vähenevad kolm korda.

Muutuvad suurused jaotatakse vastavalt nende muutumise iseloomule veel *tõkestatud* ja *tõkestamata suurusteks*.

Definitsioon. *Muutuvat suurust y nimetatakse tõkestatud suuruseks, kui tema teatud väärtusest alates kehtib võrratus*

$$|y| < M,$$

kus M on mingi jääv positiivne arv.

Näiteks $\tan x$ on *tõkestatud* muutuv suurus, kui argu-

mendi väärtused asetsevad vahemikus $x = -45°$ kuni $x = 45°$, kuna sel juhul $|\tan x| \leqslant 1$.

Peale tõkestatud muutuvate suuruste esineb ka niisuguseid, mis ei rahulda ülaltoodud definitsiooni. Vaatleme näiteks muutuvat suurust $\tan x$, kui argumendi väärtused asetsevad vahemikus 0° kuni 90°. Ükskõik kui suure positiivse arvu N me ka ei võtaks, ikka leidub esimeses veerandis kaar x, mille puhul $\tan x > N$. Niisugust muutuvat suurust nimetatakse *tõkestamata* suuruseks.

§ 38. Lõpmatult kahanev suurus. Võtame muutuva suuruse α, mis saab järjest väärtusi:

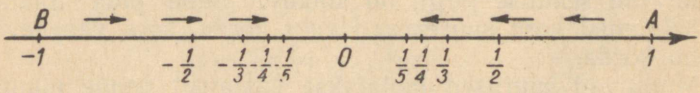
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \tag{1}$$

või

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots \tag{2}$$

Nende jadade liikmete kohanumbri suurenemisel α absoluutväärtus väheneb ning kuitahes väikese positiivse arvu ε me ka ei valiks, leidub kummaski antud jadas arv, millest alates α absoluutväärtus saab väiksemaks kui ε. Olgu näiteks $\varepsilon = 0{,}001$. Kummagi antud jada algusest teataval kaugusel leiame arvu, mis on absoluutväärtuselt väiksem kui 0,001, kusjuures leitud arvule järgnevate liikmete absoluutväärtus jääb sellest murrust väiksemaks. Kui võtame veel väiksema murru, näiteks $\varepsilon = 0{,}0001$, siis küllalt kaugel jadade (1) ja (2) algusest leidub arv, mis oma absoluutväärtuselt on väiksem kui 0,0001, kusjuures järgnevad liikmed on samuti väiksemad kui 0,0001.

Nagu näha läheneb vaadeldav suurus α tõkestamatult nullile. Seda kirjutatakse järgmiselt: $\alpha \to 0$.



Joon. 62.

Väärtusi (1) omandava suuruse α muutumisprotsessi võib kujutada ka geomeetriliselt. Seda võib vaadelda kui koordinaatteljel (joon. 62) nooltega näidatud suunas liikuva punkti A abstsissi muutumist. Ükskõik kui väikese positiivse arvu me ka ei võtaks, ikka saabub moment,

millal punkti A abstsiss saab ja ka edaspidi jääb väiksemaks valitud arvust.

Suuruse α muutumisprotsess, kui α omandab väärtusi (2), on esitatud joonisel 62 koordinaatteljel näidatud suunas liikuva punkti B abstsissi muutumisena. Sellelgi juhul punkti B abstsiss saab ja jääb absoluutväärtuselt väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust.

Definitsioon. *Muutuvat suurust α nimetatakse lõpmatult kahanevaks, kui muutumisel tema absoluutväärtus saab ja ka edasisel muutumisel jääb väiksemaks kuitahes väikesest etteantud positiivsest arvust ε, s. t. $\alpha \to 0$.*

Lõpmatult kahanevat suurust ei tohi ära segada väga väikese suurusega. Nii näiteks võime pikkuse 1 cm võrdlemisel Maa kaugusega Päikesest (150 000 000 km) esimest suurust lugeda teise suhtes väga väikeseks, kuid nimetada seda lõpmatult kahanevaks suuruseks ei tohi, kuna ta on jääv, lõpmatult kahanev suurus on aga muutuv.

Nagu näha, ükski jääv suurus ei saa olla lõpmatult kahanev, kuna ta ei saa oma absoluutväärtuselt väiksemaks kuitahes väikesest etteantud arvust. Ent erandi kõigist jäävatest suurustest moodustab null; null on alati väiksem ükskõik kui väikesest positiivsest arvust. Sellepärast kuulub null lõpmatult kahanevate suuruste hulka.

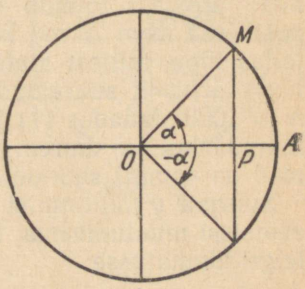
Näide 1. Muutuja $\alpha = \frac{1}{2^n}$, kui $n = 0, 1, 2, 3, 4$ jne., saab väärtused:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$$

Ükskõik kui väikese positiivse arvu me ka ei võtaks, leidub antud jadas ometi arv, mis on väiksem võetud arvust. Valime näiteks murru $\frac{1}{1000}$. Kui $n = 10$, saame

$$\alpha = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{1000}.$$

Seega muutuja $\alpha = \frac{1}{2^n}$ on eespool antud n väärtuste puhul lõpmatult kahanev suurus.



Joon. 63.

Näide 2. Võtame ringjoone raadiusega 1 (joon. 63). Tähistades nurga AOM suuruse radiaanmõõdus tähega α, saame:

$$\sin \alpha = \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{1} = PM.$$

Kuid nagu näha jooniselt

$$PM < \smile AM$$

ehk

$$PM < \alpha.$$

Seepärast

$$\sin \alpha < \alpha.$$

Kui α tõkestamatult läheneb nullile, siis seda enam läheneb nullile $\sin \alpha$. Järelikult, $\sin \alpha$ on lõpmatult kahanev suurus, kui $\alpha \to 0$.

Samale järeldusele tuleme, kui α on negatiivne. Sel juhul, kui $|\alpha| \to 0$, läheneb ka $\sin(-\alpha)$ absoluutväärtus nullile ja sellepärast $\sin(-\alpha)$ on lõpmatult kahanev suurus, kui $|\alpha| \to 0$.

§ 39. Lõpmatult kasvav suurus. Saagu muutuja y järjest väärtusi:

$$2;\ 4;\ 6;\ 8;\ 10;\ 12;\ \ldots \qquad (1)$$

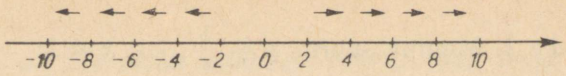
või

$$-2;\ -4;\ -6;\ -8;\ -10;\ -12,\ \ldots. \qquad (2)$$

Nagu näeme, kasvab antud jadade liikmete kohanumbri suurenemisel ka y absoluutväärtus. Oletame, et see kasvamise protsess toimub tõkestamatult; siis kuitahes suure positiivse arvu N me ka ei võtaks, leidub mõlemas antud jadas liige, millest alates kõik järgnevad liikmed on absoluutväärtuselt suuremad kui N. Anname ette näiteks arvu $N = 1000$. Jadades (1) ja (2) võime leida arvu, mille absoluutväärtus on suurem kui 1000, kusjuures järgnevad liikmed on samuti suuremad kui 1000.

Suuruse y muutumist võib geomeetriliselt kujutada punkti abstsissi muutumisena, kui punkt liigub mööda koordinaattelge lõpmatusse:

esimesel juhul alguspunktist O paremale (joon. 64),
teisel „ „ O vasakule (joon. 64).



Joon. 64.

D e f i n i t s i o o n. *Muutuvat suurust y nimetatakse lõpmatult kasvavaks, kui muutumisel tema absoluutväärtus saab ja ka edasisel muutumisel jääb suuremaks kuitahes suurest etteantud positiivsest arvust N.*

Lõpmatult kasvavat suurust ei tohi ära segada väga suure arvuga, kuna viimane on jääv, lõpmatult kasvav suurus aga muutuv.

Kui y on lõpmatult kasvav suurus, siis on kokku lepitud märkida seda järgmiselt:

$$y \to \infty$$

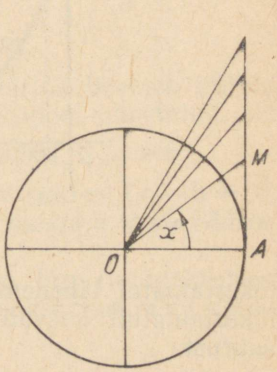
ja lugeda: „y läheneb lõpmatusele".

Tuleb meeles pidada, et lõpmatuse sümbol ei väljenda konkreetset arvu, vaid osutab ainult muutuva suuruse muutumise iseloomule, nimelt tema tõkestamatule kasvamisele. Seepärast on lõpmatuse sümbolit vaja käsitleda ettevaatlikult, et mitte viga teha.

N ä i d e 1. Vaatleme muutuja $y = \tan x$ muutumist, kui $x \to \frac{\pi}{2}$. Võttes ringjoone raadiusega $R = 1$ (joon. 65), võime kirjutada

$$\tan x = \frac{AM}{R} = \frac{AM}{1} = AM.$$

Kui kaar x, asetsedes I veerandis, läheneb $\frac{\pi}{2}$-le, siis AM, ja järelikult ka $\tan x$, kasvab tõkestamatult. Tõepoolest, ükskõik kui suure positiivse arvu N me ka ei valiks, ikka leidub esimeses veerandis kaar, mille tangens on suurem kui N, ning seepärast jääb $\tan x$ kaare edasisel suurenemisel seda enam suuremaks kui N.

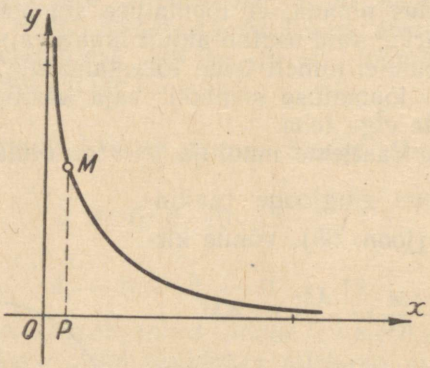


Joon. 65.

Seega on $\tan x$ lõpmatult kasvav suurus, kui $x \to \frac{\pi}{2}$.

Näide 2. Muutuv suurus $y = \frac{1}{x}$, kui $x = 1$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; ..., omandab vastavalt väärtused: 1; 2; 3; 4; 5; .... Kui x tõkestamatult väheneb ($x \to 0$), siis y tõkestamatult suureneb, s. t. saab lõpmatult kasvavaks suuruseks, sest ükskõik kui suure positiivse arvu N me ka ei võtaks, ikka leidub selline väike x väärtus, mille puhul $y > N$. Võtame näiteks $N = 1000$. Siis valides $x = \frac{1}{1001}$, saame $y = 1001 > N$.

Selleks et geomeetriliselt tõlgendada vaadeldud lõpmatult kasvavat suurust, tuletame meelde, et võrrand $y = \frac{1}{x}$ määrab x positiivsete väärtuste puhul võrdhaarse hüperbooli haru, mis asetseb koordinaattasapinna esimeses veerandis (joon. 66). Jooniselt on näha, et punkti M abstsissi



Joon. 66.

tõkestamatul lähenemisel nullile punkti ordinaadi väärtus tõkestamatult kasvab, s. t. kujutab lõpmatult kasvavat suurust.

§ 40. Seos lõpmatult kahaneva ja lõpmatult kasvava suuruse vahel. Lõpmatult kahaneva ja lõpmatult kasvava suuruse vahel on olemas seos, ja nimelt:

kui y on lõpmatult kasvav suurus, siis tema pöördväärtus $\frac{1}{y}$ on lõpmatult kahanev suurus

ja

kui α on lõpmatult kahanev suurus, siis tema pöördväärtus $\frac{1}{\alpha}$ on lõpmatult kasvav suurus.

Toodud väiteid tõestamata selgitame neid näidetega.

1. Olgu y lõpmatult kasvav suurus, mis saab väärtusi:

$$1,\ 10,\ 100,\ 1000,\ \ldots\ \to \infty;$$

siis $\frac{1}{y}$ saab vastavalt väärtused:

$$1;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots\ \to 0,$$

s. t. saab lõpmatult kahanevaks suuruseks.

2. Olgu α lõpmatult kahanev suurus, mis saab väärtusi:

$$0;\ 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ \ldots\ \to 0;$$

siis $\frac{1}{\alpha}$ saab vastavalt väärtused:

$$1;\ 10;\ 100;\ 1000;\ \ldots\ \to \infty,$$

s. t. saab lõpmatult kasvavaks suuruseks.

§ 41. Muutuja piirväärtuse mõiste. Olgu x muutuja, mis tõkestamatult läheneb arvule 3 ja seejuures saab väärtusi:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots$$

või

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \ldots.$$

Neil juhtudel vahe $x - 3$ absoluutväärtus läheneb nullile. Tõepoolest, kui x muutub nii nagu eespool nimetatud, siis

$$|x - 3| = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots\ \to 0,$$

s. t. vahe $x - 3$ on lõpmatult kahanev suurus $(x - 3 \to 0)$.

Toodud näites nimetatakse arvu 3 *muutuja x piirväärtuseks.*

Piirväärtust tähistatakse sümboliga lim (ladinakeelsest sõnast *limes*, mis tähendab piiri). Seega antud juhul võime kirjutada:

$$\lim x = 3.$$

Kasutatakse aga ka järgmist märkimisviisi:

$$x \to 3.$$

D e f i n i t s i o o n. *Jäävat suurust a nimetatakse muutuja x piirväärtuseks, kui nende vahe on lõpmatult kahanev suurus a*, s. t.

$$\lim x = a, \text{ kui } x - a = \alpha.$$

Selle definitsiooni põhjal võib kirjutada:

$$x = a + \alpha. \tag{1}$$

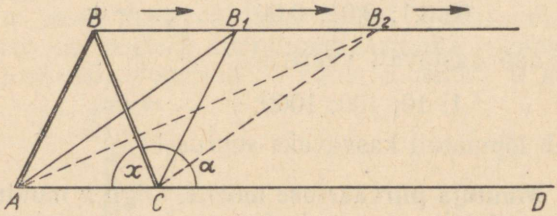
Siit järeldub, et lõpmatult kahaneva suuruse piirväärtus võrdub nulliga, s. t.

$$\lim \alpha = 0.$$

Kui muutuja x tõkestamatult kasvab, siis öeldakse, et ta läheneb lõpmatusele; ka sel juhul on kokku lepitud kirjutada:

$$\lim x = \infty.$$

Näide 1. Olgu kolmnurgas ABC (joon. 67)



Joon. 67.

$$\angle ABC = x, \ \angle BCD = \alpha;$$

siis

$$x + \alpha = 2d,$$

millest

$$2d - x = \alpha. \tag{2}$$

Kui tipp B liigub ühtlaselt ja peatumata mööda AD-ga paralleelset sirget, siis nurgad x ja α saavad muutujateks, kusjuures α saab lõpmatult kahanevaks suuruseks. Seega võrduses (2) jääva suuruse $2d$ ja muutuja x vahe läheneb nullile ning vastavalt piirväärtuse definitsioonile

$$\lim x = 2d.$$

Näide 2. Ringi sisse on kujundatud korrapärane n-nurk (joon. 68).

Tähistades

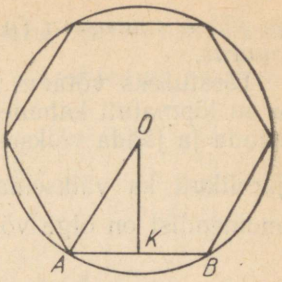
$$AB = a_n, \ OA = R \text{ ja } OK = h_n,$$

saame kolmnurgast AOK:

$$OA - OK < AK$$

ehk

$$R - h_n < \frac{a_n}{2}.$$



Joon. 68.

Suurendame selle hulknurga külgede arvu n tõkestamatult, siis h_n ja $\frac{a_n}{2}$ saavad muutuvateks suurusteks, kusjuures $\frac{a_n}{2}$ saab lõpmatult kahanevaks suuruseks. Tõepoolest, korrapärase n-nurga külg

$$a_n < \smile AB = \frac{2\pi R}{n} = 2\pi R \cdot \frac{1}{n}.$$

n tõkestamatul kasvamisel murd $\frac{1}{n}$ on lõpmatult kahanev suurus (§ 38), $2\pi R$ on jääv kordaja. Paragrahvis 42 tõestatakse, et jääva suuruse korrutis lõpmatult kahaneva suurusega on samuti lõpmatult kahanev suurus, seepärast

$$2\pi R \cdot \frac{1}{n} \to 0,$$

s. t. a_n ja järelikult ka $\frac{a_n}{2}$ on lõpmatult kahanevad suurused. Seega jääva suuruse R ja muutuja h_n vahe osutub väiksemaks kui lõpmatult kahanev suurus $\frac{a_n}{2}$; seepärast ringjoone raadius on piirväärtuseks, millele läheneb apoteemi pikkus korrapärase kõõlhulknurga külgede arvu tõkestamatul kasvamisel, s. t.

$$\lim_{n \to \infty} h_n = R.$$

Märkus. Iga muutuvat suurust, sealjuures ka lõpmatult kahanevat suurust, millel on lõplik piirväärtus, loetakse tõkestatud muutujate hulka.

§ 42. Lõpmatult kahanevate suuruste omadused.

Esimene omadus. *Lõpmatult kahaneva suuruse* α

ja jääva suuruse a ($a \neq 0$) korrutis on lõpmatult kahanev suurus.

Tõestuseks võtame meelevaldse positiivse arvu ε. Kuna α on lõpmatult kahanev suurus, siis $|\alpha|$ võib α muutumisel saada ja jääda väiksemaks igast positiivsest murrust, ning järelikult ka väiksemaks kui $\frac{\varepsilon}{|a|}$, s. t. et alates mingist momendist on õige võrratus:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{|a|}.$$

Järelikult on teatud momendist alates

$$|a\alpha| < \varepsilon.$$

Tähendab, korrutis $a\alpha$ on lõpmatult kahanev suurus.

Nagu näidatakse samas paragrahvis, on vaadeldud omadus õige ka juhul, kui $a = 0$.

N ä i d e. Korrutame (-8)-ga lõpmatult kahanevat suurust, mis saab järjest väärtusi: 1; 0,1; 0,01; 0,001; ... $\to 0$; saame suuruse -8α, mis saab järjest väärtusi:

$$-8;\ -0{,}8;\ -0{,}08;\ -0{,}008;\ \ldots \qquad (1)$$

Korrutis -8α on samuti lõpmatult kahanev suurus, sest ükskõik kui väikese positiivse arvu ε me ka ei võtaks, ikka leidub jadas (1) murd, mille absoluutväärtus on väiksem kui ε. Näiteks, -8α absoluutväärtus võib saada väiksemaks kui 0,0001; 0,00001; 0,000001 jne.

J ä r e l d u s. *Tõkestatud muutuja korrutis lõpmatult kahaneva suurusega on lõpmatult kahanev suurus.*

Kuna tõkestatud muutuja on väiksem teatud jäävast suurusest (§ 37), siis lõpmatult kahanevate suuruste tõestatud omadust võib laiendada ka tõkestatud muutuja ja lõpmatult kahaneva suuruse korrutise juhule.

See järeldus on õige ka kahe lõpmatult kahaneva suuruse korrutise kohta, samuti aga ka nulli ning lõpmatult kahaneva suuruse korrutise kohta, kuna lõpmatult kahanevad suurused kuuluvad tõkestatud muutujate hulka (märkus § 41), null on aga lõpmatult kahaneva suuruse erijuhus (§ 38).

T e i n e o m a d u s. *Kahe lõpmatult kahaneva suuruse algebraline summa $\alpha + \beta$ on lõpmatult kahanev suurus.*

Võtame meelevaldse positiivse arvu ε. Kuna α ja β on lõpmatult kahanevad suurused, siis nii $|\alpha|$ kui ka $|\beta|$ saa-

vad ja seejuures ka jäävad väiksemaks igast positiivsest arvust ε, seega ka väiksemaks kui $\frac{\varepsilon}{2}$, s. t. et teatud momendist alates kehtivad võrratused:

$$|\alpha| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ja } |\beta| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Liites need võrratused, saame:

$$|\alpha| + |\beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \text{ ehk } |\alpha| + |\beta| < \varepsilon.$$

Kuid § 36, (1) põhjal

$$|\alpha| + |\beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Seega on teatud momendist alates õige:

$$|\alpha + \beta| < \varepsilon.$$

Järelikult, $\alpha + \beta$ on lõpmatult kahanev suurus.

N ä i d e. Liidame kaks lõpmatult kahanevat suurust: α, mis saab järjest väärtusi:

$$-2;\ -0{,}2;\ -0{,}02;\ -0{,}002;\ \ldots \to 0,$$

ja β, mis saab järjest väärtusi:

$$-14;\ -1{,}4;\ -0{,}14;\ -0{,}014;\ \ldots \to 0;$$

saame $\alpha + \beta$ väärtuste jada:

$$-16;\ -1{,}6;\ -0{,}16;\ -0{,}016;\ \ldots \qquad (2)$$

Summa $\alpha + \beta$ on samuti lõpmatult kahanev suurus, sest ükskõik kui väikese positiivse arvu ε me ka ei võtaks, leidub jada (2) liikmete hulgas siiski murd, mille absoluutväärtus on väiksem kui ε; näiteks, $|\alpha + \beta|$ võib saada väiksemaks kui 0,0001; 0,00001; 0,000001 jne.

J ä r e l d u s. *Lõpliku arvu lõpmatult kahanevate suuruste algebraline summa on lõpmatult kahanev suurus.*

Olgu vaja liita lõpmatult kahanevad suurused $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Vastavalt teisele omadusele saame:

$\alpha_1 + \alpha_2$ on lõpmatult kahanev suurus
$(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3$ on lõpmatult kahanev suurus
$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4$ on lõpmatult kahanev suurus
. . . . . .
$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}) + \alpha_n$ on lõpmatult kahanev suurus, m. o. t. t.

Tuleb meeles pidada, et see omadus on tõestatud ainult selle juhu jaoks, kui lõpmatult kahanevate liidetavate hulk on lõplik, ehkki väga suur. Kui on aga vaja liita lõpmata palju lõpmatult kahanevaid suurusi, siis võib nimetatud omadus osutuda valeks. Nii näiteks ringi sisse joonestatud korrapärase hulknurga külgede arvu tõkestamatul kahekordistamisel on hulknurga külje pikkus lõpmatult kahanev suurus; kuid külgede summa, mille piirväärtuseks on ringjoone pikkus, ei ole lõpmatult kahanev suurus.

§ 43. Teoreeme piirväärtuste kohta.

Teoreem I. *Muutuval suurusel ei saa olla kaht erinevat piirväärtust.*

Tõestus. Oletame, et muutujal x on kaks erinevat piirväärtust A ja B. Sel juhul peab muutuja ja tema piirväärtuse vahe olema vastavalt piirväärtuse definitsioonile (§ 41) lõpmatult kahanev suurus, s. t.

$$x - A = \alpha,$$
$$x - B = \beta$$

ehk

$$x = A + \alpha,$$
$$x = B + \beta,$$

kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused.

Lahutades esimesest võrdusest teise, saame:

$$0 = A - B + \alpha - \beta$$

ehk

$$\alpha - \beta = B - A.$$

Selle võrduse vasak pool on kui kahe lõpmatult kahaneva suuruse vahe lõpmatult kahanev suurus, parem pool aga jääv suurus. Kuid lõpmatult kahanev suurus võib võrduda jääva suurusega ainult siis, kui see jääv suurus võrdub nulliga (§ 38); järelikult $B - A = 0$, siit $A = B$, s. t. et muutuval suurusel saab olla ainult üks piirväärtus.

Järeldus. *Kui kaks muutuvat suurust, mis omavad piirväärtuse, on oma muutumistel teineteisega alati võrdsed, siis on võrdsed ka nende piirväärtused.*

Tõepoolest, tõestatu põhjal saab igal muutujal olla ainult üks piirväärtus, kuid kuna muutuvad suurused on oma muutumistel võrdsed, siis lähenevad nad ühesugusele konstandile, s. t. omavad võrdsed piirväärtused.

Teoreem II. *Lõpliku arvu muutuvate suuruste summa piirväärtus, kui iga muutuv suurus omab piirväärtuse, võrdub muutuvate suuruste piirväärtuste summaga.*

Tõestus. Võtame kaks muutuvat suurust x ja y, mille piirväärtused on vastavalt A ja B, s. t.

$$\left.\begin{aligned}\lim x &= A,\\ \lim y &= B.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Vastavalt piirväärtuse definitsioonile (§ 41) on vahed $x - A$ ja $y - B$ lõpmatult kahanevad suurused, s. t.

$$\begin{aligned}x - A &= \alpha,\\ y - B &= \beta,\end{aligned}$$

kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused.

Liites need võrdused, saame:

$$(x + y) - (A + B) = \alpha + \beta.$$

Viimase võrduse vasakul poolel on meil muutuja $x + y$ ja konstandi $A + B$ vahe, paremal poolel aga lõpmatult kahanev suurus (vt. teine omadus § 42). Vastavalt piirväärtuse definitsioonile saame:

$$\lim (x + y) = A + B.$$

Arvestades võrdusi (1), võime kirjutada:

$$\lim (x + y) = \lim x + \lim y.$$

Täpselt samuti võib selle teoreemi tõestada kolme, nelja või mistahes lõpliku arvu muutujate korral.

Teoreem III. *Piirväärtust omavate muutujate vahe piirväärtus võrdub nende muutujate piirväärtuste vahega.*

Nagu teada, võib vahet vaadelda kui algebralist summat, sellepärast võib teoreemi II laiendada ka vahe kohta.

Teoreem IV. *Lõpliku arvu muutujate korrutise piirväärtus, kui iga muutuja omab piirväärtuse, võrdub nende muutujate piirväärtuste korrutisega.*

Tõestus. Võtame kaks muutuvat suurust x ja y, mille piirväärtused on vastavalt A ja B, s. t.

$$\begin{aligned}\lim x &= A,\\ \lim y &= B.\end{aligned}$$

Piirväärtuse definitsiooni põhjal võime kirjutada:

$$\begin{aligned}x &= A + \alpha,\\ y &= B + \beta\end{aligned}$$

(1) § 41, kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused.

Korrutades need võrdused, saame:

$$xy = AB + \beta A + \alpha B + \alpha\beta,$$

millest

$$xy - AB = \beta A + \alpha B + \alpha\beta.$$

Viimase võrduse vasakul poolel on meil muutuja xy ja konstandi AB vahe, paremal poolel on aga iga liidetav lõpmatult kahanev suurus (vt. esimene omadus § 42), kuid nende summa on samuti lõpmatult kahanev suurus (§ 42 teise omaduse järeldus). Järelikult on vahe $xy - AB$ lõpmatult kahanev suurus ja vastavalt piirväärtuse definitsioonile

$$\lim xy = AB$$

ehk

$$\lim xy = \lim x \lim y.$$

Selle teoreemi võib tõestada ka mistahes lõpliku arvu muutuvate tegurite korral.

Järeldus 1. *Konstandi ja piirväärtust omava muutuja korrutise piirväärtus võrdub konstandi ja muutuja piirväärtuse korrutisega, s. t.*

$$\lim ax = a \lim x,$$

kus a on konstant ja x muutuja.

Kui a on konstant, siis ilmselt

$$\lim a = a.$$

Seepärast vastavalt teoreemile IV saame:

$$\lim ax = \lim a \lim x = a \lim x.$$

Järeldus 2. *Piirväärtust omava muutuja astme piirväärtus võrdub muutuja piirväärtuse sama astmega,* s. t.

$$\lim x^m = (\lim x)^m.$$

Tõepoolest, astet x^m võib vaadelda kui m võrdse teguri korrutist, s. t.

$$\lim x^m = \lim (x \cdot x \cdot x \ldots x) = \lim x \lim x \lim x \ldots \lim x = (\lim x)^m.$$

Nagu tõestatakse analüüsi täielikus kursuses, on see järeldus õige mistahes m väärtuse korral.

Kasutades seda järeldust, võib öelda, et *piirväärtust omavast muutujast võetud juure piirväärtus võrdub muutuja piirväärtuse sama juurega, s. t.*

$$\lim \sqrt[m]{x} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

Tõepoolest, esitades $\sqrt[m]{x}$ astme $x^{\frac{1}{m}}$ kujul saame:

$$\lim \sqrt[m]{x} = \lim x^{\frac{1}{m}} = (\lim x)^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{\lim x}.$$

Teoreem V. *Kahe muutuja jagatise piirväärtus, kui kumbki muutuja omab piirväärtuse, võrdub jagatava ja jagaja piirväärtuste jagatisega tingimusel, et jagaja piirväärtus ei võrdu nulliga.*

Tõestus. Olgu muutujate x ja y piirväärtused vastavalt A ja B, kusjuures $B \neq 0$.
Siis

$$\left.\begin{aligned} x &= A + \alpha \\ y &= B + \beta, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused.
Vaatleme vahet

$$\frac{x}{y} - \frac{A}{B}$$

ja asendame selles x ja y nende väärtustega võrdustest (2), saame:

$$\frac{x}{y} - \frac{A}{B} = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{AB + \alpha B - AB - \beta A}{B(B+\beta)} =$$

$$= (\alpha B - \beta A) \cdot \frac{1}{B^2 + B\beta}. \tag{3}$$

Korrutised αB ja βA on lõpmatult kahanevad suurused (esimene omadus § 42), seega ka vahe $\alpha B - \beta A$ on lõpmatult kahanev. Saab tõestada, et suurus $\frac{1}{B^2 + \beta B}$ on tõkestatud. Järelikult on võrduse (3) parem pool lõpmatult kahanev suurus (esimese omaduse järeldus § 42). Seega on muutuja $\frac{x}{y}$ ja konstandi $\frac{A}{B}$ vahe võrduses (3) lõpmatult kahanev suurus. Piirväärtuse definitsiooni kohaselt

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{A}{B}$$

ehk

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

tingimusel, et $\lim y \neq 0$.

§ 44. Funktsiooni piirväärtus. Olgu antud funktsioon

$$y = x^2 - 4. \qquad (1)$$

Funktsiooni piirväärtusest saab rääkida ainult siis, kui on antud väärtus, millele läheneb funktsiooni argument x; ilma selle tingimuseta ei ole küsimusel funktsiooni piirväärtusest mõtet.

Oletame, et $x \to 3$; vaatame, kas sel tingimusel antud funktsioonil on olemas piirväärtus ja kui on, siis milline *.

Rääkides muutuja piirväärtusest paragrahvis 41, me näitasime, et see muutuja võib läheneda oma piirväärtusele mitmesugusel viisil.

Moodustagu meie näites x väärtused järgmise arvude jada:

$$3{,}1;\ 3{,}01;\ 3{,}001;\ 3{,}0001;\ \ldots \to 3;$$

siis funktsioon (1) saab vastavalt väärtused:

$$5{,}6;\ 5{,}06;\ 5{,}006;\ 5{,}0006;\ \ldots \to 5.$$

Me näeme, et antud funktsiooni piirväärtus on 5, kui $x \to 3$. Seda kirjutatakse järgmiselt:

$$\lim_{x \to 3} (x^2 - 4) = 5.$$

Kui funktsiooni (1) argumendile anda väärtusi:

$$2{,}9;\ 2{,}99;\ 2{,}999;\ 2{,}9999;\ \ldots \to 3,$$

siis ka sel juhul on meie funktsioonil sama piirväärtus, milles on kerge veenduda vastavate arvutuste abil.

Niisiis, funktsioonil (1) on piirväärtus, kui $x \to 3$.

Esitatud piirväärtuse leidmise viis on kohmakas ja seepärast ei kasutata seda praktikas. Meie poolt tõestatud teoreemid piirväärtuste kohta (§ 43) võimaldavad lihtsustada selle ülesande lahendamist.

Näide 1. Leida $\lim_{x \to 3} (x^2 - 4)$.

Lahendus. Kasutades teoreemi III ja teoreemi IV järeldust 2 piirväärtuste kohta, saame:

---

* Analüüsi täielikus kursuses antakse funktsiooni piirväärtuse definitsioon. Selle definitsiooni keerulisuse tõttu me ei leia võimaliku olevat seda siin esitada.

$$\lim_{x\to 3}(x^2-4)=\lim_{x\to 3}x^2-\lim 4=(\lim_{x\to 3}x)^2-\lim 4=$$
$$=3^2-4=5.$$

See piirväärtus võrdub funktsiooni $y=x^2-4$ varem leitud piirväärtusega.

Näide 2. Leida $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}$.

Lahendus. Enne kui kasutada teoreemi jagatise piirväärtuse kohta, tuleb selgitada, kas jagaja piirväärtus ei võrdu nulliga, kui $x\to 2$. Kasutades teoreemi II ja teoreemi IV järeldust 1 piirväärtuste kohta, leiame: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=$ $=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim 1=2\cdot 2+1=5$. Jagaja piirväärtus ei võrdu nulliga, seepärast võib antud funktsiooni kohta rakendada teoreemi V. Seega

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}.$$

Kuid

$$\lim_{x\to 2}(x^2+3x)=(\lim_{x\to 2}x)^2+3\lim_{x\to 2}x.$$

Järelikult,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{(\lim\limits_{x\to 2}x)^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim 1}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=\frac{10}{5}=2.$$

Kui käsitletud näidetes asetame funktsioonis x asemele tema piirväärtuse, siis saame samad tulemused. Analüüsi täielikus kursuses tõestatakse sellise asenduse lubatavus tingimusel, et funktsioonile, mille piirväärtust leitakse, on rakendatavad teoreemid piirväärtuste kohta.

Edaspidi me kasutame seda võtet, kuna see tunduvalt kiirendab funktsiooni piiriväärtuse leidmise protsessi.

II. Käsitleme nüüd näiteid, millistes jagaja piirväärtus võrdub nulliga ja järelikult ei saa rakendada teoreemi jagatise piirväärtuse kohta; seejuures võib esineda kaks juhtu.

a) Jagatava piirväärtus ei võrdu nulliga.

Näide 3. Leida $\lim\limits_{x \to 3} \frac{3}{2x-6}$.

Lahendus. Leiame jagaja piirväärtuse, asendades x tema piirväärtusega:

$$\lim_{x \to 3} (2x - 6) = 2 \cdot 3 - 6 = 0.$$

Nagu näha, ei saa antud funktsiooni puhul kasutada teoreemi jagatise piirväärtuse kohta (3-me 0-ga jagada pole võimalik). Me teame, et kui $\lim\limits_{x \to 3} (2x - 6) = 0$, siis $2x - 6$ on lõpmatult kahanev suurus, tema pöördväärtus on aga lõpmatult kasvav suurus (§ 40). Seega on $\frac{1}{2x-6}$, kui $x \to 3$, ja järelikult ka korrutis $\frac{1}{2x-6} \cdot 3$ lõpmatult kasvav suurus, s. t.

$$\lim_{x \to 3} \frac{3}{2x-6} = \infty.$$

b) Jagatava piirväärtus võrdub nulliga.

Näide 4. Leida $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + x}$.

Lahendus. Jagaja piirväärtus

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + x) = 0^2 + 0 = 0$$

ja jagatava piirväärtus

$$\lim_{x \to 0} (x^2 + 2x) = 0^2 + 2 \cdot 0 = 0.$$

Sel juhul saame avaldise $\frac{0}{0}$, millel ei ole mõtet.

Kuid siit ei järeldu, et antud funktsioonil pole piirväärtust; selle leidmiseks tuleb funktsiooni eelnevalt teisendada, ja nimelt, jagada lugeja ja nimetaja x-ga, mis on lubatud, kuna enne piirile üleminekut $x \neq 0$, s. t.

$$\frac{x^2 + 2x}{x^2 + x} = \frac{x + 2}{x + 1}. \qquad (2)$$

Avaldise $\frac{x+2}{x+1}$ kohta on teoreem jagatise piirväärtusest

rakendatav, sest jagaja piirväärtus ei võrdu nulliga. Leiame murru $\frac{x+2}{x+1}$ piirväärtuse:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{0+2}{0+1} = 2.$$

Arvestades võrdust (2) ja teoreemi I § 43 järeldust, saame

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2x}{x^2+x} = \lim_{x \to 0} \frac{x+2}{x+1} = 2.$$

Selle tulemuse õigsuses võib veenduda ka antud funktsiooni väärtuste arvutamisega argumendi nende väärtuste puhul, mis on lähedased nullile. Näiteks, kui

$$x = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001;\ 0{,}0001;\ \ldots,$$

siis funktsiooni

$$y = \frac{x^2+2x}{x^3+x}$$

muutumise iseloomu näitab järgmine tabel:

x	0,1	0,01	0,001	$0{,}0001 \to 0$
$y = \frac{x^2+2x}{x^2+x}$	1,9	1,99	1,999	$1{,}9999 \to 2$

Näide 5. Leida $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$.

Lahendus. Ka antud juhul on jagatava ja jagaja piirväärtused võrdsed nulliga ning seepärast on vaja funktsiooni eelnevalt teisendada, taandades $x-3$-ga, mis on lubatav, kuna enne piirile üleminekut $x-3 \neq 0$.

Niisiis,

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \to 3} (x+3) = 3+3 = 6.$$

Näide 6. Leida $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$.

Lahendus. Samuti nagu eelnevates näidetes, tuleb ka siin antud funktsiooni teisendada. Selleks vabastame lugeja irratsionaalsusest, korrutades murru mõlemaid liik-

meid avaldisega $\sqrt{x+3}+2$, ja teeme vajalikud lihtsustused:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}=\frac{1}{4}.$$

III. Vaatleme nüüd näiteid funktsiooni piirväärtuse leidmise kohta juhul, kui $x\to\infty$.

Näide 7. Leida $\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x+2}$.

Lahendus. Jagaja $3x+2$ kasvab tõkestamatult, kui $x\to\infty$, s. t. esitab lõpmatult kasvavat suurust; tema pöördväärtus $\frac{1}{3x+2}$ on aga lõpmatult kahanev suurus (§ 40). Järelikult korrutis $\frac{1}{3x+2}\cdot 2$ läheneb nullile, kui $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x+2}=0.$$

Näide 8. Leida $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}$.

Lahendus. Siin jagatav ja jagaja on lõpmatult kasvavad suurused, kui $x\to\infty$, nende suhtel aga puudub mõte. Seepärast teisendame antud avaldist, jagades nii jagatava kui ka jagaja x-ga:

$$\frac{3x+5}{4x+1}=\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}.$$

Kui $x\to\infty$, siis $\frac{5}{x}$ ja $\frac{1}{x}$ on lõpmatult kahanevad suurused ning seega jagatava ja jagaja piirväärtused on vastavalt 3 ja 4, funktsiooni piirväärtus on aga 0,75.

Antud funktsiooni piirväärtuse leidmise protsess kirjutatakse üles järgmiselt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{4+\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{4+0}=0{,}75.$$

Näide 9. Leida $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}$.

Lahendus. Jagades murru mõlemad liikmed x^2-ga saame:

$$\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Kui $x\to\infty$, siis suhted $\frac{1}{x}$ ja $\frac{4}{x^2}$ lähenevad nullile. $2x$ aga kasvab tõkestamatult; järelikult,

$$\lim_{x\to\infty}\left(2x+3+\frac{1}{x}\right)=\infty$$

ja

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)=1,$$

kogu murd

$$\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}\to\infty.$$

Seega,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2+x}{x^2+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+3+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x^2}}=\infty.$$

Harjutusi.

Leida:

1. $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+4)$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+x-3}{2x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{5}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x-1}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-3x^2}{2x^2+5}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^2+x}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x+x^2}{2x+x^2+x^3}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{3x+2x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{2x}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^3+3x^2}{2x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

14. $\lim\limits_{x\to 2a}\dfrac{4a^2-x^2}{x-2a}$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$.

16. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+4x-5}{x+5}$.

17. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

18. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{x+3}$.

19. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-6x+9}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}{x}$.

22. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$.

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2+x}$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x}$.

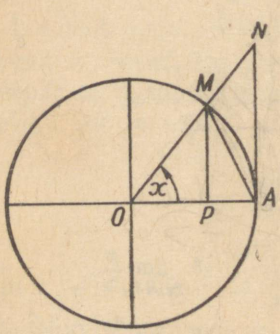
27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x-1}$.

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^2}{1+2x^2}$.

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x^3}{x^4+x^5}$.

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^5}{x^2+x^3}$.

§ 45. Suhte $\dfrac{\sin x}{x}$ piirväärtus, kui $x\to 0$. Kuna antud juhul $\lim x = 0$, siis suhte $\dfrac{\sin x}{x}$ piirväärtuse leidmiseks, kui $x\to 0$, ei saa rakendada jagatise piirväärtuse teoreemi, samuti ei saa teha siin mingisuguseid teisendusi antud suhte piirväärtuse arvutamiseks. Sellepärast kasutame geomeetrilisi kaalutlusi.



Joon. 69.

Võtame ringjoone raadiusega R ja kesknurga x, mis on väljendatud radiaanmõõdus (joon. 69). Tõmbame kõõlu AM ja puutuja AN, mis lõikab raadiuse OM pikendust punktis N. Jooniselt on näha: $\triangle AOM$ pindala $<$ sektori AOM

pindala $< \triangle AON$ pindala. Kasutades kolmnurkade ja sektori pindala valemeid, võime kirjutada:

$$\frac{OA \cdot PM}{2} < \frac{OA \cdot \smile AM}{2} < \frac{OA \cdot AN}{2};$$

pärast taandamist $\frac{OA}{2}$-ga, saame:

$$PM < \smile AM < AN.$$

Jagame viimaste võrratuste kõiki liikmeid R-ga:

$$\frac{PM}{R} < \frac{\smile AM}{R} < \frac{AN}{R}. \qquad (1)$$

Kuid

$$\frac{PM}{R} = \sin x,$$

$$\frac{AN}{R} = \tan x,$$

$$\frac{\smile AM}{R} = x,$$

seepärast võime võrratused (1) kirjutada järgmiselt:

$$\sin x < x < \tan x$$

ehk

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kuna x on teravnurk, siis $\sin x$ on positiivne suurus; jagades saadud võrratused suurusega $\sin x$, leiame:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ehk

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \qquad (2)$$

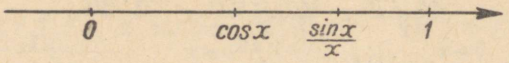
Oletame nüüd, et $x \to 0$; siis

$$\cos x \to 1.$$

Kuna suhe $\frac{\sin x}{x}$ asetseb vastavalt võrratustele (2) arvu 1 ja $\cos x$ vahel, siis see suhe peab lähenema 1-le.

Suhte $\frac{\sin x}{x}$ lähenemist 1-le saab hästi selgitada, kui

võrratustes (2) esinevad suurused kujutada koordinaatteljel (joon. 70).



Joon. 70.

Seega,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

§ 46. Ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused. *Ekvivalentseteks lõpmatult kahanevateks suurusteks nimetatakse niisuguseid lõpmatult kahanevaid suurusi, millede suhte piirväärtuseks on 1.*

Paragrahvis 45 vaadeldi kahe lõpmatult kahaneva suuruse, $\sin x$ ja x, suhte piirväärtust, kusjuures see piirväärtus osutus võrdseks 1-ga; seepärast on $\sin x$ ja x ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused, kui $x \to 0$.

Võib näidata ka teisi ekvivalentseid lõpmatult kahanevaid suurusi, näiteks $\tan x$ ja x, kui $x \to 0$. Tõepoolest,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Analüüsi täielikus kursuses tõestatakse, et kahe lõpmatult kahaneva suuruse suhte piirväärtuse leidmiseks võib kummagi neist asendada temaga ekvivalentse suurusega.

Näide 1. Leida $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.

Lahendus. Me näitasime juba, et $\sin x$ ja x on ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused, kui $x \to 0$; sellepärast võib antud avaldises $\sin \frac{x}{2}$ asendada tema argumendiga $\frac{x}{2}$. Teinud seda, saame:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\lim\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

Näide 2. Leida $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$.

Lahendus. Kui $x\to 0$, siis ka $ax\to 0$ ja $bx\to 0$; seepärast $\sin ax$ ja $\sin bx$ on lõpmatult kahanevad suurused. Asendades $\sin ax$ ja $\sin bx$ vastavate ekvivalentsete lõpmatult kahanevate suurustega ax ja bx, saame:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{ax}{bx}=\lim\frac{a}{b}=\frac{a}{b}.$$

Harjutusi.

Leida:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\cos x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$.
8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}$.
10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^3}$.
11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin 3x}{x}$.
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\tan x}$.
13. $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$.
14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\sin x}{x^2}$.
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{x}$.
16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\tan x}{x}$.
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin x}$.
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3\sin x}$.
19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.
20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{x}$.
21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

§ 47. Avaldise $(1+\frac{1}{n})^n$ piirväärtus, kui $n\to\infty$. Analüüsi täielikus kursuses tõestatakse, et avaldisel $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ on piirväärtus, kui $n\to\infty$, et see piirväärtus on suurem kui 2 ja väiksem kui 3 ning avaldub irratsionaalarvuna. Öeldu selgitamiseks koostame järgmise tabeli avaldise $(1+\frac{1}{n})^n$ väärtuste kohta kasvavate n väärtuste korral:

n	1	2	3	4	5	10	100	1000
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	2	2,25	2,37	2,44	2,49	2,59	2,705	2,717

Tabelist on näha, et n kasvamisel kasvavad samuti avaldise $(1+\frac{1}{n})^n$ väärtused, kuid nende kasvamine toimub aeglustuvalt.

Avaldise $(1+\frac{1}{n})^n$ piirväärtust kui $n \to \infty$, tähistatakse tähega e, mis võrdub ligikaudu 2,718-ga.

Seega,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}718.$$

§ 48. Naturaallogaritmid. Kõrgemas matemaatikas on arvul e väga suur tähtsus, mida võib võrrelda π tähtsusega geomeetrias. Arv e võetakse *naturaal-* ehk *Napieri** logaritmide aluseks. Naturaallogaritme kasutatakse laialdaselt matemaatilises analüüsis, kuna nende abil võib mitmesuguseid valemeid esitada lihtsamal kujul kui kümnendlogaritmide kasutamisel. Naturaallogaritmide sümboliks on ln.

Ühe ja sama arvu naturaal- ja kümnendlogaritmide vahel on lihtne seos, mis võimaldab kümnendlogaritmidelt üle minna naturaallogaritmidele ja vastupidi.

Selle seose tuletamiseks võtame arvu N ja esitame selle kord arvu 10, kord arvu e astmena:

$$N = 10^x$$

ja

$$N = e^y,$$

kus x ja y, nagu teada, on arvu N logaritmid, kusjuures x on *kümnendlogaritm, y* aga *naturaallogaritm*. Nendest võrdustest järeldub:

$$10^x = e^y.$$

---

* Naturaallogaritme nimetatakse ka Napieri logaritmideks šoti matemaatiku Napieri (ka Neperi) nime järgi, kes esimesena võttis kasutusele logaritmid.

Logaritmides selle võrduse mõlemad pooled alusel 10, saame:

$$x \log 10 = y \log e,$$

ehk

$$x = y \log e,$$

millest

$$y = \frac{x}{\log e}.$$

Asendades x ja y vastavalt suurustega $\log N$ ja $\ln N$, saame:

$$\ln N = \frac{\log N}{\log e}.$$

Logaritmide tabelist leiame:

$$\log e = 0{,}4343.$$

Seega

$$\ln N = \log N \cdot \frac{1}{\log e} = \log N \cdot \frac{1}{0{,}4343} = \log N \cdot 2{,}303, \quad (1)$$

s. o. *arvu naturaallogaritm võrdub selle arvu kümnendlogaritmi ja teguri* 2,303 *korrutisega.*

Siit järeldub, et arvu naturaallogaritm on 2,303 korda suurem kümnendlogaritmist.

Võrdusest (1) leiame:

$$\log N = \ln N \cdot 0{,}4343,$$

s. o. *arvu kümnendlogaritm võrdub selle arvu naturaallogaritmi ja teguri* 0,4343 *korrutisega.*

N ä i d e. Leida $\ln 2$.

L a h e n d u s. $\ln 2 = \log 2 \cdot 2{,}303 = 0{,}3010 \cdot 2{,}303 \approx \approx 0{,}693$.

Harjutusi.

1. $\ln 3$.
2. $\ln 12$.
3. $\ln 4{,}5$
4. $\ln 10{,}5$.
5. $\ln 0{,}2$.
6. $\ln 0{,}16$.
7. $\ln 0{,}84$.
8. $\ln 0{,}1$.

VI peatükk.

FUNKTSIOON JA SELLE LIHTSAIMAD OMADUSED.

§ 49. Funktsionaalse sõltuvuse sümboolika. Nagu teada (§ 6), nimetatakse muutujat y muutuja x funktsiooniks, kui x igale lubatud väärtusele vastab kindel y väärtus. Väljendada funktsioon analüütiliselt — see tähendab näidata tehted, mis on vaja teostada argumendiga x, selleks et saada vastavaid y väärtusi.

Olgu näiteks antud funktsioon võrrandiga

$$y = \frac{x^2 + 2\sqrt{x} - 1}{x}.$$

Sellega antakse meile ka need tehted, mis on vaja teostada argumendiga x, et saada y.

Tihti juhtub, et üks ja sama funktsioon, mis mõnikord on antud keerulise võrrandiga, esineb ühe ja sama küsimuse käsitlemisel korduvalt. Üleskirjutuse lühendamiseks on lepitud kokku tähistada võrrandi paremat poolt sümboliga $f(x)$ ja kirjutada:

$$y = f(x).$$

Seda võrdust loetakse nii: „igrek on ef iks" ehk „igrek on iksi funktsioon".

Mõnikord ei huvita meid mitte konkreetne funktsioon, mille argumendiga on teostatud teatud hulk tehteid, vaid ainult fakt, et üks muutuv suurus sõltub teisest muutuvast suurusest. Sel juhul kirjutatakse samuti $y = f(x)$, mõistes sümboli $f(x)$ all teadmata tehete kogumikku, mis tuleb sooritada argumendiga x.

Kui ühes ja samas küsimuses on juttu mitmest erinevast funktsioonist, siis selleks, et neid mitte segi ajada, tähistatakse funktsioonide sümbolid eri tähtedega, näiteks: F, φ, ψ.

§ 50. Funktsiooni eriväärtus. Olgu funktsioon y antud võrrandiga

$$y = x^2 - x. \qquad (1)$$

Anname argumendile x rea väärtusi, näiteks $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$ jne.; siis y omandab vastavalt väärtused: $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 20$ jne.

Suurusi x_1, x_2, x_3 nimetatakse *argumendi eriväärtusteks* ja suurusi y_1, y_2, y_3 *funktsiooni eriväärtusteks.*

Kui funktsiooni (1) argumendiga sooritatav tehete kogumik tähistada sümboliga $f(x)$, siis võib kirjutada:

$$f(x) = x^2 - x.$$

Sel juhul kirjutatakse funktsiooni leitud väärtused järgmiselt:

$$f(1) = 0,\ f(3) = 6,\ f(5) = 20.$$

N ä i d e. On antud funktsioon $f(x) = 2x^2 + x - 1$. Leida:

$$1)\ f(-1),\ 2)\ f(0),\ 3)\ f(2),\ 4)\ f(a).$$

L a h e n d u s. 1) $f(-1) = 2(-1)^2 + (-1) - 1 = 2 - 1 - 1 = 0$,
2) $f(0) = 2 \cdot 0 + 0 - 1 = -1$,
3) $f(2) = 2 \cdot 2^2 + 2 - 1 = 9$,
4) $f(a) = 2a^2 + a - 1$.

Harjutusi.

1. On antud funktsioon $f(x) = 2x - 1$. Määrata

$$1)\ f(2),\ 2)\ f(0),\ 3)\ f(-1).$$

2. On antud funktsioon $f(x) = 3x^2 + 1$. Määrata

$$1)\ f(-2),\ 2)\ f(5),\ 3)\ f(2a),\ 4)\ f(a-1).$$

3. Näidata, et funktsiooni $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$ kohta on kehtiv võrdus $f(-3) = f(3)$.

4. On antud funktsioon $f(x) = x^3 - x$. Tõestada, et $f(-x) = -f(x)$.

5. Kuidas kirjutada, et arvud 2 ja -3 on võrrandi $f(x) = 0$ lahendid?

§ 51. Funktsioonide geomeetriline kujutamine. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Analüütilisest geomeetriast

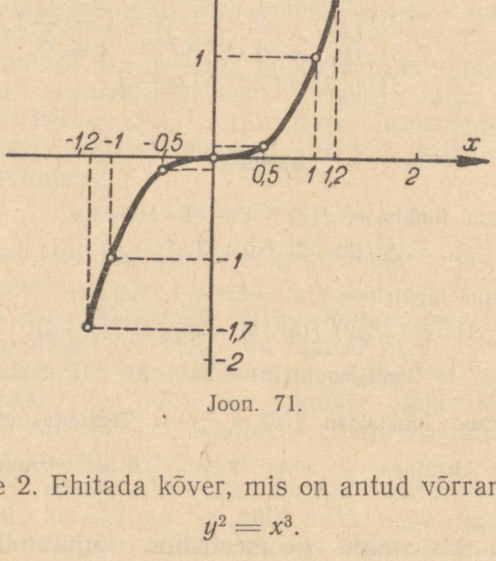
teame, et võrrand $y = f(x)$ määrab üldiselt mingi joone, mida nimetatakse *funktsiooni graafikuks*. See graafik annab meile näitliku ettekujutuse antud funktsiooni muutumise iseloomust.

N ä i d e 1. Ehitada funktsiooni $y = x^3$ graafik.

L a h e n d u s. Võttes $x = -1{,}2;\ -1;\ -0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1;\ 1{,}2$; leiame funktsiooni y vastavad väärtused ja kirjutame tulemused tabelisse:

x	$-1{,}2$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}2$
y	$-1{,}7$	-1	$-0{,}1$	0	$0{,}1$	1	$1{,}7$

Vaadeldes x ja y iga leitud väärtuste paari kui tasapinna punkti koordinaate, ehitame need punktid ja ühendame need sujuva joonega; saame kõvera, mida nimetatakse *kuupparaboliks* (joon. 71).



Joon. 71.

N ä i d e 2. Ehitada kõver, mis on antud võrrandiga

$$y^2 = x^3.$$

L a h e n d u s. Avaldame antud võrrandist y

$$y = \pm \sqrt{x^3}.$$

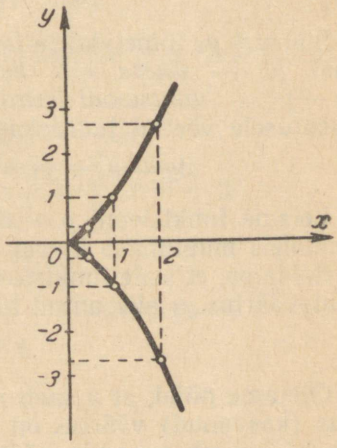
Me näeme, et võrrandiga $y^2 = x^3$ on antud kaks funktsiooni:

$$y = \sqrt{x^3} \text{ ja } y = -\sqrt{x^3},$$

mis omavad reaalseid väärtusi ainult siis, kui $x \geqslant 0$. Koostame järgmise tabeli x ja y väärtuste kohta, arvutades $\sqrt{x^3}$:

x	0	0,5	1	2
y	0	$\pm 0{,}35$	± 1	$\pm 2{,}8$

Ehitades leitud koordinaatide järgi punktid ja ühendades need sujuva joonega, saame kahest harust koosneva kõvera, kus ühele harule vastab plussmärk, teisele miinusmärk võrrandis $y = \pm \sqrt{x^3}$. Seda kõverat nimetatakse *poolkuupparabooliks* (joon. 72).



Joon. 72.

§ 52. Funktsiooni juurdekasv. Kui muutuv suurus x muutis oma väärtust x_1-st kuni x_2-ni, siis tema uue väärtuse ja lähteväärtuse vahet nimetatakse muutuja juurdekasvuks ja tähistatakse sümboliga Δx * (loetakse: „delta iks").

