ISSN 0494-7304 0132-053x

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

770

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ СУММИРУЕМОСТИ

Matemaatika- ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

TARTU 1987

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a. VIHIK 770 ВЫПУСК ОСНОВАНЫ В 1893.г

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ СУММИРУЕМОСТИ

Matemaatika-ja mehhaanika-alaseid töid
Труды по математике и механике

ТАРТУ 1987

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 3-6

DOTSENT TAMARA SÕRMUS 60

1986. aastal tähistas oma juubelit Eesti matemaatik ja matemaatika-õppejõud Tamara Sõrmus. Tamara Sõrmus töötab kõrgkooli-õppejõuna alates 1954. aastast. Nende 32 tööaasta jooksul on tema käe all hariduse saanud mitu Eesti matemaatikute, füüsikute, matemaatika-, füüsika- ja tööõpetuse õpetajate põlvkonda. Käesoleval ajal töötab Tamara Sõrmus dotsendina E.Vilde nim. Tallinna Pedagoogilise Instituudi matemaatika kateedris, olles oma kõrge pedagoogimeisterlikkuse, suutlikkuse ja isikliku sarmi poolest eeskujuks ja autoriteediks nii kolleegidele kui üliõpilastele. Tamara Sõrmuse tee oma elukutse juurde oli nii mõneski mõttes ebatavaline ja väga huvitav.

Tamara Sõrmus sündis Tartus 29. novembril 1926.aastal. Tema haridustee kulges läbi sõjakeerise. Tal tuli keskharidust omandades õppida nii eesti, saksa kui ka vene õppekeelega koolides. Keskkooli lõputunnistuse sai ta 1949.aastal Tartu I Töölisnoorte Koolist, olles selle kooli parimaks lõpetajaks.Alates üheksandast eluaastast hakkas ta õppima balletti. Balletiõpingud "Vanemuise" balletistuudios katkestas sõda. Ent sõja lõppedes asus ta 1944. aastal tööle "Vanemuise" balletitruppi. Baleriinina töötas Tamara Sõrmus 7 aastat, tantsides mitmetes balletides peaosi. Nii osales ta solistina sellistes balletides nagu S.Prokofjevi "Romeo ja Julia", A.Adami "Giselle", M.Tšulaki "Kahe isanda teener", E.Kapi "Kalevipoeg" ja B.Assafjevi "Bahtšisarai purskkaev".

Pöördeliseks aastaks Tamara Sõrmuse elus oli 1949. aasta, mil ta asus TRÜ-sse õppima matemaatika erialale. Sellise otsustava sammu astumise põhjustas ühelt poolt suur huvi matemaatika vastu, teiselt poolt aga baleriinile ohtlik seljavigastus. Esialgu jätkas ta õppetöö kõrvalt tööd teatris. Ent nagu ta ise meenutab: "Kahte "isandat" suutsin teenida vaid kaks aastat. Ei jätkunud jõudu jagada end kahe ülimat pingutust nõudva ala vahel. Üks võttis jäägitult füüsilise jõu, teine - vaimse. Tuli teha kindel ja ühene valik." Nii lahkus ta 1951. aastal teatrist, pühendudes täielikult matemaatikaõpingultele. Ülikooli lõpetas 1954. aastal. Aastatel 1959-1961 õppis ta TRÜ-s aspirantuuris ning kaitses 1963. aastal dissertatsiooni teemal "Merceri tüüpi teoreemid kahekordsete jadade jaoks", mille põhjal talle omistati füüsika-matemaatikakandidaadi kraad. Kandidaadidissertatsioon valmis professor G.Kangro juhendamisel. Dotsendi kutse omistati talle 1968. aastal.

Pärast ülikooli lõpetamist 1954. aastal asus Tamara Sõrmus tööle õppejõuna - esialgu korraga EPA-s ja TRÜ-s. Aastatel 1955-1975 töötas TRÜ-s.

Tamara Sõrmusest kujunes peagi TRÜ matemaatilise analüüsi kateedri silmapaistev õppejõud. Tema metoodiliselt hästi läbimõeldud kõrgetasemelised loengud ja praktikumid leidsid kohe tunnustust kuulajate poolt. Nendel aastatel alustas ta ka teaduslikku uurimistööd, millest kirjutame allpool lähemalt. TRÜ-s töötamise ajal tegi ta ära suure töö õppevahendite kirjastamisel. Ta kirjutas koos G.Vainikkoga TRÜ rotaprindis ilmunud kaheosalise õppevahendi "Harilikud diferentsiaalvõrrandid"[1] [14,15] ning seejärel ka õpiku "Harilikud diferentsiaalvõrrandid", mis ilmus kirjastuse "Valgus" väljaandena [21]. Samuti oli ta õppevahendi "Matemaatilise analüüsi praktikum I" [16] kaasautor.

Alates 1975. aasta septembrist töötab Tamara Sõrmus dotsendina TPedI matemaatika kateedris. Lühikese ajaga muutus ta selle kateedri üheks juhtivaks õppejõuks, paistes oma töös silma kohusetunde, printsipiaalsuse ning pedagoogimeisterlikkusega. Ta on osanud panna üliõpilasi oma õppeaines kogu semestri jooksul pidevalt tööle ning suunata neid tulemuslikule teaduslikule tööle matemaatilise analüüsi alal. Paljud tema juhendamisel valminud üliõpilastööd on saavutanud esimesi kohti nii üleinstituudilistel kui vabariiklikel üliõpilastööde konkurssidel. Tähtsamaid üliõpilastöödes saadud teaduslikke tulemusi on publitseeritud [39]. Dots. T.Sõrmus on TPedI-s töötades lugenud loenguid ja juhendanud praktikume matemaatilises analüüsis ning lugenud valikkursusi integraaliteoorias ning funktsionaalanalüüsis ,ate,aatika ja füüsika eriala üliõpilastele, samuti kõrgemas matemaatikas üldtehniliste distsipliinide eriala üli-

---

[1] Viide nurksulgudes on antud T.Sõrmuse poolt publitseeritud tööde nimekirjale, mis on sellele artiklile järgneva artikli "К шестидесятилетию со дня рождения доцента Т. Сырмус" lõpus.(lk. 9).

mas matemaatikas üldtehniliste distsipliinide eriala üliõpilastele. Üliõpilased hindavad dots. T.Sõrmust kõrgelt tema heatasemeliste loengute, heatahtliku ja abistava suhtumise, aga ka nõudlikkuse eest. Paljudele praegustest ja endistest üliõpilastest on dots. T.Sõrmus pedagoogina üheks eredamaks eeskujuks.

TRÜ-s töötamise perioodil oli ta mitmetel juhtivatel kohtadel a/ü organisatsioonis, töötas matemaatikateaduskonna prodekaanina ning metoodikanõukogu liikmena.

Juubilar on alati aktiivselt osalenud ühiskondlikus elus. Ta on olnud õpperühmade juhendajaks TRÜ-s kui ka TPed-s. Aastatel 1975-76 oli ta TPedI matemaatika-füüsikateaduskonna a/ü büroo esimees, aastatel 1976-79 - TPedI matemaatika-füüsikateaduskonna prodekaan, 1979-81 - TPedI a/ü komitee esimees, 1984-86 - ühingu "Teadus" TPedI algorganisatsiooni büroo esimees. Käesoleval ajal on ta vabariikliku a/ü komitee ühe töökomisjoni liige, TPedI ÜTÜ matemaatikaringi teaduslik juhendaja ja instituudi konkursikomisjoni liige ning matemaatika ja füüsika eriala kolmanda kursuse juhendaja.

Tamara Sõrmus alustas viljakat teaduslikku tegevust Merceri tüüpi teoreemide uurimisega. Kohe esimeses töös [1] annab ta Merceri põhiteoreemi täpse üldistuse kahekordsetele jadadele. See üldistus erineb sellest üldistusest, mille andis Mercer ise. Järgmises töös [2] Tamara Sõrmus tõestab Merceri teoreemi harilike jadade Hausdorfi teisenduse jaoks, kust erijuhul saab seda tüüpi teoreemid Cesàro ja Hölderi teisenduste jaoks, mis üldistavad nende teisenduste kohta teadaolevaid tulemusi sellelt alalt.

Ulatuslikud uurimused on T.Sõrmus läbi viinud Tauberi tüüpi teoreemide üldise teooria arendamisel.

Olgu A ja B mingid lineaarsed arvridade summeerimismenetlused, mille summeerimisväljade vahel on sisalduvus $A' \supset \supset B$. Olgu T_0 mingi jadade klass. Jada $x=(x_k)$ korral tingimust $x \in T_0$ nimetatakse Tauberi tingimuseks menetlusele A, kui seosest $x \in A'$ järeldub, et $x \in B'$. Kui seejuures tingimus $x \in T$, kus $T \supset T_0 \cap A'$, on ka Tauberi tingimus menetlusele A, siis seda tingimust nimetatakse nõrgendatud Tauberi tingimuseks menetlusele A.

Oma töödes [37,41] töötas T.Sõrmus välja meetodi Tauberi tingimuste nõrgendamiseks ning annab saadud tulemuste mitmesuguseid rakendusi.

Analoogilised uurimused on Tamara Sõrmus läbi viinud ka absoluutse summeeruvuse korral, samuti ka summeerimismenetluste tõkestatuse väljade korral.

Lisaks viljakale teaduslikule tegevusele on dots. T. Sõrmus TPedI-s töötamise ajal kirjutanud kaks õppevahendit üliõpilastele: "Meetrilised ruumid" [32] ja "Matemaatilise analüüsi töövihik. Ühemuutuja funktsiooni piirväärtus" [40]. Need õppevahendid hõlmavad materjali TPedI matemaatika ja füüsika eriala õppeprogrammi vastavate teemade ulatuses. Nimetatud õppevahendite metoodiline ülesehitus ning sisuline põhjalikkus võimaldavad soovi korral neid kasutada ka teiste kõrgkoolide matemaatilist analüüsi õppivatel üliõpilastel. Dots. T.Sõrmus on samuti osalenud matemaatilise analüüsi elemente käsitlevate metoodiliste artiklite kirjutamisel keskkooli matemaatikaõpetajatele ([28], [31]) ning esinenud mitmete ettekannetega matemaatilise analüüsi õpetamise metoodika alalt konverentsidel nii meie vabariigis kui väljaspool. ([29], [30], 33, [34], [38]).

Eduka pedagoogilise ja teadusliku töö eest autasustati Tamara Sõrmust ENSV Kõrgema ja Keskerihariduse ministeeriumi aukirjaga.

A.Tali, E.Reimers, E.Jürimäe

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 7-11

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ ДОЦЕНТА Т.СЫРМУС

Доцент кафедры математики Таллинского педагогического института Тамара Сырмус родилась 29 ноября 1926 года в городе Тарту.

В 1949 году Т.Сырмус окончила Первую Тартускую среднюю школу рабочей молодежи. Параллельно с учебой она с девятилетнего возраста занималась в балетной студии. С 1944 по 1951 год она работала в театре "Ванемуйне" артисткой балета.

В 1949 году Тамара Сырмус поступила в Тартуский государственный университет на отделение математики, которое она окончила в 1954 году. Последовали годы работы в Эстонской сельскохозяйственной академии и в Тартуском государственном университете. С 1959 года по 1961 год она училась в аспирантуре при университете, где под руководством профессора Г. Кангро написала кандидатскую диссертацию по теме "Теоремы типа Мерсера для двойных рядов", которую она защитила в 1963 году, получив степень кандидата физико-математических наук. С 1975 года по сей день она работает в Таллинском педагогическом институте. В 1968 году Т.Сырмус присуждено ученое звание доцента.

Научные исследования Т.Сырмус начала с изучения теорем типа Мерсера. В первой работе [1] она дает точное обобщение основной теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей. Это обобщение отличается от обобщения этой теоремы на двойные последовательности, которое дано самим Мерсером. Затем в работе [2] Т.Сырмус доказывает теорему Мерсера на случай преобразования Хаусдорфа обычных последовательностей, откуда выводятся, в частности, теоремы типа Мерсера для преобразований Чезаро и Гельдера. Не делая упрощающих предположений, ей и в этом случае удается получить обобщения известных результатов в этой области для методов суммирования Чезаро и Гельдера.

В работе [6] Т.Сырмус рассматривает теоремы типа Мерсера для стесненной сходимости двойных последовательностей.

Много научных исследований Т.Сырмус провела по общей теории тауберовых теорем [11,22,25,27]. Пусть A и B – линейные методы суммирования числовых рядов, между полями суммируемости, абсолютной суммируемости и ограниченности которых имеются соответственно включения $A' \supset B'$, $|A|' \supset |B|'$ и $A_0 \supset B_0$. Пусть T_0 – какой-нибудь класс последовательностей. Для ряда $\sum u_k$ с последовательностью частичных сумм $x = (x_k)$ условие $x \in T_0$ называют B-тауберовым для метода A, если из $x \in A'$ следует $x \in B'$. Если при этом условие $x \in T$, где $T \supset T_0 \cap A'$ также B-тауберово для метода A, то это условие называют ослабленным B-тауберовым условием для метода A. Аналогично определяются тауберовы условия и для методов $|A|$ и A_0.

Если $B=E$, т.е. идентичный метод суммирования, то говорят просто о тауберовых условиях для методов A, $|A|$ и A_0 соответственно.

В статье [37] Т.Сырмус дает один метод ослабления B-тауберовых условий для метода A в общих тауберовых теоремах и приводит применения полученных результатов. В статье [41] аналогичным методом даются ослабленные B-тауберовы условия для методов A, а также для методов $|A|$ и A_0, откуда, в частности, при $B=E$ вытекают многие известные результаты.

В статье [42] Т.Сырмус показывает как по тауберовым условиям можно классифицировать методы суммирования.

Многие свои результаты Т.Сырмус обобщает на последовательности элементов банахового пространства [27,36].

Во время своей многолетней педагогической работы в высшей школе Т.Сырмус вела интенсивную методическую работу. Она написала ряд учебных пособий [14,15,16,32] и учебник по дифференциальным уравнениям [21]. Она выступала содержательными методическими докладами почти на всех зональных совещаниях-семинарах заведующих кафедрами и ведущих преподавателей математики вузов Белорусской, Латвийской, Литовской, Эстонской ССР и Калининградской области РСФСР [20, 29,33,38], а также на республиканских конференциях ЭстССР [26,30,34]. Во время работы в Таллинском педагогическом институте Т.Сырмус много занималась проблемами методики школьной математики [28,30,31].

Т.Сырмус выполняла ряд серьезных общественных поручений: была продеканом факультета как в ТГУ так и в ТПедИ, председателем профсоюза института, научным руководителем студенческого научного кружка по математике, членом конкурсных комисии института и т.д. Все общественные поручения она выполняла с исключительной добросовестностью.

За успешную педагогическую и научную работу доц. Т.Сырмус награждена почетной грамотой Минвуза ЭССР.

Э.Реймерс, Э.Юримяэ

СПИСОК НАУЧНЫХ ТРУДОВ Т.СЫРМУС

1. Об одном обобщении теоремы Мерсера на случай двойных последовательностей. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 156-168.
2. О некоторых обобщениях теоремы Мерсера. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 169-184.
3. О некоторых обобщениях теоремы Мерсера для двойных последовательностей. – Изв. АН ЭССР, сер. физ. мат. и тех. наук, II, № 1, 37-49, 1962.
4. Об обобщенной теореме Мерсера. – Изв. АН ЭССР, сер. физ. мат. и тех. наук, 1962, II, № 2, 99-106.
5. О некоторых обобщениях теорем типа Мерсера для стесненной сходимости. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129,264-273.
6. Теоремы типа Мерсера для стесненной и обыкновенной сходимости. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1962, 129, 274-282.
7. Теоремы типа Мерсера для двойных последовательностей. Диссертация ТГУ. – Тарту, 1963. – 131 л.
8. Теоремы типа Мерсера для двойных последовательностей. – Автореферат дисс. ТГУ. – Тарту, 1963. – 8 с.
9. К пятидесятилетию со дня рождения проф. Г.Кангро. Коллектив авторов: С.Барон, Э.Юримяэ, Э.Реймерс, Т.Сырмус. – Уч зап. Тартуск. ун-та, 1964, 150, 3-11.
10. Работы Тартуских математиков по теории суммирования рядов. Совместно с Э.Юримяэ. – Юбилейные чтения посвящ.памяти П.Г.Боля. Тезисы докл. АН ЛССР, Рига, 1965.
11. Теоремы тауберова типа, связанные с методами Якимовского – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 67-79.
12. Об одной асимптотической задаче. – Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1965, 177, 125-133.
13. 150 лет со дня рождения К.Вейерштрасса(на эст. языке). – Матем. я каазаэг, 1965, 8, 65-76.
14. Обыкновенные дифференциальные уравнения. I (на эст. языке, сов. с Г.Вайникко). – Тарту: Изд. Тартуск. ун-та, 1967, – 212 с.

I5. Обыкновенные дифференциальные уравнения. II (на эст.языке, совм. с Г.Вайникко). - Тарту: Изд. Тартуск. ун-та, I967. - I26 с.

I6. Практикум по математическому анализу. I (на эст. языке, совместно с С.Бароном, Э.Юримяэ, Э.Реймерс, М.Тыннов). - Тарту: Изд. Тартуск. ун-та, I967, - 249 с.

I7. Об абсолютной суммируемости простых и двойных последовательностей методами Хаусдорфа. - Уч. зап. Тартуск.ун-та, I967, 206, I22-I34.

I8. О содержании и развитии теории дифференциальных уравнений. - Матем. я каазаэг, Тарту, I968, № I5, I4-26.

I9. Существование и единственность решения дифф. уравнения. - Матем. я каазаэг, Тарту, I97I, № I7, 23-34.

20. Попытка оценки качества обучения. - Тезисы докладов семинара-сов. преподавателей матем. ВУЗ-ов, Вильнюс, I97I.

2I. Обыкновенные дифференциальные уравнения (учебник на эст. языке, совместно с Г.Вайникко). - Таллин: Валгус, I972. - 403 с.

22. Теоремы тауберова типа для различных видов суммируемости. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 28I, I03-II7.

23. Математическое отделение. - Матем. фак. ТГУ. Тарту,I972, 20-2I.

24. Профессия - математик. - Статья в газете "ТГУ", I972.

25. Несколько обобщенных тауберовых теорем. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, I972, 305, I67-I78.

26. О проведении учебной работы на I курсе и применении тестов для стимулирования студентов к непрерывным занятиям учебой. - III республ. научно-метод. конф. "Научная органиЗ. уч. работы в высшей школе", Матер. конф. Тарту, I973, 74-76.

27. Тауберовы теоремы для рядов банахова пространства. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, I974, 342, I82-I88.

28. О корректности определения понятиия функции. - Нõукогуде Коол, I977, № 9, 745-755.

29. Новые требования к курсу мат. анализа и теории функций в связи с новыми программами по матем. в средней школе. - Тезисы докл. III зон. совещ.-сем. зав. каф. и ведущ. лект. прибалт. респ. Минск, I977, I09-II0.

30. О корректности изложения элементов матем. анализа в школьной мат-ке. - Соврем. пробл. шк-ой мат-ки. Тезисы докл. республ. научно-метод. конф. Тарту, I977, 79-83.

31. Понятие предела в школьной математике (совм. с А. Монаков-Рогозкиным и А.Тали). - Нынкогуде Коол, 1978, № 8, 927-934.
32. Метрические пространства. Отображения в метрических пространствах. - Таллин: Изд. ТПИ, 1979. - 114 с.
33. Тема "метрические пространства" в курсе матем. анализа педагог. ВУЗ-ов, - IУ зан. совещ.-семм зав. каф. и ведущ. лект. матем. прибалт. респ. "Содерж. и мат.препод. мат. курсов в ВУЗ-ах. Аннот. докл." Рига, 1980, 82-83.
34. Об изложении некоторых тем в курсе анализа педагогических институтов. - Тезисы конф. "Теорет. и прикладн.вопросы матем.", Тарту, 1980, 290-292.
35. Ослабление общих абсолютных тауберовых условий. - Тезисы конф. "Теорет. и прикладн. вопр. матем.", Тарту,1980 144-146.
36. Тауберовы теоремы для последовательностей в банаховых пространствах. - 350 лет математики в Тартуск. ун-те. Тезисы докладов, Тарту, 1982, 19-22.
37. Об ослаблении тауберовых о-условий в О-условия. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1982, 596, 75-89.
38. Значимость курсовых работ студентов и научно-исследовательских работ в общей подготовке учителей математики. - Зональное совещ.-семинар зав. каф. и ведущ. лекторов матем. ВУЗ-ов прибалт. респ. Тезисы докладов, Вильнюс, 1983, 183-185.
39. Суммируемые решения дифференциальных уравнений (совм. с Р.Контус и В.Рейнерт). - Тезисы докладов конфер. "Методы алгебры и анализа", Тарту, 1983, 34-36.
40. Рабочая тетрадь по математическому анализу. Предел функции одной переменной. - Таллин: Изд. ТПИ, 1983. - 51 с.
41. Об ослаблении тауберовых условий в однотипные условия. - Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1984, 661, 49-59.
42. Классификация методов суммирования по тауберовым условиям. - Теорет. и прикладн. вопросы матем. I. Тезисы докладов конф. Тарту, 1985, 171-173.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,12-25

О РАЗЛОЖИМОСТИ ГОМОМОРФИЗМОВ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ АЛГЕБР

А. Кокк

Тартуский государственный университет

Пусть K - поле $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ и A - топологическая K-алгебра, т.е. линейное топологическое пространство над K, в котором определено умножение элементов, относительно которого оно является ассоциативной алгеброй и в топологии которого рассматриваемое умножение элементов (как билинейное отображение $A\times A$ в A) раздельно непрерывно. В частном случае, когда умножение элементов алгебры A непрерывно в совокупности, A называется топологической K-алгеброй с непрерывным умножением.

Пусть $\hom(X,Y)$ - множество всех нетривиальных непрерывных K-гомоморфизмов топологической K-алгебры X в топологическую K-алгебру Y, наделенное слабой топологией и пусть $\hom X = \hom(X,K)$ для каждой топологической K-алгебры X. Известно (см., например,[7, стр. 146] или [13,стр. 111]), что $\hom X$ может оказаться пустым множеством. Поэтому всюду в дальнейшем будем рассматривать только такие топологические K-алгебры X, для которых множество $\hom X$ непусто. Некоторые классы таких топологических K-алгебр приведены в [12, стр. 13], [13, стр. 95].

Топологическую K-алгебру B будем называть модуль-алгеброй относительно K-алгебры A или коротко (A,K)-алгеброй, если

1) A есть топологическая K-алгебра,

2) B есть A-бимодуль

и

3) $a(b_1b_2)=(ab_1)b_2$, $(b_1b_2)a = b_1(b_2a)$ и и $(b_1a)b_2 = b_1(ab_2)$ для всех $b_1, b_2\in B$ и $a\in A$.

При этом, если алгебра A имеет единицу (здесь и всюду в дальнейшем через e_A обозначается единица алгебры A), то $e_Ab = b = be_A$ для всех $b\in B$, а если алгебра B имеет единицу e_b, то $ae_b = e_ba$ для всех $a\in A$.

Пусть теперь C - (A,K)-алгебра, X - подалгебра алгебры C и E — топологическая K-алгебра. Если

(а) $ax = xa$ для всех $x \in X$ и $a \in A$

и

(б) для каждого $x \in X$ отображение $a \to ax$ алгебры A в C непрерывно на A,

то мы будем говорить, что подалгебра X согласована с алгеброй A; а в случае, когда, кроме условий (а) и (б), выполнены и условия

(в) существует топологический изоморфизм f из[I]

$$AX = \{\sum_{k=1}^{n} a_k x_k : n \in \mathbb{N};\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A;\ x_1, x_2, \ldots, x_n \in X\}$$

в E такой, что $f(AX)$ всюду плотен в E

и

(г) для каждого $\varrho \in \hom X$ найдется $\Phi_\varrho \in \hom(E, A)$ такой, что $\Phi_\varrho(f(ax)) = a\varrho(x)$ при всех $a \in A$ и $x \in X$,

то мы скажем, что E обладает свойством (A, X, f)-продолжения.

Пусть далее D — (B,K)-алгебра, H — топологическая K-алгебра, Z — подалгебра алгебры C и Y — подалгебра алгебры D такие, что

(д) Z согласована с алгеброй A,

и

(е) E обладает свойством (B, Y, g)-продолжения.

Кроме того, пусть $H_{AB,ZY} = \hom(A, B) \times \hom(Z, Y)$, $H_{A,Z} = \hom A \times \hom Z$ и

$$[\alpha, \beta](\sum_{k=1}^{n} a_k z_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k)\beta(z_k)$$

при всех $n \in \mathbb{N};\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A;\ z_1, z_2, \ldots, z_n \in Z$ и $(\alpha, \beta) \in H_{AB,ZY}$.

В первой части настоящей статьи дается описание пространства $\hom_c(AZ, H)$, образованного из всех таких $\Lambda \in \hom(AZ, H)$, для которых $\Lambda(az)$ обратим в H при некоторых $a \in A$ и $z \in Z$. Затем, во второй части статьи, находятся условия для представления гомоморфизмов $\Lambda \in \hom(AZ, E)$ в виде $\Lambda = g \circ [\alpha, \beta]$, где $(\alpha, \beta) \in H_{AB,ZY}$.

В частности, когда $E = D$ и g является тождественным отображением на BY, отсюда вытекают условия для разложимости гомоморфизмов топологических модуль-алгебр. Таким образом, получены обобщения результатов, доказанных в [4,6,10].

I По условию (а) подмодуль AX является подалгеброй алгебры C

§ I. Описание гомоморфизмов модуль-алгебр без единицы

Пусть A и H - топологические K-алгебры, G - подалгебра алгебры A, $\mathrm{Jnv}\,H$ - множество всех обратимых элементов алгебры H, $\bar{\omega}$ - продолжение гомоморфизма $\omega \in \mathrm{hom}(G,H)$ на замыкание $\mathrm{cl}_A G$ подалгебры G в топологии алгебры A (если это продолжение существует) и $\mathbb{N}_n = \{1,2,\dots,n\}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть далее C - (A,K)-алгебра, Z - согласованная с алгеброй A подалгебра алгебры C и $T_{AH,ZH}$ - множество всех пар $(\lambda,\varrho) \in H_{AH,ZH}$, для которых выполнены условия[2]

(α) если $m\in\mathbb{N}$, $a_k\in A$ и $z_k \in Z$ для каждого $k \in \mathbb{N}_m$ суть такие, что $s = a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_m z_m = \theta_{AZ}$, то

$$[\lambda,\varrho](s) = \sum_{k=1}^{m} \lambda(a_k)\varrho(z_k) = \theta_H,$$

(β) $\lambda(a)\varrho(z) = \varrho(z)\lambda(a)$ для всех $a \in A$ и $z \in Z$,

(γ) $\lambda(a)\varrho(z) \in \mathrm{Jnv}\,H$ при некоторых $a \in A$ и $z \in Z$

и

(δ) отображение $[\lambda,\varrho]$ непрерывно на AZ.

В случае, когда алгебры A и Z имеют единицу, описание пространства $\mathrm{hom}(AZ,H)$ дано в [2, теорема I]. Оказывается, что аналогичный результат имеет место и в случае модуль-алгебр без единицы. Справедлива

Теорема I. Пусть A - топологическая K-алгебра, H - топологическая K-алгебра с единицей, C - (A,K)-алгебра и Z - подалгебра алгебры C такая, что выполнены условия (д),

(ж) множество $\mathrm{hom}_c(AZ,H)$ непусто

и

(з) для каждого $a\in A$ отображение $z \to za$ алгебры Z в C непрерывно на Z.

Тогда каждый гомоморфизм $\Lambda \in \mathrm{hom}_c(AZ,H)$ определяет пару $(\lambda,\varrho) \in T_{AH,ZH}$ такую, что $\Lambda = [\lambda,\varrho]$ и отображение φ, определяемое равенством $\varphi(\lambda,\varrho) = [\lambda,\varrho]$ для всх $(\lambda,\varrho) \in T_{AH,ZH}$, является биекцией $T_{AH,ZH}$ на $\mathrm{hom}_c(AZ,H)$. В частности, когда H является топологической K-алгеброй с непрерывным обратным и с непрерывным умножением, φ является гомеоморфизмом пространств $T_{AH,ZH}$ и $\mathrm{hom}_c(AZ,H)$.

---

[2] Здесь и всюду в дальнейшем через θ_A обозначается нулевой элнмент алгебры A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно заметить, что каждая пара $(\lambda,\varrho)\in T_{AH,ZH}$ определяет (по условию (α)) отображение $[\lambda,\varrho]$, которое принадлежит $\hom_c(AZ,H)$ (по условиям (д), (β), (γ) и (δ)).

Пусть $\Lambda\in\hom_c(AZ,H)$. Тогда существуют элементы $a_0\in A$ и $z_0\in Z$ такие, что $c_0=\Lambda(a_0z_0)\in \mathrm{Inv}\,H$. Положим $\lambda_\Lambda(a)=c_0^{-1}\Lambda((a_0a)z_0)$ и $\varrho_\Lambda(z)=c_0^{-1}\Lambda(a_0(z_0z))$ при всех $a\in A$ и $z\in Z$. Оказывается, что значения отображений λ_Λ и ϱ_Λ не зависят от выбора таких элементов $a_0\in A$ и $z_0\in Z$, при которых $\Lambda(a_0z_0)\in\mathrm{Inv}\,H$. Действительно, пусть $a_1,a_2\in A$ и $z_1,z_2\in Z$ такие, что $c_i=\Lambda(a_iz_i)\in\mathrm{Inv}\,H$ с $i=1,2$. Тогда $\Lambda((a_1a)z_1)c_1=\Lambda(((a_1a)z_1)(a_1z_1))=c_1\Lambda((aa_1)z_1)$ для всех $a\in A$. Поэтому

$$c_2^{-1}\Lambda((a_2a)z_2)=c_2^{-1}\Lambda(((a_2a)z_2)(a_1z_1))c_1^{-1}=\Lambda((aa_1)z_1)c_1^{-1}=$$
$$=c_1^{-1}\Lambda((a_1a)z_1)$$

для всех $a\in A$. Аналогично получим, что

$$c_2^{-1}\Lambda(a_2(z_2z))=c_1^{-1}\Lambda(a_1(z_1z))$$

при всех $z\in Z$.

Нетрудно заметить, что отображения λ_Λ и ϱ_Λ непрерывны (по условиям (д) и (з)) и линейны на A и Z соответственно. Кроме того

$$\lambda_\Lambda(a)\varrho_\Lambda(z)=c_0^{-1}\Lambda(((a_0a)z_0)(a_0(zz_0)))c_0^{-1}=\Lambda(az)=$$
$$=c_0^{-1}\Lambda((a_0(z_0z))((aa_0)z_0))c_0^{-1}=\varrho_\Lambda(z)\lambda_\Lambda(a)$$

при всех $a\in A$ и $z\in Z$ и

$$\lambda_\Lambda(aa')=c_0^{-1}\Lambda(((a_0(aa'))z_0)(a_0z_0))c_0^{-1}=$$
$$=c_0^{-1}\Lambda((a_0a)z_0)\Lambda((a'a_0)z_0)c_0^{-1}=\lambda_\Lambda(a)\lambda_\Lambda(a')$$

для всех $a,a'\in A$. Таким же образом $\varrho_\Lambda(zz')=\varrho_\Lambda(z)\varrho_\Lambda(z')$ для всех $z,z'\in Z$. Значит, каждый $\Lambda\in\hom_c(AZ,H)$ определяет пару $(\lambda,\varrho)\in T_{AH,ZH}$ такую, что $\Lambda=[\lambda,\varrho]$.

Пусть теперь $(\lambda_1,\varrho_1),(\lambda_2,\varrho_2)\in T_{AH,ZH}$ такие, что $[\lambda_1,\varrho_1]=[\lambda_2,\varrho_2]$. Тогда найдутся элементы $a_3\in A$ и $z_3\in Z$ такие, что $c_3=\lambda_1(a_3)\varrho_1(z_3)=\lambda_2(a_3)\varrho_2(z_3)\in\mathrm{Inv}\,H$. Но поскольку, по условию (β), при всех $a\in A$ и $z\in Z$ имеют место равенства

$$\lambda_1(a)=c_3^{-1}(\lambda_1(a_3a)\varrho_1(z_3))=c_3^{-1}(\lambda_2(a_3a)\varrho_2(z_3))=\lambda_2(a)$$

и

$$\varrho_1(z)=c_3^{-1}(\lambda_1(a_3)\varrho_1(z_3z))=c_3^{-1}(\lambda_2(a_3)\varrho_2(z_3z))=\varrho_2(z),$$

то $(\lambda_1,\varrho_1)=(\lambda_2,\varrho_2)$.

Таким образом, отображение φ, определяемое равенством

$$\varphi(\lambda,\varrho)=[\lambda,\varrho]$$

для всех $(\lambda,\varrho)\in T_{AH,ZH}$ является биекцией пространства $T_{AH,ZH}$ на $hom_c(AZ,H)$.

Остается показать, что в случае, когда H является топологической алгеброй с непрерывным обратным и с непрерывным умножением, φ есть гомеоморфизм пространства $T_{AH,ZH}$ на $hom_c(AZ,H)$. Для этого пусть $\Lambda_0\in hom_c(AZ,H)$, элементы $a_0\in A$ и $z_0\in Z$ такие, что $c_0=\Lambda_0(a_0z_0)\in \mathrm{Inv}\,H$ и $O(\lambda_0,\varrho_0)$ – любая окрестность точки $(\lambda_0,\varrho_0)=\varphi^{-1}(\Lambda_0)$ в топологии пространства $T_{AH,ZH}$. Тогда существуют числа $n,m\in \mathbb{N}$, окрестность нуля U алгебры H, элементы $a_k\in A$ и $z_i\in Z$ с $k\in\mathbb{N}_n$ и $i\in\mathbb{N}_m$ такие, что

$$(O(\lambda_0)\times O(\varrho_0))\cap T_{AH,ZH}\subset O(\lambda_0,\varrho_0),$$

где

$$O(\lambda_0)=\bigcap_{k=1}^{n}\{\lambda\in hom(A,H):(\lambda-\lambda_0)(a_k)\in U\}$$

и

$$O(\varrho_0)=\bigcap_{i=1}^{m}\{\varrho\in hom(Z,H):(\varrho-\varrho_0)(z_i)\in U\}.$$

Теперь для окрестности нуля U существуют окрестности нуля V и O_1 алгебры H такие, что $V+V\subset U$, $O_1\Lambda_0(b_k)\subset V$ и $O_1\Lambda_0(d_i)\subset V$, где $b_k=(a_0a_k)z_0$ и $d_i=a_0(z_0z_i)$ для всех $k\in\mathbb{N}_n$, $i\in\mathbb{N}_m$. Далее, в силу непрерывности умножения алгебры H, окрестность V определяет окрестность нуля $O_2\subset H$ такую, что $(c_0^{-1}+O_2)O_2\subset V$. Известно, (см., например,[3, стр. 205]), что для топологической K-алгебры H с непрерывным обратным множество $\mathrm{Inv}\,H$ открыто в топологии алгебры H и операция $h\longrightarrow h^{-1}$ непрерывна на $\mathrm{Inv}\,H$. Поэтому окрестности O_1 и O_2, в свою очередь, определяют окрестность нуля $O_3\subset H$ такую, что $O_3+c_0\in \mathrm{Inv}\,H$ и $h^{-1}-c_0^{-1}\in O_1\cap O_2$ при $h-c_0\in O_3$. Пусть теперь

$$O_1(\Lambda_0)=\{\Lambda\in hom_c(AZ,H):(\Lambda-\Lambda_0)(a_0z_0)\in O_3\},$$

$$O_2(\Lambda_0)=\bigcap_{k=1}^{n}\{\Lambda\in hom_c(AZ,H):(\Lambda-\Lambda_0)(b_k)\in O_2\},$$

$$O_3(\Lambda_0)=\bigcap_{i=1}^{m}\{\Lambda\in hom_c(AZ,H):(\Lambda-\Lambda_0)(d_i)\in O_2\}$$

и

$$\Lambda\in O(\Lambda_0)=O_1(\Lambda_0)\cap O_2(\Lambda_0)\cap O_3(\Lambda_0).$$

Тогда, по изложенному выше, $\Lambda=[\lambda,\varrho]$ при $(\lambda,\varrho)=\varphi^{-1}(\Lambda)\in T_{AH,ZH}$. Поскольку $c_\Lambda=\Lambda(a_0z_0)\in O_3+c_0\in \mathrm{Inv}\,H$, то $\lambda(a)=c_\Lambda^{-1}\Lambda((a_0a)z_0)$ и $\varrho(z)=c_\Lambda^{-1}\Lambda(a_0(z_0z))$ при всех $a\in A$ и $z\in Z$. Следовательно,

$$(\lambda-\lambda_0)(a_k)=c_\Lambda^{-1}((\Lambda-\Lambda_0)(b_k))+(c_\Lambda^{-1}-c_0^{-1})\Lambda_0(b_k)\in$$
$$\in(c_0^{-1}+O_2)O_2+O_1\Lambda_0(b_k)\subset$$
$$\subset V+V\subset U$$

и

$$(\varrho-\varrho_0)(z_i)=c_\Lambda^{-1}((\Lambda-\Lambda_0)(d_i))+(c_\Lambda^{-1}-c_0^{-1})\Lambda_0(d_i)\in$$
$$\in(c_0^{-1}+O_2)O_2+O_1\Lambda_0(d_i)\subset$$
$$\subset V+V\subset U$$

для всех $k\in\mathbb{N}_n$ и $i\in\mathbb{N}_m$.

Итак, $\varphi^{-1}(O(\Lambda_0))\subset O(\lambda_0,\varrho_0)$. Значит, отображение φ^{-1} непрерывно в любой точке Λ_0 пространства $\mathrm{hom}_0(AZ,H)$.

Завершим доказательство теоремы I отметив, что непрерывность отображения φ доказывается так же, как и в случае модуль-алгебр с единицей ([2, теорема I]).

Следующее следствие является обобщением теоремы 3 в [I].

Следствие I. Пусть E – топологическая K-алгебра, D – (B,K)-алгебра и Y – подалгебра алгебры D такая, что выполнены условия (е) и

(и) для каждого $b\in B$ отображение $y\longrightarrow by$ алгебры Y в D непрерывно на Y.

Тогда каждый $\Lambda\in\mathrm{hom}E$ определяет пару $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ такую, что $\Lambda=\lambda\circ\Phi_\varrho$. При этом отображение $(\lambda,\varrho)\longrightarrow\lambda\circ\Phi_\varrho$ является биекцией пространства $H_{B,Y}$ на $\mathrm{hom}E$, обратное отображение которой непрерывно на $\mathrm{hom}E$. В частном случае, когда выполнено и условие

(к) множество $\mathrm{hom}BY$ локально равностепенно непрерывно, то эта биекция является гомеоморфизмом пространства $H_{B,Y}$ на $\mathrm{hom}\,E$

Доказательство. Поскольку по условию (е) для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ и $t\in BY$ справедливо

$$[\lambda,\varrho](t)=(\lambda\circ\Phi_\varrho)(q(t)),$$

то $[\lambda,\varrho]\in\mathrm{hom}BY$, имеет место равенство $T_{BK,YK}=H_{B,Y}$ и (в силу всюду плотности $q(BY)$ в E) гомоморфизм $[\lambda,\varrho]\circ q^{-1}\in$ $\in\mathrm{hom}\,q(BY)$ продолжим до гомоморфизма $\overline{[\lambda,\varrho]\circ q^{-1}}=\lambda\circ\Phi_\varrho\in\mathrm{hom}E$. Далее, отображение φ_1, определяемое для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ равенством $\varphi_1(\lambda,\varrho)=[\lambda,\varrho]$, является гомеоморфизмом пространства $H_{B,Y}$ на $\mathrm{hom}BY$ (по теореме I), а отображение μ, определяемое равенством[3] $\mu(\Lambda)=\Lambda|q(BY)$ при всех $\Lambda\in\mathrm{hom}E$,

[3] Здесь $\Lambda|q(BY)$ обозначает сужение гомоморфизма Λ на $q(BY)$.

является непрерывной биекцией $\hom E$ на $\hom q(BY)$, обратное отображение которой при выполнении условия (к) непрерывно на $\hom q(BY)$ (см.[2, предложение I]). Поэтому отображение Φ, определяемое равенством

$$\Phi(\lambda,\varrho) = \overline{[\lambda,\varrho]\circ q^{-1}}$$

для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ является биекцией H_{BY} на $\hom E$, удовлетворяющей требуемым условиям.

Замечание I. В частности, когда в теореме I алгебра A содержит единицу, то для $\Lambda\in \hom_0(AZ,H)$ можно ϱ_Λ определить равенством $\varrho_\Lambda = \Lambda | Z$. Итак, в этом случае, условие (з) в теореме I (следовательно и условие (и) в следствии I, в случае когда алгебра B содержит единицу) является лишним.

Из теоремы I следуют результаты Маллиоса (см.[8,9]), связанные с описанием пространства гомоморфизмов топологического тензорного произведения локально выпуклых алгебр, и результат Домара, описывающий структуру модулярных идеалов коммутативной банаховой алгебры (см.[5, теорема I]).

§ 2. Разложимость гомоморфизмов топологических алгебр

Пусть A и E – топологические K–алгебры. Для каждого $\Lambda\in\hom(A,E)$ через Λ^* будем обозначать отображение[4] $\hom E$ в $\hom A\cup\{\theta\}$, определяемое равенством $\Lambda^*(\lambda)=\lambda\circ\Lambda$ при всех $\lambda\in\hom E$. Легко заметить, что Λ^* непрерывно на $\hom E$, а в случае, когда Λ является топологическим изоморфизмом A на E, то Λ^* является гомеоморфизмом пространства $\hom E$ на $\hom A$ и $(\Lambda^*)^{-1} = (\Lambda^{-1})^*$.

Топологическая K–алгебра A называется строго функционально полупростой алгеброй (коротко с.ф.п. алгеброй), если для каждого ненулевого элемента $a\in A$ найдется гомоморфизм $\lambda\in\hom A$ такой, что $\lambda(a)\neq 0$. Нетрудно заметить, что каждая с.ф.п. алгебра отделима и коммутативна.

Следующая теорема является обобщением результатов статей [4,6], а также (более сильных) результатов статьи [10].

Теорема 2. Пусть E – топологическая K–алгебра, A и B – топологические K–алгебры с единицей, C – (A,K)–алгебра, , D – (B,K)–алгебра, Z и Y – подалгебры алгебр C и D соответственно такие, что выполнены условия (д), (е), (к) и

(л) $\operatorname{cl}_C AZ = C$.

---

[4] Через θ обозначается тривиальный гомоморфизм на A.

Тогда каждый гомоморфизм $\Lambda \in \mathrm{hom}(C,E)$, удовлетворяющий условию $\Lambda^*(\mathrm{hom}\,E) \subset \mathrm{hom}\,C$, определяет непрерывные отображения $\Delta_1 : H_{B,Y} \longrightarrow \mathrm{hom}\,A$ и $\Delta_2 : H_{B,Y} \longrightarrow \mathrm{hom}\,Z$ такие, что

$$\Lambda^*(\lambda \circ \Phi_\varrho) = \overline{[\Delta_1(\lambda,\varrho), \Delta_2(\lambda,\varrho)]} \qquad (\mathrm{I})$$

при всех $(\lambda,\varrho) \in H_{B,Y}$.

В частности, когда B,Y и E являются с.ф.п. алгебрами, справедливы следующие утверждения:

2.I. Если $\Lambda(Z) \subset g(Y)$ и $\Lambda(Z) \neq [\Theta_E]$, то $\Delta_1(\lambda,\varrho_1) = \Delta_1(\lambda,\varrho_2)$ для всех $\lambda \in \mathrm{hom}\,B$ и $\varrho_1,\varrho_2 \in \mathrm{hom}\,Y$ тогда и только тогда, когда $\Lambda = g \circ [\alpha,\beta]$ при $\beta = g^{-1} \circ (\Lambda|Z) \in \mathrm{hom}(Z,Y)$ и некотором $\alpha \in \mathrm{hom}(A,B)$.

2.2. Если выполнено условие

(м) для каждого $\lambda \in \mathrm{hom}\,B$ существует $\Phi_\lambda \in \mathrm{hom}(E,Y)$ такой, что $\Phi_\lambda(g(by)) = \lambda(b)y$ при всех $b \in B$ и $y \in Y$, то $\Delta_2(\lambda_1,\varrho) = \Delta_2(\lambda_2,\varrho)$ при всех $\lambda_1,\lambda_2 \in \mathrm{hom}\,B$ и $\varrho \in \mathrm{hom}\,Y$ тогда и только тогда, когда $\Lambda(Z) \subset g(Y)$.

2.3. Если алгебры Z и Y содержат единицу, то $\Delta_1(\lambda,\varrho_1) = \Delta_1(\lambda,\varrho_2)$ для всех $\lambda \in \mathrm{hom}\,B$ и $\varrho_1,\varrho_2 \in \mathrm{hom}\,Y$ тогда и только тогда, когда для каждого $a \in A$ существует $b \in B$ такой, что $\Lambda(ae_Z) = g(be_Y)$.

Доказательство. Пусть φ и Φ отображения, определяемые при всех $(\omega,\nu) \in T_{AK,ZK}$ и $(\lambda,\varrho) \in H_{B,Y}$ равенствами $\varphi(\omega,\nu) = [\omega,\nu]$ и $\Phi(\lambda,\varrho) = \lambda \circ \Phi_\varrho$. Так как по условиям (д),(е) и (к) предположения теоремы I и следствия I выполнены (при $H = K$), то φ и Φ являются гомеоморфизмами $T_{AK,ZK}$ на $\mathrm{hom}\,AZ$ и $H_{B,Y}$ на $\mathrm{hom}\,E$ соответственно. Далее, пусть μ – отображение, определяемое при всех $T \in \mathrm{hom}\,C$ равенством $\mu(T) = T|AZ$. Тогда μ является непрерывным отображением $\mathrm{hom}\,C$ в $\mathrm{hom}\,AZ$. Следовательно, $\Delta = \varphi^{-1} \circ \mu \circ \Lambda^* \circ \Phi$ есть непрерывное отображение пространства $H_{B,Y}$ в $H_{A,Z}$. Положим $\Delta_1 = \pi_A \circ \Delta$ и $\Delta_2 = \pi_Z \circ \Delta$, где π_A и π_Z – проекции пространства $H_{A,Z}$ на $\mathrm{hom}\,A$ и $\mathrm{hom}\,Z$ соответственно.

Далее, так как для всех $(\lambda,\varrho) \in H_{B,Y}$ справедливы $\Lambda^*(\lambda \circ \Phi_\varrho)|AZ \in \mathrm{hom}\,AZ$ и $\varphi^{-1}(\Lambda^*(\lambda \circ \Phi_\varrho)|AZ) = \Delta(\lambda,\varrho) = (\Delta_1(\lambda,\varrho), \Delta_2(\lambda,\varrho))$, то

$$\Lambda^*(\lambda \circ \Phi_\varrho)|AZ = [\Delta_1(\lambda,\varrho), \Delta_2(\lambda,\varrho)].$$

Итак, по условию (л) справедливо (I).

Остальную часть доказательства будем проводить в трех частях.

I) Пусть $\Lambda(Z) \subset g(Y)$ и $\Lambda(Z) \neq [\Theta_E]$. Тогда

$$\beta = (g^{-1} \circ \Lambda|Z) \in \mathrm{hom}(Z,Y)$$

и
$$\Delta_2(\lambda,\varrho)(z)=\Lambda^*(\lambda\circ\Phi_\varrho)(z)=(\lambda\circ\Phi_\varrho)(g(\beta(z)e_B))=\varrho(\beta(z))$$
при всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ и $z\in Z$. Учитывая это, справедливо
$$\Delta_2(\lambda,\varrho)=\varrho\circ\beta \tag{2}$$
при всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$. Пусть теперь $(\lambda_0,\varrho_0)\in H_{B,Y}$ – произвольный элемент. Тогда найдутся элементы $a_0\in A$ и $z_0\in Z$ такие, что
$$\Lambda^*(\lambda_0\circ\Phi_{\varrho_0})(a_0z_0)=\Delta_1(\lambda_0,\varrho_0)(a_0)\Delta_2(\lambda_0,\varrho_0)(z_0)\neq 0$$
(поскольку по предположению $\Lambda^*(\lambda_0\circ\Phi_{\varrho_0})\in \hom C$). Следовательно, $(\varrho_0\circ\beta)(z_0)\neq 0$. Положим $z_1=((\varrho_0\circ\beta)(z_0))^{-1}z_0$ и $\alpha(a)=\Phi_{\varrho_0}(\Lambda(az_1))$ для каждого $a\in A$. Тогда по условиям(д) и (е) α является непрерывным и линейным отображением A в B. Оказывается, что α является и мультипликативным на A. Действительно, для любых $a\in A$ и $\lambda\in\hom B$, согласно равенству (2), справедливо
$$\lambda(\alpha(a))=\lambda(\Phi_{\varrho_0}(\Lambda(az_1)))=\Delta_1(\lambda,\varrho_0)(a)\Delta_2(\lambda,\varrho_0)(z_1)=\Delta_1(\lambda,\varrho_0)(a).$$
Поэтому
$$\lambda(\alpha(a_1a_2))=\Delta_1(\lambda,\varrho_0)(a_1a_2)=\lambda(\alpha(a_1))\lambda(\alpha(a_2))=\lambda(\alpha(a_1)\alpha(a_2))$$
для всех $a_1,a_2\in A$ и $\lambda\in\hom B$. Таким образом, $\alpha(a_1a_2)=$ $=\alpha(a_1)\alpha(a_2)$ при всех $a_1,a_2\in A$, ибо B есть с.ф.п. алгебра. Кроме того,
$$\alpha(e_A)=\Phi_{\varrho_0}(\Lambda(z_1))=\Phi_{\varrho_0}(g(\beta(z_1)e_B))=e_B.$$
Следовательно, $\alpha\in\hom(A,B)$.

