Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Marko Kolk

Banachi ruumide omadused CWO ja CO

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Märt Põldvere

Tartu 2025

Banachi ruumide omadused CWO ja CO

Bakalaureusetöö
Marko Kolk

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös uuritakse Banachi ruumi nõrga ja normitopoloogia poolt indutseeritud topoloogiaid kinnisel ühikkeral ning analüüsitakse nende stabiilsusomadusi. Keskmes on küsimus, kas ühikkera suhteliselt lahtiste hulkade lõplikud kumerad kombinatsioonid osutuvad samuti suhteliselt lahtisteks.

Töös tõestatakse, et T. A. Abrahamseni, J. Becerra Guerrero, R. Halleri, V. Lima ja M. Põldvere poolt defineeritud Banachi ruumi omadus (co) on samaväärne ühikkera B stabiilsusega normitopoloogia alamruumitopoloogia suhtes, st kujutuse $B \times B \to B$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y)$, lahtisusega.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: Banachi ruumid, normeeritud ruumid, nõrk topoloogia, ühikkera stabiilsus.

Properties CWO and CO of Banach Spaces

Bachelor's thesis
Marko Kolk

Abstract. This bachelor's thesis examines the topologies on the closed unit ball of a Banach space induced by the weak and norm topologies and analyses their stability properties. The central question is whether finite convex combinations of relatively open subsets of the unit ball remain relatively open.

The thesis establishes that the Banach space property (co), introduced by T. A. Abrahamsen, J. Becerra Guerrero, R. Haller, V. Lima, and M. Põldvere, is equivalent to the stability of the unit ball B with respect to the subspace topology inherited from the norm topology, i.e. to the openness of the mapping $B \times B \to B$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(x + y)$.
CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier Analysis, functional analysis.
Keywords: Banach spaces, normed spaces, weak topology, stability of the unit ball stability.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev bakalaureusetöö kuulub funktsionaalanalüüsi valdkonda. Töös käsitletakse Banachi ruumi nõrga ja normitopoloogia poolt indutseeritud alamruumitopoloogiaid kinnisel ühikkeral. Töö peamiseks aluseks on viie matemaatiku ühisartikkel „*Banach spaces where convex combinations of relatively weakly open subsets of the unit ball are relatively weakly open*" (autorid T. A. Abrahamsen, J. Becerra Guerrero, R. Haller, V. Lima ja M. Põldvere; ilmunud 2020. aastal ajakirjas *Studia Mathematica*). Lisaks tugineb töö artiklile „*A characterization of the weak topology in the unit ball of purely atomic L_1 preduals*" (autorid G. López-Pérez ja R. Medina; ilmunud 2022. aastal ajakirjas *Journal of Mathematical Analysis and Applications*).

Banachi ruumides on nõrk topoloogia normitopoloogia kõrval üks keskseid topoloogiaid. Üldiselt on nõrk topoloogia normitopoloogiast nõrgem ning need topoloogiad langevad kokku parajasti lõplikumõõtmelisel Banachi ruumil. Kuna nõrk topoloogia on vektortopoloogia, siis ühe nõrgalt lahtise hulga korrutis skalaariga on nõrgalt lahtine ning kahe nõrgalt lahtise hulga summa on samuti nõrgalt lahtine. Need omadused ei pruugi aga kehtida nõrga topoloogia poolt ühikkeral indutseeritud alamruumitopoloogia puhul.

Osutub siiski, et teatud Banachi ruumides on ühikkera suhteliselt nõrgalt lahtiste osahulkade lõplikud kumerad kombinatsioonid alati suhteliselt nõrgalt lahtised – sellistel ruumidel öeldakse olevat omadus CWO (vt definitsioon 2.1, lk 13).

Eespool esimesena nimetatud artiklis toodi omaduse CWO uurimiseks sisse spetsiaalselt loodud geomeetriline omadus (co) (vt definitsioon 2.15 lk 18). Näidati muu hulgas, et kui lõplikumõõtmelise Banachi ruumil on omadus (co), siis tal on ka omadus CWO. Samuti tõestati, et igal kahemõõtmelisel reaalsel Banachi ruumil on omadus (co), kuid mitte igal kolmemõõtmelisel Banachi ruumil seda omadust ei ole.

Artikli preprindi ilmumise järel juhtis V. Kadets autorite tähelepanu sellele, et lõplikumõõtmeliste Banachi ruumide korral on omadused CWO ja (co) tegelikult samaväärsed, teistpidi implikatsiooni tõestamiseks saab kasutada klassikalist Michaeli valikuteoreemi. Nimetatud samaväärsuse täpne sõnastamine ja üksikasjalik tõestamine ongi üks käesoleva bakalaureusetöö põhieesmärkidest.

Eespool teisena nimetatud artiklis selgitati omaduse (co) tähendus lõplikult, näidates, et see on samaväärne omadusega, kus ühikkeras normitopoloogia alamruumitopoloogia lahtiste hulkade lõplikud kumerad kombinatsioonid on selles alamruumitopoloogis lahtised.

Bakalaureusetöös käsitletakse lihtsuse mõttes ainult reaalseid normeeritud ruume. Üldiselt kasutame meetriliste ja normeeritud ruumide teooria tavalisi tähistusi. Normeeritud ruumi X kinnist ühikkera ja ühiksfääri tähistame vastavalt B_X ja S_X ning ruumi X kaasruumi tähistame X^*. Tähistega $B(a,r)$ ja $\overline{B}(a,r)$ märgime vastavalt lahtist ja kinnist kera keskpunktiga a ja raadiusega r; kasutame ka spetsiaaltähistusi $D(a,r) \coloneqq B_X \cap B(a,r)$ ja $C(a,r) \coloneqq S_X \cap B(a,r)$.

1 Vajalikud eelteadmised

1.1 Lahtised kujutused

Olgu X ja Y topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$ kujutus. Meenutame, et kujutus f on lahtine, kui iga lahtise $U \subset X$ korral on $f(U)$ lahtine.

Lemma 1.1. *Olgu $\mathfrak{B}$ ruumi X topoloogia baas. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *f on lahtine kujutus;*

(ii) *iga $B \in \mathfrak{B}$ korral on $f(B)$ lahtine.*

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii) on ilmne.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Eeldame, et iga baasihulga $B \in \mathfrak{B}$ korral on $f(B)$ lahtine. Olgu nüüd $U \subset X$ suvaline lahtine hulk. Siis saab U esitada baasihulkade ühendina:

$$U = \bigcup_{B\in\mathfrak{B},\, B\subset U} B.$$

Seega

$$f(U) = f\Big(\bigcup_{B\in\mathfrak{B},\, B\subset U} B\Big) = \bigcup_{B\in\mathfrak{B},\, B\subset U} f(B).$$

Iga $f(B)$ on eelduste kohaselt lahtine, mistõttu ka $f(U)$ on lahtine. Seega on f lahtine kujutus. $\square$

Näide 1.2. Projektsioon $\pi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$, on lahtine. Tõepoolest, topoloogilise ruumi $\mathbb{R}^2$ topoloogia baasiks sobib $\mathfrak{B} = \{U \times V : U, V \subset \mathbb{R}$ on lahtised$\}$. Iga $U \times V \in \mathfrak{B}$ korral on $\pi(U \times V) = U$ lahtine, järelikult on π lahtine.

Näide 1.3. Funktsioon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, ei ole lahtine, sest näiteks $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ ei ole lahtine. Kujutus $\mathbb{R} \to [0, \infty)$ on aga lahtine, kui sihthulgal $[0, \infty)$ vaadelda tavalist topoloogiat, st $\mathbb{R}$ tavatopoloogia alamruumitopoloogiat.

Näide 1.4. Sisestus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x, 0)$, ei ole lahtine, sest mitte ühegi mittetühja lahtise $U \subset \mathbb{R}$ kujutis ei ole lahtine.

