



Esitatud Riigikassamiskomisjoni

22. X. 1949.

A. Liit.

Riigikassamiskomisjoni esimees
Matemaatika-loodusteadus-
konna.

Waga

Mat.-loodusteaduskonna dekaan

RENE LOSKIT

B.G. Galerkin'i variatsiooniteoreetiline meetod
ja selle rakendusi tehnilises mehhaanikas.

Diplomitöö

esitatud Tartu R. Ülikooli matemaatika-loodus -
teaduskonnale oktoobri kuul 1949.a.

Tartu, 1949.

B.G. Galerkin'i variatsiooniteoreetiline meetod ja selle rakendusi tehnilises mehhaanikas.

1. Sissejuhatus.

Paljud mehhaanika probleemid, nende seas mitmed tehniliselt eriti tähtsad probleemid viivad diferentsiaal-võrrandele, ei ole ^{millele} leitud täpsat lahendit. See on maksev eriti mehhaanikas ja tehnilises mehhaanikas esinevate rajaväärtuste probleemide puhul. Rajaväärtuste probleemide täpne lahendamine ei tekita raskusi ainult vähestel elementaarsemail juhtumel, muidu aga peaaegu alati. Seejuures rajaväärtuste probleemide lahendamisel kerkivad raskused ei seisa mitte selles, et üldse leida lahendeid vastavatele diferentsiaal-võrranditele, vaid eeskätt selles, et kohandada neid lahendeid rajatingimustele, mis tavaliselt õnnestub vaid ligikaudu. Seepärast tuleb sageli rahulduda probleemi vaid lähendusliku lahendiga.

Rajaväärtuste probleemide lähenduslahendeid saab lähendusmeetoditega, mida võib jaotada kahte suurte rühma:

a) variatsioonmeetodid, mis annavad otsitava funktsiooni jaoks lähendusliku avaldise;

b) numbrilised ja graafilised meetodid, mis annavad otsitava funktsiooni kas arvuliste väärtuste tabeliga või graafikuga.

Esimesse rühma kuuluvad Galerkin'i, Ritz'i ja Trefftz'i meetodid ning nende teisendid; teise rühma kuulub eelkõige lõplikude vahede meetod ja rida graafilisi meetodeid.

Variatsioonmeetodeid on arendatud viimase kolmekümne aasta jooksul peamiselt nõukogude õpetlaste töös; nimetagem siin eelkõige nimesid nagu: B.G. Galerkin, L.S. Leibenzon, A.N. Dinnik,

P. Papkovits ja N.M. Krölov.

Käesolevas töös vaatleme Galerkin'i variatsiooniteoreetilist meetodit ja selle rakendusi tehnilises mehhaanikas.

2. Ajaloolisi märkmeid.

Variatsioonmeetodite esmakordseks rakendajaks tuleb lugeda füüsik lord Rayleigh'd. Oma klassilises teoses heli teooria kohta Rayleigh lähtus keelte, varraste ja plaatide võnkumiste uurimisel energia jäävuse seadusest. Võttes keele võnkumisevõrrandi ligikaudseks lahendiks avaldise

$$w = X \cos pt = \left[1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right] \cos pt$$

leidis ta, et $n = 1$ puhul võnkeperiood on 10% väiksem tõelisest, $n = 2$ puhul aga kõigest 0,64% väiksem tõelisest.

Rayleigh' meetodit arendas edasi W. Ritz. Oma teostes^(xx) Ritz vaatleb kontuuril kinnitatud ristkülikukujuliste plaatide painet ja nende plaatide võnkumisi; ta näitab, et nende ülesannete lähenduslikku lahendamist võib läbi viia teatava määratud integraali ekstremaalseks muutmise, kasutamata Euler-Lagrange'i võrrandi lahendamist. Tuleb leida funktsioon $w(x)$, mis teeb integraali

$$J = \int_{(1)} F(x, w, w', \dots) dx \quad (1)$$

minimumiks. Võttes⁽¹⁾ $w(x)$ lähenduslikult agregaadikujul

$$w(x) = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x), \quad (2)$$

kus a_i on esialgu määratud^{ma} parameetrid ja $\varphi_i(x)$ - kujutamiskordsfunktsioonid, mis vastavad antud ülesande rajatingimustele, ja asetades selle agregaadikujulise integraalisse, saame rea avaldise

x) Venekeelses tõlkes: Пенн, Теория збыва, м. I, изд. с. анн., 1940.

xx) Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathem. Physik. Journ. für r. und angew. Mathem. Bd. 135, 1908.

Ritz W., Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte u.s.w. Annalen der Physik, Bd. 28, 1909.

tundmatute parameetrite a_i -de määramiseks. Selleks et integraal] saaks ekstreemumiks on vaja iga parameetri järgi võetud tule-
tis võrrutada nulliga:

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial J}{\partial a_n} = 0$$

ja lahendada need n lineaarset võrrandit tundmatute a_i suhtes.

Ritz'i meetodit arendati edasi eeskätt vene õpetlaste poolt. Juba 1910.aastal Timošenko rakendas Ritz'i meetodit ^{painutatud} varras-
te ja plaatide stabiilsuse uurimisel. Võtte seisneb järgmises:

Tähendagu $U = F_1(a_1, a_2, \dots)$ sisemiste tungide energiat ja $T = -P_m \cdot F_2(a_1, a_2, \dots)$ välistungide energiat. Siis süsteemi koguenergia on

$$F_1(a_1, a_2, \dots) - P_m F_2(a_1, a_2, \dots).$$

Et süsteemi potentsiaalse energia suurus on määratud ainult meelevaldse konstandini, siis saab selle ^{konstandi} valida ikka nii, et tasakaalu seisundis koguenergia oleks null. Et tasakaalu seisundis energia on ekstremaalne, siis üleminekul naaberseisundis-
se energia muut on null. Järelikult kõigi a_i jaoks, mis nii vähe kui tahame erinevad a_i -dest tasakaaluasendis. ^{$F_1 - P_m F_2 = 0$} Seega

$$P_m = \frac{F_1(a_1, a_2, \dots, a_n)}{F_2(a_1, a_2, \dots, a_n)} \quad (3)$$

Kuna F_1 ja F_2 on parameetrite a_i homogeensed funktsioonid, siis saab murdu avaldada $n-1$ muutuja funktsioonina; näiteks

tähistades $\frac{a_2}{a_1} = z_1, \quad \frac{a_3}{a_1} = z_2$ jne., saame, et

$$P_m = \frac{F_1(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})}{F_2(z_1, z_2, \dots, z_{n-1})}$$

Parameetrid z_1, z_2, \dots tuleb nüüd leida nii, et P_m omaks minimaalset väärtust. Selleks tuleb lahendada süsteem $n-1$ võrrandist:

$$\frac{\partial P_m}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial P_m}{\partial z_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial P_m}{\partial z_{n-1}} = 0$$

Lähendfunktsioonide leidmisel Rayleigh, Ritz ja Timošenko lähtusid potentsiaalse energia ekstremaalsuse nõudest, jättes kasutamata seejuures tasakaalu määravaid diferentsiaalvõrrandeid. 1915.a. andis B.G.Galerkin uue meetodi tehnilise mehhaanika probleemide lähenduslikuks lahendamiseks. Galerkin rakendas uut võtet eeskätt varraste ja plaatide paindumise ja painutatud varraste ja plaatide stabiilsuse uurimiseks.

Galerkini meetodi juurde jõuame järgmise probleemi seadega. Olgu $a \leq x \leq b$ kinnine vahemik. Nõutagu selles vahemikus määratud diferentsiaalvõrrandi

$$L(x, w, w', w'', \dots) = 0 \quad (4)$$

lahendit, mis rahuldab antud rajatingimusi.

Selle rajaväärtusülesande ligikaudseks lahendamiseks anname lähendfunktsiooni w agregaadi kujul

$$w = a_1 \varphi_1(x) + a_2 \varphi_2(x) + \dots + a_n \varphi_n(x) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i(x), \quad (5)$$

kus $\varphi_i(x)$ on lineaarselt sõltumatud funktsioonid, mis rahuldavad rajatingimusi ja a_i on tundmatud parameetrid. Need parameetrid määrame tingimustest:

$$\int_a^b L(x, w, w', w'', \dots) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

mis kujutavad a_i suhtes lineaarseid võrrandeid.

Galerkin'il õnnestus oma meetodit rakendada mitte ainult tasakaalu ja stabiilsuse küsimuste uurimisel, vaid ka võnkumisülesannete lahendamisel. Galerkin'i meetodit rakendati suure eduga paljude probleemide lahendamiseks; näit. kasutas seda Lõskov lennukitiiva vibreerimisprobleemi uurimisel.

Ühes oma töös ^{x)} esitas Trefftz uue võtte ekstremaalsete ülesannete lahendamiseks. Ta eeldas, et agregaadis (5) funktsioonid $\varphi_i(x)$ on valitud niiviisi, et nad on diferentsiaalvõrrandi (4) erilahenditeks, kuid ei tarvitse seejuures rahuldada raja-

x) Trefftz E., Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. Verh. des 2 Int. Kongr. für technische Mechanik. Zürich, 1926.

tingimusi. Otsitavad parameetrid määratakse siis tingimusest, et operaatorfunktsioon L_s omaks nulli suhtes vähima ruut-
hälbe, st. nii, et oleks

$$\int_a^b L_s(x, w, w', \dots) \frac{\partial L_s}{\partial a_n} dx = 0 \quad (n=1, 2, \dots, n)$$

Saadud avaldis annab parameetrite a_i määramiseks n võrrandist koosneva süsteemi.

