E. ETVERK
A. LINTS
A. VIHMAN

Matemaatika

VII KLASSILE

E. ETVERK, A. LINTS, A. VIHMAN

MATEMAATIKA

VII KLASSILE

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1961

Kinnitatud Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt.

1. KORDAMISEKS.

1. Kirjuta arvude a ja b summa. Arvuta see summa, kui

1) $a=716$ 2) $a=1\frac{5}{8}$ 3) $a=7{,}5$

$b=284$ $b=2\frac{1}{2}$ $b=2{,}95$

2. Kirjuta arvude m ja n vahe ja arvuta see vahe, kui

1) $m=1701$ 2) $m=4{,}08$ 3) $m=6\frac{5}{18}$

$n=601$ $n=3{,}9$ $n=1\frac{11}{24}$

3. Kirjuta kordaja abil lühemalt:

1) $ab+ab+ab+ab+ab$

2) $mx+mx+mx+mx+mx+mx$

4. Kirjuta astendaja abil lühemalt:

1) $aaaaa$ 2) $mmmmmm$

5. Kirjuta lühemalt:

1) $aaann+aaann+aaann+aaann$

2) $a+a+a+aaa+aaa+aaa+aaa+aaa$

3) $xxxyy+xxxyy+xxyyy+xxyyy+xxyyy$

6. Kumb on suurem, kas

4^2 või 2^4; 2^3 või 3^2; 5^3 või 3^5; 3^4 või 4^3.

7. Arvuta.

1) $4a$ ja a^4, kui $a=3$

2) b^3 ja $3b$, kui $b=5$

3) $2m$ ja m^2, kui $m=10$

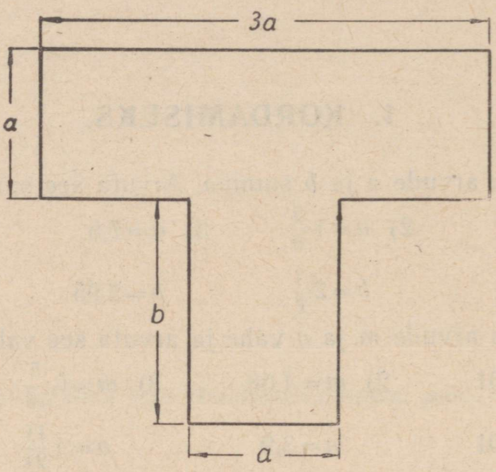
8. Arvuta.

1) $(\frac{1}{3})^2$ 2) $(\frac{3}{4})^2$ 3) $(\frac{1}{2})^3$ 4) $(0{,}1)^3$ 5) $(0{,}5)^2$

9. Arvuta.

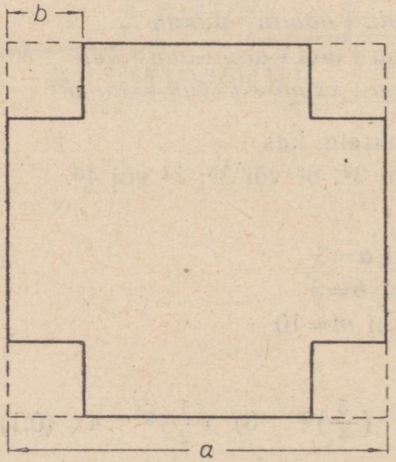
1) $2^4 \cdot 5^2$ 2) $8^2 \cdot 5^3$ 3) $2^3 \cdot 5 + 8^2$

10. Koosta valem joonisel 1 esitatud kujundi ümbermõõdu arvutamiseks.



Joon. 1.

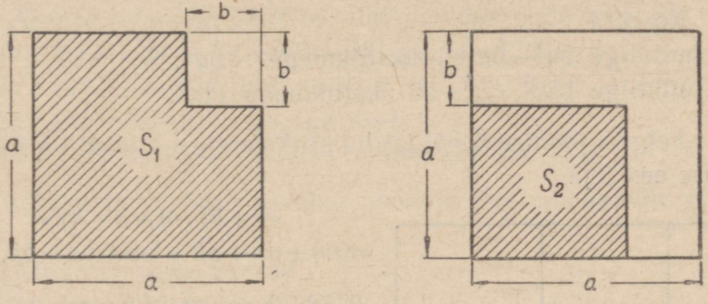
11. Ruudukujulisest kartongitükist, mille külje pikkus on a cm, valmistati servi üles pöörates pealt lahtine karp. Selleks lõigati lehe nurkadest välja ruudud küljepikkusega b cm. Avalda saadud karbi ruumala V.



Joon. 2.

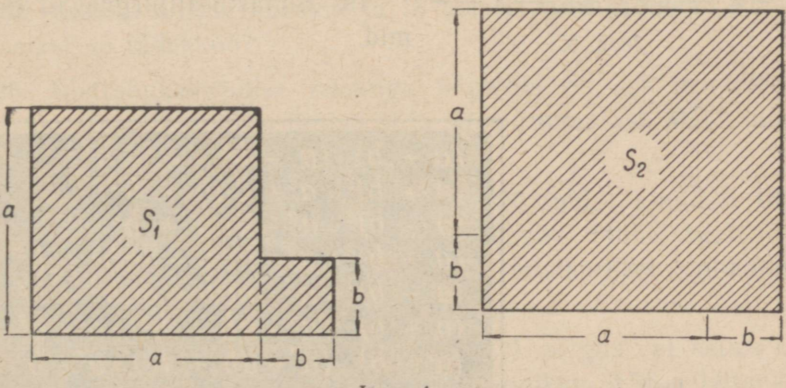
12. Kirjuta algebraline avaldis, mida loetakse järgmiselt:
1) arvude a ja b summa ruut;
2) arvude m ja n ruutude summa;
3) arvude a ja b summa kuup;
4) arvude a ja b kuupide summa;
5) arvude x ja y vahe ruut;
6) arvude x ja y ruutude vahe;
7) arvude c ja d vahe kuup;
8) arvude u ja v kuupide vahe.

13. Avalda joonisel 3 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2. Arvuta S_1 ja S_2, kui $a=3$ m ja $b=1$ m.



Joon. 3.

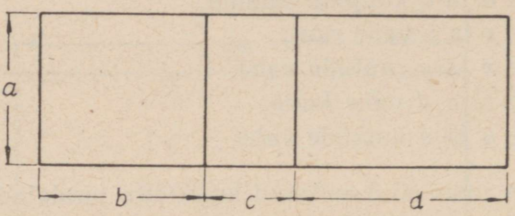
14. Avalda joonisel 4 esitatud kujundite pindalad S_1 ja S_2. Arvuta need pindalad, kui $a=1{,}2$ m ja $b=0{,}6$ m.



Joon. 4.

15. Põhjenda joonise 5 abil üksliikme ja hulkliikme korrutamise eeskirja

$$a(b+c+d)=ab+ac+ad.$$



Joon. 5.

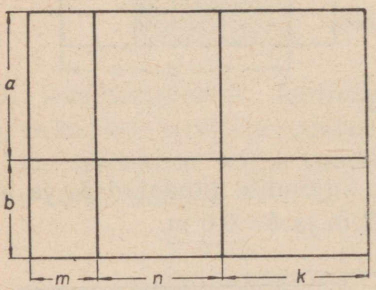
16. Korruta

a) hulkliige $2a^3-5a+1$ üksliikmega $-3a^4$;

b) hulkliige $15x^2-7x-25$ üksliikmega $11x^2$.

17. Selgita joonise 6 põhjal hulkliikmete $a+b$ ja $m+n+k$ korrutamise eeskirja

$$(a+b)(m+n+k)=$$
$$=am+an+ak+bm+bn+bk.$$



Joon. 6.

18. Korruta ja koonda tulemus.

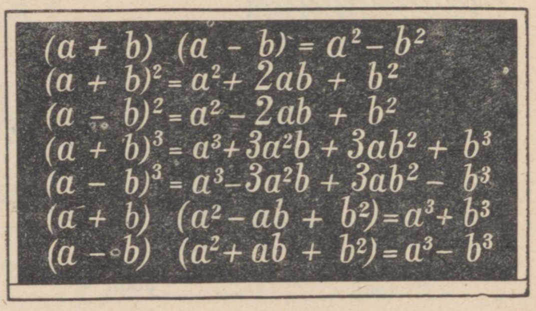
a) $(2x^2-x+1)(x+3)$

b) $(a^2-2a+3)(3a^2+a-2)$

c) $(2x^2-x+1)(x+3)$

d) $(a^2-2a+3)(3a^2+a-2)$

19. Sõnasta alljärgnevad valemid.



Joon. 7.

20. Lihtsusta.

1) $(3+a)^2+(a-3)^2-18$

2) $2n^2+(5+n)(5-n)-(5-n)^2$

3) $(2+x)^3+(2-x)^3-12x^2$

4) $(a-n)(a^2+an+n^2)+(a-n)^3+3an^2$

5) $2(3a-b)+3(4-2a)+2b$

21. Lihtsusta.

1) $(4+b)^2+(b-4)^2-32$

2) $(3+a)(3-a)-(3-a)^2+2a^2$

3) $(1+y)^3+(1-y)^3-6y^2$

4) $(b-x)(b^2+bx+x^2)-(b-x)^3+3bx^2$

5) $2(10-5x)+5(2x-a)+5a$

22. Arvuta avaldise väärtus, lihtsustades enne avaldist.

1) $(4+m)(4-m)+(4+m)^2-32$, kui $m=1{,}25$

2) $(x+3)^2-(x-3)^2$, kui $x=15$

3) $(a+2)^3-(a-2)^3-16$, kui $a=5$

4) $(1+x)(1-x+x^2)-(1+x)^3+3x^2$, kui $x=-1{,}5$

23. Lihtsusta võrduse vasakut poolt ja leia siis saadud võrdusest x.

1) $4(2x+3)+6(x-2)=42$

2) $(7+x)^2+(8+x)(8-x)=127$

3) $(x+1)^2-x^2=2$

4) $2x^2-2(x-3)^2=27$

24. Ristküliku ja ruudu ümbermõõdud on võrdsed. Ristküliku pikkus on a meetrit ja laius b meetrit. Leia ruudu külje pikkus.

25. Klassis on 22 tüdrukut ja 18 poissi. Mitu protsenti klassi õpilastest on tüdrukud?

26. Risttahukakujulise siloaugu sügavus on 1,9 m, pikkus 3,4 m ja laius 3,1 m. Silo täidab 85% augu ruumalast. Mitu kuupmeetrit silo on augus?

27. Kauba hinda, mille väärtus oli 220 rubla, alandati 10% võrra. Järgmisel aastal alandati selle kauba hinda veel 15% võrra. Kui palju maksab see kaup pärast teistkordset hinnaalandamist?

28. 14-grammise söetüki analüüsimisel selgus, et selles oli 10,4 g süsinikku, 1 g vesinikku, 0,84 g hapnikku, 0,56 g lämmastikku ja peale selle veel mitmesuguseid muid aineid. Mitu protsenti sisaldas söetükk iga nimetatud ainet?

29. Klassist puudus 4 õpilast ehk 12,5% klassi õpilaste üldarvust. Leia klassi õpilaste arv.

30. Nimeta kõik x täisarvulised väärtused, mis rahuldavad tingimusi

1) $-5<x<2$; 2) $-1007<x<-1002$.

31. Arvuta ja täida tühjad lahtrid alljärgnevas tabelis.

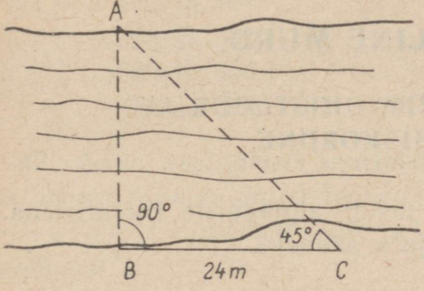
	1	2	3	4	5	6	7	8
a	3	-8	12	$\frac{5}{18}$	-16	$-0,3$	-5	824
b	6	4	-3	$-\frac{7}{24}$	-8	0,12	-10	-376
$a+b$								
$a-b$								
$a \cdot b$								
$a:b$								
$\frac{a+b}{a-b}$								
$\frac{a-b}{a \cdot b}$								

32. Täida alljärgnev tabel.

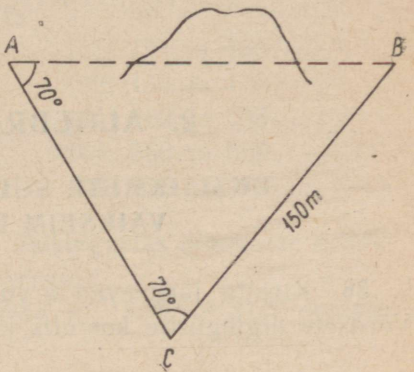
a	18	10	13	-11	-9	-23	750	-96
b	15	-8	-23	3	17	-17	750	-96
$a-b$								
$b-a$								

Millega võrdub $n-m$, kui $m-n=-7$?
Mis arvud on teineteise suhtes $x-y$ ja $y-x$?

33. Kui lai on jõgi (joon. 8)?



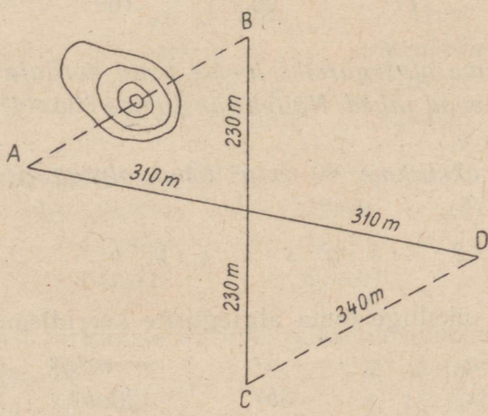
Joon. 8.



Joon. 9.

34. Kui pikk on lõik AB joonisel 9?

35. Otsusta joonise 10 põhjal, kui suur on punktide A ja B vaheline kaugus.



Joon. 10.

2. ALGEBRALINE MURD.

ÜKSLIIKMETE SUURIM ÜHISTEGUR JA VÄIKSEIM ÜHISKORDNE.

36. Kirjuta järgnevad arvud nende algtegurite korrutistena. Võrdsete algtegurite korrutis kirjuta astmena.

Näide. $324=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=2^2\cdot 3^4$

36	54	81	102	510
40	63	82	121	484

37. Lahuta järgnevad arvud algtegureiks.

42	64	86	144	720
45	72	92	150	1050
49	77	96	169	1352

38. *Üksliikme algtegureiks loeme tema kordaja algtegurid ja üksliikmes esinevad tähed. Näiteks üksliikme* $60ax^2y^3$ *algtegurid on* 2, 3, 5, a, x ja y.

Kirjutades üksliikme $60\,ax^2y^3$ *tema algtegurite korrutisena, saame*

$$60ax^2y^3=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot a\cdot x\cdot x\cdot y\cdot y\cdot y$$

39. Kirjuta üksliige tema algtegurite korrutisena.

$15a$	a^2	m^2n^2	$12a^3bc$
$8x$	$3b^2$	$120ab^3$	$18a^2b^2c^2$
$14b$	$36x^2$	$57x^2y^3$	$8a^5b$
$24a$	$26y^3$	$210ax^2y^3$	$20a^4b^2$
$39z$	$17x^4$	$4a^4b^3x$	$27a^2xy$

40. Leia peast järgmiste arvude suurim ühistegur (SÜT):

9 ja 12	15 ja 35	6; 12 ja 20
10 ja 15	39 ja 52	9; 18 ja 45
21 ja 14	34 ja 51	7; 14 ja 21

41. Arvuta järgmiste arvude SÜT:

112 ja 176	121; 154 ja 165
132 ja 364	102; 136 ja 170
308 ja 392	144; 162 ja 198
360 ja 450	264; 360 ja 600
468 ja 624	104; 525 ja 712

42. *Antud üksliikmete* **suurimaks ühisteguriks** *nimetame nende üksliikmete kõikide ühiste tegurite korrutist.*

Näide. *Üksliikmete* $3a^2b^3$, $12a^3bc$ *ja* $18a^2b^2c^2$ *SÜT leiame järgmiselt:*

$$3a^2b^3 = 3 \cdot a^2b^3$$
$$12a^3bc = 2^2 \cdot 3 \cdot a^3bc$$
$$18a^2b^2c^2 = 2 \cdot 3^2 \cdot a^2b^2c^2$$
$$\overline{\qquad SÜT = 3 \cdot a^2b \qquad}$$

Ühistegurita üksliikmete SÜT on 1.

43. Leia üksliikmete SÜT.

a ja $2a$	$6a$ ja 8	$14ax^2$ ja $21a^2x$
ab ja b	$7ab$ ja $12ac$	$44cy^3$ ja $77c^2y^2$
$3x$ ja $6x$	a^4 ja a^2	$30m^2p^3q$ ja $65mp^2q^3$
x ja x^2	$14y^3$ ja $7y$	$22a^2b^3c^2$ ja $121a^3bc$
a ja b	$18abc$ ja $12ac$	$42ax^2y^3$ ja $35bx^2$

44. Leia kolme üksliikme SÜT.

a) $15ab^2$	b) $16x^3y^2z$	c) $12mn$	d) $26p^3q^2$
$21a^2b$	$24xy^2z^3$	$18n^2$	$65a^2p^2q^3$
$12ab$	$6x^2y^2z^2$	$30mn^2$	$39p^2q^3$

45. Leia peast järgmiste arvude väikseim ühiskordne (VÜK):

8 ja 12	3; 5 ja 11
12 ja 15	4; 10 ja 16
21 ja 14	5; 12 ja 18
33 ja 22	9; 15 ja 25
24 ja 100	7; 10 ja 21

46. Arvuta järgmiste arvude VÜK:

12; 18; 96 ja 144	240; 810 ja 6300
14; 20; 28 ja 30	42; 56 ja 98
12; 28; 35 ja 40	54; 72 ja 126
12; 20; 36 ja 54	504; 686 ja 1890
18; 24; 32 ja 48	720; 945 ja 3969

47. *Antud üksliikmete* **väikseimaks ühiskordseks** *nimetame korrutist, mille saame, kui ühe üksliikme korrutame teiste üksliikmete nende teguritega, mis võetud üksliikmes ei esine.*

Näide. *Üksliikmete* $40m^2n^3p$ *ja* $84mnq^2$ *VÜK leiame järgmiselt:*

$$40m^2n^3p = 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p$$
$$84\,mnq^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot mnq^2$$

$$VÜK = 2^3 \cdot 5 \cdot m^2n^3p \cdot 3 \cdot 7 \cdot q^2 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot m^2n^3pq^2 = \\ = 840m^2n^3pq^2.$$

Ühisteguriteta üksliikmete VÜK on nende korrutis. Näiteks $3a^2$ *ja* $5b$ *VÜK on* $15a^2b$.

Kui antud üksliikmetest üks jagub kõigi teiste üksliikmetega, siis on ta antud üksliikmete VÜK.

Näiteks üksliikmete $18a^2b$, $54a^2b^2x$ *ja* $9ab^2$ *VÜK on* $54a^2b^2x$, *sest*

$$54a^2b^2x : 18a^2b = 3bx,$$
$$54a^2b^2x : 9ab^2 = 6ax.$$

48. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

1) $a;\ 7$	2) $2y;\ y$	3) $a;\ b$	4) $ab;\ ac$
$2a;\ 8$	$10x;\ 5x$	$2a;\ 2b$	$ab;\ 5ac$
$8a;\ 2$	$12b;\ 4b$	$2a;\ 5b$	$4ab;\ 16ac$
$12x;\ 16$	$2a;\ 3a$	$14a;\ 3b$	$24ab;\ 6a$
$51y;\ 34$	$6b;\ 8b$	$15a;\ 3b$	$36ab;\ 48ac$

49. Leia iga üksliikmete paari VÜK.

1) $abc;\ bcd$	2) $a^2;\ a$	3) $a^2b;\ a$	4) $a^3;\ b^3$
$8abc;\ bcd$	$a^2;\ 7a$	$a^2b; 2a$	$a^3;\ ab^3$
$9abc;\ bc$	$3a;\ 7a^2$	$3a^2b;\ 6b$	$a^3;\ a^2b^3$
$8xyz;\ 3xy$	$5a;\ 15a^2$	$18a^2b;\ 54a^2$	$a^2b;\ ab^2$
$8xyz;\ 32xz$	$28a^2;\ 35a$	$45a^2b;\ 18b^2$	$ab^2;\ a^3b$

50. Leia iga üksliikmete paari SÜT ja VÜK.

1) $6x$; $3x$	2) $4np$; $2pz$	3) $12a^4$; $27a^6$
k^2; $7k$	$6a^2b$; $9b^2$	$18x^2y^4$; $12x^3y^5$
cv; v	$7t^2$; $3t^2$	$15a^2x^3$; $35a^3x$
x^2y; xy^2	$12r$; $18rp$	$24x^3y^2$; $30xy^4$
$2m^2$; $3mn$	$7abc^2$; $14\ abc$	$16am^2n$; $15am^3n^2$

ALGEBRALISE MURRU MÕISTE.

51. 75 cm^3 õli kaalub 60 g. Arvuta õli erikaal.

52. Auto sõitis a tunniga m kilomeetrit. Mitu kilomeetrit sõitis auto keskmiselt tunnis?

53. Paberi paksuse määramiseks võeti pakk paberit, milles oli n lehte. Paki paksus oli p millimeetrit. Kui paks oli paber?

54. Laua mõõtmed on m ja n meetrit. Laua poleerimiseks kulus p grammi polituuri. Mida tähendab avaldis $\frac{p}{mn}$?

55. Ruudukujulise põranda värvimiseks kulus v kg värvi. Mida tähendab avaldis $\frac{v}{a^2}$, kui põranda pikkus on a meetrit.

56. *Murdu, mille liikmetes esineb tähti, nimetatakse* **algebraliseks murruks.**

Algebralises murrus $\frac{a}{b}$ tähed a ja b võivad tähendada mistahes arvusid, ainsaks erandiks on, et b ei või olla null. Miks?

57. *Murdu $\frac{a}{b}$ võib vaadelda arvude a ja b jagatisena. Iga arvu võib kirjutada murruna, näiteks $x = \frac{x}{1}$.*

58. Kirjuta murruna järgmised arvud:

$$5;\ 0;\ a;\ b;\ a^2;\ a^2b;\ 2a^3b.$$

59. Arvuta murru väärtus, kui temas esinevate tähtede väärtused on antud.

1) $\frac{3a}{5b}$; $\quad a=15;\ b=9.$

2) $\frac{6ab}{7c}$; $\quad a=14;\ b=7;\ c=12.$

3) $\frac{4a}{3bc}$; $a=6$; $b=-2$; $c=12$.

4) $\frac{ax^2}{5b}$; $a=10$; $x=-2$; $b=24$.

5) $\frac{a+b}{a-b}$; $a=2{,}6$; $b=2{,}4$.

6) $\frac{3a+2b}{2a-3b}$; $a=5$; $b=3$.

60. Millist väärtust ei või omada murru nimetajas esinev täht igas alljärgnevas murrus:

$$\frac{m}{n};\quad \frac{3}{n};\quad \frac{5}{1-x};\quad \frac{a}{x-2};\quad \frac{5}{2+a};\quad \frac{m}{x+3}?$$

MURRU PÕHIOMADUS.

61. *Murdu $\frac{a}{b}$ võib vaadelda arvude a ja b jagatisena. Jagatise omadustest on teada, et jagatis ei muutu, kui jagatavat ja jagajat suurendada või vähendada üks ja sama arv korda. Sellest järeldub, et murru $\frac{a}{b}$ väärtus jääb endiseks, kui ta lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.*

Miks ei või murru lugejat ja nimetajat korrutada nulliga? jagada nulliga?

62. Eelmisest ülesandest järeldub algebralise murru põhiomadus:

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{ma}{mb},\quad \frac{a}{b}=\frac{a:m}{b:m}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui tema lugejat ja nimetajat korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

63. *Murru lugeja ja nimetaja korrutamist ühe ja sama arvuga nimetatakse* **murru laiendamiseks.** *Arvu, millega murru laiendamisel lugejat ja nimetajat korrutatakse, nimetatakse* **laiendajaks.**

Laiendame näiteks 3-ga murdu $\frac{a}{5}$, saame

$$\frac{a}{5}=\frac{3\cdot a}{3\cdot 5}=\frac{3a}{15}.$$

64. Laienda

4-ga murdu	$\frac{1}{2}$;	8-ga murdu	$\frac{a}{3}$;
5-ga "	$\frac{1}{3}$;	3-ga "	$\frac{x}{5}$;
6-ga "	$\frac{1}{4}$;	4-ga "	$\frac{2x}{7}$;
3-ga "	$\frac{3}{4}$;	3-ga "	$\frac{1}{2a}$;
8-ga "	$\frac{7}{8}$;	4-ga "	$\frac{5}{6a}$.

65. Laienda

b-ga	murdu	$\frac{5}{9}$;	5-ga	murdu	$\frac{3a}{4c}$;
a-ga	"	$\frac{8}{13}$;	$3n$-ga	"	$\frac{12m}{17n}$;
c-ga	murdu	$\frac{7}{10}$;	$2n$-ga	murdu	$\frac{12m}{17n}$;
$3k$-ga	"	$\frac{7}{12}$;	$5x$-ga	"	$\frac{24xy}{25z}$;
$10x$-ga	"	$\frac{2}{3}$;	$3xy^2$-ga	"	$\frac{24xy}{25z}$.

66. *Murru* **laiendamiseks antud nimetajani** *leiame esmalt laiendaja, mille saame, kui jagame uue nimetaja antud murru nimetajaga. Saadud jagatisega laiendame antud murdu.*

N ä i t e d. 1) *Laienda murd* $\frac{2}{37}$ *nimetajani* 111.

$$111:37=3; \qquad \frac{\overbrace{2}^{3}}{37}=\frac{6}{111}$$

2) *Laienda murd* $\frac{2m}{13n}$ *nimetajani* $52m^2n$.

$$52m^2n:13n=4m^2; \qquad \frac{\overbrace{2m}^{4m^2}}{13n}=\frac{8m^3}{52m^2n}$$

Kui võimalik, siis laiendaja leitakse peast.

67. Laienda murd

$\frac{3a}{4b}$	nimetajani $20b$;	$\frac{a}{n}$	nimetajani bn^2;
$\frac{5m}{4n}$	" $24n$;	$\frac{3}{7}$	" 259;

$\frac{14x}{45y}$	nimetajani $180xy^2$;	$\frac{b}{x}$	nimetajani $2ax$;
$\frac{a}{b}$	" $4a^2b^2$;	$\frac{a}{4b}$	" $12ab^2$;
$\frac{12}{13}$	" 169;	$\frac{3m^2n}{4xy}$	" $12m^2xy$.

MURRU TAANDAMINE.

68. *Murru lugeja ja nimetaja jagamist nende ühisteguriga nimetatakse* **murru taandamiseks.**

$$\frac{\overset{3}{\cancel{12}}\,\cancel{a}\cancel{b}\cancel{c}}{\underset{2}{\cancel{8}}\,\cancel{a}\cancel{b}\underset{c}{\cancel{c^2}}} = \frac{3}{2c}; \qquad \frac{\overset{1}{\cancel{4}}\,\cancel{m}\cancel{n}\cancel{x}}{\underset{2}{\cancel{8}}\,\cancel{m}\underset{n}{\cancel{n^2}}\underset{x}{\cancel{x^2}}} = \frac{1}{2nx}$$

69. Missugust murdu nimetatakse taandumatuks? Millega peab murdu taandama, et saada taandumatu murd?

70. Taanda järgmised murrud:

1)	2)	3)	4)	5)	6)
$\frac{16}{40}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{14}{35}$	$\frac{24}{66}$	$\frac{28}{72}$	$\frac{21}{63}$
$\frac{15}{18}$	$\frac{24}{78}$	$\frac{33}{88}$	$\frac{28}{32}$	$\frac{14}{49}$	$\frac{27}{72}$
$\frac{40}{88}$	$\frac{24}{54}$	$\frac{35}{63}$	$\frac{88}{121}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{24}{70}$
$\frac{27}{63}$	$\frac{40}{96}$	$\frac{39}{91}$	$\frac{60}{84}$	$\frac{42}{72}$	$\frac{84}{220}$
$\frac{57}{243}$	$\frac{115}{320}$	$\frac{117}{130}$	$\frac{132}{143}$	$\frac{112}{176}$	$\frac{308}{392}$

7)	8)	9)	10)
$\frac{2\cdot 6}{42}$	$\frac{-12}{6\cdot 5}$	$\frac{72\cdot 6}{-36}$	$\frac{3\cdot 12}{18\cdot 24}$
$\frac{3}{2\cdot 3}$	$\frac{-8\cdot 5}{12}$	$\frac{22}{-33\cdot 9}$	$\frac{-15\cdot 20}{45\cdot 30}$
$\frac{4}{3\cdot 8}$	$\frac{5\cdot 16}{-32}$	$\frac{17\cdot(-2)}{-51}$	$\frac{-3\cdot 8\cdot 36}{-2\cdot 9\cdot 48}$
$\frac{6}{3\cdot 10}$	$\frac{3\cdot(-12)}{40}$	$\frac{-36}{-5\cdot(-24)}$	$\frac{-4\cdot(-7)\cdot 15}{3\cdot 7\cdot 50}$
$\frac{3\cdot 4}{9}$	$\frac{-36\cdot 5}{-96}$	$\frac{-75\cdot 3}{-50}$	$\frac{2\cdot(-6)\cdot 32}{45\cdot 5\cdot(-6)}$

71. Taanda järgmised murrud:

1) $\frac{6a}{4}$	2) $\frac{12}{6a}$	3) $\frac{ab^2}{abc}$	4) $\frac{a^2b}{abc}$
$\frac{6}{2a}$	$\frac{5a}{10}$	$\frac{9ax}{15a^2}$	$\frac{8a^2}{12ax}$
$\frac{8b}{4a}$	$\frac{9a}{3b}$	$\frac{15ax^2}{35bx^3}$	$\frac{9ax^3}{6bx^2}$
$\frac{3a}{5a}$	$\frac{5c}{7c}$	$\frac{12a^2b^2x}{18a^2b^2y}$	$\frac{18a^2b^3y}{24a^2b^3x}$
$\frac{b}{2b}$	$\frac{n}{3n}$	$\frac{20ab^2c^3}{48a^2b^3c^4}$	$\frac{36a^2b^3c^4}{30ab^2c^3}$

5) $\frac{15a^2}{35ab}$	6) $\frac{96m^2n^2}{72m^3n^3}$	7) $\frac{ab \cdot 5ab}{10ab^2 \cdot 4b^2}$
$\frac{26ab^2}{65a^2b}$	$\frac{144mn^2p^3}{192m^2np}$	$\frac{21x^3 \cdot 6y^3}{7xy \cdot 18xy}$
$\frac{48a^2bc}{78abc^2}$	$\frac{169m^4n^3}{195m^2np^2}$	$\frac{39mp^2 \cdot 4n^2p}{26mn \cdot 7np}$
$\frac{33m^2nx}{48mnx}$	$\frac{57c^3u^4v^5}{190c^4u^3v^5}$	$\frac{32u^2 \cdot 49v^2}{56uv \cdot 28uv}$
$\frac{74p^2q^4}{37npq^3}$	$\frac{105x^2z^2}{360x^3z}$	$\frac{18x^2 \cdot 32y}{32x^2 \cdot 45y^3}$

MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

72. Milliseid murde nimetatakse isenimelisteks? Milliseid murde nimetatakse ühenimelisteks? Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui nimetajad on ühistegurita?

Mis on antud murdude ühiseks nimetajaks, kui üks nimetajaist jagub teistega?

Mis võetakse antud isenimeliste murdude ühiseks nimetajaks?

73. Teisenda ühenimelisteks murrud:

1) $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{5}$	2) $\frac{5}{7}$ ja $\frac{5}{21}$	3) $\frac{5}{26}$ ja $\frac{1}{51}$
$\frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$	$\frac{3}{5}$ ja $\frac{7}{15}$	$\frac{11}{63}$ ja $\frac{13}{126}$
$\frac{2}{7}$ ja $\frac{5}{8}$	$\frac{3}{5}$ ja $\frac{8}{45}$	$\frac{13}{54}$ ja $\frac{7}{81}$
$\frac{1}{2}$ ja $\frac{7}{11}$	$\frac{3}{55}$ ja $\frac{10}{11}$	$\frac{1}{81}$ ja $\frac{49}{135}$
$\frac{6}{11}$ ja $\frac{7}{12}$	$\frac{13}{144}$ ja $\frac{7}{12}$	$\frac{34}{35}$ ja $\frac{54}{55}$

4) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}$ ja $\frac{5}{7}$

$\frac{3}{5}, \frac{5}{7}$ ja $\frac{4}{15}$

$\frac{23}{24}, \frac{7}{8}$ ja $\frac{59}{60}$

5) $\frac{2}{7}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}$ ja $\frac{1}{2}$

$\frac{6}{11}, \frac{7}{12}, \frac{8}{13}$ ja $\frac{9}{14}$

$\frac{11}{50}, \frac{23}{125}, \frac{29}{150}$ ja $\frac{34}{225}$

74. Näide. *Teisenda murrud* $\frac{a}{3b}$ *ja* $\frac{b}{4c}$ *ühenimelisteks.*

Lahendus. *Et antud murdude nimetajad on ühistegurita, siis ühiseks nimetajaks on antud nimetajate korrutis.*

$$3b \cdot 4c = 12bc.$$

Vastavad laiendajad on $4c$ *ja* $3b$.
Seega

$$\frac{a}{3b} = \frac{a \cdot 4c}{3b \cdot 4c} = \frac{4ac}{12bc}$$

$$\frac{b}{4c} = \frac{b \cdot 3b}{4c \cdot 3b} = \frac{3b^2}{12bc}$$

75. Näide. *Teisenda murrud*

$$\frac{7c}{12abx}, \quad \frac{13x}{20ab^2} \quad \text{ja} \quad \frac{8b}{15a^2x^3}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. *Lahutades nimetajad algteguriteks, saame*

$$2^2 \cdot 3 \cdot abx \qquad 2^2 \cdot 5 \cdot ab^2 \qquad 3 \cdot 5 \cdot a^2x^3;$$

seega nimetajate väikseim ühiskordne on

$$2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a^2b^2x^3 = 60a^2b^2x^3.$$

Leitud väikseim ühiskordne $60a^2b^2x^3$ *on antud murdude ühiseks nimetajaks. Jagades saadud ühise nimetaja antud murdude nimetajatega, leiame vastavad laiendajad:*

$$60a^2b^2x^3 : 12abx = 5abx^2;$$

$$60a^2b^2x^3 : 20ab^2 = 3ax^3;$$

$$60a^2b^2x^3 : 15a^2x^3 = 4b^2.$$

Laiendades antud murde nende laiendajatega, saamegi ühenimelised murrud:

$$\frac{7c \cdot 5abx^2}{12abx \cdot 5abx^2} = \frac{35abcx^2}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{13x \cdot 3ax^3}{20ab^2 \cdot 3ax^3} = \frac{39ax^4}{60a^2b^2x^3};$$

$$\frac{8b \cdot 4b^2}{15a^2x^3 \cdot 4b^2} = \frac{32b^3}{60a^2b^2x^3}.$$

76. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1) $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$	2) $\frac{a}{3b}$, $\frac{c}{4d}$	3) $\frac{a}{a^2}$, $\frac{3}{b}$	4) $\frac{p}{a^2}$, $\frac{q}{2ab}$
5) $\frac{2a^2}{x}$, $\frac{3b}{y}$, $\frac{4c}{z}$	6) $\frac{4x}{a^2}$, $\frac{3y}{2b^2}$, $\frac{5y}{4ab}$	7) $\frac{2m}{3a^3}$, $\frac{n}{12a^2b}$, $\frac{5n}{18ab^2}$	8) $\frac{p}{4m^2n}$, $\frac{3p^2}{2mn^3}$, $\frac{5}{14m^3n^2}$
9) $\frac{x}{a}$, a^2, $\frac{y}{3a^3b}$	10) $2b$, $\frac{a}{3x^2}$, $\frac{3ab}{5xy}$	11) $\frac{2p}{3m^2}$, $\frac{5p^2}{6m^2n^2}$, $3mn$	12) $\frac{5b}{24a^2c^3}$, $5d$, $\frac{7a}{36c^2}$
13) $\frac{5}{a}$, $\frac{4}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$	14) x, $\frac{1}{2a}$, $\frac{1}{4}$	15) 2, 9, $\frac{4}{5x^2}$	16) $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

77. Ühenimeliste murdude summa on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate summa ja nimetajaks on liidetavate nimetaja.

$$\boxed{\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} = \frac{a+b+c}{n}}$$

78. Liida murrud.

$\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$ $\qquad$ $\frac{4}{a}+\frac{5}{a}$ $\qquad$ $\frac{-p}{q}+\frac{2p}{q}$

$\frac{8}{15}+\frac{2}{15}$ $\qquad$ $\frac{3a}{k}+\frac{a}{k}$ $\qquad$ $\frac{r}{10s}+\frac{1}{10s}$

$\frac{2x}{3}+\frac{4x}{3}$ $\qquad$ $\frac{5u^3}{b}+\frac{u^3}{b}$ $\qquad$ $\frac{-3u}{-5v}+\frac{2u}{5v}$

$\frac{4R}{9}+\frac{R}{9}$ $\qquad$ $\frac{7}{2h}+\frac{k}{2h}$ $\qquad$ $\frac{92a^2}{35y}+\frac{8ab}{35y}$

$\frac{p^2}{4}+\frac{3p^2}{4}$ $\qquad$ $\frac{4m^2}{3n}+\frac{1}{3n}$ $\qquad$ $\frac{a}{a^2}+\frac{1}{a^2}$

79. *Murru* $\frac{1}{2}$ *vastandarvuks on* $-\frac{1}{2}$ *ja murru* $\frac{a}{b}$ *vastandarvuks* $-\frac{a}{b}$.

Kirjuta järgmiste arvude vastandarvud:

$$-\frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5}; \quad -\frac{a}{b}; \quad -\frac{m}{4}; \quad -\frac{5}{n}.$$

80. *Teades, et*

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b} \quad \text{ja}$$

$$-(-a)=a,$$

saame:

$$-\frac{-a}{b}=-\left(-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}$$

ehk

$$\boxed{\frac{a}{b}=-\frac{-a}{b}}$$

Edasi saame:

$$-\frac{a}{-b}=-\left(-\frac{a}{a}\right)=\frac{a}{b}$$

ehk

$$\boxed{\frac{a}{b}=-\frac{a}{-b}}$$

Laiendades murdu $\frac{a}{b}$ *arvuga* — 1, *saame*

$$\frac{a}{b}=\frac{(-1)\cdot a}{(-1)\cdot b}=\frac{-a}{-b}, \quad \textit{seega}$$

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{-a}{-b}}$$

Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru ees ja murru ühes liikmes.
Murru väärtus ei muutu, kui muuta märk vastupidiseks murru mõlemas liikmes.

81. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgita murru ees:

$$-\frac{3}{4}; \quad -\frac{a}{2}; \quad -\frac{m}{n}; \quad -\frac{-3}{m}; \quad -\frac{a}{-2}.$$

82. Kirjuta järgnevad murrud miinusmärgiga murru ees:

$$\frac{2}{5}; \quad \frac{-x}{2}; \quad \frac{a}{b}; \quad \frac{5}{-n}; \quad \frac{n}{-3}.$$

83. *Murru lahutamisel liidame lahutatava murru vastandarvu.* Selgita järgmist sümbolites kirjutatud arutlust:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a}{n}+\left(-\frac{b}{n}\right)+\left(-\frac{c}{n}\right)=$$

$$=\frac{a}{n}+\frac{-b}{n}+\frac{-c}{n}=\frac{a+(-b)+(-c)}{n}=\frac{a-b-c}{n}.$$

$$\boxed{\frac{a}{n}-\frac{b}{n}-\frac{c}{n}=\frac{a-b-c}{n}}$$

84. Liida murrud ja kui võimalik, siis taanda tulemus.

1) $\frac{2}{15}+\frac{1}{15}+\frac{7}{15}$ $\qquad$ $\frac{3}{10}-\frac{9}{10}+\frac{1}{10}$

$\frac{5}{18}+\frac{11}{18}-\frac{7}{18}$ $\qquad$ $\frac{3}{28}+\frac{9}{28}-\frac{5}{28}$

$\frac{4}{9}-\frac{5}{9}+\frac{4}{9}$

2) $\frac{7a}{10}-\frac{3a}{10}$ $\qquad$ $\frac{15x}{16y}-\frac{7x}{16y}$

$\frac{5g}{16}+\frac{3g}{16}$ $\qquad$ $\frac{a}{2}-\frac{a}{2}$

$\frac{2m}{3n}+\frac{m}{3n}$

85. Arvuta.

1) $\frac{a}{3b}+\frac{a}{3b}+\frac{a}{3b}$ $\qquad$ 2) $\frac{2a+5}{6}+\frac{3a+2}{6}$

$\frac{a^2}{3}+\frac{2b^2}{3}-\frac{4c^2}{3}$ $\qquad$ $\frac{4m+8}{3}+\frac{2m-8}{3}$

$\frac{a}{x}+\frac{3a}{x}+\frac{5a}{x}$ $\qquad$ $\frac{7n+12}{8}-\frac{3n+12}{8}$

$\frac{10x}{9a}-\frac{5x}{9a}+\frac{x}{9a}$ $\qquad$ $\frac{14x-9}{10}-\frac{6x+2}{10}$

$\frac{9}{10a^2}-\frac{3}{10a^2}-\frac{1}{10a^2}$ $\qquad$ $\frac{m+n}{2}+\frac{m-n}{2}$

Näide.

$$\frac{16x-3}{7}-\frac{2x-3}{7}=\frac{16x-3-(2x-3)}{7}=\frac{16x-3-2x+3}{7}=\frac{14x}{7}=2x.$$

86. Arvuta.

$\frac{m+n}{4p}-\frac{m-n}{4p}$ $\qquad$ $\frac{3a}{a+b}+\frac{5a}{a+b}+\frac{7a}{a+b}$

$\frac{24x-6y}{7}-\frac{10x-48y}{7}$ $\qquad$ $\frac{a+b}{a-b}-\frac{b}{a-b}$

$\frac{7m+8n}{3m}-\frac{3m-5n}{3m}$ $\qquad$ $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}$

$\frac{20a-9}{6b}-\frac{8a-9}{6b}$ $\qquad$ $\frac{a}{x}-\frac{b+c+d}{x}$

$\frac{7x+5}{2y}+\frac{7x-5}{2y}$ $\qquad$ $\frac{2a+3b}{a-b}-\frac{a+4b}{a-b}$

87. Isenimeliste murdude algebralisel liitmisel

1) leiame nende murdude ühise nimetaja, milleks on antud nimetaja VÜK;

2) leiame igale antud murrule laiendaja, milleks jagame leitud VÜK iga nimetajaga;

3) laiendame iga antud murdu leitud laiendajaga;

4) arvutame saadud ühenimeliste murdude summa;

5) kui võimalik, siis koondame saadud murru lugejat;
6) kui võimalik, siis taandame saadud murdu.

Näiteid. 1) *Leiame summa*

$$\frac{2a+b}{2ab}-\frac{a+b}{b^2}+\frac{a}{b^2}.$$

$\frac{2a+b}{2ab}-\frac{a+b}{b^2}+\frac{a}{b^2}=$ — 1) Ühiseks nimetajaks on $2ab^2$.

$=\frac{\overset{b}{\smile}\,2a+b}{2ab}-\frac{\overset{2a}{\smile}\,a+b}{b^2}+\frac{\overset{2a}{\smile}\,a}{b^2}=$ — 2) Laiendajad on: $2ab^2:2ab=b$; $2ab^2:b^2=2a$.

$=\frac{2ab+b^2}{2ab^2}-\frac{2a^2+2ab}{2ab^2}+\frac{2a^2}{2ab^2}=$ — 3) Laiendame iga murdu leitud laiendajaga.

$=\frac{(2ab+b^2)-(2a^2+2ab)+2a^2}{2ab^2}=$ — 4) Liidame lugejad.

$=\frac{2ab+b^2-2a^2-2ab+2a^2}{2ab^2}=$ — 5) Koondame lugeja.

$=\frac{b^2}{2ab^2}=\frac{1}{2a}.$ — 6) Taandame.

2) *Arvuta summa* $2a+\frac{b^3}{5c^2}$.

$$2a+\frac{b^3}{5c^2}=\frac{\overset{5c^2}{\smile}\,2a}{1}+\frac{\overset{1}{\smile}\,b^3}{5c^2}=\frac{10ac^2+b^3}{5c^2}.$$

88. Arvuta.

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$	$\frac{1}{3x}+\frac{1}{3y}$	$1+\frac{a}{3}$
$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$	$\frac{1}{f}+\frac{1}{g}$	$\frac{1}{5a}+\frac{1}{7b}$	$5+\frac{b}{5}$
$\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$	$\frac{1}{a}+\frac{1}{x}$	$\frac{1}{4m}+\frac{1}{5n}$	$1+\frac{2}{x}$
$\frac{1}{5}+\frac{1}{8}$	$\frac{1}{b}+\frac{1}{y}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{8u}$	$4+\frac{3}{x}$

5)	6)	7)
$a+\frac{b}{c}$	$m+\frac{2m+3n}{2}$	$\frac{9}{25}-\frac{8}{45}$
$3+\frac{a}{b}$	$4+\frac{a+x}{4}$	$\frac{1-2x}{6}+\frac{1+x}{3}$
$ab-\frac{2}{d}$	$8+\frac{a-x}{4}$	$\frac{2b}{15a}+\frac{b}{5a}$
$3a-\frac{a}{2}$	$2a+\frac{2a+3b}{2b}$	$\frac{x}{3a}-\frac{1}{3a^2}$

89. Arvuta.

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$	$\frac{2}{3x}-\frac{3}{2y}$	$1-\frac{a}{3}$	$5-\frac{a+x}{3}$
$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$	$\frac{4}{5a}-\frac{6}{7b}$	$5-\frac{b}{5}$	$7-\frac{a-x}{6}$
$\frac{3}{a}-\frac{1}{2a}$	$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$	$1-\frac{2}{x}$	$3m-\frac{4m+5n}{3}$
$\frac{5}{a}-\frac{2}{3a}$	$\frac{1}{a}-\frac{2}{b}$	$4-\frac{3}{x}$	$3a-\frac{8a+3c}{2b}$
$\frac{y}{z}-\frac{z}{mx}$	$\frac{2}{b}-\frac{3}{ab}$	$3-\frac{2}{a}$	$4-\frac{2+a}{3}$

5)	6)	7)
$a-b-\frac{a^2-b^2}{a}$	$a^2-\frac{3b^3+a^3}{a}$	$3a+2b-\frac{2a^2-b^2}{a}$
$a+b-\frac{a^2-b^2+ab}{a}$	$\frac{a^2+b^2}{a+b}+a-b$	$\frac{x^2+y^2}{x+y}+3(x-y)$
$1+\frac{a}{1-a}$	$\frac{a^2+b^2}{a-b}-(a+b)$	$x^2+xy+y^2+\frac{y^3}{x-y}$
$1-\frac{a}{1+a}$	$a^2-ab+b^2-\frac{b^3}{a+b}$	$\frac{n^3}{n^2-2n+4}+n+2$

90. Arvuta.

1)	2)	3)	4)
$\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$	$\frac{a}{4}+\frac{a}{12}$	$\frac{2m}{ar}-\frac{u}{r}$	$\frac{2}{a^2}-\frac{3}{ab}$
$\frac{8}{15}+\frac{2}{5}$	$\frac{c}{3}-\frac{c}{6}$	$\frac{b}{a^2}+\frac{c}{a}$	$\frac{m}{x^2y}-\frac{n}{xy^2}$
$\frac{5}{8}-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{p}+\frac{1}{3p}$	$\frac{5u}{6a^2}-\frac{u}{3a}$	$\frac{3x}{4a^2b}+\frac{5y}{6ab^2}$
$\frac{9}{10}-\frac{4}{5}$	$\frac{5}{4q}-\frac{3}{2q}$	$\frac{5}{a^2}-\frac{4}{a^2b^2}$	$\frac{5n}{6m^2}-\frac{7p}{6mn^2}$
$\frac{5}{6}+\frac{7}{12}$	$\frac{1}{a}+\frac{2}{ab}$	$\frac{7}{4x^3}+\frac{3}{x^2}$	$\frac{3ab}{10c^2d}+\frac{2c}{15d^2}$

5)	6)
$\frac{4a+b}{8}+\frac{2a-b}{8}$	$\frac{5a+b}{4}-\frac{a+b}{4}$
$\frac{a+b}{10}+\frac{a-b}{10}$	$\frac{c+nd}{2}-\frac{c-nd}{2}$
$\frac{a+y}{3m}+\frac{2a-y}{3m}$	$\frac{6x-32}{2R^2}-\frac{4x-32}{2R^2}$
$\frac{5c-3u}{6n^2}+\frac{7c+3u}{6n^2}$	$\frac{58a^2-81}{27D^2}-\frac{58a^2}{27D^2}$
$\frac{2r-t}{s^2}+\frac{t-r}{s^2}$	$\frac{19N-23}{8h^3}-\frac{1+19N}{8h^3}$

7) $\frac{a+4}{2}+\frac{a+5}{3}$

$\frac{x+7}{4}+\frac{x-21}{12}$

$\frac{x-1}{6}+\frac{x+4}{21}$

$\frac{p+2q}{3}-\frac{5p+16q}{24}$

$\frac{5a-7b}{14}-\frac{a-3b}{6}$

8) $\frac{am+bn}{ab}+\frac{am+cn}{ac}$

$\frac{a^2-1}{2a}-\frac{a-1}{2}$

$\frac{m^2+n^2}{mn}+\frac{1-n}{m}$

$\frac{p^2+q^2}{pq}-\frac{p-1}{q}$

$\frac{1}{a}-\frac{b+1}{ab}$

91. N ä i d e. *Teisendame murru* $\frac{a}{m-n}$ *murruks nimetajaga* $n-m$. *Selleks kasutame võrdust.*

$$\frac{a}{b}=-\frac{a}{-b}.$$

Saame

$$\frac{a}{m-n}=-\frac{a}{-(m-a)}=-\frac{a}{-m+n}=-\frac{a}{n-m}$$

$$\boxed{\frac{a}{m-n}=-\frac{a}{n-m}}$$

92. N ä i d e. *Arvutame summa*

$$\frac{a}{m-n}+\frac{b}{n-m},$$

saame

$$\frac{a}{m-n}+\frac{b}{n-m}=\frac{a}{m-n}-\frac{b}{m-n}=\frac{a-b}{m-n}.$$

93. Arvuta.

1) $\frac{x}{3}-\frac{y}{-3}$

$\frac{2}{a}-\frac{1}{-a}$

$\frac{4}{3a}+\frac{1}{-3a}$

$\frac{1}{a+x}-\frac{1}{-a-x}$

$\frac{1}{a-x}+\frac{2}{x-a}$

2) $\frac{1}{a-1}-\frac{a}{1-a}$

$\frac{m^2}{m-n}-\frac{n^2}{n-m}$

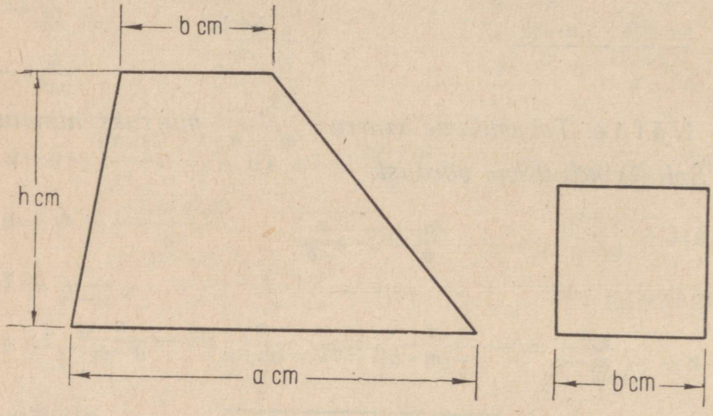
$\frac{n}{n-2}+\frac{n}{2-n}$

$\frac{2a}{a-x}+\frac{a}{x-a}$

$\frac{a}{x-a}+\frac{x}{x-a}$

94. Ühe kolmnurga pindala on $\frac{ah}{2}$ cm², teise pindala on $\frac{bh}{2}$ cm². Kui suur on nende kolmnurkade pindalade summa?

