M. LEVIN
S. ULM

ARVUTUSMEETODITE KÄSIRAAMAT

2/68675

A-28 090

M. LEVIN
S. ULM

Arvutusmeetodite käsiraamat

Kirjastus „Valgus"
Tallinn 1966

51
L 50

Kaane kujundanud E. Tali

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
68675

EESSÕNA

Tänapäeva teadus ja tehnika kasutavad järjest rohkem matemaatilisi meetodeid, sealhulgas mitmesuguseid arvutusmeetodeid. Ka kaasaegsete elektronarvutite edukas rakendamine pole mõeldav nende igakülgse tundmiseta. Kahjuks on ulatuslik materjal arvutusmeetodite kohta hajutatud mitmesuguste õpikute ja teaduslike ajakirjade (sageli võõrkeelsete) veergudel, mistõttu vajaliku valemi leidmine nõuab suurt töö- ja ajakulu.

Käesoleva raamatu autorid seadsid endale eesmärgiks teha kõnealused meetodid kasutajale kättesaadavamaks. Materjal on esitatud süstematiseeritud kujul (ilma tõestusteta). See võimaldab kiiresti leida ühe või teise ülesande lahendamiseks sobivaid algoritme, mille selgitamiseks on enamikul juhtudel toodud illustreerivaid näiteid.

Kahjuks ei lubanud raamatu piiratud maht anda täielikku ülevaadet kõigist kaasajal kasutatavatest arvutusmeetoditest. Seetõttu leiavad käsitlemist põhilisemad, praktikas enamrakendatavad meetodid interpoleerimiseks, numbriliseks diferentseerimiseks ja integreerimiseks, funktsioonide lähendamiseks ning mitmesuguste võrrandite ja võrrandisüsteemide lahendamiseks.

Raamat on mõeldud eelkõige insener-tehnilistele töötajatele, samuti mitmesuguste erialade õppejõududele, teaduslikele töötajatele ja üliõpilastele. Selle kasutamine eeldab matemaatika tundmist kõrgemate tehniliste õppeasutuste programmide ulatuses. Peatükkide lõppu on lisatud kasutatud kirjanduse loetelu.

Avaldame siinkohal tänu dots. Ü. Kaasikule ja dots. E. Tammele, kes tutvusid käsikirjaga ja abistasid autoreid terve rea väärtuslike märkustega.

Kõigist ettepanekutest ja märkustest raamatu kohta palume lugejaid teatada aadressil:

TPI matemaatika kateeder, Tallinn, Ehitajate tee 5 või ENSV TA Küberneetika Instituudi Arvutuskeskus, Tallinn, Lenini pst. 10.

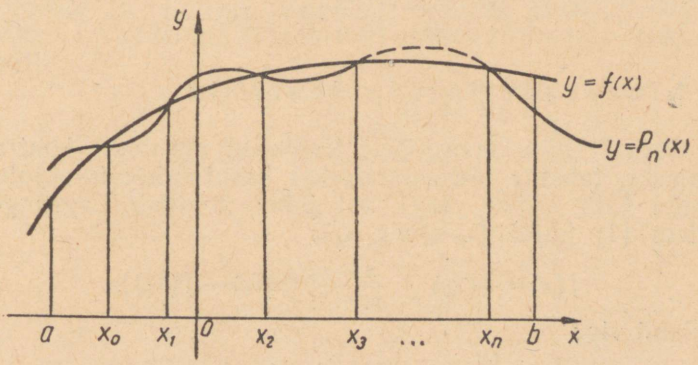
Autorid

I. INTERPOLEERIMINE

A. Ühe muutuja funktsiooni interpoleerimine

Interpoleerimise ülesandeks on funktsiooni $f(x)$ väärtuse ligikaudne arvutamine mingis punktis $x \in [a, b]$, kui on teada selle funktsiooni väärtused punktides $x_i \in [a, b]$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Punkte x_i nimetatakse interpolatsioonisõlmedeks ehk lihtsalt sõlmedeks. Allpool toodavates valemites eeldatakse üldreeglina, et sõlmed on erinevad.

Püstitatud ülesande lahendamiseks koostatakse n-astme polünoom $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, mille kordajad a_i määratakse tingimusest, et interpolatsioonisõlmedes võrduksid polünoomi väärtused vastavate funktsiooni väärtustega. Seda polünoomi nimetatakse interpolatsioonipolünoomiks ja tähistatakse $P_n(x)$. Funktsiooni $f(x)$ ligikaudne väärtus leitakse valemi $f(x) \approx P_n(x)$ põhjal.



Joon. 1

1. Lagrange'i valem.

Lagrange'i valem avaldub kujul

$$f(x) \approx P_n(x), \tag{1}$$

kus

$$P_n(x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} f(x_i)$$

on nn. Lagrange'i polünoom.
Valemi viga

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \tag{2}$$

kus $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$; $\xi \in [a, b]$.

Näide 1. Koostame tabeliga

x_i	0	0,5	1
$f(x_i)$	-1	0	3

antud funktsiooni jaoks Lagrange'i polünoomi $P_2(x)$. Saame:

$$P_2(x) = \frac{(x-0{,}5)(x-1)}{(0-0{,}5)(0-1)}(-1) + \frac{(x-0)(x-1)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)} \cdot 0 +$$
$$+ \frac{(x-0)(x-0{,}5)}{(1-0)(1-0{,}5)} \cdot 3 = 4x^2 - 1.$$

2. Lineaarne interpoleerimine.

Sageli (näit. massiliselt teostatud arvutuste kontrollimiseks, tabelite täpsustamiseks) kasutatakse interpoleerimist kahe sõlme järgi. Sel juhul avaldub Lagrange'i valem (1) kujul $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x-x_0}{x_1-x_0}[f(x_1) - f(x_0)].$$

Valemi viga

$$R_1 \leqslant \frac{h^2}{8} \cdot \max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|; \quad h = x_1 - x_0.$$

3. Neville'i skeemi kasutatakse interpolatsioonipolünoomi $P_n(x)$ väärtuse tegelikuks arvutamiseks argumendi x antud väärtusel. Skeem on sobiv arvutamiseks nii käsitsi kui ka elektronarvutil. $P_n(x)$ arvutamine antud x puhul toimub alljärgnevalt:

$$L_j^{(0)} = f(x_j) \qquad (j = 0, 1, \ldots, n),$$

$$L_j^{(1)} = L_j^{(0)} + \frac{(L_{j+1}^{(0)} - L_j^{(0)})(x - x_j)}{x_{j+1} - x_j} \quad (j = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$L_j^{(2)} = L_j^{(1)} + \frac{(L_{j+1}^{(1)} - L_j^{(1)})(x - x_j)}{x_{j+2} - x_j} \quad (j = 0, 1, \ldots, n-2),$$

. . . . . .

$$L_j^{(n)} = L_j^{(n-1)} + \frac{(L_{j+1}^{(n-1)} - L_j^{(n-1)})(x - x_j)}{x_{j+n} - x_j} \quad (j = 0),$$

$$P_n(x) = L_0^{(n)}.$$

Arvutused on sobiv koondada tabelisse:

j	x_j	$x - x_j$	$L_j^{(0)}$	$L_j^{(1)}$	$L_j^{(2)}$	...	$L_j^{(n)}$
0	x_0	$x - x_0$	$L_0^{(0)}$	$L_0^{(1)}$	$L_0^{(2)}$	...	$L_0^{(n)}$
1	x_1	$x - x_1$	$L_1^{(0)}$	$L_1^{(1)}$	$L_1^{(2)}$	...	
2	x_2	$x - x_2$	$L_2^{(0)}$	$L_2^{(1)}$	$L_2^{(2)}$	...	
...	...	...	...	...	...	...	
$n-2$	x_{n-2}	$x - x_{n-2}$	$L_{n-2}^{(0)}$	$L_{n-2}^{(1)}$	$L_{n-2}^{(2)}$		
$n-1$	x_{n-1}	$x - x_{n-1}$	$L_{n-1}^{(0)}$	$L_{n-1}^{(1)}$			
n	x_n	$x - x_n$	$L_n^{(0)}$				

Näide 2. Leiame Neville'i skeemi järgi $P_2(0{,}25)$ (näites 1 vaadeldud funktsiooni puhul). Täidame vastava tabeli:

j	x_j	$x - x_j$	$L_j^{(0)}$	$L_j^{(1)}$	$L_j^{(2)}$
0	0	0,25	—1	—0,5	—0,75
1	0,5	—0,25	0	—1,5	
2	1	—0,75	3		

Seega $P_2(0{,}25) = L_0^{(2)} = -0{,}75$.

4. Lagrange'i valem võrdsete vahemikega sõlmede puhul.

Olgu interpolatsioonisõlmed võrdsete vahemikega, s. o. $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} = h$. Tähistame $(x - x_0)/h = t$. Kehtib valem

$$P_n(x) = (-1)^n \frac{t(t-1)\ldots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{C_n^i}{t-i} f(x_i), \quad (3)$$

kus $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

Näide 3. Näites 1 vaadeldud funktsiooni puhul on sõlmed võrdsete vahemikega, kusjuures $h = 0{,}5$. Olgu $x = 0{,}25$. Arvutame valemiga (3) $P_2(0{,}25)$. Antud juhul $t = (0{,}25 - 0)/0{,}5 = 0{,}5$ ja

$$P_2(0{,}25) = (-1)^2 \frac{0{,}5(0{,}5-1)(0{,}5-2)}{1 \cdot 2} \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \frac{C_2^i}{0{,}5-i} f(x_i) =$$

$$= \frac{3}{16}\left[2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 0 + \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot 3\right] = -0{,}75.$$

5. Tšebõšovi interpolatsioonisõlmed.

Kehtigu lõigul $[-1,1]$* võrratus: $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$. Siis interpolatsioonivalemi viga $R_n(x)$ (vt. (2)) sellel lõigul rahuldab võrratust

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [-1,1]} |w(x)|.$$

Parimad (vea hinnangu mõttes) on need interpolatsioonisõlmed, mille puhul suurus $\max |w(x)|$ on minimaalne. Niisugusteks sõlmedeks on

$$x_i = \cos \frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \quad (i = 0,1, \ldots, n),$$

nn. Tšebõšovi polünoomi $T_{n+1}(x) = \cos[(n+1) \arccos x]$ nullkohad. Sellise sõlmede valiku puhul kehtib hinnang

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!\,2^n} \quad (x \in [-1, 1]).$$

---

* Funktsiooni $f(x)$ vaatlemise lõigul $[a, b]$ võib teisenduse $x = 0{,}5(b-a)y + 0{,}5(b+a)$ abil taandada alati funktsiooni $\varphi(y) = f[0{,}5(b-a)y + 0{,}5(b+a)]$ vaatlemisele lõigul $[-1,1]$.

6. Uue interpolatsioonisõlme lisamine.

Kui $P_n(x)$ on interpolatsioonipolünoom, mis on koostatud antud funktsiooni jaoks sõlmede $x_0, x_1, \ldots, x_n$ järgi, ning $P_{n+1}(x)$ interpolatsioonipolünoom, mis on koostatud sama funktsiooni jaoks sõlmede $x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$ järgi, siis

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{f(x_{n+1}) - P_n(x_{n+1})}{w(x_{n+1})} w(x),$$

kus $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

7. Newtoni interpolatsioonivalem.

Diferentssuheteks nimetatakse suurusi, mis on arvutatavad valemitega

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1; x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \ldots,$$

$$\ldots, f(x_{n-1}; x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}; \quad f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_k) =$$

$$= \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; \ldots; x_k) - f(x_i; x_{i+1}; \ldots; x_{k-1})}{x_k - x_i}$$

$$\begin{pmatrix} i = 0,1, \ldots, n-1; \\ k = i+1, i+2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

Arvutused on sobiv koondada järgmisse tabelisse:

x_0	$f(x_0)$					
		$f(x_0; x_1)$				
x_1	$f(x_1)$		$f(x_0; x_1; x_2)$			
		$f(x_1; x_2)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3)$		
x_2	$f(x_2)$		$f(x_1; x_2; x_3)$		$f(x_0; x_1; x_2; x_3; x_4)$	
		$f(x_2; x_3)$		$f(x_1; x_2; x_3; x_1)$		...
x_3	$f(x_3)$		$f(x_2; x_3; x_4)$		...	
		$f(x_3; x_4)$		...		
x_4	$f(x_4)$		...			
...	...	...				

$f(x_i, x_{i+1})$ nimetatakse funktsiooni $f(x)$ esimest järku diferentssuhteks, $f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ — teist järku diferentssuhteks jne.

Newtoni valem

$$f(x) \approx P_n(x),$$

kus

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0;\ x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0;\ x_1;\ x_2) + \ldots + (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0;\ x_1;\ x_2;\ \ldots;\ x_n). \quad (4)$$

Polünoomi (4) nimetatakse Newtoni interpolatsioonipolünoomiks. Ta on Lagrange'i interpolatsioonipolünoom (lk. 6) teisel kujul.

Näide 4. Koostame näite 1 (lk. 6) andmete põhjal Newtoni interpolatsioonipolünoomi $P_2(x)$. Arvutame kõigepealt diferentssuhted:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;\ x_{i+1})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2})$
0	−1		
		2	
0,5	0		4
		6	
1	3		

Seega

$$P_2(x) = -1 + (x - 0) \cdot 2 + (x - 0)(x - 0{,}5) \cdot 4 = 4x^2 - 1.$$

Vaatleme juhtu, kui sõlmede seas leidub võrdseid. Järjestame sõlmed nii, et võrdsed sõlmed asetseksid kõrvuti:

$$\underbrace{x_0,\ x_0,\ \ldots,\ x_0}_{\alpha_0},\quad \underbrace{x_1,\ x_1,\ \ldots,\ x_1}_{\alpha_1},\ \ldots,\quad \underbrace{x_l,\ x_l,\ \ldots\ x_l}_{\alpha_l}.$$

Olgu $(l+1)$ — erinevate sõlmede arv ja $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_l = n + 1$ (x_0 on α_0-kordne sõlm, ..., x_l on α_l-kordne sõlm).

Et nende sõlmede puhul koostada interpolatsioonipolünoomi (4), on tarvilik, et iga x_i puhul oleksid antud väärtused $f(x_i)$ ja $f^{(k)}(x_i)$ $(k = 1,2,\ \ldots,\ \alpha_i - 1)$.

Diferentssuhete tabeli koostamisel tuleb toimida järgmiselt: kui p-järku diferentssuhte arvutamisel tekib määramatus $\frac{0}{x_j - x_j} = \frac{0}{0}$, siis kirjutame tabelis selle diferentssuhte asemel väärtuse $\frac{1}{p!} f^{(p)}(x_j)$.

Niiviisi koostatud Newtoni interpolatsioonipolünoomi (4) puhul kehtivad võrdused

$$P_n^{(k_i)}(x_i) = f^{(k_i)}(x_i) \quad (i = 0,1, \ldots, l;\ k_i = 0,1, \ldots, \alpha_i - 1).$$

Märgime, et juhul $l = 0$ ühtib Newtoni interpolatsioonivalem Taylori valemiga (vt lk. 77).

Näide 5. Koostame Newtoni interpolatsioonipolünoomi, kui sõlmedeks on

$$1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3 \qquad (n = 5).$$

Funktsiooni ja tema tuletiste väärtused on antud tabeliga:

x_i	1	2	3
$f(x_i)$	0	−14	2
$f'(x_i)$	−7		81
$f''(x_i)$	−16		

Koostame diferentssuhete tabeli:

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i;\ x_{i+1})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2})$	$f(x_i;\ x_{i+1};\ x_{i+2};\ x_{i+3})$	$f(x_i;\ \ldots;\ x_{i+4})$	$f(x_i;\ \ldots;\ x_{i+5})$
1	0					
		−7				
1	0		−8			
		−7		1		
1	0		−7		5	
		−14		11		1
2	−14		15		7	
		16		25		
3	2		65			
		81				
3	2					

Newtoni interpolatsioonipolünoom moodustatakse tabelis allakriipsutatud diferentssuhete abil

$$P_5(x) = 0 + (x-1)(-7) + (x-1)(x-1)(-8) + (x-1)(x-1)(x-1)\cdot 1 + (x-1)(x-1)(x-1)(x-2)\cdot 5 + (x-1)(x-1)(x-1)(x-2)(x-3)\cdot 1 = x^5 - 3x^4 + 2.$$

Seega

$$f(x) \approx x^5 - 3x^4 + 2.$$

Lähemalt Newtoni interpolatsioonipolünoomist kordsete sõlmedega vt. [1].

8. Newtoni interpolatsioonivalem sammuga ette (võrdsete vahemikega sõlmede jaoks).

Olgu interpolatsioonisõlmedeks x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_n = x_0 + nh$; $h > 0$. Tähistame funktsiooni väärtused nendes sõlmedes $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1, \ldots, n)$.

Lõplikeks vahedeks (või diferentsideks) nimetatakse suurusi, mis on arvutatavad valemitega

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,\ \Delta y_1 = y_2 - y_1,\ \ldots,\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1};$$
$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0,\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1,\ \ldots,\ \Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2};\ \Delta^3 y_0 = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y_0,\ \Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1 \text{ jne.}$$

Arvutused on sobiv koondada tabelisse:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	...
x_0	y_0					
		$\underline{\Delta y_0}$				
x_1	y_1		$\underline{\Delta^2 y_0}$			
		Δy_1		$\underline{\Delta^3 y_0}$		
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\underline{\Delta^4 y_0}$	
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$		...
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$		...	
		Δy_3		...		
x_4	y_4		...			
		...				
...	...					

Tähistame $(x - x_0)/h = t$. Siis Newtoni interpolatsioonivalem avaldub kujul

$$f(x) \approx P_n(x),$$

kus

$$P_n(x) = y_0 + \frac{t}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots +$$
$$+ \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0.$$

Eespool toodud tabelis on valemisse kuuluvad vahed alla kriipsutatud. Valemit on otstarbekas rakendada, kui tuleb arvutada funktsiooni $y = f(x)$ väärtust niisuguse x puhul, mis asetseb interpolatsioonivahemiku vasakpoolse otspunkti läheduses.

Näide 6. Leiame toodud valemi järgi $P_2(0{,}25)$ näites 1 vaadeldud funktsiooni puhul. Koostame vahede tabeli:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	−1		
		1	
0,5	0		2
		3	
1	3		

Et

$$x = 0{,}25;\ h = 0{,}5;\ x_0 = 0;\ t = \frac{x - x_0}{h} = 0{,}5,$$

siis

$$P_2(0{,}25) = -1 + \frac{0{,}5}{1} \cdot 1 + \frac{0{,}5(0{,}5 - 1)}{1 \cdot 2} \cdot 2 = -0{,}75.$$

9. Newtoni interpolatsioonivalem sammuga taha (võrdsete vahemikega sõlmede jaoks).

Olgu interpolatsioonisõlmedes $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0, -1, -2, \ldots ;\ h > 0)$ teada funktsiooni väärtused $y_k = f(x_k)$.

Tuleb arvutada funktsiooni $f(x)$ väärtus x puhul, mis asetseb suurima sõlme x_0 läheduses. Sel juhul kasutatakse valemit

$$f(x) \approx P_n(x),$$

kus

$$P_n(x) = y_0 + t\Delta y_{-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{-2} + \ldots +$$

$$+ \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_{-n}; \qquad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Suuruste Δy_{-1}, $\Delta^2 y_{-2}$, ... arvutamiseks koostame vahede tabeli *:

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	...
...	...	...				
x_{-4}	y_{-4}		...			
		Δy_{-4}		...		
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$		...	
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$		...
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$	
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$			
		Δy_{-1}				
x_0	y_0					

10. Stirlingi valem.

Olgu interpolatsioonisõlmedes $x_k = x_0 + kh$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) teada funktsiooni väärtused $y_k = f(x_k)$. Nõutakse arvutada funktsiooni $f(x)$ väärtust x puhul, mis asetseb keskmise sõlme x_0 läheduses. Sel juhul on sobiv kasutada valemit

$$f(x) \approx P_{2n}(x),$$

kus

$$P_{2n}(x) = y_0 + t\frac{\Delta y_0 + \Delta y_{-1}}{2} + \frac{t^2}{2!}\Delta^2 y_{-1} +$$

$$+ \frac{t(t^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{-2} + \Delta^3 y_{-1}}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{4!}\Delta^4 y_{-2} +$$

$$+ \frac{t(t^2-1)(t^2-2^2)}{5!} \cdot \frac{\Delta^5 y_{-3} + \Delta^5 y_{-2}}{2} + \ldots +$$

$$+ \frac{t^2(t^2-1)\ldots[t^2-(n-1)^2]}{(2n)!}\Delta^{2n} y_{-n}, \qquad t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Vahede Δy_0, Δy_{-1}, $\Delta^2 y_{-1}$, ... arvutamiseks koostame tabeli (vt. allmärkust):

* Iga arv vaadeldavates vahede tabelites (välja arvatud kahe esimese veeru arvud) saadakse, kui eelmises veerus poolrea võrra madalamal asetsevast arvust lahutatakse poolrea võrra kõrgemal asetsev arv, näit. $\Delta y_{-2} = y_{-1} - y_{-2}$; $\Delta^3 y_{-3} = \Delta^2 y_{-2} - \Delta^2 y_{-3}$ jne. Tabelites on alla kriipsutatud vahed, mis esinevad vaadeldavas valemis.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	...
...	...						
		...					
x_{-3}	y_{-3}		...				
		Δy_{-3}		...			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		...		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		...	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		...
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		...
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		...
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		...	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		...		
		Δy_2		...			
x_3	y_3		...				
		...					
...	...						

Näide 7. Arvutame Stirlingi valemi abil näites 1 (lk. 6) toodud funktsiooni väärtuse kohal $x = 0{,}4$ $(n = 1)$.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$
0	-1		
		1	
0,5	0		2
		3	
1	3		

$$\text{Et } t = \frac{0{,}4 - 0{,}5}{0{,}5} = -0{,}2,$$

siis

$$P_2(x) = 0 + t\frac{1+3}{2} + \frac{t^2}{2} \cdot 2 = t^2 + 2t =$$

$$= (-0{,}2)^2 + 2(-0{,}2) = -0{,}36.$$

11. Besseli valem.

Olgu interpolatsioonisõlmedes

$$x_k = x_0 + kh \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

teada funktsiooni väärtused $y_k = f(x_k)$. Nõutakse arvutada funktsiooni $f(x)$ väärtust x puhul, mis asetseb lõigu $[x_0, x_1]$ keskpunkti läheduses. Vaadeldaval juhul on otstarbekas kasutada valemit $f(x) \approx P_{2n+1}(x)$, kus

$$P_{2n+1}(x) = \frac{y_0 + y_1}{2} + \frac{(t-0{,}5)}{1!}\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\cdot\frac{\Delta^2 y_{-1} + \Delta^2 y_0}{2} +$$

$$+ \frac{(t-0{,}5)t(t-1)}{3!}\Delta^3 y_{-1} + \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)}{4!}\cdot\frac{\Delta^4 y_{-2} + \Delta^4 y_{-1}}{2} +$$

$$+ \frac{(t-0{,}5)t(t-1)(t+1)(t-2)}{5!}\Delta^5 y_{-2} + \ldots$$

$$+ \frac{t(t-1)(t+1)(t-2)\ldots(t+n-1)(t-n)}{(2n)!}\cdot\frac{\Delta^{2n} y_{-n} + \Delta^{2n} y_{-n+1}}{2} +$$

$$+ \frac{(t-0{,}5)t(t-1)(t+1)(t-2)\ldots(t+n-1)(t-n)}{(2n+1)!}\Delta^{2n+1} y_{-n},$$

$$t = \frac{x - x_0}{h}.$$

Vahede Δy_0, $\Delta^2 y_{-1}$, $\Delta^2 y_0$, ... arvutamiseks koostame vahede tabeli (vt. allmärkust lk. 14):

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	...
...	...	...					
x_{-3}	y_{-3}	Δy_{-3}	...	...			
x_{-2}	y_{-2}	Δy_{-2}	$\Delta^2 y_{-3}$	$\Delta^3 y_{-3}$	...	...	
x_{-1}	y_{-1}	Δy_{-1}	$\Delta^2 y_{-2}$	$\Delta^3 y_{-2}$	$\Delta^4 y_{-3}$	$\Delta^5 y_{-3}$	...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_{-1}$	$\Delta^3 y_{-1}$	$\Delta^4 y_{-2}$	$\Delta^5 y_{-2}$	...
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^4 y_{-1}$	...	...
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	...	...		
x_3	y_3	...	...				
...	...						

12. Interpolatsiooniprotsesside koonduvusest*.

Olgu antud lõigule $[a, b]$ kuuluvate arvude (interpolatsioonisõlmede) tabel

$$\left.\begin{array}{l} x_0^{(1)},\ x_1^{(1)} \\ x_0^{(2)},\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots \\ x_0^{(n)},\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)} \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Olgu $P_n(x)$ n-astme interpolatsioonipolünoom, mis on koostatud tabeli (5) n-da rea sõlmede järgi funktsiooni $f(x)$ jaoks.

Kehtivad järgmised teoreemid.

a) Kui $f(x)$ on täisfunktsioon, siis tabeli (5) mistahes sõlmede puhul koondub polünoomide $P_n(x)$ jada lõigul $[a, b]$ ühtlaselt funktsiooniks $f(x)$.

b) Kui $[a, b] = [-1,1]$ ja tabeli (5) sõlmed on Tšebõšovi polünoomide nullkohad (lk. 8), siis absoluutselt pideva funktsiooni $f(x)$ puhul koondub polünoomide $P_n(x)$ jada lõigul $[-1, 1]$ ühtlaselt funktsiooniks $f(x)$.

c) Kui $[a, b] = [-1, 1]$, tabeli (5) sõlmed on Tšebõšovi polünoomide nullkohad ja $f(x)$ on lõigul $[-1, 1]$ tõkestatud muuduga, siis sellel lõigul (funktsiooni $f(x)$ igas pidevuspunktis) koondub polünoomide $P_n(x)$ väärtuste jada funktsiooni $f(x)$ väärtuseks selles punktis.

Nende teoreemidega antakse tingimused, mille kehtivuse puhul interpolatsioonisõlmede arvu suurendamisest järeldub üldiselt interpolatsioonivea vähenemine.

13. Interpoleerimine seoses vähimruutude meetodiga.

Ligikaudne valem

$$f(x) \approx Q_{n+1}(x),$$

kus

$$Q_{n+1}(x) = P_n(x) + \lambda \cdot w(x).$$

Siin $P_n(x)$ on n-astme interpolatsioonipolünoom funktsiooni $f(x)$ jaoks, koostatud sõlmede $x_0, x_1, \ldots, x_n$ järgi;

* Siin esinevaid mõisteid vt. И. П. Натансон «Теория функций вещественной переменной». Москва 1957.

$w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Kordaja λ valitakse niiviisi, et integraal

$$\int_a^b [f(x)-Q_{n+1}(x)]^2\,dx$$

oleks minimaalne. Valem lõplikul kujul:

$$f(x)\approx P_n(x)+\frac{\int_a^b [f(x)-P_n(x)]w(x)\,dx}{\int_a^b [w(x)]^2\,dx}\cdot w(x).$$

14. Siledate funktsioonide interpoleerimine*.

Olgu funktsioonil $f(x)$ lõigul $[a, b]$ pidev tuletis. Sel juhul võib saada hea lähendi alljärgnevalt:

$$f(x)\approx Q_{n+1}(x),$$
$$Q_{n+1}(x)=P_n(x)+\lambda_0 w(x),$$

kus $P_n(x)$ on n-astme interpolatsioonipolünoom funktsiooni $f(x)$ jaoks sõlmede $x_0, x_1, \ldots, x_n$ järgi; $w(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)$. Arv λ_0 valitakse selliselt, et kõvera $Q_{n+1}(x)$ kaare pikkus lõigul $[a, b]$ oleks minimaalne, s. o. λ_0 on võrrandi

$$\int_a^b \frac{[P'_n(x)+\lambda w'(x)]w'(x)\,dx}{\sqrt{1+[P'_n(x)+\lambda w'(x)]^2}}=0$$

lahendiks.

15. Interpoleerimine eksponentsiaalsete polünoomidega.

Olgu antud interpolatsioonisõlmed $x_0=0$, $x_1=h$, $x_2=2h, \ldots, x_{2n-1}=(2n-1)h$. Tähistame funktsiooni väärtused $y_i=f(x_i)$ $(i=0, 1, \ldots, 2n-1)$. Anname skeemi valemi

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k x} \qquad (6)$$

* Lähemalt vt. T. J. Rivlin, *A Note on Smooth Interpolation*, SIAM Review, 1960, 2, № 1, lk. 27—30.

koostamiseks. Nõuame, et punktides $x_i (i = 0,1, \ldots, 2n - 1)$ valem (6) oleks täpne, s. o. $f(x_i) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k x_i}$.

a) Leiame võrrandi

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n-1} & y_n & y_{n+1} & \cdots & y_{2n-1} \\ 1 & m & m^2 & \ldots & m^n \end{vmatrix} = 0$$

lahendid $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

b) Leiame arvud

$$p_i = \frac{1}{h} \ln m_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

c) Konstrueerime funktsiooni

$$\sum_{k=1}^{n} C_k e^{p_k x} = \frac{\overline{W}}{W},$$

kus

$$\overline{W} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & -y_0 \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n & -y_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \ldots & m_n^{n-1} & -y_{n-1} \\ e^{p_1 x} & e^{p_2 x} & \ldots & e^{p_n x} & 0 \end{vmatrix},$$

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_n \\ m_1^2 & m_2^2 & \ldots & m_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_1^{n-1} & m_2^{n-1} & \ldots & m_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Näide 8. Koostame valemi (6) nelja sõlme 0, h, $2h$, $3h$ järgi. Et antud juhul $n = 2$, siis saame

$$f(x) \approx \frac{1}{m_2 - m_1} [(m_2 y_0 - y_1) e^{p_1 x} + (y_1 - m_1 y_0) e^{p_2 x}],$$

kus m_1 ja m_2 on võrrandi

$$\begin{vmatrix} y_0 & y_1 & y_2 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & m & m^2 \end{vmatrix} = 0$$

lahendid ning $p_1 = \frac{1}{h} \ln m_1$, $p_2 = \frac{1}{h} \ln m_2$.

16. Pöördinterpoleerimine.

Olgu funktsiooni $y = f(x)$ väärtused sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ vastavalt $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Tuleb leida argumendi väärtus $x = x^*$, mille puhul funktsioon $f(x)$ omandab etteantud väärtuse y^*.

a) Esimene lahendusviis. Kui funktsioon $y = f(x)$ on monotoonne, koostame interpolatsioonipolünoomi (lugedes x funktsiooniks, y — argumendiks):

$$P_n(y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\ldots(y-y_n)}{(y_i-y_0)(y_i-y_1)\ldots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\ldots(y_i-y_n)} \cdot x_i.$$

Siis $x^* \approx P_n(y^*)$.

b) Teine lahendusviis. Koostame funktsiooni $f(x)$ jaoks interpolatsioonipolünoomi $P_n(x)$. Otsitav väärtus x^* leitakse võrrandi $y^* = P_n(x)$ lahendina.

Olgu näiteks interpolatsioonisõlmedeks $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0,1, \ldots, n)$; $\Delta y_0 > 0$; $y_0 < y^* < y_1$. Sel juhul on otstarbekas võtta polünoomiks $P_n(x)$ Newtoni interpolatsioonipolünoom (vt. lk. 12). Siis

$$x^* = x_0 + ht^*,$$

kus t^* on võrrandi

$$t = \frac{1}{\Delta y_0}\left[y^* - y_0 - \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 y_0 - \right.$$

$$\left. - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3 y_0 - \ldots - \frac{t(t-1)\ldots(t-n+1)}{n!}\Delta^n y_0\right]$$

lahend (sümbolite $\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \ldots$ tähendust vt. lk. 12).

Selle võrrandi võime lahendada hariliku iteratsioonimeetodiga (lk. 151), võttes alglähendiks $t_0 = 0$. Hariliku iteratsioonimeetod koondub näiteks siis, kui $|\Delta^2 y_0| < |\Delta y_0|$ ja kõrgemat järku vahed $\Delta^3 y_0, \Delta^4 y_0, \ldots$ on väikesed, võrreldes vahedega Δy_0 ja $\Delta^2 y_0$.

Näide 9. Olgu funktsioon $y = f(x)$ antud tabeliga:

x_i	-1	0	2
y_i	-4	-5	-1

Leida $x = x^*$, mille puhul $y = -2$.

Koostame interpolatsioonipolünoomi

$$P_2(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(-1-0)(-1-2)} \cdot (-4) + \frac{(x+1)(x-2)}{(0+1)(0-2)} \cdot (-5) + \\ + \frac{(x+1)(x-0)}{(2+1)(2-0)} \cdot (-1) = x^2 - 5.$$

Lahendame võrrandi $-2 = x^2 - 5$, kust saame: $x^* = \pm\sqrt{3}$.

17. Hermite'i interpolatsioonivalem.

Valemi tuletamisel nõutakse, et interpolatsioonisõlmedes oleksid nii funktsiooni ja polünoomi väärtused kui ka funktsiooni ja polünoomi vastavate tuletiste (teatava järguni) väärtused võrdsed.

Vaatleme valemi erijuhtu *. Olgu antud funktsioon $f(x)$. Nõuame, et $(2n+1)$-järku polünoom $P_{2n+1}(x)$ rahuldaks sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tingimusi

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad P'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \quad (i = 0,1, \ldots, n).$$

Siis

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i(x) f(x_i) + \sum_{i=0}^{n} B_i(x) f'(x_i),$$

kus $A_i(x) = \left[1 - \frac{w''(x_i)}{w'(x_i)}(x - x_i)\right] \frac{w^2(x)}{[w'(x_i)(x-x_i)]^2}$,

$B_i(x) = (x - x_i) \frac{w^2(x)}{[w'(x_i)(x-x_i)]^2}$ $(i = 0,1, \ldots, n)$ ja

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n).$$

Hermite'i valem

$$f(x) \approx P_{2n+1}(x).$$

Valemi viga

$$R(x) = f(x) - P_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} w^2(x).$$

18. Feijéri teoreem.

Olgu interpolatsioonilõiguks lõik $[-1, 1]$. Eeldame, et funktsioon $f(x)$ on sellel lõigul pidev, kusjuures interpo-

* Valemi üldkuju vt. näit. [1, 3].

latsioonisõlmedeks on Tšebõšovi polünoomi (lk. 8) nullkohad

$$x_i = \cos\frac{(2i+1)\pi}{2(n+1)} \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Koostades nende sõlmede järgi polünoomi $P_{2n+1}(x)$, mis rahuldab tingimusi

$$P_{2n+1}(x_i) = f(x_i), \quad P'_{2n+1}(x_i) = 0 \quad (i = 0,1, \ldots, n),$$

saame:

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{i=0}^{n} (1 - xx_i)\left[\frac{2^n w(x)}{(n+1)(x-x_i)}\right]^2 f(x_i),$$

kus $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Polünoomide $P_{2n+1}(x)$ jada koondub $(n \to \infty)$ lõigul $[-1, 1]$ ühtlaselt funktsiooniks $f(x)$.

B. Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine

Olgu k-muutuja funktsioon $f(x, y, \ldots, t)$ antud oma väärtustega punktides (sõlmedes) $(x_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, t_{i_k})$ $(i_1 = 0,1, \ldots, n_1; i_2 = 0,1, \ldots, n_2; \ldots; i_k = 0,1, \ldots, n_k)$. Et arvutada ligikaudselt selle funktsiooni väärtust mingis punktis $(x, y, \ldots, t)$, koostatakse polünoom (nn. interpolatsioonipolünoom) $P_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x, y, \ldots, t)$ (n_1 — polünoomi aste x suhtes, $n_2 - y$ suhtes, ..., $n_k - t$ suhtes), kusjuures polünoomi kordajad määratakse tingimustest

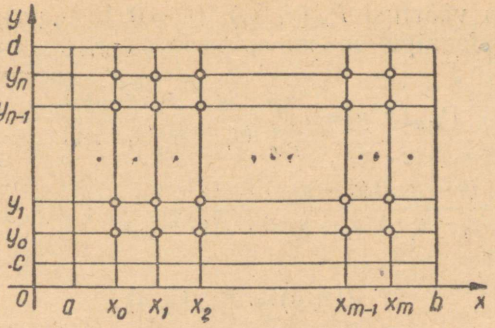
$$P_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, t_{i_k}) = f(x_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, t_{i_k}).$$

Funktsiooni ligikaudseks väärtuseks võetakse

$$f(x, y, \ldots, t) \approx P_{n_1 n_2 \ldots n_k}(x, y, \ldots, t).$$

1. Skeem kahe muutuja funktsioonide interpoleerimiseks.

Olgu funktsioon $z = f(x, y)$ antud punktide (sõlmede) (x_i, y_j) hulgal $(i = 0,1, \ldots, m; j = 0,1, \ldots, n)$.



Joon. 2.

Tähistame $z_{ij} = f(x_i, y_j)$. Vaadeldavat funktsiooni z võime esitada alljärgneva tabelina.

y_j \ x_i	x_0	x_1	...	x_m
y_0	z_{00}	z_{10}	...	z_{m0}
y_1	z_{01}	z_{11}	...	z_{m1}
...	...	...	...	...
y_n	z_{0n}	z_{1n}	...	z_{mn}

Probleem: leida selle tabeli andmete järgi funktsiooni z väärtus punktis $(\bar{x}, \bar{y})$.

Selleks koostame kahe muutuja polünoomi (polünoomi aste x suhtes on m; y suhtes n), mille väärtused antud sõlmedes võrduvad funktsiooni $z = f(x, y)$ vastavate väärtustega.

Koostame tabeli iga rea väärtuste z_{ij} järgi m-astme interpolatsioonipolünoomi (lugedes y fikseerituks)

$$P_m(x, y_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_m)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_m)} z_{ij}$$

$$(j = 0,1, \dots, n).$$

Kasutades väärtusi $P_m(\bar{x}, y_j)$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, koostame interpolatsioonipolünoomi sõlmede $y_0, y_1, \ldots, y_n$ järgi

$$P_{mn}(\bar{x}, y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots}{(y_j-y_0)(y_j-y_1)\ldots}$$

$$\frac{(y-y_{j-1})(y-y_{j+1})\ldots(y-y_n)}{(y_j-y_{j-1})(y_j-y_{j+1})\ldots(y_j-y_n)} \cdot P_m(\bar{x}, y_j).$$

Siis

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \approx P_{mn}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad (7)$$

Valemi (7) saamisel kasutasime Lagrange'i interpolatsioonivalemit (1). Analoogiliselt võime saada mitmesuguseid interpolatsioonivalemeid kahe muutuja funktsiooni jaoks, lähtudes teistest ühe muutuja funktsiooni interpolatsioonivalemitest.

Tähistame

$$w_1(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_m),$$
$$w_2(y) = (y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_n).$$

Siis valem (7) avaldub kujul:

$$f(x, y) \approx \sum_{i=0}^{m} \frac{w_1(x)}{(x-x_i)w'_1(x_i)} \sum_{j=0}^{n} \frac{w_2(y)}{(y-y_j)w'_2(y_j)} f(x_i, y_j).$$

Valemi viga

$$R_{mn}(x, y) = f(x, y) - P_{mn}(x, y) =$$

$$= \frac{w_1(x)}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} f(\xi, y) + \frac{w_2(y)}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} f(x, \eta) -$$

$$- \frac{w_1(x)w_2(y)}{(m+1)!(n+1)!} \frac{\partial^{m+n+2}}{\partial x^{m+1}\partial y^{n+2}} f(\xi_1, \eta_1).$$

Näide 10. Olgu funktsioon z antud tabeliga:

y_j \ x_i	0	1	2
0	1	2	5
1	1	3	7
2	1	6	13

Koostame funktsiooni z jaoks interpolatsioonipolünoomi $P_{22}(x, y)$. Selleks leiame algul interpolatsioonipolünoomid x järgi iga fikseeritud $y = y_j$ puhul $(j = 0, 1, 2)$

$$P_2(x, 0) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 2 + \\ + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 5 = x^2 + 1,$$

$$P_2(x, 1) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 3 + \\ + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 7 = x^2 + x + 1,$$

$$P_2(x, 2) = \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} \cdot 1 + \frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)} \cdot 6 + \\ + \frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)} \cdot 13 = x^2 + 4x + 1.$$

Lugedes nüüd avaldised $P_2(x, y_j)$ $(j = 0, 1, 2)$ funktsiooni z väärtusteks punktides (x, y_j) $(j = 0, 1, 2)$, koostame nende väärtuste ja sõlmede y_j $(j = 0, 1, 2)$ järgi interpolatsioonipolünoomi y suhtes. Saame

$$P_{22}(x, y) = \frac{(y-1)(y-2)}{(0-1)(0-2)}(x^2 + 1) + \\ + \frac{(y-0)(y-2)}{(1-0)(1-2)}(x^2 + x + 1) + \\ + \frac{(y-0)(y-1)}{(2-0)(2-1)}(x^2 + 4x + 1) = x^2 + xy^2 + 1.$$

Seega $z \approx x^2 + xy^2 + 1$.

2. Lineaarne interpoleerimine kahe muutuja funktsioonide puhul.

Olgu funktsiooni z väärtused antud neljas sõlmes:

y_j \ x_i	x_1	x_2
y_1	z_{11}	z_{21}
y_2	z_{12}	z_{22}

Interpolatsioonivalem (7) vaadeldavate sõlmede järgi avaldub kujul ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$):

$$z \approx z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \Big[(z_{12} - z_{11}) + \\ + \frac{(z_{22} - z_{12}) - (z_{21} - z_{11})}{x_2 - x_1}(x - x_1)\Big] \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (8)$$

Näide 11. Funktsioon on antud tabeliga:

y_j \ x_i	0	1
−1	−1	0
0	1	2

Leida funktsiooni z väärtus punktis (0,5; −0,5). Valemi (8) põhjal saame

$$z \approx -1 + \frac{0-(-1)}{1-0}(0{,}5 - 0) + \\ + \Big[(1-(-1)) + \frac{(2-1)-(0-(-1))}{1-0}(0{,}5 - 0)\Big] \times \\ \times \frac{-0{,}5-(-1)}{0-(-1)} = 0{,}5.$$

3. Kolme ja enama muutuja funktsioonide interpoleerimisest.

Interpolatsioonipolünoomi koostamine kolme ja enama muutuja funktsiooni jaoks on analoogiline kahe muutuja funktsiooni juhuga (vt. lk. 22). Kui muutujate arv on k, saadakse interpolatsioonipolünoom ühe muutuja interpolatsioonipolünoomide k-kordsel rakendamisel.

Olgu funktsioon $f(x, y, \ldots, t)$ antud sõlmedes $(x_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, t_{i_k})$ ($i_1 = 0, 1, \ldots, n_1$; $i_2 = 0, 1, \ldots, n_2$; $\ldots$; $i_k = 0, 1, \ldots, n_k$).

Tähistame

$$w_1(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n_1}),$$
$$w_2(y) = (y - y_0)(y - y_1) \ldots (y - y_{n_2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w_k(t) = (t - t_0)(t - t_1) \ldots (t - t_{n_k}).$$

Siis interpolatsioonivalem avaldub kujul

$$f(x, y, \ldots, t) \approx$$

$$\approx \sum_{i_1=0}^{n_1} \frac{w_1(x)}{(x-x_{i_1})w_1'(x_{i_1})} \cdot \sum_{i_2=0}^{n_2} \frac{w_2(y)}{(y-y_{i_2})w_2'(y_{i_2})} \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot \sum_{i_k=0}^{n_k} \frac{w_k(t)}{(t-t_{i_k})w_k'(t_{i_k})} f(x_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, t_{i_k}).$$

Vaatleme veel lineaarset interpoleerimist kolme muutuja funktsiooni $u = f(x, y, z)$ puhul. Tähistame $u_{ijk} = f(x_i, y_j, z_k)$.

Olgu funktsioon u antud tabeliga:

y_j \ z_k / x_i	z_1		z_2	
	x_1	x_2	x_1	x_2
y_1	u_{111}	u_{211}	u_{112}	u_{212}
y_2	u_{121}	u_{221}	u_{122}	u_{222}

Interpolatsioonivalem ($x_1 \leqslant x \leqslant x_2$; $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$; $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$) avaldub kujul

$$u \approx u_{111} + \frac{u_{211}-u_{111}}{x_2-x_1}(x-x_1) + \Big[(u_{121}-u_{111}) +$$

$$+ \frac{(u_{221}-u_{121})-(u_{211}-u_{111})}{x_2-x_1}(x-x_1)\Big]\frac{y-y_1}{y_2-y_1} + \Big\{(u_{112}-u_{111}) +$$

$$+ \frac{(u_{212}-u_{112})-(u_{211}-u_{111})}{x_2-x_1}(x-x_1) +$$

$$+ \Big[(u_{122}-u_{112}+u_{111}-u_{121}) +$$

$$+ \frac{(u_{222}-u_{122})-(u_{212}-u_{112})+(u_{211}-u_{111})-(u_{221}-u_{121})}{x_2-x_1}(x-x_1)\Big] \times$$

$$\times \frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Big\} \cdot \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Kirjandust.

1. И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, I. Москва, 1962.
2. Э. Д. Бут, *Численные методы*. Москва, 1959.
3. В. Л. Гончаров, *Теория интерполирования и приближения функций*. Москва, 1954.
4. Дж. Н. Ланс, *Численные методы для быстродействующих вычислительных машин*. Москва, 1962.
5. И. П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*. Москва, 1962.
6. И. П. Натансон, *Конструктивная теория функций*. Москва, 1949.
7. L. Luht, *Arvutusmeetodid II*. TRÜ rotoprint, 1964.

II. NUMBRILINE DIFERENTSEERIMINE

Numbrilise diferentseerimise ülesandeks on funktsiooni tuletise väärtuse ligikaudne arvutamine mingis punktis eeldusel, et on teada funktsiooni väärtused lähedastes punktides. Selle ülesande lahendamiseks koostatakse tavaliselt funktsiooni väärtuste järgi mingi lähendpolünoom (vt. ptk. I, IV, V), mille tuletis loetakse ligikaudselt võrdseks vaadeldava funktsiooni tuletisega.

1. Tuletiste arvutamine interpolatsioonivalemite abil (üldised märkused).

Olgu lõigul $[a, b]$ funktsiooni $y = f(x)$ väärtused antud punktides (sõlmedes) $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Et arvutada väärtust $f'(x)$, koostame interpolatsioonipolünoomi $P_n(x)$ funktsiooni $y = f(x)$ jaoks antud sõlmede järgi (vt. ptk. I). Siis

$$f'(x) \approx P_n'(x). \tag{1}$$

Selle valemi viga

$$R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) = \frac{w'(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) + \\ + \frac{w(x)}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\eta), \tag{2}$$

kus $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$; $\xi, \eta \in (a, b)$.

Valemite saamiseks kõrgemat järku tuletiste jaoks tuleb seost (1) diferentseerida vastav arv kordi. Näiteks

$$f''(x) \approx P_n''(x),$$

kusjuures viga avaldub kujul

$$R_n''(x) = f''(x) - P_n''(x) = \frac{w''(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_1) + \\ + 2\frac{w'(x)}{(n+2)!} f^{(n+2)}(\xi_2) + 2\frac{w(x)}{(n+3)!} f^{(n+3)}(\xi_3); \; \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (a, b).$$

Kui punkt x asetseb interpolatsioonisõlmi sisaldavast lõigust väljaspool, siis valemid $R_n'(x)$ ja $R_n''(x)$ jaoks lihtsustuvad:

$$R_n'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w'(x),$$

$$R_n''(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w''(x).$$

Võrreldes interpoleerimisega on ligikaudne diferentseerimine üldiselt ebatäpsem.

Sageli nõutakse tuletise väärtuse arvutamist interpolatsioonisõlmes. Sel juhul lihtsustuvad numbrilise diferentseerimise valemid tunduvalt. Lihtsustub ka vea avaldis (2), sest interpolatsioonisõlmes $w(x) = 0$.

2. Numbriline diferentseerimine diferentssuhete abil.

Lähtume Newtoni interpolatsioonivalemist (vt. lk. 9). Tähistades $x - x_i = \alpha_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$, saame valemi

$$f'(x) \approx f(x_0; x_1) + (\alpha_0 + \alpha_1) f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0\alpha_1 + \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots + (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-2} + \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-3}\alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Valemi viga

$$R'_n(x) = w'(x) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + w(x) f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Teise tuletise arvutamiseks kehtib valem

$$f''(x) \approx 2[f(x_0; x_1; x_2) + (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) f(x_0; x_1; x_2; x_3) + \ldots + (\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-3} + \alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{n-4}\alpha_{n-2} + \ldots + \alpha_2\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}) f(x_0; x_1; \ldots; x_n)].$$

Valemi viga

$$R''_n(x) = w''(x) f(x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + 2w'(x) f(x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n) + 2w(x) f(x; x; x; x_0; x_1; \ldots; x_n).$$

Näide 1. Arvutame $f'(0{,}4)$, kui funktsioon $f(x)$ on antud tabeliga

x_i	0	0,5	1
$f(x_i)$	0	0,75	2

Leiame: $a_0 = x - x_0 = 0{,}4 - 0 = 0{,}4$; $a_1 = x - x_1 = 0{,}4 - 0{,}5 = -0{,}1$. Koostame diferentssuhete tabeli (vt. lk. 9):

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i; x_{i+1})$	$f(x_i; x_{i+1}; x_{i+2})$
0	0	1,5	
0,5	0,75		1
1	2	2,5	

Saame

$$f(0{,}4) \approx [f(x_0; x_1) + (a_0 + a_1) f(x_0; x_1; x_2)] = 1{,}5 + (0{,}4 - 0{,}1) \cdot 1 = 1{,}8.$$

3. Vahedeta valem.

Lähtudes Lagrange'i interpolatsioonivalemist (vt. lk. 6), saame

$$f^{(k)}(x) \approx \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{w(x)}{x - x_i}\right]^{(k)} \cdot \frac{f(x_i)}{w'(x_i)}.$$

Valemi viga

$$R_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{(k-i)!(n+i+1)!} f^{(n+i+1)}(\xi_i)\, w^{(k-i)}(x),$$

$$\xi_i \in (a, b).$$

4. Numbriline diferentseerimine võrdsete vahemikega sõlmede puhul.

Olgu sõlmedes $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ antud funktsiooni väärtused $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Tähistame $(x - x_0)/h = t$. Kasutades Lagrange'i interpolatsioonivalemit võrdsete vahemikega sõlmede puhul (vt. lk. 8), saame valemid

$$f'(x) \approx \frac{1}{h} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \frac{C_n^i y_i}{n!} \cdot \frac{d}{dt} \left[\frac{t(t-1) \dots (t-n)}{t-i} \right],$$

$$f'''(x) \approx \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n+i} \frac{C_n^i y_i}{n!} \frac{d}{dt^2} \left[\frac{t(t-1) \dots (t-n)}{t-i} \right].$$

Toome konkreetsed valemid funktsiooni tuletiste arvutamiseks sõlmedes (mitmesuguste n väärtuste puhul). Tähistame $y_i^{(k)} = f^{(k)}(x_i)$. Igas valemis nurksulu järel seisev liidetav annab vaadeldava valemi vea. Esitatud valemitest nähtub, et keskmistes sõlmedes saadakse kõige lihtsamad avaldised paarisarvulise n puhul. Seetõttu tuletiste arvutamisel mingis sõlmes tuleb täiendavaid sõlmi võtta vaadeldavast sõlmest vasakul ja paremal võrdsel hulgal.

$n = 1$

$$y_0' = \frac{1}{h}[y_1 - y_0] - \frac{h}{2} f''(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{h}[y_1 - y_0] + \frac{h}{2} f''(\xi).$$

$n = 2$

$$y_0' = \frac{1}{2h}[-3y_0 + 4y_1 - y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{2h}[y_2 - y_0] - \frac{h^2}{6} f'''(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{2h}[y_0 - 4y_1 + 3y_2] + \frac{h^2}{3} f'''(\xi).$$

$n = 3$

$$y_0' = \frac{1}{6h}[-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3] - \frac{h^3}{4} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{6h}[-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3] + \frac{h^3}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{6h}[y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3] - \frac{h^3}{12} f^{(IV)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{6h}[-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3] + \frac{h^3}{4} f^{(IV)}(\xi).$$

$n = 4$

$$y_0' = \frac{1}{12h}[-25y_0 + 48y_1 - 36y_2 + 16y_3 - 3y_4] + \frac{h^4}{5} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{12h}[-3y_0 - 10y_1 + 18y_2 - 6y_3 + y_4] - \frac{h^4}{20} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{12h}[y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4] + \frac{h^4}{30} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{12h}[-y_0 + 6y_1 - 18y_2 + 10y_3 + 3y_4] + \frac{h^4}{20} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_4' = \frac{1}{12h}[3y_0 - 16y_1 + 36y_2 - 48y_3 + 25y_4] + \frac{h^4}{5} f^{(V)}(\xi).$$

$n = 5$

$$y_0' = \frac{1}{60h}[-137y_0 + 300y_1 - 300y_2 + 200y_3 - 75y_4 + 12y_5] - \frac{h^5}{6} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_1' = \frac{1}{60h}[-12y_0 - 65y_1 + 120y_2 - 60y_3 + 20y_4 - 3y_5] + \frac{h^5}{30} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_2' = \frac{1}{60h}[3y_0 - 30y_1 - 20y_2 + 60y_3 - 15y_4 + 2y_5] - \frac{h^5}{60} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_3' = \frac{1}{60h}[-2y_0 + 15y_1 - 60y_2 + 20y_3 + 30y_4 - 3y_5] + \frac{h^5}{60} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_4' = \frac{1}{60h}[3y_0 - 20y_1 + 60y_2 - 120y_3 + 65y_4 + 12y_5] - \frac{h^5}{30} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_5' = \frac{1}{60h}[-12y_0 + 75y_1 - 200y_2 + 300y_3 - 300y_4 + 137y_5] + \frac{h^5}{6} f^{(VI)}(\xi).$$

$n = 6$:

$$y_3' = \frac{1}{60h}[-y_0 + 9y_1 - 45y_2 + 45y_4 - 9y_5 + y_6] - \frac{h^6}{140} f^{(VII)}(\xi).$$

$n = 2$:

$$y_0'' = \frac{1}{h^2}[y_0 - 2y_1 + y_2] - hf'''(\xi_1) + \frac{h^2}{6} f^{(IV)}(\xi_2);$$

$$y_1'' = \frac{1}{h^2}[y_0 - 2y_1 + y_2] - \frac{h^2}{12} f^{(IV)}(\xi_2);$$

$$y_2'' = \frac{1}{h^2}[y_0 - 2y_1 + y_2] + hf'''(\xi_1) - \frac{h^2}{6} f^{(IV)}(\xi_2).$$

$n = 3$:

$$y_0'' = \frac{1}{6h^2}[12y_0 - 30y_1 + 24y_2 - 6y_3] + \frac{11}{12} h^2 f^{(IV)}(\xi_1) -$$
$$- \frac{h^3}{10} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_1'' = \frac{1}{6h^2}[6y_0 - 12y_1 + 6y_2] - \frac{1}{12} h^2 f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_2'' = \frac{1}{6h^2}[6y_1 - 12y_2 + 6y_3] - \frac{1}{12} h^2 f^{(IV)}(\xi_1) - \frac{h^3}{30} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_3'' = \frac{1}{6h^2}[-6y_0 + 24y_1 - 30y_2 + 12y_3] + \frac{11}{12} h^2 f^{(IV)}(\xi_1) -$$
$$- \frac{h^3}{10} f^{(V)}(\xi_2).$$

$n = 4$:

$$y_0'' = \frac{1}{24h^2}[70y_0 - 208y_1 + 228y_2 - 112y_3 + 22y_4] -$$
$$- \frac{5h^3}{6} f^{(V)}(\xi_1) + \frac{h^4}{15} f^{(V)}(\xi_2);$$

$$y_1'' = \frac{1}{24h^2}[22y_0 - 40y_1 + 12y_2 + 8y_3 - 2y_4] +$$
$$+ \frac{h^3}{12} f^{(V)}(\xi_1) - \frac{h^4}{60} f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_2'' = \frac{1}{24h^2}[-2y_0 + 32y_1 - 60y_2 + 32y_3 - 2y_4] + \frac{h^4}{90} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_3'' = \frac{1}{24h^2}[-2y_0 + 8y_1 + 12y_2 - 40y_3 + 22y_4] -$$
$$- \frac{h^3}{12} f^{(V)}(\xi_1) + \frac{h^4}{60} f^{(VI)}(\xi_2);$$

$$y_4'' = \frac{1}{24h^2}[22y_0 - 112y_1 + 228y_2 - 208y_3 + 70y_4] +$$
$$+ \frac{5}{6} h^3 f^{(V)}(\xi_1) - \frac{h^4}{15} f^{(VI)}(\xi_2).$$

Toome mõned valemid kõrgemat järku tuletiste arvutamiseks:

$$y_2''' = \frac{1}{2h^3}[y_4 - y_0 + 2(y_1 - y_3)] - \frac{h^2}{4} f^{(V)}(\xi);$$

$$y_3''' = \frac{1}{8h^3}[y_0 - y_6 + 8y_5 - 8y_1 + 13y_2 - 13y_4] + \frac{7h^4}{120} f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_2^{(IV)} = \frac{1}{h^4}[y_4 + y_0 - 4y_3 - 4y_1 + 6y_2] - \frac{h^2}{6} f^{(VI)}(\xi);$$

$$y_3^{(IV)} = \frac{1}{6h^4}[-y_6 - y_0 + 12y_5 + 12y_1 - 39y_4 - 39y_2 + 56y_3] + \frac{7h^4}{240} f^{(VIII)}(\xi);$$

$$y_3^{(V)} = \frac{1}{2h^5}[y_6 - y_0 - 4y_5 + 4y_1 + 5y_4 - 5y_2] - \frac{h^2}{3} f^{(VII)}(\xi);$$

$$y_3^{(VI)} = \frac{1}{h^6}[y_6 + y_0 - 6y_5 - 6y_1 + 15y_4 + 15y_2 - 20y_3] - \frac{h^2}{4} f^{(VIII)}(\xi).$$

Näide 2. Arvutame näites 1 vaadeldud funktsiooni puhul $f'(0,5)$. Et $h = 0,5$, siis rakendades valemit $n = 2$ puhul, saame

$$f'(0,5) = y_1' = \frac{1}{2h}[y_2 - y_0] = \frac{1}{2 \cdot 0,5}[2 - 0] = 2.$$

5. Määramatute kordajate meetod numbriliste diferentseerimisvalemite koostamiseks.

Tuletame valemi

$$f^{(k)}(x_i) \approx \sum_{j=0}^{n} c_j f(x_j), \qquad (3)$$

lähtudes nõudest: valida arvud $c_0, c_1, \ldots, c_n$ niiviisi, et valem (3) oleks täpne iga n-astme polünoomi puhul. Arvude $c_0, c_1, \ldots, c_n$ määramiseks asetatakse avaldisse (3) funktsioonid $f(x) = 1, x, x^2, \ldots, x^n$. Saadakse alljärgnev võrrandisüsteem

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + \ldots + c_n = 0, \\ c_0x_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{k-1} + c_1x_1^{k-1} + \ldots + c_nx_n^{k-1} = 0, \\ c_0x_0^{k} + c_1x_1^{k} + \ldots + c_nx_n^{k} = k!, \\ c_0x_0^{k+1} + c_1x_1^{k+1} + \ldots + c_nx_n^{k+1} = \frac{(k+1)!}{1!}x_i, \\ c_0x_0^{k+2} + c_1x_1^{k+2} + \ldots + c_nx_n^{k+2} = \frac{(k+2)!}{2!}x_i^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0x_0^{n} + c_1x_1^{n} + \ldots + c_nx_n^{n} = \frac{n!}{(n-k)!}x_i^{n-k}. \end{cases}$$

Näide 3. Sõlmedes $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, $x_3 = 3h$ on antud funktsiooni väärtused $f(0)$, $f(h)$, $f(2h)$, $f(3h)$. Tuletame valemi $f'(h)$ arvutamiseks, mis on täpne suvalise kolmandat järku polünoomi puhul.

