EUKLIDES.

Der Druck wird unter den gesetzlichen Bedingungen gestattet.

Riga, am 20 März 1841.

Dr. C. E. Napiersky

Censor.

Geometrie.

Erster Cursus.

I.

Von Professor Dr. G. Paucker.

Mitau $\frac{14}{26}$ Decbr. 1840.

Der Punkt.

Wenn ein Naturkörper in immer kleinere Theile zerlegt wird, so ist dasjenige Theilchen desselben, welches durch kein mechanisches Mittel mehr verkleinert werden kann, welches daher für unsere Sinne ohne Ausdehnung ist, und nur noch bei der Betrachtung dem Auge durch seine Farbe sichtbar wird, ein <u>physischer Punkt</u>. Wenn aber der Punkt nicht bloß für unsere Sinne, sondern auch für unser Denkvermögen ohne alle Ausdehnung ist, d. h. wenn er keine Theile, und weder Länge noch Breite oder Dicke hat so ist er ein <u>geometrischer Punkt</u>. Ein solcher Punkt ist nicht in der Natur, sondern nur in unserer Vorstellung vorhanden.

Die Linie.

Die Bahn oder Spur, welche ein ohne Unterbrechung fortrückender physischer Punkt beschreibt, heißt eine <u>physische Linie</u>. Eine solche Linie hat eine für unsere Sinne bemerkbare geringe Breite oder Dicke, aber eine sichtbare Ausdehnung nach der Länge. Die feinen Linien welche der Kalligraph oder Lithograph, der Zeichner, Maler oder Kupferstecher, der praktische Geometer u. s. w. mit der Spitze

der

der Feder, des Blei- oder Metallstifts zeichnen, die Linien welche der Glaser mit der Demantspitze zieht, oder der Optikus in Glas ätzt, die Linien welche der Sonnenstrahl in den Sonnenstäubchen abbildet, oder in den Lichtbildern auf der Metallfläche darstellt, sind physische Linien. Wenn wir in unserer Vorstellung von der physischen Linie nur die Ausdehnung in der Länge behalten, die Breite oder Dicke aber weglassen, so erhalten wir den Begriff einer geometrischen Linie, welche also auch nicht in der Natur, wohl aber in unserem Denkvermögen vorhanden ist. Anfang oder Ende, die Grenze, oder irgend eine bestimmte Stelle der geometrischen Linie ist also ein geometrischer Punkt. Er entsteht da, wo zwei geometrische Linien einander durchschneiden. Die Bahn eines geometrischen Punkts ist eine geometrische Linie.

Die gerade Linie.

Indem nun ein Punkt bei seinem ununterbrochenen Fortrücken oder bei seiner Bewegung eine Linie beschreibt, welche nur eine Ausdehnung nach der Länge hat, so kann bei derselben, abgesehen von der wechselnden Geschwindigkeit der Bewegung, noch eine Verschiedenheit in der Richtung stattfinden

können

Wenn die Richtung der Linie sich beständig ändert, d. h. wenn sie in jedem Punkte eine andere ist, so heißt die Linie eine krumme Linie. Bleibt aber die Richtung in allen Punkten unverändert dieselbe, so heißt die so gezogene Linie eine gerade Linie. Um also bei einer krummen Linie die Änderung der Richtung wahrzunehmen, muß man in jedem Punkte derselben eine gerade Linie ziehen, oder sich denken.

Zwischen zwei Punkten kann man unzählige krumme Linien, aber nur eine einzige gerade Linie denken. Dieses giebt ein Mittel, um die Richtigkeit einer geraden Linie (z. B. an einem Lineal) zu erkennen. Denn wenn man die Linie um zwei ihrer festen Punkte wie um eine Axe sich drehen läßt, so werden ihre Punkte, wenn sie krumm ist, bei fortgesetzter Drehung sich trennen. Dieses wird bei der geraden Linie nicht der Fall sein. Also:

Zwei gerade Linien, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, decken einander in allen übrigen Punkten, d. h. sie bilden nur eine einzige gerade Linie, welche zwischen diesen beiden Punkten die kürzeste Entfernung oder die Entfernung überhaupt angiebt.

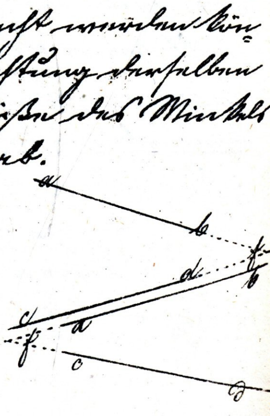
Die

die gerade Linie ist daher das Mittel, nicht bloß die Richtung zu erkennen, sondern auch die Entfernung zu bestimmen, welche immer auf der geraden Linie gemessen wird.

Der Winkel.

Wenn zwei gerade Linien ab, ac, von einem Punkt a nach verschiedenen Richtungen gehen, so bilden sie einen Winkel. Der Punkt a heißt die Spitze des Winkels; die Linien ab, ac, heißen die Schenkel oder Seiten des Winkels. Der Winkel selbst wird entweder bloß durch den Buchstaben a der Spitze bezeichnet; oder indem man diesen Buchstaben in die Mitte setzt: bac oder cab.

Die Größe des Winkels bac hängt bloß von der Neigung der Linien ab, ac, zu einander ab, d. h. er ist kleiner oder größer, je nachdem die Richtungen ab, ac, näher zusammen fallen oder weiter auseinander rücken. Da die Seiten des Winkels unbegrenzt verlängert gedacht werden können, ohne daß dadurch die Richtung derselben geändert wird, so hängt die Größe des Winkels nicht von der Länge der Seiten ab.

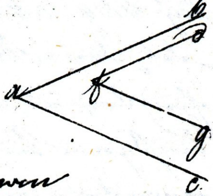


Wenn zwei gerade Linien ab, cd, welche nach verschiedenen Richtungen gehen, einander immer näher rücken, so daß sie

zuletzt

zuletzt bei gehöriger Verlängerung in einem einzigen Punkt f zusammentreffen würden, so heißen sie convergirende Linien; wenn sie aber immer weiter auseinander gehen, so heißen sie divergirende Linien.

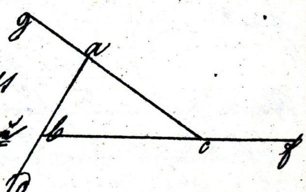
Gleichheit der Winkel.



Zwei Winkel bac, dfg, können einander gleich seyn.

