Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Getter Hiis-Hommuk

Perfektsed monoidid

Matemaatika

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Valdis Laan

Tartu 2021

PERFEKTSED MONOIDID

Bakalaureusetöö

Getter Hiis-Hommuk

Lühikokkuvõte

Käesolevas bakalaureusetöös antakse ülevaade perfektseid monoide kirjeldavast John Fountaini teoreemist. Kõigepealt tuletatakse meelde poolrühmateooria põhimõisted ja antakse perfektse monoidi definitsioon. Seejärel sõnastatakse ja tõestatakse abitulemused. Lõpuks antakse nende tulemuste abil põhiteoreemi tõestus.

CERCS teaduseriala: P120 Arvuteooria, väljateooria, algebraline geomeetria, algebra, rühmateooria

Märksõnad: monoidid, ideaalid, kategooriad

PERFECT MONOIDS

Bachelor thesis

Getter Hiis-Hommuk

Abstract

In this Bachelor's thesis we give an overview of a theorem by John Fountain which describes perfect monoids. Firstly we recall basic concepts of semigroup theory and give the definition of a perfect monoid. Then helping results are formulated and proven. Finally we present a proof of the main theorem based on the results that were previously proven.

CERCS research specialisation: P120 Number theory, field theory, algebraic geometry, algebra, group theory

Key Words: monoids, ideals, categories

Sisukord

Sissejuhatus

Objekti projektiivsus on üks oluline mõiste, millest võib rääkida mistahes kategoorias. Teatud objektidel võivad leiduda nendega mingis mõttes lähedased projektiivsed objektid, mida kutsutakse projektiivseteks kateteks.

Perfektsus defineeriti esmalt ühikelemendiga ringide jaoks öeldes, et ring on vasakperfektne, kui tema igal vasakpoolsel moodulil leidub projektiivne kate. Analoogiliselt ringide juhuga defineeris John Isbell [2] vasakperfektsed monoidid kui sellised, mille igal vasakpoolsel polügoonil leidub projektiivne kate. Samas artiklis andis ta ka teatud tarvilikud ja piisavad tingimused monoidi vasakperfektsuseks. Mõned aastad hiljem ilmunud John Fountaini artiklis [1] tõestati veel mitu vasakperfektsusega samaväärset tingimust. Neist üks ütleb näiteks seda, et iga tugevalt lame polügoon on projektiivne. Seega võib Fountaini teoreemi vaadelda ka kui monoidide homoloogilise klassifikatsiooni tulemust.

Käesoleva referatiivse bakalaureusetöö eesmärgiks on anda üksikasjalik ülevaade John Fountaini artiklis [1] tõestatud teoreemist.

Töö esimeses peatükis tuletame kõigepealt meelde poolrühmateooria põhimõisted. Seejärel anname projektiivsete polügoonide definitsiooni ja kirjelduse ning perfektse monoidi definitsiooni projektiivsete katete kaudu. Viimaks anname ülevaate mõningatest järjestatud hulkade omadustest, mis on vajalikud järgnevates peatükkides olevate tulemuste tõestamiseks.

Teises peatükis anname põhiteoreemi sõnastuse. Samuti kirjeldame teoreemis esinevate mõistete ja tingimuste sisu.

Kolmandas peatükis sõnastame kuus lemmat ja ühe järelduse, mida läheb vaja põhiteoreemi tõestuses. Peatüki lõpus näitame, kuidas teoreemi tõestus nende abil välja tuleb.

Neljandas peatükis toome mõned näited perfektsetest monoidest.

1 Definitsioonid

Alustuseks esitame mõned põhimõisted ja tulemused, millest enamus põhinevad kursuse Sissejuhatus algebra struktuuridesse loengukonspektil [7].

1.1 Monoid, ideaal

Definitsioon 1. **Kahekohaliseks algebraliseks tehteks** hulgal A nimetame kujutust $A^2 \to A$.

Definitsioon 2. **Poolrühmaks** nimetatakse hulka S koos sellel defineeritud kahekohalise tehtega $\cdot$, mis on assotsiatiivne ehk iga $a, b, c \in S$ puhul kehtib $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. Kirjutame edaspidi $ab := a \cdot b$.

Definitsioon 3. Kui leidub element $e \in S$ nii, et iga elemendi $a \in S$ korral kehtib $ae = a = ea$, siis nimetame poolrühma S **monoidiks**.

Elementi e nimetame monoidi **ühikelemendiks** ning tähistame sümboliga 1.

Definitsioon 4. Monoidi S alamhulka T nimetatakse **alammonoidiks**, kui ta on kinnine korrutamise suhtes ja sisaldab S ühikelemendi.

Definitsioon 5. Alamhulka I poolrühmas S nimetatakse selle poolrühma **parempoolseks ideaaliks**, kui iga $a \in I$ ja $s \in S$ korral $as \in I$. Analoogiliselt nimetatakse alamhulka I poolrühma S **vasakpoolseks ideaaliks**, kui iga $a \in I$ ja $s \in S$ korral $sa \in I$. Poolrühma **ideaaliks** nimetatakse poolrühma parempoolset ideaali, mis on ka vasakpoolne ideaal.

Definitsioon 6. Poolrühma S parempoolset ideaali I nimetatakse **minimaalseks parempoolseks ideaaliks**, kui

1. $I \neq \varnothing$
2. iga parempoolse ideaali J korral, kui $J \neq \varnothing$ ja $J \subseteq I$, siis $J = I$.

Definitsioon 7. Olgu S monoid ning olgu $a \in S$. Siis alamhulk $Sa \subseteq S$ on vasakpoolne ideaal, mida nimetatakse elemendi a poolt tekitatud **vasakpoolseks peaideaaliks**. Analoogiliselt saab defineerida parempoolse peaideaali.

Definitsioon 8. Öeldakse, et monoidi S vasakpoolne ideaal I on **lõplikult tekitatud**, kui leidub naturaalarv n ja elemendid $s_1, \ldots, s_n \in I$ nii, et

$$I = Ss_1 \cup \ldots \cup Ss_n.$$

On selge, et iga vasakpoolne peaideaal on lõplikult tekitatud.

1.2 Polügoon, tsükliline polügoon

Definitsioon 9. Olgu A hulk ja S monoid. Kujutust $A \times S \to A$, $(a, s) \mapsto as$ nimetatakse monoidi S **toimeks** hulgal A, kui iga $a \in A$ ja $s, t \in S$ korral

1. $(as)t = a(st)$,
2. $a1 = a$.

Hulka A nimetatakse seejuures **parempoolseks polügooniks üle monoidi** S ehk **parempoolseks** S**-polügooniks**. Tähistame A_S.