Lemma 1.5. *Olgu X ja Y meetrilised ruumid ning $f\colon X \to Y$ sürjektiivne. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *f on lahtine kujutus;*

(ii) *iga $x \in X$ ja iga ruumi Y elementide jada (y_n) korral, mis koondub elemendiks $f(x)$, leiduvad osajada (y_{n_k}) ning ruumi X elementide jada (x_k) nii, et $x_k \to x$ ja iga k korral $f(x_k) = y_{n_k}$.*

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Eeldame, et kehtib (i). Fikseerime $x \in X$ ja ruumi Y elementide jada (y_n), mis koondub elemendiks $f(x)$. Tähistame $k \in \mathbb{N}$ korral $U_k := B_X(x, 1/k)$. Siis U_k on lahtine ja $f(U_k)$ on (i) põhjal (lahtine) punkti $f(x)$

ümbrus. Järelikult leidub iga k jaoks piisavalt suur indeks n_k nii, et $y_{n_k} \in f(U_k)$. Valime selliste indeksite jada kasvavalt, $n_1 < n_2 < \cdots$. Kuna $y_{n_k} \in f(U_k)$, leidub $x_k \in U_k$ nii, et $f(x_k) = y_{n_k}$. Siis $x_k \to x$. Seega oleme näidanud, et kehtib (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Oletame, et (i) ei kehti. Sellisel juhul leidub lahtine $U \subset X$, mille korral $f(U)$ ei ole lahtine. Seega mingi $x \in U$ korral ei ole $f(U)$ punkti $f(x)$ ümbrus, st mitte ühegi $n \in \mathbb{N}$ korral ei sisaldu kera $B(f(x), 1/n)$ tervenisti hulgas $f(U)$. Järelikult saame iga $n \in \mathbb{N}$ korral leida punkti

$$y_n \in B\big(f(x), 1/n\big) \setminus f(U).$$

Saadud jada (y_n) koondub punktiks $f(x)$. Tingimuse (ii) põhjal saame leiduvad osajada (y_{n_k}) ja ruumi X elementide jada (x_k) nii, et $x_k \to x$ ja iga k korral $f(x_k) = y_{n_k}$. Kuna $y_{n_k} \notin f(U)$, siis $x_k \notin U$. See on vastuolus sellega, et $x_k \to x$ ja U on punkti x ümbrus, mille põhjal $x_k \in U$ mingist indeksist alates. Vastuolu tõttu peab $f(U)$ olema lahtine ning seega on f lahtine kujutus. $\square$

1.2 Hulga-väärtustega funktsiooni alt ja ülalt poolpidevus

Olgu X ja Y topoloogilised ruumid ning $f\colon X \to Y$ kujutus. Meenutame, et kujutus f on pidev, kui iga lahtise $V \subset Y$ korral on $f^{-1}(V)$ lahtine. Kuna

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x \in X : f(x) \in V\} \\ &= \big\{x \in X : \{f(x)\} \cap V \neq \varnothing\big\} \\ &= \big\{x \in X : \{f(x)\} \subset V\big\}, \end{aligned}$$

saame f pidevuse tingimuse formuleerida kahel samaväärsel viisil:

(i) iga lahtise $V \subset Y$ korral on $\{x \in X : \{f(x)\} \cap V \neq \varnothing\}$ lahtine;

(ii) iga lahtise $V \subset Y$ korral on $\{x \in X : \{f(x)\} \subset V\}$ lahtine.

Tingimused (i) ja (ii) langevad tavalise funktsiooni f puhul kokku, kuid on aluseks hulga-väärtusega funktsioonide $X \to 2^Y$ alt poolpidevuse ja ülalt poolpidevuse mõistetele.

Definitsioon 1.6. Olgu $F\colon X \to 2^Y$.

(a) Öeldakse, et F on **alt poolpidev**, kui iga lahtise $V \subset Y$ korral on $\{x \in X : F(x) \cap V \neq \varnothing\}$ lahtine.

(b) Öeldakse, et F on **ülalt poolpidev**, kui iga lahtise $V \subset Y$ korral on $\{x \in X : F(x) \subset V\}$ lahtine.

Märkus 1.7. Üldiselt on alt poolpidevus ja ülalt poolpidevus erinevad mõisted. Paneme aga tähele, et tingimuste (i) ja (ii) samaväärsuse tõttu on kujutuse $X \to 2^Y$, $x \mapsto \{f(x)\}$, alt ja ülalt poolpidevus omavahel samaväärsed ning tähendavad f pidevust.

Märkus 1.8. Töö seisukohalt on oluline ainult alt poolpidevuse mõiste.

Näide 1.9. Kujutus $F\colon [0,\infty) \to 2^{\mathbb{R}}$, $F(x) = \{\sqrt{x}, -\sqrt{x}\}$, on alt ja ülalt poolpidev. Olgu $V \subset \mathbb{R}$ lahtine. Funktsioonide $\sqrt{\cdot}$ ja $-\sqrt{\cdot}$ pidevuse tõttu on $U_1 \coloneqq \{x \in [0,\infty) : \sqrt{x} \in V\}$ ja $U_2 \coloneqq \{x \in [0,\infty) : -\sqrt{x} \in V\}$ lahtised (ruumis $[0,\infty)$). Seega on F on alt poolpidev, sest $\{x \in [0,\infty) : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = U_1 \cup U_2$, ja ülalt poolpidev, sest $\{x \in [0,\infty) : F(x) \subset V\} = U_1 \cap U_2$.

Näide 1.10. Kujutus $F\colon \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$,

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1], & \text{kui } x < 0, \\ \{0\}, & \text{kui } x \geqslant 0, \end{cases}$$

on alt poolpidev, kuid mitte ülalt poolpidev.

Näitame, et F on alt poolpidev. Olgu $V \subset \mathbb{R}$ lahtine. Vaatleme läbi võimalikud juhud.

(1) Kui $0 \in V$, siis $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = \mathbb{R}$.

(2) Kui $V \cap [-1,1] = \varnothing$, siis $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = \varnothing$.

(3) Kui V ei sisalda punkti 0, kuid lõikub hulgaga $[-1,1]$, siis $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = (-\infty, 0)$.

Kõik saadud hulgad $\mathbb{R}$, $\varnothing$ ja $(-\infty, 0)$ on lahtised, seega F on alt poolpidev.

Näitame, et F ei ole ülalt poolpidev. Olgu $V := (-1,1)$. Siis $\{x \in \mathbb{R} \colon F(x) \subset V\} = [0, \infty)$, mis ei ole lahtine ja seega ei ole F ülalt poolpidev.

Näide 1.11. Kujutus $F \colon \mathbb{R} \to 2^{\mathbb{R}}$,

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1], & \text{kui } x \leqslant 0, \\ \{0\}, & \text{kui } x > 0, \end{cases}$$

ei ole alt poolpidev, kuid on ülalt poolpidev.

Selline F ei ole alt poolpidev, sest $V := (0, \infty)$ korral on $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \cap V \neq \varnothing\} = (-\infty, 0]$, mis ei ole lahtine.

Näitame, et F on ülalt poolpidev. Olgu $V \subset \mathbb{R}$ lahtine. Vaatleme läbi võimalikud juhud.

(1) Kui $0 \notin V$, siis $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset V\} = \varnothing$.

(2) Kui $[-1,1] \subset V$, siis $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset V\} = \mathbb{R}$.

(3) Kui $0 \in V$, aga $[-1,1] \not\subset V$, siis $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \subset V\} = (0, \infty)$.

Kõik saadud hulgad $\varnothing$, $\mathbb{R}$ ja $(0, \infty)$ on lahtised, seega on F ülalt poolpidev.

Lause 1.12. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $f \colon X \to Y$ *on lahtine;*

(ii) $Y \to 2^X$, $y \mapsto f^{-1}(\{y\})$, *on alt poolpidev.*

Tõestus. Esmalt paneme tähele, et iga $U \subset X$ korral

$$\{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \cap U \neq \varnothing\} = f(U).$$

Selle tähelepaneku kohaselt on lahtise $U \subset X$ korral $f(U)$ ja $\{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \cap U \neq \varnothing\}$ lahtisus samaväärsed, st kujutuse f lahtisus ja tingimuses (ii) vaadeldava kujutuse alt poolpidevus on samaväärsed. $\square$

Märkus 1.13. Sarnaselt tõestatakse, et samaväärsed on:

(i) $f \colon X \to Y$ on kinnine, st iga kinnise $K \subset X$ korral $f(K)$ on kinnine;

(ii) $Y \to 2^X$, $y \mapsto f^{-1}(\{y\})$, on ülalt poolpidev.

