Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Kristjan Kallikivi

Lipschitzi funktsioonide jätkamine

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Johann Langemets
Natalia Saealle

Tartu 2023

Lipschitzi funktsioonide jätkamine

Bakalaureusetöö
Kristjan Kallikivi

Lühikokkuvõte. Aastal 1934 tõestasid E. J. McShane ja H. Whitney teineteisest sõltumatult, et meetrilise ruumi alamhulgal tegutsevat Lipschitzi funktsiooni saab alati jätkata Lipschitzi funktsiooniks tervele ruumile säilitades tema Lipschitzi konstanti. Käesolevas bakalaureusetöös kirjutatakse üksikasjaliselt lahti selle tulemuse tõestus ja esitatakse ka analoogiline tulemus lokaalselt Lipschitzi funktsioonide jaoks.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: meetriline ruum, normeeritud ruum, Lipschitzi funktsioon, funktsiooni jätkamine.

Extension of Lipschitz functions

Bachelor's thesis
Kristjan Kallikivi

Abstract. In 1934, E. J. McShane and H. Whitney proved independently that every Lipschitz function acting on a subset of a metric space can always be extended to a Lipschitz function on the whole metric space such that it preserves it's Lipschitz constant. In this bachelor's thesis, a detailed proof of this result is presented, and an analogous result for locally Lipschitz functions is also exhibited.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.
Keywords: metric space, normed space, Lipschitz function, extending a function.

Sisukord

Sissejuhatus

Bakalaureusetöö on referatiivne teoreetiline uurimus funktsionaalanalüüsi vallas. Töö eesmärgiks on anda ülevaade Lipschitzi funktsioonidest ja nende jätkamisest.

Aastal 1934 tõestasid E. J. McShane [McS34, Teoreem 1] ja H. Whitney [Whi34, joonealune märkus 63. leheküljel] teineteisest sõltumatult, et meetrilise ruumi alamhulgal defineeritud reaalsete väärtustega Lipschitzi funktsioon f on Lipschitzi konstanti säilitavalt jätkatav kogu ruumile. McShane näitas, et sobivaks jätkuks on Φ_f ja Whitney näitas, et sobib Ψ_f (vt alljärgnev McShane–Whitney teoreem).

Teoreem (McShane–Whitney, 1934)**.** *Olgu* (X, d) *meetriline ruum,* S *ruumi* X *alamhulk ning* $f\colon S \to \mathbb{R}$ *Lipschitzi funktsioon, kus* $\mathrm{Lip}(f) = L$*. Siis funktsioonid* $\Psi_f\colon X \to \mathbb{R}$ *ja* $\Phi_f\colon X \to \mathbb{R}$*, defineeritud kui*

$$\Psi_f(x) \coloneqq \sup_{s\in S}(f(s) - Ld(x, s))$$

ja

$$\Phi_f(x) \coloneqq \inf_{s\in S}(f(s) + Ld(x, s)),$$

on funktsiooni f *Lipschitzi jätkud, mille puhul* $\mathrm{Lip}(\Psi_f) = \mathrm{Lip}(\Phi_f) = \mathrm{Lip}(f)$.

McShane–Whitney teoreem koos tõestusega on eesti keeles ilmunud varem H. Niglase magistritöös (vt [Nig14, Teoreem 1.15]), kuid see tõestus kasutab Kuratowski–Zorni lemmat ning seetõttu annab mingi sobiva jätku olemasolu, aga ei anna eeskirja sellise jätku konstrueerimiseks. Käesoleva bakalaureusetöö peamiseks eesmärgiks on suuresti õpikule [CMN19] tuginedes anda üksikasjalik ja originaali sarnane tõestus nii McShane–Whitney teoreemile (vt Teoreem 2.2) kui ka selle teoreemi laiendusele lokaalselt Lipschitzi funktsioonide jaoks (vt Teoreem 3.6).

Bakalaureusetöö sisuline osa on jaotatud neljaks peatükiks. Esimeses peatükis esitame eelteadmistena vajalikud definitsioonid ja tulemused. Kirjeldame mõningaid Lipschitzi funktsioonide omadusi ja toome näiteid Lipschitzi funktsioonidest. Peatüki olulisus seisneb selles, et valmistada lugeja ette järgnevates peatükkides vaadeldavate Lipschitzi funktsioonide jätkamisviiside uurimiseks.

Teises peatükis vaatleme Lipschitzi funktsioonide jätkamist. Tõestame bakalaureusetöö põhitulemuse ehk McShane–Whitney teoreemi, mille järel vaatame teoreemi järeldusi ja illustreerime kirjeldatavat teoreemi näidetega. Näeme, et kompleksete väärtustega Lipschitzi funktsioonide jätkamisel Lipschitzi konstant üldiselt ei säili.

Kolmas peatükk keskendub lokaalselt Lipschitzi funktsioonidele. Kirjeldame seoseid Lipschitzi funktsioonide ja lokaalselt Lipschitzi funktsioonide vahel. Peatüki põhiteoreemis tõestame, et meetrilise ruumi kinnise alamhulga peal defineeritud lokaalselt Lipschitzi funktsioonil leidub lokaalselt Lipschitzi jätk tervele ruumile.

Töö neljandas peatükis defineerime hulgal absoluutselt minimiseerivad funktsioonid ja funktsiooni absoluutselt minimiseerivad Lipschitzi jätkud. Vaatame selliste funktsioonide näiteid ja kirjeldame nende funktsioonide omadusi. Lõpetuseks toome välja ühe seni lahendamata probleemi absoluutselt minimiseerivate Lipschitzi jätkude olemasolu kohta.

1 Eelteadmised

Käesolevas peatükis defineerime töö sisu jaoks olulised mõisted ja tulemused. Esimeses alapeatükis vaatame üle meetriliste ruumidega seonduva ning teises alapeatükis kirjeldame Lipschitzi funktsioone ja vaatame mõningaid Lipschitzi funktsioonide omadusi. Siin peatükis tugineme õpikutele [OO91] ja [CMN19].

1.1 Meetrilised ruumid

Definitsioon 1.1. *Meetriliseks ruumiks* nimetatakse mittetühja hulka X koos sellel defineeritud seosega d, mis seab igale elemendipaarile $x, y \in X$ vastavusse reaalarvu $d(x, y)$ selliselt, et iga $x, y, z \in X$ korral kehtivad järgmised tingimused:

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ehk *identsuse aksioom*;
2. $d(x, y) = d(y, x)$ ehk *sümmeetria aksioom*;
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ehk *kolmnurga võrratus*.

Reaalarvu $d(x, y)$ nimetatakse elementide x ja y *vaheliseks kauguseks* ja funktsiooni $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ *meetrikaks*. Meetrilist ruumi X kaugusega d tähistame (X, d).

Näide 1.2. Tähistagu $\mathbb{K}$ hulka $\mathbb{R}$ või $\mathbb{C}$. Ruumis $\mathbb{K}^n$ saab elementide $x \coloneqq (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ja $y \coloneqq (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ vahelise kauguse defineerida järgmiselt:

$$d(x, y) = \sqrt{|\xi_1 - \eta_1|^2 + \ldots + |\xi_n - \eta_n|^2}.$$

Definitsioon 1.3. Olgu (X, d) meetriline ruum, $a \in X$ ja $r > 0$. Hulka

$$B_r[a] \coloneqq \{x \in X \mid d(x, a) \leq r\}$$

nimetatakse *kinniseks keraks* keskpunktiga a ja hulka

$$B_r(a) \coloneqq \{x \in X \mid d(x, a) < r\}$$

lahtiseks keraks keskpunktiga a.

Definitsioon 1.4. Olgu X meetriline ruum, ja $a \in X$. Elemendi a *ümbruseks* nimetatakse hulka V_a, mille puhul leidub $r > 0$ selliselt, et $B_r(a) \subset V_a$.

Definitsioon 1.5. Olgu (X, d) meetriline ruum ja S hulga X alamhulk. Elemendi $x \in X$ *kauguseks hulgast* $S \subset X$ nimetatakse arvu

$$d(x, S) := \inf_{s \in S} d(x, s).$$

Toome sisse hulga kompaktsuse mõiste.

Definitsioon 1.6. Olgu X meetriline ruum. Öeldakse, et hulk $K \subset X$ on *kompaktne*, kui igast tema elementide moodustatud jadast saab eraldada koonduva osajada.

Märkus 1.7. Kompaktne hulk on kinnine ja tõkestatud.

