TARTU ÜLIKOOL
LOODUS- JA TÄPPISTEADUSTE VALDKOND
Matemaatika ja statistika instituut
Matemaatika eriala

Laura Kruusmann

Vitali–Hahn–Saksi teoreem ja Nikodými koonduvusteoreem

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Märt Põldvere

TARTU 2016

Vitali–Hahn–Saksi teoreem ja Nikodými koonduvusteoreem

Bakalaureusetöö

Laura Kruusmann

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös analüüsitakse Vitali–Hahn–Saksi teoreemi ja Nikodými koonduvusteoreemi (hästi tuntud) vahekorda (loenduvalt aditiivsete reaalväärtustega mõõtude jaoks): näidatakse, et kummastki neist teoreemidest järeldub teine. Vitali–Hahn–Saksi teoreemile esitatakse tõestus, mis toetub järeldusele Baire'i teoreemist, mille kohaselt punktiviisi koonduva funktsioonide jada jaoks täielikus meetrilises ruumis on olemas punkt, milles see jada on võrdpidev. Ka nimetatud järeldus esitatakse koos tõestusega.

CERCS teaduseriala: P140 Read, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Mõõduga ruum, Vitali–Hahn–Saksi teoreem, Nikodými koonduvusteoreem.

The Vitali–Hahn–Saks theorem and Nikodým convergence theorem

Bachelor's thesis

Laura Kruusmann

Abstract. In this bachelor's thesis, the (known) relationship between the Vitali–Hahn–Saks theorem and Nikodým convergence theorem (for real valued countably additive measures) is analysed: it is shown that each of these theorems implies the other. A proof of the Vitali–Hahn–Saks theorem is presented that relies on the corollary from Baire's theorem according to which every pointwise convergent sequence of functions in a complete metric space has a point of equicontinuity. This corollary is also presented with a proof.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Key words: Measure space, Vitali–Hahn–Saks theorem, Nikodým convergence theorem.

Sisukord

Sissejuhatus

Vitali–Hahn–Saksi teoreemil ja *Nikodými koonduvusteoreemil* on mõõduteoorias väga oluline roll. Kõikjal järgnevas on $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ lõpliku mõõduga ruum.

Vitali–Hahn–Saksi teoreem (vt nt [R, lk 213, lause C.3], [S, lk 145, teoreem 3] või [LP, lk 133, teoreem 2.7])**.** *Olgu λ-pidevad mõõdud $\mu_n \colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

- *piirväärtus $\mu(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) \in \mathbb{R}$ eksisteerib iga $E \in \Sigma$ korral.*

Siis

(a) *jada (μ_n) on ühtlaselt λ-pidev;*

(b) *hulgafunktsioon $\mu\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ on λ-pidev (mõõt).*

Nikodými koonduvusteoreem (vt nt [R, lk 214, lause C.4], [S, lk 68, teoreem 5] või [LP, lk 132–133, teoreem 2.6])**.** *Olgu (loenduvalt aditiivsed) mõõdud $\mu_n \colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

- *piirväärtus $\mu(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) \in \mathbb{R}$ eksisteerib iga $E \in \Sigma$ korral.*

Siis

(a) *jada (μ_n) on ühtlaselt loenduvalt aditiivne;*

(b) *hulgafunktsioon $\mu\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ on loenduvalt aditiivne, s.t μ on mõõt.*

Vitali–Hahn–Saksi teoreemi rakendatakse näiteks ruumi $L_1(\lambda)$ nõrgas topoloogias suhteliselt kompaktseid alamhulki kirjeldava Dunfordi teoreemi tõestamisel (vt nt [DU, lk 76, teoreem 15]); Nikodými koonduvusteoreemi (täpsemalt, tema üldisemat versiooni) rakendatakse näiteks ruumidelt $L_\infty(\lambda)$ lähtuvate nõrgalt kompaktsete operaatorite omaduste tõestamisel (vt nt [DU, lk 150, järeldus 5]). Samuti pakuvad need mõlemad teoreemid iseseisvat teoreetilist huvi. Ülevaate Vitali–Hahn–Saksi teoreemi ja Nikodými koonduvusteoreemi ajaloost võib leida monograafiast [DU, lk 34–36].

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on analüüsida Vitali–Hahn–Saksi teoreemi ja Nikodými koonduvusteoreemi (teoorias hästi tuntud) vahekorda – näidata, et need teoreemid on samaväärsed, s.t kummastki neist järeldub teine – ning tõestada üks neist teoreemidest (ja seega mõlemad). Kõnealuste teoreemide tõestamiseks on kaks põhilist lähenemisviisi: toetuda Baire'i teoreemile (nagu näiteks õpikutes [R] ja [D]) või kasutada libiseva küüru meetodit (nagu näiteks õpikus [S] ja ülevaateartiklis [LP]). Käesolevas töös tõestatakse Vitali–Hahn–Saksi teoreem toetudes Baire'i teoreemi järeldusele, mille kohaselt punktiviisi koonduva funktsioonide jada jaoks on täielikus meetrilises ruumis olemas punkt, milles see jada on võrdpidev.

Töö koostamisel on peamiselt toetutud õpikutele [R] ja [S], kusjuures sealset materjali on üsna vabalt ümber organiseeritud.

Töö koosneb kaheksast paragrahvist.

Esimeses paragrahvis tuuakse sisse lõplikult aditiivse ja loenduvalt aditiivse reaalväärtustega mõõdu mõiste ning antakse tarvilikke ja piisavaid tingimusi lõplikult aditiivse mõõdu loenduvaks aditiivsuseks.

Teises paragrahvis tuuakse sisse mõõtude hulga ühtlase loenduva aditiivsuse mõiste ja antakse tarvilikke ja piisavaid tingimusi mõõtude hulga ühtlaseks loenduvaks aditiivsuseks.

Kolmandas paragrahvis tõestatakse mõõdu täisvariatsiooni olulisemad omadused: näidatakse, et loenduvalt aditiivse reaalväärtustega mõõdu täisvariatsioon on loenduvalt aditiivne, kusjuures tema väärtused on lõplikud.

Neljandas paragrahvis tuuakse sisse mõõdu pidevuse mõiste etteantud mõõdu suhtes, antakse tarvilikke ja piisavaid tingimusi mõõdu pidevuseks ning näidatakse, et mis tahes loenduvalt aditiivsete mõõtude jada jaoks on olemas "kontrollmõõt", s.t niisugune mõõt, mille suhtes kõik selle jada liikmed on pidevad.

Viiendas paragrahvis tuuakse sisse mõõtude hulga ühtlase pidevuse mõiste etteantud mõõdu suhtes ning uuritakse mõõtude hulga ühtlase pidevuse ja ühtlase loenduva aditiivsuse vahekorda: näidatakse, et ühtlaselt pidev mõõtude hulk on ühtlaselt loenduvalt aditiivne ning, teiselt poolt, etteantud mõõdu suhtes pidevate mõõtude ühtlaselt loenduvalt aditiivne hulk on selle mõõdu suhtes ühtlaselt pidev.

Kuuendas paragrahvis antakse, lähtudes lõpliku mõõduga ruumist $(\Omega, \Sigma, \lambda)$, kogumi Σ teatavale faktorruumile meetrilise ruumi struktuur nii, et iga λ-pidev reaalväärtusega mõõt on loomulikul viisil tõlgendatav pideva funktsioonina sellel faktorruumil.

Seitsmendas paragrahvis tõestatakse järeldus Baire'i teoreemist, mille kohaselt punktiviisi koonduva funktsioonide jada jaoks leidub täielikus meetrilises ruumis punkt, milles see jada on võrdpidev.

Lõpuks, viimases paragrahvis näidatakse, et Vitali–Hahn–Saksi teoreem ja Nikodými koonduvusteoreem on samaväärsed – kummasti neist teoreemidest järeldub teine – ning tõestatakse Vitali–Hahn–Saksi teoreem toetudes kuuenda paragrahvi materjalile ja seitsmendas paragrahvis tõestatud Baire'i teoreemi järeldusele.

Kõikjal bakalaureusetöös on Ω etteantud mittetühi hulk, Σ hulga Ω alamhulkade

σ-algebra ning λ lõplik positiivne mõõt σ-algebral Σ, s.t $\lambda\colon \Sigma \to [0,\infty)$ on loenduvalt aditiivne hulgafunktsioon (termin "hulgafunktsioon" tähistab funktsiooni, mille määramispiirkond on mingi etteantud hulga mingi alamhulkade kogum; terminiga "kogum" tähistame hulki, mille elementideks on hulgad). σ-algebra Σ hulkadele viitame kui *mõõtuvatele* hulkadele.

§ 1. Loenduvalt aditiivsed mõõdud $\Sigma \to \mathbb{R}$

Definitsioon 1.1. Öeldakse, et hulgafunktsioon $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ on

- *lõplikult aditiivne mõõt,* kui ta on *lõplikult aditiivne* (ehk lihtsalt *aditiivne*), s.t mis tahes $n \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatute hulkade $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ korral

$$\mu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Bigr) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j);$$

- *loenduvalt aditiivne mõõt* ehk lihtsalt *mõõt,* kui ta on *loenduvalt aditiivne,* s.t mis tahes paarikaupa lõikumatute hulkade $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, korral

$$\mu\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Bigr) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

Matemaatilise induktsiooni abil on lihtne tõestada, et *hulgafunktsioon $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ on lõplikult aditiivne parajasti siis, kui mis tahes lõikumatute hulkade $A, B \in \Sigma$ korral*

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Esitame mõned lõplikult aditiivsete mõõtude lihtsamad omadused.

Lause 1.1. *Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ lõplikult aditiivne mõõt. Siis*

(a) $\mu(\varnothing) = 0$*;*

(b) *mis tahes $A, B \in \Sigma$, $A \subset B$, korral*

$$\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A).$$

TÕESTUS. (a). Olgu $A \in \Sigma$; siis

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing) = \mu(A) + \mu(\varnothing),$$

mis on võimalik vaid siis, kui $\mu(\varnothing) = 0$.