Selle tõestus toetub vastavalt tähelepanekule, et iga $K \subset X$ korral

$$\{y \in Y : f^{-1}(\{y\}) \subset X \setminus K\} = Y \setminus f(K).$$

Lemma 1.14. *Olgu $\mathfrak{B}$ ruumi Y topoloogia baas ja $F\colon X \to 2^Y$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *F on alt poolpidev;*

(ii) *iga $B \in \mathfrak{B}$ korral on $\{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\}$ lahtine.*

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii) on ilmne.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Kehtigu tingimus (ii). Olgu nüüd $V \subset Y$ suvaline lahtine hulk. Siis saab V esitada baasihulkade ühendina:

$$V = \bigcup_{B \in \mathfrak{B},\, B \subset V} B.$$

Seega

$$\begin{aligned}\{x \in X : F(x) \cap V \neq \varnothing\} &= \{x \in X : F(x) \cap \bigcup_{B \in \mathfrak{B},\, B \subset V} B \neq \varnothing\} \\ &= \bigcup_{B \in \mathfrak{B},\, B \subset V} \{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\}.\end{aligned}$$

Iga hulk $\{x \in X : F(x) \cap B \neq \varnothing\}$ on eelduste kohaselt lahtine, mistõttu ka $\{x \in X : F(x) \cap V \neq \varnothing\}$ on lahtine. Seega on F alt poolpidev. $\square$

Järeldus 1.15. *Kui Y on normeeritud ruum, siis $F\colon X \to 2^Y$ on alt poolpidev parajasti siis, kui iga ruumi Y lahtise kera $B(y, r)$ korral on $\{x \in X : F(x) \cap B(y, r) \neq \varnothing\}$ lahtine.*

Tõestus. Lahtised kerad moodustavad Y normitopoloogia baasi. Seega rakendub eelmine lemma. $\square$

Järeldus 1.16. *Olgu Y kahe topoloogilise ruumi korrutisruum, $Y = Y_1 \times Y_2$, ning olgu $\mathfrak{B}$ ja $\mathfrak{C}$ vastavalt Y_1 ja Y_2 topoloogia baas, siis $F\colon X \to 2^Y$ on alt poolpidev parajasti siis, kui iga $B \in \mathfrak{B}$ ja $C \in \mathfrak{C}$ korral on $\{x \in X : F(x) \cap (B \times C) \neq \varnothing\}$ lahtine.*

Tõestus. Hulgad $B \times C$, kus $B \in \mathfrak{B}$ ja $C \in \mathfrak{C}$, moodustavad Y korrutistopoloogia baasi. Seega rakendub eelmine lemma. $\square$

Lemma 1.17. *Olgu X ja Y meetrilised ruumid ning $F\colon X \to 2^Y$ selline, et iga $x \in X$ korral $F(x) \neq \varnothing$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *F on alt poolpidev;*

(ii) *iga $x \in X$, $y \in F(x)$ ning jada $(x_n) \subset X$ puhul, mis koondub punktiks x, kehtib $d\big(y, F(x_n)\big) \to 0$;*

(iii) *iga $x \in X$, $y \in F(x)$ ning jada $(x_n) \subset X$ puhul, mis koondub punktiks x, leidub jada $(y_n) \subset Y$, mis koondub punktiks y ja $y_n \in F(x_n)$ iga n korral.*

Märkus 1.18. Väites (ii) on $d(y, F(x_n)) = \inf\{d(y, z) : z \in F(x_n)\}$.

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Eeldame, et F on alt poolpidev. Olgu $x \in X$, $y \in F(x)$ ning $x_n \to x$. Näitame, et $d(y, F(x_n)) \to 0$. Fikseerime $\varepsilon > 0$ ja olgu $V \coloneqq B(y, \varepsilon)$. Eelduse põhjal on

$$U \coloneqq \{u \in X : F(u) \cap V \neq \varnothing\}$$

lahtine ja $x \in U$. Kuna $x_n \to x$, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et iga $n \geqslant N$ korral $x_n \in U$, mistõttu $d(y, F(x_n)) < \varepsilon$. Seega $d(y, F(x_n)) \to 0$ ning järelikult kehtib (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). Eeldame, et kehtib (ii). Olgu $x \in X$, $y \in F(x)$ ning $x_n \to x$. Kuna $d(y, F(x_n)) \to 0$, saame iga n korral leida $y_n \in F(x_n)$ nii, et $d(y, y_n) < d(y, F(x_n)) + 1/n$. Sellest järeldub, et $y_n \to y$. Järelikult kehtib (iii).

(iii) $\Longrightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (iii), kuid (i) mitte. Siis leidub lahtine $V \subset Y$, mille korral

$$U \coloneqq \{x \in X : F(x) \cap V \neq \varnothing\}$$

ei ole lahtine. Seega leidub $x \in U$ nii, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral $B(x, 1/n) \not\subset U$ ehk leidub $x_n \in B(x, 1/n) \setminus U$. Sellisel juhul $x_n \to x$ ja $F(x_n) \cap V = \varnothing$. Kuna $x \in U$, siis $F(x) \cap V \neq \varnothing$. Olgu $y \in F(x) \cap V$. Eelduse kohaselt leidub jada $(y_n) \subset Y$ nii, et $y_n \in F(x_n)$ ja $y_n \to y$. Kuna V on lahtine ja $y \in V$, leidub $N \in \mathbb{N}$ nii, et $n \geqslant N$ korral $y_n \in V$. Seega $y_n \in F(x_n) \cap V$ iga piisavalt suure n korral, mis on vastuolus sellega, et $F(x_n) \cap V = \varnothing$. Järelikult kehtib (i). $\square$

1.3 Michaeli valikuteoreem

Käesoleva alapunkti eesmärk on teha ettevalmistused järgmise tuntud teoreemi hilisemaks rakendamiseks. Selle teoreemi tõestust töös ei esitata; tõestus on antud näiteks raamatus [4].

Teoreem 1.19 ([4, teoreem 7.53])**.** *Olgu X parakompaktne topoloogiline ruum, Y Banachi ruum ja $F\colon X \to 2^Y$ alt poolpidev kujutus. Kui iga $x \in X$ korral on $F(x)$ mittetühi, kinnine ja kumer, siis leidub pidev funktsioon $f\colon X \to Y$ nii, et*

$$f(x) \in F(x) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

Märkus 1.20. Parakompaktse topoloogilise ruumi mõistet ei käsitleta üldise topoloogia põhikursuses, seepärast toome selle järgnevas sisse ja näitame, et meetriline ruum on parakompaktne.

Definitsioon 1.21. Olgu X topoloogiline ruum.

(a) Ruumi X **kate** on selle ruumi osahulkade kogum, mille ühend on X.

(b) Katte $\mathcal{K}$ **peenendus** on kate, mille iga hulk sisaldub mõnes katte $\mathcal{K}$ hulgas.

(c) Kate on **lahtine**, kui iga tema hulk on lahtine osahulk.

(d) Ruum X on **parakompaktne**, kui igal tema lahtisel kattel leidub selline lahtine peenendus, et igal X elemendil leidub ümbrus, mis lõikub vaid lõpliku arvu peenenduse hulkadega.

Näide 1.22. (1) Diskreetse topoloogiaga ruum on ilmselt parakompaktne, sest diskreetses topoloogilises ruumis on iga ühepunktiline hulk lahtine.

(2) Kompaktne topoloogiline ruum on ilmselt parakompaktne, sest kompaktse topoloogilise ruumi igal lahtisel kattel leidub lõplik alamkate.

Lause 1.23. *Meetriline ruum on parakompaktne.*

Märkus 1.24. Viimase tulemuse tõestuse avaldas esimesena A. H. Stone 1948. aastal. Järgneva tõestuse aluseks on M. E. Rudini tõestus [9].

Tõestus. Olgu (X, d) meetriline ruum ning $\mathcal{K} := \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ selle mingi lahtine kate. Valikuaksioomi põhjal saab iga hulka täielikult järjestada, seega eeldame, et indeksite hulk A on täielikult järjestatud. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral defineerime (induktiivselt n järgi) iga $\alpha \in A$ puhul hulga

$$V_{\alpha,n} := \bigcup B(x, 1/2^n),$$

kus ühend on võetud üle kõikide elementide $x \in U_\alpha$, mis rahuldavad järgmisi tingimusi:

(1) α on vähim selline indeks, mille puhul $x \in U_\alpha$;

(2) iga $m < n$ ja iga $\beta \in A$ korral $x \notin V_{\beta,m}$;

(3) $B(x, 3/2^n) \subset U_\alpha$.

Näitame, et $\{V_{\alpha,n} : \alpha \in A, n \in \mathbb{N}\}$ on katte $\mathcal{K}$ lahtine peenendus ning igal ruumi X punktil leidub ümbrus, mis lõikub vaid lõpliku arvu selle peenenduse hulkadega.

