ISSN 0494-7304 0132-053×

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

833

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1988

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 833 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г

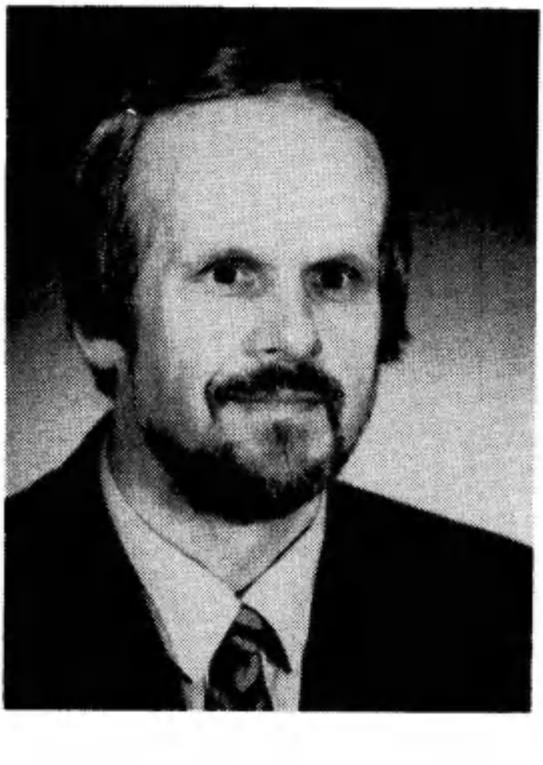
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Matemataatika- ja mehaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

ТАРТУ 1988

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск [illegible].
РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском и эстонском языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Тамме.
Подписано к печати 25.10.1988.
МВ [illegible].
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 6,66. Печатных листов 7,75.
Тираж 400.
Заказ № 903.
Цена 1 руб. 40 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

2 - 2



ГЕННАДИЮ ВАЙНИККО 50 ЛЕТ

Профессор Тартуского госуниверситета член-корр. АН ЭССР Геннадий Михайлович Вайникко родился 31 мая 1938 г. в городе Кондапога Карельской АССР в семье учителя.

После окончания с золотой медалью Кехраской средней школы Г.Вайникко в 1956 г. поступает на математическое отделение Тартуского университета, которое окончил с отличием в 1961 г. В 1961-1963 он обучался в аспирантуре при Тартуском университете, в 1964 г. защитил в Тарту кандидатскую [6], а в 1969 г. в Воронеже докторскую диссертацию [30]. В период с 1963 по 1965 г. Г.Вайникко работал ассистентом и старшим преподавателем Тартуского университета, с 1965 по 1967 г. доцентом Воронежского университета, с 1967 по 1971 г. доцентом Тартуского университета, а с 1971 г. по настоящее время он - профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики ТГУ. С 1983 г. он - научный руководитель лаборатории прикладной математики ТГУ. 1986 г. Г.Вайникко избран членом-корреспондентом Академии наук ЭССР.

Основные направления научных исследований Г.Вайникко следующие: 1) проекционные и другие методы дискретизации задач математической физики, 2) общая теория приближенных методов и ее приложения к решению конкретных задач, 3) регуляризация некорректно поставленных задач. Эти три направления объединяются общей нацеленностью на обоснование широкого класса численных методов на основе приложения и развития идей и методов функционального анализа.

Первые исследования Г.Вайникко посвящены изучению проекционных методов. Уже в студенческих работах [1, 2] содержатся новые априорные оценки погрешности для метода Галеркина решения линейной краевой задачи и метода Ритца решения проблемы собственных значений. В аспирантуре он продолжил эти исследования. В работах [4, 5] получены общие асимптотические и априорные оценки погрешности для метода Галеркина. Особенно интересные результаты Г.Вайникко получил при исследовании сходимости метода Галеркина в проблеме собственных значений [3, 6, 8, 12]. В этих работах им впервые даны эффективные оценки погрешности для этого метода в случае кратных собственных значений, причем даже в случае простого собственного значения его оценки точнее известных ранее. В [9, 10] содержатся теоретические исследования устойчивости и сходимости метода Галеркина.

На основе полученных результатов о сходимости метода Галеркина Г.Вайникко построил простую и красивую методику исследования метода коллокации. Он получил условия сходимости этого метода применительно к решению линейных [7] и нелинейных [11] краевых задач, одно- и многомерных интегральных уравнений [39, 35].

В 1965 г. по приглашению проф. М.А.Красносельского Г. Вайникко переезжает в Воронеж. Два года он работает в сильном коллективе математиков Воронежского университета, читает студентам ряд основных и специальных курсов, участвует в научных семинарах М.А.Красносельского, С.Г.Крейна, П.Е.Соболевского, А.И.Перова и др.

Здесь, в Воронеже, Г.Вайникко построил и обосновал общую схему исследования сходимости широкого класса приближенных методов, названную им возмущенным методом Галеркина [13, 16]. Эта схема, как частный случай, содержит общую теорию приближенных методов Л.В.Канторовича, созданную в 1948 г. Хотя теория Л.В.Канторовича и применялась для исследования сходимости различных методов вычислений, однако до работ Г.Вайникко она не получила существенного развития. Теория Г.Вайникко, в отличие от работ Л.В.Канторовича, применима для решения как линейных, так и нелинейных задач. В [17, 23] приведена схема исследования сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений.

Почти все названные результаты изложены в четвертой главе "Проекционные методы" монографии [29], где Г.Вайникко [1]"дал весьма завершенную теорию, включающую оценки ошибок в собственных значениях и собственных функциях даже для несамосопряженных случаев". Эта монография, написанная коллективом воронежских математиков, переведена на английский и немецкий языки [43, 44]. Полученные результаты в теории проекционных методов легли в основу курса лекций [45], прочитанного Г.Вайникко в 1973 г. в Технической высшей школе в Карл-Маркс-Штадте.

Существенным вкладом Г.Вайникко в общую теорию приближен-

[1] Г.Стренг, Дж.Фикс. "Теория метода конечных элементов" М.: Мир, 1977, с. 268.

ных методов является развитие нового направления этой теории на основе понятия дискретной сходимости и принципа компактной аппроксимации операторов [24, 27, 31]. Этот подход позволил развить общую теорию как для линейных так и для нелинейных задач и проблем собственных значений, а также расширить и упростить приложения этой теории.

Теория компактной аппроксимации является основным содержанием докторской диссертации Г.Вайникко [30], которая, по словам М.А.Красносельского, "является выдающимся событием в теории приближенных методов". Основные результаты диссертации опубликованы в монографии [34]. Эффективность теории ясно демонстрируется при исследовании сеточных алгоритмов решения уравнений, таких как метод механических квадратур решения интегральных уравнений, разностный метод решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и др. (см. также [26, 29, 36, 37]).

В работах [54, 58-60, 62, 63, 68-70, 78] Г.Вайникко развивает методы функционального анализа, связанные с исследованием дискретной сходимости. Он глубоко исследовал вопросы дискретной компактности элементов, устойчивой, компактной и регулярной сходимости операторов. На основе полученных результатов Г.Вайникко построил законченную общую теорию дискретизационных методов решения линейных и нелинейных уравнений, проблемы собственных значений. Центральным моментом этой теории является понятие регулярной сходимости операторов, которое оказывается более естественным, чем компактная сходимость, при исследовании сходимости разностного метода решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений [61] и уравнений в частных производных [67, 77]. Основные результаты этой теории Г.Вайникко изложил в книге [65], написанной на основе прочитаного спецкурса, а также в обзоре [88]. Теория дискретизационных методов широко применяется в работах советских и зарубежных специалистов.

Наряду с теоретическими работами Г.Вайникко следует отметить его деятельность в области приложения математических методов в задачах атмосферной оптики и геофизики. В период с 1973 по 1985 г. в Институте астрофизики и физики атмосферы АН ЭССР им были выполнены ряд работ по международным геофизическим проектам [46-51, 55, 56, 66, 75, 76, 87, 91, 92, 97, 99, 100, 104, 135] (большинство из них в соавторстве с О.Авасте).

Первые работы Г.Вайникко связаны с описанием поля интенсивности трансформированного солнечного излучения в разорванной облачности, что относится к основным задачам статистической оптики облачности. Применение классического уравнения переноса для изучения в облачной среде, использовавшееся в то время, не могло решить проблему в целом. По мнению Г.Н.Глазова[2] "начало строгому подходу, возможному только на основе решения стохастического уравнения переноса в адекватной модели облачности, положено Вайникко Г.М. Путем пространственного усреднения в модели разорванной облачности со стохастической геометрической и горизонтально-однородной внутренней структурой им выведены уравнения первых моментов прямой и рассеянной интенсивностей и вторых моментов прямой интенсивности."

В [48, 49] Г.Вайникко показал, что полученные им в [47] уравнения для средней интенсивности при некоторых предположениях относительно исходных данных могут быть сведены к решению интегрального уравнения с логарифмической особенностью, принадлежащего к классу слабосингулярных интегральных уравнений. Изучению свойств и методов решения этого типа уравнений посвящены ряд работ Г.Вайникко и его учеников [40, 66, 79, 82-84, 95, 96, 101, 102, 109, 111, 124, 131, 141, 144, 145, 148, 149]. В работах [40, 95, 101, 109] Г.Вайникко совместно с А.Педасом исследовали свойства гладкости решения слабосингулярного интегрального уравнения. Получены теоремы, описывающие связь между особенностями решения интегрального уравнения и особенностью ядра. На основе этих результатов дан тонкий анализ сходимости метода механических квадратур (совместно с А.Педасом) [40, 84, 131], метода сплайн-коллокации с выбором специальной сильно неравномерной сетки (совместно с П.Уба) [96, 102, 111], а также описана (совместно с А.Маршаком) методика исследования скорости сходимости "полуаналитического" метода Чандрасекара для решения уравнения Милна [79, 82]. В [141, 144, 145, 149] получены теоремы о гладкости решения многомерных слабосингулярных уравнений и сходимости метода кусочно-постоянной коллокации применительно к решению этого уравнения. Многие описанные выше результаты изложены в книге [124]. Разработка и обоснование методов решения уравнений, описывающих физические явления, относятся к так называемым прямым задачам. В атмосферной оптике и геофизике одним из

---

[2] Г.Н.Глазов. Статистическая теория лидарного зондирования атмосферы. Автореферат докторской диссертации. Томск, 1987, с. 17.

основных таких уравнений является уравнение переноса. Его решение дает интенсивность рассеянного переноса. Однако уже в середине 60 годов, в связи с развитием космических исследований, стала актуальной обратная задача: по измеренным значениям интенсивности излучения (т.е. по решению уравнения переноса) определить параметры атмосферы (т.е. исходные данные уравнения). Как правило, обратные задачи переноса излучения принадлежат классу некорректно поставленных задач.

Мы отметим работу [91], выполненную коллективом авторов, в которой Г.Вайникко предложил алгоритм решения обратной задачи по определению высотного хода коэффициента аэрозольного ослабления по оптическим измерениям интенсивности из космоса. Здесь исходная довольно сложная задача сведена, благодаря учету специфики задачи, к существенно более простой: к решению интегрального уравнения Абеля. Этот подход получил дальнейшее развитие в работах [92, 99, 104].

Решение прикладных задач атмосферной оптики и геофизики явилось отправной точкой цикла работ, посвященных теоретическому исследованию методов решения некорректных задач. Основное внимание Г.Вайникко уделяет изучению линейных операторных уравнений первого рода в гильбертовом пространстве.

Изучение некорректных задач Г.Вайникко начинал с исследования итерационных процессов [89, 93]. Он предложил удобный в практических приложениях принцип невязки выбора параметра регуляризации, доказал его регуляризирующие свойства и получил оценки погрешности в случае истокопредставимого решения. Далее он распространил эти результаты для целого класса методов регуляризации как в случае приближенно заданной правой части [94], так и в случае неточно заданного оператора задачи [106, 110, 112, 113, 117]. В [121] изучен вопрос, в каких случаях вычисления можно провести до критического уровня невязки. Эти результаты Г.Вайникко изложил в книге [114], написанной на основе прочитанного спецкурса по теории некорректных задач.

Г.Вайникко изучал также класс нормально разрешимых задач [120, 134, 140]. Для них он указал способы выбора параметра регуляризации, при котором погрешность метода имеет тот же порядок, что и исходные данные, а также описал структуру постоянных в оценках. Эти результаты получены им на основе работ [122, 123], посвященных изучению аппроксимации псевдообратных операторов.

В [127] изучена модификация для класса методов регуляризации при наличии априорной информации о решении.

Г.Вайникко занимался также нелинейными некорректными задачами. Он предложил и обосновал одну легко реализуемую версию принципа невязки [I30].

В [II6, I26] изучены вопросы выбора размерности при дискретизации регуляризационных алгоритмов проекционными методами. Бывают случаи, когда дискретизация сама играет роль регуляризующего фактора, т.е. имеет место так называемая саморегуляризация. Г.Вайникком (совместно с У.Хямариком) выведены необходимые и достаточные условия саморегуляризации при дискретизации задачи проекционными методами [I32, I33].

Большой теоретический интерес представляют вопросы оптимальности приближенных методов решения некорректных задач. Г.Вайникко предложил новое понятие оптимальности [I28], являющееся, в случае приближенно известного оператора, более естественным ранее использовавшихся. Для класса методов регуляризации он получил условия оптимальности (в новом смысле), а также указал для конкретных методов границы оптимальности и оптимальный выбор параметра регуляризации на классе истокообразно представимых решений [I28, I38, I43, I46, I47]. Основные результаты работ по некорректным задачам Г.Вайникко изложил в монографии [I37], написанной совместно с А.Ю.Веретенниковым.

Г.Вайникко - прекрасный лектор, умеющий выявить и ясно изложить сущность вопроса. В Тартуском университете он, кроме основных курсов по дифференциальным уравнениям, уравнениям математической физики, методам вычислений и пр., читал ряд спецкурсов по актуальным проблемам вычислительной математики: проекционные методы, анализ дискретизационных методов, некорректно поставленные задачи, численные методы теории переноса излучения и др. Изданные на ротапринте Тартуского госуниверситета материалы этих спецкурсов [65, II4, I24] получили известность далеко за пределами республики. Г.Вайникко является автором оригинального учебника по дифференциальным уравнениям [42, I39].

Много внимания Г.Вайникко уделяет работе с учениками. Он умеет уже у студентов возбудить интерес к решению серьезных математических проблем. Под его руководством выполнено более 20 кандидатских работ, все, без исключения, аспиранты Г.Вайникко успешно защищаются и утверждаются ВАК-ом в ученой степени. Кроме Тарту и Таллина, его ученики работают в Москве, Ленинграде, Тбилиси, Воронеже, Хабаровске, Дрездене, Пловдиве.

Г.Вайникко участвовал во многих всесоюзных и международных конференциях и школах, часто в качестве приглашенного лектора. Он читал циклы лекций в разных математических центрах Советского Союза, в ГДР, ЧССР, ПНР и Финляндии. Часто он выступает оппонентом кандидатских и докторских диссертаций.

Г.Вайникко является членом редколлегий двух международных журналов по прикладному функциональному анализу – "**Numerical Functional Analysis and Optimization**" (США) и "**Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen**" (ГДР). Он входит в коллектив авторов "Математической энциклопедии" (статьи "Коллокации метод", "Проекционные методы", "Ритца метод", "Сходимость дискретная" и др.)и "Эстонской советской энциклопедии". Он пишет рефераты для реферативных журналов "Математика" и "**Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete**," является рецензентом многих центральных математических журналов.

Г.Вайникко является руководителем всесоюзного семинара "Численные методы решения переноса" (см. [136, 142]), республиканского семинара по методам вычислений, заместителем председателя Эстонского математического общества, председателем бюро ТГУ общества дружбы с ГДР, руководителем кружка студенческого научного общества математического факультета ТГУ.

Коллектив математического факультета ТГУ от всей души поздравляет юбиляра и желает дальнейших творческих успехов в его научной деятельности.

Э.Тамме, У.Хямарик, Ю.Князихин

ТРУДЫ Г.ВАЙНИККО

1. Оценки погрешности метода Галеркина для линейного дифференциального уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, вып. 129, 394-416.

2. Оценки погрешности метода Ритца для линейного однородного уравнения. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, вып. 129, 417-427.

3. Асимптотические оценки погрешности проекционных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1964, т. 4, № 3, 405-425.

4. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина I. Асимптотические оценки. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964, вып. 150, 188-201.

5. Некоторые оценки погрешности метода Бубнова-Галеркина II. Оценки n-ого приближения. Уч. зап. Тартуск. ун-та. 1964. вып. 150, 202-215.

6. О точности методов типа Галеркина. Канд. диссертация, Тарту, 1964, 202 с.-Автореферат дисс., Тарту, 1964, 14 с.

7. О сходимости и устойчивости метода коллокации. Дифференц. уравнения, 1965, т.1, № 2, 244-254.

8. Оценки погрешности метода Бубнова- Галеркина в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1965, т.5, № 4, 587-607.

9. Необходимые и достаточные условия устойчивости метода Галеркина-Петрова. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, вып. 177, 141-147.

10. К вопросу о сходимости метода Галеркина. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, вып. 177, 148-158.

11. О сходимости метода коллокации для нелинейных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1966, т. 6, № 1, 35-42.

12. О быстроте сходимости некоторых приближенных методов типа Галеркина в проблеме собственных значений. Изв. вузов. Математика, 1966, № 2, 37-45.

13. Возмущенные проекционные методы и общая теория приближенных методов. Тезисы доклада на международном конгрессе математиков. Москва, 1966.

14. Harilikud diferentsiaalvõrrandid I. Tartu: TRÜ, 1967, 212 lk. (kaasautor T.Sõrmus).

15. Harilikud diferentsiaalvõrrandid II. Tartu: TRÜ, 1967, 126 lk. (kaasautor T.Sõrmus).

16. Возмущенный метод Галеркина и общая теория приближенных методов для нелинейных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 4, 723-751.

17. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 5, 977-987.

18. Об устойчивости метода Галеркина-Петрова для нелинейных уравнений. В сб.:Проблемы мат. анализа сложных систем. Воронеж: ВГУ, 1967, вып. 1, 12-15.

19. Решение экстремальных задач с помощью обучающихся программ. В сб.:Проблемы мат. анализа сложных систем. Воронеж: ВГУ, 1967, вып. 1, 16-24 (соавтор Ю.И. Петунин).

20. О быстроте сходимости метода моментов для дифференциальных уравнений. Сибирск. мат. ж., 1968, т. 9, № 1, 21-28.

21. О сходных операторах. Докл. АН СССР, 1968, т. 179, № 5, 1029-1031.

22. Правильные операторы. Функц. анализ и его прилож., 1968, т. 2, № 2, 87-88 (соавтор Ю.Б. Уманский).

23. О быстроте сходимости метода механических квадратур в проблеме собственных значений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1968, т. 8, № 5, 1105-1110 (соавтор А.М. Дементьева).

24. Компактная аппроксимация линейных вполне непрерывных операторов операторами в факторпространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1968, вып. 220, 190-204.

25. О вращении уплотняющих векторных полей. В сб.: Проблемы мат. анализа сложных систем. Воронеж: ВГУ, 1968, вып. 2, 84-88 (соавтор Б.Н.Садовский).

26. О связи между методами механических квадратур и конечных разностей. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, т. 9, № 2, 259-270.

27. Принцип компактной аппроксимации в теории приближенных методов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, т. 9, № 4, 739-761.

28. О разностном методе для обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1969, т. 9, № 5, 1057-1074.

29. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969, 450 с. (соавторы М.А.Красносельский, П.П.Забрейко, Я.Б.Рутицкий, В.Я.Стеценко).

30. Об аппроксимации линейных и нелинейных операторов и приближенном решении операторных уравнений. Докторск. диссертация, Воронеж, 1969, 310 с.- Автореферат дисс., Воронеж, 1969, 27 с.

31. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение операторных уравнений. Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 2, 237-240.

32. Mônda funktsionaalanalüüsist I. Matemaatika ja kaasaeg, 1969, № 16, 3-19.

33. Mônda funktsionaalanalüüsist II. Matemaatika ja kaasaeg, 1970, № 17, 35-43.

34. Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение операторных уравнений. Тарту: ТГУ, 1970, 192 с.

35. О сходимость метода коллокации для многомерных интегральных уравнений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1970, вып. 253, 244-257.

36. О сходимости метода механических квадратур для интегральных уравнений с разрывными ядрами. Сибирск. мат. ж., 1971, т. 12, № 1, 40-53.

37. О сходимости квадратурно-разностных методов для линейных интегро-дифференциальных уравнений. Ж.вычисл. мат. и мат. физ., 1971, т. 11, № 3, 770-776.

38. К одной теореме С.Г.Крейна о возмущении операторов, порождающих аналитические полугруппы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, вып. 281, 186-189 (соавтор М.Шлапикиене).

39. К вопросу об устойчивости метода коллокации. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, вып. 281, 190-196.

40. О решении интегральных уравнений с логарифмической особенностью методом механических квадратур. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, вып. 281, 201-210 (соавтор А.Педас).

41. Mônda funktsionaalanalüüsist III. Matemaatika ja kaasaeg, 1972, № 18, 13-22.

42. Harilikud diferentsiaalvôrrandid. Tallinn: Valgus, 1972, 348 lk. (kaasautor T.Sôrmus).

43. Approximate Solution of Operator Equations (translation from Russian), Groningen: Wolters-Noordhoff publ., 1972, (co-authors M.A.Krasnoselski and others).

44. Näherungsverfahren zur Lösung von Operatorgleichungen (Übersetzung aus Russischer Sprache). Berlin, 1973, (Mitautoren M.A.Krasnoselski und anderen).

45. Projektionsmethoden. Skripte TH Karl-Marx-Stadt, 1973, 72 S.

46. О влиянии разрешающей способности телевизионных камер и радиометров на точность определения количества облаков со спутников. Метеорология и гидрология, 1973, № 6, 36–45 (соавтор О.А.Авасте).

47. Уравнение средней интенсивности излучения в разорванной облачности. Метеорологические исследования, 1973, № 21, 28–37.

48. Транспортное приближение к средней интенсивности излучения в разорванной облачности. Метеорологические исследования, 1973, № 21, 38–51.

49. Результаты расчета потоков солнечной радиации, отраженной и пропущенной разорванной облачностью. Метеорологические исследования, 1973, № 21, 52–64 (соавтор О.А.Авасте).

50. Корреляция интенсивности прямого солнечного излучения в разорванной облачности. Метеорологические исследования, 1973, № 21, 65–76.

51. Calculation of the mean values of intensities and fluxes in broken clouds. In: Noctilucent clouds. Tallinn, 1973, 48-117 (co-author O.Avaste).

52. Matemaatilise füüsika võrrandid I. Tartu: TRÜ, 1973, 186 lk. (kaasautor E.Tamme).

53. Matemaatilise füüsika võrrandid II. Tartu: TRÜ, 1974, 170 lk. (kaasautor E.Tamme).

54. Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Skripte TH Karl-Marx-Stadt, 1974, 134 S.

55. Перенос солнечной радиации в разорванной облачности. Физика атмосферы и океана, 1974, 10, № 10, 1054–1061 (соавтор О.А.Авасте).

56. Статистическое моделирование переноса коротковолновой радиации в разорванной облачности. В сб.: Методы Монте-Карло в вычисл. мат. и мат. физ. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1974, 232–239 (соавтор О.А.Авасте).

57. О приближении неподвижных точек вполне непрерывных операторов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, вып. 342, 225–236.

58. Дискретно-компактные последовательности. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, т. 14, № 3, 572–583.

59. О сходимости приближенных методов решения линейных и нелинейных операторных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, т. 14, № 4, 828–837 (соавтор О.Карма).

60. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1974, т. 14, № 6, 1393–1408 (соавтор О.Карма).

61. О сходимости разностного метода в задаче о периодических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1975, т. 15, № 1, 87–100.

62. Konvergenzuntersuchungen der Näherungsmethoden für lineare und nichtlineare Operatorgleichungen und Eigenwertprobleme mit Anwendungen zum Differenzenverfahren. 5.Tagung über Probleme und Methoden Math. Phys., TH Karl-Marx-Stadt, 1975, Heft 3, 501-531.

63. Некоторые проблемы. связанные с дискретной сходимостью операторов. Тр. НИИ мат. Воронежск. ун-та, 1975, вып. 19, 21-26.

64. О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений. Дифференц. уравнения, 1975, т. II, № 7, 1269-1277 (соавтор П.Оя).

65. Анализ дискретизационных методов. Тарту: ТГУ, 1976, 161 с.

66. Решение интегральных уравнений с экспоненциальными ядрами. Изв. АН ЭССР, Физ. Мат., 1976, 25, № 2, 118-123 (соавторы Л.Карпенко, А.Шилман).

67. Сходимость разностного метода в задаче о периодических решениях уравнений эллиптического типа. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1976, т. 16, № 3, 652-664 (соавтор Э.Тамме).

68. Funktionalanalysis der Diskretisierungsmethoden. Leipzig: Teubner Verlagsges., 1976, 136 S.

69. Über die Konvergenz und Divergenz von Näherungsmethoden bei Eigenwertproblemen. Math. Nachr., 1977, № 78, 145-164.

70. Über Konvergenzbegriffe für lineare Operatoren in der Numerischen Mathematik. Math. Nachr., 1977, № 78, 165-183.

71. Über die Invarianz der Rotation bei Approximation der Vektorfelder. Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math., Naturwiss. Techn., 1977, № 1, 265-271.

72. О сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний. Abh. Akad. Wiss. DDR, Abt. Math., Naturwiss. Techn., 1977, № 4, 347-353 (соавтор П. Мийдла).

73. О сходимости приближенных методов отыскания автоколебаний. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, вып. 430, 75-88 (соавтор П.Мийдла).

74. О регулярно согласованных операторах. Изв. вузов. Математика, 1977, № 10, 25-36 (соавтор С.И.Пискарев).

75. Некоторые статистические характеристики поля мезосферных облаков. Метеорологические исследования, 1977, № 23, 5-11 (соавторы О.Авасте, О.Кярнер).

76. A method of calculating radiative transfer in broken clouds. Proc. of Symp. on radiation in atmosphere. Princeton, 1977, 220-224 (co-author O.Avaste).

77. Foundation of finite difference method for eigenvalue problems. Proc. of Summer School "The use of finite element method in geophysics". Prague-Liblice, 1978, 173-192.

78. Approximative methods for nonlinear equations (two approaches to the convergence problems). Nonlinear Analysis, 1978, vol.2, No 6, 647-687.

79. О быстроте сходимости метода дискретных ординат в задаче переноса излучения. Изв. вузов. Математика, 1978, № 11, 11-22 (соавтор А.Маршак).

80. Оценки сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений. В сб.: Республ. симп. по методами решения нелин. уравнений. Таллин: АН ЭССР, 1978, 12-18.

81. Замечание об интерполяции функций кубическими сплайнами на неравномерной сетке. В сб.: Республ. симп. по методами решения нелин. уравнений. Таллин: АН ЭССР, 1978, 19-20 (соавтор Р.Керге).

82. О быстроте сходимости метода Чандрасекара. В сб.: Республ. симп. по методами решения нелин.уравнений. Таллин: АН ЭССР, 1978, 21-22 (соавторы Ю.Князихин, А.Маршак).

83. Кусочно-линейная аппроксимация решения уравнения Милна. В сб.: Республ. симп. по методами решения нелин. уравнений. Таллин: АН ЭССР, 1978, 23-24 (соавтор А.Педас).

84. О методе механических квадратур для решения интегральных уравнений со слабой особенностью. Матер. конф. "Методы алгебры и функц. ан. семейств операторов". Тарту: ТГУ, 1978, 58-60 (соавтор А.Педас).

85. О методе редукции для многомерных дискретных уравнений Винера-Хопфа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, вып. 448, 74-81 (соавтор Р.Лепик).

86. Резольвента Фредгольма и обращение матриц, линейно зависящих от параметра. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, вып. 448, 94-98 (соавтор С.Г.Михлин).

87. Approximate solution of the transfer equation in broken clouds. In: Standard Procedures to Compute Atmosphere Radiative Transfer in Scattering Atmosphere, vol. 3. Lille, 1978, 44-47 (co-author O.Avaste).

88. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений. Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 16. М.: ВИНИТИ СССР, 1979, 5-53.

89. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректно поставленных задач. В сб.: Всесоюзн. конф. по некорректно пост. задачам. Фрунзе: Илим, 1979, 27-28.

90. О методах решения интегральных уравнений переноса излучения. 7. Tagung über Probleme und Methoden der Math. Physik, Tagungsberichte. Karl-Marx-Stadt, 1979, 57-64.

91. Восстановление высотного хода профиля коэффициента ослабления аэрозоля. В кн.: Исследов. атмосферно-оптических явлений с борта орбит. научн. станции "Салют-4". Тарту: АН ЭССР, 1979, 146-157 (соавторы О.А.Авасте, Г.М.Гречко, В.И.Севастьянов и др.).

92. Reconstruction of altitude profile of aerosol extintion coefficient from the near-earth space optical measurements. XVII General Assembly IUGG, Int. assoc. of meteorology atm. physics. Canberra, 1979, p. 80.

93. Оценки погрешности метода последовательных приближений для некорректных задач. Автомат. и телемех., 1980, № 3, 84-92.

94. Принцип невязки для класса регуляризационных методов. Тезисы конф. "Теорет. и прикл. вопросы матем." Тарту: ТГУ, 1980, 170-172.

95. Оценки производных решения интегрального уравнения со слабо особым ядром. Тезисы конф. "Теорет. и прикл. вопросы матем." Тарту: ТГУ, 1980, 193-195 (соавтор А.Педас).

96. Кусочно-полиномиальная аппроксимация решения интегрального уравнения со слабой особенностью. Тезисы конф. "Теорет. и прикл. вопросы матем." Тарту: ТГУ, 1980, 196-198,(соавтор П.Уба).

97. Слежение высотного распределения аэрозольного коэффиента ослабления. Тезисы докл. XI всесоюзн. совещ. по актинометр. Таллин: АН ЭССР, 1980, 19-22 (соавтор О.Авасте).

98. Mittekorrektsed ülesanded. Koolimatemaatika VII. Tartu: TRÜ, 1980, 38-41.

99. Aerosol monitoring using radiation measurements. Intern. Radiation Symp., extended abstracts. Colorado, 1980, 485-487, (co-author O.Avaste).

100. Approximate solution of the transfer equation in broken (or finite) clouds. In: Standard Procedures to Compute Atmospheric Radiative Transfer in a Scattering Atmosphere, vol. 2. Colorado, 1980, 18-27.

101. The properties of solutions of weakly singular integral equations. J. Austral. Math. Soc., Ser. B, 1981, v. 22, 419-430, (co-author A.Pedas).

102. A piecewise polynomial approximation to the solution of integral equation with weakly singular kernel. J.Austral. Math. Soc., Ser. B. 1981, v. 22, 431-438, (co-author P.Uba).

103. Конечномерная аппроксимации нелинейных уравнений и приложения к задачам о периодических решениях и автоколебаниях. IX междун. конф. по нелин. колебаниям. Киев: 1981, 75-76.

104. Восставноление высотного хода коэффициента аэрозольного рассеяния и концентрации водяного пара по измерениям из космоса. В кн.: Атмосферно-оптические явления с орбит. станции "Салют". Тарту: АН ЭССР, 1981, 146-157, (соавторы О.А.Авасте, Г.М.Гречко, В.И.Севастьянов и др.).

105. О сходимости метода конечных разностей при отыскании периодических решений уравнений нейтрального типа. ПЛИСКА Български мат. студии, 1981. т. 3, 20-27, (соавтор Н.Казакова).

106. Принцип невязки для класса регуляризационных методов в случае приближенно заданного оператора. II симп. по мет. решения нелин. уравнений и задач оптимиз. Таллин: Валгус, 1981, 27-29.

107. Аппроксимация неподвижных точек многозначных отображений. II симп. по мет. решения нелин. уравнений и задач оптимиз. Таллин: Валгус, 1981, 86-87.

108. Дискретные меры некомпактности. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981. вып. 580, 3-8.

109. О дифференциальных свойствах решения интегрального уравнения со слабо-особым ядром. В кн.: Численное реш. краевых задач и интегр. уравнений. Тарту: ТГУ, 1981, 45-47 (соавтор А.Педас).

110. Принцип невязки для класса регуляризационных методов для самосопряженных задач. В кн.: Численное реш. краевых задач и интегр. уравнений. Тарту: ТГУ, 1981, 73-75.

111. Кусочно-полиномиальная аппроксимация решения интегральных уравнений со слабой особенностью. В кн.: Методы аппрокс. и интерполяции. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1981,

33-38, (соавторы А.Педас, П.Уба).
II2. Принцип невязки для одного класса регуляризационных методов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., I982, т. 22, № 3, 499-5I5.
II3. Принцип невязки для класса итерационных методов. В кн.: Методы решения некорректных задач. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, I982, I9-28.
II4. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: ТГУ, I982, II0 с.
II5. Об инвариантности вращевращения векторных полей при аппроксимации многозначных отображений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I983, вып. 633, 3-I0.
II6. Проекционные методы в некорректно поставленных задачах. В кн.: Методы адгебры и анализа. Тарту: ТГУ, I983, I06-I09.
II7. A class of regularization methods for ill-posed problems. ICM-82, Short Communic. XIII. Warszawa: 1983, p.27.
II8. Методы регуляризации некорректных задач. В кн.: УIII школа по теории операторов. Тез. докл. I, I983, Рига: ЛГУ, I983, с. 42.
II9. Методы регуляризации линейных некорректных задач. В кн.: Теории и методы решения некорректно поставл. задач (тесисы). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, I983, 56-57.
I20. Об оптимальной регуляризации нормально разрешимых задач. В кн.: Теория и методы решения некорректно поставленных задач и ее приложения.(Научн. тр.). Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, I983, 23-29.
I2I. Критический уровень невязки в методах регуляризации. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., I983, т. 23, № 6, I283-I297.
I22. Аппроксимация псевдообратного оператора. В кн.: Методы решения нелин. уравнений и задач оптимизации. Таллин: Валгус, I984, II-I4.
I23. Оценки погрешности при аппроксимации псевдообратного оператора. В сб.: IX школа по теории операторов в функц. пространствах. Тернополь, I984, с. 2I.
I24. Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту: ТГУ, I984, 94 с., (соавторы А.Педас, П.Уба).
I25. Конечномерная аппроксимация задач о периодических решениях и автоколебаниях. В кн.: IX международ. конф. по нелинейным колебаниям, т. I. Киев: Наукова думка, I984, I03-I07.
I26. Проекционные методы в некорректных задачах. В сб.: Вариационно-разностные методы в мат. физ. Москва: ОВМ АН СССР, I984, 42-50.
I27. Об одном классе методов регуляризации при наличии априорной информации о решении. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I984, вып. 672, 3-9.
I28. О понятии оптимальности приближенных методов решения некорректных задач. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I985, вып. 7I5, 3-II.
I29. Оптимальный выбор параметра регуляризации на классе истокообразно представимых решений. В сб.: Теория и методы решения некорр. пост. задач. Саратов: СГУ, I985, 28-29.

130. Легко реализуемая версия принципа невязки для нелинейных некорректных задач. В сб.: Теорет. и прикладн. вопр. матем. Тарту: ТГУ, 1985, 20-22.

131. О скорости сходимости одной модификации метода механических квадратур для решения интегральных уравнений со слабой особенностью. В сб.: Теорет. и прикладн. вопр. матем. Тарту: ТГУ, 1985, 23-25 (соавтор А.Педас).

132. Проекционная регуляризация некорректных задач. В сб.: Теорет. и прикладн. вопр. матем. Тарту: ТГУ, 1985, 26-28 (соавтор У.Хямарик).

133. Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах. Изв. вузов. Математика, 1985, № 10, 3-17 (соавтор У.Хямарик).

134. Оценки погрешности методов регуляризации для нормально разрешимых задач. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1985, т. 25, № 10, 1443-1456.

135. Horizontally inhomogeneoue atmospheres illuminated by the solar beam. In: Radiative transfer in scattering and absorbing atmospheres: Standard computational procedures. A Deepan Publ., 1985, 207-245 (co-author O.Avaste).

136. Семинар "Численные методы решения уравнения переноса". Изв. АН ЭССР, Физ. Мат., 1985, т. 34, № 2, 229-231 (соавторы В.И.Агошков, Л.П.Васс).

137. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, 1986, 181 с. (соавтор А.Ю.Веретенников).

138. On the optimality of regularization methods. In: Aloine-U.S. Seminar on Inverse and Ill-Posed Problems. St.Wolfgang, Austria, 1986, p. 49.

139. Harilikud diferentsiaalvõrrandid. Tallinn: Valgus, 1986, 238 lk.

140. Решение интегральных уравнений на спекрте. В сб.: Тез. докл. всесоюзн. конф. "Дифференциальные уравнения и их приложения". Ашхабад: Минвуз ТССР, 1986, с. 56.

141. О гладкости решения многомерных интегральных уравнений переноса. В сб.: Численные методы решения уравнения переноса. Тарту: АН ЭССР, 1986, 40-43.

142. Семинар "Численные методы решения уравнения переноса". Изв. АН ЭССР, Физ. Мат., 1986, т. 35, № 4, 447-448 (соавторы Т.А.Гермогенова, В.П.Шутяев).

143. Об оптимальном выборе параметра регуляризации в методе Тихонова. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, вып. 762, 3-8.

144. Некоторые коллокационные схемы для многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений. В кн.: Актуальные проблемы вычисл. и прикл. математики. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987, 41-42.

145. Гладкость решения многомерного слабо сингулярного интегрального уравнения. В сб.: Методы решения интегральных, дифференциальных и операторных уравнений. Тарту: ТГУ, 1987, 3-5.

146. On the optimality of methods for ill-posed problems. Z. Anal. Anw., 2987, Bd. 6, H. 4, 351-362.

147. On the optimality of regularization methods. In: Inverse and Ill-posed Problems. London: Aoademio Press, 1987, 77-95.

148. О решении слабо сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1987, т. 180, 76-77 (соавтор А.Педас).

149. Метод кусочно-постоянной коллокации для многомерного слабосингулярного интегрального уравнения. Тезисы докл. семинара "Численные методы решения уравнения переноса". Тарту: АН ЭССР, 1988, 31-34.