Seega

$$\Delta x = x_2 - x_1,$$

siit

$$x_2 = x_1 + \Delta x.$$

Suurust x_2 nimetatakse teisiti ka *muutuja kasvanud väärtuseks.*

---

* Märgime et Δx ei tohi vaadelda kui kahe teguri korrutist; sümbol Δ on x-ist lahutamatu, nii nagu näiteks avaldises $\sin x$ sümbol sin on x-st lahutamatu.

Muutuja juurdekasvuks võib olla nii positiivne kui ka negatiivne arv. Kui näiteks x väärtus muutub 5-st kuni 5,2-ni, siis

$$\Delta x = 5{,}2 - 5 = 0{,}2,$$

muutub aga argument 10-st kuni 9,7-ni, siis

$$\Delta x = 9{,}7 - 10 = -0{,}3.$$

Olgu antud funktsioon

$$y = x^2.$$

Eeldame, et selle funktsiooni argumendi lähteväärtus $x_1 = 3$ ja kasvanud väärtus $x_2 = 3{,}5$; siis

$$\Delta x = 3{,}5 - 3 = 0{,}5.$$

Leides algul funktsiooni väärtuse, kui $x_1 = 3$, ja seejärel funktsiooni väärtuse, kui $x_2 = 3{,}5$, saame:

$$y_1 = 3^2 = 9,$$
$$y_2 = 3{,}5^2 = 12{,}25.$$

Suurust y_1 nimetatakse *funktsiooni lähteväärtuseks*, suurust y_2 — *uueks* ehk *kasvanud väärtuseks*, ja vahet $y_2 - y_1$ — *funktsiooni juurdekasvuks*. Vastavalt meie poolt kasutusele võetud juurdekasvu sümbolile võime kirjutada:

$$\Delta y = y_2 - y_1 = 12{,}25 - 9 = 3{,}25.$$

Leiame funktsiooni $y = x^2$ juurdekasvu Δy argumendi x mistahes muutumise korral.

Eeldame, et selle funktsiooni argumendil on mingisugune lähteväärtus x; siis antud funktsiooni lähteväärtus on:

$$y = x^2. \qquad (1)$$

Oletame nüüd, et x saab juurdekasvu Δx; siis argumendi uus (kasvanud) väärtus on $x + \Delta x$. Selleks, et leida funktsiooni uut (kasvanud) väärtust, tuleb antud funktsiooni avaldises x asendada suurusega $x + \Delta x$; saame

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \qquad (2)$$

Lahutades võrdusest (2) võrduse (1), leiame:

$$\begin{array}{rl} & y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 \\ - & y \qquad\quad = x^2 \\ \hline & \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 \end{array}$$

ehk pärast teisendamist

$$\Delta y = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2. \qquad (3)$$

Me leidsime antud *funktsiooni juurdekasvu üldkujul.*

Et leida selle funktsiooni juurdekasvu erijuhul, mida vaatlesime paragrahvi alguses, võib võrduses (3) x ja Δx asendada vastavalt arvudega 3 ja 0,5, siis leiame:

$$\Delta y = 2 \cdot 3 \cdot 0{,}5 + (0{,}5)^2 = 3 + 0{,}25 = 3{,}25.$$

Saadud tulemus ühtib varem leituga.

Seega on funktsiooni juurdekasvu leidmiseks vaja:

1) *antud funktsionaalse sõltuvuse avaldises asendada* x suurusega $x + \Delta x$ ja y suurusega $y + \Delta y$;

2) *saadud avaldisest lahutada liikmeti antud avaldis.*

Kui funktsioon on antud üldkujul $y = f(x)$, siis vastavalt ülaltoodud reeglile saame funktsiooni juurdekasvu esitada järgmiselt:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x). \qquad (4)$$

Näide 1. Leida funktsiooni $y = 2x^2 + 3$ juurdekasv.

Lahendus.

$$\begin{array}{lll} 1. & y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^2 + 3 = \\ & \quad = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3. \\ 2. & y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 3 \\ - & y \qquad\quad = 2x^2 + 3 \\ \hline & \Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 \end{array}$$

Näide 2. Leida funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ juurdekasv.

Lahendus.

$$\begin{array}{lll} 1. & y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x}. \\ 2. & y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} \\ - & y \qquad\quad = \frac{1}{x} \\ \hline & \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}. \end{array}$$

1. On antud funktsioon $y = 2x + 1$. Leida funktsiooni juurdekasv, kui x muutub: 1) 4-st 4,3-ni; 2) 0-st 0,2-ni; 3) 2-st 1,5-ni.

2. Leida funktsiooni $y = 2x^2$ juurdekasv, kui x muutub: 1) 1-st 1,3-ni; 2) $-0{,}2$-st $+0{,}2$-ni; 3) 0-st a-ni.

3. Leida funktsiooni $y = x^2 - 1$ juurdekasv, kui on teada: 1) $x_1 = 2$, $\Delta x = 0{,}5$; 2) $x_1 = 3$, $\Delta x = -0{,}6$.

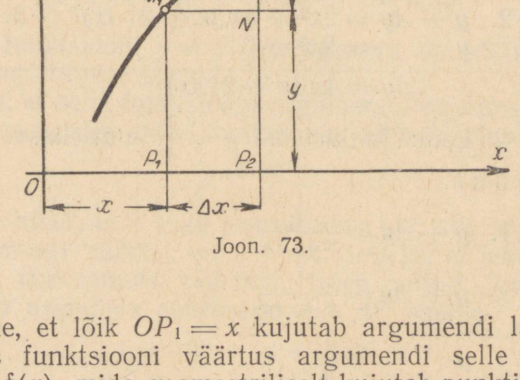
4. Leida funktsiooni $y = 2x^2 - x + 1$ juurdekasv, kui on antud: 1) $x_1 = 3$, $\Delta x = 0{,}5$; 2) $x_1 = a$, $\Delta x = h$.

5. On antud $v = \frac{12}{p}$, $p_1 = 1$, $\Delta p = 0{,}4$; leida Δv.

6. On antud $y = \sin x$, $x_1 = \frac{\pi}{2}$, $\Delta x = \frac{\pi}{6}$; leida Δy.

7. Leida funktsiooni juurdekasv üldkujul:
1) $y = 3x + 2$, 2) $y = 2x^2 - 1$, 3) $y = 3x^2 - 2x$,
4) $y = -x^2 - 3x$, 5) $y = x^3$, 6) $y = 2x^3 - 2x^2$, 7) $y = x - \frac{1}{x}$.

§ 53. Argumendi ja funktsiooni juurdekasvude geomeetriline kujutamine. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mille graafik on esitatud joonisel 73.



Joon. 73.

Oletame, et lõik $OP_1 = x$ kujutab argumendi lähteväärtust; siis funktsiooni väärtus argumendi selle väärtuse puhul on $f(x)$, mida geomeetriliselt kujutab punkti M_1 ordinaat P_1M_1:

$$P_1M_1 = f(x). \qquad (1)$$

Anname argumendile x juurdekasvu

$$P_1P_2 = \Delta x;$$

siis x uus väärtus on:

$$OP_2 = x + \Delta x$$

ning funktsiooni uus väärtus on $f(x + \Delta x)$, mida geomeetriliselt kujutab punkti M_2 ordinaat P_2M_2:

$$P_2M_2 = f(x + \Delta x).$$

Tõmmates punktist M_1 sirgega OP_2 paralleelse sirge lõikumiseni P_2M_2-ga punktis N, saame:

$$NM_2 = P_2M_2 - P_2N = P_2M_2 - P_1M_1$$

ehk vastavalt võrdustele (1) ja (2)

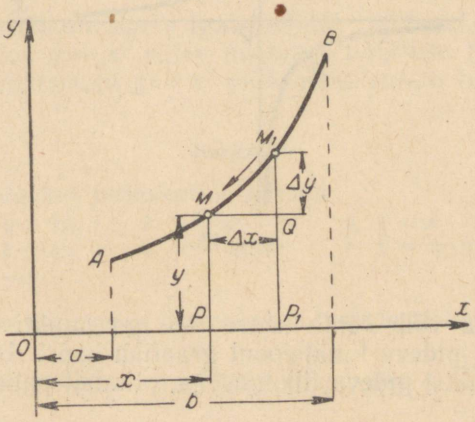
$$NM_2 = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Paremal poolel saadud vahe võrdub Δy-ga [vt. valemit (4) § 52] ja seega

$$NM_2 = \Delta y.$$

Järelikult, *geomeetriliselt kujutatakse argumendi juurdekasvu kõvera punkti abstsissi juurdekasvuga, funktsiooni juurdekasvu aga selle punkti ordinaadi juurdekasvuga.*

§ 54. Funktsiooni pidevus. *Funktsiooni* $y = f(x)$ *nimetatakse pidevaks* x *antud väärtusel, kui* x *lõpmatult väikesele juurdekasvule vastab* y *lõpmatult väike juurdekasv, s. t. kui* $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.



Joon. 74.

Kui see tingimus on täidetud igal argumendi väärtusel vahemikus $x = a$ kuni $x = b$, siis nimetatakse funktsiooni *pidevaks* antud *vahemikus.*

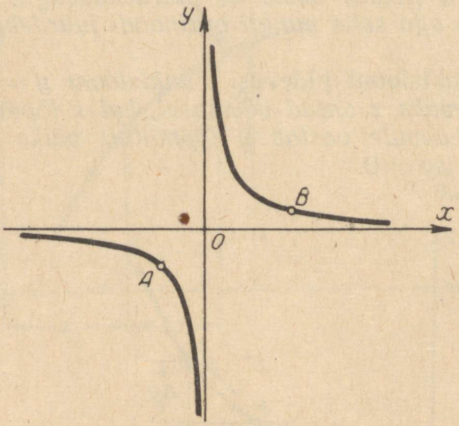
Selgitame funktsiooni pidevust geomeetriliselt. Olgu kaar AB (joon. 74) funktsiooni $y = f(x)$ graafikuks, kusjuures see funktsioon on pidev x väärtuste vahemikus a-st kuni b-ni. Võtame sellel kaarel meelevaldse punkti $M(x\,;y)$. Anname abstsissile x juurdekasvu

$$PP_1 = \Delta x,$$

siis y saab juurdekasvu

$$QM_1 = \Delta y.$$

Vastavalt definitsioonile on funktsioon punktis M pidev, kui $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. See tähendab, kui $\Delta x \to 0$, siis ordinaat P_1M_1 läheneb tõkestamatult ordinaadile PM ja punkt M_1 punktile M ning seepärast leidub kõveral punkt, mis on kuitahes lähedal punktile M.



Joon. 75.

Sedasama võib öelda kaare AB iga punkti kohta. Siit järeldub, et pideva funktsiooni graafiku kaart AB võib joonestada pliiatsi pideva liikumisega, pliiatsit paberilt eemaldamata.

Kuid mitte kõik funktsioonid ei ole igal argumendi väär-

tusel pidevad. Võtame näiteks funktsiooni $y = \frac{1}{x}$. Analüütilisest geomeetriast teame, et selle funktsiooni graafikuks on võrdhaarne hüperbool (joon. 75), mis koosneb kahest harust. Pliiatsi pideva liikumisega võib joonestada mistahes kaare vasakul harul ja mistahes kaare paremal harul, kuid pliiatsit paberilt eemaldamata pole võimalik minna mööda kõverat vasaku haru punktist A parema haru punkti B. See illustreerib meile funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ pidevust x igal väärtusel, välja arvatud $x = 0$, kus, nagu öeldakse, antud funktsioon katkeb.

Murdfunktsioonid omavad selliseid katkevuspunkte nimetajat nulliks tegevatel x väärtustel, kui funktsiooni y väärtused samal ajal kasvavad tõkestamatult ($y \to \infty$) *.

Näiteks funktsioon $y = \frac{4x}{x-3}$ katkeb, kui $x = 3$; funktsioon $y = \frac{10}{x^2-4}$ katkeb aga, kui $x_1 = 2$ ja $x_2 = -2$ jne.

N ä i d e. Uurida funktsiooni $y = x^2$ pidevust.

L a h e n d u s. Anname argumendile x juurdekasvu Δx; siis funktsioon y saab juurdekasvu (valem (3) § 52)

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Leiame Δy piirväärtuse, kui $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [2x\Delta x + (\Delta x)^2] = 2x \cdot 0 + 0^2 = 0.$$

Saadud võrdus on õige x igal lõplikul väärtusel, sellepärast on funktsioon $y = x^2$ pidev mistahes väärtuse puhul. Ettekujutuse funktsiooni $y = x^2$ pidevusest annab tema graafik (joon. 8).

Harjutusi.

Uurida järgmiste funktsioonide pidevust:

1. $y = 2x$, 2. $y = x^2 - 3$, 3. $y = x - 2x^2$,
4. $y = x^3$, 5. $y = \sin x$, 6. $y = \cos x$.

---

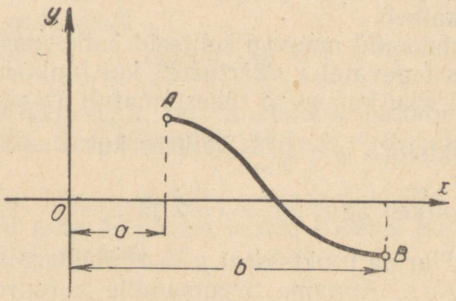
* Viimane tingimus on oluline, sest näiteks funktsiooni $y = \frac{4x}{x^2-3x}$ puhul läheneb funktsioon y väärtusele $-\frac{4}{3}$, kui x läheneb nullile. (*Toim.*)

Määrata funktsioonide katkevuspunktid:

7. $y = \frac{1}{1-x}$, 8. $y = \frac{x}{x-2}$, 9. $y = \frac{2x}{x+1}$, 10. $y = \tan x$.

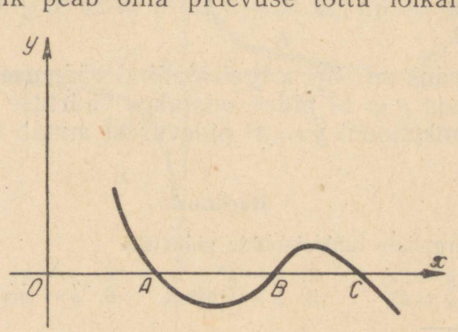
§ 55. Pideva funktsiooni omadus. *Pidev funktsioon võib märki muuta ainult üleminekul nullist.* Seda pideva funktsiooni omadust on kerge selgitada geomeetriliselt. Tõepoolest, olgu

$f(x) > 0$, kui $x = a$ (joon. 76, punkt A),
$f(x) < 0$, kui $x = b$ (joon. 76, punkt B).



Joon. 76.

Kui abstsissi väärtusi muuta pidevalt a-st b-ni, siis funktsiooni graafik peab oma pidevuse tõttu lõikama x-telge.



Joon. 77.

Selles kõvera ja abstsisstelje lõikepunktis funktsiooni väärtus võrdub nulliga.

Kui pidev funktsioon muudab märki mitu korda järjest, siis tema graafik lõikab x-telge sama arv korda (joon. 77). On selge, et funktsiooni märk ei muutu graafiku ja x-telje kahe naaberlõikepunkti vahel (A ja B vahel negatiivne, B ja C vahel positiivne), samuti aga ka kõigi punktide puhul vasakul pool punkti A (positiivne) ja paremal pool punkti C (negatiivne).

§ 56. Funktsioonide liigitus.

Ilmutatud ja ilmutamata funktsioonid. Funktsioonid jagunevad *ilmutatud* ja *ilmutamata funktsioonideks. Funktsiooni nimetatakse ilmutatuks, kui teda määrav võrrand on lahendatud funktsiooni suhtes.*

Näiteks võrrandis $y = 2x^2 - x + 3$ on y ilmutatud funktsioon.

Funktsiooni nimetatakse ilmutamatuks, kui teda määrav võrrand ei ole lahendatud funktsiooni suhtes.

Näiteks võrrandis $x^2 + y^2 = 25$ on funktsioon y antud ilmutamata kujul. Viimase võrrandiga väljendatud funktsiooni võib esitada ka ilmutatud kujul; tõepoolest, lahendades selle võrrandi y suhtes, saame $y = \pm \sqrt{25 - x^2}$. Kuid keerulisematel juhtudel osutub selline teisendamine tihti võimatuks.

Ilmutatud funktsioonide liigitus. Ilmutatud funktsioonid jagunevad kahte klassi: *algebralised* ja *transtsendentsed funktsioonid.*

Algebraliseks nimetatakse sellist funktsiooni, milles argumendiga teostatakse lõplik arv algebralisi tehteid (liitmine, lahutamine, korrutamine, jagamine ja astendamine ratsionaalse astendajaga).

Näiteks, $y = 2x^2 - 3\sqrt{x} + 1$, $y = \frac{4x^2-1}{x+3}$ on algebralised funktsioonid.

Iga mittealgebralist funktsiooni nimetatakse transtsendentseks funktsiooniks.

Näiteks, $y = a^x$, $y = \log_a x$, $y = \sin x$, $y = \arc\sin x$ on transtsendentsed funktsioonid.

Transtsendentsed funktsioonid jagunevad mitmesse liiki, milledest lihtsaimad on järgmised:

1. *Eksponentfunktsioon* $y = a^x$, kus argument x on astendajaks.
2. *Logaritmfunktsioon* $y = \log_a x$.

3. *Trigonomeetrilised funktsioonid:* $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$.

4. *Trigonomeetrilised pöördfunktsioonid:* $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctan x$, $y = \operatorname{arc\,cot} x$, $y = \operatorname{arc\,sec} x$, $y = \operatorname{arc\,cosec} x$.

Ühesed ja mitmesed funktsioonid. *Funktsiooni nimetatakse üheseks, kui argumendi igale lubatud väärtusele vastab üks funktsiooni väärtus.*

Näiteks on võrrandiga $y = x^2 + 1$ antud funktsioon ühene.

Funktsiooni nimetatakse mitmeseks, kui argumendi igale lubatud väärtusele vastab mitu funktsiooni väärtust.

Näiteks on võrrandiga $y^2 = 3x^2 + x$ antud funktsioon kahene, sest et $y = \pm \sqrt{3x^2 + x}$ (y omab kaks väärtust); funktsioon $y = \operatorname{Arc\,tan} x$ on mitmene, sest et x ühele väärtusele vastab y väärtuste hulk, mis erinevad üksteisest π-kordse suuruse võrra (näiteks, kui $x = 0$, siis funktsioon $y = 0, \pi, 2\pi, 3\pi$ jne.).

Pöördfunktsioonid. Olgu antud võrrand

$$y = x^3,$$

kus y on x funktsioon. Avaldame siit argumendi x funktsiooni y kaudu:

$$x = \sqrt[3]{y}.$$

Vahetades võrrandis (2) tähe x tähega y, saame:

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Võrrandiga (3) antud funktsiooni y nimetatakse võrrandiga (1) antud funktsiooni y *pöördfunktsiooniks*; mõlemaid funktsioone (1) ja (3) nimetatakse aga *teineteise pöördfunktsioonideks.*

Näiteks on teineteise pöördfunktsioonid $y = \sin x$ ja $y = \operatorname{Arc\,sin} x$; $y = a^x$ ja $y = \log_a x$.

VII peatükk.

FUNKTSIOONI TULETISE MÕISTE.

§ 57. Ühtlane liikumine ja selle kiirus. Liikugu keha ühtlaselt ja sirgjooneliselt. See tähendab, et igas ajaühikus läbib keha ühe ja sama teepikkuse, mida nimetatakse selle liikumise *kiiruseks*. *Ühtlase liikumise* seadus väljendub valemiga

$$s = vt + s_0,$$

mis kujutab endast esimese astme funktsiooni, geomeetriliselt aga sirgjoont.

Ümberpöördult, iga lineaarfunktsioon kujul

$$s = vt + s_0, \qquad (1)$$

kus v ja s_0 on jäävad suurused, väljendab ühtlase sirgjoonelise liikumise seadust. Et selles veenduda, leiame keha poolt läbitud tee pikkuse ajamomentidel t_1 ja t_2. Asetades võrduses (1) t asemele väärtused t_1 ja t_2, saame:

$$s_1 = vt_1 + s_0,$$
$$s_2 = vt_2 + s_0.$$

Siit

$$s_2 - s_1 = (vt_2 + s_0) - (vt_1 + s_0) = v(t_2 - t_1)$$

ja

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = v.$$

Tähistades teepikkuse juurdekasvu $s_2 - s_1$ sümboliga Δs ja aja juurdekasvu $t_2 - t_1$ sümboliga Δt, võime kirjutada:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v. \qquad (2)$$

Võrdus (2) näitab, et keha poolt läbitud tee pikkuse suhe ajavahemikku, mille jooksul see tee läbiti, on jääv suurus. Seepärast $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ esitab ühtlase liikumise kiirust.

Järelikult, *lineaarfunktsioon* $s = vt + s_0$ *väljendab ühtlase sirgjoonelise liikumise seadust, kusjuures* v *on selle liikumise kiirus.*

§ 58. Mitteühtlane liikumine ja selle kiirus. Peale ühtlase liikumise esineb looduses ka *mitteühtlane* liikumine. Selle liikumise seadus ei väljendu enam esimese astme võrrandiga, vaid palju keerulisema võrrandiga. Olgu näiteks antud funktsioon

$$s = 4{,}9t^2,$$

mis väljendab keha langemise seadust. Kuna keha langemine ei ole ühtlane liikumine, siis tekib küsimus, kuidas määrata keha kiirust mingil ajamomendil. Toimime järgmisel viisil.

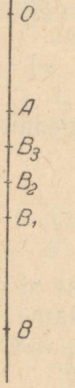
Oletame, et keha oli langemise algul punktis O (joon. 78). Aja t jooksul läbib keha teepikkuse

$$s = 4{,}9t^2$$

ja jõuab punkti A, aja $t + \Delta t$ jooksul (alates liikumise algusest) aga teepikkuse

$$s_2 = 4{,}9(t + \Delta t)^2$$

ja jõuab punkti B. Teelõik, mille keha läbib ajavahemiku Δt jooksul, on:



Joon. 78.

$$AB = s_2 - s_1 = 4{,}9(t + \Delta t)^2 - 4{,}9t^2 =$$
$$= 4{,}9t^2 + 9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2 - 4{,}9t^2 =$$
$$= 9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2.$$

Jagades läbitud tee pikkuse $\Delta s = s_2 - s_1$ ajaga Δt, saame

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{9{,}8t\Delta t + 4{,}9(\Delta t)^2}{\Delta t} = 9{,}8t + 4{,}9\Delta t. \qquad (1)$$

Jagatist $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nimetatakse keha langemise *keskmiseks kiiruseks* teelõigul $AB = \Delta s$.

Keha liikumise keskmine kiirus ei väljenda siiski tõelist kiirust igal ajamomendil. Nii näiteks, kui räägitakse, et rong sõidab kiirusega 50 km tunnis, siis see ei tähenda, et

ta liigub selle kiirusega tee igas punktis, vaid ta muudab seda: jaamast väljudes rong järk-järgult suurendab kiirust, kuni saavutab maksimaalse kiiruse, seejärel aeglustab liikumist, kuni peatub järgmises jaamas. Seega, ühel teelõigul rongi kiirus on väiksem kui 50 km tunnis, teisel suurem, keskmiselt aga 50 km tunnis.

Keskmine kiirus iseloomustab liikumist seda paremini, mida väiksem on teelõik, millel kiirus määratakse; seepärast eeldame, et keha langemise ajavahemik t väheneb. Siis hakkab vähenema ka teepikkus $AB = \Delta s$, saades võrdseks AB_1-ga, AB_2-ga, AB_3-ga jne. (joon. 78), ning iga uue Δt väärtuse korral suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ määrab keha langemise keskmise kiiruse ikka lühemal ja lühemal teelõigul. Oletame, et $\Delta t \to 0$, siis suhe $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ läheneb suurusele, mida nimetatakse *kiiruseks antud ajamomendil* t ja mis vastab kiirusele punktis A.

Seega, *kiiruseks antud ajamomendil t nimetatakse keskmise kiiruse piirväärtust ajavahemikus t kuni* $t + \Delta t$, *kui* $\Delta t \to 0$.

Leides võrduse (1) mõlemate poolte piirväärtused, kui $\Delta t \to 0$, saame:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (9{,}8t + 4{,}9\,\Delta t) = 9{,}8t.$$

Seega, keha langemise kiirus ajamomendil t on

$$v = 9{,}8t.$$

§ 59. Funktsiooni muutumise kiirus. Kiirusi ei tule määrata mitte ainult liikumise korral, vaid ka iga muutuva suuruse muutumise korral, kui suurusel on füüsikaline sisu (vedeliku aurumise kiirus, reaktsiooni kiirus jne.).

Olgu muutuv suurus y, mis iseloomustab mingit muutumise protsessi, esimese astme funktsioon muutuja x suhtes; siis *y muutumise kiirus* mistahes x väärtusel, samuti nagu ühtlase liikumise korral (§ 57), on jääv suurus, mis võrdub funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhtega, s. t. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Kui aga suurus y esitab mingit teist liiki funktsiooni,

siis suhe $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ väljendab analoogselt mitteühtlasele liikumisele (§ 58) *y muutumise keskmist kiirust* argumendi väärtuste vahemikus x-st kuni $(x+\Delta x)$-ni. *y muutumise kiiruseks* argumendi väärtusel x on aga *y keskmise kiiruse piirväärtus, kui* $\Delta x \to 0$, s. t. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Seega, *funktsiooni muutumise kiiruseks väärtusel x on tema keskmise kiiruse piirväärtus argumendi väärtuste vahemikus x kuni* $x+\Delta x$, kui $\Delta x \to 0$.

Vaatleme mõningaid näiteid.

N ä i d e 1. Homogeense varda kaal P kilogrammides avaldub valemiga $P = 0{,}5l$, kus l on varda pikkus meetrites. Määrata varda kaalu muutumise kiirus varda pikkuse muutumisel.

L a h e n d u s. Kuna P on esimese astme funktsioon pikkuse l suhtes, siis antud juhul on tegemist ühtlase muutumisega. Järelikult, kaalu P muutumise kiirus pikkuse l mistahes väärtusel on (valem (2), § 57):

$$\frac{\Delta P}{\Delta l} = 0{,}5.$$

See tähendab, et varda pikenemisel 1 m võrra tema kaal suureneb 0,5 kG võrra.

N ä i d e 2. Soojendamisel keha temperatuur T muutub sõltuvalt soojendamise ajast t järgmise seaduse järgi:

$$T = 0{,}4t^2.$$

Millise kiirusega soojeneb keha ajamomendil $t = 10$ sek.?

L a h e n d u s. Antud teise astme funktsioon väljendab mitteühtlase muutumise seadust ja sellepärast toimime ülesande lahendamisel samuti, nagu seda tegime langeva keha kiiruse määramisel (§ 58):

Ajamomendil $t = 10$ keha temperatuur on $T_1 = 0{,}4 \cdot 10^2 = 40$.
„ $t = 10 + \Delta t$ „ „ „ $T_2 = 0{,}4(10+\Delta t)^2$.

Lahutades T_2-st T_1 väärtuse, saame temperatuuri juurdekasvu ΔT aja Δt jooksul:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 0{,}4(10+\Delta t)^2 - 40 =$$
$$= 40 + 8\Delta t + 0{,}4(\Delta t)^2 - 40 = 8\Delta t + 0{,}4(\Delta t)^2,$$

siit

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 8 + 0{,}4\Delta t.$$

Jagatis $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ on keha soojenemise keskmine kiirus ajavahemiku $t = 10$ kuni $t = 10 + \Delta t$ jooksul.

Et määrata keha soojenemise kiirust ajamomendil $t = 10$ sek., leiame soojenemise keskmise kiiruse piirväärtuse tingimusel, et $\Delta t \to 0$.
Saame:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (8 + 0{,}4\Delta t) = 8.$$

Seega, ajamomendil $t = 10$ sek. soojeneb keha 8° võrra ajaühikus. See tähendab, et kui ajamomendist $t = 10$ sek. alates keha soojeneks ühtlaselt, siis tema temperatuur tõuseks ajaühikus 8° võrra.

Harjutusi.

1. Leida keha kiirus, kui keha liigub seaduse järgi $s = 3t - 5$.
2. Gaasi ruumala v temperatuuril t on määratud valemiga:

$$v = 1 + 0{,}0075t.$$

Määrata gaasi ruumala muutumise kiirus mistahes temperatuuril.
3. Leida seaduse $s = 2t^2$ järgi liikuva keha keskmine liikumise kiirus ajavahemikus:

1) $t_1 = 2$ kuni $t_2 = 4$;
2) $t_1 = 6$ kuni $t_2 = 10$.

4. Keha liikumise seadus väljendub valemiga $s = t^2 + 1$. Leida keha liikumise keskmine kiirus ajavahemikus $t_2 - t_1$, kui:

1) $t_1 = 2$, $t_2 = 3$;
2) $t_1 = 2$, $t_2 = 2{,}01$;
3) $t_1 = 2$, $t_2 = 2{,}01$;
4) $t_1 = 2$, $t_2 = 2{,}001$.

Arvutustulemused kirjutada tabelisse ja jälgida keskmise kiiruse muutumist.
5. Leida keha liikumise kiirus ajamomendil $t = 2$, kui liikumise seadus on antud valemiga $s = 4t^2 - 3$.
6. Keha liikumise seadus väljendub valemiga $s = 3t^2$. Leida:
1) liikumise keskmine kiirus ajavahemikus $t_1 = 2$ kuni $t_2 = 5$;
2) liikumise kiirus ajamomentidel $t = 2$ ja $t = 5$.
7. Voolutugevus amprites muutub sõltuvalt ajast järgmise seaduse järgi:

$$I = 0{,}2t^2,$$

kus t on sekundid. Leida voolutugevuse muutumise kiirus 4-nda sekundi lõpul.

§ 60. Funktsiooni tuletis. Suurus $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ on matemaati-

lise analüüsi põhimõisteks ja teda nimetatakse *funktsiooni tuletiseks argumendi x järgi.*

Definitsioon. *Funktsiooni $y = f(x)$ tuletiseks argumendi x järgi nimetatakse funktsiooni juurdekasvu Δy ja argumendi juurdekasvu Δx suhte piirväärtust, kui $\Delta x \to 0$.*

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletise märkimiseks kasutatakse sümboleid:

$$y'; \quad f'(x); \frac{dy}{dx}; \quad y'_x.$$

Matemaatilise avaldisega antud funktsiooni tuletise märkimiseks kirjutatakse antud funktsioon sulgudesse ja tõmmatakse kriipsuke paremale poole üles.

Näiteks, funktsiooni $y = 2x^2 - 3x + 1$ tuletist võib märkida järgmiselt:

$$(2x^2 - 3x + 1)'.$$

Tuletise definitsioonist järeldub järgmine reegel.

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletise leidmiseks argumendi x järgi tuleb leida:

1) *funktsiooni uus väärtus,* s. t. $y + \Delta y$;
2) *funktsiooni juurdekasv,* s. t. Δy;
3) *funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhe, s. t.* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$;
4) *selle suhte piirväärtus, kui $\Delta x \to 0$,* s. t. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Tuletise leidmist nimetatakse *funktsiooni diferentseerimiseks.* Matemaatilise analüüsi osa, mis käsitleb tuletisega seotud küsimusi, nimetatakse *diferentsiaalarvutuseks.*

Näide 1. Leida funktsiooni $y = x^2 + x$ tuletis.

Lahendus. 1. samm: $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)$.

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x) - (x^2 + x) =$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + x + \Delta x - x^2 - x =$$
$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + \Delta x}{\Delta x} = 2x + \Delta x + 1.$$

4. samm:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x + 1) = 2x + 1.$$

Näide 2. Diferentseerida funktsioon $y = \frac{2}{x}$.

Lahendus. 1. samm: $y + \Delta y = \frac{2}{x + \Delta x}$.

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \frac{2}{x + \Delta x} - \frac{2}{x} =$$

$$= \frac{2x - 2x - 2\Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{2\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\Delta x}{x(x + \Delta x)} : \Delta x = -\frac{2}{x(x + \Delta x)}.$$

4. samm:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[-\frac{2}{x(x + \Delta x)} \right] = -\frac{2}{x^2}.$$

Funktsiooni $y = f(x)$ tuletis on samuti funktsioon, mille väärtused olenevad sõltumatu muutuja x väärtustest.

Definitsioon. *Funktsiooni $y = f(x)$ tuletise väärtust x antud väärtusel nimetatakse tuletise eriväärtuseks.*

Näide 3. Leida funktsiooni $f(x) = x^2 + x$ tuletise eriväärtus, kui $x = 3$.

Lahendus. Asendades antud funktsiooni tuletises, mille me leidsime varem (vt. näide 1), x arvuga 3, saame:

$$f'(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7.$$

Seoses eespool antud tuletise definitsiooniga võib varem vaadeldud liikumise kiiruse (§ 58) ja funktsiooni muutumise kiiruse (§ 59) definitsioonid sõnastada järgmiselt.

Keha liikumise kiirus antud ajamomendil võrdub teepikkuse tuletise väärtusega samal ajamomendil.

Funktsiooni muutumise kiirus antud argumendi väärtusel võrdub funktsiooni tuletise väärtusega sellel argumendi väärtusel.

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:
1. $y = 4x - 5$; **2.** $y = 5x^2 + 1$; **3.** $y = 4x^2 - 2x$.

4. $f(x) = -2x^2 + x$; 5. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$; 6. $f(t) = -2t^3$;

7. $v = u^3 - u$; 8. $v = -\frac{4}{p}$.

9. On antud funktsioon $f(x) = x^2 - 5x$. Leida $f'(-1)$.

§ 61. Funktsiooni diferentseeritavuse seos pidevusega. Teoreem. *Kui funktsioonil $y = f(x)$ on tuletis mingil argumendi väärtusel x, siis argumendi sellel väärtusel on antud funktsioon pidev.*

Tõestus. Olgu funktsioonil $y = f(x)$ tuletis mingil väärtusel x:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(§ 60), siis piirväärtuse definitsiooni põhjal võime kirjutada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

kus $\alpha \to 0$, kui $\Delta x \to 0$. Siit

$$\Delta y = y' \Delta x + \alpha \Delta x$$

ja

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (y' \Delta x) + \lim_{\Delta x \to 0} (\alpha \Delta x) = 0$$

[$\lim\limits_{\Delta x \to 0} (y' \Delta x) = 0$, kui konstandi ja lõpmatult kahaneva suuruse korrutis, ja $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (\alpha \Delta x) = 0$, kui lõpmatult kahanevate suuruste korrutis]. Kuid me teame (§ 54), et juhul, kui antud argumendi väärtusel kehtib võrdus

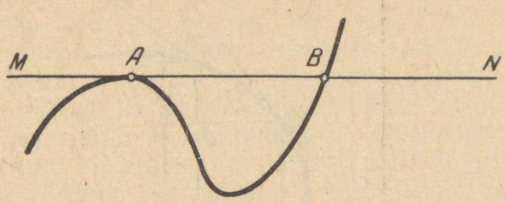
$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

siis funktsioon on sellel argumendi väärtusel pidev. Seega on teoreem tõestatud.

Vastupidine väide pole aga alati õige, sest on olemas funktsioone, mis on kõikjal pidevad, kuid x mõnedel väärtustel ei oma tuletist.

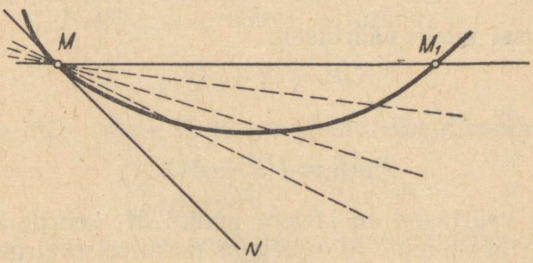
§ 62. Puutuja mõiste. Ringjoone puutujat me defineerisime kui sirget, millel on ringjoonega üks ühine punkt. See definitsioon ei sobi aga iga kõvera kohta. Näiteks sirge

MN on kõvera puutujaks punktis A (joon. 79), kuid tal on kõveraga mitte üks, vaid kaks ühist punkti.



Joon. 79.

Et defineerida puutujat antud kõvera punktis M (joon. 80), võtame sellel kõveral veel ühe punkti M_1 ja tõmbame lõikaja MM_1. Kui nihutame punkti M_1 mööda



Joon. 80.

kõverat nii, et see läheneks punktile M, siis lõikaja MM_1 pöördub punkti M ümber, lähenedes sirgele MN, mida nimetatakse antud kõvera *puutujaks* punktis M.

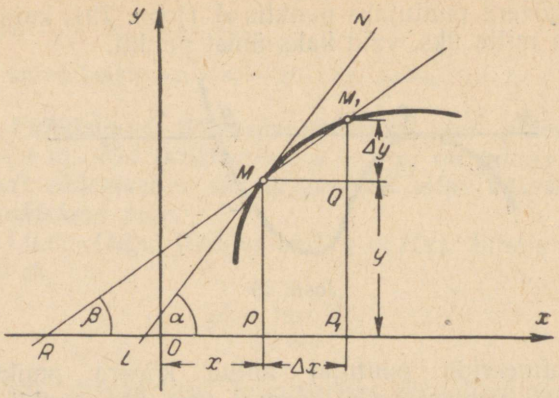
Definitsioon. *Antud kõvera puutujaks antud punktis M nimetatakse lõikaja MM_1 piirasendit, kui punkt M_1, liikudes mööda kõverat, läheneb tõkestamatult punktile M.*

§ 63. Tuletise geomeetriline vaste. Olgu antud pidev funktsioon $y = f(x)$, mille graafik on esitatud joonisel 81. Võtame kõveral punkti M $(x\,;\,y)$; siis

$$OP = x \text{ ja } PM = y.$$

Anname abstsissile x juurdekasvu

$$PP_1 = \Delta x,$$



Joon. 81.

siis abstsissi uuele väärtusele

$$OP_1 = x + \Delta x$$

vastab ordinaadi uus väärtus

$$P_1M_1 = f(x + \Delta x).$$

Saadud väärtused on kõvera punkti M_1 koordinaatideks. Tõmbame läbi punkti M x-teljega paralleelse sirge MQ ja lõikaja läbi punktide M ja M_1. Saadud täisnurkses kolmnurgas M_1MQ

$$MQ = \Delta x,$$

$$QM_1 = P_1M_1 - PM = f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y.$$

Tähistame lõikaja M_1R ja x-telje positiivse suuna vahelise nurga β-ga; siis

$$\angle M_1MQ = \angle MRP = \beta.$$

Kolmnurgast M_1MQ saame:

$$QM_1 = MQ \tan \angle M_1MQ$$

ehk

$$\Delta y = \Delta x \tan \beta,$$

millest

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \beta. \qquad (1)$$

Võrdusest (1) on näha, et funktsiooni juurdekasvu ja argumendi juurdekasvu suhe võrdub lõikaja ja x-telje positiivse suuna vahelise nurga tangensiga.

Lähenegu nüüd Δx nullile; siis sirge P_1M_1 hakkab nihkuma paralleelselt y-teljega, punkt M_1 hakkab aga liikuma mööda kõverat, lähenedes tõkestamatult punktile M. Sellest tingituna hakkab ka Δy lähenema nullile, lõikaja M_1R hakkab aga pöörduma ümber punkti M, lähenedes sirgele NL, mis on antud kõverale puutujaks punktis M (§ 62).

Leiame võrduse (1) mõlema poole piirväärtuse tingimusel, et $\Delta x \to 0$; saame:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \tan \beta. \qquad (2)$$

Kuna lõikaja pöördumisel tema kaldenurk x-telje suhtes muutub, siis β on muutuv suurus, mis läheneb puutuja NL ja x-telje positiivse suuna vahelisele nurgale. Seega, tähistades $\angle NLP$ tähega α, võime kirjutada:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \tan \beta = \tan \alpha.$$

Võrduse (2) võime kirjutada nüüd järgmiselt:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha. \qquad (3)$$

Võrduse (3) vasak pool on antud funktsiooni tuletis (§ 60), parem pool aga puutuja NL tõus k (§ 10):

$$y' = k. \qquad (4)$$

Võrdus (4) näitab, et *funktsiooni $y = f(x)$ tuletis, kui $x = a$, võrdub antud funktsiooni graafiku puutuja tõusuga punktis, mille abstsiss $x = a$.*

Ülesanne. Leida kõvera $y = x^2 + x$ puutuja võrrand, kui puutepunkti abstsiss on 2.

Lahendus. Leiame kõveral asetseva punkti M ordinaadi:

$$y = 2^2 + 2 = 6.$$

Otsitav puutuja asetseb punkti $M(2\,;\,6)$ läbivate sirgete kimbus, mis on määratud võrrandiga

$$y - 6 = k(x - 2).$$

Jääb veel määrata puutuja tõus, milleks tuleb leida antud funktsiooni tuletis. See tuletis oli meil juba leitud:

ta võrdub $(2x + 1)$-ga (vt. § 60, näide 1) ja määrab antud kõvera mistahes punktis puutuja tõusu. Et leida puutuja tõus antud punktis $M(2\,;\,6)$, tuleb avaldises

$$y' = 2x + 1$$

x asendada tema väärtusega 2. Saame:

$$k = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

Otsitava puutuja võrrandi kirjutame järgmisel kujul:

$$y - 6 = 5(x - 2)$$

ehk

$$y = 5x - 4.$$

Harjutusi.

1. Leida kõverale $y = 3x^2$ tõmmatud puutuja tõus, kui puutepunkti abstsiss x on: 1) $x = 1$, 2) $x = 0$.
2. Määrata kõvera $y = 2x^2$ puutuja ja x-telje positiivse suuna vaheline nurk, kui puutepunkti abstsiss on $\frac{1}{4}$.
3. Kui suure nurga moodustab x-telje positiivse suunaga kõvera $y = \frac{1}{3}x^2$ puutuja, kui puutepunkti abstsiss on $-\frac{3}{2}$?
4. Leida kõverale $y = x^2 - 2$ tõmmatud puutuja võrrand, kui puutepunkti abstsiss on 2.
5. Kõverale $y = 3x^2 + x$ on tõmmatud puutuja punktis, mille abstsiss on -1. Leida selle puutuja võrrand.

$dy = y' \cdot \Delta x$

VIII peatükk.

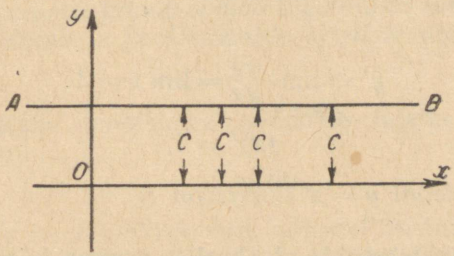
DIFERENTSEERIMISE VALEMID.

Tuletise leidmise üldeeskiri on antud paragrahvis 60. Selle kasutamine võtab aga palju aega ja paljudel juhtudel tekitab suuri raskusi. Seepärast on kasulik teada selliseid reegleid, mis võimaldavad tuletist leida lihtsamalt ja minimaalse ajakuluga. Sellised reeglid on tõepoolest olemas, kusjuures need tuletatakse diferentseerimise üldeeskirja alusel.

§ 64. Konstandi tuletis. Olgu C konstantne suurus; siis võrdust

$$y = C$$

võib vaadelda kui funktsiooni, mille väärtus ei muutu argumendi muutumisel. Selle õigsuses võib veenduda, kui esi-



Joon. 82.

tada võrdus graafiliselt, s. t. x-teljega paralleelse sirge AB kujul (joon. 82). Tõepoolest, selle sirge punkti abstsissi muutumisel jääb sirge ordinaat konstantseks.

Funktsiooni $y = C$ tuletise leidmiseks kasutame diferentseerimise üldeeskirja:

1. samm: $y + \Delta y = C$.
2. samm: $\Delta y = (y + \Delta y) - y = C - C = 0$.
3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

4. samm:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 0 = 0.$$

$$(C)' = 0, \qquad \text{(I)}$$

s. t. *konstandi tuletis on null.*

Konstandi tuletist ei tohi ära segada konstandi piirväärtusega, mis, nagu teada, võrdub konstandi endaga.

§ 65. Funktsiooni $y = x$ tuletis. Rakendades diferentseerimise üldeeskirja, saame:

1. samm:

$$y + \Delta y = x + \Delta x.$$

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = x + \Delta x - x = \Delta x.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

4. samm:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim 1 = 1.$$

$$(x)' = 1, \qquad \text{(II)}$$

s. t. *funktsiooni $y = x$ tuletis on 1.*

§ 66. Funktsioonide algebralise summa tuletis. Võtame funktsiooni

$$y = u + v - w,$$

kus u, v ja w on x funktsioonid, milledel on tuletised x järgi. Kui argumendile x anda juurdekasv Δx, siis ka funktsioonid u, v ja w saavad vastavalt juurdekasvud Δu, Δv ja Δw, ning sellepärast ka y saab juurdekasvu Δy. Üldeeskirja põhjal leiame:

1. samm:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w).$$

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \\ + \Delta w) - (u + v - w) = u + \Delta u + v + \\ + \Delta v - w - \Delta w - u - v + w = \Delta u + \Delta v - \Delta w.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

4. samm:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Viimase võrduse paremal poolel iga liidetav kujutab endast funktsiooni tuletist. Toodud võrduse võib kirjutada kujul:

$$y' = u' + v' - w'$$

ehk

$$(u + v - w)' = u' + v' - w', \qquad \text{(III)}$$

s. t. *lõpliku arvu funktsioonide algebralise summa tuletis on võrdne liidetavate funktsioonide tuletiste algebralise summaga.*

§ 67. Kahe funktsiooni korrutise tuletis. Olgu antud funktsioon

$$y = uv,$$

kus u ja v on x funktsioonid, milledel on tuletised x järgi. Anname argumendile x juurdekasvu Δx; siis vastavalt üldeeskirjale saame:

1. samm:

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \\ = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u\Delta v}{\Delta x}+\frac{v\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta u\Delta v}{\Delta x}=u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

4. samm:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right).$$

Kuid u ja v ei sõltu argumendi juurdekasvust Δx, seepärast võib neid lugeda konstantseiks, kui $\Delta x\to 0$ *; vastavalt paragrahvis 43 esitatud IV teoreemi järeldusele 1, võime kirjutada:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Funktsiooni juurdekasv Δu muutub aga koos Δx muutumisega, seepärast saame § 43 IV teoreemi põhjal:

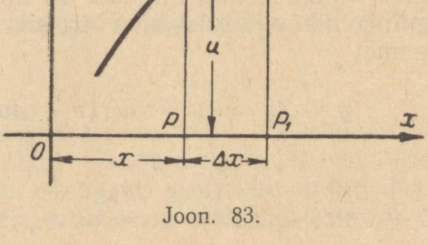
$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Seega,

$$y'=u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

---

* Seda võib illustreerida joonisel 83. Siin $OP=x$, $PP_1=\Delta x$, $PM=u$. Kui $\Delta x\to 0$, siis $PM=u$ ei muutu.



Joon. 83.

Kuid

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v', \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'.$$

Kuna u on diferentseeritav, siis ta on ka pidev (§ 61), järelikult:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0.$$

Sellepärast

$$y' = uv' + vu' + 0 \cdot v' = uv' + vu'.$$

Seega,

$$(uv)' = uv' + vu', \qquad \text{(IV)}$$

s. t. *kahe funktsiooni korrutise tuletis võrdub kahe liidetava summaga, kusjuures üheks liidetavaks on esimese funktsiooni ja teise funktsiooni tuletise korrutis ning teiseks liidetavaks esimese funktsiooni tuletise ja teise funktsiooni korrutis.*

§ 68. Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis. Võtame funktsiooni

$$y = Cu,$$

kus

$$C = \text{const.}, \; u = f(x)$$

ja kusjuures funktsioonil u on tuletis x järgi.

Rakendades valemit (IV), saame:

$$y' = (Cu)' = Cu' + uC' = Cu' + u \cdot 0 = Cu',$$

$$(Cu)' = Cu', \qquad \text{(V)}$$

s. t. *konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis võrdub konstandi ja funktsiooni tuletise korrutisega.*

§ 69. Positiivse täisarvulise astendajaga astme tuletis. Võtame kõigepealt funktsiooni

$$y = x^2.$$

Esitades selle funktsiooni korrutise kujul ja rakendades valemit (IV), saame:

$$y' = (x^2)' = (xx)' = x(x)' + x(x)' = x + x = 2x.$$

Leiame nüüd funktsiooni $y = x^3$ tuletise.

Asendades funktsiooni korrutisega x^2x ja rakendades jälle valemit (IV), leiame:

$$y' = (x^3)' = (x^2x)' = x^2(x)' + x(x^2)' = x^2 \cdot 1 + x \cdot 2x = 3x^2.$$

Toimides täpselt samuti funktsiooniga

$$y = x^4,$$

leiame:

$$y' = (x^4)' = (x^3x)' = x^3(x)' + x(x^3)' = \\ = x^3 \cdot 1 + x \cdot 3x^2 = 4x^3.$$

Kui diferentseerida samal meetodil funktsioone x^5, x^6, x^7 jne., siis saame tulemused, mis alluvad ühele ja samale valemile:

$$(x^m)' = mx^{m-1}. \qquad \text{(VI)}$$

Seega, *astme x^m tuletis, kus m on positiivne täisarv, võrdub astendaja ja ühe võrra vähendatud astendajaga astme korrutisega.*

Esitatud reegel on õige ka mistahes astendaja m puhul, mida tõestame § 78-ndas.

§ 70. Funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletis. Esitades funktsiooni $y = \sqrt{x}$ murrulise astendajaga astme kujul ja rakendades valemit (VI), saame:

$$y' = (\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Seega,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

s. t. *funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletis võrdub murruga, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks kahekordne funktsioon.*

§ 71. Funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ tuletis. Asendades murru $\frac{1}{x}$ astmega x^{-1} ja diferentseerides seda valemi (VI) järgi, saame:

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Seega,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \qquad \text{(VIII)}$$

s. t. *murru* $\frac{1}{x}$ *tuletis võrdub negatiivse murruga, mille lugejaks on 1 ja nimetajaks antud murru nimetaja ruut.*

§ 72. Jagatise tuletis. Võtame funktsiooni

$$y = \frac{u}{v},$$

kus u ja v on x funktsioonid, milledel on tuletised x järgi, ja kusjuures $v \neq 0$ x väärtustel, milledel leitakse tuletis. Rakendame diferentseerimise üldeeskirja.

1. samm:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} =$$

$$= \frac{uv + v\Delta u - uv - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v(v + \Delta v)} : \Delta x = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

4. samm: rakendades paragrahvis 43 esitatud teoreeme V, III, II ja IV teoreemi järeldust 1, leiame:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\lim\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}[v(v + \Delta v)]} = \frac{\lim\left(v\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) - \lim\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)}{\lim\limits_{\Delta x \to 0}[v(v + \Delta v)]} =$$

$$= \frac{v\lim\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\lim\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\left[\lim\limits_{\Delta x \to 0} v + \lim\Delta v\right]} = \frac{vu' - uv'}{v(v + 0)} = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

Siin tuleb samuti nagu valemi (IV) tuletamiselgi u ja v lugeda Δx-st sõltumatuiks ning $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

Seega,

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}, \qquad \text{(IX)}$$

s. t. *jagatise tuletis võrdub murruga, mille nimetaja on jagaja ruut, lugeja on aga kahe avaldise vahe, kusjuures vähendatavaks on jagaja ja jagatava tuletise korrutis ning lahutatavaks — jagatava ja jagaja tuletise korrutis.*

§ 73. Diferentseerimise valemite rakendamine. Vaatleme mõningaid näiteid tuletatud reeglite rakendamise kohta.

Näide 1. Diferentseerida funktsioon

$$y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 3.$$

Lahendus. Valemi (III) põhjal saame:

$$y' = (2x^3)' - (4x^2)' + (5x)' - (3)'.$$

Rakendades kolmele esimesele liidetavale valemit (V) ja viimasele valemit (I), saame:

$$y' = 2(x^3)' - 4(x^2)' + 5 \cdot x' - 0.$$

Vastavalt valemitele (VI) ja (II) saame:

$$y' = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x + 5 \cdot 1 = 6x^2 - 8x + 5.$$

Näide 2. Leida funktsiooni

$$y = (x^2 + 1)(2x + 3)$$

tuletis.

Lahendus. Valemi (IV) järgi saame:

$$y' = (x^2 + 1)(2x + 3)' + (2x + 3)(x^2 + 1)'.$$

Valemi (III) järgi:

$$y' = (x^2 + 1)[(2x)' + (3)'] + (2x + 3)[(x^2)' + (1)'].$$

Valemite (V), (II), (I) ja (VI) järgi:

$$y' = (x^2 + 1)(2 + 0) + (2x + 3)(2x + 0) = \\ = 2x^2 + 2 + 4x^2 + 6x = 6x^2 + 6x + 2.$$

Seda näidet võib lahendada ka teisiti; nimelt, korrutame sulgudes olevad avaldised ja seejärel diferentseerime saadud summa, saame:

$$y = (x^2 + 1)(2x + 3) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3,$$
$$y' = (2x^3 + 3x^2 + 2x + 3)' = 6x^2 + 6x + 2.$$

Näide 3. Diferentseerida funktsioon $y = \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

Lahendus. Teisendame antud funktsiooni järgmiselt:

$$y=\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=2xx^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{7}{6}}.$$

Rakendades valemeid (V) ja (VI), saame:

$$y'=(2x^{\frac{7}{6}})'=2(x^{\frac{7}{6}})'=2\cdot\frac{7}{6}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}\sqrt[6]{x}.$$

Näide 4. Diferentseerida funktsioon

$$y=\frac{2}{x}-3\sqrt{x}+\frac{4}{\sqrt[3]{x}}.$$

Lahendus. Esitame antud funktsiooni järgmisel kujul:

$$y=2\cdot\frac{1}{x}-3\sqrt{x}+4\cdot x^{-\frac{1}{3}}.$$

Rakendades valemeid (III) ja (V), saame:

$$y'=2\left(\frac{1}{x}\right)'-3(\sqrt{x})'+4(x^{-\frac{1}{3}})'.$$

Vastavalt valemitele (VIII), (VII) ja (VI):

$$y'=2\left(-\frac{1}{x^2}\right)-3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}+4\left(-\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}-1}\right)=$$

$$=-\frac{2}{x^2}-\frac{3}{2\sqrt{x}}-\frac{4}{3x^{\frac{4}{3}}}=-\left(\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{4}{3\sqrt[3]{x^4}}\right).$$

Näide 5. Diferentseerida funktsioon

$$y=\frac{x^2+x-3}{2x}.$$

Lahendus. Valemi (IX) järgi:

$$y'=\frac{2x(x^2+x-3)'-(x^2+x-3)(2x)'}{(2x)^2}.$$

Rakendades valemit (III) summa diferentseerimiseks, saame:

$$y' = \frac{2x[(x^2)' + (x)' - (3)'] - (x^2 + x - 3)(2x)'}{4x^2}.$$

Lõpuks, valemite (VI), (II), (I) ja (V) põhjal leiame:

$$y' = \frac{2x(2x+1) - (x^2 + x - 3)\cdot 2}{4x^2} = \frac{4x^2 + 2x - 2x^2 - 2x + 6}{4x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 + 6}{4x^2} = \frac{x^2 + 3}{2x^2}.$$

Antud funktsiooni võib diferentseerida ka teisiti; selleks jagame antud võrrandi paremal poolel lugeja liikmeti nimetajaga. Saame:

$$y = \frac{x^2 + x - 3}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2x}$$

ehk

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x};$$

siit

$$y' = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{2}(x)' + \left(\frac{1}{2}\right)' - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2} + 0 - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2x^2} = \frac{x^2 + 3}{2x^2}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = 3$. **2.** $y = ax$. **3.** $y = x^5$. **4.** $s = t^3$.

5. $y = x^p$. **6.** $f(x) = 5x^2$. **7.** $s = -3t^3$.