Пусть теперь $\Delta_1(\lambda,\varrho_1)=\Delta_1(\lambda,\varrho_2)$ при всех $\lambda\in\hom B$ и $\varrho_1,\varrho_2\in\hom Y$. Тогда, по изложенному выше,
$$(\lambda\circ\Phi_\varrho)(\Lambda(s))=[\Delta_1(\lambda,\varrho),\Delta_2(\lambda,\varrho)](s)=[\Delta_1(\lambda,\varrho_0),\Delta_2(\lambda,\varrho)](s)=$$
$$=[\lambda\circ\alpha,\varrho\circ\beta](s)=(\lambda\circ\Phi_\varrho)((g\circ[\alpha,\beta])(s))$$
для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ и $s\in AZ$. Значит, для с.ф.п. алгебры E, справедливо $\Lambda|AZ=g\circ[\alpha,\beta]$ Поэтому $\Lambda=g\circ[\alpha,\beta]$.

Наоборот, пусть $\Lambda=g\circ[\alpha,\beta]$ при $\beta=g^{-1}\circ\Lambda|Z$ и некотором $\alpha\in\hom(A,B)$. Кроме того, пусть $\lambda\in\hom B$ и $\varrho_1,\varrho_2\in$ $\in\hom Y$ – произвольные элементы. Тогда найдутся элементы $a_1,a_2\in A$ и $z_1,z_2\in Z$ такие, что $\Delta_1(\lambda,\varrho_i)(a_i)\cdot$ $\cdot\Delta_2(\lambda,\varrho_i)(z_i)\neq 0$ при $i\in\mathbb{N}_2$. Отсюда ясно, что $\Delta_2(\lambda,\varrho_i)(z_i)\neq$ $\neq 0$ при $i\in\mathbb{N}_2$, в силу чего и $\varrho_i(\beta(z_i))\neq 0$ при $i\in$ $\in\mathbb{N}_2$. Положим $x_i=(\varrho_i(\beta(z_i)))^{-1}z_i$ при $i\in\mathbb{N}_2$. Тогда для всех $a\in A$ и $i\in\mathbb{N}_2$ из равенств (I) и (2) вытекает

$$\Delta_1(\lambda,\varrho_i)(a)=\Delta_1(\lambda,\varrho_i)(a)\varrho_i(\beta(x_i))=\Lambda^*(\lambda\circ\Phi_{\varrho_i})(ax_i)=$$
$$=(\lambda\circ\Phi_{\varrho_i})((q\circ[\alpha,\beta])(ax_i))=\lambda(\alpha(a)).$$

Таким образом, $\Delta_1(\lambda,\varrho_1)=\Delta_1(\lambda,\varrho_2)$.

2) Пусть выполнено условие (м). Легко заметить, что тогда

$$\lambda\circ\Phi_\varrho=\varrho\circ\Phi_\lambda \tag{3}$$

для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$.

Пусть теперь $\Delta_2(\lambda_1,\varrho)=\Delta_2(\lambda_2,\varrho)$ при всех $\lambda_1,\lambda_2\in \hom B$ и $\varrho\in\hom Y$. Тогда по равенствам (I) и (3) имеем

$$\varrho(\Phi_{\lambda_1}(\Lambda(z)))=\Delta_2(\lambda_2,\varrho)(z)=\varrho(\Phi_{\lambda_2}(\Lambda(z))),$$

в силу чего

$$\varrho(\Phi_{\lambda_1}(\Lambda(z)))=\varrho(\Phi_{\lambda_2}(\Lambda(z))) \tag{4}$$

для всех $z\in Z$, $\varrho\in\hom Y$ и $\lambda_1,\lambda_2\in\hom B$. Ввиду с.ф.п. алгебры Y, справедливо $\Phi_{\lambda_1}(\Lambda(z))=\Phi_{\lambda_2}(\Lambda(z))$ при всех $\lambda_1,\lambda_2\in$ $\in\hom B$ и $z\in Z$. Пусть далее z_0 – любой элемент в Z и $y_0=$ $=\Phi_\lambda(\Lambda(z_0))$ при некоторого $\lambda\in\hom B$. Тогда, по равенству (4) при всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$, справедливо

$$(\varrho\circ\Phi_\lambda)(\Lambda(z_0))=\varrho(y_0)=(\varrho\circ\Phi_\lambda)(q(y_0e_B)).$$

Теперь, в силу с.ф.п. алгебры E, можно утверждать, что $\Lambda(z_0)\in$ $\in q(Y)$. Таким образом, $\Lambda(Z)\subset q(Y)$.

Наоборот, если $\Lambda(Z)\subset q(Y)$, элементы $\lambda_1,\lambda_2\in\hom B$, $\varrho\in\hom Y$ и $z\in Z$, то по равенствам (I) и (3) имеем

$$\Delta_2(\lambda_1,\varrho)(z)=\Lambda^*(\lambda_1\circ\Phi_\varrho)(z)=(\varrho\circ\Phi_{\lambda_1})(q(q^{-1}(\Lambda(z))e_B))=$$
$$=(\lambda_2\circ\Phi_\varrho)(q(q^{-1}(\Lambda(z))e_B))=\Delta_2(\lambda_2,\varrho)(z).$$

Поэтому $\Delta_2(\lambda_1,\varrho)=\Delta_2(\lambda_2,\varrho)$.

3) Справедливость утверждения 2.3 доказывается аналогично доказательству утверждения 2.2.

Теорема 3. Пусть E и F – топологические K–алгебры, A и B – с.ф.п. алгебры с единицей, C – (A,K)–алгебра, D – (B,K)–алгебра, Z – подалгебра алгебры C такая, что $e_c=e_z$ и Y – подалгебра алгебры D такая, что $e_D=e_Y$. Если E, Z и Y являются с.ф.п. алгебрами и выполнены условия (е),(к),(м),

(н) алгебра F обладает свойством (A,Z,f)–продолжения

и

(о) для каждого $\omega\in\hom A$ существует $\Phi_\omega\in\hom(F,Z)$ такой, что $\Phi_\omega(f(az))=\omega(a)z$ для всех $a\in A$ и $z\in Z$, то для того, чтобы топологический изоморфизм Λ алгебры F на E был бы представим в виде $\Lambda=\overline{g\circ[\alpha,\beta]\circ f^{-1}}$ при некоторых топологических изоморфизмах α и β алгебры A на B и Z на Y соответственно, необходимо и достаточно существование гомеоморфизмов δ_1 и δ_2 пространства $\hom B$ на $\hom A$ и $\hom Y$ на $\hom Z$ таких, что при всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ было бы справедливо равенство

$$\Lambda^*(\lambda\circ\Phi_\varrho)=\delta_1(\lambda)\circ\Phi_{\delta_2(\varrho)}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\Lambda=\overline{g\circ[\alpha,\beta]\circ f^{-1}}$ при некоторых топологических изоморфизмах α алгебры A на B и β алгебры Z на Y. Тогда отображения $\delta_1=\alpha^*$ и $\delta_2=\beta^*$ являются гомеоморфизмами пространства $\hom B$ на $\hom A$ и $\hom Y$ на $\hom Z$ соответственно. При этом,

$$\Lambda^*(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)(f(s))=(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)((g\circ[\alpha,\beta])(s))=[\lambda\circ\alpha,\varrho\circ\beta](s)=$$
$$=(\delta_1(\lambda)\circ\bar\Phi_{\delta_2(\varrho)})(f(s))$$

для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$ и $s\in AZ$. Значит,

$$\Lambda^*(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)|f(AZ)=(\delta_1(\lambda)\circ\bar\Phi_{\delta_2(\varrho)})|f(AZ).$$

Поэтому справедливо равенство (5).

Пусть теперь δ_1 и δ_2 гомеоморфизмы пространства $\hom B$ на $\hom A$ и $\hom Y$ на $\hom Z$ соответственно такие, что справедливо (5). Положив $\Lambda_1=\Lambda\circ f$ заметим, что $\Lambda_1\in\hom(AZ,E)$ и $\Lambda_1^*(\hom E)\subset\hom AZ$. Далее, поскольку по условиям (е), (к) и (н) предположения теоремы 2 (при $C=AZ$) выполнены, то существуют непрерывные отображения $\Delta_1: H_{B,Y}\longrightarrow\hom A$ и $\Delta_2: H_{B,Y}\longrightarrow\hom Z$ такие, что

$$\Lambda_1^*(\lambda\circ\Phi_\varrho)=[\Delta_1(\lambda,\varrho),\Delta_2(\lambda,\varrho)] \tag{6}$$

при всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$. Теперь по равенствам (5) и (6) справедливы

$$\Delta_1(\lambda,\varrho)(a)=\Lambda_1^*(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)(ae_z)=(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)(\Lambda(f(ae_z)))=$$
$$=(\delta_1(\lambda)\circ\Phi_{\delta_2(\varrho)})(f(ae_z))=\delta_1(\lambda)(a)$$

и

$$\Delta_2(\lambda,\varrho)(z)=\Lambda_1^*(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)(z)=(\lambda\circ\bar\Phi_\varrho)(\Lambda(f(z)))=$$
$$=(\delta_1(\lambda)\circ\Phi_{\delta_2(\varrho)})(f(z))=\delta_2(\varrho)(z)$$

для всех $(\lambda,\varrho)\in H_{B,Y}$, $a\in A$ и $z\in Z$. Значит, $\Delta_1(\lambda_1,\varrho_1)=\Delta_1(\lambda_1,\varrho_2)$ и $\Delta_2(\lambda_1,\varrho_1)=\Delta_2(\lambda_2,\varrho_1)$ при всех $\lambda_1,\lambda_2\in\hom B$ и $\varrho_1,\varrho_2\in\hom Y$. В силу чего, по утверждению 2.2, справедливо включение $\Lambda_1(Z)\subset q(Y)$. Далее, по условию (н), справедливо $f(e_Z)=e_F$. Ввиду этого $\Lambda_1(e_Z) = e_E$. Следовательно, по утверждению 2.I, имеет место $\Lambda_1 = q\circ[\alpha,\beta]$ при $\beta=q^{-1}\circ(\Lambda_1|Z)$ и некотором $\alpha\in \hom(A,B)$. Поэтому

$$\Lambda(f(s))=(q\circ[\alpha,\beta])(s)=(q\circ[\alpha,\beta]\circ f^{-1})(f(s))$$

для всех $s\in AZ$. Таким образом, $\Lambda=q\circ[\alpha,\beta]\circ f^{-1}$.

Покажем теперь, что α является биекцией. Для этого возьмем любые элементы $\lambda\in\hom B, \varrho\in\hom Y, a\in A$ и $z\in Z$. Поскольку, по равенству (5), справедливо

$$\delta_1(\lambda)(a)\,\delta_2(\varrho)(z)=\Lambda^*(\lambda\circ\Phi_\varrho)(f(az)) = (\lambda\circ\Phi_\varrho)((q\circ[\alpha,\beta])(az))=\alpha^*(\lambda)(a)\beta^*(\varrho)(z),$$

то $\delta_1(\lambda)(a)=\alpha^*(\lambda)(a)$ и $\delta_2(\varrho)(z)=\beta^*(\varrho)(z)$ при всех $\lambda\in\hom B, \varrho\in\hom Y, a\in A$ и $z\in Z$. В силу этого $\delta_1=\alpha^*$ и $\delta_2=\beta^*$.

Пусть далее $a_1,a_2\in A$ такие, что $a_1\neq a_2$. Тогда $\omega(a_1-a_2)\neq 0$ для некоторого $\omega\in\hom A$. Теперь найдется $\lambda\in\hom B$ такой, что $\omega=\delta_1(\lambda)=\lambda\circ\alpha$. Но так как $\lambda(\alpha(a_1-a_2)) = \omega(a_1-a_2)\neq 0$, то $\alpha(a_1)\neq\alpha(a_2)$. Следовательно, отображение α является однозначным на A.

Пусть теперь $b_0\in B, \varrho_0\in\hom Y$ и $a_0=\Phi_{\delta_2(\varrho_0)}(\Lambda^{-1}(q(b_0 e_Y)))$. Тогда по равенству (5) справедливо

$$\lambda(\alpha(a_0))=\delta_1(\lambda)(\Phi_{\delta_2(\varrho_0)}(\Lambda^{-1}(q(b_0e_Y))))= (\lambda\circ\Phi_\varrho)(q(b_0e_Y))=\lambda(b_0)$$

при всех $\lambda\in\hom B$. Поэтому $\alpha(a_0)=b_0$, ибо B есть с.ф.п. алгебра.

Аналогичным образом (при помощи условия (о)) показывается и биективность отображения β.

Остается показать непрерывность отображений α^{-1} и β^{-1} на B и Y соответственно. По изложенному выше,

$$[\alpha^{-1},\beta^{-1}]=[\alpha,\beta]^{-1}=f^{-1}\circ\Lambda^{-1}\circ q.$$

Поэтому отображение $[\alpha^{-1},\beta^{-1}]$ непрерывно на BY. Поскольку $\beta^{-1}(y)=[\alpha^{-1},\beta^{-1}](ye_B)$ при всех $y\in Y$ и

$$\alpha^{-1}(b)=\Phi_\nu(f([\alpha^{-1},\beta^{-1}](be_Y)))$$

для всех $b\in B$ и некоторого $\nu\in\hom Z$, то можно утверждать, что отображения α^{-1} и β^{-1} непрерывны на B и Y, соответственно, что и завершает доказательство теоремы 3.

В заключение отметим, что для автоморфизмов пополнений топологических тензорных произведений банаховых алгебр, аналогичный результат получен в [II].

Литература

1. Абель М. Фиксированные идеалы в топологических модуль-алгебрах. – Изв. АН ЭССР Физ. Мат., 1985, 34, 237–247.
2. Кокк А. Описание гомоморфизмов топологических модуль-алгебр. – Изв. АН ЭССР Физ. Мат. (в печати).
3. Наймарк М.А. Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 431 с.
4. Akinyele, O. On a homomorphism between generalized semigroup algebras. – Riv. math. Univ. Parma, 1978, 4,73–78.
5. Domar, Y. On the ideal structure of commutative Banach algebras. – Banach Cent. Publ. Vol. 8. Warszawa, 1982, 241–249.
6. Hausner, A. On a homomorphism between generalized group algebras. – Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67, 138–141.
7. Knaleelulla, S.M. Counterexamples in topological vector spaces. – Lect. Notes Math. 936. – Berlin: Springer-Verlag, 1982. – 179 p.
8. Mallios, A. On the spectrum of a topological tensor product of locally convex algebras. – Math. Ann., 1964,154, 171–180.
9. Mallios, A. Heredity of tensor products of topological algebras. – Math. Ann., 1966, 162, 246–257.
10. Mallios, A. On continuous homomorphisms between topological tensor algebras. – Prakt. Akad. Athēnon, 1972,47, 49–58.
11. Mehta, R.D., Vasavada, M.H. A note on automorphisms of tensor product of Banach algebras. – Indian J. Pure and Appl. Math., 1985, 16, 13–16.
12. Želazko, W. Metric generalizations of Banach algebras. – Rozpr. mat. XLII. – Warszawa, 1965. – 70 p.
13. Želazko, W. Selected topics in topological algebras. – Lect. Notes Ser. 31, – Aarhus Univ., 1971. – 176 p.

Поступило 10 II 1986

ON DECOMPOSITION OF HOMOMORPHISMS OF TOPOLOGICAL ALGEBRAS

A. Kokk

Summary

Let K be one of the fields $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, A and B be topological K-algebras and let $\mathrm{hom}(A,B)$ be the set of all non-zero continuous homomorphisms of A into B, endowed with the topology of simple convergence in A.

We say that B is a topological (A,K)-algebra if

1) B is a A-bimodule with separately continuous module multiplications

and

2) $a(b_1b_2)=(ab_1)b_2, (b_1b_2)a=b_1(b_2a)$ and $b_1(ab_2) = (b_1a)b_2$ for each $a\in A$ and $b_1, b_2 \in B$.

Let E be a topological K-algebra, H be a topological K-algebra with a unit, C be a topological (A,K)-algebra, D be a topological (B,K)-algebra and let Z and Y be respectively subalgebras of C and D such that

a) $az=za$ for each $a\in A$ and $z\in Z$,

b) $by=yb$ for each $b\in B$ and $y\in Y$,

c) there exists a topological isomorphism of

$$BY=\{\sum_{k=1}^{n} b_k y_k : n\in\mathbb{N};\ b_1,b_2,\dots,b_n\in B;\ y_1,y_2,\dots,y_n\in Y\}$$

into E such that $q(BY)$ is dense in E

and

d) for each $\varrho\in \mathrm{hom}(Y,K)$ there exists $\Phi_\varrho\in \mathrm{hom}(E,B)$ such that $\Phi_\varrho(q(by))=b\varrho(y)$ for all $b\in B$ and $y\in Y$.

In section 1 of the present paper we give a description of the space $\mathrm{hom}_0(AZ,H)$ (that is the space of all $\Lambda\in \mathrm{hom}(AZ,H)$ such that $\Lambda(az)$ is invertible in H for some $a\in A$ and $z\in Z$).

In section 2 we obtain necessary and sufficient conditions for $\Lambda\in \mathrm{hom}(AZ,E)$ to be of the form $\Lambda=q\circ[\alpha,\beta]$, where $(\alpha,\beta)\in \mathrm{hom}(A,B)\times \mathrm{hom}(Z,Y)$ and

$$[\alpha,\beta](\sum_{k=1}^{n} a_k z_k) = \sum_{k=1}^{n}\alpha(a_k)\beta(z_k)$$

for all $n\in\mathbb{N}$; $a_1,a_2,\dots,a_n\in A$ and $z_1,z_2,\dots,z_n\in Z$.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,26-37

О ВСЮДУ ПЛОТНОСТИ ПОДМНОЖЕСТВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОРНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

М. Абель

Лаборатория прикладной математики

Теоремы типа Стоуна-Вейерштрасса широко применимы во многих разделах математики - в теории аппроксимации, в теории мер, в теории топологических алгебр и т.д.. При этом особую роль в современной математике играют всякие обобщения теоремы Стоуна-Вейерштрасса на случай пространств и алгебр векторнозначных функций. Одна теорема такого характера и доказывается в данной статье. Этот результат применяется для обобщения теоремы Дугунджи [9], Майкла [16], Де ла Фуэнте [7], Пролла [17] и др. о продолжении векторнозначных непрерывных функций, заданных на замкнутом подмножестве, на все пространство.

1. Пусть $\mathbb{K}$ - одно из полей $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, X - топологическое пространство, $\mathfrak{S}$ - его покрытие, замкнутое относительно конечного объединения, и Y - линейное топологическое пространство над $\mathbb{K}$. Через $C(X,Y;\mathfrak{S})$ будем обозначать множество тех Y-значных непрерывных на X функций f, для которых $f(S)$ относительно компактно в Y для каждого $S\in\mathfrak{S}$. В частности, когда все элементы покрытия $\mathfrak{S}$ компактны, $C(X,Y;\mathfrak{S})$ совпадает с множеством $C(X,Y)$ всех Y-значных непрерывных на X функций, а когда покрытие $\mathfrak{S}$ конечно, то с множеством $C_c(X,Y)$ тех Y-значных непрерывных на X функций f, для которых образ $f(X)$ относительно компактен в Y. Таким образом, $C(X,Y;\mathfrak{S})$ представляет собой промежуточное между $C_c(X,Y)$ и $C(X,Y)$ множество, которое, в частности, совпадает с одним из них.

Алгебраические операции в $C(X,Y;\mathfrak{S})$ будем определять поточечно и наделять его топологией $\mathfrak{S}$-сходимости, т.е. топологией, в которой базу окрестностей нуля образуют множества

$$T(S,O) = \{f\in C(X,Y;\mathfrak{S}) : f(S)\subset O\}$$

(ввиду замкнутости покрытия $\mathfrak{S}$ относительно конечного объединения), где $S\in\mathfrak{S}$ и O - элемент некоторой базы окрестностей нуля пространства Y.

В дальнейшем для каждых $\alpha \in C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$ и $y \in Y$ через αy будем обозначать функцию, удовлетворяющую на X условию $(\alpha y)(x) = \alpha(x) y$, а через $L(\mathfrak{A}, Z)$ – линейную оболочку множества $\{\alpha y : \alpha \in \mathfrak{A}, y \in Z\}$ при $\mathfrak{A} \subseteq C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$ и $Z \subseteq Y$.

Теорема I. Пусть X – тихоновское пространство, $\mathfrak{S}$ его покрытие, замкнутое относительно конечного объединения, и Y – отделимое линейное топологическое пространство над $\mathbb{K}$. Кроме того, пусть $\mathfrak{A}$ и Z – всюду плотные подмножества в $C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$ и в Y соответственно. Если выполнено одно из следующих условий:

(α) топология пространства Y локально выпукла;

(β) пространство Y обладает свойством аппроксимации[I],

(γ) пространство X имеет конечную размерность в смысле покрытий[2] и все элементы покрытия $\mathfrak{S}$ относительно компактны в X,

(δ) каждое $S \in \mathfrak{S}$ является относительно компактным в X и его замыкание имеет конечную размерность в смысле покрытий,

то каждое подмножество $\mathfrak{B} \subset C(X, Y; \mathfrak{S})$, содержащее $L(\mathfrak{A}, Z)$, всюду плотно в $C(X, Y; \mathfrak{S})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о этой теоремы проведем отдельно для каждого случая.

а) Пусть $\{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ – насыщенное семейство непрерывных полунорм, определяющих на Y локально выпуклую топологию[3]. Пусть f – любая функция в $C(X, Y; \mathfrak{S})$ и $\mathcal{O}(f)$ – ее окрестность в топологии пространства $C(X, Y; \mathfrak{S})$. Тогда $f + T(S, \mathcal{U}) \subset \mathcal{O}(f)$ для некоторых $S \in \mathfrak{S}$ и окрестности нуля $\mathcal{U}$

[I] Говорят, что линейное топологическое пространство X обладает свойством аппроксимации, если для каждого предкомпактного подмножества $K \subset X$ и каждой окрестности нуля $\mathcal{O}$ пространства X существует такой линейный непрерывный конечномерный оператор $L : X \to X$, что $L(x) - x \in \mathcal{O}$ при всех $x \in K$.

[2] Говорят, что топологическое пространство X имеет конечную размерность в смысле покрытий (которую обозначают через $\dim X$), если существует такое число $n \in \mathbb{N}$, что в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие пространства X кратности не более, чем $n+1$.

[3] Данная часть теоремы доказана в [I] (в частности, когда каждое $S \in \mathfrak{S}$ является относительно компактным в X, этот результат вытекает и из леммы 3.0 статьи [18]). Но в целях целосности дадим здесь и доказательство этой части теоремы.

пространства $\mathcal{Y}$. Окрестность $\mathcal{U}$ определяет $\varepsilon > 0$ и $\lambda \in \Lambda$ такие, что $\{y \in \mathcal{Y} : p_\lambda(y) < \varepsilon\} \subset \mathcal{U}$.

Для каждого $y \in \mathcal{Y}$ положим

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}(y) = \{y' \in \mathcal{Y} : p_\lambda(y' - y) < \varepsilon/3\}.$$

Поскольку множество $\mathcal{Y}_S = cl_{\mathcal{Y}} f(S)$ компактно в $\mathcal{Y}$, то существуют $n \in \mathbb{N}$ и $y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{Y}_S$ такие, что

$$\mathcal{Y}_S \subseteq \bigcup_{k=1} \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}(y_k).$$

Теперь существуют функции $\mu_1, \ldots, \mu_n \in C(\mathcal{Y}_S, [0,1])$ такие, что для каждого[4] $k \in \mathbb{N}_n$ справедливы $\mu_k(y) = 0$ при $y \notin \mathcal{U}_{\varepsilon,\lambda}(y_k) \cap \mathcal{Y}_S$ и

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k(y) \equiv 1$$

на $\mathcal{Y}_S$ (см.[5], с. 260). Так как $\mathcal{Y}_X = cl_{\mathcal{Y}} f(X)$ локально выпукло и отделимо в топологии подпространства, то оно является тихоновским пространством (см., например,[6], с.98). Поэтому каждая функция μ_k имеет продолжение $\bar{\mu}_k \in C(\mathcal{Y}_X, \mathbb{R})$ (см.[II], с. 43).

Для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ пусть $\beta_k = \bar{\mu}_k \circ f$. Тогда $\beta_k \in C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$ при всех $k \in \mathbb{N}_n$. Поскольку $\mathfrak{A}$ всюду плотно в $C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$, то для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ существует такая функция $\alpha_k \in \mathfrak{A}$, что

$$\sup_{x \in S} |(\alpha_k - \beta_k)(x)| < \frac{\varepsilon}{3K},$$

где K - число, удовлетворяющее условию

$$K > \sum_{k=1}^{n} p_\lambda(y_k).$$

Кроме того, ввиду всюду плотности множества Z в $\mathcal{Y}$, для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ существуют элементы $z_k \in Z$ такие, что

$$p_\lambda(z_k - y_k) < \frac{\varepsilon}{3T},$$

где T - число, удовлетворяющее условию

$$T > \sup_{x \in S} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x)|.$$

Учитывая это и сказанное, имеем

$$\begin{aligned} p_\lambda\Big(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) z_k - f(x)\Big) \leq & \sum_{k=1}^{n} |(\bar{\mu}_k \circ f)(x)|\, p_\lambda(y_k - f(x)) + \\ & + \sum_{k=1}^{n} |(\beta_k - \alpha_k)(x)|\, p_\lambda(y_k) + \\ & + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k(x)|\, p_\lambda(y_k - z_k) < \end{aligned}$$

---

[4] Здесь и всюду в дальнейшем $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

$$< \frac{\varepsilon}{3} \sum_{k=1}^{n} \mu_k(f(x)) + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} <$$

$$< \varepsilon$$

при всех $x \in S$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \in \mathcal{O}(f) \cap L(\mathfrak{A}, Z).$$

Значит, множество $L(\mathfrak{A}, Z)$ (следовательно и $\mathcal{L}$) всюду плотно в $C(X, Y; \mathfrak{S})$.

б) Пусть выполнено условие (β). Пусть $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$ и $\mathcal{O}(f)$ – любая окрестность функции f в топологии пространства $C(X, Y; \mathfrak{S})$. Аналогично тому, как и выше, $f + T(S, \mathcal{U}) \subset \mathcal{O}(f)$ при некоторых $S \in \mathfrak{S}$ и окрестности нуля $\mathcal{U}$ пространства Y. Теперь существует такая окрестность $\mathcal{U}'$ пространства Y, что $\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}' + \mathcal{U}' + \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$. Поскольку Y обладает свойством аппроксимации и множество $Y_S = cl_Y f(S)$ компактно в нем, то найдется такой линейный непрерывный конечномерный оператор $L: Y \to Y$, что $L(y) - y \in \mathcal{U}'$ при всех $y \in Y_S$. Пусть $Y_0 \subset Y$ – конечномерное подпространство, содержащее $L(Y)$, и $\{a_1, \ldots, a_n\}$ – базис этого подпространства. Тогда

$$L(y) = \lambda_1(y) a_1 + \ldots + \lambda_n(y) a_n$$

для каждого $y \in Y$, где функции λ_k непрерывны на Y для каждого $k \in \mathbb{N}_n$. Таким образом, функции $\beta_k = \lambda_k \circ f$ непрерывны на X для каждого $k \in \mathbb{N}_n$, и множества $\lambda_k(Y_S)$ замкнуты и компактны в Y для каждых $S \in \mathfrak{S}$ и $k \in \mathbb{N}_n$. Поэтому $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$ и существуют такие числа $M_k > 0$, что $|\beta_k(x)| \leq M_k$ при всех $x \in S$ и $k \in \mathbb{N}_n$.

Пусть теперь $M = max\{M_1, \ldots, M_n\}$ и $\mathcal{V}$ – такая уравновешенная окрестность нуля пространства Y, что

$$\mathcal{V}_n = \underbrace{\mathcal{V} + \ldots + \mathcal{V}}_{(n \text{ слагаемых})} \subset \mathcal{U}'.$$

В силу всюду плотности Z в Y, для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ найдется $z_k \in (a_k + M^{-1}\mathcal{V}) \cap Z$. Теперь для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ существует число $\varepsilon_k > 0$ такое, что $\lambda z_k \in \mathcal{V}$ при $|\lambda| < \varepsilon_k$. Кроме того (ввиду всюду плотности $\mathfrak{A}$ в $C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$), для каждого $k \in \mathbb{N}_n$ существует $\alpha_k \in \mathfrak{A}$ такая, что $|(\alpha_k - \beta_k)(x)| < \varepsilon_k$ при всех $x \in S$. Поэтому, учитывая равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) z_k - f(x) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k(x) - \beta_k(x)) z_k + \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x)(z_k - a_k) +$$

$$+ L(f(x)) - f(x),$$

справедливо

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) z_k - f(x) \subset \mathcal{V}_n + \sum_{k=1}^{n} \beta_k(x) M^{-1} \mathcal{V} + \mathcal{U}' \subset$$
$$\subset \mathcal{U}' + \mathcal{V}_n + \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_0$$

при всех $x \in S$. Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \in \mathcal{O}(f) \cap L(\mathcal{O\!\iota}, Z).$$

Значит, множества $L(\mathcal{O\!\iota}, Z)$ и $\mathcal{L}$ всюду плотны в $C(X, Y; \mathfrak{S})$.

в) Пусть выполнено условие (μ). Тогда существует число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\dim X \leq n$. Пусть опять $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$, $\mathcal{O}(f)$ – любая окрестность функции f в топологии пространства $C(X, Y; \mathfrak{S})$, и пусть $S \in \mathfrak{S}$ и окрестность нуля $\mathcal{U}$ пространства Y такие, что $f + T(S, \mathcal{U}) \subset \mathcal{O}(f)$. Пусть далее $\mathcal{V}$ – такая открытая уравновешенная окрестность нуля пространства Y, что $\mathcal{V}_{2n+3} \subset \mathcal{U}$ (здесь $\mathcal{V}_k$ обозначает сумму, состоящую из k слагаемых $\mathcal{V}$). Поскольку $f(x) + \mathcal{V}$ является открытой окрестностью точки $f(x)$ в Y, то $\mathcal{O}(x) = f^{-1}(f(x) + \mathcal{V})$ является открытой окрестностью точки x в X. Легко заметить, что эти окрестности покрывают $\bar{S} = cl_X S$. Поэтому (ввиду компактности множества $\bar{S}$) существуют число $\ell \in \mathbb{N}$ и точки $x_1, \ldots, x_\ell \in \bar{S}$ такие, что

$$\bar{S} \subset \bigcup_{k=1}^{\ell} \mathcal{O}(x_k).$$

Таким образом, $\Omega = \{X \setminus \bar{S}, \mathcal{O}(x_1), \ldots, \mathcal{O}(x_\ell)\}$ является конечным открытым покрытием пространства X. Поэтому в Ω можно вписать конечное открытое покрытие ω пространства X кратности $\leq n+1$. Следовательно, существуют число $r \in \mathbb{N}$ и множества $K_1, \ldots, K_r \in \omega$ такие, что эти множества покрывают $\bar{S}$ и для каждого $i \in \mathbb{N}_r$ справедливо $K_i \subset \mathcal{O}(x_{k_i})$ при некотором $k_i \in \mathbb{N}_\ell$. Кроме того, для каждого $x \in \bar{S}$ множество $I_x = \{i \in \mathbb{N}_r : x \in K_i\}$ имеет не более, чем $n+1$ элементов.

Пусть теперь $\beta_1, \ldots, \beta_r \in C(\bar{S}, [0,1])$ – разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{K_1, \ldots, K_r\}$, и $\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_r \in C(X, \mathbb{R})$ продолжения этих функций на X (существование которых показано в [1], с. 43). Тогда $\bar{\beta}_i \in C(X, \mathbb{K}; \mathfrak{S})$ для каждого $i \in \mathbb{N}_r$, $\bar{\beta}_i(x) = 0$ при $x \in \bar{S} \setminus K_i$ и $\bar{\beta}_1(x) + \ldots + \bar{\beta}_r(x) = 1$ для всех $x \in \bar{S}$. Так как Z всюду плотно в Y, то для каждого $i \in \mathbb{N}_r$ существует $z_i \in (f(x_{k_i}) + \mathcal{V}) \cap Z$. Таким образом,

$$M(x) = \sum_{k=1}^{r} \bar{\beta}_i(x)[f(x_{k_i}) - f(x)] = \sum_{i \in I_x} \bar{\beta}_i(x)[f(x_{k_i}) - f(x)] \in$$

$\in \mathcal{V}_{n+1}$

и

$$N(x) = \sum_{i=1}^{r} \bar{\beta}_i(x)[z_i - f(x_{k_i})] = \sum_{i\in I_x} \bar{\beta}_i(x)[z_i - f(x_{k_i})] \in$$
$$\in \mathcal{V}_{n+1}$$

при всех $x \in \bar{S}$ ибо окрестность $\mathcal{V}$ уравновешена и из $K_i \subset \mathcal{O}(x_{k_i})$ следует $f(x_{k_i}) - f(x) \in \mathcal{V}$ при $x \in K_i$.

Пусть далее $\mathcal{V}'$ – такая окрестность нуля пространства Y, что $\mathcal{V}' + \ldots + \mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$ (r слагаемых). Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}_r$ существуют число $\varepsilon_i > 0$ такое, что $\lambda z_i \in \mathcal{V}'$ при $|\lambda| < \varepsilon_i$, и (ввиду всюду плотности $\mathfrak{A}$ в $C(X, Y; \mathfrak{S})$) функция $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ такая, что $|(\alpha_i - \beta_i)(x)| < \varepsilon_i$ при $x \in S$. Учитывая теперь это и вышесказанное, имеем

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) z_i - f(x) = \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i(x) - \bar{\beta}_i(x)) z_i + N(x) + M(x) \in$$
$$\in \mathcal{V} + \mathcal{V}_{n+1} + \mathcal{V}_{n+1} \subset \mathcal{U}$$

при всех $x \in S$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i z_i \in L(\mathfrak{A}, Z) \cap O(f),$$

в силу чего $L(\mathfrak{A}, Z)$ и $\mathcal{B}$ всюду плотны в $C(X, Y; \mathfrak{S})$.

г) Пусть выполнено условие (δ). Тогда для каждого $S \in \mathfrak{S}$ существует число $n_S \in \mathbb{N}$ такое, что $\dim cl_X S \leq n_S$. Пусть опять $f \in C(X, Y; \mathfrak{S})$ и $O(f)$ – любая окрестность функции f в топологии пространства $C(X, Y; \mathfrak{S})$. Тогда существуют $S \in \mathfrak{S}$, окрестность нуля $\mathcal{U}$ и открытая уравновешенная окрестность нуля $\mathcal{V}$ пространства Y такие, что $f + T(S, \mathcal{U}) \subset O(f)$ и $\mathcal{V}_{2n_S+3} \subset \mathcal{U}$, где опять $\mathcal{V}_k$ обозначает сумму $\mathcal{V} + \ldots + \mathcal{V}$, состоящую из k слагаемых. Аналогично тому, как и выше, положим $\bar{S} = cl_X S$ и $\mathcal{O}(x) = f^{-1}(f(x) + \mathcal{V})$. Тогда существуют число $m \in \mathbb{N}$ и элементы $x_1, \ldots, x_m \in \bar{S}$ такие, что $\Omega = \{\mathcal{O}(x_k) \cap \bar{S};\ k \in \mathbb{N}_m\}$ является открытым покрытием пространства $\bar{S}$. Теперь по условию (δ) существуют такое число $r \in \mathbb{N}$ и покрытие $\omega = \{K_1, \ldots, K_r\}$ пространства $\bar{S}$, что ω можно вписать в Ω, и для каждого $x \in \bar{S}$ множество $I_x = \{i \in \mathbb{N}_r : x \in K_i\}$ имеет не более, чем $n_S + 1$ элементов. Теперь опять (аналогично тому, как и в части в) доказательства) для каждого $i \in \mathbb{N}_r$ существуют $z_i \in Z$ и $\alpha_i \in \mathfrak{A}$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i(x) z_i - f(x) \in \mathcal{V}_{2n_S+3}$$

при всех $x \in \bar{S}$. Следовательно, $L(\mathfrak{A}, Z)$ и $\mathcal{B}$ всюду плотны в $C(X, Y; \mathfrak{S})$.

Примечание. Теорема I известна во многих частных случаях. Например, всюду плотность множества $L(C(X,\mathbb{K}),Y)$ в $C(X,Y)$ доказана в [8], с. 206, в [12], с. 28, и в [10], если X компактно и выполнено условие (α), а в [20], теорема I и следствия I и 2 (см. также [21], с. 26–32), если X компактно, но выполнено одно из условий (β) или $\dim X<\infty$ (случай, когда Y есть F-пространство с базисом доказан в [15], с. 294). Всюду плотность множества $L(C(X,\mathbb{K};\mathfrak{S}),Y)$ в $C(X,Y;\mathfrak{S})$ показана в [8], с. 206, если выполнено условие (α) и каждое $S\in\mathfrak{S}$ компактно в X, и в [17], с. 43–44, если каждое $S\in\mathfrak{S}$ замкнуто и выполнено условие (δ). Кроме того, всюду плотность $L(C_c(X,\mathbb{K}),Y)$ в $C_c(X,Y)$ показана в [14] в случае, когда выполнено условие (α).

2. Пусть X – топологическое пространство, Y – линейное топологическое пространство над $\mathbb{K}$, $Z\subset Y$, $\mathfrak{A}\subseteq C_c(X,Y)$ и $\mathfrak{A}|Z=\{f|Z: f\in\mathfrak{A}\}$. Кроме того, пусть L_Z – отображение $C_c(X,Y)$ в $C_c(Z,Y)$, определяемое на $C_c(X,Y)$ равенством

$$L_Z(f)=f|Z.$$

Предложение I. Пусть X – нормальное пространство и Z – его непустое замкнутое подмножество. Тогда для каждого линейного топологического пространства Y над $\mathbb{K}$ отображение L_Z непрерывно, открыто и линейно.

Доказательство. Линейность отображения L_Z очевидна. Чтобы показать его непрерывность возьмем любую окрестность нуля $\mathcal{U}$ пространства $C_c(Z,Y)$. Тогда существует окрестность нуля $\mathcal{O}$ пространства Y такая, что $T(Z,\mathcal{O})\subset\mathcal{U}$. Поскольку $T(X,\mathcal{O})|Z\subset T(Z,\mathcal{O})$ и $T(X,\mathcal{O})$ является окрестностью нуля пространства $C_c(X,Y)$, то отображение L_Z непрерывно (см., например, [4], с. 122).

Пусть теперь $\mathcal{U}$ – любое открытое множество в $C_c(X,Y)$. Тогда $\mathcal{U}$ является объединением множеств $T(X,\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – открытая уравновешенная окрестность нуля пространства Y. Поскольку образ объединения множеств совпадает с объединением образов соответствующих множеств, то достаточно показать только открытость множества $T(X,\mathcal{O})|Z$ в $C_c(X,Y)|Z$. Для этого покажем, что

$$T(X,\mathcal{O})|Z=T(Z,\mathcal{O})\cap C_c(X,Y)|Z.$$

Так как $T(X,\mathcal{O})|Z\subset T(Z,\mathcal{O})$, то остается показать справедливость включения

$$K=T(Z,\mathcal{O})\cap C_c(X,Y)|Z\subseteq T(X,\mathcal{O})|Z.$$

Пусть $h\in K$. Тогда $h=g|Z$ при такой функции $g\in C_c(X,Y)$, что $g(Z)\subset\mathcal{O}$. В силу этого, Z и $F=X\setminus g^{-1}(\mathcal{O})$

являются замкнутыми непересекающимся подмножествами пространства X. Если $F = \emptyset$, то $g \in T(X, \mathcal{O})$, в силу чего $h \in T(X, \mathcal{O})|Z$. Пусть теперь $F \neq \emptyset$. Тогда (ввиду нормальности пространства X) существует функция $\varphi \in C(X, [0, 1])$ такая, что $\varphi(x) = 1$ при $x \in Z$ и $\varphi(x) = 0$ при $x \in F$. Теперь $f = \varphi g \in C_c(X, Y)$ и $f|Z = h$. Если $x \in F$, то $f(x) = \theta_Y \in \mathcal{O}$, а если $x \notin F$, то $f(x) = \varphi(x) g(x) \subset \varphi(x)\mathcal{O} \subset \mathcal{O}$. Следовательно, $f \in T(X, \mathcal{O})$, а $h \in T(X, \mathcal{O})|Z$, что и завершает доказательство.

Хорошо известно (см., например, [19], с. 101 и [11], с. 43), что $C(X, \mathbb{K})|Z = C(Z, \mathbb{K})$ и[5] $C_b(X, \mathbb{K})|Z = C_b(Z, \mathbb{K})$, если либо X нормальное пространство и Z замкнуто в X, либо X тихоновское пространство и Z компактно в X. На случай векторнозначных функций эти результаты обобщили Дугунджи, Де ла Фуэнте и Пролла. Именно, в статье [9], с. 357 (см. также [16] и [2], с. 86), Дугунджи показал, что $C(X, Y)|Z = C(Z, Y)$, если X является метрическим пространством, Z замкнутым подмножеством в X и Y локально выпуклым пространством над $\mathbb{R}$. Кроме того, в книге [17], с. 54 (в частности, когда X компактно, см. [7]), Пролла показал, что $C_b(X, Y)|Z = C_b(Z, Y)$, если X является тихоновским пространством, Z компактным подмножеством в X и Y локально выпуклым пространством со свойством E_c (см. [17], с. 53 или [7]).

Чтобы доказать аналоги результата Пролла, введем следующие классы линейных топологических пространств. Через T будем обозначать класс тех отделимых полных линейных топологических пространств, которые обладают свойствами

1) если $Y \in T$ и Z замкнутое подмножество в Y, то $Y / Z \in T$

и

2) $C_c(X, Y) \in T$ для каждого $Y \in T$ и нормального пространства X,

через T_Δ - подкласс тех пространств в T, которые обладают свойством аппроксимации, а через T_{Lc} - подкласс локально выпуклых пространств в T. Оказывается, что каждое F-пространство (т.е. полное метризуемое линейное топологическое пространство над $\mathbb{K}$) Y принадлежит T, ибо Y обладает свойством 1) (см., например, [13], с. 113 и 138) и

---

[5] Через $C_b(X, Y)$ обозначается множество всех непрерывных ограниченных Y-значных функций на X.

5

свойством 2) ввиду метризуемости и полноты пространства $C(\beta X, Y)$ (см., например, [3], с. 184) и топологической изоморфности пространств $C_c(X, Y)$ и $C(\beta X, Y)$ (здесь и в дальнейшем через βX обозначается расширение Стоуна-Чеха пространства X). Кроме того, каждое F-пространство с базисом принадлежит T_A (см. [20], с. 101).

Предложение 2. Пусть X - нормальное пространство и Z - его непустое замкнутое подмножество. Если $Y \in T_A \cup T_{Lc}$, то
$$C_c(X, Y)|Z = C_c(Z, Y).$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что Z является тихоновским пространством, $L(C_c(X, \mathbb{K}), Y)|Z \subseteq \subseteq C_c(X, Y)|Z \subseteq C_c(Z, Y)$ и $L(C_c(X, \mathbb{K}), Y)|Z = L(C_c(Z, \mathbb{K}), Y)$ по теореме Титце-Урысона. Поэтому $C_c(X, Y)|Z$ всюду плотно в $C_c(Z, Y)$ по теореме 1. Кроме того, ядро $\ker L_Z$ отображения L_Z замкнуто в $C_c(X, Y)$ по предложению 1, в силу чего фактор пространство $C_c(X, Y)/\ker L_Z$ полно. Далее, пространства $C_c(X, Y)/\ker L_Z$ и $C_c(X, Y)|Z$ топологически изоморфны по предложению 1. Поэтому полно и пространство $C_c(X, Y)|Z$. Учитывая это и сказанное выше видим, что $C_c(X, Y)|Z = C_c(Z, Y)$.

Предложение 3. Пусть X - тихоновское пространство и Z - его непустое компактное подмножество (непустое компактное подмножество конечной размерности в смысле покрытий). Если $Y \in T_A \cup T_{Lc}$ (соответственно, $Y \in T$), то
$$C_c(X, Y)|Z = C(Z, Y).$$

Доказательство. Пусть h_X - гомеоморфизм X в βX, определяемый пространством βX, и $f \in \in C(Z, Y)$. Поскольку Z компактно в X, то $h_X(Z)$ компактно в βX. Поэтому $C(\beta X, Y)|h_X(Z) = C(h_X(Z), Y)$ по предложению 2. Следовательно, существует такая $g \in C(\beta X, Y)$, что $g \circ h_X(z) = f \circ (h_X|Z)^{-1}(h_X(z)) = f(z)$ при всех $z \in Z$ (ибо $f \circ (h_X|Z)^{-1} \in C(h_X(Z), Y)$). Так как $g \circ h_X \in C_c(X, Y)$, то $C_c(X, Y)|Z = C(Z, Y)$.

Из сказанного выше и предложений 2 и 3 вытекают

Теорема 2. Пусть X - нормальное пространство, Z - его непустое замкнутое подмножество и Y - либо локально выпуклое F-пространство, либо F-пространство, обладающее свойством аппроксимации. Тогда каждая функция $f \in C_c(Z, Y)$ имеет продолжение $\tilde{f} \in C_c(X, Y)$.

Теорема 3. Пусть X - тихоновское пространство, Z - его непустое компактное подмножество (непустое компактное подмножество конечной размерности в смысле покрытий) и Y – либо локально выпуклое F-пространство, либо F-пространство, обладающее свойством аппроксимации (соответственно Y любое F-пространство). Тогда каждая $f \in C(Z, Y)$ имеет продолжение $\bar{f} \in C_c(X, Y)$.

Литература

1. Абель М. Условия всюду плотности в некоторых пространствах непрерывных функций. – Уч. зап. Тарт. ун-та, 1977, 430, 6–13.
2. Борсук К. Теория ретрактов. – М.: Мир, 1971, – 292 с.
3. Бурбаки Н. Общая топология. Функциональные пространства. – М.: Наука, 1975. – 408 с.
4. Келли Дж. Л. Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
5. Наймарк М.А. Нормированные кольца. – М.: Наука, 1968. – 664 с.
6. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ, т. I. – М.: Наука, 1975. – 654 с.
7. De la Fuente A. Algunos resultados sobre aproximacion de funciones vectoriales tipo teorema Weierstrass-Stone. – Ph. D. Dis. – Univ. de Madrid, 1973.
8. Dietrich W. Jr. The maximal ideal space of the topological algebra $C(X, E)$. – Math. Ann., 1969, 183, 201–212.
9. Dugundji J. An extension of Tietze's theorem. – Pacif. J. Math., 1951, 1, 353–367.
10. Germanov L., L. Uniform approximation of continuous functions with values in locally convex space. – В кн.: Конструктивная теория функций. Тр. Междунар. конф. "Золотые пески" (Варна), 1970. – София, 1972, 183–185.
11. Gillman L., Jerison M. Rings of continuous functions. – Princeton: Van Nostrand, 1960. – 394 p.
12. Grothendieck A. Topological vector spaces. – London: Gordon and Breach, 1973. – 245 p.
13. Horváth J. Topological Vector Spaces and Distributions, Vol. I. – Massachusetts: Addison and Weslye Publ. Co., 1966. – 449 p.
14. Katsaras A.K. Continuous linear functionals on spaces of vector-valued functions. – Bull. Soc. Math. Grece, 1974, 15, 13–19.

15. Klee V. Leray-Schauder theory without local convexity. - Math. Ann., 1960, 141, 286-296.
16. Michael E. Some extension theorems for continuous functions. - Pacif. J. Math., 1953, 3, 789-806.
17. Prolla J. B. Approximation of Vector-Valued Functions. - North-Holland Math. Studies 25, - Amsterdam: N.-Holl. Publ. Co., 1977. - 219 p.
18. Prolla J. B. Topological algebras of vector-valued continuous functions. - In. "Math. Anal. and Appl Pt. B. - New-York: Acad. Press., 1981", 727-740.
19. Semadeni Z. Banach spaces of continuous functions. - Warszawa: PWN, 1971, - 584 p.
20. Shuchat A.H. Approximation of vector-valued continuous functions. - Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 31, N 1,97-103.
21. Waelbroeck L. Topological vector spaces. - In "Summer School on Topological Vector Spaces. - Lect. Notes Math. 331, - Berlin: Springer-Verlag, 1973, - 226 p.", 1-40.

Поступило II. 10.1986

ON DENSE SUBSETS IN SOME SPACES OF VECTOR-VALUED FUNCTIONS

M. Abel

Summary

Let $\mathbb{K}$ be one of the fields $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, X be a topological space, $\mathfrak{S}$ be a cover of X, Y be a linear topological space over $\mathbb{K}$, $C(X,Y)$ be the space of all continuous Y-valued functions on X, $C(X,Y;\mathfrak{S})$ be the subspace (endowed with topology of $\mathfrak{S}$-convergence) of those $f\in C(X,Y)$, for which $f(S)$ is relatively compact in Y for each $S\in\mathfrak{S}$ and let $C_c(X,Y)=C(X,Y;\mathfrak{S})$. Moreover, for each $\alpha\in C(X,\mathbb{K};\mathfrak{S})$ and $y\in Y$ let αy denote the function, defined on X by $(\alpha y)(x)=\alpha(x)y$ and let $L(\mathfrak{A},Z)$ denote the linear span of $\{\alpha y:\alpha\in\mathfrak{A},y\in Z\}$ where $\mathfrak{A}\subseteq C(X,\mathbb{K};\mathfrak{S})$ and $Z\subseteq Y$.

The following results are proved:

Theorem 1. Let X be a Tychonoff space, $\mathfrak{S}$ be a cover of X, closed under finite unions, and Y be a linear topological space over $\mathbb{K}$. In addition, let $\mathfrak{A}$ and Z be dense subsets in $C(X,\mathbb{K};\mathfrak{S})$ and in Y respectively. Then any subset $\mathcal{L}\subset C(X,Y;\mathfrak{S})$ containing $L(\mathfrak{A},Z)$ is dense in

$C(X, Y; \mathfrak{S})$ in each of the following cases:

1) topology of Y is locally convex,

2) Y has the approximation property,

3) X has finite covering dimension and all elements of $\mathfrak{S}$ are relatively compact in X,

4) every $S \in \mathfrak{S}$ is relatively compact and its closure has finite covering dimension.

Theorem 2. Let X be a normal space, Z be a nonempty closed subset of X and Y be either a locally convex F-space or a F-space which has the approximation property. Then any $f \in C_c(Z, Y)$ has the extension $\bar{f} \in C_c(X, Y)$.

