Tartu Ülikool
Matemaatika-informaatikateaduskond
Matemaatika instituut

Rihhard Nadel

# Diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kaasruumide kirjeldused oktaeedrilisuse abil

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller, teadur, *PhD*
Johann Langemets, assistent, *MSc*

Tartu 2014

# Diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kaasruumide kirjeldused oktaeedrilisuse abil

Bakalaureusetöö

Rihhard Nadel

**Lühikokkuvõte**. Bakalaureusetöös antakse erinevate diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kaasruumide kirjeldus R. Halleri, J. Langemetsa ja M. Põldvere ühisartikli „*On duality of diameter 2 properties*“ põhjal, mis on ilmumas ajakirjas *Journal of Convex Analysis*. Lisaks üldistatakse oktaeedrilisuse stabiilsustulemusi absoluutse normiga korrutisruumidele.

**Märksõnad**. Diameeter-2 omadus, oktaeedriline norm, absoluutne norm.

# Characterization of dual spaces of Banach spaces with diameter 2 properties using octahedrality

Bachelor's thesis

Rihhard Nadel

**Abstract**. The objective of this bachelor's thesis is to characterize dual spaces of Banach spaces with diameter 2 properties following the paper *"On duality of diameter 2 properties"* by R. Haller, J. Langemets, and M. Põldvere, which is due to appear in *Journal of Convex Analysis*. Also, we generalize some stability results of octahedrality to product spaces with an absolute norm.

**Key words.** Diameter 2 property, octahedral norm, absolute norm.

# Sisukord

# Sissejuhatus

Käesoleva bakalaureusetöö põhieesmärk on artikli [HLP] eeskujul üksikasjalikult esitada erinevate diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kaasruumi kirjeldus. Bakalaureusetöö on osalt iseseisev teoreetiline uurimus ja osalt referatiivne.

Norra matemaatikute Abrahamseni, Lima ja Nygaardi ühisartiklis [ALN] uuriti kolme formaalselt erinevat diameeter-2 omadust — lokaalset diameeter-2 omadust, diameeter-2 omadust ja tugevat diameeter-2 omadust. Samas artiklis püstitati hüpotees, et need omadused on üldiselt erinevad. Nüüdseks on see hüpoteesi teaduslikult kinnitatud — kolm vaadeldavat diameeter-2 omadust on tõepoolest üldiselt erinevad (vt. [L], [BLR1]).

Tugeva diameeter-2 omaduse ja oktaeedrilisuse seosele osutas arvatavasti esimest korda Godefroy artiklis [G]. Artiklis [HLP] anti vastava oktaeedrilisuse abil kõigi diameeter-2 omaduste kirjeldus.

Bakalaureusetöö põhiosa koosneb viiest paragrahvist. Esimeses kolmes paragrahvis antakse vajalikud eelteadmised ning tuuakse sisse diameeter-2 omadused ja oktaeedrilisuse omadused. Töö põhieesmärk täidetakse neljandas paragrahvis, kus esitatakse erinevate diameeter-2 omadustega ruumide esimese kaasruumi kirjeldus vastava oktaeedrilisuse omaduse abil. Viimases paragrahvis uuritakse oktaeedrilisuse päranduvust komponentruumidelt absoluutse normiga korrutisruumidele.

Käesolevas töös vaatleme ainult mittetriviaalseid reaalseid Banachi ruume.

Olgu $X$ Banachi ruum. Tähistagu $B_X$ ruumi $X$ kinnist ühikkera ja $S_X$ ruumi $X$ ühiksfääri. Ruumi $X$ pidevate lineaarsete funktsionaalide ruumi tähistame $X^*$. Ruumi $X$ alamhulga $A$ lineaarset katet tähistame $\operatorname{span} A$ ja diameetrit $\operatorname{diam} A$.

# 1 Eelteadmised

Olgu $X$ Banachi ruum.

**Definitsioon 1.1.** *Nõrk topoloogia* on ruumi $X$ vähim topoloogia, mille suhtes iga $x^* \in X^*$ korral $x^*\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^*(x)$, on pidev.

On teada (vt. [M, lk. 213]), et elemendi $x \in X$ ümbruste baasi nõrgas topoloogias moodustavad lahtised hulgad kujul

$$\{y \in X\colon |x_i^*(x-y)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$.

**Definitsioon 1.2.** Kujutust $j_X\colon X \to X^{**}$, kus iga $x \in X$ ja $x^* \in X^*$ korral

$$j_X(x)(x^*) = x^*(x),$$

nimetatakse ruumi $X$ *kanooniliseks sisestuseks* teise kaasruumi $X^{**}$.

Märgime siinkohal, et samastades elemendid $x \in X$ ja $j_X(x) \in X^{**}$, saame iga elementi $x \in X$ vaadelda funktsionaalina kaasruumil $X^*$ ja võime ruumi $X$ vaadelda teise kaasruumi $X^{**}$ alamruumina.

**Definitsioon 1.3.** **-nõrk topoloogia* on kaasruumi $X^*$ vähim topoloogia, mille suhtes iga $x \in X$ korral $x\colon X^* \to \mathbb{R}$, $x^* \mapsto x^*(x)$, on pidev.

On teada (vt. [M, lk. 224]), et elemendi $x^* \in X^*$ ümbruste baasi *-nõrgas topoloogias moodustavad lahtised hulgad kujul

$$\{y^* \in X^*\colon |(x^* - y^*)(x_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n\},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$.

**Teoreem 1.4** (Goldstine'i teoreem, vt. [M, teoreem 2.6.26])**.** *Ruumi $X$ ühikkera $B_X$ on *-nõrga topoloogia suhtes tihe teise kaasruumi $X^{**}$ ühikkeras $B_{X^{**}}$.*

**Teoreem 1.5** (Lokaalse refleksiivsuse printsiip, vt. [W, lk. 453]). *Kui* $E \subset X^{**}$ *ja* $F \subset X^{*}$ *on lõplikumõõtmelised alamruumid, siis iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub pidev lineaarne* $T\colon E \to X$ *nii, et iga* $x^{**} \in E$ *ja* $x^{*} \in F$ *korral*

$$(1-\varepsilon)\|x^{**}\| \le \|Tx^{**}\| \le (1+\varepsilon)\|x^{**}\|$$

*ja*

$$x^{*}(Tx^{**}) = x^{**}(x^{*}),$$

*kusjuures iga* $x \in E \cap X$ *korral*

$$Tx = x.$$

# 2 Diameeter-2 omadused

Käesoleva paragrahvi eesmärk on bakalaureusetöösse sisse tuua artiklis [ALN] käsitletud diameeter-2 omadused.

Olgu $X$ Banachi ruum.

**Definitsioon 2.1.** Banachi ruumi $X$ ühikkera *viiluks* nimetatakse hulka

$$S(x^*, \alpha) = \{x \in B_X \colon x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$.

Üldisemalt võib vaadelda mistahes alamhulga viile, kuid käesolevas bakalaureusetöös vaatleme vaid ühikkera viile.

**Definitsioon 2.2.** Viilude $S_1, \ldots, S_n$ ($n \in \mathbb{N}$) *kumeraks kombinatsiooniks* nimetatakse hulka

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i,$$

kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$ ja $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$.

Viilude $S_1, \ldots, S_n$ kumerat kombinatsiooni

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} S_i$$

nimetatakse viilude $S_1, \ldots, S_n$ *aritmeetiliseks keskmiseks.*

**Definitsioon 2.3.** Öeldakse, et Banachi ruumil $X$ on

(a) *lokaalne diameeter-2 omadus*, kui iga $B_X$ viilu diameeter on 2;

(b) *diameeter-2 omadus*, kui iga $B_X$ mittetühja suhteliselt nõrgalt lahtise alamhulga diameeter on 2;

(c) *tugev diameeter-2 omadus*, kui iga $B_X$ viilude kumera kombinatsiooni diameeter on 2.