Trefftz'i meetodit on akadeemik Leibenzon tagajärjekalt rakendanud lennuasjanduse probleemide lahendamiseks.

Peale eespoolnimetatute on tegelenud variatsioonmeetodite edasiarendamisega Nõukogude Liidu teadlased H.M.Krölov, N.N.Borgoljubov, L.B. Kantorovitš ja mitmed teised.

3. Galerkin'i meetod.

Galerkin esitades oma töös "Сметрени и инаемени" uue meetodi ehitusmehhaanika ülesannete lahendamiseks, vastandas seda Ritz'i meetodile. Esitame eespoolnimetatud tööst mõningaid tsitaate (vabas tõlkes):

"Olgu antud ristkülikukujuline plaat, mis toetub vabalt tugelele ja kannab koormist $p=f(x,y)$. Esitame elastse pinna tema võrrandiga

$$w = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (b)$$

Koordinaatide algus on võetud ühte tippu ja koordinaatide teljed on suunatud ristküliku külgi mööda.

~~Võrrand~~ ^{Avaldis} (b) rahuldab rajatingimusi: $w=0$ kui $x=0, y=0$, samuti kui $x=a, y=b$; peale selle $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$ kui $x=0$ ja $x=a$; samuti $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0$ kui $y=0$ ja $y=b$.

Asetades avaldise w painutatud plaadi elastse pinna diferentsiaalvõrrandisse:

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2-1)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f(x,y) \quad (c)$$

saame

$$\frac{m^2 E h^3 \pi^4}{12(m^2-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = f(x,y). \quad (d)$$

Üldisel juhul w silmnähtavalt ei rahulda võrrandit ja ~~w~~ tuleb arvesse ainult lähenduslik^{ina} lahend. Kordajate määramiseks korrutame võrrandi (d) mõlemad pooled avaldisega $\sin(\kappa\pi x/a) \sin(n\pi y/b) dx dy$ ja integreerime rajades 0-st kuni a -ni ja 0 kuni b -ni; siis saame

$$\frac{m^2 E h^3 \pi^4}{12(m^2 - 1)} A_{kn} \frac{ab}{4} \left(\frac{\kappa^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = \iint_0^a \iint_0^b f(x, y) \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy = T_{kn} \quad (e)$$

millest

$$A_{kn} = \frac{48(m^2 - 1) a^3 b^3}{m^2 E h^3} \cdot \frac{T_{kn}}{(\kappa^2 b^2 + n^2 a^2)^2}$$

Võrrandi (b) puhul tuleb märkida, et

$$w = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{kn} = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

kus

$$w_{kn} = A_{kn} \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

s.t. aga, et elastne pind saadakse rea elastsete pindade superponeerimise teel.

Võrrandi (e) parem pool

$$T_{kn} = \iint_0^a \iint_0^b f(x, y) \sin \frac{\kappa\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy$$

kujutab plaadi w_{kn} -le vastava elastse pinna deformeerimisel mõjuvate välistungide tööd $A_{kn} = 1$ juures."

"Üldistades seda võtet.

Olgu plaadi kõverdunud pinna kjuu antud võrrandiga

$$w = \sum A_n \varphi_n(x, y) \quad (1)$$

kus iga liige $\varphi_n(x, y)$ rahuldab rajatingimusi. Asetades w avaldise võrrandisse

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = f(x, y, w) \quad (2)$$

leiame

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \sum A_n \left(\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial y^4} \right) = f(x, y).$$

Korrutades mõlemad võrrandi pooled liikmega $\varphi_n dx dy$ ja integreerides üle kogu plaadi pinna, saame n võrrandit:

$$\frac{m^2 E h^3}{12(m^2 - 1)} \sum A_n \iint \left(\frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_n}{\partial y^4} \right) \varphi_n dx dy = \iint \phi(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Seda meetodit võib rakendada nii elastsete võnkumiste küsimuste käsitlemisel kui ka varraste ja plaatide staatika küsimuste lahendamisel."

Vaatleme Galerkin'i variatsiooniteoreetilist meetodit üldisemalt.

Olgu antud integraal

$$J = \iiint_{(V)} F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z) dx dy dz. \quad (I)$$

Nõuame, et ta omaks minimaalset väärtust. V on pinnaga S piiratud ruumosa, w - otsitav funktsioon muutujates x, y, z . Olgu antud w pinnatükil S_1 . Eeldame, et F omab pidevaid osatuletisi kuni kolmanda järguni (viimased kaasa arvatud) ja et w_x, w_y, w_z on pidevad. Integraali I variatsioon avaldub siis järgmiselt:

$$\delta J = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial F}{\partial w} \delta w + \frac{\partial F}{\partial w_x} \delta w_x + \frac{\partial F}{\partial w_y} \delta w_y + \frac{\partial F}{\partial w_z} \delta w_z \right) dx dy dz.$$

Teisendades võrrandi paremal pool kolm viimast liiget Ostrogradski - Gaussi valemi järgi, leiame, et

$$\begin{aligned} \delta J = & \iiint_{(V)} L \delta w dx dy dz + \iint_{(S_2)} \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} \cos(\alpha_x) + \frac{\partial F}{\partial w_y} \cos(\alpha_y) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial F}{\partial w_z} \cos(\alpha_z) \right] \delta w d\sigma. \quad (S = S_1 + S_2) \end{aligned} \quad (II)$$

L -ga on ^{siin} tähistatud Euleri diferentsiaalvõrrandi vasakut osa:

$$L = \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial w_z} \right). \quad (III)$$

Minimumi jaoks tarvilik tingimus on:

$$\delta J = 0. \quad (IV)$$

Esitame lähislahendi kujul

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{i=n} c_i \varphi_i(x, y, z), \quad (V)$$

kus $w_0(x, y, z)$ rahuldab pinnal S_1 samu tingimusi, mis otsitav funktsioon $w(x, y, z) - q_i$; e_i on määramata kordajad ja $\varphi_i(x, y, z)$ on lähisfunktsioonid, mis rahuldavad peale diferentseeritavuse ja lineaarselt sõltumatuse tingimust ka veel nõuet:

kun $\varphi_i(x, y, z) = 0$ pinnal S_1 (VII). Siis

$$\delta w = \sum_{i=1}^{i=n} \delta e_i \varphi_i(x, y, z) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (VII)$$

Asetades avaldise (VII) võrrandisse (IV), saame

$$\sum_{i=1}^{i=n} \delta e_i \left\{ \iiint_{(V)} L \varphi_i dx dy dz + \iint_{(S_2)} \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} \cos(\alpha x) + \frac{\partial F}{\partial w_y} \cos(\alpha y) + \frac{\partial F}{\partial w_z} \cos(\alpha z) \right] \varphi_i d\sigma \right\} = 0 \quad (VIII)$$

Variatsiooni δe_i meelevaldsust silmaspidades

saame n võrrandist koosneva süsteemi

$$\iiint_{(V)} L \varphi_i dx dy dz + \iint_{S_2} \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} \cos(\alpha x) + \frac{\partial F}{\partial w_y} \cos(\alpha y) + \frac{\partial F}{\partial w_z} \cos(\alpha z) \right] \varphi_i d\sigma = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (IX)$$

Saadud n võrrandist (IX), mis paljudes mehhaanika ülesannetes on lineaarsed, võime määrata tundmatud kordajad e_i ; ($i=1, 2, \dots, n$).

Võrrandit (IX) nimetame Galerkin'i variatsioonvõrrandiks.

Erijuhul, kui avaldis (V) rahuldab rajatingimusi kogu pinnal S , Galerkini võrrand (IX) kujuneb järgmiseks

$$\iiint_{(V)} L \varphi_i dx dy dz = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (IX')$$

Kui ülesande lähislahend valida nii, et avaldis (V) on küll Euleri võrrandi $L=0$ lahendiks, ei rahulda aga rajatingimusi, siis jõuame võrrandsüsteemi

$$\iint_{S_2} \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} \cos(\alpha x) + \frac{\partial F}{\partial w_y} \cos(\alpha y) + \frac{\partial F}{\partial w_z} \cos(\alpha z) \right] \varphi_i d\sigma = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (IX'')$$

juurde.

4. Galerkin'i ja Ritz'i meetodite vaheline seos.

Kui variatsioonülesannet lahendada ükskord Ritz'i meetodiga ja teinekord Galerkin'i meetodiga ühede ja samade koordinaat-funktsioonide abil, siis saame samad tulemused. Veendume tulemuste ekvivalentsuses.

Otsime Ritz'i meetodiga integraali

$$J = \iiint_{(V)} F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z) dx dy dz \quad (1)$$

miinimumiks tegevat funktsiooni, võttes variatsioonülesande lähislahendi kujul

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x, y, z), \quad (2)$$

kus w_0 ja φ_i tähendavad sama, mis varemalt 3. punktis.