Um dieses zu erkennen, denkt man die Winkelspitze f auf die Winkelspitze a gelegt, und einen Punkt der geraden Linie fg in die gerade Linie ac fallend. dann müssen beide Linien fg, ac, einander decken, d. h. nur eine einzige gerade Linie bilden. Wenn in diesem Falle auch die geraden Linien f d, a b, einander decken, so sind die Winkel dfg, bac, einander gleich

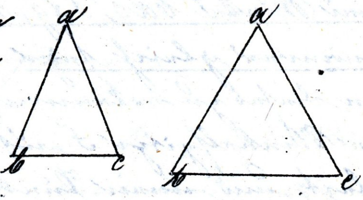
Das Dreieck



Wenn je zwei von drei nicht in gerader Linie liegenden Punkten a, b, c, durch gerade Linien verbunden werden, so entsteht eine Figur, welche ein Dreieck heißt. Die drei Punkte a, b, c, heißen die Winkelpunkte, Spitzen oder Ecken des Dreiecks. Auf den unbegrenzten Verbindungslinien abd, bcf, cag, heißen diejenigen Stücke, welche zwischen den Ecken des Dreiecks genommen werden, nämlich ab, bc, ca, die Sei-

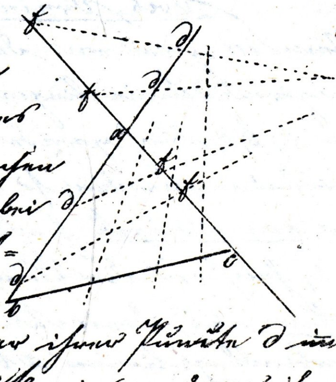
ten

Seiten des Dreiecks. Die Winkel cab, abc, bca, heißen die innern Winkel des Dreiecks. Die Winkel, welche jede Seite des Dreiecks mit der Verlängerung der andern Seite bildet, nämlich bag, cbd, acf, heißen die Außenwinkel des Dreiecks.



Ein Dreieck, in welchem bloß zwei Seiten ab, ac, einander gleich sind, heißt ein gleichschenkliges Dreieck, jene beiden Seiten heißen die Schenkel, die dritte Seite bc, welche den Schenkeln nicht gleich ist, heißt die Grundlinie oder Basis. Ein gleichseitiges Dreieck ist ein solches, in welchem alle drei Seiten ab, bc, ca, einander gleich sind.

Die Ebene.



Wenn sich eine gerade Linie df, längs den Seiten eines Winkels bac ununterbrochen fortschiebt, so daß sie sich bei dieser Bewegung fortwährend auf die Seiten ba, ac, stützt, d. h. daß einer ihrer Punkte d immer in der geraden Linie ab, ein anderer ihrer Punkte immer in der geraden Linie ac liegt, so

beschreibt

beschreibt die gerade Linie eine Ebene. Der Winkel bac liegt in dieser Ebene, und jede andere gerade Linie, welche auf dieselbe Art wie df, ununterbrochen fortrückt, indem sie sich auf die Linien ab, ac, stützt, beschreibt dieselbe Ebene wie df. Die Lage dieser Ebene ist also durch den Winkel bac völlig bestimmt, d.h. durch diesen Winkel kann keine zweite Ebene gedacht werden, welche von der ersten verschieden wäre.

Da die Richtung der geraden Linie ab durch die Punkte a und b; die Richtung der geraden Linie ac durch die Punkte a und c, bestimmt ist, so ist auch der Winkel bac durch die drei Punkte a, b, c, bestimmt. Folglich bestimmen auch drei Punkte die Lage einer Ebene, d.h. gerade Linien, welche sich bei ihrer Bewegung auf die geraden Linien ab, ac, oder auf die geraden Linien ac, bc, stützen, beschreiben immer dieselbe Ebene.

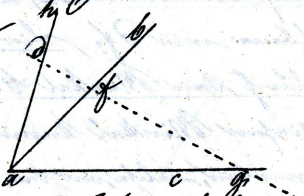
Ferner, da zwei Punkte eine gerade Linie bestimmen, so ist die Lage einer Ebene auch durch einen Punkt und eine gerade Linie völlig bestimmt d.h. durch einen Punkt und eine gerade Linie kann immer eine Ebene, und zwar nur eine einzige Ebene gelegt werden.

Eine Ebene ist nichts anders, als der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, welche in geraden Linien liegen, die sich auf je zwei von dreien

ein

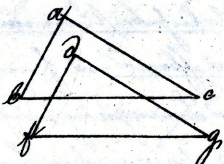
ein Dreieck bildenden geraden Linien stützen.

Wenn zwei Punkte einer geraden Linie in einer Ebene liegen, so liegen auch alle übrigen Punkte dieser geraden Linie, so weit man dieselbe auch verlängern mag, in derselben Ebene.



Wenn also aus dem Punkte a eine gerade Linie ak so gezogen werden soll, daß sie in der Ebene bac liege, so hat man nur zu bewirken, daß sie durch irgend einen Punkt d gehe, welcher in einer geraden Linie fg liegt, die sich auf die geraden Linien ab, ac, stützt.

1.



Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander, d. h. alsdann sind auch die dritte Seite und die beiden andern Winkel gegenseitig gleich.

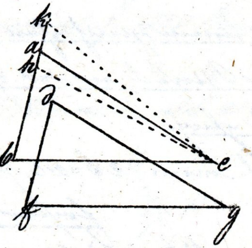
Es sei ab = df, bc = fg, ∠abc = dfg.

Die Winkel dfg, abc, lassen sich so zusammenlegen, daß die Spitze f auf b, die Richtung der Seite fg auf bc fällt. Da nach der Annahme ∠f = b, so muß dann auch die Richtung fd auf ba fallen. Außerdem ist nach der Annahme fg = bc, ab = df. Also fällt bei dieser Zusammenlegung der gleichen Winkel f, b, auch der Punkt g auf c, der

Punkt

Punkt d auf a. Also fallen die Seiten d, f, g, gegenseitig auf die Seiten a, b, c. Also decken die zwischen ihnen liegenden Seiten einander. Also ist die Seite $dg = ac$, $\angle g = c$, $\angle d = a$.

2.



<u>Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander.</u>

d. h. alsdann sind auch die beiden andern Seiten und der dritte Winkel, gegenseitig gleich.

Es sei $bc = fg$, $\angle b = f$, $\angle c = g$.

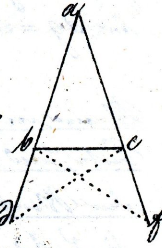
Man nehme an, df sei $<$ als ab, mache $bk = df$, und ziehe ck. dann ist in den Dreiecken dfg, kbc, $df = kb$, $fg = bc$, $\angle f = b$, also (II.) decken die Dreiecke kbc, dfg einander, also $\angle kcb = dgf$. Aber $\angle dgf = acb$, also $\angle kcb = acb$. dieses ist aber unmöglich, also kann nicht $df <$ als ab sein.

Man nehme an, df sei größer als ab, mache $bk = df$ und ziehe ck. Dann ist in den Dreiecken dfg, kbc, $df = kb$, $fg = bc$, $\angle f = b$, also (II) decken die Dreiecke kbc, dfg einander, also $\angle kcb = dgf$. Aber $\angle dgf = acb$, also ist $\angle kcb = acb$. dieses ist aber unmöglich, also kann nicht $df >$ als ab sein.