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО СЛАБО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Г.Вайникко

В работе строятся коллокационные схемы m- ого порядка точности для многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений второго рода. Особенности производных решения возле границы области (в данной работе – параллелепипеда) учитываются специальным сгущением сетки аналогично, как это в одномерном случае предложено в [4,2].

I. Гладкость решения. Рассмотрим линейное интегральное уравнение

$$u(x)=\int_G \mathcal{K}(x,y)u(y)dy + f(x), \quad x\in G, \qquad (I)$$

где $G\subset \mathbb{R}^n$ – параллелепипед,

$$G=\{x\in \mathbb{R}^n: \quad 0<x_k<b_k, \quad k=1,\dots,n\}.$$

Предполагается, что ядро $\mathcal{K}(x,y)$ имеет на $(G\times G)\setminus\{x=y\}$ непрерывные производные до некоторого порядка m $(m\geq 1)$ и существует такое вещественное число ν $(-\infty<\nu<n)$, что

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1}\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\beta_n}\mathcal{K}(x,y)\right|\leq$$

$$\leq c\begin{cases}1+|x-y|^{-\nu-|\alpha|}, & \nu+|\alpha|\neq 0,\\ 1+|\log|x-y||, & \nu+|\alpha|=0,\end{cases} \qquad |\alpha|+|\beta|\leq m \qquad (2)$$

(имеется в виду, что оценка выполняется для всех $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ с $\alpha_i\geq 0$, $\beta_i\geq 0$, таких что $|\alpha|+|\beta|\equiv \alpha_1+\dots+\alpha_n+\beta_1+\dots+\beta_n\leq m$). Кроме того, ядро $\mathcal{K}(x,y)$ предполагается обладающим следующей гладкостью:

$$\left.\begin{array}{l}\forall\varepsilon>0\quad\forall\eta>0\quad\exists\,\delta=\delta(\varepsilon,\eta)>0:\\ x_1,x_2,y\in G,\ |x^1-x^2|<\delta,\ |x^i-y|\geq\eta\ (i=1,2)\Rightarrow\\ \Rightarrow|D_x^\alpha D_y^\beta\mathcal{K}(x^1,y)-D_x^\alpha D_y^\beta\mathcal{K}(x^2,y)|<\varepsilon\quad(|\alpha|+|\beta|\leq m)\end{array}\right\}\quad(3)$$

Здесь

$$D_x^\alpha D_y^\beta\mathcal{K}(x^1,y)=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\beta_n}\mathcal{K}(x,y)\right]_{x=x^1}.$$

Отметим, что условиям (2) и (3) удовлетворяют, например ядра вида $\mathcal{K}(x,y)=a(x,y)|x-y|^{-\nu}$ $(\nu<n)$ и $\mathcal{K}(x,y)=a(x,y)\log|x-y|$ $(\nu=0)$, где функция $a(x,y)$ вместе с её производными до порядка m равномерно непрерывна по x на множествах $\{(x,y)\in G\times G: |x-y|\geq\eta\}$, $\eta>0$, причем

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial y_1}\right)^{\beta_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{\beta_n}a(x,y)\right|\leq$$
$$\leq c'|x-y|^{-|\alpha|},\qquad|\alpha|+|\beta|\leq m.$$

Последние неравенства выполняются, в частности, если

$$|D_x^\alpha D_y^\beta a(x,y)|\leq c'',\quad|\alpha|+|\beta|\leq m.$$

Обозначим через $\rho_k(x)=\max\{x_k,\ b_k-x_k\}$ расстояние от $x\in G$ до ближайшей из двух противоположных граней G, ортогональных оси x_k. Тогда $\rho(x)=\min\limits_{1\leq k\leq n}\rho_k(x)$ – расстояние от x до ∂G, границы области G. Введем весовое пространство $C_\square^{m,\nu}(G)$, состоящее в случае $m\geq n-\nu$ из функций $u\in C^m(G)\cap\bar{C}(\bar{G})$, производные $D^\alpha u(x)$ которых при $|\alpha|<n-\nu$ непрерывны в $\bar{G}$ (замыкании G), а при $n-\nu\leq|\alpha|\leq\leq m$ удовлетворяют неравенствам

$$|D^\alpha u(x)|\leq c\begin{cases}1+|\log\rho(x)|, & |\alpha|=n-\nu,\\ \rho(x)^{n-\nu-|\alpha|}, & |\alpha|>n-\nu,\end{cases}\qquad(4)$$

причем производные вида $\partial^l u(x)/\partial x_k^l$ $(1\leq k\leq n,\ n-\nu\leq l\leq m)$ продолжимы в непрерывные на множестве

$0\leq x_1\leq b_1,\ldots,\ 0\leq x_{k-1}\leq b_{k-1},\ 0<x_k<b_k,\ 0\leq x_{k+1}\leq b_{k+1},\ldots,\ 0\leq x_n\leq b_n$

функции, и (ср. с (4))

$$\left|\frac{\partial^l u(x)}{\partial x_k^l}\right| \le c \begin{cases} 1+|\log \varrho_k(x)|, & l=n-\nu, \\ \varrho_k(x)^{n-\nu-l}, & l>n-\nu \end{cases} \qquad (4')$$

Постоянная $c=c(u)$ в приведенных оценках роста производных возле ∂G, конечно зависит от u. В случае $m<n-\nu$ положим $C_\square^{m,\nu}(G)=C^m(\bar G)$.

В обозначениях [I] имеем $C_\square^{m,\nu}(G)=\bigcap\limits_{k=1}^{n} C_{a^k}^{m,\nu}(G)$, где $a^k(x)=(\underbrace{0,\ldots,0}_{k-1},1,0,\ldots,0)$ – постоянное векторное поле в $\bar G$. Имеет место следующий результат (см. [I], теорема 2).

Лемма I. Пусть выполнены условия (2),(3) и $f\in C_\square^{m,\nu}(G)$. Если уравнение (I) имеет интегрируемое в G решение, то все его интегрируемые в G решения принадлежат $C_\square^{m,\nu}(G)$.

2. Оценка погрешности интерполяции. На отрезках $[0,b_k]$, $k=1,\ldots,n$, определим точки (ср. [2,4])

$$x_k^j=\frac{b_k}{2}\left(\frac{j}{N_k}\right)^r, \; j=0,1,\ldots,N_k, \quad x_k^{N_k+j}=b_k-x_k^{N_k-j}, \; j=1,\ldots,N_k \qquad (5)$$

(параметр $r\ge 1$ характеризует неравномерность сетки). Тем самым определено разбиение G на ячейки

$$G_{j_1\ldots j_n}=\{x\in\mathbb{R}^n: x_1^{j_1}\le x_1\le x_1^{j_1+1},\ldots,x_n^{j_n}\le x_n\le x_n^{j_n+1}\}\subset\bar G,$$
$$j_1=0,1,\ldots,2N_1-1,\quad\ldots,\quad j_n=0,1,\ldots,2N_n-1.$$

На стандартном отрезке [-I,I] выберем некоторые точки ξ_1, $\xi_2,\ldots,\xi_m$, $-1\le\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_m\le 1$. Аффинным преобразованием перенесем их на отрезки $[x_k^i, x_k^{i+1}]$:

$$\xi_{k,l}^i=x_k^i+\frac{\xi_l+1}{2}(x_k^{i+1}-x_k^i),\; l=1,\ldots,m,\; i=0,1,\ldots,2N_k-1,\; k=1,\ldots,n \qquad (6)$$

Обозначим $N=(N_1,\ldots,N_n)$, $h=1/\min\limits_{1\le k\le n} N_k$. По заданной на $\bar G$ функции u построим кусочно-полиномиальную функцию $P_N u$, которая на каждой ячейке $G_{j_1\ldots j_n}$, $j_k=0,1,\ldots,2N_k-1$, является многочленом степени $\le m-1$ относительно каждой из переменных $x_1,\ldots,x_n$ и интерполирует u в узлах $(\xi_{1,l_1}^{i_1},\ldots,\xi_{n,l_n}^{i_n})$, $l_k=1,\ldots,m$, $i_k=0,1,\ldots,2N_k-1$ $(1\le k\le n)$. В действительности в каждой ячейке интерполяция проводится независимо по попавшим в нее узлам. Если $\xi_1=-1$, $\xi_m=1$, то $P_N u$ всеже будет непрерывной в $\bar G$. Если $\xi_1>-1$ или $\xi_m<1$, то $P_N u$, вообще говоря, разрывна на гиперплоскостях $x_k=x_k^j$; нам удобно допускать многозначность $P_N u$ на указанных гиперплоскостях.

Лемма 2. Пусть $u \in C_{\square}^{m,\nu}(G)$. Тогда в случае $m < n-\nu$ при любом значении $r \geq 1$ параметра неравномерности сетки (см. (5)) справедлива оценка

$$\max_{x \in \bar{G}} |u(x) - (P_N u)(x)| \leq c h^m; \qquad (7)$$

в случае $m = n-\nu$

$$\max_{x \in \bar{G}} |u(x) - (P_N u)(x)| \leq c \begin{cases} h^m |\log h|, & r = 1, \\ h^m, & r > 1; \end{cases} \qquad (8)$$

в случае $m > n-\nu$

$$\max_{x \in \bar{G}} |u(x) - (P_N u)(x)| \leq c \begin{cases} h^{r(n-\nu)}, & 1 \leq r \leq \frac{m}{n-\nu}, \\ h^m, & r \geq \frac{m}{n-\nu} \end{cases} \qquad (9)$$

В случае $m > n-\nu$ справедлива также следующая L^p - оценка

$$\|u - P_N u\|_{L^p(G)} \leq$$

$$\leq c \begin{cases} h^{r(n-\nu+\frac{1}{p})}, & 1 \leq r < \frac{m}{n-\nu+\frac{1}{p}} \quad \left(\text{если } \frac{m}{n-\nu+\frac{1}{p}} > 1\right), \\ h^m |\log h|^{1/p}, & r = \frac{m}{n-\nu+\frac{1}{p}} \quad \left(\text{если } \frac{m}{n-\nu+\frac{1}{p}} \geq 1\right), \\ h^m, & r > \frac{m}{n-\nu+\frac{1}{p}} \quad \left(\frac{m}{n-\nu+\frac{1}{p}} \text{ произвольно}\right), \quad r \geq 1. \end{cases} \qquad (10)$$

Постоянная c в этих оценках не зависит от h (она зависит от постоянной в (4') при $\ell = m$).

Доказательство. Равномерные оценки (7)-(9) достаточно установить на каждой ячейке $G_{j_1 \ldots j_n}$ в отдельности. Нетрудно убедиться, что

$$\max_{x \in G_{j_1 \ldots j_n}} |u(x) - (P_N u)(x)| \leq (1 + \|P\| + \ldots \|P\|^{n-1}) \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^{j_1 \ldots j_n}(u),$$

где P - одномерный интерполяционный проектор Лагранжа, соответствующий интерполяции на $[-1,1]$ многочленами степени $\leq m-1$ по узлам $\xi_1, \ldots, \xi_m$, а $\lambda_k^{j_1 \ldots j_n}(u)$ - максимальная возможная погрешность одномерной интерполяции u как функции переменной x_k на отрезке $x_k^{j_k} \leq x_k \leq x_k^{j_k+1}$ при фиксированных (в пределах ячейки $G_{j_1 \ldots j_n}$) значениях остальных переменных многочленами степени $\leq m-1$ по узлам $\xi_{k,\ell}^{j_k}$, $\ell = 1, \ldots, m$. Ясно, что

$$\lambda_k^{j_1,\dots,j_n} \leqslant (1+\|P\|)\, e_k^{j_1,\dots,j_n}(u),$$

где $e_k^{j_1,\dots,j_n}(u)$ – наибольшая возможная погрешность равномерной аппроксимации u многочленами степени $\leqslant m-1$ по переменной x_k на отрезке $[x_k^{j_k}, x_k^{j_k+1}]$ при фиксированных в пределах $G_{j_1\dots j_n}$ значениях остальных переменных. Аппроксимируя u по x_k многочленом Тейлора степени $m-1$ в одной из точек $x_k^{j_k}$ и $x_k^{j_k+1}$ (эта точка должна отличаться от 0 и b_k), с помощью (4) убеждаемся в справедливости следующих оценок: при $1 \leqslant j_k \leqslant N_k - 1$

$$\lambda_k^{j_1,\dots,j_n}(u) \leqslant c'(x_k^{j_k+1} - x_k^{j_k})^m \cdot \begin{cases} 1, & m < n-\nu, \\ 1+|\log x_k^{j_k}|, & m = n-\nu, \\ (x_k^{j_k})^{n-\nu-m}, & m > n-\nu; \end{cases}$$

при $j_k = 0$ (подробные выкладки см. в [2] или [4])

$$\lambda_k^{j_1,\dots,j_n}(u) \leqslant c' \cdot \begin{cases} (x_k^1)^m, & m \leqslant n-\nu, \\ (x_k^1)^{n-\nu}, & m > n-\nu; \end{cases}$$

при $N_k \leqslant j_k \leqslant 2N_k - 1$ оценки аналогичны. Отсюда с учётом (5) немедленно следуют оценки (7)-(9). Для получения (10) заметим, что

$$\|u - P_N u\|_{L^p(G)} \leqslant$$

$$\leqslant c' \Big\{ \sum_{k=1}^{n} \sum_{j_1=0}^{2N_1-1} \dots \sum_{j_n=0}^{2N_n-1} [\lambda_k^{j_1,\dots,j_n}(u)]^p (x_1^{j_1+1} - x_1^{j_1}) \dots (x_n^{j_n+1} - x_n^{j_n}) \Big\}^{1/p}.$$

Оценив $\lambda_k^{j_1,\dots,j_n}(u)$ указанным выше способом и просуммировав сперва по $j_1,\dots,j_{k-1},j_{k+1},\dots,j_n$ (на этом месте доказательства вводится в русло [2,4]), а затем по j_k, убеждаемся в справедливости (10). Лемма 2 доказана.

3. <u>Метод коллокации</u>. Обозначим через E_N пространство кусочно-полиномиальных функций u_N, являющихся на каждой ячейке $G_{j_1\dots j_n}$, $j_k = 0,1,\dots,2N_k-1$ $(k=1,\dots,n)$ многочленом степени $\leqslant m-1$ относительно каждой из переменных $x_1,\dots,x_n$, причем в случае $\xi_1=-1$, $\xi_m=1$ (см. п.2) u_N непрерывна в G, а в случае $\xi_1>-1$ или $\xi_m<1$ на границах ячек допустимы разрывы. Приближенное решение $u_N \in E_N$ уравнения (I) определим из условия, чтобы оно удовлетворяло уравнению в узлах (6):

$$\Big[u_N(x) - \int_G K(x,y)\,u_N(y)\,dy - f(x)\Big]_{x=(\xi_{l_1}^{i_1},\dots,\xi_{l_n}^{i_n})} = 0, \tag{II}$$

$$l_k = 1,\dots,m;\quad i_k = 0,1,\dots,2N_k-1 \quad (k=1,\dots,n).$$

Используя введенный в п.2 интерполяционный проектор P_N, эти условия можно записать в виде уравнения

$$u_N = P_N T u_N + P_N f. \tag{I2}$$

Теорема I. Пусть выполнены условия (I) и (2), $f \in C_{\square}^{m,\nu}(G)$ и однородное уравнение $v = Tv$, соответствующее интегральному уравнению (I), имеет лишь нулевое решение. Тогда найдутся такие натуральные числа N_k^0, что при $N_k \geq N_k^0$, $k=1,\dots,n$, коллокационное уравнение (I2) имеет единственное решение u_N, и $\max_{x\in\bar{G}} |u_N(x) - u(x)| \to 0$ при $N \to \infty$ (т.е. $N_k \to \infty$, $k=1,\dots,n$), где u – решение уравнения (I). При этом быстрота сходимости зависит от параметра неравномерности r сетки (5) следующим образом:

в случае $m < n-\nu$

$$\max_{x\in\bar{G}} |u_N(x) - u(x)| \leq c h^m \quad \text{при любом} \quad r \geq 1;$$

в случае $m = n-\nu$

$$\max_{x\in\bar{G}} |u_N(x) - u(x)| \leq c \begin{cases} h^m |\log h|, & r = 1, \\ h^m, & r > 1; \end{cases}$$

в случае $m > n-\nu$

$$\max_{x\in\bar{G}} |u_N(x) - u(x)| \leq c \begin{cases} h^{r(n-\nu)}, & 1 \leq r \leq \frac{m}{n-\nu}, \\ h^m, & r \geq \frac{m}{n-\nu}. \end{cases}$$

Доказательство. Решение u уравнения (I) при сделанных предположениях существует и единственно, по лемме I $u \in C_{\square}^{m,\nu}(G)$. Из (2) и (3) следует, что интегральный оператор T действует и вполне непрерывен из $L^\infty(G)$ в $C(\bar{G})$. С другой стороны, $\|P_N v - v\|_{L^\infty(G)} \to 0$ при $N \to \infty$ для любой функции $v \in C(\bar{G})$. Отсюда следует, что $\|T - P_N T\|_{L^\infty \to L^\infty} \to 0$ при $N \to \infty$. Теперь утверждения теоремы о сходимости метода коллокации следуют из элементарных результатов о методе Галеркина (см., например, [3], теорема I5.3); при этом

$$\|u_N - u\|_{L^\infty} \leq c \|u - P_n u\|_{L^\infty}$$

С учетом оценок (7)–(9) получим оценки сходимости, сформулированные в теореме. Теорема I доказана.

Согласно теореме I, разумно положить $r = \max\{1, \frac{m}{n-\nu}\}$. Это гарантирует равномерную сходимость с оценкой $O(h^m)$, которая лишь в случае $m = n - \nu$ может быть испорчена множителем $|\log h|$. Однако в узлах коллокации такого же порядка сходимости можно достичь при менее неравномерных сетках.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы I, причем $m > n - \nu$. Если $\nu \le 0$, то положим $r > \frac{m}{n-\nu+1}$, $r \ge 1$; если $\nu > 0$, то положим $r > \frac{n}{n+1}\,\frac{m}{n-\nu}$, $r \ge 1$. Тогда

$$\varepsilon_N \equiv \max_{\substack{\ell_k = 1,\dots,m \\ i_k = 0,1,\dots,2N_k \\ k=1,\dots,n}} |u_N(\xi^{i_1}_{1,\ell_1},\dots,\xi^{i_n}_{n,\ell_n}) - u(\xi^{i_1}_{1,\ell_1},\dots,\xi^{i_n}_{n,\ell_n})| \le \le c h^m. \quad (13)$$

Доказательство. Имеем (см. [2] или [4])

$$\varepsilon_N \le c \| T(u - P_N u)\|_{L^\infty} \le \|T\|_{L^p \to L^\infty} \|u - P_N u\|_{L^p}.$$

При $\nu \le 0$ оператор T действует и ограничен из $L^p(G)$ в $L^\infty(G)$ при всех $p > 1$; при $\nu > 0$ это верно при $p > \frac{n}{n-\nu}$. Оценив при указанных p норму $\|u - P_N u\|_{L^p}$ по третьей строчке формулы (10), приходим к указанным в теореме ограничениям на выбор r и к утверждению теоремы. Теорема 2 доказана.

Замечание. Обозначим

$$v_N(x) = \int_G \mathcal{K}(x,y)\, u_N(y)\, dy + f(x).$$

В условиях теоремы 2, при указанном там выборе r имеем

$$\max_{x \in G} |v_N(x) - u(x)| \le c h^m.$$

Доказательство основывается на том легко проверяемом факте, что для $v_N - u = T(u_N - u)$ тоже верна оценка

$$\|v_N - u\|_{L^\infty} \le c \| T(u - P_N u)\|_{L^\infty}.$$

Заметим еще, что в узлах коллокации функции $v_N(x)$ и $u_N(x)$ совпадают.

4. Кусочно-полиномальная аппроксимация решения. Используя сетку (5), введем одномерные линейные базисные сплайны $\varphi^i_k(x_k)$, $i = 0,1,\dots,2N_k$, линейные на каждом отрезке $[x^j_k, x^{j+1}_k]$, $j = 0,1,\dots,2N_k - 1$, равные единице в соответствующем узле x^i_k и нулю в остальных узлах. Приближенное решение уравнения (I) разыскивается в виде полилинейного сплайна

$$u_N(x) = \sum_{j_1=0}^{2N_1} \dots \sum_{j_n=0}^{2N_n} c_{j_1\dots j_n} \varphi_1^{j_1}(x_1) \dots \varphi_n^{j_n}(x_n).$$

Коэффициенты (узловые значения) $c_{j_1 \dots j_n}$ определим из условия удовлетворения уравнению (1) в узлах $(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n})$. Это приводит к системе уравнений

$$c_{i_1\dots i_n} = \sum_{j_1=0}^{2N_1} \dots \sum_{j_n=0}^{2N_n} a_{i_1\dots i_n j_1 \dots j_n} c_{j_1\dots j_n} +$$

$$+ f(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}), \quad i_k = 0, 1, \dots, 2N_k \quad (k=1, \dots, n),$$

где

$$a_{i_1\dots i_n j_1 \dots j_n} = \int_G \mathcal{K}(x_1^{i_1}, \dots, x_n^{i_n}; y) \varphi_1^{j_1}(y_1) \dots \varphi_n^{j_n}(y_n)\, dy.$$

Данный метод является частным случаем метода (II), в котором $m=2$, $\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$. Теоремы I и 2 для него справедливы с очевидными изменениями – всюду следует положить $m=2$.

Литература

I. Вайникко Г. Гладкость решения многомерного слабо сингулярного интегрального уравнения. В сб.: Методы решения интегральных, дифференциальных и операторных уравнений. Тарту: ТГУ, 1987, 3–5.

2. Вайникко Г., Педас А., Уба П. Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту: ТГУ, 1984.

3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. Москва: Наука, 1969.

4. Vainikko G., Uba P. A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel., J. Austral. Math. Soc., Series B, 1981, v.22, 431–438.

A PIECEWISE POLYNOMIAL APPROXIMATION TO THE SOLUTION OF A MULTIDIMENSIONAL WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATION

G. Vainikko

Summary

On a parallelepiped $G \subset \mathbb{R}^n$ consider an integral equation with a weakly singular kernel $\mathcal{K}(x,y)$ satisfying (2) and (3). Let $f \in C_\square^{m,\nu}(G)$ where $C_\square^{m,\nu}(G)$ is a special weight class of functions on $\bar{G}$ (see (4),(4')). It occurs that the solution u of equation (1) also belongs to $C_\square^{m,\nu}(G)$ (Lemma 1). Using a generally non-uniform grid in $\bar{G}$ and special interpolation points (see (5) and (6)), introduce a piecewise polynomial interpolation projector P_N, $P_N u$ being a polynomial of degree $\leq m-1$ with respect to any of variables $x_1, \dots, x_n$ on any cell of the grid. Lemma 2 gives error estimates for $P_N u$, $u \in C_\square^{m,\nu}(G)$. Similar estimations hold for collocation approximation to the solution of equation (1) (Theorem 1). For instance

$$\max_{x \in \bar{G}} |u_N(x) - u(x)| \leq c \begin{cases} h^{r(n-\nu)} & \text{if} \quad 1 \leq r \leq m/(n-\nu), \\ h^m & \text{if} \quad r \geq m/(n-\nu) \end{cases}$$

in case $m > n - \nu$. Here $h = 1/\min_{1\leq k\leq n} N_k$ and r is the non-uniformity parameter in (5). It occurs that in the collocation points the estimation of the order $O(h^m)$ can be obtained using less non-uniform grids (Theorem 2).

A well-known piecewise polylinear collocation is a special case ($m=2$) of the methods under consideration.

One dimensional problem ($n = 1$) is treated in [2,4].

4*

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ СЛАБО-СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦЕНТОМ.

П. Уба

Рассмотрим линейное интегральное уравнение второго рода

$$u(t) = \int_a^b g(t,s)\,\varkappa(t-s)u(s)ds + f(t), \quad a \le t \le b, \qquad (\mathrm{I})$$

в котором $\varkappa \in C^{m-1}([a-b, b-a]\setminus\{0\})$, причём при $\tau \neq 0$ справедлива оценка

$$|\varkappa^{(m-1)}(\tau)| \le c|\tau|^{-\beta}, \quad 0<\beta<m, \qquad (2)$$

где β -дробное число.

В [I,4,II] показано, что при достаточно гладких $g(t,s)$ и $f(t)$ решение задачи (I) внутри промежутка (a, b) является m раз непрерывно дифференцируемым, а в обоих концах отрезка интегрирования k -ая производная решения имеет особенности такой же силы как функция $\varkappa^{(k-1)}(t)$ в точке нуль. В работах [I,5,7,I2] указано,как нужно сгущать сетку около концов отрезка интегрирования, чтобы справиться с особенностями решения и построить проекционные методы оптимального порядка сходимости.

В случае негладкого по параметру s коэффициента $g(t,s)$ у производных решения $u(t)$ появляются дополнительные особенности (см. [8,9]). В настоящей статье указывается способ построения сетки для приближённого решения такой задачи.

Отметим, что краткий исторический очерк и библиографические замечания к решению слабо-сингулярных интегральных уравнений даны в [I] .

I. Гладкость решения.

Пусть функция $\partial^m g(t,s)/\partial t^m$ непрерывна на $[a,b]$ по параметру t и пусть целые p_i, $i=1,\dots,\ell$ $(0\le p_i<\beta)$ наименьшие, при которых функция $\partial^{p_i} g(t,s)/\partial s^{p_i}$ имеет при $s=d_i$ $(a<d_i<b,\ d_i<d_{i+1})$ разрыв первого рода (случай $\ell=0$ обозначает в дальнейшем гладкость по параметрам s и t коэффициента $g(t,s)$). Предположим ещё, что функция $g(t,s)$ на отрезках $[d_i, d_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,\ell$ (где $d_0=a$, $d_{\ell+1}=b$) m раз непрерывно дифференцируема по параметру s . Пусть, кроме неравенст-

ва (2), в некоторой окрестности точки $\tau=0$ справедливы обратные неравенства $|\text{æ}^{(k)}(\tau)| \geq c_k' |\tau|^{-\gamma+m-1-k}$, $k=0,1,\dots,m-1$, $\beta-(m-\beta)<\gamma\leq\beta$ и пусть $f(t)\in C^m[a,b]$.

Тогда решение задачи (I) $u\in C[a,b]\cap C^m((a,b)\setminus\bigcup_{i=1}^{\ell}\{d_i\})$ и для тех $k=1,\dots,m$, для которых $\text{æ}^{(k-1)}(\tau)$ уже имеет при $\tau=0$ особенность, можно выделить главные члены производных решения (см. [8,9]):

$$u^{(k)}(t)=u(a)g(t,a)\text{æ}^{(k-1)}(t-a)-u(b)g(t,b)\text{æ}^{(k-1)}(t-b)+v_k(t)+$$
$$+\sum_{i=1}^{\ell}(-1)^{p_i}\binom{k-1}{p_i}u(d_i)\text{æ}^{(k-1-p_i)}(t-d_i)\left[\frac{\partial^{p_i}}{\partial s^{p_i}}g(t,s)\Big|_{s=d_i+}-\frac{\partial^{p_i}}{\partial s^{p_i}}g(t,s)\Big|_{s=d_i-}\right], \quad (3)$$

где $v_k\in C^{m-k}((a,b)\setminus\bigcup_{i=1}^{\ell}\{d_i\})$, причём

$$\lim_{t\to a+}\frac{v_k(t)}{\text{æ}^{(k-1)}(t-a)}=0,\quad \lim_{|t-d_i|\to 0}\frac{v_k(t)}{\text{æ}^{(k-1-p_i)}(t-d_i)}=0,\ i=1,\dots,\ell,$$
$$\lim_{t\to b-}\frac{v_k(t)}{\text{æ}^{(k-1)}(t-b)}=0.$$

В случае $k-1-p_i<0$ соответствующее слагаемое в сумме выражения (3) отсутствует. Обозначим класс таких функций через E^β.

Представление (3) говорит о том, что (p_i+q)-я $(1\leq q\leq m-p_i)$ производная решения уравнения (I) при $t\to d_i-$ и $t\to d_i+$ имеет такие же особенности как функция $\text{æ}^{(q-1)}(\tau)$, соответственно, при $\tau\to 0-$ и $\tau\to 0+$. На концах отрезка интегрирования оно имеет особенности такой же силы, что (p_i+q-1)-я производная функции $\text{æ}(\tau)$ в нуле.

<u>2. Кусочно-полиномальная интерполяция</u>. Для интерполирования функций, производные которых имеют вид (3), введем специальную неравномерную сетку с узлами $t_0,t_1,\dots,t_N$, определёнными следующими правилами (ср. с [I,I0,I2]):

- для каждой d_i $(i=0,1,\dots,\ell+1)$ определяем вещественное число $\tau_i=\max(1,\mu/(m-\beta+p_i))$, где $p_0=p_{\ell+1}=0$, $m-\beta+\mu\leq m$.
- точки d_i, $(d_i+d_{i+1})/2$, $i=0,1,\dots,\ell$ и $d_{\ell+1}$ считаем узлами сетки;
- на каждом отрезке $[d_i,d_{i+1}]$ определяем ещё $2n-2$ узлов

$$d_i+(j/n)^{\tau_i}(d_{i+1}-d_i)/2,\quad j=1,\dots,n-1,$$
$$d_{i+1}-(j/n)^{\tau_{i+1}}(d_{i+1}-d_i)/2,\quad j=1,\dots,n-1;$$

- переобозначим узлы сетки в растущем порядке через t_i, $i=0,1,\dots,N$, $N=2n(\ell+1)$.

Обозначим полученную сетку через Δ^τ. Величины τ_i характеризуют неравномерность сетки; чем больше τ_i, тем гуще расположены узлы около точки d_i.

На стандартном отрезке $[-1,1]$ выберем какие-то точки интерполяции $-1 \le \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_m \le 1$ и при помощи аффинного преобразования перенесем их на отрезки $[t_i, t_{i+1}]$:

$$\tau_{ij} = t_i + (\tau_j + 1)(t_{i+1} - t_i)/2 \,, \; j = 1, \ldots, m, \; i = 0, 1, \ldots, N-1 \,.$$

По заданной функции u, определённой на $[a,b]$, построим кусочно-полиномальную интерполянту u_n, потребовав, чтобы на каждом подинтервале $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0,1,\ldots,N-1$ она была многочленом степени $\le m-1$, интерполирующим функцию u в точках τ_{ij}, $j=1,\ldots,m$. Если $\tau_1 > -1$ или $\tau_m < 1$, то u_n, вообще говоря, разрывна в точках $t_1, \ldots, t_{N-1}$; договоримся считать функцию u_n в этих точках двухзначной (её значения равны односторонним пределам). В равномерные оценки погрешности интерполянты войдет любое из этих двух значений.

Лемма I. Пусть $u \in E^{\beta}$. Тогда при $r_i = \max(1, \mu/(m-\beta+p_i))$, $i = 0, 1, \ldots, \ell+1$, $m - \beta \le \mu \le m$ справедлива оценка

$$\| u - u_n \|_{L_\infty} \le c n^{-\mu}, \quad c = const.$$

В [I] стр. 39 (см. также [I2]) доказана такая же оценка для случая $\ell = 0$. Доказательство леммы I дословно повторяет указанные доказательства с оговоркой, что особому исследованию, кроме окрестностей концов отрезка интегрирования, подлежит и окрестность точки d_i.

3. Метод кусочно-полиномальной коллокации решения интегрального уравнения. Приближённое решение интегрального уравнения (I) будем разыскивать в виде кусочно-полиномальной функции u_n. Потребуем, чтобы u_n удовлетворяло уравнению (I) в точках τ_{ij}:

$$u_n(\tau_{ij}) = \int_a^b g(\tau_{ij}, s)\, \varkappa(\tau_{ij} - s)\, u_n(s)\, ds + f(\tau_{ij}), \qquad (4)$$
$$i = 0, 1, \ldots, N-1; \; j = 1, \ldots, m.$$

Эти условия представляют собой систему линейных уравнений, вид которой конкретизируется выбором базиса в пространстве кусочно-полиномальных функций. (Один способ конкретизации указан, напр. в [I,I2]).

Теорема I. Пусть для уравнения (I) выполнены перечисленные в пункте I условия и пусть оно имеет единственное решение $u(t)$. Тогда при достаточно больших n приближение $u_n(t)$ определяется условиями (4) однозначно. Если неравномерность сетки Δ^{r} подчинить условиям $r_i = \max(1, \mu/(m-\beta+p_i))$, $m - \beta \le \mu \le m$, $i = 0, 1, \ldots, \ell+1$, то справедлива оценка погрешности:

$$\| u_n - u \|_{L_\infty} \le c\, n^{-\mu}.$$

Доказательство полностью совпадает с доказательствами аналогичных утверждений в [I,I2] и поэтому не прилагается.

4. <u>Интерполяция с кубическими сплайнами.</u> В качестве интерполянты $S(u,t)$ функции $u \in C[a,b]$ на сетке Δ^{τ} будем использовать интерполяционные кубические сплайны дефекта I. То есть функции, дважды непрерывно дифференцируемые на $[a,b]$, являющиеся на каждом частичном отрезке $[t_i, t_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,N-1$ кубическими полиномами и удовлетворяющие условиям $S(u,t_i)=u(t_i)$, $i=0,1,\dots,N$. Как известно (см. [2]), для определения интерполяционного кубического сплайна дефекта I понадобятся ещё два краевых условия. Примем их в виде

$$S'''(u,t_j+0)=S'''(u,t_j-0), \quad j=1, N-1. \tag{5}$$

По [I] §4 (см. также [6]) описанный интерполяционный процесс при $u \in C[a,b]$ сходится

$$\max_{a \le t \le b} |S(u,t)-u(t)| \to 0 \qquad \text{при } n \to \infty . \tag{6}$$

<u>Лемма 2.</u> Пусть $u \in E^{\beta}$ с $m=4$. Тогда при $\tau_i = \max(1, 4/(4-\beta+\rho_i))$ для интерполяционного кубического сплайна справедлива оценка

$$\max_{a \le t \le b} |S(u,t)-u(t)| \le c\,\mu(u)\,n^{-4},$$

где постоянная c не зависит ни от u, ни от n, $\mu(u)$ – постоянная, зависящая от u.

Доказательство дословно следует доказательству аналогичного утверждения (случай $\ell=0$) в [I] стр. 59 (см. также [6]) с оговоркой, что дополнительному изучению, кроме окрестностей концов отрезка интегрирования, подлежит и окрестность точки d_i.

5. <u>Метод коллокации для интегрального уравнения.</u> Приближённое решение $u_n(t)$ уравнения (I) отыскиваем в виде кубического сплайна дефекта I. Потребуем, чтобы оно удовлетворяло уравнению (I) в узлах сетки

$$u_n(t_i)=\int_a^b g(t_i,s)\,\varkappa(t_i-s)\,u_n(s)\,ds+f(t_i), \quad i=0,1,\dots,N \tag{7}$$

с краевым условиям

$$u_n'''(t_1+0)=u_n'''(t_1-0), \quad u_n'''(t_{N-1}+0)=u_n'''(t_{N-1}-0). \tag{8}$$

Условия $\{(7),(8)\}$ представляют собой систему линейных уравнений, вид которой конкретизируется выбором базиса в пространстве кубических сплайнов дефекта I. Применение в качестве басиса В-сплайнов указан, напр. в [I], стр. 65.

Теорема 2. Пусть для уравнения (I) выполнены перечисленные в пункте I условия с $m=4$ и пусть оно имеет единственное решение $u(t)$. Тогда при достаточно больших n приближение $u_n(t)$ определяется условиями $\{(7),(8)\}$ однозначно. Если $r_i = max(1, 4/(4-\beta+p_i))$, то

$$\max_{a\leq t\leq b} |u_n(t) - u(t)| \leq c n^{-4}. \tag{9}$$

Доказательство: Уравнение (I) можем рассматривать как операторное уравнение $u = Tu + f$ в банаховом пространстве $C[a,b]$ с обычной нормой. Сплайн-коллокационные условия $\{(7), (8)\}$ можем переписать в равносильной форме $u_n = P_nTu_n + P_nf$, где P_n проектор в C, сопоставляющий любой функции $u(t)$ ее сплайновый интерполянт $S(u,t)$. В силу (6) имеет место сильная сходимость $P_n \to I$ при $n \to \infty$ и нормы $\|P_n\|$ равномерно ограничены. Поскольку T вполне непрерывен в $C[a,b]$, то стандартным образом заключаем (см. [3] стр. 202), что $\|P_nT-T\| \to 0$ при $n \to \infty$. Теперь из однозначной разрешимости уравнения (I) следует, что при достаточно больших n однозначно разрешима и задача $\{(7),(8)\}$, причем (см. [3] стр. 200) $\|u_n - u\| \leq c\|u - P_nu\|$. При помощи леммы 2 отсюда получаем оценку (9).

6. Замечания. I. При кусочно-полиномальной интерполяции функций $u \in E^\beta$ в случае $l=0$ замечена сверхсходимость в узлах сетки (см. [I,I2]). Соответствующие теоремы распространяются и для случая $l\neq 0$; их переформулировка не представляет трудности.

2. Аналогично [I] §5 методы коллокации (4) и $\{(7),(8)\}$ применимы для приближённого решения соответствующей уравнению (I) проблемы собственных значений.

3. Решение системы линейных уравнений (4) при больших n представляет определённые трудности. В [I,7] предложены итерационные схемы решения больших систем уравнений, основанные на использовании другой, более грубой аппроксимации того же исходного уравнения. Описанные методы разрешимы и для решения задачи (4).

4. Результаты настоящей работы справедливы и в случае, когда β -целое число $(0<\beta<m)$. Тогда из (2) вытекающие оценки $|\varkappa^{(k)}(\tau)| \leq c_k(|\tau|^{-\beta+(m-1-k)}+1)$, $k=0,1,\dots,m-1$ верны для всех производных, кроме производной порядка $k=m-1-\beta$. Для нее справедлива $|\varkappa^{(k)}(\tau)| \leq c_k(|\ln|\tau||+1)$. Соответственно должно несколько отличаться поведение низших производных функции $u(t)$ в классе E^β.

Литература

I. Вайникко Г., Педас А., Уба П. Методы решения слабо-сингулярных интегральных уравнений. Тарту: ТГУ, 1984.

2. Завьялов Ю.С., Квасов В.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. Москва: Наука, 1980.

3. Красносельский М.А., Вайникко Г.М., и др. Приближённое решение операторных уравнений. Москва: Наука, 1969.

4. Педас А. О гладкости решения интегрального уравнения со слабо-сингулярным ядром. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 492, 56-68.