Lemma 1.8. *Olgu X ja Y meetrilised ruumid. Kui $K \subset X$ on kompaktne hulk ja funktsioon $f \colon X \to Y$ on pidev, siis ka $f(K)$ on kompaktne hulk.*

Tõestus. Olgu (y_n) hulga $f(K)$ suvaline jada. Leidub vastav argumentide jada (x_n) hulgas K, mille puhul $y_n = f(x_n)$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Eelduse kohaselt leidub jada (x_n) osajada (x_{n_k}), mille puhul $x_{n_k} \to x_0 \in K$ protsessis $k \to \infty$, ning Heine pidevuse kriteeriumi kohaselt $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x_0) \in f(K)$. Seega $f(K)$ on kompaktne hulk. $\square$

Definitsioon 1.9. Olgu X vektorruum üle korpuse $\mathbb{K}$. Kujutust $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ nimetatakse *normiks* ruumil X, kui iga $x, y \in X$ ja $\lambda \in \mathbb{K}$ korral kehtivad tingimused:

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$;
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Paari $(X, \|\cdot\|)$ nimetatakse *normeeritud ruumiks.*

Märgime, et mistahes normeeritud ruum on loomulikul viisil meetriline ruum, kus $d(x, y) := \|x - y\|$ iga $x, y \in X$ korral.

Näide 1.10. Ruumil $\mathbb{R}^n$ saab vaadelda erinevaid norme. Näiteks $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ on normeeritud ruum, mille puhul

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Kui $1 \leq p < \infty$, siis võime vaadelda normeeritud ruumi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, mille puhul

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Võttes viimases $p = 2$ saame erijuhuna tuntud Eukleidilise normi.

Näide 1.11. Olgu X meetriline ruum ja $B(X) \coloneqq \{f\colon X \to \mathbb{K} \mid f \text{ on tõkestatud}\}$. Siis $(B(X), \|\cdot\|_\infty)$ on normeeritud ruum, kus

$$\|f\|_\infty \coloneqq \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Seejuures normi $\|f\|_\infty$ nimetatakse funktsiooni f *lõpmatusnormiks.*

Definitsioon 1.12. Olgu X hulk ja S hulga X alamhulk. *Funktsiooni* $f\colon X \to Y$ *ahendiks hulgale* S nimetatakse funktsiooni $f|_S\colon S \to Y$, mille korral $f|_S(x) = f(x)$ iga $x \in S$ korral.

Definitsioon 1.13. Olgu X hulk ja S hulga X alamhulk. *Funktsiooni* $f\colon S \to Y$ *jätkuks hulgale* X nimetatakse funktsiooni $F\colon X \to Y$, mille korral iga $s \in S$ jaoks kehtib $F(s) = f(s)$. Teiste sõnadega on funktsioon f funktsiooni F *ahendiks* hulgale S.

1.2 Lipschitzi funktsioonid

Definitsioon 1.14. Olgu (X, d_X) ja (Y, d_Y) meetrilised ruumid. Funktsiooni $f\colon X \to Y$ nimetatakse *Lipschitzi funktsiooniks*, kui leidub reaalarv $L \geq 0$, mis iga elemendipaari $x, y \in X$ korral rahuldab tingimust (s.o Lipschitzi tingimust):

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L d_X(x, y).$$

Kui f on Lipschitzi funktsioon, siis arvu

$$\operatorname{Lip}(f) \coloneqq \sup \left\{ \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)} \mid x, y \in X, x \neq y \right\}$$

nimetatakse funktsiooni f *Lipschitzi konstandiks.*

Toome järgnevalt näiteid Lipschitzi funktsioonidest.

Näide 1.15. Olgu (X, d) meetriline ruum ja $x_0 \in X$ fikseeritud. Näitame, et funktsioon $f_{x_0}\colon X \to \mathbb{R}$, mis on defineeritud kui $f_{x_0}(y) = d(x_0, y)$ iga $y \in X$ korral on Lipschitzi funktsioon.

Tõepoolest, iga $x, y \in X$ korral saame

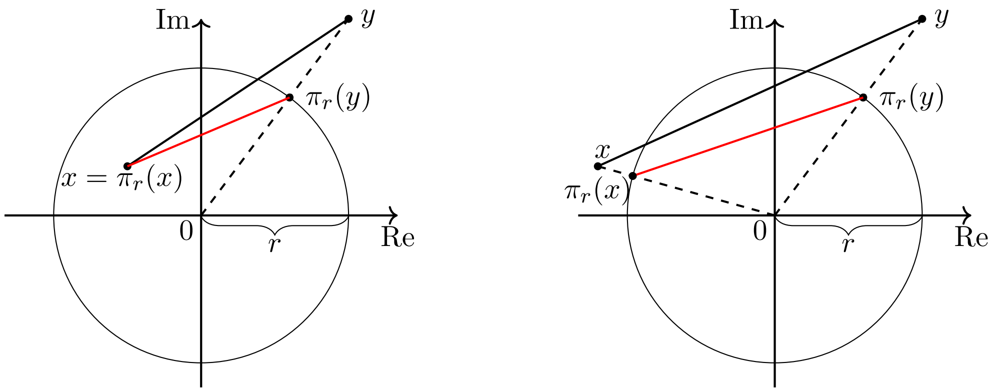
$$|f_{x_0}(x) - f_{x_0}(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y),$$

kus viimane võrratus järeldub kolmnurga võrratusest.

Näide 1.16. Olgu $r > 0$ ja $B_r[0] \subset \mathbb{C}$. *Meetriline projektsioon* $\pi_r \colon \mathbb{C} \to B_r[0]$, mis on defineeritud kui

$$\pi_r(x) \coloneqq \begin{cases} x, & \text{kui } x \in B_r[0], \\ \dfrac{rx}{|x|}, & \text{kui } x \notin B_r[0] \end{cases}$$

on Lipschitzi funktsioon ja $\mathrm{Lip}(\pi_r) = 1$.



(a) Juht 2

(b) Juht 3

Joonis 1: Meetriline projektsioon

Tõestus. Vaatleme kolme juhtu.

1. Olgu $x, y \in B_r[0]$. Siis $\pi_r(x) = x$ ja $\pi_r(y) = y$ ning $|\pi_r(x) - \pi_r(y)| = |x - y|$.

   Enne teise juhu vaatamist märgime, et

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x\overline{y}) \text{ iga } x, y \in \mathbb{C} \text{ korral.} \tag{1.1}$$

2. Olgu $x \in B_r[0]$ ja $y \notin B_r[0]$, vt joonist 1a. Näitame, et $|\pi_r(x) - \pi_r(y)| < |x - y|$ ehk samaväärselt, et $|x - y|^2 - |\pi_r(x) - \pi_r(y)|^2 > 0$. Nüüd paneme tähele, et võrduse (1.1) abil saame kirjutada

$$\begin{aligned} &|x - y|^2 - |\pi_r(x) - \pi_r(y)|^2 \\ &= |x|^2 - |\pi_r(x)|^2 + |y|^2 - |\pi_r(y)|^2 - 2\,\mathrm{Re}(x\overline{y}) + 2\,\mathrm{Re}(\pi_r(x)\overline{\pi_r(y)}). \end{aligned} \tag{1.2}$$

   Võrduse (1.2) abil ja pidades silmas, et $\pi_r(x) = x$ ja $\pi_r(y) = \frac{ry}{|y|}$, saame kirjutada, et

$$
\begin{aligned}
|x-y|^2 - |\pi_r(x)-\pi_r(y)|^2 &= |x|^2 - |x|^2 + |y|^2 - \left|\frac{ry}{|y|}\right|^2 - 2\operatorname{Re}(x\overline{y}) + \frac{2r}{|y|}\operatorname{Re}(x\overline{y}) \\
&= (|y|-r)(|y|+r) - \frac{2\operatorname{Re}(x\overline{y})}{|y|}(|y|-r) = (|y|-r)\left((|y|+r) - 2\frac{\operatorname{Re}(x\overline{y})}{|y|}\right) \\
&> (|y|-r)\left(2\,|x| - 2\frac{\operatorname{Re}(x\overline{y})}{|y|}\right) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Viimane võrratus kehtib, sest $\operatorname{Re}(x\overline{y}) \leq |x|\,|y|$.

3. Olgu nüüd $x, y \notin B_r[0]$ ning eeldame üldisust kitsendamata, et $|y| \geq |x|$, vt joonist 1b. Siis punktide 1 ja 2 kohaselt $\left|\pi_{|x|}(x) - \pi_{|x|}(y)\right| \leq |x-y|$. Seetõttu

$$
|\pi_r(x)-\pi_r(y)| = r\left|\frac{x}{|x|} - \frac{y}{|y|}\right| = \frac{r}{|x|}\left|x - \frac{y\,|x|}{|y|}\right| = \frac{r}{|x|}\left|\pi_{|x|}(x) - \pi_{|x|}(y)\right| < |x-y|\,.
$$

Juhu 1 tõttu $\operatorname{Lip}(\pi_r) \geq 1$. Juhtude 2 ja 3 tõttu $\operatorname{Lip}(\pi_r) \leq 1$. Seega peab kehtima, et $\operatorname{Lip}(\pi_r) = 1$. □

Lipschitzi funktsiooni definitsioonist järeldub, et Lipschitzi funktsioon on ühtlaselt pidev ja seega ka pidev. Demonstreerime nüüd, et iga pidev funktsioon ei ole Lipschitzi funktsioon.