8. $f(x) = \frac{3}{4}ax^4$. **9.** $s = 2\sqrt{x}$. **10.** $y = -\sqrt[3]{x^2}$.

11. $y = \sqrt[4]{t}$. **12.** $s = r\sqrt{r}$. **13.** $v = u^2\sqrt[3]{u}$. **14.** $v = \frac{4}{3p}$.

15. $f(r) = \frac{1}{r^2}$. Leida $f'(-2)$. **16.** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Leida $f'(4)$.

17. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. **18.** $f(u) = \frac{u}{\sqrt{u}}$. Leida $f'(9)$. **19.** $f(v) = \frac{\sqrt[3]{v}}{v^2}$.

20. $y = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$. 21. $y = 2x^2\sqrt{x}$. 22. $s = \frac{6t\sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}$.

23. $u = \frac{6\sqrt{\varphi}\sqrt[3]{\varphi}}{\sqrt[4]{\varphi}}$. 24. $y = \frac{3x^3}{14\sqrt[3]{x^2}}$. 25. $y = \frac{2n}{2n+1}x^2\sqrt[n]{x}$.

26. $y = x\sqrt{x}\sqrt[3]{x}$. 27. $y = 2x^3 - 3x$. 28. $s = \frac{3}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 2t$.

29. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$. Leida $f'(3)$.

30. $y = \frac{3x^2 - 5x - 1}{x}$.

31. $s = \frac{t^2 - t + 1}{t^2}$. 32. $y = x(x+1)$. 33. $s = t^2(3t - 2)$.

34. $f(x) = 2x(3x^2 - x + 5)$. Leida $f'(-2)$. 35. $s = t(t+1)(t+2)$.

36. $f(u) = (2u^2 + u)(4u^2 - 1)$. 37. $y = t(\sqrt{t} + 1)$.

38. $v = (1 + u^2)(1 + \sqrt{u})$. 39. $v = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 1}$.

40. $y = \frac{3x^2 - 2x - 4}{2x - 1}$. 41. $f(u) = \frac{2}{u+1}$. 42. $f(v) = \frac{1}{v^2+1}$.

43. $y = -\frac{1 + 2x}{x(1+x)}$. 44. $f(x) = \frac{x}{1 - x^2} + \frac{1}{x}$. 45. $y = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$.

46. Kõverale $y = 3x^2 - 6x + 5$ on tõmmatud x-teljega paralleelne puutuja. Leida puutepunkti koordinaadid.

47. Millises punktis on vaja kõverale $y = 2x^2 - x + 1$ tõmmata puutuja, mis oleks paralleelne sirgega $y = 3x + 5$?

48. Punkt, liikudes mööda kõverat $y = x^2 - 8x + 15$, eraldus sellelt momendil, kui ta asetses sirgel $x = 6$. Leida punkti edasise teevõrrand.

49. Keha pöörleb ümber telje, kusjuures nurga φ muutumise seadus sõltuvalt ajast t on antud valemiga $\varphi = 0{,}1t^2$. Määrata keha pöörlemise nurkkiirus ajamomendil $t = 5$.

§ 74. Funktsiooni funktsioon (liitfunktsioon). Olgu meile antud kaks funktsiooni:

$$y = u^3 \tag{1}$$

ja

$$u = 2x^2 - 3x + 1. \tag{2}$$

Kui võrduses (1) asendada u tema avaldisega (2), siis saame:

$$y = (2x^2 - 3x + 1)^3. \qquad (3)$$

Võrrandeist (1) ja (2) on näha, et y on u funktsioon, kuid u on omakorda x funktsioon; seega funktsioon y sõltub funktsioonist $u = 2x^2 - 3x + 1$. Funktsiooni (3) nimetatakse *funktsiooni funktsiooniks* ehk *liitfunktsiooniks.*

Iga liitfunktsiooni võib esitada mitme lihtfunktsiooni kujul. Vaatleme näiteid.

Näide 1. Esitada funktsioon $y = \sqrt{x^2 - x + 1}$ kahe lihtfunktsiooni kujul.

Lahendus. Võtame

$$u = x^2 - x + 1;$$

siis

$$y = \sqrt{u}.$$

Me saime kaks funktsiooni u ja y, mis on lihtsamad kui antud funktsioon.

Näide 2. Esitada funktsioon $y = \sin^3 x$ kahe lihtfunktsiooni kujul.

Lahendus. Võtame

$$u = \sin x;$$

siis

$$y = u^3.$$

Harjutusi.

Esitada iga alljärgnev funktsioon kahe lihtfunktsiooni kujul.

1. $y = (x^3 - 2x + 5)^4$. 2. $y = \sqrt{x^2 + 2x}$. 3. $y = \sqrt[3]{4x + 5}$.
4. $y = 2\sqrt[4]{x^3 - 2x^2 + 1}$. 5. $s = \cos^4 t$. 6. $v = 4\sin^3 \omega$.
7. $y = \sqrt{\sin x}$. 8. $y = \sqrt{3\cos x}$. 9. $y = 4\sqrt[3]{\cot x}$.
10. $s = \sin \omega t$. 11. $s = 2\tan 3t$. 12. $u = 3\cos \frac{x}{2}$.

§ 75. Liitfunktsiooni tuletis. Võtame funktsiooni

$$y = f(u), \qquad (1)$$

kusjuures

$$u = \varphi(x). \qquad (2)$$

Olgu funktsioonil (2) tuletis antud x väärtusel; siis juhul, kui $\Delta x \to 0$, ka $\Delta u \to 0$ (§ 61). Olgu ka funktsioonil (1) tuletis u väärtusel, mis vastab antud x väärtusele.

Kirjutame samasuse:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{3}$$

Rakendades samasuse (3) parema poole kohta korrutise piirväärtuse teoreemi (teoreem IV § 43), saame:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4}$$

Kuid, nagu teada (§ 60),

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x,$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'_x.$$

Seepärast võib võrduse (4) kirjutada kujul:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{5}$$

Valem (5) on kahest lihtfunktsioonist koosneva liitfunktsiooni diferentseerimise eeskiri.

N ä i d e. Diferentseerida funktsioon

$$y = (3x^2 - 2x + 4)^5.$$

L a h e n d u s. Esitame antud funktsiooni kahe järgmise funktsiooni kujul:

$$u = 3x^2 - 2x + 4,$$
$$y = u^5.$$

Leiame algul y'_u (s. t. funktsiooni y tuletise argumendi u järgi) ja seejärel u'_x (s. t. funktsiooni u tuletise argumendi x järgi):

$$y'_u = (u^5)' = 5u^4,$$
$$u'_x = (3x^2 - 2x + 4)' = 6x - 2.$$

Seega otsitav tuletis on järgmine:

$$y'_x = 5u^4(6x - 2)$$

ehk asendades u tema väärtusega, saame:

$$y'_x = 5(3x^2 - 2x + 4)^4(6x - 2) =$$
$$= 10(3x^2 - 2x + 4)^4(3x - 1).$$

Nagu on näha valemist (5), avaldatakse liitfunktsiooni tuletis lihtfunktsioonide tuletiste korrutisena ning muidugi ei muuda tegurite ümberpaigutamine tulemust. Neid tegureid on otstarbekohasem leida siiski teatud kindlas järjekorras, mida on kasulik meeles pidada eeskirjana. Nii näiteks võib vaadeldud astmefunktsiooni puhul sõnastada selle eeskirja järgmiselt:

astme liitfunktsiooni diferentseerimiseks tuleb algul leida astme tuletis astendatava järgi* (võttes astendatava argumendiks), *seejärel aga astendatava avaldise tuletis sõltumatu muutuja järgi ning tulemused korrutada.*

Kui $y = u^m$ on astme liitfunktsioon, siis tema tuletis kirjutatakse vastavalt sellele eeskirjale järgmiselt:

$$(u^m)'_x = mu^{m-1}u'_x. \qquad (6)$$

Olgu tarvis leida näiteks funktsiooni

$$y = (x^3 - 4x + 1)^3$$

tuletis.

Võttes

$$u = x^3 - 4x + 1$$

ja rakendades valemit (6), saame:

$$y' = 3(\underbrace{x^3 - 4x + 1}_{u})^2(\underbrace{x^3 - 4x + 1}_{u})' =$$
$$= 3(x^3 - 4x + 1)^2(3x^2 - 4).$$

Edaspidi anname iga erijuhu jaoks analoogilised eeskirjad, mis määravad kindlaks diferentseerimise järjekorra.

Vaatleme veel ühte näidet. Olgu tarvis leida funktsiooni

$$y = \sqrt{x^2 + x}$$

tuletis.

Jaotades selle funktsiooni kaheks lihtfunktsiooniks, saame:

$$u = x^2 + x,$$
$$y = \sqrt{u}.$$

* Astme liitfunktsiooni all mõistetakse astet, milles astendatav on x funktsioon.

Siit

$$u'_x = 2x + 1,$$

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Järelikult,

$$y'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}(2x+1) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}.$$

Ka siin võib kindlaks määrata tuletise leidmise järjekorra, mida väljendatakse järgmise eeskirjaga:

liitfunktsiooni $y = \sqrt{u}$ *diferentseerimiseks tuleb algul leida selle funktsiooni tuletis juuritava avaldise järgi* (lugedes u argumendiks), *seejärel aga juuritava avaldise tuletis sõltumatu muutuja järgi ning tulemused korrutada,* s. t., oletades, et u on x funktsioon, saame:

$$(\sqrt{u})'_x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x. \qquad (7)$$

Nii näiteks leitakse funktsiooni

$$y = \sqrt{2x^2 - 3x + 4}$$

tuletis vastavalt ülaltoodud eeskirjale järgmiselt:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\underbrace{2x^2-3x+4}_{u}}} \cdot \underbrace{(2x^2-3x+4)'}_{u} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2x^2-3x+4}} \cdot (4x-3) = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+4}}.$$

Kui on antud mõne teise juurijaga juur, siis tuleb see eelnevalt teisendada murrulise astendajaga astmeks ja rakendada astme liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja. Näiteks:

$$(\sqrt[3]{x^2+1})' = \left[(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right]' = \frac{1}{3}\underbrace{(x^2+1)}_{u}^{-\frac{2}{3}}\underbrace{(x^2+1)'}_{u} =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}2x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = (x+2)^4$. 2. $s = (3t-2)^3$. 3. $y = (x^2-1)^5$.
4. $f(x) = (x^2-2x)^3$. 5. $s = (t^2-t+1)^4$.
6. $f(u) = 5(3u^2-u+4)^4$. 7. $s = \sqrt{t+1}$. 8. $y = \sqrt{2x+1}$.
9. $f(x) = \sqrt{x^2+1}$. 10. $f(x) = 2\sqrt{1+2x-x^2}$.
11. $v = \sqrt{(2-x)(3+2x)}$. 12. $r = \sqrt[3]{p^3-1}$.
13. $f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x^2+1}$. 14. $y = (3x-1)^2(x+1)^3$.
15. $s = t^2\sqrt{4t-3}$. 16. $y = (x-1)\sqrt{x^2+1}$.
17. $y = (x+1)^2\sqrt{x-1}$. 18. $\Theta = \dfrac{(2\varphi^2-1)^2}{\varphi^2}$.
19. $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x-1}}$. 20. $y = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. 21. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$.
22. $f(x) = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}$. 23. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$.

§ 76. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised.

1. $y = \sin x$.

Diferentseerimise eeskirja järgi leiame:

1. samm:

$$y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \sin(x + \Delta x) - \sin x.$$

Teisendades siinuste vahet, saame:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} =$$

$$= 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}.$$

Pärast murru lugeja ja nimetaja jagamist 2-ga saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

4. samm:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Kuid

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ (§ 45) ja } \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x;$$

seepärast

$$y' = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Järelikult,

$$(\sin x)' = \cos x. \qquad \text{(X)}$$

2. $y = \cos x$.

Taandamisvalemi põhjal võib kirjutada:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),$$

siit

$$y' = (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]'.$$

Liitfunktsiooni $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ diferentseerimiseks esitame selle kahe lihtfunktsiooni kujul:

$$u = \frac{\pi}{2} - x,$$

$$y = \sin u.$$

Vastavalt valemile (5) § 75, saame:

$$u'_x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -1,$$

$$y'_u = (\sin u)' = \cos u = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$y'_x = \sin x \cdot (-1) = -\sin x.$$

Järelikult,

$$(\cos x)' = -\sin x. \qquad \text{(XI)}$$

3. $y = \tan x$.

Asendades $\tan x$ suhtega $\frac{\sin x}{\cos x}$ ja rakendades jagatise diferentseerimise eeskirja, saame:

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\,(\sin x)' - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x\,(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Seega saame:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. \qquad \text{(XII)}$$

4. $y = \cot x$.

Toimides samuti nagu juhul 3, saame:

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\sin x\,(\cos x)' - \cos x\,(\sin x)'}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x\,(-\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Seega,

$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \qquad \text{(XIII)}$$

Käesoleva paragrahvi punktis 2 diferentseerisime liitfunktsiooni $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, rakendades valemit (5) § 75. Seda operatsiooni võib aga teostada ka järgmise eeskirja järgi: *trigonomeetrilise liitfunktsiooni* diferentseerimiseks tuleb algul leida trigonomeetrilise funktsiooni tuletis avaldise järgi, mis asetseb trigonomeetrilise funktsiooni märgi all* (võttes selle argumendiks), *seejärel aga leida selle avaldise tuletis sõltumatu muutuja järgi ning tulemused korrutada*, s. t., oletades, et u on x funktsioon, saame:

$$(\sin u)'_x = \cos u \cdot u'_x, \qquad (1)$$

$$(\cos u)'_x = -\sin u \cdot u'_x, \qquad (2)$$

$$(\tan u)'_x = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x, \qquad (3)$$

$$(\cot u)'_x = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x. \qquad (4)$$

* Trigonomeetrilise liitfunktsiooni all mõistame liitargumendiga trigonomeetrilist funktsiooni.

Kasutades valemit (1) võib funktsiooni $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ diferentseerimise protsessi kirjutada järgmiselt:

$$\left[\sin\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{u}\right]' = \cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{u}\underbrace{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}_{u}' =$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1) = -\sin x.$$

N ä i d e 1. Diferentseerida funktsioon

$$y = \cos\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

L a h e n d u s. Vastavalt käesoleva paragrahvi valemile (2) leiame:

$$y' = \left[\cos\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{u}\right]' = -\sin\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{u}\underbrace{\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{u}' =$$

$$= -\sin\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2}\sin\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

N ä i d e 2. Diferentseerida funktsioon $y = \sin^2\sqrt{x}$.

L a h e n d u s. Esitades funktsiooni kujul $y = (\sin\sqrt{x})^2$, leiame valemi (6) § 75 järgi

$$y' = [\underbrace{(\sin\sqrt{x})^2}_{u}]' = 2\underbrace{\sin\sqrt{x}}_{u}\cdot\underbrace{(\sin\sqrt{x})'}_{u}.$$

Kuid $\sin\sqrt{x}$ on trigonomeetriline liitfunktsioon, seepärast käesoleva paragrahvi valemi (1) järgi saame:

$$(\sin\underbrace{\sqrt{x}}_{u})' = \cos\underbrace{\sqrt{x}}_{u}\underbrace{(\sqrt{x})'}_{u} = \cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Järelikult,

$$y' = 2\sin\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Antud funktsiooni diferentseerimise protsessi võib kirjutada järgmiselt:

$$y' = (\sin^2 \sqrt{x})' = 2 \sin \sqrt{x} \, (\sin \sqrt{x})' =$$
$$= 2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \, (\sqrt{x})' = 2 \sin \sqrt{x} \cos \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = x - \sin x$. **2.** $\Theta = \varphi \cos \varphi$. **3.** $v = \sec u$.
4. $f(t) = \sin t \cos t$. **5.** $f(x) = \tan x - \cot x$. **6.** $s = \tan \Theta - \Theta$.
7. $\Theta = \varphi + \cot \varphi$. **8.** $s = a(1 - \cos t)$. **9.** $f(\Theta) = (1 + \cos \Theta) \sin \Theta$.
10. $v = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}$. **11.** $f(\Theta) = \frac{1 + \tan \Theta}{\tan \Theta}$. **12.** $y = \frac{1}{2} \sin^2 x$.
13. $v = -\frac{1}{4} \cos^4 \omega$. **14.** $f(\varphi) = -\cot^5 \varphi$. Leida $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$. **15.** $f(\varphi) = \sin 2\varphi$.
16. $f(\omega) = \frac{1}{2} \cos 2\omega$. **17.** $y = \sin\left(\frac{2\pi}{q} x\right)$. **18.** $y = -a \cos\left(\frac{\pi}{a} t\right)$.
19. $s = \cos(1 - 2\varphi)$. **20.** $f(\omega) = \frac{1}{2} \tan \omega^2$. **21.** $t = 2 \sin(\varphi^2 - \varphi)$.
22. $f(\Theta) = \sin \sqrt{\Theta}$. **23.** $s = -\sqrt{\cos t}$. **24.** $y = 4 \tan 2\sqrt{x}$.
25. $y = \sqrt[3]{\sin x}$. **26.** $s = \cos \frac{1}{t}$. **27.** $s = \sin \frac{a}{t}$.
28. $y = \frac{1}{2} \sec^2 \omega$. **29.** $y = \sqrt{\sec x}$. **30.** $y = \sin^3 x \cos x$.
31. $f(t) = 2 \sin 2t \cos^2 t$. **32.** $f(\Theta) = 2 \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta$.
33. $y = \sin(x + a) \cos(x - a)$. **34.** $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$.
35. $\Theta = \sin^2 2\varphi$. **36.** $y = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$ **37.** $s = \sqrt{\sin 2\varphi}$.
38. $y = \frac{1}{3} \tan^3 \frac{1}{x}$. **39.** $y = \sqrt[3]{\sin 2x}$. **40.** $\Theta = \sqrt[3]{\sin^2 2\omega}$.
41. $r = \frac{1}{3} \tan^3 \frac{\omega}{2} - \tan \frac{\omega}{2}$. **42.** $y = \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{2}{3} \tan^3 x + \tan x$.

§ 77. Logaritmfunktsiooni tuletis. Olgu antud funktsioon

$$y = \ln x.$$

Rakendame selle funktsiooni diferentseerimiseks üldeeskirja.

1. samm:

$$y + \Delta y = \ln (x + \Delta x).$$

2. samm:

$$\Delta y = (y + \Delta y) - y = \ln (x + \Delta x) - \ln x$$

ehk

$$\Delta y = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

3. samm:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right). \qquad (1)$$

Võtame

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{n},$$

millest

$$\Delta x = \frac{x}{n}. \qquad (2)$$

Asetades $\frac{\Delta x}{x}$ ja Δx väärtused võrdusesse (1), saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

ehk peale potentseerimist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Võrdusest (2) järeldub, et

$$\Delta x \to 0, \text{ kui } n \to \infty. \qquad (3)$$

4. samm. Arvestades tingimust (3), võime kirjutada:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right].$$

Tegur $\frac{1}{x}$ ei sõltu n-st, seepärast võime teda lugeda jäävaks, kui $n \to \infty$; järelikult,

$$y' = \frac{1}{x} \lim_{n \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (4)$$

Analüüsi täielikus kursuses tõestatakse teoreem: *muutuva suuruse logaritmi piirväärtus võrdub selle muutuva suuruse piirväärtuse logaritmiga*; seepärast

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right],$$

kuid § 47 põhjal

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Seega võrdus (4) saab kuju

$$y' = \frac{1}{x}\ln\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right] = \frac{1}{x}\ln e = \frac{1}{x}\cdot 1 = \frac{1}{x}.$$

Järelikult,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \qquad \text{(XIV)}$$

s. t. *naturaallogaritmi tuletis võrdub argumendi pöördväärtusega.*

Kui on antud kümnendlogaritm, siis tuleb see eelnevalt avaldada naturaallogaritmi kaudu. On ju teada (§ 48), et

$$\log x = 0{,}4343 \ln x.$$

Diferentseerides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$(\log x)' = 0{,}4343\ (\ln x)' = 0{,}4343 \cdot \frac{1}{x}$$

ehk

$$(\log x)' = \frac{0{,}4343}{x}, \qquad \text{(XV)}$$

s. t. *kümnendlogaritmi tuletis võrdub naturaallogaritmi tuletise ja jääva teguri 0,4343 korrutisega.*

N ä i d e 1. Diferentseerida funktsioon $y = \ln(2x+1)$.

L a h e n d u s. Antud funktsioon on liitfunktsioon. Võtame

$$u = 2x + 1,$$

siis

$$y = \ln u.$$

Vastavalt valemile (5) § 75 saame:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u}\cdot 2 = \frac{2}{2x+1}.$$

Logaritmilise liitfunktsiooni * tuletise võime leida ka järgmise eeskirja järgi:

logaritmilise liitfunktsiooni diferentseerimiseks tuleb algul leida logaritmi tuletis avaldise järgi, mis asetseb logaritmi märgi all (võttes selle avaldise argumendiks), *seejärel aga leida logaritmi märgi all seisva avaldise tuletis sõltumatu muutuja järgi ning tulemused korrutada,* s. t. oletades, et u on x funktsioon, saame:

$$(\ln u)'_x = \frac{1}{u} \cdot u'_x. \qquad (5)$$

N ä i d e 2. Diferentseerida funktsioon

$$y = \ln \cos (1 - x).$$

L a h e n d u s. Vastavalt valemile (5) leiame:

$$y' = [\ln \underbrace{\cos (1 - x)}_{u}]' = \frac{1}{\underbrace{\cos (1 - x)}_{u}} [\underbrace{\cos (1 - x)}_{u}]'.$$

Kuid $\cos(1 - x)$ on trigonomeetriline liitfunktsioon; rakendades tema suhtes valemit (2) § 76, saame:

$$[\cos \underbrace{(1 - x)}_{u}]' = -\sin \underbrace{(1 - x)}_{u} \underbrace{(1 - x)'}_{u} =$$

$$= -\sin (1 - x)(-1) = \sin (1 - x)$$

ehk

$$[\ln \cos (1 - x)]' = \frac{1}{\cos (1 - x)} [\cos (1 - x)]' =$$

$$= \frac{1}{\cos (1 - x)} [-\sin (1 - x)] (1 - x)' =$$

$$= \frac{1}{\cos (1 - x)} \sin (1 - x) = \tan (1 - x).$$

N ä i d e 3. Leida funktsiooni $y = \ln \sqrt{\frac{x}{1 + x}}$ tuletis.

L a h e n d u s. Teisendame algul antud funktsiooni, rakendades juure ja murru logaritmimise reegleid:

$$y = \frac{1}{2} [\ln x - \ln (1 + x)].$$

---

* Logaritmiliseks liitfunktsiooniks nimetatakse liitargumendiga logaritmfunktsiooni.

Diferentseerides saadud funktsiooni [$\ln x$ valemi (XIV) ja $\ln(1+x)$ valemi (5) järgi], saame:

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}(1+x)'\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1+x-x}{x(1+x)} = \frac{1}{2x(1+x)}.$$

Harjutusi.

Leida funktsioonide tuletised:

1. $y = x \ln x$.
2. $\Theta = t(\ln t - 1)$.
3. $f(u) = \frac{\ln u}{u}$.
4. $y = \lg 2x$.
5. $f(x) = 2 \lg (x+1)$. Leida $f'(1)$.
6. $s = \ln (t^2 - 1)$.
7. $u = \ln \frac{1}{v}$.
8. $t = \ln \sin \alpha$.
9. $y = -\ln \cos t$.
10. $f(t) = \ln (2 \cos t)$.
11. $f(\Theta) = \ln \tan \Theta$. Leida $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
12. $y = \ln^2 x$.
13. $u = 10 \ln \frac{4}{4+t}$.
14. $f(x) = \ln \frac{a+x}{a-x}$.
15. $y = \ln^3 \sin x$.
16. $f(u) = \ln \sin \frac{u}{3}$.
17. $s = \ln \tan \frac{t}{2}$.
18. $y = \ln^2 \sqrt{x}$.
19. $y = \sqrt{\ln \tan x}$.
20. $s = \ln \cos^2 (1-t)$.
21. $y = \ln \sec^2 x$.
22. $f(x) = \ln \sqrt{a^2 + x^2}$.
23. $y = \ln (x + \sqrt{1+x^2})$.
24. $y = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

§ 78. Mistahes astendajaga astme tuletis. Paragrahvis 69 tuletasime valemi

$$(x^m)' = mx^{m-1}$$

positiivse täisarvulise astendaja m puhul. Nüüd tõestame selle valemi kehtivuse igasuguse astendaja puhul.

Oletame, et funktsioonis

$$y = x^m$$

m omab mistahes jääva väärtuse. Logaritmides selle võrduse alusel e, saame:

$$\ln y = m \ln x. \qquad (1)$$

Võttes arvesse, et $\ln y$ on liitfunktsioon ($\ln y$ sõltub y-st

ja y x-st), diferentseerime võrduse (1) mõlemaid pooli x järgi:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = m \cdot \frac{1}{x},$$

siit

$$y' = m \cdot \frac{y}{x} = m \cdot \frac{x^m}{x} = mx^{m-1}.$$

Järelikult,

$$(x^m)' = mx^{m-1}.$$

§ 79. Eksponentfunktsiooni tuletis. On antud eksponentfunktsioon

$$y = a^x. \qquad (1)$$

Logaritmides võrduse (1) alusel e, saame:

$$\ln y = x \ln a.$$

Diferentseerime seda võrdust x järgi, lugedes $\ln y$ liitfunktsiooniks:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln a,$$

siit

$$y' = y \ln a = a^x \ln a.$$

Järelikult,

$$(a^x)' = a^x \ln a, \qquad (XVI)$$

s. t. *eksponentfunktsiooni a^x tuletis võrdub funktsiooni enda ja aluse naturaallogaritmi korrutisega.*

Kui on antud eksponentfunktsioon

$$y = e^x,$$

kus e on naturaallogaritmide alus, siis valemi (XVI) põhjal tema tuletis on:

$$(e^x)' = e^x \ln e = e^x.$$

Seega,

$$(e^x)' = e^x, \qquad (XVII)$$

s. t. *eksponentfunktsiooni e^x tuletis võrdub funktsiooni endaga.*

N ä i d e 1. Diferentseerida funktsioon $y = e^{\sin x}$.

L a h e n d u s. Asendades antud liitfunktsiooni kahe lihtfunktsiooniga, saame:

$$u = \sin x,$$
$$y = e^u.$$

Siit

$$y'_u = e^u \text{ ja } u'_x = \cos x.$$

Vastavalt valemile (5) § 75 saame:

$$y'_x = e^u \cos x = e^{\sin x} \cos x.$$

Antud funktsiooni võib diferentseerida ka järgmise eeskirja järgi:

eksponent-liitfunktsiooni diferentseerimiseks tuleb algul leida eksponentfunktsiooni tuletis astendaja järgi* (võttes astendaja argumendiks), *siis aga astendaja tuletis sõltumatu muutuja järgi ja tulemused korrutada,* s. t. lugedes u suuruse x funktsiooniks, saame:

$$(a^u)'_x = a^u \ln a\, u'_x, \tag{2}$$
$$(e^u)'_x = e^u \cdot u'_x. \tag{3}$$

N ä i d e 2. Diferentseerida funktsioon $y = e^{\tan 2x}$.

L a h e n d u s. Käesoleva paragrahvi valemi (3) põhjal

$$y' = \left(e^{\overbrace{\tan 2x}^{u}}\right)' = e^{\overbrace{\tan 2x}^{u}} \underbrace{(\tan 2x)'}_{u}.$$

Kuid vastavalt valemile (3) § 76

$$\underbrace{(\tan 2x)'}_{u} = \frac{1}{\cos^2 \underbrace{2x}_{u}} \underbrace{(2x)'}_{u} = \frac{2}{\cos^2 2x}.$$

Järelikult,

$$(e^{\tan 2x})' = e^{\tan 2x} (\tan 2x)' = e^{\tan 2x} \frac{1}{\cos^2 2x} (2x)' = \frac{2e^{\tan 2x}}{\cos^2 2x}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = xe^x - e^x$.
2. $s = e^t \ln t$.
3. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x}$.
4. $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
5. $P = e^{2h}$.
6. $f(x) = a^{-x}$.
7. $y = xe^{2x}$.
8. $\Theta = e^{-\varphi^2}$
9. $u = a^{\frac{1}{p}}$

* Liitargumendiga eksponentfunktsioon.

10. $y = x^n n^x$. 11. $s = \ln e^t$. 12. $s = e^{\ln t}$.

13. $f(t) = \sin e^t$. 14. $f(t) = e^{2\sin t}$. 15. $y = e^{x \ln x}$.

16. $f(\omega) = \ln \frac{e^\omega}{1 - e^\omega}$. 17. $\Theta = \sin^2 e^t$. 18. $r = \cos \sqrt{e^\omega}$.

19. $f(x) = \sqrt{\cos e^x}$. 20. $f(t) = \ln e^{\cos t}$. 21. $f(x) = \cos e^{\sqrt{x}}$.

22. $v = \tan e^{-2\varphi}$. 23. $R = e^{\ln \frac{1}{x}}$. 24. $y = e^{\cos x} \sin x$.

25. $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}})$. 26. $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

27. $\Theta = e^{2\varphi} \cos 2\varphi$. 28. $y = e^{ax}(\sin ax - \cos ax)$.

§ 80. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide tuletised.

1. $y = \text{arc sin } x$.

Arkussiinuse definitsiooni põhjal saame:

$$\sin y = x. \tag{1}$$

Siin $\sin y$ on liitfunktsioon ($\sin y$ sõltub y-st, y aga sõltub x-st). Diferentseerides võrduse (1) mõlemaid pooli x järgi, saame:

$$(\sin y)' = (x)'$$

ehk

$$\cos y \cdot y' = 1,$$

millest

$$y' = \frac{1}{\cos y}.$$

Arvestades valemit

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}\ *$$

ja võrdust (1), saame:

$$y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ehk

$$(\text{arc sin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{XVIII}$$

---

* Juure võtame siin plussmärgiga, sest arc sin x väärtused asetsevad $-\frac{\pi}{2}$ ja $+\frac{\pi}{2}$ vahel, selles vahemikus on aga $\cos y$ väärtused positiivsed

2. $y = \arccos x$.
Vastavalt arkuskoosinuse definitsioonile saame:

$$\cos y = x.$$

Diferentseerides selle võrduse mõlemaid pooli x järgi ja võttes seejuures arvesse, et $\cos y$ on liitfunktsioon, leiame:

$$(\cos y)' = (x)'$$

ehk

$$-\sin y \cdot y' = 1,$$

millest

$$y' = -\frac{1}{\sin y}.$$

Kuna

$$\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y} * = \sqrt{1 - x^2},$$

siis

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

ehk

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \qquad \text{(XIX)}$$

3. $y = \arctan x$.
Vastavalt arkustangensi definitsioonile saame:

$$\tan y = x.$$

Diferentseerides nagu eelmistelgi juhtudel selle võrduse mõlemaid pooli x järgi, saame:

$$(\tan y)' = (x)'$$

ehk

$$\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1,$$

millest

$$y' = \cos^2 y.$$

Kuid

$$\cos^2 y = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y}.$$

---

* Ka siin võetakse juur plussmärgiga, sest $\arccos x$ väärtused asetsevad 0 ja π vahel, selles vahemikus on aga $\sin y$ väärtused positiivsed.

Arvestades võrdust (2), saame:

$$y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}.$$

Järelikult,

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XX)}$$

4. $y = \operatorname{arc\,cot} x$.

Arkuskootangensi definitsiooni põhjal

$$\cot y = x.$$

Diferentseerides selle võrduse mõlemaid pooli x järgi, saame:

$$(\cot x)' = (x)'$$

ehk

$$-\frac{1}{\sin^2 y} \cdot y' = 1,$$

millest

$$y' = -\sin^2 y.$$

Kuid

$$\sin^2 y = \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 y} = \frac{1}{1+\cot^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Järelikult,

$$y' = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \qquad \text{(XXI)}$$

N ä i d e 1. Diferentseerida funktsioon $y = \arctan \frac{1}{x}$.

L a h e n d u s. Asendame antud liitfunktsiooni kahe lihtfunktsiooniga:

$$u = \frac{1}{x},$$

$$y = \arctan u.$$

Siit

$$y'_u = \frac{1}{1+u^2},$$

$$u'_x = -\frac{1}{x^2}.$$

Vastavalt valemile (5) § 75 saame:

$$y'_x = \frac{1}{1-u^2}\left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Antud funktsiooni diferentseerimiseks võime kasutada ka järgmist eeskirja:

trigonomeetrilise pöörd-liitfunktsiooni * *diferentseerimiseks tuleb algul leida trigonomeetrilise pöördfunktsiooni tuletis avaldise järgi, mis asetseb pöördfunktsiooni sümboli all* (võttes selle avaldise argumendiks), *seejärel aga leida selle avaldise tuletis sõltumatu muutuja järgi ning tulemused korrutada,* s. t. lugedes u suuruse x funktsiooniks, saame:

$$(\arcsin u)'_x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \cdot u'_x; \quad (\arctan u)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x;$$

$$(\arccos u)'_x = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x; \quad (\operatorname{arc\,cot} u)'_x = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x.$$

N ä i d e 2. Leida funktsiooni $y = \arcsin \sqrt{2x}$ tuletis.

L a h e n d u s. Antud funktsioon on trigonomeetriline pöörd-liitfunktsioon. Rakendades eespool esitatud eeskirja $\arcsin u$ tuletise leidmiseks, saame:

$$y' = (\arcsin \underbrace{\sqrt{2x}}_{u})' = \frac{1}{\sqrt{1-(\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})^2}} (\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})' =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} (\sqrt{2x})'.$$

Kuna $\sqrt{2x}$ on ka liitfunktsioon, siis valemi (7) § 75 põhjal saame:

$$(\underbrace{\sqrt{2x}}_{u})' = \frac{1}{2\underbrace{\sqrt{2x}}_{u}} (\underbrace{2x}_{u})' = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x}}.$$

Järelikult,

$$y' = (\arcsin \sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} (\sqrt{2x})' =$$

---

* Liitargumendiga trigonomeetriline pöördfunktsioon.

$$= \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} (2x)' = \frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2x-4x^2}}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $y = \arcsin 2x$.
2. $y = \arccos \frac{x}{2}$.
3. $y = \arctan 3x$.
4. $f(t) = \arctan \frac{t}{2}$.
5. $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$.
6. $u = \arctan \sqrt{v}$.
7. $s = \arcsin t^2$.
8. $\Theta = \arctan e^{\varphi}$.
9. $s = \arcsin \frac{1}{t}$.
10. $\varphi = (\arcsin x)^2$.
11. $y = e^{\arctan x}$.
12. $y = \arcsin \sqrt{e^x}$.
13. $f(x) = (\arccos 3x)^2$.
14. $y = \ln e^{\arcsin x}$.
15. $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$.
16. $s = \ln \cos e^{\arccos t}$.
17. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$. Arvutada $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.
18. $u = a \arcsin \frac{t}{a} + \sqrt{a^2 - t^2}$.
19. $s = t \arctan \frac{t}{a} - \frac{a}{2} \ln(a^2+t^2)$.
20. $f(x) = \arctan \frac{a+x}{1-ax}$.
21. $\Theta = \arctan \frac{2\varphi}{1-\varphi^2}$.

§ 81. Ilmutamata funktsiooni tuletis. Olgu antud ilmutamata funktsioon y järgmise võrrandiga:

$$xy - x - 1 = 0. \tag{1}$$

Leiame antud funktsiooni tuletise, eeldades, et see on olemas. Selleks diferentseerime võrrandi (1) mõlemaid pooli, rakendades algebralise summa tuletise leidmise kohta kehtivat eeskirja:

$$(xy)' - (x)' - (1)' = 0. \tag{2}$$

Et xy on kahe muutuva suuruse korrutis, siis

$$(xy)' = x(y)' + y(x)'.$$

Seega võrdus (2) omandab kuju

$$x(y)' + y(x)' - (x)' - (1)' = 0$$

ehk

$$xy' + y - 1 = 0.$$

Et y' on otsitav tuletis, siis avaldades viimasest võrdusest y', saame:

$$y' = \frac{1-y}{x}. \tag{3}$$

Antud funktsiooni diferentseerimiseks oleksime võinud algul avaldada y suuruse x kaudu ja seejärel leida saadud ilmutatud funktsiooni tuletise. Tõepoolest, võrrandist (1) saame:

$$y = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x},$$

millest

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Väliselt see tulemus erineb eelnevast, kuid asetades võrdusesse (3) y väärtuse, saame:

$$y' = \frac{1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x} = -\frac{1}{x^2}.$$

Seega osutusid diferentseerimise tulemused mõlemal juhul ühesugusteks. Üleminek ilmutamata funktsioonilt ilmutatud funktsioonile on võimalik aga ainult kõige lihtsamatel juhtudel. Esineb niisuguseid ilmutamata funktsioone, milledele ilmutatud kuju andmine on väga raske või isegi võimatu. Näiteks funktsiooni y, mis on antud võrrandiga $xy + x = \sin y$, pole võimalik esitada ilmutatud kujul.

Seepärast tuleb selliseid funktsioone diferentseerida kui ilmutamata funktsioone. Vaatleme veel üht näidet.

Olgu tarvis leida võrrandiga $y^2 - 8x = 0$ antud ilmutamata funktsiooni tuletis.

Rakendades algebralise summa diferentseerimise eeskirja, saame:

$$(y^2)' - (8x)' = 0. \qquad (4)$$

Kuna y^2 on liitfunktsioon (y^2 sõltub y-st, y aga sõltub x-st), siis astme liitfunktsiooni diferentseerimise eeskirja põhjal (6) § 75 saame:

$$(y^2)' = 2yy'.$$

Järelikult saab võrdus (4) kuju

$$2yy' - (8x)' = 0$$

ehk

$$2yy' - 8 = 0,$$

millest

$$y' = \frac{8}{2y} = \frac{4}{y}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide tuletised:

1. $2y - 3x^2 + 3 = 0$.
2. $y^2 - 4x = 0$.
3. $2y^2 - 6x + 1 = 0$.
4. $x - y + y^2 = 0$.
5. $x^2 + y^2 = r^2$.
6. $2x^2 + 3y^2 - 4ay = 0$.
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
8. $xy = 4$.
9. $x^2 - 2xy - 6 = 0$.

10. $x^2y + xy^2 = 4$. 11. $(1 - y)^2 = ax$. 12. $\sin y = 1 - x$.
13. $xy = \sin y$. 14. $x^2 = e^y$. 15. $xy = e^{x+y}$.
16. $\text{arc sin } y = x^2$.

§ 82. Teist järku tuletis. Olgu funktsioonil $y = f(x)$ tuletis $y' = f'(x)$. Funktsiooni $f'(x)$ tuletist x järgi, kui see on olemas, nimetatakse *teiseks tuletiseks* ehk *teist järku tuletiseks*.

Funktsiooni $y = f(x)$ teist järku tuletist tähistame järgmiselt:

$$y'',\ y''_x,\ f''(x).$$

N ä i d e. Leida funktsiooni $y = \frac{1}{x^2}$ teist järku tuletis.

L a h e n d u s.

$$y' = \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2}) = -2x^{-3},$$

$$y'' = (-2x^{-3})'' = -2\,(-3x^{-4}) = \frac{6}{x^4}.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide teist järku tuletis:

1. $y = 4x + 1$. 2. $y = x^3$. 3. $s = 3t^2 + 2t - 1$.
4. $Q = 2\sqrt{u}$. 5. $f(t) = \frac{2t-1}{t}$. 6. $y = (x^2 - 1)^2$.
7. $f(\alpha) = \frac{1}{2}\cos 2\alpha$. 8. $f(t) = e^{\sin t}$. 9. $s = 2 \ln \frac{2}{2+t}$.

§ 83. Teist järku tuletise mehhaanikaline tõlgendus. Liikugu keha sirgjooneliselt seaduse järgi

$$s = f(t).$$

Paragrahvis 60 leidsime, et keha liikumise kiirus v antud ajamomendil t on teepikkuse tuletis aja järgi, s. t.

$$v = s'.$$

Kui keha liigub mitteühtlaselt, siis kiirus v muutub koos ajaga ning ajavahemiku Δt jooksul saab juurdekasvu Δv. Sel juhul nimetatakse suhte $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ väärtust, mis näitab kiiruse muutumist ajaühikus, *keskmiseks kiirenduseks* aja-

vahemikus t-st kuni $(t + \Delta t)$-ni. *Kiirendus antud ajamomendil t on võrdne keskmise kiirenduse piirväärtusega, kui $\Delta t \to 0$.* Tähistades kiirenduse antud ajamomendil j-ga, võime kirjutada:

$$j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'.$$

Kuid

$$v' = (s')' = s'',$$

seepärast

$$j = s''.$$

Sirgjooneliselt liikuva keha liikumise kiirendus antud ajamomendil on võrdne teepikkuse teist järku tuletisega aja järgi.

N ä i d e. Punkt liigub sirgjooneliselt seaduse järgi $s = 2t^2 - t + 5$. Leida punkti kiirus ja kiirendus ajamomendil $t = 5$.

L a h e n d u s. Kiiruse määramiseks tuleb leida antud funktsiooni esimest järku tuletise väärtus, kui $t = 5$. Seega:

$$v = s' = (2t^2 - 3t + 5)' = 4t - 3$$

ja

$$v_{t=5} = 4 \cdot 5 - 3 = 17.$$

Kiirendus on võrdne teist järku tuletise väärtusega, kui $t = 5$, s. t.

$$j = s'' = (s')' = (4t - 3)' = 4.$$

Kiirendus osutus konstantseks t mistahes väärtusel; seega toimub punkti liikumine antud seaduse järgi jääva kiirendusega.

Harjutusi.

Määrata sirgjooneliselt liikuva punkti kiirendus antud ajamomendil t, kui punkti kiirus on antud järgmiste võrranditega:

1. $v = t^2 + 2t$, $t = 3$.
2. $v = 3t - t^3$, $t = 2$.
3. $v = 4 \sin \frac{t}{2}$, $t = \frac{\pi}{3}$.
4. $v = 2 \cos 3t$, $t = \frac{\pi}{6}$.

Leida sirgjooneliselt liikuva punkti kiirus ja kiirendus antud ajamomendil t, kui liikumine toimub järgmiste seaduste põhjal:

5. $s = t^3 + 2t^2$, $t = 2$.

6. $s = 2t - t^2$, $t = 1$.

7. $s = 2 \sin t$, $t = \frac{\pi}{4}$.

8. $s = 3 \cos \frac{\pi t}{3}$, $t = 1$.

9. Tõstuki poolt läbitud tee pikkus määratakse valemiga $h = 4 + 5t$. Leida tõstuki kiirus ja kiirendus mistahes ajamomendil.

10. Määrata moment t, millal võrrandiga $s = -\frac{1}{6} t^3 + 3t^2 - 5$ väljendatud sirgjoonelise liikumise kiirendus on null. Kui suur on sel juhul kiirus?

Diferentseerimise valemite tabel

I. $(c)' = 0$.

II. $(x)' = 1$.

III. $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.

IV. $(uv)' = uv' + vu'$.

V. $(cu)' = cu'$.

VI. $(x^m)' = mx^{m-1}$.

VII. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

VIII. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

IX. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$.

X. $(\sin x)' = \cos x$.

XI. $(\cos x)' = -\sin x$.

XII. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

XIII. $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

XIV. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

XV. $(\lg x)' = \frac{0{,}4343}{x}$.

XVI. $(a^x)' = a^x \ln a$.

XVII. $(e^x)' = e^x$.

XVIII. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

XIX. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

XX. $(\arctan x)' = \frac{1}{1 + x^2}$.

XXI. $(\operatorname{arc\,cot} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

---

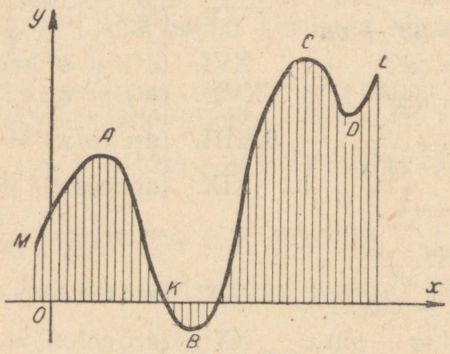
y' = kiirus

y'' = kiirendus

XI peatükk.

TULETISE RAKENDUSI.

§ 84. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$, mis on graafiliselt kujutatud joonisel 84. Jälgime selle kõvera punktide ordinaatide suuruse muutumist abstsissi kasvamisel.



Joon. 84.

Näeme, et argumendi x kasvamisel kasvavad ka vastavate punktide ordinaadid kõvera osal MA, osal AK aga kahanevad. Argumendi edasisel kasvamisel jätkavad ordinaadid kaare KB kõigis punktides kahanemist, olles juba negatiivsed *; kaare BC punktide ordinaadid aga kasvavad jne. Antud funktsiooni nimetatakse piirkondades MA, BC ja DL kasvavaks, piirkondades AB ja CD aga kahanevaks.

* On teada, et väiksem on see negatiivne arv, mille absoluutväärtus on suurem, ja vastupidi.

Definitsioon. *Funktsiooni $y = f(x)$ nimetatakse mingis x väärtuste vahemikus kasvavaks, kui argumendi x kasvamisel selles vahemikus kasvavad ka vastavad y väärtused, ja kahanevaks, kui x väärtuste kasvamisel y väärtused kahanevad.*

Käesolevas peatükis vaadeldakse ainult argumendi kasvavat muutumist ning funktsioone, mis ise ja millede esimene ning teine tuletis on pidevad kõigil vaadeldavatel argumendi väärtustel.

§ 85. Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused.

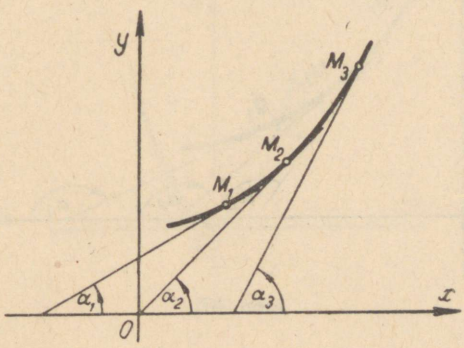
Teoreem. *Kui funktsiooni $y = f(x)$ tuletis mingis x väärtuste vahemikus on positiivne, siis funktsioon kasvab selles vahemikus, kui aga tuletis on negatiivne, siis funktsioon kahaneb.*

Teoreemi tõestamata selgitame seda geomeetriliselt.

I. Olgu x väärtuste antud vahemikus

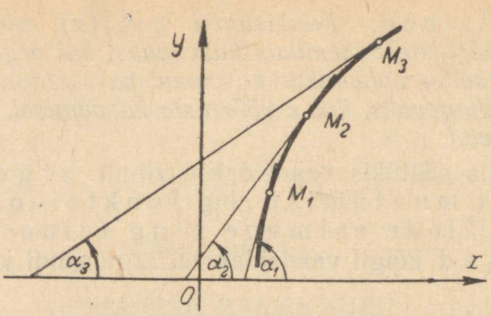
$$f'(x) > 0.$$

Arvestades tuletise geomeetrilist vastet (§ 63), võib väita, et funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutujate tõusud on vaadeldavas vahemikus positiivsed. Teiste sõnadega, puutujad moodustavad x-telje positiivse suunaga teravnur-



Joon. 85.

gad (joon. 85 ja 86); järelikult, antud vahemikus kõver tõuseb, s. t. funktsioon kasvab.

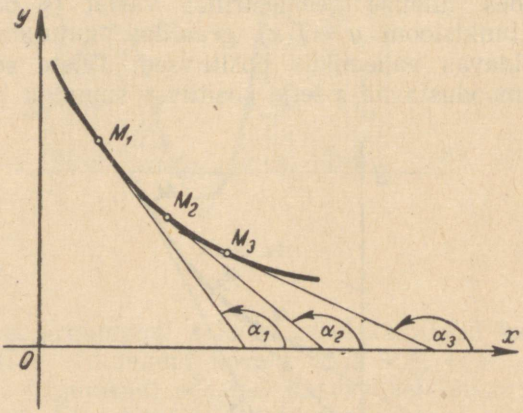


Joon. 86.

II. Olgu x väärtuste antud vahemikus

$$f'(x) < 0.$$

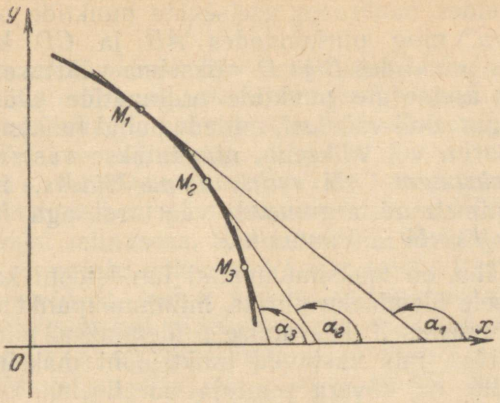
See tähendab, et funktsiooni $y = f(x)$ graafiku puutujate tõusud on negatiivsed. Teiste sõnadega, puutujad moodustavad x-telje positiivse suunaga nürinurgad (joon. 87 ja



Joon. 87.

88); seepärast vaadeldavas vahemikus kõver langeb, s. t. funktsioon kahaneb.

N ä i d e. Määrata funktsiooni $y = x^2$ kasvamise ja kahanemise vahemikud.

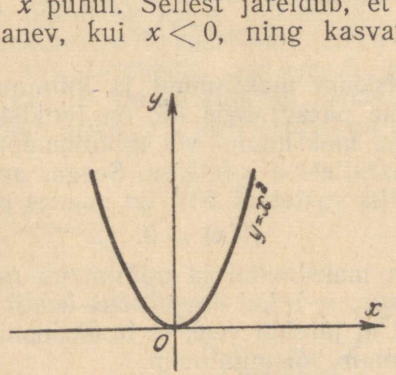


Joon. 88.

L a h e n d u s. Leiame antud funktsiooni tuletise

$$y' = (x^2)' = 2x.$$

Suurus $2x$ on positiivne iga positiivse x puhul ja negatiivne iga negatiivse x puhul. Sellest järeldub, et antud funktsioon on kahanev, kui $x < 0$, ning kasvav, kui $x > 0$ (joon. 89).



Joon. 89.

§ 86. Funktsiooni maksimum ja miinimum. Vaadeldes joonisel 84 antud funktsiooni muutumise käiku, näeme, et piirkondades MA ja BC asetsevate punktide ordinaadid kasvavad, omandades kõvera punktides A ja C suurima väär-

tuse, võrreldes naabruses asetsevate punktide ordinaatide väärtustega, ning piirkondades AB ja CD kahanevad, omandades punktides B ja D väikseima väärtuse, võrreldes naabruses asetsevate punktide ordinaatide väärtustega *.

Neid argumendi väärtusi, millede puhul funktsiooni väärtus on suurim või väikseim, nimetatakse vastavalt funktsiooni *maksimum-* või *miinimumpunktideks*, funktsiooni väärtust nimetatud argumendi väärtusel aga funktsiooni *maksimumiks* või *miinimumiks*.

Nagu näha, on maksimumpunkt funktsiooni kasvamiselt kahanemisele ülemineku piiriks, miinimumpunkt aga funktsiooni kahanemiselt kasvamisele ülemineku piiriks. Nendes punktides, mis vastavad funktsiooni maksimumile ja miinimumile, on kõvera puutuja paralleelne x-teljega **.

Definitsioon 1. *Funktsioonil $y = f(x)$ on argumendi väärtusel $x = a$ maksimum, kui kõigil x väärtustel, mis on küllalt lähedal a-le, kehtib võrratus*

$$f(a) > f(x).$$

Definitsioon 2. *Funktsioonil $y = f(x)$ on argumendi väärtusel $x = a$ miinimum, kui kõigil x väärtustel, mis on küllalt lähedal a-le, kehtib võrratus*

$$f(a) < f(x).$$

§ 87. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnused. Nagu näitasime paragrahvis 86, on funktsiooni $y = f(x)$ graafikule tema maksimum- või miinimumpunktis tõmmatud puutuja paralleelne x-teljega. Seega, arvestades tuletise geomeetrilist vastet (§ 63), on nendes punktides

$$f'(x) = 0.$$

See võrdus on maksimumi ja miinimumi *tarvilik tunnus*, kuid mitte *piisav*, s. t. kui see võrdus kehtib mõnes punktis, siis sellest ei järeldu veel, et funktsioonil on vastavas punktis maksimum või miinimum.

Tõestame teoreemi, mis annab maksimumi ja miinimumi piisavad tunnused.

---

* Funktsiooni maksimum (miinimum) ei ole tema väärtus, mis on suurem (väiksem) kõigist teistest tema väärtustest, vaid ainult nendest, mis asetsevad tema vahetus naabruses. (*Toim.*)

** Esineb juhtumeid, kus kõvera puutuja ei ole nendes punktides, mis vastavad maksimumile või miinimumile, paralleelne x-teljega, vaid y-teljega. Selliseid funktsioone me ei vaatle

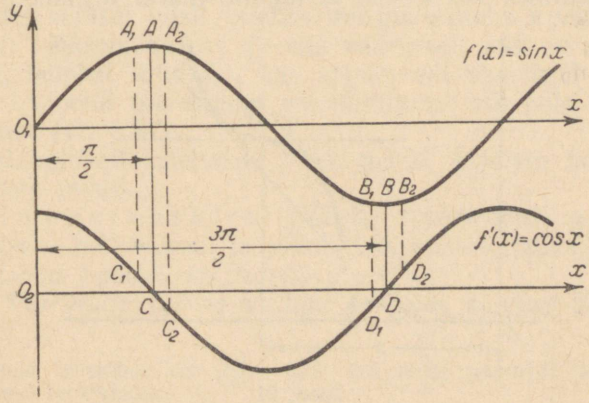
Teoreem. *Kui mingi funktsiooni* $y = f(x)$ *puhul*

$$f'(a) = 0$$

ja $f'(x)$ *muudab märgi argumendi üleminekul väärtusest* $x = a$ *plussist miinuseks, siis antud funktsioonil on väärtusel* $x = a$ *maksimum, kui aga* $f'(x)$ *muudab märgi miinusest plussiks, siis miinimum.*

Tõestus. I. Oletame, et $f'(a) = 0$ ja argumendi üleminekul väärtusest $x = a$ funktsiooni tuletis $f'(x)$ muudab märgi plussist miinuseks. See tähendab, et kõigil x väärtustel, mis on natuke väiksemad kui a, tuletis $f'(x)$ on positiivne ja, järelikult, neil x väärtustel funktsioon $y = f(x)$ on kasvav, argumendi väärtustel, mis on natuke suuremad kui a, tuletis $f'(x)$ on negatiivne ja, järelikult, neil x väärtustel funktsioon $y = f(x)$ on kahanev (§ 85). Seega argumendi väärtus $x = a$, mille puhul $f'(x) = 0$, on funktsiooni kasvamiselt kahanemisele ülemineku piiriks, s. t. funktsioonil on maksimum, kui $x = a$.

II. Oletame, et $f'(a) = 0$ ja argumendi üleminekul väärtusest $x = a$ tuletis $f'(x)$ muudab märgi miinusest plussiks. Sel puhul kõigil x väärtustel, mis on natuke väiksemad kui a, tuletis $f'(x)$ on negatiivne ja seepärast neil x väärtustel funktsioon $y = f(x)$ on kahanev, nendel x väärtustel, mis on aga natuke suuremad kui a, tuletis $f'(x)$ on positiivne ja seepärast vastavatel x väärtustel funktsioon $y = f(x)$ on kasvav (§ 85). Järelikult, argumendi väärtus $x = a$, mille puhul $f'(x) = 0$, on funktsiooni kahanemiselt kasvamisele ülemineku piiriks, s. t. funktsioonil on miinimum, kui $x = a$.



Joon. 90.

Selgitame seda teoreemi näite abil.

Joonisel 90 on kujutatud funktsiooni $f(x) = \sin x$ ja tema tuletise $f'(x) = \cos x$ graafikud.