Otsides valemit kujul

$$f'(h) \approx c_0f(0) + c_1f(h) + c_2f(2h) + c_3f(3h),$$

saame kordajate c_0, c_1, c_2, c_3 määramiseks võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_0 \cdot 0 + c_1h + c_2 2h + c_3 3h = 1, \\ c_0 \cdot 0 + c_1h^2 + c_2 4h^2 + c_3 9h^2 = 2h, \\ c_0 \cdot 0 + c_1h^3 + c_2 8h^3 + c_3 27h^3 = 3h^2. \end{cases}$$

Süsteemi lahenditeks on: $c_0 = -\frac{2}{6h}$, $c_1 = -\frac{3}{6h}$, $c_2 = \frac{6}{6h}$, $c_3 = -\frac{1}{6h}$. Järelikult saame valemi

$$f'(h) \approx \frac{1}{6h}[-2f(0) - 3f(h) + 6f(2h) - f(3h)].$$

6. Numbriline diferentseerimine vähimruutude meetodi abil.

Kui funktsiooni $y = f(x)$ väärtused saadakse katseliselt (esinevad mõõtmisvead), siis on tuletise ligikaudset väärtust sobiv arvutada vähimruutude meetodi abil saadud valemite põhjal (vähimruutude meetodist vt. ptk. IV).

Olgu sõlmedes $x_0 = 0$, $x_1 = h$, $x_2 = 2h$, ..., $x_n = nh$ saadud funktsiooni väärtused vastavalt y_0, y_1, ..., y_n.

Eeldame, et praktiliselt võime mistahes $2k+1$ järjestikust punkti (x_i, y_i) paraboolil asuvaks lugeda. Tuletise väärtust sõlmes $x_j = jh$ on siis sobiv arvutada valemi

$$y_j' = \frac{3}{k(k+1)(2k+1)h} \sum_{i=-k}^{k} i \cdot y_{j+i}$$

põhjal.*

Sageli rakendatakse praktikas valemeid, mis kasutavad funktsiooni väärtusi kahes sõlmes vasakul ja paremal pool vaadeldavast sõlmest (sel juhul $k=2$) (seejuures tuletise väärtuse arvutamiseks kahes esimeses ja kahes viimases sõlmes kasutatakse erinevaid valemeid). Need on järgmised:

$$\left.\begin{aligned}
y_0' &= \frac{-21y_0 + 13y_1 + 17y_2 - 9y_3}{20h}, \\
y_1' &= \frac{-11y_0 + 3y_1 + 7y_2 + y_3}{20h}, \\
y_j' &= \frac{-2y_{j-2} - y_{j-1} + y_{j+1} + 2y_{j+2}}{10h}, \qquad (j=2,3,\ldots,n-2) \\
y_{n-1}' &= \frac{-y_{n-3} - 7y_{n-2} - 3y_{n-1} + 11y_n}{20h}, \\
y_n' &= \frac{9y_{n-3} - 17y_{n-2} - 13y_{n-1} + 21y_n}{20h},
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Näide 4. Leiame y_0' ja y_3' tabeliga

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,11	0,24	0,39	0,56	0,75	0,96	1,19	1,44	1,71	2

antud funktsiooni puhul. Siin $h = 0{,}1$ ja seega

$$y_0' = \frac{-21 \cdot 0 + 13 \cdot 0{,}11 + 17 \cdot 0{,}24 - 9 \cdot 0{,}39}{20 \cdot 0{,}1} = 1,$$

---

* Selle valemi tuletamiseks moodustame polünoomi $P_2(x) = a + bx + cx^2$. Kordajad a, b, c määratakse tingimusest, et suurus

$$\varepsilon(a,b,c) = \sum_{i=-k}^{k} [P_2(x_{j+i}) - y_{j+i}]^2$$

oleks minimaalne.

Seejuures võetakse $y_j' = P_2'(x_j)$.

$$y_3' = \frac{-2 \cdot 0{,}11 - 0{,}24 + 0{,}56 + 2 \cdot 075}{10 \cdot 0{,}1} = 1{,}6.$$

Teise tuletise väärtuste arvutamiseks vähimruutude meetodiga arvutame alguses esimese tuletise väärtused y'_i ja saadud väärtuste abil samade valemite põhjal y''_i. Valemite (4) kahekordsel rakendamisel saame valemid

$$y_0'' = \frac{1}{200h^2}[115y_0 - 116y_1 - 124y_2 + 118y_3 + 25y_4 - 18y_5],$$

$$y_1'' = \frac{1}{200h^2}[85y_0 - 76y_1 - 84y_2 + 58y_3 + 15y_4 + 2y_5],$$

$$y_2'' = \frac{1}{200h^2}[53y_0 - 33y_1 - 51y_2 + 13y_3 + 2y_4 + 8y_5 + 8y_6],$$

$$y_3'' = \frac{1}{200h^2}[26y_0 - 4y_1 - 18y_2 - 14y_3 - 8y_4 + 2y_5 + 8y_6 + 8y_7],$$

$$y_j'' = \frac{1}{100h^2}[4(y_{j-4} + y_{j-3} + y_{j+3} + y_{j+4} - y_{j-1} - y_{j+1}) + (y_{j-2} + y_{j+2}) - 10y_j]$$
$$(j = 4, 5, \ldots, n-4),$$

$$y_{n-3}'' = \frac{1}{200h^2}[-26y_n + 4y_{n-1} + 18y_{n-2} + 14y_{n-3} + 8y_{n-4} - 2y_{n-5} - 8y_{n-6} - 8y_{n-7}],$$

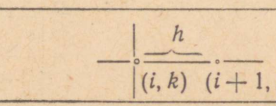
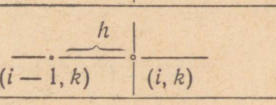
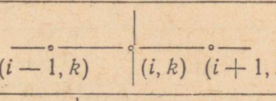
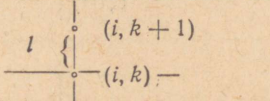
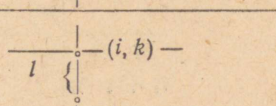
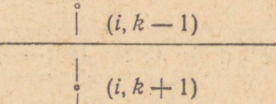
$$y_{n-2}'' = \frac{1}{200h^2}[-53y_n + 33y_{n-1} + 51y_{n-2} - 13y_{n-3} - 2y_{n-4} - 8y_{n-5} - 8y_{n-6}],$$

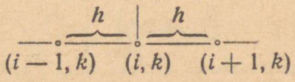
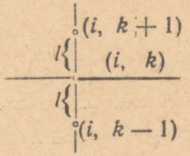
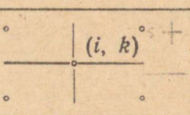
$$y_{n-1}'' = \frac{1}{200h^2}[-85y_n + 76y_{n-1} + 84y_{n-2} - 58y_{n-3} - 15y_{n-4} - 2y_{n-5}],$$

$$y_n'' = \frac{1}{200h^2}[-115y_n + 116y_{n-1} + 124y_{n-2} - 118y_{n-3} - 25y_{n-4} + 18y_{n-5}].$$

7. Osatuletiste ligikaudne arvutamine.

Olgu antud funktsiooni $u = u(x, y)$ väärtused sõlmedes (punktides) (x_i, y_k) (või lühidalt (i, k)) $(i = 0,1,2\ldots;$ $k = 0, 1, 2, \ldots)$, kusjuures $x_{i+1} - x_i = h$ $(i = 0, 1, \ldots)$; $y_{k+1} - y_k = l$ $(k = 0, 1, \ldots)$. Tähistame $u_{ik} = u(x_i, y_k)$. Toome mõned valemid funktsiooni u osatuletiste ligikaudseks arvutamiseks sõlmedes (x_i, y_k):

	Sõlmede paigutus	Ligikaudne valem	Vea suurusjärk
1		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,\,k} - u_{ik}}{h}$	$O(h)$
2		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} \approx \frac{u_{i,\,k} - u_{i-1,\,k}}{h}$	$O(h)$
3		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,\,k} - u_{i-1,\,k}}{2h}$	$O(h^2)$
4		$\frac{\partial u_{i,\,k}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,\,k+1} - u_{ik}}{l}$	$O(l)$
5		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y} \approx \frac{u_{ik} - u_{i,\,k-1}}{l}$	$O(l)$
6		$\frac{\partial u_{ik}}{\partial y} \approx \frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k-1}}{2l}$	$O(l^2)$

	Sõlmede paigutus	Ligikaudne valem	Vea suurusjärk
7		$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,\,k}}{h^2}$	$O(h^2)$
8		$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,\,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,\,k-1}}{l^2}$	$O(l^2)$
9		$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} \approx \frac{u_{i+1,\,k+1} - u_{i+1,\,k-1} - u_{i-1,\,k+1} + u_{i-1,\,k-1}}{4hl}$	$O(h^2 + l^2)$
10		$\frac{\partial^4 u_{ik}}{\partial x^4} \approx \frac{u_{i+2,\,k} - 4u_{i+1,\,k} + 6u_{ik} - 4u_{i-1,\,k} + u_{i-2,\,k}}{h^4}$	$O(h^2)$
11		$\frac{\partial^4 u_{ik}}{\partial y^4} \approx \frac{u_{i,\,k+2} - 4u_{i,\,k+1} + 6u_{ik} - 4u_{i,\,k-1} + u_{i,\,k-2}}{l^4}$	$O(l^2)$

Ligikaudsed valemid kõrgemat järku osatuletiste arvutamiseks saadakse, kui rakendatakse järjestikku madalamat järku osatuletiste arvutamiseks kasutatavaid ligikaudseid valemeid. Seejuures on soovitatav, et valemite vea suurusjärgud oleksid võrdsed. Näitena vaatleme tabelis toodud valemi 9 saamist sama tabeli valemite 3 ja 6 järjestikusel rakendamisel:

$$\frac{\partial^2 u_{ik}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial u_{ik}}{\partial x}\right] \approx \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{u_{i+1,\,k} - u_{i-1,\,k}}{2h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2h}\left[\frac{\partial}{\partial y} u_{i+1,\,k} - \frac{\partial}{\partial y} u_{i-1,\,k}\right] \approx \frac{1}{2h}\left[\frac{u_{i+1,\,k+1} - u_{i+1,\,k-1}}{2l} - \right.$$

$$\left. - \frac{u_{i-1,\,k+1} - u_{i-1,\,k-1}}{2l}\right] = \frac{u_{i+1,\,k+1} - u_{i+1,\,k-1} - u_{i-1,\,k+1} + u_{i-1,\,k-1}}{4hl}.$$

Kirjandust

1. И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений*, I. Москва, 1962.
2. Э. Д. Бут, *Численные методы*. Москва, 1959.
3. Л. В. Канторович, В. И. Крылов. *Приближенные методы высшего анализа*. Москва—Ленинград, 1962.
4. К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*. Москва, 1961.
5. И. П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*. Москва, 1962.
6. L. Luht, *Arvutusmeetodid II*. TRÜ rotaprint, 1964.

III INTEGRAALIDE LIGIKAUDNE ARVUTAMINE

A. Ühekordsete integraalide arvutamine

Määratud integraali

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

ligikaudseks arvutamiseks antavates valemites (nn. kvadratuurvalemites) on integreerimislõik $[a, b]$ tavaliselt jaotatud n osaks.

Juhul kui need osad on võrdsed, kasutame tähistusi $h = \frac{b-a}{n}$, $y_i = f(a + ih)$. Valemi vea R_n hinnangus kasutame veel tähistust:

$$M_k = \max_{[a,b]} |f^{(k)}(x)|.$$

1. Ristkülikvalem.

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{2k-1}{2} h\right) + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2.$$

2. Trapetsvalem.

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\left[\frac{1}{2} y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2} y_n\right] + R_n, \tag{1}$$

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2.$$

Näide 1. Arvutame trapetsvalemi abil integraali

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

võttes $n = 5$. Saame $h = 0{,}2$, $y_0 = \frac{1}{1+0^2} = 1$, $y_1 = \frac{1}{1+0{,}2^2} = 0{,}962$, $y_2 = \frac{1}{1+0{,}4^2} = 0{,}862$, $y_3 = \frac{1}{1+0{,}6^2} = 0{,}735$, $y_4 = \frac{1}{1+0{,}8^2} = 0{,}610$, $y_5 = \frac{1}{1+1^2} = 0{,}5$;

$$I \approx 0{,}2\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + 0{,}962 + 0{,}862 + 0{,}735 + 0{,}610 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\right] = 0{,}7838.$$

Integraali täpne väärtus $I = \frac{\pi}{4} = 0{,}785398$.

Täpsustatud trapetsvalem avaldub kujul

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{h^2}{12}[f'(b) - f'(a)] + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{(b-a)^5}{720n^4} M_4.$$

Arvutame näites 1 toodud integraali täpsustatud trapetsvalemi abil $n = 5$ puhul. Arvestades, et $f'(x) = \left[\frac{1}{1+x^2}\right]' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, saame

$$I \approx 0{,}7838 - \frac{0{,}04}{12}\left[-\frac{2\cdot 1}{(1+1^2)^2} + \frac{2\cdot 0}{(1+0^2)^2}\right] = 0{,}7855.$$

3. Stiefeli meetod.

Tähistame sümboliga T_{ok} integraali $\int_a^b f(x)dx$ ligikaudse väärtuse, mis on arvutatud trapetsvalemi (1) abil $n = 2^k$ puhul. Näiteks

$$T_{00} = (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right],$$

$$T_{01} = \frac{b-a}{2}\left[\frac{1}{2}f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f(b)\right], \ldots$$

Koostame alljärgneva tabeli:

T_{0k}	T_{1k}	T_{2k}	T_{3k}	...
T_{00}				
T_{01}	$T_{11}=\frac{4T_{01}-T_{00}}{4-1}$			
T_{02}	$T_{12}=\frac{4T_{02}-T_{01}}{4-1}$	$T_{22}=\frac{4^2T_{12}-T_{11}}{4^2-1}$		
T_{03}	$T_{13}=\frac{4T_{03}-T_{02}}{4-1}$	$T_{23}=\frac{4^2T_{13}-T_{12}}{4^2-1}$	$T_{33}=\frac{4^3T_{23}-T_{22}}{4^3-1}$	
T_{04}	$T_{14}=\frac{4T_{04}-T_{03}}{4-1}$	$T_{24}=\frac{4^2T_{14}-T_{13}}{4^2-1}$	$T_{34}=\frac{4^3T_{24}-T_{23}}{4^3-1}$	...
...	...	...	...	...

Tähistame integraali täpse väärtuse sümboliga I. Tabeli esimeses veerus paiknevad arvud lähenevad väärtusele I kiirusega $\left(\frac{1}{4}\right)^k$, teise veeru arvud — kiirusega $\left(\frac{1}{4}\right)^{2k}$, kolmanda veeru arvud — kiirusega $\left(\frac{1}{4}\right)^{3k}$ jne.

4. Integraalide arvutamine ostsilleeruvatest funktsioonidest*.

Olgu suurte a puhul vaja arvutada

$$\Phi(a)=\int_a^b \sin axf(x)\,dx.$$

Arvutades selle integraali hariliku trapetsvalemi (1) abil, saame üldiselt väikese täpsusega vastuse. Alljärgnev valem annab suurema täpsuse, sest ta arvestab integraalialuse funktsiooni ostsilleerumist.

$$\Phi(a)\approx\left[\frac{1}{a}\cos aa-\frac{2}{a^2h}\sin\frac{ah}{2}\cos a\left(a+\frac{h}{2}\right)\right]y_0+$$
$$+\left[-\frac{1}{a}\cos ab+\frac{2}{a^2h}\sin\frac{ah}{2}\cos a\left(b-\frac{h}{2}\right)\right]y_n+$$

* Lähemalt sellest küsimusest vt. М. В. Николаева, *О приближенном вычислении осциллирующих интегралов*, Труды матем. ин-та им. Стеклова, 1949, XXVIII, 26—32.

$$+\frac{4}{a^2h}\sin^2\left(\frac{ah}{2}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\sin a(a+kh)\cdot y_k.$$

Kui integraali märgi all on $\sin ax$ asemel kordaja $\cos ax$, siis teeme muutuja vahetuse $x=\frac{\pi}{2a}-y$, mille tulemusena saame $\Phi(a)$ tüüpi integraali.

5. Simpsoni valem.

Olgu n paarisarv. Siis

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+$$
$$+4y_{n-1}+y_n]+R_n, \qquad (2)$$
$$|R_n|\leqslant\frac{(b-a)^5}{180n^4}M_4.$$

Suurte n väärtuste puhul hinnatakse Simpsoni valemi viga tavaliselt nii: kui I_k tähistab integraali väärtust, mis on saadud Simpsoni valemi abil integreerimislõigu jaotamisel k osaks (s. o. $n=k$), siis

$$|R_{2n}|\approx\frac{1}{15}|I_{2n}-I_n|.$$

Simpsoni valem täpsustatud kujul:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots+$$
$$+4y_{n-1}+y_n]-\frac{h^4}{180}[f'''(b)-f'''(a)]+R_n,$$
$$|R_n|\leqslant\frac{17(b-a)^7}{22680n^6}M_6.$$

Näide 2. Arvutame sama integraali nagu näites 1 Simpsoni valemi (2) abil ($n=4$):

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}\approx\frac{0{,}25}{3}\left[\frac{1}{1+0^2}+4\cdot\frac{1}{1+0{,}25^2}+2\cdot\frac{1}{1+0{,}5^2}+\right.$$
$$\left.+4\cdot\frac{1}{1+0{,}75^2}+\frac{1}{1+1^2}\right]=0{,}785399.$$

Viga on viimases kümnendkohas.

6. Weddly valem.

Olgu n arvu 6 kordne. Siis

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{10}\,[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + 2y_6 + \\ + 5y_7 + y_8 + 6y_9 + y_{10} + 5y_{11} + 2y_{12} + \ldots + \\ + 6y_{n-3} + y_{n-2} + 5y_{n-1} + y_n] + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{47(b-a)^7}{12600\,n^6} M_6.$$

Weddly valem täpsustatud kujul:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{3h}{10}\,[y_0 + 5y_1 + y_2 + 6y_3 + y_4 + 5y_5 + \ldots + \\ + 5y_{n-1} + y_n] - \frac{h^6}{840}\,[f^{(5)}(b) - f^{(5)}(a)] + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{169(b-a)^9}{252000\,n^8} M_8.$$

7. Üldised interpolatsiooni tüüpi kvadratuurvalemid.

Olgu lõigul $[a, b]$ sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ antud funktsiooni väärtused $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Asendades integraalialuse funktsiooni $f(x)$ tema interpolatsioonipolünoomiga $P_n(x)$ (vt. lk. 5), saame valemi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_n(x)\,dx + R_n$$

ehk

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) + R_n, \qquad (3)$$

kus

$$A_k = \int_a^b \frac{w(x)\,dx}{(x - x_k)\,w'(x_k)} \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n),\ w(x) = \\ = (x - x_0)(x - x_1)\ \ldots\ (x - x_n),$$

$$|R_n| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b |w(x)|\,dx.$$

Näide 3. Olgu funktsioon $f(x)$ antud tabeliga:

x_i	1	1,1	1,3	1,7	2
$f(x_i)$	0	0,11	0,39	1,19	2

Arvutame

$$I = \int_1^2 f(x)\,dx.$$

Koostades antud funktsiooni jaoks interpolatsioonipolünoomi, saame

$$P_4(x) = x^2 - x$$

ning seega

$$I \approx \int_1^2 (x^2 - x)\,dx = \frac{5}{6}.$$

8. Newtoni-Cotes'i valemid.

Üldiste interpolatsiooni tüüpi kvadratuurvalemite (3) rakendamine lihtsustub tunduvalt, kui interpolatsioonisõlmed on võrdsete vahemikega. Sel puhul saadavatel nn. Newtoni-Cotes'i valemitel on kuju

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\sum_{k=0}^{n} B_k^{(n)} f(a+kh) + R_n. \qquad (4)$$

Toome kordajate $B_k^{(n)}$ ja veahinnangute R_n tabeli (erinevate n väärtuste puhul):

n	$B_0^{(n)}$, $B_n^{(n)}$	$B_1^{(n)}$, $B_{n-1}^{(n)}$	$B_2^{(n)}$, $B_{n-2}^{(n)}$	$B_3^{(n)}$, $B_{n-3}^{(n)}$	$B_4^{(n)}$, $B_{n-4}^{(n)}$	$\lvert R_n\rvert \leqslant$
1	$\frac{1}{2}$					$\frac{h^3}{12} M_2$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$				$\frac{h^5}{90} M_4$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$				$\frac{3}{80} h^5 M_4$

n	$B_0^{(n)}$, $B_n^{(n)}$	$B_1^{(n)}$, $B_{n-1}^{(n)}$	$B_2^{(n)}$, $B_{n-2}^{(n)}$	$B_3^{(n)}$, $B_{n-3}^{(n)}$	$B_4^{(n)}$, $B_{n-4}^{(n)}$	$\lvert R_n\rvert \leqslant$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$			$\frac{8}{945}h^7M_6$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$			$\frac{275}{12096}h^7M_6$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$		$\frac{9}{1400}h^9M_8$
7	$\frac{751}{17280}$	$\frac{3577}{17280}$	$\frac{1323}{17280}$	$\frac{2989}{17280}$		$\frac{8183}{518400}h^9M_8$
8	$\frac{989}{28350}$	$\frac{5888}{28350}$	$-\frac{928}{28350}$	$\frac{10496}{28350}$	$-\frac{4540}{28350}$	$\frac{2368}{467775}h^{11}M_{10}$
9	$\frac{2857}{89600}$	$\frac{15741}{89600}$	$\frac{1080}{89600}$	$\frac{19344}{89600}$	$\frac{5778}{89600}$	$\frac{4671}{394240}h^{11}M_{10}$

Näide 4. Kui $n=3$, saame valemi (4) põhjal

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \approx \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+0^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1+1^2}=$$

$$=0{,}7846.$$

Märkus. Praktikas piirdutakse tavaliselt ülaltoodud n väärtustega. Suurema täpsuse saavutamiseks tehakse järgmist: integreerimislõik $[a, b]$ jaotatakse küllalt suureks arvuks osalõikudeks ja iga osalõigu puhul rakendatakse Newtoni-Cotes'i valemit küllalt väikese n puhul.

9. Suurima algebralise täpsusastmega valemid.

Olgu valem

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

täpne, kui $f(x)$ on suvaline r-astme polünoom, ja mittetäpne vähemalt ühe $(r+1)$-astme polünoomi puhul *.

* Funktsiooni $p(x)$ nimetame kaalufunktsiooniks.

Siis arvu r nimetatakse vaadeldava valemi algebraliseks täpsusastmeks.

Märgime, et alati $r \leqslant 2n-1$. Valemeid, mille puhul $r = 2n-1$, nimetatakse suurima algebralise täpsusastmega valemiteks.

Alljärgnevas esitame niisuguseid valemeid.

a) Gaussi valem*.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \cdot f(x_k^{(n)}) + R_n,$$

kus $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ on Legendre'i polünoomi $L_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}[(x^2-1)^n]^{(n)}$ nullkohad ja

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{[1-(x_k^{(n)})^2][P_n'(x_k^{(n)})]^2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Valemi viga

$$|R_n| \leqslant \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n)!}\left[\frac{(n!)^2}{(2n)!}\right]^2 M_{2n}.$$

Suurust M_{2n} on praktikas väga raske (sageli ka võimatu) leida. Seepärast võib soovitada teist (sageli küllalt jämedat) Gaussi valemi veahinnangut:

$$R_n \approx \frac{1}{2n+1}\left\{f(1) + f(-1) - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} x_k^{(n)} f'(x_k^{(n)})\right\}.$$

Kui $f(x)$ on lõigul $[-1, 1]$ pidev, siis tema puhul Gaussi valem koondub, s. o.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Toome Gaussi valemi sõlmede ja kordajate tabeli:

---

* Integraal integreerimisrajadega a, b taandatakse integraalile integreerimisrajadega $-1, 1$ valemi

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right)dx.$$

abil.

n	Sõlmed	Kordajad
1	$x_1^{(1)} = 0$	$A_1^{(1)} = 2$
2	$x_2^{(2)} = -x_1^{(2)} = 0{,}577350269$	$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 1$
3	$x_2^{(3)} = 0$ $x_3^{(3)} = -x_1^{(3)} = 0{,}774596669$	$A_2^{(3)} = \frac{8}{9}$ $A_1^{(3)} = A_3^{(3)} = \frac{5}{9}$
4	$x_3^{(4)} = -x_2^{(4)} = 0{,}339981044$ $x_4^{(4)} = -x_1^{(4)} = 0{,}861136312$	$A_2^{(4)} = A_3^{(4)} = 0{,}652145155$ $A_1^{(4)} = A_4^{(4)} = 0{,}347854845$
5	$x_3^{(5)} = 0$ $x_4^{(5)} = -x_2^{(5)} = 0{,}538469310$ $x_5^{(5)} = -x_1^{(5)} = 0{,}906179846$	$A_3^{(5)} = 0{,}568888889$ $A_2^{(5)} = A_4^{(5)} = 0{,}478628670$ $A_1^{(5)} = A_5^{(5)} = 0{,}236926885$
6	$x_4^{(6)} = -x_3^{(6)} = 0{,}238619186$ $x_5^{(6)} = -x_2^{(6)} = 0{,}661209386$ $x_6^{(6)} = -x_1^{(6)} = 0{,}932469514$	$A_3^{(6)} = A_4^{(6)} = 0{,}467913935$ $A_2^{(6)} = A_5^{(6)} = 0{,}360761573$ $A_1^{(6)} = A_6^{(6)} = 0{,}171324492$
7	$x_4^{(7)} = 0$ $x_5^{(7)} = -x_3^{(7)} = 0{,}405845151$ $x_6^{(7)} = -x_2^{(7)} = 0{,}741531186$ $x_7^{(7)} = -x_1^{(7)} = 0{,}949107912$	$A_4^{(7)} = 0{,}417959184$ $A_3^{(7)} = A_5^{(7)} = 0{,}381830051$ $A_2^{(7)} = A_6^{(7)} = 0{,}279705391$ $A_1^{(7)} = A_7^{(7)} = 0{,}129484966$
8	$x_5^{(8)} = -x_4^{(8)} = 0{,}183434642$ $x_6^{(8)} = -x_3^{(8)} = 0{,}525532410$ $x_7^{(8)} = -x_2^{(8)} = 0{,}796666477$ $x_8^{(8)} = -x_1^{(8)} = 0{,}960289856$	$A_4^{(8)} = A_5^{(8)} = 0{,}362683783$ $A_3^{(8)} = A_6^{(8)} = 0{,}313706646$ $A_2^{(8)} = A_7^{(8)} = 0{,}222381034$ $A_1^{(8)} = A_8^{(8)} = 0{,}101228536$
9	$x_5^{(9)} = 0$ $x_6^{(9)} = -x_4^{(9)} = 0{,}324253423$ $x_7^{(9)} = -x_3^{(9)} = 0{,}613371433$ $x_8^{(9)} = -x_2^{(9)} = 0{,}836031107$ $x_9^{(9)} = -x_1^{(9)} = 0{,}968160240$	$A_5^{(9)} = 0{,}330239355$ $A_4^{(9)} = A_6^{(9)} = 0{,}312347077$ $A_3^{(9)} = A_7^{(9)} = 0{,}260610696$ $A_2^{(9)} = A_8^{(9)} = 0{,}180648161$ $A_1^{(9)} = A_9^{(9)} = 0{,}081274388$
10	$x_6^{(10)} = -x_5^{(10)} = 0{,}148874339$ $x_7^{(10)} = -x_4^{(10)} = 0{,}433395394$ $x_8^{(10)} = -x_3^{(10)} = 0{,}679409568$ $x_9^{(10)} = -x_2^{(10)} = 0{,}865063367$ $x_{10}^{(10)} = -x_1^{(10)} = 0{,}973906529$	$A_6^{(10)} = A_5^{(10)} = 0{,}295524225$ $A_7^{(10)} = A_4^{(10)} = 0{,}269266719$ $A_8^{(10)} = A_3^{(10)} = 0{,}219086363$ $A_9^{(10)} = A_2^{(10)} = 0{,}149451349$ $A_{10}^{(10)} = A_1^{(10)} = 0{,}066671344$

n	Sõlmed	Kordajad
11	$x_6^{(11)} = 0$ $x_7^{(11)} = -x_5^{(11)} = 0{,}269543156$ $x_8^{(11)} = -x_4^{(11)} = 0{,}519096129$ $x_9^{(11)} = -x_3^{(11)} = 0{,}730152006$ $x_{10}^{(11)} = -x_2^{(11)} = 0{,}887062600$ $x_{11}^{(11)} = -x_1^{(11)} = 0{,}978228658$	$A_6^{(11)} = 0{,}272925087$ $A_5^{(11)} = A_7^{(11)} = 0{,}262804545$ $A_4^{(11)} = A_8^{(11)} = 0{,}233193764$ $A_3^{(11)} = A_9^{(11)} = 0{,}186290211$ $A_2^{(11)} = A_{10}^{(11)} = 0{,}125580369$ $A_1^{(11)} = A_{11}^{(11)} = 0{,}055668567$
12	$x_7^{(12)} = -x_6^{(12)} = 0{,}125233409$ $x_8^{(12)} = -x_5^{(12)} = 0{,}367831499$ $x_9^{(12)} = -x_4^{(12)} = 0{,}587317954$ $x_{10}^{(12)} = -x_3^{(12)} = 0{,}769902674$ $x_{11}^{(12)} = -x_2^{(12)} = 0{,}904117256$ $x_{12}^{(12)} = -x_1^{(12)} = 0{,}981560634$	$A_6^{(12)} = A_7^{(12)} = 0{,}249147046$ $A_5^{(12)} = A_8^{(12)} = 0{,}233492537$ $A_4^{(12)} = A_9^{(12)} = 0{,}203167427$ $A_3^{(12)} = A_{10}^{(12)} = 0{,}160078328$ $A_2^{(12)} = A_{11}^{(12)} = 0{,}106939326$ $A_1^{(12)} = A_{12}^{(12)} = 0{,}047175336$

Näide 5. Võttes Gaussi valemis $n = 5$, saame: $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} =$

$= 2\int_{-1}^{1} \frac{dx}{4+(x+1)^2} \approx 0{,}78539816$. Märgime, et tulemuses on kõik kümnnendkohad õiged.

Märkus. Gaussi valemit on praktikas küllalt raske rakendada, sest sõlmed ja kordajad on üldiselt irratsionaalarvud. Seepärast kasutatakse seda valemit tavaliselt ainult siis, kui on nõutav suur täpsus ning funktsiooni väärtuste arvutamine teeb raskusi.

b) Mehleri valem.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right) + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi}{2^{2n-1}(2n)!} M_{2n}.$$

Näide 6. Arvutame Mehleri valemi ($n = 5$) abil integraali

TRÜ Raamatukogu

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{2x}dx}{\sqrt{1-x^2}} \approx \frac{\pi}{5}\left(e^{2\cos\frac{\pi}{10}} + e^{2\cos\frac{3\pi}{10}} + e^{2\cos\frac{5\pi}{10}} + e^{2\cos\frac{7\pi}{10}} + \right.$$

$$\left. + e^{2\cos\frac{9\pi}{10}}\right) = \frac{\pi}{5}\left(e^{-1,902114} + e^{-1,175540} + 1 + e^{1,175540} + \right.$$

$$\left. + e^{1,902114}\right) = 7,161529.$$

Integraali täpne väärtus: 7,161528.

c) Valem, kus $p(x) = \sqrt{1-x^2}$.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} f(x)dx = \frac{\pi}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{n+1} f\left(\cos \frac{k\pi}{n+1}\right) + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} M_{2n}.$$

d) Valem, kus $p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right) + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{\pi}{2^{2n}(2n)!} M_{2n}.$$

e) Valem, kus $p(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, *

$$\int_{0}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = 2 \sum_{k=1}^{n} A_k^{(2n)} f[(x_k^{(2n)})^2] + R_n.$$

Selles valemis on $x_k^{(2n)}$ positiivsed sõlmed ning arvud $A_k^{(2n)}$ neile vastavad kordajad Gaussi valemis $2n$ sõlme puhul. Seejuures viga

$$|R_n| \leqslant \frac{2 \cdot 4^{2n} M_{2n}}{(4n+1)(2n)!(C_{4n}^{2n})^2}.$$

---

* Suurima algebralise täpsusastmega kvadratuurvalemite ($p(x) = x^{\beta}(1-x)^{\alpha}$ sõlmed ja kordajad (mitmesuguste n ja α, β väärtuste puhul) on toodud raamatus: В. И. Крылов и др., Таблицы для численного интегрирования функций со степенными особенностями $\int_0^1 x^{\beta}(1-x)^{\alpha} f(x)dx$, Минск, 1963.

10. Suurima algebralise täpsusastmega valemid (lõpmatu integreerimisvahemiku puhul).

a) Valem, kus $p(x) = e^{-x^2}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{\sqrt{\pi} \cdot n!}{2^n (2n)!} M_{2n}.$$

Vastav sõlmede ja kordajate tabel:

n	Sõlmed	Kordajad
1	$x_1^{(1)} = 0$	$A_1^{(1)} = 1{,}772453851$
2	$x_2^{(2)} = -x_1^{(2)} = 0{,}707106781$	$A_1^{(2)} = A_2^{(2)} = 0{,}886226925$
3	$x_2^{(3)} = 0$ $x_3^{(3)} = -x_1^{(3)} = 1{,}224744871$	$A_2^{(3)} = 1{,}181635901$ $A_1^{(3)} = A_3^{(3)} = 0{,}295408975$
4	$x_3^{(4)} = -x_2^{(4)} = 0{,}524647623$ $x_4^{(4)} = -x_1^{(4)} = 1{,}650680124$	$A_3^{(4)} = A_2^{(4)} = 0{,}804914090$ $A_1^{(4)} = A_4^{(4)} = 0{,}081312835$
5	$x_3^{(5)} = 0$ $x_4^{(5)} = -x_2^{(5)} = 0{,}958572465$ $x_5^{(5)} = -x_1^{(5)} = 2{,}020182870$	$A_3^{(5)} = 0{,}945308720$ $A_4^{(5)} = A_2^{(5)} = 0{,}393619323$ $A_5^{(5)} = A_1^{(5)} = 0{,}019953242$
6	$x_4^{(6)} = -x_3^{(6)} = 0{,}436077412$ $x_5^{(6)} = -x_2^{(6)} = 1{,}335849074$ $x_6^{(6)} = -x_1^{(6)} = 2{,}350604974$	$A_3^{(6)} = A_4^{(6)} = 0{,}724629595$ $A_2^{(6)} = A_5^{(6)} = 0{,}157067320$ $A_1^{(6)} = A_6^{(6)} = 0{,}004530010$
7	$x_4^{(7)} = 0$ $x_5^{(7)} = -x_3^{(7)} = 0{,}816287883$ $x_6^{(7)} = -x_2^{(7)} = 1{,}673551629$ $x_7^{(7)} = -x_1^{(7)} = 2{,}651961357$	$A_4^{(7)} = 0{,}810264618$ $A_5^{(7)} = A_3^{(7)} = 0{,}425607253$ $A_6^{(7)} = A_2^{(7)} = 0{,}054515583$ $A_7^{(7)} = A_1^{(7)} = 0{,}000971781$
8	$x_5^{(8)} = -x_4^{(8)} = 0{,}381186990$ $x_6^{(8)} = -x_3^{(8)} = 1{,}157193712$ $x_7^{(8)} = -x_2^{(8)} = 1{,}981656757$ $x_8^{(8)} = -x_1^{(8)} = 2{,}930637420$	$A_4^{(8)} = A_5^{(6)} = 0{,}661147013$ $A_3^{(8)} = A_6^{(8)} = 0{,}207802326$ $A_2^{(8)} = A_7^{(8)} = 0{,}017077983$ $A_1^{(8)} = A_8^{(8)} = 0{,}000199604$

n	Sõlmed	Kordajad
9	$x_5^{(9)} = 0$ $x_6^{(9)} = +x_4^{(9)} = 0{,}723551019$ $x_7^{(9)} = -x_3^{(9)} = 1{,}468553289$ $x_8^{(9)} = -x_2^{(9)} = 2{,}266580585$ $x_9^{(9)} = -x_1^{(9)} = 3{,}190993202$	$A_5^{(9)} = 0{,}720235216$ $A_4^{(9)} = A_6^{(9)} = 0{,}432651559$ $A_3^{(9)} = A_7^{(9)} = 0{,}088474527$ $A_2^{(9)} = A_8^{(9)} = 0{,}004943624$ $A_1^{(9)} = A_9^{(9)} = 0{,}000039607$
10	$x_6^{(10)} = -x_5^{(10)} = 0{,}342901327$ $x_7^{(10)} = -x_4^{(10)} = 1{,}036610830$ $x_8^{(10)} = -x_3^{(10)} = 1{,}756683649$ $x_9^{(10)} = -x_2^{(10)} = 2{,}532731674$ $x_{10}^{(10)} = -x_1^{(10)} = 3{,}436159119$	$A_5^{(10)} = A_6^{(10)} = 0{,}610862634$ $A_4^{(10)} = A_7^{(10)} = 0{,}240138611$ $A_3^{(10)} = A_8^{(10)} = 0{,}033874394$ $A_2^{(10)} = A_9^{(10)} = 0{,}001343646$ $A_1^{(10)} = A_{10}^{(10)} = 0{,}000007640$

b) Valem, kus $p(x) = e^{-x}$,

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n,$$

kus $|R_n| \leqslant \dfrac{M_{2n}}{C_{2n}{}^n} = \dfrac{(n!)^2 M_{2n}}{(2n)!}$.

Vastav sõlmede ja kordajate tabel:

n	Sõlmed	Kordajad
1	$x_1 = 1$	$A_1 = 1$
2	$x_1 = 0{,}585786438$ $x_2 = 3{,}414213562$	$A_1 = 0{,}853553391$ $A_2 = 0{,}146446609$
3	$x_1 = 0{,}415774557$ $x_2 = 2{,}294280360$ $x_3 = 6{,}289945083$	$A_1 = 0{,}711093010$ $A_2 = 0{,}278517734$ $A_3 = 0{,}010389256$
4	$x_1 = 0{,}322547690$ $x_2 = 1{,}745761101$ $x_3 = 4{,}536620297$ $x_4 = 9{,}395070912$	$A_1 = 0{,}603154104$ $A_2 = 0{,}357418692$ $A_3 = 0{,}038887909$ $A_4 = 0{,}000539295$
5	$x_1 = 0{,}263560320$ $x_2 = 1{,}413403059$ $x_3 = 3\,596425771$ $x_4 = 7{,}085810006$ $x_5 = 12{,}640800844$	$A_1 = 0{,}521755610$ $A_2 = 0{,}398666811$ $A_3 = 0{,}075942450$ $A_4 = 0{,}003611759$ $A_5 = 0{,}000023370$

n	Sõlmed	Kordajad
6	$x_1 = 0{,}222846604$	$A_1 = 0{,}458964674$
	$x_2 = 1{,}188932102$	$A_2 = 0{,}417000831$
	$x_3 = 2{,}992736326$	$A_3 = 0{,}113373382$
	$x_4 = 5{,}775143569$	$A_4 = 0{,}010399197$
	$x_5 = 9{,}837467418$	$A_5 = 0{,}000261017$
	$x_6 = 15{,}982873981$	$A_6 = 0{,}000000899$
7	$x_1 = 0{,}193043677$	$A_1 = 0{,}409318952$
	$x_2 = 1{,}026664895$	$A_2 = 0{,}421831278$
	$x_3 = 2{,}567876745$	$A_3 = 0{,}147126349$
	$x_4 = 4{,}900353085$	$A_4 = 0{,}020633514$
	$x_5 = 8{,}182153445$	$A_5 = 0{,}001074010$
	$x_6 = 12{,}734180292$	$A_6 = 0{,}000015865$
	$x_7 = 19{,}395727862$	$A_7 = 0{,}000000032$
8	$x_1 = 0{,}170279632$	$A_1 = 0{,}369188589$
	$x_2 = 0{,}903701777$	$A_2 = 0{,}418786781$
	$x_3 = 2{,}251086630$	$A_3 = 0{,}175794987$
	$x_4 = 4{,}266700170$	$A_4 = 0{,}033343492$
	$x_5 = 7{,}045905402$	$A_5 = 0{,}002794536$
	$x_6 = 10{,}758516010$	$A_6 = 0{,}000090765$
	$x_7 = 15{,}740678641$	$A_7 = 0{,}000000849$
	$x_8 = 22{,}863131737$	$A_8 = 0{,}000000001$

11. Tšebõšovi valemid.

Tšebõšovi valemiteks nimetatakse valemeid võrdsete kordajatega, mis on täpsed suvalise n-astme polünoomi puhul:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) + R_n.$$

Toome Tšebõšovi valemite sõlmede ja veahinnangute tabeli niisuguste n väärtuste puhul, kui need valemid eksisteerivad:

n	Sõlmed	$\lvert R_n \rvert \leqslant$
1	$x_1 = 0$	$\frac{1}{3} M_2$
2	$-x_1 = x_2 = 0{,}577350269$	$\frac{1}{135} M_4$

n	Sõlmed	$\lvert R_n\rvert \leqslant$
3	$x_2 = 0$ $-x_1 = x_3 = 0{,}707106781$	$\frac{1}{360} M_4$
4	$-x_1 = x_4 = 0{,}794654472$ $-x_2 = x_3 = 0{,}187592474$	$\frac{2}{42525} M_6$
5	$x_3 = 0$ $-x_1 = x_5 = 0{,}832497487$ $-x_2 = x_4 = 0{,}374541410$	$\frac{13}{544320} M_6$
6	$-x_1 = x_6 = 0{,}866246820$ $-x_2 = x_5 = 0{,}422518654$ $-x_3 = x_4 = 0{,}266635401$	$\frac{1}{3969000} M_8$
7	$-x_1 = x_7 = 0{,}883861701$ $-x_2 = x_6 = 0{,}529656775$ $-x_3 = x_5 = 0{,}323911811$ $x_4 = 0$	$\frac{281}{1959552000} M_8$
9	$-x_1 = x_9 = 0{,}911589308$ $-x_2 = x_8 = 0{,}601018655$ $-x_3 = x_7 = 0{,}528761783$ $-x_4 = x_6 = 0{,}167906184$ $x_5 = 0$	$\frac{74747}{100800 \cdot 11!} M_{10}$

12. Valem, mille sõlmedeks on integreerimislõigu otspunktid.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot \left[f^{(k)}(x)\, p_n^{(n-k-1)}(x) \right]_{x=a}^{b} + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{M_n}{n!} \int_a^b |p_n(x)|\,dx;$$

$p_n(x)$ on suvaline n-astme polünoom pealiikme kordajaga 1. Selle valemi puhul $R_n = 0$, kui $f(x)$ on suvaline $(n-1)$-astme polünoom.

Valemi erijuhuks on nn. Obreškovi valem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\frac{n!}{(2n)!} \sum_{k=0}^{n-1} (b-a)^{k+1} \frac{(2n-k-1)!}{(n-k-1)!\,(k+1)!} \left[f^{(k)}(a) + (-1)^k f^{(k)}(b) \right] + R_n,$$

$$|R_n| \leqslant \frac{\sqrt{\pi} \cdot n!}{\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) \cdot (2n)!} \left(\frac{b-a}{2} \right)^{2n+1} M_{2n}.$$

Obreškovi valem on täpne juba suvalise $(2n-1)$-astme polünoomi puhul.

13. Euleri-Maclaurini valem.

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots + f(a+(n-1)h) + \frac{1}{2}f(b)\right] - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{h^{2i}B_{2i}}{(2i)!}[f^{(2i-1)}(b) - f^{(2i-1)}(a)] + R_{2k}, \quad (5)$$

kus $B_{2i}(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ on paarisindeksitega Bernoulli arvud.

Bernoulli arve võib leida valemite

$$B_0 = 1, \; B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} B_k \text{ või } B_{2i} = \frac{(-1)^{i+1}(2i)!}{2^{2i-1}\pi^{2i}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2i}}$$

põhjal. Näiteks

$$B_2 = \frac{1}{6}, \; B_4 = -\frac{1}{30}, \; B_6 = \frac{1}{42}, \; B_8 = -\frac{1}{30}, \; B_{10} = \frac{5}{66},$$

$$B_{12} = -\frac{691}{2730}, \; B_{14} = \frac{7}{6}, \; B_{16} = -\frac{3617}{510}, \; B_{18} = \frac{43867}{798},$$

$$B_{20} = -\frac{174611}{330}, \ldots .$$

Euleri-Maclaurini valemi viga

$$|R_{2k}| \leqslant \frac{b-a}{(2k)!} \cdot h^{2k} B_{2k} M_{2k}.$$

14. Gregory valem.

Kui funktsioon $f(x)$ on antud tabelina, siis ei saa Euleri-Maclaurini valemit rakendada. Asendades aga seoses (5) tuletised diferentssuhetega, saame valemi (suure täpsusega), mis ei sisalda funktsiooni tuletisi:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n\right] - \frac{h}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{h}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) -$$

$$-\frac{19h}{720}(\Delta^3 y_{n-3} - \Delta^3 y_0) - \frac{3h}{160}(\Delta^4 y_{n-4} + \Delta^4 y_0) -$$

$$-\frac{863h}{60480}(\Delta^5 y_{n-5} - \Delta^5 y_0) - \frac{275h}{24192}(\Delta^6 y_{n-6} + \Delta^6 y_0) - \ldots$$

Kordaja avaldise $(\Delta^k y_{n-k} + (-1)^k \Delta^k y_0)$ ees võib arvutada valemi

$$-\frac{(-1)^k h}{(k+1)!}\int_0^1 t(t-1)\ldots(t-k)\,dt$$

abil. Vahede $\Delta^k y_{n-k}$, $\Delta^k y_0$ arvutamist vt. lk. 12.

Näide 7. Arvutame Gregory valemi abil integraali

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2},$$

võttes $n = 3$ ja piirdudes teist järku vahedega.

Siis $h = \frac{1}{3}$. Koostame vahede tabeli:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	0	1	−0,1	−0,108
1	$\frac{1}{3}$	0,9	−0,208	+0,016
2	$\frac{2}{3}$	0,692	−0,192	
3	1	0,5		

Gregory valemi põhjal saame

$$I \approx \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\cdot 1 + 0{,}9 + 0{,}692 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}5\right] -$$

$$-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{3}(-0{,}192 + 0{,}1) -$$

$$-\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3}(0{,}016 - 0{,}108) = 0{,}781 + 0{,}003 + 0{,}001 = 0{,}785.$$

15. Integraalide arvutamine Taylori valemi abil.

Kui integraalialust funktsiooni võib arendada Taylori ritta (vt. lk. 74), siis saame integraali väärtuse selle rea liikmete integreerimisel.

Näide 8. Arvutame Taylori valemi abil integraali

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} - \frac{1}{7\cdot 7!} + \ldots \approx 1 -$$

$$- \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = 0{,}94611\ldots .$$

Viga on ligikaudu võrdne esimese ärajäetava liikmega. Integraali täpne väärtus on 0,94608... .

16. Runge meetod kvadratuurvalemi vea ligikaudseks hindamiseks.

Ligikaudsete valemite vigade hinnanguid on praktikas sageli raske saada, sest selleks tuleb hinnata funktsiooni tuletiste absoluutväärtusi.

Runge meetod võimaldab ligikaudselt (sageli küll üsna jämedalt) hinnata kvadratuurvalemi vea suurust, kasutamata tuletisi.

Olgu integreerimislõik jaotatud n võrdseks osaks. Oletame, et integraali

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

arvutamiseks kasutame kvadratuurvalemit, mille viga hinnatakse valemiga

$$|R_n| \leqslant cM_k,$$

kus c on mingi konstant.

Olgu I_n integraali I ligikaudne väärtus, mille saame selle valemi järgi arvutades. Olgu I_{2n} integraali I ligikaudne väärtus, mille saame sama valemi järgi, kuid kasutades sõlmi, mis jaotavad integreerimislõigu $2n$ võrdseks osaks. Sel juhul kehtib hinnang

$$|R_n| = |I - I_n| \approx \frac{|I_{2n} - I_n|}{1 - \frac{1}{2^k}}.$$

Valem on seda täpsem, mida vähem muutub integreerimislõigul $f^{(k)}(x)$.

17. Lõpmatute integreerimisrajadega integraalide* arvutamine.

Lõpmatute integreerimisrajadega integraali võib alati teisendada lõplike rajadega integraaliks. Selleks tuleb teostada ainult sobiv muutuja vahetus.

Näide 9. Integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

arvutamiseks teeme muutuja vahetuse $x = y^{-1}$, $y = x^{-1}$, $dx = -y^{-2}dy$. Saame

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2}.$$

Integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

puhul ei saa kohe teha niisugust muutuja vahetust. Selle integraali võime aga jaotada kaheks:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

Sageli kasutatakse muutuja vahetust $y = e^{-x}$.

Mõnikord taandatakse lõpmatute rajadega integraal lõplike rajadega integraaliks alljärgnevalt:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \int_a^A f(x)\,dx + \int_A^{\infty} f(x)\,dx;$$

---

* Vt. ka lk. 53—54.

kui

$$\left|\int_A^{\infty} f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

siis

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \approx \int_a^{A} f(x)\,dx$$

veaga ε. Arvu A valik sõltub integraalialuse funktsiooni kahanemise kiirusest ning nõuab vaadeldava funktsiooni spetsiaalset uurimist.

18. Lõplike rajadega päratute integraalide arvutamine.

a) Võte, mis põhineb funktsiooni $f(x)$ käitumise uurimisel iseärase punkti ümbruses. Selgitame seda näite abil. Olgu vaja arvutada integraal

$$\int_0^1 f(x)\,dx,$$

kusjuures punkt $x = 0$ on funktsiooni $f(x)$ iseärane punkt ning selle punkti ümbruses on funktsioonil $f(x)$ kuju: $f(x) = \alpha + \beta x^{-\frac{2}{3}}$, kus α ja β on mingid konstandid.

Jaotame integraali kaheks osaks

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^h f(x)\,dx + \int_h^1 f(x)\,dx. \qquad (6)$$

Võrduse viimane integraal ei ole päratu ja teda võib arvutada käesolevas peatükis vaadeldud harilike kvadratuurvalemite abil. Esimese integraali arvutamiseks koostame spetsiaalse valemi

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h\left[c_1 f\left(\frac{h}{2}\right) + c_2 f(h)\right], \qquad (7)$$

kus c_1 ja c_2 valitakse nii, et valem oleks täpne funktsioonide $a + bx^{-\frac{2}{3}}$ puhul, kusjuures a, b ja $0 < h < 1$ on suvalised. Selleks asetame funktsiooni $a + bx^{-\frac{2}{3}}$ avaldisse (7). Saame

$$\int_0^h (a + bx^{-\frac{2}{3}})\,dx = h[c_1\left(a + b\frac{h^{-\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{2}{3}}}\right) + c_2(a + bh^{-\frac{2}{3}})],$$

kust järeldub, et

$$ah + 3bh^{\frac{1}{3}} = ac_1h + bc_1\sqrt[3]{4}h^{\frac{1}{3}} + ac_2h + c_2h^{\frac{1}{3}}b$$

ehk

$$ah(1 - c_1 - c_2) + bh^{\frac{1}{3}}(3 - \sqrt[3]{4}c_1 - c_2) = 0.$$

Et viimane võrdus kehtiks suvaliste a, b ja h puhul, selleks peavad kehtima võrdused

$$\begin{cases} 1 - c_1 - c_2 = 0, \\ 3 - \sqrt[3]{4}c_1 - c_2 = 0. \end{cases}$$

Lahendades selle võrrandisüsteemi, leiame

$$c_1 = \frac{2}{\sqrt[3]{4} - 1}, \quad c_2 = \frac{\sqrt[3]{4} - 3}{\sqrt[3]{4} - 1}.$$

Seega võrduse (6) parempoolse osa esimene integraal arvutatakse valemi

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h\left[\frac{2}{\sqrt[3]{4} - 1} f\left(\frac{h}{2}\right) - \frac{3 - \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4} - 1} f(h)\right]$$

abil.

b) Iseärasuste eraldamise multiplikatiivne meetod. Olgu vaja arvutada integraal

$$\int_a^b f(x)\,dx,$$

kusjuures $f(x)$ muutub lõpmatuks lõigu $[a, b]$ mingis punktis. Esitame funktsiooni kujul

$$f(x) = p(x)\varphi(x),$$

kus $p(x) > 0$ lõigul $[a, b]$ ning sisaldab endas funktsiooni $f(x)$ iseärasuse; funktsioon $\varphi(x)$ olgu lõigul $[a, b]$ piisav arv kordi pidevalt diferentseeruv.

Funktsiooni $p(x)$ loeme kaalufunktsiooniks ja kasu-

tame integreerimisvalemeid selle kaalufunktsiooniga (kui niisugused valemid puuduvad, siis koostame nad)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b p(x)\varphi(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi(x_k).$$

Näide 10. Vaadeldava integraali puhul eraldame kaalufunktsiooni $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, mis sisaldab integraalialuse funktsiooni iseärasuse, ning rakendame Mehleri valemit (vt. lk. 51):

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-x^4}} = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{e^x dx}{\sqrt{1+x^2}} \approx$$

$$\approx \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{\cos\frac{2k-1}{2n}\pi}}{\sqrt{1+\cos^2\frac{2k-1}{2n}\pi}} =.$$

c) I s e ä r a s u s t e e r a l d a m i s e a d i t i i v n e m e e t o d. Sel puhul jaotatakse integraalialune funktsioon kaheks liidetavaks

$$f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

nii et funktsioonil $\varphi(x)$ ei ole lõigul $[a, b]$ iseärasusi; funktsioon $\psi(x)$, mis sisaldab endas funktsiooni $f(x)$ iseärasused, olgu aga täpsete meetoditega integreeruv.

Näide 11. Olgu vaja arvutada integraal

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\,dx.$$

Integraalialusel funktsioonil on iseärasus punktis $x = 0$. Jaotame selle funktsiooni liidetavateks

$$\ln \sin x = \ln x + \ln \frac{\sin x}{x}.$$

Esimene liidetav on integreeritav täpselt; teisel liidetaval aga ei ole iseärasusi ja integraali arvutamisel võib kasutada mitmesuguseid kvadratuurvalemeid, näiteks Simpsoni valemit (vt. lk. 45):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{x}\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\ln \frac{\pi}{2} - 1\right) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Vaatleme Kantorovitši meetodit. Olgu vaja arvutada integraal

$$\int_a^b (x-\beta)^{\alpha}\varphi(x)\, dx, \qquad \beta \in [a, b], \quad \alpha > -1;$$

funktsioonil $\varphi(x)$ olgu lõigul $[a, b]$ m pidevat tuletist.