5. Уба П.Р. Метод кусочно-линейной коллокации на неравномерной сетке для решения интегральных уравнений с особенностью. Уч. зап.Тартуск.ун-та, 1981, 580, 52-57.

6. Уба П. О сходимости интерполяционных кубических сплайнов на неравномерных сетках. Изв. АН ЭССР. Физика. Математика, т.31, № 4, 339-409.

7. Уба П. Итеративное решение интегрального уравнения со слабо особенным ядром. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1983, 633, 67-74.

8. Уба П.Кусочно-полиномиальная аппроксимация для слабосингулярного интегрального уравнения с разрывным коэффициентом. В сб.:Методы решения интегральных, дифференциальных и операторных уравнений. Тарту, 1987, 6-7.

9. Уба П. Метод коллокации с кубическими сплайнами для слабо-сингулярного интегрального уравнения с разрывным коэффициентом. В сб.: Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики. Тезисы докладов Всесоюзной конференции. Новосибирск, 1987, стр. 177-178.

10. Rice J.R. On the degree of convergence of nonlinear spline approximation. In "Approximations with special emphasis on spline functions". New York: Academic Press, 1969, pp. 349-365.

11. Vainikko, G. and Pedas, A. The properties of solutions of weakly singular integral equations. J. Austral. Math. Soc., 1981, B 22, 4, 419-430.

12. Vainikko, G. and Uba, P.A piecewise polynomial approximation to solution of an integral equation with weakly singular kernel. J. Austral. Math. Soc., 1981, B 22, 4, 431-438.

EQUATION WITH A ⁻ ⁻ONTINUOUS COEFFICIENT

P. Uba

Summary

In [1,5,12] we have constructed the collocation methods for numerical solving of a weakly-singular integral equation (1) with a sufficiently smooth coefficient g(t,s) and a corresponding eigenvalue problem. To obtain the best convergence, a special non-uniform grid is used.

In this paper we study a case with weaker conditions on g(t,s). We assume that p_i are the least integers, by which the functions $\frac{\partial^{p_i}}{\partial s^{p_i}} g(t,s)$ have the first kind discontinuities on the lines $s=d_i$, $a < d_i < b$, $i=1,\dots,l$. The (3) indicates that these discontinuities determine the singularities of certain order in the points $s=d_i$ to the solution u(t) in addition to singularities at the endpoints of [a,b] (see [8,9]).

On the basis of this information we construct (analogical [1,10,12]) in Part 3 a special grid with a greater density towards points d_i, $i=0,1,\dots,l+1$, $d_0=a$, $d_{l+1}=b$.

The interpolation properties of functions with derivatives in form (3) by piecewise polynomials and cubic splines are investigated (Lemmas 1 and 2). The results are used to derive the optimal-order collocation methods for solving an integral equation (1) (Theoremas 1 and 2). The proofs of lemmas and theorems observe the corresponding discussions in [1] (or in [6,12]) word for word and are not presented.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{L}_2$

Е.Рукавишникова

В работе [5] построен метод конечных элементов для задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с вырождением или с особенностью на границе области Ω, сходящийся со скоростью $O(h)$ по весовой норме $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$.

В настоящей работе доказано, что в метрике $\mathcal{L}_2(\Omega)$ сходимость имеет порядок $O(h^2)$.

<u>Обозначения и вспомогательные предложения</u>

I. Рассматривается задача:

$$Lu = F(x), \quad x \in \Omega \subset R^2, \quad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega \subset C^2; \tag{I}$$

$$Lu = -\sum_{k,\ell=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{k\ell}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_\ell}\right) + a(x)\cdot u(x),$$

$$F \in \mathcal{L}_{2,-1-\alpha}(\Omega), \quad \text{т.е. } \rho(x)^{1+\alpha}\cdot F(x) \in \overset{\circ}{\mathcal{L}}_2(\Omega). \tag{2}$$

Коэффициенты $a_{k\ell}(x) = a_{\ell k}(x)$ – функции, дифференцируемые на Ω, удовлетворяют неравенствам

$$|a_{k\ell}(x)| \leq C_0\,\rho(x)^{-2\alpha}, \quad \left|\frac{\partial a_{k\ell}(x)}{\partial x_1}\right|, \ \left|\frac{\partial a_{k\ell}(x)}{\partial x_2}\right| \leq C_1\,\rho(x)^{-2\alpha-1}, \tag{3}$$

а функция $a(x)$ – положительная и подчиняется неравенству

$$|a(x)| \leq C_2\cdot\rho(x)^{-2\alpha-2}, \tag{4}$$

где C_0, C_1, C_2 – константы, не зависящие от x, $\alpha \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $\rho(x)$ – расстояние точки $x \in \Omega$ до границы $\partial\Omega$. Предполагается также выполненным условие ультраэллиптичности

$$\sum_{k,\ell=1}^{2} a_{k\ell}(x)\,\xi_k\,\xi_\ell \geq \frac{\varkappa}{\rho(x)^{2\alpha}}\sum_{k=1}^{2}\xi_k^2, \quad x \in \Omega \tag{5}$$

5*

с константой $\varkappa > 0$, не зависящей от x и $f=(f_1, f_2)$.

Введем весовое пространство С.Л. Соболева (см. [4])

$$\overset{\circ}{W}{}^{s}_{2,r} = \left\{ f : f \in W^{s}_{2,r}(\Omega),\ f\big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},\quad 0 < s + r - \tfrac{1}{2} < s,\ s = 1, 2,$$

с конечной нормой

$$\| f \|_{W^{s}_{2,r}} = \Big(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \Big)^{1/2} + \Big(\int_{\Omega} \rho(x)^{-2r} \sum_{|s| = s_1 + s_2} \Big(\frac{\partial^{|s|} f}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}} \Big)^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Задача (I) равносильна следующей вариационной задаче (см. [I, 4]): найти такую функцию $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$, для которой

$$E(u, v) = (F, v) \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega). \tag{6}$$

Здесь

$$E(u, v) = \int_{\Omega} \Big(\sum_{k,\ell=1}^{2} a_{k\ell}(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \frac{\partial v(x)}{\partial x_\ell} + a(x) \cdot u(x) \cdot v(x) \Big) dx,$$

$$(F, v) = \int_{\Omega} F(x) \cdot v(x)\, dx.$$

Отметим, что билинейная форма $E(u,v)$ непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}$ и $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}$ – эллиптична, а линейная форма (F,v) непрерывна на $\overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}$.

В [I, 2, 4] доказаны при сделанных предположениях существование и единственность обобщенного решения задачи (I) в классе $\overset{\circ}{W}{}^{2}_{2,\alpha-1}(\Omega) \subset \overset{\circ}{W}{}^{1}_{2,\alpha}(\Omega)$.

2. Полагая, что область Ω выпукла, произведем ее триангуляцию (см. рис.I). Для этого через точки, находящиеся от границы $\partial\Omega$ на расстоянии b ($b < \delta_\Omega / 2$, δ_Ω – диаметр вписанной в Ω окружности) проведем кривую $\partial\Omega_1$, делящую область Ω на две подобласти

Ω_1 и Ω_2 . Внешнюю подобласть Ω_1 разделим на слои Q_j , $j=1,\dots,n$ кривыми Γ_j , $j=0,\dots,n$ ($\partial\Omega_1 \equiv \Gamma_n$), удаленными от $\partial\Omega$ на расстояния, равные $\theta\cdot(j/n)^r$, $j=0,\dots,n$; $r = 1/(\beta-\alpha)$, $\alpha<\beta<\frac{1}{2}$. К кривой $\partial\Omega\equiv\Gamma_0$ проведем перпендикуляр d . Начиная от прямой d , на каждой кривой Γ_j , $j=1,\dots,n$ берем равноотстоящие точки $x^{j,m}$, $m=1,\dots,M_i$, $i=1,\dots,n$. Число M_i определяется функцией $\Psi(j)=[\ell_j/(\theta(\frac{j}{n})^r-\theta(\frac{j-1}{n})^r)]+1$, где ℓ_j – длина j-той кривой ($j=1,\dots,n$). Чтобы получить узлы на границе области $\partial\Omega$, к каждой из точек $x^{1,m}$ на Γ_1 проведем перпендикуляры. Дуги, стягивающие рядом лежащие точки пересечения перпендикуляров с границей $\partial\Omega$, делим пополам. Получим узловые точки $x^{0,m}$, $m=1,\dots,2M_1$. Соединим сначала последовательно все точки кривых Γ_j ломаными $\tilde{\Gamma}_j$ ($j=0,\dots,n$), а затем каждую из точек $x^{j,m}$ еще и с ближайшей из точек $x^{j+1,m}$ (с обеими из ближайших, если их две). При этом возникают треугольники и четырехугольники; последние делим меньшей из диагоналей. Внутреннюю подобласть Ω_2 квазиравномерной триангуляцией разбиваем на конечное число регулярных треугольников с наибольшей стороной порядка $\frac{1}{n}$. При этом точки разбиения (вершины треугольников) на границе $\partial\Omega_1$ должны входить в число вершин треугольников на Ω_2 .

В результате имеем триангуляцию $\mathcal{T}_h$ области $\bar{\Omega}$ (см. рис. I) со свойствами:

$(\mathcal{T}_{h1})$ $\bar{\Omega}=\Omega^h\cup\Omega'$, где $\Omega^h=\bigcup\limits_{\nu=1}^{N} K_\nu$, K_ν -замкнутые треугольники, называемые конечными элементами, N – число треугольников, Ω' – объединение сегментов, отсекаемых треугольниками K_ν , хотя бы одна вершина которых принадлежит кривой Γ_0 .

$(\mathcal{T}_{h2})$ Общими для треугольников K_ν могут быть только стороны или вершины.

$(\mathcal{T}_{h3})$ Наибольшая сторона h в треугольниках K_ν

имеет порядок $\bar{n}$.

$(\mathcal{T}_{h4})$ $\quad \sup\limits_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_{max}(K)}{h_{min}(K)} \le \sigma$, где

σ не зависит от h .

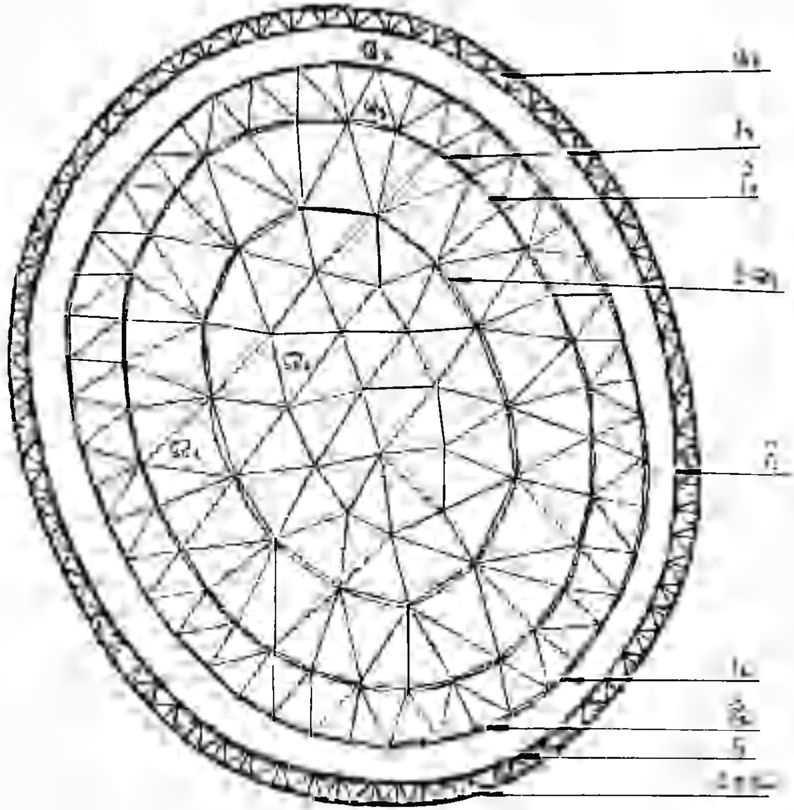


Рис. I

Триангуляция области Ω.

Обозначим через $V^h \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}$ пространство непрерывных функций, линейных на каждом треугольнике K_ν в триангуляции $\mathcal{T}_h$ и равных нулю на $\overline{\Omega} \setminus \Omega^h$.

Построенному конечномерному пространству $V^h \subset \overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$ сопоставим дискретную задачу: найти такую функцию $u_h(x)$ из V^h, что

$$E(u_h, v_h) = (F, v_h) \qquad \forall v_h \in V^h. \tag{7}$$

Здесь $E(u_h, v_h)$ и (F, v_h) - билинейная и линейная формы задачи (6). Из леммы Лакса-Мильграма (см. [6]) следует, что такая задача имеет единственное решение $u_h(x)$.

В случае достаточно малого $\beta-\alpha$ можно сформулировать основной результат работы [5].

<u>Лемма I.</u> Пусть коэффициенты $a_{k\ell}(x) = a_{\ell k}(x)$ $(k,\ell=1,2)$ и $a(x)$ удовлетворяют неравенствам (3) - (5), выполнено условие $F(x) \cdot \rho(x)^{1+2\alpha-\beta} \in \mathcal{L}_2(\Omega)$.

Тогда существует такая постоянная C_3, не зависящая от $F(x)$ и h, что для проведенной триангуляции $\mathcal{T}_h$ области Ω справедлива оценка

$$\|u - u_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \leq C_3 \, h \cdot \|F \cdot \rho^{1+2\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}. \tag{8}$$

<u>Оценка ошибки $\|u-u_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}$.</u>

Рассмотрим вспомогательную задачу:

$$L w = G_h(x), \; x \in \Omega \subset R^2, \quad w|_{\partial\Omega} = 0, \quad \partial\Omega \subset C^2; \tag{9}$$

$$L w = -\sum_{k,\ell=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{k\ell}(x)\frac{\partial w(x)}{\partial x_\ell}\right) + a(x) \cdot w(x),$$

$$G_h(x) = u(x) - u_h(x).$$

Так как разность $u(x) - u_h(x)$ принадлежит пространству $\mathcal{L}_2(\Omega)$, а при $0 < \beta - \alpha \leq \frac{1}{2}$ имеем $1+2\alpha-\beta > 0$, то

$G_h(x)\cdot\rho(x)^{1+2\alpha-\beta}\in\mathcal{L}_2(\Omega)$ т.е. $G_h(x)\in\mathcal{L}_{2,-1-2\alpha+\beta}(\Omega)$, $\alpha<\beta<\frac{1}{2}$.
Задаче (9), как и (I), поставим в соответствие вариационную задачу: найти такую функцию $w(x)$ из $\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, что

$$E(w,v)=(G_h,v) \qquad \forall v\in\overset{\circ}{W}{}^1_{2,\alpha}(\Omega), \tag{I0}$$

а также дискретную задачу.

Так как при достаточно малом $\beta-\alpha>0$ оператор $L:\overset{\circ}{W}{}^2_{2,\beta-1}\to\mathcal{L}_{2,-1-2\alpha+\beta}$ является изоморфизмом между пространствами $W^2_{2,\beta-1}(\Omega)$ и $\mathcal{L}_{2,-1-2\alpha+\beta}(\Omega)$ (см. [5]), то

$$\|w\|_{W^2_{2,\beta-1}(\Omega)}\leqslant C_4\,\|G_h\,\rho^{1+2\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}. \tag{II}$$

Из леммы I и полученной оценки (II) следует лемма.

<u>Лемма 2.</u> Пусть коэффициенты уравнения (I) удовлетворяют условиям леммы I. Тогда существует такая постоянная C_5, не зависящая от $G_h(x)$ и h, что для проведенной триангуляции $\mathcal{T}_h$ области Ω справедлива следующая оценка

$$\|w-w_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}\leqslant C_5\,h\,\|G_h\,\rho^{1+2\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}, \tag{I2}$$

где $w(x)$ – точное решение задачи (I0), $w_h(x)$ – приближенное его решение.

<u>Теорема.</u> Пусть выполнены условия леммы I. Тогда найдется такая постоянная C_6, не зависящая от $u(x)$, $u_h(x)$, $F(x)$ и h, что в случае достаточно малого $\beta-\alpha>0$

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}\leqslant C_6\,h^2\,\|F\,\rho^{1+2\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}. \tag{I3}$$

<u>Доказательство.</u> Так как $u-u_h$ – элемент пространства $W^1_{2,\alpha}(\Omega)$, то из равенства (I0) имеем

$$E(w,u-u_h)=(G_h,u-u_h).$$

Принимая во внимание, что $G_h(x) = u(x) - u_h(x)$, а также тот факт, что

$$E(u-u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in V^h,$$

получаем

$$(u-u_h, u-u_h) = E(w, u-u_h) - E(w_h, u-u_h) = E(w-w_h, u-u_h).$$

Из того, что билинейная форма непрерывна на пространстве $\dot{W}^1_{2,\alpha}(\Omega)$, следует

$$\|u-u_h\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = (u-u_h, u-u_h) \le C_9 \|w-w_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)} \|u-u_h\|_{W^1_{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Используя оценки (8) и (12), запишем

$$\|u-u_h\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \le C_8 \cdot h^2 \cdot \|\rho^{1+2\alpha-\beta} \cdot F\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \cdot \|\rho^{1+2\alpha-\beta} \cdot G_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \le$$

$$\le C_8 \cdot h^2 \cdot (\max_{\forall x \in \Omega} \rho(x)^{1+2\alpha-\beta}) \|G_h(x)\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \|\rho^{1+2\alpha-\beta} \cdot F\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}. \qquad (14)$$

Так как $\|G_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = \|u-u_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}$, то после подстановки ее в (14), получим оценку

$$\|u-u_h\|^2_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \le C_6 \cdot h^2 \cdot \|\rho^{1+2\alpha-\beta} \cdot F\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \|u-u_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}$$

или

$$\|u-u_h\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \le C_6 \cdot h^2 \cdot \|F \cdot \rho^{1+2\alpha-\beta}\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}.$$

Теорема доказана.

В доказательстве мы следовали идее, изложенной в [3].

В заключение хочу выразить признательность профессору Г.М. Вайникко за внимание, полезные советы и обсуждение результатов.

Литература

1. Л и з о р к и н П.И., Н и к о л ь с к и й С.М. Эллиптическое уравнение с вырождением. Вариационный метод. Докл. АН СССР, 1981, 257, № 1, 42-45.

2. Л и з о р к и н П.И., Н и к о л ь с к и й С.М. Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства решений. Докл. АН СССР, 1981, 257, № 2, 278-282.

3. М а р ч у к Г.И., А г о ш к о в В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М., 1981.

4. Н и к о л ь с к и й С.М. Вариационная проблема для уравнения эллиптического типа с вырождением на границе. Тр. Матем. ин-та им. В.А.Стеклова, 1979, 150, 212-238.

5. Р у к а в и ш н и к о в а Е.И. О порядке сходимости метода конечных элементов для эллиптической краевой задачи с вырождением. В кн.: Численные методы в задачах математической физики и кибернетики. Владивосток, ВЦ ДВНЦ АН СССР, 1987, 34-61.

6. С ь я р л е Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М., 1980.

ON THE CONVERGENCE RATE OF THE FINITE ELEMENT METHOD FOR DEGENERATIVE ELLIPTIC EQUATION IN THE SPACE $\mathcal{L}_2$

E. Rukavishnikova

Summary

The finite element method for Dirichlet problem of an elliptic equation of the second order with degeneration on the boundary is considered. It has been stated that the convergence of an approximate solution to an exact one has an $O(h^2)$ order in the norm $\mathcal{L}_2$.

МЕТОД ИТЕРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ РАЗНОСТНОЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

М.Фишер

В статье [I] исследовалась сходимость неявной разностной схемы для решения параболической задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(t)u = f, \quad x \in \Omega, \quad t \in (0,T], \tag{I}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$u = u(x,t) \in H_0^2(\Omega), \quad t \in [0,T], \tag{3}$$

где

$$A(t)u = -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right), \quad m = 2,3,$$

$$a_{ij}(x,t,u) = a_{ji}(x,t,u), \quad f = f(x,t) \in L_2(\Omega), \quad t \in (0,T],$$

$$H_0^2(\Omega) = \{v : v \in H^2(\Omega), \; v|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega) -$$

пространство Соболева, $\Omega = \{0 < x_i < 1, \; i = 1,\dots,m\}$, $\partial\Omega$ – граница, $\bar{\Omega}$ – замыкание. Здесь исследуется метод итерации для нахождения решения названной неявной разностной схемы.

Предположим, что выполнены условия:

(I) для каждого $a > 0$ существует такое число $\varkappa_a > 0$, что при всех $x \in \bar{\Omega}$, $t \in [0,T]$, $\xi_i \in R$, $u \in [-a,a]$ справедливо неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x,t,u)\xi_i\xi_j \geq \varkappa_a \sum_{i=1}^{m} \xi_i^2 ;$$

(II) функции $a_{ij}(x,t,u)$ дифференцируемы и

$$\left| \frac{\partial^{\mu_0+\mu_1} a_{ij}(x,t,u)}{\partial x_\ell^{\mu_0}\, \partial u^{\mu_1}} \right| \le d_a,\ \mu_0,\mu_1 = 0,1,2,3,\ \mu_0+\mu_1 \le 3$$

$$\forall x \in \Omega,\ t \in [0,T],\ u \in [-a,a],\ \ell = 1,\dots,m.$$

Равномерную сетку с шагом h в $\overline{\Omega}$ обозначим через $\overline{\Omega}_h$, причем $\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \Omega$, $\partial\Omega_h = \overline{\Omega}_h \cap \partial\Omega$. На отрезке $[0,T]$ введем сетку с шагом $\tau = T/N$:

$$\omega_\tau = \{ t_k = k\tau,\ k = 0,1,\dots,N \}$$

и обозначим

$$\omega_\tau^+ = \{ t \in \omega_\tau,\ 0 < t \le T \}.$$

В дальнейшем ∂_i, $\overline{\partial}_i$ означают, соответственно, разность вперед или разность назад по пространственным переменным в i – том направлении, а

$$y_{\bar{t}} = \frac{1}{\tau}(y - \check{y}),\ \check{y} = y(x, t-\tau).$$

Итак, рассматривается следующая неявная разностная схема

$$y_{\bar{t}} + A_{h\tau}(t) y = f_{h\tau},\ x \in \Omega_h,\ t \in \omega_\tau^+, \tag{4}$$

$$y(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega_h, \tag{5}$$

$$y = y(t) = y(x,t) \in H_0^2(\Omega_h),\ t \in \omega_\tau, \tag{6}$$

где

$$A_{h\tau}(t) y = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} [\partial_i (a_{ij}(x,t,y) \overline{\partial}_j y) + \overline{\partial}_i (a_{ij}(x,t,y) \partial_j y)],$$

$$f_{h\tau} = f_{h\tau}(x,t) \in L_2(\Omega_h), t \in \omega_\tau^+, H_0^k(\Omega_h) = \{ y \in H^k(\Omega_h), y|_{\partial\Omega_h} = 0 \},$$

$H^k(\Omega_h) = W^{k,2}(\Omega_h)$. В пространствах $H_0^1(\Omega_h)$, $H_0^2(\Omega_h)$ воспользуемся, соответственно, нормами

$$\|y\|_1 = \|\Delta_h^{1/2} y\|_0,\ \|y\|_2 = \|\Delta_h y\|_0,\ \Delta_h = -\sum_{i=1}^{m} \partial_i \overline{\partial}_i,\ \|\cdot\|_0 = \|\cdot\|_{L_2(\Omega_h)}.$$

Введем связывающие операторы $p_h \in \mathcal{L}(H_0^2(\Omega), H_0^2(\Omega_h))$, $q_h \in \mathcal{L}(L_2(\Omega), L_2(\Omega_h))$, действующие, соответственно, по формулам

$$(p_h u)(\xi) = u(\xi), \quad \xi \in \bar{\Omega}_h,$$

$$(q_h u)(\xi) = h^{-m} \int\limits_{\Pi(\xi)} u(x)\,dx, \quad \xi \in \Omega_h,$$

где $\Pi(\xi)$ — элементарная ячейка объема h^m с центром в точке $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \Omega_h$:

$$\Pi(\xi) = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_m),\ \xi_j - \frac{h}{2} < x_j \le \xi_j + \frac{h}{2},\ j = 1, \ldots, m \right\}.$$

Для оператора $A_{h\tau}$ непосредственно доказывается следующая лемма.

Лемма. Пусть выполнено условие (II). Тогда оператор $A_{h\tau}: H_0^2(\Omega_h) \to L_2(\Omega_h),\ t \in \omega_\tau$ дифференцируем по Фреше, и имеет место неравенство

$$\|A_{h\tau} y - A_{h\tau} v\|_0 \le M_a \|y - v\|_2,\ y, v \in H_0^2(\Omega_h),\ t \in \omega_\tau,\ \|y\|_2, \|v\|_2 \le a,$$

где

$$M_a = c\,d_a\,(2 + 4a + a^2),\ c = const > 0.$$

В дальнейшем предположим, что задача (I),(2),(3) имеет достаточно гладкое решение $u^*(x,t)$. Рассмотрим окрестность

$$\mathcal{U}_\delta = \left\{ v(t) \in H_0^1(\Omega_h),\ t \in \omega_\tau^+,\ \max_{t \in \omega_\tau^+} \|v(t) - p_h u^*(t)\|_1 \le c_0 h = \delta \right\},\ c_0 = const > 0.$$

Отметим, что для элементов $v(t) \in \mathcal{U}_\delta$ справедливо неравенство

$$\|v(t)\|_2 \le \|v(t) - p_h u^*(t)\|_2 + \|p_h u^*(t)\|_2 \le \frac{c}{h} \|v(t) - p_h u^*(t)\|_1 +$$

$$+ \|p_h u^*(t)\|_2 = const = a.$$

Теперь, для $y, v \in \mathcal{U}_\delta$ имеет место неравенство коэрцитивности (см. [2])

$$(A_{h\tau}(t) y - A_{h\tau}(t) v,\ \Delta_h(y - v)) \ge \frac{\varkappa_a}{2} \|y - v\|_2^2 - C_a \|y - v\|_1^2,$$

где C_a — положительная постоянная, зависящая от a.

Для корректности схемы (4),(5),(6) справедлива следующая теорема (см. [I]).

Теорема I. Пусть выполнены условия (I),(II). Пусть $\tau \le r h,\ r = const > 0$, такое, чтобы выполнялось $1 - 2\tau C_a > 0$. Тогда при достаточно малых h и r ($\tau \le r h$) схема (4),(5),(6) имеет единственное решение $y^* \in \mathcal{U}_\delta$ и при $\|f_{h\tau} - q_h f\|_0 = O(h^2 + \tau)$ имеет место оценка

$$\max_{t\in\omega_\tau^+} \| y^*(t) - p_h u^+(t) \|_1 = O(h^2+\tau)$$

Для нахождения решения $y^*(t)$ преобразуем схему (4),(5), (6) к эквивалентному виду

$$(E_h + \tau A_{h\tau}) y = \tau f_{h\tau} - \check{y},\ y = y(x,t) \in \overset{\circ}{H}{}^2(\Omega_h),\ t \in \omega_\tau^+, \qquad (7)$$

$$y(x,0) = u_0(x),$$

где E_h – единичный оператор.

Рассмотрим предложенный в [3] итерационный процесс решения задачи (7):

$$(E_h + \tau \Delta_h) y^l = (E_h + \tau\Delta_h) y^{l-1} - \lambda[(E_h + \tau A_{h\tau}) y^{l-1} - \tau f_{h\tau} - \check{y}^*], \qquad (8)$$

$l = 1,2,\dots;\ \lambda > 0.$

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы I. Тогда при любых $\lambda \in (0,b)$, $b = \min\{2(1-\tau c_a), \frac{\varkappa_a}{M_a^2}\}$, $y_0 \in M_\delta$ метод итерации (8) сходится с оценкой

$$\| y^l - y^* \|_1^2 + \tau \| y^l - y^* \|_2^2 \le$$

$$\le [q(\lambda)]^2 (\| y^{l-1} - y^* \|_1^2 + \tau \| y^{l-1} - y^* \|_2^2),$$

где

$$q(\lambda) = \max\{(1 - 2\lambda(1-\tau c_a) + \lambda^2)^{1/2}, (1 - \lambda\varkappa_a + \lambda^2 M_a^2)^{1/2}\} < 1.$$

Доказательство. В обозначениях

$$B = E_h + \tau A_{h\tau},\quad C = E_h + \tau\Delta_h$$

итерационный процесс (8) для нахождения y^* принимает вид

$$C y^l = C y^{l-1} - \lambda (B y^{l-1} - \tau f_{h\tau} - \check{y}^*)$$

или

$$C y^l = C y^{l-1} - \lambda (B y^{l-1} - B y^*).$$

Из неравенства коэрцитивности вытекает для оператора B следующее неравенство

$$(By - Bv, \Delta_h(y - v)) \geq \frac{\tau \varkappa_n}{2} \|y - v\|_2^2 + (1 - \tau c_a)\|y - v\|_1^2, \; y, v \in M_\delta \quad (9)$$

Обозначим $z^l = y^l - y^*$, будем иметь

$$Cz^l - Cz^{l-1} = -\lambda (By^{l-1} - By^*) .$$

Умножим последнее скалярно на $\Delta_h z^l$:

$$(Cz^l, \Delta_h z^l) - (Cz^{l-1}, \Delta_h z^l) = -\lambda (By^{l-1} - By^*, \Delta_h z^l).$$

Преобразуем полученное равенство подходящим образом. Имеем

$$\frac{1}{2}(Cz^l, \Delta_h z^l) - \frac{1}{2}(Cz^{l-1}, \Delta_h z^{l-1}) + \frac{1}{2}(C(z^l - z^{l-1}), \Delta_h (z^l - z^{l-1})) =$$

$$= -\lambda (By^{l-1} - By^*, \Delta_h z^{l-1}) - \lambda (By^{l-1} - By^*, \Delta_h (z^l - z^{l-1}))$$

или

$$(Cz^l, \Delta_h z^l) - (Cz^{l-1}, \Delta_h z^{l-1}) = -(C(z^l - z^{l-1}), \Delta_h (z^l - z^{l-1})) -$$
$$- 2\lambda (By^{l-1} - By^*, \Delta_h z^{l-1}) - 2\lambda (By^{l-1} - By^*, \Delta_h (z^l - z^{l-1})). \quad (10)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (10) перепишем в виде

$$-(C(z^l - z^{l-1}), \Delta_h (z^l - z^{l-1})) = -\|z^l - z^{l-1}\|_1^2 - \tau \|z^l - z^{l-1}\|_2^2 . \quad (11)$$

Пусть $y^l \in M_\delta$. Тогда второе слагаемое в правой части равенства (10) оценивается непосредственно с помощью неравенства (9):

$$2\lambda (By^{l-1} - By^*, \Delta_h z^{l-1}) \geq \lambda \tau \varkappa_n \|z^{l-1}\|_2^2 + 2\lambda (1 - \tau c_a)\|z^{l-1}\|_1^2 \quad (12)$$

На основе леммы и неравенства Коши-Буняковского будем иметь

$$2\lambda |(By^{l-1} - By^*, \Delta_h (z^l - z^{l-1}))| = 2\lambda |(z^{l-1}, \Delta_h (z^l - z^{l-1})) +$$
$$+ \tau (A_{h\tau} y^{l-1} - A_{h\tau} y^*, \Delta_h (z^l - z^{l-1}))| \leq$$
$$\leq 2\lambda (\Delta_h z^{l-1}, z^{l-1})^{1/2} (\Delta_h (z^l - z^{l-1}), z^l - z^{l-1})^{1/2} +$$

$$+ 2\lambda\tau M_a \|y^{l-1} - y^*\|_2 \, \|z^l - z^{l-1}\|_2 =$$

$$= 2\lambda \|z^{l-1}\|_1 \|z^l - z^{l-1}\|_1 + 2\lambda\tau M_a \|z^{l-1}\|_2 \|z^l - z^{l-1}\|_2 .$$

Применим к последнему ε – неравенство в виде

$$a \cdot b \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 , \quad \varepsilon > 0 , \; a, b \geq 0 .$$

Имеем

$$2\lambda \, |(By^{l-1} - By^*, \Delta_h (z^l - z^{l-1}))| \le$$

$$\le \varepsilon_0 \|z^l - z^{l-1}\|_1^2 + \frac{\lambda^2}{\varepsilon_0} \|z^{l-1}\|_1^2 + \tau M_a \varepsilon_1 \|z^l - z^{l-1}\|_2^2 + \tag{13}$$

$$- \lambda^2 \frac{\tau M_a}{\varepsilon_1} \|z^{l-1}\|_2^2 , \quad \varepsilon_0, \varepsilon_1 > 0 .$$

Подставляя (11),(12),(13) в (10), получим

$$(Cz^l, \Delta_h z^l) \le (Cz^{l-1}, \Delta_h z^{l-1}) - (1 - \varepsilon_0) \|z^l - z^{l-1}\|_1^2 -$$

$$- \tau (1 - M_a \varepsilon_1) \|z^l - z^{l-1}\|_2^2 + \left(-2\lambda (1 - \tau c_a) + \frac{\lambda^2}{\varepsilon_0}\right) \|z^{l-1}\|_1^2 +$$

$$+ \tau \left(- \lambda \varkappa_a + \frac{\lambda^2 M_a^2}{\varepsilon_1}\right) \|z^{l-1}\|_2^2 .$$

Выбираем $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{M_a}$, имеем

$$\|z^l\|_1^2 + \tau \|z^l\|_2^2 \le (1 + 2\lambda (1 - \tau c_a) + \lambda^2) \|z^{l-1}\|_1^2 +$$
$$+ \tau (1 - \lambda \varkappa_a + \lambda^2 M_a^2) \|z^{l-1}\|_2^2$$

или

$$\|z^l\|_1^2 + \tau \|z^l\|_2^2 \le [q(\lambda)]^2 (\|z^{l-1}\|_1^2 + \tau \|z^{l-1}\|_2^2) ,$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. Фишер М. Сходимость разностного метода для нелинейного параболического уравнения. В кн.: III симпозиум. Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Таллин: "Валгус", 1984, 101-102.
2. Фишер М. О сходимости разностного метода в сильной норме для нелинейной задачи эллиптического типа. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 633, 55-66.
3. Лапин А.В. О корректности нелинейной двухслойной разностной схемы с весами. В сб.: Исследования по прикладной математике. Вып. I. Казань: КГУ, 1973, 82-89.

ITERATIONSMETHODE FÜR DIE LÖSUNG DER NICHTLINEAREN PARABOLISCHEN DIFFERENZENAUFGABE

H. Fischer

Zusammenfassung

Man untersucht die Iterationsmethode für die Lösung der Differenzengleichung mit den schwachen Nichtlinearitäten in den Koeffizienten. Es wird gezeigt daß die Iterationsmethode konvergiert.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В СИЛОВОМ ПОЛУПРОВОДНИКОВОМ ПРИБОРЕ

К.Румма, И.-И.Саарниит, П.Уба

Рассматривается универсальная модель для описания нестационарных тепловых процессов в силовом полупроводниковом приборе. Приводятся результаты расчетов.

§ I. Исходная задача

В цилиндрических координатах задается область

$$S = \{(z,r): 0 \le z \le \ell,\ R_1 \le r \le R\},\quad R_1 \ge 0,$$

которая разбита плоскостями

$$z = \zeta_\alpha,\quad 0 = \zeta_0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_{\varkappa} = \ell,$$

на $\varkappa$ слоев. Температура $u^\alpha(z,r,t)$ в точке (z,r) принадлежащей слою $\zeta_{\alpha-1} < z < \zeta_\alpha$ в момент времени t является решением задачи

$$\rho^\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r p^\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(p^\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial z}\right) = f^\alpha(z,r,t), \tag{I}$$

$$\zeta_{\alpha-1} < z < \zeta_\alpha,\quad R_1 < r < R,\quad t > 0;$$

$$u^\alpha\big|_{t=0} = u^\alpha(z,r),\quad \zeta_{\alpha-1} \le z \le \zeta_\alpha,\ R_1 \le r \le R; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial r}\bigg|_{r=R_1} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial r}\bigg|_{r=R} = 0,\quad \zeta_{\alpha-1} \le z \le \zeta_\alpha,\ t \ge 0; \tag{3}$$

$$(\alpha = 1,\ldots,\varkappa);$$

$$u^1\big|_{z=0} = \varphi_0(r,t),\quad u^\varkappa\big|_{z=\ell} = \varphi_1(r,t),\ R_1 \le r \le R,\ t \ge 0. \tag{4}$$

Здесь α – номер слоя, $\rho^\alpha = \rho^\alpha(z,r,u^\alpha)$ – произведение удельной теплоемкости и плотности материала слоя, $p^\alpha = p^\alpha(z,r,u^\alpha)$ – его коэффициент теплопроводности, $f^\alpha(z,r,t)$ – плотность внутренних источников тепла, $u^\alpha(z,r)$ – начальное распределение температуры, $\varphi_0(r,t)$ и $\varphi_1(r,t)$ – температура на торцах модели. На контактных поверхностях $z = \zeta_\alpha$ в отличие от "классического" случая (см., напр., [2], [3]) требуется выполнения следующих условий сопряжения (см. [I], [5]):

$$p^{\alpha}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta_\alpha} = p^{\alpha+1}\frac{\partial u^{\alpha+1}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta_\alpha},$$

$$b_\alpha p^{\alpha}\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta_\alpha} = (u^{\alpha+1} - u^{\alpha})\Big|_{z=\zeta_\alpha} \quad (\alpha=1,\ldots,\varkappa-1). \qquad (5)$$

Здесь $b_\alpha = b_\alpha(r)$ – коэффициент термического сопротивления контактной поверхности. При идеальном контакте $b_\alpha(r)\equiv 0$ и $u^{\alpha}\big|_{z=\zeta_\alpha} = u^{\alpha+1}\big|_{z=\zeta_\alpha}$. Если же $b_\alpha(r)>0$, то значения функций u^α и $u^{\alpha+1}$ при $z=\zeta_\alpha$ могут различаться.

Так как коэффициент теплопроводности и удельная теплоемкость полупроводникового слоя существенно зависят от температуры (функции ς^α и p^α зависят от u^α), то задача (I–5) нелинейна. Кроме того, функции ς^α и p^α могут иметь разрывы первого рода на линиях $z=\text{const}$ и $r=\text{const}$.