Ritz'i võrrandid avalduvad alljärgnevalt:

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \iiint_{(V)} F(x, y, z, w, w_x, w_y, w_z) dx dy dz = 0 \quad (3)$$

(i = 1, 2, \dots, n)

ehk

$$\frac{\partial}{\partial c_k} \iiint_{(V)} F dx dy dz = \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial F}{\partial w} \varphi_k + \frac{\partial F}{\partial w_x} \varphi_{kx} + \frac{\partial F}{\partial w_y} \varphi_{ky} + \frac{\partial F}{\partial w_z} \varphi_{kz} \right) dx dy dz$$

Teisendades kolm viimast liiget Ostrogradski - Gaussi valemi

järgi saame:

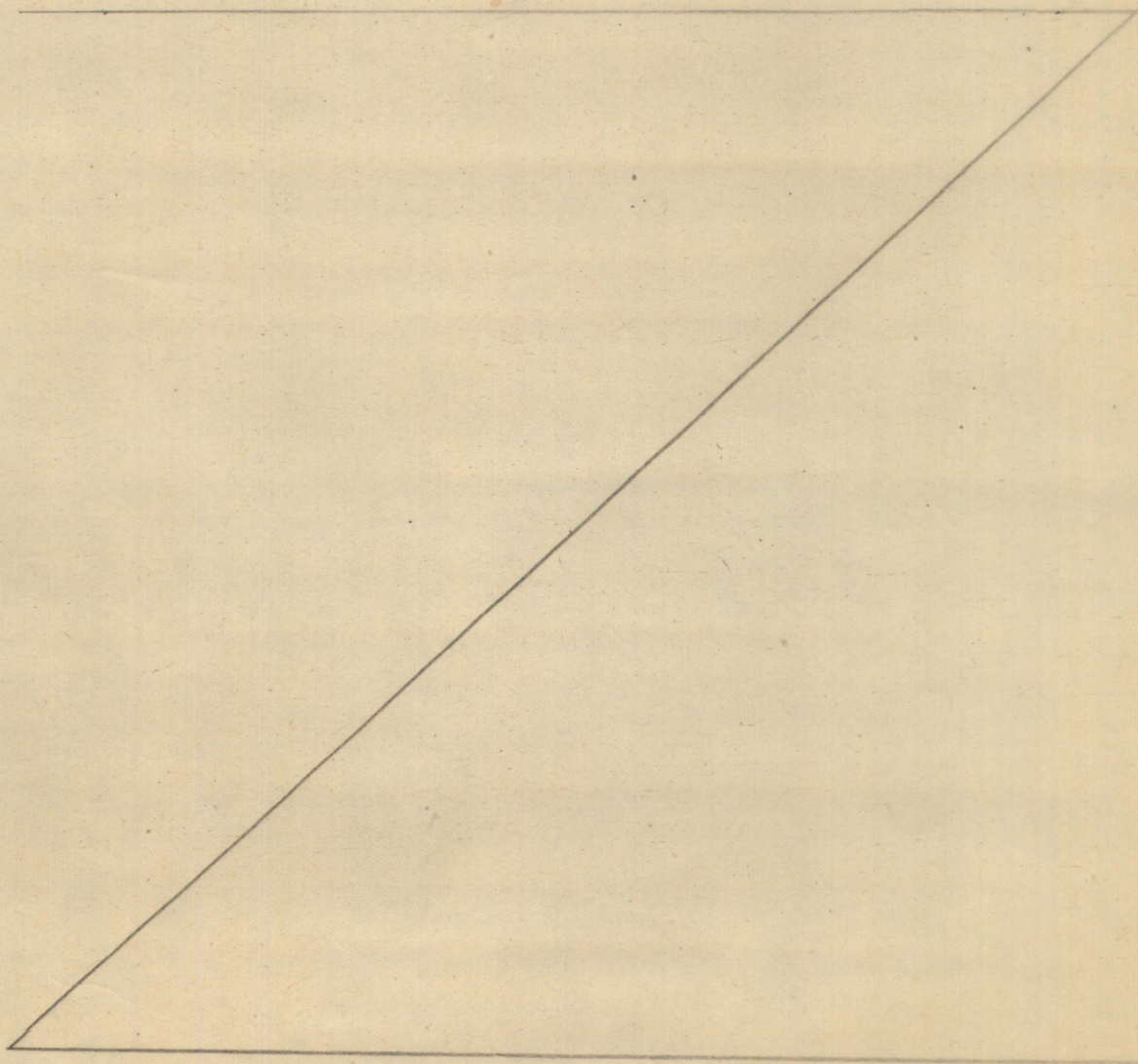
$$\begin{aligned} & \iiint_{(V)} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial w_y} \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial w_z} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ & = \iint_{(S_2)} \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} \cos(nx) + \frac{\partial F}{\partial w_y} \cos(ny) + \frac{\partial F}{\partial w_z} \cos(nz) \right] \varphi_k d\sigma - \\ & - \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial w_z} \right) \right] \varphi_k d\sigma. \end{aligned}$$

Seega:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial c_k} \iiint_{(V)} F d\tau &= \iiint_{(V)} \left[\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial w_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial w_y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial F}{\partial w_z} \right) \right] \varphi_k dx dy dz + \\ & + \iint_{(S_2)} \left[\frac{\partial F}{\partial w_x} \cos(nx) + \frac{\partial F}{\partial w_y} \cos(ny) + \frac{\partial F}{\partial w_z} \cos(nz) \right] \varphi_k d\sigma = 0. \end{aligned}$$

Et kolmekordse integraali märgi all seisvates püstsulgudes leiame Euleri võrrandi vasaku poole L , siis oleme tõepoolest välja jõudnud Galerkin'i võrrandini (\bar{u}).

Galerkin'i meetod on praktiliselt kergemini rakendatav kui Ritz'i meetod. Esimese meetodi puhul oluliselt lihtsustub arvutuslik töö, kuna ta annab lineaarsed võrrandid tundmatute kordajate e_k -de jaoks ja ei määra neid kaudselt ruutvormi kaudu.



5. Galerkini võrrand elastsusteooria ruumiliste ülesannete lähenduslikuks lahendamiseks.

Tuletame Galerkin'i võrrandi elastsusteooria ruumiliste ülesannete lähenduslikuks lahendamiseks lähtudes võimalike nihete printsibist.

Tasakaalu võrrandid nihetes ξ, η, ζ on järgmised :

$$\begin{aligned} \nu \Delta \xi + (\lambda + \nu) \frac{\partial e}{\partial x} + X \rho &= 0 \\ \nu \Delta \eta + (\lambda + \nu) \frac{\partial e}{\partial y} + Y \rho &= 0 \\ \nu \Delta \zeta + (\lambda + \nu) \frac{\partial e}{\partial z} + Z \rho &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Rajatingimused avalduvad kujul:

$$\begin{aligned} p_{nx} &= \lambda e \cos(\eta x) + \nu \frac{\partial e}{\partial n} + \nu \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos(\eta x) + \frac{\partial \eta}{\partial x} \cos(\eta y) + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cos(\eta z) \right] \\ p_{ny} &= \lambda e \cos(\eta y) + \nu \frac{\partial e}{\partial n} + \nu \left[\frac{\partial \xi}{\partial y} \cos(\eta x) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos(\eta y) + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cos(\eta z) \right] \\ p_{nz} &= \lambda e \cos(\eta z) + \nu \frac{\partial e}{\partial n} + \nu \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \cos(\eta x) + \frac{\partial \eta}{\partial z} \cos(\eta y) + \frac{\partial \zeta}{\partial z} \cos(\eta z) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

Anneme ette nihked koordinaatfunktsioonide kaudu:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{i=n} a_i f_i(x, y, z) \\ \eta &= \eta_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{i=n} b_i \varphi_i(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta_0(x, y, z) + \sum_{i=1}^{i=n} c_i \psi_i(x, y, z) \end{aligned} \right\} (3)$$

kusjuures ξ_0, η_0, ζ_0 on nihked pinna S , punktides; kõik funktsioonid f_i, φ_i, ψ_i on aga sellel pinnal nullid ning ülejäänud pinnal rahuldavad ainult diferentseeritavuse ja lineaarselt sõltumatus tingimusi.

Võimalikud nihked valime kujus :

$$f_i(x, y, z) \delta a_i, \quad \varphi_i(x, y, z) \delta b_i, \quad \psi_i(x, y, z) \delta c_i, \quad (4)$$

kus $\delta a_i, \delta b_i, \delta c_i$ on avaldises (3) olevate määramatute korrajate variatsioonid.

Arvutame mass- ja pindtungide töö võimalikkudel nihete.

Võrrandist (1) saame, et

$$\rho X = - \left[\nu \Delta \xi + (\lambda + \nu) \frac{\partial e}{\partial x} \right]:$$

Korrutades viimati saadud avaldise i -nda võimaliku nihke-

ga $f_i(x, y, z) \delta a_i$ ja integreerides üle ruumosa V saame, et

$$\iiint_{(V)} \rho \lambda f_i(x, y, z) \delta a_i dx dy dz = - \iiint_{(V)} [\nu \Delta \xi + (\lambda + \nu) \frac{\partial \xi}{\partial x}] f_i(x, y, z) \delta a_i dx dy dz. \quad (5)$$

Korrutades süsteemi (2) esimest võrrandit i -nda võimaliku nihkega ja integreerides üle kogu pinna, saame, et

$$\iint_{(S_2)} p_{ni} f_i(x, y, z) \delta a_i d\sigma = \iint_{S_2} \left\{ \lambda \varepsilon \cos(\nu x) + \nu \frac{\partial \xi}{\partial n} + \nu \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos(\nu y) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos(\nu z) \right] \right\} f_i(x, y, z) \delta a_i d\sigma. \quad (6)$$

Liites võrdused (5) ja (6) leiamegi Galerkin'i võrrandi

$$\iiint_{(V)} [\nu \Delta \xi + (\lambda + \nu) \frac{\partial \xi}{\partial x}] f_i d\tau = \iint_{S_2} \left\{ \lambda \varepsilon \cos(\nu x) + \nu \frac{\partial \xi}{\partial n} + \nu \left[\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos(\nu x) + \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos(\nu y) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \cos(\nu z) \right] \right\} f_i d\sigma, \quad (7)$$

ülejäänud 2 võrrandit saab tuletada analoogselt. Lisades võrrandi (7) vasakule poolele d'Alembert'i inertstungi, saame Galerkin'i võrrandi elastse keha liikumise jaoks.