Theorem 3. Let X be a Tychonoff space, Z be a nonempty compact subset of X (a nonempty compact subset of X which has finite covering dimension) and Y be either a locally convex F-space or a F-space which has the approximation property (respectively, a F-space). Then any $f \in C(Z, Y)$ has the extension $\bar{f} \in C_c(X, Y)$.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 38-50

МАТРИЧНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОЛЕЙ СУММИРУЕМОСТИ

А. Аасма

Кафедра математического анализа

Введение

Пусть $\mathbb{N}=\{0,1,\dots\}$, $\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел, $A=(\alpha_{nk})$ – матричный метод суммирования над $\mathbb{C}$ (т.е. $\alpha_{nk}\in\mathbb{C}$ для всех $k,n\in\mathbb{N}$), заданный в виде преобразования ряда в последовательность, и c_A – поле суммируемости метода A (т.е. множество тех рядов, которые суммируемы методом A). Метод $A=(\alpha_{nk})$ называется регулярным, если он суммирует все сходящиеся ряды к их обычной сумме, и нормальным, если он треуголен (т.е. $\alpha_{nk}=0$ при $k>n$) и $\alpha_{nn}\neq 0$ при любом $n\in\mathbb{N}$. Далее, метод $A=(\alpha_{nk})$ называется реверсивным, если бесконечная система[1)]

$$u'_n=\sum_k \alpha_{nk}u_k \tag{1}$$

имеет единственное решение для каждой сходящейся последовательности (u'_n).

Числа ε_n называются множителями суммируемости типа (A,B), если для любого A-суммируемого ряда $\sum u_k$ ряд $\sum \varepsilon_k u_k$ является B-суммируемым. В случае многих конкретных методов A и B, необходимые и достаточные условия для множителей суммируемости типа (A,B) известны (см., например, [1, 3, 6]).

Пусть $B=(\beta_{nk})$ – матричный метод суммирования над $\mathbb{C}$, заданный в виде преобразования ряда в последовательность; $\mathfrak{M}_c(A)$ – множество всех бесконечных матриц $M=(m_{nk})$ над $\mathbb{C}$, при которых преобразование

$$y_n=\sum_k m_{nk}u_k \tag{2}$$

существует для каждого $\sum u_k\in c_A$ (т.е. каждая строка матрицы M является множителем сходимости для метода A) и (c_A, c_B) – множество всех матриц $M\in\mathfrak{M}_c(A)$, которые преобразуют c_A в c_B.

---

1) Если пределы индексов не определены, то они изменяются от 0 до ∞.

Целью данной статьи является нахождение необходимых и достаточных условий для матрицы $M \in \mathfrak{M}_c(A)$, при которых $M \in (c_A, c_B)$ (т.е. изучение более общей задачи, чем нахождение необходимых и достаточных условий для множителей суммируемости рядов). Эта задача решена в [4] при $A = C^\alpha$ и $B = C^\beta$, где C^α и C^β – методы Чезаро ($\alpha, \beta \geqslant 0$). В данной статье рассматриваемая выше задача решается в случае, когда A является реверсивным и B конечнострочным[2)] методом суммирования. Полученные результаты применяются в § 3 к методам Чезаро комплексного порядка (это обобщает результат статьи [4]) и в § 4 к методам взвешенных средних Рисса.

I. Некоторые вспомогательные результаты

Для дальнейшего нужны следующие результаты.

Лемма I. ([I], с.I2–I7) Преобразование

$$u_n' = \sum_k a_{nk} u_k$$

переводит все сходящиеся к нулю последовательности (u_k) в сходящиеся последовательности (u_n') тогда и только тогда, когда выполнены условия

(A_1) $\lim_n a_{nk} = a_k$,

(A_2) $\sum_k |a_{nk}| = O(1)$.

При этом,

$$\lim_n u_n' = \sum a_k u_k.$$

Лемма 2. ([I], с. 25–26) Преобразование

$$u_n' = \sum_k \beta_{nk} u_k \tag{3}$$

переводит все абсолютно сходящиеся ряды $\sum u_k$ в сходящиеся последовательности (u_n') тогда и только тогда, когда

(B_1) $\lim_n \beta_{nk} = \beta_k$,

(B_2) $\beta_{nk} = O(1)$.

Лемма 3. ([I], с. I7–20) Преобразование (3) переводит все сходящиеся ряды $\sum u_k$ в сходящиеся последовательности (u_n') тогда и только тогда, когда выполнены условия[3)] (B_1)

---

2) т.е. когда в каждой строке матрицы B только конечное число отличных от нуля элементов.

3) Здесь и в дальнейшем $\Delta\beta_{nk} = \beta_{nk} - \beta_{n,k+1}$.

и

(B_3) $\sum_k |\Delta\beta_{nk}| = O(1)$.

2. Преобразования полей суммируемости

Пусть $\sum \eta_n$ и $\sum_n \eta_{nk}$ – решения системы (I) при $\mathcal{U}'_n = \delta_{nn}$ и $\mathcal{U}'_n = \delta_{nk}$ соответственно, и пусть

$$B_{nl} = \sum_k \beta_{nk} m_{kl}, \quad \bar{B} = (B_{nl}), \quad \varkappa^n_{hk} = \sum_{l=0}^{h} B_{nl}\eta_{lk},$$

$$\varkappa_{nk} = \lim_h \varkappa^n_{hk}, \quad \varkappa_k = \lim_n \varkappa_{nk}.$$

Теорема I. Если метод A реверсивен и метод B конечнострочен, то матрица $M \in \mathfrak{M}_c(A)$ принадлежит множеству (c_A, c_B) тогда и только тогда, когда выполнены условия

(AB_1) ряды $\sum_n \eta_{nk}$ и $\sum \eta_n$ $\bar{B}$–суммируемы,

(AB_2) $\sum_k |\varkappa_{nk}| = O(1)$.

Доказательство. Необходимость. Ввиду конечнострочности матрицы B, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует число $\varkappa_n$ такое, что $\beta_{nk} = 0$ при $k > \varkappa_n$. Поэтому

$$B_{nl} = \sum_{k=0}^{\varkappa_n} \beta_{nk} m_{kl}.$$

Если $M \in (c_A, c_B)$, то преобразование (2) существует для каждого $\sum u_l \in c_A$ и справедливо

$$\sum_k \beta_{nk} y_k = \sum_l B_{nl} u_l. \tag{4}$$

Таким образом, для B–суммируемости ряда $\sum y_k$ при всех $\sum u_l \in c_A$ необходима $\bar{B}$–суммируемость каждого ряда $\sum u_l \in c_A$. Следовательно, метод $\bar{B}$ включает метод A. Поэтому, ввиду A–суммируемости ряда $\sum \eta_l$ (см.[3], с. 200), необходима $\bar{B}$–суммируемость этого ряда.

Ввиду реверсивности метода A, элементы u_l ряда $\sum u_l \in c_A$ представимы в виде

$$u_l = \eta_l \mathcal{U}' + \sum_k \eta_{lk}(\mathcal{U}'_k - \mathcal{U}'), \tag{5}$$

где $\mathcal{U}'_n = \sum_l a_{nl} u_l$, $\mathcal{U}' = \lim \mathcal{U}'_n$ и $\sum_k |\eta_{lk}| < \infty$ (см. [3], с. 200). Из равенства (5) заметим, что ряды $\sum_k \eta_{lk}(\mathcal{U}'_k - \mathcal{U}')$ сходятся. Тогда ввиду конечнострочности метода B, для каждого $\sum u_l \in c_A$ имеет место равенство

$$\sum_{l=0}^{h} B_{nl} u_l = \mathcal{U}' \sum_{l=0}^{h} B_{nl}\eta_l + \sum_k \varkappa^n_{hk}(\mathcal{U}'_k - \mathcal{U}'). \tag{6}$$

Поскольку

$$\sum_{l=0}^{s} B_{nl}u_l = \sum_{l=0}^{s}\left(\sum_{k=0}^{r_n}\beta_{nk}m_{kl}\right)u_l = \sum_{k=0}^{r_n}\beta_{nk}\sum_{l=0}^{s}m_{kl}u_l$$

и преобразование (2) существует для каждого $\sum u_l \in c_A$, то ряды $\sum_l B_{nl}u_l$ сходятся. Поэтому, учитывая равенство (6) и $\bar{B}$-суммируемость ряда $\sum \eta_n$, можем заключить, что существует конечный предел $\lim_s \sum_k \chi^n_{sk}(\mathcal{U}'_n - \mathcal{U}')$ для каждой сходящейся к нулю последовательности. Следовательно, по лемме I, из равенства (6) следует справедливость равенства

$$\sum_l B_{nl}u_l = \mathcal{U}'\sum_l B_{nl}\eta_l + \sum_k \chi_{nk}(\mathcal{U}'_k - \mathcal{U}'). \tag{7}$$

Теперь нетрудно заметить, что для $\bar{B}$-суммируемости ряда $\sum u_l \in c_A$ необходимо существование конечного предела $\lim_n \sum_k \chi_{nk}(\mathcal{U}'_k - \mathcal{U}')$, в силу чего ряды $\sum_n \eta_{nk}$ являются $\bar{B}$-суммируемыми и справедливо условие (AB_2) по лемме I.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть выполнены условия (AB_I) и (AB_2). Поскольку метод B конечнострочен и $M \in \mathfrak{M}_c(A)$, то (аналогично доказательству необходимого условия теоремы), по условию (AB_I) справедливо равенство (7) для каждого ряда $\sum u_l \in c_A$. Положим $\Gamma = (\chi_{nk})$. Тогда по лемме I последовательность $(\mathcal{U}'_k - \mathcal{U}')$ является Γ-суммируемой. Учитывая это и условие (AB_I) можем заключать, что из равенства (7) вытекает $\bar{B}$-суммируемость ряда $\sum u_l \in c_A$. Следовательно, ряд $\sum y_k$ является B-суммируемым по равенству (4).

<u>Примечание I.</u> В случае бесконечнострочного метода B справедливо следующее утверждение: если ряды B_{nl} сходятся и для каждого $\sum u_l \in c_A$ справедливо равенство (4), то матрица $M \in (c_A, c_B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (AB_I), (AB_2),

(AB_3) $\lim_s \chi^n_{sk} = \chi_{nk}$,

(AB_4) $\sum_k |\chi^n_{sk}| = O_n(1)$.

Из теоремы I, согласно лемме I, вытекает

<u>Следствие I.</u> Если метод A реверсивен, метод B конечнострочен и матрица $M \in (c_A, c_B)$, то выполнено условие

(AB_5) $\sum|\chi_k| < \infty$.

Поскольку из условия $M \in (c_A, c_B)$ следует, что $\bar{B} \geq A$ (см. доказательство теоремы I), то из теоремы I вытекает

<u>Следствие 2.</u> Если метод A сохраняет сходимость, метод B конечнострочен и матрица $M \in (c_A, c_B)$, то и метод $\bar{B}$ сохраняет сходимость.

Если матрица $M = (m_{nk})$ такова, что $m_{nk} = \delta_{nk}\varepsilon_k$, где (ε_k) – заданная последовательность чисел, то из утверждения при-

6

мечания I следует один результат Кангро [3], стр. 206 – 208 (а при $\varepsilon_k \equiv 1$ – теорема Мазура-Хилла, которая дает необходимые и достаточные условия для включения $B \supseteq A$ (см.[I], с. 64)).

3. Преобразования полей суммируемости для методов Чезаро

Пусть $A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n}$ (см.[I], с. 78), $\alpha \in \mathbb{C}$. Метод Чезаро порядка α ($\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1,-2,\ldots\}$), коротко метод C^α, заданный в виде преобразования ряда в последовательность, определяется матрицей (α_{nk}), где

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} A_{n-k}^\alpha / A_n^\alpha & \text{при } k \leq n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что этот метод нормален.

Введем следующее обозначение: для любого числа $\alpha \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\alpha > -1$ или $\alpha = -1$ и для каждой ограниченной последовательности (ε_k) пусть

$$\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k = \sum_l A_l^{-\alpha-2}\varepsilon_{k+l}.$$

При таких условиях ряды $\sum_l |A_l^{-\alpha-2}\varepsilon_{k+l}|$ сходятся.

Для применения теоремы I в случае, когда оба методы A и B являются методами Чезаро, нужны следующие результаты.

Лемма 4.[I], с. I92) Если $\alpha \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$, то числа ε_k являются множителями сходимости типа (C^α, E) тогда и только тогда, когда выполнены условия

(C_1) $\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k| < \infty$,

(C_2) $\varepsilon_k = O(k^{-\operatorname{Re}\alpha})$.

<u>Лемма 5.</u> Пусть[4)] $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Если последовательность (ε_k) удовлетворяет условиям (C_1) и

(C_3) $\varepsilon_k = O(1)$,

то существует конечный предел

$$\lim \varepsilon_k = l \tag{8}$$

и для каждого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\sum_l A_l^\alpha \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_{k+l} = \varepsilon_k - l. \tag{9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (e_k) – последовательность чисел с

$$e_k = \sum_l A_l^\alpha \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_{k+l}.$$

Поскольку (см.[I], с. 79)

$$|A_n^\alpha| \leq M_1 (n+1)^{\operatorname{Re}\alpha}, \tag{I0}$$

4) В случае, когда $\alpha > -1$, лемма 5 доказана в статье [5], с. I0–I2.

$$|A_n^\alpha| \geq M_2(n+1)^{\operatorname{Re}\alpha}; \quad \alpha \neq -1,-2,\dots, \tag{11}$$

где M_1 и M_2 суть некоторые положительные числа, то существует такое число $M>0$, что

$$|A_l^\alpha| \leq M|A_{l+k}^\alpha|. \tag{12}$$

Поэтому

$$|e_k| \leq M\sum_{l=k}^{\infty}|A_l^\alpha||\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_l| \leq MM_1\sum_{l=k}^{\infty}(l+1)^{\operatorname{Re}\alpha}|\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_l|.$$

Отсюда, по условию (C_1), следует, что

$$\lim e_k = 0. \tag{13}$$

Нетрудно заметить, что $A_n^\alpha - A_{n-1}^\alpha = A_n^{\alpha-1}$.

Поэтому

$$\Delta^1 e_k = \Delta^{\alpha+1}\varepsilon_k + \sum_{l=1}^{\infty}(A_l^\alpha - A_{l-1}^\alpha)\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_{k+1} = \sum_l A_l^{\alpha-1}\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_{k+l}.$$

Методом математической индукции можно показать, что для каждого $n=1,2,\dots$ справедливо равенство

$$\Delta^n e_k = \sum_l A_l^{\alpha-n}\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_{k+l}. \tag{14}$$

Пусть теперь $\alpha = s+\delta+it$, где s – целая часть и δ – дробная часть числа $\operatorname{Re}\alpha$, а t – мнимая часть числа α. Используя равенство (14) при $n=s+1$ заметим, что

$$\Delta^{s+1}e_k = \sum_{l=0}^{\infty} A_l^{\delta+it-1}\Delta^{\alpha+1}\varepsilon_{k+l}.$$

Если $\delta=t=0$ (т.е. α целое число), то

$$\Delta^{s+1}e_k = \Delta^{s+1}\varepsilon_k, \tag{15}$$

ибо $A_n^{-1} = \delta_{n0}$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon_k = e_k + c_0 + c_1k^1 + \dots + c_s k^s,$$

где $c_0, c_1, \dots, c_s$ – некоторые числа (см.[2], с. 308-310). Ввиду условия (C_3) и (13) в последнем равенстве $c_1 = c_2 = \dots = c_s = 0$, так как k^s неограниченно возрастает при $k\to\infty$. Таким образом,

$$\varepsilon_k = e_k + c_0. \tag{16}$$

Покажем теперь, что равенство (16) справедливо и в случае $\delta\neq 0$ или $t\neq 0$. Известно (см.[1], с. 79), что ряд $H_\alpha = \sum|A_n^\alpha|$ сходится.

По условию (C_3)

$$\sum_m|A_m^{\delta+it-2}|\sum_l|A_l^{-\alpha-2}||\varepsilon_{k+m+l}| = O(1)H_{-\alpha-2}\sum_m|A_m^{\delta+it-2}| = O(1)H_{-\alpha-2}H_{\delta+it-2}.$$

Значит, ряд

$$\Delta^{s+2}e_k = \sum_m\left(\sum_l A_m^{\delta+it-2}A_l^{-\alpha-2}\varepsilon_{k+m+l}\right)$$

сходится абсолютно. Следовательно, согласно равенству

$$A_n^{\alpha+\delta+1} = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\delta}A_k^{\alpha}$$

для всех $\alpha, \delta \in \mathbb{C}$ (см.[I], с. 77), справедливо

$$\Delta^{s+2} e_k = \sum_m A_m^{\delta+it-2} \sum_\ell A_\ell^{-\alpha-2} \varepsilon_{k+m+\ell} = \sum_m A_m^{\delta+it-2} \sum_{\ell=m}^{\infty} A_{\ell-m}^{-\alpha-2} \varepsilon_{k+m} =$$

$$= \sum_\ell \left(\sum_{m=0}^{\ell} A_m^{\delta+it-2} A_{\ell-m}^{-\alpha-2} \right) \varepsilon_{k+\ell} = \sum_\ell A_\ell^{-s-3} \varepsilon_{k+\ell} = \Delta^{s+2} \varepsilon_k .$$

Таким образом, равенство (I5) (а также равенство (I6)) выполняется независимо от того, равны δ и t нулью или нет.

Теперь из равенства (I6), ввиду условия (I3), можем заключить, что условия (8) и (9) выполняются при $\ell = c_0$.

Теорема 2. Если метод B конечнострочен и $\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ или $\alpha = 0$, то матрица $M \in \mathfrak{M}_c(C^\alpha)$ принадлежит множеству (c_{C^α}, c_B) тогда и только тогда, когда

(BM_2) $\exists \lim_n B_{n\ell}$,

(CB_1) $\sum_k (k+1)^{\mathrm{Re}\,\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} B_{nk}| = O(1)$.

При этом из условий[5] (BM_2) и (CB_1) следует

(BM_3) $B_{nk} = O(1)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть матрица $M \in (c_{C^\alpha}, c_B)$. Тогда условия (BM_2) и (CB_1) необходимы. В самом деле, по теореме I выполнено условие (AB_2), а по следствию 2 и лемме 3 - также условие (BM_2). В данном случае $\varkappa_{nk} = A_k^\alpha \Delta_k^{\alpha+1} B_{nk}$, так как (см.[I], с. 86)

$$\eta_{nk} = A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-2}. \tag{I7}$$

Таким образом, условие (AB_2) принимает вид (CB_1).

Поскольку матрица $M \in (c_{C^\alpha}, c_B)$, то по равенству (4) ряды $\sum_k B_{nk} u_k$ сходятся для каждого $\sum u_k \in c_{C^\alpha}$. Итак, числа B_{nk} являются множителями сходимости типа (C^α, E) для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $B_{nk} = O_n(k^{-\mathrm{Re}\,\alpha})$ по лемме 4. Отсюда вытекают $B_{nk} = O_n(1)$ и $\lim_k B_{nk} = 0$, ибо $k^{\mathrm{Re}\,\alpha}$ неограниченно возрастает при $k \to \infty$. Таким образом, условия леммы 5 выполнены при $\varepsilon_k = B_{nk}$ и $\ell = 0$. Поэтому, по лемме 5, справедливо

$$B_{nk} = \sum_\ell A_\ell^\alpha \Delta_\ell^{\alpha+1} B_{n,k+\ell} = \sum_\ell \frac{A_\ell^\alpha}{A_{\ell+k}^\alpha} \varkappa_{n,\ell+k}.$$

Отсюда, согласно неравенству (I2) и условию (CB_1), следует условие (BM_3).

Достаточность. Пусть условия (BM_2) и (CB_1)

---

5) Согласно лемме 2 выполнение условий (BM_2) и (BM_3) означает, что метод $\bar{B}$ суммирует все абсолютно сходящиеся ряды.

выполнены. Покажем, что тогда выполняется условия теоремы I Из условия (CB_1) следует условие (AB_2). Поскольку $A_n^{-m}=0$ при $n \geq m$ (см.[I], с. 78), то в случае $\alpha \in \mathbb{N}$ по условию (BM_2) ряды $\sum_n \eta_{nk}$ $\bar{B}$-суммируемы (ибо в этом случае ряд $\Delta_k^{\alpha+1} B_{nk}$ для всех $k,n \in \mathbb{N}$ имеет только конечное число слагаемых). Поэтому остается рассмотреть случай, когда $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ и $\operatorname{Re}\alpha > 0$. Тогда для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\varkappa_{p+l,k} - \varkappa_{pk} = A_k^{\alpha} \Delta_k^{\alpha+1} B_{p+l,k} - A_k^{\alpha} \Delta_k^{\alpha+1} B_{pk} =$$
$$= A_k^{\alpha} \sum_i A_i^{-\alpha-2} (B_{p+l,k+i} - B_{p,k+i}).$$

Но $\sum_i |A_i^{-\alpha-2}| < \infty$ при $\operatorname{Re}\alpha > -1$. Следовательно, для каждого $\delta > 0$ и $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $N_k^1 \in \mathbb{N}$, что

$$\sum_{i=N_k^1+1}^{\infty} |A_i^{-\alpha-2}| < \frac{\delta}{4M_0 |A_k^{\alpha}|},$$

где $M_0 = \sup_{n,k} |B_{nk}| + 1$. Поэтому

$$|A_k^{\alpha} \sum_{i=N_k^1+1}^{\infty} A_i^{-\alpha-2} (B_{p+l,k+i} - B_{p,k+i})| < \frac{\delta}{2} \qquad (18)$$

независимо от $l, p \in \mathbb{N}$. Далее, по условию (BM_2) для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ существует такое число $N_k^2 \in \mathbb{N}$, что

$$|B_{p+l,k} - B_{pk}| < \frac{\delta}{2|A_k^{\alpha}| M H_{-\alpha-2}}$$

при $p > N_k^2$ независимо от $l \in \mathbb{N}$, где число M определено неравенством (I2). Тогда получаем

$$|A_k^{\alpha} \sum_{i=0}^{N_k^1} A_i^{-\alpha-2} (B_{p+l,k+i} - B_{p,k+i})| \leq |A_k^{\alpha}| \sum_{i=0}^{N_k^1} |A_i^{-\alpha-2}| |B_{p+l,k+i} - B_{p,k+i}| <$$
$$< \frac{\delta}{2MH_{-\alpha-2}} \sum_{i=0}^{N_k^1} |A_i^{-\alpha-2}| \frac{|A_k^{\alpha}|}{|A_{k+i}^{\alpha}|} \leq \frac{\delta}{2}$$

для каждого $p > N_k^2$ независимо от $l \in \mathbb{N}$. Теперь ввиду неравенства (I8) для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$|\varkappa_{p+l,k} - \varkappa_{pk}| < \delta$$

при $p > N_k^2$ независимо от $l \in \mathbb{N}$. Таким образом, для каждого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ последовательность ($\varkappa_{nk}$) является фундаментальной, в силу чего она сходится. Значит, для каждого $k \in \mathbb{N}$ ряд $\sum_n \eta_{nk}$ $\bar{B}$-суммируем.

Остается показать, что и ряд $\sum \eta_n$ $\bar{B}$-суммируем. Поскольку метод C^{α} нормален, то (см.[3], с. 198)

$$\eta_n = \sum_{k=0}^{n} \eta_{nk}.$$

Теперь из равенства (I7) следует $\eta_n = \delta_{n0}$. Таким образом, из условия (BM_2) следует $\bar{B}$-суммируемость ряда $\sum \eta_n$.

Значит условие (AB_1) выполнено и по теореме I матрица $M \in$ $\in (c_{C^\alpha}, c_B)$.

По лемме 4 из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Если метод B нормален, $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$, то матрица $M \in (c_{C^\alpha}, c_B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (BM_2), (CB_1) и

(C_4) $m_{nk} = O_n(k^{-\operatorname{Re}\alpha})$.

Доказательство. По теореме 2 и лемме 4, достаточно показать, что выполнено условие

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} m_{nk}| < \infty. \tag{19}$$

Это утверждение докажем методом математической индукции. Так как из условия (C_4) следует $m_{nk} = O_n(1)$, то

$$\sum_{i=l}^{\infty} |A_{i-l}^{-\alpha-2} m_{ki}| = O_k(1) \sum_{i=l}^{\infty} |A_{i-l}^{-\alpha-2}| = O_k(1) H_{-\alpha-2} < \infty.$$

В силу этого,

$$\sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} \Delta_l^{\alpha+1} m_{kl} = \sum_{i=l}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n} \beta_{nk} m_{ki}\Big) A_{i-l}^{-\alpha-2} = \Delta_l^{\alpha+1} B_{nl}.$$

Поэтому, по условию (CB_1) имеем

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \Big|\sum_{i=0}^{n} \beta_{ni} \Delta_k^{\alpha+1} m_{ik}\Big| = O(1). \tag{20}$$

Поскольку метод B нормален, то из (20) при $n = 0$ вытекает условие

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} m_{0k}| < \infty,$$

а при $n = 1$ – условие

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\beta_{10} \Delta_k^{\alpha+1} m_{0k} + \beta_{11} \Delta_k^{\alpha+1} m_{1k}| < \infty.$$

Поэтому имеет место

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} m_{1k}| < \infty.$$

Допустим теперь, что условие (19) справедливо при $n \leq i-1$, где $i = 1, 2, \ldots$ и покажем, что оно выполняется и при $n = i$. Нетрудно заметить, что из (20) при $n = i$ следует

$$T_i = \sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\beta_{i0} \Delta_k^{\alpha+1} m_{0k} + \beta_{i1} \Delta_k^{\alpha+1} m_{1k} + \ldots + \beta_{ii} \Delta_k^{\alpha+1} m_{ik}| < \infty.$$

Поэтому, в силу нормальности метода B, справедливо неравенство

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} m_{ik}| \leq \frac{1}{|\beta_{ii}|} \Big(T_i + \sum_{l=0}^{i-1} |\beta_{il}| \sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} m_{lk}|\Big).$$

Отсюда ясно, что условие (19) выполняется при $n = i$, если оно выполнено при $n \leq i-1$. Таким образом, по математической индукции условие (19) выполнено для каждого $n \in \mathbb{N}$. По лемме

4 матрица $M \in \mathfrak{M}_C(C^\alpha)$. Из теоремы 2 вытекает $M \in (c_{C^\alpha}, c_B)$.

Следующая теорема дает простые достаточные условия для того, чтобы матрица $M \in (c_{C^\alpha}, c_B)$.

Теорема 4. Пусть конечнострочный метод B обладает свойством (B_2) и $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$. Если для матрицы M выполнены условия (C_4), (BM_2) и

(CB_2) $\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \sum_l |\Delta_k^{\alpha+1} m_{lk}| < \infty$,

то матрица $M \in (c_{C^\alpha}, c_B)$.

Доказательство. Из условия (CB_2) следует выполнение условия (19), а также условия (CB_1), так как по условию (B_2)

$$\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\Delta_k^{\alpha+1} B_{nk}| = \sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\sum_l \beta_{nl} \Delta_k^{\alpha+1} m_{lk}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \sum_l |\beta_{nl}| |\Delta_k^{\alpha+1} m_{lk}| =$$

$$= O(1) \sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} \sum_l |\Delta_k^{\alpha+1} m_{lk}| = O(1).$$

Теперь утверждение теоремы следует из теоремы 2 и леммы 4.

Пусть теперь $B = C^\beta$ с $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$. Тогда из теоремы 3 непосредственно вытекает обобщение теоремы I из [4] для методов Чезаро комплексного порядка.

Следствие 3. Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$ или $\alpha = 0$ и $\beta \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, \ldots\}$, то матрица $M \in (c_{C^\alpha}, c_{C^\beta})$ тогда и только тогда, когда выполнено условие (C_4) и

(CC_1) столбцы матрицы M C^β–суммируемы,

(CC_2) $\sum_k (k+1)^{\operatorname{Re}\alpha} |\sum_{l=0}^{n} A_{n-l}^{\beta} \Delta_k^{\alpha+1} m_{lk}| = O((n+1)^{\operatorname{Re}\beta})$.

4. Преобразования полей суммируемости для методов Рисса

Рассмотрим случай, когда $A = (\alpha_{nk})$ метод взвешенных средних Рисса (R, p_n), сохраняющий сходимость, определенный последовательностью (p_n), где $P_n = p_0 + \ldots + p_n \neq 0$, $p_n \neq 0$, в виде преобразования ряда в последовательность, т.е.

$$\alpha_{nk} = \begin{cases} 1 - P_{k-1}/P_n & \text{при } k \leqslant n, \\ 0 & \text{при } k > n. \end{cases}$$

При этом будем предполагать, что $P_{-1} = 0$. Метод (R, p_n) нормален. Поэтому он имеет обратную матрицу (η_{nk}), где (см. [11], с. 116)

$$\eta_{nk} = \begin{cases} P_k/p_k & \text{при } n = k \\ -P_k(1/p_k + 1/p_{k+1}) & \text{при } n = k+1 \\ P_k/p_{k+1} & \text{при } n = k+2 \\ 0 & \text{при } n < k \text{ или } n > k+2. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что в данном случае

$$\gamma_{nk} = P_k \Delta \frac{\Delta B_{nk}}{p_k}.$$

Теперь из теоремы I вытекает

Теорема 5. Если метод B конечнострочен, то матрица $M \in \mathfrak{M}_C((R,p_n))$ принадлежит множеству $(c_{(R,p_n)}, c_B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (BM_2) и

$$(RB_1) \sum_k |P_k \Delta \frac{\Delta B_{nk}}{p_k}| = O(1).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть матрица $M \in (c_{(R,p_n)}, c_B)$. По теореме I и следствию 2 (учитывая лемму 3), условия (AB_2) (которое в данном случае равносильно условию (RB_1)) и (BM_2) выполнены.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть условия (BM_2) и (RB_1) выполнены. Тогда выполнены и условия (AB_1) и (AB_2). Действительно, условие (RB_1) равносильно условию (AB_2) и, поскольку в данном случае (как и в предедущем) $\eta_0 = 1$ и $\eta_k = 0$ при $k \geq 1$, то по условию (BM_2) условие (AB_1) выполнено. Поэтому матрица $M \in (c_{(R,p_n)}, c_B)$ по теореме I.

Примечание 2. В случае бесконечнострочного метода B справедливо следующее утверждение: если ряды B_{nl} сходятся и для каждого $\sum u_l \in c_{(R,p_n)}$ справедливо равенство (4), то матрица $M \in (c_{(R,p_n)}, c_B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (BM_2), (RB_1) и

(RB_2) $P_k B_{nk} = O_n(p_k)$.

Если матрица $M = (m_{nk})$ такова, что $m_{nk} = b_{nk}\varepsilon_k$, где (ε_k) – заданная последовательность чисел, то по примечанию 2 из теоремы 5 следует один результат Кангро.

Следствие 4. ([3], с. 218–219). Если метод B регулярен, то числа ε_k являются множителями суммируемости типа $((R,p_n), B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

(RB_3) $\sum |P_k \Delta \frac{\Delta \varepsilon_k}{p_k}| < \infty$,

(RB_4) $P_k \Delta \varepsilon_k = O(p_k)$,

(RB_5) $\sum_k |P_k \varepsilon_{k+1} \Delta \frac{\Delta \beta_{nk}}{p_k}| = O(1)$,

(RB_6) $\beta_{nk} P_k \varepsilon_k = O_n(p_k)$.

Примечание 3. Из следствия 4 следует, что матрица $M \in \mathfrak{M}_C((R,p_n))$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

(RE_1) $\sum_k |P_k \Delta \frac{\Delta m_{nk}}{p_k}| = O_n(1)$,

(RE_2) $P_k m_{nk} = O(p_k)$.

При помощи метода математической индукции нетрудно показать (аналогично доказательству теоремы 3), что условие (RE_1) вытекает из условия (RB_1), если метод B нормален. Поэтому из теоремы 5 и примечания 3 вытекает

Теорема 6. Если метод B нормален, то матрица $M \in \in (c_{(R,p_n)}, c_B)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (RE_2), (BM_2) и (RB_1).

Следующая теорема дает простые достаточные условия для того, чтобы матрица $M \in (c_{(R,p_n)}, c_B)$.

Теорема 7. Пусть конечнострочный метод B обладает свойством (B_2). Если для матрицы $M = (m_{nk})$ над $\mathbb{C}$ выполнены условия (RE_2), (BM_2) и

$$(RB_7)\quad \sum_l \sum_k \left| P_l \Delta \frac{\Delta m_{kl}}{p_l} \right| < \infty,$$

то матрица $M \in (c_{(R,p_n)}, c_B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия (RB_7) следует выполнение условия (RE_1), а также условия (RB_1), так как

$$\sum_l \left| P_l \Delta \frac{\Delta B_{nl}}{p_l} \right| = \sum_l \left| P_l \sum_k \beta_{nk} \Delta \frac{\Delta m_{kl}}{p_l} \right| \leq \sum_l \sum_k |\beta_{nk}| \left| P_l \Delta \frac{\Delta m_{kl}}{p_l} \right| =$$
$$= O(1) \sum_l \sum_k \left| P_l \Delta \frac{\Delta m_{kl}}{p_l} \right| = O(1)$$

по условию (B_2). Таким образом, по теореме 5 и примечанию 3 получаем требуемое.

Пусть теперь $B = (R, q_n) = (\beta_{nk})$, т.е. $\beta_{nk} = 1 - Q_{k-1}/Q_n$, где $Q_n = q_0 + \ldots + q_n$, $Q_{-1} = 0$, q_k, $Q_k \neq 0$ при $k \leq n$ и $\beta_{nk} = 0$ при $n < k$. Тогда из теоремы 5 непосредственно вытекает

Следствие 5. Матрица $M \in \mathfrak{M}_c((R, p_n))$ принадлежит множеству $(c_{(R,p_n)}, c_{(R,q_n)})$ тогда и только тогда, когда выполнены условия

(RR_1) каждый столбец матрицы M (R, q_n)-суммируем,

$$(RR_2)\quad \sum_l \left| P_l \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{Q_{k-1}}{Q_n}\right) \Delta \frac{\Delta m_{kl}}{p_l} \right| = O(1).$$

Литература

1. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. – Таллин, 1977.
2. Гелфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – Москва, 1967.
3. Кангро Г. О множителях суммируемости. – Уч. зап. Тарт. ун-та, 1955, 37, 191–229.

4. Alpár, L. On the linear transformations of series summable in the sense of Cesáro. - Acta Math. Acad. Sci. Hungar., 1982, 39(1), 233-243.
5. Andersen, A.F. On the extensions within the theory of Cesáro summability of a classical convergence theorem of Dedekind. - Proc. London Math. Soc., 1958, 8, 1-52.
6. Peyerimhoff, A. Konvergenz- und Summerbarkeitsfaktoren. - Math. Z., 1951, 55, 23-54.

Поступила II.I2.84

THE MATRIX TRANSFORMATIONS OF SUMMABILITY FIELDS

A. Aasma

Summary

Let A be a reversive series-to-sequence method of summability over $\mathbb{C}$, c_A be the field of summability of the method A, B be a series-to-sequence method of summability over $\mathbb{C}$ and M be an infinite matrix over $\mathbb{C}$.

In the present paper the necessary and sufficient conditions for the matrix transformation (2), that the series $\sum y_k$ will be B-summable for every series $\sum u_k \in c_A$ are found.

The cases, when A or A and B are the methods of summability of Cesàro with complex order or the methods of summability of the weighted means of Riesz are considered as applications.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,51-60

О ПОРЯДКОВОЙ СТРУКТУРЕ ПОЛЯ СУММИРУЕМОСТИ

Т.Лейгер

Поле суммируемости c_A бесконечной матрицы A является FK-пространством и, как всякое пространство последовательностей, упорядочено покоординатно. Но оно не отличается хорошими порядковыми свойствами, поэтому теория упорядоченных векторных пространств мало применима к исследованию проблем суммируемости. Тем не менее, многие результаты теории суммируемости допускают порядковую интерпретацию. Если матрица A нормальна, то в c_A можно определить новый порядок $\leqslant_A$ таким образом, что c_A порядково (и топологически) изоморфно с BK-пространством c всех сходящихся последовательностей (см.[8]).

В § 2 настоящей заметке определяется аналогичный (в общем не антисимметричный) порядок в поле суммируемости матриц более широкого класса. Изучаются свойства этого порядка. Вводится понятие матрицы положительной по отрезкам (AP-матрицы) и доказывается, что при естественных предположениях в поле суммируемости AP-матрицы имеет место ограниченность по отрезкам.

В § 3 к изучению включения матриц применяется одна теорема типа П.П.Коровкина, доказанная в [2].

§ 1. Основные понятия и обозначения

1. Пусть $A=(a_{nk})$ - числовая матрица, $x=(x_k)$ - числовая последовательность и $y=(y_n)=:A(x)$ - последовательность, где[1]

$$y_n := \sum_k a_{nk}x_k \quad (n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

Введем обозначения $c_A:=\{x=(x_k): \exists \lim_n y_n =: \lim_A x\}$ и $c_{0A}:=\{x\in c_A: \lim_A x = 0\}$. Множество c_A называется полем суммируемости матрицы A. Если $c_A\supseteq c:=\{x=(x_k): \exists \lim_k x_k\}$ и $\lim_A x=\lim_k x_k$ для всех $x\in c$, то матрица A называется регулярной. Если система (1) имеет для каждого $y\in c$ в точ-

[1] Если пределы изменения индексов не указаны, то они пробегают все значения в $\mathbb{N}:=\{0,1,2,\dots\}$.

ности одно решение, то A будем называть обратимой на c. В частности, каждая нормальная матрица A (т.е. $a_{nn} \neq 0$ и $a_{nk} = 0$ при $k > n$) обратима на c.

Определим в c_A полунормы $p_0(x) := \sup_n |y_n|$, $p_{2j-1}(x) := |x_j|$, $p_{2j}(x) := \sup_m |\sum_{k=0}^{m} a_{j-1,k} x_k|$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Поле суммируемости (c_A, p_n), где $n \in \mathbb{N}$, является FK-пространством, т.е. полным метризуемым локально выпуклым пространством последовательностей, в котором из $x^{(m)} \longrightarrow x$ $(m \to \infty)$ следует $x_k^{(m)} \longrightarrow x_k$ $(k \in \mathbb{N}, m \longrightarrow \infty)$ ([9], стр. 38). Если же A обратима на c, то (c_A, p_0) – BK-пространство (т. е. нормированное FK-пространство). BK-пространством является также $(c, \|\ \|_\infty)$, где $\|x\|_\infty := \sup_k |x_k|$.

Для последовательности $x = (x_k)$ и $m \in \mathbb{N}$ обозначим $x^{[m]} := (x_0, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots)$ (отрезки последовательности x). Будем говорить, что в точке $x \in c_A$ имеет место ограниченность по отрезкам, если подмножество $\{x^{[m]} : m \in \mathbb{N}\}$ ограниченно в (c_A, p_n). Матрица A называется AB-матрицей если ограниченность по отрезкам имеет место в каждой точке $x \in c_A$.

2. Под упорядоченным векторным пространством $(E, \leq)$ в этой заметке будем понимать векторное пространство E, в котором определено рефлексивное и транзитивное (не обязательно антисимметричное) отношение порядка $\leq$, удовлетворяющее условиям

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \qquad x \leq y \Rightarrow \lambda x \leq \lambda y \quad (x, y, z \in E, \lambda \geq 0).$$

Тогда $E^+ := \{x \in E : x \geq 0\}$ является клином, т.е. $E^+ + E^+ \subseteq E^+$ и $\lambda E^+ \subseteq E^+$ $(\lambda \geq 0)$. Если порядок $\leq$ к тому еще антисимметричен, то $E^+ \cap (-E^+) = \{0\}$ и, таким образом, является конусом. Верно и обратное: если E^+ – конус, то порядок $\leq$ антисимметричен.

Подмножество $D \subset E$ называется о-ограниченным, если существуют a и b из E с $D \subseteq [a, b] := \{x \in E : a \leq x \leq b\}$. Каждое конечное подмножество о-ограничено в точности тогда, когда $E^+ - E^+ = E$. Клин E^+ с таким свойством называется порождающим. Элемент $u \in E^+$ называется порядковой единицей, если для каждого $x \in E$ найдется $\lambda > 0$ с $-\lambda u \leq x \leq \lambda u$. Подмножество $D \subseteq E$ будем называть о-выпуклым, если $[a, b] \subseteq D$ для всех a и b из D.

Говорят, что $(E, \leq)$ архимедово упорядоченно, если из о-ограниченности подмножества $\{nx : n \in \mathbb{N}\}$ следует, что $x \leq 0$. Если же в E верна импликация

$$-y \leq nx \leq y \quad (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow x = 0,$$
то $(E, \leq)$ называется почти архимедово упорядоченным.

Пусть $(E, p_\alpha, \leq)$ – локально выпуклое пространство (ЛВП) с порядком $\leq$, где топология порождается семейством полунорм p_α. Такое ЛВП будем называть локально о-выпуклым, если оно имеет локальный базис из о-выпуклых окрестностей нуля. В локально о-выпуклом ЛВП каждое о-ограниченное подмножество ограничено. Клин E^+ называется телесным, если его внутренность непуста. Оказывается ([6], стр. 80), что если E бочечно, то внутренность клина E^+ совпадает с множеством всех порядковых единиц в E.

Рассмотрим, например, архимедово упорядоченное BK-пространство $(c, \| \|_\infty, \leq)$, где $x \leq z :\Leftrightarrow x_k \leq z_k \, (k \in \mathbb{N})$. Этот порядок антисимметричен, конус c^+ является порождающим и $e := (1, 1, \ldots)$ – порядковая единица в $(c, \leq)$, а $[-e, e]$ – единичный шар в $(c, \| \|_\infty)$. Отметим, что $(c, \| \|_\infty, \leq)$ локально о-выпукло.

Ниже $x > 0$ для $x \in c$ означает, что $x_k > 0 \; (k \in \mathbb{N})$.

§ 2. Порядок поля суммируемости

Пусть $A = (a_{nk})$ – бесконечная матрица. Введем в поле суммируемости c_A порядок $\leq_A$ соотношением

$$x \geq_A 0 \; :\Leftrightarrow \; y_n \geq 0 \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{2}$$

где числа y_n определяются преобразованием (I). Подмножество

$$c_A^+ := \{ x \in c_A : \; x \geq_A 0 \}$$

является клином в c_A. Так как преобразование $A: c_A \longrightarrow c$ непрерывно ([9], стр. 29), а конус c^+ замкнут в $(c, \| \|_\infty)$, то $c_A^+ = A^{-1}(c^+)$ замкнут в (c_A, p_n).

Если A обратима на c, то c_A^+ является конусом в c_A. В таком случае A устанавливает изоморфизм между $(c_A, p_0, \leq_A)$ и $(c, \| \|_\infty, \leq)$. Тогда c_A обладает этими же порядково-топологическими свойствами что и c. Таким образом, $(c_A, p_0, \leq_A)$ является (почти) архимедово упорядоченным локально о-выпуклым BK-пространством, в котором точка $A^{-1}(e)$ служит порядковой единицей.

Если же матрица A необратима на c, то порядково-топологическая структура поля суммируемости c_A существенно сложнее. Следующий пример показывает, что порядок, определяемый соотношением (2), может быть тривиальным.

Пример I. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & \boxed{0} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \end{pmatrix},$$

тогда $c_A = c_{oC_1}$, где C_1 – метод арифметических средних ([I], стр. 69), а $c_A^+ = \{0\}$.

В настоящей заметке будем рассматривать матрицы $A=(a_{nk})$ со свойством

$$A(c_A) \cap \{x>0 : \exists \lim_k x_k \neq 0\} \neq \emptyset \tag{3}$$

и обозначать через $\mathfrak{D}$ класс всех таких матриц. В класс $\mathfrak{D}$ входят, в частности,

I) матрицы, обратимые на c, в том числе нормальные,

2) матрицы $A=(a_{nk})$ с

$$0 < \sum_k a_{nk} \longrightarrow a \neq 0 \quad (n \to \infty),$$

в том числе все положительные регулярные матрицы.

Предложение I. Если $A \in \mathfrak{D}$, то

I) в $(c_A, \leqslant_A)$ существует порядковая единица,

2) клин c_A^+ телесен в $(c_A, p_n, \leqslant_A)$,

3) клин c_A^+ является порождающим в $(c_A, \leqslant_A)$,

4) порядок $\leqslant_A$ является архимедовым в c_A.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно условию (3) существует $u \in A(c_A)$ с $0<u_k$ $(k \in \mathbb{N})$ и $\lim_k u_k \neq 0$. Эта точка является порядковой единицей в $(c, \leqslant)$. Пусть $v=(v_k) \in c_A$ с $A(v) = u$. Если $x \in c_A$, то $A(x) \in c$ и существует такое число $\lambda > 0$, что $-\lambda u \leqslant A(x) \leqslant \lambda u$. Это равносильно условию $-\lambda v \leqslant_A x \leqslant \lambda v$. Итак, v – порядковая единица в $(c_A, \leqslant_A)$, т.е. утреждение I) доказано. Так как FK-пространство (c_A, p_n) бочечно, то каждая порядковая единица – внутренняя точка клина c_A^+. Отсюда следует справедливость утверждения 2). Непосредственно из I) следует и утверждение 3).

Утверждение 4) следует из замкнутости клина c_A^+ (см. [6], стр. 79).

Предложение 2. Если $A \in \mathfrak{D}$ то подмножество $D \subsetneq c_A$ o-ограничено в точности тогда, когда $\sup_{x \in D} p_o(x) < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если D о-ограничено в $(c_A, \leqslant_A)$, то найдется такое число $\lambda > 0$, что

$$-\lambda v \leqslant_A x \leqslant_A \lambda v \qquad (x \in D),$$

где v – некоторая порядковая единица в $(c_A, \leqslant_A)$. Это значит, что

$$|\Sigma_k a_{nk} x_k| \leqslant \lambda \Sigma_k a_{nk} v_k \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in D),$$

откуда

$$p_0(x) = \sup_n |\Sigma_k a_{nk} x_k| \leqslant \lambda \sup_n \Sigma_k a_{nk} v_k = \lambda p_0(v) \quad (x \in D).$$

Пусть, обратно, D ограничено по полунорме p_0. Тогда существует $M > 0$ с $p_0(x) \leqslant M$ $(x \in D)$. Отсюда

$$-M \leqslant \Sigma_k a_{nk} x_k \leqslant M \qquad (n \in \mathbb{N}, x \in D)$$

или

$$-Me \leqslant A(x) \leqslant Me \qquad (x \in D)$$

в $(c, \leqslant)$. Если v – порядковая единица в $(c_A, \leqslant_A)$, а $u := A(v)$, то найдется $\lambda > 0$ с

$$-\lambda u \leqslant -Me \leqslant A(x) \leqslant Me \leqslant \lambda u \qquad (x \in D)$$

в $(c, \leqslant)$, т.е.

$$-\lambda v \leqslant_A x \leqslant_A \lambda v \qquad (x \in D).$$

Итак, E о-ограничено.

Следствие 3. Отрезки $x^{[m]}$ точки $x \in c_A$ ограничены в FK-пространстве (c_A, p_n) в точности тогда, когда они о-ограничены в $(c_A, \leqslant_A)$.

Доказательство вытекает непосредственно из предложения 2 и факта, что $\sup_m p_n(x^{[m]}) < \infty$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Из следующего предложения следует, что $(c_A, p_n, \leqslant_A)$, вообще говоря, лишено многих важных свойств, вытекающих из локальной о-выпуклости.

Предложение 4. Если $A \in \mathfrak{D}$ и $(c_A, p_n, \leqslant_A)$ локально о-выпукло, то (c_A, p_0) – BK-пространство.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $(c_A, p_n, \leqslant_A)$ локально о-выпукло, то каждое о-ограниченное подмножество, в том числе и окрестность нуля $\{x \in c_A : p_0(x) \leqslant 1\}$, ограничено. Утверждение следует из теоремы А.Н.Колмогорова ([3], стр. 57).

Отметим еще, что p_0 является нормой в c_A, если $(c_A, \leqslant_A)$ почти архимедово упорядочено. Это вытекает из факта, что функционал Минковского подмножества $[-v, v]$, где v – порядковая единица, является нормой в точности тогда, когда порядок почти архимедов.

Определение. Матрица $A \in \mathfrak{D}$ называется положительной по отрезкам или, короче, AP-матрицей, если в $(c_A, \leqslant_A)$

верна импликация

$$x \geqslant_A 0 \Rightarrow x^{[m]} \geqslant_A 0 \quad (m \in \mathbb{N}).$$

В случае нормальной матрицы A это условие характеризуется распределением знаков в A и в обратной матрице $A^{-1}=(\alpha_{nk})$ (см.[4],[5],[8]). Известно знаменательное свойство регулярных AP-матриц: из ограниченности по отрезкам в точке e следует ограниченность по отрезкам во всем c_A ([8], теорема 5; см. также [4], следствие 2.2). Оказывается, что аналогичное утверждение верно и в более общей ситуации.

Предложение 5. Пусть $A \in \mathfrak{D}$ – AP-матрица с $(a_{nk})_{n=0}^{\infty} \in c$ $(k \in \mathbb{N})$ и пусть v – некоторая порядковая единица в $(c_A, \leqslant_A)$. Если в точке v имеет место ограниченность по отрезкам, то A является AB-матрицей.

Доказательство. Ввиду существования пределов $\lim_n a_{nk}$ $(k \in \mathbb{N})$ поле суммируемости c_A содержит отрезки всех своих точек. В силу предложения I клин c_A^+ является порождающим в $(c_A, \leqslant_A)$, поэтому достаточно доказать ограниченность по отрезкам в c_A^+.

Пусть отрезки $v^{[m]}$ ограничены в (c_A, p_n). Согласно следствию 3 найдется $\lambda > 0$ с

$$0 \leqslant_A v^{[m]} \leqslant_A \lambda v \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Пусть x – произвольная точка из c_A^+ Найдем $\alpha > 0$ с

$$0 \leqslant_A x \leqslant_A \alpha v.$$

Так как A – AP-матрица, то из последнего условия заключим, что

$$0 \leqslant_A x^{[m]} \leqslant_A \alpha v^{[m]} \leqslant_A \alpha\lambda v \quad (m \in \mathbb{N}).$$

Итак, отрезки точки x о-ограничены, поэтому в силу следствия 3 и топологически ограничены. Предложение доказано.

Следствие 6. Положительная регулярная AP-матрица является AB-матрицей.

