TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI
TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

596

FUNKTSIONAALANALÜÜSI JA FUNKTSIOONITEOORIA RAKENDUSED

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 596 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г.

FUNKTSIONAALANALÜÜSI JA FUNKTSIOONITEOORIA RAKENDUSED

ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

Matemaatika- ja mehaanika-alaseid töid

Труды по математике и механике

ТАРТУ 1982

ОБЩИЕ СВОЙСТВА МНОЖИТЕЛЕЙ СУММИРУЕМОСТИ

Г.Кангро

Тартуский государственный университет

В настоящей статье[1] рассматривается связь между множителями суммируемости в FK-пространствах, имеющих общий счетный базис, и множителями суммируемости в сопряженных пространствах.

Пусть A и B — два FK-пространства с элементами[2] $x=(\xi_k)$, $y=(\eta_k)$, ... Комплексные числа ε_k будем называть множителями суммируемости типа (A,B), если для любого $x\in A$ элемент $\mathcal{U}x\in B$, где

$$\mathcal{U}x=(\varepsilon_k\xi_k). \tag{1}$$

В случаях, когда $B=c$ или $B=\ell$ числа ε_k будем называть множителями сходимости. Через (A,B) будем также обозначать множество всех последовательностей $\varepsilon=(\varepsilon_k)$, являющихся множителями суммируемости типа (A,B).

Определяя множители суммируемости в FK-пространствах A и B, можно одновременно находить интересные общие свойства множителей суммируемости в ряде (первого и второго родов) и в последовательности (см.[1], стр. 195 и 223). Это достигается соответственным выбором пространств A и B. Например, (ℓ,ℓ) — множители сходимости второго рода, (c,ℓ) —

---

[1] Статья написана на основе найденного наброска проф. Г.Кангро его учениками С.Бароном и Э.Юримяэ. Хотя лемма и теорема статьи уже известны в более общем виде (см.[5], предложение 4, и [6], предложение 3.2), все же статья вполне достойна опубликования, ибо простыми интересными рассуждениями она указывает на возможности одновременного изучения множителей суммируемости в ряде и в последовательности нахождения множителей суммируемости.

[2] Свободные индексы и индексы суммирования принимают все значения 0,1,... .

множители сходимости первого рода, а (m,c) — множители сходимости в последовательности.

Лемма. Пусть оператор $\mathcal{U}: A \to B$ определен равенством (1), где $x \in A$. Если $\varepsilon \in (A,B)$, то $\mathcal{U}$ — непрерывный линейный оператор.

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ в A и $\mathcal{U}x_n \to y$ в B. Покажем, что $y = \mathcal{U}x$. Так как $\varepsilon \in (A,B)$, то обозначая $x_n = (\xi_k^n)$, получаем

$$\mathcal{U}x_n = (\varepsilon_k \xi_k^n).$$

Ввиду покоординатной сходимости имеем

$$\lim_n \xi_k^n = \xi_k \quad , \quad \lim_n \varepsilon_k \xi_k^n = \eta_k ,$$

откуда

$$\eta_k = \varepsilon_k \lim_n \xi_k^n = \varepsilon_k \xi_k ,$$

т.е.

$$y = \mathcal{U}x$$

По теореме о замкнутом графике ([4], стр. 61) оператор $\mathcal{U}$ непрерывен, так как он линеен. Лемма доказана.

Обозначим через A' и B' пространства, сопряженные для A и B соответственно.

Теорема. Пусть A и B обладают одним и тем же счетным базисом (e_k). Тогда

$$(A,B) \subset (B',A').$$

Доказательство. Пусть $x \in A$ и $y \in B$. Так как (e_k) — общий базис для A и B, то[2]

$$x = \sum_k \xi_k e_k \quad , \quad y = \sum_k \eta_k e_k .$$

Если $f \in A'$ и $g \in B'$, то, обозначая

$$f_k = f e_k \quad , \quad g_k = g e_k ,$$

получаем

$$f x = \sum_k f_k \xi_k \quad , \quad g y = \sum_k g_k \eta_k . \qquad (2)$$

Таким образом можем f и g рассматривать как последовательности $f = (f_k)$ и $g = (g_k)$. Если $\varepsilon \in (A,B)$, то по лемме оператор $\mathcal{U}$, определенный равенством (1), непрерывен, и, следовательно, положив для любого $g \in B'$

$$f = g \circ \mathcal{U} \in A'$$

и учитывая второе из равенств (2), находим

$$fx = g(\mathcal{U}x) = \sum_k g_k \varepsilon_k \xi_k = \sum_k \varepsilon_k g_k \xi_k .$$

Последнее означает, что $\mathcal{U}g = (\varepsilon_k g_k) \in A'$ для любого $g \in B$, т.е. $\varepsilon \in (B', A')$.

Применим теорему в случае, когда $A = \ell^p$ и $B = \ell^r$. Это возможно, так как при всех $p \geq 1$ пространства ℓ^p имеют общий счетный базис (e_k), где $e_k = (\delta_{k\nu})$ и $\delta_{k\nu}$ — символ Кронеккера.

Действительно, пусть $p, r > 1$. Определим q и s равенствами

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 , \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1.$$

Так как $(\ell^p)' = \ell^q$ и $(\ell^r)' = \ell^s$, то по теореме и замечанию при конечных $p, r > 1$, ввиду реверсивности ℓ^p и ℓ^r;

$$(\ell^p, \ell^r) = (\ell^s, \ell^q) . \tag{3}$$

Рассмотрим верно ли (3) при всех $1 \leq p, r \leq \infty$, где $\ell^1 = \ell$ и $\ell^\infty = m$. По доказанному остается рассмотреть лишь частные случаи формулы (3), когда p и r равны 1 или ∞, полагая $1/\infty = 0$.

1) Частный случай $r = 1$. Так как $\ell' = m$ и $(c_0)' = \ell$, а c_0 и ℓ^q имеют общий счетный базис (e_k), то по теореме имеем $(\ell^p, \ell) \subset (m, \ell^q)$ и $(c_0, \ell^q) \subset (\ell^p, \ell)$. Отсюда при помощи очевидного ввиду $c_0 \subset m$ включения $(m, B) \subset (c_0, B)$ выводим, что

$$(\ell^p, \ell) = (m, \ell^q). \tag{4}$$

Если $p = 1$, то

$$(\ell, \ell) = (m, m) = m . \tag{5}$$

Действительно, по теореме $(\ell, \ell) \subset (m, m)$. Обратно, если $\varepsilon \in (m, m)$, то $\varepsilon \in m$ (ибо при $\varepsilon \notin m$ и $e = (1)$ имеем $\mathcal{U}e \notin m$ и, тем самым $\varepsilon \in (\ell, \ell)$, ибо $(\ell, \ell) = m$ (см., например, [1] стр. 189, следствие 22.3), т.е. $(m, m) \subset m$, чем (5) доказано.

Если $p = \infty$, то $\ell^q = \ell$ и (4) получает тривиальный вид $(m,l)=(m,l)$.

Таким образом, при $1\leq p\leq\infty$

$$(l^p,l)=(m,l^q). \tag{6}$$

2) Частный случай $q=\infty$. Так как l^∞ не обладает счетным базисом, то поступим следующим образом. По теореме при $p>1$

$$(l,l^q)\subset(l^p,m). \tag{7}$$

Докажем сначала, что при $p\geq 1$

$$(l^p,m)\subset(l^p,c_0). \tag{8}$$

Для этого предположим, что $\varepsilon\in(l^p,m)$. Тогда для любого $x\in l^p$ имеем $\mathcal{U}x\in m$. Следовательно, матричное преобразование

$$\eta_n=\sum_k\alpha_{nk}\xi_k$$

с $\alpha_{nk}=\varepsilon_n$ при $k=n$ и $\alpha_{nk}=0$ при $k\neq n$ переводит любую последовательность $(\xi_k)\in l^p$ в ограниченную последовательность $\eta_n=(\varepsilon_n\xi_n)$. Тогда (см., например, [1], теорема 3.2, и 7 , теорема X111a) $\alpha_{nk}=O(1)$ при $p=1$, т.е. $\varepsilon_n=O(1)$ и $\sum_k|\alpha_{nk}|^q=O(1)$ при $p>1$, или $|\varepsilon_n|^q=O(1)$, откуда также $\varepsilon\in m$. Тогда[3] $\varepsilon\in(l^p,c_0)$, ибо $m\subset(l^p,c_0)$ ввиду $l^p\subset c_0$, чем включение (8) доказано. Но по теореме $(l^p,c_0)\subset(l,l^q)$. Поэтому ввиду (7) при всех $p>1$

$$(l,l^q)=(l^p,m). \tag{9}$$

Если $p=1$, то имеем очевидность $(l,m)=(l,m)$.

Если $p=\infty$, то получаем $(l,l)=(m,m)$, что ввиду (5) имеет место.

Таким образом, при $1\leq p\leq\infty$ доказана формула (9).

3) Частичный случай $p=1$ дает $(l,l^r)=(l^1,m)$, что ввиду (9) имеет место при любом r.

4) Частичный случай $p=\infty$ дает $(m,l^r)=(l^s,l)$, что ввиду (6) верно при любом r.

Итак, доказано

Следствие 1. При любых p и r с $1\leq p\leq\infty$ и $1\leq r\leq\infty$ имеет место формула (3).

---

[3] На самом деле $(l^p,m)=(l^p,c_0)=m$ при любом конечном (см. ниже следствие 3).

Рассмотрим теперь множители суммируемости, где одно из пространств является c, которое не имеет счетного базиса.

Докажем, что имеет место

Следствие 2. При любом p с $1 \leq p \leq \infty$

$$(c, \ell^p) = (m, \ell^p). \tag{10}$$

Доказательство. С одной стороны, так как $c_0 \subset c \subset m$, то $(m, B) \subset (c, B) \subset (c_0, B)$. С другой стороны, при $p > 1$ по теореме $(c_0, \ell^p) \subset (\ell^q, \ell) \subset (m, \ell^p)$, т.е. формула (10) при $p > 1$ доказана.

При $p = 1$ формула (10) получает вид $(c, \ell) = (m, \ell)$, что верно, ибо $(m, \ell) \subset (c, \ell) \subset (c_0, \ell)$, а по теореме $(c_0, \ell) \subset$ $\subset (m, \ell)$.

При $p = \infty$ формула (10) получает вид $(c, m) = (m, m)$, что также верно. Действительно, мы видели, что $(m, m) \subset$ $\subset (c, m)$. Обратно, если $\varepsilon \in (c, m)$, то для любого $x \in c$ имеем $\varepsilon_n \xi_n = O(1)$. В частности, при $x = e$ имеем $\varepsilon_n = O(1)$, т.е. $\varepsilon \in m = (m, m)$ ввиду (5). А тогда $\varepsilon \in (m, m)$, т.е. $(c, m) \subset (m, m)$.

Следствие 3. При любом конечном $p \geq 1$

$$(\ell^p, c) = (\ell^p, m). \tag{11}$$

Доказательство. Так как $c \subset m$, то $(A, c) \subset$ $\subset (A, m)$ и, применяя (8), получаем требуемое.

При $p = \infty$ формула (11) переходит в $(m, c) = (m, m)$, что не имеет места. Действительно, мы видели, что $(m, c) \subset$ $\subset (m, m)$, но не наоборот, ибо при $\varepsilon \in (m, m)$, т.е. при $\varepsilon \in m$, и $x = e$ последовательность $(\varepsilon_n \xi_n) = (\varepsilon_n)$ не должна сходиться. Фактически же $(m, m) = m$ ввиду (5) и $(m, c) = c_0$ (см., например, [2], следствие 2, и [1], теорема 17.9).

Следствие 4. Имеет место строгое включение

$$(c, c_0) \subset (\ell, \ell). \tag{12}$$

Доказательство. Так как $(c, c_0) \subset (c_0, c_0)$ и по теореме $(c_0, c_0) \subset (\ell, \ell)$, то (12) имеет место. Однако обратное включение не имеет места, ибо ввиду (5) имеем $(\ell, \ell) =$ $= m$. Действительно, если $x \in c$, например, $x = e$, то $(\varepsilon_n \xi_n) =$ $= (\varepsilon_n)$ не сходится для любого $\varepsilon \in m$.

Литература

1. Б а р о н С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. К а н г р о Г., Т ы н н о в М., Множители суммируемости в последовательности для метода взвешенных средних Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 249-262.
3. К а ч м а ж С., Ш т е й н г а у з Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
4. Р у д и н У., Функциональный анализ. Москва, 1975.
5. Т я х т Т., Мультипликаторы и дополнительные пространства BK-пространств. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 874, 141-154.
6. Т я х т Т., Мультипликаторы BK-пространств. Уч.зап.Тартуск. ун-та, 1977, 430, 29-43.
7. Hahn, H., Über Folgen linearen Operationen Monatsh. Math. und Phys., 1922, 32, 3-88.

Поступило 21 08 1979

General properties of the summability factors

G.Kangro

Summary

Let A and B are FK-spaces, A' and B' their dual spaces. A sequence $\varepsilon=(\varepsilon_k)$ is called the sequence of the summability factors of the type (A,B) if $(\varepsilon_k\xi_k)\in B$ for all $(\xi_k)\in A$.

Theorem: If A and B have the same denumerable basis (e_k) then

$$(A,B)\subset(B',A').$$

As applications of this general theorem the following relations are given:

1) $(A,B)=(B',A')$ for the reflexive spaces A and B;

2) $(\ell^p,\ell^r)=(\ell^s,\ell^q)$, $1\le p,r\le\infty$ ($\ell^\infty=m$) and

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad \frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1;$$

3) $(c,\ell^p)=(m,\ell^p)$, $1\le p\le\infty$;

4) $(\ell^p,c)=(\ell^p,m)$, $1\le p<\infty$;

5) $(c,c_0)=(\ell,\ell)$.

ТЕОРЕМА ВИЛАНСКОГО-ЦЕЛЛЕРА ДЛЯ СУММИРУЕМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ

Э.Юриммэ

Тартуский государственный университет

В одной из оставшихся заметок проф. Г.Кангро был сформулирован для суммируемости со скоростью аналог теоремы Виланского-Целлера [2] о суммируемости ограниченных расходящихся последовательностей. Им представлена и схема доказательства соответствующей теоремы для таких λ-консервативных методов $A=(a_{nk})$, для которых[1] $a_k = 0$. Проработав эти рукописные заметки своего учителя, автор нашел доказательство в общем случае, которое и приводится в данной статье. При этом из доказательства выделены некоторые предложения, которые могут быть полезными при изучении других свойств методов суммирования со скоростью.

1. Используемые понятия и факты

Пусть $\lambda=(\lambda_k)$ - некоторая возрастающая последовательность чисел. Для всех сходящихся последовательностей $x=(\xi_k)$ определим последовательности[2] $b=(\beta_k)$ с $\beta_k=\lambda_k(\xi_k-\xi)$, где $\xi=\lim \xi_k$. Последовательность x называется λ-сходящейся, если соответствующая последовательность b сходится, и λ-ограниченной, если b ограничена. Если $b \notin m$, то последовательность x называем λ-неограниченной. Множества $c^\lambda = \{x : b \in c\}$ и $m^\lambda=\{x : b \in m\}$ являются BK- пространствами с нормой $\|x\| = \sup\{|\beta_k|, |\xi|\}$ (см. [1]). Пусть метод A определен матрицей (a_{nk}) преобразования последовательности в последовательность. Последовательность x называется A^λ-сум-

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то изменение происходит от 0 до ∞.

[2] Если надо подчеркнуть зависимость от x, то пишем $b(x)$, $\beta_k(x)$ и т.д.

2

мируемой, если существует $\lim \gamma_n = \gamma$, где $\gamma_n = \lambda_n(\eta_n - \eta)$, $\eta_n = \sum a_{nk}\xi_k$ и $\eta = \lim \eta_n$. Множество всех A^λ-суммируемых последовательностей обозначаем через $c^\lambda A$. Оно является FK-пространством (см. [1]) с полунормами

$$|\xi_k|, \qquad \sup_m \left|\sum_{k=0}^m a_{nk}\xi_k\right|, \qquad \sup\{|\gamma_n|, |\eta|\}. \quad (1)$$

В пространстве $c^\lambda A$ каждый линейный непрерывный функционал определяется формулой

$$f(x) = d\eta + t\gamma + \sum_n d_n\gamma_n + \sum_k t_k\xi_k, \quad (2)$$

где $\sum|d_n| < \infty$ и коэффициенты t_k таковы, что ряд $\sum t_k$ сходится при всех $x \in c^\lambda A$.

Метод A называется λ-консервативным, если $A(c^\lambda) \subseteq c^\lambda$. Для λ-консервативного метода A последовательности $e_\nu = (\delta_{k\nu})$, $e = (\delta_{kk})$ и $e^\lambda = (1/\lambda_k)$ принадлежат пространству $c^\lambda A$. Имеет место (см. [1], лемма 3) следующая

Лемма. Метод $A = (a_{nk})$ является λ-консервативным тогда и только тогда, когда

1⁰ $A(e) \in c^\lambda$,

2⁰ $\sum(|a_k|/\lambda_k) < \infty \quad (a_k = \lim_n a_{nk})$,

3⁰ $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ с

$$\alpha_{nk} = \frac{\lambda_n(a_{nk} - a_k)}{\lambda_k} \quad (3)$$

консервативен.

Если для последовательности e^λ имеет место слабая сходимость по отрезкам в $c^\lambda A$, то λ-консервативный метод A называется λ-конулевым, в противном случае λ-корегулярным (см. [1]). В последнем случае

$$\varrho(\mathfrak{A}) = \alpha - \sum \alpha_k \neq 0,$$

где

$$\alpha = \lim_n \sum_k \alpha_{nk}, \quad \alpha_k = \lim_n \alpha_{nk}.$$

Если $\lambda_k = \mathcal{O}(1)$, то λ-консервативность совпадает с консервативностью и имеют место равенства $c^\lambda = m^\lambda = c$ и $\varrho(\mathfrak{A}) = \varrho(A)$ (см. [1]). Из этого следует, что в случае $\lambda_k = \mathcal{O}(1)$ топологические свойства λ-консервативных методов не отличаются от свойств консервативных методов суммирования. Поэтому в дальнейшем предполагаем, что $\lambda_k \neq \mathcal{O}(1)$.

2. Некоторые предложения

Оказывается, что многие свойства поля $c^\lambda A$ выражаются через свойства поля суммируемости метода $\mathfrak{A}=(\alpha_{nk})$, где α_{nk} определяются формулой (3). Поле суммируемости метода $\mathfrak{A}$ обозначаем через $c\mathfrak{A}$. Оно являэтся FK-пространством с полунормами

$$|\beta_k|,\quad \sup_m\Big|\sum_{k=0}^{m}\alpha_{nk}\beta_k\Big|,\quad \sup_n\Big|\sum_k\alpha_{nk}\beta_k\Big|,$$

где $b=(\beta_k)$ - точка поля $c\mathfrak{A}$. В пространстве $c\mathfrak{A}$ каждый линейный непрерывный функционал f определяется формулой

$$f(b)=\sum_k\tau_k\beta_k+\sum_n d_n\sum_k\alpha_{nk}\beta_k+\sigma\lim_n\sum_k\alpha_{nk}\beta_k\,, \qquad (4)$$

в которой $\sum|d_n|<\infty$ и коэффициенты τ_k таковы, что ряд $\sum\tau_k\beta_k$ сходится при всех $b=(\beta_k)\in c\mathfrak{A}$.

Докажем сперва следующее

Предложение 1. Если A λ-консервативен, то всякий линейный непрерывный функционал в пространстве $c^\lambda A$ на множестве $c\cap c^\lambda A$ определяется формулой

$$f(x)=\sum_k\sigma_k\beta_k+\sum_n d_n\sum_k\alpha_{nk}\beta_k+\sigma\lim_n\sum_k\alpha_{nk}\beta_k+\mu\xi, \qquad (5)$$

где $\sum|d_n|<\infty$ и коэффициенты σ_k таковы, что ряд $\sum\sigma_k\lambda_k\xi_k$ сходится при всех $x\in c_c\cap c^\lambda A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x\in c$, то $\xi_k=\beta_k/\lambda_k+\xi$,

$$\eta=\sum_k a_k\xi_k+\varrho(A)\xi=\sum_k\frac{a_k}{\lambda_k}\beta_k+a\xi\,,$$

$$\gamma_n=\sum_k\alpha_{nk}\beta_k+\xi\gamma_n(e)\,,$$

$$\gamma=\lim_n\sum_k\alpha_{nk}\beta_k+\xi\gamma(e).$$

При помощи этих соотношений из (2) получаем формулу (5) и вместе с ней условие для коэффициентов σ_k.

Предложение 2. Если последовательность (x_t), где $x_t\in c$, слабо сходится к $x\in c$ в $c^\lambda A$, то последовательность[2] $(b(x_t))$ слабо сходится к $b(x)$ в $c\mathfrak{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из общих видов линейных непрерывных функционалов (4) и (5).

Примечание. Если $a_k=0$ для всех k, то можно показать, что из сильной сходимости $x_r \to x$ следует сильная сходимость $b_r(x) \longrightarrow b(x)$.

Предложение 3. Если последовательность (b_r), $b_r \in m$, слабо сходится к элементу $b \in m$ в $c\mathcal{A}$, то в $c^\lambda A$ найдется последовательность с элементами $x_r \in m^\lambda$, которая слабо сходится к $x \in m^\lambda$.

Доказательство. Пусть $b_r = (\beta_k^r)$. Выберем $x_r = (\beta_k^r/\lambda_k)$ и $x_k = (\beta_k/\lambda_k)$. Так как $\lambda_k \neq \mathcal{O}(1)$, то $x_r \in c_0$ и $x \in c_0$. Слабая сходимость последовательности (x_r) к x в $c^\lambda A$ получается при помощи (4) и (5), учитывая, что $\xi=0$.

Предложение 4. Для λ-корегулярного метода A в поле $c^\lambda A$ имеет место соотношение $m^\lambda \cap c^\lambda A \subseteq cl\, c^\lambda$.

Доказательство. Нам надо показать, что для каждого линейного непрерывного функционала (5) из равенства $f(x)=0$ для всех $x \in c^\lambda$ следует $f(x)=0$ при всех $x \in m^\lambda \cap c^\lambda A$.

Сперва отметим, что при $x \in m^\lambda$ во второй сумме в (5) можно изменять порядок суммирования. Таким образом каждый линейный непрерывный функционал в пространстве $c^\lambda A$ на множестве $m^\lambda \cap c^\lambda A$ определяется формулой

$$f(x) = \sum_k s_k \beta_k + t \lim_n \sum_k \alpha_{nk} \beta_k + \mu \xi .$$

Возьмем

$$x_m = e^\lambda - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{e_k}{\lambda_k} \in c^\lambda .$$

Для x_m имеют место равенства $\beta_k(x_m)=0$ при $k<m$, $\beta_k(x_m)=1$ при $k \geq m$ и $\xi(x_m)=0$. Из условия $f(x_m)=0$ получим

$$f(x_m) = \sum_{k=m}^{\infty} s_k + t\left(\alpha - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k\right) = 0 ,$$

откуда при $m \to \infty$ в силу $\varrho(\mathcal{A}) \neq 0$ следует, что $t=0$. Взяв $x = e_k \in c^\lambda$ и затем $x = e \in c^\lambda$, получаем соответственно, что $s_k = 0$ и $\mu=0$, т.е. $f(x)=0$, если $x \in m^\lambda \cap c^\lambda A$.

3. Основная теорема

Теорема. Если метод A λ-корегулярен, то соотношение $m^\lambda \cap c^\lambda A = c^\lambda$ имеет место тогда и только тогда, когда c^λ замкнуто в $c^\lambda A$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть c^λ замкнуто в $c^\lambda A$. Тогда c^λ является полным подпространством в $c^\lambda A$, т.е. в нем топология нормы $\|x\| = \sup\{|\beta_k|, |\xi|\}$ совпадает с топологией, индуцированной топологией пространства $c^\lambda A$. Из этого следует, что каждый линейный непрерывный функционал на подпространстве c^λ задается формулой

$$f(x) = d\xi + t\beta + \sum_k d_k \beta_k$$

Отсюда можно заключить, что для последовательности e^λ не имеет места слабая сходимость по отрезкам. Действительно, если $f(e_k)=0$ для всех k, то $d_k=0$ для всех k, но для таких функционалов $f(e^\lambda)=t$. Это значит, что A является λ-корегулярным и по предложению 4 получим равенство $m^\lambda \cap c^\lambda A = c^\lambda$.

2) Пусть $m^\lambda \cap c^\lambda A = c^\lambda$. Допустим, что $cl\, c^\lambda \neq c^\lambda$. Тогда по предложению 2 множество c не замкнуто в $c\mathfrak{A}$. Из этого по теореме Виланского-Целлера получим, что в $c\mathfrak{A}$ найдется $\ell \in m$, являющаяся предельной точкой для множества c. В силу предложения 3 получаем противоречие с равенством $m^\lambda \cap c^\lambda A = c^\lambda$.

Теорема доказана.

4. Некоторые другие следствия

Следствие 1. Если $c^\lambda A \neq c^\lambda$, то λ-консервативной метод A^λ-суммирует некоторую λ-неограниченную последовательность.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для λ-корегулярного метода это утверждение следует из предложения 4, учитывая свойства топологии FK-пространств. Для λ-конулевого метода получаем то же самое непосредственно из определения λ-конулевого метода.

Методы A и B называются λ-совместными для последовательности $x = (\xi_k)$, если

$$\lim_n \lambda_n \Big(\sum_k a_{nk} \xi_k - \lim_m \sum_k a_{mk} \xi_k \Big) =$$
$$= \lim_n \lambda_n \Big(\sum_k b_{nk} \xi_k - \lim_m \sum_k b_{mk} \xi_k \Big).$$

Следствие 2. Если для λ-корегулярных методов $c^\lambda A \supseteq c^\lambda B$ и эти методы λ-совместны на c^λ, то они λ-совместны и на множестве $c^{\lambda}B \cap m^{\lambda}$

Доказательство вытекает из предложения 4, учитывая, что δ является непрерывным функционалом.

Литература

1. Кангро Г., О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I. Изв. АН ЭстССР, Физ., Матем., 1971, 20, 111-120.
2. Wilansky, A., Zeller, K., Summation of bounded divergent sequences, topological methods. Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, 501-509.

Поступило 17 10 1979

A theorem of Wilansky and Zeller for the summability with the speed

E.Jürimäe

Summary

Let $A = (a_{nk})$ be a number matrix and $\lambda = (\lambda_k)$, where $0 < \lambda_k \uparrow$. In this paper the space of λ-convergent sequences c^{λ}, the space of λ-bounded sequences m^{λ} and the space of A^{λ}-summable sequences $c^{\lambda}A$ are considered. They all are FK-spaces (see [1]).

For the λ-conservative method A (i.e. $c^{\lambda} \subseteq c^{\lambda}A$) it is proved that

$$m^{\lambda} \cap c^{\lambda}A = c^{\lambda} \iff cl\, c^{\lambda} = c^{\lambda} \text{ in } c^{\lambda}A.$$

Also some other propositions in connection with the λ-conservative methods are given.

ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ. I

Э.Реймерс

Тартуский государственный университет

Пусть[1] $A=(a_{nk})$ - треугольная числовая матрица, $x = (x_k)$ - числовая последовательность и $y=(y_n)$ - последовательность, где

$$y_n = A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k .$$

Последовательность x называется суммируемой методом A, если

$$\exists \lim y_n = A(x) \neq \infty ,$$

и пишут $x \in cA$. При этом множество cA называют полем суммируемости метода A, а число $A(x)$ - A-суммой последовательности x.

Пусть c - множество всех сходящихся последовательностей и $e = (1, 1, \ldots)$.

Метод A называют регулярным, если $c \subseteq cA$ и $A(x) = \lim x_k$. Для регулярности метода A необходимо и достаточно выполнение условий ([1], стр. 16)

1° $\lim\limits_n a_{nk} = 0$,

2° $\lim\limits_n A_n(e) = 1$,

3° $\sum\limits_{k=0} |a_{nk}| \leq M$.

Условия 1° и 3° являются необходимыми и достаточными для нуль-регулярности метода A, т.е. для того чтобы метод A суммировал к нулю все нуль-последовательности. Во всей статье будем предполагать, что метод A регулярен.

Последовательности x и y называются эквивалентными,

---

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они имеют значения 0,1,2,... . Ниже

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_k a_k = \lim a_k .$$

если
$$\lim \frac{y_n}{x_n} = 1$$
и пишут $x \sim y$. При этом будем предполагать, что $x_n \neq 0$.

В настоящей статье изучается проблема эквивалентности последовательностей x и y, при этом последовательность x может быть произвольной, т.е. не принадлежать полю суммируемости cA.

В § 1 дается точное (т.е. необходимое и достаточное) условие для эквивалентности $x \sim y$ при произвольной последовательности x (теорема 1.1).

В § 2 из точных условий эквивалентности выводятся достоточные условия (теоремы 2.1, 2.2 и 2.3), связанные с некоторыми множителями $c_k(x)$.

В § 3 дается рекуррентное соотношение между числами $c_k(x)$.

В § 4 из теорем эквивалентности выводятся как частные случаи теоремы тауберова типа для сходимости последовательности x. При этом тауберовы условия оказываются зависящимися от последовательности x.

Во второй части статьи, которая будет опубликована в следующем номере, будет дана конкретизация результатов этой части статьи для методов Чезаро и Рисса.

§ 1. Точное условие для эквивалентности

Пусть $x = (x_k)$ - произвольная последовательность, где $x_k \neq 0$. Обозначим
$$u_{k+1} = x_{k+1} - x_k,$$
$$v_{k+1} = \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = -\frac{u_{k+1}}{x_{k+1} x_k},$$
$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i .$$
Тогда
$$y_n = x_n A_n(e) - x_n \sum_{i=0}^{n-1} a_{ni} x_i \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_n}\right) =$$
$$= x_n A_n(e) - x_n \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_k} - \frac{1}{x_{k+1}}\right) \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i .$$

Следовательно,

$$\frac{y_n}{x_n} = A_n(e) + F_n(x). \qquad (1.1)$$

Из этого равенства (1.1) непосредственно вытекает следующая

Теорема 1.1.

$$x \overset{o}{\sim} y \iff F_n(x) = o(1). \qquad (1.2)$$

В статье [4] имеется аналогичный результат для $(x_{n+1}) \sim$ $\sim (y_n)$ (теорема 3.3).

§ 2. Достаточные условия для эквивалентности

Пусть числа $c_k(x) \neq 0$ удовлетворяют условию

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i \right| = O(1). \qquad (2.1)$$

Теорема 2.1. Если числа $c_k(x)$ определены условием (2.1), то

$$c_k(x) \upsilon_{k+1} = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

Доказательство. На основании теоремы 1.1 достаточно показать, что $F_n(x) = o(1)$. Мы имеем

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i \; c_k(x) \upsilon_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f_{n-1\,k} \; c_k(x) \upsilon_{k+1},$$

где

$$f_{n-1\,k} = \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i .$$

Так как метод A регулярен, то

$$\lim_n f_{n-1\,k} = \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} \lim_n a_{ni} x_i = 0.$$

Ввиду условия (2.1) будет

$$\sum_{k=0}^{n-1} | f_{n-1\,k} | = O(1).$$

Таким образом, матрица $F = (f_{n-1,k})$ суммирует к нулю все нуль-последовательности, т.е. метод суммирования F нуль-регулярен. По этому из $c_k(x) \upsilon_{k+1} = o(1)$ следует $F_n(x) =$

$= o(1)$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопрос, как выбрать числа $c_k(x)$, чтобы условие (2.1) выполнялось. Пусть $a_{nk} \neq 0$ и определим $c_k(x)$ так, чтобы было

$$\Big| \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i \Big| \leqslant M \, |a_{nk}| \, |c_k(x)|. \qquad (2.2)$$

Тогда условие (2.1) выполнено. Действительно, ввиду условия (2.2) и регулярности метода A, мы имеем

$$\sum_{k=0}^{n-1} \Big| \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i \Big| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{nk}| M = O(1).$$

Условие (2.2) проще условия (2.1). Чтобы условие (2.2) в свою очередь было выполнено, достаточно взять

$$c_k(x) = \lim_{n} \frac{\sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i}{a_{nk}} \qquad (2.3)$$

равномерно по k или

$$c_k(x) = \sup_{n \geqslant k} \left| \frac{\sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i}{a_{nk}} \right|, \qquad (2.4)$$

предполагая, что такие числа $c_k(x)$ существуют и конечны. Следовательно, имеет место

Теорема 2.2. Если $c_k(x)$ определены условием (2.2), (2.3) или (2.4), то

$$c_k(x) v_{k+1} = o(1) \Rightarrow x \sim y. \qquad (2.5)$$

В условии (2.5)

$$c_k(x) v_{k+1} = - \frac{c_k(x) u_{k+1}}{x_k x_{k+1}}.$$

Если предположить, что $|x_k| \geqslant \varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$, то

$$|c_k(x) v_{k+1}| = \left| \frac{c_k(x) u_{k+1}}{x_k x_{k+1}} \right| \leqslant \frac{|c_k(x) u_{k+1}|}{\varepsilon^2}$$

и мы можем написать следующий результат.

Теорема 2.3. Если $c_k(x)$ определены условием (2.1), (2.2), (2.3) или (2.4) и $|x_k| \geqslant \varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$, то

$$c_k(x) u_{k+1} = o(1) \Rightarrow x \sim y.$$

§ 3. Рекуррентное соотношение между $c_k(x)$

Если $c_k(x)$ определены условием (2.3), то мы можем написать

$$c_{k+1}(x)=\lim_n\left(\frac{\sum_{i=0}^{k}a_{ni}x_i}{a_{nk}}\ \frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+\frac{a_{n\,k+1}x_{k+1}}{a_{n\,k+1}}\right)=$$

$$=\lim_n\frac{\sum_{i=0}^{k}a_{ni}x_i}{a_{nk}}\lim_n\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+x_{k+1}$$

и, следовательно,

$$c_{k+1}(x)=c_k(x)\lim_n\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+x_{k+1} \tag{3.1}$$

В статье [3] имеется частный случай этого равенства, когда $x=e$.

Если $c_k(x)$ определены условием (2.4), то аналогично получим, если $a_{nk}>0$ и $x_k>0$, что

$$c_{k+1}(x)=\sup_{n\geq k+1}\left(\frac{\sum_{i=0}^{k}a_{ni}x_i}{a_{nk}}\ \frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+\frac{a_{n\,k+1}x_{k+1}}{a_{n\,k+1}}\right)\leq$$

$$\leq\sup_{n\geq k}\frac{\sum_{i=0}^{k}a_{ni}x_i}{a_{nk}}\sup_{n\geq k+1}\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+x_{k+1},$$

т.е.

$$c_{k+1}(x)\leq c_k(x)\sup_{n\geq k+1}\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+x_{k+1}. \tag{3.2}$$

Так как в условии (2.1) мы можем $c_k(x)$ увеличивать не нарушая выполнения условия, то вместо неравенства (3.2) мы можем взять равенство

$$c_{k+1}(x)=c_k(x)\sup_{n\geq k+1}\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}}+x_{k+1}. \tag{3.3}$$

§ 4. Тауберовы теоремы

Рассмотрим, в предыдущих результатах частный случай, когда $x\in cA$. Тогда $y\in c$ и из эквивалентности $x\sim y$ получим, что и $x\in c$, причем из-за регулярности метода A будет

$$A(x)=\lim x_k.$$

Следовательно, из теоремы 2.1 вытекает следующий результат тауберова типа.

Теорема 4.1. Пусть $c_k(x)$ определены условием (2.1). Если $c_k(x)v_{k+1}=o(1)$, то $x\in cA\Rightarrow x\in c$.

Такая же теорема будет верна, если $c_k(x)$ определены условием (2.2), (2.3) или (2.4). Соответствующие результаты вытекают тогда из теоремы 2.2. Выпишем их.

Теорема 4.2. Пусть $c_k(x)$ определены условием (2.2), (2.3) или (2.4). Если $c_k(x)v_{k+1} = o(1)$, то $x \in cA \Rightarrow x \in c$.

Наконец из теоремы 2.3 получим следующий результат.

Теорема 4.3. Пусть $c_k(x)$ определены условием (2.1), (2.3) или (2.4) и $|x_k| \geq \varepsilon$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$. Если $c_k(x)u_{k+1} = o(1)$, то $x \in cA \Rightarrow x \in c$.

Во второй части статьи мы сравним эти результаты с имеющимися результатами тауберова типа для методов суммирования Чезаро и Рисса.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Таллин, 1977.
2. Реймерс Э., Теоремы тауберова типа для матричных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та,1961,102,43-51.
3. Реймерс Э., Тауберова теоремы для числовых рядов. Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1977,430,51-57.
4. Реймерс Э., Мультипликаторные методы суммирования.Уч.зап. Тартуск. ун-та, 1981, 504, 85-89.

Поступило 18 03 1980

The problem of equivalence
of sequences and Tauberian theorems. I

E.Reimers

Summary

Let $A = (a_{nk})$ be a triangular matrix of real numbers a_{nk} and the sequence $y = (y_n)$ be the A-transform of a real sequence $x = (x_k)$, i.e.

$$y_n = A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k .$$

Let c be the set of all convergent sequences x and $e = (1) = (1, 1, \ldots)$.

The sequence x is called A summable to the sum $A(x)$ if there exists $\lim y_n = A(x) \neq \infty$ when $n \to \infty$. At that it is written $x \in cA$ and the set cA is called the summability field of the method A. The sequences x, where $x_k \neq 0$, and y are called equivalent if $\lim y_n/x_n = 1$ and at that we write $x \sim y$.

In the whole article we are assuming that A is regular, i.e. $c \subset cA$ and $A(x) = \lim x_k$ for all $x \in c$.

§ 1. The precise condition for equivalence

In this section we deduce the precise condition, i.e. necessary and sufficient condition ($\Leftrightarrow$) for the equivalence of sequences x and y, where x is an arbitrary sequence with $x_k \neq 0$, i.e. optionally $x \in cA$. Denote

$$u_{k+1} = x_{k+1} - x_k,$$

$$v_{k+1} = \frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_k} = -\frac{u_{k+1}}{x_{k+1} x_k},$$

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} v_{k+1} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i .$$

Then

$$\frac{y_n}{x_n} = A_n(e) + F_n(x). \tag{1.1}$$

From this equality (1.1) we get directly the following result.

Theorem 1.1. $y \sim x \Leftrightarrow F_n(x) = o(1)$.

In the article [4] there is similar result for $(y_n) \sim (x_{n+1})$.

§ 2. Sufficient conditions for equivalence

In this section we deduce sufficient ($\Rightarrow$) conditions for the equivalence of sequences x and y. For the sequence x define numbers $c_k(x) \neq 0$ so that they satisfy the condition

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{c_k(x)} \sum_{i=0}^{k} a_{ni} x_i \right| = O(1). \tag{2.1}$$

Theorem 2.1. $c_k(x) v_{k+1} = o(1) \Rightarrow y \sim x$.

Let $a_{nk}\neq 0$ and define numbers $c_k(x)$ so that

$$\Big|\sum_{i=0}^{k} a_{ni}x_i\Big| \leq M\,|a_{nk}c_k(x)|. \tag{2.2}$$

Then the condition (2.1) holds. The last condition (2.2) in its turn holds when

$$c_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{k} a_{ni}x_i/a_{nk} \tag{2.3}$$

uniformly in k, or

$$c_k(x) = \sup_{n\geq k} \Big|\sum_{i=0}^{k} a_{ni}x_i/a_{nk}\Big|. \tag{2.4}$$

Thus we have the following results.

Theorem 2.2. If the numbers $c_k(x)$ are defined by the condition (2.2), (2.3) or (2.4), then

$$c_k(x)v_{k+1} = o(1) \Rightarrow y \sim x.$$

Theorem 2.3. If the numbers $c_k(x)$ are defined by the condition (2.1), (2.2), (2.3) or (2.4) and $|x_k|\geq\varepsilon$ for some $\varepsilon>0$, then

$$c_k(x)u_{k+1} = o(1) \Rightarrow y \sim x.$$

§ 3. Recursion relation between $c_k(x)$

If $c_k(x)$ are defined by the contition (2.3), then the following relation holds:

$$c_{k+1}(x) = c_k(x)\lim_{n\to\infty}\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}} + x_{k+1}. \tag{3.1}$$

In the article [3] there is a special case of this relation when $x=e$.

If $c_k(x)$ are defined by the condition (2.4) and if $a_{nk}>0$ and $x_k>0$, then

$$c_{k+1}(x) = c_k(x)\sup_{n\geq k+1}\frac{a_{nk}}{a_{n\,k+1}} + x_{k+1}. \tag{3.3}$$

§ 4. Tauberian theorems

In this section we consider the special case of the previous problem when $x\in cA$. Then $y\in c$ and from the equivalence $y\sim x$ we get that $x\in c$. Owing to the regularity of the method A we have $A(x)=\lim x_k$. Hence from the theorem 2.1 we obtain the following Tauberian results.

Theorem 4.1. Let $c_k(x)$ be defined by the condition (2.1). If $c_k(x)v_{k+1}=o(1)$, then $x\in cA \Rightarrow x\in c$.

Analogously from the theorems 2.2 and 2.3 we obtain, respectively:

Theorem 4.2. Let $c_k(x)$ be defined by the condition (2.2), (2.3) or (2.4). If $c_k(x)v_{k+1}=o(1)$, then $x\in cA \Rightarrow x\in c$.

Theorem 4.3. Let $c_k(x)$ be defined by the condition (2.2), (2.3) or (2.4), and $|x_k|\geqslant\varepsilon$ for some $\varepsilon>0$. If $c_k(x)u_{k+1}=o(1)$ then $x\in cA \Rightarrow x\in c$.

In part II of this article we compare these results with known results of Tauberian type for specific methods of summability such as of Cesàro and Riesz.

СУММИРУЕМОСТЬ, ЗАДАННАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ МАТРИЦ, И ПОЧТИ СУММИРУЕМОСТЬ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В.Соомер
Тартуский государственный университет

Введение

Пусть m - пространство ограниченных последовательностей, M - множество всех банаховых пределов[1]. Числовая последовательность $(x_k)\in m$ называется почти сходящейся к числу s, если $L(x)=s$ для всех $L\in M$. Понятие почти сходимости введено Лоренцом в статье [1], в которой доказано, что последовательность $(x_k)\in m$ является почти сходящейся к пределу s тогда и только тогда, когда

$$\lim_n\left(\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=i}^{i+n} x_k = s \qquad (1)$$

равномерно по i. Обозначим множество всех почти сходящихся последовательностей через f.

В статье [5] рассматривается суммируемость, заданная последовательностью матриц $\alpha=(A_i)$, где $A_i=(a_{nik})$, частным случаем которой является почти сходимость (при $a_{nik}=(n+1)^{-1}$, $i\le k\le i+n$; $a_{nik}=0$, $k<i$, $k>i+n$).

В настоящей статье рассматриваются почти сходимость и суммируемость, заданная последовательностью матриц, в банаховом пространстве.

§ 1. Почти сходимость в банаховом пространстве

Пусть X - банахово пространство, $m(X)$ - пространство ограниченных последовательностей банахова пространства

---

[1] Линейный непрерывный функционал L на пространстве m называется банаховым пределом, если $L\geq 0$, $L(e)=1$, где $e=(1,1,\ldots)$, $L(x_{k+1})=L(x_k)$.

X , т.е.[2]

$$m(X) = \{(x_k),\ x_k \in X \mid \sup \|x_k\| < \infty\}.$$

Приведем понятие почти сходимости последовательности $u = (x_k) \in m(X)$. Пусть X^* - сопряженное пространство рефлексивного банахова пространства X . Для всех $L \in M$ (см. введение) и $u \in m(X)$, определим функционалы $\Lambda(u)$ следующим равенством

$$\Lambda(u)(x^*) = L(x^*(x_k)), \tag{2}$$

где $x^* \in X^*$. Тогда $\Lambda(u) \in X^{**}$ (см. [2], стр. 390). Так как X - рефлексивное пространство, то можем считать, что $\Lambda(u) \in X$.

Соответствие $u \to \Lambda(u)$ определяет непрерывный линейный оператор $\Lambda : m(X) \to X$. Нетрудно убедиться, что операторы Λ инвариантны относительно сдвига и $\Lambda(u_0) = x$, где $u_0 = (x, x, \ldots)$. Операторы Λ называются банаховыми операторами.