6. Galerkin'i meetodi rakendamine plaadi painde uurimisel.

Vaatleme ristkülikukujulist plaati, mis on kinnistatud kogu oma ääre ulatuses ja millele mõjub ühtlaselt jaotatud koormis tugevusega q .

Ülesande rajatingimused on seejuures järgmised:

$$w = 0 \quad \text{kui} \quad x = \pm a \quad \text{ja} \quad y = \pm b$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{kui} \quad x = \pm a \quad \text{ja} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{kui} \quad y = \pm b.$$

Koordinaatfunksiooniks valime polünoomi:

$$w = \frac{L_{11}}{a^4 b^4} X_1 Y_1 + \frac{L_{12}}{a^6 b^4} X_1 Y_2 + \frac{L_{21}}{a^4 b^6} X_2 Y_1 + \frac{L_{22}}{a^6 b^6} X_2 Y_2$$

milles

$$X_1 = x^4 - 2x^2 a^2 + a^4 \quad Y_1 = y^4 - 2y^2 b^2 + b^4$$

$$X_2 = x^6 - 2x^4 a^2 + x^2 a^4 \quad Y_2 = y^6 - 2y^4 b^2 + y^2 b^4$$

Selle valikuga on automaatselt rahuldatud ülesande kõik raja-tingimused.

Ülemannes dimensioonita muutujatele $\bar{x} = \frac{x}{a}$ ja $\bar{y} = \frac{y}{b}$, saame, et

$$\begin{aligned} \bar{X}_1 &= \bar{x}^4 - 2\bar{x}^2 + 1 & \bar{Y}_1 &= \bar{y}^4 - 2\bar{y}^2 + 1 \\ \bar{X}_2 &= \bar{x}^6 - 2\bar{x}^4 + \bar{x}^2 & \bar{Y}_2 &= \bar{y}^6 - 2\bar{y}^4 + \bar{y}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Seega omab w avaldis järgmise kuju:

$$w = \alpha_{11} \bar{X}_1 \bar{Y}_1 + \alpha_{12} \bar{X}_1 \bar{Y}_2 + \alpha_{21} \bar{X}_2 \bar{Y}_1 + \alpha_{22} \bar{X}_2 \bar{Y}_2. \quad (3)$$

Plaadi painutatud pinna diferentsiaalvõrrand on

$$\Delta \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - q = 0$$

ehk

$$\nabla^4 w - A q = 0,$$

kus $D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$ - on silindri jäikustegur, mis oleneb elastsusmoodulist E , Poisson'i kordajast ν ja plaadi paksusest h , ja $A = \frac{1}{D} = \frac{12(1-\nu^2)}{E h^3}$.

Galerkini võrrandid

$$\iint_{(S)} L_k \psi_k dx dy = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

kujunevad antud juhul järgmisteks:

$$\begin{aligned} \iint_0^1 \iint_0^1 \left[\sum_{\substack{i=1,2 \\ j=1,2}} \alpha_{ij} (\mu \bar{X}_i'''' \bar{Y}_j + 2 \bar{X}_i'' \bar{Y}_j'' + \frac{1}{\mu} \bar{X}_i \bar{Y}_j'''') \right] \bar{X}_k \bar{Y}_l dx dy = \\ = A \mu b^2 q \iint_0^1 \iint_0^1 \bar{X}_k \bar{Y}_l dx dy, \end{aligned} \quad (4)$$

($k=1,2, l=1,2$)

kus sümmeetria tõttu on integreeritud üle plaadipinna neljandi-ku ja $\mu = \frac{b^2}{a^2}$.

Allpool tabelis on toodud kõikide integraalide integrandid mis on vajalikud võrrandis (4).

	$i=1$ $j=1$	$i=1$ $j=2$	$i=2$ $j=1$	$i=2$ $j=2$	
$\kappa=1$ $l=1$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_1'' \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_1''' \bar{x}_1 \bar{y}_1$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_2 \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_2'' \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_2''' \bar{x}_1 \bar{y}_1$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_1 \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_1'' \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_1''' \bar{x}_1 \bar{y}_1$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_2 \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_2'' \bar{x}_1 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_2''' \bar{x}_1 \bar{y}_1$	$\bar{x}_1 \bar{y}_1$
$\kappa=1$ $l=2$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_1 \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_1'' \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_1''' \bar{x}_1 \bar{y}_2$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_2 \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_2'' \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_2''' \bar{x}_1 \bar{y}_2$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_1 \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_1'' \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_1''' \bar{x}_1 \bar{y}_2$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_2 \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_2'' \bar{x}_1 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_2''' \bar{x}_1 \bar{y}_2$	$\bar{x}_1 \bar{y}_2$
$\kappa=2$ $l=1$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_1'' \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_1''' \bar{x}_2 \bar{y}_1$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_2 \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_2'' \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_2''' \bar{x}_2 \bar{y}_1$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_1'' \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_1''' \bar{x}_2 \bar{y}_1$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_2 \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_2'' \bar{x}_2 \bar{y}_1$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_2''' \bar{x}_2 \bar{y}_1$	$\bar{x}_2 \bar{y}_1$
$\kappa=2$ $l=2$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_1'' \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_1''' \bar{x}_2 \bar{y}_2$	$\mu \bar{x}_1''' \bar{y}_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_1'' \bar{y}_2'' \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_1 \bar{y}_2''' \bar{x}_2 \bar{y}_2$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_1 \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_1'' \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_1''' \bar{x}_2 \bar{y}_2$	$\mu \bar{x}_2''' \bar{y}_2 \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $2 \bar{x}_2'' \bar{y}_2'' \bar{x}_2 \bar{y}_2$ $\frac{1}{\mu} \bar{x}_2 \bar{y}_2''' \bar{x}_2 \bar{y}_2$	$\bar{x}_2 \bar{y}_2$

Tähistame lühiduse eesmärgil

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \bar{x}_i \bar{y}_j dx &= \int_0^1 \bar{y}_i \bar{y}_j dy = a_{ij} & , & \quad \int_0^1 \bar{x}_i \bar{x}_j'' dx = \int_0^1 \bar{y}_i \bar{y}_j'' dy = b_{ij} & , \\
 \int_0^1 \bar{x}_i \bar{x}_j''' dx &= \int_0^1 \bar{y}_i \bar{y}_j''' dy = e_{ij} & , & \quad \int_0^1 \bar{x}_i dx = \int_0^1 \bar{y}_i dy = d_i & , \\
 & & & \quad \int_0^1 \bar{x}_2 dx = \int_0^1 \bar{y}_2 dy = d_2 & .
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Ositi integreerimise teel veendume, et $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$ ja $e_{ij} = e_{ji}$. Kordajad (5) peale integreerimist avalduvad järgmiselt:

$$a_{11} = \frac{128}{3 \cdot 105}$$

$$a_{12} = \frac{128}{33 \cdot 105}$$

$$a_{22} = \frac{128}{143 \cdot 105}$$

$$b_{11} = -\frac{128}{105}$$

$$b_{12} = 0$$

$$b_{22} = -\frac{128}{11 \cdot 105}$$

$$e_{11} = \frac{64}{5},$$

$$e_{12} = \frac{64}{35},$$

$$e_{22} = \frac{3 \cdot 64}{35},$$

$$d_1 = \frac{8}{15},$$

$$d_2 = \frac{8}{105}.$$

Võrrandite (4) kordajatetabel on esitatud allpool:

	$i=1$ $j=1$	$i=1$ $j=2$	$i=2$ $j=1$	$i=2$ $j=2$	
$\kappa=1$ $\ell=1$	$\mu a_{11} e_{11}$ $2 b_{11}^2$ $\frac{1}{\mu} a_{11} e_{11}$	$\mu a_{12} e_{11}$ $2 b_{11} b_{12}$ $\frac{1}{\mu} a_{11} e_{12}$	$\mu a_{11} e_{12}$ $2 b_{11} b_{12}$ $\frac{1}{\mu} a_{12} e_{11}$	$\mu a_{22} e_{12}$ $2 b_{12}^2$ $\frac{1}{\mu} a_{12} e_{12}$	$\mu d_1^2 A b^4 q$
$\kappa=1$ $\ell=2$	$\mu a_{12} e_{11}$ $2 b_{11} b_{12}$ $\frac{1}{\mu} a_{11} e_{12}$	$\mu a_{22} e_{11}$ $2 b_{11} b_{22}$ $\frac{1}{\mu} a_{11} e_{22}$	$\mu a_{12} e_{12}$ $2 b_{12}^2$ $\frac{1}{\mu} a_{12} e_{12}$	$\mu a_{22} e_{12}$ $2 b_{12} b_{22}$ $\frac{1}{\mu} a_{12} e_{22}$	$\mu d_1 d_2 A b^4 q$
$\kappa=2$ $\ell=1$	$\mu a_{11} e_{12}$ $2 b_{11} b_{12}$ $\frac{1}{\mu} a_{12} e_{11}$	$\mu a_{12} e_{12}$ $2 b_{12}^2$ $\frac{1}{\mu} a_{11} e_{12}$	$\mu a_{11} e_{22}$ $2 b_{11} b_{22}$ $\frac{1}{\mu} a_{22} e_{11}$	$\mu a_{12} e_{22}$ $2 b_{12} b_{22}$ $\frac{1}{\mu} a_{22} e_{12}$	$\mu d_1 d_2 A b^4 q$
$\kappa=2$ $\ell=2$	$\mu a_{12} e_{12}$ $2 b_{12}^2$ $\frac{1}{\mu} a_{12} e_{12}$	$\mu a_{22} e_{12}$ $2 b_{12} b_{22}$ $\frac{1}{\mu} a_{11} e_{22}$	$\mu a_{12} e_{22}$ $2 b_{12} b_{22}$ $\frac{1}{\mu} a_{22} e_{12}$	$\mu a_{22} e_{22}$ $2 b_{22}^2$ $\frac{1}{\mu} a_{22} e_{22}$	$\mu d_2^2 A b^4 q$