Kui $\alpha < 0$, siis punkt $x = \beta$ on integraalialuse funktsiooni iseärane punkt.* Jaotame selle funktsiooni kaheks liidetavaks

$$(x-\beta)^{\alpha}\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

kus

$$f_1(x) = (x-\beta)^{\alpha}\varphi(\beta) + (x-\beta)^{\alpha+1}\frac{\varphi'(\beta)}{1!} +$$

$$+ (x-\beta)^{\alpha+2}\frac{\varphi''(\beta)}{2!} + \ldots + \frac{(x-\beta)^{\alpha+k}}{k!}\varphi^{(k)}(\beta),$$

$$f_2(x) = (x-\beta)^{\alpha}[\varphi(x) - \varphi(\beta) - \frac{\varphi'(\beta)}{1!}(x-\beta) - \ldots -$$

$$- \frac{\varphi^{(k)}(\beta)}{k!}(x-\beta)^k], \quad (k < m).$$

Siis

$$\int_a^b (x-\beta)^{\alpha}\varphi(x)\, dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx.$$

Võrduse parempoolse osa esimene integraal arvutatakse täpselt; teist integraali võib arvutada käesolevas peatükis vaadeldud ligikaudsete valemite abil (märgime, et funktsioonil $f_2(x)$ on lõigul $[a, b]$ pidevad tuletised kuni järguni $k + [\alpha]$ *incl.*).

Näide 12. Arvutame integraali

$$\int_0^1 x^{-1/2} e^{x^4}\, dx.$$

---

* Kui $\alpha > 0$, kuid ei ole täisarv, siis $x = \beta$ on funktsiooni $(x-\beta)^{\alpha}\varphi(x)$ $(1 + [\alpha])$-järku tuletise iseärane punkt.

Siin $\beta = 0$, $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\varphi(x) = e^{x^4}$. Võtame $k = 0$. Siis

$$f_1(x) = x^{-1/2}\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

$$f_2(x) = x^{-1/2}[\varphi(x) - \varphi(0)] = \frac{e^{x^4} - 1}{\sqrt{x}}.$$

Seega

$$\int_0^1 x^{-1/2} e^{x^4}\, dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int_0^1 \frac{e^{x^4} - 1}{\sqrt{x}}\, dx = 2 + \int_0^1 \frac{e^{x^4} - 1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Viimases integraalis ei ole punkt $x = 0$ integraalialuse funktsiooni iseäraseks punktiks ja integraali võib arvutada harilike valemite, näiteks trapetsvalemi abil (vt. lk. 42). Seejuures võtame arvesse, et

$$\left(\frac{e^{x^4} - 1}{\sqrt{x}}\right)_{x=0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^4} - 1}{\sqrt{x}} = 0.$$

19. Integraalide arvutamine perioodilistest funktsioonidest.

Kui $f(x)$ on perioodiline funktsioon perioodiga T, siis on sobiv kasutada ristkülikvalemit

$$\int_0^T f(x)\, dx \approx \frac{T}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{T}{n}(k - 1)\right),$$

kus α on suvaline arv lõigult $\left[0, \frac{T}{n}\right]$.

Kui $f(x)$ on 2π-perioodiline funktsioon, siis

$$\int_0^{2\pi} f(x)\, dx \approx \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\alpha + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right).$$

20. Parimad valemid funktsioonide klassides.

Olgu $R_n(f)$ viga, mida teeme integraali arvutamisel antud valemi abil (funktsioonist $f(x)$), F aga funktsioonide antud klass.

Kvadratuurvalemit nimetatakse funktsioonide klassis

F parimaks, kui selles valemis on sõlmed ja kordajad valitud nii, et

$$\sup_{f(x)\in F} |R_n(f)|$$

omandab minimaalse väärtuse.

Esitame parimate valemite näiteid.

a) Olgu F klass, mille funktsioonidel $f(x)$ on lõigul $[0, 1]$ pidev teine tuletis, kusjuures $|f''(x)| \leqslant M_2$. Parimaks valemite

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f)$$

seas, mis on täpsed iga lineaarse funktsiooni puhul, on valem, mille puhul

$$x_k = \frac{\sqrt{3} + 4(k-1)}{2} h \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$A_k = 2h \qquad (k = 2, 3, \ldots, n-1),$$

$$A_1 = A_n = \frac{2+\sqrt{3}}{2} h, \qquad h = \frac{1}{\sqrt{3} + 2(n-1)}.$$

Seejuures kehtib hinnang

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{h^2}{8} M_2.$$

b) Olgu F klass, mille funktsioonidel $f(x)$ on lõigul $[-1, 1]$ pidev n-järku tuletis, kusjuures $|f^{(n)}(x)| \leqslant M_n$. Parimaks valemite

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} [A_k f^{(k)}(1) + B_k f^{(k)}(-1)] + R_n(f)$$

seas, mis on täpsed iga $(n-1)$-astme polünoomi puhul, on valem, mille puhul

$$A_k = (-1)^k \frac{(n-k-1)!\,(2n-k)!}{2^{k+1} n!\,(2n-2k-1)!\,(k+1)!},$$

$$B_k = (-1)^k A_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Seejuures kehtib hinnang

$$|R_n(f)| \leqslant \frac{M_n}{n!\,2^{n-1}}.$$

B. Kordsete integraalide arvutamine

1. Interpolatsioonipolünoomide kasutamisel põhinev meetod*.

Olgu vaja arvutada kahekordne integraal

$$I = \iint_D f(x, y)\,dxdy.$$

Selleks koostame funktsiooni $f(x, y)$ jaoks interpolatsioonipolünoomi $P_{m,n}(x, y)$ (vt. lk. 23) piirkonnas D ja arvutame integraali sellest polünoomist

$$I \approx \iint_D P_{mn}(x, y)\,dxdy.$$

Integreerimisviga on võrdne integraaliga interpolatsiooniveast.

Näide 13. Funktsiooni $z = f(x, y)$ puhul (vt. näide 10, lk. 24) saame

$$\int_0^2\int_0^2 f(x, y)\,dxdy \approx \int_0^2\int_0^2 (x^2 + xy^2 + 1)\,dxdy = 14\frac{2}{3}.$$

2. Kvadratuurvalemi korduval rakendamisel põhinev meetod.

Olgu vaja arvutada integraal

$$I = \int_a^b\int_c^d f(x, y)\,dxdy.$$

Esitame selle kujul

$$I = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right]dx.$$

Integraalile nurksulgudes rakendame mingit kvadratuurvalemit, lugedes x fikseerituks. Saame

$$\int_c^d f(x, y)\,dy \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x, y_k).$$

Siis

$$I \approx \sum_{k=0}^{n} A_k \int_a^b f(x, y_k)\,dx.$$

---

* Me vaatleme põhiliselt kahekordsete integraalide arvutamist. Mitmekordseid integraale arvutatakse analoogiliselt.

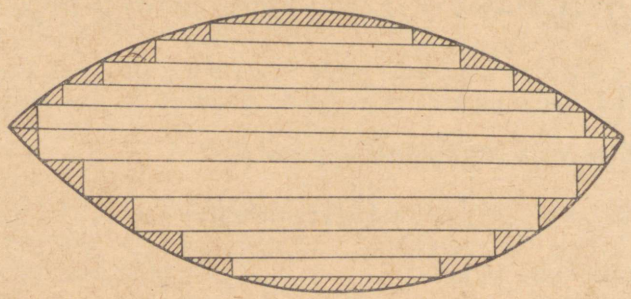
Integraalidele summa märgi all rakendame sama kvadratuurvalemit, mida kasutasime integraali $\int_c^d f(x, y)\,dy$ arvutamisel:

$$\int_a^b f(x, y_k)\,dx \approx \sum_{i=0}^{m} A_i' f(x_i, y_k).$$

Lõpptulemusena saame

$$I \approx \sum_{k=0}^{n} A_k \sum_{i=0}^{m} A_i' f(x_i, y_k). \qquad (8)$$

Kui integreerimispiirkond ei ole ristkülikukujuline, siis jaotatakse see ristkülikuteks (ülejäävad osad jäetakse vaatluse alt välja). Kui integreerimispiirkond on suurte mõõtmetega ristkülik, osutub otstarbekaks ka see väiksemate mõõtmetega osaristkülikuteks jaotada ja igaühele neist rakendada valemit (8).



Joon. 1.

Kui lähtevalemiks valida Simpsoni valem (vt. lk. 45) kolme sõlmega, siis saadakse valem

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\,dx\,dy = \frac{(b-a)(d-c)}{36} \Big\{ f(a, c) + f(a, d) + f(b, c) + f(b, d) + 4\left[f\left(a, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(b, \frac{c+d}{2}\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, c\right) + f\left(\frac{a+b}{2}, d\right)\right] + 16 f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2}\right)\Big\} + R,$$

kusjuures viga

$$R = -\frac{(b-a)^5(d-c)}{2880}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^4} - \frac{(b-a)(d-c)^5}{2880}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial y^4} - \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{8294400}\cdot\frac{\partial^8 f(\xi_3,\eta_3)}{\partial x^4\partial y^4}.$$

Kui lähtevalemiks valida Gaussi valem (vt. lk. 49) kahe sõlmega, siis saadakse valem

$$\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dxdy = \frac{(b-a)(d-c)}{4}\left[f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ \frac{d+c}{2}+\frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ \frac{d+c}{2}+\frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ \frac{c+d}{2}-\frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2\sqrt{3}},\ \frac{d+c}{2}-\frac{d-c}{2\sqrt{3}}\right)\right]+R, \qquad (9)$$

kus

$$R = \frac{(b-a)^5(d-c)}{69120}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_1,\eta_1)}{\partial x^4} + \frac{(b-a)(d-c)^5}{69120}\cdot\frac{\partial^4 f(\xi_2,\eta_2)}{\partial y^4} - \frac{(b-a)^5(d-c)^5}{4777574400}\cdot\frac{\partial^8 f(\xi_3,\eta_3)}{\partial x^4\partial y^4}.$$

Näide 14. Arvutame valemi (9) põhjal integraali

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{dxdy}{10+x^2+y^2} \approx \left[\frac{1}{10+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{10+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{10+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}+\frac{1}{10+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]=\frac{4}{10+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=\frac{3}{8}.$$

3. Mõned lihtsad valemid kahekordsete integraalide arvutamiseks.

Vaatleme valemeid, kui integreerimispiirkonnaks on ruut.,

a) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x, y)\,dxdy \approx f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)+f\left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}\right)+$

$+f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, 0\right)+f\left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$

Valem on täpne suvaliste kolmanda astme polünoomide puhul.

b) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x, y)\,dxdy \approx \frac{8}{3} f(0, 0) +$

$+\frac{1}{3}[f(-1, 1)+f(-1, -1)+f(1, -1)+f(1, 1)].$

Valem on täpne suvaliste kolmanda astme polünoomide puhul.

c) $\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dxdy \approx \frac{1}{f(0, 0)} \int_{-h}^{h} f(x, 0)\,dx \cdot \int_{-h}^{h} f(0, y)\,dy,$ (10)

kus eeldatakse, et $f(0, 0) \neq 0$.

Valemi viga eeldusel, et tuletised $f_{x^i y^j}^{(i+j)}(x, y)$ $(i, j \leqslant 6)$ on ruudus $[-h, h; -h, h]$ pidevad: $O(h^6)$.

Näide 15. Arvutame valemi (10) põhjal integraali

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{dxdy}{(10+x+y)^2}.$$

Siin $f(0, 0) = 0{,}01$. Saame

$$I \approx 100 \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+x)^2} \cdot \int_{-1}^{1} \frac{dy}{(10+y)^2} = 100 \cdot \left[\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(10+x)^2}\right]^2 =$$

$$= 100\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)^2 = 0{,}04081.$$

Integraali täpne väärtus: $I = 0{,}04082$.

Kui $f(x, y)$ on x suhtes paarisfunktsioon ja $f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h, 0\right) \neq 0$, siis

$$\int_{-h}^{h}\int_{-h}^{h} f(x, y)\,dxdy \approx \frac{1}{f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h, 0\right)} \int_{-h}^{h} f(x, 0)\,dx \int_{-h}^{h} f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}h, y\right)dy.$$

Valemi viga eeldusel, et eksisteerib piisav arv tuletisi: $0(h^8)$.

Vaatleme nüüd valemeid, kui integreerimispiirkonnaks D on ühikring.

a) $$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \frac{\pi}{6}\{f(0,0) + f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + f\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}[f(1, 0) + f(0, 1) + f(-1, 0) + f(0, -1)]\}.$$

Valem on täpne suvaliste viienda astme polünoomide puhul.

b) $$\iint_D f(x, y)\,dxdy \approx \frac{\pi}{4}\left\{f(0, 0) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{6} f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\frac{k\pi}{3}, \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\frac{k\pi}{3}\right)\right\}.$$

Valem on täpne suvaliste viienda astme polünoomide puhul.

c) $$\iint_D f(x, y)\,dxdy \approx \pi\left\{\frac{1}{9}f(0, 0) + \frac{16 - 3\sqrt{6}}{360}\sum_{i=0}^{9} f\left(\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\cos\frac{\pi i}{5}, \sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\sin\frac{\pi i}{5}\right) + \frac{16 + 3\sqrt{6}}{360}\sum_{i=0}^{9} f\left(\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\cos\frac{\pi i}{5}, \sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\sin\frac{\pi i}{5}\right)\right\}.$$

Valem on täpne suvaliste üheksanda astme polünoomide puhul.

d) $$\iint_D f(x, y)\,dxdy \approx \pi\left[\frac{1}{16}f(0, 0) + 0{,}0235\sum_{i=0}^{13} f\left(0{,}401\cos\frac{\pi i}{7}; 0{,}401\sin\frac{\pi i}{7}\right) + 0{,}0277\sum_{i=0}^{13} f\left(0{,}768\cos\frac{\pi i}{7}; 0{,}768\sin\frac{\pi i}{7}\right) + 0{,}0158\sum_{i=0}^{13} f\left(0{,}955\cos\frac{\pi i}{7}, 0{,}955\sin\frac{\pi i}{7}\right)\right].$$

Valem on täpne suvaliste kolmeteistkümnenda astme polünoomide puhul.

4. Monte Carlo meetod kordsete integraalide arvutamiseks.

Monte Carlo meetod integraali

$$I = \underbrace{\int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1}_{n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1, dx_2, \dots dx_n$$

arvutamiseks tingimusel, et $0 \leqslant f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leqslant 1$, seisab alljärgnevas.

Eeldame, et järjestikku saame N valikut, millest igaüks sisaldab lõigul $[0, 1]$ $n+1$ ühtlaselt jaotatud arvu *

$$\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}\}$$

Iga valiku puhul kontrollime võrratuse

$$\xi_{n+1} \leqslant f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

kehtivust. Olgu võrratus kehtiv m juhul N võimalikust. Siis loeme, et

$$I \approx \frac{m}{N}.$$

Viga

$$R_N = \left| I - \frac{m}{N} \right|$$

võib jämedalt hinnata nii: tõenäosusega p kehtib võrratus

$$R_n \leqslant \sqrt{\frac{I(1-I)}{(1-p)N}}.$$

Viimase hinnangu võib asendada veel jämedamaga:

$$R_n \leqslant \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-p)N}}.$$

Võttes näiteks: $p = 0{,}9$, $N = 100000$, võime väita, et tõenäosusega 0,9 on viga väiksem arvust

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{(1-0{,}9)\ 100000}} = 0{,}005.$$

* Me ütleme, et meie käsutuses on menetlus juhuslike, lõigul [0, 1] ühtlaselt jaotatud arvude saamiseks, kui arvu ilmumise igal momendil võib selle arvu asemel ilmuda niisama hästi iga teine arv lõigult [0, 1]. On olemas spetsiaalsed programmid, mille abil elektronarvutid võivad genereerida juhuslikke arve. On koostatud ka juhuslike arvude tabeleid.

Esitatud hinnangud ei sõltu arvutatava integraali kordsusest. Siit järeldub, et Monte Carlo meetodi rakendamine on seda loomulikum, mida suurem on integraali kordsus.

Märkus. Kui tingimus $0 \leqslant f \leqslant 1$ ei ole täidetud, siis võib arvutada alljärgneval viisil:

$$I = (M - L)I_1 + L,$$

kus M ja L on vastavalt funktsiooni f väärtuste mingi ülemine ja alumine tõke integreerimispiirkonnas;

$$I_1 = \int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L}{M - L} dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Integraali I_1 puhul asuvad integraalialuse funktsiooni kõik väärtused juba lõigul [0, 1]; seega I_1 arvutamiseks võib rakendada ülalkirjeldatud Monte Carlo meetodit.

Kirjandust

1. И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений*. I. Москва, 1962.
2. В. И. Крылов, *Приближенное вычисление интегралов*. Москва, 1959.
3. К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*. Москва, 1961.
4. Ш. Е. Микеладзе, *Численные методы математического анализа*. Москва, 1953.
5. И. П. Мысовских, *Лекции по методам вычислений*. Москва, 1962.
6. С. М. Никольский, Квадратные формулы. Москва, 1958.
7. L. Luht, *Arvutusmeetodid II*. TRÜ rotoprint, 1964.

IV. FUNKTSIOONIDE LÄHENDAMINE

Olgu lõigul $[a, b]$ antud pidev funktsioon $f(x)$. Iga $\varepsilon > 0$ puhul leidub polünoom $P(x)$, nii et kõigi $x \in [a, b]$ puhul kehtib võrratus

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Teiste sõnadega, iga mingil lõigul pideva funktsiooni puhul eksisteerib polünoomide jada, mis sellel lõigul koondub ühtlaselt vaadeldavaks funktsiooniks (nn. Weierstrassi teoreem).

Teoreem näitab, et iga pidevat funktsiooni on võimalik suvalise täpsusega lähendada ehk aproksimeerida polünoomidega. See on aluseks funktsioonide lähendite otsimisele polünoomkujul.

Üheks võimaluseks funktsioonide lähendamisel polünoomidega on interpolatsioonipolünoomi moodustamine antud funktsiooni jaoks. Seda küsimust vaadeldi I peatükis.

A. Ühtlased lähendid

1. Funktsioonide arendamine Taylori ritta.

Olgu x_0 argumendi mingi fikseeritud väärtus. Funktsiooni $f(x)$ Taylori rida avaldub kujul

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \ldots . \quad (1)$$

Kui $x_0 = 0$, saame:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \ldots . \quad (2)$$

Näide 1. Arendame Taylori ritta (2) funktsiooni $f(x) = \sin x$. Saame $\sin 0 = 0$, $(\sin x)'_{x=0} = \cos 0 = 1$, $(\sin x)''_{x=0} = -\sin 0 = 0$, $(\sin x)'''_{x=0} = -\cos 0 = -1$ jne. Seega (2) põhjal

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .$$

Esitame mõnede funktsioonide Taylori read. Iga rea puhul on toodud selle koonduvuspiirkond.

1) $$(1 \pm x)^m = 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 \pm$$
$$\pm \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots +$$
$$+ (\pm 1)^n \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots ,$$
$$(m > 0,\ |x| \leqslant 1).$$

2) $$(1 \pm x)^{-m} = 1 \mp mx + \frac{m(m+1)}{2!} x^2 \mp$$
$$\mp \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} x^3 + \dots +$$
$$+ (\mp 1)^n \frac{m(m+1)\dots(m+n-1)}{n!} x^n \pm \dots ,$$
$$(m > 0,\ |x| < 1).$$

3) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \pm$$
$$\pm \dots ,\ (|x| < \infty).$$

4) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm$$
$$\pm \dots ,\ (|x| < \infty).$$

5) $$\tan x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \dots +$$
$$+ (-1)^{n+1} \frac{2^{2n}(2^{2n}-1) B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots ,$$

$\left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$, B_{2n} — Bernoulli arvud (vt. lk. 57).

6) $$\cot x - \frac{1}{x} = -\left[\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \frac{x^7}{4725} + \dots +\right.$$
$$\left. + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} + \dots\right],$$
$(0 < |x| < \pi)$, B_{2n} — Bernoulli arvud (vt. lk. 57).

7) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, $(|x| < \infty)$.

8) $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1!} + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \ldots$, $(|x| < \infty)$.

9) $\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$, $(0 < x \leqslant 2)$.

10) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \pm \ldots$, $(-1 < x \leqslant 1)$.

11) $\arcsin x = x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)(2n+1)} x^{2n+1} + \ldots$ $(|x| < 1)$.

12) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

13) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(|x| < 1)$.

14) $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$.

15) $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1!)} + \ldots$, $(|x| < \infty)$.

16) $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, $(|x| < \infty)$.

17) $\operatorname{Arsh} x = x - \frac{1}{2 \cdot 3} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \ldots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n) \cdot (2n+1)} x^{2n+1} + \ldots$, $(|x| < 1)$.

2. Taylori rea koonduvuspiirkonna laiendamine.

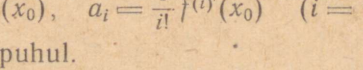
Koondugu funktsiooni $f(x)$ Taylori rida

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots, \qquad (3)$$

kus

$$a_0 = f(x_0), \quad a_i = \frac{1}{i!} f^{(i)}(x_0) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

iga $x \in [0, 2x_0]$ puhul.



Joon. 1.

Rea (3) võib teisendada uueks reaks suurema koonduvuspiirkonnaga.

Vaatleme nimelt rida

$$f(x) = b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots, \tag{4}$$

kus

$$\xi = \frac{x - x_0}{x + x_0},$$

$$b_0 = a_0, \quad b_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} C_k^i (2x_0)^{i+1} a_{i+1} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Rida (4) koondub iga $x > 0$ puhul.

3. Taylori valem.

Kui valemis (1) piirduda $n + 1$ liidetavaga, saadakse ligikaudne valem (Taylori valem) funktsiooni väärtuste arvutamiseks:

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \tag{5}$$

Valemi viga

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x) \tag{6}$$

või

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Analoogiliselt saadakse seosest (2)

$$f(x) \approx f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0), \tag{7}$$

mille viga

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) =$$

$$= \frac{1}{n!} \int_{0}^{x} (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt, \quad \xi \in (0, x).$$

Praktikas hinnatakse valemite (5) ja (7) viga sageli esimese ärajäetava liikmega Taylori ridades (1) ja (2).

Kui funktsiooni $f(x)$ lähendada lõigul $[a, b]$ valemi (5) põhjal ning sellel lõigul $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1}$, siis kehtib hinnang (vrd. (6))

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}. \tag{8}$$

Näide 2. Koostame valemi funktsiooni $\sin x$ väärtuste arvutamiseks $|x| \leqslant 1$ puhul nii, et valemi viga ei ületaks arvu 0,0005. Selleks määrame, mitu liidetavat tuleb võtta valemis (7), et saavutada nõutavat täpsust. Saame

$$M_{n+1} = \max_{x \in [-1;\,1]} |(\sin x)^{(n+1)}| = 1, \quad x_0 = 0.$$

Seega (8) põhjal

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} \leqslant \frac{1}{(n+1)!}.$$

Siit järeldub n valikuks võrratus

$$\frac{1}{(n+1)!} < 0{,}0005,$$

kust leiame, et $n = 6$.

Otsitavaks valemiks on

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120};$$

selle viga on iga $x \in [-1, 1]$ puhul väiksem arvust 0,0005.

4. Liidetavate arvu vähendamine ligikaudses valemis.

Olgu meil ligikaudne valem (näiteks Taylori valem (7))

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \tag{9}$$

funktsiooni $f(x)$ väärtuste arvutamiseks lõigul $[-1, 1]$.

Olgu valemi (9) viga $r_n(x)$ ja iga $x \in [-1, 1]$ puhul kehtigu võrratused

$$|r_n(x)| < \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_1 < \varepsilon,$$

kus ε on valemi (9) lubatav viga.

Näitame, et mõnikord õnnestub valemit (9) teisendada uueks valemiks, milles liidetavate arv on väiksem ja mille viga ei ületa samuti arvu ε.

a) Kui valemi (9) puhul $|a_n| + \varepsilon_1 < \varepsilon$, siis võime kirjutada uue valemi

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i,$$

mille viga $x \in [-1, 1]$ puhul ei ületa arvu ε.

b) Olgu $|a_n| + \varepsilon_1 > \varepsilon$. Sel juhul põhineb liidetavate arvu vähendamine valemis (9) Tšebõšovi polünoomide

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

kasutamisel. Toome Tšebõšovi polünoomide tabeli:

n	$T_n(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$
6	$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
7	$64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
8	$128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
9	$256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$
10	$512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$

Üksliiget x^i võib avaldada Tšebõšovi polünoomide $T_0(x), T_1(x), \ldots, T_i(x)$ abil alljärgnevalt *:

$$x^i = 2^{1-i} \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} C_i^k \overline{T}_{i-2k}(x),$$

kus

$$\overline{T}_0(x) = \frac{1}{2}, \quad \overline{T}_k(x) = T_k(x) \quad (k > 0).$$

* $\left[\frac{i}{2}\right]$ tähistab suurimat täisarvu, mis ei ületa arvu $\frac{i}{2}$.

Toome Tšebõšovi polünoomide kaudu avaldatud suuruste x^i tabeli:

i	x^i
0	$1 = T_0(x)$
1	$x = T_1(x)$
2	$2x^2 = T_0(x) + T_2(x)$
3	$4x^3 = 3T_1(x) + T_3(x)$
4	$8x^4 = 3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x)$
5	$16x^5 = 10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x)$
6	$32x^6 = 10T_0(x) + 15T_2(x) + 6T_4(x) + T_6(x)$
7	$64x^7 = 35T_1(x) + 21T_3(x) + 7T_5(x) + T_7(x)$
8	$128x^8 = 35T_0(x) + 56T_2(x) + 28T_4(x) + 8T_6(x) + T_8(x)$
9	$256x^9 = 126T_1(x) + 84T_3(x) + 36T_5(x) + 9T_7(x) + T_9(x)$
10	$512x^{10} = 126T_0(x) + 210T_2(x) + 120T_4(x) + 45T_6(x) + 10T_8(x) + T_{10}(x)$

Avaldame valemis (9) suurused x^i $(i = 0,1, \ldots, n)$ Tšebõšovi polünoomide kaudu. Pärast sarnaste liikmete koondamist saame valemi

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} b_i T_i(x). \tag{10}$$

Kui õnnestub valida valemi (10) m viimast kordajat nii, et

$$|b_n| + |b_{n-1}| + \ldots + |b_{n-m+1}| + \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

siis saame valemi

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n-m} b_i T_i(x), \tag{11}$$

mille viga iga $x \in [-1, 1]$ puhul ei ületa arvu ε.

Valemis (11) on polünoomi astmeks juba $n - m$.

Näide 3. Vaatleme Taylori valemit

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}. \tag{12}$$

Selle valemi viga $x \in [-1, 1]$ puhul ei ületa arvu $\varepsilon_1 = 0{,}0014$. Kasutades esitatud metoodikat, saame valemist (12) valemi, milles liidetavate arv on väiksem ja mille täpsus $\varepsilon = 0{,}008$.

Ülaltoodud tabeli põhjal

$$1 = T_0(x),$$

$$x^2 = \frac{1}{2} T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x),$$

$$x^4 = \frac{3}{8} T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x) + \frac{1}{8} T_4(x).$$

Asetades need avaldised valemisse (12), saame

$$\cos x \approx T_0(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x)\right] +$$

$$+ \frac{1}{24}\left[\frac{3}{8} T_0(x) + \frac{1}{2} T_2(x) + \frac{1}{8} T_4(x)\right] =$$

$$= \frac{49}{64} T_0(x) - \frac{11}{48} T_2(x) + \frac{1}{192} T_4(x). \qquad (13)$$

Siin

$$|b_2| + \varepsilon_1 = \frac{1}{192} + 0{,}0014 < 0{,}008 = \varepsilon.$$

Seega võime valemis (13) ära jätta viimase liidetava. Saame

$$\cos x \approx \frac{49}{64} T_0(x) - \frac{11}{48} T_2(x) = \frac{49}{64} - \frac{11}{48}(2x^2 - 1),$$

kust

$$\cos x \approx 0{,}995 - 0{,}458x^2.$$

Selle valemi viga ei ületa arvu 0,008.

5. Kahe muutuja funktsiooni Taylori valem.

$$f(x+h,\ y+l) \approx f(x,y) + \left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} h + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} l\right] +$$

$$+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} hl + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} l^2\right] + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[\frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^n} h^n + C_n^1 \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-1} \partial y} h^{n-1} l + C_n^2 \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-2} \partial y^2} h^{n-2} l^2 +\right.$$

$$\left. + \ldots + C_n^n \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial y^n} l^n\right], \text{ kus } C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Valemi viga

$$R_n(x,y) = O(h^{n+1} + h^n l + h^{n-1} l^2 + \ldots + l^{n+1}).$$

Taylori valemi võime lühidalt kirjutada ka kujul

$$f(x+h, y+l) \approx f(x, y) + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} l \right)^i f(x, y),$$

kusjuures on kasutatud tähistust

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} h + \frac{\partial}{\partial y} l \right)^i f(x, y) = \sum_{k=0}^{i} C_i^k \frac{\partial^i f(x, y)}{\partial x^{i-k} \partial y^k} h^{i-k} l^k.$$

Sageli kasutatakse Taylori valemit kujul

$$f(x+h,\ y+l) \approx \sum_{i=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^i l^k}{i!k!} \frac{\partial^{i+k} f(x, y)}{\partial x^i \partial y^k}.$$

Valemi viga

$$R_{mn}(x, y) = \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(\xi, y)}{\partial x^{m+1}} + \frac{l^{n+1}}{(n+1)!} \frac{\partial^{n+1} f(x, \eta)}{\partial y^{n+1}} -$$

$$- \frac{h^{m+1} l^{n+1}}{(m+1)!(n+1)!} \frac{\partial^{m+n+2} f(\xi_1, \eta_1)}{\partial x^{m+1} \partial y^{n+1}},$$

$$(x < \xi,\ \xi_1 < x+h;\ y < \eta,\ \eta_1 < y+l).$$

6. Parimad lähendpolünoomid.

Olgu $P_n(x)$ n-astme polünoom. Vaatleme suurust

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_n(x)|, \tag{14}$$

mida nimetatakse polünoomi $P_n(x)$ maksimaalseks hälbeks funktsioonist $f(x)$. See suurus iseloomustab, kuivõrd hästi polünoom $P_n(x)$ lähendab lõigul $[a, b]$ funktsiooni $f(x)$. Seda n-astme polünoomi, mille puhul suurus (14) omandab vähima väärtuse, nimetatakse funktsiooni $f(x)$ parima lähendamise polünoomiks ehk lühidalt — parimaks lähendpolünoomiks.

Lõigul eksisteerib parim lähendpolünoom pideva funktsiooni puhul alati ja on ühene.

Vaatleme juhtu $f(x) = 0$; n-astme polünoomide hulgas (pealiikme kordajaga 1) on vähim maksimaalne hälve funktsioonist $f(x) \equiv 0$ Tšebõšovi polünoomil *

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos n \arccos x.$$

---

* Tšebõšovi polünoomide $T_n(x) = 2^{n-1} \overline{T}_n(x)$ tabelit vt. lk. 79.

Üldjuhul on parimad lähendpolünoomid täpselt leitavad ainult väga kitsa funktsioonide klassi jaoks. Tavaliselt koostatakse niisugune polünoom antud funktsiooni puhul ligikaudsete meetoditega.

7. Meetod parima lähendpolünoomi leidmiseks.

a) Parim lähendpolünoom $n+2$ punktist koosneval hulgal.

Olgu lõigul $[a, b]$ antud $n+2$ punktist koosnev hulk

$$S_j = \{x_0^{(j)}, x_1^{(j)}, \ldots, x_{n+1}^{(j)}\}.$$

Funktsiooni $f(x)$ n-astme parimaks lähendpolünoomiks hulgal S_j nimetatakse n-astme polünoomi $P_{nj}(x)$, mille kordajad määratakse tingimusest, et suurus

$$\max_{x \in S_j} |f(x) - P_{nj}(x)|$$

oleks minimaalne.

Kehtib valem

$$P_{nj}(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x - x_0^{(j)})(x - x_1^{(j)}) \ldots}{(x_i^{(j)} - x_0^{(j)})(x_i^{(j)} - x_1^{(j)}) \ldots} \times$$

$$\times \frac{(x - x_{i-1}^{(j)})(x - x_{i+1}^{(j)}) \ldots (x - x_{n+1}^{(j)})}{(x_i^{(j)} - x_{i-1}^{(j)})(x_i^{(j)} - x_{i+1}^{(j)}) \ldots (x_i^{(j)} - x_{n+1}^{(j)})} \cdot p_i^{(j)},$$

kus

$$p_i^{(j)} = f(x_i^{(j)}) - (-1)^i \varrho_j \qquad (i = 0, 1, \ldots, n+1);$$

$$\varrho_j = \frac{d_0^{(j)} f(x_0^{(j)}) - d_1^{(j)} f(x_1^{(j)}) + \ldots + (-1)^{n+1} d_{n+1}^{(j)} f(x_{n+1}^{(j)})}{d_0^{(j)} + d_1^{(j)} + \ldots + d_{n+1}^{(j)}};$$

$$d_i^{(j)} = \frac{1}{(x_i^{(j)} - x_0^{(j)})(x_i^{(j)} - x_1^{(j)}) \ldots} \times$$

$$\times \frac{1}{(x_i^{(j)} - x_{i-1}^{(j)})(x_{i+1}^{(j)} - x_i^{(j)}) \ldots (x_{n+1}^{(j)} - x_i^{(j)})}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n).$$

Ülejäävat väärtust $p_{n+1}^{(j)}$ võib kasutada arvutuste kontrolliks

$$p_{n+1}^{(j)} = P_{nj}(x_{n+1}^{(j)}).$$

b) Algoritm parima lähendpolünoomi ligikaudseks leidmiseks lõigul $[a, b]$.

Vaatleme funktsiooni $f(x)$ parima lähendpolünoomi $P_n(x)$ ligikaudset leidmist lõigul $[a, b]$.

1) Valime $n+2$ punktist $x_i^{(0)} \in [a, b]$ koosneva hulga S_0. Otstarbekas on valida

$$x_i^{(0)} = \frac{b-a}{2} \cos \frac{(n+1-i)\pi}{n+1} + \frac{b+a}{2} \quad (i = 0, 1, \ldots, n+1).$$

Hulgal S_0 koostame n-astme lähendpolünoomi $P_{n0}(x)$ (vt. alapunkt a).

2) Leiame suuruse

$$L_0 = \max_{x \in [a,b]} |\Delta_0(x)|,$$

kus $\Delta_0(x) = f(x) - P_{n0}(x)$, ja vaatleme vahet $\varepsilon_0 = L_0 - |\varrho_0|$.

Kui $\varepsilon_0 = 0$, siis $P_{n0}(x) = P_n(x)$; kui $\varepsilon_0 > 0$, siis moodustame uue punktide hulga $S_1 = \{x_0^{(1)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_{n+1}^{(1)}\}$ nii, et funktsioonil $\Delta_0(x)$ oleksid hulga S_1 punktides vahelduvate märkidega väärtused, kusjuures $|\Delta_0(x_i^{(1)})| \geqslant |\varrho_0|$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ ja vähemalt ühes punktis $|\Delta_0(x_i^{(1)})| > |\varrho_0|$.

Hulgal S_1 koostame n-astme lähendpolünoomi $P_{n1}(x)$. Nüüd hakkab arvutusprotsess tsükliliselt korduma. Leiame suuruse $L_1 = \max_{x \in [a,b]} |\Delta_1(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P_{n1}(x)|$ ja vaatleme vahet $\varepsilon_1 = L_1 - |\varrho_1|$.

Kui $\varepsilon_1 = 0$, siis $P_{n1}(x) = P_n(x)$; kui $\varepsilon_1 > 0$, siis moodustame uue punktide hulga $S_2 = \{x_0^{(2)}, x_1^{(2)}, \ldots, x_{n+1}^{(2)}\}$ nii, et funktsioonil $\Delta_1(x)$ oleksid hulga S_2 punktides vahelduvate märkidega väärtused, kusjuures $|\Delta_1(x_i^{(2)})| \geqslant |\varrho_1|$ $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ ja vähemalt ühes punktis $|\Delta_1(x_i^{(2)})| > |\varrho_1|$.

Hulgal S_2 koostame n-astme lähendpolünoomi $P_{n2}(x)$ jne.

Peale k sammu leiame polünoomi $P_{nk}(x)$. Kui $\varepsilon_k = L_k - |\varrho_k|$ on küllalt väike, siis võtame

$$P_n(x) \approx P_{nk}(x).$$

Kui $\varepsilon_k = 0$, siis kehtib $P_n(x) = P_{nk}(x)$.

Märkus. Suuruse L_i ligikaudseks leidmiseks võime

koostada lõigul $[a, b]$ funktsiooni $|\Delta_j(x)|$ väärtuste tabeli (küllalt tiheda!). Neist väärtustest valime välja suurima.

Punktid $x_i^{(j+1)}$ on soovitatav valida nii, et arvud $|\Delta_j(x_i^{(j+1)})|$ oleksid võimalikult suured.

Polünoomide $P_{nj}(x)$ koostamiseks võib kasutada ka järgmist võtet: kui $P_{n,j-1}(x)$ on leitud, siis koostame hulgal S_j funktsiooni $\Delta_{j-1}(x)$ jaoks n-astme parima lähendpolünoomi $Q_{n,j-1}(x)$. Siis

$$P_{n,j}(x) = P_{n,j-1}(x) + Q_{n,j-1}(x).$$

B. Vähimruutude meetod

1. Meetodi olemus.

Olgu lõigu $[a, b]$ punktides (sõlmedes) $x_0, x_1, \ldots, x_m$ saadud katseliselt funktsiooni väärtused $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_m)$. Eeldame, et sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_m$ on valitud niivõrd tihedalt, et lõigul $[x_0, x_m]$ võime $f^{(n)}(x)$ oluliselt mittemuutuvaks lugeda. Siis on loomulik otsida funktsiooni ligikaudset esitust n-astme polünoomina

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n.$$

Otsitava polünoomi astme n võib sageli määrata funktsiooni $f(x)$ poolt kirjeldatava protsessi füüsikalistest omadustest. Kui näiteks on teada, et funktsioon $f(x)$ kirjeldab liikumist, mis on lähedane ühtlasele liikumisele, on loomulik otsida $P_n(x)$ kujul: $P_1(x) = a_0 + a_1x$.

Olgu katseandmeid niivõrd palju, et $m > n$. Kui me tahame arvesse võtta katseandmeid kõigis sõlmedes, ei ole polünoomi $P_n(x)$ leidmine interpolatsioonipolünoomina (vt. ptk. I) võimalik. Pealegi on katseandmed sageli ebatäpsed, mistõttu pole mõtet nõuda, et polünoomi $P_n(x)$ väärtused vaadeldavates sõlmedes võrduksid nende andmetega. Neil juhtudel koostatakse lähendpolünoom $P_n(x)$ vähimruutude meetodi abil.

Vahet $f(x) - P_n(x)$ nimetatakse antud lähendpolünoomi $P_n(x)$ hälbeks punktis x. Vähimruutude meetodi

puhul valitakse lähendpolünoomi kordajad $a_0, a_1, \ldots, a_n$ selliselt, et sõlmpunktides hälvete ruutude summa

$$\sum_{i=0}^{m} [f(x_i) - P_n(x_i)]^2$$

oleks minimaalne.

Juhul, kui funktsioon $f(x)$ on antud analüütiliselt, on loomulik asendada ruutude summa integraaliga hälbe ruudust üle kogu lähendamislõigu. Kordajad $a_0, a_1, \ldots, a_n$ määratakse siis integraali

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 \, dx$$

miinimumi tingimusest.

2. Vähimruutude meetod juhul, kui funktsioon on antud punktide jadaga.

Olgu sõlmedes x_i $(i = 0,1, \ldots, m)$ teada funktsiooni väärtused $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1, \ldots, m)$.

Lähendpolünoomi $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ kordajad leitakse alljärgneva skeemi kohaselt.

a) Leiame arvud

$$\begin{aligned}
[x] &= x_0 + x_1 + \ldots + x_m, \\
[x^2] &= x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_m^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[x^{2n}] &= x_0^{2n} + x_1^{2n} + \ldots + x_m^{2n}, \\
[y] &= y_0 + y_1 + \ldots + y_m, \\
[xy] &= x_0 y_0 + x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[x^n y] &= x_0^n y_0 + x_1^n y_1 + \ldots + x_m^n y_m.
\end{aligned}$$

b) Lahendame tundmatute $a_0, a_1, \ldots a_n$ suhtes võrrandisüsteemi

$$\begin{cases}
a_0(m+1) + a_1[x] + a_2[x^2] + \ldots + a_n[x^n] = [y], \\
a_0[x] + a_1[x^2] + a_2[x^3] + \ldots + a_n[x^{n+1}] = [xy], \\
a_0[x^2] + a_1[x^3] + a_2[x^4] + \ldots + a_n[x^{n+2}] = [x^2 y], \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_0[x^n] + a_1[x^{n+1}] + a_2[x^{n+2}] + \ldots + a_n[x^{2n}] = [x^n y].
\end{cases} \quad (15)$$

Lähenduse keskmine viga lõigul $[x_0, x_m]$

$$\delta_n = \sqrt{\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m}[f(x_i) - P_n(x_i)]^2}.$$

Näide 4. Olgu funktsioon antud tabeliga:

x_i	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
y_i	-1	0	$\frac{7}{8}$	2

Leiame vähimruutude meetodi abil lähendpolünoomi $P_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Et $m = 3$, $n = 2$, siis

a) $[x] = 0 + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{9}{4}$,

$[x^2] = 0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1^2 = \frac{29}{16}$,

$[x^3] = 0^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1^3 = \frac{99}{64}$,

$[x^4] = 0^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + 1^4 = \frac{353}{256}$,

$[y] = -1 + 0 + \frac{7}{8} + 2 = \frac{15}{8}$,

$[xy] = 0 \cdot (-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4} \cdot \frac{7}{8} + 1 \cdot 2 = \frac{85}{32}$,

$[x^2y] = 0^2(-1) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 0 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{7}{8} + 1^2 \cdot 2 = \frac{319}{128}$;

b) (15) põhjal

$$\begin{cases} a_0 \cdot 4 + a_1 \cdot \frac{9}{4} + a_2 \cdot \frac{29}{16} = \frac{15}{8}, \\ a_0 \cdot \frac{9}{4} + a_1 \cdot \frac{29}{16} + a_2 \cdot \frac{99}{64} = \frac{85}{32}, \\ a_0 \cdot \frac{29}{16} + a_1 \cdot \frac{99}{64} + a_2 \cdot \frac{353}{256} = \frac{319}{128}, \end{cases}$$

kust $a_0 = -1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Otsitav polünoom avaldub kujul

$$P_2(x) = -1 + x + 2x^2.$$

3. Võrdsete summade meetod.

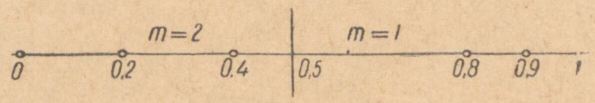
Meetod võimaldab leida n-astme polünoomi, mis lähendab funktsiooni vaadeldaval lõigul $[a, b]$. See polünoom on lähedane vähimruutude meetodi abil leitud polünoomile $P_n(x)$. Seejuures nõuab lähendpolünoomi leidmine võrdsete summade meetodi abil vähem arvutusi kui polünoomi $P_n(x)$ leidmine.

Olgu lõigu $[a, b]$ sõlmedes x_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$ antud funktsiooni väärtused y_i $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Lõik $[a, b]$ jaotatakse $n + 1$ osaks nii, et igas osas asetseks vähemalt üks sõlm. Iga osa puhul kirjutame välja süsteemi (15) esimese võrrandi. Sel teel saadakse $n + 1$ võrrandist koosnev süsteem lähendpolünoomi kordajate $a_0, a_1, \ldots, a_n$ leidmiseks.

Näide 5. Koostame tabeliga

x_i	0	0,2	0,4	0,8	0,9
y_i	1	1,3	1,9	2,6	2,9

antud funktsioonile $y = f(x)$ lõigul $[0, 1]$ lähendpolünoomi $P_1(x) = a_0 + a_1 x$.



Joon. 2

Et $n = 1$, siis jaotame lõigu $[0, 1]$ kaheks osaks: $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ja $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$. Kummagi osa puhul kirjutame välja süsteemi (15) esimese võrrandi. Saame süsteemi

$$\begin{cases} a_0 \cdot 3 + a_1(0 + 0{,}2 + 0{,}4) = 1 + 1{,}3 + 1{,}9, \\ a_0 \cdot 2 + a_1(0{,}8 + 0{,}9) = 2{,}6 + 2{,}9, \end{cases}$$

kust leiame:

$$a_0 = 0{,}98;\ a_1 = 2{,}08.\ \text{Seega}\ P_1(x) = 0{,}98 + 2{,}08x.$$

4. Tšebõšovi polünoomide kasutamine vähimruutude meetodi puhul.

Vaatleme funktsiooni $y = f(x)$ lähendamist lõigul $[-1, 1]$. Funktsiooni väärtused arvutame sõlmedes

$$x_i = \cos\frac{\pi i}{m} \quad (i = 0, 1, \ldots, m). \tag{16}$$

Leiame funktsioonile $y = f(x)$ lähendpolünoomi kujul

$$f(x) \approx \frac{1}{2}c_0 + c_1T_1(x) + c_2T_2(x) + \ldots + c_{m-1}T_{m-1}(x) + \\ + \frac{1}{2}c_mT_m(x), \tag{17}$$

kus

$$c_i = \frac{2}{m}\sum_{k=0}^{m} f(x_k)\cos ik\frac{\pi}{m} \quad (i = 0, 1, \ldots, m);$$

$T_k(x) = \cos(k \arccos x)$ — Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79). Vaatleme kahte juhtu.

1) Olgu füüsikalistest kaalutlustest teada, et $f(x)$ lähendit on vaja otsida n-astme polünoomina, kusjuures $n < m$. Sel juhul jätame avaldises (17) ära viimased $m - n$ liidetavat. Saame n-astme polünoomi, mis rahuldab vähimruutude meetodi tingimust sõlmedega (16). Tähistades selle polünoomi $P_n(x)$, saame lõigul $[-1, 1]$ ligikaudse valemi

$$f(x) \approx P_n(x).$$

2) Olgu teada, et $f(x)$ lähendit on vaja otsida suhteliselt madala astme polünoomina (täpset astet me ei tea). Koostame avaldise (17) suure m jaoks. Avaldise (17) parempoolse osa kordajad kahanevad tavaliselt monotoonselt. Oletame, et alates $(k+1)$-st liidetavast kordajad $c_0, c_1, \ldots c_m$ ei kahane monotoonselt. Siis võetakse avaldises (17) esimesed k liidetavat, mille summa moodustabki funktsiooni $f(x)$ otsitava lähendpolünoomi.

5. Tšebõšovi meetod lähendpolünoomi leidmiseks vähimruutude meetodi abil (võrdsete vahemikega sõlmede puhul).

Olgu sõlmedes $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ teada funktsiooni väärtused $f(x_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Võtame kasutusele muutuja $t = (x - x_0)/h$ ja polünoomid

$$P_{r,m}(t) = 1 + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k C_r^k C_{r+k}^k \frac{t(t-1)\ldots(t-k+1)}{m(m-1)\ldots(m-k+1)}$$

$(r = 0, 1, \ldots, n)$. Siis n-astme polünoom $(n \leqslant m)$, mis lähendab funktsiooni $f(x)$ (vähimruutude meetodi mõttes, vt. lk. 85) lõigul $[x_0, x_m]$, avaldub kujul

$$P_n(x) = a_0 P_{0,m}(t) + a_1 P_{1,m}(t) + \ldots + a_n P_{n,m}(t), \qquad (18)$$

kus

$$a_i = \frac{(2i+1)m(m-1)\ldots(m-i+1)}{(i+m+1)(i+m)\ldots(m+1)} \sum_{k=0}^{m} f(x_k) P_{i,m}(k)$$

$(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Näide 6. Leiame tabeliga

x_i	0	0,25	0,5	0,75
$f(x_i)$	−5	−4	−1	4

antud funktsiooni puhul vähimruutude meetodi abil teise astme lähendpolünoomi $P_2(x)$.

Vaadeldaval juhul $m = 3$, $n = 2$, $h = 0{,}25$, $t = \frac{x-0}{0{,}25} = 4x$;

$P_{0,3}(t) = 1$;

$P_{1,3}(t) = 1 - \frac{2}{3}t$; $P_{1,3}(0) = 1$; $P_{1,3}(1) = \frac{1}{3}$;

$P_{1,3}(2) = -\frac{1}{3}$; $P_{1,3}(3) = -1$;

$P_{2,3}(t) = 1 - 3t + t^2$; $P_{2,3}(0) = 1$; $P_{2,3}(1) = -1$;

$P_{2,3}(2) = -1$; $P_{2,3}(3) = 1$.

Seega

$$a_0 = \frac{1}{4}(-5 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1) = -1{,}5;$$

$$a_1 = \frac{3\cdot 3}{5\cdot 4}\left(-5\cdot 1 - 4\cdot\frac{1}{3} - 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + 4\cdot(-1)\right) = -4{,}5;$$

$$a_2 = \frac{5\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4}(-5\cdot 1 - 4(-1) - 1(-1) + 4\cdot 1) = 1.$$

Valemi (18) põhjal saame:

$$P_2(x) = -1{,}5 - 4{,}5\left(1 - \frac{2}{3}t\right) + 1\cdot(1 - 3t + t^2) = t^2 - 5$$

ehk

$$P_2(x) = (4x)^2 - 5 = 16x^2 - 5.$$

Tšebõšovi meetodi eelis seisab selles, et lähendpolünoomi leidmisel ei ole vaja lahendada võrrandisüsteemi. Peale selle on olemas tabelid polünoomide väärtuste $P_{r,m}(k)$ jaoks ($k = 0, 1, \ldots, m$) erinevate m ja kõigi $r \leqslant m$ puhul *.

6. Vähimruutude meetodi rakendamine mõõtmistulemuste täpsustamiseks.

Olgu võrdsete vahemikega argumendi väärtuste $x_0, x_1, \ldots, x_r$ puhul funktsiooni katsest saadud väärtused $y_0, y_1, \ldots, y_r$ **. Suurused y_i võivad sisaldada juhuslikke vigu. Nende juhuslike vigade vähendamiseks asendatakse suurused y_i täpsemate suurustega $\bar{y}_i$, mis leitakse vähimruutude meetodi abil.

Olgu sõlmed $x_0, x_1, \ldots, x_r$ üksteisele niivõrd lähedal, et lõigul, mis sisaldab nende sõlmede hulgast valitud $m + 1$ järjestikust sõlme, võib funktsiooni y küllalt hästi lähendada n-astme polünoomiga. Olgu $m \geqslant n$. Väärtuse $\bar{y}_i$ saamiseks valime sõlmede $x_0, x_1, \ldots, x_r$ hulgast $m + 1$ sõlme nii, et sõlm x_i asetseks võimalikult nende sõlmede keskel. Leiame funktsioonile y nende sõlmede järgi vähimruutude meetodi abil (vt. lk. 85) n-astme lähendpolünoomi; viimase väärtus punktis x_i ongi otsitav väärtus $\bar{y}_i$.

Toome mõned valemid funktsiooni väärtuste täpsustamiseks erinevate m ja n puhul (valemid on saadud ülalkirjeldatud viisil):

$$m = 2,\ n = 1;\quad \bar{y}_i = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1});$$

---

* Niisugused tabelid on toodud näiteks raamatus М. Милн, Численный анализ. Москва, 1951.

** Eeldame, et mõõtmisel pole tehtud süstemaatilisi vigu ega jämedaid eksimusi.

$$m=4,\ n=1;\ \bar{y}_i=\frac{1}{5}\,(y_{i-2}+y_{i-1}+y_i+y_{i+1}+y_{i+2});$$

(19)

$$m=4,\ n=3;\ \bar{y}_i=\frac{1}{35}\,(-3y_{i-2}+12y_{i-1}+17y_i+$$
$$+12y_{i+1}-3y_{i+2});$$
$$m=6,\ n=3;\ \bar{y}_i=\frac{1}{21}\,(-2y_{i-3}+3y_{i-2}+6y_{i-1}+7y_i+$$
$$+6y_{i+1}+3y_{i+2}-2y_{i+3});$$
$$m=6,\ n=5;\ \bar{y}_i=\frac{1}{231}\,(5y_{i-3}-30y_{i-2}+75y_{i-1}+$$
$$+131y_i+75y_{i+1}-30y_{i+2}+5y_{i+3});$$
$$m=8,\ n=5;\ \bar{y}_i=\frac{1}{429}\,(15y_{i-4}-55y_{i-3}+30y_{i-2}+$$
$$+135y_{i-1}+179y_i+135y_{i+1}+30y_{i+2}-55y_{i+3}+$$
$$+15y_{i+4}).$$

Näide 7. Olgu funktsioon antud tabeliga

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
y_i	1	1,02	1,03	1,06	1,09	1,10	1,12

Ülaltoodud tabeli põhjal täpsustame väärtust y_4. Tabelist näeme, et funktsioon y on lähedane lineaarsele funktsioonile, s. o. esimese astme polünoomile. Seega peame võtma $n=1$. Valemi (19) põhjal saame ($i=4$):

$$\bar{y}_4=\frac{1}{5}\,(y_2+y_3+y_4+y_5+y_6)=$$
$$=\frac{1}{5}\,(1{,}03+1{,}06+1{,}09+1{,}10+1{,}12)=1{,}08.$$

7. Vähimruutude meetod juhul, kui katseandmed on erineva täpsusega.

Olgu sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_m$ saadud funktsiooni väärtused $y_0, y_1, \ldots, y_m$, kusjuures katsete sooritamistingimuste põhjal oletame, et mõned funktsiooni väärtused on

täpsemad, teised aga vähem täpsed. Kui koostada funktsioonile y lähendpolünoom $P_n(x)$, siis tahame loomulikult, et viimasele osutaksid suuremat mõju täpsemad väärtused y_i. Sel juhul toimitakse nii: polünoomi $P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ kordajad leitakse summa

$$S = \sum_{i=0}^{m} p_i [y_i - P_n(x_i)]^2$$

miinimumi tingimusest, kusjuures positiivsed arvud (kaalud) p_i valitakse selliselt, et usaldatavamatele väärtustele y_i vastavad suuremad väärtused p_i. Sageli normeeritakse arvud p_i veel tingimusega: $p_0 + p_1 + \ldots + p_m = 1$. Kordajad $a_0, a_1, \ldots, a_n$ määratakse võrrandisüsteemist

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

8. Vähimruutude meetodi integraalkuju.

Kui funktsioon $f(x)$ on antud lõigul $[a, b]$ analüütiliselt, siis lähendpolünoom

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

määratakse integraali

$$\int_a^b [f(x) - P_n(x)]^2 dx$$

miinimumi tingimusest.

Kordajate $a_0, a_1, \ldots, a_n$ leidmiseks lahendatakse võrrandisüsteem

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^i dx = \int_a^b f(x)\, dx, \\ \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^{i+1} dx = \int_a^b f(x)\, x dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=0}^{n} a_i \int_a^b x^{i+n} dx = \int_a^b f(x)\, x^n dx. \end{cases} \tag{20}$$

Kui lõigu $[a, b]$ teatud osades tahame saada suuremat täpsust kui teistes osades, siis leitakse polünoom $P_n(x)$ integraali

$$\delta_n^2 = \int_a^b p(x)[f(x) - P_n(x)]^2 dx \tag{21}$$

miinimumi tingimusest, kus $p(x)$ on mittenegatiivne funktsioon. See funktsioon valitakse niiviisi, et tema väärtused on nende punktide ümbruses, kus nõutakse suuremat täpsust, suuremad. Polünoomi $P_n(x)$ kordajate leidmiseks saame võrrandisüsteemi sel juhul süsteemist (20), kui viimases kõik integraalialused funktsioonid korrutada kaalufunktsiooniga $p(x)$. Mõnede kaalufunktsioonide puhul vaadeldakse seda küsimust täpsemalt (lk. 96 ja lk. 97).

Märkus. Sageli on raske (või võimatu) täpselt arvutada süsteemi (20) kuuluvaid integraale

$$\int_a^b f(x)\,x^k dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Siis arvutatakse nad ligikaudselt ristkülikvalemiga (vt. lk. 42).

$$\int_a^b f(x)\,x^k dx \approx \frac{b-a}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i^k f(x_i),$$

kus

$$x_i = a + \frac{2i-1}{2} \cdot \frac{b-a}{m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Süsteem (20) avaldub sel juhul kujul

$$\begin{cases} a_0(b-a) + a_1 \dfrac{b^2-a^2}{2} + a_2 \dfrac{b^3-a^3}{3} + \\ + \ldots + a_n \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} = \dfrac{b-a}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(x_i), \\ a_0 \dfrac{b^2-a^2}{2} + a_1 \dfrac{b^3-a^3}{3} + a_2 \dfrac{b^4-a^4}{4} + \\ + \ldots + a_n \dfrac{b^{n+2}-a^{n+2}}{n+2} = \dfrac{b-a}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\,x_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 \dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1} + a_1 \dfrac{b^{n+2}-a^{n+2}}{n+2} + a_2 \dfrac{b^{n+3}-a^{n+3}}{n+3} + \\ + \ldots + a_n \dfrac{b^{2n+1}-a^{2n+1}}{2n+1} = \dfrac{b-a}{m} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} f(x_i)\,x_i^n. \end{cases} \tag{22}$$

9. Võrdsete pindalade meetod.

Meetod võimaldab vähimruutude meetodi abil leitud polünoomile (vt. eelmine punkt) lähedast lähendpolünoomi saada tunduvalt väiksema töökuluga. Selleks tehakse järgnevat.