Iga hulk $V_{\alpha,n}$ on ilmselt U_α osahulk ja lahtine, kuna see on lahtiste kerade ühend. Samuti moodustavad need hulgad kokku ruumi X katte: kui $x \in X$, siis valime vähima $\alpha \in A$, mille korral $x \in U_\alpha$, ja seejärel $n \in \mathbb{N}$ nii, et $B(x, 3/2^n) \subset U_\alpha$. Sel juhul kehtib kas $x \in V_{\alpha,n}$ või leiduvad $m < n$ ja $\beta \in A$ nii, et $x \in V_{\beta,m}$.

Fikseerime vabalt $x_0 \in X$ ja olgu $\beta \in A$ vähim indeks, mille puhul leidub $m \in \mathbb{N}$ nii, et $x_0 \in V_{\beta,m}$. Võtame ühe sellise $m \in \mathbb{N}$ ja valime $k \in \mathbb{N}$ nii, et $B(x_0, 1/2^k) \subset V_{\beta,m}$. Näitame, et

(a) kui $n \geqslant m + k$, siis $B(x_0, 1/2^{m+k})$ ei lõika hulka $V_{\alpha,n}$ mitte ühegi $\alpha \in A$ korral;

(b) kui $n < m + k$, siis $B(x_0, 1/2^{m+k})$ lõikab hulka $V_{\alpha,n}$ ülimalt ühe $\alpha \in A$ korral.

Sellest järeldub, et kera $B(x_0, 1/2^{m+k})$ lõikub vaid lõpliku arvu peenenduse hulkadega ja seega on X parakompaktne.

(a) Olgu $n \geqslant m + k$ ja $\alpha \in A$. Definitsiooni järgi on $V_{\alpha,n} = \bigcup B(x, 1/2^n)$, kusjuures tingimuse (2) kohaselt $x \notin V_{\beta,m}$. Seega k valiku tõttu $d(x_0, x) \geqslant 1/2^k$ ja

$$B(x_0, 1/2^{m+k}) \cap B(x, 1/2^n) = \varnothing.$$

Järelikult $B(x_0, 1/2^{m+k})$ ei lõika hulka $V_{\alpha,n}$.

(b) Olgu $n < m + k$. Oletame, et leiduvad $\alpha, \gamma \in A$ nii, et $\alpha < \gamma$, ning punktid $u \in V_{\alpha,n}$ ja $v \in V_{\gamma,n}$. Näitame, et siis $d(u, v) \geqslant 1/2^n$. Tõepoolest, $V_{\alpha,n}$ ja $V_{\gamma,n}$ definitsiooni kohaselt leiduvad $x, y \in X$ nii, et

$$u \in B(x, 1/2^n) \subset V_{\alpha,n} \quad \text{ja} \quad v \in B(y, 1/2^n) \subset V_{\gamma,n}.$$

Tingimuse (3) kohaselt $B(x, 3/2^n) \subset U_\alpha$, kuid tingimuse (1) kohaselt $y \notin U_\alpha$. Seega $d(x, y) \geqslant 3/2^n$ ja

$$d(u, v) \geqslant d(x, y) - d(x, u) - d(y, v) > \frac{3}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

Kui $d(x_0, u) < 1/2^{m+k}$, siis

$$d(x_0, v) \geqslant d(u, v) - d(x_0, u) > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{m+k}} \geqslant \frac{1}{2^{m+k}},$$

seega $v \notin B(x_0, 1/2^{m+k})$. Järelikult $n < m + k$ korral lõikab $B(x_0, 1/2^{m+k})$ hulka $V_{\alpha,n}$ ülimalt ühe $\alpha \in A$ korral. $\square$

2 Omadused CWO, CO ja (co)

2.1 Omadus CWO

Olgu X Banachi ruum. Meenutame, et ruumi X **nõrk topoloogia** on funktsioonide hulga X^* poolt indutseeritud topoloogia, st vähim topoloogia w, mille korral iga funktsionaal $f \in X^*$ on pidev kujutusena $(X, w) \to \mathbb{R}$. Üldiselt on nõrk topoloogia normitopoloogiast nõrgem; need topoloogiad langevad kokku parajasti siis, kui X on lõplikumõõtmeline (vt nt [8, lause 2.5.13]).

Vaatleme nõrga topoloogia alamruumitopoloogiat ühikkeral B_X. Selle alamruumitopoloogia elemente nimetame B_X **suhteliselt nõrgalt lahtisteks osahulkadeks**. Ühikkera B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste osahulkade **kumer kombinatsioon** on mis tahes B_X osahulk $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ on sellised, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ning $U_1, \dots, U_n$ on B_X suhteliselt nõrgalt lahtised osahulgad.

Definitsioon 2.1 (vt [2, definitsioon 1.1])**.** Banachi ruumil X on **omadus CWO**, kui iga B_X suhteliselt nõrgalt lahtiste osahulkade kumer kombinatsioon on samuti B_X suhteliselt nõrgalt lahtine osahulk.

Märkus 2.2. (1) Olgu $\mathfrak{B}$ nõrga topoloogia poolt indutseeritud topoloogia baas ühikkeras. Omaduse CWO jaoks piisab, kui kõik $\mathfrak{B}$ hulkade kumerad kombinatsioonid on suhteliselt nõrgalt lahtised.

(2) Ühikkera (lahtised) viilud moodustavad nõrga topoloogia poolt indutseeritud topoloogia eelbaasi. Ei ole teada, kas omadus CWO on samaväärne sellega, et kõik ühikkera viilude kumerad kombinatsioonid on suhteliselt nõrgalt lahtised (vt [7, lk 7]).

Näide 2.3. Banachi ruumil c_0 on omadus CWO (vt nt [2, teoreem 2.5, (b)], vrd [1, teoreem 2.4]).

Näide 2.4. Banachi ruumil ℓ_2 ei ole omadust CWO (vt nt [5, märkus IV.5]). Sarnaselt saab näidata, et mitte ühelgi lõpmatumõõtmelisel rangelt kumeral Banachi ruumil ei ole omadust CWO.

Lemma 2.5. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Banachi ruumil X on omadus CWO;*

(ii) *iga $\lambda \in (0, 1)$ ja mis tahes kahe B_X suhteliselt nõrgalt lahtise osahulga U ja V korral on B_X osahulk $\lambda U + (1 - \lambda)V$ suhteliselt nõrgalt lahtine.*

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii) on ilmne.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Näitame, et siis on iga kumer kombinatsioon $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i U_i$, kus $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ on sellised, et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ning $U_1, \dots, U_n$ on B_X suhteliselt nõrgalt lahtised osahulgad, samuti B_X suhteliselt nõrgalt lahtine osahulk.

Juht $n = 1$ on triviaalne. Juht $n = 2$ tuleneb vahetult eeldusest. Üldjuhul tõestame väite induktsiooniga n järgi. Eeldame, et väide kehtib mingi $n \geqslant 2$ korral ning vaatleme kumerat kombinatsiooni

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i U_i,$$

kus $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ on sellised, et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, ning $U_1, \dots, U_{n+1}$ on B_X suhteliselt nõrgalt lahtised osahulgad. Kui $\lambda_{n+1} = 1$, siis $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ja seega $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i U_i$ võrdub hulgaga U_{n+1}, mis on suhteliselt nõrgalt lahtine.

Olgu nüüd $\lambda_{n+1} \neq 1$. Sel juhul kehtib

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} = 1.$$

Induktsiooni eelduse järgi on hulk

$$U := \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} U_i$$

suhteliselt nõrgalt lahtine. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i U_i &= (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} U_i + \lambda_{n+1} U_{n+1} \\
&= (1 - \lambda_{n+1}) U + \lambda_{n+1} U_{n+1}.
\end{aligned}$$

Viimane on kahe suhteliselt nõrgalt lahtise hulga U ja U_{n+1} kumer kombinatsioon, mis eelduse (ii) kohaselt on suhteliselt nõrgalt lahtine. Seega kehtib (i). $\square$

2.2 Omadus CO

Olgu X Banachi ruum. Käesolevas alapunktis vaatleme normitopoloogia alamruumitopoloogiat ühikkeral B_X. Selle alamruumitopoloogia elemente nimetame B_X **suhteliselt lahtisteks osahulkadeks**. Ühikkera B_X suhteliselt lahtiste osahulkade **kumer kombinatsioon** on mis tahes B_X osahulk $\sum_{i=1}^n \lambda_i U_i$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ on sellised, et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, ning $U_1, \ldots, U_n$ on B_X suhteliselt lahtised osahulgad.

Definitsioon 2.6. Banachi ruumil X on **omadus CO**, kui iga ühikkera B_X suhteliselt lahtiste osahulkade kumer kombinatsioon on B_X suhteliselt nõrgalt lahtine osahulk.