(b). Olgu $A, B \in \Sigma$ sellised, et $A \subset B$; siis

$$\mu(B) = \mu\bigl((B \backslash A) \cup A\bigr) = \mu(B \backslash A) + \mu(A),$$

millest järeldub soovitud võrdus. $\square$

Esitame nüüd mõned loenduvalt aditiivsete mõõtude lihtsamad omadused.

Lause 1.2. *Olgu* $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *loenduvalt aditiivne mõõt. Siis*

(a) $\mu(\varnothing) = 0$*;*

(b) μ *on lõplikult aditiivne;*

(c) *mis tahes paarikaupa lõikumatute hulkade* $A_j \in \Sigma$*,* $j \in \mathbb{N}$*, korral rida* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ *koondub absoluutselt, s.t*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| < \infty.$$

Tõestus. (a). Eeldame, et μ on loenduvalt aditiivne ning fikseerime vabalt $A \in \Sigma$. Siis mõõdu μ loenduva aditiivsuse tõttu

$$\mu(A) = \mu(A \cup \varnothing \cup \cdots) = \mu(A) + \mu(\varnothing) + \cdots,$$

mis on võimalik vaid siis, kui $\mu(\varnothing) = 0$.

(b). Olgu $A, B \in \Sigma$ lõikumatud hulgad. Osa (a) põhjal

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \cup B \cup \varnothing \cup \cdots) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(\varnothing) + \cdots = \mu(A) + \mu(B).$$

(c). Olgu $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud hulgad. Mis tahes naturaalarvude ümberjärjestuse π (s.t bijektsiooni $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) korral on hulgad $A_{\pi(j)}$, $j \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud, kusjuures $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{\pi(j)} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j =: A$, seega

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_{\pi(j)}) = \mu\Bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{\pi(j)}\Bigg) = \mu(A).$$

Niisiis, rea $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ kõik ümberjärjestused koonduvad samaks summaks, järelikult Riemanni teoreemi (vt nt [K, lk 472]) põhjal see rida koondub absoluutselt. $\square$

Järgnev lause annab tarvilikke ja piisavaid tingimusi selleks, et lõplikult aditiivne mõõt oleks loenduvalt aditiivne.

Lause 1.3. *Olgu* $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *lõplikult aditiivne mõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) μ *on loenduvalt aditiivne;*

(ii) $E_n \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N},\ E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k\Big)$*;*

(iii) $E_n \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N},\ E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big);$

(iv) $E_n \in \Sigma,\ n \in \mathbb{N},\ E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots,\ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$

Tõestus. (i)⇒(ii). Kehtigu (i). Olgu $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$. Defineerime hulgad $A_n = E_n \backslash E_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, kus $E_0 = \varnothing$. Siis hulgad A_n, $n \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud ning $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Nüüd

$$\mu(E_n) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big);$$

s.t

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big),$$

nagu soovitud.

(ii)⇒(iii). Kehtigu (ii). Olgu $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. Defineerime hulgad $A_n = E_1 \backslash E_n$, $n \in \mathbb{N}$, siis $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$. Väite (ii) kohaselt

$$\begin{aligned}\mu(E_1) - \mu(E_n) = \mu(E_1 \backslash E_n) = \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_1 \backslash E_k\Big) = \mu\Big(E_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \\ = \mu(E_1) - \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big),\end{aligned}$$

järelikult

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big),$$

nagu soovitud.

(iii)⇒(iv). Kehtigu (iii). Kuna $\mu(\varnothing) = 0$, siis väite (iii) kohaselt

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\Big) = \mu(\varnothing) = 0.$$

(iv)⇒(i). Kehtigu (iv). Olgu $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud hulgad. Peame näitama, et

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

ehk, tähistades $A := \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$,

$$\mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A)$$

ehk

$$\left|\mu\Big(\bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j\Big)\right| = \left|\mu\Big(A \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)\right| = \left|\mu(A) - \mu\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

s.t

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \tag{1.1}$$

kus iga $n \in \mathbb{N}$ korral $E_n := \bigcup\limits_{j=n+1}^{\infty} A_j \in \Sigma$.

Näitame, et $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$. Selleks oletame vastuväiteliselt, et leidub $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Olgu $n \in \mathbb{N}$ suvaline. Siis $x \in E_n = \bigcup\limits_{j=n+1}^{\infty} A_j$ ning seega mingi $m > n$ korral $x \in A_m$. Nüüd aga $x \notin \bigcup\limits_{j=m+1}^{\infty} A_j = E_m$, sest hulgad A_j, $j \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud. Sellega oleme jõudnud vastuoluni; niisiis $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$. Kuna $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$, siis on implikatsiooni (iv) eeldused täidetud, seega (1.1) kehtib. $\square$

Järeldus 1.4. *Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ loenduvalt aditiivne mõõt. Siis μ on* tõkestatud, *s.t tema väärtuste hulk on tõkestatud, s.t leidub $M \geqslant 0$ nii, et*

$$|\mu(A)| \leqslant M \quad \textit{iga } A \in \Sigma \textit{ korral.}$$

TÕESTUS. Tähistame iga $E \in \Sigma$ korral $|||\mu|||(E) := \sup\limits_{\Sigma \ni A \subset E} |\mu(A)|$. Siis mis tahes $A, B \in \Sigma$ korral

$$|||\mu|||(A \cup B) \leqslant |||\mu|||(A) + |||\mu|||(B), \tag{1.2}$$

sest kui $\Sigma \ni C \subset A \cup B$, siis

$$|\mu(C)| = |\mu(C \cap A) + \mu(C \setminus A)| \leqslant |\mu(C \cap A)| + |\mu(C \setminus A)| \leqslant |||\mu|||(A) + |||\mu|||(B).$$

Mõõdu μ tõkestatuseks piisab tõestada järgmine väide:

- mis tahes $E \in \Sigma$, $|||\mu|||(E) = \infty$, korral leiduvad lõikumatud mõõtuvad hulgad $A, B \subset E$ nii, et
$$|\mu(A)| > 1 \quad \text{ja} \quad |||\mu|||(B) = \infty.$$

Tõepoolest, oletame, et väide • kehtib. Oletame vastuväiteliselt, et μ on tõkestamata, s.t $|\!|\!|\mu|\!|\!|(\Omega) = \infty$. Siis väite $\bullet$ põhjal leiduvad lõikumatud mõõtuvad hulgad $A_1, B_1 \subset \Omega$ nii, et

$$|\mu(A_1)| > 1 \quad \text{ja} \quad |\!|\!|\mu|\!|\!|(B_1) = \infty.$$

Jällegi väite $\bullet$ põhjal leiduvad lõikumatud mõõtuvad hulgad $A_2, B_2 \subset B_1$ nii, et

$$|\mu(A_2)| > 1 \quad \text{ja} \quad |\!|\!|\mu|\!|\!|(B_2) = \infty.$$

Analoogiliselt jätkates saame paarikaupa lõikumatud hulgad $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et

$$|\mu(A_j)| > 1 \quad \text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Aga nüüd $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\mu(A_j)| = \infty$, mis on vastuolus lausega 1.2, (c).

Järelduse tõestuseks jääb tõestada väide $\bullet$. Olgu $E \in \Sigma$ selline, et $|\!|\!|\mu|\!|\!|(E) = \infty$. Oletame vastuväiteliselt, et soovitud omadustega hulki $A, B \in \Sigma$ ei leidu. Kuna $|\!|\!|\mu|\!|\!|(E) = \infty$, siis leidub $E_1 \subset E$ nii, et $|\mu(E_1)| > 1$. Tehtud vastuväitelise oletuse põhjal $|\!|\!|\mu|\!|\!|(E \backslash E_1) < \infty$, järelikult võrratuse (1.2) põhjal $|\!|\!|\mu|\!|\!|(E_1) = \infty$, seega leidub $E_2 \subset E_1$ nii, et $|\mu(E_2)| > 2$. Tehtud vastuväitelise oletuse põhjal $|\!|\!|\mu|\!|\!|(E_1 \backslash E_2) < \infty$, järelikult võrratuse (1.2) põhjal $|\!|\!|\mu|\!|\!|(E_2) = \infty$, seega leidub $E_3 \subset E_2$ nii, et $|\mu(E_3)| > 3$. Analoogiliselt jätkates saame hulgad $E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ nii, et

$$|\mu(E_j)| > j \quad \text{iga } j \in \mathbb{N} \text{ korral,}$$

seega $|\mu(E_j)| \xrightarrow[j\to\infty]{} \infty$. Teiselt poolt, lause 1.3 põhjal

$$|\mu(E_j)| \xrightarrow[j\to\infty]{} \left|\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j\right)\right|.$$

Jõudsime vastuoluni. $\square$

§ 2. Ühtlane loenduv aditiivsus

Definitsioon 2.1. Olgu $\mathcal{M}$ mingi loenduvalt aditiivsete mõõtude $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ hulk. Öeldakse, et $\mathcal{M}$ on *ühtlaselt loenduvalt aditiivne,* kui mis tahes paarikaupa lõikumatute hulkade $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, korral read $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$ koonduvad ühtlaselt $\mu \in \mathcal{M}$ suhtes, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\sum_{j=n}^{\infty} \mu(A_j)\right| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Öeldakse, et loenduvalt aditiivsete mõõtude jada (μ_n) on ühtlaselt loenduvalt aditiivne, kui tema liikmete hulk $\{\mu_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne.

Järgnev lause annab tarvilikke ja piisavaid tingimusi loenduvalt aditiivsete mõõtude hulga ühtlaseks loenduvaks aditiivsuseks.