Definitsioon 10. Hulga A alamhulka B nimetatakse polügooni A_S **alampolügooniks**, kui iga $b \in B$ ja $s \in S$ korral $bs \in B$.

Alampolügooni B nimetatakse polügooni A_S **pärisalampolügooniks**, kui $B \neq A$.

Näide 1. 1) Olgu S monoid. Kui võtame toimeks S korrutamise, siis S on polügoon üle iseenda. Monoidi S iga parempoolne ideaal on selle polügooni alampolügoon.

2) Mistahes polügooni A_S korral $\varnothing$ ja A ise on tema alampolügoonid.

Kui A_S on parempoolne S-polügoon ja $a \in A$, siis tähistame

$$aS = \{as \mid s \in S\} \subseteq A.$$

Lihtne on näha, et aS on polügooni A_S alampolügoon. Selliseid alampolügoone nimetatakse **tsüklilisteks**.

Tuleb välja, et tsüklilisi polügoone saab kirjeldada monoidi faktoritena.

Definitsioon 11. Poolrühma S **parempoolne kongruents** on ekvivalentsusseos ρ hulgal S, mis on kooskõlas S elementidega paremalt korrutamisega, s.t. iga $s_1, s_2, s \in S$ korral kehtib implikatsioon

$$s_1 \rho s_2 \implies (s_1 s) \rho (s_2 s).$$

Kui ρ on monoidi S parempoolne kongruents, siis defineerides faktorhulgal

$$S/\rho = \{[s] \mid s \in S\}$$

monoidi S toime võrdusega

$$[s]t := [st]$$

saame parempoolse S-polügooni.

Definitsioon 12. Kujutust $f : A_S \to B_S$ nimetatakse **polügoonide homomorfismiks**, kui iga $a \in A$ ja iga $s \in S$ korral

$$f(as) = f(a)s.$$

Definitsioon 13. Polügoonide homomorfismi $f : A_S \to B_S$ nimetakse **polügoonide isomorfismiks**, kui kujutus f on bijektiivne.

Lause 1. *Polügoon A_S on tsükliline parajasti siis, kui leidub monoidi S parempoolne kongruents ρ nii, et $A_S \cong S/\rho$.*

Tõestus. Polügoon S/ρ on tsükliline, sest $S/\rho = [1]S = \{[1]s \mid s \in S\}$. Sellega on tõestatud piisavus.

Tõestame ka tarvilikkuse. Olgu A_S tsükliline polügoon. Siis leidub $a \in A$ nii, et $A_S = aS$. Defineerime monoidil S binaarse seose ρ järgmiselt:

$$s\rho t \iff as = at.$$

Lihtne on aru saada, et ρ on ekvivalentsiseos. Näitame, et ρ on parempoolne kongruents. Kehtigu $s, t \in S$ korral $s\rho t$, s.t. $as = at$. Olgu $u \in S$. Siis $(as)u = (at)u$, millest $a(su) = a(tu)$. Seega $(su)\rho(tu)$.

Näitame, et $A_S \cong S/\rho$. Defineerime kujutuse $f : A \to S/\rho$ võrdusega

$$f(as) := [s],$$

$s \in S$. Tänu ρ definitsioonile on see kujutus korrektselt defineeritud ja injektiivne. On ilmne, et f on sürjektiivne. Veendume, et f on polügoonide homomorfism. Olgu $a \in A$ ja $s, t \in S$ suvalised. Siis

$$f((as)t) = f(a(st)) = [st] = [s]t = f(as)t.$$

Kokkuvõttes f on polügoonide isomorfsim. □

Definitsioon 14. Monoidi S alammonoidi T nimetatakse **paremunitaarseks**, kui

$$(\forall x, y \in S)(x, xy \in T \implies y \in T).$$

Lemma 2. *Kui ρ on parempoolne kongruents monoidil S, siis ühikelemendi ρ-klass on paremunitaarne alammonoid.*

Tõestus. Vaatleme hulka

$$B := [1] = \{s \in S \mid s\rho 1\} \subseteq S,$$

s.t. B on ühikelemendi ρ-klass. Monoidi S ühikelement kuulub hulka B, sest $1\rho 1$. Olgu b_1, $b_2 \in B$. Siis $b_1\rho 1$ ja $b_2\rho 1$. Kuna ρ on parempoolne kongruents, siis $b_1b_2\rho b_2$. Seose ρ transitiivsuse tõttu $b_1b_2\rho 1$, seega $b_1b_2 \in B$. Järelikult B on monoidi S alammonoid.

Näitame, et ta on paremunitaarne. Kehtigu mingite $x, y \in S$ korral $x \in B$ ja $xy \in B$. Siis $x\rho 1$ ja $xy\rho 1$. Nüüd $xy\rho y$ ja seega ka $y\rho xy$. Seose ρ transitiivsuse tõttu $y\rho 1$. Seega B on paremunitaarne alammonoid, mida oligi vaja näidata. □

Definitsioon 15. Kui polügooni S ei saa esitada kahe mittetühja lõikumatu alampolügooni ühendina, siis nimetatakse polügooni S **lahutumatuks**.

Kehtib järgmine lause.

Lause 3 ([5, Teoreem 7.1.21])**.** *Iga S-polügoon on üheselt esitatav lahutumatute alampolügoonide lõikumatu ühendina.*

1.3 Projektiivne polügoon, perfektne monoid

Definitsioon 16. Polügooni P_S nimetatakse **projektiivseks**, kui iga sürjektiivse homomorfismi $\pi : A_S \to B_S$ ja iga homomorfismi $f : P_S \to B_S$ korral leidub homomorfism $g : P_S \to A_S$ nii, et $\pi g = f$.

$$\begin{tikzcd} & P_S \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "f"] \\ A_S \arrow[r, "\pi"'] & B_S \end{tikzcd}$$

Teoreem 4 ([5, Teoreem 7.2.7])**.** *Olgu polügoon P_S oma alampolügoonide P_i, $i \in I$, lõikumatu ühend. Siis P_S on projektiivne parajasti siis, kui iga P_i on projektiivne.*

Definitsioon 17. Poolrühma S elementi e nimetatakse **idempotendiks**, kui $e^2 = e$.

Järgmine teoreem annab projektiivsete polügoonide kirjelduse üle monoidi S.

Teoreem 5 ([5, Teoreem 7.2.8])**.** *Polügoon P_S on projektiivne parajasti siis, kui leidub hulk I ja alampolügoonid P_i, $i \in I$, nii et $P_S = \bigsqcup_{i \in I} P_i$ ja iga $i \in I$ korral leidub idempotent $e_i \in S$ nii, et $P_i \cong e_i S$.*

Järeldus 1. *Kui $e \in S$ on idempotent, siis polügoon eS on projektiivne.*

Definitsioon 18. Polügooni A_S **projektiivseks katteks** nimetatakse sürjektiivset homomorfismi $\pi : P_S \to A_S$, kus

1. P_S on mingi projektiivne polügoon,

2. π ahend ühelegi P_S pärisalampolügoonile ei ole sürjektiivne.

