



TARTU ÜLIKOOL  
Didaktiline seminar

~~Inw. 236.~~

Matemaatika jaoskond

A-3667 II

5600

56027

# Stereometria

K. H. Bachmann

K. R. Taylor

3-5-5

K. H. Bachmann

1954

1880

1881

1882

1883

1884

Mat 114

# Stereomeetria

K. N. Rashevski järele

K. R. Veski ja J. Grünthal



TARTU ÜLIKOOL.  
DIDAKTILINE SEMINAAR  
MATEMAATIKA JAOSKOND

~~Iw. nr 236~~

3053

K/Ü „Loodus“, Tartus

1922. a.

2

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu  
56027

K/Ü „Looduse“ keeleline korrektor Ülikooli eesti keele lektor  
J. V. Veski,

A-3667 II

U 15924397

K. Mattiesen'i trükk, Tartus.

TARTU ÜLIKOOL.  
DIDAKTILINE SEMINAAR  
MATEMAATIKA JAOSKOND

I osa.

**Tasapinna asendi määramine.**

1. **Sirgjoone ja tasapinna suhteline asend.** Nagu planimeetriast teada, nimetatakse tasapinnaks niisugust pinda, millel on see omadus, et kui sirgjoonel on selle pinnaga kaks mingit ühist punkti, siis asub terve see sirgjoon sellel pinnal. Aksiomina võetakse see teadmine, et säherdune pind on olemas ja et see pind on igast küljest piiramatult. Tasapinna definitsioonist järgneb, et sirgjoone ja tasapinna suhteline asend võib kolmesugune olla:

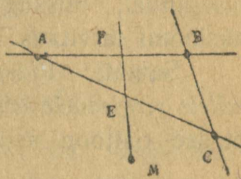
a) sirgjoonel võib tasapinnaga olla kaks ühist punkti, s. o. sirgjoon asub täies ulatuses sellel tasapinnal; säärasel juhusel kõneldakse, et tasapind on tõmmatud läbi sirgjoone;

b) sirgjoonel võib tasapinnaga olla üks ühine punkt; räägitakse, et sirgjoon lõikab tasapinda; sirgjoone ja tasapinna ühist punkti, s. o. lõikepunkti, nimetatakse sirgjoone aluseks;

c) sirgjoon ja tasapind võivad olla isekeesis säärases asendis, et neil pole mingit ühist punkti; sel juhusel nimetatakse sirgjoont ja tasapinda rööbikuteks ehk paralleelseteks.

2. **Lause.** Läbi kolme mitte ühel sirgjoonel asuva punkti  $A$ ,  $B$  ja  $C$  võib pinna tõmmata ja nimelt üheainsa pinna (joonis 1).

a) Läbi kahe antud punkti  $A$  ja  $B$  tõmbame sirgjoone ja läbi selle sirgjoone tõmbame mingisuguse tasapinna. Pöörame saadud tasapinda sirgjoone  $AB$



Joonis 1.

ümber kui telje ümber seni, kuni ta pöörlemisel kohtab punktiga  $C$ . Nõnda võib läbi kolme antud punkti alati tõmmata tasapinna.

b) Oletame, et läbi punktide  $A$ ,  $B$  ja  $C$  on tõmmatud kaks tasapinda: tasapind  $P$  ja tasapind  $P'$ . Siis asuvad sirgjooned  $AB$ ,  $AC$  ja  $BC$  ühel ja samal ajal mõlemas tasapinnas.

Võtame tasapinnal  $P$  mingi punkti  $M$  ja tõmbame läbi selle punkti sirgjoone  $MF$  nõnda, et  $MF$  lõikaks niihästi  $AB$  kui ka  $AC$  mingisugustes punktides  $E$  ja  $F$ . Tasapind  $P'$ , mahutades enesesse sirgjooni  $AB$  ja  $AC$ , mahutab enesesse ka punktid  $E$  ja  $F$ , järjekult mahutab ta enesesse ka sirgjoone  $FM$ , nõnda siis ka punkti  $M$ . Seega asub tasapinna  $P$  iga punkt  $M$  ühtlasi ka tasapinnal  $P'$ ; järjekult need tasapinnad ühtivad.

**Märkus.** Nagu näha, võib läbi antud sirgjoone  $AB$  tõmmata lõp-mata palju tasapindu, sest et me tõestuse järele võime tõmmata tasapinna läbi sirgjoone  $AB$  ja punkti  $C$ , samati siis ka läbi sirgjoone  $AB$  ja mõne ruumis asuva punkti  $D^1$ ) jne.

**Järeldus.** Tasapinna asendi määravad kindlaks:

- a) kolm mitte ühel sirgjoonel asuvat punkti ruumis;
- b) sirgjoon ja väljaspool sirgjoont asuv punkt;
- c) kaks isekeskis lõikuvat sirgjoont;
- d) kaks rööbikut sirgjoont.

**3.** Planimeetria aksioom: läbi sirgjoonest väljaspool antud punkti võib sellele sirgjoonele ainult ühe rööbiku sirgjoone tõmmata — on maksev ka ruumis, sest et tõmmates läbi sirgjoonest väljaspool antud punkti sellele sirgjoonele rööbiku sirgjoone, näeme, et need rööpjooned mõlemad asuvad ühel tasapinnal, missugune asjaolu lubabki meil planimeetria aksioomi tarvitada.

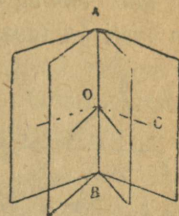
Samati, väljaspool sirgjoont olevast punktist võib tõmmata sellele sirgjoonele ainult ühe ristjoone ehk perpendikulaari, sest et see ristjoon asub ühes antud sirgjoonega ühel ja samal

1) Mis ei asu esimesel tasapinnal.

tasapinnal; tasapinna kohta oli see lause aga planimeetrias tõestatud.

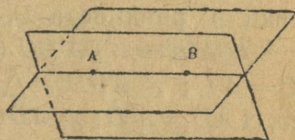
Vastupidiselt, läbi sirgjoonel  $AB$  asuva punkti  $O$  (joonis 2) võib sirgjoonele  $AB$  lõpmata palju ristjooni tõmmata; selleks tarvis ainult läbi punkti  $O$  tõmmata igal  $AB$ -st läbi tõmmatud tasapinnal ristjoon  $AB$ -le.

Nõnda näeme, et ruumis võivad 2 sirgjoont olla kolmandaga risti, ilma et need kaks sirgjoont isekeskis rööbikud oleksid.



Joonis 2.

4. Kahe tasapinna lõikjoon on sirgjoon (joonis 3). Võtame tasapindade lõikjoonel kaks mingisugust punkti  $A$  ja  $B$ ; niihästi punktid  $A$  ja  $B$  kui ka sirgjoon  $AB$  asuvad ühel ja samal ajal mõlematel tasapindadel. Mingit ühist punkti ei või neil kahel tasapinnal olla väljaspool sirgjoont  $AB$ , sest et nad vastasel korral ühtiksid. Nõnda asuvad kõik nende kahe lõikuva tasapinna ühised punktid nende tasapindade lõikjoonel ja ainult sellel lõikjoonel. Järjekult on kahe tasapinna lõikjoon sirgjoon.



Joonis 3.

5. Kahe tasapinna suhteline asend. Kaks tasapinda võivad isekeskis järgmised kolm asendit omandada:

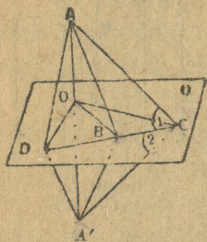
- ühtivad, kui neil on kolm mitte ühel sirgjoonel asuvat ühist punkti;
- lõikuvad — mööda sirgjoont;
- puudub ühine punkt; säärasel juhusel on tasapinnad rööbikud.

## II osa.

### Sirgjoon ja tema rist-tasapind.

6. Definiitsioon. Sirgjoont, mis on risti (perpendikulaarne) kõigi selle sirgjoone alusest läbi tõmmatud sirgjoontega tasapinnal, nimetatakse tasapinna ristjooneks.

**Lause.** Kui sirgjoon on risti kahe selle sirgjoone alusest läbi tõmmatud sirgjoonega tasapinnal, siis on see sirgjoon risti ka tasapinnaga (joonis 4).



Joonis 4.

Olgu  $AO$  risti  $OD$ -ga ja  $OC$ -ga; et tõestada, et  $AO$  on risti ka tasapinna  $Q$ -ga, selleks tarvis tõestada, et ta on risti iga sirgjoone  $OB$ -ga, mis tasapinnal  $Q$  tema alusest  $O$  läbi läheb.

Tõmbame tasapinnal  $Q$  juhuslise sirgjoone  $DC$ , mis lõikaks  $OD$ ,  $OB$  ja  $OC$  punktides  $D$ ,  $B$  ja  $C$ .

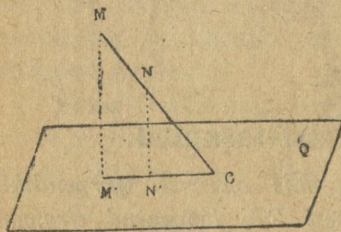
Pikendades sirgjoont  $AO$ , võttes tema pikendusel  $OA' = OA$  ja ühendades

punkti  $A'$  punktidega  $D$ ,  $B$  ja  $C$ , saame:

$\triangle AOC = \triangle A'OC$  ( $OA = OA'$ ;  $OC = OC$ ); järgneb, et  $AC = A'C$ ;  $\triangle AOD = \triangle A'OD$  ( $OA = OA'$ ;  $OD = OD$ ); järgneb, et  $AD = A'D$ ;  $\triangle ADC = \triangle A'DC$  ( $AC = A'C$ ;  $AD = A'D$ ;  $DC = DC$ ); järgneb, et  $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ;  $\triangle ACB = \triangle A'CB$  ( $AC = A'C$ ;  $BC = BC$  ja  $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$ ); järgneb, et  $AB = A'B$ ;  $\triangle AOB = \triangle A'OB$  ( $AO = A'O$ ;  $OB = OB$ ;  $AB = A'B$ ); järgneb, et  $\sphericalangle AOB = \sphericalangle A'OB$ , võrdsed kõrvunurgad on aga täisnurgad; järjekult:  $AO \perp OB$ , mis oligi tarvis tõestada.

**7. Definiitsioonid.** Punkte  $A$  ja  $A'$  (joonis 4), mis on asetatud tasapinna  $Q$  ristjoonel  $AA'$  ühekaugusel tasapinnast, nimetatakse selle tasapinna suhtes *sümmeetrilisteks* punktideks, kuna tasapinda  $Q$  nimetatakse säärasel juhusel *sümmeetrilise tasapinnaks*.

Kujundeid nimetatakse *sümmeetrilisteks telje suhtes*, kui nende kujundite punktid on paari kaupa isekeskis sümmeetrilised. Nõnda näit. on sirgjooned  $AC$  ja  $A'C$  (joonis 4) sümmeetrilised; samuti on sümmeetrilised ka  $\triangle ABC$  ja  $\triangle A'BC$ , kujund  $ADOC$  ja kujund  $A'DOC$  jne.



Joonis 5.

**8. Definiitsioonid.** Punkti  $M$  projektsiooniks (joonis 5) tasapinna  $Q$  peale nimetatakse sellest punktist läbi mineva tasa-

pinna  $Q$  ristjoone alust  $M'$  tasapinna peal. Kui punkt asub tasapinnal, siis ta on ise enese projektsioon; näit. punkti  $C$  projektsioon on punkt  $C$  ise.

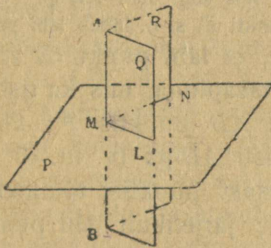
Joonlõigu projektsiooniks nimetatakse selle joonlõigu otsapunktide projektsioonide ühendus-joonlõiku. Nõnda näit. on lõigu  $MN$  projektsiooniks lõik  $M'N'$ ;  $NC$  projektsioon on  $N'C$ .

Üldse, joone projektsiooniks tasapinna peale nimetatakse selle sirgjoone kõigi punktide projektsioonide geometrilist kohta.

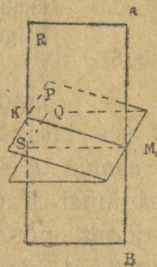
**9. Lause.** Läbi sirgjoone iga punkti võib sellele sirgjoonele tõmmata rist-tasapinna ja ainult ühe rist-tasapinna.

a) Läbi antud sirgjoone  $AB$  (joonis 6) tõmbame kaks mingisugust tasapinda  $Q$  ja  $R$  ja tõmbame neil tasapindadel antud sirgjoonele  $AB$  antud punktist  $M$  ristjooned  $MN$  ja  $ML$ .

Tasapind  $P$ , olles tõmmatud läbi sirgjoonte  $MN$  ja  $ML$ , on risti  $AB$ -ga (v. nr. 6). Nõnda võib sirgjoonele  $AB$  läbi antud punkti  $M$  alati tõmmata rist-tasapinna.



Joonis 6.



Joonis 7.

b) Oletame, et läbi sirgjoone  $AB$  peal antud punkti  $M$  (joonis 7) võib sellele sirgjoonele  $AB$  tõmmata kaks rist-tasapinda  $P$  ja  $Q$ . Olgu sirgjooned  $KM$  ja  $SM$  nende tasapindade ja mingi kolmanda  $AB$ -st läbi tõmmatud tasapinna  $R$  lõikjooned. Siis (v. nr. 6) oleksid sirgjooned  $KM$  ja  $SM$ , mis asuvad ühel ja samal tasapinnal  $R$ ,  $AB$ -ga risti ühes ja samas punktis, mis aga on võimatu. Järjekult võib läbi punkti  $M$  sirgjoonele  $AB$  tõmmata ainult ühe rist-tasapinna.

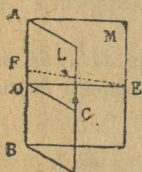
**10. Järeldus.** Kõik ristjooned, mis on tõmmatud  $AB$ -le punktist  $O$  ruumis, asuvad ühel ja samal tasapinnal, mis on risti selle sirgjoonega (joonis 2).

Tõesti, läbi punkti  $O$  võib sirgjoonele  $AB$  tõmmata ainult ühe rist-tasapinna: selle tasapinna määravad ära kaks vabalt võetud sirgjoont, mis on risti  $AB$ -ga punktis  $O$ ; järjekult asuvad kõik need ristjooned samal tasapinnal, mis oligi tarvis tõestada. Sellest järgneb, et:

a) Tasapind on nende ristjoonte geomeetiline koht, mis on tõmmatud mingisugusele sirgjoonele läbi selle sirgjoone ühe ja sama punkti.

b) Kui täismurk  $AOC$  pöörleb ümber kaateti  $AO$ , siis joonestab teine kaatet  $OC$  tasapinna, mis on risti  $AO$ -ga.

**11. Lause.** Läbi väljaspool sirgjoont võetud punkti võib sirgjoonele tõmmata rist-tasapinna ja ainult ühe.



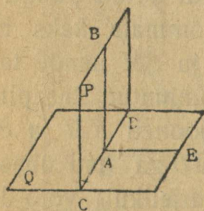
Joonis 8.

a) Olgu tarvis läbi punkti  $E$  (joonis 8) tõmmata  $AB$ -le rist-tasapind. Tõmbame läbi punkti  $E$  ja sirgjoone  $AB$  tasapinna  $M$ ; sellel tasapinnal tõmbame punkti  $E$  sirgjoonele  $AB$  ristjoone  $EO$ ; läbi sirgjoone  $AB$  tõmbame veel teise tasapinna  $L$ , millel tõmbame  $AB$ -le ristjoone  $OC$ . Läbi kahe lõikuva sirgjoone  $OE$  ja  $OC$  tõmbame tasapinna, mis ongi risti  $AB$ -ga (v. nr. 6) ja kulgeb seejuures punkti  $E$ , s. o. läheb läbi punkti  $E$ .

b) Oletame, et läbi punkti  $E$  võib tõmmata veel teise tasapinna, mis ongi risti  $AB$ -ga.

Lõigaku see tasapind sirgjoont  $AB$  punktis  $F$ ; ühendades  $F$  ja  $E$  saame  $EF$ , mis on risti  $AB$ -ga (v. nr. 6). Nõnda võib tasapinnal  $M$  ühest ja samast punktist tõmmata  $AB$ -le kaks ristjoont, mis on võimatu; järjekult läbi punkti  $E$  ei saa tõmmata  $AB$ -le teist rist-tasapinda.

**12. Lause.** Tasapinna igast punktist võib sellele tasapinnale tõmmata ristjoone ja ainult ühe (joonis 9).

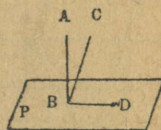


Joonis 9.

a) Olgu tarvis punktist  $A$  tõmmata tasapinnale  $Q$  ristjoon. Tõmbame sellel tasapinnal läbi punkti  $A$  juhulise sirgjoone  $AE$  ja sellele sirgjoonele tõmbame läbi punkti  $A$  rist-tasapinna  $P$ . Lõikugu tasapinnad  $P$  ja  $Q$  mööda sirgjoont  $CD$ . Tasapinnal  $P$  tõmbame punktist  $A$  sirgjoonele  $CD$  ristjoone  $AB$ . Võime tõestada, et see  $AB$  ongi risti tasapinnaga  $Q$ . Tõesti, sirgjoon  $AE$ , mis on risti tasapinnaga  $P$ , on risti ka  $AB$ -ga (v. nr. 6);

teisest küljest on  $AB$  risti  $CD$ -ga konstrueerimise järele.  $AB$ , olles risti kahe tasapinnal  $Q$  enese alusest läbi tõmmatud sirgjoonega  $CD$  ja  $AE$ , on risti ka tasapinnaga  $Q$ , mis oligi tarvis tõestada.

b) Oletame, et punktist  $B$  on võimalik tõmmata tasapinnale  $P$  kaks ristjoont  $AB$  ja  $CB$ . Tõmmame läbi  $AB$  ja  $CB$  tasapinna, mis lõikuks tasapinnaga  $P$  mööda sirgjoont  $BD$ . Siis on  $AB$  ja  $CB$ , olles risti tasapinnaga  $P$ , risti ka  $BD$ -ga, mis, nagu näha, on võimatu. Järjekult võib punktist  $B$  tasapinnale  $P$  tõmmata ainult ühe ristjoone.

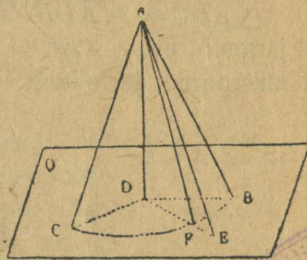


Joonis 10.

**13. Lause.** Kui ristjoone  $AD$  mingisugusest punktist  $A$  tõmmata tasapinnale  $Q$  mitmesugused kaldjooned  $AB$ ,  $AC$  ja  $AE$ , siis:

- ristjoon on igast kaldjoonest lühem;
- võrdsete projektsioonidega kaldjooned on võrdsed;
- kahest kaldjoonest on see suurem, mille projektsioon on suurem (joonis 11).

Pöördes täisnurkseid kolmnurki  $ADB$  ja  $ADC$  ümber  $AD$  võib nende kolmnurkade tasapindu asetada kolmnurga  $ADE$  tasapinda. Siis oleksid ka kaldjooned ja ristjoon ühte tasapinda asetatud, ja selle lause kohta on maksev sellekohane tõestus planimeetriast.



Joonis 11.

**Vastupidine lause.** Kui ristjoone  $AD$  mingisugune punkt  $A$  on ühendatud joonlõikude kaudu mitmesuguste tasapinnal  $Q$  asuvate punktidega, siis:

a) selle punkti  $A$  kõige lühem kaugus tasapinnast  $Q$  on ristjoon  $AB$ ;

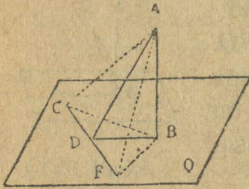
b) võrdsetel kaldjoontel on võrdsed projektsioonid;

c) suuremal kaldjoonel on suurem projektsioon.

Neid lauseid on vastuväiteliselt kerge tõestada.

**Märkus.** Ristjoone  $AD$  suurust nimetatakse punkti  $A$  kauguseks tasapinnast  $Q$ .

**14. Lause kolmest ristjoonest.** Sirgjoon ( $CF$ ), mis on tõmmatud tasapinnal ( $Q$ ) läbi kaldjoone ( $AD$ ) aluse risti kaldjoone projektsiooniga ( $DB$ ), on risti selle tasapinnaga (joonis 12).



Joonis 12.

Tingimus:  $AB \perp DB$ . Väide:  $CF \perp AD$ ,  
 $CF \perp DB$ .

Tõestus. Võttes  $CF$  peal võrdsed lõigud  $CD$  ja  $DF$  ja ühendades punktid  $C$  ja  $F$  punktidega  $A$  ja  $B$ , saame:

$\triangle CBD = \triangle DBF$  ( $CD = DF$  konstrueerimise järele;  $DB = DB$ ); siit järgneb, et  $CB = FB$ ;

$\triangle CBA = \triangle FBA$  ( $CB = FB$  tõestuse järele;  $AB = AB$ ); siit järgneb, et  $AC = AF$ ;

$\triangle ADC = \triangle ADF$  ( $AC = AF$ ;  $CD = DF$ ;  $AD = AD$ ); siit järgneb, et  $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADF$ ; kuid võrdsed kõrvunurgad on täisnurgad, järjekult,  $CF \perp AD$ , mis oligi tarvis tõestada.

### III osa.

#### Rööbikud sirgjooned ja tasapinnad.

##### Rööbikud sirgjooned.

**15. Kahe sirgjoone suhteline asend (ruumis).**

Ruumis võivad kaks sirgjoont teineteise suhtes olla kolmes asendis:

- nad võivad lõikuda; siis asuvad nad ühel tasapinnal;
- nad võivad olla isekeskis rööbikud; ka siis asuvad nad ühel tasapinnal;

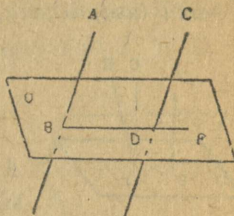
c) võivad mitte lõikuda ja olla mitte rööbikud; siis asub kumbki neist eri-tasapinnal.

**16. Lause.** *Kui tasapind lõikab üht rööbikut sirgjoont, siis lõikab ta ka teist (joonis 13).*

*Tingimus:*  $AB \parallel CD$  ja tasapind  $Q$  lõikab  $AB$  punktis  $B$ .

*Väide:* Tasapind  $Q$  lõikab ka  $CD$ .

Tõestuseks tõmbame läbi rööbikute sirgjoonte  $AB$  ja  $CD$  tasapinna, mis lõikaks tasapinda  $Q$  mööda sirgjoont  $BF$ . Sirgjoon  $BF$ , olles  $AB$  ja  $CD$ -ga ühel tasapinnal ja lõigates üht neist,  $AB$ -d, lõikab ka teist,  $CD$ -d, mingisuguses punktis  $D$ .



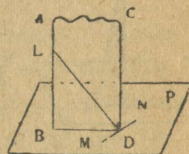
Joonis 13.

Punkt  $D$ , olles ühel ja samal ajal sirgjoone  $CD$  peal ja tasapinnal  $Q$ , on sirgjoone ja tasapinna ühine punkt. Teist ühist punkti ei või sel sirgjoonel ja tasapinnal olla, sellepärast et siis sirgjoon  $CD$ , mis asub tasapindadel  $ABDC$  ja  $Q$ , peaks ühtima sirgjoonega  $BD$  ja järjekult peaks lõikuma  $AB$ -ga, mis tingimusele vastu räägiks.

**17. Lause.** *Kui kahest rööpjoonest üks on risti tasapinnaga, siis on ka teine rööpjoon risti sama tasapinnaga (joonis 14).*

*Tingimus:*  $AB \parallel CD$ . *Väide:*  $CD \perp P$ .  
 $AB \perp P$ .

*Tõestus.* Kui tasapind  $P$  lõikab üht rööpjoont  $AB$ , siis lõikab ta ka teist rööpjoont  $CD$ . Tõmbame läbi rööbikute sirgjoonte  $AB$  ja  $CD$  tasapinna, mis lõikub tasapinnaga  $P$  mööda sirgjoont  $BD$ . Tasapinnal  $P$  tõmbame  $MN \perp BD$ ; punkti  $D$  ühendame mingisuguse punktiga  $L$ , mis sirgjoonel  $AB$  asub.



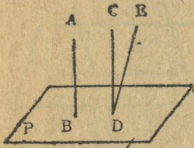
Joonis 14.

Sirgjoon  $MN$ , olles risti  $BD$ -ga, on risti ka  $DL$ -ga (v. nr. 14); sellepärast on  $MN$  risti tasapinnaga  $ACDB$ , sest et ta on risti kahe sirgjoone  $BD$  ja  $DL$ -ga, mis tema alusest tasapinnal  $ACDB$  läbi lähevad; järjekult on  $MN$  risti ka sirgjoonega  $CD$ .

Sirgjoon  $AB$ , mis on risti tasapinnaga  $P$ , on risti ka  $BD$ -ga; kuid  $CD \parallel AB$ , järjekult ka  $CD \perp BD$ .

Sirgjoon  $CD$ , olles tõestuse järele risti  $MN$ -ga ja  $BD$ -ga, on risti ka tasapinnaga  $P$ , mis oligi tarvis tõestada.

**18. Lause.** *Kaks sirgjoont, millest kumbki on risti ühe ja sama tasapinnaga, on rööbikud (joonis 15).*

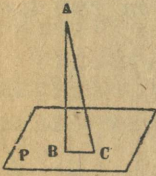


Joonis 15.

Tingimus:  $AB \perp P$ . Väide:  $AB \parallel CD$ .  
 $CD \perp P$ .

**Tõestus.** Oletame, et  $CD$  ei ole risti  $AB$ -ga; siis võib läbi punkti  $D$  tõmmata sirgjoone  $DE \parallel AB$ ; et oletuse järele on  $AB \perp P$ , siis ka  $DE \perp P$ , mille tagajärjena on asjaolu, et tasapinnale  $P$  võib ühest ja samast punktist  $D$  tõmmata kaks ristjoont, mis on võimatu. Järjekult,  $AB \parallel CD$ , mis oligi tarvis tõestada.

**19. Lause.** *Igast punktist  $A$ , mis asub väljaspool tasapinda  $P$ , võib sellele tasapinnale tõmmata ristjoone ja ainult ühe (joonis 15).*

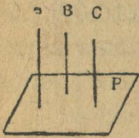


Joonis 15 a.

a) Mingisugusest tasapinnal  $P$  olevast punktist  $D$  (joonis 15) tõmbame sellele tasapinnale ristjoone  $CD$  (v. nr. 12) ja läbi punkti  $A$  tõmbame  $AB \parallel CD$ . Et  $CD \perp P$ , siis ka  $AB \perp P$ ; järjekult  $AB$  ongi otsitav ristjoon.

Olgu väljaspool tasapinda olevast punktist  $A$  (joonis 15 a) lastud tasapinnale  $F$  ristjoon  $AB$ ; tõestame, et ükski teine sirgjoon  $AC$  ei ole risti tasapinnaga  $P$ . Tõesti, kui  $AC \perp P$ , siis, ühendades punktid  $B$  ja  $C$ , saame, et punktist  $A$  on sirgjoonele  $BC$  tõmmatud kaks ristjoont, mis on võimatu.

**20. Lause.** *Kui kumbki kahest sirgjoonest on kolmandaga rööbik, siis on need kaks sirgjoont ka isekeskis rööbikud (joonis 16).*



Joonis 16.

Tingimus:  $A \parallel C$ . Väide:  $A \parallel B$ .  
 $B \parallel C$ .

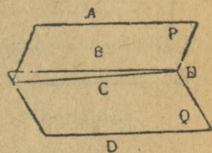
**Tõestus.** Tõmbame sirgjoonele  $C$  risti-  
tasapinna  $P$ .

Et  $C$  on risti  $P$ -ga, siis temaga rööbikud sirgjooned  $A$  ja  $B$  on ka risti tasapinnaga  $P$  (v. nr. 17).

Sirgjooned  $A$  ja  $B$ , millest kumbki on risti ühe ja sama tasapinnaga, on isekeskis rööbikud, mis oligi tarvis tõestada.

**21. Lause.** Kui kaks lõikuvat tasapinda  $P$  ja  $Q$  on tõmmatud läbi rööbikute sirgjoonte  $A$  ja  $D$ , siis on nende tasapindade lõikjoon  $C$  rööbik nende sirgjoontega (joonis 17).

Läbi punkti  $E$  tõmbame sirgjoonele  $A$  rööbiku sirgjoone  $B$ ; siis on sirgjoon  $B$  rööbik ka sirgjoonega  $D$  (v. nr. 20). Sirgjoon  $B$ , olles rööbik niihästi sirgjoonega  $A$  kui ka sirgjoonega  $D$ , peab ühel ja samal ajal asuma tasapinnal  $P$  kui ka tasapinnal  $Q$ , s. o. sirgjoon  $B$  peab ühtima nende tasapindade lõikjoonega  $C$ .

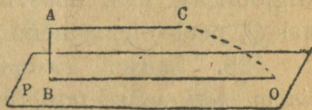


Joonis 17.