Lause 2.1. *Olgu $\mathcal{M}$ mingi mõõtude $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ hulk. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mathcal{M}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne;*

(ii) *mis tahes $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$, korral*

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad \textit{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \textit{ suhtes;}$$

(iii) *mis tahes $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$, korral*

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad \textit{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \textit{ suhtes;}$$

(iv) *mis tahes $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$, korral*

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \textit{ suhtes;}$$

(v) *mis tahes $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_n \cap E_k = \varnothing$, $n \neq k$, korral*

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \textit{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \textit{ suhtes.}$$

Tõestus. (i)⇒(ii). Kehtigu (i). Olgu $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots$. Väite (ii) tõestuseks piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \left|\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) - \mu(E_n)\right| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Selleks defineerime hulgad $A_n = E_n \backslash E_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, kus $E_0 = \varnothing$. Siis hulgad A_n, $n \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud ning $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Väite (i) kohaselt leidub selline $N \in \mathbb{N}$, et kui $n \geqslant N$, siis

$$\left|\sum_{k=n}^{\infty} \mu(A_k)\right| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Olgu nüüd $n \geqslant N$; siis iga $\mu \in \mathcal{M}$ korral

$$\begin{aligned}
\left|\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) - \mu(E_n)\right| &= \left|\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) - \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(A_k)\right| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

nagu soovitud.

(ii)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (ii). Olgu $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$. Defineerime hulgad $A_n = E_1 \backslash E_n$, $n \in \mathbb{N}$; siis $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$. Nüüd väite (ii) kohaselt

$$\begin{aligned}
\mu(E_1) - \mu(E_n) = \mu(E_1 \backslash E_n) = \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) &= \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_1 \backslash E_k\right) = \mu\left(E_1 \backslash \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \\
&= \mu(E_1) - \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad \text{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \text{ suhtes,}
\end{aligned}$$

järelikult

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) \quad \text{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \text{ suhtes.}$$

(iii)$\Rightarrow$(iv). Kehtigu (iii). Kuna iga $\mu \in \mathcal{M}$ korral $\mu(\varnothing) = 0$, siis väite (iii) kohaselt

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \mu(\varnothing) = 0 \quad \text{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \text{ suhtes.}$$

(iv)$\Rightarrow$(v). Kehtigu (iv). Olgu $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud hulgad.

Peame näitama, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E_n)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N}$ korral $A_n := \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k \in \Sigma$; siis $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, kusjuures $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, seega eelduse (iv) põhjal

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) = \mu\Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k\Big) = \mu(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \text{ suhtes,}$$

järelikult leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad \Big|\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Nüüd mis tahes $n \geqslant N$ ja $\mu \in \mathcal{M}$ korral

$$|\mu(E_n)| = \Big|\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_k)\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k)\Big| + \Big|\sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(E_k)\Big| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(v)$\Rightarrow$(i). Kehtigu (v). Oletame vastuväiteliselt, et $\mathcal{M}$ ei ole ühtlaselt loenduvalt aditiivne. Siis leiduvad paarikaupa lõikumatud hulgad $A_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, nii, et read $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$, $\mu \in \mathcal{M}$, ei koondu ühtlaselt; niisiis leiduvad $\varepsilon > 0$, naturaalarvud $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ ja mõõdud $\mu_k \in \mathcal{M}$, $k \in \mathbb{N}$, nii, et

$$\Big|\sum_{j=n_k}^{\infty} \mu_k(A_j)\Big| \geqslant 2\varepsilon \quad \text{iga } k \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Iga $k \in \mathbb{N}$ korral on mõõt μ_k loenduvalt aditiivne, järelikult leidub naturaalarv $m_k > n_k$ nii, et

$$\Big|\sum_{j=m_k+1}^{\infty} \mu_k(A_j)\Big| < \varepsilon.$$

Osajadale üle minnes võime üldisust kitsendamata eeldada, et

$$n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < n_3 < m_3 < \cdots .$$

Tähistame iga $k \in \mathbb{N}$ korral $E_k = \bigcup\limits_{j=n_k}^{m_k} A_j$, siis

$$\begin{aligned}
|\mu_k(E_k)| &= \left|\sum_{j=n_k}^{m_k} \mu_k(A_j)\right| = \left|\sum_{j=n_k}^{\infty} \mu_k(A_j) - \sum_{j=m_k+1}^{\infty} \mu_k(A_j)\right| \\
&\geqslant \left|\sum_{j=n_k}^{\infty} \mu_k(A_j)\right| - \left|\sum_{j=m_k+1}^{\infty} \mu_k(A_j)\right| \\
&\geqslant 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon. \qquad (2.1)
\end{aligned}$$

Teiselt poolt, kuna hulgad E_k, $k \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud, siis väite (v) põhjal

$$\mu(E_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \quad \text{ühtlaselt } \mu_k \in \mathcal{M} \text{ suhtes,}$$

mis on vastuolus hinnanguga (2.1). □

§ 3. Mõõdu täisvariatsioon

Definitsioon 3.1. Lõplikult aditiivse mõõdu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *täisvariatsiooniks* nimetatakse hulgafunktsiooni $|\mu|\colon\ \Sigma \to [0,\infty]$, kus $E \in \Sigma$ korral

$$|\mu|(E) := \sup\left\{\sum_{i=1}^{m} |\mu(A_i)| \colon\ m \in \mathbb{N}, A_1, \ldots, A_m \in \Sigma,\ A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{m} A_i = E\right\}.$$

Lause 3.1. *Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ lõplikult aditiivne mõõt. Siis iga $E \in \Sigma$ korral*

$$\|\!|\mu|\!\|(E) \leqslant |\mu|(E) \leqslant 2\|\!|\mu|\!\|(E), \tag{3.1}$$

kus

$$\|\!|\mu|\!\|(E) = \sup_{\Sigma \ni D \subset E} |\mu(D)|.$$

TÕESTUS. Olgu $E \in \Sigma$. Esimene võrratus ahelas (3.1) on ilmne, sest kui $\Sigma \ni D \subset E$, siis $|\mu(D)| \leqslant |\mu(D)| + |\mu(E \backslash D)| \leqslant |\mu|(E)$. Jääb tõestada teine võrratus.

Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $E_1, \ldots, E_m \in \Sigma$ sellised, et $\bigcup\limits_{i=1}^{m} E_i = E$. Tähistame

$$I^+ := \Big\{ i \in \{1, \ldots, m\} \colon \mu(E_i) \geqslant 0 \Big\} \quad \text{ja} \quad I^- := \Big\{ i \in \{1, \ldots, m\} \colon \mu(E_i) < 0 \Big\},$$

siis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\mu(E_i)| &= \sum_{i \in I^+} |\mu(E_i)| + \sum_{i \in I^-} |\mu(E_i)| = \sum_{i \in I^+} \mu(E_i) - \sum_{i \in I^-} \mu(E_i) \\
&= \mu\Big(\bigcup_{i \in I^+} E_i\Big) - \mu\Big(\bigcup_{i \in I^-} E_i\Big) \leqslant \left|\mu\Big(\bigcup_{i \in I^+} E_i\Big)\right| + \left|\mu\Big(\bigcup_{i \in I^-} E_i\Big)\right| \\
&\leqslant \|\!|\mu|\!\|(E) + \|\!|\mu|\!\|(E) = 2\|\!|\mu|\!\|(E).
\end{aligned}$$

Siit järeldub ahela (3.1) teine võrratus. □

Järgnev tulemus on vahetu järeldus lausest 3.1.

Järeldus 3.2. *Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ lõplikult aditiivne mõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *μ on tõkestatud, s.t*

$$\sup_{E \in \Sigma} |\mu(E)| < \infty;$$

(ii) *$|\mu|(\Omega) < \infty$.*

Järgnev lause ütleb, et loenduvalt aditiivse mõõdu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ täisvariatsioon $|\mu|$ on lõplik mõõt; niisiis võime teda tõlgendada (ja edasises tõlgendamegi) loenduvalt aditiivse mõõduna $|\mu|\colon \Sigma \to \mathbb{R}$.

Lause 3.3. *Loenduvalt aditiivse mõõdu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ täisvariatsioon $|\mu|\colon \Sigma \to [0,\infty]$ on lõplik mõõt, s.t*

(a) *$|\mu|$ on loenduvalt aditiivne;*

(b) *$|\mu|(\Omega) < \infty$; niisiis $|\mu|$ väärtused on lõplikud.*

TÕESTUS. (a). Olgu $E_k \in \Sigma$, $k \in \mathbb{N}$, paarikaupa lõikumatud hulgad. Hulgafunktsiooni $|\mu|$ loenduvaks aditiivsuseks piisab näidata, tähistades $E := \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, et

$$|\mu|(E) = \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|(E_k).$$

Olgu $m \in \mathbb{N}$ ja olgu $A_1, \ldots, A_m \in \Sigma$ sellised paarikaupa lõikumatud hulgad, et $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i = E$. Kuna iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$E_k = E_k \cap E = E_k \cap \bigcup_{i=1}^{m} A_i = \bigcup_{i=1}^{m} E_k \cap A_i$$

ning seega $\sum\limits_{i=1}^{m} |\mu(A_i \cap E_k)| \leqslant |\mu|(E_k)$, siis

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |\mu(A_i)| &= \sum_{i=1}^{m} |\mu(A_i \cap E)| = \sum_{i=1}^{m} \left|\mu\Big(A_i \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big)\right| = \sum_{i=1}^{m} \left|\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_i \cap E_k\Big)\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_k)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(A_i \cap E_k)| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m} |\mu(A_i \cap E_k)| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\mu|(E_k).
\end{aligned}$$

Siit järeldub, et $|\mu|(E) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\mu|(E_k)$.

Vastupidiseks võrratuseks piisab näidata, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\sum_{k=1}^{n} |\mu|(E_k) \leqslant |\mu|(E), \tag{3.2}$$

sest niisugusel juhul

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu|(E_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} |\mu|(E_k) \leqslant |\mu|(E).$$

Olgu $n \in \mathbb{N}$ suvaline ning olgu iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral $m_k \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1^k, \ldots, A_{m_k}^k \in \Sigma$ sellised, et $\bigcup\limits_{i=1}^{m_k} A_i^k = E_k$. Tähistame $A_0 = E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$; siis $A_0 \cup \bigcup\limits_{k=1}^{n} \bigcup\limits_{i=1}^{m_k} A_i^k = E$; seega

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} |\mu(A_i^k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} |\mu(A_i^k)| + |\mu(A_0)| \leqslant |\mu|(E),$$

millest järeldub võrratus (3.2).