Definitsioon 19. Monoidi S nimetatakse **paremperfektseks**, kui igal parempoolsel S-polügoonil leidub projektiivne kate.

Selles töös me vaatleme ainult paremperfektseid monoide ja edaspidi ütleme nende kohta lihtsalt "perfektne monoid".

1.4 Järjestatud hulgad

Meil läheb vaja järgmisi tulemusi järjestatud hulkade kohta.

Lemma 6 (Zorni lemma)**.** *Kui mittetühja järjestatud hulga P igal ahelal on olemas ülemine tõke, siis selles hulgas leidub maksimaalne element.*

Teoreem 7 ([4, Teoreem 1.4.14])**.** *Mistahes järjestatud hulga P korral on järgmised tingimused samaväärsed.*

1. (Minimaalsuse tingimus.) *Hulga P mistahes mittetühjas alamhulgas leidub minimaalne element.*

2. (Kahanevate jadade tingimus.) *Hulga P elementide mistahes kahaneva jada*

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

korral leidub selline indeks n, et $a_n = a_{n+1} = a_{n+2} = \dots$.

Kui leidub selline naturaalarv n nagu tingimuses 2, siis öeldakse, et see kahanev jada stabiliseerub ehk katkeb.

Muidugi on olemas ka selle teoreemi duaalne teoreem, kus minimaalsuse tingimuse asemel on maksimaalsuse tingimus ja kahanevate jadade asemel on kasvavad jadad. Edaspidi kasutame neid kahte teoreemi vastavalt vajadusele, kuid harilikult ilma neile ilmutatult viitamata.

2 Põhitulemuse sõnastus

Bakalaureusetöö põhieesmärk on anda järgmise perfektseid monoide kirjeldava teoreemi tõestus.

Teoreem ([1]). *Monoidi S jaoks on järgmised väited samaväärsed.*

1. *S on perfektne.*
2. *S rahuldab tingimusi (A) ja (D).*
3. *S rahuldab tingimusi (A) ja M_L.*
4. *S rahuldab tingimust (A) ja kahanevate ahelate tingimust lõplikult tekitatud vasakpoolsete ideaalide jaoks.*
5. *Iga tugevalt lame parempoolne S-polügoon on projektiivne.*

Selgitame selles teoreemis esinevaid tingimusi.

Tingimus (A): iga parempoolne polügoon A_S rahuldab kasvavate ahelate tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks, s.t. hulga A mistahes elementide $a_i, i \in \mathbb{N}$, korral polügooni A tsükliliste alampolügoonide ahel

$$a_1 S \subseteq a_2 S \subseteq a_3 S \subseteq \dots$$

katkeb. Viimane tähendab seda, et leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $a_n S = a_{n+1} S = \dots$. Kasvavate ahelate tingimus polügooni A_S tsükliliste alampolügoonide jaoks on samaväärne sellega, et tsükliliste alampolügoonide hulga $\{aS \mid a \in A\}$ igas mittetühjas alamhulgas leidub maksimaalne element sisalduvusseose suhtes.

Tingimus (D): monoidi S igal paremunitaarsel alammonoidil leidub minimaalne parempoolne ideaal, mis on tekitatud idempotendi poolt.

See, et monoidi parempoolne ideaal I on tekitatud idempotendi poolt, tähendab seda, et leidub idempotent e nii, et $I = eS$.

Tingimus M_L: kahanevate ahelate tingimus monoidi S vasakpoolsete peaideaalide jaoks. See tähendab, et monoidi S mistahes elementide s_i, $i \in \mathbb{N}$ korral monoidi S vasakpoolsete peaideaalide ahel

$$Ss_1 \supseteq Ss_2 \supseteq Ss_3 \supseteq \dots$$

katkeb. Viimane tähendab seda, et leidub $n \in \mathbb{N}$ nii, et $Ss_n = Ss_{n+1} = \dots$. Tingimus M_L on samaväärne sellega, et hulga $\{Ss \mid s \in S\}$ igas mittetühjas alamhulgas leidub minimaalne element.

Definitsioon 20. Polügooni A_S nimetatakse **tugevalt lamedaks** (artiklis [1] öeldakse sama asja kohta *weakly flat*), kui selle polügooniga tensorkorrutamise funktor säilitab konservatiivseid ruute.

Meie kasutame selle definitsiooni asemel hoopis järgmist tugeva lameduse kirjeldust, mille andis oma 1971. aasta artiklis Bo Stenström.

Teoreem 8 ([8, Teoreem 5.3])**.** *Polügoon A_S on tugevalt lame parajasti siis, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:*

(P)*: kui $as = a's'$, $a, a' \in A$, $s, s' \in S$, siis leiduvad $a'' \in A$, $u, v \in S$ nii, et*

$$a = a''u, \quad a' = a''v, \quad us = vs',$$

(E)*: kui $as = as'$, $a \in A$, $s, s' \in S$, siis leiduvad $a' \in A$, $u \in S$ nii, et*

$$a = a'u, \quad us = us'.$$

Järgmine lause on järeldus raamatu [6] lausest 3.16.6 ja lausest 3.14.8.

Lause 9. *Olgu ρ monoidi S parempoolne kongruents. Siis tsükliline polügoon S/ρ on tugevalt lame parajasti siis, kui*

$$(\forall s, t \in S)(s\rho t \implies (\exists u \in S)(us = ut \text{ ja } u\rho 1)).$$

3 Põhitulemuse tõestus

Põhitulemuse tõestame terve rea lemmade abil.

Lemma 10 ([1, Lemma 1])**.** *Kui kõik tugevalt lamedad parempoolsed S-polügoonid on projektiivsed, siis S rahuldab tingimust M_L.*

Tõestus. Olgu $Sa_1 \supseteq Sb_2 \supseteq Sb_3 \supseteq \ldots$ kahanev ahel S vasakpoolsetest peaideaalidest. Siis leiduvad elemendid $a_2, a_3, \dots \in S$ nii, et

$$b_2 = a_2a_1,\ b_3 = a_3a_2a_1,\ \ldots,\ b_m = a_m \ldots a_2a_1,\ \ldots.$$

Defineerime hulgal

$$F = \mathbb{N} \times S = \{(k, s) \mid k \in \mathbb{N}, s \in S\}$$

parempoolse S toime võrdusega

$$(k, s)z := (k, sz)$$

$k \in \mathbb{N}$, $s, z \in S$. Niimoodi saame parempoolse S-polügooni F_S.