Lõik $[a, b]$ jaotatakse $n+1$ osaks: $[a, x_1)$, $[x_1, x_2)$, $[x_2, x_3), \ldots, [x_n, b]$. Nõutakse, et igas osas oleksid funktsiooni $f(x)$ ja lähendpolünoomi graafikutega piiratud pindalad võrdsed. Siit saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} \int_a^{x_1} P_n(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx, \\ \int_{x_1}^{x_2} P_n(x)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int_{x_n}^{b} P_n(x)\,dx = \int_{x_n}^{b} f(x)\,dx \end{cases} \tag{23}$$

lähendpolünoomi $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ kordajate $a_0, a_1, \ldots, a_n$ määramiseks. Süsteemi (23) paremppoolse osa integraalid arvutatakse tavaliselt ristkülikvalemi abil (vt. lk. 42).

Näide 8. Leiame võrdsete pindalade meetodi abil lähendpolünoomi $P_2(x) = a_1 x + a_2 x^2$ funktsioonile $y = \ln(1+x)$ lõigul $[0,1]$. Polünoomi $P_2(x)$ puhul on valitud $a_0 = 0$, millega on garanteeritud funktsiooni y ja polünoomi $P_2(x)$ väärtuste võrdsus punktis $x = 0$ (suurendab lähendamise täpsust!).

Jaotame lõigu $[0,1]$ osadeks: $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ ja $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Seoste (23) põhjal saame

$$\begin{cases} \int_0^{0,5} (a_1 x + a_2 x^2)\,dx = \int_0^{0,5} \ln(1+x)\,dx, \\ \int_{0,5}^{1} (a_1 x + a_2 x^2)\,dx = \int_{0,5}^{1} \ln(1+x)\,dx \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} 0{,}1250 a_1 + 0{,}0417 a_2 = 0{,}1082, \\ 0{,}3750 a_1 + 0{,}2916 a_2 = 0{,}2780, \end{cases}$$

kust $a_1 = 0{,}96$; $a_2 = -0{,}28$ ning seega $P_2(x) = 0{,}96x - 0{,}28x^2$. Tähendab, lõigul [0,1]

$$\ln(1+x) \approx 0{,}96x - 0{,}28x^2.$$

10. Funktsiooni arendus Legendre'i polünoomide järgi.

Kui funktsiooni $f(x)$ lähendada lõigul $[-1, 1]$* n-astme polünoomiga, kusjuures lähendpolünoomi $P_n(x)$ otsime integraali (21) miinimumi tingimusest $p(x) \equiv 1$ puhul, siis otsitav lähendpolünoom avaldub kujul

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k L_k(x), \tag{24}$$

kus

$$L_k(x) = \frac{1}{2^k k!}[(x^2-1)^k]^{(k)} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

on nn. Legendre'i polünoomid;

$$c_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x) L_k(x)\,dx \qquad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

Funktsiooni $f(x)$ polünoomiga (24) lähendamise keskmine viga

$$\delta_n = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} c_k^2}.$$

Polünoom (24) lähendab funktsiooni $f(x)$ paremini lõigu $[-1, 1]$ keskpunkti, halvemini aga selle lõigu otspunktide lähedal.

Kui funktsioonil $f(x)$ on lõigul $[-1, 1]$ pidev teine tuletis, siis kehtib valem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k L_k(x), \tag{25}$$

kusjuures rida koondub ühtlaselt lõigul $[-1, 1]$.

* Funktsiooni $f(x)$ lähendamine lõigul $[a, b]$ taandatakse funktsiooni

$$\varphi(u) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u\right)$$

lähendamisele lõigul $[-1, 1]$.

Valemit (25) nimetatakse funktsiooni arenduseks Legendre'i polünoomide järgi. Tuleb märkida, et selline arendus koondub, võrreldes Taylori arendusega (vt. lk. 74), tunduvalt laiema funktsioonide klassi puhul. Sageli koondub arendus Legendre'i polünoomide järgi ka kiiremini kui Taylori rida.

11. Funktsiooni arendus Tšebõšovi polünoomide järgi.

Kui me tahame saada lõigul $[-1, 1]$ funktsioonile $f(x)$ sellist n-astme lähendpolünoomi $P_n(x)$, et piki lõiku $[-1, 1]$ oleks lähendamisviga ligikaudu ühesugune, siis otsime lähendpolünoomi integraali (21) miinimumitingimusest kaalufunktsiooni $p(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ puhul. Otsitavaks polünoomiks on

$$P_n(x)=c_0+c_1T_1(x)+c_2T_2(x)+\ldots+c_nT_n(x), \quad (26)$$

kus $T_k(x)=\cos(k \arccos x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79);

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$c_k=\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)T_k(x)\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (k\geqslant 1).$$

Valemi (26) kordajaid on sobiv arvutada ristkülikvalemi abil (vt. lk. 42):

$$c_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right),$$

$$c_k=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\varphi)\cos k\varphi\,d\varphi=$$

$$=\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} f\left(\cos\frac{2i-1}{2N}\pi\right)\cos\frac{(2i-1)k\pi}{2N} \quad (k\geqslant 1).$$

Funktsiooni $f(x)$ polünoomiga (26) lähendamise keskmine viga

$$\delta_n = \sqrt{\int_{-1}^{1} f^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\pi}{2}(2c_0^2 + c_1^2 + \ldots + c_n^2)}.$$

Suurte n puhul võib lähendamisviga ligikaudselt väljendada järgmiselt:

$$f(x) - P_n(x) \approx c_{n+1} T_{n+1}(x).$$

Kui lõigul $[-1, 1]$ on teada funktsiooni $(n+1)$-järku tuletise hinnang

$$|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M_{n+1},$$

siis küllalt suurte n puhul

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!2^n}.$$

Kui funktsioonil $f(x)$ on lõigul $[-1, 1]$ pidev tuletis, siis kehtib valem

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad (27)$$

kusjuures rida koondub ühtlaselt lõigul $[-1, 1]$.

Valem (27) on funktsiooni $f(x)$ arendus Tšebõšovi polünoomide järgi. Rida (27) koondub tunduvalt laiema klassi funktsioonide puhul kui Taylori rida (vt. lk. 74), kusjuures funktsiooni kõigi arenduste hulgas (polünoomide järgi) on arendusel (27) kõige suurem koonduvuskiirus.

Lähtudes sellest, tuleb osata teisendada funktsiooni astmerida (eeldatakse selle koonduvust)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad (28)$$

funktsiooni arenduseks Tšebõšovi polünoomide järgi.

Seda tehakse valemitega

$$c_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{2i}^i}{2^{2i}} a_{2i},$$

$$c_k = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{C_{k+2i}^i}{2^{k+2i-1}} a_{k+2i} \quad (k \geqslant 1).$$

Et saada nõutud täpsust, tuleb võtta reas (27) tunduvalt vähem liikmeid kui lähtereas (28).

Näide 9. Leiame funktsiooni $y = \arccos x$ puhul 3. astme lähendpolünoomi. Arvutame kordajad

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \arccos x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \arccos x \cdot \cos(\arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi \cos \varphi d\varphi = -\frac{4}{\pi},$$

$$c_2 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \arccos x \cdot \cos(2 \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi \cos 2\varphi \, d\varphi = 0,$$

$$c_3 = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \arccos x \cdot \cos(3 \arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi \cos 3\varphi d\varphi = -\frac{4}{9\pi}.$$

Seega

$$P_3(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{9\pi}(4x^3 - 3x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{2x}{3} + \frac{4x^3}{9}\right).$$

12. Praktiline skeem Tšebõšovi arendusega antud funktsiooni väärtuste arvutamiseks.

Olgu vaja arvutada funktsiooni

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i T_i(x) \qquad (29)$$

väärtust punktis x (üksikasjalisemalt valemist (29) vt. eelmises punktis).

Arvutusi nii käsitsi kui ka elektronarvutil on sobiv teha skeemi järgi:

$$b_{n+2} = 0,$$
$$b_{n+1} = 0,$$
$$b_{n-i} = c_{n-i} + 2xb_{n-i+1} - b_{n-i+2} \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$
$$f(x) = b_0 - x \cdot b_1.$$

Näide 10. Arvutame ülaltoodud skeemi järgi funktsiooni

$$f(x) = 2T_0(x) + 3T_1(x) - T_2(x) + 2T_3(x)$$

väärtuse punktis $x = 1$. Et $n = 3$, siis saame:

$b_5 = 0,$
$b_4 = 0,$
$b_3 = 2 + 2 \cdot 1 \cdot 0 - 0 = 2,$
$b_2 = -1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 - 0 = 3,$
$b_1 = 3 + 2 \cdot 1 \cdot 3 - 2 = 7,$
$b_0 = 2 + 2 \cdot 1 \cdot 7 - 3 = 13,$
$f(1) = 13 - 1 \cdot 7 = 6.$

13. Lanczosi meetod funktsiooni ligikaudseks arendamiseks Tšebõšovi polünoomide järgi.

Peamine raskus funktsiooni Tšebõšovi arenduste leidmisel on kordajate arvutamises. Lanczosi meetod võimaldab küllalt hõlpsasti leida niisuguseid arendusi ligikaudselt (võrdlemisi laia funktsioonide klassi puhul). Vaatleme siin Lanczosi meetodit erijuhul (üksikasjaliselt sellest meetodist vt. [4], lk. 457).

Oletame, et funktsioon $y = f(x)$, mille jaoks otsitakse lähendpolünoomi, on diferentsiaalvõrrandi

$$A(x)y' + B(x)y = 0; \quad y(a) = b \tag{30}$$

lahendiks ($A(x)$, $B(x)$ — polünoomid).

Sellele funktsioonile otsime lõigul $[0, 1]$ n-astme lähendpolünoomi

$$P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n. \tag{31}$$

Kordajad b_0, b_1, ..., b_n määratakse järgmiselt.

1. Määrame nn. määramatuse astme μ, milleks asetame polünoomi (31) võrrandisse (30) y asemele. Kui

seejuures võrrandi (30) vasakpoolses osas saadakse r-astme polünoom, siis

$$\mu = r - n + 1.$$

2. Asendame võrrandi (30) võrrandiga

$$A(x)y' + B(x)y = \tau_1 T_n^*(x) + \tau_2 T_{n+1}^*(x) + \ldots + \\ + \tau_\mu T_{n+\mu-1}^*(x), \qquad (32)$$

kus

$T_k^*(x) = T_k(2x - 1)$ ja $T_k(x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79).

3. Asendame polünoomi (31) võrrandisse (32) y asemele ja võrdsustame kordajad ühesuguste x astmete ees võrrandi vasakul ja paremal poolel. Saame võrrandisüsteemi $b_0, b_1, \ldots, b_n, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\mu$ suhtes. Lahendades (algtingimusi arvestades!) selle süsteemi, saame otsitavad arvud $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Niiviisi leitud polünoom $P_n(x)$ lähendab funktsiooni $y = f(x)$ lõigul [0, 1] peaaegu ühesuguse täpsusega ja on lähedane polünoomile, mis saadakse funktsiooni $y = f(x)$ arendamisel Tšebõšovi polünoomide järgi.

Polünoomide $T_n^*(x)$ kordajate tabel:

n	1	x	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
0	1								
1	−1	2							
2	1	−8	8						
3	−1	18	−48	32					
4	1	−32	160	−256	128				
5	−1	50	−400	1120	−1280	512			
6	1	−72	840	−3584	6912	−6144	2048		
7	−1	98	−1568	9408	−26880	39424	−28672	8192	
8	1	−128	2688	−21504	84480	−180224	212992	−131072	32768

Näiteks $T_2^*(x) = 1 - 8x + 8x^2$,

$T_3^*(x) = -1 + 18x - 48x^2 + 32x^3$.

Näide 11. Leiame funktsioonile

$$y = \sqrt{1 + x^2} \qquad (33)$$

Lanczosi meetodi järgi teise astme lähendpolünoomi

$$P_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2.$$

Selleks koostame funktsiooni (33) jaoks diferentsiaalvõrrandi (30). Logaritmides (33), saame: $\ln y = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Diferentseerides seda võrdust, leiame

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2},$$

kust $(1+x^2)y' - xy = 0.$ (34)

Algtingimuseks saame (33) põhjal $y(0) = 1$.

Antud juhul $n = 2$; $\mu = 2$. Leiame võrrandi (32)

$$(1+x^2)(b_1 + 2b_2x) - x(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \\ = \tau_1 T_2^*(x) + \tau_2 T_3^*(x)$$

ehk

$$(1+x^2)(b_1 + 2b_2x) - x(b_0 + b_1x + b_2x^2) = \\ = \tau_1(1 - 8x + 8x^2) + \tau_2(-1 + 18x - 48x^2 + 32x^3),$$

mille põhjal

$$b_1 + (2b_2 - b_0)x + b_2x^3 = \tau_1 - \tau_2 + (18\tau_2 - 8\tau_1)x + \\ + (8\tau_1 - 48\tau_2)x^2 + 32\tau_2x^3.$$

Võrdsustades viimases seoses kordajad ühesuguste x astmete ees, saame:

$$\begin{cases} b_1 = \tau_1 - \tau_2, \\ 2b_2 - b_0 = 18\tau_2 - 8\tau_1, \\ 0 = 8\tau_1 - 48\tau_2, \\ b_2 = 32\tau_2. \end{cases}$$

Sellele süsteemile lisame algtingimusest saadava võrrandi $y(0) = 1$ ehk $b_0 = 1$. Seega saame b_0, b_1, b_2 leidmiseks süsteemi

$$\begin{cases} b_1 = \tau_1 - \tau_2, \\ 2b_2 - b_0 = 18\tau_2 - 8\tau_1, \\ 0 = 8\tau_1 - 48\tau_2, \\ b_2 = 32\tau_2, \\ b_0 = 1, \end{cases}$$

millest leiame $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{5}{94} \approx 0{,}053$, $b_2 = \frac{32}{94} \approx 0{,}340$.

Järelikult kehtib lõigul $[0, 1]$

$$\sqrt{1+x^2} \approx 1 + 0{,}053x + 0{,}340x^2.$$

C. Elementaarfunktsioonide väärtuste arvutamine

Selles alapeatükis tuuakse kõige levinumad valemid põhiliste elementaarfunktsioonide väärtuste arvutamiseks. Kõrvuti valemiga antakse ka piirkond, mille puhul see valem on rakendatav.

Sümboliga r tähistatakse esitatava valemi vea absoluutväärtust.

1. Horneri skeem polünoomi väärtuste arvutamiseks.

Üldiseks meetodiks polünoomi $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ väärtuse arvutamiseks punktis x on nn. Horneri skeem. Selleks esitatakse polünoom $P_n(x)$ kujul $P_n(x) = (\ldots((a_0x + a_1)x + a_2)x + \ldots + a_{n-1})x + a_n$, kusjuures arvutused teostatakse sulgudega määratud järjekorras.

Meetodi praktilise rakendamise korral koondatakse arvutused tabelisse:

	a_0	a_1	a_2	$\ldots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
x	b_0	b_1	b_2	$\ldots$	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n

Siin $P_n(x) = b_n$.

Suurused $b_0, b_1, \ldots, b_n$ leitakse järk-järgult seostest

$$b_0 = a_0, \; b_i = xb_{i-1} + a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Näide 12. Arvutame polünoomi $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ väärtuse punktis $x = 2$. Saame:

	1	3	−2	4
2	1	5	8	20

Seega $P_3(2) = 20$.

2. Astmefunktsiooni väärtuste arvutamine.

$$(1+x)^a = 1 + \frac{a}{1!}x + \frac{a(a-1)}{2!}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \\ + \ldots + \frac{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

$(|x| < 1)$.

Näide 13. Arvutame $\sqrt[3]{1{,}1}$ täpsusega 10^{-5}. Ülaltoodud valemi (Taylori rea) põhjal saame:

$$\sqrt[3]{1{,}1} = (1+0{,}1)^{1/3} = 1 + \frac{\frac{1}{3}}{1!}0{,}1 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}0{,}1^2 + \\ + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{3!}0{,}1^3 + \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{4!}0{,}1^4 + \ldots = \\ = 1 + 0{,}033333 - 0{,}001111 + \\ + 0{,}000062 - 0{,}000004 + \ldots \approx 1{,}03228.$$

3. $\sqrt{x}$ arvutamine.

Olgu $0{,}5 \leqslant x < 1$. Siis võime $\sqrt{x}$ arvutada alljärgnevate valemite põhjal:

1) $\sqrt{x} \approx -0{,}197936x^2 + 0{,}882692x + 0{,}315244$, $r < 0{,}0015$;
2) $y_0 = -0{,}197936x^2 + 0{,}882692x + 0{,}315244$,
$\sqrt{x} \approx 0{,}5\left(y_0 + \frac{x}{y_0}\right)$, $r < 0{,}000001$;
3) $y_0 = 0{,}5 + 0{,}5x$.
$y_1 = 0{,}5\left(y_0 + \frac{x}{y_0}\right)$,
$\sqrt{x} \approx 0{,}5\left(y_1 + \frac{x}{y_1}\right)$, $r < 0{,}00000005$;
4) $y_0 = 0{,}5903x + 0{,}4173$,
$y_1 = 0{,}5\left(y_0 + \frac{x}{y_0}\right)$,
$\sqrt{x} \approx 0{,}5\left(y_1 + \frac{x}{y_1}\right)$, $r \leqslant 2^{-32}$;

5) üldine skeem:

$$y_0 = 0{,}5903x + 0{,}4173,$$

$$y_{i+1} = 0{,}5\left(y_i + \frac{x}{y_i}\right) \quad (i = 0, 1, \ldots),$$

$$\sqrt{x} = \lim_{i \to \infty} y_i.$$

Märkus. Kui $x \notin [0{,}5; 1)$, siis võime jagamise teel arvuga 2^k (valides sobivalt k) taandada oma ülesande alati juure leidmisele vahemikus $[0{,}5; 1)$ asetsevast arvust. Näiteks

$$\sqrt{15{,}2} = \sqrt{16 \cdot \frac{15{,}2}{16}} = \sqrt{16 \cdot 0{,}95} = 4\sqrt{0{,}95},$$

$$\sqrt{0{,}14} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0{,}14 \cdot 4} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 0{,}56} = \frac{1}{2}\sqrt{0{,}56}.$$

Näide 14. Arvutame $\sqrt{3{,}2}$. Saame:

$$\sqrt{3{,}2} = \sqrt{\frac{3{,}2}{4} \cdot 4} = 2\sqrt{0{,}8},$$

$\sqrt{0{,}8}$ arvutame valemi 3) järgi:

$y_0 = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}9;$

$$y_1 = 0{,}5\left(0{,}9 + \frac{0.8}{0{,}9}\right) = 0{,}894444444;$$

$$y_2 = 0{,}5\left(0{,}894444444 + \frac{0{,}8}{0{,}894444444}\right) = 0{,}89442719;$$

$\sqrt{0{,}8} = 0{,}89442719$; seega

$\sqrt{3{,}2} = 2 \cdot \sqrt{0{,}8} = 2 \cdot 0{,}89442719 = 1{,}78885438.$

Kõik kohad on siin õiged.

4. e^x arvutamine.

Reaksarendused:

1) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (|x| < \infty);$

2) $e^{ax} = I_0(a) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(a)\, T_k(x) \quad (|x| \leqslant 1),$

kus $T_k(x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79);

$I_n(a)$ — imaginaarse argumendi n-järku Besseli funktsioonid:

$$I_0(a) = 1 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{(1!)^2} + \left(\frac{a}{2}\right)^4 \frac{1}{(2!)^2} + \ldots + \left(\frac{a}{2}\right)^{2k} \frac{1}{(k!)^2} + \ldots,$$

$$I_n(a) = \left(\frac{a}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} + \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!1!} + \ldots + \left(\frac{a}{2}\right)^{n+2k} \frac{1}{(n+k)!k!} + \ldots,$$

$(n > 0)$.

Ligikaudsed valemid:

3) $e^x \approx \frac{8+16x}{9}$ $(0 < x < 1)$, $r < 0{,}12$;

4) $e^x \approx \frac{114+96x+96x^2}{113}$ $(0 < x < 1)$, $r \leqslant 0{,}01$;

5) $e^x \approx \frac{1824+1856x+768x^2+512x^3}{1825}$ $(0 < x < 1)$, $r \leqslant 0{,}0006$;

6) $e^x \approx \frac{36690+36640x+18720x^2+5120x^3+25060x^4}{36689}$ $(0 < x < 1)$, $r < 0{,}00003$;

7) $e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$, $r \leqslant \frac{e^x |x|^{n+1}}{(n+1)!}$;

8) $e^x \approx a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(-0{,}5 \leqslant x \leqslant 0)$, $r \leqslant 0{,}0000005$

$a_0 = 0{,}9999996$	$a_3 = 0{,}1628427$
$a_1 = 0{,}9999586$	$a_4 = 0{,}0325340$
$a_2 = 0{,}4993309$	

;

9) $e^x \approx \sum_{k=0}^{7} a_k x^k$ $(|x| \leqslant 1)$, $r \leqslant 0{,}0000002$;

$a_0 = 0{,}9999998$	$a_4 = 0{,}0416350$
$a_1 = 1{,}0000000$	$a_5 = 0{,}0083298$
$a_2 = 0{,}5000063$	$a_6 = 0{,}0014393$
$a_3 = 0{,}1666674$	$a_7 = 0{,}0002040$

;

10) $\frac{1}{4} e^x \approx \sum_{k=0}^{10} a_k x^k$ $(|x| < 1)$, $r \leqslant 0{,}000000005$;

$a_0 = 0{,}250000000$	$a_6 = 0{,}000347223$
$a_1 = 0{,}250000000$	$a_7 = 0{,}000049587$
$a_2 = 0{,}125000000$	$a_8 = 0{,}000006199$
$a_3 = 0{,}041666666$	$a_9 = 0{,}000000706$
$a_4 = 0{,}010416666$	$a_{10} = 0{,}000000070$
$a_5 = 0{,}002083340$	

;

11) $e^{-x} \approx \frac{1}{[a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0]^4}$ $(0 \leqslant x \leqslant 16)$, $r < 0{,}0003$,

$a_0 = 1$	$a_2 = 0{,}0292732$
$a_1 = 0{,}2507213$	$a_3 = 0{,}0038278$

.

5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ arvutamine.

1) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \approx \frac{1}{a_0 + a_1x^2 + a_2x^4 + a_3x^6}$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$, $r \leqslant 0{,}003$;

$a_0 = 2{,}490895$	$a_2 = -0{,}024393$
$a_1 = 1{,}466003$	$a_3 = 0{,}178257$

;

2) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \approx \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{5} a_k x^{2k}}$ $(0 \leqslant x \leqslant 5)$, $r < 0{,}00022$;

$a_0 = 2{,}5052367$	$a_3 = 0{,}1306469$
$a_1 = 1{,}2831204$	$a_4 = -0{,}0202490$
$a_2 = 0{,}2264718$	$a_5 = 0{,}0039132$

.

6. 2^x arvutamine.

1) Reaksarendus:

$$2^x = \sqrt{2}\left[I_0\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) T_k(2x-1)\right]$$

$(0 \leqslant x \leqslant 1)$,
kus $T_k(x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79); $I_k(x)$ — imaginaarse argumendi k-järku Besseli funktsioon (vt. lk. 106).
2) Ligikaudne valem:

$$2^x \approx \sum_{i=1}^{7} a_i x^i \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r < 10^{-10},$$

$a_0 = 0{,}99999999994$	$a_4 = 0{,}00961353587$
$a_1 = 0{,}69314718771$	$a_5 = 0{,}00134298077$
$a_2 = 0{,}24022635777$	$a_6 = 0{,}00014299431$
$a_3 = 0{,}05550529195$	$a_7 = 0{,}00002165162$

.

7. 10^x arvutamine.

1) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{4} a_k x^k]^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r < 0{,}001,$

$a_0 = 1$	$a_3 = 0{,}2080$
$a_1 = 1{,}1499$	$a_4 = 0{,}1268$
$a_2 = 0{,}6774$	

;

2) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{5} a_k x^k]^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r < 0{,}00004,$

$a_0 = 1$	$a_3 = 0{,}261306$
$a_1 = 1{,}151384$	$a_4 = 0{,}058907$
$a_2 = 0{,}661309$	$a_5 = 0{,}029366$

;

3) $10^x \approx [\sum_{k=0}^{7} a_k x^k]^2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r < 0{,}00000005.$

$a_0 = 1$	$a_4 = 0{,}072951737$
$a_1 = 1{,}151292776$	$a_5 = 0{,}017421120$
$a_2 = 0{,}662730884$	$a_6 = 0{,}002554918$
$a_3 = 0{,}254393575$	$a_7 = 0{,}000932642$

.

8. $\ln x$, $\ln(1+x)$ arvutamine.

Reaksarendused:

1) $\ln x = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(x-1)^k}{k} \quad (0 < x < 2);$

2) $\ln \frac{1+p^2+2px}{1+p^2-2px} = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}(x)$

$(0 < p < 1, \ |x| < 1),$

$\ln x = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4p^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}\left((\sqrt{2}+1)^2 \cdot \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right),$

$(p = 0{,}08642723372, \quad 1 \leqslant x \leqslant 2),$

$T_n(x)$ — Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79).

Ligikaudsed valemid:

3) $\ln(1+x) \approx \sum_{k=0}^{3} a_k x^k$, $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $r < 0{,}0006$,

$a_0 = 0{,}00049$	$a_2 = -0{,}39728$
$a_1 = 0{,}98248$	$a_3 = 0{,}10784$

;

4) $\ln(1+x) \approx \sum_{k=1}^{5} a_k x^k$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, $r < 0{,}00001$,

$a_1 = 0{,}999496$	$a_4 = -0{,}136063$
$a_2 = -0{,}491909$	$a_5 = 0{,}032158$
$a_3 = 0{,}289475$	

;

5) $\frac{1}{25} \ln x = \frac{1}{25} \ln q + \frac{1}{25} p \ln 2$, $(2^{-35} < x < 1)$,
$r < 5 \cdot 10^{-9}$.

Arvud q ja p valitakse nii, et $x = q \cdot 2^p$, kusjuures $0{,}5 \leqslant |q| < 1$, p — täisarv. Suurus $\ln q$ arvutatakse valemi

$$\ln q = z \sum_{k=0}^{5} a_k z^{2k}$$

järgi, kus

$z = \frac{0{,}5q - 0{,}5}{\frac{1}{6}q + \frac{1}{6}}$;

$a_0 = 0{,}666666666;$
$a_1 = 0{,}024691358;$
$a_2 = 0{,}001616092;$
$a_3 = 0{,}000130642;$
$a_4 = 0{,}000011290;$
$a_5 = 0{,}000001132;$

6) $\ln(1-x) \approx \sum_{k=1}^{9} a_k x^k$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$, $r \leqslant 0{,}000001$,

$a_1 = -1{,}000002$	$a_6 = 0{,}623373$
$a_2 = -0{,}499919$	$a_7 = -2{,}122103$
$a_3 = -0{,}335428$	$a_8 = 2{,}649698$
$a_4 = -0{,}223585$	$a_9 = -1{,}877585$
$a_5 = -0{,}387483$	

;

7) $\ln x \approx -\frac{1}{2} \ln 2 + a_1 z + a_2 z^3 + a_3 z^5$,

$$z = \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad (0{,}5 \leqslant x < 1), \quad r \leqslant 0{,}00000003;$$

$$a_1 = 2{,}000000815; \quad a_2 = 0{,}666445069; \quad a_3 = 0{,}415054254.$$

8) $\ln x \approx \ln 2\,[-0{,}5 + \sum_{k=0}^{3} a_k z^{2k+1}], \quad z = \frac{x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x + \frac{\sqrt{2}}{2}},$

$$(0{,}5 \leqslant x < 1), \quad r \leqslant 2^{-32},$$

$a_0 = 2{,}88539007274$	$a_2 = 0{,}57658434206$
$a_1 = 0{,}96180076229$	$a_3 = 0{,}43425975129$

9. $\sin x$ arvutamine.

Reaksarendused:

1) $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (|x| < \infty);$

2) $\sin \frac{\pi}{4} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) T_{2k+1}(x) \quad (|x| \leqslant 1),$

$$\sin \frac{\pi}{2} x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) T_{2k+1}(x) \quad (|x| \leqslant 1).$$

Siin $T_n(x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79); $J_k(x)$ on Besseli funktsioon

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{m!\,(m+k)!}.$$

Ligikaudsed valemid:

3) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (|x| \leqslant 1), \quad r \leqslant \frac{1}{(2n+3)!};$

4) $\sin \frac{\pi}{4} x \approx 2 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k J_{2k+1}\left(\frac{\pi}{4}\right) T_{2k+1}(x) \quad (|x| \leqslant 1),$

$$r \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+1}\left(1+\frac{\pi}{16n}\right)}{(2n+1)!};$$

5) $\sin\frac{\pi}{4}x \approx a_1x + a_2x^3 \quad (|x| \leqslant 1), \quad r < 0{,}0002,$

$$a_1 = 0{,}78464, \quad a_2 = -0{,}07768;$$

6) $\sin\frac{\pi}{4}x \approx a_1x + a_2x^3 + a_3x^5 + a_4x^7 \quad (|x| \leqslant 1),$

$$r < 0{,}000000002,$$

$a_1 = 0{,}7853981525$	$a_3 = 0{,}0024898718$
$a_2 = -0{,}0807453672$	$a_4 = -0{,}0000358771$

;

7) $\sin\frac{\pi}{2}x \approx a_1x + a_2x^3 + a_3x^5 \quad (|x| \leqslant 1), \quad r < 0{,}00011,$

$$a_1 = 1{,}5706268, \quad a_2 = -0{,}6432292, \quad a_3 = 0{,}0727102;$$

8) $\sin\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{4} a_kx^{2k+1} \quad (|x| \leqslant 1), \quad r < 0{,}000000006,$

$a_0 = 1{,}57079631847$	$a_3 = -0{,}00467376557$
$a_1 = -0{,}64596371106$	$a_4 = 0{,}00015148419$
$a_2 = 0{,}07968967928$	

;

9) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{3} a_kx^{2k+1} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad r \leqslant 0{,}000001,$

$a_0 = 0{,}9999992$	$a_2 = 0{,}0083132$
$a_1 = -0{,}1666567$	$a_3 = -0{,}0001852$

;

10) $\sin x \approx \sum_{k=0}^{4} a_kx^{2k+1} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\pi}{2}\right), \quad r \leqslant 0{,}000000006,$

$a_0 = 1{,}000000002$	$a_3 = -0{,}000198107$
$a_1 = -0{,}166666589$	$a_4 = 0{,}000002608$
$a_2 = 0{,}008333075$	

.

Märkus. Kui tahetakse arvutada valemite 7) ja 8) järgi argumendi $|x| > 1$ puhul, siis võib kasutada taandamisvalemit

$$\sin \frac{\pi}{2} x = \sin \frac{\pi}{2} z, \tag{35}$$

kus

$$z = \left| \left\{ \frac{x-1}{4} \right\} 4 - 2 \right| - 1$$

ja $\{u\}$ tähistab arvu u murdosa. Valemis (35) juba $|z| \leqslant \leqslant 1$. Valem (35) kehtib kõigi reaalarvuliste x puhul.

10. $\cos x$ arvutamine.

Reaksarendused:

1) $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (|x| < \infty)$;

2) $\cos \frac{\pi}{4} x = J_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_{2i}\left(\frac{\pi}{4}\right) T_{2i}(x) \quad (|x| \leqslant 1)$,

kus $T_n(x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79); $J_n(x)$ — Besseli funktsioonid (vt. lk. 110).

Ligikaudsed valemid:

3) $\cos x \approx \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (|x| \leqslant 1), \quad r \leqslant \frac{1}{(2n+2)!}$;

4) $\cos \frac{\pi}{4} x \approx J_0\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^i J_{2i}\left(\frac{\pi}{4}\right) T_{2i}(x) \quad (|x| \leqslant 1)$,

$$r \leqslant \frac{\left(\frac{\pi}{8}\right)^{2n+2} \left(1 + \frac{\pi}{16n}\right)}{(2n+2)!};$$

5) $\cos \frac{\pi}{4} x \approx 0{,}9980785 - 0{,}2928932x^2 \quad (|x| \leqslant 1), \; r < 0{,}002$;

6) $\cos \frac{\pi}{4} x \approx 0{,}9999900 - 0{,}3082451x^2 + 0{,}0153718x^4$,

$$(|x| \leqslant 1), \; r \leqslant 0{,}00001;$$

7) $\cos \frac{\pi}{4} x \approx \sum_{k=0}^{4} a_k x^{2k} \quad (|x| \leqslant 1), \; r < 0{,}00000000005$.

$a_0 = 0{,}99999999995$	$a_3 = -0{,}00032593860$
$a_1 = -0{,}30842513516$	$a_4 = 0{,}00000352980$
$a_2 = 0{,}01585432524$	

;

8) $\cos\frac{\pi}{2}x \approx 0{,}999403 - 1{,}222797x^2 + 0{,}223990x^4 \quad (|x| \leqslant 1)$,

$r < 0{,}0006$;

9) $\cos\frac{\pi}{2}x \approx \sum_{k=0}^{5} a_k x^{2k} \quad (|x| \leqslant 1),\ r \leqslant 0{,}000000007,$

$a_0 = 0{,}9999999998$	$a_3 = -0{,}0208626564$
$a_1 = -1{,}2337005336$	$a_4 = 0{,}0009176703$
$a_2 = 0{,}2536693147$	$a_5 = -0{,}0000237888$

;

10) $\cos x \approx \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \quad (|x| \leqslant 1),\ r < 0{,}00005,$

$a_0 = 0{,}9999589$	$a_3 = 0{,}0000012$
$a_1 = -0{,}0000003$	$a_4 = 0{,}0396321$
$a_2 = -0{,}4992466$	

;

11) $\cos x \approx \sum_{i=0}^{5} a_i x^{2i} \quad (|x| < 1),\ r \leqslant 0{,}000000002,$

$a_0 = 1{,}0000000000$	$a_3 = -0{,}0013888857$
$a_1 = -0{,}4999999999$	$a_4 = 0{,}0000247951$
$a_2 = 0{,}0416666659$	$a_5 = -0{,}0000002696$

.

Märkus. $\cos x$ arvutamiseks on mõnikord sobiv kasutada võrdust

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

11. $\tan x$ arvutamine.

Reaksarendused:

1) $\tan x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} |B_{2k}| x^{2k-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right),$

kus B_n on Bernoulli arvud (vt. lk. 57).

Ligikaudsed valemid:

2) $\tan x \approx \dfrac{0{,}75000243 - 0{,}0509056x^2}{0{,}75 - 0{,}30085232x^2} \cdot x \quad \left(x \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right), \quad r \leqslant 0{,}00005;$

3) $\tan \dfrac{\pi}{4} x \approx \sum\limits_{k=0}^{8} a_k x^{2k+1} \quad (|x| < 1), \quad r \leqslant 0{,}0000000002,$

$a_0 = 0{,}78539816410$	$a_5 = 0{,}00056487893$
$a_1 = 0{,}16149098290$	$a_6 = 0{,}00027311044$
$a_2 = 0{,}03984702854$	$a_7 = 0{,}00002798137$
$a_3 = 0{,}00994314878$	$a_8 = 0{,}00003645270$
$a_4 = 0{,}00251021492$	

;

4) $\tan x \approx \sum\limits_{k=0}^{5} a_k x^{2k+1} \quad \left(|x| \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right), \quad r < 0{,}0000003,$

$a_0 = 0{,}9999998$	$a_3 = 0{,}0571648$
$a_1 = 0{,}3333591$	$a_4 = 0{,}0125595$
$a_2 = 0{,}1328541$	$a_5 = 0{,}0203732$

;

5) $\tan x \approx \dfrac{945x - 105x^3 + x^5}{945 - 420x^2 + 15x^4} \quad \left(|x| \leqslant \dfrac{\pi}{4}\right), \quad r \leqslant 0{,}00000002.$

Märkus. Suuruse $\tan x$ arvutamiseks $|x| \geqslant \dfrac{\pi}{4}$ puhul valemite 2), 4), 5) järgi võib kasutada seost

$$\tan x = \begin{cases} \tan \pi z, & \text{kui } uv \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{\tan \pi z}, & \text{kui } uv < 0, \end{cases} \tag{36}$$

kus

$$u = \left\{\frac{x}{\pi} - \frac{1}{4}\right\}, \quad v = |u| - \frac{1}{2}, \quad z = |v| - \frac{1}{4}.$$

Valemis (36) juba $|\pi z| \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Seejuures sümbol $\{r\}$ tähistab arvu r murdosa.

12. $\cot x$ arvutamine.

Suuruse $\cot x$ arvutamiseks võib kasutada valemit:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}.$$

Toome veel kaks valemit $\cot x$ arvutamiseks:

1) $$\cot x \approx \frac{1}{x} - 0{,}333335x - 0{,}022173x^3 - 0{,}002327x^5$$

$$\left(|x| \leqslant \frac{\pi}{4}\right), \quad r \leqslant 0{,}000001;$$

2) $$\cot \frac{\pi}{4} x \approx \frac{a}{x} + \sum_{k=0}^{4} a_k x^{2k+1} \quad (|x| < 1), \quad r \leqslant 0{,}0000000002,$$

$a = 1{,}273239544735$	$a_2 = -0{,}000632697788$
$a_0 = -0{,}261799389768$	$a_3 = -0{,}000038528582$
$a_1 = -0{,}010766029173$	$a_4 = -0{,}000002899234$

13. $\arcsin x$ arvutamine.

Reaksarendused:

1) $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} \quad (|x| < 1);$$

2) $$(\arcsin x)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k}(k!)^2 x^{2k+2}}{(2k+1)!(k+1)} \quad (|x| < 1).$$

Ligikaudsed valemid:

3) $$\arcsin x \approx \sum_{k=0}^{5} a_k x^{2k+1} \quad (|x| < 0{,}5), \quad r \leqslant 0{,}00000003,$$

$a_0 = 0{,}999999971$	$a_3 = 0{,}045938780$
$a_1 = 0{,}166669834$	$a_4 = 0{,}022316969$
$a_2 = 0{,}074901474$	$a_5 = 0{,}044856985$

;

4) $$\arcsin x \approx \sum_{k=0}^{10} a_k x^{2k+1} \quad \left(|x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad r \leqslant 0{,}000000005,$$

$a_0 = 1{,}000000000$	$a_6 = 0{,}060563817$
$a_1 = 0{,}166666601$	$a_7 = -0{,}124609822$
$a_2 = 0{,}075003446$	$a_8 = 0{,}289558388$
$a_3 = 0{,}044560474$	$a_9 = -0{,}313624468$
$a_4 = 0{,}031466212$	$a_{10} = 0{,}182869190$
$a_5 = 0{,}013758605$	

;

5) $\arcsin x \approx \frac{\pi}{2} - \sqrt{1-x} \cdot \sum_{k=0}^{3} a_k x^k \quad (0 < x < 1)$,

$r < 0{,}00007$,

$a_0 = 1{,}570729$	$a_2 = 0{,}074261$
$a_1 = -0{,}212114$	$a_3 = -0{,}018729$

;

6) $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$.

Suuruse $\arctan x$ arvutamisest vt. punkt 15.

Märkus. Argumendi väärtuste $|x| > \frac{\sqrt{2}}{2}$ puhul võib valemit 4) rakendada järgmiselt:

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin y \quad \left(x > \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$\arcsin x = -\frac{\pi}{2} + \arcsin y \quad \left(x < -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

kus $y = \sqrt{1-x^2}$ ja seega $|y| < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $\arccos x$ arvutamine.

Kasutatakse valemit $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

15. $\arctan x$ arvutamine.

Reaksarendused:

1) $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x| < 1)$;

2) $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}} \quad (|x| \geqslant 1)$;

3) $\arctan x = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{p^{2k+1}}{2k+1} T_{2k+1}(x) \quad (|x| \leqslant 1)$,

kus $T_n(x)$ on Tšebõšovi polünoomid (vt. lk. 79); $p = \sqrt{2} - 1 = 0{,}41\ldots$.

Ligikaudsed valemid:

4) $\arctan x \approx \sum_{k=0}^{4} a_k x^{2k+1} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad r \leqslant 0{,}000012,$

$a_0 = 0{,}999866$	$a_3 = -0{,}085133$
$a_1 = -0{,}330299$	$a_4 = 0{,}020835$
$a_2 = 0{,}180141$	

;

5) $\arctan x \approx \sum_{i=0}^{10} a_i x^{2i+1} \quad (|x| \leqslant 1), \quad r \leqslant 0{,}0000000005,$

$a_0 = 0{,}9999999953$	$a_6 = 0{,}0647029924$
$a_1 = -0{,}3333329248$	$a_7 = -0{,}0411720745$
$a_2 = 0{,}1999892590$	$a_8 = 0{,}0197433754$
$a_3 = -0{,}1427243942$	$a_9 = -0{,}0060738765$
$a_4 = 0{,}1101791217$	$a_{10} = 0{,}0008766095$
$a_5 = -0{,}0867899197$	

;

6) $\arctan x = \arctan z + c \quad (0 < x \leqslant 1), \; r \leqslant 2^{-32},$
kus $z = x$ ja $c = 0$, kui $|x| < 2 - \sqrt{3}$,

$$z = \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{x}{\sqrt{3}}}, \quad c = \frac{\pi}{6}, \text{ kui } |x| \geqslant 2 - \sqrt{3},$$

$$\arctan z = \sum_{k=0}^{4} a_k z^{2k+1},$$

$a_0 = 0{,}999999998$	$a_3 = -0{,}141734606$
$a_1 = -0{,}333332894$	$a_4 = 0{,}094919550$
$a_2 = 0{,}199965348$	

.

Märkus. Kui $|x| > 1$, võib ülaltoodud valemeid kasutada, arvesse võttes võrdust

$$\arctan x = \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{|x|}\right) \cdot \operatorname{sign} x.*$$

---

* $\operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ kui } x > 0 \\ 0, \text{ kui } x = 0 \\ -1, \text{ kui } x < 0. \end{cases}$

16. arccot x arvutamine toimub valemi $\operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2} - \arctan x$ abil.

17. Hüperboolsete funktsioonide väärtuste arvutamine.

Reaksarendused:

1) $\operatorname{sh} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \quad (|x| < \infty)$;

2) $\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (|x| < \infty)$;

3) $\operatorname{th} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!} B_{2k} x^{2k-1} \quad \left(|x| < \frac{\pi}{2}\right)$,

4) $\operatorname{cth} x = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} x^{2k-1} \quad (|x| < \pi)$,

kus B_n on Bernoulli arvud (vt. lk. 57).

Ligikaudsed valemid:

5) $\frac{1}{4} \operatorname{sh} x \approx x[((0{,}000049x^2 + 0{,}002083)x^2 + 0{,}041666)x^2 + 0{,}25]$, $(-1 < x < 1)$, $r < 0{,}000004$;

6) $\frac{1}{4} \operatorname{ch} x \approx ((0{,}000347x^2 + 0{,}010416)x^2 + 0{,}125)x^2 + 0{,}25$, $(-1 < x < 1)$, $r < 0{,}00004$;

7) $\operatorname{sh} x \approx \sum_{k=0}^{5} a_k x^{2k+1} \quad (|x| < 1), \quad r \leqslant 0{,}0000000001,$

$a_0 = 0{,}99999999999$	$a_3 = 0{,}00019841196$
$a_1 = 0{,}16666666671$	$a_4 = 0{,}00000275645$
$a_2 = 0{,}00833333348$	$a_5 = 0{,}00000002505$

;

8) $\operatorname{ch} x \approx \sum_{k=0}^{5} a_k x^{2k} \quad (|x| < 1), \quad r \leqslant 0{,}000000001,$

$a_0 = 0{,}9999999999$	$a_3 = 0{,}0013888921$
$a_1 = 0{,}5000000001$	$a_4 = 0{,}0000247950$
$a_2 = 0{,}0416666659$	$a_5 = 0{,}0000002816$

9) $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

Kirjandust

1. И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений I.* Москва, 1962.
2. Э. Д. Бут, *Численные методы.* Москва, 1959.
3. Дж. Н. Ланс, *Численные методы для быстродействующих вычислительных машин.* Москва, 1962.
4. К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа.* Москва, 1961.
5. Л. А. Люстерник, О. А. Червоненкис, А. Р. Янпольский, *Вычисление элементарных функций.* Москва, 1963.
6. E. Tamme, *Arvutusmeetodid III.* TRÜ rotaprint, 1963.

V. HARMOONILINE ANALÜÜS

Olgu $T > 0$. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse T-perioodiliseks, kui iga x puhul kehtib võrdus $f(x+T) = f(x)$. Märgime, et T-perioodilise funktsiooni $f(x)$ vaatlemise võib alati taandada 2π-perioodilise funktsiooni $\varphi(z)$ vaatlemisele, kui võtta $\varphi(z) = f\left(\frac{Tz}{2\pi}\right)$.

Avaldist

$$U_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (1)$$

nimetatakse n-järku trigonomeetriliseks polünoomiks.

Weierstrassi teoreem. Kui $f(x)$ on pidev 2π-perioodiline funktsioon, siis iga $\varepsilon > 0$ puhul eksisteerib niisugune trigonomeetriline polünoom $U(x)$, et kõigi $x \in [-\infty, +\infty]$ puhul kehtib võrratus

$$|f(x) - U(x)| < \varepsilon.$$

See teoreem on aluseks 2π-perioodiliste funktsioonide lähendite otsimisel trigonomeetriliste polünoomide kujul.

1. Perioodiliste funktsioonide interpoleerimine (üldjuht).

Olgu 2π-perioodiline funktsioon $f(x)$ antud punktides (sõlmedes) $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ ($x_l \in [0, 2\pi]$; $l = 0, 1, \ldots, 2n$) väärtustega $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_{2n})$.

Kehtib valem

$$f(x) \approx \sum_{l=0}^{2n} f(x_l) \left[\frac{\sin \frac{x-x_0}{2} \sin \frac{x-x_1}{2} \ldots}{\sin \frac{x_l-x_0}{2} \sin \frac{x_l-x_1}{2} \ldots} \times \right.$$

$$\times \frac{\ldots \sin \frac{x-x_{i-1}}{2} \sin \frac{x-x_{i+1}}{2} \ldots \sin \frac{x-x_{2n}}{2}}{\ldots \sin \frac{x_i-x_{i-1}}{2} \sin \frac{x_i-x_{i+1}}{2} \ldots \sin \frac{x_i-x_{2n}}{2}} \Bigg].$$

Valemi parempoolne osa kujutab endast ülimalt n-järku trigonomeetrilist polünoomi (kujule (1) saab teda teisendada trigonomeetria valemite abil), millel on sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_{2n}$ samad väärtused kui funktsioonil $f(x)$.

2. Perioodiliste paarisfunktsioonide interpoleerimine.

Olgu π-perioodiline paarisfunktsioon $f(x)$ antud sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ väärtustega $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Olgu $x_i \in [0, \pi]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Kehtib valem

$$f(x) \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \left[\frac{(\cos x - \cos x_0)(\cos x - \cos x_1) \ldots (\cos x - }{(\cos_i - \cos x_0)(\cos x_i - \cos x_1) \ldots (\cos x_i - } \times \right.$$

$$\left. \times \frac{- \cos x_{i-1})(\cos x - \cos x_{i+1}) \ldots (\cos x - \cos x_n)}{- \cos x_{i-1})(\cos x_i - \cos x_{i+1}) \ldots (\cos x_i - \cos x_n)} \right]. \qquad (2)$$

Valemi parempoolne osa kujutab endast ülimalt n-järku paaris trigonomeetrilist polünoomi, millel on sõlmedes $x_0, x_1, \ldots, x_n$ samad väärtused kui funktsioonil $f(x)$.

Näide 1. Olgu funktsioon $f(x)$ antud tabeliga:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x_i)$	0	1	2

Olgu teada, et $f(x)$ on paarisfunktsioon ja π-perioodiline.

Võttes $n = 2$, saame valemi (2) põhjal

$$f(x) \approx 0 \cdot \frac{\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos 0 - \cos\frac{\pi}{2}\right)} +$$

$$+ 1 \cdot \frac{(\cos x - \cos 0)\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos 0\right)\left(\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{2}\right)} +$$

$$+ 2\,\frac{(\cos x - \cos 0)\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right)\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4}\right)} = 1 \cdot \frac{(\cos x - 1)\cos x}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)\frac{\sqrt{2}}{2}} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{(\cos x - 1)\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(-1)\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = -2(1 + \sqrt{2}) \cdot$$

$$\cdot(\cos^2 x - \cos x) + 2\sqrt{2}\left(\cos^2 x - \cos x - \right.$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2(1 + \sqrt{2})\left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos x\right) +$$

$$+ 2\sqrt{2}\left(\frac{1 + \cos 2x}{2} - \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 - \cos 2x;$$

$$f(x) \approx 1 - \cos 2x.$$

3. Perioodiliste paaritufunktsioonide interpoleerimine.

Olgu 2π-perioodiline paaritufunktsioon antud sõlmedes $x_i \in [0, \pi]$ oma väärtustega $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Kehtib valem

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\left[\frac{\sin x(\cos x - \cos x_1)(\cos x - \cos x_2)\ldots}{\sin x_i(\cos x_i - \cos x_1)(\cos x_i - \cos x_2)\ldots} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\ldots(\cos x - \cos x_{i-1})(\cos x - \cos x_{i+1})\ldots(\cos x - \cos x_n)}{\ldots(\cos x_i - \cos x_{i-1})(\cos x_i - \cos x_{i+1})\ldots(\cos x_i - \cos x_n)}\right].$$

Valemi parempoolne osa kujutab endast ülimalt n astme paaritut trigonomeetrilist polünoomi, millel on sõlmedes $x_1, x_2, \ldots x_n$ samad väärtused kui funktsioonil $f(x)$.

4. Perioodiliste funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodi abil võrdsete vahemikega sõlmede puhul.

Olgu punktides (sõlmedes) $x_i = \frac{2\pi i}{r}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ antud 2π-perioodilise funnktsiooni $y = f(x)$ väärtused $f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$.

Siis n-järku trigonomeetrilisel lähendpolünoomil, $U_n(x)$, mille puhul summa

$$\sum_{i=1}^{r} [f(x_i) - U_n(x_i)]^2 \qquad (3)$$

on minimaalne, on kordajateks

$$a_0 = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} f(x_i), \quad a_k = \frac{2}{r} \sum_{i=1}^{r} f(x_i) \cos kx_i, \quad b_k =$$

$$= \frac{2}{r} \sum_{i=1}^{r} f(x_i) \sin kx_i \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

5. Runge skeem vähimruutude meetodi abil leitud trigonomeetrilise lähendpolünoomi kordajate arvutamiseks.

Olgu 2π-perioodiline funktsioon $y = f(x)$ antud sõlmedes $x_i = \frac{2\pi i}{r}$ väärtustega $y_i = f(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, kusjuures sõlmede arv $r = 4p$. Siis trigonomeetrilisel lähendpolünoomil

$$U_{2p}(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_{2p-1} \cos (2p - 1)x + a_{2p} \cos 2px + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_{2p-1} \sin (2p - 1)x,^*$$

mille puhul summa (3) on minimaalne, on kordajateks

---

* Siin on võetud $b_{2n} = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{4p}\sum_{i=1}^{4p} y_i, \quad a_k = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{4p} y_i \cdot \cos kx_i,$$

$$b_k = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{4p} y_i \cdot \sin kx_i, \quad (k = 1, 2, \ldots, 2p-1), \qquad (4)$$

$$a_{2p} = \frac{1}{4p}\sum_{i=1}^{4p} (-1)^i y_i.$$

Suuruste (4) arvutamiseks on sobiv nn. Runge skeem.

I		y_1	y_2	y_3	...	y_{2p-1}	y_{2p}
II	y_{4p}	y_{4p-1}	y_{4p-2}	y_{4p-3}	...	y_{2p+1}	
III (*S*)	S_0	S_1	S_2	S_3	...	S_{2p-1}	S_{2p}
IV (*V*)		d_1	d_2	d_3	...	d_{2p-1}	

V	S_0	S_1	S_2	...	S_{p-1}	S_p
VI	S_{2p}	S_{2p-1}	S_{2p-2}	...	S_{p+1}	
VII (*S*)	σ_0	σ_1	σ_2	...	σ_{p-1}	σ_p
VIII (*V*)	δ_0	δ_1	δ_2	...	δ_{p-1}	

IX	d_1	d_2	d_3	...	d_{p-1}	d_p
X	d_{2p-1}	d_{2p-2}	d_{2p-3}	...	d_{p+1}	
XI (*S*)	σ'_1	σ'_2	σ'_3	...	σ'_{p-1}	σ'_p
XII (*V*)	δ'_1	δ'_2	δ'_3	...	δ'_{p-1}	

Täidame tabelid järgnevalt: ridadesse I ja II paigutame funktsiooni $y = f(x)$ väärtused sõlmedes. Read V ja VI täidetakse arvudega reast III; read IX ja X arvu-

dega reast IV. Rida, mille järjekorranumbri juures on sümbol (S), saadakse kahe eelneva rea vastavate arvude liitmise teel; reale (S) järgnev rida (V) saadakse ülalmainitud ridade vastavate arvude lahutamise teel. Näiteks:

$$S_2 = y_2 + y_{4p-2},\quad d_1 = y_1 - y_{4p-1},\quad \sigma_p = S_p,$$
$$\delta_0 = S_0 - S_{2p},\quad \sigma'_2 = d_2 + d_{2p-2},\quad \delta'_2 = d_2 - d_{2p-2}.$$

Kui ülaltoodud tabelid on täidetud, leitakse suurused (4) valemitest *

$$a_0 = \frac{1}{4p}\sum_{i=0}^{p}\sigma_i,\quad a_{2p} = \frac{1}{4p}\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\sigma_i,$$

$$a_{2j} = \frac{1}{2p}\sum_{i=0}^{p}\sigma_i\cos 2jx_i,\quad a_{2j-1} = \frac{1}{2p}\sum_{i=0}^{p-1}\delta_i\cos(2j-1)x_i,$$

$$b_{2j} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{p-1}\delta'_i\cdot\sin 2jx_i,\quad b_{2j-1} = \frac{1}{2p}\sum_{i=1}^{p}\sigma'_i\sin(2j-1)x_i.$$

Esitame Runge skeemi 12 sõlme puhul $(p = 3)$. Täidame ülaltoodud viisil tabelid:

I		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
II	y_{12}	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
III (S)	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
IV (V)		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	

V	S_0	S_1	S_2	S_3
VI	S_6	S_5	S_4	
VII (S)	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
VIII (V)	δ_0	δ_1	δ_2	

* Loeme $x_0 = 0$.

IX	d_1	d_2	d_3
X	d_5	d_4	
XI (S)	σ'_1	σ'_2	σ'_3
XII (V)	δ'_1	δ'_2	

Edasi arvutame alljärgneva skeemi kohaselt:

sin 30° = 0,500			δ_2		$-\sigma_2$	σ_1		
sin 60° = 0,866				δ_1				
sin 90° = 1,000	σ_0	σ_1	δ_0		σ_0	$-\sigma_3$	δ_0	δ_2
sin 90° = 1,000	σ_2	σ_3						
Summad	I	II	I	II	I	II	I	II
Summad (I + II)	$12a_0$		$6a_1$		$6a_2$			
Vahed (I — II)	$12a_6$		$6a_5$		$6a_4$		$6a_3$	

sin 30° = 0,500	σ'_1					
sin 60° = 0,866		σ'_2	δ'_1	δ'_2		
sin 90° = 1,000	σ'_3				σ'_1	σ'_3
Summad	I	II	I	II	I	II
Summad (I + II)	$6b_1$		$6b_2$			
Vahed (I — II)	$6b_5$		$6b_4$		$6b_3$	

Summade I ja II saamiseks on vaja vastavate veergude arvud korrutada vastavate siinustega ning saadud korrutised liita.

Vaatleme näitena arvude a_1 ja a_5 saamist:

$$I = \delta_2 \cdot 0{,}500 + \delta_0 \cdot 1{,}000;\ II = \delta_1 \cdot 0{,}866;$$
$$I + II = 0{,}5\delta_2 + \delta_0 + 0{,}866\delta_1;$$

$$I - II = 0{,}5\delta_2 + \delta_0 - 0{,}866\delta_1;$$
$$6a_1 = I + II;\quad 6a_5 = I - II;$$
$$a_1 = \frac{I + II}{6};\quad a_5 = \frac{I - II}{6}.$$

6. Perioodiliste funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodi abil (integraalkujul).

Olgu funktsioon $f(x)$ 2π-perioodiline. Trigonomeetrilisel lähendpolünoomil (1), mille puhul integraal

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - U_n(x)]^2\, dx$$

on minimaalne, on kordajateks:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx; \\ a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \\ b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx, \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{5}$$

7. Fourier' rida.

2π-perioodilise funktsiooni $f(x)$ Fourier' reaks nimetatakse rida

$$s(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{6}$$

kus a_0, a_k, b_k $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ arvutatakse valemite (5) põhjal.