Märgime, et iga ühikkera viil on mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine hulk. Seega, kui ruumil $X$ on diameeter-2 omadus, siis on tal ka lokaalne diameeter-2 omadus. On teada, et tugevast diameeter-2 omadusest järeldub diameeter-2 omadus (vt. [L]).

**Näide 2.4.** Banachi ruumidel $c_0$, $C[0,1]$, $\ell_\infty$ ja $L_1[0,1]$ on tugev diameeter-2 omadus.

*Põhjendus.* Kõik toodud näited leiab koos põhjendusega või vastava viitega magistritööst [L].

Näitame definitsiooni 2.3 põhjal, et ruumil $c_0$ on tugev diameeter-2 omadus. Olgu $S_1 := S(x_1^*, \alpha_1), \dots, S_n := S(x_n^*, \alpha_n)$ viilud, kus iga indeksi $i$ korral $x_i^* \in S_{c_0^*}$ ja $\alpha_i > 0$. On hästi teada, et $c_0^* = \ell_1$. Seda samasust arvestades võime kirjutada $x_1^* = (\beta_k^1), \dots, x_n^* = (\beta_k^n) \in S_{\ell_1}$ ja iga indeksi $i$ korral

$$S_i = \{(\xi_k) \in B_{c_0} \colon \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^i \xi_k > 1 - \alpha_i\}.$$

Kuna iga indeksi $i$ korral $\sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k^i| = 1$, siis leidub $N_i \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{k=1}^{N_i} |\beta_k^i| > 1 - \frac{\alpha_i}{2}.$$

Olgu $N = \max_{1 \le i \le n} N_i$. Valime elemendid $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in c_0$ nii, et iga indeksi $i$ korral

$$x_i = (\xi_k^i) = \left(\operatorname{sgn} \beta_1^i, \dots, \operatorname{sgn} \beta_N^i, 1, 0, \dots\right)$$

ja

$$y_i = (\eta_k^i) = \left(\operatorname{sgn} \beta_1^i, \dots, \operatorname{sgn} \beta_N^i, -1, 0, \dots\right).$$

Ilmselt on $x_i, y_i \in B_{c_0}$. Näitame, et $x_i, y_i \in S_i$. Kuna

$$|\beta_{N+1}^i| < \sum_{k=N+1}^{\infty} |\beta_k^i| < \frac{\alpha_i}{2},$$

siis

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^i \xi_k^i = \sum_{k=1}^{N} |\beta_k^i| + \beta_{N+1}^i > 1 - \frac{\alpha_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2} = 1 - \alpha_i$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^i \eta_k^i = \sum_{k=1}^{N} |\beta_k^i| - \beta_{N+1}^i > 1 - \frac{\alpha_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2} = 1 - \alpha_i.$$

Seega $x_i, y_i \in S_i$. Vaatleme viilude $S_1, \dots, S_n$ mingit kumerat kombinatsiooni

$$K = \lambda_1 S_1 + \dots + \lambda_n S_n,$$

kus $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ ja $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Olgu

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{ja} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i.$$

On selge, et $x, y \in K$ ja

$$\begin{aligned} \operatorname{diam} K \geq \|x - y\| &= \|\lambda_1(x_1 - y_1) + \dots + \lambda_n(x_n - y_n)\| = \\ &= \|(0, \dots, 0, \lambda_1(1 - (-1)) + \dots + \lambda_n(1 - (-1)), 0, 0, \dots)\| = 2. \end{aligned}$$

Järelikult on ruumil $c_0$ tugev diameeter-2 omadus. □

**Näide 2.5.** Jadaruumil $\ell_1$ pole lokaalset diameeter-2 omadust.

*Põhjendus.* Arvestame, et kaasruum $\ell_1^*$ on samastatav jadaruumiga $\ell_\infty$. Vaatleme viilu $S = S(x^*, \frac{1}{3})$, kus $x^* \in S_{\ell_1^*}$ samastub jadaga $(1, 0, 0, \dots) \in S_{\ell_\infty}$. Seega

$$S = \{(\xi_k) \in B_{\ell_1} \colon \xi_1 > \frac{2}{3}\}.$$

Näitame, et $\operatorname{diam} S \leq 1$. Kui $x = (\xi_k) \in S$ ja $y = (\eta_k) \in S$, siis saame, et

$$|\xi_1 - \eta_1| < \frac{1}{3}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| < \frac{1}{3} \quad \text{ja} \quad \sum_{k=2}^{\infty} |\eta_k| < \frac{1}{3},$$

mistõttu

$$\|x - y\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \eta_k| \leq |\xi_1 - \eta_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |\xi_k| + \sum_{k=2}^{\infty} |\eta_k| < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

Seega $\operatorname{diam} S \leq 1 < 2$. Järelikult ruumil $\ell_1$ pole lokaalset diameeter-2 omadust. □

Artikkel [ALN] on esimene põhjalikum diameeter-2 omaduste uurimus, aga sellest ei selgu, kas diameeter-2 omadused on alati samad või erijuhul erinevad. Muuhulgas tõestatakse artiklis [ALN], et $1 < p < \infty$ korral on Banachi ruumide $\ell_p$-summal (s.t. $\ell_p$-normiga otsesummal) diameeter-2 omadus või lokaalne diameeter-2 omadus, kui komponentidel on vastav diameeter-2 omadus.

Magistritöös [L] tõestati, et kui $1 < p < \infty$, siis Banachi ruumide $\ell_p$-summal ei ole tugevat diameeter-2 omadust. Seega on näiteks ruumil $c_0 \oplus_2 c_0$ on diameeter-2 omadus, aga ei ole tugevat diameeter-2 omadust.

Nüüdseks on teada, et diameeter-2 omadus ja lokaalne diameeter-2 omadus ei ole üldiselt samad (vt. [BLR1]).

Järgnevas näitame, et tugev diameeter-2 omadus on samaväärne sellega, et iga viilude aritmeetilise keskmise diameeter on 2. Selle näitamiseks kasutame järgmist lemmat.

**Lemma 2.6.** *Iga $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, kus $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ nii, et*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i - \frac{k_i}{m} \right| < \varepsilon,$$

*kus $m = k_1 + \cdots + k_n$.*

*Tõestus.* Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$, kus $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, ja $\varepsilon > 0$. Valime $m \in \mathbb{N}$ sellise, et $m\varepsilon > 2n$ ja

$$l_1 := \lfloor m\lambda_1 \rfloor, \ldots, l_n := \lfloor m\lambda_n \rfloor > 0.$$

Olgu iga indeksi $i$ korral

$$k_i = \begin{cases} l_1 + m - \sum_{i=1}^{n} l_i, \text{ kui } i = 1, \\ l_i, \text{ kui } i \geq 2. \end{cases}$$

On selge, et $m = \sum_{i=1}^n k_i$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\left|\lambda_1 - \frac{k_1}{m}\right| &\leq \left|\lambda_1 - \frac{l_1}{m}\right| + \left|\frac{k_1}{m} - \frac{l_1}{m}\right| = \\
&= \left|\lambda_1 - \frac{l_1}{m}\right| + \left|\frac{m - \sum_{i=1}^n l_i}{m}\right| = \\
&= \left|\lambda_1 - \frac{l_1}{m}\right| + \left|\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{l_i}{m}\right)\right|.
\end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i - \frac{k_i}{m}\right| &\leq \left|\sum_{i=1}^n \left(\lambda_i - \frac{l_i}{m}\right)\right| + \sum_{i=1}^n \left|\lambda_i - \frac{l_i}{m}\right| \leq \\
&\leq 2\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i - \frac{l_i}{m}\right| = \\
&= \frac{2}{m}\sum_{i=1}^n (m\lambda_i - l_i) \leq \\
&\leq \frac{2}{m}\sum_{i=1}^n 1 = \frac{2n}{m} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Sellega on lemma 2.6 tõestatud. □

**Teoreem 2.7.** *Banachi ruumil on tugev diameeter-2 omadus parajasti siis, kui iga tema ühikkera viilude aritmeetilise keskmise diameeter on 2.*

*Tõestus. Tarvilikkus* on ilmne.