Defineerime hulgal F binaarse seose ρ järgmiselt:

$$(k, s)\rho(k', s') \iff (\exists n > k, k')(a_n \ldots a_k s = a_n \ldots a_{k'} s').$$

Näitame, et ρ on polügooni F_S kongruents. Veendume kõigepealt, et ρ on ekvivalentsiseos. Kuna $a_{k+1}a_k s = a_{k+1}a_k s$, siis $(k, s)\rho(k, s)$. Samuti ilmselt

$$(k, s)\rho(k', s') \iff (k', s')\rho(k, s).$$

Seega seos ρ on refleksiivne ja sümmeetriline. Näitame, et seos ρ on transitiivne.

Kehtigu $(k,s)\rho(k',s')$ ja $(k',s')\rho(k'',s'')$. Siis leiduvad $n_1 > k, k'$ ja $n_2 > k', k''$, et

$$a_{n_1}\dots a_k s = a_{n_1}\dots a_{k'}s' \quad \text{ja} \quad a_{n_2}\dots a_{k'}s' = a_{n_2}\dots a_{k''}s''.$$

Siis $n = \max\{n_1,\, n_2\}$ korral $a_n \dots a_{k'}s' = a_n \dots a_{k'}s'$ ja eelneva põhjal

$$a_n \dots a_k s = a_n \dots a_{k''}s''.$$

Näitame nüüd, et seos ρ on kooskõlas toimega. Selleks on vaja, et kehtiks

$$(\forall z \in S)((k,s)\,\rho\,(k's') \implies (k,s)z\,\rho\,(k',s')z).$$

Kehtigu $(k,s)\rho(k',s')$ ja olgu $z \in S$ suvaline. Siis leidub selline naturaalarv $n > k, k'$, et $a_n \dots a_k s = a_n \dots a_{k'}s'$. Eelmist võrdust elemendiga z läbi korrutades saame

$$a_n \dots a_k sz = a_n \dots a_{k'}s'z.$$

Kuna $sz, s'z \in S$, siis sobib võtta sama n, et kehtiks $(k,sz)\,\rho\,(k',s'z)$ ehk $(k,s)z\,\rho\,(k',s')z$. Seega ρ on polügooni F_S kongruents.

Moodustame faktorpolügooni

$$M_S = F_S/\rho = \{[k,s] \mid k \in \mathbb{N}, s \in S\},$$

kus $[k,s]$ tähistab paari (k,s) ekvivalentsiklassi seose ρ järgi. Näitame, et M_S rahuldab tingimusi (P) ja (E).

Alustame tingimusest (P). Kehtigu mingite $[k,s],[k',s'] \in M$ ja $z,z' \in S$ korral võrdus $[k,s]z = [k',s']z'$ ehk $[k,sz] = [k',s'z']$. Siis $(k,sz)\rho(k',s'z')$. Näitame, et leiduvad $[k'',s''] \in M$ ja $u, v \in S$, et kehtiksid võrdused

$$[k,s] = [k'',s'']u, \;\; [k',s'] = [k'',s'']v \;\; \text{ja} \;\; uz = vz'.$$

Teame, et leidub $n > k, k'$ nii, et $a_n \dots a_k sz = a_n \dots a_{k'} s' z'$. Võtame $u := a_n \dots a_k s$, $v := a_n \dots a_{k'} s'$ ja $(k'', s'') = (n+1, 1)$. Siis

$$a_{n+2} \dots a_k s = a_{n+2} a_{n+1} u \implies (k, s) \rho (n+1, u) \implies [k, s] = [n+1, 1]u,$$

$$a_{n+2} \dots a_{k'} s' = a_{n+2} a_{n+1} v \implies (k', s') \rho (n+1, v) \implies [k', s'] = [n+1, 1]v.$$

ja

$$uz = a_n \dots a_k sz = a_n \dots a_{k'} s' z' = vz'.$$

Saime, et (P) kehtib.

Kehtigu nüüd mingite $[k, s] \in M$ ja $z, z' \in S$ korral $[k, s]z = [k, s]z'$ ehk $[k, sz] = [k, sz']$. Peame näitama, et leiduvad $[k', s'] \in M$ ja $u \in S$ nii, et $[k, s] = [k', s']u$ ja $uz = uz'$. Kuna $(k, sz) \rho (k, sz')$, siis leidub $n > k$ nii, et $a_n \dots a_k sz = a_n \dots a_k sz'$. Võtame $u = a_n \dots a_k s$ ja $(k', s') = (n+1, 1)$. Siis

$$a_{n+2} a_{n+1} \dots a_k s = a_{n+2} a_{n+1} u \implies (k, s) \rho (n+1, u) \implies [k, s] = [n+1, 1]u$$

ja $uz = a_n \dots a_k sz = a_n \dots a_k sz' = uz'$. Seega (E) kehtib.

Teoreemi 8 tõttu on M_S tugevalt lame. Eelduse põhjal on ta projektiivne. Seega sürjektiivse homomorfismi

$$\pi : F_S \to M_S, \quad (k, s) \mapsto [k, s]$$

jaoks leidub homomorfism $\mu : M_S \to F_S$ nii, et $\pi\mu = 1_M$.

$$\begin{tikzcd}
& M_S \arrow[dl, dashed, "\mu"'] \arrow[d, "1_M"] \\
F_S \arrow[r, "\pi"'] & M_S
\end{tikzcd}$$

Olgu $\mu([1,1]) = (k,s) \in \mathbb{N} \times S$. Siis

$$[1,1] = (\pi\mu)([1,1]) = \pi(k,s) = [k,s].$$

Kuna $(1,1)\rho(k,s)$, siis leidub $n > 1, k$ nii, et $a_n \dots a_1 \cdot 1 = a_n \dots a_k s$. Seega iga $m > n$ korral

$$Sb_m = Sa_m \dots a_1 = Sa_m \dots a_{n+1}a_n \dots a_1 = Sa_m \dots a_{n+1}a_n \dots a_k s \subseteq Ss.$$

Olgu $m > n$ ja $\mu([m+1,1]) = (r,c)$. Paneme tähele, et $(1,1)\rho(m+1, a_m \dots a_1)$, sest

$$a_{m+2} \dots a_1 \cdot 1 = a_{m+2}a_{m+1} \cdot a_m \dots a_1.$$

Nüüd saame, et

$$\begin{aligned}(k,s) &= \mu([1,1]) = \mu([m+1, a_m \dots a_1]) = \mu([m+1,1])a_m \dots a_1 \\ &= (r,c)a_m \dots a_1 = (r, ca_m \dots a_1),\end{aligned}$$

kust $k = r$ ja $s = ca_m \dots a_1$. Järelikult $Ss \subseteq Sa_m \dots a_1 = Sb_m$ ja me oleme tõestanud, et $Ss = Sb_m$. Seega

$$Sa_1 \supseteq Sb_2 \supseteq Sb_3 \supseteq \dots \supseteq Sb_n \supseteq Sb_{n+1} = Sb_{n+2} = \dots$$

□

Meil läheb vaja ka järgmisi definitsioone.