Kui funktsioon $f(x)$ on paarisfunktsioon, siis on reas (6) kordajad b_1, b_2, $b_3, \ldots$ nullid; paaritufunktsiooni $f(x)$ puhul on nullid kordajad a_0, a_1, $a_3, \ldots$.

Kui kõigi x puhul $f(x) = -f(x + \pi)$, siis on nullid a_0, a_{2k}, b_{2k} $(k = 1, 2, \ldots)$.

Vaatleme näidet funktsioonide klassist, mille puhul rida (6) koondub.

Dirichlet' teoreem. Olgu funktsiooni $f(x)$ puhul lõigul $[0, 2\pi]$ täidetud tingimused:

1) funktsioonil $f(x)$ on ainult lõplik arv maksimume ja miinimume;
2) funktsioon $f(x)$ on pidev, välja arvatud lõplik arv punkte, milles funktsioonil võib olla esimest järku katkevusi.

Siis (vahemikus $[0, 2\pi]$) igas pidevuspunktis x koondub rida (6) väärtuseks $f(x)$; igas katkevuspunktis x koondub rida (6) väärtuseks $\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x-\Delta x)+f(x+\Delta x)]$; $x=0$ ja $x=2\pi$ puhul koondub rida (6) väärtuseks $\frac{1}{2}[f(0)+f(2\pi)]$.

Kirjandust

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений I*. Москва, 1962.
2. Г. П. Толстов, *Ряды Фурье*. Москва, 1951.
3. E. Tamme, *Arvutusmeetodid III*. TRÜ rotaprint, 1963.

VI. LINEAARALGEBRA ARVUTUSMEETODID

A. Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine

Lineaarseid võrrandisüsteeme vaatleme kujul:

$$\text{a)}\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

ehk maatrikskujul

$$Ax = b,$$

kus

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \ldots\ a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \ldots\ a_{nn} \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} x &= (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n); \\ b &= (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n); \end{aligned}$$

$$\text{b)}\quad \begin{cases} x_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n + f_1, \\ x_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n + f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n + f_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n + f_n \end{cases} \qquad (2)$$

ehk maatrikskujul

$$x = Bx + f,$$

kus

$$B = \begin{pmatrix} b_{11}\, b_{12} \ldots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \ldots b_{2n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{i1}\, b_{i2} \ldots b_{in} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{n1}\, b_{n2} \ldots b_{nn} \end{pmatrix}; \qquad \begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ f &= (f_1, f_2, \ldots, f_n). \end{aligned}$$

Siin maatriksid A, B ja vektorid b, f on tuntud; tundmatuks on vektor x. Eeldame, et a_{ik}, b_{ik}, b_i ja f_i on reaalarvud.

Süsteemide (1) ja (2) lahendit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on võimalik arvutada determinantide abil (vt. näit. [7]). Suurte n väärtuste puhul on selline lahendusviis aga ebaratsionaalne tehete suure arvu tõttu. Allpool esitame rida praktikas kasutatavaid meetodeid süsteemide (1) ja (2) lahendamiseks.

1. Gaussi meetod ehk elimineerimismeetod.

Vaatleme võrrandisüsteemi (1) lahendamist. Jagame esimese võrrandi läbi tundmatu x_1 kordajaga a_{11} * ning lahutame a_{21}-kordse tulemuse teisest võrrandist, a_{31}-kordse tulemuse kolmandast võrrandist jne., a_{n1}-kordse tulemuse viimasest võrrandist. Siis saame:

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases}$$

kus

$$c_{1k} = \frac{a_{1k}}{a_{11}} \quad (k = 2, 3, \ldots, n);$$

$$d_1 = \frac{b_1}{a_{11}};$$

$$a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1}c_{1k} \quad (i = 2, \ldots, n; \; k = 2, \ldots, n);$$

$$b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}d_1 \quad (i = 2, \ldots, n).$$

---

* Me eeldame, et $a_{11} \neq 0$. Võrrandite järjekorra muutmise või tundmatute ümbernummerdamise abil on võimalik seda alati saavutada.

Jätame nüüd kõrvale esimese võrrandi ja vaatleme $n-1$ võrrandist koosnevat süsteemi tundmatutega $x_2, \ldots, x_n$ (tundmatu x_1 oleme elimineerinud). Elimineerides sellest süsteemist täpselt samuti x_2 jõuame $n-2$ võrrandist koosnevale süsteemile tundmatutega $x_3, \ldots, x_n$ jne. Lõpuks jõuame kolmnurksele süsteemile (eeldusel, et maatriksi A astak on n).

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad x_{n-1} + c_{n-1,n}x_n = d_{n-1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = d_n. \end{cases}$$

Nüüd leiame järk-järgult viimasest võrrandist x_n, eelviimasest $x_{n-1}, \ldots$, teisest võrrandist x_2 ja esimesest võrrandist x_1.

Näide 1. Lahendame Gaussi meetodiga võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

Arvutused koondame tabelisse:

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i
2	1	1	3
1	2	−1	−3
1	−1	1	4
1	0,5	0,5	1,5
	1,5	−1,5	−4,5
	−1,5	0,5	2,5
	1	−1	−3
		−1	−2
		1	2

Seega $x_3 = 2$; $x_2 = -1$; $x_1 = 1$.

Gaussi meetodit võib kasutada ka võrrandisüsteemide lahendamiseks, kus tundmatute arv on suurem võrrandite arvust. Selgitame seda juhtu näitega. Lähemalt vt. [7].

Näide 2. Lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Arvutades analoogiliselt nagu eelpool, saame:

a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	b_i
1	−2	1	−1	2
2	−3	1	1	4
1	−5	−1	1	3
1	−2	1	−1	2
	1	−1	3	0
	−3	−2	2	1
	1	−1	3	0
		−5	11	1
		1	$-\frac{11}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Tundmatule x_4 võime anda suvalisi väärtusi ($x_4 = c$). Edasi saame

$$x_3 = \frac{11}{5}c - \frac{1}{5};$$

$$x_2 = -\frac{4}{5}c - \frac{1}{5};$$

$$x_1 = -\frac{14}{5}c + \frac{9}{5}.$$

2. Jordani skeem.

Gaussi meetodi puuduseks on asjaolu, et tema rakendamisel võib esineda küllaltki tunduv täpsuse kadu (kui jagada tuleb suhteliselt väikeste arvudega). Täpsuse kadu võimaldab vähendada nn. peaelementide väljaeraldamine. Vaatleme nn. Jordani skeemi, mille puhul eraldatakse välja peaelemendid ja ühtlasi viiakse süsteem otsekohe diagonaalkujule.

Näide 2. Koostame Jordani skeemi võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 10x_1 + 34x_2 - 4x_3 = 32, \\ 12x_1 - 4x_2 + 10x_3 = -10, \\ 71x_1 + 10x_2 + 12x_3 = 29 \end{cases}$$

lahendamiseks.

	1	2	3	4	5	6	7
	№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	b_i	Σ_i
I	1	−0,141	10,0	34,0	−4,0	32,0	72,0
	2	−0,169	12,0	−4,0	10,0	−10,0	8,0
	3		71,0	10,0	12,0	29,0	122,0
II	1			32,6	−5,7	27,9	54,8
	2	0,175		−5,7	8,0	−14,9	−12,6
	3	−0,307	71,0	10,0	12,0	29,0	122,0
III	1	0,814		32,6	−5,7	27,9	54,8
	2				7,0	−10,0	−3,0
	3	−1,957	71,0		13,7	20,4	105,2
IV	1			32,6		19,8	52,4
	2				7,0	−10,0	−3,0
	3		71,0			40,0	111,1

Selgitused.

I. Esimeses veerus on kirjutatud võrrandi järjekorranumber. 3., 4. ja 5. veerg sisaldavad võrrandisüsteemi kordajaid, 6. veerg vabaliikmeid. 7. veerg (kontrollveerg *) sisaldab iga võrrandi kordajate ja vabaliikme summa, s. o. $\sum_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + b_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

Valime välja võrrandisüsteemi moodulilt suurima kordaja, mida nimetame peaelemendiks. Vaadeldaval juhul on selleks $a_{31} = 71$. Jagame peaelementi sisaldava veeru (3. veeru) kõik elemendid peaelemendiga, paigutades tulemused vastupidise märgiga veergu m_i.

II. Liidame igale reale vastava arvuga m_i korrutatud peaelementi sisaldava rea; saame uued a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, b_i, $\sum_i$. Arvutuste õigsuse kontrolliks kasutame võrdusi: $\sum_i = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + b_i$.

---

* Kontrollveergu võme kasutada ka Gaussi meetodi (vt. lk. 130) puhul.

Valime uue peaelemendi, jättes vaatlusest välja kolmanda rea (sellest me juba valisime peaelemendi!). Antud juhul on selleks 32,6. Leiame analoogiliselt ülaltoodud reegliga uued m_i väärtused.

III. Liidame jällegi igale reale vastava arvuga m_i korrutatud peaelementi sisaldava rea jne. jne.

IV. . . . . .

V. Leiame vastused:

$$x_1 = \frac{40,0}{71,0} = 0,563;$$

$$x_2 = \frac{19,8}{32,6} = 0,607;$$

$$x_3 = -\frac{10,0}{7,0} = -1,429.$$

Kontrollida võime veel järgmiselt: asendades vabaliikmed b_i vastavate summadega $\sum_i$, peame vastustena saama vastavalt $x_i + 1$. Antud näite puhul $\frac{111,1}{71,0} = 1,565$; $\frac{52,4}{32,6} = 1,607$; $-\frac{3,0}{7,0} = -0,429$.

3. Harilik iteratsioonimeetod.

Olgu lahendada lineaarne võrrandisüsteem (2). Hariliku iteratsioonimeetodi puhul lähtutakse süsteemi lahendi mingist lähendist (nn. alglähendist)

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}).$$

Järgnevad lähendid

$$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

leitakse valemi

$$x^{(k)} = Bx^{(k-1)} + f \tag{3}$$

põhjal.

Piisavad tingimused jada (3) koonduvuseks: jada koondub suvalise $x^{(0)}$ puhul, kui on täidetud üks tingimustest

(a) $\sum_{k=1}^{n} |b_{ik}| \leqslant \mu < 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$

või

(b) $\sum_{i=1}^{n} |b_{ik}| \leqslant \nu < 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$

või

(c) $\sum_{i,k=1}^{n} b^2_{ik} \leqslant \varrho < 1.$

Teoreem. Valemiga (3) arvutatud vektorite jada $\{x^{(k)}\}$ koondumiseks võrrandisüsteemi (2) lahendiks suvalise alglähendi $x^{(0)}$ puhul on tarvilik ja piisav, et maatriksi B kõik omaväärtused (vt. lk. 145) oleksid moodulilt ühest väiksemad.

Võrrandisüsteemi (1) viimine iteratsioonimeetodi rakendamiseks sobivale kujule.

a) Eeldame, et maatriksi A diagonaalelemendid on nullist erinevad *. Siis saame

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n + \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1 - \frac{a_{23}}{a_{22}} x_3 - \ldots - \frac{a_{2n}}{a_{22}} x_n + \frac{b_2}{a_{22}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}} x_2 - \ldots - \frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} x_{n-1} + \frac{b_n}{a_{nn}}. \end{cases}$$

Seega antud juhul

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \ldots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \ldots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

ja

$$f = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{b_n}{a_{nn}} \right).$$

---

* Piisavate tingimuste (*a*), (*b*), (*c*) rakendamiseks on vajalik veel eeldada, et maatriksi A diagonaalelemendid on suuremad, võrreldes teiste elementidega.

b) Valime suvalise maatriksi D, mille determinant $|D| \neq 0$. Võrrandisüsteem

$$x = (E - DA)x + Db$$

on ekvivalentne süsteemiga (1) (E on ühikmaatriks). Seega antud juhul $B = E - DA$ ja $f = Db$. Eeltoodud piisavate tingimuste põhjal koondub harilik iteratsioonimeetod kindlasti siis, kui $E - DA \approx 0$ *, s. o. $D \approx A^{-1}$. Kirjeldatud meetodit on seega sobiv rakendada siis, kui meil on ligikaudselt teada maatriksi A pöördmaatriks.

4. Seideli meetod.

Olgu lahendada võrrandisüsteem (2). Seideli meetod on määratud järgmise arvutuseeskirjaga

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = b_{11}x_1^{(k)} + b_{12}x_2^{(k)} + \ldots + b_{1n}x_n^{(k)} + f_1, \\ x_2^{(k+1)} = b_{21}x_1^{(k+1)} + b_{22}x_2^{(k)} + \ldots + b_{2n}x_n^{(k)} + f_2, \\ x_3^{(k+1)} = b_{31}x_1^{(k+1)} + b_{32}x_2^{(k+1)} + b_{33}x_3^{(k)} + \\ + \ldots + b_{3n}x_n^{(k)} + f_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = b_{n1}x_1^{(k+1)} + b_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + \\ + b_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_{nn}x_n^{(k)} + f_n \end{cases}$$

ehk kompaktsemalt

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{m=1}^{i-1} b_{im}x_m^{(k+1)} + \sum_{m=i}^{n} b_{im}x_m^{(k)} + f_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots),$$

kusjuures $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ on alglähend.

Seideli iteratsioonimeetod langeb kokku hariliku iteratsioonimeetodiga (vt. lk. 134), kui viimast rakendada võrrandisüsteemiga (2) ekvivalentsele võrrandisüsteemile

$$x = (E - M)^{-1}Nx + (E - M)^{-1}f,$$

kus E on ühikmaatriks;

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix};$$

* Sümbol 0 tähendab siin nullmaatriksit, s. o. maatriksit, mille kõik elemendid on nullid.

$$N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Seideli meetodi koonduvuse üle võime seega otsustada, kui kasutame eelmises punktis hariliku iteratsioonimeetodi koonduvuse kohta antud tingimusi ja võtame

$$B = (E - M)^{-1}N.$$

Võrreldes hariliku iteratsioonimeetodiga (3) koondub Seideli meetod tavaliselt mõnevõrra kiiremini.

5. Kiireima languse meetod.

Maatriksit A nimetatakse sümmeetriliseks, kui $A^* = A$, s. o. maatriks A ühtib oma transponeeritud maatriksiga A^* (saadakse maatriksist A ridade ja veergude ümberpaigutamisel).

Sümmeetrilist maatriksit nimetatakse positiivselt määratuks, kui $(Ax, x) > 0$ iga vektori $x \neq 0$ puhul. Sümboliga (a, b) on tähistatud vektorite skalaarkorrutis; sümboliga $\| a \|$ vektori $a = (a_1, \dots, a_n)$ norm (pikkus), s. o. $\| a \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$. Kiireima languse meetodi algoritm positiivselt määratud (sümmeetrilise) maatriksiga võrrandisüsteemi (1) puhul

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\| Ax^{(k)} - b \|^2}{(A(Ax^{(k)} - b),\ Ax^{(k)} - b)} (Ax^{(k)} - b), \qquad (4)$$

kus $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ on alglähend; $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$ $(k = 1, 2, \dots)$ — järjestikused lähendid süsteemi (1) lahendile.

L. Kantorovitš tõestas, et positiivselt määratud (sümmeetrilise) maatriksiga võrrandisüsteemi (1) korral koondub kiireima languse meetod geomeetrilise progressiooni kiirusega * süsteemi lahendiks x^*.

Juhul kui võrrandisüsteemi maatriks A pole positiivselt määratud, avaldub kiireima languse meetodi algoritm kujul (süsteem (1) asendatakse ekvivalentse posi-

* S. o. $\| x^* - x^{(k)} \| \leqslant cq^k$, kus $0 < q < 1$; c — const.

tiivselt määratud (sümmeetrilise) maatriksiga võrrandisüsteemiga $A^*Ax = A^*b$)

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\|A^*(Ax^{(k)} - b)\|^2}{\|AA^*(Ax^{(k)} - b)\|^2} A^*(Ax^{(k)} - b) \quad (5)$$

($k = 0, 1, \ldots$).

Näide 3. Arvutame kiireima languse meetodiga $x^{(1)}$ süsteemi

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9{,}7, \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8{,}9, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = -4{,}8 \end{cases}$$

puhul, võttes $x^{(0)} = (1, 2, -2)$. Süsteemi maatriks on ilmselt sümmeetriline. Sylvesteri teoreemi [4,7] järgi on maatriks positiivselt määratud siis ja ainult siis, kui tema peamiinorid on positiivsed. Antud juhul

$$3 > 0; \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} > 0,$$

s. o. süsteemi maatriks on positiivselt määratud. Rakendades algoritmi (4), saame

$$Ax^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix};$$

$$Ax^{(0)} - b = (9; 8; -5) - (9{,}7; 8{,}9; -4{,}8) = (-0{,}7; -0{,}9; -0{,}2);$$

$$\|Ax^{(0)} - b\|^2 = 0{,}49 + 0{,}81 + 0{,}04 = 1{,}34;$$

$$A(Ax^{(0)} - b) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0{,}7 \\ -0{,}9 \\ -0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}7 \\ -5{,}2 \\ -0{,}8 \end{pmatrix};$$

$$(A(Ax^{(0)} - b),\ Ax^{(0)} - b) = (-3{,}7; -5{,}2; -0{,}8)(-0{,}7; -0{,}9; -0{,}2) = 7{,}43;$$

$$\frac{\|Ax^{(0)} - b\|^2}{(A(Ax^{(0)} - b),\ Ax^{(0)} - b)} = \frac{1{,}34}{7{,}43} = 0{,}18;$$

$$x^{(1)} = (1; 2; -2) - 0{,}18\ (-0{,}7; -0{,}9; -0{,}2) = (1{,}13; 2{,}16; -1{,}96).$$

Märgime, et süsteemi täpne lahend

$$x^* = (1{,}2; 2{,}1; -1{,}9).$$

6. Kaasgradientide meetod.

Olgu lahendada võrrandisüsteem (1) positiivselt määratud (sümmeetrilise) (vt. lk. 137) maatriksiga A. Valime alglähendi $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Vektorite $p^{(k)}$, $r^{(k)}$, arvude ε_k, β_k ja lähendite $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ jadad määratakse järgmiste rekurrentsete seostega

$$\begin{aligned} p^{(0)} &= r^{(0)} = b - Ax^{(0)}; \\ \varepsilon_k &= \frac{(r^{(k)}, p^{(k)})}{(p^{(k)}, Ap^{(k)})}; \\ x^{(k+1)} &= x^{(k)} + \varepsilon_k p^{(k)}; \\ r^{(k+1)} &= r^{(k)} - \varepsilon_k Ap^{(k)}; \\ \beta^{(k)} &= -\frac{(r^{(k+1)}, Ap^{(k)})}{(p^{(k)}, Ap^{(k)})}; \\ p^{(k+1)} &= r^{(k+1)} + \beta_k p^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{6}$$

See protsess annab teoreetiliselt (kui ei esine ümardamisvigu!) täpse lahendi $l \leqslant n$ sammu puhul.

Juhul kui A ei ole positiivselt määratud (sümmeetriline), asendatakse lähtesüsteem (1) ekvivalentse süsteemiga

$$A^*Ax = A^*b$$

ning rakendatakse saadud süsteemile eeltoodud algoritmi (s. o. valemites (6) asendame maatriksi A maatriksiga A^*A ja vektori b vektoriga A^*b; vrd. ka valemitega (4) ja (5)).

7. Vähimruutude meetod.

Vaatleme nüüd lineaarset võrrandisüsteemi üldisemal kujul

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{7}$$

Kui $m > n$, s. o. kui võrrandite arv on suurem kui

tundmatute arv, siis pole võrrandisüsteem üldiselt enam lahenduv.*

Püstitame ülesande: leida vektor $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, mis «võimalikult hästi» rahuldaks ülaltoodud võrrandisüsteemi (7). «Võimalikult hästi» all mõistame nõuet, et hälvetevektori $r=(r_1, r_2, \ldots, r_m)$ koordinaatide

$$r_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k - b_i \quad (i = 1, \ldots, m)$$

ruutude summa (vektori r normi ruut)

$$\|r\|^2 = \sum_{i=1}^{m} r_i^2$$

oleks minimaalne. See nõue taandab süsteemi (7) lahendamise probleemi nn. normaalvõrrandite süsteemi

$$\sum_{k=1}^{n}\{\sum_{i=1}^{m} a_{ik}a_{ij}\}x_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}b_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

lahendamisele.

Normaalvõrrandite süsteemi puhul võrdub tundmatute arv võrrandite arvuga ning süsteemi lahendamiseks võib kasutada kõiki käesolevas peatükis esitatud meetodeid.

Reegel: selleks et saada normaalvõrrandite süsteemi j-ndat võrrandit, tuleb lähtesüsteemi iga võrrand korrutada tundmatu x_j kordajaga selles võrrandis ning saadud võrrandid liita.

B. Maatriksite pööramine

Maatriksi A pöördmaatriksi A^{-1} leidmise probleem on tihedalt seotud lineaarse võrrandisüsteemi $Ax = b$ (1) lahendamise ülesandega ($x = A^{-1}b$). Kui süsteemi (1) on vaja lahendada sama A, kuid erinevate b puhul, siis on sobiv arvutada algul A^{-1}.

Sageli esineb pöördmaatriksi leidmise probleem ka iseseisva ülesandena.

---

* Juhtu $n > m$ vt. lk. 131.

1. Pöördmaatriksi leidmine võrrandisüsteemide lahendamise abil

Meetodi rakendamine maatriksi A pööramiseks põhineb asjaolul, et võrrandisüsteemi

$$Ax = e_k,$$

kus

$$e_k = (\underbrace{0, 0, 0, \ldots, 0}_{k}, 1, 0, \ldots, 0)^{n},$$

lahendvektor on maatriksi A^{-1} k-ndaks veeruvektoriks.

Süsteemide $Ax = e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ lahendamiseks võime kasutada näiteks Gaussi meetodit (vt. lk. 130) või Jordani skeemi (vt. lk. 132).

Vaatleme näitena Jordani skeemi kasutamist. Töö planeerime selliselt, et A on vaja diagonaalkujule teisendada ainult üks kord, s. o. lahendame süsteemid $Ax = e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ korraga.

Näide 4. Leiame maatriksi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi (vrd. näide 2).

№	m_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	$b^{(1)}$	$b^{(2)}$	$b^{(3)}$	
1	—0,25	2	0	1	1	0	0	4
2	0	3	1	0	0	1	0	5
3		1	2	4	0	0	1	8
1	—0,58	1,75	—0,5		1	0	—0,25	2
2		3	1		0	1	0	5
3	—0,33	1	2	4	0	0	1	8
1	0,93		—1,08		1	—0,58	—0,25	—0,90
2		3	1		0	1	0	5
3	1,55		1,67	4	0	—0,33	1	6,35
1			—1,08		1	—0,58	—0,25	—0,90
2		3			0,93	0,46	—0,23	4,16
3				4	1,55	—1,23	0,61	4,95

Pöördmaatriks

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}31 & 0{,}15 & -0{,}08 \\ -0{,}93 & 0{,}54 & 0{,}23 \\ 0{,}39 & -0{,}31 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

2. Ä ä r i s t a m i s m e e t o d.

Olgu

$$A = A_n = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} & a_{n-1,\,n} \\ \hdashline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,\,n-1} & a_{nn} \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{n-1} & u_n \\ v_n & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kus

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,\,n-1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,\,n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,\,1} & a_{n-1,\,2} & \dots & a_{n-1,\,n-1} \end{pmatrix},$$

$$v_n = (a_{n-1,\,1},\, a_{n-1,\,2},\, \dots,\, a_{n-1,\,n-1});$$

$$u_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n-1,\,n} \end{pmatrix};$$

(v_n — üherealine maatriks; u_n — üheveeruline maatriks).

Eeldame, et A_{n-1}^{-1} on teada. Siis

$$A^{-1} = A_n^{-1} = \begin{pmatrix} A_{n-1}^{-1} + \dfrac{A_{n-1}^{-1} u_n v_n A_{n-1}^{-1}}{a_n} & -\dfrac{A_{n-1}^{-1} u_n}{a_n} \\ -\dfrac{v_n A_{n-1}^{-1}}{a_n} & \dfrac{1}{a_n} \end{pmatrix},$$

kus $a_n = a_{nn} - v_n A_{n-1}^{-1} u_n$

Arvutuste järjekord:

1° arvutame $-A_{n-1}^{-1} u_n$;

2° arvutame $-v_n A_{n-1}^{-1}$;

3° arvutame $a_n = a_{nn} + v_n(-A_{n-1}^{-1} u_n) = a_{nn} + (-v_n A_{n-1}^{-1}) u_n$;

4° leiame pöördmaatriksi A_n^{-1} elemendid:

$$\text{a)} -\frac{A_{n-1}^{-1}u_n}{a_n};\quad \text{b)} -\frac{v_nA_{n-1}^{-1}}{a_n};\quad \text{c)}\ A_{n-1}^{-1}+\frac{(-A_{n-1}^{-1}u_n)(-v_nA_{n-1}^{-1})}{a_n}.$$

Maatriksi $A=A_n=(a_{ik})$ pöördmaatriksi leiame, rakendades $n-1$ korda ääristamist. Lähtudes esimest järku pöördmaatriksist $(a_{11})^{-1}=\left(\frac{1}{a_{11}}\right)$, arvutame ääristamismeetodi abil järk-järgult pöördmaatriksid

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1},\quad \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}^{-1}\ \text{jne.}$$

Näide 5. Leiame maatriksi

$$A_3=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

pöördmaatriksi. A_2^{-1} leiame pöördmaatriksi arvutamise tavalise eeskirja [7] põhjal

$$A_2^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ -1{,}5 & 1\end{pmatrix}.$$

Antud juhul $a_{33}=4$; $u_3=\binom{1}{0}$; $v_3=(1,2)$. Saame

$$-A_2^{-1}u_3=-\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ -1{,}5 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\ 1{,}5\end{pmatrix};$$

$$-v_3A_2^{-1}=-(1,\ 2)\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ -1{,}5 & 1\end{pmatrix}=(2{,}5;\ -2);$$

$$a_3=4+(1,2)\begin{pmatrix}-0{,}5\\ 1{,}5\end{pmatrix}=4+(2{,}5;\ 2)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=6{,}5;$$

$$-\frac{A_2^{-1}u_3}{a_3}=\frac{1}{6{,}5}\begin{pmatrix}-0{,}5\\ 1{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}08\\ 0{,}23\end{pmatrix};$$

$$-\frac{v_3A_2^{-1}}{a_3}=\frac{1}{6{,}5}(2{,}5;\ -2)=(0{,}38;\ -0{,}31);$$

$$A_2^{-1}+\frac{(-A_2^{-1}u_3)(-v_3A_2^{-1})}{a_3}=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ -1{,}5 & 1\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{6{,}5}\begin{pmatrix}-0{,}5\\ 1{,}5\end{pmatrix}(2{,}5;\ -2)=\begin{pmatrix}0{,}5 & 0\\ -1{,}5 & 1\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{6{,}5}\begin{pmatrix}-1{,}25 & 1\\ 3{,}75 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}31 & 0{,}15\\ -0{,}92 & 0{,}54\end{pmatrix}.$$

Seega

$$A_3^{-1}=\begin{pmatrix}0{,}31 & 0{,}15 & -0{,}08\\ -0{,}92 & 0{,}54 & 0{,}23\\ 0{,}38 & -0{,}31 & 0{,}15\end{pmatrix}.$$

3. Jeršovi meetod.

Pööratava maatriksi A ja ühikmaatriksi E abil moodustatakse maatriksite jada

$$A^{(0)},\ A^{(1)\prime},\ A^{(1)},\ A^{(2)\prime},\ A^{(2)},\ \ldots,\ A^{(n)\prime},\ A^{(n)},$$

kus

$$A^{(m)\prime}=(a_{ij}{}^{(m)\prime});$$
$$A^{(m)}=(a_{ij}{}^{(m)});$$
$$A^{(0)}=A-E;$$
$$a_{ij}{}^{(m)\prime}=\begin{cases}a_{ij}{}^{(m-1)}, & \text{kui } i\neq m;\\ \delta_{ij}, & \text{kui } i=m;\end{cases}$$
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{kui } i=j;\\ 0, & \text{kui } i\neq j;\end{cases}$$
$$a_{ij}{}^{(m)}=a_{ij}{}^{(m)\prime}-\frac{a_{im}{}^{(m)\prime}\cdot a_{mj}{}^{(m-1)}}{1+a_{mm}{}^{(m-1)}}\quad(i,j,m=1,2,\ldots,n).$$

Pöördmaatriksiks A^{-1} on maatriks $A^{(n)}$.

4. Hamiltoni-Cayley teoreemil põhinev meetod.

Hamiltoni-Cayley teoreem: iga maatriks on oma karakteristliku võrrandi (vt. lk. 146) lahendiks.

Kui maatriksi A karakteristlikuks võrrandiks on

$$\lambda^n+p_1\lambda^{n-1}+p_2\lambda^{n-2}+\ldots+p_n=0,$$

siis *

$$A^n+p_1A^{n-1}+p_2A^{n-2}+\ldots+p_nE=0$$

(E — ühikmaatriks),

kust

$$A^{-1}=-\frac{1}{p_n}(A^{n-1}+p_1A^{n-2}+p_2A^{n-3}+\ldots+p_{n-1}E).$$

* Siin $A^i=\underbrace{A\cdot A\ldots A}_{i}$.

Kordajad p_i $(i = 1, \ldots, n)$ võime leida järk-järgult seostest

$$p_1 = -s_1,$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}(p_1 s_1 + s_2),$$

$$p_3 = -\frac{1}{3}(p_2 s_1 + p_1 s_2 + s_3),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = -\frac{1}{n}(p_{n-1} s_1 + p_{n-2} s_2 + \ldots + s_n),$$

kus

s_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on maatriksi A^i jälg (peadiagonaali elementide summa).

5. Iteratsioonimeetod.

Olgu X_0 pöördmaatriksi A^{-1} mingi lähendmaatriks. Seostega

$$X_{n+1} = X_n(2E - AX_n) \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

(E — ühikmaatriks)
määratud jada koondub $(n \to \infty)$ pöördmaatriksiks A^{-1}, kui maatriksi $C_0 = E - AX_0 = (c_{ik})$ puhul on täidetud üks tingimustest

(a) $q_1 = \max\limits_i \sum\limits_{k=1}^{n} |c_{ik}| < 1$

või

(b) $q_2 = \max\limits_k \sum\limits_{i=1}^{n} |c_{ik}| < 1$

või

(c) $q_3 = \sqrt{\lambda_1} < 1$, kus λ_1 on maatriksi $C_0^* C_0$ suurim omaväärtus; C_0^* — maatriksi C_0 transponeeritud maatriks.

C. Maatriksi omaväärtuste ja omavektorite leidmine

Maatriksi $A = (a_{ik})$ omaväärtuseks nimetatakse niisugust arvu (üldiselt kompleksarvu) λ, mille puhul homogeensel võrrandisüsteemil

$$Ax - \lambda x = 0$$

eksisteerib mittetriviaalne (s. o. nullist erinev) lahend.

Seda lahendit x nimetatakse omaväärtusele λ vastavaks omavektoriks.

Arv λ on maatriksi A omaväärtuseks siis ja ainult siis, kui determinant

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (E \text{ — ühikmaatriks}) \text{ ehk}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (8)$$

Ülaltoodud võrrandi vasak pool on n-astme polünoom pealiikme kordajaga $(-1)^n$. Polünoomi

$$\varphi(\lambda) = (-1)^n |A - \lambda E| = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \dots + p_n$$

nimetatakse maatriksi A karakteristlikuks polünoomiks; võrrandit

$$\varphi(\lambda) = 0$$

karakteristlikuks võrrandiks.

Maatriksi A omaväärtusteks on karakteristliku võrrandi lahendid. Suurte n väärtuste puhul on omaväärtuste otsene leidmine võrrandist (8) seotud mahukate arvutustega (tuleb avada n-järku determinant!) *. Järgnevas esitame omaväärtuste leidmiseks kaks praktikas enamrakendatavat meetodit.

1. Jacobi meetod.

a) Sümmeetriline juht.

Eeldame, et maatriks A on sümmeetriline, s. o. $a_{ik} = a_{ki}$. Maatriksit

$$T_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s & \cdots & t \\ & & \vdots & & \\ & & t & \cdots & s \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \dots p \\ \\ \dots q \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} & & \vdots & \vdots \\ & & p & q \end{matrix}$$

* Karakteristliku polünoomi kordajate arvutamist vt. ka lk. 145.

nimetatakse pöörete maatriksiks, kui $s^2 + t^2 = 1$. Maatriks T_{pq} erineb ühikmaatriksist nelja elemendi poolest, mis asetsevad p-nda ja q-nda rea ning veeru lõikekohtadel.

Jacobi meetodi puhul valitakse absoluutväärtuselt suurim väljaspool peadiagonaali asetsev maatriksi A element a_{pq}, arvutatakse Θ valemist

$$\tan 2\Theta = \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}},$$

võetakse $s = \cos\Theta$ ja $t = \sin\Theta$ ning moodustatakse maatriks

$$C_1 = T_{pq}{}^* A T_{pq} = T_1{}^* A T_1,$$

kus $T_{pq}{}^* = T_1{}^*$ on maatriksi T_{pq} transponeeritud maatriks.

Maatriksi $C_1 = (c_{ik}{}^{(1)})$ puhul saadakse: $c_{pq}{}^{(1)} = c_{qp}{}^{(1)} = 0$.

Järgmisel sammul valitakse maatriksis C_1 absoluutväärtuselt suurim väljaspool peadiagonaali paiknev element $c_{p'q'}^{(1)}$, arvutatakse Θ, s ja t nagu ennegi (s. o. $\tan 2\Theta = \frac{2c_{p'q'}^{(1)}}{c_{p'p'}^{(1)} - c_{q'q'}^{(1)}}$, $s = \cos\Theta$, $t = \sin\Theta$) ning moodustatakse maatriks

$$C_2 = T_{p'q'}{}^* C_1 T_{p'q'} = T_2{}^* C_1 T_2.$$

Jätkates protsessi, saame:

$$C_3 = T_3{}^* C_2 T_3,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_m = T_m{}^* C_{m-1} T_m.$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

Maatriksite C_m puhul väljaspool peadiagonaali asetsevate elementide absoluutväärtused vähenevad järk-järgult ning maatriksid C_m lähenevad diagonaalkujule, s. o.

$$C_m \to \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kus λ_i on maatriksi A omaväärtused.

Jacobi meetodi puhul loobutakse sageli absoluutväärtuselt suurimate elementide otsimisest väljaspool peadiagonaali ning maatriksite C_1, C_2, ... moodustamisel kasutatakse järk-järgult kõiki ülalpool peadiagonaali asetsevaid elemente mingis kindlas järjekorras (näiteks ridade kaupa).

Maatriksi A omavektorite leidmiseks moodustatakse maatriks

$$T = T_1 T_2 \ldots T_m \ldots$$

Maatriksi A omavektoriteks on maatriksi T veerud.

b) Mittesümmeetriline juht.

Arvutusprotsess on analoogiline sümmeetrilise juhuga. Pöörete maatriksil on siin kuju

$$T_{pq} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & s & \cdots -\bar{t} & \cdots p \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & t & \cdots s & \cdots q; \\ & & & & \ddots \\ & & & & 1 \\ & & p & q & \end{pmatrix}$$

s ja t leitakse seostest

$$s = (1 + |\mu|^2)^{-1/2};$$
$$t = \mu(1 + |\mu|^2)^{-1/2} = \mu s;$$

$\bar{t}$ on arvu t kaaskompleksarv;

$$\mu = [\Delta_{qp} \pm (\Delta_{qp}^2 + a_{pq}a_{qp})^{1/2}] \cdot \frac{1}{a_{pq}};$$

$$\Delta_{qp} = \frac{1}{2}(a_{qq} - a_{pp});$$

valitakse vähima mooduliga μ.

Maatriksid C_m lähenevad siin kolmnurkkujule (nullideks teisendatakse allpool peadiagonaali asetsevad elemendid). Maatriksite C_m diagonaalelemendid lähenevad maatriksi A omaväärtustele *.

Mittesümmeetrilisel juhul on omavektorite leidmine tunduvalt keerulisem.**

---

* Väide on üldjuhul seni tõestamata (vt. [2]), kuid seda kinnitavad rohkearvulised praktilised arvutused.

** J. Greenstadt, *A Method for Finding Roots of Arbitrary Matrices, Mathematical Tables and other Aids to Computation,* vol. IX, 1955, lk. 47.

2. Ortogonaliseerimismeetod.

a) Omaväärtuste leidmine.

Vaatleme karakteristliku polünoomi leidmist ortogonaliseerimismeetodi abil.

Valime suvalise vektori $c_0 \neq 0$ ja leiame Ac_0. Määrame kordaja a_{10} nii, et vektor $c_1 = Ac_0 - a_{10}c_0$ oleks ortogonaalne vektoriga c_0, s. o. $(c_1, c_0) = 0$, kust

$$a_{10} = \frac{(Ac_0, c_0)}{(c_0, c_0)}$$

(sümbol (a, b) tähistab vektorite a ja b skalaarkorrutist).

Olgu $c_1 \neq 0$. Moodustame vektori Ac_1 ja valime kordajad a_{21} ja a_{20} nii, et vektor $c_2 = Ac_1 - a_{21}c_1 - a_{20}c_0$ oleks ortogonaalne vektoritega c_0 ja c_1, s. o. võtame

$$a_{21} = \frac{(Ac_1, c_1)}{(c_1, c_1)}; \quad a_{20} = \frac{(Ac_1, c_0)}{(c_0, c_0)}.$$

Olgu leitud vektorid $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$, kusjuures

$$c_{k+1} = Ac_k - a_{k+1,k}c_k - a_{k+1,k-1}c_{k-1} - \ldots - a_{k+1,0}c_0 \quad (9)$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m-2);$$
$$(c_i, c_j) = 0, \text{ kui } i \neq j; \; c_k \neq 0 \; (i, j, k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

Valime kordajad a_{mi} nii, et vektor

$$c_m = Ac_{m-1} - a_{m,m-1}c_{m-1} - a_{m,m-2}c_{m-2} - \ldots - a_{m0}c_0$$

oleks ortogonaalne vektoritega $c_0, c_1, \ldots, c_{m-1}$, s. o. võtame

$$a_{mi} = \frac{(Ac_{m-1}, c_i)}{(c_i, c_i)}.$$

Paralleelselt vektoritega $c_0, c_1, \ldots, c_m, \ldots$ moodustame polünoomid

$$\varphi_0(\lambda) = 1;$$
$$\varphi_m(\lambda) = (\lambda - a_{m,m-1})\varphi_{m-1}(\lambda) - \sum_{k=0}^{m-2} a_{m,k}\,\varphi_k(\lambda).$$

Et n-dimensioonilises vektorruumis ei leidu rohkem kui n vastastikku ortogonaalset vektorit, siis mingil sammul saame $c_m = 0$. Kui seejuures $m = n$, siis $\varphi_m(\lambda)$ (nn. vektorit c_0 annulleeriv minimaalne polünoom) on maat-

riksi A karakteristlikuks polünoomiks; $m < n$ puhul on $\varphi_m(\lambda)$ karakteristliku polünoomi jagaja.

Kui $m < n$, siis valime uue lähtevektori $c_0' \neq 0$, mis on ortogonaalne vektoritega c_0, c_1, ..., c_{m-1} ja kordame ülaltoodud protsessi. Kui ortogonaalsete vektorite üldarv jääb seejuures ikka veel väiksemaks kui n, siis kordame seda protsessi, lähtudes algvektorist $c_0'' \neq 0$, mis on ortogonaalne kõigi eelnevate vektoritega jne.

Maatriksi A karakteristlik polünoom avaldub vektoreid c_0, c_0', c_0'', ... annulleerivate minimaalsete polünoomide korrutisena.

Sümmeetrilise maatriksi A puhul seos (9) lihtsustub, sest siis $i < k - 1$ korral $\alpha_{k+1,\,i} = 0$, s. o.

$$c_{k+1} = Ac_k - \alpha_{k+1,\,k}c_k - \alpha_{k+1,\,k-1}c_{k-1}. \qquad (9').$$

b) Omavektorite leidmine.

Oletame, et mingist vektorist c_0 lähtudes saime $c_m = 0$. Olgu λ_i vastava minimaalse annulleeriva polünoomi nullkoht, s. o. λ_i on ka maatriksi A omaväärtuseks. Omaväärtusele λ_i vastab omavektor

$$x_i = \beta_0 c_0 + \beta_1 c_1 + \ldots + \beta_{m-1}c_{m-1},$$

kusjuures β_i leitakse alljärgnevatest rekurrentsetest seostest:

$$\begin{aligned}
&\beta_1(\lambda_i - \alpha_{21}) - \alpha_{31}\beta_2 - \beta_0 = 0,\\
&\beta_2(\lambda_i - \alpha_{32}) - \alpha_{42}\beta_3 - \beta_1 = 0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_{m-2}(\lambda_i - \alpha_{m-1,\,m-2}) - \alpha_{m,\,m-2}\beta_{m-1} - \beta_{m-3} = 0,\\
&\beta_{m-1}(\lambda_i - \alpha_{m,\,m-1}) - \beta_{m-2} = 0;
\end{aligned}$$

seejuures võime näiteks valida $\beta_{m-1} = 1$.

Kirjandust

1. И. С. Березин, Н. П. Жидков, *Методы вычислений II*. Москва, 1959.
2. Дж. Н. Ланс, *Численные методы для быстродействующих вычислительных машин*. Москва, 1962.
3. К. Ланцош, *Практические методы прикладного анализа*. Москва, 1961.
4. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*. Москва—Ленинград, 1963.
5. А. С. Хаусхолдер, *Основы численного анализа*. Москва, 1956.
6. E. Bodewig, *Matrix Calculus*. Amsterdam, 1959.
7. G. Kangro, *Kõrgem algebra*. Tallinn, 1962.
8. E. Tamme, *Arvutusmeetodid IV*. TRÜ rotaprint, 1963.

VII. MITTELINEAARSED VÕRRANDID JA VÕRRANDISÜSTEEMID

A. Mittelineaarsete võrrandite ligikaudne lahendamine

Mittelineaarsete võrrandite $f(x)=0$ või $x-\varphi(x)=0$ lahendamiseks kasutatakse põhiliselt nn. iteratsioonimeetodeid. Lähtudes mingist alglähendist * x_0 (või alglähenditest $x_0, x_1, \ldots, x_k$) moodustatakse jada $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (või siis jada $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n, \ldots$), mis teatavatel tingimustel koondub võrrandi täpseks lahendiks.

1. Harilik iteratsioonimeetod.

Võrrand: $x-\varphi(x)=0$.

Algoritm: $x_{n+1}=\varphi(x_n)\quad (n=0,1,2,\ldots)$; (1)
x_0 — alglähend.

Teoreem. Olgu täidetud tingimused:

1° funktsioon $\varphi(x)$ rahuldab lõigul $|x-x_0|\leqslant r$ Lipschitzi tingimust ** konstandiga $K<1$, s. o. $|\varphi(x')-\varphi(x'')|\leqslant K|x'-x''|$ iga x', x'' puhul vaadeldavalt lõigult;

2° $|x_1-x_0|=|\varphi(x_0)-x_0|\leqslant(1-K)r$. Siis võrrandil $x-\varphi(x)=0$ on lõigul $|x-x_0|\leqslant r$ ühene lahend x^*, milleks jada $\{x_n\}$ koondub kiirusega

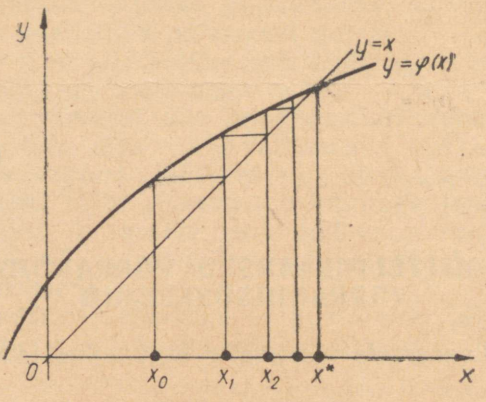
$$|x^*-x_n|\leqslant\frac{K^n}{1-K}|x_1-x_0|\quad (n=0,1,\ldots).$$

Võrrandi $f(x)=0$ võib viia kujule $x-\varphi(x)=0$, võt-

---

* Alglähendite leidmist vt. lk. 159.

** Tingimuse 1° võib asendada tingimusega: lõigul $|x-x_0|\leqslant r$ on $|\varphi'(x)|\leqslant K<1$.



Joonis 1. Hariliku iteratsioonimeetodi geomeetriline interpretatsioon.

tes näiteks $\varphi(x) = x + cf(x)$, kus $c \neq 0$ on suvaline konstant.

Näide 1. Lahendame meetodiga (1) võrrandi

$$x = \ln x + 2{,}7.$$

Valides $x_0 = 4$, saame
$x_1 = \ln 4 + 2{,}7 = 1{,}3863 + 2{,}7 = 4{,}0863;$
$x_2 = \ln 4{,}0863 + 2{,}7 = 1{,}4076 + 2{,}7 = 4{,}1076;$
$x_3 = \ln 4{,}1076 + 2{,}7 = 1{,}4128 + 2{,}7 = 4{,}1128;$
$x_4 = \ln 4{,}1128 + 2{,}7 = 1{,}4141 + 2{,}7 = 4{,}1141;$
$x_5 = \ln 4{,}1141 + 2{,}7 = 1{,}4144 + 2{,}7 = 4{,}1144;$ jne.

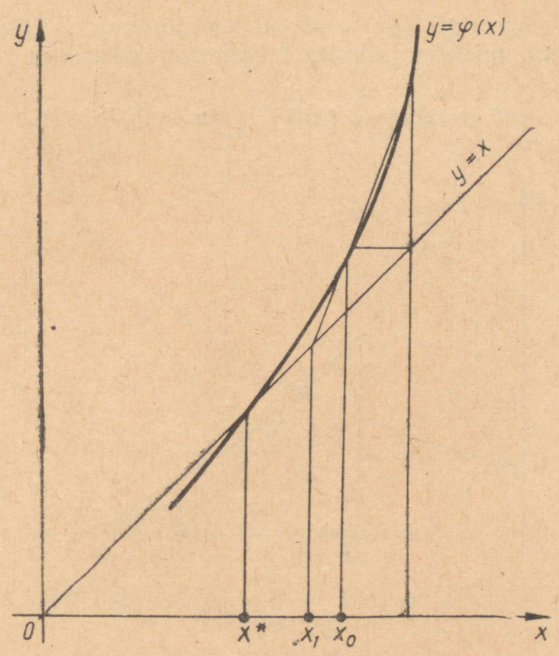
2. Steffenseni meetod.

Võrrand: $x - \varphi(x) = 0$.
Algoritm:

$$x_{n+1} = \frac{x_n \varphi[\varphi(x_n)] - [\varphi(x_n)]^2}{x_n - 2\varphi(x_n) + \varphi[\varphi(x_n)]}$$

$(n = 0, 1, 2, \ldots)$;
x_0 — alglähend.

Steffenseni meetod kiirendab hariliku iteratsioonimeetodi (1) koonduvust. Jada $\{x_n\}$ võib koonduda ka juhul, kui lahendi x^* ümbruses $|\varphi'(x)| > 1$. Üldiselt saame teist järku koonduvuskiiruse, s. t. $|x^* - x_{n+1}| = 0(|x^* - x_n|^2)$. Lähemalt Steffenseni meetodist vt. [2].



Joonis 2. Steffenseni meetodi geomeetriline interpretatsioon.

3. Newtoni meetod.

Võrrand: $f(x) = 0$

Algoritm: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$; (2)

x_0 — alglähend.

Teoreem. Olgu täidetud tingimused:

$$1^\circ \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leqslant \eta;$$

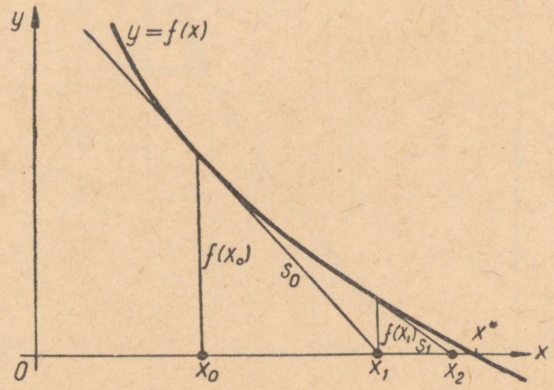
2° lõigul $|x - x_0| \leqslant \frac{1 - \sqrt{1 - 2h}}{h} \eta$ kehtigu hinnang:

$$\left| \frac{f''(x)}{f'(x_0)} \right| \leqslant K;$$

3° $h = K\eta \leqslant \frac{1}{2}$.

Siis võrrandil $f(x) = 0$ on vaadeldaval lõigul ühene lahend x^*, milleks jada $\{x_n\}$ koondub kiirusega

$$|x^* - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}(2h)^{2^n}\frac{\eta}{h} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$



Joonis 3. Newtoni meetodi geomeetriline interpretatsioon.

s_0, s_1, ... — puutujad kõverale $y = f(x)$ vastavalt punktides $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1))$ jne.

Näide 2. $f(x) = x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x - 49 = 0$. Valime $x_0 = -1$, siis

$$x_1 = (-1) - \frac{1}{(-78)} = -0{,}9872.$$

Antud juhul $x^* = -0{,}98710\ldots$

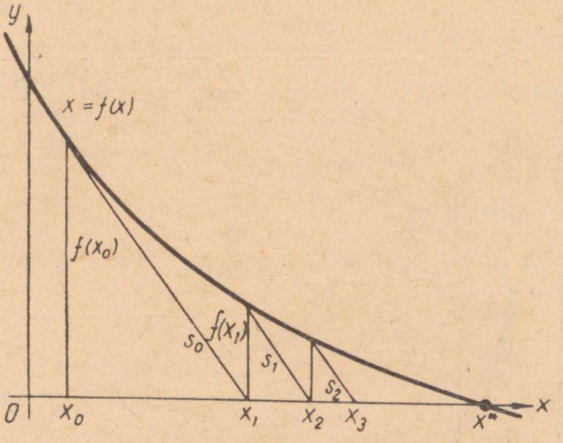
Newtoni meetodi algoritmid arvu a pöördväärtuse ja N-nda juure ligikaudseks leidmiseks:

a) $f(x) = \frac{1}{x} - a$; $x_{n+1} = x_n(2 - ax_n)$.

b) $f(x) = x^N - a$; $x_{n+1} = [(N-1)x_n^N + a]/Nx_n^{N-1}$.

Sageli kasutatakse nn. modifitseeritud Newtoni meetodit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$



Joonis 4. Modifitseeritud Newtoni meetodi geomeetriline interpretatsioon.

s_0 — puutuja kõveral, $y = f(x)$ punktis $(x_0, f(x_0))$; $s_0 \| s_1 \| s_2 \ldots$.

4. Teist järku tuletisi sisaldavad iteratsioonimeetodid.

Võrrand: $f(x) = 0$.

Algoritmid:
$$x_{n+1} = x_n - \frac{[f'(x_n)]^2 + \frac{1}{2}(\alpha + 1) f''(x_n) f(x_n)}{[f'(x_n)]^2 + \frac{1}{2}\alpha f''(x_n) f(x_n)} \times$$
$$\times \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}; \qquad (3)$$

α — reaalarv;
x_0 — alglähend;
$n = 0, 1, 2, \ldots$.

Kui $\alpha = 0$ ja $\alpha = -1$, saame vastavalt puutuvate paraboolide ja puutuvate hüperboolide meetodi. Küllalt hea alglähendi korral saame üldiselt kolmandat järku koonduvuskiiruse, s. t. $|x^* - x_{n+1}| = 0(|x^* - x_n|^3)$. Arvutustel saadakse täpsemaid tulemusi tavaliselt $\alpha = -2$ puhul.

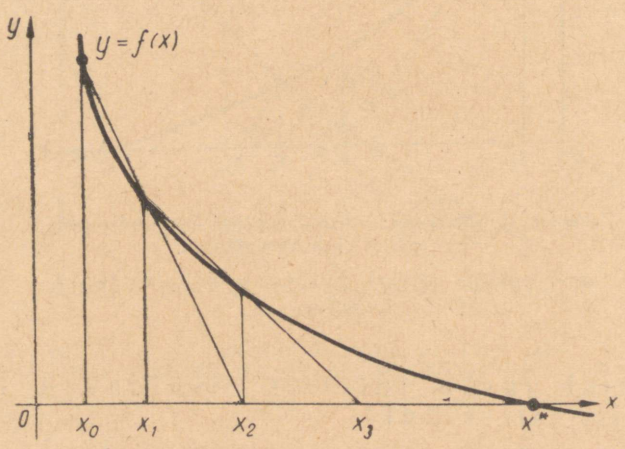
5. Kõõlude meetod.

Võrrand: $f(x) = 0$.

Algoritm: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n)$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (4)$$

x_0, x_1 — alglähendid.



Joonis 5. Kõõlude meetodi geomeetriline interpretatsioon.

Kõõlude meetod koondub hariliku iteratsioonimeetodiga (1) ja Newtoni meetodiga (2) võrreldes vahepealse kiirusega, s. o. veahinnang saadakse siin kujul: $|x^* - x_n| \leqslant \leqslant c \cdot d^{t^n}$, kus $t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$. Võrreldes Newtoni meetodiga on eeliseks asjaolu, et kõõlude meetodi algoritm ei nõua funktsiooni $f(x)$ tuletise arvutamist.

Näide 3. $f(x) \equiv x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 30x - 49 = 0$. Valime $x_0 = 0$; $x_1 = -1$, siis

$$x_2 = (-1) - \frac{(-1) - 0}{1 - (-49)}(+1) = -0{,}98;$$

(vrd. näide 2).

6. Teist järku diferentssuhteid sisaldavad iteratsioonimeetodid.

Võrrand: $f(x) = 0$.

Algoritmid:

$$x_{n+1} = x_n + \{[f(x_n;\ x_{n-1}) - (1+\alpha) f(x_n;\ x_{n-1};\ x_{n-2})(\tilde{x}_{n+1} - x_n) - f(x_n;\ x_{n-1};\ x_{n-2})(x_n - x_{n-1})]/[f(x_n;\ x_{n-1}) - \alpha f(x_n;\ x_{n-1};\ x_{n-2})(\tilde{x}_{n+1} - x_n)]\} \cdot (\tilde{x}_{n+1} - x_n), \quad (5)$$

kus $f(x_n;\ x_{n-1})$ ja $f(x_n;\ x_{n-1};\ x_{n-2})$ on vastavalt funktsiooni $f(x)$ esimest ja teist järku diferentssuhted (vt. lk. 9),

$$\tilde{x}_{n+1} - x_n = -f(x_n)/f(x_n;\ x_{n-1});$$

x_0, x_1, x_2 — alglähendid;

α — reaalarv;

$n = 2, 3, \ldots$.

Vaadeldavad meetodid koonduvad üldiselt kõõlude meetodiga (4) ja Newtoni meetodiga (2) võrreldes vahepealse kiirusega.

Kui võrrand on antud kujul $f(x) \equiv x - \varphi(x) = 0$, siis asendades ülaltoodud algoritmides (5) x_{n-1} ja x_{n-2} vastavalt suurustega $\varphi(x_n)$ ja $\varphi[\varphi(x_n)]$, saadakse kolmandat järku koonduvuskiirusega (vrd. (3)) iteratsioonimeetodid. Igal iteratsioonisammul nõuavad mainitud meetodid $\varphi(x_n)$, $\varphi[\varphi(x_n)]$ ja $\varphi\{\varphi[\varphi(x_n)]\}$ arvutamist (meetodid (3) nõuavad $f(x_n)$, $f'(x_n)$, $f''(x_n)$ arvutamist).

7. Fürstenau meetod.

Võrrand: $f(x) = 0$.

Algoritm: $x_n = x_0 - a_0 \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$,

kus

$$\Delta_0 = 1;$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n \\ a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & a_0 & \ldots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \ldots);$$

$$a_i = \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!};$$

x_0 — alglähend.

Determinandid Δ_n arvutatakse järk-järgult seosest:

$$\Delta_n = a_1\Delta_{n-1} + (-a_0)a_2\Delta_{n-2} + (-a_0)^2a_3\Delta_{n-3} + \ldots + + (-a_0)^{n-1}a_n\Delta_0.$$

Arvutusi on sobiv koondada tabelisse:

$\Delta_0 = 1$	a_1	$(-a_0)a_2$	$(-a_0)^2a_3$	$(-a_0)^3a_4$	...
$\Delta_1 = a_1$	$a_1\Delta_1$	$(-a_0)a_2\Delta_1$	$(-a_0)^2a_3\Delta_1$		
Δ_2	$a_1\Delta_2$	$(-a_0)a_2\Delta_2$			
Δ_3	$a_1\Delta_3$				
Δ_4					
⋮					

Fürstenau meetod osutub väga efektiivseks, kui funktsiooni $f(x)$ kõrgemat järku tuletised on kohal x_0 kergesti arvutatavad.

Näide 4. $f(x) \equiv x^3 - 2x - 5 = 0;$

$$x_0 = 2;$$

$$a_0 = -1;\ a_1 = 10,\ a_2 = 6;\ a_3 = 1;\ a_4 = 0;$$

$\Delta_0 = 1$	10	6	1	0
$\Delta_1 = 10$	100	60	10	
$\Delta_2 = 106$	1060	636		
$\Delta_3 = 1121$	11210			
$\Delta_4 = 11856$				

$$\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{1121}{11856} = 0{,}09455128 \ldots ;$$

$$x_4 \approx 2{,}09455128.$$

Märgime, et antud juhul täpne lahend

$$x^* = 2{,}09455148 \ldots .$$

8. Alglähendite leidmisest.

a) Graafiline meetod.