## Sirgjoon ja tema rööp-tasapind.

**22.** Nagu nr. 1 oli defineeritud, nimetatakse sirgjoont ja tasapinda paralleelseteks, kui neil ei ole mingit ühist punkti, s. o. kui nad ilmiski ei lõiku, ükskõik kui palju me neid ka ei pikendaks.

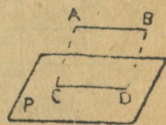
**Lause.** Kui sirgjoon  $AC$  ja tasapind  $P$  (joonis 18) on risti ühe ja sama sirgjoonega  $AB$ , siis on nad isekeskis rööbikud sellepärast, et kui nad lõikuksid, siis oleks neil mingisugune ühine punkt  $O$ , millest võiks  $AB$ -le tõmmata kaks ristjoont, mis on võimatu.



Joonis 18.

**23. Lause.** Kui sirgjoon  $AB$  on rööbik tasapinnal  $P$  asuva sirgjoonega  $CD$ , siis on ta rööbik ka tasapinnaga  $P$  (joonis 19).

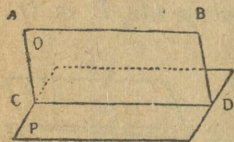
Tõesti, kui  $AB$  lõikuks tasapinnaga  $P$ , siis lõikuks ta ka sirgjoonega  $CD$ , sest et nad mõlemad asuvad ühel tasapinnal  $ABDC$ . Tingimuse järele on  $AB$  ja  $CD$  lõikumine



Joonis 19.

võimatu, järjelikult on ka  $AB$  ja tasapinna  $P$  lõikumine võimatu. Tähen­dab,  $AB \parallel P$ .

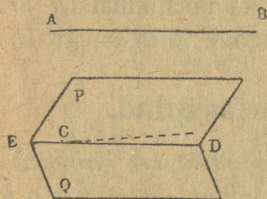
**24. Lause.** *Kui tasapind  $Q$  on tõmmatud läbi sirgjoone  $AB$ , mis on rööbik tasapinnaga  $P$ , siis lõikuvad tasapinnad  $Q$  ja  $P$  mööda sirgjoont  $CD$ , mis rööbik  $AB$ -ga (joonis 20).*



Joonis 20.

Kui  $AB$  ei oleks rööbik  $CD$ -ga, siis, olles temaga ühel tasapinnal, lõikuks ta  $CD$ -ga kui ka tasapinnaga  $P$ , mis aga võimatu, sest et oletuse järele on  $AB \parallel P$ .

**25. Lause.** *Kui sirgjoon  $AB$  on rööbik kahe lõikuva tasapinnaga  $P$  ja  $Q$ , siis on ta rööbik ka nende tasapindade lõikjoonega  $ED$  (joonis 21).*

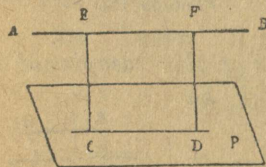


Joonis 21.

Kui läbi  $AB$  ja kahe tasapinna lõikjoone mingisuguse punkti  $C$  tõmbame tasapinna, siis lõikab ta tasapindu  $P$  ja  $Q$  mööda sirgjooni, mis on rööbikud  $AB$ -ga (v. nr. 24); läbi punkti  $C$  võib aga ühe sirgjoone tõmmata, mis on rööbik  $AB$ -ga; järjelikult peavad need kaks sirgjoont ühtima

sirgjooneks, mis, olles niihästi tasapinnal  $P$  kui ka tasapinnal  $Q$ , peab olema nende pindade lõikjooneks  $ED$ .

**26. Lause.** *Tasapinnaga  $P$  rööbiku sirgjoone  $AB$  punktid on kõik sellest tasapinnast ühekaugusel (joonis 22).*



Joonis 22.

Sirgjoone  $AB$  kahest mingisugusest punktist  $E$  ja  $F$  laseme tasapinnale  $P$  ristjooned  $EC$  ja  $FD$ .

$EC$  ja  $FD$ , olles risti ühe ja sama tasapinnaga  $P$ , on isekeskis rööbikud; järjelikult võib läbi nende sirgjoonte tasapinna tõmmata.

See tasapind lõikab tasapinda  $P$  mööda sirgjoont  $CD \parallel AB$  (v. nr. 23).

$EC = FD$ , kui rööbikute lõigud rööbikute sirgjoonte vahel, mis oligi tarvis tõestada.

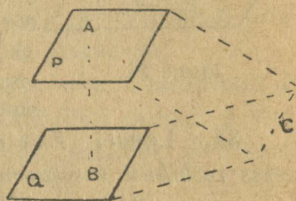
Siit järgneb, et *tasapinnaga rööbik sirgjoon on kõigel oma ulatusel tasapinnast ühekaugusel.*

## Rööbikud tasapinnad.

27. Nagu nr. 5. oli defineeritud, nimetatakse rööbikuiks niisuguseid tasapindu, millel pole mingit ühist punkti, s. o. mis ilmasti ei lõiku, kui palju me neid ka ei pikendaks.

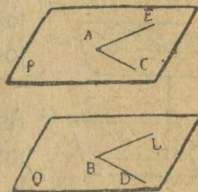
Järgnev lause tõestab rööbikute tasapindade olemasolu.

**Lause.** *Kui kumbki kahest tasapinnast on risti ühe ja sama sirgjoonega  $AB$ , siis on nad isekeskis rööbikud (joonis 23), sest et, kui neil oleks olnud ühine punkt  $C$ , siis sellest punktist oleks võinud antud sirgjoonele  $AB$  tõmmata kaks rist-tasapinda, mis on võimatu (v. nr. 11).*



Joonis 23.

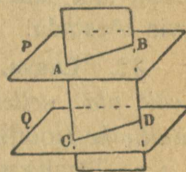
28. **Lause.** *Kaks tasapinda  $P$  ja  $Q$  on rööbikud, kui ühe tasapinna lõikuvad sirgjooned  $AE$  ja  $AC$  on vastavalt rööbikud teise tasapinna lõikuvate sirgjoontega  $BL$  ja  $BD$  (joonis 24)*



Joonis 24.

Kui tasapinnad  $P$  ja  $Q$ , mis on tõmmatud läbi rööbikute sirgjoonte  $AC$  ja  $BD$ , lõikuksid, siis oleks lõikjoon rööbik  $AC$ -ga (v. nr. 21); samuti oleks ka lõikjoon rööbik  $AE$ -ga, mis on võimatu.

29. **Lause.** *Kaks rööbikut tasapinda  $P$  ja  $Q$  lõikuvad kolmanda tasapinnaga rööbikuks sirgjooni  $AB$  ja  $CD$  mööda (joonis 25).*

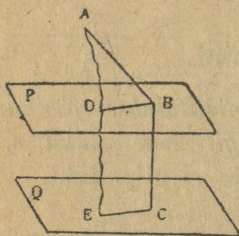


Joonis 25.

Tõesti, sirgjooned  $AB$  ja  $CD$  võivad

lõikuda ainult juhusel, kui lõikuvad tasapinnad  $P$  ja  $Q$ , mis on võimatu. Peale selle asuvad  $AB$  ja  $CD$  ühel tasapinnal  $ABDC$ ; järjekult on nad rööbikud.

**30. Lause.** Kui sirgjoon  $AB$  lõikab üht rööbikut tasapinda  $P$ , siis lõikab ta ka teist rööbikut tasapinda  $Q$  (joonis 26).

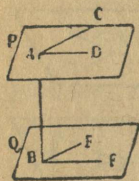


Joonis 26.

Olgu  $P \parallel Q$  ja lõigaku sirgjoon  $AB$  tasapinda  $P$  punktis  $B$ . Tõmbame punktist  $B$  tasapinnale  $Q$  ristjoone  $BC$ . Läbi lõikuvate sirgjoonte  $AB$  ja  $BC$  tõmbame tasapinna, mis lõikub tasapindadega  $P$  ja  $Q$  mööda rööbikuid sirgjooni  $DB$  ja  $EC$ . Et kolm sirgjoont  $AB$ ,  $DB$  ja  $EC$  asuvad ühel tasapinnal ja et sirgjoon  $AB$  lõikab üht sirgjoont  $DB$ , siis lõikab ta ka teist sirgjoont  $EC$ , mis rööbik  $DB$ -ga ja mis asub ühel ja samal tasapinnal  $DB$ -ga. Järjekult lõikab  $AB$  ka tasapinda  $Q$ , mis oligi tarvis tõestada.

**31. Lause.** Kui sirgjoon  $AB$  on risti ühega kahest isekeskis rööbikust tasapinnast  $P$ , siis on ta risti ka teise rööbiku tasapinnaga  $Q$  (joon. 27).

Olgu sirgjoon  $AB$  risti tasapinnaga  $P$ . Eelmise lause põhjal peab  $AB$  lõikama ka tasapinda  $Q$ . Tõmbame läbi  $AB$  kaks mingisugust tasapinda, mis lõikuvad tasapindadega  $P$  ja  $Q$  mööda rööbikuid sirgjooni, nõnda et  $AC \parallel BE$  ja  $AD \parallel BF$ .



Joonis 27.

Et tingimuse järele  $AB \perp P$ , siis on  $AB$  risti ka  $AC$ -ga ja järjekult risti ka  $BE$ -ga, mis on rööbik  $AC$ -ga. Samati on  $AB \perp AD$  ja järjekult ka  $AB \perp BF$ .

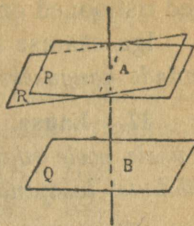
Sirgjoon  $AB$ , olles risti kahe sirgjoonega  $BE$  ja  $BF$ , mis tasapinnal  $Q$  sirgjoone  $AB$  alusest läbi lähevad, on risti ka tasapinnaga  $Q$ , mis oligi tarvis tõestada.

**32. Lause.** Läbi tasapinnast  $Q$  väljaspool antud punkti  $A$  võib alati sellele tasapinnale  $Q$  tõmmata rööbiku tasapinna ja ainult ühe (joonis 28).

a) Tõmbame punktist  $A$  tasapinnale  $Q$  ristjoone  $AB$  ja läbi sama punkti  $A$  tõmbame  $AB$ -le rist-tasapinna  $P$ . Et

tasapinnad  $P$  ja  $Q$  on risti ühe ja sama sirgjoonega  $AB$ , siis on nad isekeskis rööbikud.

b) Oletame, et läbi punkti  $A$  on tõmmatud veel teine tasapinnaga  $Q$  rööbik tasapind  $R$ ;  $AB$ , mis on risti tasapinnaga  $Q$ , oleks siis risti ka tasapinnaga  $R$ ; seega oleks  $AE$ -le läbi ühe ja sama punkti  $A$  tõmmatud kaks rist-tasapinda  $P$  ja  $R$ , mis on võimatu. Järjekult ei või läbi punkti  $A$  tasapinnale  $Q$  teist rööbikut tasapinda tõmmata.



Joonis 28.

**33. Järeldus.** Kui tasapind lõikab üht rööbikuist tasapinnadest, siis lõikab ta ka teist rööbikut tasapinda.

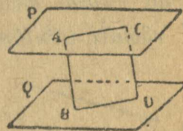
Kui tasapind  $R$  (joonis 28) lõikaks ainult tasapinda  $P$ , kuid ei lõikaks tasapinda  $Q$ , siis oleksid läbi punkti  $A$  tõmmatud kaks tasapinda  $P$  ja  $R$ , millest kumbki on rööbik tasapinnaga  $Q$ , mis on võimatu (v. nr. 32).

**34. Lause.** Kui kumbki kahest tasapinnast on rööbik kolmanda tasapinnaga, siis on nad rööbikud ka isekeskis.

Tõesti, neil kahel tasapinnal ei või olla ühtki ühist punkti, sest et vastasel korral oleks läbi ühe punkti tõmmatud kaks tasapinda, millest kumbki on rööbik kolmanda tasapinnaga.

**35. Lause.** Rööbikute tasapindade  $P$  ja  $Q$  vahel asuvate rööbikute sirgjoonte lõigud  $AB$  ja  $CD$  on võrdsed (joonis 29).

Tõmbame läbi rööbikute sirgjoonte  $AB$  ja  $CD$  tasapinna  $ACDB$ , mis lõikub tasapinnadega  $P$  ja  $Q$  rööbikuid sirgjooni  $AC$  ja  $BD$  mööda, siis  $AB = CD$  kui rööbikute sirgjoonte lõigud rööbikute sirgjoonte vahel.



Joonis 29.

**36. Järeldus.** Kaks rööbikut tasapinda on igas punktis üksteisest ühekaugusel, sest et, lastes ühe tasapinna mingi-

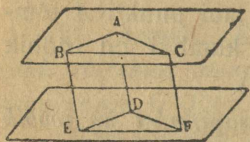
sugustest punktidest ristjooned teisele tasapinnale, leiame, et need ristjooned on rööbikud ja järjelikult ka isekeskis võrdsed.

Iga säärase ristjoone pikkust nimetatakse rööbikute tasapindade kauguseks.

**37. Lause.** *Kui kahe nurga küljed on vastavalt rööbikud ja ühele poole sihitud, siis on need nurgad võrdsed ja asuvad rööbikutel tasapindadel (joonis 30).*

*Tingimus:*  $BA \parallel ED$ . *Väide:*  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$ .  
 $BC \parallel EF$ .

*Tõestus.* Mõõdame antud nurkade külgedel tippudest alates võrdsed lõigud:  $BA = ED$  ja  $BC = EF$ . Ühendame  $A$  ja  $C$ ,  $D$  ja  $F$ ,  $B$  ja  $E$ ,  $A$  ja  $D$ ,  $C$  ja  $F$ . Siis:



Joonis 30.

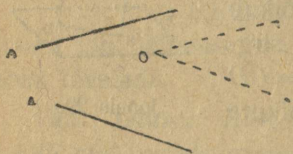
$BA \neq ED$ ; järjelikult:  $BE \neq AD$ ;  
 $BC \neq EF$ ; „  $BE \neq CF$ .

Viimasest järgneb, et  $AD \neq CF$ , millest omakord järgneb, et  $AC \neq DF$ .

Kolmnurgad  $ABC$  ja  $DEF$  on võrdsed, sest et kõik nende küljed on vastavalt võrdsed. Tähendab, ka  $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$ , mis oligi tarvis tõestada.

Tasapindade  $ABC$  ja  $DEF$  rööbikus oli tõestatud nr. 28-das.

**38. Definitsioon.** *Kahe lõikuva ehk mittelõikuva sirgjoone  $A$  ja  $A'$  nurgaks nimetatakse säärast nurka, mille sünnitavad ruumi mingisugusest punktist  $O$  antud sirgjoontele  $A$  ja  $A'$  rööbiti läbitõmmatud sirgjooned (joonis 31).*



Joonis 31.

Sel kombel konstrueeritud nurga suurus ei olene mitte punkti  $O$  seisangust. Tõesti, tõmmates kahest punktist  $O$  ja  $O'$  sirgjoontele  $A$  ja  $A'$  rööbikud sirgjooned, saame kaks nurka, millede küljed on vastavalt rööbikud ja mis sellepärast eelmise lause põhjal on võrdsed.

Kirjeldatavaid lõikuvaid või mittelõikuvaid sirgjooni nimetatakse *ristjoonteks* juhusel, kui nende vaheline nurk on täisnurk.

**39. Lause.** Kolme rööbiku tasapinna vahel olevad kahe sirgjoone lõigud on võrdelised ehk proportsionaalsed (joonis 32).

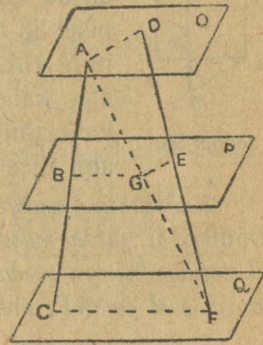
Tingimus:  $O \parallel P \parallel Q$ . Väide:  $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ .

*Tõestus:* Tõmbame sirgjoone  $AF$ , mis lõikab tasapinda  $P$  punktis  $G$ . Tasapind  $CAF$  lõikub tasapindadega  $P$  ja  $Q$  mööda rööbikuid sirgjooni  $BG$  ja  $CF$ ; järjestikult:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AG}{GF} \quad (1).$$

Tasapind  $AFD$  lõikub tasapindadega  $P$  ja  $Q$  mööda rööbikuid sirgjooni  $GE$  ja  $AD$ ; järjestikult:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{AG}{GF} \quad (2).$$



Joonis 32.

Et (1) ja (2) võrde (proportsiooni) paremad pooled on võrdsed, siis:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}, \text{ mis oligi tarvis tõestada.}$$

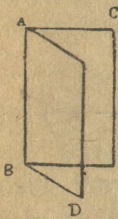
## IV osa.

### Kahetahused nurgad.

**40. Definiitsioon.** Kahetahuseks nurgaks nimetatakse kujundit, mis on moodustatud kahest lõikuvast tasapinnast

(ühes nende lõikuvate tasapindade vahel oleva ruumiosaga) (joonis 33).

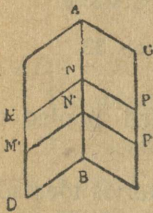
Sirgjoont  $AB$  nimetatakse kahetahuse nurga servaks, aga kahetahust nurka moodustavaid tasapindu nimetatakse kahetahuse nurga külgedeks ehk tahkudeks.



Joonis 33.

Kahetahust nurka märgitakse nelja tähe abil, kusjuures kaks *keskmist* tähte tähendavad tema serva, kuna aga kaks *äärmist* tähte tähendavad tahkusi. Nõnda tähendatakse näit. joonisel 33 olevat kahetahust nurka: kas kahetahune nurk  $CABD$  ehk kahetahune nurk  $DBAC$ . On aga kahetahuse nurga serva juures üks ainus kahetahune nurk, siis võib teda ka kahe tähe abil üles tähendada, näit. kahetahune nurk  $AB$ .

Kahetahuse nurga **lineaarnurgaks** nimetatakse  $\sphericalangle MNP$  (joonis 34), mida moodustavad kahetahuse nurga tahkudel selle kahetahuse nurga serva mingisugusest punktist tõmmatud ristjooned  $NM$  ja  $NP$ , ehk teiste sõnadega:



Joonis 34.

nurk, mis saadakse, kui kahetahune nurk lõigatakse läbi tasapinnaga risti kahetahuse nurga servaga.

Kahetahuse nurga lineaarnurga suurus oleneb ainult kahetahuse nurga suurusest, kuid mitte punkti  $N$  seisukohast serva peal, sest et kõik nurgad:  $\sphericalangle MNP$ ,  $\sphericalangle M'N'P'$  jne., mis on moodustatud seeläbi, et kahetahune nurk lõigati läbi tasapinnaga, mis risti servaga, on võrdsed kui rööbikute ja ühele poole sihitud külgedega nurgad.

Kahetahuseid nurki nimetatakse (võrdsete kujundite üldise definitsiooni põhjal) *ühtivateks*, kuid neid võib üksteise sisse mahutada nõnda, et nad ühtivad; vastasel korral nimetatakse väiksemaks seda kahetahust nurka, mis teisest kahetahusest nurgast ainult osa sünnitab.

Nagu planimeetria nurki (lineaarnurki), nõnda võib ka kahetahuseid nurki liita, lahutada, korrutada ja jagada.

Kahe tasapinna lõikumisel sünnib neli kahetahust nurka, mida samati kui planimeetriasi ki nimetatakse paarikaupa *kõrvu- ja tippnurkadeks*.

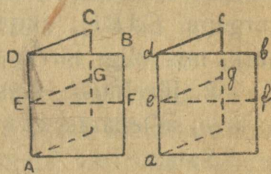
Kumbagi kahest võrdsest kahetahusest kõrvunurgast nimetatakse kahetahuseks *täisnurgaks*, kuna aga kahetahuseid täisnurki sünnitavaid tahke *rist-tahkudeks* nimetatakse.

**41. Lause.** *Kui kahetahused nurgad on ühtivad, siis on ühtivad ka nende lineaarnurgad (joonis 35).*

*Tingimus:* Kahetahune nurk  $CDAB =$  kahetahuse nurgaga  $cdab$ ;

*Väide:*  $\sphericalangle GEF = \sphericalangle gef$ .

*Tõestus.* Mahutame kahetahuse nurga  $cdab$  kahetahusesse nurka  $CDAB$  nõnda, et nende tahud ühtiksid ja et punkt  $e$  ühtiks punktiga  $E$ . Siis ühtib  $ef$   $EF$ -ga kui ühel ja samal tasapinnal ühele ja samale sirgjoonele ühest ja samast punktist tõmmatud ristjooned; samati ühtib  $eg$   $EG$ -ga; järjekult ühtib nurk  $gef$  nurgaga  $GEF$ .



Joonis 35.

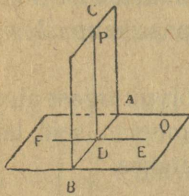
**42. Vastupidine lause.** *Kui lineaarnurgad on ühtivad, siis on ühtivad ka nende kahetahused nurgad (joonis 35).*

*Tingimus:*  $\sphericalangle GEF = \sphericalangle gef$ .

*Väide:* Kahetahune nurk  $CDAB =$  kahetahuse nurgaga  $cdab$ .

*Tõestus:* Mahutame kahetahuse nurga  $cdab$  kahetahusesse nurka  $CDAB$  nõnda, et ühtivad lineaarnurgad:  $\sphericalangle gef$  ja  $\sphericalangle GEF$  ühtiksid. Siis ühtib serv  $da$ , mis on risti tasapinnaga  $gef$ , servaga  $DA$ , mis on risti tasapinnaga  $GEF$  (sest et tasapinnale võib temal asuvast punktist ainult ühe ristjoone tõmmata); järjekult ühtib tasapind  $C$  tasapinnaga  $c$ , tasapind  $B$  tasapinnaga  $b$ , kuid selle tagajärjel ühtivad ka kahetahused nurgad.

**43. 1. järeldus.** Kui kahetahune nurk on täisnurk, siis on ka tema lineaarnurk täisnurk ja vastupidi (joonis 36).



Joonis 36.

Kui kahetahune nurk  $CABE$  on täisnurk, siis võrdub ta oma kahetahuse kõrvunurgaga  $CABF$ ; järjekult võrdub ka lineaarnurk  $\sphericalangle CDE$  oma kõrvunurgaga  $\sphericalangle CDF$ ; sellepärast on  $\sphericalangle CDE$  täisnurk, mis oligi tarvis tõestada.

Vastupidi, kui  $\sphericalangle CDE$  on täisnurk, siis võrdub ta oma kõrvunurgaga  $\sphericalangle CDF$ ; sellepärast võrdub ka kahetahune nurk  $CABE$  oma kõrvunurgaga  $CABF$ ; järjekult on kahetahune nurk  $CABE$  täisnurk, mis oligi tarvis tõestada.

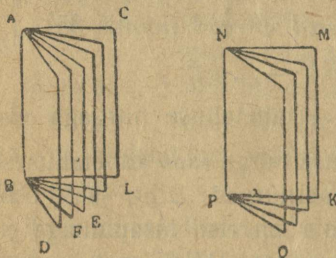
**2. järeldus.** Täisnurksed kahetahused nurgad on isekeskis võrdsed, sellepärast et nende vastavad lineaarnurgad on võrdsed.

Samati ka:

**3. järeldus.** Kahetahused tippnurgad on võrdsed.

**4. järeldus.** Kahetahused nurgad, millede tahud on vastavalt rööbikud ja ühele poole sihitud, on võrdsed.

**44. Lause.** Kahetahused nurgad suhtuvad nõnda kui nende lineaarnurgad (joonis 37).



Joonis 37.

Olgu kahetahuste nurkade  $CABD$  ja  $MNPQ$  lineaarnurgad  $\sphericalangle LBD$  ja  $\sphericalangle KPQ$  ühis-  
mõõdulised ja mahtugu nende  
ühine mõõt  $\sphericalangle FBD$  5 korda  
nurgasse  $\sphericalangle LBD$  ja 3 korda  
 $\sphericalangle KPQ$ ; siis:

$$\frac{\sphericalangle LBD}{\sphericalangle KPQ} = \frac{5}{3}$$

Läbi serva  $AB$  ja läbi  
lineaarnurka jaotavate sirgjoonte  
 $BF, BE \dots$  tõmbame tasapin-  
nad. Sama konstruktsiooni teeme ka kahetahuses nurgas  $MNPQ$ .  
Et jagamisel saadud lineaarnurgad on võrdsed, siis jagub ka

kahetahune nurk  $CABD$  5-eks võrdseks osaks ja kahetahune nurk  $MNPQ$  3-eks võrdseks osaks, nõnda et:

$$\frac{\text{kahetahune nurk } CABD}{\text{kahetahusesse nurka } MNPQ} = \frac{5}{3},$$

järjekult:  $\frac{\text{kahetahune nurk } CABD}{\text{kahetahusesse nurka } MNPQ} = \frac{\sphericalangle LBD}{\sphericalangle KPQ}$ , mis oligi tarvis tõestada.

Kui lineaarnurgad:  $\sphericalangle LBD$  ja  $\sphericalangle KPQ$  on ühismõõduta, siis tarvitatakse planimeetrias tarvitatud vastavat tõestusviisi.

**Järeldus.** Kui kahetahuse nurga mõõtüksuseks (mõõduks) võtta siisugune kahetahune nurk, mille lineaarnurk võrduks mingisuguse lineaarnurkade mõõtüksusega, siis on näha, et niihästi kahetahuse kui ka lineaarnurga mõõtarvuna esineb üks ja sama arv ehk, nagu öeldakse: kahetahune nurk mõõhtub oma lineaarnurgaga. Et seda tõestada, maksab ainult eelmises lauses teise kahetahuse nurga  $MNPQ$  asemel võtta kahetahune nurk, mis on tuntud mõõtüksusena.

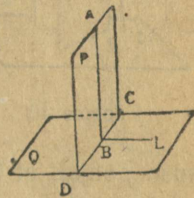
## Rist-tasapinnad.

**45. Lause.** Kui tasapind  $P$  on tõmmatud läbi sirgjoone  $AB$ , mis on risti tasapinnaga  $Q$ , siis on ka tasapind  $P$  risti tasapinnaga  $Q$ .

Tingimus:  $AB \perp Q$ . Väide:  $P \perp Q$ .

Tasapinnal  $Q$  tõmbame  $BL \perp DC$ . Et tingimuse järele on  $AB \perp Q$ , siis  $AB \perp DC$  ja  $AB \perp BL$ . Et  $AB \perp DC$  ja  $BL \perp DC$ , siis on  $\sphericalangle ABL$  kahetahuse nurga  $ACDL$  lineaarnurk; et aga  $AB \perp BL$ , siis on  $\sphericalangle ABL$  täisnurk; järjekult on ka temale vastav kahetahune nurk  $ACDL$  täisnurk; tähendab,  $P \perp Q$ , mis oligi tarvis tõestada.

**46. Lause.** Kui kaks tasapinda  $P$  ja  $Q$  (joonis 38) on isekeskis risti, siis on sirgjoon  $AB$ , mis asub ühes neist tasapin-



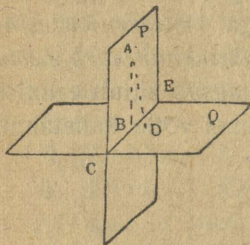
Joonis 38.

dadest ja mis on risti nende tasapindade lõikjoonega  $DC$ , risti ka teise tasapinnaga.

Tingimus:  $P \perp Q$ . Väide:  $AB \perp Q$ .  
 $AB \perp DC$ .

Tõestus. Tõmbame  $BL \perp DC$ ; siis on  $\sphericalangle ABL$  kahe tahuse nurga  $ACDL$  lineaarnurk. Et tingimuse põhjal on kahe tahune nurk  $ACDL$  täisnurk, siis on ka tema lineaarnurk  $ABL$  täisnurk; järjestikult on  $AB \perp BL$ . Nõnda on  $AB$ , mis on tingimuse järele risti  $DC$ -ga ja tõestuse järele risti  $BL$ -ga, risti tasapinnaga  $Q$ .

47. Lause. Kui kaks tasapinda  $P$  ja  $Q$  (joonis 39) on isekeskis risti ja läbi ühel tasapinnal asuva punkti  $A$  tõmbame teisele tasapinnale ristjoone, siis asub see ristjoon tervelt esimesel tasapinnal  $P$ .

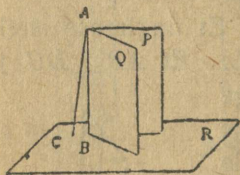


Joonis 39.

Ärgu asugu tasapinnale  $Q$  risti olev  $AD$  mitte tasapinnal  $P$ . Tõmbame siis tasapinnal  $P$  sirgjoone  $AB \perp CE$ , millest leiame eelmise lause põhjal, et  $AB \perp Q$ . Nõnda oleks punktist  $A$  tõmmatud tasapinnale  $Q$  kaks

ristjoont  $AD$  ja  $AB$ , mis on võimatu (v. nr. 19).

48. Lause. Kui kaks lõikuvat tasapinda on risti kolmanda tasapinnaga, siis on ka nende tasapindade lõikjoon risti kolmanda tasapinnaga (joonis 40).



Joonis 40.

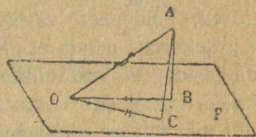
Tingimus:  $P \perp R$ . Väide:  $AB \perp R$ .  
 $Q \perp R$ .