95. Arvuta joonisel 11 kujutatud kahe nelinurga pindalade vahe. Esimese nelinurga pindala leidmiseks tükelda ta rööpkülikuks ja kolmnurgaks. Teine nelinurk on ruut.



Joon. 11.

96. Prisma kummagi põhja pindala on $\frac{a^2}{b}$ cm² ja külgpindala $\frac{m^2}{2b}$ cm². Kui suur on prisma täispindala?

97. Püramiidi põhja pindala on $\frac{a^2}{b^2}$ cm² ja külgpindala $\frac{am}{b}$ cm². Kui suur on püramiidi täispindala?

98. Kauba brutokaal on $\frac{a}{b}$ kg ja netokaal $\frac{1}{3b}$ kg. Kui suur on taarakaal?

99. Kooli esimese klassi õpilastest puudus ühel päeval $\frac{m}{n}$ protsenti; lõppklassis puudus samal päeval $\frac{a}{2n}$ protsenti õpilastest. Mitme protsendi võrra oli lõppklassis puudujaid vähem kui esimeses klassis?

100. Arvuta korrutis ja võimaluse korral taanda.

1) $\frac{3}{4}\cdot 8$; $\frac{5}{6}\cdot 24$; $\frac{7}{12}\cdot 60$; $\frac{11}{15}\cdot 90$; $\frac{9}{17}\cdot 102$

2) $\frac{7}{8}\cdot 12$; $\frac{3}{5}\cdot 15$; $\frac{9}{10}\cdot 35$; $\frac{13}{18}\cdot 27$; $\frac{11}{24}\cdot 32$

3) $21\cdot\frac{5}{7}$; $39\cdot\frac{11}{13}$; $48\cdot\frac{5}{8}$; $85\cdot\frac{12}{17}$; $95\cdot\frac{15}{19}$

4) $65\cdot\frac{19}{30}$; $78\cdot\frac{7}{12}$; $30\cdot\frac{23}{42}$; $56\cdot\frac{9}{16}$; $63\cdot\frac{25}{27}$

5) $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$; $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}$; $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}$; $\frac{4}{7}\cdot\frac{7}{8}$; $\frac{7}{8}\cdot\frac{4}{9}$

6) $\frac{7}{12}\cdot\frac{24}{35}$; $\frac{5}{9}\cdot\frac{27}{55}$; $\frac{11}{13}\cdot\frac{65}{33}$; $\frac{17}{15}\cdot\frac{25}{6}$; $\frac{18}{35}\cdot\frac{77}{24}$

7) $1\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{14}$; $3\frac{4}{7}\cdot\frac{14}{15}$; $2\frac{1}{5}\cdot\frac{15}{22}$; $7\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}$; $9\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}$

8) $\frac{11}{12}\cdot 4\frac{4}{5}$; $\frac{5}{16}\cdot 7\frac{1}{9}$; $\frac{7}{10}\cdot 3\frac{1}{3}$; $\frac{8}{13}\cdot 3\frac{1}{4}$; $\frac{11}{17}\cdot 5\frac{2}{3}$

9) $2\frac{1}{3}\cdot 3\frac{1}{2}$; $4\frac{1}{2}\cdot 1\frac{1}{3}$; $7\frac{3}{5}\cdot 1\frac{6}{19}$; $8\frac{1}{4}\cdot 1\frac{5}{11}$; $10\frac{4}{5}\cdot 4\frac{4}{9}$

10) $1\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{9}\cdot\frac{7}{12}$; $2\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{7}$; $3\frac{3}{8}\cdot 1\frac{1}{9}\cdot 5\frac{1}{2}$; $7\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{25}$; $5\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{29}\cdot 4\frac{3}{4}$

11) $-3\cdot\frac{2}{3}$; $(-6)\cdot\left(-12\frac{1}{4}\right)$; $\frac{-3}{5}\cdot\frac{5}{-6}$; $-4\cdot\frac{5}{6}$; $2\frac{1}{3}\cdot\frac{-3}{5}$

12) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{8}$; $\frac{5}{6}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)$; $-\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right)\cdot\frac{5}{8}$; $-\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$; $-2\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}:\left(-8\frac{4}{5}\right)$

101. Kontrolli valemi

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}=\frac{am}{bn}$$

õigsust, täites alljärgneva tabeli.

a	b	m	n	$\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}$	$\frac{am}{bn}$
3	5	15	18		
0,4	1,5	0,5	0,6		
3	—5	—15	18		
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{14}{25}$		
$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{15}$	$-\frac{14}{25}$		

Murdude korrutis on murd, mille lugejaks on antud murdude lugejate korrutis ja nimetajaks on antud murdude nimetajate korrutis.

102. Esitades täisavaldise murruna, mille nimetajaks on 1, tuleta valemi $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} = \frac{am}{bn}$ põhjal valem $k \cdot \frac{a}{b} = \frac{ka}{b}$.

103. Arvuta korrutis ja kui võimalik, siis taanda.

1) $\frac{5}{9} \cdot 21$	2) $12 \cdot \frac{5}{9}$	3) $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15}$	4) $1\frac{2}{5} \cdot \frac{a}{n^2} \cdot \frac{3}{7}a^2n^2$
$\frac{3}{x} \cdot a$	$6 \cdot \frac{a}{3b}$	$\frac{4}{7} \cdot \frac{a}{n^2}$	$2\frac{1}{4} \cdot \frac{c^3}{x} \cdot \frac{11x^2}{3c^2}$
$\frac{c}{u^2} \cdot 2u$	$7m \cdot \frac{5}{u^2}$	$\frac{4a}{b} \cdot \frac{3c}{8a}$	$\frac{3a}{5b} \cdot \frac{10b}{21c} \cdot \frac{7c}{4a}$
$\frac{h}{ab} \cdot a$	$20c \cdot \frac{4ab}{5c}$	$\frac{ab}{6} \cdot \frac{3a}{4b}$	$\frac{8a^2}{21b^2} \cdot \frac{14b}{15c} \cdot \frac{c}{4a^2}$
$\frac{4f}{g^2h} \cdot fgh$	$9hx^2 \cdot \frac{a}{hx^2}$	$\frac{x^2u^3}{7} \cdot \frac{14}{a^2u}$	$1\frac{3}{4}N^2u^2 \cdot \frac{8u}{15N^2}$

5) $(-2) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$	6) $\frac{5a}{16b^2} \cdot (-32ab^2c)$
$nx \cdot \left(-\frac{x}{n}\right)$	$\left(-\frac{2a^2}{3b^2}\right) \cdot \left(-\frac{5a^2b^2}{8c}\right)$
$(-15m^3p) \cdot \frac{3x}{10m^2p}$	$\left(-\frac{N}{a}\right) \cdot \frac{a^2}{5N^3}$
$(-4at) \cdot \left(-\frac{5a^2u}{8t^2}\right)$	$\frac{-a^2x^3}{13} \cdot \frac{52c}{-ax}$
$\left(-3\frac{qw}{r}\right) \cdot qwr$	$\frac{h}{5u^2} \cdot \left(-\frac{15u^3}{16h^3}\right)$

104. Korruta kahel viisil:

a) teostades enne sulgudes näidatud tehted;

b) korrutades sulgavaldised, kasutades hulkliikmete korrutamise eeskirja.

Võrdle tulemusi.

1) $\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(2+\frac{3}{a}\right)$

2) $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(3-\frac{a}{2}\right)$

3) $\left(5-\frac{3}{x}\right)\left(4+\frac{2}{x}\right)$

4) $\left(7-\frac{2}{a}\right)\left(7-\frac{2}{a}\right)$

5) $\left(5+\frac{a}{x}\right)\left(5-\frac{a}{x}\right)$

6) $\left(\frac{a}{3}+\frac{4}{b}\right)\cdot\frac{3b}{4a}$

7) $\left(\frac{2x}{7y}-\frac{3y}{5x}\right)\cdot\left(-\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

8) $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)$

9) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{4}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{5}\right)$

10) $\left(\frac{2}{a}-\frac{b}{3}\right)\cdot\left(\frac{a}{2}+\frac{3}{b}\right)$

Näide. 1) $\left(\frac{x}{3}+\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{3}-\frac{2}{x}\right)=\frac{3x+2}{x}\cdot\frac{3x-2}{x}=$

$$=\frac{(3x+2)\cdot(3x-2)}{x\cdot x}=\frac{9x^2-4}{x^2}.$$

2) $\left(3-\frac{2}{x}\right)\cdot\left(3-\frac{2}{x}\right)=3^2-\left(\frac{2}{x}\right)^2=\frac{x^2}{9}-\frac{4}{x^2}=\frac{9x^2-4}{x^2}.$

105. Teosta tehted.

1) $\frac{a+b}{6}\cdot 2(m-4)$

$\frac{m+4}{6}\cdot 2(m-4)$

$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\cdot(a-b)$

$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)\cdot(p+q)$

$\frac{a+2}{3}\cdot\frac{a+3}{4}$

2) $\left(\frac{x}{4a}-\frac{y}{4}\right)\cdot\left(\frac{x}{5a}-\frac{y}{5}\right)$

$\frac{a+b}{7}\cdot\frac{a-b}{14}$

$\frac{m-n}{5}\cdot\frac{m+n}{16}$

$\left(\frac{p}{6}-\frac{q}{2}\right)\cdot\left(\frac{p}{9}+\frac{q}{3}\right)$

$\left(\frac{u^2}{4}-\frac{v^2}{2}\right)\cdot\left(\frac{u^2}{8}+\frac{v^2}{4}\right)$

MURRU ASTENDAMINE.

106. *Et aste on võrdsete tegurite korrutis, siis*

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a}{b\cdot b}=\frac{a^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b}=\frac{a^3}{b^3}.$$

Üldiselt

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n\text{ tegurit}}=\frac{a^n}{b^n}}$$

Murru aste on murd, mille lugejaks on antud murru lugeja aste ja nimetajaks antud murru nimetaja aste.

107. Astenda.

1) $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ 2) $\left(-\frac{5a^2}{6b^3}\right)^2$ 3) $\left(\frac{a+2}{2}\right)^2$

$\left(\frac{b}{3}\right)^2$ $\left(\frac{3x^2}{10y^2}\right)^3$ $\left(\frac{x-5}{10}\right)^2$

$\left(\frac{2x}{9}\right)^2$ $\left(-\frac{y^3}{6x^2}\right)^3$ $\left(\frac{x+1}{4}\right)^3$

$\left(-\frac{a}{2}\right)^2$ $\left(\frac{a^3}{3b}\right)^2$ $\left(\frac{x+y}{2}\right)^3$

$\left(-\frac{a}{2}\right)^3$ $\left(\frac{3x^2}{4y^3}\right)^3$ $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^3$

4) $\left(\frac{4a}{5}\right)^2$ 5) $\left(\frac{3m}{4n}\right)^2$ 6) $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2$ 7) $\left(2+\frac{a}{2}\right)^3$

$\left(-\frac{7b}{8}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{2N}\right)^2$ $\left(\frac{a}{2}-2\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{2}\right)^3$

$\left(-\frac{8c}{15}\right)^3$ $\left(\frac{0,1ab}{7c^2}\right)^3$ $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)^2$ $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}n\right)^3$

$\left(\frac{9d}{10}\right)^3$ $\left(\frac{3a^2}{8mnp}\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{4}b\right)^2$ $\left(m+\frac{3}{4}\right)^3$

$\left(-\frac{11e}{15}\right)^2$ $\left(-\frac{1}{2m^2x}\right)^3$ $\left(\frac{a}{n}-1\right)^3$ $\left(\frac{2}{5}-\frac{2n}{3}\right)^3$

MURDUDE JAGAMINE

108. Arvuta.

1) $\frac{12}{35}:6$	2) $\frac{3}{5}:5$	3) $\frac{15}{16}:10$	4) $28:\frac{7}{10}$
$\frac{14}{15}:7$	$\frac{6}{7}:3$	$\frac{28}{33}:35$	$16:\frac{8}{13}$
$\frac{27}{48}:9$	$\frac{3}{8}:7$	$\frac{63}{50}:14$	$20:\frac{4}{5}$
$\frac{36}{55}:12$	$\frac{7}{16}:2$	$\frac{52}{105}:12$	$64:\frac{16}{17}$
$\frac{65}{72}:13$	$\frac{5}{21}:4$	$\frac{84}{95}:60$	$80:\frac{10}{11}$

5) $\frac{2}{3}:\frac{4}{7}$	6) $\frac{5}{24}:\frac{35}{12}$	7) $1\frac{14}{15}:\frac{29}{45}$	8) $-2\frac{3}{5}:6\frac{1}{2}$
$\frac{3}{5}:\frac{6}{11}$	$\frac{27}{55}:\frac{3}{22}$	$5\frac{11}{14}:\frac{-18}{35}$	$4\frac{3}{8}:\left(-2\frac{5}{8}\right)$
$\frac{5}{16}:\frac{5}{7}$	$\frac{24}{65}:\frac{12}{91}$	$3\frac{5}{12}:\frac{5}{-16}$	$5\frac{4}{9}:\left(-4\frac{2}{3}\right)$
$\frac{9}{14}:\frac{11}{35}$	$\frac{4}{9}:\frac{8}{27}$	$-9\frac{3}{8}:\frac{-15}{24}$	$7\frac{7}{8}:5\frac{1}{4}$
$\frac{7}{12}:\frac{31}{24}$	$\frac{1}{3}:\frac{7}{30}$	$-2\frac{3}{5}:\frac{13}{-15}$	$-8\frac{1}{4}:\left(-3\frac{2}{3}\right)$

109. *Murru* $\frac{a}{b}$ *pöördarv on* $\frac{b}{a}$, *sest*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1.$$

Mis on murru $-\frac{a}{b}$ pöördarvuks?

Nimeta murdude

$$\frac{2}{3},\quad -\frac{5}{6},\quad \frac{m}{n},\quad -\frac{m}{n},\quad a,\quad -b,\quad \frac{1}{a}$$

pöördarvud.

110. *Jagada murd* $\frac{a}{b}$ *murruga* $\frac{m}{n}$, *tähendab leida niisugune arv, mille korrutamisel jagajaga* $\frac{m}{n}$ *saame jagatava* $\frac{a}{b}$.

Tõestame, et

$$\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}.$$

Selleks on tarvis näidata, et võrduse parema poole korrutamisel jagajaga $\frac{m}{n}$ *saame jagatava* $\frac{a}{b}$.

Korrutame:

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}\right)\cdot\frac{m}{n}=\frac{an}{bm}\cdot\frac{m}{n}=\frac{anm}{bmn}=\frac{a}{b}.$$

Seega

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{m}{n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{n}{m}}$$

Murru jagamisel murruga korrutame esimese murru teise murru pöördarvuga.

111. Esitades arvu a murruna ja kasutades murdude jagamise eeskirja, tõesta võrdused:

$$a:\frac{m}{n}=\frac{an}{m};\qquad \frac{a}{b}:m=\frac{a}{bm}.$$

112. Arvuta.

1) $\frac{a}{5}:5$	2) $2\frac{1}{4}a:3$	3) $\frac{2a}{5}:a$
$\frac{2x}{5}:4$	$6\frac{1}{2}b^2:2b$	$\frac{ab}{8}:b$
$-\frac{6m}{5}:2$	$-3\frac{1}{3}xy:(-10)$	$3\frac{1}{5}:8a$
$-\frac{3n}{8}:(-27)$	$4\frac{1}{6}x^2y:50$	$\frac{12xy}{17}:3x$
$\frac{8p}{9}:16$	$1\frac{1}{2}m^3:15$	$\frac{42pq}{5}:21p$
4) $\frac{x}{5}:2\frac{1}{3}$	5) $\frac{a^2}{3}:\frac{a}{b}$	6) $\frac{a^2}{b^2}:\frac{a}{b}$
$\frac{2a}{9}:3\frac{1}{9}$	$\frac{x}{8}:\frac{x^2}{4}$	$\frac{a^2}{b^2}:\frac{b}{a}$
$\frac{a}{10}:1\frac{2}{5}$	$\frac{3q^3}{4}:\frac{16q}{15}$	$\frac{a}{b}:\frac{1}{b}$
$3\frac{1}{3}u:6\frac{2}{3}$	$\frac{18p}{5}:\frac{27p^3}{35}$	$\frac{2x}{3y}:\frac{2y}{3x}$
$6\frac{2}{3}a^3:1\frac{2}{3}$	$\frac{m^2}{2}:\frac{m^2}{10}$	$\frac{x}{y}:\frac{x^2}{y^2}$.

113. Arvuta.

1) $\frac{b^2}{a} : 3a$

$\left(-\frac{2a^3}{n}\right) : a^2$

$\frac{16b}{a^2} : 4b^3$

$\left(-\frac{15m^4}{8q}\right) : (-5m^2)$

$\frac{2c^2}{5x} : (-14c^3x)$

2) $\left(-\frac{a^2}{b}\right) : 5n$

$\left(\frac{-a}{b}\right) : 7ac^2$

$\frac{16b}{m^2} : (-4b^3)$

$\frac{4ax}{b} : (-5ax^2)$

$\left(\frac{8c^2n}{3f}\right) : (-4cf)$

3) $\frac{3m}{4p} : \frac{q}{2m}$

$\left(-\frac{ax}{c}\right) : \frac{2}{3x^2}$

$\frac{x^3}{y} : \left(-\frac{x^2}{y}\right)$

$\frac{1}{q^2} : \left(-\frac{n}{q^2}\right)$

$\frac{4fg}{h^2} : \frac{2fg}{h^3}$

4) $\frac{3a^2b}{2c^2} : \frac{6ab}{2c^2}$

$\left(-\frac{14xy}{9z^2}\right) : \frac{21x^2}{2c^2}$

$\left(-\frac{156a^4b^3}{17m}\right) : \left(-\frac{12a^2b}{17m}\right)$

$\frac{72u^5}{v^2} : 84\frac{u^3}{v^2}$

$\frac{135a^4b^3}{c^4} : \frac{105a^3b^3}{c^3}$

114. N ä i d e. *Lihtsusta* **mitmekordset murdu**

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}}$$

jagamise teel.

L a h e n d u s.

$$\frac{\frac{7}{25}}{\frac{14}{15}} = \frac{7}{25} : \frac{14}{15} = \frac{7 \cdot 15}{25 \cdot 14} = \frac{3}{10}.$$

115. N ä i d e. *Lihtsusta mitmekordset murdu*

$$\frac{a + \frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}}$$

laiendamise teel.

L a h e n d u s. *Laiendades antud murdu cx-ga, saame*

$$\frac{a+\frac{bx}{c}}{\frac{1}{cx}}=\frac{acx+bx^2}{1}=acx+bx^2.$$

116. Lihtsusta järgmised murrud.

1) $\dfrac{\frac{3}{4}}{9}$ 2) $\dfrac{1}{\frac{1}{a}}$ 3) $\dfrac{x-\frac{x}{3}}{2x}$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ $\dfrac{\frac{a}{2}}{2}$ $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{c}$

$\dfrac{\frac{3x}{8y^2}}{\frac{5x^2}{12y}}$ $\dfrac{-b^2}{-\frac{a}{b}}$ $\dfrac{a+\frac{b}{c}}{\frac{1}{c}}$

$\dfrac{8}{\frac{3}{5}}$ $\dfrac{-\frac{b^2}{a}}{b}$ $\dfrac{m+\frac{1}{4}}{m+\frac{1}{6}}$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ $\dfrac{\frac{16b}{a^2}}{4b^3}$ $\dfrac{2+\frac{1}{a}}{3+\frac{1}{a}}$

KORDAMISEKS.

117. Taandada murrud.

a) $\frac{-12a^3b^4c^5}{-36a^4b^4c^5}$; b) $\frac{-72a^3b^4c^5x^6y^7}{-9a^3b^2c}$.

118. Arvuta korrutis

$$\frac{m}{n}\cdot\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)$$

kahel viisil ja võrdle tulemusi.

119. a) Kirjuta hulkliige

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

astmena.

b) Kirjuta hulkliige

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

astmena.

120. a) Tõesta, et võrdus

$$(-a+b)(-a-b)=(a+b)(a-b)$$

on õige.

b) Tõesta, et võrdus

$$(-a-b)^2=(a+b)^2$$

on õige.

121. Tõesta, et võrdus

$$(a-b)^2=(b-a)^2$$

on õige.

122. Millise avaldise peab liitma avaldisega $(a-b)^2$, et tulemus oleks võrdne avaldisega $(a+b)^2$?

123. Millise avaldise peab lahutama arvude a ja b summa kuubist, et tulemus oleks võrdne a ja b kuupide summaga?

124. Arvuta x antud võrdest.

a) $\frac{x}{m}=\frac{5n}{2m}$; b) $\frac{ab}{cd}=\frac{a^2b^2}{x}$.

125. Teisenda murd

$$-\frac{-x^2-x+1}{2}$$

murruks, mille ees ei ole miinusmärki.

126. Teisenda murd $\frac{-a+b}{-x-y}$ niisuguseks murruks, milles lugeja ega nimetaja esimese liikme ees ei ole miinusmärki.

127. Ristküliku ühe külje pikkus on $\frac{a}{2}$ meetrit ja teise külje pikkus on $\frac{m}{a}$ meetrit. Kui suur on ristküliku pindala?

128. Toa pikkus on $\frac{a^2}{2b}$ meetrit ja laius $\frac{b}{3a}$ meetrit. Arvuta toa põranda pindala.

129. Kolmnurga alus on $\frac{2a}{b}$ cm ja kõrgus $\frac{b}{a}$ cm. Leia pindala.

130. Kolmnurga küljed on $\frac{a}{b}$ cm, $\frac{2a}{b}$ cm ja $\frac{b-a}{2b}$ cm. Leia kolmnurga ümbermõõt.

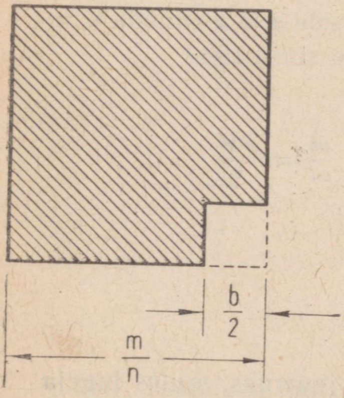
131. Rööpküliku külgede pikkused on $\frac{a-b}{m}$ cm ja $\frac{2a-b}{m}$ cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.

132. Plekist ruudu külje pikkus on a mm. Soojenedes paisus ruudu külg 1 mm võrra. Leia pindala, mille võrra plekist ruudu pindala suurenes soojenedes.

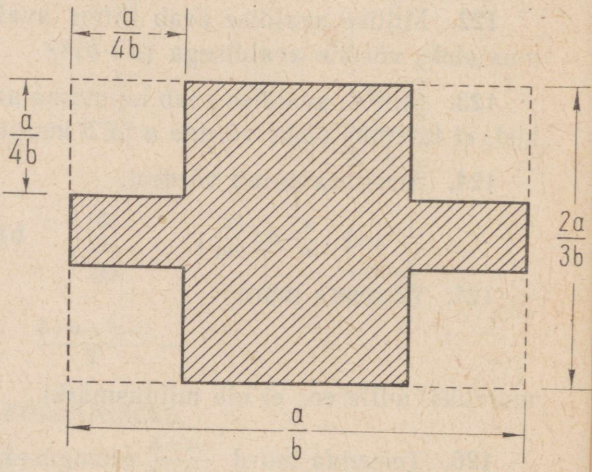
133. Vasest kuubi serv, mille pikkus on b mm, paisus kuumendamisel 1 mm võrra. Leia, mille võrra suurenes kuubi ruumala.

134. Arvuta joonisel 12 antud kujundi pindala.

135. Arvuta joonisel 13 antud kujundi pindala.



Joon. 12.



Joon. 13.

3. HULKLIIKMETE LAHUTAMINE TEGUREIKS.

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE ÜHISE TEGURI SULGUDE ETTE TOOMISEGA.

136. *Jagades hulkliikme*

$$am+bm-cm$$

arvuga m, saame

$$(am+bm-cm):m=a+b-c.$$

Et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, siis

$$\boxed{am+bm-cm=m(a+b-c).}$$

Nii on hulkliige $am+bm-cm$ *teisendatud korrutiseks* $m(a+b-c)$. *Selle kohta öeldakse, et hulkliige on* **lahutatud tegureiks.**

Hulkliikme teisendamist korrutiseks nimetatakse **hulkliikme tegureiks lahutamiseks.**

137. Jaga hulkliige

$$12x^2-18x+30$$

tema liikmete suurima ühisteguriga 6 ning kirjuta seejärel antud hulkliige korrutisena, s. t. lahuta see hulkliige tegureiks.

138. Mis on hulkliikme $ak-bk-ck$ liikmete ühiseks teguriks? Jaga see hulkliige tema liikmete ühise teguriga ja esita siis antud hulkliige korrutisena.

139. Jaga hulkliige

$$9a^5x^2-6a^3x^3+15a^2x^5$$

tema liikmete suurima ühisteguriga. Lahuta antud hulkliige tegureiks.

140. *Ülesandeis 136—139 kirjeldatud hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse* **ühise teguri sulgude ette toomise võtteks.**

Antud hulkliikme lahutamisel tegureiks sulgude ette toomise võttega toimime järgmiselt:

1) **leiame hulkliikme liikmete SÜT ja kirjutame selle tegurina sulgude ette;**

2) **sulgudesse kirjutame teise teguri, milleks on antud hulkliikme ja sulgude ees seisva teguri jagatis.**

Näide. $12a^2b-18a^3b^2-24a^4b^3=6a^2b(2-3ab-4a^2b^2)$,

sest $12a^2b:6a^2b=2$,

$-18a^3b^2:6a^2b=-3ab$,

$-24a^4b^3:6a^2b=-4a^2b^2$.

141. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3a+3b$	2) $6a-3x$
$3a+6$	$7x-14a$
$9a-6$	$15x+3a$
$12-4a$	$16a-24x$
$21-35a$	$72x-9a$
3) $mn+mx$	4) $16r^3-24r^2$
Q^2-PQ	$4u^3-u^4$
mv^2-gv	pq^2-3p^2q
$2st-6at^2$	m^3+5am^2
$14N^2-7Nc$	$15h^2k^3-9h^3k$

142. *Kui antud hulkliikme üks liikmetest on liikmete SÜT, siis saab tuua selle liikme sulgude ette. Sulgudes on sel korral üheks liikmeks $+1$ või -1.*

Näiteid. $3a+3=3(a+1)$

$2ab-a=a(2b-1)$

143. Lahuta alljärgnevad kaksliikmed tegureiks.

1) $6ax-6a$	2) x^2+2ax^2
$5a^2-10ab$	$12a^2-4a^2x$
$6ax-12a^2$	$10ax-15bx$
$9x^2-18ax$	$12ax^2-10a^2x$
$3a^2b+3b$	a^2b^2-ab

144. Too -2 sulgude ette.

a) $-6a-4b$

b) $-2x^2+10x-12$

c) $-8a^2-6a-2$

145. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$6ax-9bx+21cx$

$42a^2y-35ay^2+7ay$

$9cz^4-21c^2z^3-15c^3z^2$

$-12ax^2-9ax-6a$

$-5+10x-15x^2$

146. *Jagades hulkliikme*

$$7u(3a-2)+5(3a-2)$$

kaksliikmega $3a-2$, *saame*

$$[7u(3a-2)+5(3a-2)]:(3a-2) = 7u+5.$$

Siit järeldame, et

$$7u(3a-2)+5(3a-2) = (3a-2)(7u+5).$$

Hulkliikme

$$7u(3a-2)+5(3a-2)$$

liikmete ühiseks teguriks on hulkliige $3a-2$. *Sellest näeme, et kui antud hulkliikme liikmetel on hulkliikmeline ühistegur, siis võib tuua selle sulgude ette.*

147. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks.

$a(3m+n)+b(3m+n)$

$5(x-2y)+a(x-2y)$

$(a+b)(2x+y)+a(2x+y)$

$m(u+2)-n(u+2)$

$2(3b-v)-3v(3b-v)$

148. *Lahutame hulkliikme*

$$m(1+a+a^2)-(1+a+a^2)$$

tegureiks. Liikmete ühiseks teguriks on kolmliige $1+a+a^2$. *Kirjutame selle sulgude ette esimeseks teguriks; et ta on hulkliikmeline tegur, siis peame ta kirjutama sulgudesse.*

Nii saame

$$m(1+a+a^2)-(1+a+a^2) = (1+a+a^2)(m-1),$$

sest

$$\frac{m(1+a+a^2)}{1+a+a^2}=m \text{ ja } \frac{-(1+a+a^2)}{1+a+a^2}=-1.$$

149. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

$a(1+x)-(1+x)$

$a(1+x+x^2)-(1+x+x^2)$

$x(a^2-a+1)-2(a^2-a+1)$

$m(5x-1)-(n+2)(5x-1)$

$(3a+2b)(m+3c)-(2a+b)(m+3c)$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE VALEMITE KASUTAMISEGA.

150. *Kui hulkliige on kahe arvu ruutude vahe, siis tema tegureiks lahutamisel saab kasutada valemit*

$$\boldsymbol{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}.$$

(*vt. ül.* 8.)

N ä i t e i d.

a) $16a^2-81b^2=(4a)^2-(9b)^2=(4a+9b)(4a-9b)$.

b) $(2x+3y)^2-(2x-3y)^2=$
$=[(2x+3y)+(2x-3y)]\cdot[(2x+3y)-(2x-3y)]=4x\cdot 6y=24xy$.

151. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) x^2-1	2) $1-x^2$	3) $4x^2-9y^2$
y^2-4	a^2-9	$0{,}16a^2-0{,}09b^2$
$25-y^2$	$64u^2-v^2$	$9a^2-(2x-1)^2$
$49-9x^2$	$x^2-\frac{9}{25}$	$(3a+b)^2-(a-3b)^2$
$0{,}04-c^2$	$a^2-0{,}49$	$(a+b)^2-(a-b)^2$

152. Lahuta alljärgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) ax^2-ay^2	2) $2a^2-2b^2$
a^3-ax^2	$8-18x^2$
$3R^2-3r^2$	$2R^2-2r^2$
$27a^2-12b^2$	$50a^2-98b^2$
s^3t^2-s	$9a^3x^2-a$

Näide. $18a^3m^2-50a=2a(9a^2m^2-25)=$
$=2a[(3am)^2-5^2]=2a(3am+5)(3am-5)$.

153. *Valemist*

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

järeldame võrduse poolte vahetamise teel, et

$$\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}.$$

Samal viisil järeldame valemist

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

et

$$\boldsymbol{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}.$$

Neist valemeist näeme, et kui kolmliikme kaks liiget on kahe arvu ruudud ja üks liige on nende arvude kahekordne korrutis, siis selle kolmliikme saab kirjutada nende arvude summa või vahe ruuduna, s. t. selle kolmliikme saab lahutada teguriteks.

Näiteid.

a) $4a^2+12ab+9b^2=(2a)^2+2\cdot 2a\cdot 3b+(3b)^2=(2a+3b)^2$.

b) $36m^2-60mn+25n^2=(6m)^2-2\cdot 6m\cdot 5n+(5n)^2=(6m-5n)^2$.

154. Lahuta järgmised hulkliikmed võimaluse korral tegureiks.

1) x^2+4x+4	2) $25-10y+y^2$
x^2-2x+3	$1+2z+z^2$
$x^2+14x+49$	$4u+8+u^2$
$x^2-8x+16$	v^2-2v-1
$x^2-18x+72$	$t^2-16t+64$
3) $x^2-\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}$	4) $x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$
$4f^2+4f+1$	$16g^2-16g+4$
$x^2-0{,}2x+0{,}01$	$h^2-6ah+9a^2$
$x^2-2{,}4x+1{,}44$	$c^2-4ck+4k^2$
$x^2-0{,}6x-0{,}09$	$25m^2-30mn+9n^2$

155. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks, tuues esmalt ühise teguri sulgude ette ning kasutades seejärel valemit.

1) $3a^2-6a+3$	2) $6a^2+12a+6$
$5a^2+10a+5$	$50y^2+20y+2$
$ax^2+4ax+4a$	$av^2-2av+a$
$7x^2-14x+7$	$3m^2-48m+19^2$
$2x^2-16x+32$	$5+10z+5z^2$.

156. Lahuta järgnevad kolmliikmed tegureiks.

1) $-a^2-8a-16$ 2) $-x^2-4x-4$

$-x^2+10x-25$ $2ab-a^2-b^2$

$2x-x^2-1$ $-x^2+6x-9$

N ä i d e. $10a-a^2-25=-(-10a+a^2+25)=$
$=-(a^2-10a+25)=-(a-5)^2$.

157. *Valemeist*

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

ja

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

saame järeldada, et

$$\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3}$$

ja

$$\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3}.$$

Neid valemeid saab hulkliikme tegureiks lahutamisel kasutada siis, kui hulkliikmes on neli liiget, milledest kaks on kahe arvu kuubid, üks on kolmekordne esimese arvu ruudu ja teise arvu korrutis ning üks on kolmekordne esimese arvu ja teise arvu ruudu korrutis.

N ä i d e. $a^3+12a^2+48a+64=a^3+3\cdot a^2\cdot 4+3\cdot a\cdot 4^2+4^3=$
$=(a+4)^3$.

158. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) x^3+3x^2+3x+1

$8-12a+6a^2-a^3$

$c^3+3c^2d+3cd^2+d^3$

$-a^3-30a^2-300a-1000$

$y^3+2y^2+\frac{3}{4}y+\frac{8}{27}$

2) $x^3+18x^2+108x+216$

$1+0{,}03p+0{,}0003p^2+0{,}000001p^3$

$125-75z+15z^2-z^3$

$8u^3+12u^2v+6uv^2+v^3$

$125a^3-150a^2b+60ab^2-8b^3$

159. *Valemeist*

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

ja

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

saame järeldada, et

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

ja

$$\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}.$$

Neist valemeist näeme, et kui hulkliige on kahe arvu kuupide-summa või kuupide vahe, siis saab seda hulkliiget lahutada tegureiks, kirjutades üheks teguriks nende arvude summa (või vahe) ja teiseks teguriks nende arvude vahe (või summa) mittetäieliku ruudu.

Näide. $8a^3-27b^3=(2a)^3-(3b)^3=$
$=(2a-3b)[(2a)^2+2a\cdot 3b+(3b)^2]=$
$=(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$.

160. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks.

1) a^3+125	2) $250p^3+54q^3r^3$
$64-x^3$	$x^3-0{,}008$
$8x^3+1$	$\frac{1}{8}-8a^3$
$27a^3-8b^3$	$125u^3+216$
$z^3+0{,}001$	$128a^3b^2-432b^2c^3$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE LIIKMETE RÜHMITAMISE VÕTTEGA.

161. *Hulkliikme*

$$m(a+b)+n(a+b)$$

tegureiks lahutamisel saame kasutada ühise teguri sulgude ette toomise võtet, sest hulkliikme liikmetel on ühiseks teguriks $(a+b)$. *Tuues selle ühise teguri sulgude ette, saame*

$$m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n).$$

Hulkliikme

$$m(a+b)+n(a+b)$$

võib anda ka kujul

$$ma+mb+na+nb.$$

Kui seda hulkliiget hakata lahutama tegureiks, siis näeme, et kõikidel tema liikmetel ei ole ühist tegurit, kuid esimesel kahel liikmel on ühiseks teguriks m, kahel viimasel aga n.

Rühmitades selle hulkliikme liikmeid nii, et igas rühmas oleks ühise teguriga liikmed, siis saame

$$(ma+mb)+(na+nb).$$

Kummaski rühmas saab nüüd tuua ühise teguri sulgude ette. Seega saame

$$(ma+mb)+(na+nb)=m(a+b)+n(a+b).$$

Sel viisil oleme saanud hulkliikme niisugusel kujul, et kõikidel liikmetel on ühine tegur $(a+b)$, *mille võime tuua sulgude ette. Nii saame lõpuks:*

$$ma+mb+na+nb=(ma+mb)+(na+nb)=$$
$$=m(a+b)+n(a+b)=(a+b)(m+n).$$

Niisugust hulkliikme tegureiks lahutamise võtet nimetatakse **liikmete rühmitamise võtteks.**

Lahuta hulkliige

$$ma+mb+na+nb$$

tegureiks, rühmitades liikmed nii, et esimeses rühmas oleks liikmed ühise teguriga a, teises rühmas liikmed ühise teguriga b. Võrdle tulemust eespool saadud tulemusega.

162. Lahuta järgnevad hulkliikmed tegureiks liikmete rühmitamise võttega.

1) $ax+ay+2x+2y$
$n^2+nz+5n+5z$
$u^2+7u+au+7a$
$3a^2+2ab+ba+4b$
$6x^2-13x+6xy-13y$

2) $2ax-au+4bx-2bu$
$5Nc-5Nd+7c^2-7cd$
$z^2-hz+11z-11h$
$8x^3-8x^2y-4xy^2+4y^3$
$ax^2-bx^2+ax-bx$

3) $t^2-at-3t+3a$
$8m^2-4mn-6m+3n$
$16pq-12q-8pr+6r$
$20ab-4b-5a+1$
$5z^2-5hz+ah-az$

4) x^3+x^2+x+1
x^3-3x^2-2x+6
$3x^3-7x^2-9x+21$
x^3-2x^2-2x+4
$5x^3-35x^2+x-7$

HULKLIIKMETE TEGUREIKS LAHUTAMINE MITME VÕTTEGA.

163. *Hulkliikmete tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, kui saadud korrutises hulkliikmeline tegur on omakorda veel tegureiks lahutatav. Näiteks, kui hulkliige*

$$3ax^2-3ay^2$$

on ühise teguri $3a$ *sulgude ette toomisega teisendatud korrutiseks*

$$3a(x^2-y^2),$$

siis tegureiks lahutamine ei ole lõpetatud, sest teine tegur on omakorda veel tegureiks lahutatav:

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y).$$

Hulkliikme tegureiks lahutamine on lõpetatud siis, kui ta on teisendatud niisuguseks korrutiseks, mille ükski hulkliikmeline tegur ei ole enam tegureiks lahutatav.

Tegureiks ei ole lahutatavad näiteks järgmised hulkliikmed:

$a+b$; $\quad a-b$; $\quad a^2+ab+b^2$;
a^2-ab+b^2; $\quad a^2+b^2$; $\quad 2x-4y+3xy$.

N ä i d e.

$$3ax^2-3ay^2=3a(x^2-y^2)=3a(x+y)(x-y)$$

Siin on tegureiks lahutamine lõpetatud, sest kumbagi hulkliikmelist tegurit ei saa enam tegureiks lahutada.

Hulkliikme tegureiks lahutamisel vaatame kõigepealt, kas kõigil liikmetel on ühine tegur; kui on, siis toome selle sulgude ette. Seejärel vaatame, kas sulgudes olevat avaldist saab veel tegureiks lahutada kas valemite kasutamise või liikmete rühmitamise võttega; kui see on võimalik, siis tuleb seda teha.

Näide.

$$6ax^2-12ax-9bx^2+18bx=3x(2ax-4a-3bx+6b)=$$
$$=3x[(2ax-4a)-(3bx-6b)]=$$
$$=3x[2a(x-2)-3b(x-2)]=3x[(x-2)(2a-3b)]=$$
$$=3x(x-2)(2a-3b).$$

164. Lahuta järgmised hulkliikmed tegureiks:

1) $3x^2-6x+3$
$6-24p^2q^2$
$5y^2-1445$
$11x^2-66x+99$
$u^2-1{,}21$

2) $7a^2b^2-7c^4$
$245Q^2-140Q+20$
$121a^2b^2-100c^2d^2$
$24x^2+72x+54$
$4f^2-\frac{9}{25}$

3) $3a^3-12a$
$4a^4+4ab^3$
$x^2-a^2-2ab-b^2$
$a^2-b^2+2bc-c^2$
$5ax^3-40ax^2+80ax$

4) a^4-ab^3
$a^2+2ab+b^2-x^2$
a^2-b^2-a-b
$2a-3b-4a^2+9b^2$
$3k^4-6k^3+3k^2$

HULKLIIKMETE SUURIMA ÜHISTEGURI LEIDMINE.

165. *Antud hulkliikmete SÜT leidmiseks lahutame need hulkliikmed tegureiks ja moodustame siis kõikide ühiste tegurite korrutise.*

Näide. *Leiame hulkliikmete*

$$15h^2-15h,$$
$$9h^3-9h \text{ ja}$$
$$24h^3-48h^2+24h$$

suurima ühisteguri.

Lahendus.

$15h^2-15h=15h(h-1)=3\cdot 5\cdot h\cdot (h-1)$;

$9h^3-9h=9h(h^2-1)=3^2\cdot h(h+1)(h-1)$;

$24h^3-48h^2+24h=24h(h^2-2h+1)=2^3\cdot 3\cdot h(h-1)^2$.

$SÜT=3h(h-1)$.

166. Leia iga järgmise avaldisepaari SÜT:

1) $8mnp$
$12m^2np-4mn^2p$

2) a^2x+ax^2
a^2x-ax^2

3) $15pq-5p$
$10p^2+15p$

4) $7a^2-21ab$
$5a-15b$

5) a^2-1
$a+1$

6) $5(a+x)^2$
$10(a^2-x^2)$

7) N^2-9
N^2-6N+9

8) a^3
a^2x+ax^2

9) m^2n^2-1
$5mn^2+5n$

10) u^3-c^2u
$u^3-2u^2c+uc^2$

167. Leia iga järgmise avaldisekolmiku SÜT:

1) x^2-2x+1
x^2-1
$5x-5$

2) $9-x^2$
x^2+6x+9
$2x+6$

3) $25-36x^2$
$5+6x$
$36x^2-60x+25$

4) $2a-5$
$10-4a$
$6a-15$

5) $4(a+1)^2$
$6a^2-6$
$2a^2+4a+2$

6) a^2-b^2+a-b
$3a^2-6a+3$
$5a^2-5b^2$

HULKLIIKMETE VÄIKSEIMA ÜHISKORDSE LEIDMINE.

168. *Antud hulkliikmete VÜK leidmiseks lahutame kõik need hulkliikmed tegureiks, misjärel moodustame korrutise, mille tegureiks on ühe hulkliikme kõik tegurid ning teiste hulkliikmete tegurite hulgast need, mis võetud hulkliikme tegurite hulgas ei esine.*

Näide. *Leiame hulkliikmete* $4N^2x-4N^2$, $6N(x^2+2x+1)$ *ja* $20Nx^2-20N$ *väikseima ühiskordse.*

L a h e n d u s.

$4N^2x-4N^2=4N^2(x-1)=2^2\cdot N^2(x-1)$;

$6N(x^2+2x+1)=6N(x+1)^2=2\cdot 3\cdot N(x+1)^2$;

$20Nx^2-20N=20N(x^2-1)=2^2\cdot 5\cdot N(x+1)(x-1)$.

$$VÜK=2^2\cdot N^2(x-1)\cdot 3\cdot (x+1)^2\cdot 5= =60N^2(x-1)(x+1)^2.$$

169. Leia järgmiste avaldisepaaride VÜK:

1) 5 $5a-5x$	2) 12 $12a+5b$	3) m m^2+m
4) Ny N^2-N	5) $4a+4n$ $5a-5n$	6) a^3-aR^2 $6a-6R$
7) x^2-u^2 $7x+7u$	8) $1-x^2$ $(x-1)(x+2)$	9) $(v-9)^2$ $(18-2v)^2$

170. Leia iga järgmise kolme hulkliikme VÜK:

1) $(b-7)^2$ b^2-7b $5b$	2) ax a^2+ax $ax+x^2$	3) $3x^2-48$ $3x-12$ $(x+4)^2$
4) $(x-3)^2$ x^2-9 $5x-15$	5) $3(n^2-1)$ $(n-1)(n^2+1)$ n^3+n	6) $2(x-1)^2$ $7(x+1)^2$ $14(x^2-1)$
7) $a(a+b)+a^2-b^2$ $4a^2-4ab+b^2$ a^2-b^2	8) a^2-4 a^3+8 a^2+2a+4	
9) a^3-a^2+a-1 a^3+a^2+a+1 a^4-1	10) $8ab+16b^2$ $a^2b+4ab^2+4b^3$ a^3	

HULKLIIKMELISTE LIIKMETEGA MURRUD.

MURRU TAANDAMINE.

171. *Kui murru lugeja ja nimetaja on hulkliikmed, siis sellise murru taandamiseks lahutame tema lugeja ja nimetaja tegureiks. Juhul kui lugejal ja nimetajal on ühiseid tegureid, siis nende ühiste teguritega taandame murdu.*

N ä i t e i d.

1. *Taanda murd* $\frac{3ab+3b}{6b+6ab}$.

L a h e n d u s. $\frac{3ab+3b}{6b+6ab}=\frac{3b(a+1)}{6b(1+a)}=\frac{3b(a+1)}{6b(a+1)}=\frac{1}{2}$.

2. *Taanda murd* $\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}$.

L a h e n d u s.

$$(x+3)(x+2)+2(x-3)=x^2+5x+6+2x-6=$$
$$=x^2+7x=x(x+7);$$
$$x^2+14x+49=(x+7)^2;$$
$$\frac{(x+3)(x+2)+2(x-3)}{x^2+14x+49}=\frac{x(x+7)}{(x+7)^2}=\frac{x}{x+7}.$$

3. *Taanda murd* $\frac{2ab-2b}{8b-8ab}$.

L a h e n d u s.

$$\frac{2ab-2b}{8b-8ab}=\frac{2b(a-1)}{8b(1-a)}=\frac{a-1}{4(1-a)}=-\frac{1-a}{4(1-a)}=-\frac{1}{4}.$$

172. Taanda võimaluse korral iga järgmine murd.

1) $\frac{9m+18}{9m-27}$; $\frac{ab-ac}{ad+ac}$; $\frac{a^2-a}{ab+a}$; $\frac{2x-2}{2x+7}$; $\frac{a-ax}{n-nx}$

2) $\frac{7h+14}{7h-35}$; $\frac{2e-1}{2e+3}$; $\frac{n+n^2}{1+n}$; $\frac{ar+a^2r^2}{a+ar}$; $\frac{6u^3-6u^2}{u-1}$

3) $\frac{3abc-7abu}{3ac-7au}$; $\frac{ns+nt}{sv+tv}$; $\frac{a^2-az}{ab-bz}$; $\frac{Q^3+Q^2}{Q^3-Q}$; $\frac{5z^3-6z}{15z^2-18}$

4) $\frac{4x^2-4x+1}{10x-5}$; $\frac{z^4-2z^2+1}{z^3-z}$; $\frac{25-10v+v^2}{25a-av^2}$; $\frac{9p^2-16q^2}{6p+8q}$; $\frac{gh^2-gf^2}{kh+kf}$

5) $\frac{ay^2-2ay+a}{y-1}$; $\frac{u^3-2u^2+u}{2u-2}$; $\frac{4x^2-1}{4x+2}$; $\frac{4n^2+25}{16n^4-625}$; $\frac{1-Q^4}{Q^2+1}$

6) $\frac{x-a}{a-x}$; $\frac{5nz-15}{3-nz}$; $\frac{15a^2-20ab}{21am-28bm}$; $\frac{1-h^2}{ch^2-c}$; $\frac{ab-bc}{ad-dc}$

7) $\dfrac{by-b}{1-y}$

$\dfrac{x^2+xy}{xy+y^2}$

$\dfrac{2a-5b}{15b-6a}$

$\dfrac{abd^2-abc}{abc-abd^2}$

$\dfrac{a^2-b^2}{a+b}$

8) $\dfrac{a^2-1}{1+a}$

$\dfrac{d^2u^2-9d^2}{du-3d}$

$\dfrac{(nz+1)^3}{n^2z^2-1}$

$\dfrac{a-x}{a-x}$

$-\dfrac{6-x}{x^2-36}$

9) $\dfrac{c^2-16}{4-c}$

$\dfrac{w^2-1}{(w+1)^2}$

$\dfrac{m^3n-mn^3}{mn^2-m^2n}$

$\dfrac{a-b}{b^2-a^2}$

$\dfrac{3h-k}{k^2-9h^2}$

10) $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

$\dfrac{m^2-2mn+n^2}{n-m}$

$\dfrac{u^2-v^2}{u^2-2uv+v^2}$

$\dfrac{a^3+a^2b-ab^2-b^3}{a^8-a^2b-ab^2+b^3}$

$\dfrac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2}$

11) $\dfrac{9-p^2}{p+3}$

$-\dfrac{-p-q}{p^2+2pq+q^2}$

$\dfrac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$

$\dfrac{x^2-y^2-(x+y)z}{x^2-y^2+xz+yz}$

$\dfrac{m^4-m}{m^4-m^2}$

173. Lihtsusta avaldist

$$\frac{2a^3+2a^2-20a-30}{4a^2-9}$$

ja arvuta siis ta väärtus, kui $a=11$.