Доказательство. Такая матрица принадлежит классу $\mathfrak{D}$, кроме того можно положить $v = e$. Утверждение следует из предложения 5.

Пусть $A, B \in \mathfrak{D}$ и пусть ряды $\sum_k b_{nk} x_k$ $(n \in \mathbb{N})$ сходятся всюду в c_A.

Определение. Матрицу B будем называть A-положительной, если в c_A верна импликация

$$x \geqslant_A 0 \Longrightarrow x \geqslant_B 0.$$

Нетрудно убедиться, что в случае нормальной матрицы A матрица B является A-положительной, если матрица $G=(g_{ni})$, где

$$g_{ni} := \sum_{k \geq i} b_{nk} \alpha_{ki} \quad (n, i \in \mathbb{N}),$$

положительна, т.е. $g_{ni} \geq 0 \quad (n, i \in \mathbb{N})$.

§ 3. Теоремы включения матриц

Наличие порядковой структуры в поле суммируемости позволяет для исследования проблем суммируемости использовать методы теории упорядоченных топологических векторных пространств. Мы проиллюстрируем это на примере, где к изучению включения и регулярности матриц будет применена теорема, доказанная М.А.Красносельским, В.С.Климовым и Е.А.Лифшицем [2].

Пусть E – банахово пространство, упорядоченное конусом E^+, и $E^\times$ – множество всех непрерывных положительных линейных функционалов в E. Говорят, что ненулевой функционал $f \in E^\times$ проходит через точку $x_0 \in E^+$, если $f(x_0) = 0$. Точка $x_0 \in E^+$ $(x_0 \neq 0)$ называется точкой гладкости конуса E^+ если через нее проходит единственный (с точностью до нормы) ненулевой функционал из $E^\times$.

Теорема 7 ([2], теорема I). Пусть последовательность (непрерывных) положительных линейных функционалов $f_n \in E^\times$ удовлетворяет условиям

$$\lim_n f_n(x_0) = 0, \qquad \lim_n f_n(z) = \alpha_0,$$

где x_0 – некоторая точка гладкости, а z – внутренняя точка телесного конуса E^+. Тогда последовательность (f_n) сходится всюду в пространстве E, причем

$$\lim_n f_n(x) = \frac{\alpha_0}{g(z)} g(x) \qquad (x \in E),$$

где $g \in E^\times$ проходит через точку z.

В упорядоченном банаховом пространстве $(c, \| \|_\infty, \leq)$ положительный конус c^+ телесен: внутренней точкой является, например, точка e. Общий вид положительного линейного (непрерывного) функционала в c дается формулой

$$f(x) = \alpha \lim_k x_k + \sum_k \alpha_k x_k \quad (\alpha, \alpha_k \geq 0, \ \sum_k \alpha_k < \infty).$$

Пусть $w = (w_k)$ с $0 < w_k \to 0 \ (k \to \infty)$. Так как через w проходят лишь функционалы в виде $f(x) = \alpha \lim x_k$ с $\alpha > 0$, то w является точкой гладкости конуса c^+.

Если $A = (a_{nk})$ – нормальная матрица, то упорядоченные банаховые пространства $(c_A, p_0, \leq_A)$ и $(c, \| \|_\infty, \leq)$ изоморфны. Поэтому $A^{-1}(e)$ – внутренняя точка, а $A^{-1}(w)$ – точка гладкости конуса c_A^+, где $0 < w_k \to 0 \ (k \to \infty)$.

Пусть, далее, $B=(b_{nk})$ – конечнострочная A-положительная матрица. Тогда функционалы B_n, где $B_n(x)=\sum_k b_{nk}x_k$ $(n\in\mathbb{N})$ непрерывны, положительны и линейны в $(c_A, p_o, \leqslant_A)$. Если выполняются условия

$$\exists \lim_n B_n(A^{-1}(e)), \qquad \lim_n B_n(A^{-1}(w))=0$$

для некоторого w с $0<w_k\to 0$ $(k\to\infty)$, то согласно теореме 7 существует $\lim_n B_n(x)=\lim_n \sum_k b_{nk}x_k$ при всех $x\in c_A$. Значит, $c_B\supseteq c_A$. Итак, верно

Предложение 8. Если конечнострочная матрица B A-положительна, а $A^{-1}(e)\in c_B$ и $A^{-1}(w)\in c_{oB}$ для некоторой точки w с $0<w_k\to 0$ $(k\to\infty)$, то $c_B\supseteq c_A$. Если при этом еще $\lim_B A^{-1}(e)=1$, то $\lim_B x=\lim_A x$ для всех $x\in c_A$, т.е. матрицы A и B совместны.

Условие о конечнострочности матрицы B может быть заменено некоторым другим условием, обеспечивающим сходимость рядов $\sum_k b_{nk}x_k$ $(n\in\mathbb{N})$ в c_A.

В случае $A=(\delta_{nk})$ получаем из предложения 8 следующее утверждение, доказанное для нормальных матриц Беэкманном и Целлером ([5], теорема I), а также Кершоу ([7], теорема 5.I).

Следствие 9. Положительная матрица B с $\sum_k b_{nk}<\infty$ $(n\in\mathbb{N})$ регулярна, если $\lim_n \sum_k b_{nk}=1$ и $\lim_n \sum_k b_{nk}w_k=0$ для некоторой последовательности w с $0<w_k\to 0$ $(k\to\infty)$.

Пусть $A=\Sigma=(\sigma_{nk})$ с $\sigma_{nk}=1$, если $k\leqslant n$, и $\sigma_{nk}=0$, если $k>n$. Тогда $A^{-1}=(\alpha_{ki})$ с

$$\alpha_{ki}=\begin{cases}1 & \text{при } i=k,\\ -1 & \text{при } i=k-1,\\ 0 & \text{для } i<k-1 \text{ и } i>k.\end{cases}$$

Ясно, что $c_\Sigma=cs$ – множество всех сходящихся рядов. Если $c_B\supseteq cs$ и $\lim_B x=\sum_k x_k$ для всех $x\in cs$, то говорят, что B регулярно в смысле преобразования ряда в последовательность. Из предложения 8 вытекает

Следствие 10. Матрица B с $\Delta b_{nk}:=b_{nk}-b_{n,k+1}\geqslant 0$ и $\sum_k \Delta b_{nk}<\infty$ $(n,k\in\mathbb{N})$ регулярна в смысле преобразования ряда в последовательность, если $\lim_n b_{n1}=1$ и для некоторой последовательности $u=(u_k)$ с $0<\sum_{k=0}^{n}u_k\to 0$ выполняется условие $\lim_n \sum_k b_{nk}u_k=0$.

Следствие 11. Пусть A – регулярная положительная нормальная матрица с $\sum_k a_{nk}=1$ $(n\in\mathbb{N})$. Если конечнострочная A-положительная матрица B регулярна, то $c_B\supset c_A$, причем матрицы A и B совместны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из регулярности матрицы B следует, что $\lim_n \sum_k b_{nk} = 1$ и $\lim_n \sum_k b_{nk} v_k = 0$ для всех $v \in c_0$. Так как $A^{-1}(e) = e$ и $0 < \sum_{k=0}^n a_{nk} w_k \to 0$ $(n \to \infty)$ для всех w с $0 < w_k \to 0$ $(k \to \infty)$, то $A^{-1}(e) \in c_B$ и $A^{-1}(w) \in c_{0B}$. В силу предложения 8 имеет место включение $c_A \subset c_B$ с $\lim_A x = \lim_B x$ при всех $x \in c_A$.

Пример 2. Если $A = (a_{nk})$ с

$$a_{nk} = \begin{cases} p_k / P_n & \text{при} \quad k \le n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n, \end{cases}$$

где $p_k > 0$ $(k \in \mathbb{N})$ и $P_n := \sum_{k=0}^n p_k \to \infty$ $(n \to \infty)$ (регулярный метод взвешенных средних Рисса; см.[1], § 17), а B – некоторая регулярная треугольная матрица, то

$$g_{nk} = \begin{cases} P_k \Delta \dfrac{b_{nk}}{p_k} & \text{при} \quad k \le n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n \end{cases}$$

(см.[1], стр. 117). Итак, если $\Delta \dfrac{b_{nk}}{p_k} \geq 0$ $(n, k \in \mathbb{N})$, то B является A-положительной матрицей и в силу следствия 11 $c_B \supset c_A$, причем A и B совместны.

Пример 3. Если $A = C^\alpha$ и $B = C^\beta$ с $-1 < \alpha < \beta$ (методы Чезаро; см.[1], § 15), то

$$g_{nk} = \begin{cases} A_k^\alpha A_{n-k}^{\beta-\alpha-1} / A_n^\beta & \text{при} \quad k \le n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n \end{cases}$$

(см.[1], стр. 88). В силу следствия 11 имеем $c_B \supset c_A$, а матрицы A и B совместны.

Литература

1. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. – Таллин, 1977.
2. Красносельский М.А., Климов В.С., Лифшиц Е.А. О сходимости положительных функционалов и операторов. – Докл. АН СССР, 1965, 162, № 2, 258–261.
3. Шефер Х. Топологические векторные пространства. – Москва, 1971.
4. Beekmann, W. Total-Vergleich normaler Matrizen mit diagonal-positiver Inversen. – Math. Z., 1972, 125, № 4, 361–371.
5. Beekmann, W., Zeller, K. Positive Operatoren in der Limitierung. Linear Operators and Approximation. II – (Proc. Conf., Oberwolfach, 1974), Internat. Ser. Numer. Math. 25, Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart, 1974, 559–564.

6. Jameson, G. Ordered Linear Spaces. - Lecture Notes in Mathematics, 141. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg--New York, 1970.
7. Kershaw, D. Regular and convergent Korovkin sequences. Linear Operators and Approximation. II (Proc. Conf., Oberwolfach, 1974). - Internat. Ser. Numer. Math. 25, Birkhäuser Verlag, Basel and Stuttgart, 1974, 377-389.
8. Leiger, T. Abschnittspositive Matrizen und Positivitätsfaktoren in der Limitierungstheorie. - Manuscripta Math., 1984, 45, N° 3, 293-307.
9. Zeller, K., Beekmann, W. Theorie der Limitierungsverfahren. - Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.

ÜBER EINE ORDNUNGSSTRUKTUR IM WIRKFELD

T. Leiger

Zusammenfassung

Im Wirkfeld c_A einer Matrix $A=(a_{nk})$ definieren wir die Ordnung $\geqslant_A$ durch

$$x \geqslant_A 0 \quad :\Longleftrightarrow \quad \sum_k a_{nk}x_k \geqslant 0 \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Die Matrix A heißt abschnittspositiv (kurz: AP-Matrix), wenn gilt:

$$x \geqslant_A 0 \Rightarrow x^{[m]} := (x_0,\dots,x_m,0,0,\dots) \geqslant_A 0 \quad (m\in\mathbb{N}).$$

Ist A reversibel, so ist die Relation $\geqslant_A$ reflexiv, antisymmetrisch und translativ (vgl. [8]). Bei nichtreversibler Matrix A ist $\geqslant_A$ nicht mehr antisymmetrisch.

In der vorliegenden Note beschränken wir uns auf eine Matrizenklasse $\mathfrak{D}$ (siehe (3)), die insbesondere alle Matrizen A mit $0<\sum_k a_{nk}\to a\neq 0$ $(n\to\infty)$ sowie alle normale Matrizen umfaßt. Es ist bemerkenswert, daß für $A\in\mathfrak{D}$ der halbgeordnete Vektorraum $(c_A, \geqslant_A)$ eine Ordnungseinheit besitzt und der Keil $c_A^+ := \{x\in c_A : x\geqslant_A 0\}$ erzeugend ist. Dabei gilt (vgl. [8], Satz 5)

Satz 5. Sei $A\in\mathfrak{D}$ eine AP-Matrix mit $c_A \ni e^{(k)} := (\delta_{ki})$ $(k\in\mathbb{N})$. Sind die Abschnitte $v^{[m]}$ einer Ordnungseinheit $v\in c_A^+$ im FK-Raum c_A beschränkt, so ist A eine AB-Matrix (d.h., $x^{[m]}$ sind für jedes $x\in c_A$ beschränkt).

Die Einführung der Ordnung $\geqslant_A$ ermöglicht Resultate über halbgeordnete topologische Vektorräume in der Limitierungstheorie anzuwenden. Als ein Beispiel dazu geben wir einen Vergleichssatz (Satz 8), der aus [2], Satz 1 folgt und ein bekanntes Ergebnis von Beekmann und Zeller ([5], Lemma 1) und Kershaw ([7], Theorem 5.1) umfaßt.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,61-68

О λ-ВКЛЮЧЕНИИ МАТРИЦ СУММИРОВАНИЯ

Т. Лейгер, М. Маазик

Кафедра математического анализа

В теории суммируемости проблема о сравнении методов суммирования является одной из главных. Она решена для многих конкретных методов. Каулинг [5] и Рассел [6] разработали метод изучения включения общих матриц суммирования. В настоящей заметке этот метод распространяется на суммирование со скоростью. Понятия λ-сходимости и λ-суммируемости а также другие основные понятия, рассматриваемые ниже, были введены Г.Кангро ([1],[2]).

1. Пусть $\lambda=(\lambda_k)$, $0<\lambda_k\uparrow\infty$. Последовательность $x=(x_k)$ называется λ-сходящейся (или сходящейся со скоростью λ), если существуют пределы

$$\lim_k x_k =: \xi, \qquad \lim_k \beta_k =: \beta,$$

где[1]

$$\beta_k := \lambda_k(x_k-\xi).$$

Множество c^λ всех λ-сходящихся последовательностей является BK-пространством с нормой $\|x\| = \sup_k\{|\beta_k|, |\xi|\}$, а подпространства

$$c_0^\lambda := \{x\in c^\lambda : \xi = 0\},$$
$$n^\lambda := \{x\in c^\lambda : \xi=\beta=0\}$$

замкнуты в c^λ. Отметим, что последовательности

$$e^{(k)} := (\delta_{ki}) \qquad (k\in\mathbb{N}),$$
$$e := (1,1,\dots),$$
$$e^\lambda := \left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$$

принадлежат c^λ. Нетрудно проверить, что $c^\lambda = n^\lambda \oplus \langle e^\lambda\rangle \oplus \langle e\rangle$.

Пусть $A=(a_{nk})$ – некоторая бесконечная матрица. Рассмотрим преобразование

$$A_n(x) := y_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k \qquad (n\in\mathbb{N}) \tag{1}$$

---
[1] В настоящей работе $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$.

и обозначим $A(x):=y:=(y_n)=(A_n(x))$. Для $x\in c_A:=\{x=(x_k): \exists \lim y_n =: \eta =: \lim_A x\}$ обозначим

$$\gamma_n^A(x) := \lambda_n(y_n-\eta).$$

Если $x\in c_A$ и существует предел

$$\lim_n \gamma_n^A(x) =: \gamma^A(x),$$

то последовательность x называется A^λ-суммируемой (или A-суммируемой со скоростью λ). Множество всех A^λ-суммируемых последовательностей обозначим через c_A^λ. Таким образом, $c_A^\lambda = A^{-1}(c^\lambda)$, аналогично $c_{oA}^\lambda := A^{-1}(c_o^\lambda)$ и $n_A^\lambda := A^{-1}(n^\lambda)$.

Матрица A называется λ-обратимой, если для каждого $y\in c^\lambda$ существует в точности один элемент $x\in c_A^\lambda$ с $A(x)=y$. Для λ-обратимой матрицы A множество c_A^λ является BK-пространством с нормой

$$\|x\| = \sup_n \{|\gamma_n^A(x)|, |\eta|\},$$

а функционал $f\in c_A^{\lambda\prime}$ (т.е. линеен и непрерывен в c_A^λ) в точности тогда, когда

$$f(x) = h\eta + t\gamma^A(x) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n\gamma_n^A(x) \qquad (x\in c_A^\lambda), \tag{2}$$

где $\sum|d_n|<\infty$.

Отметим, что в случае произвольной матрицы A в c_A^λ можно определить FK-топологию (см.[2], § 2).

Говорят, что в точке $x\in c_A^\lambda$ имеет место ограниченность по отрезкам, если отрезки

$$x^{[m]} := (x_o,\dots,x_m,0,0,\dots) = \sum_{k=0}^{m} x_k e^{(k)} \qquad (m\in\mathbb{N})$$

составляют в c_A^λ ограниченное подмножество.

<u>Определение.</u> Матрицу A с

$$a_k := \lim_n a_{nk} = 0 \qquad (k\in\mathbb{N}) \tag{3}$$

назовем λ-AB-матрицей, если в каждой точке $x\in c_{oA}^\lambda$ имеет место ограниченность по отрезкам.

Для матрицы A, удовлетворяющей равенству (3), обозначим через L_A^λ подмножество всех последовательностей x в c_A^λ, при которых суммы

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n\lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} d_n\lambda_n a_{nk}x_k$$

существуют и равны между собой для всех последовательностей (d_n) с $\sum|d_n|<\infty$. Аналогично лемме 4.2 из [7] доказывается

<u>Предложение I</u> ([4]). Пусть A - матрица с $a_k=0$ $(k\in\mathbb{N})$. Точка $x\in L_A^\lambda$ в точности тогда, когда в точке $/$ имеет место

ограниченность по отрезкам.

Матрица A называется λ-консервативной, если $c_A^\lambda \supset c^\lambda$.

Предложение 2 ([2], лемма 3). Матрица A λ-консервативна в точности тогда, когда

1^0 $e \in c_A^\lambda$

2^0 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty$,

3^0 матрица $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ с

$$\alpha_{nk} := \frac{\lambda_n (a_{nk} - a_k)}{\lambda_k} \qquad (n,k \in \mathbb{N})$$

консервативна, т.е. $c_{\mathfrak{A}} \supset c := \{x=(x_k) : \exists \lim x_k\}$.

Определение. Матрицу A будем называть λ-регулярной, если она λ-консервативна и

$$e^{(k)} \in n_A^\lambda \quad (\text{т.е. } \lim_n \lambda_n a_{nk} = 0) \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

$$e^\lambda \in c_{0A}^\lambda \setminus n_A^\lambda$$

$$\left(\text{т.е. } \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\lambda_k} \quad \text{и} \quad \exists \lim_n \lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\lambda_k} \neq 0\right), \qquad (4)$$

$$e \in c_A^\lambda \setminus c_{0A}^\lambda$$

$$\left(\text{т.е. } \exists \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} =: a \neq 0 \ \text{ и } \ \exists \lim_n \lambda_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - a\right)\right).$$

Отметим, что в случае λ-регулярной матрицы A имеем включения $n^\lambda \subset n_A^\lambda$ и $c_0^\lambda \subset c_{0A}^\lambda$. Это вытекает непосредственно из доказательства теоремы I статьи [1].

2. Если A и B – матрицы со сходящимися столбцами (т.е. существуют пределы $\lim_n a_{nk} = a_k$ и $\lim_n b_{nk} =: b_k$ $(k \in \mathbb{N})$), то для заданной скорости λ определим матрицы $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ (см. предложение 2) и $\mathfrak{B} = (\beta_{nk})$ с

$$\beta_{nk} := \frac{\lambda_n (b_{nk} - b_k)}{\lambda_k} \quad (n,k \in \mathbb{N}).$$

Если при этом существуют пределы

$$\lim_n \alpha_{nk} =: \alpha_k \quad (k \in \mathbb{N}) \qquad \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} =: \alpha, \qquad (5)$$

а ряд $\sum \alpha_k$ сходится, то обозначим

$$\chi(\mathfrak{A}) := \alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k .$$

Известно ([2], § 2), что $\chi(\mathfrak{A})$ существует при λ-консервативной матрице A.

Предложение 3. Пусть A – λ-обратимая матрица, удовлетворяющая следующим условиям:

1° $e^{(k)} \in c_{0_A}^{\lambda}$ $(k \in \mathbb{N})$,

2° $e^{\lambda} \in c_{0_A}^{\lambda} \cap L_A^{\lambda}$,

3° $e \in c_A^{\lambda}$,

4° $\exists\, \chi(\mathfrak{A}) \neq 0$.

Пусть, далее, B – матрица с

5° $e^{(k)} \in c_B$,

6° $\exists \lim_B e^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{\lambda_k}$.

Если $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$, то $\mathfrak{B} = D\mathfrak{A}$, т.е.

$$\beta_{nk} = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \alpha_{mk} \quad (n,k \in \mathbb{N}), \tag{6}$$

где $D = (d_{nm})$ – консервативная матрица.

Доказательство. Поскольку $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$, то $\gamma_n^B \in c_A^{\lambda'}$ $(n \in \mathbb{N})$. Следовательно, для всех $x \in c_A^{\lambda}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство (см. (2))

$$\gamma_n^B(x) = h_n \eta + t_n \gamma^A(x) + \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \gamma_m^A(x),$$

где $\sum_m |d_{nm}| < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Учитывая условие 1° получим отсюда, что

$$\beta_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} \gamma_n^B(e^{(k)}) = t_n \alpha_k + \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \alpha_{mk} \quad (n,k \in \mathbb{N}). \tag{7}$$

В силу условий 2° и 4° ряды $\sum_k \alpha_k$ и $\sum_k \sum_m d_{nm} \alpha_{mk}$ сходятся и

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{nk} = t_n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \alpha_{mk} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

С другой стороны, воспользовавшись 6°, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_{nk} = \lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{nk} - b_k}{\lambda_k} = \lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\lambda_k} - \lim_B e^{\lambda} \Big) =$$
$$= \gamma_n^B(e^{\lambda}) = h_n \lim_A e^{\lambda} + t_n \alpha + \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{mk}.$$

Согласно предположению 2° имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \alpha_{mk} = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{mk} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

поэтому

$$0 = t_n \Big(\alpha - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\Big) = t_n \chi(\mathfrak{A}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ввиду условия 4° $t_n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, вследствие чего из (7) вытекает равенство (6). Остается доказать консервативность матрицы D.

Положив $z := A^{-1}(e)$ имеем $\lim_A z = 1$ и $\gamma^A_n(z) = 0$, а $\gamma^B_n(z) = h_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Следовательно, $(h_n) \in c$. Для произвольного $x \in c^\lambda_A$ получим

$$\gamma^B(x) = \lim_n h_n \cdot \lim_A x + \lim_n \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \gamma^A_m(x),$$

откуда в силу λ-обратности матрицы A следует консервативность матрицы D.

Следствие 4. Если помимо условий I^0–6^0 предложения 3 $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, то из включения $c^\lambda_A \subset c^\lambda_B$ следует, что

$$b_{nk} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{nm} \lambda_m a_{mk}}{\lambda_n} \qquad (n, k \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

где матрица D консервативна.

3. Предложение 5. Пусть A – матрица с $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Если D – консервативная матрица, а матрица B определена равенством (8), то $L^\lambda_A \subset c^\lambda_B$.

Доказательство. Сначала заметим, что $L^\lambda_A \subset c^\lambda_{0A}$. В самом деле, если $x \in L^\lambda_A$ то ряд $\sum_m d_m \lambda_m \sum_k a_{mk} x_k$ сходится для всех $d \in \ell$, откуда из-за неограниченности последовательности λ и следует, что $x \in c^\lambda_{0A}$.

Пусть теперь $x \in L^\lambda_A$ и D – консервативная матрица, тогда $\sum_m |d_{nm}| < \infty$ $(n \in \mathbb{N})$. Из включения $L^\lambda_A \subset c^\lambda_{0A}$ следует равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \lambda_m a_{mk} x_k = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \gamma^A_m(x).$$

Если матрица B задано в виде (8), то из последнего равенства заключим

$$B_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \gamma^A_m(x) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

откуда $\lim_B x = 0$ и

$$\gamma^B_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \gamma^A_m(x).$$

Ввиду консервативности матрицы D существует $\gamma^B(x)$, т.е. $x \in c^\lambda_B$. Из предложений I и 5 заключим

Предложение 6. Пусть A – λ-AB – матрица, а матрица B задана в виде (8), где D – некоторая консервативная матрица. Тогда $c^\lambda_{0A} \subset c^\lambda_B$.

Чтобы получить достаточные условия для включения $c^\lambda_A \subset c^\lambda_B$, заметим, что в случае $e \in c^\lambda_A \setminus c^\lambda_{0A}$ каждый элемент $x \in c^\lambda_A$ представляется единственным образом в виде

$$x = z + \frac{\eta}{a} e,$$

где $z := x - \eta a^{-1} e \in c_{0A}^{\lambda}$. В самом деле, $z \in c_A^{\lambda}$ и

$$\lim_A z = \lim_A x - \frac{\eta}{a} \lim_A e = \eta - \eta = 0.$$

Итак, $c_A^{\lambda} = c_{0A}^{\lambda} \oplus \langle e \rangle$. Из предложения 6 следует

Предложение 7. Пусть A – λ-AB-матрица с $e \in c_A^{\lambda} \setminus c_{0A}^{\lambda}$. Если D – консервативная матрица, а матрица B задана в виде (8), то $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$ в точности тогда, когда $e \in c_B^{\lambda}$.

4. Пусть теперь A и B – λ-регулярные матрицы. Тогда $a_k = b_k = \alpha_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ и $\alpha \neq 0$ (см. (4)), значит $\chi(\mathfrak{A}) \neq 0$. Далее, в силу консервативности матрицы $\mathfrak{A}$ существует второй предел из (5), поэтому для любой последовательности (d_n) с $\sum |d_n| < \infty$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\lambda_k} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{nk} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \alpha_{nk} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda_n \frac{a_{nk}}{\lambda_k},$$

т.е. $e^{\lambda} \in L_A^{\lambda}$. В итоге выполняются все условия 1^0–6^0 предложения 3, а также предположение $e \in c_B^{\lambda} \cap c_A^{\lambda} \setminus c_{0A}^{\lambda}$ предложения 7. Из следствия 4 вытекает

Теорема 8. Пусть A – λ-обратимая λ-регулярная λ-AB-матрица, а B – произвольная λ-регулярная матрица. Включение $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$ имеет место в точности тогда, когда B имеет вид (8), где $D = (d_{nm})$ – некоторая консервативная матрица.

Рассмотрим и другую возможность выведения необходимых и достаточных условий для включения $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$.

Предложение 9. Пусть A – λ-обратимая λ-AB-матрица с $e^{(k)} \in n_A^{\lambda}$ $(k \in \mathbb{N})$. Если B – матрица с $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$, то включение $n_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$ имеет место в точности тогда, когда B представляется в виде (8), где $D(c_0) \subset c$.

Доказательство. Необходимость. Если $n_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$ то $\gamma_n^B \in n_A^{\lambda'}$ $(n \in \mathbb{N})$. Поэтому для всех $z \in n_A^{\lambda}$ и $n \in \mathbb{N}$ из (2) получается, что

$$\gamma_n^B(z) = \sum_{m=0}^{\infty} d_{nm} \gamma_m^A(z) \qquad \left(\sum_{m=0}^{\infty} |d_{nm}| < \infty;\ n \in \mathbb{N}\right).$$

Положив $z := e^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ получим равенство (8). Так как A λ-обратима, то из существования предела $\lim_n \gamma_n^B(z)$

для всех $z \in n_A^{\lambda}$ следует, что $D(c_0) \subset c$.

Достаточность доказывается аналогично предложению 5. При этом используется соотношение $n_A^{\lambda} \subset L_A^{\lambda}$.

Пусть A – λ-регулярная матрица. Из определения λ-регулярности следует, что каждый элемент $x \in c_A^{\lambda}$ представляется единственным образом в виде

$$x = z + \rho e + \sigma e^{\lambda},$$

где $z \in n_A^{\lambda}$, а ρ и σ – некоторые числа. Итак,

$$c_A^{\lambda} = n_A^{\lambda} \oplus \langle e \rangle \oplus \langle e^{\lambda} \rangle,$$

вследствие чего из предложения 9 получается

Теорема 10. Пусть A – λ-обратимая λ-регулярная λ-AB-матрица, а B – матрица с $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. Включение $c_A^{\lambda} \subset c_B^{\lambda}$ имеет место в точности тогда, когда матрица B имеет вид (8) с $D(c_0) \subset c$ и $e, e^{\lambda} \in c_B^{\lambda}$.

Литература

1. Кангро Г. О множителях суммируемости типа Бора-Харди для заданной скорости. I. – Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1969, 18, № 2, 137-146.
2. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. I. – Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, 20, № 2, 111-120.
3. Кангро Г. О λ-совершенности методов суммирования и ее применениях. II. – Изв. АН ЭстССР. Физ., матем., 1971, 20, № 4, 375-385.
4. Лейгер Т. О структуре полей λ-суммируемости матриц. (Работа готовится к печати).
5. Cowling, V.F. Inclusion relations between matrices. – Math. Z., 1967, 98, N° 3, 192-195.
6. Russell, D.C. Inclusion theorems for sectionbounded matrix transformations. – Math. Z., 1970, 113, N° 4, 225 - 265.
7. Wilansky, A. Distinguished subsets and summability invariants. – J. Analyse Math., 1964, 12, 327-350.

Поступила 20.03.1986

ÜBER λ-INKLUSION VON MATRIZEN

T. Leiger, M. Maasik

Zusammenfassung

Es sei $\lambda := (\lambda_k)$, $0<\lambda_k\uparrow$. Eine Folge $x=(x_k)$ nennen wir λ-konvergent, wenn existieren $\lim x_k =: \xi$ und $\lim \lambda_k(x_k-\xi) =: \beta$. Die Menge c^λ aller λ-konvergenten Folgen ist ein BK-Raum mit der Norm $\|x\| := \sup\{|\lambda_k(x_k-\xi)|, |\xi|\}$ ([2]). Wir setzen $e^{(k)} := (\delta_{ki})$ $(k\in\mathbb{N})$, $e := (1,1,\ldots)$ und $e^\lambda := (\lambda_k^{-1})$. Offensichtlich sind die Folgen $e^{(k)}$, e und e^λ λ-konvergent.

Für eine Matrix $A=(a_{nk})$ und eine Folge x setzen wir

$$y_n := \sum_k a_{nk} x_k \quad (n\in\mathbb{N}), \qquad A(x) := y := (y_n).$$

Die Menge

$$c_A^\lambda := \{x=(x_k) : \exists \lim y_n =: \eta,\ \exists \lim \gamma_n^A(x) =: \gamma^A(x)\},$$

wobei $\gamma_n^A(x) := \lambda_n(y_n-\eta)$ ist, und die Teilmengen

$$c_{0A}^\lambda := \{x\in c_A^\lambda : \eta=0\}, \qquad n_A^\lambda := \{x\in c_A^\lambda : \eta=\gamma^A(x)=0\}$$

sind im allgemeinen FK-Räume. Ist A λ-reversibel (d.h., für jedes $y\in c^\lambda$ gibt es genau ein Element $x\in c_A^\lambda$ mit $y=A(x)$), so sind c_A^λ, c_{0A}^λ und n_A^λ BK-Räume mit der Norm

$$\|x\| := \sup\{|\gamma_n^A(x)|, |\eta|\}.$$

Wir nennen eine Matrix A λ-AB-Matrix, wenn c_{0A}^λ ein AB-FK-Raum ist. Weiter nennen wir A λ-permanent, wenn die Inklusion $c^\lambda\subset c_A^\lambda$ (λ-Konvergenztrue; siehe [1], Satz 1 und [2], Lemma 3) mit $e^{(k)}\in n_A^\lambda$ $(k\in\mathbb{N})$, $e^\lambda\in c_{0A}^\lambda\setminus n_A^\lambda$ und $e\in c_A^\lambda\setminus c_{0A}^\lambda$ gilt.

In der vorliegenden Note untersuchen wir die Inklusion $c_A^\lambda\subset c_B^\lambda$. Mit Hilfe einer funktionalanalytischen Methode, die Cowling [5] und Russell [6] für die Inklusion $c_A\subset c_B$ entwickelt haben, erhalten wir notwendige, hinreichende und z. T. notwendige und hinreichende Bedingungen für die Inklusion $c_A^\lambda\subset c_B^\lambda$. Es gilt z.B.

Satz 10. Ist A eine λ-reversible λ-permanente λ-AB-Matrix und B eine Matrix mit $\lim\limits_n b_{nk}=0$ $(k\in\mathbb{N})$, so ist die Bedingung $c_A^\lambda\subset c_B^\lambda$ genau dann erfüllt, wenn $e, e^\lambda\in c_B^\lambda$ gilt und die Matrix B durch

$$b_{nk} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_{nm}\lambda_m a_{mk}}{\lambda_n} \qquad (n,k\in\mathbb{N})$$

mit $D:=(d_{nm}): c_0\to c$ darstellbar ist.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,69-79

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СИЛЬНОЙ И ОБЫКНОВЕННОЙ СУММИРУЕМОСТЯМИ СО СКОРОСТЬЮ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Тали

Таллинский педагогический институт

В настоящей статье изучается связь между сильной и обыкновенной суммируемостями со скоростью, и, в частности, также между сильной и обыкновенной суммируемостями последовательностей в локально выпуклых пространствах.

§1. Необходимые и достаточные условия для сильной суммируемости со скоростью

1.1. Пусть $\mathcal{E}$ – секвенциально полное отделимое локально выпуклое пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или над $\mathbb{R}$), топология которого определена семейством полунорм $\mathcal{P}=\{p\}$. Пусть, далее, A – некоторое преобразование, переводящее последовательность[1] $x=(\xi_n)$ в последовательность $Ax=(\eta_n)$, где $\xi_n\in\mathcal{E}$ и $\eta_n\in\mathcal{E}$, а $P=(p_{nk})$ – числовая матрица, удовлетворяющая условиям

$$\sum_k |p_{nk}| = \mathcal{O}(1) \tag{1}$$

и

$$\sum_k p_{nk} \neq o(1) . \tag{2}$$

Предположим также, что $r \geq 1$ – некоторое фиксированное число и $\lambda=(\lambda_n)$ – монотонно возрастающая последовательность с $\lambda_n>0$.

[1] Свободные индексы принимают всюду значения 0,1,2,.... Заметим, что вместо последовательности $x=(\xi_n)$ мы можем рассматривать элемент x произвольного множества, так как природа области определения преобразования A в настоящей статье не имеет значения.

Приведем основные определения работы[2].

Определение I. Последовательность x называется суммируемой[3] методом PA (коротко PA-суммируемой) к сумме $\eta\in\mathcal{E}$, если

$$\lim_n \sigma_n = \eta, \tag{3}$$

где $(\sigma_n)=(PA)x=(\sum_k p_{nk}\eta_k)$.

Определение 2. Последовательность x называется PA-суммируемой со скоростью λ (коротко $(PA)^\lambda$-суммируемой) к сумме η, если существует предел (3) и последовательность $\{\lambda_n(\sigma_n-\eta)\}$ сходится в пространстве $\mathcal{E}$. В частности, если последняя последовательность сходится к нулю $\theta\in\mathcal{E}$, т.е. если

$$\lim_n \lambda_n(\sigma_n-\eta)=\theta, \tag{4}$$

то последовательность x называется регулярно PA-суммируемой со скоростью λ (коротко регулярно $(PA)^\lambda$-суммируемой) к сумме η. Последовательность x называется PA-ограниченной со скоростью λ (коротко $(PA)^\lambda$-ограниченной), если существует предел (3) и последовательность $\{\lambda_n(\sigma_n-\eta)\}$ ограничена.

Определение 3. Последовательность x называется сильно PA-суммируемой в степени r (коротко $[P,A]_r$-суммируемой) к сумме η, если

$$\sum_k |p_{nk}|[p(\eta_k-\eta)]^r = o_p(1) \tag{5}$$

при каждой полунорме $p\in\mathcal{P}$, и сильно PA-ограниченной в степени r (коротко $[P,A]_r$-ограниченной), если

$$\sum_k |p_{nk}|[p(\eta_k)]^r = O_p(1) \tag{6}$$

при каждой полунорме $p\in\mathcal{P}$.

---

[2] Определения I–4, а также теоремы 3 и 4 (без доказателств) докладывались автором на конференции Тартуского университета (см. [2]).

[3] Чтобы подчеркнуть отличие от сильной суммируемости, мы называем суммируемость последовательности x также и обыкновенной суммируемостью.

Заметим, что условие (2) гарантирует единственность $[P,A]_r$-суммы последовательности x, а, в силу условия (I), из $[P,A]_r$-суммируемости x следует ее $[P,A]_r$-ограниченность.

Определение 4. Последовательность x называется сильно PA-суммируемой со скоростью λ в степени r (коротко $[(P,A)^\lambda]_r$-суммируемой) к сумме η, если

$$(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\eta_k - \eta)]^r = o_p(1) \tag{7}$$

при каждой полунорме $p \in \mathcal{P}$, и сильно PA-ограниченной со скоростью λ в степени r (коротко $[(P,A)^\lambda]_r$-ограниченной), если выполнены условия (5) и

$$(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\eta_k - \eta)]^r = O_p(1) \tag{8}$$

при каждой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

В частности, если $\lambda_n = O(1)$, то понятия $[(P,A)^\lambda]_r$-суммируемости и $[(P,A)^\lambda]_r$-ограниченности последовательности x совпадают с понятием $[P,A]_r$-суммируемости, а понятия регулярной $(PA)^\lambda$-суммируемости и $(PA)^\lambda$-ограниченности – с понятием PA-суммиреумости.

I.2. Приведем несколько предложений, вытекающих из определений 3 и 4.

Предложение I. Пусть матрица $P = (p_{nk})$ удовлетворяет помимо условий (I) и (2) также условию $p_{nk} = o(1)$ ($k = 0,1,2,\ldots$). Если последовательность x является A-суммируемой к сумме η, то она и $[P,A]_r$-суммируема к той же сумме.

Доказательство. Поскольку матрица $(|p_{nk}|)$ переводит все 0-последовательности в 0-последовательности, то справедливость утверждения следует непосредственно из определения 3.

Предложение 2. Если последовательность x является A-ограниченной, то она и $[P,A]_r$-ограничена.

Доказательство. Справедливость предложения следует из определения 3, так как, в силу условия (I), матрица $(|p_{nk}|)$ переводит все ограниченные последовательности снова в ограниченные последовательности.

Предложение 3. Пусть метод P и скорость λ удовлетворяют помимо условий (I) и (2) также условиям

$$p_{nk}(\lambda_n)^r = o(1) \quad (k=0,1,2,\dots) \tag{9}$$

и

$$\sum_k |p_{nk}|(\lambda_n/\lambda_k)^r = O(1). \tag{10}$$

Если последовательность x является регулярно A^λ-суммируемой к сумме η, то она и $[(P,A)^\lambda]_r$-суммируема к той же сумме.

Доказательство. Предположим, что x является регулярно A^λ-суммируемой к η, т.е. выполнено условие $\lim_n \lambda_n(\eta_n - \eta)=\theta$. Поскольку, в силу условий (9) и (10), матрица $(|p_{nk}|(\lambda_n/\lambda_k)^r)$ переводит все 0-последовательности в 0-последовательности, то

$$(\lambda_n)^r\sum_k |p_{nk}|[p(\eta_k-\eta)]^r = (\lambda_n)^r\sum_k |p_{nk}|\{p[\lambda_k(\eta_k-\eta)]\}^r/(\lambda_k)^r = o_p(1)$$

при любой полунорме $p\in\mathcal{P}$. Таким образом, выполнено условие (7), значит последовательность x является $[(P,A)^\lambda]_r$-суммируемой к η.

Предложение 4. Пусть метод P и скорость λ удовлетворяют помимо условий (I) и (2) еще условиям $\lambda_n \uparrow \infty$ и (I0). Если последовательность x является A^λ-ограниченной, то она и $[(P,A)^\lambda]_r$-ограничена.

Доказательство аналогично доказательству предложения 3.

I.3. Этот раздел является центральной частью работы. Здесь доказываются теоремы, дающие необходимые и достаточные условия для сильной суммируемости (ограниченности) и сильной суммируемости (ограниченности) со скоростью. Первые две теоремы, устанавливающие связь между сильной и обыкновенной суммируемостями и между сильной и обыкновенной ограниченностями, мы сформулируем пока без доказательств (см. примечания I и 2).

Теорема I. Пусть $P=(p_{nk})$ является T-матрицей. Последовательность x является $[P,A]_r$-суммируемой к сумме η тогда и только тогда, когда она PA-суммируема к η и

$$\sum_k |p_{nk}|[p(\sigma_k-\eta_k)]^r = o_p(1)$$

при любой полунорме $p\in\mathcal{P}$.

Теорема 2. Последовательность x является $[P,A]_r$-ограниченной тогда и только тогда, когда она PA-ограничена и

$$\sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta_k)]^r = O_p(1)$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

Следующая теорема характеризует взаимоотношение между сильной и обыкновенной суммируемостями со скоростью.

Теорема 3. Пусть метод P и скорость λ удовлетворяют условиям (9), (10) и

$$\sum_k p_{nk} = 1. \tag{11}$$

Последовательность x является $[(P,A)^\lambda]_r$-суммируемой к сумме η тогда и только тогда, когда она регулярно $(PA)^\lambda$-суммируема к η и

$$(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta_k)]^r = o_p(1) \tag{12}$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что для x выполнено условие (7). Используя неравенство Гёльдера и учитывая условия (1), (7), (11) и секвенциальную полноту пространства[4] $\mathcal{E}$, мы получаем, что

$$p[\lambda_n(\sigma_n - \eta)] \le \lambda_n \sum_k |p_{nk}| p(\eta_k - \eta) =$$
$$= O(1)\{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\eta_k - \eta)]^r\}^{1/r} = o_p(1) \tag{13}$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$. Значит, выполнено условие (4), т.е. последовательность x является регулярно $(PA)^\lambda$-суммируемой к η. Остаётся убедиться в выполнении условия (12). Заметим, что, ввиду условий (9), (10) и (4), мы имеем

$$(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| \{p[\lambda_k(\sigma_k - \eta)]\}^r / (\lambda_k)^r = o_p(1). \tag{14}$$

Используя, далее, неравенство Минковского, мы получаем при помощи условий (14) и (7), что

$$\{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta_k)]^r\}^{1/r} \le \{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta)]^r\}^{1/r} +$$
$$+ \{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\eta_k - \eta)]^r\}^{1/r} =$$
$$= o_p(1). \tag{15}$$

---

[4] Секвенциальная полнота пространства $\mathcal{E}$ нужна для существования суммы $\sum_k p_{nk}(\eta_k - \eta) \in \mathcal{E}$.

Таким образом, мы заключаем, что и условие (I2) выполнено.

Достаточность. Предположим, что последовательность x удовлетворяет условиям (4) и (I2). Ввиду условий (9), (I0) и (4), выполнено и условие (I4). Используя снова неравенство Минковского, мы заключаем, что выполнено условие (7). Действительно,

$$\{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\eta_k - \eta)]^r\}^{1/r} \leq \{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta_k)]^r\}^{1/r} + \\ + \{(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta)]^r\}^{1/r} = \\ = o_p(1). \qquad (I6)$$

Теорема доказана.

Примечание I. В частности, когда $\lambda_n = \mathcal{O}(1)$, то из предложения 3 следует предложение I, а из теоремы 3 – теорема I. Действительно, не ограничивая общности, мы можем в этом случае считать, что $\lambda_n = 1$. Из доказательства необходимости условия (4) теоремы 3 видно, что условие (II) можно в рассматриваемом случае ослабить до условия $\lim\limits_n \sum_k p_{nk} = 1$. Таким образом, условия теоремы 3 превращаются в условия теоремы I.

Взаимоотношение между сильной и обыкновенной ограниченностями со скоростью характеризуется при помощи следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть $\lambda_n \uparrow \infty$ и выполнены условия (I0) и (II). Последовательность x является $[(P,A)^\lambda]_r$-ограниченной тогда и только тогда, когда она $(PA)^\lambda$-ограничена и

$$(\lambda_n)^r \sum_k |p_{nk}| [p(\sigma_k - \eta_k)]^r = \mathcal{O}_p(1) \qquad (I7)$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что x является $[(P,A)^\lambda]_r$-ограниченной. Учитывая условия (I), (8), (II) и секвенциальную полноту пространства $\mathcal{E}$, мы аналогично соотношениям (I3), выводим, что x является $(PA)^\lambda$-ограниченной. В силу условий (8), (I0) и $(PA)^\lambda$-ограниченности последовательности x, мы заключаем, рассуждая так же, как при соотношениях (I5), что и условие (I7) выполнено.

Достаточность. Используя неравенство Минковского и учитывая условия (I7), (I0) и $(PA)^\lambda$-ограниченность

ность последовательности X , мы выводим, рассуждая так же, как при соотношениях (I6), что выполнено условие (8). В силу того, что $\lambda_n \uparrow \infty$, выполнено и соотношение (5). Таким образом, последовательность X является $[(P,A)^\lambda]_\varkappa$-ограниченной. Теорема доказана.

Примечание 2. Заметим, что доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 4. Нужно только в последнем доказательстве считать, что $\lambda_n = 1$, $\eta = \theta$ и сделать соответствующие поправки в нумерации использованных соотношений. В частности, когда $\mathcal{E} = \mathbb{C}$, теоремы I–4 приведены в работе [I], а теорема I доказана для матричных методов $A = (a_{nk})$, $P = (p_{nk})$ с $p_{nk} \geqslant 0$ в работе [3] и для нормальных матричных методов A и P в работе [4].

Примечание 3. В частности, если метод $P = (p_{nk})$ является конечнострочным (например, треугольным), то условие секвенциальной полноты пространства $\mathcal{E}$ всюду излишне.

§2. Сильная суммируемость и сильная суммируемость со скоростью методами некоторого линейно связанного семейства

2.I. Рассмотрим семейство методов A_α, заданных в виде преобразований последовательностей $x \in X_\alpha$ в последовательности $A_\alpha x = (\eta_n^\alpha)$, где X_α – поле применения метода A_α, а $\alpha \in]\alpha_0; \infty[$ – непрерывный параметр. Предположим, что методы A_α и $A_{\alpha+\delta}$ при любых $x \in X_\alpha$, α и $\delta > 0$ связаны соотношением

$$\eta_n^{\alpha+\delta} = \frac{1}{b_n^{\alpha+\delta}} \sum_{k=0}^{n} d_{nk}^{\alpha\delta} b_k^\alpha \eta_k^\alpha , \qquad (I8)$$

где $(d_{nk}^{\alpha\delta})$ – нижняя треугольная числовая матрица с $d_{nk}^{\alpha 1} = 1/M_\alpha$, M_α – некоторая постоянная, а (b_n^α) – числовая последовательность с $b_n^\alpha \neq 0$. Итак, методы семейства A_α связаны между собой при помощи линейного преобразования, определенного соотношением (I8). Заметим, что это соотношение не фиксирует конкретных методов A_α. Существует бесконечное множество семейств A_α, удовлетворяющих одному и тому же соотношению (I8).

Описанное семейство A_α рассматривалось автором и ранее (см., например, [I]).

Примером такого семейства является семейство обобщенных методов Нёрлунда $A_\alpha=(N,p_n^{\alpha+i\varphi_\alpha},q_n)$ с

$$\eta_n^\alpha=\frac{1}{R_n^{\alpha+i\varphi_\alpha}}\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^{\alpha+i\varphi_\alpha}q_k\xi_k, \tag{I9}$$

где

$$\alpha>-1,\ R_n^{\alpha+i\varphi_\alpha}=\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^{\alpha+i\varphi_\alpha}q_k,\ p_n^{\alpha+i\varphi_\alpha}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\alpha-1+i\varphi_\alpha}p_k,$$

i – мнимая единица, φ_α – вещественные числа с $\varphi_\alpha=\varphi_{\alpha+1}$, $A_{n-k}^{\alpha+i\varphi_\alpha}$ – числа Чезаро и p_n, q_n – некоторые числа, при которых $R_n^{\alpha+i\varphi_\alpha}\neq 0$. В частности, если $\varphi_\alpha=0$ при любом α, то мы получаем обобщенные методы Нёрлунда $A_\alpha=(N,p_n^\alpha,q_n)$, если к тому же $q_n=1$, то – методы Вороного-Нёрлунда $A_\alpha=(WN,p_n^\alpha)$. Если $p_0=1$, $p_n=0$ при $n>0$ и $q_n=A_n^{\beta_0}$ с $\beta_0\geq 0$, то получаем семейство обобщенных методов Чезаро $A_\alpha=(C,\alpha,\beta_0)$. В частности, если $\beta_0=0$, то методы (C,α,β_0) превращаются в методы Чезаро (C,α).

Нетрудно убедиться, что методы $A_\alpha=(N,p_n^{\alpha+i\varphi_\alpha},q_n)$ связаны соотношением (I8). Для этого покажем сначала, что

$$p_n^{\alpha+\delta+i\varphi_{\alpha+\delta}}=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\delta-1+i(\varphi_{\alpha+\delta}-\varphi_\alpha)}p_k^{\alpha+i\varphi_\alpha}. \tag{20}$$

Действительно,

$$\begin{aligned}p_n^{\alpha+\delta+i\varphi_{\alpha+\delta}}&=\sum_{\nu=0}^{n}A_{n-\nu}^{\alpha+\delta-1+i\varphi_{\alpha+\delta}}p_\nu=\\&=\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-\nu}A_{n-\nu-k}^{\delta-1+i(\varphi_{\alpha+\delta}-\varphi_\alpha)}A_k^{\alpha-1+i\varphi_\alpha}p_\nu=\\&=\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\delta-1+i(\varphi_{\alpha+\delta}-\varphi_\alpha)}p_k^{\alpha+i\varphi_\alpha}.\end{aligned}$$

Учитывая, далее, соотношение (20), мы имеем

$$\begin{aligned}\eta_n^{\alpha+\delta}&=\frac{1}{R_n^{\alpha+\delta+i\varphi_{\alpha+\delta}}}\sum_{\nu=0}^{n}p_{n-\nu}^{\alpha+\delta+i\varphi_{\alpha+\delta}}q_\nu\xi_\nu=\\&=\frac{1}{R_n^{\alpha+\delta+i\varphi_{\alpha+\delta}}}\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-\nu}A_{n-\nu-k}^{\delta-1+i(\varphi_{\alpha+\delta}-\varphi_\alpha)}p_k^{\alpha+i\varphi_\alpha}q_\nu\xi_\nu=\\&=\frac{1}{R_n^{\alpha+\delta+i\varphi_{\alpha+\delta}}}\sum_{k=0}^{n}A_{n-k}^{\delta-1+i(\varphi_{\alpha+\delta}-\varphi_\alpha)}R_k^{\alpha+i\varphi_\alpha}.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что методы семейства $A_\alpha=(N,p_n^{\alpha+i\varphi_\alpha},q_n)$ связаны соотношением (I8) с $b_n^\alpha=R_n^{\alpha+i\varphi_\alpha}$ и $d_{nk}^{\alpha\delta}=A_{n-k}^{\delta-1+i(\varphi_{\alpha+\delta}-\varphi_\alpha)}$.