Märkus 2.7. (1) Artiklis [3] (vt ka [7]) öeldakse, et ühikkera B_X on stabiilne, kui Banachi ruumil X on omadus CO. Käesolevas töös kasutame *ad hoc* nimetust 'omadus CO' analoogia põhjal omaduse CWO nimetusega.

(2) Olgu $\mathfrak{B}$ normitopoloogia poolt indutseeritud topoloogia baas ühikkeras. Omaduse CO jaoks piisab, kui kõik $\mathfrak{B}$ hulkade kumerad kombinatsioonid on suhteliselt lahtised.

Näide 2.8 (vt [3, näide 1.3 (d)]). Rangelt kumeral Banachi ruumil on omadus CO (me anname sellele ka oma põhjenduse, vt järeldus 3.3).

Märkus 2.9. Viimasest näitest tuleneb, et omadused CWO ja CO on üldiselt erinevad: igal rangelt kumeral Banachi ruumil on omadus CO, aga rangelt kumeral lõpmatumõõtmelisel Banachi ruumil, nt ℓ_2, ei ole omadust CWO. Küll aga on lahtine küsimus, kas igal CWO omadusega Banachi ruumil on omadus CO (vt nt [7, lk 9 esimene lõik]).

Lemma 2.10. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Banachi ruumil X on omadus CO;*

(ii) *iga $\lambda \in (0, 1)$ ja mis tahes kahe B_X suhteliselt lahtise osahulga U ja V korral on B_X osahulk $\lambda U + (1 - \lambda)V$ suhteliselt lahtine;*

(iii) *mis tahes kahe B_X suhteliselt lahtise osahulga U ja V korral on B_X osahulk $\frac{1}{2}(U + V)$ suhteliselt lahtine;*

(iv) *kujutus*

$$F: B_X \to 2^{B_X \times B_X}, \quad F(x) = \{(y, z) \in B_X \times B_X : \frac{1}{2}(y + z) = x\},$$

on alt poolpidev.

Märkus 2.11. (1) Omadust CO saab esitada teatud kujutuste lahtisusena. Tingimus (ii) tähendab, et iga $\lambda \in (0, 1)$ korral on kujutus $B_X \times B_X \to B_X$, $(y, z) \mapsto \lambda y + (1 - \lambda)z$, lahtine. Tingimus (iii) tähendab, et kujutus $B_X \times B_X \to B_X$, $(y, z) \mapsto \frac{1}{2}(y + z)$, on lahtine.

(2) Korrutise $B_X \times B_X$ topoloogia on metriseeruv, sobiv kaugus on näiteks

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\{\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|\}.$$

Seega käsitleme korrutist $B_X \times B_X$ meetrilise ruumina.

Tõestus. (i) $\iff$ (ii) tõestatakse samal viisil kui lemma 2.5; bakalaureusetöös eraldi tõestust ei esitata.

(ii) $\implies$ (iii) on ilmne, tingimus (iii) on tingimuse (ii) erijuht, kus $\lambda = \frac{1}{2}$.

(iii) $\implies$ (ii). Eeldame, et kehtib (iii). Fikseerime $\lambda \in (0, 1)$ ja näitame, et kujutus $\Phi\colon B_X \times B_X \to B_X$, $(y, z) = \lambda y + (1 - \lambda)z$, on lahtine. Kasutame selleks lemmat 1.5. Olgu $(y, z) \in B_X \times B_X$ ja tähistame $x \coloneqq \Phi(y, z)$, st $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Vaatleme B_X elementide jada (x_n), mis koondub punktiks x. Eesmärk on leida osajada (x_{n_k}) ning B_X elementide jadad (y_k) ja (z_k) nii, et $y_k \to y$, $z_k \to z$ ja iga k korral $\lambda y_k + (1 - \lambda)z_k = x_{n_k}$.

Samm 1: tähelepanek. Olgu $U, V \subset B_X$ suhteliselt lahtised ning $y \in U$ ja $z \in V$. Näitame, et $\operatorname{conv}(U \cup V)$ on punkti x ümbrus. Eeldusest (iii) tuleneb, et iga diaadilise murdarvu $\mu \in [0, 1]$ (st $\mu = \frac{m}{2^n}$, kus $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \{0, \dots, 2^n\}$) korral on B_X osahulk $\mu U + (1-\mu)V$ suhteliselt lahtine. Mingi diaadilise murdarvu $\mu \in [0, 1]$ ja $z' \in V$ korral $x = \mu y + (1 - \mu)z'$, seega sisaldab $\operatorname{conv}(U \cup V)$ punkti x ümbrust $\mu U + (1 - \mu)V$.

Samm 2: osajada (x_{n_k}) konstruktsioon. Olgu iga $k \in \mathbb{N}$ korral

$$U_k \coloneqq D(y, 1/k), \quad V_k \coloneqq D(z, 1/k) \quad \text{ja} \quad W_k = \operatorname{conv}(U_k \cup V_k).$$

Eelneva tähelepaneku kohaselt on iga W_k punkti x ümbrus. Kuna $x_n \to x$, siis leidub iga k korral kui tahes suur $n_k \in \mathbb{N}$ nii, et $x_{n_k} \in W_k$. Valime $n_1 < n_2 < \cdots$. Iga k korral on $x_{n_k} \in W_k$, seega leiduvad $\lambda_k \in [0, 1]$, $u_k \in U_k$ ja $v_k \in V_k$ nii, et

$$x_{n_k} = \lambda_k u_k + (1 - \lambda_k)v_k.$$

Ilmselt $u_k \to y$ ja $v_k \to z$.

Samm 3: $\lambda_k \to \lambda$. Kui $y = z$, siis $x = y = z$ ja võime λ_k asendada konstantse jadaga $\lambda, \lambda, \dots$. Vaatleme juhtu $y \neq z$. Meil on

$$\|x_{n_k} - x\| = \|\lambda_k u_k + (1 - \lambda_k)v_k - \lambda y - (1 - \lambda)z\| \to 0.$$

Seega

$$|\lambda_k - \lambda| \cdot \|u_k - v_k\| \leqslant \|x_{n_k} - x\| + \lambda\|u_k - y\| + (1 - \lambda)\|v_k - z\| \to 0.$$

Kuna $\|u_k - v_k\| \to \|y - z\| > 0$, saame, et $\lambda_k \to \lambda$.

Samm 4: täpsustamine. Kui $\lambda_k \geqslant \lambda$, siis asendame esituses $x_{n_k} = \lambda_k u_k + (1 - \lambda)v_k$ punkti v_k sellise punktiga $z_k \in [x_k, v_k]$, et $x_k = \lambda u_k + (1-\lambda)z_k$, ning tähistame $y_k \coloneqq u_k$. Kui $\lambda_k < \lambda$, siis asendame esituses $x_{n_k} = \lambda_k u_k + (1 - \lambda)v_k$ punkti u_k sellise punktiga $y_k \in [x_k, u_k]$, et $x_k = \lambda y_k + (1 - \lambda)v_k$, ning tähistame $z_k \coloneqq v_k$. Mõlemal juhul on

$$x_k = \lambda y_k + (1 - \lambda)z_k, \quad y_k \to y \quad \text{ja} \quad z_k \to z.$$

Kokkuvõttes oleme leidnud vajaliku omadusega jadad ning seega on Φ lahtine.

(iii) $\iff$ (iv). (Selle samaväärsuse võib lihtsasti tuletada lause 1.12 abil.) Tingimus (iv) tähendab, et mis tahes B_X suhteliselt lahtiste osahulkade U ja V korral on $\{x \in B_X : F(x) \cap (U \times V) \neq \varnothing\}$ suhteliselt lahtine. Paneme seejuures tähele, et

$$\{x \in B_X : F(x) \cap (U \times V) \neq \varnothing\} = \frac{1}{2}(U + V).$$

Seega on tingimus (iv) samaväärne tingimusega (iii). □

Toome nüüd välja ühe omadusega CO Banachi ruumide klassi.

Lause 2.12. *Banachi ruumil on omadus CO, kui tema mis tahes kolmel paarikaupa lõikuval kinnisel keral on mittetühi ühisosa.*

Märkus 2.13. Viimasele tulemusele on esitatud tõestus näiteks [3, näide 1.3, (d), lk 195], kuid see ei paista olevat täielik, sest seal esitatud kriteerium omadusele CO on formaalselt nõrgem kui omadus CO ja ei ole selge, et tegu on samaväärsete tingimustega. Sealse põhjenduse eeskujul on siiski võimalik anda korrektne tõestus.