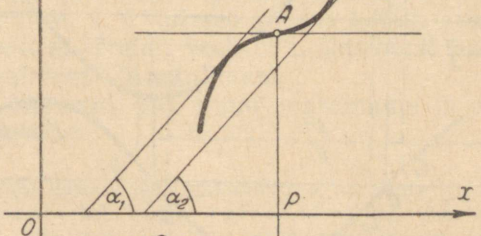
I. Punktis C on $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$. Punktist C vasakul $f'(x) > 0$ ja punktist A vasakul $f(x)$ kasvab. Punktist C paremal $f'(x) < 0$ ja punktist A paremal $f(x)$ kahaneb.

Nagu näha, muudab tuletis $f'(x) = \cos x$ argumendi üleminekul väärtusest $x = \frac{\pi}{2}$ (punktis C) märgi plussist miinuseks, funktsioon $f(x) = \sin x$ läheb aga punktis A kasvamiselt üle kahanemisele, mis näitabki, et funktsioonil on maksimum punktis $x = \frac{\pi}{2}$.

II. Punktis D on $f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$. Punktist D vasakul $f'(x) < 0$ ja punktist B vasakul $f(x)$ kahaneb. Punktist D paremal $f'(x) > 0$ ja punktist B paremal $f(x)$ kasvab.

Seega muudab tuletis $f'(x) = \cos x$ argumendi üleminekul väärtusest $x = \frac{3\pi}{2}$ (punktis D) märgi miinusest plussiks, funktsioon $f(x) = \sin x$ läheb aga punktis B kahanemiselt üle kasvamisele, mis näitabki, et funktsioonil on miinimum, kui $x = \frac{\pi}{2}$.

Kuid võib juhtuda, et funktsiooni esimene tuletis, muutudes nulliks, kui $x = a$, ei muuda märki argumendi üle-



Joon. 91.

minekul väärtusest $x = a$. Sellisel juhul funktsioonil ei ole ei maksimumi ega miinimumi. Joonisel 91 on näidatud juhtum, kus kõvera $y = f(x)$ puutuja punktis A on paralleelne x-teljega, s. t. $f'(a) = 0$, kuid $\tan \alpha_1 > 0$ ja $\tan \alpha_2 > 0$. Järelikult, funktsiooni $y = f(x)$ esimene tuletis ei muuda märki argumendi üleminekul väärtusest $x = a$. Funktsioonil, nagu näitab joonis, ei ole ei maksimumi ega miinimumi, kui $x = a$.

Argumendi väärtusi, millede puhul esimene tuletis on null, nimetatakse funktsiooni *kriitiliseks väärtuseks.*

§ 88. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmise eeskiri. Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Tema maksimumi ja miinimumi määramiseks tuleb kõigepealt lahendada võrrand $f'(x) = 0$ ja leida seega argumendi kriitilised väärtused. Olgu sellel võrrandil järgmised reaalsed lahendid: x_1, x_2, x_3 jne.*.

Seejärel tuleb uurida $f'(x)$ märki x leitud kriitilistel väärtustel, alates x_1-st (kõige väiksemast). Selleks määratakse algul tuletise märk, kui $x < x_1$, asetades avaldisse $f'(x)$ mingi arvu, mis on väiksem kui x_1. (Tuletis ei võrdu nulliga mitte ühelgi x väärtusel, mis on väiksem kui x_1, ja seepärast, võttes arvesse § 55 käsitletud pidevate funktsioonide omadusi, võime öelda, et tuletis säilitab märgi, kui $x < x_1$.)

Pärast seda määratakse tuletise märk x mingil väärtusel, mis kuulub vahemikku x_1-st kuni x_2-ni (vahemikus x_1-st kuni x_2-ni tuletise märk ei muutu pidevate funktsioonide vastava omaduse põhjal).

Leides sellisel viisil tuletise märgid esiteks x väärtusel, mis on väiksem kui x_1, ja siis väärtusel, mis on suurem kui x_1, tehakse kindlaks, kas argumendi väärtusel $x = x_1$ on funktsioonil maksimum või miinimum või pole ei ühte ega teist (vt. § 87).

Analoogiliselt uuritakse $f'(x)$ märki x teiste kriitiliste väärtuste puhul.

Esimene eeskiri. Seega, funktsiooni $y = f(x)$ uurimiseks maksimumi ja miinimumi suhtes, tuleb:

I. *Leida funktsiooni tuletis* $y' = f'(x)$.

II. *Võrrutada tuletis nulliga ja leida saadud võrrandi*

* Neid lahendeid on lõplik arv, kui mitte vaadelda lõpmatult võnkuvaid funktsioone.

reaalsed lahendid. Viimased ongi argumendi kriitilised väärtused; olgu need x_1, x_2, x_3 *jne.*

III. *Paigutanud suurused* x_1, x_2, x_3, ... *kasvavasse järjekorda, asetada tuletisse algul mingi arv, mis on väiksem kui* x_1, *et määrata tuletise märk enne* x_1; *seejärel asetada tuletisse arv, mis asetseb* x_1 *ja* x_2 *vahel, et määrata tuletise märk pärast* x_1;

kui seejuures tuletise märk muutub plussist miinuseks, siis väärtusel $x = x_1$ *on funktsioonil maksimum;*

kui märk muutub miinusest plussiks, siis väärtusel $x = x_1$ *on funktsioonil miinimum;*

kui tuletise märk ei muutu, siis väärtusel $x = x_1$ *ei ole funktsioonil ei maksimumi ega miinimumi.*

Analoogiliselt tuleb määrata tuletise märk enne x_2 *ja pärast* x_2 *jne.*

IV. *Leida funktsiooni maksimaalsed ja minimaalsed väärtused, s. t. arvutada funktsiooni väärtused neil argumendi väärtustel, millede puhul, nagu näitas uurimine, funktsioonil on kas maksimum või miinimum.*

Eeskirja neljas punkt on vajalik ainult sel juhul, kui on tarvis leida funktsiooni maksimumile ja miinimumile vastavate punktide asukoht kõveral.

Vaatleme mõningaid näiteid.

N ä i d e 1. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni $y = x^2 - 1$.

L a h e n d u s. I. Leiame funktsiooni tuletise:

$$y' = (x^2 - 1)' = 2x.$$

II. Võrrutame tuletise nulliga:

$$2x = 0,$$

millest

$$x = 0.$$

III. Määrame tuletise märgi, kui $x < 0$, näiteks $x = -1$:

$$y'_{x=-1} = 2(-1) = -2.$$

Nüüd leiame tuletise märgi, kui $x > 0$, näiteks $x = 1$:

$$y'_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2.$$

Tuletise märgi muutumine miinusest plussiks näitab, et antud funktsioonil on miinimum, kui $x = 0$.

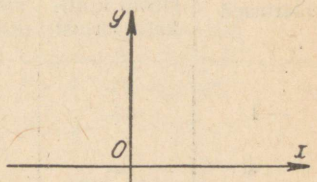
IV. Leiame funktsiooni minimaalväärtuse, s. t. $f(0)$:

$$f(0) = 0^2 - 1 = -1.$$

Nüüd võime leitud punkti $(0; -1)$ ja ka kõvera osa selle punkti ümbruses kujutada joonisel (joon. 92).

Näide 2. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni

$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6.$$



Joon. 92.

Lahendus. Vastavalt eeskirjale saame:

I. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 4x + 6\right)' =$

$= x^2 - 3x - 4.$

II. $x^2 - 3x - 4 = 0,$

millest

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 4.$$

III. 1) Uurime kriitilist väärtust $x_1 = -1$. Võtame väärtuse $x < -1$, näiteks $x = -2$; siis

$$y'_{x=-2} = (-2)^2 - 3(-2) - 4 = 4 + 6 - 4 = 6.$$

Võtame väärtuse $x > -1$, näiteks $x = 0$; siis

$$y'_{x=0} = 0^2 - 3 \cdot 0 - 4 = -4.$$

Tuletise märgi muutumine plussist miinuseks näitab, et funktsioonil on maksimum, kui $x = -1$.

2) Uurime kriitilist väärtust $x_2 = 4$. Argumendi väärtuseks, mis oleks väiksem kui 4, võtame $x = 0$, ning väärtuseks, mis on suurem kui 4, võtame $x = 5$; siis:

$$y'_{x=0} = -4, \quad y'_{x=5} = 25 - 15 - 4 = 6.$$

Järelikult, funktsioonil on miinimum,. kui $x = 4$.

IV. Funktsiooni maksimaal- ja minimaalväärtus on seega:

$$y_{x=-1} = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{3}{2}(-1)^2 - 4(-1) + 6 = 8\frac{1}{6},$$

$$y_{x=4} = \frac{1}{3} \cdot 4^3 - \frac{3}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 6 = -12\frac{2}{3}.$$

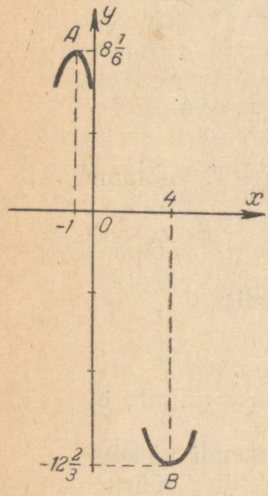
Arvutuse tulemused kirjutame tabelisse:

Argumendi kriitilised väärtused	Tuletise märk		Funktsiooni käitumine	Funktsiooni väärtused argumendi kriitilistel väärtustel
	enne argumendi kriitilist väärtust	pärast argumendi kriitilist väärtust		
-1	$+$	$-$	maksimum	$8\frac{1}{6}$
4	$-$	$+$	miinimum	$-12\frac{2}{3}$

Tähistades leitud punktid vastavalt tähtedega A ja B, võime kirjutada:

$A\left(-1;\ 8\frac{1}{6}\right)$ — maksimumpunkt.

$B\left(4;\ -12\frac{2}{3}\right)$ — miinimumpunkt.



Joon. 93.

Punktide A ja B asetus kõveral ning kõvera kuju nende punktide ümbruses on kujutatud joonisel 93.

Näide 3. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni $y = x^3$.

Lahendus. I. $y' = (x^3)' = 3x^2$.

II. $3x^2 = 0$, millest $x_{1,2} = 0$.

III. Kui $x < 0$, näiteks $x = -1$, siis

$$y'_{x=-1} = 3(-1)^2 = 3;$$

kui $x > 0$, näiteks $x = 1$, siis

$$y'_{x=1} = 3 \cdot 1^2 = 3.$$

Nagu on näha, tuletis ei muutnud oma märki argumendi üleminekul kriitilisest väärtusest $x = 0$; järelikult antud funktsioonil ei ole ei maksimumi ega miinimumi, kui $x = 0$ (joon. 71).

Harjutusi.

1. On antud funktsioon $y = 2x^2$. Määrata, kas funktsioon kasvab või kahaneb argumendi väärtustel: 1) $x = 1$, 2) $x = -1$. Kontrollida tulemust graafiku abil.

2. Sama küsimus funktsiooni $y = -x^2 + x - 1$ kohta argumendi väärtustel: 1) $x = -2$, 2) $x = 0$, 3) $x = 2$.

2. Leida argumendi väärtused, millistel järgmised funktsioonid kasvavad või kahanevad: 1) $y = 5x + 1$, 2) $y = 4 - 3x$.

4. Leida järgmiste funktsioonide kasvamise või kahanemise vahemikud:

1) $y = x^2 - 3x + 1$, 2) $y = -2x^2 + 8x - 1$.

Leida järgmiste funktsioonide maksimumid ja miinimumid:

5. $y = x^2 - 2x$. 6. $y = -x^2 + 4x$. 7. $y = 2x^2 + 3x + 4$.

8. $y = -5x^2 - 2x + 2$. 9. $v = 6t - t^2 - 7$. 10. $y = x^4$.

11. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x$. 12. $y = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 5$.

13. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$. 14. $s = \frac{1}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 + 6t - 7$.

15. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$. 16. $y = x^3 + x^2 - 5x - 6$.

17. $s = 2t^3 - t^2 - 4t + 5$. 18. $v = p^3 - 3p^2 - 9p + 4$.

19. $y = \frac{x}{1 + x^2}$. 20. $y = 3x - \frac{27}{2 - x}$ (kusjuures $x \neq 2$).

21. Näidata, et järgmistel funktsioonidel ei ole ei maksimumi ega miinimumi:

1) $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 2$,

2) $y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

§ 89. Funktsiooni uurimine maksimumi ja miinimumi suhtes teise tuletise abil.

Teoreem. *Olgu funktsiooni $y = f(x)$ esimene tuletis, kui $x = a$,*

$$f'(a) = 0,$$

siis antud funktsioonil on $x = a$ puhul maksimum, kui $f''(a) < 0$, ja miinimum, kui $f''(a) > 0$.

Tõestus. I. Oletame, et kui $x = a$, siis

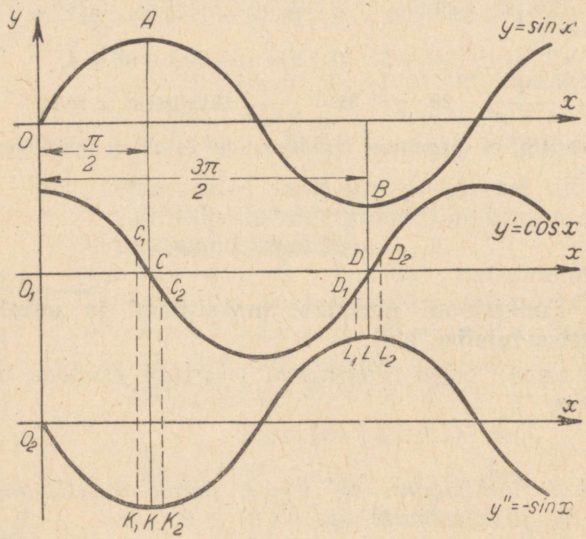
$$f'(a) = 0 \text{ ja } f''(a) < 0.$$

Kuna $f''(x)$ on negatiivne, kui $x = a$, siis pidevuse tõttu jääb ta negatiivseks ka nendel väärtustel, mis on natukene väiksemad või natukene suuremad kui a. See aga tähendab, et $f'(x)$ nendel x väärtustel kahaneb. Eelduse põhjal on aga $f'(a) = 0$ (§ 85). Järelikult peab $f'(x)$ kui pidev ja kahanev funktsioon muutma nullist üleminekul oma märgi plussist miinuseks. Sel juhul aga on § 87 tõestatud teoreemi põhjal funktsioonil $y = f(x)$ maksimum, kui $x = a$.

II. Oletame, et kui $x = a$, siis

$$f'(a) = 0 \text{ ja } f''(a) > 0.$$

Kuna teine tuletis $f''(x)$ on pidev, siis jääb ta positiivseks ka nendel x väärtustel, mis on natukene väiksemad või natukene suuremad kui a. See tähendab, et $f'(x)$ nimetatud x väärtustel kasvab * (§ 85). Eelduse põhjal on aga $f'(a) = 0$. Järelikult $f'(x)$ kui pidev ja kasvav funktsioon muudab nullist üleminekul oma märgi miinusest plussiks. Sel juhul on aga § 87 tõestatud teoreemi põhjal funktsioonil $y = f(x)$ miinimum, kui $x = a$.



Joon. 94.

Selgitame äsja tõestatud teoreemi näite abil. Joonisel 94 on kujutatud funktsiooni $y = \sin x$ ja tema tuletiste $y' = \cos x$ ning $y'' = -\sin x$ graafikud.

I. Nagu jooniselt näeme, on teine tuletis $y'' = -\sin x$ punktis K ja selle naabruses asetsevais punktides K_1 ja K_2

* $f''(x)$ on $f'(x)$ esimene tuletis samasuguses tähenduses kui $f'(x)$ on $f(x)$ suhtes.

negatiivne; seejuures esimene tuletis $y' = \cos x$ kahaneb argumendi üleminekul väärtusest $x = \frac{\pi}{2}$ ning, läbides punktis C nulli, muudab märgi plussist (punktis C_1) miinuseks (punktis C_2). Seega on funktsioonil $y = \sin x$ maksimum, kui $x = \frac{\pi}{2}$.

II. Punktis L ja selle naaberpunktides L_1 ning L_2 on teine tuletis $y'' = -\sin x$ positiivne, esimene tuletis $y' = \cos x$ on aga argumendi üleminekul väärtusest $x = \frac{3\pi}{2}$ kasvav ning, läbides punktis D nulli, muudab märgi miinusest (punktis D_1) plussiks (punktis D_2). Seega funktsioonil $y = \sin x$ on miinimum, kui $x = \frac{3\pi}{2}$.

Kuid võib juhtuda, et funktsiooni teine tuletis on null, kui $x = a$. Sel korral ei saa teise tuletise järgi otsustada, kas on tegemist funktsiooni maksimumi või miinimumiga. Sel juhul tuleb küsimuse lahendamiseks kasutada esimest eeskirja.

Teine eeskiri funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmiseks:

leida funktsiooni teine tuletis ja asetada sellesse järgemööda kõik argumendi kriitilised väärtused. Kui mõne väärtuse puhul teine tuletis osutub negatiivseks, siis sellel argumendi väärtusel on funktsioonil maksimum; kui teine tuletis osutub positiivseks, siis miinimum; kui teine tuletis osutub nulliks, siis tuleb küsimuse lahendamiseks kasutada esimest eeskirja.

Vaatleme mõningaid näiteid.

Näide 1. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni

$$y = x^2 - 4x + 9.$$

Lahendus. Eeskirja kohaselt saame:

I. $y' = (x^2 - 4x + 9)' = 2x - 4.$

II. $2x - 4 = 0$, millest $x = 2.$

III. $y'' = (2x - 4)' = 2.$

Teine tuletis osutus positiivseks, järelikult on funktsioonil miinimum, kui $x = 2$.

Näide 2. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni

$$y = x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15.$$

Lahendus. I. $y' = (x^3 - \frac{21}{2}x^2 + 30x + 15)' =$

$$= 3x^2 - 21x + 30.$$

II. $3x^2 - 21x + 30 = 0$ ehk $x^2 - 7x + 10 = 0$, millest

$$x_{1,2} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - 10} = \frac{7}{2} \pm \frac{3}{2};$$

$$x_1 = 2,$$
$$x_2 = 5.$$

III. $y'' = (3x^2 - 21x + 30)' = 6x - 21$.

Asetame teise tuletisse x asemele järgemööda väärtused 2 ja 5 ning määrame tuletise märgi:

$$y''_{x=2} = 6 \cdot 2 - 21 = -9,$$
$$y''_{x=5} = 6 \cdot 5 - 21 = +9.$$

Seega on funktsioonil maksimum, kui $x = 2$, ja miinimum, kui $x = 5$.

Näide 3. Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes funktsiooni $y = x^4$.

Lahendus.

I. $y' = (x^4)' = 4x^3$.
II. $4x^3 = 0$, millest $x = 0$.
III. $y'' = (4x^3)' = 12x^2$.

Asetades väärtuse $x = 0$ teise tuletisse, saame:

$$y''_{x=0} = 12 \cdot 0^2 = 0.$$

Et teine tuletis on 0, siis II eeskirja põhjal maksimumi ja miinimumi määrata ei saa. Kasutades esimest eeskrja, saame:

$$y'_{x=-1} = 4(-1)^3 = -4,$$
$$y'_{x=1} = 4 \cdot 1^3 = +4.$$

Esimese tuletise märgimuut näitab, et funktsioonil on miinimum, kui $x = 0$.

Uurida maksimumi ja miinimumi suhtes järgmisi funktsioone:

1. $y = 3x^2$. 2. $y = 4x^2 - 12$. 3. $y = x^2 - 6x + 3$.
4. $y = -2x^2 + 8x - 5$. 5. $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 10$.
6. $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3$. 7. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 1$.
8. $y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2$. 9. $y = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x - 4$.
10. $y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$. 11. $y = x^5$.

Leida järgmiste funktsioonide kasvamise ja kahanemise vahemikud:

12. $y = x^3 - 12x - 4$. 13. $y = -x^3 + x^2 + 5x - 6$.

Kas järgmistel funktsioonidel on maksimumi ja miinimumi?

14. $y = \frac{x}{\ln x}$ (kusjuures $x > 1$). 15. $y = \frac{4x^2 + 25}{10x}$ (kusjuures $x \neq 0$).

§ 90. Ülesandeid funktsioonide maksimumi ja miinimumi kohta. Paragrahvides 86—89 käsitletud teooria leiab laialdast rakendamist nii matemaatikas kui ka tehnilistes distsipliinides. Toome näiteid.

Ülesanne 1. Jaotada arv 20 kaheks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks maksimaalne.

Lahendus. Tähistame ühe liidetava tähega x; siis teine liidetav on $20 - x$. Nende liidetavate korrutis on muutuv suurus, mis sõltub sellest, kuidas arv 20 on osadeks jaotatud. Tähistades korrutise tähega y, saame:

$$y = x(20 - x).$$

Seega saime funktsiooni, mis väljendab korrutise sõltuvust esimesest liidetavast. Ülesande tingimuse kohaselt tuleb leida selline x, mille puhul y omandaks suurima väärtuse. Seega taandub ülesanne funktsiooni maksimumi leidmisele. Toimime § 89 antud eeskirja kohaselt:

I. $y' = [x(20 - x)]' = (20x - x^2)' = 20 - 2x$.
II. $20 - 2x = 0$, millest $x = 10$.
III. $y'' = (20 - 2x)' = -2$.

Järelikult, funktsioonil on maksimum, kui $x = 10$.

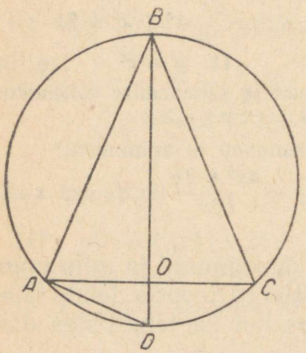
Seega tuleb arv 20 lahutada kaheks võrdseks liidetavaks, sest siis on nende korrutis maksimaalne.

Ülesanne 2. Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud suurima ruumalaga koonus. Leida koonuse kõrgus.

L a h e n d u s. Tähistades koonuse põhja raadiuse, kõrguse ja ruumala vastavalt tähtedega r, h ja V, saame:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

See võrdus väljendab V sõltuvust kahest muutujast r ja h; elimineerime neist suurustest ühe, näiteks r. Täisnurksest kolmnurgast ABD (joon. 95) leiame (täisnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud kõrguse kohta kehtiva teoreemi põhjal):



Joon. 95.

$$AO^2 = BO \cdot DO$$

ehk

$$r^2 = h(2R - h).$$

Asetades r^2 väärtuse koonuse ruumala valemisse, saame:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (2R - h).$$

Näeme, et kerasse, mille raadius on R, kujundatud koonuse ruumala V on koonuse kõrguse h funktsioon. Leida kõrgus, mille puhul kerasse kujundatud koonusel on suurim ruumala, see tähendab leida selline h, mille puhul funktsioonil V on maksimum.

Leiame funktsiooni V maksimumi:

I. $V' = \left(\frac{2}{3}\pi R h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3\right)' = \frac{4}{3}\pi R h - \pi h^2.$

II. $\frac{4}{3}\pi R h - \pi h^2 = 0$, millest $h_1 = 0$ ja $h_2 = \frac{4}{3}R.$

III. $V'' = \left(\frac{4}{3}\pi R h - \pi h^2\right)' = \frac{4}{3}\pi R - 2\pi h.$

Asetades h asemele algul $h_1 = 0$ ja seejärel $h_2 = \frac{4}{3}R$, saame:

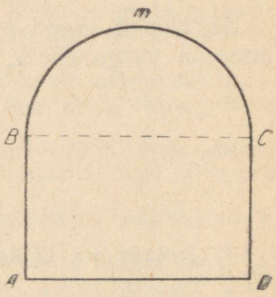
$$V''_{h=0} = \frac{4}{3}\pi R,$$

$$V''_{h=\frac{4}{3}R} = \frac{4}{3}\pi R - 2\pi \cdot \frac{4}{3}R = -\frac{4}{3}\pi R.$$

Esimesel juhul saame miinimumi, teisel juhul maksimumi.

Järelikult, kerasse, mille raadius on R, kujundatud koonusel on suurim ruumala, kui $h = \frac{4}{3}R$.

Ülesanne 3. Aknal on ristküliku kuju poolringiga ülemises osas. Akna ümbermõõt on 6 m. Millised peavad olema akna mõõtmed, et akent läbiks maksimaalne valgusehulk (joon. 96)?



Joon. 96.

Lahendus. Nagu teada, on akent läbiv valgusehulk seda suurem, mida suurem on akna pindala. Tähistame

$$AD = x;$$

siis pool ringjoone pikkusest, s. t. kaar BmC, on võrdne $\frac{\pi x}{2}$ ja akna kõrgus

$$AB = \frac{6 - AD - BmC}{2} = \frac{6 - x - \frac{\pi x}{2}}{2} = \frac{12 - 2x - \pi x}{4}.$$

Kogu akna pindala koosneb ristküliku $ABCD$ ja poolringi BmC pindalast. Vastavate valemite järgi leiame:

$$S_{ABCD} = \frac{12 - 2x - \pi x}{4} \cdot x = \frac{12x - 2x^2 - \pi x^2}{4}$$

ja

$$S_{BmC} = \frac{\pi x^2}{8}.$$

Tähistades akna pindala tähega y, saame:

$$y = \frac{12x - 2x^2 - \pi x^2}{4} + \frac{\pi x^2}{8} =$$

$$= \frac{24x - 4x^2 - 2\pi x^2 + \pi x^2}{8} = \frac{24x - 4x^2 - \pi x^2}{8}.$$

Siit näeme, et antud ülesandes akna pindala y on tema aluse funktsioon ja seega ülesanne taandub funktsiooni y maksimumi leidmisele.

Leiame saadud funktsiooni maksimumi.

I. $y' = \left(\frac{24x - 4x^2 - \pi x^2}{8}\right)' = \frac{24 - 8x - 2\pi x}{8} = \frac{12 - 4x - \pi x}{4}.$

II. $\frac{12 - 4x - \pi x}{4} = 0$, millest $x = \frac{12}{4 + \pi}$.

III. $y'' = \left(\frac{12-4x-\pi x}{4}\right)' = \frac{-4-\pi}{4} = -\frac{4+\pi}{4}$.

Teine tuletis osutus negatiivseks, seega akna pindala on suurim, kui $x = \frac{12}{4+\pi}$.

Selleks et akent, mille ümbermõõt on 6 m, läbiks maksimaalne valgusehulk, peab ta laius olema

$$\frac{12}{4+\pi} \approx 1{,}68 \text{ m}.$$

Harjutusi.

1. Jaotada arv 12 kaheks liidetavaks nii, et nende korrutis oleks suurim.
2. Jaotada arv 10 kaheks liidetavaks nii, et nende ruutude summa oleks väikseim.
3. Jaotada arv 8 kaheks liidetavaks nii, et nende kuupide summa oleks väikseim.
4. Millise arvu puhul on selle arvu ja tema ruudu vahe suurim?
5. Millisel ristkülikul, ümbermõõduga 50 cm, on suurim pindala?
6. On tarvis piirata kraaviga ristkülikukujuline maa-ala, mille pindala on 10 000 m². Kuidas valida maatüki mõõtmed, et kraavi pikkus oleks väikseim?
7. Kolmnurga aluse ja kõrguse summa on 10 cm. Kui suur peab olema alus, et kolmnurga pindala oleks väikseim?
8. Ruudukujulisest plekitükist, mille külg on 30 cm, on vaja nurkadest välja lõigata 4 ruudukest nii, et ülejäänud osa kokku murdes tekiks suurima ruumalaga karp. Millised on seejuures väljalõigatud ruudukeste mõõtmed?
9. Ristkülikukujulisest papitükist, mõõtmetega 30×50 cm², on vaja nurkadest välja lõigata ruudukesed nii, et ülejäänud osa kokku murdes tekiks suurima külgpindalaga karp. Arvutada väljalõigatud ruudukeste mõõtmed.
10. Aknal on ristküliku kuju korrapärase kolmnurgaga ülemises osas. Akna ümbermõõt on 3 m. Milline peab olema ristküliku alus, et akna pindala oleks suurim?
11. Kanali ristlõige on ristkülik poolringiga alumises osas. Ristlõike ümbermõõt on 4,5 m. Kui suur peab olema poolringi raadius, et ristlõike pindala oleks suurim?
12. On tarvis valmistada kaanega kast, mille ruumala oleks 72 dm³ ning mille põhiservad suhtuksid nagu 1 : 2. Millised peavad olema kasti mõõtmed, et tema täispindala oleks väikseim?
13. Korrapärase neljatahulise prisma ruumala on 8 dm³. Kui suur peab olema prisma põhiserv, et tema täispindala oleks väikseim?
14. Pealt lahtine ruudukujulise põhjaga reservuaar, mille ruumala on 4 m³, on vaja katta tinaga. Millised peavad olema reservuaari mõõtmed, et tina kulu oleks minimaalne?
15. Leida väikseima täispindalaga silindri põhja raadius ja kõrgus, kui silindri ruumala on 27π cm³.

16. Millised peavad olema kaaneta silindrilise nõu mõõtmed, et tema valmistamiseks kuluks kõige vähem materjali, kui nõu ruumala on 1 l?

17. Võrdhaarsesse kolmnurka, mille alus on 20 cm ja kõrgus 8 cm, on kujundatud ristkülik. Kui suur peab olema ristküliku kõrgus, et tema pindala oleks suurim?

18. Traadist, mille pikkus on 120 cm, on tarvis valmistada ruudukujulise põhjaga risttahuka mudel. Kui suur peab olema põhiserv, et risttahuka täispindala oleks suurim?

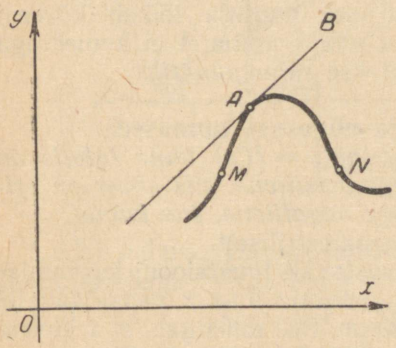
19. Traadist, mille pikkus on 90 cm, on tarvis valmistada korrapärase kolmetahulise prisma mudel. Kui suur peab olema prisma põhiserv, et tema külgpindala oleks suurim?

20. On tarvis valmistada koonusekujuline lehter, moodustajaga 20 cm. Kui suur peab olema lehtri kõrgus, et tema ruumala oleks suurim?

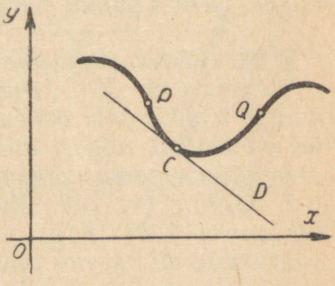
21. Kerasse, mille raadius on R, on kujundatud suurima ruumalaga silinder. Leida selle silindri kõrgus.

22. Koonusesse, mille põhja raadius on 6 cm ja kõrgus 15 cm, on kujundatud suurima täispindalaga silinder. Leida silindri põhja raadius.

§ 91. Kõvera kumerus ja nõgusus. Vaatleme joonisel 97 kujutatud kõverat. Tõmmates sellele kõverale mingi puutuja AB, näeme, et puutepunkti A naabruses (sellest mõlemal pool) asetsevad kõvera punktid on allpool puutujat. Sel



Joon. 97.

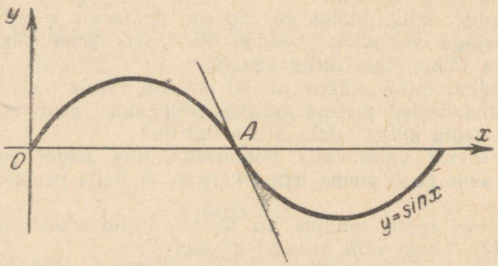


Joon. 98.

juhul öeldakse, et kõver on *punktis A ülespoole kumer*; kõvera osa punktide M ja N vahel, mis rahuldab seda tingimust, nimetatakse *ülespoole kumeraks* ehk lihtsalt *kumeraks*.

Võtame kõvera, mis on kujutatud joonisel 98. Siin näeme vastupidist olukorda, nimelt: puutepunkti C naabruses (sellest mõlemal pool) asetsevad kõvera punktid on ülalpool

puutujat CD. Sel puhul öeldakse, et kõver on *punktis C ülespoole nõgus* ja kõvera osa punktide P ning Q vahel, mis rahuldab seda tingimust, nimetatakse *ülespoole nõgusaks* ehk lihtsalt *nõgusaks*.



Joon. 99.

Sageli on kõver ühes oma osas kumer, teises aga nõgus; näiteks sinusoidil (joon. 99) esineb nii kumerus (ülalpool x-telge), kui ka nõgusus (allpool x-telge), kusjuures nendevaheliseks piiriks on punkt A. Puutuja, mis on tõmmatud kõverale punktis A, on ühine nii kõvera kumerale kui ka nõgusale osale; samal ajal see puutuja lõikab kõverat puutepunktis; seega sinusoid pole punktis A ei kumer ega nõgus. Sellist punkti nimetatakse *käänupunktiks*.

§ 92. Kõvera kumeruse ja nõgususe tunnused.

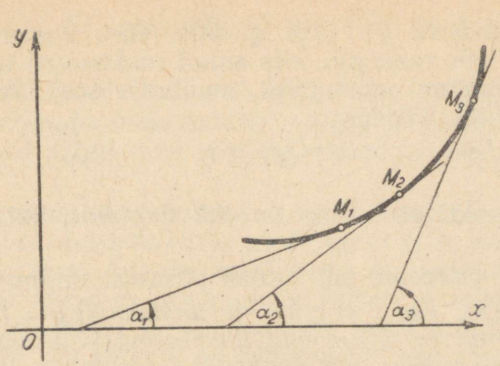
Teoreem. *Kui funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis on mingis x väärtuste vahemikus positiivne, siis kõver on selles vahemikus nõgus; kui aga negatiivne, siis kumer.*

Selgitame seda teoreemi geomeetriliselt.

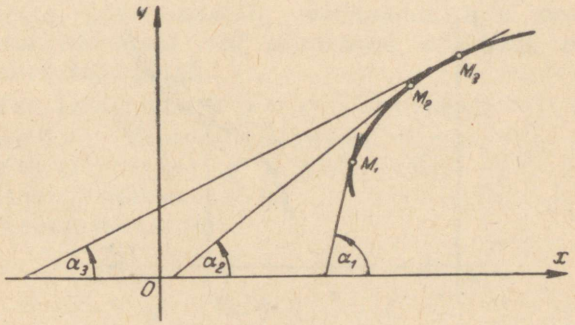
I. Olgu $f''(x) > 0$, siis (vastavalt funktsiooni kasvamise tunnusele, § 85) $f'(x)$, s. t. puutuja tõus x vaadeldavatel väärtustel, on kasvav funktsioon. See tähendab, et x kasvamisel kasvab ka puutuja kaldenurk x-telje positiivse suunaga, mis leiab aset juhul, kui puutuja on tõmmatud kõvera nõgusale osale (joon. 100).

II. Olgu $f''(x) < 0$, siis $f'(x)$, s. t. puutuja tõus x vaadeldavatel väärtustel, on kahanev funktsioon. See tähendab, et x kasvamisel nurk puutuja ja x-telje positiivse suuna vahel kahaneb, mis leiab aset juhul, kui puutuja on tõmmatud kõvera kumerale osale (joon. 101).

Näide. Selgitada, kas kõver $y = x^3$ on kumer või nõgus punktis, mille abstsiss on -2.



Joon. 100.



Joon. 101.

L a h e n d u s. Leiame antud funktsiooni teise tuletise ja määrame tema märgi, kui $x = -2$.

$$y' = (x^3)' = 3x^2,$$
$$y'' = (3x^2)' = 6x,$$
$$y''_{x=-2} = 6 \cdot (-2) = -12.$$

Teine tuletis on negatiivne, järelikult kõver $y = x^3$ on antud punktis kumer (joon. 71).

§ 93. Käänupunkti leidmine.

D e f i n i t s i o o n. *Kõvera käänupunktiks nimetatakse punkti, mis eraldab kõvera kumera osa tema nõgusast osast.*

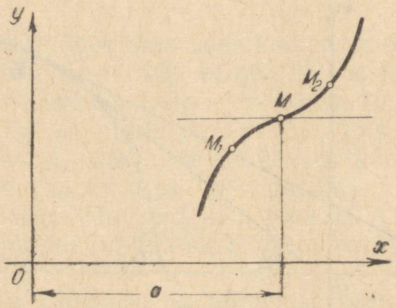
Kui funktsiooni $y = f(x)$ graafik läheb kumeruselt üle nõgususele või vastupidi, siis antud funktsiooni teine tuletis peab muutma oma märgi, muutudes seejuures käänupunktis nulliks. Võrdus

$$f''(x) = 0$$

on käänupunkti olemasolu *tarvilik tingimus*, kuid ta *pole* veel *piisav*.

Tõestame teoreemi, mis annab piisavad tingimused.

Teoreem. *Kui $x = a$ korral funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis on null ja argumendi üleminekul väärtusest $x = a$ muudab oma märgi, siis funktsiooni graafikul on käänupunkt, kui $x = a$.*



Joon. 102

Tõestus. Vastaku väärtusele $x = a$ punkt M kõveral $y = f(x)$ (joon. 102). Oletame, et selles punktis teine tuletis

$$f''(a) = 0$$

ja argumendi üleminekul väärtusest $x = a$ muudab oma märgi miinusest plussiks. Siis punktis M_1, mis asetseb vasakul pool punkti M, on funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis negatiivne ja, järelikult, kõver vasakul pool punkti M on kumer (§ 92); punktis M_2, mis asetseb paremal pool punkti M, on funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis positiivne ja, järelikult, kõver paremal pool punkti M on nõgus. Seega kõver $y = f(x)$ läheb kumeruselt üle nõgususele, mistõttu väärtusel $x = a$ on kõveral käänupunkt.

Eeskiri. *Et leida kõvera $y = f(x)$ käänupunkti, on vaja:*

I. *Leida funktsiooni $y = f(x)$ teine tuletis.*

II. *Võrrutada teine tuletis nulliga ja lahendada saadud võrrand. Olgu selle võrrandi reaalsed lahendid x_1, x_2, x_3, jne.**

III. *Paigutanud väärtused $x_1, x_2, x_3, \ldots$ kasvavasse järjekorda, asetada teise tuletisse algul mingi x_1-st väiksem arv, et määrata teise tuletise märk enne x_1; seejärel asetada võrrandisse mistahes arv x_1 ja x_2 vahel, et määrata teise tuletise märk pärast x_1; kui mõlemal juhul saadakse erinevad märgid, siis kõveral on käänupunkt, kui $x = x_1$; juhul, kui märgid on ühesugused, käänupunkti ei ole. Analoogiliselt määratakse teise tuletise märk x_2 suhtes jne.*

IV. *Leida käänupunktide ordinaadid, s. t. arvutada funktsiooni väärtused neil argumendi väärtusil, millede puhul esineb käänupunkt.*

Näide. Leida kõvera $y = x^3$ käänupunkt.

Lahendus. Vastavalt eeskirjale leiame:

I. $y' = (x^3)' = 3x^2$, $y'' = (3x^2)' = 6x$.

II. $6x = 0$, millest $x = 0$.

III. Määrame märgid:

$$y''_{x=-1} = 6 \cdot (-1) = -6,$$

$$y''_{x=1} = 6 \cdot 1 = +6.$$

Nagu näeme, on kõveral käänupunkt, kui $x = 0$.

IV. $y = 0^3 = 0$.

Kõvera $y = x^3$ käänupunkt asetseb seega koordinaatide alguses, kusjuures kõver läheb selles punktis kumeruselt üle nõgususele, nagu selgub teise tuletise märkide vaheldusest (joon. 71).

Harjutusi.

1. Kas kõver $y = x^3$ on kumer või nõgus punktides, millede abstsissid on: 1) $x = 1$, 2) $x = 2$?

2. Kas kõver $y = x^4 - 4x^3 + 8x - 2$ on kumer või nõgus punktides, millede abstsissid on: 1) $x = \frac{1}{2}$, 2) $x = -2$?

* Eeldatakse, et võrrandil on lõplik arv lahendeid.

3. Millistes punktides on kõverad:

$$1)\ y = x^2 - 3x + 6,\quad 2)\ y = 2 - 3x - x^2$$

kumerad ja millistes nõgusad?

Leida järgmiste kõverate käänupunktid:

4. $y = \frac{1}{3}x^3 - x$.
5. $y = x^3 + 3x^2 - 5x - 6$.
6. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9$.
7. $y = -x^3 + 6x^2 - 15x + 10$.
8. $y = x^4$.
9. $y = x^4 - 12x^3 + 48x^2 - 50$.
10. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
11. $y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$.
12. $y = 12x^4 - 12x^2$.
13. $y = 3x^5 - 5x^3 + 1$.

Leida kõverate kumeruse ja nõgususe vahemikud:

14. $y = x^3 - 4x^2 - 2x + 1$.
15. $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x$.

§ 94. Funktsioonide graafikud. Paragrahvides 85—93 tutvusime sellega, kuidas kasutatakse funktsiooni tuletisi funktsiooni omaduste uurimisel. Nende omaduste tundmine võimaldab meil saada ettekujutuse funktsioonist ja joonestada tema graafiku.

N ä i d e. Joonestada funktsiooni $y = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$ graafik.

L a h e n d u s. Uurime antud funktsiooni maksimumi ja miinimumi suhtes.

I. $y' = \left(\frac{1}{6}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}\right)' = \frac{1}{2}x^2 - 2x$.

II. $\frac{1}{2}x^2 - 2x = 0$ ehk $x^2 - 4x = 0$,

millest $x_1 = 0$ ja $x_2 = 4$.

III. $y'' = \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)' = x - 2$,

$y''_{x=0} = 0 - 2 = -2$,

$y''_{x=4} = 4 - 2 = +2$.

Funktsioonil on maksimum, kui $x = 0$, ja miinimum, kui $x = 4$.

IV. Leiame funktsiooni maksimumile ja miinimumile vastavate punktide ordinaadid:

$$y_{x=0} = \frac{1}{6} \cdot 0^3 - 0^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3},$$

$$y_{x=4} = \frac{1}{6} \cdot 4^3 - 4^2 + \frac{2}{3} = \frac{32}{3} - 16 + \frac{2}{3} = -4\frac{2}{3}.$$

Otsitavate punktide koordinaadid on $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ ja $\left(4; -4\frac{2}{3}\right)$.

Uurime nüüd antud funktsiooni käänupunktide suhtes. Selleks võrrutame leitud teise tuletise nulliga:

$$x - 2 = 0,$$

millest

$$x = 2.$$

Selleks et veenduda, kas funktsioonil on tõepoolest käänupunkt $x = 2$ korral, määrame teise tuletise märgid, kui $x < 2$ ja $x > 2$; saame:

$$y''_{x=1} = 1 - 2 = -1,$$
$$y''_{x=3} = 3 - 2 = +1.$$

Teise tuletise märgimuut näitab, et argumendile $x = 2$ vastab käänupunkt. Leides selle punkti ordinaadi, saame:

$$y = \frac{1}{6} \cdot 2^3 - 2^2 + \frac{2}{3} = \frac{4}{3} - 4 + \frac{2}{3} = -2.$$

Käänupunkti koordinaadid on seega $(2; -2)$.

Et saada selgemat ettekujutust antud funktsiooni graafikust, arvutame veel mõnede punktide koordinaadid *. Võttes $x = -2$ ja $x = 6$, saame:

$$y_{x=-2} = \frac{1}{6} \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + \frac{2}{3} =$$
$$= -\frac{4}{3} - 4 + \frac{2}{3} = -4\frac{2}{3},$$
$$y_{x=6} = \frac{1}{6} \cdot 6^3 - 6^2 + \frac{2}{3} = 36 - 36 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

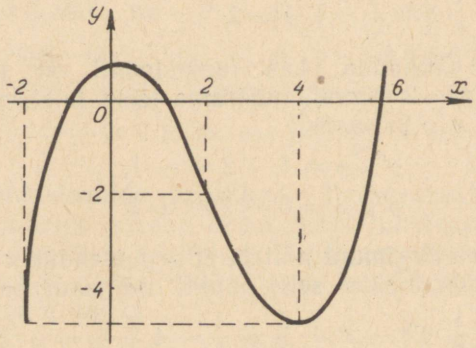
Täiendavate punktide koordinaadid on $\left(-2; -4\frac{2}{3}\right)$; $\left(6; \frac{2}{3}\right)$. Koostame leitud punktide koordinaatide väärtuste tabeli:

---

* Sageli on kasulik leida kõvera lõikepunktid koordinaattelgedega, kuid see on tihti seotud suurte raskustega, kuna ülesanne taandub kõrgema astme võrrandite lahendamisele.

x	-2	0	2	4	6
y	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	-2	$-4\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

Konstrueerime kõik need punktid ja ühendame sujuva joonega (joon. 103).



Joon. 103.

Funktsiooni graafiku ehitamisel tuleb kinni pidada järgmisest skeemist.

1. Leida x väärtused, millede puhul antud funktsioonil on kas maksimum või miinimum.

2. Leida x väärtused, millede puhul funktsiooni graafikul on käänupunktid.

3. Arvutada leitud abstsissidele vastavate punktide ordinaadid; leidnud nendele punktidele lisaks veel mõned täiendavad punktid, kirjutada leitud x ja y väärtused tabelisse.

4. Konstrueerida vastavad punktid ja ühendada need sujuva joonega.

M ä r k u s. Murd-, irratsionaal-, logaritm- ja trigonomeetriliste pöördfunktsioonide uurimisel maksimumi ja miinimumi suhtes, aga ka nende funktsioonide graafikute ehitamisel, tuleb kõrvale jätta need argumendi väärtused, millede puhul funktsioon kaotab mõtte (ei eksisteeri).

Harjutusi.

Ehitada järgmiste funktsioonide graafikud:

1. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$.
2. $y = 2x^2 + 6x$.
3. $y = -2x^2 + 4x$.
4. $y = x^2 - 6x + 5$.
5. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 3{,}5$.
6. $y = x^4$.
7. $y = x^5$.
8. $y = x^3 + x$.
9. $y = x^3 - 3x$.
10. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4$.
11. $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 1$.
12. $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 2$.
13. $y = \frac{1}{3}x^3 - x + 3$.
14. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$
15. $y = \frac{1}{4}x^4 - 8x$.
16. $y = x^4 - 2x^3 + 3$.

X peatükk.

DIFERENTSIAAL.

§ 95. Diferentsiaali mõiste. I. Võtame funktsiooni $y = x^2$. Tema juurdekasv avaldub järgmiselt:

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \quad [(3)\ \S\ 52].$$

Kuna Δx kordaja on antud funktsiooni tuletis, siis võime viimase võrduse kirjutada kujul:

$$\Delta y = y'\Delta x + (\Delta x)^2. \qquad (1)$$

Võrdleme võrduses (1) kummagi liidetava suuruse muutumist Δx vähenemisel. Võtnud näiteks $x = 2$ ja, järelikult, $y' = 4$, koostame järgmise tabeli:

Δx	1	0,1	0,01	0,001
$y'\Delta x$	4	0,4	0,04	0,004
$(\Delta x)^2$	1	0,01	0,0001	0,000001

Nagu tabelist näeme, Δx vähenemisel vähenevad ka liidetavad $y'\Delta x$ ja $(\Delta x)^2$, kusjuures esimene väheneb võrdeliselt Δx-ga, teine aga tunduvalt kiiremini.

Näitame, et mistahes diferentseeruva funktsiooni $f(x)$ puhul on olukord analoogiline.

Olgu antud funktsioon $y = f(x)$. Tema tuletis:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vastavalt muutuja piirväärtuse definitsioonile (§ 41), saame:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha,$$

kus α on lõpmatult kahanev suurus, kui $\Delta x \to 0$.
Siit

$$\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x.$$

Ka siin Δx vähenemisel väheneb esimene liidetav $y'\Delta x$ võrdeliselt Δx-ga, teine liidetav $\alpha\Delta x$ väheneb aga kiiremini, kuna ta on lõpmatult kahanevate suuruste Δx ja α korrutis. Seepärast avaldist $y'\Delta x$ nimetatakse funktsiooni $y = f(x)$ *juurdekasvu peaosaks.*

Definitsioon. *Funktsiooni $y = f(x)$ juurdekasvu peaosa $y'\Delta x$ nimetatakse funktsiooni diferentsiaaliks.*

Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali tähistatakse sümboliga dy.
Seega,

$$dy = y'\Delta x. \qquad (3)$$

Argumendi diferentsiaal dx võetakse võrdseks argumendi juurdekasvuga Δx, s. t.

$$dx = \Delta x.$$

Seega võime võrduse (3) esitada järgmisel kujul:

$$dy = y'dx. \qquad (4)$$

Funktsiooni diferentsiaal võrdub funktsiooni tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutisega.
Valemist (4) järeldub:

$$y' = \frac{dy}{dx}. \qquad (5)$$

Võrdusest (5) on näha, et *funktsiooni tuletis on funktsiooni diferentsiaali ja argumendi diferentsiaali suhe.* Selle põhjal kirjutatakse funktsiooni tuletis tihti kujul $\frac{dy}{dx}$ ja loetakse: „de igrek de iks".

II. Näitame, et kui $\Delta x \to 0$, siis funktsiooni lõpmatult kahanev juurdekasv on ekvivalentne selle funktsiooni diferentsiaaliga kõigil x väärtustel, millede puhul eksisteerib nullist erinev tuletis. Tõepoolest, kui võrduses (2) $y'\Delta x$ asendada dy-ga, siis saame:

$$\Delta y = dy + \alpha\Delta x. \qquad (6)$$

Kuid vastavalt tingimusele

$$dy = y'\Delta x \neq 0.$$

Seepärast, jagades võrduse (6) dy-ga, saame:

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha \Delta x}{dy} = 1 + \frac{\alpha \Delta x}{y' \Delta x} = 1 + \frac{\alpha}{y'},$$

kus $\frac{\alpha}{y'}$ on lõpmatult kahanev suurus. Siit

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{y'} = 1 + 0 = 1.$$

Seega Δy ja dy on ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused (§ 46). Selle põhjal võime võtta

$$\Delta y \approx dy. \qquad (7)$$

Praktiliste küsimuste lahendamisel kasutatakse tihti valemit (7), s. t. võetakse funktsiooni juurdekasvu asemel tema diferentsiaal, tehes seejuures tähtsusetu vea.

M ä r k u s. Lineaarfunktsiooni korral $\Delta y = dy$. Tõepoolest funktsiooni $y = kx + b$ juurdekasv on:

$$\Delta y = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) =$$
$$= kx + k\Delta x + b - kx - b = k\Delta x.$$

Tegur k on lineaarfunktsiooni tuletis; seepärast viimase võrduse parem pool väljendab funktsiooni diferentsiaali, s. t.

$$k\Delta x = dy.$$

Niisiis, lineaarfunktsiooni korral

$$\Delta y = dy.$$

§ 96. Diferentsiaali geomeetriline vaste. Võtame funktsiooni $y = f(x)$, mille graafik on kujutatud joonisel 104. Olgu punkti M abstsiss

$$OP = x;$$

siis tema ordinaat

$$PM = y = f(x).$$

Anname argumendile x juurdekasvu $PP_1 = dx$ ja tõmbame punktist P_1 x-teljele ristsirge P_1M_1; punktist M tõmbame aga $MQ \parallel Ox$. Siis, nagu teada (§ 53),

$$QM_1 = \Delta y.$$

Joonestame kõverale punktis M puutuja; seejuures tekkivat lõiku QN, mis on võrdne mööda puutujat edasiliikuva

punkti M ordinaadi juurdekasvuga, nimetatakse *puutuja ordinaadi juurdekasvuks*. Täisnurksest kolmnurgast MNQ saame:

$$QN = MQ \tan \angle NMQ.$$

Kuid

$$MQ = PP_1 = dx$$

ning vastavalt tuletise geomeetrilisele vastele (§ 63)

$$\tan \angle NMQ = \tan \alpha = y'.$$

Seepärast

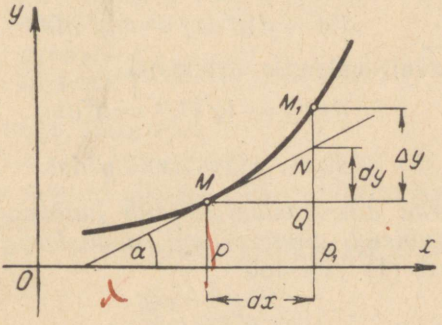
$$QN = y'dx.$$

Kuid

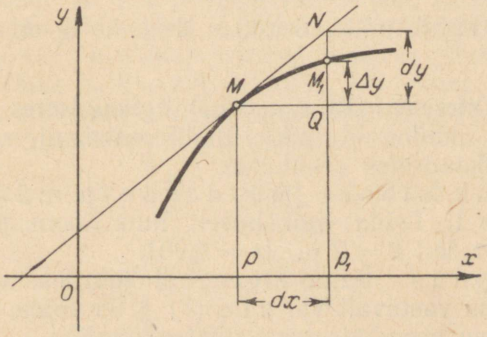
$$y'dx = dy \text{ [(4) § 95]}.$$

Järelikult,

$$QN = dy.$$



Joon. 104.



Joon. 105.

Kui kõverale $y = f(x)$ tõmmata punktis M puutuja, siis *funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaali selles punktis kujutatakse puutuja ordinaadi juurdekasvuga abstsissi kasvamisel dx võrra.*

Funktsiooni diferentsiaal antud punktis võib olla tema juurdekasvust väiksem (joon. 104) või suurem (joon. 105).

§ 97. Teist järku diferentsiaal. Funktsiooni $y = f(x)$ diferentsiaal dy kujutab endast samuti mingit funktsiooni, seepärast võime leida ka dy diferentsiaali, mida nimetatakse *teist järku diferentsiaaliks.* Sel puhul kirjutatakse $d(dy)$ ehk lühidalt d^2y ja loetakse „de kaks igrek".

Avaldame funktsiooni teist järku diferentsiaali funktsiooni tuletise kaudu. Selleks diferentseerime x järgi võrdust

$$dy = y'dx,$$

kusjuures dx loeme konstandiks (kuna dx ei sõltu x-st):

$$d^2y = d(y'dx) = d(y')dx.$$

Kuid vastavalt valemile (4) § 95

$$d(y') = (y')'dx = y''dx.$$

Seepärast

$$d^2y = y''dx \cdot dx = y''dx^2. \qquad (1)$$

Teist järku diferentsiaal võrdub funktsiooni teise tuletise ja argumendi diferentsiaali ruudu korrutisega.

Võrdusest (1) järeldub

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}. \qquad (2)$$

See võimaldab meil funktsiooni teist tuletist väljendada suhte $\frac{d^2y}{dx^2}$ kujul, mida loetakse „de kaks igrek de iks ruudus".

§ 98. Diferentsiaali rakendusi ligikaudsetes arvutustes. Vaatleme mõningaid näiteid diferentsiaali rakendamise kohta ligikaudsetes arvutustes.

a) Funktsiooni juurdekasvu määramine.

Näide 1. Leida ligikaudselt funktsiooni $y = 2x^2 + 3$ juurdekasv, kui $x = 2$ ja $\Delta x = 0{,}001$.

Lahendus. Kuna argumendi juurdekasv on väike suurus, siis vastavalt valemile (7) § 95 võime funktsiooni juurdekasvu asendada tema diferentsiaaliga.

Antud funktsiooni diferentsiaal on aga

$$dy = (2x^2 + 3)'dx = 4xdx. \qquad (1)$$

Asendades võrduses (1) x ja dx nende väärtustega, saame:

$$dy = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}008.$$

Järelikult,

$$\Delta y \approx 0{,}008.$$

Vaatame, millise vea me teeme, kui võtame funktsiooni juurdekasvu asemel tema diferentsiaali. Selleks leiame funktsiooni juurdekasvu täpse väärtuse (vt. näide 1, § 52):

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 + 2(0{,}001)^2 = 0{,}008 + 0{,}000002 = 0{,}008002.$$

Võrreldes saadud täpset Δy väärtust ligikaudse väärtusega, näeme, et tehtud viga on võrdne 0,000002. Väljendades vea protsentides, saame:

$$\frac{0{,}000002}{0{,}008002} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\%.$$

Viga osutus väga väikeseks.