Последовательность $u \in m(X)$ называется почти сходящейся к элементу $s \in X$, если $\Lambda(u) = s$ для всех $L \in M$. Такое определение почти сходимости в банаховом пространстве дано Курцом в статье [2]. Оказывается, что последовательность u является почти сходящейся тогда и только тогда, когда последовательность $(x^*(x_k)) \in f$ при всех $x^* \in X^*$ (см. [2], стр. 390). Через $f(X)$ и $c(X)$ обозначим соответственно пространства всех в банаховом пространстве X почти сходящихся и сходящихся последовательностей. Тогда $c(X) \subset f(X)$. В статье [2] доказана следующая

Теорема 1.1. Относительно компактная последовательность u является почти сходящейся к элементу $s \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_n \Big\| \Big(\frac{1}{n+1} \sum_{k=i}^{i+n} x_k\Big) - s \Big\| = 0 \tag{3}$$

равномерно по i .

Из теоремы 1.1 можем сделать следующие выводы.

1°. Пусть X - конечномерное пространство, тогда все ограниченные множества из X являются относительно компакт-

---

[2] Во всей статье, если пределы изменения индексов не указаны, то они принимают все целочисленные значения от 0 до ∞.

ными. Значит, если пространство X конечномерно, то u является почти сходящейся тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). (Но существуют почти сходящиеся последовательности, не удовлетворяющие условию (3) (см. [2], стр. 393)).

2^{0}. Перессини [3] доказал, что если X - вполне упорядоченная банахова решетка, в которой сходимость по норме и сходимость по упорядочению эквивалентны, то $u \in f(X)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (3). Но так как на банаховой решетке сходимость по норме и сходимость по упорядочению эквивалентны тогда и только тогда, когда X конечномерно [6], то результат, доказанный Перессиним, непосредственно вытекает из теоремы 1.1 и из предыдущего замечания.

§ 2. Почти сходимость и F_A-суммируемость в банаховом пространстве

Пусть $A=(a_{nk})$ - матрица, элементы которой непрерывные линейные операторы в пространстве X. Последовательность $u=(x_k)$, $x_k \in X$ называется F_A-суммируемой к элементу $s \in X$, если

$$\lim_n \Big\|\Big(\sum_k a_{nk}\, x_{k+i}\Big) - s\Big\| = 0$$

равномерно по i. Обозначим через $F_A(X)$ - множество всех F_A-суммируемых последовательностей пространства X.

Известно (см. [4], стр. 52-53), что если $X=R_1$ (R_1 - пространство действительных чисел), a_{nk} - действительные числа и метод $A=(a_{nk})$ является методом типа[3] $c \to f$, то $F_A(R_1) \subset f$. Далее находим класс обобщенных матричных методов, удовлетворяющих условию $F_A(X) \subset f(X)$.

Пусть a - непрерывный линейный оператор в пространстве X, T_a - оператор в $m(X)$, заданный равенством $T_a(u) = (a x_k)$ для всех $u \in m(X)$. Оператор T_a называется L-непрерывным, если $\Lambda(T_a(u)) = a\Lambda(u)$ для всех $L \in M$ и $u \in m(X)$. Так как сверткой банахова оператора на пространстве $c(X)$ является предел, то каждый L-непрерывный оператор является

---

[3] Через c обозначено пространство всех сходящихся последовательностей, т.е. $c = c(R_1)$.

непрерывным. Имеет место следующая

Теорема 2.1. Если метод суммирования $A=(a_{nk})$ удовлетворяет условиям

1° $\Lambda(\sum_k a_{nk}x)=x$ для всех $x\in X$ и $L\in M$.

2° операторы $T(a_{nk})$, где $T(a_{nk})(u)=(a_{nk}x_i)$ L-непрерывные,

тогда $F_A(X)\subset f(X)$.

Доказательство. Пусть $u=(x_k)\in F_A(X)$ и $F_A\text{-}\lim u=s$, тогда для каждого $\varepsilon>0$ найдется число $N>0$, такое, что при всех $n>N$ и $i=0,1,\dots$ имеет место

$$\|\sum_k a_{nk}x_{k+i}-s\|<\varepsilon.$$

Значит, имеют место равенства (при всех $n>N$; $i=0,1,\dots$)

$$\sum a_{nk}x_{k+i}=s+t_{ni},$$

где $\|t_{ni}\|<\varepsilon$. Тогда в пространстве $m(X)$ получим следующее уравнение

$$\sum_k T(a_{nk})u^{(k)}=\sigma+t^{(n)}, \tag{4}$$

где $u^{(k)}=(x_{k+i})$, $\sigma=(s)$, $t^{(n)}=(t_{ni})$.

Пусть Λ - некоторый банаховый оператор (соответствующий) банаховому пределу L), тогда, учитывая непрерывность и линейность оператора Λ, а также L-непрерывность операторов $T(a_{nk})$, получим

$$\sum a_{nk}\Lambda(u^{(k)})=\Lambda(\sigma)+t_n,$$

где $t_n=\Lambda(t^{(n)})$. Но $\Lambda(\sigma)=s$ и так как операторы Λ инвариантны относительно сдвига, то $\Lambda(u^{(k)})=\Lambda(a)$, значит имеет место

$$\sum_k a_{nk}\Lambda(u)=s+t_n. \tag{5}$$

Равенство (5) означает, что в пространстве $m(X)$ имеет место равенство

$$v=\sigma+t, \tag{6}$$

где[4] $v=A(\Lambda(u))$, $t=(t_n)$, $\sigma=(s)$.

Применим к равенству (6) некоторый банаховый оператор Λ_1, тогда ввиду того, что $\Lambda_1(\sigma)=s$, $\Lambda_1(t)=\Theta$ (Θ - нулевой элемент пространства X) получим, что $\Lambda_1(v)=s$. Но из условия 1° настоящей теоремы следует, что $\Lambda_1(v)=\Lambda(u)$. Зна-

[4] Здесь $A(\Lambda(u))=(\sum_k a_{nk}\Lambda(u))$.

чит $\Lambda(u)=s$, и так как выбор оператора Λ был произвольным, то $u\in f(X)$ для всех $u\in F_A(X)$, т.е. $F_A(X)\subset f(X)$. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры L-непрерывных операторов.

1^0 Если $T_a(u)=(ax_k)$, где $a\in R_1$, то оператор T_a очевидно L-непрерывен.

2^0 Если $X=X^*$ и a - самосопряженный оператор в пространстве X , то $\Lambda(T_a(u))(x^*) = L(x^*(ax_k)) = L(ax^*(x_k))$, с другой стороны $a\Lambda(u)(x^*) = x^*(a\Lambda(u)) = ax^*(\Lambda(u)) = \Lambda(u)(ax^*) = L(ax^*(x_k))$ для всех $x^*\in X^*$ и $u=(x_k)\subset X$. Значит, оператор T_a является L-непрерывным.

З а м е ч а н и е. Если $A=(C,1)$ - метод арифметических средних, то из (1) вытекает, что $f=F_{(C,1)}(R_1)$. Из теоремы 2.1 следует, что в общем $F_{(C,1)}(X)\subset f(X)$ (нетрудно проверить, что метод $(C,1)$ удовлетворяет условия теоремы 2.1). Но если выполнены условия теоремы 1.1, то $f(X)=F_{(C,1)}(X)$.

§ 3. Почти суммируемость и α-суммируемость в банаховом пространстве

Пусть $\alpha=(A_i)$ - последовательность матриц $A_i=(a_{nik})$, $(i=0,1,\cdots)$, где a_{nik} - непрерывные линейные операторы в банаховом пространстве X . Последовательность $u=(x_k)$ назовем α-суммируемой к элементу $s\in X$, если

$$\lim_n \|\sum_k a_{nik}x_k - s\| = 0 \qquad (7)$$

равномерно по i. Обозначим множество всех α-суммируемых последовательностей через $c_\alpha(X)$. Приведем некоторые примеры α-суммируемости.

1^0 Если $\alpha=(A)$, и $A=(a_{nk})$ - матричный метод суммируемости, где a_{nk} - непрерывные линейные операторы в пространстве X, то $c_\alpha(X)=c_A(X)$, где $c_A(X)$ - поле суммируемости метода A.

2^0 Пусть $A=(a_{nk})$ - матричный метод суммируемости. Полагая $a_{nik}=a_{nk-i}$, получим, что $c_\alpha(X)=F_A(X)$.

Далее рассматриваются методы α , удовлетворяющие условию:

существуют натуральное число r и постоянная $H>0$, такие, что

$$\sup_{\substack{r \leq n < \infty \\ 0 \leq i < \infty}} \left\| \sum_k a_{nik} x_k \right\| \leq H \sup_k \| x_k \| \qquad (S)$$

для всех $u = (x_k) \in c(X)$.

Выполнение условия (S) гарантирует, что последовательность (y_{in}), где

$$y_{in} = \sum_k a_{nik} x_k \quad \text{для всех} \quad u \in c(X)$$

ограничена, т.е. $\sup_{n,i} \| y_{in} \| < \infty$. Необходимость и достаточность этого утверждения доказана (при $X = R_1$) в статье [5]. Тогда верна следующая

Теорема 3.1. Пусть метод α удовлетворяет условию (S). Тогда $c(X) \subset c_\alpha(X)$ тогда и только тогда, когда

1° $\exists \lim_n a_{nik}(x) = a_k(x)$ равномерно по i для всех $k = 0, 1, \ldots$ и $x \in X$,

2° $\exists \lim_n \sum_k a_{nik}(x) = a(x)$ равномерно по i для всех $x \in X$,

3° $\left\| \sum_{k=0}^{m} a_{nik} x_k \right\| < M \sup_k \| x_k \|$ для всех $(x_k) \in m(X)$ и $i, m, n = 0, 1, \ldots$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству соответствующих теорем (при $X = R_1$) из статьи [5]. Применяя теорему 3.1 можем найти условия для $c(X) \subset f_A(X)$, где[5] $f_A(X)$ - поле почти суммируемости метода A.

Теорема 3.2. Метод суммирования $A = (a_{nk})$, где a_{nk} - непрерывные линейные операторы в банаховом пространстве X, удовлетворяет условию $c(X) \subset f_A(X)$ тогда и только тогда, когда $c(X) \subset c_\beta(X)$, где $\beta = (B_i)$, $B_i = (b_{nik})$ и $b_{nik} = \frac{1}{(n+1)} (a_{ik} + \ldots + a_{i+n,k})$.

Доказательство. Метод A преобразует последовательность $u = (x_k)$ в последовательность $v = (y_n)$, где

$$y_n = \sum_k a_{nk} x_k .$$

Так как $f(X) \subset m(X)$, то метод A сохраняет ограниченность, следовательно оператор $U_A : u \to v$ непрерывный оператор. Но

[5] Здесь $f_A(X) = \{ (x_k) \mid (\sum_k a_{nk} x_k) \in f(X) \}$.

хорошо известно, что отображение относительно компактного множества непрерывным оператором также относительно компактное множество. Так как все сходящиеся последовательности относительно компактны, то и все последовательности (y_n) относительно компактны (множество $A(c(X))$ состоит из относительно компактных последовательностей). Значит, $(y_n) \in f(X)$ $\Leftrightarrow (x_k) \in f_A(X)$ тогда и только тогда, когда последовательность (y_n) удовлетворяет условию (3), т.е. существует $s \in X$, такая, что

$$\lim_n \left\| \left(\sum_k \frac{1}{n+1} \sum_{j=i}^{i+n} a_{jk} x_k \right) - s \right\| = 0$$

равномерно по i. Но последнее равенство означает, что $(x_k) \in c_\beta(X)$. Теорема доказана.

Выбирая $a_{nik} = a_{nk-i}$ и учитывая, что $a_{nk-i}(x) = \theta$ при $i > k$, получим из теоремы 3.1 следующую теорему

Теорема 3.3. Для того, чтобы $c(X) \subset F_A(X)$, необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 $\lim_n a_{nk}(x) = \theta$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ и $x \in X$;

2^0 $\exists \lim_n \sum_k a_{nk}(x) = a(x)$ для всех $x \in X$,

3^0 $\| \sum_{k=0}^{m} a_{nk}(x_k) \| < M \sup_k \| x_k \|$

для всех $(x_k) \in m(X)$ и $m, n = 0, 1, \ldots$.

Значит (см. [7], стр. 18-20), $c(X) \subset F_A(X)$ тогда и только тогда, когда A является мультипликативным методом типа $c(X) \to c(X)$.

Литература

1. Kurtz, J.C., Almost convergence in Banach spaces. Tohoku Math. J.,1972,24,389-399.
2. Lorentz, G.G., A contribution to the theory of divergent sequences. Acta. Math.,1948,80,167-190.
3. Peressini, A., Banach limits in vector lattices. Stud. Math.,1970,35,111-121.
4. Schaefer, P., Almost convergent and almost summable sequences. Proc. Amer. Math. Soc.,1969,20,51-54.
5. Stieglitz, M., Fastkonvergence und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklärte konvergenzbegriffe.Stuttgart,

1971.
6. Wirth, A., Order and norm convergence in Banach lattices. Glasgow Math. J.,1974,15,N°1,13.
7. Zeller, K., Verallgemeinerte Matrixtransformationen.Math. Z.,1956,53,18-20.

Поступило 17 01 1980

Almost convergence and summability, defined by a sequence of matrices

V.Soomer

Summary

Let $\alpha=(A_i)$ be a sequence of matrices $A_i=(a_{nik})$, where a_{nik} are continuous linear operators in Banach space X. We call the sequence $u=(x_k)$, $x_k\in X$, α-summable if the sequence is summable by every method A_i uniformly in i. If $A=(a_{nk})$ is a generalized summability method and we choose $a_{nik}=a_{nk+i}$, then the α-summable sequence u is called F_A-summable. The sets of all α-summable and F_A-summable sequences $u=(x_k)$, $x_k\in X$ are denoted respectively by $c_\alpha(X)$ and $F_A(X)$. By $f(X)$ and $c(X)$ we denote respectively the sets of all almost convergent (see § 1) and convergent sequences $u=(x_k)$, $x_k\in X$.

In the present paper the class of generalized summability methods has been found so that $F_A(X)\subset f(X)$ is true. In § 3 the necessary and sufficient conditions for $c(X)\subset c_\alpha(X)$, $A(c(X))\subset f(X)$, $c(X)\subset F_A(X)$ are given.

СУММИРУЕМОСТЬ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЛИНЕЙНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Т.Лейгер

Тартуский государственный университет

Пусть X - хаусдорфово линейное топологическое пространство (сокращенно ЛТП) с базисом окрестностей нуля $\mathfrak{B}X$ и семейством ограниченных подмножеств $\mathrm{bd}\, X$. Будем рассматривать преобразование[1]

$$\eta_n = \sum_k a_{nk}\xi_k , \tag{1}$$

где $\xi_k \in X$, а $A = (a_{nk})$ - бесконечная числовая матрица. Мы говорим, что матрица A суммирует последовательность $x = (\xi_k)$, если для всех n ряды (1) сходятся и существует $\lim \eta_n$. Если A суммирует все сходящиеся в X последовательности, то она называется консервативной. Известно (см., например,[5]), что матрица A является консервативной для числовых последовательностей в точности тогда, когда

$$\exists \lim_n a_{nk}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

$$\exists \lim_n \sum_k a_{nk}, \tag{3}$$

$$\sum_k |a_{nk}| = O(1). \tag{4}$$

Матрицу A будем называть сохраняющей ограниченность в X, если преобразование (1) переводит все ограниченные последовательности в ограниченные.

Вопрос о суммируемости в ЛТП изучался в работах [1],[2] [5]. Ф.Вихманн [1] и Л.Д.Менихес [5] доказали, что если A - консервативная в F-пространстве[2] $M[0,1]$ всех функций, измеримых по Лебегу на отрезке $[0,1]$, то A является матрицей конечного типа, т.е. существует такое $N > 0$, что число

---

[1] Свободные индексы и индексы суммирования пробегают все значения 1,2,....

[2] Полное метрическое ЛТП называется F-пространством.

ненулевых элементов в каждой строке не больше чем N. В [3] этот результат обобщен на случай $M(S,\Sigma,\mu)$, где (S,Σ,μ) - пространство с конечной неатомической мерой μ.

Главная цель настоящей заметки состоит в описании класса всех F-пространств, в которых консервативными являются лишь матрицы конечного типа. При решении этой задачи используются и обобщаются введенные Тюрпэном [9],[10],[11] понятия и методы. Результат сформулирован в теоремах 8 и 9. В заключительной части заметки находятся необходимые и достаточные условия для консервативности в локально ограниченных пространствах.

1. Линейное топологическое пространство X с топологией τ называется ультрабочечным, если всякая линейная топология τ' в X, обладающая базисом окрестностей нуля из τ-замкнутых подмножеств, слабее топологии τ. В частности, каждое F-пространство ультрабочечно ([6], следствие 6.2.3).

Пусть X и Y - линейные топологические пространства, а $L(X,Y)$ - пространство всех непрерывных линейных операторов из X в Y. В $L(X,Y)$ топология ограниченной сходимости определяется базисом окрестностей нуля, состоящим из подмножеств $\{\Phi \in L(X,Y) : \Phi(B) \subset V\}$ где $V \in \mathcal{B}Y$, а B пробегает некоторую фундаментальную систему ограниченных подмножеств пространства X. Так как всякое равностепенно непрерывное подмножество ограничено в топологии ограниченной сходимости (а тогда, тем более, и в топологии точечной сходимости), то из известной теоремы Банаха-Штейнгауза для ультрабочечных пространств ([6], теорема 7.1.3) вытекает

Предложение 1. Пусть X - ультрабочечное, а Y - произвольное ЛТП. Множество $\mathcal{F} \subset L(X,Y)$ ограничено в топологии точечной сходимости в точности тогда, когда оно ограничено в топологии ограниченной сходимости.

Рассмотрим преобразование

$$\eta_n = \sum_k A_{nk} \xi_k , \tag{5}$$

где $\xi_k \in X$ и $A_{nk} \in L(X,Y)$. Для F-пространств X и Y справедливо

Предложение 2 ([4], теорема 3). Преобразование (5) переводит все сходящиеся в X последовательности в сходящиеся в Y последовательности в точности тогда, когда

$$\exists \lim_n A_{nk}\xi, \quad \xi\in X, \quad k\in\mathbb{N},$$

$$\exists \lim_n \sum_k A_{nk}\xi, \quad \xi\in X,$$

$$\{\sum_{k=1}^{m} A_{nk}\xi_k : \xi_k\in B, n,m\in\mathbb{N}\}\in bd\,Y \quad \forall B\in bd\,X.$$

Известно [4], что пространство $m(X)$ всех ограниченных в X последовательностей является K-пространством[3] с $\mathfrak{B}m(X) = \{V_U\}$, где

$$V_U = \{x=(\xi_k)\in m(X) : \xi_k\in U, k\in\mathbb{N}\}, \quad U\in\mathfrak{B}X.$$

Если X метризуемо или полно, то соответствующим свойством обладает и $m(X)$.

Допустим, что матрица (A_{nk}) — конечнострочная, т.е. для каждого n существует N_n с $A_{nk}=\theta$ при $k>N_n$. Тогда справедливо

Предложение 3. Пусть X - такое ЛТП, что $m(X)$ ультрабочечно. Тогда преобразование (5) переводит $m(X)$ в $m(Y)$ в точности тогда, когда

$$\{\sum_{k=1}^{N_n} A_{nk}\xi_k : \xi_k\in B, n\in\mathbb{N}\}\in bd\,Y \quad \forall B\in bd\,X. \qquad (6)$$

Доказательство. Необходимость. Операторы A_n, где $A_n x = \eta_n$, непрерывны на $m(X)$ ввиду непрерывности координатных операторов π_k. Если $(\eta_n)\in m(Y)$ для всех $x\in m(X)$, то (A_n) точечно ограничена в $m(X)$. Согласно предложению 1 это равносильно условию

$$\{A_n x : x\in M\}\in bd\,Y \quad \forall M\in bd\,m(X). \qquad (7)$$

Пусть $B\in bd\,X$, тогда $B_1\in bd\,m(X)$, где

$$B_1 = \{(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\theta,\ldots) : \xi_k\in B, n\in\mathbb{N}\}.$$

Положив в (7) $M = B_1$, получим условие (6).

---

[3] Линейное топологическое пространство $E(X)$ последовательностей $x=(\xi_k)$ с $\xi_k\in X$ называется K-пространством, если координатные операторы π_k с $\pi_k x = \xi_k$ непрерывны.

Достаточность условия (6) очевидна, так как в случае $B = \{\xi_k\}$, где $(\xi_k) \in m(X)$, из него непосредственно следует $y \in m(X)$.

2. В работах Тюрпена [9],[10],[11], а также в книгах [7] и [8] изучались следующие понятия, связанные с ЛТП. Контуром пространства X называется множество $G(X)$ числовых последовательностей $\lambda = (\lambda_k)$, удовлетворяющих следующему условию: для каждой окрестности нуля U пространства X существует[4] $V \in \mathfrak{B}X$ с $\Sigma'_k \lambda_k V \subset U$. Для $B \in bdX$ в [7] обозначают $R(B) = \{\lambda = (\lambda_k) : \Sigma'_k \lambda_k B \in bdX\}$. Там же показывается[5], что $E^\infty \subset G(X) \subset \cap\{R(B) : B \in bdX\}$, а $G(X) = \ell$ в точности тогда, когда X локально выпукло. В [8] доказывается, что если X — метризуемое ЛТП, то $\lambda \in G(X)$ в точности тогда, когда $\{\Sigma^n_{k=1} \lambda_k \xi_k\} \in bdX$ для всех $x \in m(X)$.

Следуя идеям Тюрпена, определим классы $G^2(X)$ и $R^2(X)$ числовых матриц следующим образом. Будем говорить, что конечнострочная числовая матрица $A \in G^2(X)$, если для каждой окрестности нуля U существует $V \in \mathfrak{B}X$ с $\Sigma'_k a_{nk} V \subset U$ для всех n. Если $B \in bdX$ и $\{\Sigma'_k a_{nk} B\} \in bdX$, то говорим, что $A \in R^2(B)$. Обозначим $R^2(X) = \cap\{R^2(B) : B \in bdX\}$.

Предложение 4. Пусть X - метризуемое ЛТП. Конечнострочная матрица $A = (a_{nk}) \in G^2(X)$ в точности тогда, когда $A \in R^2(X)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $A \in G^2(X)$ и U - произвольная окрестность нуля в X. Тогда существует $V \in \mathfrak{B}X$ с $\Sigma'_k a_{nk} V \subset U$. Если $B \in bdX$, то $B \subset \alpha V$ для некоторого $\alpha > 0$. Поэтому

$$\Sigma'_k a_{nk} B \subset \Sigma'_k a_{nk} \alpha V \subset \alpha U,$$

т.е. $A \in R^2(B)$ для произвольного $B \in bdX$.

Достаточность. Так как X метризуемо, то имеем $\mathfrak{B}X = (V_m)$, где $V_m \supset V_{m+1}$ для $m \in \mathbb{N}$. Допустим, что

---

[4] Здесь и в дальнейшем $\Sigma'_k \alpha_k B = \cup^\infty_{n=1}(\alpha_1 B + \dots + \alpha_n B)$.

[5] Через E^∞ обозначается пространство числовых последовательностей, в которых отлично от нуля лишь конечное число координат.

$A \notin G^2(X)$. Тогда существует такая окрестность нуля U в X, что для всякого индекса m включение $\{\sum'_k a_{nk} V_m\} \subset U$ неверно. Поэтому можно найти возрастающуюся последовательность индексов n_m с

$$\frac{1}{m} \sum_{k=1}^{N_{n_m}} a_{n_m k} V_m \not\subset U.$$

Для каждого m существуют элементы $\xi_k^m \in V_m$ с $k=1,2,\dots, N_{n_m}$ и

$$\sum_{k=1}^{N_{n_m}} a_{n_m k} \xi_k^m \notin mU.$$

При этом множество $B = \{\xi_k^m\}$ с $k=1,2,\dots,N_{n_m}$ и $m \in \mathbb{N}$ ограничено в X. В самом деле, для произвольной окрестности нуля W существует такое число m_0, что $W \supset V_m$ при $m \geq m_0$, поэтому вне множества W находится лишь конечное число элементов множества B.

Таким образом, мы доказали, что существует $B \in bdX$ для которого $\sum'_k a_{nk} B \notin bdX$, т.е. $A \notin R^2(X)$. Предложение доказано.

В [7] доказывается, что если X – борнологическое[6] ЛТП с фундаментальной последовательностью ограниченных подмножеств, то

$$G(X) = \bigcap \{R(B) : B \in bdX\} \tag{8}$$

Из предложения 4 получаем

Следствие 5. Для всех метризуемых ЛТП верно равенство (8).

Из предложений 3 и 4 вытекает

Следствие 6. Пусть X – метризуемое ЛТП и $m(X)$ ультрабочечно. Конечнострочная матрица $A = (a_{nk})$ сохраняет ограниченность в X в точности тогда, когда $A \in G^2(X)$.

Нетрудно проверить, что если X – произвольное ЛТП, то все матрицы конечного типа, удовлетворяющие условию (4), принадлежат $G^2(X)$. С другой стороны, все конечнострочные матрицы со свойством (4) принадлежат $G^2(X)$ при любом локально выпуклом пространстве X. Для решения нашей основной задачи нам необходимо найти класс таких линейных топологичес-

---

[6] Понятие борнологичности в [7] определяется для общих ЛТП.

ких пространств X, при которых $G^1(X)$ содержит только матрицы конечного типа.

Тюрпен [9],[11] рассматривал ЛТП со следующим свойством (γ): для каждой окрестности нуля U существует $V \in \mathcal{B}X$, что U поглощает все множества $\sum_{k=1}^{,n} V$, т.е.

$$\sum_{k=1}^{,n} V \subset \rho_n U \tag{9}$$

при некоторых числах $\rho_n > 0$.

Предложение 7. Пусть X - метризуемое ЛТП. Множество $G^2(X)$ содержит матрицу не конечного типа в точности тогда, когда X обладает свойством (γ).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Н е о б х о д и м о с т ь.

Пусть A - матрица не конечного типа с $A \in G^2(X)$. Поскольку в каждом ЛТП существует базис окрестностей нуля, состоящий из уравновешенных подмножеств, то без ограничения общности можно допустить, что $a_{nk} \geqslant 0$. Пусть K_n - число положительных элементов, а α_n - наименьший положительный элемент в n-ой строке. Тогда

$$\sum_{k=1}^{,K_n} \alpha_n V \subset \sum_{k}{}' a_{nk} V$$

и из условия $A \in G^2(X)$ следует, что для каждой окрестности нуля U существует $V \in \mathcal{B}X$ с

$$\sum_{k=1}^{,K_n} V \subset \alpha_n^{-1} U .$$

Поскольку A является матрицей не конечного типа, то последовательность (K_n) неограничена. Поэтому из последнего включения следует (9).

Д о с т а т о ч н о с т ь . Так как X метризуемо, то существует $\mathcal{B}X = (V_m)$ с

$$V_{m+1} + V_{m+1} \subset V_m . \tag{10}$$

Пусть X обладает свойством (γ). Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ существуют $j(m) \in \mathbb{N}$ и $\lambda_n^m > 0$ с

$$\sum_{k=1}^{,n} V_{j(m)} \subset \lambda_n^m V_m . \tag{11}$$

Благодаря условиям (10) и (11) из базиса (V_m) можно выделить последовательность окрестностей нуля (W_i) со следующими свойствами:

$$\sum\nolimits'^{\,n}_{k=1} W_{i+1} \subset \alpha^i_n W_i\,, \quad \alpha^i_n \geqslant 1, \tag{12}$$
$$\sum\nolimits'^{\,i+1}_{k=1} W_{i+1} \subset W_i\,. \tag{13}$$

Рассмотрим матрицу (α^i_n). Согласно условиям (12) и (13) она имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha^1_3 & \alpha^1_4 & \alpha^1_5 & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \alpha^2_4 & \alpha^2_5 & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha^3_5 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}$$

Обозначим $\rho_n = \sup_i \alpha^i_n$, тогда $\rho_n = \max_{1\leq i\leq n-1} \alpha^i_n$. Из условия (12) следует

$$\sum\nolimits'^{\,n}_{k=1} W_{i+1} \subset \rho_n W_i\,, \quad i \in \mathbb{N}.$$

Так как для произвольной окрестности нуля U существует $W_i \in \mathscr{B}X$ с $W_i \subset U$, то положив $V = W_{i+1}$ получим условие (9). Пусть $A = (a_{nk})$ с

$$a_{nk} = \begin{cases} \rho_n^{-1}, & \text{если } k \leq n, \\ 0, & \text{если } k > n. \end{cases}$$

Из условия (9) следует, что $A \in G^2(X)$. Поскольку $\rho_n > 0$, то A - матрица не конечного типа. Предложение доказано.

Заметим, что при доказательстве необходимости предложений 4 и 7 мы не пользовались предположением, что X метризуемо. Соответствующие утверждения верны для произвольных ЛТП.

Теперь мы сможем дать ответ на поставленный во введении вопрос. Из предложений 3 и 7 следует

Теорема 8. Пусть X - такое метризуемое ЛТП, что $m(X)$ ультрабочечно. Для того, чтобы в X сохраняли ограниченность только матрицы конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы X не обладало свойством (γ).

Ввиду предложений 2 и 3 в F-пространстве каждая консервативная матрица сохраняет сходимость. Таким образом, верна

Теорема 9. Для того, чтобы в F-пространстве X консервативными были только матрицы конечного типа, необходимо и достаточно, чтобы X не обладало свойством (γ).

В качестве примера рассмотрим класс ЛТП, для которых условие (γ) не выполнено. Мы говорим, что F-пространство X является пространством с конечной нормой, если для каждой окрестности нуля U существует число $n=n(U)$ с $X = \sum_{k=1}^{n} U$. В [8] доказывается, что $M[0,1]$ является пространством с конечной нормой.

Из определения пространства с конечной нормой следует, что такое пространство не обладает свойством (γ), ибо каждая окрестность нуля не может поглощать все пространство.

3. В конце настоящей заметки найдем условия для консервативности матриц в локально ограниченных пространствах. Мы называем ЛТП локально ограниченным, если в нем существует ограниченная окрестность нуля. Отметим, что наиболее важные примеры не локально выпуклых ЛТП (ℓ^p, L^p, H^p с $0<p<1$) являются локально ограниченными пространствами.

Пусть в дальнейшем везде $0<p\leq 1$. Подмножество B линейного пространства X называется p-выпуклым, если для $\xi,\eta\in B$ все элементы вида $\alpha\xi+\beta\eta$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ и $\alpha^p+\beta^p=1$, принадлежат подмножеству B. Если $\alpha\xi+\beta\eta\in B$ для всех $\xi,\eta\in B$ и скаляров α и β с $|\alpha|^p+|\beta|^p\leq 1$, то B называется абсолютно p-выпуклым. Для произвольного подмножества $B\subset X$ абсолютно p-выпуклая оболочка $\Gamma_p(B)$ (т.е. наименьшее абсолютно p-выпуклое множество, содержащее B) состоит из элементов вида $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\xi_k$, где $\xi_k\in B$ и $\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|^p\leq 1$.

В линейном пространстве X понятие p-нормы $\|\cdot\|$ определяется следующими аксиомами:

$$\|\xi\| = 0 \iff \xi = \theta,$$

$$\|\alpha\xi\| = |\alpha|^p\|\xi\|, \quad \alpha\in\mathbb{K}, \quad \xi\in X,$$

$$\|\xi+\eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|, \quad \xi,\eta\in X.$$

Известно [8], что ЛТП является p-нормированным в точности тогда, когда оно имеет ограниченную p-выпуклую окрестность нуля, а каждое локально ограниченное пространство p-нормируемо с некоторым $p\in(0,1]$. Таким образом, единичный шар $D=\{\xi\in X: \|\xi\|\leq 1\}$ локально ограниченного пространства X абсолютно p-выпукло с $p\in(0,1]$

Теорема 10. Если X является p-нормированным F-пространством, то матрица $A=(a_{nk})$ консервативна в X в точности тогда, когда выполняются условия (2),(3) и

$$\Sigma_k |a_{nk}|^p \leq M^p. \qquad (14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду предложения 2 достаточно доказать эквивалентность условий (14) и

$$\{\Sigma'_k a_{nk} D\} \in bd\, X. \qquad (15)$$

Допустим, что условие (14) выполнено. Тогда имеем $M^{-p}\Sigma_{k=1}^{m}|a_{nk}|^p \leq 1$ для всех n и m. Поэтому $\Sigma'_k a_{nk} D \subset M^p D$, т.е. выполняется условие (15).

Если условие (14) не выполнено, то существуют неограниченная последовательность чисел (M_n) и последовательность индексов N_n с

$$\Sigma_{k=1}^{N_n} |a_{nk}|^p > M_n^p.$$

Тогда

$$\Sigma_{k=1}^{N_n} |a_{nk}/M_n|^p > 1$$

и ввиду абсолютной p-выпуклости множества D имеем

$$\Sigma'^{N_n}_{k=1} a_{nk}/M_n D \not\subset D,$$

т.е.

$$\Sigma_{k=1}^{N_n} a_{nk} D \not\subset M_n D.$$

Получаем, что $\{\Sigma'^{N_n}_{k=1} a_{nk} D\} \notin bd\,X$ и условие (15) не выполняется. Таким образом, из условии (15) следует (14).

Следствие 11. В p-нормированном F-пространстве ряд $\Sigma_k \lambda_k \xi_k$ сходится для всех сходящихся последовательностей $x=(\xi_k)$ в точности тогда, когда $(\lambda_k) \in \ell^p$.

Следствие 12. Если X является p-нормированным F-пространством, то $G(X) = \ell^p$.

Литература

1. Вихманн Ф., О консервативности матриц относительно сходимости по мере. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат., 1971, 20, № 3,275-278.

2. Жаворонков В.Д., Суммируемость числовыми матрицами в полных локально выпуклых пространствах. Мат. зап. Уральский ун-т, 1977,10,№ 2,36-39.

3. Лейгер Т., О суммируемости по мере. Материалы конф. Методы алгебры и функциональн. анализа при исслед.семейств операторов, 1978. Тарту, 1978, 20-22.
4. Лейгер Т., Включение обобщенных методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 492, 17-34.
5. Менихес Л.Д., Суммирование в линейных топологических пространствах. Мат. зап. Уральский ун-т, 1975, 9, №2, 65-76.
6. Эдвардс Р., Функциональный анализ. Теория и приложения. Москва, 1969.
7. Adasch, N., Ernst, B., Keim, D., Topological Vektor Spaces. The Theory Without Convexity Conditions. Berlin, Springer, 1978.
8. Rolewicz, S., Metric Linear Spaces. Warszawa, 1972.
9. Turpin, P., Généralization d'un théorème de S.Mazur et W.Orlicz. C. r. Acad. sci., 1971, N°11, 457-460.
10. Turpin, P., Variantes de résultats de S.Mazur et W. Orlicz et convexités généralisées. C. r. Acad. sci., 1971, 273, N°12, 506-509.
11. Turpin, P., Conditions de bornitude et espaces de fonctions mesurables. Stud. math., 1976, 56, N°1, 69-91.

Поступило 16 01 1980

Limitierbarkeit in linearen topologischen Räumen

T.Leiger

Zusammenfassung

Ist eine unendliche Matrix $A=(a_{nk})$ konvergenztreu im F-Raum $M[0,1]$ der auf $[0,1]$ meßbaren (im Sinn von Lebesgue) Funktionen, so ist A, wie man in [1] und [5] zeigt, von endlichem Typ: es gibt $N>0$, so daß die Anzahl der von Null verschiedenen Elementen in jeder Zeile kleiner als N ist. In [3] verallgemeinert man diesen Satz auf einen Maßraum (S,Σ,μ) mit endlichem nichtatomarem μ-Maß.

6

In diesem Aufsatz wird die Klasse von F-Räumen X gefunden, in denen nur Matrizen von endlichem Typ konvergenztreu sind. Eine notwendige und hinreichende Bedingung: Es gibt eine Nullumgebung U, so daß für jede Nullumgebung V nicht alle Summen $\sum_{k=1}^{m} V = V+\dots+V$ von U absorbiert werden. Für den Beweis dieser Bedingung werden Ideen von Turpin[9], [10] gebraucht und weiterentwickelt.

Im letzten Teil des Artikels wird die Limitierbarkeit in lokalbeschränkten Räumen untersucht. Der folgende Satz wird bewiesen: Eine Matrix $A=(a_{nk})$ ist in einem p-normierbaren Raum mit $0<p\leq 1$ genau dann konvergenztreu, wenn die Bedingungen (2),(3) und (14) erfüllt sind.

О СУММИРУЕМОСТИ ПОДПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ПЕРЕСТАНОВОК. II

Э. Кольк

Тартуский государственный университет

Введение

Данная статья, являющаяся продолжением статьи [3] автора, посвящена изучению некоторых свойств последовательностей в локально выпуклых пространствах. При этом мы без ссылки будем пользоваться обозначениями, введенными в указанной статье [3].

Пусть E и F – отделимые локально выпуклые пространства с порождающимися наборами полунорм соответственно P и Q, $X=(x_i)$ – последовательность элементов пространства E, $\mathcal{N}(X)$ и $\mathcal{R}(X)$ – соответственно множества всех подпоследовательностей и перестановок последовательности X, $A=(a_{nk})$ – числовая матрица. Последовательность $X\in s(E)$ называется A-устойчивой с пределом $x\in E$ (ср. [4], ~~стр. 369~~), если $A\text{-}\lim Y = x$ равномерно по $Y\in \mathcal{N}(X)$.

В § 1 доказывается (теорема 1), что в случае произвольной обобщенной матрицы $A=(A_{nk})$ с $A_{nk}:E\to F$ суммируемость матрицей A к элементу $x\in F$ всех подпоследовательностей последовательности $X\in s(E)$ со свойством

$$\lim_n A_{nk}(x_i)=\theta \text{ равномерно по } i\in N \quad (k\in N) \qquad (B)$$

эквивалентна свойству

$$A\text{-}\lim Y = x \text{ равномерно по } Y\in \mathcal{N}(X).$$

Отсюда в частности вытекает, что A-суммируемость регулярной числовой матрицей A всех подпоследовательностей последовательности X к элементу x_0 в локально выпуклом пространстве E равносильна ее A-устойчивости.

Во втором параграфе приводится аналог теоремы 1 для перестановок.

§ 1. Устойчивые последовательности в локально выпуклых пространствах

Известно (см. [3], теоремы А и Б), что в случае $A=(a_{nk})\in\mathcal{T}$ понятие A-устойчивости последовательности X в банаховом пространстве E равносильно A-суммируемости всех ее подпоследовательностей. Оказывается, что аналогичная равносильность имеет место и в более общем случае.

Докажем сначала одно вспомогательное предложение.

Лемма 1. Пусть E и F - локально выпуклые пространства, $t_n: E\to F$ - произвольные отображения и $X\in s(E)$. Если при любой $Y\in\mathcal{R}(X)$ ряд $\sum t_n(y_n)$ сходится, то для каждой полунормы $q\in Q$ справедливо равенство $\lim_m S(m,q)=0$, где

$$S(m,q)=\sup_{Y\in\mathcal{R}(X(>m))} q\left(\sum_{k>m} t_k(y_k)\right).$$

Доказательство. Предположим обратное. Тогда для некоторой полунормы $q\in Q$ существуют число $\alpha>0$ и последовательность индексов $m(1)<m(2)<\cdots<m(i)<\cdots$ такие, что

$$S(m_i,q)>\alpha \qquad (i\in\mathbb{N}). \tag{1}$$

Пусть $i_1=1$ и $m_1=m(i_1)$. По условию (1) имеем $S(m_1,q)>\alpha$. Поэтому найдется такая последовательность $Y_1=(y_k^1)\in\mathcal{R}(X(>m_1))$, что

$$q\left(\sum_k t_{m_1+k}(y_k^1)\right)>\alpha.$$

Возьмем индекс k_1 столь большим, чтобы было

$$q\left(\sum_{k\leq k_1} t_{m_1+k}(y_k^1)\right)>\alpha.$$

Далее, в силу неравенства (1) можно выбрать индексы $i_2>i_1$ и k_2 такие, что

$$m_2=m(i_2)>\max\left(N(y_{k_1}^1),\, m_1+k_1\right)$$

и для некоторой последовательности $Y_2=(y_k^2)\in\mathcal{R}(X(>2m_2-m_1-k_1))$ выполнено неравенство

$$q\left(\sum_{k\leq k_2} t_{m_2+k}(y_k^2)\right)>\alpha.$$

В общем случае, если индексы $m_1<m_2<\cdots<m_{j-1}=m(i_{j-1})$, последовательности $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{j-1}$ и числа $k_1,k_2,\cdots,k_{j-1}\in\mathbb{N}$ уже определены, то фиксируем индекс $i_j>i_{j-1}$ столь большим, чтобы было

$$m_j = m(i_j) > \max\left(N(y^{j-1}_{k_{j-1}}), m_{j-1}+k_{j-1}\right).$$

Ввиду вытекающего из условия (1) неравенства $S(m_j, q) > \alpha$ существуют последовательность $Y_j = (y^j_k) \in \mathcal{R}(X(>2m_j - m_{j-1} - k_{j-1}))$ и индекс k_j такие, что

$$q\left(\sum_{k \le k_j} t_{m_j+k}(y^j_k)\right) > \alpha. \qquad (2)$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим индексы k_j $(j \in N)$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_j < \cdots$ и последовательности $Y_1, Y_2, \cdots, Y_j, \cdots$ такие, что для любого $j \geq 2$ имеем $Y_j \in \mathcal{R}(X(>2m_j - m_{j-1} - k_{j-1}))$ и выполнено условие (2).

Рассмотрим теперь последовательность $Z = (z_k)$, где

$$z_k = \begin{cases} x_k & (1 \le k \le m_1), \\ y_{k-m_j} & (m_j < k \le m_j + k_j, \ j \ge 1), \\ x_{k+m_{j+1}-m_j-k_j} & (m_j + k_j < k \le m_{j+1}, j \ge 1). \end{cases}$$

По нашим построениям $Z \in \mathcal{R}(X)$, причем из-за (2) для всех $j \geq 2$ верно неравенство

$$q\left(\sum_{m_{j+1} < k \le m_j + k_j} t_k(z_k)\right) = q\left(\sum_{k \le k_j} t_{m_j+k}(y^j_k)\right) > \alpha.$$

Но это противоречит сходимости ряда $\sum t_k(z_k)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть E и F - локально выпуклые пространства и A - произвольная операторная матрица. Для последовательности $X \in s(E)$ со свойством (B) следующие предложения для каждой $q \in Q$ эквивалентны:

1^0 $\lim_n q(A_n(Y) - z_0) = 0$ для всех $Y \in \mathcal{R}(X)$;

2^0 $\lim_n q(A_n(Y) - z_0) = 0$ равномерно по $Y \in \mathcal{R}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применив на основе

$$Y \in d_A(E) \qquad (Y \in \mathcal{R}(X))$$

лемму 1 к последовательностям $(A_{nk})_{k \in N}$, мы для всех $n \in N$ получим

$$\lim_n S(n, m, q) = 0, \qquad (3)$$

где

$$S(n, m, q) = \sup_{Y \in \mathcal{R}(X(>m))} q\left(\sum_{k > m} A_{nk}(y_k)\right).$$

Введя, далее, обозначение

$$\mathcal{U}(n,m,q)=\sup_{Y\in \mathcal{N}(X(>m))} q\left(\sum_k A_{nk}(y_k)-z_0\right),$$

можно сказать, что соотношение 2^0 равносильно условию

$$\lim_n \sup_m \mathcal{U}(n,m,q)=0.$$

Поэтому, если 2^0 не выполнено, то существуют число $\alpha>0$ и индексы $m(1)<m(2)<\cdots$ и $n(1)<n(2)<\cdots$ такие, что

$$\mathcal{U}(n(i),m(i),q)>\alpha \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{4}$$

Для доказательства нашей теоремы достаточно показать существование последовательности $Z=(z_k)\in\mathcal{N}(X)$ с

$$\lim_n q(A_n(Z)-z_0)\neq 0. \tag{5}$$

Пусть $i_1=1$, $m_1=m(i_1)$ и $n_1=n(i_1)$. Ввиду условия (4) существует последовательность $Y_1=(y_k^1)\in\mathcal{N}(X(>m_1))$ с

$$q\left(\sum_k A_{n_1k}(y_k^1)-z_0\right)>\alpha. \tag{6}$$

Затем на основе равенства (3) при $n=n_1$ и сходимости ряда

$$\sum_k A_{n_1k}(y_k^1)$$

найдем индекс k_1 столь большим, чтобы было $S(n_1,k_1,q)<\frac{\alpha}{8}$ и

$$q\left(\sum_{k>k_1} A_{n_1k}(y_k^1)\right)<\frac{\alpha}{2}. \tag{7}$$

Тогда из (6) и (7) вытекает

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{k\le k_1} A_{n_1k}(y_k^1)-z_0\right) &> q\left(\sum_k A_{n_1k}(y_k^1)-z_0\right)- \\ &-q\left(\sum_{k>k_1} A_{n_1k}(y_k^1)\right)>\alpha-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}. \end{aligned} \tag{8}$$

В общем случае, если индексы $1=i_1<i_2<\cdots<i_{j-1}$, $k_1<k_2<\cdots<k_{j-1}$ и последовательности $Y_1, Y_2,\ldots,Y_{j-1}$ с $Y_{j-1}\in\mathcal{N}(X(>m_{j-1}))$, где $m_{j-1}=m(i_{j-1})$, уже определены, то в силу условий (B) и (4) существуют индекс $i_j>i_{j-1}$ и последовательность $Y_j=(y_k^j)\in\in\mathcal{N}(X(>m_j))$ такие, что $m_j>N(y_{k_{j-1}}^{j-1})$,

$$q\left(\sum_k A_{n_jk}(y_k^j)-z_0\right)>\alpha \tag{9}$$

и при $1\le k<k_{j-1}$ выполнено неравенство

$$\kappa_{j-1}\, q\left(A_{n_j k}(x)\right) > \alpha/16 \qquad (x\in X), \tag{10}$$

где $m_j = m(i_j)$ и $n_j = n(i_j)$. Затем на основе равенства (3) и сходимости ряда

$$\sum_k A_{n_j k}(y_k^j)$$

фиксируем индекс $\kappa_j > \kappa_{j-1}$ таким, чтобы было

$$S(n_j, \kappa_j, q) < \alpha/8 \tag{11}$$

и

$$q\left(\sum_{k>\kappa_j} A_{n_j k}(y_k^j)\right) < \alpha/2 . \tag{12}$$

Из (12) при помощи (9) аналогично условию (8) находим

$$q\left(\sum_{k\le\kappa_j} A_{n_j k}(y_k^j) - z_0\right) > \alpha/2 . \tag{13}$$

Продолжая этот процесс неограниченно, мы построим последовательности индексов $\kappa_1<\kappa_2<\cdots<\kappa_j<\cdots$; $m_1<m_2<\cdots<m_j<\cdots$; $n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots$ и последовательность (Y_j) такие, что будут выполнены условия (10), (11) и (13) для всех $j\ge 2$.