*Piisavus.* Olgu $X$ Banachi ruum. Eeldame, et $B_X$ viilude aritmeetilise keskmise diameeter on alati 2. Vaatleme $B_X$ viilude $S_1, \ldots, S_n$ kumerat kombinatsiooni

$$K = \lambda_1 S_1 + \cdots + \lambda_n S_n,$$

kus $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ ja $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Näitame, et $\operatorname{diam} K = 2$. Olgu $\varepsilon > 0$.

Valime lemma 2.6 põhjal $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{i=1}^n \left|\lambda_i - \frac{k_i}{m}\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

kus $m = k_1 + \cdots + k_n$. Vaatleme hulka

$$K' = \frac{1}{m}\left(\underbrace{(S_1 + \cdots + S_1)}_{k_1 \text{ tükki}} + \cdots + \underbrace{(S_n + \cdots + S_n)}_{k_n \text{ tükki}}\right).$$

On selge, et $K'$ on viilude aritmeetiline keskmine ning seega on eelduse põhjal $\operatorname{diam} K' = 2$. Järelikult leiduvad elemendid $x, y \in K'$ nii, et

$$\|x - y\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kuna $S_1, \ldots, S_n$ on ruumi $X$ kumerad alamhulgad, siis elemendid $x$ ja $y$ avalduvad kujul

$$x = \frac{k_1}{m} x_1 + \cdots + \frac{k_n}{m} x_n$$

ja

$$y = \frac{k_1}{m} y_1 + \cdots + \frac{k_n}{m} y_n,$$

kus $x_i, y_i \in S_i$. Olgu

$$\tilde{x} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

ja

$$\tilde{y} = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_n y_n.$$

Paneme tähele, et $\tilde{x}, \tilde{y} \in K$. Kuna

$$\begin{aligned} \|(x - \tilde{x}) - (y - \tilde{y})\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \frac{k_i}{m})(x_i - y_i) \right\| \leq \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i - \frac{k_i}{m} \right| < 2 \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

siis

$$\begin{aligned} \|\tilde{x} - \tilde{y}\| &\geq \|x - y\| - \|(x - \tilde{x}) - (y - \tilde{y})\| \geq \\ &\geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Seega $\operatorname{diam} K = 2$. Järelikult on ruumil $X$ tugev diameeter-2 omadus. $\square$

# 3 Oktaeedrilisus

Käesolevas paragrahvis tutvume artiklis [HLP] uuritud oktaeedrilisuse omadustega.

Olgu $X$ Banachi ruum.

**Definitsioon 3.1.** Öeldakse, et Banachi ruum $X$ on

(a) *lokaalselt oktaeedriline*, kui iga $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $s \in \mathbb{R}$ korral
$$\|sx + y\| \geq (1 - \varepsilon)(|s|\|x\| + \|y\|);$$

(b) *nõrgalt oktaeedriline*, kui iga ruumi $X$ lõplikumõõtmelise alamruumi $E$, $x^* \in B_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in E$ korral
$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + \|y\|);$$

(c) *oktaeedriline*, kui iga ruumi $X$ lõplikumõõtmelise alamruumi $E$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in E$ korral
$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + \|y\|).$$

Paneme tähele, et ruumi oktaeedrilisusest järeldub tema nõrk oktaeedrilisus ja ruumi nõrgast oktaeedrilisusest järeldub tema lokaalne oktaeedrilisus. Artiklist [HLP] on teada, et üldjuhul vastupidised implikatsioonid ei kehti.

**Näide 3.2.** Banachi ruumid $C[0, 1]$, $\ell_1$ ja $L_1[0, 1]$ on oktaeedrilised.

*Põhjendus.* Ruumide $C[0, 1]$ ja $\ell_1$ oktaeedrilisust näitame üksikasjalikult lausetes 3.9 ja 3.10 pärast oktaeedrilisuse kriteeriumi sisse toomist. Ruumi $L_1[0, 1]$ oktaeedrilisus on põhjendatud artiklis [BLR2, järeldus 2.5 ja märkus 2.6]. □

**Näide 3.3.** Banachi ruum $c_0$ pole lokaalselt oktaeedriline.

*Põhjendus.* Eeldame vastuväiteliselt, et ruum $c_0$ on lokaalselt oktaeedriline. Olgu $x = (1, 0, 0, \dots) \in S_{c_0}$ ja $\varepsilon = 1/4$. Eelduse põhjal leidub $y = (\eta_k) \in S_{c_0}$ nii, et
$$\|x \pm y\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + \|y\|) = \frac{3}{2}.$$

Viimane võrratus on samaväärne võrratustega

$$\sup\{|1+\eta_1|, |\eta_2|, \dots\} \geq \frac{3}{2}$$

ja

$$\sup\{|1-\eta_1|, |\eta_2|, \dots\} \geq \frac{3}{2}.$$

Kuna $y \in S_{c_0}$, siis iga indeksi $k$ korral $|\eta_k| \leq 1$. Seega saame, et

$$|1+\eta_1| \geq \frac{3}{2} \quad \text{ja} \quad |1-\eta_1| \geq \frac{3}{2}$$

ehk

$$\eta_1 \geq \frac{1}{2} \quad \text{ja} \quad \eta_1 \leq -\frac{1}{2}.$$

Jõudsime vastuoluni. Järelikult ruum $c_0$ pole lokaalselt oktaeedriline. □

Alljärgnevates lausetes 3.5–3.8 toome oktaeedrilisuste samaväärsed tingimused.

**Lemma 3.4.** *Kui $x, y \in S_X$, siis mistahes $t > 0$ korral kehtib*

$$\|x+ty\| \geq \max\{1,t\}\|x+y\| - |t-1|.$$

*Tõestus.* Olgu $x, y \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $t \geq 1$, siis saame, et

$$\begin{aligned}\|x+ty\| &= \|tx+ty-(t-1)x\| \geq \\ &\geq t\|x+y\| - |t-1| = \\ &= \max\{1,t\}\|x \pm y\| - |t-1|.\end{aligned}$$

Kui $t < 1$, siis saame, et

$$\begin{aligned}\|x+ty\| &= \|x+y+(t-1)y\| \geq \\ &\geq \|x+y\| - |t-1| = \\ &= \max\{1,t\}\|x \pm y\| - |t-1|.\end{aligned}$$

□

**Lause 3.5** ([HLP, lemma 3.1])**.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *Ruum $X$ on lokaalselt oktaeedriline.*

(ii) *Iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $t > 0$ korral*

$$\|x \pm ty\| \geq (1-\varepsilon)(\|x\| + t).$$

(iii) *Iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et*

$$\|x \pm y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

*Tõestus.* (i) $\Rightarrow$ (iii). Eeldame, et kehtib (i). Olgu $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Eelduse põhjal leidub $y \in S_X$ nii, et iga $s \in \mathbb{R}$ korral

$$\|sx + y\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(|s|\|x\| + \|y\|).$$

Kui $s = 1$, siis saame võrratuse

$$\|x + y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Kui $s = -1$, siis saame võrratuse

$$\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Kokkuvõttes

$$\|x \pm y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Järelikult kehtib (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Eeldame, et kehtib (iii). Kui $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$, siis eelduse põhjal leidub $y \in S_X$ nii, et

$$\|x \pm y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt $t > 0$. Lemma 3.4 abil saame iga $t > 0$ korral

$$\begin{aligned}
\|x \pm ty\| &\geq \max\{1,t\}\|x \pm y\| - |t-1| \geq \\
&\geq \max\{1,t\}(2-\varepsilon) - (\max\{1,t\} - \min\{1,t\}) = \\
&= \max\{1,t\}(1-\varepsilon) + \min\{1,t\} = \\
&= 1 + t - \max\{1,t\}\varepsilon \geq \\
&\geq 1 + t - (1+t)\varepsilon = \\
&= (1-\varepsilon)(1+t) = F \\
&= (1-\varepsilon)(\|x\| + t).
\end{aligned}$$

Järelikult kehtib (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Olgu $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $x \neq 0$, siis eelduse põhjal leidub selline $y \in S_X$, et iga $t > 0$ korral

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} \pm ty \right\| \geq (1-\varepsilon)(1+t).$$

Kui $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, siis $t = \frac{1}{|s|\|x\|}$ korral saame viimase võrratuse mõlemaid pooli arvuga $t$ läbi jagades, et

$$\|sx + y\| \geq (1-\varepsilon)(|s|\|x\| + \|y\|).$$

Kui $s = 0$, siis viimane võrratus kehtib triviaalselt.