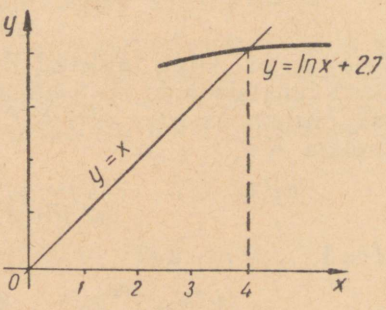
Joonistatakse funktsiooni $y = f(x)$ graafik, millelt leitakse ligikaudselt $f(x)$ nullkohad. Seejuures on sageli kasulik esitada võrrand $f(x) = 0$ enne kujul $f_1(x) = f_2(x)$. Funktsiooni nullkohtadeks on siis kõverate $y = f_1(x)$ ja $y = f_2(x)$ lõikepunktid.

Näide 5. Leiame võrrandi $x = \ln x + 2{,}7$ ligikaudse lahendi (vrd. näide 1). Selleks joonistame funktsioonide $y = x$ ja $y = \ln x + 2{,}7$ graafikud.

Jooniselt 6 on näha et $x \approx 4$.

b) Poolitamismeetod.

Põhineb lihtsal teoreemil: kui pideval funktsioonil on lõigu $[a, b]$ otspunktides erimärgilised väärtused, siis funktsioonil on vähemalt üks nullkoht sellel lõigul.



Joon. 6.

Olles jõudnud proovimise teel niisuguse lõiguni, arvutame funktsiooni väärtuse lõigu keskpunktis ja valime välja lõigu selle poole, mille otspunktides funktsiooni väärtused on erimärgilised. Nüüd arvutame funktsiooni väärtuse poollõigu keskpunktis ning valime välja veerandlõigu, mille otspunktides funktsiooni väärtused on erimärgilised jne. jne. Selle nn. poolitamismeetodi nimetuse all tuntud protsessi abil võime leida funktsiooni nullkoha põhimõtteliselt mistahes täpsusega.

B. Mittelineaarsed võrrandisüsteemid

Alapeatükis *A* esitatud meetodid ühe mittelineaarse võrrandi lahendamiseks on üldistatavad ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele (seejuures saame ka samad koonduvuskiirused). Lisaks vaatleme veel mõningaid algoritme mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks.

1. Harilik iteratsioonimeetod.

Võrrandisüsteem: $x_i = \varphi_i(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Algoritm: $x_i^{(k+1)} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$
$(k = 0, 1, 2, \ldots)$; (6)

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — alglähend.

Teoreemi (vt. lk. 151) võime üldistada ka mittelineaarsetele võrrandisüsteemidele. Defineerime vektorite $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$ ja $x'' = (x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$ vahelise kauguse valemiga

$$\varrho(x', x'') = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i' - x_i''|.$$

Teoreem. Olgu täidetud tingimused:

1^0 funktsioonide süsteem φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ rahuldab piirkonnas $\varrho(x, x^{(0)}) \leqslant r$ Lipschitzi tingimust konstandiga $K < 1$, s. o.

$$|\varphi_i(x_1', x_2', \ldots, x_n') - \varphi_i(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')| \leqslant \leqslant K\varrho(x', x'')$$

$(i = 1, \ldots, n)$, kui

$$\varrho(x', x^{(0)}) \leqslant r, \quad \varrho(x'', x^{(0)}) \leqslant r;$$

2^0 $\varrho(x^{(1)}, x^{(0)}) \leqslant (1 - K)r$.

Siis võrrandisüsteemil $x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ on piirkonnas $\varrho(x, x^{(0)}) \leqslant r$ ühene lahend $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, milleks vektorite jada $x^{(n)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ koondub kiirusega

$$\varrho(x^*, x^{(k)}) \leqslant \frac{K^k}{1 - K} \varrho(x^{(1)}, x^{(0)}).$$

Näide 6. Lahendame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x_1 = x_1^2 + x_2^2 + 0{,}05; \\ x_2 = x_1^2 - x_2^2 + 0{,}23. \end{cases}$$

Valides $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$, saame:

$$x_1^{(1)} = 0^2 + 0^2 + 0{,}05 = 0{,}05; \qquad x_2^{(1)} = 0^2 - 0^2 + 0{,}23 = 0{,}23;$$

$$x_1^{(2)} = 0{,}05^2 + 0{,}23^2 + 0{,}05 = 0{,}1054; \quad x_2^{(2)} = 0{,}05^2 - 0{,}23^2 + 0{,}23 = 0{,}1796;$$

$$x_1^{(3)} = 0{,}1054^2 + 0{,}1796^2 + 0{,}05 = 0{,}0934; \quad x_2^{(3)} = 0{,}1054^2 - 0{,}1796^2 + 0{,}23 = 0{,}2088.$$

Märgime, et süsteemi täpseks lahendiks on

$$x_1^* = 0{,}1; \quad x_2^* = 0{,}2.$$

2. Seideli meetod.

Võrrandisüsteem: $x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Algoritm:
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ x_3^{(k+1)} = \varphi_3(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, x_3^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}); \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k = 0, 1, 2, \ldots); \end{cases}$$

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — alglähend.

Seideli meetod erineb harilikust iteratsioonimeetodist (6) selle poolest, et juba arvutatud lähendvektori koordinaate kasutatakse edaspidistes arvutustes otsekohe ära. Seideli meetod koondub üldiselt mõnevõrra kiiremini kui harilik iteratsioonimeetod.

3. Steffenseni meetod.

Võrrandisüsteem: $x_i = \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Algoritm: $(E - \Gamma_k)\Delta x^{(k)} = y^{(k)} - x^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, (7)

kus $\Gamma_k = (a_{ij}^{(k)})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ või $\Gamma_k = (b_{ij}^{(k)})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$;

$$a_{ij}^{(k)} = (x_j^{(k)} - y_j^{(k)})^{-1}[\varphi_i(y_1^{(k)}, \ldots, y_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) - \varphi_i(y_1^{(k)}, \ldots, y_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})];$$

$$b_{ij}^{(k)} = (y_j^{(k)} - x_j^{(k)})^{-1}[\varphi_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_{j-1}^{(k)}, y_j^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}) - \varphi_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_j^{(k)}, y_{j+1}^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)})];$$

E — ühikmaatriks;

$$y^{(k)} = (y_1{}^{(k)}, \ldots, y_n{}^{(k)}) = (\varphi_1(x_1{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)}), \ldots, \varphi_n(x_1{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)}));$$

$$x^{(k)} = (x_1{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k)}); \quad \Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} =$$

$$= (x_1{}^{(k+1)} - x_1{}^{(k)}, \ldots, x_n{}^{(k+1)} - x_n{}^{(k)})$$

$$(k = 0, 1, \ldots);$$

$$x^{(0)} = (x_1{}^{(0)}, \ldots, x_n{}^{(0)}) \text{ — alglähend.}$$

Uus lähend $x^{(k+1)}$ leitakse seosest

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)},$$

kusjuures parandusvektor $\Delta x^{(k)}$ arvutatakse lineaarsest võrrandisüsteemist (7).

Kahest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} u = \varphi_1(u, v), \\ v = \varphi_2(u, v) \end{cases}$$

puhul saadakse parandusvektori $\Delta x^{(k)} = (\Delta u^{(k)}, \Delta v^{(k)})$ leidmiseks järgmised lineaarsed võrrandisüsteemid:

$$\begin{cases} \left[1 - \dfrac{s^{(k)} - \varphi_1(s^{(k)}, v^{(k)})}{u^{(k)} - s^{(k)}}\right] \Delta u^{(k)} - \\ - \dfrac{\varphi_1(s^{(k)}, v^{(k)}) - \varphi_1(s^{(k)}, t^{(k)})}{v^{(k)} - t^{(k)}} \Delta v^{(k)} = s^{(k)} - u^{(k)}, \\ - \dfrac{t^{(k)} - \varphi_2(s^{(k)}, v^{(k)})}{u^{(k)} - s^{(k)}} \Delta u^{(k)} + \\ + \left[1 - \dfrac{\varphi_2(s^{(k)}, v^{(k)}) - \varphi_2(s^{(k)}, t^{(k)})}{v^{(k)} - t^{(k)}}\right] \Delta v^{(k)} = t^{(k)} - v^{(k)} \end{cases}$$

või

$$\begin{cases} \left[1 - \dfrac{\varphi_1(u^{(k)}, t^{(k)}) - \varphi_1(s^{(k)}, t^{(k)})}{u^{(k)} - s^{(k)}}\right] \Delta u^{(k)} - \\ - \dfrac{s^{(k)} - \varphi_1(u^{(k)}, t^{(k)})}{v^{(k)} - t^{(k)}} \Delta v^{(k)} = s^{(k)} - u^{(k)}, \\ - \dfrac{\varphi_2(u^{(k)}, t^{(k)}) - \varphi_2(s^{(k)}, t^{(k)})}{u^{(k)} - s^{(k)}} \Delta u^{(k)} + \\ + \left[1 - \dfrac{t^{(k)} - \varphi_2(u^{(k)}, t^{(k)})}{v^{(k)} - t^{(k)}}\right] \Delta v^{(k)} = t^{(k)} - v^{(k)}, \end{cases}$$

kus

$$s^{(k)} = \varphi_1(u^{(k)}, v^{(k)}); \quad t^{(k)} = \varphi_2(u^{(k)}, v^{(k)}).$$

4. Newtoni meetod.

Võrrandisüsteem: $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Parandusvektor $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = (x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}) = (\Delta x_1^{(k)}, \Delta x_2^{(k)}, \ldots, \Delta x_n^{(k)})$ leitakse igal iteratsioonisammul $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(k)} \Delta x_1^{(k)} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(k)} \Delta x_2^{(k)} + \ldots + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right|_{(k)} \Delta x_n^{(k)} = \\ = -f_1(x^{(k)}) \\ \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(k)} \Delta x_1^{(k)} + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(k)} \Delta x_2^{(k)} + \ldots + \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right|_{(k)} \Delta x_n^{(k)} = \\ = -f_2(x^{(k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\right|_{(k)} \Delta x_1^{(k)} + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_2}\right|_{(k)} \Delta x_2^{(k)} + \ldots + \left.\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|_{(k)} \Delta x_n^{(k)} = \\ = -f_n(x^{(k)}), \end{cases}$$

kus

$$\left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{(k)} = \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{x_1 = x_1^{(k)}, \ldots x_n = x_n^{(k)}}$$

$$f_i(x^{(k)}) = f_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)});$$

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — alglähend.

Uus lähend arvutatakse seosest $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Näide 7.

$$\begin{cases} x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^2 + 7x_1 - 12 = 0, \\ x_1^2 x_2 - 3x_2^2 - 5x_1 - 1 = 0. \end{cases}$$

Valime $x_1^{(0)} = 6$; $x_2^{(0)} = 1$. Siis

$$\left.\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|_{(0)} = 1 - 12 + 7 = -4; \left.\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right|_{(0)} = 2 + 6 = 8;$$

$$\left.\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right|_{(0)} = 12 - 5 = 7; \left.\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right|_{(0)} = 36 - 6 = 30;$$

$$f_1(x^{(0)}) = 1; \quad f_2(x^{(0)}) = 2.$$

Süsteem $\Delta x_1^{(0)}$ ja $\Delta x_2^{(0)}$ määramiseks:

$$\begin{cases} -4\Delta x_1^{(0)} + 8\Delta x_2^{(0)} = -1, \\ 7\Delta x_1^{(0)} + 30\Delta x_2^{(0)} = -2, \end{cases}$$

kust $\Delta x_1^{(0)} \approx 0{,}0795$; $\Delta x_2^{(0)} \approx -0{,}0852$,
s. o. $x_1^{(1)} \approx 6{,}0795$; $x_2^{(1)} \approx 0{,}9148$.

Täpne lahend $x^* = (\sqrt{37},\ 7 - \sqrt{37}) = (6{,}0827\ldots,\ 0{,}9172\ldots)$.

5. Kõõlude meetod.

Võrrandisüsteem: $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Parandusvektor $\Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = (x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)}) = (\Delta x_1^{(k)}, \ldots, \Delta x_n^{(k)})$ leitakse igal iteratsioonisammul $(k = 1, 2, \ldots)$ lineaarsest võrrandisüsteemist

$$\Phi_k \Delta x^{(k)} = -F(x^{(k)}),$$

kusjuures $\Phi_k = (C_{ij}^{(k)})_{\substack{i=1,\ \ldots,n \\ j=1,\ \ldots,n}}$ või $\Phi_k = (d_{ij}^{(k)})_{\substack{i=1,\ \ldots,n \\ j=1,\ \ldots,n}}$;

$$C_{ij}^{(k)} = (x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)})^{-1} [f_i(x_1^{(k-1)}, \ldots, x_{j-1}^{(k-1)}, x_j^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) - f_i(x_1^{(k-1)}, \ldots, x_j^{(k-1)}, x_{j+1}^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})];$$

$$d_{ij}^{(k)} = (x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)})^{-1} [f_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_{j-1}^{(k)}, x_j^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)}) - f_i(x_1^{(k)}, \ldots, x_j^{(k)}, x_{j+1}^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})];$$

$$F(x^{(k)}) = (f_1(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}),\ f_2(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}),\ \ldots,\ f_n(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})),$$

$$\left.\begin{aligned} x^{(0)} &= (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \\ x^{(1)} &= (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}) \end{aligned}\right\} \text{— alglähendid.}$$

Uus lähend arvutatakse seosest $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$.

Näide 8. Rakendame kõõlude meetodi esimest varianti näites 7 vaadeldud süsteemile. Parandused $\Delta x_1^{(1)}$, $\Delta x_2^{(1)}$ leitakse võrrandisüsteemist

$$\begin{cases} \dfrac{f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) - f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(1)})}{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}} \Delta x_1^{(1)} + \\ + \dfrac{f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(1)}) - f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{x_2^{(1)} - x_2^{(0)}} \Delta x_2^{(1)} = -f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}), \\ \dfrac{f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) - f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(1)})}{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}} \Delta x_1^{(1)} + \\ + \dfrac{f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(1)}) - f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)})}{x_2^{(1)} - x_2^{(0)}} \Delta x_2^{(1)} = -f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}). \end{cases}$$

Valides $x_1^{(0)} = 6$; $x_2^{(0)} = 1$; $x_1^{(1)} = 6{,}1$; $x_2^{(1)} = 0{,}9$, saame

$$f_1(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = -0{,}21;\ f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(1)}) = 0{,}21;$$
$$f_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 1;\ f_2(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = -0{,}44;$$
$$f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(1)}) = -1{,}03;\ f_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = 2.$$

Süsteem $\Delta x_1^{(1)}$ ja $\Delta x_2^{(1)}$ määramiseks:

$$\begin{cases} -4{,}2\Delta x_1^{(1)} + 7{,}9\Delta x_2^{(1)} = 0{,}21, \\ 5{,}9\Delta x_1^{(1)} + 30{,}3\Delta x_2^{(1)} = 0{,}44, \end{cases}$$

kust $\Delta x_1^{(1)} \approx -0{,}0166$; $\Delta x_2^{(1)} \approx 0{,}0177$, s. o. $x_1^{(2)} \approx 6{,}0834$;
$x_2^{(2)} \approx 0{,}9177$.

6. Kiireima languse meetod.

Võrrandisüsteem: $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.
Algoritm:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{\|J^*(x^{(k)})F(x^{(k)})\|^2}{\|J(x^{(k)})J^*(x^{(k)})F(x^{(k)})\|^2} J^*(x^{(k)})F(x^{(k)})$$
$$(k = 0, 1, \ldots),$$

kus

$$J(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x_1 = x_1^{(k)},\ x_2 = x_2^{(k)}, \ldots, x_n = x_n^{(k)}};$$

$J^*(x^{(k)})$ — maatriksi $J(x^{(k)})$ transponeeritud maatriks;
$F(x^{(k)}) = (f_1(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), f_2(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}), \ldots, f_n(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}))$;
sümbol $\|a\|^2$ tähistab vektori a normi (pikkuse) ruutu, s. o. kui $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, siis $\|a\|^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$;

$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ — alglähend;
$x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ — k-s lähend.

Märgime, et algoritm saadakse, kui vaadeldava süsteemi võrrandid linеariseerida Taylori valemi abil punktis $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})$ ja saadud lineaarse võrrandisüs-

teemi ligikaudseks lahendamiseks rakendada kiireima languse meetodi (vt. lk. 137)) esimest sammu (saadud uue lähendi tähistame $x^{(k+1)}$).

7. Parameetri järgi diferentseerimise meetod.

Selgitame selle olemust näitega.

Näide 9. Olgu lahendada võrrandisüsteem

$$\begin{cases} y - \sin x + 1{,}32 = 0, \\ \cos y - x + 0{,}85 = 0. \end{cases}$$

Toome süsteemi sisse parameetri λ, nii et $\lambda = 0$ puhul süsteemi lahend oleks hõlpsasti arvutatav ning $\lambda = 1$ puhul parameetrit sisaldav süsteem ühtiks lähtesüsteemiga:

$$\begin{cases} y + \lambda(1{,}32 - \sin x) = 0, \\ \cos y - x + 0{,}85 = 0. \end{cases}$$

$\lambda = 0$ puhul saame $x = 1{,}85$; $y = 0$. Diferentseerides nüüd süsteemi λ järgi, saame

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\lambda} + 1{,}32 - \sin x - \lambda \cos x \frac{dx}{d\lambda} = 0, \\ -\sin y \frac{dy}{d\lambda} - \frac{dx}{d\lambda} = 0 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\lambda} = \sin y \frac{1{,}32 - \sin x}{1 + \lambda \cos x \sin y}, \\ \frac{dy}{d\lambda} = -\frac{1.32 - \sin x}{1 + \lambda \cos x \sin y}. \end{cases}$$

Saadud diferentsiaalvõrrandisüsteemi võime integreerida numbriliselt (lõigul $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, kusjuures $x(0) = 1{,}85$; $y(0) = 0$), kasutades ptk. IX meetodeid. Lähtesüsteemi lahend x^*, y^* saadakse $\lambda = 1$ puhul, s. o. $x^* = x(1)$, $y^* = y(1)$.*

* Lähemalt meetodist vt. Д. Ф. Давиденко. *О приближенном решении систем нелинейных уразнений.* Украинский матем. журнал, т. V, № 2, 1953.

8. Võrrandi $f(z) = 0$ komplekssete juurte leidmine.

Võrrand: $f(z) = 0$, $z = x + iy$.

Eraldame võrrandis $f(z) = 0$ reaal- ja imaginaarosa, s. o.

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

kus u ja v on juba reaalsed funktsioonid.

Seega võrrandi $f(z) = 0$ lahendamine on ekvivalentne võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} u(x, y) = 0, \\ v(x, y) = 0 \end{cases}$$

lahendamisega.

Kui $f(z)$ on analüütiline funktsioon, võime võrrandi $f(z) = 0$ lahendamiseks kasutada näiteks Newtoni meetodit (2)

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (n = 0, 1, \ldots);$$

z_0 — alglähend.

9. Mitme muutuja funktsiooni miinimumi (maksimumi) leidmine.

Olgu probleemiks minimiseerida (maksimiseerida) funktsioon

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Miinimumi (maksimumi) tarvilike tingimuste põhjal

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Probleem taandub mittelineaarse võrrandisüsteemi lahendamisele, milleks võib kasutada kõiki käesolevas alapeatükis vaadeldud meetodeid.

C. Spetsiaalseid meetodeid algebraliste võrrandite lahendamiseks

Algebraliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0; \quad (8)$$

$a_0, a_1, \ldots, a_n$ — mistahes reaalarvud.

Kui $a_0 \neq 0$, on meil tegemist n-astme algebralise võrrandiga.

Gaussi teoreem: n-astme algebralisel võrrandil on täpselt n reaalset või kompleksset lahendit, kui iga k-kordset lahendit arvesse võtta k korda.

Arvu x^* nimetatakse võrrandi (8) k-kordseks lahendiks, kui

$f(x^*) = f'(x^*) = \ldots = f^{(k-1)}(x^*) = 0$, kuid $f^{(k)}(x^*) \neq 0$.

Kui võrrandi (8) lahendiks on kompleksarv $a + bi$, siis on tema lahendiks ka kaaskompleksarv $a - bi$, s. o. komplekssed lahendid esinevad alati paarikaupa.

Märgime, et võrrandi (8) lahendite ligikaudseks leidmiseks võib peale allpool vaadeldavate meetodite kasutada kõiki alapeatükis A esitatud meetodeid.

1. Lobatševski meetod.

Olgu võrrandis (8) $a_0 = 1$.

Lobatševski meetodi puhul teisendatakse võrrandi kordajaid valemi

$$A_i^{(1)} = a_i^2 - 2a_{i-1}a_{i+1} + 2a_{i-2}a_{i+2} - 2a_{i-3}a_{i+3} + \ldots \quad (9)$$

järgi. Liikmeid valemis (9) võtame juurde seni, kuni jõuame võrrandi esimese või viimase kordajani.

Arvutusi on sobiv kanda järgmisse tabelisse:

1	a_1	a_2	...	a_i	...	a_n
1	a_1^2	a_2^2	...	a_i^2	...	a_n^2
	$-2a_2$	$-2a_1a_3$	...	$-2a_{i-1}a_{i+1}$	...	
		$2a_4$	...	$2a_{i-2}a_{i+2}$	...	
			...	$-2a_{i-3}a_{i+3}$	...	
			...	$2a_{i-4}a_{i+4}$	...	
			...	...	...	
1	$A_1^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	...	$A_i^{(1)}$	...	$A_n^{(1)}$
...	...	...	...	...	...	...

Üldiselt, lähtudes kordajatest $A_i^{(k-1)}$ $(k = 2, 3, \ldots)$ määratakse kordajad $A_i^{(k)}$ analoogiliselt valemiga (9)

$$A_i^{(k)} = (A_i^{(k-1)})^2 - 2A_{i-1}^{(k-1)}A_{i+1}^{(k-1)} + 2A_{i-2}^{(k-1)}A_{i+2}^{(k-1)} - \\ - 2A_{i-3}^{(k-1)}A_{i+3}^{(k-1)} + \ldots . \qquad (10)$$

a) Reaalsed ja erinevad juured.

Võrrandi kordajate teisendusi valemite (9) ja (10) abil jätkame senikaua, kuni saame etteantud täpsuse piirides võrdused

$A_i^{(k)} = (A_i^{(k-1)})^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Olgu $x_1, x_2, \ldots, x_n$ võrrandi reaalsed ja erinevad lahendid, kusjuures

$$|x_1| > |x_2| > \ldots > |x_n|.$$

Siis

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{A_1^{(k)}},$$
$$|x_2| \approx \sqrt[m]{A_2^{(k)}/A_1^{(k)}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_i| \approx \sqrt[m]{A_i^{(k)}/A_{i-1}^{(k)}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_n| \approx \sqrt[m]{A_n^{(k)}/A_{n-1}^{(k)}},$$

kus $m = 2^k$. Lahendite märgid määratakse proovimise teel.

b) Komplekssed juured.

Olgu võrrandil kaks kompleksset juurt, näiteks

$$x_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$x_3 = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

kusjuures

$$|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > \ldots > |x_n|.$$

Kompleksete juurte olemasolu tunnuseks on see, et kordajad $A_2^{(k)}$ hakkavad muutuma korrapäratult (teiste kordajate puhul jällegi küllalt suure k puhul $A_i^{(k)} \approx \approx (A_i^{(k-1)})^2$ $(i \neq 2)$).

Lahendite moodulid määratakse võrdustest

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{A_1^{(k)}},$$
$$r \approx \sqrt[2m]{A_3^{(k)}/A_1^{(k)}},$$

$$|x_4| \approx \sqrt[m]{A_4^{(k)}/A_3^{(k)}},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$|x_n| \approx \sqrt[m]{A_n^{(k)}/A_{n-1}^{(k)}}.$$

Kui kompleksed juured paikneksid j-nda ja $(j+3)$-nda juure vahel, s. o.

$$x_{j+1} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$
$$x_{j+2} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi),$$

kusjuures

$$|x_1| > |x_2| > \ldots > |x_j| > |x_{j+1}| = |x_{j+2}| > |x_{j+3}| > \ldots > |x_n|,$$

siis hakkavad korrapäratult muutuma kordajad $A_{j+1}^{(k)}$. Lahendite moodulid määratakse sel korral võrdustest

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{A_1^{(k)}},$$
$$|x_2| \approx \sqrt[m]{A_2^{(k)}/A_1^{(k)}},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$|x_j| \approx \sqrt[m]{A_j^{(k)}/A_{j-1}^{(k)}},$$
$$r \approx \sqrt[2m]{A_{j+2}^{(k)}/A_j^{(k)}},$$
$$|x_{j+3}| \approx \sqrt[m]{A_{j+3}^{(k)}/A_{j+2}^{(k)}},$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$|x_n| \approx \sqrt[m]{A_n^{(k)}/A_{n-1}^{(k)}}.$$

Argument φ määratakse Vieta valemi abil

$$-a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_j + 2r\cos\varphi + x_{j+3} + \ldots + x_n$$

Kui võrrandil on kaks paari kompleksseid lahendeid, näiteks

$$x_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
$$x_3 = r_1(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1),$$
$$x_5 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
$$x_6 = r_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2),$$

kusjuures $|x_1| > |x_2| = |x_3| > |x_4| > |x_5| = |x_6| > |x_7| > \ldots$ $\ldots > |x_n|$, siis hakkavad korrapäratult muutuma kordajad $A_2^{(k)}$ ja $A_5^{(k)}$. Lahendite moodulid määrame valemitest

$|x_1| \approx \sqrt[m]{A_1^{(k)}}$, $r_1 \approx \sqrt[2m]{A_3^{(k)}/A_1^{(k)}}$, $|x_4| \approx \sqrt[m]{A_4^{(k)}/A_3^{(k)}}$, $r_2 \approx$
$\approx \sqrt[2m]{A_6^{(k)}/A_4^{(k)}}$, $|x_7| \approx \sqrt[m]{A_7^{(k)}/A_6^{(k)}}$, ... jne.

Argumendi φ määramiseks üldjuhul toimitakse järgmiselt. Komplekssetele juurtele $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ja $r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ vastab polünoomi $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ teguriteks arenduses kolmliige $x^2 - 2px + r^2$. Jagame $f(x)$ kolmliikmega $x^2 - 2px + r^2$. Jäägiks R saame

$$R = P(p)x + Q(p).$$

Tundmatu p määratakse võrrandite $P(p) = 0$ ja $Q(p) = 0$ ühise lahendina. Leidnud p, arvutame φ valemi järgi

$$\varphi = \operatorname{Arccos}\frac{p}{r}.$$

c) Kordsed (või lähedased) juured.

Olgu x_2 ja x_3 lahendid, mis on moodulilt võrdsed (või lähedased). Sel juhul küllalt suure k puhul

$A_1^{(k)} \approx (A_1^{(k-1)})^2$, $A_2^{(k)} \approx \frac{1}{2}(A_2^{(k-1)})^2$,
$A_3^{(k)} \approx (A_3^{(k-1)})^2$, ...,

$A_n^{(k)} \approx (A_n^{(k-1)})^2$, s. o. erinevalt hakkavad käituma kordajad $A_2^{(k)}$. Lahendite moodulid määratakse valemitest

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{A_1^{(k)}},$$
$$|x_2| = |x_3| \approx \sqrt[2m]{A_3^{(k)}/A_1^{(k)}},$$
$$|x_4| \approx \sqrt[m]{A_4^{(k)}/A_3^{(k)}},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$|x_n| \approx \sqrt[m]{A_n^{(k)}/A_{n-1}^{(k)}}.$$

Kui võrrandil on moodulilt l võrdset (või lähedast) lahendit, näiteks $x_{i+1}, \ldots, x_{i+l}$, siis küllalt suure k puhul

$$A_{i+1}^{(k)} \approx \frac{1}{l}(A_{i+1}^{(k-1)})^2.$$

Lahendite moodulid määratakse valemitest

$$|x_1| \approx \sqrt[m]{A_1^{(k)}},$$

$$|x_2| \approx \sqrt[m]{A_2^{(k)}/A_1^{(k)}},$$

. . . . . .

$$|x_i| \approx \sqrt[m]{A_i^{(k)}/A_{i-1}^{(k)}}$$

$$|x_{i+1}| = \ldots = |x_{i+l}| \approx \sqrt[lm]{A_{i+l}^{(k)}/A_i^{(k)}}$$

$$|x_{i+l+1}| \approx \sqrt[m]{A_{i+l+1}^{(k)}/A_{i+l}^{(k)}},$$

. . . . . .

$$|x_n| \approx \sqrt[m]{A_n^{(k)}/A_{n-1}^{(k)}}.$$

Lähemalt Lobatševski meetodist vt. [3, 4].

2. Bernoulli meetod.

Eeldame, et võrrandis (8) $a_0 \neq 0$.

Bernoulli meetodi puhul

1) valitakse arvud $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, näiteks

$$y_0 = y_1 = \ldots = y_{n-2} = 0, \quad y_{n-1} = 1;$$

2) kasutades valemit

$$y_{n+i} = -\frac{1}{a_0}(a_n y_i + a_{n-1} y_{i+1} + \ldots + a_1 y_{n+i-1})$$

arvutatakse järk-järgult $y_n, y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$.

Siin tuleb eristada kolme juhtu.

a) Võrrandil (8) on üks (võib olla kordne) moodulilt suurim lahend x_1 (see lahend on ilmselt reaalne).

Siis suhe

$\frac{y_{k+1}}{y_k} \to x_1$, s. o. küllalt suure k puhul võime võtta $x_1 \approx \frac{y_{k+1}}{y_k}$

b) Võrrandil (8) on kaks reaalset moodulilt suurimat (võivad olla kordsed) lahendit x_1 ja $(-x_1)$.

Siis suhe

$$\frac{y_{k+2}}{y_k} \to x_1^2,$$

kusjuures jada $\left\{\frac{y_{k+1}}{y_k}\right\}$ hajub.

c) Võrrandil (8) on paar kompleksseid (võivad olla kordsed) moodulilt suurimaid lahendeid $x_1 = \varrho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $x_2 = \varrho\,(\cos\varphi - i\sin\varphi)$.

Moodustame determinandid

$$S_k = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ y_{k-1} & y_k \end{vmatrix} \quad \text{ja} \quad t_k = \begin{vmatrix} y_k & y_{k+1} \\ y_{k-2} & y_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Sel juhul koonduvad jadad $\left\{\frac{S_k}{S_{k-1}}\right\}$ ja $\left\{\frac{t_k}{S_{k-1}}\right\}$. Lahendid x_1 ja x_2 leitakse ruutvõrrandist

$$x^2 + px + q = 0,$$

kusjuures küllalt suure k puhul

$$p \approx -\frac{t_k}{S_{k-1}} \quad \text{ja} \quad q = \varrho^2 \approx \frac{S_k}{S_{k-1}}.$$

Moodulilt teise lahendi (lahendite) x_2 leidmiseks moodustatakse uus jada $\{y_k'\}$ sõltuvalt jada $\{y_k\}$ koonduvustüübist:

juhul (a) $\ldots y_k' = y_{k+1} - x_1 y_k$,
juhul (b) $\ldots y_k' = y_{k+2} - x_1^2 y_k$,
juhul (c) $\ldots y_k' = y_{k+2} + p y_{k+1} + q y_k$.

Moodulilt teine lahend x_2 leitakse jada $\{y_k'\}$ abil täpselt samuti nagu moodulilt suurim lahend jada $\{y_k\}$ abil. Pärast seda, kui moodulilt teine lahend on leitud, moodustatakse jada $\{y_k'\}$ koonduvustüübist lähtudes uus jada $\{y_k''\}$ alljärgnevalt:

juhul (a) $\ldots y_k'' = y_{k+1}' - x_2 y_k'$,
juhul (b) $\ldots y_k'' = y_{k+2}' - x_2^2 y_k'$,
juhul (c) $\ldots y_k'' = y_{k+2}' + p' y_{k+1}' + q' y_k'$,

kus

$$p' \approx -\frac{t_k'}{S_{k-1}'}; \quad q' \approx \frac{S_k'}{S_{k-1}'}; \quad S_k' = \begin{vmatrix} y_k' & y_{k+1}' \\ y_{k-1}' & y_k' \end{vmatrix};$$

$$t_k' = \begin{vmatrix} y_k' & y_{k+1}' \\ y_{k-2}' & y_{k-1}' \end{vmatrix}.$$

Jada $\{y_k''\}$ abil leitakse moodulilt kolmas lahend jne. jne. Lähemalt Bernoulli meetodist vt. [3].

Näide 10. Leiame võrrandi

$$x^3 - x^2 - x - 2 = 0$$

moodulilt suurima juure.

Jada $\{y_i\}$ arvutame valemi

$$y_{i+3} = 2y_i + y_{i+1} + y_{i+2} \quad (i = 0, 1, \ldots)$$

järgi, valides

$$y_0 = 0;\ y_1 = 0;\ y_2 = 1.$$

Saame:

$y_3 = 1,$
$y_4 = 1 + 1 = 2,$ $y_4/y_3 = 2{,}00;$
$y_5 = 2 + 1 + 2 = 5,$ $y_5/y_4 = 2{,}50;$
$y_6 = 2 + 2 + 5 = 9,$ $y_6/y_5 = 1{,}80;$
$y_7 = 4 + 5 + 9 = 18,$ $y_7/y_6 = 2{,}00;$
$y_8 = 10 + 9 + 18 = 37,$ $y_8/y_7 = 2{,}06;$
$y_9 = 18 + 18 + 37 = 73,$ $y_9/y_8 = 1{,}97;$
$y_{10} = 36 + 37 + 73 = 146,$ $y_{10}/y_9 = 2{,}00;$
$y_{11} = 74 + 73 + 146 = 293,$ $y_{11}/y_{10} = 2{,}01;$ jne.

Võrrandi täpseks (moodulilt suurimaks) lahendiks on siin $x^* = 2$.

Kirjandust

1. Н. С. Березин, И. П. Жидков. *Методы вычислений II.* Москва, 1959.
2. А. М. Островский. *Решение уравнений и систем уравнений.* Москва, 1963.
3. В. Л. Загускин. *Справочник по численным методам решения уравнений.* Москва, 1960.
4. Г. Н. Положий и др., *Математический практикум.* Москва, 1960.
5. А. С. Хаусхолдер. *Основы численного анализа.* Москва, 1956

VIII HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Harilike diferentsiaalvõrrandite puhul esineb põhiliselt kahte tüüpi ülesandeid:

a) nn. Cauchy ülesanded, mille puhul otsitav funktsioon ja tema tuletised kuni järguni $n-1$ (n — diferentsiaalvõrrandi järk) peavad mingis punktis omandama etteantud väärtusi (nn. algtingimused).

Näiteks: leida funktsioon $y=y(x)$, mis rahuldab diferentsiaalvõrrandit $y''=f(x, y, y')$ ja algtingimusi $y(x_0)=y_0$, $y'(x_0)=y_0'$ (y_0, y_0' on ette antud).

b) nn. rajaülesanded, mille puhul otsitav lahend peab rahuldama teatavaid tingimusi (nn. rajatingimusi) etteantud lõigu $[a, b]$ otspunktides (tavaliselt antakse n-järku võrrandi puhul n rajatingimust).

Näiteks: leida funktsioon $y=y(x)$, mis rahuldab lõigul $[a, b]$ diferentsiaalvõrrandit $y''=f(x, y, y')$ ja rajatingimusi $y(a)=\gamma_1$, $y'(b)=\gamma_2$ (γ_1, γ_2 — etteantud konstandid).

Vaadeldakse ka veel nn. omaväärtusülesandeid (vt. lk. 194).

Diferentsiaalvõrrandite lahendite olemasolu- ja ühesusteoreeme vt. [3, 7].

A. Cauchy ülesannete ligikaudsed lahendusmeetodid

1. Picard'i meetod.

Võrrand: $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$. (1)

Algtingimus: $y(x_0)=y_0$. (2)

Algoritm: $y_{(n+1)}(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x, y_{(n)}(x))\,dx$

$(n=0, 1, 2, \ldots)$; $y_{(0)}(x)\equiv y_0$.

Teoreem. Kui funktsioon $f(x, y)$ rahuldab y järgi Lipschitzi tingimust, s. o.

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leqslant K|y - \tilde{y}|,$$

siis küllalt väikesel lõigul $[x_0, x_0 + h]$

$$\lim_{n\to\infty} y_{(n)}(x) = y(x),$$

kusjuures $y(x)$ rahuldab diferentsiaalvõrrandit (1) ja algtingimust (2).

Näide 1. $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y^3 + x^2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$

Valime $y_{(0)}(x) \equiv 0$. Siis

$$y_{(1)}(x) = \int_0^x x^2 dx = \frac{x^3}{3};$$

$$y_{(2)}(x) = \int_0^x \left(-\frac{x^9}{27} + x^2\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{270} \quad \text{jne.}$$

2. Astmeridade meetod.

Võrrand: $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$. (3)
Algtingimused: $y = y_0, y' = y_0', \ldots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, kui $x = x_0$.

Võrrandi (3) lahendit otsitakse Taylori rea kujul

$$y = y_0 + y_0'(x - x_0) + \frac{y_0''}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{y_0^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n +$$
$$+ \frac{y_0^{(n+1)}}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + \ldots + \frac{y_0^{(n+k)}}{(n+k)!}(x - x_0)^{n+k} + \ldots \quad (4)$$

Kordajad $y_0, y_0', \frac{y_0''}{2!}, \ldots, \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}$ asendame algtingimustest. Kordaja $\frac{y_0^{(n)}}{n!}$ leiame võrrandist (3), mille põhjal

$$y_0^{(n)} = f(x_0, y_0, y_0', y_0'', \ldots, y_0^{(n-1)}).$$

Järgmised kordajad määratakse järk-järgult, diferentseerides võrrandit (3). Näiteks saame

$$y^{(n+1)} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} =$$
$$= f_1(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y_0^{(n+1)} = f_1(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)});$$
$$y^{(n+2)} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y} y' + \frac{\partial f_1}{\partial y'} y'' + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial y^{(n-1)}} y^{(n)} =$$
$$= f_2(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$
$$y_0^{(n+2)} = f_2(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) \text{ jne.}$$

Rea (4) koonduvusraadiuse leidmine on üldjuhul küllalt raske (vt. [7]). Tavaliselt kehtib see reaksarendus ainult x_0 lähemas ümbruses. Seepärast kasutatakse astmeridade meetodit sageli vaid abimeetodina (näit. ekstrapolatsioonimeetodite (vt. lk. 181) puhul).

3. Newtoni meetod.

Võrrand: $y' = f(x, y)$.
Algtingimus: $y(x_0) = y_0$.
Igal iteratsioonisammul lahendatakse lineaarne Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} \frac{dy_{(n+1)}}{dx} = f(x, y_{(n)}) + (y_{(n+1)} - y_{(n)}) \frac{\partial f(x, y_{(n)})}{\partial y}, \\ y_{(n+1)}(x_0) = y_0, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \end{cases}$$

$y_{(0)}(x)$ — alglähend, mis rahuldab algtingimust.

4. Steffenseni meetod.

Võrrand: $y' = f(x, y)$.
Algtingimus: $y(x_0) = y_0$.
Igal iteratsioonisammul lahendatakse lineaarne Cauchy ülesanne:

$$\begin{cases} \frac{dy_{(n+1)}}{dx} = f(x, y_{(n)}) + (y_{(n+1)} - y_{(n)}) \frac{f(x, y_{(n)}) - f(x, u_{(n)})}{y_{(n)} - u_{(n)}}, \\ y_{(n+1)}(x_0) = y_0, \end{cases}$$

kusjuures $u_{(n)} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{(n)}(x))\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$;

$y_{(0)}(x)$ — alglähend, mis rahuldab algtingimust.

Näide 2.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y^3 + x^2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Valime $y_{(0)}(x) \equiv 0$. Siis $u_0(x) = \frac{x^3}{3}$ (vrd. näide 1, lk. 176).

$y_{(1)}(x)$ leidmiseks saame lineaarse ülesande:

$$\begin{cases} \frac{dy_{(1)}}{dx} = x^2 - \frac{x^6}{9} y_{(1)}; \\ y_{(1)}(0) = 0. \end{cases}$$

Otsides ülesande lahendit astmerea kujul

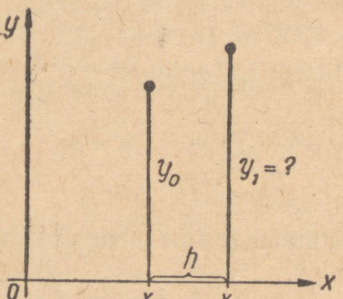
$$y_{(1)}(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots ,$$

saame

$$y_{(1)}(x) \approx \frac{x^3}{3} - \frac{x^{10}}{270} + \frac{x^{17}}{153 \cdot 270}.$$

5. Runge-Kutta tüüpi meetodid.

Võrrand: $y' = f(x, y)$.
Algtingimus: $y(x_0) = y_0$.
Diferentsiaalvõrrandi numbriline lahendamine Runge-Kutta tüüpi meetoditega taandub funktsiooni y väärtuste arvutamisele argumentide väärtuste mingi jada $x_0 < x_1 < x_2 < \dots$ puhul. Tähistame $y_i = y(x_i)$ ja $x_1 - x_0 = h$. Kui on näidatud meetod, kuidas punkti (x_0, y_0) järgi leida punkti (x_1, y_1), siis protsessi kordamisel võime y_i leida järk-järgult suvalise i puhul. Seepärast on piisav vaadelda y_1 arvutamist.



Joon. 1.

a) Esimest järku Runge-Kutta meetod (Euleri meetod).

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0).$$

Valemi viga*: $O(h^2)$.

b) Teist järku Runge-Kutta meetodid.

I variant: $y_1 = y_0 + hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{hf(x_0, y_0)}{2}\right)$;

II variant: $k_1 = hf(x_0, y_0)$;

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1);$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2).$$

Valemite viga mõlemal juhul: $O(h^3)$.

c) Kolmandat järku Runge-Kutta meetod.

$$k_1 = hf(x_0, y_0);$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = hf(x_0 + h, y_0 - k_1 + 2k_2);$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3);$$

$$y_1 = y_0 + k.$$

Valemi viga: $O(h^4)$.

d) Neljandat järku Runge-Kutta meetod.

$$k_1 = hf(x_0, y_0);$$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}\right);$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}\right);$$

---

* Hinnang $O(h^k)$ tähendab, et $|y_1$ (tegelik) $- y_1$ (arvutatud)$| \leqslant \leqslant M_k h^k$, kus M_k on teatav konstant. Näiteks $k = 2$ puhul võime võtta $M_2 = \frac{1}{2} \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h} |y''(x)|$. Lähemalt vea hindamisest Runge-Kutta meetodi puhul vt. [1].

$$k_4 = hf(x_0 + h,\ y_0 + k_3);$$
$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4);$$
$$y_1 = y_0 + k.$$

Valemi viga: $O(h^5)$.

Neljandat järku Runge-Kutta meetodit kasutatakse praktikas kõige sagedamini.

Näide 3.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y^3 + x^2; \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Vaadeldaval juhul $y_0 = y(0) = 0$. Valime $h = 0{,}1$ ja arvutame neljandat järku Runge-Kutta meetodiga $y_1 = y(0{,}1)$. Saame

$k_1 = 0{,}1 \cdot f(0{,}0) = 0;$

$k_2 = 0{,}1 \cdot f(0{,}05;\ 0) = 0{,}1 \cdot 0{,}05^2 = 0{,}00025;$

$k_3 = 0{,}1 \cdot f(0{,}05;\ 0{,}000125) = 0{,}1[0{,}0025 - 0{,}000125^3] \approx$
$\approx 0{,}00025;$

$k_4 = 0{,}1f(0{,}1;\ 0{,}00025) = 0{,}1[0{,}01 - 0{,}00025^3] \approx 0{,}00100;$

$k = \frac{1}{6}(0 + 0{,}00050 + 0{,}00050 + 0{,}00100) = \frac{1}{6} \cdot 0{,}00200 =$
$= 0{,}00033;$

$y_1 \approx 0{,}00033.$

6. Ekstrapolatsiooni- ja interpolatsioonivalemid.

Võrrand: $y' = f(x, y)$.

Algtingimus: $y(x_0) = y_0$.

Diferentsiaalvõrrandi lahendamine taandatakse funktsiooni y väärtuste arvutamisele argumentide väärtuste jada x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_i = x_0 + ih$, ... puhul. Tähistame $y_i = y(x_i)$ ja $y_i' = y'(x_i) = f(x_i, y_i)$.

Ekstrapolatsioonivalemeid:

Jrk. nr.	Valem	Valemi viga ühel sammul (vrd. lk. 179)
1.	$y_{i+1} = y_i + hy_i'$	$O(h^2)$
2.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(3y_i' - y_{i-1}')$	$O(h^3)$
3.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{12}h(23y_i' - 16y_{i-1}' + 5y_{i-2}')$	$O(h^4)$
4.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24}h(55y_i' - 59y_{i-1}' + 37y_{i-2}' - 9y_{i-3}')$	$O(h^5)$
5.	$y_{i+1} = y_{i-1} + 2hy_i'$	$O(h^3)$
6.	$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3}h(7y_i' - 2y_{i-1}' + y_{i-2}')$	$O(h^4)$
7.	$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3}h(8y_i' - 5y_{i-1}' + 4y_{i-2}' - y_{i-3}')$	$O(h^5)$

Ekstrapolatsioonivalemite puhul on arvutuste alustamiseks vaja teada mõned y_i väärtused, mis leitakse mingite teiste meetoditega (näiteks Runge-Kutta (vt. lk. 178), Picard'i (vt. lk. 175) või astmerea (vt. lk. 176) meetoditega). Nii on valemi 3 rakendamiseks vaja teada y_0, y_1 ja y_2 (seejuures on y_0 antud algtingimusega). Edasi võime arvutada

$$y_3 = y_2 + \frac{1}{12}h(23y_2' - 16y_1' + 5y_0');$$

$$y_4 = y_3 + \frac{1}{12}h(23y_3' - 16y_2' + 5y_1') \text{ jne.}$$

Siin y_0', y_1' ... leiame seostest $y_0' = f(x_0, y_0)$; $y_1' = f(x_1, y_1)$; ....

Interpolatsioonivalemeid:

Jrk. nr.	Valem	Valemi viga ühel sammul
1.	$y_{i+1} = y_i + hy_{i+1}'$	$O(h^2)$
2.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}h(y_{i+1}' + y_i')$	$O(h^3)$
3.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{12}h(5y_{i+1}' + 8y_i' - y_{i-1}')$	$O(h^4)$
4.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{24}h(9y_{i+1}' + 19y_i' - 5y_{i-1}' + y_{i-2}')$	$O(h^5)$
5.	$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{720}h(251y_{i+1}' + 646y_i' - 264y_{i-1}' + 106y_{i-2}' - 19y_{i-3}')$	$O(h^6)$
6.	$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{1}{3}h(y_{i+1}' + 4y_i' + y_{i-1}')$	$O(h^5)$

Interpolatsioonivalemid on üldiselt täpsemad kui vastavad ekstrapolatsioonivalemid. Nende rakendamisel on aga y_{i+1} leidmiseks vaja lahendada algebraline või transtsendentne võrrand.

Interpolatsioonivalemeid võib kasutada ka ekstrapolatsioonivalemite rakendamisel saadud y_{i+1} täpsustamiseks.

Näiteks arvutame ekstrapolatsioonivalemi 3 abil esialgselt y_{i+1} väärtuse

$$y_{i+1}^{(1)} = y_i + \frac{1}{12}h[23y_i' - 16y_{i-1}' + 5y_{i-2}'].$$

Tulemust täpsustame interpolatsioonivalemi 3 abil

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + \frac{1}{12}h[5y_{i+1}^{(1)\prime} + 8y_i' - y_{i-1}'],$$

kus $y_{i+1}^{(1)\prime} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(1)})$.

Leitud $y_{i+1}^{(2)}$ võtame y_{i+1} väärtuseks.

7. Milne'i meetod

Võrrand: $y' = f(x, y)$.

Algtingimus: $y(x_0) = y_0$.

Diferentsiaalvõrrandi lahendamine taandatakse funkt-

siooni y väärtuste arvutamisele argumentide väärtuste jada x_0, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h$, ..., $x_i = x_0 + ih$, ... puhul. Tähistused: $y_i = y(x_i)$, $y_i' = f(x_i, y_i)$. Eeldame, et y_0, y_1, y_2, y_3 on leitud (kasutades algtingimust ja mingit muud meetodit, näiteks Picard'i (vt. lk. 175), Runge-Kutta (vt. lk. 178) või astmerea (vt. lk. 176) meetodit).

Edasised y_i väärtused ($i = 4, 5, \ldots$) määratakse järkjärgult alljärgnevalt:

1) $y_i^{(1)} = y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2y_{i-3}' - y_{i-2}' + 2y_{i-1}')$, ($y_i^{(1)}$ on y_i esimene lähend);

2) $y_i^{(1)\prime} = f(x_i, y_i^{(1)})$;

3) $y_i^{(2)} = y_{i-2} + \frac{h}{3}(y_{i-2}' + 4y_{i-1}' + y_i^{(1)\prime})$, ($y_i^{(2)}$ on y_i teine lähend).

Seejuures $y_i^{(2)}$ absoluutne viga

$$\varepsilon_i \approx \frac{1}{29}|y_i^{(2)} - y_i^{(1)}|.$$

Kui see täpsus meid rahuldab, võtame $y_i = y_i^{(2)}$ ja asume sama skeemi järgi y_{i+1} arvutamisele. Vastasel korral tuleb vähendada sammu h ja arvutada uuesti $y_i^{(1)}$ ning $y_i^{(2)}$.

8. Diferentsiaalvõrrandite süsteemid normaalkujul.

Esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemi normaalkuju:

$$\left.\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases}\right\} \quad (4)$$

Algtingimused:

$$y_1(x_0) = y_{10};\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0}.$$

Otsitavateks on funktsioonid

$$y_1 = y_1(x);\ y_2 = y_2(x);\ \ldots;\ y_n = y_n(x).$$

Tähistades

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n),$$
$$F = (f_1, f_2, \ldots, f_n),$$
$$Y_0 = (y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}),$$

võime vaadeldava ülesande (4) kirjutada lühidalt vektorkujul

$$\begin{cases} \frac{dY}{dx} = F(x, Y); \\ Y(x_0) = Y_0. \end{cases} \tag{4'}$$

Ülesande (4) (või (4')) lahendamiseks on ülekantavad käesoleva alapeatüki punktides 1—7 vaadeldud meetodid.

Näiteks Picard'i meetodi (vt. lk. 175) puhul määratakse järkjärgulised lähendid $Y_{(n+1)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ seosest

$$Y_{(n+1)}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(x, Y_{(n)}(x))\,dx,$$

kus

$$Y_{(0)}(x) = Y_0$$

ja

$$\int_{x_0}^{x} F(x, Y)\,dx = \left(\int_{x_0}^{x} f_1 dx, \int_{x_0}^{x} f_2 dx, \ldots, \int_{x_0}^{x} f_n dx\right).$$

Näide 4. Võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2^2 + 2x, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_2^2 - x^2 + 1. \end{cases}$$

Algtingimused: $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = 0$.

Antud juhul $Y_{(0)}(x) = (0; 0)$. Tähistame $Y_{(n)}(x) = (y_{1(n)}(x), y_{2(n)}(x))$. Saame

$$y_{1(1)}(x) = \int_0^x 2x\,dx = x^2;$$

$$y_{2(1)}(x) = \int_0^x (1 - x^2)\,dx = x - \frac{x^3}{3};$$

$$y_{1(2)}(x) = \int_0^x \left[x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 + 2x\right] dx =$$

$$= \int_0^x \left[2x + \frac{2x^4}{3} - \frac{x^6}{9}\right] dx = x^2 + \frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{63};$$

$$y_{2(2)}(x) = \int_0^x \left[\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 - x^2 + 1\right] dx =$$

$$= \int_0^x \left[1 - \frac{2x^4}{3} + \frac{x^6}{9}\right] dx = x - \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{63}.$$

Märgime, et antud süsteemi täpne lahend on $y_1^*(x) = x^2$; $y_2^*(x) = x$.

Neljandat järku Runge-Kutta meetod (vt. lk. 179) avaldub süsteemi (4) (või (4′)) lahendamiseks alljärgnevalt:

$$K_1 = hF(x_0,\ Y_0);$$
$$K_2 = hF\left(x_0 + \frac{h}{2},\ Y_0 + \frac{K_1}{2}\right);$$
$$K_3 = hF\left(x_0 + \frac{h}{2},\ Y_0 + \frac{K_2}{2}\right);$$
$$K_4 = hF(x_0 + h,\ y_0 + K_3);$$
$$K = \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4);$$
$$Y_1 = Y_0 + K.$$

Siin $Y_1 = Y(x_1)$.

9. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid.

Võrrand: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. (5)

Algtingimused: $y(x_0) = y_0$; $y'(x_0) = y_0'$; $\ldots$; $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Spetsiaalseid meetodeid me kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks ei vaatle, kuna neid võrrandeid võib taandada diferentsiaalvõrrandite süsteemi-

dele normaalkujul. Võrrand (5) on ekvivalentne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \vdots \\ \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}, \\ \frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}). \end{cases}$$

Algtingimusteks saame

$$y(x_0) = y_0;\ y_1(x_0) = y_0';\ y_2(x_0) = y_0'';\ \ldots;\ y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Näide 5. Võrrand

$$y'' = y'^2 + 5xy^3$$

on ekvivalentne võrrandisüsteemiga

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y_1, \\ \frac{dy_1}{dx} = y_1^2 + 5xy^3. \end{cases}$$

B. Rajaülesannete ligikaudsed lahendusmeetodid

1. Lineaarsete rajaülesannete taandamine Cauchy ülesannetele.

Diferentsiaalvõrrand: $L(y) = R(x)$. (6)
Rajatingimused: $S_i(y) = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. (7)
Siin

$$L(y) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x) y^{(i)}$$

ja

$$S_i(y) = \sum_{k=0}^{n-1} [a_{ik} y^{(k)}(a) + b_{ik} y^{(k)}(b)];$$

$f_i(x)$, $R(x)$ — lõigul $[a, b]$ antud pidevad funktsioonid; a_{ik}, b_{ik}, γ_i — antud konstandid; $y = y(x)$ — otsitav funktsioon (lõigul $[a, b]$).

Diferentsiaalvõrrandi (6) üldlahend avaldub kujul

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + z(x),$$

kus

a) $y_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ on homogeense võrrandi $L(y_k) = 0$ erilahend algtingimustel

$$y_k^{(i)}(a) = \begin{cases} 0, \text{ kui } i \neq k-1 \\ 1, \text{ kui } i = k-1 \end{cases}$$

$$(i = 0, 1, \ldots, n-1;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Näiteks teist järku diferentsiaalvõrrandi puhul lahendame järgmised ülesanded:

1) $\begin{cases} L(y_1) = 0; \\ y_1(a) = 1, \\ y_1'(a) = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} L(y_2) = 0; \\ y_2(a) = 0, \\ y_2'(a) = 1. \end{cases}$

b) $z(x)$ määratakse mittehomogeensest võrrandist

$$L(z) = R(x)$$

homogeensetel algtingimustel

$$z^{(i)}(a) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

c) c_k on suvalised konstandid.

Et leida rajaülesande (6), (7) lahend, selleks tuleb avaldis $y(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(x) + z(x)$ allutada rajatingimustele $S_i(y) = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, mis annab n võrrandit n tundmatu c_k määramiseks.

2. Väikese parameetri meetod (häiritusmeetod).

Diferentsiaalvõrrand: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. (8)

Rajatingimused: $S_i(y) = \gamma_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (vt. punkt 1).

Konstrueerime võrrandi

$$G(\varepsilon, x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (9)$$

nii et oleksid täidetud tingimused

a) $\varepsilon = 1$ puhul võrrand (9) ühtib võrrandiga (8).

b) $\varepsilon = 0$ puhul on võrrand (9) lihtsalt lahenduv.