Tõestus. Olgu X selline Banachi ruum, mille mis tahes kolmel paarikaupa lõikuval kinnisel keral on mittetühi ühisosa. Näitame, et ruumil X on omadus CO, st kujutus

$$F\colon B_X \to 2^{B_X \times B_X}, \quad F(x) = \{(y, z) \in B_X \times B_X : \tfrac{1}{2}(y + z) = x\},$$

on alt poolpidev. Selleks kasutame alt poolpidevuse kriteeriumi lemmast 1.17.

Fikseerime $x \in B_X$ ja $(y, z) \in F(x)$ ning vaatleme punktiks x koonduvat B_X elementide jada (x_n). Lemma 1.17 järgi piisab leida $B_X \times B_X$ elementide jada (y_n, z_n), $n = 1, 2, \ldots$, nii, et $(y_n, z_n) \in F(x_n)$ ning $y_n \to y$ ja $z_n \to z$.

Iga $n \in \mathbb{N}$ korral tähistame $a_n \coloneqq y + x_n - x$ ja vaatleme kolme kinnist kera:

$$B_1 \coloneqq B_X, \quad B_2 \coloneqq \overline{B}(2x_n, 1), \quad B_3 \coloneqq \overline{B}(a_n, \|x_n - x\|),$$

kus $B_3 = \{y\}$ juhul, kui $x_n = x$. Need kolm kera lõikuvad paarikaupa, sest

$$x_n \in B_1 \cap B_2, \quad y \in B_1 \cap B_3, \quad 2a_n - y \in B_2 \cap B_3.$$

Eeldusest tuleneb, et $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \neq \varnothing$. Fikseerime $y_n \in B_1 \cap B_2 \cap B_3$. Kuna $y_n \in B_3$, kehtib $\|y_n - a_n\| \leqslant \|x_n - x\|$. Samuti $a_n \to y$, mistõttu

$$\|y_n - y\| \leqslant \|y_n - a_n\| + \|a_n - y\| \to 0.$$

Defineerime $z_n \coloneqq 2x_n - y_n$. Siis $z_n \in B_X$, sest $y_n \in B_2$, ja $(y_n, z_n) \in F(x_n)$. Lisaks

$$\|z_n - z\| = \|2x_n - y_n - (2x - y)\| \to 0,$$

kuna $x_n \to x$ ja $y_n \to y$.

Järelikult on F alt poolpidev ja Banachi ruumil X omadus CO. □

Näide 2.14. Lõplikumõõtmelistel Banachi ruumidel ℓ_1^n ja ℓ_∞^n ($n \in \mathbb{N}$) on omadus CO, sest nendes ruumides on mis tahes kolmel paarikaupa lõikuval kinnisel keral mittetühi ühisosa (vt nt [6]).

2.3 Omadus (co)

Artiklis [2] toodi sisse omaduse CWO uurimiseks spetsiaalselt loodud geomeetriline omadus (co). Käesolevas alapunktis anname selle omaduse definitsiooni ja esitame vajalikud tulemused.

Definitsioon 2.15. Olgu X Banachi ruum ja $a \in B_X$.

(a) **Elemendil a on omadus (co)**, kui iga $\varepsilon > 0$ ja elemendi a esituse korral kujul

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

kus $n \in \mathbb{N}$ ja $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ on sellised, et $n \geqslant 2$ ja $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, ning $a_1, \dots, a_n \in B_X$, leiduvad $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$f_1 \colon D(a, \delta) \to D(a_1, \varepsilon), \ \ \dots, \ \ f_n \colon D(a, \delta) \to D(a_n, \varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a, \delta)$ korral

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = x.$$

(b) **Elemendil a on omadus (co2)**, kui iga $\varepsilon > 0$ ja elemendi a esituse korral kujul

$$a = \lambda b + (1 - \lambda)c,$$

kus $\lambda \in (0, 1)$ ning $b, c \in B_X$, leiduvad $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$f \colon D(a, \delta) \to D(b, \varepsilon) \quad \text{ja} \quad g \colon D(a, \delta) \to D(c, \varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a, \delta)$ korral

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)g(x) = x.$$

(c) **Banachi ruumil X on omadus (co)**, kui igal B_X elemendil on omadus (co).

Lause 2.16 ([2, lause 3.2, (a)]). *Olgu X Banachi ruum ja $a \in B_X$. Kui $\|a\| < 1$, siis elemendil a on omadus (co).*

Tõestus. Eeldame, et $\|a\| < 1$. Olgu $\varepsilon > 0$ ning olgu

$$a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i,$$

kus $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ja $a_1, \dots, a_n \in B_X$. Võtame

$$\delta = \frac{1 - \|a\|}{2} \cdot \varepsilon$$

ning defineerime iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$f_i \colon D(a, \delta) \to D(a_i, \varepsilon), \quad f_i(x) = x + \big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big)(a_i - a).$$

Näitame, et need kujutused on korrektselt defineeritud. Olgu $x \in D(a, \delta)$ ja fikseerime $i \in \{1, \dots, n\}$. Siis

$$\begin{aligned}
\|f_i(x)\| &= \big\|(x - a) + \big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big) a_i + \frac{\varepsilon}{2} a\big\| \\
&\leqslant \|x - a\| + \big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big)\|a_i\| + \frac{\varepsilon}{2}\|a\| \\
&< \delta + \big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big) + \frac{\varepsilon}{2}\|a\| = 1,
\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}
\|f_i(x) - a_i\| &= \|(x - a) + \frac{\varepsilon}{2}(a - a_i)\| \\
&\leqslant \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{2}\|a\| + \frac{\varepsilon}{2}\|a_i\| \\
&< \delta + \frac{\varepsilon}{2}\|a\| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

seega $f_i(x) \in D(a_i, \varepsilon)$. Kujutus f_i on ilmselt pidev, sest see on pideva nihkekujutuse ahend.

Lõpetuseks paneme tähele, et iga $x \in D(a, \delta)$ korral on

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x + \big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (a_i - a) \\
&= x + \big(1 - \frac{\varepsilon}{2}\big)(a - a) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Järelikult on elemendil a omadus (co). □

Lause 2.17 ([2, lause 3.2, (b)]). *Olgu X Banachi ruum. Kui X on rangelt kumer, siis on ruumil X omadus (co).*

Tõestus. Olgu $a \in B_X$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $\|a\| < 1$, siis elemendil a on omadus (co) eelmise lause kohaselt.

Olgu nüüd $a = 1$ ja eeldame, et $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$, kus $n \geqslant 2$, $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ja $a_i \in B_X$. Rangelt kumera ruumi mõiste kohaselt on a ekstreemumpunkt, seega on iga $i = \{1, \dots, n\}$ korral $a_i = a$ ning võime võtta $\delta = \varepsilon$ ja iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$f_i \colon D(a, \delta) \to D(a_i, \varepsilon), \quad f_i(x) = x.$$

Seega on igal $a \in B_X$ omadus (co) ning järelikult on ruumil X omadus (co). □

Lemma 2.18 ([2, lause 3.2]). *Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Banachi ruumil X on omadus (co);*

(ii) *iga $\varepsilon > 0$, elemendi $a \in B_X$ ja elemendi a esituse korral kujul $a = \lambda b + (1-\lambda)c$, kus $\lambda \in (0,1)$ ja $b, c \in B_X$, leiduvad $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid*

$$f\colon D(a,\delta) \to D(b,\varepsilon) \quad ja \quad g\colon D(a,\delta) \to D(c,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a,\delta)$ korral $\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = x$.

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii) on ilmne.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Eeldame, et kehtib (ii). Fikseerime vabalt $\varepsilon > 0$. Näitame induktsiooniga, et iga naturaalarvu $n \geqslant 2$ korral saame iga elemendi $a \in B_X$ ja iga esituse $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i$ korral, kus $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ on sellised, et $n \geqslant 2$ ja $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, ning $a_1, \dots, a_n \in B_X$, leida $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$f_1\colon D(a,\delta) \to D(a_1,\varepsilon), \ \dots, \ f_n\colon D(a,\delta) \to D(a_n,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a,\delta)$ korral

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x) = x.$$

Juht $n = 2$ on eelduse põhjal ilmne. Kehtigu väide mingi $n \in \mathbb{N}$ korral, kus $n \geqslant 2$. Fikseerime elemendi $a \in B_X$ ja vaatleme a esitust kujul

$$a = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i,$$

kus $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} > 0$ on sellised, et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$, ning $a_1, \dots, a_{n+1} \in B_X$.