Kui $x = 0$, siis suvalise $y \in S_X$ ja iga $s \in \mathbb{R}$ korral saame, et

$$\|sx + y\| = \|y\| \geq (1-\varepsilon)(|s|\|x\| + \|y\|).$$

Järelikult kehtib (i). $\square$

**Lause 3.6** ([HLP, lause 2.4]). *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *Ruum $X$ on nõrgalt oktaeedriline.*

(ii) *Iga ruumi $X$ lõplikumõõtmelise alamruumi $E$, $x^* \in B_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in S_E$ ja $t > 0$ korral*

$$\|x + ty\| \geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t).$$

(iii) *Iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_X$, $x^* \in B_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga indeksi $i$ ja $t \geq \varepsilon$ korral*

$$\|x_i + ty\| \geq (1-\varepsilon)(|x^*(x_i)| + t).$$

*Tõestus.* (i) $\Rightarrow$ (iii). Eeldame, et kehtib (i). Olgu $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B_X$, $x^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $E = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Eelduse kohaselt leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in E$ ja $t > 0$ korral

$$\|x + ty\| \geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t).$$

Seega iga indeksi $i$ ja $t \geq \varepsilon$ korral

$$\|x_i + ty\| \geq (1-\varepsilon)(|x^*(x_i)| + t).$$

Järelikult kehtib (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Eeldame, et kehtib (iii). Olgu $E$ ruumi $X$ lõplikumõõtmeline alaruum, $x^* \in B_{X^*}$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Valime $\delta, \gamma > 0$ nii, et $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ja $\gamma \leq \frac{\delta^2}{2}$. Kuna $E$ on lõplikumõõtmeline, siis leidub tema ühiksfäärile $S_E$ lõplik $\gamma$-võrk $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_E$. Eelduse põhjal leidub selline $y \in S_X$, et iga indeksi $i$ ja $t \geq \delta$ korral

$$\|x_i + ty\| \geq (1-\delta)(|x^*(x_i)| + t).$$

Fikseerime vabalt $x \in S_E$ ja $t > 0$. Kui $t \leq \delta$, siis $\delta$ valiku tõttu saame, et

$$\begin{aligned}\|x + ty\| &\geq \|x\| - t\|y\| \geq 1 - \delta \geq \\ &\geq (1-\varepsilon)(1+\delta) \geq (1-\varepsilon)(1+t) \geq \\ &\geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t).\end{aligned}$$

Kui $t \geq \delta$, siis valime sellise indeksi $i$, et

$$\|x - x_i\| \leq \gamma.$$

Seega

$$|x^*(x_i)| \geq |x^*(x)| - \|x - x_i\| \geq |x^*(x)| - \gamma$$

ja

$$\begin{aligned}\|x + ty\| &\geq \|x_i + ty\| - \|x - x_i\| \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x_i)| + t) - \gamma \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x)| + t) - (2-\delta)\gamma \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x)| + t) - \delta^2 \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x)| + t) - \delta t \geq \\ &\geq (1-2\delta)(|x^*(x)| + t) \geq \\ &\geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t).\end{aligned}$$

Järelikult kehtib (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Olgu $E \subset X$ lõplikumõõtmeline alamruum, $x^* \in B_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Eelduse põhjal leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in S_E$ ja $t > 0$ korral

$$\|x + ty\| \geq (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + t).$$

Kui $x \in E \setminus \{0\}$, siis

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + \frac{1}{\|x\|} y \right\| \geq (1 - \varepsilon) \left( \left| x^* \left( \frac{x}{\|x\|} \right) \right| + \frac{1}{\|x\|} \right)$$

ehk

$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + \|y\|).$$

Kui $x = 0$, siis $x^*(x) = 0$ ja

$$\|x + y\| = \|y\| \geq (1 - \varepsilon)\|y\| = (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + \|y\|).$$

Järelikult kehtib (i). $\square$

**Lause 3.7** ([HLP, lause 2.5])**.** *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *Kaasruum $X^*$ on nõrgalt oktaeedriline.*

(ii) *Iga kaasruumi $X^*$ lõplikumõõtmelise alamruumi $E$, $x \in B_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga $x^* \in E$ ja $t > 0$ korral*

$$\|x^* + ty^*\| \geq (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + t).$$

(iii) *Iga $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$, $x \in B_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga indeksi $i$ ja $t \geq \varepsilon$ korral*

$$\|x_i^* + ty^*\| \geq (1 - \varepsilon)(|x_i^*(x)| + t).$$

*Tõestus.* (i) $\Rightarrow$ (iii). Eeldame, et kehtib (i). Olgu $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \cdots, x_n^* \in S_{X^*}$, $x \in B_X$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $E = \operatorname{span}\{x_1^*, \cdots, x_n^*\}$. Eelduse põhjal leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga $x^* \in E$ korral

$$\|x^* + y^*\| \geq (1 - \varepsilon)(|x^*(x)| + 1).$$

Seega ka suvalise indeksi $i$ ja $t > 0$ korral saame

$$\left\| \frac{1}{t} x_i^* + y^* \right\| \geq (1-\varepsilon) \left( \left| \frac{1}{t} x_i^* (x) \right| + 1 \right)$$

ehk

$$\|x_i^* + ty^*\| \geq (1-\varepsilon)(|x_i^*(x)| + t).$$

Järelikult kehtib (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Eeldame, et kehtib (iii). Olgu $E$ kaasruumi $X^*$ lõplikumõõtmeline alaruum, $x \in S_X$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Olgu $\delta, \gamma > 0$ sellised, et $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ja $\gamma \leq \frac{\delta^2}{2}$. Olgu $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\} \subset S_E$ lõplik $\gamma$-võrk hulgale $S_E$. Eelduse põhjal leidub selline $y^* \in S_{X^*}$, et iga indeksi $i$ ja $t \geq \delta$ korral

$$\|x_i^* + ty^*\| \geq (1-\delta)(|x_i^*(x)| + t).$$

Fikseerime suvalised $x^* \in S_E$ ja $t > 0$. Kui $t \leq \delta$, siis $\delta$ valiku tingimusest saame, et

$$\begin{aligned}\|x^* + ty^*\| &\geq \|x^*\| - t\|y^*\| \geq 1 - \delta \geq (1-\varepsilon)(1+\delta) \geq \\ &\geq (1-\varepsilon)(1+t) \geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t).\end{aligned}$$

Kui $t \geq \delta$, siis valime sellise indeksi $i$, et

$$\|x^* - x_i^*\| \leq \gamma.$$

Seega

$$|x_i^*(x)| \geq |x_i^*(x)| - \|x^* - x_i^*\| \geq |x_i^*(x)| - \gamma.$$

ja

$$\begin{aligned}\|x^* + ty^*\| &\geq \|x_i^* + ty^*\| - \|x^* - x_i^*\| \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x_i^*(x)| + t) - \gamma \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x)| + t) - (2-\delta)\gamma \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x)| + t) - \delta^2 \geq \\ &\geq (1-\delta)(|x^*(x)| + t) - \delta t \geq \\ &\geq (1-2\delta)(|x^*(x)| + t) \geq \\ &\geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t).\end{aligned}$$

Järelikult kehtib (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Olgu $E$ kaasruumi $X^*$ lõplikumõõtmeline alamruum, $x^{**} \in B_{X^{**}}$ ja $\varepsilon > 0$. Lokaalse refleksiivsuse printsiibi (vt. teoreem 1.5) põhjal leidub $x \in X$ nii, et iga $x^* \in E$ korral

$$x^{**}(x^*) = x^*(x) \quad \text{ja} \quad (1-\varepsilon)\|x^{**}\| \leq \|x\| \leq (1+\varepsilon)\|x^{**}\|.$$