Eeldame, et võrrandi (9) lahend rajatingimustel

$S_i(y) = \gamma_i$ avaldub kujul $y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x)$. Asetades $y(x, \varepsilon)$ avaldise võrrandisse (9), saame (pärast korraldamist ε astmete järgi):

$$G(\varepsilon, x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p G_p.$$

Lahendame lineaarsed rajaülesanded

$$\begin{cases} G_0 = G(0, x, y_0, \ldots, y_0^{(n)}) = 0, \\ S_i(y_0) = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} G_p(y_p) = 0, \quad (p = 1, 2, \ldots), \\ S_i(y_p) = 0. \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Lähteülesande lahend avaldub kujul

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) + y_2(x) + \ldots .$$

Näide 6. (vt. [8])

$$\begin{cases} y'' + (1 + x^2)y + 1 = 0; \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Valides

$$G(\varepsilon, x, y, y', y'') = y'' + (1 + \varepsilon x^2)y + 1,$$

saame $\varepsilon = 0$ puhul ülesande

$$\begin{cases} y_0'' + y_0 + 1 = 0, \\ y_0(-1) = y_0(1) = 0. \end{cases}$$

Siit

$$y_0(x) = \frac{\cos x}{\cos 1} - 1.$$

Otsides võrrandi $G(\varepsilon, x, y, y', y'') = 0$ lahendit kujul

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k(x),$$

saame seose

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k (y_k'' + y_k) + \varepsilon x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k y_k + 1 = 0.$$

$y_1(x)$ leidmiseks saame ülesande

$$\begin{cases} y_1'' + y_1 = x^2 \left(1 - \frac{\cos x}{\cos 1}\right), \\ y_1(-1) = 0, \ y_1(1) = 0, \end{cases}$$

mille lahendiks on

$$y_1(x) = x^2 - 2 + \frac{1}{12\cos 1}[(3x - 2x^3)\sin x - 3x^2\cos x] +$$
$$+ \frac{1}{12\cos^2 1}(15\cos 1 - \sin 1)\cos x \text{ jne.}$$

3. Newtoni meetod.

Vaatleme näitena mittelineaarse diferentsiaalvõrrandi

$$y'' = f(x, y, y')$$

lahendamist rajatingimustel

$$y(a) = \gamma_1,\ y(b) = \gamma_2.$$

Olgu $y_0(x)$ — alglähend, mis rahuldab rajatingimusi. Lähendid $y_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ määratakse järk-järgult lineaarsetest rajaülesannetest

$$\begin{cases} y_n'' = f(x, y_{n-1}, y_{n-1}') + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{y=y_{n-1}\\ y'=y_{n-1}'}} \cdot (y_n - y_{n-1}) + \\ \qquad + \left.\frac{\partial f}{\partial y'}\right|_{\substack{y=y_{n-1}\\ y'=y_{n-1}'}} \cdot (y_n' - y_{n-1}'), \\ y_n(a) = \gamma_1;\quad y_n(b) = \gamma_2. \end{cases}$$

Näide 7.

$$\begin{cases} y'' = y'^2 - 4y + 2; \\ y(0) = 0;\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Valime $y_0(x) = x$; siis $y_0'(x) = 1$. Järgmise lähendi $y_1(x)$ arvutamiseks saame võrrandi

$$y_1'' = (1 - 4x + 2) + (-4)(y_1 - y_0) + 2(y_1' - 1)$$

ehk

$$y_1'' - 2y_1' + 4y_1 = 1.$$

Lahendades võrrandi rajatingimustel $y_1(0) = 0$, $y_1(1) = 1$, saame

$$y_1(x) = e^x\left(-\frac{1}{4}\cos\sqrt{3}x + \frac{3 + e\cos\sqrt{3}}{4e\sin\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{1}{4}.$$

4. Diferentsmeetod.

Vaatleme näitena teist järku lineaarse rajaülesande

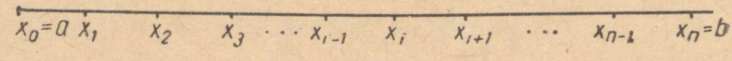
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{10}$$

lahendamist rajatingimustel

$$\begin{aligned} a_0 y(a) + b_0 y'(a) &= A, \\ a_1 y(b) + b_1 y'(b) &= B. \end{aligned} \tag{11}$$

Siin $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ on antud pidevad funktsioonid; a_0, b_0, a_1, b_1, A, B — antud konstandid.

Jaotame lõigu $[a, b]$ n võrdseks osaks pikkusega h (meetodi samm):



Joon. 2.

Vaatleme veel punkte $x_{-1} = x_0 - h$ ja $x_{n+1} = x_n + h$. Tähistame

$$y_i = y(x_i),\ p_i = p(x_i),\ q_i = q(x_i),\ f_i = f(x_i)$$

$$(i = 0, \ldots, n).$$

Asendades võrrandis (10) ja rajatingimustes (11) tuletised diferentssuhetega (vt. lk. 32, 34), saame y_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ leidmiseks $(n+1)$ võrrandist koosneva lineaarse võrrandisüsteemi:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i,$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Suuruste $y_{-1} = y(x_{-1})$ ja $y_{n+1} = y(x_{n+1})$ elimineerimiseks kasutame rajatingimusi (asendades ka nendes tuletised diferentssuhetega)

$$a_0 y_0 + b_0 \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} = A;$$

$$a_1 y_n + b_1 \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} = B.$$

Märgime, et nii võrrand kui ka rajatingimused on aproksimeeritud sama täpsusega $(O(h^2))$.

Mittelineaarse rajaülesande lahendamine diferents-

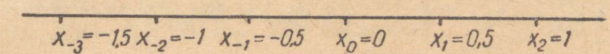
meetodiga taandab probleemi mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamisele y_i suhtes.

Diferentsmeetodi täpsust võib tõsta, kasutades täpsemaid diferentsvalemeid. Selgitame seda näite abil.

Näide 8. Lahendame rajaülesande

$$\begin{cases} y'' + x^2 y + 1 = 0; \\ y(-1) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Valime $h = 0{,}5$.



Joon. 3.

Rajatingimustest saame $y_2 = y_{-2} = 0$. Sümmeetria tõttu $y_1 = y_{-1}$.

Kasutades näiteks y'' aproksimeerimiseks täpsemat diferentsvalemit (vt. lk. 34)

$$y_i'' = \frac{1}{12h^2}(-y_{i-3} + 4y_{i-2} + 6y_{i-1} - 20y_i + 11y_{i+1}) + O(h^3) \quad (i = 0,\ 1),$$

saame y_0 ja y_1 määramiseks diferentsvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} \dfrac{-y_{-3} + 17y_1 - 20y_0}{12h^2} + 1 = 0, \\ \dfrac{-16y_1 + 6y_0}{12h^2} + \dfrac{1}{4}y_1 + 1 = 0. \end{cases}$$

Suuruse y_{-3} elimineerimiseks kasutame diferentsiaalvõrrandit (punktis $x = -1$), asendades selles y_2'' valemiga (vt. lk. 34)

$$y_2'' = \frac{1}{12h^2}(11y_{-3} - 20y_{-2} + 6y_{-1} + 4y_0 - 2y_1).$$

Seega saame y_{-3} elimineerimiseks seose

$$\frac{1}{12h^2}(11y_{-3} + 4y_1 + 4y_0) + 1 = 0.$$

Diferentsmeetodi täpsuse tõstmiseks kasutatakse ka teatavaid ligikaudseid valemeid *, mis seovad funktsiooni

* Valemite tuletamisest vt. [8, 9].

ja tema tuletiste väärtusi punktides $x_i = ih$. Toome mõned niisugused valemid (siin $y_i = y(ih)$; $y_{(i)}^{(k)} = y^{(k)}(ih)$:

Jrk. nr.	Valem	Valemi viga *
1.	$y_{i+1}' + y_i' - \frac{2}{h}(y_{i+1} - y_i) = 0$	$O(h^2)$
2.	$y_{i+1}' + 4y_i' + y_{i-1}' - \frac{3}{h}(y_{i+1} - y_{i-1}) = 0$	$O(h^4)$
3.	$y_{i+1}' + 3y_i' + y_{i-1}' - \frac{1}{12h}(y_{i+2} + 28y_{i+1} - 28y_{i-1} - y_{i-2}) = 0.$	$O(h^6)$
4.	$y_{i+1}'' + 10y_i'' + y_{i-1}'' - \frac{12}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 0$	$O(h^4)$
5.	$2y_{i+1}'' + 11y_i'' + 2y_{i-1}'' - \frac{3}{4h^2}(y_{i+2} + 16y_{i+1} - 34y_i + 16y_{i-1} + y_{i-2}) = 0$	$O(h^6)$
6.	$y_{i+1}''' + 2y_i''' + y_{i-1}''' - \frac{2}{h^3}(y_{i+2} - 2y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) = 0$	$O(h^4)$
7.	$y_{i+1}^{(IV)} + 4y_i^{(IV)} + y_{i-1}^{(IV)} - \frac{6}{h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) = 0$	$O(h^4)$

Näide 9. Lahendame rajaülesande (vrd. näide 8)

$$\begin{cases} y'' + x^2 y + 1 = 0; \\ y(-1) = y(1) = 0, \end{cases}$$

valides $h = 0{,}5$. Kasutades valemit 4 $(i = 0,\ 1)$, saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y_1'' + 10y_0'' + y_{-1}'' - \frac{12}{h^2}(y_1 - 2y_0 + y_{-1}) = 0, \\ y_2'' + 10y_1'' + y_0'' - \frac{12}{h^2}(y_2 - 2y_1 + y_0) = 0. \end{cases}$$

Suuruste y_i'' elimineerimiseks kasutame diferentsiaalvõrrandit

$$y_i'' = -i^2h^2y_i - 1 \qquad (i = -1,\ 0,\ 1,\ 2).$$

* Veahinnangud kehtivad eeldusel, et funktsioon y on piisav arv kordi pidevalt diferentseeruv.

Et $y_2 = 0$ ja $y_{-1} = y_1$, on ülaltoodud võrrandisüsteemist võimalik leida otsitavad väärtused y_0, y_1.

5. Galjorkini meetod.

Vaatleme ülesannet (6)-(7) homogeensetel rajatingimustel, s. o.

$$\begin{cases} L(y) = R(x), \\ S_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases} \tag{12}$$

Valime lõigul $[a, b]$ m lineaarselt sõltumatut funktsiooni (nn. koordinaatfunktsioonid)

$$u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x),$$

mis rahuldavad homogeenseid rajatingimusi ja otsime ülesande (12) ligikaudset lahendit kujul

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k(x). \tag{13}$$

Kordajad c_i määratakse võrrandisüsteemist

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \int_a^b L(u_k(x))\, u_j(x)\, dx = \int_a^b R u_j(x)\, dx$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m).$$

Näide 10. Lahendame rajaülesande:

$$\begin{cases} y'' + y = -2x \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Valime $u_1 = x(1 - x)$ ja otsime ülesande lahendit kujul

$$y = c_1 x(1 - x).$$

Antud juhul $L(u_1) = -2 + x - x^2$ ja võrrand c_1 määramiseks avaldub kujul

$$c_1 \int_0^1 (-2 + x - x^2)(x - x^2)\, dx = -\int_0^1 2x(x - x^2)\, dx$$

ehk

$$-\frac{3}{10} c_1 = -\frac{1}{6},$$

s. o. $c_1 = \frac{5}{9}$ ja $y_1 = \frac{5}{9} x(1 - x)$. Märgime, et ülesande täpseks lahendiks on $y = 2\left(\frac{\sin x}{\sin 1} - x\right)$

6. Kollokatsioonimeetod.

Ülesande (12) lahendit otsitakse kujul (13). Tähistame

$$L(\tilde{y}) - R(x) = \varepsilon(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m). \qquad (14)$$

Valitakse m punkti $x_1, x_2, \ldots, x_m$, mis asetsevad lõigul $[a, b]$. Kordajad c_k määratakse tingimustest, et

$$\varepsilon(x_k;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

7. Vähimruutude meetod.

Ülesande (12) lahendit otsitakse kujul (13). Nõutakse, et

$$I = \int_a^b \varepsilon^2 dx = \min,$$

kus ε on määratud avaldisega (14).

Et $I = I(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, saadakse miinimumi tarvilike tingimuste põhjal kordajate c_i määramiseks võrrandisüsteem

$$\frac{\partial I}{\partial c_k} = 0 \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

C. Omaväärtusülesannete numbriline lahendamine

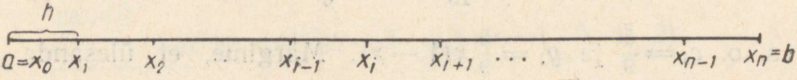
1. Diferentsmeetod.

Vaatleme ülesannet

$$\begin{cases} y'' + a(x)y' = \lambda b(x)y; \\ y'(a) = 0;\ y(b) = 0; \end{cases} \qquad (15)$$

$a(x)$, $b(x)$ — pidevad funktsioonid lõigul $[a, b]$; $a < b$. Probleemiks on leida parameetri λ niisugused väärtused (nn. omaväärtused), mille puhul ülesandel (15) on olemas mittetriviaalne lahend.

Jaotame lõigu $[a, b]$ n võrdseks osaks.



Joon. 4.

Tähistame $y(x_i) = y_i$; $a(x_i) = a_i$; $b(x_i) = b_i$. Asendades võrrandis ja rajatingimustes tuletised diferentssuhetega (vt. lk. 32, 34), saame

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + a_i \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \lambda b_i y_i \\ \qquad\qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1); \\ \dfrac{y_1 - y_{-1}}{2h} = 0, \text{ s. o. } y_{-1} = y_1; \\ y_n = 0. \end{cases}$$

Meil on n homogeenset võrrandit n tundmatu $y_0, y_1, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}$ määramiseks. Et homogeensel võrrandisüsteemil on olemas mittetriviaalne lahend siis ja ainult siis, kui selle süsteemi determinant on 0, saame sellest tingimusest n-astme algebralise võrrandi omaväärtuste λ ligikaudseks määramiseks.

2. Galjorkini meetod.

Vaatleme ülesandele (12) vastavat omaväärtusülesannet

$$\begin{cases} L(y) = \lambda a(x) y; \\ S_i(y) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Otsides ülesande lahendit kujul (13), saame kordajate c_i määramiseks võrrandisüsteemi

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \int_a^b [L(u_k) - \lambda a(x) u_k] u_j dx = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m).$$

Omaväärtused λ määratakse tingimusest, et vaadeldaval süsteemil eksisteeriks mittetriviaalne lahend, s. o. determinant

$$\left| \int_a^b [L(u_k) - \lambda a(x) u_k] u_j dx \right| = 0$$
$$(k, j = 1, \ldots, m).$$

Näide 11. Leiame ülesande

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0; \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$$

kaks esimest omaväärtust.

Valime $u_1(x) = x(1-x)$; $u_2(x) = x^2(1-x)$. Omaväärtused λ_i määrame võrrandist

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{3}+\frac{1}{30}\lambda & -\frac{1}{6}+\frac{1}{60}\lambda \\ -\frac{1}{6}+\frac{1}{60}\lambda & -\frac{2}{15}+\frac{1}{105}\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

kust

$$\lambda_1 = 10;$$
$$\lambda_2 = 42.$$

Lähteülesande täpsed omaväärtused:

$$\lambda_1^* = \pi^2;$$
$$\lambda_2^* = 4\pi^2.$$

Kirjandust

1. И. С. Березин, И. П. Жидков. *Методы вычислений II.* Москва, 1959.
2. Б. П. Демидович и др. *Численные методы анализа.* Москва, 1963.
3. Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* Москва, 1965.
4. Л. Коллац. *Численные методы решения дифференциальных уравнений.* Москва, 1953.
5. В. Э. Милн. *Численное решение дифференциальных уравнений.* Москва, 1955.
6. С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий. *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* Москва, 1965.
7. И. Г. Петровский, *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.* Москва, 1964.
8. Г. Н. Положий и др., *Математический практикум.* Москва, 1960.
9. L. Collatz, *Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen.* Leipzig, 1963.

IX. OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID

Osatuletistega võrrandite üldkuju:

$$F\left(x,\ y,\ \ldots,\ u,\ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},\ \ldots\right) = 0.$$

Otsitavaks on funktsioon $u(x, y, \ldots)$. Osatuletistega võrrandiga seotakse teatavad alg- või rajatingimused, millega kindlustatakse lahendi ühesus.

Teist järku lineaarseid osatuletistega võrrandeid

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G$$

(A, B, ..., G — funktsioonid argumentidest x, y) liigitatakse järgmiselt:

1) $AC - B^2 > 0$ — elliptilised võrrandid;
2) $AC - B^2 = 0$ — paraboolsed võrrandid;
3) $AC - B^2 < 0$ — hüperboolsed võrrandid.

Võrrandi tüüp sõltub üldiselt vaadeldavast piirkonnast.

Osatuletistega võrrandite ligikaudsetest lahendusmeetoditest vaatleme võrkude, sirgete ja karakteristikute meetodit ning variatsioonmeetodeid.

A. Võrkude meetod

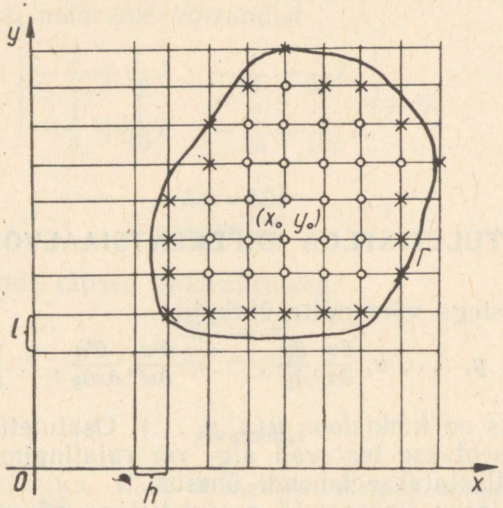
1. Elliptilist tüüpi võrrandid.

Olgu antud teist järku elliptiline diferentsiaalvõrrand*

$$L(u) \equiv A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G, \quad (1)$$

kus A, C, D, E, F, G on sõltumatute muutujate x, y pide-

* Siin on võetud $B = 0$.



Joon. 1.

vad funktsioonid piirkonnas S rajajoonega Γ; A ja C on mittenegatiivsed ($A,\ C \not\equiv 0$) piirkonnas $S + \Gamma$.

Lahendame nn. Dirichlet' ülesande: leida piirkonnas $S + \Gamma$ pidev funktsioon $u = u(x, y)$, mis rahuldab võrrandit (1) ja rajatingimust

$$u|_\Gamma = \varphi(x, y);$$

$\varphi(x, y)$ — rajajoonel Γ etteantud pidev funktsioon. Vaatleme kaht paralleelsete sirgete parve

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ih \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots); \\ y &= y_0 + kl \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \end{aligned}$$

mis moodustavad nn. võrgu (joon. 1). Nende sirgete lõikepunkte nimetatakse sõlmpunktideks ehk lihtsalt sõlmedeks.

Arvud h ja l on võrgu sammud vastavalt x-telje ja y-telje suunas.

Kaht sõlme nimetame naabersõlmedeks, kui nad asetsevad üksteisest ühe sammu kaugusel x- või y-telje suunas.

Sõlmi, mille kõik neli naabersõlme kuuluvad piirkonda $S + \Gamma$, nimetame sisemisteks. Piirkonda

$S + \Gamma$ kuuluvaid ülejäänud sõlmi nimetame rajasõlmedeks. Joonisel 1 on sisemised sõlmed tähistatud ringikestega, rajasõlmed ristikestega.

Tähistame sõlmedes $(x_0 + ih,\ y_0 + kl)$ (või lühidalt: $(i,\ k)$) võrrandi (1) kordajate väärtused vastavalt A_{ik}, C_{ik}, D_{ik}, E_{ik}, F_{ik}, G_{ik} ning $u(x_0 + ih,\ y_0 + kl) = u_{ik}$. Asendades võrrandis (1) osatuletised diferentssuhetega (vt. lk. 39, 40), saame iga sisemise sõlme puhul alljärgneva diferentsvõrrandi:

$$l(u_{ik}) \equiv A_{ik}\frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,\,k}}{h^2} + C_{ik}\frac{u_{i,\,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,\,k-1}}{l^2} +$$

$$+ D_{ik}\frac{u_{i+1,\,k} - u_{i-1,\,k}}{2h} + E_{ik}\frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k-1}}{2l} + F_{ik}u_{ik} = Gu_{ik}. \quad (2)$$

Igas rajasõlmes võtame u_{ik} võrdseks funktsiooni φ väärtusega selles rajajoone Γ punktis, mis asetseb vaadeldavale rajasõlmele kõige lähemal.

Kirjutades iga sisemise sõlme jaoks võrrandi kujul (2), saame u_{ik} määramiseks lineaarse algebralise võrrandisüsteemi, milles tundmatute arv võrdub võrrandite arvuga. Selle võrrandisüsteemi lahendamine annab meile lahendi u ligikaudsed väärtused sisemistes sõlmedes.

2. Rajatingimuste täpsem aproksimeerimine elliptiliste ülesannete puhul.

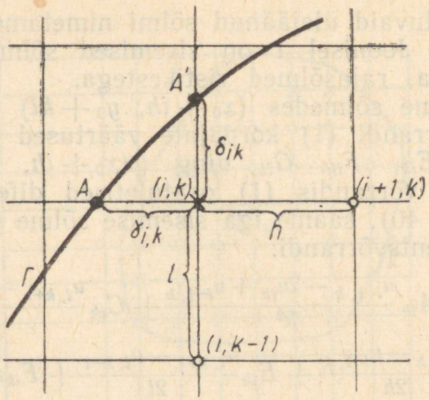
a) Punktis 1 vaadeldud lihtsustatud rajatingimuste aproksimeerimine võib olla praktikas seotud küllalt suurte vigadega. Vaatleme täpsemat menetlust, mida on soovitanud L. Collatz. Igale rajasõlmele $(i,\ k)$ vastab rajajoone Γ ja võrgu sirge lõikepunkt A (või A'), mis asetseb punktist $(i,\ k)$ kaugusel $\gamma_{ik} < h$ (või $\delta_{ik} < l$). Vaatleme veel sisemist sõlme $(i + 1,\ k)$ (või $(i,\ k - 1)$). Kasutades lineaarset interpolatsiooni (vt. lk. 6), saame:

$$u_{ik} = u_A + \frac{u_{i+1,\,k} - u_A}{h + \gamma_{ik}}\gamma_{ik}, \quad (3)$$

$$\left(\text{või } u_{ik} = u_{A'} + \frac{u_{i-1,\,k} - u_{A'}}{l + \delta_{ik}}\delta_{ik}\right). \quad (3')$$

Valemi viga $O(h^2)$ (või $O(l^2)$).

Iga rajasõlme jaoks võime kirjutada diferentsvõrrandi kujul (3) (või (3')). Ühendades võrrandid tüüpi (2) ja



Joon. 2

(3) (või (3′)), saame lineaarse algebralise võrrandisüsteemi, mille lahendamisel määrame funktsiooni u ligikaudsed väärtused nii sisemistes kui ka rajasõlmedes.

b) Elliptiliste ülesannete puhul antakse rajatingimus sageli kujul:

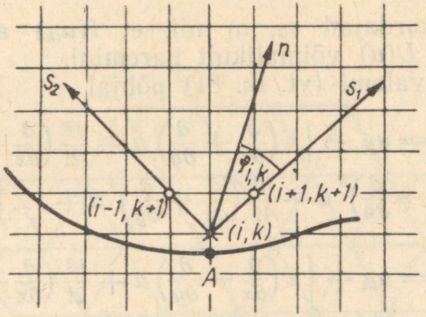
$$\left[a\frac{\partial u}{\partial n}+bu\right]_{\Gamma}=\varphi, \tag{4}$$

kus a, b, φ on rajajoonel Γ antud funktsioonid; $\frac{\partial u}{\partial n}$ — otsitava funktsiooni u tuletis normaali suunas (seejuures normaali n all mõistame rajajoone Γ sisemist normaali). Vaatleme ruutvõrku ($h=l$), kusjuures rajasõlmeks olgu sõlm (i, k). Kanname sellesse sõlme üle normaali n suuna temale kõige lähedasemast rajajoone Γ punktist A. Konstrueerime sirged s_1 ja s_2, mis moodustavad täisnurga ning läbivad võrgu sisemisi või rajasõlmi (antud juhul sõlmi $(i+1,\ k+1)$ ja $(i-1,\ k+1)$). Siis

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial s_1}\cos\varphi_{ik}+\frac{\partial u}{\partial s_2}\sin\varphi_{ik}\approx$$

$$\approx\frac{u_{i+1,\,k+1}-u_{ik}}{\sqrt{2}h}\cos\varphi_{ik}+\frac{u_{i-1,\,k+1}-u_{ik}}{\sqrt{2}h}\sin\varphi_{ik}$$

ning rajatingimuse (4) aproksimeerime sõlmes (i, k) kujul



Joon. 3

$$a_A\left(\frac{u_{i+1,\,k+1}-u_{ik}}{\sqrt{2}h}\cos\varphi_{ik}+\frac{u_{i-1,\,k+1}-u_{ik}}{\sqrt{2}h}\sin\varphi_{ik}\right)+b_A u_{ik}=\varphi_A,$$

kus a_A, b_A, φ_A on vastavalt funktsioonide a, b, φ väärtused punktis A.

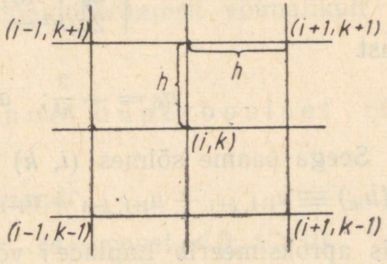
3. Diferentsvõrrandite koostamine määramatute kordajate meetodil.

Vaatleme näitena Laplace'i võrrandit

$$L(u)\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Koostame selle võrrandi puhul diferentsvõrrandi sõlme $(i,\ k)$ jaoks, milles peale funktsiooni väärtuse sõlmes $(i,\ k)$ esineksid veel funktsiooni väärtused joon. 4 näidatud sõlmedes. Kasutades sümmeetriat otsime operaatorit $L(u)$ aproksimeerivat diferentsavaldist $l(u_{ik})$ kujul

$$l(u_{ik}=a_0u_{ik}+a_1(u_{i+1,\,k+1}+u_{i+1,\,k-1}+u_{i-1,\,k-1}+u_{i-1,\,k+1}),$$



Joon. 4

määrates kordajad a_0, a_1 nii, et $l(u_{ik})$ aproksimeeriks operaatorit $L(u)$ võimalikult paremini.

Taylori valemi (vt. lk. 81) põhjal

$$u_{i+k,\,k+i} = u_{ik} + \left\{ h\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \right.$$
$$\left. + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \dots \right\}_{\substack{x = x_0 + ih; \\ y = y_0 + kh;}}$$

$$u_{i+1,\,k-1} = u_{ik} + \left\{ h\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \right.$$
$$\left. + \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \dots \right\}_{\substack{x = x_0 + ih; \\ y = y_0 + kh;}}$$

$$u_{i-1,\,k-1} = u_{ik} + \left\{ -h\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u - \right.$$
$$\left. - \frac{h^3}{3!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u - \dots \right\}_{\substack{x = x_0 + ih; \\ y = y_0 + kh;}}$$

$$u_{i-1,\,k+1} = u_{ik} + \left\{ h\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right) u + \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u + \right.$$
$$+ \frac{h^3}{3!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)^3 u + \frac{h^4}{4!}\left(-\frac{\partial}{\partial x} + \right.$$
$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u + \dots \right\}_{\substack{x = x_0 + ih; \\ y = y_0 + kh.}}$$

Seega

$$l(u_{ik}) = (a_0 + 4a_1)\, u_{ik} + 4a_1 \left\{ \frac{h^2}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^4}{4!}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 6\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right) + \dots \right\}_{\substack{x = x_0 + ih; \\ y = y_0 + kh.}}$$

Et $l(u_{ik})$ aproksimeeriks operaatorit $L(u)$ kõige paremini, on tarvilik, et

$$\begin{cases} a_0 + 4a_1 = 0 \\ 2a_1 h^2 = 1, \end{cases}$$

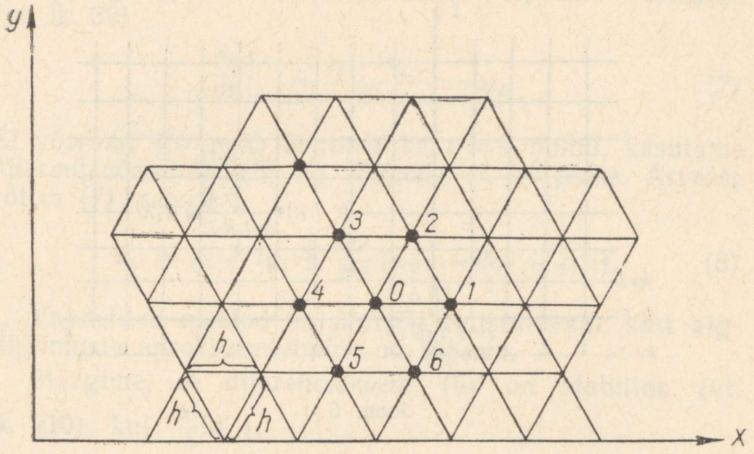
kust

$$a_0 = -\frac{2}{h^2}; \quad a_1 = \frac{1}{2h^2}.$$

Seega saame sõlmes (i, k) diferentsvõrrandiks

$$l(u_{ik}) \equiv u_{i+1,\,k+1} + u_{i+1,\,k-1} + u_{i-1,\,k-1} + u_{i-1,\,k+1} - 4u_{ik} = 0,$$

mis aproksimeerib Laplace'i võrrandit täpsusega $O(h^2)$.



Joon. 5

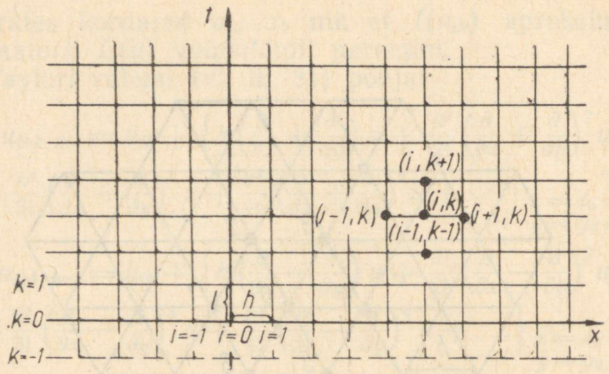
4. Mitteristkülikvõrgud.

Eelmises punktis esitatud aproksimeerimistehnika võimaldab diferentsiaalvõrrandeid aproksimeerivaid diferentsvõrrandeid tuletada ka kolmnurkvõrkude, kuusnurkvõrkude jne. puhul. Kui punkti 0 koordinaadid on (x, y), siis punkti 1 koordinaadid on $(x+h, y)$, punkti 2 koordinaadid $\left(x+\frac{h}{2}, y+\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)$ jne. Otsides punkti 0 puhul diferentsiaaloperaatorit aproksimeerivat diferentsavaldist funktsiooni väärtuste u_0, u_1, u_2, ..., u_6 lineaarse kombinatsioonina, arendame u_1, u_2, ..., u_6 punkti 0 ümbruses Taylori valemi (vt. lk. 81) järgi. Kordajad määrame jällegi tingimusest, et diferentsavaldis aproksimeeriks diferentsiaaloperaatorit võimalikult paremini.

5. Cauchy ülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi puhul.

Olgu lahendada võrrand

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a = \text{const} \neq 0;\ t \geqslant 0) \qquad (5)$$



Joon. 6

algtingimustel

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Asendades lähtevõrrandis (5) tuletised diferentssuhetega (vt. lk. 40), saame sõlme (i, k) jaoks diferentsvõrrandi

$$\frac{u_{i,\,k+1} - 2u_{ik} + u_{i,\,k-1}}{l^2} = a^2 \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,\,k}}{h^2}. \qquad (6)$$

See valem võimaldab rekurrentselt arvutada funktsiooni u väärtusi antud kihil (horisontaalreal) $k+1$, kui on teada funktsiooni väärtused kahel eelneval kihil k ja $k-1$.

Funktsiooni väärtuste määramiseks kahel algkihil on põhiliselt kaks meetodit.

a) Algtingimustest saame

$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i;$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \approx \frac{u_{i1} - u_{i0}}{l} = \psi(ih) = \psi_i,$$

kust

$$u_{i1} = \varphi_i + l\psi_i.$$

b) Võtame kasutusele veel fiktiivse kihi $k = -1$. Esimesest algtingimusest

$$u_{i0} = \varphi_i.$$

Teise algtingimuse aproksimeerime täpsema valemiga (vt. lk. 39)

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} \approx \frac{u_{i1} - u_{i,-1}}{2l} = \psi_i. \qquad (7)$$

Et võrrand (5) peab kehtima ka $t = 0$ puhul, kasutame diferentsvõrrandit (6) ka sõlmede $(i, 0)$ jaoks. Arvesse võttes (7), saame

$$u_{i1} = \varphi_i + l\psi_i + \frac{a^2 l^2}{2h^2}(\varphi_{i+1} - 2\varphi_i + \varphi_{i-1}). \qquad (8)$$

Vaadeldud meetod on üldiselt eelistatavam, sest algtingimuste aproksimeerimine on täpsem.

Märgime, et diferentsskeem (6) on stabiilne (vt. lk. 210), kui $\frac{al}{h} \leqslant 1$.

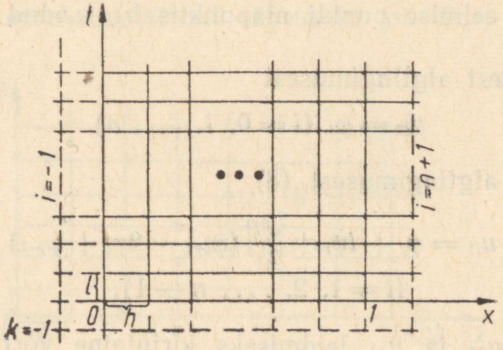
6. Segaülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi puhul.

Vaatleme võrrandit (5)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (a = \text{const} \neq 0;\ t \geqslant 0)$$

algtingimustel

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$



Joon. 7

ja rajatingimustel

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_1(t)\,u\right]_{x=0}=\Phi(t);\quad \left[\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_2(t)\,u\right]_{x=1}=\psi(t)\quad (t\geqslant 0).$$

Võrrandi (5) aproksimeerime siin jällegi diferentsvõrrandiga (6). Rajatingimuste aproksimeerimiseks võtame kasutusele veel fiktiivsed vertikaalread $i=-1$ ja $i=n+1$. Asendades rajatingimustes tuletised diferentssuhetega (vt. lk. 39), saame

$$\frac{u_{ik}-u_{-1,\,k}}{2h}+\alpha_1(kl)=\Phi(kl), \tag{9}$$

$$\frac{u_{n+1,\,k}-u_{n-1,\,k}}{2h}+\alpha_2(kl)=\psi(kl). \tag{10}$$

Et võrrand (5) peab kehtima ka $x=0$ ja $x=1$ puhul, kasutame diferentsvõrrandit (6) ka sõlmede $(0,\ k)$ ja $(n,\ k)$ jaoks

$$\frac{u_{0,\,k+1}-2u_{0k}+u_{0,\,k-1}}{l^2}=a^2\,\frac{u_{1k}-2u_{0k}+u_{-1,\,k}}{h^2}; \tag{11}$$

$$\frac{u_{n,\,k+1}-2u_{nk}+u_{n,\,k-1}}{l^2}=a^2\,\frac{u_{n+1,\,k}-2u_{nk}+u_{n-1,\,k}}{h^2}. \tag{12}$$

Eeldame, et horisontaalridadel k ja $k-1$ on funktsiooni väärtused teada. Siis $u_{0,\,k+1}$ ja $u_{n,\,k+1}$ saame arvutada valemitest (11) ja (12), elimineerides neist vastavalt valemite (9) ja (10) abil $u_{-1,\,k}$ ja $u_{n+1,\,k}$. Suurused $u_{i,\,k+1}$ $(i=1,\ \ldots,\ n-1)$ arvutame valemi (6) abil.

Funktsiooni väärtuste määramiseks kahel algkihil kasutame eelmise punkti alapunktis b) toodud metoodikat.

Esimesest algtingimusest

$$u_{i0}=\varphi_i\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$$

ja teisest algtingimusest (8)

$$u_{i1}=\varphi_i+l\psi_i+\frac{a^2l^2}{2h^2}(\varphi_{i+1}-2\varphi_i+\varphi_{i-1})$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Suuruste u_{01} ja u_{n1} leidmiseks kirjutame võrrandi (6) sõlmede $(0,\ 0)$ ja $(n,\ 0)$ jaoks, s. o.

$$\frac{u_{01} - 2u_{00} + u_{0,-1}}{l^2} = a^2 \frac{u_{10} - 2u_{00} + u_{-1,0}}{h^2},$$

$$\frac{u_{n1} - 2u_{n0} + u_{n,-1}}{l^2} = a^2 \frac{u_{n+1,0} - 2u_{n0} + u_{n-1,0}}{h^2}.$$

Siit saame määrata u_{01} ja u_{n1}, kui seose (7) abil (võtta vastavalt $i = 0$ ja $i = n$) elimineerida $u_{0,-1}$ ja $u_{n,-1}$ ning seoste (9) ja (10) abil (võttes $k = 0$) elimineerida $u_{-1,0}$ ja $u_{n+1,0}$.

7. Paraboolset tüüpi võrrandid.

Vaatleme soojusjuhtivuse võrrandit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (a = \text{const} \neq 0;\ t \geqslant 0) \tag{13}$$

algtingimusel

$$u|_{t=0} = \varphi(x)$$

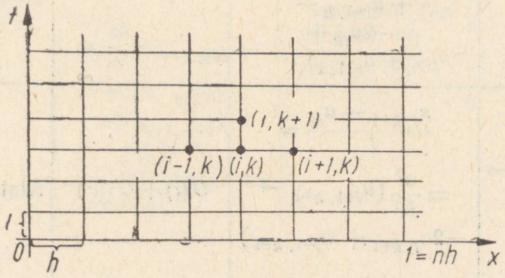
ja rajatingimustel

$$u|_{x=0} = 0;\ u|_{x=1} = 0 \quad (t \geqslant 0).$$

Asendades võrrandis (13) tuletised diferentssuhetega (vt. lk. 39, 40), saame iga sõlme (i, k) puhul diferentsvõrrandi

$$\frac{u_{i,k+1} - u_{ik}}{l} = a^2 \frac{u_{i+1,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,k}}{h^2}, \tag{14}$$

kusjuures aproksimatsiooni täpsuseks on $O(l) + O(h^2)$.



Joon. 8

Valem (14) võimaldab rekurrentselt arvutada funktsiooni u väärtusi antud kihil (horisontaalreal) $k+1$, kui on teada funktsiooni väärtused eelneval kihil k.

Algkihil ($k=0$) saame algtingimusest

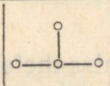
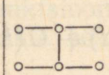
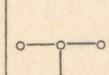
$$u_{i0} = \varphi(ih) = \varphi_i.$$

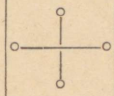
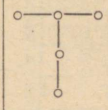
Rajatingimustest

$$u_{0k} = 0;\ u_{nk} = 0.$$

Märgime, et diferentsskeem (14) on stabiilne (vt. lk. 210), kui $\frac{a^2 l}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}$.

Teisi diferentsskeeme võrrandi (13) aproksimeerimiseks:

Jrk. nr.	Kasutatavad sõlmed	Diferentsskeem	Aproksimatsiooni täpsus	Stabiilsus
1.		valem (14), kuid $\frac{a^2 l}{h^2} = \frac{1}{6}$	$O(l^2) = O(h^4)$	Stabiilne
2.		$\frac{u_{i,\,k+1} - u_{ik}}{l} = \frac{a^2}{2h^2}(u_{i+1,\,k+1} - 2u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k+1} + u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,\,k})$	$O(l) + O(h^2)$	Alati stabiilne
3.		$\frac{u_{i,\,k+1} - u_{ik}}{l} = \frac{a^2}{h^2}(u_{i+1,\,k+1} - 2u_{i,\,k+1} + u_{i-1,\,k+1})$	$O(l) + O(h^2)$	Alati stabiilne

Jrk. nr.	Kasutatavad sõlmed	Diferentsskeem	Aproksimatsiooni täpsus	Stabiilsus
4.		$\frac{u_{i,\,k+1}-u_{ik}}{l}=$ $=\frac{a^2}{h^2}[\theta(u_{i+1,\,k+1}-$ $-2u_{i,\,k+1}+$ $+u_{i-1,\,k+1})+$ $+(1-\theta)(u_{i+1,\,k}-$ $-2u_{ik}+$ $+u_{i-1,\,k})];$ $0\leqslant\theta\leqslant 1.$ Sisaldab erijuhtudena skeemid 1, 2 ja 3.	$O(l)+O(h^2)$; kui $\theta=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12a^2l}$, siis aproksimatsiooni täpsuseks on $O(l^2)=O(h^4)$	$0\leqslant\theta<\frac{1}{2}$ puhul skeem on stabiilne, kui $\frac{a^2l}{h^2}\leqslant$ $\leqslant 1/(2-4\theta)$; $\frac{1}{2}\leqslant\theta<1$ puhul alati stabiilne
5.		$\frac{u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k-1}}{2l}=$ $=\frac{a^2}{h^2}(u_{i+1,\,k}-$ $-u_{i,\,k+1}-$ $-u_{i,\,k-1}+$ $+u_{i-1,\,k})$	$O(l)+O(h^2)+$ $+O\left(\frac{l}{h}\right);$ $\left(\frac{l}{h}\to 0,\ \text{kui}\right.$ $\left.l\to 0;\quad h\to 0\right)$	Alati stabiilne
6.		$(1+\theta)\times$ $\times\frac{u_{i,\,k+1}-u_{ik}}{l}-$ $-\theta\frac{u_{ik}-u_{i,\,k-1}}{l}=$ $=\frac{a^2}{h^2}(u_{i+1,\,k+1}-$ $-2u_{i,\,k+1}+$ $+u_{i-1,\,k+1})$ $(\theta\geqslant 0).$ Sisaldab erijuhuna skeemi 3.	$O(l)+O(h^2)$; kui $\theta=\frac{1}{2}-\frac{h^2}{12a^2l}$, siis aproksimatsiooni täpsuseks on $O(l^2)=O(h^4)$	Alati stabiilne

8. Diferentsskeemide koonduvusest ja stabiilsusest. ε-skeem.

Meid huvitavad eelkõige ainult niisugused diferentsskeemid, mille abil võib saada diferentsiaalvõrrandi täpsele lahendile küllalt lähedase ligikaudse lahendi, s. o. kui $h,\ l \to 0$, siis ligikaudne lahend läheneb täpsele lahendile. Niisuguseid diferentsskeeme nimetatakse *koonduvaiks.**

Praktikas võib leida diferentsvõrrandite lahendeid ainult ligikaudselt (ümardamisvead!). Seepärast pakuvad koonduvate diferentsskeemide hulgas huvi ainult niisugused, mille lahendamisel tehtud väikesed vead ei põhjusta suuri kõrvalekaldeid täpsest lahendist. Niisuguseid diferentsskeeme nimetatakse *stabiilseiks.*

Koonduvuse ja stabiilsuse matemaatiliselt rangeid definitsioone vt. näit. [3, 8].

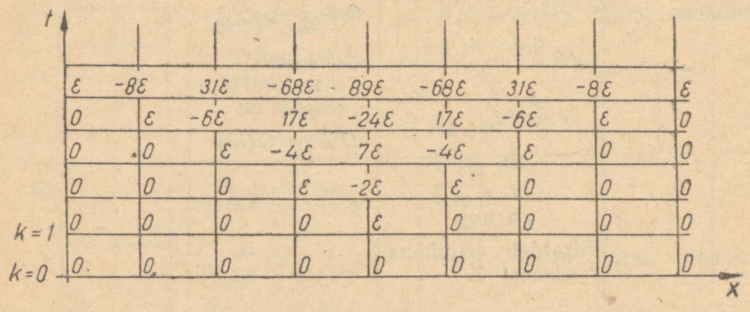
Diferentsskeemide stabiilsuse uurimise üheks levinumaks meetodiks praktikas on ε-skeemi koostamine.

Vaatleme võrrandi (13) lahendamiseks ($a = 1$) nn. Richardsoni skeemi:

$$\frac{u_{i,\,k+1} - u_{i,\,k-1}}{2l} = \frac{u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i-1,\,k}}{h^2}.$$

Valides $l = \frac{h^2}{2}$, saame

$$u_{i,\,k+1} = u_{i+1,\,k} - 2u_{ik} + u_{i,\,k-1} + u_{i-1,\,k}. \qquad (15)$$



Joon. 9

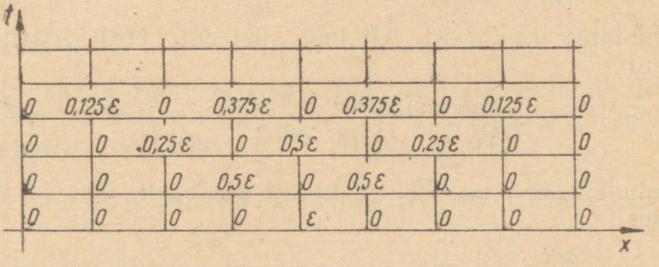
* Sageli leiab koonduvus aset vaid siis, kui h ja l vahel on teatav seos.

Oletame, et algkihi (horisontaalrea) $k = 1$ mingis punktis tegime vea ε, edasi arvutame aga absoluutse täpsusega. Jooniselt 9 on näha selle vea levikut, kui arvutada valemi (15) järgi. Diferentsskeem (15) on ilmselt mittestabiilne.

Vaatleme nüüd võrrandi (13) lahendamiseks ($a = 1$) diferentsskeemi (14), valides $l = \frac{h^2}{2}$, s. o.

$$u_{i,\,k+1} = \frac{1}{2}\,(u_{i+1,\,k} + u_{i-1,\,k}). \qquad (16)$$

Vastav ε-skeem:



Joon. 10

Viga ei kasva, vaid väheneb järk-järgult. Diferentsskeem (16) on stabiilne.

9. Diferentsskeemide stabiilsuse tarvilik tingimus.

Stabiilsuse uurimisel on põhilise tähtsusega nn. üleminekumaatriksi (üleminekuteguri) mõiste [8], mis on seotud üleminekuga k-ndalt horisontaalrealt (kihilt) kihile $k + 1$. Tähistame selle $G(l, m)$, kus l on samm t-telje suunas; m-täisarvuline parameeter.

Neumanni tingimus. Selleks et kahekihiline diferentsskeem oleks stabiilne, on tarvilik, et maatriksi $G(l, m)$ omaväärtused λ_i rahuldaksid iga m puhul võrratust $|\lambda_i| \leqslant 1 + O(l)$.

Kui G on normaalmaatriks, s. o. $G^*G = GG^*$ (G^* — maatriksi G transponeeritud maatriks), siis Neumanni tingimus on ka piisav stabiilsuseks. Teisi piisavaid tingimusi vt. [8].

Näide 1 [8]. Vaatleme võrrandi (13) lahendamiseks diferentsskeemi

$$\frac{u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k-1}}{2l}=a^2\,\frac{u_{i+1,\,k}-u_{i,\,k+1}-u_{i,\,k-1}+u_{i-1,\,k}}{h^2}. \qquad (17)$$

See on kolmekihiline diferentsskeem. Uue muutuja sissetoomisega saab seda aga taandada kahekihilisele diferentsskeemile

$$\begin{cases}\dfrac{u_{i,\,k+1}-V_{ik}}{2l}=a^2\,\dfrac{u_{i+1,\,k}-u_{i,\,k+1}-V_{ik}+u_{i-1,\,k}}{h^2}\\ V_{i,\,k+1}=u_{ik}.\end{cases} \qquad (18)$$

Tähistame $j=\sqrt{-1}$. Otsime süsteemi (18) erilahendit kujul

$$u_{ik}=s_1(kl)\,e^{j\,\cdot\,imh}=s_{1k}e^{j\,\cdot\,imh},$$
$$V_{ik}=s_2(kl)\,e^{j\,\cdot\,imh}=s_{2k}e^{j\,\cdot\,imh}.$$

Asetades need u_{ik}, V_{ik} avaldised süsteemi (18) ja tähistades

$\alpha=\frac{2a^2l}{h^2}$; $\beta=mh$, saame pärast lihtsaid teisendusi

$$\begin{pmatrix}s_{1,\,k+1}\\ s_{2,\,k+1}\end{pmatrix}=\underbrace{\begin{pmatrix}\dfrac{2\alpha\cos\beta}{1+\alpha} & \dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{\text{üleminekumaatriks } G(l,\,m)}\begin{pmatrix}s_{1k}\\ s_{2k}\end{pmatrix}.$$

Maatriksi $G(l, m)$ omaväärtused

$$\lambda_{1,2}=\frac{\alpha\cos\beta\pm\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\beta}}{1+\alpha}.$$

Analüüs näitab, et iga α puhul $|\lambda_i|\leqslant 1$. Seega diferentsskeem (17) on alati stabiilne (võib tõestada ka piisavuse!).

Näide 2 [8]. Vaatleme võrrandi

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+bu \qquad (a\neq 0,\ b>0) \qquad (19)$$

puhul diferentsskeemi

$$\frac{u_{i,\,k+1}-u_{ik}}{l}=a^2\,\frac{u_{i+1,\,k}-2u_{ik}+u_{i-1,\,k}}{h^2}+bu_{ik}. \qquad (20)$$

Otsides (20) erilahendit kujul

$$u_{ik} = s(kl)\, e^{i \cdot imh} = s_k e^{i \cdot imh},$$

saame

$$s_{k+1} = \underbrace{\left(1 - \frac{4a^2 l}{h^2} \sin^2 \frac{mh}{2} + bl\right)}_{\text{üleminekutegur } G(l,\ m)} s_k.$$

Antud juhul on stabiilsuse tarvilikuks tingimuseks

$$|G(l,\ m)| \leqslant 1 + 0(l).$$

See on täidetud, kui

$$\frac{a^2 l}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{21}$$

Et üheelemendilist maatriksit võib alati tõlgendada kui normaalmaatriksit, on tingimus (21) diferentsskeemi (20) stabiilsuseks ka piisav.

10. Kolmedimensioonilised diferentsskeemid.

Vaatleme näitena paraboolset tüüpi diferentsiaalvõrrandit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{22}$$

algtingimusel

$$u(x,\ y,\ 0) = \varphi(x,\ y) \qquad (0 \leqslant x,\ y \leqslant 1)$$

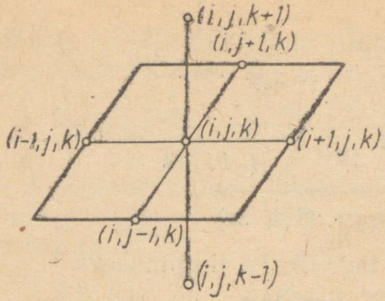
ja rajatingimustel

$$u(0,\ y,\ t) = u(1,\ y,\ t) = 0 \quad (0 \leqslant y \leqslant 1, \quad t \geqslant 0),$$
$$u(x,\ 0,\ t) = u(x,\ 1,\ t) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad t \geqslant 0).$$

Antud juhul saame ruumilise võrgu. Olgu sammuks x-telje suunas h_1, y-telje suunas h_2 ja t-telje suunas l.

Asendades võrrandis (22) tuletised diferentssuhetega, saame punkti $(i,\ j,\ k)$ jaoks diferentsvõrrandi (tähistame $u(ih_1,\ jh_2,\ kl) = u_{ijk}$)

$$\frac{u_{ij,\ k+1} - u_{ijk}}{l} = \frac{u_{i+1,\ jk} - 2u_{ijk} + u_{i-1,\ jk}}{h_1^2} + \frac{u_{i,\ j+1,\ k} - 2u_{ijk} + u_{i,\ j-1,\ k}}{h_2^2}. \tag{23}$$



Joon. 11

Diferentsskeem (23) on stabiilne, kui $l \leqslant \frac{h_1^2}{2} + \frac{h_2^2}{2}$. Valem (23) võimaldab rekurrentselt arvutada funktsiooni u väärtusi kihil (horisontaaltasapinnal) $k+1$, kui on teada funktsiooni u väärtused kihil k.

Algtingimusest:

$$u_{ij0} = \varphi(ih_1,\ jh_2) = \varphi_{ij}.$$

Kui $nh_1 = 1$ ja $mh_2 = 1$, siis rajatingimustest saame:

$$u_{0jk} = 0;\ u_{njk} = 0;$$
$$u_{i0k} = 0;\quad u_{imk} = 0.$$

B. Sirgete meetod

1. Sirgete meetodi idee.

Sirgete meetodi puhul asendatakse võrrandis endas, samuti alg- ja rajatingimustes esinevad osatuletised ühe muutuja järgi diferentssuhetega, s. o. vähendame võrrandi dimensiooni ühe võrra.

Vaatleme osatuletistega võrrandi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{24}$$

lahendamist algtingimustel

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x);\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi(x)$$

ning rajatingimustel

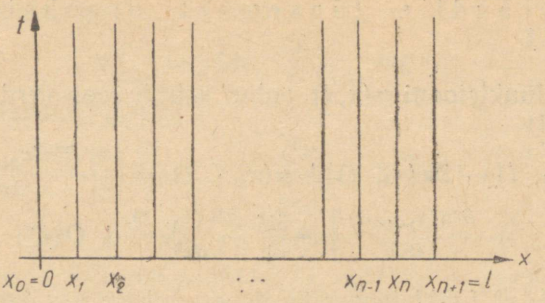
$$u(t,\ 0) = \xi(t);\quad u(t,\ l) = \eta(t).$$

Jaotame lõigu $[0, l]$ võrdseteks osadeks punktidega

$$x = x_k;\ x_k = kh;$$
$$(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$$

ning tõmbame sirged

$$x = x_k.$$



Joon. 12

Osatuletise $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ asendame sirgetel $x = x_k$ diferentssuhetega (vt. lk. 40)

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t)}{h^2} + O(h^2). \quad (25)$$

Tähistame $u(x_k, t) = u_k(t)$; siis $\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} = u_k''(t)$. Jättes valemis (25) jääkliikme arvestamata, saame igal sirgel $x = x_k$ diferentsiaalvõrrandi

$$u_k''(t) - \frac{u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)}{h^2} = 0, \quad (26)$$

kus $k = 1, 2, \ldots, n$.

Rajatingimustest saame, et

$$u_0(t) = \zeta(t); \quad u_{n+1}(t) = \eta(t)$$

ning algtingimustest

$$\begin{cases} u_k(0) = \varphi(x_k), \\ u_k'(0) = \varphi(x_k). \end{cases} \quad (27)$$

Vaadeldava osatuletistega ülesande ligikaudse lahendi saame, kui lahendame harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi (26) jaoks Cauchy ülesande. Seejuures algtingimused antakse valemitega (27).

2. Võrrandite täpsemast aproksimeerimisest.

Iga funktsiooni $u(x, t)$ puhul kehtib seos (vrd. lk. 192, valem 4)

$$u(x_{k+1}, t) - 2u(x_k, t) + u(x_{k-1}, t) = \frac{h^2}{12}\left[\frac{\partial^2 u(x_{k+1}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_{k-1}, t)}{\partial x^2}\right] + \frac{5h^2}{6}\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} + O(h^6) \qquad (28)$$

eeldusel, et funktsioon $u(x, t)$ on piisav arv kordi pidevalt diferentseeruv.

Kasutades valemit (28), võime võrrandit (24) aproksimeerida harilike diferentsiaalvõrranditega (sirgetel $x = x_k$) tunduvalt täpsemalt.

Võrrandi (24) põhjal

$$\frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x_k, t)}{\partial t^2} = u''_k(t),$$

ning kasutades seost (28), saame süsteemi (26) asemel süsteemi

$$u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t) = \frac{h^2}{12}[u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t)] + \frac{5h^2}{6}u''_k(t)$$

ehk

$$u_{k+1}''(t) + u_{k-1}''(t) + 10u_k''(t) = \frac{12[u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)]}{h^2}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Sirgete meetodi diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamine.

Võime kasutada kõiki meetodeid (nii numbrilisi kui ka analüütilisi), mis on rakendatavad harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamiseks (vt. ptk. VIII). Mõningatel lihtsamatel juhtudel on õnnestunud integreerida neid süsteeme ka täpselt (vt. [1] ja näide 3).

Näide 3. Vaatleme võrrandit

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x, t)$$

algtingimustega

$$u\Big|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x)$$

ja rajatingimustega

$$u\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0,$$
$$u\Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x=l} = 0.$$

Eeldame, et funktsioonid $F(x, t)$, $f(x)$ ja $g(x)$ on pidevad. Lõigul $[0, l]$ võtame punktid $x_k = kh$ $(k = 0, 1, \ldots n+1)$, kus $h = \frac{l}{n+1}$, ning tõmbame sirged $x = x_k$. Kasutame tähistusi

$$F(x_k, t) = F_k(t); \; f(x_k) = f_k; \; g(x_k) = g_k.$$

Asendades võrrandis ja rajatingimustes tuletised x järgi diferentssuhetega (vt. lk. 40) ja tähistades otsitava funktsiooni $u(x, t)$ väärtused sirgetel $x = x_k$ $(k = 0, \ldots, n+1)$ sümboliga $u_k(t)$, saame ülesande ligikaudseks lahendamiseks alljärgneva harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemi

$$\begin{cases} h^4 u_1'' + 5u_1 - 4u_2 + u_3 = h^4 F_1, \\ h^4 u_2'' - 4u_1 + 6u_2 - 4u_3 + u_4 = h^4 F_2, \\ h^4 u_k'' + u_{k-2} - 4u_{k-1} + 6u_k - 4u_{k+1} + u_{k+2} = h^4 F_k, \\ \qquad\qquad (k = 3, \ldots, n-2) \\ h^4 u_{n-1}'' + u_{n-3} - 4u_{n-2} + 6u_{n-1} - 4u_n = h^4 F_{n-1}, \\ h^4 u_n'' + u_{n-2} - 4u_{n-1} + 5u_n = h^4 F_n, \\ \qquad\qquad u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Algtingimusteks saame

$$u_k(0) = f_k; \; u_k'(0) = g_k.$$

Tähistades

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

võime selle süsteemi esitada vektorkujul

$$h^4 \bar{u}'' + A^2 \bar{u} = h^4 \bar{F},$$

kus $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$,

$$\bar{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_n).$$

Ortogonaalteisendus *

$$B = B^* = B^{-1} = \left((-1)^{k+s} \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{\pi k s}{n+1} \right) \begin{matrix} k = 1, \ldots, n \\ s = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

taandab maatriksi A diagonaalkujule Λ elementidega $-\lambda_s = -2\left(1 + \cos \frac{\pi s}{n+1}\right)$ $(s = 1, \ldots, n)$, s. t. $B^{-1}AB = \Lambda$.