174. Lihtsusta avaldist

$$\frac{8x^2+16x+32}{x^3-8}$$

ja arvuta siis ta väärtus, kui $x=3$.

175. Näita, et murru

$$\frac{n^2-nx+n-x}{n^2-nx-n+x}$$

väärtus ei sõltu x väärtusest.

176. Näita, et murru

$$\frac{m^2+2m-mx-2x}{m^2+3m-mx-3x}$$

väärtus ei sõltu x väärtusest.

177. Laienda murd $\frac{11}{17}$ nimetajani 51. Millega pead antud murru nimetajat korrutama, et saada uueks nimetajaks 51? Kui suur on laiendaja?

178. Näide. *Laienda murd* $\frac{2a-b}{a+3b}$ *nimetajani* $a^2+6ab+9b^2$.

Lahendus.

$$a^2+6ab+9b^2=(a+3b)^2.$$

Laiendaja on $a+3b$.

$$\frac{2a-b}{a+3b}=\frac{(2a-b)\cdot(a+3b)}{(a+3b)\cdot(a+3b)}=\frac{2a^2+6ab-ab-3b^2}{a^2+6ab+9b^2}=\frac{2a^2+5ab-3b^2}{a^2+6ab+9b^2}.$$

179. Laienda järgmised murrud antud nimetajani

1) $\frac{1}{a+b}$ nimetajani a^2-b^2

2) $\frac{a-b}{a+b}$ „ $a^2+2ab+b^2$

3) $\frac{x+y}{x-y}$ „ $x^2-2xy+y^2$

4) $\frac{m+n}{m-n}$ „ m^2-n^2

5) $\frac{a+b}{a-b}$ „ a^3-b^3

6) $\frac{m-n}{m+n}$ „ m^3+n^3

7) $\frac{2a+5}{3a-1}$ „ $9a^2-6a+1$

8) $\frac{2x-3}{5x+7}$ „ $25x^2+70x+49$

MURDUDE TEISENDAMINE ÜHENIMELISTEKS.

180. Tuleta meelde, kuidas teisendatakse murde ühenimelisteks.

Teisenda ühenimelisteks murrud

$$\frac{5}{54},\quad \frac{7}{81} \text{ ja } \frac{19}{135}.$$

181. Näide. *Teisenda murrud*

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2} \text{ ja } \frac{2ab}{a^2-b^2}$$

ühenimelisteks.

Lahendus. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$VÜK=(a+b)^2(a-b).$$

Esimese murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b):(a^2+2ab+b^2)=a-b;$$

teise murru laiendaja on

$$(a+b)^2(a-b):(a^2-b^2)=a+b.$$

$$\frac{a-b}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a-b)\cdot(a-b)}{(a^2+2ab+b^2)\cdot(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2(a-b)};$$

$$\frac{2ab}{a^2-b^2}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a^2-b^2)(a+b)}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a+b)(a-b)(a+b)}=\frac{2ab\cdot(a+b)}{(a+b)^2(a-b)}.$$

182. Teisenda järgmised murrud ühenimelisteks:

1) $\frac{a}{a+b}$ ja $\frac{b}{a-b}$

2) $\frac{m}{m-n}$ ja $\frac{n}{m+n}$

3) $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$

4) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$ ja $\frac{a+b}{a^2-2ab+b^2}$

5) $\frac{b}{a(a+b)}$, $\frac{a}{b(a-b)}$ ja $\frac{ab}{a^2-b^2}$

6) $\frac{c+d}{d(c-d)}$, $\frac{c-d}{d(c+d)}$ ja $\frac{cd}{c^2-d^2}$

MURDUDE LIITMINE JA LAHUTAMINE.

183. Kuidas toimub isenimeliste murdude liitmine ja lahutamine?

Teosta tehted:

$$\frac{12}{35}+\frac{29}{42}-\frac{61}{70}.$$

184. Näide. *Teosta tehted:*

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3}-\frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3}-\frac{1}{mn+n^2}.$$

L a h e n d u s.

1) *Lahutame nimetajad tegureiks ja leiame nimetajate VÜK, mis on antud murdude ühiseks nimetajaks:*

$$\begin{array}{l} m^3+n^3=(m+n)(m^2-mn+n^2) \\ m^2n-mn^2+n^3=n(m^2-mn+n^2) \\ mn+n^2=n(m+n) \\ \hline VÜK=(m+n)(m^2-mn+n^2)n. \end{array}$$

2) *Jagades leitud VÜK iga murru nimetajaga, leiame iga murru laiendaja:*

$$n,\ m+n \text{ ja } m^2-mn+n^2.$$

3) *Laiendame iga murdu vastava laiendajaga ja liidame laiendatud murrud:*

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3}^{\overbrace{\ n\ }} - \frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3}^{\overbrace{m+n}} - \frac{1}{mn+n^2}^{\overbrace{m^2-mn+n^2}} =$$

$$=\frac{n(m-2n)-(m+n)(m-n)-(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}=$$

$$=\frac{mn-2n^2-m^2+n^2-m^2+mn-n^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}.$$

4) *Koondame lugeja, saame*

$$\frac{2mn-2n^2-2m^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}.$$

5) *Kui võimalik, siis taandame. Taandamise võimaluse selgitamiseks lahutame lugeja tegureiks:*

$$\frac{2mn-2n^2-2m^2}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}=\frac{-2(m^2-mn+n^2)}{(m+n)(m^2-mn+n^2)n}=$$

$$=\frac{-2}{(m+n)n}=-\frac{2}{n(m+n)}.$$

V a s t u s.

$$\frac{m-2n}{m^3+n^3}-\frac{m-n}{m^2n-mn^2+n^3}-\frac{1}{mn+n^2}=-\frac{2}{n(m+n)}.$$

185. N ä i d e. *Lihtsusta avaldis*

$$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}.$$

L a h e n d u s.

$$\frac{a}{a-1}-\frac{2a}{1-a}-\frac{3a^2+a-2}{a^2-1}=\frac{\overbrace{a}^{a+1}}{a-1}+\frac{\overbrace{2a}^{a+1}}{a-1}-\frac{\overbrace{3a^2+a-2}^{1}}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{a^2+a+2a^2+2a-3a^2-a+2}{(a+1)(a-1)}=$$

$$=\frac{2a+2}{(a+1)(a-1)}=\frac{2(a+1)}{(a+1)(a-1)}=\frac{2}{a-1}.$$

186. Teosta järgmised tehted:

1) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}$

$\frac{2a+3b}{2a-3b}-\frac{2a-3b}{3b-2a}$

$\frac{7b-8a}{3a-2b}-\frac{b-4a}{2b-3a}$

$\frac{3a-4b}{a^2-b^2}-\frac{3b-2a}{b^2-a^2}+1$

$\frac{2b^3-2a^3}{a^3-b^3}-\frac{1}{b-a}+1$

2) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

$\frac{5x-6y}{x-y}-\frac{3x-2y}{y-x}$

$\frac{7a+8}{5a-5}+\frac{8+4a}{4-4a}$

$\frac{4}{x-y}+\frac{5x+5y}{2y^2-2x^2}-2$

$\frac{2b^2-ab}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{ab-a^2-b^2}-1$

3) $\frac{1}{y-3}-\frac{1}{y-1}$

$\frac{4-3a}{a-1}-\frac{4a-5}{1-a}$

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c}$

$\frac{x}{2x-c}+\frac{c}{2x}$

$\frac{x-y}{x+3y}-\frac{x+y}{3y}$

4) $\frac{1}{2u-v}-\frac{1}{2u+v}$

$\frac{5}{3x-3}-\frac{3}{2x-2}$

$\frac{2}{a}+\frac{4a-b}{a^2+ab}$

$\frac{1}{1-c}-\frac{1}{c+1}$

$\frac{7n}{5m^2-m}-\frac{2n}{10m-2}$

5) $\frac{4}{x-1}+\frac{3}{1-x}$

$\frac{3}{2x-1}+\frac{7}{2x+1}-\frac{4-20x}{1-4x^2}$

$\frac{5}{5+3n}+\frac{3}{5-3n}-\frac{3n-35}{9n^2-25}$

$\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}$

$\frac{4a+x}{4a-x}+\frac{4a-x}{x-4a}$

6) $\frac{2}{1-a^2}-\frac{2}{a-1}$

$\frac{2a+3x}{2a-3x}-\frac{2a-3x}{3x-2a}$

$\frac{x}{x-y}+\frac{3x}{x+y}-\frac{2xy}{x^2-y^2}$

$\frac{2}{2x+3}+\frac{3}{3-2x}+\frac{2x+15}{4x^2-9}$

$\frac{2x-19}{3x-4}-\frac{5x}{6x-8}-\frac{1}{2}$

7) $\frac{2}{a+b}+\frac{3}{a-b}+\frac{4a+8b}{a^2-b^2}$

$\frac{2}{2a+3}+\frac{3}{3-2a}+\frac{2a+15}{4a^2-9}$

$\frac{2}{a}+\frac{3}{b-2a}-\frac{2a-3b}{4a^2-b^2}$

$\frac{1}{(a-2)(a-3)}+\frac{2}{(a-1)(3-a)}+\frac{1}{(a-1)(a-2)}$

$\frac{n}{n^2-1}+\frac{n^2+n-1}{n^3-n^2+n-1}+\frac{n^2-n-1}{n^3+n^2+n+1}+\frac{2n^3}{n^4-1}$

8) $\frac{a-2b}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{a^2b-ab^2+b^3}-\frac{1}{ab+b^2}$

$\frac{1}{a-b}-\frac{3ab}{a^3-b^3}-\frac{b-a}{a^2+ab+b^2}$

$\frac{2}{4+a}-\frac{a-3}{16-4a+a^2}-\frac{a^2-9a}{64+a^3}$

$\frac{1}{2m-3n}-\frac{2m+3n}{4m^2+6mn+9n^2}-\frac{6mn}{8m^3-27n^3}$

$\frac{a+1}{2a-2}+\frac{a^2+3}{2-2a^2}+\frac{2a-3}{a+1}$

187. N ä i d e. *Kirjuta avaldis*

$$a-b-\frac{a^2-b^2+ab}{b}$$

murruna.

L a h e n d u s.

$$a-b=\frac{a-b}{1}=\frac{b(a-b)}{b}=\frac{ab-b^2}{b};$$

seega

$$a-b-\frac{a^2-b^2+ab}{b}=\frac{ab-b^2}{b}-\frac{a^2-b^2+ab}{b}=$$

$$=\frac{ab-b^2-a^2+b^2-ab}{b}=\frac{-a^2}{b}=-\frac{a^2}{b}.$$

188. Kirjuta järgmised avaldised murdudena:

1) $1+\frac{a}{1-d}$ 4) $\frac{b}{b+x}+1$

2) $1+n+\frac{n^2}{1-n}$ 5) $x-3+\frac{7}{x+3}$

3) $a-b-\frac{a^2-b^2}{a}$ 6) $\frac{x^2-x-6}{x^2-4}-2-\frac{x-1}{2-x}$

189. Maja veevärgi kraan annab torustiku korrasolekul q liitrit vett minutis. Torude osalisel ummistumisel langeb minutiline läbivool d liitri võrra. Mitme minuti võrra kasvab sel puhul vanni täitumise aeg, kui vanni lastakse v liitrit vett?

190. Ujuja ujub seisvas vees kiirusega v meetrit sekundis. Jõevoolu kiirus on w meetrit sekundis. Kui palju aega kulub ujujal k meetri ujumiseks vastuvoolu rohkem, kui sama vahemaa ujumiseks pärivoolu?

Kui palju aega kulub ujujal k meetri edasi-tagasi ujumiseks?

MURDUDE KORRUTAMINE.

191. Korruta.

1) $3\cdot\frac{5}{6}$	2) $\frac{9}{16}\cdot\frac{20}{21}\cdot\frac{28}{45}$	3) $\frac{113}{355}\cdot 1\frac{2}{113}$
$14\cdot\frac{2}{7}$	$\frac{17}{18}\cdot\frac{27}{34}\cdot\frac{9}{16}$	$1\frac{1}{3}\cdot 20\frac{1}{4}$
$3a\cdot\frac{b}{6a}$	$\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c^2}{a^2}$	$\left(1+\frac{a+b}{a-2b}\right)\cdot\left(2-\frac{3a}{2a-b}\right)$
$\frac{a}{10b}\cdot 5b$	$\left(-\frac{2a}{3b}\right)\cdot\left(-\frac{6c}{4a}\right)\cdot 2b$	$\left(1-\frac{a-2b}{2a+b}\right)\cdot\left(2-\frac{5b}{a+3b}\right)$

192. N ä i d e. Leia korrutis

$$(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}.$$

L a h e n d u s.

$$(4-a^2)\cdot\frac{3a}{2+a}=\frac{(4-a^2)\cdot 3a}{2+a}=\frac{3a(2+a)(2-a)}{2+a}=$$

$$=3a(2-a)=6a-3a^2.$$

193. N ä i d e. *Lihtsusta avaldis*

$$\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}.$$

L a h e n d u s.

$$\frac{x^2-4u^2}{x+u}\cdot\frac{x^2-u^2}{x+2u}=\frac{(x^2-4u^2)\cdot(x^2-u^2)}{(x+u)\cdot(x+2u)}=$$

$$= \frac{(x+2u)(x-2u)\cdot(x+u)(x-u)}{(x+u)\cdot(x+2u)} = (x-2u)(x-u).$$

194. Korruta.

1) $\frac{x^2-y^2}{xy} \cdot \frac{y}{x^2+xy}$

$-\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \cdot \left(-\frac{3a^2}{4a-4b}\right)$

$(2x-2a) \cdot \frac{c}{x-a}$

$\frac{m+n}{7m} \cdot \frac{5m}{2m-2n}$

2) $\frac{a^2+ab}{3bc} \cdot \frac{12c}{a^2-b^2}$

$-\frac{10b^2-10a^2}{a^2} \cdot \left(\frac{b^2+a^2}{5a+5b}\right)$

$(x+1) \cdot \frac{3}{x^2-1}$

$\frac{4n+1}{6-10n} \cdot (5n-3)$

3) $\frac{m}{n-1} \cdot \frac{n^2-2n+1}{m+mn}$

$\frac{x+7u}{x-7u} \cdot (x^2-49u^2)$

$\frac{x^2-u^2}{2a+2b} \cdot \frac{a+b}{3x+3u}$

$\frac{x^2-1}{4} \cdot \frac{12}{x-1}$

$\frac{u^2-4v^2}{8u} \cdot \frac{12u^2}{2u-4v}$

4) $\frac{4ax-4x}{a+1} \cdot \frac{1}{4(a-1)}$

$\frac{x+a}{x-a} \cdot \frac{3a}{x^2-a^2}$

$\frac{9-z^2}{3z} \cdot \frac{d}{3+z}$

$\left(1+\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{5x}{x^2-1}$

$\frac{s^2-3s}{7t} \cdot \frac{14t^2}{s^2-9}$

5) $\frac{5p(p-q)}{3r(p+q)} \cdot \frac{3(p^2+q^2)}{5(p^2-q^2)}$

$\frac{4r^2+8r}{3r+9} \cdot \frac{15r+45}{14r^2+28r}$

$\frac{3a+3}{a^2+6a+9} \cdot \frac{6a+18}{a^2-1}$

$\frac{a}{a-b} \cdot \left(-\frac{b-a}{c}\right)$

$-\frac{ab+ac}{cd-bd} \cdot \frac{ab-ac}{bd+cd}$

6) $\frac{ad-ab}{bc+cd} \cdot \frac{ab+ad}{bc-cd}$

$\frac{a^2+4a+4}{3a+6} \cdot \frac{6a-12}{a^2-4}$

$\frac{9-6b+b^2}{3+b} \cdot \frac{9+6b+b^2}{3-b}$

$\frac{7a^2+28a+28}{21a^2-189} \cdot \frac{3a^2-18a+27}{a^2-4}$

$\frac{3a^2-3}{2a^2+8a+8} \cdot \frac{a^2-4}{6a^2-12a+6}$

195. Leia jagatised.

1) $\frac{39}{67} : \frac{52}{134}$	2) $\frac{22}{35} : \frac{33}{70}$	3) $\frac{a^2}{b^2} : \frac{5}{a}$	4) $-\frac{2x}{3y} : \left(-\frac{2y}{3x}\right)$
$26 : \frac{13}{15}$	$7 : \frac{14}{15}$	$\frac{6a^2}{25b^2} : \frac{3a}{5b}$	$\frac{8m^2n}{15k} : \frac{2mn^2}{3k}$
$\frac{15}{16} : 5$	$-\frac{5}{8} : 15$	$a^2b : \frac{ab^2}{n}$	$-m^2 : \left(-\frac{2m}{a^2}\right)$
$12\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2}$	$13\frac{1}{3} : 4\frac{4}{9}$	$\frac{4ax}{b} : 8ax^2$	$\frac{8c^2n}{3a} : 4ac$

196. Näide. *Leia jagatis:*

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4).$$

Lahendus. *Korrutades murru nimetaja täisavaldisega, saame*

$$\frac{3a+2}{2} : (9a^2-4) = \frac{3a+2}{2(9a^2-4)} = \frac{3a+2}{2(3a+2)(3a-2)} = \frac{1}{2(3a-2)}.$$

197. Näide. *Leia jagatis:*

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6}.$$

Korrutades täisavaldise murru pöördarvuga, saame

$$(a+x)^2 : \frac{2a+2x}{6} = \frac{6\cdot(a+x)^2}{2a+2x} = \frac{6(a+x)^2}{2(a+x)} = \frac{3(a+x)}{1} = 3\,(a+x).$$

198. Leia järgmised jagatised:

1) $\frac{a+b}{c} : (a+b)$	2) $\frac{4n(p-q)}{p} : (p-q)$
$\frac{x^2-c^2}{7c} : (x+c)$	$\frac{m^2-mn}{6} : (3m-3n)$
$\frac{5a+1}{3} : (25a^2-1)$	$\frac{4a^2+4a+1}{a-1} : (4a^2-1)$
$c^2 : \frac{-c^3}{a+b}$	$(2p+2q) : \frac{p+q}{5a}$
$(x+2y) : \left(\frac{x+2y}{4n}\right)$	$(a-m)^2 : \frac{3a-3m}{8}$
$(14m-7) : \frac{4m^2-1}{9}$	$(a^3-n^3) : \frac{a^2+an+n^2}{a-n}$

199. Näide. *Leia jagatis.*

$$\frac{a^2-4}{x}:\frac{a+2}{x^2-x}.$$

Lahendus. *Lahutades esimese murru lugeja tegureiks, saame:*

$$a^2-4=(a+2)(a-2).$$

Lahutades teise murru nimetaja tegureiks, saame:

$$x^2-x=x(x-1).$$

Korrutades nüüd esimese murru teise murru pöördarvuga ning taandades, saame:

$$\frac{a^2-4}{x}:\frac{a+2}{x^2-x}=\frac{(a+2)(a-2)\,x(x-1)}{x(a+2)}=(a-2)(x-1).$$

200. Leia järgmised jagatised:

1) $\frac{x^2-ax}{4a}:\frac{x}{8a^2}$

$\frac{a^2-x^2}{ax}:\frac{a+x}{a^2x^2}$

$\frac{p^2+pq}{rx+sx}:\frac{p^3+p^2q}{rx^3+sx^3}$

$\frac{105f^2}{gh-1}:\frac{84fg}{1-gh}$

$\left(R^2-2+\frac{1}{R^2}\right):3\left(R-\frac{1}{R}\right)$

2) $\frac{2x-4}{5a}:\frac{x-2}{15a^2}$

$\frac{(m+n)^2}{4m-4n}:\frac{6m+6n}{m-n}$

$\frac{a+b}{a-b}:\frac{b+a}{b-a}$

$\left(\frac{Q}{2}-\frac{2}{Q}\right):\frac{Q+2}{4Q}$

$\frac{2a}{x-2}:\frac{4}{2-x}$

KÕIK TEHTED MURDUDEGA.

201. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\left(\frac{a+2}{a-2}+\frac{a-2}{a+2}\right)\cdot(a^2-4).$$

Lahendus. *Sulgudes olevate murdude ühiseks nimetajaks on* $(a-2)(a+2)$. *Vastavad laiendajad on* $a+2$ *ja* $a-2$. *Niisiis*

$$\left(\frac{\overbrace{a+2}^{a+2}}{a-2}+\frac{\overbrace{a-2}^{a-2}}{a+2}\right)\cdot(a^2-4)=\frac{(a+2)(a+2)+(a-2)(a-2)}{(a-2)(a+2)}\cdot(a^2-4)=$$

$$=\frac{(a^2+4a+4+a^2-4a+4)(a^2-4)}{a^2-4}=2a^2+8.$$

202. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\left(\frac{a}{3}+\frac{4}{b}\right)\cdot\frac{3b}{4a}$ 2) $\left(\frac{2x}{7y}-\frac{3y}{5x}\right):\left(\frac{35x^2}{6y^2}\right)$

3) $\left(\frac{x}{3}-\frac{3}{x}\right):(x+3)$ 4) $\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

5) $\left(\frac{a+1}{a-1}+\frac{a-1}{a+1}\right)\cdot(a^2-1)$ 6) $\left(\frac{a-3}{a+3}+\frac{a+3}{a-3}\right)\cdot(a^2-9)$

203. Näide. *Lihtsusta avaldis*

$$\frac{2+\frac{2}{a-2}}{2-\frac{2}{a+2}}.$$

Lahendus.

$$\frac{2+\frac{2}{a-2}}{2-\frac{2}{a+2}}=\left(2+\frac{2}{a-2}\right):\left(2-\frac{2}{a+2}\right)=\frac{2(a-2)+2}{a-2}:\frac{2(a+2)-2}{a+2}=$$

$$=\frac{2a-4+2}{a-2}:\frac{2a+4-2}{a+2}=\frac{2a-2}{a-2}:\frac{2a+2}{a+2}=\frac{(2a-2)(a+2)}{(a-2)(2a+2)}=$$

$$=\frac{2(a-1)(a+2)}{(a-2)\cdot 2(a+1)}=\frac{(a-1)(a+2)}{(a-2)(a+1)}=\frac{a^2+a-2}{a^2-a-2}.$$

204. Näide. *Lihtsusta mitmekordset murdu*

$$\frac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a+1}}$$

laiendamise teel.

Lahendus. *Korrutades lugejat ja nimetajat avaldisega* $a+1$, *saame:*

$$\frac{1-\frac{1}{a+1}}{1+\frac{1}{a+1}}=\frac{a+1-1}{a+1+1}=\frac{a}{a+2}.$$

205. Lihtsusta järgmised avaldised:

1) $\frac{x+\frac{x}{2}}{x-\frac{x}{2}}$ 3) $\frac{a+\frac{1}{3}}{a-\frac{1}{2}}$ 5) $\frac{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}$ 7) $\frac{1-\frac{b}{a}}{a+b}$

2) $\dfrac{1-\dfrac{p}{q}}{\dfrac{q-p}{r}}$ 4) $\dfrac{1-\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}}$ 6) $\dfrac{1+c}{1+\dfrac{1}{c}}$ 8) $\dfrac{\dfrac{5m}{2n}}{\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{4}}$

9) $\dfrac{1+\dfrac{1}{m-1}}{1-\dfrac{1}{m+1}}$ 10) $\dfrac{a+\dfrac{5}{6}b}{a-\dfrac{4}{9}b}-1$

206. Teosta tehted.

1) $\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

2) $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right):(a-b)$

3) $\left(\frac{x^3}{y}-\frac{y^3}{x}\right):\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$

4) $\left(\frac{m^2}{n^2}-\frac{n^2}{m^2}\right):(m+n)$

5) $\left(\frac{a+b}{b}-\frac{2b}{b-a}\right)\cdot\frac{b-a}{a^2+b^2}$

6) $\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}\right):\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

7) $\frac{x^4-y^4}{x^2-xy+y^2}\cdot\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$

8) $\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{y}\right):\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{y}\right)$

9) $\left(\frac{1-x}{1+x}-\frac{4x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{1-x}{2x}$

10) $\frac{a^2-1}{b-1}:\frac{1-a^4}{1-b^2}$

207. N ä i d e. *Lihtsusta avaldis*

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]:\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+1\right]$$

ja arvuta ta väärtus, kui $a=2\frac{1}{2}$ *ja* $b=3\frac{1}{2}$.

L a h e n d u s.

$$\left[\frac{(a+b)^3}{3ab}-a-b\right]:\left[\frac{(a-b)^2}{ab}+1\right]=$$

$$=\frac{(a+b)^3-3a^2b-3ab^2}{3ab}:\frac{(a-b)^2+ab}{ab}=$$

$$=\frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2b-3ab^2}{3ab}:\frac{a^2-2ab+b^2+ab}{ab}=$$

$$=\frac{a^3+b^3}{3ab}:\frac{a^2-ab+b^2}{ab}=\frac{(a^3+b^3)ab}{3ab(a^2-ab+b^2)}=$$

$$=\frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{3(a^2-ab+b^2)}=\frac{a+b}{3}.$$

Kui $a=2\frac{1}{2}$ ja $b=3\frac{1}{2}$, siis $\frac{a+b}{3}=\frac{6}{3}=2.$

208. Lihtsusta avaldis ja arvuta ta väärtus.

1) $\left(1+a-\frac{a^2+3}{a+1}\right)\cdot\left[\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}a\right)^2\right]$, kui $a=\frac{1}{2}$;

2) $\left[\frac{a^2+ax}{2x}:(a^2-x^2)\right]\cdot\left[\frac{(a+x)^2}{4ax}-1\right]$, kui $a=4$ ja $x=-2$;

3) $\left(\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{4}-\frac{1}{4a}\right)$, kui $a=1\frac{1}{2}$;

4) $\frac{a^3+27}{a^3-27}\cdot\frac{a-3}{a^2-3a+9}$, kui $a=2$;

5) $\frac{a+2}{a^2}-\frac{a-3}{3a}-\frac{3a+2}{a^2}+\frac{5}{6}$, kui $a=\frac{1}{4}$;

6) $\frac{2a+3b^2}{4b^2}+\frac{6-15a}{20a}-\frac{a^3-2b^3}{2a^2b^2}-\frac{4}{5a}$, kui $a=b=-1$;

7) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right):\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)$, kui $a=5\frac{1}{2}$ ja $b=3\frac{2}{3}$;

8) $\left(3a-\frac{12a^2-b^2}{4a-2b}\right):\frac{\frac{b}{6}-a}{\frac{1}{3}}$, kui $a=-\frac{1}{2}$ ja $b=\frac{1}{3}$;

9) $\left(\frac{x-4}{x+1}-\frac{x-5}{x^2-1}\right):\frac{x-3}{2x^2-2}$, kui $x=-2\frac{1}{2}$;

10) $\frac{2-x}{2x^2+4x}+\frac{2}{3x+6}-\frac{2}{3x^2+12x+12}-\frac{4}{3x(x+2)^2}$, kui $x=\frac{1}{6}$;

11) $\frac{1}{m+2}+\frac{1}{m-2}+\frac{m}{4-m^2}-\frac{4}{m^3-4m}$, kui $m=0{,}1$;

12) $\left[x+2:\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{x+2}{x^3-8}+\frac{1}{x-2}$, kui $x=2\frac{1}{2}$;

13) $\frac{a^3-8}{a+2}:\left[a+2:\left(1+\frac{a}{2}\right)\right]-\frac{a-2}{2}$, kui $a=1\frac{1}{2}$;

14) $\left(\frac{3a+2b}{4b}-2\right):\left(1\frac{5}{6}a-\frac{5b+3a}{3}\right)$, kui $b=0{,}9$;

15) $\frac{x^4+x^3-x-1}{1-y^2}\cdot\frac{y^2-1}{x^2+x}\cdot\left(1-\frac{x}{x-1}\right)$, kui $x=1\frac{2}{3}$;

16) $\left(2m+\frac{m^2+n^2}{n}\right):\left(m+\frac{n^2}{m+2n}\right)-\frac{m}{n}\left(n+1+\frac{2n}{m}\right)$,

kui $m=-\frac{1}{2}$;

17) $\left[m-\frac{1}{m}:\left(\frac{1}{m}-1\right)\right]\cdot\frac{1-m^2}{m^4+m}$, kui $m=-\frac{2}{3}$;

18) $\left(\frac{4n^2+2n+1}{2n+1}\cdot\frac{n+1}{8n^3-1}+\frac{1}{2-4n}\right):\frac{2n+1}{4n-2}-\frac{2}{(2n+1)^2}$, kui $n=\frac{1}{2}$;

19) $\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2} : \frac{a^3-b^3}{a^3+b^3} - \frac{a-b}{a+b}$, kui $a=15$ ja $b=14$;

20) $\frac{38\,(a^2-3a+9)}{11a} : 95\,(a^3+27)$, kui $a=\frac{2}{11}$;

21) $\frac{18(x^3-8)}{4(x+2)} : 42\,(x^2+2x+4)$, kui $x=-2$;

22) $\frac{a-x}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right) : \frac{a^2+x^2}{ax} \cdot \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)$, kui $a=0{,}7$ ja $x=5$;

23) $\left(a-2+\frac{1}{a}\right) : \left(a^2-a-1+\frac{1}{a}\right)$, kui $a=24$.

KORDAMISEKS.

209. Näita, et

a) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$;
b) $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$.

210. Lahuta kahel viisil tegureiks:

a) x^2+3x^2+3x+1;
b) x^3-3x^2+3x-1.

211. Kontrolli, kas kumbki alljärgnev võrdus on õige:

a) $x(x+1)(x+2)(x+3)=(x^2-3x+1)^2$;
b) $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2$.

212. Arvuta x võrdest:

1) $\frac{a+1}{x}=\frac{a^2-1}{a-1}$

2) $\frac{a^3+3a^2+3a+1}{a^2+2a+1}=\frac{a+1}{x}$

3) $\frac{x}{n-1}=\frac{n^2-2n+1}{n^3-3n^2+3n-1}$

4) $\frac{x}{a^2-a+1}=\frac{a+1}{a^3+1}$

5) $\frac{n-1}{n^3-1}=\frac{x}{n^2+n+1}$

6) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^3}=\frac{a-b}{x}$

7) $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}=\frac{x}{a-b}$

8) $\frac{3a-6b}{x}=\frac{a-2b}{4}$

9) $\frac{nb}{x}=\frac{b(n+b)}{b+n}$

10) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}=\frac{a^3-b^3}{x}$

213. Arvuta x võrdusest:

1) $(x+1)(x-1)-x(x-1)=4$
2) $(x+3)^2-x^2=21$

3) $(x+3)(x^2-3x+9)-(x-1)^3-3x^2=1$

4) $(x-2)(x^2+2x+4)-(x+1)^3+x(3x+4)=1$

5) $x(x-2)^2-(x+1)(x^2-x+1)+4x^2=15$

214. Lihtsusta avaldised:

1) $\dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2}+\dfrac{\frac{2}{ab}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2}$

2) $\dfrac{a(a-b)-b(a+b)}{\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}}$

3) $\left[\dfrac{(a-x)^2}{ax}+1\right]:\left[\dfrac{(a+x)^3}{3ax}-a-x\right]$

4) $\dfrac{x^4-x-3x^3+3x^2}{x^3y-y^4}:\dfrac{x^4+x^2-2x^3}{x^2y^2+xy^3+y^4}$

5) $\dfrac{x^2+xy}{x^2+y^2}:\dfrac{x^3y+xy^3+2x^2y^2}{x^4-y^4}$

6) $\dfrac{a^2-ab}{a^2b+b^3}-\dfrac{2a^2}{b^3-ab^2+a^2b-a^3}$

7) $1-\dfrac{b-1}{a}-\dfrac{b}{a^2}$

8) $\left[\dfrac{1}{(b-a)^3}:\dfrac{1}{(a-b)^2}-\dfrac{1}{a+b}\right]:\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$

9) $\left(\dfrac{1}{b^2-a^2}:\dfrac{a^2}{a^3-b^3}+\dfrac{1}{a+b}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{1+b}\right)$

10) $\dfrac{2a^2b}{(a-b)^3}-\dfrac{b^2}{(a-b)^2}+\dfrac{a}{a-b}$

215. Taanda murrud:

1) $\dfrac{a^5-a^4-a^3+a^2}{a^6-2a^4+a^2}$

2) $\dfrac{9a^2-16b^2}{9a^2-24ab+16b^2}$

3) $\dfrac{a^2-2ab+b^2-am+bm}{a^2-am-b^2-bm}$

4) $\dfrac{x^3-4x^3+8x-8}{x^4-24x^3+8x-16}$

5) $\dfrac{(x^2-x-7)^2-25}{(x^2-x-6)^2-36}$

6) $\dfrac{a^2-b^2-2bc-c^2}{b^2-2bc+c^2-a^2}$

7) $\dfrac{a^2-2a+1}{b-ab}$

8) $\dfrac{8a^3+b^3}{2a+b}$

9) $\dfrac{(a^2+b^2)(y-x)^2}{(x^2-y^2)(a^4-b^4)}$

10) $\dfrac{3a^4c+5a^3bc-2a^3c^2}{2ab^2c^2-3a^2b^2c-5ab^3c}$

11) $\dfrac{x^5-2x^3+x}{x^5-x^4+x^2-x}$

12) $\dfrac{x^4+x^2y^2+y^4}{x^6-y^6}$

216. Teosta tehted.

1) $\frac{a^2+b^2}{a+b}+2(a-b)$

3) $\frac{1-a}{3b^2-12a^2}\cdot\frac{6a+3b}{a^2-1}$

2) $\frac{x^2+y^2}{x+y}+3(x-y)$

4) $\frac{a^2-2a+4}{a^2+2a+4}:\frac{a^3+8}{a^3-8}$

5) $\frac{m^3+n^3}{(m-n)^3}+\frac{mn}{(m-n)^2}-\frac{m+n}{m-n}$

6) $\frac{5}{4x+4y}+\frac{3}{x-y}-\frac{13x+7y}{4(x^2-y^2)}$

7) $\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}-\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}+\frac{2y^3-y^2+x^2}{x^2-y^2}$

217. *Et antud arvu korrutada* 100-*ga ja siis tulemusega liita mingi kahekohaline arv, tuleb ainult antud arvu lõppu kirjutada see kahekohaline arv.*

Näide.

$$100\cdot 37+46=3746$$

Arvuta peast:

$$100\cdot 58+12$$
$$100\cdot 375+39$$
$$100\cdot 8+34$$

218. *Peast saab kergesti korrutada kahte kahekohalist arvu, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on* 10.

Olgu ühe arvu numbrid a ja b, teise numbrid b ja c, kusjuures $b+c=10$.

Korrutades need arvud saame $(10a+b)\cdot(10a+c)=$

$$=100a^2+10ab+10ac+bc=100a^2+10a(b+c)+bc=$$
$$=100a^2+10a\cdot 10+bc=100a^2+100a+bc=$$
$$=100a(a+1)+bc.$$

Seega

$$\boxed{(10a+b)\cdot(10a+c)=100\cdot a\cdot(a+1)+bc}$$

Selleks et korrutada kahte kahekohalist arvu, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10, *tuleb nende arvude algusnumber korrutada* 1 *võrra suurema arvuga ning tulemusele kirjutada lõppu juurde lõpunumbrite korrutis.*

$$83 \cdot 87 = \underbrace{72}_{8\cdot(8+1)}\underbrace{21}_{3\cdot 7}$$

Märkus. *Kui antud arvude lõpunumbrid on* 1 *ja* 9, *siis tuleb algusnumbri ja* 1 *võrra suurendatud arvu korrutisele kirjutada juurde* 09. *Miks?*

219. Korruta peast.

1) 72 · 78	2) 36 · 34	3) 49 · 41
56 · 54	23 · 27	48 · 42
71 · 79	88 · 82	94 · 96
17 · 13	22 · 28	77 · 73
57 · 53	24 · 26	38 · 32

220. 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmine taandub kahe võrdse arvu korrutamisele, millede algusnumbrid on võrdsed ja lõpunumbrite summa on 10. Seega saame 5-ga lõppeva kahekohalise arvu ruudu leidmiseks järgmise eeskirja:

et leida 5-*ga lõppeva kahekohalise arvu ruutu, tuleb selle arvu esimene number korrutada* 1 *võrra suurema arvuga ja tulemusele kirjutada lõppu juurde* 25.

Näide.

$$35^2 = \underbrace{12}_{3\cdot 4}25.$$

221. Arvuta peast järgmised ruudud.

75^2	95^2	55^2	25^2	45^2
$8{,}5^2$	$6{,}5^2$	$7{,}5^2$	$3{,}5^2$	$5{,}5^2$

4. SIRGETE LÕIKUMINE JA PARALLEELSUS.

MATEMAATILISED LAUSED.

222. a) Mis on algarv? Mis on paarisarv? Mis on kahe arvu väikseim ühiskordne? Mida nimetatakse kahe arvu suurimaks ühisteguriks?

b) Mis on rööpkülik? Mida nimetatakse kolmnurga kõrguseks? Missugust hulknurka nimetatakse korrapäraseks? Missugust kolmnurka nimetatakse teravnurkseks, missugust nürinurkseks?

223. Lauset, mis selgitab mingi uue mõiste sisu, nimetatakse definitsiooniks.

Definitsioon on seega vastus selle mõiste kohta esitatud küsimusele «Mis see on?».

Definitsiooni andmine on defineerimine.

Näiteks lause «Rööpkülik on nelinurk, mille vastasküljed on paralleelsed» on definitsioon, sest selle lausega selgitatakse mõiste «rööpkülik» sisu.

Definitsiooni saab alati anda niisugusel kujul, et selles esineb sõna «nimetatakse». Näiteks rööpküliku definitsiooni saab anda ka kujul «Rööpkülikuks nimetatakse nelinurka, mille vastasküljed on paralleelsed».

224. Anna järgmiste mõistete definitsioonid: teravnurk, sirgnurk, võrdkülgne kolmnurk, kaarekraad, ring, võrdsed kujundid.

225. *Lauseid, mis väljendavad geomeetriliste kujundite (või arvude) omadusi, on kahte liiki: aksioomid ja teoreemid.*

Teoreem on niisugune lause, mille õigsust saab põhjendada varem tundmaõpitud lausete abil.

Teoreemi põhjendamist varem tundmaõpitud lausete abil nimetatakse **teoreemi tõestamiseks.**

Aksioom ehk põhilause on niisugune lause, mida loetakse õigeks ilma tõestuseta.

Näiteks sirgjoone omadustest kasutame aksioomina lauset

kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

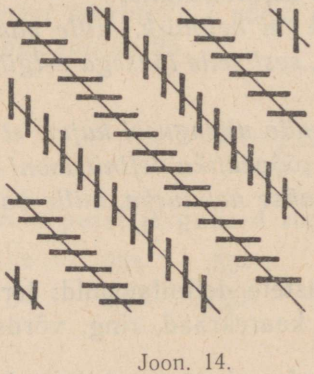
Seevastu lause

kaks sirgjoont saavad lõikuda ainult ühes punktis

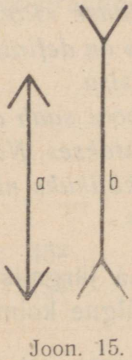
on teoreem, sest tema õigsust saab põhjendada eelmise aksioomi abil. Tõepoolest, kui kaks sirgjoont lõikuksid kahes punktis, siis neid punkte läbiks kaks sirgjoont, mida aksioomi järgi ei saa olla. Selle tõttu tuleb õigeks lugeda väide, et kaks sirgjoont saavad lõikuda ainult ühes punktis.

226. *Geomeetriliste kujundite omadusi õpitakse sageli tundma vaatluste ja mõõtmiste teel. Sel teel leitud omadused ei tarvitse alati olla õiged ja vajavad seepärast tõestamist. Et vaatlus võib anda ebaõigeid tulemusi, selles saame veenduda jooniste* 14 *kuni* 17 *vaatlemisel.*

a) Joonisel 14 kaldu läbikriipsutatud sirged ei näi olevat paralleelsed. Kontrolli nende vastastikust asendit rööplükke abil.



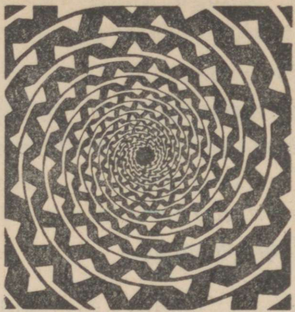
Joon. 14.



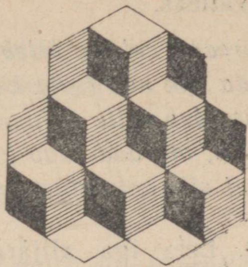
Joon. 15.

b) Kumb lõikudest *a* ja *b* joonisel 15 on pikem?

c) Kas joonis 16 kujutab spiraale või ühise keskpunktiga ringjooni? Kontrolli oma arvamist sirkli abil.



Joon. 16.



Joon. 17.

d) Mitu kuupi on kujutatud joonisel 17? Pööra joonist 180° võrra ja vaata uuesti. Missuguses kuupide reas kuupide arv lehe pööramisel näib muutuvat ja kui palju?

227. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad kahe kolmnurga võrdsuse tingimusi.

228. Tuleta meelde teoreemid, mis väljendavad võrdhaarse kolmnurga omadusi.

229. Tuleta meelde teoreem

a) ristküliku pindalast;
b) kolmnurga pindalast;
c) trapetsi pindalast.

230. Tuleta meelde teoreem, mis väljendab

a) millal arv jagub 9-ga;
b) millal arv jagub 5-ga;
c) millal arv jagub 2-ga.

TEOREEMI KOOSTIS.

231. *Iga teoreemi saab sõnastada nii, et üks osa temast algab sõnaga «kui» ja teine osa sõnaga «siis».*

Näiteks teoreemi «Võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed» saab sõnastada ka nii: «Kui kolmnurk on võrdhaarne, siis tema alusnurgad on võrdsed.»

Seda osa teoreemist, mis algab sõnaga «kui», nimetatakse teoreemi **eelduseks**, *ja seda osa, mis algab sõnaga «siis» — teoreemi* **väiteks.**

Teoreemi eeldus ütleb, mis vaadeldava kujundi (arvu) kohta on teada ehk mis tema kohta on antud, ja väide ütleb, mis eeldusest järeldub selle kujundi kohta. Näiteks ülalantud teoreemi eeldus ütleb, et vaadeldav kujund on võrdhaarne kolmnurk, ja väide ütleb, et siis kolmnurga alusnurgad on võrdsed.

232. Leia iga alljärgneva teoreemi eeldus ja väide ning sõnasta iga teoreem nii, et temas esineksid sõnad «kui» ja «siis»:

a) võrdhaarse kolmnurga aluse mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks;

b) korrapärase kuusnurga külg on võrdne tema ümberringjoone raadiusega;

c) nulliga lõppev arv jagub 10-ga.

233. Sõnasta teoreem, mille eeldus ja väide on allpool kõrvuti antud.

Eeldus.	Väide.
a) Arvu ristsumma jagub 9-ga.	Arv jagub 9-ga.
b) Kolmnurga kaks külge on võrdsed.	Kolmnurga kaks nurka on võrdsed.
c) Kolmnurk on täisnurkne.	Kolmnurga kahe teravnurga summa on täisnurk.
d) Hulknurk on korrapärane.	Hulknurga pindala võrdub poole ümbermõõdu ja apoteemi korrutisega.
e) Kahest arvust *a* ja *b* suurem arv jagub väiksemaga.	Suurem arv on arvude *a* ja *b* väikseim ühiskordne.
f) Jagatav ja jagaja on ühesuguste märkidega.	Jagatis on positiivne.

234. Sõnasta teoreem, mille eeldus on antud.

a) Korrutise üks tegur võrdub nulliga.

b) Ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega.

c) Antud kaks suurust on võrdelised.

d) Jagatav ja jagaja on erinevate märkidega.

e) Jagatav on 0 ja jagaja on nullist erinev arv.

JÄRELDAMISHARJUTUSI.

235. *Antud tõdedest uute tõdede tuletamist ainult mõtlemise teel nimetatakse* **järeldamiseks.** *Kui on teada näiteks, et lõik a ei ole suurem lõigust b ega võrdne lõiguga b, siis saame järeldada, et lõik a on väiksem lõigust b.*

Mis järeldub lõikude a ja b kohta, kui on teada, et $a \neq b$?

236. Kuidas saab kolmnurki liigitada nende nurkade järgi? Mis järeldub kolmnurga kohta, kui on teada, et

a) kolmnurk ei ole teravnurkne ega nürinurkne?

b) kolmnurk ei ole nürinurkne?

c) kolmnurk ei ole täisnurkne?

237. Mida saab öelda arvu kohta,

a) mis ei ole negatiivne ega null?

b) mis ei ole positiivne?

c) mis ei ole positiivne ega negatiivne?

238. a) Mida saab öelda kahe suuruse kohta, kui nad on võrdsed ühe ja sama kolmanda suurusega?

b) On antud kaks võrdset suurust a ja b. Kummagi suurusega on liidetud üks ja sama suurus c. Mis saab öelda saadud summade $a+c$ ja $b+c$ kohta?

c) On antud võrratus $a<b$. Selle kummastki poolest lahutatakse üks ja sama arv c. Mis saab öelda vahede $a-c$ ja $b-c$ kohta?

239. Tee järeldus antud eeldustest ja anna eeldus ja järeldus ühe lausena.

a) $a=b$ ja $b=c$.

b) $a<b$ ja $b<c$.

c) $a=b$ ja $b \neq 8$.

d) Antud murru lugeja on 3 korda väiksem kui nimetaja.

e) Summa $a+b$ kumbki liidetav jagub 5-ga.

240. Otsusta, mida saab järeldada igast allpool antud lausest.

a) Arv x ei ole negatiivne.

b) Arv a ei ole suurem kui 12.

c) VII klassis ei ole üle 30 ega alla 29 õpilase.

d) Kumbki lõikudest a ja b ei ole teisest pikem.

241. Tee järeldus igast järgnevast eelduste paarist:

1) $a=b$	2) $a>b$	3) $x=a+b$	4) $s=a+b$
$b<c$	$b>c$	$x=a+c$	$b=a$

242. Otsusta, kas järgnevad väited on õiged või mitte.

a) Kui $x=4$, siis $3x-10>4$.

b) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdhaarne.

c) Iga võrdhaarne kolmnurk on võrdkülgne.

d) Iga võrdkülgne kolmnurk on võrdnurkne.

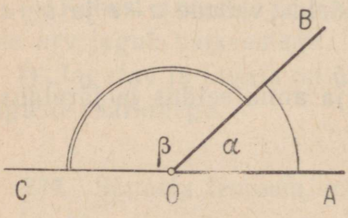
e) Kui kumbki kahest liidetavast jagub 4-ga, siis summa jagub 8-ga.

f) Kui arvu ristsumma jagub 9-ga, siis arv jagub 3-ga.

g) Kui koolis on 370 õpilast, siis seal leidub vähemalt kaks õpilast, kelle sünnipäev on ühel ja samal päeval.

KÕRVUNURGAD.

243. *Nurki tähistatakse sageli väikeste kreeka tähtedega* α *(alfa),* β *(beeta),* γ *(gamma),* δ *(delta) jne. See täht kirjutatakse nurga sisse (joon.* 18*). Selle tähise ette nurga märki ei kirjutata, näiteks* $\alpha=75°$, *mitte* $\angle\alpha=75°$.



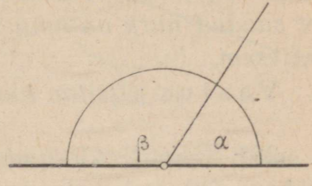
Joon. 18.

244. *Joonesta mingi nurk* α *ja pikenda tema üht haara üle nurga tipu O (joon.* 18*). Siis nurga* α *kõrvale tekib uus nurk, ütleme* β *ehk* $\angle BOC$ *(joon.* 18*). Nurki* α *ja* β *nimetatakse teineteise* **kõrvunurkadeks.**

Kaht nurka nimetatakse kõrvunurkadeks, kui neil on ühine tipp ja üks ühine haar, kuna teised haarad moodustavad sirgjoone.

Leia joniselt 18 nurkade α ja β ühine tipp ja ühine haar. Missuguse joone moodustavad nende nurkade teised haarad?

245. Joonesta kaks lõikuvat sirget *AB* ja *CD*, tähista nende lõikepunkt ja selle juures tekkinud nurgad. Nimeta nüüd joonise järgi seal esinevad kõrvunurkade paarid ja iga paari puhul nurkade ühine haar.



Joon. 19.

246. Missuguse nurga saab, kui liita kõrvunurgad, s. o. kõrvaldada nende ühine haar (joon. 19)?

Kõrvunurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Sümbolites:

$$\alpha+\beta=180^\circ.$$

247. Avalda

a) α tema kõrvunurga β kaudu;

b) β tema kõrvunurga α kaudu.

248. Kui suur on nurk, mis on võrdne oma kõrvunurgaga? Kuidas saaks täisnurka defineerida kõrvunurga mõiste abil?

249. Mis liiki on teravnurga kõrvunurk, nürinurga kõrvunurk?

VÕRRAND.

250. N ä i d e. *Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast* 26° *võrra väiksem?*

L a h e n d u s. *Oletame, et otsitav nurk sisaldab x kraadi. Siis tema kõrvunurk sisaldab* $x+26$ *kraadi ja nende summa sisaldab* $x+(x+26)$ *ehk* $2x+26$ *kraadi. Et kõrvunurkade summa on sirgnurk, siis*

$$2x+26=180.$$

Saadud võrdusest järeldub (kuidas?), et

$$2x=180-26$$

ehk

$$2x=154,$$

seega

$$x=77.$$

Kontroll. *Kui nurk on 77 kraadi, siis tema kõrvunurk peab olema* 180−77=103 *kraadi. Lahutades sellest 77 kraadi, näeme, et saadud nurk on oma kõrvunurgast tõepoolest 26 kraadi võrra väiksem.*

Vastus. *Otsitav nurk on 77°.*

251. *Eelmise ülesande lahendamisel tähistasime otsitava nurga tähega (x) ja koostasime võrduse, milles see täht oli tundmatuks.*

Võrdust, mis sisaldab tundmatut, nimetatakse võrrandiks. Tundmatu leidmist võrrandist nimetatakse võrrandi lahendamiseks.