(b). Väide järeldub vahetult järeldustest 1.4 ja 3.2. □

Definitsioon 3.2. Mõõdu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ *variatsiooninormiks* nimetatakse arvu

$$\|\mu\| := |\mu|(\Omega).$$

§ 4. λ-pidevus

Definitsioon 4.1. Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ lõplikult aditiivne mõõt. Öeldakse, et μ on *absoluutselt pidev λ suhtes* või lihtsalt *pidev λ suhtes* või *absoluutselt λ-pidev* või lihtsalt *λ-pidev* ja kirjutatakse $\mu \ll \lambda$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E)| < \varepsilon. \tag{4.1}$$

Lause 4.1. *Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ lõplikult aditiivne mõõt. Kui μ on λ-pidev, siis μ on loenduvalt aditiivne.*

Tõestus. Eeldame, et μ on λ-pidev. Olgu hulgad $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ ja $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$. Veendumaks, et μ on loenduvalt aditiivne, piisab lause 1.3 põhjal näidata, et $\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E_n)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Kuna μ on λ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E)| < \varepsilon.$$

Kuna λ on mõõt, siis lause 1.3 põhjal leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E_n) < \delta.$$

Aga nüüd kehtib implikatsioon (4.2). □

Lause 4.2 (vt nt [F, lk 89, teoreem 3.5])**.** *Olgu $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ loenduvalt aditiivne mõõt. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *mõõt μ on λ-pidev;*

(ii) *täisvariatsioon $|\mu|$ on λ-pidev;*

(iii) $E \in \Sigma,\ \lambda(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) = 0$*;*

(iv) $E \in \Sigma,\ \lambda(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) = 0.$

Tõestus. (i)$\Rightarrow$(iii). Kehtigu (i). Olgu $E \in \Sigma$, $\lambda(E) = 0$. Implikatsiooni tõestuseks piisab näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral $|\mu(E)| < \varepsilon$. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Kuna μ on λ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$D \in \Sigma,\ \lambda(D) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(D)| < \varepsilon.$$

Antud juhul $\lambda(E) = 0 < \delta$, seega $|\mu(E)| < \varepsilon$, nagu soovitud.

(iii)$\Rightarrow$(iv). Kehtigu (iii). Olgu $E \in \Sigma$, $\lambda(E) = 0$, ning olgu $m \in \mathbb{N}$ ja paarikaupa lõikumatud hulgad $A_1, \dots, A_m \in \Sigma$ sellised, et $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = E$. Siis

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda(A_i) = \lambda(E) = 0,$$

seega $\lambda(A_1) = \cdots = \lambda(A_m) = 0$. Nüüd väite (iii) kohaselt $|\mu(A_1)| = \cdots = |\mu(A_m)| = 0$, järelikult

$$\sum_{i=1}^{m} |\mu(A_i)| = 0;$$

niisiis $|\mu|(E) = 0$.

(iv)$\Rightarrow$(ii). Kehtigu (iv). Oletame vastuväiteliselt, et $|\mu|$ ei ole λ-pidev, s.t leidub selline $\varepsilon > 0$, et iga $\delta > 0$ korral leidub $E \in \Sigma$ nii, et

$$\lambda(E) < \delta \quad \text{ja} \quad |\mu|(E) \geqslant \varepsilon;$$

seega iga $k \in N$ korral leidub $E_k \in \Sigma$ nii, et

$$\lambda(E_k) < \frac{1}{2^k} \quad \text{ja} \quad |\mu|(E_k) \geqslant \varepsilon.$$

Defineerime hulgad

$$F_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k, \quad n \in \mathbb{N} \qquad \text{ja} \qquad F := \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Nüüd iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\lambda(F_n) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \lambda(E_k) < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}},$$

seega lause 1.3 põhjal

$$0 \leqslant \lambda(F) = \lim_{n\to\infty} \lambda(F_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0,$$

millest $\lambda(F) = 0$. Järelikult väite (iv) põhjal $|\mu|(F) = 0$.

Teiselt poolt, iga $n \in \mathbb{N}$ korral $|\mu|(F_n) \geqslant |\mu|(E_n) \geqslant \varepsilon$, seega lause 1.3 põhjal

$$|\mu|(F) = \lim_{n\to\infty} |\mu|(F_n) \geqslant \varepsilon;$$

jõudsime vastuoluni.

(ii)⇒(i). Kehtigu (ii). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Mõõdu μ λ-pidevuseks peame leidma $\delta > 0$ nii, et kehtib implikatsioon (4.1). Eelduse (ii) kohaselt leidub selline $\delta > 0$, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu|(E) < \varepsilon.$$

Kuna

$$|\mu(E)| \leqslant |\mu|(E) \quad \text{iga } E \in \Sigma \text{ korral,}$$

siis kehtib implikatsioon (4.1), nagu soovitud. □

Selle paragrahvi lõpetuseks näitame, et mis tahes mõõtude $\Sigma \to \mathbb{R}$ jada (μ_n) jaoks on olemas "kontrollmõõt", s.t niisugune mõõt $\nu\colon \Sigma \to [0,\infty)$, et μ_n on ν-pidev iga $n \in \mathbb{N}$ korral.

Lemma 4.3 (vt nt [R, lk 212])**.** *Olgu $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, loenduvalt aditiivsed mõõdud. Siis leidub mõõt $\nu\colon \Sigma \to [0,\infty)$ nii, et μ_n on ν-pidev iga $n \in \mathbb{N}$ korral.*

Tõestus. Defineerime hulgafunktsiooni $\nu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$,

$$\nu(E) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|(E)}{2^n\big(1+\|\mu_n\|\big)}, \quad E \in \Sigma. \tag{4.3}$$

Hulgafunktsioon ν on korrektselt defineeritud, sest kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\frac{|\mu_n|(E)}{2^n\big(1+\|\mu_n\|\big)} \leqslant \frac{|\mu_n|(\Omega)}{2^n\big(1+|\mu_n|(\Omega)\big)} \leqslant \frac{1}{2^n},$$

siis rida valemis (4.3) koondub iga $E \in \Sigma$ korral.

Funktsioon ν on mõõt, sest mis tahes paarikaupa lõikumatute hulkade $E_j \in \Sigma$, $j \in \mathbb{N}$, korral

$$\begin{aligned}\nu\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\big(1+\|\mu_n\|\big)}\,|\mu_n|\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n\big(1+\|\mu_n\|\big)} \sum_{j=1}^{\infty} |\mu_n|(E_j)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|(E_j)}{2^n\big(1+\|\mu_n\|\big)} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu_n|(E_j)}{2^n\big(1+\|\mu_n\|\big)} = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(E_j).\end{aligned}$$

Mõõtude μ_n, $n \in \mathbb{N}$, ν-pidevus järeldub lausest 4.2, sest kui $\nu(E) = 0$, siis ilmselt ka $|\mu_n|(E) = 0$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. □

Märkus 4.1. Mõõtude μ_n, $n \in \mathbb{N}$, ν-pidevust lemmas 4.3 saab näidata ka ilma lause 4.2 abita. Tõepoolest, olgu $n \in \mathbb{N}$ suvaline. Mõõdu μ_n ν-pidevuseks piisab, fikseerides vabalt

$\varepsilon > 0$, leida $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \nu(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu_n(E)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Mis tahes $E \in \Sigma$ korral

$$\frac{|\mu_n|(E)}{2^n\big(1 + \|\mu_n\|\big)} \leqslant \nu(E),$$

seega

$$|\mu_n(E)| \leqslant |\mu_n|(E) \leqslant 2^n\big(1 + \|\mu_n\|\big)\nu(E).$$

Siit näeme, et implikatsioon (4.4) kehtib, kui võtta

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2^n\big(1 + \|\mu_n\|\big)}.$$

§ 5. Ühtlase λ-pidevuse ja ühtlase loenduva aditiivsuse vahekorrast

Definitsioon 5.1. Olgu $\mathcal{M}$ mingi mõõtude $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ hulk. Öeldakse, et $\mathcal{M}$ on *ühtlaselt λ-pidev,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Öeldakse, et loenduvalt aditiivsete mõõtude jada (μ_n) on ühtlaselt λ-pidev, kui tema liikmete hulk $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ on ühtlaselt λ-pidev.

Lause 5.1. *Olgu $\mathcal{M}$ mingi mõõtude $\Sigma \to \mathbb{R}$ hulk. Kui $\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev, siis $\mathcal{M}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne.*

TÕESTUS. Eeldame, et $\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev. Olgu hulgad $E_n \in \Sigma$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$ ja $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$. Veendumaks, et $\mathcal{M}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne, piisab lause 2.1 põhjal näidata, et

$$\mu(E_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \text{ suhtes,}$$

s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E_n)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.} \tag{5.1}$$

Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Kuna $\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Kuna λ on mõõt, siis lause 1.3 põhjal leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad \lambda(E_n) < \delta.$$

Aga nüüd kehtib implikatsioon (5.1). □

Teoreem 5.2 (vt nt [S, lk 144])**.** *Kui λ-pidevate mõõtude $\Sigma \to \mathbb{R}$ hulk $\mathcal{M}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne, siis $\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev.*

TÕESTUS. Eeldame, et λ-pidevate mõõtude $\Sigma \to \mathbb{R}$ hulk $\mathcal{M}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne. Peame näitama, et $\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev, s.t iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.} \tag{5.2}$$