2.2. Пусть, далее, $P_\alpha=(p^\alpha_{nk})$ — нижние треугольные числовые матрицы с $p^\alpha_{nk}=b^\alpha_k/M_\alpha b^{\alpha+1}_n$ при $k\le n$, где последовательности (b^α_n) и числа M_α определяются соотношением (I8). Предположим также, что матрицы P_α удовлетворяют при любом $\alpha>-1$ условиям (I) и (2). Рассмотрим семейство методов $[P_\alpha,A_\alpha]_r$, описанных в определении 3. Поскольку из соотношения (I8) следует, что $P_\alpha A_\alpha=A_{\alpha+1}$, так как $\sigma^\alpha_n=\sum\limits_{k=0}^n p^\alpha_{nk}\eta^\alpha_k=$ $=\sum\limits_{k=0}^n b^\alpha_k\eta^\alpha_k/M_\alpha b^{\alpha+1}_n=\eta^{\alpha+1}_n$, то сильная $P_\alpha A_\alpha$-суммируемость в степени r ($[P_\alpha,A_\alpha]_r$-суммируемость) является некоторой сильной $A_{\alpha+1}$-суммируемостью в степени r ($[A_{\alpha+1}]_r$-суммируемостью). Аналогично определяется $[A_{\alpha+1}]_r$-ограниченность. Также и $[(P_\alpha,A_\alpha)^\lambda]_r$-суммируемость (-ограниченность), описанная в определении 4, является $[A^\lambda_{\alpha+1}]_r$-суммируемостью (-ограниченностью), т.е. сильной $A_{\alpha+1}$-суммируемостью (-ограниченностью) со скоростью λ в степени r.

2.3. Остановимся коротко на свойствах методов $[A_{\alpha+1}]_r$, вытекающих из предложений раздела I.2. Если предположить, что последовательность $\{|b^\alpha_n|/(\lambda_n)^r\}$ монотонно возрастает и

$$b^\alpha_n/b^{\alpha+1}_n=O(1/n)\quad(n=1,2,\ldots),\qquad\text{(2I)}$$

то выполнены условия (9) и (I0) с $p^\alpha_{nk}=b^\alpha_k/M_\alpha b^{\alpha+1}_n$, так как

$$p^\alpha_{nk}(\lambda_n/\lambda_k)^r=(b^\alpha_k/M_\alpha b^{\alpha+1}_n)(\lambda_n/\lambda_k)^r=$$
$$=O(1)|b^\alpha_n/b^{\alpha+1}_n|=O(1/n)$$

и

$$\sum_{k=0}^n|p^\alpha_{nk}|(\lambda_n/\lambda_k)^r=\sum_{k=0}^n|b^\alpha_k/b^{\alpha+1}_n M_\alpha|(\lambda_n/\lambda_k)^r=$$
$$=O(1)\sum_{k=0}^n|b^\alpha_n/b^{\alpha+1}_n|=O(1).$$

Таким образом, из предложений 3 и 4 непосредственно вытекают следующие результаты.

<u>Предложение 5</u>. Пусть последовательность $\{|b^\alpha_n|/(\lambda_n)^r\}$ монотонно возрастает и выполнено условие (2I). Если последовательность x является регулярно A^λ_α-суммируемой к сумме η, то она является и $[A^\lambda_{\alpha+1}]_r$-суммируемой к η.

<u>Предложение 6</u>. Пусть выполнены условия:

$$\sum_{k=0}^n|b^\alpha_k/b^{\alpha+1}_n|(\lambda_n/\lambda_k)^r=O(1),\ \sum_{k=0}^n b^\alpha_k=M_\alpha b^{\alpha+1}_n,\ \lambda_n\uparrow\infty.$$

Если последовательность x является A^λ_α-ограниченной, то она является и $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_r$-ограниченной.

2.4. При помощи теорем I–4 легко находятся необходимые и достаточные условия для $[A_{\alpha+1}]_r$-суммируемости (-ограниченности) и $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_r$-суммируемости (-ограниченности) последовательности x. Непосредственно из теорем 3 и 4, например вытекают следующие результаты.

Теорема 5. Пусть метод $[A_{\alpha+1}]_r$ и скорость λ удовлетворяют условиям предложение 5. Последовательность x является $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_r$-суммируемой к сумме η тогда и только тогда, когда она регулярно $A^{\lambda}_{\alpha+1}$-суммируема к η и выполнено условие

$$(\lambda_n)^r \sum_{k=0}^{n} |b_k^{\alpha} / b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^{\alpha+1} - \eta_k^{\alpha})]^r = o_p(1)$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

Теорема 6. Пусть метод $[A_{\alpha+1}]_r$ и скорость λ удовлетворяют условиям предложения 6. Последовательность x является $[A^{\lambda}_{\alpha+1}]_r$-ограниченной тогда и только тогда, когда она $A^{\lambda}_{\alpha+1}$-ограничена и выполнено условие

$$(\lambda_n)^r \sum_{k=0}^{n} |b_k^{\alpha} / b_n^{\alpha+1}| [p(\eta_k^{\alpha+1} - \eta_k^{\alpha})]^r = O_p(1)$$

при любой полунорме $p \in \mathcal{P}$.

Литература

I. Тали А., Некоторые примеры выпуклых и нуль-выпуклых семейств методов суммирования.-Уч. зап. Тарт. ун-та, I982, 596, 90-I04.

2. Тали А., Сильная суммируемость и сильная суммируемость со скоростью в локально выпуклых пространствах.-350 лет математики в Тартуском университете. Тезисы докладов , Тарту, I982, 57-6I.

3. Borwein, D., On strong and absolute summability. -Proc. Glasgow Math. Assoc., 1960, 4, 122-139.

4. Tanović-Miller, N., On strong summability.-Glasnik Matematički, 1979, 14(34), 87-97.

ON RELATIONS BETWEEN STRONG SUMMABILITY WITH RAPIDITY AND ORDINARY SUMMABILITY WITH RAPIDITY OF SEQUENCES IN LOCALLY CONVEX SPACES

A. Tali

Summary

This paper extends the authors researches on strong summability started in [1,2] and is devoted to the comparison of two concepts: strong summability with rapidity and ordinary summability with rapidity.

Let $\mathcal{E}$ be a locally convex space on $\mathbb{C}$ (or on $\mathbb{R}$) and $x=(\xi_n)$ $(n=0,1,2,\dots)$ be a sequence where $\xi_n \in \mathcal{E}$. Let also A be a sequence-to-sequence transform of x into $Ax=$ $=(\eta_n)$ $(\eta_n \in \mathcal{E})$ and $P=(p_{nk})$ be an infinite complex matrix. The summability method PA is defined by sequence-to-sequence transform of x into $(PA)x=(\sigma_n)$, where $\sigma_n=\sum_k p_{nk}\eta_k$. The concepts of PA-summability (-boundedness) with rapidity, of strong PA-summability (-boundedness) and of strong PA-summability (-boundedness) with rapidity are given by definitions 2, 3 and 4 respectively.

Main results of the paper are given by theorems 3 and 4. The theorem 3 compares the strong PA-summability with rapidity to the ordinary PA-summability with rapidity giving necessary and sufficient conditions for x being strongly PA-summable with rapidity. The theorem 4 gives analogous conditions for x being strongly PA-bounded with rapidity. Some known results ([1] ,theorems 3, 4, [3] , theorem 7, [4] theorem 5) can be obtained from theorems mentioned above as special cases. The results obtained for method PA are applied to certain family of methods A_α (theorems 5 and 6).

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,80-87

ТАУБЕРОВА ТЕОРЕМА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ МЕТОДОВ НЁРЛУНДА

А. Рохтла, А. Тали

Таллинский педагогический институт

Рассмотрим семейство обобщенных методов Нёрлунда $A_\alpha = (N, p_n^\alpha, q_n)$, переводящих числовую последовательность $x = (\xi_n)$ в последовательности $A_\alpha x = (\eta_n^\alpha)$ с

$$\eta_n^\alpha = \frac{1}{R_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^\alpha q_k \xi_k ,$$

где

$$\alpha > -1, \ R_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^\alpha q_k , \ p_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} p_k ,$$

$A_{n-k}^{\alpha-1}$ – числа Чезаро и p_n, q_n – некоторые числа, при которых $R_n^\alpha \neq 0$. Введя обозначение

$$T_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}^\alpha q_k \xi_k ,$$

мы можем писать, что $\eta_n^\alpha = T_n^\alpha / R_n^\alpha$. Методы A_α и A_β при любых $\alpha < \beta$ связаны соотношением (см., например, [2])

$$T_n^\beta = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-\alpha-1} T_k^\alpha . \tag{1}$$

В частности, когда $q_n = 1$ при любом $n = 0, 1, 2, \ldots$, то методы (N, p_n^α, q_n) являются методами Вороного–Нёрлунда (WN, p_n^α). Если $p_0 = 1$, $p_n = 0$ при $n > 0$ и $q_n = A_n^{\beta_0}$ с $\beta_0 \geq 0$, то мы получаем семейство обобщенных методов Чезаро (C, α, β_0). В частности, если $\beta_0 = 0$, то методы (C, α, β_0) превращаются в методы Чезаро (C, α). Методы Чезаро переводят последовательность x в последовательности (σ_n^α) с

$$\sigma_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \xi_k .$$

Используя обозначение

$$S_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} \xi_k , \tag{2}$$

мы получаем для методов (C, α) соотношение (1) в виде

$$S_n^{\beta}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-\alpha-1} S_k^{\alpha}.$$

Целью настоящей статьи является обобщение классической теоремы Рисса о выпуклости, хорошо известной для методов Чезаро ([3] , теорема 3.I), на обобщенные методы Нёрлунда (N, p_n^{α}, q_n), а также применение этой теоремы к суммированию со скоростью.

Для методов (C,α) известна следующая лемма (см. [3], лемма 3.2).

<u>Лемма I.</u> Для любых $0<\varkappa<\beta$ имеет место неравенство

$$\sup_{k\le n}|S_k^{\varkappa}|\le C(\varkappa,\beta)(\sup_{k\le n}|\xi_k|)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta}}(\sup_{k\le n}|S_k^{\beta}|)^{\frac{\varkappa}{\beta}}, \qquad (3)$$

где $C(\varkappa,\beta)$ – некоторое положительное число, зависящее от $\varkappa$ и β.

Сформулированный результат без труда переносится на методы (N, p_n^{α}, q_n).

<u>Лемма 2.</u> Для любых $-1<\alpha<\varkappa<\beta$ справедливо неравенство

$$\sup_{k\le n}|T_k^{\varkappa}|\le C(\alpha,\beta,\varkappa)(\sup_{k\le n}|T_k^{\alpha}|)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(\sup_{k\le n}|T_k^{\beta}|)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}, \qquad (4)$$

где $C(\alpha,\beta,\varkappa)$ – некоторое положительное число, зависящее от $\alpha,\beta,\varkappa$.

Доказательство. Сравнивая соотношения (2) и (I), мы видим, что

$$T_n^{\beta}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\beta-\alpha-1} T_k^{\alpha}=S_n^{\prime\,\beta-\alpha}$$

и

$$T_n^{\varkappa}=\sum_{k=0}^{n} A_{n-k}^{\varkappa-\alpha-1} T_k^{\alpha}=S_n^{\prime\,\varkappa-\alpha},$$

где $S_n^{\prime\,\beta-\alpha}$ и $S_n^{\prime\,\varkappa-\alpha}$ являются суммами при чезаровских преобразованиях, примененных к последовательности (T_n^{α}). Это означает, что $S_n^{\prime\,\beta-\alpha}$ и $S_n^{\prime\,\varkappa-\alpha}$ получаются из сумм $S_n^{\beta-\alpha}$ и $S_n^{\varkappa-\alpha}$ (см. соотношение (2)) при помощи замены в них ξ_n на T_n^{α}. В силу неравенства (3), суммы $S_n^{\prime\,\beta-\alpha}$ и $S_n^{\prime\,\varkappa-\alpha}$ удовлетворяют условию

$$\sup_{k\le n}|S_k^{\prime\,\varkappa-\alpha}|\le C(\varkappa-\alpha,\beta-\alpha)(\sup_{k\le n}|T_k^{\alpha}|)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(\sup_{k\le n}|S_k^{\prime\,\beta-\alpha}|)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Используя соотношения $S_k^{\prime\,\beta-\alpha}=T_k^{\beta}$ и $S_k^{\prime\,\varkappa-\alpha}=T_k^{\varkappa}$ и обозначая $C(\alpha,\beta,\varkappa)=C(\varkappa-\alpha,\beta-\alpha)$, мы можем последнее неравенство переписать в виде (4). Лемма доказана.

Докажем теперь основную теорему работы – тауберову теорему для семейства методов (N, p_n^α, q_n).

Теорема I. Пусть $(\mathcal{U}_n)$ и $(\mathcal{V}_n)$ – некоторые последовательности, где $0<\mathcal{U}_n\nearrow$ и $0<\mathcal{V}_n\nearrow$. Для любых $-1<\alpha<\varkappa<\beta$ справедливы следующие три импликации:

$$T_n^\alpha=O(\mathcal{U}_n),\ T_n^\beta=O(\mathcal{V}_n) \Longrightarrow T_n^\varkappa=O(1)(\mathcal{U}_n)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(\mathcal{V}_n)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}, \quad (5)$$

$$\mathcal{U}_n\uparrow\infty,\ T_n^\alpha=o(\mathcal{U}_n),\ T_n^\beta=O(\mathcal{V}_n) \Longrightarrow T_n^\varkappa=o(1)(\mathcal{U}_n)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(\mathcal{V}_n)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}} \quad (6)$$

и

$$\mathcal{V}_n\uparrow\infty,\ T_n^\alpha=O(\mathcal{U}_n),\ T_n^\beta=o(\mathcal{V}_n) \Longrightarrow T_n^\varkappa=o(1)(\mathcal{U}_n)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(\mathcal{V}_n)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}. \quad (7)$$

Доказательство. а) Докажем сначала справедливость импликации (5). Из условий $T_n^\alpha=O(\mathcal{U}_n)$, $T_n^\beta=O(\mathcal{V}_n)$, $0<\mathcal{U}_n\nearrow$ и $0<\mathcal{V}_n\nearrow$ следует, что $\sup\limits_{k\le n}|T_k^\alpha|=O(\mathcal{U}_n)$ и

$$\sup_{k\le n}|T_k^\beta|=O(\mathcal{V}_n). \quad (8)$$

Из неравенства (4) мы заключаем теперь, что

$$|T_n^\varkappa|\le\sup_{k\le n}|T_k^\varkappa|=O(1)(\mathcal{U}_n)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(\mathcal{V}_n)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Справедливость импликации (5) доказана.

б) Докажем справедливость импликации (6). Из условий $T_n^\beta=O(\mathcal{V}_n)$ и $0<\mathcal{V}_n\nearrow$ следует соотношение (8). При условиях $T_n^\alpha=o(\mathcal{U}_n)$, $\mathcal{U}_n\uparrow\infty$ рассмотрим два случая:

I) $T_n^\alpha=O(1)$

и

2) $\overline{\lim\limits_n}|T_n^\alpha|=\infty$.

I) Если $T_n^\alpha=O(1)$, то $\sup\limits_{k\le n}|T_k^\alpha|=O(1)$ и

$$\sup_{k\le n}|T_k^\alpha|=o(\mathcal{U}_n). \quad (9)$$

2) Если $\overline{\lim\limits_n}|T_n^\alpha|=\infty$, то $\sup\limits_{k\le n}|T_k^\alpha|=|T_{\ell_n}^\alpha|$, где $\ell_n\le n$ и $\ell_n\to\infty$ при $n\to\infty$. Выполнено также соотношение (9), так как

$$\frac{\sup\limits_{k\le n}|T_k^\alpha|}{\mathcal{U}_n}=\frac{|T_{\ell_n}^\alpha|}{\mathcal{U}_n}\le\frac{|T_{\ell_n}^\alpha|}{\mathcal{U}_{\ell_n}}=o(1).$$

Из соотношений (8), (9) и (4) следует теперь справедливость импликации (6).

Справедливость импликации (7) доказывается аналогично.

Примечание I. Импликации (5)-(7) доказаны в работе [2] в следствии (см. [2], следствие 2) из теоремы о нуль-выпуклости некоторого семейства методов суммирования. Но в указанном результате на последовательности $(\mathcal{U}_n)$ и $(\mathcal{V}_n)$ накладываются более сильные ограничения, чем в теореме I. Помимо условий теоремы I требуется еще выполнение неравенств

$$M_1 n^{\beta-\alpha} \leq \mathcal{V}_n / \mathcal{U}_n \leq M_2 n^{\beta-\alpha} \quad (n=1,2,\dots). \qquad (10)$$

Примечание 2. В частности, при методах (C,α) в импликациях (5)-(7) величины $T_n^\alpha, T_n^\beta, T_n^\gamma$ превращаются соответственно в $S_n^\alpha, S_n^\beta, S_n^\gamma$ и теорема I превращается в классическую Рисса о выпуклости ([3] , теорема 3.I). Однако в упомянутой теореме во всех трех импликациях имеются условия $\mathcal{U}_n \uparrow \infty$ и $\mathcal{V}_n \uparrow \infty$. Из литературы известны еще некоторые обобщения теоремы Рисса для методов Чезаро. Подробный обзор этих теорем дан в работе [4] . Заметим, что все теоремы, утверждающие справедливость хотя бы одной из импликаций (5)-(7) для методов (C,α) , остаются в силе и для методов (N,p_n^α,q_n), каковы бы ни были ограничения на $(\mathcal{U}_n)$ и $(\mathcal{V}_n)$. Действительно, в силу соотношения (2), достаточно рассматривать упомянутые импликации для (C,α) в случае $\xi_n = T_n^\alpha$, учитывая, что $S_n^{\prime\beta-\alpha} = T_n^\beta$ и $S_n^{\prime\gamma-\alpha} = T_n^\gamma$ (см. доказательство леммы 2).

Введя, далее, обозначения

$$\lambda_n^\alpha = R_n^\alpha / \mathcal{U}_n , \qquad (11)$$

$$\lambda_n^\beta = R_n^\beta / \mathcal{V}_n \qquad (12)$$

и

$$\lambda_n^\gamma = R_n^\gamma / [(\mathcal{U}_n)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}} (\mathcal{V}_n)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}}] , \qquad (13)$$

мы можем импликации (5)-(7) переписать в виде:

$$\lambda_n^\alpha \eta_n^\alpha = O(1) , \ \lambda_n^\beta \eta_n^\beta = O(1) \Longrightarrow \lambda_n^\gamma \eta_n^\gamma = O(1) , \qquad (5')$$

$$\mathcal{U}_n \uparrow \infty, \ \lambda_n^\alpha \eta_n^\alpha = o(1), \ \lambda_n^\beta \eta_n^\beta = O(1) \Longrightarrow \lambda_n^\gamma \eta_n^\gamma = o(1) \qquad (6')$$

и

$$V_n\uparrow\infty,\ \lambda_n^\alpha\eta_n^\alpha=O(1),\ \lambda_n^\beta\eta_n^\beta=o(1)\ \Longrightarrow\ \lambda_n^\varkappa\eta_n^\varkappa=o(1)\ . \qquad (7')$$

Из теоремы I легко выводится следующее следствие.

Следствие I. Пусть (U_n), (V_n) –некоторые последовательности, где $0<U_n\nearrow$, $0<V_n\nearrow$ и $\lambda_\alpha=(\lambda_n^\alpha)$, $\lambda_\beta=(\lambda_n^\beta)$, $\lambda_\varkappa=(\lambda_n^\varkappa)$ – последовательности, определенные соотношениями (II)–(I3). Для любых $-1<\alpha<\varkappa<\beta$ справедливы следующие импликации:

$$\lambda_n^\alpha(\eta_n^\alpha-\eta)=O(1),\ \lambda_n^\beta(\eta_n^\beta-\eta)=O(1)\Longrightarrow\lambda_n^\varkappa(\eta_n^\varkappa-\eta)=O(1), \qquad (I4)$$

$$U_n\uparrow\infty,\ \lambda_n^\alpha(\eta_n^\alpha-\eta)=o(1),\ \lambda_n^\beta(\eta_n^\beta-\eta)=O(1)\Longrightarrow\lambda_n^\varkappa(\eta_n^\varkappa-\eta)=o(1) \qquad (I5)$$

и

$$V_n\uparrow\infty,\ \lambda_n^\alpha(\eta_n^\alpha-\eta)=O(1),\ \lambda_n^\beta(\eta_n^\beta-\eta)=o(1)\Longrightarrow\lambda_n^\varkappa(\eta_n^\varkappa-\eta)=o(1). \qquad (I6)$$

Доказательство. Докажем справедливость импликации (I4).

Поскольку

$$\lambda_n^\alpha(\eta_n^\alpha-\eta)=\lambda_n^\alpha\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^\alpha q_k(\xi_k-\eta)=O(1)$$

и

$$\lambda_n^\beta(\eta_n^\beta-\eta)=\lambda_n^\beta\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^\beta q_k(\xi_k-\eta)=O(1),$$

то, в силу теоремы I, справедлива импликация (5') и мы имеем:

$$\lambda_n^\varkappa(\eta_n^\varkappa-\eta)=\lambda_n^\varkappa\sum_{k=0}^{n}p_{n-k}^\varkappa q_k(\xi_k-\eta)=O(1).$$

Справедливость импликации (I5) и (I6) доказывается аналогично.

Заметим, что если $\lambda_n^\alpha\nearrow$, то последовательность $\lambda_\alpha=(\lambda_n^\alpha)$ является скоростью суммирования. Если выполнено условие $\lambda_n^\alpha(\eta_n^\alpha-\eta)=o(1)$, то последовательность x является суммируемой методом (N,p_n^α,q_n) к сумме η со скоростью λ_α, точнее – регулярно $A_\alpha^{\lambda_\alpha}$–суммируемой (см. [I]). Если $\lambda_n^\alpha(\eta_n^\alpha-\eta)=O(1)$ и $\eta_n^\alpha-\eta=o(1)$, то последовательность x называется ограниченной методом (N,p_n^α,q_n) со скоростью λ_α (коротко $A_\alpha^{\lambda_\alpha}$–ограниченной). Итак, если λ_α, λ_β и $\lambda_\varkappa$ являются скоростями, то импликации (I4)–(I6) являются предложениями о суммируемости (или ограниченности) со скоростью и следствие I дает нам три теоремы о суммируемости со скоростью. Для примера сформулируем одну из них – теорему, получаемую при помощи импликации (I6).

Теорема 2. Пусть (U_n), (V_n) – некоторые последовательности, где $0<U_n\nearrow$, $0<V_n\uparrow\infty$, а $\lambda_\alpha=(\lambda_n^\alpha)$, $\lambda_\beta=(\lambda_n^\beta)$, $\lambda_\varkappa=(\lambda_n^\varkappa)$ – последовательности с $-1<\alpha<\varkappa<\beta$, определенные соотношениями (II)-(I3) и удовлетворяющие условиям $\lambda_n^\alpha\nearrow$, $\lambda_n^\beta\nearrow$, $\lambda_n^\varkappa\nearrow$. Если последовательность x является $A_\alpha^{\lambda_\alpha}$-ограниченной и регулярно $A_\beta^{\lambda_\beta}$-суммируемой к сумме η, то она регулярно $A_\varkappa^{\lambda_\varkappa}$-суммируема к той же сумме.

Подобная теорема позволяет нам, зная скорости суммирования последовательности x методами A_α и A_β, оценить скорость суммирования x промежуточными методами $A_\varkappa$ $(\alpha<\varkappa<\beta)$ и выбрать для суммирования x некоторый оптимальный для нас метод $A_\varkappa$.

Остановимся вкратце еще на сравнивающих оценках для скоростей λ_α, λ_β, $\lambda_\varkappa$, вытекающих из соотношений (II)-(I3).

Теорема 3. Если последовательности $\lambda_\alpha=(\lambda_n^\alpha)$, $\lambda_\beta=(\lambda_n^\beta)$ и $\lambda_\varkappa=(\lambda_n^\varkappa)$ определены соотношениями (II)-(I3), где $|R_n^\alpha|\nearrow$, $|R_n^\varkappa|\nearrow$ и $-1<\alpha<\varkappa<\beta$, то имеют место неравенства

$$N_1(\beta,\varkappa)\,n^{\varkappa-\beta}(V_n/U_n)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}\lambda_n^\beta\le\lambda_n^\varkappa\le$$

$$\le N_2(\alpha,\varkappa)\,n^{\varkappa-\alpha}(U_n/V_n)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}\lambda_n^\alpha\qquad(n=1,2,\dots).\qquad(I7)$$

Доказательство. Заметим, что, поскольку $|R_n^\alpha|\nearrow$, то $|R_n^\varkappa/R_n^\alpha|\le N_2(\alpha,\varkappa)\,n^{\varkappa-\alpha}$ при любом $\varkappa>\alpha$. Докажем правое из неравенств (I7). Действительно,

$$\lambda_n^\varkappa=\frac{|R_n^\varkappa|\,|R_n^\alpha|\,U_n}{|R_n^\alpha|\,U_n(U_n)^{\frac{\beta-\varkappa}{\beta-\alpha}}(V_n)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}}\le N_2(\alpha,\varkappa)\left(\frac{U_n}{V_n}\right)^{\frac{\varkappa-\alpha}{\beta-\alpha}}\lambda_n^\alpha .$$

Левое из неравенств (I7) доказывается аналогично.

Следствие 2. Если последовательности $\lambda_\alpha=(\lambda_n^\alpha)$, $\lambda_\beta=(\lambda_n^\beta)$ и $\lambda_\varkappa=(\lambda_n^\varkappa)$ определены соотношениями (II)-(I3), где $|R_n^\alpha|\nearrow$, $|R_n^\varkappa|\nearrow$, $-1<\alpha<\varkappa<\beta$ и последовательности (U_n) и (V_n) удовлетворяют условию (I0), то имеют место неравенства.

$$K_1(\beta,\varkappa)\lambda_n^\beta\le\lambda_n^\varkappa\le K_2(\alpha,\varkappa)\lambda_n^\alpha .\qquad(I8)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенства (I8) следуют непосредственно из неравенств (I7) с учетом условия (I0).

Из следствия I легко вытекает следующий ранее известный результат (см., например, [2] , следствие I и примечание 3).

Следствие 3. Пусть $|R_n^\alpha|\nearrow$ и при любом $\beta>\alpha$ выполнены условия $|R_n^\beta|\nearrow$ и

$$|R_n^\beta/R_n^\alpha|\geqslant L(\alpha,\beta)\,n^{\beta-\alpha}\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Если последовательность x является (N,p_n^α,q_n)-ограниченной и (N,p_n^β,q_n)-суммируемой к сумме η , то при любом $\varkappa\in\,]\alpha;\beta[$ она $(N,p_n^\varkappa,q_n)$-суммируема к η .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $u_n=|R_n^\alpha|$, $v_n=|R_n^\beta|$, мы замечаем, что выполнено условие (I0), и выводим из соотношений (II), (I3), что $\lambda_n^\alpha=1$, $\lambda_n^\beta=1$. Доказательство завершается справедливостью импликации (I6), доказанной в следствии I, где мы, в силу условия (I8), можем считать $\lambda_n^\varkappa=1$ при любом $\varkappa\in\,]\alpha;\beta[$.

Литература

I. Кангро Г., Сильная суммируемость ортогональных рядов со скоростью.-Изв. АН ЭстССР. Физ.матем., I979, 28, №I,I-8.
2. Тали А., О нуль-выпуклых семействах методов суммирования. -Уч. зап. Тарт. ун-та, I98I, 504, 48-57.
3. Peyerimhoff, A., Lectures on summability. Berlin, Springer, 1969.
4. Sakata, H., Tauberian theorems for Cesaro sums. I.-Proc. Japan Acad., 1965, 41, N7, 532-534.

A TAUBERIAN THEOREM FOR THE FAMILY OF GENERALIZED NÖRLUND SUMMABILITY METHODS

A. Rohtla, A. Tali

Summary

The classical Rieszian convexity theorem, wellknown for Cesàro summability method ([3], theorem 3.1), is extended to generalized Nörlund summability methods (N, p_n^{α}, q_n) (theorem 1). The theorem 1 is applied to (N, p_n^{α}, q_n)-summability with rapidity (theorem 2). Some comparative estimates for rapidities of summability are obtained (theorem 3, corollary 2).

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770,88-96

СУММИРОВАНИЕ РАСТЯЖЕК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э. Кольк

Тартуский государственный университет

Обозначим через $s(X)$ множество всех последовательностей[1] $x=(x_k)$ в топологическом векторном пространстве X над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$. В случае бесконечной скалярной матрицы $A=(a_{nk})$ и последовательности $x=(x_k)\in s(X)$ пусть[1]

$$A_n x=\sum_k a_{nk}x_k \quad (n\in\mathbb{N}). \tag{1}$$

Если ряды в (1) сходятся и $\lim A_n x=x_0$ в пространстве X, то последовательность $x=(x_k)$ называется суммируемой методом (или матрицей) A или A-суммируемой к элементу x_0 и пишут $A\text{-}\lim x=x_0$, а также $A\text{-}\lim x_k=x_0$. Метод суммирования A называется регулярным в $s(X)$, если все сходящиеся в X последовательности (x_k) суммируемы методом A и $A\text{-}\lim x_k=\lim x_k$. Известно (см. [5], стр. 129), что в случае секвенциально полного отделимого локально выпуклого пространства X метод суммирования A является регулярным в $s(X)$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_n a_{nk}=0 \quad (k\in\mathbb{N}), \tag{R1}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk}=1, \tag{R2}$$

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}|<\infty. \tag{R3}$$

Матрица A называется полурегулярной, если выполнены условия (R1), (R2) и регулярной при выполнении условий (R1) – (R3). Регулярная матрица A со свойством

$$\lim_n \sup_k |a_{nk}|=0$$

называется равномерно регулярной. Матрица $A=(a_{nk})$ называется нормальной, если $a_{nk}=0$ при $k>n$ и $a_{nn}\neq 0$.

---

[1]Свободные индексы и индексы суммирования, если пределы их изменения не указаны, принимают все значения из множества $\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$.

При изучении суммируемости ограниченных последовательностей полезна следующая теорема (ср.[3], стр. 25).

Теорема А. Пусть X – секвенциально полное отделимое локально выпуклое пространство и B – полурегулярная (регулярная) числовая матрица. Тогда найдется нормальная полурегулярная (регулярная) матрица A такая, что множество всех A-суммируемых ограниченных последовательностей x из $s(X)$ совпадает с множеством всех B-суммируемых ограниченных последовательностей и $A\text{-}\lim x = B\text{-}\lim x$ на этом множестве.

Последовательность $y=(y_k)$ называется растяжкой последовательности $x=(x_k)$, если существует последовательность целых чисел (m_i) такая, что $1=m_1<m_2<\ldots<m_i<\ldots$ и

$$y_k=x_i \quad (m_i \leqslant k \leqslant m_{i+1}-1,\ i\in \mathbb{N}).$$

Операцию перехода от последовательности x к определенной растяжке y будем называть растяжением. Если при этом растяжка y определена последовательностью $\mu=(m_i)$, то соответствующее растяжение обозначим также символом μ, а растяжку y обозначим через $\mu(x)$. Растяжение μ (или растяжку $\mu(x)$) будем называть равномерным, если последовательность $(m_{i+1}-m_i)$ ограничена и неравномерным в обратном случае. Множество всех растяжений обозначим символом $\mathcal{R}$.

В 1975 году в банаховом пространстве был введен новый вид сходимости следующим образом (см.[7], стр. 103). Последовательность $x=(x_k)$ в банаховом пространстве X называется псевдосходящейся к элементу $x_0\in X$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется число n_ε такое, что

$$\sup_{x'\in S'} \operatorname{card}\{k: |x'(x_k-x_0)|\geqslant\varepsilon\}<n_\varepsilon,$$

где S' – замкнутый единичный шар в пространстве X', сопряженном к X, и $\operatorname{card} G$ – число элементов конечного множества G. Там же (см.[7], стр. 104) была доказана

Теорема Б. Пусть X – банахово пространство и A – равномерно регулярная матрица. Последовательность $x=(x_k)\in s(X)$ псевдосходится к элементу $x_0\in X$ тогда и только тогда, когда все подпоследовательности последовательности x суммируемы матрицей A к элементу x_0.

Из теории суммируемости числовых последовательностей известна следующая теорема Бака (см.[6], стр. 401): если все подпоследовательности данной числовой последовательности суммируемы некоторой регулярной матрицей, то эта последовательность сходится. Довсоном [8] был доказан аналог теоремы Бака для растяжек в следующей усиленной форме.

Теорема В. Числовая последовательность (α_k) сходится к числу α_0, если все растяжки последовательности (α_k) суммируемы к числу α_0 полурегулярной матрицей A.

Аналоги теорем Бака и Довсона для перестановок были получены в работах [I,9,I0].

Если вместо числовых последовательностей рассматривать абстрактные последовательности, то теорема Бака, как это видно из теоремы Б, перестает быть верной в случае равномерно регулярных матриц. То же самое можно сказать и относительно перестановок (см. [4], стр. 5).

В настоящей статье будет доказано, что суммируемость всех растяжек данной последовательности полурегулярной матрицей в секвенциально полном локально выпуклом пространстве влечет сходимость этой последовательности. Выясняется также, что существуют ограниченные расходящиеся последовательности вещественных чисел, все равномерные растяжки которых суммируемы методом арифметических средних. Для банаховых пространств X, в которых псевдосходимость не совпадает со сходимостью по норме, доказывается, что любому неравномерному растяжению μ соответствует псевдосходящаяся в X последовательность x и равномерно регулярная матрица A такие, что растяжка $\mu(x)$ не суммируется матрицей A.

§ I. Последовательности со суммируемыми растяжками

Относительно ограниченных последовательностей верна

Лемма I. Пусть X — секвенциально полное отделимое локально выпуклое пространство и B - полурегулярная матрица. Если ограниченная в X последовательность $x=(x_k)$ не сходится к элементу $x_0 \in X$, то найдется такая растяжка (z_k) последовательности x, что $B\text{-}\lim z_k \neq x_0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предполагать, что $x_0=\theta$. В силу ограниченности последовательности x и соотношения $\lim x_k \neq \theta$ существуют полунорма p и положительные числа K и $\varepsilon<\frac{1}{4}$ такие, что

$$p(x_k)\leqslant K \quad (k\in\mathbb{N}) \tag{I}$$

и при некоторой последовательности индексов $(k(i))$ с $1<k(1)<k(2)<\ldots<k(i)<\ldots$ имеем

$$p(x_{k(i)})\geqslant\varepsilon \quad (i\in\mathbb{N}). \tag{2}$$

Для доказательства леммы на основе теоремы А достаточно построить растяжку z_k последовательности (x_k) такую, что $A\text{-}\lim z_k \neq \theta$, где $A=(a_{nk})$ – нормальная полурегулярная матрица, которая соответствует матрице B по теореме А. Для этого сначала построим индуктивно три последовательности натуральных чисел (n_s), (i_s) и (m_s) следующим образом.

Пусть $i_1=n_1=0$. Если i_s и n_s $(s\geq 1)$ уже определены, то через i_{s+1} обозначим первое следующее за i_s целое число такое, что $k(i_{s+1})>n_s+1$. Пусть $m_s=n_s+ k(i_s)-1$. Учитывая условия (R1) и (R2), выберем теперь $n_{s+1}>m_s$ столь большим, чтобы

$$\max_{1\leq k<m_s}|a_{n_{s+1}k}|<\frac{\varepsilon}{2K(m_s-1)}, \tag{3}$$

$$\Big|\sum_{k=m_s}^{n_{s+1}} a_{n_{s+1}k}\Big|>1-\varepsilon. \tag{4}$$

Таким образом, последовательности (n_s), (i_s) и (m_s) построены.

Положив для всех $s=1,2,\ldots$

$$z_k=\begin{cases} x_{k+k(i_s)-n_s} & (n_s+1\leq k<m_s),\\ x_{k(i_{s+1})} & (m_s\leq k\leq n_{s+1}),\end{cases}$$

получаем растяжку $z=(z_k)$ последовательности x. При этом в силу оценок (I)–(4) находим

$$p(A_{n_{s+1}}(z))\geq\Big|\sum_{k=m_s}^{n_{s+1}}a_{n_{s+1}k}\Big|p(x_k(i_{s+1}))-\sum_{k=1}^{m_s-1}|a_{n_{s+1}k}|p(z_k)>$$
$$>(1-\varepsilon)\varepsilon-\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\Big(\frac{1}{2}-\varepsilon\Big)>\frac{\varepsilon}{4}$$

для всех $s=1,2,\ldots$ Следовательно, $A\text{-}\lim z_k\neq\theta$. Лемма доказана.

Лемма I позволяет перенести теорему Довсона на случай абстрактных последовательностей следующим образом.

<u>Теорема I.</u> Пусть X – секвенциально полное отделимое локально выпуклое пространство. Последовательность $(x_k)\in s(X)$

сходится к элементу x_0 в пространстве X, если все ее растяжки суммируемы к x_0 полурегулярной матрицей A.

Доказательство. Пусть X' – пространство, сопряженное к пространству X. Для любого $x' \in X'$ и любой растяжки $y=(y_k)$ последовательности (x_k) имеем

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x'(y_k) = \lim x'(\sum_k a_{nk} y_k) = x'(\lim_n A_n y).$$

Поэтому в силу предположения нашей теоремы все растяжки числовой последовательности $(x'(x_k))$ суммируемы матрицей A к $x'(x_0)$. Отсюда по теореме В следует, что $\lim x'(x_k) = x'(x_0)$. Итак, последовательность (x_k) слабо сходится к элементу x_0 в X. Но тогда последовательность (x_k) ограничена и ее сходимость к элементу x_0 вытекает уже из леммы I. Теорема доказана.

§ 2. Суммирование растяжек и псевдосходимость последовательностей в банаховом пространстве

Обозначим через $\mathcal{R}_0$ множество всех равномерных растяжений. Если последовательность $x=(x_k)$ в банаховом пространстве X псевдосходится к элементу x_0, то все растяжки $\mu(x)$ $(\mu \in \mathcal{R}_0)$ также псевдосходятся к x_0 и по теореме Б суммируемы к элементу x_0 произвольной равномерно регулярной матрицей A (в частности матрицей арифметических средних C^1). Возникает вопрос о справедливости обратного утверждения: следует ли из $C^1\text{-}\lim \mu(x) = x_0$ $(\mu \in \mathcal{R}_0)$ псевдосходимость последовательности x к элементу x_0 в пространстве X? Учитывая совпадение псевдосходимости и сходимости в случае $X=\mathbb{C}$ сразу получаем, что положительный ответ на поставленный вопрос возможен только тогда, когда ограниченные числовые последовательности, все равномерные растяжки которых C^1-суммируемы к одному и тому же числу, сходятся.

Для исследования последнего рассмотрим растяжку $b=(b_k)$ ограниченной числовой последовательности $a=(a_k)$, определенную последовательностью индексов (m_i), где

$$p_i = m_{i+1} - m_i = O(1). \tag{5}$$

Тогда C^1-средние последовательности b с индексами $s_i = m_{i+1}-1$ $(i \in \mathbb{N})$ принимают вид

$$C^1_{s_i} b = \frac{1}{m_{i+1}-1} \sum_{k=1}^{i} a_k,$$

а все остальные C^1-средние можно при $m_{i+1} \leq n < m_{i+2}-1 \quad (i \in \mathbb{N})$ представить в виде

$$C_n^1(b) = \frac{m_{i+1}-1}{n} C_{s_i}^1(b) + \frac{1}{n} q_{i+1} a_{i+1},$$

где $1 \leq q_{i+1} < p_{i+1}$ Отсюда ввиду оценки (5) и неравенств

$$\frac{n-p_{i+1}}{n} < \frac{m_{i+1}-1}{n} < 1, \quad \frac{1}{n} \leq \frac{q_{i+1}}{n} < \frac{p_{i+1}}{n}$$

выводим, что $C^1\text{-}\lim b = a_0$ тогда и только тогда, когда

$$\lim_i C_{s_i}^1 b = a_0. \tag{6}$$

Поскольку $m_{i+1}-1 = \sum_{k=1}^{i} p_k$ то

$$C_{s_i}^1 b = \left(\sum_{k=1}^{i} p_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{i} p_k a_k$$

и равенство (6) можно переписать в виде

$$(R, p_i)\text{-}\lim a = a_0,$$

где (R, p_i) – метод взвешенных средних Рисса (см. [2], стр. 112). Итак, доказана

Теорема 2. Растяжка (b_k) ограниченной комплексной последовательности (a_k), определенная последовательностью (m_i), где $p_i = m_{i+1} - m_i = O(1)$, суммируется методом арифметических средних C^1 к числу a_0 тогда и только тогда, когда последовательность (a_k) суммируется к a_0 методом (R, p_i) взвешенных средних Рисса.

Предположим теперь, что $a = (a_k)$ – вещественная последовательность с неотрицательными членами a_k и пусть

$$p_i \leq M \quad (i \in \mathbb{N}).$$

Тогда в силу $p_i \geq 1$ имеем

$$\frac{1}{Mi} \leq \frac{p_i}{\sum_{k=1}^{i} p_k} \leq \frac{M}{i}$$

и, значит,

$$M^{-1}\left(i^{-1} \sum_{k=1}^{i} a_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{i} p_i\right)^{-1} \sum_{k=1}^{i} p_k a_k \leq M\left(i^{-1} \sum_{k=1}^{i} a_k\right)$$

для всех $i \in \mathbb{N}$. Следовательно, соотношение $(R, p_i)\text{-}\lim a_k = 0$ равносильно соотношению $C^1\text{-}\lim a_k = 0$. Таким образом, из теоремы 2 вытекает следующее предложение.

Следствие 1. Если ограниченная числовая последовательность с неотрицательными членами суммируется к нуля матрицей C^1, то все ее равномерные растяжки также суммируются к нулю методом C^1.

Среди неотрицательных ограниченных последовательностей, которые суммируемы методом C^1 к нулю, существуют расходящиеся последовательности. Такой является, например, последовательность (c_k), где $c_k=1$ при $k=n^2$ и $c_k=0$ при $k\neq n^2$ $(n\in\mathbb{N})$. Следовательно, имеет место

Следствие 2. C^1-суммируемость всех равномерных растяжек вещественной последовательности не является достаточным условием для сходимости этой последовательности.

Имеется возможность, что при некотором промежуточном между $\mathcal{R}_0$ и $\mathcal{R}$ множестве $\mathcal{R}_1$ последовательность $x=(x_k)$ псевдосходится к x_0 в банаховом пространстве X тогда и только тогда, когда в случае произвольной равномерно регулярной матрицы A выполняется $A\text{-}\lim\mu(x)=x_0$ для всех $\mu\in\mathcal{R}_1$. Убедимся, что и этого не может быть в банаховых пространствах, в которых псевдосходимость не совпадает со сходимостью по норме.

Теорема 3. Пусть μ – неравномерное растяжение и X – отделимое локально выпуклое пространство. Если последовательность $x=(x_k)\in s(X)$ не сходится к элементу $x_0\in X$, то найдется подпоследовательность $z=(x_{k_i})$ и равномерно регулярная матрица A такие, что $A\text{-}\lim\mu(z)\neq x_0$.

Доказательство. Если $\lim x_k\neq x_0$, то существует подпоследовательность $z=(x_{k_i})$, никакая подпоследовательность которой не сходится к x_0. Если растяжение μ определена последовательностью (m_i), то последовательность индексов (p_i), где $p_i=m_{i+1}-m_i$, неограничена и поэтому содержит строго возрастающую подпоследовательность (p_{i_n}). Определив для всех $n=1,2,\ldots$

$$a_{nk}=\begin{cases}1/p_{i_n} & (k=m_{i_n}, m_{i_n}+1,\ldots,m_{i_n+1}-1),\\ 0 & (k=1,2,\ldots,m_{i_n-1};\ k=m_{i_n+1},m_{i_n+1}+1,\ldots),\end{cases}$$

получим равномерно регулярную матрицу $A=(a_{nk})$. При этом для растяжки $y=(y_k)=\mu(z)$ имеем

$$A_n(y)=\sum_k a_{nk}y_k=\sum_{k=m_{i_n}}^{m_{i_n+1}-1} x_{i_n}/p_{i_n}=x_{i_n}.$$

Учитывая, что $\lim_n x_{i_n} \neq x_0$, приходим к требуемому соотношению $\lim_{\mathcal{C}} A_n(y) \neq x_0$. Теорема доказана.

Учитывая, что все подпоследовательности псевдосходящейся последовательности также псевдосходятся, из теоремы 3 непосредственно выводим

Следствие 3. Пусть μ - неравномерное растяжение и X - банахово пространство, в котором псевдосходимость не совпадает со сходимостью. Тогда существуют псевдосходящаяся к некоторому элементу $x_0 \in X$ последовательность $x=(x_k)$ и равномерно регулярная матрица A такие, что $A\text{-}\lim \mu(x) \neq x_0$.

Литература

I. Баркарь М.А. К вопросу о суммируемости числовых последовательностей методом арифметических средних. - Уч. зап. Кишинев. ун-т , 1964, 70, №I, 9-16.
2. Барон С. Введение в теорию суммируемости рядов. - 2-е изд., исправленное и дополненное. - Таллин: "Валгус", 1977. - 280 с.
3. Кольк Э. Обобщенная секвенциальная сходимость и свойство Банаха-Сакса. - Уч. зап. Тарт. ун-та, 1978, 448, 21-30.
4. Кольк Э. Псевдосходимость в локально выпуклых пространствах. - Тарт. ун-т., Тарту, 1979. - 24 с. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 27.II.79, № 4021-79 Деп.)
5. Кольк Э. Теорема Бака в локально выпуклых пространствах. - Уч. зап. Тарт. ун-та, 1975, 374, 128-140.
6. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. - М.: Изд-во иностр. лит., 1960. - 471 с.
7. Рудаков С.А. Суммируемость слабо сходящихся последовательностей в банаховых пространствах. - Мат. зап. Уральск. ун-т , 1975, 9, № 2, 103-110.
8. Dawson, D.F. Summability of subsequences and stretchings of sequences. - Pacific J. Math., 1973, 44, N° 2, 455-460.
9. Fridy, J.A. Summability of rearrangements of sequences. - Math. Z., 1975, 143, 187-192.
10. Keagy, T.A., Summability of subsequences and rearrangements of sequences. - Proc. Amer. Math. Soc., 1978, 72, N° 3, 492-496.

Поступила 18.II.1986

SUMMABILITY OF STRETCHINGS OF SEQUENCES IN LOCALLY CONVEX SPACES

E. Kolk

Summary

The following theorem of Buck is known in the theory of matrix transformations: if all subsequences of a complex sequence (a_k) are summable by a regular matrix A then (a_k) converges. The similar statements relative to rearrangements and stretchings were given in [1,8,9,10]. The sequence (y_k) is called a stretching of a sequence (x_k) if there exists a strictly increasing index sequence (m_i) so that $m_1=1$ and $y_n=x_i$ for all n with $m_i \leqslant n < m_{i+1}$ $(i=1, 2,\ldots)$. If the sequence $(m_{i+1}-m_i)$ is bounded then we say that the stretching (y_k) is uniform.

S.A.Rudakov [7] has shown that if all subsequences of a sequence (x_k) in a Banach space X are summable by a uniformly regular scalar matrix A to $x_0 \in X$ then (x_k) is pseudoconvergent, i.e. for $\varepsilon>0$ there exists a number n_ε such that

$$\sup_{x' \in S'} \operatorname{card} \{k : |x'(x_k - x_0)| \geqslant \varepsilon\} < n_\varepsilon,$$

where S' is the closed unit ball in the conjugate space X' of X and $\operatorname{card} G$ denotes the number of elements of the finite set G.

In this article the following propositions are proved. The summability by a semiregular matrix of all stretchings of a sequence (x_k) in a sequentially complete locally convex space X implies the convergence of (x_k). There exists a bounded divergent real sequence all uniform stretchings of which are summable by arithmetical means. If the pseudoconvergence and the norm convergence are different in the Banach space X, then for every index sequence (m_i), where $(m_{i+1}-m_i)$ is unbounded, there exist a pseudoconvergent sequence (x_k) in X and a uniformly regular matrix A so that the stretching (y_k) of (x_k) defined by means of (m_i) is not A-summable.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987,770,97-104

СУММИРУЕМОСТЬ СКАЛЯРНЫМИ МАТРИЦАМИ В АБСТРАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Э.Кольк, Т. Ахун

Тартуский государственный университет

Пусть X - векторное пространство над полем $\mathbb{K}$ вещественных чисел $\mathbb{R}$ или комплексных чисел $\mathbb{C}$. Множество $s(X)$ всех последовательностей[1] $x=(x_k)$ с $x_k \in X$ является векторным пространством относительно покоординатных операций. При $X=\mathbb{K}$ вместо $s(X)$ пишут коротко s. Линейные подпространства пространства $s(X)$ называются пространствами последовательностей. Пространство скалярных последовательностей α называется нормальным, если оно вместе с $b=(b_k)$ содержит и все последовательности $d=(d_k)\in s$, у которых $|d_k| \leq |b_k|$. Нормальными являются, например, пространство m всех ограниченных последовательностей, пространство c_0 всех сходящихся к нулю последовательностей и при $p\geq 1$ пространства l^p, состоящие из тех последовательностей $b=(b_k)\in s$, для которых ряд[1] $\sum_k |b_k|^p$ сходится. Пространство c всех сходящихся скалярных последовательностей не является нормальным.

Для бесконечной матрицы $A=(a_{nk})$ и банахова пространства последовательностей E матричное преобразование A в E определяется равенствами $Ax=(A_n x)$,

$$A_n x = \sum_k a_{nk} x_k \tag{I}$$

в предположении, что ряды в (I) сходится, если $x=(x_k)\in E$. Запись $A: E \to F$ означает, что преобразование A отображает все пространство E в пространство последовательностей F.