Tõestus. Tõmbame mingisugusest ristjoonel  $AB$  asuvast punktist  $A$  ristjoone tasapinnale  $R$ , siis leiame eelmise lause põhjal, et see ristjoon peab asuma niihästi tasapinnal  $P$  kui ka tasapinnal  $Q$ , s. o. ta peab ühtima nende tasapindade lõikjoonega.

### Tasapinna ja sirgjoone nurk.

49. Lause. Nurk  $AOB$ , mida moodustavad sirgjoon  $OA$  ja tema projektsioon  $OB$  tasapinna  $P$  peale, on kõige väiksem neist nurkadest, mida moodustab sirgjoon  $OA$  nende sirgjoontega, mis tema alusest tasapinnal  $P$  on läbi tõmmatud (joonis 41).

Olgu  $OC$  mingisugune sirgjoon, mis tasapinnal  $P$  punktist  $O$  läbi on tõmmatud. Tõestame, et  $\sphericalangle AOB < \sphericalangle AOC$ . Mõõdame  $OC = OB$  ja ühendame  $C$  ja  $A$ . Kolmnurkades  $AOB$  ja  $AOC$  on külj  $OA$  ühine ja  $OB = OC$ , kuid kolmandad küljed ei ole võrdsed (ristjoon  $AB$  on vähem kui kaldjoon  $AC$ ); järjestikult on  $\sphericalangle AOB < \sphericalangle AOC$ .



Joonis 41.

Seda nurka  $AOB$ , mille moodustavad sirgjoon ja tema projektsioon tasapinna peale, nimetataksegi **tasapinna ja sirgjoone nurgaks**.

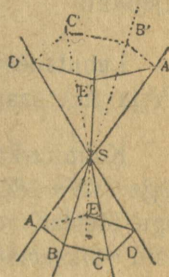
## V osa.

### Ruumisnurgad.

50. Definitsioon. Kujundit  $SABCDE$ , mille moodustavad mitu ühes ja samas punktis lõikuvat tasapinda (ühes nende tasapindadega piiratud ruumiosaga), nimetatakse **ruumisnurgaks** (joonis 42).

Punkti  $S$  nimetatakse ruumisnurga tipuks; tasapindade lõikjooni  $SA, SB, SC \dots$  — ruumisnurga servadeks ja nurki  $ASB, BSC \dots$ , mis asuvad järjest võetud servade vahel, ruumisnurga tahkudeks ehk **tasapinnakudeks**.

Igal ruumisnurgal peab olema vähemalt



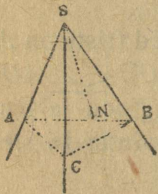
Joonis 42.

kolm tahku. Kui ruumisnurgal on ainult kolm tahku, siis nimetatakse teda *kolmetahuseks* nurgaks (joonis 43).

Ruumisnurka nimetatakse *kumeraks* ruumisnurgaks siis, kui ta asub igast oma kõigile poole pikendatud tahust ühel pool.

51. Kui pikendame ruumisnurga servi (joonis 42), siis saame teise ruumisnurga  $SA'B'C'D'E'$ , mille kõik tasanurgad ja kahetahused nurgad on ruumisnurga  $SABCDE$  tasanurkade ja kahetahuste nurkadega vastavalt võrdsed, kuid need vastavalt võrdsed elemendid on järjestatud vastupidi- ses järjekorras, nõnda et neid hülktahuseid nurki ei saa üksteise sisse mahutada nõnda, et nad ühtiksid. Sellepärast *ei ole need kaks ruumisnurka võrdsed*, ehk nende vastavad elemendid küll võrdsed on. Sääraseid ruumisnurki nimetatakse *sümmeetrilisteks*.

52. **Lause.** *Igas kolmetahuses nurgas on üks tasanurk vähem kui kahe teise tasanurga summa ja suurem kui kahe teise tasanurga vahe (joonis 43).*



Joonis 43.

Olgu  $\sphericalangle ASB$  kolmetahuse nurga  $SABC$  kõige suurem tasanurk. Tõestame, et

$$\sphericalangle ASB < \sphericalangle ASC + \sphericalangle CSB.$$

Asetame nurga  $ASB$  tasapinnale nurga  $ASN$ , mis võrdne on nurgaga  $ASC$ . Mõõdame  $SN = SC$ . Läbi punktide  $N$  ja  $C$  tõmbame mingisuguse tasapinna, mis lõikuks servadega  $SA$  ja  $SB$  mingisugustes punktides  $A$  ja  $B$ . Kolmnurgas  $ABC$  on

$$AN + NB < AC + CB \quad (1)$$

$\triangle ASN = \triangle ASC$  ( $SA = SA$ ,  $SN = SC$  ja  $\sphericalangle ASN = \sphericalangle ASC$ ); järjekult

$$AN = AC.$$

Lahutades võrratuse (1) kummastki osast võrdsed osad  $AN$  ja  $AC$ , saame

$$NB < CB.$$

Kolmnurkadel  $NSB$  ja  $CSB$  on kaks vastavalt võrdset külge ( $SN = SC$  ja  $SB = SB$ ), kuid kolmandad küljed pole, nagu tõestasime, mitte võrdsed ( $NB < CB$ ); järjekult asub vastu väiksemat külge ka väiksem nurk; tähendab

$$\sphericalangle NSB < \sphericalangle CSB.$$

Liites selle võrratuse võrdusega

$$\sphericalangle ASN = \sphericalangle ASC,$$

saame

$$\sphericalangle ASN + \sphericalangle NSB < \sphericalangle ASC + \sphericalangle CSB$$

ehk

$$\sphericalangle ASB < \sphericalangle ASC + \sphericalangle CSB,$$

mis oligi tarvis tõestada.

Lahutades selle võrratuse kummastki osast nurga  $ASC$ , saame

$$\sphericalangle ASB - \sphericalangle ASC < \sphericalangle CSB$$

ehk

$$\sphericalangle CSB > \sphericalangle ASB - \sphericalangle ASC,$$

mis oligi tarvis tõestada.

**53. Lause.** *Kumera ruumisnurga tasanurkade summa on väiksem kui 4d (joonis 44).*

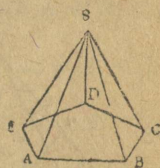
Tõmbame tasapinna, mis lõikuks ruumisnurga tahkudega. Lõikes saame hulknurga  $AEDCB$ . Silmas pidades tippude  $A, E, D, \dots$  juures olevaid kolmetahuseid nurki, võime kirjutada rea võrratusi:

$$\sphericalangle AED < \sphericalangle SEA + \sphericalangle SED;$$

$$\sphericalangle EDC < \sphericalangle SDE + \sphericalangle SDC;$$

$$\sphericalangle DCB < \sphericalangle SCD + \sphericalangle SCB;$$

.....



Joonis 44.

Liites need võrratused osade kaupa, saame:

$$\sphericalangle AED + \sphericalangle EDC + \sphericalangle DCB + \dots < \sphericalangle SEA + \sphericalangle SED + \sphericalangle SDE + \sphericalangle SDC + \sphericalangle SCD + \dots \quad (1)$$

Tähendame ruumisnurga tipu juures olevate tasanurkade summa  $S$ -ga ja nende arvu  $n$ -ga. Võrratuse (1) pahempoolne osa, sisaldades eneses hulknurga  $AEDCB$  kõigi sisenurkade summa, võrdub

$$2dn - 4d.$$

Sama võrratuse (1) parempoolne osa aga, sisaldades eneses kolmnurkade  $ASE$ ,  $ESD$ ,  $DSC$ , ... sisenurkade summa ilma tipu  $S$  juures asuvate samade kolmnurkade nurkadeta, võrdub

$$2dn - S.$$

Nõnda võime võrratuse (1) järgmiselt kirjutada:

$$2dn - 4d < 2dn - S,$$

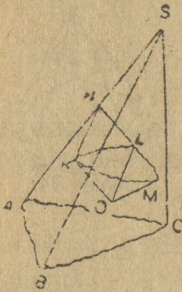
kust

$$-4d < -S, \text{ ehk } 4d > S, \text{ ehk } S < 4d,$$

mis oligi tarvis tõestada.

## Kolmetahuste nurkade ühtivus.

**54. Täiendusnurk.** Kui kolmetahuse nurga  $SABC$  sisevallas asuvast punktist  $O$  (joonis 45) tõmmata tema tahkudele ristjooned  $OK$ ,  $OL$  ja  $OM$ , siis moodustavad nad kolmetahuse nurga  $OKLM$ . Nurga  $S$  servad on samati nurga  $OKLM$  tahkudele ristjoonteks. Tõesti, tasapind  $KOL$ , minnes läbi sirgjoonte  $OK$  ja  $OL$ , mis on ristjoonteks tasapindadele  $ASB$  ja  $ASC$ , on ka nende tasapindadele rist-tasapinnaks, järjellikult ka nende tasapindade lõikjoonele  $AS$  rist-tasapinnaks. Nõnda on kolmetahuse nurga  $S$  serv  $AS$  risti kolmetahuse nurga  $O$  tahuga  $KOL$ ; samati võib tõestada, et ka teised kolmetahuse nurga  $S$  servad on risti kolmetahuse nurga  $O$  vastavate tahkudega. Kui ühe kolmetahuse nurga servad on risti teise kolmetahuse nurga vastavate tahkudega, siis nimetatakse niisuguseid kaht kolmetahust nurka täiendusnurkadeks.



Joonis 45.

**55.** Kerge on tõestada, et nurk  $KOL$  liidetuna kahetahuse nurga  $BASC$  lineaarnurgaga moodustab  $2d$ . Lõigaku tasapind  $KOL$  tasapindu  $ASB$  ja  $ASC$  mööda ristjooni  $NK$  ja  $NL$ ; et tasapind  $KOL$  on risti  $AS$ -ga, siis on  $\sphericalangle KNL$  kahetahuse nurga  $BASC$  lineaarnurk. Nelinurga  $OKNL$  nurgad  $OLN$  ja  $OKN$  on täisnurgad, sellepärast

$$\sphericalangle KOL + \sphericalangle KNL = 2d.$$

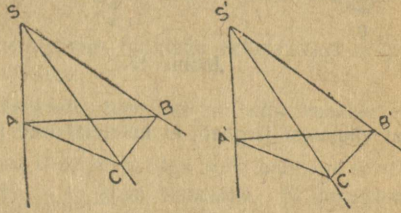
**56. 1. juh. Lause.** Kaks kolmetahust nurka on ühtivad, kui nende vastavalt ühtivate ja ühtemoodu asetatud kahe tasanurga vahel asuvad ühtivad kahetahused nurgad.

**57. 2. juhus. Lause.** Kaks kolmetahust nurka on ühtivad, kui nende vastavalt ühtivate ja ühtemoodu asetatud kahe kahetahuse nurga vahel asuvad ühtivad tasanurgad.

Kerge on aru saada, et säärased kolmetahused nurgad ühtivad.

**58. 3. juhus. Lause.** Kaks kolmetahust nurka on ühtivad, kui nende tasanurgad on ühtivad ja ühtemoodu asetatud.

Olgu kolmetahuste nurkade  $SABC$  ja  $S'A'B'C'$  (joonis 46) tasanurgad vastavalt ühtivad, s. o.  $\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'S'B'$ ,  $\sphericalangle ASC = \sphericalangle A'S'C'$  ja  $\sphericalangle BSC = \sphericalangle B'S'C'$ . Tõestame, et seesugusel juhusel on ühtivad ka kahetahused nurgad. Serva  $AS$  mööda möödame  $AS = A'S'$ . Läbi punktide  $A$  ja  $A'$  tõmbame servadele  $AS$  ja  $A'S'$  rist-tasapinnad  $ABC$  ja  $A'B'C'$ ; saame nurgad  $BAC$  ja  $B'A'C'$ , mis pole midagi muud kui kahetahuste nurkade  $CSAB$  ja  $C'S'A'B'$  lineaarnurgad.



Joonis 46.

Täisnurksete kolmnurkade  $ASB$  ja  $A'S'B'$  ühtivusest ( $AS = A'S'$  ja  $\sphericalangle ASB = \sphericalangle A'S'B'$ ) järeldeb, et  $AB = A'B'$  ja  $SB = S'B'$ ;

täisnurksete kolmnurkade  $ASC$  ja  $A'S'C'$  ühtivusest ( $AS = A'S'$  ja  $\sphericalangle ASC = \sphericalangle A'S'C'$ ) järeldeb, et  $AC = A'C'$  ja  $SC = S'C'$ ;

kolmnurkade  $CSB$  ja  $C'S'B'$  ühtivusest ( $SB = S'B'$ ,  $SC = S'C'$  ja  $\sphericalangle BSC = \sphericalangle B'S'C'$ ) järeldeb, et  $CB = C'B'$ ;

kolmnurkade  $ABC$  ja  $A'B'C'$  ühtivusest ( $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  ja  $CB = C'B'$ ) järeldeb, et  $\sphericalangle BAC = \sphericalangle B'A'C'$ .

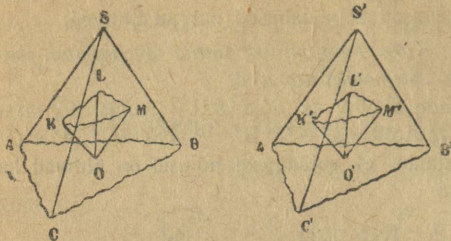
Lineaarnurkade  $BAC$  ja  $B'A'C'$  ühtivusest aga järgneb, et vastavad kahetahused nurgad  $CSAB$  ja  $C'S'A'B'$  on ühtivad<sup>1)</sup>.

Kolmetahused nurgad on ühtivad, kui nende vastavalt ühtivate ja ühtemoodu asetatud kahel lineaarnurga vahel asuvad ühtivad kahetahused nurgad.

**59. 4. juhus. Lause.** Kaks kolmetahust nurka  $SABC$  ja  $S'A'B'C'$  (joonis 47) on ühtivad, kui nende kahetahused nurgad on ühtivad ja ühtemoodu asetatud.

1) Kui servad  $SB$  ja  $SC$  on risti servaga  $AS$  ja  $S'B'$  ja  $S'C'$  on risti nurgaga  $A'S'$ , siis on tasanurgad  $BSC$  ja  $B'S'C'$  kahetahuste nurkade  $CASB$  ja  $C'A'S'B'$  lineaarnurgad ja nende kahetahuste nurkade ühtivus järgneb sellest, et nende vastavad lineaarnurgad on ühtivad.

Olgu  $OKLM$  ja  $O'K'L'M'$  kolmetahuste nurkade  $S$  ja  $S'$  täiendusnurgad. Kolmetahuste nurkade  $S$  ja  $S'$  kahetahuste nurkade ühtivusest järgneb



Joonis 47.

(nr. 55), et ka kolmetahuste nurkade  $O$  ja  $O'$  lineaarnurgad on ühtivad, järjekult ka kolmetahused nurgad  $O$  ja  $O'$  ise on ühtivad. Kolmetahuste nurkade  $O$  ja  $O'$  ühtivusest oleneb nende kolmetahuste nurkade kahetahuste nurkade ühtivus; viimaste ühtivusest aga oleneb kolmetahuste nurkade  $S$  ja  $S'$  lineaarnurkade ühtivus ja sel-

lest viimasest järgneb, et kolmetahused nurgad  $S$  ja  $S'$  on ühtivad.

## VI osa.

### Hulktahud.

**60. Definiitsioon.** *Keha, mis igast küljest on piiratud tasapindadega, nimetatakse hulktahuks.*

Hulknurki, mida moodustavad need tasapinnad teineteist lõigates, nimetatakse hulktahu *tahkudeks*, hulknurkade külgi nimetatakse hulktahu *servadeks*, hulknurkade tippe nimetatakse hulktahu *tippudeks*.

Sirgjoont, mis ühendab kaht mingisugust mitte ühel tahul asuvat hulktahu tippu, nimetatakse hulktahu *nurkjooneks* ehk *diagonaaliks*; tasapinda, mis kulgeb kaht mitte ühel tahul asuvat serva, nimetatakse *nurkjooneliseks* ehk *diagonaalseks tasapinnaks*.

Hulktahu nimetatakse *kumeraks*, kui ta asub ühel pool igast oma tahust.

Kõige väiksem tahkude arv hulktahus on *neli* tahku. Säärast hulktahu nimetatakse *nelitahuks* ehk *tetraedriks*.

Kuue tahuga hulktahku nimetatakse *kuustahuks* ehk *heksaedriks*, kaheksa tahuga — *kaheksatahuks* ehk *oktaaedriks*, kaheteistkümne tahuga — *kaheteisttahuks* ehk *dodekaaedriks*, kahekümne tahuga — *kaheskümmendtahuks* ehk *ikosaedriks*.

## Korrapäraseid hulktahud.

**61. Definiitsioon.** *Hulktahku*<sup>1)</sup>, mille kõik ruumisnurgad on ühtivad ja mille kõik tahud on ühtivad korrapäraseid hulknurgad, nimetatakse korrapäraseks.

Definiitsioonist järgneb, et korrapärase hulktahu kahetahused nurgad tasanurgad ja servad on isekesis võrdsed.

**62. Lause.** *Korrapärase hulktahu tahul ei või olla rohkem kui viis tippu.*

Oletame, et hulktahu tahul on 6 tippu ja olgu selle hulktahu ruumisnurgal kõige väiksem arv tasanurki, s. o. kolm tasanurka. Et korrapärase kuusnurga nurk võrdub  $\frac{4}{3}d$ , siis võrduks ruumisnurga tasanurkade summa  $4d$ -ga, mis on võimatu (nr. 53). Nõnda ei või korrapärasest kuusnurkadest korrapärase hulktahku kokku seada, seda enam ei või aga korrapärasest hulktahku kokku seada korrapärasest hulknurkadest, millel on rohkem kui kuus külge.

**63.** Nõnda võib korrapäraseid hulktahkusi moodustada ainult korrapärasest kolmnurkadest, viisnurkadest ja nelinurkadest ehk ruutudest.

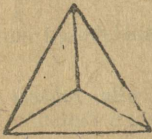
Ruumisnurgal, mille moodustavad korrapäraseid kolmnurgad, võib olla ainult 3, 4 või 5 tasanurka, sest et iga seesugune nurk võrdub  $\frac{2}{3}d$  ja kuue säärase nurga summa võrduks  $4d$ -ga, mis on võimatu. Sellepärast võib korrapärasest kolmnurkadest moodustada ainult järgmised kolm korrapärase hulktahku:

- a) korrapärase nelitahu ehk tetraedri (joonis 48);
- b) korrapärase kaheksatahu ehk oktaedri (joonis 49);
- c) korrapärase kaheskümmendtahu ehk ikosaedri (joonis 50).

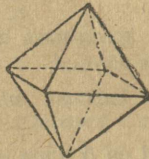
1) Meie vaatleme ainult kumeraid hulktahke.

Ruumisnurgal, mille moodustavad ruudud ja korrapärased viisnurgad, võib olla ainult kolm tasanurka, sest et vastasel korral võrduks tasanurkade summa kas  $4d$ -ga või oleks suurem kui  $4d$ . Sellepärast võib ruutudest ja korrapärastest viisnurkadest moodustada ainult järgmised kaks hulktahku:

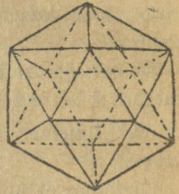
- d) korrapärase kuustahu ehk heksaeedri (joonis 51);  
 e) korrapärase kaksteisttahu ehk dodekaeedri (joonis 52).



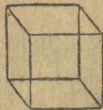
Joonis 48.



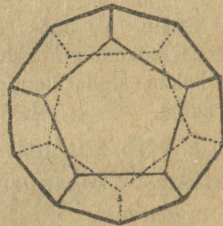
Joonis 49.



Joonis 50.



Joonis 51.



Joonis 52.

## Tahksammas ehk prisma.

**64. Definiitsioonid.** *Hulktahku, mille kaks tahku on võrdsed ja rööbikud hullknurgad, teised tahud aga — rööpkülilikud, nimetatakse tahksambaks ehk prismaks (joonis 53).*

Rööbikuid tahkusid  $ABCDE$  ja  $A'B'C'D'E'$  nimetatakse tahksamba põhjadeks; rööpkülilikuid  $AA'E'E$ ,  $EE'D'D$ , . . . — külgtahkudeks; ristjoont  $HH$ , mis ühe põhja mingisugusest punktist on tõmmatud teise põhja peale, nimetatakse tahksamba kõrguseks.

Selge on, et tahksamba küljeservad, kui rööpjoonte lõigud rööbikute tasapindade (põhjade) vahel, on isekeskis võrdsed.

Kui küljeservad on põhjadele ristjoonteks, siis nimetatakse seda tahksammast *püstprismaks* (joonis 54), vastasel korral aga *kaldprismaks* (joonis 53).

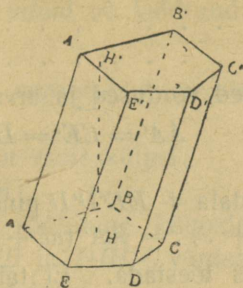
Püstprisma kõrguseks on küljeserv, kuna aga püstprisma külgtahud püstkülikud on.

**Püstprismat**, mille põhjadeks on korrapärased hulknurgad, nimetatakse **korrapäraseks**. Korrapärase prisma külgtahud on võrdsed püstkülikud.

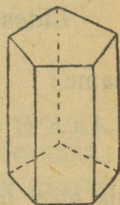
Tahksammast nimetatakse kolmnurkseks, nelinurkseks, viisnurkseks jne., selle järele, misugused hulknurgad selle tahksamba põhjadeks on.

**65. Lause.** Tahksamba külje-pindala võrdub küljeserva ja ristlõike ümbermõõdu korrutisega<sup>1)</sup>.

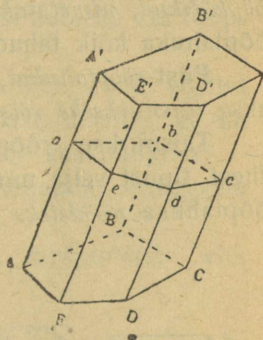
Olgu  $abcd$  tahksamba  $ABCDEA'B'C'D'E'$  ristlõige, s. o. lõige, mis on risti tahksamba küljeservadega (joonis 55). Külje-pindala on võrdne külgtahkude pindalade summaga. Et tahksamba külgtahud on rööpkülikud, siis:



Joonis 53.



Joonis 54.



Joonis 55.

1) Sõnade: „pindala“, „serva“ ja „ümbermõõdu“ all mõeldakse siin nende vastavaid mõõtarusid.

$$AA'E'E \text{ pindala} = AA' \cdot ae,$$

$$EE'D'D \text{ pindala} = EE' \cdot ed,$$

$$DD'C'C \text{ pindala} = DD' \cdot dc,$$

.....

Liites need võrdused ja arvesse võttes, et

$$AA' = EE' = DD' = \dots,$$

saame:

$$AA'E'E \text{ pindala} + EE'D'D \text{ pindala} + DD'C'C \text{ pindala} + \dots = AA' (ae + ed + dc + \dots),$$

mis oligi tarvis tõestada. Et tahksamba täis-pindala saada, tarvis tahksamba külje-pindalaga liita tema põhjade pindalad.

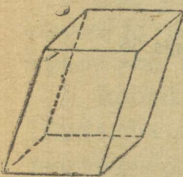
**Järeldus.** Püstprisma külje-pindala võrdub põhja ümbermõõdu ja kõrguse korrutisega.

## Rööptahukas.

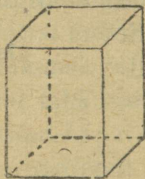
**66. Definitsioonid.** Tahksammast, mille põhjadeks on rööpkülilikud, nimetatakse rööptahukaks (joonis 56). Nõnda on rööptahuka kõik tahud rööpkülilikud.

Püst-rööptahukat, mille põhjadeks on püstkülilikud, nimetatakse täisnurkseks rööptahukaks (joonis 57).

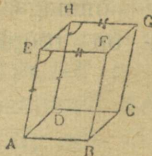
Täisnurkse rööptahuka kõik tahud on püstkülilikud. Ühest tipust välja mineva kolme serva pikkusi nimetatakse rööptahuka mõõdeteks ehk dimensioonideks.



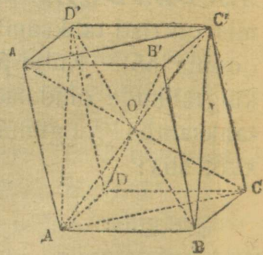
Joonis 56.



Joonis 57.



Joonis 58.



Joonis 59.

Kui täisnurkse rööptahuka kõik kolm mõõdet on võrdsed, siis nimetatakse seda rööptahukat *kuubiks*.

Rööptahukat, mille kõik tahud on kaldruudud (rombid), nimetatakse *romboeedriks*.

**67. Lause.** *Rööptahuka vastastahud on võrdsed ja rööbikud* (joonis 58).

$EA \# HD$ , kui rööpküliku vastasküljed;

$EF \# HG$  samal põhjusel;

$\sphericalangle AEF = \sphericalangle DHG$ , kui rööbikute külgedega nurgad; järjelikult on rööpkülikud  $AEFB$  ja  $DHGC$  võrdsed ja asuvad nr. 28 põhjal rööbikutel tasapindadel.

**68. Lause.** *Rööptahuka kõik neli nurkjoont lõikuvad ühes ja samas punktis, mis nad pooleks jagab.*

Võtame mingisugused kaks nurkjoont (diagonaali)  $AC'$  ja  $BD'$  (joonis 59) ja tõmbame sirgjooned  $AD'$  ja  $BC'$ .

Et  $AB \# DC$  ja  $D'C' \# DC$ , siis  $AB \# D'C'$ , järjelikult on kujund  $AD'C'B$  rööpkülik; sellepärast jaguvad rööptahuka nurkjooned  $AC'$  ja  $BD'$  lõikepunktis pooleks kui rööpküliku  $AD'C'B$  nurkjooned.

Võttes kolmanda nurkjoone  $A'C$  ja ühe enne võetud nurkjoone  $AC'$  ja korrates tehtud tõestust, leiame, et ka kolmas nurkjoon  $A'C$  kulgeb nurkjoone  $AC'$  keskpunkti  $O$ .

Samale otsusele jõuaksime ka neljanda nurkjoone  $B'D$  kohta.

Punkti  $O$  nimetatakse rööptahuka *keskpunktiks* ehk *kesktäpiks*.

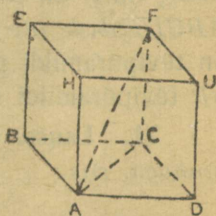
**69. Lause.** *Täisnurkse rööptahuka nurkjoone ruut võrdub rööptahuka kolme mõõte ruutude summaga* (joonis 60).

Täisnurksest kolmnurgast  $AFC$  leiame:

$$\overline{AF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{AC}^2 \quad (1);$$

täisnurksest kolmnurgast  $ACD$  leiame:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2;$$



Joonis 60.

pannes  $\overline{AC}^2$  asemele tema avalduse, saame:

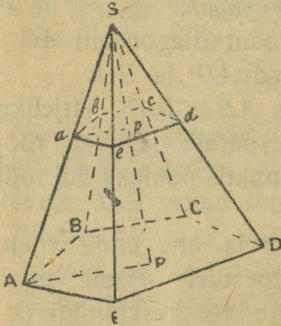
$$\overline{AF}^2 = \overline{FC}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2.$$

**Järeldus.** Täisnurkse rööptahuka nurkjooned on isekeskis võrdsed.

## Püramiid.

**70. Definiitsioonid.** Hulktahku, mille üks tahk on hulknurk, teised tahud aga kolmnurgad, milledel on ühine tipp, nimetatakse püramiidiks.

Hulktahk  $SABCDE$  (joonis 61) on püramiid. Punkt  $S$  on püramiidi tipp, hulknurk  $ABCDE$  — põhi, kolmnurgad  $SAB, SBC, \dots$  — külgtahud ja sirgjooned  $SA, SB, \dots$  — püramiidi küljeservad.



Joonis 61.

Püramiidi tipust selle püramiidi põhjale tõmmatud ristjoont nimetatakse püramiidi kõrguseks.

Püramiidi nimetatakse kolmnurkseks, nelinurkseks jne., selle järele, kas tema põhjaks on kolmnurk, nelinurk jne. Kolmnurkset püramiidi nimetatakse teise sõnaga nelitahuks ehk tetraeedriks<sup>1)</sup>. Tetraeedri iga külge võib põhjaks võtta

Kui püramiidi  $SABCDE$  (joonis 61) lõigata tasapinnaga  $abcde$ , mis on rööbik põhjaga, siis nimetatakse hulktahku  $ABCDEabcde$  tüvipüramiidiks. Hulknurgad  $ABCDE$  ja  $abcde$  on tüvipüramiidi põhjad, kuna aga nende kaugust üksteisest  $pP$  tüvipüramiidi kõrguseks nimetatakse.