Ülesande lahendamine võrrandi abil algab otsitava suuruse tähistamisest mingi tähega. Sellele järgneb võrrandi koostamine ühes tarviliku selgitusega ja võrrandi lahendamine. Saadud lahendit, s. o. tundmatu väärtust tuleb kontrollida. Lahendi kontrollimine peab toimuma üesande teksti, mitte koostatud võrrandi põhjal, sest viimane võib sisaldada juba viga. Lahendi kontrollimise järel tuleb anda ülesande vastus.

Võrrandisse nimetusi arvude juurde ära kirjuta.

Lahenda järgnevad ülesanded võrrandi abil.

252. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 34° võrra suurem?

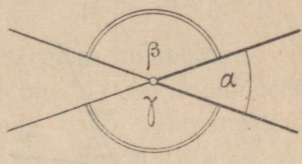
253. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 15° võrra väiksem?

254. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 3 korda suurem?

255. Kui suur on kumbki kõrvunurkadest, kui nende vahe on 9 korda väiksem nende summast?

256. Joonesta mingi nurk α (joon. 20) ja pikenda tema mõlemat haara üle nurga tipu.

Kummagi haara pikendamisel üle nurga tipu (joon. 20) tekib nurgale α *kõrvunurk:* α *ja* β *on kõrvunurgad, samuti* α *ja* γ *on kõrvunurgad. Nurki* β *ja* γ *nimetatakse teineteise suhtes* **tippnurkadeks.**



Joon. 20.

Kaht nurka nimetatakse tippnurkadeks, kui neil leidub ühine kõrvunurk.

Mitu tippnurkade paari tekib kahe sirge lõikumisel?

257. *Olgu* β *ja* γ *tippnurgad ning* α *nende ühine kõrvunurk (joon. 20). Siis*

$$\alpha+\beta=180^\circ \text{ ja } \alpha+\gamma=180^\circ.$$

Avaldades neist võrdustest tippnurgad β *ja* γ, *saame*

$$\beta=180^\circ-\alpha \text{ ja } \gamma=180^\circ-\alpha.$$

Seega

$$\beta=\gamma.$$

Sellest selgub, et

tippnurgad on võrdsed.

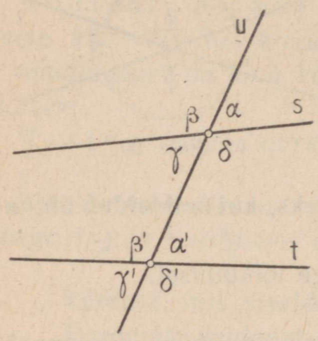
258. Joonesta kaks lõikuvat sirget ja tähista tekkinud nurgad ringjärjekorras tähtedega α, β, γ, δ. Nimeta kõik tekkinud tippnurkade paarid ja kõik tekkinud kõrvunurkade paarid.

259. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on üks 78°. Kui suured on teised nurgad?

260. Kahe sirge lõikumisel tekkinud nurkadest on kahe nurga summa 128°. Leia iga tekkinud nurga suurus.

261. Kahe tippnurga summa on 158°20′. Kui suur on nende ühine kõrvunurk?

262. *Lõikame kaht sirget s ja t mingi kolmanda sirgega u (joon. 21). Tähistame sirgete u ja s lõikumisel tekkinud nurgad tähtedega α, β, γ ja δ, sirgete u ja t lõikumisel tekkinud nurgad aga tähtedega α′, β′, γ′ δ′ (loe: alfa prim jne.).*



Joon. 21.

Kuidas nimetatakse nurki α ja γ, β′ ja δ′, γ ja δ, α′ ja γ′, γ′ ja β′?

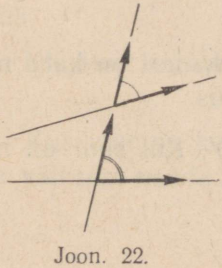
263. *Nurkadest, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmandaga ja asetsevad eri lõikepunktide juures, on mõnele paarile antud erinimetused.*

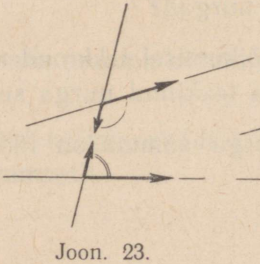
1) *Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad ühtepidi, nimetatakse* **kaasnurkadeks** (*joon.* 22).

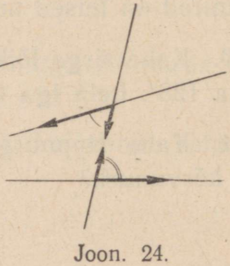
Joonisel 21 *on kaasnurkadeks* α *ja* α′, β *ja* β′, γ *ja* γ′, δ *ja* δ′.

2) *Kaht nurka, mis asetsevad ühel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse* **lähisnurkadeks** (*joon.* 23). *Joonisel* 21 *on lähisnurkadeks* γ *ja* β′, δ *ja* α′.

3) *Kaht nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool lõikajat ja mille haarad lõikajal suunduvad vastamisi, nimetatakse* **põiknurkadeks** (*joon.* 24). *Joonisel* 21 *on põiknurkadeks* γ *ja* α′, δ *ja* β′.


Joon. 22.


Joon. 23.


Joon. 24.

264. Arvuta joonisel 21 esinevad nurgad, mis on tekkinud kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui $\alpha=54°$ ja $\beta=\beta'$.

265. Arvuta nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe kaasnurga summa on 153° ja üks neist on 70°.

266. Kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega on tekkinud üks paar võrdseid kaasnurki, näiteks $\alpha=\alpha'$ (joon. 21). Mis saab öelda siis teiste kaasnurkade kohta? põiknurkade kohta? lähisnurkade kohta?

267. Joonisel 21 $\gamma=\alpha'$. Mida saab öelda nurkade δ ja α', α ja α', β ja β' kohta?

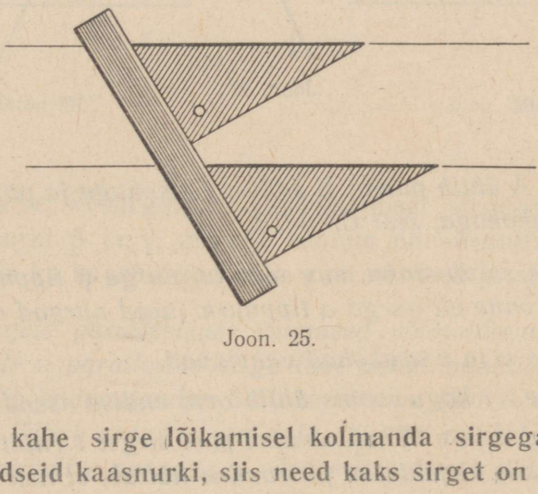
KAHE SIRGE PARALLEELSUS.

268. Kaht sirget, mis asetsevad ühel ja samal tasapinnal ning ei lõiku, nimetatakse paralleelseteks.

Kahe sirge u ja v paralleelsust märgitakse nii: $u \| v$.

Too näiteid paralleelsetest sirgetest.

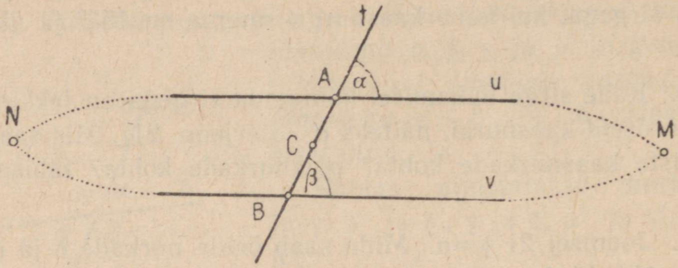
269. *Paralleelseid sirgeid oleme joonestanud rööplükke abil (joon. 25). See joonestamise võte põhineb järgmisel teoreemil:*



Joon. 25.

kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid kaasnurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.

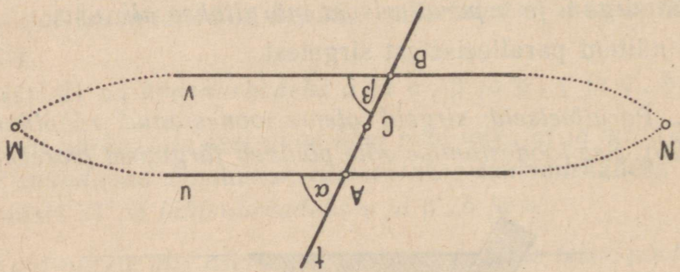
E e l d u s. *Sirgete u ja v lõikamisel sirgega t on tekkinud võrdsed kaasnurgad* α *ja* β (*joon.* 26).



Joon. 26.

V ä i d e. *Sirged u ja v on paralleelsed.*

T õ e s t u s. *Leiame lõigu AB keskpunkti C ja pöörame kogu joonise selle punkti ümber 180° võrra* (*joon.* 27). *Siis*



Joon. 27.

1) *punkt A ühtib punkti B endise asukohaga ja punkt B punkti A endise asukohaga, sest CA = CB*;

2) *nurk* α *satub sinna, kus enne oli nurga* β *tippnurk, ja nurk* β *sinna, kus enne oli nurga* α *tippnurk* (*need nurgad on võrdsed*);

3) *sirgete u ja v asukohad vahetuvad.*

Nii näeme, et kogu joonis ühtib oma endise asendiga.

Kui sirged u ja v lõikuksid ühel pool sirget t (*näiteks paremal punktis M*), *siis kirjeldatud pööramine näitab, et neil leiduks veel* *teine lõikepunkt teisel pool sirget t (punkt N). Et kaks sirget saavad lõikuda ainult ühes punktis, siis u ja v ei või lõikuda, s. t. u||v.*

Seda teoreemi nimetame kahe sirge **paralleelsuse esimeseks tunnuseks.**

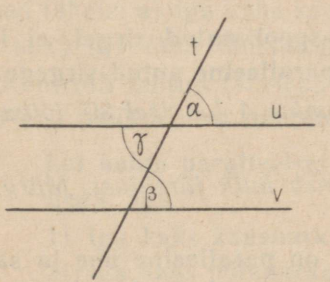
270. Valmista endale õppevahend eelmise teoreemi tõestamiseks. Selleks tee joonis 26 paksemale paberile, kopeeri siis sealt läbipaistvale paberile (kalkale) ja kinnita need joonised punktis *C* nööpnõela või peenikese naela abil.

Näita selle mudeli abil, kuhu satub nurk α pärast ühe lehe pööramist 180° võrra, kuhu nurk β.

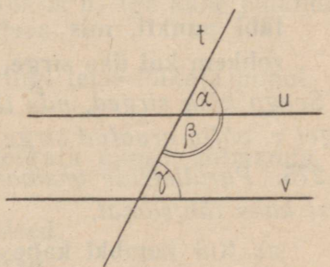
271. a) Eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkis paar võrdseid põiknurki γ ja β (joon. 28). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja β on võrdsed ja seega $u \| v$.

Kahe sirge paralleelsuse teine tunnus.

Kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekib paar võrdseid põiknurki, siis need kaks sirget on paralleelsed.



Joon. 28.



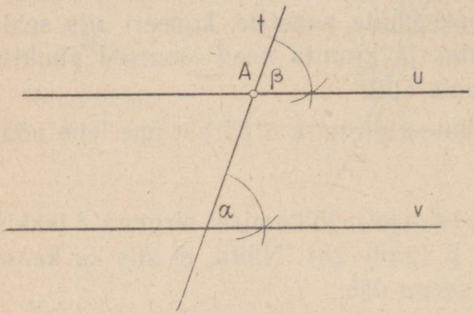
Joon. 29.

b) Eeldame, et sirgete u ja v lõikamisel sirgega t tekkis üks paar lähisnurki β ja γ, millede summa on sirgnurk (joon. 29). Näita, et siis ka kaasnurgad α ja γ on võrdsed ja seega $u \| v$.

272. *Sirgete paralleelsuse tunnused võimaldavad joonestada antud sirgele v paralleelse sirge läbi antud punkti A, kasutades ainult sirklit ja joonlauda. Selleks võtame läbi A vabalt mingi sirge t, mis lõikab antud sirget v ja ehitame punkti A juurde sirgete t ja v vahelise nurgaga* α *võrdse kaasnurga* β *(joon.* 30).

Ehitatud nurga teine haar u läbib punkti A ja on paralleelne sirgega v.

Teosta see konstruktsioon, võttes vabalt sirge ja väljaspool sirget ühe punkti.



Joon. 30.

273. Rakendades sirgete paralleelsuse tunnuseid, näita, et kaks sirget *u* ja *v*, mis on risti ühe ja sama sirgega *t*, on paralleelsed.

274. *Läbi antud punkti (punkt A joonisel* 30) *saab antud sirgele (sirge v joonisel* 30) *joonestada paralleelse sirge mitmel viisil. Kogemused näitavad, et sõltumatult ehitamisviisist saame läbi antud punkti ikka ainult ühe paralleeli sirgele v. Seda tõsiasja väljendab järgmine nn.* **paralleelide aksioom:**

läbi punkti, mis asetseb väljaspool antud sirget, ei lähe rohkem kui üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Seega kõik sirged, mis läbivad punkti A joonisel 30, *lõikavad sirget v, välja arvatud sirge u.*

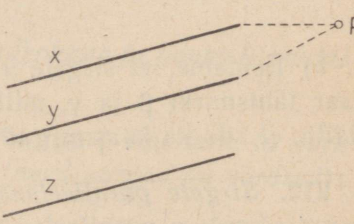
275. *Paralleelide aksioomist tuleneb hulk järeldusi. Märgime neist kaks tähtsamat.*

a) **Kui kumbki kahest sirgest on paralleelne ühe ja sama sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed.**

E e l d u s. $x \| z$; $y \| z$ (*joon.* 31).

V ä i d e. $x \| y$.

T õ e s t u s. *Kui x ja y ei oleks paralleelsed, siis nad lõikuksid mingis punktis P. Seda punkti läbiks siis kaks sirgega z paralleelset sirget, nimelt x ja y. Kuid see on vastuolus paralleelide aksioomiga, tähendab* $x \| y$.



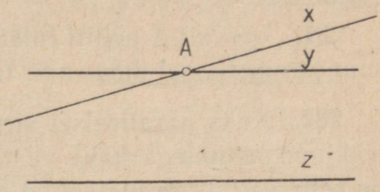
Joon. 31.

b) **Kui sirge lõikab üht kahest paralleelsest sirgest, siis lõikab ta ka teist.**

Eeldus. $y \| z$; *x lõikab sirget y punktis A* (*joon.* 32).

Väide. *x lõikab sirget z.*

Tõestus. *Kui sirge x ei lõikaks sirget z, siis oleks ta sellega paralleelne ja seega läbi sirgete x ja y lõikepunkti A läheks kaks sirget (x ja y), mis oleksid paralleelsed sirgega z. Kuid see pole võimalik. Tähendab, sirge x lõikab ka sirget z.*



Joon. 32.

KAHE PARALLEELSE SIRGE LÕIKAMINE SIRGEGA.

276. Joonesta kaks paralleelset sirget, lõika need mingi sirgega, mõõda tekkinud nurgad ja kirjuta tulemused joonisele. Mis paned tähele: a) iga kahe kaasnurga kohta; b) iga kahe põiknurga kohta; c) iga kahe lähisnurga kohta?

Kontrolli tehtud tähelepanekuid mingi teise lõikaja puhul.

Neist mõõtmistest nähtub, et

kui kahte paralleelset sirget lõigata mingi kolmanda sirgega, siis

1) **iga kaks kaasnurka on võrdsed,**

2) **iga kaks põiknurka on võrdsed,**

3) **iga kahe lähisnurga summa on sirgnurk.**

277. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 57°. Kui suured on teised nurgad?

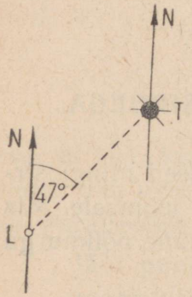
278. Näita, et kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.

279. Kaks laeva sõidavad paralleelsete kurssidega, üks läänest itta, teine idast läände. Esimeselt laevalt paistab teine parajasti kirde suunas. Mis suunas paistab sel momendil teiselt laevalt esimene?

280. Kaks lennukit lendavad paralleelsete kurssidega, üks lõunast põhja, teine põhjast lõuna. Esimeselt lennukilt paistab teatud momendil teine lennuk suunas, mis on põhjasuunast 35° ida pool (lühemalt, suunas N35°E). Mis suunas paistab sel momendil teiselt lennukilt esimene?

281. Laevalt L peiliti tuletorni T suunas N47°E (joon. 33). Mis suunas paistis sel momendil tuletornist laev? Kui suur on $\angle LTN$?

282. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kahe sirgega nii, et tekkinud nelinurga kaks vastasnurka on 73° ja 127°. Kui suured on selle nelinurga ülejäänud nurgad?



Joon. 33.

283. a) On antud kaks paralleelset sirget s ja t. Sirgel s on võetud kaks punkti A ja B, millest on tõmmatud ristlõigud AC ja BD sirgele t. Tõesta, et need ristlõigud on võrdsed, s. t. punktid A ja B on sirgest t võrdsetel kaugustel.

N ä p u n ä i d e. *Ühenda punktid C ja B ning vaatle tekkinud kolmnurki.*

Kahe paralleelse sirge vahelise ristlõigu pikkust nimetame nende sirgete vaheliseks kauguseks. See kaugus on igal pool üks ja sama.

b) Joonesta antud sirgega paralleelne sirge, mis asetseb sellest antud kaugusel. Mitu lahendit on sellel ülesandel?

VASTAVALT PARALLEELSETE HAARADEGA NURGAD.

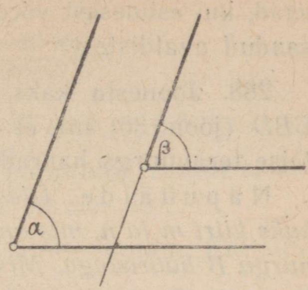
284. a) Joonesta mingi terav- või nürinurk α, võta selle nurga sees punkt ja tõmba sellest punktist kaks kiirt, mis on vastavalt paralleelsed ja s a m a s u u n a l i s e d nurga α haaradega. Tõesta, et nende kiirte vaheline nurk β võrdub nurgaga α.

N ä p u n ä i d e. *Pikenda nurga* β *üht haara üle nurga tipu nii, et ta lõikaks nurga* α *haara, ja võrdle nurki* α *ja* β *sellel pikendamisel tekkinud ühe nurgaga* (*joon.* 34).

b) Lahenda eelmine ülesanne veel kord, võttes nurga β tipu nii, et üks nurk ei asetseks teise sees.

Kui ühe nurga haarad on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised teise nurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

c) Mis nurgad saab vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurkadest, kui ühe nurga tipp võtta teise haaral või selle pikendusel üle tipu?



Joon. 34.

285. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete ja vastandsuunaliste haaradega nurka ja võrdle neid teineteisega.

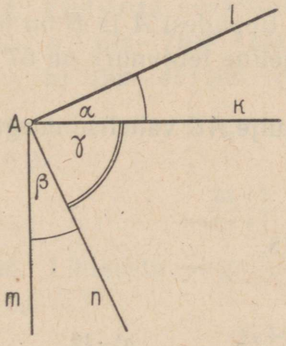
Näpunäide. *Võta abiks ühe nurga tippnurk.*

286. Joonesta kaks vastavalt paralleelsete haaradega nurka, mille ühed haarad on samasuunalised ja teised vastandsuunalised. Missugune seos valitseb nende nurkade vahel?

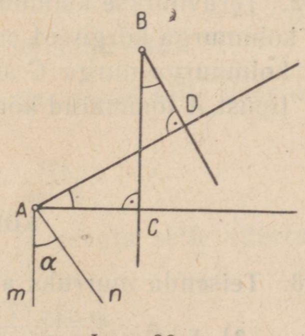
Näpunäide. *Võta abiks ühe nurga kõrvunurk.*

VASTAVALT RISTUVATE HAARADEGA NURGAD.

287. Joonesta mingi teravnurk α, mille haarad olgu k ja l, ning tõmba selle nurga tipust kaks uut kiirt m ja n nii, et need oleksid vastavalt risti nurga α haaradega ja moodustaksid teravnurga, ütleme β (joon. 35) : $m \perp k$; $n \perp l$; $\beta < 90°$. Mõõda nurgad α ja β. Näita, et need nurgad on alati võrdsed. Selleks pane tähele, et joonisel 35 $\alpha + \gamma = 90°$ (miks?) ja ka $\beta + \gamma = 90°$ (miks?). Mis



Joon. 35.



Joon. 36.

saad, kui esimesest võrdusest avaldad α ja teisest β? Mis nähtub saadud avaldistest?

288. Joonesta kaks erinevate tippudega teravnurka CAD ja CBD (joon. 36) nii, et ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega. Tõesta, et $\angle CAD = \angle CBD$.

N ä p u n ä i d e. *Ülesande lahendamiseks tõmba punktist A kaks kiirt m ja n, mis on vastavalt paralleelsed ja samasuunalised nurga B haaradega. Mis võib öelda nende kiirte vahelise nurga α ja nurga B suuruse kohta? Mis võib öelda nende kiirte vahelise nurga α ja nurga CAD suuruse kohta? Mis sellest järeldub nurkade CAD ja CBD suuruse kohta?*

Kui ühe teravnurga haarad on vastavalt risti teise teravnurga haaradega, siis need nurgad on võrdsed.

289. Täisnurkses kolmnurgas ABC on täisnurga tipust C joonestatud kõrgus CD. Näita, et nurgad ACD ja CBD on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Mis sellest järeldub nende nurkade suuruse kohta?

290. Võrdhaarses kolmnurgas ABC, mille alus on BC, on joonestatud kõrgused AD ja BE. Näita, et nurgad CAD ja EBC on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad. Järelda siit, et võrdhaarse kolmnurga haarale joonestatud kõrguse ja kolmnurga aluse vaheline nurk on pool kolmnurga tipunurgast.

291. Joonesta mingi teravnurk, võta selle sees punkt ja tõmba sellest kaks kiirt, mis on vastavalt risti võetud nurga haaradega. Leia nende kiirte vahelise nurga suurus, kui võetud teravnurga suurus on α.

292. Teravnurkse kolmnurga ABC tippudest A ja B on joonestatud kolmnurga kõrgused, milledevaheline teravnurk on 67°. Leia

1) kolmnurga nurga C suurus;

2) tipust A tõmmatud kõrguse ja külje AC vahelise nurga suurus.

KORDAMISEKS.

293. Teisenda murruks avaldis

a) $x+6-\frac{x^2-40}{x-6}$; b) $a^2+2a+4-\frac{a^3-10}{a-2}$.

294. Taanda murd

a) $\frac{3u^2-27}{u^3-27}$; b) $\frac{(x-3)^2+3x}{x^3+27}$.

295. Arvuta kuubi täispindala, kui kuubi serv on 0,8 dm.

296. Arvuta korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui püramiidi põhiserv on 14 cm ja kõrgus on 18 cm.

297. Üks kõrvunurkadest on teisest 4 korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?

298. Kahe vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste haaradega nurga summa on 135°20′. Kui suur on kummagi nurga kõrvunurk?

299. Kolmes korvis on kokku 155 õuna. Teises korvis on 3 korda rohkem õunu kui esimeses ja kolmandas korvis on 10 õuna rohkem kui esimeses. Mitu õuna on igas korvis? Lahenda võrrandi abil.

300. Kolmnurga ümbermõõt on 37 cm. Teine külg on esimesest kaks korda pikem ja kolmas on teisest 3 cm lühem. Kui pikad on küljed? Lahenda võrrandi abil.

301. a) Nimeta mingi definitsioon, teoreem, aksioom.

b) Missugust lauset nimetatakse definitsiooniks, missugust teoreemiks, missugust aksioomiks?

302. Mis on põhjasuuna vastandsuund? kagusuuna vastandsuund? suuna $S8°E$ vastandsuund?

303. Missugune on põhja-lõuna sihi ristsiht? kagu-loode sihi ristsiht? püstsihi ristsiht?

304. Lihtsusta avaldised:

a) $(3x-7y)^2-(3x+7y)^2$;

b) $(5a-4b)(6a-3b)-(2a+9b)(15a-4b)$.

305. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $x=-0,2$.

$$\frac{2x-1}{2x+1}+\frac{3x-1}{2x-1}-\frac{10x}{4x-2}.$$

306. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $x=-0,5$.

$$\frac{2x+7}{4x^2+28x+49}+\frac{2x-7}{4x^2-28x+49}.$$

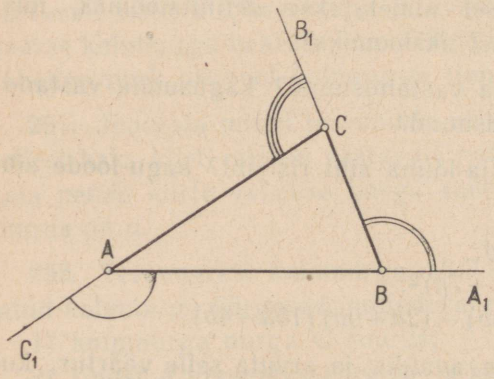
5. KOLMNURKADE JA NELINURKADE TÄHTSAMAD OMADUSED.

KOLMNURGA NURKADE SUMMA.

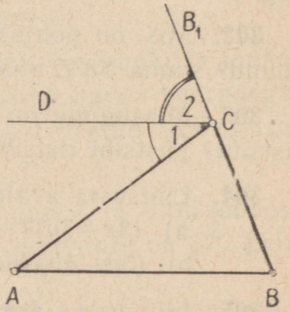
307. Joonesta kolmnurk ja selle kolmnurga mingi nurga kõrvunurk. Mis selleks teha? Joonesta ka kolmnurga teiste nurkade kõrvunurgad, pikendades iga külge ainult üks kord.

Kolmnurga nurga (ehk sisenurga) kõrvunurka nimetatakse kolmnurga välisnurgaks.

Mitu välisnurka on igal kolmnurgal? Nimeta neid jooniselt 37.



Joon. 37.



Joon. 38.

308. Joonesta kolmnurk ABC ja tema välisnurk, mille tipuks on punkt C (joon. 38). Selleks et näha, kuidas välisnurga suurus on seotud sisenurkadega, joonesta läbi C sirge CD, mis on paralleelne nurga C vastasküljega AB. Mis toimub välisnurgaga? Missuguse nurgaga võrdub $\angle 1$, missugusega $\angle 2$ (joon. 38) ja miks? Millega võrdub siis välisnurk ACB_1? Mis saaks samal viisil tõestada tipu A juures oleva välisnurga kohta, mis tipu B juures oleva välisnurga kohta?

Kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti asetsevate sisenurkade summaga.

309. Tõesta eelmises ülesandes sõnastatud teoreem tipu B juures oleva välisnurga kohta.

310. Kolmnurga üks sisenurk on 38°40′ ja teine sisenurk 56°20′. Kui suur on kolmanda tipu juures olev välisnurk?

311. Mis tuleb liita kolmnurga tipu C juures oleva välisnurgaga, et saada kolmnurga kõikide sisenurkade summa? Kui suur on see summa?

Kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

312. Miks kolmnurgas ei saa olla kaht täisnurka ega kaht nürinurka? Kas leidub kolmnurka, mille üks nurk on täisnurk ja teine nürinurk? Miks?

313. On antud, et ühe kolmnurga kaks nurka on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe nurgaga. Mis järeldub kolmandate nurkade kohta?

314. a) Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

b) Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on α. Leia välisnurgad.

315. a) Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 52°10′. Kui suured on kolmnurga välisnurgad?

b) Võrdhaarse kolmnurga tipu juures olev välisnurk on 138°. Kui suured on sisenurgad?

316. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu 1 : 2 : 3? Lahenda võrrandi abil.

317. Kolmnurga kaks välisnurka on 81° ja 117°40′. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

318. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 18° võrra suurem. Leia kolmnurga sise- ja välisnurgad. Lahenda võrrandi abil.

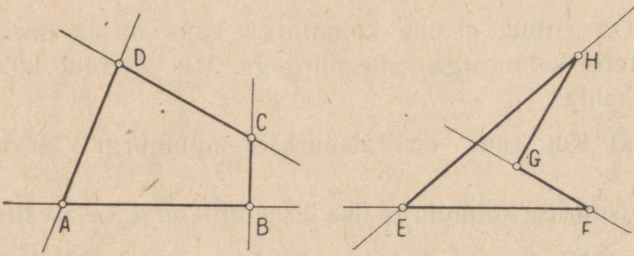
319. Tähista tasapinnal neli punkti nii, et nende hulgas ei leiduks kolme punkti, mis asetseksid ühel sirgel. Ühenda need punktid järjestikku lõikude abil ja nimeta saadud nelinurka, tema tippe ja külgi.

320. Võta eelmise ülesande eeskujul viis punkti ja ühenda need viisnurgaks.

321. Kuidas nimetatakse kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. ühise nimega?

322. **Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema iga külje pikendamisel saadakse sirge, millest hulknurga teised küljed on kõik ühel ja samal pool.**

Näiteks joonisel 39 kujutatud nelinurk $ABCD$ on kumer (miks?), kuid nelinurk $EFGH$ ei ole kumer, sest pikendades viimase külge FG saame sirge, millest selle nelinurga külg EF on ühel pool, külg GH aga teisel pool.



Joon. 39.

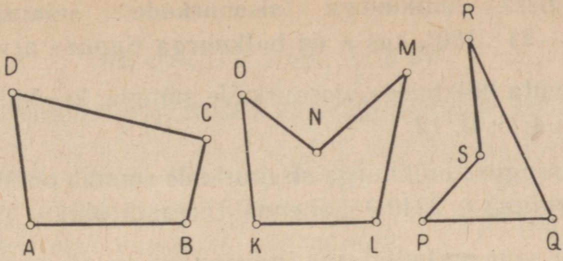
Missugused joonisel 40 esitatud hulknurkadest ei ole kumerad ja miks?

Kas kolmnurk saab olla mittekumer?

323. **Lõiku, mis ühendab hulknurga kaht tippu ja ei ole tema küljeks, nimetatakse hulknurga diagonaaliks.**

Mitu diagonaali on nelinurgal, mitu viisnurgal?

324. Mitu diagonaali saab tõmmata viisnurga, seitsenurga, kümmenurga ühest tipust?



Joon. 40.

N ä p u n ä i d e. *Leia enne, mitmesse tippu diagonaali ei saa tõmmata.*

325. Edaspidi vaatleme ainult kumeraid hulknurki. Kumera hulknurga iga nurk (ehk sisenurk) on väiksem kui sirgnurk, kuna aga mittekumeral hulknurgal võib see olla sirgnurgast suurem, nagu nurk FGH joonisel 39.

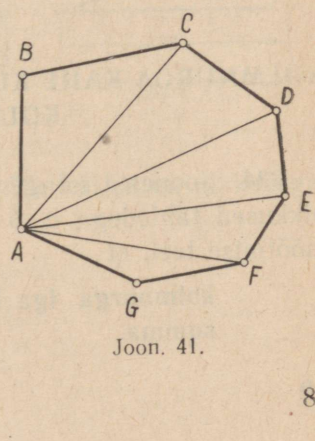
Sisenurga kõrvunurka nimetatakse hulknurga **välisnurgaks.**

KUMERA HULKNURGA NURKADE SUMMA.

326. a) Joonesta mingi nelinurk ja leia sisenurkade summa, tükeldades nelinurga tema diagonaaliga kolmnurkadeks.

b) Joonesta mingi viisnurk ja tõmba tema ühest tipust kõik võimalikud diagonaalid. Mitmeks kolmnurgaks tükeldus viisnurk? Kui suur on kokku nende kolmnurkade sisenurkade summa? Kuidas selle põhjal leida viisnurga sisenurkade summat?

327. *Kui hulknurgal on n tippu, siis selle hulknurga ühest tipust tõmmatud diagonaalid jaotavad hulknurga* $n-2$ *kolmnurgaks, sest selle tipu vastas on hulknurgal* $n-2$ *külge, milledest igaüks saab ühe kolmnurga aluseks* (*joon.* 41). *Nende kolmnurkade sisenurkade summa on* $(n-2)\cdot 180°$. *Niisama suur on ka hulknurga sisenurkade summa, sest hulknurga nurgad on kas kolmnurkade nurkadeks või koosnevad neist ja ainult neist. Seega,*



Joon. 41.

kumera hulknurga sisenurkade summa võrdub $(n-2) \cdot 180°$, kus n on hulknurga tippude arv.

328. Arvuta hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv on 4; 6; 9; 12.

329. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 900°; 12 täisnurka; 5 sirgnurka; 2340°? Lahenda võrrandi abil.

330. Kui suur on hulknurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa? Kui suur on siis n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa kokku?

Hulknurga välisnurkade summa saamiseks lahuta sise- ja välisnurkade kogusummast sisenurkade summa ja näita, et

iga hulknurga välisnurkade summa võrdub 360°.

331. Korrapärase hulknurga sisenurgad on teatavasti võrdsed. Mis sellest järeldub välisnurkade kohta? Kui suur on korrapärase hulknurga välisnurk, kui hulknurga tippude arv on 3; 5; 6; 8?

Kuidas leida korrapäraste hulknurkade sisenurga suurust, kui välisnurga suurus on teada?

Näita, et korrapärase n-nurga välisnurk võrdub $360° : n$ ja sisenurk võrdub $180° - 360° : n$.

Anna avaldisele $180° - 360° : n$ murru kuju.

332. a) Arvuta korrapärase 15-nurga sisenurk ja välisnurk.
b) Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15°?
c) Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135°?

333. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui hulknurga tippude arv kasvab kolme võrra? viie võrra?

KOLMNURGA KAHE KÜLJE SUMMA JA VAHE VÕRDLEMINE KOLMANDA KÜLJEGA.

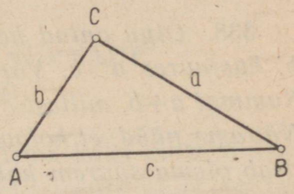
334. Joonesta mingi kolmnurk ABC ja tähista tema külgede pikkused tähtedega a, b ja c, nagu näidatud joonisel 42. Näita mõõtmise teel, et

kolmnurga iga külg on väiksem kui kahe teise külje summa.

Külje AB ehk c kohta saab seda lauset kirjutada kujul

$$AB<BC+AC \text{ ehk } c<a+b.$$

Kirjuta vastavad võrratused ka teiste külgede kohta.



Joon. 42.

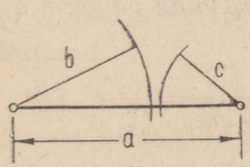
335. *Võtame kolm lõiku a, b, ja c nii, et kõige pikem neist, ütleme a, on suurem kahe teise summast või võrdub nende summaga:*

$$a>b+c \text{ või } a=b+c.$$

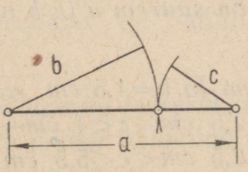
Proovime ehitada kolmnurka, mille küljed võrduvad lõikudega a, b ja c. Selleks joonestame esmalt lõigu pikkusega a ja siis tema otspunktide ümber ringjooned, mille raadiused on vastavalt b ja c. Selgub, et kolmnurga joonestamine ei õnnestu, sest selleks tarvilikud abiringjooned raadiustega b ja c ei lõiku (joon. 43 *ja* 44). *Kolmnurk tekib alles siis, kui külgi b ja c (või ühte neist) pikendada nii, et* $a<b+c$ *(joon.* 45). *Sellest selgub, et*

antud kolm lõiku saavad olla kolmnurga külgedeks ainult siis, kui suurim lõik on lühem kahe teise lõigu summast.

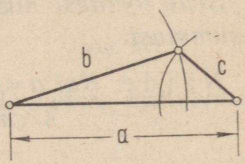
Näiteks lõikudest $a=15$ *cm,* $b=27$ *cm ja* $c=12$ *cm ei saa ehitada kolmnurka, sest suurim lõik b ei ole väiksem lõikude a ja c summast.*



Joon. 43.



Joon. 44.



Joon. 45.

336. Otsusta, kas leidub kolmnurk, mille küljed on pikkusega

a) 5 m, 7 m ja 10 m;
b) 1,5 m, 4 dm ja 2,5 dm;
c) 7,4 dm, 3,7 dm ja 2,9 dm;
d) 35 cm, 18,9 m ja 19,2 m.

337. Otsusta, kas leidub võrdhaarne kolmnurk, millel

a) alus on 15 cm ja haar on 7 cm;
b) alus on 7 cm ja haar on 15 cm;
c) alus on 7,8 m ja haar on 3,9 m;
d) ümbermõõt on 6 m ja haar on 12 dm.

338. *Olgu antud kolmnurga kahe külje pikkused, näiteks a ja b, kusjuures $a>b$. Varem leidsime, et siis kolmas külg $c<a+b$. Summat $a+b$, millest c on väiksem, nimetame külje c* **ülemtõkkeks.** *Näitame nüüd, et kolmas külg c ei saa olla kuitahes väike, vaid ta peab olema suurem kahe teise külje vahest, s. t. $c>a-b$. Selleks võtame võrratuse*

$$a<b+c.$$

Kui vähendada selle võrratuse mõlemaid pooli ühe ja sama suuruse b võrra, siis vasak pool jääb ikkagi paremast väiksemaks, s. t.

$$a-b<b+c-b$$

ehk

$$a-b<c.$$

Lugedes seda võrratust paremalt vasakule, saame

$$c>a-b.$$

Nüüd oleme saanud külje c **alamtõkke,** *s. o. arvu, millest külje c pikkus on suurem. Tulemust saab üles märkida järgmiselt:*

$$a-b<c<a+b.$$

Seda loetakse nii: c on suurem a ja b vahest ning väiksem a ja b summast.

Näide. *Kui $a=4$ cm ja $b=1{,}5$ cm, siis*

$$4\ cm-1{,}5\ cm<c<4\ cm+1{,}5\ cm$$
$$2{,}5\ cm<c<5{,}5\ cm.$$

Kolmnurga iga külg on suurem kahe teise külje vahest ja väiksem nende summast.

339. Leida kolmnurga külje x tõkked, kui kaks antud külge on järgmised:

a) 5,7 cm ja 6,3 cm; b) 18 dm ja 7 dm;
c) 3,5 m ja 8,4 m; d) $8\frac{3}{4}$ m ja $6\frac{2}{3}$ m.

340. Kolmnurga kahe lühema külje pikkused on 35 cm ja 47 cm. Missugused on kolmanda külje tõkked?

341. Missugused on kolmnurga lühima külje tõkked, kui kaks pikemat külge on 7,8 dm ja 13,1 dm?

KOLMNURGA KÜLGEDE JA NURKADE VAHELISED SEOSED.

342. Joonesta mingi kolmnurk, mõõda tema kaks mittevõrdset külge ja nende vastas asetsevad nurgad. Missuguse külje vastas asetseb suurem nurk?

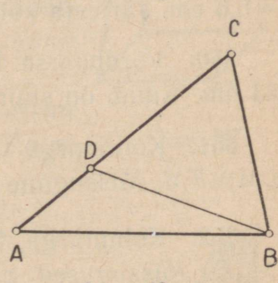
343. *Tõestame, et*

kolmnurgas asetseb suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus. *Kolmnurgas ABC külg* $AC > BC$ *(joon. 46).*

Väide. $\angle ABC > \angle CAB$.

Tõestus. *Märgime küljel AC punkti D nii, et* $DC = BC$ *ja ühendame punktid D ning B. Siis kolmnurgas BCD nurgad CDB ja DBC on võrdsed (miks?). Et* $\angle CDB$ *on kolmnurga ADB välisnurk, siis on ta suurem kui temaga mitte kõrvuti asetsev sisenurk A (miks?).*



Joon. 46.

Seega $\angle CDB > \angle CAB$. *Et* $\angle CDB = \angle DBC$, *siis ka* $\angle DBC > \angle CAB$. *Kuid* $\angle DBC$ *on osa nurgast ABC, mistõttu ka* $\angle ABC > \angle CAB$. *Sellega on väide tõestatud.*

344. *Tõestame, et on õige ka teoreem, mille saame, kui eelmise teoreemi eelduse ja väite ümber vahetame:*

kolmnurgas asetseb suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus. *Kolmnurgas ABC (joon. 46)* $\angle ABC > \angle CAB$.

Väide. $AC > BC$.

Tõestus. *Külgede AC ja BC kohta on õige üks kolmest väitest:*

$$AC < BC \text{ või } AC = BC \text{ või } AC > BC.$$

Neist esimene väide ei saa olla õige, sest eelmise teoreemi järgi peaks siis olema $\angle ABC < \angle CAB$, *mis on vastuolus eeldusega.*

Samal põhjusel ei saa ka teine väide olla õige, sest sellest järelduks, et nurgad ABC ja CAB on võrdsed. Nii jääb püsima ainult kolmas väide, s. t. $AC>BC$.

Samal viisil saab näidata, et

kolmnurgas asetsevad võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

345. Kolmnurga ABC kohta on teada, et $\angle A=78°$ ja $\angle B=$ $=37°$. Järjesta kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

346. Täisnurkse kolmnurga ABC teravnurgad on $\angle A$ ja $\angle B$. Leia pikem kaatet, kui $\angle A=34°$.

347. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on 45°. Mis saab öelda kaatetite kohta?

348. Missugune külg on täisnurkses kolmnurgas kõige pikem? Missugune külg on nürinurkses kolmnurgas kõige pikem?

349. Kolmnurga küljed on $AB=7{,}8$ cm, $BC=9{,}4$ cm ja $AC=$ $=5{,}6$ cm. Järjesta kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

350. Võrdhaarse kolmnurga alus on 8,4 dm ja ümbermõõt 23 dm. Kumb on suurem, kas alusnurk või tipunurk?

351. Kolmnurga KLM kohta on teada, et $\angle L>\angle M$ ja $LM>KM$. Missugune on kolmnurga suurim nurk?

352. Kolmnurga ABC külgede kohta on teada, et $BC>AC>$ $>AB$. Missugused nurgad on selles kolmnurgas teravnurgad? Mis saab öelda kolmanda nurga suuruse kohta?

353. Tõesta, et

täisnurkses kolmnurgas 30°-se nurga vastaskaatet võrdub poole hüpotenuusiga.

Tõestuseks joonesta võrdkülgne kolmnurk ja jaota see kõrgusega kaheks täisnurkseks kolmnurgaks. Vaatle üht neist. Kui suur on selles väiksem teravnurk ja kui pikk on tema vastaskaatet?

354. Joonesta sirkli ja joonlaua abil täisnurkne kolmnurk, mille üks teravnurk võrdub 60° ja hüpotenuus võrdub antud lõiguga.

355. Kui pikk on telefoniposti tugi, mis moodustab postiga nurga 30°, kui posti ja toe vaheline kaugus mööda maapinda on 1,8 m?

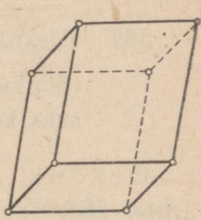
356. Täisnurkse kolmnurga üks nurk on 60° ja hüpotenuusi ning väiksema kaateti summa on 24 dm. Kui pikk on hüpotenuus?

RÖÖPKÜLIKU OMADUSED.

357. Joonesta kaks paralleelset sirget ja lõika neid kahe paralleelse sirgega. Kuidas nimetatakse tekkinud nelinurka?

Rööpkülik on nelinurk, millel on kaks paari paralleelseid vastasküljgi. Rööpkülikut nimetatakse ka parallelogrammiks.

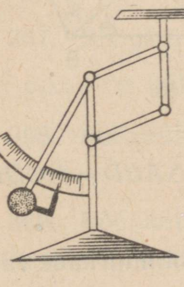
Kuidas nimetatakse keha (joon. 47), mille kõik tahud on rööpkülikud?



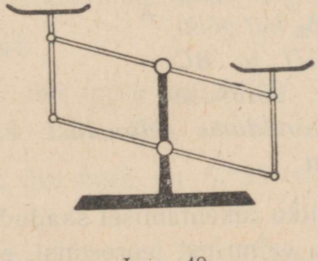
Joon. 47.

358. *Rööpkülik leiab tehnikas sageli rakendamist. Joonised* 48 *kuni* 51 *kujutavad mõningaid esemeid, millede juures on kasutatud rööpkülikut (kirjakaal, lauakaal, jalgratta lamp, hambaarsti riistade laud).*

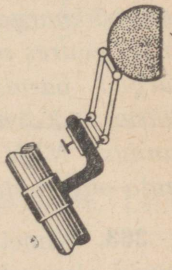
Selgita, miks on sobiv viimase kahe eseme kinnitamisel kasutada rööpkülikut, mitte aga kolmnurka.



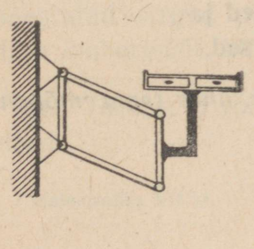
Joon. 48.



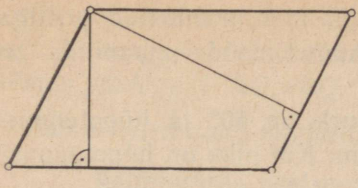
Joon. 49.



Joon. 50.



Joon. 51.



Joon. 52.

359. *Rööpküliku kahe vastasküljе vahelist ristlõiku nimetatakse tema kõrguseks. Et vastaskülgi on rööpkülikul kaks paari, siis on tal ka kaks kõrgust* (*joon.* 52).

Joonesta mingi rööpkülik ühes tema kahe kõrgusega, mõõda **alused** ja kõrgused, arvuta pindala kahel viisil ja võrdle tulemusi. Millest on tingitud tulemuste erinevus, kui see esineb?

360. Joonesta rööpkülik, mille kaks külge on 5 cm ja 3,5 cm ning nendevaheline nurk on 60°. Mõõda rööpküliku diagonaalid.

361. Joonesta rööpkülik, mille kaks külge on 6,8 cm ja 4 cm ning nendevaheline nurk on 140°. Mõõda rööpküliku diagonaalid.

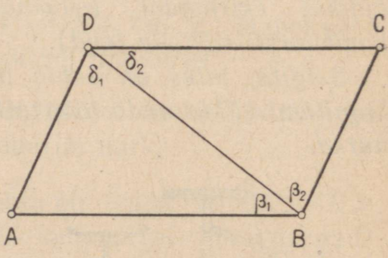
362. *Tõestame, et*

rööpküliku diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks võrdseks kolmnurgaks.

Eeldus. $AB \| DC$ ja $AD \| BC$ (*joon.* 53).

Väide. $\triangle ABD = CDB$.

Tõestus. *Kolmnurkadel ABD ja CDB on ühine külg BD. Selle külje lähisnurkadest* $\beta_1 = \delta_2$ *kui põiknurgad paralleelide AB ja DC juures ning* $\delta_1 = \beta_2$ *kui põiknurgad paralleelide AD ja BC juures. Kolmnurkade võrdsuse tunnuse NKN põhjal järeldame eeltoodust, et* $\triangle ABD = \triangle CDB$, *mida oligi vaja tõestada.*



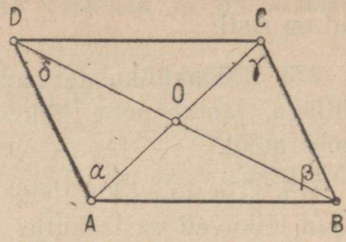
Joon. 53.

363. Nimeta rööpküliku tükeldamisel saadud kolmnurkade vastavaid elemente; järelda eelmisest teoreemist, et

1) **rööpküliku vastasküljed on võrdsed ja**
2) **rööpküliku vastasnurgad on võrdsed.**

364. *Joonestame mingi rööpküliku ABCD ühes tema mõlema diagonaaliga ja tõestame, et*

rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.



Joon. 54.

E e l d u s: $AB \| DC$ *ja* $AD \| BC$ (*joon.* 54).

V ä i d e. $AO = CO$ *ja* $BO = DO$.

T õ e s t u s. *Kolmnurkade AOD ja COB külgedest AD=BC, sest nad on rööpküliku vastasküljed. Nende külgede lähisnurkadest* $\alpha = \gamma$ *kui põiknurgad paralleelide AD ja BC lõikaja AC juures ja* $\delta = \beta$ *kui põiknurgad samade paralleelide lõikaja BD juures. Kuid siis kolmnurkade võrdsuse tunnuse NKN järgi*

$$\triangle AOD = \triangle COB.$$

Sellest järeldub, et

$$AO = CO \text{ ja } BO = DO,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad küljed.

365. Põhjenda väidet, et
rööpküliku ühe külje lähisnurkade summa võrdub sirgnurgaga.

366. Rööpküliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külg on teisest 1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

367. Rööpküliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külg on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

368. Rööpküliku üks nurk on 57°15′. Kui suured on teised nurgad?

369. Rööpküliku üks nurk on 52°20′ suurem kui teine. Leia nurkade suurused.

370. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktist on joonestatud sirged paralleelselt haaradega. Leia saadud rööpküliku ümbermõõt, kui võrdhaarse kolmnurga haar on 12 cm.

371. Tõesta, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

372. Tõesta, et rööpküliku mistahes külje lähisnurkade poolitajad on risti.

373. Rööpküliku teravnurga poolitaja, lõikudes rööpküliku küljega, jaotab selle lõikudeks 8 cm ja 3 cm. Leia rööpküliku ümbermõõt.

374. Tõesta, et kui rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad lõikuvad vastasküljel, siis lühem külg on pool pikemast.

RÖÖPKÜLIKU TUNNUSED.

375. *Selleks et otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik või mitte, saab kasutada peale rööpküliku definitsiooni veel mitmeid teoreeme. Üks neist on järgmine:*

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.

Eeldus. $AB=DC$ *ja* $AD=BC$ (*joon.* 55).

Väide. *ABCD on rööpkülik.*

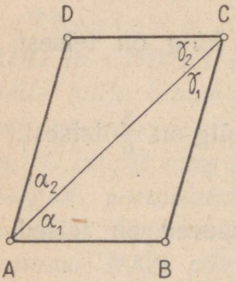
Tõestus. *Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC. Siis*

$$\triangle ABC=\triangle ACD,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kolme küljega. Kuid siis

$$\alpha_1=\gamma_2 \text{ ja } \gamma_1=\alpha_2$$

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et



Joon. 55.

$$AB\|DC \text{ ja } AD\|BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga ABCD vastasküljed on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

376. *Teine teoreem, mis võimaldab otsustada, et antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:*

nelinurk, millel on üks paar võrdseid ja paralleelseid vastaskülgi, on rööpkülik.

E e l d u s. *$AD=BC$ ja $AD \parallel BC$ (joon.* 55).

V ä i d e. *ABCD on rööpkülik.*

T õ e s t u s. *Kolmnurkadel ADC ja ABC on peale ühise külje AC veel eelduse järgi*

$$AD=BC.$$

Nende kolmnurkade nurkadest

$$\alpha_2=\gamma_1$$

kui põiknurgad paralleelsete sirgete AD ja BC lõikaja AC juures.