Võtame näitena plaadi külgede suhte $\frac{a}{b} = 1,5$ (st. $\mu = 2,25$),

siis kujunevad võrrandid (4) järgmisteks R. Grammel'i järgi^{*)}

$$16,98668 \Delta_{11} + 1,39414 \Delta_{12} + 1,88199 \Delta_{21} + 0,18200 \Delta_{22} = 0,640000 A b^4 q,$$

$$1,39414 \Delta_{11} + 1,50642 \Delta_{12} + 0,18200 \Delta_{21} + 0,12513 \Delta_{22} = 0,091424 A b^4 q,$$

$$1,88199 \Delta_{11} + 0,18200 \Delta_{12} + 5,33425 \Delta_{21} + 0,46289 \Delta_{22} = 0,091424 A b^4 q,$$

$$0,18200 \Delta_{11} + 0,12513 \Delta_{12} + 0,46289 \Delta_{21} + 0,15057 \Delta_{22} = 0,013061 A b^4 q,$$

Selle süsteemi lahend on

$$\Delta_{11} = 0,035035 A b^4 q,$$

$$\Delta_{12} = 0,026786 A b^4 q,$$

$$\Delta_{21} = 0,002648 A b^4 q,$$

$$\Delta_{22} = 0,014031 A b^4 q.$$

Plaadi keskel esinev suurim paine on : $W_{max} = W_{q,0} = \frac{\Delta_{11}}{a^2 b^4} (X, Y)_{0,0} = \Delta_{11} =$

$$= 0,035035 A b^4 q,$$

* E. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, S. 141, Berlin, 1939.

Saadud v_{max} on 0,4 % tõelisest väiksem. Võrdluseks kasutatud täpne lahend on saadud H.Hencky^{x)} poolt.

7. Galerkin'i meetod omaväärtusprobleemide puhul.

Kõrvuti rajaväärtusülesannetega esinevad tehnilises mehhaanikas sageli omaväärtusülesanded, eriti stabiilsuse- ja võnkumisprobleemide puhul. Oma väärtusprobleemide diferentsiaalvõrrandi tuletamisel lähtume Hamiltoni printsiibist. Lihtsuse mõttes vaatleme omaväärtusprobleemi ühe sõltumatu muutujaga x , rajaväärtustega $x=0$ ja $x=1$. Väikeste amplituudidega ja energiakadudeta elastsete võnkumiste puhul Lagrange'i funktsioon avaldub kujul

$$L = U - T, \text{ kus } U = \int_0^1 F(x, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}) dx \tag{1}$$

ja $T = \frac{1}{2} \int_0^1 (\frac{\partial y}{\partial t})^2 \cdot m(x) dx,$

kus F on kogu lõigul positiivne ning $\frac{\partial y}{\partial x}$ ja $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ suhtes homogeenne ruutfunktsioon; U - on võnkuva süsteemi potentsiaal, T - süsteemi kineetiline energia.

Vaatleme statsionaarseid võnkumisi sagedusega ω ja amplituudiga $y(x)$. Sel puhul

$$y(x, t) = y(x) \cdot \sin \omega t. \tag{2}$$

Lagrange'i funktsioon (1) omab siis kuju:

$$L = U \sin^2 2\pi \omega t - \lambda T \cos^2 2\pi \omega t,$$

kusjuures

$$U = \int_0^1 F(x, y', y'') dx; T = \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 m(x) dx; \lambda = (2\pi \omega)^2. \tag{3}$$

Olgu $t_0 = 1$ ja $t_1 = \frac{1}{2\omega}$. Hamiltoni printsiip väidab siis, et

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = 0.$$

Et antud juhul $\int_{t_0}^{t_1} \sin^2 2\pi \omega t dt = \int_{t_0}^{t_1} \cos^2 2\pi \omega t dt = \frac{1}{4\omega}$, siis tuleme järgmisele variatsioonülesandele $\delta(U - \lambda K) = 0, \tag{4}$

x) H.Hencky, Der Spannungszustand in rechteckigen Platten (Dissertation, Darmstadt), S53, München und Berlin, 1913.

kusjuures U -tähendab suurimat potentsiaalset energiat ja T suurimat kineetilist energiat.

Asetades siin U ja T avaldistega (3) saame, et

$$\delta \int_0^1 [F(x, y', y'') - \frac{1}{2} \lambda y^2 m(x)] dx = 0. \quad (5)$$

Variieerimist läbi viies leiame, et

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' + \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' - \lambda y m \delta y \right] dx = 0. \quad (5')$$

Saadud avaldis laseb teisendada kui arvestame võimalust variieerimise ja diferentseerimise operatsioonide järjekorda vahetatavust. Teostame süsteemis (5') esimese liikme juures ükskord, teise liikme juures kaksorda ositi integreerimist:

$$\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial y''} \delta y'' dx = \left[\frac{\partial F}{\partial y''} (\delta y)' \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) (\delta y)' dx,$$

$$\int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) (\delta y)' dx = \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx.$$

Peale ositi integreerimist avaldub (5') järgnevalt

$$\left[\frac{\partial F}{\partial y'} \delta y \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} (\delta y)' \right]_0^1 - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) \delta y dx - \lambda \int_0^1 y m \delta y dx = 0$$

ehk

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \lambda y m \right] \delta y dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y''} (\delta y)' \right]_0^1 - \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{\partial F}{\partial y'} \right] \delta y \Big|_0^1 = 0. \quad (6)$$

Et saadud võrrand (6) kehtiks iga variatsiooni δy korral, siis peab integraali integrand olema null. Seega olemegi leidnud omaväärtuste probleemi Euleri diferentsiaalvõrrandi:

$$L(y) - \lambda y m = \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \lambda y m = 0. \quad (7)$$

Teiseks peavad ka seoses (6) esinevad nurgelised sulud

olema nullid. Viimane tingimus annab dünaamilised rajatingimused, milles võime veenduda järgneva näite varal. Olgu $x=0$ jaoks kinnitus ette antud, s.t. on antud geomeetrilised rajatingimused

$$y=0 \quad \text{ja} \quad y'=0 \quad \text{kui} \quad x=0 \quad (8)$$

Kuna $\delta y=0$ ja $\delta y'=0$, siis reas (6) nurgelised suluavaldised saavad nulliks $x=0$ korral. Et nurgelised sulud avaldises (6) oleksid nullid ka $x=1$ korral, selleks peab olema

$$\frac{\partial F}{\partial y''} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \text{kui} \quad x=1. \quad (9)$$

Viimased võrrandid aga kujutavad "vaba" otsa $x=1$ dünaamilisi rajatingimusi.

Variatsioonprobleemi (6) täpse lahendi saame kui lähendame diferentsiaalvõrrandi (7) ühes rajatingimustega (meie näites (8) ja (9)) eksaktselt. Viimast aga tähtsamate tehnikliste oma väärtusprobleemide puhul ei ole leitud, mistõttu peab rahulduma lähendusega.

Variatsioonvõrrand (6) lahendatakse Galerkin'i meetodiga. Selleks anname ette lähislahendi kujul

$$y = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n, \quad (10)$$

kusjuures koordinaatfunktsioonid φ_i rahuldavad nii geomeetrilisi kui ka dünaamilisi rajatingimusi.

y variatsioon δy avaldub järgmiselt:

$$\delta y = \varphi_1 \delta a_1 + \varphi_2 \delta a_2 + \dots + \varphi_n \delta a_n, \quad (11)$$

kus δa_i tähendab meelevaldse parameetri a_i variatsiooni.

Variatsioonvõrrandis (6) kaovad nurgelised sulud lähislahendi kohta tehtud eelduse tõttu. Silmaspidades avaldist (11), saame variatsioonvõrrandi (6) järgmisel kujul:

$$\int_0^1 [L(y) - \lambda^* y_m] (\varphi_1 \delta a_1 + \varphi_2 \delta a_2 + \dots + \varphi_n \delta a_n) dx = 0,$$

kusjuures λ asemel on võetud λ^* , mis peab tähendama, et on tegemist λ lähendiga.