Определим теперь последовательность $Z=(z_k)$ равенством

$$z_k = y_k^j \qquad (\kappa_{j-1}\le k<\kappa_j,\ j\ge 1,\ \kappa_0=1).$$

По посторовнию ясно, что $Z\in\mathcal{N}(X)$ с $Z(\ge\kappa_j)\in\mathcal{N}(X(\ge\kappa_j))$. При этом из условий (10), (11) и (13) вытекает

$$q\left(\sum_k A_{n_j k}(z_k)-z_0\right) \ge q\left(\sum_{k\le\kappa_j} A_{n_j k}(y_k^j)-z_0\right) -$$

$$-\sum_{k\le\kappa_{j-1}} q\left(A_{n_j k}(y_k^j)\right) - \sum_{k\le\kappa_{j-1}} q\left(A_{n_j k}(z_k)\right) - q\left(\sum_{k>\kappa_j} A_{n_j k}(z_k)\right) \ge$$

$$\ge q\left(\sum_{k\le\kappa_j} A_{n_j k}(y_k^j)-z_0\right) - \kappa_{j-1}\max_{1\le k\le\kappa_{j-1}} q\left(A_{n_j k}(y_k^j)\right) -$$

$$-\kappa_{j-1}\max_{1\le k\le\kappa_{j-1}} q\left(A_{n_j k}(z_k)\right) - S(n_j,\kappa_j,q) > \frac{\alpha}{2}-\frac{2\alpha}{16}-\frac{\alpha}{8}=\frac{\alpha}{4}$$

для всех $j\ge 2$. Следовательно, последовательность $Z\in\mathcal{N}(X)$ удовлетворяет условию (5). Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть E - локально выпуклое пространство и $A=(a_{nk})\in \mathcal{Y}$. Тогда для $X\in s(E)$ следующие условия эквивалентны:

1^0 $A\text{-}\lim Y=x_0$ для всех $Y\in \mathcal{R}(X)$;

2^0 X является A-устойчивой с пределом x_0.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3 из статьи [1] любая последовательность X со свойством 1^0 ограничена. Но тогда условие (B) выполено из-за $A\in \mathcal{Y}$ и наше утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1.

§ 2. О суммируемости перестановок

Аналогом теоремы 1 в случае перестановок является следующая

Теорема 2. Пусть E и F - локально выпуклые пространства, а A - произвольная конечнострочная обобщенная матрица. Для последовательности $X\in s(E)$ со свойством (B) следующие утверждения для произвольной полунормы $q\in Q$ равносильны:

1^{00} $\lim_n q(A_n(Y)-u_0)=0$ для всех $Y\in\mathcal{R}(X)$;

2^{00} $\lim_n q(A_n(Y)-u_0)=0$ равномерно по $Y\in\mathcal{R}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обоснования требует только импликация $1^{00}\Rightarrow 2^{00}$. При этом можно предполагать, что длины строк матрицы A не равномерно ограничены, ибо в противном случае равносильность соотношений 1^{00} и 2^{00} с $u_0=\theta$ сразу вытекает из свойства (B) последовательности X.

Допустим теперь, что условие 2^{00} не выполнено. Тогда существуют полунорма $q\in Q$, число $\alpha>0$ и последовательности индексов $n(1)<n(2)<\dots<n(i)<\dots$, $k(1)<k(2)<\dots<k(i)<\dots$ и перестановок $Y_i=(y_k^i)\in\mathcal{R}(X)$ такие, что

$$q\Big(\sum_{k\le k_i} A_{n_i k}(y_k^i)-u_0\Big)>\alpha \qquad (i\in\mathbb{N}), \tag{15}$$

где $k(i)$ обозначает номер последнего отличного от нулевого элемента в ряде с номером $n(i)$ матрицы A. Построим сначала по индукции последовательности индексов $k_1\le m_1<$ $<k_2\le m_2<\dots<k_i\le m_i<\dots$ и перестановок $V_i=(v_k^i)\in$ $\in\mathcal{R}(X)$ следующим образом. Обозначим $n_1=n(1)$, $k_1=k(1)$, $V_1=Y_1$ и

$$m_1=\max_{1\le k\le k_1} N(y_k^1).$$

Тогда $m_1 \geq k_1$ и ввиду неравенства (15) имеем

$$q\left(\sum_{k \leq k_1} A_{n_1 k}(v_k^1) - u_0\right) > \alpha > \frac{\alpha}{2}.$$

Пусть перестановки $V_1, V_2, \ldots, V_{j-1}$, индексы $1 = i_1 < i_2 < \ldots < i_{j-1}$ и, тем самым, числа $n_1 < n_2 < \ldots < n_{j-1} = n(i_{j-1})$ и $k_1 \leq m_1 < k_2 \leq m_2 < \ldots < k_{j-1} \leq m_{j-1}$ с $k_\ell = k(i_\ell)$ $(1 \leq \ell \leq j-1)$,

$$m_\ell = \max_{1 \leq k \leq k_\ell} N(y_k^\ell) \qquad (1 \leq \ell \leq j-1)$$

уже определены. Используя свойство (B), найдем индекс $i_j > i_{j-1}$ столь большим, чтобы было $k_j > m_{j-1}$ и

$$m_{j-1}\, q(A_{n_j k}(x)) < \frac{\alpha}{8} \qquad (x \in X), \tag{16}$$

где $k_j = k(i_j)$ и $n_j = n(i_j)$. В зависимости от последовательности Y_j рассмотрим отдельно два случая. При $X(\leq m_{j-1}) \cap [Y_j(\leq k_j) \setminus Y_j(\leq m_{j-1})] = \emptyset$, определив $V_j = Y_j$, мы из-за (15) непосредственно получим

$$q\left(\sum_{k \leq k_j} A_{n_j k}(v_k^j) - u_0\right) > \alpha > \frac{\alpha}{2}. \tag{17}$$

Если же $X(\leq m_{j-1}) \cap [Y_j(\leq k_j) \setminus Y_j(\leq m_{j-1})] \neq \emptyset$, то найдется множество индексов $\sigma_j = \{\ell \in N: \ \ell \leq m_{j-1},\ N(y_\ell^j) > m_{j-1}\}$, такое, что $card\, \sigma_j = card\, \tau_j$, где $\tau_j = \{r \in N: m_{j-1} < r < k_j,\ N(y_r^j) \leq m_{j-1}\}$. Через V_j обозначим теперь перестановку, полученную из Y_j заменой $\{y_r^j : r \in \tau_j\}$ на $\{y_\ell^j : \ell \in \sigma_j\}$. В этом случае V_j также удовлетворяет условию (17), ибо в силу $card\, \tau_j = card\, \sigma_j \leq \leq m_{j-1}$ на основе неравенств (15) и (16) справедливо

$$q\left(\sum_{k \leq k_j} A_{n_j k}(v_k^j) - u_0\right) \geq q\left(\sum_{k \leq k_j} A_{n_j k}(y_k^j) - u_0\right) -$$

$$- \sum_{k \in \sigma_j} q(A_{n_j k}(y_k^j)) - \sum_{k \in \sigma_j} q(A_{n_j k}(v_k^j)) -$$

$$- \sum_{k \in \tau_j} q(A_{n_j k}(y_k^j)) - \sum_{k \in \tau_j} q(A_{n_j k}(v_k^j)) > \alpha - 4\frac{\alpha}{8} = \frac{\alpha}{2}.$$

7

Продолжая этот процесс бесконечно, мы построим перестановки V_j и индексы $n_1<n_2<\dots<n_j<\dots$, $k_1\le m_1<k_2\le$ $\le m_2<\dots<k_j\le m_j<\dots$ такие, что при всех $j\ge 2$ выполнены условия (16) и (17).

По нашим построениям последовательность

$$Z=V_1(\le k_1)X(\le m_1)[V_2(\le k_2)\setminus V_2(\le m_1)]X(\le m_2)\cdots,$$

очевидно, является перестановкой последовательности X. При этом из условий (16) и (17) для всех индексов $j\ge 2$ вытекает

$$q\Big(\sum_{k\le k_j} A_{n_j k}(z_k)-u_0\Big)\ge q\Big(\sum_{k\le k_j} A_{n_j k}(v_k^j)-u_0\Big)-$$

$$-\sum_{k\le m_{j-1}} q\big(A_{n_j k}(v_k^j)\big)-\sum_{k\le m_{j-1}} q\big(A_{n_j k}(z_k)\big)>$$

$$>\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{8}-\frac{\alpha}{8}=\frac{\alpha}{4},$$

т.е. $q(A_{n_j}(Z)-u_0)>\alpha/4$. Но это явно противоречит соотношению 1^{00}. Теорема доказана.

Следствие 2. Пусть E – секвенциально полное локально выпуклое пространство и $A=(a_{nk})\in\mathcal{T}$. Тогда для $X\in s(E)$ следующие соотношения эквивалентны:

1^{00} $A\text{-}\lim Y=x_0$ для всех $Y\in\mathcal{R}(X)$;

2^{00} $A\text{-}\lim Y=x_0$ равномерно по $Y\in\mathcal{R}(X)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено 1^{00}. Тогда по доказательству следствия 6 из [3] имеем $X\in m(E)$ и на основе теоремы 3 из статьи [2] существует нормальная матрица $B=(b_{nk})\in\mathcal{T}$ такая, что

$$B\text{-}\lim Y=x_0 \qquad (Y\in\ (X)),$$

причем $X\in m(E)$ удовлетворяет условию (B) относительно матрицы B из-за $B\in\mathcal{T}$. Следовательно, из теоремы 2 вытекает $B\text{-}\lim Y=x_0$ равномерно по $Y\in\mathcal{R}(X)$, откуда на основе построения матрицы B (см. доказательство теоремы 1 из [3]) следует 2^{00}. Доказательство закончено, ибо импликация $2^{00}\Longrightarrow$ $\Longrightarrow 1^{00}$ очевидна.

Литература

1. Кольк Э., Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 128-140.
2. Кольк Э., Обобщенная секвенциальная сходимость и свойство Банаха-Сакса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448,21-30.
3. Кольк Э., О суммируемости подпоследовательностей и перестановок. I. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 504, 74-84.
4. Partington, J.R., On the Banach—Saks property. Math. Proc. Cambr. Philos. Soc., 1977, 82, №3, 369-374.

Поступило 28 11 79

Über die Limitierbarkeit der Teilfolgen und Umordnungen. II

E.Kolk

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit ist eine Fortsetzung des Artikels [3]. Es seien E und F separierte lokalkonvexe topologische lineare Räume, es sei $A=(A_{nk})$, $A_{nk}:E\to F$ eine verallgemeinerte Matrix und $\mathcal{T}(X)$ die Menge aller Teilfolgen der Folge $X=(x_n)$, $x_n\in E$. Es wird bewiesen, daß die A-Limitierbarkeit zu $x\in F$ aller Teilfolgen der die Bedingung (B) befridigende Folge X der Eigenschaft

$A\text{-}\lim Y = x$ gleichmäßig für $Y\in \mathcal{T}(X)$

äquivalent ist. Ein Analogon dieses Satzes für die Umordnungen wird bewiesen.

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ ПОЧТИ ВСЮДУ

Л.Паллас

Тартуский государственный университет

1. Пусть $\varphi = \{\varphi_k\}$ - такая система измеримых, конечных почти всюду на $e=[a,b]$ функций, для которых выполнено условие (A_p^λ): для каждого $\varepsilon>0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $mes\, T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon>0$ такие, что для всех чисел $\{c_k\}$

$$\int_{T_\varepsilon} \Big|\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(t)\Big|\,dt \le M_\varepsilon \lambda_n \Big\{\sum_{k=0}^{n} |c_k|^p\Big\}^{1/p},$$

где $\lambda = \{\lambda_n\}$ заданная последовательность с $0<\lambda_n \uparrow$.

Говорят, что ряд[1]

$$\sum_k{}' \xi_k \varphi_k(t) \qquad (1)$$

почти всюду на e абсолютно суммируем методом $A=(\bar\alpha_{nk})$ т.е. $|A|$-суммируем почти всюду на e, если почти всюду на e

$$\sum_n \Big|\sum_{k=0}^{n} \bar\alpha_{nk}\, \xi_k \varphi_k(t)\Big| < \infty. \qquad (2)$$

В частности, если

$$\bar\alpha_{nk} = \frac{k A_{n-k}^{\varkappa-1}}{n A_n^{\varkappa}},$$

то говорят, что ряд (1) почти всюду на e абсолютно суммируем методом Чезаро $C^\varkappa$ или $|C^\varkappa|$ - суммируем и, если

$$\bar\alpha_{nk} = P_{k-1}\, p_n P_n^{-1} P_{n-1}^{-1},$$

где $0<P_n\uparrow$ и $p_n = P_n - P_{n-1}$, то говорят, что ряд (1) почти всюду на e абсолютно суммируем методом Рисса или $|P|$-суммируем.

Абсолютную суммируемость исследовали Барон [2], Грепачевская [3,4], Лейндлер [9] и Тандори [10]. Однако более общие результаты в этом направлении принадлежат Тюрнпу [7,8].

---

[1] Через $\sum_k{}' u_k$ мы обозначаем ряд $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

2. Целью настоящей статьи является обобщение трех теорем из работ [7,8] на случай, где сходимость по мере ряда (1) заменена на условие (A_p').

Обозначим

$$r(m) = 2^m$$

$$\delta_{m\nu} = \sum_{n=\max\{r(m)+1,\nu\}}^{r(m+1)} |\bar{\alpha}_{n\nu}^{\varkappa}|^p$$

$$\Delta_{m\ell} = \max_{r(\ell)+1 \le \nu \le r(\ell+1)} \delta_{m\nu}.$$

Определение 1. Будем говорить, что для порядка $\varkappa$ метода суммирования $A^{\varkappa} = (\bar{\alpha}_{nk}^{\varkappa})$ выполнено неравенство $\varkappa > 1/q$, если

$$\Delta_{m\ell} = \mathcal{O}(1)\, r((m+mq-\ell q)/(1-q)),$$

равенство $\varkappa = 1/q$, если

$$\Delta_{m\ell} = \mathcal{O}(1)\, r((m+mq-\ell q)/(1-q))\cdot \ell$$

и неравенство $-1 < \varkappa < 1/q$, если

$$\Delta_{m\ell} = \mathcal{O}(1)\, r((m+mq-\ell q+\ell q\alpha-\ell)/(1-q)).$$

Покажем, что порядок $\varkappa$ метода суммирования $|C^{\varkappa}|$ удовлетворяет условиям определения 1. На самом деле, имеем

$$\Delta_{m\ell} = \max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=\max\{r(m)+1,\nu\}}^{r(m+1)} |\nu A_{n-\nu}^{\varkappa-1} n^{-1} (A_n^{\varkappa})^{-1}|^p.$$

Так как

$$|\nu A_{n-\nu}^{\varkappa-1} n^{-1} (A_n^{\varkappa})^{-1}| = \mathcal{O}(1)\, n^{-p(\varkappa+1)} (n-\nu+1)^{p(\varkappa-1)} \nu^p,$$

то

$$\Delta_{m\ell} = \mathcal{O}(1)\, r(\ell p - mp\varkappa - mp) \max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=\max\{r(m)+1,\nu\}}^{r(m+1)} (n-\nu+1)^{p\varkappa-p}.$$

Теперь, если $\varkappa > 1/q$, то $p\varkappa - p + 1 > 0$ и

$$\sum_{n=\nu}^{r(m+1)} (n-\nu+1)^{p\varkappa-p} = \mathcal{O}(1)\, r(mp\varkappa - mp + m)$$

и, следовательно,

$$\Delta_{m\ell} = \mathcal{O}(1)\, r(m - 2mp + \ell p) = \mathcal{O}(1)\, r((m+mq-\ell q)/(1-q)).$$

Далее, если $\varkappa = 1/q$, то $p\varkappa - p = -1$. Следовательно, при $\ell \le m-2$ имеем

$$\max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n-\nu+1)^{-1} = \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n-r(\ell+1)+1)^{-1} = O(1),$$

при $\ell = m-1$ имеем

$$\max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n-\nu+1)^{-1} = \sum_{n=r(\ell+1)+1}^{r(\ell+2)} (n-r(\ell+1)+1)^{-1} = O(1)\cdot\ell$$

и при $\ell = m$ имеем

$$\max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=\nu}^{r(\ell+1)} (n-\nu+1)^{-1} = O(1)\cdot\ell .$$

Итак, при $\text{æ} = 1/q$

$$\Delta_{m\ell} = O(1)\,r\,(\ell p - mp\,(1/q+1))\cdot\ell = O(1)\,r\,((m+mq-\ell q)/(1-q))\cdot\ell .$$

Наконец, если $-1 < \text{æ} < 1/q$, то $p\text{æ}-p+1<0$. Следовательно при $\ell \le m-2$ имеем

$$\max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n-\nu+1)^{p\text{æ}-p} = \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n-r(\ell+1)+1)^{p\text{æ}-p} =$$

$$= O(1)\,r\,(mp\text{æ}-mp+m),$$

при $\ell = m-1$, учитывая, что $p\text{æ}-p<-1$, получаем

$$\max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=r(m)+1}^{r(m+1)} (n-\nu+1)^{p\text{æ}-p} = \sum_{n=r(\ell+1)}^{r(\ell+2)} (n-r(\ell+1)+1)^{p\text{æ}-p} = O(1)$$

и при $\ell = m$ –

$$\max_{r(\ell)+1\le\nu\le r(\ell+1)} \sum_{n=\nu}^{r(\ell+1)} (n-\nu+1)^{p\text{æ}-p} = O(1).$$

Отсюда выводим, что при $\ell \le m-2$

$$\Delta_{m\ell} = O(1)\,r\,(m-2mp+\ell p),$$

при $\ell = m-1$

$$\Delta_{m\ell} = O(1)\,r\,(m-2mp+\ell p+mp-m-mp\text{æ}) =$$
$$= O(1)\,r\,(m-2mp+\ell p+\ell p/q-\ell p\text{æ})$$

и при $\ell = m$ также

$$\Delta_{m\ell} = O(1)\,r\,(m-2mp+\ell p+\ell p/q-\ell p\text{æ}).$$

Следовательно, если $-1<\text{æ}<1/q$, то

$$\Delta_{m\ell} = O(1)\,r\,((m+mq-\ell q+\ell q\text{æ}-\ell)/(1-q)).$$

Введем дополнительно следующие обозначения:

$$\bar{A}_m^{(p)} = \left\{ \sum_{k=\tau(m)+1}^{\tau(m+1)} \lambda_k^p |\xi_k|^p \right\}^{1/p},$$

$$\bar{E}_m^{(p)} = \left\{ \sum_{k=m}^{\infty} \lambda_k^p |\xi_k|^p \right\}^{1/p},$$

где для $\{\lambda_n\}$ имеем

$$\sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\lambda_{\tau(m+1)}}{\tau(m)} \leq M \frac{\lambda_{\tau(\ell)+1}}{\tau(\ell)}. \tag{3}$$

3. В настоящей статье будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ -неубывающая положительная последовательность, которая удовлетворяет условию (3), и пусть система φ для всех $x \in \ell^p$ $(1 < p < \infty)$ на e удовлетворяет условию (A_p^λ).Тогда ряд (1) почти всюду на e является $|A^\varkappa|$-суммируемым для тех $x \in \ell^p$ для которых при $\varkappa > 1/q$ имеем место

$$\sum_m \bar{A}_m^{(p)} < \infty, \tag{4}$$

при $\varkappa = 1/q$ –

$$\sum_m m^{1/p} \bar{A}_m^{(p)} < \infty, \tag{5}$$

и при $-1 < \varkappa < 1/q$ –

$$\sum_m \tau(m/q - m\varkappa) \bar{A}_m^{(p)} < \infty. \tag{6}$$

Следствие 1. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ - неубывающая положительная последовательность, которая удовлетворяет условию (3) и пусть система φ для всех $x \in \ell^p$ $(1 < p < \infty)$ на e удовлетворяет условию (A_p^λ). Тогда ряд (1) почти всюду на e является $|C^\varkappa|$-суммируемым для тех $x \in \ell^p$, для которых при $\varkappa > 1/q$ выполняется условие (4), при $\varkappa = 1/q$ - условие (5) и при $-1 < \varkappa < 1/q$ - условие (6).

Примечание. Если предположить сходимость ряда (1) по мере для всех $x \in \ell^p$ на e, то из следствия 1 вытекает теорема 1 из [7]. Если к тому же φ - ортогональная система и $p = 2$, то из этого следствия вытекает соответствующий результат, доказанный Лейндлером [9].

Теорема 2. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ -неубывающая положительная последовательность, удовлетворяющая условию (3) и пусть система φ для всех $x \in \ell^p$ $(1 < p < \infty)$ удовлетворяет условию

(A^{λ}_{p}). Тогда ряд (1) почти всюду на e является $|C^{\varkappa}|$-суммируемым для тех $x \in \ell^{p}$ для которых при $\varkappa > 1/q$ имеет место

$$\sum_{n} \frac{\bar{E}^{(p)}_{\lambda+2}}{(n+2)\lg^{1/p}(n+2)} < \infty, \tag{7}$$

при $\varkappa = 1/q$ –

$$\sum_{n} \frac{\bar{E}^{(p)}_{\lambda+1}}{n+1} < \infty \tag{8}$$

и при $-1 < \varkappa < 1/q$ –

$$\sum_{n} (n+1)^{-(\varkappa+1/p)} \bar{E}^{(p)}_{n+1} < \infty. \tag{9}$$

Примечание. Если предположить сходимость ряда (1) по мере для всех $x \in \ell^{p}$, из теоремы 2 вытекает теорема 2 из [7]. Если дополнительно предположить, что φ – ортогональная система и $p = 2$, то из данной теоремы вытекают соответствующие результаты Грепачевской [7,8].

Теорема 3. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ – неубывающая положительная последовательность и пусть система φ для всех $x \in \ell^{p}$ $(1 < p < \infty)$ на e удовлетворяет условию (A^{λ}_{p}). Пусть, далее, для $\omega_k \uparrow \infty$ и метода A имеем

1. $\sum_{n} |\alpha_{nn}| \lambda_n \omega_n^{1/(1-p)} < \infty$,
2. $\left| \frac{\bar{\alpha}_{nk} (\omega_n \lambda_n)^{1/(p-1)}}{\alpha_{nn}} \right|$ не возрастает по n для $k = 0, 1, 2, \ldots$,
3. $\sum_{n=k}^{\infty} |\bar{\alpha}_{nk}| < N.$ $\quad (10)$

Тогда ряд (1) почти всюду на e является $|A|$-суммируемым для тех $x \in \ell^{p}$, для которых

$$\sum_{k} |\xi_k|^{p} \omega_k \lambda_k < \infty.$$

Теорема 4. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ – неубывающая положительная последовательность и пусть система φ для всех $x \in \ell^{p}$ $(1 < p < \infty)$ удовлетворяет на e условию (A^{λ}_{p}). Пусть, далее, для $\omega_k \uparrow \infty$ и метода A имеют место условия (10),

1. $\sum_{n} |\alpha_{nn}| \omega_n^{1/(1-p)} < \infty$

и

2. $\left| \frac{\bar{a}_{nk} \lambda_n^{p/(p-1)} \omega_n^{1/(p-1)}}{a_{nn}} \right|$ не возрастает по n для $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда ряд (1) почти всюду на e является $|A|$-суммируемым для тех $x \in \ell^p$ для которых

$$\sum_k |\xi_k|^p \lambda_k^p \omega_k < \infty.$$

Теорема 5. Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ - неубывающая положительная последовательность и пусть система φ для всех $x \in \ell^p$ ($1 < p < \infty$) удовлетворяет на e условию (A_p^λ). Пусть, далее, для $\omega_k \uparrow \infty$ и метода A имеют место условие (10),

1. $\sum_n |\alpha_{nn}| (\lambda_n^p \omega_n^{-1})^{1/(p-1)} < \infty$

и

2. $\left| \frac{\bar{a}_{nk} \omega_k^{1/(p-1)}}{\alpha_{nn}} \right|$ не возрастает по n для $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Тогда ряд (1) почти всюду на e является $|A|$-суммируемым для тех $x \in \ell^p$ для которых

$$\sum_k |\xi_k|^p \lambda_k^p \omega_k < \infty.$$

Примечание. Если предположить сходимость ряда (1) по мере на e для всех $x \in \ell^p$, то из теорем 3-5 вытекает теорема 3 из [8]. При ортогональных системах и $p = 2$ получаем в случае $A = P$ отсюда теорему 5 из [2].

4. Доказательство теоремы 1. Для $|A^\varkappa|$-суммируемости ряда (1) достаточно показать, что

$$\sup_m \sum_{n=0}^m \left| \sum_{k=0}^n \bar{a}_{nk}^\varkappa \xi_k \varphi_k(t) \right| < \infty.$$

По лемме 2 ([6], стр. 142) и по теореме Леви ([1], стр. 19) последнее имеет место, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $N_\varepsilon > 0$ такие, что

$$\sum_{n=0}^m \int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^n \bar{a}_{nk}^\varkappa \xi_k \varphi_k(t) \right| dt \le N_\varepsilon.$$

По условию (A_p^λ)

$$\int_{T_\varepsilon} \left| \sum_{k=0}^n \bar{a}_{nk}^\varkappa \xi_k \varphi_k(t) \right| dt \le M_\varepsilon \lambda_n \left\{ \sum_{k=0}^n |\bar{a}_{nk}^\varkappa|^p |\xi_k|^p \right\}^{1/p}$$

8

Итак, $|A^{\varkappa}|$-суммируемость ряда (1) почти всюду на e вытекает из сходимости ряда

$$J \equiv \sum_n \lambda_n \Big\{ \sum_{k=0}^{n+1} B_{n+1,k}^{\varkappa p} \Big\}^{1/p},$$

где

$$B_{nk}^{\varkappa p} = |\bar{\alpha}_{nk}^{\varkappa}|^p |\xi_k|^p.$$

Так как

$$J = \sum_m \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} \lambda_n \Big\{ \sum_{k=0}^{n} B_{nk}^{\varkappa p} \Big\}^{1/p},$$

то при помощи неравенства Гельдера получаем оценку

$$J \leq \sum_m \nu(m/q) \Big\{ \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} \lambda_n^p \sum_{k=0}^{n} B_{nk}^{\varkappa p} \Big\}^{1/p}.$$

Теперь, учитывая, что

$$\sum_{k=0}^{n} B_{nk}^{\varkappa p} = O(1) \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=\nu(l)+1}^{\min\{\nu(l+1),n\}} B_{n\nu}^{\varkappa p} + O(1)(|\bar{\alpha}_{n0}^{\varkappa}| + |\bar{\alpha}_{n1}^{\varkappa}|),$$

получаем

$$J = O(1) \sum_m \nu(m/q) \Big\{ \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} \lambda_n^p (|\bar{\alpha}_{n0}^{\varkappa}| + |\bar{\alpha}_{n1}^{\varkappa}|) \Big\}^{1/p} +$$

$$+ O(1) \sum_m \nu(m/q) \Big\{ \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} \lambda_n^p \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=\nu(l)+1}^{\min\{\nu(l+1),n\}} B_{n\nu}^{\varkappa p} \Big\}^{1/p} =$$

$$= O(1) \sum_m \nu(m/q) \lambda_{\nu(m+1)} \Big\{ \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} |\bar{\alpha}_{n0}^{\varkappa}| + \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} |\bar{\alpha}_{n1}^{\varkappa}| \Big\}^{1/p} +$$

$$+ O(1) \sum_m \nu(m/q) \Big\{ \sum_{l=0}^{m} \sum_{\nu=\nu(l)+1}^{\nu(l+1)} \lambda_{\nu(m+1)}^p |\xi_\nu|^p \delta_{m\nu} \Big\}^{1/p} =$$

$$= O(1) \sum_m \nu(m/q) \lambda_{\nu(m+1)} \{ \delta_{m0} + \delta_{m1} \}^{1/p} +$$

$$+ O(1) \sum_m \nu(m/q) \sum_{l=0}^{m} \Delta_{ml}^{1/p} \frac{\lambda_{\nu(m+1)}}{\lambda_{\nu(l)+1}} \Big\{ \sum_{\nu=\nu(l)+1}^{\nu(l+1)} \lambda_\nu^p |\xi_\nu|^p \Big\}^{1/p} =$$

$$= O(1) \sum_m \nu(m/q) \lambda_{\nu(m+1)} \Delta_{mc}^{1/p} +$$

$$+ O(1) \sum_l \bar{A}_l^{(p)} \sum_{m=l}^{\infty} \frac{\lambda_{\nu(m+1)}}{\lambda_{\nu(l)+1}} \nu(m/q) \Delta_{ml}^{1/p},$$

где
$$\Delta_{mc} = \max\{\delta_{m0}, \delta_{m1}\}.$$

Рассмотрим случай $\varkappa > 1/q$. В этом случае

$$J = O(1)\sum_m r(m/q + mp - 2m + c)\lambda_{r(m+1)} +$$
$$+ O(1)\sum_l \bar{A}_l^{(p)} \sum_{m=l}^{\infty} \frac{\lambda_{r(m+1)}}{\lambda_{r(l)+1}} r(m/q) r(m/p - 2m + l) =$$
$$= O(1)\sum_m r(m - 2m)\lambda_{r(m+1)} + O(1)\sum_l \bar{A}_l^{(p)} \sum_{m=l}^{\infty} \frac{\lambda_{r(m+1)}}{\lambda_{r(l)+1}} \frac{r(l)}{r(m)}.$$

Учитывая условие (3) получим, что

$$J = O(1) + O(1)\sum_l \bar{A}_l^{(p)}$$

в следствие чего из условии (4) вытекает, что $J = O(1)$. Теорема при $\varkappa > 1/q$ доказана. Далее отметим, что при $\varkappa = 1/q$ и при $-1 < \varkappa < 1/q$ теорема доказывается аналогично.

5. Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что условия (4),(5) и (6) вытекает соответственно из ловий (7),(8) и (9). Во-первых покажем, что условие (4) вытекает из условия (7). На самом деле, так как

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \bar{E}_n^{(p)} \lg^{-1/p} n \geqslant \sum_i \sum_{n=r(i)+1}^{r(i+1)} r(-i-1) \lg^{-1/p} r(i+1) \bar{E}_n^{(p)} \geqslant$$
$$\geqslant M_1 \sum_i (i+1)^{1/p} \left\{ \sum_{m=i+1}^{\infty} [\bar{A}^{(p)}]^p \right\}^{1/p},$$

где $M_1 = 1/2 \lg^{1/p} 2$, то положив в неравенстве (см. [5], теорема 345)

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{1/p} \leqslant M_2 \sum_{i=1}^{\infty} i^{-1/p} \left(\sum_{k=i}^{\infty} |a_k| \right)^{1/p}$$

$a_m = [\bar{A}_m^{(p)}]^p$, получаем, что при некотором $M > 0$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-1} \bar{E}_n^{(p)} \lg^{-1/p} n \geqslant M \sum_n \bar{A}_n^{(p)},$$

что и требовалось доказать.

Во-вторых, положив в неравенстве (см.[5], теорема 344)

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{1/p}|a_k|^{1/p} \leq M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=k}^{\infty} |a_n|\Big)^{1/p}$$

$a_n = [\bar{A}_n^{(p)}]^p$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p} \bar{A}_n^{(p)} \leq M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \Big\{ \sum_{n=k}^{\infty} [\bar{A}^{(p)}]^p \Big\}^{1/p} \leq$$

$$\leq M_3 \sum_{k=1}^{\infty} \bar{E}^{(p)}_{\nu(k)+1}.$$

Учитывая, что $\bar{E}_n^{(p)} \downarrow 0$ при $n \to \infty$, заключаем, что ряд $\sum_n \bar{E}^{(p)}_{\nu(n)}$ сходится, если сходится ряд $\sum_n n^{-1} \bar{E}_n^{(p)}$. Итак, из условия (8) вытекает условие (5).

Пусть $-1/p \leq \varkappa < 1/q$. Заметив, что

$$\sum_m \nu(m/q - m\varkappa) \bar{E}^{(p)}_{\nu(m)} \geq \sum_m \nu(m/q - m\varkappa) \bar{A}_m^{(p)}$$

и из сходимости ряда

$$\sum_m m^{-(1/p+\varkappa)} \bar{E}_m^{(p)}$$

вытекает сходимость ряда

$$\sum_m \nu(m/q - m\varkappa) \bar{E}^{(p)}_{\nu(m)},$$

получаем, что в данном случае из условия (9) вытекает условие (6).

Пусть, наконец, $-1 < \varkappa < -1/q$. Тогда из неравенства

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(1/p+\varkappa)} \bar{E}_n^{(p)} = \sum_m \sum_{n=\nu(m)+1}^{\nu(m+1)} n^{-(1/p+\varkappa)} \bar{E}_n^{(p)} \geq$$

$$\geq \sum_m \nu(m - mp - m\varkappa) \bar{E}^{(p)}_{\nu(m+1)+1} \geq$$

$$\geq \sum_m \nu(m/q - m\varkappa) \bar{A}^{(p)}_{m+1} = M \sum_m \nu(m/q - m\varkappa) \bar{A}_m^{(p)},$$

где $M = \nu(\varkappa - 1/q)$ выводим, что и теперь из условия (9) следует условие (6). Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3. В силу леммы 2 ([6], стр. 142) и теоремы Леви мы должны для сходимости ряда (2) показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon \subset e$ с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b - a - \varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon > 0$ такие, что

$$B_m \le \sum_{n=0}^{m} \int_{T_\xi} \Big| \sum_{k=0}^{n} \bar{\alpha}_{nk} \xi_k \varphi_k(t) \Big| dt \le N_\xi .$$

Из условия (A_p^{λ}) имеем, что

$$B_m \le M_\xi \sum_{n=0}^{m} \lambda_n \Big\{ \sum_{k=0}^{n} |\bar{\alpha}_{nk}|^p |\xi_k|^p \Big\}^{1/p}$$

или

$$B_m \le M_\xi \sum_{n=0}^{m} \lambda_n^{\frac{q-1}{q}} |\alpha_{nn}|^{1/q} \lambda_n^{1/q} |\alpha_{nn}|^{-1/q} \omega_n^{1/p} \Big\{ \sum_{k=0}^{n} |\bar{\alpha}_{nk}|^p |\xi_k|^p \Big\}^{1/p}.$$

При помощи неравенства Гельдера получаем оценку

$$B_m \le M_\xi \Big\{ \sum_{n=0}^{m} \lambda_n |\alpha_{nn}| \omega_n^{1/(1-p)} \Big\}^{1/q} \sum_{n=0}^{m} |\alpha_{nn}|^{1-p} \omega_n \lambda_n \sum_{k=0}^{n} |\bar{\alpha}_{nk}|^p |\xi_k|^p \Big\}^{1/p}.$$

Применяя условие 1, получаем после изменения порядка суммирования, что

$$B_m \le M_\xi \Big\{ \sum_{k=0}^{m} |\xi_k|^p \sum_{n=k}^{m} |\bar{\alpha}_{nn}|^{1-p} \omega_n \lambda_n |\bar{\alpha}_{nk}|^p \Big\}^{1/p} =$$

$$= M_\xi \Big\{ \sum_{k=0}^{m} |\xi_k|^p \sum_{n=k}^{m} \Big| \frac{\bar{\alpha}_{nk} (\omega_n \lambda_n)^{1/(p-1)}}{\alpha_{nn}} \Big| |\bar{\alpha}_{nk}| \Big\}^{1/p}.$$

Учитывая условие 2, получаем, что

$$B_m \le M_\xi \Big\{ \sum_{k=0}^{m} |\xi_k|^p \Big| \frac{\bar{\alpha}_{kk} (\omega_k \lambda_k)^{1/(p-1)}}{\alpha_{kk}} \Big| |\bar{\alpha}_{nk}| \Big\}^{1/p},$$

и, наконец, из условия 3 вытекает что

$$B_m = O(1) \Big\{ \sum_{k=0}^{m} |\xi_k|^p \omega_k \lambda_k \Big\}^{1/p} < \infty .$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4 и 5 доказываются аналогично.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Барон С., О признаках типа Вейля для абсолютной суммируемости ортогональных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1964,150,165-181.
3. Грепачевская Л.В., Абсолютная суммируемость ортогональных рядов. Мат. сб., 1964,65,№ 3,370-389.
4. Грепачевская Л.В., Абсолютная суммируемость ортогональных рядов. Сиб. мат. ж., 1965,6,№ 4,737-774.

5. Харди Г., Литтлвуд Дж. Е., Полия Г., Неравенства. Москва, 1948.
6. Никишин Е.М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи мат. наук, 1970, 25, №1, 129-191.
7. Тюрнпу Х., Об абсолютной Чезаро-суммируемости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 212-221.
8. Тюрнпу Х., Об абсолютной Р-суммируемости функциональных рядов почти всюду. Ann. Univ. sci. budapest. Sec. math., 1974, 17, 97-101.
9. Leindler, L., Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen. Acta sci. math., 1961, 22, 243-268.
10. Tandori, K., Über die absolute Summierbarkeit der Orthogonalreihen. Acta math. Acad. sci. hung., 1971, 22, 215-226.

Поступило 10 02 1980

On absolute summability of functional series

L.Pallas

Summary

Let $\varphi = \{\varphi_k\}$ denote a system of functions, that are measurable and finite almost everywhere on interval $e = [a,b]$ and for which the series (1) are convergent on e for every $x = \{\xi_k\} \in \ell^r$. It is said that the series (1) is almost everywhere on e absolutely summable by the method $A = (\alpha_{nk})$ or $|A|$ -summable, if the condition (2) is satisfied almost everywhere on e. In [7,8] sufficient conditions for $|C^{\alpha}|$- and $|P|$-summability of functional series (1) have been found, assuming that the series (1) is convergent in measure.

In the present paper the convergence in measure of series (1) is replaced by the condition (A_r^{λ}). The following theorem is proved, that is valid for some class of matrix methods defined by means of definition 1.

Theorem 1. Let $\lambda = \{\lambda_n\}$ be a non-decreasing sequence of positive real numbers, which satisfies the condition (3)

and let system φ satisfy the condition (A_p^λ) for every $x \in \ell^p$ $(1 < p < \infty)$ on e. Then the series (1) is $|A^{æ}|$-summable almost everywhere on e for these $x \in \ell^p$ for which in case $æ > 1/q$ the condition (4), in case $æ = 1/q$ the conditions (5) and in case $-1 < æ < 1/q$ the condition (6) are satisfied.

The theorem 2 proved in this paper is the generalization of the theorem 2 in [7]; the theorems 3-5 are the generalisations of the theorem 3 in [8].

МАКСИМАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Х. Тюрнпу

Тартуский государственный университет

1. Рассмотрим на отрезке $[a,b]=e$ ортонормированную (ОН) систему $\varphi=\{\varphi_k\}$, состоящую из ограниченных на e функций φ_k. Через $\psi=\{\psi_k\}$ обозначим систему ограниченных на множестве $T\subset R^1$ функции ψ_k, которые не обязательно образуют ОН-систему. Пусть[1] $A=(\alpha_{nk})$ конечнострочный регулярный метод суммирования, задаваемый матрицей преобразования ряда в последовательность, которую также обозначим через A.

Говорят, что ряд

$$\sum \xi_k \varphi_k(t) \tag{1}$$

является почти всюду (п.в.) на e суммируемым методом A (короче, A-суммируемым), если почти всюду на e существует предел

$$\lim_n \sum_{k=0}^{s_n} \alpha_{nk}\xi_k \varphi_k(t).$$

Если же, кроме того,

$$\int_e \sup_n \Big|\sum_{k=0}^{s_n} \alpha_{nk}\xi_k\varphi_k(t)\Big|^p dt<\infty \quad (1\le p<\infty), \tag{2}$$

то говорят, что ряд (1) является p-максимально A-суммируемым.

Говорят, что ряд (1) является p-максимально ограниченным методом A, если имеет место неравенство (2).

Если $p=1$, то вместо 1-максимальной A-суммируемости (соответственно 1-максимальной A-ограниченности) мы говорим о максимальной A-суммируемости (соответственно максимальной A-ограниченности).

Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое пространство последовательностей $x=(\xi_k)$.

[1] Мы воспользуемся обозначениями и определениями из [1].

Если ряд (1) для всех $x \in \mathfrak{X}$ является p-максимально A-суммируемым (соответственно p-максимально A-ограниченным), то говорят, что φ является системой p-максимальной A-суммируемости (соответственно p-максимальной A-ограниченности) для пространства $\mathfrak{X}$.

В основном в качестве $\mathfrak{X}$ мы рассмотрим пространства ℓ^p $(1 \le p < \infty)$, а также пространства коэффициентов Фурье (соответственно моментов) функций $f \in L^p$ $(1 \le p \le \infty)$ по системе φ (соответственно, по системе ψ), обозначив последние через $F(L^p, \varphi)$ (соответственно $F(L^p, \psi)$).

2. В настоящей статье мы докажем следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть ряд (1) для $x_0 = (\xi_k^0)$ — максимально A-ограничен. Если найдется такая регулярная конечно-строчная матрица $C = (\gamma_{n\nu})$, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in e} \mathcal{L}_n(C, \varphi, \psi, t) = O(1), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{L}_n(C, \varphi, \psi, t) = \int_T \Big| \sum_{k=0}^{\mu_n} \gamma_{nk} \varphi_k(t) \psi_k(\tau) \Big| d\tau,$$

то ряд

$$\sum \xi_k^0 \psi_k(t)$$

максимально A-ограничен (на множестве T).

Из теоремы 1 мы непосредственно выводим следующее

Следствие 1.1. Пусть φ — система максимальной A-ограниченности для $\mathfrak{X}$. Если найдется такая конечнострочная регулярная матрица C, чтобы имело место неравенство (3), то ψ является также системой максимальной A-ограниченности для $\mathfrak{X}$.

Рассмотрим в следствии 1.1 в качестве $\mathfrak{X}$ пространство ℓ^p с $1 \le p < \infty$, где множество $\{e_\nu\}$ с $e_\nu = (\delta_{k\nu})$ — символ Кронекера) является тотальным.

Учитывая, что в силу регулярности метода A на T п.в.

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\lambda_n} \alpha_{nk} \delta_{k\nu} \psi_k(t) = \psi_\nu(t),$$

то по лемме 1 (приведенной в обзаце 3) мы получим, что система максимальной A-ограниченности для ℓ^p является системой максимальной A-суммируемости для ℓ^p. Итак, из следствия 1.1 вытекает непосредственно

Следствие 1.2. Пусть φ — система максимальной A-ограниченности для ℓ^p $(1\le p<\infty)$. Если найдется такая конечнострочная матрица C, что имеет место неравенство (3), то ψ является системой максимальной A-суммируемости для ℓ^p.