Kolmnurkade võrdsuse tunnuse KNK järgi on siis

$$\triangle ADC=\triangle CBA.$$

Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et

$$\alpha_1=\gamma_2,$$

sest nad on võrdsete kolmnurkade vastavad nurgad. Sellest järeldub sirgete paralleelsuse teise tunnuse põhjal, et nelinurga ABCD vastasküljed AB ja DC on paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal ABCD ka teine paar vastaskülgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

377. *Rööpküliku tunnused koos kolmnurkade konstrueerimise oskusega võimaldavad ehitada rööpkülikut tema antud elementide järgi. Selleks ehitame nende elementide järgi esmalt ühe kolmnurga, milleks diagonaal jaotab rööpküliku, ja siis teise. Teostanud konstruktsiooni, põhjendame, et saadud nelinurk on rööpkülik.*

Rööpküliku kaht lähiskülge tähistame tähtedega a ja b, külje a lähisnurki tähtedega α ja β, diagonaale tähtedega e ja f (f on β vastas).

a) Joonesta rööpkülik, millel $a=3{,}9$ cm, $b=2{,}9$ cm ja $e=$ $=5{,}8$ cm.

b) Joonesta rööpkülik, millel $a=4{,}5$ cm, $\alpha=48°$ ja $f=7{,}2$ cm.

c) Joonesta rööpkülik, millel $a=5{,}5$ cm, $\beta=130°$ ja $b=4{,}1$ cm.

378. a) Tõesta, et

nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

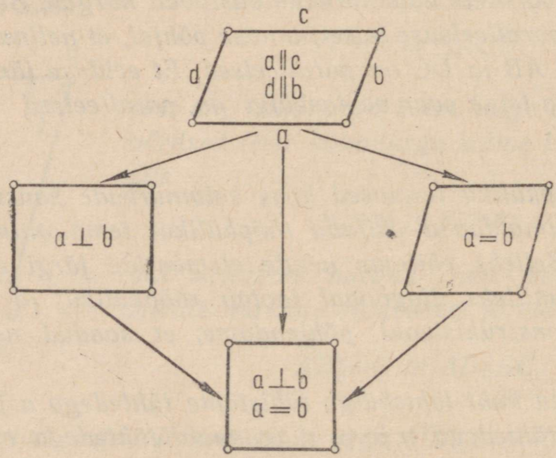
b) Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades ehita rööpkülik, millel $a=5{,}7$ cm, $e=7{,}2$ cm ja $f=5{,}2$ cm.

RÖÖPKÜLIKU ERILIIGID.

379. *Praktikas esinevad sageli niisugused rööpkülikud, millel kas nurgad on võrdsed või küljed on võrdsed või nii nurgad kui ka küljed on võrdsed. Selliseid rööpkülikuid nimetatakse vastavalt ristkülikuteks, rombideks ja ruutudeks* (*joon.* 56).

a) **Ristkülik on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed.**

Et rööpküliku nurkade summa on 360°, *siis ristküliku iga nurk peab olema* 360° : 4 *ehk* 90°. *Seega ristkülik on täisnurkne rööpkülik. Niisuguse rööpküliku saame, kui tema ühe nurga teeme täisnurgaks* (*joon.* 56).



Joon. 56.

Põhjenda väidet, et kui rööpküliku üks nurk on täisnurk, siis on ka teised nurgad täisnurgad.

b) **Romb on rööpkülik, mille küljed on võrdsed.**

Rombi saame, kui rööpküliku ühe tipu lähisküljed teeme võrdseiks, sest siis on rööpküliku vastaskülgede võrdsuse tõttu kõik küljed võrdsed (joon. 56). *Seega romb on võrdkülgne rööpkülik.*

c) **Ruut on rööpkülik, mille nurgad on võrdsed ja küljed on võrdsed** (joon. 56).

380. a) Kuidas defineerida ruutu ristküliku kaudu (joon. 56)?
b) Kuidas defineerida ruutu rombi kaudu (joon. 56)?

RISTKÜLIKU OMADUSED.

381. *Rööpküliku igal eriliigil on muidugi kõik rööpküliku omadused. Kuid peale nende on igal eriliigil veel omad eriomadused. Kui kõneldakse ristküliku või rombi omadustest, siis mõeldakse tavaliselt neid eriomadusi. Vaatleme neid.*

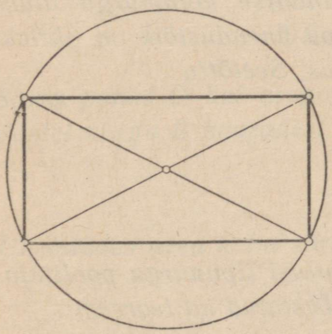
Joonesta ristkülik $ABCD$ ühes tema diagonaalidega AC ja BD, vaatle kolmnurki ABC ja BAD ning tõesta teoreem:

ristküliku diagonaalid on võrdsed.

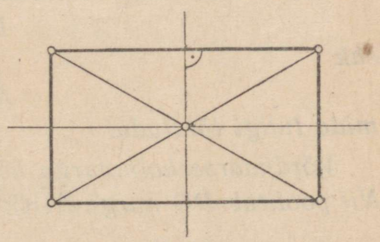
382. Et ristküliku kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist ja ühtlasi on teineteisega võrdsed, siis järeldub, et

ristküliku diagonaalide lõikepunkt on tema tippudest võrdsetel kaugustel.

Kontrolli seda, joonestades ringjoone, mille keskpunktiks on ristküliku diagonaalide lõikepunkt ja mis läbib ristküliku üht tippu (joon. 57). Kas ta läbib ristküliku kõiki tippe?



Joon. 57.



Joon. 58

Ringjoont, mis läbib ristküliku kõiki tippe, nimetatakse tema ümberringjooneks.

383. Näita, et ristküliku diagonaalide lõikepunktist küljele joonestatud ristsirge poolitab külje (joon. 58).

384. a) Joonesta ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

b) Joonesta ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

c) Joonesta ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 45°.

385. Tõesta, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

ROMBI OMADUSED.

386. *Rombi eriomadustest tähtsaimat väljendab teoreem;*

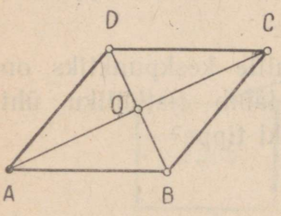
rombi diagonaalid on teineteisega risti.

Eeldus. *Nelinurgas ABCD* (*joon.* 59) $AB=BC=CD=AD$.

Väide. $AC \perp BD$.

Tõestus. *Vaatleme kolmnurka ACD. Eelduse järgi*

$$AD=CD$$



Joon. 59.

ja seega kolmnurk ACD on võrdhaarne. Et rombi kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis diagonaalide lõikepunkt O on kolmnurga ACD aluse AC keskpunkt. Võrdhaarse kolmnurga aluse keskpunkti ja tipu ühenduslõik on ühtlasi kolmnurga kõrgus. Seetõttu

$$DO \perp AC$$

ehk

$$AC \perp BD,$$

mida tuligi tõestada.

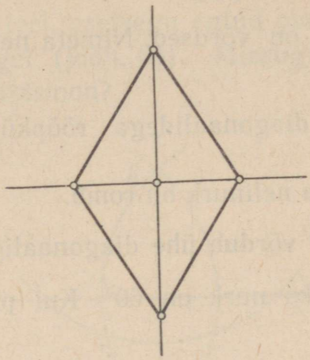
Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja. Nii poolitab DO nurga ADC; seega on tõestatud ka teoreem:

rombi diagonaal poolitab rombi nurga.

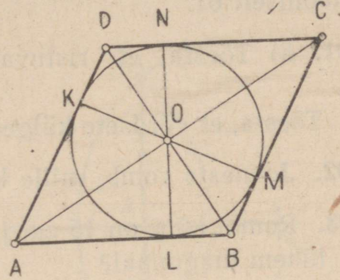
387. Näita, et kui romb tema diagonaali mööda kahekorra murda, siis rombi üks pool ühtib teisega (joon. 60).

388. *Tõestame, et*

rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsetel kaugustel.



Joon. 60.



Joon. 61.

E e l d u s. *Nelinurk ABCD on romb ja O on tema diagonaalide lõikepunkt;* $OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OM \perp BC$; $ON \perp CD$ (*joon.* 61).

V ä i d e. $OK = OL = OM = ON$.

T õ e s t u s. *On teada, et nurgapoolitaja punkt asetseb nurga haaradest võrdsetel kaugustel. Et diagonaal AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nii nurga A kui ka nurga C haaradest, seega*

$$OK = OL \text{ ja } OM = ON.$$

Sama punkt O kui diagonaali BD punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga B haaradest ja seega

$$OL = OM.$$

Ühendades need kolm võrdust saame

$$OK = OL = OM = ON,$$

mida tuligi tõestada.

Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK, läbib punkte K, L, M ja N. Seda ringjoont nimetatakse rombi **siseringjooneks** (*joon.* 61).

389. a) Joonesta romb, mille külg on 5 cm ja diagonaal on 8 cm.

b) Joonesta romb, mille külg on 6,5 cm ja üks nurk on 45°.

c) Joonesta romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

390. Tõesta, et rombi kõrgused on võrdsed. Nimeta neid kõrgusi jooniselt 61.

391. a) Tõesta, et ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

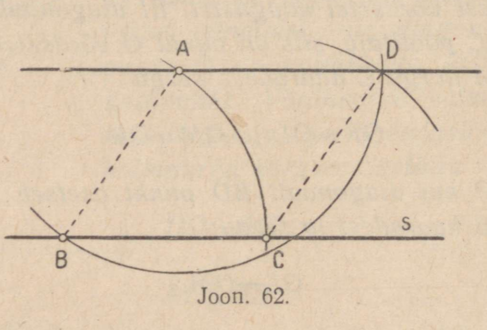
b) Tõesta, et võrdsete külgedega nelinurk on romb.

392. Joonesta romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga.

393. Rombi külg on 15 cm ja üks nurk on 60°. Kui pikk on rombi lühem diagonaal?

394. Rombi kõrgus, mis on tõmmatud tema ühest tipust, poolitab külje. Leia, kui suured on rombi nurgad.

395. *Rombi joonestamisega saab kergesti lahendada mitmeid konstruktsioonülesandeid sirkli ja joonlaua abil. Lahendame näiteks järgmise ülesande: joonestada antud sirgega paralleelne sirge, mis läbib antud punkti (viimane loomulikult ei saa asetseda antud sirgel).*

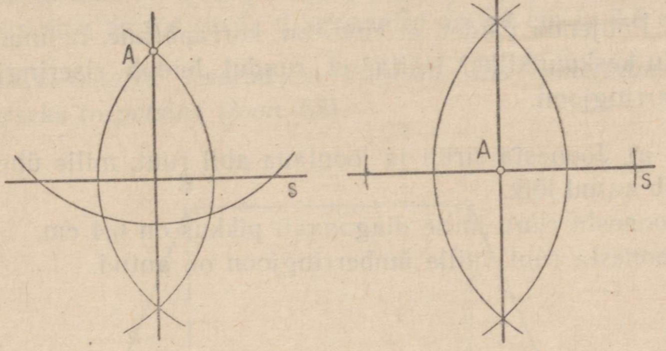


Joon. 62.

Olgu antud sirge s ja väljaspool seda punkt A (*joon.* 62). *Joonestame meelevaldse raadiusega AB ringjoone, mille keskpunktiks on punkt A, ja mis lõikab antud sirget s kahes punktis* *(üks neist on B). Muutmata sirkli haaret märgime sirgel s lõigu $BC=BA$ ja joonestame sama raadiusega kaare ümber punkti C. Punktide A ja C ümber joonestatud kaarte lõikepunkti D ühendame punktiga A. Sirge AD ongi otsitav.*

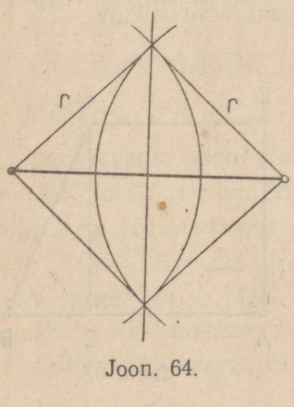
Mis kujund on $ABCD$? Miks $AD \| s$?

396. Näita, et antud sirgele *s* ristsirge joonestamine läbi antud punkti *A* sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel, asetsegu antud punkt väljaspool antud sirget või sellel sirgel (joon. 63). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

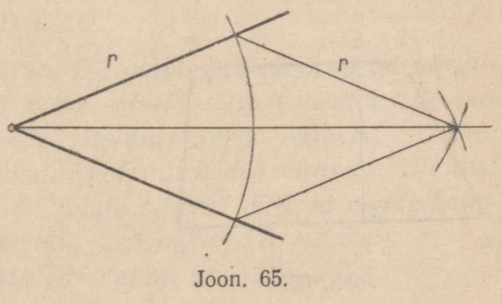


Joon. 63.

397. Näita, et antud lõigu poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel (joon. 64). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?



Joon. 64.



Joon. 65.

398. Näita, et nurga poolitamine sirkli ja joonlaua abil on teostatav rombi joonestamise teel (joon. 65). Missugusel rombi omadusel põhineb see konstruktsioon?

RUUDU OMADUSED.

399. Põhjenda väidet, et ruudul on kõik ristküliku ja ühtlasi ka kõik rombi omadused. Mis sellest järeldub ruudu diagonaalide kohta?

400. Põhjenda väidet, et ruut on korrapärane nelinurk. Mis on ruudu keskpunktiks? Näita, et ruudul leidub siseringjoon ja ka ümberringjoon.

401. a) Joonesta sirkli ja joonlaua abil ruut, mille üheks küljeks jääb antud lõik.

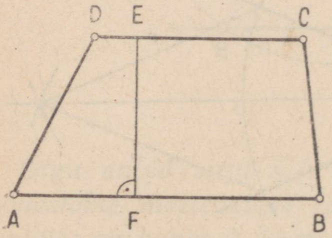
b) Joonesta ruut, mille diagonaali pikkus on 6,4 cm.

c) Joonesta ruut, mille ümberringjoon on antud.

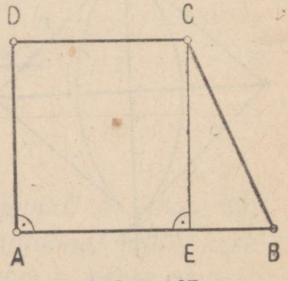
TRAPETS.

402. Trapets on nelinurk, millel ainult üks paar vastaskülgi on paralleelsed.

Trapetsi paralleelsed küljed (*AB ja DC, joon.* 66) *on tema* **alused,** *teised küljed aga* **haarad.** *Alustevaheline ristlõik on trapetsi* **kõrgus** (*EF, joon.* 66).



Joon. 66.



Joon. 67.

Kui suur on trapetsi haara lähisnurkade summa? Kui suur on trapetsi kõikide sisenurkade summa?

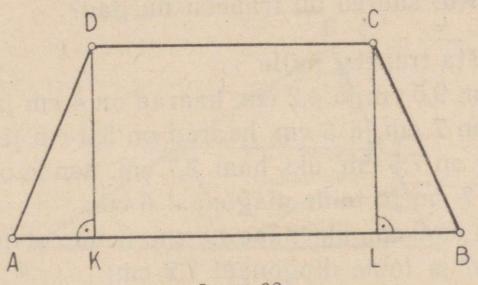
403. *Trapetsit, mille üks haar on alustega risti, nimetatakse* **täisnurkseks** *trapetsiks* (*joon.* 67).

Kui suured on täisnurkse trapetsi kaks nurka? Mis saab öelda täisnurkse trapetsi kõrguse kohta?

404. Joonesta täisnurkne trapets, mille

a) alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning lühem haar on 3,3 cm;
b) alused on 5,5 cm ja 3,9 cm ning pikem haar on 3,3 cm;
c) pikem alus on 6 cm ja haarad on 4 cm ja 5,5 cm;
d) üks alus on 6,4 cm ja diagonaalid on 5,4 cm ja 7,5 cm.

405. *Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda* **võrdhaarseks** *trapetsiks* (*joon.* 68).



Joon. 68.

Tõestame, et

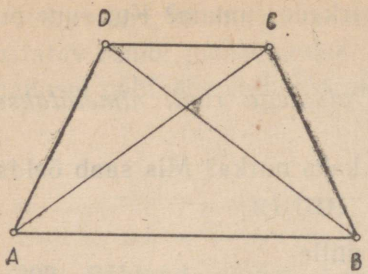
võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.

Eeldus. $AB \parallel DC$ *ja* $AD = BC$ (*joon.* 68).

Väide. $\angle A = \angle B$ *ja* $\angle D = \angle C$.

Tõestus. *Joonestame aluse DC otspunktidest trapetsi kõrgused DK ja CL* (*joon.* 68). *Et paralleelsete sirgete vahelised ristlõigud on võrdsed, siis* $DK = CL$. *Eelduse järgi* $AD = BC$ *ja joonise järgi* $\angle K = \angle L$. *Rakendades kolmnurkade võrdsuse tunnust KkN saame, et* $\triangle ADK = \triangle BCL$. *Kuid siis on võrdsed nende kolmnurkade kõik vastavad elemendid, seega ka* $\angle A = \angle B$.

Sellest on kerge järeldada (kuidas?), et $\angle D = \angle C$.



Joon. 69.

406. *Võrreldes kolmnurki ABD ja ABC* (*joon.* 69), *tõesta, et* **võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.**

407. Joonesta võrdhaarne trapets, mille

a) alus on 6 cm, haar 3 cm ja nendevaheline nurk on 60°;

b) alus, haar ja diagonaal on antud;

c) alused on 6 cm ja 4 cm ning kõrgus on 3 cm.

408. a) Kui suur on võrdhaarse trapetsi vastasnurkade summa?

b) Võrdhaarse trapetsi haar on võrdne lühema alusega ja risti diagonaaliga. Kui suured on trapetsi nurgad?

409. Joonesta trapets, mille

a) alused on 9,5 cm ja 4,2 cm, haarad on 4 cm ja 5,2 cm;

b) alused on 7 cm ja 3 cm, haarad on 5,3 cm ja 5,9 cm;

c) üks alus on 7,5 cm, üks haar 3,7 cm, nende otspunkte ühendav diagonaal 7 cm ja teine diagonaal 6 cm;

d) üks alus on 9 cm, üks haar 4,8 cm, nende otspunkte ühendav diagonaal 6 cm ja teine diagonaal 7,2 cm;

e) üks alus on 4 cm, üks haar 3 cm, nende otspunkte ühendav diagonaal 6 cm ja teine alus 8 cm;

f) pikem alus 8 cm, kõrgus 4,7 cm, haarad 5,7 cm ja 5 cm.

Igas joonises mõõda küljed ja kõrgus, mis ei ole antud.

Näpunäide. *Trapetsi joonestamiseks tema nelja külje järgi vaatle kolmnurka, mis tekib, kui lühemä aluse ühest otspunktist panna läbi sirge, mis on paralleelne selle aluse teisest otspunktist lähtuva haaraga. Tee vastav joonis ja selgita, kui pikad on selle kolmnurga küljed. Kas trapetsi külgi teades on võimalik seda kolmnurka joonestada? Kuidas selle kolmnurga järgi saab joonestada kogu trapetsi?*

410. Leia võimalikult lihtsa joonise abil trapetsi kõrgus, kui

a) trapetsi alused on 8,3 cm ja 13,3 cm, haarad on 4 cm ja 3,5 cm;

b) trapetsi alused on 25 cm ja 18 cm, haarad on 6 cm ja 5 cm;

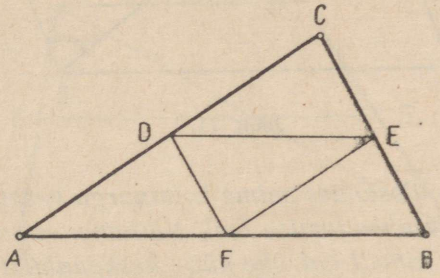
c) trapetsi alused on 2,12 m ja 2,03 m, haarad on 8 cm;

d) trapetsi üks alus on 8,4 cm, üks haar 6 cm ja nende otspunkte ühendav diagonaal 5,2 cm.

KOLMNURGA KESKLÕIK. TRAPETSI KESKLÕIK.

411. Joonesta mingi kolmnurk ABC ja ühenda selle kahe külje keskpunktid D ja E (joon. 70). Saadud lõiku DE nimetatakse kolmnurga **kesklõiguks.**

Kolmnurga kesklõiguks nimetatakse tema kahe külje keskpunkte ühendavat lõiku.



Joon. 70.

Mitu kesklõiku on kolmnurgal? Joonesta tema kõik kesklõigud. Mõõda iga kesklõik ja võrdle tema pikkust küljega, millel pole kesklõiguga ühist punkti. Kuidas kesklõik näib asetsevat selle külje suhtes?

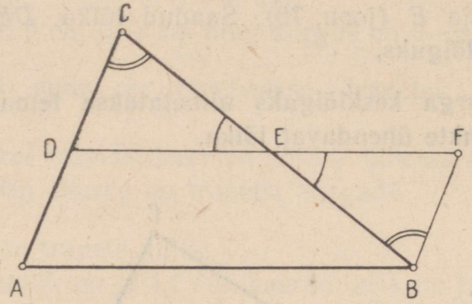
412. *Tõestame, et*

kolmnurga kesklõik on paralleelne kolmnurga ühe küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

Eeldus. $AD=DC$ *ja* $BE=EC$ (*joon.* 71).

Väide. $DE \parallel AB$ *ja* $DE=AB:2$.

Tõestus. *Joonestame sirge läbi punkti B paralleelselt sirgega AC ja pikendame kesklõiku DE lõikumiseni selle sirgega* *punktis F. Nii saame kolmnurga BEF, mis tunnuse NKN põhjal on võrdne kolmnurgaga CED (põhjenda seda üksikasjaliselt). Kolmnurkade võrdsusest järeldub, et $BF=DC$ ja $EF=DE$ (miks?). Nii näeme, et nelinurgas ABFD on vastasküljed AD ja BF mitte ainult paralleelsed, nagu joonestasime, vaid ka võrdsed ($AD=DC$ ja $BF=DC$, järelikult $AD=BF$). Seega nelinurk ABFD on rööpkülik. Kuid siis tema vastasküljed DF ja AB on paralleelsed ja võrdsed. Et DE on pool lõigust DF, siis ka $DE \parallel AB$ ja $DE=AB:2$, mida oligi vaja tõestada.*



Joon. 71.

413. *Eelmises ülesandes saime kolmnurga kesklõigu tema kahe külje keskpunktide ühendamise teel. Näitame, et sama lõigu võib saada veel teisiti, nimelt kui ühe külje keskpunktist tõmmata teise küljega paralleelne lõik kuni kolmanda küljeni. Tõepoolest, kui näiteks läbi punkti D (joon. 71) tõmmata küljega AB paralleelne lõik küljeni BC, siis peab see ju ühtima lõiguga DE, sest vastasel korral läheks läbi punkti D kaks sirget, mis oleksid paralleelsed sirgega AB: üks oleks äsja joonestatud sirge ja teine oleks sirge, millel asetseb kesklõik. Niisiis*

kolmnurga ühe küljega paralleelne sirge, mis poolitab teise külje, poolitab ka kolmanda.

414. *Joonesta mingi trapets ABCD ja tema üks diagonaal, ütleme BD. Tõmba trapetsi haara AD keskpunktist E alustega paralleelne sirge, mis lõigaku diagonaali BD punktis F ja haara BC punktis G (joon. 72). Eelmise teoreemi põhjal EF poolitab kolmnurga ABD külje BD, s. t. $BF=FD$. Kuid sama teoreemi põhjal EG poolitab siis ka kolmnurga DCB külje CB, sest ta poolitab* *külje DB ja on paralleelne küljega DC. Seega punkt G on trapetsi haara BC keskpunkt. Saadud lõiku EG, mis ühendab trapetsi mitteparalleelsete külgede keskpunkte, nimetatakse* **trapetsi kesklõiguks.** *Kolmnurga kesklõigu omadustest järeldub, et trapetsi kesklõik*

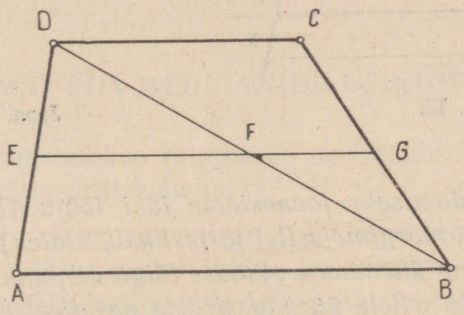
$$EG \| AB \| DC$$

ja

$$EG = EF + FG = \frac{AB}{2} + \frac{DC}{2} = \frac{AB + DC}{2}.$$

Nii oleme saanud, et

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja tema pikkus võrdub aluste pikkuste poolsummaga.



Joon. 72.

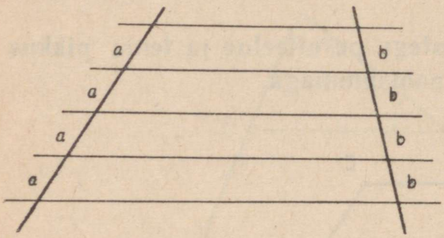
415. a) Anna trapetsi kesklõigu definitsioon.
b) Missugusel kahel viisil saab joonestada antud trapetsi kesklõiku?

416. Missuguse kujundi saab trapetsist, kui tema ühe aluse pikkus väheneb nii, et saab võrdseks nulliga? Mis saab sel juhul trapetsi kesklõigust? Järelda sel teel, et kolmnurga kesklõik võrdub poolega ühest küljest.

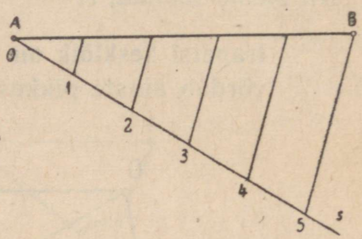
417. *Kui trapetsi üks haar poolitada, saadud pooled uuesti poolitada jne., siis see haar jaotub võrdseteks lõikudeks (joon. 73). Tõmmates kõigist saadud jaotuspunktidest alustega paralleelsed sirged, jaotub trapetsi kesklõigu omaduste põhjal ka teine haar* *võrdseteks lõikudeks. Seda tõsiasja võime sõnastada järgmiselt (joon.* 73):

kui paralleelsed sirged lõikavad kaht sirget nii, et ühel neist tekivad võrdsed lõigud, siis tekivad võrdsed lõigud ka teisel sirgel.

418. *Eelmises ülesandes antud paralleelsete sirgete omadus võimaldab antud lõiku kergesti jaotada võrdseteks osadeks. Olgu vaja lõik AB jaotada näiteks viieks võrdseks osaks (joon.* 74).



Joon. 73.



Joon. 74.

Ülesande lahendamiseks joonestame läbi lõigu AB otspunkti A mingi abisirge s, märgime sellel järjestikku, alates punktist A, viis võrdset lõiku ning ühendame viimase lõigu otspunkti punktiga B. Nüüd joonestame sellele ühendussirgele paralleelsed sirged abisirge s punktidest 1, 2, 3 ja 4. Need paralleelid jaotavad lõigu AB viieks võrdseks osaks.

419. a) Jaota vabalt võetud lõik joonisel 74 näidatud viisil kolmeks võrdseks osaks.

b) Jaota vabalt võetud lõik joonisel 74 näidatud viisil kuueks võrdseks osaks.

420. a) Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on selle küljed?

b) Kolmnurga külgede pikkused a, b ja c avalduvad kahe arvu x ja y kaudu järgmiselt:

$$a=4x-2y;\ b=3x+y;\ c=5x-3y.$$

Avalda antud kolmnurga kesklõikudest moodustuva kolmnurga küljed x ja y kaudu. Leia kummagi kolmnurga ümbermõõt ja võrdle neid.

421. Trapetsi alused on 7 dm ja 12 dm. Kui pikad on lõigud, milleks diagonaal tükeldab kesklõigu?

422. Trapetsi kesklõik on 12 m. Diagonaal tükeldab selle lõikudeks, milledest üks on teisest 3 m pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

423. a) Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

b) Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik on 12 cm. Kui pikk on teine alus?

c) Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik on 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

KOLMNURGA MEDIAANIDE LÕIKUMINE.

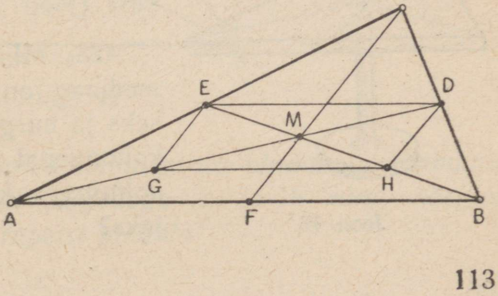
424. Mida nimetatakse kolmnurga mediaaniks? Kas mediaan saab asetseda väljaspool kolmnurka?

425. Joonesta mingi kolmnurga kolm mediaani. Mida paned tähele nende kohta? Leia mõõtmise teel, kuidas suhtuvad need kaks lõiku, milledeks mediaanide lõikepunkt jaotab iga mediaani.

426. *Tõestame, et*

kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis, mis jaotab iga mediaani suhtes 2 : 1, arvates kolmnurga vastavast tipust.

Eeldus. $AE=CE$; $AF=BF$; $BD=CD$ (*joon.* 75).



Joon. 75.

V ä i d e. *AD, BE ja CF lõikuvad kõik ühes ja samas punktis M ning seejuures* $AM : MD = BM : ME = CM : MF = 2 : 1$.

T õ e s t u s. *Tähistame mingi kahe mediaani (näiteks AD ja BE) lõikepunkti tähega M ja ühendame nende mediaanide otspunktid D ja E ning lõikude AM ja BM keskpunktid G ja H. Siis DE on kolmnurga ABC kesklõik ja GH on kolmnurga ABM kesklõik, tähendab:*

$$ED \| AB \text{ ja } ED = \tfrac{1}{2} AB;$$

$$GH \| AB \text{ ja } GH = \tfrac{1}{2} AB.$$

Sellest järeldub, et

$$ED \| GH \text{ ja } ED = GH.$$

Kuid siis nelinurk GHDE on rööpkülik, sest tema üks paar vastaskülgi on paralleelsed ja võrdsed. Et rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis

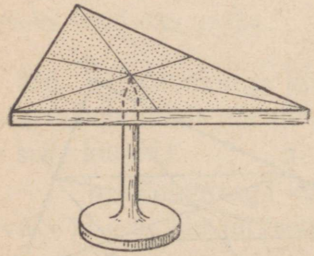
$$MD = MG \text{ ja } ME = MH.$$

Kuid MG on pool lõigust AM ja MH on pool lõigust BM, tähendab

$$AM : MD = 2 : 1 \text{ ja } BM : ME = 2 : 1.$$

Joonestame nüüd kolmanda mediaani CF. See peab tõestatu põhjal lõikama nii mediaani AD kui ka mediaani BE punktis, mis jaotab neid suhtes 2 : 1, arvates vastavast tipust, s. t. punktis M. See näitab, et kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis.

427. Lõika papist välja mingi kolmnurk, määra tema mediaanide lõikepunkt ja näita katseliselt, et mediaanide lõikepunkt on kolmnurga raskuskese (joon. 76).



Joon. 76.

428. Missugusel kolmnurgal ü k s mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks? Missugusel kolmnurgal i g a mediaan on ühtlasi kolmnurga kõrguseks ja nurga poolitajaks?

429. Joonesta mingi täisnurkne kolmnurk ühes hüpotenuusi mediaaniga ja võrdle mediaani pikkust hüpotenuusi pikkusega. Näita, et hüpotenuusi mediaan võrdub alati poole hüpotenuusiga.

430. Teades, et hüpotenuusi mediaan võrdub poole hüpotenuusiga, leia, kui suur on nurk täisnurkse kolmnurga, hüpotenuusi mediaani ja täisnurga poolitaja vahel, kui kolmnurga üks teravnurk on 59°.

TRAPETSI PINDALA.

431. a) Millega võrdub rööpküliku pindala? Avalda rööpküliku pindala S tema aluse a ja kõrguse h kaudu.

b) Millega võrdub ristküliku pindala? Järelda rööpküliku pindala valemist, et ristküliku pindala võrdub tema kahe lähiskülje pikkuste korrutisega.

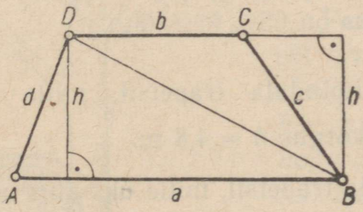
432. a) Millega võrdub kolmnurga pindala? Avalda kolmnurga pindala S tema aluse a ja kõrguse h kaudu.

b) Avalda täisnurkse kolmnurga pindala S tema kaatetite a ja b kaudu. Kuidas see valem tuleneb ristküliku pindala valemist?

433. *Tõestame, et*

trapetsi pindala võrdub aluste poolsumma ja kõrguse korrutisega.

Tõestuseks joonestame mingi trapetsi ABCD ja tükeldame ta diagonaaliga BD kaheks kolmnurgaks ABD ja DCB (*joon.* 77).



Joon. 77.

Trapetsi pindala võrdub saadud kolmnurkade pindalade summaga. Tähistades trapetsi aluseid tähtedega a ja b ning kõrgust tähega h, saame nüüd, et trapetsi pindala

$$S = \frac{1}{2} ah + \frac{1}{2} bh,$$

sest kui kolmnurkade ABD ja DCB alusteks võtta trapetsi alused, siis kõrgused võrduvad trapetsi kõrgusega. Võttes saadud summas ühised tegurid $\frac{1}{2}$ *ja h sulgude ette, saame*

$$S = \frac{1}{2} h(a+b)$$

ehk, korrutades tegurid $\frac{1}{2}$ *ja* $a+b$,

$$S = \frac{a+b}{2} h,$$

mida oligi vaja tõestada.

Trapetsi aluste poolsumma $\frac{a+b}{2}$ *võrdub teatavasti tema kesklõiguga. Tähistades selle tähega k, saame trapetsi pindala valemi kirjutada kujul*

$$S = kh,$$

mis ütleb, et

trapetsi pindala võrdub kesklõigu ja kõrguse korrutisega.

434. a) Arvuta trapetsi pindala, kui trapetsi alused on 5,8 cm ja 4,6 cm ning kõrgus on 3,7 cm.

b) Arvuta trapetsi pindala, kui trapetsi alused on 320 m ja 240 m ning kõrgus on 65% kesklõigust.

435. a) Arvuta pindala trapetsil, mille alus $a = 15{,}7$ m, alus $b = 8\frac{2}{3}$ m ja kõrgus $h = 4{,}8$ m.

b) Arvuta pindala trapetsil, mille üks alus on 48 m, teine alus on sellest 25% võrra suurem ja kõrgus on teisest alusest 25% võrra väiksem.

436. a) Trapetsi pindala $S = 127{,}1$ m², alus $a = 18$ m ja alus $b = 13$ m. Arvuta trapetsi kõrgus.

b) Trapetsi pindala $S=392$ m², alus $a=25$ m ja kõrgus $h=14$ m. Kui pikk on alus b?

437. Trapetsi alused ja kõrgus avalduvad kahe arvu x ja y abil järgmiselt:

$$a=2x+y,\ b=2x-y,\ h=x+y.$$

Avalda trapetsi pindala x ja y kaudu ja arvuta pindala, kui $x=5$ ja $y=7$.

438. Arvuta täisnurkse trapetsi pindala, kui alused on 8 dm ja 5 dm ning trapetsi üks nurk on 45°.

439. Täisnurkse trapetsi lühem alus on 12 cm, kõrgus 7 cm ja pikem haar 8 cm. Arvuta trapetsi pindala, kui on teada, et trapetsi üks nurk on 60°.

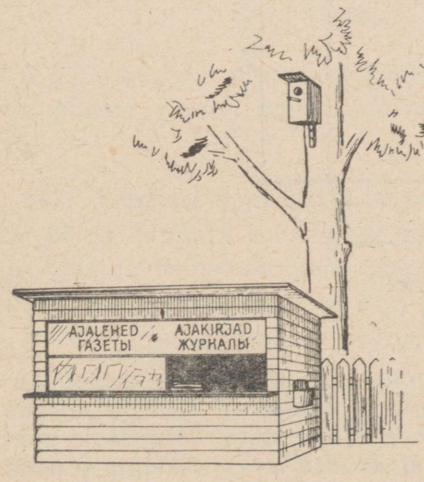
440. Missuguse kujundi pindala valemi saab trapetsi pindala valemist, kui selles ühe aluse pikkuseks võtta 0? kui selles alused on võrdsed?

TRAPETSIKUJULISE PÕHJAGA PÜSTPRISMA.

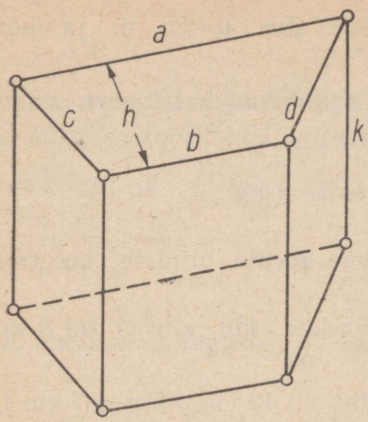
441. *Trapets on paljude kehade juures esinev kujund. Näiteks on teetammide ja kraavide ristlõigetel tavaliselt trapetsi kuju (joon.* 81 *ja* 82*). Sama kuju on ka paljude hoonete (kioskite, kuuride) külgmistel seintel (joon.* 78).

Vaadeldes teetammi või kraavi osa tema kahe ristlõike vahel, saame keha, millel on sama kuju, nagu ülalnimetatud hoonetel. See keha on **trapetsikujulise põhjaga püstprisma** (*joon.* 79).

Too oma ümbrusest näiteid trapetsikujulise põhjaga püstprismadest.



Joon. 78.

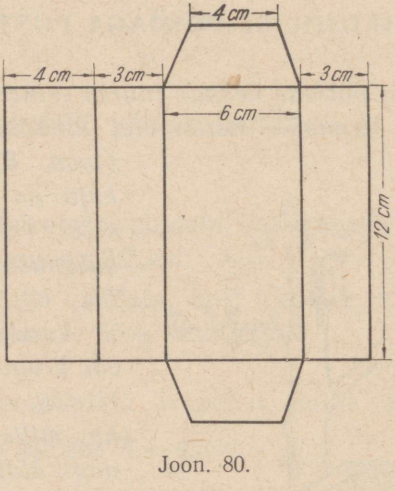


Joon. 79.

442. Mitu tahku, serva ja tippu on trapetsikujulise põhjaga püstprismal? Missuguse kujuga on selle keha külgtahud? põhitahud? Missugused tahud on paralleelsed, missugused võrdsed? Missugused servad on paralleelsed ja võrdsed?

443. a) Valmista endale traat- või puuvarbadest trapetsikujulise põhjaga püstprisma varbmudel, ühendades prisma servi kujutavad varvad korkide või plastiliini abil.

b) Joonis 80 kujutab trapetsikujulise põhjaga püstprisma pinnalaotust. Joonesta see joonisel antud mõõtmete järgi ruudulisele paberile, lõika välja ja kleebi kokku püstprismaks, täiendades joonist enne väljalõikamist kokkukleepimiseks vajalike äärtega.



Joon. 80.

444. Leia joonise 80 põhjal, missuguse kujuga on trapetsikujulise põhjaga püstprisma külgpinna laotus ja millega võrdub selle prisma külgpindala. Avalda see külgpindala, kui prisma põhjaks oleva trapetsi alused on a ja b, haarad on c ja d ning prisma külgserv (ühtlasi ka kõrgus) on k (joon. 79).

Arvuta trapetsikujulise põhjaga püstprisma külgpindala, kui põhja küljed on 17,8 cm, 8,3 cm, 6,8 cm ja 9,6 cm ning külgserv on 22,4 cm.

445. Prisma täispindala T koosneb külgpindalast K ja kahe põhja pindalast $2P$:

$$T=K+2P.$$

Avalda K, P ja T joonisel 79 märgitud suuruste a, b, c, d, h ja k kaudu. Näita, et trapetsikujulise põhjaga püstprisma täispindala valemile saab anda kuju

$$T=(a+b)(k+h)+(c+d).k,$$

kus tähed a, b, c, d, h ja k tähendavad joonisel 79 näidatud suurusi.

446. Arvuta trapetsikujulise põhjaga püstprisma põhja pindala, külgpindala ja täispindala järgmise tabeli andmeil (tähed tähendavad joonisel 79 näidatud suurusi).

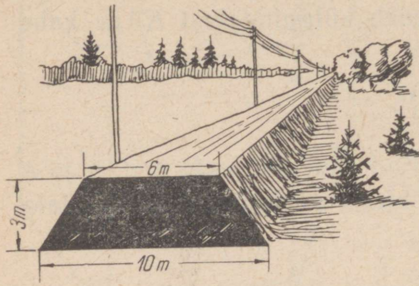
Andmed / Harjutuse nr.	a	b	c	d	k
1	9 cm	5 cm	3,6 cm	3,6 cm	25 cm
2	8 m	3,5 m	4,3 m	5 m	0,5 m
3	12,6 m	6 m	4,5 m	7,5 m	1 m
4	17 dm	6 dm	11,3 dm	8,4 dm	10 m

Näpunäide. Prisma põhjaks oleva trapetsi kõrguse leidmiseks kasuta (tarbe korral vähendatud) joonist (vt. üles. 409 *ja* 410).

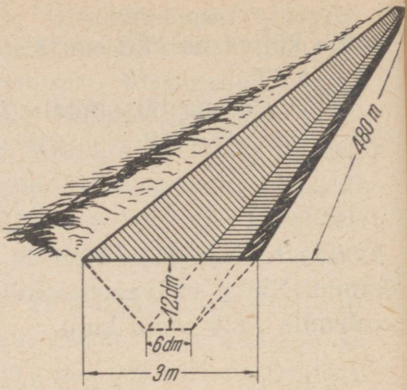
447. Eelmisel õppeaastal nägime, et iga prisma ruumala võrdub põhja pindala ja kõrguse korrutisega. Kasutades seda tõsiasja, avalda trapetsikujulise põhjaga püstprisma ruumala põhja aluste a ja b, põhja kõrguse h ja prisma kõrguse k kaudu.

Arvuta prisma ruumala eelmise ülesande tabeli andmeil.

448. Trapetsikujulise ristlõikega teetammi (joon. 81) laius pealt on 6 m, laius alt 10 m ja kõrgus 1,2 m. Mitu autokoormat kruusa läheb niisuguse ristlõikega teetammi ühe kilomeetri ehitamiseks, kui auto kandejõuks arvestada 4,5 t ja kui 1 m³ kruusa



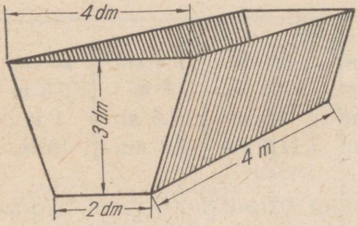
Joon. 81.



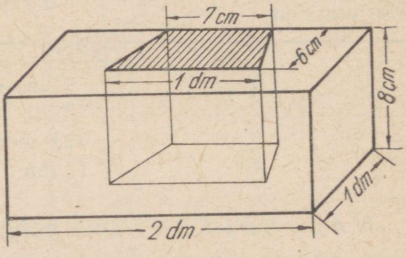
Joon. 82.

kaalub 1,5 t? Mitme päevaga võivad selle kruusa kohale toimetada 10 autot, kui iga auto teeb päevas 15 reisi?

449. Mitu kuupmeetrit pinnast tuleb välja võtta trapetsikujulise ristlõikega kraavist, mille mõõtmed on antud joonisel 82?



Joon. 83.



Joon. 84.

450. Mitu pange vett mahub joonisel 83 antud mõõtmetega künasse, kui pang mahutab 12 liitrit?

KORDAMISEKS.

451. Tõesta, et ristküliku külgede keskpunktid on ühe rombi tippudeks.

452. Tõesta, et rombi külgede keskpunktid on ühe ristküliku tippudeks.

453. Pioneerid matkasid kompassi järgi esiteks 3 km suunas $N30°E$, siis 2 km suunas $N40°W$ ja lõpuks veel 4 km suunas $N40°E$. Valmista nende teest joonis mõõdus 1 : 100 000 ja leia sellest, kui kaugel olid pioneerid matka lõpul oma lähtekohast otsejoones.

454. Laev sõitis esiteks kursiga $N60°E$, siis kursiga E ja lõpuks kursiga $S30°W$. Kuidas esimene teelõik asetseb viimase suhtes?

455. Risttahukakujulisest rauatükist on välja lõigatud trapetsikujulise põhjaga püstprisma (joon. 84). Arvuta joonise andmeil rauatüki ruumala ja kaal.

456. Missugune kujund tekib, kui võrdhaarse trapetsi külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

457. Missugune kujund tekib, kui nelinurga külgede keskpunktid ühendada järjestikku?

N ä p u n ä i d e. *Kasuta nelinurga diagonaale.*

458. Kolmnurga mediaanid on 15,6 cm, 18,9 cm ja 14,1 cm. Arvuta kolmnurga tippude kaugused mediaanide lõikepunktist.

459. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{5}{2x-1}+\frac{8}{2x+1}+\frac{7+16x}{1-4x^2}\right)\cdot\frac{2x-1}{x-1}.$$

460. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{5}{2a+3}+\frac{2}{3-2a}+\frac{2a+9}{4a^2-9}\right):\frac{8}{4a^2+12a+9}.$$

461. Teosta tehted

$$\frac{5{,}22-0{,}744:0{,}2}{25\cdot 0{,}016}+\left(3\frac{1}{15}-\frac{44}{45}\right):1\frac{22}{25}.$$

462. Teosta tehted

$$34{,}17:1{,}7+\left(2\frac{3}{4}+0{,}15\right):\frac{4}{5}-23\frac{3}{8}.$$

463. Mitu protsenti moodustab arvude 4,2 ja 3,8 vahe ruut samade arvude ruutude vahest?

464. Lihtsusta järgmine avaldis ja arvuta selle väärtus, kui $a=-2$:

$$\frac{a^2-ax+a-x}{a^2-ax-a+x}.$$

6. ARVUTAMINE LIGIKAUDSETE ARVUDEGA.

ARVUDE ÜMARDAMINE JA SELLEST TEKKIV VIGA.

465. *Arvu* 1254 *saab ümardada sajalisteni kahel viisil, nimelt võttes* 1254 *asemele* 1200 *või* 1300. *Esimest ümardamist nimetatakse ümardamiseks* **puuduga,** *teist aga ümardamiseks* **liiaga.**

Vastavalt sellele on arv 1200 *arvu* 1254 **ligikaudne väärtus puuduga** *ja arv 1300 arvu* 1254 **ligikaudne väärtus liiaga.**

Asendades antud arvu ükskõik kummaga nendest ligikaudsetest väärtustest, teeme vea, mida nimetatakse **ümardamisveaks.** *Puuduga ümardamise juhul on siin ümardamisviga* 1254—1200, *s. o.* 54, *liiaga ümardamise puhul* 1300—1254, *s. o.* 46.

Täisarvude ümardamisel asendatakse iga ärajääv number nulliga, kümnendmurdude ümardamisel jäetakse aga lõpunumbrid lihtsalt ära.

Näide. $1685 \approx 1700$ (*ümardatult sajalisteni*);

$37{,}658 \approx 37{,}7$ (*ümardatult kümnendikeni*).

466. Maakera läbimõõt poolusest pooluseni on 12 713,8 km. Anna maakera läbimõõdu ligikaudne väärtus tuhandetes kilomeetrites. Kui suure vea teed, kui ümardad selle arvu tuhandelisteni puuduga? liiaga?

Kummal juhul on viga väiksem?

467. a) Euroopa pindala on 9 439 926 km². Ümarda see arv tuhandelisteni nii puuduga kui ka liiaga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

b) Ringjoone pikkuse ja ringi läbimõõdu suhe on 3,141592653 . . . Ümarda see arv sajandikeni nii puuduga kui ka liiaga. Otsusta, kummal juhul on viga väiksem.

468. *Selleks et ümardamisviga oleks võimalikult väike, on kokku lepitud*

> **ümardada liiaga, kui esimene ärajääv number on 5, 6, 7, 8 või 9, ja ümardada puuduga, kui esimene ärajääv number on 0, 1, 2, 3 või 4.**

Järgnevates ülesannetes ümarda ikka selle reegli järgi.

469. Ümarda kümnelisteni arvud

37,4; 182; 1645; 5,6; 2049; 305.

Määra ümardamisvead ning leia nende hulgast suurim.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnelisteni?

N ä i d e. 716,4 ≈ 720; *ümardamisviga on* 3,6.

470. Ümarda kümnendikeni

3,78; 4,348; 6,85; 29,391; 36,54; 0,259.

Missugune on suurim võimalik ümardamisviga, kui ümardame arve kümnendikeni?

471. Ümarda täismeetriteks

2,7 m; 16,3 m; 28,5 m; 39,4 m; 128 dm; 365 dm; 984 dm; 191 cm; 236 cm; 3799 cm; 5830 cm.

Missugune on ümardamisel tekkiva vea ülemmäär, kui mingi pikkuse ümardame täismeetriteks?

472. Suurimat võimalikku ümardamisviga nimetatakse ümardamisvea ülemmääraks.

Ümardades kümnelisteni on vea ülemmäär 5 (*vt. ül.* 469), *ümardades kümnendikeni on vea ülemmäär* 0,05 (*vt. ül.* 470) *jne. Üldiselt:*

> **ümardades arve ülesandes 468 antud reegli kohaselt, on ümardamisvea ülemmääraks pool selle järgu ühikust, milleni ümardati.**

Ümardades arve näiteks tuhandelisteni, on ümardamisvea ülemmääraks pool tuhandest, s. o. 500.

473. Kui suur on vea ülemmäär, kui arv ümardati sajalisteni? sajandikeni? ühelisteni? kümnelisteni? tuhandikeni?

474. Ümarda järgmised arvud

a) tuhandikeni:	b) sajandikeni:	c) kümnendikeni:
0,2096	19,407	48,805
27,0607	8,095	4,83
4,00852	5,5428	0,754
6,90049	11,1065	127,896
1,82171	1,009	6,695
15,0999	2,999	14,051

Märkus. Kui kümnendmurru ümardamisel esimene allesjääv number on 0, siis seda nulli ei kustutata. Miks?

Näide. $1,97 \approx 2,0$.

475. Ümarda järgmised arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks 5.