Silmaspidades võrrandit (10) saame lõpuks Galerkin'i võrrandid

$$\int_0^1 \left[L \left(\sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i \right) - \lambda^* m \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i \right] \varphi_k dx = 0 \quad (12)$$

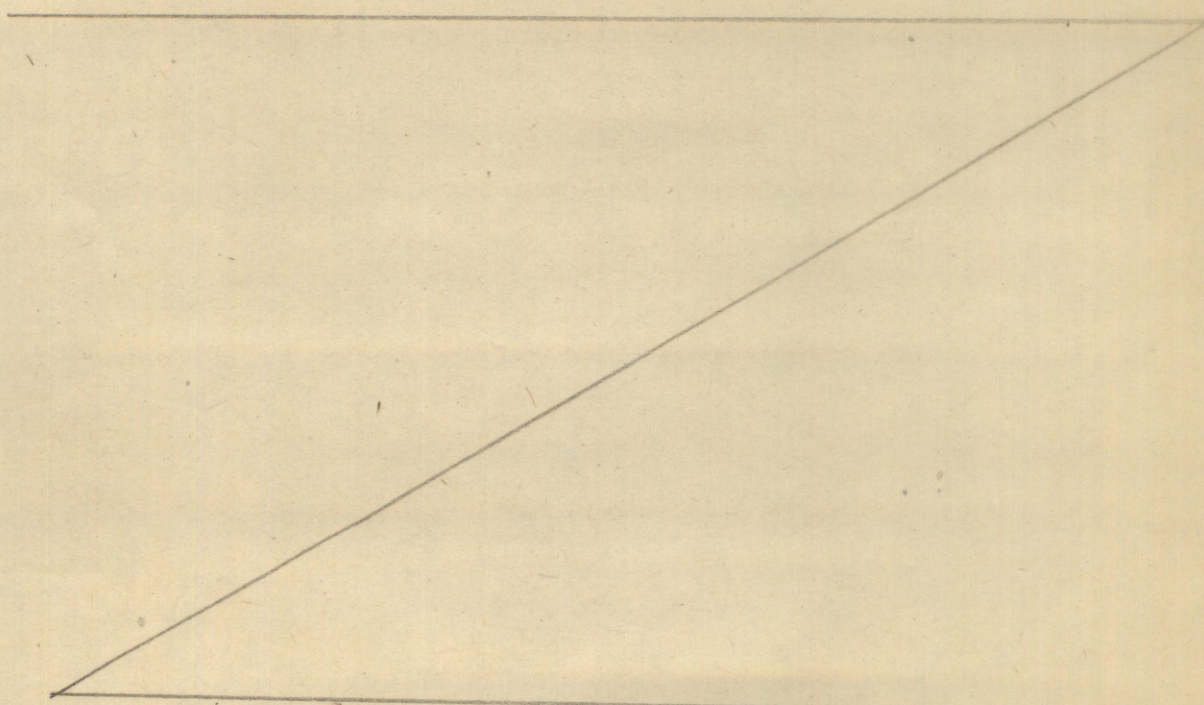
$(k = 1, 2, \dots, n).$

Kuna $L(y)$ y tuletiste suhtes on lineaarne siis võime sümboolite L ja \sum järjekorra vahetada ja Galerkin'i võrrandid saavad kuju

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i \int_0^1 [L \varphi_i - \lambda^* m \varphi_i] \varphi_k dx = 0 \quad (13)$$

$(k = 1, 2, \dots, n).$

Tulemus kujutab endast n -lineaarsest homogeenest võrrandist koosnevat süsteemi tundmatutega a_i . a_i -de determinandi nulliks olemise nõue annab meile võrrandi λ^* kogusummas n väärtuse leidmiseks.



8. Galerkin'i meetodi rakendamine omaväärtuste ülesannete lahendamisel.

A. Esmalt vaatleme Galerkin'i meetodi rakendamist stabiilsuseküsimumste lahendamisel.

Näide . Mõjugu plaadi kesktasandil ühele pikkusühikule arvatud survetungid \bar{T}_x, \bar{T}_y ja nihketungid \bar{S}_x, \bar{S}_y . Jaotugu need tungid piki servi meelevaldselt. Kui tungid \bar{T} ja \bar{S} ületavad kriitilised väärtused, siis plaadi tasapind kõverdub.

Survetungide mõjul plaadi kõverdunud pinna diferentsiaalvõrrand avaldub järgmiselt:

$$\Delta \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + T_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (1)$$

Võtame läbi painde $\frac{w}{i=1}^n$ lähislahendi kujul

$$w = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y),$$

kusjuures eeldame, et koordinaatfunktsioon φ_i rahuldab ülesande kõiki rajatingimusi.

Esiialgu tundmatud parameetrid a_i määrame Galerkin'i meetodiga. Galerkin'i võrrandid avalduvad järgmiselt:

$$\int \int \sum_{i=1}^n a_i \left[\Delta \nabla^4 \varphi_i + T_x \varphi_{i,xx} + T_y \varphi_{i,yy} + 2S \varphi_{i,xy} \right] \varphi_i dx dy = 0 \quad (2)$$

$(i, k = 1, 2, 3, \dots, n)$.

Vahetades summeerimise ja integreerimise järjekorra ja tuues parameetrid a_i integraalide märkide ette, saame:

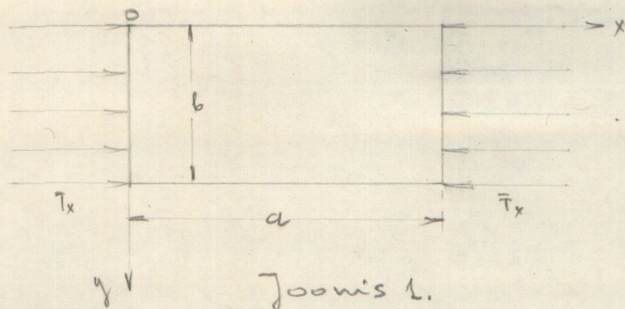
$$\begin{aligned} & a_1 \int \int \left[\Delta (\nabla^4 \varphi_1) \varphi_1 + T_x \varphi_{1,xx} + T_y \varphi_{1,yy} + 2S \varphi_{1,xy} \right] \varphi_1 dx dy + \\ & + a_2 \int \int \left[\Delta (\nabla^4 \varphi_2) \varphi_1 + T_x \varphi_{2,xx} + T_y \varphi_{2,yy} + 2S \varphi_{2,xy} \right] \varphi_1 dx dy + \dots = 0, \\ & a_1 \int \int \left[\Delta (\nabla^4 \varphi_1) \varphi_2 + T_x \varphi_{1,xx} + T_y \varphi_{1,yy} + 2S \varphi_{1,xy} \right] \varphi_2 dx dy + \\ & + a_2 \int \int \left[\Delta (\nabla^4 \varphi_2) \varphi_2 + T_x \varphi_{2,xx} + T_y \varphi_{2,yy} + 2S \varphi_{2,xy} \right] \varphi_2 dx dy + \dots = 0, \end{aligned}$$

ehk

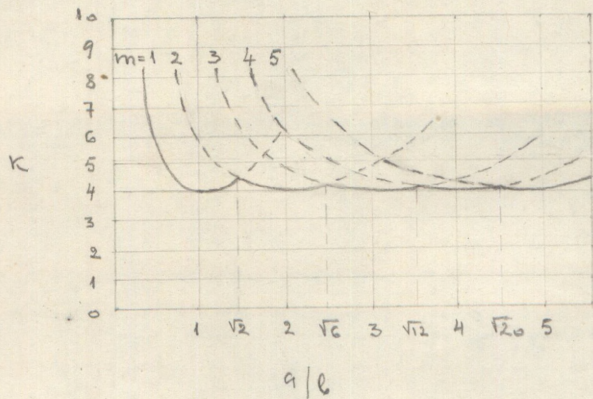
$$\begin{aligned} a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + \dots &= 0 \\ a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + \dots &= 0 \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (3')$$

kus

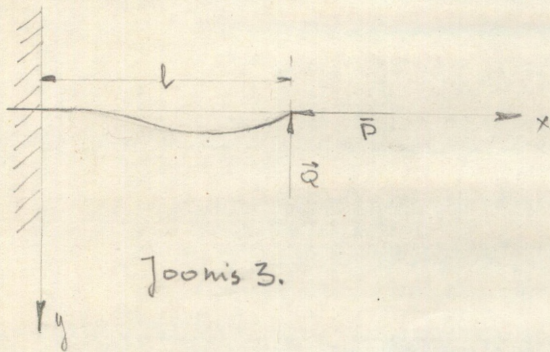
$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \int \int \left[\Delta (\nabla^4 \varphi_i) \varphi_k + T_x \varphi_{i,xx} + T_y \varphi_{i,yy} + 2S \varphi_{i,xy} \right] dx dy.$$



Joonis 1.



Joonis 2. (Timosenko järgi)



Joonis 3.

Süsteem (3) omab nullist erinevaid lahendeid ainult siis, kui kordajaist δ_{ik} moodustatud determinant on null. Seega peab olema

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} & \dots & \delta_{n2} \\ \delta_{13} & \delta_{23} & \delta_{33} & \dots & \delta_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

$\Delta = 0$ kujutab endast n-astmelist võrrandit, millest leiame kriitilise tungi T_x jaoks n väärtust. Võrrandit (4) nimetatakse surutud plaadi Galerkin'i võrrandiks stabiilsuse puhul.

Näide 1. Vaatleme vabalt toetuva ristkülikukujulise plaadi stabiilsust, kui surve jaotub ühele küljepaarile ühtlaselt. (Joon. 1)

Selleks avaldame plaadi keskmise tasandi kõverdunud kuju lähenduslikult võrrandiga

$$w = \sum_{m=1}^5 \sum_{n=1}^5 a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

mis rahuldab ühtlasi ka kõiki rajatingimusi.