Paneme tähele, et $\frac{1}{1+\varepsilon}x \in B_X$. Eelduse põhjal leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga $x^* \in S_E$ ja $t > 0$ korral

$$\begin{aligned}
\|x^* + ty^*\| &\geq (1-\varepsilon^2)\left(\left|x^*\left(\frac{1}{1+\varepsilon}x\right)\right| + t\right) \geq \\
&\geq (1-\varepsilon)(|x^*(x)| + t) = \\
&= (1-\varepsilon)(|x^{**}(x^*)| + t).
\end{aligned}$$

Seega, kui $x^* \in E \setminus \{0\}$, siis

$$\left\|\frac{x^*}{\|x^*\|} + \frac{1}{\|x^*\|}y^*\right\| \geq (1-\varepsilon)\left(\left|x^{**}\left(\frac{x^*}{\|x^*\|}\right)\right| + \frac{1}{\|x^*\|}\right)$$

ehk

$$\|x^* + y^*\| \geq (1-\varepsilon)(|x^{**}(x^*)| + \|y^*\|).$$

Kui $x^* = 0$, siis

$$\|x^* + y^*\| = \|y^*\| \geq (1-\varepsilon)\|y^*\| = (1-\varepsilon)(|x^{**}(x^*)| + \|y^*\|).$$

□

**Lause 3.8** ([HLP, lause 2.1]). *Olgu $X$ Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed.*

(i) *Ruum $X$ on oktaeedriline.*

(ii) *Iga ruumi $X$ lõplikumõõtmelise alamruumi $E$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in S_E$ ja $t > 0$ korral*

$$\|x + ty\| \geq (1-\varepsilon)(\|x\| + t).$$

(iii) *Iga* $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ *ja* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y \in S_X$ *nii, et iga indeksi* $i$ *korral*

$$\|x_i + y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

*Tõestus.* (i) $\Rightarrow$ (iii). Eeldame, et kehtib (i). Olgu $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $E = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Eelduse põhjal leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in E$ korral

$$\|x + y\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\|x\| + \|y\|).$$

Seega iga indeksi $i$ korral

$$\|x_i + y\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\|x_i\| + \|y\|) = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult kehtib (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Eeldame, et kehtib (iii). Olgu $E$ ruumi $X$ lõplikumõõtmeline alamruum ja $\varepsilon > 0$. Olgu $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_E$ lõplik $\frac{\varepsilon}{2}$-võrk hulgale $S_E$. Eelduse põhjal leidub $y \in S_X$ nii, et iga indeksi $i$ korral

$$\|x_i + y\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sarnaselt lause 3.5 (iii) $\Rightarrow$ (ii) tõestusele kehtib iga $t > 0$ korral

$$\|x_i + ty\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(\|x_i\| + t).$$

Kui $x \in S_E$ ja $t > 0$, siis leidub indeks $i$ nii, et $\|x - x_i\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ja saame, et

$$\|x + ty\| \geq \|x_i + ty\| - \|x - x_i\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(1 + t) - \frac{\varepsilon}{2} \geq (1 - \varepsilon)(1 + t).$$

Järelikult kehtib (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Olgu $E$ ruumi $X$ lõplikumõõtmeline alamruum ja $\varepsilon > 0$. Eelduse põhjal leidub $y \in S_X$ nii, et iga $x \in S_E$ ja $t > 0$ korral

$$\|x + ty\| \geq (1 - \varepsilon)(\|x\| + t).$$

Kui $x \in E \setminus \{0\}$, siis

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{1}{\|x\|}y\right\| \geq (1 - \varepsilon)(1 + \frac{1}{\|x\|})$$

ehk

$$\|x + y\| \geq (1 - \varepsilon)\left(\|x\| + \|y\|\right).$$

Kui $x = 0$, siis

$$\|x + y\| = \|y\| \geq (1 - \varepsilon)\|y\| = (1 - \varepsilon)(\|x\| + \|y\|).$$

Järelikult kehtib (i). $\square$

**Lause 3.9.** *Ruum $C[0,1]$ on oktaeedriline.*

*Tõestus.* Olgu $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_{C[0,1]}$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Lause 3.8, (iii) põhjal piisab näidata, et leidub $y \in S_{C[0,1]}$ nii, et iga indeksi $i$ korral

$$\|x_i + y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Kuna $x_1, \ldots, x_n$ on pidevad funktsioonid ja iga indeksi $i$ korral $\max_{t \in [0,1]} |x_i(t)| = 1$, siis leiduvad paarikaupa erinevad $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ nii, et

$$|x_i(t_i)| \geq 1 - \varepsilon.$$

Vaatleme sellist $y \in S_{C[0,1]}$, et iga indeksi $i$ korral

$$y(t_i) = \operatorname{sgn} x_i(t_i).$$

Seega saame, et

$$\|x_i + y\| \geq |x_i(t_i) + y(t_i)| \geq 1 - \varepsilon + 1 = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on ruum $C[0,1]$ oktaeedriline. $\square$

**Lause 3.10.** *Jadaruum $\ell_1$ on oktaeedriline.*

*Tõestus.* Olgu $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in S_{\ell_1}$ ja $\varepsilon > 0$. Tähistame iga indeksi $i$ korral $x_i = (\xi_k^i)$. Kuna iga indeksi $i$ korral $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^i| = 1$, siis leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga indeksi $i$ korral $|\xi_N^i| \leq \varepsilon/2$. Olgu $y = (\eta_k)$, kus

$$\eta_k = \begin{cases} 0, & \text{kui } k \neq N, \\ 1, & \text{kui } k = N. \end{cases}$$

Nüüd saame, et suvalise indeksi $i$ korral

$$\begin{aligned}\|x_i + y\| &= \sum_{k=1}^{N-1} |\xi_k^i| + |\xi_N^i + 1| + \sum_{k=N+1}^{\infty} |\xi_k^i| = \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} + |\xi_N^i + 1| \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.\end{aligned}$$

Lause 3.8, (iii) põhjal on jadaruum $\ell_1$ oktaeedriline. $\square$

# 4 Diameeter-2 omaduste ja oktaeedrilisuse vahekord

Antud paragrahvis esitame artikli [HLP] eeskujul bakalaureusetöö põhitulemusena erinevate diameeter-2 omadustega Banachi ruumide esimese kaasruumi kirjelduse oktaeedrilisuse abil.

**Teoreem 4.1** ([HLP, teoreem 3.3])**.** *Banachi ruumil on lokaalne diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on lokaalselt oktaeedriline.*

*Tõestus. Tarvilikkus.* Eeldame, et Banachi ruum $X$ on lokaalse diameeter-2 omadusega. Näitame lause 3.5 tingimuse (iii) abil, et kaasruum $X^*$ on lokaalselt oktaeedriline. Olgu $x^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Lokaalse diameeter-2 omaduse tõttu on $B_X$ viilu $S(x^*, \varepsilon/2)$ diameeter 2. Seega leiduvad $x, y \in S(x^*, \varepsilon/2)$ nii, et

$$\|x - y\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olgu $y^* \in S_{X^*}$ selline, et

$$y^*(x - y) = \|x - y\|.$$

Kuna $y^*(x) \leq 1$ ja $y^*(y) \geq -1$, siis

$$y^*(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad -y^*(y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Järelikult

$$\|x^* + y^*\| \geq (x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon$$

ja

$$\|x^* - y^*\| \geq (x^* - y^*)(y) = x^*(y) - y^*(y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.$$

Kokkuvõttes saame, et

$$\|x^* \pm y^*\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on $X^*$ lokaalselt oktaeedriline.