Банахово пространство последовательностей E называется BK-пространством, если в нем имеет место сходимость по координатам. Пусть $\varphi(X)$ - множество всех последовательностей из $s(X)$, имеющих только конечное число ненулевых элементов. Говорят, что в банаховом пространстве последовательностей $E\subset s(X)$ имеет место сходимость по отрезкам, если $E \supset \varphi(X)$ и $\lim \overset{m}{x} = x$ в E для всех $x=(x_k)\in E$, где $\overset{m}{x}=(x_1,$

---

[1] Свободные индексы и индексы суммирования принимают все значения из множества $\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}$.

$x_2, \ldots, x_m, \Theta, \Theta, \ldots)$. В банаховом пространстве скалярных последовательностей α имеет место сходимость по отрезкам тогда и только тогда, когда последовательности $e^k = (\delta_{ki})$, где δ_{ki} – символ Кронекера, образуют базис в α. Норма $\| \ \|_\alpha$ пространства α называется монотонной, если при $b = (b_k) \in \alpha$ и $d = (d_k) \in \alpha$ из $|b_k| \le |d_k|$ следует $\|b\|_\alpha \le \|d\|_\alpha$. Ясно, что m, c и c_0 являются BK-пространствами относительно монотонной нормы $\|b\| = \sup |b_k|$, а ℓ^p $(p \ge 1)$ является BK-пространством с монотонной нормой $\|b\| = (\sum_k |b_k|^p)^{1/p}$. Сходимость по отрезкам имеет место в пространствах c_0 и ℓ^p.

Если X – банахово пространство и α – нормальное BK-пространство, то

$$\alpha[X] = \{x = (x_k) \in s(X) : (\|x_k\|) \in \alpha\}$$

является векторным пространством. Можно показать, что имеет место

Предложение I. Пусть X – банахово пространство и $\alpha \subset s$ – нормальное BK-пространство с монотонной нормой. Множество $\alpha[X]$ является BK-пространством относительно нормы

$$\|x\|_{\alpha[X]} = \|(\|x_k\|)\|_\alpha . \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что множество $c(X)$ всех сходящихся в банаховом пространстве X последовательностей $x = (x_k) \in s(X)$ становится BK-пространством, если в нем ввести норму

$$\|x\|_{c(X)} = \sup \|x_k\|.$$

Наряду с пространствами α и $\alpha[X]$ рассмотрим также векторные пространства

$$\widehat{\alpha} = \{\widehat{b} = (\widehat{b}_k) \in s : \widehat{b}_k = b_k + b_0, (b_k) \in \alpha, b_0 \in K\}$$

и

$$\widehat{\alpha[X]} = \{\widehat{x} = (\widehat{x}_k) \in s(X) : \widehat{x}_k = x_k + x_0, (x_k) \in \alpha[X], x_0 \in X\}.$$

Пусть в пространстве α (или $\widehat{\alpha}$) определен функционал f, а в пространстве $\alpha[X]$ (или $\widehat{\alpha[X]}$) – оператор F со значениями в X. Если A отображает α в c и $\lim A_n b = f(b)$ для всех $b \in \alpha$, то пишем $A : \alpha \xrightarrow{f} c$. Аналогично определим преобразования $A : \alpha[X] \xrightarrow{F} c(X)$, $A : \widehat{\alpha} \xrightarrow{f} c$ и $A : \widehat{\alpha[X]} \xrightarrow{F} c(X)$. Матричное преобразование A называется регулярным в $s(X)$ (s), если $A : c(X) \to c(X)$ и $\lim A_n x = \lim x_k$ для всех $x = (x_k) \in c(X)$ (соответственно $A : c \to c$ и $\lim A_n b =$

$= \lim b_k$ для всех $b = (b_k) \in c$.

Б.З.Вулих [I] доказал уже в 1938 году, что матричное преобразование A является регулярным в $s(X)$ тогда и только тогда, когда A регулярно в s. Затем Г.Кангро (см.[2], примечание 2) показал, что необходимые и достаточные условия преобразований $A: c(X) \to c(X)$ и $A: \ell^1[X] \to c(X)$ не зависят от банахова пространства X, т.е. утверждения $A: c(X) \to c(X)$ и $A: \ell^1[X] \to c(X)$ равносильны соответственно утверждениям $A: c \to c$ и $A: \ell^1 \to c$.

В данной работе приведены обобщения этих результатов. Доказывается, что если X – банахово пространство и $\alpha \subset s$ – такое нормальное BK-пространство с монотонной нормой, в котором имеет место сходимость по отрезкам, то утверждения $A: \alpha[X] \to c(X)$ и $A: \widehat{\alpha[X]} \to c(X)$ равносильны соответственно утверждениям $A: \alpha \to c$ и $A: \hat{\alpha} \to c$. Выясняется также, что при тех же предположений относительно пространств X и α преобразования $A: \alpha[X] \xrightarrow{F} c(X)$ и $A: \alpha \xrightarrow{f} c$ эквивалентны в том случае, когда выполнено условие (7), а утверждения $A: \widehat{\alpha[X]} \xrightarrow{F} c(X)$ и $A: \hat{\alpha} \xrightarrow{f} c$ равносильны, если линейные операторы $f: \hat{\alpha} \to \mathbb{K}$ и $F: \widehat{\alpha[X]} \to X$ связаны соотношениями (7) и (8).

§ I. Пространство $\alpha[X]$

Пусть X – банахово пространство и $\alpha \subset s$ – нормальное BK-пространство с монотонной нормой $\| \; \|_\alpha$. Тогда по предложению I множество $\alpha[X] \subset s(X)$ является BK-пространством с нормой (2). Напомним, что подмножество G банахова пространства Y называется основным, если линейная оболочка $\mathcal{L}(G)$ множества G всюду плотна в Y, т.е. $\overline{\mathcal{L}(G)} = Y$. Имеет место

<u>Предложение 2.</u> Если $\alpha_0 \subset \alpha$ является основным множеством в пространстве α, то $\alpha_0[X]$ является основным множеством в пространстве $\alpha[X]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varepsilon > 0$. Если $x = (x_k) \in \alpha[X]$, то $(\|x_k\|) \in \alpha$ и на основе равенства $\overline{\mathcal{L}(\alpha_0)} = \alpha$ существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ и элементы $a^i = (a^i_k) \in \alpha$ ($i = 1, 2, \dots, m$) такие, что

$$\| (\|x_k\|) - \sum_{i=1}^m \lambda_i a^i \|_\alpha < \varepsilon. \tag{3}$$

Обозначив $x_k' = x_k/\|x_k\|$, имеем $\|x_k'\|=1$ и поэтому последовательности $(a_k^i x_k')$ $(i=1,2,\dots,m)$ принадлежат $\alpha[X]$. Но тогда

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i (a_k^i x_k') \in \mathcal{L}(\alpha_0[X])$$

и в силу оценки (3) находим

$$\|x-\sum_{i=1}^m \lambda_i (a_k^i x_k')\|_{\alpha[X]} = \|(\|x_k - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_k^i x_k'\|)\|_\alpha =$$

$$= \|(|\,\|x_k\| - \sum_{i=1}^m \lambda_i a_k^i\,|\,\|x_k'\|)\|_\alpha =$$

$$= \|(\|x_k\|) - \sum_{i=1}^m \lambda_i a^i\|_\alpha < \varepsilon,$$

ибо в пространстве α выполняется равенство $\|(b_k)\|_\alpha = \|(d_k)\|_\alpha$ при $|b_k| = |d_k|$. Предложение доказано.

Если в пространстве α имеет место сходимость по отрезкам, то элементы базиса $\{e^k\}$ образуют основное множество в α. Обозначим $e^k(x) = (\delta_{ki} x)$ $(x \in X)$. Из предложения 2 непосредственно получим

Следствие I. Если в нормальном BK-пространстве α с монотонной нормой имеет место сходимость по отрезкам, то элементы $e^k(x)$ $(x \in X)$ образуют основное множество в пространстве $\alpha[X]$.

§ 2. Суммирование числовыми матрицами

Пусть $A=(a_{nk})$ – числовая матрица, X – банахово пространство и X' – пространство, сопряженное к X. Если в нормальном BK-пространстве α с монотонной нормой имеет место сходимость по отрезкам, то, учитывая следствие I, на основе теоремы Банаха-Штейнгауза (см.[3], стр. II7, теорема 4) сразу получаем следующие предложения.

Предложение 3. Для преобразования $A:\alpha \to c$ необходимо и достаточно выполнение условий

1^0 $\|A_n\|_{L(\alpha,K)} \le M$,

2^0 $\exists\, \lim_n A_n e^k = \lim_n a_{nk} \in K$.

Предложение 4. Для преобразования $A:\alpha[X] \to c(X)$ необходимо и достаточно выполнение условий

1^{00} $\quad \|A_n\|_{L(\alpha[X],X)} \leq K,$

2^{00} $\quad \exists \lim_n A_n e^k(x) = \lim_n a_{nk} x \in X \quad (x \in X).$

Равносильность условий 2^0 и 2^{00} очевидно. Предположим, что выполнено условие 1^0. Тогда $|A_n b| \leq M$ для любого индекса n и любого элемента $b = (b_k) \in \alpha$, где $\|b\|_\alpha \leq 1$. Если теперь $x = (x_k) \in \alpha[X]$ и $\|x\|_{\alpha[X]} \leq 1$, то ввиду нормальности α имеем $z^n = (\operatorname{sgn} a_{nk} \|x_k\|) \in \alpha$, причем $\|z^n\|_\alpha = \|x\|_{\alpha[X]}$ в силу монотонности нормы в α. Значит, $\|z^n\|_\alpha \leq 1$ и поэтому

$$\|A_n x\| \leq \sum_k |a_{nk}| \|x_k\| = \sum_k a_{nk} \operatorname{sgn} a_{nk} \|x_k\| = \|A_n z^n\| \leq M.$$

Следовательно, условие 1^{00} выполнено с $K = M$.

Пусть выполнено условие 1^{00}. Рассмотрим произвольный элемент $b = (b_k) \in \alpha$ с $\|b\|_\alpha \leq 1$. Для любого ненулевого элемента $x_0 \in X$, где $\|x_0\| = 1$, последовательность $y = (b_k x_0)$ принадлежит $\alpha[X]$ и $\|y\|_{\alpha[X]} = \|(|b_k|)\|_\alpha = \|b\|_\alpha \leq 1$. По теореме о достаточном числе функционалов (см. [3] ,стр. 138, следствие 1) найдется $x' \in X'$ такой, что $x'(x_0) = \|x_0\| = 1$ и $\|x'\| = 1$. Так как

$$x'(A_n y) = \sum_k a_{nk} b_k x'(x_0) = A_n b,$$

то

$$|A_n b| = |x'(A_n y)| \leq \|x'\| \|A_n y\| = \|A_n y\|$$

и ввиду условия 1^{00} получаем $|A_n b| \leq K$. Итак, условие 1^0 выполнено с $M = K$.

В итоге доказана

<u>Теорема 1.</u> Пусть $A = (a_{nk})$ - скалярная матрица, X - банахово пространство и α - нормальное BK-пространство с монотонной нормой. Если в пространстве α имеет место сходимость по отрезкам, то утверждения $A: \alpha[X] \to c(X)$ и $A: \alpha \to c$ равносильны.

Предположим, что в $\hat{\alpha}$ и $\widehat{\alpha[X]}$ введены топологии, которые соответственно в подпространствах α и $\alpha[X]$ совпадают с топологиями их норм. Так как для всех $\hat{b} = (\hat{b}_k) \in \hat{\alpha}$ имеем $\hat{b}_k = b_k + b_0$, где $b = (b_k) \in \alpha$, $b_0 \in \mathbb{K}$, то

$$A_n \hat{b} = \lim_m \left(\sum_{k=1}^m a_{nk} b_k + b_0 \sum_{k=1}^m a_{nk}\right).$$

Поэтому последовательность $A\hat{b} = (A_n \hat{b})$ определена тогда и только тогда, когда определена $Ab = (A_n b)$ и

$$\exists \lim_n \sum_k a_{nk} = a \in \mathbb{K}. \tag{4}$$

При этом

$$A\hat{b} = Ab + ae, \tag{5}$$

где $e = (\delta_{KK})$. Так как любой элемент $\hat{x} \in \widehat{\alpha[X]}$ имеет представление $\hat{x} = x + e(x_0)$, где $x \in \alpha[X]$, $x_0 \in X$, $e(x_0) = (\delta_{KK} x_0)$, то аналогично предыдущему заключаем, что $A\hat{x}$ существует в точности тогда, когда существует Ax и выполнено условие (4), причем

$$A\hat{x} = Ax + ae(x_0). \tag{6}$$

Следовательно, ввиду соотношений $ae \in c$, $ae(x_0) \in c(X)$ по теореме I имеет место

Теорема 2. В предположениях теоремы I утверждение $A : \widehat{\alpha[X]} \to c(X)$ эквивалентно утверждению $A : \hat{\alpha} \to c$.

Отметим, что теорема 2 содержит упомянутый выше результат Г.Кангро о равносильности утверждений $A : c(X) \to c(X)$ и $A : c \to c$, ибо $c(X) = \widehat{c_0[X]}$ и $c = \hat{c}_0$.

§ 3. Суммируемость с ограничениями

В этом параграфе мы исследуем равносильность матричных преобразований $A : \alpha[X] \xrightarrow{F} c(X)$ и $A : \alpha \xrightarrow{f} c$, а также преобразований $A : \widehat{\alpha[X]} \xrightarrow{F} c(X)$ и $A : \hat{\alpha} \xrightarrow{f} c$. Для первых двух из этих преобразований предложения 3 и 4 принимают следующий вид.

Предложение 5. Для преобразования $A : \alpha \xrightarrow{f} c$ необходимо и достаточно выполнение условий I^0 и

2' $\lim_n a_{nk} = f(e^k)$.

Предложение 6. Для преобразования $A : \alpha[X] \xrightarrow{F} c(X)$ необходимо и достаточно выполнение условий I^{00} и

2" $\lim_n a_{nk} x = F(e^k(x))$ $(x \in X)$.

Условия 2' и 2" эквивалентны в том случае, когда

$$F(e^k(x)) = f(e^k)x. \tag{7}$$

Так как равносильность условий I^0 и I^{00} доказана уже во втором параграфе, то имеет место

Теорема 3. Пусть матрица A и пространства X и α удовлетворяют условиям теоремы I. При условии (7) преобразование $A : \alpha[X] \xrightarrow{F} c(X)$ равносильно преобразованию $A : \alpha \xrightarrow{f} c$.

В частном случае нулевых операторов $f : \alpha \to \mathbb{K}$ и $F : \alpha[X] \to X$ условие (7) очевидно выполнено. Поэтому справедливо

Следствие 2. Пусть выполнены предположения теоремы I. Тогда преобразования $A:\alpha[X]\to c_0[X]$ и $A:\alpha\to c_0$ эквивалентны.

Рассмотрим преобразования $A:\hat{\alpha}\xrightarrow{f} c$ и $A:\widehat{\alpha[X]}\to c(X)$. Из равенств (5) и (6) видно, что при линейных операторов $f:\hat{\alpha}\to\mathbb{K}$ и $F:\widehat{\alpha[X]}\to X$ эти преобразования равносильны соответственно преобразованиям $A:\alpha\xrightarrow{f} c$ и $A:\alpha[X]\xrightarrow{F} c(X)$, если

$$F(e(x)) = x f(e) \quad (x\in X). \tag{8}$$

Следовательно, на основе теоремы 3 имеет место

Теорема 4. Пусть матрица A и пространства X и α удовлетворяют условиям теоремы I. Если для линейных операторов $f:\hat{\alpha}\to\mathbb{K}$ и $F:\widehat{\alpha[X]}\to X$ выполнены условия (7) и (8), то преобразования $A:\widehat{\alpha[X]}\xrightarrow{F} c(X)$ и $A:\hat{\alpha}\xrightarrow{f} c$ равносильны.

Пусть операторы $f:c\to\mathbb{K}$ и $F:c(X)\to X$ определены соответственно равенствами $f(b)=\lim b_k$ $(b=(b_k)\in c)$ и $F(x)=\lim x_k$ $(x=(x_k)\in c(X))$. Для этих линейных операторов условия (7) и (8) выполнены. Так как $c=\hat{c}_0$ и $c(X)=\widehat{c_0[X]}$, то из теоремы 4 при $\alpha=c_0$ непосредственно выводим теорему Б.З.Вулиха [I].

Следствие 3. Пусть X - банахово пространство и $A=(a_{nk})$ - скалярная матрица. Преобразование A является регулярным в $s(X)$ тогда и только тогда, когда оно регулярно в s.

Литература

I. Вулих Б.З. О линейных методах суммирования в абстрактных пространствах. - Зап. Н.-и. ин-та матем. и механ. Харьковск. ун-та Харьковск. матем. о-ва, (4), I938, I5, № 2, 65-75.

2. Кангро Г. О матричных преобразованиях последовательностей в банаховых пространствах. - Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ. матем. наук, I956, 5, № 2, I08-I28.

3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. - М.: Высш. школа, I982. - 27I с.

Поступила I5.II.I986

SUMMABILITY BY SCALAR MATRICES IN ABSTRACT SPACES

E. Kolk, T. Ahun

Summary

Let X be a vector space over the field $\mathbb{K}$ of real or complex numbers and let $s(X)$ be the set of all X-valued sequences $x=(x_k)$. The Banach space $E\subset s(X)$ is called a BK-space if the maps $f_k:E\to X$, $f_k(x)=x_k$, are continuous and an AK-space if $\lim \overset{m}{x}=x$ in E for all $x=(x_k)\in E$, where $\overset{m}{x}=(x_1,x_2,\dots,x_m,\theta,\theta,\dots)$. The norm $\|\ \|_\alpha$ of a Banach space $\alpha\subset s=s(\mathbb{K})$ is called monotone if for all $(b_k),(d_k)\in\alpha$ with $|b_k|\leq|d_k|$ the inequality $\|(b_k)\|_\alpha\leq\|(d_k)\|_\alpha$ holds. If X is a Banach space and α is a normal BK-space with the monotone norm then $\alpha[X]=\{x=(x_k)\in s(X):(\|x_k\|)\in\alpha\}$ is the BK-space with respect to the norm $\|x\|_{\alpha[X]}=\|(\|x_k\|)\|_\alpha$. The set $c(X)$ of all convergent X-valued sequences $x=(x_k)$ is also the BK-space with respect to the norm $\|x\|_{c(X)}=\sup\|x_k\|$. Denote $c=c(\mathbb{K})$ and for a sequence space $E\subset s(X)$ let $\hat{E}=\{\hat{x}=(\hat{x}_k)\in s(X):\hat{x}_k=x_k+x_0,\ (x_k)\in E,\ x_0\in X\}$. The matrix transformation $Ax=(A_nx)$, $A_nx=\sum_k a_{nk}x_k$, $a_{nk}\in\mathbb{K}$, is called regular in $s(X)$ if $A:c(X)\to c(X)$ and $\lim A_nx=\lim x_k$ for all $x=(x_k)\in c(X)$. If $A:E\to c(X)$ and $\lim A_nx=F(x)$ for every $x\in E$, then we write $A:E\xrightarrow{F}c(X)$.

Vulich [1] has shown that for a Banach space X a matrix transformation A is regular in $s(X)$ if and only if it is regular in s. Later it was proved by Kangro [2] that the statements $A:c(X)\to c(X)$ and $A:\ell^1[X]\to c(X)$ are equivalent to the statements $A:c\to c$ and $A:\ell^1\to c$ respectively. In this article we prove the following generalizations of there results in case when X is a Banach space and α is a normal BK-AK-space with the monotone norm. The scalar matrix A maps $\alpha[X]$ ($\widehat{\alpha[X]}$) into $c(X)$ if and only if A maps α ($\hat{\alpha}$) into c. The statements $A:\alpha[X]\xrightarrow{F}c(X)$ and $A:\alpha\xrightarrow{f}c$ are equivalent when the condition (7) holds. The statement $A:\widehat{\alpha[X]}\xrightarrow{F}c(X)$ is equivalent to the statement $A:\hat{\alpha}\xrightarrow{f}c$ if the operators $F:\widehat{\alpha[X]}\to X$ and $f:\hat{\alpha}\to\mathbb{K}$ are linear and (7), (8) hold.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 105-114

ТЕОРЕМЫ ВКЛЮЧЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО АБСОЛЮТНОЙ СУММИРУЕМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ ДЛЯ МЕТОДОВ ТИПА ПУАССОНА-АБЕЛЯ

Ф. Вихман

Таллинский политехнический институт

В настоящей статье рассматривается одно обобщение метода суммирования Пуассона-Абеля, которое можно исследовать в случае суммируемости несобственных интегралов или рядов. Поскольку различия в доказательствах будут только в деталях, то ограничимся вариантом интегралов.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_0^{+\infty} a(u)\,du \tag{1}$$

Пусть задана неубывающая на $[0,+\infty)$ функция $\lambda(u) \geq 0$, $\lim\limits_{u\to+\infty} \lambda(u) = +\infty$. Обозначим

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\lambda(u)} a(u)\,du, \tag{2}$$

$$\psi_s(\alpha) = \int_0^{+\infty} (1+\alpha\lambda(u))^{-s} a(u)\,du \quad (s \geq 1), \tag{3}$$

$$\rho_s(\alpha) = \int_0^{+\infty} (1+\alpha\lambda(u))^{-s} e^{-\alpha\lambda(u)} du \quad (s \geq 1). \tag{4}$$

<u>Определение</u> 1. Интеграл (1) называется суммируемым методом Пуассона-Абеля $PA\{\lambda(u)\}$ (или $T_s\{\lambda(u)\}$, или $AT_s\{\lambda(u)\}$) к числу z, если при всех $\alpha > 0$ интеграл (2) (соответственно (3) или (4)) сходится и

$\lim\limits_{\alpha\to0+} \varphi(\alpha) = z$ (соответственно $\lim\limits_{\alpha\to0+} \psi_s(\alpha) = z$ или $\lim\limits_{\alpha\to0+} \rho_s(\alpha) = z$).

В литературе метод $T_1\{\lambda(u)\}$ известен под названием метода Стилтьеса.

<u>Определение</u> 2. Интеграл (1) называется суммируемым методом Меллина $PA\{\ln\lambda(u)\}$ к числу z, если для малых $\alpha > 0$ существует интеграл

$$h(\alpha) = \int_0^{+\infty} \lambda^{-\alpha}(u)\,a(u)\,du \tag{5}$$

и $\lim\limits_{\alpha\to0+} h(\alpha) = z$.

Для этих методов и их соответствующих аналогов для рядов разными авторами доказан ряд теорем включения. Укажем работы Г. Харди ([5] , теорема 28), Ю.И. Худака [6],К.Жусипова [4] . Автором статьи проблемы включения этих методов в случае рядов и интегралов изучались в [1-3] . В том числе были получены следующие результаты.

<u>Теорема</u> I. Имеют место включения:

1° $AT_1\{\lambda(u)\} \supset PA\{\lambda(u)\}$;

2° если[1] $\lambda(u)\geq 1$ и метод $PA\{\ln\lambda(u)\}$ применим к интегралу (1), то $PA\{\ln\lambda(u)\} \supset AT_1\{\lambda(u)\}$;

3° если метод $T_1\{\lambda(u)\}$ применим к интегралу (1), то $T_1\{\lambda(u)\} \supset PA\{\lambda(u)\}$;

4° если[1] $\lambda(u)\geq 1$ и метод $PA\{\ln\lambda(u)\}$ применим к интегралу (1),то $PA\{\ln\lambda(u)\} \supset T_1\{\lambda(u)\}$.

Введем понятие абсолютной суммируемости интегралов.

<u>Определение</u> 3. Интеграл (1) называется абсолютно суммируемым методом $PA\{\lambda(u)\}$ (или $T_1\{\lambda(u)\}$,или $AT_1\{\lambda(u)\}$), если он суммируем этим методом и функция $\varphi(\alpha)$ (соответственно $\psi_1(\alpha)$ или $\rho_1(\alpha)$) принадлежит классу функций $BV(0,+\infty)$, имеющих ограниченную вариацию на $(0,+\infty)$.

<u>Определение</u> 4. Интеграл (1) называется абсолютно суммируемым методом Меллина $PA\{\ln\lambda(u)\}$, если он суммируем этим методом и найдется $c>0$, что $h(\alpha)\in BV(0,c)$.

Эти определения при $\lambda(u)\equiv u$ совпадают для методов $PA\{\lambda(u)\}$, $T_1\{\lambda(u)\}$ и $PA\{\ln\lambda(u)\}$ с определениями 1°-3° из [7] .

Теоремы включения относительно абсолютной суммируемости рассматривали в случае методов PA , T_1 и $PA\{\ln\lambda_k\}$ для рядов Д. Рат [9] , а для интегралов Г. Дайамонд, Б. Катнер, Л.А. Рафаэль [7] . Последние доказали при $\lambda(u)\equiv u$ следующие утверждения.

<u>Теорема</u> II. Имеют место включения относительно абсолютной суммируемости:

1° (теорема 1) если интеграл $\psi_1(\alpha)$ сходится для всех $\alpha>0$, то $|T_1\{u\}|\supset|PA\{u\}|$;

2° (теорема 2) если интеграл $K(\alpha)$ сходится для всех α , $0<\alpha<c$, то $|PA\{\ln u\}|\supset|T_1\{u\}|$ при всех c' , $c'<c$.

---

[1]Можно показать,что условие $\lambda(u)\geq 1$ лишнее.

Нашей целью является вывод аналогичных теорем для методов PA, T_s, AT_s и $PA\{\ln\lambda(u)\}$.

В доказательствах мы будем пользоваться одной леммой К. Кноппа [8].

Лемма. Если

1^0 $g(t) \in BV(0,+\infty)$;

2^0 $\int\limits_0^{+\infty} h(\alpha,t)\,dt$ существует для всех $\alpha \in (0,c)$, где c может быть и бесконечным;

3^0 $\int\limits_v^{+\infty} h(\alpha,t)\,dt \in BV(0,c)$ равномерно относительно $v \geqslant 0$,

то функция

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} h(\alpha,t)g(t)\,dt \in BV(0,c).$$

Теорема 1. Имеет место включение относительно абсолютной суммируемости $|AT_s\{\lambda(u)\}| \supset |PA\{\lambda(u)\}|$.

Доказательство. Включение $AT_s\{\lambda(u)\} \supset PA\{\lambda(u)\}$ есть утверждение 1^0 теоремы I. Остается доказать, что из $\varphi(\alpha) \in BV(0,+\infty)$ следует $\rho_s(\alpha) \in BV(0,+\infty)$.

По теореме 1 из [3] для всех $\alpha > 0$ верно равенство

$$\rho_s(\alpha) = \frac{1}{\alpha^s\Gamma(s)} \int\limits_\alpha^{+\infty} (t-\alpha)^{s-1} e^{1-t/\alpha} \varphi(t)\,dt.$$

Применим лемму Кноппа, выбрав $g(t) \equiv \varphi(t)$ и

$$h(\alpha,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^s\Gamma(s)}(t-\alpha)^{s-1} e^{1-t/\alpha}, & \text{если } t \geqslant \alpha, \\ 0, & \text{если } t < \alpha. \end{cases}$$

Проверим выполнение условий 1^0–3^0 леммы. Условие 1^0 выполнено по предпосылке, а для условия 2^0 получим

$$\int\limits_0^{+\infty} h(\alpha,t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{+\infty} z^{s-1} e^{-z}\,dz = 1.$$

Дальше, при $v \geqslant \alpha$

$$\int\limits_v^{+\infty} h(\alpha,t)\,dt = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_{v/\alpha-1}^{+\infty} z^{s-1} e^{-z}\,dz = F(\alpha,v) \leq 1.$$

Так как функция $F(\alpha,v)$ неубывающая и ограниченная, то $F(\alpha,v) \in BV(0,+\infty)$ равномерно относительно v.

Значит, по лемме $\rho_s(\alpha) \in BV(0,+\infty)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\lambda'(u) > 0$ для всех $u \geqslant 0$. Если интеграл

(1) абсолютно суммируем методом $AT_s\{\lambda(u)\}$ и интеграл (5) сходится при всех α, $0<\alpha<c<s$, то интеграл (1) абсолютно суммируем методом $PA\{\ln\lambda(u)\}$ и $h(\alpha)\in BV(0,c')$ при любом c', $c'<c$.

Доказательство. Включение $PA\{\ln\lambda(u)\}\supset\supset AT_s\{\lambda(u)\}$ есть утверждение 2^0 теоремы 1. Надо показать, что из $\Psi_s(\alpha)\in BV(0,+\infty)$ следует $h(\alpha)\in BV(0,c')$.

Так как ($\Delta\alpha>0$) интеграл

$$h''(\alpha)=\int_0^{+\infty}\lambda^{-(\alpha-\Delta\alpha)}(u)\,a(u)\cdot\left[\lambda^{-\Delta\alpha}(u)\ln^2\lambda(u)\right]du$$

по признаку Абеля сходится, то $h'(\alpha)=O(1)$ на любом конечном интервале $[a,c']$. Значит, $h(\alpha)\in BV[a,c']$.

Покажем, что $h(\alpha)\in BV(0,a]$ при каком-то a. Пусть a таково, что $4a<\min(1,c)$.

Аналогично тому, как была доказана формула (3) для рядов в [1], можно получить интегральное представление

$$h(\alpha)=A^{-1}(\alpha,s)\int_0^{+\infty}t^{\alpha-1}\rho_s(t)\,dt, \tag{6}$$

где $$A(\alpha,s)=\int_1^{+\infty}(t-1)^{\alpha-1}t^{-s}e^{-t}\,dt.$$

Применим снова лемму Кноппа, записав (6) в виде

$$h(\alpha)=\int_0^{+\infty}k(\alpha,t)\,g(t)\,dt,$$

где

$$g(t)=(1+t)^{2a}\rho_s(t),\quad k(\alpha,t)=A^{-1}(\alpha,s)\,t^{\alpha-1}(1+t)^{-2a}.$$

Проверим выполнение условий 1^0–3^0 леммы.

Поскольку $\rho_s(u)\in BV(0,+\infty)$ и $(1+t)^{2a}$ монотонна и ограничена на $(0,1]$, то $g(t)\in BV(0,1]$. Покажем, что $g(t)\in BV[1,+\infty)$. Достаточно доказать, что

$$\int_1^{+\infty}|g'(t)|\,dt<+\infty.$$

Вычислим производную $g'(t)$:

$$g'(t)=2a(1+t)^{2a-1}\rho_s(t)-(1+t)^{2a}\int_0^{+\infty}\lambda(x)\,a(x)\cdot$$
$$\cdot\left(1+s+t\lambda(x)\right)e^{-t\lambda(x)}\left(1+t\lambda(x)\right)^{-s-1}dx=A+B.$$

Представим

$$\rho_s(t)=\int_0^{+\infty}\frac{a(x)}{(\lambda(x))^{2a}}\,\delta(x,t)\,dx. \tag{7}$$

Легко убедиться, что при всех $x \in [0,+\infty)$ и $t \in [1,+\infty)$ $\delta(x,t) \le 1/t^{3a}$ и при любом зафиксированном t $\delta(x,t)$ имеет при $x \geqslant 0$ единственную точку максимума. Применив к интегралу (7) два раза формулу Бонне, получим оценку

$$|A| \le 4a(1+t)^{2a-1} t^{-3a} \sup_{\varepsilon_2 > \varepsilon_1} \left| \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \lambda^{-3a}(x) a(x)\, dx \right| = O\left(t^{-a-1}\right).$$

Аналогично найдем для слагаемого B :

$$-B = (1+t)^{2a} \int_0^{+\infty} \lambda^{-3a}(x)\, a(x)\, \chi(x,t)\, dx, \tag{8}$$

$$\chi(x,t) \le (1+s) t^{-3a-1}$$

при всех $x \in [0,+\infty)$ и $t \in [1,+\infty)$.

Исследование производной $\chi'(x,t)$ показывает, что при $x \geqslant 0$ $\chi(x,t)$ имеет не более трех экстремумов. Поэтому из (8) получим с помощью формулы Бонне оценку $B = O(t^{-a-1})$.

Значит,

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|\, dt = \int_1^{+\infty} O(t^{-a-1})\, dt < +\infty .$$

В итоге получено, что $g(t) \in BV(0,+\infty)$.

Условие 2^0 леммы выполнено, поскольку для всех $\alpha \in [0,a]$ интеграл

$$\int_0^{+\infty} (1+t)^{-2a} t^{\alpha-1}\, dt$$

сходится.

Осталось показать, что интеграл

$$\int_v^{+\infty} k(\alpha,t)\, dt \in BV(0,a]$$

равномерно относительно $v \geqslant 0$.

Проинтегрировав по частям, получим:

$$\int_v^{+\infty} k(\alpha,t)\, dt = \alpha^{-1} A^{-1}(\alpha,s) v^{\alpha} (1+v)^{-2a} + 2a\alpha^{-1} A^{-1}(\alpha,s) \int_v^{+\infty} t^{\alpha} (1+t)^{-2a-1}\, dt .$$

Поскольку функции $v^{\alpha}(1+v)^{-2a}$ и $\displaystyle\int_v^{+\infty} t^{\alpha}(1+t)^{-2a-1}\, dt$

принадлежат классу $BV(0,a]$ равномерно относительно $v \geqslant 0$, то достаточно показать, что этому классу принадлежит функция $\alpha^{-1}A^{-1}(\alpha,s)$.

Так как

$$\alpha A(\alpha,s) = \alpha e^{-1} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1}(u+1)^{-s-u} e\, du >$$

$$> \alpha e^{-2} 2^{-s} \int_0^1 u^{\alpha-1}\, du = 2^{-s} e^{-2} ,$$

то в окрестности нуля $\alpha^{-1}A^{-1}(\alpha,s) = O(1)$.

Докажем, что для малых $\alpha>0$ $[\alpha A(\alpha,s)]'<0$, т.е. функция $\alpha^{-1}A^{-1}(\alpha,s)$ возрастает.

Представим производную в следующем виде:

$$[\alpha A(\alpha,s)]' = \left(\int_0^1 u^{\alpha-1}(u+1)^{-s}e^{-u}du - \alpha^{-1}\right) +$$

$$+\left(\alpha\int_0^1 u^{\alpha-1}(u+1)^{-s}e^{-u}\ln u\,du + \alpha^{-1}\right)+$$

$$+\int_1^{+\infty} u^{\alpha-1}(u+1)^{-s}e^{-u}du + \alpha\int_1^{+\infty} u^{\alpha-1}(u+1)^{-s}e^{-u}\ln u\,du =$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 .$$

Оценим эти слагаемые в процессе $\alpha\to 0+$. Очевидно, $A_4 = o(1)$. Для A_3 получим:

$$\lim_{\alpha\to 0+} A_3 < \int_1^{+\infty} u^{-2}e^{-u}du = e^{-1} + Ei(-1) < 0{,}5873 .$$

Для A_1 и A_2 найдем:

$$A_2 = \alpha\int_0^1 u^{\alpha-1}\ln u\left[(u+1)^{-s}e^{-u} - 1\right]du =$$

$$= \alpha\int_0^1 u^{\alpha-1}\ln u\left[1-(s+1)u + O(1)u^2 - 1\right]du = o(1) ;$$

$$-A_1 = \int_0^1 u^{\alpha-1}\left[1-(u+1)^{-s}e^{-u}\right]du \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^1 (u+1)^{-1}u^{\alpha-1}\left[u+1-\left(1-u+\frac{u^2}{2}\right)\right]du >$$

$$> \frac{1}{4}\int_0^1 u^{\alpha}(4-u)du > 0{,}87 .$$

В итоге получено, что для малых $\alpha>0$ $[\alpha A(\alpha,s)]'<0$.

Значит, для малых $\alpha>0$ функция $\alpha^{-1}A^{-1}(\alpha,s)$ возрастает и ограничена, откуда следует ее принадлежность классу $BV(0,a]$.

Все условия леммы выполнены, и функция $l(\alpha)\in BV(0,a]$.

Теорема доказана.

Теорема 3 . Если интеграл (3) сходится при всех $\alpha>0$, то имеет место включение $|T_s\{\lambda(u)\}|\supset|PA\{\lambda(u)\}|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Включение $T_s\{\lambda(u)\}\supset$

$\supset |PA\{\lambda(u)\}|$ есть утверждение 3^0 теоремы I. В [1] (теорема 3) доказана формула

$$\psi_s(\alpha) = \frac{1}{\alpha^s\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t/\alpha} \varphi(t)\,dt.$$

По предпосылке $\varphi(t) \in BV(0,+\infty)$. Применим лемму, выбрав $g(t) \equiv \varphi(t)$ и $k(\alpha,t) = \alpha^{-s}\Gamma^{-1}(s)t^{s-1}e^{-t/\alpha}$.

Условие 1^0 леммы выполнено, а для условия 2^0 получим

$$\int_0^{+\infty} k(\alpha,t)\,dt = 1.$$

Рассмотрим условие 3^0:

$$\int_v^{+\infty} k(\alpha,t)\,dt = \mathcal{F}(\alpha,v) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{v/\alpha}^{+\infty} u^{s-1}e^{-u}\,du \le 1 \quad (v \ge 0).$$

Так как $\mathcal{F}(\alpha,v)$ как функция от α неубывающая и ограниченная, то $\mathcal{F}(\alpha,v) \in BV(0,+\infty)$ равномерно относительно v.

Значит, по лемме $\psi_s(\alpha) \in BV(0,+\infty)$.

Теорема доказана.

Частный случай, когда $s=1$ и $\lambda(u) \equiv u$, рассмотрен в [7] (теорема 1).

Теорема 4. Пусть $\lambda'(u)>0$ для всех $u \ge 0$. Если интеграл (1) абсолютно суммируем методом $T_s\{\lambda(u)\}$ и интеграл (5) сходится при всех α, $0<\alpha<c<s$, то интеграл (1) абсолютно суммируем методом $PA\{\ln\lambda(u)\}$ и $h(\alpha) \in BV(0,c')$ при любом c', $c'<c$.

Доказательство. Включение $PA\{\ln\lambda(u)\} \supset T_s\{\lambda(u)\}$ есть утверждение 4^0 теоремы I.

По предпосылке $\psi_s(\alpha) \in BV(0,+\infty)$. Выберем числа a и c' так, что $0<a<c'<c$. Как было показано в доказательстве теоремы 2, $h(\alpha) \in BV[a,c']$. Докажем, что $h(\alpha) \in BV(0,a]$ при каком-то a, $a<c$. Пусть a таково, что $4a < \min(1,c)$.

В [1] (теорема 5) доказано равенство

$$h(\alpha) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Gamma(s)\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}\psi_s(t)\,dt \quad (0<\alpha<s).$$

Перепишем это равенство в виде

$$h(\alpha) = \int_0^{+\infty} k(\alpha,t)\,g(t)\,dt, \tag{9}$$

где

$$g(t) = (1+t)^{2a}\psi_1(t) ,$$

$$h(\alpha,t) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\Gamma(s)\, t^{\alpha-1}(1+t)^{-2a} .$$

Проверим для интеграла (9) выполнение условий леммы. Так как $\psi_1(\alpha)\in BV(0,+\infty)$ и $(1+t)^{2a}$ монотонна и ограничена на $(0,1]$, то $g(t)\in BV(0,1]$. Для $g(t)\in BV[1,+\infty)$ достаточно выполнения условия

$$\int_1^{+\infty} |g'(t)|\, dt < +\infty . \qquad (10)$$

Дифференцированием получим:

$$g'(t) = 2a\,(1+t)^{2a-1}\psi_1(t) - s\,(1+t)^{2a}\int_0^{+\infty}\frac{\lambda(x)\,a(x)\,dx}{(1+t\lambda(x))^{s+1}} = A + B .$$

Аналогично доказательству соответствующей части теоремы 2 найдем, что $A = O(t^{-a-1})$ и $B = O(t^{-a-1})$. Значит, условие (10) выполнено.

В итоге доказано, что $g(t)\in BV(0,+\infty)$.

Условие 2^0, очевидно, выполнено. Рассмотрим условие 3^0. Проинтегрировав по частям, получим:

$$\int_v^{+\infty} h(t,\alpha)\, dt = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\cdot\frac{v^{\alpha}}{(1+v)^{2a}} + \\ + 2a\,\Gamma(s)\,\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\int_v^{+\infty}\frac{t^{\alpha}dt}{(1+t)^{2a+1}} . \qquad (11)$$

Функция $(\pi\alpha)^{-1}\sin\pi\alpha\in BV(0,a]$. При $\alpha\in(0,a]$ и $v\in[0,+\infty)$ функция

$$v^{\alpha}(1+v)^{-2a}\le 1 ,$$

а при зафиксированном v как функция от α монотонна. Тем самым она принадлежит классу $BV(0,a]$ равномерно относительно v. Значит, равномерно относительно v

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\cdot\frac{v^{\alpha}}{(1+v)^{2a}}\in BV(0,a] .$$

Так как

$$\left|\frac{d}{d\alpha}\int_v^{+\infty}\frac{t^{\alpha}dt}{(1+t)^{2a+1}}\right| \le \int_0^{+\infty}\frac{|\ln t|\,t^{\alpha/2}}{(1+t)^{a+1}}\,dt < +\infty ,$$

то равномерно относительно v

$$\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\int\limits_{v}^{+\infty}\frac{t^{\alpha}\,dt}{(1+t)^{2\alpha+1}} \in BV(0,a].$$

Выполнение условия 3^0 леммы следует теперь непосредственно из равенства (11).

По лемме $h(\alpha) \in BV(0,c')$.

Теорема доказана.

Литература

1. Вихманн Ф., Об одном методе суммирования рядов. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1975, А373, 27-35.
2. Вихманн Ф., Об одном методе типа Пуассона-Абеля суммирования рядов. Материалы конф. " Методы алгебры и функционального анализа при исслед. семейств операторов, 1978 ". Тарту, 1978, 43-44.
3. Вихманн Ф., О свойствах одного метода суммирования типа Пуассона-Абеля. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1979, 504, 95-98.
4. Жусипов К., Теоремы включения для одного метода суммирования интегралов. Сб. материалов Алгебр. семинара Кафедры алгебры и теории чисел. Казахск. гос. пед. ин-т, 1973, 3, 41-48.
5. Харди Г., Расходящиеся ряды. Москва, 1951.
6. Худак Ю.И., Две теоремы включения для метода обобщенного суммирования рядов $T(\lambda_k)$. Докл. АН СССР, 1972, 202, №6, 1284-1287.
7. Diamond H., Kuttner B., Raphael L.A., Inclusion theorems for the absolute summability of divergent integrals. Can. Math. Bull., 1983, 26, N=4, 389-398.
8. Knopp K., Nörlund method for functions. Math. Z., 1955, 63, 39-52.
9. Rath D., An inclusion theorem on summability. J. London Math. Soc., (2), 1977, 16, 493-498.

INCLUSION THEOREMS FOR THE ABSOLUTE SUMMABILITY OF INTEGRALS FOR THE POISSON-ABEL TYPE METHODS

F. Vichmann

Summary

In this paper absolute summability of integrals

$$\int_0^{+\infty} a(u)\,du \qquad (1)$$

is considered.

The integral (1) is summable by the method $PA\{\lambda(u)\}$ (resp. $T_s\{\lambda(u)\}$, $AT_s\{\lambda(u)\}$) if the integral (2) (resp. (3), (4)) converges for $\alpha>0$ and the finite limit of it exists as $\alpha\to 0+$. The integral (1) is summable by the Mellin method $PA\{\ln\lambda(u)\}$ if the integral (5) converges for sufficient small $\alpha>0$ and the finite limit of it exists as $\alpha\to 0+$. The integral (1) is said in addition absolutely summable by these methods if the function (2) (resp. (3), (4), (5)) belongs to the class BV of the functions having bounded variation on $(0,+\infty)$ (on $(0,c)$ for some $c>0$ in the latter case).

Four inclusion theorems for the absolute summability are proved.

Theorem 1. If the integral (1) is absolutely summable by the method $PA\{\lambda(u)\}$ then it is absolutely summable by the method $AT_s\{\lambda(u)\}$.

Theorem 2. Let $\lambda'(u)>0$ for $u\geq 0$. If the integral (1) is absolutely summable by the method $AT_s\{\lambda(u)\}$ and the integral (5) converges for any α, $0<\alpha<c<s$, then it is absolutely summableby the method $PA\{\ln\lambda(u)\}$ and $h(\alpha)\in BV(0,c')$ for any $c'<c$.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та,1987,770,115-121

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОШИ

Э. Оя и К.Клаар

Тартуский государственный университет

I. Произведением Коши рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n \tag{I}$$

называется ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}. \tag{2}$$

Известно, что если для сходящихся рядов (I) ряд (2) сходится, то его сумма равна произведению сумм рядов (I). Согласно теореме Мертенса, ряд (2) сходится, если ряды (I) сходятся, причем один из них сходится абсолютно. В случае, когда оба ряда (I) сходятся условно, их произведение Коши (2), вообще говоря, расходится.

Считая известной скорость сходимости одного из условно сходящихся рядов (I), мы находим условия, при которых ряд (2) сходится (теорема I). Изучаем и количественный аспект сходимости произведения Коши. В предположении, что скорости сходимости (вообще говоря, условно сходящихся) рядов (I) известны, мы дадим условие, гарантирующее сходимость ряда (2) с наиболее "высокой" возможной в этой ситуации скоростью (см. теорему 2). Тот же вопрос мы исследуем в предположении абсолютной сходимости одного из рядов (I) и устанавливаем количественный вариант теоремы Мертенса (теорема 3).

2. Будем называть скоростью числовую последовательность[I] $\lambda = (\lambda_n)$, удовлетворяющую условиям $\lambda_n > 0$, $\lim \lambda_n = \infty$. Следуя Г.Кангро [2], сходящийся ряд $\sum u_n$ будем называть λ-ограниченным, если последовательность

$$\beta_n = \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \tag{3}$$

ограничена. Множество всех λ-ограниченных рядов обозначается через m^λ.

[I] Свободные индексы и индексы суммирования пробегают все значения 0,I,2,... .

Теорема I. Пусть $\lambda=(\lambda_n)$ – скорость. Если $\sum u_n \in m^\lambda$, ряд $\sum v_n$ сходится и

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k} = o(1), \tag{4}$$

то произведение Коши (2) сходится.

Доказательство. Положим

$$\mathcal{U}_n=\sum_{k=0}^{n} u_k, \quad \mathcal{V}_n=\sum_{k=0}^{n} v_k, \quad \mathcal{W}_n=\sum_{k=0}^{n} w_k.$$

Поскольку

$$\mathcal{W}_n=\sum_{k=0}^{n} v_{n-k}\mathcal{U}_k=-\sum_{k=0}^{n} \frac{v_{n-k}}{\lambda_k}\beta_k+\mathcal{U}\mathcal{V}_n, \tag{5}$$

где $\mathcal{U}=\sum u_n$ и β_k определено равенством (3), то достаточно показать, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{v_{n-k}}{\lambda_k}\beta_k=o(1). \tag{6}$$

Но это, в силу условия (4), очевидно, так как последовательность (β_k) ограничена. Теорема доказана.

Рядом лейбницевского типа называется знакопеременный ряд

$$\sum u_n=\sum(-1)^n a_n, \qquad a_n>0, \tag{7}$$

удовлетворяющий условиям

$$a_n \geq a_{n+1}, \quad \lim a_n=0.$$

Такой ряд сходится, причем его остаток оценивается следующим образом:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k\right| \leq a_{n+1}.$$

Значит, ряд лейбницевского типа принадлежит m^λ с $\lambda = =(1/a_{n+1})$. Отсюда непосредственно вытекает

Следствие. Произведение Коши (2) ряда (7) лейбницевского типа и сходящегося ряда $\sum v_n$ сходится, если

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1}|v_{n-k}|=o(1). \tag{8}$$

Замечание. В условии (8), а значит и в условии (4), $o(1)$, вообще говоря, нельзя заменить на $O(1)$. Действительно, произведение Коши рядов $\sum u_n=\sum v_n=\sum(-1)^n\sqrt{n+1}$ расходится (см., например, [4], п. 392) и, по формулам из [I], п. I5.2,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+2)^{-\frac{1}{2}}(n-k+1)^{-\frac{1}{2}}=O(1)\sum_{k=0}^{n} A_k^{-\frac{1}{2}}A_{n-k}^{-\frac{1}{2}}=O(1)A_n^0=O(1),$$

где A_n^α – числа Чезаро.

С силу следствия, сходится, например, произведение Коши рядов $\sum u_n = \sum (-1)^n/\sqrt{n+1}$ и $\sum v_n$, где $(n+1)^\beta v_n = O(1)$ при некотором $\beta > 1/2$, так как для $1 > \beta > 1/2$, согласно вышеупомянутым формулам из [I], имеем

$$\sum_{k=0}^{n} (k+2)^{-\frac{1}{2}} |v_{n-k}| = O(1) \sum_{k=0}^{n} (k+2)^{-\frac{1}{2}} (n-k+1)^{-\beta} =$$
$$= O(1)\, A_n^{\frac{1}{2}-\beta} = O(1)(n+1)^{\frac{1}{2}-\beta} = o(1),$$

а для $\beta \geq 1$ выполнение условия (8) вытекает отсюда непосредственно.

3. Нельзя ожидать, что умножение в смысле Коши улучшает скорость сходимости, ибо если положить $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = \ldots = 0$, то ряд $\sum u_n \in m^\lambda$ для любой скорости λ, а его произведение Коши с рядом $\sum v_n$ совпадает с $\sum v_n$. Следующая теорема описывает скорость сходимости при умножении рядов в смысле Коши.

Теорема 2. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ и $\mu = (\mu_n)$ – скорости. Если $\sum u_n \in m^\lambda$, $\sum v_n \in m^\mu$ и выполняется условие (4), то произведение Коши $\sum w_n \in m^\nu$, где скорость $\nu = (\nu_n)$ определяется соотношением

$$\nu_n = \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{\mu_n},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k}\right\}} .$$

Доказательство. Используем обозначения из доказательства теоремы I, в силу которой $\sum w_n = UV$, где $U = \sum u_n$ и $V = \sum v_n$. Так как выполнено условие (4), то ν является скоростью. Поскольку последовательности (β_k),

$$\left(\nu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k}\right),$$

(ν_n/μ_n) ограничены и $\sum v_n \in m^\mu$, то последовательность

$$\nu_n (UV - W_n) = \nu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{v_{n-k}}{\lambda_k} \beta_k + \frac{\nu_n}{\mu_n} \mu_n (V - V_n) U$$

ограничена, так что $\sum w_n \in m^\nu$. Теорема доказана.