Paneme tähele, et

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1.$$

Induktsiooni eelduse kohaselt leiduvad kumera kombinatsiooni

$$b := \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} a_i$$

korral $\delta_1 > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$g_1\colon D(b,\delta_1) \to D(a_1,\varepsilon), \ \dots, \ g_n\colon D(b,\delta_1) \to D(a_n,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(b, \delta_1)$ korral

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} g_i(x) = x.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\delta_1 \leqslant \varepsilon$.

Paneme tähele, et

$$a = (1-\lambda_n)b + \lambda_{n+1}a_{n+1}.$$

Tingimuse (ii) kohaselt leiduvad $\delta > 0$ ning pidevad funktsioonid

$$h\colon D(a,\delta) \to D(b,\delta_1) \quad \text{ja} \quad f_{n+1}\colon D(a,\delta) \to D(a_{n+1},\delta_1) \subset D(a_{n+1},\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a, \delta)$ korral

$$(1-\lambda_{n+1})h(x) + \lambda_{n+1}f_{n+1}(x) = x.$$

Defineerime kujutused $f_1 \coloneqq g_1 \circ h, \dots, f_n \coloneqq g_n \circ h$. Paneme tähele, et iga $x \in D(a, \delta)$ korral

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f_i(x) &= (1-\lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} g_i\big(h(x)\big) + \lambda_{n+1}f_{n+1}(x) \\
&= (1-\lambda_{n+1})h(x) + \lambda_{n+1}f_{n+1}(x) \\
&= x.
\end{aligned}$$

Seega kehtib väide iga $n \geqslant 2$ korral ja järelikult kehtib (i). $\square$

Lemma 2.19 ([2, teoreem 3.6]). *Olgu X Banachi ruum ja $a \in S_X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *elemendil a on omadus (co2);*

(ii) *iga $\varepsilon > 0$ ja esituse $a = \lambda b + (1-\lambda)c$ korral, kus $\lambda \in (0,1)$ ja $b, c \in B_X$, leiduvad $\delta > 0$ ning pidevad funktsioonid*

$$\widetilde{f}\colon C(a,\delta) \to C(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad \widetilde{g}\colon C(a,\delta) \to C(c,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in C(a, \delta)$ korral

$$\lambda\widetilde{f}(x) + (1-\lambda)\widetilde{g}(x) = x.$$

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Eeldame, et elemendil a on omadus (co2). Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu

$$a = \lambda b + (1-\lambda)c,$$

kus $\lambda \in (0,1)$ ja $b, c \in B_X$. Eelduse kohaselt leiduvad $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$f\colon D(a,\delta) \to D(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad g\colon D(a,\delta) \to D(c,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in B$ korral
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = x.$$
Otsitavateks funktsioonideks $\widetilde{f}$ ja $\widetilde{g}$ sobivad vastavalt funktsioonide f ja g ahendid.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu
$$a = \lambda b + (1-\lambda)c,$$
kus $\lambda \in (0,1)$ ja $b, c \in B_X$. (Ilmselt $b, c \in S_X$.) Olgu $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid
$$\widetilde{f}\colon C(a,\delta) \to C(b, \varepsilon/2) \quad \text{ja} \quad \widetilde{g}\colon C(a,\delta) \to C(c, \varepsilon/2)$$
sellised, et iga $x \in C(a,\delta)$ korral
$$\lambda\widetilde{f}(x) + (1-\lambda)\widetilde{g}(x) = x.$$
Näitame, et leiduvad pidevad funktsioonid
$$f\colon D(a,\delta/2) \to D(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad g\colon D(a,\delta/2) \to D(c,\varepsilon)$$
nii, et iga $x \in D(a,\delta/2)$ korral
$$\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = x.$$
Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\delta \leqslant \varepsilon$ ja $\delta < 2$. Sel juhul $0 \notin D(a,\delta/2)$. Defineerime $x \in D(a,\delta/2)$ korral
$$f(x) = \|x\| \cdot \widetilde{f}\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) \quad \text{ja} \quad g(x) = \|x\| \cdot \widetilde{g}\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big).$$
Paneme tähele, et kujutus f on korrektselt defineeritud: kui $x \in D(a,\delta/2)$, siis $x/\|x\| \in C(a,\delta)$ ja $f(x) \in D(b,\varepsilon)$, sest
$$\Big\|a - \frac{x}{\|x\|}\Big\| \leqslant \|a - x\| + 1 - \|x\| \leqslant \|a-x\| + \|a-x\| < \delta$$
ja
$$\begin{aligned}\Big\|b - \|x\| \cdot \widetilde{f}\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\| &\leqslant (1-\|x\|)\|b\| + \|x\| \cdot \Big\|b - \widetilde{f}\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\| \\ &\leqslant \|a-x\| + \Big\|b - \widetilde{f}\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big)\Big\| \\ &< \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$
Kujutused f ja g on ilmselt pidevad. Järelikult kehtib (i). □

Lause 2.20 (vt [2, lause 3.7]). *Igal kahemõõtmelisel Banachi ruumil on omadus (co).*

Tõestus. Olgu X kahemõõtmeline Banachi ruum. Olgu $\varepsilon > 0$ ja $a \in S_X$ ning vaatleme elemendi a mingit esitust kujul

$$a = \lambda b + (1-\lambda)c,$$

kus $\lambda \in (0,1)$ ja $b, c \in B_X$ on sellised, et $b \neq c$.

Näitame, et leiduvad $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$\widetilde{f}\colon C(a,\delta) \to C(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad \widetilde{g}\colon C(a,\delta) \to C(c,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in C(a,\delta)$ korral

$$\lambda\widetilde{f}(x) + (1-\lambda)\widetilde{g}(x) = x.$$

Üldisust kitsendamata eeldame, et $\lambda \geqslant 1/2$. Selle eelduse kohaselt on

$$\|a-b\| \leqslant \|a-c\|,$$

sest

$$\|a-b\| = (1-\lambda)\|b-c\| \quad \text{ja} \quad \|a-c\| = \lambda\|b-c\|.$$

Tähistame

$$d \coloneqq \|a-b\| = (1-\lambda)\|b-c\|.$$

Seega $d \leqslant 1$, sest

$$d = (1-\lambda)\|b-c\| \leqslant \frac{1}{2}(\|b\| + \|c\|) = 1.$$

Veel tähistame

$$e \coloneqq (a-b)/\|a-b\|.$$

Paneme tähele, et $\|a+te\| = 1$, kui $-d \leqslant t \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}d$: vaadeldavad elemendid $a+te$ on b ja c kumerad kombinatsioonid, sest otspunktides $t = -d$ ja $t = \frac{\lambda}{1-\lambda}d$ saame vastavalt

$$a + te = b \quad \text{ja} \quad a + te = c.$$

Väide. *Leidub $\gamma > 0$ nii, et iga $\delta \in (0,\gamma)$ korral*

$$C(a,\delta) = \{a + te : t \in (-\delta,\delta)\}.$$

Väite tõestus. Esmalt paneme tähele, et elemendid a ja e on lineaarselt sõltumatud. Valime $\gamma \in (0, d/2]$ nii, et

$$\gamma B_X \subset D \coloneqq \{sa + te : s, t \in [-d/2, d/2]\}.$$

Olgu $\delta \in (0,\gamma)$. Kui $t \in (-\delta,\delta)$, siis $-d \leqslant t \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}d$, mistõttu saame varasema tähelepaneku põhjal, et $\|a+te\| = 1$ ja seega

$$\{a + te : t \in (-\delta,\delta)\} \subset C(a,\delta).$$

Kuna $C(a,\delta) \subset \{a\} + \delta B_X \subset \{a\} + D$, saame iga $x \in C(a,\delta)$ esitada kujul $x = a + (sa + te) = (1+s)a + te$, kus $s, t \in [-\delta/2, \delta/2]$. Sel juhul on $-d \leqslant \frac{t}{1+s} \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda} d$ ja seega

$$1 = \|x\| = \|(1+s)a + te\| = (1+s)\Big\|a + \frac{t}{1+s}e\Big\| = 1 + s,$$

järelikult $s = 0$, $x = a + te$ ja

$$C(a,\delta) \subset \{a + te : t \in [-\delta/2, \delta/2]\}. \qquad \square$$

Fikseerime ühe sellise arvu γ. Olgu

$$0 < \delta < \min\{\gamma, (1-\lambda)\varepsilon/2\}.$$

Defineerime

$$f\colon C(a,\delta) \to C(b,\varepsilon), \quad f(a+te) = b + \Big(\frac{\delta}{\lambda} + t\Big)e,$$

ja

$$g\colon C(a,\delta) \to C(c,\varepsilon), \quad g(a+te) = c + \Big(\frac{\delta}{1-\lambda} - t\Big)e.$$