Näide 1.17. Vaatleme funktsiooni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kus $f(x) = x^2$. Sellisel juhul iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral

$$
d(f(x), f(y)) = d(x^2, y^2) = |x-y||x+y| = |x+y|d(x,y). \tag{1.3}
$$

Oletame vastuväiteliselt, et f on Lipschitzi funktsioon ehk leidub arv L, et iga $x, y \in \mathbb{R}$ korral

$$
d(f(x), f(y)) \leq Ld(x,y). \tag{1.4}
$$

Võtame $y = 0$ ja $x = L+1$. Siis võrduse (1.3) abil saame, et

$$
\begin{aligned}
d(f(x), f(y)) =& d(f(L+1), f(0)) = (L+1)d(L+1, 0) > \\
>& Ld(L+1, 0) = Ld(x,y),
\end{aligned}
$$

mis on vastuolus võrratusega (1.4).

Järgmisena esitame seose diferentseeruvate funktsioonide ja Lipschitzi funktsioonide vahel, mille abil saab lihtsasti kontrollida, kas antud funktsioon on Lipschitzi funktsioon.

Lause 1.18. *Olgu I mingi intervall hulgas $\mathbb{R}$ ning olgu funktsioon $f\colon I \to \mathbb{R}$ pidev intervallil I ja diferentseeruv tema sisemuses I°. Siis f on Lipschitzi funktsioon parajasti siis, kui tema tuletisfunktsioon f' on tõkestatud hulgal I°. Sel juhul*

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup\{|f'(x)| \mid x \in I^\circ\}. \tag{1.5}$$

Tõestus. Olgu $\gamma := \sup\{|f'(x)| \mid x \in I^\circ\}$. Kui f on Lipschitzi funktsioon, siis iga $x \in I^\circ$ korral $\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq \mathrm{Lip}(f)$ iga $h \neq 0$ korral. Protsessist $h \to 0$ saame, et $|f'(x)| \leq \mathrm{Lip}(f)$ iga $x \in I^\circ$ korral, millest järeldub, et $\gamma \leq \mathrm{Lip}(f)$.

Kui f' on tõkestatud hulgal I°, siis Lagrange'i keskväärtusteoreemi põhjal iga $x, y \in I$, kus $x < y$, korral leidub selline c, et $x < c < y$ nii, et

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|f'(c)\right| \leq \gamma,$$

millest järeldub, et f on Lipschitzi funktsioon ja $\mathrm{Lip}(f) \leq \gamma$. □

Toome näite ühtlaselt pidevast funktsioonist, mis pole Lipschitzi funktsioon.

Näide 1.19. Vaatame funktsiooni $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Et tema tuletis ei ole tõkestatud vahemikus $(0,1)$, siis lause 1.18 põhjal ei ole f Lipschitzi funktsioon.

Peatüki lõpetuseks näitame, et Lipschitzi funktsioonide kompositsioon on Lipschitzi funktsioon.

Lemma 1.20. *Olgu $(X, d_X), (Y, d_Y)$ ja (Z, d_Z) meetrilised ruumid ja olgu $f\colon X \to Y$ ja $g\colon Y \to Z$ sellised Lipschitzi funktsioonid, et* $\mathrm{Lip}(f) = L_1$ *ja* $\mathrm{Lip}(g) = L_2$. *Siis $g \circ f\colon X \to Z$ on Lipschitzi funktsioon, kusjuures* $\mathrm{Lip}(g \circ f) \leq L_1 L_2$.

Tõestus. Et

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_1 d_X(x_1, x_2)$$

iga $x_1, x_2 \in X$ korral ja

$$d_Z(g(y_1), g(y_2)) \leq L_2 d_Y(y_1, y_2)$$

iga $y_1, y_2 \in Y$ korral, siis

$$d_Z((g \circ f)(x_1), (g \circ f)(x_2)) \leq L_2 d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L_1 L_2 d_X(x_1, x_2)$$

iga $x_1, x_2 \in X$ korral. □

2 Lipschitzi funktsioonide jätkamine

Teises peatükis vaatleme Lipschitzi funktsioonide jätkamist. Tõestame bakalaureusetöö põhitulemuse McShane–Whitney teoreemi, mis kirjeldab, kuidas reaalarvuliste väärtustega Lipschitzi funktsioonidele konstrueerida maksimaalseid ja minimaalseid Lipschitzi konstanti säilitavaid Lipschitzi jätke. Seejärel vaatame teoreemi järeldusi ja illustreerime kirjeldatavat teoreemi näidetega. Näitame, et kompleksarvuliste väärtustega Lipschitzi funktsioonide jätkamisel, Lipschitzi konstant üldiselt ei säili.

Definitsioon 2.1. Olgu X ja Y meetrilised ruumid. Olgu S ruumi X alamhulk ning $f\colon S \to Y$ Lipschitzi funktsioon. Funktsiooni f *Lipschitzi jätkuks* nimetatakse funktsiooni f jätku $F\colon X \to Y$, kus F on Lipschitzi funktsioon.

Tõestame teoreemi, mis on nimetatud matemaatikute Edward James McShane ja Hassler Whitney järgi, kes kolmekümnendatel teineteisest sõltumatult näitasid järgnevat.

Teoreem 2.2 (McShane–Whitney, vt nt [CMN19, Theorem 4.1.1])**.** *Olgu (X, d) meetriline ruum, S ruumi X alamhulk ning $f\colon S \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon, kus* $\operatorname{Lip}(f) = L$*. Siis funktsioonid $\Psi_f\colon X \to \mathbb{R}$ ja $\Phi_f\colon X \to \mathbb{R}$ defineeritud kui*

$$\Psi_f(x) := \sup_{s\in S}(f(s) - Ld(x, s))$$

ja

$$\Phi_f(x) := \inf_{s\in S}(f(s) + Ld(x, s)),$$

on funktsiooni f Lipschitzi jätkud, mille puhul $\operatorname{Lip}(\Psi_f) = \operatorname{Lip}(\Phi_f) = \operatorname{Lip}(f)$*. Kui $F\colon X \to \mathbb{R}$ on funktsiooni f Lipschitzi jätk, kus* $\operatorname{Lip}(F) = \operatorname{Lip}(f)$*, siis*

$$\Psi_f \leq F \leq \Phi_f.$$

Tõestus. Olgu $x \in X$ ning $s, s' \in S$. Lipschitzi tingimusest ning kolmnurga võrratusest saame, et

$$f(s) - f(s') \leq Ld(s, s') \leq Ld(x, s) + Ld(x, s'),$$

millest järeldub

$$f(s) - Ld(x, s) \leq f(s') + Ld(x, s').$$

Kuna viimane võrratus kehtib iga elemendi x, s, s' korral, siis on funktsioonid Ψ_f ja Φ_f

korrektselt defineeritud. Seejuures

$$\Psi_f(x) = \sup_{s\in S}(f(s) - Ld(s,x)) \le \inf_{s'\in S}(f(s') + Ld(x,s')) = \Phi_f(x)$$

iga $x \in X$ korral.

1. Näitame, et Ψ_f ja Φ_f on funktsiooni f jätkud. Suvalise $x \in S$ puhul kehtib

$$f(x) = f(x) - Ld(x,x) \le \sup_{s\in S}(f(s) - Ld(x,s)) = \Psi_f(x).$$

Samuti

$$f(x) = f(x) + Ld(x,x) \ge \inf_{s\in S}(f(s) + Ld(x,s)) = \Phi_f(x).$$

Seega iga $x \in S$ korral

$$f(x) \le \Psi_f(x) \le \Phi_f(x) \le f(x),$$

millest järeldub, et

$$f(x) = \Psi_f(x) = \Phi_f(x)$$

iga $x \in S$ korral.

2. Näitame, et funktsioonid Ψ_f ja Φ_f on Lipschitzi funktsioonid. Iga $x, x' \in X, s \in S$ korral saame

$$\Phi_f(x) \le f(s) + Ld(x,s) \le f(s) + Ld(x',s) + Ld(x,x').$$

Kuna viimane võrratus kehtib iga $s \in S$ jaoks, siis

$$\Phi_f(x) \le \inf_{s\in S}(f(s) + Ld(x',s)) + Ld(x,x') = \Phi_f(x') + Ld(x,x').$$

Siit järeldub, et

$$\Phi_f(x) - \Phi_f(x') \le Ld(x,x').$$

Võime ära vahetada x ja x' kohad ning saada, et

$$|\Phi_f(x) - \Phi_f(x')| \le Ld(x,x').$$

Argumentatsioon kehtib Ψ_f puhul sarnaselt, tuleb vaid võrratuse märk ära vahetada.

Viimasest võrratusest saame, et $\mathrm{Lip}(\Psi_f), \mathrm{Lip}(\Phi_f) \le L$. Kuna $\mathrm{Lip}(f) = L$ ning iga $x \in S$ korral $f(x) = \Psi_f(x) = \Phi_f(x)$, siis $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\Psi_f) = \mathrm{Lip}(\Phi_f)$.