Плотность источников тепла f^α – периодическая по t функция с периодом T. Предполагается, что тепло выделяется лишь в одном слое прибора (например, в n-базе тиристора) и при этом равномерно по всей его толщине в направлении оси z. Пусть $\bar\alpha$ – номер этого слоя. Ширина теплоактивной области в нем задается двумя функциями: $r_s(t)$ – внутренний радиус, $r_v(t)$ – внешний радиус,

$$R_1 \le r_s(t) \le r_v(t) \le R \quad \text{при} \quad 0\le t\le T.$$

Плотность источников тепла в теплоактивной области вычисляется по формуле

$$\Psi(t) = \frac{J(t)\,U(t)}{\pi(r_v^2(t)-r_s^2(t))(\zeta_{\bar\alpha}-\zeta_{\bar\alpha-1})},$$

где $J(t)$ – сила тока, $U(t)$ – напряжение на приборе (см. [3]). Таким образом f^α записывается в виде

$$f^\alpha(z,r,t) = \begin{cases} \Psi(t), & \text{если } \alpha=\bar\alpha \text{ и } r_s(t)<r<r_v(t), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

§ 2. Метод решения

Для решения задачи используется метод конечных разностей. Разбиение прямоугольника S осуществляется линиями $z=z_i$ ($i=0,\ldots,n$), $r=r_j$ ($j=0,\ldots,m$). Шаги сетки в направлении осей z и r обозначим через

$$h_{i-1/2} = z_i - z_{i-1}, \quad \eta_{j-1/2} = r_j - r_{j-1}.$$

Сетку на оси t зададим точками t_k ($k = 0,1,2,\ldots$; $t_0 = 0$), шаги по времени обозначим

$$\tau_{k-1/2} = t_k - t_{k-1}.$$

Приближенные значения решения в узлах сетки обозначим

$$u_{ij}^k \approx u^\alpha(z_i, r_j, t_k), \quad \zeta_{\alpha-1} \le z_i \le \zeta_\alpha.$$

Сетка строится так, чтобы линии разрывов функций p^α и ϱ^α, а также линии $z = \zeta_\alpha$ находились на линиях сетки. Если коэффициент термического сопротивления $b_\alpha(r) > 0$, то предполагается, что $z = \zeta_\alpha$ совпадает с двумя линиями сетки:

$$z_{i-1} = \zeta_\alpha - 0, \quad z_i = \zeta_\alpha + 0,$$

причем

$$u_{i-1,j}^k \approx u^\alpha(\zeta_\alpha, r_j, t_k), \quad u_{ij}^k \approx u^{\alpha+1}(\zeta_\alpha, r_j, t_k).$$

Для обозначения матрицы значений приближенного решения на множестве узлов (z_i, r_j) будем опускать нижние индексы. Например, k-й слой решения будем обозначать

$$u^k = \{u_{ij}^k : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}.$$

Значения коэффициентов p^α и ϱ^α уравнения (I) в узлах сетки обозначим

$$p_{ij}[u] = p^\alpha(z_i, r_j, u_{ij}), \quad \varrho_{ij}[u] = \varrho^\alpha(z_i, r_j, u_{ij}), \quad \zeta_{\alpha-1} \le z_i \le \zeta_\alpha,$$

где $u = \{u_{ij} : 0 \le i \le n,\ 0 \le j \le m\}$ – заданная матрица. Если коэффициенты уравнения имеют при z_i или r_j разрывы, то в качестве $p_{ij}[u]$ и $\varrho_{ij}[u]$ берутся их усредненные значения, соответственно, на отрезке $[z_{i-1/2}, z_{i+1/2}]$ или $[r_{j-1/2}, r_{j+1/2}]$. Здесь и в дальнейшем мы используем дробные индексы для обозначения величин

$$z_{i-1/2} = \frac{z_{i-1} + z_i}{2}, \quad r_{j-1/2} = \frac{r_{j-1} + r_j}{2}, \quad u_{i-1/2,j} = \frac{u_{i-1,j} + u_{ij}}{2}, \quad u_{i,j-1/2} = \frac{u_{i,j-1} + u_{ij}}{2}.$$

Производная по r в уравнении (I) аппроксимируется в узлах (z_i, r_j) следующими конечно-разностными выражениями:

$$\left(\Lambda_r[u]u^k\right)_{ij} = \frac{2}{r_{j-1/2}\eta_{j-1/2} + r_{j+1/2}\eta_{j+1/2}} \left(r_{j+1/2}\, p_{i,j+1/2}[u]\, \frac{u_{i,j+1}^k - u_{ij}^k}{\eta_{j+1/2}} - \right.$$

$$- r_{j-1/2}\, p_{i,j-1/2}[u] \frac{u_{ij}^k - u_{i,j-1}^k}{\eta_{j-1/2}} \Big) \quad (i=1,\ldots,n-1;\ j=1,\ldots,m-1),$$

$$\left(\Lambda_r[u]u^k\right)_{i0} = 2 p_{i,1/2}[u] \frac{u_{i1}^k - u_{i0}^k}{\eta_{1/2}^2},$$

$$\left(\Lambda_r[u]u^k\right)_{im} = 2 p_{i,m-1/2}[u] \frac{u_{i,m-1}^k - u_{im}^k}{\eta_{m-1/2}^2}.$$

Для аппроксимации производной по z в узлах (z_i, r_j) не находящихся на прямых $z = \zeta_\alpha$, на которых $b_\alpha(r) > 0$, используем выражения

$$\left(\Lambda_z[u]u^k\right)_{ij} = \frac{2}{h_{i-1/2} + h_{i+1/2}} \Big(p_{i+1/2,j}[u] \frac{u_{i+1,j}^k - u_{ij}^k}{h_{i+1/2}} -$$

$$- p_{i-1/2}[u] \frac{u_{ij}^k - u_{i-1,j}^k}{h_{i-1/2}} \Big) \quad (i=1,\ldots,n-1;\ j=0,\ldots,m).$$

Если же z_i совпадает с ζ_α и при этом $b_\alpha(r) > 0$, то используем конечно-разностные выражения, учитывающие условия сопряжения (5) (см. [5]):

$$\left(\Lambda_z[u]u^k\right)_{ij} = \frac{2}{h_{i-1/2}} \Big(\frac{u_{i+1,j}^k - u_{ij}^k}{b_\alpha(r_j)} - p_{i-1/2,j}[u] \frac{u_{ij}^k - u_{i-1,j}^k}{h_{i-1/2}} \Big),$$

если $z_i = \zeta_\alpha - 0$;

$$\left(\Lambda_z[u]u^k\right)_{ij} = \frac{2}{h_{i+1/2}} \Big(p_{i+1/2,j}[u] \frac{u_{i+1,j}^k - u_{ij}^k}{h_{i+1/2}} - \frac{u_{ij}^k - u_{i-1,j}^k}{b_\alpha(r_j)} \Big),$$

если $z_i = \zeta_\alpha + 0$.

В качестве свободных членов системы конечноразностных уравнений в узлах (z_i, r_j) вычисляются усредненные значения плотностей источников тепла на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$, на которые делится период $[0, T]$:

$$f_{ij}^{k-1/2} \approx \frac{1}{\tau_{k-1/2}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f^\alpha(z_i, r_j, t)\,dt, \quad \zeta_{\alpha-1} \le z_i \le \zeta_\alpha \qquad (6)$$

$$(i=1,\ldots,n-1;\ j=0,\ldots,m).$$

Для вычисления интегралов в (6) отрезок $[t_{k-1}, t_k]$ разбивается на подотрезки и применяется формула прямоугольников. Если шаг $\tau_{k-1/2} \geq T$, то свободные члены вычисляются по формуле

$$f_{ij} \approx \frac{1}{T}\int_0^T f^{\alpha}(z_i, r_j, t)\,dt, \quad \zeta_{\alpha-1} \le z_i \le \zeta_\alpha. \qquad (6')$$

Для приближенного решения задачи (I-5) применяется метод переменных направлений (см. [4]). Слой u^k $(k=1,2,\ldots)$ вычисляется исходя из предыдущего слоя u^{k-1} в результате двух полушагов. Сначала находится вспомогательная матрица $u^{k-1/2}$ – решение трехдиагональной системы

$$\varrho[u^{k-1}]u^{k-1/2} - \frac{\tau_{k-1/2}}{2}\Lambda_r[u^{k-1}]u^{k-1/2} = \\ = \varrho[u^{k-1}]u^{k-1} + \frac{\tau_{k-1/2}}{2}\Lambda_z[u^{k-1}]u^{k-1} + \frac{\tau_{k-1/2}}{2}f^{k-1/2}. \qquad (7)$$

Для нахождения матрицы u^k затем решается (тоже трехдиагональная) система

$$\varrho[u^{k-1}]u^{k} - \frac{\tau_{k-1/2}}{2}\Lambda_z[u^{k-1}]u^{k} = \\ = \varrho[u^{k-1}]u^{k-1/2} + \frac{\tau_{k-1/2}}{2}\Lambda_r[u^{k-1}]u^{k-1/2} + \frac{\tau_{k-1/2}}{2}f^{k-1/2}. \qquad (8)$$

Значения u^k_{0j} и u^k_{nj} в системе (8) определяются из (4). Слой u^0 задается начальными условиями (2). Ввиду нелинейности задачи предвидена возможность применения метода предиктор-корректор (см., напр., [7]), число корректирующих шагов при этом может быть произвольным.

Описанный метод реализован в виде пакета программ на языке ФОРТРАН-IУ. Описывающие модель функции p^α, ϱ^α, b_α, J, U, r_v и r_s задаются в виде программ-функций, что позволяет, в частности, использовать данные, полученные в результате экспериментов.

§ 3. Результаты вычислений

В качестве примера рассмотрим следующую модель тиристора (см. рис. I): слой I – медь (толщина 8,6 мм), 2 – вольфрам (2,5 мм), 3 – кремний (0,08 мм), 4 – кремний (n-база, т.е. теплоактивный слой, толщина 0,23 мм), 5 – кремний (0,08 мм), 6 – медь (I2 мм). В последнем слое имеется отверстие для управляющего электрода, его глубина и наибольший радиус равны 6 мм. Радиус тиристора – I6,5 мм.

Величины контактных термических сопротивлений определялись по общему термическому сопротивлению прокладок и припоев с учетом сопротивления прижимных контактов. В модели были приняты следующие их значения: $b_1 = 0{,}205$ К·см^2/Вт, $b_2 = 0{,}0017$ К·см^2/Вт, $b_3 = b_4 = 0$, $b_5 = 0{,}235$ К·см^2/Вт.

Температурные зависимости коэффициента теплопроводности и удельной теплоемкости кремния были описаны такими же формулами, как в [1]. Плотность слоев прибора, а также тепловые параметры металлов и воздуха считались постоянными, их значения взяты из [6].

Температура на торцах модели и начальная температура были 40°С.

Моделировалась нагрузка тиристора полупериодными синусоидальными импульсами частотой в 630 Гц и максимальными значениями напряжения 670 В и силы тока 3860 А. Формулы для функций $U(t)$ и $J(t)$ были взяты из [3]. Значения $r_s(t)$ и $r_v(t)$ (в миллиметрах) определялись следующим образом (см. [3]):

$$r_s(t) = 6, \quad r_v(t) = \begin{cases} 6{,}35 & \text{при } t \le 2 \text{ мкс}; \\ 6{,}35 + 0{,}1(t-2) & \text{при } t > 2 \text{ мкс}. \end{cases}$$

Некоторые результаты расчетов, характеризующие температурное поле тиристора, работающего в установившемся режиме, приведены на рис. 1–4. Расчеты проводились на сетке размером 54×30 узлов по координатам z и r соответственно. Рабочий период тиристора был разбит на 16 отрезков. Для вычисления усредненных значений температуры в установившемся режиме работы прибора потребовалось рассчитать 80 слоев u^k с шагом по времени $\tau = 0{,}05$ секунды. Последний слой был принят за исходный для вычисления изменений температуры внутри периода. Удовлетворительные результаты были получены уже во втором периоде, т.е. было вычислено еще 32 слоя u^k. Корректирующие шаги при вычислениях не потребовались. Время вычисления всех 112 слоев на ЭВМ ЕС-1060 – около 6,5 минут.

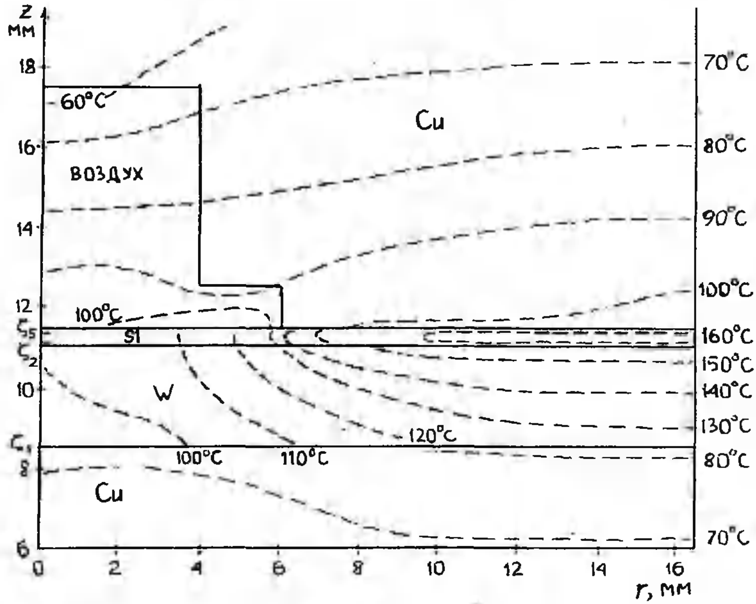


Рис.I. Температурное поле тиристора в момент времени t=600 мкс от начала периода.

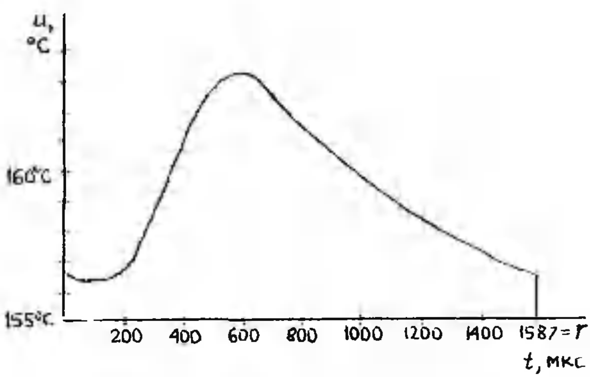


Рис.2. Колебание температуры в течении периода в точке с координатами z=II,3 мм, r=I4,5 мм.

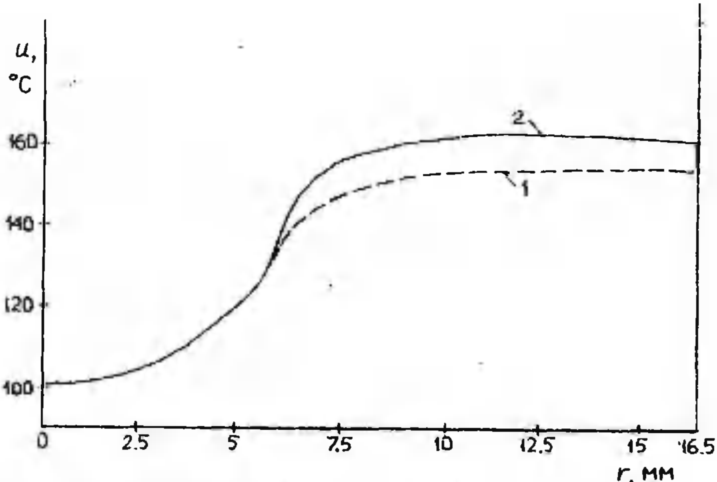


Рис.3. Изменение температуры в направлении радиуса тиристора при z=II,3 мм в моменты времени t=0 (I) и t=600 (2) мкс.

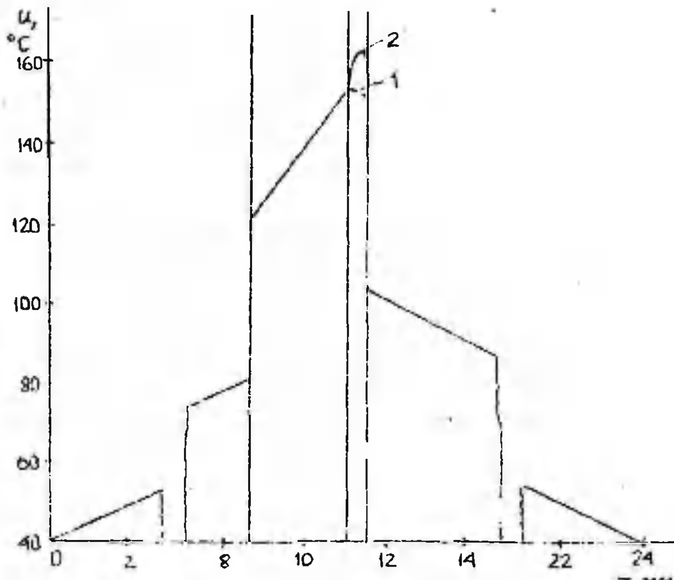


Рис.4. Изменение температуры в направлении оси тиристора при r=I4,5 мм в моменты времени t=0 (I) и t=600 (2) мкс.

Литература

1. В е л м р е Э.Э., Ф р е й д и н Б.П. Численное моделирование неизотермических переходных процессов в силовых полупроводниковых приборах при воздействии мощного импульса прямого тока. "Электронное моделирование", 1983, № 1, 73-76.
2. Н а й м а р к А.М. Нахождение температурных полей тиристора. "Динамика систем. Устойчивость, автоколебания и стохастичность". Межв. сборник, Горький, 1981, 176-193.
3. Р а б и н е р с о н А.А., А ш к и н а з и Г.А. Режим нагрузки силовых полупроводниковых приборов. М., "Энергия", 1976.
4. С а м а р с к и й А.А. Введение в теорию разностных схем. М., "Наука", 1971.
5. С а м а р с к и й А.А., А н д р е е в В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М., "Наука", 1978.
6. Таблицы физических величин. Справочник. М., "Атомиздат", 1976.
7. Ф о р с а й т Д., М а л ь к о л ь м М., М о у л е р К. Машинные методы математических вычислений. М., "Мир", 1980.

COMPUTATIONAL MODELLING OF THE TEMPERATURE FIELD IN A POWER SEMICONDUCTOR DEVICE

K.Rumma, I.-I.Saarniit, P.Uba

Summary

A universal model for describing non-stationary thermal processes in a power semiconductor device is examined. Results of calculations are presented.

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДА ПОДОБЛАСТЕЙ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

П.Оя

Сравнительный анализ методов коллокации и подобластей квадратичеокими и кубическими сплайнами для краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений приведен в [2]. Выяснилось, что наибольшую скорость сходимости имеет метод подобластей кубическими сплайнами, а из остальных трех ни один не имеет преимущества перед другими. В настоящей работе, которая по существу продолжает исследование [2], уточняем скорость сходимости метода подобластей кубичеокими сплайнами и обсуждаем некоторые возможности его реализации.

1. Приведем сначала оценки точности интерполяционного кубического сплайна в узлах сетки. На отрезке $[a,b]$ введем равномерное разбиение $x_i = a + ih$, $i = 0,\dots,n$, $h = (b-a)/n$, пусть также $y_i = x_i + h/2$, $i = 0,\dots,n-1$. Кубический интерполяционный сплайн S для функции $f \in C^6[a,b]$ определим краевыми условиями

$$S''(a) = f''(a) - \frac{1}{12} h^2 f^{IV}(a) + \frac{1}{360} h^4 f^{VI}(a),$$
$$S''(b) = f''(b) - \frac{1}{12} h^2 f^{IV}(b) + \frac{1}{360} h^4 f^{VI}(b). \qquad (1)$$

Тогда обычной техникой разложения Тейлора (см. [1], стр. 230, и [2]) устанавливается, что

$$S''(x_i) = f''(x_i) - \frac{1}{12} h^2 f^{IV}(x_i) + \frac{1}{360} h^4 f^{VI}(x_i) + o(h^4).$$

Затем, используя представление сплайна S на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

$$S(x) = (1-t) f(x_i) + t f(x_{i+1}) - \frac{1}{6} h^2 t(1-t)\big((2-t)S''(x_i) + (1+t)S''(x_{i+1})\big),$$

где $t = (x - x_i)/h$, получаем, что

$$S(y_i) = f(y_i) - \frac{1}{384} h^4 f^{IV}(y_i) + O(h^6),$$

$$S'(y_i)=f'(y_i)+\frac{13}{5760}h^4 f^{V}(y_i)+o(h^5).$$

Отметим, что при краевых условиях (1) сохраняются обычные порядки точности кубической сплайновой интерполянты: $\|S-f\|_\infty=O(h^4)$, $\|S'-f'\|_\infty=O(h^3)$ и $\|S''-f''\|_\infty=O(h^2)$;

здесь и в дальнейшем ∞ – норма означает максимум-норму на отрезке $[a,b]$.

2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases}(Lu)(x)\equiv p(x)u''(x)+q(x)u'(x)+r(x)u(x)=f(x),\ x\in(a,b),\\ u(a)=\alpha\ ,\ u(b)=\beta,\end{cases} \tag{2}$$

где предположим, что функции p,q,r и f достаточно гладкие и $p(x)\geq p>0$, $r(x)\leq r<0$, $x\in(a,b)$. Пусть задача (2) имеет решение $u\in C^6[a,b]$, его единственность уже следует из свойств функций p и r.

В методе подобластей искомый кубический сплайн $\tilde{u}(x)$, как приближенное решение задачи (2), определяем условиями

$$\int_{x_0}^{y_0}(L\tilde{u}-f)(x)dx=0,\ \int_{y_{i-1}}^{y_i}(L\tilde{u}-f)(x)dx=0,\ i=1,\dots,n-1,\ \int_{y_{n-1}}^{x_n}(L\tilde{u}-f)(x)dx=0,$$
$$\tilde{u}(a)=\alpha\ ,\ \tilde{u}(b)=\beta. \tag{3}$$

Выбираем кубические B-сплайны в виде

$$B_i(x)=\frac{1}{h^3}\begin{cases}(x-x_{i-2})^3, & x\in[x_{i-2},x_{i-1}],\\ h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3, & x\in[x_{i-1},x_i],\\ 4h^3-6h(x-x_i)^2+3(x-x_i)^3, & x\in[x_i,x_{i+1}],\\ (x_{i+2}-x)^3, & x\in[x_{i+1},x_{i+2}],\end{cases}$$

причем $B_i(x)=0$ вне отрезка $[x_{i-2},x_{i+2}]$. Коэффициенты c_i в представлении

$$\tilde{u}(x)=\sum_{i=-1}^{n+1}c_i B_i(x)$$

определяются условиями (3), они образуют линейную систему по отношению к c_i. Исключая из этой системы c_{-1} и c_{n+1}, умножая затем первое и последнее уравнения на h, а внутренние на $1/h$, получаем систему с матрицей (обозначим ее через A_0), которая имеет при малых h диагональное преобладание с разностью, не зависящей от h.

Построим решению $u(x)$ задачи (2) интерполирующий кубический сплайн $\bar{u}(x)$ по краевым условиям $\bar{u}''(a) = u''(a) - \frac{1}{12} h^2 u^{IV}(a) + \frac{1}{360} h^4 u^{VI}(a)$, $\bar{u}''(b) = u''(b) - \frac{1}{12} h^2 u^{IV}(b) + \frac{1}{360} h^4 u^{VI}(b)$, рассмотрим и его представление

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} \bar{c}_i B_i(x).$$

Числа $c_i - \bar{c}_i$, $i = 0, \ldots, n$ удовлетворяют линейной системе с матрицей A_0 и правой частью

$$h \int_{x_0}^{y_0} L(u-\bar{u})(x)dx, \quad \frac{1}{h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} L(u-\bar{u})(x)dx, \quad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$h \int_{y_{n-1}}^{x_n} L(u-\bar{u})(x)dx.$$

Здесь первая и последняя компоненты непосредственно оцениваются через $O(h^4)$, это следует уже из того, что $\|\bar{u} - u\|_\infty = O(h^4)$, $\|\bar{u}' - u'\|_\infty = O(h^3)$, $\|\bar{u}'' - u''\|_\infty = O(h^2)$.

Исследуем точнее внутренние компоненты

$$\frac{1}{h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \left(p(x)(u''(x) - \bar{u}''(x)) + q(x)(u'(x) - \bar{u}'(x)) + r(x)(u(x) - \bar{u}(x))\right)dx.$$

Грубая оценка $\|u - \bar{u}\|_\infty = O(h^4)$ дает, что $\frac{1}{h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} r(x)(u(x) - \bar{u}(x))dx = O(h^4)$. Воспользовавшись разложением $p(x) = p(x_i) + p'(x_i)(x - x_i) + O(h^2)$ и оценкой приближения $\bar{u}'(y_i) = u'(y_i) + \frac{13}{5760} h^4 u^{V}(y_i) + o(h^5)$, получаем

$$\frac{1}{h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} p(x_i)(u''(x) - \bar{u}''(x))dx = \frac{p(x_i)}{h}(u'(x) - \bar{u}'(x))\Big|_{y_{i-1}}^{y_i} =$$

$$= \frac{p(x_i)}{h}\left(\frac{13}{5760} h^4 (u^{V}(y_{i-1}) - u^{V}(y_i)) + O(h^5)\right) = O(h^4).$$

Далее, интегрируя по частям, и, учитывая еще оценку $\bar{u}(y_i) = u(y_i) - \frac{1}{384} h^4 u^{IV}(y_i) + O(h^6)$, имеем

$$\frac{1}{h} \int_{y_{i-1}}^{y_i} p'(x_i)(x - x_i)(u''(x) - \bar{u}''(x))dx =$$

$$= \frac{p'(x_i)}{2}(u'(y_i) - \bar{u}'(y_i) + u'(y_{i-1}) - \bar{u}'(y_{i-1})) -$$

$$-\frac{p'(x_i)}{h}\left(\frac{h^4}{384}\left(u^{IV}(y_i)-u^{IV}(y_{i-1})\right)+O(h^5)\right)=O(h^4).$$

Теперь ясно, что $\frac{1}{h}\int_{y_{i-1}}^{y_i} p(x)\left(u''(x)-\bar{u}''(x)\right)dx=O(h^4)$. Аналогично при помощи разложения $q(x)=q(x_i)+O(h)$ доказывается, что $\frac{1}{h}\int_{y_{i-1}}^{y_i} q(x)\left(u'(x)-\bar{u}'(x)\right)dx=O(h^4)$. Этим у нас также доказано, что $\frac{1}{h}\int_{y_{i-1}}^{y_i} L(u-\bar{u})(x)\,dx=O(h^4)$. Вместе с тем мы получаем, что $\max\limits_{0\le i\le n}|c_i-\bar{c}_i|=O(h^4)$, из этого, в свою очередь следует, что $\max\limits_{x_1\le x\le x_{n-1}}|\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)|=$ $=O(h^4)$. Оценка $\max\limits_{x_0\le x\le x_1}|\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)|\le 6\max\limits_{0\le i\le 2}|c_i-\bar{c}_i|$ (см. [2]) и его аналог в другом конце отрезка $[a,b]$ позволяют теперь утверждать, что $\max\limits_{a\le x\le b}|\tilde{u}(x)-\bar{u}(x)|=O(h^4)$. Значит, доказана

Теорема. Метод подобластей (3) для решения задачи (2) имеет в равномерной норме порядок $O(h^4)$.

3. Обсуждаем еще точность вычисления коэффициентов и правых частей в системе уравнений, которая возникает при реализации метода (3).

Условия (3) записываются в виде линейной системы для определения $c_{-1},\dots,c_{n+1}$:

$$\begin{cases} c_{-1}+4c_0+c_1=\alpha, \\ \sum\limits_{j=-1}^{2} c_j\int_{x_0}^{y_0}\left(p(x)B_j''(x)+q(x)B_j'(x)+r(x)B_j(x)\right)dx=\int_{x_0}^{y_0}f(x)\,dx, \\ \sum\limits_{j=i-2}^{i+2} c_j\int_{y_{i-1}}^{y_i}\left(p(x)B_j''(x)+q(x)B_j'(x)+r(x)B_j(x)\right)dx=\int_{y_{i-1}}^{y_i}f(x)\,dx, \\ \qquad\qquad i=1,\dots,n-1, \qquad\qquad (4) \\ \sum\limits_{j=n-2}^{n+1} c_j\int_{y_{n-1}}^{x_n}\left(p(x)B_j''(x)+q(x)B_j'(x)+r(x)B_j(x)\right)dx=\int_{y_{n-1}}^{x_n}f(x)\,dx, \\ c_{n-1}+4c_n+c_{n+1}=\beta, \end{cases}$$

в более подробном виде она приведена в [2]. Исключаем из этой системы c_{-1} и c_{n+1} простой заменой из первого и последнего уравнений в другие. Затем в полученной системе умножим первые два, а также последние два уравнения на h, остальные (назовем их внутренними) на $1/h$ и итоговую систему запишем обозначениями

$$A c = \varphi\,, \tag{5}$$

здесь $c = (c_0, \dots, c_n)$. Система, определяющая интерполянту $\bar{u}(x)$ при помощи $\bar{c} = (\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_n)$, имеет вид

$$A \bar{c} = \varphi_1 .$$

Мы уже знаем, что (в равномерной норме) $\varphi - \varphi_1 = O(h^4)$ и $c - \bar{c} = O(h^4)$, последнее опирается на то, что при малых h главная диагональ матрицы A преобладает с разностью, не зависящей от h. Ясно, что для того, чтобы сохранить такой порядок, достаточно в системе (4) вычислить во внутренних уравнениях интегралы $\int_{y_{i-1}}^{y_i} f(x)dx$ с точностью $O(h^5)$, а для крайних уравнений достаточна точность $O(h^3)$. Мы сосредоточим наше внимание на вычислении коэффициентов матрицы A .

Итак, допустим, что вместо (5) решается система

$$(A - B)\tilde{c} = \varphi ,$$

где возмущение B возникает из-за приближенного вычисления интегралов в левой части системы (4). Если $\|B\|_{\infty\to\infty}$ достаточно мало, то $\exists (A-B)^{-1}$ и $\|(A-B)^{-1}\|_{\infty\to\infty} = O(1)$. Тогда

$$\tilde{c} - c = (A - B)^{-1} B c \tag{6}$$

и поскольку $\|c\|_\infty = O(1)$, то из $\|B\|_{\infty\to\infty} = O(h^4)$ следует также $\|\tilde{c} - c\|_\infty = O(h^4)$. Значит, если $\|B\|_{\infty\to\infty} = O(h^4)$, то в методе сохраняется порядок $O(h^4)$.

4. Допустим, что интегралы в левой части системы (4) вычисляются по интерполяционным квадратурным формулам с узлами y_i и x_i , причем B_j, B_j' и B_j'' выступают в качестве весовой функции. Например, имеем

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i} p(x) B_j''(x)dx = A_1 p(y_{i-1}) + A_2 p(x_i) + A_3 p(y_i) + R(p),$$

причем A_1, A_2, A_3 определяют из условия, что формула точна для многочленов второго порядка. Так как

$$R(p) = \int_{y_{i-1}}^{y_i} \frac{p'''(\xi(x))}{3!} B_j''(x)\,\omega(x)dx,$$

где $\omega(x) = (x - y_{i-1})(x - x_i)(x - y_i)$, и $B_j''(x) = O(\frac{1}{h^2})$, то $R(p) = O(h^2)$, а интегралы с весами B_j' и B_j вычисляются с точностью $O(h^3)$ и $O(h^4)$.

Рассмотрим подробнее случай, когда решение u задачи (2) такое, что $u(x) > 0,\ x \in [a, b]$ (или $u(x) < 0,\ x \in [a, b]$). Тогда этому условию при малых h удовлетворяет также $\tilde{u}$, а поскольку вектор $c=(c_0,\dots,c_n)$ "копирует форму" функции $\hat{u}(x)$, то $c_i>0$, $i=0,\dots,n$. Если теперь в формуле (6) оценивать $\|Bc\|_\infty$, то при $B=(b_{ij})$ появляется возможность оценивать $\max\limits_{0\le i\le n}|\sum\limits_{j=0}^{n} b_{ij}|$. Из того, что при вычислении интеграла

$$\int_{y_{i-1}}^{y_i}(p(x)B_j''(x)+q(x)B_j'(x)+r(x)B_j(x))\,dx$$

имеем погрешность

$$\frac{1}{3!}\int_{y_{i-1}}^{y_i}(p'''(\xi(x))B_j''(x)+q'''(\eta(x))B_j'(x)+r'''(\varsigma(x))B_j(x))\omega(x)\,dx,$$

при $i=2,\dots,n-2$ получаем

$$\sum_{j=0}^{n} b_{ij}=\frac{1}{3!h}\int_{y_{i-1}}^{y_i}\Big(p'''(\xi(x))\sum_{j=i-2}^{i+2}B_j''(x)+q'''(\eta(x))\sum_{j=i-2}^{i+2}B_j'(x)+$$

$$+r'''(\varsigma(x))\sum_{j=i-2}^{i+2}B_j(x)\Big)\omega(x)\,dx.$$

Но $\sum\limits_{j=i-2}^{i+2}B_j''(x)=\sum\limits_{j=i-2}^{i+2}B_j'(x)\equiv 0$, $\sum\limits_{j=i-2}^{i+2}B_j(x)\equiv 6$, следовательно $|\sum\limits_{j=0}^{n} b_{ij}|=O(h^3)$. В крайних компонентах вектора Bc порядок $O(h^3)$ гарантируется уже тем, что при выводе системы (5) соответствующие уравнения в (4) были умножены на h вместо $1/h$ во внутренних. Полученное теоретическое заключение подтверждается следующим примером.

Пример. Пусть в задаче (2), рассматриваемой на отрезке $[0,1]$, $p(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $q(x)=\frac{5x}{1+x^2}$, $r(x)=\frac{x^2-4}{1+x^2}$, $f(x)=x^5+20x^3$, $\alpha=0$, $\beta=1$. Тогда задача имеет точное решение $u(x)=x^5$. Правые части системы (4) мы вычислили точно, а коэффициенты при c_j по интерполяционным квадратурным формулам с узлами x_i, y_i и весами B_j'', B_j', B_j соответственно. Вместо $\|\tilde{u}-u\|_\infty$ мы вычислили $\max\limits_{0\le i\le 10n}|\tilde{u}(z_i)-u(z_i)|$, где $z_i=ih/10$. В результатах указаны n и $\|\tilde{u}-u\|_\infty$ соответственно:

10	20	40	80	160
0.312E-4	0.203E-5	0.137E-6	0.121E-7	0.166E-8

Метод был реализован на языке Фортран с двойной точностью, вычисления проведены на ЭВМ ЕС-1060.

Литература

1. З а в ь я л о в Ю.С., К в а с о в Б.И., М и р о ш н и ч е н к о В.Л., Методы сплайн-функций. Москва, Наука, 1980.
2. О я П., Р е й т с е к а с А., О методах коллокации и подобластей квадратическими и кубическими сплайнами для краевых задач. Изв. АН Эст.ССР, Физ. мат., 1987, 36, № 2, 118-128.

ON THE RATE OF CONVERGENCE OF THE SUBREGIONS METHOD WITH THE CUBIC SPLINES FOR THE BOUNDARY VALUE PROBLEMS

P. Oja

Summary

We prove that the subregions method (3) for the two-point boundary value problem (2) has the rate of convergence $O(h^4)$. We also discuss the numerical solution based on approximative evaluation of integrals in (4) by interpolatory quadrature formulas. A numerical example supporting the theoretical results is given.

ЛОКАЛЬНАЯ СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННО-ПРОЕКЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР ПОСТРОЕНИЯ ВЫНУЖДЕННЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Э. Вайникко

В данной работе изучается сходимость двух итерационно-проекционных методов приближенного построения T-периодических решений нелинейных систем управления. Изучаемые методы основываются на эквивалентной операторной форме исходной задачи. Доказывается сходимость методов в случае существования локально единственного решения.

I. Постановка задачи. Рассмотрим задачу приближенного построения T-периодических решений уравнения

$$L\left(\frac{d}{dt}\right)x = M\left(\frac{d}{dt}\right)f(t,x,x',\dots,x^{(n)}), \tag{I}$$

где степени взаимно простых многочленов

$$L(p) = p^{\ell} + a_1 p^{\ell-1} + \dots + a_{\ell-1}p + a_\ell ,$$

$$M(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m$$

удовлетворяют неравенству $\ell - m - n > 0$. Функция $f(t,x_0,\dots,x_n)$ предполагается измеримой и T-периодичной по переменной t, непрерывной по совокупности остальных переменных.

Выберем вещественное γ так, что числа $\omega_k i = 2\pi k i/T$ $(k=0,1,\dots)$ не являются корнями многочлена $L(p)-\gamma M(p)$. Тогда определен оператор периодической задачи $\Pi_j(\gamma,T)$ $(j = 0,1,\dots,n)$ [5] линейного звена с передаточной функцией

$$W_j(p) = \frac{p^j M(p)}{L(p)-\gamma M(p)} .$$

Рассмотрим ортонормированную в $L_2 = L_2(0,T)$ систему тригонометрических функций

$$e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{T}};\ e_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega_k t,\ g_k(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega_k t,\ k=1,2,\dots . \tag{2}$$

Обозначим через $E(N,T) \subset L_2$ подпространство размерности

$2N+1$ с базисом из функций (2) при $k=1,\dots,N$. Пусть $P(N,T)$ - оператор ортогонального проектирования на подпространство $E(N,T)$:

$$P(N,T)x=(x,e_0)e_0+\sum_{k=1}^{n}(x,e_k)e_k+(x,g_k)g_k \qquad (x\in L_2).$$

Для оператора периодической задачи справедливо спектральное представление (см., например, [2]):

$$\Pi_j(\gamma,T)y=\sum_{k=0}^{\infty}|W_{\gamma j}(\omega_k i)|\,U_{kj}P_k y, \tag{3}$$

где $P_0=P(0,T)$, $P_k=P(k,T)-P(k-1,T)$ $(k=1,2,\dots)$; U_{0j} - это оператор в одномерном пространстве $E(0,T)$ умножения на $\operatorname{sign} W_{\gamma j}(0)$, а операторы U_{kj} ($k=1,2,\dots$; $j=0,\dots,n$) определяются равенством

$$U_{kj}(\xi_k e_k+\eta_k g_k)=\frac{1}{|W_{\gamma j}(\omega_k i)|}\Big\{\big[\operatorname{Re}W_{\gamma j}(\omega_k i)\xi_k+$$

$$+\operatorname{Im}W_{\gamma j}(\omega_k i)\eta_k\big]e_k+\big[-\operatorname{Im}W_{\gamma j}(\omega_k i)\xi_k+\operatorname{Re}W_{\gamma j}(\omega_k i)\eta_k\big]g_k\Big\}.$$

Из (3) вытекает известная (см., например, [5]) формула для нормы оператора периодической задачи $\Pi_j(\gamma,T)$ как оператора в L_2:

$$\|\Pi_j(\gamma,T)\|_{L_2\to L_2}=w_{\gamma j}(\cdot,T)\equiv\max|W_{\gamma j}(\omega_k i)|.$$

Оператор $\Pi_j(\gamma,T)$ вполне непрерывен как оператор из L_2 в пространство периодических функций $C^{\ell-m-j-1}=C^{\ell-m-j-1}[0,T]$.