Da df weder $<$ noch $>$ als ab sein kann, so muß $df = ab$ sein. Aber auch $bc = fg$, und $\angle b = f$.

Also

Also decken die Dreiecke abc, dfg, einander. Also ist außer $ab=df$ und $\angle c=g$, auch $ac=dg$, und $\angle a=d$.



3.

In einem gleichschenkligen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

d.h. wenn $ab=ac$, so ist auch $\angle abc=acb$.

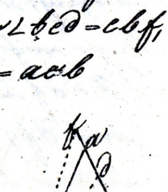
Erster Beweis

Man bringe das $\triangle abc$ in die umgekehrte Lage acb, da $\angle a=a$, $ab=ac$, $ac=ab$, so decken die $\triangle abc$, acb, einander, der Punkt c fällt auf b, und b auf c, (II) also ist der $\angle b=c$, und $\angle c=b$.

Zweiter Beweis.

Man verlängere ab, ac, nach d, f, und mache $bd=cf$, und ziehe cd, bf. In den $\triangle acd$, abf, ist $ac=ab$, $ad=af$, $\angle a=a$, also (II) $\triangle acd=abf$, also $cd=bf$, $\angle acd=abf$ $\angle adc=afb$. In den $\triangle bdc$, cfb, ist $cd=bf$, $bd=cf$, $\angle bdc=cfb$, also (II) $\triangle bdc=cfb$, also $\angle bcd=cbf$, also $\angle acd-bcd=abf-cbf$, also $\angle abc=acb$

4.



Wenn die Winkel an der Grundlinie eines Dreiecks einander gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

d.h. wenn $\angle abc=acb$, so ist $ab=ac$.

Denn es sey $ab <$ als ac. Man mache $cd=ab$, ziehe bd. In den $\triangle dcb=abc$, ist $dc=ab$, $bc=bc$ $\angle dcb=abc$,

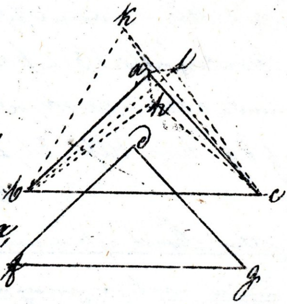
also

also (I 1) Δ dcb = abc. Dieses ist unmöglich, also kann nicht ab $<$ als ac seyn.

Es sei ab $>$ als ac. Man mache cf = ab, ziehe bf. In den Δ fcb, abc, ist fc = ab, bc = bc, $\angle$ fcb = abc, also (I 1) Δ fcb = abc. Dieses ist unmöglich, also kann nicht ab $>$ als ac seyn.

Da ab weder größer noch kleiner als ac seyn kann, so ist ab = ac.

5.



<u>Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten gegenseitig gleich sind, so decken die Dreiecke einander;</u>

d.h. wenn df = ab, fg = bc, gd = ca, so ist $\angle$ d = a, $\angle$ f = b, $\angle$ g = c

<u>Erster Beweis.</u>

Man lege fg auf bc, und bringe den Punkt d in die Ebene des Δ abc, nach der Richtung von a, so fällt d entweder innerhalb des Δ abc in h, oder oberhalb des Punktes a in k, oder seitwärts von a in l.

Wenn d in h fällt, so ist bh = ba; ch = ca, also (I 3) $\angle$ bah = bha, $\angle$ cah = cha, also $\angle$ bac = bha + cha, was unmöglich ist; also fällt d nicht in h.

Wenn d in k fällt, so ist bk = ba, ck = ca, also (I 3) $\angle$ bka = bak, $\angle$ cka = cak, also $\angle$ bkc = bak + cak, was unmöglich ist; also fällt d nicht in k.

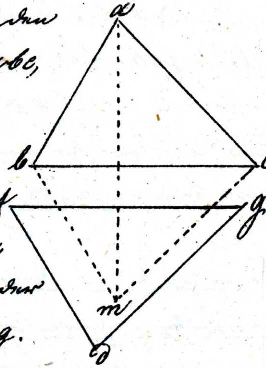
Wenn d in l fällt, so ist bl = ba, cl = ca, also (I 3) $\angle$ bal = bla, $\angle$ cal = cla. Da $\angle$ cla $>$ als bla, so ist auch $\angle$ cal $>$ als bla. Da $\angle$ bla = bal, so ist auch $\angle$ cal $>$ als bal, was unmöglich ist. Also fällt d nicht in l.

Also

Also kann d nirgends anders fallen, als in a; also decken die △ dfg, abc einander.

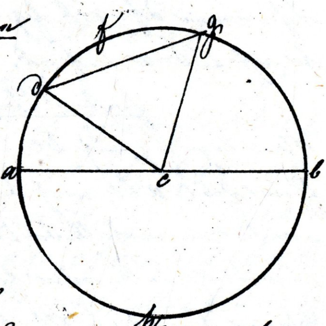
Zweiter Beweis.

Man lege fg auf bc, und bringe den Punkt d in die Ebene des Dreiecks abc, auf die entgegengesetzte Seite von bc, so daß der Punkt d in m fällt. Alsdann ist bm = ba, cm = ca, also (I 3) ∠ bma = bam, und ∠ cma = cam, also ∠ bmc oder fdg = bac. Also (I 1) △ abc = dfg.



6.

Der Kreis ist eine krumme Linie, welche ganz in einer Ebene liegt und deren Punkte von einem in derselben Ebene liegenden festen Punkte gleich weit entfernt sind.

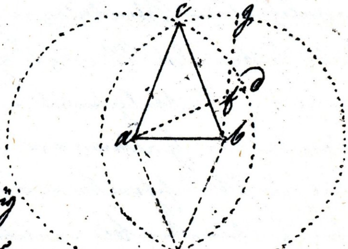


Der feste Punkt c heißt der Mittelpunkt oder das Centrum, die gleiche Entfernung der Punkte des Kreises vom Mittelpunkt; ca, cd, cf, cg, cb, ck, heißt der Halbmesser oder Radius, die krumme Linie adfgbka, als Länge betrachtet heißt der Umfang, die Peripherie oder Circumferenz, ein Theil derselben zwischen zwei Punkten, z. B. dfg, heißt der Bogen, die gerade Linie dg, welche die Endpunkte des Bogens verbindet, heißt die Sehne oder Chorde; der Winkel dcg, wel-

chen

welchen die nach den Endpunkten des Bogens gezogenen Halbmesser mit einander im Mittelpunkte bilden, heißt der <u>Mittelpunktswinkel</u> oder <u>Centralwinkel</u>, eine gerade Linie aob, welche durch den Mittelpunkt gezogen wird, heißt der <u>Durchmesser</u> oder <u>Diameter</u> und ist doppelt so groß als der Halbmesser. Der Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleiche Theile, welche <u>Halbkreise</u> heißen.