Применим следствие 1.2 в случае $p=2$. Рассмотрим систему $h=\{h_k\}$ функций h_k, ограниченных на T. Определим систему g произведений системы h, полагая (см. [5], стр.2)

$g_0(t)\equiv 1$, и

$$g_n(t)=h_{k_1+1}(t)\,h_{k_2+1}(t)\cdots h_{k_n+1}(t)$$

для $n=2^{k_1}+\dots+2^{k_n}$ с $k_1>k_2>\dots>k_n$.

Например, если $h=r$ — система Радемахера, то $g=w$ система Уольша-Пэли. В [6] доказана, что система Уольша-Пэли является системой 2-максимальной сходимости для ℓ^2. Итак, подавно w — система максимальной ограниченности для ℓ^2. Возьмем в следствии 1.2 в качестве системы φ систему w, а в качестве системы ψ систему g, потребовав дополнительно, что

$$\sum\left|\int_T g_k(t)\,dt\right|<\infty,$$

т.е. g является системой произведений слабо мультипликативной системой (см. [5], стр. 4).

Так как (см. [5], стр. 6)

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} w_k(t)\,g_k(\tau)\ge 0, \tag{4}$$

то

$$\int_T\left|\sum_{k=0}^{2^n-1} w_k(t)\,g_k(\tau)\right|d\tau=\left|\int_T\sum_{k=0}^{2^n-1} w_k(t)\,g_k(\tau)\,d\tau\right|\le$$

$$\le\sum\left|\int_T g_k(\tau)\,d\tau\right|<\infty, \tag{5}$$

т.е. условие (3) имеет место для некоторой матрицы C, для которой $\gamma_{n\nu}=1$ при $\nu\le 2^n-1$ и $\gamma_{n\nu}=0$ при $\nu>2^n-1$.

Итак, мы получили, что каждая система произведений g слабо мультипликативной системы является системой максимальной сходимости для ℓ^2. Такой результат вытекает, в частности, из [7], где доказано, что каждая система произведений слабо мультипликативной системн является системой 2-максимальной сходимости для ℓ^2. Мы получаем такой же результат как следствие из теоремы 2.

Берем теперь в лемме 1.1 в качестве пространства $\mathfrak{X}$ пространство $F(L^p,\varphi)$. Из замкнутости системы ψ в пространстве L^p следует, что множества $\{e_\nu\}$ тотально в $F(L^p,\psi)$. Следовательно, система максимальной A-ограниченности одновременно является и системой максимальной A-суммируемости.

Итак, из леммы 1.1 вытекает

Следствие 1.3. Пусть φ — система максимальной A-ограниченности для $F(L^p,\varphi)$ с $1<p\leq\infty$. Если найдется такая конечнострочная матрица C, что имеет место неравенство (3), и кроме того $F(L^p,\psi)\subseteq F(L^p,\varphi)$, то замкнутая в L^p система ψ является системой максимальной A-суммируемости для $F(L^p,\psi)$.

Далее, если нам известно, что функции Лебега системы φ для некоторой конечнострочной регулярной матрицы C

$$\mathcal{L}_n(C,\varphi,t)=\int_e\Big|\sum_{k=0}^{M_n}\gamma_{nk}\varphi_k(t)\varphi_k(\tau)\Big|d\tau$$

удовлетворяют условию

$$\underset{t\in e}{\operatorname{vraisup}}\,\mathcal{L}_n(C,\varphi,t)=O(1), \qquad (6)$$

то для выполнения условия (3) достаточно, чтобы $F(L^\infty,\psi)\subseteq F(L^\infty,\varphi)$. На самом деле, тогда по теореме 6.4.6 из [3] (см. стр. 257) ряд

$$\sum\xi_k\eta_k \qquad (7)$$

для всех $x=(\xi_k)\in F(L^\infty,\psi)$ и $y=(\eta_k)\in F(L^1,\varphi)$ является C-ограниченным, т.е.

$$\sum_{k=0}^{M_n}\gamma_{nk}\xi_k\eta_k=O(1),$$

или же для всех $f\in L^\infty$ и $g\in L^1$ имеем

$$\int_T f(t)\int_e g(\tau)\sum_{k=0}^{M_n}\gamma_{nk}\psi_k(t)\varphi_k(\tau)\,d\tau\,dt=O(1),$$

которое равносильно условию (3).

Итак, в силу следствия 1.3 нами доказано еще следующее

Следствие 1.4. Пусть φ — система максимальной ограниченности для $F(L^p,\varphi)$ с $1<p\le\infty$. Если найдется такая конечнострочная регулярная матрица C, для которой имеет место неравенство (6), то из включения $F(L^p,\psi)\subseteq F(L^p,\varphi)$ и $F(L^\infty,\psi)\subseteq F(L^\infty,\varphi)$ вытекает, что замкнутая в L^p система ψ является системой максимальной сходимости для $F(L^p,\psi)$.

Теорема 2. Пусть система φ является системой p-максимальной A-ограниченности для $F(L^p,\varphi)$ и пусть для некоторой регулярной конечнострочной матрицы C имеет место неравенство (6). Если $F(L^\infty,\varphi)=F(L^\infty,\psi)$, то замкнутая в L^p система ψ является системой p-максимальной A-суммируемости для $F(L^p,\psi)$.

Применим теорему 2 в случае $\varphi=w$ и $\psi=g$, где g — система произведений слабо мультипликативной системы. Учитывая неравенство (4) и ортонормальность системы w, имеем помимо неравенства (5), что

$$\int_0^1\Big|\sum_{k=0}^{2^n-1}w_k(t)g_k(\tau)\Big|dt\cong 1,$$

т.е.

$$\operatorname*{vraisup}_{\tau\in e}\int_0^1\Big|\sum_{k=0}^{2^n-1}w_k(t)g_k(\tau)\Big|dt=O(1) \qquad (8)$$

и, следовательно,

$$\operatorname*{vraisup}_{\tau\in e}\int_0^1\Big|\sum_{k=0}^{2^n-1}w_k(t)w_k(\tau)\Big|dt=O(1). \qquad (9)$$

Покажем, что $F(L^\infty,g)\subseteq F(L^\infty,w)$. Для этого в силу условия (9) достаточно показать, что частные суммы $S_{2^n-1}(x,y)$ ряда (7) сходятся для всех $x=(\xi_k)\in F(L^\infty,g)$ и $y=(\eta_k)\in F(L^1,w)$. Зафиксируем $x_0=(\xi_k^0)\in F(L^\infty,g)$ и исследуем сходимость последовательности $S_{2^n-1}(x_0,y)$ для каждой $y\in F(L^1,w)$. Так как $S_{2^n-1}(x_0,y)$ определяют последовательность линейных непрерывных функционалов на L^1, то по теореме Банаха-Штейнхауза надо лишь установить, что для всех $h\in L^1$ с $\|h\|=1$

$$J_nh=\int_0^1 h(t)\sum_{k=0}^{2^n-1}\xi_k^0 w_k(t)dt=O(1). \qquad (10)$$

ибо сходится последовательность (J_nh) на тотальном в L^1 множестве $\{w_\nu\}$. Так как условию (10) можно придать вид

$$\int_T f_0(\tau)\int_0^1 h(t)\sum_{k=0}^{2^n-1} g_k(\tau)w_k(t)\,dt\,d\tau = O(1),$$

то из неравенств (5) и

$$\|J_n\| \le \|f_0\| \operatorname*{vraisup}_{t\in[0,1]} \int_T \Big|\sum_{k=0}^{2^n-1} g_k(\tau)w_k(t)\Big|\,d\tau$$

вытекает требуемое включение. Если потребовать, что g замкнута в L^1, то включение $F(L^\infty, w) \subseteq F(L^\infty, g)$ доказывается аналогично (вместо неравенства (5) применяем неравенством (8)).

Итак, из теоремы 2 вытекает

Следствие 2.1. Замкнутые в L^1 системы произведений g слабо мультипликативных систем являются сиџтемами p-максимальной сходимости для $F(L^p, g)$.

Приведем еще одно следствие, вытекающее из теоремы 2. Доказательство этого следствия дадим после доказательства теоремы 2.

Следствие 2.2. Системы произведения g слабо мультипликативных систем являются системами 2-максимальной сходимости для пространства

Из следствия 2.2 вытекает полностью результат Шиппа из [7].

3. Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. Пусть F_n линейные непрерывные операторы со значениями $F_n(x,t)$ из B-пространства X в F-пространство всех измеримых и почти всюду конечных на T функции M_T. Если на тотальном в X множестве X_1 п.в. на T существует $\lim\limits_n F_n(x,t)$ ($x\in X_1$) и, кроме того, для каждого $x\in X$ имеем $\sup\limits_n |F_n(x,t)| < \infty$ п.в. на T, то для каждого $x\in X$ п.в. на T существует предел

$$\lim_n F_n(x,t).$$

Доказательство см. [2](стр. 361).

Лемма 2. Пусть $A=(\alpha_{nk})$ и $\mathfrak{D}=(\Delta_{nk})$ конечнострочные регулярные матрицы и пусть $|\xi_k^0| \le M$. Тогда для каждого натурального числа m найдется натуральное число ν_m так, что при $1 \le p < \infty$

$$\Big\{\int_T \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}\alpha_{nk}\xi_k^0\psi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}\le$$

$$\le 1+\Big\{\int_T \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}\Delta_{v_m k}\alpha_{nk}\xi_k^0\psi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}.$$

Доказательство. Из-за регулярности матриц A и D можно найти число V_m так, чтобы

$$\max_{k\le s_m}|\Delta_{v_m k}-1|\le\Big(s_m\sup_{n,k}|\alpha_{nk}|\,M\sup_{k\le s_m}\Big\{\int_T|\psi_k(t)|^p dt\Big\}^{1/p}\Big)^{-1}.$$

Тогда

$$\Big\{\int_T \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}\Delta_{v_m k}\alpha_{nk}\xi_k^0\psi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}\ge$$

$$\ge\Big\{\int_T \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}\alpha_{nk}\xi_k^0\psi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}-J_m,$$

где

$$J_m=\Big\{\int_T \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}(\Delta_{v_m k}-1)\alpha_{nk}\xi_k^0\psi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}.$$

Но

$$J_m\le$$

$$\le\Big\{\sum_{k=0}^{s_m}|\Delta_{v_m k}-1|^q\sup_{n,k}|\alpha_{nk}|^q|\xi_k^0|^q\Big\}^{1/q}\Big\{\sum_{k=0}^{s_m}\int_T|\psi_k(t)|^p dt\Big\}^{1/p}$$

$$\le 1,$$

следовательно, лемма доказана.

4. Доказательство теоремы 1. Воспользуемся леммой 2 при $p=1$. Обозначив

$$B_m(A,D,x_0,\psi,p)=\Big\{\int_T \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}\Delta_{v_m k}\alpha_{nk}\xi_k^0\psi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}$$

и

$$B_m(A,x_0,\varphi,p)=\Big\{\int_e \sup_{n\le m}\Big|\sum_{k=0}^{s_n}\alpha_{nk}\xi_k^0\varphi_k(t)\Big|^p dt\Big\}^{1/p}$$

имеем в силу леммы 2, что

$$B_m(A,x_0,\psi,1)\le 1+B_m(A,D,x_0,\psi,1).$$

Но в силу ортонормальности системы φ

$$B_m(A,D,x_0,\psi,1) =$$
$$= \int_T \sup_{n\le m} \left| \int_e \sum_{k=0}^{\lambda_n} \alpha_{nk} \xi_k^0 \varphi_k(\tau) \sum_{l=0}^{\nu_m} \Delta_{\nu_m l} \varphi_l(\tau) \psi_l(t)\, d\tau \right| dt \le$$
$$\le B_m(A,x_0,\varphi,1) \operatorname*{vraisup}_{\tau\in e} \mathcal{L}_{\nu_m}(D,\varphi,\psi,\tau).$$

Если положить $D = C$, где C — матрица, фигурирующая в условии (3), то имеем
$$\operatorname*{vraisup}_{\tau\in e} \mathcal{L}_m(C,\varphi,\psi,\tau) = O(1).$$
Кроме того, по предположению
$$B_m(A,x_0,\varphi,1) = O(1).$$
Следовательно,
$$B_m(A,x_0,\psi,1) = O(1),$$
что и требовалось доказать.

5. Доказательство теоремы 2. В силу леммы 1 мы должны лишь установить, что для каждого $x \in F(L^p,\psi)$
$$B_m(A,x,\psi,p) = O(1), \tag{11}$$
так как из замкнутости системы ψ в L^p выводится, что множество $\{e_\nu\}$ тотально в $F(L^p,\psi)$, причем почти всюду на T
$$\lim_n \sum_{k=0}^{\lambda_n} \alpha_{nk} \delta_{k\nu} \psi_k(t) = \psi_\nu(t),$$
где $\psi_\nu(t)$ для каждого ν п.в. конечна на T.

Для доказательства неравенства (11) заметим сперва, что из равенства $F(L^\infty,\psi) = F(L^\infty,\varphi)$ и из неравенства (6) вытекает неравенство (3) и неравенство
$$\operatorname*{vraisup}_{t\in T} \mathcal{L}_n(C,\psi,\varphi,t) = O(1). \tag{12}$$
На самом деле, по теореме 6.4.6 из [3] (см. стр. 257) из $F(L^\infty,\psi) \subseteq F(L^\infty,\varphi)$ следует, что для фиксированной $h^0 \in L^\infty$ и для всех $f \in L^1$ с $\|f\| = 1$
$$\int_e f(\tau) \int_T h^0(t) \sum_{k=0}^{\nu_m} \gamma_{\nu_m k} \psi_k(t) \varphi_k(\tau)\, dt\, d\tau = O(1),$$
т.е.
$$\operatorname*{vraisup}_{\tau\in e} \left| \int_T h^0(t) \sum_{k=0}^{\nu_m} \gamma_{\nu_m k} \psi_k(t) \varphi_k(\tau)\, dt \right| = O(1).$$
Так как h^0 произвольна из L^∞, то подавно имеет место

неравенство (3). Далее, из $F(L^\infty,\varphi)\subseteq F(L^\infty,\psi)$ получаем аналогично, что имеет место неравенство (12). Теперь из неравенств (3) и (12) выводим, что для всех $1<p<\infty$ имеет место

$$F(L^p,\psi)\subseteq F(L^p,\varphi).$$

На самом деле, воспользуясь теоремой 6.4.6 из [3], мы должны показать, что ряд

$$\sum\langle f,\psi_k\rangle\langle h,\varphi_k\rangle$$

для всех $h\in L^p$ и $f\in L^q$ ($1/p+1/q=1$) суммируется методом C. По теореме Банаха-Штейнхауза мы должны лишь доказать, что для всех $h\in L^p$ и $f\in L^q$ последовательность

$$\sum_{k=0}^{\nu_m}\gamma_{\nu_m k}\langle f,\psi_k\rangle\langle h,\varphi_k\rangle \tag{13}$$

ограничена, так как в силу замкнутости системы φ в L^q множество $\{e_\nu\}_\nu$ тотально в $F(L^q,\varphi)$ и, следовательно,

$$\lim_m\sum_{k=0}^{\nu_m}\gamma_{\nu_m k}\delta_{k\nu}\langle f,\psi_k\rangle=\langle f,\psi_\nu\rangle.$$

Далее, исследуем ограниченность последовательности (13). Имеем

$$\left|\sum_{k=0}^{\nu_m}\gamma_{\nu_m k}\langle f,\psi_k\rangle\langle h,\varphi_k\rangle\right|\le$$

$$\le\frac{1}{p}\int_e\int_T|f(t)|^p\left|\sum_{k=0}^{\nu_m}\gamma_{\nu_m k}\psi_k(t)\varphi_k(\tau)\right|dt\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{q}\int_e\int_T|h(\tau)|^q\left|\sum_{k=0}^{\nu_m}\gamma_{\nu_m k}\psi_k(t)\varphi_k(\tau)\right|d\tau\,dt\le$$

$$\le\frac{1}{p}\operatorname*{vraisup}_{t\in T}\mathcal{L}_m(C,\psi,\varphi,t)\|f\|+$$

$$+\frac{1}{q}\operatorname*{vraisup}_{\tau\in e}\mathcal{L}_m(C,\varphi,\psi,\tau)\|h\|,$$

т.е. последовательность (13) ограничена.

Покажем, теперь, что для каждого $z_0=(\xi_k^0)\in F(L^p,\varphi)$

$$B_m(A,z_0,\psi,p)=O(1).$$

Из ортонормальности системы φ в силу леммы 2 вытекает, что

$$B_m(A, z_0, \psi, p) \leq 1 +$$

$$+ \sup_{\|f\|_q = 1} \int_T |f(t)| \sup_{n \leq m} \int_e \Big|\sum_{k=0}^{\lambda_n} \alpha_{nk} \xi_k^0 \varphi_k(\tau)\Big| \Big|\sum_{l=0}^{\nu_m} \gamma_{\nu_m l} \varphi_l(\tau) \psi_l(t)\Big| d\tau\, dt \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{p} B_m(A, z_0, \varphi, p) \operatorname*{vrai\,sup}_{\tau \in e} \mathcal{L}_m(C, \varphi, \psi, \tau) +$$

$$+ \frac{1}{q} \operatorname*{vrai\,sup}_{t \in T} \mathcal{L}_m(C, \psi, \varphi, t).$$

Так как $z_0 \in F(L^p, \varphi)$, то

$$B_m(A, z_0, \varphi, p) = O(1),$$

вследствие чего из условий (3) и (12) выводим, что

$$B_m(A, z_0, \psi, p) = O(1).$$

Но

$$F(L^p, \psi) \subseteq F(L^p, \varphi),$$

следовательно, учитывая, что $z_0 \in F(L^p, \varphi)$ была произвольная, получаем подавно, что для каждой $x \in F(L^p, \psi)$, имеет место неравенство (11), что и требовалось доказать.

6. Доказательство следствия 2.2. Применяя доказательство теоремы 2, нам для доказательства следствия 2.2 надо лишь установить, что для систем произведений слабо мультипликативных систем имеют место неравенства (3), (12) и (6), если $\varphi = w$. Но из условия (9) вытекает неравенство (6) для матрицы C, для которой $\gamma_{n\nu} = 1$ при $\nu \leq 2^n - 1$ и $\gamma_{n\nu} = 0$ в остальных случаях. Для такой же матрицы из неравенств (8) и (5) вытекают соответственно неравенства (12) и (3). Следствие 2.2 доказана.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.
2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, Москва, 1962.

3. Качмаж С., Штейнгаус Г., Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.

4. Никишин Е.М., Резонансные теоремы и надлинейные операторы. Успехи матем. наук, 1979, 25, №1, 129-191.

5. Alexits, G., Stochastische Unabhängigkeit und Orthogonalität. Mitt. Mat. Sem. Giessen, 1971, 92, 1-10.

6. Sjölin, P., An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh-Fourier series, Arkiv Mat., 1968, 7, 551-570.

7. Schipp, F., Über die Konvergenz von Reihen nach Produktsystemen, Acta sci. math., 1973, 35, 13-16.

Поступило 10 02 1980

Maximal theorems for functional series

H.Türnpu

Summary

In this paper ρ-maximal A-summability systems in certain sequence spaces for row-finite matrix methods A are studied.

Definition. A system $\varphi=\{\varphi_k\}$ is said to be ρ-maximal A-summability system in the space X, if the series (1) is almost everywhere A-summable for every $x=(\xi_k)\in X$ and the inequality (2) holds.

For example the following theorem is proved.

Theorem 2. Let φ be a ρ-maximal A-summability system in the space $F(L^p,\varphi)=\{x=(\langle f,\varphi_k\rangle): f\in L^p\}$. If the system ψ is closed in space L^1 and the equation $F(L^\infty,\varphi)=F(L^\infty,\psi)$ holds, then ψ is ρ-maximal A-summability system in the space $F(L^p,\psi)$.

Theorem 2 generalizes some results of Hungarien mathematicians Alexits and Schipp from papers [5] and [7].

ОДИН МЕТОД ОСЛАБЛЕНИЯ ТАУБЕРОВЫХ o-УСЛОВИЙ В O-УСЛОВИЯ

Т.Сырмус

Таллинский педагогический институт

Пусть A и B - два линейных метода суммирования числовых рядов[1] $\sum u_k$ с последовательностью частных сумм[2] $x = (x_n)$. Из методов A и B один, например B, слабее другого, так что поля суммируемости A' и B' этих методов связаны соотношением $B' \subset A'$.

Если (λ_k) - некоторая числовая последовательность, то следуя Кангро [4] назовем условие

$$\lambda_k u_k = o(1) \tag{1}$$

или

$$\lambda_k u_k = O(1) \tag{2}$$

B-тауберовым для метода A, если из условия (1) (или соответственно (2)) и A-суммируемости ряда $\sum u_k$ следует B-суммируемость данного ряда. Теоремы с подобными утверждениями называются общими тауберовыми теоремами. В случае $B = E$, где E - единичный метод, говорят о тауберовом условии для метода A. Составим последовательность

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} t_{nk} \lambda_k u_k ,$$

где $T = (t_{nk})$ - некоторая нижняя треугольная числовая матрица. При определенных дополнительных ограничениях условие

$$\eta_n = o(1) \tag{3}$$

или

$$\eta_n = O(1) \tag{4}$$

может оказаться также B-тауберовым для метода A. Если при этом из условия (1) или (2) следует выполнимость усло-

---

[1] Вместо $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$ будем всюду писать $\sum u_k$, причем пусть $x_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

[2] Предполагаем (здесь и всюду далее) $n = 0, 1, 2, \ldots$.

вия (3) или (4), то последние называют ослабленными тауберовыми условиями, а соответствующую теорему называют тауберовой теоремой с ослабленным тауберовым условием. Имеется много работ, например [4,9-12], посвященных вопросам ослабления условия (1) в условия (2),(3) или (4). В таких работах в основном $B=E$; A - конкретный или общий метод суммирования, а условие (1) или (2) ослабляется в условие (3) или соответственно (4). Наиболее общие результаты об ослаблении тауберовых условий содержит работа [4].

В данной статье излагается один метод ослабления тауберова о-условия (1) в O-условие типа (4) в общих тауберовых теоремах. Приведены также применения доказанных теорем.

1. Обозначения и вспомогательные результаты. Пусть все элементы вещественных числовых последовательностей (α_k), (λ_k),(μ_k) и (ζ_k) здесь и далее отличны от нуля, а $\mu_{-1}=0$ и $\zeta_{-1}=0$. Рассматриваемые последовательности ниже связаны определенными соотношениями. Поэтому обозначим:

$$\nu_k=\mu_k(\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})^{-1};\quad \tau_k=\zeta_k\alpha_k\lambda_{k+1}^{-1}\bar{\Delta}\lambda_{k+1};$$
$$\omega_k=(k+1)\alpha_k\lambda_{k+1}^{-1}\bar{\Delta}\lambda_{k+1};\quad \varrho_k=\zeta_k\lambda_k\alpha_{k+1}^{-1}\bar{\Delta}\alpha_{k+1};$$
$$\varepsilon_k=\mu_k(\alpha_k\alpha_{k+1}\lambda_{k+1})^{-1}\bar{\Delta}(\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}).$$

Рассматриваемый метод ослабления тауберовых условий связан со следующими последовательностями и соответствующими им классами последовательностей:

$$S_n(x)=\mu_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\lambda_k u_k, \tag{5}$$
$$R_n(x)=(n+1)^{-1}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k, \tag{6}$$
$$V_n(x)=\zeta_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k u_k, \tag{7}$$
$$W_n(x)=\zeta_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\alpha_k u_k \tag{8}$$

и

$$s_o(\lambda)=\{x:\lambda_k u_k=o(1)\};\quad S_O=\{x:S_n(x)=O(1)\};$$
$$R_O=\{x:R_n(x)=O(1)\};\quad V_O=\{x:V_n(x)=O(1)\};$$
$$W_O=\{x:W_n(x)=O(1)\}.$$

Из соотношения (5) находим

$$u_n = (\alpha_n\lambda_n)^{-1}\bar\Delta(\mu_n S_n(x)),$$

откуда вытекает[3]

$$u_n = (\alpha_n\lambda_n)^{-1}\bar\Delta\,\mu_n S_n(x) + \nu_{n-1}\bar\Delta S_n(x)$$

и поэтому

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{\bar\Delta\mu_k}{\alpha_k\lambda_k}S_k(x) + \sum_{k=0}^{n}\nu_{k-1}\bar\Delta S_k(x). \tag{9}$$

Второе слагаемое в равенстве (9) приведем при помощи преобразования Абеля к виду

$$\sum_{k=0}^{n}\nu_{k-1}\bar\Delta S_k(x) = \sum_{k=0}^{n}\Delta(\nu_{k-1})S_k(x) + \nu_n S_n(x),$$

вследствие чего равенству (9) придадим вид

$$x_n = \sum_{k=0}^{n}\mu_k\Delta\left(\frac{1}{\alpha_k\lambda_k}\right)S_k(x) + \nu_n S_n(x).$$

Таким образом, для последовательности x получаем разложение

$$x = y(S) + z(S), \tag{10}$$

где $y(S) = (y_n(S))$ и $z(S) = (z_n(S))$, причем

$$y_n(S) = \sum_{k=0}^{n}\mu_k\Delta\left(\frac{1}{\alpha_k\lambda_k}\right)S_k(x) \tag{11}$$

и

$$z_n(S) = \nu_n S_n(x). \tag{12}$$

Поскольку преобразование (6) является частным случаем преобразования (5) при $\alpha_k = 1$ и $\mu_n = n+1$, то, заменяя в равенствах (10)–(12) величину $S_n(x)$ через $R_n(x)$, получаем для последовательности x следующее разложение

$$x = y(R) + z(R), \tag{13}$$

где $y(R) = (y_n(R))$, $z(R) = (z_n(R))$, а

$$y_n(R) = \sum_{k=0}^{n}(k+1)\Delta(1/\lambda_k)R_k(x) \tag{14}$$

и

$$z_n(R) = \frac{n+1}{\lambda_{n+1}}R_n(x). \tag{15}$$

Аналогично преобразования (7) и (8) являются частными случаями преобразования (5) при $\mu_n = \zeta_n$ и $\alpha_k = 1$ или соответственно $\lambda_k = 1$. Поэтому, заменяя в равенствах (10)–(12) последовательность $(S_n(x))$ через $(V_n(x))$ или

---

[3] Ввиду $\mu_{-1} = 0$, рассматриваемое равенство верно и при $n = 0$; здесь $S_{-1}(x)$ можно брать произвольно, поэтому пусть $S_{-1}(x) = 0$.

соответственно $(W_n(x))$, приходим к следующим утверждениям.

Для последовательности x имеем место разложение

$$x = y(V) + z(V), \tag{16}$$

где $y(V) = (y_n(V))$, $z(V) = (z_n(V))$, а

$$y_n(V) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \Delta(1/\lambda_k) V_k(x), \tag{17}$$

и

$$z_n(V) = (\xi_n/\lambda_{n+1}) V_n(x). \tag{18}$$

Для последовательности x имеет место разложение

$$x = y(W) + z(W), \tag{19}$$

где $y(W) = (y_n(W))$, $z(W) = (z_n(W))$,

$$y_n(W) = \sum_{k=0}^{n} \xi_k \Delta(1/\alpha_k) W_k(x) \tag{20}$$

и

$$z_n(W) = (\xi_n/\alpha_{n+1}) W_n(x). \tag{21}$$

2. Основные леммы. При выводе теорем на ослабление тауберовых условий имеют большое значение следующие леммы.

Лемма 1. Если (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям

1^0 $\nu_k = O(1)$ и 2^0 $\sigma_k = O(1)$,

то любая последовательность $x \in S_{(0)}$ допускает разложение (10), где $y(S)$ и $z(S)$, определенные формулами (11) и (12), удовлетворяют условиям[4] $y(S) \in s_0(\lambda)$ и $z(S) \in c_0$.

Доказательство. Поскольку для любой последовательности x, как установлено в пункте 1, имеет место разложение (10), то нужно доказать, что $y(S) \in s_0(\lambda)$, а $z(S) \in c_0$ в случае любой последовательности $x \in S_{(0)}$.

На основании условия 1^0 и предположения $x \in S_{(0)}$ из формулы (12) следует, что $z(S) \in c_0$. Исходя из равенства (11), составим величину $\lambda_n \bar{\Delta} y_n(S)$, которая приводится к виду $\lambda_n \bar{\Delta} y_n(S) = \sigma_n S_n(x)$. Из полученного равенства, ввиду предположения $x \in S_{(0)}$ и условия 2^0, вытекает $y(S) \in s_0(\lambda)$. Лемма 1 доказана.

[4] Символами c_0, c и m обозначены классы последовательностей, сходящихся к нулю, сходящихся или ограниченных соответственно.

Лемма 2. Если (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) удовлетворяют условиям

2.1° $\zeta_n = o(\lambda_{n+1})$ и 2.2° $\sum_{k=0}^{n} |\tau_k| = O(\mu_n)$,

то любая последовательность $x \in V_0$ допускает разложение (16), где $y(V)$ и $z(V)$, определенные формулами (17) и (18), удовлетворяют условиям

$$y(V) \in S_0 \quad \text{и} \quad z(V) \in c_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании пункта 1 имеет место разложение (16) для любой последовательности x. Поэтому нужно доказать, что $y(V) \in S_0$ и $z(V) \in c_0$, если $x \in V_0$, т.е. $V_n(x) = O(1)$.

Поскольку выполняется условие 2.1° и $x \in V_0$, то на основании равенства (18) ясно, что $z(V) \in c_0$. Для последовательности $y(V)$, определенной формулой (17), составим по формуле (5) последовательность $S_n(y(V))$, простое преобразование которой дает

$$S_n(y(V)) = (\mu_n)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \tau_k V_k(x).$$

На основании $x \in V_0$ и условия 2.2° из последнего равенства следует, что $S_n(y(V)) = O(1)$, т.е. $y(V) \in S_0$.

Лемма доказана.

Следствием леммы 2 при $\zeta_n = n+1$ является следующая лемма, в которой ввиду формул (6) и (7) величина $V_n(x)$ заменена через $R_n(x)$.

Лемма 3. Если (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям

3.1° $n = o(\lambda_{n+1})$ и 3.2° $\sum_{k=0}^{n} |\omega_k| = O(\mu_n)$,

то любая последовательность $x \in R_0$ допускает разложение (13), где $y(R)$ и $z(R)$, определенные формулами (14) и (15), удовлетворяют условиям

$$y(R) \in S_0 \quad \text{и} \quad z(R) \in c_0.$$

Лемма 4. Если (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) удовлетворяют условиям

4.1° $\zeta_n = o(\alpha_{n+1})$ и 4.2° $\sum_{k=0}^{n} |\rho_k| = O(\mu_n)$,

то любая последовательность $x \in W_0$ допускает разложение

(19), где $y(W)$ и $z(W)$, определенные формулами (20) и (21), удовлетворяют условиям

$$y(W) \in S_{(0)} \quad \text{и} \quad z(W) \in c_0.$$

Доказательство. Исходим из разложения (19), верного для любой последовательности x, и полагаем, что $x \in W_{(0)}$, т.е. $W_n(x) = O(1)$. Из формулы (21), $x \in W_{(0)}$ и условия 4.1° непосредственно следует, что $z(W) \in c_0$. Далее, исходя из формулы (5) с учетом (20), составим последовательность $S_n(y(W))$ и преобразуем ее к виду

$$S_n(y(W)) = (\mu_n)^{-1} \sum_{k=0}^{n} \rho_k W_k(x).$$

На основании $x \in W_{(0)}$ и условия 4.2° из последнего равенства вытекает, что $S_n(y(W)) = O(1)$, т.е. $y(W) \in S_{(0)}$, чем завершается доказательство леммы.

3. Теоремы на ослабление тауберовых условий. Доказательства нижеследующих теорем об ослаблении тауберовых условий опираются на лемму 27.1 из [1], являющейся частным случаем основной леммы из [4]. Приведем упомянутую лемму, назвав ее леммой А, где T_0 и T - некоторые классы последовательностей.

Лемма А. Пусть $A \supset B$ и A совместен с B. Если условие $x \in T_0$ является B-тауберовым для A, то условие $x \in T$ будет B-тауберовым для A тогда, когда любой элемент $x \in T$ представим в виде

$$x = y + z, \quad y \in T_0, \quad z \in B'.$$

Теорема 1. Пусть A и B такие сохраняющие сходимость совместные методы, что $A \supset B$, а последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ξ_k) удовлетворяют условиям 1° и 2° леммы 1, а также 2.1° и 2.2° леммы 2. Если условие $x \in s_0(\lambda)$ является B-тауберовым для A, то условие $x \in V_{(0)}$ также B-тауберово для A.

Доказательство. Пусть $x \in V_{(0)}$. На основании леммы 2 последовательность x допускает разложение (16), где $z(V) \in c_0$, а $y(V) \in S_{(0)}$. По лемме 1 теперь следует, что эта последовательность $y(V)$ представима в виде (10), так что $y(V) = y(S) + z(S)$, где $y(S) \in s_0(\lambda)$, а $z(S) \in c_0$. В результате применения обеих указанных лемм любая последовательность $x \in V_0$ представима в виде $x = y(S) + z$, где $z = z(S) + z(V) \in c_0$, а $y(S) \in s_0(\lambda)$.

Поскольку условие $x \in s_0(\lambda)$ по предложению B-тауберово для A и $z \in c_0 \subset B'$, то из леммы А следует нужное нам заключение, что условие $x \in V_0$ является B-тауберовым для A.

Аналогично доказываются следующие две теоремы, в которых вместо леммы 2 используются лемма 3 и соответственно лемма 4.

Теорема 2. Пусть A и B такие сохраняющие сходимость совместные методы, что $A \supset B$, а последовательности (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям 1^0 и 2^0 леммы 1, а также 3.1^0 и 3.2^0 леммы 3. Если условие $x \in s_0(\lambda)$ является B-тауберовым для A, то условие $x \in R_0$ также B-тауберово для A.

Теорема 3. Пусть A и B такие сохраняющие сходимость совместные методы, что $A \supset B$, а последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) удовлетворяют условиям 1^0 и 2^0 леммы 1, а также 4.1^0 и 4.2^0 леммы 4. Если условие $x \in s_0(\lambda)$ является B-тауберовым для A, то условие $x \in W_0$ также B-тауберово для A.

Полагая в теоремах 1-3 метод $B = E$, а метод A регулярным, имеем $B' = c$ и $A' \supset c$. В таком случае теоремы 1-3 обращаются в тауберовы теоремы для метода A, в которых из A-суммируемости последовательности вытекает ее сходимость при соответствующем тауберовом условии. Эти теоремы сформулируем в виде двух следствий, из которых первое вытекает из теоремы 1 (соответственно теоремы 3), а второе из теоремы 2.

Следствие 1. Пусть A - регулярный метод, а последовательности (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ζ_k) удовлетворяют условиям 1^0 и 2^0 леммы 1, а также 2.1^0 и 2.2^0 леммы 2 (соответственно 4.1^0 и 4.2^0 леммы 4). Если условие $x \in s_0(\lambda)$ является тауберовым для метода A, то условие $x \in V_0$ (соответственно $x \in W_0$) также тауберово для A.

Следствие 2. Пусть A - регулярный метод, а последовательности (α_k), (λ_k) и (μ_k) удовлетворяют условиям 1^0 и 2^0 леммы 1, а также 3.1^0 и 3.2^0 леммы 3. Если условие $x \in s_0(\lambda)$

II

является тауберовым для метода A, то условие $x \in R_{\varphi}$ также тауберово для A.

Примечание. Доказательства теорем 1-3 показывают, что условие $x \in S_{\varphi}$ (или $x \in V_{\varphi}$, или $x \in R_{\varphi}$, или $x \in W_{\varphi}$) является B-тауберовым для A, если $x \in \Delta_0(\lambda)$ (или $x \in S_{\varphi}$) является B-тауберовым для A при определенных условиях, налагаемых на (α_k), (λ_k), (μ_k) и (ξ_k). В разработке нашего метода условие $x \in S_{\varphi}$ - вспомогательное тауберово условие.

4. Частные случаи и примеры. Известны различные методы суммирования с одними и теми же тауберовыми условиями. Например для метода Бореля B_0 тауберовым является условие Карамата [8], т.е. $\eta_n = o(\exp\sqrt{n})$, где

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \exp\sqrt{k}, \qquad (22)$$

а условие $(\eta_n \exp(-\sqrt{n})) \in c$ есть тауберово для круговых методов (см. [11,15]). В статье [11] доказано, что последнее условие тауберово для всех таких аддитивных регулярных методов, которым тауберовым является условие $(\sqrt{n}\, u_n) \in c$. Этот результат обобщает

Теорема 4. Пусть A и B такие сохраняющие сходимость совместные методы, что $A \supset B$. Если условие

$$\sqrt{n}\, u_n = O(1) \qquad (23)$$

является B-тауберовым для A, то условие

$$\eta_n = O(\exp(n+1)^{\rho}), \qquad (24)$$

где (η_n) определена формулой (22), а $\rho \in (0;1/2)$ фиксировано, также B-тауберово для A.

Доказательство. Пусть $\alpha_k = \exp\sqrt{k}$, $\lambda_k = \sqrt{k}$, $\mu_k = \exp\sqrt{k+1}$ и $\xi_k = \exp(k+1)^{\rho}$. Тогда условие (23) означает, что $x \in \Delta_0(\lambda)$ есть B-тауберово условие для A. Поскольку условие (24) означает $x \in W_{\varphi}$ при $W_n(x) = \eta_n \exp[-(n+1)^{\rho}]$, то ввиду теоремы 3 нужно лишь проверить выполнимость условий 1^0 и 2^0 леммы 1 и 4.1^0, 4.2^0 леммы 4. Выполнимость условий 1^0 и 4.1^0 очевидна. Проверяя условие 2^0 учтем, что $\bar\Delta(\alpha_{k+1}\lambda_{k+1}) = \gamma_k\sqrt{k}\exp\sqrt{k}$, где $\gamma_k = ((1+1/k)^{1/2}\exp\bar\Delta\sqrt{k+1} - 1) \downarrow 0$. Поэтому $\sigma_k = (k/k+1)^{1/k}\gamma_k = o(1)$ и условие 2^0 выполнено.

Так как $\bar\Delta\alpha_{k+1} = \delta_k \exp\sqrt{k}$ и $\delta_k = \exp\bar\Delta\sqrt{k+1} - 1 \le e - 1$, то $|\varrho_k| \leq (e-1)\sqrt{k}\,\exp(k+1)^{\varrho}$ и поэтому

$$\mu_n^{-1} \sum_{k=0}^{n} |\varrho_k| \leq (e-1)(n+1)^{3/2}[\exp((n+1)^{1/2}-(n+1)^{\varrho})]^{-1} \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Это завершает наше доказательство, поскольку выполнено и условие 4.2^0 из теоремы 3.

Как очевидное, сформулируем без доказательства следующее

Следствие 3. Если условие (23) является тауберовым для рягулярного метода A, то условие (24), где $\varrho \in (0;1/2)$ фиксировано, а (η_n) определена формулой (22), также тауберово для A.

Следующие две теоремы обобщают предложение статьи [11], в которой утверждается, что при $\lambda_n = O(n)$ (соответственно $O(n)$) условие $(\varkappa_n (n+1)^{-1}) \in c$ (соответственно $= O(1)$), где

$$\varkappa_n = \sum_{k=0}^{n} k u_k, \tag{25}$$

является тауберовым для всех таких регулярных и аддитивных методов, для которых условие $x \in \mathfrak{s}_0(\lambda)$ является тауберовым.

Теорема 5. Пусть A и B такие сохраняющие сходимость совместные методы, что $A \supset B$, а (λ_n) удовлетворяет требованиям: $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = O(n)$, $\bar{\Delta}\lambda_{n+1} = O(1)$ и $n^{\varrho} = O(\lambda_n)$, где $\varrho \in (0,1)$ фиксировано. Если $x \in \mathfrak{s}_0(\lambda)$ является B-тауберовым для A, то условие

$$\varkappa_n = O((n+1)^{\varrho}) \tag{26}$$

также B-тауберово для A.

Доказательство. Применяя теорему 3, выберем $\alpha_n = n$, $\mu_n = n^{\varrho+1}$ и $\zeta_n = (n+1)^{\varrho}$, где ϱ фиксировано соответственно условиям теоремы. Выполнимость условий 1^0 леммы 1 и 4.1^0 леммы 4 очевидна.

При оценке величины σ_n в условии 2^0 леммы 1 после упрощений имеем[5]:

$$\sigma_n = \frac{(n+1)^{\varrho}}{\lambda_{n+1}} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\varrho} \cdot \left(\bar{\Delta}\lambda_{n+1} + \frac{\lambda_n}{n+1}\right) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Проверяя выполнимость условия 4.2^0, приходим к равен-

[5] Так как $\mu_n = n^{\varrho+1}$, то нижеследующее равенство верно и при $n=0$, где σ_0 можно взять произвольно.

ству[6]:

$$\mu_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}|\rho_k| = n^{-(\rho+1)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\rho}[\lambda_k/(k+1)]. \qquad (27)$$

Правая часть равенства (27) является (t_{nk})-преобразованием последовательности $(\lambda_k/(k+1))\in c_0$, где

$$t_{nk} = \begin{cases} (k+1)^{\rho}\cdot n^{-(\rho+1)} & \text{при } k\leq n; \\ 0 & \text{при } k>n. \end{cases}$$

Поскольку для $\rho>-1$ существует (см. [6], гл. II, § 1)

$$\lim_n (n+1)^{-(\rho+1)}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{\rho} = (\rho+1)^{-1},$$

то метод $(t_{nk})\in(c_0,m)$. Поэтому выполнимость условия 4.2^0 леммы 4 вытекает из (27). На основании теоремы 3 теперь заключаем, что условие (26) является B-тауберовым для A.

Теорема 6. Пусть A и B такие сохраняющие сходимость методы, что $A\supset B$, а (λ_n) удовлетворяет требованиям: $\lambda_n = o(n)$, $\lambda_0 = 0$, $\bar{\Delta}\lambda_{n+1} = O(1)$ и $|\lambda_n|\uparrow$. Если $x\in s_0(\lambda)$ является B-тауберовым для A, то условие

$$\varkappa_n = O(\bar{\Delta}\lambda^2_{n+1}), \qquad (28)$$

где $\varkappa_n$ определено через (25), также B-тауберово для A.

Доказательство. Применяя теорему 3, выберем $\alpha_n = n$, $\mu_n = \lambda^2_{n+1}$, $\xi_n = \bar{\Delta}\lambda^2_{n+1}$ и отметим, что условие (28) означает $x\in W_0$ при $W_n = \varkappa_n/(\bar{\Delta}\lambda^2_{n+1})$.

Условие 1^0 леммы 1 выполнено в силу $\lambda_n = o(n)$. Проверяя 2^0, на основании условий получим

$$\sigma_n = (n+1)^{-1}\lambda_{n+1}(n^{-1}\lambda_{n+1}+\bar{\Delta}\lambda_{n+1}) \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty).$$

Имея в виду эти же условия, заключаем

$$(n+1)^{-1}\xi_n = (n+1)^{-1}(\lambda_{n+1}+\lambda_n)\bar{\Delta}\lambda_{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

что обосновывает выполнимость условия 4.1^0. Из-за $\lambda_n = o(n)$ и $|\lambda_n|\uparrow$ оказывается $|\rho_0|+|\rho_1|+\cdots+|\rho_n| = O(\mu_n)$. Таким образом, показана выполнимость условия 4.2^0, что завершает доказательство теоремы.

Известны различные тауберовы условия для логарифмических методов суммирования (L) и (ℓ). Пусть ниже $\Lambda_n u_n =$

---

[6] На основании $\lambda_0 = 0$ равенство (27) выполнено и при $n=0$.

$= u_n (n+1) \ln (n+1)$. К методам (L) и (ℓ) относятся следующие тауберовы условия:

$$\Lambda_n u_n = o(1), \tag{29}$$

$$\Lambda_n u_n = O(1), \tag{30}$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \ln(k+1) = o(\ln(n+1)), \tag{31}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \Lambda_k u_k = o(1). \tag{32}$$

То, что условие (29) является тауберовым для метода (L) а из-за включения $(\ell) \subset (L)$, также для (ℓ), доказано Ишигуро [7]. Поэтому называют условие (29) условием Ишигуро. Для условия (32) Кауфман [5] доказал, что оно тауберово для метода (L) . Им же доказано при помощи условия (32), что тауберовым для (L) является также условие (31), называемое условием Кауфмана. Это же, исходя из условия Ишигуро, доказано в работе [12]. Для O-условия Давыдов [2] первым доказал, что (30) является т-условием для метода (ℓ), а в работе [13] это утверждение обобщается на метод (L). На то, что в условии (32) можно o заменить на O, указал Тийц [14], основываясь на общих результатах из совместной работы с Мейер-Кенигом [11]. Иным путем это доказал Кангро [4]. Доказано [14], что в условии Кауфмана (31) нельзя заменить o на O.