1237,698; 75,6789; 465,5664; 791,1243; 65,0075.

476. Ümarda eelmise ülesande arvud nii, et ümardamisvea ülemmäär oleks: a) 0,5; b) 50; c) 0,005; d) 0,05.

477. Ümarda järgmised arvud

a) sajandikeni: 0,2093; 27,0605; 4,00202;
b) ühelisteni: 1,23; 0,746; 19,507; 8,09; 2,103;
c) tuhandikeni: 0,7385; 9,2297; 16,3776; 9,999;
d) kümnelisteni: 18,1; 96,2; 15,099; 19,101; 85,5;
e) tuhandelisteni: 817,8; 1511; 3690; 12723; 999;
f) kümnendikeni: 2,53; 0,95; 6,678; 0,6099.

478. Ümarda järgmised arvud kümnelisteni ning määra ümardamisviga: 503; 817; 4305; 21 658; 21 814.

479. Ümarda järgmised arvud tuhandelisteni ning määra ümardamisviga: 23 458; 13 709; 100 998; 365 651.

480. Ümarda järgmised arvud ühelisteni ning määra ümardamisviga: 0,8; 3,7; 15,5; 0,379; 1,813; 2,972.

481. Ümarda järgmised arvud kümnendikeni ning määra ümardamisviga: 8,512; 11,395; 0,403; 4,08; 6,17; 10,0098.

482. Ümarda järgmised arvud sajandikeni ning määra ümardamisviga: 9,647; 12,784; 0,231; 1,054; 19,6723; 0,455; 7,0993.

ARVU ALAMTÕKE JA ÜLEMTÕKE.

483. *Olgu mingi arvu x ümardamisel sajalisteni saadud* 2700, *s. t.* $x \approx 2700$. *Kui ümardamine on toimunud ülesandes* 468 *antud reegli kohaselt, siis arv x, mille täpne väärtus ei ole teada, peab olema väiksem kui* 2750, *kuid suurem kui* 2650 *(mõnikord ka viimasega võrdne):*

$$2650 < x < 2750.$$

Arve 2650 *ja* 2750 *nimetame tundmatu arvu x* **tõketeks,** *nimelt on* 2650 *tema* **alamtõke** *ja* 2750 *tema* **ülemtõke.**

484. Eesti NSV pindala p on sadade ruutkilomeetriteni ümardatult 45 100 km². Anna pindala p tõkked.

485. Tervete meetriteni ümardatult on koolimaja pikkus $p \approx 42$ m ja laius $l \approx 14$ m. Anna suuruste p ja l tõkked.

486. *Olgu tundmatu arvu x ümardamisel saadud tema ligikaudseks väärtuseks a, kusjuures selle ligikaudse väärtuse vea ülemmäär on v. Siis on arvu x ülemtõke $a+v$ ja alamtõke $a-v$:*

$$a - v < x < a + v.$$

Seega

> **arvu ülemtõke võrdub selle arvu ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära summaga, alamtõke võrdub ligikaudse väärtuse ja vea ülemmäära vahega.**

Näide. *Kui* $x \approx 15{,}4$ *ja* $v = 0{,}05$,
siis

$$15{,}4 - 0{,}05 < x < 15{,}4 + 0{,}05$$

ehk

$$15{,}35 < x < 15{,}45.$$

487. Ümardamisel kümnendikeni saadi arvud:

$$a=53{,}8;\ b=14{,}3;\ c=187{,}6;\ d=48{,}5;\ e=5{,}0.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke? Vastus anna kujul:

$$53{,}75<a<53{,}85.$$

488. Ümardamisel sajandikeni saadi arvud:

$$a=1{,}07;\ b=0{,}12;\ c=19{,}36;\ d=187{,}05;\ e=40{,}00.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

489. Ümardamisel tuhandikeni saadi arvud:

$$a=16{,}825;\ b=4{,}791;\ c=63{,}559;\ d=191{,}099;\ e=0{,}030.$$

Milline on nende arvude alam- ja ülemtõke?

490. Anna järgmiste suuruste tõkked nende suuruste ligikaudsete väärtuste põhjal:

$$a=0{,}8;\ b=6{,}5;\ c=1{,}25;\ d=12{,}683;\ e=79;\ f=6300;$$
$$g=48\,000;\ h=6795;\ i=21.$$

491. *Kui kirjutatakse, et klassi pikkus on* 12,0 *m, siis tahetakse sellega öelda, et viga mõõtmisel ei ületa* 0,05 *meetrit.*

Kui suur on klassi pikkuse alam- ja ülemtõke? Kuidas mõjuks nulli kustutamine arvu lõpust vea ülemmäärale?

492. Missugune on vea ülemmäär ning ülem- ja alamtõke, kui kirjutatakse, et mingi raskus on 16,0 t? 9,00 ts? 25,000 kg? 0,030 t?

TÄPSED JA LIGIKAUDSED ARVUD.

493. *Igasugune arvutamine tähendab* a n t u d *arvude kaudu* o t s i t a v a t e *arvude leidmist. Antud arvud on võetud sageli igapäevasest elust, on saadud seega mõõtmise, loendamise ja arvutamise teel, kusjuures need andmed on sageli ümardatud.*

Kõik ümardamise teel saadud arvud on ligikaudsed.

494. Missuguse vea ülemmääraga saab mõõta pikkusi mõõdupuu abil, millel pole a) detsimeetritest peenemaid jaotusi, b) sentimeetritest peenemaid jaotusi, c) millimeetritest peenemaid jaotusi?

Kõik mõõtmise teel saadud arvud on ligikaudsed.

Mõõtmisel saadud arve kirjutatakse ikka nii, et mõõtmisviga oleks mitte suurem kui pool arvu viimase järgu ühikut. Seega tuleb mõõtmisel saadud ligikaudseid arve mõista ja kirjutada niisamuti, nagu ümardamisel saadud ligikaudseid arvegi.

Näiteid. 1) *Kui tänava laius* $l \approx 8{,}4$ *m, siis see tähendab, et*

$$8{,}35\ m < l < 8{,}45\ m.$$

2) *Kui laua pikkus* $p \approx 1{,}20$ *m, siis see tähendab, et*

$$1{,}195\ m < p < 1{,}205\ m.$$

3) *Kui rauatüki kaalumisel saadi* $k \approx 73{,}0$ *g, siis see tähendab, et*

$$72{,}95\ g < k < 73{,}05\ g.$$

495. a) *Loendamisel saame ligikaudsed arvud, kui loendatavaid esemeid on palju, kui nad loendamise ajal muudavad oma asukohta, on paigutatud korrapäratult jne.*

Kuigi loendamise tulemus on mõnikord täpne arv, tuleb see arvutamise ja meelespidamise hõlbustamiseks asendada ümardamisel saadava ligikaudse arvuga. Kui näiteks linna elanike arvuks saadi rahvaloendusel 271 826 *inimest, siis ümardatakse see harilikult arvuks* 272 000.

b) *Ligikaudsed arvud võivad tekkida ka arvutamise tulemusena. Olgu näiteks vaja jaotada* 24 *m traati* 7*-ks võrdseks osaks. Siis iga osa pikkus meetrites on*

$$24 : 7 = 3{,}428\ldots$$

Tulemuse kasutamiseks peame selle ümardama. Nii saame jagatiseks ligikaudse arvu.

496. *Asudes lahendama ükskõik millist ülesannet, on kõigepealt vaja endale selgeks teha, missugused selles ülesandes esinevad andmed on ligikaudsed ja missugused täpsed.*

Näiteks ülesandes: «Korrapärase kaheksanurga külje pikkuseks saadi mõõtmisel 5,7 *m. Kui suur on selle kaheksanurga* *ümbermõõt?» esinev arv* 8 *on täpne arv,* 5,7 *aga ligikaudne arv, kuna see on saadud mõõtmise tulemusena.*

497. Otsusta, kas alltoodud arvud väljendavad suuruse täpset või ligikaudset väärtust.

a) Kooli õpilaste arv on nimekirja järgi 791.

b) Linnas on 72 000 elanikku.

c) Tööline sai kassast 820 rubla palka.

d) Rong sõitis Tallinnast Moskvasse 23 tundi.

e) Isa, ema ja poja vanus on kokku 112 aastat.

f) Muuseumi külastas kuu jooksul 2500 inimest.

g) Kauplusest müüdi nädala jooksul 450 paari jalatseid.

h) Raamatukogu raamatute arv on 25 000.

i) Raudteerööpa pikkus on 10,35 m.

j) Jalgratta ratta kõrgus on 0,63 m.

k) Bensiinivaadi maht on 125 l.

498. Aruta läbi ülesanded 622—632 ja määra kindlaks, kas neis esinevad arvud on täpsed või ligikaudsed.

499. *Eelmistes klassides õppisime teostama tehteid täpsete arvudega ja jätsime tulemused enamasti ümardamata. Vaatleme nüüd, kuidas tuleb tehete tulemusi ümardada, kui teame, et arvutamisel kasutatavad andmed on ligikaudsed.*

LIGIKAUDSETE ARVUDE LIITMINE

500. *Õpilased mõõtsid jaama kaugust koolimajast. Seda teostati osade kaupa. Saadi järgmised tulemused: koolimajast sidekontorini on* 229 *m, sidekontorist apteegini* 198 *m ja apteegist raudteejaamani* 377 *m. Kui kaugel asetseb raudteejaam koolimajast?*

Koolimaja *Sidekontor* *Apteek* *Raudteejaam*

Liites need arvud, saame:

$$\begin{array}{r} 229 \\ +\,198 \\ 377 \\ \hline 804 \end{array}$$

Ülesande andmed on saadud mõõtmise teel ja on seega ligikaudsed. Järelikult on ligikaudne ka saadud summa. Kuidas tuleb see summa ümardada?

Sellele küsimusele vastuse saamiseks leiame otsitava **summa alamtõkke,** *liites liidetavate alamtõkked, ja* **summa ülemtõkke,** *liites liidetavate ülemtõkked.*

Summa alamtõke:	*Summa ülemtõke:*
$\begin{array}{r} 228,5 \\ +\,197,5 \\ 376,5 \\ \hline 802,5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 229,5 \\ +\,198,5 \\ 377,5 \\ \hline 805,5 \end{array}$

Seega teame otsitavast kaugusest x järgmist:

$$802,5 < x < 805,5$$

Võrdleme otsitava summa ligikaudset väärtust, tema alam- ja ülemtõket omavahel.

804
802,5
805,5

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama sajaliste ning üks ja sama kümneliste number (8 *ja* 0). *Üheliste numbrid on erinevad:* 4, 2 *ja* 5. *Lepime kokku kirjutada ligikaudsete arvudega arvutamisel tulemusi nii, et* **kõik nendes esinevad numbrid oleksid õiged, peale viimase, mis võib õigest erineda.** *(Selleks viimaseks numbriks ei tohi olla muidugi mingi juhuslikult võetud number, vaid arvutamisel või ümardamisel saadud number.) Selle kokkuleppe kohaselt võtame otsitava summa ligikaudseks väärtuseks* 804. *Seda pole enam vaja ümardada, sest ta vastab ülaltoodud kokkuleppele.*

V a s t u s. *Raudteejaama kaugus koolimajast on* 804 *m.*

501. *Teostades tehteid ligikaudsete arvudega, ei ole tulemuse vea ülemmäär enam pool ligikaudse arvu viimase järgu ühikust. Lahutades eelmises ülesandes vaadeldud summa ülemtõkkest* 805,5 *selle ligikaudse väärtuse* 804, *saame* 1,5. *Sama tulemuse saame, kui ligikaudsest väärtusest* 804 *lahutame alamtõkke* 802,5. *Tähendab, ligikaudse arvu* 804 *vea ülemmäär on juba* 1,5. *Kui ligikaudse arvu vea ülemmäär ei ole pool tema viimase järgu* *ühikust, siis märgitakse see ülemmäär sageli selle arvu järele sulgudesse:*

$$x \approx 804\,(\pm 1{,}5).$$

See kirjutus tähendab, et

$$804 - 1{,}5 < x < 804 + 1{,}5.$$

502. Anna järgmiste ligikaudsete arvude tõkked.

$$a \approx 18{,}7\,(\pm 1{,}3);\quad b \approx 0{,}80\,(\pm 0{,}007);\quad c \approx 120\,(\pm 15).$$

503. *Kaalumise teel määrati kindlaks, et tühi pudel kaalub* 239,2 *g ja kork* 5,24 *g. Pudelisse valati* 25 *g vett. Kui palju kaalub nüüd pudel koos vee ja korgiga?*

Alamtõke	*Ligikaudne väärtus*	*Ülemtõke*
239,15	239,2	239,25
+ 5,235	+ 5,24	+ 5,245
24,5	25	25,5
268,885	269,44	269,995

Õigeid numbreid, nagu nende kolme summa kõrvutamine näitab, on saadud summas ainult kaks: 2 *ja* 6 *(sajalised ja kümnelised). Sel põhjusel on õige ümardada summa ühelisteni:*

$$269{,}44 \approx 269.$$

V a s t u s. *Pudel koos korgi ja veega kaalub* 269 *g.*

504. Missugused arvu järgud on antud eelmise ülesande esimeses liidetavas? teises liidetavas? kolmandas liidetavas?

Missugune on kõige madalam järk, mis kõikides andmetes on antud?

Missuguse järguni tuli ümardada ligikaudsete arvude summa?

Ligikaudsete arvude summa tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis kõikides liidetavates on teada.

M ä r k u s. *Kui mõni liidetav on täpne arv, siis selle järgu määramisel, milleni summat ümardada, seda liidetavat ei arvestata. Näiteks, kui ülesandes* 499 *oleks* 25 *täpne arv, siis tuleks* *summa ümardada esimese ligikaudse liidetava järgi, s. o. kümnendikeni.*

505. Tee kindlaks, millise järguni tuleb ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirja põhjal ümardada iga järgmine ligikaudsete arvude summa:

a) $29{,}594+3{,}7+0{,}9009$;
b) $0{,}00825+0{,}002+0{,}87$;
c) $9{,}4+2{,}7327+7{,}26$;
d) $444{,}4+2{,}22+111{,}111$;
e) $0{,}2093+27+4{,}008$;
f) $0{,}08+0{,}10023+0{,}7$.

506. Ümarda järgmised summad vastavalt ligikaudsete arvude summa ümardamise eeskirjale:

a) $57{,}028+0{,}3+84=141{,}328\approx \ldots$
b) $0{,}2+49{,}35+0{,}069=49{,}619\approx \ldots$
c) $40+0{,}91+51{,}7=92{,}61\approx \ldots$

507. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa ning ümarda see:

a) $137\,000+680+31\,200+1700$;
b) $395+710+2900+3600$;
c) $478\,000+6750+4781+5400$.

508. Olgu vaja liita neli ligikaudset arvu:

$$3{,}5+6{,}7837+4{,}257+0{,}07896.$$

Liidame need:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 6{,}7837 \\ 4{,}257 \\ 0{,}07896 \\ \hline 14{,}61966 \end{array}$$

Ligikaudsete arvude summa ümardamise reegli kohaselt tuleb saadud tulemuses säilitada ainult üks koht pärast koma (miks?):

$$14{,}61966\approx 14{,}6.$$

Kolme viimase liidetava suurem täpsus osutus siin kasutuks ja ülearused kohad pärast koma nõudsid tarbetut tööd.

Seda tööd saab vältida, kui enne liitmist suurema täpsusega *liidetavad ümardada nii, et neis jääks üks koht (varunumber) koma järel rohkem, kui on kõige väiksema täpsusega liidetavas.*

Ümardame kolm viimast liidetavat ü h e v a r u n u m b r i g a ning liidame uuesti:

$$\begin{array}{r} 3{,}5 \\ 6{,}78 \\ 4{,}26 \\ 0{,}08 \\ \hline 14{,}62 \end{array} \approx 14{,}6.$$

Saime endise **tulemuse.**

Suurema täpsusega antud liidetava ümardamine enne liitmist kergendab arvutamist. Rakenda seda kergendavat võtet.

509. Ümarda eelmises ülesandes antud ligikaudsed arvud kümnendikeni (nagu on antud väikseima täpsusega liidetav 3,5) ja liida siis. Missuguse tulemuse saad? Miks on liidetavate ümardamisel vaja säilitada üks varunumber?

510. Leia järgmiste ligikaudsete arvude summa:

a) $0{,}52+0{,}079+12$; b) $1{,}038+12{,}5$;
c) $4{,}8+0{,}475+3{,}5691$; d) $12{,}57+0{,}617+32$;
e) $0{,}72+0{,}6482+0{,}01686$; f) $15{,}240+2{,}6463+0{,}81418$;
g) $52{,}3+432+250+26{,}47$.

511. Turist käis 94 km jalgsi, sõitis 895,6 km rongiga ja 240 km laevaga. Kui pikk oli kogu teekond?

512. Ühes tükis on 17,25 m nööri, teises 19 m ja kolmandas 21,3 m. Mitu meetrit nööri on kolmes tükis kokku?

513. Kolmnurga külgede mõõtmisel saadi pikkused 20,7 m, 14,53 m ja 21 m. Arvuta kolmnurga ümbermõõt.

514. Kollase vase valmistamiseks võeti 64,1 kg punast vaske, 32,75 kg tsinki ja 2,863 kg tina. Kui palju kaaluvad võetud metallid kokku?

515. Nelinurkse aia ümber ehitati tara. Aia üks külg oli 20 m, teine külg 16,8 m, kolmas 184 dm ja neljas 22,75 m. Kui pikk on kogu tara?

516. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks kahe numbriga koma järel ja leia summa S.

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{11}{12}+\frac{11}{15}.$$

Kontrolli saadud tulemuse õigsust, sooritades tehted harilike murdudega ning teisendades siis tulemuse kümnendmurruks.

517. Teisenda liidetavad kümnendmurdudeks kahe kohaga koma järel ning leia tulemus.

a) $4\frac{1}{7}+5\frac{4}{9}+3\frac{5}{11}$;

b) $10\frac{5}{9}+6\frac{6}{11}+\frac{4}{7}$;

c) $11\frac{15}{309}+111\frac{17}{412}+1\frac{1}{206}$;

d) $4\frac{5}{63}+5\frac{1}{79}+\frac{11}{51}$.

518. Ristkülikukujulise maatüki pikkus on 1240 m ja laius 236 m. Leia selle maatüki ümbermõõt.

519. Maja ehitamiseks vajatakse 1 532 000 punast tellist ja 325 500 silikaatkivi. Mitu kivi on vaja selle maja ehitamiseks?

520. Kolhoosi maa-alast on põldude all 1550 ha, metsa all 640 ha, heinamaa all 1360 ha ning muuks otstarbeks kasutatakse 345 ha. Kui palju maad on sellel kolhoosil?

LIGIKAUDSETE ARVUDE LAHUTAMINE.

521. *Olgu vaja leida ligikaudsete arvude* 22,8 *ja* 1,248 *vahe. Lahutades saame:*

$$\begin{array}{r} 22{,}8 \\ -\quad 1{,}248 \\ \hline 21{,}552 \end{array}$$

Millise järguni ümardada saadud vahet?

Leiame vahe alamtõkke, lahutades vähendatava alamtõkkest lahutatava ülemtõkke, sest vahe on seda väiksem, mida väiksem on vähendatav ning mida suurem on lahutatav.

$$\begin{array}{r} 22{,}75 \\ -\quad 1{,}2485 \\ \hline 21{,}5015 \end{array}$$

Vahe ülemtõkke leidmiseks lahutame vähendatava ülemtõkkest lahutatava alamtõkke, sest vahe on seda suurem, mida suurem on vähendatav ja mida väiksem on lahutatav:

$$\begin{array}{r} 22,85 \\ -\ \ 1,2475 \\ \hline 21,6025. \end{array}$$

Seega teame otsitavast vahest x järgmist:

$$21,5015 < x < 21,6025.$$

Võrdleme leitud vahet tema alam- ja ülemtõkkega:

21,552
21,5015
21,6025

Kõigis kolmes arvus esineb üks ja sama kümneliste ning üks ja sama üheliste number (2, 1). *Kümnendike numbris on erinevusi:* 5, 5 *ja* 6. *Vastavalt arvutamise tulemuste kirjutamise kokkuleppele peame ümardama:*

$$21,552 \approx 21,6.$$

Tulemusest saame teha sama järelduse, mis liitmise puhulgi:

ligikaudsete arvude vahe tuleb ümardada kõige madalama järguni, mis on teada nii vähendatavas kui ka lahutatavas.

522. Tee arvutamata kindlaks, mitu numbrit saame koma järel vastavalt vahe ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude vahes:

a) $276,1-69,8943$;
b) $97,8-0,8594$;
c) $784,4908-35,3$;
d) $0,75958-0,6$;
e) $7,8004-2,23$;
f) $3,5-0,789$.

523. Ümarda järgmised vahed vastavalt vahe ümardamise eeskirjale:

a) $10,7-0,532=10,168\approx \dots$
b) $15,348-8,3=7,048\approx \dots$
c) $2-1,221=0,779\approx \dots$

524. Teosta järgmiste, erineva täpsusega ligikaudsete arvude lahutamine: 1) tavalisel viisil; 2) ümardades suurema täpsusega ligikaudset arvu enne lahutamist ühe varunumbrini.

a) 14,8 – 2,3651;
b) 29,3785 – 7,6.

Ümarda saadud tulemused eespool toodud ligikaudsete arvude vahe ümardamise reegli kohaselt. Võrdle saadud tulemusi. Millise järelduse võid sellest teha?

Rakenda seda arvutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude lahutamisel.

525. Lahuta järgmised ligikaudsed arvud:

1) 9 – 0,85	2) 81 – 0,09	3) 5,6 – 2,367
17 – 0,24	48 – 28,58	17,993 – 8,4
15 – 13,351	30 – 18,86	29,72 – 8,643
500 – 14,275	8,65 – 7	4,153 – 2,9

526. Leia järgmiste ligikaudsete arvude vahe:

1) 377 – 2,35	2) 8,1 – 5,906	3) 74,38 – 27
58,41 – 55,7	738 – 69,465	115,25 – 49
12 – 1,18	895,1 – 386,472	4,195 – 2,5
684,42 – 36,8	85 – 68,642	98 – 10,75
4,7 – 0,522	0,2 – 0,057	60 – 21,40

527. Teisenda harilikud murrud kümnendmurdudeks ühe numbriga koma järel ning arvuta alltoodud arvude vahe.

a) $\frac{9}{10} - \frac{1}{15}$ d) $\frac{11}{18} - \frac{11}{90}$

b) $\frac{15}{27} - \frac{1}{18}$ e) $\frac{13}{85} - \frac{11}{17}$

c) $\frac{25}{27} - \frac{10}{21}$ f) $\frac{17}{70} - \frac{11}{35}$

Kontrolli saadud tulemuste õigsust, teostades tehted harilike murdudega ning teisendades vahe kümnendmurruks.

528. Kahe ligikaudse arvu summa on 120,4. Üks liidetavatest on 50,98. Leia teine liidetav.

529. Auto, sõites kiirusega 68,7 km tunnis, möödub teisest samas suunas sõitvast autost, mille kiirus on 49 km tunnis. Kui kaugel olid need autod teineteisest üks tund enne kohtumist?

530. Sulatati 64,85 kg vaske, 32,755 kg tsinki ja 2,1 kg tina. Metalli kadu sulatamisel oli 2215 g. Leia saadud sulami kaal.

531. Linnas *A* on ligikaudu 175 000 elanikku, linnas *B* aga 89 500 elanikku. Kui palju on linnas *A* elanikke enam?

532. Sovhoosi metsas kasvas ligikaudu 5200 puud. Aasta jooksul raiuti maha ligikaudu 860 puud. Mitu puud on veel sovhoosi metsas?

533. Kütteladu sai 15 500 m^3 puid. Sellest on laos järel 210 m^3. Kui palju puid on müüdud?

534. Pudel koos petrooleumiga kaalub 1,42 kg, pudel kaalub 0,543 kg. Kui palju kaalub pudelis olev petrooleum?

535. Korteri põrandapindala on 79,43 m^2, sellest on ahjude all 5,325 m^2. Kui palju on vaba põrandapinda?

536. Mensuuris on 62,0 cm^3 vett. Mensuuri lasti tinatükk, mille järel veepind tõusis 94,35 cm^3-ni. Kui suur on tinatüki ruumala?

537. Kauba brutokaal on 1,23 t, taarakaal 0,150 t. Kui palju kaalub kaup?

538. Leia järgmised vahed, kui üks arvudest on ligikaudne ja teine täpne arv (täpne arv on antud jämedas kirjas):

a) 0,96 − **0,5**; b) **3,2** − 0,12; c) **3,27** − 0,2;

d) 8,065 − **0,0035**.

M ä r k u s. *Täpset arvu vahe ümardamisel ei arvestata (vt. ül. nr.* 504).

LIGIKAUDSETE ARVUDE KORRUTAMINE

539. *Arvutame korrutise* 7 · 0,052, *milles esimene tegur on täpne ja teine ligikaudne arv, ning küsime, missuguse järguni tuleb tulemus ümardada.*

Korrutades antud arvud, saame

$$7 \cdot 0{,}052 = 0{,}364.$$

Et teise teguri vea ülemmäär on 0,0005, *siis võib arvutatud korrutis õigest tulemusest erineda juba kuni*

$$7 \cdot 0{,}0005 = 0{,}0035$$

võrra. Seega ei ole arvutatud korrutise viimasel järgunumbril 4 *mingit mõtet ja me ümardame korrutise sajandikeni:*

$$7 \cdot 0{,}052 = 0{,}364 \approx 0{,}36$$

540. *Eelmises ülesandes toodud näite eeskujul saaksime:*

$$\mathbf{70} \cdot 0{,}052 = 3{,}6;$$
$$\mathbf{0{,}7} \cdot 0{,}052 = 0{,}036;$$
$$7 \cdot 0{,}0052 = 0{,}036;$$
$$\mathbf{0{,}07} \cdot 5200 = 360.$$

Selleks et sõnastada siit silmanähtavat ümardamisreeglit, jätame nii ligikaudses teguris (0,052; 0,0052; 5200) *kui ka korrutises* (0,36; 3,6; 0,036; 360) *koma ja nullid arvu kirjutise alguses ja lõpus ära ning vaatleme siis saadud numbrite rühmi* 52 *ja* 36. *Esimest numbrite rühma* (52) *nimetatakse teguri* **tüveks** *ja teist* (36) *korrutise* **tüveks.** *Arvu tüves esinevad numbrid on arvu* **tüvenumbrid.**

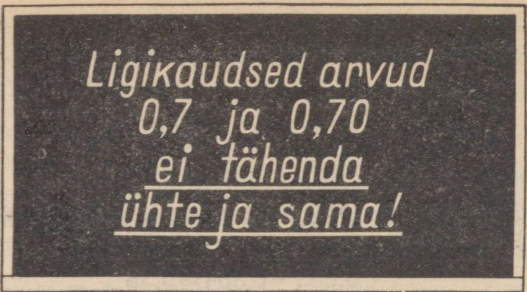
Ligikaudse täisarvu tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui arvu lõpus olevad nullid ära jätame.
Ligikaudse kümnendmurru tüveks nimetatakse seda arvu, mille saame, kui koma ja arvu alguses olevad nullid ära jätame.

Erandina kuulub 0 *täisarvu lõpus mõnikord tüvenumbrite hulka* (*vt. üles.* 542).

N ä i t e i d.

a) 5200, *tüvi* 52;
b) 360, *tüvi* 36;
c) 0,07, *tüvi* 7;
d) 0,070, *tüvi* 70.

Nagu näeme, on eespool saadud korrutistes niisama palju tüvenumbreid, kui palju neid on ligikaudses teguris.



Joon. 85.

Seega

täpse arvu ja ligikaudse arvu korrutis tuleb ümardada nii, et korrutises oleks niisama palju tüvenumbreid, kui palju on neid ligikaudses teguris.

541. Kirjuta järgmiste ligikaudsete arvude tüved:

250; 7500; 0,07; 1,005; 0,070; 0,3009; 3,090.

Märkus. *Kümnendmurru lõpus olevad nullid kuuluvad tüvenumbrite hulka.*

542. *Nullidega lõppev ligikaudne täisarv, mille kohta me ei tea, millise järguni ta ümardati, loetakse ümardatuks selle madalaima järguni, milles esineb veel nullist erinev number.*

Näiteks loetakse ligikaudne arv 2400 *ümardatuks sajalisteni, ligikaudne arv* 10 030 *ümardatuks kümnelisteni, ligikaudne arv* 13 000 *ümardatuks tuhandelisteni jne.*

Nullid selliste ligikaudsete täisarvude lõpus tema tüvenumbrite hulka ei kuulu.

Kui aga on teada, missuguse järguni nullidega lõppev ligikaudne täisarv on ümardatud, ja kui selles järgus, milleni arv ümardati (*võib olla ka kõrgemates järkudes*), *leidub nulle, siis kuuluvad need nullid tüvenumbrite hulka.*

Näide:

2501 ≈ 2500 (*ümardatud kümnelisteni*) → 3 *tüvenumbrit* (2,5,0).
Arv ümardati kümnelisteni. Selles järgus asub null. See null kuulub tüvenumbrite hulka.

2500,3 $\approx$ 2500 (*ümardatud ühelisteni*) $\rightarrow$ 4 *tüvenumbrit* (2,5,0,0). Nullid, mis asuvad selles järgus, milleni arv ümardati, ja sellest kõrgemates järkudes, kuuluvad tüvenumbrite hulka.

250 300 $\approx$ 250 000 $\rightarrow$ 3 tüvenumbrit. Missuguse järguni see arv ümardati? Miks kuulub esimene null tüvenumbrite hulka, kolm viimast aga mitte?

Tüvenumbrite hulka kuuluvad nullid ligikaudses täisarvus märgime edaspidi, kus see teisiti pole selge, väikese kriipsukesega nulli alla. Näiteks: 17$\underline{0}$0 arv on ümardatud kümnelisteni, järelikult on selles arvus 3 tüvenumbrit.

543. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes:

12 $\underline{0}$00; 12 $\underline{00}$0; 12 000; 12 $\underline{000}$?

544. Mitu tüvenumbrit on järgmistes ligikaudsetes arvudes: 24; 356; 502; 7004; 20 604; 250; 3100; 2050; 302 4$\underline{0}$0; 5 003 $\underline{00}$0?

545. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises, kümnelisteni ümardatud ligikaudses arvus: 230; 480; 1040; 20 050; 11 700?

546. Mitu tüvenumbrit on igas järgmises ligikaudses arvus: 8,5; 0,42; 0,703; 6,05; 1,003; 201,03; 0,03; 0,004; 2,60; 8,240; 8,040; 0,070; 0,2080; 0,300; 2,500; 603,100; 2004,50; 9800; 83 000; 75 0$\underline{00}$; 8500; 49$\underline{0}$; 300 2$\underline{0}$0; 101$\underline{0}$?

547. Missugune erinevus on kirjutustel: «temperatuur on 37°» ja «temperatuur on 37,0°»?

548. Arvuta võrdkülgse kolmnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkuse mõõtmisel saadi 0,73 m.

549. Arvuta ruudu ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 5,8 dm.

550. Arvuta korrapärase kuusnurga ümbermõõt, kui tema külje pikkus on ligikaudu 13,6 cm.

551. Arvuta järgmised korrutised, kui esimene tegur on täpne arv ja teine ligikaudne arv.

a) **8** · 0,0042; c) **98** · 1,37; e) **59** · 0,20;
b) **12** · 0,751; d) **60** · 0,68; f) **75** · 9800.

Näide. $\mathbf{31} \cdot 0{,}60 = 18{,}60 \approx 19$;
$\mathbf{22} \cdot 970 = 21\,340 \approx 21\,000$.

552. *Klassi pikkus on* 11,3 *m ja laius* 8,4 *m. Kui suur on klassi põranda pindala?*

Pindala leidmiseks tuleb pikkust ja laiust väljendavad arvud korrutada:

$$\begin{array}{r} \times \; 11{,}3 \\ 8{,}4 \\ \hline 452 \\ 904 \\ \hline 94{,}92 \end{array}$$

Klassi pikkust ja laiust väljendavad arvud on ligikaudsed (miks?), mistõttu korrutis tuleb ümardada. Küsime, missuguse järguni tuleb seda teha?

Antud arvude alamtõkked on 11,25 *ja* 8,35, *ülemtõkked on* 11,35 *ja* 8,45.

Korrutis omandab väikseima väärtuse, kui tegurid on võimalikult väiksed. Leiame korrutise alamtõkke, korrutades tegurite alamtõkked:

$$\begin{array}{r} \times \; 11{,}25 \\ 8{,}35 \\ \hline 5625 \\ 3375 \\ 9000 \\ \hline 93{,}9375 \end{array}$$

Nüüd korrutame tegurite ülemtõkked, et leida korrutise ülemtõke.

$$\begin{array}{r} \times \; 11{,}35 \\ 8{,}45 \\ \hline 5675 \\ 4540 \\ 9080 \\ \hline 95{,}9075 \end{array}$$

Kõrvutame nüüd kõik kolm korrutist.

Antud arvude korrutis: 94,92
Alamtõkete korrutis: 93,9375
Ülemtõkete korrutis: 95,9075

Igas korrutises on kümneliste arv üks ja sama (9). *Üheliste arv aga on juba erinev:* 4, 3, 5. *Järelikult tuleb korrutis ümardada ühelisteni. Seega* 94,92≈95.

Mitu tüvenumbrit on esimeses teguris? teises teguris? Mitu tüvenumbrit on korrutises?

Millise järelduse võid teha?

Kahe ligikaudse arvu korrutist tuleb ümardada nii, et korrutises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on vähima tüvenumbrite arvuga teguris.

553. Määra arvutamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale järgmiste ligikaudsete arvude korrutistes:

a) 7 · 3,587; d) 121 · 1,0042; g) 0,57 · 0,305;
b) 22 · 5,87; e) 1308 · 0,00561; h) 5,8 · 0,001;
c) 1,008 · 81; f) 44 · 0,207; i) 0,3 · 7,84.

554. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude korrutised vastavalt korrutise ümardamise eeskirjale:

a) 0,8 · 16,9=13,52≈... d) 366 · 90=32 940≈...
b) 7,2 · 0,09=0,648≈... e) 0,79 · 6,41=5,0639≈...
c) 24,0 · 481=11544≈... f) 0,03 · 0,07=0,0021≈...

555. Arvuta kolmnurkse maatüki pindala, kui maatüki üks külg on 46 m ja vastastipu kaugus sellest küljest on 37 m.

556. Arvuta ligikaudsete arvude

3,8 · 12,456

korrutis kahel viisil: 1) korrutades tegurid antud kujul; 2) ümardades enne korrutamist suurema tüvenumbrite arvuga tegurit nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga teguris.

Ümarda tulemused korrutise ümardamise reegli kohaselt ja võrdle tulemusi. Missuguse järelduse võid teha?
Rakenda seda arvutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude korrutamisel.

557. Leia järgmiste ligikaudsete arvude korrutised:

1) $15 \cdot 2{,}34$	2) $15{,}2 \cdot 0{,}03$	3) $17{,}007 \cdot 4{,}08$
$1{,}6 \cdot 0{,}25$	$0{,}07 \cdot 15{,}25$	$5{,}08 \cdot 0{,}0149$
$7{,}5 \cdot 0{,}014$	$0{,}156 \cdot 1{,}7$	$6{,}8 \cdot 0{,}93$
$1{,}01 \cdot 2{,}04$	$16{,}15 \cdot 0{,}08$	$0{,}991 \cdot 0{,}89$
$0{,}09 \cdot 3{,}07$	$23 \cdot 4{,}08$	$6{,}07 \cdot 0{,}305$

558. Leia ristkülikukujulise maatüki pindala, kui maatüki pikkus on 1,72 km ja laius 0,34 km.

559. Laoplatsile veeti 16 250 m^3 tammepalke. Arvuta palkide kaal, kui üks kuupmeeter palke kaalub 0,85 tonni.

560. Kui palju kaalub 17,5 m^3 kivisütt, kui 1 m^3 kivisütt kaalub 1,3 tonni?

561. Leia korrapärase kuusnurga ümbermõõt, kui kuusnurga külje pikkuseks saadi mõõtmisel 12,24 m.
Mitu tüvenumbrit tuleb võtta siin korrutises? Miks?

562. Teosta järgmised korrutamised (üks tegureist on ligikaudne arv; teine — täpne arv, mis on trükitud jämedas kirjas).

1) $\mathbf{8} \cdot 6{,}57$;	3) $0{,}283 \cdot \mathbf{734}$;	5) $\mathbf{90} \cdot 375$;
2) $0{,}85 \cdot \mathbf{375}$;	4) $\mathbf{70} \cdot 4{,}8$;	6) $\mathbf{7} \cdot 12{,}8$.

563. Leia korrutised:

1) $5\frac{1}{9} \cdot 2\frac{4}{7}$; 2) $\frac{8}{11} \cdot \frac{11}{18}$ ja 3) $5\frac{1}{2} \cdot 8\frac{1}{11}$

kahel viisil: a) teisenda iga harilik murd kümnendmurruks ning ümarda tulemust; b) leia korrutis harilike murdude korrutamise teel ning teisenda tulemus kümnendmurruks.

Harilike murdude teisendamisel kümnendmurruks ümarda arvud esimeses ülesandes kümnendikeni, teises sajandikeni ja kolmandas tuhandikeni.

Võrdle mõlemal teel saadud korrutisi.

564. Kolhoosniku perekond töötas aasta jooksul välja 731 normipäeva. Kui palju teravilja sai see perekond, kui iga normipäeva kohta arvestati 8,2 kg?

565. Sovhoosis on nisu all 1250 ha. Kui palju nisu saab sovhoos, kui loodetav saak on 18,5 ts hektarilt?

566. Tööliste brigaad töötas maantee parandamisel 132 tundi, korrastades keskmiselt 24 m maanteed tunnis. Mitu meetrit maanteed parandas see brigaad?

567. Põranda värvimiseks kulub 0,142 kg värvi ruutmeetrile. Kui palju värvi on vaja 43 m^2 suuruse põranda värvimiseks?

568. Leia 18,5 m^3 kivisöe kaal, kui 1 m^3 kivisütt kaalub 1,3 t.

569. Kui palju kaalub 12,87 m pikkune raudtala, mille jooksva meetri kaal on 60,4 kg?

570. Arvuta oma klassi põranda pindala.

571. Arvuta oma toa põranda pindala.

572. Veoauto koormasse mahub 1600 kg turvast. Kui palju turvast tuuakse kohale 19 koormaga?

573. Kaupluses oli 23 tükki vahariiet, igas tükis 23,0 m. Kui palju vahariiet oli selles kaupluses kokku?

574. Kui palju kaaluvad 36 kaubavagunit, kui ühe vaguni keskmine kaal koos kaubaga on 23,76 t?

575. Katusepleki tahvel kaalub 4,52 kg. Kui palju kaalub 50 sellist tahvlit?

576. Kahe punkti vaheline kaugus plaanil on 8,3 cm. Leia nende punktide vaheline tõeline kaugus, kui plaani mõõt on 1 : 250.

577. Maatüki pindala plaani järgi on 3,3 cm^2. Leia selle maatüki tõeline pindala, kui 1 cm plaanil kujutab 50 m.

578. Pudel kaalub 0,0475 kg. Kui palju kaaluvad 120 sellist pudelit?

LIGIKAUDSETE ARVUDE JAGAMINE.

579. *Olgu vaja jagada ligikaudne arv 72,4 ligikaudse arvuga 0,13.*

$$72{,}4:0{,}13=7240:13=556{,}923\ldots$$

$$\begin{array}{l} 74 \\ \;\;90 \\ \;\;120 \\ \;\;\;\;30 \\ \;\;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\;\;1 \end{array}$$

Kuna siin jagamine nähtavasti ei lõpe, siis on väga oluline teada, kui kaugele jagamist jätkata.

Küsimusele vastamiseks leiame otsitava jagatise alam- ja ülemtõkke.

Jagatis omandab väikseima väärtuse siis, kui jagatav on võimalikult väike ja jagaja võimalikult suur. Seetõttu jagatise alamtõkkeks on jagatava alamtõkke ja jagaja ülemtõkke jagatis:

$$72{,}35:0{,}135=535{,}9\ldots$$

Jagatise ülemtõkkeks on jagatava ülemtõkke ja jagaja alamtõkke jagatis:

$$72{,}45:0{,}125=579{,}6.$$

Võrdleme nüüd antud ligikaudsete arvude jagatist tema alam- ja ülemtõkkega.

Ligikaudsete arvude jagatis:	556,923 . . .
Jagatise alamtõke:	535,9 . . .
Jagatise ülemtõke:	579,6.

Näeme, et jagatistes on ühesugused ainult sajaliste numbrid (5). *Kümneliste number on igas jagatises juba isesugune:* 5, 3, 7. *Seega tuleb jagatis ümardada kümnelisteni:*

$$72{,}4:0{,}13=556{,}923\ldots\approx 560.$$

Mitu tüvenumbrit on jagatavas? Mitu jagajas? Mitme tüvenumbriga saime jagatise?

580. *Eeltoodud näide kinnitab, et ligikaudsete arvude jagatise ümardamisel kehtib sama reegel, mis nende arvude korrutise ümardamiselgi:*

ligikaudsete arvude jagatis tuleb ümardada nii, et jagatises oleks nii mitu tüvenumbrit, kui mitu neid on väiksema tüvenumbrite arvuga andmes.

581. Kontrolli selle reegli õigsust, jagades eelmise näite eeskujul arvu 4,3 arvuga 5,73, siis esimese arvu alamtõkke teise arvu ülemtõkkega ja lõpuks esimese arvu ülemtõkke teise arvu alamtõkkega. Mitu kohta tuleb jagatises säilitada?

582. Määra ilma jagamist teostamata, mitu tüvenumbrit saame vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale järgmistes ligikaudsete arvude jagatistes:

a) $75:8$;	d) $9{,}6:0{,}08$;	g) $55{,}23:14$;
b) $6{,}18:0{,}0013$;	e) $0{,}3825:0{,}581$;	h) $628{,}125:33{,}5$;
c) $90{,}3062:30{,}1$;	f) $1{,}33:0{,}6$;	i) $4{,}75:6$.

583. Ümarda järgmised ligikaudsete arvude jagatised vastavalt jagatise ümardamise eeskirjale.

a) $135:1{,}9=71{,}05\ldots\approx\ldots$	d) $72{,}5:11=6{,}59\ldots\approx\ldots$
b) $143{,}8:0{,}15=958{,}6\ldots\approx\ldots$	e) $57{,}3:0{,}13=440{,}7\ldots\approx\ldots$
c) $8{,}5:9=0{,}944\ldots\approx\ldots$	f) $0{,}2:65=0{,}0307\ldots\approx\ldots$

584. Arvuta ligikaudsete arvude jagatis

$$3{,}6918:0{,}18$$

kahel viisil: 1) teostades jagamise arvudega antud kujul, 2) ümardades enne jagamist suurema tüvenumbrite arvuga arvu nii, et selles oleks üks tüvenumber enam (varunumber) kui väiksema tüvenumbrite arvuga antud arvus.

Ümarda saadud jagatised jagatise ümardamise reegli kohaselt ja võrdle tulemusi.

Missuguse järelduse võid sellest teha?

Rakenda seda arvutamist kergendavat võtet ligikaudsete arvude jagamisel.

585. Leia järgmised ligikaudsete arvude jagatised:

1) 15,56 : 6,7	2) 4,28 : 0,7	3) 822 : 76	4) 72,4 : 0,13
18,63 : 0,8	4,8 : 0,284	8 : 34	0,12 : 37,8
32,4 : 23,3	0,036 : 2,7	384 : 287	341,3 : 12
382,6 : 36,8	7,8 : 3,62	362 : 236	5 : 22,5

586. Ristküliku pindala on 15,12 cm^2. Ristküliku ühe külje pikkus on 3,6 cm. Leia teise külje pikkus.

587. Toa põranda pindala on 69,2 m^2. Kui suur peab olema selle toa kõrgus, et toas oleks 250 m^3 õhku?

588. Ristkülikukujuliselt põllult, mille pindala on 54 ha, saadi 834 ts nisu. Kui suur on keskmine nisusaak hektarilt?

589. *32,7 m pikkune traat on vaja jaotada 16 võrdseks tükiks. Leia iga tüki pikkus.*

Siin arv 32,7 m on ligikaudne arv, 16 aga täpne arv. Kuna 16 = 16,0 = 16,00 = 16,000 jne., s. t. täpsel arvul võime kujutleda ükskõik kui mitu tüvenumbrit, siis määratakse jagatise tüvenumbrite arv ligikaudse andme tüvenumbrite arvu järgi.

$$32{,}7\ m : 16 = 2{,}044\ m \approx 2{,}04\ m.$$

590. Teosta järgmised jagamised, kus üks arvudest on täpne arv (trükitud jämeda kirjaga).

1) 2,6 : **165**	2) **573** : 4,3	3) 900 : **96**	4) 1,05 : **12**
27 : 2,37	435 : **13**	37,4 : **19**	**0,1** : 26
23,45 : **3**	0,81 : 8	**72** : 0,13	**12** : 37,8

591. Kahe linna vahemaa on 955 km. Mitme tunniga läbib selle vahemaa rong, kui selle keskmine kiirus on 52 km tunnis?

592. 83 ha suuruselt maa-alalt saadi 1430 t kartuleid. Kui suur on keskmine kartulisaak hektarilt?

593. Mitu vagunit on vaja 7500 t kauba veoks, kui kasutada 17 t kandejõuga vaguneid?

594. Ristkülikukujulise maatüki pindala on 19,45 ha. Selle maatüki laius on 230 m. Leia maatüki pikkus.

595. 1442 km raudteeliini ehitamine maksis 17 900 000 rubla. Leia raudtee ühe kilomeetri ehitamise hind.

596. Sovhoos eraldas 250 ha suuruse põllu väetamiseks 63,45 t mineraalväetist. Kui palju mineraalväetist tuleb külvata 1 hektarile?

597. Kolhoosnik sai töö eest 1342 kg teravilja. Mitu normipäeva töötas see kolhoosnik, kui iga normipäeva kohta arvestati 5,61 kg teravilja?

598. Rull traati kaalub 38,54 kg. Mitu meetrit traati on selles rullis, kui 1 m traati kaalub 0,528 kg?

599. Kui suur on tsemenditünni ruumala, kui tünn mahutab 0,106 t tsementi, 1 m^3 tsementi kaalub aga 1,4 t?

600. Naftaveo tsistern mahutab 38,8 t naftat. Mitu sellist tsisterni on vaja 2138 t nafta veoks?

601. 1 cm^3 pliid kaalub 11,3 g, 1 cm^3 tina aga 7,3 g. Mitu korda on plii tinast raskem?

602. Klassi ruumala on 235,34 m^3. Klassi põranda pindala on 48,3 m^2. Leia klassi kõrgus.

603. Heli levimiskiirus õhus on 333,3 m sekundis. Kui kaua aja pärast on kuulda müristamist, kui välku lõi 8690 m kaugusel?

604. 94-st võrdse pikkusega veetorust saadi 762 m pikkune torustik. Kui pikk on iga toru?

605. Koolimaja ruumala on 24 986 m^3. Selles koolis õpib ligikaudu 1100 õpilast. Mitu kuupmeetrit ehituse mahust tuleb iga õpilase kohta?

606. 25 ühesugust polti kaaluvad 7,82 kg. Kui raske on iga polt?

607. 50 ühesugust raamatut kaaluvad 21,32 kg. Kui raske on iga raamat?

608. *Lahendades ülesandeid, kus otsitava arvu leidmiseks on vaja sooritada mitu tehet, lisanduvad andmete vigadest tingitud vigadele veel vahepealsete tehete tulemuste ümardamisest tingitud vead.*

Olgu vaja näiteks leida korrutiste summa

$$x=3{,}6 \cdot 2{,}18+1{,}8 \cdot 3{,}74+2{,}4 \cdot 4{,}06+0{,}90 \cdot 8{,}61.$$

Arvutades vahepealseid tulemusi ümardamata, saame:

1) $3{,}6 \cdot 2{,}18=7{,}848;$
2) $1{,}8 \cdot 3{,}74=6{,}732;$
3) $2{,}4 \cdot 4{,}06=9{,}744;$
4) $0{,}90 \cdot 8{,}61=7{,}749;$

5)
$$\begin{array}{r} 7{,}848 \\ 6{,}732 \\ 9{,}744 \\ 7{,}749 \\ \hline 32{,}073 \approx 32{,}1. \end{array}$$

Ümardades aga iga vahepealse tehte tulemuse vastavalt reeglile, saame:

$$7{,}8+6{,}7+9{,}7+7{,}7=31{,}9.$$

Saadud tulemus erineb märgatavalt esimesest tulemusest (32,1).

Märgitud puudust saame vältida, kui ümardame vahepealsete tehete tulemused mitte selle järguni või tüvenumbrite arvuni, mida näevad ette tehete tulemuste ümardamise reeglid, vaid **võtame igas vahepealses tulemuses ühe järgu või tüvenumbri rohkem.** *Sellise* **varunumbri** *säilitame kuni* **lõpptulemuse** *saamiseni, siis jätame selle ära, lõpptulemust vastavalt ümardades.*

Arvutame eelmise ülesande tulemuse ühte varunumbrit kasutades:

$$\begin{array}{r} 7{,}85 \\ 6{,}73 \\ 9{,}74 \\ 7{,}75 \\ \hline 32{,}07 \approx 32{,}1. \end{array}$$

Saime täpselt sama tulemuse, mis ümardamata andmetega arvutades.

Seega enama kui ühetehtelise ülesande lahendamisel rakendame järgmist juhist:

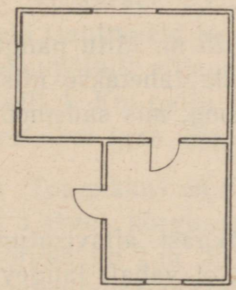
vahepealsete tulemuste arvutamisel säilitame ühe varunumbri. Lõpptulemuses jätame selle varunumbri ära, tulemust vastavalt ümardades.

609. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks kahe kohaga murdosas (viimane koht annab varunumbri).

a) $\dfrac{3\frac{5}{6}+1\frac{4}{9}-2\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}$; b) $\dfrac{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$.

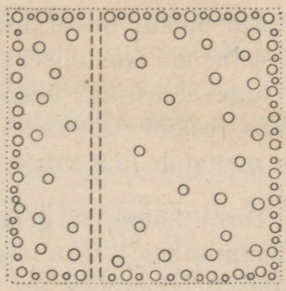
610. Kui palju kaalub kuusepuust palk, mille ristlõige on ristkülik mõõtmetega 168 mm$\times$113 mm, palgi pikkus aga 4,29 m ja kui 1 dm^3 kuusepuud kaalub 0,5 kg?