N ä i d e 2. Kera, mille raadius $R = 20$ cm, soojendati, mistõttu tema raadius pikenes 0,01 cm võrra. Kui palju suurenes seejuures kera ruumala?

L a h e n d u s. Kera ruumala määratakse valemi järgi

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Igale R väärtusele vastab selle valemi järgi üksainus kindel V väärtus, s. t. V on R funktsioon. Järelikult, ülesanne taandub funktsiooni V juurdekasvu määramisele argumendi R antud juurdekasvu puhul. Kuna argumendi juurdekasv on väike ($\Delta R = dR = 0{,}01$), siis võime funktsiooni juurdekasvu asendada tema diferentsiaaliga (§ 95).

Leiame funktsiooni V diferentsiaali:

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = 4\pi R^2 dR.$$

Kuna

$$R = 20 \text{ ja } dR = 0{,}01,$$

siis

$$dV = 4\pi \cdot 20^2 \cdot 0{,}01 = 16\pi \text{ cm}^3.$$

b) Funktsiooni arvulise väärtuse leidmine. Olgu vaja leida funktsiooni

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

ligikaudne väärtus, kui $x_1 = 2{,}001$, s. t. leida suurus $f(2{,}001)$.

Esitame x_1 summa kujul

$$x_1 = 2 + 0{,}001,$$

kus suurust 0,001 vaatleme kui argumendi juurdekasvu.

Funktsiooni juurdekasvu valemist

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

leiame

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta y.$$

Lugedes Δx väikeseks suuruseks, võime suuruse Δy asendada dy-ga; sel juhul võime viimase võrduse kirjutada kujul

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy. \qquad (2)$$

Rakendades võrdust (2) antud näite kohta, saame:

$$f(2 + 0{,}001) \approx f(2) + dy.$$

Kuna

$$dy = 4x\,dx = 4 \cdot 2 \cdot 0{,}001 = 0{,}008,$$
$$f(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 = 11,$$

siis

$$f(2 + 0{,}001) = f(2{,}001) \approx 11 + 0{,}008 = 11{,}008.$$

Võrdust (2) võime kasutada funktsiooni väärtuse ligikaudse arvutamise valemina.

c) Arvutamine ligikaudsete valemite põhjal. Kasutades valemit (2), tuletame ligikaudsed valemid mõningate avaldiste arvutamiseks.

1) Võtame funktsiooni

$$y = \sin x.$$

Oletame, et nurk x, mis on võrdne nulliga, saab väga väikese juurdekasvu α. Rakendame valemit (2), eeldades, et selles $x = 0$ ja $dx = \alpha$. Saame:

$$f(0 + \alpha) \approx f(0) + dy.$$

Kuid

$$dy = (\sin x)'\,dx = \cos x\,dx = \cos 0 \cdot \alpha = \alpha$$

ja

$$f(0) = \sin 0 = 0.$$

Seepärast

$$f(0+\alpha) \approx 0+\alpha$$

ehk

$$\sin \alpha \approx \alpha.$$

Siit järeldub, et väga väikese nurga siinus on ligikaudu võrdne nurga endaga, kusjuures on vaja meeles pidada, et nurk peab olema väljendatud radiaanmõõdus. Nii näiteks $\sin 0{,}003 \approx 0{,}003$. Tõepoolest, väljendades antud nurga kraadimõõdus, saame:

$$\frac{180^\circ \cdot 0{,}003}{3{,}14} \approx 0{,}17^\circ \approx 10',$$

aga

$$\sin 10' \approx 0{,}003.$$

2) Võtame funktsiooni $y = x^n$ ja oletame, et x, mis on võrdne 1-ga, saab ühega võrreldes väga väikese juurdekasvu $\Delta x = \alpha$. Siis vastavalt valemile (2) saame:

$$f(1+\alpha) = f(1) + dy.$$

Kuid

$$dy = (x^n)' dx = nx^{n-1} dx = n \cdot 1^{n-1} \cdot \alpha = n\alpha$$

ja

$$f(1) = 1^n = 1.$$

Seepärast

$$f(1+\alpha) \approx 1 + n\alpha$$

ehk

$$(1+\alpha)^n \approx 1 + n\alpha. \qquad (3)$$

Täpselt samuti võime tuletada võrduse

$$(1-\alpha)^n \approx 1 - n\alpha. \qquad (4)$$

Valemite (3) ja (4) põhjal võime kiiresti leida niisuguse arvu astme ligikaudse väärtuse, mis erineb väga vähe arvust 1. Näiteks:

$$1{,}015^2 = (1+0{,}015)^2 \approx 1 + 2 \cdot 0{,}015 = 1{,}03,$$
$$0{,}988^3 = (1-0{,}012)^3 \approx 1 - 3 \cdot 0{,}012 = 0{,}964.$$

3. Tuletame avaldise $\sqrt[n]{1+\alpha}$ ligikaudse väärtuse arvutamiseks valemi, kui α on väike suurus võrreldes 1-ga. Selleks esitame avaldise $\sqrt[n]{1+\alpha}$ astme kujul

$$\sqrt[n]{1+\alpha} = (1+\alpha)^{\frac{1}{n}}.$$

Kuid valemi (3) põhjal

$$(1+\alpha)^{\frac{1}{n}} \approx 1+\frac{1}{n}\alpha$$

ehk

$$\sqrt[n]{1+\alpha} = 1+\frac{1}{n}\alpha. \qquad (5)$$

Analoogiliselt tuletatakse valem

$$\sqrt[n]{1-\alpha} = 1-\frac{1}{n}\alpha. \qquad (6)$$

Valemite (5) ja (6) põhjal võime kergesti leida mistahes juure ligikaudse väärtuse niisugusest arvust, mis erineb väga vähe arvust 1. Näiteks:

$$\sqrt{1{,}03} = \sqrt{1+0{,}03} \approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}03 = 1{,}015,$$

$$\sqrt[3]{0{,}964} = \sqrt[3]{1-0{,}036} \approx 1-\frac{1}{3}\cdot 0{,}036 = 0{,}988.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste funktsioonide esimene diferentsiaal:

1. $y = x\sqrt{x}$. 2. $s = \frac{1-t}{1+t}$. 3. $v = \frac{1}{2}\cos\frac{2}{\omega}$.

4. $y = \sin^2\sqrt{x}$. 5. $u = \ln^2\frac{1}{t}$. 6. $y = \ln\sqrt{\frac{1}{x}}$.

7. $y = \operatorname{arc\,tan}\frac{x}{1+x}$.

8. Leida valemiga $s = 5t^2$ väljendatud tee pikkuse diferentsiaal, kui $t = 4$ ja $\Delta t = 0{,}01$.

9. Leida funktsiooni $y = x^3 - 5x^2 + 80$ ligikaudne juurdekasv argumendi muutumisel $x = 4$ kuni $x = 4{,}001$.

10. Ruudu külg on 5 cm. Leida ruudu pindala ligikaudne juurdekasv, kui tema külge pikendada 0,01 cm võrra.

11. Leida ringi pindala ligikaudne juurdekasv, kui tema raadius pikeneb 50 cm-lt 50,1 cm-le.

12. Kuubi serv, mis on võrdne 1 m, pikeneb 10 cm võrra. Kui palju suureneb seejuures kuubi ruumala?

13. Ruudukujulise põhjaga risttahuka põhiserv on 20 cm, kõrgus 10 cm. Kui palju suureneb risttahuka ruumala, kui põhiserva pikendada 0,02 cm võrra?

14. Koonuse põhja raadius on 15 cm, kõrgus 20 cm. Kui palju suureneb koonuse ruumala, kui tema põhja raadiust pikendada 0,04 cm võrra?

15. Kera, mille raadius on 9 cm, soojendati, mistõttu tema ruumala suurenes $32{,}4\pi$ cm^3 võrra. Leida kera raadiuse pikenemine.

16. Kuubi ruumala suurenes soojendamisel 0,06 osa võrra. Leida kuubi serva pikenemine, kui ta esialgne pikkus oli $a = 10$ cm.

17. Kera ruumala suurenes soojendamisel 0,0024 osa võrra. Mitme protsendi võrra pikenes seejuures kera raadius?

18. Mitu protsenti moodustab viga, mis tekib ringi pindala arvutamisel, kui tema raadiuse mõõtmisel on tehtud viga 1%?

19. Kuubi ruumala suurenes 6% võrra. Mitme protsendi võrra suurenes seejuures kuubi serva pikkus?

Leida järgmiste funktsioonide ligikaudsed väärtused:

20. $y = x^2 + x$, kui $x = 3{,}01$.

21. $y = 3x^2 + 2x - 1$, kui $x = 2{,}03$.

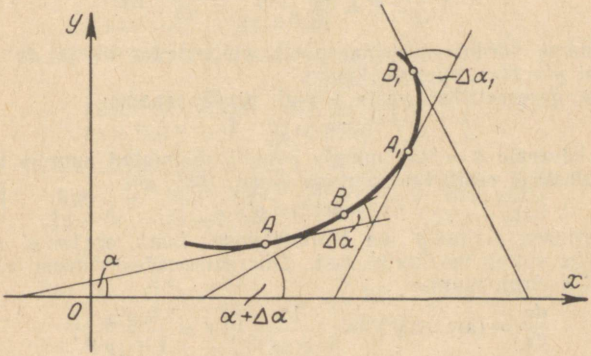
22. $y = x^3 + x^2 - 2x$, kui $x = 2{,}01$.

23. $y = \frac{1}{2}x^3 - 5x^2 + x - 1$, kui $x = 2{,}1$.

24. $y = x^3 - 2x + 1$, kui $x = 0{,}02$.

25. $y = x^3 - 4x^2 + 1$, kui $x = -2{,}03$.

26. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$, kui $x = 4{,}2$.



Joon. 106.

§ 99. Joone kõverus. Olgu antud kõver, mis on määratud võrrandiga $y = f(x)$ (joon. 106). Võtame sellel kaks punkti A ja B ning tõmbame neis kõverale puutujad. Üleminekul punktist A punkti B muutub puutuja kaldenurk abstsisstelje positiivse suunaga mingisuguse suuruse võrra. Kui tähistame punktis A tõmmatud puutuja kaldenurga x-telje suhtes α-ga, siis punktis B tõmmatud puutuja kaldenurk sama telje suhtes, olles saanud juurdekasvu $\Delta\alpha$, on $\alpha + \Delta\alpha$. Nurk puutujate endi vahel, nagu jooniselt näeme, on $\Delta\alpha$. Suurust $\Delta\alpha$ võib vaadelda kui nurka, mille võrra puutuja on kõrvale kaldunud oma esialgsest asendist.

Jagades $\Delta\alpha$ kaare AB pikkusega Δs, saame keskmise kõrvalekalde nurga kaare pikkuse ühiku kohta. Suhet $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ nimetatakse *joone keskmiseks kõveruseks* osal AB. Joone keskmine kõverus tema mitmesugustel osadel võib olla erinev.

Oletame nüüd, et punkt B, liikudes antud kõveral, läheneb tõkestamatult punktile A, kusjuures Δs väheneb, lähenedes nullile. Sel juhul suhte $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ piirväärtus määrab *joone kõveruse punktis A*. Tähistades joone kõveruse mingis punktis tähega K, saame:

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}.$$

Definitsioon. *Joone kõveruseks antud punktis A nimetatakse kaare AB keskmise kõveruse piirväärtust punkti B tõkestamatul lähenemisel punktile A.*

Tuletise definitsiooni põhjal (§ 60)

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds};$$

seega

$$K = \frac{d\alpha}{ds}. \tag{1}$$

Teisendame võrduse paremat poolt, väljendades $d\alpha$ ja ds antud funktsiooni $y = f(x)$ tuletiste kaudu.

Tuletise geomeetrilise vaste põhjal (§ 63) saame:

$$\tan\alpha = y',$$

kus α on kõverale $y = f(x)$ mingis punktis tõmmatud puutuja kaldenurk abstsisstelje positiivse suunaga (joon. 106); siit

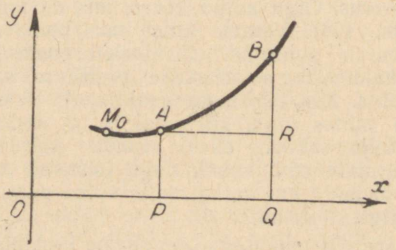
$$\alpha = \operatorname{arc\,tan} y'.$$

Selles võrduses $\operatorname{arc\,tan} y'$ on liitfunktsioon, kuna $\operatorname{arc\,tan} y'$ sõltub y'-st, y' aga sõltub omakorda x-st. Diferentseerides viimast võrdust argumendi x järgi, saame:

$$\frac{d\alpha}{dx} = (\operatorname{arc\,tan} y')' = \frac{1}{1+(y')^2}(y')' = \frac{y''}{1+(y')^2},$$

millest

$$d\alpha = \frac{y''\,dx}{1+(y')^2}. \tag{2}$$



Joon. 107.

Avaldame ds funktsiooni $y = f(x)$ tuletise kaudu. Selleks võtame jällegi kõvera sellesama osa AB (joon. 107). Vaatleme pikkust AB kui kaare M_0A juurdekasvu, mis vastab juurdekasvudele $PQ = \Delta x$ ja

$RB = \Delta y$. Kui Δx on küllalt väike, siis võime kaare osa AB lugeda sirgjooneliseks; sel juhul, kasutades Pythagorase teoreemi, saame:

$$AB^2 = AR^2 + RB^2$$

ehk

$$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2.$$

Jagades võrduse mõlemaid pooli $(\Delta x)^2$-ga, saame:

$$\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2,$$

millest

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Oletame, et $\Delta x \to 0$; siis

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}.$$

Rakendades piirväärtuste teoreeme (§ 43), saame:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \sqrt{\lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2\right]} =$$

$$= \sqrt{\lim_{\Delta x \to 0} 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}. \qquad (3)$$

Kuid

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{ds}{dx} \quad \text{ja} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y';$$

seepärast võrdus (3) saab kuju

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (y')^2},$$

millest

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2}\, dx. \qquad (4)$$

Asetades $d\alpha$ ja ds väärtused avaldisse (1), saame:

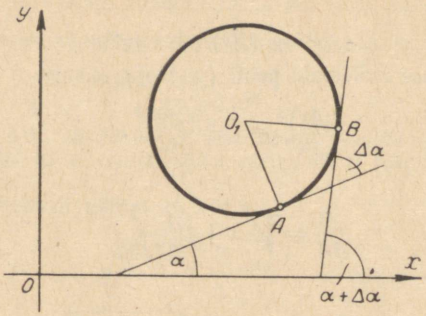
$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{y''\, dx}{1 + (y')^2} : \sqrt{1 + (y')^2}\, dx =$$

$$= \frac{y''}{[1 + (y')^2]\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}},$$

$$K = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}. \qquad (5)$$

Valem (5) võimaldab leida võrrandiga $y = f(x)$ määratud joone kõveruse tema mistahes punktis.

§ 100. Ringjoone kõverus. Ringjoone kõveruse võime määrata valemi (5) § 99 järgi, kuid seda on palju lihtsam leida järgmise arutelu põhjal.



Joon. 108.

Tõmbame ringjoonele punktides A ja B puutujad (joon. 108). Tähistades kaare AB Δs-ga, leiame keskmise kõveruse sellel osal; keskmine kõverus väljendub murruna $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Tõmmates puutepunktidesse raadiused, saame:

$$\angle AO_1B = \Delta\alpha,$$

kuna nurgad AO_1B ja $\Delta\alpha$ on vastavalt ristuvate haaradega nurgad. Nagu teada, mõõtub nurk radiaanmõõdus kaare pikkuse ja raadiuse suhtega; järelikult,

$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R},$$

millest

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}.$$

On selge, et me jõuame samale järeldusele, vaadeldes ükskõik millist ringjoone osa. Järelikult, võrdus

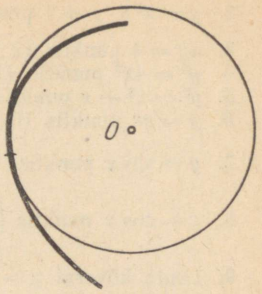
$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{R} = \frac{1}{R}$$

on kehtiv ringjoone iga punkti kohta, s. t. *ringjoone kõverus on kõigis punktides konstantne ning võrdub raadiuse pöördväärtusega.*

§ 101. Joone kõverusraadius. Joone kõveruse uurimiseks valitakse selline ringjoon, mille kõverus on võrdne joone kõverusega ühes või teises punktis. Selle ringjoone keskpunkti nimetatakse *joone kõverus-keskpunktiks vastavas punktis*, raadiust — *joone kõverusraadiuseks selles punktis* ja ringjoont ennast — *kõverusringjooneks* (joon. 109).

Definitsioon. *Joone kõverusringjooneks punktis M nimetatakse ringjoont, mis läbib punkti M ja millel on joonega ühesugune kõverus.*

Tuleb märkida, et kõverusringjoone keskpunkt asetseb alati kõvera nõgususe suunas.



Joon. 109.

Nagu teame, on ringjoone kõverus (§ 100)

$$K = \frac{1}{R},$$

millest

$$R = \frac{1}{K}.$$

Järelikult, ka joone kõverusraadius on tema mingis punktis määratud sama võrdusega.

Asendades K tema väärtusega võrdusest (5) § 99, saame valemi joone kõverusraadiuse määramiseks tema mistahes punktis

$$R = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{y''}. \qquad (1)$$

Rakendades seda valemit sirgjoone kohta, mille võrrand on näiteks $y = kx + b$, saame:

$$R = \frac{(1 + k^2)^{3/2}}{0} = \infty,$$

kuna $y' = k$ ja $y'' = 0$.

Seega, sirgjoont võib vaadelda kui lõpmatu suure raadiusega ringjoont.

Näide. Leida kõvera $y = 2x^2$ kõverusraadius punktis, mille abstsiss on $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lahendus. Leiame esiteks funktsiooni $y = 2x^2$ esimese ja teise tuletise punktis, mille abstsiss $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$y' = (2x^2)' = 4x$ ja kui $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, siis $y' = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

$y'' = (4x')' = 4$ kõigi x väärtuste puhul.

Asetades väärtuse y' ja y'' valemisse (1), saame:

$$R = \frac{[1 + (2\sqrt{2})^2]^{3/2}}{4} = \frac{(1 + 8)^{3/2}}{4} = \frac{\sqrt{9^3}}{4} = \frac{27}{4} = 6{,}75.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste kõverate kõverusraadius:

1. $y = x^2 + x$ punktis $(0\,;\,0)$.

2. $y = x^2 - x + 1$ punktis, mille abstsiss $x = \frac{1}{2}$.

3. $xy = 4$ punktis $(2\,;\,2)$.
4. $y^2 = 4x^3$ punktis $(1\,;\,2)$.
5. $y^2 = x^3 + x$ punktis, mille abstsiss $x = 1$.
6. $y = e^x$ punktis $(0\,;\,1)$.

7. $y = \sin x$ punktis, mille abstsiss $x = \frac{\pi}{4}$.

8. $y = \cos x$ punktis $\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$.

9. Leida kõveral $y = \frac{1}{2}x^2$ punkt, mille kõverusraadius on minimaalne.

XI peatükk.

INTEGRAAL.

§ 102. Määramata integraali mõiste. Kui on antud funktsioon, siis võime meile juba tuntud eeskirjade järgi leida tema diferentsiaali. Seame endale nüüd vastupidise ülesande: leida antud diferentsiaali järgi funktsioon.

Olgu antud funktsioon

$$y = x^3. \tag{1}$$

Tema diferentsiaal on

$$dy = (x^3)'dx = 3x^2dx. \tag{2}$$

Funktsiooni (1) nimetatakse tema diferentsiaali (2) suhtes *algfunktsiooniks*.

Võtame üldkujulise funktsiooni

$$y = F(x).$$

Kui tema diferentsiaal on

$$dy = f(x)dx,$$

siis $F(x)$ on avaldise $f(x)dx$ algfunktsioon.

Definitsioon. *Avaldise $f(x)dx$ algfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $F(x)$, mille diferentsiaal on $f(x)dx$.*

Kuid funktsiooni igale diferentsiaalile vastab mitte üks algfunktsioon, vaid lõpmata palju algfunktsioone, mis erinevad üksteisest konstantse liidetava poolest. Tõepoolest, võttes näiteks funktsioonid:

$$y = x^3,$$
$$y = x^3 + 2,$$
$$y = x^3 - 5,$$
$$y = x^3 + a,$$

kus $a = \text{const.}$, näeme, et kõigil neil on ühesugune diferentsiaal

$$dy = 3x^2dx.$$

Järelikult sellele diferentsiaalile vastab niisuguste algfunktsioonide hulk, mille kuju on $x^3 + C$, kus C on meelevaldne konstant.

Avaldist $x^3 + C$ nimetatakse avaldise $3x^2dx$ *määramata integraaliks* ja tähistatakse $\int 3x^2dx$.

Definitsioon. *Diferentsiaali $f(x)dx$ algfunktsioonide kogu $F(x) + C$ nimetatakse määramata integraaliks ja tähistatakse* $\int f(x)dx$.

Seega võime kirjutada $\int f(x)dx = F(x) + C$, kus avaldist $f(x)dx$ nimetatakse *integreeritavaks avaldiseks*, suurust C aga *integreerimiskonstandiks*.

Algfunktsiooni leidmise protsessi nimetatakse *integreerimiseks*, seda matemaatika osa aga, mis tegeleb integreerimisega seotud küsimustega, nimetatakse *integraalarvutuseks*.

Öeldust nähtub, et integreerimine on diferentseerimise pöördtehe.

§ 103. Määramata integraali põhiomadused.

Esimene omadus. *Määramata integraali diferentsiaal võrdub integreeritava avaldisega,* s. t.

$$d\int f(x)dx = f(x)dx.$$

See omadus järeldub määramata integraali definitsioonist.

Teine omadus. *Funktsiooni diferentsiaali määramata integraal võrdub selle funktsiooni ja meelevaldse konstandi summaga.*

Olgu

$$dF(x) = f(x)dx.$$

Integreerides võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$\int dF(x) = \int f(x)dx.$$

Kuid definitsiooni põhjal

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

järelikult,

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Esitame tõestuseta veel järgmised määramata integraali omadused.

Kolmas omadus. *Konstantse kordaja võib tuua integraalimärgi ette,* s. t.

$$\int a f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx,$$

kus a on konstantne kordaja.

Neljas omadus. *Funktsioonide algebralise summa integraal võrdub liidetavate funktsioonide integraalide algebralise summaga,* s. t.

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]\,dx =$$

$$= \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx - \int f_3(x)\,dx.$$

§ 104. Integreerimise põhivalemid. Määramata integraali leidmiseks on vaja teada integreerimise põhivalemeid.

Tuletame algul astme integreerimise valemi. Selleks võtame funktsiooni x^{n+1} ja leiame tema diferentsiaali:

$$d(x^{n+1}) = (n+1)x^n dx.$$

Integreerides selle võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$\int d(x^{n+1}) = \int (n+1)x^n dx.$$

Rakendades integraali teist omadust võrduse vasakule poolele ja integraali kolmandat omadust võrduse paremale poolele, leiame:

$$x^{n+1} + C_1 = (n+1) \int x^n dx,$$

kust saame, kui $n + 1 \neq 0$,

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{C_1}{n+1}.$$

Tähistades konstantse liidetava $\frac{C_1}{n+1}$ tähega C, saame lõplikult:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Tuletatud valem on õige mistahes n puhul, välja arvatud $n = -1$. Viimasel juhul valem kaotab mõtte.

Analoogiliselt võime tuletada teisi põhivalemeid. Kuid neid võib saada ka lihtsamalt.

Näiteks olgu meil vaja leida $\int \frac{dx}{x}$. Küsime: millise funktsiooni diferentsiaaliks on avaldis $\frac{dx}{x}$? Funktsiooni $\ln x + C$, sest

$$d(\ln x + C) = \frac{dx}{x}.$$

Järelikult,

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C.$$

Esitame järgmise põhivalemite tabeli. Neid põhivalemeid on kerge tuletada vastavatest diferentseerimise valemitest viimaste ümberpööramise teel, nagu seda tegime $\int \frac{dx}{x}$ leidmisel:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \text{(I)}$$

kui $n \neq -1$.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C. \quad \text{(II)}$$

$$\int e^x dx = e^x + C. \quad \text{(III)}$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C. \quad \text{(IV)}$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + C. \quad \text{(V)}$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + C. \quad \text{(VI)}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C. \quad \text{(VII)}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C. \quad \text{(VIII)}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C. \quad \text{(IX)}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc\,tan} x + C. \quad \text{(X)}$$

Lahendame mõningad näited.

N ä i d e 1. Leida $\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\,dx$.

L a h e n d u s. Rakendades esiteks integraali neljandat, siis aga kolmandat omadust ja valemit (I), saame:

$$\int (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\,dx =$$

$$= \int 5x^4\,dx - \int 4x^3\,dx + \int 3x^2\,dx - \int dx =$$

$$= 5\int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 3\int x^2 dx - \int dx =$$

$$= 5\frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - x + C = x^5 - x^4 + x^3 - x + C.$$

Siin C on nelja integraali integreerimiskonstantide algebraline summa.

Integreerimise õigsust on lihtne kontrollida; selleks leiame saadud funktsiooni diferentsiaali:

$$d(x^5 - x^4 + x^3 - x + C) = (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)\,dx.$$

Tulemusena saime integreeritava avaldise; järelikult, integreerimine oli teostatud õigesti.

Näide 2. Leida $\int \frac{2x\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Lahendus. Et antud integraali ei saa otseselt leida tabelis antud valemite järgi, siis tuleb integreeritavat avaldist järgmiselt teisendada:

$$\int \frac{2x\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}} = 2\int x x^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{3}}\,dx = 2\int x^{\frac{7}{6}}\,dx.$$

Kasutades valemit (I), saame:

$$2\int x^{\frac{7}{6}}\,dx = 2\frac{x^{\frac{13}{6}}}{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + C = \frac{12}{13}x^2\sqrt[6]{x} + C.$$

Näide 3. Leida $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$.

Lahendus. Esitame integreeritava avaldise kahe murru summana, jagades lugeja liikmeti x-ga:

$$\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx.$$

Jaotades viimase integraali kahe integraali summaks ja rakendades valemeid (I) ja (II), saame:

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \int x\,dx + \int \frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + \ln x + C.$$

Me käsitlesime lihtsamaid näiteid, millistes saime funktsioone lihtsate teisenduste teel teisendada nii, et integraali leidmiseks saime kasutada tabelis antud valemeid. Kuid tihti ei ole võimalik selliseid teisendusi teostada ning integ-

reerimiseks tuleb kasutada erivõtteid, mis on mõnikord küllaltki keerulised.

Seega, integreerimiseks ei piisa ainult valemite tundmisest, vaid on vaja veel kogemusi, mis kujunevad ülesannete lahendamise protsessis.

Harjutusi.

1. $\int x\,dx$. 2. $\int x^4\,dx$. 3. $\int x^{n-1}\,dx$. 4. $\int 5\,dx$.

5. $\int a\,d\varphi$. 6. $\int 2x\,dx$. 7. $\int \frac{1}{2}t^2\,dt$. 8. $\int (2-x)\,dx$.

9. $\int (3x-x^2)\,dx$. 10. $\int (a+\varphi^2)\,d\varphi$. 11. $\int 3(x-2)\,dx$.

12. $\int (4x^3+4x-3)\,dx$. 13. $\int x^2(1+2x)\,dx$.

14. $\int (x+3)^2\,dx$. 15. $\int 4(2x-1)^2\,dx$.

16. $\int x(1-x)^2\,dx$. 17. $\int \sqrt{x}\,dx$. 18. $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$.

19. $\int \frac{d\omega}{\omega^2}$. 20. $\int \frac{du}{\sqrt{u}}$. 21. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$. 22. $\int \frac{3dx}{4\sqrt[4]{x}}$.

23. $\int \frac{x\,dx}{2\sqrt{x}}$ 24. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{4x}\,dx$. 25. $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$.

26. $\int \left(\frac{2}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\sqrt[3]{x^2}\right)dx$. 27. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}\,dx$.

28. $\int \frac{v-\sqrt[3]{v^2}}{\sqrt{v}}\,dv$. 29. $\int 4\sin x\,dx$.

30. $\int 2a\cos\varphi\,d\varphi$. 31. $\int \frac{2d\Theta}{\cos^2\Theta}$. 32. $\int \frac{3a\,du}{\sin^2 u}$.

33. $\int (1+\cos t)\,dt$. 34. $\int (2-3\sin x)\,dx$.

35. $\int (3x^2-2\cos x)\,dx$. 36. $\int \left(\frac{2}{\cos^2\varphi}-\frac{3}{\sin^2\varphi}\right)d\varphi$.

37. $\int 3e^u\,du$. 38. $\int 2a^\varphi\,d\varphi$. 39. $\int (x-5e^x)\,dx$.

40. $\int (2e^t-3\cos t)\,dt$. 41. $\int \frac{3dt}{2t}$. 42. $\int \left(\frac{2}{x}-x\right)dx$.

43. $\int \frac{6\,dx}{1+x^2}$. 44. $\int \frac{3\,dx}{4\sqrt{1-x^2}}$. 45. $\int \frac{2\cos^2 v + 1}{\cos^2 v}\,dv$.

46. $\int \frac{\sin^2 t - 2}{\sin^2 t}\,dt$. 47. $\int \frac{e^{2x} + e^x \sin x}{e^x}\,dx$.

48. $\int \sec^2 x\,dx$. 49. $\int \tan^2 x\,dx$.

§ 105. Integreerimiskonstandi määramine. Paragrahvis 102 näitasime, et määramata integraal kujutab endast algfunktsioonide hulka, mis erinevad üksteisest mingi jääva liidetava poolest. Nii näiteks mõeldakse integraalis

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C \qquad (1)$$

C all mistahes jäävat suurust; seepärast kirjutatud võrdus määrab lõpmata palju algfunktsioone. Selleks et saada antud diferentsiaali jaoks ainult ühte algfunktsiooni, peab olema antud veel mingi lisatingimus. Kui oletada, et antud näites algfunktsiooni väärtus võrdub 1-ga, kui $x = -1$, siis ülaltoodud võrdus omandab kuju:

$$1 = -1 + C,$$

millest

$$C = 2.$$

Seega antud lisatingimust rahuldab ainult üks algfunktsioon ja nimelt:

$$x^3 + 2.$$

Harjutusi.

1. Leida $\int (x-3)dx$ teades, et algfunktsiooni väärtus on 9, kui $x = 2$.

2. Leida $\int (\sin x + \cos x)dx$ teades, et algfunktsiooni väärtus on 2, kui $x = \frac{\pi}{2}$.

3. Leida $\int \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx$ teades, et algfunktsiooni väärtus on 2, kui $x = 1$.

4. Leida $\int \left(\frac{1}{2} e^x - \cos x\right) dx$ teades, et algfunktsiooni väärtus on $\frac{1}{2}$, kui $x = 0$.

5. Leida $\int \left(\frac{5}{1+x^2}+1\right)dx$ teades, et algfunktsiooni väärtus on 0, kui $x=0$.

§ 106. Määratud integraal. Muutugu paragrahvis 105 antud võrduses (1) argument vahemikus $x=2$ kuni $x=4$. Siis algfunktsiooni juurdekasv x väärtuste antud vahemikus on

$$4^3+C-(2^3+C)=64-8=56.$$

Saadud algfunktsiooni juurdekasvu nimetatakse *määratud integraaliks* ja tähistatakse

$$\int_2^4 3x^2dx.$$

Definitsioon. *Algfunktsiooni $F(x)+C$ juurdekasvu $F(b)-F(a)$ argumendi muutumisel väärtuselt $x=a$ väärtuseni $x=b$ nimetatakse määratud integraaliks ja tähistatakse* $\int_a^b f(x)dx$.

Seejuures eeldatakse, et funktsioon $f(x)$ on pidev argumendi väärtuste vahemikus a-st b-ni.

Seega,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

Selle võrduse vasakut poolt loetakse järgmiselt: „määratud integraal a-st b-ni ef iksist de iks".

Väärtust a nimetatakse *määratud integraali alamrajaks*, väärtust b *ülemrajaks*.

Võrdusest (1) järeldub järgmine eeskiri:

määratud integraali $\int_a^b f(x)dx$ *arvutamiseks on vaja leida vastav määramata integraal, saadud avaldises asendada x esiteks määratud integraali ülemrajaga, seejärel almrajaga ning esimesest tulemusest lahutada teine.*

Et alla kriipsutada määratud integraali leidmisel kahte erinevat tehet, nimelt, määramata integraali leidmist ja rajade asetamist saadud avaldisse, kirjutatakse valem (1) järgmisel kujul

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Näide 1. Arvutada $\int_{-1}^{+1} (x^2 + 1)\,dx$.

Lahendus. Vastavalt eeskirjale saame:

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 + 1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{-1}^{+1} = \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + 1 = 2\frac{2}{3}.$$

Näide 2. Arvutada $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos x\,dx$.

Lahendus.

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos x\,dx = 4\sin x\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \approx 4(1 - 0{,}865) = 4 \cdot 0{,}135 = 0{,}54.$$

Näide 3. Arvutada $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2}$.

Lahendus.

$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x\Big|_1^{\sqrt{3}} = \arctan\sqrt{3} - \arctan 1 =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \approx 0{,}262.$$

§ 107. Määratud integraali põhiomadused. Paragrahvis 103 vaatlesime määramata integraali nelja põhiomadust. Kõrgema matemaatika täielikus kursuses tõestatakse, et

kolmas ja neljas omadus kehtib ka määratud integraali kohta. Peale nende omaduste on määratud integraalil veel järgmine omadus:

määratud integraali rajade ümbervahetamisel integraali märk muutub vastupidiseks.

Tõepoolest, võttes võrduse

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

paremal poolel kordaja — 1 sulgude ette, saame:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -[F(a) - F(b)].$$

Nurksulgudes olev vahe on seesama määratud integraal, ainult ümbervahetatud rajadega, s. t. $\int_b^a f(x)\,dx$.

Järelikult,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Harjutusi.

Arvutada määratud integraalid:

1. $\int_1^2 x\,dx$. 2. $\int_0^3 x^2\,dx$. 3. $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^3\,dx$. 4. $\int_0^1 (2x+1)\,dx$.

5. $\int_{-1}^0 (3x^2+1)\,dx$. 6. $\int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{2}t + 4t^2\right) dt$.

7. $\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} 3(u^2+1)\,du$. 8. $\int_1^2 2\pi(1+x^2)\,dx$.

9. $\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$. 10. $\int_1^8 \frac{\theta - \sqrt[3]{\theta}}{\theta}\,d\theta$. 11. $\int_{-1}^{+1} (1 - \sqrt[3]{x^2})\,dx$.

12. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi$. 13. $\int_0^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi$. 14. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,dt}{\cos^2 t}$.

15. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\Theta}{\sin^2\Theta}$. 16. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\cos t\, dt$. 17. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{3}{4}\sin\Theta\, d\Theta$.

18. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi + \sin\varphi)\, d\varphi$. 19. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sin x\right) dx$.

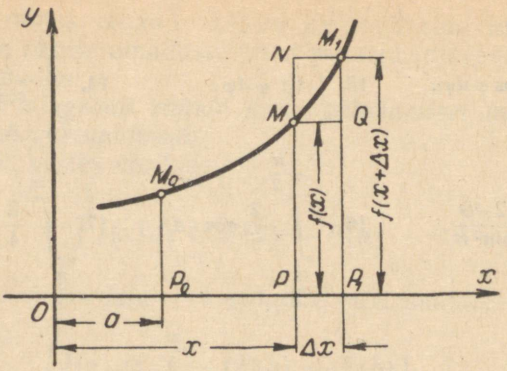
20. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$. 21. $\int_0^{\pi} (e^x - \cos x)\, dx$.

22. $\int_1^2 \frac{2\,dx}{5x}$. 23. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\cos x + 1}{x}\, dx$.

24. $\int_0^{0{,}5} \frac{2\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 25. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3dx}{1+x^2}$. 26. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{2\sqrt{1-x^2}}$.

§ 108. Määratud integraal kui pindala. Võtame kõveral, mis on määratud võrrandiga $y = f(x)$, kusjuures $f(x) > 0$, punkti M_0 jääva abstsissiga $OP_0 = a$ (joon. 110). Peale selle võtame kõveral veel teise punkti M, mis muudab oma asendit vastavalt abstsissi $OP = x$ muutumisele. Sel juhul pindala M_0MPP_0 on muutuv suurus, mis sõltub x-st. Tähistades pindala tähega s, saame:

$$s = \Phi(x) \qquad (1)$$



Joon. 110.

Andes argumendile x juurdekasvu $PP_1 = \Delta x$, saab pindala juurdekasvu Δs, mis võrdub kõverjoonelise pindalaga MM_1P_1P. Tõmmates $MQ \parallel Ox$ ja $M_1N \parallel Ox$ lõikumiseni ordinaadi PM pikendusega, saame:

$$\text{pindala } MQP_1P < \Delta s < \text{pindala } NM_1P_1P$$

ehk

$$PM \cdot PP_1 < \Delta s < P_1M_1 \cdot PP_1. \tag{2}$$

Kuna

$$PP_1 = \Delta x,$$
$$PM = f(x),$$
$$P_1M_1 = f(x + \Delta x),$$

siis võime võrratused (2) esitada järgmisel kujul:

$$f(x)\,\Delta x < \Delta s < f(x + \Delta x)\,\Delta x.$$

Jagades saadud võrratused positiivse suurusega Δx, saame:

$$f(x) < \frac{\Delta s}{\Delta x} < f(x + \Delta x). \tag{3}$$

Kui suurus Δx tõkestamatult kahaneb, s. t.

$$\Delta x \to 0,$$

siis

$$f(x + \Delta x) - f(x) \to 0$$

ehk, mis on sama,

$$f(x + \Delta x) \to f(x).$$

Kuna suurus $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ asetseb $f(x)$ ja $f(x+\Delta x)$ vahel, nagu näeme võrratusest (3), siis

$$\frac{\Delta s}{\Delta x} \to f(x)$$

ehk

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = f(x).$$

Kuid $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x}$ on funktsiooni s tuletis; järelikult,

$$\frac{ds}{dx} = f(x),$$

millest

$$ds = f(x)\,dx.$$

Integreerides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$\int ds = \int f(x)\,dx$$

ehk

$$s + C_1 = \int f(x)\,dx. \tag{4}$$

Olgu $F(x)$ funktsiooni $f(x)$ algfunktsioon. Siis

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C_2. \tag{5}$$

Võrreldes võrdusi (4) ja (5), saame:

$$s + C_1 = F(x) + C_2$$

ehk

$$s = F(x) + C. \tag{6}$$

Siin on konstandil $C = C_2 - C_1$ üks väärtus, kuna on teada tingimused, mida rahuldab funktsioon $s = \Phi(x)$ ja mida peab järelikult rahuldama ka summa $F(x) + C$. Vastavalt algtingimusele on $x = a$ korral $s = \Phi(a) = 0$. Asetades väärtuse $x = a$ võrdusesse (6), saame C määramiseks järgmise võrrandi:

$$0 = F(a) + C.$$

Siit

$$C = -F(a),$$

s. t.

$$s = F(x) - F(a).$$

Definitsiooni põhjal on aga

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(x)\,dx.$$

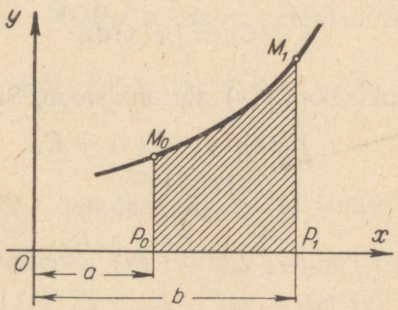
Järelikult,

$$s = \int_a^x f(x)\,dx. \qquad (7)$$

See valem määrab muutuva pindala M_0MPP_0.

Et leida jääva pindala M_0MPP_0 suurust x väärtuste vahemikus a-st b-ni (joon. 111), tuleb võrduses (7) võtta $x = b$; siis pindala

$$M_0M_1P_1P_0 = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$



Joon. 111.

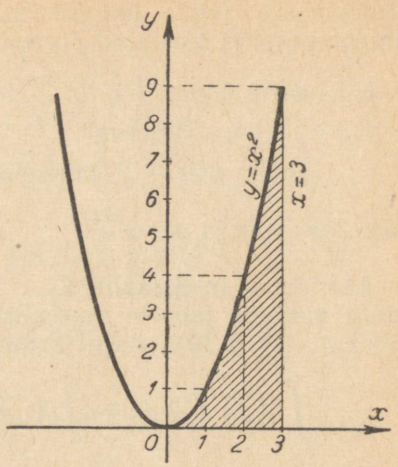
Niisiis, *pindala, mis on piiratud kõveraga* $y = f(x)$, *kus* $f(x) > 0$, x*-teljega ja sirgetega* $x = a$ *ja* $x = b$, *väljendub määratud integraaliga* $\int_a^b f(x)\,dx$.

Selline ongi määratud integraali geomeetriline mõte.

N ä i d e. Määrata niisuguse kujundi pindala, mis on piiratud kõvera $y = x^2$ haruga, x-teljega ja sirgetega $x = 0$ ja $x = 3$.

L a h e n d u s. Vastavalt määratud integraali geomeetrilisele vastele on otsitav pindala (joon. 112)

$$s = \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9.$$



Joon. 112.

§ 109. Integreerimine asendusvõttega. Kui antud integraalile on lihtsate teisenduste abil raske (või hoopis võimatu) anda tabelis esineva integraali kuju, siis kasutatakse integraali leidmiseks erivõtteid. Vaatleme üht neist, nimelt *integreerimist asendusvõttega.*

N ä i d e 1. Leida $\int (1+x)^5 dx$.

L a h e n d u s. Võtame

$$1 + x = z, \qquad (1)$$

kus z on uus muutuja. Diferentseerides võrduse (1) mõlemaid pooli, saame:

$$dx = dz.$$

Asendades otsitavas integraalis $1+x$ ja dx leitud väärtustega ning rakendades valemit (I) § 104, saame:

$$\int (1+x)^5 dx = \int z^5 dz = \frac{z^6}{6} + C.$$

Kuna vastus tuleb anda muutuja x funktsioonina, siis asendame z tema väärtusega võrdusest (1); saame:

$$\int (1+x)^5 dx = \frac{1}{6}(1+x)^6 + C.$$

Lahenduse kontrollimiseks leiame saadud avaldise diferentsiaali, vaadeldes seda avaldist kui astme liitfunktsiooni:

$$d\left[\frac{1}{6}(1+x)^6 + C\right] = \frac{1}{6} \cdot 6(1+x)^5 dx = (1+x)^5 dx.$$

Tulemuseks saime integreeritava avaldise; järelikult oli integreerimine teostatud õigesti.

Näide 2. Leida $\int \sqrt{2x+3}\,dx$.

Lahendus. Võtame

$$2x+3=z;$$

siis $2dx=dz$ ja $dx=\frac{dz}{2}$.

Asendame integraalis $2x+3$ ja dx leitud väärtustega ning anname juurele murrulise astendajaga astme kuju. Valemi (I) § 104 põhjal saame:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx=\int \sqrt{z}\cdot\frac{dz}{2}=\frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}\sqrt{z^3}+C.$$

Minnes üle esialgsele muutujale x, saame:

$$\int \sqrt{2x+3}\,dx=\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}+C.$$

Näide 3. Leida $\int \sin(a+bx)\,dx$.

Lahendus. Võtame

$$a+bx=z;$$

siis

$$bdx=dz \text{ ja } dx=\frac{dz}{b}.$$

Asendades ja rakendades valemit (V) § 104, saame:

$$\int \sin(a+bx)\,dx=\int \sin z\cdot\frac{dz}{b}=-\frac{1}{b}\cos z+C=$$

$$=-\frac{1}{b}\cos(a+bx)+C.$$

Näide 4. Leida $\int \frac{x^2dx}{1+x^3}$.

L a h e n d u s. Võtame

$$1 + x^3 = z;$$

siis

$$3x^2dx = dz \text{ ja } x^2dx = \frac{dz}{3}.$$

Asendades ja rakendades valemit (II) § 104, saame:

$$\int \frac{x^2dx}{1+x^3} = \int \frac{\frac{dz}{3}}{z} = \frac{1}{3}\ln z + C = \frac{1}{3}\ln(1+x^3) + C.$$

N ä i d e 5. Leida $\int \sin^2 x \cos x\, dx$.

L a h e n d u s. Võtame

$$\sin x = z;$$

siis

$$\cos x\, dx = dz$$

ja

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int z^2 dz = \frac{z^3}{3} + C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C.$$

N ä i d e 6. Leida $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}}$.

L a h e n d u s. Võtame

$$1 - \cos x = z;$$

siis

$$\sin x\, dx = dz$$

ja

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1-\cos x}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int z^{-\frac{1}{2}} dz =$$

$$= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{1-\cos x} + C.$$

N ä i d e 7. Leida $\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2}$.

L a h e n d u s. Võtame

$$1 - e^x = z;$$

siis

$$e^x dx = -dz$$

ja

$$\int \frac{2e^x\,dx}{(1-e^x)^2} = \int \frac{-2dz}{z^2} = -2\int z^{-2}\,dz =$$

$$= -2\cdot\frac{z^{-1}}{-1} + C = \frac{2}{z} + C = \frac{2}{1-e^x} + C.$$

Näide 8. Leida $\int \frac{dx}{9+x^2}$.

Lahendus. Kuna otsitav integraal meenutab tabelis leiduvat integraali [(X) § 104], siis on tarvis vastavate teisenduste teel anda talle kuju, mis võimaldaks kasutada nimetatud valemit. Selleks toome kordaja $\frac{1}{9}$ integraali märgi ette.

Saame:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}.$$

Võtame nüüd

$$\frac{x}{3} = z;$$

siis

$$dx = 3dz$$

ja

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{3dz}{1+z^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tan} z + C = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{3} + C.$$

Näide 9. Leida $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

Lahendus. See integraal on järgmiste teisenduste teel taandatav tabelis leiduvale integraalile [(IX) § 104]:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3\left(1-\frac{5}{3}x^2\right)}} =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{3}\sqrt{1-\frac{5}{3}x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}}.$$

Võtame

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x = z;$$

siis

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}dx = dz,$$

millest

$$dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz.$$

Järelikult,

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}dz}{\sqrt{1-z^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin z + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x + C$$

ehk

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x + C.$$

Näide 10. Leida $\int \tan x\,dx$.

Lahendus.

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x}.$$

Võtame

$$\cos x = z;$$

siis

$$\sin x\,dx = -dz$$

ja

$$\int \tan x\,dx = \int -\frac{dz}{z} = -\ln z + C = -\ln\cos x + C.$$

Näide 11. Leida $\int \cos^2 x\,dx$.

Lahendus. Rakendame valemit

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

siis

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{2}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx.$$

Viimase integraali leidmiseks võtame

$$2x = z;$$

siis

$$dx = \frac{1}{2}\,dz$$

ja

$$\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \cos z \cdot \frac{1}{2}\,dz = \frac{1}{4}\int \cos z\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\sin z + C = \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Järelikult,

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Harjutusi.

1. $\int (3+5x)^4\,dx.$ 2. $\int (a+bx)^m\,dx.$ 3. $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}.$

4. $\int \sqrt{x+2}\,dx.$ 5. $\int 2\sqrt[3]{4x-3}\,dx.$ 6. $\int \sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx.$

7. $\int \frac{3\,dx}{\sqrt[4]{3x+5}}.$ 8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^2}}.$ 9. $\int \frac{dx}{1+2x}.$

10. $\int \frac{2\,dx}{3-4x}$.

11. $\int \sin 2x\,dx$.

12. $\int \cos 4x\,dx$.

13. $\int \sin(1-t)\,dt$.

14. $\int \cos\left(\frac{1}{2}\varphi + 2\right) d\varphi$.

15. $\int \left(\cos\frac{x}{3} - \sin 3x\right) dx$.

16. $\int \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

17. $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$.

18. $\int \frac{dx}{\cos^2(1-2x)}$.

19. $\int e^{2\varphi}\,d\varphi$.

20. $\int e^{-3\Theta}\,d\Theta$.

21. $\int 2e^{-\frac{1}{2}\omega+1}\,d\omega$.

22. $\int \frac{dx}{2e^x}$.

23. $\int \frac{e^x+1}{e^x}\,dx$.

24. $\int 3^{-t+2}dt$.

25. $\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

26. $\int \frac{2t\,dt}{(2t^2-1)^2}$.

27. $\int \frac{3v^2\,dv}{(2-v^3)^4}$.

28. $\int \frac{t\,dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

29. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3-1}}$.

30. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$.

31. $\int t^2\sqrt{1+2t^3}\,dt$.

32 $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$.

33. $\int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{2-3\cos\varphi}$.

34. $\int \frac{\sin t\,dt}{\cos^2 t}$.

35. $\int \frac{\cos\omega\,d\omega}{\sin^4\omega}$.

36. $\int \frac{\cos x\,dx}{(2-\sin x)^2}$.

37. $\int \frac{\cos t\,dt}{\sqrt[3]{1+\sin t}}$.

38. $\int \sin\alpha\cos\alpha\,d\alpha$.

39. $\int \sin^3\varphi\cos\varphi\,d\varphi$.

40. $\int \sqrt{\cos\Theta}\sin\Theta\,d\Theta$.

41. $\int \cos\alpha\,(1+\sin\alpha)^2\,d\alpha$.

42. $\int x^2\sin 3x^3\,dx$.

43. $\int e^{\cos x}\sin x\,dx$.

44. $\int \cot x\,dx$.

45. $\int \frac{e^x\,dx}{1+e^x}$.

46. $\int \frac{2e^x\,dx}{(2+e^x)^2}$.

47. $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

48. $\int \frac{e^u\,du}{\sqrt{2+e^u}}$.

49. $\int xe^{x^2}\,dx$.

50. $\int \frac{\cos 2x\,dx}{1+\sin 2x}$.

51. $\int \sin^2 x\,dx$.

52. $\int \frac{dx}{4+x^2}$.

53. $\int \frac{dx}{2+x^2}$.

54. $\int \frac{dt}{5+4t^2}$.

55. $\int \frac{dt}{\sqrt{1-4t^2}}$.

56. $\int \frac{d\alpha}{\sqrt{9-\alpha^2}}$.

57. $\int \frac{du}{\sqrt{9-4u^2}}$.

58. $\int \frac{d\Theta}{\sqrt{3-4\Theta^2}}$.

59. $\int \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}$.

60. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x}dx$.

61. $\int \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}$.

62. $\int \tan 2x\,dx$.

63. $\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$.

64. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

65. $\int \frac{\ln x\,dx}{x}$.

66. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

67. $\int \sin^3 x\,dx$.

68. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

69. $\int \frac{x\,dx}{1+x}$.

70. $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$.

71. $\int \sqrt{1+\cos x}\,dx$.

72. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$.

§ 110. Määratud integraali arvutamine asendusvõtte korral. Määratud integraali arvutamiseks asendusvõtte kasutamise korral toimitakse niisamuti nagu paragrahvis 109 lahendatud näidetes. Kuid antud juhul tuleb tähelepanu pöörata ühele iseärasusele. Nagu juba selgitasime, seisneb asendusvõte selles, et antud määramata integraali taandamiseks tuntud integraalile väljendatakse argument uue muutuja kaudu, seejärel leitakse määramata integraal ja saadud tulemus väljendatakse uuesti esialgse muutuja (argumendi) kaudu. Määratud integraali korral pole aga vajadust tagasi minna esialgsele muutujale.

Vaatleme mõningaid näiteid.

N ä i d e 1. Leida

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3}.$$

L a h e n d u s. Võtame

$$1-x^2=z; \qquad (1)$$

siis

$$-2x\,dx = dz,$$

millest

$$x\,dx = -\frac{dz}{2}.$$

Kuna me tõime sisse uue muutuja, mis on esialgsega seotud võrdusega (1), siis muutuja z muutumise piirid, s. t. integreerimise rajad, on esialgsetest erinevad. Uued rajad leiame võrdusest (1), kui argument x asendada tema väärtustega 0 ja $\frac{1}{2}$. Pärast asendamist saame:

$$z_a = 1 - 0 = 1 \text{ (alamraja)},$$
$$z_{\ddot{u}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \text{ (ülemraja)}.$$

Seega leidsime, et x muutumise vahemikule 0-st $\frac{1}{2}$-ni vastab uue muutuja z muutumise vahemik 1-st $\frac{3}{4}$-ni. Asendades antud integraalis $1 - x^2$ ja $x\,dx$ vastavate avaldistega uue muutuja kaudu ja muutes vastavalt ka integreerimise rajad, saame lahenduse järgmisel kujul:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{5x\,dx}{(1-x^2)^3} = \int_1^{\frac{3}{4}} \frac{5\left(-\frac{dz}{2}\right)}{z^3} = -\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} \frac{dz}{z^3} = -\frac{5}{2}\int_1^{\frac{3}{4}} z^{-3}dz =$$

$$= -\frac{5}{2}\cdot\frac{z^{-2}}{-2}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{z^2}\Bigg|_1^{\frac{3}{4}} = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{\frac{9}{16}} - 1\right) =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\frac{16}{9} - 1\right) = \frac{35}{36}.$$

Näide 2. Leida

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9 + 16x^2}.$$

L a h e n d u s. Toome kordaja $\frac{3}{9}$ integraali märgi ette:

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2} = \frac{3}{9}\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\frac{16}{9}x^2} = \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{1+\left(\frac{4}{3}x\right)}.$$

Võtame

$$\frac{4}{3}x = z; \tag{2}$$

siis

$$\frac{4}{3}dx = dz,$$

millest

$$dx = \frac{3}{4}dz.$$

Leiame uued rajad:

$$z_{\text{a}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$z_{\text{ü}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4} = 1.$$

Järelikult,

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{3\,dx}{9+16x^2} = \frac{1}{3}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{\frac{3}{4}dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{4}\arctan z\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\arctan 1 - \arctan\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{48}.$$

Harjutusi.

1. $\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx.$ 2. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}.$ 3. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}.$

4. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

5. $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos\frac{x}{3}\,dx$.

6. $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{2\,dx}{3\cos^2 3x}$.

7. $\int_1^2 \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

8. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\,dx}{2\sqrt{1+x^2}}$.

9. $\int_0^3 \frac{2x\,dx}{\sqrt{16+x^2}}$.

10. $\int_{-1}^{+1} \frac{x^2\,dx}{3+2x^3}$.

11. $\int_{-1}^{2} \frac{2x\,dx}{(2x^2+1)^2}$.

12. $\int_0^1 \frac{6x^2\,dx}{1+2x^3}$.

13. $\int_2^4 \frac{15x\,dx}{(x^2-1)^3}$.

14. $\int_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2-7}\,dx$.

15. $\int_1^2 (x^2-1)^3 x\,dx$.

16. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

17. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin x}$.

18. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$.

19. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x\,dx}{\cos^4 x}$.

20. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^3 x\cos x\,dx$.

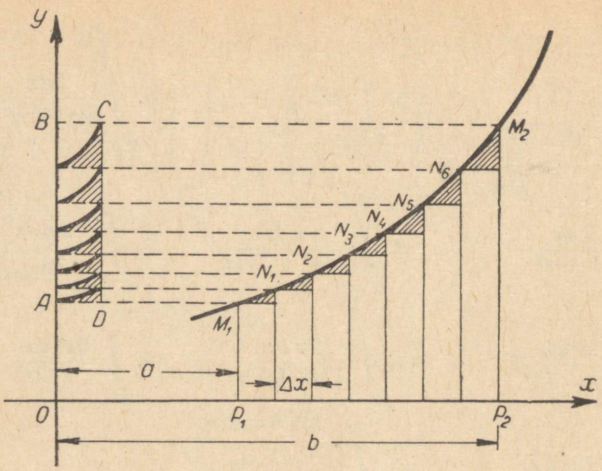
21. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\cos^2 x\,dx$.