7.

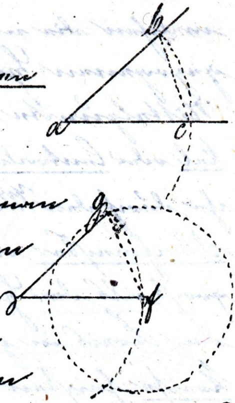


<u>Ueber einer Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck zu beschreiben.</u>

Die gegebene Grundlinie sey ab, die gegebene Länge der Schenkel sey ad = bg. Wenn die Ebene in welcher das Dreieck liegen soll, gegeben ist, so beschreibe man in dieser Ebene, aus a als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ad, aus b als Mittelpunkt mit dem Halbmesser bg, zwei Kreise. Wenn diese Halbmesser größer als $\frac{1}{2}$ ab sind, so durchschneiden die Kreise einander in c. Dann ist (I. 6) ac = ad, bc = bg; aber nach der Voraussetzung ad = bg, also ac = bc, also △ abc gleichschenklig. Wenn die Ebene nicht gegeben ist, so wähle man einen beliebigen Punkt f, wodurch man die Ebene abf erhält, ziehe in dieser die Halbmesser afd = bfg, und beschreibe die Kreise in dieser Ebene.

8.

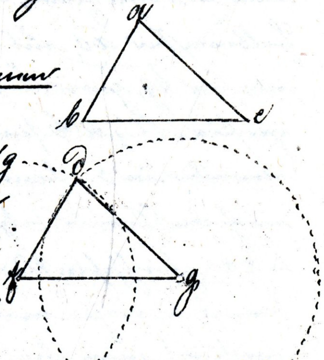
Einen Winkel einem gegebenen Winkel gleich zu machen.



Der gegebene Winkel sey bac. Aus a als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis mit einem beliebigen Halbmesser, welcher die Winkelseiten in b, c, schneidet. Man ziehe bc. Es sei in der geraden Linie, an welcher der Winkel zu zeichnen ist, der Punkt d als Spitze des Winkels gegeben, so beschreibe man aus d als Mittelpunkt einen zweiten Kreis mit demselben Halbmesser $df = ab = ac$. Aus f als Mittelpunkt beschreibe man einen dritten Kreis mit dem Halbmesser bc, welcher den zweiten Kreis in g schneidet. Man ziehe dg, so ist der $\angle fdg = bac$. Denn $fg = bc$, $dg = df = ab = ac$, also (I.5) ist das $\triangle fdg = bac$, also $\angle fdg = bac$.

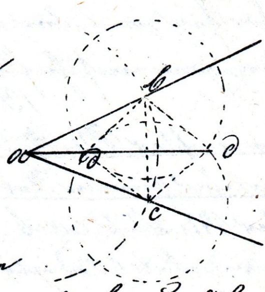
9.

Ein Dreieck einem gegebenen Dreieck gleich zu machen.



Man mache eine gerade Linie $fg = bc$, beschreibe in einer beliebigen Ebene, aus f als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ba, aus g als Mittelpunkt mit dem Halbmesser ca, Kreise, welche einander in d schneiden, so ist (I.6) $fd = ba$, $gd = ca$, $fg = bc$, also (I.5) $\triangle dfg = abc$.

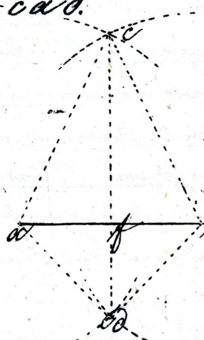
10.



Einen Winkel in die Hälfte zu theilen.

Der gegebene Winkel sey bac. Man beschreibe aus der Spitze des Winkels a als Mittelpunkt einen Kreis, welcher die Winkelseiten in b, c, schneidet, ziehe bc, und beschreibe über bc als Grundlinie in der Ebene bac ein gleichschenkliges Dreieck bdc (I.7), ziehe die gerade Linie ad, so theilt sie den ∠ bac in die Hälfte. denn da ab = ac, bd = cd, ad = ad, so ist (I.5) Δ bad = cad, also ∠ bad = cad.

11.



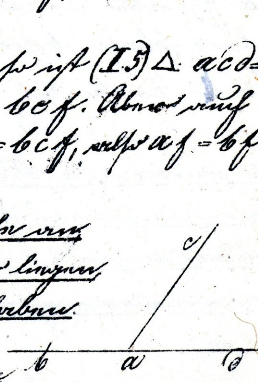
Eine gerade Linie in die Hälfte zu theilen.

Die gegebene Linie sey ab. Neben derselben als Grundlinie beschreibe man in der nämlichen Ebene zwei gleichschenklige Δ abc, abd. (I.7). Man verbinde cd, so schneidet diese gerade Linie die gegebene Linie ab in f, so daß die Theile af, bf, einander gleich sind.

denn da ac = bc, ad = bd, cd = cd, so ist (I.5) Δ acd = bcd, also ∠ acd = bcd, oder ∠ acf = bcf. Aber auch ac = bc, cf = cf, also (I.1) Δ acf = bcf, also af = bf.

12.

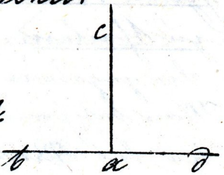
Nebenwinkel sind Winkel, welche an einer geraden Linie neben einander liegen und eine gemeinschaftliche Seite haben.



∠ bac, dac sind Nebenwinkel, da

die sie an der geraden Linie bd liegen und die gemeinschaftliche Seite ac haben.

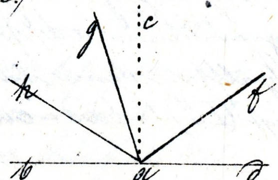
13.



Ein rechter Winkel ist ein Winkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist.

der Winkel cab ist seinem Nebenwinkel cad gleich, und heißt ein rechter Winkel. die Linie ca heißt auf bad senkrecht, lothrecht, (perpendikulär, normal), oder auch das Loth (Perpendikel, Normallinie).

14.

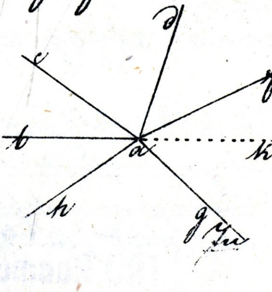


Die Summe zweier Nebenwinkel, und überhaupt die Summe mehrerer Winkel welche an einer geraden Linie in einer Ebene neben einander liegen, ist gleich der Summe zweier rechten Winkel.