Oletame vastuväiteliselt, et teatava $\varepsilon > 0$ korral ei leidu tingimust (5.2) rahuldavat arvu $\delta > 0$. Siis iga $\delta > 0$ korral leiduvad $E \in \Sigma$ ja $\mu \in \mathcal{M}$ nii, et

$$\lambda(E) < \delta \quad \text{ja} \quad |\mu(E)| \geqslant \varepsilon.$$

Seega, tähistades $\delta_0 = 2$, leiduvad $E_1 \in \Sigma$ ja $\mu_1 \in \mathcal{M}$ nii, et

$$\lambda(E_1) < \frac{\delta_0}{2} \quad \text{ja} \quad |\mu_1(E_1)| \geqslant \varepsilon;$$

kuna mõõt μ_1 on λ-pidev, siis leidub $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \frac{\delta_0}{2}$, nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta_1 \quad \Longrightarrow \quad |\mu_1(E)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Jätkame induktiivselt: kui on antud $n \in \mathbb{N}$, hulgad $E_1, \ldots, E_n \in \Sigma$, mõõdud $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathcal{M}$ ja arvud $\delta_1, \ldots, \delta_n > 0$ nii, et iga $k \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$\lambda(E_k) < \frac{\delta_{k-1}}{2}, \quad |\mu_k(E_k)| \geqslant \varepsilon, \quad \delta_k < \frac{\delta_{k-1}}{2} \tag{5.3}$$

ning

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta_k \quad \Longrightarrow \quad |\mu_k(E)| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{5.4}$$

siis valime $E_{k+1} \in \Sigma$ ja $\mu_{k+1} \in \mathcal{M}$ nii, et

$$\lambda(E_{k+1}) < \frac{\delta_k}{2} \quad \text{ja} \quad |\mu_{k+1}(E_{k+1})| \geqslant \varepsilon;$$

kuna mõõt μ_{k+1} on λ-pidev, siis leidub $\delta_{k+1} > 0$, $\delta_{k+1} < \frac{\delta_k}{2}$, nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta_{k+1} \quad \Longrightarrow \quad |\mu_{k+1}(E)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kirjeldatud protsessi tulemusena saame hulgad $E_k \in \Sigma$, mõõdud $\mu_k \in \mathcal{M}$ ja arvud $\delta_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, nii, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral kehtivad (5.3) ja (5.4).

Paneme nüüd tähele, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}\lambda\Bigl(E_k \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j\Bigr) &\leqslant \lambda\Bigl(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j\Bigr) \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda(E_j) < \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{\delta_{j-1}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \delta_{k+i}\\ &< \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\delta_k}{2^i} = \delta_k,\end{aligned}$$

seega tingimuse (5.4) põhjal

$$\left|\mu_k\left(E_k \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hulgad $A_k := E_k \setminus \bigcup\limits_{j=k+1}^{\infty} E_j$, $k \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud; seejuures iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
|\mu_k(A_k)| &= \left|\mu_k\left(E_k \setminus \left(E_k \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j\right)\right)\right| \\
&= \left|\mu_k(E_k) - \mu_k\left(E_k \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j\right)\right| \\
&\geqslant |\mu_k(E_k)| - \left|\mu_k\left(E_k \cap \bigcup_{j=k+1}^{\infty} E_j\right)\right| \\
&\geqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (5.5)
\end{aligned}$$

Kuna $\mathcal{M}$ on ühtlaselt loenduvalt aditiivne, siis lause 2.1 põhjal

$$\mu(A_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \qquad \text{ühtlaselt } \mu \in \mathcal{M} \text{ suhtes;}$$

järelikult leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k \geqslant N \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(A_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral,}$$

mis on vastuolus hinnanguga (5.5). □

§ 6. Meetriline ruum $(\Sigma_\lambda, d_\lambda)$

Selles paragrahvis anname kogumi Σ teatavale faktorruumile täieliku meetrilise ruumi struktuuri nii, et iga λ-pidev reaalväärtusega mõõt on loomulikul viisil tõlgendatav pideva funktsioonina sellel faktorruumil.

Lemma 6.1. *Mis tahes $E, F, G \subset \Omega$ korral*

$$E \triangle G \subset (E \triangle F) \cup (F \triangle G). \tag{6.1}$$

TÕESTUS. Arvestades, et mis tahes hulkade A ja B korral $A \triangle B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$, piisab sisalduvuseks (6.1) näidata, et

$$E \backslash G \subset (E \backslash F) \cup (F \backslash G) \quad \text{ja} \quad G \backslash E \subset (G \backslash F) \cup (F \backslash E).$$

Olgu $x \in E \backslash G$. Siis $x \in E$ ja $x \notin G$, seega,

(1) kui $x \notin F$, siis $x \in E \backslash F$, seega $x \in (E \backslash F) \cup (F \backslash G)$;

(2) kui $x \in F$, siis $x \in F \backslash G$, seega $x \in (E \backslash F) \cup (F \backslash G)$;

niisiis $E \backslash G \subset (E \backslash F) \cup (F \backslash G)$. Analoogiliselt saab näidata, et $G \backslash E \subset (G \backslash F) \cup (F \backslash E)$. □

Lause 6.2. *Seos $\simeq$ hulgas Σ, mis on defineeritud valemiga*

$$E \simeq F \quad :\Longleftrightarrow \quad \lambda(E \triangle F) = 0, \qquad E, F \in \Sigma,$$

on ekvivalentsusseos.

TÕESTUS. Olgu $E, F, G \in \Sigma$.

Seos $\simeq$ on refleksiivne, sest kuna $\lambda(E \triangle E) = \lambda(\varnothing) = 0$, siis $E \simeq E$.

Seos $\simeq$ on sümmeetriline, sest kui $E \simeq F$, siis $\lambda(F \triangle E) = \lambda(E \triangle F) = 0$, seega $F \simeq E$.

Olgu $E \simeq F$ ja $F \simeq G$, s.t $\lambda(E \triangle F) = 0$ ja $\lambda(F \triangle G) = 0$. Seose $\simeq$ transitiivsuseks piisab näidata, et $E \simeq G$, s.t $\lambda(E \triangle G) = 0$. Selleks piisab näidata, et

$$\lambda(E \triangle G) \leqslant \lambda(E \triangle F) + \lambda(F \triangle G), \tag{6.2}$$

mis mõõdu λ subaditiivsuse tõttu järeldub lemmast 6.1. □

Tähistame faktorhulga $\Sigma/\simeq$ sümboliga Σ_λ, s.t $\Sigma_\lambda := \Sigma/\simeq$. Hulga $E \in \Sigma$ ekvivalentsiklassi faktorhulgas Σ_λ tähistame sümboliga $\widehat{E}$, s.t

$$\widehat{E} := \big\{F \in \Sigma\colon\ E \simeq F\big\} = \big\{F \in \Sigma\colon\ \lambda(E \triangle F) = 0\big\} \in \Sigma_\lambda.$$

Vaatleme nüüd kujutust

$$\Sigma_\lambda \ni \widehat{E} \longmapsto \chi_E \in L_1(\lambda). \tag{6.3}$$

Selle kujutuse definitsiooni korrektsuseks ja tema injektiivsuseks piisab näidata, et hulkade $E, F \in \Sigma$ korral

$$\lambda(E \triangle F) = 0 \quad \iff \quad \chi_E = \chi_F \ \lambda\text{-p.k.} \tag{6.4}$$

Võrdus $\chi_E = \chi_F$ λ-p.k. tähendab, et

$$\lambda\Big(\big\{x \in \Omega\colon\ \chi_E(x) \neq \chi_F(x)\big\}\Big) = 0.$$

Kuna

$$\big\{x \in \Omega\colon\ \chi_E(x) \neq \chi_F(x)\big\} = \big\{x \in \Omega\colon\ x \in (E \backslash F) \cup (F \backslash E)\big\} = E \triangle F,$$

siis samaväärsus (6.4) kehtib.

Kujutuse (6.3) injektiivuse tõttu võime vaadelda hulka Σ_λ ruumi $L_1(\lambda)$ alamhulgana; niisiis see kujutus indutseerib meetrika hulgas Σ_λ.

Lause 6.3. *Funktsioon* $d_\lambda\colon \Sigma_\lambda \times \Sigma_\lambda \to \mathbb{R}$,

$$d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) = \|\chi_E - \chi_F\|_{L_1(\lambda)} = \int_\Omega |\chi_E - \chi_F|\, d\lambda = \lambda(E \triangle F), \quad E, F \in \Sigma,$$

on meetrika hulgal Σ_λ.

Tõestus. Kontrollime meetrika aksioome: mis tahes $E, F, G \in \Sigma$ korral

1° $d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) = 0 \iff \lambda(E \triangle F) = 0 \iff E \simeq F \iff \widehat{E} = \widehat{F}$;

2° $d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) = \|\chi_E - \chi_F\|_{L_1(\lambda)} = \|\chi_F - \chi_E\|_{L_1(\lambda)} = d_\lambda(\widehat{F}, \widehat{E})$;

3°
$$\begin{aligned} d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{G}) &= \|\chi_E - \chi_G\|_{L_1(\lambda)} = \|\chi_E - \chi_F + \chi_F - \chi_G\|_{L_1(\lambda)} \\ &\leqslant \|\chi_E - \chi_F\|_{L_1(\lambda)} + \|\chi_F - \chi_G\|_{L_1(\lambda)} = d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) + d_\lambda(\widehat{F}, \widehat{G}). \end{aligned}$$

□

Märkus 6.1. Meetrika aksioomid kauguse d_λ jaoks on kontrollitavad ka vahetult, ilma kujutust (6.3) kasutamata: mis tahes $E, F, G \in \Sigma$ korral

1° $d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) = 0 \iff \lambda(E \triangle F) = 0 \iff E \simeq F \iff \widehat{E} = \widehat{F}$;

2° $d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) = \lambda(E \triangle F) = \lambda(F \triangle E) = d_\lambda(\widehat{F}, \widehat{E})$;

3° $d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{G}) = \lambda(E \triangle G) \leqslant \lambda(E \triangle F) + \lambda(F \triangle G) = d_\lambda(\widehat{E}, \widehat{F}) + d_\lambda(\widehat{F}, \widehat{G})$

(siin tingimuse 3° tõestamisel kasutasime võrratust (6.2)).