Definitsioon 21. Polügooni A_S alamhulka X nimetatakse **tekitajate hulgaks**, kui

$$(\forall a \in A)(\exists x \in X)(\exists s \in S)\ a = xs.$$

Selle tingimuse võib lühidalt kirja panna võrdusena $A = XS$, kus hulk XS on defineeritud kui $XS = \{xs \mid x \in X, s \in S\}$.

Definitsioon 22. Öeldakse, et polügooni A_S tekitajate hulk on **sõltumatu**, kui

$$(\forall x, x' \in X)(x \in x'S \implies x = x').$$

Lemma 11 ([1, Lemma 2])**.** *Rahuldagu polügoon A_S kasvavate ahelate tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks. Kui X on polügooni A tekitajate hulk, siis X sisaldab mingit A sõltumatut tekitajate hulka.*

Tõestus. Tähistame

$$X' := \{x \in X \mid (\forall x' \in X)(xS \subseteq x'S \implies xS = x'S)\} \subseteq X\,.$$

Näitame, et X' on A_S tekitajate hulk. Selleks piisab, kui näitame, et $X \subseteq X'S$. (Tõepoolest, kui $X \subseteq X'S$, siis ka

$$A = XS \subseteq X'SS = X'S \subseteq A$$

ja seega $A = X'S$.) Võtame suvalise elemendi $x \in X$ ja vaatleme hulka

$$P_x = \{aS \mid a \in A, xS \subseteq aS\}$$

järjestatud hulgana sisalduvusseose suhtes. Siis eelduse tõttu peab selles hulgas leiduma mingi maksimaalne element aS. Muuhulgas $xS \subseteq aS$. Näitame, et $a \in X'$. Mistahes $x' \in X$ korral, kui $aS \subseteq x'S$, siis ka $xS \subseteq x'S$ ja $x \in x'S$. Et X on sõltumatu, siis $x = x'$. Nüüd

$$aS \subseteq x'S = xS \subseteq aS \implies aS = x'S.$$

Seega tõesti $a \in X'$. Kuna $x \in xS \subseteq aS$, siis leidub selline $s \in S$, et $x = as$. Järelikult $x \in X'S$, mida tahtsimegi näidata.

Defineerime nüüd hulgal X' seose $\sim$ järgmiselt:

$$x \sim x' \iff (\exists s \in S)\; x = x's.$$

Lihtne on aru saada, et

$$x \sim x' \iff xS \subseteq x'S\,.$$

Näitame, et $\sim$ on ekvivalentsiseos. Refleksiivsus kehtib ilmselt, sest $xS \subseteq xS$ iga $x \in X'$ korral. Olgu nüüd $x, x' \in X'$. Kui $x \sim x'$, siis $xS \subseteq x'S$. Et $x \in X'$, siis $xS = x'S$, järelikult ka $x'S \subseteq xS$ ja seega $x' \sim x$. Sellega on sümmeetrilisus tõestatud. Näitame veel, et $\sim$ on transitiivne. Kehtigu $x \sim x'$ ja $x' \sim x''$. Siis $xS \subseteq x'S$ ja $x'S \subseteq x''S$, mistõttu ka $xS \subseteq x''S$. Seega $x \sim x''$ ja transitiivsus kehtib.

Valime igast ekvialentsiklassist $\sim$ järgi välja ühe esindaja ja moodustame neist esindajatest hulga X''. Siis $X'' \subseteq X$. Näitame, et X'' on polügooni A_S sõltumatu tekitajate hulk.

Kõigepealt näitame, et X'' on A_S tekitajate hulk. Võtame selleks $a \in A$ ja näitame, et leiduvad $x \in X''$ ja $s \in S$, nii et $a = xs$. Seose $\sim$ definitsiooni põhjal iga $x' \in X'$ korral leiduvad $x'' \in X''$ ja $s \in S$ nii, et $x' = x''s$. Seega kuna X' on polügooni A tekitajate hulk, siis ka X'' on polügooni A_S tekitajate hulk.

Näitame lõpuks, et X'' on sõltumatu tekitajate hulk. Kui $x, x' \in X'' \subseteq X$ ja $x \in x'S$, siis tänu X sõltumatusele $x = x'$. Seega X'' on polügooni A_S sõltumatu tekitajate hulk, mida oligi vaja näidata. □

Lemma 12 ([1, Lemma 3])**.** *Olgu A_S tugevalt lame polügoon, mis rahuldab kasvavate ahelate tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks. Kui A_S on lahutumatu, siis on ta tsükliline.*

Tõestus. Lemma 1 järgi on polügoonil A_S olemas sõltumatu tekitajate hulk X.

Fikseerime suvalise elemendi $x \in X$. Vaatleme hulka

$$\{a'S \mid a' \in A, xS \subseteq a'S\} \subseteq \{a'S \mid a' \in A\}.$$

See hulk on mittetühi, sest sisaldab tsüklilist alampolügooni xS. Seega leidub selles hulgas mingi maksimaalne element aS, kus $a \in A$. See tähendab, et

$$xS \subseteq aS$$

ja

$$(\forall a' \in A)(xS \subseteq a'S \wedge aS \subseteq a'S \implies aS = a'S).$$

Kuna sisalduvustest $xS \subseteq aS$ ja $aS \subseteq a'S$ järeldub $xS \subseteq a'S$, siis viimase tingimuse võib ümber kirjutada kujul

$$(\forall a' \in A)(aS \subseteq a'S \implies aS = a'S).$$

Tähistame

$$X' = \{a\} \sqcup Y,$$

kus $Y = \{y \in X \mid y \notin aS\}$. Näitame, et X' on polügooni A_S sõltumatu tekitajate hulk.

Esiteks X' on tekitajate hulk, sest iga element $b \in A$ esitub kas kujul $b = as$, $s \in S$, või kujul $b = xs$, kus $s \in S$, $x \in X$ ja $x \notin aS$.

Veendume, et X' on sõltumatu. Olgu $x', x'' \in X'$ erinevad elemendid. Peame näitama, et $x' \notin x''S$. On kolm võimalust.

1) $x', x'' \in Y \subseteq X$. Siis $x' \notin x''S$ tänu X sõltumatusele.

2) $x' \in Y$, $x'' = a$. Kui oletada, et $x' \in aS$, siis saaksime vastuolu Y definitsiooniga. Seega $x' \notin x''S$.