**71. Lause.** Kui püramiidi lõigata põhjale rööbiku tasapinnaga, siis:

1) Tetraeedril on ruumis sama osa, mis kolmnurgal tasapinnal.

a) püramiidi küljeservad ja kõrgus lõikuvad võrdelisteks lõikudeks;

b) lõikes tekib põhjaga sarnane hulknurk;

c) põhja- ja lõike-pindalad suhtuvad nõnda, kui nende tipukauguste ruudud.

a) Olgu püramiid  $SABCDE$  (joonis 61) lõigatud põhjale rööbiku tasapinnaga  $abcde$ . Et rööp-tasapinnad lõikuvad kolmanda tasapinnaga rööpsirgeid mööda, siis on  $AB \parallel ab$ ,  $BC \parallel bc$ , ...  $AP \parallel ap$ . Kuid rööpsirged lõikavad nurga küljed võrdelisteks lõikudeks; järjelikult

$$\frac{Sa}{aA} = \frac{Sb}{bB} = \frac{Sc}{cC} = \dots = \frac{Sp}{pP},$$

mis oligi tarvis tõestada.

b)  $\triangle SAB \sim \triangle Sab$ ; järjelikult  $\frac{AB}{ab} = \frac{SB}{Sb}$ ,

$\triangle SBC \sim \triangle Sbc$ ; järjelikult  $\frac{BC}{bc} = \frac{SB}{Sb}$ ;

siit järgneb, et

$$\frac{AB}{ab} = \frac{BC}{bc}.$$

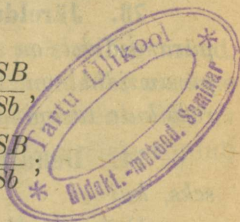
Samati võib tõestada, et ka teised hulknurkade  $ABCDE$  ja  $abcde$  küljed on võrdelised; peale selle on nende hulknurkade nurgad võrdsed, kui ühele poole sihitud rööbikute külgedega nurgad. Tähenab, hulknurgad  $ABCDE$  ja  $abcde$  on sarnased, sest et nende nurgad on võrdsed ja küljed võrdelised, kuid seda oligi tarvis tõestada.

c) Sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad kui vastavate külgede ruudud; sellepärast

$$\frac{ABCDE \text{ pindala}}{abcde \text{ pindalasse}} = \frac{\overline{AB}^2}{ab^2};$$

kuid  $\frac{AB}{ab} = \frac{SA}{Sa} = \frac{SP}{Sp}$ ,

sellepärast  $\frac{ABCDE \text{ pindala}}{abcde \text{ pindalasse}} = \frac{\overline{SP}^2}{Sp^2}$ .



**72. Lause.** Kui kaks ühekõrgust püramiidi on lõigatud tippudest  $h$  kaugusel põhjadele rööbikute tasapindadega, siis on saadud lõigete pindalad võrdelised põhja-pindaladega.

Olgu püramiidide kõrgus  $H$ , nende põhjad  $B$  ja  $B'$  ja põhjadele rööbikute lõigete pinnad  $b$  ja  $b'$ . Eelmise lause põhjal võime kirjutada:

$$\frac{b}{B} = \frac{h^2}{H^2} \text{ ja } \frac{b'}{B'} = \frac{h^2}{H^2};$$

siit järgneb:

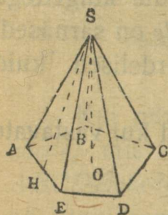
$$\frac{b}{B} = \frac{b'}{B'} \text{ ehk } \frac{b}{b'} = \frac{B}{B'}.$$

**73. Järeldus.** Kui  $B = B'$ , siis ka  $b = b'$ , s. o. kui püramiididel on võrdsed kõrgused ja võrdsed põhjad ja need püramiidid on lõigatud tipust ühekaugusel võetud põhjadele rööbikute tasapindadega, siis on saadud lõigete pindalad võrdsed.

**74. Definitsioonid.** Püramiidi nimetatakse korrapäraseks, kui

- 1) tema põhjaks on korrapärane hulknurk ja
- 2) tema kõrgus kulgeb aluse keskpunkti.

Korrapärase püramiidi kõik küljeservad on võrdsed kui kaldjooned, mis seisavad ristjoone alusest ühekaugusel. Kõik külgtahud on võrdsed võrdhaarsed kolmnurgad (nende kõik kolm külge on vastavalt ühtivad).



Joonis 62.

Kolmnurga kõrgust  $SH$  (joonis 62) nimetatakse korrapärase püramiidi **apoteemiks**.

Kui antud püramiid oli korrapärane, siis on ka tema tüvipüramiid korrapärane. Säärasel juhusel moodustab püramiidi iga külgtahk võrdkülgse trapetsi, mille kõrgust nimetatakse tüvipüramiidi apoteemiks.

**75. Lause.** Korrapärase püramiidi külje-pindala võrdub põhja ümbermõõdu ja apoteemi poole korrutisega.

Olgu antud korrapärane  $n$ -nurkne püramiid  $SABCDE$

(joonis 62); tema külje-pindala võrdub võrdsete võrdhaarsete kolmnurkade pindalade summaga, s. o.

$$S = ASE \text{ pindala} + ESD \text{ pindala} + DSC \text{ pindala} + \dots = \\ = n \cdot ASE \text{ pindala} = \frac{n \cdot AE \cdot SH}{2},$$

kus  $n \cdot AE$  on põhja ümbermõõt ja  $SH$  — püramiidi apoteem.

Et saada püramiidi täis-pindala, tarvis tema külje-pindalaga liita põhja-pindala.

**76. Lause.** *Korrapärase tüvipüramiidi külje-pindala võrdub alumise ja ülemise põhja ümbermõõdu summa ja apoteemi poole korrutisega.*

Korrapärase tüvipüramiidi külje-pindala pole midagi muud, kui ühtivate trapetsite pindalade summa. Tähendades alumise põhja külje  $A$ -ga, ülemise põhja külje  $a$ -ga, apoteemi  $\alpha$ -ga ja külgtahkude arvu  $n$ -ga, leiame, et iga trapetsi pindala võrdub

$$\frac{(A + a) \cdot \alpha}{2},$$

järjelikult tüvipüramiidi külje-pindala

$$S = \frac{n(A + a) \alpha}{2} = \frac{(nA + na) \alpha}{2},$$

kusjuures  $nA$  ja  $na$  on alumise ja ülemise põhja ümbermõõdud.

**77. Märkus.** Iga hulktahu võib lahutada püramiidideks, millede ühistipuks on hulktahu mingisugune üks tipp ja põhjadeks need hulktahu tahud, mis enestes seda tippu ei sisalda; ehk püramiidideks, millede põhjadeks on järgemööda kõik hulktahu tahud, aga nende ühistipuks on hulktahu mingisugune sisepunkt. Et iga püramiidi võib lahutada kolmnurkseteks püramiidideks (selleks tarvis põhi jagada kolmnurkadeks), siis: *iga hulktahu võib lahutada kolmnurkseteks püramiidideks.*

**78.** Kui tasapind jagab hulktahu osadeks, mis selle tasapinna suhtes on sümmeetrilised, siis nimetatakse seda tasapinda *sümmeetria-tasapinnaks* (nr. 7). Näituseks püstprisma küljeservi poolitav tasapind on tema sümmeetria-tasapind. Kui hulktahul on kaks *sümmeetria-tasapinda*, siis nimetatakse nende tasapindade lõikejoont *sümmeetriateljeks*.

Täisnurksel rööptahukal on kolm sümmeetria-tasapinda ja kolm sümmeetriatelge. Kuubil on 9 sümmeetria-tasapinda ja 13 sümmeetriatelge; korrapärasel  $n$ -nurksel tahksambal on  $n+1$  sümmeetria-tasapinda ja  $n+1$  sümmeetriatelge jne.

Sümmeetria paistab õige sagedasti silma looduses ja kunstisaadustes. Näit. on enamasti kõigi loomade kehad moodustatud kahest sümmeetrilisest osast; sedasama võib ütelda ka lillede kohta. Samuti moodustavad ka majad, sillad, mööbel jne. sümmeetriat tasapinna suhtes.

## Harjutused.

### Tõestada laused:

1. Iga sirgjoon, mis on tõmmatud läbi rööptahuka nurkjoonte lõikepunkti, jagub selles punktis pooleks.

2. Kui rööptahuka nurkjooned on võrdsed, siis on see rööptahukas täisnurkne.

3. Kui  $AB$  on kuubi nurkjoon, siis on tema kuue serva keskpunktid, kusjuures need servad ei lähe ei läbi  $A$  ega ka läbi  $B$ , korrapärase kuusnurga tippudeks. (*Seletus*: pöörata kuup  $180^\circ$  võrra tema ühe sümmeetria-telje suhtes, mis ühendab tema kahe serva keskpunktid.)

4. Kui nelitahku lõigata tasapinnaga rööbiti kahe vastasservaga, siis saame lõikes rööpküliku.

### Arvutusülesanded.

5. Leida kuubi serv, kui teada on üks tema nurkjoontest  $d$ .

6. Kuubi täis-pindala on  $2400 m^2$ . Leida kuubi nurkjoon.

7. Täisnurkse rööptahuka täis-pindala on  $352 m^2$ . Leida kuubi kolm mõõdet, mis isekeskis suhtuvad nõnda, kui  $1:2:3$ .

8. Ruutpõhjaga püst-rööptahuka täis-pindala on  $S$ , püst-rööptahuka kõrgus aga  $H$ . Leida aluse külg.

9. Kuidas suhtuvad kahe kuubi servad, kui nende kuupide täis-pindalad on vastavalt  $S_1$  ja  $S_2$ ?

10. Korrapärase kolmnurkse tahksamba küljeserv on  $h$ , põhja külg aga  $a$ . Leida tahksamba täis-pindala.

11. Leida korrapärase kuusnurkse tahksamba põhja külg, kui selle tahksamba täis-pindala on  $S$  ja kõrgus  $H$ .

12. Leida korrapärase kolmnurkse püramiidi täis-pindala, kui selle püramiidi kõrgus on  $h$  ja põhja külg  $a$ .

13. Leida korrapärase kolmnurkse püramiidi külje-pindala, kui selle püramiidi serv on  $l$  ja apoteem  $a$ .

14. Teades korrapärase kuusnurkse püramiidi kõrguse  $h$  ja küljeserva  $l$ , leida selle püramiidi põhja külg.

15. Leida korrapärase nelinurkse püramiidi kõrgus, kui selle püramiidi külje-pindala on  $S$  ja põhja külg  $a$ .

16. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi külje-pindala, kui teada on kõrgus  $H$  ja põhjade servad  $a$  ja  $b$ .

17. Tüvipüramiid on lõigatud tasapinnaga, mis on selle püramiidi põhjadega rööbiti ja mis jagab ta kõrguse pooleks. Leida lõike-pindala, kui tüvipüramiidi kõrgus on  $H$  ja tema põhjade pindalad on  $B$  ja  $b$ .

18. Leida püstprisma täis-pindala, kui teada on, et selle prisma põhi on korrapärane kolmnurk, mille külg on 3 m, ja prisma kõrgus on 12 m.

19. Täisnurkse rööptahuka täis-pindala on 1714 ruutjalga, aga rööptahuka põhja isesuuredused küljed on 25 j. ja 14 j. Leida külje-pindala ja küljeserv.

20. Ruutpõhjaga täisnurkne rööptahukas, mille kõrgus on  $h$ , on lõigatud tasapinnaga mööda kaht vastasküljeserva. Leida rööptahuka täis-pindala, kui teada on, et lõike-pindala on  $S$ .

21. Korrapärase kuusnurkse püramiidi põhja külg on  $a$  ja ta kõrgus on  $h$ . Leida püramiidi küljeserv, apoteem, külje-pindala ja täis-pindala.

22. Leida kolmnurkse püramiidi täis-pindala ja kõrgus, kui teada on, et püramiidi iga serv on  $a$ .

23. Korrapärane kuusnurkne püramiid, mille kõrgus on 25 sm ja põhja külg 5 sm, on lõigatud põhjaga rööbiti tasapinnaga. Leida lõikepinna kaugus püramiidi tipust, teades, et lõikepindala  $= \sqrt{3}$  sm<sup>2</sup>.

24. Ruutpõhjaga tüvipüramiidi kõrgus on  $h$ , alumise põhja külg  $a$ , ülemise põhja külg  $b$ . Leida tüvipüramiidi täis-pindala.

25. Tüvipüramiidi kõrgus on 6, põhjade pindalad aga 18 ja 8. Tüvipüramiidi lõikab tasapind, mis alustega rööbiti ja mis jagab tüvipüramiidi kõrguse pooleks. Leida lõike-pindala.

## VII osa.

### Tahksamba ja püramiidi ruumala.

79. Keha ruumala peale vaatame meie kui algmõiste peale.<sup>1)</sup>

1) Keha ruumala mõiste uurimist vaata *Leçons de Géométrie élémentaire par J. Hadamard, II, note F.*

Ruumala *mõõta* tähendab *leida* selle ja mõõtüksuseks võetud ruumala *suhe*.

Ruumala mõõtüksuseks võetakse niisuguse kuubi ruumala, mille serv võrdub mingisuguse pikkuse mõõtüksusega.

Kuigi kaks keha ei ühti, kui neil aga on võrdsed ruumalad, siis nimetatakse neid *võrdseteks*.

**80. Lause.** Iga kaldprisma on võrdne niisuguse püstprismaga, mille põhjaks on kaldprisma ristlõige ja kõrguseks — kaldprisma küljeserv.

Kaldprisma  $ABCDEA'B'C'D'E'$  (joonis 63) serva  $AA'$  ja selle serva pikenduse peal võtame kaks punkti  $M'$  ja  $M$  nõnda, et  $MM' = AA'$ , ja läbi nende punktide tõmbame prisma küljeservadele rist-tasapinnad. Siis saame püstprisma  $MNPQRM'N'P'Q'R'$ <sup>1)</sup>, mille kõrgus  $MM'$  võrdub kaldprisma küljeservaga ja mille põhi  $MNPQR$  on kaldprisma ristlõige.

Et  $EE' = AA'$  ja  $RR' = MM'$  ja konstruktsiooni järele  $MM' = AA'$ , siis  $EE' = RR'$ . Lahutades selle võrduse kummastki osast ühe ja sama lõigu  $ER'$ , saame

$$EE' - ER' = RR' - ER'$$

ehk

$$E'R' = ER;$$

samati tõestame, et  $D'Q' = DQ$ ,  $C'P' = CP$  jne.

Mahutame nüüd hulktahu  $MNPQRABCDE$  hulktahu  $M'N'P'Q'R'A'B'C'D'E'$  sisse nõnda, et ühtiksid võrdsed hulknurgad  $MNPQR$  ja  $M'N'P'Q'R'$ ; siis on servad  $MA$ ,  $RE$ ,

1) Tõesti,  $MR \parallel M'R'$  kui sirgjooned, mis on saadud rööbikute tasapindade  $MNPQR$  ja  $M'N'P'Q'R'$  lõikamisel kolmanda tasapinnaga  $MA'E'R$ ; samati ka  $RQ \parallel R'Q'$ ;  $QP \parallel Q'P'$  jne. Sellepärast on hulknurgad  $MNPQR$  ja  $M'N'P'Q'R'$  võrdsed kui vastavalt võrdsete nurkadega (nurkade küljed on vastavalt rööbiti) ja võrdsete külgedega (rööbikute lõigud rööbikute vahel on võrdsed) hulknurgad; ka asuvad need võrdsed hulknurgad rööbikutel tasapindadel.

$QD \dots$  risti tasapinnaga  $MNPQR$ , ja nad ühtivad vastavalt enestega võrdsete servadega  $M'A'$ ,  $R'E'$ ,  $Q'D' \dots$ , mis omakord risti on tasapinnaga  $M'N'P'Q'R'$ ; sellepärast ühtivad need hulktahud.

Lahutades hulktahust  $MNPQRA'B'C'D'E'$  hulktahu  $MNPQRABCDE$  saame kaldprisma, kuid lahutades temaga võrdse hulktahu  $M'N'P'Q'R'A'B'C'D'E'$  saame püstprisma; järjekult on püst- ja kaldprisma võrdsed, mis oligi tarvis tõestada.

**81. Lause.** *Kaks püstprismat on võrdsed, kui neil on võrdsed alused ja võrdsed kõrgused.*

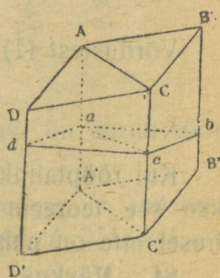
Mahutame ühe prisma teise sisse nõnda, et nende võrdsed põhjad ühtiksid; siis lähevad ühe prisma küljeservad, mis on risti selle prisma põhjaga, mööda teise prisma küljeservi, mis omakord on risti teise prisma põhjaga; et ka prismade küljeservad on isekeskis võrdsed, siis ühtivad ka prismade ülemised põhjad; järjekult prismad ühtivad, s. o. nad on võrdsed.

**82. Lause.** *Diagonaalne tasapind jagab iga rööptahuka kaheks võrdseks kolmnurkse prismaks.*

Tõmbame rööptahukale  $ABCD A'B'C'D'$ -le diagonaalse tasapinna  $ACC'A'$  ja ristlõike  $abcd$ .

Et rööptahuka vastastahud on isekeskis rööbikud (nr. 67), siis lõikuvad nad tasapinnaga  $abcd$  rööbikuid sirgjooni mööda (nr. 29); sellepärast on  $ab \parallel dc$  ja  $ad \parallel bc$  ja kujund  $abcd$  on rööpkülik; järjekult  $\triangle abc = \triangle adc$

Kujutame enestele ette kaks säärast püstprismat, millede põhjadeks oleksid kolmnurgad  $abc$  ja  $adc$ , aga kõrguseks — rööptahuka küljeserv  $DD'$ . Siis oleksid need kaks prismat isekeskis võrdsed, sest et nende alused ühtivad ja nende kõrgused on võrdsed; kuid  $abc$  põhjaga prisma on võrdne kaldprismaga  $ABCA'B'C'$  (nr. 80) ja  $adc$  põhjaga prisma on võrdne kaldprismaga  $ADCA'D'C'$ ; järje-

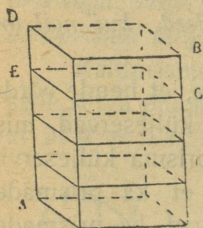


Joonis 64.

likult on võrdsed ka kolmetahused prismad  $ABCA'B'C'$  ja  $ADCA'D'C'$ , mis oligi tarvis tõestada.

**83. 1. abilause.** *Kahe võrdsete põhjadega täisnurkse rööptahuka ruumalad suhtuvad nõnda kui nende kõrgused (joonis 65).*

Mahutame rööptahuka  $AC$  rööptahuka  $AB$  sisse. (See on võimalik alati, kui rööptahukad on täisnurksed ja nende alused on ühtivad.) Olgu rööptahukate kõrgused  $AD$  ja  $AE$  ühismõõdulised ja mahtugu nende ühine mõõt  $DE$  kõrgusesse  $AD$  4 korda ja kõrgusesse  $AE$  3 korda; siis



Joonis 65.

$$\frac{AD}{AE} = \frac{4}{3} \quad (1).$$

Läbi kõrguste jagamispunktide tõmbame tasapinnad, mis on rööbiti rööptahuka põhjaga; siis jagub rööptahukas  $AB$  4-jaks ja rööptahukas  $AC$  3-ks võrdseks osaks (väikesed rööptahukad on võrdsed kui võrdsete alustega ja võrdsete kõrgustega rööptahukad, nagu see on nr. 81 tõestatud); sellepärast

$$\frac{AB \text{ ruumala}}{AC \text{ ruumalasse}} = \frac{4}{3} \quad (2).$$

Võrdustest (1) ja (2) leiame:

$$\frac{AB \text{ ruumala}}{AC \text{ ruumalasse}} = \frac{AD}{AE}.$$

Kui rööptahukate kõrgused on ühismõõduta, siis tõestatakse see teorem nõnda, nagu see planimeetrias vastaval juhusel ette on nähtud.

**84. Märkus.** Et täisnurkse rööptahuka iga tahku võib selle rööptahuka põhjaks võtta ja et kahel võrdsete põhjadega täisnurksel rööptahukal on kaks võrdset mõõdet (dimensiooni), siis võib eelmise lause täisnurksete rööptahukate kohta järgmiselt sõnastada:

Kui kahel täisnurksel rööptahukal on kaks võrdset mõõdet, siis suhtuvad need rööptahukad nõnda kui nende kolmandad mõõted.

**85. 2. abilause.** Võrdsete kõrgustega täisnurksed rööptahukad suhtuvad nõnda kui nende põhjade pindalad.

Olgu  $h$ ,  $a$  ja  $b$  rööptahuka  $P$  mõõted ja  $h$ ,  $a'$  ja  $b'$  rööptahuka  $P'$  mõõted ( $h$  on nende ühine kõrgus).

Kujutame enestele ette kolmanda rööptahuka  $Q$ , mille kõrgus oleks samati  $h$ , kuid ülejäänud kaks mõõdet oleksid  $a$  ja  $b'$ .

Siis suhtuvad rööptahukate  $P$  ja  $Q$  ruumalad nõnda kui nende kolmandad mõõted  $b$  ja  $b'$ , sest et nende rööptahukate kaks mõõdet on võrdsed, s. o.:

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{b'} \quad (1).$$

Samati suhtuvad rööptahukate  $Q$  ja  $P'$  ruumalad nõnda kui nende kolmandad mõõted  $a$  ja  $a'$ , sest et ka nende rööptahukate kaks ülejäänud mõõdet  $h$  ja  $b'$  on võrdsed; järjekult:

$$\frac{Q}{P'} = \frac{a}{a'} \quad (2).$$

Korrutades<sup>1)</sup> võrded (proportsioonid) (1) ja (2) ositi, saame:

$$\frac{P}{P'} = \frac{ab}{a'b'},$$

mis oligi tarvis tõestada, sest et  $ab$  ja  $a'b'$  on antud rööptahukate põhja-pindalad.

**86. 3. abilause.** Isesuuruste põhjadega ja iseruuruste kõrgustega täisnurksete rööptahukate ruumalad suhtuvad nõnda

1) Korrutamisel ei vaata meie võrdustes (1) ja (2) esinevate tähtede peale mitte kui vastavate suuruste eneste peale, vaid kui nende suuruste mõõtarmude peale; sellepärast on meil õigus ka korrutamisel saadud wurdud lühendada.

kui vastavate rööptahukate põhja-pindalade ja kõrguste kor-  
rutised<sup>1)</sup>.

Olgu rööptahukate  $P$  ja  $p$  põhjad  $Q$  ja  $q$  ja kõrgused  $H$  ja  $h$ .

Kujutame enestele ette kolmanda rööptahuka  $R$ , mille põhja-pindala oleks  $Q$  ja kõrgus  $h$ .

Siis suhtuvad rööptahukate  $P$  ja  $R$  ruumalad nõnda kui rööptahukate kõrgused, sest et neil rööptahukatel on võrdsed alused:

$$\frac{P}{R} = \frac{H}{h} \quad (1),$$

kuid rööptahukate  $R$  ja  $p$  ruumalad suhtuvad nõnda kui nende rööptahukate põhja-pindalad, sest et nende rööptahukate kõrgused on võrdsed:

$$\frac{R}{p} = \frac{Q}{q} \quad (2).$$

Korrutades võrded (1) ja (2) ositi, saame:

$$\frac{P}{p} = \frac{Q \cdot H}{q \cdot h}.$$

**87. Lause.** Täisnurkse rööptahuka ruumala võrdub tema põhja-pindala ja kõrguse korrutisega, ehk täpsamalt:

täisnurkse rööptahuka ruumala **mõõtari**v võrdub selle rööptahuka põhja-pindala ja kõrguse **mõõtari**vude korrutisega.

Kui eelmise nr. võrduses:

$$\frac{P}{p} = \frac{Q \cdot H}{q \cdot h} = \frac{Q}{q} \cdot \frac{H}{h} \quad (1)$$

oletada, et rööptahukas  $p$  on ruumi mõõtüksus, s. o. kuup, mille serv võrdub pikkuse mingi mõõtüksusega, siis  $q = 1$  ruut-mõõtüksusega;  $h = 1$  pikkus-mõõtüksusega, suhe  $\frac{P}{p}$  oleks

1) Sõnade: „pindala“ ja „kõrgus“ all mõeldakse siin nende vastavaid mõõtari

rööptahuka  $P$  mõõtarv, suhe  $\frac{Q}{q}$  — põhja  $Q$  mõõtarv ja suhe  $\frac{H}{h}$  — kõrguse  $H$  mõõtarv; seega on teoreem tõestatud.

Vaadeldes sümbolite  $P$ ,  $Q$  ja  $H$  all mitte suurusi endid, vaid nende mõõtarvusi, võime võrduse (1) järgmiselt kirjutada

$$P = Q \cdot H.$$

**1. järeldus.** Tähendades täisnurkse rööptahuka kolm mõõdet tähtedega  $a$ ,  $b$  ja  $c$  ja rööptahuka ruumala sümboliga  $V$ , võime kirjutada

$$V = abc,$$

kus  $ab$  on põhja-pindala ja  $c$  — kõrgus. Nõnda:

*täisnurkse rööptahuka ruumala võrdub tema kolme mõõde korrutisega.*

**2. järeldus.** *Kuubi ruumala võrdub tema serva kuubiga.* Sellepärast nimetataksegi arvu kolmandat astet teise sõnaga tema *kuubiks*<sup>1)</sup>.

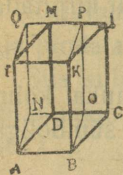
**88. Lause.** *Püst-rööptahuka ruumala võrdub põhja-pindala ja kõrguse korrutisega.*

Olgu  $ADCBIMLK$  (joonis 66) püst-rööptahukas (mitte aga täisnurkne, sest  $ABCD$  on rööpkülik). Tõmbame servadest  $IA$  ja  $KB$  tasapinnad, mis oleksid risti  $AB$ -ga. Siis saame täisnurkse rööptahuka  $ANOBIQPK$ .

1) Vanal ajal oli tähtsaks ülesandeks *kuubi kahendamine*, mis selles seis, et joonistada *kuupi*, mille ruumala antud kuubi ruumalast kaks korda suurem. Eratosthenes'e arvamise järele olevat see ülesanne omale alguse saanud järgniselt. Et katkule, mis Deelose saare elanikka hävitas, piiri panna, käskis oraakel kuubikujulise altari *kahendada*, see on, kaks korda suurendada. Järelemõtlemata töölisid ehitasid lihtsalt kuubi, mille mõõted endise kuupaltari mõõdetest kaks korda suuremad olid. Katk aga ei lõppenud. Siis alles saadi aru, et ehitus oli valesti tehtud. On tõestatud, et seda ülesannet ei või geomeetriliselt konstrueerida. Mis aga puutub selle ülesande ligikaudsesse lahendusesse, siis ei sünnita see raskusi. Ja tõesti, tähendades  $a$  ja  $x$  kaudu antud ja otsitava kuubi servad, saame  $x^3 = 2a^3$ , kust

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

$ADCB$  põhjaga püst-rööptahukat  $ADCBIMLK$  vaadeldes kui  $AIMD$  põhjaga kaldprisma, selgub (nr. 80), et ta on sama suur kui püstprisma, mille põhjaks on ristlõige  $AIQN$ , kõrguseks aga kaldprisma külje serv  $AB$ , s. o. et ta on sama suur kui täisnurkne rööptahukas  $ANOBIQPK$ . Et aga täisnurkse rööptahuka  $ANOBIQPK$  ruumala võrdub tema kolme mõõte korrutisega, s. o.



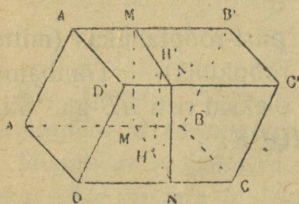
Joonis 66.

$$AB \cdot AN \cdot AI,$$

siis võrdub ka rööptahuka  $ADCBIMLK$  ruumala sama korrutisega. Et aga  $AB \cdot AN$  on rööpküliku  $ADCB$  pindala, siis võrdub püst-rööptahuka ruumala ( $ADCB$  pindala)  $\cdot AI$ .

**89. Lause.** Iga rööptahuka ruumala võrdub tema põhjapindala ja kõrguse korrutisega.

Olgu  $ABCD A'B'C'D'$  (joonis 67) kald-rööptahukas. Ta on sama suur (nr. 80) kui püst-rööptahukas, mille põhjaks on ristlõige  $MM'N'N$ , kõrguseks aga — serv  $DC$ . Et aga püst-rööptahuka ruumala võrdub põhjapindala ja kõrguse korrutisega:



Joonis 68.

$$(MM'N'N \text{ pindala}) \cdot DC,$$

siis järjekult võrdub ka rööptahuka  $ABCD A'B'C'D'$  ruumala selle korrutisega. Märkides rööpküliku  $MM'N'N$  kõrgust  $H'H$ -ga saame:

$$MM'N'N \text{ pindala} = MN \cdot H'H.$$

Järjekult võrdub rööptahuka ruumala korrutisega:

$$MN \cdot H'H \cdot DC.$$

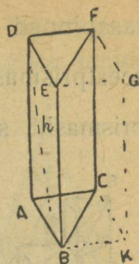
Et aga korrutis  $MN \cdot DC$  on rööptahuka põhja  $ABCD$  pindala,  $H'H$  on aga sama rööptahuka<sup>1)</sup> kõrgus, siis järjekult võrdub rööptahuka ruumala korrutisega:

$$(ABCD \text{ pindala}) \cdot H'H.$$

1) Sirgjoon  $H'H$ , olles risti kahe vastastiku rist-tasapinna lõikjoonega ning asudes ühes neist tasapinnadest, on risti ka teise tasapinnaga.