Пример 1. Применяя следствие 2, на примере метода (ℓ) покажем, что O-условие вида

$$\sum_{k=0}^{n} \Lambda_k u_k = O(n+1) \tag{33}$$

является тауберовым для метода (ℓ), так как для него тауберово o-условие Ишигуро [7], т.е. условие (29).

Выберем $\lambda_n = (n+1)\ln(n+1)$, $\mu_n = 1$, а $\alpha_n = -1/2n$. Тогда условие (29) - тауберово условие вида $\lambda_n u_n = o(1)$ и нам нужно показать, что $x \in R_O$, т.е., что условие (33) также тауберово для (ℓ). Поскольку последнее утверждение оправдывается следствием 2, то нам остается показать выполнимость условий леммы 3 и леммы 1.

Условия 1° и 3.1° явно выполнены. Проверяя условие 2°, учтем равенство

$$\Delta(\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}) = -[2k(k+1)]^{-1} \cdot [k(k+2)\ln(1+(k+1)^{-1}) - \ln(k+1)].$$

Поэтому $\sigma_k \to 0$ $(k\to\infty)$ и условие 2^0 выполнено. Так как

$$\frac{k+1}{\lambda_{k+1}}\bar\Delta\lambda_{k+1}=\frac{k+1}{(k+2)}\frac{\ln(k+1)}{\ln(k+2)}+\frac{(k+1)\ln(1+(k+1)^{-1})}{\ln(k+2)}\to 1,$$

то для выполнимости условия 3.2^0 остается показать, что

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|+\dots+|\alpha_n|=O(1). \tag{34}$$

Поскольку

$$|\alpha_0|+|\alpha_1|+\dots+|\alpha_n|\le 2+\left|1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\dots-\tfrac{1}{2n}\right|, \tag{35}$$

то на основании неравенства Бернулли (см. [3], стр. 8) и оценки (см.[3], стр. 9)

$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1)/(2k)<(2n+1)^{-1/2}$$

получаем

$$\left|1-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}-\dots-\tfrac{1}{2n}\right|<(2n+1)^{-1/2}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

Из полученного и неравенства (35) вытекает нужная нам оценка (34).

На возможность ослабления тауберова σ-условия (31) в некоторое O-условие указывает следующее предложение. Оно выводится из условия Ишигуро применением следствия 1.

Предложение 1. Для логарифмического метода (L) условие

$$\sum_{k=0}^{n}u_k\ln(k+1)=O\left(\ln^{\rho}(n+1)\right) \tag{36}$$

при любом фиксированном $\rho\in(0,1)$ является тауберовым, если условие (29) считать известным тауберовым для (L).

Доказательство. Пусть $\lambda_n=(n+1)\ln(n+1)$, $\alpha_n=\ln(n+1)$, $\mu_n=(n+1)\ln^{\rho}(n+1)$, $\xi_n=\ln^{\rho}(n+1)$ и $\rho\in(0,1)$ фиксировано. Выполнимость условий 1^0 и 4.1^0 очевидна. Поскольку

$$\sigma_n=\frac{2(n+1)\ln(1+(n+1)^{-1})}{\ln(n+2)\ln^{1-\rho}(n+1)}+\frac{(n+1)\ln^2(1+(n+1)^{-1})}{\ln(n+2)\ln^{2-\rho}(n+1)}+\frac{\ln(n+2)}{\ln^{2-\rho}(n+1)},$$

где каждое из трех слагаемых стремится к нулю, то условие 2^0 леммы 1 удовлетворено. Последовательность

$$\mu_n^{-1}\sum_{k=0}^{n}|\rho_k|=(n+1)^{-1}\ln^{-\rho}(n+1)\sum_{k=0}^{n}y_k\ln^{\rho}(k+1)$$

представляет собой (t_{nk})-преобразование к единице сходящейся последовательности

$y_k=(k+1)\ln(k+1)\ln^{-1}(k+2)\cdot\ln(1+(k+1)^{-1})$ при

$$t_{nk} = \begin{cases} \ln^{\varrho}(k+1) \cdot [(n+1) \cdot \ln^{\varrho}(n+1)]^{-1}, & \text{при } k \le n; \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

Так как $\sum_{k=0}^{n} |t_{nk}| = O(1)$, то метод $(t_{nk}) \in [m, m]$ и поэтому

$$|\varrho_0| + |\varrho_1| + \cdots + |\varrho_n| = O(\mu_n),$$

т.е. выполнено условие 4.1^0. Из следствия 1 теперь непосредственно следует, что условие (36) тауберово для метода (L).

Замечание. Тауберово условие (24) слабее условия (23), условие (33) слабее условия (29), а условие $x \in R_{\sigma}$ в теореме 2 слабее условия $x \in s_0(\lambda)$.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. Тарту, 1977.
2. Давыдов Н.А., Об одном свойстве метода Чезаро суммирования рядов. Мат. сб., 1956, 38(80), 509-524.
3. Демидович Б.П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, 1954.
4. Кангро Г., Об ослаблении тауберовых условий. Изв. АН Эст.ССР. Физ., матем., 1970, 19, № 4, 24-33.
5. Кауфман Б.А., О теоремах типа Таубера для логарифмического метода суммирования. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1967, 1, 57-62.
6. Полиа Г., Сеге Г., Задачи и теоремы из анализа. 1. Москва, 1978.
7. Ishiguro, K., Tauberian theorems concerning the summability methods of logaritmic type. Proc. Jap. Acad., 1963, 39, N°3, 156-159.
8. Karamata, J., Sur les théorèms inverses der procédés de sommabilité. Paris, 1937.
9. Kwee, B., A Tauberian theorem for the logarithmic method of summation. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1967, 63, N°2, 401-405.
10. Meyer-König, W., Tietz, H. On Tauberian conditions of type o. Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 73, N°6, 926-927.

11. Meyer-König, W., Tietz, H., Über Umkehrbedingungen in der Limitierungstheorie. Arch. Math., 1969, 5, N°4, 177-186.

12. Meyer-König, W., Tietz, H., Über die Limitierungsumkehrsätze vom Typ o. Stud. math., 1968, 31, N°3, 205-216.

13. Rangachari, M.S., Sitaraman, I., Tauberian theorems for logaritmic summability (L). Tôhoku Math.J., 1964, 16, N°3, 257-269.

14. Tietz, H., Negative resultate über Tauber-Bedingungen. Monatsh. Math., 1971, 75, N°1, 69-78.

15. Zeller, K., Theorie der Limitierungsverfahren. Berlin, 1958.

Поступило 15 02 1979

Eine Methode zur Schwächung der o-Tauber-Bedingung in die O-Bedingung

T.Sõrmus

Zusammenfassung

Die betrachteten Verfahren A und B zur Summierung von Zahlenfolgen $x = \{x_n\}$, mit $\bar{\Delta} x_n = u_n$, seien linear und verträglich. Es sei A stärker als B, so dass die Wirkfelder A' und B' für die Beziehung $A' \supset B'$ genügen. Vorgegeben sei eine Zahlenfolge $\{\lambda_k\}$ mit von Null verschiedenen Folgengliedern.

Die Bedingung (1) heisst nach Kangro die B-Tauber-Bedingung für A, falls unter der Bedingung (1) von A-Limitierbarkeit auf B-Limitierbarkeit zurückgeschlossen wird. Bei $B = E$ heisst die Nebenbedingung (1) bezüglich der Konvergenz Tauber-Bedingung für A. Das Problem der Schwächung einer Tauber-Bedingung besteht darin, die angegebene Nebenbedingung (z.B. o-Bedingung (1)) in eine neue (insbesondere schwächere) Bedingung (z.B. o-Bedingung (4)) umzuwandeln. Dazu hat Kangro [4] eine allgemeine Method vorgeschlagen. Im Wesen der Methode lieget ein allgemeiner Hilfssatz ([4], s. 24).

In diesem Aufsatz wird eine spezielle Methode für das Ableiten neuer (insbesondere schwächerer) B-Tauber-Bedingungen für A der Form O aus den entsprechenden o-Bedingungen vorgestellt. Dabei wird ein von Baron ([1], s. 229) angegebenes Hilfssatz angewandt. Unser allgemeines Resultat ist

<u>Satz 3</u>. Es seien A und B lineare, konvergenztreue und verträgliche Summierungsverfahren, wobei $A' \supset B'$. Die Zahlenfolgen (α_k), (λ_k), (μ_k) und (ξ_k) sollen die Voraussetzungen 1°, 2° des Lemma 1 und 4.1°, 4.2° des Lemma 4 erfüllen.

Ist die Bedingung $x \in S_0(\lambda)$ eine B-Tauber-Bedingung für A, so ist auch $x \in W_0$ eine B-Tauber-Bedingung für A.

Als Anwendungen werden einige konkret angegebene Tauber-Bedingungen (z.B. sie Karamata [8], Ishiguro [7], Kaufman [5]) untersucht.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫПУКЛЫХ И НУЛЬ-ВЫПУКЛЫХ СЕМЕЙСТВ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ

А.Тали

Таллинский педагогический институт

§ 1. Введение

Настоящая работа продолжает исследования выпуклых семейств методов суммирования, начатые в статьях [3,4]. Здесь рассматриваются некоторые семейства, относящиеся к теории сильной суммируемости, при этом обобщается понятие сильной суммируемости со скоростью, введенное в работе [2].

1. Пусть B_α - семейство[1] методов суммирования последовательностей. Чтобы охватить случай сильной суммируемости, будем пользоваться более общим понятием метода суммирования, чем в работах, упомянутых выше.

Следуя общему определению метода суммирования (см.[1], стр. 7), будем говорить, что последовательность x суммируема методом B к сумме s, если по некоторому определению B ей сопоставлено число s. Будем говорить, что последовательность x ограничена методом B, если некоторая ее преобразованная последовательность, определенная также определением B, ограничена. Множество всех последовательностей, ограниченных методом B, будем обозначать через mB. Множество последовательностей, суммируемых методом B, будем обозначать через cB, а множество последовательностей, суммируемых к нулю - через c_0B. При этом метод суммирования определен так, что гарантируется единственность суммы s элемента x и имеет место включение $cB \subset mB$.

Обобщим, далее, понятие выпуклого семейства, приведенное в работе [4].

Определение 1. Будем говорить, что семейство B_α яв-

[1] Параметр α является везде непрерывным и принимает значения $\alpha > \alpha_0$ (или же $\alpha \geq \alpha_0$).

ляется выпуклым, если при $\alpha<\beta$ выполняется условие

$$mB_\alpha \subset mB_\beta, \; cB_\alpha \subset cB_\beta \tag{1}$$

и справедлива импликация

$$x \in mB_\alpha, \; x \in cB_\beta, \; \alpha<\gamma<\beta \Longrightarrow x \in cB_\gamma. \tag{2}$$

Если условия (1) и (2) имеют место с заменой в них c на c_0, то будем называть семейство B_α нуль-выпуклым (0-выпуклым).

2. В работе [4] рассматриваются 0-выпуклые семейства методов суммирования A_α, заданных в виде преобразований последовательности $x=(s_n)$ в последовательности[2] $A_\alpha x = (t_n^\alpha)$. В ней приводится следующая теорема (теорема 1), которая дает достаточные условия для 0-выпуклости семейства A_α.

Теорема А. Пусть $mA_\alpha \subset mB_\beta$ и $c_0A_\alpha \subset c_0A_\beta$ при $\alpha<\beta$. Пусть, далее, существуют числа a, b и матричные методы $E^{\alpha\delta\theta}=(e_{nk}^{\alpha\delta\theta})$ и $G=(g_{nk}^{\alpha\delta\theta})$ такие, что при каждом α, $0<\delta<1$ и $a<\theta<b$ справедливо неравенство

$$|t_n^{\alpha+\delta}| \leq \left|\sum_k e_{nk}^{\alpha\delta\theta} t_k^{\alpha+1}\right| + \left|\sum_k g_{nk}^{\alpha\delta\theta} t_k^{\alpha}\right| \tag{3}$$

для всех $x \in mA_\alpha \cap c_0A_{\alpha+1}$.

Если[3]

1^0 методы $E^{\alpha\delta\theta}$ являются методами типа $c_0 \to c_0$

и

2^0 методы $G^{\alpha\delta\theta}$ удовлетворяют условию

$$\sum_k |g_{nk}^{\alpha\delta\theta}| \leq \varphi^{\alpha\delta}(\theta),$$

где $\varphi^{\alpha\delta}(\theta)\to 0$ при $\theta \to b^-$, то семейство A_α является 0-выпуклым.

На основе этой теоремы в работе [4] доказывается нуль-выпуклость и выпуклость некоторых семейств методов A_α, связанных при любых α и $\delta>0$ линейным соотношением

---

[2] Метод A_α суммирует x к сумме s, если $t_n^\alpha \to s$ и ограничивает x, если $t_n^\alpha = O(1)$. Свободные индексы принимают всюду значения 0,1,2,... .

[3] Необходимые и достаточные условия для того, чтобы выполнялось условие 1^0, см., например, в [1], стр. 17.

$$t_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha} t_k^{\alpha}, \tag{4}$$

где $(d_{nk}^{\alpha\delta})$ - треугольные матрицы с $d_{nk}^{\alpha 1} = 1/M_\alpha$, причем M_α не зависят от k и n, а (b_n^α) - некоторые последовательности с $b_n^\alpha \neq 0$. Отметим, что соотношению (4) удовлетворяют, например, семейства обобщенных методов Нерлунда (см. [4]) $A_\alpha = (N p_n^\alpha q_n)$ с

$$t_n^\alpha = \frac{1}{P_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^\alpha q_k s_k, \tag{5}$$

где $\alpha > -1$, $P_n^\alpha = \sum_{k=0} p_{n-k}^\alpha q_k$, $p_n^\alpha = \sum_{k=0} A_{n-k}^{\alpha-1} p_k$, $p_0 > 0$, $p_n \geq 0$, $q_n > 0$ и $A_n^{\alpha-1}$ - числа Чезаро. Соотношение (4) выполняется здесь с $b_n^\alpha = P_n^\alpha$ и $d_{nk}^{\alpha\delta} = A_{n-k}^{\delta-1}$. В частности, если $q_n = 1$, то методы (N, p_n^α, q_n) являются методами Нерлунда (N, p_n^α). Если же $p_0 = 1$ и $p_n = 0$ при $n > 0$, а $q_n = A_n^{\beta_0}$ с $\beta_0 \geq 0$, то мы получаем обобщенные методы Чезаро (C, α, β_0), причем при $q_n = 1$, т.е. если $\beta_0 = 0$, последние превращаются в методы Чезаро (C, α).

3. В параграфе 2 данной работы мы остановимся более подробно на понятиях сильной суммируемости и сильной суммируемости со скоростью. В параграфе 3 мы убедимся при помощи теоремы А в O-выпуклости и выпуклости некоторых семейств методов B_α, определяющих сильную суммируемость. Доказываемые теоремы о выпуклости применяются к сильной суммируемости со скоростью.

§ 2. О сильной суммируемости со скоростью

Пусть A - некоторый метод суммирования, преобразующий последовательность $x = (s_n)$ в последовательность $Ax = (t_n)$. Пусть, далее, $P = (p_{nk})$ - матричный метод, заданный в виде преобразования последовательности в последовательность и удовлетворяющий условиям

$$\sum_k |p_{nk}| = O(1) \tag{6}$$

и

$$\sum_k p_{nk} \neq o(1), \tag{7}$$

а $\kappa \geq 1$ - некоторое фиксированное число. Введем теперь метод B при помощи следующего определения.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность x суммируема методом B к сумме s, если

$$\sum_k |p_{nk}||t_k - s|^{\nu} = o(1), \qquad (8)$$

и ограничена методом B, если

$$\sum_k |p_{nk}||t_k|^{\nu} = O(1).$$

Заметим, что условие (7) гарантирует единственность B-суммы последовательности x, а (6) обеспечивает включение $cB \subset mB$. Охарактеризуем метод B при помощи двух следующих теорем, которые доказываются аналогично теореме 7 работы [5].

Теорема 1. Пусть метод P регулярен. Последовательность x является B-суммируемой к сумме s тогда и только тогда, когда x является PA-суммируемой к сумме s и [4]

$$\sum_k |p_{nk}||t_k - \sigma_k|^{\nu} = o(1),$$

где $\sigma_n = \sum_k p_{nk} t_k$.

Теорему 1 можно переформулировать для суммы $s = 0$. При этом достаточно предполагать, чтобы P было преобразованием типа $c_0 \to c_0$.

Теорема 2. Последовательность x является B-ограниченной тогда и только тогда, когда она PA-ограничена и

$$\sum_k |p_{nk}||t_k - \sigma_k|^{\nu} = O(1).$$

Опираясь на сформулированные теоремы 1 и 2 и следуя работе [5], будем говорить, что метод B определяет сильную PA-суммируемость в степени ν (коротко $[P,A]_\nu$-суммируемость) и сильную PA-ограниченность в степени ν (коротко $[P,A]_\nu$-ограниченность). В дальнейшем будем также пользоваться обозначением $B = [P,A]_\nu$. Подчеркнем, что данное здесь определение сильной суммируемости (ограниченности) для метода PA зависит от компонент P и A.

Обобщим, далее, понятие сильной суммируемости со ско-

---

[4] Последовательность x является PA-суммируемой к сумме s, если $\sigma_n \to s$ при $n \to \infty$, и PA-ограниченной, если $\sigma_n = O(1)$. Условимся в дальнейшем пользоваться обозначением σ_n в том же смысле.

ростью, введенное в работе [2] для сильной PE-суммируемости[5].

Определение 3. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ – некоторая последовательность с $0<\lambda_n \uparrow$. Будем говорить, что последовательность x сильно PA-суммируема со скоростью λ в степени n (коротко $[(P,A)^\lambda]_n$-суммируема) к сумме s, если

$$\lambda_n^n \sum_k |p_{nk}| |t_k - s|^n = o(1), \tag{9}$$

и сильно PA-ограничена со скоростью λ в степени n (коротко $[(P,A)^\lambda]_n$-ограничена), если выполнено условие (8) и

$$\lambda_n^n \sum_k |p_{nk}| |t_k - s|^n = O(1). \tag{10}$$

Заметим, что понятия $[(P,A)^\lambda]_n$-суммируемости и $[(P,A)^\lambda]_n$-ограниченности совпадают с понятием $[P,A]_n$-суммируемости тогда и только тогда, когда $\lambda_n = O(1)$. В частности, понятие $[(P,E)^\lambda]_n$-суммируемости введено в [2].

Следующая теорема характеризует взаимоотношение между обыкновенной и сильной суммируемостями со скоростью.

Теорема 3. Пусть метод P удовлетворяет условиям

$$p_{nk} \lambda_n^n = o(1) \quad (k = 0,1,2,\dots) \tag{11}$$

$$\sum_k |p_{nk}| \lambda_n^n / \lambda_k^n = O(1) \tag{12}$$

и

$$\sum_k p_{nk} = 1. \tag{13}$$

Последовательность x является $[(P,A)^\lambda]_n$-суммируемой к s тогда и только тогда, когда[6]

$$\lambda_n (\sigma_n - s) = o(1) \tag{14}$$

и

$$\lambda_n^n \sum_k |p_{nk}| |t_k - \sigma_k|^n = o(1). \tag{15}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что x удовлетворяет условию (9). Используя неравенство Гельдера и учитывая условия (6) и (9), мы получаем, что

---

[5] Метод E является везде методом сходимости.

[6] Условие (14) означает, что x регулярно PA-суммируема со скоростью λ к s (см. [2]).

$$|\lambda_n \sum_k p_{nk}(t_k - s)| \le \lambda_n \sum_k |p_{nk}|\,|t_k - s| =$$
$$= O(1)\Big(\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|t_k - s|^r\Big)^{1/r} = o(1).$$

Учитывая теперь условие (13), мы видим, что выполнено условие (14). Заметим, далее, что, ввиду условий (11), (12) и (14),

$$\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|\lambda_k(\sigma_k - s)|^r / \lambda_k^r = o(1). \qquad (16)$$

Используя неравенство Минковского, мы получаем при помощи условий (9) и (16), что

$$\Big(\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|t_k - \sigma_k|^r\Big)^{1/r} \le \Big(\lambda_n^r \sum |p_{nk}|\,|t_k - s|^r\Big)^{1/r} +$$
$$+ \Big(\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|\sigma_k - s|^r\Big)^{1/r} =$$
$$= o(1).$$

Таким образом, мы заключаем, что и условие (15) выполнено.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия (14) и (15). Ввиду условий (11), (12) и (14) выполнено и условие (16). Снова используя неравенство Минковского, мы заключаем, что выполнено условие (9). Действительно,

$$\Big(\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|t_k - s|^r\Big)^{1/r} \le \Big(\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|t_k - \sigma_k|^r\Big)^{1/r} +$$
$$+ \Big(\lambda_n^r \sum_k |p_{nk}|\,|\sigma_k - s|^r\Big)^{1/r} =$$
$$= o(1).$$

Заметим, что доказанную теорему можно переформулировать для суммы $s = 0$. В этом случае условие (13) оказывается лишним. В частности, если $\lambda_n = O(1)$, теорема 3 превращается в теорему 1.

Для $[(P, A)^\lambda]_r$-ограниченности справедлива следующая теорема, которая доказывается аналогично теореме 3.

Теорема 4. Пусть $\lambda_n \uparrow \infty$ и выполнены условия (12) и (13). Последовательность x является $[(P, A)^\lambda]_r$-ограниченной тогда и только тогда, когда она PA-ограничена со скоростью λ и

$$\lambda_n^{\nu}\sum_k |p_{nk}||t_k-\sigma_k|^{\nu}=O(1).$$

Остановимся далее на некоторых семействах методов типа $[P,A]_{\nu}$.

§ 3. Выпуклые и нуль-выпуклые семейства методов $B_{\alpha}=[P_{\alpha},A_{\alpha}]_{\nu}$

1. Пусть A_{α} – методы, преобразующие последовательность $x=(s_n)$ в последовательности $A_{\alpha}x=(t_n^{\alpha})$, а $P_{\alpha}=(p_{nk}^{\alpha})$ – матричные методы, заданные в виде преобразования последовательностей в последовательности и удовлетворяющие условиям (6) и (7). Рассмотрим семейство методов $B_{\alpha}=[P_{\alpha},A_{\alpha}]_{\nu}$. К методам B_{α} можно отнести следующее

Примечание 1. Если ограничиваться суммированием к нулю и ограниченностью, то методы B_{α} являются методами, преобразующими последовательность x в последовательности (r_n^{α}) с

$$r_n^{\alpha}=\sum_k |p_{nk}||t_k^{\alpha}|^{\nu}. \qquad (17)$$

Поэтому в исследованиях семейства B_{α} на 0-выпуклость мы можем опираться на теорему А.

При доказательстве выпуклости семейства B_{α} полезна и

Лемма 1. Если матричные методы $A_{\alpha}=(a_{nk}^{\alpha})$ удовлетворяют условию

$$\sum_k a_{nk}^{\alpha}=a_{\alpha} \qquad (18)$$

с $a_{\alpha}\neq 0$, то из 0-выпуклости семейства B_{α} следует его выпуклость. В частности, если $a_{\alpha}=1$ при любом α, то методы B_{α} к тому же совместны.

2. *Остановимся, далее, на более конкретном семействе* B_{α}. Предположим, что методы A_{α} связаны соотношением (4), удовлетворяющим при любом α и $0<\delta<1$ условиям

1° последовательности $(|b_n^{\alpha}|)$ монотонно возрастают и[7]

$$M_1(n+1)^{\delta}\leq |b_n^{\alpha+\delta}/b_n^{\alpha}|\leq M_2(n+1)^{\delta}, \qquad (19)$$

2° $$d_{nk}^{\alpha\delta}=O\{(n-k+1)^{\delta-1}\} \qquad (0\leq k\leq n) \qquad (20)$$

и

[7] В условиях ограниченности постоянные могут зависеть от α и δ. Зависимость от других переменных отмечается особо.

и

$$3^0\quad d_{nk}^{\alpha\delta}-d_{n,k+1}^{\alpha\delta}=O\{(n-k+1)^{\delta-2}\}\quad(0\le k<n).\tag{21}$$

Оказывается, что при названных условиях семейство A_α O-выпукло (~~см.~~[4]). Пусть, ~~далее~~, P_α - треугольные методы с $p_{nk}^{\alpha}=b_k^{\alpha}/b_n^{\alpha+1}$ $(0\le k\le n)$, удовлетворяющие условию (7).

Условимся в этом разделе под семейством B_α везде понимать семейство $[P_\alpha, A_\alpha]_r$, удовлетворяющее условиям (4), (7), (19), (20) и (21).

Примечание 2. Заметим, что ввиду соотношения (4) имеет место равенство $P_\alpha A_\alpha=M_\alpha A_{\alpha+1}$ (где постоянная M_α определена соотношением (4)) и методы B_α определяют некоторую сильную суммируемость (ограниченность) в степени r методами $A_{\alpha+1}$. В частности, если $A_\alpha=(N,p_n^{\alpha},q_n)$, то B_α определяет $[N,p_n^{\alpha+1},q_n]_r$-суммируемость (ограниченность), рассматриваемую в работах [6,7].

Перейдем к исследованию семейства B_α на O-выпуклость. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2. Семейство B_α удовлетворяет при любых α и β с $\alpha<\beta$ условиям

$$mB_\alpha\subset mB_\beta \quad\text{и}\quad cB_\alpha\subset c_0B_\beta.\tag{22}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем считать, что $\beta=\alpha+\delta$, где $0<\delta<1$. Воспользуемся обозначением (17). Учитывая соотношение (4) и используя неравенство Гельдера, мы получаем:

$$\tau_n^{\alpha+\delta}=\frac{1}{|b_n^{\alpha+\delta+1}|}\sum_{k=0}^{n}|b_k^{\alpha+\delta}||t_k^{\alpha+\delta}|^r\le$$
$$\le\frac{1}{|b_n^{\alpha+\delta+1}|}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{|b_k^{\alpha+\delta}|^{r-1}}\Big(\sum_{\nu=0}^{k}|b_\nu^{\alpha}d_{k\nu}^{\alpha\delta}||t_\nu^{\alpha}|^r\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{k}|t_\nu^{\alpha}d_{k\nu}^{\alpha\delta}\Big)^{r-1}$$

Ввиду монотонности последовательностей $(|b_n^{\alpha}|)$ и условий (19) и (20) справедлива оценка

$$\sum_{\nu=0}^{k}|b_\nu^{\alpha}d_{k\nu}^{\alpha\delta}|=O(|b_k^{\alpha+\delta}|).$$

В силу условия (20), мы заключаем далее, что

$$\tau_n^{\alpha+\delta}=O\Big\{\frac{(n+1)^{\delta}}{|b_n^{\alpha+\delta+1}|}\sum_{\nu=0}^{n}|b_\nu^{\alpha}||t_\nu^{\alpha}|^r\Big\}.\tag{23}$$

13

Используя еще раз условие (19), мы получаем оценку

$$\kappa_n^{\alpha+\delta} = O(\kappa_n^{\alpha}),$$

которая и завершает доказательство.

Теорема 5. Семейство B_α является O-выпуклым.

Доказательство. Используя обозначение (17), покажем, что семейство B_α удовлетворяет условиям теоремы А. В силу леммы 2 достаточно убедится в том, что имеет место неравенство (3) и выполнены условия 1° и 2° теоремы А. Исходя из соотношения (4) с $\delta \in (0,1)$, при помощи некоторого числа $\theta \in (1/2, 1)$ мы получаем, что

$$b_n^{\alpha+\delta} t^{\alpha+\delta} = \sum_{k=0}^{N} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha} t_k^{\alpha} + \sum_{k=N+1}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha} t_k^{\alpha},$$

где $N = [\theta n]$. Преобразуя, далее, первую сумму при помощи преобразования Абеля, мы приходим к соотношению

$$b_n^{\alpha+\delta} t_n^{\alpha+\delta} = \sum_{k=0}^{N-1} (d_{nk}^{\alpha\delta} - d_{n,k+1}^{\alpha\delta}) b_k^{\alpha+1} t_k^{\alpha+1} + d_{nN}^{\alpha\delta} b_N^{\alpha+1} t_N^{\alpha+1} +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k t_k^{\alpha} = \mathcal{U}_n + \mathcal{V}_n + \mathcal{W}_n.$$

Имеет место следующее неравенство:

$$\begin{aligned} 3^{-r} \sum_{n=0}^{m} |b_n^{\alpha+\delta}| |t_n^{\alpha+\delta}|^r \le & \sum_{n=0}^{m} |\mathcal{U}_n|^r / |b_n^{\alpha+\delta}|^{r-1} + \\ & + \sum_{n=0}^{m} |\mathcal{V}_n|^r / |b_n^{\alpha+\delta}|^{r-1} + \\ & + \sum_{n=0}^{m} |\mathcal{W}_n|^r / |b_n^{\alpha+\delta}|^{r-1} = \\ & = R_m + S_m + T_m. \end{aligned} \tag{24}$$

Оценим, далее, каждую из сумм R_m, S_m и T_m, начиная с R_m. Используя неравенство Гельдера и учитывая условие (21) и монотонность последовательностей $(|b^{\alpha+1}|)$, мы получаем, что

$$|\mathcal{U}_n|^r \le \Big(\sum_{k=0}^{N-1} |\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1}| |t_k^{\alpha+1}|^r\Big) \Big(\sum_{k=0}^{N-1} |\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1}|\Big)^{r-1} =$$

$$= O\Big\{ |b_n^{\alpha+1}|^{r-1} (n+1)^{(\delta-1)(r-1)} \sum_{k=0}^{N-1} |\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1}| |t_k^{\alpha+1}|^r \Big\}$$

При помощи условий (19) и (21) мы имеем далее

$$R_m = \sum_{n=0}^{m} |U_n|^r / |b_n^{\alpha+\delta}|^{r-1} =$$
$$= O\Big\{\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{N-1} |\Delta_k d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha+1}| |t_k^{\alpha+1}|^r\Big\} =$$
$$= O\Big\{\sum_{n=0}^{m} (n-N+2)^{\delta-2} |b_n^{\alpha+2}| r_n^{\alpha+1}\Big\},$$

Таким образом, мы получили для R_m оценку

$$R_m = O_\theta\Big\{\sum_{n=0}^{m} (1+n)^{\delta-2} |b_n^{\alpha+2}| r_n^{\alpha+1}\Big\}. \tag{25}$$

Оценим теперь сумму S_m. Учитывая условия (20), (19) и монотонность последовательностей $(|b_n^{\alpha+1}|)$, мы получаем, что

$$S_m = \sum_{n=0}^{m} |V_n|^r / |b_n^{\alpha+\delta}|^{r-1} =$$
$$= O_\theta\Big\{\sum_{n=0}^{m} |b_N^{\alpha+1}| A_{n-N}^{\delta-1} |t_N^{\alpha+1}|^r\Big\}.$$

При помощи преобразования Абеля мы получаем далее:

$$S_m = O_\theta\Big\{\sum_{n=0}^{m-1} |\Delta_n A_{n-N}^{\delta-1}| \sum_{\nu=0}^{n} |b_{[\theta\nu]}^{\alpha+1}| |t_{[\theta\nu]}^{\alpha+1}|^r +$$
$$+ A_{m-[\theta m]}^{\delta-1} \sum_{\nu=0}^{m} |b_{[\theta\nu]}^{\alpha+1}| |t_{[\theta\nu]}^{\alpha+1}|^r\Big\}.$$

Из последнего легко выводится оценка

$$S_m = O_\theta\Big\{\sum_{n=0}^{m-1} (n+1)^{\delta-2} |b_n^{\alpha+2}| r_n^{\alpha+1}\Big\} +$$
$$+ O_\theta\Big\{m^{\delta-1} |b_m^{\alpha+2}| r_m^{\alpha+1}\Big\}. \tag{26}$$

Остается еще оценить сумму T_m. Используя неравенство Гельдера, мы получаем, что

$$|W_n|^r \le \Big(\sum_{k=N+1}^{n} |d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha}| |t_k^{\alpha}|^r\Big)\Big(\sum_{k=N+1}^{n} |d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^{\alpha}|\Big)^{r-1}.$$

Учитывая условия (20), (19) и монотонность последовательностей $(|b_n^{\alpha}|)$, мы выводим, далее, что

$$T_m = \sum_{n=0}^{m} |W_n|^r / |b_n^{\alpha+\delta}|^{r-1} =$$

$$= O\Big\{(1-\theta)^{\delta_1-\delta}\sum_{n=0}^{m}\sum_{k=N+1}^{n}|d_{nk}^{\alpha\delta}b_k^{\alpha}||t_k^{\alpha}|^{r_1}\Big\} =$$
$$= O\Big\{(1-\theta)^{\delta_1-\delta}\sum_{k=0}^{[m(1-\theta)]}(k+1)^{\delta-1}|b_{m-k}^{\alpha+1}|\,r_{m-k}^{\alpha}\Big\}.$$

Таким образом, мы получили оценку

$$T_m = O\Big\{(1-\theta)^{\delta_1-\delta}\sum_{k=[\theta m]}^{m}(m-k+1)^{\delta-1}|b_k^{\alpha+1}|r_k^{\alpha}\Big\}. \quad (27)$$

Отметим, что оценки (24)-(27) дают нам неравенство (3), если мы заменим в нем символы t_n^{α} на r_n^{α} и введем обозначения

$$e_{mn}^{\alpha\delta\theta} = \begin{cases} K_{\alpha\delta\theta}\cdot(n+1)^{\delta-2}\,|b_n^{\alpha+2}/b_m^{\alpha+\delta+1}| & \text{при } 0\le n<m,\\ L_{\alpha\delta\theta}\cdot(m+1)^{\delta-2}\,|b_m^{\alpha+2}/b_m^{\alpha+\delta+1}|+ & \\ +\,M_{\alpha\delta\theta}\cdot m^{\delta-1}\,|b_m^{\alpha+2}/b_m^{\alpha+\delta+1}| & \text{при } n=m,\\ 0 & \text{при } n>m, \end{cases}$$

и

$$g_{mn}^{\alpha\delta\theta} = \begin{cases} N_{\alpha\delta}\cdot(1-\theta)^{\delta_1-\delta}(m-n+1)^{\delta-1}\,|b_n^{\alpha+1}/b_m^{\alpha+\delta+1}| & \text{при } [\theta m]\le n\le m,\\ 0 \quad \text{при } 0\le n<[\theta m] \text{ и } n>m. \end{cases}$$

Учитывая еще раз условие (19) и монотонность последовательностей $(|b_n^{\alpha+1}|)$, нетрудно убедится, что методы $E^{\alpha\delta\theta} = (e_{mn}^{\alpha\delta\theta})$ и $G^{\alpha\delta\theta} = (g_{mn}^{\alpha\delta\theta})$, введенные выше, удолетворяют соответственно условиям 1^0 и 2^0 теоремы А с $a=1/2$, $b=1$ и $\varphi^{\alpha\delta}(\theta) = T_{\alpha\delta}\cdot(1-\theta)^{\delta_1}$. Теорема доказана.

В силу примечания 2 и леммы 1, из теоремы 5 вытекает

Следствие 1. Пусть дано семейство методов $[N, p_n^{\alpha+1}, q_n]_r$ с $\alpha>\alpha_0\ge -1$ (или $\alpha\ge\alpha_0>-1$). Если последовательности $(|P_n^{\alpha}|)$ монотонно возрастают и удовлетворяют условию (19) с $b_n^{\alpha} = P_n^{\alpha}$, то семейство выпукло, причем методы совместны.

Заметим, что результат, аналогичный следствию 1, получен в работе [7], в частности, для методов $[N, p_n^{\alpha+1}]$ в [6]. Из следствия 1 легко вывести, что семейство $[N, A_n^{\alpha}, A_n^{\beta_0}]_r$ с $\beta_0\ge 0$ и $\alpha\ge 0$, т.е. семейство методов сильной суммируемости методами $(C, \alpha+1, \beta_0)$, выпукло; в частности, семейство

$[c, \alpha+1]_n$ выпукло[8].

При помощи оценок (23) и (24)-(27) из теоремы A можно также вывести следующую теорему.

Теорема 6. Пусть (c_n^α) с $c_n^\alpha \neq 0$ - некоторые последовательности. Если последовательности $(|c_n^\alpha|)$ монотонно возрастают и удовлетворяют условию (19), то для методов B_α при любых $\alpha < \beta$ справедливы импликации

$$\lambda_n^\alpha v_n^\alpha = O(1) \Longrightarrow \lambda_n^\beta v_n^\beta = O(1), \tag{28}$$

$$\lambda_n^\alpha v_n^\alpha = o(1) \Longrightarrow \lambda_n^\beta v_n^\beta = o(1) \tag{29}$$

и

$$\lambda_n^\alpha v_n^\alpha = O(1),\ \lambda_n^\beta v_n^\beta = o(1),\ \alpha < \gamma < \beta \Longrightarrow \lambda_n^\gamma v_n^\gamma = o(1), \tag{30}$$

где $\lambda_n^\alpha = |t_n^{\alpha+1} / c_n^\alpha|$ и

$$v_n^\alpha = \frac{1}{|t_n^{\alpha+1}|} \sum_{k=0}^{n} |t_k^\alpha| \, |\varepsilon_k|^{\varkappa}.$$

Если же методы A_α матричные и удовлетворяют условию (18) с $a_{kk} = 1$, то мы можем в определении величины v_n^α заменить t_k^α на $t_k^\alpha - \Delta$ с произвольным Δ.

Примечание 3. Заметим, что, если $\lambda_n^\alpha \uparrow \infty$ при $n \to \infty$, то импликации (28)-(30) являются предложениями о сильной суммируемости (и ограниченности) со скоростью методами $P_\alpha A_\alpha$, точнее, предложениями о $[(P_\alpha, A_\alpha)^{\lambda_\alpha}]_\varkappa$-суммируемости (и ограниченности), где $\lambda_\alpha = (\sqrt[\varkappa]{\lambda_n^\alpha})$.

3. В этом разделе мы обозначаем через B_α семейства $B_\alpha = [P_\alpha, E]_\varkappa$ с треугольными методами P_α, где $p_{nk}^\alpha = t_{nk} t_k^\alpha / c_n^\alpha$, (t_{nk}) - некоторая матрица, а (t_n^α) и (c_n^α) - последовательности с $c_n^\alpha \neq 0$. Предположим, что P_α удовлетворяют условиям (6) и (7).

Заметим, что такими методами являются, например, методы Рисса $P_\alpha = (R, p_n^\alpha)$ с $p_n^\alpha > 0$ (см. [1], стр. 112).

Теорема 7. Если последовательности (t_n^α) и последова-

---

[8] Из доказательств леммы 2 и теоремы 5 видно, что в случае положительных (p_n^α) можно ограничения следствия 1 ослабить, сохранив лишь условие (19). Таким образом, семейство $[N, A_n^\alpha, A_n^{\beta_0}]$ выпукло при $\alpha > -1$.

тельности (c_n^α) удовлетворяют условию[9] (19), то семейство B_α ~~выпукло.~~

Д о к а з а т е л ь с т о. В силу леммы 1, достаточно убедится в том, что методы B_α удовлетворяют условиям теоремы А. Условие (19), наложенное на (b_n^α) и (c_n^α), обеспечивает при $\alpha<\beta$ включения (22). Воспользуемся, далее, обозначением (17) с $t_n^\alpha = s_n$. Следуя идее доказательства теоремы 5, разобьем сумму $r_n^{\alpha+\delta}$ при помощи некоторого $\theta\in(1/2,1)$ на две части:

$$r_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{|c_n^{\alpha+\delta}|}\sum_{k=0}^{n-N} |b_{nk} b_k^{\alpha+\delta}||s_k|^r +$$

$$+ \frac{1}{|c_n^{\alpha+\delta}|}\sum_{k=n-N+1}^{n} |b_{nk} b_k^{\alpha+\delta}||s_k|^r = J_1 + J_2,$$

где $N=[\theta n]$. Учитывая условие (19), мы получаем, далее, что $J_1 = O\{(1-\theta)^\delta r_n^\alpha\}$ и $J_2 = O_\theta(r_n^{\alpha+1})$. Из полученных оценок следует, что условия теоремы А выполнены с $e_{nk}^{\alpha\delta\theta} = M_{\alpha\delta\theta}\cdot\delta_{nk}$, $g_{nk}^{\alpha\delta\theta} = N_{\alpha\delta}\cdot(1-\theta)^\delta\,\delta_{nk}$, $a=1/2$, $b=1$ и $\varphi^{\alpha\delta}(\theta) = N_{\alpha\delta}\cdot(1-\theta)^{\delta}$.

Из теоремы 7 непосредственно вытекает

Следствие 2. Пусть (d_n^α) - некоторые последовательности, удовлетворяющие условию (19). Если (b_n^α) удовлетворяют условию (19), то для методов B_α при $\alpha<\beta$ справедливы импликации (28)-(30), где $\lambda_n^\alpha = |c_n^\alpha / d_n^\alpha|$ и

$$r_n^\alpha = \frac{1}{|c_n^\alpha|}\sum_{k=0}^{n} |b_{nk} b_k^\alpha||s_k - s|^r.$$

Ясно, что при $\lambda_n^\alpha\uparrow\infty$ импликации в следствии 2 являются предложениями о $[(P_\alpha, E)^{\lambda_\alpha}]_r$ -суммируемости (ограниченности), где $\lambda_\alpha = (\sqrt{\lambda_n^\alpha})$.

Примечание 4. Следствие 2 справедливо, например, при методах Рисса $P_\alpha = (R, p_n^\alpha)$ с $p_n^\alpha = (n+1)^\alpha$. Здесь $b_{nk}=1$, $b_n^\alpha = p_n^\alpha$, $c_n^\alpha = p_0^\alpha + p_1^\alpha + \dots + p_n^\alpha$, а (d_n^α) - некоторые последовательности, удовлетворяющие условию (19).

---

[9] Постоянные M_1 и M_2 в условии (19) могут быть различными для разных последовательностей.

В заключение сделаем еще одно замечание.

Примечание 5. В определении методов B_α можно метод E заменить на произвольный метод A, а также ℓ_k^α на ℓ_{n-k}^α, причем теорема 7 и следствие 2 остаются в силе.

Литература

1. Барон С., Введение в теорию суммируемости. Таллин, 1977.
2. Кангро Г., Сильная суммируемость ортогональных рядов со скоростью. Изв. АН ЭстССР. Физ., мат., 1979, 28, № 1, 1-8.
3. Тали А., Один способ для построения выпуклых семейств методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 55-65.
4. Тали А., О нуль-выпуклых семействах методов суммирования. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 504, 48-57.
5. Borwein, D., On strong and absolute summability. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1960, 4, 122-139.
6. Cass, F.P., Convexity theorems for Nörlund and strong Nörlund summability. Math. Z., 1969, 112, N°5, 357-363.
7. Sinhha, R., Convexity theorem for $[N, p, q]$ summability. Kyungpook Math. J., 1975, 15, 65-79.

Поступило 05 12 1980

Some examples on convex and zero-convex families of summability methods

A.Tali

Summary

This article extends certain researches on convex families of summability methods started in works [3,4] to strong summability.

In section 2 the concepts of strong summability and strong summability with rapidity given in works [5,2] are generalized (definitions 2 and 3). Relations between ordinary summability and strong summability as well as between ordinary summability with rapidity and strong summability with rapidity are established (theorems 1, 2, 3 and 4).

In section 3 some convexity theorems for strong summa-

bility methods $B_\alpha = [P_\alpha, A_\alpha]_{\mu}$ are proved (theorems 5,7 and lemma 1). Proofs are based on the theorem A. These convexity theorems are translated to strong summability with rapidity (theorem 6 and corollary 2). The convexity theorem for $[N, p_n^{\alpha+1}, q_n]_n$ - summability follows from the theorem 5 (corollary 1). This result is analogous to theorems given in works [6,7]. The theorem 6 includes the theorem about strong $(N, p_n^{\alpha+1}, q_n)$ - summability with rapidity as a special case.