*Piisavus.* Eeldame nüüd, et kaasruum $X^*$ on lokaalselt oktaeedriline ja näitame, et ruumil $X$ on lokaalne diameeter-2 omadus. Olgu $x^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Piisab näidata, et leiduvad sellised $x, y \in S(x^*, \varepsilon)$, et

$$\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Kuna $X^*$ on lokaalselt oktaeedriline, siis leidub selline $y^* \in S_{X^*}$, et

$$\|x^* \pm y^*\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Võtame $x, y \in S_X$ nii, et

$$(x^* + y^*)(x) > 2 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad (x^* - y^*)(y) > 2 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Seega

$$x^*(x) > 2 - \frac{\varepsilon}{2} - y^*(x) \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - 1 = 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon$$

ja

$$x^*(y) > 2 - \frac{\varepsilon}{2} - y^*(y) \geq 2 - \frac{\varepsilon}{2} - 1 = 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \varepsilon.$$

Järelikult $x, y \in S(x^*, \varepsilon)$. Teiselt poolt saame võrratustest (1), et

$$y^*(x) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad -y^*(y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega

$$\|x - y\| \geq y^*(x - y) = y^*(x) - y^*(y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on ruumil $X$ lokaalne diameeter-2 omadus.

$\square$

**Teoreem 4.2** ([HLP, teoreem 2.7])**.** *Banachi ruumil on diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on nõrgalt oktaeedriline.*

*Tõestus. Tarvilikkus.* Eeldame, et Banachi ruumil $X$ on diameeter-2 omadus. Näitame lause 3.7 kriteeriumi (iii) abil, et kaasruum $X^*$ on nõrgalt oktaeedriline. Olgu $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$, $x \in B_X$ ja $\varepsilon \in (0, 1)$. Fikseerime suvalise sellise

$\delta \in (0, \varepsilon^2)$, et $\delta < \varepsilon |x_i^*(x)|$ iga indeksi $i$ korral, mille puhul $|x_i^*(x)| > 0$. Vaatleme hulka

$$\mathcal{W} = \{y \in B_X \colon |x_i^*(x-y)| < \delta, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Ilmselt on $\mathcal{W}$ ühikkera $B_X$ mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk. Seega eelduse põhjal leiduvad $u, v \in \mathcal{W}$ nii, et

$$\|u - v\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Olgu $y^* \in S_{X^*}$ selline, et

$$y^*(u - v) = \|u - v\|.$$

Kuna $y^*(u) \leq 1$ ja $y^*(v) \geq -1$, siis

$$y^*(u) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{ja} \quad y^*(v) \leq -1 + \varepsilon.$$

Fikseerime vabalt indeksi $i$ ja arvu $t \geq \varepsilon$. Kui $x_i^*(x) \neq 0$, siis valime sellise $z \in \{u, v\}$, et $x_i^*(x)$ ja $y^*(z)$ oleksid sama märgiga. Sel juhul on ka $x_i^*(z)$ ja $y^*(z)$ sama märgiga, mistõttu

$$\begin{aligned}
\|x_i^* + ty^*\| &\geq |x_i^*(z) + ty^*(z)| = \\
&= |x_i^*(z)| + t|y^*(z)| \geq \\
&\geq |x_i^*(x)| - |x_i^*(x - z)| + t|y^*(z)| \geq \\
&\geq |x_i^*(x)| - \varepsilon|x_i^*(x)| + t(1 - \varepsilon)) = \\
&= (1 - \varepsilon)(|x_i^*(x)| + t).
\end{aligned}$$

Kui $x_i^*(x) = 0$, siis

$$\begin{aligned}
\|x_i^* + ty^*\| &\geq |x_i^*(u) + ty^*(u)| \geq \\
&\geq t|y^*(u)| - |x_i^*(u)| \geq \\
&\geq t(1 - \varepsilon) - \varepsilon^2 \geq \\
&\geq t(1 - \varepsilon) - t\varepsilon = (1 - 2\varepsilon)t = \\
&= (1 - 2\varepsilon)(|x_i^*(x)| + t).
\end{aligned}$$

Järelikult on kaasruum $X^*$ nõrgalt oktaeedriline.

*Piisavus.* Eeldame, et Banachi ruumi $X$ korral on kaasruum $X^*$ nõrgalt oktaeedriline. Näitame, et ruumil $X$ on diameeter-2 omadus. Olgu $\mathcal{O} \subset B_X$ mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk. Olgu $x \in \mathcal{O}$. Vaatleme elemendi $x$ suhteliselt nõrka baasiümbrust

$$\mathcal{W} = \{y \in B_X \colon |x_i^*(x-y)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, n\} \subset \mathcal{O},$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Meil piisab näidata, et leiduvad sellised $u, v \in \mathcal{W}$, et

$$\|u - v\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldata, et $\varepsilon < 2$. Olgu $E = \operatorname{span}\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$. Eelduse kohaselt leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga $x^* \in E$ ja $t > 0$ korral

$$\|x^* + ty^*\| \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)(|x^*(x)| + t). \tag{2}$$

Paneme tähele, et $y^* \notin E$: kui $y^* \in E$, siis ka $-y^* \in E$, mistõttu saame võrratusest (2) vastuolu, kui võtta $x^* = -y^*$ ja $t = 1$.

Defineerime funktsionaalid

$$F, G \colon \operatorname{span}(E \cup \{y^*\}) \to \mathbb{R}$$

selliselt, et iga $x^* \in E$ korral

$$F(x^*) = G(x^*) = x^*(x)$$

ning

$$F(y^*) = 1 \quad \text{ja} \quad G(y^*) = -1.$$

Kuna $y^* \notin E$, siis funktsionaalid $F$ ja $G$ on ilmselt korrektselt defineeritud ja lineaarsed. Paneme tähele, et funktsionaalid $F$ ja $G$ on pidevad: võrratuse (2) põhjal saame, et

$$|F(x^* + ty^*)| = |x^*(x) + t| \leq |x^*(x)| + t \leq \frac{1}{1 - \varepsilon/4}\|x_i^* + ty^*\|,$$

seega $(1 - \varepsilon/4)\|F\| \leq 1$ ja analoogiliselt saame, et $(1 - \varepsilon/4)\|G\| \leq 1$.
Järelikult on ka

$$U := \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) F \quad \text{ja} \quad V := \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) G$$

pidevad lineaarsed funktsionaalid kaasruumi $X^*$ alamruumil $\operatorname{span}(E \cup \{y^*\})$, kusjuures $\|U\|, \|V\| \leq 1$. Jätkame funktsionaalid $U$ ja $V$ normi säilitavalt kogu ruumile $X^*$ ja edaspidi tähistagu $U$ ja $V$ vastavaid jätke. Goldstine'i teoreemi (vt. teoreem 1.4) põhjal leiduvad $u, v \in B_X \subset B_{X^{**}}$ nii, et iga indeksi $i$ korral

$$|(u-U)(x_i^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad |(v-V)(x_i^*)| < \frac{\varepsilon}{4}$$

ning

$$|(u-U)(y^*)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad |(v-V)(y^*)| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Näitame, et $u, v \in \mathcal{W}$ ja $\|u-v\| \geq 2-\varepsilon$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\|u-v\| \geq |y^*(u-v)| &= \\
&= |(U-V)(y^*) + (u-U)(y^*) + (V-v)(y^*)| \geq \\
&\geq |(U-V)(y^*)| - |(u-U)(y^*)| - |(V-v)(y^*)| \geq \\
&\geq 2(1-\frac{\varepsilon}{4}) - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = 2-\varepsilon.
\end{aligned}$$

Jääb veel näidata, et $u, v \in \mathcal{W}$. Iga indeksi $i$ korral

$$\begin{aligned}
|x_i^*(x-u)| &= |(x-U)x_i^* + (U-u)x_i^*| \leq \\
&\leq |(x-U)x_i^*| + |(u-U)x_i^*| < \\
&< |x_i^*(x) - (1-\frac{\varepsilon}{4})F(x_i^*)| + \frac{\varepsilon}{4} = \\
&= \frac{\varepsilon}{4}|x_i^*(x)| + \frac{\varepsilon}{4} \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Seega $u \in \mathcal{W}$. Analoogiliselt saab näidata, et $v \in \mathcal{W}$. Järelikult on ruumil $X$ diameeter-2 omadus. □