Et

$$B^{-1}A^2B = B^{-1}ABB^{-1}AB = (B^{-1}AB)^2 = \Lambda^2,$$

siis see ortogonaalteisendus taandab diagonaalkujule ka maatriksi A^2.

Korrutades võrrandit $h^4\bar{u}'' + A^2\bar{u} = h^4\bar{F}$ vasakult maatriksiga B ja kasutades seost $BA^2 = \Lambda^2 B$, saame:

$$h^4 B\bar{u}'' + \Lambda^2 B\bar{u} = h^4 B\bar{F}.$$

Tähistades

$$B\bar{u} = \bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$$

ja

$$B\bar{F} = \bar{w} = (w_1, \ldots, w_n)$$

näeme, et viimane vektorvõrrand on ekvivalentne n sõltumatu võrrandiga

$$v_k'' + \frac{\lambda_k^2}{h^4} v_k = w_k \quad (k = 1, \ldots, n),$$

kust

$$v_k(t) = v_k(0) \cos \frac{\lambda_k t}{h^2} + \frac{h^2 v_k'(0)}{\lambda_k} \sin \frac{\lambda_k t}{h^2} + \frac{h^2}{\lambda_k} \int_0^t \sin \frac{\lambda_k (t-\tau)}{h^2} w_k(\tau)\, d\tau.$$

---

* Vt. В. Н. Фадеева, Метод прямых в применении к некоторым краевым задачам. Тр. Мат. ин-та Стеклова, т. XXVIII, 1949, lk. 73—103.

Märgime, et B^* tähistab siin maatriksi B transponeeritud maatriksit.

Et $\bar{u} = B\bar{v}$, siis lõplikult saame

$$u_k(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s} \sin \frac{\pi sk}{n+1} \left[v_s(0) \cos \frac{\lambda_s t}{h^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2 v_s'(0)}{\lambda_s} \sin \frac{\lambda_s t}{h^2} + \frac{h^2}{\lambda_s} \int_0^t \sin \frac{\lambda_s (t-\tau)}{h^2} w_s(\tau)\, d\tau \right],$$

kus

$$v_s(0) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{s+j} \sin \frac{\pi sj}{n+1} f_j;$$

$$v_s'(0) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{s+j} \sin \frac{\pi sj}{n+1} g_j;$$

$$w_s(t) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{s+j} \sin \frac{\pi sj}{n+1} F_j(t).$$

$$(k,\ s = 1, \ldots, n).$$

C. Karakteristikute meetod hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemide lahendamiseks

1. Esimest järku hüperboolne võrrandisüsteem.

Vaatleme võrrandisüsteemi

$$\sum_{k=1}^{n} \left(A_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x} + B_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial y} \right) = C_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad (29)$$

kus A_{ik}, B_{ik}, C_i on argumentide x, y, u_1, ... , u_n pidevad ja pidevalt diferentseeruvad funktsioonid.

Kui võrrandil

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \lambda A_{11} & B_{12} - \lambda A_{12} & \ldots & B_{1n} - \lambda A_{1n} \\ B_{21} - \lambda A_{21} & B_{22} - \lambda A_{22} & \ldots & B_{2n} - \lambda A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1} - \lambda A_{n1} & B_{n2} - \lambda A_{n2} & \ldots & B_{nn} - \lambda A_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (30)$$

on fikseeritud punktis $(x, y, u_1, \ldots, u_n)$ n erinevat reaalset juurt, siis osatuletistega võrrandisüsteem (29) on selles punktis hüperboolset tüüpi. Süsteemi (29), mis on hüperboolset tüüpi ruumi $(x, y, u_1, \ldots, u_n)$ teatava piirkonna igas punktis, nimetatakse hüperboolseks selles piirkonnas. Edaspidi piirdume ainult hüperboolsete võrrandisüsteemide vaatlemisega.

Tähistame võrrandi (30) lahendid λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Süsteemi (29) antud lahendi $u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)$ puhul $\lambda_i = \lambda_i(x, y)$.

Iga diferentsiaalvõrrand

$$dy = \lambda_i(x, y)dx \tag{31}$$

määrab üheparameetrilise kõverate (nn. karakteristikute) parve. Antud lahendi $u_1(x, y), \ldots, u_n(x, y)$ puhul piirkonna S (kus süsteem (29) on hüperboolne) iga punkti läbib üks ja ainult üks vaadeldava parve karakteristik.

Igal karakteristikul saame nn. diferentsiaalseose, kui võrrandis (30) mingi veerg asendada suurustega $C_i dx - \sum_{k=1}^{n} A_{ik} du_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (seejuures vastava maatriksi astakuks peab olema $n - 1$).

Erijuht $n = 1$.

Võrrand: $A \dfrac{\partial u}{\partial x} + B \dfrac{\partial u}{\partial y} = C.$

Karakteristikute võrrand: $Bdx - Ady = 0.$
Diferentsiaalseos: $Cdx - Adu = 0.$

Erijuht $n = 2$.

Võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} A_{11} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + B_{11} \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + A_{12} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + B_{12} \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = C_1, \\ A_{21} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} + B_{21} \dfrac{\partial u_1}{\partial y} + A_{22} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + B_{22} \dfrac{\partial u_2}{\partial y} = C_2. \end{cases}$$

Karakteristikute võrrandid:

$$dy - \lambda_i dx = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

kus λ_i on võrrandi

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \lambda A_{11} & B_{12} - \lambda A_{12} \\ B_{21} - \lambda A_{21} & B_{22} - \lambda A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

lahendid.

Diferentsiaalseosed:

$$\begin{vmatrix} C_1 dx - A_{11} du_1 - A_{12} du_2 & B_{12} - \lambda_i A_{12} \\ C_2 dx - A_{21} du_1 - A_{22} du_2 & B_{22} - \lambda_i A_{22} \end{vmatrix} = 0$$

või

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \lambda A_{11} & C_1 dx - A_{11} du_1 - A_{12} du_2 \\ B_{21} - \lambda A_{21} & C_2 dx - A_{21} du_1 - A_{22} du_2 \end{vmatrix} = 0.$$

2. Teist järku hüperboolne võrrand.

Vaatleme teist järku hüperboolset võrrandit

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D = 0, \qquad (32)$$

kus A, B, C, D on funktsioonid argumentidest x, y, u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Võrrandi hüperboolsus tähendab seda, et vaadeldavas piirkonnas kehtib võrratus $AC - B^2 < 0$.

Karakteristikute võrrand:

$$A \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0. \qquad (33)$$

Et $AC - B^2 < 0$, siis võrrand (33) määrab igas punktis kaks reaalset erinevat $\frac{dy}{dx}$ väärtust (tähistame need λ_1 ja λ_2). Kõverat C, mis igas punktis rahuldab võrrandit (33), nimetatakse karakteristikuks. Piirkonnas, kus võrrand (32) on hüperboolne, läbib iga punkti kaks reaalset karakteristikut. Võrrand (33) määrab kaks üheparameetrilist karakteristikute parve:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_1 \text{ (esimene parv karakteristikuid)} \qquad (34)$$

ja

$$\frac{dy}{dx} = \lambda_2 \text{ (teine parv karakteristikuid).} \qquad (35)$$

Diferentsiaalseos esimese parve karakteristikutel:

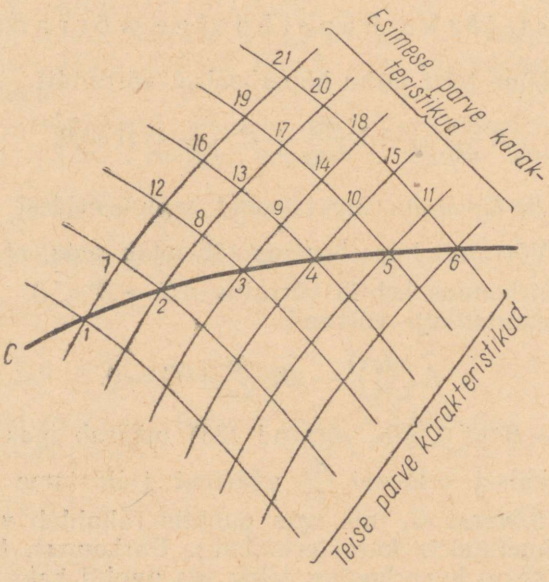
$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \lambda_2 d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\left(\frac{D}{A}\right) dx. \qquad (36)$$

Diferentsiaalseos teise parve karakteristikutel:

$$d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \lambda_1 d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\left(\frac{D}{A}\right) dx. \qquad (37)$$

3. Cauchy ülesande ligikaudne lahendamine karakteristikute meetodiga.

Vaatleme Cauchy ülesannet võrrandi (32) puhul. Eeldame, et kõveral C ei ole üheski punktis karakteristlikku suunda.



Joon. 13

Olgu kõveral C teada otsitava funktsiooni u ja tema osatuletiste $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ väärtused. Valime kõveral C küllalt lähedased punktid 1, 2, ... , 6. Tähistame funktsiooni u ja tema osatuletiste väärtused punktis jär-

jekorranumbriga i vastavalt u_i, p_i, q_i. Punkti i koordinaadid märgime x_i, y_i.

Punktis 7 kasutame x_7, y_7, u_7, p_7, q_7 määramiseks seoseid (34), (35), (36), (37) ja seost

$$du = pdx + qdy, \tag{38}$$

asendades diferentsiaalid lõplike vahedega. Suurema täpsuse saamiseks kasutame aritmeetilisi keskmisi. Tähistades λ_1, λ_2 ja $\frac{D}{A}$ väärtused punktis i vastavalt λ_{1i}, λ_{2i}, $\left(\frac{D}{A}\right)_i$, saame viie tundmatu x_7, y_7, u_7, p_7, q_7 määramiseks viiest võrrandist koosneva võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} y_7 - y_1 = \frac{1}{2}(\lambda_{17} + \lambda_{11})(x_7 - x_1), \\ p_7 - p_1 + \frac{1}{2}(\lambda_{27} + \lambda_{21})(q_7 - q_1) = \\ \qquad = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{A}\right)_7 + \left(\frac{D}{A}\right)_1\right](x_7 - x_1), \\ y_7 - y_2 = \frac{1}{2}(\lambda_{27} + \lambda_{22})(x_7 - x_2), \\ p_7 - p_2 + \frac{1}{2}(\lambda_{17} + \lambda_{12})(q_7 - q_2) = \\ \qquad = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{A}\right)_7 + \left(\frac{D}{A}\right)_2\right](x_7 - x_2), \\ u_7 - \frac{u_1 + u_2}{2} = \frac{1}{2}[p_1(x_7 - x_1) + q_1(y_7 - y_1)] + \\ \qquad + \frac{1}{2}[p_2(x_7 - x_2) + q_2(y_7 - y_2)]. \end{cases} \tag{39}$$

Kui A, B, C ja D ei sõltu suurustest u, p ja q, ei valmista selle võrrandisüsteemi lahendamine raskusi. Vastasel korral osutub süsteem (39) mittelineaarseks, mida üldiselt tuleb lahendada iteratiivselt.

Protsessi võime analoogiliselt jätkata. Punktide 2 ja 3 järgi võime leida punkti 8 koordinaadid ning u, p ja q väärtused selles punktis (selleks asendame võrrandisüsteemis (39) indeksid 7, 1 ja 2 vastavalt indeksitega 8, 2 ja 3); punktide 3 ja 4 järgi punkti 9, punktide 7 ja 8 järgi punkti 12 jne. jne.

Seega võime järk-järgult leida x_i, y_i, u_i, p_i ja q_i ($i = 7, 8, \ldots, 21$). Ühtlasi konstrueerime ligikaudselt ka võrrandi (32) karakteristikud.

Analoogilist metoodikat võib kasutada karakteristikute võrrandite ja diferentsiaalseoste ligikaudseks integreerimiseks ka esimest järku hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemide lahendamisel.

Karakteristikute meetodit võib kasutada ka segaülesande ja Goursat' ülesande ligikaudseks lahendamiseks [1].

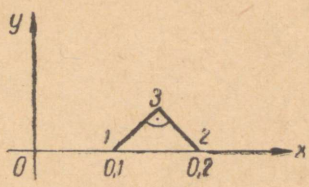
Näide 4.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \\ u|_{y=0} = x^2; \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0} = 0. \end{cases}$$

Vaadeldaval juhul on karakteristikuks

$$y - x = \text{const},$$
$$y + x = \text{const};$$

ning $x_1 = 0{,}1$; $y_1 = 0$; $x_2 = 0{,}2$; $y_2 = 0$; $x_3 = 0{,}15$; $y_3 = 0{,}05$.



Joon. 14

Kasutame seostest (39) teist, neljandat ja viiendat, et määrata p_3, q_3, u_3 (indeksi «7» seostes (39) asendame indeksiga «3»).

Et $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = -1$; $p_1 = 0{,}2$; $p_2 = 0{,}4$; $q_1 = 0$; $q_2 = 0$; $u_1 = 0{,}01$; $u_2 = 0{,}04$, siis saame

$$\begin{cases} p_3 - 0{,}2 - q_3 = 0, \\ p_3 - 0{,}4 + q_3 = 0, \end{cases}$$

kust

$$p_3 = 0{,}3; \quad q_3 = 0{,}1;$$

$$u_3 - \frac{0{,}01 + 0{,}04}{2} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}05 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}4\,(-0{,}05),$$

kust $u_3 = 0{,}020$.

Märgime, et antud juhul $u(x, y) = x^2 + y^2$ ning seega p_3, q_3, u_3 täpseteks väärtusteks on vastavalt 0,3; 0,1; 0,025.

D. Variatsioonmeetodid

1. Ritzi meetod.

Vaatleme rajaülesannet

$$\begin{cases} L(u)=f(x,y) \text{ piirkonnas } G; \\ S(u)=0 \text{ piirkonna } G \text{ rajajoonel } \Gamma, \end{cases} \tag{40}$$

kus $L(u)$ on lineaarne elliptiline diferentsiaaloperaator.

Vaatleme funktsioonide hulka U, mis koosneb nõutav arv kordi piirkonnas G pidevalt diferentseeruvatest ja homogeenset rajatingimust $S(u)=0$ rahuldavatest funktsioonidest $u(x,y)$.

Defineerime skalaarkorrutise:

$$(u,v)=\iint_G uvdxdy.$$

Operaatorit L nimetatakse hulgal U sümmeetriliseks, kui iga $u, v \in U$ puhul kehtib võrdus $(Lu,v)=(u,Lv)$. Operaatorit L nimetatakse hulgal U positiivseks, kui iga $u \in U$ puhul kehtib: $(Lu,u) \geqslant 0$, kusjuures $(Lu,u)=0$ siis ja ainult siis, kui $u=0$.

Kui operaator L on positiivne ja sümmeetriline, siis rajaülesande (40) lahendamine on samaväärne funktsionaali

$$F(u)=(Lu,u)-2(f,u) \tag{41}$$

minimiseerimisega hulgal U.

Näiteks Dirichlet' ülesande jaoks Poissoni võrrandi puhul

$$\begin{cases} -\Delta u=f(x,y) \text{ piirkonnas } G; \\ u|_\Gamma=0 \end{cases} \tag{42}$$

saame

$$F(u)=\iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2fu\right]dxdy. \tag{43}$$

Ritzi meetodi abil võime konstrueerida ligikaudselt funktsionaali (41) minimiseeriva funktsiooni. Selleks valitakse hulgast U n lineaarselt sõltumatut funktsiooni, nn. koordinaatfunktsiooni

$$u_1(x,y),\ u_2(x,y),\ \ldots,\ u_n(x,y)$$

ja otsitakse funktsionaali (41) miinimumi (ehk rajaülesande (40) lahendit) kujul:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x, y). \tag{44}$$

Asetades $\tilde{u}(x, y)$ funktsionaali (41) avaldisse, saame

$$F(\tilde{u}) = \Phi(c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

Kordajad c_i määratakse funktsiooni Φ miinimumi tarvilikest tingimustest

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial c_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c_2} = 0, \\ \ldots \ldots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial c_n} = 0. \end{cases} \tag{45}$$

Süsteem (45) koosneb n võrrandist n tundmatu c_i määramiseks.

2. Kantorovitši meetod.

Olgu vaja lahendada ülesanne (42), mis on ekvivalentne funktsionaali (43) minimiseerimisega.

Eeldame, et piirkond G on piiratud sirgetega $x = a$, $x = b$ ning kahe kõveraga $y_1(x)$, $y_2(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b$; $y_2(x) > y_1(x))$.

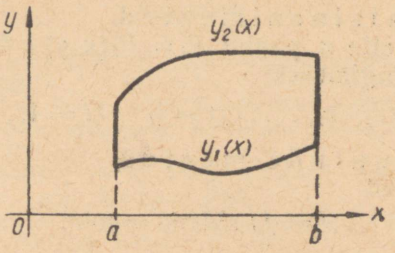
Otsime ülesande (42) ligikaudset lahendit kujul

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) u_i(x, y),$$

kus $u_i(x, y)$ on ettevalitud kaks korda pidevalt diferentseeruvad funktsioonid, mis muutuvad nulliks kõveratel $y_1(x)$ ja $y_2(x)$ (ei tarvitse aga võrduda nulliga sirgetel $x = a$ ja $x = b$).

Asetades $\tilde{u}(x, y)$ funktsionaali (43) avaldisse ja integreerides y järgi, saame

$$F(\tilde{u}) = \int_a^b \Phi(x, f_1(x), \ldots, f_n(x); f_1'(x), \ldots, f_n'(x))\, dx.$$



Joon. 15

Funktsioonide $f_i(x)$ määramiseks saime variatsioonülesande (minimiseerida tuleb $F(\tilde{u})$!). Miinimumi tarvilikeks tingimusteks on Euleri võrrandid

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial \Phi}{\partial f_i'} - \frac{\partial \Phi}{\partial f_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

kusjuures rajatingimusteks on

$$f_i(a) = f_i(b) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Saime rajaülesande harilike diferentsiaalvõrrandite süsteemide jaoks (vt. ptk. VIII), mida lahendades leiame $f_i(x)$.

8. Minimiseerimismeetodid.

Vaatleme rajaülesannet (40)

$$\begin{cases} L(u) = f(x, y) & \text{piirkonnas } G; \\ S(u) = 0 & \text{piirkonna } G \text{ rajajoonel } \Gamma. \end{cases}$$

Otsime ülesande (40) lahendit kujul

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x, y),$$

kus $u_i(x, y)$ on ettevalitud koordinaatfunktsioonid (vt. lk. 225).

Asetades $\tilde{u}$ võrrandisse $L(u) = f(x, y)$, saame

$$L(\tilde{u}) - f(x, y) = \varepsilon(x, y; c_1, c_2, \ldots, c_n).$$

a) Kollokatsioonimeetod.
Valitakse ette n punkti $P_i = P_i(x, y) \in G$. Kordajad c_i määratakse tingimusest

$$\varepsilon(P_i, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

b) Vähimruutude meetod.
Nõutakse, et

$$I = \iint_G \varepsilon^2 dxdy = \min.$$

Et $I = I(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, siis saame miinimumi tarvilike tingimuste põhjal c_i määramiseks võrrandisüsteemi:

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

c) Osapiirkondade meetod.
Piirkond G jaotatakse n osapiirkonnaks G_i. Nõutakse, et

$$\iint_{G_i} dxdy = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

mis annab n võrrandit n tundmatu c_i määramiseks.

4. Galjorkini meetod.

Galjorkini meetod ei ole olemuselt variatsioonmeetod. Kui aga L on positiivne ja sümmeetriline, siis Galjorkini meetodi algoritm ühtib Ritzi meetodi algoritmiga. Et Galjorkini meetod ei nõua rajaülesande taandamist funktsionaali minimiseerimisprobleemile, on ta universaalsem kui Ritzi meetod.
Otsides ülesande (40) lahendit kujul

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i(x, y),$$

kus $u_i(x, y)$ on ettevalitud koordinaatfunktsioonid (vt. lk. 225), määratakse kordajad c_i võrrandisüsteemist:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i (Lu_i, u_j) = (f, u_j) \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Galjorkini meetodit ja minimiseerimismeetodeid (vt. eelmine punkt) võib kasutada ka mittelineaarsete rajaülesannete lahendamiseks.

Kirjandust

1. И. С. Березин и И. П. Жидков, *Методы вычислений II.* Москва, 1959.
2. В. Вазов, Дж. Форсайт, *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных.* Москва, 1963.
3. С. К. Годунов, В. С. Рябенький, *Введение в теорию разностных схем.* Москва, 1962.
4. Л. Коллац, *Численные методы решения дифференциальных уравнений.* Москва, 1953.
5. С. Г. Михлин, *Прямые методы в математической физике.* Гостехиздат, 1950.
6. С. Г. Михлин, Х. Л. Смолицкий, *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.* Москва, 1965.
7. Д. Ю. Панов, *Справочник по численному решению дифференциальных уравнений в частных производных.* Москва—Ленингард, 1951.
8. Р. Д. Рихтмайер, *Разностные методы решения краевых задач.* Москва, 1960.
9. В. К. Саульев, *Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток.* Москва, 1960.
10. R. Sauer, *Anfangswertprobleme bei Partiellen Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, 1952.

X. INTEGRAALVÕRRANDID

A. Fredholmi tüüpi lineaarsed integraalvõrrandid

Vaatleme integraalvõrrandi (nn. Fredholmi tüüpi lineaarse integraalvõrrandi)

$$x(s) - \lambda \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt = y(s) \qquad (1)$$

ligikaudseid lahendusmeetodeid, kusjuures

$x(s)$ on otsitav funktsioon;
$K(s,t)$ — võrrandi tuum;
$y(s)$ — vabaliige;
λ — parameeter.

1. Harilik iteratsioonimeetod.

Otsime võrrandi (1) lahendit rea

$$x(s) = x_0(s) + \lambda x_1(s) + \lambda^2 x_2(s) + \ldots$$

kujul. Funktsioonid $x_i(s)$ leitakse järk-järgult valemitest

$$x_0(s) = y(s);$$

$$x_1(s) = \int_a^b K(s,t)\,x_0(t)\,dt;$$

$$x_2(s) = \int_a^b K(s,t)\,x_1(t)\,dt;$$

. . . . . .

$$x_n(s) = \int_a^b K(s,t)\,x_{n-1}(t)\,dt;$$

. . . . . .

Teoreem. Kui $\max\limits_{\substack{a\leqslant s\leqslant b\\ a\leqslant t\leqslant b}} |K(s,t)| \leqslant H$, siis $\lambda < \frac{1}{H(b-a)}$ puhul rida $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \lambda^i x_i(s)$ koondub ühtlaselt ja $x(s)$ on võrrandi (1) lahendiks.

2. Integraalvõrrandi asendamine lineaarse võrrandisüsteemiga.

Kasutame mingit kvadratuurvalemit (vt. ptk. III), s. o.

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \approx \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi(t_k), \tag{2}$$

kus A_k ja t_k on antud kvadratuurvalemi ja integreerimisvahemiku puhul tuntud konstandid.

Rakendades valemit (2) integraalile võrrandi (1) vasakul poolel, saame ligikaudse võrrandi

$$x(s) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(s, t_k)\, x(t_k) = y(s). \tag{3}$$

Võttes võrrandis (3) järgemööda

$$s = t_1,\ t_2, \ldots, t_n,$$

saame $x(t_i)$ määramiseks lineaarse võrrandisüsteemi

$$x(t_i) - \lambda \sum_{k=1}^{n} A_k K(t_i, t_k)\, x(t_k) = y(t_i)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

3. Tuuma asendamine kõdunud tuumaga.

Kõdunud tuumaks nimetatakse tuuma, mida võib esitada kujul

$$K(s,t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(s)\,\beta_i(t).$$

Kõdunud tuuma puhul avaldub võrrandi (1) lahend valemiga

$$x(s) = y(s) + \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i \alpha_i(s),$$

kusjuures kordajad A_i määratakse lineaarsest võrrandisüsteemist

$$A_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} A_j = y_i \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

kus

$$y_i = \int_a^b y(t)\beta_i(t)\,dt;$$

$$\gamma_{ij} = \int_a^b \alpha_j(t)\beta_i(t)\,dt.$$

Suvalise tuumaga integraalvõrrandi ligikaudsel lahendamisel asendatakse tuum kõdunud tuumaga, kasutades näiteks Taylori rea või Fourier' rea osasummasid (vt. ptk. IV), mitmesuguseid interpolatsioonivalemeid (vt. ptk. I). Meetodi täpsusest vt. [2].

Näide 1. Lahendame ligikaudselt integraalvõrrandi

$$x(s) - 2\int_0^1 se^{st^2} x(t)\,dt = s - e^s + 1.$$

Asendame tuuma kõdunud tuumaga (kasutades funktsiooni e^x Taylori reaksarenduse (vt. lk. 76) kaht esimest liiget) $s + s^2t^2$. Seega $\alpha_1(s) = s$; $\beta_1(t) = 1$; $\alpha_2(s) = s^2$; $\beta_2(t) = t^2$. Siinjuures

$$y_1 = \int_0^1 (t - e^t + 1)\,dt = \frac{5}{2} - e;$$

$$y_2 = \int_0^1 (t^3 - e^t t^2 + t^2)\,dt = \frac{31}{12} - e;$$

$$\gamma_{11} = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2};$$

$$\gamma_{21} = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4};$$

$$\gamma_{12} = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3};$$

$$\gamma_{22} = \int_0^1 t^4\,dt = \frac{1}{5}.$$

Konstantide $A_i (i = 1, 2)$ määramiseks saame võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} A_1 - 2\left(A_1 \cdot \frac{1}{2} + A_2 \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{5}{2} - e, \\ A_2 - 2\left(A_1 \cdot \frac{1}{4} + A_2 \cdot \frac{1}{5}\right) = \frac{31}{12} - e, \end{cases}$$

kust

$$A_2 = \frac{3}{2}e - \frac{15}{4};$$

$$A_1 = \frac{19}{5}e - \frac{29}{3}.$$

Seega

$$x(s) \approx s - \left[e^s - 1 - \left(\frac{38}{5}e - \frac{58}{3}\right)s - \left(3e - \frac{15}{2}\right)s^2\right].$$

Märgime, et lähteülesande täpseks lahendiks on $x^*(s) = s$.

4. Kollokatsioonimeetod.

Otsime võrrandi (1) ligikaudset lahendit kujul

$$\tilde{x}(s) = x_0(s) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(s), \tag{4}$$

kus $x_0(s), x_1(s), \ldots, x_n(s)$ on etteantud lineaarselt sõltumatud funktsioonid, nn. koordinaatfunktsioonid; c_i — otsitavad kordajad.

Asetades $\tilde{x}(s)$ võrrandisse (1), saame jäägiks

$$\varepsilon(s, \lambda, c_1, c_2, \ldots, c_n) = x_0(s) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(s) - \\ - \lambda \int_a^b K(s, t)[x_0(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t)]dt - y(s). \tag{5}$$

Valime lõigul $[a, b]$ n punkti

$$a \leqslant t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n \leqslant b$$

ning nõuame, et

$$\varepsilon(t_i, \lambda, c_1 c_2, \ldots, c_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Võrrandisüsteemist (6) määrame otsitavad kordajad c_i.

5. Vähimruutude meetod.

Otsides võrrandi (1) ligikaudset lahendit kujul (4), nõuame, et integraal

$$I = \int_a^b \varepsilon^2(s, \lambda, c_1, \ldots, c_n)\, ds$$

oleks minimaalne, kusjuures $\varepsilon(s, \lambda, c_1, \ldots, c_n)$ on määratud valemiga (5). Et $I = I(\lambda, c_1, c_2, \ldots, c_n)$, siis saame miinimumi tarvilike tingimuste põhjal kordajate c_i määramiseks võrrandisüsteemi

$$\frac{\partial I}{\partial c_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

6. Momentide (Galjorkini) meetod.

Otsime võrrandi (1) ligikaudset lahendit kujul (4), võttes $x_0(s) = y(s)$.

Kordajad c_i määrame võrrandisüsteemist

$$\int_a^b \varepsilon(s, \lambda, c_1, \ldots, c_n)\, x_i(s)\, ds = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

kus $\varepsilon(s, \lambda, c_1, c_2, \ldots, c_n)$ on määratud valemiga (5).

B. Volterra tüüpi lineaarsed integraalvõrrandid

Volterra integraalvõrrand:

$$x(s) - \lambda \int_a^s K(s, t)\, x(t)\, dt = y(s), \qquad (7)$$

kusjuures
$x(s)$ on otsitav funktsioon;
$K(s, t)$ — võrrandi tuum;
$y(s)$ — vabaliige;
λ — parameeter.

1. Harilik iteratsioonimeetod.

Otsime võrrandi (7) lahendit rea

$$x(s) = x_0(s) + \lambda x_1(s) + \lambda^2 x_2(s) + \ldots$$

kujul. Funktsioonid $x_i(s)$ leitakse järk-järgult valemitest

$$x_0(s) = y(s);$$

$$x_1(s) = \int_a^s K(s, t)x_0(t)dt;$$

. . . . . .

$$x_n(s) = \int_a^s K(s, t)x_{n-1}(t)dt$$

. . . . . .

2. Volterra integraalvõrrandi taandamine lineaarse diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesandele.

Vaatleme näitena integraalvõrrandit

$$x(s) + \int_0^s (3 - s + t)x(t)dt = s^3. \tag{8}$$

Diferentseerides kaks korda s järgi, saame

$$x'(s) + 3x(s) - \int_0^s x(t)dt = 3s^2; \tag{9}$$

$$x''(s) + 3x'(s) - x(s) = 6s. \tag{10}$$

Võttes võrrandites (8) ja (9) $s = 0$, saame

$$x(0) = 0; \quad x'(0) = 0. \tag{11}$$

Integraalvõrrandi (8) lahendamine taandub diferentsiaalvõrrandi (10) lahendamisele algtingimustel (11).

Kirjeldatud võte on rakendatav, kui tuum $K(s, t)$ on s suhtes polünoom, s. o.

$$K(s, t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)s^i.$$

C. Mittelineaarsed integraalvõrrandid

Mittelineaarne integraalvõrrand:

$$x(s) = \int_a^b K(s, t, x(t))dt; \tag{12}$$

K — oma argumentide pidev funktsioon;
$x(t)$ — otsitav lahend.

1. Newtoni meetod.

Valime alglähendi $x_0(s)$. Järkjärgulised lähendid leiame valemi

$$x_{n+1}(s) = x_n(s) + \Delta x_n(s) \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

järgi, kusjuures $\Delta x_n(s)$ leitakse igal iteratsioonisammul lineaarse integraalvõrrandi

$$\Delta x_n(s) - \int_a^b K_x'(s,\ t,\ x_n(t))\,\Delta x_n(t)\,dt =$$
$$= \int_a^b K(s,\ t,\ x_n(t))\,dt - x_n(s)$$

lahendina.

2. Steffenseni meetod.

Valime alglähendi $x_0(s)$. Järkjärgulised lähendid leiame valemi

$$x_{n+1}(s) = x_n(s) + \Delta x_n(s) \qquad (n = 0,\ 1,\ \ldots)$$

järgi, kusjuures $\Delta x_n(s)$ leitakse igal iteratsioonisammul lineaarse integraalvõrrandi

$$\Delta x_n(s) - \int_a^b \frac{K(s,\ t,\ x_n(t)) - K(s,\ t,\ y_n(t))}{x_n(t) - y_n(t)}\,\Delta x_n(t)\,dt =$$
$$= y_n(s) - x_n(s)$$

lahendina ning

$$y_n(s) = \int_a^b K(s,\ t,\ x_n(t))\,dt.$$

Näide 2. Lahendame integraalvõrrandi

$$x(s) = 0{,}05s \int_0^1 tx^2(t)\,dt + 3 + 0{,}6625s.$$

Valides alglähendiks $x_0(s) \equiv 4$, saame

$$y_0(s) = \int_0^1 (16 \cdot 0{,}05st + 3 + 0{,}6625s)\,dt = 1{,}0625s + 3;$$

$$\Delta x_0(s) - 0{,}05s \int_0^1 \frac{16 - (1{,}0625t + 3)^2}{1 - 1{,}0625t} t\Delta x_0(t)\,dt = 1{,}0625s - 1$$

ehk

$$\Delta x_0(s) - 0{,}05s \int_0^1 (1{,}0625t + 7)\, t\Delta x_0(t)\,dt = 1{,}0625s - 1,$$

kust

$$\Delta x_0(s) \approx 0{,}9997s - 1;$$
$$x_1(s) \approx 0{,}9997s + 3.$$

Lähtevõrrandi täpne lahend $x^*(s) = s + 3$.

Kirjandust

1. И. С. Березин и Н. П. Жидков, *Методы вычислений II*. Москва, 1959.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*. Гостехиздат, 1952.
3. С. Г. Михлин и Х. Л. Смолицкий, *Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений*. Москва, 1965.

AINEREGISTER

Algebraline võrrand 167
algebraline täpsusaste 49
alglähendi leidmine 159
— — graafiliselt 159
algtingimused 175
astmeridade meetod 176

Bernoulli arvud 57
— meetod 172
Besseli funktsioonid 106, 110
— valem 15

Cauchy ülesanne harilike diferentsiaalvõrrandite puhul 175
— — hüperboolsete võrrandite puhul 203

Diferents 12
diferentsiaalseos karakteristikul 220, 221, 222
diferentsiaalvõrrandite süsteemi normaalkuju 183
diferentsmeetod rajaülesannete lahendamiseks 190
— omaväärtusülesannete lahendamiseks 194
diferentsskeem (diferentsvõrrand) 199
diferentsskeemide koonduvus 210
— stabiilsus 210
— — , tarvilik tingimus 211
— (ε-skeem) 210
diferentssuhe 9
diferentssuhete järk 9, 10
Dirichlet' teoreem 128
— ülesanne 198

Ekstrapolatsioonivalemid 181
elementaarfunktsioonide väärtuste arvutamine 103
elimineerimismeetod 130
elliptilised võrrandid (teist järku) 197
esimest järku hüperboolne võrrandisüsteem 219
Euleri meetod 179
— võrrandid 227
Euleri-Maclaurin'i valem 57

Fejéri teoreem 21
Fourier' rida 127
Fredholmi integraalvõrrand 230
funktsiooni arendus Legendre'i polünoomide järgi 96, 97
— — Tšebõševi — — 97, 98
funktsioonide lähendamine 74

Fürstenau meetod 157
Galjorkini meetod Fredholmi integraalvõrrandite lahendamiseks 234
— — omaväärtusülesannete — 195
— — rajaülesannete — 193, 228
Gaussi meetod 130
— teoreem 168
— valem 49, 69
Gregori valem 57

Hamiltoni-Cayley teoreem 144
— — teoreemil põhinev meetod 144
harilik iteratsioonimeetod, geomeetriline interpretatsioon 152
— — Fredholmi integraalvõrrandite lahendamiseks 230

— — lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 134
— — mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 160
— — mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks 151
— — Volterra integraalvõrrandite lahendamiseks 234
harmooniline analüüs 120
Hermite'i interpolatsioonivalem 21
homogeensed rajatingimused 193
Horneri skeem 103
häiritusmeetod 187
hälve 82, 85
hälvetevektor 140
hüperboolsed võrrandid (teist järku) 197, 221

Integraalide arvutamine 42
— — ostsilleeruvatest funktsioonidest 44
— — perioodilistest funktsioonidest 65
— — Taylori valemi abil 58
Integraalvõrrand 230
— , Fredholmi tüüpi 230
— , mittelineaarne 235
— , Volterra tüüpi 234
integraalvõrrandi asendamine lineaarse võrrandisüsteemiga 231
interpolatsioonipolünoom 5, 22, 26
interpolatsioonisõlmed 5, 22, 26
interpolatsiooni-tüüpi kvadratuurvalemid 46
interpolatsioonivalemid 12, 21, 182
interpoleerimine 5
— eksponentsiaalsete funktsioonidega 18
— mitme muutuja funktsioonide puhul 22, 26
— seoses vähimruutude meetodiga 17
— siledate funktsioonide puhul 18
iseärasuse eraldamine 61
— — , aditiivne meetod 63
— — , Kantorovitši meetod 64
— — , multiplikatiivne meetod 62
iteratsioonimeetod maatriksi pööramiseks 145

Jacobi meetod 146
Jeršovi — 144
Jordani skeem 132, 141

Kaalufunktsioon 48, 94
kaasgradientide meetod 139
Kantorovitši meetod määratud integraalide arvutamiseks 64
— — osatuletistega võrrandite lahendamiseks 226
karakteristikud 220
karakteristikute meetod 219
— võrrand 220, 221
kiireima languse meetod lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 137
kiirema languse meetod mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 165
kollokatsioonimeetod integraalvõrrandite lahendamiseks 233
— rajaülesannete lahendamiseks 194, 228
kolmedimensioonilised diferentsskeemid 213
komplekssete juurte leidmine 167
koordinaatfunktsioonid 193, 225
kordne lahend 168
kordsete integraalide arvutamine 67
kvadratuurvalemi algebraline täpsusaste 49
kvadratuurvalemid 42
— lõpmatu integreerimisvahemiku puhul 60
— suurima algebralise täpsusastmega 48, 49
kõdunud tuum 231
kõõlude meetod, geomeetriline interpretatsioon 156
— — mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 164
— — mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks 156

Lagrange'i valem 6, 24, 31
— — võrdsete vahemikega sõlmede puhul 8, 31
Lanczosi meetod 100
Laplace'i võrrand 201
Legendre'i polünoomid 49, 96
— polünoomide nullkohad 49
lineaarne interpoleerimine 6
— — kahe muutuja funktsioonide puhul 25
— — kolme muutuja funktsioonide puhul 27
lineaarne rajaülesanne 186
lineaarne võrrandisüsteem 129
— — maatrikskujul 129
— — , üldkuju 139
Lipschitzi tingimus 151, 160, 176
Lobatševski meetod 168
lõplik vahe 12, 14
lähendpolünoom 29, 82

Maatriksi jälg 145
— karakteristlik polünoom 146
— — võrrand 146
— omavektorid 146
— omaväärtused 145
Mehleri valem 51
Milne'i meetod 182
minimiseerimismeetodid 227
mitme muutja funktsiooni miinimumi (maksimumi) leidmine 167
mitteristkülikvõrgud 203
modifitseeritud Newtoni meetod 154
— — — , geomeetriline interpretatsioon 155
momentide meetod 234
Monte-Carlo meetod 72
mõõtmistulemuste täpsustamine 91
määramatuse aste 100
määramatute kordajate meetod diferentsvõrrandite koostamiseks 201
— — — numbriliseks diferentseerimiseks 35

Neumanni tingimus 211
Neville'i skeem 7
Newtoni-Cotes'i valemid 47
Newtoni interpolatsioonivalem 9
— — sammuga ette 12
— — — taha 13
Newtoni meetod arvu N-da juure leidmiseks 154
— — — pöördväärtuse leidmiseks 154
— — Cauchy ülesannete lahendamiseks 177
— — , geomeetriline interpretatsioon 154
— — kompleksse juurte leidmiseks 167
— — mittelineaarsete integraalvõrrandite lahendamiseks 236
— — mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 163
— — mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks 154
— — rajaülesannete lahendamiseks 189
normaalmaatriks 211
normaalvõrrandite süsteem 140
— — , reegel koostamiseks 140
numbriline diferentseerimine 29
— — diferentssuhete abil 30
— — interpolatsioonivalemite abil 29
— — võrdsete vahemikega sõlmede puhul 31

Obreškovi valem 56
omaväärtusülesanne harilike diferentsiaalvõrrandite puhul 194
— maatriksite puhul 146
ortogonaliseerimismeetod 149
osapiirkondade meetod 228
osatuletiste arvutamine 38
osatuletistega võrrandi üldkuju 197
ostsilleeruvad funktsioonid 44

Paraboolsed võrrandid (teist järku) 197
parameetri järgi diferentseerimise meetod 166
parim lähendpolünoom 82
— — , ligikaudne leidmine 83
— — punktide hulgal 83
— — lõigul 82, 84
parimad kvadratuurvalemid 65

peaelemendid 133
perioodiline funktsioon 65, 122
perioodiliste paarisfunktsioonide interpoleerimine 121
— paaritufunktsioonide interpoleerimine 122
Picard'i meetod 175, 184
piisavad tingimused hariliku iteratsioonimeetodi koonduvuseks 134
Poisson'i võrrand 225
poolitamismeetod 159
positiivne diferentsiaaloperaator 225
positiivselt määratud maatriks 137
puutuvate hüperboolide meetod 155
— paraboolide meetod 155
päratute integraalide arvutamine 53, 54, 60, 61
pöördinterpoleerimine 20
pöörete maatriks 146

Rajatingimused 175
— , nende täpsem aproksimeerimine 199
rajaülesanne harilike diferentsiaalvõrrandite puhul 175, 186
— osatuletistega diferentsiaalvõrrandite puhul 225
rea koonduvuspiirkonna laiendamine 76
Richardsoni skeem 210
ristkülikvalem 42, 94, 97
Ritzi meetod 225
Runge-Kutta tüüpi meetodid 178, 185
Runge meetod 59
Runge skeem 123, 125

Segaülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi puhul 205
Seideli meetod lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 136
— — mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 161
Simpsoni valem 45, 68
— — täpsustatud kujul 45
sirgete meetod 214
soojusjuhtivuse võrrand 207
Steffenseni meetod Cauchy ülesannete lahendamiseks 177
— — , geomeetriline interpretatsioon 153
— — mittelineaarsete integraalvõrrandite lahendamiseks 236
— — mittelineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 161
— — mittelineaarsete võrrandite lahendamiseks 152
Stiefeli meetod 43
Stirlingi valem 14
Sümmeetriline diferentsiaaloperaator 225
— maatriks 137
Sylvesteri teoreem 138

Taylori rida 74
— — , selle koonduvuspiirkonna laiendamine 76
— valem 11, 58, 77
— — kahe muutuja funktsiooni puhul 81, 82
teist järku diferentssuhteid sisaldavad iteratsioonimeetodid 157
— — tuletisi sisaldavad iteratsioonimeetodid 155
teoreem hariliku iteratsioonimeetodi koonduvusest Fredholmi integraalvõrrandite puhul 231
— — — — lineaarsete võrrandisüsteemide puhul 135
— — — — mittelineaarsete võrrandisüsteemide puhul 160
— — — — mittelineaarsete võrrandite puhul 151
— lõigul pideva funktsiooni nullkohast 159
— Newtoni meetodi koonduvusest 153
— Picardi meetodi koonduvusest 176
teoreemid interpolatsiooniprotsessi koonduvusest 17
transponeeritud maatriks 137

trapetsvalem 42
— täpsustatud kujul 43
trigonomeetriline polünoom 120
Tšebõšovi interpolatsioonisõlmed 8
— polünoom 8, 79
— — , selle nullkohad 8
— valem 55
tuuma asendamine kõdunud tuumaga 231

Vahedeta valem 31
variatsioonimeetodid 225
vektori norm (pikkus) 137
vektorit annulleeriv minimaalne polünoom 149
Volterra integraalvõrrand 234
võrdsete pindalade meetod 95
— summade meetod 88
võrgu samm 198
— sõlm (sõlmpunkt) 198
võrk 198
võrkude meetod 197
vähimruutude meetod Fredholmi integraalvõrrandite lahendamiseks 234
— — funktsioonide lähendamiseks 85, 86
— — integraalkujul 93
— — katseandmete erineva täpsuse puhul 92
— — lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamiseks 139
— — mõõtmistulemuste täpsustamiseks 91
— — numbriliseks diferentseerimiseks 36
— — perioodiliste funktsioonide lähendamiseks 123, 127
— — rajaülesannete lahendamiseks 194, 228
väikese parameetri meetod 187

Weddly valem 46
— — täpsustatud kujul 46
Weierstrassi teoreem 74
— — algebraliste polünoomidega lähendamisest 74
— — trigonomeetriliste polünoomidega lähendamisest 120

Ühtlaselt jaotatud arvud 72
Ühtlased lähendid 74
üleminekumaatriks (üleminekutegur) 211

Ääristamismeetod 142

SISUKORD

EESSÕNA 3

I. INTERPOLEERIMINE 5

A. Ühe muutuja funktsiooni interpoleerimine 5

1. Lagrange'i valem 6
2. Lineaarne interpoleerimine 6
3. Neville'i skeem 7
4. Lagrange'i valem võrdsete vahemikega sõlmede puhul 8
5. Tšebõšovi interpolatsioonisõlmed 8
6. Uue interpolatsioonisõlme lisamine 9
7. Newtoni interpolatsioonivalem 9
8. Newtoni interpolatsioonivalem sammuga ette (võrdsete vahemikega sõlmede jaoks) 12
9. Newtoni interpolatsioonivalem sammuga taha (võrdsete vahemikega sõlmede jaoks) 13
10. Stirlingi valem 14
11. Besseli valem 15
12. Interpolatsiooniprotsesside koonduvusest 17
13. Interpoleerimine seoses vähimruutude meetodiga . . . 17
14. Siledate funktsioonide interpoleerimine 18
15. Interpoleerimine eksponentsiaalsete polünoomidega . . 18
16. Pöördinterpoleerimine 20
17. Hermite'i interpolatsioonivalem 21
18. Feijéri teoreem 21

B. Mitme muutuja funktsioonide interpoleerimine 22

1. Skeem kahe muutuja funktsioonide interpoleerimiseks . 22
2. Lineaarne interpoleerimine kahe muutuja funktsioonide puhul 25
3. Kolme ja enama muutuja funktsioonide interpoleerimisest 26

Kirjandust 28

II. NUMBRILINE DIFERENTSEERIMINE

1. Tuletiste arvutamine interpolatsioonivalemite abil . . . 29
2. Numbriline diferentseerimine diferentssuhete abil . . . 30
3. Vahedeta valem 31
4. Numbriline diferentseerimine võrdsete vahemikega sõlmede puhul 31

5. Määramatute kordajate meetod numbriliste diferentseerimisvalemite koostamiseks 35
6. Numbriline diferentseerimine vähimruutude meetodi abil 36
7. Osatuletiste ligikaudne arvutamine 38
Kirjandust 41

III. INTEGRAALIDE LIGIKAUDNE ARVUTAMINE 42

A. Ühekordsete integraalide arvutamine 42

1. Ristkülikvalem 42
2. Trapetsvalem 42
3. Stiefeli meetod 43
4. Integraalide arvutamine ostsilleeruvatest funktsioonidest 44
5. Simpsoni valem 45
6. Weddly valem 46
7. Üldised interpolatsiooni tüüpi kvadratuurvalemid . . 46
8. Newtoni-Cotes'i valemid 47
9. Suurima algebralise täpsusastmega valemid 48
10. Suurima algebralise täpsusastmega valemid (lõpmatu integreerimisvahemiku puhul) 53
11. Tšebõšovi valemid 55
12. Valem, mille sõlmedeks on integreerimislõigu otspunktid 56
13. Euleri-Maclaurini valem 57
14. Gregory valem 57
15. Integraalide arvutamine Taylori valemi abil 58
16. Runge meetod integreerimisvea ligikaudseks hindamiseks 59
17. Lõpmatute integreerimisrajadega integraalide arvutamine 60
18. Lõplike rajadega päratute integraalide arvutamine . . 61
19. Integraalide arvutamine perioodilistest funktsioonidest 65
20. Parimad valemid funktsioonide klassides 65

B. Kordsete integraalide arvutamine 67

1. Interpolatsioonipolünoomide kasutamisel põhinev meetod 67
2. Kvadratuurvalemi korduval rakendamisel põhinev meetod 67
3. Mõned lihtsad valemid kahekordsete integraalide arvutamiseks 69
4. Monte Carlo meetod integraalide arvutamiseks . . . 72
Kirjandust 73

IV. FUNKTSIOONIDE LÄHENDAMINE 74

A. Ühtlased lähendid 74

1. Funktsioonide arendamine Taylori ritta 74
2. Taylori rea koonduvuspiirkonna laiendamine 76
3. Taylori valem 77
4. Liidetavate arvu vähendamine ligikaudses valemis . . 78
5. Kahe muutuja funktsiooni Taylori valem 81
6. Parimad lähendpolünoomid 82
7. Meetod parima lähendpolünoomi ligikaudseks leidmiseks 83

B. Vähimruutude meetod 85

1. Meetodi olemus 85
2. Vähimruutude meetod juhul, kui funktsioon on antud punktide jadaga 86

3. Võrdsete summade meetod 88
4. Tšebõšovi polünoomide kasutamine vähimruutude meetodi puhul 89
5. Tšebõšovi meetod lähendpolünoomi leidmiseks vähimruutude meetodi abil (võrdsete vahemikega sõlmede puhul) 90
6. Vähimruutude meetodi rakendamine mõõtmistulemuste täpsustamiseks 91
7. Vähimruutude meetod juhul, kui katseandmed on erineva täpsusega 92
8. Vähimruutude meetodi integraalkuju 93
9. Võrdsete pindalade meetod 95
10. Funktsiooni arendus Legendre'i polünoomide järgi . . 96
11. Funktsiooni arendus Tšebõšovi polünoomide järgi . . 97
12. Praktiline skeem Tšebõšovi arendusega antud funktsiooni väärtuste arvutamiseks 99
13. Lanczosi meetod funktsiooni ligikaudseks arendamiseks Tšebõšovi polünoomide järgi 100

C. Elementaarfunktsioonide väärtuste arvutamine 103

1. Horneri skeem polünoomi väärtuste arvutamiseks . . . 103
2. Astmefunktsiooni väärtuste arvutamine 104
3. $\sqrt{x}$ arvutamine 104
4. e^x arvutamine 105
5. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$ arvutamine 107
6. 2^x arvutamine 107
7. 10^x arvutamine 108
8. $\ln x$, $\ln(1+x)$ arvutamine 108
9. $\sin x$ arvutamine 110
10. $\cos x$ arvutamine 112
11. $\tan x$ arvutamine 113
12. $\cot x$ arvutamine 114
13. $\arcsin x$ arvutamine 115
14. $\arccos x$ arvutamine 116
15. $\arctan x$ arvutamine 116
16. $\operatorname{arccot} x$ arvutamine 118
17. Hüperboolsete funktsioonide väärtuste arvutamine . . 118
Kirjandust 119

V. HARMOONILINE ANALÜÜS 120

1. Perioodiliste funktsioonide interpoleerimine (üldine juht) 120
2. Perioodiliste paarisfunktsioonide interpoleerimine . . . 121
3. Perioodiliste paaritufunktsioonide interpoleerimine . . 122
4. Perioodiliste funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodi abil võrdsete vahemikega sõlmede puhul . . . 123
5. Runge skeem vähimruutude meetodi abil leitud trigonomeetrilise lähendpolünoomi kordajate arvutamiseks . . 123
6. Perioodiliste funktsioonide lähendamine vähimruutude meetodi abil (integraalkujul) 127
7. Fourier' rida 127
Kirjandust 128

VI. LINEAARALGEBRA ARVUTUSMEETODID 129

A. Lineaarsete võrrandisüsteemide lahendamine 129

1. Gaussi meetod ehk elimineerimismeetod 130
2. Jordani skeem 132
3. Harilik iteratsioonimeetod 134
4. Seideli meetod 136
5. Kiireima languse meetod 137
6. Kaasgradientide meetod 139
7. Vähimruutude meetod 139

B. Maatriksite pööramine 140

1. Pöördmaatriksi leidmine võrrandisüsteemide lahendamise abil 141
2. Ääristamismeetod 142
3. Jeršovi meetod 144
4. Hamiltoni-Cayley teoreemil põhinev meetod 144
5. Iteratsioonimeetod 145

C. Maatriksi omaväärtuste ja omavektorite leidmine 145

1. Jacobi meetod 146
2. Ortogonaliseerimismeetod 149

Kirjandust 150

VII. MITTELINEAARSED VÕRRANDID JA VÕRRANDISÜSTEEMID 151

A. Mittelineaarsete võrrandite ligikaudne lahendamine 151

1. Harilik iteratsioonimeetod 151
2. Steffenseni meetod 152
3. Newtoni meetod 153
4. Teist järku tuletisi sisaldavad iteratsioonimeetodid . . 155
5. Kõõlude meetod 156
6. Teist järku diferentssuhteid sisaldavad iteratsioonimeetodid 157
7. Fürstenau meetod 157
8. Alglähendite leidmisest 159

B. Mittelineaarsed võrrandisüsteemid 160

1. Harilik iteratsioonimeetod 160
2. Seideli meetod 161
3. Steffenseni meetod 161
4. Newtoni meetod 163
5. Kõõlude meetod 164
6. Kiireima languse meetod 165
7. Parameetri järgi diferentseerimise meetod 166
8. Võrrandi $f(z) = 0$ kompleksse juurte leidmine . . . 167
9. Mitme muutuja funktsiooni miinimumi (maksimumi) leidmine 167

C. Spetsiaalseid meetodeid algebraliste võrrandite lahendamiseks 167

1. Lobatševski meetod 168
2. Bernoulli meetod 172

Kirjandust 174

VIII. HARILIKUD DIFERENTSIAALVÕRRANDID 175

A. Cauchy ülesannete ligikaudsed lahendusmeetodid 175

1. Picard'i meetod 175
2. Astmeridade meetod 176
3. Newtoni meetod 177
4. Steffenseni meetod 177
5. Runge-Kutta tüüpi meetodid 178
6. Ekstrapolatsiooni- ja interpolatsioonivalemid 180
7. Milne'i meetod 182
8. Diferentsiaalvõrrandite süsteemid normaalkujul . . . 183
9. Kõrgemat järku diferentsiaalvõrrandid 185

B. Rajaülesannete ligikaudsed lahendusmeetodid 186

1. Lineaarsete rajaülesannete taandamine Cauchy ülesannetele 186
2. Väikese parameetri meetod (häiritusmeetod) 187
3. Newtoni meetod 189
4. Diferentsmeetod 190
5. Galjorkini meetod 193
6. Kollokatsioonimeetod 194
7. Vähimruutude meetod 194

C. Omaväärtusülesannete numbriline lahendamine 194

1. Diferentsmeetod 194
2. Galjorkini meetod 195

Kirjandust 196

IX. OSATULETISTEGA DIFERENTSIAALVÕRRANDID . . 197

A. Võrkude meetod 197

1. Elliptilist tüüpi võrrandid 197
2. Rajatingimuste täpsem aproksimeerimine elliptiliste ülesannete puhul 199
3. Diferentsvõrrandite koostamine määramatute kordajate meetodil 201
4. Mitteristkülik-võrgud 203
5. Cauchy ülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi puhul . . 203
6. Segaülesanne hüperboolset tüüpi võrrandi puhul . . . 205
7. Paraboolset tüüpi võrrandid 207
8. Diferentsskeemide koonduvusest ja stabiilsusest. ε-skeem 210
9. Diferentsskeemide stabiilsuse tarvilik tingimus 211
10. Kolmedimensioonilised diferentsskeemid 213

B. Sirgete meetod 214

1. Sirgete meetodi idee 214
2. Võrrandite täpsemast aproksimeerimisest 216
3. Sirgete meetodi diferentsiaalvõrrandite süsteemide lahendamine 216

C. Karakteristikute meetod hüperboolset tüüpi võrrandisüsteemide lahendamiseks 219

1. Esimest järku hüperboolne võrrandisüsteem 219
2. Teist järku hüperboolne võrrand 221
3. Cauchy ülesande ligikaudne lahendamine karakteristikute meetodiga 222

D. Variatsioonmeetodid 225
1. Ritzi meetod 225
2. Kantorovitši meetod 226
3. Minimiseerimismeetodid 227
4. Galjorkini meetod 228
Kirjandust 229

X. INTEGRAALVÕRRANDID 230

A. Fredholmi tüüpi lineaarsed integraalvõrrandid 230
1. Harilik iteratsioonimeetod 230
2. Integraalvõrrandi asendamine lineaarse võrrandisüsteemiga 231
3. Tuuma asendamine kõdunud tuumaga 231
4. Kollokatsioonimeetod 233
5. Vähimruutude meetod 234
6. Momentide (Galjorkini) meetod 234

B. Volterra tüüpi lineaarsed integraalvõrrandid 234
1. Harilik iteratsioonimeetod 234
2. Volterra integraalvõrrandi taandamine lineaarse diferentsiaalvõrrandi Cauchy ülesandele 235

C. Mittelineaarsed integraalvõrrandid 235
1. Newtoni meetod 236
2. Steffenseni meetod 236
Kirjandust 237

Aineregister 238

Мейше Исакович Левин и Сулев Юханович Ульм

СПРАВОЧНИК ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМ МЕТОДАМ

На эстонском языке

Оформление Э. Тали

Издательство «Валгус» Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja H. Heinoja. Kunstiline toimetaja H. Keigo. Tehniline toimetaja S. Kohu. Korrektor S. Kõiv.

Ladumisele antud 12. I 1966. Trükkimisele antud 22. IX 1966. Paber 54 × 84, 1/16. Trükipoognaid 15,5. Tingtrükipoognaid 13. Arvestuspoognaid 11,57. Trükiarv 4000. MB-08064. Tellimise nr. 284.
Hans Heidemanni nimeline trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II

Trükipaber nr. 2 — Kohila Paberivabrik

Hind 88 kop.

2—2—4

A-28090

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00281742 9