Положим

$$y=f(t,x,x',\dots,x^{(n)})-\gamma x. \tag{4}$$

Дифференцируя эквивалентное с (I) уравнение

$$\Big[L\Big(\frac{d}{dt}\Big)-\gamma M\Big(\frac{d}{dt}\Big)\Big]x=M\Big(\frac{d}{dt}\Big)\big[f(t,x,x',\dots,x^{(n)})-\gamma x\big]$$

и учитывая определение операторов $\Pi_j(\gamma,T)$ ($j=0,\dots,n$), получим, что $x=\Pi_0(\gamma,T)y$, $x'=\Pi_1(\gamma,T)y,\dots,x^{(n)}=\Pi_n(\gamma,T)y$.

Из (4) вытекает, что уравнение (I) эквивалентно уравнению

$$y=By, \tag{5}$$

где

$$By=f(t,\Pi_0(\gamma,T)y,\dots,\Pi_n(\gamma,T)y)-\gamma\Pi_0(\gamma,T)y.$$

При этом T-периодическое решение $x_*\in C^{\ell-m-1}$ уравнения (I) определяется по решению $y_*\in L_2$ уравнения (5) формулой

$$x_* = \Pi_0(\gamma, T)\, y_* .$$

Из полной непрерывности операторов $\Pi_j(\gamma, T): L_2 \to C$ ($j = 0, \ldots, n$) и непрерывности функции $f(t, x_0, \ldots, x_n)$ по переменным x_j вытекает полная непрерывность оператора B в L_2.

2. Описание итерационно-проекционных методов. Обозначим через $Q(N,T) = I - P(N,T)$ ортопроектор на ортогональное дополнение $E^{\perp}(N,T) = L_2 \ominus E(N,T)$ к подпространству $E(N,T)$. Решение y уравнения (5) будем искать в виде суммы $y = u + v$, где $u \in E(N,T)$, а $v \in E^{\perp}(N,T)$.

Изучаемые итерационно-проекционные методы имеют следующий вид (см. [4], с. 102, [3]).

а. Задаются начальные приближения компонент решения уравнения (5) $u_0 \in E(N,T)$ и $v_0 \in E^{\perp}(N,T)$. Последовательное приближение для u находят, решая уравнение

$$u_s = P(N,T) B(u_s + v_{s-1}) \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Приближение для v находят по формуле

$$v_s = Q(N,T) B(u_{s-1} + v_{s-1}) \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

б. Задается начальное приближение $v_0 \in E^{\perp}(N,T)$. Приближение u_s ($s = 1, 2, \ldots$) находят как решение уравнения (6), а приближение к v находят по формуле

$$v_s = Q(N,T) B(u_s + v_{s-1}) \qquad (s = 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

В [3] доказана глобальная теорема сходимости методов а. и б. в случае $n = 0$ при условии, что $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной. Этот результат можно обобщить на случай уравнения (I), в котором функция $f(t, x_0, \ldots, x_n)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|f(t, x_0, \ldots, x_n) - f(t, \tilde{x}_0, \ldots, \tilde{x}_n) - \gamma(x_0 - \tilde{x}_0)| \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j |x_j - \tilde{x}_j|, \tag{9}$$

причем

$$q = \sum_{j=0}^{n} \varkappa_j w_{\gamma j}(T) < 1$$

Целью данной работы является установление сходимости методов а и б, не накладывая органичений на коэффициенты

Липшица $æ_j$ Вместо этого предполагается, что уравнение (I) имеет локально единственное решение, причем линеаризованное уравнение однозначно разрешимо.

3. <u>Локальная теорема сходимости</u>. Основной результат статьи заключается в следующей теореме.

<u>Теорема</u>. Пусть уравнение (5) имеет решение y_* в L_2, причем оно единственно в шаре $S_\delta(y_*)=\{y: \|y-y_*\|_{L_2}\le\delta\}$, где δ достаточно малый параметр. Пусть (вполне непрерывный) оператор B дифференцируем по Фреше в шаре $S_{2\delta}(y_*)$, причем из равенства $B'(y_*)h=h$ вытекает, что $h=0$. Пусть оператор B удовлетворяет в шаре $S_\delta(y_*)$ условию Липшица

$$\|By-B\tilde{y}\|_{L_2}\le c_1\|y-\tilde{y}\|_{L_2}, \tag{I0}$$

а производная Фреше $B'(y)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|B'(y)-B'(\tilde{y})\|_{L_2\to L_2}\le c_2\|y-\tilde{y}\|_{L_2} \tag{II}$$

в шаре $S_{2\delta}(y_*)$. Тогда найдутся такие N_0 и $\varepsilon_0\in(0,\delta]$, что при $N\geqslant N_0$ справедливы следующие утверждения:

а. если начальное приближение y_0 метода (6), (7) удовлетворяет условию $\|y_0-y_*\|_{L_2}\le\varepsilon_0$, то приближенные решения сходятся со скоростью геометрической прогрессии к решению y_*;

б. если начальное приближение v_0 метода (6), (8) удовлетворяет условию $\|v_0-v_*\|_{L_2}\le\varepsilon_0$, то приближенные решения сходятся со скоростью геометрической прогрессии к решению y_*.

Все требования на величины δ, ε_0 и N приведем в ходе доказательства. Сформулированная теорема в действительности носит общий характер - вид оператора B не играет существенной роли, важно лишь, чтобы он был вполне непрерывным и обладал указанной в теореме гладкостью. Для уравнения (5) наложенные на B условия гладкости (в частности, условия (I0) и (II)) выполнены, если функция $f(t,x_0,\dots,x_n)$ дважды непрерывно дифференцируема по переменным $x_0,\dots,x_n$. При этом производная Фреше имеет вид

$$B'(y)h=\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial f(t,\Pi_0(\gamma,T)y,\dots,\Pi_n(\gamma,T)y)}{\partial x_j}\Pi_j(\gamma,T)h-\gamma\Pi_0(\gamma,T)h.$$

Доказательство теоремы. Из полной непрерывности оператора $B'(y_*)$ и равенства $h=0$, если $B'(y_*)h = h$, вытекает, что оператор $I - B'(y_*)$ обратим, а

$$\|B'(y_*) - P(N,T)B'(y_*)\|_{L_2\to L_2} \to 0 \quad \text{при} \quad N\to\infty .$$

Значит, при достаточно большом N обратим и оператор $I - P(N,T)B'(y_*)$, причем найдется такая константа c_3, что

$$\|[I - P(N,T)B'(y_*)]^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le c_3 \qquad (N \ge N_0). \tag{12}$$

Предположим, что $\delta < (4c_2c_3)^{-1}$.

Рассмотрим (6) как уравнение относительно u_3. Это уравнение вида

$$u = P(N,T)B(u+\tilde{\vartheta}). \tag{13}$$

Пусть функция $\tilde{\vartheta} \in S_\delta(\vartheta_*) \cap E^\perp(N,T)$ удовлетворяет оценке $\|\tilde{\vartheta} - \vartheta_*\|_{L_2} \le \min\{(2c_2c_3)^{-1}, \delta(4c_1c_3)^{-1}\}$ (напомним, что $y_* = u_* + \vartheta_*$, $u_* \in E(N,T)$, $\vartheta_* \in E^\perp(N,T)$). Оказывается, что соответствующее решение $\tilde{u}$ уравнения (13) в шаре $S_\delta(u_*)$ существует, единственно в этом шаре и удовлетворяет оценке

$$\|\tilde{u} - u_*\|_{L_2} \le 4c_1c_3\|\tilde{\vartheta} - \vartheta_*\|_{L_2}. \tag{14}$$

Для доказательства этого утверждения используем следующую лемму (см., например, [4]).

Лемма. Пусть оператор A дифференцируем по Фреше в шаре $\|u - u_*\| \le \delta$ и пусть оператор $A'(u_*)$ имеет обратный, причем выполнена оценка

$$\|[A'(u_*)]^{-1}\| \le \varkappa. \tag{15}$$

Пусть с некоторым d $(0 \le d < 1)$ выполнены неравенства

$$\sup_{\|u-u_*\|\le\delta} \|A'(u) - A'(u_*)\| \le \frac{d}{\varkappa}, \tag{16}$$

$$\|Au_*\| \le \frac{\delta(1-d)}{\varkappa}. \tag{17}$$

Тогда уравнение $Au = 0$ имеет в шаре $S_\delta(u_*)$ единственное решение $\tilde{u}$, причем

$$\|\tilde{u} - u_*\| \le \frac{\varkappa\|Au_*\|}{1-d}. \tag{18}$$

Положим $Au = u - P(N,T)B(u+\tilde{\vartheta})$. Покажем, что условия леммы для оператора A выполнены. Производная Фреше оператора A имеет вид $A'(u)h = h - P(N,T)B'(u+\tilde{v})h$. Используя (II), (I2) и равенство $(I-U)^{-1} = (I-V)^{-1}[I-(U-V)(I-V)^{-1}]^{-1}$ с операторами $U = P(N,T)B'(u_*+\tilde{v})$, $V = P(N,T)B'(y_*)$, получаем оценку

$$\|[I-P(N,T)B'(u_*+\tilde{v})]^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le \frac{c_3}{1-c_2c_3\|\tilde{v}-v_*\|_{L_2}}.$$

Так как $\tilde{v}\in S_\delta(v_*)$ и $\|\tilde{v}-v_*\|_{L_2} \le (2c_2c_3)^{-1}$, то отсюда следует, что

$$\|[A'(u_*)]^{-1}\|_{L_2\to L_2} \le 2c_3 \equiv \varkappa,$$

т.е. условие (I5) леммы выполнено.

Из условия (II) следует оценка

$$\sup_{\|u-u_*\|_{L_2}\le\delta} \|A'(u)-A'(u_*)\|_{L_2\to L_2} \le c_2\delta.$$

Так как $\delta < (4c_2c_3)^{-1}$, то мы имеем, что выполнено условие (I6) леммы при $d = 1/2$.

Из равенства $y_* = P(N,T)B(u_*+v_*)$ и условия (I0) вытекает оценка

$$\|Au_*\|_{L_2} \le c_1\|\tilde{v}-v_*\|_{L_2}. \qquad (I9)$$

Из условия $\|\tilde{v}-v_*\|_{L_2} \le \delta[4c_1c_3]^{-1}$ и определения $\varkappa = 2c_3$ вытекает, что

$$\|Au_*\|_{L_2} \le \frac{\delta}{2\varkappa},$$

т.е. условие (I7) выполнено. Значит, все условия леммы выполнены.

Из (I7), (I9) следует наше утверждение (I4).

Обозначим $c_*(N) = \|Q(N,T)B'(y_*)\|_{L_2\to L_2}$. Имеет место сходимость $c_*(N)\to 0$ при $N\to\infty$.

Приведем здесь доказательство сходимости для метода б. Доказательство сходимости метода а проводят аналогично в несколько модифицированной форме.

Покажем, что функция v_s $(s=1,2,\ldots)$, найденная из (8), при условии $\|u_s-u_*\|_{L_2}<\delta$, $\|v_{s-1}-v_*\|_{L_2}<\delta$ удовлетворяет оценке

$$\|v_s-v_*\|_{L_2} \le c_*(N)(\|u_s-u_*\|_{L_2}+\|v_{s-1}-v_*\|_{L_2}) + c_2(\|u_s-u_*\|_{L_2}^2+\|v_{s-1}-v_*\|_{L_2}^2). \qquad (20)$$

Вычитая из (8) почленно равенство $v_* = Q(N,T)B(u_*+v_*)$, получаем

$$v_s - v_* = I_1 + I_2, \qquad (2I)$$

где обозначено

$$I_1 = Q(N,T)B'(y_*)(u_s - u_* + v_{s-1} - v_*),$$

$$I_2 = Q(N,T)B(u_s + v_{s-1}) - Q(N,T)B(u_* + v_*) -$$

$$- Q(N,T)B'(y_*)(u_s - u_* + v_{s-1} - v_*).$$

Из определения величины $c_*(N)$ вытекает оценка

$$\|I_1\|_{L_2} \le c_*(N)(\|u_s - u_*\|_{L_2} + \|v_s - v_*\|_{L_2}).$$

Применяя формулу конечных приращений с остаточным членом (см., например, [I]), оценим

$$\|I_2\|_{L_2} \le \sup_{0<\theta<1} \|Q(N,T)B'[\theta(u_s + v_{s-1}) + (1-\theta)(u_* + v_*)] -$$

$$- Q(N,T)B'(y_*)\|_{L_2 \to L_2} \|u_s - u_* + v_{s-1} - v_*\|_{L_2},$$

и в силу условия (II),

$$\|I_2\|_{L_2} \le c_2(\|u_s - u_*\|^2_{L_2} + \|v_{s-1} - v_*\|^2_{L_2})$$

(заметим, что $\|u_s - u_* + v_{s-1} - v_*\|^2_{L_2} = \|u_s - u_*\|^2_{L_2} + \|v_{s-1} - v_*\|^2_{L_2}$ ввиду ортогональности функций $u_s - u_* \in E(N,T)$, $v_{s-1} - v_* \in E^{\perp}(N,T)$). Следовательно, из (2I) вытекает оценка (20).

Пусть начальное приближение $v_0 \in S_\delta(v_*) \cap E^{\perp}(N,T)$ удовлетворяет условию $\|v_0 - v_*\|_{L_2} \le \varepsilon_0 \le \min\{(2c_2c_3)^{-1}, \delta(4c_1c_3)^{-1}\}$. Обозначим через ε_s $(s = 1, 2, ..)$ отклонение $\varepsilon_s = \|v_s - v_*\|_{L_2}$.

Для доказательства сходимости итерационно-проекционного метода (6), (8) используем индукцию. Выберем произвольное число α $(0 < \alpha < 1)$. Из (I4) вытекает неравенство

$$\|u_k - u_*\|_{L_2} \le 4c_1c_3\varepsilon_{k-1} \tag{22}$$

при $k = 1$. Из неравенства (20) вытекает, что

$$\varepsilon_k \le [c_*(N)(4c_1c_3 + 1) + c_2(16c_1^2c_3^2 + 1)\varepsilon_0]\varepsilon_{k-1}$$

при $k = 1$. Пусть число N настолько велико и ε_0 настолько мало, что $c_*(N)(4c_1c_3 + 1) \le \frac{\alpha}{2}$; $c_2(16c_1^2c_3^2 + 1)\varepsilon_0 \le \frac{\alpha}{2}$. Тогда

$$\varepsilon_k \le \alpha\varepsilon_{k-1} \tag{23}$$

при $k = 1$. Пусть по предположению индукции неравенство (23) выполнено при $k = 1, 2, \ldots, s-1$. Повторяя выкладки, начиная с (22) для $k = s$, убеждаемся, что (23) выполнено и при $k = s$. Следовательно, неравенство (23) справедливо при всех $k = 1, 2, \ldots$. Значит итерационно-проекционный метод б сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем α. Теорема доказана.

Замечание I. Из доказательства теоремы видно, что чем грубее оценки (I0), (II) и (I2) и чем более быстрой сходимости нам хочется добиться, тем больше нужно выбрать N и тем меньше должно быть отклонение начального приближения от точного решения.

Замечание 2. Мы установили сходимость методов а и б со скоростью геометрической прогрессии (линейную сходимость) с произвольным знаменателем α. Отсюда вытекает, что если в процессе итераций размерность $N = N(k)$ устремить к бесконечности, то сходимость будет сверхлинейной, т.е. $\varepsilon_k \leq \alpha_k \varepsilon_{k-1}, \alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Замечание 3. Теорема сохранит силу, если условие Липшица (II) заменить условием о непрерывной дифференцируемости B в точке y_*.

Литература

I. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М., Наука, 1977.

2. Красносельский А.М. Новые теоремы о вынужденных периодических колебаниях в нелинейных системах. Прикладная матем. и механика, 1986, 50, № 2, 224-230.

3. Красносельский А.М. Проекционно-итерационные процедуры расчета вынужденных колебаний. Тезисы докладов 10-ого Всесоюзного совещания по проблемам управления. Алма-Ата, 1986, 54-55.

4. Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., Наука, 1969.

5. Красносельский М.А., и др. Позитивные линейные системы. М., Наука, 1985.

LOCAL CONVERGENCE OF ITERATIVE-PROJECTION PROCEDURES FOR CONSTRUCTING FORCED OSCILLATIONS

E. Vainikko

Summary

The paper deals with the convergence of two iterative-projection methods (6), (7) and (6), (8) for approximate construction of T-periodic solutions of nonlinear control system (1). The methods are applied to equation (5) which is equivalent to (1). The main result is given in theorem of local convergence of the methods, provided eqqation (5) has loоally unique solution y_* and operator B is sufficiently smooth.

ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В ПРИБЛИЖЁННЫХ МЕТОДАХ

Г.Вайникко, О.Карма

Приводится доказательство одной анонсированной в [2] оценки, являющейся уточнением соответствующей оценки в [3,4]. Используется схема аппроксимации пространств, предложенная Ф.Штуммелем [6(I)] и понятие регулярной аппроксимации операторов (см., например, [I,2]).

I. <u>Применяемая схема аппроксимации</u>. Пусть E, F, E_n, F_n $(n\in N)$ – комплексные банаховы пространства, связанные системами операторов $p_n : E\to E_n$, $q_n : F\to F_n$ $(n\in N)$ такими, что[1]:

$$(1)\quad \|p_n u\|_{E_n}\to\|u\|_E,\ \|q_n v\|_{F_n}\to\|v\|_F \qquad \forall u\in E,\ v\in F,$$

$$(2)\quad \|p_n(au+a'u')-(ap_nu+a'p_nu')\|_{E_n}\to 0 \qquad \forall u,u'\in E,\ a,a'\in\mathbb{C},$$

$$(3)\quad \|q_n(av+a'v')-(aq_nv+a'q_nv')\|_{F_n}\to 0 \qquad \forall v,v'\in F,\ a,a'\in\mathbb{C}.$$

Напомним, что последовательность $(x_n)_{n\in N'\subseteq N}$ с x_n из E_n (дискретно) сходится (или $\mathcal{P}$- сходится) к элементу u из E, если $\|x_n-p_nu\|_{E_n}\to 0$ $(n\in N')$; пишем $x_n\to u$ $(n\in N')$.

Пусть Λ – область (открытое связное множество) в $\mathbb{C}$ и пусть на Λ заданы оператор-функции[2] $A:\Lambda\to\mathcal{L}(E,F)$, $A_n:\Lambda\to\mathcal{L}(E_n,F_n)$ $(n\in N)$, причем:

(4) оператор-функции A и A_n голоморфны на Λ,

(5) при каждом λ из Λ операторы $A(\lambda)$ и $A_n(\lambda)$ фредгольмовы с индексом 0 ,

---

1) Запись $\alpha_n\to\alpha$ далее означает сходимость при $n\in N$, $n\to\infty$, а запись $\alpha_n\to\alpha$ $(n\in N')$ – сходимость при $n\in N'\subseteq N$, $n\to\infty$.

2) Через $\mathcal{L}(E,F)$ обозначено банахово пространство линейных ограниченных операторов из E в F с нормой $\|A\|=\sup\{\|Au\| : u\in E,\ \|u\|=1\}$; $N(A)=\{u\in E : Au=0\}$.

(6) существует λ^0 из Λ такое, что $N(A(\lambda^0)) = \{0\}$,

(7) на каждом компакте Λ_0 из Λ нормы $\|A_n(\lambda)\|$ ограничены равномерно по n и λ :

$$\|A_n(\lambda)\| \le C(\Lambda_0) \qquad \forall n \in N,\ \lambda \in \Lambda_0,$$

(8) последовательность $(A_n(\lambda))_{n\in N}$ сходится к $A(\lambda)$ при каждом λ из Λ, т.е.

$$x_n \to u \ \Rightarrow\ A_n(\lambda)x_n \to A(\lambda)u \qquad \forall \lambda \in \Lambda,$$

(9) последовательность $(A_n(\lambda))_{n\in N}$ регулярна при каждом λ из Λ, т.е.

$$\|x_n\| \le C,\ A_n(\lambda)x_n \to v\ (n \in N') \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists N'' \subseteq N',\ u \in E:\ x_n \to u\ (n \in N'').$$

Приведенная схема является общей для многих вычислительных методов (см., например, [1,2]). При выполнении условий (1)-(9), в частности, имеют место следующие утверждения о сходимости спектров[3] $\sigma(A_n) = \{\lambda \in \Lambda : N(A_n(\lambda)) \ne \{0\}\}$ к спектру $\sigma(A) = \{\lambda \in \Lambda : N(A(\lambda)) \ne \{0\}\}$ [4,3,1]:

1) $\lambda_0 \in \sigma(A) \Rightarrow \exists (\lambda_n)_{n\in N}:\ \lambda_n \to \lambda,\ \lambda_n \in \sigma(A_n) \quad (n \ge n_0),$

2) $\lambda_n \in \sigma(A_n),\ \lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda\ (n \in N') \Rightarrow \lambda_0 \in \sigma(A)$,

3) $\|x_n\| = 1,\ A_n(\lambda_n)x_n = 0,\ \lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda \quad (n \in N') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists N'' \subseteq N',\ u \in E:\ \|u\| = 1,\ A(\lambda_0)u = 0,\ x_n \to u \quad (n \in N''),$$

4) $\|g_n\| = 1,\ [A_n(\lambda_n)]^* g_n = 0,\ \lambda_n \to \lambda_0 \in \Lambda\ (n \in N') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists N'' \subseteq N',\ g \in F^*:\ g \ne 0,\ [A(\lambda_0)]^* g = 0,$$
$$\{x_n \to u\ (n \in N'')\} \Rightarrow \langle x_n, g_n \rangle \to \langle u, g \rangle \quad (n \in N'').$$

2. <u>Некоторые вспомогательные понятия и результаты</u>.

Жорданова цепочка $\{u^0, u^1, \dots, u^k\}$ длины $k+1$ (присоединённых к $u^0 \in N(A(\lambda_0))$, $u^0 \ne 0$ элементов) определяется условиями

---

3) Для банахова пространства E через E^* обозначено сопряженное банахово прстранство и для оператора $A \in \mathcal{L}(E,F)$ через A^* - сопряжённый оператор из $\mathcal{L}(F^*, E^*)$.

$$A(\lambda_0)u^0=0,\ A(\lambda_0)u^1+A'(\lambda_0)u^0=0,\ A(\lambda_0)u^2+A'(\lambda_0)u^1+\frac{1}{2!}A''(\lambda_0)u^0=0,\ \dots,$$

$$A(\lambda_0)u^k+A'(\lambda_0)u^{k-1}+\frac{1}{2!}A''(\lambda_0)u^{k-2}+\dots+\frac{1}{k!}A^{(k)}(\lambda_0)u^0=0\ . \qquad (2.I)$$

Кратность $\nu(u^0)=\nu(u^0, A,\lambda_0)$ собственного элемента $u_0\neq 0$ – это наибольшая длина жордановых цепочек, присоединенных к u^0.

Известно, что в условиях (4)–(6) оператор-функция A^{-1} имеет в каждой точке $\lambda_0\in\sigma(A)$ полюс конечного порядка $\varkappa=\varkappa(A,\lambda_0)$, причем $\varkappa=\max\{\nu(u^0): u^0\in N(A(\lambda_0)), u^0\neq 0\}$. Собственное подпространство $N(A(\lambda_0))$ конечномерно и разлагается в прямую сумму

$$N(A(\lambda_0)) = N_1 \dot{+} N_2 \dot{+} \dots \dot{+} N_r \qquad (2.2)$$

подпространств N_k, состоящих из собственных элементов одинаковой кратности n_k так что $n_1=\varkappa>n_2>\dots>n_r\geq 1$.

Пусть $\{u^{1,0}, u^{2,0},\dots,u^{m,0}\}$ – базис в $N(A(\lambda_0))$, составленный из базисов подпространств N_k в (2.2); будем называть такой базис каноническим и введем обозначение $\nu_j=\nu(u^{j,0})$. Пусть $(u^{j,0}, u^{j,1},\dots,u^{j,\nu_j-1})$ – жордановы цепочки максимальной длины, и полиномы $u^j(\lambda)$ определены соотношениями

$$u^j(\lambda)=u^{j,0}+(\lambda-\lambda_0)u^{j,1}+\dots+(\lambda-\lambda_0)^{\nu_j-1}u^{j,\nu_j-1} \quad (j=1,\dots,m)\ . \qquad (2.3)$$

Отметим, что, так как для $u(\lambda)=u^0+(\lambda-\lambda_0)u^1+\dots+(\lambda-\lambda_0)^k u^k$ имеем при $\ell\leq k$

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}[A(\lambda)u(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}\left[\left(\frac{d^i}{d\lambda^i}A(\lambda)\right)\left(\frac{d^{\ell-i}}{d\lambda^{\ell-i}}u(\lambda)\right)\right]_{\lambda=\lambda_0}=\sum_{i=0}^{\ell}\frac{\ell!}{i!}A^{(i)}(\lambda_0)u^{\ell-i}, \qquad (2.4)$$

то условия (2.I) можно переписать в виде

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}[A(\lambda)u(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}=0, \qquad \ell=0,1,\dots,k. \qquad (2.5)$$

Поэтому из $\nu_j=\nu(u^{j,0})$ следует, что

$$v_j := \frac{d^{\nu_j}}{d\lambda^{\nu_j}}[A(\lambda)u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}\neq 0\ . \qquad (2.6)$$

Покажем, что элементы v_j, $j=1,\dots,m$, определенные соотношениями (2.6) для канонического базиса $\{u^{1,0},\dots,u^{m,0}\}$, линейно независимы, и F можно представить в виде прямой суммы

$$F = A(\lambda_0)E \dotplus v^1 \dotplus \ldots \dotplus v^m \qquad (2.7)$$

(напомним, что $\operatorname{codim} A(\lambda_0)E = \dim N(A(\lambda_0)) = m$).

Допустим, от противного, что найдется линейная комбинация $a_1 v^1 + \ldots + a_m v^m = v_0 \in A(\lambda_0)E$, причем $|a_1| + \ldots + |a_m| \neq 0$ (Если $v_0 = 0$, то $v^1, \ldots, v^m$ линейно зависимы, а если $v_0 \neq 0$, то не имеет место (2.7)).

Пусть $v_0 = A(\lambda_0)u_0$, $\nu = \max\{\nu_j : j = 1, \ldots, m_j ;\ a_j \neq 0\}$.

Составим полином

$$u(\lambda) = \sum_{\substack{j=1 \\ a_j \neq 0}}^{m} \nu_j !\, a_j\, (\lambda-\lambda_0)^{\nu-\nu_j} u^j(\lambda) - (\lambda-\lambda_0)^{\nu} u_0 \ . \qquad (2.8)$$

Тогда $u(\lambda_0) \in N(A(\lambda_0))$ и $u(\lambda_0) \neq 0$ (элементы $u^{j,0} = u^j(\lambda_0)$ линейно независимы), а по определению разложения (2.2) кратность $\nu(u(\lambda_0))$ должна равняться ν . Но, с другой стороны,

$$\frac{d^\nu}{d\lambda^\nu}\left[A(\lambda)u(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_0} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \nu_j !\, a_j \binom{\nu}{\nu-\nu_j} (\nu-\nu_j)!\, v^j - \nu!\, A(\lambda_0)u_0 =$$

$$= \nu! \,(a_1 v^1 + \ldots + a_m v^m - v_0) = 0 ,$$

что противоречит (2.6).

3. <u>Оценка скорости сходимости собственных значений</u>.

Обозначим через $W(\lambda_0) \subseteq E$ линейную оболочку всевозможных собственных и присоединённых к ним элементов, соответствующих $\lambda_0 \in \sigma(A)$; в наших условиях

$$\dim W(\lambda_0) < \infty . \qquad (3.1)$$

<u>Теорема</u> (Теорема 6.2 в [2]). Пусть выполнены требования (I)-(9) и пусть p_n^0 - линейные операторы из $W(\lambda_0)$ в E_n $(n \in N)$ такие, что $\|p_n^0 u - p_n u\| \to 0$ для каждого u из $W(\lambda_0)$. Тогда для $(\lambda_n)_{n\in N}$ с $\lambda_n \in \sigma(A_n)$, $\lambda_n \to \lambda_0 \in \sigma(A)$ и $(x_n^0)_{n\in N}$ с $x_n^0 \in N(A_n(\lambda_n))$, $\|x_n^0\| = 1$ справедливы оценки

$$|\lambda_n - \lambda_0| \leq c\left[(\varepsilon_n^{(0)})^{\nu_\varkappa} + (\varepsilon_n^{(1)})^{\nu_{\varkappa-1}} + \ldots + (\varepsilon_n^{(\varkappa-2)})^{\nu_2} + (\varepsilon_n^{(\varkappa-1)})\ \right], \qquad (3.2)$$

$$d_{E_n}(x_n^0, p_n^0 N(A(\lambda_0))) \leq c\left[|\lambda_n - \lambda_0| + \max_{j=1,\ldots,m} \|A_n(\lambda_0) p_n^0 u^{j,0}\|\ \right], \qquad (3.3)$$

где $c - const$, $\varkappa$ – порядок полюса A^{-1} в точке λ_0, d_{E_n} – расстояние по метрике пространства E_n, а

$$\varepsilon_n^{(\ell)} = \max_{j=1,\dots,m,\ \nu(u^{j,0})>\ell} |\langle A_n(\lambda_0)p_n^0 u^{j\ell} + \dots + \frac{1}{\ell!}A_n^{(\ell)}(\lambda_0)p_n^0 u^{j,0},\ g_n \rangle|, \tag{3.4}$$

$$\ell = 0,1,\dots,\varkappa-1$$

– погрешности аппроксимации корневых соотношений (2.I) для произвольно фиксированного канонического базиса $\{u^{1,0},\dots,u^{m,0}\}$ в $N(A(\lambda_0))$, оцененные произвольно фиксированными функционалами g_n из $N([A_n(\lambda_n)]^*)$ с $\|g_n\|=1$. При этом $\varepsilon_n^{(\ell)} \to 0$, $\ell=0,1,\dots,\varkappa-1$.

<u>Замечание</u>. Используя полиномы $u^j(\lambda)$, определенные соотношениями (2.3), можно величины $\varepsilon_n^{(\ell)}$ представить в виде

$$\varepsilon_n^{(\ell)} = \max_{j=1,\dots,m;\ \nu(u^{j,0})>\ell} \frac{1}{\ell!}|\langle \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}[A_n(\lambda)p_n^0 u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0},\ g_n \rangle|. \tag{3.5}$$

<u>Доказательство теоремы.</u> а) Из представления производных $A_n^{(\ell)}(\lambda)$ по формуле Коши

$$A_n^{(\ell)}(\lambda^0) = \frac{\ell!}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda^0|=\delta>0} \frac{A_n(\lambda)}{(\lambda-\lambda^0)^{\ell+1}}\,d\lambda, \quad \ell=0,1,\dots \tag{3.6}$$

следует, что нормы $\|A_n^{(\ell)}(\lambda)\|$ при каждом ℓ ограничены равномерно по n и λ на каждом компакте $\Lambda_0 \subset \Lambda$:

$$\|A_n^{(\ell)}(\lambda)\| \le \frac{\ell!}{\delta^\ell} c(\Lambda_0), \qquad n\in N,\ \lambda\in\Lambda_0 \tag{3.7}$$

(здесь δ – любое положительное число, которое меньше расстояния Λ_0 от границы Λ). Из этого же представления (3.6) и теоремы 2.3.1 в [6 (II)] о сходимости интегралов следует, что при каждом $\ell=0,1,\dots$ и каждом λ из Λ имеем

$$x_n \to u\ (n\in N') \quad \Rightarrow A_n^{(\ell)}(\lambda)x_n \to A^{(\ell)}(\lambda)u \quad (n\in N'). \tag{3.8}$$

б) Пусть, как в условиях теоремы, $\lambda_n\in\sigma(A_n)$, $\lambda_n\to\lambda_0\in\sigma(A)$. Пусть $\{u^{1,0},\dots,u^{m,0}\}$ – некоторый фиксированный канонический базис в $N(A(\lambda_0))$, а полиномы $u^j(\lambda)$ определены соотношениями (2.3). Пусть, наконец, g_n – некоторые фиксированные функционалы из $N([A_n(\lambda_n)]^*)$ с $\|g_n\|=1$. Тогда при любом $j=1,\dots,m$ имеем

$$0 = \langle A_n(\lambda_n) p_n^\circ u^j(\lambda_n), g_n \rangle =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^\ell}{\ell!} \langle \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} [A_n(\lambda) p_n^\circ u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, g_n \rangle =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{\nu_j-1} \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^\ell}{\ell!} \langle \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} [A_n(\lambda) p_n^\circ u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, g_n \rangle + \tag{3.9}$$

$$+ \frac{(\lambda_n-\lambda_0)^{\nu_j}}{\nu_j!} \langle \frac{d^{\nu_j}}{d\lambda^{\nu_j}} [A_n(\lambda) p_n^\circ u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, g_n \rangle + \Delta_{n,\nu_j},$$

где через Δ_{n,ν_j} обозначена бесконечная сумма, начиная с $\ell=\nu_j+1$.

в) Так как p_n° линейны и $\|p_n^\circ u\|_{E_n} \to \|u\|_E$ на $W(\lambda_0)$, то нормы $\|p_n^\circ\|$ равномерно ограничены. Из этого и (3.7) следует, что величины Δ_{n,ν_j} в (3.9) могут равномерно по n быть оценены величиной $|\lambda_n-\lambda_0|^{\nu_j+1}$:

$$|\Delta_{n,\nu_j}| \le c\, |\lambda_n-\lambda_0|^{\nu_j+1}. \tag{3.10}$$

г) Покажем существование такого $\alpha>0$, что, начиная с некоторого индекса n_0, при всех n имеем

$$\max_{j=1,\dots,m} |\langle \frac{d^{\nu_j}}{d\lambda^{\nu_j}} [A_n(\lambda) p_n^\circ u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, g_n \rangle| \ge \alpha = const > 0. \tag{3.11}$$

Действительно, если допускать противное, то при всех $j=1,\dots,m$ имеем

$$\langle \frac{d^{\nu_j}}{d\lambda^{\nu_j}} [A_n(\lambda) p_n^\circ u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, g_n \rangle \to 0 \quad (n\in N' \subseteq N). \tag{3.12}$$

Так как, ввиду (3.8), при всех $\ell=0,1,\dots$

$$\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} [A_n(\lambda) p_n^\circ u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0} \to \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} [A(\lambda) u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, \tag{3.13}$$

то из утверждения 4) п I. теперь следует существование такого $g\ne 0$, $g\in N([A(\lambda_0)]^*)$, что при всех $j=1,\dots,m$

$$\langle \frac{d^{\nu_j}}{d\lambda^{\nu_j}} [A(\lambda) u^j(\lambda)]_{\lambda=\lambda_0}, g \rangle = 0. \tag{3.14}$$

Но это – противоречие, так как для $g\in N([A(\lambda_0)]^*)$ из (3.14), (2.6) и (2.7) следует, что $g=0$.

д) Обозначим

$$\alpha_{jn}^{(\ell)} = \frac{1}{\ell!}\left|\left\langle \frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}\left[A_n(\lambda)p_n^0 u^j(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_0}, g_n\right\rangle\right| . \qquad (3.15)$$

Тогда из (3.9), ввиду (3.10),(3.11), для всех достаточно больших n получим оценку (напомним, что $\lambda_n\to\lambda_0$ при $n\to\infty$)

$$|\lambda_n-\lambda_0|^{\nu_j} \le c\sum_{\ell=0}^{\nu_j-1} |\lambda_n-\lambda_0|^\ell \alpha_{jn}^{(\ell)} , \qquad (3.16)$$

где $j=j_n$ – индекс, при котором реализуется максимум в (3.11). Чтобы избавиться от зависимости $j=j_n$, заменим величины $\alpha_{jn}^{(\ell)}$ под знаком суммы в (3.16) на максимум по тем j , при которых $\ell<\nu_j$.

Таким образом, вводя величины $\varepsilon_n^{(\ell)} = \max\{\alpha_{jn}^{(\ell)} : j=1,\dots,m;\ \nu_j>\ell\}$ и учитывая, что $\nu_j\le\varkappa$ при всех j , мы из (3.16) получим для всех достаточно больших n

$$|\lambda_n-\lambda_0|^{\varkappa} \le |\lambda_n-\lambda_0|^{\nu_j} \le c\sum_{\ell=0}^{\varkappa} |\lambda_n-\lambda_0|^\ell \varepsilon_n^{(\ell)} . \qquad (3.17)$$

Пусть ℓ_n – индекс, при котором член $\varepsilon_n^{(\ell)}|\lambda_n-\lambda_0|^\ell$ под знаком суммы в (3.17) максимальный $(\ell_n<\max \nu_j=\varkappa)$. Тогда из (3.17) следует, что

$$|\lambda_n-\lambda_0|^{\varkappa} \le c(\varkappa+1)\,\varepsilon_n^{(\ell_n)}|\lambda_n-\lambda_0|^{\ell_n} , \qquad (3.18)$$

$$|\lambda_n-\lambda_0| \le c_1\left[\varepsilon_n^{(\ell_n)}\right]^{1/(\varkappa-\ell_n)} \le c_1\sum_{\ell=0}^{\varkappa}\left[\varepsilon_n^{(\ell)}\right]^{1/(\varkappa-\ell)} , \qquad (3.19)$$

т.е. оценка (3.2) теоремы.