**90. Lause.** Iga prisma ehk tahksamba ruumala võrdub tema põhja-pindala ja kõrguse korrutisega.

1. Selleks vaatame enne kolmnurkset prisma  $ABCDEF$  (joonis 68). Täiendame teda kuni rööptahukani  $ACKBDFGE$ . Et aga rööptahukas jaguneb diagonaalse tasapinnaga kaheks võrdseks kolmnurkseks prismaks, siis

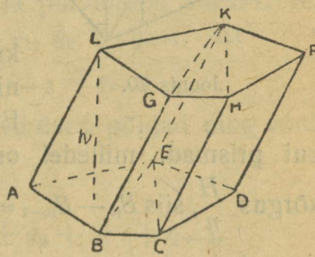


Joonis 68.

$$\begin{aligned} ABCDEF \text{ ruumala} &= \frac{ACKBDFGE \text{ ruumalaga}}{2} = \\ &= \frac{(ACKB \text{ pindala}) \cdot h}{2} = \frac{ACKB \text{ pindala} \cdot h}{2} = (ACB \text{ pindala}) \cdot h. \end{aligned}$$

2. Kui prisma on hulknurkne, siis võib teda diagonaalsete tasapindadega jagada kolmnurkseteks prismadeks, millel on antud prismaga võrdsed kõrgused (joonis 69).

Märgime saadud prismade põhjad  $b, b_1, b_2$ -ga ja iga prisma kõrguse  $h$ -ga. Hulknurkse prisma ruumala võrdub kolmnurksete prismade ruumalade summaga:



Joonis 69.

$$bh + b_1h + b_2h = (b + b_1 + b_2)h = (AEDCB \text{ pindala}) \cdot h.$$

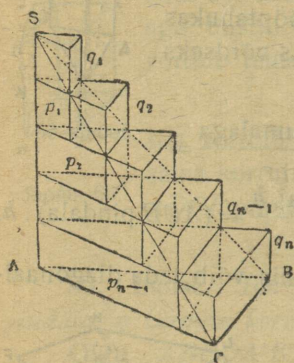
**Järeldus.** Kaks prisma, millel on võrdsed põhjad ja võrdsed kõrgused, on võrdsed.

## Püramiidi ruumala.

**91. Lause.** Kolmnurkse püramiidi ruumala on sise- või seestprismade ruumalade summa piir, kui prismade arv lõpmata kasvab.

Jagame püramiidi  $SABC$  (joonis 70) kõrguse  $H$   $n$  võrdsesse ossa ja jagamispunktidest tõmbame põhjale rööbikud

tasapinnad. Saadud lõikpindadele konstrueerime rea sise- ja seestprismasid, millede kõrgus oleks  $\frac{H}{n}$ . Arusaadav, et seestprismasid, s. o. prismasid, mille üks osa on püramiidi sees,



Joonis 70.

teine osa aga ulatub välja, on  $n$ , kuna siseprismade arv on  $n - 1$ . Märgime tipust algades siseprismade ruumalad tähtedega  $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ , seestprismade ruumalad aga tähtedega  $q_1, q_2 \dots q_{n-1}, q_n$ . Siis on püramiidi ruumala suurem siseprismade ruumalade summast  $S_{n-1}$  ning vähem seestprismade ruumalade summast  $S_n$ , s. o.:

$$S_{n-1} < V < S_n,$$

kusjuures  $S_{n-1} = p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$  ning  $S_n = q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + q_n$ .

Et  $p_1 = q_1, p_2 = q_2, \dots, p_{n-1} = q_{n-1}$ ,

kui prismad, millel on vastavalt üks ja sama põhi ning kõrgus  $\frac{H}{n}$ , siis  $S_n - S_{n-1} = (q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} + q_n) - (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}) = q_n = (ABC \text{ pindala}) \cdot \frac{H}{n}$ .

Kui lõpmata suurendame arvu  $n$ , siis püüab  $\frac{H}{n}$  nulliks saada ja korrutis  $(ABC \text{ pindala}) \cdot \frac{H}{n}$ , s. o.  $S_n - S_{n-1}$ , püüab nulliks saada. Sel korral püüab seda enam ka vahe  $V - S_{n-1}$ , mis on vähem kui  $S_n - S_{n-1}$ , nulliks saada, millest järgneb, et

$$V = \lim S_{n-1}.$$

Samati leiame, et

$$V = \lim S_n.$$

92. Lause. Kaks kolmnurkset püramiidi, millel on võrdsed põhjad ja võrdsed kõrgused, on isekeskis võrdsed.

Olgu püramiididel  $SABC$  ja  $S'A'B'C'$  (joonis 71) võrdsed põhjad  $ABC$  ja  $A'B'C'$  ning ühine kõrgus  $H$ . Märgime nende ruumalad  $V$  ja  $V'$ -ga. Kõrguse  $H$  jagame  $n$  võrdsesse ossa ning jagamispunktidest tõmbame põhjaga rööbiti tasapinnad. Et põhjad  $ABC$  ja  $A'B'C'$  on võrdsed, siis saame lõigetes võrdsed kolmnurgad (joonis 73).

Saadud lõigetele konstrueerime püramiidis  $SABC$  rea siseprismasid, millede ruumalad märgime  $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ , ja püramiidis  $S'A'B'C'$  rea siseprismasid, millede ruumalad on  $q_1, q_2 \dots q_{n-1}$ . Et

$$p_1 = q_1; p_2 = q_2; \dots p_{n-1} = q_{n-1},$$

kui prismad, millel on vastavalt võrdsed põhjad ning võrdsed kõrgused  $\frac{H}{n}$ , siis

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1} = q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1},$$

ning  $p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}$  märkides  $S$ -ga ja  $q_1 + q_2 + \dots + q_{n-1} - S'$ -ga, saame:

$$S = S' \quad (1).$$

Kui arvu  $n$  lõpmata suurendada, siis on mõlemad võrduse (1) osad, saades muutuvaiks suurusteks, alati võrdsed; sellepärast peavad ka nende piirid võrdsed olema (v. planimeetriast), s. o.

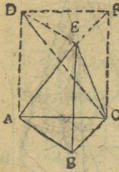
$$\lim S = \lim S';$$

et aga  $\lim S = V$  ja  $\lim S' = V'$ , siis järjekult

$$V = V'.$$

**93. Lause.** Püramiidi ruumala võrdub tema põhjapindala ja kõrguse  $\frac{1}{3}$  korrutisega.

a) Olgu antud kolmnurkne püramiid  $EABC$ . Täiendame selle püramiidi prismaks. Selle jaoks tõmbame sirged  $AD$  ja  $CF$ , mis oleksid võrdsed ja rööbiti  $BE$ -ga. Ühendades  $D$  ja  $F$   $E$ -ga, saame prisma  $ABCDEF$  (joonis 72), millel on antud püramiidiga ühine põhi  $ABC$  ja ühine kõrgus.



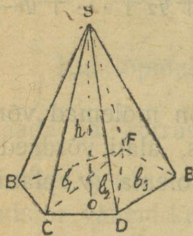
Joonis 72.

Kui sellest prismast lahutame antud püramiidi  $EABC$ , siis saame nelinurkse püramiidi  $EADFC$ , mille põhjaks on  $ADFC$  ja tipuks punkt  $E$ . Rööpkülikut nurkjoone ehk diagonaaliga  $DC$  kaheks kolmnurgaks jagades, jaotame nelinurkse püramiidi kaheks kolmnurkseks püramiidiks  $EADC$  ja  $EDFC$ .

Need kaks püramiidi on isekeskis võrdsed (joonis 92), sest et neil on võrdsed alused ( $\triangle ADC = \triangle DFC$ ) ja üks ja sama kõrgus (tipp  $E$ -st tasapinnale  $ADFC$  tõmmatud ristjoon). Järjekult:

$$EADC \text{ ruumala} = EDFC \text{ ruumala} \quad (1).$$

Kui kolmnurkse püramiidi  $EDFC$  põhjaks võtta  $\triangle DEF$  ja tipuks punkt  $C$ , siis näeme, et ta on püramiidiga  $EABC$  võrdne (põhjad  $DEF$  ja  $ABC$  on võrdsed ja kõrgus ühine), järjekult



Joonis 73.

$$EDFC \text{ ruumala} = CDFE \text{ ruumalaga} = \\ = EABC \text{ ruumalaga},$$

ehk võrdust (1) arvesse võttes saame:

$$EADC \text{ ruumala} = EDFC \text{ ruumalaga} = \\ = EABC \text{ ruumalaga},$$

s. o. et kõik kolm püramiidi, mis moodustavad prisma, on isekeskis võrdsed; sellepärast:

$$EABC \text{ ruumala} = \frac{ABCDEF \text{ ruumalaga}}{3} = \frac{(ABC \text{ pindala}) \cdot H}{3},$$

kusjuures  $H$  on prisma kõrgus.

b) Et seda lauset tõestada hulknurkse püramiidi  $SBCDEF$  kohta (joonis 73), lahutame ta diagonaalsete tasapindadega kolmnurkseteks püramiidideks  $SBCF$ ,  $SCDF$  ja  $SDEF$ , millele põhjad on  $b_1$ ,  $b_2$  ja  $b_3$  ja millede kõrgus  $h$  on ka antud püramiidi kõrgus. Sellepärast:

$$\begin{aligned} SBCDEF \text{ ruumala} &= SBCF \text{ ruumala} + SCDF \text{ ruumala} + \\ + SDEF \text{ ruumala} &= \frac{b_1 \cdot h}{3} + \frac{b_2 \cdot h}{3} + \frac{b_3 \cdot h}{3} = (b_1 + b_2 + b_3) \cdot h = \\ &= (BCDEF \text{ pindala}) \cdot \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

**Järeldus.** Iga püramiid on kolmandik prismast, millel on püramiidiga ühine alus ning ühine kõrgus.

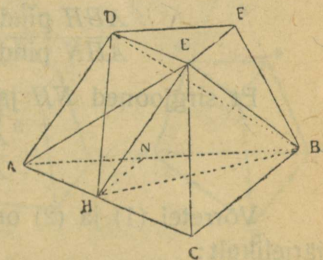
**94. Märkus.** Püramiidi ruumala valemi teadmine annab võimaluse iga hulktahu ehk polüeedri ruumala arvutada. Selleks on tarvis antud hulktahk lahutada püramiidideks (nr. 77). Järgnevad laused on selleks määratud.

**95. Lause.** Tüvipüramiid võrdub kolme säärase püramiidi summaga, millel on antud püramiidiga ühine kõrgus, kuid põhjadeks on: esimesel — tüvipüramiidi alumine põhi, teisel — ülemine põhi ning kolmandal — kahe põhja keskmine võrdeline (proportsionaalne).

a) Olgu antud tüvipüramiid  $ABCDEF$  (joonis 74) kolmnurkne.

Tõmmates tasapinna  $AEB$ , lahutame antud tüvipüramiidist kolmnurkse püramiidi  $EABC$ , mille kõrguseks on tüvipüramiidi kõrgus ja põhjaks — tüvipüramiidi alumine põhi  $ABC$ . See on siis esimene lauses tähendatud püramiid.

Järelejäänud nelinurkset püramiidi  $EADFB$  võib omakorda tasapinnaga  $DEB$  lahutada kaheks kolmnurkseks püramiidiks  $EDFB$  ja  $EADB$ . Püramiidil  $EDFB$  võib võtta tipuks punkti



Joonis 74.

$B$  ja põhjaks  $DEF$ , s. o. antud tüvipüramiidi ülemine põhi. Sel korral on tema kõrgus võrdne tüvipüramiidi kõrgusega. Sellega on see lauses tähendatud teine püramiid.

Jääb veel tõestada, et püramiid  $EADB$  on kolmas nõutav püramiid. Tõmbame  $HE \parallel AD$  ja  $D$  ja  $B$  ühendame  $H$ -ga. Saadud püramiid  $HADB$  on sama suur kui püramiid  $EADB$ , sest neil on ühine alus  $ADB$  ja võrdsed kõrgused (sest nende tipud  $E$  ja  $H$  on sirgjoonel  $HE$ , mis on rööbiti  $AD$ -ga, järjekult rööbiti ka tasapinnaga  $ADB$ ). Püramiidil  $HADB$  võttes tipuks punkti  $D$ , põhjaks  $ABH$ , näeme, et ta kõrgus on ühine tüvipüramiidi kõrgusega; jääb veel tõestada, et põhi  $ABH$  on keskmine võrdeline põhjadega  $ABC$  ja  $DEF$ . Tõmbame  $NH \parallel BC$ .

Et kolmnurkadel  $ABC$  ja  $ABH$  on ühine tipp  $B$ , alused  $AC$  ja  $AH$  aga asuvad ühel sirgjoonel, siis on ka nende kõrgused võrdsed; sellepärast võrdub kolmnurkade pindalade suhe nende aluste suhtega:

$$\frac{ABC \text{ pindala}}{ABH \text{ pindalasse}} = \frac{AC}{AH}. \quad (1).$$

Et kolmnurkadel  $ABH$  ja  $AHN$  on ühine tipp ja ühel sirgjoonel asuvad alused  $AB$  ja  $AN$ , siis võrdub nende pindalade suhe aluste suhtega:

$$\frac{ABH \text{ pindala}}{AHN \text{ pindalasse}} = \frac{AB}{AN} = . \quad (2).$$

Et sirgjooned  $NH$  ja  $BC$  on rööpjooned, siis

$$\frac{AC}{AH} = \frac{AB}{AN}.$$

Võrretel (1) ja (2) on seega parempoolsed osad võrdsed, järjekult:

$$\frac{ABC \text{ pindala}}{ABH \text{ pindalasse}} = \frac{ABH \text{ pindala}}{AHN \text{ pindalasse}};$$

et aga  $\triangle AHN = \triangle DEF$  ( $AH = DE$ ,  $\sphericalangle HAN = \sphericalangle EDF$ ;  $\sphericalangle ANH = \sphericalangle ACB = \sphericalangle DEF$ ), siis

$$\frac{ABC \text{ pindala}}{ABH \text{ pindalasse}} = \frac{ABH \text{ pindala}}{DEF \text{ pindalasse}},$$

s. o.  $ABH$  pindala on  $ABC$  ja  $DEF$  pindalade keskmine võrdeline, mis oligi tarvis tõestada.

Märkides tüvipüramiidi ruumala  $V$ -ga, kõrguse  $H$ -ga, alumise põhja  $ABC$  pindala  $B$ -ga ja ülemise põhja  $DEF$  pindala  $b$ -ga, saame:

$$\frac{B}{ABH \text{ pindalasse}} = \frac{ABH \text{ pindala}}{b} \text{ ehk } ABH \text{ pindala} = \sqrt{B \cdot b};$$

$$EABC \text{ ruumala} = \frac{B \cdot H}{3}; \quad BDEF \text{ ruumala} = \frac{b \cdot H}{3};$$

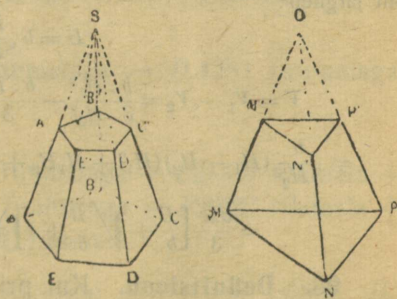
$$EABD \text{ ruumala} = HADB \text{ ruumalaga} = DABH \text{ ruumalaga} = \\ = \frac{\sqrt{B \cdot b \cdot H}}{3};$$

$$V = EABC \text{ ruumala} + BDEF \text{ ruumala} + EADB \text{ ruumala} = \\ = \frac{B \cdot H}{3} + \frac{b \cdot H}{3} + \frac{\sqrt{B \cdot b \cdot H}}{3};$$

$$V = \frac{H}{3} (B + b + \sqrt{B \cdot b}).$$

b) Olgu antud hulknurkne tüvipüramiid  $ABCDEA'B'C'D'E'$  (joonis 75). Võtame veel kolmnurkse püramiidi  $OMNP$ , millel on antud püramiidiga  $SABCDE$  võrdne kõrgus ning võrdne põhi. Siis on need püramiidid võrdsed. Lõikame kolmnurkset püramiidi tasapinnaga  $A'B'C'D'E'$  kolmnurka  $M'N'P'$  mööda. Lõikpinnad  $M'N'P'$  ja  $A'B'C'D'E'F'$  on võrdsed (nr. 73), sellepärast on ka püramiidid  $O'M'N'P'$  ja  $SA'B'C'D'E'F'$  võrdsed.

Kui võrdsetest püramiididest  $SABCDE$  ja  $OMNP$  lahu-



Joonis 75.

tame võrdsed püramiidid  $SA'B'C'D'E'F'$  ja  $OM'N'P'$ , siis saame võrdsed tüvipüramiidid  $ABCDEA'B'C'D'E'$  ja  $MNPM'N'P'$ . Kui hulknurkse tüvipüramiidi kõrguse märgime  $H$ -ga, põhja  $ABCDE$  pindala  $B$ -ga ja põhja  $A'B'C'D'E'$  pindala  $b$ -ga, siis on ka kolmnurkse tüvipüramiidi kõrgus  $H$ , põhja  $MNP$  pindala  $= B$  ja põhja  $M'N'P'$  pindala  $= b$ .

Et aga, nagu juba tõestatud,

$$MNPM'N'P' \text{ ruumala} = \frac{B \cdot H}{3} + \frac{b \cdot H}{3} + \frac{\sqrt{B \cdot b} \cdot H}{3},$$

siis ka

$$ABCDEA'B'C'D'E' \text{ ruumala} = \frac{B \cdot H}{3} + \frac{b \cdot H}{3} + \frac{\sqrt{B \cdot b} \cdot H}{3},$$

mis oligi tarvis hulknurkse tüvipüramiidi kohta tõestada.

**95a.** Tüvipüramiidi  $ABCDEA'B'C'D'E'$  (joonis 75) ruumala võib vaadelda kui püramiidide  $SABCDE$  ja  $SA'B'C'D'E'$  ruumalade vahet. Märgime tüvipüramiidi ruumala  $V$ -ga, kõrguse  $H$ -ga, põhja  $ABCDE$  pindala  $B$ -ga ja põhja  $A'B'C'D'E'$  pindala  $b$ -ga, püramiidide  $SABCDE$  ja  $SA'B'C'D'E'$  kõrgused  $H_1$  ja  $H_2$ -ga ning nende ruumalad  $V_1$  ja  $V_2$ , saame:

$$V_1 = \frac{B \cdot H_1}{3}; \quad V_2 = \frac{b \cdot H_2}{3}; \quad V = V_1 - V_2; \quad H = H_1 - H_2; \quad \frac{B}{b} = \frac{H_1^2}{H_2^2}.$$

Siit järgneb:

$$\begin{aligned} B &= b \cdot \frac{H_1^2}{H_2^2}; \\ V &= V_1 - V_2 = \frac{b \cdot H_1^3}{3 \cdot H_2^2} - \frac{b \cdot H_2}{3} = \frac{b}{3H_2^2} (H_1^3 - H_2^3) = \\ &= \frac{b}{3H_2^2} (H_1 - H_2)(H_1^2 + H_1H_2 + H_2^2) = \frac{bH}{3} \left[ \frac{H_1^2}{H_2^2} + \frac{H_1}{H_2} + 1 \right] = \\ &= \frac{bH}{3} \left[ \frac{B}{b} + \sqrt{\frac{B}{b}} + 1 \right] = \frac{H}{3} [B + \sqrt{Bb} + b]. \end{aligned}$$

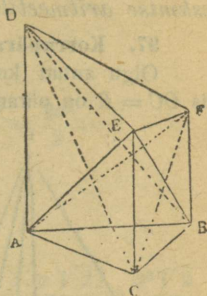
**96. Definiitsioon.** Kui prismat lõigata tasapinnaga, mis ei ole põhjaga rööbiti, siis nimetatakse kumbagi saadavat hulktahku *tüviprismaks*.

**Lause.** Kolmnurkse tüviprisma ruumala võrdub kolme niisuguse püramiidi ruumala summaga, millel on prisma põhi, kuid tipud on põhjaga mitte rööbiku lõikepinna tippudes.

TARTU ÜLIKOOL.  
 DIDAKTILINE SEMINAAR  
 57  
 MATEMAATIKA JAOSKOND

On antud tüvprisma  $ABCDEF$  (joonis 76). Tõmbame tasapinnad  $AEB$  ja  $EDB$ . Prisma jaguneb sellega kolmeks püramiidiks:  $EABC$ ,  $EDFB$  ja  $EADB$ , kusjuures  $EABC$  on üks neist püramiididest, mis lauses on tähendatud.

Püramiid  $EDFB$  on sama suur kui püramiid  $CAFB$ , sest et neil on võrdsed põhjad  $DFB$  ja  $AFB$  (need kolmnurgad on võrdsed, sest neil on ühine alus  $FB$ , sest et tipud asuvad sirgjoonel  $DA \parallel FB$ ), kuna tipud  $E$  ja  $C$  asuvad sirgjoonel  $EC$ , mis on rööbiti  $FB$ -ga, järjekult ka põhjadega. Püramiidil  $CAFB$  võib tipuks võtta punkti  $F$  ja põhjaks  $ABC$ .



Joonis 76.

Siit näeme, et see on teine lauses nõutav püramiid. Järjekult  $EDFB$  ruumala =  $CAFB$  ruumalaga =  $FABC$  ruumalaga.

Püramiid  $EADB$  on sama suur kui püramiid  $CADB$ , sest neil on ühine põhi  $ADB$  ja võrdsed kõrgused (tipud  $E$  ja  $C$  asuvad sirgjoonel  $EC$ , mis on rööbiti põhjaga). Võttes püramiidil  $CADB$  tipuks  $D$  ja põhjaks  $ABC$ , näeme, et see püramiid on kolmas lauses nõutav püramiid. Järjekult:

$$EADB \text{ ruumala} = CADB \text{ ruumalaga} = DABC \text{ ruumalaga.}$$

Sellepärast ka:

$$ABCDEF \text{ ruumala} = EABC \text{ ruumalaga} + EDFB \text{ ruumala} + \\ + EADB \text{ ruumala} = EABC \text{ ruumalaga} + FABC \text{ ruumala} + \\ + DABC \text{ ruumala.}$$

**Järeldus.** Kui  $B$ -ga märgime tüvprisma põhja,  $H_1$ ,  $H_2$  ja  $H_3$ -ga mitterööbiku löikpinna kolmest tipust põhjale tõmmatud ristjooned, siis omandab tüvprisma ruumala  $V$  järgmise kuju:

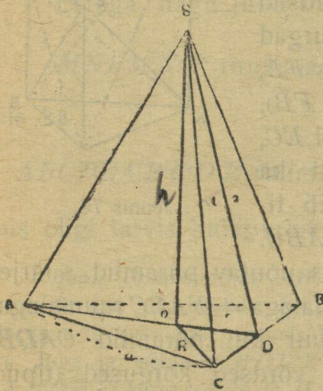
$$V = B \cdot \frac{H_1 + H_2 + H_3}{3}.$$

Kui on antud püst-tüviprisma, siis on kõrgused  $H_1$ ,  $H_2$  ja  $H_3$  ta küljeservad; järjelikult:

*Kolmnurkse püst-tüviprisma ruumala võrdub küljeservade keskmise aritmeetilise ja põhja-pindala korruutisega.*

**97. Korrapärase püramiidi elementide suhted** (joonis 77).

Olgu antud korrapärase püramiidi  $SABC$ , mille põhja külg on  $a$ . Siis  $OC = R$  on püramiidi põhja ümberjoonestatud ringi raadius;  $OD = r$  on aga sama põhja sissejoonestatud ringi raadius (punkt  $D$  on  $CB$  kesktäpis). Märgime  $h$ ,  $l$  ja  $\alpha$ -ga vastavalt püramiidi kõrguse, küljeserva ja apoteemi.



Joonis 77.

Et hästi võiks lahendada püramiidide kohta antud ülesandeid, peab mõistma enesele selgesti ette kujutada neli järgmist kolm nurka:  $SOD$ ,  $SOC$ ,  $CSD$  ja  $OCD$ , mis annavad iga korrapärase püramiidi elementide jaoks järgmised vahekorrad:

a)  $h^2 = a^2 - r^2$ ,

b)  $h^2 = l^2 - R^2$ ,

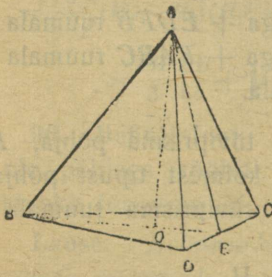
c)  $l^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$ ,

d)  $R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$ .

Kui on aga püramiid kolmnurkne, siis saame peale selle veel:

e)  $r = OD = \frac{AD}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ,

f)  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$



Joonis 78.

**98. Ülesanne.** Leida korrapärase nelitahu ehk tetraedri ruumala, kui serva pikkus on  $a$  (joonis 78).

$ABCD$  on korrapärase nelitahk. Serva  $CD$  keskkoha  $E$  ühendame punkti  $A$  ja  $B$ -ga.  $AE$  ja  $BE$  on võrdkülgsete kolmnurkade  $CAD$  ja  $DBC$  kõrgused, tasapind  $ABE$  on risti  $CD$ -ga ja tasapinnaga  $BCD$ . Nelitahu kõrgus  $AO$  asub tasapinnas  $ABE$ ; seega asub punkt  $O$  sirgjoonel  $BE$ . Punkt  $O$  asub ühtlasi ka kolmnurga  $DBC$  teistel mediaanidel; sellepärast

$OE = \frac{BE}{3}$ . Et aga  $AE$  ja  $BE$  on niisuguste võrdkülgsete kolmnurkade kõrgused, millede külje pikkus on  $a$ , sellepärast ka:

$$AE = BE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Arvesse võttes, et  $OE = \frac{BE}{3}$ , leiame, et

$$\overline{AO^2} = \overline{AE^2} - \overline{OE^2} = \frac{8}{9} \overline{AE^2} = \frac{8 \cdot 3 a^2}{9 \cdot 4} = \frac{2a^2}{3};$$

$$AO = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Nelitahu ruumala  $V$ -ga märkides, saame:

$$V = \frac{(BCD \text{ pindala}) \cdot AO}{3} = \frac{DC \cdot BE \cdot AO}{2 \cdot 3} = \frac{a \cdot a \sqrt{3} \cdot a \sqrt{2}}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

**99. Ülesanne.** Korrapärane püramiid  $SABCD$ , mille kõrgus on 6 m, on põhjaga rööbikute tasapindadega lõigatud niisugustesse kolme jakku  $V$ ,  $V_1$  ja  $V_2$ , mis suhtuvad isekeesis kui 1:2:3. Leida tasapindade kaugused  $x$  ja  $y$ , püramiidi tipust arvates (joonis 79).

Märgime lõikpinnad ja püramiidi põhja vastavalt  $R$ ,  $Q$  ja  $P$ -ga. Antud tingimustel saame:

$$\frac{V}{1} = \frac{V_1}{2} = \frac{V_2}{3}; \text{ siit järgneb:}$$

$$\frac{V + V_1 + V_2}{1 + 2 + 3} = \frac{V}{1} \text{ ehk } \frac{SABCD \text{ ruumala}}{6} = \frac{V}{1} \text{ ehk}$$

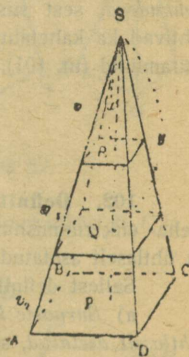
$$\frac{SABCD \text{ ruumala}}{V} = 6;$$

et aga  $\frac{SABCD \text{ ruumala}}{V} = \frac{P \cdot 6}{R \cdot x}$ ; järjekult  $\frac{P \cdot 6}{R \cdot x} = 6$

ehk  $\frac{P}{R} = x$ .

Et  $\frac{P}{R} = \frac{6^2}{x^2}$ , siis  $x = \frac{6^2}{x^2}$ , ehk  $x^3 = 6^2$ , ehk  $x = \sqrt[3]{36}$ .

Samati tuleb leida  $y$ .

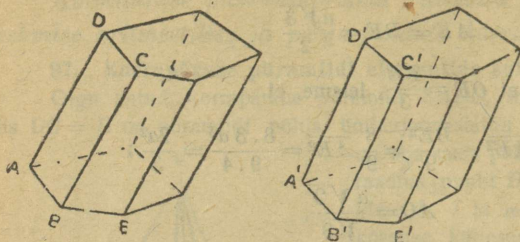


Joonis 79.

## Prismade ja püramiidide ühtivus.

**100. Lause.** Kaks prisma ehk püramiidi on ühtivad, kui ühe põhi ja külgtahk on vastavalt ühtivad teise ühtlaselt asetatud põhja ja külgtahuga ning kui nende vahelised kahetahused nurgad on ühtivad.

Olgu kahele prismal (joonis 80) kahetahused nurgad servade  $AB$  ja  $A'B'$  juures ühtivad, ühtlasi ka prismade põhjad ja külgtahud  $AC$  ja  $A'C'$



Joonis 80.

võrdsed ning ühtlaselt asetatud. Ma hütame ühe prisma teise sisse nii, et alumised põhjad ühtiksid. Servade  $AB$  ja  $A'B'$  juures olevate kahetahuste nurkade ühtivuse tõttu läheb tahk  $AC$  tahku  $A'C'$  mööda; et aga ka tahud võrdsed on, siis nad ühtivad; järjekult ühtib serv  $AD$  servaga  $A'D'$ ; siis peavad aga kõik ülejäänud servad ühtima, sest nad on võrdsed ja rööbikud. Sellepärast ühtivad ka prismad.