611. Kui palju tuleb maksta plaanil (joon. 86) näidatud kahe toa põranda värvimise eest, kui 1 m^2 värvimine maksab 0,19 rubla?



Mõõt 1:250

Joon. 86.



Joon. 87.

612. Leia suhkrupeedi saak ristkülikukujuliselt põllult, mille pikkus plaanil (mõõdusuhe 1 : 10 000) on 2,5 cm ja laius 1,2 cm, kui suhkrupeedi saak hektarilt on 550 ts.

613. Ruudukujulist metsalanki (joon. 87) läbib tee, mis jaotab selle langi kaheks mittevõrdseks osaks. Langi üks osa on teisest 526,5 a võrra suurem. Kui see tee oleks aetud 40,5 m võrra paremale, siis oleks ta langi poolitanud.

Kui suur on selle metsalangi pindala?

614. Tühi klaaskolb kaalub 24,8 g, veega täidetult 74,6 g, petrooleumiga täidetult aga 64,9 g. Arvuta nende andmete põhjal, kui palju kaalub 1 cm^3 petrooleumi.

615. Ristkülikukujuline tükk plekki kaalub 149,3 g. Selle plekitüki pikkus on 32,3 cm ja laius 12,7 cm. Mõõtmisel saadi selle plekitüki paksuseks $\frac{1}{2}$ mm. Leia plekitüki paksus arvutamise teel ja võrdle seda mõõtmise tulemusega, kui raua erikaal on 7,8.

616. Ristkülikukujuline vaskplaat kaeti ühelt küljelt niklikorraga. Enne nikeldamist kaalus see plaat 48,7 g, pärast nikeldamist aga 49,5 g. Plaadi pikkus on 11,3 cm ja laius 6,5 cm. Nikli erikaal on 8,9. Leia niklikihi paksus.

617. Vundamendikaevise pikkus on 7,3 m, laius 5,5 m ja sügavus 3,5 m. Mitu autokoormat mulda tuleb sealt ära vedada, kui on teada, et 1 m^3 mulda kaalub 2,13 t ja auto kandejõud on 2,5 tonni?

618. Aia pikkus on 67,5 m ja laius 56,25 m. Mitu pange vett on vaja selle aia kastmiseks, kui maapinda tahetakse niisutada niisama tugevasti, nagu seda tegi vihmahoog, mis sadememõõtja järgi andis veekihi paksuseks 5,25 mm?

Pang mahutab 12,3 liitrit vett.

619. Torni kõige kõrgemal asuvast aknast allavisatud kivi jõudis maapinnani 4 sekundiga. On teada, et vabalt langev keha läbib esimese sekundiga 4,9 m ja iga järgmise sekundiga 9,8 m võrra rohkem kui eelmises sekundis.

Leia selle torni kõrgus, kui torni tipuni on viimasest aknast veel 4 m.

620. Teosta tehted ligikaudsete arvudega:

a) $(2500+46{,}12-11\,220:38):8$;

b) $\mathbf{0{,}28}:(0{,}64\cdot 0{,}843+0{,}78\cdot 0{,}8-26{,}078:32{,}6)$;

c) $(2{,}17\cdot 4{,}3+3{,}07:0{,}3-7{,}8\cdot 1{,}2)\cdot \mathbf{0{,}8}$;

d) 3,58 : 12 − 0,28) · 8 + 0,028;

e) (5,05 : 200) · **63** − 0,4725.

Märkus. *Jämedas kirjas on antud täpsed arvud.*

621. Leia järgmiste avaldiste ligikaudne väärtus, teisendades harilikud murrud kümnendmurdudeks sajandikeni.

a) $\dfrac{\left(7\frac{5}{6}-6\frac{7}{8}\right)\cdot 13\frac{1}{3}}{3\frac{11}{12}}$; b) $\dfrac{7\frac{1}{3}+8\frac{1}{6}}{5\frac{1}{2}-1\frac{7}{12}}\cdot 10\frac{3}{7}$.

622. Lennuk, mille kiirus on 270 km tunnis, peab lendama punktist A punkti B, mis asub lähtekohast põhja suunas 1250 km kaugusel, ning siis uuesti tagasi punkti A.

a) Leia, kui kaua kestab lend tuulevaikse ilmaga.

b) Kui kaua kestab lend lõunatuule puhul, mis puhub kiirusega 37,5 km tunnis?

623. Risttahukakujulise metallitüki pikkus on 0,14 m, laius 0,4 dm ja paksus 2 cm. See metallitükk kaalub 873,6 g. Teise samast metallist risttahukakujulise metallitüki mõõtmed on 0,09 m×0,8 dm×0,2 dm. Kui palju kaalub teine metallitükk?

624. Viljapeade noppimine pärast lõikust annab täiendavalt miljoneid tsentnereid teravilja. Kooliõpilased korjasid 125 ha suuruselt nisupõllult viljapäid, kusjuures igalt ruutmeetrilt leiti neid keskmiselt 4. Kui palju teravilja saadi õpilaste poolt kogutud viljapeadest, kui igas viljapeas olevate terade kaaluks arvata 1 g?

625. Toa pikkus on 8,4 m, laius 6,5 m ja kõrgus 4 m. Sellel toal on 3 akent, kõrgusega 1,64 m ja laiusega 1,2 m, ja kaks ust, mille kõrgus on 2 m 20 cm ja laius 1 m. Mitu rulli tapeeti on vaja osta selle toa tapeetimiseks, kui tapeedirulli laius on 50 cm ja tapeeti on rullis 12 m, kui kadudeks arvestada 10%?

626. Viljasalve pikkus on 12 m ja laius 8 m. Vilja sügavus salves on 1,5 m. Selleks et teada saada, kui palju kaalub salves olev vili, võeti kast sisemiste mõõtmetega 0,5 m×0,5 m×0,4 m, täideti see ääreni viljaga ning kaaluti. Kastitäis teri kaalus 80 kg. Kui palju kaalub salves olev vili?

627. Katuse katmiseks kasutati ristkülikukujulisi katusekive, mille pikkus oli 25 cm ja laius 17 cm. Katus koosneb kahest ristkülikukujulisest osast, kummagi pikkus on 14 m ja laius 6,25 m. Kui palju kive on vaja selle katuse katmiseks, kui on teada, et katusekivide osaliselt üksteise peale asetamisel katab iga kivi katust 40% ulatuses kivi pindalast.

628. Nõu koos veega kaalus 68,4 kg. Kui sellest nõust kallati ära 78% seal olevast veest, siis kaalus nõu koos ülejäänud veega 28,3 kg. Kui palju kaalub tühi nõu?

629. Tühi nõu kaalub 15,2 g, elavhõbedaga täidetult aga 263 g. Leia selle nõu ruumala, kui on teada, et 1 cm^3 elavhõbedat kaalub 13,6 g.

630. Kolhoosi 42 ha suuruselt nisupõllult saadi 15,2 hektarilt keskmiseks saagiks 20,3 ts hektarilt, ülejäänud osalt 13,1 ts hektarilt. Kui suur oli keskmine nisusaak selle põllu igalt hektarilt?

631. Rong koosneb vedurist koos tendriga, mis kokku kaaluvad 76 t, ja 35-st kaubavagunist. Iga vagun koos kaubaga kaalub keskmiselt 23 t. Rong kulutab 1 km pikkuse tee läbimiseks rongikaalu iga tonni kohta 32 g kivisütt. Kui palju kivisütt peab vedur peale võtma sõiduks Tallinnast Tartusse, mille vahemaa on ümmarguselt 200 km?

632. Metsatukas kasvab 900 puud, neist on 300 männid ja ülejäänud kased. Kogu metsatuka puidu juurdekasv aastas on 2,3 m^3. Iga männi juurdekasv aastas moodustab 0,003 m^3. Arvutada iga kase juurdekasv aastas.

633. Pirita—Kose—Kloostrimetsa võidusõidu ringraja pikkus on 6,7554 km. Sõitja läbis selle 3 minuti 27 sekundiga. Arvuta keskmise kiiruse alamtõke ja ülemtõke. Kas saab uskuda võistluse korraldajate teadet, et sõitja keskmine kiirus oli 117,485 km tunnis?

634. Käsitöötunnis valmistati plekist karp. Selleks kulus 60,0 dm^2 plekki. Pärast kasti valmimist selgus, et selle välispindala oli 52,5 dm^2. Mitu protsenti plekist läks jäätmeteks?

635. Õhk sisaldab ümmarguselt 20% hapnikku ja 80% lämmastikku.

a) Mitu kuupmeetrit hapnikku sisaldab klassituba, mille ruumala on 245 m^3?

b) Kui palju hapnikku leidub toas, mille pikkus on 4,2 m, laius 3,6 m ja kõrgus 2,5 m?

636. Kolhoosil on teravilja all 432,46 ha põldu, sellest nisu all 219,00 ha, rukki all 120,32 ha, odra all 46,30 ha, kaera all 29,21 ha ja herne all 17,63 ha. Mitu protsenti teravilja all olevast maast on iga nimetatud kultuuri all?

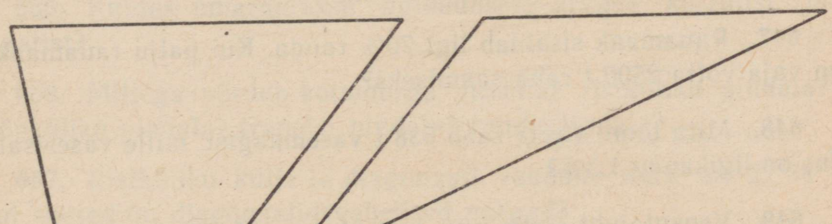
Märkus. *Siin ja ka edaspidi anna protsentide arv täpsusega* 0,1, *kui pole eraldi nõutud teistsugust täpsust.*

637. Meie maja õu on 329 m² ning seejuures 25% suurem naabermaja õuest. Kui suur on naabermaja õu?

638. Kauba taarakaal moodustab 6,3% kauba brutokaalust. Sama kauba netokaal on 75,2 kg. Kui palju kaalub see kaup koos taaraga?

639. a) Mitu protsenti moodustab joonisel 88 kujutatud kolmnurga pindala trapetsi pindalast?

b) Mitu protsenti moodustab joonisel 88 kujutatud trapetsi pindala kolmnurga pindalast?



Joon. 88.

640. Vedel metallisulam tõmbub jahtudes kokku. Terasevalu juures on see vähenemine 6,1%. Milline oli vedela metalli maht, kui jahtunult oli tema ruumala 9,63 dm³?

641. Rukkiteradest saadakse keskmiselt 85% jahu ja 13% kliisid. Kui palju rukkijahu ja kliisid saadi ristkülikukujuliselt põllult koristatud rukkist, kui põllu pikkus on 480 m, laius 126 m ja hektarisaak keskmiselt 22 ts?

642. Suitsutamisel saadi 24,2 kilogrammist lihast 21,6 kg suitsuliha. Kui suur oli kaalukadu protsentides liha suitsutamisel?

643. Umbrohu vastu võitlemiseks kasutati $3\frac{1}{2}$ kg keemilist umbrohutõrjevahendit, mis lahustati 200 l vees. Mitme protsendiline lahus saadi?

Märkus. *Ära unusta, et lahuse kaalu moodustavad siin vee ja kemikaali raskus kokku.*

644. Kartul kaotab laos hoidmisel 8,5% oma kaalust. Mitu tonni kartuleid saadi kevadel laost, kuhu sügisel pandi 240 tonni kartuleid?

645. Pronks on vase ja tina sulam. Kui palju vaske ja tina on vaja võtta 350 kg pronksi valmistamiseks, mis sisaldaks 94% vaske ja 6% tina?

646. Messing on vase ja tsingi sulam, mis sisaldab veel vähesel määral teisigi metalle. Mitu kilogrammi vaske ja mitu kilogrammi tsinki on vaja võtta 120 kg messingi valmistamiseks, mis sisaldaks 69,5% vaske ja 29,5% tsinki?

647. Rauamaak sisaldab ligi 70% rauda. Kui palju rauamaaki on vaja võtta 2500 t raua saamiseks?

648. Mitu tonni vaske saab 538 t vasemaagist, mille vasesisaldus on ligikaudu 1,5%?

649. Veoautojuht sõitis uue veoautoga 135 290 km, siis anti auto kapitaalremonti. Norm nägi ette 80 000 kilomeetri läbimist kapitaalremondita. Mitme protsendi võrra ületas autojuht normi?

650. Sõiduautojuht sõitis oma autoga kapitaalremondita 128 390 km. Norm oli 75 000 km. Mitme protsendi võrra ületas sõiduautojuht plaani?

Kumb autojuht saavutas parema tulemuse (võrdle eelmise ülesandega)?

651. Lauda desinfitseerimiseks on vaja valmistada lahus desinfitseerivast vahendist ja veest. Desinfitseeriva vahendi hulk lahuses peab moodustama 2,5% lahuse üldkogusest (s. o. 2,5-protsendiline lahus). Kui palju desinfitseerivat vahendit on vaja võtta 30 l lahuse jaoks? Kui palju vett on selleks vaja võtta?

652. Piimatööstus arvestab piima vastuvõtmisel selle rasvasisalduseks 3,5%. Kui majanditest toodud piim on sellest erineva rasvasisaldusega, siis leitakse piimakogus 3,5%-lise rasvasisalduse järgi.

Mitu kilogrammi piima arvestatakse kolhoosile, kes piimatööstusse saatis 2250 kg 4,1%-lise rasvasisaldusega piima?

KORDAMISEKS.

653. Kuidas leida ligikaudsete arvude

a) summa ülemtõket? alamtõket?
b) vahe ülemtõket? alamtõket?
c) korrutise ülemtõket? alamtõket?
d) jagatise ülemtõket? alamtõket?

654. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude summat ja vahet?

655. Kuidas ümardatakse ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

656. Millega võrdub kolmnurga pindala? ristküliku pindala? rööpküliku pindala? trapetsi pindala? ruudu pindala?

657. Ristküliku külje ja diagonaali vaheline nurk on 27°34′. Kui suured on diagonaalidevahelised nurgad?

658. Võrdhaarse trapetsi ümbermõõt on 87 m ja haara pikkus on 16,4 m. Kui pikk on trapetsi kesklõik?

659. Leia arvude 120 ja 80 suurim ühistegur ja väikseim ühiskordne.

660. Lihtsusta avaldis

$$\left[\frac{2}{3a}-\frac{2}{a+b}\left(\frac{a+b}{3a}-a-b\right)\right]:\frac{a-b}{a}.$$

661. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right):\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right):\left(1+\frac{b}{a}\right).$$

662. Lihtsusta avaldis

$$\frac{ab}{(a+b)^2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

663. Lihtsusta avaldis

$$\frac{ab}{a^2-2ab+b^2} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

664. Lahuta hulkliige tegureiks.

1) a^3+2a^2+a	2) $2a^3-4a^2+2a$
3) $a^4+2a^3+a^2$	4) a^3+4a^2+4a
5) $a^3+a^2b+ab^2+b^3$	6) a^4+a
7) $ab^2-ac^2-bc^2+b^3$	8) x^4-x
9) $24ax-36ay+14bx-21by$	10) $8ax-12bx-20ay+30by$

665. Arvuta, rakendades valemeid.

1)	82^2	$4{,}1^2$	$6{,}08^2$	$(-1{,}08)^2$	$(6\frac{1}{3})^2$
2)	79^2	$8{,}3^2$	$9{,}98^2$	$(-8{,}97)^2$	$(6\frac{1}{12})^2$
3)	$99 \cdot 101$	$95 \cdot 105$	$89 \cdot 111$	$6{,}5 \cdot 7{,}5$	
4)	$98 \cdot 102$	$91 \cdot 109$	$87 \cdot 113$	$41{,}2 \cdot 38{,}8$	
5)	576^2-424^2	$6{,}57^2-3{,}43^2$	$19{,}86^2-0{,}14^2$		
6)	693^2-307^2	$5{,}35^2-4{,}65^2$	$3{,}75^2-6{,}25^2$		

666. Mis arvu peab liitma avaldisega

$$25x^2+30x,$$

et saada kaksliikme ruut?

667. Mis arvu peab liitma kolmliikmega

$$16x^2+24x-7,$$

et saada kaksliikme ruut?

668. Kui palju kasvab avaldise

$$6{,}25x^2+40x+64$$

väärtus, kui x kasvab 4-st kuni 8-ni?

669. Mitme protsendi võrra muutub avaldise

$$8a^3-36a^2+54a-27$$

väärtus, kui a väärtus kasvab 4-st kuni 5-ni?
Kas avaldise väärtus kasvab või kahaneb?

670. Mitu protsenti moodustab avaldise

$$a^2+b^2$$

väärtus avaldise

$$(a+b)^2$$

väärtusest, kui $a=5$ ja $b=3$? kui $a=10$ ja $b=6$?

7. ÜHE TUNDMATUGA LINEAARSED VÕRRANDID.

SAMASUS.

671. *Teisendame avaldist* $(2x+1)^2-(4x^2+1)$, *avades selles sulud ja koondades sarnased liikmed:*

$$(2x+1)^2-(4x^2+1)=4x^2+4x+1-4x^2-1=4x.$$

Kirjutame võrduse, mille üheks pooleks on antud avaldis ja teiseks pooleks teisendamisel saadud avaldis:

$$(2x+1)^2-(4x^2+1)=4x.$$

Kui selle võrduse mõlemal poolel asendada täht x mistahes vabalt võetud väärtusega ja arvutada võrduse poolte väärtused, siis selgub, et need on võrdsed. Näiteks, kui x asendada arvuga 3, siis võrduse vasaku poole väärtus

$$v=(2\cdot 3+1)^2-(4\cdot 3^2+1)=7^2-37=49-37=12$$

ja parema poole väärtus

$$p=4\cdot 3=12,$$

seega $v=p$. *Selles ei ole midagi üllatavat, sest sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on teisendused, mille puhul avaldise väärtus ei muutu.*

Teisendust, mille puhul avaldise väärtus ei muutu, nimetatakse samasusteisenduseks.

Sulgude avamine ja sarnaste liikmete koondamine on seega samasusteisendused.

672. Otsusta iga allpool nimetatud teisenduse kohta, kas see on samasusteisendus või mitte. Kui teisendus ei ole samasusteisendus, siis otsusta, kuidas avaldise väärtus nimetatud teisendusel muutub.

1) Hulkliikme liikmete ühise teguri toomine sulgude ette.

2) Avaldise jagamine 3-ga, näiteks üleminek avaldiselt $3a+6$ avaldisele $a+2$.

3) Kahe arvu summa ja vahe korrutise asendamine nende arvude ruutude vahega.

4) Murru laiendamine.

5) Murdude liitmise reegli rakendamine.

6) Murru korrutamine 4-ga, näiteks üleminek murrult $\frac{a}{8}$ murrule $\frac{a}{2}$.

7) Murde sisaldava avaldise korrutamine nende murdude ühise nimetajaga.

8) Hulkliikme lahutamine tegureiks.

9) Hariliku murru teisendamine kümnendmurruks.

673. Võrdust, mille ühest poolest saab samasusteisenduste abil teise poole, nimetatakse samasuseks. Samasuses võib tähe asendada vabalt võetud arvuga, ilma et võrdus kaotaks kehtivust.

Näiteks järgmised võrdused on samasused:

1) $(2a-b)^2=4a^2-4ab+b^2$;

2) $3x-\frac{1-x}{2}=\frac{7x-1}{2}$;

3) $1-9a^4=(1+3a^2)(1-3a^2)$;

4) $0{,}75-\frac{1}{4}=0{,}5$.

Nimeta iga võrduse puhul need teisendused, mille abil saab võrduse ühest poolest teise.

M ä r k u s. *Samasuse tähiseks on* $\equiv$, *kuid seda sümbolit kasutatakse ainult siis, kui soovitakse eriti rõhutada, et tegemist on samasusega. Niisugusel juhtumil tuleks näiteks kirjutada, et*

$$(a-2)^2-4\equiv a^2-4a+4-4\equiv a^2-4a\equiv a(a-4).$$

Kui samasust pole vaja eriti rõhutada, siis kasutatakse samasuse märkimiseks harilikku võrdusmärki $=$. *Nii võib ülalantud samasust kirjutada ka kujul*

$$(a-2)^2-4=a^2-4a+4-4=a^2-4a=a(a-4).$$

674. Tõesta, et järgmised võrdused on samasused.

1) $\frac{a}{2}(4x-1)-\frac{a}{3}(6x-2)=\frac{a}{6}$

2) $3mn-2m-12+18n=(3n-2)(m+6)$

3) $6x^2-5x-4=(3x-4)(2x+1)$

4) $(m^2+2mn+n^2)(m^2-2mn+n^2)=(m^2-n^2)^2$

5) $(3-1:\frac{2}{3}):(4-1:1\frac{1}{3})=\frac{6}{13}$

Näpunäide. *Tõestuseks näita, et võrduse ühest poolest (ükskõik kummast) saab samasusteisenduste teel teise poole.*

675. *Kas antud võrdus on samasus või mitte, seda saab otsustada ka* proovimise *teel. Selleks asenda võrduses esinev täht (või tähed, kui neid on mitu) mõnede vabalt võetud arvudega ja kontrolli arvutamise teel, kas võrdus jääb kehtima või mitte.*

Mida võib öelda võrduse kohta, mis ei jää kehtima tähe asendamisel mingi arvuga?

Kontrolli proovimise teel, kas järgnevad võrdused on samasused või mitte:

1) $(3+a)^2-(3-a)^2=12a$

2) $(1-a)^2-(a-1)^2=0$

3) $4(a-1)=0$

4) $a^2=3a-2$

5) $a^2-b^2=b^2-a^2$

676. Näita arvutamise teel, et

1) võrdus $2a^2-3a=3a$ on õige, kui $a=3$;

2) võrdus $6+\frac{2a}{2-a}+\frac{4}{a-2}=4$ on õige, kui $a=1$;

3) võrdus $5x+8=x$ on õige, kui $x=-2$;

4) võrdus $6x-2(3x-1)-2=0$ on õige, kui $x=0$.

Näita nüüd proovimise teel, et mõned nendest võrdustest ei ole samasused. Missugused nimelt?

Iga võrdus ei ole samasus.

677. Koosta iga järgneva lause põhjal võrdus ja otsusta, kas saadud võrdus on samasus või mitte.

1) Arv $5a$ on $3a$ võrra suurem kui $2a$.

2) Arv $7m$ on 6 võrra väiksem kui $10m$.

3) Arv x on 4 võrra väiksem kui 12.

4) Arv x on 4 korda väiksem kui arv y.

5) Arvude a ja 3 jagatis võrdub poolega nende arvude summast.

6) Arvude x ja 4 ruutude vahe on 16 võrra väiksem arvu x ruudust.

7) Arvude x ja 1 summa ruut on $2x$ võrra suurem samade arvude ruutude summast.

VÕRRANDI LAHENDID.

678. Mida nimetatakse võrrandiks? Kasutades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, lahenda peast järgmised võrrandid.

a) $x+4=11$	b) $x+7=2$	c) $x+1=7$	d) $x+5=3$
$y-2=7$	$y-3=0$	$y-2=10$	$y-6=-4$
$6-z=1$	$2-z=3$	$15-z=9$	$74-z=80$
$5u=0,1$	$3u=7$	$5u=-1$	$-3u=\frac{1}{3}$
$21:v=7$	$4:v=0,5$	$15:v=3$	$18:v=-2$

Missuguseid tehetes esinevate arvude omadusi tuleb kasutada tulbas a antud võrrandite lahendamisel?

679. *Olgu antud võrrand* $x^2=x+6$. *Kui selles* x *asendada arvuga* 2, *siis saame mittevõrdsed tulemused:* $2^2\neq2+6$. *Kui aga* x *asendada arvuga* 3, *siis saame võrdsed tulemused:*

$$3^2=3+6.$$

Kui võrrandis tundmatu asendamisel mingi arvuga võrrandi pooled osutuvad võrdseteks, siis öeldakse, et see arv rahuldab võrrandit.

Kas arv 3 rahuldab võrrandit $x^2=x+6$? Aga arv 2?

Proovi, kas arvudest 0, -1, -2 ja -3 mõni rahuldab võrrandit $x^2=x+6$ või ei rahulda.

Võrrandit rahuldavat arvu nimetatakse võrrandi lahendiks.

Näiteks arv 3 on võrrandi $x^2=x+6$ lahendiks, samuti ka arv -2.

680. Leia poovimise teel, kas arvude 0, 2, -2, 5, -5 hulgas leidub võrrandi

$$\frac{4x-1}{x-2}=3$$

lahendit.

681. a) Näita, et arvud 5 ja -3 on võrrandi $x^2=2x+15$ lahenditeks.

b) Näita, et arvud -1, $+1$, -2 ja $+2$ rahuldavad võrrandit $(x^2-1)(x^2-4)=0$. Mitu lahendit leidsid sellel võrrandil?

682. Mis liiki arv on positiivse arvu ruut? negatiivse arvu ruut? nulli ruut? Kas leidub niisugune arv, mille ruut võrdub -4? Kas leidub lahendit võrrandil

$$x^2=-4;\ x^2=-9;\ x^2+1=0;\ x^2+100=0?$$

683. a) Missuguse arvu jagamisel 5-ga saadakse 0? Mis on lahendiks võrrandil

$$\frac{x}{5}=0;\quad \frac{x}{10}=0;\quad x:2\frac{1}{3}=0;\ x:0{,}05=0?$$

b) Kas leidub arvu, millega arvu 1 jagades saadakse 0? Kas leidub lahendit võrrandil

$$\frac{1}{x}=0;\quad \frac{5}{x}=0;\ 0{,}5:x=0;\quad 1\frac{1}{4}:x=0?$$

684. Mis on lahendiks võrrandil

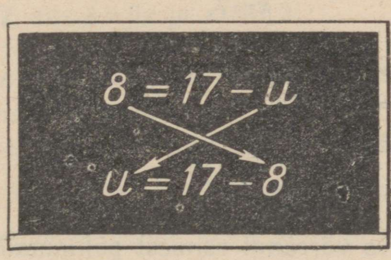
$$\frac{x}{2}=1;\quad \frac{x}{2}=0;\quad \frac{2}{x}=1?$$

Võrrandil võib olla üks või mitu lahendit. Võrrandil võib ka lahend puududa.

685. Rakendades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, põhjenda järgmisi väiteid:

1) kui $x+7=15$, siis $x=15-7$;
2) kui $y-12=8$, siis $y=8+12$;
3) kui $6-z=4$, siis $z=6-4$;
4) kui $8=17-u$, siis $u=17-8$.

Võrreldes siin kaht ühes ja samas reas olevat võrrandit, näeme, et teine neist saadakse esimesest, kui selles viia üks liige (*reas* 1 *ja* 2) *või kaks liiget* (*reas* 3 *ja* 4) *võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes seejuures iga üleviidava liikme märgi vastupidiseks. Näiteks reas* 4 *olevast võrrandist* $8=17-u$ *saab võrrandi* $u=17-8$, *kui liige* $-u$ *viia võrrandi paremalt poolelt vasakule poolele, kirjutades sinna* $+u$, *ja liige* 8 *viia võrrandi vasakult poolelt paremale, kirjutades* sinna -8 (*joon.* 89).



Joon. 89.

Selgita, missugused liikmed on võrrandites 1, 2 ja 3 viidud ühelt poolelt teisele.

Võrrandi liikmete ülalkirjeldatud omadust nimetatakse **võrrandi esimeseks põhiomaduseks.**

Võrrandi iga liikme võib viia võrrandi ühelt poolelt teisele, muutes selle liikme märgi vastupidiseks.

686. *Võrrandi esimene põhiomadus võimaldab tunduvalt kergendada võrrandi lahendamist. Olgu vaja lahendada näiteks võrrand*

$$6-5x=27-8x.$$

Teisendame võrrandit nii, et tema liikmed, mis sisaldavad tundmatut, oleksid võrrandi vasakul poolel, ja liikmed, mis ei sisalda tundmatut, paremal poolel. Antud võrrandis tuleb selleks liige $-8x$ viia paremalt poolelt vasakule (märgiga+) ja liige 6 viia vasakult paremale (märgiga $-$). Seda tehes saame teisendatud võrrandi

$$8x-5x=27-6.$$

Koondades nüüd sarnased liikmed, saame

$$3x=21.$$

Siit järeldub, et

$$x=7.$$

Lahenduse kirjutame lühidalt järgmiselt:

$$6-5x=27-8x;$$
$$8x-5x=27-6;$$
$$3x=21;$$
$$x=7.$$

Kontroll. $v=6-5\cdot 7=6-35=-29;$
$p=27-8\cdot 7=27-56=-29.$
$v=p.$

Vastus. $x=7.$

687. Rakendades võrrandi esimest põhiomadust, lahenda võrrandid:

1) $5x=4x+12$	6) $14x-9=5x$
2) $-5x=36-6x$	7) $3x-3=4+x$
3) $10x=9x-44$	8) $2x+4=1-x$
4) $x-1=1$	9) $7+3x=8-2x$
5) $x+2=5-x$	10) $4-5x=8+3x$

688. Millega võrdub x, kui

$$5=x;\quad -3=x;\quad -1=x?$$

$$\boxed{\textbf{Kui } a=b, \textbf{ siis } b=a}$$

Võrrandi pooli võib vahetada ilma ühegi liikme märki muutmata.

Kasuta seda omadust järgmiste võrrandite lahendamisel:

1) $12=x+7$ 2) $28=4+6x$

3) $4+2x=10x-4$ 4) $-10=3+x$

N ä i d e. $60=x+15$;

$x+15=60$;

$x=60-15$;

$x=45$.

689. Rakendades tehetes esinevate arvude vahelisi seoseid, põhjenda järgmisi väiteid.

1) Kui $8x=5$, siis $x=\frac{5}{8}$.

2) Kui $-3x=9$, siis $x=9:(-3)$

3) Kui $\frac{x}{5}=a$, siis $x=5a$.

4) Kui $\frac{4}{x}=2$, siis $4=2x$ ja $x=4:2$.

Võrreldes siin kaht ühes ja samas reas seisvat võrrandit, näeme, et teine neist saadakse esimesest selle vasaku ja parema poole korrutamisel või jagamisel ühe ja sama (nullist erineva) arvuga. Näiteks võrrandist $\frac{4}{x}=2$ *saame võrrandi* $4=2x$, *kui esimese võrrandi mõlemad pooled korrutame arvuga* x.

Missuguse arvuga tuleb korrutada või jagada 1., 2. ja 3. reas oleva võrrandi pooli, et leida võrrandi lahendit?

Võrrandi teine põhiomadus:

võrrandi pooli võib korrutada või jagada ühe ja sama nullist erineva arvuga.

690. *Nõue, et arv, millega võrrandi pooli korrutame, ei oleks* **0**, *on tarvilik sellepärast, et võrrandi poolte korrutamisel arvuga* 0 *saaksime võrrandi, mida rahuldab iga arv. Korrutades näiteks võrrandi* $2x=10$ *pooli arvuga* 0, *saame võrrandi* $0\cdot 2x=0\cdot 10$ *ehk* $0x=0$. *Seda võrrandit rahuldab iga arv. Tõepoolest,* $0\cdot 2=0$, $0\cdot(-2)=0$, $0\cdot 5=0$ *jne. Antud võrrandit* $2x=10$ *rahuldab aga ainult arv* 5.

Võrrandil $0 \cdot x=0$ on lõpmata palju lahendeid, sest tema lahendiks sobib iga arv.

Lahenda võrrandid

$$x+5=5+x; \; 2x+3=3+2x; \; 3x-6=3(x-2).$$

691. *Võrrandi mõlema poolega teostatav tehe märgitakse harilikult võrrandi järele püstkriipsu taha. Näiteks tähendab kirjutus*

$$2(x+7)=34; \,|:2$$

võrrandi mõlema poole jagamist 2-ga. Jagades saame

$$x+7=17,$$

millest

$$x=17-7$$

ehk

$$x=10.$$

692. Kasutades võrrandi teist põhiomadust, lahenda järgmised võrrandid. Lahendeid kontrolli peast.

1) $7x=49$	2) $9x=0$	3) $1=\frac{3}{4}x$	4) $5=\frac{x}{2}$
$3y=-2{,}1$	$\frac{y}{2}=3$	$3y=\frac{1}{3}$	$\frac{6}{y}=2$
$\frac{z}{4}=1$	$\frac{2z}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{2z}{5}=0$	$\frac{3z}{4}=\frac{1}{2}$
$0{,}4u=0{,}8$	$0{,}3u=1{,}2$	$\frac{3}{u}=2$	$-1{,}2u=0{,}8$
$\frac{v}{5}=0{,}3$	$12=8v$	$\frac{3}{2v}=1{,}5$	$\frac{2}{3}v=-\frac{1}{6}$

Näiteid. 1) $\frac{3x}{4}=6; \,|\cdot 4$

$3x=24; \,|:3$

$x=8.$

2) $\frac{5}{2z}=15; \,|\cdot 2z$

$5=30z;$

$30z=5; \,|:30$

$z=\frac{5}{30}=\frac{1}{6}.$

693. *Võrrandi esimene ja teine põhiomadus võimaldavad antud võrrandit mitmeti teisendada. Need teisendused ei ole samasusteisendused, sest antud võrrandi pooled pole võrdsed teisendamisel saadud võrrandi vastavate pooltega. Näiteks võrrandi*

$$3x-4=6+x$$

ja sellest esimese põhiomaduse põhjal saadud võrrandi

$$3x-x=6+4$$

vastavad pooled ei ole omavahel võrdsed. Küll on aga nende võrrandite lahendid võrdsed.

Kontrolli, et arv 5 rahuldab nii üht kui ka teist ülalantud võrrandit.

VÕRRANDITE LIIKE.

694. *Võrrandid liigitatakse neis esinevate tundmatute arvu järgi ühe tundmatuga võrrandeiks, kahe tundmatuga võrrandeiks jne. Lugedes tähtedega x, y ja z märgitud arvud tundmatuiks, on näiteks*

$3x^2=x-1$ *ühe tundmatuga võrrand;*

$2x+3y=4a$ *kahe tundmatuga võrrand;*

$x^2+y^2=2z$ *kolme tundmatuga võrrand.*

Käesolevas peatükis vaatleme ainult ühe tundmatuga võrrandeid.

695. *Vaatleme mingit võrrandit, milles tundmatu ei esine murru nimetajas, näiteks võrrandit*

$$2(5x-8)=4-3(x+1).$$

Anname sellele võrrandile võimalikult lihtsa kuju. Selleks avame sulud, viime kõik liikmed võrrandi vasakule poolele, kirjutades paremale 0, *ja koondame sarnased liikmed:*

$$10x-16=4-3x-3;$$
$$10x+3x-16-4+3=0;$$
$$13x-17=0.$$

Kui pärast võrrandi lihtsustamist tundmatu esineb võrrandis ainult esimesel astmel, siis nimetatakse seda võrrandit esimese astme võrrandiks ehk lineaarseks võrrandiks (ka lineaarvõrrandiks).

Ühe tundmatuga lineaarses võrrandis on pärast võrrandi lihtsustamist ainult kaks liiget: liige tundmatuga esimesel astmel ja tundmatut mittesisaldav liige, nn. **vabaliige.** *Niisuguse võrrandi* **üldkuju** *on*

$$ax+b=0.$$

Selles võrrandis a ja b on mistahes arvud, kusjuures $a \neq 0$. Lahendades üldkujulise lineaarse võrrandi, saame

$$ax = -b;$$

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Ühe tundmatuga lineaarsel võrrandil on üks ja ainult üks lahend.

696. Anna igale alljärgnevale võrrandile võimalikult lihtne kuju ja otsusta, missugused neist on lineaarsed võrrandid, missugused mitte. Lineaarsed võrrandid lahenda.

1) $3x-4(2-x)=6$
2) $x(3+x)=2(3-x)$
3) $(x-1)^2=x^2$
4) $3(2-3x)=8-2(3-x)$
5) $(x-3)(x+3)=7$

Näide. $x(7+x)=5-x(5+2x)$;
$7x+x^2=5-5x-2x^2$;
$7x+x^2-5+5x+2x^2=0$;
$3x^2+12x-5=0$. *Ei ole lineaarne võrrand.*

LINEAARSETE VÕRRANDITE KOOSTAMINE JA LAHENDAMINE.

697. *Lineaarseid võrrandeid lahendame järgmise üldplaani järgi.*

1) *Avame sulud, kui neid võrrandis on, ja koondame sarnased liikmed.*

2) *Viime tundmatut sisaldavad liikmed võrrandi ühele poolele ja kõik muud liikmed võrrandi teisele poolele.*

3) *Koondame sarnased liikmed.*

4) *Jagame võrrandi mõlemad pooled tundmatu kordajaga.*

Leitud lahendit tuleb kontrollida.

Näide. *Lahendame võrrandi* $4(x-2)-9=3-(x+5)$.

L a h e n d u s.

Avame sulud:	$4x-8-9=3-x-5;$
Koondame sarnased liikmed:	$4x-17=-x-2;$
Viime üle liikmed —17 ja —x:	$4x+x=17-2;$
Koondame sarnased liikmed:	$5x=15;$
Jagame võrrandi pooled 5-ga:	$x=3.$

K o n t r o l l. $v=4\cdot(3-2)-9=4\cdot1-9=-5;$
$p=3-(3+5)=3-8=-5;$
$v=p.$

V a s t u s. $x=3.$

M ä r k u s. *Lahendus kirjuta edaspidi ilma selgituseta.*

698. Lahenda võrrandid:

1) $7(x-3)+3(x-5)=2(3x+2)$
2) $11x-(25-3x)=17$
3) $7-(7x-28)=0$
4) $3(10-x)-6(9{,}5-x)=0$
5) $3(x+4)=(17-x)\cdot4$

699. Lahenda võrrandid:

1) $0{,}02(30-x)-4=0{,}2-0{,}04(x-3)$
2) $2x+3-4(x-2)=7-(3x-5)+4x$
3) $6+2v(-4v-1)=1-4v(2v+3)-5$
4) $(y-6)(2y-3)=2(y-4)(y-3)$
5) $5(x-2)-3(x-1)=-1$

700. Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Arvuga x liideti 21 ning saadi 68. Millega võrdub x?
2) 26,8-le lisati arv a ning saadi 43,3. Leia a.
3) Arvust m lahutati 3,8 ja saadi 4,5. Leia m.
4) Arvust 15,7 lahutati arv s ja saadi 6,9. Leia s.
5) Arvu m suurendati 6,8 korda ja saadi 34. Leia m.
6) Arvu y jagamisel arvuga 3,7 saadi 11,1. Leia y.
7) Arv 13,5 jagati arvuga x ja saadi 0,5. Leia x.
8) Mingi arvuga liideti 180 ja saadi 150. Leia see arv.

701. Lahenda võrrandid:

1) $4k-0{,}2(k+4)=41$
2) $0{,}5(z-1)-0{,}25(3-z)=2$

3) $(3x-2)4=6x-6$
4) $5(k+2)=13+3k$
5) $4(3v-1)=3(2v+2)+8$

702. Lahenda võrrandid:
1) $2(5u-3)=3(2u+5)-5$
2) $(2x-1)-(6x-4)=0$
3) $(x-2)(x-3)=x(x-1)$
4) $3(6-x)-4(x+8)=0$
5) $2(x-1)-3(3+x)=5+x$

703. Lahenda võrrandi abil järgmised ülesanded.

1) Arvu 35 korrutati ühe teise arvuga ja saadi 72,45. Missuguse arvuga korrutati?

2) Mingi arv jagati 7,5-ga ja saadi 4,4. Leia see arv.

3) Missuguse arvuga tuleb liita 2,87, et saada 11,06?

4) Missugusest arvust tuleb lahutada 12,5, et saada 63,1?

5) Missugust arvu tuleb korrutada 3,8-ga, et saada 4,18?

6) Missuguse arvuga tuleb jagada 33,5, et saada 3,7?

7) Riiulil oli teatud hulk raamatuid. Kui neile lisati veel 14 raamatut, siis oli riiulil 81 raamatut. Mitu raamatut oli esialgu riiulil?

8) Pärast seda, kui laost veeti 284 m^3 puid ära, jäi sinna veel 3759 m^3 puid. Kui palju puid oli esialgu laos?

704. *Kui võrrand sisaldab harilikke murde, siis alustame võrrandi lahendamist murdude kaotamisega. Selleks korrutame võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga.*

N ä i d e. $\frac{2x-1}{5}=3+\frac{1-3x}{4}; \ | \cdot 20$

Võrrandi mõlema poole korrutamiseks 20-*ga korrutame võrrandi* **iga liikme** *selle arvuga:*

$$\frac{\overset{4}{\cancel{20}}(2x-1)}{\underset{1}{\cancel{5}}}=20\cdot 3+\frac{\overset{5}{\cancel{20}}(1-3x)}{\underset{1}{\cancel{4}}}$$

ehk

$$4(2x-1)=20\cdot 3+5(1-3x);$$
$$8x-4=60+5-15x;$$
$$8x+15x=65+4;$$
$$23x=69;$$
$$x=3.$$

Kontroll. $v=\frac{2\cdot 3-1}{5}=\frac{5}{5}=1;$

$$p=3+\frac{1-3\cdot 3}{4}=3-2=1;$$

$$v=p.$$

Vastus. $x=3$.

705. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{y}{3}-7=5$

2) $20=13+\frac{7x}{2}$

3) $1+\frac{4t}{1}=13$

4) $\frac{3x}{4}-\frac{x}{2}=1$

5) $\frac{x-2}{3}=5$

6) $7+\frac{x}{3}=13$

7) $8=\frac{x}{5}+7$

8) $\frac{3r}{8}-15=0$

9) $\frac{s}{2}+\frac{s}{4}=0$

10) $\frac{5}{x}=\frac{2}{3}$

706. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{2c-1}{5}-\frac{1+c}{2}=1$

2) $\frac{s+3}{5}=8-\frac{s-1}{4}$

3) $\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\frac{a}{4}-1$

4) $\frac{2x+7}{4}-\frac{x+1}{3}=\frac{3}{4}$

5) $\frac{n}{2}-\frac{5n+4}{3}=\frac{4n-9}{3}$

707. Koosta võrdus iga järgneva lause põhjal.

1. Arv 6 on 2 võrra suurem kui 4.
2. Arv 10 on 2 korda suurem kui 5.
3. Arv $x+3$ on 4 võrra suurem kui $\frac{x}{2}$.
4. Arvude $x+1$ ja $x-1$ jagatis on 2.
5. Arvude $3x-1$ ja $x-2$ vahe on 3.

708. Näide. *Ma mõtlesin ühe arvu, liitsin sellega* 2, *tulemuse jagasin* 3-*ga, saadud jagatisest lahutasin* 4 *ja sain* 6. *Missuguse arvu ma mõtlesin?*

Lahendus.

I. Võrrandi koostamine.

Olgu minu poolt mõeldud arv x. Liitnud selle arvuga 2, *sain* $x+2$. *Saadud tulemuse jagamisel* 3-*ga sai* $\frac{x+2}{3}$. *Lahutades sellest* 4, *sain* $\frac{x+2}{3}-4$. *Ülesandes on öeldud, et tulemuseks ma sain* 6. *Järelikult*

$$\frac{x+2}{3}-4=6.$$

II. Võrrandi lahendamine.

$$\frac{x+2}{3}-4=6; \mid \cdot 3$$
$$x+2-12=18;$$
$$x-10=18;$$
$$x=18+10;$$
$$x=28.$$

III. Lahendi kontroll (*ülesande teksti põhjal*).

$$28+2=30;\ 30:3=10;\ 10-4=6.$$

IV. Vastus. *Mõeldud arv oli* 28.

709. Ma mõtlesin ühe arvu. Sellest arvust lahutasin 11, saadud vahe jagasin 8-ga ja tulemusega liitsin 7. Sain 10. Missuguse arvu ma mõtlesin?

710. Jagades tundmata arvu 5-ga ja suurendades saadud jagatist 27 võrra, saame arvu, mis on pool endisest tundmata arvust. Leia see arv.

711. Jüri on Reinust 2 aastat vanem, Maret on Jürist 3 aastat noorem. Kokku on Reinu, Jüri ja Mareti vanus 37 aastat. Kui vana on Rein?

712. Isa, poja ja tütre vanus on kokku 47 aastat. Isa on pojast 5 korda vanem, tütar on pojast 2 aastat noorem. Kui vana on poeg?

713. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{2x-3}{5}=\frac{x+1}{3}$
4) $\frac{2x+5}{3}-\frac{x+6}{2}-\frac{x+8}{6}=0$

2) $\frac{11}{15}x-\frac{5}{6}(x-2)=0$
5) $\frac{5(4x-1)}{8}-\left[x-\frac{3(1-x)}{2}\right]=2$

3) $\frac{2(x-4)}{3}=3(x-2)-\frac{4x-3}{2}$

714. Kolme järjestikuse täisarvu summa on 54. Leia need arvud.

715. Nelja järjestikuse täisarvu summa on 34. Leia need arvud.

716. Kirjutati neli täisarvu, milledest iga järgmine on temale eelnevast arvust 2 võrra suurem. Nende arvude summa on 44. Leia need arvud.

717. Jaota arv 37 kahte ossa nii, et pool ühest osast oleks 15 võrra suurem teise osa $\frac{2}{3}$-st.

718. Lahenda võrrandid.

1) $2-x-\frac{5x-1}{3}=\frac{4x+2}{15}$

2) $2x-\frac{8x+7}{3}=-\frac{6x-5}{7}$

3) $\frac{6x-5}{7}=x-1-\frac{3x-4}{5}$

4) $5\cdot\frac{x}{6}-3\cdot\frac{x}{4}-2\frac{3}{8}=\frac{7}{9}x-1\frac{1}{12}x+15\frac{1}{8}$

5) $13z-\frac{8z}{9}=15z+22-\frac{7z}{2}$

719. Lahenda võrrandid.

1) $\frac{6}{7}(9-2x)-\frac{2}{3}(3x-4)=3-1\frac{1}{2}x$

2) $\frac{7x+18}{3}-\frac{4}{5}(x+3)=\frac{3}{2}(x+2)+\frac{2}{3}$

3) $\frac{7-2x}{2}-\left(1\frac{1}{2}x-\frac{x-2}{7}\right)=36-6x$

4) $\frac{5x-1}{3}+\frac{4(x-1)}{5}-2x-4=0$

5) $\frac{2(2x-7)}{7}+6\frac{5}{6}+\frac{7(x-4)}{3}=x+4-\frac{9-7x}{8}-\frac{1}{6}$

720. Näide. 5., 6. *ja* 7. *klass kogusid* 840 *kg vanapaberit, kusjuures* 6. *klass kogus* 2 *korda rohkem ja* 7. *klass* 4 *korda rohkem kui* 5. *klass. Kui palju vanapaberit kogus iga klass?*

Lahendus.

I. Võrrandi koostamine.

Olgu 5. *klassis kogutud* x *kilogrammi vanapaberit. Siis* 6. *klassis on seda kogutud* $2x$ *kilogrammi ja* 7. *klassis* $4x$ *kilogrammi. Et üldse koguti vanapaberit* 840 *kg, siis*

$$x+2x+4x=840.$$

II. Võrrandi lahendamine.

$$x+2x+4x=840;$$
$$7x=840;$$
$$x=120.$$

III. Lahendi kontroll.

5. *klass* ... 120 *kg*;
6. *klass* ... 240 *kg*;
7. *klass* ... 480 *kg*;

Kokku ... 840 *kg*.

IV. Vastus. 5. *klass kogus vanapaberit* 120 *kg*, 6. *klass* 240 *kg ja* 7. *klass* 480 *kg*.

721. Kolhoosi aias kasvab 120 pirni-, õuna- ja ploomipuud. Pirnipuid on kolm korda rohkem kui ploomipuid, õunapuid kaks korda rohkem kui pirnipuid. Mitu pirni-, õuna- ja ploomipuud on kolhoosi aias?

722. Ristkülikukujulise põllu pikkus on kaks korda suurem laiusest. Leia selle põllu pikkus ja laius, kui põllu ümbermõõt on 960 m.

723. Kolmnurga ümbermõõt on 180 cm. Kolmnurga küljed suhtuvad nagu 9, 11 ja 16. Leia kolmnurga iga külje pikkus.

724. Kolm perekonda kasutavad korterit, mille üür on 9 rubla kuus. Esimese perekonna kasutada on korteri elamispinnast 30 m^2, teisel 20 m^2 ja kolmandal 50 m^2. Üür jaotatakse kolme perekonna vahel võrdeliselt kasutatavale elamispinnale. Kui palju tuleb maksta igal perekonnal?

725. Kolmnurga külgede pikkused väljenduvad kolme üksteisele järgneva täisarvuga. Leia iga külje pikkus, kui kolmnurga ümbermõõt on 24 cm.

726. Kahest kõrvunurgast on üks 4 korda teisest suurem. Leia kummagi nurga suurus.

727. Kahest kõrvunurgast on üks 36° teisest väiksem. Leia need nurgad.

728. Kolmes koolis on kokku 1200 õpilast. Teises koolis on õpilasi kaks korda rohkem kui esimeses, kolmandas koolis aga 40 õpilast vähem kui teises. Mitu õpilast on igas koolis?

729. Koolil on musti, valgeid ja kirjusid kanu kokku 178. Kirjusid kanu on 3 korda rohkem kui musti, valgeid aga 3 võrra rohkem kui musti. Mitu musta, mitu valget ja mitu kirjut kana on koolil?

730. Tehase kolmes tsehhis töötab kokku 624 töölist. Teises tsehhis on töölisi 5 korda rohkem kui esimeses, kolmandas tsehhis aga niipalju kui esimeses ja teises tsehhis kokku. Mitu töölist on igas tsehhis?

731. «Tere, tere, sada hane,» ütles haneparvele vastulendav üksik hani.

«Ei meid ole 100 hane,» vastas parve juht. «Kui meid oleks veel nii palju, nagu meid on, ja veel pool sellest ning veerand sellest ning sina ka lendaksid koos meiega, alles siis oleks meid sada hane!»

Mitu hane lendas parves?

VÕRRANDID, MIS SISALDAVAD TUNDMATUT MURRU NIMETAJAS.

732. *Võrrandit*

$$\frac{2}{x}-\frac{1}{x-1}=0$$

lahendamata saab öelda, et selle lahendiks ei või olla arv 0 *ega arv* 1. *Miks? Lahenda see võrrand, korrutades võrrandi mõlemad pooled murdude ühise nimetajaga* $x(x-1)$.