е) Для доказательства оценки (3.3) отметим, что связывающие операторы p_n можно с сохранением свойств (1) и (2) заменить на операторы, совпадающие с p_n^0 на $W(\lambda_0)$ и с p_n на некотором прямом дополнении в E к $W(\lambda_0)$. При этом (дискретно) сходящиеся последовательности и их пределы не изменятся. А значит, сохранятся и свойства (8) и (9). Поэтому оценка (3.3) следует из леммы 8 в [3].

ж) Сходимость $\varepsilon_n^{(\ell)}\to 0$ вытекает из (3.13) и (2.5) с $\ell=0,1,\dots,\nu(u^{j_0})-1$.

Теорема доказана.

4. Некоторые замечания к теореме.

Пусть Λ_0 – некоторый компакт в A со спрямляемой границей $\partial\Lambda_0$ и такой, что $\sigma(A)\cap\Lambda_0=\{\lambda_0\}$, $\lambda_0\notin\partial\Lambda_0$. Пусть операторы q_n $(n\in N)$ линейны и ограничены на некотором подпространстве $F^0\subseteq F$, $F^0\supseteq\{A(\lambda)W(\lambda_0):\lambda\in\Lambda_0\}$.

Замечание I. Величины $\varepsilon_n^{(\ell)}$ можно представить в виде

$$\varepsilon_n^{(\ell)}=\max_{j=1,\dots,m;\ \nu(u^{j0})>\ell}\left|\left\langle\frac{1}{\ell!}\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}\left[(A_n(\lambda)p_n^0-q_nA(\lambda))u^j(\lambda)\right]_{\lambda=\lambda_0},g_n\right\rangle\right| \quad (4.1)$$

Кроме того, их можно оценить, используя формулу Коши:

$$\varepsilon_n^{(\ell)}\le C\max_{j=1,\dots,m;\ \nu(u^{j0})>\ell}\ \max_{\lambda\in\partial\Lambda_0}\left|\left\langle\left(A_n(\lambda)p_n^0-q_nA(\lambda)\right)u^j(\lambda),g_n\right\rangle\right|\le \quad (4.2)$$

$$\le C'\max_{u\in W^{\ell+1}(\lambda_0),\ \|u\|=1}\ \max_{\lambda\in\partial\Lambda_0}\left|\left\langle\left(A_n(\lambda)p_n^0-q_nA(\lambda)\right)u,g_n\right\rangle\right|,$$

где $W^{\ell+1}(\lambda_0)\subseteq E$ – линейная оболочка всевозможных собственных элементов кратности $\nu\ge\ell+1$ и присоединённых к ним элементов.

Замечание 2. Используя разложение (2.2), можно дать следующее определение (полной, алгебраической) кратности $\nu(\lambda_0,A)$ собственного значения λ_0 оператор-функции A:

$$\nu(\lambda_0,A)=n_1\cdot\dim N_1+\ldots+n_{r_0}\cdot\dim N_{r_0}. \quad (4.3)$$

Известно ([4]), что при всех достаточно больших n

$$\sum_{\lambda_n\in\sigma(A_n)\cap\Lambda_0}\nu(\lambda_n,A_n)=\nu(\lambda_0,A). \quad (4.4)$$

Для взвешенных арифметических средних собственных значений A_n в Λ_0 в [5] установлена оценка

$$\left|\sum_{\lambda_n\in\sigma(A_n)\cap\Lambda_0}\lambda_n\cdot\nu(\lambda_n,A_n)/\nu(\lambda_0,A)-\lambda_0\right|\le C\varepsilon_n, \quad (4.5)$$

где

$$\varepsilon_n=\max_{u\in W(\lambda_0),\ \|u\|=1}\ \max_{\lambda\in\partial\Lambda_0}\left\|\left[A_n(\lambda)p_n^0-q_nA(\lambda)\right]u\right\|. \quad (4.6)$$

Литература

I. В а й н и к к о Г. Анализ дискретизационных методов. Тарту: изд. ТГУ, 1976.

2. В а й н и к к о Г.М. Регулярная сходимость операторов и приближенное решение уравнений. Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 16. Москва, 1979, 5-53.

3. В а й н и к к о Г.М., К а р м а О.О. О быстроте сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, 14, № 6, 1393-1408.

4. К а р м а О.О. Об аппроксимации оператор-функций и сходимости приближённых собственных значений. Канд. диссертация, Тарту, 1971.

5. К а р м а О. Аппроксимация в проблеме собственных значений с голоморфной зависимостью оператора от параметра (I). I-47, Рукопись депонирована в ВИНИТИ 11.01.82г., № 130-82 Деп.

6. S t u m m e l F. Discrete Konvergenz linearer Operatoren I Math. Annal., 1970, 190, 45-92; II Math Z. 1971, 120, 231-264.

AN ASYMPTOTIC ERROR ESTIMATION IN EIGENVALUE PROBLEMS DEPENDING ANALYTICALLY ON THE PARAMETER

G. Vainikko, O. Karma

Let the operator functions $A_n:\Lambda\to\mathcal{L}(E_n,F_n)$ ($\Lambda\subseteq\mathbb{C}$; E_n, F_n - Banach spaces) approximate regularly the operator function $A:\Lambda\to\mathcal{L}(E,F)$. We give a proof of estimation (3.2), announced previously in [2], theorem 6.2.

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ НЕЭРМИТОВОЙ МАТРИЦЫ

Т.Саан

В работах [1] и [3-5] исследована быстрота сходимости итерационных методов

$$\rho_k = \frac{(Tv_k, u_k)}{(v_k, u_k)}, \quad v_{k+1} = \frac{(T-\rho_k)^{-1}v_k}{\|(T-\rho_k)^{-1}v_k\|}, \quad u_{k+1} = \frac{(T^*-\bar{\rho}_k)^{-1}u_k}{\|(T^*-\bar{\rho}_k)^{-1}u_k\|}$$

и

$$\rho_k = (Tv_k, v_k), \quad v_{k+1} = \frac{(T-\rho_k)^{-1}v_k}{\|(T-\rho_k)^{-1}v_k\|}$$

для отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы T. В случае эрмитовой матрицы T эти методы совпадают и обладают свойством монотонного убывания норм невязок (см. [I, 5]). Названное свойство для указанных методов не имеет место в случае неэрмитовой матрицы T. В настоящей статье строится новый итерационный метод, основанный на регуляризации Тихонова и обладающий свойством монотонного убывания норм невязок. В случае симметричной матрицы этот метод исследован в [2] .

Пусть дана комплексная $(n\times n)$-матрица T. Через $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ и $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$, $r \le n$ обозначим множество попарно различных собственных значений матрицы T и соответствующие им корневые подпространства.

<u>Определение I</u>. Отношением Релея называется функция $\rho(v) = (Tv, v)/(v, v)$, где $v \in C^n/\{0\}$.

Для отыскания собственного значения λ матрицы T и соответствующего ему собственного векторе x используем итерационный метод. Сначала выбираем единичный вектор v_0. Затем для к=0,I,2,... повторим следующие шаги:

(I) вычислим $\rho_k = \rho(v_k) = (Tv_k, v_k)$;

(II) решим уравнение $[\alpha_k + (T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)]\, w_{k+1} = v_k$,

где $\alpha_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$;

(III) формируем $v_{k+1} = w_{k+1}/\|w_{k+1}\|$.

Шаги (II) и (III) можно объединить в один,

(II*) $\quad v_{k+1} = \tau_k^2\, [\alpha_k + (T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)]^{-1} v_k$, где

$\tau_k^2 = \|[\alpha_k + (T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)]^{-1} v_k\|^{-1}$.

<u>Лемма I</u>. Для любых $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ и $\mu \in \mathbb{C}$

$\|[T-\rho(v)]v\|^2 = \|[T-\mu]v\|^2 - |\mu - \rho(v)|^2 \|v\|^2$.

<u>Доказательство</u>. Преобразуем

$$\|[T-\rho(v)]v\|^2 = \|[T-\mu+\mu-\rho(v)]v\|^2 =$$

$$= \|[T-\mu]v\|^2 + 2\mathrm{Re}\,([T-\mu]v, [\mu-\rho(v)]v) + |\mu-\rho(v)|^2\|v\|^2 =$$

$$= \|[T-\mu]v\|^2 + 2\mathrm{Re}\,[\bar{\mu}-\overline{\rho(v)}]([T-\mu]v, v) + |\mu-\rho(v)|^2\|v\|^2 =$$

$$= \|[T-\mu]v\|^2 + 2\mathrm{Re}\,[\bar{\mu}-\overline{\rho(v)}][\rho(v)-\mu]\|v\|^2 + |\mu-\rho(v)|^2\|v\|^2 =$$

$$= \|[T-\mu]v\|^2 - |\mu-\rho(v)|^2\|v\|^2. \ \square$$

Хорошей вычислимой мерой точности пары $[\rho_k, v_k]$, $\|v_k\|=1$, как собственной пары для матрицы T, является вектор невязки $r_k = (T-\rho_k)v_k$.

<u>Лемма 2</u>. Для данного итерационного метода при всех k>0 справедливо неравенство $\|r_{k+1}\| \le \|r_k\|$.

<u>Доказательство</u>. Если $\|r_{k+1}\| = 0$, то лемма справедлива. Если $\|r_{k+1}\| > 0$, то представим шаг (II*) в виде

$$\alpha_k v_{k+1} + (T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)v_{k+1} = \tau_k^2 v_k . \qquad (I)$$

Убедимся, что (v_{k+1}, v_k) и $((T-\rho_k)v_{k+1}, v_k)$ вещественны и положительны. Для этого умножаем (I) [redacted] на v_{k+1},

$$\alpha_k (v_{k+1}, v_{k+1}) + (v_{k+1}, (T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)v_{k+1}) = \tau_k^2 (v_{k+1}, v_k),$$

$$\alpha_k + ((T-\rho_k)v_{k+1}, (T-\rho_k)v_{k+1}) = \tau_k^2 (v_{k+1}, v_k),$$

$$\alpha_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 = \tau_k^2 (v_{k+1}, v_k). \qquad (2)$$

Отсюда видна вещественность и положительность (v_{k+1}, v_k). Умножая (I) справа на v_k, получим

$$\alpha_k (v_{k+1}, v_k) + ((T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)v_{k+1}, v_k) = \tau_k^2. \tag{3}$$

Из леммы I и $\|r_{k+1}\|>0$ следует, что $\|(T-\rho_k)v_{k+1}\| \geq \|r_{k+1}\| > 0$. Так как векторы v_k и v_{k+1} нормированы, то

$$\alpha_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 > \alpha_k (v_{k+1}, v_k)^2.$$

Учитывая равенство (2), получим $\tau_k^2 (v_{k+1}, v_k) > \alpha_k (v_{k+1}, v_k)^2$, или $\tau_k^2 > \alpha_k (v_{k+1}, v_k)$. Опираясь на полученное неравенство и на соотношение (3), получим утверждение и относительно $((T-\rho_k)v_{k+1}, v_k)$:

$$((T-\rho_k)v_{k+1}, r_k) = ((T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)v_{k+1}, v_k) = \tau_k^2 - \alpha_k (v_{k+1}, v_k) > 0.$$

Введем φ_k и ψ_k, такие что

$$\cos\varphi_k = (v_{k+1}, v_k), \quad \cos\psi_k = \frac{((T-\rho_k)v_{k+1}, r_k)}{\|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\|}.$$

Соотношение (3) приобретает теперь вид

$$\alpha_k \cos\varphi_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\| \cos\psi_k = \tau_k^2. \tag{3"}$$

Используя (I) и (3"), преобразуем

$$\|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 = ((T^* - \bar{\rho}_k)(T-\rho_k)v_{k+1}, v_{k+1}) =$$

$$= (\tau_k^2 v_k - \alpha_k v_{k+1}, v_{k+1}) = \tau_k^2 \cos\varphi_k - \alpha_k =$$

$$= [\alpha_k \cos\varphi_k + \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\| \cos\psi_k] \cos\varphi_k - \alpha_k \leq$$

$$\leq \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k.$$

Делим последнее соотношение на $\|(T-\rho_k)v_{k+1}\|$:

$$\|(T-\rho_k)v_{k+1}\| \leq \|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k. \tag{4}$$

Опираясь на лемму I и оценку (4), получим

$$\|r_{k+1}\| = \|(T-\rho_{k+1})v_{k+1}\| \leq \|(T-\rho_k)v_{k+1}\| \leq$$

$$\leq \|r_k\| \cos\psi_k \cos\varphi_k \leq \|r_k\|. \ \square \tag{5}$$

<u>Лемма 3</u>. Для данного итерационного метода $\lim\limits_{k\to\infty} |\rho_k - \rho_{k+1}| = 0$.

Доказательство. Из леммы I и оценки (4) следует

$$\|r_{k+1}\|^2 = \|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2 - |\rho_k - \rho_{k+1}|^2 \le$$
$$\le \|r_k\|^2 \cos^2\varphi_k \cos^2\psi_k - |\rho_k-\rho_{k+1}|^2 \le \|r_k\|^2 - |\rho_k - \rho_{k+1}|^2. \qquad (6)$$

Из монотонного убывания норм невязок следует существование предела $\lim_{k\to\infty}\|r_k\| = \tau \ge 0$. Перейдя в неравенстве (6) к пределу $k\to\infty$, получим

$$\tau^2 \le \tau^2 - \lim_{k\to\infty}|\rho_k-\rho_{k+1}|^2,$$

$$\lim_{k\to\infty}|\rho_k - \rho_{k+1}|^2 = 0. \ \square$$

Теорема. Пусть $\{v_k\}$ –последовательность итераций (I)-(III), порождаемая единичным вектором v_0. При $k\to\infty$ либо

I) $\rho_k\to\lambda$ и $\operatorname{dist}(v_k, X)\to 0$, где $\lambda\in\sigma(T)$ и $X=\{x \mid Tx=\lambda x\}$,либо

2) $\rho_k\to\rho$ и $\operatorname{dist}(v_k, V)\to 0$, где $V=\{v \mid (T^*-\bar\rho)(T-\rho)v = \tau^2 v,\ \tau^2 = \|(T-\rho)v\|^2\}$.

Доказательство. Из леммы 2 следует, что $\|r_k\| = \|(T-\rho_k)v_k\| \to \tau \ge 0$ при $k\to\infty$. Поскольку последовательность $\{v_k\}$ принадлежит единичной сфере в C^n, то $\{v_k\}$ имеет хотя бы одну точку накопления. То же самое верно для $\{\rho_k\}$, так как $\rho_k\in[-\|T\|,\|T\|]$. Изучим отдельно случаи $\tau=0$ и $\tau>0$.

Случай $\tau=0$. Пусть $[\rho,v]$ – точка накопления последовательности $\{[\rho_k,v_k]\}$, т.е. $\rho=\lim_{j\in J}\rho_j$, $v=\lim_{j\in J} v_j$ для некоторого индексного множества $J\subset N$. Поскольку $\rho(\cdot)$- непрерывная функция на единичной сфере, то

$$\rho(v) = \lim_{j\in J}\rho(v_j) = \lim_{j\in J}\rho_j = \rho,$$

$$\|(T-\rho)v\| = \lim_{j\in J}\|r_j\| = \tau = 0.$$

Таким образом $[\rho,v]$ должна быть собственной парой матрицы T. Так как количество собственных значений матрицы T конечно и $\lim_{k\to\infty}|\rho_k-\rho_{k+1}|=0$ по лемме 3, то для достаточно больших k последовательность $\{\rho_k\}$ не может перескочить расстояние между двумя точками накопления и, следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=\lambda$. Так как $\|r_k\|\to 0$ при $k\to\infty$ то каждая точка накопления v последовательности $\{v_k\}$ должна принадлежать собственному подпространству, соответствующему собственному значению λ, т.е. $v\in\{x\,|\,Tx=\lambda x\}$.

Случай $\tau>0$. Имеет место неравенство (см.(5))

$$\|r_{k+1}\|\leq\|r_k\|\cos\varphi_k\cos\psi_k.$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу $k\to\infty$:

$$\tau\leq\tau\lim_{k\to\infty}\cos\varphi_k\cos\psi_k.$$

Учитывая, что $\cos\varphi_k,\cos\psi_k>0$, получим

$$\lim_{k\to\infty}\cos\varphi_k=1\quad,\quad\lim_{k\to\infty}\cos\psi_k=1.$$

Из леммы I и леммы 3 следует, что

$$\lim_{k\to\infty}\|(T-\rho_k)v_{k+1}\|^2=\lim_{k\to\infty}\|r_{k+1}\|^2+\lim_{k\to\infty}|\rho_k-\rho_{k+1}|^2=\tau^2.$$

Из последнего предела и соотношения (3") вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty}\tau_k^2=\lim_{k\to\infty}(\alpha_k\cos\varphi_k+\|(T-\rho_k)v_{k+1}\|\|r_k\|\cos\psi_k)=\tau^2.$$

Покажем, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_k\|=\tau^2$. Действительно, с учетом (I)

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_k\|\leq$$

$$\leq\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_{k+1}\|+\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)\|\|v_k-v_{k+1}\|=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\|\tau_k^2v_k-\alpha_kv_{k+1}\|+\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)\|(2-2\cos\varphi_k)^{1/2}=\tau^2,$$

$$\underline{\lim_{k\to\infty}}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_k\|\geq$$

$$\geq\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_{k+1}\|-\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)\|\|v_k-v_{k+1}\|=\tau^2.$$

Вычислим теперь

$$\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_k-\|r_k\|^2v_k\|^2=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\|(T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_k\|^2-2\,\mathrm{Re}\lim_{k\to\infty}\|r_k\|^2((T^*-\bar\rho_k)(T-\rho_k)v_k,v_k)+$$

$$+\lim_{k\to\infty}\|r_k\|^4=\tau^4-2\tau^4+\tau^4=0.$$

Таким образом, всякая точка накопления ρ ограниченной последовательности $\{\rho_k\}$ должна удовлетворять уравнению

$$\det[(T^*-\bar\rho)(T-\rho)-\tau^2]=0.$$

Следовательно, множество точек накопления последовательности $\{\varrho_k\}$ конечно, и, в силу соотношения $\lim_{k\to\infty} |\varrho_k - \varrho_{k+1}| = 0$, последовательность $\{\varrho_k\}$ на самом деле сходится. Аналогично случаю $\tau=0$ получим, что $[\tau^2, v]$, где v предельная точка какой-то последовательности $\{v_k \mid k \in N'\}$ для некоторого индексного множества $N' \subset N$, должна быть собственной парой для матрицы $(T^*-\bar{\varrho})(T-\varrho)$, т.е. v принадлежит множеству

$$V = \{v \mid (T^*-\bar{\varrho})(T-\varrho)v = \tau^2 v,\ \tau^2 = \|(T-\varrho)v\|^2\}. \square$$

Замечание. В случае эрмитовой матрицы T случай 2) теоремы неустойчив (см. [2]).По-видимому, это верно и в случае неэрмитовой матрицы, однако, вопрос пока остается открытым.

Пример. Дана матрица

$$T = \begin{pmatrix} 2+i & 1+2i & 1+3i & 2+i \\ 2+i & 5+2i & 1+i & 2+3i \\ 3+i & 3+2i & 8+3i & 3+i \\ 1+i & 3+2i & 3+i & 10+3i \end{pmatrix}$$

Пусть начальный вектор $v_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+i, 1+i, 1+i, 1+i)^T$. Выбираем $\alpha_k = 0{,}0001$, $k=0,1,2,\dots$. Для наглядности приближения v_k в таблице нормированы так, чтобы наибольший по модулю элемент был равен единице.

шаг	0	1	2
ϱ_k	12,5+7i	13,5514+6,7810i	13,6944+6,7479i
v_k	1 1 1 1	0,3693+0,3155i 0,5423+0,3362i 0,9693+0,1264i 1	0,3512+0,2749i 0,5244+0,2857i 0,9168+0,1125i 1
$\|\tau_k\|$	4,71699	0,45013	0,05141
шаг	3	4	5
ϱ_k	13,7099+6,7445i	13,7115+6,7441i	13,7117+6,7441i
v_k	0,3497+0,2703i 0,5229+0,2797i 0,9115+0,1107i 1	0,3496+0,2698i 0,5227+0,2791i 0,9109+0,1105i 1	0,3495+0,2698i 0,5227+0,2790i 0,9108+0,1105i 1
$\|\tau_k\|$	0,00545	0,00057	0,000058

Отметим, что $[\varrho_7, v_7]$ о точностью 10^{-4} является собственной парой матрицы Т.

Литература

1. П а р л е т т Б. Симметричная проблема собственных значений. М: Мир, 1983.
2. С а а н Т. Регуляризованный итерационный метод для отыскания собственных значений и собственных векторов симметричной матрицы. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1987, 762, 59-68.
3. У и л к и н с о н Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. М: Наука, 1970.
4. O s t r o w s k i, A.M. On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of characteristic roots and vectors I-VI. Aroh. Rational Meoh. Anal., 1958/59, v. I-4.
5. P a r l e t t, B. N. The Rayleigh quotient iteration and some generalizations for nonnormal matrices. Math. of Computation, 1974, v.28, 679-693.

THE REGULARIZED ITERATIVE METHOD FOR FINDING THE EIGENVALUES AND EIGENVECTORS OF NON-HERMITIAN MATRICES

T. Saan

Summary

The Rayleigh Quotient Iteration (RQI) suits well for finding the eigenvalues and eigenvectors of Hermitian matrices. It has an excellent global convergence property - due to the monotonic decrease in the norms of the residuals. This property fails for non-Hermitian matrices. In this work another iterative method (I)-(III) has been constructed. It is based on the Tikhonov regularisation and the RQI. For this method the global convergence property mentioned above remains valid for non-Hermitian matrices too.

О САМОРЕГУЛЯРИЗАЦИИ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРОЕКЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

У. Хямарик

Приводятся условия саморегуляризации при решении некорректных задач проекционными методами. В работе обобщаются некоторые результаты статьи [2] на случай неточно заданного оператора.

I. Априорный выбор размерности. Пусть задано уравнение $Au=f$ с оператором $A\in\mathcal{L}(H,F)$, где H,F – гильбертовы пространства. Пусть $f\in\mathcal{R}(A)$, а ядро $\mathcal{N}(A)=\{0\}$. Пусть вместо A и $f\in F$ известны оператор $A_\eta\in\mathcal{L}(H,F)$ и элемент $f_\delta\in F$ такие, что $\|A_\eta-A\|\le\eta$, $\|f_\delta-f\|\le\delta$. В проекционном методе выбираются подпространства $H_{n,\eta}\subseteq H$ и $F_{n,\eta}\subseteq F$ с соответствующими ортопроекторами $P_{n,\eta}$ и $Q_{n,\eta}$ (здесь индекс η означает возможную зависимость от A_η). Приближение u_n к решению u_* уравнения $Au=f$ находят из уравнения

$$A_{n,\eta}u_n=Q_{n,\eta}f_\delta,\qquad u_n\in H_{n,\eta}, \qquad (1)$$

где спроектированный оператор $A_{n,\eta}\in\mathcal{L}(H_{n,\eta},F_{n,\eta})$ действует по формуле $A_{n,\eta}v_n=Q_{n,\eta}A_\eta v_n$ ($\forall v_n\in H_{n,\eta}$). Наша цель – найти условия для саморегуляризации, т.е. для того, чтобы $u_n\to u_*$ при $n\to\infty$, $\delta\to0$, $\eta\to0$.

Лемма I. Если $\tau_{n,\eta}\equiv\inf\{\|Q_{n,\eta}A_\eta v_n\|/\|A_\eta v_n\|,\ v_n\in H_{n,\eta}\}>0$ и $\varkappa_{n,\eta}\equiv\sup\{\|v_n\|/\|A_\eta v_n\|,\ v_n\in H_{n,\eta}\}<\infty$, то $\mathcal{N}(A_{n,\eta})=0$ и $\varkappa_{n,\eta}\le\|A_{n,\eta}^{-1}\|\le\varkappa_{n,\eta}/\tau_{n,\eta}$.

Лемма 2. Если $\tau^*_{n,\eta}\equiv\inf\{\|P_{n,\eta}A^*_\eta z_n\|/\|A^*_\eta z_n\|,\ z_n\in F_{n,\eta}\}>0$ и $\varkappa^*_{n,\eta}\equiv\sup\{\|z_n\|/\|A^*_\eta z_n\|,\ z_n\in F_{n,\eta}\}<\infty$, то $\mathcal{N}(A_{n,\eta})=0$ и $\varkappa^*_{n,\eta}\le\|A^{-1}_{n,\eta}\|\le\varkappa^*_{n,\eta}/\tau^*_{n,\eta}$, $\|A^{-1}_{n,\eta}Q_{n,\eta}A_\eta(I-P_{n,\eta})\|=[1/(\tau^*_{n,\eta})^2-1]^{1/2}$.

Доказательства лемм I,2 совпадают с доказательствами аналогичных лемм I.I, I.2 в [2], где надо только к символам операторов, пространств и ортопроекторов добавить индекс η.

Теорема I. Пусть $\mathcal{N}(A^*)=\{0\}$. Пусть существует выбор $n=n(\delta,\eta)$ такой, что $\tau_{n,\eta}\geq\tau_\eta>0$, $(\delta+\eta)\varkappa^*_{n,\eta}\to 0$, $\|u-P_{n,\eta}u\|\to 0$ $(\forall u\in H)$ при $\delta\to 0$, $\eta\to 0$. Тогда при малой η и указанном выше выборе $n=n(\delta,\eta)$ уравнение (I) однозначно разрешимо и имеет место сходимость

$$\|u_{n(\delta,\eta)}-u_*\|\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0,\ \eta\to 0. \qquad (2)$$

Доказательство. Единственность решения $u_n\in H_{n,\eta}$ уравнения (I) следует из леммы 2. Используя тождества $(A_{n,\eta}-Q_{n,\eta}A_\eta)P_{n,\eta}=0$, $I-P_{n,\eta}=(I-P_{n,\eta})^2$ имеем

$$A_{n,\eta}(u_*-u_n)=A_{n,\eta}(I-P_{n,\eta})u_*-Q_{n,\eta}A_\eta(I-P_{n,\eta})^2u_*+Q_{n,\eta}[(A_\eta-A)u_*+(f-f_\delta)].$$

С помощью леммы 2 оценим

$$\|u_*-u_n\|\leq[1+\|A_{n,\eta}^{-1}Q_{n,\eta}A_\eta(I-P_{n,\eta})\|]\,\|(I-P_{n,\eta})u_*\|+\|A_{n,\eta}^{-1}\|(\eta\|u_*\|+\delta)\leq$$
$$\leq[1+(1/(\tau_\eta^*)^2-1)^{1/2}]\,\|(I-P_{n,\eta})u_*\|+(\eta\|u_*\|+\delta)\,\varkappa^*_{n,\eta}/\tau^*_\eta.$$

Отсюда и из правила выбора $n=n(\delta,\eta)$ следует сходимость (2).

2. Выбор размерности по невязке.

Лемма 3. Если u_n – решение уравнения (I) и $\tau_{n,\eta}>0$, то

$$\|A_\eta u_n-f_\delta\|\leq\tau_{n,\eta}^{-1}\,dist(f_\delta,A_\eta H_{n,\eta}).$$

Доказательство совпадает с доказательством аналогичной леммы I.3 в [2], где надо только к символам операторов и подпространств добавить индекс η.

Предполагаем, что задана некоторая возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_i\}$, $i=1,2,\ldots$ (например $n_i=i$ или $n_i=k^i$, где k – натуральное число).

Теорема 2. Пусть $\|(I-P_n)u\|\to 0$ при $n\to\infty$ $(\forall u\in H)$. Пусть при малых η множество $N_\eta\equiv\{n\in\{n_i\},\ \eta\varkappa_{n,\eta}<1\}$ непусто. Пусть

$$\tau_{n,\eta}\geq\tau_\eta>0,\qquad \tau^*_{n,\eta}\geq\tau^*_\eta>0\qquad (n\in N_\eta),$$

$$\|(I-P_{n_{i-1},\eta})u\|\leq c\|(I-P_{n_{i-1}})u\|+\bar{c}\eta\varkappa_{n_i,\eta}\|u\|\quad(\forall u\in H,\ n_i\in N_\eta),\qquad(3)$$

$$\varkappa_{n_{i+1},\eta}\|(I-Q'_{n_i,\eta})A_\eta\|\leq\gamma'\qquad(n_{i+1}\in N_\eta),\qquad(4)$$

где $Q'_{n,\eta}$ – ортопроектор в F на $A_\eta H_{n,\eta}$. Тогда при достаточно малых δ,η выбор n осуществим по правилу: $n=n(\delta,\eta)$ первое из чисел $\{n_i\}$ такое, что

$$\|A_\eta u_n - f_\delta\| \le b(\delta + b_1\|u_n\|\eta), \quad b = const > \tau_\eta^{-1}, \quad b_1 = const > 1 + \bar c\,\gamma'. \qquad (5)$$

При таком выборе $n = n(\delta,\eta)$ имеет место сходимость (2).

<u>Доказательство</u>. Рассмотрим сначала основной случай, когда выбираемое $n = n(\delta,\eta) \to \infty$ при $\delta \to 0$, $\eta \to 0$. При $n \in N_\eta$ по лемме 3 имеем

$$\|A_\eta u_n - f_\delta\| \le \tau_\eta^{-1} dist(f_\delta, A_\eta H_{n,\eta}) \le \tau_\eta^{-1}\|(f_\delta - f) + (Au_* - A_\eta u_*) + (A_\eta u_* - Q'_{n,\eta} A_\eta u_*)\| \le$$

$$\le \tau_\eta^{-1}\left[\delta + \eta\|u_*\| + \|(I - Q'_{n,\eta})A_\eta(I - P_{n,\eta})u_*\|\right].$$

При $n_i \in N_\eta$ по условиям (3),(4) получим

$$\|(I - Q'_{n_i,\eta})A_\eta(I - P_{n_i,\eta})u_*\| \le \|(I - Q'_{n_i,\eta})A_\eta\|\,\|(I - P_{n_i,\eta})u_*\| \le$$

$$\le \gamma'\varkappa^{-1}_{n_{i+1},\eta}\left[c\|(I - P_{n_i})u_*\| + \bar c\,\eta\,\varkappa_{n_{i+1},\eta}\|u_*\|\right] =$$

$$= \bar c\,\gamma'\eta\|u_*\| + c\,\gamma'\varkappa^{-1}_{n_{i+1},\eta}\|(I - P_{n_i})u_*\|.$$

Из последних соотношений имеем

$$\|A_\eta u_{n_i} - f_\delta\| \le \tau_\eta^{-1}\left[\eta\|u_*\|(\bar c\,\gamma' + 1) + \delta\right] + c\,\gamma'\tau_\eta^{-1}\varkappa^{-1}_{n_{i+1},\eta}\|(I - P_{n_i})u_*\|. \qquad (6)$$

Докажем от противного, что

$$\lim_{i\to\infty,\ \delta\to 0,\ \eta\to 0,\ \eta\varkappa_{n_i,\eta} < 1} \|u_{n_i}\| \ge \|u_*\|. \qquad (7)$$

Если (7) не выполнено, то существуют последовательности $i_k \to \infty$, $\delta_k \to 0$, $\eta_k \to 0$ такие, что $\|u_{n_{i_k}}\| < \|u_*\|$. Ввиду ограниченности последовательность $\{u_{n_{i_k}}\}$ слабо компактна; считаем, что $u_{n_{i_k}} \rightharpoonup u'$, $u' \in H$ при $k \to \infty$. По (6) $\|A_{\eta_k} u_{n_{i_k}} - f_{\delta_k}\| \to 0$, значит $Au_{n_{i_k}} \rightharpoonup f$ при $k \to \infty$. Поэтому $Au' = f$, а ввиду $\mathcal{N}(A) = 0$ также $u' = u_*$. Поскольку $u_{n_{i_k}} \rightharpoonup u_*$, то $\|u_*\| \le \varliminf_{k\to\infty} \|u_{n_{i_k}}\|$. Полученное противоречие с предположением $\|u_{n_{i_k}}\| < \|u_*\|$ доказывает (7).

Пусть n_k первый индекс из $\{n_i\}$, при котором $\eta\varkappa_{n_i,\eta} \ge 1$ или выполняется (5). По (6) имеем

$$b(\delta + b_1\|u_{n_{k-1}}\|\eta) < \|A_\eta u_{n_{k-1}} - f_\delta\| \le \tau_\eta^{-1}(\delta + (\bar c\,\gamma' + 1)\|u_*\|\eta) +$$

$$+ c\,\gamma'\tau_\eta^{-1}\varkappa^{-1}_{n_k,\eta}\|(I - P_{n_{k-1}})u_*\|,$$

откуда

$$\varkappa_{n_k,\eta}(\delta + \eta) \le \left[\min\{b - \tau_\eta^{-1},\ b b_1\|u_{n_{k-1}}\| - \tau_\eta^{-1}(\bar c\,\gamma' + 1)\|u_*\|\}\right]^{-1} \cdot$$

$$\cdot\, c\,\gamma'\tau_\eta^{-1}\|(I - P_{n_{k-1}})u_*\|.$$

Отсюда с учётом (7) имеем

$$\varkappa_{n_k,\eta}\,(\delta+\eta)\to 0 \quad \text{при} \quad \delta\to 0,\ \eta\to 0. \tag{8}$$

Учитывая соотношения (6),(7),(8) при малых δ,η гарантируется выбор некоторого $n=n_k\in\{n_i\}$ согласно (5).

Из доказательства теоремы I имеем оценку

$$\|u_{n_k}-u_*\|\le\left[1+(1/(\tau_\eta^*)^2-1)^{1/2}\right]\|(I-P_{n_k,\eta})u_*\|+(\eta\|u_*\|+\delta)\varkappa_{n_k,\eta}/\tau_\eta \tag{9}$$

(при оценке $\|A_{n,\eta}^{-1}\|$ использована лемма I). Отсюда и из соотношений (3) и (8) следует сходимость (2).

Если выбираемое $n_i(\delta_k,\eta_k)\le const$ при $\delta_k\to 0$, $\eta_k\to 0$, то по (9) $u_{n_i(\delta_k,\eta_k)}$ ограничена и (относительно) компактна в H и по (5) имеем $Au_{n_i(\delta_k,\eta_k)}\to f=Au_*$ при $k\to\infty$. Отсюда следует, что $u_{n_i(\delta_k,\eta_k)}\to u_*$ при $k\to\infty$. Теорема 2 доказана.

Замечание. Отметим, что для гарантирования выбора $n=n(\delta,\eta)$ при всех δ,η правило выбора n можно уточнить, например так: зададим число $\alpha\in(0,1)$ и выберем первое $n\in\{n_i\}$, для которого $\eta\varkappa_{n,\eta}\ge\alpha$ или выполнено (5). Покажем, что при малых δ,η это дополнение не влияет на выбор $n=n_i(\delta,\eta)$. Для этого убедимся, что если δ,η достаточно малы, то при возрастании n выполнение неравенства (5) предшествует выполнению неравенства $\eta\varkappa_{n,\eta}\ge\alpha$. Действительно, если $\eta\varkappa_{n_{i+1},\eta}\ge\alpha$ при некоторой n_{i+1}, то оценка (6) принимает форму

$$\|A_\eta u_{n_i}-f_\delta\|\le\tau_\eta^{-1}\left[\eta\|u_*\|(\tilde c\gamma'+1)+\delta\right]+\left[c\gamma'\tau_\eta^{-1}/\alpha\right]\eta\,\|(I-P_{n_i})u_*\|.$$

При малых δ,η отсюда и из (7) следует выполнение (5) при $n=n_i$.

Отметим, что некоторые другие правила выбора размерности по невязке рассмотрены в [4–6].

3. Дополнения к теоремам сходимости.

Лемма 4. При любом $\alpha>0$ справедливо неравенство

$$\|(I-Q'_{n,\eta})A_\eta\|\le\|(I-P_{n,\eta})|A_\eta|^\alpha\|^{1/\alpha}, \qquad |A_\eta|=(A_\eta^*A_\eta)^{1/2}. \tag{10}$$

Доказательство. Если в лемме I.8 в [2] к операторам и ортопроекторам добавить индекс η, получим неравенство $\|(I-Q'_{n,\eta})A_\eta\|\le\|(I-P_{n,\eta})|A_\eta|^{1/m}\|^m$ $(\forall m\in N)$. Соотношение (10) следует отсюда и из неравенства $\|(I-P_{n,\eta})|A_\eta|^{1/m}\|^m\le$ $\le\|(I-P_{n,\eta})|A_\eta|^\alpha\|^{1/\alpha}$ при $1/m<\alpha$. Последнее соотношение можно доказать с помощью неравенства моментов: при любом $v\in H$ имеем

$$\| |A_\eta|^{1/m}(I-P_{n,\eta})\omega\|^m \le \| |A_\eta|^\alpha(I-P_{n,\eta})\omega\|^{1/\alpha}\cdot\|(I-P_{n,\eta})\omega\|^{m-1/\alpha} \le$$
$$\le \| |A_\eta|^\alpha(I-P_{n,\eta})\|^{1/\alpha}\|\omega\|^{1/\alpha}\|\omega\|^{m-1/\alpha} = \| |A_\eta|^\alpha(I-P_{n,\eta})\|^{1/\alpha}\|\omega\|^m .$$

Из леммы 4 следует, что для выполнения условия (4) достаточно существования $\alpha>0$ такого, что

$$\varkappa^\alpha_{n_{i+1},\eta}\ \|(I-P_{n,\eta})|A_\eta|^\alpha\| \le const \quad \text{при} \quad \varkappa_{n_{i+1},\eta}<1. \qquad \text{(II)}$$

Лемма 5. Пусть $H_{n,\eta}=H_n$. Если $\eta\varkappa_n<1$, где $\varkappa_n\equiv\sup\{\|\omega_n\|/\|A\omega_n\|,\ \omega_n\in H_n\}$, то $\varkappa_{n,\eta}\le\varkappa_n/(1-\eta\varkappa_n)$. Если $\tau_{n,\eta}\ge\tau_\eta>0$ и при некотором $\alpha>0$

$$\varkappa_n^\alpha\ \|(I-P_n)|A|^\alpha\| \le \gamma \qquad (n=1,2,\dots), \qquad \text{(I2)}$$

то при $\eta\varkappa_n\le c'<1$ имеем $\tau^*_{n,\eta}\ge\tau^*_\eta>0$. Условие (4) выполнено, если

$$\varkappa^\alpha_{n_{i+1}}\ \|(I-P_{n_i})|A|^\alpha\| \le const \quad \text{при} \quad \eta\varkappa_{n_{i+1}}\le c<1. \qquad \text{(I3)}$$

Доказательство первого утверждения имеется в [3]. Второе утверждение совпадает с леммой I.5 в [2], если там заменить оператор A на A_η, а вместо (I2) требовать $\varkappa^\alpha_{n,\eta}\ \|(I-P_n)|A_\eta|^\alpha\|\le\gamma_\eta$ при $\eta\varkappa_n\le c<1$. Убедимся, что это условие выполнено, если выполнено (I2). Поскольку $\| |A_\eta|^\alpha-|A|^\alpha\|\le c\eta^\alpha\ln\eta$ (см. [I]), то

$$\varkappa^\alpha_{n,\eta}\|(I-P_n)|A_\eta|^\alpha\| \le [\varkappa_n^\alpha/(1-\eta\varkappa_n)^\alpha]\,[\|(I-P_n)|A|^\alpha\| + \| |A_\eta|^\alpha-|A|^\alpha\|] \le$$
$$\le (1-c')^{-\alpha}[\varkappa_n^\alpha\|(I-P_n)|A|^\alpha\| + c\varkappa_n^\alpha\eta^\alpha\ln\eta] \le (1-c')^{-\alpha}[\gamma+c(c')^\alpha\ln\eta]\equiv\gamma_\eta .$$

Аналогично проверяется импликация (I3)$\Rightarrow$(II), что доказывает последние утверждение леммы 5.