**Teoreem 4.3** ([HLP, teoreem 2.3])**.** *Banachi ruumil on tugev diameeter-2 omadus parajasti siis, kui tema kaasruum on oktaeedriline.*

*Tõestus. Tarvilikkus.* Eeldame, et Banachi ruumil $X$ on tugev diameeter-2 omadus. Näitame lause 3.8 kriteeriumi (iii) abil, et kaasruum $X^*$ on oktaeedriline. Olgu $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga indeksi $i$ korral

$$\|x_i^* + y^*\| \geq 2-\varepsilon.$$

Tähistame

$$K := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i,$$

kus iga indeksi $i$ korral $S_i := S(x_i^*, \varepsilon/2)$ on $B_X$ viilud. Eelduse kohaselt diam $K = 2$. Järelikult leiduvad $x, y \in K$ nii, et

$$\|x - y\| > 2 - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Olgu $y^* \in S_{X^*}$ selline, et

$$y^*(x - y) = \|x - y\|.$$

Kuna $y^*(y) \geq -1$, siis

$$y^*(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{2n}.$$

Kuna $x \in K$, siis $x$ esitub kujul

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

kus $x_i \in S_i$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} y^*(x_i) &= ny^*(x) - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} y^*(x_j) \geq \\ &\geq n\left(1 - \frac{\varepsilon}{2n}\right) - (n-1) = \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

mistõttu

$$\|x_i^* + y^*\| \geq (x_i^* + y^*)(x_i) > 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on kaasruum $X^*$ oktaeedriline.

*Piisavus.* Eeldame, et Banachi ruumi $X$ korral on kaasruum $X^*$ oktaeedriline. Näitame teoreemi 3.8 kriteeriumi (iii) abil, et ruumil $X$ on tugev diameeter-2 omadus. Olgu $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Tähistame

$$K := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(x_i^*, \frac{\varepsilon}{2}),$$

kus iga indeksi $i$ korral $S(x_i^*, \varepsilon/2)$ on $B_X$ viil. Piisab näidata, et leiduvad $x, y \in K$ nii, et

$$\|x - y\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Eelduse kohaselt leidub $y^* \in S_{X^*}$ nii, et iga indeksi $i$ korral

$$\|x_i^* \pm y^*\| \geq 2 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Iga indeksi $i$ korral leiduvad $x_i, y_i \in B_X$ nii, et

$$(x_i^* + y^*)(x_i) \geq \|x_i^* + y^*\| - \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \quad (x_i^* - y^*)(y_i) \geq \|x_i^* - y^*\| - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3}$$

Kuna $y^*(x_i) \leq 1$ ja $y^*(y_i) \geq -1$, siis

$$x_i^*(x_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad x_i^*(y_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Seega $x_i, y_i \in S_i$. Kuna $x_i^*(x_i) \leq 1$ ja $y^*(x_i) \leq 1$, siis võrratustest (3) saame, et

$$y^*(x_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad -y^*(y_i) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Võtame

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \text{ja} \quad y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Ilmselt $x, y \in K$ ja

$$\|x - y\| \geq y^*(x - y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2} + 1 - \frac{\varepsilon}{2} = 2 - \varepsilon.$$

Järelikult on ruumil $X$ tugev diameeter-2 omadus. $\square$

# 5 Absoluutse normiga korrutisruumi oktaeedrilisus

Artiklis [HLP] uuriti, kuidas oktaeedrilisus kandub Banachi ruumidelt üle nende ruumide $\ell_p$-summale. Käesolevas paragrahvis üldistame artiklis [HLP] saadud $\ell_p$-summade oktaeedrilisuse stabiilsustulemusi absoluutsete normidega korrutisruumidele.

Olgu $X$ ja $Y$ Banachi ruumid.

**Definitsioon 5.1.** Öeldakse, et norm $\|\cdot\|_N$ ruumil $X \times Y$ on *absoluutne*, kui leidub funktsioon $N\colon [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ nii, et iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral

$$\|(x,y)\|_N = N(\|x\|, \|y\|).$$

Absoluutne norm $\|\cdot\|_N$ on *normaliseeritud*, kui $N(0,1) = N(1,0) = 1$.

Ruumi $X \times Y$ varustatud absoluutse normiga $\|\cdot\|_N$ tähistame $X \oplus_N Y$.

**Näide 5.2.** Iga $p$-norm

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, & \text{kui } 1 \le p < \infty, \\ \max\{\|x\|, \|y\|\}, & \text{kui } p = \infty, \end{cases}$$

on absoluutne normaliseeritud norm.

Korrutisruumi $X \times Y$ varustatud $p$-normiga tähistame $X \oplus_p Y$.

**Näide 5.3.** Olgu $\lambda \in (0,1)$. Korrutisruumil $X \times Y$ vaadeldav norm

$$\|(x,y)\| = \max\{\|(x,y)\|_\infty, \lambda\|(x,y)\|_1\}$$

on ilmselt absoluutne normaliseeritud norm, kuid pole $p$-norm. Paneme tähele, et kui $\lambda = 1$, siis antud norm oleks võrdne 1-normiga, ja kui $\lambda = 0$, siis oleks tegemist $\infty$-normiga.

**Lemma 5.4** ([H, lemma 3.1 ja lk. 317])**.** *Olgu $X$ ja $Y$ Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm korrutisruumil $X \times Y$.*

(a) *$X \oplus_N Y$ on Banachi ruum, kusjuures*

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_N \leq \|\cdot\|_1.$$

(b) *Kui $x_1, x_2 \in X$ ja $y_1, y_2 \in Y$ on sellised, et $\|x_1\| \leq \|x_2\|$ ja $\|y_1\| \leq \|y_2\|$, siis*

$$\|(x_1, y_1)\|_N \leq \|(x_2, y_2)\|_N.$$

(c) *Leidub absoluutne normaliseeritud norm $\|\cdot\|_{N^*}$ ruumil $X^* \times Y^*$ nii, et $(X \oplus_N Y)^* = X^* \oplus_{N^*} Y^*$, kusjuures iga $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_{N^*} Y^*$ korral*

$$\|(x^*, y^*)\|_{N^*} = \max_{N(|\alpha|,|\beta|)\leq 1} \Big(|\alpha|\|x^*\| + |\beta|\|y^*\|\Big)$$

*ja iga $(x, y) \in X \oplus_N Y$ korral*

$$(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x) + y^*(y).$$

**Lause 5.5.** *Kui Banachi ruumid $X$ ja $Y$ on lokaalselt oktaeedrilised ja $\|\cdot\|_N$ on absoluutne normaliseeritud norm, siis ruum $X \oplus_N Y$ on samuti lokaalselt oktaeedriline.*

*Tõestus.* Olgu $X$ ja $Y$ lokaalselt oktaeedrilised Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm korrutisruumil $X \times Y$. Näitame lause 3.5 kriteeriumi (iii) abil, et $X \oplus_N Y$ on lokaalselt oktaeedriline. Olgu $(x, y) \in S_{X \oplus_N Y}$ ja $\varepsilon \in (0, 2)$. Meil piisab leida $(u, v) \in S_{X \oplus_N Y}$ nii, et

$$\|(x, y) \pm (u, v)\|_N \geq 2 - \varepsilon.$$

Kui $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, siis ruumide $X$ ja $Y$ on lokaalse oktaeedrilisuse tõttu leivad $x_0 \in S_X$ ja $y_0 \in S_Y$ nii, et

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} \pm x_0\right\| \geq 2 - \varepsilon \quad \text{ja} \quad \left\|\frac{y}{\|y\|} \pm y_0\right\| \geq 2 - \varepsilon.$$

Võtame $u \coloneqq \|x\|x_0$ ja $v \coloneqq \|y\|y_0$. Paneme tähele, et $(u, v) \in S_{X \oplus_N Y}$. Tõepoolest, kuna $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$, siis

$$\begin{aligned}\|(u, v)\|_N = N(\|u\|, \|v\|) = N\big(\big\|\|x\|x_0\big\|, \big\|\|y\|y_0\big\|\big) = \\ = N(\|x\|, \|y\|) = \|(x, y)\|_N = 1.\end{aligned}$$