3. Tõestame, et iga teise funktsiooni f Lipschitzi konstanti säilitava Lip-

schitzi jätku $F\colon X \to \mathbb{R}$ korral kehtib $\Psi_f \leq F \leq \Phi_f$. Olgu F funktsiooni f Lipschitzi jätk, mille puhul $\mathrm{Lip}(F) = \mathrm{Lip}(f)$. Olgu $x \in X$ ja $s \in S$. Kehtib $F(x) - F(s) = F(x) - f(s)$, sest f on funktsiooni F ahend hulgale S. Sellest, et F on Lipschitzi funktsioon, saame, et $|F(x) - f(s)| \leq Ld(x,s)$. Viimane on aga samaväärne sellega, et

$$f(s) - Ld(x,s) \leq F(x) \leq f(s) + Ld(x,s).$$

Kuna see võrratus kehtib iga x ja s korral, siis ilmselt $\Psi_f \leq F \leq \Phi_f$.

□

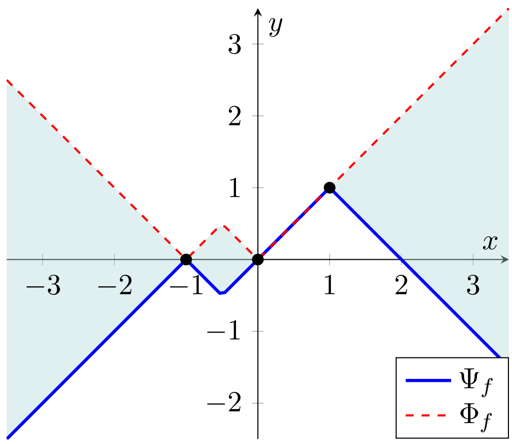
Näide 2.3 ([ACJ04, Example 1.1])**.** Vaatleme hulka $\{-1,0,1\} \subset \mathbb{R}$ ja funktsiooni $f\colon \{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$, kus $f(-1) = f(0) = 0$ ja $f(1) = 1$. Siis f on Lipschitzi funktsioon ja $\mathrm{Lip}(f) = 1$. Leiame McShane–Whitney teoreemi abil funktsiooni f jätkud

$$\Psi_f(x) = \sup_{y \in \{-1,0,1\}} (f(y) - 1 \cdot |x-y|) = \max\{-|x+1|, -|x|, 1 - |x-1|\}$$

ja

$$\Phi_f(x) = \inf_{y \in \{-1,0,1\}} (f(y) + 1 \cdot |x-y|) = \min\{|x+1|, |x|, 1 + |x-1|\}.$$

Funktsioonide Ψ_f ja Φ_f graafikud on esitatud joonisel 2.



Joonis 2: Funktsiooni f Lipschitzi jätkud

Toome välja McShane–Whitney teoreemi olulisemad järeldused.

Järeldus 2.4 ([CMN19, Theorem 4.1.1])**.** *Olgu X meetriline ruum ja S ruumi X alamhulk. Kui $f\colon S \to \mathbb{R}$ on Lipschitzi funktsioon ja seejuures tõkestatud, siis leidub Lipschitzi jätk $F\colon X \to \mathbb{R}$ nii, et* $\mathrm{Lip}(F) = \mathrm{Lip}(f)$ *ja* $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$.

Tõestus. Olgu f tõkestatud, s.t $a \coloneqq \|f\|_\infty < \infty$. Teoreemi 2.2 põhjal leidub funktsiooni f Lipschitzi jätk $\tilde{F}$ nii, et $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\tilde{F}) = L$. Vaatleme näites 1.16 defineeritud funktsiooni $\pi_a \colon \mathbb{R} \to [-a, a]$. Lemma 1.20 kohaselt on funktsioon $F \colon X \to [-a, a]$, $F \coloneqq \pi_a \circ \tilde{F}$ Lipschitzi funktsioon, mille puhul $\mathrm{Lip}(\pi_a \circ \tilde{F}) \leq L$. Kuna F on funktsiooni f jätk, siis $\mathrm{Lip}(F) \geq L$ ning seega $\mathrm{Lip}(F) = L$. Seejuures $a = \|f\|_\infty \leq \|F\|_\infty = \left\|\pi_a \circ \tilde{F}\right\|_\infty \leq \|\pi_a\|_\infty = a$, millest $\|F\|_\infty = a$. □

Järeldus 2.5 ([CMN19, Remark 4.1.2])**.** *Olgu X meetriline ruum, S ruumi X alamhulk ja $a, b \in \mathbb{R}$, kus $a < b$. Kui $f \colon S \to [a, b]$ on Lipschitzi funktsioon, siis leidub funktsiooni f Lipschitzi jätk F nii, et $F(X) \subset [a, b]$ ja $\mathrm{Lip}(F) = \mathrm{Lip}(f)$.*

Tõestus. Vaatleme funktsiooni $\delta_{[a,b]} \colon \mathbb{R} \to [a, b]$, kus $\delta_{[a,b]}(x) \coloneqq \pi_{\frac{b-a}{2}}(x) + \frac{a+b}{2}$. Siis $\mathrm{Lip}(\delta_{[a,b]}) = 1$. Teoreemi 2.2 põhjal saame leida funktsiooni f Lipschitzi jätku $H \colon X \to \mathbb{R}$ mille puhul $\mathrm{Lip}(H) = \mathrm{Lip}(f)$. Olgu $\tilde{F} \colon X \to \mathbb{R}$ kujul $\tilde{F}(x) = H(x) - \frac{a+b}{2}$. Ilmselt on $\tilde{F}$ Lipschitzi funktsioon, kusjuures $\mathrm{Lip}(\tilde{F}) = \mathrm{Lip}(f)$. Siis $F \coloneqq \delta_{[a,b]} \circ \tilde{F}$ sobib vastavaks jätkuks. On lihtne näha, et $\mathrm{Lip}(F) = \mathrm{Lip}(f)$ ning funktsiooni F konstruktsioonist on selge, et $F(X) \subset [a, b]$. Näitame, et $F|_S = f$. Olgu $s \in S$. Siis

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \delta_{[a,b]}\left(\tilde{F}(s)\right) = \delta_{[a,b]}\left(H(s) - \frac{a+b}{2}\right) = \delta_{[a,b]}\left(f(s) - \frac{a+b}{2}\right) \\
&= \pi_{\frac{b-a}{2}}\left(f(s) - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{a+b}{2} = f(s) - \frac{a+b}{2} + \frac{a+b}{2} \\
&= f(s).
\end{aligned}
$$

Seega on funktsioon F funktsiooni f Lipschitzi jätk hulgale X. □

Nüüd hakkame uurima kompleksarvuliste väärtustega Lipschitzi funktsioone. Tuleb välja, et selliseid funktsioone ei saa üldiselt jätkata nii, et Lipschitzi konstant säiliks.

Märkus 2.6. Olgu X meetriline ruum ja $f \colon X \to \mathbb{C}$ funktsioon. Paneme tähele, et f saab esitada kujul $f = f_R + i f_I$, kus $f_R, f_I \colon X \to \mathbb{R}$ on sellised, et $f_R(x) \coloneqq \mathrm{Re}(f(x))$ ja $f_I(x) \coloneqq \mathrm{Im}(f(x))$ iga $x \in X$ korral.

Lemma 2.7 ([Wea18, Lemma 1.28])**.** *Olgu (X, d) meetriline ruum ja olgu $f \colon X \to \mathbb{C}$ Lipschitzi funktsioon. Siis*

$$
\max\{\mathrm{Lip}(f_R), \mathrm{Lip}(f_I)\} \leq \mathrm{Lip}(f) \leq \sqrt{2}\max\{\mathrm{Lip}(f_R), \mathrm{Lip}(f_I)\}. \tag{2.1}
$$

Tõestus. Paneme tähele, et iga $z \in \mathbb{C}$ korral kehtib

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\}.$$

Olgu p, q vabalt valitud elemendid hulgast X. Võtame $z = f(p) - f(q)$. Siis

$$\begin{aligned} \max\{|f_R(p) - f_R(q)|, |f_I(p) - f_I(q)|\} &\leq |f(p) - f(q)| \\ &\leq \sqrt{2} \max\{|f_R(p) - f_R(q)|, |f_I(p) - f_I(q)|\}, \end{aligned}$$

millest

$$\begin{aligned} \max\left\{\frac{|f_R(p) - f_R(q)|}{d(p,q)}, \frac{|f_I(p) - f_I(q)|}{d(p,q)}\right\} &\leq \frac{|f(p) - f(q)|}{d(p,q)} \\ &\leq \sqrt{2} \max\left\{\frac{|f_R(p) - f_R(q)|}{d(p,q)}, \frac{|f_I(p) - f_I(q)|}{d(p,q)}\right\}. \end{aligned}$$

Viimaks võtame pooltest p ja q järgi supreemumi. Tulemuseks on täpselt võrratus (2.1). □