Аналогично лемме 5 доказывается следующая

Лемма 6. Пусть $F_{n,\eta}=F_n$. Если $\eta\varkappa_n^*<1$, где $\varkappa_n^*\equiv\sup\{\|z_n\|/\|A^*z_n\|,\ z_n\in F_n\}$, то $\varkappa^*_{n,\eta}\le\varkappa_n^*/(1-\eta\varkappa_n^*)$. Если $\tau^*_{n,\eta}\ge\tau^*_\eta>0$ и при некотором $\alpha>0$

$$(\varkappa_n^*)^\alpha\cdot\|(I-Q_n)|A^*|^\alpha\| \le \gamma^* \qquad (n=1,2,\dots),$$

то при $\eta\varkappa_n^*\le c'<1$ имеем $\tau_{n,\eta}\ge\tau_\eta>0$.

Отметим, что в [2] приведены условия саморегуляризации для некоторых конкретных проекционных методов.

Литература

1. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, 1986.
2. Вайникко Г.М., Хямарик У.А. Проекционные методы и саморегуляризация в некорректных задачах. Изв. вузов. Матем., 1986, № 10, 3-17.
3. Хямарик У.А. Проекционные методы для регуляризации линейных некорректных задач. Труды ВЦ ТГУ, 1983 № 50, 69-90.
4. Хямарик У. Принцип невязки выбора размерности при решении некорреткных задач проекционными методами. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 672, 27-34.
5. Хямарик У.А. Принципы невязки в проекционной регуляризации некорректных задач. В кн.: Методы решения нелинейных уравнений и задач оптимизации. Доклады и сообщения III симпозиума. Таллин: Валгус, 1984, 103-104.
6. Хямарик У.А. Регуляризация некорректных задач проекционными методами. Канд. диссертация. Тарту, 1985.

ABOUT SELF-REGULARIZATION SOLVING ILL-POSED PROBLEMS BY PROJECTION METHODS

U. Hämarik

Summary

This paper deals with solving ill-posed problems by projection methods. The conditions for self-regularization are given. This article complements paper [2], examinating the case of approximately given operator.

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПО ТОЧНОСТИ ВЫБОР ПАРАМЕТРА В ИТЕРИРОВАННЫХ ВАРИАНТАХ МЕТОДА ЛАВРЕНТЬЕВА НА КЛАССЕ ИСТОКООБРАЗНО ПРЕДСТАВИМЫХ РЕШЕНИЙ

Т.Кихо

В статье найдены классы истокообразно представимых решений самосопряженной задачи с неотрицательным оператором, на которых оптимален по точности m-шаговый итерированный вариант метода Лаврентьева с подходящим образом выбранным параметром.

I. Формулировка результата и обсуждение. В гильбертовом пространстве H рассмотрим операторное уравнение

$$Au = f, \tag{I}$$

с линейным непрерывным самосопряженным неотрицательным оператором $A \in \mathcal{L}(H, H)$, имеющим незамкнутую область значений $\mathcal{R}(A) \subset H$. Свободный член $f \in \mathcal{R}(A)$ пусть известен приближенно, вместо него имеем $f_\delta \in H, \|f - f_\delta\| \le \delta, \delta > 0$.

Пусть точное решение уравнения (I) принадлежит классу истокообразно представимых решений

$$\mathcal{M}_{p\varrho u_0} = \{v \in H : v - u_0 = A^p w, \|w\| \le \varrho\}, \quad p > 0, \varrho > 0.$$

Приближенное решение $u_\alpha \in H$ этой некорректно поставленной задачи найдём m-шаговым итерированным вариантом метода Лаврентьева (см. [2], с.19)

$$\begin{aligned} &u_\alpha = u_{m,\alpha}, \\ &\quad u_{j,\alpha} = (\alpha I + A)^{-1}(\alpha u_{j-1,\alpha} + f_\delta), \quad j = 1, \ldots, m, \\ &u_{0,\alpha} = u_0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α - малый положительный параметр.

Известны методы, т.е. отображения $P : H \mapsto H$ (например,

13

метод спектральной срезки (см. [2], с. 33-34)), для которых справедлива оценка погрешности

$$\sup_{u\in M_{p\rho u_0},\, f_\delta\in H:\|Au-f_\delta\|\le\delta} \|Pf_\delta-u\|\le \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}. \quad (3)$$

Эта оценка, вообще говоря, неулучшаема. А именно, для любого метода P при условии $(\delta/\rho)^{(1/(p+1))}\in\sigma(A)$ ($\sigma(A)$- спектр оператора A) имеет место обратное неравенство

$$\sup_{u\in M_{p\rho u_0},\, f_\delta\in H:\|Au-f_\delta\|\le\delta} \|Pf_\delta-u\|\ge \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}}.$$

Методы, для которых имеет место (3), будем называть оптимальными по точности на классе $M_{p\rho u_0}$.

Наша цель - выяснить, при каких $p>0$ итерированный вариант метода Лаврентьева (2) с подходящим образом выбранным параметром $\alpha=\alpha(\delta)$ оптимален по точности на $M_{p\rho u_0}$. Оказывается, что областью оптимальности по точности по p является некоторый полуотрезок $(0,\bar{p}_m]$, правая граница которого указывается в следующей теореме.

<u>Теорема</u>. При фиксированном натуральном числе $m\ge 1$ областью оптимальности по $p\in(0,m]$ m-шагового итерированного варианта метода Лаврентьева на классе $M_{p\rho u_0}$ является полуотрезок $(0,\bar{p}_m]\subset(0,\bar{p}]\subset(0,m]$, где $\bar{p}_m\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},\bar{p}\right]$ - единственное решение уравнения

$$\theta(p,m)\equiv\frac{p+1}{p}\left[\sqrt[m]{p+1}-1\right]^2 m^2-1=0 \quad (0<p\le m), \quad (4)$$

а константа $\bar{p}\approx 1{,}043$ - решение предельного уравнения

$$\theta(p,\infty)\equiv\frac{p+1}{p}\ln^2(p+1)-1=0. \quad (5)$$

Последовательность $(\bar{p}_m)_{m=1}^{\infty}$ возрастает, причем $\bar{p}_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\lim\limits_{m\to\infty}\bar{p}_m=\bar{p}$. Параметр α следует выбрать по формуле

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt[m]{p+1}-1}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}}. \quad (6)$$

Доказательство теоремы будет изложено в пункте 4.

Рассмотрим уравнение (4). При $m=1$ и $m=2$ его можно точно решить, т.е. удается найти точную область оптимальности для I- и 2-шагового итерированного варианта метода Лаврентьева.

При $m=1$ решением уравнения (4) (уравнения $\rho(\rho+1)=1$) является

$$\rho_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}6180 \tag{7}$$

т.е. одношаговый метод Лаврентьева оптимален по точности на $\mathcal{M}_{\rho\xi u_0}$ при $0<\rho\le\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При $u_0=0$ придем к обыкновенному методу Лаврентьева $u_\alpha=(\alpha I+A)^{-1}f_\delta$, для которого указанная область оптимальности получена уже ранее в [2], с. 60-6I.

При $m=2$ уравнение (4) примет вид $4(\rho+1)[\sqrt{\rho+1}-1]^2=\rho$. Решение на этот раз

$$\rho_2=\frac{a^4+4a^3-18a^2+28a+49}{36a^2}, \qquad a=\sqrt[3]{44+3\sqrt{177}},$$

т.е. $\rho_2\approx$ 0,7675 . Этот результат нов.

Решение уравнения (4) при $m\ge 3$ можно найти приближенно. Например $\rho_3\approx$ 0,84, $\rho_4\approx$ 0,89, $\rho_5\approx$ 0,9I,..., $\rho_{10}\approx$ 0,97,..., $\rho_{100}\approx$ I,04,.... Эти значения ρ_m сходятся к $\rho\approx$ I,043 - решению предельного уравнения (5):

$$\theta(\rho,\infty)=\lim_{m\to\infty}\theta(\rho,m)=\frac{\rho+1}{\rho}\Big(\lim_{x\to 0}\frac{(\rho+1)^x-1}{x}\Big)^2-1=\frac{\rho+1}{\rho}\ln^2(\rho+1)-1=0. \tag{8}$$

А полуотрезок $(0,\rho]$ - это область асимптотической оптимальности итерационного метода на $\mathcal{M}_{\rho\xi u_0}$ (см. [2], с. 6I).

Естественно поставить задачу о таком выборе $\alpha=\alpha(\delta)$ также при $\rho>\rho_m$, чтобы достичь наилучшей оценки метода (2) на классе $\mathcal{M}_{\rho\xi u_0}$. При $\rho_m<\rho\le m$ достижима оценка

$$\sup_{u\in\mathcal{M}_{\rho\xi u_0},\ f_\delta\in\{f:\|Au-f_\delta\|\le\delta\}}\|u-u_\alpha\|\le c_{\rho m}\,\xi^{\frac{1}{\rho+1}}\,\delta^{\frac{\rho}{\rho+1}}, \qquad c_{\rho m}>1$$

и вопрос сводится к минимизации константы $c_{\rho m}$. Для метода Лаврентьева ($m=1$) такой оптимальный выбор параметра указан в [3]. При $\rho>m$ метод теряет даже оптимальный порядок.

2. <u>Условия оптимальности класса методов</u>. В литературе (см. [I],[2]) подробно рассмотрен более общий класс методов

$$u_\alpha=(I-Ag_\alpha(A))u_0+g_\alpha(A)f_\delta, \tag{9}$$

где семейство операторов $g_\alpha(A)$ порождено непрерывно дифференцируемой функцией

$$g_\alpha(\lambda)=\frac{1}{\alpha}g\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right),\quad \alpha>0,\ \lambda\geq 0$$

удовлетворяющей условиям

$$\begin{cases} \sup\limits_{\lambda\geq 0}|g(\lambda)|<\infty, \\ \sup\limits_{\lambda\geq 0}\lambda^p|1-\lambda g(\lambda)|<\infty \quad \text{при } p\in[0,p_0],\ p_0>0, \end{cases} \tag{10}$$

причем функция $h(\lambda)=\lambda^p|1-\lambda g(\lambda)|$ строго убывает, $h'(\lambda)<0,\ \lambda>0$.

Приведем необходимые нам результаты из [2], с. 56–59. Для приближения (9) справедлива оценка погрешности

$$\inf_{\alpha>0}\ \sup_{u\in M_{p\varsigma u_0},\ f_\delta\in H:\|Au-f_\delta\|\leq\delta}\|u-u_\alpha\|\leq c_p\,\rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}},\qquad 0<p\leq p_0 \tag{11}$$

где

$$c_p=\inf_{d>0}\ \inf_{0<t<1}\ \sup_{\lambda>0}\varphi_p(d,t,\lambda), \tag{12}$$

$$\varphi_p(d,t,\lambda)=\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2p}\frac{(1-\lambda g(\lambda))^2}{t}+\frac{d^2g^2(\lambda)}{1-t}}; \tag{13}$$

если при этом найдется $\varepsilon>0$ такое, что $\partial(A)\supset[0,\varepsilon]$, то при достаточно малых $\delta>0$ в (11) достигается знак равенства. Если при некотором $p\in(0,p_0]$ для всех $\lambda\geq 0$ имеет место неравенство

$$\psi_p(\lambda)\equiv\frac{(p+1)\lambda^{2p}h^2(\lambda)}{\left[h^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\right]^{2p}}+\frac{(p+1)g^2(\lambda)\left[h^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)\right]^2}{p}\leq 1, \tag{14}$$

то оценка (11) выполняется с $c_p=1$, т.е. выполняется (3), и соответствующий оптимальный выбор параметра α дается формулой

$$\alpha=\frac{1}{h^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right)}\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{\frac{1}{p+1}}; \tag{15}$$

иными словами метод (9),(15) оптимален по точности на классе $M_{p\varsigma u_0}$. Если же найдется такое $\lambda_0>0$, что $\psi_p(\lambda_0)>1$, то при $\partial(A)\supset[0,\varepsilon]$, $\varepsilon>0$, для достаточно малых $\delta>0$ и всех $\alpha>0$ выполняется неравенство

$$\sup_{u\in M_{p\rho u_0},\ f_\delta\in H:\|Au-f_\delta\|\le\delta} \|u-u_\alpha\| > \rho^{\frac{1}{p+1}}\delta^{\frac{p}{p+1}},$$

т.е. метод (9) не будет оптимальным по точности на классе $M_{p\rho u_0}$ ни при каком выборе параметра α. Известно также, что точка

$$\mu_p = h^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) \qquad (I6)$$

стационарна для $\psi_p(\lambda)$, и

$$\psi_p(\mu_p) = 1. \qquad (I7)$$

3. Вспомогательный результат. Прежде, чем приступить к доказательству теоремы, сформулируем лемму.

Лемма. Уравнение (4) при каждом натуральном числе $m\geq 1$ однозначно разрешимо, и последовательность решений $(P_m)_{m=1}^{\infty}$ возрастает, причем $P_1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\lim_{m\to+\infty} P_m = P$, а P – решение уравнения (5).

Доказательство. Нами уже установлены соотношения (7) и (8). Кроме того, $\lim_{\rho\to+0}\theta(\rho,m)=-1$, $m\geq 1$. Тем самым для доказательства леммы достаточно показать, что $\theta(\rho,m)$ как функция аргумента ρ строго возрастает, а как функция аргумента m строго убывает (см. рис. I).

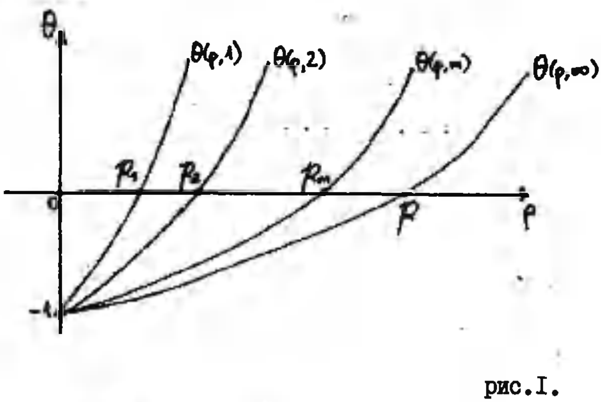


рис.I.

Фиксируем $m\geq 1$, дифференцируем по ρ:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\rho}(\rho,m)=\frac{m(\sqrt[m]{\rho+1}-1)}{\rho^2}\left[(2\rho-m)\sqrt[m]{\rho+1}+m\right].$$

Нули производной $\frac{\partial\theta}{\partial\rho}$ (при фиксированном m) совпадают с решениями уравнения

$$\omega_m(\rho) \equiv (2\rho - m)\sqrt[m]{\rho+1} + m = 0. \tag{I8}$$

Но так как $\omega_m'(\rho) = \frac{\sqrt[m]{\rho+1}}{m(\rho+1)}(m + 2m\rho + 2\rho) > 0$, то ω_m строго возрастает. Поскольку $\omega_m(0) = 0,\ \omega_m(m) = m\sqrt[m]{m+1} + m > 0$, то уравнение (I8) не имеет при $0 < \rho \leq m$ ни одного решения и, следовательно, производная $\frac{\partial\theta}{\partial\rho}$ не имеет ни одного нуля – она положительна. Таким образом $\theta(\rho, m)$, как функция аргумента ρ, строго возрастает.

Фиксируем теперь $\rho > 0$ и дифференцируем по m (временно считая m непрерывно меняющимся):

$$\frac{\partial\theta}{\partial m}(\rho, m) = \frac{2(\rho+1)[\sqrt[m]{\rho+1} - 1]}{\rho}\left[m(\sqrt[m]{\rho+1} - 1) - \sqrt[m]{\rho+1}\ln(\rho+1)\right].$$

Убедимся, что $\frac{\partial\theta}{\partial m}(\rho, m) < 0$ при каждом $m \geq 1,\ \rho > 0$, или

$$\chi(\sqrt[m]{\rho+1}) \equiv \sqrt[m]{\rho+1} - 1 - \frac{\sqrt[m]{\rho+1}\ln(\rho+1)}{m} < 0.$$

Для этого заменим $\sqrt[m]{\rho+1} = s$ и заметим, что при $s \in (1, \rho+1)$

$$\chi(s) = s - 1 - \frac{s\ln s^m}{m} = s - 1 - s\ln s < 0$$

так как $\chi'(s) = -\ln s < 0$ при $s \in (1, \rho+1)$ и $\chi(1) = 0$. Таким образом $\theta(\rho, m)$, как функция аргумента m, действительно строго убывает. Лемма доказана.

4. <u>Доказательство теоремы.</u> Заметим, что общий метод (9) при

$$g(\lambda) \equiv g_m(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\lambda^{j-1}}{(1+\lambda)^m} \equiv \frac{B_m(\lambda)}{(1+\lambda)^m},\quad h(\lambda) \equiv h_m(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^m}$$

приводит к m-шаговому итерированному варианту метода Лаврентьева (2), и для него справедлива соответствующая оценка (II),(I2),(I3) с $c_\rho = c_{\rho m}$,

$$\varphi_\rho(\lambda) = \varphi_{\rho m}(\lambda) = \frac{1}{(1+\lambda)^m}\sqrt{\left(\frac{\lambda}{d}\right)^{2\rho}\frac{1}{t} + \frac{d^2}{1-t}B_m^2(\lambda)}.$$

При этом (I0) имеет место с $\rho_0 = \rho_{0m} = m$ (см. [I], с.26–27). Наша цель – найти область оптимальности по ρ метода (2), т.е. множество всех таких $\rho > 0$, для которых можно оптимальным выбором параметра (6) достичь наилучшей возможной оценки погрешности (3), т.е. оценки (II) с $c_\rho = 1$. Таким образом, достаточно показать, что условие (I4) выполняется для каждого $\lambda > 0$ при $\rho \in (0, R_m]$ и, с другой стороны, при $\rho \in (R_m, m]$ найдется $\lambda_{0\rho} > 0$, при котором условие (I4) нарушается. Определенная в (I4) функция $\psi_\rho(\lambda)$ в данном случае имеет вид

$$\psi_{\rho m}(\lambda) = \frac{\rho+1}{[\sqrt[m]{\rho+1}-1]^{2\rho}(1+\lambda)^{2m}}\left[\lambda^{2\rho} + \frac{[\sqrt[m]{\rho+1}-1]^{2\rho+2}}{\rho} B_m^2(\lambda)\right]. \qquad (I9)$$

Рассмотрим сперва значение функции $\psi_{\rho m}$ в точке 0:

$$\psi_{\rho m}(0) = \frac{\rho+1}{\rho}[\sqrt[m]{\rho+1}-1]^2 m^2.$$

Эта величина при фиксированном $m \geq 1$ возрастает по ρ и при $\rho = R_m$ равняется единице $\psi_{R_m, m}(0) = 1$ (см. пункт 3, где исследована функция

$$\Theta(\rho, m) = \frac{\rho+1}{\rho}[\sqrt[m]{\rho+1}-1]^2 m^2 - 1 = \psi_{\rho m}(0) - 1\ ).$$

Таким образом становится ясным, что искомая область оптимальности по ρ заключается в полуотрезке $(0, R_m]$. Тем самым из области оптимальности исключаются ρ, большие чем R_m, и мы в дальнейшем рассмотрим $0 < \rho \leq R_m$.

Заметим также, что

$$\psi_{\rho m}(\lambda) \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty \qquad (20)$$

и при проверке условия (I4) точка $\lambda = \infty$ не играет роли.

Для функции $\psi_{\rho m}$ известна стационарная точка (I6) – точка $\mu_{\rho m} = \sqrt[m]{\rho+1} - 1$, для которой имеем $\psi'_{\rho m}(\mu_{\rho m}) = 0$ и $\psi_{\rho m}(\mu_{\rho m}) = 1$ (см. (I7)). Дифференцируем:

$$\psi'_{\rho m}(\lambda) = \frac{2(\rho+1)}{[\sqrt[m]{\rho+1}-1]^{2\rho}(1+\lambda)^{2m+1}}\left[(\rho-m)\lambda^{2\rho} + \rho\lambda^{2\rho-1} - \frac{[\sqrt[m]{\rho+1}-1]^{2\rho+2}}{\rho}\sum_{j=1}^{2m-1} M_{mj}\lambda^{j-1}\right], \qquad (2I)$$

где константы

$$M_{mj} = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{j} \frac{m+1}{i+1}\binom{m}{j+1-i} & \text{при } j \leq m, \\ \sum\limits_{i=j-m+1}^{m} \frac{m+1}{i+1}\binom{m}{j+1-i} & \text{при } j > m. \end{cases}$$

При обозначении

$$\Phi_{pm}(\lambda) \equiv (p-m)\lambda^{2p} + p\lambda^{2p-1} - \frac{[\sqrt[m]{p+1}-1]^{2p+2}}{p}\sum_{j=1}^{2m-1} M_{mj}\lambda^{j-1}$$

имеем

$$\psi'_{pm}(\lambda) = \frac{2(p+1)}{[\sqrt[m]{p+1}-1]^{2p}(1+\lambda)^{2m+1}}\,\Phi_{pm}(\lambda).$$

Нули функций ψ'_{pm} и Φ_{pm} в области $\lambda \geq 0$ совпадают.

Пусть $p \leq \frac{1}{2}$. Тогда

$$\Phi'_{pm}(\lambda) = 2p(p-m)\lambda^{2p-1} + p(2p-1)\lambda^{2p-2} - \frac{[\sqrt[m]{p+1}-1]^{2p+2}}{p}\sum_{j=1}^{2m-1} M_{mj}(j-1)\lambda^{j-2} < 0,$$

так как второе слагаемое неположительное ($2p-1 \leq 0$), а остальные слагаемые отрицательные. Следовательно сама функция Φ_{pm} строго убывает, т.е. она не может иметь более одного нуля. А точка $\mu_{pm} = \sqrt[m]{p+1}-1$ является нулем для функций ψ'_{pm} и Φ_{pm}. Итак, $\mu_{pm} = \sqrt[m]{p+1}-1$ – единственная точка экстремума функции ψ_{pm}. Из того, что в точке экстремума

$$\psi''_{pm}(\mu_{pm}) = \frac{2(p+1)}{[\sqrt[m]{p+1}-1]^{2p}}\left[\frac{1}{(1+\mu_{pm})^{2m+1}}\Phi'_{pm}(\mu_{pm}) - \frac{2m+1}{(1+\mu_{pm})^{2m+2}}\Phi_{pm}(\mu_{pm})\right] < 0$$

(так как $\Phi'_{pm}(\mu_{pm}) < 0$ и $\Phi_{pm}(\mu_{pm}) = 0$) заключаем, что стационарная точка μ_{pm} является для ψ_{pm} точкой глобального максимума причем $\psi_{pm}(\mu_{pm}) = 1$. Итак, значения $p \in (0, \frac{1}{2}]$ входят в область оптимальности метода (2) на M_{pq_m}.

Пусть $\frac{1}{2} < p \leq \mathcal{R}_m$. Покажем, что функция Φ_{pm} имеет не более двух нулей. Действительно, если $\frac{1}{2} < p \leq \min\{1, \mathcal{R}_m\}$, то

$$\Phi''_{pm}(\lambda) = 2p(2p-1)(p-m)\lambda^{2p-2} + p(2p-1)(2p-2)\lambda^{2p-3} - \frac{[\sqrt[m]{p+1}-1]^{2p+2}}{p}\sum_{j=1}^{2m-1} M_{mj}(j-1)(j-2)\lambda^{j-3} < 0;$$

следовательно Φ'_{pm} строго убывает, а сама функция Φ_{pm} вогнута и имеет не более двух нулей. Если $1 < p \leq \mathcal{R}_m$, то

$$\Phi'''_{pm}(\lambda) = 2p(2p-1)(2p-2)(p-m)\lambda^{2p-3} + p(2p-1)(2p-2)(2p-3)\lambda^{2p-4} - \frac{[\sqrt[m]{p+1}-1]^{2p+2}}{p}\sum_{j=1}^{2m-1} M_{mj}(j-1)(j-2)(j-3)\lambda^{j-4} < 0,$$

таким образом Φ''_{pm} строго убывает, а Φ'_{pm} вогнута и, значит, имеет не более двух нулей и не более одной области положительности. Следовательно сама функция Φ_{pm} имеет не более одной области возрастания. Учитывая, что

$$\Phi_{pm}(0) = -\frac{[\sqrt{p+1}-1]^{2p+2}}{p} M_{m1} < 0,$$

$$\Phi_{pm}(\lambda) \longrightarrow -\infty \text{ при } \lambda \longrightarrow \infty,$$

можем утверждать, что Φ_{pm} имеет не более чем одну область положительности, т.е. не более двух нулей.

Таким образом число нулей функции Ψ'_{pm} тоже не более двух. Итак, функция Ψ_{pm} имеет максимально две точки экстремума. Из выражений (I9),(20),(2I) видно, что

$$\Psi_{pm}(\lambda) > 0, \ \Psi_{pm}(0) > 0, \ \Psi_{pm}(\infty) = 0, \ \Psi'_{pm}(0) < 0.$$

Тем самым ясно, что если точек экстремума две, то первая (меньшая) из них точка локального минимума, а вторая – точка локального максимума функции Ψ_{pm}. Также ясно, что своего глобального максимума, функция Ψ_{pm} достигает либо в точке локального максимума, либо на границе в точке 0. Но у нас $p \leq p_m$, т.е. $\Psi_{pm}(0) < 1$, и с другой стороны $\Psi_{pm}(\mu_{pm}) = 1$. Значит, стационарная точка μ_{pm} является для Ψ_{pm} второй (бóльшей) точкой экстремума (т.е. точкой локального максимума), а следовательно и точкой глобального максимума. Теорема доказана.

Литература

I. Вайникко Г. Методы решения линейных некорректно поставленных задач в гильбертовых пространствах. Тарту: I982.

2. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, I986.

3. Кихо Т. Оптимальный выбор параметра в методе Лаврентьева на классе истокообразно представимых решений. Уч.зап.Тартуск.ун.-а, I987, 762, 3I-39.

OPTIMAL CHOICE OF THE PARAMETER IN THE ITERATED VERSIONS OF THE LAVRENTIEV METHOD ON THE SOURCE CLASSES OF SOLUTIONS

T. Kiho

Summary

Let A be a linear continous self-conjugate non-negative operator in a Hilbert space H, with a non-closed range $\mathcal{R}(A) \subset H$. Consider the operator equation $Au=f$ and the m-step version of the Lavrentiev method (2) for it. Introduce source classes

$$\mathcal{M}_{p\rho u_0} = \{ v \in H : v - u_0 = A^p w, \|w\| \le \rho \}, \quad p>0, \rho>0 .$$

A method $P: H \mapsto H$ is called optimal on $\mathcal{M}_{p\rho u_0}$ if the estimation (3) holds. In this paper the values of p and the corresponding choice of the regularisation parameter α are indicated, for which method (2) is optimal on $\mathcal{M}_{p\rho u_0}$ (see the Theorem in Section 1).

О ВЫБОРЕ ПАРАМЕТРА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ В СЛУЧАЕ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ДАННЫХ.

Т.Раус

В настоящей работе рассматривается решение линейных некорректно поставленных задач в гильбертовом пространстве методом Лаврентьева в случае, если свободный член имеет случайные погрешности. Дается одна возможность выборе параметра, доказывается теорема сходимости и некоторая оценка для среднего значения квадрата погрешности приближенного решения.

I. Рассмотрим вероятностное пространство (Ω, F, P). Пусть $\eta = \eta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, случайная величина со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H, наделенном борелевской σ-алгеброй β. Хорошо известно, что если $\eta: (\Omega, F) \to (H, \beta)$ – случайная величина, то норма $\|\eta\| : (\Omega, F) \to (R^1, \beta^1)$ – тоже случайная величина и, таким образом, можем рассматривать выражения типа $P(\|\eta\| \le \delta) \ge \alpha$.

Рассмотрим в пространстве H уравнение

$$A u = f, \quad f \in R(A), \tag{I}$$

где оператор A – линейный, ограниченный, самосопряженный, неотрицательный. Допускается незамкнутость области значений $R(A)$ и нетривиальность ядра $N(A)$. Предполагается, что вместо f задан $f_z = f + z$, где элемент z – реализация случайной величины η (то есть $z = \eta(\omega_z)$, $\omega_z \in \Omega$) и нам известны числа α, δ_1, δ_2 такие, что

$$\|\eta\| \le \delta_1, \quad P(\|\eta\| \le \delta_2) \ge \alpha, \quad \delta_1 > \delta_2. \tag{2}$$

Предполагается, что $E\eta = 0$ (E – среднее значение). В качестве метода решения уравнения (I) рассмотрим метод Лаврентьева в виде

$$u_n^z = n(I + nA)^{-1} f_z, \tag{3}$$

где I - единичный оператор, $n > 0$ - параметр регуляризации.

Как обычно в случае случайных ошибок, погрешность приближенного решения будем характеризовать так называемой функцией риска $E\|u_n^n - u_*\|^2$ (см. напр. [I] и литературу в ней). Здесь u_* - нормальное решение уравнения (I). Используя информацию (2), оценим дисперсию случайной величины. Обозначая $\delta_3 = 0$, $\Omega_k = \{\omega : \delta_{k+1} < \|\eta(\omega)\| \le \delta_k\}$, $k = 1, 2$, получим

$$E\|\eta\|^2 = \int\limits_{\Omega} \|\eta(\omega)\|^2 dP = \sum_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} \|\eta(\omega)\|^2 dP \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{2} \delta_k^2 P(\delta_{k+1} < \|\eta(\omega)\| \le \delta_k) \le \tag{4}$$

$$\le \max_{x_1, x_2,\ x_1 + x_2 = 1,\ x_2 \ge \alpha} \sum_{k=1}^{2} \delta_k^2 x_k = (1-\alpha)\delta_1^2 + \alpha\delta_2^2 .$$

В случае известной оценки дисперсии существует выбор параметра, при котором функция риска сходится, а именно, если параметр $n = n(\delta)$, $\delta^2 = (1-\alpha)\delta_1^2 + \alpha\delta_2^2$, выбрать так, что $n(\delta) \to \infty$, $\delta n(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, то (ср. [2]) $E\|u_{n(\delta)}^n - u_*\|^2 \to 0$ при $\delta \to 0$. В данной работе рассматривается ещё одна возможность выбора параметра, при котором, кроме сходимости, мы получим оценку для функции риска.

Обозначим $B_n = (I + nA)^{-1}$. Пусть $\bar{n}_k$, $k = 1, 2$ любое значение параметра, для которого выполнены неравенства

$$b_1 \delta_k \le \|B_n (Au_n^z - f_z)\| \le b_2 \delta_k , \tag{5}$$

где $b_2 > b_1 > 1$ — заданные постоянные, причём $b_2/b_1 < \delta_1/\delta_2$. Таким образом, $\bar{n}_k$ определяются по модифицированному принципу невязки (см. [3]). Отметим, что в силу условия $\|f_z - f\| \le \delta_1$ хотя бы $\bar{n}_1$ конечно. Если $\bar{n}_2$ не существует, то положим $\bar{n}_2 = \infty$. Поскольку $f(n) = \|B_n(Au_n - f_z)\|$ — монотонно убывающая функция и $b_1\delta_1 > b_2\delta_2$, то имеет место $\bar{n}_1 < \bar{n}_2$. Обозначим $n_k = \max\{1, \bar{n}_k\}$, $k = 1, 2$. Определим функцию $F(n)$ на отрезке $[n_1, n_2]$:

$$F(n) = (1-\alpha)\|u_n^z - u_{n_1}^z\|^2 / (b_1 n_1 \delta)^2 + \tag{6}$$

$$+\alpha \| B_n(Au_n^z - f_z)\| / \sigma .$$

Сформулируем теперь правило выбора параметре.

<u>Правило II.</u> Зададим числа C_0, b_1, b_2, где $C_0 \geq 0$, $b_2 \geq b_1 > 1$, $b_2/b_1 < \delta_1/\delta_2$. В качестве параметра регуляризации $n(z) = n(f_z, \alpha, \delta_1, \delta_2)$ выберем любой параметр n такой, что

$$F(n) \leq \mathrm{glob} \min_{n_1 \leq s \leq n_2} F(s) + C_0 . \tag{7}$$

Число C_0 задается, исходя из вычислительных рассуждений, целесообразно выбрать C_0 меньше единицы. Отметим, что для разных z_1, z_2 параметры $n(z_1)$ и $n(z_2)$ в общем случае будут разные.

Укажем теперь некоторые свойства функции $F(n)$, которые полезно знать для определения значения параметра

Покажем, что имеет место неравенство

$$F(n) \geq (1-\alpha)\left[(n-n_1)\delta_2/n_1\sigma\right]^2, \quad n_1 \leq n \leq n_2 \tag{8}$$

Действительно, если $n_1 \leq n \leq n_2$, то имеем

$$\| B_n(Au_n^z - f_z)\| \geq b_1 \delta_2 ,$$

$$\| u_n - u_{n_1}\| = (n-n_1)\|(I+n_1A)^{-1}(I+nA)^{-1} f_z\| \geq$$

$$\geq (n-n_1)\|(I+nA)^{-2} f_z\| = (n-n_1)\| B_n(Au_n^z - f_z)\| \geq$$

$$\geq (n-n_1) b_1 \delta_2 ,$$

$$F(n) = (1-\alpha)\| u_n^z - u_{n_1}^z\|^2/(b_1 n_1 \sigma)^2 + \alpha \| B_n(Au_n^z - f_z)\|/\sigma \geq$$

$$\geq (1-\alpha)\| u_n^z - u_{n_1}^z\|^2/(b_1 n_1 \sigma)^2 \geq (1-\alpha)\left[(n-n_1)\delta_2/(n_1\sigma)\right]^2 .$$

Обозначим через n_* глобальный минимум функции $F(n)$ на отрезке $[n_1, n_2]$. Поскольку $F(n_1) = \alpha \| B_{n_1}(Au_{n_1}^z - f_z)\|/\sigma \leq \leq \alpha b_2 \delta_1/\sigma$ и $F(n_*) \leq F(n_1)$, то с помощью (8) получим оценку

$$n_* \leq n_1\left(1 + \sqrt{\alpha b_2 \delta_1 \sigma/(1-\alpha)\delta_2^2}\right).$$

Представим $F(n)$ в виде $F(n) = D(n) + G(n)$, где $D(n) = \alpha \| B_n(Au_n^z - f_z)\|/\sigma$, $G(n) = (1-\alpha)\| u_n^z - u_{n_1}^z\|^2/(b_1 n_1 \sigma)^2$.
Так как $\| B_n(Au_n^z - f_z)\|$ убывающая, а $\| u_n^z - u_{n_1}^z\|$ при $n \geq n_1$ возрастающая функция, то $D(n)$ и $G(n)$, соответственно, убывающая и возрастающая функция при $n_1 \leq n \leq n_2$. Таким об-

разом, мы можем оценить функцию $F(\pi)$ на любом отрезке $[\pi', \pi'']$, $\pi_1 \le \pi' \le \pi'' \le \pi_2$, так:

$$G(\pi') + D(\pi'') \le F(\pi) \le G(\pi'') + D(\pi'), \quad \pi \in [\pi', \pi''].$$

Приведем теперь один результат о модифицированном принципе невязки (доказательство см. [3]), который понадобится нам в дальнейшем. Пусть $\|f_\delta - f\| \le \delta$ и $\pi = \bar\pi = \bar\pi(\delta)$ выбран так, что для $u_\pi^\delta = \pi(I+\pi A)^{-1} f_\delta$ имеем $b_1 \delta \le$ $\le \|B_{\bar\pi}(A u_{\bar\pi}^\delta - f_\delta)\| \le b_2 \delta$ $(b_2 \ge b_1 > 1)$. Тогда

$$\|u_{\bar\pi}^\delta - u_*\| \to 0, \quad \bar\pi(\delta)\cdot\delta \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{9}$$

причём имеют место неравенства

$$\|u_{\bar\pi}^\delta - u_*\| \le \|(I+\bar\pi A)^{-1} u_*\| + \bar\pi \delta \le$$
$$\le c(b_1, b_2)\,\mathcal{U}(\delta) \le c(b_1, b_2) \cdot \sup_{f_{\delta'},\ \|f_{\delta'} - f\| \le \delta}\ \inf_{\pi \ge 0} \|u_\pi^{\delta'} - u_*\|, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{U}(\delta) = \min_{\pi \ge 0} \{\|(I+\pi A)^{-1} u_*\|^2 + \pi^2 \delta^2\}^{1/2}, \tag{11}$$

$$c(b_1, b_2) = \max(\bar c_{b_1}, \bar c_{b_2}), \quad \bar c_{b_1} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4(b_1 - 1)} + 1\right)^2}, \tag{12}$$

$$\bar c_{b_2} = (b_2 + 1) / \sqrt{(c_* - 1)(2c_* - 1)},$$

c_* – решение уравнения

$$b_2 + 1 = \sqrt{(c-1)(c^3 + 2c - 1)}. \tag{13}$$

2. Дадим теперь теорему сходимости для правила П. Под f_η в дальнейшем понимаем элемент $f + \eta(\omega)$, где $\eta(\omega)$ –произвольная реализация случайной величины η, а через u_π обозначим элемент $u_\pi^\eta = \pi(I + \pi A)^{-1} f_\eta$.