Paneme lemma 5.4, (b) abil tähele, et

$$\begin{aligned}\|(x,y)\pm(u,v)\|_N &= N(\|x\pm u\|,\|y\pm v\|) = \\ &= N\left(\big\|x\pm\|x\|x_0\big\|,\big\|y\pm\|y\|y_0\big\|\right) \geq \\ &\geq N\big((2-\varepsilon)\|x\|,(2-\varepsilon)\|y\|\big) = \\ &= (2-\varepsilon)N(\|x\|,\|y\|) = 2-\varepsilon.\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $x=0$ või $y=0$. Konkreetsuse mõttes olgu $\|x\|=0$. Kuna $\|\cdot\|_N$ on normaliseeritud, siis $\|y\|=1$. Ruumi $Y$ on lokaalse oktaeedrilisuse tõttu leidub $v\in S_Y$ nii, et

$$\|y\pm v\|\geq 2-\varepsilon.$$

Seega

$$\|(0,y)\pm(0,v)\|_N = N(0,\|y\pm v\|)\geq N(0,2-\varepsilon)=2-\varepsilon.$$

Järelikult on $X\oplus_N Y$ lokaalselt oktaeedriline. □

**Lause 5.6.** *Kui Banachi ruumid $X$ ja $Y$ on nõrgalt oktaeedrilised ja $\|\cdot\|_N$ on absoluutne normaliseeritud norm, siis ruum $X\oplus_N Y$ on samuti nõrgalt oktaeedriline.*

*Tõestus.* Olgu $X$ ja $Y$ nõrgalt oktaeedrilised Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm korrutisruumil $X\times Y$. Näitame lause 3.6 kriteeriumi (ii) abil, et $X\oplus_N Y$ on nõrgalt oktaeedriline. Olgu $E\oplus_N F\subset X\oplus_N Y$ lõplikumõõtmeline alamruum, $\|\cdot\|_{N^*}$ kaasruumi $(X\oplus_N Y)^* = X^*\oplus_{N^*} Y^*$ absoluutne normaliseeritud norm, $(x^*,y^*)\in S_{X^*\oplus_{N^*}Y^*}$ ja $\varepsilon\in(0,1)$. Meil piisab leida $(u,v)\in S_{X\oplus_N Y}$ nii, et iga $(x,y)\in E\oplus_N F$ ja $t>0$ korral

$$\|(x,y)+t(u,v)\|_N\geq(1-\varepsilon)(|(x^*(x)+y^*(y)|+t).$$

Kui $x^*\neq 0$ ja $y^*\neq 0$, siis ruumide $X$ ja $Y$ nõrga oktaeedrilisuse tõttu leiduvad $x_0\in S_X$ ja $y_0\in S_Y$ nii, et iga $x\in S_E$, $y\in S_F$ ning $t>0$ korral

$$\|x+tx_0\|\geq(1-\varepsilon)\left(\frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|}+t\right)$$

ja

$$\|y+ty_0\|\geq(1-\varepsilon)\left(\frac{|y^*(y)|}{\|y^*\|}+t\right).$$

Lemma 5.4, (c) põhjal leiduvad sellised $\alpha, \beta > 0$, et $N(\alpha, \beta) = 1$ ja

$$\|(x^*, y^*)\|_{N^*} = \alpha\|x^*\| + \beta\|y^*\| = 1.$$

Võtame $u \coloneqq \alpha x_0$ ja $v \coloneqq \beta y_0$. Paneme tähele, et $(u, v) \in S_{X\oplus_N Y}$. Tõepoolest, kuna $\|x_0\| = \|y_0\| = 1$, siis

$$\|(u, v)\|_N = N(\|u\|, \|v\|) = N(\alpha\|x_0\|, \beta\|y_0\|) = N(\alpha, \beta) = 1.$$

Paneme tähele, et iga $(x, y) \in E \oplus_N F$ ja $t > 0$ korral

$$\begin{aligned}\|(x, y) + t(u, v)\|_N &\geq \|x^*\|\|x + tu\| + \|y^*\|\|y + tv\| \geq \\ &\geq \|x^*\|(1-\varepsilon)\left(\frac{|x^*(x)|}{\|x^*\|} + \alpha t\right) + \|y^*\|(1-\varepsilon)\left(\frac{|y^*(y)|}{\|y^*\|} + \beta t\right) \geq \\ &\geq (1-\varepsilon)\big(|x^*(x) + y^*(y)| + (\alpha\|x^*\| + \beta\|y^*\|)t\big) = \\ &= (1-\varepsilon)(|x^*(x) + y^*(y)| + t).\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $x^* = 0$ või $y^* = 0$. Konkreetsuse mõttes olgu $x^* = 0$. Kuna $\|\cdot\|_{N^*}$ on normaliseeritud, siis $\|y^*\| = 1$. Ruumi $Y$ nõrga oktaeedrilisuse tõttu leidub $v \in S_Y$ nii, et iga $y \in F$ ja $t > 0$ korral

$$\|y + tv\| \geq (1-\varepsilon)(|y^*(y)| + t).$$

Seega iga $(x, y) \in E \oplus_N F$ ja $t > 0$ korral

$$\begin{aligned}\|(x, y) + t(0, v)\|_N &\geq \|x^*\|\|x\| + \|y^*\|\|y + tv\| = \\ &= \|y + tv\| \geq (1-\varepsilon)(|y^*(y)| + t) = \\ &= (1-\varepsilon)(|x^*(x) + y^*(y)| + t).\end{aligned}$$

Järelikult on $X \oplus_N Y$ nõrgalt oktaeedriline. $\square$

**Lause 5.7** ([HLP, lause 3.10]). *Olgu $X$ ja $Y$ Banachi ruumid.*

(a) *Kui $X$ on oktaeedriline, siis $X \oplus_1 Y$ on oktaeedriline.*

(b) *Kui $1 < p < \infty$, siis $X \oplus_p Y$ ei saa olla oktaeedriline.*

(c) *Kui $X$ ja $Y$ on oktaeedrilised, siis $X \oplus_\infty Y$ on oktaeedriline.*

Seega leidub selliseid absoluutse normiga korrutisruume $X \times Y$, mis on oktaeedrilised ning ka selliseid, mis pole oktaeedrilised. Lahtiseks jääb küsimus, millal täpselt on absoluutse normiga varustatud korrutisruum $X \times Y$ oktaeedriline.

# Viited


[ALN] T. Abrahamsen, V. Lima ja O. Nygaard, *Remarks on diameter 2 properties*, J. Convex Anal. **20** (2013), 439–452.

[BLR1] J. Becerra Guerrero, G. López Pérez ja A. Rueda Zoca, *Big slices versus big relatively weakly open subsets in Banach spaces*, (2013), arXiv:1304.4397.

[BLR2] ———, *Octahedral norms and convex combination of slices in Banach spaces*, (2013), arXiv:1309.3866.

[G] G. Godefroy, *Metric characterization of first Baire class linear forms and octahedral norms*, Studia Math. **95** (1989), 1–15.

[H] J.-D. Hardtke, *Absolute sums of Banach spaces and some geometric properties related to rotundity and smoothness*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 295–334.

[HLP] R. Haller, J. Langemets ja M. Põldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Convex Anal. **22** (2015), ilmumas.

[L] J. Langemets, *Diameter 2 properties*, magistritöö, Tartu Ülikool, 2012.

[M] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[OO] E. Oja ja P. Oja, *Funktsionaalanalüüs*, TÜ trükikoda, Tartu, 1991.

[W] D. Werner, *Funktionalanalysis*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

**Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks**

Mina, ___________________________Rihhard Nadel___________________________________,
(*autori nimi*)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose
Diameeter-2 omadustega Banachi ruumide kirjeldused oktaeedrilisuse abil_____________________________________________________________________________
_______________________________________________________________________________,
(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendajad on ____________Rainis Haller ja Johann Langemets_____________________,
(*juhendaja nimi*)

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus **05.06.2014**