ОПИСАНИЕ ИДЕАЛОВ ОДНОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ АЛГЕБРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

М.Абель

Тартуский государственный университет

1. Пусть X - топологическое пространство, $\mathfrak{S}=\mathfrak{S}(X)$ - покрытие пространства X и $\mathbb{F}$ - поле $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть $C(X,\mathbb{F})$ - множество всех $\mathbb{F}$-значных непрерывных функций на X, $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ - множество всех таких функций $f\in C(X,\mathbb{F})$, при которых $f(S)$ ограничено в $\mathbb{F}$ для каждого $S\in\mathfrak{S}$ и $C_b(X,\mathbb{F})$ - множество всех тех функций из $C(X,\mathbb{F})$, которые ограничены на X. При этом, множества $C(X,\mathbb{F})$ и $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ совпадают, если каждое множество $S\in\mathfrak{S}$ является относительно псевдокомпактным в X (т.е. таким подмножеством в X, на котором ограничены все функций $f\in C(X,\mathbb{F})$) и, кроме того, множества $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ и $C_b(X,\mathbb{F})$ совпадают, если пространство X само псевдокомпактно, или покрытие $\mathfrak{S}$ пространства X конечно. Таким образом, для любого покрытия $\mathfrak{S}$ пространства X справедливо

$$C_b(X,\mathbb{F})\subseteq C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})\subseteq C(X,\mathbb{F}).$$

Наделяя множество $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ топологией равномерной сходимости на элементах покрытия $\mathfrak{S}$ пространства X и определяя алгебраические операции над функциями как обычно, поточечно, множество $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ будет отделимой локально m-выпуклой алгеброй (с единицей) над $\mathbb{F}$. Обычно эта топология на $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ определяется семейством $\{p_S : S\in\mathfrak{S}\}$ непрерывных полунорм, где

$$p_S(f)=\sup\{|f(x)| : x\in S\}$$

для всех $f\in C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$.

2. Пусть $\mathcal{J}(A)$ - множество всех[1] замкнутых идеалов, а $\mathfrak{M}(A)$ - множество всех максимальных идеалов топологической

[1] В данной статье рассматриваются только собственные идеалы.

14

алгебры A над F. Пусть, далее, $\mathfrak{M}_c(A) = \mathfrak{M}(A) \cap \mathfrak{J}(A)$ и, кроме того, $Hom A$ - множество всех F-гомоморфизмов алгебры A и $hom A$ - подмножество тех F-гомоморфизмов, которые непрерывны на A.

Для каждого тихонова пространства X пусть βX - компактное отделимое пространство и $h_X : X \to \beta X$ - всюду плотное вложение такие, что пара $(\beta X, h_X)$ есть расширение Стоуна--Чеха пространства X. Пусть, далее, $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Как известно (см. [7], стр. 103), для каждой функции $g \in C(X, \mathbb{R})$ существует функция $g^* \in C(\beta X, \mathbb{R}^*)$ такая, что $g^* \circ h_X = g$. В статье [3] водятся пространства

$$\mathfrak{S}X = \{p \in \beta X : f^*(p) \in \mathbb{R} \ \forall f \in C_b(X, \mathbb{R}; \mathfrak{S})\}$$

и[1]

$$\mathfrak{S}_\beta X = \bigcup \{ cl_{\beta X} h_X(S) : S \in \mathfrak{S} \}$$

и изучаются их свойства. В настоящей статье дается их алгебраическая характеристика. Показывается, что множество $Hom\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ можно отождествлять пространством $\mathfrak{S}X$; множество $hom\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ - пространством $\mathfrak{S}_\beta X$; множество $\mathfrak{M}(C_b(X, F; \mathfrak{S}))$ - пространством βX; множество $\mathfrak{J}(C_b(X, F; \mathfrak{S}))$ - множеством $P(\mathfrak{S}_\beta X)$ всех непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathfrak{S}_\beta X$ и множество $\mathfrak{M}_c(C_b(X, F; \mathfrak{S}))$ - пространством $\mathfrak{S}_\beta X$. Оказывается, что $Hom\, C_b(X, F; \mathfrak{S}) = hom\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ наполнено; $\mathfrak{M}(C_b(X, F; \mathfrak{S})) = \mathfrak{M}_c(C_b(X, F; \mathfrak{S}))$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ компактно и, что каждый $M \in \mathfrak{M}(C_b(X, F; \mathfrak{S}))$ есть ядро некоторого $\varphi \in Hom\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ псевдокомпактно.

§ 1. Описание максимальных идеалов алгебры $C_b(X, F; \mathfrak{S})$

Пусть X - тихоново пространство, $h_X : X \to \beta X$ — всюду плотное вложение и $(\nu X, h_X)$ - расширение Хьюитта пространства X. Тогда для каждой функции $f \in C(X, F)$ существует такая однозначно определенная функция $f^\nu \in C(\nu X, F)$, что $f^\nu \circ h_X = f$ (см. [7], стр. 117). В частном случае, когда $\nu X = h_X(X)$, пространство X называется наполненным. Примером

[1] Здесь и всюду в дальнейшем $cl_Y X$ обозначает замыкание множества $X \subseteq Y$ в топологии пространства Y.

наполненного пространства является сепарабельное метрическое пространство (см.[6], стр. 26). Таким образом, F является наполненным пространством. Поэтому, по теореме 1 и следствию 1 из статьи [3] справедливо

Теорема А. Пусть X - тихоново пространство и $\mathfrak{S}$—покрытие пространства X. Тогда для каждой функции $f \in C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ существует такая функция $f^{\mathfrak{S}} \in C(\mathfrak{S}X,F)$, что $f^{\mathfrak{S}} \circ h_X = f$. При этом, отображение $F_{\mathfrak{S}}: f \to f^{\mathfrak{S}}$ есть изоморфизм алгебры $C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ на $C(\mathfrak{S}X,F)$.

В дальнейшем используется следующий результат:

Теорема Б. Пусть X - отделимое вполне регулярное пространство. Тогда

а) каждый $M \in \mathfrak{M}(C(X,F))$ определяет такую точку $p \in \beta X$, что[1]

$$M = M_p(X) = \{f \in C(X,F) : p \in cl_{\beta X} h_X[z_X(f)]\}$$

и отображение $p \to M_p(X)$ есть биекция βX на $\mathfrak{M}(C(X,F))$;

б) каждый $\varphi \in Hom\, C(X,F)$ определяет такую точку $p \in \nu X$, что $\varphi(f) = f^{\nu}(p)$ для всех $f \in C(X,F)$ и $\ker \varphi = M_p(X)$.

Доказательство для алгебры $C(X,R)$ см., например,[6], стр. 18-20 и 29. Случай $C(X,\mathbb{C})$ доказывается аналогично.

Справедлива

Теорема 1. Пусть X - тихоново пространство и $\mathfrak{S}$—покрытие пространства X. Тогда

а) каждый $M \in \mathfrak{M}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$ определяет такую точку $p \in \beta X$, что

$$M = M_p(X;\mathfrak{S}) = \{f \in C_\ell(X,F;\mathfrak{S}) : p \in cl_{\beta X} z_{\mathfrak{S}X}(f^{\mathfrak{S}})\}$$

и отображение $p \to M_p(X;\mathfrak{S})$ есть биекция βX на $\mathfrak{M}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$;

б) каждый $\varphi \in Hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ определяет точку $p \in \mathfrak{S}X$ такую, что[2] $\varphi = \delta_p \circ F_{\mathfrak{S}}$, $\ker \varphi = M_p(X;\mathfrak{S})$ и отображение $p \to \delta_p \circ F_{\mathfrak{S}}$ есть биекция $\mathfrak{S}X$ на $Hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$;

в) алгебра $C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ полупроста.

Доказательство. а) Пусть $M \in \mathfrak{M}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$. Поскольку отображение $F_{\mathfrak{S}}: f \to f^{\mathfrak{S}}$ есть изоморфизм $C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ на $C(\mathfrak{S}X,F)$

---

[1] Здесь $z_X(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}$.

[2] Здесь $\delta_p(f) = f(p)$ при $p \in \mathfrak{S}X$ и $f \in C(\mathfrak{S}X,F)$.

по теореме А, то $F_\sigma(M) \in \mathfrak{M}(C(\sigma X, F))$. Поэтому, по теореме Ба), существует такая точка $q \in \beta(\sigma X)$, что $F_\sigma(M) = M_q(\sigma X)$.

Пусть $1_{\sigma X}$ – тождественное отображение на σX. Как показывается в [3], существует гомеоморфизм G пространства $\beta(\sigma X)$ на βX, удовлетворяющий условию $G \circ h_{\sigma X} = 1_{\sigma X}$. Учитывая это,

$$G\{cl_{\beta(\sigma X)} h_{\sigma X}[z_{\sigma X}(f^\sigma)]\} = cl_{\beta X}\{G \circ h_{\sigma X}[z_{\sigma X}(f^\sigma)]\} =$$
$$= cl_{\beta X}\, z_{\sigma X}(f^\sigma).$$

Таким образом,

$$M_p(X;\sigma) = (F_\sigma)^{-1}(M_q(\sigma X)) \qquad (1)$$

при $p = G(q) \in \beta X$. Значит, $M = M_p(X;\sigma)$. Далее, по теореме Ба) и равенству (1) каждое множество $M_p(X;\sigma)$ с $p \in \beta X$ принадлежит $\mathfrak{M}(C_b(X, F;\sigma))$. Следовательно, отображение $p \to M_p(X;\sigma)$ является сюръекцией.

Пусть, теперь, $p_1, p_2 \in \beta X$ и $p_1 \neq p_2$. Тогда $q_k = G^{-1}(p_k) \in \beta(\sigma X)$ при $k = 1,2$ и $q_1 \neq q_2$. В силу иньективности отображения $q \to M_q(\sigma X)$ справедливо $M_{q_1}(\sigma X) \neq M_{q_2}(\sigma X)$. Учитывая теперь иньективность отображения F_σ и равенство (1), получаем, что

$$M_{p_1}(X;\sigma) = (F_\sigma)^{-1}(M_{q_1}(\sigma X)) \neq (F_\sigma)^{-1}(M_{q_2}(\sigma X)) = M_{p_2}(X;\sigma).$$

Итак, отображение $p \to M_p(X;\sigma)$ есть биекция βX на $\mathfrak{M}(C_b(X, F;\sigma))$.

б) Так как F_σ есть изоморфизм $C_b(X, F;\sigma)$ на $C(\sigma X, F)$ по теореме А, то $\delta_p \circ F_\sigma \in Hom\, C_b(X, F;\sigma)$ при $p \in \sigma X$. Пусть, теперь, $\varphi \in Hom\, C_b(X, F;\sigma)$. Тогда отображение H_σ, определяемое равенством $H_\sigma(\varphi) = \varphi \circ (F_\sigma)^{-1}$ при $\varphi \in Hom\, C_b(X, F;\sigma)$, отображает $Hom\, C_b(X, F;\sigma)$ на $Hom\, C(\sigma X, F)$. Поэтому, по теореме Бб), существует такая точка $q \in \nu(\sigma X)$, что

$$\varphi(f) = \varphi \circ (F_\sigma)^{-1}(f^\sigma) = H_\sigma(\varphi)(f^\sigma) = (f^\sigma)^\nu(q)$$

для всех $f \in C_b(X, F;\sigma)$. В силу наполненности пространства σX (см. [3], теорема 2а)), справедливо $\nu(\sigma X) = h_{\sigma X}(\sigma X)$. Следовательно, $p = (h_{\sigma X})^{-1}(q) \in \sigma X$ и

$$\varphi(f) = (f^\sigma)^\nu \circ h_{\sigma X}(p) = f^\sigma(p) = \delta_p \circ F_\sigma(f)$$

для всех $f \in C_b(X, F;\sigma)$. Таким образом, каждый $\varphi \in$

$\in \mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\sigma)$ определяет такую точку $p\in\sigma X$, что $\varphi=\delta_p\circ F_\sigma$. Кроме того, по теоремам А и Бб) справедливо

$$F_\sigma(\ker\varphi) = \ker H_\sigma(\varphi) = M_q(\sigma X), \qquad (2)$$

где $q\in\nu X$. Поскольку $\sigma^{-1}|\sigma X = h_{\sigma X}$ (см. [3], доказательство теоремы 2а)), то $p=\sigma(q)$. Итак, по равенствам (1) и (2), справедливо $\ker\varphi = (F_\sigma)^{-1}(M_q(\sigma X)) = M_p(X;\sigma)$.

Пусть, теперь, $p_1,p_2\in\sigma X$ и $p_1\neq p_2$. В силу отделимости и вполне регулярности пространства σX (как подмножества βX) существует функция $g\in C(\sigma X,F)$ такая, что $g(p_1)=1$, а $g(p_2)=0$. По теореме А ясно, что $g\circ h_X\in$ $\in C_b(X,F;\sigma)$ и $(g\circ h_X)^\sigma = g$. Поэтому

$$\delta_{p_1}\circ F_\sigma(g\circ h_X) = g(p_1)\neq g(p_2) = \delta_{p_2}\circ F_\sigma(g\circ h_X).$$

Значит, $\delta_{p_1}\circ F_\sigma \neq \delta_{p_2}\circ F_\sigma$. Таким образом, отображение $p\to\delta_p\circ F_\sigma$ есть биекция σX на $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\sigma)$.

в) Если[1] $f\neq\theta_{C_b(X,F;\sigma)}$, то $f^\sigma\neq\theta_{C(\sigma X,F)}$ по теореме А. В силу этого, существует такая $p_0\in\sigma X$, что $f^\sigma(p_0)\neq 0$. Отсюда ясно, что $f\notin\ker\delta_{p_0}\circ F_\sigma = M_{p_0}(X;\sigma)$. Таким образом, если $f\neq\theta_{C_b(X,F;\sigma)}$, то f не принадлежит в радикал алгебры $C_b(X,F;\sigma)$ (см.[5], стр. 197). Поэтому алгебра $C_b(X,F;\sigma)$ ~~полупроста~~.

Теорема доказана.

Множество $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\sigma)$ будем в дальнейшем наделять слабой топологией, определенной алгеброй $C_b(X,F;\sigma)$. Тогда в этой топологии предбазой окрестностей точки $\varphi_0\in$ $\in\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\sigma)$ являются множества

$$O(\varphi_0;f,\varepsilon) = \{\varphi\in\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\sigma) : |\varphi(f)-\varphi_0(f)|<\varepsilon\},$$

где $\varepsilon>0$ и $f\in C_b(X,F;\sigma)$. По теореме 1б) каждый $\varphi\in$ $\in\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\sigma)$ определяет такую точку $p\in\sigma X$, что $\varphi=$ $=\delta_p\circ F_\sigma$. Поэтому, окрестность $O(\varphi_0;f,\varepsilon)$ гомоморфизма $\varphi_0=\delta_{p_0}\circ F_\sigma$ можно представить в виде

$$\{\delta_p\circ F_\sigma : |f^\sigma(p)-f^\sigma(p_0)|<\varepsilon\}.$$

Пусть $O(\varphi_0)$ – любая окрестность гомоморфизма φ_0 в

---

[1] Здесь θ_A обозначает нулевой элемент алгебры A.

этой топологии. Тогда существуют такие функции $f_1, f_2, \ldots, f_n \in$ $\in C_b(X,F;\mathfrak{S})$, что

$$\bigcap_{k=1}^{n} \{\delta_p \circ F_{\mathfrak{S}} : |(f_k)^{\mathfrak{S}}(p) - (f_k)^{\mathfrak{S}}(p_0)| < \varepsilon\} \subseteq O(\varphi_0).$$

В силу непрерывности функций $(f_k)^{\mathfrak{S}}$ на $\mathfrak{S}X$, существует такая окрестность $O(p_0)$ точки $p_0 \in \mathfrak{S}X$, что

$$|(f_k)^{\mathfrak{S}}(p) - (f_k)^{\mathfrak{S}}(p_0)| < \varepsilon$$

при $p \in O(p_0)$ для каждого $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому отображение $\mu : p \to \delta_p \circ F_{\mathfrak{S}}$ пространства $\mathfrak{S}X$ на $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$ отображает окрестность $O(p_0)$ в $O(\varphi_0)$ и будет поэтому непрерывным на $\mathfrak{S}X$. Поскольку пространство $\mathfrak{S}X$ вполне регулярно, то топология пространства $\mathfrak{S}X$ совпадает со слабой топологией, определенной алгеброй $C(\mathfrak{S}X, F)$ (см. [14], стр. 95). В силу этого, для любой окрестности $O(p_0)$ точки $p_0 \in \mathfrak{S}X$ существуют такие функции $g_1, g_2, \ldots, g_m \in C(\mathfrak{S}X, F)$, что

$$U = \bigcap_{k=1}^{m} \{p \in \mathfrak{S}X : |g_k(p) - g_k(p_0)| < \varepsilon\} \subseteq O(p_0).$$

Учитывая то, что μ есть биекция $\mathfrak{S}X$ на $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$, $p_0 = \mu^{-1}(\varphi_0)$ при $\varphi_0 = \delta_{p_0} \circ F_{\mathfrak{S}}$ и

$$\mu(U) = \bigcap_{k=1}^{m} O(\varphi_0; g_k \circ k_X, \varepsilon)$$

есть окрестность гомоморфизма φ_0 в топологии пространства $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$, то μ^{-1} непрерывно на $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$. Следовательно, μ отображает $\mathfrak{S}X$ гомеоморфно на $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$.

Таким образом, справедливо следующее обобщение теоремы (1.6-2) книги [6].

Следствие 1. Пусть X - тихоново пространство и $\mathfrak{S}$ - покрытие пространства X. Если множество $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$ наделить слабой топологией, определенной алгеброй $C_b(X,F;\mathfrak{S})$, то пространства $\mathfrak{S}X$ и $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$ гомеоморфны.

§ 2. Описание замкнутых идеалов алгебры $C_b(X,F;\mathfrak{S})$

Пусть X - топологическое пространство. Множество $S \subseteq$ $\subseteq X$ называется C_b-вложенным в X, если для каждой функции $f \in C_b(S,R)$ существует такая функция $\bar{f} \in C_b(X,R)$, что $\bar{f}|S = f$.

Лемма 1. Пусть X - тихоново пространство и $\mathfrak{S}$ - покрытие пространства X. Если множество $S \in \mathfrak{S}$ является C_b-вложенным в X, то существует гомеоморфизм τ от $\mathrm{cl}_{\beta X} h_X(S)$ на βS такой, что[1] $(f|S)^\beta \circ \tau = f^{\mathfrak{S}} | \mathrm{cl}_{\beta X} h_X(S)$ для каждой $f \in C_b^1(X, F; \mathfrak{S})$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{S}$, $\bar{S} = \mathrm{cl}_{\beta X} h_X(S)$ и $\alpha \in C_b(h_X(S), F)$. Тогда $\alpha \circ h_X \in C_b(S, F)$. Так как S есть множество, которое C_b-вложенно в X, то существует такая функция $\overline{\alpha \circ h_X} \in C_b(X, F)$, что $\overline{\alpha \circ h_X} | S = \alpha \circ h_X$. Таким образом функция $g = (\overline{\alpha \circ h_X})^\beta | \bar{S} \in C_b(X, F)$ и $g | h_X(S) = \alpha$. Значит, $h_X(S)$ является C_b-вложенным в $\bar{S}$. Кроме того, пара $(\bar{S}, h_X|S)$ есть компактное отделимое расширение пространства S и $h_S \circ (h_X)^{-1}$ - гомеоморфизм $h_X(S)$ на $h_S(S)$. Поэтому существует гомеоморфизм τ от $\bar{S}$ на βS такой, что $\tau | h_X(S) = h_S \circ (h_X)^{-1}$ (см. [6], теорема 1.1-1). Учитывая это,

$$[(f|S)^\beta \circ \tau](x) = [(f|S)^\beta \circ h_S \circ (h_X)^{-1}](x) = [(f|S) \circ (h_X)^{-1}](x) =$$
$$= f^{\mathfrak{S}}(x) = (f^{\mathfrak{S}} | \bar{S})(x)$$

при всех $f \in C_b(X, F; \mathfrak{S})$ и $x \in h_X(S)$. Следовательно, $(f|S)^\beta \circ \tau = f^{\mathfrak{S}} | \bar{S}$ для всех $f \in C_b(X, F; \mathfrak{S})$.

Лемма 2. Пусть X - тихоново пространство и $\mathfrak{S}$ - покрытие пространства X. Тогда $\delta_p \circ F_{\mathfrak{S}} \in hom\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ при $p \in \mathfrak{S}_\beta X$.

Доказательство. Пусть $p \in \mathfrak{S}_\beta X$. Тогда $p_0 \in \bar{S}_0$ при некотором $S_0 \in \mathfrak{S}$. Так как $p_{\bar{S}_0}(f^{\mathfrak{S}}) = p_{S_0}(f)$ (см. [3], доказательство следствия 1) для всех $f \in C_b(X, F; \mathfrak{S})$, то из

$$|(\delta_{p_0} \circ F_{\mathfrak{S}})(f)| = |f^{\mathfrak{S}}(p_0)| \leqslant p_{\bar{S}_0}(f^{\mathfrak{S}})$$

следует, что

$$|(\delta_{p_0} \circ F_{\mathfrak{S}})(f)| \leqslant p_{S_0}(f)$$

для всех $f \in C_b(X, F; \mathfrak{S})$. В силу, этого гомоморфизм $\delta_p \circ F_{\mathfrak{S}}$ непрерывен на $C_b(X, F; \mathfrak{S})$ в каждой точке $p \in \mathfrak{S}_\beta X$.

Лемма 3. Пусть X - компактное отделимое пространство, $\mathfrak{I}$ - идеал алгебры $C(X, F)$ и $f \in C(X, F)$. Функция $f \in$

---

[1] Если $g \in C_b(X, F)$, то через g^β обозначается такая однозначно определенная непрерывная функция на βX, что $g^\beta \circ h_X = g$.

$\in cl_{C(X,F)}\mathcal{J}$ тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ для каждой точки

$$x \in \bigcap\{\alpha^{-1}(\{0\}) : \alpha \in \mathcal{J}\}.$$

Доказательство см. [10], стр. 41-42.

Чтобы описать замкнутые идеалы алгебры $C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ введем следующее обозначение: для каждого $P \subseteq \mathfrak{S}_\beta X$ пусть

$$\mathcal{J}(P) = \{f \in C_\ell(X,F;\mathfrak{S}) : f^{\mathfrak{S}}(p)=0 \ \forall p \in P\}.$$

Справедлива

Теорема 2. Пусть X - тихоново пространство и $\mathfrak{S}$ – покрытие пространства X, элементы которого C_ℓ-вложены в X. Тогда

а) каждый $\mathcal{J} \in \mathcal{J}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$ определяет такое $P_\mathcal{J} \in P(\mathfrak{S}_\beta X)$, что $\mathcal{J} = \mathcal{J}(P_\mathcal{J})$ и отображение $P \to \mathcal{J}(P)$ есть биекция $P(\mathfrak{S}_\beta X)$ на $\mathcal{J}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$;

б) каждый $M \in \mathcal{M}_c(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$ определяет такую точку $p \in \mathfrak{S}_\beta X$, что $M = \mathcal{J}(\{p\})$ и отображение $p \to \mathcal{J}(\{p\})$ есть биекция $\mathfrak{S}_\beta X$ на $\mathcal{M}_c(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$;

в) каждый $\varphi \in hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ определяет такую точку $p \in \mathfrak{S}_\beta X$, что $\varphi = \delta_p \circ F_\mathfrak{S}$ и отображение $p \to \delta_p \circ F_\mathfrak{S}$ есть гомеоморфизм[1] $\mathfrak{S}_\beta X$ на $hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$;

г) пространства $\mathfrak{S}_\beta X$ и $\mathcal{M}_c(C_\ell(X,\mathbb{C};\mathfrak{S}))$ гомеоморфны[2];

д) каждый $\mathcal{J} \in \mathcal{J}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$ есть пересечение всех содержащих его замкнутых максимальных идеалов;

е) $Hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S}) = hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ наполнено;

ж) каждый $M \in \mathcal{M}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$ является ядром некоторого $\varphi \in Hom\, C_\ell(X,F;\mathfrak{S})$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ псевдокомпактно;

з) $\mathcal{M}(C_\ell(X,F;\mathfrak{S})) = \mathcal{M}_c(C_\ell(X,F;\mathfrak{S}))$ тогда и только тогда, когда пространство $\mathfrak{S}_\beta X$ компактно;

---

[1] Если A - топологическая алгебра, то на $hom A$ рассмотрим топологию, индуцированную топологией пространства $Hom A$.

[2] Если A - коммутативная m-выпуклая алгебра над $\mathbb{C}$, то на $\mathcal{M}_c(A)$ рассмотрим топологию Гельфанда (см. [6], стр. 223) как и в случае коммутативных банаховых алгебр над $\mathbb{C}$.

и) алгебры $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})/\mathcal{J}(P)$ и $C(P,\mathbb{F})$ изоморфны, если $P\in P(\mathfrak{S}_\beta X)$ является C-вложенным[3] в $\mathfrak{S}X$ (в частности, если P компактно в $\mathfrak{S}_\beta X$).

Доказательство. а) Пусть $P\in P(\mathfrak{S}_\beta X)$. По лемме 2 множество $\ker(\delta_p\circ F_\mathfrak{S})$ замкнуто в $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ при $p\in \mathfrak{S}_\beta X$. Поэтому из равенства

$$\mathcal{J}(P)=\bigcap\{\ker(\delta_p\circ F_\mathfrak{S}) : p\in P\}$$

следует замкнутость множества $\mathcal{J}(P)$ в $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$. Так как по теореме А справедливы $(f+g)^\sigma=f^\sigma+g^\sigma$, $(\lambda f)^\sigma=\lambda f^\sigma$ и $(fg)^\sigma=f^\sigma g^\sigma$ для всех $f,g\in C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ и $\lambda\in\mathbb{F}$, то $\mathcal{J}(P)$ образует идеал в $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$. Следовательно, $\mathcal{J}(P)\in \mathfrak{J}(C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S}))$ для каждого $P\in P(\mathfrak{S}_\beta X)$.

Пусть, теперь, $\mathfrak{Y}\in \mathfrak{J}(C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S}))$. Далее, для каждого $S\in\mathfrak{S}$ пусть μ_S - гомоморфизм[4] $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ на $C_b(S,\mathbb{F})$, определенный равенством $\mu_S(f)=f|S$ для всех $f\in C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$, F_S - изоморфизм $C_b(S,\mathbb{F})$ на $C(\beta S,\mathbb{F})$ (теорема А при $X=S$ и $\mathfrak{S}=\{S\}$), определенный равенством $F_S(\alpha)=\alpha^\beta$ для всех $\alpha\in C_b(S,\mathbb{F})$ и ρ_S - изоморфизм $C(\beta S,\mathbb{F})$ на $C(\bar{S},\mathbb{F})$, определенный равенством $\rho_S(\gamma)=\gamma\circ\tau$ для всех $\gamma\in C(\beta S,\mathbb{F})$, где τ - гомеоморфизм $\bar{S}$ на βS (см. лемму 1). В силу непрерывности этих отображений, $\omega_S=\rho_S\circ F_S\circ\mu_S$ есть непрерывный гомоморфизм $C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ на $C(\bar{S},\mathbb{F})$ и, по лемме 1, справедливо $\omega_S(f)=f^\sigma|\bar{S}$ для каждой функции $f\in C_b(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$.

Пусть, далее,

$$P_S(\mathfrak{Y})=\bigcap_{f\in\mathfrak{Y}}\{s\in\bar{S} : f^\sigma(s)=0\}$$

для каждого $S\in\mathfrak{S}$ и

$$\mathfrak{S}_\mathfrak{Y}=\{S\in\mathfrak{S} : P_S(\mathfrak{Y})\neq\emptyset\}.$$

---

3 Подмножество $Y\subseteq X$ называется <u>C-вложенным</u> в X, если каждая $f\in C(Y,\mathbb{R})$ имеет продолжение $\tilde{f}\in C(X,\mathbb{R})$. Если X - вполне регулярное отделимое пространство, то каждое компактное подмножество C-вложено в X (см.[7], стр. 43).

4 Отображение μ_S сюрьективно, так как S есть C_b-вложено в X.

Если $\mathfrak{I}_S = \omega_S(\mathfrak{I}) = C(\bar{S}, \mathbb{F})$ для каждого $S \in \mathfrak{S}$, то $\mathfrak{I} = C_b(X, \mathbb{F}; \mathfrak{S})$ (см. [2], предложение 1) как всюду плотная замкнутая подалгебра в $C_b(X, \mathbb{F}; \mathfrak{S})$. Так как это не возможно, то $\mathfrak{I}_S$ является собственным идеалом алгебры $C(\bar{S}, \mathbb{F})$ хотя бы при одном $S \in \mathfrak{S}$ и содержится таким образом в некотором максимальном идеале M_S алгебры $C(\bar{S}, \mathbb{F})$. В силу компактности множества $\bar{S}$, существует такая точка $p \in \bar{S}$, что

$$M_S = \{\alpha \in C(\bar{S}, \mathbb{F}) : \alpha(p) = 0\}$$

(см., например, [4], стр. 73). Поэтому $\{p\} \subset P_S(\mathfrak{I})$ при этом $S \in \mathfrak{S}$. Следовательно, $\mathfrak{S}_{\mathfrak{I}} \neq \phi$. Таким образом, подмножество

$$P_{\mathfrak{I}} = \bigcup \{P_S(\mathfrak{I}) : S \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}\}$$

пространства $\mathfrak{S}_\beta X$ не пусто для каждого $\mathfrak{I} \in \mathfrak{I}(C_b(X, \mathbb{F}; \mathfrak{S}))$. Чтобы показать замкнутость множества $P_{\mathfrak{I}}$ в $\mathfrak{S}_\beta X$, положим

$$Q_{\mathfrak{I}} = \bigcap \{Q_f : f \in \mathfrak{I}\},$$

где множество

$$Q_f = \{q \in \mathfrak{S}_\beta X : f^{\sigma}(q) = 0\}$$

при каждой $f \in \mathfrak{I}$. Тогда $Q_{\mathfrak{I}} \neq \phi$. Действительно, как объяснено выше, идеал $\mathfrak{I}$ определяет хотя бы одно $S \in \mathfrak{S}$ и точку $p \in \bar{S}$ такую, что $(f^{\sigma}|\bar{S})(p) = f^{\sigma}(p) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{I}$. Значит, $p \in Q_{\mathfrak{I}}$. Так как $\mathfrak{S}_\beta X \subseteq \mathfrak{S}X$ (см. [3]), то функция f^{σ} непрерывна на $\mathfrak{S}_\beta X$. Поэтому, в силу отделимости пространства $\mathbb{F}$, множество Q_f замкнуто в $\mathfrak{S}_\beta X$ для каждой функции $f \in \mathfrak{I}$ (как прообраз множества $\{0\}$). Отсюда ясно, что множество $Q_{\mathfrak{I}}$ замкнуто в $\mathfrak{S}_\beta X$. Остается показать, что $Q_{\mathfrak{I}} = P_{\mathfrak{I}}$. Для этого, пусть $p \in P_{\mathfrak{I}}$. Тогда $p \in P_S(\mathfrak{I})$ при некотором $S \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{I}}$. Следовательно, $p \in Q_{\mathfrak{I}}$. Пусть, теперь, $q \in Q_{\mathfrak{I}}$. Тогда $q \in Q_f$ для каждой $f \in \mathfrak{I}$. Поэтому $q \in \bar{S}$ при некотором $S \in \mathfrak{S}$ и справедливо $q \in P_S(\mathfrak{I})$ при этом S. В силу этого, $q \in P_{\mathfrak{I}}$. Таким образом, $P_{\mathfrak{I}} = Q_{\mathfrak{I}}$ и, следовательно, каждый $\mathfrak{I} \in \mathfrak{I}(C_b(X, \mathbb{F}; \mathfrak{S}))$ определяет $P_{\mathfrak{I}} \in P(\mathfrak{S}_\beta X)$.

Остается показать, что $\mathfrak{I} = \mathfrak{J}(P_{\mathfrak{I}})$. Для этого, пусть $f \in \mathfrak{I}$. Тогда $f^{\sigma}(p) = 0$ для каждой точки $p \in Q_{\mathfrak{I}} = P_{\mathfrak{I}}$. Поэтому $f \in \mathfrak{J}(P_{\mathfrak{I}})$ и, следовательно, $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}(P_{\mathfrak{I}})$. Учитывая это и то, что $\mathcal{J}(P_\mathcal{J})$ замкнуто, для равенства $\mathcal{J} = \mathcal{J}(P_\mathcal{J})$ достаточно показать всюду плотность идеала $\mathcal{J}$ в $\mathcal{J}(P_\mathcal{J})$.

Пусть $f_0 \in \mathcal{J}(P_\mathcal{J})$. Тогда $\omega_S(f_0)(p) = 0$ для каждой точки $p \in P_S(\mathcal{J})$ и

$$P_S(\mathcal{J}) = \bigcap \{\alpha^{-1}(\{0\}) : \alpha \in \mathcal{J}_S\}$$

для каждого $S \in \mathfrak{S}_\mathcal{J}$. Поэтому $\omega_S(f_0) \in cl_{C(\bar S, F)} \mathcal{J}_S$ по лемме 3. Пусть, теперь, $S \in \mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}_\mathcal{J}$. Тогда при каждой точки $p \in \bar S$ существует в $\mathcal{J}$ такая функция, которая отлична от нуля в этой точке. В силу этого (см. [4], стр. 73), $\mathcal{J}_S = C(\bar S, F)$. Таким образом, для каждого числа $\varepsilon > 0$ и каждого множества $S \in \mathfrak{S}$ существует такая функция $f_{\varepsilon,S} \in \mathcal{J}$, что

$$p_{\bar S}(\omega_S(f_{\varepsilon,S} - f_0)) < \varepsilon.$$

Поскольку

$$p_S(f_{\varepsilon,S} - f_0) \leqslant p_{\bar S}(\omega_S(f_{\varepsilon,S} - f_0)),$$

то $f_0 \in cl_{C_c(X,F;\mathfrak{S})} \mathcal{J} = \mathcal{J}$. Следовательно, $\mathcal{J} = \mathcal{J}(P_\mathcal{J})$.

В заключение пусть $P_\mathcal{J}, P'_\mathcal{J} \in P(\mathfrak{S}_p X)$ такие, что $\mathcal{J} = \mathcal{J}(P_\mathcal{J}) = \mathcal{J}(P'_\mathcal{J})$. Если $P_\mathcal{J} \neq P'_\mathcal{J}$, то ввиду вполне регулярности пространства $\mathfrak{S}_p X$, для точки $p_0 \in P'_\mathcal{J} \setminus P_\mathcal{J}$ существует такая функция $\alpha \in C(\mathfrak{S}_p X, [0,1])$, что $\alpha(p_0) = 1$ и $\alpha(P_\mathcal{J}) = \{0\}$ Теперь, по теореме 1 из [3], существует $g \in C_c(X, F; \mathfrak{S})$ такая, что $g^\sim = \alpha$. Так как $g \in \mathcal{J}(P_\mathcal{J})$, но $g \notin \mathcal{J}(P'_\mathcal{J})$, то $\mathcal{J}(P_\mathcal{J}) \neq \mathcal{J}(P'_\mathcal{J})$.

Таким образом, отображение $P \to \mathcal{J}(P)$ есть биекция $P(\mathfrak{S}_p X)$ на $\mathcal{J}(C_c(X,F;\mathfrak{S}))$.

б) Пусть $M \in \mathcal{M}_c(C_c(X,F;\mathfrak{S}))$. Тогда $M = \mathcal{J}(P)$ при некотором $P \in P(\mathfrak{S}_p X)$. В силу вполне регулярности пространства $\mathfrak{S}_p X$, справедливо $\mathcal{J}(P') \subset \mathcal{J}(P'')$ в том и только в том случае, когда $P'' \subset P'$. Поэтому, ввиду максимальности идеала M $P = \{p\}$, где $p \in \mathfrak{S}_p X$. Таким образом, сужение на $\{\{p\} : p \in \mathfrak{S}_p X\}$ биекции $P \to \mathcal{J}(P)$ есть биекция $\mathfrak{S}_p X$ на $\mathcal{M}_c(C_c(X,F;\mathfrak{S}))$.

в) По лемме 2 справедливо $\delta_p \circ F_\mathfrak{S} \in hom\, C_c(X,F;\mathfrak{S})$ при $p \in \mathfrak{S}_p X$. Пусть, теперь, $\varphi \in hom\, C_c(X,F;\mathfrak{S})$. Тогда $\ker \varphi \in \mathcal{M}_c(C_c(X,F;\mathfrak{S}))$. Следовательно, по утверждению б) существует точка $p \in \mathfrak{S}_p X$ такая, что $\ker \varphi = \ker \delta_p \circ F_\mathfrak{S}$. Отсюда следует, что $\varphi = \delta_p \circ F_\mathfrak{S}$ (см. [15], стр. 321). Таким образом, сужение на $\mathfrak{S}_\rho X$ гомеоморфизма $\mathfrak{S}X$ на $\mathrm{Hom}\, C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$ есть гомеоморфизм $\mathfrak{S}_\rho X$ на $\mathrm{hom}\, C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$.

г) Так как $C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})$ есть коммутативная m-выпуклая алгебра над $\mathbb{C}$, то существует биекция $\mathfrak{M}_c(C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S}))$ на $\mathrm{hom}\, C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})$ (см. [9], стр. 11). Если на $\mathfrak{M}_c(C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S}))$ рассматривать топологию Гельфанда, а на $\mathrm{hom}\, C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})$ – топологию, индуцированную топологией пространства $\mathrm{Hom}\, C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S})$, то эта биекция является гомеоморфизмом $\mathfrak{M}_c(C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S}))$ на $\mathrm{hom}\, C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})$. Таким образом, по утверждению в) пространства $\mathfrak{S}_\rho X$ и $\mathfrak{M}_c(C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{C};\mathfrak{S}))$ гомеоморфны.

д) Пусть $\mathfrak{J}\in\mathfrak{J}(C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S}))$. Тогда $\mathfrak{J}=\mathcal{J}(P_{\mathfrak{J}})$, где $P_{\mathfrak{J}}\in P(\mathfrak{S}_\rho X)$ по утверждению а). Далее, по утверждению б), каждый $M\in\mathfrak{M}_c(C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S}))$ определяет точку $p\in\mathfrak{S}_\rho X$ такую, что $M=\mathcal{J}(\{p\})$. Поэтому $M\supseteq\mathfrak{J}$ в том и только в том случае, когда $p\in P_{\mathfrak{J}}$. Следовательно, $\mathfrak{J}$ есть пересечение идеалов $\mathcal{J}(\{p\})$, где $p\in P_{\mathfrak{J}}$.

е) Как известно (см. [3], теорема 2б)), пространство $\mathfrak{S}_\rho X$ наполнено тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\rho X=\mathfrak{S}X$. Поэтому справедливость утерждения е) следует из утверждения в) и теоремы 1б).

ж) Как известно (см. [3], теорема 2в)), пространство $\mathfrak{S}_\rho X$ псевдокомпактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}X=\beta X$. Поэтому справедливость утверждения ж) следует из теоремы 1.

з) Как известно (см. [3], теорема 2г)), пространство $\mathfrak{S}_\rho X$ компактно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{S}_\rho X=\beta X$. Поэтому справедливость утверждения ж) следует из теоремы 1а) и утверждения б).

и) Если $P\in P(\mathfrak{S}_\rho X)$ является C-вложенным в $\mathfrak{S}X$, то отображение $f\to f^{\mathfrak{S}}|P$ сюрьективно и его ядро равно $\mathcal{J}(P)$. Поэтому алгебры $C_{\mathfrak{S}}(X,\mathbb{F};\mathfrak{S})/\mathcal{J}(P)$ и $C(P,\mathbb{F})$ изоморфны.

Теорема 2 хорошо известна, в случае, когда X – компактное отделимое пространство и $\mathfrak{S}=\{X\}$. Кроме того, если X вполне регулярное отделимое пространство и $\mathfrak{S}$ – множество всех компактных подмножеств пространства X, то утверждения а), б) и в) доказаны в [13], стр. 325 и в [8], стр. 203, а если $\mathfrak{S}=\{S_n : n\in\mathbb{N}\}$ – счетное покрытие таких замкнутых подмножеств пространства X , что $S_n \subseteq S_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то утверждение в) доказано в [12], стр. 36 (см. также [11] ,стр. 1739).

В заключение отметим, что в статье [1] утверждения б) и в) теоремы 2 обобошены на векторнозначные функций.

Литература

1. Абель М., Описание пространства непрерывных линейных мультипликативных функционалов алгебры векторнозначных функций. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики", Тарту, 1980,111-113.
2. Абель М., Некоторые обобщения теоремы Стоуна-Вейерштрасса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1981, 504, 3-9.
3. Абель М., Расширения топологических пространств, зависящие от покрытия. Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., (в печати).
4. Люмис Л., Введение в абстрактный гармонический анализ. Москва, 1956.
5. Наймарк М.А., Нормированные кольца. Москва, 1968.
6. Beckenstein, E., Narici, L., Suffel, Ch., Topological Algebras. Amsterdam, 1977.
7. Gillman, L., Jerison, M., Rings of continuous functions. Princeton, 1960.
8. Dietrich, W.E., Jr., The Maximal Ideal Space of the Topological Algebra $C(X,E)$. Math. Ann., 1969, 183, 201-212.
9. Michael, E.A., Locally multiplicatively-convex topological algebras. Mem. Amer. Math. Soc., 1952, 11, 1-79.
10. Nachbin, L., Elements of approximation theory. Princeton, 1967.
11. Noureddine, M.K., Habre, W., Sous-algèbres localement convexes de $C(T)$. C.R.Acad. Sc. Paris, 1975, 280, A1739-A1741.
12. Noureddine, M.K., Hebre, W., Sous-algèbres localement convexes de $C(T)$. Pub. Dep. Math. Lyon, 1977, 14,№1 27-54.

13. Morris, P.D., Wulbert, D.E., Functional representation of topological algebras. Pacific J. Math., 1967, 22, 323-337.

14. Semadeni, Z., Banach spaces of continuous functions. Warszawa, 1971.

15. Simmons, G.F., Introduction to topology and modern analysis. New York, 1963.

Поступило 14 11 1980

The description of ideals of a topological algebra of continuous functions

M.Abel

Summary

Let X be a completely regular T_1-space, $(\beta X, h)$ be the Stone-Čech compactification of X, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(X)$ be a cover of X and F be one of the fields R or C. Let $C_b(X, F; \mathfrak{S})$ denote the set of all F-valued continuous functions f on X for which the restrictions $f|S$ of f to S are bounded for each $S \in \mathfrak{S}$. If the algebraic operations we define pointwise then in topology of $\mathfrak{S}$-convergence the set $C_b(X, F; \mathfrak{S})$ is a commutative locally m-convex algebra over F.

For each topological algebra A let $\mathrm{Hom}\,A$ ($\mathrm{hom}\,A$) denote the set of all non-trivial F-homomorphisms (respectively, continuous F-homomorphisms) of A, $\mathfrak{M}(A)$ ($\mathfrak{I}(A)$) denote the space of all maximal (respectively, closed) ideals of A and $\mathfrak{M}_c(A) = \mathfrak{M}(A) \cap \mathfrak{I}(A)$.

The topological properties of the spaces

$$\mathfrak{S}X = \{p \in \beta X : f^*(p) \in R \ \forall f \in C_b(X, F; \mathfrak{S})\}$$

(here $f^* \in C(\beta X, R \cup \{\infty\})$ and $f^* \circ h = f$ for each $f \in C(X, R)$) and

$$\mathfrak{S}_\beta X = \cup\{cl_{\beta X}\, h(S) : S \in \mathfrak{S}\}$$

are considered in [3]. Some algebraical properties of those spaces are considered in this paper. It is proved that the set $\mathrm{Hom}\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ we can indentify with the space $\mathfrak{S}X$, the set $\mathrm{hom}\, C_b(X, F; \mathfrak{S})$ - with the space $\mathfrak{S}_\beta X$, the set

$\mathfrak{M}(C_b(X,F;\mathfrak{S}))$ - with the space βX, the set $\mathfrak{I}(C_b(X,F;\mathfrak{S}))$ - with the set $P(\mathfrak{S}_\beta X)$ of all non-empty closed subsets of $\mathfrak{S}_\beta X$ and the set $\mathfrak{M}_e(C_b(X,F;\mathfrak{S}))$ - with the space $\mathfrak{S}_\beta X$. Moreover, it is shown that $\mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S}) = \mathrm{hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$ if and only if the space $\mathfrak{S}_\beta X$ is replete; $\mathfrak{M}(C_b(X,F;\mathfrak{S})) = \mathfrak{M}_e(C_b(X,F;\mathfrak{S}))$ if and only if the space $\mathfrak{S}_\beta X$ is pseudocompact and every $M \in \mathfrak{M}(C_b(X,F;\mathfrak{S}))$ is the kernel of a $\varphi \in \mathrm{Hom}\, C_b(X,F;\mathfrak{S})$ if and only if the space $\mathfrak{S}_\beta X$ is compact.