<u>Теорема I.</u> Пусть параметры $\pi = \pi(\eta)$ выбраны по правилу П. Тогда при $\sigma \to 0$ имеет место $E\|u_{\pi(\eta)} - u_*\|^2 \to 0$.

<u>Доказательство.</u> Буквой C обозначим в доказательстве постоянные (в равных местах значения C, вообще говоря, разные). Очевидно, что $\sigma \to 0$ только тогда, когда $\alpha \delta_2^2 \to 0$, $(1-\alpha)\delta_1^2 \to 0$. При этом считаем, что $\delta_1 \ge \delta_2$ при всех σ.

Аналогично, как в оценке дисперсии (4), получим

$$E\|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 \le (1-\alpha) \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_1} \|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 +$$

$$+\alpha \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_2} \|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 \le 2(1-\alpha) \sup_{f_\eta,\|f_\eta-f\|\le\delta_1} \|u_{n(\eta)}-u_{n_1}\|^2 + \quad \text{(I4)}$$

$$+2(1-\alpha) \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_1} \|u_{n_1}-u_*\|^2 + \alpha \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_2} \|u_{n(\eta)}-u_*\|^2.$$

Покажем сперва, что

$$(1-\alpha) \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_1} \|u_{n_1}-u_*\|^2 \to 0 \quad \text{(I5)}$$

при $\sigma\to 0$ (т.е. при $(1-\alpha)\delta_1^2 \to 0$). Поскольку $n_1=\max\{1,\bar n_1\}$, то имеем $\|u_{n_1}-u_*\|\le\|u_{\bar n_1}-u_*\|+\delta_1$. Теперь, используя последнее неравенство и (9), (I0), получим: $\|u_{n_1}-u_*\|\le c$, $\|u_{n_1}-u_*\|\to 0$ при $\delta_1\to 0$, и значит, сходимость (I5) имеет место.

Докажем, что

$$(1-\alpha) \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_1} \|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 \to 0 \quad \text{(I6)}$$

при $\sigma\to 0$. В силу неравенств $F(n(\eta))\le F(n_1)+C_0$ и $\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)}-f_\eta)\|\le b_1\delta_1$ получим

$$(1-\alpha)\|u_{n(\eta)}-u_{n_1}\|^2/(b_1 n_1\sigma)^2+\alpha\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)}-f_\eta)\|/\sigma \le$$

$$\le \alpha\|B_{n_1}(Au_{n_1}-f_\eta)\|/\sigma + C_0 \le \alpha b_2\delta_1/\sigma + C_0,$$

из которого следует, что

$$(1-\alpha)\|u_{n(\eta)}-u_{n_1}\|^2 \le \alpha b_2 b_1^2 n_1^2\delta_1\sigma + (b_1 n_1\sigma)^2 C_0 \le$$
$$\le c\, n_1^2\delta_1\sigma. \quad \text{(I7)}$$

Поскольку $n_1\delta_1\le c$ и $n_1\sigma\to 0$ при $\sigma\to 0$ (см. (9), (I0)), то из (I7) вытекает утверждение (I6).

Наконец докажем, что

$$\alpha \sup_{f_\eta,\ \|f_\eta-f\|\le\delta_2} \|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 \to 0 \quad \text{(I8)}$$

при $\sigma\to 0$. Рассмотрим произвольное f_η такое, что $\|f_\eta-f\|\le\delta_2$

Если $\alpha \to 0$, то в силу неравенств $n(\eta) \le n_2$ (поскольку $\|f_\eta - f\| \le \delta_2$, то n_2 – конечный) и $\|u_{n(\eta)} - u_*\|^2 \le$ $\le 2(\|u_{n(\eta)}\|^2 + \|u_*\|^2) \le 2(\|u_{n_2}\|^2 + \|u_*\|^2) \le c$ сходимость (I8) очевидна. Если $\delta_2 \to 0$, то сначала покажем, что

$$\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)} - f_\eta)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \sigma \to 0. \tag{I9}$$

В случае $\delta_2 \to 0$, $\delta_1 \to 0$ сходимость (I9) вытекает из неравенства $\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)} - f_\eta)\| \le b_2\delta_1$. В случае $\delta_2 \to 0$, $1-\alpha \to 0$, $\delta_1 \ge c$, используя неравенств $F(n(\eta)) \le F(n_2) + C_0$, $\|B_{n_2}(Au_{n_2} - f_\eta)\| \le b_2\delta_2$, получим

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\|u_{n(\eta)} - u_{n_1}\|^2/(b_1 n_1 \sigma)^2 + \alpha\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)} - f_\eta)\|/\sigma \le \\ &\le (1-\alpha)\|u_{n_2} - u_{n_1}\|^2/(b_1 n_1 \sigma)^2 + \alpha b_2\delta_2/\sigma + C_0.\end{aligned} \tag{20}$$

Оценим норму $\|u_{n_2} - u_{n_1}\|$. Имеем

$$\begin{aligned}u_{n_2} - u_{n_1} &= n_2(I+n_2A)^{-1}f_\eta - n_1(I+n_1A)^{-1}f_\eta = \\ &= -(I - n_2(I+n_2A)^{-1}A)u_* + (I - n_1(I+n_1A)^{-1}A)u_* + \\ &+ n_2(I+n_2A)^{-1}(f_\eta - f) - n_1(I+n_1A)^{-1}(f_\eta - f) = \\ &= [(I+n_1A)^{-1} - (I+n_2A)^{-1}]u_* + (n_2-n_1)(I+n_2A)^{-1}(I+n_1A)^{-1}(f_\eta - f).\end{aligned} \tag{2I}$$

Поскольку для любого $\lambda \ge 0$ справедлива

$$0 \le (1+n_1\lambda)^{-1} - (1+n_2\lambda)^{-1} \le (1+n_1\lambda)^{-1} \quad (n_2 \ge n_1)$$

и

$$\|(I+n_1A)^{-1}(I+n_2A)^{-1}(f_\eta - f)\| \le \delta_2,$$

то при помощи (2I) получим

$$\|u_{n_2} - u_{n_1}\| \le \|(I+n_1A)^{-1}u_*\| + (n_2-n_1)\delta_2. \tag{22}$$

Так как по предложению $\delta_1 \ge c$ и значит $1 \le n_1 \le c$, а в силу (I0) $n_2\delta_2 \le c$, то получим $\|u_{n_2} - u_{n_1}\|/(n_1\delta_1) \le c$. Используя последнее неравенство и неравенство $(1-\alpha)\delta_1^2 \le \sigma^2$ теперь из (20) получим

$$\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)} - f_\eta)\| \le \frac{\sigma}{\alpha}\left[\frac{(1-\alpha)\|u_{n_2} - u_{n_1}\|^2}{(b_1 n_1 \sigma)^2} + \frac{\alpha b_2\delta_2}{\sigma} + C_0\right] \le$$

$$\le \frac{(1-\alpha)\delta_1^2\sigma}{\alpha b_1^2\sigma^2}\frac{\|u_{n_2} - u_{n_1}\|^2}{(n_1\delta_1)^2} + b_2\delta_2 + \frac{C_0\sigma}{\alpha} \le c\sigma + b_2\delta_2,$$

откуда вытекает сходимость (19) при $\delta\to 0$, $\delta_2\to 0$. Поскольку
$$B_{\lambda(\eta)}(Au_{\lambda(\eta)} - f_\eta) = (I+\lambda(\eta)A)^{-2}Au_* + (I+\lambda(\eta)A)^{-2}(f_\eta - f),$$
то, с учетом (19), имеем $\|(I+\lambda(\eta)A)^{-2}Au_*\|\to 0$ и $\|(I+\lambda(\eta)A)^{-1}u_*\|\to 0$ при $\delta\to 0$ (это доказывается аналогично доказательству сходимости методов регуляризации в случае применения принципа невязки, см. [4]). Теперь сходимость (18) следует из неравенств

$$\|u_{\lambda(\eta)} - u_*\| \le \|(I+\lambda(\eta)A)^{-1}u_*\| + \lambda(\eta)\delta_2 \le$$
$$\le \|(I+\lambda(\eta)A)^{-1}u_*\| + \lambda_2\delta_2 .$$

Таким образом, в силу (14)-(16),(18) $E\|u_{\lambda(\eta)} - u_*\|^2\to 0$ при $\delta\to 0$ и теорема доказана.

3. Функцию риска будем оценивать через величину

$$\mathcal{U}_*^2(\delta) = \sup_{\bar\eta,\ E\|\bar\eta\|^2\le\delta^2}\ \inf_{\lambda\ge 0} E\|u_\lambda^{\bar\eta} - u_*\|^2$$

, которую можно понимать как наименьшее значение функции риска для метода Лаврентьева по всевозможным случайным величинам $\bar\eta$: $(\Omega, F)\to(H,\beta)$ таким, что $E\|\bar\eta\|^2\le\delta^2$. Прежде, чем дадим конкретную оценку, докажем три леммы.

<u>Лемма I.</u> Имеют место неравенства

$$\mathcal{U}(\delta) \le \mathcal{U}_*(\delta) \le \sqrt{2}\,\mathcal{U}(\delta), \qquad (23)$$

где $\mathcal{U}(\delta)$ определяется формулой (II).

<u>Доказательство.</u> Докажем оценку сверху. Имеем

$$u_\lambda^{\bar\eta} - u_* = -(I+\lambda A)^{-1}u_* + \lambda(I+\lambda A)^{-1}(f_\eta - f), \qquad (24)$$

$$\lambda\,\|(I+\lambda A)^{-1}(f_{\bar\eta} - f)\| \le \lambda\|\bar\eta\|. \qquad (25)$$

Обозначим через λ_* точку минимума функции $f(\lambda) = \|(I+\lambda A)^{-1}u_*\|^2 + \lambda^2\delta^2$. Тогда на основании (24), (25) получим

$$\mathcal{U}_*^2(\delta) \le \sup_{\bar\eta,\ E\|\bar\eta\|^2\le\delta^2} E\|u_{\lambda_*}^{\bar\eta} - u_*\|^2 \le$$

$$\le \sup_{\bar\eta,\ E\|\bar\eta\|^2\le\delta^2} E(\|(I+\lambda_* A)^{-1}u_*\| + \lambda_*\|\bar\eta\|)^2 \le$$

$$\le 2 \sup_{\bar\eta,\ E\|\bar\eta\|^2 \le \delta^2} E\left(\|(I+\alpha_* A)^{-1}u_*\|^2 + \alpha_*^2\|\bar\eta\|^2\right) =$$

$$= 2\left(\|(I+\alpha_* A)^{-1}u_*\|^2 + \alpha_*^2\delta^2\right) = 2\,\mathcal{U}^2(\delta).$$

Доказательство оценки снизу проводится аналогично доказательству леммы I в [3], где установлена оценка

$$\sup_{f_\delta,\ \|f_\delta - f\| \le \delta} \ \inf_{\alpha \ge 0} \|u_\alpha^\delta - u_*\| \ge \mathcal{U}(\delta).$$

Поэтому ограничимся здесь доказательством только в случае нетривиального ядра $N(A)$ (случай тривиального ядра $N(A)$ требует некоторых предельных переходов, см. [3]). Рассмотрим случайную величину η_0 такую, что $\eta_0(\omega) \in N(A)$ при каждом $\omega \in \Omega$ и $E\|\eta_0\|^2 = \delta^2$. Тогда в силу (24),(25) и соотношения $u_* \perp \eta_0(\omega)$, $\omega \in \Omega$, получим

$$\mathcal{U}_*^2(\delta) \ge \inf_{\alpha \ge 0} E\|u_\alpha^{\eta_0} - u_*\|^2 = \inf_{\alpha \ge 0} E\left(\|(I+\alpha A)^{-1}u_*\|^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha^2\|\eta_0\|^2\right) = \inf_{\alpha \ge 0}\left(\|(I+\alpha A)^{-1}u_*\|^2 + \alpha^2\delta^2\right) = \mathcal{U}^2(\delta).$$

Лемма 2. При любых $\delta_1 \ge \delta_2$ имеет место неравенство

$$\mathcal{U}(\delta_1)/\mathcal{U}(\delta_2) \le \sqrt{\delta_1/\delta_2}. \tag{26}$$

Доказательство. Поскольку

$$\mathcal{U}^2(\delta) = \inf_{\alpha \ge 0}\left\{\|(I+\alpha A)^{-1}u_*\|^2 + \alpha^2\delta^2\right\} =$$

$$= \inf_{\alpha \ge 0}\left\{\int_0^a (1+\alpha\lambda)^{-2}\, d\langle P(\lambda)u_*, u_*\rangle + \alpha^2\delta^2\right\},$$

то имеем

$$\frac{\mathcal{U}^2(\delta_1)}{\mathcal{U}^2(\delta_2)} \le \max_{c>0}\ \max_{\lambda>0}\left[\frac{\min_{\alpha\ge 0}\left\{c(1+\alpha\lambda)^{-2} + \alpha^2\delta_1^2\right\}}{\min_{\alpha\ge 0}\left\{c(1+\alpha\lambda)^{-2} + \alpha^2\delta_2^2\right\}}\right]. \tag{27}$$

Функция $f_i(\alpha) = c(1+\alpha\lambda)^{-2} + \alpha^2\delta_i^2$, $i \in \{1,2\}$ имеет только одну точку минимума α_i, которая определяется из уравнения

$$\lambda c/(1+\alpha_i\lambda)^3 = \alpha_i\delta_i^2. \tag{28}$$

Из последнего соотношения следует, что $\alpha_1 \le \alpha_2$, если $\delta_1 \ge \delta_2$ и

$$\delta_1\sqrt{\alpha_1(1+\alpha_1\lambda)^3} = \delta_2\sqrt{\alpha_2(1+\alpha_2\lambda)^3}. \tag{29}$$

Используя теперь равенства (28),(29) и учитывая, что функция $\rho(x) = (2x+1)\sqrt{x} / \sqrt{(x+1)^3}$ возрастающая, получим

$$\max_{t>0} \max_{\lambda>0} \left[\min_{\lambda>0} f_1(\lambda) / \min_{\lambda>0} f_2(\lambda) \right] =$$

$$= \max_{\lambda>0} \frac{(2\alpha_1\lambda+1)\alpha_1\lambda\delta_1^2}{(2\alpha_2\lambda+1)\alpha_2\lambda\delta_2^2} =$$

$$= \max_{\lambda>0} \frac{(2\alpha_2\lambda+1)}{(2\alpha_1\lambda+1)} \sqrt{\frac{\alpha_1\lambda(1+\alpha_2\lambda)^3}{\alpha_2\lambda(1+\alpha_1\lambda)^3}} \frac{\delta_1}{\delta_2} \le \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

что вместе с (27) доказывает лемму 2.

Введём однопараметрическое семейство функций

$$\Psi_p(\delta) = \mathcal{U}(\delta)/\delta^p, \quad p \in [0, 1/2]. \tag{30}$$

Легко заметить, что если $\Psi_{p_0}(\delta)$ – возрастающая функция, то функции $\Psi_p(\delta)$, $0 < p \le p_0$ – тоже возрастающие. Поскольку при любых $\delta_1 > \delta_2$ имеем $\mathcal{U}(\delta_1) > \mathcal{U}(\delta_2)$, то $\Psi_0(\delta)$ – возрастающая, а в силу леммы 2 $\Psi_{1/2}(\delta)$ – убывающая функция. Имеет место

Лемма 3. Пусть $\delta_0 \le \|(I+A)^{-2} A u_*\|$ и $\Psi_{p_0}(\delta)$, $p_0 \in [0, 1/2]$ – возрастающая функция на отрезке $[\delta_0, \bar{\delta}_0]$, $\bar{\delta}_0 = \min\{\sqrt{(1-p_0)/p_0}\,\delta_0, \ \|(I+A)^{-3/2} A^{1/2} u_*\|\}$. Тогда справедливо неравенство

$$\|(I+\alpha(\delta_0)A)^{-1} u_*\| / (\alpha(\delta_0) \cdot \|(I+\alpha(\delta_0)A)^{-2} A u_*\|) \le 1/p_0 - 1,$$

где параметр $\alpha(\delta_0)$ определён равенством

$$\|(I+\alpha(\delta_0)A)^{-2} A u_*\| = \delta_0.$$

Доказательство. Исследуем сначала функцию

$$\varphi(\alpha) = \|(I+\alpha A)^{-1} u_*\|^2 = \int_0^a (1+\alpha\lambda)^{-2} d\langle P(\lambda) u_*, u_* \rangle$$

($P(\lambda)$ – спектральное семейство проекторов оператора A). Тогда имеем

$$\varphi'(\alpha) = -2\int_0^a \lambda(1+\alpha\lambda)^{-3} d\langle P(\lambda)u_*, u_*\rangle = -2\|A^{1/2}(I+\alpha A)^{-3/2} u_*\|^2, \tag{31}$$

$$\varphi''(\alpha) = 6\int_0^a \lambda^2(1+\alpha\lambda)^{-4} d\langle P(\lambda)u_*, u_*\rangle = 6\|(I+\alpha A)^{-2} A u_*\|^2. \tag{32}$$

Используя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$[\varphi'(r)]^2 = 4\Big(\int_0^a \lambda(1+r\lambda)^{-3} d\langle P(\lambda)u_*, u_*\rangle\Big)^2 \le$$
$$\le 4\Big(\int_0^a (1+r\lambda)^{-2} d\langle P(\lambda)u_*, u_*\rangle\Big)\Big(\int_0^a \lambda^2(1+r\lambda)^{-4} d\langle P(\lambda)u_*, u_*\rangle\Big) = \tag{33}$$
$$= 2\,\varphi(r)\,\varphi''(r)\,/\,3.$$

Точка минимума $r_*(\delta)$ функции $f_\delta(r) = \varphi(r) + r^2\delta^2$ определяется из уравнения

$$-\varphi'(r_*(\delta)) = 2\,r_*(\delta)\cdot\delta^2, \tag{34}$$

причём $r_*(\delta_1) > r_*(\delta_2)$, если $\delta_1 < \delta_2$. Используя последнее неравенство и учитывая, что

$$\mathcal{U}^2(\delta) = \min_{r\ge 0}\{\|(I+rA)^{-1}u_*\|^2 + r^2\delta^2\} = \min_{r\ge 0} f_\delta(r),$$

можем функцию $\Psi^2_{p_0}(\delta)$ представить в виде

$$\Psi^2_{p_0}(\delta) = \frac{2\varphi(r_*(\delta)) - r_*(\delta)\cdot\varphi'(r_*(\delta))}{2^{1-p_0}(-\varphi'(r_*(\delta)))^{p_0}}\cdot[r_*(\delta)]^{p_0},$$

откуда по предложению леммы следует, что $t(r) = (2\varphi(r) - r\varphi'(r))r^{p_0}/(-\varphi'(r))^{p_0}$ – убывающая функция на отрезке $r \in [r_*(\bar\delta_0), r_*(\delta_0)]$. Поскольку $\varphi'(r) < 0$, $\varphi''(r) > 0$, то из условия

$$t'(r) = \Big[\frac{p_0}{r}\varphi(r) - \frac{p_0 - 1}{2}\varphi'(r)\Big]\Big[-\frac{\varphi'(r)}{r} + \varphi''(r)\Big] \le 0$$

вытекает неравенство

$$\varphi(r)/(-r\varphi'(r)) \le \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p_0} - 1\Big),\quad r\in[r_*(\bar\delta_0), r_*(\delta_0)]. \tag{35}$$

Теперь в силу (31)-(35) получим

$$\frac{\|(I+rA)^{-1}u_*\|^2}{r^2\|(I+rA)^{-2}Au_*\|^2} = \frac{6\varphi(r)}{r^2\varphi''(r)} \le 4\Big[\frac{\varphi(r)}{-r\varphi'(r)}\Big]^2 \le \tag{36}$$
$$\le (1/p_0 - 1)^2,\qquad r\in[r_*(\bar\delta_0), r_*(\delta_0)],$$

$$\frac{\delta^2}{\|(I+r_*(\delta)A)^{-2}Au_*\|^2} = \frac{-3\varphi'(r_*(\delta))}{r_*(\delta)\;\varphi''(r_*(\delta))} \le \tag{37}$$
$$\le \frac{3[\varphi'(r_*(\delta))]^2}{2\varphi(r_*(\delta))\,\varphi''(r_*(\delta))}\Big(\frac{1}{p_0} - 1\Big) \le \frac{1}{p_0} - 1,\quad r_*(\delta)\in[r_*(\bar\delta_0), r_*(\delta_0)].$$

Завершим теперь доказательство леммы. Если $r(\delta_0) \in [r_*(\bar\delta_0), r_*(\delta_0)]$, то утверждение леммы получим из (36). Если $r(\delta_0) > r_*(\delta_0)$, то используя неравенство (35), получим

$$\frac{\|(I+r(\delta_0)A)^{-1}u_*\|}{r(\delta_0)\,\|(I+r(\delta_0)A)^{-2}Au_*\|} \le \frac{\|(I+r_*(\delta_0)A)^{-1}u_*\|}{r_*(\delta_0)\,\delta_0} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\varphi(r_*(\delta_0))}{-r_*(\delta_0)\,\varphi'(r_*(\delta_0))}} \le \sqrt{\frac{1}{p_0}-1} \le \frac{1}{p_0}-1.$$

Покажем, что предположение $r(\delta_0) < r_*(\bar\delta_0)$, т.е.

$$\delta_0 = \|(I+r(\delta_0)A)^{-2}Au_*\| > \|(I+r_*(\bar\delta_0)A)^{-2}Au_*\|,$$

приводит к противоречию. Действительно, если $\bar\delta_0 = \sqrt{(1-p_0)/p_0}\;\delta_0$, то из неравенства (37), положив получим $\delta \le \|(I+r_*(\bar\delta_0)A)^{-2}Au_*\|$, а если

$$\bar\delta_0 = \|A^{1/2}(I+A)^{-3/2}u_*\|,$$

то из (34),(3I) следует, что $r_*(\bar\delta_0) = 1$ и значит,

$$\|(I+r_*(\bar\delta_0)A)^{-2}Au_*\| = \|(I+A)^{-2}Au_*\| \geqslant \delta_0 .$$

Лемма 3 доказана.

<u>Замечание I.</u> Из доказательства леммы 3 следует, что

$$\Psi_{p_*}(\delta), \qquad p_* = \left[1 + \left(\|(I+A)^{-1}u_*\| / \|(I+A)^{-3/2}A^{1/2}u_*\|\right)^2\right]^{-1},$$

в точке $\delta_* = \|(I+A)^{-3/2}A^{1/2}u_*\|$ – возрастающая функция.

4. Дадим теперь оценку для функции риска.

<u>Теорема 2.</u> Пусть p_1 – наибольшее число p, при котором функция $\Psi_p(\delta)$ (см. (30))–возрастающая на отрезке $[\delta_1, \bar\delta_1]$, $\bar\delta_1 = \min\{(b_2+1)\delta_1, \delta_*\}$ (если $\delta_1 > \bar\delta_1$, то $p_1 = p_*$, см. замечание I). Пусть p_2 – наименьшее число p, при котором имеет место неравенство

$$\Psi_p(\delta) \le \Psi_p(\sigma), \qquad \delta \in [\sigma, \delta_1]. \tag{38}$$

Пусть параметры $r = r(\eta)$ выбраны по правилу II. Тогда имеет место оценка

$$E\|u_{r(\eta)} - u_*\|^2 \le c^2(b_1,b_2)\cdot\left(T(p_2) + W(p_1,p_2)\right)\cdot$$
$$\cdot \sup_{\tilde\eta,\; E\|\tilde\eta\|^2 \le \sigma^2} \; \inf_{r \ge 0} \; E\|u_r^{\tilde\eta} - u_*\|^2 + M(\sigma), \tag{39}$$

где

$$T(p_2) = \begin{cases} \left[\sqrt{\alpha b_2 (\sigma/\delta_1)^{1-2p_2} + C_0 (\sigma/\delta_1)^{2-2p_2}} + (\sigma/\delta_1)^{1-2p_2} \right]^2, \\ \qquad \text{если} \quad n_1 > 1, \\ 2(\sigma/\delta_1)^{2-2p_2}, \quad \text{если} \quad n_1 = 1, \end{cases} \tag{40}$$

$$W(p_1, p_2) = \alpha \left[\frac{C_0}{\alpha(b_2+1)} + \frac{\delta_2}{\sigma} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{p_1} - 1\right)^2 \left(b_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4(b_1-1)}\right) \frac{1}{b_1^2 (b_2+1)\alpha} \right]^{2p_2}, \tag{41}$$

$$M(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad n_1 > 1 \\ 2\left(b_1 \sqrt{\alpha b_2 \delta_1 \sigma + \sigma^2 C_0} + \sigma\right)^2, & \text{если} \quad n_1 = 1, \end{cases}$$

а коэффициент $c(b_1, b_2)$ определён формулами (I2)-(I3).

Обсудим результат теоремы 2. Поскольку функция $\mathcal{U}(\sigma)$ и следовательно, функция $\Psi_p(\sigma)$, определены решением u_* уравнения (I), то можно сказать, что коэффициент оценки (39) $Q = c^2(b_1, b_2)(T(p_2) + W(p_1, p_2))$ существенно зависит от решения u_*. Таким образом, выбор параметра по правилу П оптимален по порядку, но порядок зависит от решения u_*. Исследуем эту зависимость подробнее. Пусть $C_0 = 0$, $\delta_1 \gg \sigma$, $\delta_2 \ll \sigma$, $n_1 = 1$. Тогда

$$Q \approx Q_0 = c^2(b_1, b_2)\left[b_2 \left(\frac{\sigma}{\delta_1}\right)^{1-2p_2} + \left(\frac{(1/p_1 - 1) b_2 (1 + 1/4(b_1 - 1))}{b_1 \sqrt{b_2 + 1}} \right)^{4p_2} \right]$$

В таблице приведена зависимость коэффициента $\sqrt{Q_0}$ от p_1 и p_2, если $b_1 = b_2 = 1{,}53$ (тогда величина $c(b_1, b_2)$ имеет минимальное значение) и $\delta_1/\sigma = 100$.

p_1 \ p_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{100}$
I/2	2,74	I,97	I,84	I,82	I,80	I,79	I,78
I/3	4,32	2,85	2,5I	2,24	2,05	I,92	I,8I
I/4	5,37	3,55	3,04	2,56	2,2I	I,99	I,83
I/6	8,47	5,02	3,88	3,0I	2,44	2,I0	I,85
I/I0	I4,9	7,35	5,I6	3,63	2,74	2,24	I,87
I/20	3I,5	I2,0	7,47	4,65	3,I7	2,38	I,89
I/I00	I63	36,0	I7,0	8,0I	4,40	2,8I	I,96

Из таблицы видно, что коэффициент $\sqrt{Q_0}$ будет большим ($\sqrt{Q_0} \geq \bar{c} \geq 5$) только тогда, когда p_1 малый, а именно, если $p_1 \leq p(\bar{c}, p_2) = [1 + (\bar{c}/c(b_1, b_2))^{\frac{1}{p_2}}]^{-1}$.

Если функция $\mathcal{U}(\delta)$ (а вспомним, что по лемме I $\mathcal{U}(\delta) \approx \mathcal{U}_*(\delta)$ - наименьшее значение функция риска) на отрезке $[\delta, \delta_1]$ убывает со скоростью δ^p, $p \leq p_2$, $p_2 \in [0, 1/2]$, а на отрезке $[\delta_1, \bar{\delta}_1]$ скорость убывания больше чем $\delta^{p(\bar{c}, p_2)}$, то $\sqrt{\varphi_0} \leq \bar{c}$. Таким образом, для широкого класса решений u_* коэффициент $\sqrt{\varphi_0}$ будет малым и выбор по правилу П даёт хорошие результаты. Отметим, что в случае малого p_1 параметр $n(\eta) \approx n_1$ и мы приблизительно имеем дело принципом невязки (5) по погрешности δ_1.

<u>Доказательство теоремы 2.</u> Имеем

$$E\|u_{n(\eta)} - u_*\|^2 \leq (1-\alpha) \sup_{f_\eta, \|f_\eta - f\| \leq \delta_1} \|u_{n(\eta)} - u_*\|^2 + \alpha \sup_{f_\eta, \|f_\eta - f\| \leq \delta_2} \|u_{n(\eta)} - u_*\|^2. \tag{42}$$

I Оценим первое слагаемое в неравенстве (42). Аналогично доказательству теоремы I при произвольном элементе f_η получим

$$(1-\alpha)\|u_{n(\eta)} - u_{n_1}\|^2 \leq \alpha b_2 b_1^2 n_1^2 \delta_1 \delta + (b_1 n_1 \delta)^2 C_0 = (b_1 n_1 \delta_1)^2 [\alpha b_2 \delta/\delta_1 + C_0 \delta^2/\delta_1^2]. \tag{43}$$

Оценим величину $b_1 n_1 \delta_1$ в случае $n_1 = \bar{n} > 1$. Имеем

$$B_n(Au_n - f_\eta) = (I + nA)^{-2} A u_* + (I + nA)^{-2}(f_\eta - f), \tag{44}$$

$$\|(I + nA)^{-2}(f_\eta - f)\| \leq \|f_\eta - f\|. \tag{45}$$

Поскольку при параметре n_1 выполнены неравенства (5), то используя (44),(45), получим

$$(b_1 - 1)\delta_1 \leq \|(I + n_1 A)^{-2} A u_*\| \leq (b_2 + 1)\delta_1. \tag{46}$$

Далее поскольку

$$\frac{\|(I + nA)^{-1} u_*\|}{n\|(I + nA)^{-2} A u_*\|} \geq \min_{\lambda \geq 0,\, n \geq 0} \frac{1 + n\lambda}{n\lambda} = 1,$$

то при помощи (46) получим

$$\frac{\|(I+n_1 A)^{-1}u_*\|}{n_1\delta_1} \geq \frac{\|(I+n_1 A)^{-1}u_*\|(b_1-1)}{n_1\|(I+n_1 A)^{-1}Au_*\|} \geq b_1-1. \quad (47)$$

Наконец, используя (I0),(23),(38),(47), можем оценить

$$\begin{aligned} b_1 n_1\delta_1 &\leq \|(I+n_1 A)^{-1}u_*\|+n_1\delta_1 \leq c(b_1,b_2)\,U(\delta_1)\leq \\ &\leq c(b_1,b_2)\,(\delta_1/\delta)^{p_2}\,U(\delta)\leq c(b_1,b_2)(\delta_1/\delta)^{p_2}\,U_*(\delta). \end{aligned} \quad (48)$$

Используя неравенств (I0),(38), получим

$$\|u_{\bar n_1}-u_*\|\leq c(b_1,b_2)\,(\delta_1/\delta)^{p_2}\,U_*(\delta). \quad (49)$$

Теперь при помощи (43),(48),(49), и неравенства $(1-\alpha)\delta_1^2\leq$ $\leq\delta^2$ в случае $n_1=\bar n_1$ получим

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 &\leq \left(\sqrt{1-\alpha}\,\|u_{n(\eta)}-u_{\bar n_1}\|+\sqrt{1-\alpha}\,\|u_{\bar n_1}-u_*\|\right)^2\leq \\ &\leq c^2(b_1,b_2)\left[\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{p_2}\sqrt{\frac{\alpha b_2\delta}{\delta_1}+\frac{C_0\delta^2}{\delta_1^2}}+\sqrt{1-\alpha}\left(\frac{\delta_1}{\delta}\right)^{p_2}\right]^2 U_*^2(\delta)\leq \quad (50) \\ &\leq c^2(b_1,b_2)\left[\sqrt{\alpha b_2\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{1-2p_2}+C_0\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{2-2p_2}}+\left(\frac{\delta}{\delta_1}\right)^{1-p_2}\right]^2 U_*^2(\delta). \end{aligned}$$

В случае $n_1=1$ в силу неравенств (43),(49) и

$\|u_{n_1}-u_*\|\leq\|u_{\bar n_1}-u_*\|+\delta_1$ имеем

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\|u_{n(\eta)}-u_*\|^2 &\leq [\,b_1\sqrt{\alpha b_2\delta_1\delta+C_0\delta^2}+\sqrt{1-\alpha}\,\delta_1+ \\ &+\sqrt{1-\alpha}\,c^2(b_1,b_2)\,(\delta_1/\delta)^{p_2}\,U_*(\delta)\,]^2\leq \quad (51) \\ &\leq 2c^2(b_1,b_2)(\delta/\delta_1)^{2-2p_2}\,U_*^2(\delta)+2\left(b_1\sqrt{\alpha b_2\delta_1\delta+C_0\delta^2}+\delta\right)^2. \end{aligned}$$

II Оценим величину $\alpha \sup\limits_{f_\eta,\,\|f_\eta-f\|\leq\delta_2}\|u_{n(\eta)}-u_*\|^2.$

Рассмотрим произвольное f_η такое, что $\|f_\eta-f\|\leq\delta_2$. В силу неравенств $F(n(\eta))\leq F(n_2)+C_0$, $\|B_{n_2}(Au_{n_2}-f_\eta)\|\leq b_2\delta_2$ (в случае $\|f_\eta-f\|\leq\delta_2$ параметр n_2 – конечный) имеем

$$\begin{aligned} (1-\alpha)\|u_{n(\eta)}-u_*\|^2/(b_1 n_1\delta)^2+\alpha\|B_{n(\eta)}(Au_{n(\eta)}-f_\eta)\|/\delta &\leq \\ \leq (1-\alpha)\|u_{n_2}-u_{n_1}\|^2/(b_1 n_1\delta)^2+\alpha b_2\delta_2/\delta+C_0. \end{aligned} \quad (52)$$

Оценим величину $\|u_{n_2}-u_{n_1}\|^2/n_1\delta_1$. Используя (5),(44),(45), получим

$$\| (I+n_2 A)^{-2} A u_* \| \geq (b_1 - 1)\delta_2 . \tag{53}$$

При любых $n_1 \leq n_2$ имеем

$$\| (I+n_2 A)^{-2} A u_* \| \leq \| (I+n_2 A)^{-2} (I+n_1 A) A \| \cdot$$

$$\cdot \| (I+n_1 A)^{-1} u_* \| \leq \max_{\lambda \geq 0} [\lambda (1+n_1\lambda)(1+n_2\lambda)^{-2}] \cdot$$

$$\cdot \| (I+n_1 A)^{-1} u_* \| \leq \| (I+n_1 A)^{-1} u_* \| / 4(n_2 - n_1),$$

что вместе с (53) дает

$$\delta_2 (n_2 - n_1) \leq \| (I+n_1 A)^{-1} u_* \| / 4(b_1 - 1).$$

Используя теперь неравенство (22), получим

$$\frac{\| u_{n_2} - u_{n_1} \|}{n_1 \delta_1} \leq \frac{\| (I+n_1 A)^{-1} u_* \| + (n_2 - n_1)\delta_2}{n_1 \delta_1} \leq$$

$$\leq \frac{\| (I+n_1 A)^{-1} u_* \|}{n_1 \delta_1} \left(1 + \frac{1}{4(b_1 - 1)} \right). \tag{54}$$

Далее, в силу (5), (44), (45) имеем

$$\| (I+n_1 A)^{-2} A u_* \| \leq \| (I+\bar{n}_1 A)^{-2} A u_* \| \leq b_2 \delta_1 + \delta_2 ,$$

а поскольку $n_1 \geq 1$, то

$$\| (I+n_1 A)^{-2} A u_* \| \leq \| (I+A)^{-2} A u_* \| .$$

Теперь, используя лемму 3, получим

$$\frac{\| (I+n_1 A)^{-1} u_* \|}{n_1 \delta_1} = \frac{\| (I+n_1 A)^{-1} u_* \|}{n_1 \| (I+n_1 A)^{-2} A u_* \|} \cdot \frac{\| (I+n_1 A)^{-2} A u_* \|}{\delta} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\rho_1} - 1 \right) \left(b_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right). \tag{55}$$

Таким образом, при помощи (54),(55) из неравенства (52) получим

$$\frac{\alpha \| B_{n(\eta)} (A u_{n(\eta)} - f_\eta) \|}{\delta} \leq \frac{\alpha b_2 \delta_2}{\delta} + (1-\alpha) \left(\frac{1}{\rho_1} - 1 \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \left(b_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{4(b_1 - 1)} \right)^2 \frac{1}{b_1^2} \frac{\delta_1^2}{\delta^2} + C_0 ,$$

и значит

$$\| B_{n(\eta)} (A u_{n(\eta)} - f_\eta) \| \leq (b_2 + 1)\omega(\rho_1)\, \delta - \delta_2 ,$$

где

$$\omega(p_1) = \left(\frac{1}{p_1} - 1\right)^2 \left(b_2 + \frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{4(b_1 - 1)}\right)^2 \frac{1}{b_1^2 (b_2+1)\alpha} + \frac{C_0}{\alpha(b_2+1)} + \frac{\delta_2}{\sigma}.$$

С другой стороны, поскольку $n(\eta) \leq n_2$, то

$$\| B_{n(\eta)} (A u_{n(\eta)} - f_\eta) \| \geq b_1 \delta_2 .$$

Теперь, используя (I0),(38), получим

$$\alpha \| u_{n(\eta)} - u_* \|^2 \leq \alpha c^2(b_1, b_2) \cdot \mathcal{U}^2(\omega(p_1)\sigma) \leq$$
$$\leq \alpha c^2(b_1, b_2) [\omega(p_1)]^{2p_2} \mathcal{U}_*^2(\sigma)$$

что вместе с (42),(50),(5I) доказывает теорему 2.

Литература

I. Ф е д о т о в А.М. Линейные некорректные задачи со случайными ошибками в данных. Новосибирск: Наука, I982.

2. М о р о з о в В.А. Об оптимальной регуляризации операторных уравнений. Журн. вычислит. мат. и мат. физ., I970, т.I0,№4, с. I34I-I349.

3. Р а у с Т. О принципе невязки при решении некорректных задач. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I984, 672,I6-26.

4. В а й н и к к о Г.М., В е р е т е н н и к о в А.Ю. Итерационные процедуры в некорректных задачах. Москва: Наука, I986.

ABOUT THE CHOICE OF REGULARIZATION PARAMETER IN CASE OF RANDOM ERRORS OF INITIAL DATA.

T. Reus

Summary

This article deals with solving of an ill-posed problem (I) by Lavrentjev method (3) when the errors of the right hand term are random (see (2)). We give a prescription for parameter choice (see rule П), prove the convergence and deduce error estimations (Theorems I,2).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS INHALT