Замечание. Скорость ν в теореме 2, вообще говоря, не может быть увеличена, так как, например, если $\lambda_n = \mu_n = n+1$, то $\sum u_n = \sum v_n = \sum (-1)^n/(n+1) \in m^\lambda = m^\mu$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k+1}\right) =$$

$$= \frac{2}{n+2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) = o(1), \qquad (9)$$

так что (4) выполняется, и

$$\nu_n = \frac{n+2}{2} : \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\right) \sim \frac{n+2}{2\ln(n+2)}.$$

А поскольку $\sum w_n = \sum (-1)^n c_n$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(n-k+1)},$$

и, согласно (9),

$$0 < c_n - c_{n+1} \sim 2\frac{\ln(n+2)}{(n+2)^2} \sim \frac{\ln(n+2)}{(n+2)^2} + \frac{\ln(n+3)}{(n+3)^2},$$

то

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k\right| = (c_{n+1} - c_{n+2}) + (c_{n+3} - c_{n+4}) + \ldots \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\ln(k+2)}{(k+2)^2} \sim \frac{\ln(n+2)}{n+2}$$

(последнюю эквивалентность можно получить, например, с помощью интегрального признака). Значит, если какая-нибудь скорость $\nu' = (\nu_n')$ удовлетворяет условию $\nu_n'/\nu_n \to \infty$, то $\sum w_k \notin m^{\nu'}$, поскольку

$$\nu_n' \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} w_k\right| \sim \frac{\nu_n' \, \nu_n \ln(n+2)}{\nu_n \, (n+2)} \sim \frac{\nu_n'}{2\nu_n} \to \infty.$$

4. Пример, приведенный в последнем замечании, указывает на то, что при умножении в смысле Коши скорость сходимости, вообще говоря, падает. Следуя идеям Г.Кангро [3], мы дадим условие, гарантирующее сохранение скорости сходимости при умножении в смысле Коши, если один из рядов (I) сходится абсолютно, т.е. в предположениях теоремы Мертенса.

Теорема 3. Пусть $\lambda = (\lambda_n)$ и $\mu = (\mu_n)$ – скорости, пусть $\sum u_n \in m^\lambda$ и $\sum v_n \in m^\mu$, причем ряд $\sum v_n$ сходится абсолютно. Если

$$\exists\, c \in (0,1), \quad \mu_n \Big(\sum_{m=n-k}^{n} |v_m|\Big)^c = O(\lambda_k), \quad k \le n, \tag{10}$$

то произведение Коши $\sum w_n \in m^\mu$.

Доказательство. Достаточно показать, что

$$\mu_n \sum_{k=0}^{n} \frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k} = O(1). \tag{11}$$

В самом деле, из (II) следует (4), так что по теореме 2 имеем $\sum w_n \in m^\nu$, где $\mu_n = O(\nu_n)$, в силу условия (II). Следовательно, $\sum w_n \in m^\mu$.

Докажем (II), следуя идее доказательства теоремы I из [3]. Зафиксируем произвольное $n \in \{0, 1, \ldots\}$. Без ограничения общности можем считать, что $v_{n-k} \neq 0$ при некотором $k \le n$. Пусть $\varkappa$ – наименьшее значение индекса k, при котором $v_{n-k} \neq 0$. Тогда

$$\mu_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k}\Big)=\sum_{k=\varkappa}^{n}|v_{n-k}|\frac{\mu_n}{\lambda_k}\leqslant$$

$$\leqslant M\sum_{k=\varkappa}^{n}|v_{n-k}|\Big(\sum_{m=n-k}^{n}|v_m|\Big)^{-c},$$

где константа M существует ввиду условия (I0). Легко проверить, что при $\varkappa\leqslant k\leqslant n$

$$|v_{n-k}|\Big(\sum_{m=n-k}^{n}|v_m|\Big)^{-c}=\frac{u\Big(\big(\sum_{m=n-k}^{n}|v_m|\big)^{1-c}-\big(\sum_{m=n-k+1}^{n}|v_m|\big)^{1-c}\Big)}{1-(1-u)^{1-c}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{1-c}\Big(\Big(\sum_{m=n-k}^{n}|v_m|\Big)^{1-c}-\Big(\sum_{m=n-k+1}^{n}|v_m|\Big)^{1-c}\Big),$$

где

$$u=|v_{n-k}|\Big(\sum_{m=n-k}^{n}|v_m|\Big)^{-1}\in[0,1].$$

Следовательно,

$$\mu_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k}\Big)\leqslant\frac{M}{1-c}\Big(\Big(\sum_{m=0}^{n}|v_m|\Big)^{1-c}-\Big(\sum_{m=n-\varkappa+1}^{n}|v_m|\Big)^{1-c}\Big)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{1-c}\Big(\sum_{m=0}^{\infty}|v_m|\Big)^{1-c}.$$

Теорема доказана.

В случае, когда $\sum v_n=\sum q^n$, $|q|<1$, условие (I0) примет вид

$$\exists\, c\in(0,1),\quad \mu_n(|q|^{n-k}-|q|^{n+1})^{c}=O(\lambda_k),\ k\leqslant n.$$

Это условие выполнено, если существует число $c\in(0,1)$ такое, что

$$\mu_n|q|^{c(n-k)}=O(\lambda_k),\qquad k\leqslant n. \tag{I2}$$

А тогда при $k=0$ следует равенство $\mu_n|q|^n=O(1)$, которое равносильно тому, что $\sum v_n\in m^{\mu}$.

Условие (I2) выполнено для всех $c>0$, если, например,

$$\mu_n=O(\lambda_n),\quad \lim\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}=1. \tag{I3}$$

В действительности, пусть $c>0$ и $\alpha=|q|^c$. Пусть $\beta>1$ есть такое число, что $\alpha\beta<1$. Тогда найдется такое натуральное число N, что $\mu_{n+1}/\mu_n<\beta$ при $n\geqslant N$. Без ограничения общности можем считать, что $n>N$. Пусть $k\leqslant n$. Если $k\leqslant N$, то

$$\frac{\mu_n}{\mu_k}=\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\cdot\frac{\mu_{n-1}}{\mu_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_{N+1}}{\mu_N}\cdot\frac{\mu_N}{\mu_k}<M\beta^{n-N}\leq M\beta^{n-k},$$

где $M=max\{\mu_N/\mu_k: k=0,1,\ldots,N\}$. А если $k>N$, то

$$\frac{\mu_n}{\mu_k}=\frac{\mu_n}{\mu_{n-1}}\cdot\frac{\mu_{n-1}}{\mu_{n-2}}\cdot\ldots\cdot\frac{\mu_{k+1}}{\mu_k}<\beta^{n-k}.$$

Следовательно, $\mu_n=O(\mu_k\beta^{n-k})$, $k\leq n$, и

$$\frac{\mu_n}{\lambda_k}|q|^{c(n-k)}=O(1)\frac{\mu_n}{\mu_k}\alpha^{n-k}=O(1)(\alpha\beta)^{n-k}=O(1),$$

так что (I2) выполняется.

Итак, из теоремы 3 вытекает

Следствие. Если скорости $\lambda=(\lambda_n)$ и $\mu=(\mu_n)$ удовлетворяют условию (I3), то произведение Коши рядов $\sum u_n\in$ $\in m^\lambda$ и $\sum q^n$, $|q|<1$, принадлежит классу m^μ.

Литература

I. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов. - Таллин: Валгус, 1977. - 280 с.
2. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов, λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. - Уч. зап. Тарт. ун-та, 1971, 277, 136-154.
3. Кангро Г., О скорости суммируемости ортогональных рядов, треугольными регулярными методами. I. - Изв. АН Эст.ССР. Физ., матем., 1974, 23, № I, 3-II.
4. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. II. - М.: Наука, 1969. - 800 с.

Поступила II.II.1986

ON THE RATE OF CONVERGENCE OF CAUCHY PRODUCTS

E. Oja, K. Klaar

Summary

A sequence $\lambda = (\lambda_n)$ is called a speed if $\lambda_n > 0$ and $\lim_n \lambda_n = \infty$. For a speed λ the set of all convergent series $\sum u_n$ such that

$$\lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = O(1)$$

is denoted by m^λ. The main result is

Theorem 2. Let $\lambda = (\lambda_n)$ and $\mu = (\mu_n)$ be two speeds. If $\sum u_n \in m^\lambda$, $\sum v_n \in m^\mu$ and (4) is satisfied, then the Cauchy product of the series $\sum u_n$ and $\sum v_n$ is contained in m^ν for the speed $\nu = (\nu_n)$,

$$\nu_n = \frac{1}{\max\left\{\frac{1}{\mu_n},\ \sum_{k=0}^{n} \frac{|v_{n-k}|}{\lambda_k}\right\}}.$$

As a corollary the following result is obtained. If the speeds $\lambda = (\lambda_n)$ and $\mu = (\mu_n)$ satisfy (13), then the Cauchy product of the series $\sum u_n \in m^\lambda$ and $\sum q^n$, $|q| < 1$, is contained in m^μ.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та,1987,770,122-128

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫЕ МЕТОДЫ СИЛЬНОГО СУММИРОВАНИЯ И СХОДИМОСТЬ ПО НУЛЬ-КЛАССУ

В. Соомер

Тартуский государственный университет

В настоящей статье рассматривается сходимость по нуль-классу. Оказывается, что при некоторых ограничениях на последовательностный метод α сильная α-суммируемость ограниченной последовательности эквивалентна сходимости по некоторому нуль-классу. Это свойство применяется при изучении включения полей сильной α-суммируемости.

§ 1. Нуль-классы и сходимость по нуль-классу

В статье [3] введены понятие нуль-класса и понятие сходимости по нуль-классу.

Пусть $\mathcal{X}$ - система множеств, элементы которых натуральные числа. Система $\mathcal{X}$ называется нуль-классом, если выполнены следующие условия:

1° каждое конечное множество $S \in \mathcal{X}$,

2° $S_1, S_2 \in \mathcal{X} \Rightarrow S_1 \cup S_2 \in \mathcal{X}$,

3° $S_1 \in \mathcal{X} \wedge S_2 \subset S_1 \Rightarrow S_2 \in \mathcal{X}$,

4° $\mathbb{N} \notin \mathcal{X}$, где $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел.

Через m, c и c_0 обозначим соответственно пространства всех ограниченных, всех сходящихся и всех сходящихся к нулю последовательностей. Пусть E - такое линейное подпространство пространства m, что

5° $c_0 \in E$

6° $(y_k) \in E \wedge |x_k| \leq |y_k|, \quad k=0,1,\ldots, \Rightarrow (x_k) \in E$

(т.е. E - нормальное пространство)

7° $e \notin E$, где $e = (1,1,\ldots)$.

Через $\varphi_S = (\varphi_k^S)$ обозначим характеристическую последовательность множества $S \subset \mathbb{N}$ т.е.

$$\varphi_k^S = \begin{cases} 1, & k \in S \\ 0, & k \notin S \end{cases}$$

Имеет место

<u>Теорема 1.1</u>. Если пространство E удовлетворяет усло-

виям 5^0–7^0, то система $\mathcal{X}_E=\{S\subset\mathbb{N}\mid\varphi_S\in E\}$ образует нуль-класс.

Доказательство. Условие 1^0 выполнено, так как каждое конечное множество $S\in\mathcal{X}_E$ ввиду условия 5^0 (если S – конечное множество, то $\varphi_S\in c_0$). Так как $\varphi_N=e$, то условие 4^0 следует из условия 7^0.

Пусть $S_1,S_2\in\mathcal{X}$, т.е. $\varphi_{S_1},\varphi_{S_2}\in E$. Тогда ввиду линейности пространства E имеем $\varphi_{S_1}+\varphi_{S_2}\in E$. Но так как

$$0\leqslant\varphi_{S_1\cup S_2}\leqslant\varphi_{S_1}+\varphi_{S_2},$$

то из условия 6^0 следует, что $\varphi_{S_1\cup S_2}\in E$. Значит, условие 2^0 выполнено. Справедливость условия 3^0 доказывается аналогично.

Введем понятие сходимости по нуль-классу.

Определение. Ограниченная последовательность $x=(x_k)$ называется сходящейся по нуль-классу $\mathcal{X}$, если существует такое множество $S\subset\mathbb{N}$ что

$$\lim_{k\in\mathbb{N}\setminus S}x_k=l.$$

Замечание I. Здесь $\lim\limits_{k\in\mathbb{N}\setminus S}x_k$ – предел подпоследовательности $(x_{k(\nu)})$, которая получается из последовательности (x_k) при отбрасывании элементов, индексы которых входят в S.

Обозначим соответственно через $\omega_{\mathcal{X}}$ и $(\omega_{\mathcal{X}})_0$ множества всех последовательностей, сходящихся и сходящихся к нулю по нуль-классу $\mathcal{X}$. Нетрудно убедиться, что $\omega_{\mathcal{X}}$ и $(\omega_{\mathcal{X}})_0$ – линейные подпространства пространства m.

Теорема I.2. Если линейное пространство E удовлетворяет условиям 5^0–7^0 и $\mathcal{X}_E=\{S\subset\mathbb{N}\mid\varphi_S\in E\}$, то $(\omega_{\mathcal{X}})_0\subset E$.

Доказательство. Пусть $x=(x_k)\in(\omega_{\mathcal{X}})_0$ т.е. пусть существует такое множество $S\subset\mathbb{N}$ что $\varphi_{\mathbb{N}\setminus S}x=(\varphi_k^{\mathbb{N}\setminus S}x_k)\in c_0$ и $\varphi_S=(\varphi_k^S)\in E$. Нетрудно убедиться, что из условия 6^0 вытекает следующее условие: если $(x_k)\in m$ и $(y_k)\in E$, то $(x_k y_k)\in E$. Но тогда ввиду того, что $(\omega_{\mathcal{X}})_0\in m$, имеем $(\varphi_k^S x_k)\in E$ для всех $(x_k)\in(\omega_{\mathcal{X}})_0$. Ввиду линейности пространства E и ввиду условия 5^0 получим, что $(x_k)\in E$, так как $x_k=\varphi_k^S x_k+\varphi_k^{\mathbb{N}\setminus S}x_k$.

Пусть $\{\mathcal{X}_\nu\mid\nu\in\Gamma\}$ – некоторое семейство нуль-классов, где Γ – некоторая совокупность индексов. Тогда нетрудно убедиться, что множество $\mathcal{X}=\bigcap\limits_{\nu\in\Gamma}\mathcal{X}_\nu$ тоже является нуль-классом. Кроме того, если

$$\mathcal{X}_\nu = \{ S \subset \mathbb{N} \mid \varphi_S \in E_\nu \},$$

то

$$\mathcal{X} = \bigcap_{\nu\in\Gamma} \mathcal{X}_\nu = \{ S\subset \mathbb{N} \mid \varphi_S \in \bigcap_{\nu\in\Gamma} E_\nu \},$$

где $\{E_\nu \mid \nu\in\Gamma\}$ – некоторое семейство линейных пространств.

Теорема I.3. Если пространства E_ν удовлетворяют условиям 5^0–7^0 и

$$E_\nu = (\omega_{\mathcal{X}_\nu})_0 \text{, где } \mathcal{X}_\nu = \{ S\subset \mathbb{N} \mid \varphi_S \in E_\nu \},$$

то

$$\bigcap_{\nu\in\Gamma} E_\nu = (\omega_{\mathcal{X}})_0 \text{, где } \mathcal{X} = \bigcap_{\nu\in\Gamma} \mathcal{X}_\nu .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I) Если пространства E_ν удовлетворяют условиям 5^0–7^0, то и пространство $E = \bigcap_{\nu\in\Gamma} E_\nu$ удовлетворяет этим условиям. Тогда из теоремы I.2 следует, что $(\omega_{\mathcal{X}})_0 \in E$.

2) Пусть $x = (x_k) \in E$, т.е. $x \in \bigcap_{\nu\in\Gamma} E_\nu = \bigcap_{\nu\in\Gamma} (\omega_{\mathcal{X}_\nu})_0$. Значит, для каждого $\nu\in\Gamma$ найдется такое множество $S_\nu \in \mathbb{N}$, что $\lim_{k\in S_\nu} x_k = 0$ и $\varphi_{\mathbb{N}\setminus S} \in E_\nu$. Полагая $S = \bigcup_{\nu\in\Gamma} S_\nu$, получим, что $\lim_{k\in S} x_k = 0$ и $\varphi_{\mathbb{N}\setminus S} \in E$ (действительно, $0 \leqslant \varphi_{\mathbb{N}\setminus S} \leqslant$ $\leqslant \varphi_{\mathbb{N}\setminus S_\nu}$ при всех $\nu\in\Gamma$, значит, ввиду условия 6^0 $\varphi_{\mathbb{N}\setminus S} \in E$).

§ 2. Последовательностные методы сильной суммируемости

Пусть $\alpha = (A_i)$ – последовательность матриц $A_i = (a_{nik})$, где $a_{nik} \geqslant 0$. Через $c_\alpha, [c_\alpha]$ и $[c_\alpha]_0$ обозначим соответственно множества всех α-суммируемых, сильно α-суммируемых и сильно α-суммируемых к нулю последовательностей, т.е.

$$c_\alpha = \{ x = (x_k) \mid \exists \lim_n \sum_k a_{nik} x_k = \alpha(x) \text{ равномерно по } i \}$$

$$[c_\alpha] = \{ x = (x_k) \mid \exists\, \ell,\ \lim_n \sum_k a_{nik} |x_k - \ell| = 0 \text{ равномерно по } i \}$$

$$[c_\alpha]_0 = \{ x = (x_k) \in [c_\alpha] \mid \ell = 0 \}.$$

Через $c_A, [c_A]$ и $[c_A]_0$ обозначим соответственно поля суммируемости, сильной суммируемости и сильной нуль-суммируемости матричного метода A. При $\alpha = (A)$, $A = (a_{nk})$ имеем $c_\alpha = c_A$, $[c_\alpha] = [c_A]$ и $[c_\alpha]_0 = [c_A]_0$. Имеет место

Теорема 2.I. [2] Пусть $\mathcal{U}$ – семейство матриц $T = (t_{nk})$, где $t_{nk} = a_{nik}$ при некотором i, тогда

$$c_\alpha = \bigcap_{T\in\mathcal{U}} c_T .$$

Следствие 2.I. Имеет место равенство

$$[c_\alpha]_0 = \bigcap_{T\in \mathcal{U}} [c_T]_0 .$$

Рассмотрим последовательностные методы α , при которых $c \subset c_\alpha\ (рег.)$ т.е. $c \subset c_\alpha$ и $\alpha(x) = \lim_k x_k$ для всех $x \in c$. Верна следующая

Теорема 2.2. [7] Включение $c \subset c_\alpha\ (рег.)$ имеет место тогда и только тогда, когда

1^0 $\lim_n a_{nik} = 0,\quad k = 0, 1, \dots ,$ равномерно по i ,

2^0 $\lim_n \sum_k a_{nik} = 1$ равномерно по i ,

3^0 $\exists\, \tau > 0,\quad \sup_{\substack{n>\tau,\\ i\geq 0}} \sum_k |a_{nik}| < \infty .$

Учитывая условия теоремы 2.2, нетрудно убедиться, что при $c \subset c_\alpha\ (рег.)$ и $a_{nik} \geq 0$ линейное пространство $[c_\alpha]_0 \cap m$ удовлетворяет условиям 5^0–7^0. Следовательно, из теоремы I.I вытекает, что семейство

$$\mathcal{X}_\alpha = \{ S \subset N \mid \varphi_s \in [c_\alpha]_0 \}$$

образует нуль-класс.

Также является нуль-классом множество

$$\mathcal{X}_A = \{ S \subset N \mid \varphi_s \in [c_A]_0 \} .$$

Известна следующая

Теорема 2.3. [4] Если A - регулярный матричный метод с элементами $a_{nk} \geq 0$, то ограниченная последовательность $(x_k) \in [c_A]$ тогда и только тогда, когда существует такое множество $S \subset N$, что $\lim_{k \in N\setminus S} x_k = A(x)$ и характеристическая последовательность φ_s A-суммируема к нулю, т.е.

$$[c_A] \cap m = \omega_{\mathcal{X}_A} .$$

Обобщим теорему 2.3 на последовательностные методы суммирования.

Теорема 2.4. Если последовательностный метод α такой, что $c \subset c_\alpha\ (рег.)$ и $a_{nik} \geq 0$, то

$$[c_\alpha]_0 \cap m = (\omega_{\mathcal{X}_\alpha})_0 .$$

Доказательство. Ввиду следствия 2.I $[c_\alpha]_0 = \bigcap_{T\in \mathcal{U}} [c_T]_0$. Если $c \subset c_\alpha\ (рег.)$ и $a_{nik} \geq 0$, то все методы T , где $T \in \mathcal{U}$ регулярны и положительны .Но тогда из теоремы 2.3. вытекает, что для всех $T \in \mathcal{U}$ имеет место

$$[c_T]_0 \cap m = (\omega_{\mathcal{X}_T})_0 .$$

Но тогда из следствия 2.I и из теоремы I.3 следует, что действительно $[c_\alpha]_0 \cap m = (\omega_{\mathcal{X}_\alpha})_0$.

<u>Замечание 2</u>. Результат, аналогичный теореме 2.4, получено другими методами в статье [1], в которой сходимость по нуль-классу рассматривается как сходимость по некоторому ядру.

Так как $x \in [c_\alpha]$ тогда и только тогда, когда $x - \ell e \in [c_\alpha]_0$, где ℓ – сильный α-предел последовательности x, то имеет место

<u>Теорема 2.5</u>. Если последовательностный метод α такой, что $c \subset c_\alpha\,(\text{per.})$ и $a_{nik} \geqslant 0$, то $[c_\alpha] \cap m = \omega_{\mathcal{X}_\alpha}$

<u>Замечание 3</u>. Нетрудно убедиться, что теоремы 2.4 и 2.5 имеют место и при таких методах α, где $c \subset c_\alpha$, $a_k = 0$, $a \neq 0$.

§ 3. Включение ограниченных полей сильной α-суммируемости

Пусть $[c_\alpha]^p$ – пространство со степенью p ($p = (p_k)$, $p_k > 0$) сильно α-суммируемых последовательностей, т.е.

$$[c_\alpha]^p = \{x = (x_k) \mid \exists \ell,\ \lim_n \sum_k a_{nik} |x_k - \ell|^{p_k} = 0 \text{ равн. по } i\}$$

Из теоремы 2.5 непосредственно следует

<u>Теорема 3.I</u>. Если $c \subset c_\alpha\,(\text{per.})$ и $a_{nik} \geqslant 0$, то ограниченная последовательность $(x_k) \in [c_\alpha]^p$ тогда и только тогда, когда существует такое множество $S \subset \mathbb{N}$, что $\lim\limits_{k \in \mathbb{N}\setminus S} |x_k - \ell|^{p_k} = 0$ и $\varphi_S \in [c_\alpha]_0$.

Значит, сильная α-суммируемость со степенью p последовательности $x = (x_k)$ к числу ℓ эквивалентна сходимости по определенному нуль-классу последовательности $u = (u_k)$, где $u_k = |x_k - \ell|^{p_k}$. Пусть

$$c_0(p) = \{x = (x_k) \mid \lim_k |x_k|^{p_k} = 0\},$$

т.е. $c_0(p)$ – пространство всех со степенью p сходящихся к нулю последовательностей. В дальнейшем нам нужна следующая

<u>Лемма 3.I.</u> [5] Пусть $p = (p_k)$, $q = (q_k)$, $p_k, q_k > 0$, то $c_0(q) \subset c_0(p)$ тогда и только тогда, когда $\liminf \frac{p_k}{q_k} > 0$.

При помощи теоремы 3.I и леммы 3.I можно найти достаточные условия для включения $[c_\alpha]^q \subset [c_\alpha]^p$.

Имеет место

<u>Теорема 3.2.</u> Если $\liminf \frac{p_k}{q_k} > 0$, то

$$[c_\alpha]^q \cap m \subset [c_\alpha]^p.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x=(x_k)\in[c_\alpha]^q \cap m$, т.е. существует число ℓ, что последовательность (u_k), где $u_k = |x_k - \ell|^{q_k}$, α-суммируема к нулю. Из теоремы 3.I тогда следует существование множества $Z\subset N$, что $\lim_{k\in N\setminus Z} |x_k - \ell|^{q_k} = 0$ и $\varphi_Z = (\varphi_k^Z)$ α-суммируема к нулю. Рассмотрим последовательность $t=(t_k)$, где

$$t_k = \begin{cases} |x_k - \ell|, & k\in N\setminus Z \\ 0, & k\in Z. \end{cases}$$

Тогда $(t_k)\in c_0(q)$ и $\varphi_Z\in[c_\alpha]_0$. Так как $\liminf \frac{p_k}{q_k} > 0$, то по лемме 3.I имеем, что $(t_k)\in c_0(p)$. Значит, $\lim_{k\in N\setminus Z} |x_k-\ell|^{p_k} = 0$ и $\varphi_Z\in[c_\alpha]_0$, т.е. по теореме 3.I. имеем $(x_k)\in[c_\alpha]_0^p$. Теорема доказана.

Литература

I. Лооне Л., Сходимость по нуль-классу и сильная $|\alpha|$-суммируемость. Тезисы докл. конф. "Теоретические и прикладные вопросы математики". Тарту, 1985, 99-101.
2. Bell, H.T., Order summability and almost convergence. Proc. Am. Math. Soc., 1973, 38, № 3, 548-552.
3. Freedman, A.R., Generalized limits and sequence spaces. Bull. London Math. Soc., 1981, 13, 224-228.
4. Hill, J.D., Sledd, W.T., Approximation in bounded summability fields. Can. J. Math., 1968, 20, № 2, 410-415.
5. Maddox, I.J., Spaces of strongly summable sequences. Oxford series (2), 1967, 18, 345-355.
6. Nanda, S., Some sequence spaces and almost convergence. J. Austral. Math. Soc., 1976, 22, 446-455.
7. Stieglitz, M., Fastkonvergenz und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklärte konvergenzbegriffe. Stuttgart, 1971.

THE SPACE OF $\mathcal{X}$-CONVERGENT SEQUENCES AND STRONG SUMMABILITY DEFINED BY A SEQUENCE OF MATRICES

V. Soomer

Summary

A class $\mathcal{X}$ of subsets of N is called a zero class, if the conditions 1°–4° hold. The sequence $x=(x_k)$ is called $\mathcal{X}$-convergent if there exists a set $Z\in\mathcal{X}$ such that

$$\lim_{k\in N\setminus Z} x_k = \ell$$

exists.

Let $\alpha=(A_i)$ be a sequence of matrices $A_i=(a_{nik})$, $a_{nik}\geq 0$ and $p=(p_k)$ be a sequence of real numbers such that $p_k>0$. We define

$$[c_\alpha]^p=\{(x_k)\mid \exists\, \ell,\ \lim_n \sum_k a_{nik}|x_k-\ell|^{p_k}=0 \text{ uniformly in } i\}$$

The set $[c_\alpha]^p$ is called the set of strongly α-summable sequences. Let $p_k=1$, $k=0,1,\dots$, then we denote $[c_\alpha]^p = [c_\alpha]$.

In the present paper it is shown that for certain summability methods α the space $[c_\alpha]$ is equal to the space of $\mathcal{X}$-convergent sequences for a suitable Zero-class $\mathcal{X}_\alpha$.

By using this fact the sufficient conditions for $[c_\alpha]^q\cap m\subset[c_\alpha]^p$ are found.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 129-132

ОБ ОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ С СИЛЬНОЙ СУММИРУЕМОСТЬЮ

Х.Паал, В.Соомер

Тартуский государственный университет

Пусть $\alpha = (A_i)$ - последовательность матриц $A_i = (a_{nik})$, где $a_{nik} \geq 0$. Через c_α и $(c_o)_\alpha$ обозначим соответственно множества всех α-суммируемых и α-суммируемых к нулю последовательностей, т.е.

$$c_\alpha = \{x = (x_k) \mid \exists \lim_n \sum_k a_{nik} x_k = \alpha(x) \text{ равномерно по } i\}, \quad (\mathrm{I})$$

$$(c_o)_\alpha = \{x = (x_k) \in c_\alpha \mid \alpha(x) = 0\}.$$

В статье [5] изучается множество всех со степенью p $(p=(p_k),\ p_k > 0)$ сильно α-суммируемых последовательностей $[c_\alpha]^p$, где $[c_\alpha]^p = \{x = (x_k) \mid \exists \ell, (|x_k - \ell|^{p_k}) \in (c_o)_\alpha\}$. В статье [5] доказано, что при условиях $0 < \inf p_k \leq \sup_k p_k < \infty$ и $\sup_{n,i} \sum_k a_{nik} < \infty$ множество $[c_\alpha]^p$ является линейным топологическим пространством с паранормой

$$g(x) = \sup_{n,i} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_{nik} |x_k|^{p_k}\right]^{1/M}, \quad (2)$$

где $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$. Если $p_k = \bar{p} \geq 1$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ и $\sup_n a_{nik} > 0$, то множество $[c_\alpha]^p$ является нормированным пространством с нормой (2), а при $p_k = \bar{p} < 1$ отображение g, определяемое равенством (2), является псевдонормой.

В настоящей статье изучается множество[I] $[c_\alpha(\Delta)]^p \cap m$, где $[c_\alpha(\Delta)]^p = \{x = (x_k) \mid u = (|\Delta x_k|^{p_k}) \in (c_o)_\alpha\}$.

Имеет место

Теорема I. Пусть $0 < \inf p_k \leq \sup p_k < \infty$ и $\sup_{n,i} \sum_k a_{nik} = H < \infty$, тогда множество $[c_\alpha(\Delta)]^p$ является линейным топологическим пространством с паранормой g, где

$$g(x) = \left[\sup_{n,i} \sum_{k=0}^{\infty} a_{nik} |\Delta x_k|^{p_k}\right]^{1/M}, \quad (3)$$

[I] Через m обозначим пространство всех ограниченных последовательностей.

где $M = \max\{1, \sup_k p_k\}$

Доказательство теоремы I аналогично доказательству утверждения, что равенство (2) определяет паранорму в $[c_\alpha]^p$ (см. [5], стр. I7). Отметим, что при $p_k = \bar{p} \geq 1$ при всех $k = 0, 1, \ldots$ соотношение (3) определяет полунорму, а при $p_k = p < 1$ – псевдонорму.

При $p_k = 1$ ($k = 0, 1, \ldots$) обозначим $[c_\alpha]^p = [c_\alpha]$ и $[c_\alpha(\Delta)]^p = [c_\alpha(\Delta)]$. Далее докажем, что множество $[c_\alpha(\Delta)]$ является множеством мультипликаторов определенного класса. Пусть f – множество всех почти сходящихся последовательностей. Известно, что f является замкнутым подпространством пространства m. Почти сходимость – это частный случай α-суммируемости, т.е. при

$$a_{nik} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & i \leq k \leq i+n, \\ 0, & k < i, \quad k > n+i, \end{cases}$$

имеем $c_\alpha = f$. Тогда обозначим $\alpha(x) = f\text{-}\lim x$. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы имело место $f \subset c_\alpha$, дает следующая

<u>Теорема 2.</u> [6] Включение $f \subset c_\alpha$ имеет место тогда и только тогда, когда

I° $\exists \lim_n a_{nik} = a_k, \quad k = 0, 1, \ldots$ равномерно по i,

2° $\exists \lim_n \sum_k a_{nik} = a$ равномерно по i,

3° $\exists\, \tau > 0, \sup_{\substack{n \geq \tau \\ i \geq 0}} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nik}| < \infty$,

4° $\lim_n \sum_k |\Delta(a_{nik} - a_k)| = 0$ равномерно по i.

Пусть (f, c_α) – множество мультипликаторов типа (f, c_α) т.е.

$$(f, c_\alpha) = \{(\varepsilon_k) \,|\, (\varepsilon_k x_k) \in c_\alpha \text{ для всех } (x_k) \in f\}.$$

Имеет место

<u>Теорема 3.</u> Если $f \subset c_\alpha$, то для того, чтобы ограниченная последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k) \in (f, c_\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы $(\varepsilon_k) \in c_\alpha$ и

$$\lim_n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{nik} - a_k| |\Delta \varepsilon_k| = 0 \qquad (4)$$

равномерно по i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение $(\varepsilon_k) \in (f, c_\alpha)$ означает, что для всех $(x_k) \in f$ существует $\lim_n \sum_k a_{nik} \varepsilon_k x_k = \alpha(\varepsilon x)$ (равномерно по i), т.е. имеет место $f \subset c_\beta$ где

$\beta=(B_i)$, $B_i=(b_{nik})$, $b_{nik}=a_{nik}\varepsilon_k$. Значит, последовательностный метод β должен удовлетворять условиям теоремы 2. Нетрудно проверить, что для метода β условия 1° и 3° теоремы 2 выполнены. Условие 2° теоремы 2 равносильно условию $(\varepsilon_k)\in c_\alpha$. Значит, надо еще доказать, что для метода β условие 4° теоремы 2 равносильно условию (4). Так как

$$\Delta(b_{nik}-b_k)=\Delta(a_{nik}\varepsilon_k-a_k\varepsilon_k)=(a_{nik}-a_k)\Delta\varepsilon_k+\varepsilon_{k+1}\Delta(a_{nik}-a_k),$$

и $\lim_n\sum_k|\Delta(a_{nik}-a_k)|=0$ равномерно по i, то эквивалентность условий 4° теоремы 2 и (4) вытекает из неравенств

$$\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta(b_{nik}-b_k)|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nik}-a_k||\Delta\varepsilon_k|+\sup_k|\varepsilon_k|\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta(a_{nik}-a_k)|$$

и

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nik}-a_k||\Delta\varepsilon_k|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta(b_{nik}-b_k)|+\sup_k|\varepsilon_k|\sum_{k=0}^{\infty}\Delta(a_{nik}-a_k)|.$$

Теорема доказана.

Известно, что $f\subset c_\alpha(per.)$ (т.е. $f\subset c_\alpha$ и $\alpha(x)=f\text{-}\lim x$ для всех $x\in f$) тогда и только тогда, когда выполнены условия теоремы 2 и $a_k=0$, $k=0,1,\dots$, $a=1$. Тогда из теоремы 3 следует

<u>Следствие 1.</u> Если $f\subset c_\alpha(per.)$ и $a_{nik}\geqslant 0$, то $(f,c_\alpha)\cap m=[c_\alpha(\Delta)]\cap c_\alpha$.

При $c_\alpha=f$ обозначим $(f,f)=M(f)$. Из следствия 1 вытекает следующее уже известное соотношение (см. [3], стр. 501–502)

$$M(f)=f(\Delta)=\{(x_k)\in f\ |\ f\text{-}\lim|\Delta x_k|=0\}. \tag{5}$$

С другой стороны в статье [2] доказано, что

$$M(f)=[f]=\{(x_k)\ |\ \exists\,\ell,\ f\text{-}\lim|x_k-\ell|=0\}. \tag{6}$$

Множество $[f]$ – это множество всех сильно почти сходящихся последовательностей. Из равенств (5), (6) и из того, что $[f]\subset m$ следует, что

$$[f]=f(\Delta). \tag{7}$$

Возникает вопрос – при каких условиях имеет место формула

$$[c_\alpha]\cap m=[c_\alpha(\Delta)]\cap c_\alpha, \tag{8}$$

частным случаем которой является соотношение (7). Применяя методы, разработанные Хиллом и Следдом в статье [4] для изучения мультипликаторов множества $c_A\cap m$ (здесь A – поле суммируемости матричного метода A), нетрудно доказать (см. также [1]), что при $f\subset c_\alpha$ $(per.)$ и $a_{nik}\geqslant 0$

Имеет место равенство

$$(\not f, c_\alpha) \cap m = [c_\alpha] \cap m,$$

т.е. при $\not f \subset c_\alpha(per.)$ формула (8) справедлива.

Литература

I. Соомер В., Сильная суммируемость, заданная последовательностью матриц. Деп. в ВИНИТИ. 10.01.79, № 96-79.
2. Ching Chou, The multipliers of the space of almost convergent sequences. Ill. J. Math., 1972, 16, 687-694.
3. Duran, P., Infinite matrices and almost convergence. Math. Z., 1972, 128, 497-502.
4. Hill, J.D., Sledd, W.T., Approximation in bounded summability fields. Can. J. Math., 1968, 20, 410-415.
5. Mursaleen, On strongly $F_{\mathcal{B}}$-summable sequences. Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara, 1979, A-28, 13-21.
6. Stieglitz, M., Fastkonvergenz und Umfassendere durch Matrizenfolgen erklarte Konvergenzbegriffe. Stuttgart, 1971.

A SEQUENCE SPACE CONNECTED WITH STRONG SUMMABILITY

H. Paal, V. Soomer

Summary

Let $\alpha = (A_i)$ be a sequence of positive matrices $A = (a_{nik})$ and $p = (p_k)$ a sequence of positive real numbers. We define

$$[c_\alpha(\Delta)]^p = \left\{(x_k) \mid \lim_n \sum_k a_{nik} |\Delta x_k|^{p_k} = 0 \text{ uniformly in } i\right\}$$

It is easily verified that the set $[c_\alpha(\Delta)]^p$ is a linear paranormed space under certain conditions (theorem 1).

The spaces of almost convergent and α-summable sequences are denoted respectively by $\not f$ and c_α (see (1)). Let $\not f \subset c_\alpha$ (reg). Then it is shown that a bounded sequence $\varepsilon = (\varepsilon_k)$ is a multiplier from $\not f$ to c_α iff $\lim_n \sum_k a_{nik} |\Delta \varepsilon_k| = 0$ uniformly in i.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 133-139

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНЫЙ α-МЕТОД И СИСТЕМА α-НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ

Л. Лооне

Тартуский государственный университет

Пусть $\mathfrak{A}$ - система множеств натуральных чисел, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$1^0\ \operatorname{card} A \in \mathbb{N} \Rightarrow A \in \mathfrak{A}, \tag{1}$$

$$2^0\ A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}, \tag{2}$$

$$3^0\ B \in \mathfrak{A} \wedge A \subset B \Rightarrow A \in \mathfrak{A}, \tag{3}$$

4^0. $\mathbb{N} \notin \mathfrak{A}$, где $\mathbb{N}$ - множество натуральных чисел. (4)

Система $\mathfrak{A}$ называется нуль-классом (см.[5]). Следовательно, нуль-класс представляет собой систему множеств, дополнительные множества которых образуют в $\mathbb{N}$ более сильный фильтр, чем фильтр Фреше. Так как в случае фильтра Фреше в системе $\mathfrak{A}$ нет бесконечных множеств, то назовем такую систему тривиальной.

Пусть m - множество всех вещественных ограниченных последовательностей $x=(\xi_k)$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_k |\xi_k|$. Пространства сходящихся и сходящихся к нулю последовательностей обозначаются соответственно через c и c_0.

Пусть P_A - оператор выделения подпоследовательности, который "отбрасывает" все координаты последовательности, индексы которых входят в A. Значит, $P_A = (\delta_{j(n)k})$ где $\{j(n): n \in \mathbb{N}\} = \mathbb{N} \setminus A$ и $n \leq j(n) < j(n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Определение I.</u> Говорят, что $x \in m$ принадлежит классу ω_α, если найдется $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $P_A x \in c$. Множество $cl\, \omega_\alpha$ называется множеством $\mathfrak{A}$-сходящихся последовательностей и обозначается через c_α (здесь $cl\, \omega_\alpha$ - замыкание множества ω_α в пространстве m).

Аналогично определяются множества $\omega_{o\alpha}$ и $c_{o\alpha}$, т.е. $\omega_{o\alpha} = \{x \in m : \exists A \in \mathfrak{A}, P_A x \in c_0\}$ и $c_{o\alpha} = cl\, \omega_{o\alpha}$ (ср.[5]). Если система $\mathfrak{A}$ является тривиальной, то $c_\alpha = c$ и $c_{o\alpha} = c_0$.

Пусть m' - пространство всех линейных непрерывных функционалов на m и пусть K - слабо бикомпактное выпуклое множество в m'. Множество

$$K(x)=\{\langle x,f\rangle : f\in K\}$$

называется ядром (определенным множеством K) элемента x (см.[1]). Если ядро $K(x)$ содержит только один элемент, то говорят, что x сходится по ядру. Следовательно, x сходится по ядру тогда и только тогда, когда

$$\langle x,f\rangle = \langle x, g\rangle \quad \forall f,g\in K.$$

множеством K° определяющим ядро Кноппа, является множество всех $f\in m'$ которые удовлетворяют следующим условиям

$$1^\circ \ \langle e_k,f\rangle = 0, \quad \forall k\in \mathbb{N}, \tag{5}$$

$$2^\circ \ \langle e,f\rangle = 1, \tag{6}$$

$$3^\circ \ \|f\| = 1. \tag{7}$$

Здесь $e=(1,1,\dots,1,\dots)$ и $e_k=(\delta_{nk})$(см.[1], § 3). Рассмотрим множество $K\subset m'$ состоящее из всех таких $f\in m'$, которые кроме (6) и (7) удовлетворяют условию

$$4^\circ \ \langle e_A,f\rangle = 0, \ A\in \mathfrak{A}. \tag{8}$$

Здесь $e_A=(\delta_{Ak})$ где $\delta_{Ak}=\begin{cases}0, & k\notin A,\\ 1, & k\in A,\end{cases}$

т.е. e_A является характеристической последовательностью множества A. Поскольку $\{k\}\in\mathfrak{A}$ $\forall k\in\mathbb{N}$, то $K\subset K^\circ$.

<u>Теорема 1.</u> Множеством сходящихся элементов по ядру K является замкнутая линейная оболочка множества $\{e,e_A : A\in\mathfrak{A}\}$ а множеством сходящихся по ядру к нулю элементов является замкнутая линейная оболочка множества $\{e_A : A\in\mathfrak{A}\}$.

Доказательство. Это теорема является частным случаем теоремы 3 из статьи [1].

Пусть $Ker f=\{x\in m : \langle x,f\rangle=0\}$ и $Ker P_A=\{x\in m : P_A x=\theta\}$.

<u>Теорема 2.</u> Множество K имеет вид

$$K=\{f\in K^\circ : Ker f\supset Ker P_A \ \forall A\in\mathfrak{A}\}. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть

$$B=\{f\in K^\circ : Ker f\supset Ker P_A \ \forall A\in\mathfrak{A}\}.$$

Покажем, что $K=B$. а) По определению оператора P_A получаем $P_A e_A=\theta$. Значит, если $f\in B$, то $e_A\in Ker f$ $\forall A\in\mathfrak{A}$. Ввиду определения множества K получаем, что $f\in K$, т.е. $B\subset K$. б) Пусть $x=(\xi_k)$ — произвольный элемент из $Ker P_A$ и пусть A_1 — характеристическое множество элемента x. Пусть

$$m=\inf\{\xi_k : k\in A_1\} \quad \text{и} \quad M=\sup\{\xi_k : k\in A_1\}.$$

Значит

$$me_{A_1} \leq x \leq Me_{A_1}.$$

Поскольку $f \geqslant 0$ для любой $f \in K^o$, то

$$m\langle e_{A_1}, f\rangle \leq \langle x, f\rangle \leq M\langle e_{A_1}, f\rangle \quad \forall f \in K. \qquad (10)$$

Так как $A_1 \subset A$ то из (3) и (8) вытекает, что $\langle e_{A_1}, f\rangle = 0$. Следовательно, из (10) получаем, что $x \in Ker f$ $\forall f \in K$. Ввиду того, что A и x — произвольные элементы соответственно из $\mathfrak{A}$ и $Ker\, P_A$ верно включение $B \subset K$. Учитывая включение $B \supset K$ получаем, что $B = K$. Теорема доказана.

Теорема 3. Множество K является множеством, определяющим такое ядро в m, что пространство c_{oK} сходящихся по ядру к нулю элементов совпадает с $c_{o\mathfrak{A}}$.

Доказательство. а) Покажем, что $c_{o\mathfrak{A}} \subset c_{oK}$. Так как c_{oK} — замкнутое пространство, достаточно показать, что $\omega_{o\mathfrak{A}} \subset c_{oK}$. Пусть $x = (\xi_k) \in \omega_{o\mathfrak{A}}$, т.е. найдется $A \in \mathfrak{A}$ такое, что $P_A x \in c_o$. Пусть

$$z = \sum_{k \notin A} \xi_k e_k \qquad \text{и} \qquad y = x - z.$$

Поскольку $P_A x \in c_o$, то $z \in c_o$ и $y \in Ker\, P_A$. Так как $K \subset K^o$ то из $z \in c_o$ вытекает, что $\langle z, f\rangle = 0$ $\forall f \in K$. Из (9) получаем, что $\langle y, f\rangle = 0$ $\forall f \in K$. Учитывая линейность f получаем что $\langle x, f\rangle = 0$ $\forall f \in K$, т.е. $x \in c_{oK}$. Следовательно, имеет место включение $c_{o\mathfrak{A}} \subset c_{oK}$. б) По теореме 1 множеством c_{oK} является замкнутая линейная оболочка множества $\{e_A : A \in \mathfrak{A}\}$ в пространстве m. Так как $c_{o\mathfrak{A}}$ — замкнутое линейное подпространство пространства m, то включение $c_{oK} \subset c_{o\mathfrak{A}}$ вытекает из того, что $P_A e_A = \theta \in c_o$ $\forall A \in \mathfrak{A}$. Учитывая часть а) доказательства теоремы получаем, что $c_{oK} = c_{o\mathfrak{A}}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Пространством c_K сходящихся элементов по ядру K является множество $c_{\mathfrak{A}}$.

Доказательство вытекает из факта, что элемент x из c_K имеет вид

$$x = ae + x_o$$

где $a \in \mathbb{R}$ и $x_o \in c_{o\mathfrak{A}}$ (см. теорема 2).

Следствие 3.2. Замкнутая линейная оболочка множества $\{e_A : A \in \mathfrak{A}\}$ (соответственно $\{e, e_A : A \in \mathfrak{A}\}$ образует пространство $c_{o\mathfrak{A}}$ (соответственно $c_{\mathfrak{A}}$).

Следствие 3.3. Пространство $c_{o\mathfrak{A}}$ является изоморфным пространству c_o тогда и только тогда, когда система $\mathfrak{A}$ является тривиальной.

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ – тривиальная, то, по определению 1, $c_{0\mathfrak{A}} = c_0$. Если в $\mathfrak{A}$ имеется бесконечное множество A, то, по условию 3^0, каждое подмножество $B \subset A$ принадлежит в $\mathfrak{A}$.

Множество всех таких подмножеств имеет мощность континуума. Следовательно, множество $\{e_B : B \subset A\}$ имеет подмножество мощности континуума, элементы которого линейно независимы (см.[3] § 4). Ввиду следствия 3.2 пространство $c_{0\mathfrak{A}}$ не может быть изоморфным пространству c_0 имеющую счетный базис $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$.

Сильное $|\alpha|$ -суммирование и α-нулевые множества

Пусть $A_m = (a_{mnk})$ — бесконечные матрицы для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$. Говорят, что последовательность $x = (\xi_k)$ суммируема α-методом (A_m) к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_m \sum_k a_{mnk} \xi_k = a.$$

Ядром α-метода называется ядро, определяемое множеством

$$K_\alpha = \mathrm{clco} \cup \{{}^t B_q(K^0) : q \in Q\},$$

где Q – множество всесозможных операторов $q: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $B_q = (a_{mq(m)k})$. (Символ $\mathrm{clco}\, B$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества B). (см.[2]). Следовательно, ядро $K_\alpha(x)$ представляет собой замкнутую выпуклую оболочку множества всех предельных точек последовательностей

$$\Big(\sum_k a_{mq(m)k} \xi_k\Big)_{m=0}^\infty \quad \forall q \in Q.$$

Последовательностный α-метод (A_m) называется ядерно-регулярным, если

$$K_\alpha(x) \subset K^0(x) \quad \forall x \in m. \tag{11}$$

Требование (11) равносильно требованию, чтобы для любого $x \in m$ и для любого $q \in Q$ все предельные точки последовательности $\big(\sum_k a_{mq(m)k} \xi_k\big)_{m=0}^\infty$ были включены в замкнутую линейную оболочку всех предельных точек последовательности $x = (\xi_k)$.

Метод (A_m) ядерно-регулярен тогда и только тогда, когда

1^0 $\lim\limits_{m} \sup\limits_{n} |a_{mnk}| = 0 \quad \forall k = 0, 1, \ldots$ (12)

2^0 $\lim\limits_{m} \sum\limits_{k} a_{mnk} = 1$ равномерно относительно n, (13)

$$3^0\quad \lim_m \sup_n \sum_k |a_{mnk}| = 1. \tag{14}$$

(см.[2]).

<u>Определение 2.</u> Говорят, что последовательность $x=(\xi_k)$ сильно $|\alpha|$ -суммируема к числу a, если равномерно относительно n существует предел

$$\lim_m \sum_k |a_{mnk}(\xi_k - a)| = 0.$$

Пространство всех сильно $|\alpha|$ -суммируемых последовательностей обозначается через $c_{[|\alpha|]}$ и пространство всех сильно к нулю $|\alpha|$ -суммируемых последовательностей — через $c_{0[|\alpha|]}$.

<u>Определение 3.</u> Говорят, что множество A натуральных чиоел является α-нулевым, если

$$\lim_m \sup_n \sum_{k\in A} |a_{mnk}| = 0.$$

Легко увидеть, что в случае ядерно-регулярного α-метода (A_m) система $\mathcal{B}$ всех α-нульмножеств является нуль-классом. Ниже рассмотрим только ядерно-регулярные α-методы.

<u>Теорема 4.</u> Если $x \in c_{0[|\alpha|]}$ и последовательность $P_{\mathbb{N}\setminus A}\,x$ не имеет подпоследовательности, которая сходится к нулю, то множество A является α-нулевым.

Доказательство. Если $x=(\xi_k)\in c_{0[|\alpha|]}$, то

$$\lim_m \sup_n \sum_k |a_{mnk}\xi_k| = 0.$$

Из того, что $P_{\mathbb{N}\setminus A}\,x$ не имеет подпоследовательности, которая сходится к нулю вытекает, что найдутся $\alpha>0$ и $k_0>0$ такие, что $|\xi_k|>\alpha$ для любого $k\in A$ лишь только $k>k_0$. Следовательно, для любых $m,n\in\mathbb{N}$, имеет место

$$\sum_k |a_{mnk}\xi_k| = \sum_{k\in A} |a_{mnk}\xi_k| + \sum_{k\notin A} |a_{mnk}\xi_k| \geqslant$$

$$\geqslant \alpha \sum_{\substack{k\in A\\ k>k_0}} |a_{mnk}|.$$

Значит,

$$\lim_m \sup_n \sum_k |a_{mnk}\xi_k| \geqslant \lim_m \sup_n \alpha \sum_{\substack{k\in A\\ k>k_0}} |a_{mnk}|$$

Ввиду условий (14) и (12) получаем, что

$$\lim_m \sup_n \sum_{k\in A} |a_{mnk}| = 0,$$

т.е. множество A является α-нулевым.