3) $x' = a, x'' \in Y$. Kui oletaksime, et $a \in x''S$, siis $aS \subseteq x''S$ ja $x'S = aS \subseteq x''S$.

Hulga X sõltumatuse tõttu $x' = x''$, vastuolu. Seega $x' \notin x''S$.

Niisiis X' on sõltumatu tekitajate hulk. Näitame, et $X' = \{a\}$. Oletame vastuväiteliselt, et X' sisaldab veel mingit elementi peale elemendi a. Siis $YS \neq \varnothing$ ja A_S on oma mittetühjade alampolügoonide aS ja YS ühend. Polügooni A_S lahutumatuse tõttu

$$aS \cap YS \neq \varnothing.$$

See tähendab, et leiduvad elemendid $y \in Y$ ja $s, t \in S$ nii, et $as = yt$. Kuna A_S on tugevalt lame, siis Stenströmi teoreemi põhjal leiduvad elemendid $a'' \in A$ ja $u, v \in S$ nii, et $a = a''u$, $y = a''v$ ja $us = vt$. Saime, et $aS \subseteq a''S$. Alampolügooni aS maksimaalsuse tõttu siis $aS = a''S$. Nüüd, mingi $s'' \in S$ korral, $a'' = as''$ ning saame

$$y = a''v = as''v,$$

kust $y \in aS$. See tekitab aga vastuolu Y definitsiooniga. Seega $X' = \{a\}$. See tähendab, et iga $b \in A$ avaldub kujul $b = as$, $s \in S$, ehk teiste sõnadega A_S on tsükliline. □

Järeldus 2. *Kui monoid S rahuldab tingimust (A), siis iga tugevalt lame S-polügoon on tsükliliste tugevalt lamedate S-polügoonide lõikumatu ühend.*

Tõestus. Rahuldagu monoid S tingimust (A). Olgu A_S tugevalt lame. Lemma 3 põhjal

$$A = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

kus A_i on polügooni A_S lahutumatu alampolügoon iga $i \in I$ korral. Lihtne on veenduda, et kõik alampolügoonid A_i on samuti tugevalt lamedad. Kuna S rahuldab tingimust (A), siis A_S rahuldab kasvavate ahelate tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks. Siis ka iga A_i rahuldab kasvavate ahelate tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks. Kuna A_i rahuldab kõiki lemma 12 eeldusi, siis on ta tsükliline. □

Lemma 13 ([1, Lemma 4])**.** *Kui monoid S rahuldab tingimust M_L, siis iga tugevalt lame tsükliline S-polügoon on projektiivne.*

Tõestus. Rahuldagu S tingimust M_L, st kahanevate ahelate tingimust vasakpoolsete peaideaalide jaoks ja olgu C_S tugevalt lame tsükliline S-polügoon. Siis lause 1 põhjal leidub monoidi S parempoolne kongruents ρ nii, et $C_S \cong S/\rho$, ja seega ka S/ρ on tugevalt lame. Peame näitama, et S/ρ on projektiivne.

Lemmast 2 teame, et ühikelemendi ρ-klass B on paremunitaarne monoidi S alammonoid. Vaatleme S vasakpoolsete peaideaalide hulka

$$\{Ss \mid s \in B\}.$$

Kuna $1 \in B$, siis $S = S1$ kuulub sellesse hulka ja see hulk on mittetühi. Tingimuse M_L tõttu sisaldab see hulk mingit minimaalset elementi Sc, kus $c \in B$.

Olgu $a \in B$ suvaline element. Siis $a\rho 1$ ja $1\rho c$, millest järeldub, et $a\rho c$. Kuna S/ρ on tugevalt lame, siis lause 9 põhjal leidub $u \in S$ nii, et $ua = uc$ ja $u\rho 1$. Et $c, u \in B$, siis ka $d := uc = ua \in B$ ja

$$Sd \subseteq Sa \cap Sc \subseteq Sc.$$

Tänu peaideaali Sc minimaalsusele saame võrduse $Sd = Sc$.

Defineerime kujutuse $f : S/\rho \to cS$ võrdusega

$$f([s]) := cs.$$

Meie eesmärk on tõestada, et f on parempoolsete polügoonide isomorfism. Kehtigu mingite $s, t \in S$ korral $[s] = [t]$. Siis lause 9 põhjal leidub $u \in S$ nii, et $us = ut$ ja $u\rho 1$. Kuna Sc on minimaalne element hulgas $\{Ss \mid s \in B\}$, siis $Sc \subseteq Su$ ning seega leidub $w \in S$, et $c = wu$. Saame

$$cs = wus = wut = ct,$$

seega f on korrektselt defineeritud. See kujutus on homomorfism, sest mistahes $s, t \in S$ korral

$$f([s]t) = f([st]) = c(st) = (cs)t = f([s])t.$$

Veel on vaja näidata, et f on isomorfism. Sürjektiivsus on ilmne. Injektiivsuse näitamiseks olgu $f([s]) = f([t])$ mingite $s, t \in S$ korral, s.t. $cs = ct$. Nüüd,

$$[s] = [1]s = [c]s = [cs] = [ct] = [c]t = [1]t = [t],$$

ehk $[s] = [t]$. Kokkuvõttes oleme saanud, et f on isomorfism.

Järelikult $S/\rho \cong cS$. Kuna $c\rho 1$, siis $c = f([1]) = f([c]) = c^2$ ehk c on idempotent. Järelduse 1 põhjal on cS ja seega ka S/ρ projektiivne, mida oligi vaja näidata. □

Lemma 14 ([1, Lemma 5])**.** *Kui monoid S rahuldab tingimust (D), siis iga tugevalt lame tsükliline S-polügoon on projektiivne.*

Tõestus. Rahuldagu monoid S tingimust (D) ja olgu C_S tugevalt lame tsükliline S-polügoon. Lause 1 põhjal leidub monoidi S parempoolne kongruents ρ nii, et C_S on isomorfne polügooniga S/ρ. Vaatleme taas hulka

$$B := [1] = \{s \in S \mid s\rho 1\} \subseteq S,$$

mis on lemma 2 põhjal monoidi S paremunitaarne alammonoid. Tingimuse (D) põhjal leidub hulgal B minimaalne parempoolne ideaal I, mis on tekitatud idempotendi poolt, s.t. $I = eB$, kus $e \in B$ on idempotent. Tulemuse [9, lemma 8.12] järgi on Be monoidi B minimaalne vasakpoolne ideaal. Olgu $a \in B$. Et $a\rho 1$ ja $1\rho e$, siis $a\rho e$. Kuna S/ρ on tugevalt lame, siis leidub element $u \in S$ nii, et $ua = ue$ ja