Lause 6.4. *Meetriline ruum* $(\Sigma_\lambda, d_\lambda)$ *on täielik.*

Tõestus. Olgu $(\widehat{E}_n)$ Cauchy jada ruumis $(\Sigma_\lambda, d_\lambda)$, s.t $d_\lambda(\widehat{E}_n, \widehat{E}_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$. Ruumi $(\Sigma_\lambda, d_\lambda)$ täielikkuseks piisab näidata, et see jada koondub. Kuna

$$\|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}\|_{L_1(\lambda)} = d_\lambda(\widehat{E}_n, \widehat{E}_m) \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0,$$

siis jada (χ_{E_n}) on Cauchy jada Banachi ruumis $L_1(\lambda)$ ning seega koondub. Olgu funktsioon $f \in L_1(\lambda)$ selle jada piirväärtus, s.t

$$\chi_{E_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} f \quad \text{ruumis } L_1(\lambda).$$

Kuna igal L_1-koonduval jadal leidub p.k. koonduv osajada, siis leiduvad sellised $D \in \Sigma$ ja osajada $(\chi_{E_{k_n}})_{n=1}^\infty$, et $\lambda(D^c) = 0$ ja $\chi_{E_{k_n}}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ iga $x \in D$ korral. Nüüd

$$\chi_D(x)\chi_{E_{k_n}}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_D(x)f(x) \quad \text{iga } x \in \Omega \text{ korral}$$

ehk

$$\chi_{E_{k_n}\cap D}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} (\chi_D f)(x) \quad \text{iga } x \in \Omega \text{ korral.}$$

Kuna $\chi_{E_{k_n}\cap D}$, $n \in \mathbb{N}$, on mõõtuvad funktsioonid, siis ka funktsioon $\chi_D f$ on mõõtuv, kusjuures tema väärtuste hulk sisaldub hulgas $\{0, 1\}$. Niisiis, tähistades $E := \{x \in \Omega\colon\ (\chi_D f)(x) = 1\} \in \Sigma$, kehtib võrdus $\chi_D f = \chi_E$. Veelgi enam $f = \chi_D f = \chi_E$ λ-p.k. Seega funktsioon f on samast ekvivalentsiklassist hulga $E \in \Sigma$ karakteristliku funktsiooniga; niisiis

$$\chi_{E_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \chi_E \quad \text{ruumis } L_1(\lambda),$$

s.t

$$\|\chi_{E_n} - \chi_E\|_{L_1(\lambda)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

s.t

$$d_\lambda(\widehat{E}_n, \widehat{E}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

mis tähendab, et jada $(\widehat{E}_n)$ koondub elemendiks $\widehat{E} \in \Sigma_\lambda$, nagu soovitud. □

Olgu μ λ-pidev mõõt σ-algebral Σ. Defineerime funktsiooni $\widehat{\mu}\colon \Sigma_\lambda \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{\mu}(\widehat{E}) := \mu(E), \quad E \in \Sigma.$$

Veendume, et funktsioon $\widehat{\mu}$ on korrektselt defineeritud. Selleks, fikseerides vabalt $D, E \in \Sigma$ nii, et $\widehat{D} = \widehat{E}$, s.t $D \simeq E$ ehk, teisisõnu, $\lambda(D\backslash E) + \lambda(E\backslash D) = \lambda(D\triangle E) = 0$, piisab näidata, et $\mu(D) = \mu(E)$. Kuna $\lambda(D\backslash E) = 0$ ja $\lambda(E\backslash D) = 0$, siis lause 4.2 põhjal $\mu(D\backslash E) = 0$ ja $\mu(E\backslash D) = 0$ ning järelikult

$$\mu(D) = \mu(D \cap E) + \mu(D\backslash E) = \mu(D \cap E) = \mu(E \cap D) = \mu(E \cap D) + \mu(E\backslash D) = \mu(E).$$

Lihtne on näha, et funktsioon $\widehat{\mu}$ on pidev. Tõepoolest, fikseerides vabalt $E \in \Sigma$, piisab selleks näidata, et iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $\delta > 0$, et

$$D \in \Sigma,\ \lambda(D\triangle E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(D) - \mu(E)| < \varepsilon.$$

Olgu $D \in \Sigma$ selline, et $\lambda(D\triangle E) < \delta$; siis $\lambda(D\backslash E), \lambda(E\backslash D) < \delta$, mistõttu $|\mu(D\backslash E)|, |\mu(E\backslash D)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seega

$$\begin{aligned}|\mu(D) - \mu(E)| &= |\mu(D \cap E) + \mu(D\backslash E) - \mu(E \cap D) - \mu(E\backslash D)| \\ &\leqslant |\mu(D\backslash E)| + |\mu(E\backslash D)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Definitsioon 6.1. Olgu X ja Y meetrilised ruumid ning olgu $\mathcal{M}$ mingi funktsioonide $f\colon X \to Y$ hulk. Öeldakse, et hulk $\mathcal{M}$ on

- *võrdpidev punktis* $x \in X$, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$z \in X,\ \rho(z, x) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\big(f(z), f(x)\big) < \varepsilon \quad \text{iga } f \in \mathcal{M} \text{ korral;}$$

- *võrdpidev,* kui ta on võrdpidev igas punktis $x \in X$;
- *ühtlaselt võrdpidev,* kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\delta > 0$ nii, et

$$z, x \in X,\ \rho(z, x) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\big(f(z), f(x)\big) < \varepsilon \quad \text{iga } f \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Öeldakse, et funktsioonide jada (f_n) on

- *võrdpidev punktis* $x \in X$, kui tema liikmete hulk $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on võrdpidev punktis $x \in X$;
- *võrdpidev,* kui tema liikmete hulk $\{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ on võrdpidev;

- *ühtlaselt võrdpidev,* kui tema liikmete hulk $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ on ühtlaselt võrdpidev.

Lause 6.5. *Olgu $\mathcal{M}$ mingi λ-pidevate mõõtude $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ hulk. Tähistame $\widehat{\mathcal{M}} := \{\widehat{\mu}\colon\ \mu \in \mathcal{M}\}$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *$\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev;*

(ii) *$\widehat{\mathcal{M}}$ on ühtlaselt võrdpidev;*

(iii) *$\widehat{\mathcal{M}}$ on võrdpidev;*

(iv) *$\widehat{\mathcal{M}}$ on võrdpidev punktis $\widehat{\varnothing}$;*

(v) *leidub hulk $E \in \Sigma$ nii, et $\widehat{\mathcal{M}}$ on võrdpidev punktis $\widehat{E} \in \Sigma_\lambda$;*

(vi) *iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad hulk $E \in \Sigma$ ja arv $\delta > 0$ nii, et*

$$D \in \Sigma,\ \lambda(D \triangle E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(D) - \mu(E)| < \varepsilon \quad \textit{iga } \mu \in \mathcal{M} \textit{ korral.}$$

TÕESTUS. (ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(vi) on ilmne.

(i)⇒(ii). Eeldame, et $\mathcal{M}$ on ühtlaselt λ-pidev. Hulga $\widehat{\mathcal{M}}$ ühtlaseks võrdpidevuseks piisab, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, leida $\delta > 0$ nii, et

$$D, E \in \Sigma,\ \lambda(D \triangle E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(D) - \mu(E)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Paneme tähele, et mis tahes $D, E \in \Sigma$ korral

$$\begin{aligned} |\mu(D) - \mu(E)| &= |\mu(D \cap E) + \mu(D \backslash E) - \mu(E \cap D) - \mu(E \backslash D)| \\ &\leqslant |\mu(D \backslash E)| + |\mu(E \backslash D)|. \end{aligned}$$

Kuna eelduse põhjal on $\mathcal{M}$ ühtlaselt λ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$D \in \Sigma,\ \lambda(D) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(D)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Olgu nüüd $D, E \in \Sigma$ sellised, et $\lambda(D \backslash E) + \lambda(E \backslash D) = \lambda(D \triangle E) < \delta$. Siis $\lambda(D \backslash E),\ \lambda(E \backslash D) < \delta$, mistõttu $|\mu(D \backslash E)|, |\mu(E \backslash D)| < \frac{\varepsilon}{2}$ iga $\mu \in \mathcal{M}$ korral. Seega

$$|\mu(D) - \mu(E)| \leqslant |\mu(D \backslash E)| + |\mu(E \backslash D)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

(vi)⇒(i). Kehtigu (vi). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Implikatsiooni tõestuseks piisab leida $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(E)| < 2\varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Eelduse (vi) põhjal leiduvad $A \in \Sigma$ ja $\delta > 0$ nii, et

$$D \in \Sigma,\ \lambda(D \triangle A) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\mu(D) - \mu(A)| < \varepsilon \quad \text{iga } \mu \in \mathcal{M} \text{ korral.}$$

Mis tahes $E \in \Sigma$ korral

$$E = E_1 \backslash E_2, \quad \text{kus } E_1 = E \cup A \text{ ja } E_2 = A \backslash E;$$

seejuures

$$E_1 \triangle A = (E_1 \backslash A) \cup (A \backslash E_1) = (E \backslash A) \cup \varnothing = E \backslash A$$

ja

$$E_2 \triangle A = (E_2 \backslash A) \cup (A \backslash E_2) = \varnothing \cup (A \cap E) = E \cap A,$$

seega

$$\lambda(E_1 \triangle A) = \lambda(E \backslash A) \leqslant \lambda(E) \quad \text{ja} \quad \lambda(E_2 \triangle A) = \lambda(E \cap A) \leqslant \lambda(E).$$

Niisiis, kui $E \in \Sigma$ rahuldab tingimust $\lambda(E) < \delta$, siis $\lambda(E_1 \triangle A) < \delta$ ja $\lambda(E_2 \triangle A) < \delta$, järelikult väite (vi) põhjal iga $\mu \in \mathcal{M}$ korral

$$|\mu(E_1) - \mu(A)| < \varepsilon \quad \text{ja} \quad |\mu(E_2) - \mu(A)| < \varepsilon$$

ning seega

$$\begin{aligned} |\mu(E)| &= |\mu(E_1 \backslash E_2)| = |\mu(E_1) - \mu(E_2)| = |\mu(E_1) - \mu(A) + \mu(A) - \mu(E_2)| \\ &\leqslant |\mu(E_1) - \mu(A)| + |\mu(A) - \mu(E_2)| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

nagu soovitud. $\square$

§ 7. Pidevate funktsioonide punktiviisi koonduva jada piirfunktsiooni pidevuspunkti olemasolu täielikus meetrilises ruumis

Meenutame funktsionaalanalüüsi sissejuhatavast kursusest tuttavat Baire'i teoreemi.