Auf der geraden Linie bad, sei ac senkrecht, und in der Ebene bacd seyen die Linien af, ag, ak gezogen, so ist (I.13) $\angle bac = cad = R$, und (I.12) $\angle baf$, daf sind Nebenwinkel. Aber $\angle baf = bac + caf = R + caf$, $\angle daf = cad - caf = R - caf$, also $\angle baf + caf = 2R$.

Da $\angle baf = bak + kag + gaf$, so ist auch die Summe der Winkel $bak + kag + gaf + fad = 2R$

15.



Die Summe aller Winkel welche in einer Ebene um einen Punkt herum liegen, ist gleich der Summe von vier rechten Winkeln.

Zu

In einer Ebene seyen die Linien ab, ac, ad, af, ag, ah, aus einem Punkte a gezogen. Man verlängere die ba nach k, so ist (I.14)

$\angle bac + cad + daf + fak = 2R$

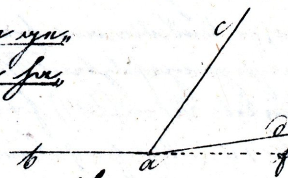
$\angle gak + gah + hab \quad = 2R$

da aber $\angle fak + gak = fag$, so folgt

$\angle bac + cad + daf + fag + gah + hab = 4R$

16.

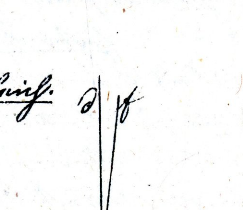
<u>Wenn zwei Winkel, welche einen gemeinschaftlichen Spitze und Seite haben, zusammen zwei rechte betragen, so liegen die anderen beiden Winkelseiten in gerader Linie.</u>



Es sey $\angle bac + cad = 2R$. Wäre bad keine gerade Linie, und man verlängerte ba nach f, so würde (I.14) $\angle bac + caf = 2R$, also $\angle bac + cad = bac + caf$, also $\angle cad = caf$ seyn, was unmöglich ist; also muss bad eine gerade Linie seyn.

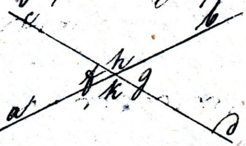
17.

<u>Alle rechte Winkel sind einander gleich. Oder auf eine gerade Linie lässt sich aus einem ihrer Punkte in einer Ebene nur eine einzige senkrechte Linie ziehen.</u>



Es seyen auf ab in einer Ebene zwei rechte Winkel dab, fab gesetzt, und es sey $\angle dab <$ als fab. Da $\angle dab = R$, so ist (I.13) $\angle dab = dac$, also $\angle dac <$ als fab. Da $\angle fab = R$, so ist (I.13) $\angle fab = fac$. Also $\angle dac <$ als fac. Dieses ist unmöglich. Also kann $\angle dab$ nicht kleiner als fab seyn. Ebenso beweiset man, dass $\angle dab$ nicht grösser als fab seyn...

seyn kann. Also sind die rechten Winkel dab, fab, einander gleich, und die Lothe ad, af, fallen zusammen.

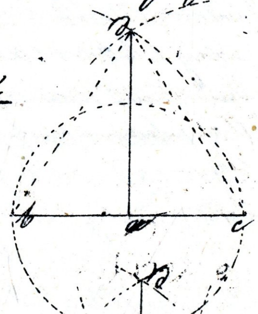


18.

Scheitelwinkel oder Verticalwinkel, welche entstehen, wenn zwei gerade Linien einander durchschneiden, sind einander gleich.

Wenn die geraden Linien ab, cd, einander durchschneiden, so sind die an ihrem Durchschnittspunct einander entgegengesetzten Winkel f, g, und h, k, Scheitelwinkel. Aber (I 14) $f+h=2R$, $h+g=2R$, also $f+h=h+g$, also $f=g$. Ferner $g+k=2R$, also $h+g=g+k$, also $h=k$.

19.

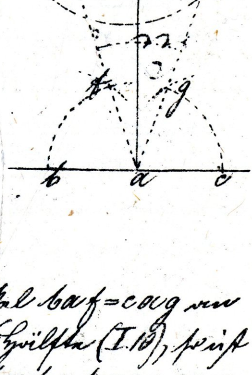


Auf eine gerade Linie aus einem ihrer Puncte eine senkrechte Linie zu errichten.

Die gegebene gerade Linie sey bc, ihr gegebener Punct sey a.

Erste Art.

Man schneide aus a auf bc zwei gleiche Stücke ab, $ab=ac$ (I. 6), errichte über bc als Grundlinie ein gleichschenkliges Dreieck bdc (I. 7) ziehe ad, so ist ad lothrecht auf bc. Denn $ab=ac$, $bd=cd$, $ad=ad$ also (I. 5) $\triangle abd = acd$, also $\angle bad = cad$, also $\angle bad = R$ (I. 13)



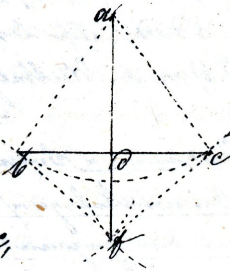
Zweite Art.

Man setze an bc in a zwei gleiche Winkel $baf = cag$ an (I 8), theile den $\angle fag$ durch ad in die Hälfte (I. 10), so ist ad lothrecht auf bc. Denn (I 14) $\angle baf + fag + cag = 2R$, $\angle baf = cag$, $fag = 2 \cdot fad$, also $2\,baf + 2\,fad = 2R$, also $\angle baf + fad = R$, also $\angle bad = R$

Auf

Auf diese Art verfahren die Feldmesser, um auf dem Felde, wo sich die erste Art nicht anwenden läßt, senkrechte Linien zu ziehen. Mit Hülfe eines einfachen Instruments, welches Diopterkreuz heißt, tragen sie einen Winkel, welcher einem rechten Winkel sehr nahe kommt, auf beiden Seiten des Punkts a auf die Linie bc, und theilen den kleinen Zwischenraum fg in die Hälfte.

20.

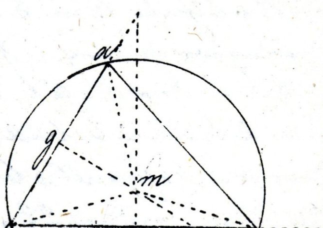


Auf eine gerade Linie aus einem außerhalb derselben gegebenen Punkte eine senkrechte Linie zu fällen.

Die gegebene gerade Linie sey bc,
der außerhalb gegebene Punkt sey a.

Aus a als Mittelpunkt beschreibe man einen Kreis (I.6) welcher die gegebene Linie in b und c schneidet. Ueber bc als Grundlinie errichte man (I.7) ein gleichschenkliges Dreieck bcf in der Ebene des Dreiecks abc, man verbinde af, so schneidet af die bc in d, und ad ist senkrecht auf bc. Denn da $ab = ac$, $bf = cf$, $af = af$, so ist (I.5) $\Delta\, abf = acf$, also $\angle\, baf = caf$, oder $\angle\, bad = cad$. Aber $ab = ac$, $ad = ad$, also (I.1) $\Delta\, abd = acd$, also $\angle\, adb = adc$, also (I.13) $\angle\, adb = R$.