Lause 2.8 ([CMN19, Proposition 4.1.3])**.** *Olgu* (X, d) *meetriline ruum,* S *ruumi* X *alamhulk ja* $f\colon S \to \mathbb{C}$ *Lipschitzi funktsioon,* $\operatorname{Lip}(f) = L$. *Siis leidub funktsiooni* f *Lipschitzi jätk* $F\colon X \to \mathbb{C}$ *nii, et* $\operatorname{Lip}(F) \leq \sqrt{2}L$. *Kui sealjuures on* f *tõkestatud, siis leidub jätk* F*, mille puhul kehtib* $\operatorname{Lip}(F) \leq \sqrt{2}L$ *ja* $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$ *.*

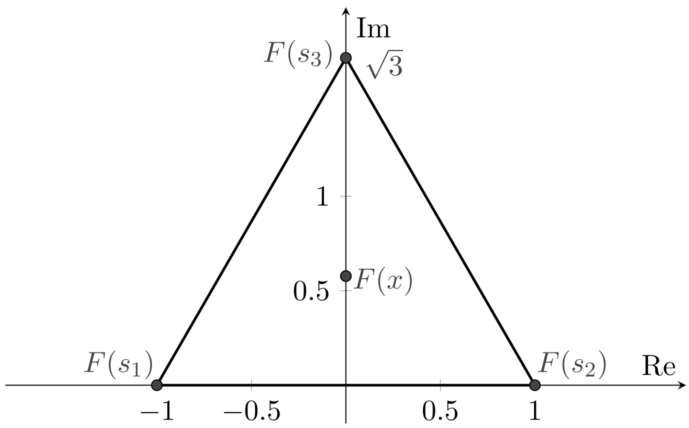
Tõestus. Olgu $f = f_R + if_I$. Lemma 2.7 põhjal teame, et $\operatorname{Lip}(f_R), \operatorname{Lip}(f_I) \leq L$. Teoreemi 2.2 järgi leiduvad neil vastavad jätkud $F_R, F_I\colon X \to \mathbb{R}$ samade Lipschitzi konstantidega. Võttes $F = F_R + iF_I$ saame, et

$$|F(x) - F(y)| = \sqrt{(F_R(x) - F_R(y))^2 + (F_I(x) - F_I(y))^2} \leq \sqrt{2}Ld(x, y)$$

iga $x, y \in X$ korral.

Olgu $a \coloneqq \|f\|_\infty < \infty$, vaatleme funktsiooni $\pi_a\colon \mathbb{C} \to [-a, a]$ näitest 1.16. Sel juhul $\operatorname{Lip}(\pi_a) = 1$. Tõestuse esimese poole põhjal teame, et leidub f jätk $\tilde{F}$ nii, et $\operatorname{Lip}(\tilde{F}) \leq \sqrt{2}L$. Siis $F \coloneqq \pi_a \circ \tilde{F}$ rahuldab tingimusi $\operatorname{Lip}(F) \leq \operatorname{Lip}(\tilde{F}) \leq \sqrt{2}L$ ning $\|F\|_\infty = \|f\|_\infty$. □

Järgmiseks näitame, et kompleksväärtustega Lipshitzi funktsiooni ei saa üldiselt jätkata nii, et Lipschitzi konstant ei suureneks.



Joonis 3: Näide 2.9

Näide 2.9 ([Jen68, lk 10-11]). Vaatleme hulka $X = \{x, s_1, s_2, s_3\}$, milles defineerime kaugused järgnevalt: $d(x, s_i) = 1, i = 1, 2, 3$ ning $d(s_i, s_j) = 2$, kui $i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3$. Siis (X, d) on meetriline ruum. Olgu $S = X \setminus \{x\}$. Defineerime funktsiooni $f\colon S \to \mathbb{C}$ nii, et funktsiooni väärtused vastavad võrdkülgse kolmnurga tippudele (Vt joonist 3):

$$f(s_1) = -1,\ f(s_2) = 1,\ f(s_3) = \sqrt{3}i.$$

Siis $|f(s_i) - f(s_j)| = 2 = d(s_i, s_j)$, kui $i \neq j, i, j = 1, 2, 3$. Seega $\mathrm{Lip}(f) = 1$. Näitame, et selliselt konstrueeritud funktsioonil f ei leidu jätku F hulgale X, mille puhul $\mathrm{Lip}(F) = 1$. Tõepoolest, võttes $F(x) = \frac{\sqrt{3}i}{3}$ kolmnurga keskpunktiks, saame, et

$$|F(s_i) - F(x))| = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} d(s_i, x).$$

$i = 1, 2, 3$. Kui $F(x) \neq \frac{\sqrt{3}i}{3}$, siis leidub $s_i \in S$, mille puhul

$$|F(s_i) - F(x)| > \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} d(s_i, x).$$

Seega $\mathrm{Lip}(F) = \frac{2\sqrt{3}}{3} > 1 = \mathrm{Lip}(f)$.

Teame, et kompleksarvude ruumi, millel kaugus on defineeritud mooduli kaudu, saame samastada ruumiga $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$. Järgmine teoreem näitab, et võttes eelmises näites suvalise meetrilise ruumi X asemele ruumi $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, saame, funktsioonile f leida Lipschitzi konstanti säilitava jätku.

Teoreem 2.10 (Kirszbraun ja Valentine, vt nt[CMN19, Theorem 4.2.3]). *Olgu* $n, m \in \mathbb{N}$.

Olgu $S \subset (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ja $f\colon S \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ Lipschitzi funktsioon. Siis leidub funktsiooni f Lipschitzi jätk $F\colon (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_2)$ nii, et $\mathrm{Lip}(F) = \mathrm{Lip}(f)$.

Kui asendame teoreemis 2.10 Eukleidilise normi mingi teise normiga, siis üldiselt funktsiooni f jätkates Lipschitzi konstant ei säili. Seda ilmestab järgmine näide.

Näide 2.11 ([CMN19, Example 4.2.1])**.** Olgu $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ ruumi $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ alamhulk, kus $s_1 = (1, -1), s_2 = (1, 1), s_3 = (-1, 1)$ ning olgu $f\colon (S, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ funktsioon kujul

$$f(s_1) = (-1, 0),\ f(s_2) = (0, 1),\ f(s_3) = (0, \sqrt{3}).$$

Sarnaselt näitele 2.9 näeme, et selliselt defineeritud funktsioonil f ei leidu Lipschitzi jätku hulgale $X = \{(0, 0), s_1, s_2, s_3\}$, mis säilitaks Lipschitzi konstanti.

3 Lokaalselt Lipschitzi funktsioonide jätkamine

Peatükis defineerime esmalt lokaalselt Lipschitzi funktsiooni mõiste ja kirjeldame seoseid Lipschitzi funktsioonide, lokaalselt Lipschitzi funktsioonide ja ühtlaselt pidevate funktsioonide vahel. Peatüki põhiteoreemis tõestame, et meetrilise ruumi kinnise alamhulga peal defineeritud lokaalselt Lipschitzi funktsioonil leidub lokaalselt Lipschitzi jätk tervele ruumile.

Definitsioon 3.1 ([CMN19, Definition 2.1.4])**.** Olgu X ja Y meetrilised ruumid. Öeldakse, et funktsioon $f\colon X \to Y$ on *lokaalselt Lipschitzi funktsioon*, kui iga $x \in X$ korral leidub talle vastav ümbrus V_x nii, et $f|_{V_x}$ on Lipschitzi funktsioon.

On selge, et iga Lipschitzi funktsioon on lokaalselt Lipschitzi funktsioon.

Märkus 3.2 ([CMN19, Remark 2.1.5])**.** Iga lokaalselt Lipschitzi funktsioon on pidev.

Tõestus. Olgu X ja Y meetrilised ruumid ning olgu $f\colon X \to Y$ lokaalselt Lipschitzi funktsioon. Iga $x \in X$ korral leidub ümbrus V_x, kus f on Lipschitzi funktsioon ning seega f on punktis x pidev. Järelikult on funktsioon f pidev kogu ruumis X. □

Järgnevalt näitame, et ühtlaselt pidev funktsioon pole üldiselt Lipschitzi funktsioon ning, et lokaalselt Lipschitzi funktsioon pole üldiselt Lipschitzi funktsioon.

Näide 3.3. Vaatleme ühtlaselt pidevat funktsiooni $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Näite 1.19 põhjal pole f Lipschitzi funktsioon. See ei ole ka lokaalselt Lipschitzi funktsioon, sest ei leidu punkti 0 ümbrust V_0, mille puhul $f|_{V_0}$ oleks Lipschitzi funktsioon. Funktsioon $f|_{(0,1]}$ on lokaalselt Lipschitzi funktsioon, kuid pole Lipschitzi funktsioon. Tõepoolest, olgu $x \in (0,1]$ ja $V_x = \left[\frac{x}{2}, \frac{x+1}{2}\right] \subset [0,1]$. Et funktsiooni f tuletis $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ on pidev lõigus V_x, siis see on ka tõkestatud. Lause 1.18 järgi on funktsioon f Lipschitzi funktsioon punkti x ümbruses V_x. Kuna x on suvaline, siis funktsiooni $f|_{(0,1]}$ puhul on tegemist lokaalselt Lipschitzi funktsiooniga. Et funktsiooni $f|_{(0,1]}$ tuletis pole tõkestatud vahemikus $(0,1)$, siis lause 1.18 põhjal pole $f|_{(0,1]}$ Lipschitzi funktsioon.