22. $\int_0^{0{,}4} \frac{5\,dx}{4+25x^2}$.

23. $\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

24. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$.

§ 111. Määratud integraal kui summa piirväärtus. Võtame kõvera, mille võrrand $y=f(x)$ kujutab pidevat



Joon. 113.

positiivset funktsiooni, mis kasvab argumendi väärtuste vahemikus $x = a$ kuni $x = b$ (joon. 113).

Vaatleme pindala $M_1M_2P_2P_1$, mis on piiratud kaarega M_1M_2, sirgetega P_1M_1 ja P_2M_2 ning x-teljega. Tähistame selle pindala tähega S. Määratud integraali geomeetrilise vaste põhjal (§ 108)

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Jagame lõigu P_1P_2 n võrdseks osaks ja tähistame iga osa Δx-ga. Saadud jaotuspunktidest tõmbame ristsirged lõikumiseni kõveraga.

Kui $OP_1 = a$, $OP_2 = b$, siis

$$P_1M_1 = f(a),\ P_2M_2 = f(b).$$

Joonestades tõmmatud ristlõikude otspunktidest sirged paralleelselt x-teljega, saame pindala $M_1M_2P_2P_1$ kujutada ristkülikute pindalade ja kõverjooneliste kolmnurkade pindalade summana. Tähistades ristkülikute pindalade summa tähega S_1 ja kõverjooneliste kolmnurkade pindalade summa tähega S_2, saame:

$$S = S_1 + S_2,$$

millest

$$S - S_1 = S_2. \tag{2}$$

Olgu punktide N_1, N_2, N_3 jne. abstsissid vastavalt x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}; nende punktide ordinaadid on siis $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, ..., $f(x_{n-1})$. Ristkülikute pindalade summa, alates vasakult esimesega ja lõpetades paremalt viimasega, on

$$S_1 = f(a)\Delta x + f(x_1)\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \ldots + f(x_{n-1})\Delta x$$

ehk

$$S_1 = \sum_a^b f(x)\Delta x. \tag{3}$$

Võrduses (3) tähistab Σ (sigma) summat; $f(x)\Delta x$ näitab, missuguse kujuga avaldisi liidetakse; tähed a ja b sümboli Σ all ja peal näitavad, et summeerimine toimub argumendi väärtusest $x = a$ väärtuseni $x = b$.

Kui lõigu P_1P_2 jaotuste arvu n tõkestamatult suurendada, siis $\Delta x \to 0$ ja suurused S_1 ja S_2 saavad muutujateks. Näitame, et sel juhul S_2 on lõpmatult kahanev suurus. Selleks nihutame kõverjoonelisi kolmnurki paralleelselt x-teljega nii, et nad kõik satuksid ristkülikusse $ABCD$, mille alus

$$AD = \Delta x$$

ja kõrgus

$$AB = P_2M_2 - P_1M_1 = f(b) - f(a).$$

Ristküliku $ABCD$ pindala on

$$[f(b) - f(a)]\Delta x.$$

Nagu on näha jooniselt 113

$$S_2 < [f(b) - f(a)]\Delta x. \tag{4}$$

Kui $\Delta x \to 0$, siis $[f(b) - f(a)]\Delta x$ kui jääva suuruse korrutis lõpmatult kahaneva suurusega on samuti lõpmatult kahanev suurus; seega vastavalt võrratusele (4) on ka S_2 lõpmatult kahanev suurus.

Seega, võrduse (2) vasakul poolel on jääva suuruse S ja muutuva suuruse S_1 vahe, paremal poolel aga lõpmatult kahanev suurus. Vastavalt piirväärtuse definitsioonile on siis aga suurus S muutuja S_1 piirväärtuseks, s. t.

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} S_1$$

ehk vastavalt võrdustele (1) ja (3)

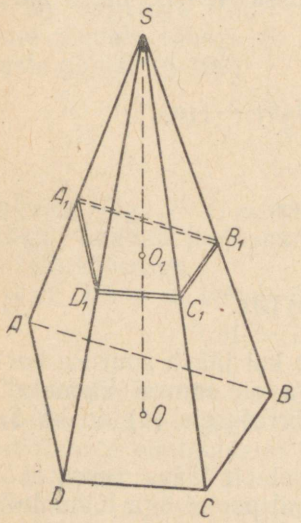
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x. \qquad (5)$$

Võrduses (5) piirväärtuse sümboli all asetsevat summat nimetatakse *integraalsummaks.*

Seega, *määratud integraal lõpliku alam- ja ülemrajaga võrdub integraalsumma piirväärtusega, kui selle summa liidetavate arv tõkestamatult kasvab ning iga liidetav läheneb nullile,* s. t.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\,\Delta x.$$

Samasugusele tulemusele jõuame, kui vaatleme positiivset funktsiooni, mis antud x väärtuste vahemikus kahaneb; või positiivset funktsiooni, mis mõnedes piirkondades kasvab, teistes aga kahaneb; või ka negatiivset funktsiooni, s. t. niisugust funktsiooni, mille graafik asetseb allpool x-telge. Nimetatud juhtude tõestustega võib soovi korral tutvuda N. Tarassovi tehnikumidele määratud kõrgema matemaatika õpiku järgi (1954. a. väljaanne, v. k., § 83).



Joon. 114.

Saadud tulemus näitab, et integreerimist võib vaadelda kui summeerimise protsessi, s. t. terve leidmist tema osade järgi. Seoses sellega ongi integraal saanud oma nimetuse ladinakeelsest sõnast *integer* (terve); ka tema sümbol (pikendatud täht S, millega harilikult tähistatakse summat) on seotud määratud integraali eespool nimetatud omadusega.

Peatükis XII peatume pikemalt valemi (5) rakendamisel. Siin vaatleme ainult ühte ülesannet, nimelt püramiidi ruumala arvutamist integraali abil.

Võtame püramiidi, mille põhja pindala on Q ja kõrgus H, ning jaotame selle püramiidi põhjaga paralleelsete tasapindadega n plaadiks (joon. 114). Kui plaatide arvu tõkestamatult suurendada, siis iga plaadi paksus muutub lõpmatult kahanevaks suuruseks. Sel juhul võib iga plaati vaadelda kui prismat. Valime neist ühe, näiteks $A_1B_1C_1D_1$. Tähistame tema põhja pindala, kõrguse ja ruumala vastavalt tähtedega q, Δy ja Δv. Siis

$$\Delta v = q\Delta y.$$

Kuna plaadi põhja pindala sõltub plaadi ja püramiidi põhja vahelisest kaugusest $OO_1 = y$, siis väljendame q kauguse y kaudu. Püramiidi põhjaga paralleelse lõike omaduse põhjal võime kirjutada:

$$\frac{q}{Q} = \frac{(H-y)^2}{H^2},$$

millest

$$q = \frac{Q}{H^2}(H-y)^2.$$

Nüüd võime võrduse (6) kirjutada kujul:

$$\Delta v = \frac{Q}{H^2}(H-y)^2\Delta y.$$

Siin Δv on tõkestamatult kahanev suurus, sest $\Delta y \to 0$, kui $n \to \infty$. Seega püramiidi ruumala võib vaadelda kui tõkestamatult kahanevate $\left[\frac{Q}{H^2}(H-y)^2\Delta y\right]$-kujuliste suuruste summa piirväärtust, s. t.

$$v = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{0}^{H} \frac{Q}{H^2}(H-y)^2\Delta y$$

ehk vastavalt käesoleva paragrahvi valemile (5)

$$v = \int_0^H \frac{Q}{H^2}(H-y)^2 dy.$$

Arvutades selle integraali tuntud eeskirjade põhjal, saame:

$$v = \frac{Q}{H^2}\int_0^H (H^2 - 2Hy + y^2)\,dy = \frac{Q}{H^2}\left(H^2y - Hy^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{Q}{H^2}\left(H^3 - H^3 + \frac{H^3}{3}\right) = \frac{1}{3}QH.$$

Püramiidi ruumala võrdub tema põhja pindala ja kõrguse ühe kolmandiku korrutisega.

XII peatükk.

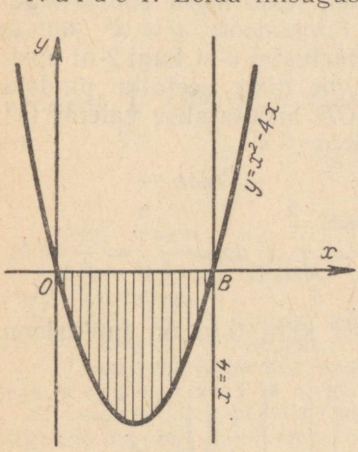
INTEGRAALI RAKENDUSI.

§ 112. Kujundite pindalad. Paragrahvis 108 tõestasime, et kui $f(x) > 0$ x väärtuste vahemikus a-st b-ni, siis kujundi pindala, mis on piiratud kõvera $y = f(x)$ graafikuga, x-teljega ning sirgetega $x = a$ ja $x = b$, väljendub määratud integraaliga

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Järgmistes näidetes selgitame, kuidas seda valemit rakendada ka teistel juhtudel.

N ä i d e 1. Leida niisuguse kujundi pindala, mis on piiratud kõveraga $y = x^2 - 4x$ ja x-teljega (joon. 115).



Joon. 115.

L a h e n d u s. Parabooli ja x-telje lõikepunktide abstsissid on 0 ja 4 (koordinaatide algus ja punkt B). Otsitava pindala (joonisel viirutatud) võime lugeda vasakult ja paremalt piiratuks sirgetega $x = 0$ ja $x = 4$, millede lõigud, mis jäävad parabooli ja x-telje vahele, võrduvad nulliga.

Antud funktsioon on x väärtuste vahemikus 0-st kuni 4-ni negatiivne.

Saab näidata, et kui $f(x) \leqslant 0$, annab valem (1) negatiivse arvu, mis oma absoluutväärtuselt võrdub otsitava pindalaga.

Järelikult, *kui* $f(x) \leqslant 0$, *siis pindala, mis on piiratud kõveraga* $y = f(x)$, *abstsissteljega ning sirgetega* $x = a$ *ja* $x = b$, *arvutatakse valemi järgi*

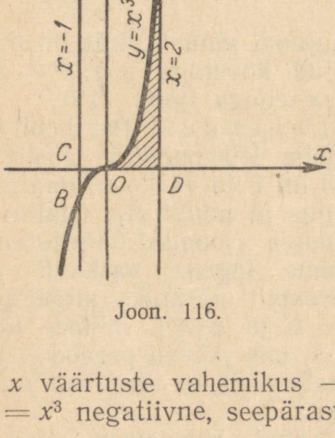
$$S = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

Seega,

$$S = \left| \int_0^4 (x^2 - 4x)\,dx \right| = \left| \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right) \Bigg|_0^4 \right| = \left| \frac{64}{3} - 32 \right| =$$

$$= \left| -10\frac{2}{3} \right| = 10\frac{2}{3}.$$

Näide 2. Leida niisuguse kujundi pindala, mis on piiratud kõveraga $y = x^3$, sirgetega $x = -1$ ja $x = 2$ ning x-teljega (joon. 116).



Joon. 116.

Lahendus. Nagu jooniselt näha, koosneb otsitav pindala kahest pindalast AOD ja BOC, mis asetsevad üks ühel, teine teisel pool x-telge.

Funktsioon $y = x^3$ on x väärtustel 0-st kuni 2-ni positiivne ning seetõttu pindala AOD arvutatakse valemi (1) järgi

$$S_{AOD} = \int_0^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4} \Bigg|_0^2 = \frac{2^4}{4} = 4.$$

x väärtuste vahemikus -1-st kuni 0-ni on funktsioon $y = x^3$ negatiivne, seepärast

$$S_{BOC} = \left| \int_{-1}^0 x^3\,dx \right| = \left| \frac{x^4}{4} \Bigg|_{-1}^0 \right| = \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

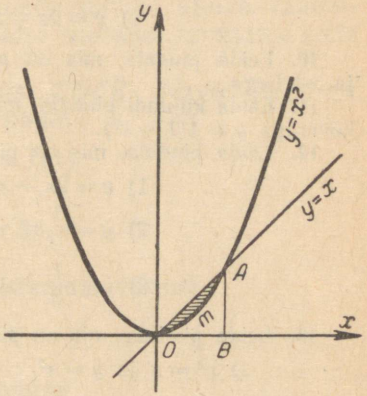
Järelikult, kogu otsitav pindala

$$S = S_{AOD} + S_{BOC} = 4\frac{1}{4}. \qquad (2)$$

N ä i d e 3. Leida kujundi pindala, mis on piiratud joontega $y = x^2$ ja $y = x$ (joon. 117).

L a h e n d u s. Antud jooned lõikuvad koordinaatide alguses ja punktis $A(1\,;\,1)$ (lõikepunkti koordinaadid leiame, kui lahendame antud joonte võrranditest koosneva süsteemi). Tõmbame punktist A (joon. 117) x-teljele ristsirge AB. See osutub sirge $x = 1$ lõiguks. Otsitav pindala on kolmnurga OAB ja kujundi $OmAB$ pindalade vahe, s. t.

$$S_{OmA} = S_{OAB} - S_{OmAB}.$$



Joon. 117.

Pindala OAB on piiratud funktsiooni $y = x$ graafikuga, sirgetega $x = 0$ ja $x = 1$ ning x-teljega.

Pindala $OmAB$ on piiratud kõveraga $y = x^2$, sirgetega $x = 0$ ja $x = 1$ ning x-teljega. Funktsioonid $y = x$ ja $y = x^2$ on x väärtuste vahemikus 0-st kuni 1-ni positiivsed.

Järelikult, valemi (1) põhjal, arvestades võrdust (2), saame:

$$S_{OmA} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Harjutusi.

1. Leida kujundi pindala, mis on piiratud sirgetega $y = 5x$, $x = 2$ ja x-teljega.
2. Leida kujundi pindala, mis on piiratud sirgetega $y = 4x - 5$, $x = -3$, $x = -2$ ja x-teljega.
3. Leida kujundi pindala, mis on piiratud kõveraga $y = 2x^2$, x-teljega ja sirgetega $x = 2$ ja $x = 4$.
4. Leida kujundi pindala, mis on piiratud kõveraga $y^2 = 9x$ ja sirgetega $x = 1$ ja $x = 9$.
5. Kõveral $y^2 = 4x$ on antud punkt, mille ordinaat on 6. Leida kujundi pindala, mis on piiratud antud kõveraga, y-teljega ja sirgega $y = 6$.
6. Leida kujundi pindala, mis on piiratud kõveraga $y = x^2 - x$, x-teljega ning sirgetega $x = 0$ ja $x = 2$.

7. On antud kõver $y = 2x^2 - x + 2$. Leida pindala, mis on piiratud antud kõveraga, koordinaattelgedega ja sirgega $x = 3$.

8. Määrata parabooli segmendi pindala, kui selle alus $a = 6$ ning kõrgus $h = 8$.

9. Leida kujundi pindala, mis on piiratud x-teljega ja joontega

$$1)\ y = 2x - x^2,\ 2)\ y = 9 - x^2.$$

10. Leida pindala, mis on piiratud sinusoidi ühe lainepikkusega ja x-teljega.

11. Leida kujundi pindala, mis on piiratud koordinaattelgedega ja kõveraga $y = 4(1 - x^3)$.

12. Leida pindala, mis on piiratud joontega:

$$1)\ y = 2x - x^2 \text{ ja } y = x,$$

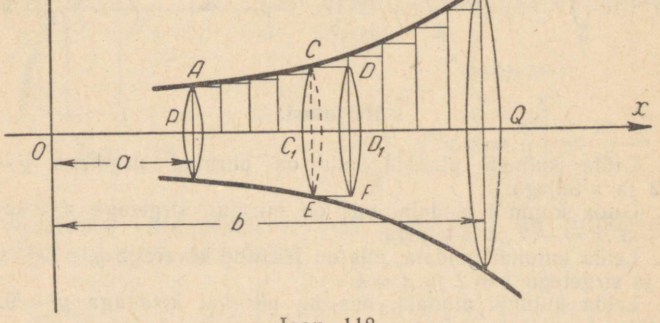
$$2)\ y = \frac{1}{2}x^2 \text{ ja } y = 4 - x,$$

$$3)\ y = \frac{1}{4}x^3 \text{ ja } y = x.$$

13. Leida pindala, mis on piiratud järgmiste kõveratega:

$$1)\ y^2 = x \text{ ja } y = x^2, \qquad 2)\ y = x^2 \text{ ja } y = 1 - x^2.$$

§ 113. Pöördkeha ruumala. Olgu antud kõver, mis on määratud võrrandiga $y = f(x)$, ja sellel kõveral kaks punkti A ja B abstsissidega $OP = a$ ning $OQ = b$ (joon. 118). Kui kujundit $ABQP$ pöörata ümber x-telje, siis tekib mingisugune pöördkeha.



Joon. 118.

Jaotame lõigu PQ n võrdseks osaks, kusjuures iga osa tähistame Δx-ga, ja jaotuspunktidest tõmbame ristsirged x-teljele kuni lõikumiseni kõveraga. Joonestades saadud

lõikepunktidest paralleelsed sirged x-teljega kuni lõikumiseni naaber-ristsirgega, jaotame kujundi $ABQP$ n ristkülikuks ja n kõverjooneliseks kolmnurgaks. Kui kujundit $ABQP$ pöörata x-telje ümber, siis iga ristkülik moodustab silindri. Nende silindrite ruumalade summa annab vaadeldava pöördkeha ruumala ligikaudse suuruse. Arvutame selle summa.

Võtame ühe silindri, näiteks $CDFE$. Nagu jooniselt näeme, on selle silindri põhja raadius

$$C_1C = y = f(x)$$

ja kõrgus

$$C_1D_1 = \Delta x.$$

Järelikult, vaadeldava silindri ruumala võrdub

$$\pi y^2 \Delta x$$

ja kõigi silindrite ruumalade summa

$$\sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

See avaldis kujutabki endast vaadeldava pöördkeha ruumala ligikaudset väärtust, s. t.

$$v \approx \sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Eeldame nüüd, et lõigu PQ jaotuste arv tõkestamatult kasvab; siis Δx ning, järelikult, ka korrutis $\pi y^2 \Delta x$ saavad lõpmatult kahanevateks suurusteks.

Minnes üle piirväärtusele, saame:

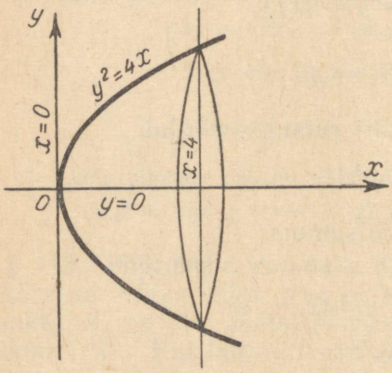
$$v = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x.$$

Vastavalt valemile (5) § 111

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b \pi y^2 \Delta x = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx. \qquad (1)$$

N ä i d e. Joontega $y^2 = 4x$, $x = 0$, $x = 4$ ja $y = 0$ piiratud kujund pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud keha ruumala (joon. 119).



Joon. 119.

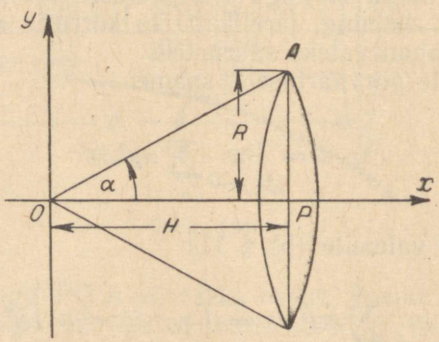
L a h e n d u s. Tekkinud keha nimetatakse pöördparaboloidiks. Vastavalt valemile (1) saame:

$$v = \pi \int_0^4 y^2 dx = \pi \int_0^4 4x\, dx =$$

$$= \pi \cdot 2x^2 \Big|_0^4 = \pi \cdot 2 \cdot 4^2 = 32\pi.$$

Kasutades valemit (1) võib tuletada koonuse, kera ja kera osade ruumalade valemid.

P ü s t r i n g k o o n u s e r u u m a l a. Püstringkoonus saadakse täisnurkse kolmnurga OAP pöörlemisel ümber x-telje (joon. 120). Sirge OA moodustab seejuures koonilise pinna. Koostame sirge OA võrrandi.



Joon. 120.

Tähistame

$$OP = H,\ PA = R,$$

siis sirge OA võrrand on:

$$y = kx = \tan\alpha \cdot x = \frac{PA}{OP}x = \frac{R}{H}x.$$

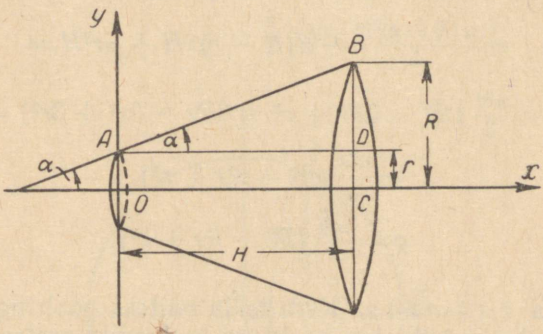
Rakendades valemit (1), saame:

$$v = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H =$$

$$= \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$$

$$v = \frac{1}{3}\pi R^2 H. \qquad (2)$$

T ü v i k o o n u s e r u u m a l a. Tüvikoonuse saame, kui pöörame täisnurkset trapetsit $ABCO$ ümber x-telje (joon. 121). Leiame moodustaja AB võrrandi. Tähistame:



Joon. 121.

$$OA = r,\ CB = R,\ OC = H$$

ning esitame AB võrrandi kujul $y = kx + b$.

Nagu jooniselt näeme

$$b = r,\ k = \tan\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{R-r}{H}.$$

Järelikult on otsitav võrrand järgmine:

$$y = \frac{R-r}{H}x + r.$$

Vastavalt valemile (1):

$$v = \pi \int_0^H \left(\frac{R-r}{H}x + r\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_0^H \left[\frac{(R-r)^2}{H^2}x^2 + \frac{2(R-r)r}{H}x + r^2\right] dx =$$

$$= \pi \int_0^H \frac{(R-r)^2}{H^2}x^2 dx + \pi \int_0^H \frac{2(R-r)r}{H}x\,dx + \pi \int_0^H r^2\,dx =$$

$$= \frac{\pi(R-r)^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^H + \frac{2\pi(R-r)r}{H} \cdot \frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H + \pi r^2 \cdot x\Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{\pi(R-r)^2}{H^2} \cdot \frac{H^3}{3} + \frac{2\pi(R-r)r}{H} \cdot \frac{H^2}{2} + \pi r^2 H =$$

$$= \frac{\pi(R-r)^2 H}{3} + \pi(R-r)rH + \pi r^2 H =$$

$$= \frac{\pi H}{3}(R^2 - 2Rr + r^2 + 3Rr - 3r^2 + 3r^2) =$$

$$= \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

$$v = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2). \qquad (3)$$

K e r a r u u m a l a. Kera tekib näiteks poolringi pöörlemisel ümber x-telje, kui poolringi keskpunkt asetseb koordinaatide alguses (joon. 122). Olgu joonisel kujutatud ringjoone raadius R, siis ringjoone võrrand omab kuju:

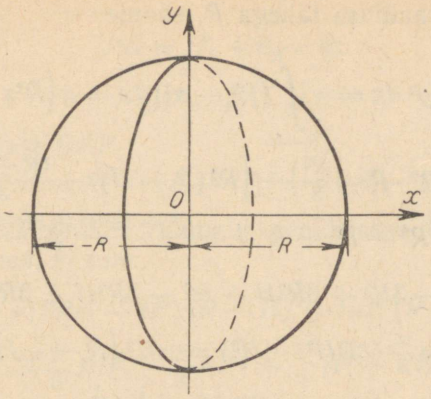
$$x^2 + y^2 = R^2,$$

millest

$$y^2 = R^2 - x^2.$$

Vastavalt valemile (1) leiame:

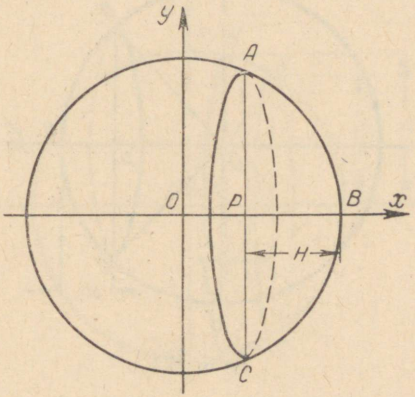
$$v = \pi \int_{-R}^{+R} y^2\,dx = \pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2)\,dx =$$



Joon. 122.

$$= 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$v = \frac{4}{3}\pi R^3. \qquad (4)$$



Joon. 123.

K e r a s e g m e n d i r u u m a l a. Kera segmendi võib saada, kui pöörata poolt ringi segmenti ABP ümber x-telje (joon. 123). Tähistades kera segmendi kõrguse PB tähega

H ja ringi raadiuse tähega R, saame:

$$v = \pi \int_{R-H}^{R} y^2\,dx = \pi \int_{R-H}^{R} (R^2 - x^2)\,dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Bigg|_{R-H}^{R} =$$

$$= \pi \left\{\left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3}\right) - \left[R^2 (R - H) - \frac{(R-H)^3}{3}\right]\right\} =$$

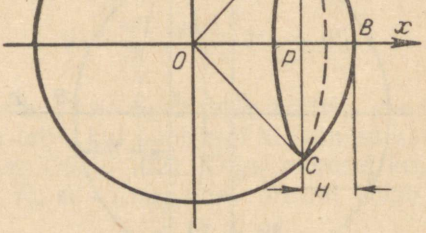
$$= \pi \left(\frac{2}{3} R^3 - R^3 + R^2 H + \frac{R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3} (2R^3 - 3R^3 + 3R^2 H + R^3 - 3R^2 H + 3RH^2 - H^3) =$$

$$= \frac{\pi}{3} (3RH^2 - H^3) = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right).$$

$$v = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H\right). \qquad (5)$$

K e r a s e k t o r i r u u m a l a. Kera sektorit võib vaadelda kui keha, mis tekib ringi sektori OAB pöörlemisel ümber x-telje (joon. 124). Nagu jooniselt näha, on kera



Joon. 124.

sektori ruumala võrdne koonuse OAC ja kera segmendi ABC ruumalade summaga. Rakendades valemeid (2) ja (5), leiame kera sektori ruumala:

$$v = \frac{1}{3} \pi PA^2 \cdot OP + \pi \cdot PB^2 \left(OB - \frac{PB}{3}\right).$$

Tähistame

$$PB = H,\ OB = R;$$

siis

$$OP = R - H$$

ja kolmnurgast OAP

$$PA^2 = R^2 - (R - H)^2 = 2RH - H^2.$$

Asetades kera sektori ruumala avaldisesse PB, OB, OP, PA^2 väärtused, saame:

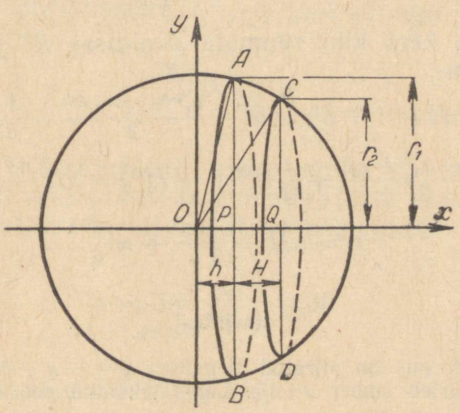
$$v = \frac{1}{3}\pi(2RH - H^2)(R - H) + \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3}R^2H - \frac{2}{3}RH^2 - \frac{1}{3}RH^2 + \frac{1}{3}H^3 + RH^2 - \frac{1}{3}H^3\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^2H.$$

$$v = \frac{2}{3}\pi R^2H. \qquad (6)$$

Kera kihi ruumala. Kera kiht tekib kujundi $ACQP$ pöörlemisel ümber x-telje, kus AC on ringjoone kaar, mille keskpunkt on koordinaatide alguses (joon. 125).



Joon. 125.

Tähistame:

$$OA = OC = R, \qquad OP = h,$$
$$PA = r_1, \qquad PQ = H,$$
$$QC = r_2,$$

siis vastavalt valemile (1) kera kihi ruumala

$$v = \pi \int_{OP}^{OQ} y^2 dx = \pi \int_{h}^{H+h} (R^2 - x^2)\, dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_{h}^{H+h} =$$

$$= \pi \left\{ \left[R^2 (H+h) - \frac{(H+h)^3}{3} \right] - \left(R^2 h - \frac{h^3}{3} \right) \right\} =$$

$$= \pi \left(R^2 H + R^2 h - \frac{H^3 + 3H^2 h + 3Hh^2 + h^3}{3} - R^2 h + \frac{h^3}{3} \right) =$$

$$= \pi \frac{3R^2 H - H^3 - 3H^2 h - 3Hh^2 - h^3 + h^3}{3} =$$

$$= \pi H \left(R^2 - h^2 - Hh - \frac{1}{3} H^2 \right).$$

Kuid kuna $R^2 = r_1^2 + h^2$ (kolmnurgast OAP) ja $R^2 = r_2^2 + (H+h)^2$ (kolmnurgast OCQ), siis

$$r_1^2 + h^2 = r_2^2 + (H+h)^2$$

ehk

$$r_1^2 + h^2 = r_2^2 + H^2 + 2Hh + h^2,$$

millest

$$Hh = \frac{r_1^2 - r_2^2 - H^2}{2}.$$

Asetades kera kihi ruumala avaldisse R^2 ja Hh väärtused, saame:

$$v = \pi H \left(r_1^2 + h^2 - h^2 - \frac{r_1^2 - r_2^2 - H^2}{2} - \frac{1}{3} H^2 \right) =$$

$$= \pi H \left(\frac{2r_1^2 - r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{3} H^2 \right) = \pi H \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \pi \frac{H^3}{6}.$$

$$v = \pi H \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \pi \frac{H^3}{6}. \qquad (7)$$

Harjutusi.

1. Kujund, mis on piiratud sirgetega $y = -x + 3$, $x = 0$, $x = 3$ ja $y = 0$, pöörleb ümber x-telje. Leida tekkinud pöördkeha ruumala.

2. Kujund on piiratud kõveraga $y = \frac{1}{x}$ ning sirgetega $x = 2$, $x = 3$ ja $y = 0$. Leida selle kujundi pöörlemisel ümber x-telje tekkinud keha ruumala.

3. Kera raadius $R = 5$ cm. Sellest kerast on ära lõigatud segment kõrgusega $h = 2$ cm. Leida segmendi ruumala.

4. Leida kera sektori ruumala, kui sektori põhja raadius $r = 3$ cm ja kera raadius $R = 5$ cm.

5. Leida kera kihi ruumala, kui kihi põhjade raadiused $r_1 = 5$ cm ja $r_2 = 8$ cm ning kõrgus $h = 3$ cm.

6. Tuletada pöördellipsoidi ruumala valem, kui pöörlemine toimub ümber x-telje.

7. Leida pöördparaboloidi ruumala, kui pöördparaboloidi põhja läbimõõt on 60 cm ja kõrgus 50 cm.

8. Leida keha ruumala, mis tekib kõvera $y = \sin x$ ja sirgete $x = 0$ ja $x = \pi$ poolt piiratud kujundi pöörlemisel ümber x-telje.

9. Leida keha ruumala, mis tekib niisuguse kujundi pöörlemisel ümber x-telje, mis on piiratud abstsissteljega ja kõveraga

1) $y = 2x - x^2$, 2) $y = x^2 - 4$.

§ 114. Keha poolt läbitud tee pikkus. Kui aja muutudes muutub ka kiirus, siis kiirus on aja funktsioon. See tähendab

$$v = f(t).$$

Et sel juhul leida keha poolt läbitud tee pikkust, jaotame ajavahemiku alates t_1-st kuni t_2-ni n võrdseks osaks ja tähistame iga osa Δt-ga. Kiirus erinevais ajavahemikes on erinev, kuid küllalt väikese ajavahemiku Δt korral võib kiirust lugeda konstantseks. Seepärast väljendub keha poolt läbitud tee pikkus ajavahemiku Δt jooksul ligikaudu avaldisega $f(t)\Delta t$, ajavahemiku $t_2 - t_1$ jooksul aga avaldisega

$$\sum_{t_1}^{t_2} f(t)\Delta t.$$

Suurendame tõkestamatult ajavahemiku $t_2 - t_1$ jaotuste arvu n; siis Δt ja seepärast ka korrutis $f(t)\Delta t$ saavad lõpmatult kahanevateks suurusteks. Seega kogu otsitav teepikkus:

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} f(t)\Delta t$$

ehk vastavalt valemile (5) § 111

$$s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{t_1}^{t_2} f(t)\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt,$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt. \qquad (1)$$

Näide. Keha liikumise kiirus on antud võrrandiga

$$v = 2t^2 + t \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}.$$

Leida 6 sek. jooksul läbitud tee pikkus alates liikumise algusest.

Lahendus. Vastavalt valemile (1) saame

$$s = \int_0^6 (2t^2 + t)\,dt = \left(\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^6 =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 6^3 + \frac{1}{2} \cdot 6^2 = 162 \text{ cm}.$$

Harjutusi.

1. Tühjuses langeva keha kiirus on määratud valemiga

$$v = 9{,}8t \frac{\text{m}}{\text{sek.}}.$$

Kui pika tee läbib keha esimese 10 sek. jooksul?

2. Leida tühjuses langeva keha teepikkuse valem, kui langemise kiirus

$$v = gt \frac{\text{m}}{\text{sek.}}.$$

3. Keha liikumise kiirus on määratud valemiga

$$v = 3t^2 - 2t \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}.$$

Kui pika tee läbib keha 5 sek. jooksul alates liikumise algusest?

4. Keha liikumise kiirus

$$v = 4t - \frac{6}{t^2} \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}.$$

Leida keha poolt läbitud tee pikkus kolmanda sekundi lõpul.

5. Kaks keha alustavad üheaegselt liikumist ühest ja samast punktist: üks kiirusega

$$v = 3t^2 \frac{\text{m}}{\text{min.}},$$

teine kiirusega

$$v = 2t \frac{\text{m}}{\text{min.}}.$$

Kui kaugel on kehad teineteisest 10 minuti pärast, kui liikumine toimub ühes ja samas suunas ning ühel ja samal sirgel.

6. Kaks keha liiguvad mööda ühte ja sama sirget: esimene kiirusega

$$v = 3t^2 + 2t \frac{\text{m}}{\text{sek.}},$$

teine kiirusega

$$v = 8t + 10 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}.$$

Kui liikumise algul olid kehad koos, siis millal ja kui kaugel liikumise algusest nad jälle kohtuvad?

7. Leida keha poolt läbitud tee pikkus, alates liikumise algusest kuni peatuseni, kui keha kiirus on määratud valemiga

$$v = 6t - t^2 \frac{\text{cm}}{\text{sek.}}.$$

8. Kivi on maapinnalt visatud vertikaalselt üles. Leida kivi maksimaalne tõusu kõrgus, kui kiirus

$$v = 19{,}6 - 9{,}8t \frac{\text{m}}{\text{sek.}}.$$

9. Pall on visatud vertikaalselt üles algkiirusega $20 \frac{\text{m}}{\text{sek.}}$. Kui kõrgele võib kivi maksimaalselt tõusta?

§ 115. Jõu töö. Liikugu keha konstantse jõu F mõjul mööda mingit sirget. Sel juhul jõu P poolt tehtud töö läbitud tee pikkusel x leitakse valemi järgi

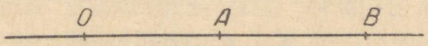
$$P = Fx.$$

Töö määramine on märksa keerulisem, kui liikumine toimub muutuva jõu mõjul. Tuletame valemi sellise juhu jaoks.

Oletame, et keha liigub mööda sirgjoont muutuva jõu F mõjul, mis sõltub läbitud tee pikkusest x; järelikult

$$F = f(x).$$

Leiame selle jõu poolt tehtud töö keha liikumisel punktist A punktini B (joon. 126).



Joon. 126.

Võtame punkti O keha poolt läbitud tee pikkuse arvestamise alguseks ja tähistame:

$$OA = a \text{ ja } OB = b.$$

Siis keha poolt läbitud tee pikkus on $b - a$. Jaotame selle n võrdseks lõiguks Δx ja oletame, et igal saadud lõigul on

jõud konstantne. Jõu töö igal lõigul Δx on ligikaudu $f(x)\Delta x$ ja kogu tee $b - a$ ulatuses

$$\sum_a^b f(x)\Delta x.$$

Kui jaotuste arvu n tõkestamatult suurendada, siis Δx ja järelikult ka $f(x)\Delta x$ saavad lõpmata kahanevateks suurusteks ning kogu otsitav töö on seega võrdne avaldisega

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x.$$

ehk vastavalt valemile (5) § 111

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b f(x)\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx,$$

$$P = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

N ä i d e. 1 kG jõu mõjul vedru pikeneb 3 cm võrra. Kui suure töö sooritab seejuures jõud?

L a h e n d u s. Hooke'i seaduse põhjal on mõjuv jõud võrdeline vedru deformatsiooniga, s. t.

$$F = kx,$$

kus x on deformatsiooni suurus ja k võrdetegur.

Et leida meie ülesande puhul k väärtust, asetame antud suurused võrrandisse, mis väljendab Hooke'i seadust.

Saame

$$1 = k \cdot 0{,}03,$$

millest

$$k = \frac{1}{0{,}03}.$$

Järelikult, vedrule mõjuv jõud väljendub järgmisel kujul:

$$F = \frac{1}{0{,}03}x$$

ja otsitav töö on valemi (1) põhjal:

$$P = \int_0^{0,03} \frac{1}{0,03} x\,dx = \frac{1}{0,03} \cdot \frac{x^2}{2} \Bigg|_0^{0,03} = \frac{1}{0,03} \cdot \frac{0,03^2}{2} = \frac{0,03}{2} = 0,015 \text{ kGm.}$$

Harjutusi.

1. Vedru pikeneb 6 kG jõu mõjul 8 cm. Kui suure töö sooritab jõud?
2. Leida töö, mis tehti vedru kokkusurumisel 4 cm võrra, kui vedru kokkusurumiseks 1 cm võrra on vaja jõudu 1 kG.
3. Vedru pikeneb 3 kG jõu mõjul 6 cm. Kui suure töö sooritab jõud, venitades vedru 10 cm võrra?
4. Leida töö, mis tehti vedru kokkusurumisel 3 cm võrra, kui vedru kokkusurumiseks 0,5 cm võrra on vaja rakendada jõudu 1 kG.
5. 6 kG jõu mõjul pikeneb vedru 2 cm võrra. Vedru esialgne pikkus on 14 cm. Kui palju peab tegema tööd, et vedru pikeneks 20 cm?
6. Vedru pikendamiseks 4 cm võrra tehti tööd 10 kGm. Kui palju tehakse tööd vedru pikendamisel 10 cm võrra?
7. Selleks et vedru pikeneks 2 cm, on vaja teha tööd 20 kGm. Kui palju on võimalik pikendada vedru, kulutades tööd 80 kGm?

§ 116. Koormuse tõstmisel tehtud töö. Füüsikast on teada, et töö, mis on tehtud koormuse tõstmisel teatud kõrgusele, võrdub kilogrammides väljendatud kaalu ja meetrites väljendatud kõrguse korrutisega. Tööd mõõdetakse sel juhul kilogramm-meetrites. Lahendame mõningad ülesanded.

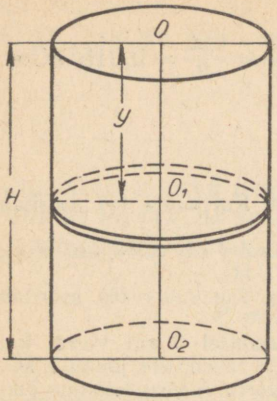
Ülesanne 1. Ääreni täidetud silindrilisest paagist on vaja välja pumbata vesi. Kui palju tehakse seejuures tööd, kui paagi põhja raadius $R = 0,6$ m ja kõrgus $H = 3$ m.

Lahendus. Kui me tõstaksime paagi koos veega teatud kõrgusele, siis tehtud töö leiaksime lihtsalt koormuse kaalu ja kõrguse korrutamise teel. Vedeliku väljapumpamisel tehtud töö määramine on aga keerulisem, kuna sel juhul mitte kogu vedelik ei tõuse korraga, vaid kihtide kaupa, kusjuures erinevate kihtide tõstekõrgused on erinevad.

Ülesande lahendamiseks jaotame silindri põhjaga paralleelsete tasapindadega õhukesteks kihtideks (joon. 127). Valime neist välja ühe, teatud sügavusel

$$OO_1 = y$$

ja tähistame kihi paksuse ja ruumala vastavalt Δy-ga ja Δv-ga.



Joon. 127.

Saame:

$$\Delta v = \pi R^2 \Delta y \text{ m}^3.$$

Vee kaal ΔQ leitud ruumalas:

$$\Delta Q = \pi R^2 \Delta y \text{ T},$$

kuna 1 m³ vett kaalub 1 T. Väljendades ΔQ kilogrammides, saame:

$$\Delta Q = 1000\pi R^2 \Delta y \text{ kG}.$$

Et vaadeldavas kihis olevat vett välja pumbata, on vaja see tõsta paagi ääreni, s. t. kõrgusele

$$O_1O = y.$$

Tehtud töö ΔP väljendub seejuures järgmiselt:

$$\Delta P = \Delta Q \cdot O_1O = 1000\pi R^2 y \Delta y \text{ kGm}. \qquad (1)$$

Kõigi kihtide (alates esimesest ja lõpetades viimasega) tõstmiseks paagi ääreni tehakse iga kord töö, mis on määratud võrdusega (1). Iga kihi puhul on aga y väärtus erinev, muutudes piirides 0-st kuni H-ni. Seega kogu vee väljapumpamiseks vajalik töö väljendub avaldisega

$$\sum_0^H 1000\pi R^2 y \Delta y.$$

Kuid töö saadud väärtus on ainult ligikaudne. Et leida otsitavat tööd, selleks suurendame tõkestamatult silindri jaotuste arvu; siis kogu töö P võrdub avaldisega

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^H 1000\pi R^2 y \Delta y$$

ehk vastavalt valemile (5) § 111:

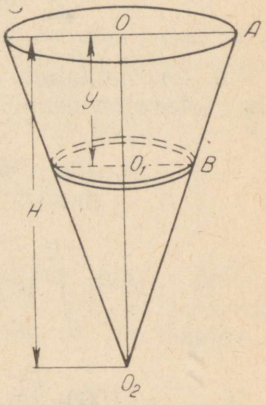
$$P = \int_0^H 1000\pi R^2 y \, dy = 1000\pi R^2 \cdot \frac{y^2}{2} \Bigg|_0^H =$$

$$= 1000\pi R^2 \cdot \frac{H^2}{2} = 500\pi R^2 H^2.$$

Asendades R ja H nende väärtustega, leiame:

$$P = 500\pi \cdot 0{,}6^2 \cdot 3^2 = 1620\pi \text{ kGm}.$$

Ülesanne 2. Veega täidetud koonilise kujuga reservuaar on paigutatud nii, et tema tipp asetseb maapinnal. Reservuaari kõrgus $H = 3$ m ja põhja raadius $R = 90$ cm. Kui palju on vaja teha tööd, et pumbata reservuaar tühjaks?



Joon. 128.

Lahendus. Nii nagu esimeses ülesandes, jaotame ka siin koonuse õhukesteks kihtideks, milledest igaühte vaatleme silindrina. Valime neist välja ühe, kaugusel $OO_1 = y$ silindri põhjast (joon. 128). Tähistades selle kihi paksuse ja ruumala vastavalt Δy-ga ja Δv-ga, võime kirjutada:

$$\Delta v = \pi \cdot O_1B^2 \Delta y \text{ m}^3. \qquad (2)$$

Väljendame O_1B kauguse y kaudu; kolmnurkade O_2O_1B ja O_2OA sarnasusest saame:

$$\frac{O_1B}{OA} = \frac{O_2O_1}{O_2O},$$

millest

$$O_1B = \frac{OA}{O_2O} \cdot O_2O_1 = \frac{OA}{O_2O}(O_2O - OO_1) = \frac{R}{H}(H - y).$$

Asendades võrduses (2) O_1B leitud väärtusega, saame:

$$\Delta v = \pi \frac{R^2}{H^2}(H - y)^2 \Delta y \text{ m}^3.$$

Vee kaal ΔQ ruumalas Δv on seega

$$\Delta Q = \frac{\pi R^2}{H^2}(H - y)^2 \Delta y \text{ T}$$

ehk

$$\Delta Q = 1000 \frac{\pi R^2}{H^2}(H - y)^2 \Delta y \text{ kG}.$$

Töö ΔP, mis sooritati ΔQ kG vee tõstmisel kõrgusele

$$O_1O = y,$$

väljendub järgmiselt:

$$\Delta P = \Delta Q \cdot O_1O = 1000\pi \frac{R^2}{H^2} y(H-y)^2 \Delta y \text{ kGm.}$$

Kogu vee tõstmiseks vajalik töö on ligikaudu võrdne avaldisega

$$\sum_0^H 1000\pi \frac{R^2}{H^2} y(H-y)^2 \Delta y.$$

Kui tõkestamatult suurendada koonuse jaotuste arvu, siis vastavalt valemile (5) § 111 kogu töö

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_0^H 1000\pi \frac{R^2}{H^2} y(H-y)^2 \Delta y =$$

$$= \int_0^H 1000\pi \frac{R^2}{H^2} y(H-y)^2 \, dy =$$

$$= 1000\pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H (H^2y - 2Hy^2 + y^3) \, dy =$$

$$= 1000\pi \frac{R^2}{H^2} \left(\frac{H^2y^2}{2} - \frac{2Hy^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_0^H =$$

$$= \frac{1000\pi R^2}{H^2} \left(\frac{H^4}{2} - \frac{2H^4}{3} + \frac{H^4}{4} \right) = \frac{1000\pi R^2}{H^2} \cdot \frac{H^4}{12} = \frac{250\pi R^2 H^2}{3}$$

ehk asendades R ja H nende väärtustega

$$P = \frac{250\pi \cdot 0{,}9^2 \cdot 3^2}{3} = 607{,}5\pi \text{ kGm.}$$

Harjutusi.

1. Ristkülikukujulise põhjaga paak on täidetud veega. Paagi kõrgus on 60 cm ning põhja mõõtmed 50 cm × 80 cm. Kui palju on vaja teha tööd, et pumbata kogu vesi paagist välja?

2. Silindriline nõu, mille põhja diameeter $D = 50$ cm ja kõrgus $H = 70$ cm, on täidetud veega. Kui palju on vaja teha tööd, et pumbata kogu vesi nõust välja?

3. Petrooleumiga täidetud tsisterni põhja raadius $R = 2$ m ja kõrgus $H = 3$ m. (Petrooleumi erikaal $d = 0{,}8$.) Kui palju tuleb teha tööd, et pumbata tsistern tühjaks?

4. Silindrilise tsisterni läbimõõt on 2 m ja sügavus 4 m. Kui palju tuleb teha tööd, et tõsta kogu vesi tsisterni ülemisest äärest 15 m kõrgemale?

5. Kõis, mille pikkus on 50 m ja ristlõike pindala 2 cm², tõmmatakse šahtist maapinnale. Leida tehtud töö hulk, kui kõis on valmistatud materjalist, mille tihedus on $6{,}4\,\frac{G}{cm^3}$.

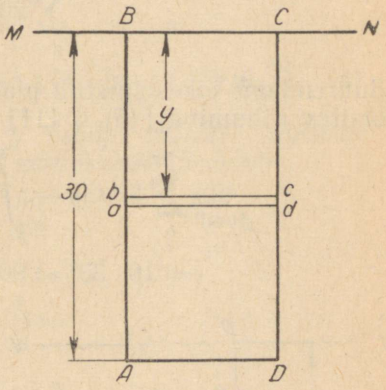
6. Koonilise kujuga allapoole asetatud tipuga reservuaar on täidetud veega. Kui palju tuleb teha tööd kogu vee väljapumpamiseks, kui koonuse põhja raadius $R = 50$ cm ja kõrgus $H = 1$ m?

7. Kui palju on vaja teha tööd, et kokku kuhjata koonilise kujuga liivahunnik, mille põhja raadius on 1,2 m ja kõrgus 1 m? (Liiva erikaal on $2\,\frac{G}{cm^3}$; liiva tõstetakse maapinnalt.)

§ 117. Vedeliku rõhumine.

Ülesanne 1. Ristkülikukujuline plaat, mõõtmetega 20 cm × 30 cm, on asetatud vette nii, et väiksem külg asetseb veepinnal ja suurem külg on vertikaalne. Leida vedeliku rõhumine plaadile.

Lahendus. Olgu antud plaat $ABCD$ asetatud nii, nagu see on näidatud joonisel 129, kus MN on vee pind. Kui plaat oleks horisontaalses asendis, siis vedeliku rõhumine oleks võrdne vedelikusamba kaaluga, mille aluseks on antud plaat ja kõrguseks plaadi kaugus vedeliku pinnast. Kuid selle seaduse põhjal ei saa arvutada rõhumist vertikaalsele plaadile, kuna seal rõhumine pinnaühikule muutub koos sügavusega.



Joon. 130.

Ülesande lahendamiseks jaotame plaadi suureks hulgaks ribadeks, mis on paralleelsed AD-ga. Olles neist välja valinud ühe, näiteks $abcd$, sügavusel

$$Bb = y$$

ja tähistanud selle laiuse Δy-ga ning pindala Δs-ga, leiame:

$$\Delta s = ad \cdot ab = 20\Delta y \text{ cm}^2. \qquad (1)$$

Rõhumine 1 cm² suurusele horisontaalsele pinnale sügavusel Bb on võrdne vedelikusamba kaaluga, mille alus on 1 cm² ja kõrgus $Bb = y$; s. t. rõhumine on y G.

Pascali seaduse järgi annab vedelik rõhumist edasi igas suunas ühteviisi; seega rõhumine 1 cm² suurusele vertikaalselt asetsevale ribale $abcd$ on samuti ligikaudu y G. Rõhumine ΔP kogu ribale $abcd$ väljendub seega järgmiselt:

$$\Delta P = y\Delta s \text{ G}$$

ehk pärast Δs asendamist võrduse (1) põhjal

$$\Delta P = 20y\Delta y \text{ G}. \qquad (2)$$

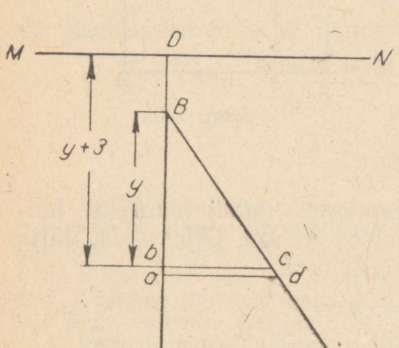
Leides sellisel viisil rõhumise igale ribale, milledest koosneb plaat $ABCD$, saame iga riba jaoks rõhumise suuruse, mida võib määrata võrdusega (2). Selles võrduses y väärtusele vastab ühe või teise riba kaugus vee pinnast. Vee rõhumine kogu plaadile $ABCD$ on ligikaudu võrdne avaldisega

$$\sum_{0}^{30} 20y\Delta y.$$

Suurendame tõkestamatult plaadi $ABCD$ jaotuste arvu, siis otsitav rõhumine [(5) § 111]

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{0}^{30} 20y\Delta y = \int_{0}^{30} 20y\,dy = 20 \cdot \frac{y^2}{2}\Big|_{0}^{30} =$$

$$= 10 \cdot 30^2 = 9000 \text{ G} = 9 \text{ kG}.$$



Joon. 129.

Ülesanne 2. Täisnurkse kolmnurga kujuline plaat ABC, mille kaatet $AB = 12$ cm ja $AC = 9$ cm, on asetatud elavhõbedasse nii, et kaatet AB on vertikaalses asendis ja tipp B asetseb 3 cm elavhõbeda pinnast allpool. Leida elavhõbeda rõhumine sellele plaadile. (Elavhõbeda erikaal on $13{,}6\frac{\text{G}}{\text{cm}^3}$.)

L a h e n d u s. Plaadi asend on näidatud joonisel 130, kus MN on elavhõbeda pind. Nagu ülesandes 1, jaotame ka nüüd plaadi ABC suureks hulgaks ribadeks, milledest igaüks on paralleelne AC-ga. Iga riba vaatame kui ristkülikut. Valime neist välja ühe, näiteks $abcd$ sügavusel Db.

Tähistades Bb y-ga ja riba $abcd$ laiuse ning pindala vastavalt Δy-ga ja ΔS-ga, leiame:

$$\Delta S = bc \cdot \Delta y \text{ cm}^3. \qquad (3)$$

Vastavalt Pascali seadusele on elavhõbeda rõhumine 1 cm² suurusele pinnale, mis asetseb sügavusel

$$Db = Bb + DB = y + 3,$$

ligikaudu võrdne

$$13{,}6\, Db = 13{,}6(y + 3) \text{ G},$$

ja rõhumine ΔP kogu ribale $abcd$

$$\Delta P = 13{,}6 \cdot (y + 3)\Delta S \text{ G}$$

ehk vastavalt võrdusele (3)

$$P = 13{,}6(y + 3) \cdot bc \cdot \Delta y = 13{,}6 \cdot bc(y + 3)\Delta y \text{ G}. \qquad (4)$$

Väljendame riba bc pikkuse y kaudu; selleks vaatleme kolmnurki ABC ja bBc; nende sarnasusest järeldub

$$\frac{bc}{AC} = \frac{Bb}{AB}$$

ehk

$$\frac{bc}{9} = \frac{y}{12},$$

millest

$$bc = \frac{9}{12} y = \frac{3}{4} y.$$

Nüüd võib võrduse (4) ümber kirjutada kujul:

$$\Delta P = 13{,}6 \cdot \frac{3}{4} y(y + 3)\Delta y = 10{,}2(y^2 + 3y)\Delta y \text{ G}. \qquad (5)$$

Rõhumine igale teisele ribale väljendub samuti võrdusega (5), milles y võib omada väärtusi 0-st kuni 12-ni. Liites kõik need rõhumised, saame rõhumise suuruse plaadile ABC, mis on ligikaudu võrdne avaldisega

$$\sum_{0}^{12} 10{,}2(y^2 + 3y)\,\Delta y.$$

Suurendades tõkestamatult plaadi ABC jaotuste arvu, saame otsitava rõhumise

$$P = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{0}^{12} 10{,}2(y^2 + 3y)\,\Delta y =$$

$$= \int_{0}^{12} 10{,}2(y^2 + 3y)\,dy = 10{,}2\left(\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{12} =$$

$$= 10{,}2\left(\frac{12^3}{3} + \frac{3 \cdot 12^2}{2}\right) = 10{,}2(576 + 216) =$$

$$= 10{,}2 \cdot 792 = 8078{,}4 \text{ G} \approx 8{,}08 \text{ kG}.$$

Harjutusi.