$u\rho 1$. Tänu sellele, et $u \in B$ ja B on alammonoid, kehtib sisalduvus $Bu \subseteq B$. seega

$$Bua \subseteq Ba \cap Be \subseteq Be.$$

Kuna Be on monoidi B minimaalne vasakpoolne ideaal, siis $Be = Bua \subseteq Ba$. Oleme näidanud, et iga $a \in B$ korral $Be \subseteq Ba$. Sarnaselt eelmise lemma tõestusega saab näidata, et $S/\rho \cong eS$. Järelduse 1 põhjal on eS projektiivne ning seega on ka isomorfsed polügoonid S/ρ ja C_S projektiivsed. □

Lemma 15 ([1, Lemma 6]). *Kui polügoon A_S rahuldab kahanevate ahelate tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks, siis ta rahuldab ka kahanevate ahelate tingimust lõplikult tekitatud alampolügoonide jaoks.*

Tõestus. Tänu teoreemile 7 võime kahanevate ahelate tingimuste asemel vaadelda minimaalsuse tingimusi. Niisiis eeldame, et A_S rahuldab minimaalsuse tingimust tsükliliste alampolügoonide jaoks. Vaatleme hulka

$$P = \{B \mid B \subseteq A_S \text{ on alampolügoon, mis rahuldab minimaalsuse tingimust} \\ \text{lõplikult tekitatud alampolügoonide jaoks}\}$$

järjestatud hulgana sisalduvusseose suhtes. Veendume, et see järjestatud hulk rahuldab Zorni lemma eeldusi.

Esiteks näitame, et hulk P on mittetühi. Eelduse tõttu leidub hulgas

$$\{aS \mid a \in A\}$$

minimaalne element, st leidub vähemalt üks minimaalne tsükliline alampolügoon a_0S polügoonis A_S. Oletame, et C_S on lõplikult tekitatud alampolügoon polügoonis a_0S. Siis leiduvad elemendid $s_1, \ldots, s_n \in S$ nii, et

$$C_S = a_0s_1S \cup \ldots \cup a_0s_nS \subseteq a_0S.$$

Siis iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $a_0 s_i S \subseteq a_0 S$, kust tänu $a_0 S$ minimaalsusele saame võrduse $a_0 s_i S = a_0 S$. Seega $C_S = a_0 S$, mis tähendab seda, et polügooni $a_0 S$ ainus lõplikult tekitatud alampolügoon on ta ise. Järelikult $a_0 S$ rahuldab minimaalsuse tingimust lõplikult tekitatud alampolügoonide jaoks ja seega $a_0 S \in P$.

Vaatleme nüüd suvalist ahelat $\{B_i \mid i \in I\}$ hulka P kuuluvatest alampolügoonidest B_i. Siis

$$B_S := \bigcup_{i \in I} B_i$$

on samuti polügooni A_S alampolügoon. On selge, et B_S on ülemine tõke alampolügoonide B_i jaoks. Veendume, et B_S rahuldab kahanevate ahelate tingimust lõplikult tekitatud alampolügoonide jaoks, st veendume, et B_S kuulub hulka P.

Selleks vaatleme kahanevat ahelat

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \ldots, \tag{1}$$

kus C_i, $i \in \mathbb{N}$, on polügooni B_S lõplikult tekitatud alampolügoonid. Olgu C_1 tekitajad $c_1, \ldots, c_n \in C_1$, st

$$C_1 = c_1 S \cup \ldots \cup c_n S.$$

Siis leiduvad indeksid $i_1, \ldots, i_n \in I$ nii, et $c_1 \in B_{i_1}, \ldots, c_n \in B_{i_n}$. Kuna $\{B_i \mid i \in I\}$ on ahel, siis leidub $j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ nii, et $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n} \subseteq B_j$. Seega ka $c_1, \ldots, c_n \in B_j$ ja $C_1 \subseteq B_j$. Järelikult kogu ahel (1) sisaldub polügoonis B_j. Et B_j kuulub hulka P, siis peab see ahel stabiliseeruma, mida oligi vaja näidata.

Zorni lemma põhjal leidub hulgas P maksimaalne element K. See K on polügooni A_S alampolügoon.

Oletame vastuväiteliselt, et $K \neq A$. Vaatleme tsükliliste alampolügoonide hulka

$$\{aS \mid a \in A, aS \nsubseteq K\}.$$

Kui iga $a \in A$ korral $aS \subseteq K$, siis $A \subseteq K$, mis pole hetkel võimalik. Seega leidub selline $a \in A$, et $aS \nsubseteq K$. Teiste sõnadega: vaadeldav hulk ei ole tühi. Eelduse tõttu leidub selles hulgas minimaalne element xS, kus $x \in A$ ja $xS \nsubseteq K$. Vaatleme polügooni A_S alampolügooni $K \cup xS$. Olgu

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots \tag{2}$$

kahanev ahel polügooni $K \cup xS$ lõplikult tekitatud alampolügoonidest. Kui leiduks selline n, mille korral $K_n \subseteq K$, siis ilmselt ahel stabiliseeruks.

Oletame nüüd, et iga n korral leidub element $y_n \in K_n \setminus K$. Ilmselt siis $y_n \in xS$ ning seega $y_nS \subseteq xS$. Alampolügooni xS minimaalsuse tõttu $y_nS = xS$. Kuna $y_nS \subseteq K_n$ (sest K_n on alampolügoon ja $y_n \in K_n$), siis iga n korral

$$K_n \cap xS = K_n \cap y_nS = y_nS = xS.$$

Olgu n suvaline. Kuna K_n on lõplikult tekitatud, siis on tal lõplik hulk tekitajaid, tähistame nende hulga tähega X. Olgu K'_n polügooni K_n alampolügoon, mille tekitajate hulgaks on $X \setminus xS$. Ilmselt $K'_n \subseteq K$ ja $K_n = K'_n \cup xS$. Kui y on üks polügooni K'_{n+1} tekitajatest, siis $y \in K_{n+1} \setminus xS$. Seega ka $y \in K_n \setminus xS \subseteq K'_n$. Kuna kõik K'_{n+1} tekitajad sisalduvad alampolügoonis K'_n, siis $K'_{n+1} \subseteq K'_n$. Saame ahela

$$K'_1 \supseteq K'_2 \supseteq K'_3 \supseteq \dots,$$

kus iga n korral K'_n on polügooni K lõplikult tekitatud alampolügoon ja seega see ahel stabiliseerub. Järelikult ka ahel (2) stabliseerub, mistõttu $K \cup xS$ rahuldab kahanevate ahelate tingimust lõplikult tekitatud alampolügoonide jaoks, s.t. $K \cup xS \in P$. Kuna $xS \nsubseteq K$, siis $K \subset K \cup xS$. See on aga vastuolus sellega, et K pidi olema järjestatud hulga P maksimaalne element.