Samati võib seda lauset tõestada püramiidide kohta.

**101. Lause.** *Kaks prisma ehk kaks püramiidi ühtivad, kui neil on aluse juures üks kolmetahune nurk vastavalt ühtivate ja ühtlaselt asetatud tahkudega, sest siis ühtivad ka kolmetahused nurgad (nr. 58); järjekult ühtivad ka kahetahused nurgad, mille tõttu ühtivad ka prismad, samati ka püramiidid (nr. 101).*

## Hulktahkude sarnasus.

**102. Definiitsioon.** Kaht hulktahku nimetatakse *sarnasteks*, kui nende keha- ehk ruumisnurgad on vastavalt ühtivad, tahud on vastavalt sarnased ja ühtlaselt asetatud.

Sellest definiitsioonist järgneb:

a) *Sarnaste hulktahkude kahetahused nurgad ühtivad vastavalt ja on ühtlaselt asetatud, sest et ruumisnurgad ühtivad.*

b) *Vastavad servad on võrdelised, kui sarnaste hulknurkade vastavad küljed, kusjuures igal kahel kõrvuseisval hulknurgal on üks ühine külj.*

Sarnaste hulktahkude olemasolu tõendab järgmine lause.

**103. Lause.** *Püramiidi  $SABCDE$  (joonis 81) põhjale rööbiti tõmmatud tasapind  $abcde$  lõikab püramiidist teise, temaga sarnase püramiidi  $Sabcde$ .*

Kummagi püramiidi vastavad tahud on sarnased, sest et lõikpind  $abcde$  on rööbiti alusega  $ABCDE$  (nr. 71).

Kolmetahused nurgad  $A, B, C, \dots$  ühtivad vastavalt kolmetahuste nurkadega  $a, b, c, \dots$ , sest et nende tasanurgad ühtivad vastavalt ja on ühtlaselt asetatud (nr. 58). Peale selle on ruumisnurk  $S$  ühine. Järjekult on püramiidid sarnased.

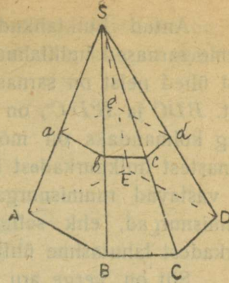
**104. Lause.** Kaks kolmnurkset püramiidi on sarnased, kui neil on ühtiv kahetahune nurk, mis on vastavalt sarnaste ning ühtlaselt asetatud tahkude vahel.

Olgu püramiididel  $S$  ja  $S'$  (joonis 82) servade  $SA$  ja  $S'A'$  juures kahetahused nurgad ühtivad ja  $\triangle ASB \sim \triangle A'S'B'$ ,  $\triangle ASC \sim \triangle A'S'C'$ .

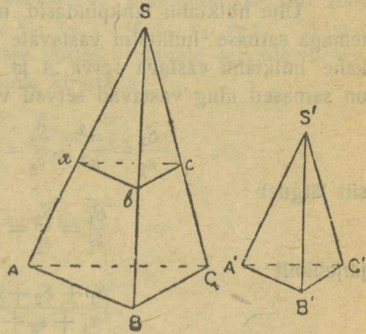
Mahutame püramiidi  $S'$  püramiidisse  $S$  nii, et neil ühtiksid tipud  $S$  ja  $S'$  ning kahetahused nurgad  $SA$  ja  $S'A'$ . Et aga  $\sphericalangle A'S'B' = \sphericalangle ASB$  ja  $\sphericalangle A'S'C' = \sphericalangle ASC$  (kolmnurkade sarnasuse tõttu), siis võtab püramiid  $S'A'B'C'$  asendi  $Sabc$ . Et aga  $\sphericalangle SAB = \sphericalangle S'A'B' = \sphericalangle Sab$  ja  $\sphericalangle SAC = \sphericalangle S'A'C' = \sphericalangle Sac$ , siis on põhi  $abc$  rööbiti põhjaga  $ACB$ ; järjekult on ka püramiidid sarnased (nr. 103).

**105. Lause.** Sarnaseid hulktahkuseid võib lahutada võrdseks arvuks vastavalt sarnasteks kolmnurkseteks püramiidideks, mis on ühtlaselt asetatud.

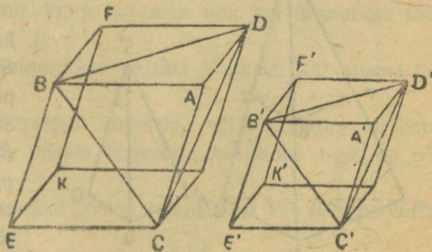
Olgu  $AB$  ja  $A'B'$  (joonis 83) kahe sarnase hulktahu vastavad servad. Tipust  $A$  välja minevate servade  $AB, AD$  ja  $AC$  lõpupunktid  $B, C$  ja  $D$  ühendame isekeski; saame kolmnurkse püramiidi  $ABCD$ . Samati konstrueerime kolmnurkse püramiidi  $A'B'C'D'$ . Need kaks vastavat püramiidi on sarnased, sest neil on servade  $AB$  ja  $A'B'$  juures ühtivad kahetahused nurgad (nr. 102), mis seisavad sarnaste ja ühtlaselt asetatud tahkude vahel ( $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  ja  $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$ ).



Joonis 81.



Joonis 82.



Joonis 83.

Antud hulktahkudest lahutades sarnased kolmnurksed püramiidid, saame sarnased hulktahud. Ja tõesti, nende tahud on vastavalt sarnased, sest ühed neist on sarnased, kui antud sarnaste hulktahkude tahud, teised, näit.  $BDC$  ja  $B'D'C'$ , on sarnased kui sarnaste püramiidide vastavad tahud, ning kolmandaks on mõned tahud sellepärast sarnased, et me nad saime sarnastest hulknurkadest lahutades sarnased ja ühtlaselt asetatud kolmnurgad. Ka vastavad ruumisnurgad on sarnased kui antud hulktahkude vastavad ruumisnurgad, ehk sellepärast, et me nad saime, kui ühtivatest ruumisnurkadest lahutasime ühtivad ning ühtlaselt asetatud kolmetahused nurgad.

Siit on kerge aru saada, et sedaviisi arutades võime antud hulktahud lahutada võrdseks arvuks sarnasteks ühtlaselt asetatud kolmnurkseteks püramiidideks.

**106. Lause.** *Sarnaste hulktahkude pinnad suhtuvad nii, kui vastavate servade rüüdüd.*

Ühe hulktahu tahkpindasid märkides  $S_1, S_2, S_3$  jne., märgime teise temaga sarnase hulktahu vastavate tahkude pinnad  $s_1, s_2, s_3$ -ga jne. ning kahe hulktahu vastava serva  $A$  ja  $a$ -ga. Et hulktahkude vastavad tahud on sarnased ning vastavad servad võrdelised, siis saame:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{A^2}{a^2}; \quad \frac{S_2}{s_2} = \frac{A^2}{a^2}; \quad \frac{S_3}{s_3} = \frac{A^2}{a^2}; \quad \dots$$

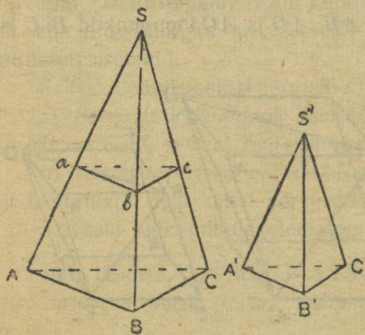
siit järgneb:

$$\frac{S_1}{s_1} = \frac{S_2}{s_2} = \frac{S_3}{s_3} = \dots = \frac{A^2}{a^2};$$

järjekult:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots} = \frac{A^2}{a^2},$$

mis oligi tarvis tõestada.



Joonis 84.

**107. Lause.** *Sarnaste hulktahkude ruumalad suhtuvad nii, kui vastavate servade kuubid.*

a) Olgu antud kaks sarnast kolmnurkset püramiidi  $SABC$  ja  $S'A'B'C'$  (joonis 84). Mahutame püramiidi  $S'$  püramiidisse  $S$  nii, et võrdsed kolmetahused nurgad  $S'$  ja  $S$  ühtiksid; siis omandab põhi  $A'B'C'$  asendi  $abc$ . Kolmetahuste nurkade  $A$  ja  $a$  ühtivuse tõttu on ka  $\sphericalangle SAB = \sphericalangle Sab$  ja  $\sphericalangle SAC = \sphericalangle Sac$ ; sellepärast  $AB \parallel ab$  ja  $AC \parallel ac$ ; siit järgneb,

et põhjade tasapinnad  $ABC$  ja  $abc$  on rööbikud ning põhjad ise on sarnased. Püramiidide ruumalad, põhjade pindalad ning kõrgusi märkides vastavalt  $V$  ja  $v$ ,  $B$  ja  $b$  ning  $H$  ja  $h$ -ga, saame:

$$\frac{V}{v} = \frac{BH}{bh};$$

Et  $abc // ABC$  ja  $abc \sim ABC$ , siis

$$\frac{B}{b} = \frac{\overline{AB^2}}{ab^2} \text{ ja } \frac{H}{h} = \frac{SA}{Sa} = \frac{AB}{ab};$$

järelikut

$$\frac{V}{v} = \frac{\overline{AB^3}}{ab^3}.$$

b) Lahutame kaks antud sarnast hulktahku võrdseteks hulkadeks sarnasteks ja ühtlaselt asetatud kolmnurkseteks püramiidideks (nr. 105), millede ruumalad märgime vastavalt  $V_1, V_2, V_3 \dots$  ja  $v_1, v_2, v_3 \dots$ .  $A$  ja  $a$  on hulktahkude vastavad servad. Arvesse võttes vastavate servade võrdelisust ning p. (a) tõestatud lause osa, võime kirjutada:

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{A^3}{a^3}; \quad \frac{V_2}{v_2} = \frac{A^3}{a^3}; \quad \frac{V_3}{v_3} = \frac{A^3}{a^3}; \quad \dots$$

siit järgneb:

$$\frac{V_1}{v_1} = \frac{V_2}{v_2} = \frac{V_3}{v_3} = \dots = \frac{A^3}{a^3};$$

järelikut

$$\frac{V_1 + V_2 + V_3 + \dots}{v_1 + v_2 + v_3 + \dots} = \frac{A^3}{a^3},$$

mis oligi tarvis tõestada.

## Arvutus-ülesanded.

26. Leida kuubi serv, kui kuup on sama suur kui täisnurkne rööptahukas, mille mõõdeteks on  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

27. Leida korrapärase kolmnurkse prisma ruumala, kui prisma täispind on  $S$  ja külgpind on  $S'$ .

28. Leida niisuguse kaldprisma ruumala, mille põhjaks on korrapärase kolmnurk küljega  $a$ , kui prisma küljeserv, võrdues  $a$ -ga, on põhjapinnale kaldu  $60^\circ$  nurga all.

29. Korrapärase kümmenurkse prisma ruumala on  $V$ . Kõrgus võrdub põhja küljega. Leida põhja külg.

30. Leida korrapärase kolmnurkse püramiidi ruumala, kui apoteem on  $a$  ja põhja külg on  $a$ .

31. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi ruumala, kui kõrgus on 63 meetrit ning aluse külg on 17 m.

32. Püramiid, mille kõrgus on  $H$ , on jagatud pooleks põhjale rööbiku tasapinnaga. Leida lõikprisma kaugus püramiidi tipust.

33. Põhjale rööbikute tasapindadega on jagatud püramiid 3-ks võrdseks osaks. Üks tema põhja külg on  $a$ . Leida lõigete küljed, mis vastavad küljele  $a$ .

34. Põhjale rööbikute tasapindadega on püramiid jagatud 3-ks võrdseks osaks. Püramiidi kõrgus on  $H$ . Leida iga osa kõrgus.

35. Leida korrapärase kaheksatahu ehk oktaedri ruumala, kui ta serv  $= a$ .

36. Leida korrapärase nelinurkse tüvipüramiidi ruumala, kui tüvipüramiidi kõrgus on  $H$  ning põhjade külgedeks on  $a$  ja  $b$ .

37. Püramiidis, mille põhja-pindala on  $Q$ , on tõmmatud põhjaga rööbik lõige, mille pindala on  $q$ . Tüvipüramiidi ruumala on  $V$ . Leida täispüramiidi ruumala.

38. Püramiid, mille kõrgus on  $H$ , on jagatud põhjaga rööbikute tasapindadega osadeks, mis suhtuvad kui 2 : 3 : 5. Leida nende tasapindade kaugus tipust.

39. Tüvipüramiidi põhja-pindalad on  $B$  ja  $b$ , kõrgus  $= H$ . Leida lõikpindala, kui see lõige on põhjaga rööbik ning kulgeb püramiidi kõrguse keskohta.

40. Antud kuubi serv on  $a$ . Leida säärase kuubi serv, mille ruumala on antud kuubi ruumalast kaks korda suurem.

Märkus. See kuubi mahu kahendamise ülesanne, mis juba vanast ajast tuttav, lahendub kergesti analüütilisel teel (nimelt:  $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2} = a \cdot 1,25992\dots$ ), kuid selle ülesande lahendamine konstrueerimise kaudu (sirkli ja joonlaua abil) on võimatu, sest et otsitava valem sisaldab eneses kolmanda astme juure.

41. Leida säärase püstprisma pind- ja ruumala, mille põhjaks on niisuguse ringi sissejoonistatud korrapärase kolmnurk, mille raadius  $r = 2$  m, kõrguseks aga on sama ringi ümberjoonistatud korrapärase kuusnurga külg.

42. Leida säärase korrapärase kaheksanurkse prisma pind- ja ruumala, mille kõrgus  $h = 6$  arss. ja põhja külg  $a = 8$  verss.

43. Leida korrapärase kuusnurkse püramiidi külg-pindala ja ruumala, kui püramiidi kõrgus on 1 m ja apoteem sünnitab kõrgusega nurga  $30^\circ$ .

44. Leida kolmnurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi iga küljeserv on  $l$  ja põhjaservad on  $a$ ,  $b$  ja  $c$ .

45. Olgu antud kolmetahune nurk, mille kõik joonnurgad on täisnurgad. Tema servade peal tipust alates on võetud lõigud:  $SA = a$ ,  $SB = b$

ja  $SC = c$ . Läbi punktide  $A$ ,  $B$  ja  $C$  on tõmmatud tasapind. Leida püramiidi  $SABC$  ruumala.

46. Püramiidi kõrgus on  $h$ , aga püramiidi põhi on  $a$  küljega korrapärane kuusnurk. Leida  $x$ , mille kaugusel, püramiidi tipust arvates, on tarvis tõmmata püramiidi põhjale rööp-tasapind, et nõnda moodustatud tüüpüramiidi ruumala oleks  $V$ .

47. Leida  $a$  servaga korrapärase tetraeedri ruumala.

48. Leida  $a$  servaga korrapärase oktaeedri ruumala.

49. Korrapärase kuusnurkse tüüpüramiidi põhjade küljed on:  $a = 23$  sm ja  $b = 17$  sm, kuna aga selle tüüpüramiidi ruumala  $V = 1465$  sm<sup>3</sup>. Leida selle tüüpüramiidi kõrgus.

50. Korrapärase kuusnurkse tüüpüramiidi ruumala  $V = 10,5$  m<sup>3</sup>, kõrgus  $h = \sqrt{3}$  m ja alumise põhja külg  $a = 2$  m. Leida tüüpüramiidi ülemise põhja külg.

51. Leida kolmnurkse tüviprisma ruumala, kui prisma põhja küljed on:  $a = 7,5$ ,  $b = 7$  ja  $c = 6,5$  ja kui põhjale ristervad on:  $k = 2$ ,  $l = 3$  ja  $m = 4$ .

52. Kui kaugel püramiidi  $SABC$  tipust  $S$  tuleb tõmmata põhjale rööbik tasapind, mis püramiidi lõikaks osadeks, millede ruumalade suhe on  $m$ ?

53. Leida niisuguse tüvi-rööptahuka ruumala, mille põhjaks on  $B$ , kuna  $h_1$  ja  $h_2$  on nurkjoonega ühendatud ülemise põhja tippudest alumisele põhjale tõmmatud ristjooned<sup>1)</sup>.

54. Püramiid, mille kõrgus on  $h$ , on põhjale rööbikute tasapindadega jagatud kolme ossa  $m : n : p$  suhtes. Leida tasapindade kaugus püramiidi tipust.

55. Kahe sarnase hulktahu ruumalade summa on  $V$ , vastavate servade suhe aga on  $m : n$ . Leida hulktahkude ruumalad.

56. Tüüpüramiidi ruumala jagada põhjadele  $B$  ja  $b$  rööbikute tasapindadega  $m : n$  suhtes.

## VIII osa.

### Pöördkehad ja pinnad.

108. **Definitsioon.** Pind, mille me saame joone  $ABC$  (joonis 85) pöördumisel paigalseisva sirgjoone  $OO''$  ümber,

1) Kerge on leida, et  $h_1 + h_2$  võrdub kahe teise ristjoone summaga, kui need on tõmmatud teise nurkjoonega ühendatud ülemise  $\nabla$  põh tippudest alumisele põhjale.



Joonis 85.

on pöördpind. Joon  $ABC$  on moodustaja ning  $OO''$  on telg.

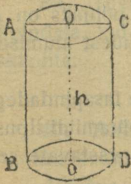
Keha, mille me saame tasase kujundi  $ABCO''O$  pöördumisel telje  $OO''$  ümber, nimetatakse pöördkehaks.

Kõige lihtsamad pöördkehad on: püst-ring-silinder, püst-ringkoonus ning kera.

## Silinder.

**109. Definiitsioon.** Püst-ringsilindriks nimetatakse keha, mille me saame püstküljiku pöördumisel tema ühe külje ümber (joonis 86).

Püst-ringsilindri saab moodustada ka  $CD$  liikumisel ringjoont mööda, kui  $CD$  oma endise seisukohaga rööbiti asendub, kusjuures tema ots liugub ringi mööda, mille pind on risti  $CD$ -ga. Sirgjoont  $OO'$  nimetatakse silindri teljeks.



Joonis 86.

$OO'$ -ga risti olevad joonlõigud  $OD$  ja  $O'C$  joonestavad pöördumisel ringid, mis on risti  $OO'$ -ga (nr. 10, p. b) ja järjekult isekeskis rööbiti. Neid ringe nimetatakse silindri põhjadeks, kuna nende kaugust teineteisest, s. o.

$OO'$ , nimetatakse silindri kõrguseks. Osa silindri pinda, mis on põhjapindade vahel, nimetatakse silindri külgpinnaks.

Sirgjoont  $CD$ , mille pöördumisel moodustub silindri külgpind, nimetatakse moodustajaks.

Iga sirgjoone  $CD$  punkt joonestab pöördumisel nii ringjoone, et ringi pind on teljega risti ning ta raadius võrdub aluse raadiusega; järjekult: iga püst-ringsilindri lõige tasapinnaga, mis teljega risti, on ring, mis ühtib põhjaga.

Kui silindri moodustaja ei ole põhjaga risti, siis nimetatakse seesugust silindrit kald-silindriks.

Kaldsilinder moodustatakse sirgjoone liikumisel, mis

rööbiti endise asendiga, ringjoont mööda, kusjuures ringi pind ei ole sirgjoonega risti.

Et me alamal vaatleme ainult püst-ringsilindri omadusi, siis nimetame teda lihtsalt silindriks<sup>1)</sup>.

**110. Silindri ja tasapinna suhteline asend.** Silindri külgpinna punktist  $A'$  (joonis 88) tõmbame tasapinna  $P$ , mis oleks rööbik teljega  $OO'$  ning järjekult ka moodustajaga<sup>2)</sup>. Punktist  $A'$   $OO'$ -ga rööbiti tõmmatud sirgjoon  $AA'$  on tütlasi silindri pinna kui ka tasapinna  $P$  peal (vastasel korral oleks punktist  $A'$  võimalik tõmmata kaks sirgjoont, mis oleksid  $OO'$ -ga rööbiti); järjekult on joon  $AA'$  tasapinna ja silindri lõikjooneks. Siin võib ette tulla kolm järgmist juhust.

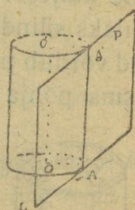
a) Tasapinna  $P$  kaugus silindri teljest on põhja raadiusest vähem (joonis 88). Sel juhusel lõikab sirge  $AB$  aluse ringjoont kahes punktis  $A$  ja  $B$ , ning tasapind  $P$  lõikab silindrit kaht moodustajat  $AA'$  ja  $BB'$  mööda, mis kulgevad punktid  $A$  ja  $B$ . Sellest järgneb, et kujund  $AA'B'B$  on püstkülik.

b) Tasapinna  $P$  kaugus teljest on põhja raadiusest suurem. Sel juhusel ei lõika  $AB$  põhja ringjoont ning tasapinnal  $P$  puudub silindriga ühine punkt.

c) Tasapinna  $P$  kaugus teljest võrdub põhja raadiusega (joonis 89). Sel juhusel on sirge  $AL$  põhja-ringjoonele puutejooneks, ning tasapinnal  $P$  on silindriga *ainus ühine sirge*  $AA'$ , nimelt moodustaja, mis kulgeb puutepunkti  $A$ . Tasapinda  $P$  nimetatakse sel juhusel **puutepinnaks**, kuna sirget  $AA'$  — *puutejooneks* nimetatakse.



Joonis 88.



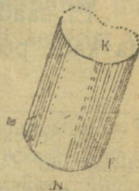
Joonis 89.

**111. Lause.** *Silindri telge ning puutejoont kulgev tasapind on risti puutepinnaga* (joonis 89).

Aluse ringjoonele on puutejooneks  $AL$ , mis on tõmmatud põhja-tasapinnal risti  $OA$ -ga. Olles risti  $OA$  ja  $AA'$ -ga, on ta risti ka tasa-

1) Üldiselt nimetatakse silindri pinnaks pinda, mille moodustab joont  $MNP$  mööda alati enese endise asendiga rööbiti liikuv sirgjoon  $KN$  (joonis 87). Joont  $MNP$  nimetatakse *juhtjooneks* ehk *direktrissiks*. Kui juhtjoon on sirgjoon, siis muutub silindri pind tasapinnaks.

2) Kui silindrit lõigata tasapinnaga, mis ei ole rööbik moodustajaga ega silindri põhjaga, siis on lõikjoon kõverjoon, mida nimetatakse *ellipsiks*.



Joonis 87.

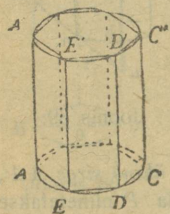
pinnaga  $OO'A'A'$ ; sellepärast on ka teda kulgev puutepind  $P$  risti tasapinnaga  $OO'A'A'$ , mis oligi tarvis tõestada.

**112. Märkus.** Tuleb tähendada, et kõik silindri puutepinnad on teljega rööbiti. Sellest järgneb, et kui sirge ei ole teljega rööbik, siis ei või temast silindri puutepinda läbi tõmmata. Vastupidi, kui sirge on teljega rööbik, siis on kõik teda kulgevad tasapinnad teljega rööbikud; tasapindade hulgest on kerge leida silindri puutepindu<sup>1)</sup>.

Väljaspool silindrit asuvast joonest võib silindrile tõmmata kaks puutepinda; kui aga sirge asub silindri pinnal, siis liituvad puutepinnad ühte.

**113. Lause.** Silindri külgpind võrdub põhja-ringjoone ja kõrguse korrutisega (joonis 90).

Silindri põhja-ringjoone sisse korrapärast hulknurka joonestades konstrueerime saadud hulknurga kui põhja peale prisma, mille küljeservadeks oleks silindri moodustajad ning teiseks põhjaks silindri teise põhja joonestatud hulknurk. Prisma küljepind võrdub põhja ümbermõõdu  $p$  ja kõrguse  $H$  korrutisega. Kui prisma põhja külgede arvu hakkame lõpmata kahendada, siis



Joonis 90.

püüab tema ümbermõõd silindri aluse ringjooneks  $C$  saada; prisma kõrgus jääb selle juures muutumata ja võrdub silindri kõrgusega. Niiviisi püüab prisma külgpindala, võrdudes

$$p \cdot H,$$

saada piiril

$$C \cdot H\text{-ks};$$

see piir võetaksegi silindri külgpindalaks.

**Järeldus.** Kui silindri põhja raadius on  $R$ , siis  $C=2\pi R$  ning silindri külgpind

$$S = 2\pi R \cdot H.$$

Et saada silindri täis-pindala, tuleb tema külgpindalaga liita kahe põhja pindalad; niiviisi on silindri täis-pindala:

$$2\pi R H + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

1) Selleks on tarvis antud sirge mingist punktist  $M$  tõmmata teljele risti-tasapind  $P$ . Saadud tasapinnas tõmmata punktist  $M$  puutejoon ringjoonele, mida mööda tasapind lõikas silindrit. Kumbki neist puutejoontest ühes antud sirgega määravad silindri puutepinna.

**114. Lause.** *Silindri ruumala võrdub põhi-pindala ja kõrguse korrutisega (joonis 90).*

Joonestame silindrisse korrapärase prisma. Märgime prisma põhi-pindala  $B'$ -ga, silindri põhi-pindala  $B$ -ga ning  $H$ -ga nende ühise kõrguse. Prisma ruumala võrdub põhi-pindala  $B'$  ja kõrguse  $H$  korrutisega. Kui põhja külgede arvu hakkame lõpmata kahendada, siis püüab pindala  $B'$  saada  $B$ -ks; kõrgus  $H$  jääb muutumata. Niiviisi püüab prisma ruumala, võrdues

$$B' \cdot H,$$

saada piiril

$$B \cdot H\text{-ks;}$$

see piir võetaksegi silindri ruumalaks.

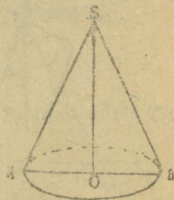
**Järeldus.** Kui silindri põhja raadius on  $R$ , siis  $B = \pi R^2$ , ning silindri ruumala

$$V = \pi R \cdot H.$$

### Koonus.

**115. Definiitsioon.** *Püst-ringkoonuseks nimetatakse keha, mis saadakse täisnurkse kolmnurga pöördumisel ühe tema kaateti ümber (joonis 91).*

Paigalseisvat kaatetit  $OS$  nimetatakse teljeks ning kõrguseks; ringi, moodustatud teise kaatetiga  $OA$ , — põhjaks ja punkti  $S$  — koonuse tipuks. Hüpotenuusi  $AS$  liikumisel moodustatud pinda nimetatakse koonuse külgpinnaks, hüpotenuusi  $AS$  ennast — moodustajaks.



Joonis 91.

Püst-ringkoonust võib moodustada sirge  $SA$  liikumisel, kusjuures üks selle sirge lõpupunkt liigub ringjoont mööda, teine lõpupunkt  $S$  asub ringi sentrist tõmmatud ristjoonel<sup>1)</sup>.

1) *Koonuse pinnaks* nimetatakse üldse pinda, mida moodustatakse sirge  $SA$  (joonis 92) liikumisel, kusjuures sirge üks punkt paigal seisab, kuna teine punkt mingit joont  $ABC$  mööda liigub; joont  $ABC$  nimetatakse *juhtjooneks*. Kui juhtjoon on sirge, siis koonuse pind muutub tasapinnaks.

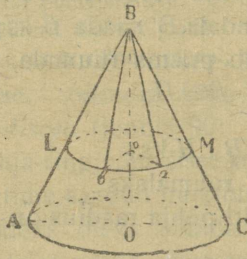
Et me siin ainult püst-ringkoonuse omadusi tundma õpime, siis nimetame teda lihtsalt *koonuseks*.

**116. Lause.** *Koonuse lõige põhjale rööbiku tasapinnaga on ringjoon.*

Lõigaku koonuse põhjaga rööbiti tõmmatud tasapind  $LM$



Joonis 92.



Joonis 93.

(joonis 93) koonust mingit joont  $LbaM$  mööda. Selle joone kaht mistahes punkti  $a$  ja  $b$  ühendades tipuga  $B$  ning punkti  $o$ -ga, saame kaks ühtivat täisnurkset kolmnurka

$$(Bo = Bo,$$

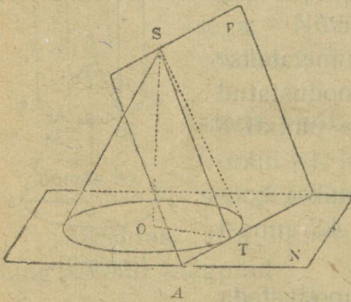
$$\sphericalangle oBa = \sphericalangle oBb);$$

järjelikult  $oa = ob$ , s. o.

joon  $LbaM$  on ringjoon, mis oligi tarvis tõestada.