Teoreem 7.1 (Baire'i teoreem; vt nt [OO, lk 33])**.** *Kui täielik meetriline ruum esitub loenduva ühendina kinnistest hulkadest, siis vähemalt üks nendest hulkadest sisaldab mingit kera.*

Vitali–Hahn–Saksi teoreemi tõestus järgmises paragrahvis toetub järgnevale hästi tuntud järeldusele Baire'i teoreemist.

Teoreem 7.2. *Olgu X ja Y meetrilised ruumid, kusjuures X on täielik, ning olgu pidevad funktsioonid $f_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

- *piirväärtus $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$ eksisteerib iga $x \in X$ korral.*

Siis

(a) *leidub punkt $x \in X$, milles jada (f_n) on võrdpidev;*

(b) *leidub punkt $x \in X$, milles funktsioon f on pidev.*

Tõestus. Kõigepealt paneme tähele, et väide (b) järeldub väitest (a) ka ilma eelduseta ruumi X täielikkuse kohta. Veelgi täpsemalt: *kui jada (f_n) on võrdpidev punktis $x \in X$, siis funktsioon f on pidev punktis x.* Tõepoolest, eeldame, et jada (f_n) on võrdpidev punktis $x \in X$. Funktsiooni f pidevuseks punktis x piisab, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, leida $\delta > 0$ nii, et

$$z \in X,\ \rho(z,x) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(f(z), f(x)\big) \leqslant \varepsilon. \tag{7.1}$$

Eelduse kohaselt leidub $\delta > 0$ nii, et

$$z \in X,\ \rho(z,x) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) < \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Kuna iga $z \in X$ korral $f_n(z) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(z)$, siis kauguse pidevuse tõttu implikatsioon (7.1) kehtib.

Teoreemi tõestuseks jääb tõestada väide (a). Selleks tähistame kõikide $k, m \in \mathbb{N}$ korral

$$F_m^k := \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ z \in X\colon \quad \rho\big(f_n(z), f_m(z)\big) \leqslant \frac{1}{k} \right\}.$$

Paneme tähele, et jada (f_n) on võrdpidev punktis $x \in X$, kui

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (F_m^k)^\circ =: G.$$

Tõepoolest, olgu $x \in G$ ning olgu $\varepsilon > 0$ suvaline. Jada (f_n) võrdpidevuseks punktis x piisab leida $\delta > 0$ nii, et

$$z \in B(x,\delta) \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) < \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{7.2}$$

Selleks valime sellise $k \in \mathbb{N}$, et $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$. Olgu $m \in \mathbb{N}$ selline, et $x \in (F_m^k)^\circ$, s.t $B(x,\delta_0) \subset F_m^k$ mingi $\delta_0 > 0$ korral. Iga $n \in \{1, \ldots, m\}$ korral on funktsioon f_n pidev punktis x, seega leidub $\delta_n > 0$ nii, et

$$z \in B(x,\delta_n) \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Näitame, et, võttes $\delta := \min\{\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_m\}$, implikatsioon (7.2) kehtib. Kui $n \leqslant m$, siis implikatsioon (7.2) on ilmne. Kui $n > m$, siis eeldusel, et $z \in B(x,\delta)$, saame

$$\begin{aligned}\rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) &\leqslant \rho\big(f_n(z), f_m(z)\big) + \rho\big(f_m(z), f_m(x)\big) + \rho\big(f_m(x), f_n(x)\big)\\ &< \frac{1}{k} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{k} < \varepsilon.\end{aligned}$$

Tõestuse lõpetuseks piisab näidata, et $G \neq \varnothing$ ehk $X \backslash G \neq X$. Selleks paneme kõigepealt tähele, et hulgad F_m^k, $k, m \in \mathbb{N}$, on kinnised, kusjuures iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^k = X$.

Olgu $k, m \in \mathbb{N}$ ning olgu $x_j \in F_m^k$, $j \in \mathbb{N}$, ja $x \in X$ sellised, et $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ ruumis X. Hulga F_m^k kinnisuseks piisab näidata, et $x \in F_m^k$. Eelduse kohaselt iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\rho\big(f_n(x_j), f_m(x_j)\big) \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{kõikide } n \geqslant m \text{ korral.}$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon f_n pidev, seega eeldusest $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ järeldub, et $f_n(x_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} f_n(x)$. Kauguse pidevuse tõttu

$$\rho\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \frac{1}{k} \quad \text{kõikide } n \geqslant m \text{ korral,}$$

seega $x \in F_m^k$, nagu soovitud.

Olgu nüüd $k \in \mathbb{N}$. Veendumaks, et $\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^k = X$, piisab näidata, et $X \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^k$. Olgu $x \in X$. Kuna jada $\big(f_n(x)\big)$ koondub, siis see jada on Cauchy jada, järelikult leidub

$m \in \mathbb{N}$ nii, et

$$n, l \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(f_n(x), f_l(z)\big) \leqslant \frac{1}{k},$$

aga siit järeldub, et $x \in F_m^k$.

Nüüd

$$\begin{aligned} X \backslash G &= \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(X \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} (F_m^k)^\circ \Big) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Big(\Big(\bigcup_{m=1}^{\infty} F_m^k \Big) \backslash \bigcup_{m=1}^{\infty} (F_m^k)^\circ \Big) \\ &\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \big(F_m^k \backslash (F_m^k)^\circ \big) \subsetneqq X. \end{aligned}$$

Siin viimane sisalduvus on range, sest kuna hulgad $F_m^k \backslash (F_m^k)^\circ$, $k, m \in \mathbb{N}$, on kinnised ja tühja sisemusega, siis nende (loenduv) ühend ei saa olla kogu ruum X Baire'i teoreemi kohaselt. □

Tegelikult piisab Vitali–Hahn–Saksi teoreemi tõestuseks järgnevast teoreemi 7.2 nõrgemast versioonist. Kuigi see nõrgem versioon järeldub vahetult teoreemist 7.2, esitame talle iseseisva tõestuse.

Teoreem 7.3. *Olgu X ja Y meetrilised ruumid, kusjuures X on täielik, ning olgu pidevad funktsioonid $f_n \colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

- *piirväärtus $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in Y$ eksisteerib iga $x \in X$ korral.*

Siis

- *iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad punkt $x \in X$ ja arv $\delta > 0$ nii, et*

$$z \in X,\ \rho(z, x) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) < \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.} \tag{7.3}$$

Tõestus. Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$ ning defineerime iga $k \in \mathbb{N}$ korral hulga

$$F_k = \Big\{ x \in X \colon\ \rho\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kõikide } m, n \geqslant k \text{ korral} \Big\}.$$

Näitame, et hulgad F_k, $k \in \mathbb{N}$, on kinnised. Olgu $k \in \mathbb{N}$ ning olgu $x_j \in F_k$, $j \in \mathbb{N}$, ja $x \in X$ sellised, et $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ ruumis X. Hulga F_k kinnisuseks piisab näidata, et $x \in F_k$. Eelduse kohaselt iga $j \in \mathbb{N}$ korral

$$\rho\big(f_n(x_j), f_m(x_j)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kõikide } m, n \geqslant k \text{ korral.}$$

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral on funktsioon f_n pidev, seega eeldusest $x_j \xrightarrow[j\to\infty]{} x$ järeldub, et

$f_n(x_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} f_n(x)$. Kauguse pidevuse tõttu

$$\rho\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kõikide } m, n \geqslant k \text{ korral,}$$

seega $x \in F_k$, nagu soovitud.

Näitame, et $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k = X$. Selleks piisab näidata, et $X \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$. Olgu $x \in X$. Vaatleme jada $\big(f_n(x)\big)$. Kuna $\big(f_n(x)\big)$ kui koonduv jada on Cauchy jada, siis leidub $l \in \mathbb{N}$ nii, et

$$m, n \geqslant l \quad \Longrightarrow \quad \rho\big(f_n(x), f_m(x)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

See aga tähendab, et $x \in F_l \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k$, nagu soovitud.

Nüüd on Baire'i teoreemi 7.1 eeldused täidetud, mistõttu leiduvad $k \in \mathbb{N}$, $x \in X$ ja $\delta_0 > 0$ nii, et $B(x, \delta_0) \subset F_k$, s.t

$$z \in B(x, \delta_0) \quad \Longrightarrow \quad z \in F_k$$

ehk, teisisõnu,

$$z \in X,\ \rho(z, x) < \delta_0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\big(f_n(z), f_m(z)\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{kõikide } m, n \geqslant k \text{ korral.}$$

Kuna funktsioonid $f_1, \ldots, f_k$ on pidevad punktis x, siis leidub $\delta_1 > 0$ nii, et

$$z \in X,\ \rho(z, x) < \delta_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{iga } n \in \{1, \ldots, k\} \text{ korral.}$$

Niisiis, võttes $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1\}$, implikatsioon (7.3) kehtib, sest kui $\rho(z, x) < \delta$, siis mis tahes $n > k$ korral

$$\begin{aligned}\rho\big(f_n(z), f_n(x)\big) &\leqslant \rho\big(f_n(z), f_k(z)\big) + \rho\big(f_k(z), f_k(x)\big) + \rho\big(f_k(x), f_n(x)\big)\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

$\square$

§ 8. Vitali–Hahn–Saksi teoreemi ja Nikodými koonduvusteoreemi tõestus

Selles paragrahvis tõestame sissejuhatuses äratoodud Vitali–Hahn–Saksi teoreemi ja Nikodými koonduvusteoreemi. Parema jälgitavuse huvides sõnastame need teoreemid siinkohal uuesti.