Võrrandi lahendiks ei saa olla arv, mille puhul tundmatut sisaldav murru nimetaja võrduks nulliga.

733. Põhjenda väidet, et võrrandi

$\frac{4-x}{x-2}=6+\frac{2}{x-2}$ lahendiks ei või olla arv 2;

$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{2}{x-2}$ „ „ „ „ ükski arvudest 0, 1 ja 2;

$\frac{3}{x^2-4}=\frac{2}{x^2-2x-8}$ „ „ „ „ ükski arvudest 2, -2 ja 4.

734. Ütle arvud, mis ei või olla

võrrandi $\frac{4}{x-1}=\frac{2}{x+1}$ lahenditeks;

„ $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{5}{x+3}$ „

„ $\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2x-1}$ „

735. *Lahendame võrrandi*

$$\frac{4-x}{x-2}=6+\frac{2}{x-2}, \tag{I}$$

teades ette, et tema lahendiks ei saa olla arv 2. *(Miks?) Korrutades võrrandi mõlemad pooled arvuga* $x-2$, *saame võrrandi*

$$4-x=6(x-2)+2, \tag{II}$$

mille lahendamisel saame:

$$4-x=6x-12+2;$$
$$4-x=6x-10;$$
$$-x-6x=-10-4;$$
$$-7x=-14;$$
$$x=2.$$

Oleme saanud lahendiks arvu, mis ei või olla antud võrrandi (I) *lahendiks. Kontrollimine näitab, et viga me teinud ei ole: arv* 2 *rahuldab võrrandit* (II) *ja kõiki järgnevaid võrrandeid, kuid ei rahulda antud võrrandit* (I). *Sellest tuleb teha järgmine järeldus:*

kui võrrandi pooli korrutada avaldisega, mis sisaldab tundmatut, siis võib saada võrrandi, millel on rohkem lahendeid kui antud võrrandil.

Siin korrutasime võrrandi pooli avaldisega $x-2$ *ja saime võrrandi, millel on üks lahend* (2), *kuna antud võrrandil ei ole ühtki lahendit. Et võrrandil* (I) *lahendit ei saa olla, see selgub, kui tundmatut sisaldavad liikmed viia võrrandi vasakule poolele ja teostada seal murdude liitmine. Siis võrrand omandab kuju*

$$\frac{2-x}{x-2}=6 \quad ehk \quad \frac{x-2}{x-2}=-6.$$

Sellel võrrandil ei ole lahendit, sest x iga väärtuse puhul võrrandi vasak pool on 1, *kuna parem pool on* -6.

Joon. 90.

736. *Arvu, mis rahuldab antud võrrandi (algvõrrandi) teisendamisel saadud võrrandit, kuid ei rahulda algvõrrandit, nimetatakse algvõrrandi* **võõrlahendiks.**

Näita, et $x=3$ on võrrandi

$$\frac{2}{x-3}+\frac{x-5}{x-3}=2$$

võõrlahend.

737. *Lahendanud võrrandi, milles tundmatu esineb murru nimetajas, vaatame esmalt, kas murdude nimetajad on leitud lahendi puhul nullist erinevad või mitte. Kui tundmatu asendamisel leitud arvuga mõni nimetaja muutub nulliks, siis see arv ei ole antud võrrandi lahendiks. Kui ükski nimetaja nulliks ei muutu, siis see arv* v õ i b o l l a *võrrandi lahendiks. Kas ta seda on või ei ole, seda näitab lahendi kontroll.*

N ä i d e 1. *Lahendame võrrandi*

$$\frac{3}{4x-2}=1-\frac{1}{1-2x}.$$

Lahutame esimese murru nimetaja teguriteks:

$$\frac{3}{2(2x-1)}=1-\frac{1}{1-2x}.$$

Muudame märgi teise murru nimetaja kõigil liikmeil ja teise murru ees:

$$\frac{3}{2(2x-1)}=1+\frac{1}{2x-1}.$$

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli murdude ühise nimetajaga $2(2x-1)$:

$$3=2(2x-1)+2.$$

Lahendame saadud võrrandi:

$$3=4x-2+2;$$
$$4x=3;$$
$$x=\frac{3}{4}.$$

K o n t r o l l.

I. *Arvutame algvõrrandis esinevate murdude nimetajad, kui* $x=\frac{3}{4}$:

$$4x-2=4\cdot\frac{3}{4}-2=3-2=1;$$
$$1-2x=1-2\cdot\frac{3}{4}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}.$$

II. *Arvutame algvõrrandi poolte väärtused:*

$$v=\frac{3}{1}=3;\ p=1-\frac{1}{-\frac{1}{2}}=1+2=3;$$

$$v=p.$$

V a s t u s. $x=\frac{3}{4}$.

N ä i d e 2.

$$\frac{x+5}{x-1}-\frac{x+1}{x-3}+\frac{8}{(x-1)(x-3)}=0.$$

Korrutame võrrandi mõlemaid pooli murdude ühise nimetajaga $(x-1)(x-3)$:

$$(x+5)(x-3)-(x+1)(x-1)+8=0.$$

Avades sulud ja koondades sarnased liikmed, saame:

$$x^2+5x-3x-15-x^2+1+8=0;$$
$$2x-6=0;$$
$$x=3.$$

K o n t r o l l.

I. *Arvutame algvõrrandis esinevate murdude nimetajad, kui* $x=3$:

$$x-1=3-1=2;$$
$$x-3=3-3=0(!)$$

Arv 3 ei rahulda antud võrrandit.

V a s t u s. *Antud võrrandil ei ole lahendit.*

738. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{6}{x-1}=2$ 2) $\frac{2x}{x-1}=5$

3) $\frac{1-x}{x-1}=3$ 4) $\frac{0,5x+2}{3-0,25x}=2$

739. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{5}{2x}+\frac{1}{6}=\frac{3}{5x}+\frac{4}{5}$

2) $\frac{2}{3x}-\frac{5}{6}=\frac{1}{2x}$

3) $\frac{5}{6x}=\frac{3}{4x}=\frac{1}{12x}$

4) $\frac{0,1}{2x}-\frac{0,15}{3x}=2$

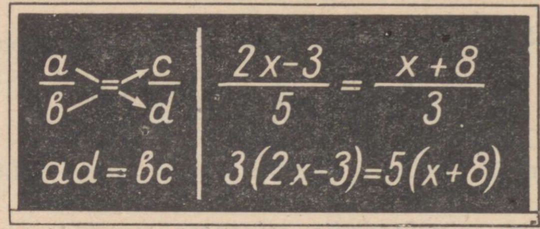
740. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{2}{10-x}=\frac{3}{x}$ 2) $\frac{2}{3x}=\frac{3}{2x}$

3) $\frac{2}{x-4}=\frac{6}{x-3}$ 4) $\frac{x+2}{x-2}=\frac{x-4}{x+2}$

5) $\frac{x-5}{x-7}=\frac{x-8}{x-9}$ 6) $\frac{x-3}{x}=\frac{x+1}{x+10}$

M ä r k u s. *Võrde kuju omavaid võrrandeid on kõige lihtsam lahendada võrde põhiomaduse põhjal* (*joon.* 166).



Joon. 91.

741. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{x+2}{3x}=\frac{5}{12}$ 2) $\frac{3u-5}{2}=\frac{4u-1}{-3}$

3) $\frac{6}{z}=\frac{7}{10-z}$ 4) $\frac{E}{1+E^2}=\frac{1}{2+E}$

5) $\frac{2l}{1+l+4l^2}=\frac{1}{1+2l}$ 6) $\frac{a}{a^2+1}=\frac{1}{a+4}$

742. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x+1}$ 2) $\frac{x+1}{x}=\frac{2x+1}{2x}$

3) $\frac{18}{x-2}=9$ 4) $\frac{3}{2x+4}=\frac{5}{3x+8}$

5) $\frac{x^2}{x-4}=x-6$ 6) $\frac{24}{x}-\frac{17-x}{x-1}=1$

743. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{x}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}=\frac{2}{x^2-4}$ 2) $\frac{x+1}{3-x}+\frac{2x-5}{x-3}=4$

3) $\frac{11+x}{6+x}=\frac{8+x}{4+x}$ 4) $\frac{0{,}3x+1{,}8}{1{,}6x+2{,}7}=0{,}6$

5) $\frac{2}{x-1}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{x-3}$ 6) $\frac{x^2}{x^2-4}+\frac{1}{2x-x^2}=1$

744. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{4x+7}{x-1}=\frac{12x+5}{3x+4}$ 2) $\frac{5x-7}{3x+2}=\frac{5x-7}{3x-1}$

3) $\frac{7x-3}{x-1}=\frac{2}{3}$ 4) $\frac{2(3-7x)}{1+x}=\frac{1}{2}$

5) $\frac{x+5}{x-5}-\frac{x-5}{x+5}=\frac{20}{x^2-25}$ 6) $\frac{x+4}{x-4}-\frac{x-4}{x+4}=\frac{24}{x^2-16}$

745. Lahenda võrrandid:

1) $\frac{10,3}{x}+\frac{1}{3}=\frac{7,8}{x}+\frac{2}{3}$ 2) $\frac{1}{3x}-\frac{1}{4x}=\frac{1}{24}$

3) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2x}+\frac{1}{3x}+\frac{1}{4x}=\frac{1}{6}$ 4) $\frac{3}{4-3x}+\frac{1}{3x}=0$

5) $\frac{1}{x}+\frac{3}{x-1}=\frac{4}{x-2}$ 6) $\frac{x-7}{x+7}=\frac{2x-15}{2x-6}-\frac{1}{2(x+7)}$

746. Üks masinakirjutaja võib käsikirja ümber kirjutada 8 tunniga, teine 7 tunniga. Kui kiiresti võivad nad selle töö lõpetada koos töötades?

747. Bassein täitub veega ühe kraani kaudu 3 tunniga, teise kraani kaudu 5 tunniga. Mitme tunniga täitub bassein siis, kui avada mõlemad kraanid korraga?

748. Kaks töölist lõpetaksid töö koos töötades 3 tunni ja 36 minutiga. Esimene tööline üksi lõpetaks töö 6 tunniga. Mitme tunniga teeks selle töö teine tööline üksi töötades?

749. Jaan läbis ühekilomeetrise vahemaa joostes 9 minuti võrra kiiremini kui kõndides. Teades, et joostes liikus Jaan $2\frac{1}{2}$ korda kiiremini kui kõndides, leia Jaani kõndimiskiirus ja jooksukiirus.

750. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugejaga ja nimetajaga, et saaksime murru $\frac{3}{7}$?

751. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{2}{5}$ lugejaga ja nimetajaga, et saaksime murru $\frac{5}{14}$?

752. Murru nimetaja on lugejast 4 korda suurem. Kui murru lugejaga ja nimetajaga liidame 10, siis saame murru, mille väärtus on $\frac{1}{2}$. Leia murd.

753. Murru $\frac{4}{25}$ lugejale lisati 9 ja nimetajale 2. Siis lisati uuesti lugejale 9 ja nimetajale 2. Nii toimiti korduvalt, kuni murru väärtuseks saadi 1. Mitu korda lisati neid arvusid murru lugejale ja nimetajale?

754. Murru $\frac{13}{22}$ lugejast lahutati 3 ja nimetajast 5. Siis lahutati uuesti lugejast 3 ja nimetajast 5. Nii toimiti korduvalt, kuni murru väärtuseks saadi $\frac{1}{2}$. Mitu korda lahutati neid arvusid murru lugejast ja nimetajast?

755. Töölised said kokku 120 rubla. Kui neid oleks olnud 4 võrra vähem, siis oleks igaüks neist saanud kolm korda rohkem. Kui palju oli töölisi?

756. Töölised said kokku 180 rubla. Kui neid oleks olnud 3 võrra rohkem, siis oleks neist igaüks saanud kaks korda vähem. Kui palju oli töölisi?

757. Kui turist oli sõitnud $\frac{3}{8}$ kahe linna vahelisest teest, siis jäi tal sõita poolest teest veel 15 km. Leia nende linnade vaheline kaugus.

758. Kui turist oli sõitnud $\frac{5}{9}$ kahe linna vahelisest teest, siis oli tal sõidetud 10 km rohkem kui pool teed. Leia nende linnade vaheline kaugus.

759. Isa on 42 aastat ja poeg 9 aastat vana. Mitme aasta pärast on isa kaks korda pojast vanem?

760. Isa on 39 aastane, poeg 15 aastane. Mitme aasta eest oli poeg isast seitse korda noorem?

761. Esimese toru kaudu täitub bassein 5 tunniga, teise kaudu aga tühjeneb 6 tunniga. Mitme tunni pärast täitub bassein, kui avada mõlemad torud korraga?

762. Esimese toru kaudu täitub bassein 4 tunniga, teise kaudu 5 tunniga. Mitme tunni pärast täitub bassein, kui avada mõlemad torud korraga?

TÄHELISTE KORDAJATEGA VÕRRANDID.

763. *Võrrandis võib peale tundmatut tähistava tähe esineda veel muid tähti. Need tähed tähistavad antud arve, kuid pole öeldud, missuguseid nimelt. Neid tähtede abil kirjutatud antud arve* *nimetatakse* **tähelisteks kordajateks** *ehk* **parameetriteks** *ja tähistatakse harilikult tähestiku esimeste tähtedega a, b, c jne., kuna tundmatuid tähistatakse tähestiku lõpuosa tähtedega x, y, z, u, v.*

Et tähelise kordaja kohta pole öeldud, millist arvu ta tähendab, siis võib tema all mõelda meelevaldset arvu, kuid mitte niisugust, mille puhul võrrandis või tema lahendis mõni nimetaja muutub nulliks. Näiteks võrrandis

$$\frac{x}{a} - x = a$$

parameeter a tähendab meelevaldset arvu, kuid mitte arvu 0. *Lahendame selle võrrandi:*

$$\frac{x}{a} - x = a; \mid \cdot a$$

$$x - ax = a^2;$$

$$(1-a)x = a^2; \mid : (1-a)$$

$$x = \frac{a^2}{1-a}$$

Nüüd näeme, et antud võrrandis ei tohi tähe a all mõista ka arvu 1, *sest siis saadud lahend ei kõlbaks.*

Täheliste kordajatega võrrandi lahendamisel pane tähele, et

pärast tundmatut sisaldavate liikmete viimist võrrandi ühele poolele tuleb tundmatu viia sulgude taha ja siis võrrandi pooled jagada tundmatu kordajaga.

N ä i d e. $ax+2=b-3x;$

$$ax+3x=b-2;$$

$$(a+3)x=b-2;$$

$$x=\frac{b-2}{a+3}.$$

764. Lahenda tähe x suhtes järgmised võrrandid:

1) $2x=a$	6) $x-a=b-x$	11) $px+qx=9$
2) $ax=m-2x$	7) $ax+(x-a)=b$	12) $x=1-3x$
3) $2x+1=n$	8) $x+h=2(x+k)$	13) $x=1-mx$
4) $2(x+1)=p$	9) $2x+3x=2c+3d$	14) $\frac{x}{p}+\frac{x}{q}=1$
5) $px+3(x+1)=q$	10) $nx+x=1$	15) $\frac{x}{2}=\frac{t}{3}-x$

765. Lahenda tähe x suhtes järgmised võrrandid:

1) $\frac{a}{x}-b=c$ 6) $\frac{a}{x-2}-c=\frac{b}{x-2}$ 11) $\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

2) $\frac{m}{x}+\frac{n}{x}=p$ 7) $\frac{m}{m-x}=\frac{n}{n-x}$ 12) $\frac{1}{x}=\frac{2}{m}-\frac{3}{n}$

3) $\frac{a}{x-1}-1=-b$ 8) $\frac{a}{x-1}-\frac{6}{x+1}=0$ 13) $\frac{1}{x}=3-\frac{a}{b}$

4) $\frac{a}{mx}+\frac{b}{nx}=p$ 9) $\frac{m-x}{n-x}=\frac{m+x}{n+x}$ 14) $\frac{1}{x}=\frac{2u}{V}+3u$

5) $\frac{m-x}{m+1}=n$ 10) $\frac{a}{x+1}+2=\frac{bx}{x+1}$ 15) $\frac{m}{x}=2a-\frac{b}{a}$

766. Ühe ruudu külg on a cm võrra väiksem teise ruudu küljest, pindala on aga d cm² võrra väiksem. Kui pikk on suurema ruudu külg?

767. Kolhoosis on tööl b naist, mis moodustab $a\%$ kogu kolhoosnikute arvust. Kui suur on kolhoosnikute arv selles kolhoosis?

768. Laeva kiirus seisvas vees on a km tunnis. Jõe voolu kiirus on b km tunnis. Kui kaugel asetseb üks linn teisest, kui aurik kulutas reisiks sinna ja tagasi mööda jõge t tundi?

769. Plaani järgi pidid kolhoosnikud külvama a ha päevas. Tegelikult ületasid nad igapäevase külviplaani, külvates b ha päevas, mille tõttu lõpetasid külvitööd 2 päeva enne määratud tähtaega. Kui suur oli külvipind?

770. Kolm töölist lõpetaksid töö koos töötades a tunniga. Esimene tööline lõpetaks selle töö üksi b tunniga, teisel töölisel kuluks selleks üksi töötades c tundi. Kui palju aega kuluks kolmandal töölisel üksi selle töö lõpetamiseks?

771. Allpool on antud rida valemeid, milledes esineb mitu tähte. Loe kordamööda iga täht valemis tundmatuks ja lahenda valem selle tähe suhtes (kui ta pole juba selle suhtes lahendatud).

1) $S=\frac{1}{2}ah.$ 3) $k=\frac{a+b}{2}$ 5) $T=K+2P$

2) $c=2\pi r$ 4) $S=\frac{ab}{2}$ 6) $V=abc$

7) $s=vt$

8) $K=\frac{na}{2}\cdot m$

9) $e=\frac{P}{V}$

10) $S=(n-2)\cdot 180°$

11) $ab=hc$

12) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

13) $2\alpha+\beta=180°$

14) $\alpha+\beta+\gamma=180°$

15) $\alpha=180°-\frac{360°}{n}$

Mitmed neist valemeist väljendavad tuntud tõsiasju. Kas tead mõnda neist?

ÜLESANNETE LAHENDAMINE VÕRRANDI ABIL.

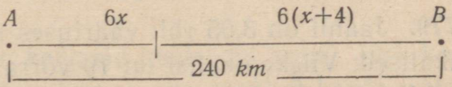
772. Näide. *Linnade A ja B vahemaa on 240 km. Nendest linnadest väljusid ühel ja samal ajal teineteisele vastu kaks jalgratturit, kes kohtusid 6 tunni pärast. Leia kummagi jalgratturi sõidukiirus, kui on teada, et teine neist läbis tunnis 4 km rohkem kui esimene.*

Lahendus.

	Kiirus $\times$ $\left(\frac{\text{km}}{\text{t}}\right)$	*Aeg*= (t)	*Tee pikkus* (km)
I jalgrattur	x	6	$6x$
II jalgrattur	$x+4$	6	$6(x+4)$

Tee pikkus on 240 *km.*

$$6x+6(x+4)=240;$$
$$6x+6x+24=240;$$
$$12x=216;$$



$$x=18\ \frac{\text{km}}{\text{t}}\ \text{(I } \textit{jalgrattur}\text{)}$$

$$x+4=22\ \frac{\text{km}}{\text{t}}\ \text{(II } \textit{jalgrattur}\text{)}$$

Kontroll. II *jalgrattur sõitis tunnis* $22-18=4$ *km rohkem kui* I *jalgrattur.* I *jalgrattur läbis* $6\cdot 18=108$ *km.* II *jalgrattur läbis* $6\cdot 22=132$ *km. Kokku oli tee pikkus* $108+132=240$ *km.*

V a s t u s. I *jalgrattur sõitis* 18 *km tunnis,* II *jalgrattur* 22 *km.*

M ä r k u s. *Kasuta ka edaspidi, kus sobib, võrrandi koostamiseks niisugust skeemi, nagu ülal näidatud.*

773. Maret väljus linnast jalgrattal 2 tundi enne Virvet. Maret läbis tunnis 10 km, Virve 14 km. Millise aja jooksul jõuab Virve Maretile järele?

774. Kaks mootorpaati väljusid samaaegselt ühest ja samast kohast ning sõitsid üks pärivoolu, teine vastuvoolu. Mootorpaatide kiiruste suhe on 2 : 3. Viie tunni pärast asusid nad teineteisest 100 km kaugusel. Leia mootorpaatide kiirus.

775. Asulate *A* ja *B* vahemaa on 66 km. Kell 9 väljus asulast *A* jalgrattur asula *B* suunas kiirusega 14 km tunnis. Kell 10 väljus asulast *B* teine jalgrattur asula *A* suunas kiirusega 12 km tunnis. Kui kaua aja pärast kohtas esimene jalgrattur teist?

*

776. Epul on 30 metallraha, 10- ja 15-kopikalised, koguväärtusega 3 rbl. 90 kop. Mitu 10- ja mitu 15-kopikalist tal on?

777. Mootorsõidukite remonditöökojas parandati kuu jooksul autosid ja motorollereid, kokku 40 masinat. Töökojas praktikal viibiv Tõnu leidis, et parandatud sõidukeil oli kokku 100 ratast. Mitu autot ja mitu motorollerit oli töökojas parandamisel kuu jooksul?

778. Pirita jõel sõitis 70 inimest süstadel. Üheinimese süstasid oli kolm korda rohkem kui kaheinimese süstasid. Mitu ühe- ja mitu kaheinimese süsta oli jõel?

779. Jaanil on 3,05 rbl. väärtuses metallraha, viie- ja kümnekopikalised. Viiekopikalisi on 19 võrra enam kui kümnekopikalisi. Mitu viie- ja mitu kümnekopikalist on Jaanil?

780. Jüri kasvatas kanu ja jäneseid. Kokku oli kanadel ja jänestel 33 pead ja 100 jalga. Mitu jänest ja mitu kana oli Jüril?

*

781. Ristkülikukujulise ehituskrundi pikkus on laiusest 3 korda suurem. Kui selle ehituskrundi laiust suurendada 2 m võrra, siis tema pindala suureneb 96 m² võrra. Leia ehituskrundi mõõtmed.

782. Ristküliku pikkus on 2 korda suurem laiusest. Kui selle ristküliku pikkust suurendada 5 m võrra, laiust aga 3 m võrra, siis tema pindala suureneb 92 m^2 võrra. Missugused on selle ristküliku esialgsed mõõtmed?

783. Ruudu külgesid pikendati 1 m võrra. Ruudu pindala suurenes selle tõttu 15 m^2 võrra. Kui pikk oli selle ruudu külg esialgu?

784. Ruudu iga külje pikkust vähendati 3 cm võrra, mille tõttu ruudu pindala vähenes 33 cm^2 võrra. Leia selle ruudu külje esialgne pikkus.

785. Ristküliku pikkus on 5 m võrra suurem tema kahekordsest laiusest. Ristküliku ümbermõõt on 190 m. Leia selle ristküliku pikkus ja laius.

*

786. Kolme üksteisele järgneva paarisarvu summa on 120. Leia need arvud.

787. Leia kolme üksteisele järgneva paarisarvu summa, kui on teada, et teise ja kolmanda arvu summa on 28 võrra suurem esimesest arvust.

788. Leia neli üksteisele järgnevat paarisarvu, kui on teada, et lahutades neljanda arvu teise arvu kolmekordsest, saame arvu, mis on 4 võrra suurem esimesest arvust.

789. Leia kolm üksteisele järgnevat paaritut arvu, kui on teada, et esimese ja kolmanda arvu summa on 37 võrra suurem teisest arvust.

790. Peeter, Jüri ja Rein korjasid kokku 63 seent. Jüri korjas 8 seent vähem kui Peeter, Rein korjas aga seeni 3 korda rohkem kui Jüri. Mitu seent korjas neist igaüks?

791. Kolhoosi aias on 240 viljapuud. Õunapuid on 3 korda rohkem kui pirnipuid, ploomipuid 9 võrra vähem kui õunapuid, kirsipuid aga 4 korda rohkem kui ploomipuid. Mitu igast liigist puud on kolhoosi aias?

792. Kolhoosil on 3 maatükki. Teine maatükk on esimesest 2,3 korda suurem, kolmas aga moodustab $\frac{2}{3}$ esimesest ja teisest tükist

kokku. Kui suur on iga maatükk, kui kolme maatüki pindala kokku on 385 ha?

793. Kolme arvu summa on 76. Leia need arvud, kui on teada, et teine arv on esimesest kaks korda suurem, kolmas arv aga on 4 võrra suurem kahe esimese summast.

794. Plaani järgi pidid kolhoosnikud külvama 25 ha päevas. Tegelikult külvasid nad 30 ha päevas ning lõpetasid selle tõttu külvitööd 3 päeva enne tähtaega. Kui suur oli ettenähtud külvipind?

795. Aurik pidi plaani järgi sõitma ühest sadamast teise kiirusega 15 km tunnis. Masinarikke tõttu sõitis aurik ainult 12 km tunnis ning hilines selle tõttu 3 tundi. Kui kaugel asus üks sadam teisest?

796. Jalgrattur sõitis kolhoosist linna kiirusega 16 km tunnis ja linnast tagasi koju kiirusega 12 km tunnis. Kogu sõiduaeg linna ja tagasi oli $2\frac{1}{3}$ tundi. Kui kaugel asus kolhoos linnast?

797. Teekonnaks Tallinnast Tartusse ja tagasi kulus autol kokku 10 tundi. Mitu kilomeetrit on maanteed mööda Tallinnast Tartusse, kui auto keskmine kiirus sinnasõidul oli 60 km tunnis ja tagasisõidul 40 km tunnis ning kui Tartus peatuti 2 tundi?

798. Jalgrattur sõitis kodunt raudteejaama ja tagasi. Minnes oli tuul vastu, tulles tagant, mistõttu sinnasõit toimus kiirusega 12 km tunnis ja tagasisõit 18 km tunnis. Jaamas kulus jalgratturil pool tundi aega. Kogu reis kestis 3 tundi. Kui kaugel elas jalgrattur raudteejaamast?

799. Kooperatiiv müüs esimesel päeval 0,5 kalevikangast, teisel päeval 0,4, kusjuures teisel päeval müüdi 30 m vähem kui esimesel päeval. Mitu meetrit kalevit oli kangas?

800. Valve luges läbi $\frac{2}{9}$ raamatust. Nüüd selgus, et lugeda on 95 lehekülge rohkem sellest, mis on juba loetud. Mitu lehekülge on selles raamatus?

801. Sovhoosis on põllumaa all $\frac{2}{3}$ kogu maa-alast, heinamaad moodustavad aga $\frac{2}{15}$ sovhoosi maa-alast. Kui palju on sellel sovhoosil maad, kui on teada, et põllumaad on 320 ha rohkem kui heinamaad?

802. Ruudu külg on 6 m pikem kui võrdkülgse kolmnurga külg. Ruudu ümbermõõt on võrdkülgse kolmnurga ümbermõõdust 34 m suurem. Leia võrdkülgse kolmnurga külje pikkus.

803. Trapetsi lühem alus on $\frac{2}{3}$ pikemast alusest. Trapetsi kesklõigu pikkus on 5 cm. Kui pikk on trapetsi pikem alus?

804. Kaks matkagruppi väljuvad samaaegselt linnast A, et minna linna B. Esimene grupp liigub kiirusega 4 km tunnis, teine grupp aga kiirusega 5 km tunnis. Teine grupp jõudis 1 tund varem linna B. Kui suur on linnade A ja B vahemaa?

805. Toomas, Jaan ja Peeter koguvad raha jalgrataste ostmiseks. Jaanil on kogutud 6 rubla rohkem kui Toomal, Peetril aga 10 rubla vähem kui Tooma kogutud kahekordne summa. Mitu rubla on igal poisil kogutud, kui kokku on nende poolt kogutud 96 rubla?

806. Rein ütles: «Kui ma oma vanust korrutan 3-ga ning tulemusega liidan 2 aastat, siis saan oma isa vanuse. Korrutades aga isa vanust 2-ga ning liites tulemusega 3 aastat, saan vanaisa vanuse. Meie kolme vanus kokku on 99 aastat.»

Kui vana on Rein?

807. Murru nimetaja on lugejast 2 võrra suurem. Suurendades murru lugejat ja nimetajat 1 võrra, saame uue murru, mille lugeja ja nimetaja suhe on 2 : 3. Kui suur on esialgne murd?

808. Kahe arvu suhe on 7 : 2. Samade arvude vahe on 30. Leia suurem arv.

809. Kahe arvu suhe on 3 : 5. Nende arvude vahe on 12. Leia väiksem arv.

810. Kolhoosi viljapuuaeda istutati 120 viljapuud. Õunapuid istutati 3 korda, pirnipuid aga 30 võrra enam kui kirsipuid? Mitu puud istutati igast liigist?

811. Kolme arvu summa on 51. Leia need arvud, teades, et esimene arv on kaks korda väiksem teisest, kolmas arv on aga 3 võrra suurem esimesest.

812. Ma võtsin ühe arvu, liitsin sellega 28, korrutasin tulemust 3-ga, siis lahutasin 120, jagasin saadud vahe 20-ga ja sain 8 korda väiksema arvu, kui ma algul võtsin. Missuguse arvu ma võtsin?

813. Kui ma algul jagan mõeldud arvu 4-ga, siis aga jagan mõeldud arvu 6-ga ja saadud jagatised liidan, saan 20. Leia mõeldud arv.

814. Isa sõitis autoga ühest linnast teise keskmise kiirusega v km tunnis. Tagasi sõitis ta lennukiga, mille keskmine kiirus oli 3 korda suurem auto kiirusest. Kogu teekond kestis t tundi. Kui suur on nende linnade vahemaa?

815. Ristküliku pikkus ja laius suhtuvad nagu 3 : 2. Kui selle ristküliku pikkust suurendada 2 korda, laiust aga vähendada 1 ühiku võrra, siis suureneb ristküliku ümbermõõt 16 ühiku võrra. Leia antud ristküliku mõõtmed.

816. Ruudu pindala on ristküliku pindalast 3 m² suurem. Ristküliku pikkus on 4 meetrit suurem, laius aga 3 m väiksem ruudu külje pikkusest. Leia ruudu külje pikkus.

817. Juhan sõitis Tartusse ja sealt tagasi. Kokku kulus tal sõiduks 14 tundi. Tema kiiruseks minnes oli 40 km ja tulles 30 km tunnis. Mitme tunniga jõudis Juhan Tartusse?

818. Lennuk läbis 600 km 3 tunniga. Teekonna esimese osa läbis ta kiirusega 240 km tunnis. Teekonna teisel osal oli tuul vastu, mistõttu lennuki kiirus oli 160 km tunnis. Kui kaua sõitis lennuk kummagi kiirusega?

819. Pedakas ostis 20 m³ kase- ja lepapuid. Kasepuudest maksis ta 4 rubla ruumimeetrist, lepapuudest 3 rubla ruumimeetrist. Kogu ostu eest maksis ta 68 rubla. Kui palju sai ta kase-, kui palju lepapuid?

820. Haridusosakond jaotas 1800 rubla kolme kooli A, B ja C vahel nii, et B sai $\frac{2}{3}$ sellest mis A, ja C kaks korda nii palju kui B. Kui palju sai iga kool?

821. Kui auto kiirust suurendada 15 km võrra tunnis, siis sooritab ta 3 t. 30 min. jooksul sama matka, milleks tal enne kulus 4 t. 40 min. Leia auto esialgne kiirus.

822. Jaota arv 45 kaheks osaks nii, et väiksema osa pool oleks kaks korda suurem kui suurema osa viiendik.

823. Ruudu pindala on võrdne ristküliku pindalaga. Ristküliku laius on 2 m väiksem ja ristküliku pikkus 4 m suurem kui ruudu külg. Kui pikk on ruudu külg?

824. Auto sõitis 225 km 5 t. 15 minutiga. Algul sõitis ta kiirusega 40 km tunnis, siis aga kiirusega 60 km tunnis. Kui kaugel sihtkohast auto kiirust suurendati?

8. ÜLDISEKS KORDAMISEKS.

825. Leia 8,4% avaldise $3\frac{1}{6}+2\frac{3}{4}:1\frac{1}{2}$ väärtusest.

826. Mitu protsenti moodustab avaldise $2\frac{3}{8}-3\cdot0{,}75$ väärtus avaldise $2\frac{3}{8}+3\cdot0{,}75$ väärtusest?

827. Leia arv, millest 17% võrdub avaldise $1{,}45-0{,}25:\frac{5}{12}$ väärtusega.

828. Mitu protsenti moodustab arvude 5 ja 7 ruutude summa samade arvude summa ruudust?

829. Arvuta avaldise väärtus.

a) $4{,}2-3\frac{3}{4}\cdot(5{,}4-4\frac{1}{3})$

b) $4\frac{3}{8}:(6{,}5-2{,}2\cdot1\frac{4}{11})$

c) $\dfrac{3+4{,}2:0{,}1}{\left(1:0{,}3-2\frac{1}{3}\right)\cdot0{,}3125}$

d) $\dfrac{(18{,}305:7-0{,}38:4)\cdot(6{,}35+4{,}65)}{28{,}08:6+7{,}38:9}$

830. Leia võrde tundmatu liige.

a) $x:12=4\frac{3}{4}:7\frac{1}{8}$

b) $3\frac{1}{2}:0{,}4=x:1\frac{1}{7}$

c) $1\frac{7}{8}:1{,}5=x:0{,}24$

d) $0{,}8:x=4\frac{2}{3}:\frac{5}{6}$

831. Kolmepäevasest automatkast osavõtjad sõitsid esimesel päeval 30% kogu teekonnast, teisel päeval $\frac{3}{8}$ ülejäänud teeosast ja kolmandal päeval viimased 189 km. Kui pikk oli teekond?

832. Kinoetendusel oli õpilasi kolmest koolist võrdeliselt arvudega $2\frac{1}{3}$, $1\frac{3}{4}$ ja $1\frac{1}{6}$. Mitu õpilast oli igast koolist, kui esimesest ja teisest koolist oli neid kokku 343?

833. Kolhoosil oli 1. oktoobril sügiskündi teha veel 630 ha. Sellest künti oktoobrikuu esimesel poolel 23% ja sama kuu teisel poolel $\frac{8}{11}$ ülejäänud pindalast. Mitu hektarit jäi künda novembrikuuks?

834. 31. oktoobril 1959. aastal saavutas nõukogude lendur G. Mossolov ühe turboreaktiivmootoriga lennukil E-66 keskmiseks kiiruseks ühel lennulõigul 2504 kilomeetrit tunnis. Kui kaua vältab sellise kiirusega reis ümber Maa (Maa ümbermõõt on 40 000 km)?

835. Mitu pööret minutis peab tegema veduriratas, mille ümbermõõt on 5,18 m, et rongi kiirus oleks 60 km tunnis?

836. On vaja tapeetida 6,5 m pikkune, 4 m laiune ja 3 m kõrgune tuba. Toal on uks mõõtmetega 2,5 m$\times$1 m ja kaks akent mõõtmetega 2 m$\times$1 m. Seina ülemine osa vastu lage jääb 0,35 m kõrguselt tapeetimata.

Mitu rulli tapeeti on vaja osta, kui igas rullis on tapeeti 12 meetrit ja tapeedi laius on 0,5 m?

837. Lihtsusta avaldised.

a) $(3x-4)(3x+4)-(3x-4)^2+32$

b) $(2a+0{,}3b)(2a-0{,}3b)-(2a+0{,}3b)^2+1{,}2ab$

c) $(3a-1)^2-5(a+2)(a-2)-2a(2a+3)$

d) $(2a-1)^3-(2a+1)^3$

e) $(3x-2a)^3-(3x+2a)(9x^2-6ax+4a^2)$

838. a) Missuguseid nurki nimetatakse kõrvunurkadeks? b) Missuguseid nurki nimetatakse tippnurkadeks?

839. Missugused on kahe sirge paralleelsuse tunnused?

840. Arvuta kumera kaheksanurga sisenurkade summa. Kui suur on sama kaheksanurga välisnurkade summa?

841. Arvuta kõik nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui kahe lähisnurga summa on 217° ja samade nurkade vahe on 39°.

842. Sirgete s ja t lõikamisel sirgega u (joon. 21) tekkis kaks lähisnurka α' ja δ, millede summa oli 234°. Kui suured on nurgad, mis tekivad sirgete s ja t lõikumisel?

843. Arvuta korrapärase viisteistnurga välisnurk ja sisenurk.

844. Tõesta, et rombi pindala võrdub tema diagonaalide poole korrutisega.

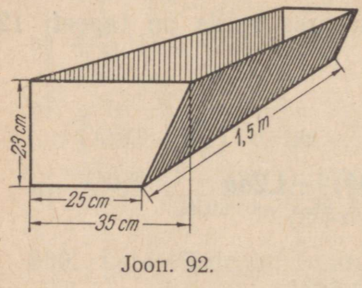
845. Avalda täisnurkse trapetsi pindala, kui tema alused on $x+2$ ja $3x-4$ ning lühem haar on $2x+1$.

846. Leia hulkliikmete jagatis.

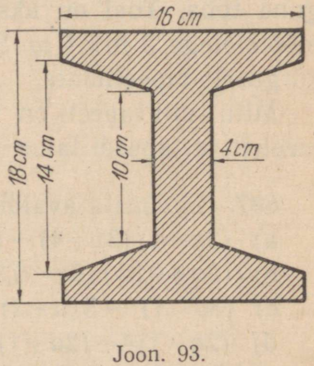
a) $(a^6+2a^5+a^4):(a^2+a)$

b) $(x^5+x^3y^3+x^2y^2+y^5):(x^3+y^2)$

847. a) Mitu pange vett mahutab joonisel 92 kujutatud küna, kui pange mahub 14 liitrit?



Joon. 92.



Joon. 93.

b) Kui palju kaalub 3,8 m pikkune raudtala, mille ristlõige on kujutatud joonisel 93?

c) Mitu kuupmeetrit mulda sisaldab raudteetammi jooksev kilomeeter, kui tammi ristlõige on võrdhaarne trapets, mille lühem alus on 6 m, kõrgus 2,4 m ja haara ning pikema aluse vaheline nurk 45°?

d) Kanali ristlõige on võrdhaarne trapets, mille alused on 4 m ja 2 m, kõrgus 1,8 m. Mitu töötundi kulus ekskavaatoril selle kaevamiseks, kui ekskavaatori tootlikkus antud pinnase puhul oli 78 kuupmeetrit tunnis ja kanali pikkus on 1,2 km?

848. Arvu a jagamisel arvuga b saadi jagatiseks täisarv q ja jäägiks r. Avalda

1) arv a arvude b, q ja r kaudu;
2) arv b arvude a, q ja r kaudu;
3) arv q arvude a, b ja r kaudu;
4) arv r arvude a, b ja q kaudu.

Sõnasta seos, mis näitab, kuidas jagatav avaldub jagaja, jagatise ja jäägi kaudu.

849. Kahe arvu summa on 33. Kui suurem nendest arvudest jagada väiksemaga, siis saame jagatiseks 4 ja jäägiks 3. Leia need arvud.

850. Taanda murrud.

a) $\frac{a^2-ab}{a^2-b^2}$ b) $\frac{3x-3}{x^2-2x+1}$

c) $\frac{7a+7}{a^2+2a+1}$ d) $\frac{x^2-1}{ax-a}$

e) $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}$ f) $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

851. Lihtsusta avaldised.

a) $\frac{5x-3}{15}+\frac{3x-5}{10}$ b) $\frac{2a+5}{8}+\frac{3a-7}{12}$

c) $\frac{a-1}{4}+\frac{2a-3}{6}-\frac{3a+1}{9}$ d) $\frac{3x-7}{12}-\frac{2x-1}{16}-\frac{x-3}{18}$

e) $\frac{4x}{1-x^2}+\frac{2}{x}-\frac{2}{x+x^2}$ f) $x-\frac{x^2}{x-1}-\frac{x}{x+1}$

g) $\frac{5-3x}{x^2-9}+\frac{5}{x^2-3x}$ h) $a+\frac{a}{a-1}-\frac{a^2}{a+1}$

i) $\frac{2x-5}{2x^2+5x}-\frac{2x+5}{2x^2-5x}+\frac{40}{4x^2-25}$

852. Kahe arvu summa on 95. Samade arvude vahe on 3 korda väiksem väiksemast liidetavast. Leia need arvud.

853. Kahe arvu summa on 96. Kui väiksemat liidetavat suurendada 6 võrra, suuremat aga niisama palju vähendada, siis saame võrdsed arvud. Leia need arvud.

854. Õhk sisaldab ümmarguselt 20% hapnikku ja 80% lämmastikku. Kui palju hapnikku ja kui palju lämmastikku on teie klassiruumis?

855. Haudeaparaati paigutati 240 muna. Nendest munadest saadi 211 tibu. Mitu protsenti see on?

856. Tehas valmistas 223 masinat, täites sellega plaani 105-protsendiliselt. Mitu masinat nägi ette plaan?

857. On vaja valada 65-millimeetrise läbimõõduga alumiiniumvardaid. On teada, et vedel alumiinium tõmbub jahtumisel kokku 1,8%. Kui suur peab olema valuvormi läbimõõt?

858. Trapetsikujulise põllu rööbiti asetsevate külgede pikkused on 365 m ja 462 m, nende külgede kaugus üksteisest on 221 m. Sellel põllul kasvatati rukist, mille saak oli keskmiselt 21 ts hektarilt. Kui palju jahu ja kliisid saab sellest rukkist, kui jahvatamisel saab teradest keskmiselt 85% jahu ja 13% kliisid?

859. Mitu kilogrammi liha võeti suitsutamiseks, kui saadud suitsuliha kaalus 18,6 kg ja kaalukadu suitsutamisel on 12,3%?

860. On vaja valmistada 710 kg pronksi, mis sisaldaks 87% vaske ja 13% tina. Kui palju on selleks vaja võtta vaske, kui palju tina?

861. Kui palju vaske ja tsinki on vaja võtta 150 kg messingi valmistamiseks, kui selles tsingi kaal peab olema 65% vase kaalust?

862. Kolmnurga üks külg on teisest kaks korda pikem ja kolmas külg esimesest küljest 16 cm pikem. Kolmnurga ümbermõõt on 108 cm. Kui pikad on kolmnurga küljed?

863. Millised on kolmnurga pikima külje tõkked, kui sama kolmnurga kaks lühemat külge on 17,8 cm ja 24,6 cm?

864. Klassis on 15 poissi ja 21 tüdrukut. Mitme protsendi võrra on tüdrukuid rohkem kui poisse? Mitme protsendi võrra on poisse vähem kui tüdrukuid?

865. a) Arv x on 25% arvust y. Mitu protsenti on arv y arvust x?

b) Arv u on 64% arvust v. Mitu protsenti on arv v arvust u?

866. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on teisest 25% võrra suurem. Kui suured on need nurgad?

867. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on 30% võrra suurem kui tipunurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?

868. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on 40% võrra suurem kui alusnurk. Kui suured on kolmnurga nurgad?

869. Võrdhaarse trapetsi pikem alus on 4 dm, haar 1 dm ja nende vaheline nurk 60°. Leia lühem alus.

870. Kahe arvu summa on 145,6. Üks arv moodustab 0,12 teisest arvust. Leia need arvud.

871. Krohvija koos oma õpilasega sai 30 rbl. 80 kop. töötasu. Krohvija töötas 8 päeva, õpilane aga ainult 35% sellest ajast. Krohvija päevapalk oli õpilase päevapalgast 40% kõrgem. Arvuta krohvija päevapalk ja õpilase päevapalk.

872. a) Nimeta neli kolmnurkade võrdsuse tunnust.

b) Joonesta võrdhaarne kolmnurk, mille haar on 4,5 cm ja alusnurk on 45°.

c) Joonesta kolmnurk, millest on antud kaks külge ja suurema külje vastasnurk.

873. Tõesta, et rombi diagonaalid jaotavad rombi neljaks võrdseks kolmnurgaks. Mis liiki need kolmnurgad on?

874. Rombi diagonaal moodustab ühe küljega nurga 37°40′. Leia rombi kõik nurgad.

875. Tõesta, et rööpkülik, mille diagonaalid on teineteisega risti, on romb.

876. Ehita kolmnurk, mille küljed on 4 cm, 6 cm ja 7 cm, ning leia punkt, mis asetseb võrdsetel kaugustel kõige pikema külje otspunktidest ja võrdsetel kaugustel kõige väiksema nurga haaradest.

877. Ehita võrdhaarne trapets, mille pikem alus on 6 cm, kõrgus 2 cm ja haar 2,5 cm.

878. Ehita romb, mille külg on 3,5 cm ja üks diagonaal on 2 cm.

879. Kuidas tuleb ümardada
a) ligikaudsete arvude summat ja vahet?
b) ligikaudsete arvude korrutist ja jagatist?

880. Kolmas Nõukogude kosmoserakett, mis saadeti välja 4. oktoobril 1959. a., oli sama päeva kella 18-ks eemaldunud Maast 145 000 kilomeetri kaugusele. 5. oktoobril kella 12-ks oli sama kosmoserakett eemaldunud Maast 248 000 kilomeetri kaugusele. Kui suur oli kolmanda Nõukogude kosmoseraketi keskmine kiirus sekundis sellel vahemaal?

881. Arvuta, rakendades valemeid.

a) 83^2 $7{,}1^2$ $2{,}05^2$ $(-5{,}01)^2$ $(3\frac{1}{3})^2$
b) $97 \cdot 103$ $93 \cdot 107$ $85 \cdot 115$ $2{,}7 \cdot 3{,}3$
c) $78{,}7^2-21{,}3^2$ $9{,}816^2-0{,}184^2$ $1{,}27^2-8{,}73^2$

882. Arvuta, rakendades valemeid.

a) 68^2 $5{,}02^2$ $9{,}99^2$ $(10{,}1)^2$ $(-8\frac{1}{8})^2$
b) $96 \cdot 104$ $94 \cdot 106$ $84 \cdot 116$ $2{,}6 \cdot 3{,}4$
c) $98{,}2^2-1{,}8^2$ $6{,}91^2-3{,}09^2$ $(7\frac{2}{3})^2-(2\frac{1}{3})^2$

883. Mis arvu peab liitma kaksliikmega

$$64x^2-48x,$$

et saada kaksliikme ruut?

884. Mis arvu peab liitma kolmliikmega

$$9x^2+24x+25,$$

et saada kaksliikme ruut?

885. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $a^3+b^3+3(a+b)$ b) $2a^2-4a+2$
c) a^3+a^2-2a-2 d) $216a^3+1$
e) $3a^3-20bc^2-5b+12a^3c^2$

886. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $a^3+2a^2b+ab^2$ b) $a^3+a^2c-ac^2-c^3$

c) a^3-a^2+a+1 d) $64a^6-x^6$

e) $12b+20a^2b-15a-16ab^2$

887. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $a^2b-2ab^2+b^3$ b) $a^3-a^2b-ab^2+b^3$

c) $a^3b+4a^2b^2+4ab^3$ d) a^6-729

e) $0{,}15a^2-0{,}21bc-0{,}35ab+0{,}09ac$

888. Lahuta hulkliige tegureiks.

a) $4x^2+12xy+9y^2-25$ b) $9a^2-24ab+16b^2-36$

c) $81-25u^2+20uv-4v^2$ d) $49-36x^2-24ax-4a^2$

889. Näita, et olgu x väärtus missugune tahes, avaldise

$$(2x-3)\,(7-x)+(2x-9)\,(x-4)$$

väärtus on ikka 15.

890. Avalda valemist

a) $s=vt+S_0$ suurus t;

b) $Q=cm\,(t_2-t_1)$ suurus t_2;

c) $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ suurus c;

d) $S=\frac{a+b}{2}h$ suurus a;

e) $u=\frac{ax+by}{3}$ suurus y.

891. Leia võrrandi lahend täpsusega 0,1.

a) $(2-3x)x+3(x-7)\,(x+1)=-42$

b) $7(x-3)-(x-3)^2+(x-2)\,(x+2)=23$

c) $2(x-3)\,(x+4)-(x-3)\,(x+3)-(x+4)^2=-100$

892. Leia võrrandi lahend täpsusega 0,01.

a) $(x-1)\,(3x+2)-3(x-7)\,(x-2)=0$

b) $(12-x)\,(3+x)-0{,}5(3+2x)\,(1-x)=48$

893. Leia võrrandi lahend täpsusega 0,001.

a) $2(x-18)(x+3)-2x^2=-110{,}2$

b) $(8x-3)(x+1)-2x(4x-3)=-1{,}8$

894. Tallinn—Pihkva rong sõidab Tallinnast Aakre jaamani 6 tunniga. Kui see rong sõidaks tunnis 8 km rohkem, siis läbiks ta sama tee 5 tunniga. Mitu kilomeetrit on Tallinnast Aakreni?

895. Jalgrattur, kes väljus punktist A punkti B poole, sõitis 12 km tunnis, kohtas poolel teel veoautot, mis liikus kiirusega 28 km tunnis ja oli väljunud punktist B 2 tundi hiljem kui jalgrattur punktist A. Arvuta punktide A ja B vaheline kaugus.

896. Lihtsusta avaldis

$$\frac{m}{n}\left(n+1+\frac{2n}{m}\right)-\left(2m+\frac{m^2+n^2}{n}\right):\left(m+\frac{n^2}{m+2n}\right).$$

897. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{1+x}{1-x}-\frac{1-x}{1+x}+\frac{4x^2}{x^2-1}\right)\cdot\frac{x+1}{2x}.$$

898. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}-\frac{4a}{a^2-b^2}\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{4b-4b^2}.$$

899. Lihtsusta avaldis

$$\left(a-\frac{b+a}{1+ab}\right):\left[1-\frac{a(b-1)}{1+ab}\right].$$

900. Lihtsusta avaldis

$$\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right):\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right):\left(1+\frac{y}{x}\right).$$

SISUKORD.

Этверк Элмар Германович
Линц Альфред Юханович
Вихман Арнольд Юрьевич
МАТЕМАТИКА ДЛЯ VII КЛ.
На эстонском языке
Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10
*
Toimetaja K. Kallaste
Tehniline toimetaja I. Vahtre
Korrektor I. Tamm

Ladumisele antud 13. II 1961. Trükkimisele antud 30. III 1961. Paber 60×90, $^{1}/_{16}$. Trükipoognaid 12,75. Arvutuspoognaid 9,13. Trükiarv 14 000. Tellimise nr. 1606. Hans Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. III.

Hind 19 kop.

6—6

19 kop.