21.



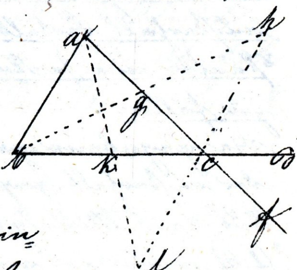
Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

Das gegebene Dreieck sey abc.
Man theile (I.11) ab in g, bc in d, in die Hälfte, errichte (I.19) auf ab in g, auf bc in d senkrechte Linien in der Ebene

des

das $\triangle$ abc, so daß diese senkrechten Linien gehörig verlängert, die Seiten des $\triangle$ abc schneiden. Der Durchschnittspunkt m der beiden senkrechten Linien ist der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises. Denn, da $ag = bg$, $mg = mg$, $\angle agm = bgm = R$, so ist (I.1) $\triangle agm = bgm$, also $am = bm$. Da $bd = cd$, $md = md$, $\angle bdm = cdm = R$, so ist (I.1) $\triangle bdm = cdm$, also $bm = cm$. Also $am = bm = cm$, also (I.6) m der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises.

22.



In einem Dreieck ist der Außenwinkel größer als jeder von den gegenüberliegenden inneren Winkeln.

Das $\triangle$ abc hat in c den Außenwinkel $acd = bcf$ (I.18), die gegenüberstehenden innern Winkel sind bac; abc.

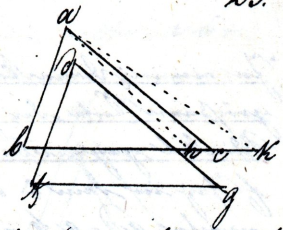
Man theile ac in g in die Hälfte (I.11), ziehe bg, verlängere sie nach h, so daß $gh = bg$ sey, verbinde ch, so ist $ag = cg$, $bg = gh$, $\angle agb = cgh$ (I.18) also (I.1) $\triangle agb = cgh$, also $\angle ach = bag = bac$. Aber $\angle acd >$ als ach, also $\angle acd > bac$.

Man theile bc in k in die Hälfte (I.11) ziehe ak, verlängere sie nach l, so daß $kl = ak$, verbinde cl, so ist $bk = ck$, $ak = kl$, $\angle akb = ckl$ (I.18) also (I.1) $\triangle akb = ckl$, also $\angle bcl = abk = abc$. Aber $\angle bcf >$ als bcl, also $\angle bcf >$ als abc, und auch $\angle acd >$ als abc.

23

Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel und der nicht von ihnen eingeschlossene Seite gegenseitig gleich sind,

so



<u>so decken die Dreiecke einander.</u>

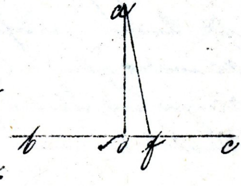
d. h. alsdann sind auch der dritte Winkel und die beiden andern Seiten gegenseitig gleich. Es sey $ab = df$, $\angle abc = dfg$, $\angle acb = dgf$.

Wäre $fg <$ als bc, so mache man $bk = fg$, verbinde ak, so ist $ab = df$, $bk = fg$, $\angle abk = dfg$, also (I.1) $\Delta\, abk = dfg$, also $\angle akb = dgf$. Aber $\angle dgf = acb$, also $\angle akb = acb$, was unmöglich ist, da (I.22) $\angle akb >$ als acb.

Wäre $fg >$ als bc, so mache man $bk = fg$, verbinde ak, so ist $ab = df$, $bk = fg$, $\angle abk = dfg$, also (I.1) $\Delta\, abk = dfg$, also $\angle akb = dgf$. Aber $\angle dgf = acb$, also $\angle akb = acb$, was unmöglich ist, da (I 22) $\angle acb >$ als akb.

Da fg weder kleiner noch größer als bc seyn kann, so ist $fg = bc$. Da nun auch $ab = df$, $\angle abc = dfg$, so ist (I.1) $\Delta\, abc = dfg$, also auch $\angle bac = fdg$, und $ac = dg$.

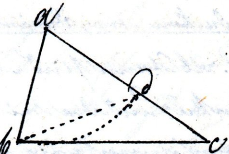
24.



<u>Von einem Punkte, welcher außerhalb einer geraden Linie liegt, läßt sich nur eine einzige senkrechte Linie auf die gerade Linie fällen.</u>

Denn es seyen ad, af, zwei verschiedene senkrechte Linien, so bilden sie ein $\Delta\, adf$, in welchem (I.22) $\angle adb >$ als afb. Dieses ist aber unmöglich, da $\angle adb = R$, $\angle afb = R$, also (I.17) $\angle adb = afb$ ist. Also können die beiden senkrechten Linien ad, af, kein Dreieck mit einander bilden, und fallen also zusammen.

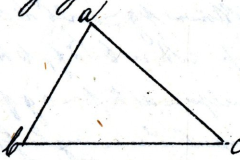
25.



In einem Dreiecke liegt der größeren Seite der größere Winkel gegenüber.

Es sey in dem △ abc die Seite ac > als ab. Man mache ad = ab, ziehe bd, so ist in dem △ bdc der ∠adb > als acb (I. 22). Aber (I. 3) ∠abd = adb, also ∠abd > als acb, also um so mehr ∠abc > als acb. Es liegt aber ∠abc der größeren Seite ac, und ∠acb der kleineren Seite ab gegenüber.

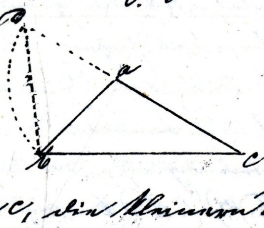
26.



In einem Dreiecke liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Es sey in dem △ abc, der Winkel b > als c. Wäre ab = ac, so müßte (I. 3) ∠b = c seyn, also kann nicht ab = ac seyn. Wäre ab > als ac, so müßte (I. 25) ∠c > als b seyn. Also kann nicht ab > als ac seyn. Da also ac weder gleich ab noch kleiner als ab seyn kann, so muß ac größer als ab seyn. Es liegt aber ac dem größeren Winkel b und ab dem kleineren Winkel c gegenüber.

27.



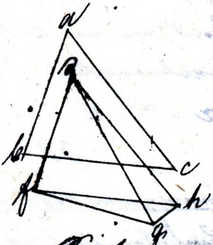
In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

In dem △ abc seyen ab, ac, die kleineren Seiten bc die größere Seite. Man verlängere ca nach d, und mache ad = ab, so ist cd gleich der Summe der Seiten ab, ac. Da ad = ab, so ist (I. 3) ∠cdb = abd; aber ∠cbd > als abd also

∠cbd.