Teoreem 3.4 ([CMN19, Theorem 2.1.6])**.** *Olgu (X, d_X) ja (Y, d_Y) meetrilised ruumid. Kui X on kompaktne, siis iga lokaalselt Lipschitzi funktsioon $f\colon X \to Y$ on Lipschitzi funktsioon.*

Tõestus. Olgu $f\colon X \to Y$ lokaalselt Lipschitzi funktsioon. Et f on pidev, siis kujutis $f(X)$ on kompaktne hulk, seega ka tõkestatud, millest järeldub, et hulga $f(X)$ diameeter

$$\operatorname{diam} f(X) \coloneqq \sup\{d_Y(f(x), f(x')) \mid x, x' \in X\}$$

on tõkestatud.

Oletame vastuväiteliselt, et f pole Lipschitzi funktsioon hulgal X. Siis iga $n \in \mathbb{N}$ jaoks leiduvad $x_n, x_n' \in X$ nii, et

$$d_Y(f(x_n), f(x_n')) > n d_X(x_n, x_n'). \tag{3.1}$$

Hulga X kompaktsuse tõttu leidub jada (x_n) osajada (x_{n_k}), mille puhul $x_{n_k} \to x$ mingi elemendi $x \in X$ korral. Kuna

$$\operatorname{diam} f(X) \geq d_Y(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}')) > n_k d_X(x_{n_k}, x_{n_k}')$$

iga $k \in \mathbb{N}$ korral, siis $d_X(x_{n_k}, x_{n_k}') \to 0$ ja seega ka $x_{n_k}' \to x$ protsessis $k \to \infty$. Olgu V_x elemendi x ümbrus, mille korral $f|_{V_x}$ on Lipschitzi funktsioon ja $\operatorname{Lip}(f|_{V_x}) = \mathrm{L}$. Võrratuse (3.1) tõttu $x_{n_k} \neq x_{n_k}'$ iga k korral. Leidub selline $k_0 \in \mathbb{N}$, et iga $k \geq k_0$ korral $x_{n_k}, x_{n_k}' \in V_x$. Siis

$$L \geq \frac{d_Y(f(x_{n_k}), f(x_{n_k}'))}{d_X(x_{n_k}, x_{n_k}')} > n_k$$

iga $k \geq k_0$ korral, mis on vastuolu, sest $n_k \to \infty$ protsessis $k \to \infty$. □

Enne kui hakkame tõestama peatüki põhiteoreemi lokaalsete Lipschitzi funktsioonide jätkamise kohta üldisel kujul, näitame ära juhu, kus jätkatav Lipschitzi funktsioon on tõkestatud.

Lause 3.5 ([CMN19, Theorem 4.1.7])**.** *Olgu (X, d) meetriline ruum, S tema kinnine alamhulk ja $f\colon S \to \mathbb{R}$ on lokaalselt Lipschitzi funktsioon, mis on tõkestatud, s.t leidub $M > 0$ nii, et $|f(s)| < M$ iga $s \in S$ korral. Siis leidub funktsiooni f jätk $F\colon X \to \mathbb{R}$, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon, seejuures $|F(x)| < M$ iga $x \in X$ korral.*

Tõestus. Eeldame, et mingi $M \in \mathbb{R}$ korral

$$|f(s)| < M$$

iga $s \in S$ korral. Näitame, et iga $s \in S$ jaoks leidub reaalarv K_s selliselt, et

$$\big|f(s) - f(s')\big| \leq K_s d(s, s')$$

ja seda iga $s' \in S$ korral.

Tõepoolest, kuna f on lokaalselt Lipschitzi funktsioon, siis iga $s \in S$ jaoks leidub

$k_1 \geq 0$ ja $r > 0$ nii, et

$$\left|f(s) - f(s')\right| \leq k_1 d(s, s')$$

iga $s' \in S \cap B(s, r)$ jaoks. Olgu

$$K_s := \max\{2Mr^{-1}, k_1, 2\}.$$

Siis iga $s' \in S \setminus B(s, r)$ korral

$$\left|f(s) - f(s')\right| \leq |f(s)| + \left|f(s')\right| < 2M = \frac{2M}{r} r \leq K_s d(s, s').$$

Seega

$$\left|f(s) - f(s')\right| \leq K_s d(s, s')$$

iga $s' \in S$ korral.

Näitame nüüd, et funktsioon $H\colon X \to \mathbb{R}$ kujul

$$H(x) := \inf_{s \in S}\{f(s) + K_s d(x, s)\}$$

on funktsiooni f jätk. Et

$$f(s) + K_s d(x, s) > -M$$

iga $x \in X$ ja $s \in S$ korral, siis H on korrektselt defineeritud ning

$$H(x) \geq -M \tag{3.2}$$

iga $x \in X$ korral. Olgu $x \in S$. Siis

$$H(x) = \inf_{s \in S}\{f(s) + K_s d(x, s)\} \leq f(x).$$

Samuti, sellest, et iga $s \in S$ korral

$$f(x) \leq f(s) + K_s d(x, s),$$

järeldub, et $f(x) \leq H(x)$, ning seega $H(x) = f(x)$ iga $x \in S$ korral ehk H on tõepoolest funktsiooni f jätk.

Näitame et H on lokaalselt Lipschitzi funktsioon. Olgu $x_0 \in X$ korral. Näitame, et leidub elemendi x_0 ümbrus, kus H on Lipschitzi funktsioon. Selleks vaatleme kahte juhtu.

1) Olgu $x_0 \in S$. Siis iga $x \in X$ korral

$$H(x) \leq f(x_0) + K_{x_0} d(x, x_0),$$

nii, et

$$H(x) - H(x_0) = H(x) - f(x_0) \leq K_{x_0} d(x, x_0).$$

Kui $s \in S \setminus \{x_0\}$, siis

$$f(s) - f(x_0) \geq -K_s d(s, x_0) \tag{3.3}$$

ja

$$f(s) - f(x_0) \geq -K_{x_0} d(s, x_0). \tag{3.4}$$

Korrutades võrratuse (3.3) suurusega

$$\frac{d(x, s)}{d(x, s) + d(x, x_0)}$$

ja võrratuse (3.4) suurusega

$$\frac{d(x, x_0)}{d(x, s) + d(x, x_0)}$$

ning liites need kokku, saame, et

$$\begin{aligned} f(s) - f(x_0) &\geq -(K_s d(x, s) + K_{x_0} d(x, x_0)) \frac{d(s, x_0)}{d(x, s) + d(x, x_0)} \\ &\geq -(K_s d(x, s) + K_{x_0} d(x, x_0)), \end{aligned}$$

millest

$$f(s) + K_s d(x, s) \geq f(x_0) - K_{x_0} d(x, x_0).$$

Viimane võrratus kehtib ka juhul $s = x_0$ ja seega

$$H(x) = \inf_{s \in S} \{f(s) + K_s d(x, s)\} \geq f(x_0) - K_{x_0} d(x, x_0)$$

ehk

$$H(x) - H(x_0) = H(x) - f(x_0) \geq -K_{x_0} d(x, x_0).$$

Seega

$$|H(x) - H(x_0)| \leq K_{x_0} d(x, x_0)$$

iga $x \in X$ korral.

2) Olgu $x_0 \in X \setminus S$. Tähistame $r \coloneqq d(x_0, S)$ ning olgu $U \coloneqq B_{\frac{r}{2}}(x_0)$. Siis

$$d(u,s) \geq d(x_0,s) - d(x_0,u) > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \tag{3.5}$$

iga $u \in U$ ja $s \in S$ korral. Näitame, et H on tõkestatud hulgal U. Olgu $s_0 \in S$. Siis iga $u \in U$ korral

$$\begin{aligned} H(u) \leq f(s_0) + K_{s_0} d(u,s_0) &\leq f(s_0) + K_{s_0}(d(u,x_0) + d(x_0,s_0)) \\ &\leq f(s_0) + K_{s_0}\left(\frac{r}{2} + d(x_0,s_0)\right). \end{aligned}$$

Koos võrratusega (3.2) saame, et leidub selline $N \in \mathbb{R}$, et $|H(x)| \leq N$ iga $x \in U$ korral.