Teoreem 8.1 (Vitali–Hahn–Saksi teoreem)**.** *Olgu λ-pidevad mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

- *piirväärtus $\mu(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) \in \mathbb{R}$ eksisteerib iga $E \in \Sigma$ korral.*

Siis

(a) *jada (μ_n) on ühtlaselt λ-pidev;*

(b) *hulgafunktsioon $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ on λ-pidev (mõõt).*

Teoreem 8.2 (Nikodými koonduvusteoreem)**.** *Olgu (loenduvalt aditiivsed) mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sellised, et*

- *piirväärtus $\mu(E) := \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) \in \mathbb{R}$ eksisteerib iga $E \in \Sigma$ korral.*

Siis

(a) *jada (μ_n) on ühtlaselt loenduvalt aditiivne;*

(b) *hulgafunktsioon $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ on loenduvalt aditiivne, s.t μ on mõõt.*

Kõigepealt analüüsime Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1 ja Nikodými koonduvusteoreemi 8.2 võrdlevalt (ilma kumbagi neist tõestamata): me näitame, et esimesest neist teoreemidest järeldub lihtsasti teine ja, vastupidi, teisest järeldub lihtsasti esimene.

Selleks märgime esmalt, et

[I] *hulgafunktsioon $\mu\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ teoreemides 8.1 ja 8.2 on lõplikult aditiivne mõõt.*

Tõepoolest, kui $A, B \in \Sigma$ on lõikumatud hulgad, siis mõõtude μ_n aditiivsuse tõttu

$$\begin{aligned}\mu(A \cup B) &= \lim_{n\to\infty} \mu_n(A \cup B) = \lim_{n\to\infty} \big(\mu_n(A) + \mu_n(B)\big) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) + \lim_{n\to\infty} \mu_n(B)\\ &= \mu(A) + \mu(B).\end{aligned}$$

Järgmiseks paneme tähele, et

[II] *nii Vitali–Hahn–Saksi teoreemis 8.1 kui ka Nikodými koonduvusteoreemis 8.2 järeldub väide* (b) *väitest* (a).

Tõepoolest, rahuldagu mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tingimust

- piirväärtus $\mu(E) := \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(E) \in \mathbb{R}$ eksisteerib iga $E \in \Sigma$ korral.

[II$_1$]. Eeldame, et kehtib teoreemi 8.1 väide (a), s.t jada (μ_n) on ühtlaselt λ-pidev. Näitame, et sel juhul kehtib ka väide (b), s.t lõplikult aditiivne mõõt μ on λ-pidev. Selleks piisab, fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, leida $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E)| \leqslant \varepsilon.$$

Kuna jada (μ_n) on ühtlaselt λ-pidev, siis leidub $\delta > 0$ nii, et

$$E \in \Sigma,\ \lambda(E) < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\mu_n(E)| < \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral},$$

aga nüüd $E \in \Sigma$, $\lambda(E) < \delta$, korral

$$|\mu(E)| = \big|\lim_{n\to\infty} \mu_n(E)\big| = \lim_{n\to\infty} |\mu_n(E)| \leqslant \varepsilon.$$

[II$_2$]. Eeldame, et kehtib teoreemi 8.2 väide (a), s.t jada (μ_n) on ühtlaselt loenduvalt aditiivne. Näitame, et sel juhul kehtib ka väide (b), s.t lõplikult aditiivne mõõt μ on loenduvalt aditiivne. Selleks piisab, lause 1.3 põhjal näidata, et suvaliste mõõtuvate hulkade $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \cdots$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k = \varnothing$, korral $\mu(E_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, s.t fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |\mu(E_k)| \leqslant \varepsilon.$$

Kuna jada (μ_n) on ühtlaselt loenduvalt aditiivne, siis lause 2.1 põhjal leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et

$$k \geqslant N \quad \Longrightarrow \quad |\mu_n(E_k)| < \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral},$$

aga nüüd $k \geqslant N$ korral

$$|\mu(E_k)| = |\lim_{n\to\infty} \mu_n(E_k)| = \lim_{n\to\infty} |\mu_n(E_k)| \leqslant \varepsilon.$$

Lõpuks näitame, et

[III$_1$] *Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1,* (a), *kehtivusest järeldub Nikodými koonduvusteoreemi 8.2,* (a), *kehtivus. Teoreemi 8.1,* (b), *kehtivusest järeldub teoreemi 8.2,* (b), *kehtivus.*

[III_2] *Nikodými koonduvusteoreemi 8.2,* (a), *kehtivusest järeldub Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1,* (a), *kehtivus. Teoreemi 8.2,* (b), *kehtivusest järeldub teoreemi 8.1,* (b), *kehtivus.*

[III_1]. Oletame, et Vitali–Hahn–Saksi teoreem 8.1, (a), on tõestatud. Tõestame sel eeldusel Nikodými koonduvusteoreemi 8.2, (a). Rahuldagu loenduvalt aditiivsed mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tingimust $\bullet$. Teoreemi 8.2, (a), tõestuseks peame näitama, et jada (μ_n) on ühtlaselt loenduvalt aditiivne. Olgu $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ "kontrollmõõt" jadale (μ_n) lemmast 4.3, s.t μ_n on ν-pidev iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis teoreemi 8.1, (a), põhjal on jada (μ_n) ühtlaselt ν-pidev, järelikult lause 5.1 põhjal on jada (μ_n) ühtlaselt loenduvalt aditiivne, nagu soovitud.

Oletame nüüd, et Vitali–Hahn–Saksi teoreem 8.1, (b), on tõestatud. Tõestame sel eeldusel Nikodými koonduvusteoreemi 8.2, (b). Rahuldagu loenduvalt aditiivsed mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tingimust $\bullet$. Teoreemi 8.2, (b), tõestuseks peame näitama, et lõplikult aditiivne mõõt μ on loenduvalt aditiivne. Olgu $\nu\colon\ \Sigma \to \mathbb{R}$ "kontrollmõõt" jadale (μ_n) lemmast 4.3, s.t μ_n on ν-pidev iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Siis teoreemi 8.1, (b), põhjal on μ ν-pidev, järelikult lause 4.1 põhjal on μ loenduvalt aditiivne, nagu soovitud.

[III_2]. Oletame, et Nikodými koonduvusteoreem 8.2, (a), on tõestatud. Tõestame sel eeldusel Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1, (a). Rahuldagu λ-pidevad mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tingimust $\bullet$. Teoreemi 8.1, (a), tõestuseks peame näitama, et jada (μ_n) on ühtlaselt λ-pidev. Teoreemi 8.2, (a), põhjal on jada (μ_n) ühtlaselt loenduvalt aditiivne, järelikult teoreemi 5.2 põhjal on jada (μ_n) ühtlaselt λ-pidev, nagu soovitud.

Oletame nüüd, et Nikodými koonduvusteoreem 8.2, (b), on tõestatud. Tõestame sel eeldusel Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1, (b). Rahuldagu λ-pidevad mõõdud $\mu_n\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, tingimust $\bullet$. Teoreemi 8.1, (b), tõestuseks peame näitama, et lõplikult aditiivne mõõt μ on λ-pidev. Teoreemi 8.2, (b), põhjal on μ loenduvalt aditiivne, seega tema λ-pidevuse tõestuseks saame rakendada lauset 4.2. Olgu $E \in \Sigma$ selline, et $\lambda(E) = 0$. Mõõdu μ λ-pidevuseks piisab lause 4.2 põhjal näidata, et $\mu(E) = 0$. Kuna eelduse põhjal on mõõdud μ_n, $n \in \mathbb{N}$, λ-pidevad, siis lause 4.2 põhjal iga $n \in \mathbb{N}$ korral $\mu_n(E) = 0$. Aga nüüd $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(E) = 0$, nagu soovitud.

Ülaltoodu valguses piisab nüüd Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1 ja Nikodými koonduvusteoreemi 8.2 tõestuseks tõestada Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1 väide (a).

Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1, (a), tõestus järeldusena teoreemist 7.2. Jada (μ_n) ühtlaseks λ-pidevuseks piisab lause 6.5 põhjal leida mingi punkt, milles jada $(\widehat{\mu}_n)$, kus funktsioonid $\widehat{\mu}_n\colon\ \Sigma_\lambda \to \mathbb{R}$ on defineeritud võrdusega $\widehat{\mu}_n(\widehat{E}) = \mu_n(E)$, $E \in \Sigma$, on võrdpidev. Sellise punkti olemasolu järeldub vahetult teoreemist 7.2. $\square$

Esitame Vitali–Hahn–Saksi teoreemile 8.1 veel ka tõestuse, mis toetub teoreemist 7.2 nõrgemale teoreemile 7.3

Vitali–Hahn–Saksi teoreemi 8.1, (a), tõestus järeldusena teoreemist 7.3. Fikseerides vabalt $\varepsilon > 0$, piisab jada (μ_n) ühtlaseks λ-pidevuseks lause 6.5 põhjal leida hulk $E \in \Sigma$ ja arv $\delta > 0$ nii, et

$$\widehat{D} \in \Sigma_\lambda,\ d_\lambda(\widehat{D}, \widehat{E}) < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |\widehat{\mu}_n(\widehat{D}) - \widehat{\mu}_n(\widehat{E})| < \varepsilon \quad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral.}$$

Soovitud $E \in \Sigma$ ja $\delta > 0$ olemasolu järeldub vahetult teoreemist 7.3. □

Kirjandus

[D] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces*, Graduate Texts in Mathematics, 92. Springer, New York, 1984.

[DU] J. Diestel, J. J. Uhl, jr., *Vector Measures*, Math. Surveys, vol.15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[F] G. B. Folland, *Real analysis. Modern techniques and their applications*, Second edition, Pure and Applied Mathematics (New York), A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1999.

[K] G. Kangro, *Matemaatiline analüüs I*, Valgus, Tallinn, 1982.

[LP] P. de Lucia, E. Pap *Convergence theorems for set functions*, In: E. Pap (ed.), Handbook of Measure Theory, Vol. I, II, 125–178, North-Holland, Amsterdam, 2002.

[OO] E. Oja, P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[R] R. A. Ryan, *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, London, 2002.

[S] C. Swartz, *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1994.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Laura Kruusmann,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose "Vitali–Hahn–Saksi teoreem ja Nikodými koonduvusteoreem", mille juhendaja on Märt Põldvere,

1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2 üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.