Galerkin'i võrrandis (4) kordajad δ_{mn} avalduvad siis järgmiselt:

$$\delta_{mn} = \left[D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - T_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cdot \iint \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} dx dy, \quad (5)$$

kuna kahekordne integraal juhul $m, n \neq k, l$ saab nulliks, siis determinandis (4) jäävad alles ainult diagonaalreas asuvad liikmed. Seega saame rida üksikuid võrrandeid kujul

$$\delta_{mm} = \left[D \pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - T_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \iint \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = 0. \quad (5)$$

Kuna kahekordne integraal viimases avaldises ei ole null, siis

$$\delta \bar{\pi}^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) - T_x \frac{m^2 \bar{\pi}^2}{a^2} = 0,$$

millest

$$T_x = \delta \bar{\pi}^2 a^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} \right) \frac{1}{m^2}. \quad (5)$$

Sama tulemuse on saanud ka Timošenko^{x)} lähtudes potentsiaalse energia meetodist.

Suruva tungi T_x kriitilise väärtuse T_{xcr} saame, kui võtame $n=1$. Seega:

$$T_{xcr} = \delta \bar{\pi}^2 a^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \frac{1}{m^2} = \frac{\bar{\pi}^2 \delta^2}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2, \quad (6)$$

kus m tuleb valida nii, et avaldis (6) omaks minimaalset väärtust. Kandes graafikule $\kappa = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$ suhte a/b funktsioonina, saame joonisel (2) näidatud graafikud. määramiseks kasutame täisjoonega tõmmatud kõverate osi.

Näide 2.

Piki varrast mõjuva tungi \bar{P} mõjul deformeerunud varda elastse joone diferentsiaalvõrrand igasuguste rajatingimuste puhul avaldub kujul

$$([E]y'')'' + Py'' = 0, \quad (7)$$

kus $[E]$ on varda paindejäikus. Galerkin'i meetodi rakendamiseks anname ette lähislahendi

$$y = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_n \varphi_n, \quad (8)$$

kus koordinaatfunktsioonidest φ_i elledame, et nad rahuldavad nii geomeetrilisi kui ka dünaamilisi rajatingimusi.

Galerkin'i võrrandid antud juhul kujunevad järgnevateks:

$$\int_0^l [(E]y'')'' + Py''] \varphi_i dx = 0 \quad (9) \\ (i=1, 2, \dots, n).$$

x) С. П. Тимошенко, Пластинки и оболочки, стр. 296, Москва, 1948.

Süsteem (9) taandub n -da astme võrrandiks P suhtes. Võrrandi väiksem juur P_1^* on nõtketungi P esimeseks ülemtõkkeks.

Vaatleme edasi varrast, mille vasak ots on müüritud seinasse ja paremale otsale on rakendatud pikisurve \bar{P} ja ristitung \bar{R} . ^(Juuks 3) Painutatud varda elastse joone diferentsiaalvõrrand avaldub seejuures järgmiselt

$$EJ y'' = -Q(1-x) - Py.$$

Kahekordse diferentseerimise järgi omab see seos kuju (7).

Valime lähislahendiks üheliikmelise avaldise

$$y = a_1 \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right), \quad (10)$$

mis rahuldab kõiki rajatingimusi $y=0$ ja $y'=0$, kui $x=0$
ja $y=0$ ja $y''=0$, kui $x=l$.

Galerkin'i võrrand (9) kujuneb sel juhul järgmiseks:

$$EJ \int_0^l \left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 \cos \frac{\pi x}{2l} - \left(\frac{3\pi}{2l} \right)^4 \cos \frac{3\pi x}{2l} \right] \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right) dx - \\ - P \int_0^l \left[\left(\frac{\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2l} - \left(\frac{3\pi}{2l} \right)^2 \cos \frac{3\pi x}{2l} \right] \left(\cos \frac{\pi x}{2l} - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right) dx = 0.$$

Pärast integrimist saame

$$P_1^* = 2,050 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Lahendades ülesande diferentsiaalvõrrandi (7) saame

täpse lahendi

$$P_1 = 2,046 \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$

Lahend P_1^* on ainult 2% suurem täpsast.

B. Galerkin'i meetodi rakendamine võnkumisküsimuste uurimiseks.

Uurime elastse plaadi vaba võnkumist.

Elastse plaadi vaba võnkumise diferentsiaalvõrrand on

järgmine

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - M \omega^2 w = 0,$$

kus ω on võnkumis-sagedus ja M on plaadi mass.

Nihke w anname ette kujul

$$w = \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i,$$

kusjuures funktsioonest φ_i eeldame, et nad rahuldavad ülesande kõiki rajatingimusi.

Galerkin'i meetodi järgi määrame esialgu tundmatud parameetrid a_i järgmise süsteemi kaudu:

$$\iint_{(S)} \left(D \sum_{i=1}^{i=n} a_i \nabla^4 \varphi_i - M \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} a_i \varphi_i \right) \varphi_k dx dy = 0 \quad (k, i = 1, 2, \dots, n).$$

Integrandis seisvad summad integreerime liigeti ja viime parameetrid integraalimärkide ette. Nii saame:

$$a_1 \iint_{(S)} (D \nabla^4 \varphi_1 - M \omega^2 \varphi_1) \varphi_1 dx dy + a_2 \iint_{(S)} (D \nabla^4 \varphi_2 - M \omega^2 \varphi_2) \varphi_1 dx dy + \dots = 0,$$

$$a_1 \iint_{(S)} (D \nabla^4 \varphi_1 - M \omega^2 \varphi_1) \varphi_2 dx dy + a_2 \iint_{(S)} (D \nabla^4 \varphi_2 - M \omega^2 \varphi_2) \varphi_2 dx dy + \dots = 0,$$

ehk

$$\left. \begin{aligned} a_1 \delta_{11} + a_2 \delta_{21} + \dots &= 0 \\ a_1 \delta_{12} + a_2 \delta_{22} + \dots &= 0 \\ \dots & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

kus

$$\delta_{ik} = \delta_{ki} = \iint_{(S)} \left[D \left(\frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_i}{\partial y^4} \right) - M \omega^2 \varphi_i \right] \varphi_k dx dy. \quad (k, i = 1, 2, \dots, n)$$

Süsteem (11) omab nullist erinevaid lahendeid tingimusel, et kordajatest δ_{ik} moodustatud determinant on null:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{21} & \delta_{31} & \dots & \delta_{n1} \\ \delta_{12} & \delta_{22} & \delta_{32} & \dots & \delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{1n} & \delta_{2n} & \delta_{3n} & \dots & \delta_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

Seega saame n -astme võrrandi, millest leiame n väärtust ω^2 jaoks.

Võrrand (12) kujutab endast Galerkin'i sagedusvõrrandit võnkuva plaadi jaoks.

Anname võnkuva plaadi pinnakuju nihke w abil ja võtame selle nihke avaldise summana

$$w = \sum_m^s \sum_n^s a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots, s) \quad (13)$$

Talitades eespool seletatud viisil saame esimese lähendi jaoks järgmise võrrandi:

$$\delta_{11} = \iint [D \left(\frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi_1}{\partial y^4} \right) - M \omega^2 \varphi_1] \varphi_1 dx dy = 0, \quad (14)$$

kus

$$\varphi_1 = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$$

Asetades selle φ_1 võrrandisse (14), saame, et

$$\left[D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - M \omega^2 \right] \int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} dx dy = 0 \quad (15)$$

ehk

$$\left[D \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - M \omega^2 \right] \frac{ab}{4} = 0$$

ehk

$$\omega = \pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \sqrt{\frac{D}{M}}$$

millega küsimus on lahendatud.

9. Eluloolisi andmeid B.G. Galerkin'i kohta.

B.G. Galerkin sündis 4.märtsil 1871.a. Kahekümnekahe aastaselt Galerkin astus Peterburi Tehnoloogilisse Insti-
tuuti, mille lõpetas 1899.aastal. Tema praktiline tegevus
insenerina algas 1896.aastal. Galerkin'i esimesed tööaastad
Harkovi veduri tehases ja hiljemini Peterburi aurumasinate
tehases langesid kokku tööstuse kiire arenemiseajastuga
Venemaal.

1906.aastal areteeriti Galerkin tsaarivalitsuse poolt
oma eesrindlike sotsiaalsete vaadete pärast ja oli sunni-
tud veetma vanglas 1/2 aastat. Olles vangimajas, kirjutas
Galerkin oma esimese teadusliku töö " Теория продольного
изгиба и опыт применения теории продольного изгиба
к многошарнистым стержням, стержням с жесткими
соединениями и стержням с шарнирами."

Raamat publitseeriti 1909.aastal.

Oma pedagoogilist tööd Galerkin alustas 1909.a. Peterburi Polütehnilises Instituudis, kus sai 1920.a. rakendusmehhaanika kateedri juhatajaks. Alates 1923.a. oli Galerkin ehitusinseneride fakulteeedi dekaaniks. 1924-1929 aastani oli Galerkin Leningradi Transportinseneride Instituudis elastsusteooria professoriks. Samal ajal oli ^{ta} Leningradi Ülikooli rakendusmehhaanika professoriks. Galerkin jätkab oma õppetööd mitmes Leningradi Ülikoolis. 1939.a. alates on ta Mereväe Ehitusinseneride Koolis rakendusmehhaanika- ja elastsusteooria kateedri juhatajaks.