1. Leida vee rõhumine akvaariumi ühele seinale, kui seina pikkus on 60 cm ja kõrgus 20 cm.
2. Akvaarium on täidetud veega 0,5 m kõrguseni. Leida rõhumine akvaariumi külgedele, kui põhja mõõtmed on 1,2 m × 1,3 m.
3. Leida vee rõhumine vertikaalselt asetsevale ristkülikule, mõõtmetega 3 m × 2 m, kui ristküliku suurem külg on vertikaalne ja ülemine külg on 1,5 m allpool vedeliku pinda.
4. Reservuaari külgseinas on ristkülikukujuline ava, mõõtmetega 60 cm × 40 cm. Kui suure jõuga surub vesi avaust sulgevale klapile, kui ristküliku suuremad küljed on horisontaalsed ja ülemine külg on 2 m allpool vee pinda?
5. Rombikujuline plaat, mille külg on 5 cm ja üks diagonaalidest 8 cm, on asetatud vertikaalselt vette. Leida vee rõhumine sellele plaadile, kui:
   1) plaadi üks külg on veepinnal;
   2) ülemine külg on 2 cm allpool veepinda.
6. Kolmnurgakujuline plaat, mille alus on 2 cm ja kõrgus 1,5 cm, on asetatud vertikaalselt vette. Leida rõhumine plaadile, kui:
   1) plaadi tipp veepinnal ja alus on sellega paralleelne;
   2) tipp on 0,5 cm allpool veepinda ja alus on sellega paralleelne.
7. Arvutada rõhumine trapetsikujulisele paisule, mille ülemine alus on 6,4 m, alumine 4,2 m ja kõrgus 3 m ning vesi ulatub tammi ülemise ääreni.
8. Tammi esikülg on paraboolikujuline, tipuga allapoole; tammi alus $a = 3{,}2$ m, kõrgus $h = 1{,}6$ m. Leida vee rõhumine tammile, kui vesi ulatub tammi ülemise ääreni.

XIII peatükk.

DIFERENTSIAALVÕRRANDID.

§ 118. Üldmõisted. Diferentsiaalvõrrandite lahendamine. *Diferentsiaalvõrrandiks* nimetatakse võrrandit, mis sisaldab otsitava funktsiooni tuletisi või diferentsiaale. Nii on näiteks $x\,dy = 2y\,dx$ või $y' = 4x$ diferentsiaalvõrrandid.

Lahendada diferentsiaalvõrrand tähendab leida selline funktsioon y, mis rahuldab antud võrrandit, s. t. asendades võrrandis y tema avaldisega, mis on väljendatud x kaudu, muutub võrrand samasuseks.

Võrrandit, mis sisaldab esimesest järgust mitte kõrgemaid tuletisi või diferentsiaale, nimetatakse *esimest järku diferentsiaalvõrrandiks.*

Diferentsiaalvõrrandid leiavad laialdast rakendamist geomeetrias, mehhaanikas, füüsikas ning teistes teadusharudes, samuti ka tehnikas.

Vaatleme ühte näidet geomeetriast.

N ä i d e. Leida kõvera võrrand, kui on teada, et kõver läbib punkti (1 ; 1) ja puutuja tõus kõvera igas punktis võrdub $2x$-ga.

L a h e n d u s. Tuletise geomeetrilise vaste kohaselt (§ 63) võime kirjutada:

$$\frac{dy}{dx} = 2x. \qquad (1)$$

Saime diferentsiaalvõrrandi. Leiame sellest dy.

$$dy = 2x\,dx.$$

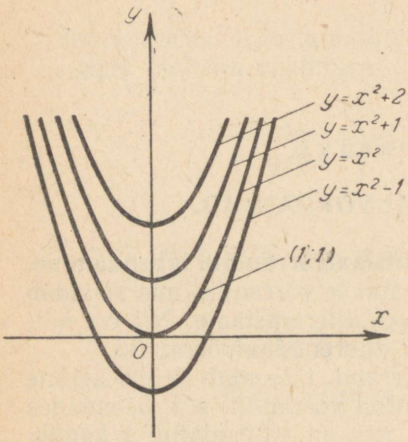
Integreerides viimase võrduse mõlemaid pooli, saame:

$$\int dy = \int 2x\,dx$$

ehk

$$y = x^2 + C, \qquad (2)$$

kus C on mõlema integraali integreerimiskonstantide summa. Avaldis (2) kujutab endast paraboolide hulka (paraboolide parve), millede lagipunktid asetsevad ühes või teises ordinaattelje punktis sõltuvalt C arvulisest väärtusest (joon. 131). Et sellest parvest välja valida parabooli, mis läbib punkti (1; 1), tuleb määrata C. Asetame võrrandisse (2) väärtused $x = 1$ ja $y = 1$. Saame:



Joon. 131.

$$1 = 1 + C,$$

millest

$$C = 0.$$

Otsitava kõvera võrrand on seega:

$$y = x^2. \qquad (3)$$

Võrrandit (2) nimetatakse *diferentsiaalvõrrandi (1) üldlahendiks*, võrrandit (3) aga *erilahendiks* *.

Antud väärtusi $x = 1$ ja $y = 1$ nimetatakse *algtingimusteks*. Algtingimused antakse selleks, et diferentsiaalvõrrandi üldlahendist leida tema erilahendit.

Diferentsiaalvõrrandi lahendamise õigsust on kerge kontrollida, kui asetada avaldis (2) võrrandisse (1). Saame:

$$\frac{d(x^2 + C)}{dx} = 2x$$

ehk

$$\frac{2x\,dx}{dx} = 2x,$$

s. t.

$$2x = 2x,$$

mis näitab võrrandi (1) lahendamise õigsust.

§ 119. Eralduvate muutujatega esimest järku diferentsiaalvõrrandid. Kui diferentsiaalvõrrandi kumbki pool

* Diferentsiaalvõrrandi üldlahend sisaldab alati integreerimiskonstanti C; erilahendis on see konstant asendatud arvuga.

kujutab endast mingi ühest muutujast sõltuva avaldise korrutist selle muutuja diferentsiaaliga, siis öeldakse, et muutujad on *eraldatud*. Näiteks $x\,dx = y\,dy$. Sellisel juhul võib liikmeti integreerida.

Võrrandit, milles muutujad on eraldatavad, nimetatakse eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandiks.

Et lahendada eralduvate muutujatega diferentsiaalvõrrandit, on vaja eraldada muutujad ja pärast seda võtta võrrandi mõlemast poolest integraal.

Vaatleme mõningaid näiteid.

Näide 1. Lahendada võrrand $x\,dy = y\,dx$ algtingimusel, et $x = 5$ puhul $y = 10$.

Lahendus. Muutujate eraldamiseks jagame võrrandi mõlemad pooled korrutisega xy. Saame

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integreerides viimase võrrandi mõlemaid pooli, leiame:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

ehk

$$\ln y = \ln x + \ln C.$$

Konstandi lisamine paremale poolele kujus $\ln C$ kergendab potentseerimist. Vabastades võrrandi logaritmi sümbolist, s. t. potentseerides, saame:

$$y = Cx.$$

Konstandi C määramiseks asetame saadud lahendisse algtingimused $x = 5$ ja $y = 10$:

$$10 = 5C,$$

millest

$$C = 2.$$

Järelikult, otsitav lahend

$$y = 2x.$$

Sel viisil me eraldasime kõigist koordinaatide algust läbivaist sirgetest (sirgete parvest) ühe, millel asetseb punkt $(5\,;\,10)$.

Näide 2. Lahendada võrrand $\frac{dy}{dx} = 2(y - 3)$, kui $x = 0$ puhul $y = 4$.

Lahendus. Eraldame muutujad:

$$\frac{dy}{y-3} = 2dx,$$

siit

$$\int \frac{dy}{y-3} = \int 2\,dx$$

ehk

$$\ln(y-3) = 2x + C.$$

Leiame C väärtuse; arvestades algtingimust. Asendades saame:

$$\ln(4-3) = 2 \cdot 0 + C,$$

millest

$$C = \ln 1 = 0.$$

Niisiis,

$$\ln(y-3) = 2x. \qquad (1)$$

Potentseerimiseks tuleb ka võrduse parem pool esitada logaritmi märgi abil. Logaritmi definitsiooni põhjal:

$$2x = \ln e^{2x};$$

järelikult, lahendi (1) võime kirjutada kujul:

$$\ln(y-3) = \ln e^{2x},$$

millest saame: $y - 3 = e^{2x}$ ehk

$$y = e^{2x} + 3.$$

Harjutusi.

Leida järgmiste võrrandite erilahendid:

1. $ds = (4t - 3)dt$, kui $t = 0$ puhul $s = 0$.
2. $dx = (2t^2 - 5)dt$, kui $t = 1$ puhul $x = -4$.
3. $x\,dx = dy$, kui $x = 1$ puhul $y = 0$.
4. $x\,dx = y\,dy$, kui $x = 2$ puhul $y = 1$.
5. $x^2dx + y\,dy = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 1$.
6. $(t-1)dt + s\,ds = 0$, kui $t = 2$ puhul $s = 0$.
7. $\frac{2\,dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$, kui $x = 1$ puhul $y = \sqrt{2}$.
8. $\frac{dy}{2x} + \frac{dx}{y} = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 2$.

9. $2s\,dt = t\,ds$, kui $t = 1$ puhul $s = 2$.
10. $x^2dy - y^2dx = 0$, kui $x = 0{,}2$ puhul $y = 1$.
11. $x^3dy = y^3dx$, kui $x = \sqrt{3}$ puhul $y = \sqrt{2}$.
12. $\frac{2\,dy}{dx} = 1 + x^2$, kui $x = 0$ puhul $y = 0$.
13. $dy + x\,dx = 2\,dx$, kui $x = 1$ puhul $y = 1{,}5$.
14. $x^2dy - \frac{1}{2}y^3dx = 0$, kui $x = -1$ puhul $y = 1$.
15. $(t + 1)dx = 2x\,dt$, kui $t = 1$ puhul $x = 4$.
16. $\sqrt{x}\,dy - \sqrt{y}\,dx = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 0$.
17. $\frac{dy}{\sqrt{y}} + dx = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, kui $x = 0$ puhul $y = 1$.
18. $\frac{dy}{2y} - dx = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 3$.
19. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 1$.
20. $2y' = y$, kui $x = 0$ puhul $y = 1$.
21. $\frac{2x - 1}{y + 1} = \frac{dx}{dy}$, kui $x = 5$ puhul $y = 0$.
22. $\tan x \cdot y' = 1 + y$, kui $x = \frac{\pi}{6}$ puhul $y = -\frac{1}{2}$.
23. $(1 - x^2)\,\frac{dy}{dx} + xy = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 4$.
24. $dy + y \tan x\,dx = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 1$.
25. $\cos x \sin y\,dy - \cos y \sin x\,dx = 0$, kui $x = \pi$ puhul $y = \pi$.

Leida järgmiste võrrandite üldlahendid:

26. $(xy + x)\,\frac{dx}{dy} = 1$.
27. $(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$.
28. $(y - x^2y)dy + (x + xy^2)dx = 0$.
29. $(1 + x^2)dy - (xy + x)dx = 0$.
30. $y\,dx + (1 - y)x\,dy = 0$.
31. $x^2dy + (y - 1)dx = 0$.
32. $2(xy + y)dx = x\,dy$.
33. $(x^2 + 1)dy = y\,dx$.
34. $x^2y' - 2xy = 3y$.
35. Keha liigub mööda abstsisstelge, alates liikumist punktist (10 ; 0) kiirusega

$$v = 2t - t^2.$$

Leida keha liikumise võrrand.

36. Kirjutada punkti $(-1\,;0)$ läbiva joone võrrand, kui joone tõus on 2.

37. Leida punkti $(3\,;1)$ läbiva kõvera võrrand, kui kõvera puutuja tõus on $2x - 1$.

38. Leida punkti $(4\,;4)$ läbiva kõvera võrrand, kui kõvera puutuja tõus $k = \frac{2}{y}$.

39. Kirjutada punkti $\left(-1;\frac{1}{e}\right)$ läbiva kõvera võrrand, kui kõvera puutuja tõus $k=y$.

40. Mingi kõvera punktide koordinaadid on seotud võrrandiga

$$xy'=(x+1)y.$$

Leida kõvera võrrand, kui kõver läbib punkti $(1;e)$.

41. Keha liigub mööda kõverat, mille puutuja tõus $k=x^2$. Leida punkti ordinaadi muutumine abstsissi muutumisel 2-st kuni 5-ni.

§ 120. $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$ tüüpi diferentsiaalvõrrandid. Võrrandit, mis sisaldab teist järku tuletisi või diferentsiaale, nimetatakse *teist järku diferentsiaalvõrrandiks*. Lihtsaim sellistest võrranditest omab kuju $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$, mida lahendatakse kahekordse integreerimise teel.

Näide 1. Lahendada võrrand $\frac{d^2y}{dx^2}=1-2x$.

Lahendus. Teise tuletise definitsiooni põhjal võib kirjutada:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Tähistame

$$\frac{dy}{dx}=p;$$

siis

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{dp}{dx}.$$

Antud võrrandi võime kirjutada nüüd järgmiselt:

$$\frac{dp}{dx}=1-2x$$

ehk

$$dp=(1-2x)\,dx.$$

Integreerides viimast võrrandit, leiame:

$$\int dp=\int(1-2x)\,dx$$

ja

$$p = x - x^2 + C_1.$$

Kuid

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

seepärast

$$\frac{dy}{dx} = x - x^2 + C_1$$

ehk

$$dy = (x - x^2 + C_1)\,dx.$$

Integreerides veel kord, saame:

$$y = \int (x - x^2 + C_1)\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2. \qquad (1)$$

Leidsime antud võrrandi üldlahendi.

Erilahendi saamiseks tuleb leida konstantide C_1 ja C_2 arvulised väärtused; selleks tuleb teada algtingimusi. Läbigu kõver, mis on määratud erilahendiga, näiteks punkte $(0\,;\,1)$ ja $(1\,;\,\frac{1}{6})$*; asetades väärtused x ja y võrrandisse (1), saame C_1 ja C_2 suhtes järgmise võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 1 = \frac{0}{2} - \frac{0}{3} + C_1 \cdot 0 + C_2 \\ \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + C_1 + C_2 \end{cases}$$

millest

$$C_1 = -1 \text{ ja } C_2 = 1.$$

Järelikult antud diferentsiaalvõrrandi erilahend antud algtingimuste korral on järgmine:

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1.$$

Lahendi õigsuse kontrollimiseks leiame selle funktsiooni teise tuletise:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - x + 1\right)' = x - x^2 - 1,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = (x - x^2 - 1)' = 1 - 2x.$$

---

* Algtingimused võivad olla antud ka teisel kujul, näiteks kui $x = x_0$ ja $y = y_0$, siis $y' = y'_0$. See tähendab, et on antud punkt ja puutuja siht selles punktis.

Me saime lähtevõrrandi ja seega lahendus on teostatud õigesti.

Näide 2. Sirgjooneliselt liikuva keha kiirendus on $2\frac{\text{cm}}{\text{sek.}}$. Väljendada teepikkus s aja t funktsioonina.

Lahendus. Vastavalt teise tuletise mehhaanikalisele vastele (§ 83), saame:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2.$$

Tähistades

$$\frac{ds}{dt} = p,$$

kirjutame

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt} = \frac{dp}{dt} = 2,$$

millest

$$dp = 2dt$$

ja

$$p = 2t + C_1.$$

Asendades p tema avaldisega, saame:

$$\frac{ds}{dt} = 2t + C_1 \qquad (2)$$

ehk

$$ds = (2t + C_1)dt,$$

millest

$$s = \int (2t + C_1)dt = t^2 + C_1t + C_2. \qquad (3)$$

Erilahendi saamiseks on vajalikud algtingimused. Olgu $t = 0$ ja $s = 0$ korral ka $\frac{ds}{dt} = 0$ (eeldame, et tee pikkus s ja liikumise kiirus $\frac{ds}{dt}$ on liikumise algmomendil võrdsed nulliga). Asendades t, s ja $\frac{ds}{dt}$ võrrandites (2) ja (3) nullidega, saame

$$C_1 = 0 \text{ ja } C_2 = 0.$$

Seega otsitav sõltuvus on $s = t^2$.

Harjutusi.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, kui $x = 0$ puhul $y = 1$ ja $x = 1$ puhul $y = 0$.

2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 5$, kui $x = 2$ puhul $y = 5$ ja $x = 4$ puhul $y = 11$.

3. $y''_x = x$, kui $x = 1$ puhul $y = 0$ ja $x = 2$ puhul $y = 2$.

4. $\frac{d^2s}{dt^2} = t + 1$, kui $t = 0$ puhul $s = 2$ ja $\frac{ds}{dt} = -\frac{11}{6}$.

5. $\frac{d^2\Theta}{d\omega} = \omega^2$, kui $\omega = 0$ puhul $\Theta = 0$ ja $\frac{d\Theta}{d\omega} = \frac{3}{4}$.

Leida järgmiste võrrandite üldlahendid:

6. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = 2$. 7. $\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2} = e^{\varphi}$. 8. $y''_x = \cos x$.

9. $\frac{d^2s}{dt^2} = 1 - \sin t$. 10. $e^x \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}$.

11. Rongi kiirendus oli t tundi pärast jaamast väljumist

$$j = 3t^2 - 42t + 80 \ \frac{\text{km}}{\text{h}^2}.$$

Leida kiirus ja läbitud tee pikkus teise tunni lõpul.

12. Sirgjooneliselt liikuva keha kiirendus on võrdeline ajaga. Leida läbitud tee ja aja vaheline sõltuvus, kui $t = 0$ puhul $v = 0$ ning $s = 0$; $t = 1$ puhul aga $s = \frac{1}{3}$.

13. Sirgjooneliselt liikuva keha kiirendus on võrdeline aja ruuduga. Leida s ja t vaheline sõltuvus, kui $t = 0$ puhul $v = 0$ ning $s = 1$; $t = 1$ puhul aga $s = 2$.

XIV peatükk.

READ.

§ 121. Jada.

Definitsioon. *Arvude jadaks ehk lihtsalt jadaks nimetatakse arvude nummerdatud hulka, kui arvud on järjestatud nende numbrite kasvamise järjekorras.*

Näiteks arvude kogumik

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

kujutab endast jada.

Tavaliselt kirjutatakse jada üldkujul järgmiselt:

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots.$$

Numbrid 1, 2, 3, 4, ... tähe u juures näitavad koha järjekorra numbrit, kus asetseb vastav jada liige. Jada liikme kohanumber määrab täielikult selle liikme; see tähendab, et jada liikme suurus on kohanumbri funktsioon.

Näide 1. Olgu vaja leida jada moodustamise seadus, kui jada kuus esimest liiget on antud:

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64. \tag{1}$$

Kirjutades need liikmed kujul

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ 2^4,\ 2^5,\ 2^6,$$

veendume, et igaühte neist võib määrata valemiga

$$u_n = 2^n. \tag{2}$$

Tõepoolest, kui $n = 1$, siis $u_1 = 2$;
kui $n = 2$, siis $u_2 = 2^2 = 4$;
kui $n = 3$, siis $u_3 = 2^3 = 8$;
kui $n = 4$, siis $u_4 = 2^4 = 16$;
kui $n = 5$, siis $u_5 = 2^5 = 32$;
kui $n = 6$, siis $u_6 = 2^6 = 64$.

Seega valem (2) kujutab endast jada moodustamise seadust, sest kuus esimest liiget ühtivad antud liikmetega *.

Näide 2. Leida jada moodustamise seadus, kui jada viis esimest liiget on järgmised:

$$\frac{1}{1\cdot 2},\ \frac{1}{2\cdot 3},\ \frac{1}{3\cdot 4},\ \frac{1}{4\cdot 5},\ \frac{1}{5\cdot 6}.$$

Kerge on veenduda, et esimesed viis liiget võib saada valemist

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Järelikult, valem (3) on otsitava jada moodustamise seaduseks, sest esimesed viis liiget ühtivad antud liikmetega **.

Harjutusi.

1. Kirjutada jada, kui selle moodustamise seadus on:

$$1)\ u_n = \frac{1}{2n},\qquad 2)\ u_n = \frac{n}{n+1},\qquad 3)\ u_n = \frac{n+1}{n^2}.$$

Leida jadade moodustamise seadus, kui nad algavad järgmiste liikmetega:

2. $\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{4}},\ \ldots$ 3. $\frac{1}{4},\ \frac{1}{16},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{256},\ \ldots$

4. $\frac{1}{2},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{4}{16},\ \ldots$ 5. $\frac{2}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{4},\ \frac{8}{5},\ \frac{10}{6},\ \ldots$

6. $\frac{3}{1},\ \frac{3^2}{1\cdot 2},\ \frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{3^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots$

§ 122. Rea mõiste. *Avaldist kujus*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \qquad (1)$$

kus $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *on mingi lõpmatu jada liikmed, nimetatakse lõpmatuks reaks ehk lihtsalt reaks.*

Tähistame rea (1) n esimese liikme summa sümboliga S_n, s. t.

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n.$$

* Siin on antud üks paljudest võimalikest lahendustest. Teise lahenduse näiteks võib olla jada

$$u_n = 2^n + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)(n-6).$$

** Teises näites, aga samuti ka selle paragrahvi harjutuste 2, 3, 4, 5 ja 6 vastustes, on näidatud ainult üks võimalikest lahendustest.

Summat S_n nimetatakse rea osasummaks. n muutumisel muutub ka S_n; seejuures võib esineda kaks juhtu:

1) suurusel S_n on piirväärtus S, kui $n \to \infty$, s. t.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S;$$

2) suurusel S_n ei ole piirväärtust, kui $n \to \infty$, või see on ∞.

Esimesel juhul nimetatakse rida koonduvaks ja arvu $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ rea summaks. Teisel juhul nimetatakse rida hajuvaks. Hajuval real ei ole summat. Näiteks rida

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots,$$

kujutab endast lõpmatult kahanevat geomeetrilist progressiooni. See rida on koonduv, kuna lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valemi põhjal

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Rida

$$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^n + \ldots$$

on aga lõpmatult kasvav geomeetriline progressioon ja seega hajuv. Tõepoolest,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{aq^n - a}{q-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2^n - 2}{2-1} = \lim_{n\to\infty} (2^{n+1} - 2) = \infty.$$

§ 123. Rea koonduvuse tarvilik tunnus. Olgu antud koonduv rida

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

Leiame selle rea $n-1$ liikme summa ja n liikme summa:

$$S_{n-1} = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1},$$
$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1} + u_n.$$

Lahutades teisest võrdusest esimese, saame:

$$S_n - S_{n-1} = u_n.$$

Leiame võrduse (2) mõlemast poolest piirväärtuse, kui $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} u_n$$

ehk

$$\lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = \lim_{n\to\infty} u_n. \qquad (3)$$

Kuna rida (1) eelduse põhjal koondub, siis

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Võrduse (3) võib ümber kirjutada järgmiselt:

$$S - S = \lim_{n\to\infty} u_n$$

ehk

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0. \qquad (4)$$

Võrdus (4) annab meile *rea koonduvuse tarviliku tingimuse*, see tähendab sellise tingimuse, mille puudumisel rida ei saa koonduda. Kuid see tingimus ei ole *piisav*. Selgitame seda näite abil.

Võtame niinimetatud harmoonilise rea:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots.$$

Selle rea puhul on tingimus (4) täidetud, kuna

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

kuid siiski see rida hajub. Et selles veenduda, kirjutame n liikme summa järgmisel kujul:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \\ + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots \qquad (5)$$

Asendades sulgudes olevad summad väiksemate summadega, nimelt:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right),\ \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right),\ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right), \ldots,$$

me vähendame sellega võrduse (5) paremat poolt. Seepärast võib kirjutada:

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) +$$
$$+ \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots$$

Siin iga sulgavaldise suurus on $\frac{1}{2}$. Järelikult,

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots \qquad (6)$$

Tähistame nende liidetavate arvu, mille suurus on $\frac{1}{2}$, tähega m; siis võime võrratuse (6) kirjutada järgmisel kujul:

$$S_n > 1 + \frac{1}{2}m.$$

Lähenegu $m \to \infty$; siis ka $n \to \infty$ ja samuti $1 + \frac{1}{2}m \to \infty$; seepärast ka

$$S_n \to \infty.$$

Järelikult, harmooniline rida hajub.

§ 124. Rea koonduvuse piisavad tunnused.

1. Ridade võrdlemine. Võrdleme kahte positiivsete liikmetega rida.

Võtame kaks rida:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n \qquad (1)$$

ja

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n. \qquad (2)$$

1) Olgu rida (2) koonduv ja rea (1) iga liige väiksem rea (2) vastavast liikmest; siis koondub ka rida (1).

2) Olgu rida (2) hajuv ja rea (1) iga liige suurem rea (2) vastavast liikmest; siis hajub ka rida (1).

Võtame antud tunnused omaks ilma tõestuseta.

Näide 1. Rea koonduvuse kindlakstegemiseks võrdleme rida

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots^* \qquad (3)$$

kahaneva geomeetrilise progressiooniga

* Korrutist $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m$ tähistatakse sümboliga $m!$ ja loetakse „em faktoriaal" (kokkuleppe kohaselt $0! = 1$).

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots \qquad (4)$$

Alates teisest liikmest on rea (3) iga liige väiksem rea (4) vastavast liikmest. Kuna me teame, et lõpmatult kahanev geomeetriline progressioon on koonduv, siis järelikult koondub ka rida (3).

N ä i d e 2. Võtame rea

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots \qquad (5)$$

ja võrdleme seda harmoonilise reaga

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (6)$$

Kuna teisest liikmest alates on rea (5) iga liige suurem rea (6) vastavast liikmest ja kuna rida (6) on hajuv (§ 123), siis on hajuv ka rida (5).

2. D'A l e m b e r t'i t u n n u s. *Kui positiivsete liikmetega rea puhul*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$$

on täidetud tingimus

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

siis antud rida koondub, kui $l<1$, *ja hajub, kui* $l>1$. Võtame selle tunnuse omaks ilma tõestuseta.

N ä i d e 3. Uurida rea

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}+\ldots$$

koonduvust.

L a h e n d u s.

$$u_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)};\quad u_{n+1}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)(n+2)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)(n+2)}:\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}=\frac{1}{n+2}.$$

Rakendades D'Alembert'i tunnust, leiame:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+2}=0<1.$$

Antud rida koondub.

Näide 4. Uurida rea

$$\frac{1}{10}+\frac{1\cdot 2}{10^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{10^3}+\ldots+\frac{n!}{10^n}+\ldots$$

koonduvust.

Lahendus.

$$u_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{10^n};\qquad u_{n+1}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n(n+1)}{10^{n+1}};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,(n+1)}{10^{n+1}}:\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{10^n}=\frac{n+1}{10};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=\infty.$$

Leitud piirväärtus osutus ühest suuremaks; seega antud rida hajub.

Rea koonduvuse uurimisel võib ilmneda, et

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

Sellisel juhul D'Alembert'i tunnus vastust ei anna ja seepärast tuleb rea uurimiseks rakendada teisi võtteid.

Harjutusi.

Uurida järgmiste ridade koonduvust:

1. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{n2^n}+\ldots$
2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^2}+\frac{1}{5\cdot 2^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\,2^n}+\ldots$
3. $\frac{1}{2\cdot 2^2}+\frac{2}{3\cdot 2^3}+\frac{3}{4\cdot 2^4}+\ldots+\frac{n}{(n+1)\,2^{n+1}}+\ldots$
4. $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots+\sqrt[n]{0{,}001}+\ldots$
5. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots+\frac{n}{n+1}+\ldots$
6. $\frac{10}{1}+\frac{10^2}{1\cdot 2}+\frac{10^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{10^n}{n!}+\ldots$
7. $\frac{3}{1}+\frac{3^2}{1\cdot 2}+\frac{3^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{3^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{3^n}{n!}+\ldots$

8. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n}}+\ldots$

9. $\frac{1}{2}+\frac{1\cdot 2}{2^2}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{2^3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2^4}+\ldots+\frac{n!}{2^n}+\ldots$

10. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$

11. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

12. $\frac{2}{1000}+\frac{2^2}{2000}+\frac{2^3}{3000}+\ldots+\frac{2^n}{1000n}+\ldots$

§ 125. Vahelduvate märkidega rea koonduvuse tunnus. *Vahelduvate märkidega reaks nimetatakse rida, mis omab kuju*

$$u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots, \qquad (1)$$

kus $u_1, u_2, u_3, \ldots$ *on positiivsed arvud.* Tõestame järgmise teoreemi.

Kui vahelduvate märkidega rea iga liige on oma absoluutväärtuse poolest eelmisest väiksem ja kui

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0,$$

siis rida koondub.

Tõestus. Leiame rea (1) m esimese liikme summa, kus m on paarisarv.

$$S_m = u_1-u_2+u_3-u_4+u_5-u_6+\ldots+u_{m-1}-u_m.$$

Seda summat võib esitada järgmisel kujul:

$$S_m=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+(u_5-u_6)+\ldots+(u_{m-1}-u_m) \qquad (2)$$

ehk

$$S_m=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{m-2}-u_{m-1})-u_m. \qquad (3)$$

Eelduse põhjal on sulgudes olevad vahed võrduses (2) positiivsed; järelikult, m kasvamisega kasvab ka summa S_m. Võrduses (3) on sulgudes olevad vahed samuti positiivsed; seepärast

$$S_m < u_1.$$

S_m kasvab, kui $m\to\infty$, kuid jääb väiksemaks kui u_1; tähendab, S_m omab piirväärtuse, s. t.

$$\lim_{n\to\infty} S_m = S. \qquad (4)$$

Me tõestasime, et paarisarvu liikmete summa S_m omab piirväärtuse, kui $m \to \infty$.

Tõestame, et ka paaritu arvu liikmete summa S_{m+1} omab piirväärtuse, kui $m \to \infty$, ning on sealjuures võrdne eelmise piirväärtusega. Siit järgneks siis, et rea (1) mistahes n liikme summa S_n omab piirväärtuse, kui $n \to \infty$.

Võtame rea (1) paaritu arvu $(m+1)$ liikme summa; siis

$$S_{m+1} = S_m + u_{m+1}.$$

Minnes üle piirile, kui $m \to \infty$, saame:

$$\lim_{m\to\infty} S_{m+1} = \lim_{m\to\infty} S_m + \lim_{m\to\infty} u_{m+1}.$$

Võttes arvesse võrdust (4) ja teoreemi eeldust, võime kirjutada:

$$\lim_{m\to\infty} S_{m+1} = S + 0 = S.$$

Seega igasuguse, nii paaris- kui ka paarituarvulise n korral on rea (1) liikmete summal üks ja sama piirväärtus, kui $n \to \infty$. Tähendab, eksisteerib

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Järelikult rida (1) koondub.

Tõestatud teoreem on vahelduvate märkidega rea koonduvuse piisavaks tunnuseks.

N ä i d e. Uurida rea

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \ldots$$

koonduvust.

L a h e n d u s. Kuna

$$1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \ldots > \frac{1}{n}$$

ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

siis tõestatud teoreemi põhjal antud rida koondub.

Uurida järgmiste ridade koonduvust:

1. $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\ldots$

2. $1-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n!}+\ldots$

3. $\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}n}{2n-1}+\ldots$

§ 126. Absoluutselt koonduvad read. Olgu antud rida

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots, \qquad (1)$$

mille liikmeteks võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed arvud. Kirjutame uue rea, mis koosneb rea (1) liikmete absoluutväärtustest:

$$|u_1|+|u_2|+|u_3|+|u_4|+\ldots \qquad (2)$$

Saab tõestada, et *kui rida (2) koondub, siis koondub ka rida (1).*

Definitsioon. *Rida nimetatakse absoluutselt koonduvaks, kui koondub tema kõigi liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida.*

Näide. Rida

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots \qquad (3)$$

koondub absoluutselt, kuna rida

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots,$$

mis on moodustatud rea (3) liikmete absoluutväärtustest, koondub.

Kuid mitte iga koonduv rida ei ole absoluutselt koonduv. Näiteks rida

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\ldots \qquad (4)$$

koondub (vt. näide § 125); kuid rida, mis on moodustatud rea (4) liikmete absoluutväärtustest

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots,$$

on harmooniline rida ja seega hajub (§ 123).

Rida (4) nimetatakse *mitte absoluutselt koonduvaks reaks.*

Definitsioon. *Koonduvat rida nimetatakse mitte absoluutselt ehk tingimisi koonduvaks, kui ei koondu kõigi tema liikmete absoluutväärtustest moodustatud rida.*

Harjutusi.

Selgitada, kas järgmised read koonduvad absoluutselt või tingimisi:

1. $\frac{1}{2}-\frac{2}{4}+\frac{3}{8}-\frac{4}{16}+\ldots+\frac{n(-1)^{n+1}}{2^n}+\ldots$

2. $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\ldots$

§ 127. Funktsionaalread. Olgu antud rida

$$f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

mille liikmeteks ei ole mitte arvud, vaid argumendi x funktsioonid. Sellist rida nimetatakse funktsionaalreaks. Funktsionaalrea näiteks võib olla rida

$$1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots, \qquad (2)$$

mis kujutab endast geomeetrilist progressiooni. Kui argumendile x anda mingi arvuline väärtus, siis funktsionaalrida muutub arvreaks.

Võib osutada, et funktsionaalrida teatud x väärtustel koondub, teistel hajub. Argumendi x väärtuste hulka, mille puhul rida (1) koondub, nimetatakse selle rea *koonduvuspiirkonnaks.*

Kui rida (1) teatud x väärtustel koondub, siis selle rea liikmete summa sõltub x-st, teisiti öeldes, on x funktsioon. Tähistades selle summa $f(x)$-ga, võime kirjutada:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots$$

Kirjutatud võrdus on õige ainult x nendel väärtustel, mis asetsevad koonduvuspiirkonnas; sellisel juhul kujutab see

võrdus endast funktsiooni $f(x)$ arendust funktsioonide $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... reaks. Vaatleme näidet.

Kui $|x| < 1$, siis rida (2) on lõpmatult kahanev geomeetriline progressioon ning seepärast koondub; kui $|x| > 1$, siis rida (2) kujutab endast lõpmatult kasvavat geomeetrilist progressiooni ja, järelikult, hajub. Antud rida hajub ka siis, kui $|x| = 1$. Seega, rea (2) koonduvuspiirkonnaks on $|x| < 1$ ehk $-1 < x < 1$. Leides rea (2) kui lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete summa, saame:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{1-x}.$$

Nüüd võime kirjutada võrduse

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots,$$

mis on õige ainult siis, kui $|x| < 1$. See võrdus kujutab endast funktsiooni $\frac{1}{1-x}$ reaksarendust x astmete järgi.

§ 128. Astmeread. *Astmereaks nimetatakse funktsionaalrida kujul*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \quad (1)$$

kus a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, ... *on konstantsed kordajad.*

Andes selles reas argumendile x mingi väärtuse, saame arvrea, mis koondub või hajub sõltuvalt x väärtusest. Analüüsi täielikus kursuses tõestatakse, et mistahes astmerea puhul on olemas x väärtuste pidev piirkond, kus see rida koondub. Seda x väärtuste piirkonda nimetatakse tavaliselt *astmerea koonduvusvahemikuks* *. Rakendades meile tuntud tunnuseid, võime leida selle koonduvusvahemiku.

N ä i d e. Uurida rea

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (1)$$

koonduvust.

L a h e n d u s. Rakendame D'Alembert'i tunnust reale

$$\frac{|x|}{1} + \frac{|x^2|}{2} + \frac{|x^3|}{3} + \frac{|x^4|}{4} + \ldots + \frac{|x^n|}{x} + \ldots \quad (2)$$

---

* Mõnikord koonduvusvahemik koosneb ainult ühest punktist ($x = 0$); sel juhul rida koondub ainult siis, kui $x = 0$.

Selle rea puhul saame:

$$u_n = \frac{|x^n|}{n}, \quad u_{n+1} = \frac{|x^{n+1}|}{n+1}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{n+1}|}{n+1} : \frac{|x^n|}{n} = \frac{n|x|}{n+1}.$$

Siit leiame:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{nx}{n+1}\right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} =$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = |x|.$$

Rea (2) koonduvuseks on piisav, et

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1, \text{ s. t. } |x| < 1$$

ehk

$$-1 < x < 1.$$

Siit järeldub, et rida (1) koondub absoluutselt kõigil x väärtustel, mis rahuldavad viimast võrratust, s. t. kõigil x väärtustel vahemikus -1 kuni $+1$, välja arvatud äärmised väärtused

$$x = -1 \text{ ja } x = +1.$$

Küsimust, kas rida (1) koondub, kui $x = -1$ või $x = +1$, on vaja uurida eraldi.

Asetades $x = -1$ ja $x = +1$ uuritavasse ritta, saame kaks rida:

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n} + \ldots$$

ja

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

Esimene rida on vahelduvate märkidega, see rahuldab § 125 olevat teoreemi ja seepärast koondub; teine on harmooniline rida ja seega hajub. Niisiis, uuritav rida koondub, kui $-1 \leqslant x < 1$, sealjuures absoluutselt, kui $-1 < x < 1$.

Diferentseerides rida (1), saame samuti astmerea:

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots$$

Analüüsi täielikus kursuses tõestatakse järgmine teoreem: *astmerida võib liikmeti diferentseerida ja integreerida*

kuitahes palju kordi ning sealjuures saadud ridadel on seesama koonduvusvahemik mis esialgsel realgi.

Võtame selle teoreemi omaks ilma tõestuseta.

Harjutusi.

Uurida järgmiste ridade koonduvust:

1. $\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n}+\ldots$
2. $x+\frac{x^2}{\sqrt{2}}+\frac{x^3}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$
3. $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$
4. $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{x^n}{(2n)!}+\ldots$
5. $x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots+nx^n+\ldots$

§ 129. Maclaurini rida. Võtame funktsiooni $f(x)$, mis on arendatav astmereaks, s. t. reaks

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots \quad (1)$$

Paragrahvis 128 antud teoreemi põhjal võib rida (1) liikmeti diferentseerida mistahes arv kordi ja sealjuures saadud ridadel on seesama koonduvusvahemik mis real (1). Diferentseerides rida (1) n korda, saame:

$$\left.\begin{aligned} f'(x) &= a_1+2a_2x+3a_3x^2+4a_4x^3+\ldots \\ &\quad \ldots+na_nx^{n-1}+\ldots, \\ f''(x) &= 2a_2+2\cdot 3a_3x+3\cdot 4a_4x^2+\ldots \\ &\quad \ldots+(n-1)na_nx^{n-2}+\ldots, \\ f'''(x) &= 2\cdot 3a_3+2\cdot 3\cdot 4a_4x+\ldots \\ &\quad \ldots+(n-2)(n-1)na_nx^{n-3}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

jne.

Võttes kirjutatud võrdustes (1) ja (2) x võrdseks nulliga, saame

$$\begin{aligned} f(0)&=a_0, && \text{millest } a_0=f(0), \\ f'(0)&=a_1, && \text{millest } a_1=f'(0), \\ f''(0)&=2a_2, && \text{millest } a_2=\frac{f''(0)}{1\cdot 2}, \\ f'''(0)&=2\cdot 3a_3, && \text{millest } a_3=\frac{f'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3} \end{aligned}$$

jne.

Asetades kordajate leitud väärtused võrdusesse (1), saame:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \ldots \quad (3)$$

Võrdus (3) kujutabki endast Maclaurini rida, mis võimaldab arendada funktsiooni $f(x)$ astmereaks.

§ 130. Funktsioonide reaksarenduste näiteid.

N ä i d e 1. Arendada Maclaurini reaks $f(x) = e^x$.

L a h e n d u s. Selleks leiame:

$$f'(x) = e^x, \; f''(x) = e^x, \; f'''(x) = e^x \text{ jne.}$$

Võttes $x = 0$, saame:

$$f(0) = 1, \; f'(0) = 1, \; f''(0) = 1, \; f'''(0) = 1 \text{ jne.}$$

Seega,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (1)$$

Rida (1) koondub x mistahes väärtustel (vt. harjutust 3 § 129).

N ä i d e 2. Arendada Maclaurini reaks $f(x) = \sin x$.

L a h e n d u s. Leiame:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x \text{ ja } f(0) = 0, \\
f'(x) &= \cos x \text{ ja } f'(0) = 1, \\
f''(x) &= -\sin x \text{ ja } f''(0) = 0, \\
f'''(x) &= -\cos x \text{ ja } f'''(0) = -1, \\
f^{(IV)}(x) &= \sin x \text{ ja } f^{(IV)}(0) = 0, \\
f^{(V)}(x) &= \cos x \text{ ja } f^{(V)}(0) = 1, \\
f^{(VI)}(x) &= -\sin x \text{ ja } f^{(VI)}(0) = 0, \\
f^{(VII)}(x) &= -\cos x \text{ ja } f^{(VII)}(0) = -1
\end{aligned}$$

jne.

Seega,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (2)$$

Uurime rea (2) koonduvust, rakendades D'Alembert'i tunnust reale, mis on moodustatud tema absoluutväärtustest. Selleks leiame:

$$u_n = \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!};$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x^{2n+3}|}{(2n+3)!} : \frac{|x^{2n+1}|}{(2n+1)!} = \frac{|x^2|}{(2n+2)(2n+3)} =$$

$$= \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)};$$

siit saame:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)}=$$

$$=x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}=0.$$

Viimane võrdus on õige mistahes x puhul; järelikult, rida (2) koondub absoluutselt x igal väärtusel.

N ä i d e 3. Arendada Maclaurini reaks $f(x)=\cos x$.

L a h e n d u s. Antud funktsioon on arendatav reaks sellesama võttega, kui $\sin x$. $\cos x$ puhul on aga võimalik rida saada ka lihtsamalt. Kuna astmerida (2) koondub x kõigil väärtustel, siis diferentseerimisel saame astmerea, mis koondub selsamal tingimusel (teoreem § 128). Diferentseerides võrduse (2) mõlemaid pooli, saame:

$$\cos x=1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!}+\ldots$$

ehk

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n!)}+\ldots \quad (3)$$

N ä i d e 4. Arendada Maclaurini reaks $f(x)=(1+x)^m$.

L a h e n d u s. Saame:

$$\begin{aligned}
f(x)&=(1+x)^m,\\
f'(x)&=m(1+x)^{m-1},\\
f''(x)&=m(m-1)(1+x)^{m-2},\\
f'''(x)&=m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3},\\
f(0)&=1;\\
f'(0)&=m;\\
f''(0)&=m(m-1);\\
f'''(0)&=m(m-1)(m-2)
\end{aligned}$$

jne.

Seega

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1\cdot2}x^2+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}x^3+\ldots$$

$$\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (4)$$

Kui m on naturaalarv, siis rida (4) koosneb $(m+1)$-st liikmest, kuna kõik järgnevad kordajad muutuvad nullideks; kui m on negatiivne arv või murdarv, siis rida (4) on lõpmatu. Rakendades D'Alembert'i tunnust, saab näidata, et lõpmatu rida (4) koondub, kui $|x|<1$.

Näide 5. Arendada $f(x)=\arcsin x$ astmereaks.

Lahendus. Rakendame valemit (4) funktsiooni $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ kohta:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2)+$$
$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1\cdot 2}(-x^2)^2+$$
$$+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1\cdot 2\cdot 3}(-x^2)^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-x^2)^n+\ldots=$$
$$=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\ldots \qquad (5)$$

Integreerides seda võrdust rajades 0-st x-ni, saame:

$$\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\frac{3}{8}\int_0^x x^4\,dx+$$
$$+\frac{5}{16}\int_0^x x^6\,dx+\ldots,$$

millest

$$\arcsin x\Big|_0^x=x\Big|_0^x+\frac{1}{6}x^3\Big|_0^x+\frac{3}{40}x^5\Big|_0^x+\frac{5}{112}x^7\Big|_0^x+\ldots,$$

$$\arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3x^5}{40}+\frac{5x^7}{112}+\ldots \qquad (6)$$

Kuna rida (5) koondub, kui $|x|<1$, siis rida (6), vastavalt teoreemile § 128, koondub samuti, kui $|x|<1$.

Näide 6. Arendada astmereaks $f(x)=\arctan x$.

Lahendus. Valemi (4) põhjal saame:

$$\frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1} = 1 + (-1)x^2 +$$

$$+\frac{-1(-1-1)}{1\cdot 2}x^4 + \frac{-1(-1-1)(-1-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^6 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{-1(-1-1)\ldots(-1-n+1)}{n!}x^{2n} + \ldots =$$

$$= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \qquad (7)$$

Korrutades võrdust (7) dx-ga ja integreerides rajades 0-st x-ni, saame:

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2\,dx + \int_0^x x^4\,dx - \int_0^x x^6\,dx + \ldots,$$

millest

$$\operatorname{arc\,tan} x \Big|_0^x = x \Big|_0^x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^x + \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^x - \frac{1}{7}x^7 \Big|_0^x + \ldots$$

ehk

$$\operatorname{arc\,tan} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (8)$$

Rida (8) koondub, kui $|x| < 1$, sest ka rida (7) koondub, kui $|x| < 1$ (teoreem § 128).

§ 131. Astmeridade rakendamine ligikaudsetes arvutustes. Astmeread leiavad laialdast rakendust ligikaudsetes arvutustes. Selgitame seda näidetega.

Näide 1. Arvutada $\sin 18°$.

Lahendus. Nurk 18° on radiaanimõõdus 0,3142. Võttes valemis (2) § 130 $x = 0{,}3142$, saame:

$$\sin 18° = \sin 0{,}3142 \approx 0{,}3142 - \frac{0{,}3142^3}{1\cdot 2\cdot 3} \approx$$

$$\approx 0{,}3142 - 0{,}0052 = 0{,}3090.$$

Näide 2. Arvutada π.

Lahendus. Võttes võrduses (6) § 130 $x = \frac{1}{2}$

ja pidades silmas, et $\operatorname{arc\,sin}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, saame:

$$\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3\cdot 6} + \frac{1}{2^5\cdot 40},$$

millest

$$\pi = 3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{32 \cdot 20} \approx 3 + 0{,}125 + 0{,}0141 \approx 3{,}14.$$

Näide 3. Arvutada $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Lahendus. Sellise kujuga määramata integraali ei saa väljendada elementaarfunktsioonide kaudu. Kuid seda on võimalik arvutada antud rajades ligikaudu, ridade abil. Jagades võrduse (2) § 130 mõlemad pooled x-ga, saame:

$$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!},$$

siit

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \int_0^1 dx - \frac{1}{3!}\int_0^1 x^2\,dx + \frac{1}{5!}\int_0^1 x^4\,dx =$$

$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{3!3}\,x^3\Big|_0^1 + \frac{1}{5!5}\,x^5\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5} \approx$$

$$\approx 1 - 0{,}0556 + 0{,}0017 = 0{,}9461.$$

§ 132. Kompleksse liikmetega read. Võtame rea

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) + \ldots, \quad (1)$$

mis koosneb kompleksarvudest kujuga $a_n + b_n i$, kus a ja b on mistahes reaalarvud ning $i = \sqrt{-1}$. Rida (1) nimetatakse koonduvaks, kui koonduvad read

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \quad (2)$$

ja

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n + \ldots, \quad (3)$$

mis koosnevad rea (1) reaalosadest ja imaginaarosade kordajaist. Olgu ridade (2) ja (3) summad vastavalt A ja B, siis rea (1) summa on $A + Bi$. Näiteks rea

$$\left(1 + \frac{1}{2}i\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}i\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{2^n}i\right) + \ldots$$

liikmete summa on

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots+\frac{1}{3^{n-1}}+\ldots\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots\right)i=$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}i=\frac{3}{2}+i=1{,}5+i.$$

Tõestame teoreemi.

Komplekssete liikmetega rida koondub, kui koondub liikmete moodulitest moodustatud rida.

Tõestus. Koondugu rida

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}+\sqrt{a_3^2+b_3^2}+\ldots, \quad (4)$$

mis on moodustatud rea (1) liikmete moodulitest. On ilmne, et

$$|a_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2} \quad \text{ja} \quad |b_n|\leqslant\sqrt{a_n^2+b_n^2}.$$

Seepärast ridade (2) ja (3) liikmed ei ületa rea (4) vastavaid liikmeid. Järelikult read (2) ja (3) koonduvad ning sealjuures absoluutselt (§ 126); seepärast koondub ka rida (1). Teoreem on tõestatud.

Mõnikord vaadeldakse astmeridasid

$$a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

kus a_0, a_1, a_2, a_3, ... on reaal- või kompleksarvud ning z kompleksmuutuja kujus $x+iy$. Kasutades tõestatud teoreemi ja meile tuntud koonduvuse tunnuseid on võimalik uurida ka selliste ridade koonduvust.

§ 133. Euleri valemid. Paragrahvis 130 esitasime eksponentfunktsiooni e^x reana (1) astendajate reaalarvuliste väärtuste korral. Kõrgema matemaatika spetsiaalkursuses tõestatakse, et rida (1) ei kaota mõtet ka komplekssе astendaja korral. Seega võib kirjutada

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots+\frac{z^n}{n!}+\ldots, \quad (1)^*$$

kus z on kompleksmuutuja kujus $x+iy$.

* Saab näidata, et see rida on absoluutselt koonduv z kõigil väärtustel.

Erijuhul, võttes võrduses (1) $z = iy$, saame

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \frac{(iy)^5}{5!} + \ldots + \frac{(iy)^n}{n!} + \ldots$$

ehk

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{i^2y^2}{2!} + \frac{i^3y^3}{3!} + \frac{i^4y^4}{4!} + \frac{i^5y^5}{5!} + \ldots + \frac{i^ny^n}{n!} + \ldots$$

Kuna

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \text{ jne.},$$

siis

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \ldots$$

Eraldades reaalsed ja imaginaarsed liikmed, saame:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}y^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) +$$

$$+ \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots\right) i.$$

Arvestades valemeid (3) ja (2) § 130, saame:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{2}$$

Asendades y võrduses (2) $(-y)$-ga, võime kirjutada:

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i \sin(-y)$$

ehk

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y. \tag{3}$$

Võrdused (2) ja (3) väljendavad eksponentfunktsiooni ja trigonomeetriliste funktsioonide vahelist seost. Need võrdused on antud Euleri poolt.

Lahendades võrdused (2) ja (3) $\cos y$ ja $\sin y$ suhtes, saame:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

ja

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2}.$$

Euleri valemid võimaldavad kindlaks määrata eksponentfunktsiooni perioodilisust. Tõepoolest, asetades võrduses (2) y asemele $y + 2\pi$, saame

$$e^{(y+2\pi)i} = \cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi) =$$
$$= \cos y + i \sin y = e^{iy}.$$

Seega

$$e^{(y+2\pi)i} = e^{iy}$$

ehk

$$e^{iy+2\pi i} = e^{iy}. \qquad (4)$$

Võrdus (4) näitab, et funktsioon e^{iy} on perioodiline funktsioon imaginaarse perioodiga $2\pi i$.

VASTUSEID.

§ 2

3. (5; 3), (−5; 3), (−5; −3), (5; −3); või (3; 5), (−3; 5), (−3; −5), (3; −5). **4.** $(4\sqrt{2}; 0)$, $(0; 4\sqrt{2})$; $(-4\sqrt{2}; 0)$, $(0; -4\sqrt{2})$.

§ 3

1. 10. **2.** 1) 10, 2) 5, 3) 5. **3.** 15. **4.** 5, 13 ja $8\sqrt{2}$. **7.** $A_1(-4; 0)$, $A_2(12; 0)$. **8.** $(\sqrt{3}; \pm 3)$. **9.** (−2; 4). **10.** (0; 14). **11.** (1; 10) ja (−11; 10). **12.** (1; 1) ja (5; 5).

§ 4

1. 1) (5; 7), 2) (4; −6). **2.** 3 ja $\sqrt{17}$; $\left(\frac{1}{2}; -1\right)$. **3.** 5. **4.** (−9; 10). **5.** (−3; 4) ja (−4; −1). **6.** (4; 6). **7.** $\left(1\frac{1}{3}; -4\right)$ ja $\left(5\frac{2}{3}; -1\right)$. **8.** (−8; −1). **9.** (8; 2). **10.** (−2; 1). **11.** (1; 1). **12.** (−2; 1).

§ 7

1. A ja C asetsevad, B mitte. **2.** $y = 0$, $x = 7$. **3.** $y = x$ ja $y = -x$. **4.** $y = 4x$. **5.** $x^2 + y^2 = 4$. **6.** $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$. **7.** $2x - 8y - 5 = 0$. **8.** $x^2 + 4y + 4 = 0$. **9.** $x^2 + y^2 = 4$.

§ 9

2. $y = -5$. **3.** $x = -2$. **4.** $y = 2$. **5.** $x = -3$. **6.** $x = 6$, $x = -6$, $y = 6$, $y = -6$. **7.** $x = 0$, $x = 8$, $y = 0$, $y = 6$ või $x = 0$, $x = 6$, $y = 0$, $y = 8$.

§ 10

1. 1) $y = x$, 2) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 3) $y = -x$, 4) $y = 0$, 5) $y = 0$.

2. 1) Ühtib x-teljega, 2) poolitab esimeses veerandis koordinaattelgede vahelise nurga, 3) poolitab teises veerandis koordinaattelgede vahelise nurga. **3.** 1) 60°, 2) 33°42′, 3) 116°34′. **5.** A ja C asetsevad, B mitte. **6.** Sirgel $y = 2x$. **7.** $x = 4$, $y = -3$. **8.** $k = -5$. **9.** $y = -2x$. **10.** $x = 10$, $y = 0$, $y = x$ või $x = 10$, $y = 0$, $y = -x$. **11.** $x = 0$, $y = 0$, $x = -6$, $y = 3$; diagonaali võrrand $y = -\frac{1}{2}x$. **12.** $y = -0{,}4x$.

§ 11

2. Sirgel $y = -8x - 10$. **3.** $y = 3$. **4.** $x = -2$. **5.** 1) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ ja $(0; -2)$, 2) $(-2; 0)$ ja $(0; -6)$. **6.** $y = -x - 5$. **7.** 1) $y = x + 2$, 2) $y = -x - 3$, 3) $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$. **8.** 1) 60°, 2) 135°, 3) 26°34′. **9.** 1) $y = 5$, 2) $x = 2$, 3) $y = 5$. **10.** $y = -2x - 1$. **11.** 1) 2, 2) 0. **12.** $y = x$ ja $y = -x + 12$. **13.** $y = x + 2\sqrt{2}$, $y = -x + 2\sqrt{2}$, $y = x - 2\sqrt{2}$, $y = -x - 2\sqrt{2}$. **14.** Külgede võrrandid: $y = x$, $y = -x + 8$, $y = x + 8$, $y = -x$. Diagonaalide võrrandid: $y = 4$, $x = 0$.

§ 12

2. $4x + 5y = 0$. **3.** 1) $y = 2x + \frac{10}{3}$, 2) $y = -\frac{5}{8}x + \frac{15}{8}$. **4.** 1) $3x + 4y = 0$, 2) $2x - 3y - 12 = 0$. **5.** 1) $\frac{2}{3}$, 2) $-\frac{1}{2}$. **6.** 1) $-\frac{2}{3}$, 2) 0. **7.** $b = 2{,}5$; $\alpha = 140°12'$.

§ 13

2. 1) $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, 2) $-\frac{x}{2} - y = 1$, 3) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. **3.** 10.

4. 1) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$, 2) $-\frac{x}{6} + y = 1$, 3) $\frac{x}{0{,}5} - y = 1$. **5.** 9. **6.** 50.

7. $\frac{x}{5} + \frac{x}{8} = 1$, $-\frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1$, $-\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$, $\frac{x}{5} - \frac{y}{8} = 1$.

8. $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$, $-\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$.

§ 14

1. $(6; -2)$. **2.** Läbib. **3.** $y + 9 = k(x + 6)$. **4.** 1) $\sqrt{3}x - y - 7 - 2\sqrt{3} = 0$, 2) $\sqrt{3}x + 3y + 21 - 2\sqrt{3} = 0$. **5.** $x - y + 9 = 0$; $\sqrt{3}x - 3y + 24 + \sqrt{3} = 0$; $x + y - 7 = 0$; $y = 8$. **6.** 1) $3x - y - 32 = 0$, 2) $2x + y - 18 = 0$. **7.** $x + y - 5 = 0$, $x - y + 5 = 0$. **8.** $\sqrt{3}x + y - 6\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 6\sqrt{3} = 0$. **9.** 1) $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$; 2) $y = 0$, $y = -2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$.