О ПОЧТИ ВСЮДУ БЕЗУСЛОВНОЙ $(C, 1)$-СУММИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ РЯДОВ

Ю. Ламп

Таллинский политехнический институт

Пусть A – некоторое бесконечное множество, (X, Σ, μ) – пространство с конечной мерой, $\{\varphi_\alpha\}_A$ – ортонормированное семейство функционалов пространства $L^2 = L^2(X, \Sigma, \mu)$, т.е.

$$(\varphi_\alpha, \varphi_\beta) = \int_X \varphi_\alpha(x)\varphi_\beta(x)\mu(dx) = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера.

В статье [4] мы определили понятие безусловной сходимости почти всюду (п.в.) на X обобщенного ортонормированного ряда

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha \varphi_\alpha(x), \tag{1}$$

где c_α – действительные числа. Именно, ряд (1) называется безусловно сходящимся п.в. на X, если п.в. на X сходится каждая счетная подпоследовательность[1]

$$\{S_{\varkappa_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \tag{2}$$

обобщенной последовательности

$$\{S_\varkappa(x)\}_{\varkappa\in F(A)}, \tag{3}$$

где $F(A)$ – направленное множество, состоящее из всех конечных подмножеств $\varkappa$ множества A, упорядоченное по включению, а

$$S_\varkappa(x) = \sum_{\alpha\in\varkappa} c_\alpha \varphi_\alpha(x).$$

В настоящей заметке мы рассмотрим проблему безусловной суммируемости п.в. на X ряда (1) методом арифметических

---

[1] У нас $\mathbb{N}$ – множество всех натуральных чисел. Последовательность (2) является подпоследовательностью обобщенной последовательности (3), если

$$(\forall \varkappa\in F(A))(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geq n_0) \Rightarrow \varkappa\subset\varkappa_n.$$

средних[2] $(C,1)$

$$\sigma_{\mathcal{X}_n}(x) = \frac{1}{|\mathcal{X}_n|}\sum_{i=0}^{n} |\Delta\mathcal{X}_i| S_{\mathcal{X}_i}(x). \tag{4}$$

Ряд (1) назовем безусловно $(C,1)$ -суммируемым п.в. на $\mathfrak{X}$, если для всякой подпоследовательности (2) обобщенной последовательности (3) сходится п.в. на $\mathfrak{X}$ последовательность

$$\{\sigma_{\mathcal{X}_n}(x)\}_{n\in\mathbb{N}}. \tag{5}$$

Пусть $A=\mathbb{N}$, а $\mathcal{X}_n=\{0,1,\dots,n\}$. Тогда преобразование (4) определяет арифметические средние обыкновенных ортонормированных рядов

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i f_i(x). \tag{6}$$

В случае $A=\mathbb{N}^2$, мы получим арифметические средние частичных сумм

$$S_{\mathcal{X}_n}(x)=\sum_{(i,k)\in\mathcal{X}_n} c_{ik} f_{ik}(x)$$

двойных ортонормированных рядов

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} f_{ik}(x). \tag{7}$$

Для обыкновенных ортонормированных рядов (6) В.Орлич в 1927 г. опубликовал следующий фундаментальный результат (см. [1], стр. 215)

Теорема А. При условии

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 < \infty$$

ортонормированный ряд (4), п.в. безусловно суммируемый регулярным матричным методом $B=\|b_{ni}\|$, п.в. безусловно сходится.

Теория безусловной суммируемости рядов (6) развита в работах П.Ульянова (см.[5-8]). В то же время вопросы суммируемости двойных ортонормированных рядов (7) исследованы мало. Нашей целью является обобщение упомянутой выше теоремы В.Орлича на арифметические средние (4) рядов (1).

Пусть для коэффициентов c_α ряда (1) выполнено условие

$$\sum_{\alpha\in A} c_\alpha^2 < \infty. \tag{8}$$

---

[2] Мы используем обозначения

$\Delta\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_i \setminus \mathcal{X}_{i-1}$, $\mathcal{X}_{-1}=\emptyset$ (т.е. $\Delta\mathcal{X}_0=\mathcal{X}_0$), $|\mathcal{X}|$ - число элементов множества $\mathcal{X}$.

16

Обощим прежде всего на средние (4) одну теорему А.Колмогорова (см.[1], теорема 2.7.).

<u>Теорема 1.</u> При выполнении условия (8) из безусловной $(C,1)$ -суммируемости п.в. на $\mathfrak{X}$ ортонормированного ряда (1) следует п.в. на $\mathfrak{X}$ сходимость всякой подпоследовательности (2), для которой

$$|\mathfrak{X}_n| \geq q|\mathfrak{X}_{n-1}|, \tag{9}$$

где $q>1$.

<u>Доказательство.</u> Так как

$$S_{\mathfrak{X}_n}(x) - \sigma_{\mathfrak{X}_n}(x) = S_{\mathfrak{X}_n}(x) - \frac{1}{|\mathfrak{X}_n|}\sum_{i=0}^{n}|\Delta\mathfrak{X}_i|\, S_{\mathfrak{X}_i}(x) =$$

$$= \frac{1}{|\mathfrak{X}_n|}\Big(|\mathfrak{X}_n|\sum_{i=0}^{n}\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha \varphi_\alpha(x) - \sum_{j=0}^{n}|\Delta\mathfrak{X}_j|\sum_{i=0}^{j}\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha\varphi_\alpha(x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{|\mathfrak{X}_n|}\Big(|\mathfrak{X}_n|\sum_{i=0}^{n}\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha\varphi_\alpha(x) - \sum_{i=0}^{n}|\mathfrak{X}_n\setminus\mathfrak{X}_{i-1}|\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha\varphi_\alpha(x)\Big) =$$

$$= \frac{1}{|\mathfrak{X}_n|}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha\varphi_\alpha(x),$$

то ввиду ортонормированности системы $\{\varphi_\alpha(x)\}_A$, учитывая условие (9), имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\mathfrak{X}}[S_{\mathfrak{X}_n}(x) - \sigma_{\mathfrak{X}_n}(x)]^2\mu(dx) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\mathfrak{X}_n|^2}\sum_{i=1}^{\infty}|\mathfrak{X}_{i-1}|^2\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty}|\mathfrak{X}_i|^2\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha^2\sum_{n\geq i}\frac{1}{|\mathfrak{X}_n|^2} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q^{2n}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{\alpha\in\Delta\mathfrak{X}_i} c_\alpha^2 < \sum_{\alpha\in A} c_\alpha^2 < \infty,$$

откуда по теореме Леви (см.[2]) следует наше утверждение.

Обобщением теоремы А на $(C,1)$ -суммируемые ряды (1) является следующая

<u>Теорема 2.</u> При выполнении условия (8) из безусловной $(C,1)$-суммируемости п.в. на $\mathfrak{X}$ обобщенного ортонормированного ряда (1) следует его безусловная сходимость п.в. на $\mathfrak{X}$.

<u>Доказательство.</u> Пусть $\{S_{\mathfrak{X}_n}(x)\}$ – некоторая подпоследовательность обобщенной последовательности (3), для которой

не выполнено условие (9). Выберем из $F(A)$ последовательность $\{T_n\}$ следующим образом:

$$T_0 = \chi_0\,;\ T_n \supset \chi_n\,,\ T_n \setminus T_{n-1} \supset \chi_n \setminus \chi_{n-1}\,,$$

$$|T_n \setminus \chi_n| \geq q\,|T_{n-1} \setminus \chi_{n-1}|\,,\ |T_n| \geq 2q\,|T_{n-1}|\,,$$

где $q > 1$. Так как последовательности $\{T_n\}$ и $\{T_n'\}$, где $T_n' = T_n \setminus \chi_n$ удовлетворяют условию (9), то из предположения и из теоремы 1 следует сходимость п.в. на X подпоследовательностей $\{S_{T_n}(x)\}$ и $\{S_{T_n'}(x)\}$. Но тогда сходится п.в. на X также и последовательность $\{S_{\chi_n}(x)\}$, так как $S_{\chi_n}(x) = S_{T_n}(x) - S_{T_n'}(x)$.

Для двойных ортонормированных рядов (5) из теоремы 2 вытекает следующее

<u>Следствие</u>. При выполнении условия

$$\sum_{i,k=0}^{\infty} c_{ik} < \infty$$

из безусловной $(C,1)$-суммируемости п.в. на X двойного ортонормированного ряда (7) следует его безусловная сходимость п.в. на X.

Литература

1. Алексич Г., Проблемы сходимости ортогональных рядов. Москва, 1963.
2. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы, общая теория. Москва, 1962.
3. Качмаж С., Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов. Москва, 1958.
4. Ламп Ю., О безусловной сходимости почти всюду обобщенных ортонормированных рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 374, 155-161.
5. Ульянов П., О безусловной сходимости и суммируемости. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1958, <u>22</u>, № 6, 811-840.
6. Ульянов П., Сходимость и суммируемость. Тр. Моск. матем. о-ва, 1960, <u>9</u>, 373-400.
7. Ульянов П., Безусловная суммируемость. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, <u>23</u>, № 5, 781-808.

Поступило 04 12 1979

Über die Unbedingte (C,1)-Summierbarkeit der verallgemeinerten Orthogonalreihen fast überall

J. Lamp

Zusammenfassung

Es sei A eine unendliche Menge, (X,Σ,μ) ein Raum mit endlichem Maß, $\{\varphi_\alpha\}_A$ ein orthonormiertes System von Funktionalen des Raums $L^2(X,\Sigma,\mu)$ und $F(A)$ eine durch das Enthaltsein geordnete Menge aller endlichen Untermengen K der Menge A. Man sagt, daß die verallgemeinerte Orthogonalreihe (1) unbedingt fast überall in X (C,1)-summierbar ist, wenn fast überall in X die Folge (5) bei jeder abzählbaren Unterfolge (2) konvergiert.

Im vorliegenden Artikel wird ein Resultat von W.Orlicz (Theorem A) für fast überall (C,1)-Summierbarkeit der Reihen (1) verallgemeinert.

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ РАВНОСУММИРУЕМОСТИ РЯДОВ

Н. Веске

В данной статье мы рассмотрим некоторые приложения к тригонометрическим рядам теории равносуммируемости, которая изложена автором в статьях [2, 3, 4]. Нас интересует равносуммируемость формального произведения рядов и последовательности частичных сумм одного из умножаемых рядов. При этом мы будем пользоваться такими свойствами умножаемых рядов, которыми при исследовании суммируемости ряда-произведения до сих пор не пользовались. Такими свойствами являются, например, сходимость со скоростью, ограниченность со скоростью, сходимость ряда $\sum n|v_n|$.

В § 1 мы докажем, что ряды

$$\frac{1}{2} + \sum \cos nx \qquad x \neq 2k\pi, \tag{1}$$

$$\sum \sin nx \qquad x \neq k\pi \tag{2}$$

и

$$\frac{1}{2} + \sum (\cos nx + \sin nx) \qquad x \neq 2k\pi \tag{3}$$

($k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots$) являются $(C,1)$-ограниченными со скоростью $\lambda = (n+1)$.

В § 2 мы применим равносуммируемость к рядам $\sum u_n v_n$ и к тригонометрическим рядам.

§ 1. $(C,1)^{\lambda}$-ограниченность рядов (1), (2) и (3)

Пусть (W_n) - последовательность частичных сумм ряда-произведения Коши $\sum w_n$ рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$, V -некоторое число. Частичные суммы рядов $\sum u_n$ и $\sum v_n$ обозначим через U_n и V_n. Ранее автором доказана

<u>Теорема А</u>. ([2], теорема 2). Последовательность

$$(W_n - VU_n)$$

является (C,β)-суммируемой к нулю при всякой (C,α)-суммируемой к нулю последовательности

$$(u_n), \tag{4}$$

если выполнено одно из следующих условий:

а) последовательность

$$(v_n) \tag{5}$$

является $(C,\beta-\alpha)$-ограниченной со скоростью $((n+1)^{\beta-\alpha})$ значением v при $\beta \geq \alpha+1$;

б) $\sum |v_n - v| < \infty$ при $\beta \geq \alpha+1$;

в) $\sum\limits_{k=0}^{n} (v_k - v) = O(1)$ при $\beta = \alpha+1$.

Напомним определение $(C,1)^{\lambda}$-ограниченности: последовательность (5) называется $(C,1)^{\lambda}$-ограниченной значением v, если

$$\lambda_n \left[(n+1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} v_k - v\right] = O(1),$$

где $\lambda = (\lambda_n)$ - монотонно возрастающая последовательность положительных чисел.

Тригонометрические ряды (1), (2) и (3) расходятся при любом x и (C,γ)-суммируются при любом $\gamma > 0$.

Для ряда (1) частичная сумма

$$S_n^0 = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n} \cos kx = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}};$$

откуда

$$S_n^1 = \sum_{k=0}^{n} S_k^0 = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2,$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S_n^1 / A_n^1 = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 2k\pi$$

т. е. ряд (1) является $(C,1)$-суммируемым к нулю.

Для ряда (2) имеем

$$S_n^0 = \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

откуда

$$S_n^1 = \frac{n+1}{2} \cot \frac{x}{2} - \frac{\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} S_n^1 / A_n^1 = \frac{1}{2}\cot\frac{x}{2} \quad \text{при} \quad x \neq 2k\pi.$$

Ряд (3) ($C, 1$)-суммируется и его сумма равна

$$\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} \qquad \text{при} \qquad x \neq 2k\pi.$$

Убедимся, что для этих рядов выполняется условие а). Для ряда (1) имеем

$$\frac{V_n^1}{n+1} - V = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2,$$

следовательно,

$$(n+1)\left[\frac{V_n^1}{n+1} - V\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2$$

ограничено значением ($2\sin^2\frac{x}{2}$)$^{-1}$ при всех фиксированных x ($x \neq 2k\pi$).

Для ряда (2) имеем

$$\frac{V_n^1}{n+1} - V = -\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$$

и следовательно,

$$(n+1)\left|\frac{V_n^1}{n+1} - V\right| = \frac{|\sin(n+1)x|}{4\sin^2\frac{x}{2}}$$

ограничено значением $\left(4\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-1}$ при всех фиксированных x, так как $x \neq 2k\pi$.

Для ряда (3) имеем

$$\frac{V_n^1}{n+1} - V = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right]^2 - \frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{\sin(n+1)x}{n+1}$$

и следовательно,

$$(n+1)\left|\frac{V_n^1}{n+1} - V\right| = \left|\frac{\sin^2(n+1)\frac{x}{2}}{2\sin^2\frac{x}{2}} - \frac{\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right|$$

ограничено значением $3(4\sin^2\frac{x}{2})^{-1}$ при всех фиксированных x, так как $x \neq 2k\pi$.

Итак, мы показали, что справедлива следующая

<u>Лемма 1.1</u>. Ряды (1), (2) и (3) являются ($C, 1$)-ограниченными со скоростью $\lambda = (n+1)$ равномерно относительно x на каждом интервале $0 < \varepsilon \leq x \leq 2\pi - \varepsilon$.

§ 2. Применение теоремы А.

В этом параграфе применим теорему А к формальному произведению рядов. Рассмотрим, какие ряды удовлетворяют условиям, которые теорема А накладывает на ряд $\sum u_n$, т. е. на последовательности (4). По теореме А последовательность (4) должна быть (C, α)-суммируемой к нулю, если $\beta \geq \alpha+1$. Так как один ряд у нас уже суммируется методом ($C, 1$), то $\beta - \alpha = 1$ и $\beta = \alpha + 1$. Мы получили, что последовательность (4) должна быть ($C, \beta - 1$)-суммируемой к нулю.

Для сходящихся знакочередующихся рядов $\sum u_n$ последовательность (4) стремится к нулю. Тогда по теореме А ряд-произведение ($C, 1$)-суммируется к $\mathcal{V}\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ - сумма знакочередующегося ряда. Нам удалось отказаться от абсолютной сходимости, так как по теореме 167 ([5], стр. 286) для суммируемости методом (C, r) ряда-произведения требуется абсолютная сходимость одного ряда и (C, r)-суммируемость второго ряда, где $r > 0$.

Для знакочередующего ряда

$$\sum (-1)^n A_n^{\alpha} \tag{6}$$

частичные суммы

$$S_n^{\alpha} = \begin{cases} A_k^{\alpha} & \text{при} \quad n = 2k \\ 0 & \text{при} \quad n = 2k+1. \end{cases}$$

Ряд (6) ограничен методом (C, α) и последовательность $\{(-1)^n A_n^{\alpha}\}$ является ($C, \alpha + 1$)-суммируемой к нулю, так как

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{\alpha} / A_n^{\alpha+1} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1} S_n^{\alpha} / A_n^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} (n+1)^{-1} \cdot O(1) = 0.$$

Ряд (6) является тогда ($C, \alpha+1$)-суммируемым к значению $2^{-\alpha-1}$. Ряд-произведение, образованное по правилу Коши из ряда (6) и ($C, 1$)$^{\lambda}$-ограниченного ряда, где $\lambda=(n+1)$, является на основании теоремы А ($C, \alpha+2$)-суммируемым к значению $2^{-\alpha-1} N$.

Остановимся на условиях (C, α)-суммируемости рядов типа

$$\sum u_k v_k. \tag{7}$$

(C, α)-суммы этого ряда при $\alpha>2$ и $u_k \neq 1$, $(k=0;1;2;\ldots)$ имеют вид

$$S_n^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha} u_k v_k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} u_k v_k \sum_{\ell=0}^{n-k} A_\ell^2 A_{n-k-\ell}^{\alpha-3} =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} A_\ell^2 \sum_{k=0}^{n-\ell} A_{n-\ell-k}^{\alpha-3} u_k \sum_{\mu=0}^{k} \bar{\Delta} v_\mu =$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} A_\ell^2 \sum_{\mu=0}^{n-\ell} \bar{\Delta} v_\mu \sum_{k=\mu}^{n-\ell} A_{n-\ell-k}^{\alpha-3} u_k .$$

Но так как метод (C, α) регулярно транслятивен при всех $\alpha \neq -1; -2; \ldots$, то (C, α)-суммы ряда (7) приобретают вид

$$S_n^{\alpha} = \sum_{\ell=0}^{n} A_\ell^2 \sum_{\mu=0}^{n-\ell} \bar{\Delta} v_\mu \, U_{n-\ell-\mu}^{\prime \alpha-2},$$

где $U_{n-\ell-\mu}^{\prime\alpha-2}$ являются ($C, \alpha-2$)-суммами последовательности (u_n). Но тогда

$$S_n^{\alpha} = \sum_{\mu=0}^{n} U_\mu^{\prime\alpha-2} \sum_{\ell=0}^{n-\mu} A_\ell^2 \bar{\Delta} v_{n-\mu-\ell} =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{n} U_\mu^{\prime\alpha-2} V_{n-\mu}^{1} .$$

В случае ($C, 2$)-суммируемости рядов типа (7) ($C, 2$)-суммы приобретают вид

$$\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{1} \sum_{\ell=0}^{k} u_\ell v_\ell =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{1} \sum_{\ell=0}^{k} v_{k-\ell} \sum_{\mu=0}^{k-\ell} \bar{\Delta} u_\mu =$$

17

$$=\sum_{\ell=0}^{n}\sum_{\mu=0}^{n-\ell} v^{1}_{n-\ell-\mu}\,\Delta u_{\mu}=$$

$$=\sum_{\mu=0}^{n} v^{1}_{\mu}\,u_{n-\mu}.$$

Чтобы найти необходимые и достаточные условия для (C,α)--суммируемости ряда (7), сравним его с (C,α)-суммируемой последовательностью

$$v\,(u_n)\,. \tag{8}$$

(C,α)-суммы этой последовательности при $\alpha>2$ приобретают вид

$$S^{\prime\alpha}_{n}=v\sum_{k=0}^{n}A^{\alpha-1}_{n-k}\,u_k=v\sum_{\mu=0}^{n}A^{1}_{\mu}\,U^{\prime\alpha-2}_{n-\mu}\,,$$

а при $\alpha=2$

$$S^{\prime 2}_{n}=v\sum_{\mu=0}^{n}A^{1}_{n-\mu}\,u_{\mu}.$$

При помощи равносуммируемости мы получим следующие результаты.

Теорема 2.1. Для того, чтобы ряд (7) и последовательность (8) были равносуммируемыми методом (C,α) при $\alpha\geqslant 2$ для любого ряда $\sum v_n$, $(C,1)$-суммируемого к значению v, достаточно, чтобы последовательность (4) была $(C,\alpha-2)$-ограничена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ряд (7) и последовательность (8) являются равносуммируемыми методом (C,α) тогда и только тогда, когда разность (C,α)-средних ряда (7) и (C,α)-средних последовательности (8) стремится к нулю. Эта разность имеет при $\alpha>2$ вид

$$\left(S^{\alpha}_{n}-S^{\prime\alpha}_{n}\right)/A^{\alpha}_{n}=\left(A^{\alpha}_{n}\right)^{-1}\sum_{\mu=0}^{n}U^{\prime\alpha-2}_{n-\mu}A^{1}_{\mu}\left(v^{1}_{\mu}/A^{1}_{\mu}-v\right). \tag{9}$$

По лемме 1 ([2], стр. 120) необходимые и достаточные условия для того, чтобы ряд (9) сходился к нулю для любого ряда $\sum v_n$, $(C,1)$-суммируемого к значению v, являются условия

$$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} (A_n^{\alpha})^{-1} U'^{\alpha-2}_{n-\mu} = 0,$$

$$2^\circ \quad (A_n^{\alpha})^{-1} \sum_{\mu=0}^{n} \left| A_\mu^1 U'^{\alpha-2}_{n-\mu} \right| = O(1).$$

Оба условия выполнены, если последовательность (4) является ($C, \alpha-2$)-ограниченной.

Разность ($C, 2$)-средних имеет вид

$$(A_n^2)^{-1} \sum_{\mu=0}^{n} A_\mu^1 \left[V_\mu^1 / A_\mu^1 - V \right] u_{n-\mu} .$$

Она сходится к нулю для всякого ряда $\sum v_n$, ($C, 1$)-суммируемого к значению V ,если последовательность (4) ограничена. Теорема доказана.

<u>Следствие 2.1</u>. Для того, чтобы ряд (7) был (C, α)-суммируемым при $\alpha \geqslant 2$ для любого ряда $\sum v_n$, ($C, 1$)$^\alpha$-ограниченного значением V , необходимо и достаточно выполнения условий

$$
\begin{aligned}
&1^\circ \lim_{n\to\infty} (A_n^{\alpha})^{-1} U'^{\alpha-2}_{n-\mu} = U^*_\mu , \\
&2^\circ (A_n^{\alpha})^{-1} \sum_{\mu=0}^{n} \left| U'^{\alpha-2}_{n-\mu} \right| = O(1), \qquad\qquad (10) \\
&3^\circ \lim_{n\to\infty} (A_n^{\alpha})^{-1} \sum_{\mu=0}^{n} \left| U'^{\alpha-2}_{\mu} - U^*_\mu \right| = 0
\end{aligned}
$$

и достаточно, чтобы последовательность (4) была ($C, \alpha-2$)-ограниченной.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Тригонометрические ряды (1), (2) и (3) являются ($C, 1$)$^\alpha$-ограниченными значением V при $\alpha = (n+1)$. Поэтому можно применить теорему Шура ([1], стр. 22): для того, чтобы преобразование последовательности (U_n) в последовательность (U_n^1) существовало и переводило все ограниченные последовательности в сходящиеся последовательности (U_n^1) , необходимо и достаточно выполнение условий

1° существует $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = a_k$,

2^0 $\sum_n |a_{nk}| = O(1)$,

3^0 $\lim_{n\to\infty} \sum_k |a_{nk} - a_k| = 0$.

При этом

$$\lim U'_n = \sum a_k U_k .$$

В нашем случае эти условия приобретают вид (10). Они выполнены, если последовательность (4) является ($C, \alpha-2$)-ограниченной.

Остановимся на условиях ($C,1$)-суммируемости рядов типа (7). Тогда ($C,1$)-суммы имеют вид

$$\sum_{k=0}^{n} A^1_{n-k} u_k v_k = \sum_{k=0}^{n} A^1_{n-k} v_k \sum_{l=0}^{k} \bar\Delta u_l = \sum_{l=0}^{n} V^1_{n-l} \bar\Delta u_l .$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{k} \bar\Delta u_l = \sum_{l=0}^{n} A^1_{n-l} \bar\Delta u_l ,$$

то при

$$(A^1_n)^{-1} \sum_{l=0}^{n} (V^1_{n-l}/A^1_{n-l} - V) A^1_{n-l} \bar\Delta u_l$$

получим результаты, аналогичные предыдущим, а именно справедлива

Теорема 2.2. Для того, чтобы ряд (7) и последовательность (8) были равносуммируемыми методом ($C,1$) для любого ряда $\sum v_n$, ($C,1$)-суммируемого к значению V , необходимо и достаточно, чтобы

$$1^\circ \ \lim \bar\Delta u_n = 0,$$

$$2^\circ \ (A^1_n)^{-1} \sum_{l=0}^{n} A^1_{n-l} |\bar\Delta u_l| = O(1),$$

и достаточно, чтобы

$$\sum |\bar\Delta u_l| < \infty .$$

Следствие 2.2. Для того, чтобы ряд (7) был ($C,1$)-суммируемым для любого ряда $\sum v_n$, $(C,1)^{\alpha}$-ограниченного значением v, необходимо и достаточно, чтобы

$$1^\circ \lim_{n\to\infty} \bar{\Delta} u_{n-k} / A_n^1 = u_k^*,$$

$$2^\circ (A_n^1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} |\bar{\Delta} u_k| = O(1),$$

$$3^\circ \lim_{n\to\infty} (A_n^1)^{-1} \sum_{k=0}^{n} |\bar{\Delta} u_k - u_k^*| = 0$$

и достаточно, чтобы

$$\sum |\bar{\Delta} u_e| < \infty .$$

Рассмотрим формальное произведение рядов типа (7). Найдем, при каких условиях ряд-произведение является (C,β)-суммируемым, если один ряд $(C,1)^{\alpha}$-ограничен, где $\alpha=(n+1)$. Тригонометрические ряды (1), (2) и (3) удовлетворяют этим условиям. Справедлива

<u>Теорема 2.3</u>. Произведение $(C,1)^{\alpha}$-ограниченных тригонометрических рядов на ряд типа (7) является (C,β)-суммируемым, если последовательность (u_n) коэффициентов ряда (7) $(C,\beta-2)$-ограничена, выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} (A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{x=0}^{n} |U_x^{\beta-2}| = 0 \qquad (11)$$

и последовательность (v_n) ограничена.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию а) теоремы А последовательность членов второго ряда должна быть $(C,\beta-1)$-суммируемой к нулю. Найдем, при каких условиях это выполнено. Для этого преобразуем сумму

$$(A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-2} u_k v_k =$$

$$= (A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=0}^{n-\ell} A_{n-\ell-k}^{\beta-3} u_k \sum_{x=0}^{k} \bar{\Delta} v_x =$$

$$= (A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{x=0}^{n} U_x^{\beta-2} v_{n-x} = (A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{x=0}^{n} U_{n-x}^{\beta-2} v_x .$$

По теореме Шура (1 стр. 22) необходимыми и достаточными для того, чтобы мы получили при ограниченной последовательности (v_n) сходящуюся последовательность, являются условия

$$1^\circ \quad \lim_{n\to\infty} (A_n^{\beta-1})^{-1} U'^{\beta-2}_{n-\varkappa} = U'_\varkappa ,$$

$$2^\circ \quad (A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{\varkappa=0}^{n} |U'^{\beta-2}_\varkappa| = O(1),$$

$$3^\circ \quad \lim_{n\to\infty} (A_n^{\beta-1})^{-1} \sum_{\varkappa=0}^{n} |U'^{\beta-2}_\varkappa - U'_\varkappa| = 0.$$

Если последовательность коэффициентов (u_n) ряда (7) $(C,\beta-2)$-ограничена, то условия 1^0 и 2^0 выполняются и $U'_\varkappa = 0$. В таком случае последовательность членов ряда (7) $(C,\beta-1)$-суммируется к нулю, а условие 3^0 приобретает вид (11). Теорема доказана.

Литература

1. Барон С. А., Введение в теорию суммируемости рядов, Таллин, 1977.
2. Веске Н. А., Суммируемость методом Чезаро формального произведения рядов. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 118-128.
3. Веске Н. А., Суммируемость формального умножения рядов методом Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1975, 355, 196-203.
4. Веске Н. А., Суммируемость формального умножения рядов непрерывным методом Рисса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1977, 431, 104-111.
5. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.

Поступило 18 01 1980

ANWENDUNGEN DER GLEICHSUMMIERBAHKEIT DER REIHEN

N. Veske

Zusammenfassung

In der Arbeit werden die in den Artikeln [2,3] erhaltene Resultate im Fall, wenn eine von den Reihen eine trigonometrische Reihe (1), (2) oder (3) und die andere eine Reihe (7) ist, verwendet. In den Sätzen 2.1 und 2.2 gibt man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die (C,α)-Summierbarkeit der Reihe (7). Man bekommt: Satz 2.3. Das Produkt der Reihe (7) mit einer $(C,1)^{\lambda}$ -summierbaren trigonometrischen Reihe ist (C,β)-summierbar, wenn die Folge der Koeffizienten einer Reihe (7) $(C,\beta-\lambda)$-beschränkt die Bedingung (11) erfüllt und die Folge (v_n) beschränkt ist.

О МНОЖИТЕЛЯХ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю. Липпус

Таллинский политехнический институт

Пусть $\omega(t)$ - некоторый модуль непрерывности. Обозначим через B множество функций

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z|<1, \tag{1}$$

аналитических внутри единичного круга и непрерывных вплоть до границы, через H множество функций $f(z)$ аналитических внутри единичного круга и удовлетворяющих оценке

$$\overline{\lim_{\rho\to 1-}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{ix})|\,dx<\infty .$$

Если $f\in H$, то почти для всех x существует $\lim f(\rho e^{ix})= f(e^{ix})$, причем предельная функция принадлежит классу L интегрируемых 2π-периодических функций.

Пусть далее H_ω (соответственно h_ω) обозначает множество тех f из H, которое на единичной окружности имеют интегральный модуль непрерывности, удовлетворяющий оценке $\omega(f,t)_L=O(\omega(t))$ (соответственно $\omega(f,t)_L=o(\omega(t))$). Пусть еще B_F обозначает класс тех f из B, степенной ряд которых сходится равномерно в круге $|z|\le 1$, и B_{BF} класс тех f из B, частичные суммы степенного ряда которых в круге $|z|\le 1$ равномерно ограничены.

Пусть $\lambda=\{\lambda_n\}$ - некоторая последовательность комплексных чисел и

$$\Lambda_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k e^{ikt}. \tag{2}$$

Говорят, что λ принадлежит классу (H,B), если для каждой f из H ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k c_k z^k \tag{3}$$

является степенным рядом некоторой функции f_λ из B. Аналогично определяются классы (H, B_F), (H_ω, B_F), (h_ω, B_F) и т.д.

Пусть M обозначает класс последовательностей косинус-коэффициентов ограниченных функций.

В настоящей работе мы изучаем вопрос принадлежности λ к классам (H_ω, B_F), (h_ω, B_F), (H_ω, B_{BF}) и (h_ω, B_{BF}), см. теоремы 3-5.

Теоремы 3-5 являются аналогами теорем В.Р.Почуева [3] о классах (L_ω, C_F), (l_ω, C_F), (L_ω, C_{BF}), (l_ω, C_{BF}). Здесь (L_ω, C_F) (соответственно $(l_\omega C_F)$)-класс последовательностей $\lambda = \{\lambda\}$, таких, что если

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

ряд Фурье интегрируемой периодической функции f для модуля непрерывности которой справедлива оценка $\omega(f,t)_L = O(\omega(t))$, соответственно оценка $\omega(f,t)_L = o(\omega(t))$, то ряд

$$\lambda_0 \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (4)$$

сходится равномерно. Аналогично определяются классы (L_ω, C_{BF}) и (l_ω, C_{BF}), если ряд (4) имеет равномерно ограниченные частные суммы.

В указанной работе накладывалось условие, что λ является последовательностью косинус-коэффициентов ограниченной функции. В наших теоремах 3-5 будем предполагать, что λ является последовательностью класса (H, B). В теоремах 1 и 2 дается характеристика классов (H, B) и (H, B_F).

Пусть $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{nk} e^{ikx}$. Определим норму

$$\|P_n\|_F = \inf \operatorname{vrai\,sup} \left| P_n(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{nk} e^{ikx} \right|, \qquad (5)$$

где нижняя грань берется по произвольным последовательностям комплексных чисел $\{\gamma_{nk}\}$. Каратеодори и Фейер [5] показали, что существует последовательность чисел $\{\gamma^*_{nk}\}$ реализующая нижнюю грань в (5). Соответствующая ей функция

$$\Gamma P_n(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \gamma^*_{nk} e^{ikx}$$

по теореме о двойственности (см. например [2] стр. 34) принадлежит классу L^∞ ограниченных измеримых функций.

18

Будем говорить, что $\lambda \in M'$, если $\| v_n \Lambda \|_F = O(1)$, где $v_n \Lambda(x) = 2\sigma_{2n-1}\Lambda(x) - \sigma_{n-1}\Lambda(x)$ средние Валле Пуссена и $\sigma_n \Lambda(x)$ - средние Фейера последовательности (2).

Теорема 1. Для того, чтобы $\lambda \in (H, B)$, необходимо и достаточно выполнение условия $\lambda \in M'$.

Доказательство. Для того, чтобы $f_\lambda \in B$, необходимо и достаточно, чтобы средние Валле Пуссена ряда (3) $v_n f_\lambda(z)$ равномерно сходились в круге $|z| \le 1$. Так как класс H является банаховым пространством относительно нормы

$$\| f \|_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} | f(e^{ix}) | \, dx$$

с единичным шаром $S = \{ f \in H : \| f \|_L \le 1 \}$ и B относительно sup-нормы, то для применения теоремы Банаха-Штейнхауза достаточно вычислить норму оператора $L_n(f) = v_n f_\lambda$, действующего из H в B. Так как вместе с $f(z)$ в S принадлежит и функция

$$f^x(z) = f(e^{ix} z),$$

то имеем

$$v_n f_\lambda (e^{ix}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \, v_n \Lambda(x-t) \, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i(x-t)}) \, v_n \Lambda(t) \, dt,$$

и (см. Карамата [7])

$$\sup_{f \in S} \max_{|z| \le 1} | L_n(f)(z) | = \sup_{f \in S} \max_x \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(e^{i(x-t)}) v_n \Lambda(t) dt \right| =$$

$$= \max_x \sup_{f \in S} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f^x(e^{it}) \, v_n \Lambda(-t) \, dt \right| =$$

$$= \sup_{f \in S} \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \, v_n \Lambda(-t) \, dt \right|.$$

Г.М.Голузин [1] доказал, что последняя величина равна $\|v_n \Lambda\|_F$.
Теорема доказана.

Теорема 2. Для того, чтобы $\lambda \in (H, B_F)$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\|\Lambda_n\|_F = O(1).$$

Доказательство. Мы имеем

$$s_n f_\lambda(e^{ix}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\Lambda_n(x-t)dt.$$

Повторная рассуждения, приведенные в доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что нормой оператора

$$s_n f_\lambda(z) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k c_k z^k,$$

действующего из H в B, является величина

$$\sup \frac{1}{2\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(e^{it})\Lambda(-t)dt\right| = \|\Lambda_n\|_F.$$

Применяя теорему Банаха-Штейнхауза, получаем утверждение теоремы.

Для класса (L, C_F) аналогичный результат получил Г.Гёс [6].

В дальнейшем будем предполагать, что модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию $\omega(t)/t \to \infty$ при $t \to 0$.

Теорема 3. Пусть $\lambda \in M'$. Тогда условие

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\|\Lambda_n\|_F = o(1) \tag{6}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $\lambda \in (h_\omega, B_F)$.

Теорема 4. Пусть $\lambda \in M'$. Тогда условие

$$\omega\left(\frac{1}{n}\right)\|\Lambda_n\|_F = O(1) \tag{7}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы $\lambda \in (h_\omega, B_F)$.

Теорема 5. Пусть $\lambda \in M'$. Тогда условие (7) необходимо и достаточно для того, чтобы $\lambda \in (H_\omega, B_{\beta F})$или $\lambda \in (h_\omega, B_{\beta F})$.

Доказательство этих теорем проведем одновременно.

Пусть $f \in H_\omega$ (соответственно h_ω). В силу условия $\lambda \in M'$ имеем, что $f_\lambda \in B$ и, следовательно,

$$\|f_\lambda - v_n f_\lambda\|_C = \max_{|z|\le 1} |f_\lambda(z) - v_n f_\lambda(z) = o(1).$$

Остается оценить разность

$$v_n f_\lambda(e^{iy}) - s_n f_\lambda(e^{iy}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{ix})\{v_n\Lambda(y-x) - \Lambda_n(y-x)\}dx.$$

Так как $v_n\Lambda(x) - \Lambda_n(x)$ не содержит гармоник до порядка n, а $f(e^{ix})$ и $v_n f(e^{ix})$ не содержат отрицательных степеней e^{ix}, то имеем:

$$\| v_n f_\lambda - s_n f_\lambda \|_C = \frac{1}{2\pi} \max_{y} \left| \int_0^{2\pi} \{ f(e^{ix}) - v_m f(e^{ix}) \} \{ v_n \Lambda(y-x) - \Lambda_n(y-x) \} dx \right| = \frac{1}{2\pi} \max_y \left| \int_0^{2\pi} \{ f(e^{ix}) - v_m f(e^{ix}) \} \{ v_n \Lambda(y-x) + \right.$$

$$\left. + \Gamma v_n \Lambda(x-y) - \Lambda_n(y-x) - \Gamma \Lambda_n(x-y) \} dx \right| \le$$

$$\le \| f - v_m f \|_L \{ \| v_n \Lambda \|_F + \| \Lambda_n \|_F \} = O(E_m(f)_L \{ \| v_n \Lambda \|_F + \| \Lambda_n \|_F \}),$$

где $m = [n/2]$. Поскольку $\lambda \in M'$, то $\| v_n \Lambda \|_F = O(1)$, а из $f \in H_\omega$ (соответственно h_ω), получаем $E_m(f)_L = O(\omega(1/n))$ (соответственно $o(\omega(1/n))$). Поэтому в силу условия (6) при $f \in H_\omega$, или в силу условия (7) при $f \in h_\omega$ имеем, что рассматриваемая разность стремится к нулю, или в силу условия (7) при $f \in H_\omega$ – ограничена. Достаточность доказана.

Для доказательства необходимость условий (6) и (7) покажем, что если условие (6) (соответственно и (7)) не выполняется, то существует функция $f \in H_\omega$ (соответственно h_ω) такая, что для нее ряд (3) расходится, причем при $f \in h_\omega$ расходимость неограниченная. При этом пользуемся методикой из статьи [4].

Пусть существует последовательность чисел $\{n_k\}$ такая, что

$$\omega\left(\frac{1}{n_k}\right) \| \Lambda_{n_k} \|_F \ge \varepsilon k^{2\alpha},$$

где $\alpha = 0$, если не выполняется условие (6), и $\alpha = 1$, если не выполняется условие (7). Можно считать, что последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет еще условиям

$$N_{k+1} \ge 5 N_k + 2 \qquad \text{где} \quad N_k = \left[\frac{n_k}{2} \right] + 1,$$
$$\omega(1/n_{k+1}) \le \frac{1}{2} \omega(1/n_k), \tag{8}$$

$$n_{k+1}\,\omega(1/n_{k+1}) \geq (k+1)^{\alpha} \sum_{\nu=1}^{k} \nu^{-\alpha} n_{\nu}\,\omega(1/n_{\nu}). \tag{9}$$

Функцию f построим в виде ряда

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\omega(1/n_k) f_k(z), \tag{10}$$

где
$$f_k(e^{ix}) = v_{N_k}(x)\exp(i(3N_k-1)x),$$

$v_n(x) = 2K_{2n-1}(x) - K_{n-1}(x)$ ядро Валле Пуссена и $K_n(x)$ - ядро Фейера. Определенные таким образом функции $f_k(z)$ являются полиномами степени $5N_k-1$ и не содержат степеней до N_k-1. По выбору чисел $\{n_k\}$ каждая степень z содержится в сумме (10) не более одного раза. Так как

$$\|f_k\|_L \leq 3, \tag{11}$$

то по теореме Леви из (8) получаем, что $f \in H$.

Оценим интегральный модуль непрерывности функции f. Пусть $1/n_{k+1} \leq h < 1/n_k$. Обозначим $\varphi(x)=f(e^{ix})$ и $\varphi_k(x) = k^{-\alpha}\omega(1/n_k) f_k(e^{ix})$. Оценим разность $\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_1$ следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(x+h)-\varphi(x)|dx \leq \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_j(x+h)-\varphi_j(x)|dx + 2\sum_{j=k+1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_j(x)|dx \tag{12}$$

Так как $\varphi_j(x)$ полиномы степени $5N_j-1$, то в силу неравенства Бернштейна и (11) имеем[1]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi_j(x+h)-\varphi_j(x)|dx \leq j^{-\alpha}C_1 n_j(1/n_j)\,h.$$

Вторую сумму в (12) оценим с помощью (11). Получаем

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_L \leq C_1 h\sum_{j=1}^{k} j^{-\alpha} n_j\omega(1/n_j) + 6\sum_{j=k+1}^{\infty} j^{-\alpha}\omega(1/n_j).$$

Отсюда с помощью (8) и (9) находим

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_L \leq C_2 k^{-\alpha} h\, n_k\omega(1/n_k) + C_3(k+1)^{-\alpha}\omega(1/n_{k+1}).$$

В силу свойств модуля непрерывности имеем

$$n_k\omega(1/n_k) \leq 2\omega(h)/h, \quad \text{и} \quad \omega(1/n_{k+1}) \leq \omega(h).$$

Следовательно:

$$\|\varphi(x+h)-\varphi(x)\|_L \leq C_4 k^{-\alpha}\omega(h),$$

т.е. $f\in H_{\omega}$, если $\alpha = 0$, и $f \in h_{\omega}$, если $\alpha=1$.

Оценим теперь разность

---

[1] Здесь $C_1, C_2, \ldots$ обозначают абсолютные положительные постоянные.

$$\max_y |v_{n_k} f_\lambda(e^{iy}) - s_{n_k} f(e^{iy})| = \max_y \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \{ v_{n_k} \Lambda(y-x) - \right.$$

$$\left. - \Lambda_{n_k}(y-x) \} dx \right| = \max_y \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} k^{-\alpha} \omega(1/n_k) f_k(e^{ix}) \{ v_{n_k} \Lambda(y-x) - \right.$$

$$\left. - \Lambda_{n_k}(y-x) \} dx \right| = k^{-\alpha} \omega(1/n_k) \max_y | v_{n_k} \Lambda(y) - \Lambda_{n_k}(y) | =$$

$$= k^{-\alpha} \omega(1/n_k) \max_y | \Lambda_{n_k}(-y) + \Gamma v_{n_k} \Lambda(y) - v_{n_k} \Lambda(-y) - \Gamma v_{n_k} \Lambda(y) | \geq$$

$$\geq k^{-\alpha} \omega(1/n_k) \{ \| \Lambda_{n_k} \|_F - \| v_{n_k} \Lambda \|_F \} \geq \varepsilon k^{\alpha} - o(1).$$

Таким образом, ряд (3) расходится, причем при $f \in h_\omega$ расходимость неограниченная. Теоремы доказаны.

Автор глубоко признателен С.А.Теляковскому за постановку вопроса и постоянное внимание к работе.

Литература

1. Голузин Г.М., О задаче Каратеодори-Фейера и об одной аналогичной задаче. Мат. сб.,1946,18(60),№ 2,213-226.
2. Корнейчук Н.П., Экстремальные задачи теории приближения. Москва, 1976.
3. Почуев В.Р., О множителях равномерной сходимости и множителях равномерной ограниченности частных сумм рядов Фурье. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1977, № 1(176),74-81.
4. Теляковский С.А., О множителях равномерной сходимости рядов Фурье функций с заданным модулем непрерывности. Мат. заметки,1971,10,№ 1,33-40.
5. Carathèodory, C. ed Fejér, L., Rend. Circ. mat. Palermo, 1911, 32, 218-239.
6. Goes, G., Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen I, II. Stud. math., 1958, 17, N°3, 299-311.
7. Karamata, J., Suite de fonctionelles linéaires et facteurs de convergence des séries de Fourier. J. math. pures et appl., 1956, 35, N°1, 87-95.

Поступило 14 02 1981

On multipliers of uniform convergence of some classes of analytic functions

J.Lippus

Summary

In the present note under some restrictions necessary and sufficient conditions are found for a sequence of complex numbers $\lambda = \{\lambda_n\}$ to transform the power series (1) of a function, analytic inside the unit circle, integrable on the unit and having there a given integral modulus of continuity, into a uniformly convergent power series (3).

ОПЕРАТОРЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПРЕДЕЛАМИ

А.Монаков-Рогозкин

Таллинский педагогический институт

Для класса функций $f: X \to \mathbb{R}$, имеющих конечный предел в любой точке топологического пространства X, соотношение

$$L(f)(z) = \lim_{x \to z} f(x), \quad z \in X,$$

определяет оператор L "перехода к пределу", действующий, как показано в первом разделе статьи, в пространство $C(X)$ непрерывных функций на X. Во втором разделе дается аксиоматическое описание оператора перехода к пределу, а именно, показывается, что для всякого оператора L, удовлетворяющего некоторым условиям, существует слабейшая топология на множестве X, относительно которой этот оператор является оператором указанного выше типа. В заключительном разделе приводятся без доказательства некоторые дальнейшие результаты, в частности, показывается, что рассмотренная в работе ситуация обобщает в топологических терминах известные конструкции теории лифтинга (см. [2] - [4]).

Если τ есть топология на множестве X, то соответствующее топологическое пространство обозначается через (X, τ). Через χ_A обозначается характеристическая функция множества $A \subset X$; мы полагаем также $\mathbb{O} = \chi_\emptyset$ и $\mathbb{1} = \chi_X$.

§1. Непрерывность предельной функции и оператор перехода к пределу

Пусть (X, τ) и (Y, η) - топологические пространства. Поскольку предел отображения $f: X \to Y$ в точке $a \in X$ определен лишь в том случае, когда a является точкой сгущения множества X, то ниже мы будем всюду предполагать (или доказывать), что рассматриваемые топологические пространства не имеют изолированных точек, т.е. плотны в себе.

Теорема 1. Если (X,τ) - T_1-пространство, а (Y,η) - хаусдорфово регулярное топологическое пространство и отображение $f: X \to Y$ имеет предел в любой точке пространства X, то равенство

$$g(z) = \lim_{x \to z} f(x), \quad z \in X, \tag{1}$$

определяет непрерывное отображение $g: X \to Y$.

Доказательство. Возьмем произвольное $z_0 \in X$ и пусть

$$\lim_{x \to z_0} f(x) = g(z_0) = y_0 \in Y.$$

Для любой окрестности $\mathcal{U}$ точки y_0 подберем, в силу регулярности пространства Y, замкнутую окрестность $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ точки y_0, а по окрестности $\mathcal{U}'$ - окрестность $V \in \tau$ точки z_0 таким образом, чтобы $f(x) \in \mathcal{U}'$ для всех $x \in V$, $x \neq z_0$. Пусть теперь $z \in V$ и $z \neq z_0$. Так как X есть T_1-пространство (без изолированных точек), то существует такая окрестность W точки z, что $W \subset V$ и $z_0 \notin W$. Для всех $x \in W$ имеем $f(x) \in \mathcal{U}'$. Так как $g(z) = \lim_{x \to z} f(x)$, то любая окрестность числа $g(z)$ должна содержать числа вида $f(x)$, где $x \in W$, а потому эта окрестность пересекается с $\mathcal{U}'$. Значит, $g(z)$ - точка прикосновения для $\mathcal{U}'$, откуда $g(z) \in cl\,\mathcal{U}' = \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Таким образом, для любой окрестности $\mathcal{U}$ точки y_0 мы нашли такую окрестность V точки z_0, что $g(z) \in \mathcal{U}$ для всех $z \in V$, тем самым, непрерывность функции g в произвольно выбранной точке $z_0 \in X$ доказана.

В случае, когда $(Y,\eta) = \mathbb{R}_1$, равенство (1) определяет функцию $g: X \to \mathbb{R}$, которую мы будем называть предельной функцией для функции f. Таким образом, теорема 1 утверждает, что предельная функция всегда непрерывна, т.е. принадлежит классу $C(X,\tau)$ непрерывных функций на X, если (X,τ) есть T_1-пространство. Обозначим через $\mathcal{E}_\tau = \mathcal{E}_\tau(X)$ совокупность всех функций $f: X \to \mathbb{R}$, имеющих конечный предел в любой точке пространства X, и положим для $f \in \mathcal{E}_\tau$ и $z \in X$

$$L_\tau(f)(z) = \lim_{x \to z} f(x). \tag{2}$$

Это равенство определяет оператор $L_\tau: \mathcal{E}_\tau \to C(X,\tau)$, который мы будем называть оператором перехода к пределу. Свойства класса

$\mathcal{E}_\tau$ и оператора L_τ вполне ясны и вытекают из соответствующих свойств предела. В следующем разделе будут выделены некоторые важнейшие свойства (A1 - A6), играющие роль характеристических.

§2. Восстановление топологии по оператору перехода к пределу

Пусть X - непустое множество, $\mathcal{A}$ - подмножество пространства $\mathcal{F}(X)$ всех вещественных функций на X и $L:\mathcal{A}\to\mathcal{F}(X)$ - некоторый оператор. Будем предполагать, что пара $(\mathcal{A}, L)$ обладает следующими свойствами:

A1. Множество $\mathcal{A}$ есть векторная подрешетка в $\mathcal{F}(X)$;

A2. Оператор L есть векторно-решеточный гомоморфизм;

A3. $\mathbb{1}\in\mathcal{A}$;

A4. Если $f, h\in\mathcal{A}$, $g\in\mathcal{F}(X)$, $f\leq g\leq h$ и $L(f)=L(h)$, то $g\in\mathcal{A}$;

A5. Оператор L является проектором, т.е. $L:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ и $L(L(f))=L(f)$ для всех $f\in\mathcal{A}$;

A6. Для любых $f\in\mathcal{A}$, $x\in X$ и $\varepsilon>0$ существует такое $y\in X$, что $x\neq y$ и $|f(y)-L(f)(x)|<\varepsilon$.

Приведенные условия не являются очень обременительными. Им удовлетворяет рассмотренный в предыдущем разделе оператор L_τ, заданный на классе $\mathcal{E}_\tau$. Нашей целью является показать, что если пара $(\mathcal{A}, L)$ обладает свойствами A1 - A6, то существуют топологии на множестве X, относительно которых L является оператором перехода к пределу на функциональном классе $\mathcal{A}$. Другими словами, существуют топологии τ на X, обладающие следующими двумя свойствами:

C1. Всякая функция $f\in\mathcal{A}$ имеет конечный предел в любой точке пространства (X,τ);

C2. Для любых $f\in\mathcal{A}$ и $z\in X$ выполняется соотношение

$$L(f)(z)=\lim_{x\to z} f(x), \qquad (3)$$

где предел понимается относительно топологии τ.

Ниже мы построим одну конкретную топологию τ_* и покажем, что она является слабейшей среди всех топологий на X, обладающих свойствами C1 и C2. Однако предварительно мы рассмотрим некоторые вспомогательные объекты и выведем некоторые следствия из условий А1 – А6. В силу А1 и А2, имеем $\mathbb{O}\in\mathcal{A}$ и $L(\mathbb{O})=\mathbb{O}$. Из А2 и А4 вытекает следующее

Предложение 1. Если $f,h\in\mathcal{A}$, $g\in\mathcal{F}(X)$, $f\leq g\leq h$ и $L(f)=L(h)$, то $L(g)=L(f)=L(h)$.

Положим для $f\in\mathcal{A}$ и $\varepsilon>0$

$$\mathcal{N}(f,\varepsilon)=\{x\mid |f(x)-L(f)(x)|\geqslant\varepsilon\}$$

и обозначим через $\mathcal{N}=\mathcal{N}(\mathcal{A},L)$ систему всех множеств $\mathcal{N}(f,\varepsilon)$.

Лемма 1. Если $N\in\mathcal{N}$ и $M\subset N$, то $M\in\mathcal{N}$.

Доказательство. Если $M=\emptyset$, то $M\in\mathcal{N}$ в силу того, что $\emptyset=\mathcal{N}(L(f),\varepsilon)$ для любых $f\in\mathcal{A}$ и $\varepsilon>0$. Предположим теперь, что $M\neq\emptyset$ и $M\subset N\in\mathcal{N}$. Тогда $N=\mathcal{N}(f,\varepsilon)$ для некоторых $f\in\mathcal{A}$ и $\varepsilon>0$. Нам нужно показать, что $M=\mathcal{N}(g,\delta)$ для некоторых $g\in\mathcal{A}$ и $\delta>0$. Рассмотрим вспомогательные функции $f_*(x)=\min\{f(x);L(f)(x)\}$ и $f^*(x)=\max\{f(x);L(f)(x)\}$. Тогда $f_*,f^*\in\mathcal{A}$ и для всех $x\in M$ имеем $f_*(x)<f^*(x)$, при этом $f^*(x)-f_*(x)=|f(x)-L(f)(x)|\geqslant\varepsilon$. Для $x\in M$ положим $\alpha(x)=f_*(x)+\varepsilon/2$, тогда $f_*(x)<\alpha(x)<f^*(x)$. Определим новую функцию $g\in\mathcal{F}(X)$, полагая $g(x)=\alpha(x)\cdot\chi_M(x)+L(f)(x)\cdot\chi_{X\setminus M}(x)$. Ясно, что $f_*\leq g\leq f^*$. Имеем $L(f_*)=L(\frac{1}{2}(f+L(f)-|f-L(f)|))=L(f)$ и аналогично $L(f^*)=L(f)$, откуда $g\in\mathcal{A}$ и $L(g)=L(f)$. Таким образом, мы получаем, что $g(x)=\alpha(x)\cdot\chi_M(x)+L(g)(x)\cdot\chi_{X\setminus M}(x)$. Очевидно, что $M=\{x\mid g(x)\neq L(g)(x)\}$, более того, как нетрудно показать, $M=\mathcal{N}(g,\varepsilon/2)$, что и требовалось.

Лемма 2. Если $N\in\mathcal{N}$, то существуют такие $f\in\mathcal{A}$ и $\varepsilon>0$, что $N=\{x\mid |f(x)-L(f)(x)|=\varepsilon\}$.

Доказательство. Имеем $N=\mathcal{N}(g,\delta)$ для некоторых $g\in\mathcal{A}$ и $\delta>0$, т.е. $N=\{x\mid |g(x)-L(g)(x)|\geqslant\delta\}$. Обозначим $\varepsilon=\delta/2$ и положим для $x\in N$

$$\begin{cases} L(g)(x)+\varepsilon, & \text{если } L(g)(x)<g(x),\\ L(g)(x)-\varepsilon, & \text{если } L(g)(x)>g(x).\end{cases}$$

Тогда $\min\{g(x);L(g)(x)\}<\alpha(x)<\max\{g(x);L(g)(x)\}$ при всех $x\in N$. Аналогично доказательству леммы 1 мы получаем, что функция $f(x)=\alpha(x)\cdot\chi_N(x)+L(g)(x)\cdot\chi_{X\setminus N}(x)$ принадлежит $\mathcal{A}$ и $L(f)=L(g)$. Ясно также, что $\{x\mid f(x)\neq L(f)(x)\}=\{x\mid |f(x)-L(f)(x)|=\varepsilon\}=N$, что и требовалось.

Лемма 3. Если $N\in\mathcal{N}$, то существуют такие $h\in\mathcal{A}$ и $\varepsilon>0$, что $L(h)=\mathbb{O}$ и $N=\{x\mid h(x)\neq 0\}=\{x\mid |h(x)|=\varepsilon\}$.

Для доказательства достаточно положить $h=f-L(f)$, где функция f такова, как в доказательстве леммы 2.

Предложение 2. Если $N\in\mathcal{N}$, то $\chi_N\in\mathcal{A}$ и $L(\chi_N)=\mathbb{O}$.

Доказательство. Пусть h и ε таковы, как в лемме 3. Положим $g=|h|\in\mathcal{A}$. Тогда $g=\varepsilon\cdot\chi_N$, откуда $\chi_N\in\mathcal{A}$. Так как $L(g)=\mathbb{O}$, то $L(\chi_N)=\mathbb{O}$.

Лемма 4. Если $N,M\in\mathcal{N}$, то $N\cup M\in\mathcal{N}$.

Доказательство. По предложению 2, имеем $\chi_N\in\mathcal{A}$, $\chi_M\in\mathcal{A}$ и $L(\chi_N)=L(\chi_M)=\mathbb{O}$. Положим $h=\chi_N\vee\chi_M\in\mathcal{A}$, тогда $h=\chi_{N\cup M}$, кроме того, $L(h)=L(\chi_N)\vee L(\chi_M)=\mathbb{O}$. Имеем $M\cup N=\{x\mid h(x)\geqslant 1/2\}=\{x\mid |h(x)-L(h(x))|\geqslant 1/2\}$, а потому $M\cup N=\mathcal{N}(h,1/2)\in\mathcal{N}$.

Из лемм 1 и 4 следует

Предложение 3. Система $\mathcal{N}$ является идеалом подмножеств множества X .

Построим теперь на множестве X одну вспомогательную топологию. Обозначим через $\bar{\tau}=\tau(\mathcal{A},L)$ слабейшую топологию на X , относительно которой все функции вида $L(f)$, где $f\in\mathcal{A}$, непрерывны. Хорошо известно,что базу этой топологии образуют всевозможные конечные пересечения вида

$$G=\bigcap_{i=1}^{k} L(f_i)^{-1}(E_i), \tag{4}$$

где $f_i\in\mathcal{A}$, а E_i – открытые множества в $\mathbb{R}_1$.

Лемма 5. Множества вида $L(f)^{-1}(I_\varepsilon)$, где $f\in\mathcal{A}$ и $I_\varepsilon=]-\varepsilon,\varepsilon[$, образуют базу топологии $\bar{\tau}$.

Доказательство. Требуется показать,что всякое множество G вида (4) представляется как объединение некоторых множеств вида $L(f)^{-1}(I_\varepsilon)$. Допустим сперва, что $k=2$, т.е. $G=f^{-1}(E_1)\cap g^{-1}(E_2)$, где $f=L(f)$ и $g=L(g)$. Пусть $E_1=\bigcup_k J_k$ и $E_2=\bigcup_m H_m$ – представления множеств E_1 и E_2 в виде объединений их составляющих интервалов. Тогда

$$G=(\bigcup_k f^{-1}(J_k))\cap(\bigcup_m g^{-1}(H_m))=\bigcup_k\bigcup_m f^{-1}(J_k)\cap g^{-1}(H_m).$$

Таким образом, G представляется в виде объединения множеств вида $f^{-1}(J)\cap g^{-1}(H)$, где J и H – интервалы в $\mathbb{R}$. Покажем, что последние множества всегда представимы в виде $L(h)^{-1}(I_\varepsilon)$, где $h\in\mathcal{A}$ и $I_\varepsilon=]-\varepsilon,\varepsilon[$. Рассмотрим некоторое множество $B=f^{-1}(J)\cap g^{-1}(H)$. Поскольку $\mathbb{1}\in\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ есть векторное пространство, то можно подобрать такие функции $f_0=L(f_0)$, $g_0=L(g_0)$ и положительное число ε, что $f^{-1}(J)=f_0^{-1}(I_\varepsilon)$ и $g^{-1}(H)=g_0^{-1}(I_\varepsilon)$, т.е. $B=f_0^{-1}(I_\varepsilon)\cap g_0^{-1}(I_\varepsilon)$. Наконец, так как $\mathcal{A}$ есть векторная решетка и L — векторно-решеточный гомоморфизм, то функция $h=|f_0|\vee|g_0|$ принадлежит $\mathcal{A}$ и $h=L(h)$. Нетрудно видеть, что $B=h^{-1}(I_\varepsilon)$. Таким образом, мы показали, что всякое множество вида $G=f^{-1}(E_1)\cap g^{-1}(E_2)$, где $f=L(f)$, $g=L(g)$ и E_1,E_2 - открытые множества в R_1, представимо как объединение множеств вида $L(h)^{-1}(I_\varepsilon)$. По индукции мы получаем, что указанное представление имеет место для всех множеств вида (4). Лемма доказана.

Обозначим теперь через $\tau_*=\tau_*(\mathcal{A},L)$ топологию на X, порожденную совокупностью всех множеств вида

$$G=L(f)^{-1}(E)\setminus N, \tag{5}$$

где $f\in\mathcal{A}$, $N\in\mathcal{N}$ и E - открытое множество в R_1. Базу этой топологии образуют всевозможные конечные пересечения

$$B=\bigcap_{i=1}^{k}(L(f_i)^{-1}(E_i)\setminus N_i) \tag{6}$$

множеств вида (5).

Лемма 6. Множества вида $L(f)^{-1}(I_\varepsilon)\setminus N$, где $f\in\mathcal{A}$, $N\in\mathcal{N}$ и $I_\varepsilon=]-\varepsilon,\varepsilon[$, образуют базу топологии τ_*.

Доказательство. Покажем, что всякое множество B вида (6) представляется как объединение указанных в условии леммы множеств. Положим $G_i=L(f_i)^{-1}(E_i)$, $i=1,2,\ldots,k$, тогда

$$B=\bigcap_{i=1}^{k}(G_i\setminus N_i)=\bigcap_{i=1}^{k}G_i\setminus\bigcup_{i=1}^{k}N_i.$$

Пусть $N_0=\bigcup_{i=1}^{k}N_i$, тогда $N_0\in\mathcal{N}$ и $B=(\bigcap_{i=1}^{k}G_i)\setminus N_0$. По лемме 5, множество $\bigcap_{i=1}^{k}G_i$ представляется как объединение некоторого семейства $\{L(f_\alpha)^{-1}(I_{\varepsilon(\alpha)})\}$, а тогда $B=(\bigcup_\alpha L(f_\alpha)^{-1}(I_{\varepsilon(\alpha)}))\setminus N_0=$
$=\bigcup_\alpha(L(f_\alpha)^{-1}(I_{\varepsilon(\alpha)})\setminus N_0)$, что и требовалось показать.

Предложение 4. В топологическом пространстве (X,τ_*) нет изолированных точек.

Доказательство. Допустим, что x_0 - изолированная точка в (X,τ_*), т.е. $\{x_0\}\in\tau_*$. Тогда, в силу леммы 6, существуют такие $f\in\mathcal{A}$, $\varepsilon>0$ и $N\in\mathcal{N}$, что $\{x_0\}=$
$=L(f)^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)\setminus N$. Не умаляя общности, можно считать, что $L(f)(x_0)=0$. Положим $h=L(f)+3\cdot\varepsilon\cdot\chi_N$, тогда $h\in\mathcal{A}$, $L(h)=L(f)$ и для всех $y\in X$, $y\neq x_0$, имеем $|h(y)-L(h)(x_0)|=|h(y)|\geq\varepsilon$, что противоречит условию A6.

Предложение 5. В пространстве (X, τ_*) всякое множество $N \in \mathcal{N}$ имеет пустую внутренность.

Доказательство. Допустим, что $\operatorname{Int} N \neq \emptyset$. Тогда существует содержащееся в N непустое множество $L(f)^{-1}(E) \setminus M$, где $f \in \mathcal{A}$, $M \in \mathcal{N}$ и E открыто в $\mathbb{R}_1$. Пусть $x_0 \in L(f)^{-1}(E) \setminus M$. Имеем $N \setminus \{x_0\} \in \mathcal{N}$ и $\{x_0\} = (L(f)^{-1}(E) \setminus M) \setminus (N \setminus \{x_0\}) = L(f)^{-1}(E) \setminus ((M \cup N) \setminus \{x_0\})$. Поскольку $(M \cup N) \setminus \{x_0\} \in \mathcal{N}$, то мы получаем, что $\{x_0\} \in \tau_*$, т.е. x_0 - изолированная точка в пространстве (X, τ_*). Тем самым мы пришли к противоречию с предложением 4. Предложение доказано.

Покажем теперь, что топология τ_* удовлетворяет условиям C1 и C2. Пусть $f \in \mathcal{A}$ и $z_0 \in X$. Положим $A = L(f)(z_0)$, $\mathcal{U} =]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$, $\mathcal{U}' =]A-\varepsilon/2, A+\varepsilon/2[$ и $V = L(f)^{-1}(\mathcal{U}')$. Тогда $V \in \tau_*$ и $z_0 \in V$. Пусть также $N = \mathcal{N}(f, \varepsilon/2)$, тогда $N \setminus \{z_0\} \in \mathcal{N}$ и множество $W = V \setminus (N \setminus \{z_0\})$ открыто в топологии τ_*, кроме того, $z_0 \in W$. Таким образом, W является открытой окрестностью точки z_0 и, в силу предложения 4, $W \neq \{z_0\}$. Для всех $x \in W$ таких, что $x \neq z_0$, имеем $L(f)(x) \in \mathcal{U}'$. Поскольку $|f(x) - L(f)(x)| < \varepsilon/2$ для всех $x \in W$, $x \neq z_0$, то $f(x) \in \mathcal{U} =]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$ при всех $x \in W, x \neq z_0$. Тем самым, мы показали, что

$$\lim_{x \to z_0} f(x) = L(f)(z_0),$$

и следовательно, топология τ_* удовлетворяет условиям C1 и C2.

Оказывается, что τ_* есть слабейшая среди всех топологий на X, удовлетворяющих условиям C1 и C2. Действительно, пусть τ - какая-нибудь топология на X, удовлетворяющая указанным условиям. Возьмем произвольное множество $G = L(f)^{-1}(E) \setminus N$ (где $f \in \mathcal{A}$, $N \in \mathcal{N}$ и E - открытое множество в $\mathbb{R}_1$), принадлежащее базе топологии τ_* (см. лемму 6), и покажем, что $G \in \tau$. Пусть $z_0 \in G$, тогда $L(f)(z_0) \in E$ и потому найдется окрестность $\mathcal{U} =]A-\varepsilon, A+\varepsilon[$ числа $A = L(f)(z_0)$ такая, что $\mathcal{U} \subset E$. Положим $M = N \cap L(f)^{-1}(\mathcal{U})$, тогда, в силу предложений 2 и 3, $M \in \mathcal{N}$, $\chi_M \in \mathcal{A}$ и $L(\chi_M) = \mathbb{0}$. Рассмотрим функцию $h = L(f) + 3 \cdot \varepsilon \cdot \chi_M \in \mathcal{A}$. Имеем $L(h) = L(f)$, причем из соотношения $x \in M$ вытекает, что $h(x) \notin \mathcal{U}$. Поскольку топология τ обладает свойствами C1 и C2, то для указанной окрестности $\mathcal{U}$ числа $A = L(f)(z_0) = \lim_{x \to z_0} f(x)$ (в топологии τ) в пространстве (X, τ) должна найтись окрестность V точки z_0, для которой $h(x) \in \mathcal{U}$ при всех $x \in V$, $x \neq z_0$.

Учитывая, что $z_0 \notin M$, мы получаем, что $M \cap V = \emptyset$, и потому $h(x) = L(f)(x) \in \mathcal{U} \subset E$ для любого $x \in V$. Значит, имеет место соотношение $V \subset L(f)^{-1}(\mathcal{U}) \setminus M \subset L(f)^{-1}(E) \setminus N = G$, стало быть, точка z_0 является внутренней точкой множества G в топологии τ. В силу произвольности $z_0 \in G$, мы получаем, что $G \in \tau$, откуда следует, что $\tau_* \subset \tau$. Таким образом, нами доказана

<u>Теорема 2</u>. Если семейство $\mathcal{A}$ функций, заданных на непустом множестве X, и оператор $L : \mathcal{A} \to \mathcal{F}(X)$ удовлетворяют условиям A1 - A6, то существует слабейшая топология τ_* на множестве X, относительно которой все функции $f \in \mathcal{A}$ имеют конечный предел в любой точке множества X, а оператор L является оператором перехода к пределу на функциональном классе $\mathcal{A}$. Базу указанной топологии τ_* образуют все множества вида $L(f)^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[) \setminus N$, где $f \in \mathcal{A}$ и $N \in \mathcal{H}$.

З а м е ч а н и я. 1) Теорема 2 получена в работе [1] при более ограничительных предположениях относительно $\mathcal{A}$ и L. 2) Беря в качестве $\mathcal{A}$ и L соответственно $\mathcal{E}_\tau$ и L_τ (см.§1), мы получаем, что $\bar{\tau} \subset \tau_* \subset \tau$. Так как $L(\mathcal{A}) \subset C(X, \bar{\tau})$, то мы видим, что для вещественных функций теорема 1 вытекает из теоремы 2, причем без каких-либо предположений относительно пространства (X, τ).

§3. <u>Некоторые дальнейшие результаты и связь с теорией лифтинга</u>

Пусть пара $(\mathcal{A}, L)$ удовлетворяет условиям A1 - A6 предыдущего раздела и $\tau_* = \tau_*(\mathcal{A}, L)$ - топология, построенная в теореме 2. Тогда $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}_{\tau_*}$, при этом оператор L_{τ_*} (см.§1) является распространением оператора L и мы будем обычно обозначать его той же буквой L. Оператор $L_{\tau_*} = L$ является оператором перехода к пределу на классе $\mathcal{E}_{\tau_*}$, т.е. равенство (3) выполнено для всех $f \in \mathcal{E}_{\tau_*}$ и $z \in X$. Пара $(\mathcal{E}_{\tau_*}, L)$ также обладает свойствами A1 - A6, при этом, как показывает следующая теорема, τ_* - это также и слабейшая топология, относительно которой все функции из $\mathcal{E}_{\tau_*}$ всюду имеют предел.

<u>Теорема 3</u>. Если $\tau_1 = \tau_*(\mathcal{A}, L)$ и $\tau_2 = \tau_*(\mathcal{E}_{\tau_1}, L_{\tau_1})$, то $\tau_1 = \tau_2$.

Теорема 4. Множество $N \subset X$ принадлежит идеалу $\mathfrak{N}(\mathcal{E}_{\tau_*}, L)$ тогда и только тогда, когда оно не имеет точек сгущения в топологическом пространстве (X, τ_*).

Отсюда и из предложения 5 мы получаем, что всякое множество $N \in \mathfrak{N}(\mathcal{E}_{\tau_*}, L)$ замкнуто и нигде не плотно в пространстве (X, τ_*). Так как $L = L_{\tau_*}$ и $\mathbb{1} \in \mathcal{E}_{\tau_*}$, то мы без труда получаем, что $L(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$. С помощью стандартных рассуждений доказывается следующая

Теорема 5. Если последовательность $\{f_n\}$ функций из $\mathcal{E}_{\tau_*}$ равномерно сходится на множестве X к функции $f \in \mathcal{F}(X)$, то $f \in \mathcal{E}_{\tau_*}$ и для любого $z \in X$

$$L(f)(z) = \lim_{n \to \infty} L(f_n)(z).$$

Легко привести примеры, показывающие, что аналогичное утверждение для поточечной сходимости не имеет места.

Определим теперь на $\mathcal{F}(X)$ отношение эквивалентности, полагая $f \sim g$, если для любого положительного числа ε множество $\{x \mid |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon\}$ принадлежит классу $\mathfrak{N}(\mathcal{E}_{\tau_*}, L)$. Если $f, g \in \mathcal{F}(X)$, то будем говорить, что $f \leq g$ почти всюду, если $f \vee g \sim g$.

Предложение 6. Имеют место следующие утверждения:

1) Если $f \in \mathcal{E}_{\tau_*}$, $g \in \mathcal{F}(X)$ и $f \sim g$, то $g \in \mathcal{E}_{\tau_*}$ и $L(f) = L(g)$.

2) Если $f, g \in \mathcal{E}_{\tau_*}$, то $f \sim g$ тогда и только тогда, когда $L(f) = L(g)$.

3) Если $f, g \in \mathcal{E}_{\tau_*}$ и $f \leq g$ почти всюду, то $L(f) \leq L(g)$.

Рассмотрим факторпространство $\mathbb{E}_{\tau_*} = \mathcal{E}_{\tau_*}/\sim$, снабженное естественными алгебраическими операциями и отношением порядка, и пусть $\pi : \mathcal{E}_{\tau_*} \to \mathbb{E}_{\tau_*}$ – каноническое отображение. Определим ассоциированное с L отображение $\mathbb{L} : \mathbb{E}_{\tau_*} \to \mathcal{E}_{\tau_*}$, полагая $\mathbb{L} = L \circ \pi$. Тогда $\mathbb{L}$ есть векторно-решеточный гомоморфизм, такой, что $\mathbb{L}(\pi(\mathbb{1})) = \mathbb{1}$ и $\pi \circ \mathbb{L}$ – тождественное отображение на $\mathbb{E}_{\tau_*}$.

Отображения пространств измеримых функций, для которых ассоциированное отображение обладает свойствами оператора $\mathbb{L}$, называются лифтингами ([3],[4]). Мы покажем, что рассмотренная в данной работе ситуация действительно обобщает конструкцию лифтинга. Пусть (X, Σ, μ) – пространство с полной σ-конечной мерой, $\mathcal{L}^{\infty}$ - пространство всех ограниченных измеримых функций на X и $\rho: \mathcal{L}^{\infty} \to \mathcal{L}^{\infty}$ - лифтинг пространства $\mathcal{L}^{\infty}$ (см. определение в [4]). Нетрудно показать, что пара $(\mathcal{A}, L)$, где $\mathcal{A}=\mathcal{L}^{\infty}$ и $L=\rho$, обладает свойствами A1 - A6, и потому всякий лифтинг является оператором перехода к пределу относительно соответствующей топологии τ_*. При этом τ_* совпадает с известной в теории лифтинга топологией τ_ρ на X, образованной множествами вида $E \setminus N$, где $E, N \in \Sigma$, $\mu(N)=0$ и $\rho(\chi_E)=\chi_E$. Идеал $\mathcal{N}$ является в данном случае совокупностью всех множеств меры нуль, а пространство $\mathbb{E}_{\tau_*}$ - построенным в работах [2] и [3] наибольшим идеалом известного пространства $S(X,\Sigma,\mu)$, на который может быть распространен ассоциированный с ρ лифтинг $\bar{\rho}=\rho\circ\pi$.

Литература

1. Монаков-Рогозкин А., Палмару У. Операторы, связанные с пределами. Тезисы конференции "Теоретические и прикладные вопросы математики", Тарту, 1980, 105 - 107.
2. Монаков-Рогозкин А.К. Пространства, допускающие лифтинг. В сб. "Работы по мат. и физ.", Таллин, 1974, 5 - 14.
3. Монаков-Рогозкин А. О строении пространств измеримых функций, допускающих лифтинг. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 12 - 20.
4. Ionescu Tulcea,A., Ionescu Tulcea,C. Topics in the theory of lifting. Berlin - Heidelberg - New York, 1969.

Поступило 12 01 1981

OPERATORS CONNECTED WITH LIMITS

A.Monakov-Rogozkin

Summary

For any function $f: X \to \mathbb{R}$ that have a limit in every point of the topological space X the equality (3) defines a function $L(f)$ which belongs to $C(X)$. Some properties of the operator L are studied. We show that such operators may be axiomatically described, i.e. for a given operator L, satisfying conditions A1 - A6 (see §2), there is the weakest topology τ_* on X so that L is of the form (3) with respect to τ_*. We show also that the objects considered in this paper generalize some constructions of the lifting theory.

ЭРГОДИЧЕСКИЙ КЛАСС МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ ПИТЕРСЕНА

Л. Лооне

Тартуский государственный университет

Пусть $A_m = (a_{mnk})$ – матричные методы суммирования для любого $m = 0, 1, \ldots$ Говорят, что последовательность $x = (\xi_k)$ суммируема α-методом (A_m) к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_m \sum_k a_{mnk} \xi_k = a.$$

Пусть Q – множество всевозможных операторов $q: N \to N$ и пусть $B_q = (a_{m q(m) k})$. Значит, для любого $q \in Q$ матрица B_q имеет первым рядом какой-то ряд матрицы A_1, вторым рядом какой-то ряд матрицы A_2 и.т.д. Пусть K^o – множество, определяющее ядро Кноппа. Ядром последовательностного α-метода в пространстве m называется ядро, определяемое множеством

$$K_\alpha = \operatorname{cl} \operatorname{co} \bigcup \{ {}^t B_q (K^o) : q \in Q \}. \tag{1.1}$$

Это ядро имеет следующие свойства (см.[1]).

<u>Свойство 1</u>. Множеством сходящихся элементов по ядру α-метода является множество C_α всех α-суммируемых последовательностей, причем

$$K_\alpha = \{ \alpha\text{-}\lim x \} \quad \forall x \in C_\alpha.$$

<u>Свойство 2</u>. Ядро почти-сходимости является ядром α-метода (A_m) с

$$a_{mnk} = \begin{cases} \frac{1}{m+1}, \text{при} & n \le k \le n+m, \\ 0, \text{при} & n > k \text{ и при } k > n+m. \end{cases}$$

<u>Свойство 3</u>. Включение

$$K_\alpha(x) \subset K^o(x) \quad \forall x \in m \tag{1.2}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

1^o α-метод регулярен, (1.3)

2^o $\lim_m \|A_m\| = 1.$ (1.4)

Пусть $T = (t_{nk})$ – матричный метод суммирования, причем

${}^tT: K^0 \to K^0$. Пусть

$$L = \{ f : \langle Tx - x, f \rangle = 0, f \in K^0 \} \tag{1.5}$$

и пусть $A = (a_{nk})$.

Теорема 1. Включение

$$K^0(Ax) \subset L(x) \quad \forall x \in m \tag{1.6}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

1^0 метод A регулярен, (1.7)

2^0 $\lim\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}| = 1$, (1.8)

3^0 $\lim\limits_n \sum\limits_k |a_{nk} - \sum\limits_i a_{ni} t_{ik}| = 0$. (1.9)

Доказательство. Необходимость. Пусть ${}^tA(K^0) \subset L$, т.е. имеет место включение (1.6). Так как $L \subset K^0$, то по теореме 5 из [1], имеют место (1.7) и (1.8). Из включения ${}^tA(K^0) \subset L$ вытекает, что ${}^tAf = {}^t(AT)f$ для любого f из K^0, т.е.

$${}^t(A - AT)f = 0 \quad \forall f \in K^0.$$

Значит, матричный метод $A - AT$ суммирует все ограниченные последовательности в нуль-последовательности, т.е. имеет место (1.9).

Достаточность. Условия (1.7) и (1.8) гарантируют включение ${}^tA(K^0) \subset K^0$. Тогда из условия (1.9) следует включение (1.6).

Теорема 2. Включение

$$K_\alpha(x) \subset L(x) \quad \forall x \in m \tag{1.10}$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.3), (1.4) и

$$\lim_m \| A_m (T - E) \| = 0. \tag{1.11}$$

Доказательство. Из свойства 4 вытекает необходимость условий (1.3) и (1.4). По определению ядра α-метода (A_m) включение (1.10) равносильно включению

$${}^tB_q(K^0) \subset L \quad \forall q \in Q.$$

Из теоремы 1 получаем, что при (1.3) и (1.4) это включение имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_m \sum_k |a_{mq(m)k} - \sum_i a_{mq(m)i} t_{ik}| = 0 \quad \forall q \in Q.$$

Отсюда, по определению множества Q, получаем равносильное требованию (1.11) условие

$$\lim_m \sup_n \sum_k | a_{mnk} - \sum_i a_{mni} t_{ik} | = 0. \tag{1.12}$$

Определение 1. Последовательностный α-метод (A_m) называется эргодическим, если найдется множество L, определенное условием (1.5), такое, что $K_\alpha = L$.

Из свойства 3 следует, что метод почти-сходимости является эргодическим. Приведем один класс эргодических методов.

Пусть P - оператор выделения подпоследовательности, т.е. $P=(p_{nk})$ с $p_{nk}=\delta_{j(n)k}$, где $j \in Q$ и $n \le j(n) < j(n+1)$ для любого $n \in N$ и $n < j(n)$, если $n \ge n_0$. Очевидно, что ${}^tP : K^\circ \to K^\circ$. Рассмотрим α-метод (A_m) с

$$A_m = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} P^i,$$

где $P^i = PP^{i-1}$ для любого $i=1,2,\ldots$. Обозначим

$$j^i(n) = \underbrace{j(j(\cdots(j}_{i\text{-раз}}(n))\ldots)).$$

Значит $P^i = (\delta_{j^i(n)k})$ и, следовательно, $A_m = (a_{mnk})$ имеет вид

$$a_{mnk} = \begin{cases} \frac{1}{m+1}, & \text{если } k \in \{j^i(n): i=0,1,\ldots,m\}, \\ 0, & \text{если } k \notin \{j^i(n): i=0,1,\ldots,m\}. \end{cases}$$

Теорема 3. Последовательностный α-метод (A_m) с $A_m = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} P^i$ является эргодическим, причем

$$K_\alpha = \{ f : \langle Px - x, f \rangle = 0 \quad f \in K^\circ \}.$$

Доказательство. а) Покажем, что $K_\alpha \subset L$, применяя теорему 2. Условия (1.3) и (1.4) этой теоремы выполнены. Покажем, что метод (A_m) удовлетворяет и условию (1.12). Действительно,

$$\lim_m \sup_n \sum_k \left| \frac{1}{m+1} \delta_{kj^i(n)} - \sum_t \frac{1}{m+1} \delta_{tj^i(n)} \delta_{j(t)k} \right| =$$

$$\lim_m \frac{1}{m+1} \sup_n \sum_k | \delta_{kj^i(n)} - \delta_{j^{i+1}(n)k} |.$$

Поскольку $j^i(n) \le j^{i+1}(n)$ для любого n, то

$$\sum_k | \delta_{kj^i(n)} - \delta_{j^{i+1}(n)k} | \le 2.$$

Так как $\lim 2/m+1 = 0$, то условие (1.11) имеет место.

б) Пусть g является опорной функцией множества K_α. Значит, по определению множества K_α, имеет место

$$g(x) \geqslant \sup_{f \in K^0} \sup_{q \in Q} \langle B_q x, f \rangle \quad \forall x \in m.$$

Рассмотрим множество последовательностей

$$H = \{ B_q x : q \in Q \}.$$

Так как функции $f \in K^0$ положительны, то

$$\sup \{ \langle B_q x, f \rangle : q \in Q \} = \langle \sup H, f \rangle$$

(см. [1] стр. 48-49).

Вычислим эту верхнюю грань

$$\sup H = \sup \{ B_q x : q \in Q \} = \Big(\sup_{q \in Q} \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} \xi_{j^i(q(m))} \Big) =$$
$$= \Big(\frac{1}{m+1} \sup_{n} \sum_{i=0}^{m} \xi_{j^i(n)} \Big).$$

Следовательно,

$$g(x) \geqslant \sup_{f \in K^0} \Big\langle \Big(\frac{1}{m+1} \sup_{n} \sum_{i=0}^{m} \xi_{j^i(n)} \Big), f \Big\rangle =$$
$$= \overline{\lim_{m}} \frac{1}{m+1} \sup_{n} \sum_{i=0}^{m} \xi_{j^i(n)} = h(x).$$

Функция h является опорной функцией множества L (см. [2]). Так как $K_\alpha \subset L$, то из $g \geqslant h$ вытекает, что $g = h$, т.е. $K_\alpha = L$. Теорема доказана.

Пусть (A_m) и (B_m) два последовательностных метода, определенные соответственно операторами $P_1 = (\delta_{j(n)k})$ и $P_2 = (\delta_{p(n)k})$ выделения подпоследовательности. Пусть $j(n) > n$ $\forall n \geqslant n_0$ и $p(n) > n$ $\forall n > m_0$. Обозначим ядро, определенное методом (A_m), через $K_\alpha(x)$ и ядро, определенное методом (B_m), через $K_\beta(x)$. Пусть $C(m,n) = \{ j^i(n) : i = 0, 1, \dots, m \} \cap \{ p(j^i(n)) : i = 0, 1, \dots, m \}$ и пусть $\operatorname{card} C(m,n)$ обозначает число элементов множества $C(m,n)$.

<u>Теорема 4.</u> Включение

$$K_\alpha(x) \subset K_\beta(x) \qquad \forall x \in m \tag{1.13}$$

имеет место тогда и только тогда, когда

1° $n_0 \leqslant m_0$,

2° $$\lim_{m} \frac{1}{m+1} \inf_{n} \operatorname{card} C(m,n) = 1. \tag{1.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Метод (A_m) регулярен, причем $\lim_{m} \| A_m \| = 1$ (см. свойство 3). Из теоремы 2 получаем, что включение (1.13) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m} \| A_m (P_2 - E) \| = 0.$$

Обозначим $(d_{mnk}) = A_m (P_2 - E)$. Пусть

$$a_{mn\mu^{-1}(k)} = \begin{cases} a_{mn\nu}, & \text{если найдется } \nu \text{, такое что } \mu(\nu)=k, \\ 0, & \text{если нет такого } \nu \text{, что } \mu(\nu)=k. \end{cases}$$

Следовательно, имея в виду определение a_{mnk}, получаем

$$a_{mn\mu^{-1}(k)} = \begin{cases} \frac{1}{m+1}, & \text{если } k \in \{\mu(j^i(n)) : i=0,1,\dots,m\}, \\ 0, & \text{если } k \notin \{\mu(j^i(n)) : i=0,1,\dots,m\}. \end{cases}$$

Так как $d_{mnk} = a_{mnk} - a_{mn\mu^{-1}(k)}$, то при $n \geq n_0$ получаем

$$\sum_k |d_{mnk}| = \sum_{i=0}^{m} |d_{mnj^i(n)}| + \sum_{i=0}^{m} |d_{mn\mu(j^i(n))}| =$$
$$2 - \frac{2}{m+1} \sum_{k \in C(m,n)} 1 = 2\left(1 - \frac{1}{m+1} \operatorname{card} C(m,n)\right).$$

Если $n < n_0$, то при $\mu(n) \neq n$ получаем, что

$$\sum_k |d_{mnk}| = |d_{mnn}| + |d_{mn\mu(n)}| = 2.$$

Значит $\lim_m \sup_n \sum_k |d_{mnk}| = 0$ может иметь место лишь тогда, когда из $n < n_0$ следует $\mu(n) = n$, т.е. $m_0 \geq n_0$. Тогда

$$\lim_m \sup_n \sum_k |d_{mnk}| = \lim_m \sup_n 2\left(1 - \frac{1}{m+1} \operatorname{card} C(m,n)\right),$$

и, следовательно, включение (1.13) имеет место тогда и только тогда, когда верно (1.14). Теорема доказана.

Рассмотрим оператор частичного левого сдвига, т.е. оператор $S_{k_0} = (\delta_{j(n)k})$, где

$$j(n) = \begin{cases} n, & \text{если } n < k_0, \\ n+1, & \text{если } n \geq k_0. \end{cases}$$

Следствие 4.1. Пусть оператор S_{k_0} частичного левого сдвига определяет ядро $K_\alpha(x)$ и оператор S_{k_1} частичного левого свига определяет ядро $K_\beta(x)$. Включение (1.13) имеет место тогда и только тогда, когда $k_0 \leq k_1$.

Доказательство. По теореме 4 условие $k_0 \leq k_1$ является необходимым.

Пусть $k_0 \leq k_1$. Значит, при $n < k_0$ $j^i(n) = n$ для любого $i = 0,1,\dots$, откуда следует, что $\mu(j^i(n)) = \mu(n) = n$. Значит $j^i(n) = \mu(j^k(n))$ для любого $k, i = 0,1,\dots,m$ и, следовательно,

$\mathrm{card}\ C(m,n) = m+1$. Пусть $n \geq k_0$. Тогда $j^i(n) = n+i$ и, следовательно,

$$\mathrm{card}\ C(m,n) = \begin{cases} m+1, & \text{если} \quad n+m < k_1, \\ m, & \text{если} \quad n+m \geqslant k_1. \end{cases}$$

Значит $\lim\limits_{m} \frac{1}{m+1} \inf\limits_{n} \mathrm{card}\ C(m,n) = 1$.

Литература

1. Лооне Л., Ядро α-суммируемости Питерсена. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1978, 448, 46-51.
2. Raimi R.A. Invariant means and invariant matrix methods of summability. Duke Math. J., 1963, 30, 81-94.

Поступило 12 01 1981

The Ergodic Class of the Petersen's Summability Methods

L.Loone

Summary

The core of Petersen's α-method has been defined in [1]. This core is determined by the set K_α (see (1.1)). In this paper the author investigates relations between the α-core and the core which is determined by the set L (see (1.5)). The necessary and sufficient conditions are established for inclusions (1.6) and (1.10). A method (A_m) is called ergodic if there exists a set L defined by (1.5) such that $K_\alpha = L$. Theorem 3 shows that the method $\left(\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m} P^i\right)$ is ergodic (here P denotes a method that detaches a subsequence).

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS * INHALT

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 596.
ПРИЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА И ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ.
Труды по математике и механике.
На русском языке.
Резюме на английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202 400, г.Тарту, ул.Юликооли, I8.
Ответственный редактор Э. Реймерс.
Сдано в печать 29.I2.8I.
МВ - 09052
Формат 30х45/4.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 9,39.
Печатных листов I0,25.
Тираж 400.
Заказ № I395.
Цена I руб. 40 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Пялсона, I4.
2 - 2