1928.a. valiti Galerkin NSVL Teaduste Akadeemia kirjavahetajaks liikmeks ja 1935 ^{olita} aastast Akadeemia tegevliikmeks. Kui asutati Teaduste Akadeemia Mehhaanika Instituut, siis nimetati ta selle instituudi direktoriks.

Galerkini praktiline tegevus konstruktorina ja ^{ns} kosmoteerija insenerina algas juba 1914.a. Suuremateks projektideks, mille kallal ta töötas, olid "Punase Oktoobri" nimeline jõujaam ja Volhovstroi hüdroelektrijõujaam.

Galerkin on oma uurimistöös tegelenud elastsusteooria, ehitusmehhaanika ja insenertehniliste küsimustega. Tema tööd iseloomustab mõttesügavus, tehniliselt tähtsate probleemide valik ja matemaatiliste resultaaside ümberkujundamine niisugusteks, et neid saaks kasutada praktikas.

Galerkin oma esimeses raamatus, mida ta kirjutas vanglas, esmaselt käsitab mitmekorruseliste tugisammaste probleemi. Tema laiendab pikipainde teooriat, mis on loodud Euleri poolt, mitmekorruseliste tugisammaste jaoks, mis on moodustatud vertikaalsete ja horisontaalsete varraste ühendamisel. Ise-

keskis seotud tugisammaste süsteemi uurimisel ta näitab, et igale tugisambale kriitilist tungi võib leida real juhtumitel sõltumatult teiste sammaste koormamisest. Eripeatükk on pühendatud Euleri teooria valemite rakendamisele praktilistesse probleemidesse.

Teises töös "Узгуд и экванне" 1910.a. Galerkin uurib ühest otsast kinnitatud varda painet, kui varda vaba otsale mõjuvad tungi on paralleelsed varda teljega kuid ekstsentrilised. Lähtudes elastse joone täpsast diferentsiaalvõrrandist ja rakendades elliptiliste funktsioonide teooriat ta tõestab, et sellistel juhtumitel elastne joon langeb kokku teise, pikema varda elastse joonega s.t. esialgne varras moodustab just kui osa vardast, mis asub mainitud tingimustes, kuid on seejuures surutud tungiga, mis ületab lähtevarda kriitilist tungi. Need tema esimesed uurimised pikipainde alalt avasid laiad võimalused pikipainde teooria rakendamiseks sildade, ehitussõrestikkude ja teiste süsteemide stabiilsuse arvutamiseks.

Hilisemad Galerkini tööd võib jagada mitmesse gruppi üks grupp töid tegeleb plaatide arvutamisega. Esimeses nendest töödest "Емпретку и ннаемутку", publitseeritud 1915.a., Galerkin arendas diferentsiaalvõrrandi integreerimise meetodit, milline praegu on laialt rakendatud matemaatilise füüsika ja tehnilise mehhaanika rajaväärtuste probleemide juures. Viimasel ajal välismaal eriti Inglismaal, on ilmunud mitmeid spetsiaalseid töid, mis pühendatud Galerkini meetodile.

1933.a. Galerkin võttis kokku oma paljude aastate uurimistööd plaatide paindumisest töös: "Упрынне монтку ннаемутку."

Selles monograafis Galerkin esimesena annab mittehomogeense biharmoonilise võrrandi tuletamise ja seejärel uurib ristkülikukujuliste õhukeste plaatide pingeseisundit mitmesugustel kimmitus- ja koormisviisidel. Biharmoonilise võrrandi integreerimist Galerkin toimetab meetodiga, mida ta on ettepannud juba 1915. a. oma töös: "Прямоугольные пластинки, опертые по краям."

Tööde tsükklis: "Стержени и пластинки" 1915; "Прямоугольные пластинки, опертые по краям" 1915; "К расчету тонких свободно опертых плит" 1917; "Изучение прямоугольных пластинок и стержней" 1918; "Квадратная пластинка" 1919; "Деформация и напряжения в прямоугольных пластинках под действием сосредоточенных сил." 1924; "Прямоугольная пластинка свободно опертая по двум краям и зафиксированная по двум другим, под действием поперечной нагрузки." 1932 - Galerkin vaatles ristkülikukujulise plaadi juhtumeid meelevaldsete koormiste ja rajaväärtuste puhul.

Omas monograafias annab ta originaalse lahenduse ridadega võrdkülgsele kolmnurgakujulisele plaadile, mis lamab vabalt tugedel ja on seejuures meelevaldselt koormatud.

Galerkin näitab omas töös: "Berechnung der frei gelagerten elliptischen Platte auf Biegung" 1923 kõverjooneliste koordinaatide rakendamist õhukeste elastsete plaatide tasakaalu võrrandite integreerimisel ja rakendas seda meetodit vabalt toetava ellipsi- ja poolellipsi- kujuliste plaatide tasakaaluvõrrandite integreerimisel.

Hoopis teisesuunalistes uurimustes "К вопросу о
выборе минимизмальных в естественной
механике" 1925 ja "К расчету сверхтонких

ферм и жестких рам" 1926 Galerkin näitas, et staatiliselt
määramatute süsteemide arvutamisel paljudel juhtumitel läheb
korda välja valida liigseid tundmatuid nii, et tundmatute arv
võrrandis, millised koostatakse liigsete tundmatute määramiseks
ei tule suur. Igas võrrandis, mis saadakse Galerkin'i meetodiga
ka kõige üldisemal juhul, ei esine üle viie tundmatu.

Järgmine grupp Galerkin'i töid kuulub elastsusteooria
valdkonda.

Rida huvitavaid töid "Кривые трехгранной
призмы." 1919; "Вопросы задачи Св. Векана об
изгибе для разрывных контуров основания призмы"

1927 on Galerkin pühendanud Saint-Venant'i probleemile, sellise
prisma väände ja painde kohta, mille ristlõiked moodustuvad
kas kahest parabolist või parabolist ja sirgest.

Laialttuntud Galerkin'i resultaate hulka kuuluvad
elastsusteooria kolmedimensionaalse ülesande lahendus 3 sõltu-
matu biharmoonilise funktsiooni abil. Nende funktsioonide line-
aarne kombinatsioon seejuures rahuldab ka tasakaaluvõrrandeid
ning deformatsiooni pidevuse tingimusi. Seda arendatud meetodit
Galerkin kasutas paksude plaatide uurimisel.

Oluliseks sammuks edasi osutuvad Galerkin'i tööd kesta-
de teooria alal: "К теории упругой цилиндрической
оболочки" 1934 ja "Равновесие упругой цилиндри-
ческой оболочки" 1935.

Neis töödes uuritakse õõnsa, ringikujulise silindri tasakaalu
ja antakse lahendus 3 sõltumatu funktsiooni abil. Galerkin oma

kolmefunktsiooni meetodiga saab resultaate mitte ainult õhukeste vaid ka keskmise paksusega kestade puhul. Galerkin'i poolt arendatud meetod on rakendatav nii hästi kestade painde ülesannete kui ka nende stabiilsuse uurimiseks; sama meetodit võib laiendada ka võnkumisteooriasse.

Galerkin'i surmaga aastal 1942 kaotas Nõukogude Liit ühe oma suurimaist rakendusmatemaatikuist ja ühe oma silmapaistvamaist mehhaanikuist - teoretikuist.

10. Kokkuvõte.

Mitmete tehnilise mehhaanika ülesannete lahendamisel on variatsioonmeetodid omandanud teiste lähendusmeetodite kõrval väga olulise koha. Variatsioonmeetoditest üks tuntumaid on Galerkin'i meetod, mille analüüsimisel ongi pühendatud käesolev töö.

Töös esitatakse Galerkin'i meetodi kirjeldus ja märgitakse tema erinevused Ritz'i meetodist.

Edasi on rakendatud Galerkin'i variatsiooniteoreetilist meetodit järgmistel näidetel:

1) Galerkin'i meetodi rakendamine elastsusteooria ruumiliste ülesannete lähenduslikuks lahendamiseks;

2) kogu kontuuri ulatuses kinnitatud ristkülikukujulise plaadi painde uurimisel;

3) omaväärtusprobleemide juures:

a) plaadi ja varda stabiilsuse uurimisel;

b) plaadi vaba võnkumise uurimisel.

Kasutatud kirjandus.

1. Карман Т. и Бюло М., Математические методы в инженерном деле, 1946.
2. Либензон Л.С., Курс теории упругости, 1947.
3. Панкович П.Ф., Теория упругости, 1939.
4. Прандтлевич Я.А., Вариационные методы в строительной механике, 1948.
5. Тимошенко С.П., Теория упругости, т. II, 1916.
6. Тимошенко С.П., Пластинки и оболочки, 1948.
7. Тимошенко С.П., Сопоставление материалов, т. II, 1946.
8. Журнал: прикладная математика и механика т. 5, в. 3, 1941.

Sisukord.

	lk.
1. Sissejuhatus.	1
2. Ajaloolisi märkmeid.	2
3. Galerkin'i meetod.	5
4. Galerkin'i ja Ritz'i meetodite vaheline seos.	9
5. Galerkin'i võrrand elastsusteooria mumiliste ülesannete lähenduslikuks lahendamiseks.	11
6. Galerkin'i meetodi rakendamine plaadi painde uurimisel.	12
7. Galerkin'i meetod omaväärtusprobleemide puhul.	16
8. Galerkin'i meetodi rakendamine omaväärtuste ülesannete lahendamiseks.	20
9. Eluloolisi andmeid B.G.Galerkin'i kohta	26
10. Kokkuvõte.	32
11. Kasutatud kirjandus.	33