$\angle cbd >$ als cdb, also (I 26) $cd > bc$, also $ab + ac > bc$.

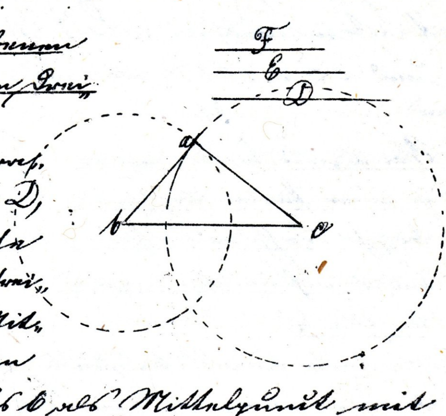
28.



Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten gegenseitig gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so liegt dem größeren Winkel die größere Seite gegenüber.

Es sey in den Δ abc, dfg, die Seite $ab = df$, $ac = dg$, aber $\angle bac >$ als fdg. In der Ebene des Δ dfg mache man (I. 8) den $\angle fdh = bac$ und $dh = ac$, so ist auch $dh = dg$, und (I. 1) Δ $fdh = bac$, also $fh = bc$. Da $dh = dg$ so ist (I 3) $\angle dgh = dhg$, aber $\angle fgh > dgh$, also $\angle fgh >$ als dhg, aber $\angle dhg >$ als $\angle fhg$, also um so mehr $\angle fgh > fhg$, also (I 26) $fh >$ als fg, also auch $bc >$ als fg.

29.



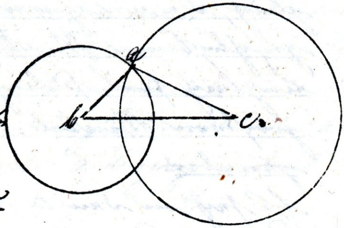
Aus drei gegebenen geraden Linien ein Dreieck zu bilden.

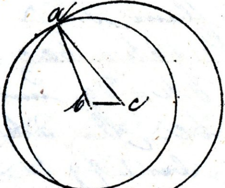
Die gegebenen geraden Linien seyen D, E, F. Man mache $bc = D$, und beschreibe aus c als Mittelpunkt mit dem Halbmesser E, aus b als Mittelpunkt mit dem Halbmesser F Kreise, welche in

einem

einer gemeinschaftlichen Ebene liegen. Wenn diese Kreise einander in a durchschneiden, und man ab, ac, zieht, so ist abc das verlangte Dreieck, weil (I.6) ab = F, ca = E ist.

30

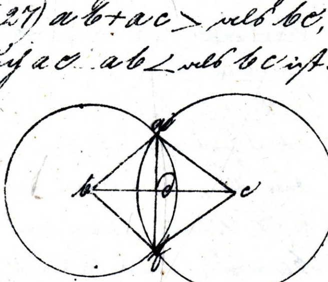




<u>Wenn zwei Kreise einander durchschneiden, so ist die Summe ihrer Halbmesser größer als die Entfernung der Mittelpunkte, und der Unterschied ihrer Halbmesser kleiner als die Entfernung der Mittelpunkte.</u>

Wenn die Kreise, deren Mittelpunkte b, c sind, einander in a durchschneiden, und man ab, ac, bc, zieht, so entsteht ein Dreieck abc, in welchem ab, ac die Halbmesser, bc die Entfernung der Mittelpunkte ist, in welchem also (I.27) ab + ac > als bc, und ac < ab + bc, also auch ac - ab < als bc ist.

31.



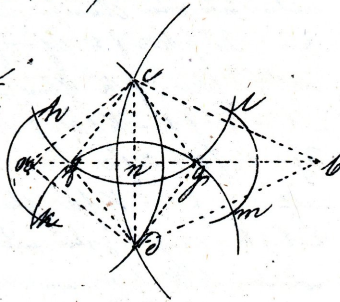
<u>Wenn zwei Kreise einander in einem Punkte durchschneiden, so durchschneiden sie einander noch in einem zweiten Punkte.</u>

Die Kreise, deren Mittelpunkte b, c sind, durchschneiden einander in a. Man fälle aus a auf bc die senkrechte Linie ad (I.20) verlängere sie

weit

nach f, und mache $df = ad$. Da auch $bd = bd$, $\angle adb$ $= bdf = R$, $cd = cd$, $\angle adc = cdf = R$, so ist (I.1) $\Delta adb = bdf$, $\Delta adc = cdf$, also $bf = ab$, $cf = ac$, also liegt (I.6) der Punkt f im Umfange beider Kreise, eben so wie der Punkt a.

32.



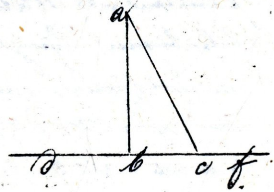
Wenn zwei Punkte gegeben sind, mehrere andere Punkte in derselben geraden Linie, durch bloße Kreisdurchschnitte ohne Lineal, zu finden.

Die gegebenen Punkte seyen a, b. Aus diesen Punkten als Mittelpunkten beschreibe man mit beliebigen ungleichen Halbmessern Kreise in einer Ebene, welche einander in c, d, durchschneiden. Da $ca = da$, $cb = db$, $ab = ab$, so ist (I.5) $\Delta acb = adb$, also $\angle cab = bad$. Wenn cd, ab, einander in n durchschneiden, so ist also $\angle can$ $= dan$, $ca = da$, $an = an$, also (I.1) $\Delta can = dan$, also $cn = dn$ und $\angle cna = dna = R$ (I.13).

Aus c, d, als Mittelpunkten beschreibe man in der Ebene acbd, mit beliebigen gleichen Halbmessern Kreise, welche einander in f, g, durchschneiden. Da $cn = dn$, $cf = df$, $fn = fn$, so ist (I.5) $\Delta cfn = dfn$, also $\angle cnf = dnf$ $= R$. Da $cn = dn$, $cg = dg$, $gn = gn$, so ist (I.5) $\Delta cng = dng$, also $\angle cng = dng = R$. Da $\angle cnf = R$, $\angle cng = R$, so liegen (I.16) die Punkte f, n, g, in gerader Linie. Da $\angle cnf = R$, $\angle cna = R$, so liegen (I.17) die Punkte a, f, n, in gerader Linie. Da $\angle cng = R$ $\angle cnb =$ R, R, so liegen die Punkte b, g, n, in gerader Linie. Also liegen die Punkte f, g, in der geraden Linie a b.