Следствие 4.1. Для каждой сильно $|\alpha|$-суммируемой к нулю последовательности найдется подпоследовательность, которая сходится к нулю.

Доказательство. Этот факт вытекает непосредственно из теоремы 4, если иметь ввиду, что $\mathbb{N} \notin \alpha$.

Теорема 5. Пространство $c_{[|\alpha|]}$ совпадает с пространством всех $\mathcal{B}$ - сходящихся последовательностей $c_{\mathcal{B}}$, причем $c_{0[\alpha]} = c_{0\mathcal{B}}$.

Доказательство. По определению 2 сильно $|\alpha|$-сходящихся к числу a элемент x имеет вид $x = ae + x_0$, где $x_0 \in c_{0[|\alpha|]}$. Если $x \in c_{\mathcal{B}}$ то (по следствию 3.2) x имеет такой же вид, но с требованием $x_0 \in c_{0\alpha}$. Следовательно, для доказательства теоремы достаточны показать, что $c_{0[|\alpha|]} = c_{0\mathcal{B}}$. Включение $c_{0\mathcal{B}} \subset c_{0[|\alpha|]}$ вытекает из следствия 3.2, поскольку для любого $A \in \mathcal{B}$ имеет место $e_A \in \in c_{0[|\alpha|]}$. Применяя следствие 4.I получаем обратное включение, т.е. $c_{0\mathcal{B}} \supset c_{0[|\alpha|]}$. Действительно, если $x \in c_{0[|\alpha|]}$ то найдется $A \in \alpha$ такое, что $P_A x \in c_0$. Значит $x \in c_{0\mathcal{B}}$. Теорема доказана.

Аналогичный результат теоремы 5 доказана в [4].

Следствие 5.1. Два α-метода α_1 и α_2 имеют одну и ту же систему нуль-множеств тогда и только тогда, когда

$$c_{0[|\alpha_1|]} = c_{0[|\alpha_2|]}.$$

Пусть (b_{mnk}) — ядерно-регулярный α-метод α_2.

Следствие 5.2. Включение $c_{[|\alpha_1|]} \subset c_{[|\alpha_2|]}$ имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lim_{m} \sup_{n} \sum_{k \in A} |b_{mnk}| = 0$$

для любого α_1-нульмножества A.

Литература

I. Лооне Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 277,I25-I35.

2. Лооне Л., Ядро α-суммируемости Питерсена. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I978, 488, 46-5I.

3. Натансон И.П., Теория функций вещественной переменной: М. I974.

4. Соомер В., Последовательностные методы сильного суммирования и сходимость по нуль-классу. Уч. зап. Тартуск. ун-

та, I987, 770, I22-I28.
5. Freedman, A.R., Generalized limits and sequence spaces. Bull. London Math. Soc., 1981, 13, 224-228.

Поступила 15.05.1986

PETERSEN'S α-METHOD AND A CLASS OF α-ZERO SETS

L. Loone

Summary

In the present paper the relations between the conception of $\mathfrak{X}$-nearly convergency (see [5]) and the conception of the convergency by core (see [1]) are investigated. The relations between the $\mathfrak{X}$-nearly convergent sequences and the sequences which are strongly $|\alpha|$-convergent are also considered.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 140-148

ВКЛЮЧЕНИЕ СО СКОРОСТЬЮ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ В КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Х. Тюрнпу, А. Виркус

Тартуский государственный университет

1. Пусть $\lambda=(\lambda_k)$ с $0<\lambda_k\uparrow\infty$ заданная скорость. Рассмотрим последовательность $x=(\xi_k)$, для которой

$$\sum \xi_k^2\lambda_k^2<\infty, \tag{1}$$

т.е. $x\in\ell^2_\lambda$.
Пусть $\varphi=\{\varphi_k\}$ такая система интегрируемых на $e=[a,b]$ функции, что ряд

$$\sum \xi_k\varphi_k(t) \tag{2}$$

сходится по мере на e для каждого $x\in\ell^2$.
Тогда, как показал Никишин в работе [5], для каждого $\varepsilon>0$ найдутся измеримое подмножество $T_\varepsilon\subset e$ с $mes\,T_\varepsilon>b-a-\varepsilon$ и константа $N_\varepsilon>0$ такие, что

$$\int_{T_\varepsilon}\Big(\sum_{k=0}^{n}\xi_k\varphi_k(t)\Big)^2dt\le N_\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\xi_k^2. \tag{3}$$

Обозначим через A треугольный регулярный метод суммирования, заданный матрицей $A=(\alpha_{nk})$ преобразования ряда в последовательность.

Говорят, что ряд (2) для $x_0\in\ell^2_\lambda$ является почти всюду на e (п.в. на e) A-суммируемым со скоростью λ (короче, A^λ-суммируемым), если п.в. на e существует предел

$$\lim \lambda_n\Big(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}\xi_k^0\varphi_k(t)-f_0(t)\Big),$$

где f_0 — сумма ряда (2) для $x_0\in\ell^2_\lambda$. Если же п.в. на e

$$\sup \lambda_n\Big|\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}\xi_k^0\varphi_k(t)-f_0(t)\Big|<\infty,$$

то говорят, что ряд (2) для $x_0\in\ell^2_\lambda$ является п.в. на e A-ограниченным со скоростью λ (короче, A^λ-ограниченным).

Пусть B другой треугольный регулярный метод суммирования, заданный матрицей $B=(\beta_{nk})$ преобразования ряда в последовательность.

Говорят, что метод суммирования B включает метод суммирования A со скоростью λ $(A^\lambda \subset B^\lambda)$ в классе рядов (2), если из A^λ-суммируемости ряда (2) для $x_0 \in \ell^2_\lambda$ п.в. на $e_0 \subset e$ вытекает его B^λ-суммируемость п.в. на e_0.

Если в классе рядов (2) $A^\lambda \subset B^\lambda$ и $B^\lambda \subset A^\lambda$, то говорят что методы A и B эквивалентны в классе рядов (2) со скоростью и пишут $A^\lambda \sim B^\lambda$.

Включение методов суммирования (без скоростей) в рассматриваемом классе хорошо исследовано. Обзор этих работ можно найти в статье [6]. О включении $A^\lambda \subset B^\lambda$ в классе рядов (2) имеется сравнительно мало работ.

В настоящей заметке мы исследуем включение методов суммирования со скоростью в классе рядов (2) при помощи понятия сильной ограниченности со скоростью.

Говорят, что ряд (2) для $x_0 \in \ell^2_\lambda$ является п.в. на e сильно BA-ограниченным со скоростью λ (короче, $[BA]^\lambda$-ограниченным), если п.в. на e

$$\sup \lambda_n^2 \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| \left(\sum_{v=0}^{k} \alpha_{kv} \xi_v^0 \varphi_v(t) - f_0(t) \right)^2 < \infty,$$

где $b_{nk} = \beta_{nk} - \beta_{n,k+1}$.

Обозначая через E — метод сходимости,

$$A_{kv} = \alpha_{kv} - 1$$

и

$$b_k(\lambda) = \sup_{n \geq k} \lambda_n^2 |b_{nk}|,$$

сформулируем и докажем следующее утверждение.

<u>Теорема I.</u> Если

$$\sum_{k=v} b_k(\lambda) A_{kv}^2 = O(\lambda_v^2), \tag{4}$$

то из $[BA]^\lambda$-ограниченности п.в. на e_0 ряда (2) для $x_0 \in \ell^2_\lambda$ вытекает его $[BE]^\lambda$-ограниченность п.в. на e_0.

Предположим, что метод B удовлетворяет следующему условию

$$\lambda_n \left(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} - 1 \right) = O(1). \tag{5}$$

Тогда, в силу теоремы I и неравенства

$$\lambda_n \left| \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \sum_{v=0}^{k} \xi_v^0 \varphi_v(t) - f_0(t) \right| \leq$$

$$\leq O(1) \lambda_n \left\{ \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| \left(\sum_{v=0}^{k} \xi_v^0 \varphi_v(t) - f_0(t) \right)^2 \right\}^{1/2} +$$

$$+ |f_0(t)| \lambda_n \left| \sum_{k=0}^{n} b_{nk} - 1 \right|, \tag{6}$$

имеет место

Следствие I. Пусть метод B удовлетворяет условию (5) и выполнено условие (4). Тогда из $[BA]^{\lambda}$-ограниченности п.в. на e_0 ряда (2) для $x_0 \in \ell^2_{\lambda}$ вытекает его B^{λ}-ограниченность п.в. на e_0

Кроме того, если имеет место условие

$$\lambda_n^2 \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| / \lambda_k^2 = O(1), \tag{7}$$

то

$$\sup \lambda_n^2 \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| \Big(\sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{k\nu} \xi_\nu^0 \varphi_\nu(t) - f_0(t) \Big)^2 \le$$

$$\le O(1) \sup \lambda_n^2 \Big(\sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{k\nu} \xi_\nu^0 \varphi_\nu(t) - f_0(t) \Big)^2$$

и, в силу следствия I, имеет место

Следствие 2. Если выполнены условия (4), (5) и (7), то из A^{λ}-ограниченности п.в. на e_0 ряда (2) для $x_0 \in \ell^2_{\lambda}$ вытекает его B^{λ}-ограниченность п.в. на e_0

Говорят, что регулярный метод B сохраняет λ-сходимость, если существует предел

$$\lim \lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} c_k - c \Big)$$

для тех сходящихся последовательностей (c_k), для которых существует предел

$$\lim \lambda_k (c_k - c),$$

где

$$\lim c_k = c .$$

Если же

$$\sup \lambda_n \Big| \sum_{k=0}^{n} b_{nk} c_k - c \Big| < \infty$$

для сходящихся последовательностей (c_k), удовлетворяющих условию $\sup \lambda_k |c_k - c| < \infty$,

то говорят, что метод B сохраняет λ-ограниченность.

Оказывается (см. [2] стр. 139), что если метод B сохраняет λ^2-ограниченность, то имеет место условие (7). Следовательно, в случае $A=B$ из теоремы I в силу неравенства (6) получаем

Следствие 3. Если метод B сохраняет λ^2-ограниченность и имеет место неравенство

$$\sum_{k=v} b_k(\lambda) B_{kv}^2 = O(\lambda_v^2),$$

то из B^λ-ограниченности п.в. на e_0 ряда (2) для $x \in \ell_\lambda^2$ вытекает его $[BE]^\lambda$-ограниченность п.в. на e_0.

Из следствия 3 мы получаем некоторые частные результаты работы [4].

Мы докажем, что имеет место

Теорема 2. Пусть метод A сохраняет λ-сходимость, а метод B сохраняет λ_n^2-ограниченность и существует предел

$$\lim \lambda_n \sum_{k=0} b_{nk}/\lambda_k . \tag{8}$$

Если выполнено условие (4), то $A^\lambda \subset B^\lambda$ в классе рядов (I).

В качестве примера рассмотрим метод Рисса P^r целочисленного порядка r, заданный треугольной матрицей (α_{nk}^r) для преобразования ряда в последовательность, где

$$\alpha_{nk}^r = (1 - P_{k-1}/P_n)^r$$

и $0 < P_n \nearrow \infty$.

Положим в условии (4) $A = P^s$ и $B = P^r$. В этом случае

$$b_k(\lambda) = \sup_{n \geq k} \lambda_n^2 \Big| \sum_{i=1}^{r} C_i^r (-1)^i P_n^{-i} (P_k^i - P_{k-1}^i) \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{n \geq k} \lambda_n^2 \sum_{i=1}^{r} C_i^r P_n^{-i} p_k \sum_{j=0}^{i-1} P_{k-1}^j P_k^{i-j-1} \leq$$

$$\leq \sup_{n \geq k} \frac{\lambda_n^2 p_k}{P_n} \frac{P_k^{i-1}}{P_n^{i-1}} r 2^r \leq 2^{2r+1} \sup_{n \geq k} \frac{\lambda_n^2 p_k}{P_n},$$

где $p_k = P_k - P_{k-1}$.

С другой стороны, если метод P^1 сохраняет λ^2-ограниченность, то по результатам [2] (см. стр. I40) выполняется

$$\frac{\lambda_n^2}{P_n} = O(1) \frac{\lambda_k^2}{P_k} \tag{9}$$

для $k \leq n$.

Следовательно, в этом случае

$$b_k(\lambda) = O(1) \frac{\lambda_k^2 p_k}{P_k} .$$

Кроме того, так как

$$|A_{kv}| \leq \sum_{i=1}^{s} C_i^s P_k^{-i} P_{v-1}^i ,$$

то условие (4) выполнено, если

$$A_\nu = \lambda_\nu^{-2} \sum_{k=\nu} \lambda_k^2 p_k P_k^{-1} \sum_{i=1}^{s} C_s^i P_k^{-i} P_{\nu-1}^{i} \sum_{j=1}^{s} C_s^j P_k^{-j} P_{\nu-1}^{j} = O(1).$$

Но в силу монотонности последовательности (P_k) имеем

$$A_\nu \le \sum_{i,j=1}^{s} C_s^i C_s^j P_{\nu-1}^{i+j} \lambda_\nu^{-2} \sum_{k=\nu} \lambda_k^2 p_k P_k^{-i-j-1} \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{s} C_s^i C_s^j P_{\nu-1}^{i+j} \lambda_\nu^{-2} P_\nu^{-i-j+2} \sum_{k=\nu} \lambda_k^2 p_k P_k^{-3}.$$

Учитывая условие (9), получаем окончательно

$$A_\nu \le \sum_{i,j=1}^{s} C_s^i C_s^j P_\nu^2 \lambda_\nu^{-2} \lambda_\nu^2 P_\nu^{-1} \sum_{k=\nu} \left(P_{k-1}^{-1} - P_k^{-1}\right) \le$$

$$\le \sum_{i,j=1}^{s} C_s^i C_s^j = 2^{2s}.$$

Итак, условие (4) имеет место и из теоремы 2, в силу произвольности натуральных чисел r и s, получаем

Следствие 4. Если метод P^1 сохраняет λ^2-ограниченность, то методы Рисса различных целочисленных порядков эквивалентны со скоростью λ в классе рядов (2).

2. Для доказательства теорем нам нужны следующие вспомогательные результаты:

Лемма I. Пусть A_n — непрерывные линейные операторы из пространства ℓ^2 в пространство TM_e всех измеримых по Лебегу конечных почти всюду на e функций. Для того, чтобы почти всюду на e существовал предел

$$\lim A_n x \tag{I0}$$

для всех $x \in \ell^2$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий

I^0 предел (I0) существует почти всюду на e для всех x из некоторого тотального в ℓ^2 множества,

2^0 функция

$$\sup |(A_n x)(t)| \tag{II}$$

конечна почти всюду на e для всех $x \in \ell^2$.

Доказательство вытекает из теоремы Банаха (см. [I], стр. 36I).

Лемма 2. Для того, чтобы последовательность измеримых почти всюду конечных на e функций (f_n) удовлетворяла почти всюду на e условию

$$\sup|f_n(t)|<\infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon>0$ нашлись измеримое подмножество T_ε с $\operatorname{mes} T_\varepsilon > b-a-\varepsilon$ и постоянная $M_\varepsilon>0$, удовлетворяющие неравенству

$$\left|\int_{T_\varepsilon}\sum_{n=0}^{m}\chi^{\varepsilon}_{mn}(t)\,f_n(t)\,dt\right|\le M_\varepsilon$$

равномерно относительно всех разбиений $\mathfrak{M}^\varepsilon=\{\mathfrak{M}^\varepsilon_{mn}\}$ множества T_ε на произвольное число $m+1$ измеримых подмножеств $\mathfrak{M}^\varepsilon_{mn}$ с характеристическими функциями χ^ε_{mn}.

Доказательство см. [7] (стр. 142).

Доказательство теоремы 1. Положим в лемме 2

$$f_n(t)=\lambda_n^2\sum_{k=0}^{n}|b_{nk}|\Big(\sum_{\nu=0}^{k}\xi^0_\nu\varphi_\nu(t)-f_0(t)\Big)^2.$$

Тогда условие (12) принимает вид

$$D_m=\int_{T_\varepsilon}\sum_{n=0}^{m}\chi^\varepsilon_{mn}(t)\lambda_n^2\sum_{k=0}^{n}|b_{nk}|\Big(\sum_{\nu=0}^{k}\xi^0_\nu\varphi_\nu(t)-f_0(t)\Big)^2dt\le M_\varepsilon .$$

Но

$$D_m\le 2E_m+2G_m,$$

где

$$E_m=\int_{T_\varepsilon}\sum_{n=0}^{m}\chi^\varepsilon_{mn}(t)\lambda_n^2\sum_{k=0}^{n}|b_{nk}|\Big(\sum_{\nu=0}^{k}\alpha_{k\nu}\,\xi^0_\nu\varphi_\nu(t)-f_0(t)\Big)^2dt$$

и

$$G_m=\int_{T_\varepsilon}\sum_{n=0}^{m}\chi^\varepsilon_{mn}(t)\lambda_n^2\sum_{k=0}^{n}|b_{nk}|\Big(\sum_{\nu=0}^{k}A_{k\nu}\,\xi^0_\nu\varphi_\nu(t)\Big)^2dt.$$

Так как ряд (2) для $x_0\in l^2_\lambda$ является п.в. на e_0 $[B\lambda]^\lambda$-ограниченным, то, ввиду условия (12), существует постоянная $L_\varepsilon>0$ такая, что

$$E_m\le L_\varepsilon .$$

Далее, в силу неравенства (3), имеем

$$G_m=\int_{T_\varepsilon}\sum_{k=0}^{m}\sum_{n=k}^{m}\chi^\varepsilon_{mn}(t)\lambda_n^2|b_{nk}|\Big(\sum_{\nu=0}^{k}A_{k\nu}\,\xi^0_\nu\,\varphi_\nu(t)\Big)^2dt\le$$

$$\le N_\varepsilon\sum_{k=0}^{m}b_k(\lambda)\sum_{\nu=0}^{k}A^2_{k\nu}\,\xi^{02}_\nu=$$

$$=N_\varepsilon\sum_{\nu=0}^{m}\xi^{02}_\nu\lambda^2_\nu\lambda^{-2}_\nu\sum_{k=\nu}A^2_{k\nu}b_k(\lambda)=O(1)\,N_\varepsilon . \quad (13)$$

Итак, $D_m=O_\varepsilon(1)$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть ряд (2) для $x_0 \in \ell^2_\lambda$ является п.в. на e_0 A^λ-суммируемым, т.е. п.в. на e_0 существует предел

$$\lim A^0_k(t),$$

где

$$A^0_k(t) = \lambda_k \Big(\sum_{v=0}^{k} \alpha_{kv} \xi^0_v \varphi_v(t) - f_0(t) \Big).$$

Так как метод B сохраняет λ^2-ограниченность и существует предел (8), то, согласно [2,3](см. стр. I38 и I55), метод B сохраняет λ-сходимость, т.е. п.в. на e_0 существуют пределы

$$\lim \lambda_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} A^0_k(t)$$

и

$$\lim \lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} - 1 \Big) = 0.$$

Итак, утверждение теоремы 2 вытекает из равенства

$$\lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} \sum_{v=0}^{k} \xi^0_v \varphi_v(t) - f_0(t) \Big) = f_0(t)\, \lambda_n \Big(\sum_{k=0}^{n} b_{nk} - 1 \Big) +$$

$$+ \lambda_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} A^0_k(t) + \lambda_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \sum_{v=0}^{k} A_{kv} \xi^0_v \varphi_v(t),$$

если мы докажем, что п.в. на e_0 существует предел

$$\lim B_n(x_0, t),$$

где

$$B_n(z_0, t) = \lambda_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \sum_{v=0}^{k} A_{kv} \lambda_v^{-1} \xi^0_v \varphi_v(t) \qquad \text{(I4)}$$

и $\xi^0_v = \xi^0_v \lambda_v$.

Определим непрерывные и линейные операторы B_n из ℓ^2 в TM_e равенством (I4).

Тогда из неравенства

$$|B_n(z,t)|^2 \le \lambda_n^2 \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}| \Big(\sum_{v=0}^{k} A_{kv} \lambda_v^{-1} \xi_v \varphi_v(t) \Big)^2 \sum_{k=0}^{n} |b_{nk}|,$$

в силу регулярности метода B, леммы 2 и неравенства (I3) получаем, что условие 2^0 леммы I имеет место.

Далее, так как метод A сохраняет λ-сходимость, то для каждого натурального числа i существует предел

$$\lim_{k} \lambda_k A_{ki}. \qquad \text{(I5)}$$

Действительно, так как предел

$$\lim \lambda_k \sum_{v=0}^{k} (\alpha_{kv} - 1) u_v =$$

$$= \lim \lambda_k \sum_{\nu=k+1}^{\infty} u_\nu - \lim \lambda_k \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu - \sum_{\nu=0}^{k} \alpha_{k\nu} u_\nu \right)$$

существует для каждого λ-сходящегося ряда $\sum u_\nu$ (см. определение из [2] стр. 136), то при $u_\nu = \delta_{\nu i}$ получаем существование предела (15). Учитывая, что метод B сохраняет λ-сходимость и

$$B_n(e_i, t) = \varphi_i(t) \lambda_n \sum_{k=0}^{n} b_{nk} A_{ki},$$

мы заключаем, что п.в. на e_0 существует предел

$$\lim B_n(e_i, t).$$

Так как множество $\{ e_i \}$ тотально в ℓ^2, то условие 1^0 леммы 1 имеет место. Теорема 2 доказана.

Литература

1. Данфорд Н., Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория. Москва, 1962, -
2. Кангро Г., Множители суммируемости для рядов λ-ограниченных методами Риса и Чезаро. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 136-154.
3. Кангро Г., Тауберова теорема с остаточным членом для метода Риса. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 277, 155-160.
4. Кангро Г., Сильная суммируемость ортогональных рядов со скоростью. Изв. АН Эст.ССР. Физ. Матем. 1979, 28, № 1, 1-8.
5. Никишин Е.М., О системах сходимости по мере для ℓ_2. Матем. заметки, 1973, т. 13, вып. 3, 337-340.
6. Зиза О.А., Суммирование ортогональных рядов методами (φ, λ). Матем. заметки т. 25, вып. 7, 177-197.
7. Тюрнпу Х., О сходимости функциональных рядов почти всюду. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1971, 281, 140-151.

Поступило 10.09.86

INCLUSION OF METHODS OF SUMMATION WITH RATES IN A CLASS OF FUNCTIONAL SERIES

H.Türnpu and A.Virkus

Summary

Let $\lambda=(\lambda_k)$, where $0<\lambda_k\nearrow\infty$ be a rate and $x=(\xi_k)$ be a sequence such that the series (1) is convergent, i.e $x\in\ell^2_\lambda$.

We consider functional series of the form (2) in the assumption that they are convergent in measure on the interval $e=[a,b]$ for all $x\in\ell^2$.

Let $A=(\alpha_{nk})$ and $B=(\beta_{nk})$ be regular triangular matrix methods of summation transforming series into sequences.

The series (2) is said to be almost everywhere on e (a.e. on e) A^λ-summable for $x_0\in\ell^2_\lambda$ if there exists a.e. on e

$$\lim \lambda_n\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_{nk}\xi_k^0\varphi_k(t)-f_0(t)\right),$$

where f_0 is the sum of (2) for $x_0\in\ell^2_\lambda$.

We say that the method of summation B includes the method of summation A with a rate λ $(A^\lambda\subset B^\lambda)$ in the class of series (2) if from the A^λ-summabylity a.e. on $e_0\subset e$ for an arbitrary $x_0\in\ell^2_\lambda$ follows B^λ-summability a.e. on e_0 for x_0.

The series (2) is said to be $[BA]^\lambda$-bounded a.e. on e for $x_0\in\ell^2_\lambda$ if

$$\sup \lambda_n^2\sum_{k=0}^{n}|b_{nk}|\left(\sum_{v=0}^{k}\alpha_{kv}\xi_v^0\varphi_v(t)-f_0(t)\right)^2<\infty$$

is true a.e. on e.

In the paper two following theorems are proved.

Theorem 1. If condition (4) is valid, then from the $[BA]^\lambda$-boundedness of the series (2) a.e. on $e_0\subset e$ for $x_0\in\ell^2_\lambda$ follows the $[BE]^\lambda$-boundness a.e. on e_0 for this series.

Theorem 2. Let a method A preserves the λ-convergence and the method B preserves λ^2-boundedness. If conditions (4) is fulfilled and limit (8) exists then $A^\lambda\subset B^\lambda$ in the class of series (2)

A corollary on the equivalence of Riesz's methods of summation is obtained.

Tartu Ülik. Toimetised. Уч. зап.
Тартуск. ун-та, 1987, 770, 149-157

О СУММИРУЕМОСТИ СО СКОРОСТЬЮ ОБОБЩЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю. Ламп, А. Тали

Таллинский политехнический институт
Таллинский педагогический институт

1. Пусть X и Y – банаховы пространства над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ (или над $\mathbb{R}$), а $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ – направленные[1] множества. Рассмотрим обобщенные последовательности $x=\{\xi_u\}$ с $\xi_u \in X$ и $u \in \mathcal{U}$. Заметим, что обобщенными последовательностями являются, например, обыкновенные последовательности $x=\{\xi_n\}$ (где $u=n$ и $\mathcal{U}=\mathbb{N}$), двойные последовательности $x=\{\xi_{mn}\}$ (где $u=(m,n)$ и $\mathcal{U}=\mathbb{N}^2$) и функции $x=\xi(u)$ с $u\in[0;\infty[=\mathcal{U}$. Воспользуемся следующими обозначениями для множеств обобщенных последовательностей x (см. [2]):

$c(\mathcal{U},X)$ – класс сходящихся обобщенных последовательностей,

$c_0(\mathcal{U},X)$ – класс обобщенных последовательностей, сходящихся к нулю $\theta\in X$,

$m(\mathcal{U},X)$ – класс ограниченных обобщенных последовательностей,

$mc(\mathcal{U},X)= m(\mathcal{U},X)\cap c(\mathcal{U},X)$,

$mc_0(\mathcal{U},X)= m(\mathcal{U},X)\cap c_0(\mathcal{U},X)$,

$rc(\mathcal{U},X)$ – класс регулярно сходящихся обобщенных последовательностей ($x\in m(\mathcal{U},X)$ и для каждого бесконечного подмножества $\mathcal{U}'$ из $\mathcal{U}$, направленному по такому же правилу как и $\mathcal{U}$ существует предел[2] $\lim_{\mathcal{U}'}\xi_u=\xi\in X$),

---

[1] Непустое множество $\mathcal{U}$ называется направленным по отношению $>$, если пары его элементов u_1 и u_2, для которых выполнено отношение $u_1>u_2$, удовлетворяют условиям:

а) если $u_1>u_2$ и $u_2>u_3$, то $u_1>u_3$,

б) для всяких двух элементов $u_1, u_2\in\mathcal{U}$ существует такой элемент $u_3\in\mathcal{U}$, что $u_3>u_1$ и $u_3>u_2$ (см, например, [2]).

[2] Символ $\lim_u$ означает $\lim_{u\in\mathcal{U}}$, а символ $\sup_u$ – $\sup_{u\in\mathcal{U}}$.

$rc_0(\mathcal{U},*)$ – класс обобщенных последовательностей, регулярно сходящихся к нулю $\theta \in X$.

Пусть, далее $\lambda = (\lambda_u)$ – обобщенная последовательность с $0 < \alpha_0 < \lambda_u \uparrow$, где α_0 – некоторое фиксированное число. Приведем два определения.

Определение I. Обобщенная последовательность X называется сходящейся со скоростью λ (λ – сходящейся, если[3] $X \in c(\mathcal{U},*)$ и $\lambda(X-\bar{\xi}) = \{\lambda_u(\xi_u - \xi)\} \in c(\mathcal{U},*)$, где $\xi = \lim_u \xi_u$. Обобщенная последовательность X называется λ – ограниченной если $X \in c(\mathcal{U},*)$ и $\lambda(X-\bar{\xi}) \in m(\mathcal{U},*)$ (см. [3]).

Определение 2. Будем говорить, что обобщенная последовательность X является регулярно сходящейся со скоростью λ (λ – регулярно сходящейся), если $X \in rc(\mathcal{U},*)$ и $\lambda(X-\bar{\xi}) \in rc(\mathcal{U},*)$, где $\xi = \lim_u \xi_u$.

Дополним теперь наш список обозначений еще некоторыми символами:

$c^\lambda(\mathcal{U},*)$ – класс λ – сходящихся обобщенных последовательностей

$m^\lambda(\mathcal{U},*)$ – класс λ – ограниченных обобщенных последовательностей,

$mc^\lambda(\mathcal{U},*) = m^\lambda(\mathcal{U},*) \cap c^\lambda(\mathcal{U},*)$

$rc^\lambda(\mathcal{U},*)$ – класс λ – регулярно сходящихся обобщенных последовательностей.

Заметим, что $m^\lambda(\mathcal{U},*) \subset mc(\mathcal{U},*)$, $mc^\lambda(\mathcal{U},*) \subset mc(\mathcal{U},*)$, $rc^\lambda(\mathcal{U},*) \subset rc(\mathcal{U},*)$ и $rc^\lambda(\mathcal{U},*) \subset mc^\lambda(\mathcal{U},*)$. В частности, если обобщенная последовательность $\lambda = \{\lambda_u\}$ ограничена (не ограничивая общности, можем тогда считать, что $\lambda_u = 1$ при любом $u \in \mathcal{U}$), то мы получаем равенства $m^\lambda(\mathcal{U},*) = mc^\lambda(\mathcal{U},*) = mc(\mathcal{U},*)$ и $rc^\lambda(\mathcal{U},*) = rc(\mathcal{U},*)$.

Будем далее считать классы $m(\mathcal{U},*)$, $mc(\mathcal{U},*)$, $mc_0(\mathcal{U},*)$, $rc(\mathcal{U},*)$ и $rc_0(\mathcal{U},*)$ банаховыми пространствами с нормой $\|X\| = \sup_u \|\xi_u\|$ (см. 2).

---

[3] Будем в дальнейшем под $\bar{\xi}$ понимать обобщенную последовательность $\bar{\xi} = \{\xi_u\}$ с $\xi_u = \xi$ при любом $u \in \mathcal{U}$.

2. Пусть $A_v\ (v \in \mathcal{V})$ – некоторые непрерывные операторы, действующие из пространства $\tau(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$ в $\mathcal{Y}$, где $\tau(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$ – одно из пространств $mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$, $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$, $c^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$. Тогда преобразование $A=\{A_v\}$ переводит обобщенную последовательность $x \in \tau(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$ в последовательность $\{A_v x\}$, где $A_v x \in \mathcal{Y}$. Введем еще оператор φ_E, где $E \subset \mathcal{U}$, определенный для всех обобщенных последовательностей $x=\{\xi_u\}$ при помощи соотношения $\varphi_E\, x=\{\xi'_u\}$ с

$$\xi'_u=\begin{cases} \xi_u, & \text{если } u \in E, \\ \theta \in \mathfrak{X}, & \text{если } u \in \mathcal{U} \setminus E. \end{cases}$$

Докажем теперь три теоремы[4], обобщающие, с одной стороны, теорему I работы [I], а с другой – теорему 5 работы [2]. Сформулируем сначала теорему 5 работы [2].

<u>Теорема А</u>. Преобразование A является преобразованием типа $mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X}) \to mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда

I° для каждого $\xi \in \mathfrak{X}$ существует $\lim_v A_v \bar{\xi}$,

2° для каждого $x \in mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$ и неконфинального[5] в $\mathcal{U}$ множества E существует[6] $\lim_v (A_v \circ \varphi_E) x$,

3° $\sup_v \|A_v\|_{mc} < \infty$.

<u>Примечание I</u>. Заметим, что необходимые и достаточные условия для того, чтобы A была преобразованием типа $mc_0(\mathcal{U}, \mathfrak{X}) \to mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ мы получим из условий теоремы А, отбрасывая условие I° и, заменяя в условиях 2° и 3° символ mc на mc_0.

<u>Теорема I</u>. Преобразование A является преобразованием типа $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X}) \to mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда

I° $A\bar{\xi} \in mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathfrak{X}$,

2° $(A \circ \lambda^{-1})\bar{\xi} \in mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ для каждого[7] $\xi \in \mathfrak{X}$,

3° $(A \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_E) x \in mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ для каждого $x \in mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$ и неконфинального в $\mathcal{U}$ множества E.

---

[4] Теоремы I и 2 сформулированы (без доказательств) в работе [3].

[5] Подмножество E направленного множества $\mathcal{U}$ называется неконфинальным в $\mathcal{U}$, если для любого $u \in \mathcal{U}$ существует $u' \in E$ такой, что $u' > u$.

[6] Операторы A_v применяются здесь в пространстве $mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$, поэтому их нормы снабжаются индексом mc.

$4^0\ \sup_v \|A_v \circ \lambda^{-1}\|_{mc} < \infty$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Условия 1^0–3^0 выполнены так как $\bar{\xi} \in mc^\lambda(\mathcal{U},\mathcal{X}), \lambda^{-1}\bar{\xi} \in mc^\lambda(\mathcal{U},\mathcal{X})$ при любом $\xi \in \mathcal{X}$, а также $(\lambda^{-1} \circ \varphi_E)x \in mc(\mathcal{U},\mathcal{X})$ при любом $x \in mc(\mathcal{U},\mathcal{X})$ и неконфинальном в $\mathcal{U}$ множестве E. Для каждого $x \in mc^\lambda(\mathcal{U},\mathcal{X})$ с $\lim_u \xi_u = \xi$, в силу линейности преобразования A, имеет при любом $x \in mc^\lambda(\mathcal{U},\mathcal{X})$ место соотношение

$$Ax = (A \circ \lambda^{-1})z + A\bar{\xi}, \qquad (1)$$

где $z = \lambda(x - \bar{\xi}) \in mc(\mathcal{U},\mathcal{X})$. Поскольку также $Ax \in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ и $A\bar{\xi} \in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$, то из соотношения (I) следует, что $(A \circ \lambda^{-1})z \in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ при любом $z \in mc(\mathcal{U},\mathcal{X})$. Значит, $A \circ \lambda^{-1}$ является преобразованием типа $mc(\mathcal{U},\mathcal{X}) \to mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ и, в силу теоремы А, примененной к преобразованию $A \circ \lambda^{-1}$, выполнено и условие 4^0 нашей теоремы. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Из условий 2^0–4^0, в силу теоремы А, следует, что $A \circ \lambda^{-1}$ является преобразованием типа $mc(\mathcal{U},\mathcal{X}) \to mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$. Учитывая еще условие 1^0, мы заключаем из соотношения (I), что A – преобразование типа $mc^\lambda(\mathcal{U},\mathcal{X}) \to mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$. Теорема доказана.

Рассматривая наряду со скоростью $\lambda = \{\lambda_u\}$ еще другую скорость $\mu = \{\mu_v\}$, где $v \in \mathcal{V}$ и $0 < \mu_v \nearrow$, мы докажем более общую теорему.

Теорема 2. Преобразование A является преобразованием типа $mc^\lambda(\mathcal{U},\mathcal{X}) \to mc^\mu(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда

$1^0\ A\bar{\xi} \in mc^\mu(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathcal{X}$,

$2^0\ (A \circ \lambda^{-1})\bar{\xi} \in mc^\mu(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathcal{X}$,

$3^0\ (A \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_E)x \in mc^\mu(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ для каждого $x \in mc(\mathcal{U},\mathcal{X})$ и неконфинального в $\mathcal{U}$ множестве E,

$4^0\ \sup_v \|A_v \circ \lambda^{-1}\|_{mc} < \infty$,

$5^0\ \sup_v \mu_v \|(A_v - \lim_v A_v) \circ \lambda^{-1}\|_{mc_0} < \infty$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Выполнение условий 1^0–3^0 следует аналогично доказательству теоремы I. Поскольку $mc^\mu(\mathcal{V},\mathcal{Y}) \subset mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$, то выполнены условия теоремы I, среди них и условие 4^0 нашей теоремы. Учитывая со-

---

[7] $(A \circ \lambda^{-1})x = A(\lambda^{-1}x)$, $\lambda^{-1}x = \{\xi_u/\lambda_u\}$.

отношение (I) и линейность преобразования A, мы получаем для любого $x\in mc^{\lambda}(\mathcal{U},\mathcal{X})$, что

$$A_v x = A_v \bar{\xi} + (A_v\circ\lambda^{-1})\bar{\nu} + (A_v\circ\lambda^{-1})(x-\bar{\nu}), \tag{2}$$

где $\nu=\lim_u \lambda_u(\xi_u-\xi)$, $\bar{\nu}=\{\nu_u\}$, $\nu_u=\nu$ при любом $u\in\mathcal{U}$. При помощи предельного перехода мы выводим из соотношения (2), что

$$\eta=\lim_v A_v x=\lim_v A_v\bar{\xi}+ \\ +\lim_v(A_v\circ\lambda^{-1})\bar{\nu}+\lim_v(A_v\circ\lambda^{-1})(x-\bar{\nu}). \tag{3}$$

Вычитая из соотношения (2) соотношение (3), а затем умножая на μ_v, мы получаем:

$$\mu_v(A_v x-\eta)=\mu_v[A_v\bar{\xi}+(A_v\circ\lambda^{-1})\bar{\nu}+(A_v\circ\lambda^{-1})(x-\bar{\nu})- \\ -\lim_v A_v\bar{\xi}-\lim_v(A_v\circ\lambda^{-1})\bar{\nu}- \\ -\lim_v(A_v\circ\lambda^{-1})(x-\bar{\nu})].$$

Перегруппируя слагаемые в правой части последнего равенства, мы выводим для любого $x\in mc^{\lambda}(\mathcal{U},\mathcal{X})$ соотношение

$$\mu_v(A_v x-\eta)=\mu_v(A_v-\lim_v A_v)\bar{\xi}+ \\ +\mu_v(A_v\circ\lambda^{-1}-\lim_v A_v\circ\lambda^{-1})\bar{\nu}+ \\ +\mu_v[(A_v-\lim_v A_v)\circ\lambda^{-1}](x-\bar{\nu}). \tag{4}$$

Поскольку

$$\{\mu_v(A_v x-\eta)\}\in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y}), \tag{5}$$

а, в силу условий I$^{\circ}$ и 2°, также

$$\{\mu_v(A_v-\lim_v A_v)\}\in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y}) \tag{6}$$

и

$$\{\mu_v(A_v\circ\lambda^{-1}-\lim_v A_v\circ\lambda^{-1})\bar{\nu}\}\in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y}), \tag{7}$$

то из соотношения (4) следует, что

$$\{\mu_v[(A_v-\lim_v A_v)\circ\lambda^{-1}](x-\bar{\nu})\}\in mc(\mathcal{V},\mathcal{Y}) \tag{8}$$

при любом $x\in mc^{\lambda}(\mathcal{U},\mathcal{X})$. Значит, преобразование $\{\mu_v(A_v-\lim_v A_v)\lambda^{-1}\}$ является преобразованием типа $mc_0(\mathcal{U},\mathcal{X})\to mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$ и, в силу примечания I выполнено условие 5°. Необходимость доказана.

<u>Достаточность</u>. При выполнении условий I$^{\circ}$ – – 5° выполнены также условия теоремы I и оператор A является преобразованием типа $mc^{\lambda}(\mathcal{U},\mathcal{X})\to mc(\mathcal{V},\mathcal{Y})$. Остановимся еще раз на соотношении (4), которое имеет место для любых $x\in mc(\mathcal{U},\mathcal{X})$. Поскольку, в силу условий I$^{\circ}$– 2°, выполнены условия (6) и (7), а, в силу условий 3° и 5°, выполнено ус-

ловие (3), то из соотношения (4) следует выполнение условия (5) при любом $x \in mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$. Значит A является преобразованием типа $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \to mc^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$. Теорема доказана.

Отнесем к теореме 2 несколько примечаний.

Примечание 2. Условие 5° теоремы 2 может быть заменено равносильным ему условием

$$\sup_v \mu_v \| A_v \circ \frac{1}{\lambda} - \lim_u \lim_v A_v \circ \frac{1}{\lambda} \circ \varphi_{\mathcal{U} \setminus E_u} \|_{mc_0} < \infty,$$

где $E_u = \{u' \in \mathcal{U} \mid u' > u\}$ (см. [3], условие 5° теоремы 2).

Примечание 3. В частности, когда $\mu_v = 1$ при любом $v \in \mathcal{V}$, теорема 2 превращается в теорему I. Если, к тому же, $\lambda_u = 1$ при любом $u \in \mathcal{U}$, то мы получаем из теоремы 2 теорему А.

Примечание 4. В частности, когда A является числовым матричным методом, то из теоремы 2 следует теорема 3 работы [3]. Если к тому же, $X = \mathbb{R}$, то из теоремы 2 следует теорема I работы [I]. Если же A – полунепрерывный метод, то из теоремы 2 следует теорема 4 работы [3].

Примечание 5. Заметим, что преобразование $A = \{A_v\}$ определяет метод суммирования обобщенных последовательностей X. Если $Ax \in mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$, то мы говорим, что x является ограниченно суммируемой методом A (ограниченно A – суммируемой). Если $Ax \in mc^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$, то x является A– суммируемой со скоростью μ (ограниченно A^{μ}– суммируемой). Если же $Ax \in m^{\mu}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$, то x является A^{μ}– ограниченной.

Теорема 3. Преобразование A является преобразованием типа $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \to m^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ тогда и толь тогда, когда

I° $A\xi \in m^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathcal{X}$,

2° $(A \circ \lambda^{-1})\xi \in m^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathcal{X}$,

3° $(A \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_E)x \in m^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ для каждого $x \in mc(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ и неконфинального в $\mathcal{U}$ множества E,

4° $\sup_v \| A_v \circ \lambda^{-1} \|_{mc} < \infty$,

5° $\sup_v \mu_v \| (A_v - \lim_v) \circ \lambda^{-1} \|_{mc} < \infty$.

Доказательство. Н е о б х о д и м о с т ь. Выполнение условий I° – 3° показывается аналогично доказательствам теорем I и 2. Поскольку $m^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y}) \subset mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$, то выполнены условия теоремы I, в том числе и условие 4° нашей теоремы. Для любого $x \in mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ имеет место соотношение (I). Перейдя в нем к пределу, мы получим:

$$\eta = \lim_v A_v x = \lim_v A_v \xi + \lim_v (A_v \circ \lambda^{-1}) z, \tag{9}$$

где $z = \lambda(x - \xi)$ и $\xi = \lim_u \xi_u$.

Из соотношений (I) и (9) мы выводим, что

$$\mu_v (A_v x - \eta) = \mu_v (A_v - \lim_v A_v) \xi + \\ + \mu_v [(A_v - \lim A_v) \circ \lambda^{-1}] z \tag{I0}$$

при любом $x \in mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$.

Поскольку

$$\{\mu_v (A_v x - \eta)\} \in m(v, \mathcal{Y}), \tag{II}$$

а, в силу условия I^0, также

$$\{\mu_v (A_v - \lim_v A_v) \xi\} \in m(v, \mathcal{Y}), \tag{I2}$$

то из соотношения (I0) следует, что

$$\{\mu_v [(A_v - \lim_v A_v) \circ \lambda^{-1}] z\} \in m(v, \mathcal{Y}) \tag{I3}$$

при любом $z \in mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$. Значит, оператор $\{\mu_v (A_v - \lim_v A_v) \circ \lambda^{-1}\}$ является преобразованием типа $mc(\mathcal{U}, \mathfrak{X}) \to m(v, \mathcal{Y})$ и, в силу теоремы I8 работы [2], выполнено условие 5^0. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь . Предположим, что выполнены условия I^0– 5^0. Тогда выполнены и условия теоремы I и оператор A является преобразованием типа $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X}) \to mc(v, \mathcal{Y})$. В силу условия I^0 имеет место соотношение (I2, а, в силу условия 5^0 – соотношение (I3) (см. [2], теорема I8). Из соотношения (I0) следует теперь выполнение условия (II) при любом $x \in mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X})$. Значит, A является преобразованием типа $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathfrak{X}) \to m^{\mu}(v, \mathcal{Y})$. Теорема доказана.

Примечание 6. Заметим, что, в частности, если $\mu = 1$ при любом $v \in \mathcal{V}$, теорема 3 превращается в теорему I.

3. Сформулируем, наконец, еще одну теорему, обобщающую теоремы I работы [I] и 4 работы [2].

Теорема 4. Преобразование A является преобразованием типа $rc^{\lambda}(\mathbb{N}^n, \mathfrak{X}) \to mc^{\mu}(v, \mathcal{Y})$ тогда и только тогда, когда

I^0 $A\xi \in mc^{\mu}(v, \mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathfrak{X}$,

2^0 $(A \circ \lambda^{-1}) \xi \in mc^{\mu}(v, \mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathfrak{X}$,

3^0 $(A \circ \lambda^{-1} \circ \varphi_E) \xi \in mc^{\mu}(v, \mathcal{Y})$ для каждого $\xi \in \mathfrak{X}$ и неконфинального в $\mathbb{N}^n$ сечения[8] E,

4^0 $\sup_v \|A_v \circ \lambda^{-1}\|_{rc} < \infty$,

$5^{0}\ \sup_\nu \mu_\nu \|(A_\nu - \lim_\nu A_\nu)\circ\lambda^{-1}\|_{rc_0} < \infty .$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы I, только вместо теоремы 5 работы [2] используется теорема 4 из [2].

Для матричного преобразования $A=\{A_{mn}\}$ двойных последовательностей $x=(\xi_{kl})$ в виде

$$A_{mn}x=\sum_{k,l} a_{mnkl}\,\xi_{kl}$$

где a_{mnkl} – некоторые числа, из теоремы 4 вытекает следующий результат.

<u>Следствие I</u>. Матричное преобразование $A=\{A_{mn}\}$ является преобразованием типа $rc^{\lambda}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})\to mc^{\mu}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда

$1^0\ \{\sum_{k,l} a_{mnkl}\}\in mc^{\mu}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})$,

$2^0\ \{\sum_{k,l} a_{mnkl}/\lambda_{kl}\}\in mc^{\mu}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})$,

$3^0\ \{\sum_{k} a_{mnkl}/\lambda_{kl}\}\in mc^{\mu}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})$ для каждого $l\in\mathbb{N}$,

$4^0\ \{\sum_{l} a_{mnkl}/\lambda_{kl}\}\in mc^{\mu}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})$ для каждого $k\in\mathbb{N}$,

$5^0\ \{a_{mnkl}\}_{m,n}\in mc^{\mu}(\mathbb{N}^2,\mathbb{C})$ для каждого $(k,l)\in\mathbb{N}^2$,

$6^0\ \sup_{m,n}\mu_{m,n}\sum_{k,l}\dfrac{|a_{mnkl}-\lim_{m,n}a_{mnkl}|}{\lambda_{kl}}<\infty.$

Литература

I. Кангро Г., О множителях суммируемости типа Бора-Харди. I.– Изв. АН ЭстССР, Физ. матем., 1969, 18, № 2, 137–146.

2. Ламп Ю., Преобразования обобщенных последовательностей. – Уч. зап. Тарт. ун.-та, 1968, 220, 67–83.

3. Паюс К., Таля А., Необходимые и достаточные условия для суммируемости со скоростью обобщенных последовательностей в банаховых пространствах. – Тезисы докладов конференции "Методы алгебры и анализа", Тарту, 1983, 46–48.

ON SUMMABILITY WITH RAPIDITY OF GENERALIZED SEQUENCES IN BANACH SPACES

J. Lamp, A. Tali

Summary

Let $\mathcal{X}$ and $\mathcal{Y}$ be Banach spaces and $x = \{\xi_u\}$ be a generalized sequence where $\xi_u \in \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{U}$ ($\mathcal{U}$-directed set). Let also A_v ($v \in \mathcal{V}$ – directed set) be linear continuous transforms of X into $A_v X \in \mathcal{Y}$. The summability method $A = \{A_v\}$ of generalized sequences X is defined by transforms A_v ($v \in \mathcal{V}$). Let $\lambda = \{\lambda_u\}$ and $\mu = \{\mu_v\}$ ($u \in \mathcal{U}$, $v \in \mathcal{V}$ $0 < d_0 < \lambda_u \uparrow$, $0 < \mu_v \uparrow$) be generalized sequences, named the rapidities of convergence and of summability. Some classes as $mc(\mathcal{U}, \mathcal{X})$, $mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$, $m^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ and $rc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X})$ of convergent generalized sequences x are defined to characterize the quickness of convergence of these sequences.

Main results of the paper are theorems 1-4 which give necessary and sufficient conditions for A being the transform of types:

$mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \to mc(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ (theorem 1),

$mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \to mc^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ (theorem 2),

$mc^{\lambda}(\mathcal{U}, \mathcal{X}) \to m^{\mu}(\mathcal{V}, \mathcal{Y})$ (theorem 3),

$rc^{\lambda}(\mathbb{N}^2, \mathbb{C}) \to mc^{\mu}(\mathbb{N}^2, \mathbb{C})$ (theorem 4),

Theorem 1 of the paper [1], also theorems 4 and 5 [2] and theorems 3,4 of [3] are obtained as special cases from theorems 1-4 of the present paper.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS * INHALT

Ученые записки Тартуского государственного университета.
Выпуск 770.
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ СУММИРУЕМОСТИ.
Труды по математике и механике.
На русском и эстонском языках.
Резюме на английском и немецком языках.
Тартуский государственный университет.
ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Юликооли, 18.
Ответственный редактор Э. Реймерс.
Подписано к печати 20.01.1987.
МВ 01507.
Формат 60x90/16.
Бумага писчая.
Машинопись. Ротапринт.
Учетно-издательских листов 9,1. Печатных листов 10,0 + 1 вкл.
Тираж 400.
Заказ № 42.
Цена 1 руб. 40 коп.
Типография ТГУ, ЭССР, 202400, г.Тарту, ул.Тийги, 78.

2 - 2