**117.** Vaatame koonuse lõikamist tasapinnaga  $P$  (joonis 94), kusjuures tasapind tippu  $S^1$  kulgeb. Kui tasapinnal  $P$  on koonusega peale punkti  $S$

veel mingi teine ühine punkt  $T$ , siis on moodustaja  $ST$  niihästi koonuse kui ka taspinna  $P$  peal, s. o. nende puutejooneks. Niiviisi võib juhtuda, et tasapind  $P$  lõikab koonust üht ehk mitut moodustajat mööda:



Joonis 94.

a) Kui sirge  $AT$  lõikab aluse ringjoont kahes punktis, siis lõikab tasapind  $P$  koonust kaht moodustajat mööda.

b) Kui sirge  $AT$  ei lõika aluse ringjoont, siis tasapind  $P$  ei lõika koonust.

c) Kui sirge  $AT$  puutub ringjoont  $O$  punktis  $T$ , siis on tasapinnal  $P$  *ainus* koonuse moodustaja; sel juhusel puutub tasapind  $P$  koonust moodustajat  $ST$  mööda. Arutades sar-

1) Koonuse lõikamisel tasapinnaga, mis ei ole rööbiti põhjaga ega kulge tippu, saame kõverad, niinimetatud *koonuse lõiked* (*ellips, parabool* ehk *hüperbool*), mida ei vaadelda elementargeomeetrias.

naselt, nagu nr. 111-s, võib tõestada, et *tasapind SOT*, mis kulgeb telge *SO* ja puutejoont *ST*, on risti puute-tasapinnaga *P*.

**118. Lause.** *Koonuse külg-pindala võrdub põhja-ring-joone ja moodustaja  $\frac{1}{2}$  korrutisega.*

Joonestame koonuse põhja ümber korrapärase hulknurga ning ühendame hulknurga tipud koonuse tipuga; saame korrapärase ümberjoonestatud püramiidi. Selle püramiidi külgpind võrdub põhja ümbermõõdu *P* ja apoteemi  $SN = l$ , s. o. koonuse moodustaja poole korrutisega. Kui hakkame püramiidi põhja külgede arvu lõpmata kahendama, siis püüab ümbermõõt *P* saada koonuse põhja-ringjoone *C* pikkuseks; apoteem jääb kõik see aeg muutumata. Niiviisi püüab püramiidi külje-pindala, võrdues

$$\frac{P \cdot l}{2},$$

piiril saada

$$\frac{C \cdot l}{2},$$

see piir võetaksegi koonuse külgpindalaks.

**Järeldus.** Kui koonuse põhja raadius on *r*, siis  $C = 2\pi r$  ning koonuse külgpindala

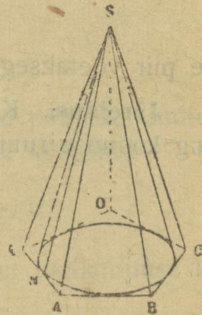
$$S = \frac{2\pi r l}{2} = \pi r l;$$

koonuse täis-pindala saame, kui külgpindala liidame põhipindalaga; saame:

$$\pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

**119. Lause.** *Koonuse ruumala võrdub põhi-pindala ja kõrguse  $\frac{1}{3}$  korrutisega.*

Joonestame koonuse ümber korrapärase püramiidi. Mär-gime püramiidi põhi-pindala *B'*-ga, koonuse põhi-pindala



Joonis 95.

aga  $B$ -ga. Püramiidi ruumala võrdub põhi-pindala  $B'$  ja kõrguse  $H \frac{1}{3}$  korrutisega. Kui hakkame püramiidi põhja külgede arvu lõpmata kahendama, siis püüab püramiidi põhi-pindala  $B'$  saada koonuse põhipinnaks  $B$ , kõrgus jääb aga muutumata. Niiviisi püüab püramiidi ruumala, võrdudes:

$$\frac{B' \cdot H}{3},$$

piiril saada:

$$\frac{B \cdot H}{3},$$

see piir võetaksegi koonuse ruumalaks.

**Järeldus.** Kui koonuse põhja raadius on  $r$ , siis  $B = \pi r^2$ , ning koonuse ruumala

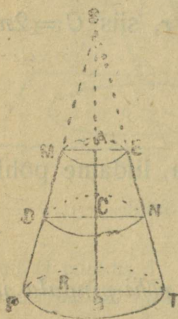
$$V = \frac{\pi r^2 \cdot H}{3}.$$

## Tüvikoonus.

**120. Definiitsioon.** Osa koonusest  $PMET'$  (joonis 96), mis asub põhja  $PT$  ja temaga rööbiku lõikepinna  $ME$  vahel, nimetatakse *tüvikoonuseks*. Ringe  $PT$  ja  $ME$  nimetatakse *põhjadeks*, sirget  $ET$  — *moodustajaks*. Lõiget  $DN$ , mis risti teljega  $AB$  tema keskkohas  $C$ , nimetatakse *kesklõikeks*.

Tüvikoonus moodustub täisnurkse trapetsi  $AETB$  pöördumisel  $AB$  ümber.

**121. Lause.** Tüvikoonuse külge-pindala võrdub põhjade ringjoonte summa ja moodustaja  $\frac{1}{2}$  korrutisega.



Joonis 96.

Joonestame tüvikoonuse mõlema põhja ümber samanimelised korrapärased hulknurgad ning ühendame nende vastavad tipud. Saame korrapärase tüvipüramiidi. Märgime  $O$  ja  $o$ -ga koonuse

põhjade ringjooned,  $P$  ja  $p$ -ga püramiidi põhjade ümbermõõte ning  $l$ -ga püramiidi apoteemi, s. o. koonuse moodustaja.

Kui püramiidi põhjade külgede arvu hakkame lõpmata kahendada, siis püüab  $P$  saada  $C$ -ks,  $p$  —  $c$ -ks, kuna apoteem ehk koonuse moodustaja jääb muutumata. Tüvipüramiidi külgpind püüab, võrdues

$$\frac{(P+p)l}{3},$$

piiril saada:

$$\frac{(C+c)l}{2},$$

mis võetaksegi tüvikoonuse külgpinnaks.

**1 järeldus.** Kui  $R$  ja  $r$  on koonuse põhjade raadiused, siis  $C = 2\pi R$  ja  $c = 2\pi r$  ning tüvikoonuse külgpind

$$S = \frac{(2\pi R + 2\pi r)l}{2} = \pi(R+r)l.$$

**2. järeldus.** Kui  $DN$  (joonis 96) on tüvikoonuse keskmine lõige, siis trapetsist  $PMAB$  saame:

$$DC = \frac{R+r}{2};$$

sellepärast

$$S = \frac{2\pi(R+r)l}{2} = 2\pi DC \cdot l,$$

s. o. tüvikoonuse külgpind võrdub kesklõike-ringjoone ja moodustaja korrutisega.

**3. järeldus.** Et leida tüvikoonuse täis-pindala, tuleb külgpindalaga liita mõlema põhja pindalad; sellepärast on tüvikoonuse täis-pindala:

$$\pi(R+r)l + \pi R^2 + \pi r^2.$$

**122. Märkus.** Silindrit ja koonust võib vaadelda kui tüvikoonuse püürjuhuseid: kui tüvikoonuse moodustaja trapets muutub püstkülikuks (s. o. kui rööpküljed  $R$  ja  $r$  muutuvad võrdseteks), siis muutub tüvikoonus silindriks;

kui aga trapets muutub kolmnurgaks (s. o. kui üks rööpkülgedest muutub nulliks), siis muutub tüvikoonus koonuseks. Niiviisi, valemis:

$$S = \pi(R + r)l;$$

oletades, et  $R = r$ , saame:

$$S = 2\pi r l \text{ (silindri külgpind);}$$

oletades aga, et  $R = 0$ , saame

$$S = \pi r l \text{ (koonuse külgpind).}$$

**123. Lause.** *Tüvikoonuse ruumala võrdub kolme niisuguse koonuse ruumala summaga, millel on tüvikoonusega ühine kõrgus, kuna põhjadeks on: esimesel — tüvikoonuse alumine põhi, teisel — ülemine põhi ning kolmandal — mõlema põhja keskmine võrdeline.*

Märgime  $B'$  ja  $b'$ -ga sisse- või ümberjoonestatud tüvipüramiidi põhjade pindalad,  $B$  ja  $b$ -ga koonuse põhjade pindalad ning  $H$ -ga nende ühise kõrguse. Kui püramiidi põhjade külgede arvu lõpmata kahendada, siis püüab  $B'$  saada  $B$ -ks,  $b'$  —  $b$ -ks, kuna kõrgus  $H$  jääb muutumata. Sellepärast püüab tüvipüramiidi ruumala, võrdues:

$$\frac{H}{3}(B' + b' + \sqrt{B' \cdot b'}),$$

piiril saada:

$$\frac{H}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b}),$$

mis võetaksegi tüvikoonuse ruumalaks.

Siit on kerge näha, et tüvikoonuse ruumala võrdub kolme niisuguse koonuse ruumala summaga, millest oli lauses räägitud.

**Järeldus.** Kui  $R$  ja  $r$  on koonuse põhjade raadiused, siis  $B = \pi R^2$  ja  $b = \pi r^2$ , ning tüvikoonuse ruumala

$$V = \frac{H}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \sqrt{\pi^2 R^2 r^2})$$

ehk

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

124. Märkus. Silindril ja koonusel, nagu igal pöördkehal, on lõp-mata hulk *sümmeetria tasapindu*: iga tasapind, mis kulgeb pöörlemistelge, on sümmeetria-tasapind.

## Sarnased silindrid ja koonused.

125. Definiitsioon. *Kaht silindrit või koonust nimetatakse sarnas-teks, kui nad on moodustatud sarnaste püstkülikute ehk kolmnurkade pöör-dumisel vastava külje ümber.*

**Lause.** *Sarnaste silindrite külge- ehk täis-pindalad suhtuvad nõnda kui raadiuste või kõrguste ruudud, ruumalad aga kui raadiuste või kõr-guste kuubid.*

a) Olgu sarnaste silindrite kõrgusteks  $H$  ja  $h$  ning põhjade raadius-teks  $R$  ja  $r$ . Definiitsioonist järgneb:

$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r},$$

siit järgneb:

$$\frac{H+R}{h+r} = \frac{R}{r}.$$

Märgime sarnaste silindrite ruumalad  $V$  ja  $v$ -ga, külgpinnad  $S$  ja  $s$ -ga ning täispinnad  $S'$  ja  $s'$ -ga. Siis:

$$\frac{S}{s} = \frac{2\pi RH}{2\pi rh} = \frac{R}{r} \cdot \frac{H}{h} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2};$$

$$\frac{S'}{s'} = \frac{2\pi RH + 2\pi R^2}{2\pi rh + 2\pi r^2} = \frac{2\pi R(H+R)}{2\pi r(h+r)} = \frac{R}{r} \cdot \frac{H+R}{h+r} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2};$$

$$\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{H}{h} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{H^3}{h^3}.$$

b) Sarnaste koonuste kohta võib antud lauset samati tõestada.

## IX osa.

### Kera (sfäär).

126. Definiitsioon. *Poolringi pöördumisel läbimõõdu ehk diameetri ümber moodustatud keha nimetatakse keraks ehk sfääriks, kuna pool-ringjoonega moodustatud pinda — kera ehk sfääri pinnaks nimetatakse.*

Arusaadav, et *kerapind* on ruumi punktide *geomeetiline koht*, kusjuures punktid on kõik ühekaugusel ühest punktist, nimelt *keskpunktist*.

Sirgjoont, mis ühendab keskpunkti kerapinna mingi punktiga, nimetatakse *raadiuseks*. Kaht kerapinna punkti ühendaja sirge, mis kulgeb keskpunkti, nimetatakse kera *läbimõõduks* ehk *diameetrik*s. Sellest definitsioonist järgneb, et kõik raadiused on isekeskis võrdsed ning läbimõõt võrdub kahe raadiusega.

Kaks võrdsete raadiustega kera on võrdsed, sest et nad ühtivad.

Kera keskpunkti kulgevat tasapinda nimetatakse *läbimõõdu-tasapinnaks*.

Kui kera pinda lõigata läbimõõdu-tasapinnaga, siis on kõik lõikjoone punktid, asetstes kera pinnal, ühekaugusel lõik-tasapinnal asuvast kera keskpunktist; järjekult, lõikjooneks on ringjoon, mille raadiuseks ja keskpunktiks on kera raadius ja keskpunkt; seda lõiget nimetatakse kera *suuringiks*.

Kerapind jaotab ruumi kahte ossa: *sisemisse*, mille iga punkti kaugus keskpunktist on raadiusest vähem, ning *välimisse*, mille iga punkti kaugus keskpunktist on raadiusest suurem; ühest ruumi osast teise minnes peame kerapinda kulgema.

**127. Lause.** *Tasapind lõikab kerapinda ringjoont mööda (joonis 97).*

Tõestame, et kerapinda lõigates tasapinna  $P$ -ga saame ringjoone. Ühendades lõikjoone kaht *mistahes* punkti  $B$  ja  $F$  kera keskpunktiga, saame kaks täisnurkset kolmnurka  $AOB$  ja  $AOF$ , milledest saame:

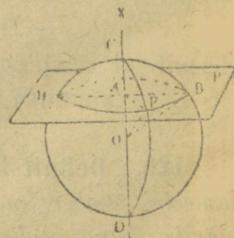
$$AB = \sqrt{OB^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - OA^2}$$

$$AF = \sqrt{OF^2 - OA^2} = \sqrt{R^2 - OA^2};$$

järjekult:

$$AB = AF,$$

s. o. et lõikjoon  $BFB'$  on ringjoon.



Joonis 97.

**Järeldus.** Tähendades kera raadiust, lõikringi raadiust ning lõikpinna kaugust kera keskpunktist vastavalt  $R$ ,  $r$  ja  $d$ -ga, saame:

$$r = \sqrt{R^2 - d^2}.$$

Saadud valemi vaatlemisest järgneb:

a) Lõikpinnad on võrdsed, kui nad kera keskpunktist ühekaugusel asuvad.

b) Kahest lõikpinnast on see suurem, mis kera keskpunktile lähemal asub.

c) Kõige suurem lõikpind saadakse, kui  $d = 0$ , s. o. kui lõikpind kulgeb keskpunkti. Sellepärast on ka tema nimetus *suuring* õige. Teisi kera lõikpindu nimetatakse *väikeringideks*.

## 128. Suuringide omadused.

a) *Suuringid jaguvad vastastikku pooleks, sest nende lõik-sirgjoon, kulgedes keskpunkti, on nende ühiseks läbimõõduks.*

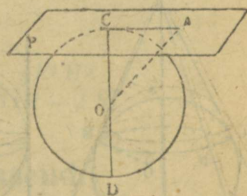
b) *Suuring jagab kera ja tema pinna kaheks võrdsesks osaks, sest need osad ühtivad, kui neid suuringi läbimõõdu ümber keerata  $180^\circ$  võrra.*

**129. Lause.** *Kui tasapinna  $P$  kaugus  $OC$  kera keskpunktist võrdub raadiusega, siis on tasapinnal ja kerapinnal ainus ühine punkt  $C$  (joonis 98).*

Kui kera keskpunkti  $O$  ühendada tasapinna  $P$  mistahes punktiga  $A$ , siis on kaldjoon  $OA$  alati suurem ristjoonest  $OC$ , s. o. raadiusest. Siit järgneb, et punkt  $A$  on väljaspool kera.

*Tasapinda, millel on kerapinnaga ainus ühine punkt, nimetatakse puutepinnaks, ühist punkti  $C$  — puutepunktiks.*

Arusaadav, et puutepunkti  $C$  kulgevail sirgeil, mis asuvad tasapinnal  $P$ , on kerapinnaga ka ainus ühine punkt; neid sirgeid nimetatakse *puutesirgeteks*.



Joonis 98.

**130. Vastupidine lause.** Kera puute-tasapind  $P$  (joonis 98) on puutepunkti  $C$  tõmmatud raadiusega risti.

Et punkt  $C$  on tasapinnal ja kerapinnal ainsaks ühiseks punktiks, siis on iga teine punkt  $A$  väljaspool kerapinda; sellepärast on ka kaugus  $OA$  suurem raadiusest  $OC$ . Järjekult on  $OC$  kõige lühem kaugus kera keskpunktist tasapinnani  $P$ , s. o.  $OC$  on risti tasapinnaga  $P$ .

**131. Lause.** Ühisest punktist  $S$  kerale tõmmatud puutesirged on isekeskis võrdsed (joonis 99), sest igaüks neist võrdub  $\sqrt{SO^2 - R^2}$ .

## Sissejoonestatud kera.

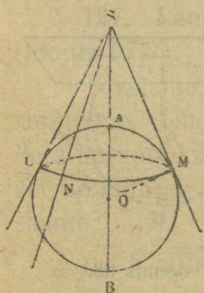
**132.** Olgu punkt  $S$  väljaspool kera  $O$ . Tõmbame tasapinna, mis kulgeb  $SO$  ja lõikab kera suurringi  $ALB$  mööda. Tõmmates punktist  $S$  suurringile puutuja  $SL$  (ta on ka kerate puutujaks), pöörame kõik selle kujundi  $SB$  kui telje ümber. Siis joonestab ring  $ALB$  kerapinna, kuna puutuja  $SL$  joonestab koonuse külgpinna. See koonus on kera ümber joonestatud, kuna kera on koonuse sisse joonestatud. Ümberjoonestatud koonus puutub kera ringi  $LMN$  mööda, mida nimetatakse puuteriingiks.

Kui punkt  $S$ , millest on tõmmatud puutujad, hakkab liikuma läbimöödu  $AB$  sihis lõpmatusse, siis muutuvad puutujad rööpjoonteks, ning koonus

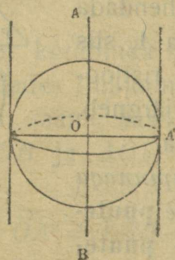
$SLNM$  (joonis 99) püüab ümberjoonestatud silindriks saada (joonis 100); sel korral muutub puuteriing sissejoonestatud kera suurringiks, mis on risti  $AB$ -ga.

Keral ja ümberjoonestatud silindril on suurringi igas punktis üks ja sama puutepind.

Niihästi kera kui ka silindri puutepinnad, mis kulgevad ühe ja sama suurringi punkti  $A'$  (joonis 100), on risti raadiusega  $OA'$ , järjekult puutepinnad ühtivad.



Joonis 99.



Joonis 100.

**133. Ülesanne.** Koonusesse, mille moodustaja  $= l$  ja raadius  $= R$ , on joonestatud kera (joonis 101). Leida puuteriingi raadius  $x$ .

$\triangle ASB$  ja  $\triangle CSD$  sarnasusest saame:

$$\frac{x}{R} = \frac{CS}{l} \text{ ehk: } \frac{x}{R} = \frac{l-AC}{l}.$$

Et ühest punktist kerale tõmmatud puutujad on võrdsed, siis

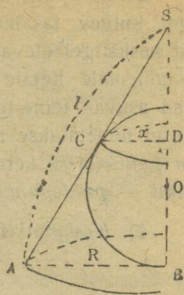
$$AC = AB = R,$$

järjekult

$$\frac{x}{R} = \frac{l-R}{l},$$

millest järgneb, et:

$$x = \frac{R}{l}(l-R).$$



Joonis 101.

**134. Ülesanne.**  $H$  kõrgusega koonusesse on joonestatud  $R$  raadiusega kera. Leida koonuse ruumala  $V$  (joonis 102).

Olgu antud:  $AD = H$  ja  $OF = R$ . Kolmnurkade  $ADC$  ja  $AOF$  sarnasusest saame:

$$\frac{DC}{OF} = \frac{AD}{AF} \text{ ehk: } \frac{DC}{R} = \frac{H}{AF}; \text{ aga}$$

$$\begin{aligned} AF &= \sqrt{AO^2 - OF^2} = \sqrt{(H-R)^2 - R^2} = \\ &= \sqrt{H^2 - 2HR} = \sqrt{H(H-2R)}; \end{aligned}$$

järjekult

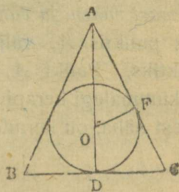
$$\frac{DC}{R} = \frac{H}{\sqrt{H(H-2R)}},$$

millest saame

$$DC = \frac{RH}{\sqrt{H(H-2R)}};$$

seljepärast

$$V = \frac{\pi \cdot DC^2 \cdot AD}{3} = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot H^3}{3H(H-2R)} = \frac{\pi R^2 H^2}{3(H-2R)}.$$



Joonis 102.

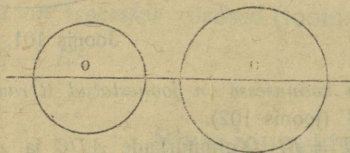
## Kahe kera suhteline asend.

**135.** Et kahe kera  $O$  ja  $O'$  suhtelist asendit tundma õppida, vaatame kesksirget (sentrijoont)  $OO'$  kui pöördumistelge ning tõmbame temast läbi tasapinna, mis lõikab kerad kaht suurringi mõõda. Suurringide suhtelist asendit tundma õppides võime tuletada järgmised viis kera suhtelise asendi juhust.

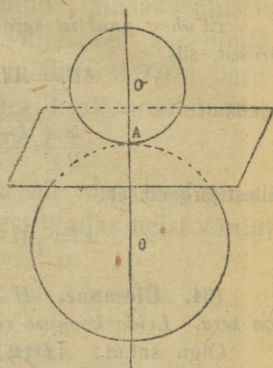
a) Kahe kera keskpunktide kaugus on suurem nende raadiuste summast; arusaadav, et sel juhul keradel puudub ühine punkt (joonis 103).

b) *Keskpunktide kaugus võrdub raadiuste summaga* (joonis 104); kesksirget kulgev tasapind lõikab kerad suurriinge mööda, mis puutuvad teineteist kesksirgel olevas punktis  $A$ ; punkti  $A$  võib tõmmata tasapinna, mis on mõlemale kerale puutepinnaks, kusjuures kerad asuvad teine teisel pool puutepinda. Sel juhul nimetatakse neid kerad *väliselt teineteist puutuvateks* keradeks, nende ainust ühist punkti — *puutepunkti*ks.

c) *Keskpunktide kaugus on raadiuste*

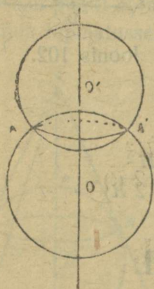


Joonis 103.

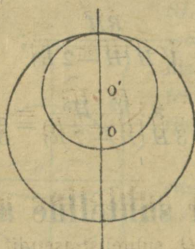


Joonis 104.

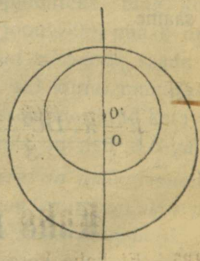
*summast vähem ja vahest suurem*; sel juhul lõikuvad ringid  $O$  ja  $O'$  (joonis 105) punktis  $A$ , väljaspool kesksirget; see punkt on kerapindade ühiseks punktiks. Punkt  $A$ , pöördues telje  $OO'$  ümber, joonestab ringjoone, mis on kummalegi kerapinnale ühine, kuna ringi pind on risti kesksirgega. Nagu sellest näha, on kerade lõikpinnaks ring.



Joonis 105.



Joonis 106.



Joonis 107.

d) *Keskpunktide kaugus võrdub raadiuste vahega*; kerad puutuvad sel juhul sisemiselt (joonis 106).

e) *Keskpunktide kaugus on raadiuste vahest vähem*; sel juhul (joonis 107) asub üks kera teise sees nii, et neil ei ole mingit ühist punkti.



Sirglõigu  $AB$  pöördumisel moodustub tükikoonuse külgpind. Tõmmates  $DE \parallel NB$ , saame  $DE$ , mis on kesklõike raadius; sellepärast (nr. 121 p. 2):

$$AB \text{ pindala}^1) = 2\pi \cdot DE \cdot AB. \quad (1)$$

Kolmnurkade  $CAB$  ja  $DEF$  sarnasusest (küljed on vastastikku risti) saame:

$$\frac{DE}{EF} = \frac{AC}{AB} \text{ ehk } DE \cdot AB = EF \cdot AC = EF \cdot MN$$

ning valemisse (1) pannes  $DE \cdot AB$  asemele  $EF \cdot MN$ , saame:

$$AB \text{ pindala} = 2\pi \cdot EF \cdot MN = MN \cdot 2\pi \cdot EF,$$

mis oligi tarvis tõestada.

Kui punkt  $A$  asub teljel  $XY$ , siis, võttes  $AM = 0$ , leiame, et kõik eespool toodud valemid on õiged ning lõpuvalem ei muutu.

Kui sirglõik  $AB$  on rööbik teljega  $XY$ , siis muutub lause tõestus lihtsamaks, sest pöördpinnaks on silindripind.

**138. Lause.** *Pind, moodustuv korrapärase murdjoone  $ABCD$  (joonis 110) pöördumisel ringjoone  $O$  lähimõõdu ümber, mis murdjoont ei lõika, võrdub murdjoone projektsiooniga  $A'D'$  diameetritele, korrutatud niisuguse ringjoone pikkusega, mille raadiuseks on murdjoone apoteem  $a$ .*



Joonis 110.

Korrapärane murdjoon  $ABCD$  on joonestatud ringjoone  $O$  kaarde  $ABCD$ . Sirglõikude  $AB$ ,  $BC$  ja  $CD$  kaugused keskpunktist  $O$  on võrdsed.

$$ABCD \text{ pindala}^2) = AB \text{ pindala} + BC \text{ pindala} + CD \text{ pindala}.$$

$$\text{Et aga } AB \text{ pindala} = A'B' \cdot 2\pi a$$

$$BC \text{ pindala} = B'C' \cdot 2\pi a$$

$$CD \text{ pindala} = C'D' \cdot 2\pi a, \text{ järjestikult}$$

$$ABCD \text{ pindala} = 2\pi a (A'B' + B'C' + C'D') = 2\pi a \cdot A'D' = A'D' \cdot 2\pi a.$$

1) „ $AB$  pindala“ tähendab „ $AB$  pöördumisel moodustatud pinda“.

2) „ $ABCD$  pindala“ tähendab „murdjoone  $ABCD$  pöördumisel moodustatud pinda“.

Arusaadav, et lause ei olene murdjoone külgede arvust ja jääb maksma ka siis, kui murdjoone lõpupunktid ühtivad läbimõõdu lõpupunktega.

Kui aga murdjoon on ümberjoonestatud, siis on tema apoteem  $R$  ja murdjoone pöördumisel moodustatud pindala võrdub  $A'D' \cdot 2\pi R$ .

**139. Lause.** Keravöö pindala võrdub tema kõrguse ja suurringi ringjoone korrutisega.

Olgu keravöö saadud kaare  $AD$  (joonis 110) pöördumisel läbimõõdu ümber. Joonestame kaarde korrapärase murdjoone  $ABCD$ , mille apoteem on  $a$ . Murdjoone pöördumisel telje  $XY$  ümber moodustub pind, mis võrdub

$$A'D' \cdot 2\pi a.$$

Kui murdjoone külgede arvu hakkame lõpmata kahendama, siis jääb ta projektsioon  $A'D'$  läbimõõdule endiseks, kuna apoteem  $a$  püüab saada raadiuseks  $R$ ; järjekult, ka pind püüab piiril saada

$$A'D' \cdot 2\pi R.$$

See piir võetaksegi keravöö pindalaks. Võttes  $A'D' = H$ , saame

$$AD \text{ pindala} = H \cdot 2\pi R.$$

**Järeldus.** Keralõigu pindala võrdub ta kõrguse ja suurringi ringjoone korrutisega, sest lõigu pind on keravöö pinna erijuhus.

**140. Lause.** Kera pindala võrdub  $4\pi R^2$ , kusjuures  $R$  on kera raadius.

Poolkera pindala, kui  $R$  kõrgusega keralõigu pindala, võrdub eelmise põhjal:

$$R \cdot 2\pi R;$$

järjekult, kera pindala võrdub:

$$2R \cdot 2\pi R = 4\pi R^2.$$

**1. järeldus.** Kera pindala võrdub neljakordse suurringi pindalaga.

2. järeldus. Kerade pindalad suhtuvad nõnda, kui nende raadiuste ruudud. Kui  $R$  ja  $R'$  on kerade raadiused ning  $S$  ja  $S'$  kerade pindalad, siis

$$S = 4\pi R^2 \text{ ja } S' = 4\pi R'^2,$$

millest järgneb, et

$$\frac{S}{S'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

141. Lause. Kui keha moodustub kolmnurga pöördumisel telje ümber, mis, kulgedes üht ta tippu, ei löika teda, vaid asub kolmnurgaga ühel tasapinnal, siis võrdub selle keha ruumala vastasküljega moodustatud pinna ja sellele küljele tõmmatud  $\frac{1}{3}$  kõrguse korrutisega.

Vaatame kolme juhust:



a) Kolmnurga  $ABC$  (joonis 111) üks külg  $AB$  ühtib pöördumisteljega  $XY$ .

Sel juhul saadud pöördkeha ruumala võrdub täisnurgeliste kolmnurkade  $BDC$  ja  $ADC$  pöördumisel moodustatud kahe koosseisruumalade summaga. Tõmmates  $DC \perp AB$  ja  $BF \perp AC$ , saame:

$$\begin{aligned} ABC \text{ ruumala}^1) &= \\ &= DBC \text{ ruumala} + ADC \text{ ruumala} = \\ &= \frac{\pi \overline{DC}^2 \cdot BD}{3} + \frac{\pi \cdot \overline{DC}^2 \cdot AD}{3} = \end{aligned}$$

Joonis 111.

$$= \frac{\pi \cdot \overline{DC}^2}{3} (BD + AD) = \frac{\pi \overline{DC}^2 \cdot AB}{3} \quad (1).$$

Et  $\triangle ABC$  pindala  $= \frac{AB \cdot DC}{2}$  ja  $\frac{AC \cdot BF}{2}$ , siis  $\frac{AB \cdot DC}{2} = \frac{AC \cdot BF}{2}$ , millest

$$AB \cdot DC = AC \cdot BF.$$

1) „ $ABC$  ruumala“ tähendab „kolmnurga  $ABC$  pöördumisel moodustatud keha ruumala“.