Um noch mehrere Punkte zu finden, beschreibe man aus f, g, als Mittelpunkten mit beliebigen ungleichen Halbmessern in der Ebene a c b d Kreise, welche die beiden vorigen Kreise in k, K und l, m, durchschneiden. Da $fk = fK$, $cf = df$, $ck = dK$, so ist (I 5) $\Delta\, cfk = dfK$, also $\angle cfk = dfK$. Aber (I. 14) $\angle cfn + cfk + kfa = 2R$. $\angle dfn + dfK + Kfa = 2R$, also $\angle cfn + cfk + kfa = dfn + dfK + Kfa$. Aber $\angle cfn = dfn$, $\angle cfk = dfK$, also $\angle kfa = Kfa$. Eben so wird bewiesen, daß $\angle lgb = mgb$. Da nun $fk = fK$, $gl = gm$, so werden kK, lm, von ab senkrecht halbirt. Also kann man sich der Punkte k, K, und l, m, wie der Punkte c, d, bedienen.

33.

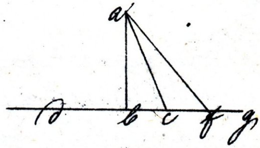


In einem rechtwinkligen Dreiecke ist jeder der beiden andern innern Winkel kleiner als ein rechter.

Oder wenn man von einem Punkte nach einer geraden Linie eine senkrechte und eine schiefe Linie zieht, so ist von den beiden ungleichen Nebenwinkeln der schiefen derjenige dessen Öffnung dem Lothe zugekehrt ist, der kleinere, und derjenige, dessen Öffnung vom Lothe abgekehrt ist, der größere. Ferner heißt Schluß dieser Annahme.

Denn es sey $\angle abc = abd = R$. Aber (I 22) $\angle acb < abd$, und $\angle acf >$ als abc, also $\angle acb < R$, und $\angle acf > R$.

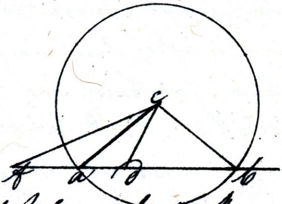
34.



Das Loth ist die kürzeste Entfernung eines Punkts von einer geraden Linie.

Es sey ab senkrecht auf dg, so ist (I.33) ∠ acb < R, ∠ afb < R, also ist (I.26) in dem Δ abc die Seite ab < als ac, und in dem Δ abf die Seite ab < als af. Auch ist (I.33) ∠ acf > R, also ist in dem Δ acf die Seite ac < af.

35.

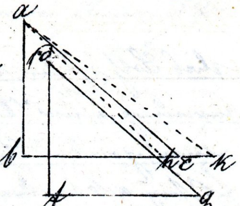


Wenn ein Kreis von einer geraden Linie durchschnitten wird, oder in einem gleichschenkligen Dreiecke, entstehen Dreiecke, in denen zwei Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, welche einander aber nicht decken.

Wenn der Kreis c die gerade Linie bf, in a, b, durchschneidet, so entstehen zwei ungleiche Dreiecke cfa, cfb, in welchen aber zwei Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, nämlich cf = cf, ca = cb, ∠ cfa = cfb.

In dem gleichschenkligen Dreiecke abc entstehen zwei ungleiche Dreiecke adc, bdc; in welchen ebenfalls zwei Seiten und der nicht eingeschlossenen Winkel gegenseitig gleich sind, nämlich cd = cd, ca = cb, ∠ cad = cbd.

36.



Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken die Hypotenuse und eine Kathete gegenseitig gleich sind, so decken sie einander.

d. h. die zweite Kathete, und die beiden andern Winkel sind dann ebenfalls gegenseitig gleich.

Die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, heißt die Hypotenuse, die Seiten welche den rechten Winkel einschließen heißen die Katheten. In den Δ abc, dfg, ist $\angle b = f = R$, $ac = dg$, $ab = df$.

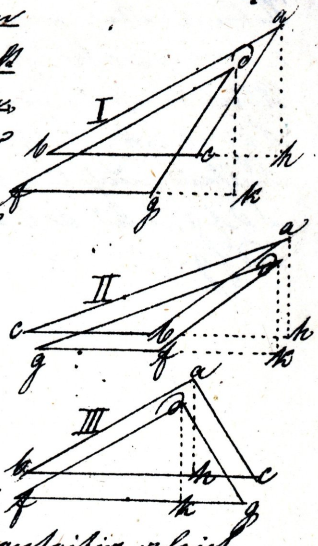
Es sei fg $<$ als bc. Man mache $bk = fg$, ziehe ak, so ist $ab = df$, $bk = fg$, $\angle b = f = R$, also (I.1) $\Delta\, abk = dfg$, also $ak = dg$. Aber $dg = ac$, also $ak = ac$, was unmöglich ist, da (I.34) ak $<$ als ac sein muß. Also kann nicht fg $<$ als bc sein.

Es sei fg $>$ als bc. Man mache $bk = fg$, ziehe ak, so ist $ab = df$, $bk = fg$, $\angle b = f = R$, also (I.1) $\Delta\, abk = dfg$, also $ak = dg$. Aber $dg = ac$. Also $ak = ac$, was unmöglich ist, da (I.34) ak $>$ als ac sein muß. Also kann nicht fg $>$ als bc sein.

Da fg weder kleiner noch größer als bc sein kann, so ist $fg = bc$. Aber auch $ab = df$, $\angle b = f = R$, also (I.1) $\Delta\, abc = dfg$, also auch $\angle a = d$ $\angle c = g$.

37.

<u>Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der nicht eingeschlossene Winkel gegenseitig gleich sind, der andere nicht eingeschlossene Winkel aber in beiden kleiner oder in beiden größer als ein rechter ist, so decken die Dreiecke einander.</u>



d. h. die dritte Seite und die beiden andern Winkel sind dann ebenfalls gegenseitig gleich.

In den Δ abc dfg, ist ab = df, ac = dg, $\angle$abc = dfg. Man fälle (I 20) aus a auf bc oder ihre Verlängerung die senkrechte Linie ah, aus d auf fg oder ihre Verlängerung die senkrechte Linie dk, so ist ab = df, $\angle$b = f, $\angle$h = k = R, also (I. 23) Δ abh = dfk, also bh = fk, ah = dk. Da ac = dg, ah = dk, $\angle$h = k = R, so ist (I. 30) Δ ach = dgk, also ch = gk, und $\angle$ach = dgk.

Der andere nicht eingeschlossene Winkel der Dreiecke abc, dfg, ist acb, dgf. dieser Winkel ist entweder der Nebenwinkel des Winkels ach, dgk (I), oder er ist ihm selbst gleich (II und III). Vermöge der Voraussetzung aber, soll, wenn acb der Nebenwinkel von ach ist, auch dgf der

Ne

Nebenwinkel von dgk sein, und wenn $\angle acb = ack$ ist, auch $\angle dgf = dgk$ sein. Aber es ist bewiesen worden daß $\angle ack = dgk$ ist. Folglich ist in allen obigen Fällen auch $\angle acb = dgf$. Aber auch $\angle abc = dfg$, und $ab = df$. Also (I.23) $\triangle abc = dfg$.