Järelikult $K = A_S$ ja A_S rahuldab minimaalsuse tingimust lõplikult tekitatud alampolügoonide jaoks. Seda oligi tarvis tõestada. $\square$

Lõpetuseks näitame, kuidas tõestatud lemmad annavad meile põhiteoreemi tõestuse.

Teoreem 16. *Monoidi S jaoks on järgmised väited samaväärsed.*

1. *S on perfektne.*
2. *S rahuldab tingimusi (A) ja (D).*
3. *S rahuldab tingimusi (A) ja M_L.*
4. *S rahuldab tingimust (A) ja kahanevate ahelate tingimust lõplikult tekitatud vasakpoolsete ideaalide jaoks.*
5. *Iga tugevalt lame parempoolne S-polügoon on projektiivne.*

Tõestus. (1) $\iff$ (2). Need tingimused on samaväärsed tänu artikli [2] tulemustele 1.1 ja 1.5.

(2) $\Longrightarrow$ (5). Eeldame, et S rahuldab tingimusi (A) ja (D) ning vaatleme tugevalt lamedat polügooni A_S. Järelduse 2 tõttu esitub A_S lõikumatu ühendina

$$A_S = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

kus iga A_i on tsükliline tugevalt lame polügoon. Lemma 14 põhjal on iga A_i projektiivne. Tänu teoreemile 4 on ka polügoon A_S projektiivne.

(5) $\Longrightarrow$ (2). See implikatsioon kehtib tänu artikli [2] tulemustele.

(5) $\Longrightarrow$ (3). Tingimus M_L järeldub lemmast 10. Tingimus (A) järeldub tänu artiklile [2].

(3) $\Longrightarrow$ (5). Tingimuse (A) kehtivusest saame järelduse 2 põhjal, et iga tugevalt lame S-polügoon A_S on tsükliliste tugevalt lamedate S-polügoonide lõikumatu ühend, s.t.

$$A_S = \bigsqcup_{i \in I} A_i,$$

kus A_i on tugevalt lame iga $i \in I$ korral. Tingimuse M_L kehtivusest saame lemma 13 põhjal, et iga A_i on projektiivne. Teoreemi 4 põhjal on siis ka polügoon A_S projektiivne.

(3) $\implies$ (4). Polügooni ${}_SS$ lõplikult tekitatud alampolügoonid on monoidi S lõplikult tekitatud vasakpoolsed ideaalid. Polügooni ${}_SS$ tsüklilised alampolügoonid on monoidi S vasakpoolsed peaideaalid. Seega see implikatsioon järeldub lemma 15 duaalsest tulemusest vasakpoolsete polügoonide jaoks.

(4) $\implies$ (3). See on ilmne. $\square$

4 Näited

Lõpetuseks toome mõned näited perfektsetest monoididest.

Selleks märgime ära, et tingimusega (A) on võimalik anda mitmeid samaväärseid tingimusi. Neist järgmine on ära toodud artiklis [3] lemmas 1.3:

(A$'$): monoidi S ühikelemendist erinevate elementide mistahes jada $s_1, s_2, \ldots$ korral leiduvad $k, m \in \mathbb{N}$ ja $u \in S$ nii, et $k > m$ ja

$$s_k s_{k-1} \ldots s_{m+1} = s_k s_{k-1} \ldots s_{m+1} s_m u.$$

Kõigi näidete puhul me põhjendame, et monoid rahuldab tingimusi (A$'$) ja M_L.

Näide 2. Iga rühm G on perfektne. Ta rahuldab tingimust (A$'$), sest $s_2 = s_2 s_1 s_1^{-1}$ (me valime $k = 2$, $m = 1$), ja samuti tingimust M_L, sest iga $g \in G$ korral $Gg = G$ (st G on ainuke vasakpoolne peaideaal).

Näide 3. Iga parempoolse korrutamisega poolrühm, millele on lisatud väline ühikelement, on perfektne. Poolrühm S on parempoolse korrutamisega, kui iga $s, t \in S$ korral $st = t$. Sellises poolrühmas $Ss = \{s\}$ iga $s \in S$ korral ja $s_2 = s_2 s_1 s_2$ jadade korral, kus ei ole ühikelementi.

Näide 4. Iga lõplik nilpotentne poolrühm koos välise ühikelemendiga on perfektne. Lõplik monoid kindlasti rahuldab tingimust M_L. Nullelemendiga poolrühma nimetatakse nilpotentseks, kui leidub selline $n \in \mathbb{N}$, et mistahes elementide $s_1, \ldots, s_n$ korral $s_1 \ldots s_n = 0$. Selline poolrühm rahuldab ka tingimust (A$'$).

Kokkuvõte

Bakalaureusetöös andsime põhjalikuma tõestuse John Fountaini teoreemile perfektsetest monoididest. Selleks defineerisime algul vajaminevad poolrühmateooria mõisteid ning seejärel sõnastasime mitmeid abitulemusi. Nende tulemuste ja teiste matemaatikute poolt varasemalt tõestatud tulemuste abil saime põhiteoreemi tõestuse. Tõime ka näiteid perfektsetest monoididest.

Tulevikus oleks huvitav uurida, kas Fountaini teoreemi tõestust on võimalik üldistada mingitele poolrühmade klassidele, mis on suuremad kui kõigi monoidide klass. Näiteks lokaalsete ühikelementidega poolrühmadele või isegi faktoriseeruvatele poolrühmadele.

Viited

[1] J. Fountain, Perfect semigroups, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 20 (1976), 87–93.

[2] J.R. Isbell, Perfect monoids, Semigroup Forum 2 (1971), 95–118.

[3] R. Khosravi, M. Ershad, M. Sedaghatjoo, Strongly flat and condition (P) covers of acts over monoids, Comm. Algebra 38 (2010), 4520–4530.

[4] M. Kilp, Algebra I, Eesti Matemaatika Selts, Tartu, 2005.

[5] M. Kilp, Algebra II, Tartu, 1998.

[6] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, Monoids, acts and categories, Walter de Gruyter & Co., Berliin, 2000.

[7] V. Laan, Sissejuhatus algebra struktuuridesse, loengukonspekt, 2020, https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.013/2020_spring/uploads/Main/kon.pdf

[8] B. Stenström, Flatness and localization over monoids, Math. Nachr. 48 (1971), 315–334.

[9] A. H. Clifford and G. B. Preston, The algebraic theory of semigroups, Vol. II, Math. Surveys No. 7, Amer. Math. Soc, 1967.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Getter Hiis-Hommuk,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Perfektsed monoidid", mille juhendaja on Valdis Laan, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Getter Hiis-Hommuk

18. mai 2021. a.