§ 15

1. 1) $x-3y+5=0$, 2) $6x+7y-9=0$, 3) $x+4y=0$, 4) $x+2=0$. **2.** $3x-y-10=0$, $x-3y+2=0$, $x+5y+2=0$. **3.** arc tan 2. **4.** 5 ja 5. **5.** $3x+7y+2=0$. **6.** $x-y-2=0$. **7.** $2x+3y-4=0$, $x-2y-2=0$. **8.** $x-y-5=0$. **9.** (2; 0).

§ 16

1. 1) arc tan $\frac{1}{3}$, 2) arc tan $\frac{1}{2}$, 3) arc tan 12, 4) arc tan 3. **2.** arc tan 5 või arc tan (-5). **3.** 1) 0°, 2) 90°. **4.** arc tan 1,75.

§ 17

1. 1) Ja, 2) ja, 3) ei. **2.** 1,5. **3.** $2x-y-1=0$. **4.** $2x-y+3=0$. **5.** $2x+y-6=0$. **6.** $x-6y+8=0$. **7.** $x=2$. **8.** $4x-5y+15=0$. **9.** $4x+3y-20=0$.

§ 18

1. 1) Ja, 2) ei. **2.** $2x+3y-25=0$. **3.** $2x+y+7=0$. **4.** $2x+3y+7=0$. **5.** $3x-4y+20=0$. **6.** $2x+y-9=0$. **7.** $3x-y+1=0$. **8.** $2x-y-3=0$, $x+2y-14=0$.

§ 19

1. 1) (2,5; 0), 2) $\left(0; -\frac{10}{3}\right)$. **2.** 1) (2; 1), 2) ei lõiku **3.** Lõikepunkt $\left(0; \frac{5}{3}\right)$. **4.** $\left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right)$, (1; 1), $\left(\frac{1}{7}; \frac{11}{7}\right)$. **5.** (3; 0). **6.** $2x-y+1=0$. **7.** $x+y=0$. **8.** $3x-2y+18=0$. **9.** $5x+2y-9=0$ **10.** $2x-3y+1=0$. **11.** (1; -3), (7; -1), (9; 5), (3; 3).

Segaülesandeid.

1. $(2\frac{2}{3}; 0)$ ja (0; 2). **2.** Ühine punkt $(-1; 3)$. **3.** $(3\frac{2}{3}; 4)$. **4.** Sirge võrrand on $y=-2x$. **5.** $x+y+2=0$. **6.** Asetseb sirgel $x-y+2=0$. **7.** 5. **8.** 7. **9.** $x-y+7=0$. **10.** (6; 6) ja $(-8; -8)$. **11.** 1,5. **12.** Diagonaali pikkus on 5; $8x+6y-39=0$, $3x-4y+26=0$. **13.** $(-3; 6)$ ja $(-1; 4)$. **14.** $\sim 5{,}6$. **15.** 21 ja 23. **16.** arc tan $\frac{4}{7}$, arc tan 3, arc tan $(-0{,}4)$. **17.** 45°. **18.** $3\sqrt{2}$. **19.** $3x-5y+30=0$. **20.** $x+y+7=0$ või $x-y+1=0$. **21.** 1) $y=0$, $x-y+2=0$, $3x+2y-24=0$; 2) $y=0$, $x-y+2=0$, $3x-8y+36=0$. **22.** $3x-y-4=0$; $\sqrt{10}$. **23.** $3x+3y+11=0$. **24.** (5; 8). **25.** (1; -1). **26.** $(-3{,}8; -1{,}6)$. **27.** $2x+y-14=0$, (6; 2), $3\sqrt{5}$. **28.** $5x-y-15=0$. **29.** arc tan 2,5. **30.** (0; -2) ja (0; -7). **31.** $x-y=0$, $x+y+2=0$, $3x+y-12=0$. **32.** (9; 1). **33.** $\sqrt{2}$. **34.** 24. **35.** 20.

36. 1) $y = x$, $y = 8$, $x = 14$; 2) $y = x$, $y = 8$, $x = 2$. **37.** $2x + y - 5 = 0$, $x - 2y - 5 = 0$. **38.** 1) $y = 12$, $y = x + 12$, $y = -x + 28$; 2) $y = 28$, $y = -x + 28$, $y = x + 12$. **39.** $y = 0$, $\sqrt{3}x + y + 2\sqrt{3} = 0$, $\sqrt{3}x - y + 2\sqrt{3} = 0$. **40.** $(-8; -3)$, $(1; 6)$, $(2{,}8; 2{,}4)$. **41.** $x - y - 10 = 0$, $y = -5$. **42.** $B(2{,}4; 6{,}4)$, $D(3{,}6; 5{,}6)$. **43.** 6. **44.** $4x - 3y - 80 = 0$, $y = -8$, $4x - 3y = 0$. **45.** $\left(3\frac{1}{3}; 5\frac{2}{3}\right)$. **46.** $x + y + 5 = 0$. **47.** $x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$. **48.** $y = -\frac{2}{3}x + 4$. **49.** $11x + 3y = 31$, $11x - 3y = 31$.

§ 21

1. 1) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$; 2) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 5$; 3) $x^2 + (y-5)^2 = 36$. **3.** A ja B asetsevad, C mitte. **4.** $x_1 = 0$, $x_2 = -4$. **5.** 1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$; 2) $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5$. **6.** $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 10$. **7.** $(x-2)^2 + y^2 = 16$. **8.** $x^2 + (y+4)^2 = 16$. **9.** $(3; 4)$, $r = 5$. **11.** $5x + 2y - 7 = 0$. **12.** 6. **13.** $x + 3 = 0$. **14.** $x - y - 2 = 0$. **15.** $x + 2y + 5 = 0$. **16.** $(5; 0)$ ja $(1; 0)$. **17.** $2x - y + 2 = 0$. **18.** $3x + 4y - 39 = 0$. **19.** $(7; 6)$ ja $(0; -1)$. **20.** On puutujaks punktis $(3; 3)$. **21.** Väljaspool ringjoont. **22.** $x + y - 4 = 0$.

§ 25

1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. **2.** $2a = 26$, $2b = 24$, $2c = 10$. **3.** $2a = 4\sqrt{6}$, $2b = 14$, $F(0; \pm 5)$. **4.** $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$. **5.** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. **6.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. **7.** $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$. **8.** $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ või $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$. **9.** $36x^2 + 20y^2 = 1125$. **10.** $4x^2 + 9y^2 = 144$ või $9x^2 + 4y^2 = 144$. **11.** A ja B asetsevad, C mitte. **12.** ± 3. **13.** $x^2 + 3y^2 = 15$. **14.** 1) $2x^2 + 5y^2 = 40$, 2) $3x^2 + 5y^2 = 120$. **15.** 4. **16.** 1) $(3; 0)$ $(0; 2)$, 2) puutuja punktis $\left(\frac{3}{2}; \sqrt{3}\right)$, 3) ei lõiku. **17.** $\sqrt{5}$. **18.** $8x^2 + 9y^2 = 72$. **19.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§ 31

1. 1) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$, 2) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, 3) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$. **2.** $2a = 6$, $2b = 10$, $2c = 2\sqrt{34}$. **3.** $A(\pm 12; 0)$, $F(\pm 13; 0)$. **4.** $7x^2 - 9y^2 = 63$. **5.** $F(\pm 7; 0)$, $2a = 10$, $2b = 4\sqrt{6}$, $e = 1{,}4$. **6.** 1) $25x^2 - 24y^2 = 600$, 2) $9x^2 - 16y = 1296$. **7.** $16x^2 - 9y^2 = 1296$. **8.** A ja B asetsevad, C mitte. **9.** $2x^2 - 9y^2 = 18$. **10.** $5x^2 - 8y^2 = 40$. **11.** $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$, $e = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **12.** $y = \pm\frac{3}{4}x$. **13.** $9x^2 - 16y^2 = 288$.

14. $153x^2 - 425y^2 = 450$. **15.** $9x^2 - 16y^2 = 576$. **16.** $(6; \pm 3)$. **17.** Puutepunkt $(6; 4)$. **18.** $\tan\varphi = 4\sqrt{5}$. **19.** $3x^2 - y^2 = 12$.

§ 33

1. 1) $y^2 = 16x$, 2) $y^2 = -8x$, 3) $x^2 = 12y$, 4) $x^2 = -20y$. **2.** 1) $\left(2\frac{1}{2}; 0\right)$, 2) $(-3; 0)$, 3) $(0; 2)$, 4) $\left(0; -2\frac{1}{2}\right)$. **3.** $\left(\frac{5}{8}; 0\right)$. **4.** 1) $x = -1$, $F(1; 0)$; 2) $y = 2$, $F(0; -2)$. **5.** 1) $y^2 = 8x$, 2) $y^2 = -12x$, 3) $x^2 = -10y$, 4) $x^2 = 16y$. **6.** $y^2 = 10x$, $F\left(\frac{5}{2}; 0\right)$. **7.** 1) Asetseb, 2) ei. **8.** 3 m. **9.** 3 m. **10.** $y^2 = x$. **11.** $x^2 = -8y$. **12.** 10. **13.** $(0; 0)$ ja $(5; 5)$. **14.** $12x - 5y - 24 = 0$. **15.** 1) $(1; 3)$ ja $\left(\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right)$, 2) $(1; 3)$ — puutepunkt, 3) ei. **16.** $4\sqrt{2}$. **17.** $x + y + 1 = 0$; 8.

§ 35

1. 16. **2.** 9 ja 21. **3.** $7x^2 + 16y^2 = 112$. **4.** $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $x + 4 = 0$ ja $y + 2 = 0$. **7.** $\operatorname{arc\,tan}(-0{,}4)$. **8.** $25x^2 + 49y^2 = 1225$. **9.** $3x^2 + 4y^2 = 48$. **10.** $x^2 + 2y^2 = 32$. **11.** $4\sqrt{2}$. **12.** $5x^2 - 4y^2 = 20$. **13.** 4,5. **14.** $\frac{2b^2}{a}$. **15.** $2p$. **16.** 7 ja 23. **17.** $8\sqrt{3}$. **18.** $2\frac{1}{12}$. **19.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$. **20.** $9x^2 - 25y^2 = 225$. **21.** $20x^2 - 5y^2 = 36$. **22.** $3x^2 + 28y^2 = 75$. **23.** 10 ja 15. **24.** 4,8. **25.** $3x - 4y - 2 = 0$. **26.** $y = -2x + 7$, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. **27.** 10 m. **28.** $x^2 = 12y$ ja $x^2 = -12y$. **29.** $9x^2 + 25y^2 = 225$. **30.** $x^2 = -\frac{16}{3}y$. **31.** 13 mm. **32.** $(18; 12)$ ja $(18; -12)$. **33.** 4. **34.** $(3; \pm 6)$. **35.** 10. **36.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **37.** $\frac{2}{3}\sqrt{2}$. **38.** $e \approx 0{,}08$. **39.** $x^2 - 4y^2 = 36$. **40.** $\operatorname{arc\,tan}\frac{\sqrt{5}}{2}$. **41.** $9x^2 - 7y^2 = 63$. **42.** $x - 2y - 3 = 0$, $x - 2y - 7 = 0$, $2x + y - 1 = 0$, $2x + y - 4 = 0$. **43.** $\sqrt{5}$. **44.** 4.

§ 44

1. 6. **2.** 1. **3.** 0. **4.** 1. **5.** 0. **6.** 0. **7.** ∞. **8.** ∞. **9.** ∞. **10.** $\frac{1}{3}$. **11.** 0. **12.** ∞. **13.** 2. **14.** $-4a$. **15.** 5. **16.** -6. **17.** $\frac{1}{8}$. **18.** 27. **19.** ∞. **20.** $\frac{\sqrt{a}}{2a}$. **21.** $\frac{\sqrt{a}}{a}$. **22.** 4. **23.** $\frac{1}{4}$. **24.** 4. **25.** 0. **26.** 1. **27.** 2. **28.** $-0{,}5$. **29.** 0. **30.** ∞.

§ 46

1. 1. **2.** 0. **3.** 2. **4.** $\frac{1}{2}$. **5.** $\frac{2}{3}$. **6.** $\frac{a}{b}$. **7.** 1. **8.** 4. **9.** $\frac{1}{8}$. **10.** ∞. **11.** 5. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 2. **17.** 2. **18.** 1. **19.** 1,5. **20.** 2. **21.** 0,5.

§ 48

1. 1,098. **2.** 2,485. **3.** 1,504. **4.** 2,352. **5.** $-1{,}610$. **6.** $-1{,}833$. **7.** $-0{,}174$. **8.** $-2{,}303$.

§ 50

1. 1) 3, 2) -1, 3) -3. **2.** 1) 13, 2) 76, 3) $12a^2+1$, 4) $3a^2-6a+4$. **5.** $f(2)=0$, $f(-3)=0$.

§ 52

1. 1) 0,6; 2) 0,4; 3) -1. **2.** 1) 1,38; 2) 0; 3) $2a^2$. **3.** 1) 2,25; 2) $-3{,}24$. **4.** 1) -6; 2) $2h^2+4ah-h$. **5.** $-3\frac{3}{7}$. **6.** $\sim -0{,}13$.

7. 1) $3\Delta x$, 2) $4x\Delta x+2(\Delta x)^2$, 3) $6x\Delta x-2\Delta x+3(\Delta x)^2$, 4) $-2x\Delta x-3\Delta x-(\Delta x)^2$, 5) $3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$, 6) $6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2-2(\Delta x)^2-4x\Delta x+2(\Delta x)^3$, 7) $\frac{x^2\Delta x+x(\Delta x)^2+\Delta x}{x(x+\Delta x)}$.

§ 54

7. $x=1$. **8.** $x=2$. **9.** $x=-1$. **10.** $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.

§ 59

1. 3. **2.** 0,0075. **3.** 1) 12, 2) 32. **4.** 1) 5; 2) 4,1; 3) 4,01; 4) 4,001. **5.** 16. **6.** 1) 21, 2) 12 ja 30. **7.** 1,6.

§ 60

1. 4. **2.** $10x$. **3.** $8x-2$. **4.** $-4x+1$. **5.** $6x-2$. **6.** $-6t^2$. **7.** $3u^2-1$. **8.** $\frac{4}{p^2}$. **9.** -7.

§ 63

1. 1) 6, 2) 0. **2.** 45°. **3.** 135°. **4.** $4x-y-6=0$. **5.** $5x+y+3=0$.

§ 73

1. 0. **2.** a. **3.** $5x^4$. **4.** $3t^2$. **5.** px^{p-1}. **6.** $10x$. **7.** $-9t^2$. **8.** $3ax^3$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{x}}$. **10.** $-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. **11.** $\frac{\sqrt[4]{t}}{4t}$. **12.** $1{,}5\sqrt{r}$. **13.** $\frac{7}{3}u\sqrt[3]{u}$. **14.** $-\frac{4}{3p^2}$. **15.** 0,25. **16.** $-\frac{1}{16}$. **17.** $-\frac{2\sqrt[3]{x}}{3x^2}$. **18.** $\frac{1}{6}$. **19.** $-\frac{5\sqrt[3]{v}}{3v^3}$. **20.** $-\frac{\sqrt[6]{x}}{6x}$. **21.** $5x\sqrt{x}$. **22.** $\frac{5\sqrt[6]{t^5}}{t}$. **23.** $\frac{7\sqrt[12]{\varphi^7}}{2\varphi}$. **24.** $\frac{1}{2}x\sqrt[3]{x}$. **25.** $2x\sqrt[n]{x}$. **26.** $\frac{11}{6}\sqrt[6]{x^5}$. **27.** $6x^2-3$. **28.** $3t^3-t+2$. **29.** -2. **30.** $\frac{3x^2+1}{x^2}$. **31.** $\frac{t-2}{t^3}$. **32.** $2x+1$. **33.** $9t^2-4t$. **34.** 90. **35.** $3t^2+6t+2$. **36.** $32u^3+12u^2-4u-1$. **37.** $\frac{3\sqrt{t}+2}{2}$. **38.** $\frac{4u^2+5u^2\sqrt{u}+\sqrt{u}}{2u}$. **39.** 2. **40.** $\frac{6x^2-6x+10}{(2x-1)^2}$. **41.** $-\frac{2}{(u+1)^2}$. **42.** $-\frac{2v}{(v^2+1)^2}$. **43.** $\frac{2x^2+2x+1}{x^2(1+x)^2}$. **44.** $\frac{3x^2-1}{x^2(1-x^2)^2}$. **45.** $\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$. **46.** (1; 2). **47.** (1; 2). **48.** $4x-y-21=0$. **49.** 1.

§ 74

1. $u=x^3-2x+5$, $y=u^4$. **2.** $u=x^2+2x$, $y=\sqrt{u}$. **3.** $u=4x+5$, $y=\sqrt[3]{u}$. **4.** $u=x^3-2x^2+1$, $y=2\sqrt[4]{u}$. **5.** $u=\cos t$, $s=u^4$. **6.** $u=\sin\omega$, $v=4u^3$. **7.** $u=\sin x$, $y=\sqrt{u}$. **8.** $u=3\cos x$, $y=\sqrt{u}$. **9.** $u=\cot x$, $y=4\sqrt[3]{u}$. **10.** $u=\omega t$, $s=\sin u$. **11.** $u=3t$, $s=2\tan u$. **12.** $z=\frac{x}{2}$, $u=3\cos z$.

§ 75

1. $4(x+2)^3$. **2.** $9(3t-2)^2$. **3.** $10x(x^2-1)^4$. **4.** $6(x^2-2x)^2(x-1)$. **5.** $4(t^2-t+1)^3(2t-1)$. **6.** $20(3u^2-u+4)^3(6u-1)$. **7.** $\frac{1}{2\sqrt{t+1}}$.

8. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$. 9. $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. 10. $\frac{2(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^2}}$. 11. $\frac{1-4x}{2\sqrt{(2-x)(3+2x)}}$.

12. $\frac{p^2}{\sqrt[3]{(p^3-1)^2}}$. 13. $\frac{x^2-2x}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2+1)^2}}$. 14. $3(3x-1)(5x+1)(x+1)^2$.

15. $\frac{2t(5t-3)}{\sqrt{4t-3}}$. 16. $\frac{2x^2-x+1}{\sqrt{x^2+1}}$. 17. $\frac{5x^2+2x-3}{2\sqrt{x-1}}$.

18. $\frac{2(4\varphi^4-1)}{\varphi^3}$. 19. $\frac{x-2}{\sqrt{(x-1)^3}}$. 20. $\frac{x+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

21. $\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. 22. $-\frac{a^2}{x^2\sqrt{a^2+x^2}}$. 23. $\frac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$.

§ 76

1. $1-\cos x$. 2. $\cos\varphi-\varphi\sin\varphi$. 3. $\frac{\sin u}{\cos^2 u}$. 4. $\cos 2t$. 5. $4\operatorname{cosec}^2 2x$.

6. $\tan^2\Theta$. 7. $-\cot^2\varphi$. 8. $a\sin t$. 9. $\cos\Theta+\cos 2\Theta$. 10. $\frac{2\sin t}{(1+\cos t)^2}$.

11. $-\frac{1}{\sin^2\Theta}$. 12. $\frac{1}{2}\sin 2x$. 13. $\cos^3\omega\sin\omega$. 14. 10. 15. $2\cos 2\varphi$.

16. $-\sin 2\omega$. 17. $\frac{2\pi}{q}\cos\left(\frac{2\pi}{q}x\right)$. 18. $\pi\sin\left(\frac{\pi}{a}t\right)$. 19. $2\sin(1-2\varphi)$.

20. $\omega\sec^2\omega^2$. 21. $2(2\varphi-1)\cos(\varphi^2-\varphi)$. 22. $\frac{\cos\sqrt{\Theta}}{2\sqrt{\Theta}}$.

23. $\frac{1}{2}\tan t\sqrt{\cos t}$. 24. $\frac{4}{\sqrt{x}\cos^2 2\sqrt{x}}$. 25. $\frac{1}{3}\cot x\sqrt[3]{\sin x}$. 26. $\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t}$.

27. $-\frac{a}{t^2}\cos\frac{a}{t}$. 28. $\tan\omega\sec^2\omega$. 29. $\frac{\sin x\sqrt{\cos x}}{2\cos^2 x}$.

30. $\sin^2 x(3\cos^2 x-\sin^2 x)$. 31. $4\cos t\cos 3t$. 32. $\sin 4\Theta$. 33. $\cos 2x$.

34. $\frac{1}{\cos x-1}$. 35. $2\sin 4\varphi$. 36. $-\frac{1}{4}\sin x$. 37. $\cot 2\varphi\sqrt{\sin 2\varphi}$.

38. $-\frac{1}{x^2}\tan^2\frac{1}{x}\sec^2\frac{1}{x}$. 39. $\frac{2}{3}\cot 2x\sqrt[3]{\sin 2x}$.

40. $\frac{4}{3}\cot 2\omega\sqrt[3]{\sin^2 2\omega}$. 41. $-\frac{\cos\omega}{2\cos^4\frac{\omega}{2}}$. 42. $\sec^6 x$.

§ 77

1. $1+\ln x$. **2.** $\ln t$. **3.** $\frac{1-\ln u}{u^2}$. **4.** $\frac{0{,}4343}{x}$. **5.** 0,4343. **6.** $\frac{2t}{t^2-1}$.

7. $-\frac{1}{v}$. **8.** $\cot\alpha$. **9.** $\tan t$. **10.** $-\tan t$. **11.** 2. **12.** $\frac{2\ln x}{x}$. **13.** $-\frac{10}{4+t}$.

14. $\frac{2a}{a^2-x^2}$. **15.** $3\cot x\ln^2\sin x$. **16.** $\frac{1}{3}\cot\frac{u}{3}$. **17.** $\operatorname{cosec} t$. **18.** $\frac{\ln\sqrt{x}}{x}$.

19. $\frac{\operatorname{cosec} 2x}{\sqrt{\ln\tan x}}$. **20.** $2\tan(1-t)$. **21.** $2\tan x$. **22.** $\frac{x}{a^2+x^2}$.

23. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **24.** $\frac{1}{1-x^2}$.

§ 79

1. xe^x. **2.** $\frac{e^t(1+t\ln t)}{t}$. **3.** e^{-x}. **4.** $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$. **5.** $2e^{2h}$.

6. $-a^{-x}\ln a$. **7.** $e^{2x}(1+2x)$. **8.** $-2\varphi e^{-\varphi^2}$. **9.** $-\frac{1}{p^2}a^{\frac{1}{p}}\ln a$.

10. $n^x x^{n-1}(n+x\ln n)$. **11.** 1. **12.** $\frac{1}{t}e^{\ln t}$. **13.** $e^t\cos e^t$. **14.** $2e^{2\sin t}\cos t$.

15. $e^{x\ln x}(1+\ln x)$. **16.** $\frac{1}{1+e^{\omega}}$. **17.** $e^t\sin 2e^t$. **18.** $-\frac{1}{2}\sqrt{e^{\omega}}\sin\sqrt{e^{\omega}}$.

19. $-\frac{1}{2}e^x\tan e^x\sqrt{\cos e^x}$. **20.** $-\sin t$. **21.** $-\frac{e^{\sqrt{x}}\sin e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$.

22. $-\frac{2e^{-2\varphi}}{\cos^2 e^{-2\varphi}}$. **23.** $-\frac{1}{x}e^{\ln\frac{1}{x}}$. **24.** $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$.

25. $\frac{1}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$. **26.** $\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$. **27.** $2e^{2\varphi}(\cos 2\varphi-\sin 2\varphi)$ või $2\sqrt{2}e^{2\varphi}\sin(45^\circ-2\varphi)$. **28.** $2ae^{ax}\sin ax$.

§ 80

1. $\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. **2.** $-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **3.** $\frac{3}{1+9x^2}$. **4.** $\frac{2}{4+t^2}$.

5. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$. **6.** $\frac{\sqrt{v}}{2v(1+v)}$. **7.** $\frac{2t}{\sqrt{1-t^4}}$. **8.** $\frac{e^{\varphi}}{1+e^{2\varphi}}$.

9. $-\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$. **10.** $\frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **11.** $\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$. **12.** $\frac{\sqrt{e^x}}{2\sqrt{1-e^x}}$.

13. $-\frac{6 \arccos 3x}{\sqrt{1-9x^2}}$. 14. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. 15. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

16. $\frac{e^{\arccos t} \tan e^{\arccos t}}{\sqrt{1-t^2}}$. 17. $\frac{\pi}{6}$. 18. $\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}$. 19. $\arctan \frac{t}{a}$.

20. $\frac{1}{1+x^2}$. 21. $\frac{2}{1+\varphi^2}$.

§ 81

1. $3x$. 2. $\frac{2}{y}$. 3. $\frac{3}{2y}$. 4. $\frac{1}{1-2y}$. 5. $-\frac{x}{y}$. 6. $\frac{2x}{2a-3y}$.

7. $-\frac{b^2x}{a^2y}$. 8. $-\frac{y}{x}$. 9. $\frac{x-y}{x}$. 10. $-\frac{2xy+y^2}{2xy+x^2}$. 11. $\frac{a}{2(y-1)}$.

12. $-\sec y$. 13. $\frac{y}{\cos y - x}$. 14. $\frac{2}{x}$. 15. $\frac{xy-y}{x-xy}$. 16. $2x\sqrt{1-y^2}$.

§ 82

1. 0. 2. $6x$. 3. 6. 4. $-\frac{\sqrt{u}}{2u^2}$. 5. $-\frac{2}{t^3}$. 6. $12x^2-4$. 7. $-2\cos 2\alpha$.

8. $e^{\sin t}(\cos^2 t - \sin t)$. 9. $\frac{2}{(2+t)^2}$.

§ 83

1. 8. 2. -9. 3. $\sqrt{3}$. 4. -6. 5. $v=20$, $j=16$. 6. $v=0$, $j=-2$. 7. $v=\sqrt{2}$, $j=-\sqrt{2}$. 8. $v=-\frac{\pi}{2}\sqrt{3}$, $j=-\frac{1}{6}\pi^2$.

9. $v=5$, $j=0$, 10. $t=6$, $v=18$.

§ 88

1. 1) Kasvab, 2) kahaneb. 2. 1) Kasvab, 2) kasvab, 3) kahaneb. 3. 1) Kasvab x kõigil väärtustel, 2) kahaneb x kõigil väärtustel. 4. 1) Kahaneb, kui $x<\frac{3}{2}$; kasvab, kui $x>\frac{3}{2}$; 2) kahaneb, kui $x>2$; kasvab, kui $x<2$. 5. Miinimum $(1; -1)$. 6. Maksimum $(2; 4)$. 7. Miinimum $(-\frac{3}{4}; \frac{23}{8})$. 8. Maksimum $(-0{,}2; 2{,}2)$. 9. Maksimum $(3; 2)$. 10. Miinimum $(0; 0)$. 11. Miinimum $(1; -\frac{3}{2})$. 12. Miinimum $(0; -5)$, maksimum $(-3; 8\frac{1}{2})$. 13. Maksimum $(-1; \frac{2}{3})$, mii-

nimum $(1; -\frac{2}{3})$. **14.** Maksimum $(2; -\frac{7}{3})$, miinimum $(3; -\frac{5}{2})$. **15.** Maksimum $(1; \frac{1}{3})$, miinimum $(3; -1)$. **16.** Maksimum $(-\frac{5}{3}; \frac{13}{27})$, miinimum $(1; -9)$. **17.** Maksimum $(-\frac{2}{3}; 6\frac{17}{27})$, miinimum $(1; 2)$. **18.** Maksimum $(-1; 9)$, miinimum $(3; -23)$. **19.** Miinimum $(-1; -0{,}5)$, maksimum $(1; 0{,}5)$. **20.** Maksimum $(-1; -12)$, miinimum $(5; 24)$.

§ 89

1. Miinimum $(0; 0)$. **2.** Miinimum $(0; -12)$. **3.** Miinimum $(3; -6)$. **4.** Maksimum $(2; 3)$. **5.** Maksimum $(2; 22)$, miinimum $(6; -10)$. **6.** Maksimum $(-\frac{2}{3}; 4\frac{13}{27})$, miinimum $(2; -5)$. **7.** Maksimum $(-3; 14{,}5)$, miinimum $(2; -6\frac{1}{3})$. **8.** Miinimum $(1; -\frac{5}{6})$, maksimum $(6; 20)$. **9.** Miinimum $(-1; -5\frac{2}{3})$, maksimum $(3; 5)$. **10.** Miinimum $(1; 3)$, maksimum $(2; 4)$, miinimum $(3; 3)$. **11.** Pole maksimumi ega miinimumi. **12.** Kasvab, kui $x < -2$; kahaneb, kui $-2 < x < 2$; kasvab, kui $x > 2$. **13.** Kahaneb, kui $x < -1$; kasvab, kui $-1 < x < \frac{5}{3}$; kahaneb, kui $x > \frac{5}{3}$. **14.** Miinimum $(e; e)$. **15.** Miinimum $(2{,}5; 2)$, maksimum $(-2{,}5; -2)$.

§ 90

1. 6 ja 6. **2.** 5 ja 5. **3.** 4 ja 4. **4.** 0,5. **5.** Ruut. **6.** 100×100 m². **7.** 5 cm. **8.** 5×5 cm². **9.** 10×10 cm². **10.** $\sim 0{,}7$ m. **11.** $\sim 0{,}63$ m. **12.** $3 \times 6 \times 4$ dm³. **13.** 2 dm. **14.** $2 \times 2 \times 1$ m³. **15.** $2R = H = 3\sqrt[3]{4}$ cm. **16.** $R = H = \frac{1}{\pi}\sqrt[3]{\pi^2}$ dm. **17.** 4 cm. **18.** 10 cm. **19.** 7,5 cm. **20.** $\frac{20}{3}\sqrt{3}$ cm. **21.** $\frac{2}{3}R\sqrt{3}$. **22.** 5 cm.

§ 93

1. 1) Kumer, 2) nõgus. **2.** 1) Kumer, 2) nõgus. **3.** 1) Nõgus kõigis punktides, 2) kumer kõigis punktides. **4.** Käänupunkt $(0; 0)$. **5.** Käänupunkt $(-1; 1)$. **6.** Käänupunkt $(\frac{1}{2}; 6\frac{1}{2})$. **7.** Käänupunkt $(2; -4)$. **8.** Pole käänupunkti. **9.** Käänupunktid $(2; 62)$ ja $(4; 206)$.

10. Käänupunktid $(-3;\ 294)$ ja $(2;\ 114)$. **11.** Pole käänupunkti. **12.** Käänupunktid $\left(\frac{\sqrt{6}}{6};\ -\frac{5}{3}\right)$ ja $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6};\ -\frac{5}{3}\right)$. **13.** Käänupunktid $(-0{,}7;\ 2{,}2)$ ja $(0;\ 1)$ ja $(0{,}7;\ -0{,}2)$. **14.** Kumer, kui $x < \frac{4}{3}$; nõgus, kui $x > \frac{4}{3}$. **15.** Nõgus, kui $x < -\frac{1}{2}$; kumer, kui $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; nõgus, kui $x > \frac{1}{2}$.

§ 98

1. $\frac{3}{2}\sqrt{x}\,dx$. **2.** $-\frac{2dt}{(1+t)^2}$. **3.** $\frac{1}{\omega^2}\sin\frac{2}{\omega}\,d\omega$. **4.** $\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$.

5. $-\frac{2}{t}\ln\frac{1}{t}\,dt$. **6.** $-\frac{dx}{2x}$. **7.** $\frac{dx}{1+2x+2x^2}$. **8.** 0,4 **9.** $\sim 0{,}008$.

10. $\sim 0{,}1$ cm^2. **11.** $\sim 10\pi$ cm^2. **12.** $\sim 0{,}3$ m^3. **13.** ~ 8 cm^3. **14.** $\sim 8\pi$ cm^3. **15.** $\sim 0{,}1$ cm. **16.** $\sim 0{,}2$ cm. **17.** $\sim 0{,}08\%$. **18.** $\sim 2\%$. **19.** $\sim 2\%$. **20.** $\sim 12{,}07$. **21.** $\sim 15{,}42$. **22.** $\sim 8{,}14$. **23.** $\sim -16{,}3$. **24.** $\sim 0{,}96$. **25.** $\sim -23{,}84$. **26.** $\sim 0{,}814$.

§ 101

1. $\sqrt{2}$. **2.** 0,5. **3.** $2\sqrt{2}$. **4.** $\frac{20}{3}\sqrt{10}$. **5.** $3\sqrt{6}$. **6.** $2\sqrt{2}$.

7. $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$. **8.** ∞. **9.** $(0;\ 0)$.

§ 104

1. $\frac{1}{2}x^2 + C$. **2.** $\frac{1}{5}x^5 + C$. **3.** $\frac{1}{n}x^n + C$. **4.** $5x + C$. **5.** $a\varphi + C$.

6. $x^2 + C$. **7.** $\frac{1}{6}t^3 + C$. **8.** $2x - \frac{1}{2}x^2 + C$. **9.** $\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$.

10. $a\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + C$. **11.** $\frac{3}{2}x^2 - 6x + C$. **12.** $x^4 + 2x^2 - 3x + C$.

13. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 + C$. **14.** $\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x + C$. **15.** $\frac{16}{3}x^3 - 8x^2 + 4x + C$. **16.** $\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$. **17.** $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$.

18. $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$. **19.** $-\frac{1}{\omega} + C$. **20.** $2\sqrt{u} + C$. **21.** $3\sqrt[3]{x} + C$.

22. $\sqrt[4]{x^3} + C$. **23.** $\frac{1}{3}x\sqrt{x} + C$. **24.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x} + C$. **25.** $\frac{4}{7}x\sqrt[4]{x^3} +$

$+C$. **26.** $\frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2}-8\sqrt{x}-\frac{2}{x}+C$. **27.** $-\frac{3\sqrt[3]{x}}{x}-3x+C$.

28. $\frac{2}{3}v\sqrt{v}-\frac{6}{7}v\sqrt[6]{v}+C$. **29.** $-4\cos x+C$. **30.** $2a\sin\varphi+C$.

31. $2\tan\Theta+C$. **32.** $-3a\cot u+C$. **33.** $t+\sin t+C$. **34.** $2x+$
$+3\cos x+C$. **35.** $x^3-2\sin x+C$. **36.** $2\tan\varphi+3\cot\varphi+C$.

37. $3e^u+C$. **38.** $\frac{2a^{\varphi}}{\ln a}+C$. **39.** $\frac{1}{2}x^2-5e^x+C$. **40.** $2e^t-3\sin t+C$.

41. $\frac{3}{2}\ln t+C$. **42.** $2\ln x-\frac{1}{2}x^2+C$. **43.** $6\arctan x+C$.

44. $\frac{3}{4}\arcsin x+C$. **45.** $2v+\tan v+C$. **46.** $t+2\cot t+C$.

47. $e^x-\cos x+C$. **48.** $\tan x+C$. **49.** $\tan x-x+C$.

§ 105

1. $\frac{1}{2}x^2-3x+13$. **2.** $\sin x-\cos x+1$. **3.** $2\ln x-x+3$.

4. $\frac{1}{2}e^x-\sin x$. **5.** $5\arctan x+x$.

§ 107

1. 1,5. **2.** 9. **3.** $\frac{15}{64}$. **4.** 2. **5.** 2. **6.** $2\frac{2}{3}$. **7.** 3,25. **8.** $\frac{20}{3}\pi$. **9.** $6\frac{2}{3}$.

10. 4. **11.** 0,8. **12.** 1. **13.** 2. **14.** 2. **15.** 2. **16.** $1\frac{1}{3}$. **17.** 0,75. **18.** 2.

19. $\sim$3,96. **20.** $\sim-0{,}68$. **21.** $e^{\pi}-1$. **22.** $\sim$0,277. **23.** $\sim-0{,}31$.

24. $\frac{\pi}{3}$. **25.** $\frac{\pi}{4}$. **26.** $\frac{\pi}{24}$.

§ 109

1. $\frac{1}{25}(3+5x)^5+C$. **2.** $\frac{1}{b(m+1)}(a+bx)^{m+1}+C$.

3. $-\frac{1}{3(3x+1)}+C$. **4.** $\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}+C$. **5.** $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(4x-3)^4}+C$.

6. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^5}+C$. **7.** $\frac{4}{3}\sqrt[4]{(3x+5)^3}+C$. **8.** $\sqrt[3]{3x-2}+C$.

9. $\frac{1}{2}\ln(1+2x)+C$. **10.** $-\frac{1}{2}\ln(3-4x)+C$. **11.** $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$.

12. $\frac{1}{4}\sin 4x+C$. **13.** $\cos(1-t)+C$. **14.** $2\sin\left(\frac{1}{2}\varphi+2\right)+C$.

15. $3\sin\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\cos 3x+C$. 16. $\frac{1}{2}\tan 2x+C$. 17. $-\frac{1}{3}\cot 3x+C$.

18. $-\frac{1}{2}\tan(1-2x)+C$. 19. $\frac{1}{2}e^{2\varphi}+C$. 20. $-\frac{1}{3}e^{-3\Theta}+C$.

21. $-4e^{-\frac{1}{2}\omega+1}+C$. 22. $-\frac{1}{2e^x}+C$. 23. $x-e^{-x}+C$.

24. $-\frac{1}{\ln 3}3^{-t+2}+C$. 25. $\ln(1+x^2)+C$. 26. $\frac{1}{2(1-2t^2)}+C$.

27. $\frac{1}{3(2-v^3)^3}+C$. 28. $-\sqrt{1-t^2}+C$. 29. $\frac{1}{3}\sqrt{2x^3-1}+C$.

30. $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. 31. $\frac{1}{9}\sqrt{(1+2t^3)^3}+C$. 32. $\ln(1+\sin x)+C$.

33. $\frac{1}{3}\ln(2-3\cos\varphi)+C$. 34. $\frac{1}{\cos t}+C$. 35. $-\frac{1}{3\sin^3\omega}+C$.

36. $\frac{1}{2-\sin x}+C$. 37. $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(1+\sin t)^2}+C$. 38. $\frac{1}{2}\sin^2\alpha+C$

või $-\frac{1}{2}\cos^2\alpha+C$. 39. $\frac{1}{4}\sin^4\varphi+C$. 40. $-\frac{2}{3}\cos\Theta\sqrt{\cos\Theta}+C$.

41. $\frac{1}{3}(1+\sin\alpha)^3+C$. 42. $-\frac{1}{9}\cos 3x^3+C$. 43. $-e^{\cos x}+C$.

44. $\ln\sin x+C$. 45. $\ln(1+e^x)+C$. 46. $-\frac{2}{2+e^x}+C$.

47. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+e^x)^3}+C$. 48. $2\sqrt{2+e^u}+C$. 49. $\frac{1}{2}e^{x^2}+C$.

50. $\frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)+C$. 51. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 52. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{2}+$

$+C$. 53. $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc\,tan}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$. 54. $\frac{\sqrt{5}}{10}\operatorname{arc\,tan}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C$.

55. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}2t+C$. 56. $\operatorname{arc\,sin}\frac{\alpha}{3}+C$. 57. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{2u}{3}+C$.

58. $\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sin}\frac{2\Theta}{\sqrt{3}}+C$. 59. $\sqrt{1+\sin^2\varphi}+C$. 60. $\ln(x^2-3x)+C$.

61. $\operatorname{arc\,tan}(\sin x)+C$. 62. $-\frac{1}{2}\ln\cos 2x+C$. 63. $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+$

$+\operatorname{arc\,tan}x+C$. 64. $3\operatorname{arc\,sin}x-2\sqrt{1-x^2}+C$. 65. $\frac{1}{2}\ln^2 x+C$.

66. $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$. 67. $-\frac{1}{3}\cos x(\sin^2 x+2)+C$.

68. $2(\sqrt{x}+1)-2\ln(\sqrt{x}+1)+C$. Näpunäide. $1+\sqrt{x}=z$. **69.** $x-\ln(1+x)+C$. Näpunäide. Integraali all oleva avaldise lugejaga liita ja lahutada 1 ning seejärel jagada liikmeti nimetajaga. **70.** $2(\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tan}\sqrt{x})+C$. Näpunäide. Võtta $\sqrt{x}=z$ ja edasi nagu ülesandes nr. 69. **71.** $2\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}+C$. Näpunäide. Asendada: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$. **72.** $\tan\frac{x}{2}+C$.

§ 110

1. $\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** 0,24. **4.** 3. **5.** 3. **6.** $\sim$0,16. **7.** $\sim$0,46. **8.** 0,5. **9.** **10.** $\sim$0,27. **11.** $\frac{1}{9}$. **12.** $\sim$1,1. **13.** 0,4. **14.** $8\frac{2}{3}$. **15.** $10\frac{1}{8}$. **16.** 0,5. **17.** $\sim$0,29. **18.** 0,5. **19.** $2\frac{1}{3}$. **20.** $\frac{5}{16}$. **21.** $\frac{1}{3}$. **22.** $\sim$0,39. **23.** $\sim$0,78. **24.** $\sim$0,45.

§ 112.

1. 10. **2.** 15. **3.** $37\frac{1}{3}$. **4.** 104. **5.** 18. **6.** 1. **7.** 19,5. **8.** 32. **9.** 1) $\frac{4}{3}$, 2) 36. **10.** 4. **11.** 3. **12.** 1) $\frac{1}{6}$, 2) 18, 3) 2. **13.** 1) $\frac{1}{3}$, 2) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

§ 113

1. 9π. **2.** $\frac{1}{6}\pi$. **3.** $\frac{52}{3}\pi$ cm^3. **4.** $\frac{50}{3}\pi$ cm^3. **5.** 138π cm^3. **6.** $\frac{4}{3}\pi ab^2$. **7.** 22500π cm^3. **8.** $\frac{1}{2}\pi$. **9.** 1) $\frac{16}{15}\pi$, 2) $\frac{512}{15}\pi$.

§ 114

1. 490 m. **2.** $s=\frac{1}{2}gt^2$. **3.** 1 m. **4.** 9 cm. **5.** 900 m. **6.** $t=5$ sek.; $s=150$ m. **7.** 9 cm. **8.** 19,6 m. **9.** $\sim$20,4 m.

§ 115

1. 0,24 kGm. **2.** 0,08 kGm. **3.** 0,25 kGm. **4.** 0,09 kGm. **5.** 0,54 kGm. **6.** 62,5 kGm. **7.** 4 cm.

§ 116

1. 72 kGm. **2.** $\sim$48,1 kGm. **3.** $\sim$45216 kGm. **4.** $\sim$213500 kGm. **5.** 1600 kGm. **6.** $\sim$65,4 kGm. **7.** $\sim$753,6 kGm.

§ 117

1. 12 kG. **2.** 625 kG. **3.** 18 T. **4.** 528 kG. **5.** 1) 57,6 G. 2) 105,6 G. **6.** 1) 1,5 G. 2) 2,25 G. **7.** 22,2 T. **8.** 2185 kG.

§ 119

1. $s = 2t^2 - 3t$. **2.** $x = \frac{2}{3}t^3 - 5t + \frac{1}{3}$. **3.** $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$. **4.** $x^2 - y^2 = 3$. **5.** $2x^3 + 3y^2 = 3$. **6.** $s^2 - 2t + t^2 = 0$. **7.** $y^2 = 2x$. **8.** $y^2 = 4 - 2x^2$. **9.** $s = 2t^2$. **10.** $y = \frac{x}{1 - 4x}$. **11.** $y^2 = \frac{6x^2}{6 + x^2}$. **12.** $y = \frac{3x + x^3}{6}$. **13.** $y = 2x - \frac{1}{2}x^2$. **14.** $y^2 = \frac{x}{1 + 2x}$. **15.** $x = (1 + t)^2$.

16. $y = x$. **17.** $2\sqrt{y} - 2\sqrt{x} + x = 2$. **18.** $y = 3e^{2x}$. **19.** $y = \frac{1 + x}{1 - x}$. **20.** $y^2 = e^x$. **21.** $3(y + 1) = \sqrt{2x - 1}$. **22.** $y = \sin x - 1$. **23.** $y = 4\sqrt{1 - x^2}$. **24.** $y = \cos x$. **25.** $y = x$ ja $y = 2\pi - x$. **26.** $y = Ce^{\frac{x^2}{2}} - 1$. **27.** $(x^2 - 1)(y^2 + 1) = C$. **28.** $y^2 = C(1 - x^2) - 1$. **29.** $y = C\sqrt{1 + x^2} - 1$. **30.** $xy = Ce^y$. **31.** $y = Ce^{\frac{1}{x}} + 1$. **32.** $y = Cx^2e^{2x}$. **33.** $y = Ce^{\arctan x}$. **34.** $y = Cx^2e^{-\frac{3}{x}}$. **35.** $x = -\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 10$. **36.** $y = 2x + 2$. **37.** $y = x^2 - x - 5$. **38.** $y^2 = 4x$. **39.** $y = e^x$. **40.** $y = xe^x$. **41.** 39.

§ 120

1. $y = 1 - x$. **2.** $y = \frac{5}{2}x^2 - 12x + 19$. **3.** $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x - 1$. **4.** $s = \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{11}{6}t + 2$. **5.** $\Theta = \frac{1}{12}\omega^4 + \frac{3}{4}\omega$. **6.** $y = -2\ln x + Cx + C_1$. **7.** $\Theta = e^{\varphi} + C\varphi + C_1$. **8.** $y = -\cos x + Cx + C_1$. **9.** $s = \frac{1}{2}t^2 + \sin t + Ct + C_1$. **10.** $y = \frac{1}{2}e^{-x} + Cx + C_1$. **11.** $v = 84$ km, $s = 108$ km. **12.** $s = \frac{1}{3}t^3$. **13.** $s = t^4 + 1$.

§ 121

1. 1) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2n}, \ldots$; 2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

$\ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots$; 3) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \ldots, \frac{n+1}{n^2}, \ldots$ **2.** $\frac{1}{\sqrt{n}}$.
3. $\frac{1}{4^n}$. **4.** $\frac{n}{2^n}$. **5.** $\frac{2n}{n+1}$. **6.** $\frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}$.

§ 124

1. Koondub. **2.** Koondub. **3.** Koondub. **4.** Hajub. **5.** Hajub. **6.** Koondub. **7.** Koondub. **8.** Kahtlane juhus. **9.** Hajub. **10.** Koondub. **11.** Kahtlane juhus. **12.** Hajub.

§ 125

1. Koondub. **2.** Koondub. **3.** Hajub.

§ 126

1. Koondub absoluutselt. **2.** Koondub mitteabsoluutselt.

§ 128.

1. Koondub, kui $-1 < x < 1$. **2.** Koondub, kui $-1 \leqslant x < 1$. **3.** Koondub, kui $-\infty < x < +\infty$. **4.** Koondub, kui $-\infty < x < +\infty$. **5.** Koondub, kui $-1 < x < 1$.

SISUKORD.

Eessõna 3

TASAPINNALISE ANALÜÜTILISE GEOMEETRIA ALGED

VI peatükk. **Koordinaatide meetod** 5
§ 1. Analüütilise geomeetria aine 5
§ 2. Descartes'i tasapinnaline ristkoordinaatide süsteem 5
§ 3. Kahe punkti vaheline kaugus 7
§ 4. Sirglõigu jaotamine antud suhtes 9

VII peatükk. **Jooned ja nende võrrandid** 14
§ 5. Jäävad ja muutuvad suurused 14
§ 6. Muutuvate suuruste vaheline funktsionaalne sõltuvus 14
§ 7. Jooned ja nende võrrandid 16

III peatükk. **Sirgjoon** 20
§ 8. Koordinaattelgedega paralleelsete sirgete võrrandid 20
§ 9. Koordinaattelgede võrrandid 21
§ 10. Koordinaatide algust läbiva sirge võrrand 22
§ 11. Sirge võrrand tõusu ja algordinaadiga 25
§ 12. Sirge võrrandi üldkuju 28
§ 13. Sirge võrrand telglõikudes 32
§ 14. Sirgete kimbu võrrand 35
§ 15. Kahte antud punkti läbiva sirge võrrand 37
§ 16. Nurk kahe sirge vahel 39
§ 17. Sirgete paralleelsuse tingimus 42
§ 18. Sirgete ristseisu tingimus 44
§ 19. Sirgete lõikumine 46

IV peatükk. **Teist järku kõverad** 52
§ 20. Ringjoon ja selle võrrand 52
§ 21. Ringjoone võrrand kui üldise teise astme võrrandi erikuju 54
§ 22. Ellips ja selle võrrand 57
§ 23. Ellipsi võrrandi uurimine 60
§ 24. Ellipsi ekstsentrilisus 63
§ 25. Ellipsi seos ringjoonega 64
§ 26. Hüperbool ja selle võrrand 66
§ 27. Hüperbooli võrrandi uurimine 69
§ 28. Hüperbooli ekstsentrilisus 71
§ 29. Hüperbooli asümptoodid 72
§ 30. Võrdhaarne hüperbool 75
§ 31. Võrdhaarse hüperbooli võrrand asümptootide suhtes 76
§ 32. Parabool ja selle kanooniline võrrand 79

§ 33. Parabooli võrrandi uurimine 81
§ 34. Nihutatud lagipunktiga parabooli võrrand, kui parabooli sümmeetriatelg on paralleelne y-teljega . . 84
§ 35. Koonuslõiked 90

DIFERENTSIAAL- JA INTEGRAALARVUTUSE ALGED

V peatükk. **Piirväärtuste teooria** 95
§ 36. Absoluutväärtus ja teoreeme selle kohta 95
§ 37. Muutuva suuruse muutumise iseloom 97
§ 38. Lõpmatult kahanev suurus 98
§ 39. Lõpmatult kasvav suurus 100
§ 40. Seos lõpmatult kahaneva ja lõpmatult kasvava suuruse vahel 102
§ 41. Muutuja piirväärtuse mõiste 103
§ 42. Lõpmatult kahanevate suuruste omadused 105
§ 43. Teoreeme piirväärtuste kohta 108
§ 44. Funktsiooni piirväärtus 112
§ 45. Suhte $\frac{\sin x}{x}$ piirväärtus, kui $x \to 0$ 118
§ 46. Ekvivalentsed lõpmatult kahanevad suurused . . . 120
§ 47. Avaldise $(1 + \frac{1}{n})^n$ piirväärtus, kui $n \to \infty$ . . . 121
§ 48. Naturaallogaritmid 122
VI peatükk. **Funktsioon ja selle lihtsamad omadused** . . . 124
§ 49. Funktsionaalse sõltuvuse sümboolika 124
§ 50. Funktsiooni eriväärtus 125
§ 51. Funktsioonide geomeetriline kujutamine 125
§ 52. Funktsiooni juurdekasv 127
§ 53. Argumendi ja funktsiooni juurdekasvude geomeetriline kujutamine 130
§ 54. Funktsiooni pidevus 131
§ 55. Pideva funktsiooni omadus 134
§ 56. Funktsioonide liigitus 135
VII peatükk. **Funktsiooni tuletise mõiste** 137
§ 57. Ühtlane liikumine ja selle kiirus 137
§ 58. Mitteühtlane liikumine ja selle kiirus 138
§ 59. Funktsiooni muutumise kiirus 139
§ 60. Funktsiooni tuletis 141
§ 61. Funktsiooni diferentseeritavuse seos pidevusega . . 144
§ 62. Puutuja mõiste 144
§ 63. Tuletise geomeetriline vaste 145
VIII peatükk. **Diferentseerimise valemid** 149
§ 64. Konstandi tuletis 149
§ 65. Funktsiooni $y = x$ tuletis 150
§ 66. Funktsioonide algebralise summa tuletis 150
§ 67. Kahe funktsiooni korrutise tuletis 151
§ 68. Konstandi ja funktsiooni korrutise tuletis 153
§ 69. Positiivse täisarvulise astendajaga astme tuletis . 153
§ 70. Funktsiooni $y = \sqrt{x}$ tuletis 154

§ 71. Funktsiooni $y = \frac{1}{x}$ tuletis 154

§ 72. Jagatise tuletis 155
§ 73. Diferentseerimise valemite rakendamine 156
§ 74. Funktsiooni funktsioon (liitfunktsioon) 159
§ 75. Liitfunktsiooni tuletis 160
§ 76. Trigonomeetriliste funktsioonide tuletised 164
§ 77. Logaritmfunktsiooni tuletis 168
§ 78. Mistahes astendajaga astme tuletis 172
§ 79. Eksponentfunktsiooni tuletis 173
§ 80. Trigonomeetriliste pöördfunktsioonide tuletised . . 175
§ 81. Ilmutamata funktsiooni tuletis 179
§ 82. Teist järku tuletis 181
§ 83. Teist järku tuletise mehhaanikaline tõlgendus . . 181

IX peatükk. **Tuletise rakendusi** 184
§ 84. Funktsiooni kasvamine ja kahanemine 184
§ 85. Funktsiooni kasvamise ja kahanemise tunnused . . 185
§ 86. Funktsiooni maksimum ja miinimum 187
§ 87. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi tunnused . . 188
§ 88. Funktsiooni maksimumi ja miinimumi leidmise eeskiri 191
§ 89. Funktsiooni uurimine maksimumi ja miinimumi suhtes teise tuletise abil 195
§ 90. Ülesandeid funktsioonide maksimumi ja miinimumi kohta 199
§ 91. Kõvera kumerus ja nõgusus 203
§ 92. Kõvera kumeruse ja nõgususe tunnused 204
§ 93. Käänupunkti leidmine 205
§ 94. Funktsioonide graafikud 208

X peatükk. **Diferentsiaal** 212
§ 95. Diferentsiaali mõiste 212
§ 96. Diferentsiaali geomeetriline vaste 214
§ 97. Teist järku diferentsiaal 216
§ 98. Diferentsiaali rakendusi ligikaudsetes arvutustes . 216
§ 99. Joone kõverus 221
§ 100. Ringjoone kõverus 224
§ 101. Joone kõverusraadius 224

XI peatükk. **Integraal** 227
§ 102. Määramata integraali mõiste 227
§ 103. Määramata integraali põhiomadused 228
§ 104. Integreerimise põhivalemid 229
§ 105. Integreerimiskonstandi määramine 233
§ 106. Määratud integraal 234
§ 107. Määratud integraali põhiomadused 235
§ 108. Määratud integraal kui pindala 237
§ 109. Integreerimine asendusvõttega 241
§ 110. Määratud integraali arvutamine asendusvõtte korral 248
§ 111. Määratud integraal kui summa piirväärtus . . . 251

XII peatükk. **Integraali rakendusi** 257
§ 112. Kujundite pindalad 257
§ 113. Pöördkeha ruumala 260

§ 114. Keha poolt läbitud tee pikkus 269
§ 115. Jõu töö 271
§ 116. Koormuse tõstmisel tehtud töö 273
§ 117. Vedeliku rõhumine 277
XIII peatükk. **Diferentsiaalvõrrandid** 281
§ 118. Üldmõisted. Diferentsiaalvõrrandite lahendamine . 281
§ 119. Eralduvate muutujatega esimest järku diferentsiaalvõrrandid 282
§ 120. $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ tüüpi diferentsiaalvõrrandid 286
XIV peatükk. **Read** 290
§ 121. Jada 290
§ 122. Rea mõiste 291
§ 123. Rea koonduvuse tarvilik tunnus 292
§ 124. Rea koonduvuse piisavad tunnused 294
§ 125. Vahelduvate märkidega rea koonduvuse tunnus . . 297
§ 126. Absoluutselt koonduvad read 299
§ 127. Funktsionaalread 300
§ 128. Astmeread 301
§ 129. Maclaurini rida 303
§ 130. Funktsioonide reaksarenduste näiteid 304
§ 131. Astmeridade rakendusi ligikaudsetes arvutustes . . 307
§ 132. Kompleksse liikmetega read 308
§ 133. Euleri valemid 309
Vastuseid 312

Зайцев Иван Лазаревич
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Учебник для техникумов
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektorid M. Amon ja S. Aron

Ladumisele antud 30. IX 1957. Trükkimisele antud 28. I 1958. Paber 54×84, 1/16. Trükipoognaid 20,75. Formaadile 60×92 kohaldatud trükipoognaid 17,01. Arvutuspoognaid 15,07. Trükiarv 5000. Tellimise nr. 2631.

Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Vallikraavi tn. 4.

Hind rbl. 5.55

6—7

-21912

Rbl. 5.55

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00309237 8