Asendades valemisse (1) korrutise  $AB \cdot DC$  asemele  $AC \cdot BF$ , saame:

$$ABC \text{ ruumala} = \frac{\pi \cdot DC \cdot AC \cdot BF}{3};$$

et aga korrutis  $\pi \cdot DC \cdot AC$  on külje  $AC$  pöördumisel moodustatud koonuse külj-pindala avaldus, siis

$$ABC \text{ ruumala} = (AC \text{ pindala}) \cdot \frac{BF}{3} = (AC \text{ pindala}) \cdot \frac{h}{3}.$$

Kui nurk  $A$  on nüri, siis  $ABC$  ruumala võrdub kahe koonuse ruumalade vahega, ning lause tõestub samal viisil.

b) *Mitte ükski kolmnurga külg ei ühti pöördumisteljega ega ole tema rööbik.*

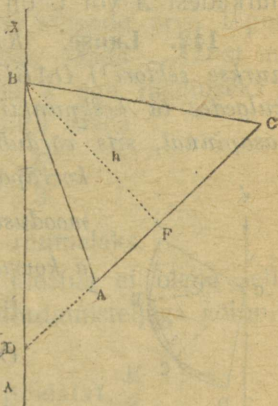
Pikendades külje  $AC$  (joonis 112) kuni lõikumiseni teljega  $XY$  punktis  $D$ , saame:

$$\begin{aligned} ABC \text{ ruumala} &= \\ &= DBC \text{ ruumala} - DBA \text{ ruumala} = \\ &= (DC \text{ pindala}) \cdot \frac{h}{3} - (DA \text{ pindala}) \cdot \frac{h}{3} = \\ &= \frac{h}{3} (DC \text{ pindala} - DA \text{ pindala}) = \\ &= (AC \text{ pindala}) \cdot \frac{h}{3}. \end{aligned}$$

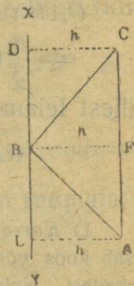
c) *Kolmnurga  $ABC$  üks külg  $AC$  on teljega  $XY$  rööbik (joonis 113).*

Saame:

$$\begin{aligned} ABC \text{ ruumala} &= DCAL \text{ ruumala} - \\ &- BDC \text{ ruumala} - LBA \text{ ruumala} = \\ &= \pi h^2 \cdot DL - \frac{\pi h^2 \cdot DB}{3} - \frac{\pi h^2 \cdot BL}{3} = \end{aligned}$$



Joonis 112.



Joonis 113.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\pi h^2}{3} (3 DL - DB - BL) = \frac{\pi h^2}{3} (3 DL - DL) = \frac{\pi h^2 \cdot 2 DL}{3} = \\
 &= \frac{2\pi h \cdot DL \cdot h}{3}.
 \end{aligned}$$

Et aga korrutis  $2\pi h \cdot DL$  on külje  $AC$  pöördumise moodustatud silindri külgpindala avaldus, siis

$$ABC \text{ ruumala} = (AC \text{ pindala}) \cdot \frac{h}{3}.$$

Lause ei kaota oma väärtust ka mitte sel korral, kui üks nurkadest  $A$  või  $C$  on nüri.

**142. Lause.** Kui keha moodustub korrapärase hulknurkse sektori<sup>1)</sup>  $OABCD$  pöördumisel telje  $XY$  ümber, mis, kulgedes ta keskpunkti, ei lõika teda, vaid asub temaga ühel tasapinnal, siis võrdub selle keha ruumala sektori põhja, s. o. korrapärase murdjoone  $ABCD$  pöördumisel moodustatud pindala ja murdjoone  $\frac{1}{3}$  apoteemi  $a$  korrutisega (joonis 114).



Joonis 114.

Elmise lause põhjal saame:

$$OAB \text{ ruumala} = (AB \text{ pindala}) \cdot \frac{a}{3};$$

$$OBC \text{ ruumala} = (BC \text{ pindala}) \cdot \frac{a}{3};$$

$$OCD \text{ ruumala} = (CD \text{ pindala}) \cdot \frac{a}{3};$$

Võrdusi liites saame:

$$\begin{aligned}
 OAB \text{ ruumala} + OBC \text{ ruumala} + OCD \text{ ruumala} &= \\
 &= \frac{a}{3} (AB \text{ pindala} + BC \text{ pindala} + CD \text{ pindala}),
 \end{aligned}$$

millest leiame, et

$$OABCD \text{ ruumala} = (ABCD \text{ pindala}) \cdot \frac{a}{3}.$$

1) Korrapäraseks hulknurkseks sektoriks nimetatakse kujundit, mis seisab koos võrdseid külgi pidi liidetud võrdhaarsetest ühise tipuga kolmnurkadest. Kolmnurkade aluskülgedest moodustatud korrapärast murdjoont nimetatakse sektori aluseks.

**143. Lause.** *Kerasektori ruumala võrdub ta põhja ja  $\frac{1}{3}$  raadiuse korrutisega.*

Olgu kerasektor moodustatud ringisektori  $OAD$  pöördumisel läbimõõdu ümber (joonis 114). Kaarde  $AD$  joonestame korrapärase murdjoone  $ABCD$ , mille apoteem on  $a$ . Hulknurkse sektori  $OABCD$  pöördumisel moodustub keha, mille ruumala on:

$$(ABCD \text{ pindala}) \cdot \frac{a}{3}.$$

Kui hakkame murdjoone  $ABCD$  külgede arvu lõpmata kahendama, siis  $ABCD$  pindala püüab saada  $\frown AD$ -st moodustatud pinnaks (nr. 139), apoteem  $a$  aga raadiuseks  $R$ ; järjekult  $OABCD$  ruumala püüab piiril saada

$$(\frown AD \text{ pindala}) \cdot \frac{R}{3}.$$

See piir võetaksegi kerasektori ruumalaks.

*Märkus.* Arusaadav, et lause tõestus ei olene sellest, kas sektori üks raadius  $OA$  ühtib pöördumisteljega või mitte; sellepärast, näit. (joonis 108):

$$LOB \text{ ruumala} = (\frown BL \text{ pindala}) \cdot \frac{R}{3}.$$

**Järeldus.** *Kui kera raadius =  $R$ , kerasektori kõrgus =  $H$ , siis kerasektori ruumala =  $\frac{2}{3} \pi R^2 H$ .*

Et  $\frown AD$  pindala (nr. 139) =  $2\pi R \cdot H$ , siis sektori ruumala

$$V_{k.s.} = (\frown AD \text{ pindala}) \cdot \frac{R}{3} = \frac{2\pi R \cdot H \cdot R}{3} = \frac{2}{3} \pi R^2 \cdot H.$$

**144. Lause.** *Kera ruumala võrdub  $\frac{4}{3} \pi R^3$ , kui raadius on  $R$ .*

*Poolkera* ruumala, kui niisuguse kerasektori ruumala, mille kõrgus on  $R$ , võrdub

$$\frac{2}{3} \pi R^2 R = \frac{2}{3} \pi R^3;$$

järjelikult kera ruumala

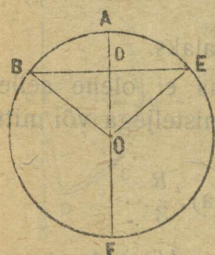
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 \quad (1).$$

**1. järeldus.** Kera ruumala võrdub  $\frac{1}{6} \pi D^3$ , kui läbimõõt on  $D$ , sest

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi \cdot D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6} \quad (2).$$

**2. järeldus.** (1) ja (2) valemitest saame: Kera ruumalad suhtuvad nõnda, kui nende raadiuste (või läbimõõtude) kuubid.

**145. Lause.** Keralõigu ruumala võrdub niisuguse silindri ruum-paga, mille põhja raadiuseks on keralõigu kõrgus ning kõrguseks — kera raadius, mis on vähendatud  $\frac{1}{3}$  keralõigu kõrguse võrra (joonis 115).



Joonis 115.

Olgu keralõigu kõrguseks  $AD = H$  ning kera raadiuseks  $R$ . Et leida keralõigu  $ABE$  ruumala, tuleb sektori  $OBAE$  ruumalast lahutada koonuse  $OBE$  ruumala, järjelikult. lõigu ruumala

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 H - \frac{\pi \cdot \overline{BD}^2 \cdot OD}{3};$$

et aga  $BD$  on  $AD$  ja  $DF$  keskmine võrdeline, siis

$$\overline{BD}^2 = AD \cdot DF = H(2R - H);$$

peale selle  $OD = R - H$ ; sellepärast

$$\begin{aligned} V &= \frac{2}{3} \pi R^2 H - \frac{\pi H(2R - H)(R - H)}{3} = \frac{\pi H}{3} [2R^2 - (2R - H)(R - H)] = \\ &= \frac{\pi H}{3} (3RH - H^2) = \frac{3\pi H^2}{3} \left(R - \frac{H}{3}\right) = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3}H\right). \end{aligned}$$

**146. Lause.** Ringilõigu pöördumisel teda mitte lõikava läbimõõdu ümber moodustatud rõngakujulise keha ruumala võrdub niisuguse silindri ruumalaga, mille põhja raadiuseks on lõigu kõõl ning kõrguseks — kõõlu projektsioon pöördumisteljele (joonis 116).

Et leida ringilõigu  $ANBF$  pöördumisel läbimõõdu ümber moodustatud rõngakujulise keha ruumala  $V$ , on tarvis ringisektori  $OANB$  pöördumisel moodustatud kerasektori ruumalast lahutada kolmnurga  $OAB$  pöördumisel moodustatud keha ruumala. Tõmbame  $OF \perp AB$ . Et (nr. 143, järeldus)

$$OANB \text{ ruumala} = \frac{2}{3} \pi \cdot \overline{OB}^2 \cdot LD,$$

$$\begin{aligned} OAB \text{ ruumala} &= (AB \text{ pindala}) \cdot \frac{OF}{3} = \\ &= LD \cdot 2\pi \cdot OF \cdot \frac{OF}{3} = \frac{2}{3} \pi LD \cdot \overline{OF}^2, \end{aligned}$$

siis

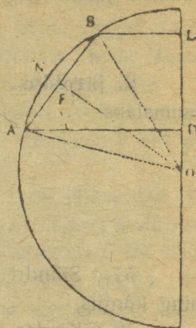
$$\begin{aligned} V &= OANB \text{ ruumala} - OAB \text{ ruumala} = \\ &= \frac{2}{3} \pi \cdot LD (\overline{OB}^2 - \overline{OF}^2); \end{aligned}$$

et aga

$$\overline{OB}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{FB}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{4},$$

siis

$$V = \frac{2}{3} \pi LD \cdot \frac{\overline{AB}^2}{4} = \frac{1}{6} \pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot LD.$$



Joonis 116.

**147. Lause.** Kerakihi ruumala võrdub kahe nüisuguse silindri ruumalade poole summaga, millel on kerakihi kõrgus ning põhjadeks — kihi põhjad, pluss nüisuguse kera ruumala, mille läbimõõduks on kihi kõrgus (joonis 117).

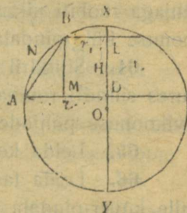
Et leida joonise  $ANBLD$  pöördumisel läbimõõdu  $XY$  ümber moodustatud kerakihi ruumala, tuleb trapetsi  $ABLD$  pöördumisel moodustatud tüvikoonuse ruumalaga liita ringilõigu  $ANB$  pöördumisel moodustatud rõngakujulise keha ruumala. Märkides  $V$ -ga kihi ruumala,  $r$  ja  $r_1$ , — tema põhjade  $AD$  ja  $BL$  raadiusi,  $H$ -ga — tema kõrgust  $LD$  ja  $R$ -ga kera raadiust, saame:

$$ABLD \text{ ruumala} = \frac{\pi H}{3} (r_1^2 + r^2 + rr_1);$$

$$ANB \text{ ruumala} = \frac{1}{6} \pi \cdot \overline{AB}^2 \cdot H,$$

millest järgneb:

$$\begin{aligned} V &= ANB \text{ ruumala} + ABLD \text{ ruumala} = \\ &= \frac{\pi H}{6} (AB^2 + 2r^2 + 2r_1^2 + 2rr_1). \end{aligned}$$



Joonis 117.

Tõmmates  $BM \perp AD$ , saame täisnurksest kolmnurgast  $ABM$ :

$$\overline{AB}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 = H^2 + (r - r_1)^2;$$

järelkult:

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi H}{6} [H + (r - r_1)^2 + 2r^2 + 2r_1^2 + 2rr_1] = \frac{\pi H}{6} [H^2 + 3(r^2 + r_1^2)] = \\ &= \frac{\pi H^3}{6} + \frac{\pi H}{2} (r^2 + r_1^2) = \pi \frac{r^2 + r_1^2}{2} H + \frac{\pi H^3}{6}. \end{aligned}$$

**1. järeldus.** Oletades, et  $r_1 = 0$ , saame saadud valemis keralõigu ruumala jaoks teise valemi:

$$\frac{\pi r^2 H}{2} + \frac{\pi H^3}{6}.$$

**2. järeldus.** Oletades, et  $r_1 = 0$ ,  $r = 0$  ja  $H = 2R$ , saame kera ruumalaks

$$\frac{\pi (2R)^3}{6} = \frac{\pi \cdot 8R^3}{6} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

## Harjutused.

**57.** Silindri külgpindala  $s$  ja ruumala  $v$  kaudu leida põhja raadius ning kõrgus.

**58.** Kuidas suhtuvad koonuse põhja-pindala, kül- ja täis-pindalad, kui koonuse moodustaja võrdub põhja läbimõõduga?

**59.** Koonuse ruumala  $V$  ja täis-pindala  $S$  kaudu leida tema raadius ja kõrgus.

**60.** Leida koonuse ruumala, teades, et selle koonuse tasapinnale laotatud külgpind moodustab ringisektori, mille raadius on 3 meetrit ning keskpunkti juures asuv nurk  $= 120^\circ$ .

**61.** Leida niisuguse lõigu raadius, mis on rööbik koonuse põhjale ning poolitab koonust, kui koonuse põhja raadius on  $R$ .

**62.** Leida tüvikoonuse külgpindala, kui ta kõrgus on  $H$  ning põhjade raadiused on  $R$  ja  $r$ .

**63.** Koonus, mille kõrgus on  $H$  ja põhja raadius on  $R$ , on lõigatud põhjaga rööbiti nii, et lõigatud väikese koonuse täis-pindala võrdub antud koonuse külgpindalaga. Leida lõike kaugus tipust.

**64.** Silindril ja tüvikoonusel on ühine põhi ja ühine kõrgus, kusjuures silindri ruumala on kaks korda suurem tüvikoonuse ruumalast. Leida tüvikoonuse põhjade pindade suhe.

**65.** Leida kera pindala, kui kera ruumala on  $V$ .

**66.** Leida tasapinna kaugus kera keskpunktist, kui ta lõikab keralõiku, mille kõver-pindala on  $S$ .

**67.** Kera ümber on joonestatud silinder ja võrdkülgne koonus. Kuidas suhtuvad nende kolme keha pind- ja ruumalad isekeskis?

**68.** Leida kaldruudu ehk rombi pöördumisel moodustatud keha ruumala, kui kaldruudu kül  $= a$  ja üks nurkjoon ehk diagonaal  $= b$ , kusjuures ta teise nurkjoone ümber pöördub.

**69.** Kui  $V$ ,  $V_1$  ja  $V_2$  on kehade ruumalad, mis on moodustatud täisnurkse kolmnurga järjekordse pöördumisega hüpoteenuusi ja kahe kaateti ümber, siis tõestada, et  $\frac{1}{V_2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$ .

70. Leida keha pindala, kui keha on saadud sel teel, et täisnurkne kolmnurk, mille kaatedid on  $a$  ja  $b$ , pöörduv hüpotenuusi ümber.

71. Võrdhaarse (sarik-)kolmnurga pöördumisel põhja ümber moodustatud keha pindala on sama suur kui selle kera pindala, mille läbimõõt võrdub kolmnurga alusega. Leida kolmnurga kõrguse ja aluse suhe.

72. Leida keha ruumala, kui keha on moodustatud sel teel, et püst-külk, mille küljed on  $a$  ja  $b$ , pöörduv sirge ümber, mis kulgeb üht püst-küliku tippu ning on risti tippu kulgeva nurkjoonega.

73. Trapetsi  $ABCD$  sisse, mille nurgad  $B$  ja  $C$  on täisnurgad, külg  $AD = 2$  m, on joonestatud ringjoon, mille raadius on  $R$ . Leida tüvikoonuse ruumala, kui ta on moodustatud trapetsi  $ABCD$  pöördumisel  $BC$  ümber.

74. Koonuse telg sünnitab moodustajaga 30-kraadilise nurga. Koonusesse on mahutatud kera, mille raadius  $= 1$  m ja mis puutub koonust ringjoont mööda. Leida puute-ringjoone raadius.

75. Kera ümber on joonestatud koonus, mille moodustaja võrdub põhja läbimõõduga. Leida kehade ruumalade suhe.

76. Kuubi (ehk korrapärase nelitahu) serva  $a$  kaudu leida ümber- ja sissejoonestatud kera raadiused.

77. Leida kera ümber- ja sissejoonestatud kuubi ruumalade suhe.

78. Tasapinnal seisavad kolm üksteist puutuvat kera, millede raadiused  $= R$ ; nende peale on pandud neljas sama suur kera. Kui kaugel tasapinnast on neljanda kera keskpunkt?

79. Silindri ruumala on 1 kantmeeter; ta kõrgus on läbimõõdust kaks korda suurem. Leida silindri kõrgus.

80. Silindri põhja läbimõõt  $= 165$  m, silindri täis-pindala  $= 1546$   $\square$ -sm. Leida silindri kõrgus.

81. Leida silindrilise raudtoru raskus, kui toru sisemine läbimõõt  $\cong 17$  sm, välimine läbimõõt  $= 18$  sm, toru pikkus  $= 74$  sm ning raua erikaal 7,7.

82. Koonusekujulisse riista, mis on pöörduv tipuga allapoole, on valatud 345 g elavhõbedat. Peale selle on teada, et tipu juures asuv nurk  $= 60^\circ$  ja et elavhõbede erikaal on 13,596. Leida, kui kõrgele oli valatud elavhõbedat.

83. Leida niisuguse tüvikoonuse külg-pindala, mille põhjade raadiused on 27 ja 18 sm ning moodustaja  $= 21$  sm.

84. Kui kaugel kera keskpunktist tuleb tõmmata lõik-tasapind nii, et väiksema keralõigu pindala suhtuks koonuse pindalasse nõnda, kui 7 : 4, kusjuures koonusel on keralõiguga ühine põhi ning koonuse tipuks on kera keskpunkt? Kera raadius  $= 2,425$  meetrit.

85. Leida niisuguse keha ruumala, mis on saadud korrapärase kuusnurga pöördumisel ühe tema külje  $a$  ümber.

86. Leida ümber kuubi joonestatud kera raadius, kui kuubi serv  $= 1$  meeter.

87. Tühi raudkera, mille välimine raadius  $= 0,154$  m, ujub vees, vajudes ainult poolest saadik vette. Leida kera raudkesta paksus, kui raua erikaal  $= 7,7$ .

88. Leida niisuguse keha ruumala, mis on saadud korrapärase kolmnurga pöördumisel kolmnurga tippu kulgeva telje ümber, kui telg on tippu vastasküljega rööbiti ning kui  $\triangle$ -ga külg on  $a$ .

89. Antud võrdhaarse (sarik-)kolmnurga  $ABC$  külg on  $a$ , külje  $BC$  peale konstrueeritakse ruut  $BCDE$  kolmnurgale vastassihis. Leida viisnurga  $ABEDC$  pöördumisel külg  $AB$  ümber saadud keha ruumala.

90. Antud ruudu  $ABCD$  külg  $= a$ . Tipust  $A$  on tõmmatud nurkjoonele  $AC$  ristjoon  $AR$ , mille ümber pöördub ruut. Leida ruudu pöördumisel ümber  $AR$  saadud keha pind- ja ruumala.

91. Antud korrapärase kuusnurga  $ABCDEF$  külg on  $a$ . Tipust  $A$  on tõmmatud raadiusele  $OA$  ristjoon  $AR$ . Leida kuusnurga pöördumisel ümber  $AR$  saadud keha pind- ja ruumala.

92. Kerasse, mille raadius  $= 2$ , on tehtud diameetrit mööda silindrisarnane auk. Leida ülejäänud keha ruumala, kui silindrisarnase augu raadius  $= 1$ .

## Geomeetrilised meetodid.

148. Iga geomeetriline meetod on *muunduste meetod*. Üks tõestamise peaviisidest seisab selles, et lause tingimust ning väidet nii muundada, et väide saab silmanähtavaks. Selle jaoks on tarvis **matemaatiliste oskussõnade asemele panna nende definitsioonid** (Pascali lause)

Järgmisest näitusest võib järeldada, et mõnikord ühest seesugusest asemelepanust on küllalt, et lause tõestuks.

**Näitus.** *Võrdhaarse kolmnurga mediaan on ühtlasi ka nurgapoolitaja* (joonis 118).

Selle lause tingimus ja väide on järgmised:

(1)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Tingimus: Kui } \triangle ABC \text{ on võrdhaarne ning tema mediaan } BD, \\ \text{Väide: siis on } BD \text{ ka nurgapoolitaja.} \end{array} \right.$

Kõige pealt lahendame järgmised küsimused:

1. Mis tähendab, et  $\triangle ABC$  on võrdhaarne?

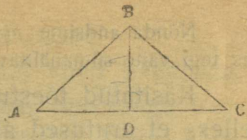
*Vastus:* See tähendab, et  $AB = BC$ ,

2. Mis tähendab et  $\triangle ABC$  mediaan on  $BDE$ ?

Vastus: See tähendab, et  $AD = DC$ .

3. Mis tähendab, et  $BD$  peab olema  $\sphericalangle ABC$  nurgapoolitajaks?

Vastus: See tähendab, et  $\sphericalangle ABD$  peab võrduma  $\sphericalangle DBC$ .



Joonis 118.

Nende vastuste tagajärjel võtavad tingimus ja väide järgneva kuju:

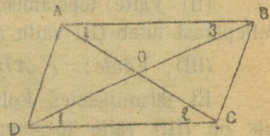
$$(II) \begin{cases} \text{Tingimus: } \begin{cases} AB = BC, \\ AD = DC, \\ BD = BD. \end{cases} \\ \text{Väide: } \sphericalangle ABD = \sphericalangle DBC. \end{cases}$$

Tarvitades oskussõnu ja kujutades tingimust ning väidet (II), võime kolmnurkade 3-da ühtivuslause põhjal tingimusest minna väitele.

**149.** Teistel juhustel tuleb tingimuse muundamiseks peale definitsioonide asemelepanu tarvitada eelmisi lauseid ning aksioome, nagu see selgub järgmises näituses.

**Näitus.** Rööpküliliku nurkjooned jaguvad lõikepunktis pooleks (joonis 119).

$$(I) \begin{cases} \text{Tingimus: } \begin{cases} \text{Nelinaruk } ABCD \\ \text{on rööpkülilik.} \end{cases} \\ \text{Väide: } \begin{cases} AO = OC, \\ DO = OB. \end{cases} \end{cases}$$



Joonis 119.

Tingimuse (I) asemele võib panna järgmise:

$$(II) \text{ Tingimus: } \begin{cases} AB \parallel DC \\ AD \parallel BC; \end{cases}$$

et aga rööpjoonte lõigud rööpjoonte vahel on võrdsed ja et rööpjooned, mida kolmas lõikab, moodustavad võrdsed sisemised põiknurgad, siis võib tingimusele (II) anda järgmise kuju:

$$(III) \text{ Tingimus: } \begin{cases} AB = DC \\ \sphericalangle 1 = \sphericalangle 2 \\ \sphericalangle 3 = \sphericalangle 4; \end{cases}$$

ja tingimuse (III) asemele võib panna järgmise:

$$(IV) \text{ Tingimus: } \triangle AOB = \triangle DOC.$$

Siis saavad tingimus ja väide järgmise kuju:

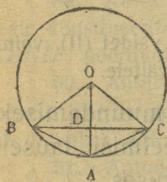
$$(V) \begin{cases} \text{Tingimus: } \triangle AOB = \triangle DOC. \\ \text{Väide: } \begin{cases} AO = OC. \\ DO = OB. \end{cases} \end{cases}$$

Nõnda andsime järgsele muunduste abil tingimusele niisuguse kuju, mis tegi väite silmanähtavaks.

Käsitatud tõestuseviisi nimetatakse *sünteesiks*. Ta seisab selles, et arutused algavad tingimuste uurimistest ning seletustest ning lõpevad väitega.

**150.** Selle asemel, et muundada tingimust, tehes väidet silmanähtavaks, on tarvilik arutada väidet, tehes teda niisuguseks, mida oleks kerge tuletada antud tingimusest.

**Näitus.** Kõõluga risti olev raadius jagab kõõlule toetuva kaare pooleks (joonis 120).



Joonis 120.

Tingimus:  $\begin{cases} OA \perp BC, \\ \sphericalcap BC \text{ toetub kõõlule } BC. \end{cases}$

(I) Väide:  $\sphericalcap BA = \sphericalcap AC$ .

Ühendame punktiga A punktid B ja C. Et võrdsed kaared toetuvad võrdsetele kõõludele ja vastupidi, siis on tarvis (sama tingimuse maksvusel) tõestada:

(II) Väide:  $BA = AC$ .

(II) Väite tõestamiseks on tarvis tõestada, et  $\triangle ABD = \triangle ACD$ ; sellepärast tuleb (II) väite asemele panna:

(III) Väide:  $\triangle ABD = \triangle ACD$ .

Et täisnurksetes kolmnurkades  $ABD$  ja  $ACD$  on kaatet  $AD$  ühine, siis on (III) väite tõestamiseks tarvis näidata, et kaatetid  $BD$  ja  $DC$  on võrdsed; seega tuleb (III) väite asemele panna:

(IV) Väide:  $BD = DC$ .

Selle tõestamiseks on aga tarvis näidata, et  $\triangle OBD = \triangle OCD$ ; sellepärast saame:

(V)  $\begin{cases} \text{Tingimus: } OA \perp BC; \\ \text{Väide: } \triangle OBD = \triangle OCD. \end{cases}$

Nüüd aga on väide muutunud silmanähtavaks, sest et neis täisnurksetes kolmnurkades on kaatet  $OD$  ühine, hüpotenuusid  $OB$  ja  $OC$ , kui raadiused, võrdsed.

Käsitatud tõestamisviisi nimetatakse *analüüsiks*. Ta seisab selles, et väite arutamisel minnakse tingimusele. Selle viisi abil lahendatakse suurem jagu konstruktsiooni-ülesandeid.

**151.** Lausetel tõestamisel on tarvis tähele panna järgmist juhust:



# S i s u.

	lhk.
<b>I osa.</b>	
Tasapinna asendi määramine . . . . .	3—5
Sirgjoone ja tasapinna suhteline asend . . . . .	3—5
Kahe tasapinna suhteline asend . . . . .	5
<b>II osa.</b>	
Sirgjoon ja tema rist-tasapind . . . . .	5—10
<b>III osa.</b>	
Rööbikud sirgjooned ja tasapinnad . . . . .	10—19
Rööbikud sirgjooned . . . . .	10—13
Sirgjoon ja tema rööp-tasapind . . . . .	13—15
Rööbikud tasapinnad . . . . .	15—19
<b>IV osa.</b>	
Kahetahused nurgad . . . . .	19—23
Rist-tasapinnad . . . . .	23—24
Tasapinna ja sirgjoone nurk . . . . .	25
<b>V osa.</b>	
Ruumisnurgad . . . . .	25—28
Kolmetahuste nurkade ühtivus . . . . .	28—30
<b>VI osa.</b>	
Hulktahud . . . . .	30—31
Korrapärased hulktahud . . . . .	31—32
Tahksamma ehk prisma . . . . .	32—34
Rööptahukas . . . . .	34—36
Püramiid . . . . .	36—40
Harjutused . . . . .	40—41
<b>VII osa.</b>	
Tahksamba ja püramiidi ruumala . . . . .	41—49
Püramiidi ruumala . . . . .	49—59
Prismade ja püramiidide ühtivus . . . . .	59—60
Hulktahkude sarnasus . . . . .	60—63
Arvutus-ülesanded . . . . .	63—65
<b>VIII osa.</b>	
Pöördkehad ja pinnad . . . . .	65—66
Silinder . . . . .	66—67
Silindri ja tasapinna suhteline asend . . . . .	67—69
Koonus . . . . .	69—72
Tüvikoonus . . . . .	72—75
Sarnased silindrid ja koonused . . . . .	75
<b>IX osa.</b>	
Kera (sfäär) . . . . .	75—77
Suuringide omadused . . . . .	77—78
Sissejoonestatud kera . . . . .	78—79
Kahe kera suhteline asend . . . . .	79—80
Kera ning tema osade pind ja ruumala . . . . .	81—90
Harjutused . . . . .	90—92
Geomeetrilised meetodid . . . . .	92—95
Sisu . . . . .	96



A

36671

V

56027