Olgu nüüd $u \in U$ suvaline element. Siis iga $\varepsilon > 0$ jaoks leidub $s_\varepsilon \in S$ nii, et

$$H(u) \geq f(s_\varepsilon) + K_{s_\varepsilon} d(u, s_\varepsilon) - \varepsilon. \tag{3.6}$$

Et

$$H(x_0) \leq f(s_\varepsilon) + K_{s_\varepsilon} d(x_0, s_\varepsilon), \tag{3.7}$$

siis saame, et

$$H(x_0) - H(u) \leq K_{s_\varepsilon}(d(x_0,s_\varepsilon) - d(u,s_\varepsilon)) + \varepsilon \leq K_{s_\varepsilon} d(x_0,u) + \varepsilon. \tag{3.8}$$

Võrratustest (3.5) ja (3.6) saame, et

$$K_{s_\varepsilon} \leq \frac{H(u) - f(s_\varepsilon) + \varepsilon}{d(u,s_\varepsilon)} \leq \frac{2(N + M + \varepsilon)}{r},$$

nii, et (3.8) saab kuju

$$H(x_0) - H(u) \leq \frac{2(N+M+\varepsilon)}{r} d(x_0,u) + \varepsilon.$$

Et $\varepsilon > 0$ valik oli suvaline, saame, et

$$H(x_0) - H(u) \leq \frac{2(N+M)}{r} d(x_0,u).$$

Analoogiliselt saame, et

$$H(u) - H(x_0) \leq \frac{2(N+M)}{r} d(x_0,u),$$

millest

$$|H(u) - H(x_0)| \leq \frac{2(N+M)}{d(x_0,S)} d(u,x_0)$$

iga $u \in B_{\frac{1}{2}d(x_0,S)}(x_0)$ jaoks. Sellega oleme näidanud, et funktsioon H on lokaalselt Lipschitzi funktsioon.

Nüüd näitame, et funktsioonil f leidub lokaalselt Lipschitzi jätk F selliselt, et $|F(x)| < M$ iga $x \in X$ korral. Iga $x \in X \setminus S$ korral

$$H(x) \geq -M + d(x,S) > -M,$$

seega funktsioon $F_1 \colon X \to \mathbb{R}$ kujul

$$F_1(x) \coloneqq \min\{H(x), M\},$$

on funktsiooni f jätk, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon iga $x \in X$ korral, ning

$$-M < F_1(x) \leq M$$

iga $x \in X$ korral.

Analoogiliselt leiame funktsiooni $-f$ jätku F_2, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon iga $x \in X$ korral ja rahuldab võrratust

$$-M < F_2(x) \leq M \iff -M \leq -F_2(x) < M$$

iga $x \in X$ korral. Siis funktsioon $F \coloneqq \frac{1}{2}(F_1 - F_2)$ on f jätk, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon iga $x \in X$ korral ja rahuldab võrratust

$$-M < F(x) < M$$

iga $x \in X$ korral. □

Nüüd tõestame peatüki põhiteoreemi üldisel juhul, kus funktsiooni tõkestatust pole eeldatud.

Teoreem 3.6 ([CMN19, Theorem 4.1.7])**.** *Olgu (X,d) meetriline ruum, S tema kinnine alamhulk ja $f \colon S \to \mathbb{R}$ on lokaalselt Lipschitzi funktsioon. Siis leidub funktsiooni f jätk $F \colon X \to \mathbb{R}$, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon.*

Tõestus. Olgu funktsioon $f \colon S \to \mathbb{R}$ lokaalselt Lipschitzi funktsioon. Paneme tähele, et $\arctan \colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ on Lipschitzi funktsioon, kusjuures $|\arctan r| < \frac{\pi}{2}$ iga $r \in \mathbb{R}$ korral.

Vaatame funktsiooni $g\colon S \to \mathbb{R},\ g := \arctan \circ f$, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon ja tõkestatud. Lause 3.5 tõttu leidub funktsiooni g jätk $G\colon X \to \mathbb{R}$, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon selliselt, et

$$|G(x)| < \frac{\pi}{2}$$

iga $x \in X$ korral.

Näitame, et funktsioon $F\colon X \to \mathbb{R},\ F = \tan \circ G$ on funktsiooni f jätk hulgale X, mis on lokaalselt Lipschitzi funktsioon. On ilmne, et iga $s \in S$ korral $F(s) = f(s)$. Olgu $x_0 \in X$ ja $\delta > 0$ selline, et $U := [G(x_0) - \delta, G(x_0) + \delta] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Olgu V punkti x_0 selline ümbrus, et $G(V) \subset U$ ja G on Lipschitzi funktsioon hulgal V. Et tangens on Lipschitzi funktsioon hulgal U, siis $F = \tan \circ G$ on Lipschitzi funktsioon hulgal V.

$\square$

4 Absoluutselt minimiseerivad Lipschitzi jätkud

Selles peatükis defineerime absoluutselt minimiseerivad funktsioonid ja absoluutselt minimiseerivad Lipschitzi jätkud. Vaatame illustreerivaid näiteid funktsioonidest, mis rahuldavad neid definitsioone, kirjeldame nende funktsioonide mõningaid omadusi ja vaatame ka nendega seotud rakendusi. Lõpuks toome välja ühe lahtise küsimuse absoluutselt minimiseerivate Lipschitzi jätkude olemasolu kohta.

Definitsioon 4.1 ([ACJ04, Definition 1.3])**.** Olgu S hulga $\mathbb{R}^n$ mittetühi alamhulk ja olgu $f\colon S \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon. Kui iga lahtise tõkestatud hulga V, kus $\overline{V} \subset S$, korral kehtib võrdus

$$\operatorname{Lip}(f|_V) = \operatorname{Lip}(f|_{\partial V}), \tag{4.1}$$

siis funktsiooni f nimetatakse *absoluutselt minimiseerivaks funktsiooniks* hulgal S (edaspidi lühidalt AM).

Näide 4.2. Iga lineaarne funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, kus $a, b \in \mathbb{R}$, on AM hulgal $\mathbb{R}$.

Ajaloolises võtmes jõuti absoluutselt minimiseerivate funktsioonide kirjeldamiseni teatud diferentsiaalvõrrandite lahendamise kaudu. Järgnev teoreem kirjeldabki seda olulist seost absoluutselt minimiseerivate funktsioonide ja diferentsiaalvõrrandite vahel.

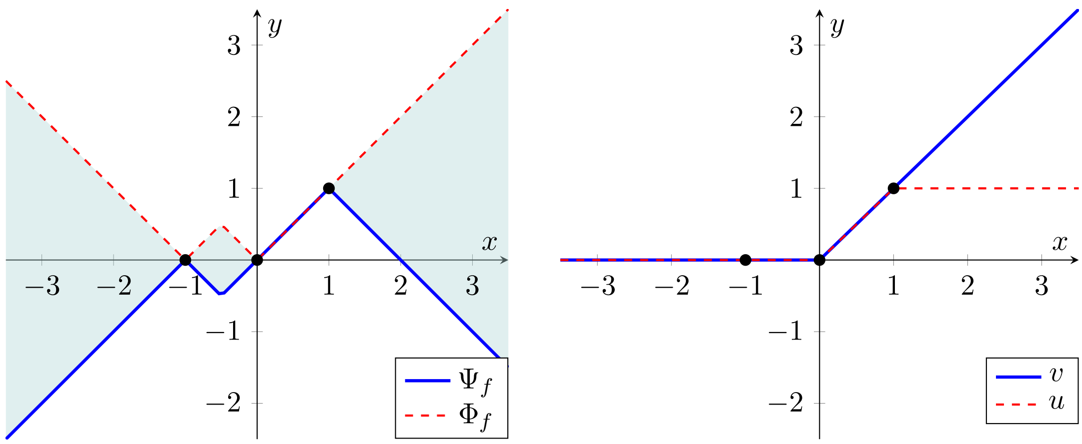
Teoreem 4.3 ([Aro67, Theorem 8])**.** *Olgu S hulga $\mathbb{R}^n$ alamhulk ning funktsioon $f\colon S \to \mathbb{R}$ kaks korda pidevalt diferentseeruv. Funktsioon f on AM hulgal S parajasti siis, kui*

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{x_i} f_{x_j} f_{x_i x_j} = 0$$

hulgal S.

Esimeses peatükis vaatlesime näidet 2.3 Lipschitzi funktsioonide jätkamisest. On selge, et funktsioonile f oleks võinud konstrueerida mitmeid teisi Lipschitzi jätke, mis säilitaks Lipschitzi konstandi. (Iga teine jätk jääb alasse, mis on kujutatud vasakpoolsel joonisel värvitud alaga, vt joonist 4a, teisisõnu jääb iga teine jätk niinimetatud maksimaalse jätku Ψ_f ja minimaalse jätku Φ_f vahele.) Tuleb välja, et funktsioonid Ψ_f ja Φ_f ei ole AM.

Näide 4.4. Näitame, et Ψ_f pole AM hulgal $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Uurime vahemikku $V \coloneqq (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4})$. On selge, et $\operatorname{Lip}(\Psi_f|_V) = 1$, aga $\operatorname{Lip}(\Psi_f|_{\partial V}) = 0$. Seega pole Ψ_f AM hulgal $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$.



(a) Funktsiooni f Lipschitzi jätkud

(b) Funktsiooni f AMLJ näited

Joonis 4

Vaatame nüüd funktsiooni f selliseid jätke, mis on AM hulgal $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Kaks võimalikku sellist jätku oleksid näiteks u ja v, kus

$$u(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } x \leq 0, \\ x, \text{ kui } 0 < x < 1, \\ 1, \text{ kui } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad v(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } x \leq 0, \\ x, \text{ kui } x > 0. \end{cases}$$

Et u ja v on lisaks ka funktsiooni f Lipschitzi konstanti säilitavad Lipschitzi jätkud, toome sisse uue definitsiooni.

Definitsioon 4.5 (Vt nt [HLG14, lk 596])**.** Olgu S hulga $\mathbb{R}^n$ alamhulk ja $f\colon S \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon. Ütleme, et funktsioon $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on funktsiooni f *absoluutselt minimiseeriv Lipschitzi jätk* hulgale $\mathbb{R}^n$ ehk AMLJ, kui

1. F on funktsiooni f Lipschitzi jätk,
2. $\operatorname{Lip}(F) = \operatorname{Lip}(f)$ ning
3. F on AM hulgal $\mathbb{R}^n \setminus S$.

Teoreem 4.6 ([Juu02, Theorem 4.3 ja Remark 4.5.])**.** *Olgu S hulga $\mathbb{R}^n$ alamhulk. Kui $f\colon S \to \mathbb{R}$ Lipschitzi funktsioon, siis funktsioonil f leidub AMLJ hulgale $\mathbb{R}^n$. Veelgi enam, kui hulk $\mathbb{R}^n \setminus S$ on tõkestatud, siis funktsioonil f leidub üheselt määratud AMLJ.*

Näide 4.7. Näitame, et funktsioon v on funktsiooni f AMLJ hulgale $\mathbb{R}$. On lihtne näha, et $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(v) = 1$, vt joonist 4b. Jääb näidata, et v on AM hulgal $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Olgu V selline tõkestatud lahtine hulk, et $\overline{V} \subset \mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$. Olgu $A_1 = (-\infty, 0)\setminus\{-1\}$, $A_2 = (0,\infty)\setminus\{1\}$. Kontrollime kolme juhtu.

1. Kui $V \subset A_1$, siis $\mathrm{Lip}(v|_V) = \mathrm{Lip}(v|_{\partial V}) = 0$.
2. Kui $V \subset A_2$, siis $\mathrm{Lip}(v|_V) = \mathrm{Lip}(v|_{\partial V}) = 1$.
3. Vaatleme nüüd juhtu, kus $V \cap A_1 \neq \emptyset$ ja $V \cap A_2 \neq \emptyset$. Siis

$$\mathrm{Lip}(v|_V) = \sup_{x,y\in V,\, x>y} \frac{v(x)-v(y)}{x-y} = \sup_{x,y\in V\cap A_2,\, x>y} \frac{x-y}{x-y} = 1$$

ja

$$\mathrm{Lip}(v|_{\partial V}) = \sup_{x,y\in \partial V,\, x>y} \frac{v(x)-v(y)}{x-y} = \sup_{x,y\in \partial V\cap A_2,\, x>y} \frac{x-y}{x-y} = 1.$$

Näide 4.8. Näite 4.4 põhjal on selge, et Ψ_f pole funktsiooni f AMLJ, sest ei rahulda definitsiooni kolmandat tingimust.

Toome näite ka funktsiooni f sellisest jätkust, mis on AM hulgal $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, kuid pole funktsiooni f AMLJ.

Näide 4.9. Olgu näitest 2.3 funktsiooni f jätk w selline, et

$$w(x) = \begin{cases} 0, \text{ kui } x \leq 0, \\ x, \text{ kui } 0 < x \leq 1, \\ 2x-1, \text{ kui } x > 1. \end{cases}$$

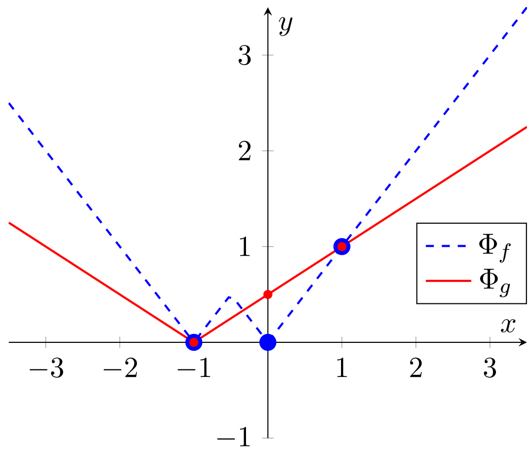
Funktsioon w on AM hulgal $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$, kuid $\mathrm{Lip}(w) = 2 \neq \mathrm{Lip}(f) = 1$.

Nüüd uurime Lipschitzi jätkude monotoonsust.

Näide 4.10. Vaatame jälle funktsiooni f näitest 2.3. Olgu uurimise all ka funktsioon $g\colon \{-1,0,1\} \to \mathbb{R}$, mille puhul $g(-1) = 0$, $g(0) = 0{,}5$, $g(1) = 1$. Märkame, et $g \geq f$, kuid teoreemi 2.2 põhjal konstueeritud jätkude Φ_g ja Φ_f puhul $\Phi_g \ngeq \Phi_f \ngeq \Phi_g$. Seda näidet illustreerib joonis 5.

Kehtib järgmine teoreem AMLJ monotoonsuse kohta.

Teoreem 4.11 ([Alm02, Theorem 11])**.** *Olgu S hulga $\mathbb{R}^n$ tõkestatud alamhulk ja Lipschitzi funktsioonid $f, g\colon \partial S \to \mathbb{R}$ sellised et $f \leq g$. Olgu $F, G\colon S \to \mathbb{R}$ vastavalt funktsioonide f ja g absoluutselt minimiseerivad Lipschitzi jätkud hulgale S. Siis $F \leq G$.*



Joonis 5: Funktsioonide f ja g monotoonsust mitte rahuldavad jätkud

Mõned absoluutselt minimiseerivate Lipschitzi jätkudega seotud rakenduslikud näited pärinevad pilditöötluse valdkonnast. Tuleb välja, et puuduoleva informatsiooni korral on näiteks maastiku kõrguse kaartide interpoleerimiseks sobilik AMLJ mudel, sest sellel on monotoonsuse, stabiilsuse ning invariantsuse omadus ja annab seetõttu võrreldes teiste kasutusel olevate meetoditega täpsemaid tulemusi. Rohkem saab selle kohta lugeda doktoritööst [Alm02, 3. ptk].

Töö lõpetuseks toome välja ühe veel lahtise AMLJ seotud probleemi.

Märkus 4.12 ([Pha15, Problem 4])**.** Olgu S hulga $\mathbb{R}^n$ alamhulk ja $f\colon S \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzi funktsioon. Kas alati on olemas funktsiooni f absoluutselt minimiseeriv Lipschitzi jätk?

Kasutatud kirjandus

[ACJ04] Gunnar Aronsson, Michael G. Crandall, and Petri Juutinen, *A tour of the theory of absolutely minimizing functions*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **41** (2004), no. 4, 439–505.

[Alm02] Andrés Almansa, *Sampling, interpolation and detection. Applications in satellite imaging. Signal and image processing.*, Ph.D. thesis, 2002.

[Aro67] Gunnar Aronsson, *Extension of functions satisfying Lipschitz conditions*, Ark. Mat. **6** (1967), 551–561.

[CMN19] Ştefan Cobzaş, Radu Miculescu, and Adriana Nicolae, *Lipschitz functions*, Lect. Notes Math., vol. 2241, Cham: Springer, 2019.

[HLG14] Matthew J. Hirn and Erwan Y. Le Gruyer, *A general theorem of existence of quasi absolutely minimal Lipschitz extensions*, Math. Ann. **359** (2014), no. 3-4, 595–628.

[Jen68] Thomas M. Jenkins, *Banach spaces of Lipschitz functions of an abstract metric space*, Ph.D. thesis, 1968.

[Juu02] Petri Juutinen, *Absolutely minimizing Lipschitz extensions on a metric space*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math. **27** (2002), no. 1, 57–67.

[McS34] Edward J. McShane, *Extension of range of functions*, Bull. Am. Math. Soc. **40** (1934), 837–842.

[Nig14] Heiki Niglas, *Lipschitzi kujutused ja M-ideaalid*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2014, `http://hdl.handle.net/10062/42888`.

[OO91] Eve Oja ja Peeter Oja, *Funktsionaalanalüüs*, Tartu Ülikool, 1991.

[Pha15] Thanh V. Phan, *Extensions Lipschitziennes minimales*, Ph.D. thesis, 2015.

[Wea18] Nik Weaver, *Lipschitz algebras*, 2nd edition ed., Hackensack, NJ: World Scientific, 2018.

[Whi34] Hassler Whitney, *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Am. Math. Soc. **36** (1934), 63–89.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Kristjan Kallikivi,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Lipschitzi funktsioonide jätkamine“,

   mille juhendajad on Johann Langemets ja Natalia Saealle, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Kristjan Kallikivi

05.01.2023