Kujutuste f ja g definitsioon on korrektne, sest

$$b + \Big(\frac{\delta}{\lambda} + t\Big)e = a + \Big(\frac{\delta}{\lambda} + t - d\Big)e,$$
$$c + \Big(\frac{\delta}{1-\lambda} - t\Big)e = a + \Big(\frac{\delta}{1-\lambda} - t + d\Big)e$$

ja

$$-d \leqslant \frac{\delta}{\lambda} + t - d \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}d, \quad -d \leqslant \frac{\delta}{1-\lambda} - t + d \leqslant \frac{\lambda}{1-\lambda}d.$$

Kujutused f ja g on ka pidevad, sest mõlemad on pidevate nihkekujutuste ahendid. $\square$

Lause 2.21 ([2, lause 3.3, (a)])**.** *Olgu X selline Banachi ruum, mille puhul* $\operatorname{ext} B_X$ *ei ole kinnine. Mitte ühelgi elemendil $a \in \overline{\operatorname{ext} B_X} \setminus \operatorname{ext} B_X$ ei ole omadust (co).*

Märkus 2.22. Teisisõnu ütleb viimane lause, et (co) omadusega Banachi ruumi ühikkera ekstreemumpunktide hulk on kinnine.

Tõestus. Fikseerime elemendi $a \in \overline{\operatorname{ext} B_X} \setminus \operatorname{ext} B_X$. Oletame, et elemendil a on omadus (co) ja näitame, et tekib vastuolu. Kuna element a ei ole ühikkera B_X ekstreemumpunkt, siis leiduvad $b, c \in B_X$ nii, et $b \neq c$ ja $a = \frac{1}{2}(b + c)$. Tähistame

$$\varepsilon := \frac{\|b - c\|}{2}.$$

Tehtud oletuse kohaselt leiduvad $\delta > 0$ ja ning pidevad funktsioonid

$$f\colon D(a,\delta) \to D(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad g\colon D(a,\delta) \to D(c,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a,\delta)$ korral

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = x,$$

kusjuures hulkade $D(b,\varepsilon)$ ja $D(c,\varepsilon)$ mittelõikumise tõttu $f(x) \neq g(x)$.

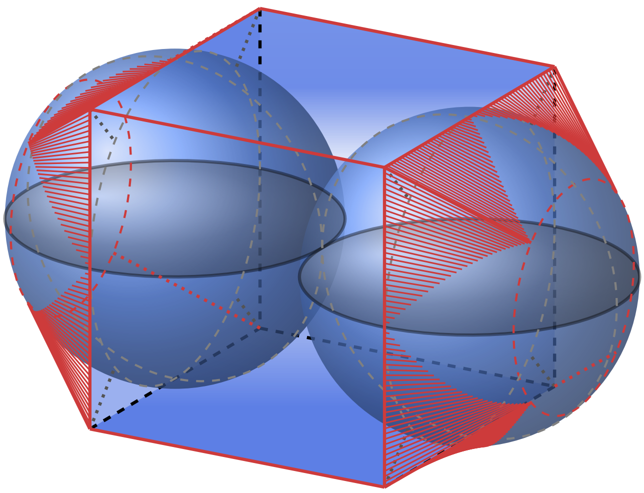
Seega ka iga $x \in D(a,\delta) \cap \operatorname{ext} B_X$ korral

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}g(x) = x. \qquad \square$$

Näide 2.23 ([2, näide 3.4]). Esitame näite kolmemõõtmelisest reaalsest Banachi ruumist, millel ei ole omadust (co). Olgu X Banachi ruum $\mathbb{R}^3$ sellise normiga, mille suhtes ühikkera on

$$B_X = \operatorname{conv}\big((B_{\ell_2^3} - \{e_1\}) \cup B_\infty^3 \cup (B_{\ell_2^3} + \{e_1\})\big),$$

vt joonis 1. Siis ei ole näiteks punktil $a = e_1 + e_3 = (1,0,1)$ eelmise lause põhjal omadust (co).



Joonis 1: Ühikkera B_X.

3 Põhiteoreemi tõestus

Käesoleva alapunkti põhieesmärk on üksikasjalikult esitada järgmise teoreemi tõestus.

Teoreem 3.1 ([7, lause 3.7])**.** *Olgu X Banachi ruum. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *Banachi ruumil X on omadus (co);*

(ii) *Banachi ruumil X on omadus CO.*

Tõestus. (i) $\Longrightarrow$ (ii). Eeldame, et ruumil X on omadus (co) ja näitame, et ruumil X on omadus CO. Vaatleme B_X suhteliselt lahtiste osahulkade U ja V kumerat kombinatsiooni $\lambda U + (1-\lambda)V$, kus $\lambda \in (0,1)$. Lemma 2.10 põhjal piisab näidata, et see kumer kombinatsioon on B_X suhteliselt lahtine osahulk.

Olgu $a \in \lambda U + (1-\lambda)V$. Siis leiduvad $u \in U$ ja $v \in V$ nii, et

$$a = \lambda u + (1-\lambda)v.$$

Valime $\varepsilon > 0$ nii, et $D(u,\varepsilon) \subset U$ ja $D(v,\varepsilon) \subset V$. Omaduse (co) põhjal leiduvad $\delta > 0$ ning pidevad funktsioonid

$$f\colon D(a,\delta) \to D(u,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad g\colon D(a,\delta) \to D(v,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a,\delta)$ korral

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = x.$$

Seega

$$D(a,\delta) \subset \lambda D(u,\varepsilon) + (1-\lambda)D(v,\varepsilon) \subset \lambda U + (1-\lambda)V.$$

Järelikult on $\lambda U + (1-\lambda)V$ ühikkera B_X suhteliselt lahtine osahulk.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Eeldame, et ruumil X on omadus CO ja näitame, et ruumil X on omadus (co). Olgu $\varepsilon > 0$ ning $a, b, c \in B_X$ ja $\lambda \in (0,1)$ sellised, et

$$a = \lambda b + (1-\lambda)c.$$

Lemma 2.18 põhjal piisab näidata, et leiduvad $\delta > 0$ ja pidevad funktsioonid

$$f\colon D(a,\delta) \to D(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad g\colon D(a,\delta) \to D(c,\varepsilon)$$

nii, et iga $x \in D(a,\delta)$ korral

$$\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = x.$$

Tähistame

$$U \coloneqq D(b,\varepsilon/2) \quad \text{ja} \quad V \coloneqq D(c,\varepsilon/2).$$

Siis on U ja V ühikkera B_X suhteliselt lahtised osahulgad. Omaduse CO põhjal on $\lambda U + (1-\lambda)V$ samuti B_X suhteliselt lahtine osahulk. Seega leidub $\delta > 0$ nii, et

$$D(a,\delta) \subset \lambda U + (1-\lambda)V.$$

Olgu $Y := X \oplus_\infty X$ ja vaatleme kujutust

$$F\colon D(a,\delta) \to 2^Y, \quad F(x) = \overline{\{(u,v) \in U \times V : \lambda u + (1-\lambda)v = x\}}.$$

Iga $x \in D(a,\delta)$ korral on $F(x)$ mittetühi, kinnine ja kumer (kumera hulga sulund on kumer, seega järeldub $F(x)$ kumerus hulga

$$\{(u,v) \in U \times V : \lambda u + (1-\lambda)v = x\}$$

kumerusest, mis omakorda tuleneb vahetult hulkade U ja V kumerusest.) Tõepoolest, olgu $x \in D(a,\delta)$, $\mu \in [0,1]$ ning olgu $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in U \times V$ sellised, et

$$\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1 = x \quad \text{ja} \quad \lambda u_2 + (1-\lambda)v_2 = x.$$

Kuna U ja V on kumerad, saame

$$u := \mu u_1 + (1-\mu)u_2 \in U \quad \text{ja} \quad v := \mu v_1 + (1-\mu)v_2 \in V.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \lambda u + (1-\lambda)v &= \mu\big(\lambda u_1 + (1-\lambda)v_1\big) + (1-\mu)\big(\lambda u_2 + (1-\lambda)v_2\big) \\ &= \mu x + (1-\mu)x = x. \end{aligned}$$

Näitame, et kujutus F on alt poolpidev ehk iga ruumi Y lahtise osahulga W korral on $\{x \in D(a,\delta) : F(x) \cap W \neq \varnothing\}$ meetrilise ruumi $D(a,\delta)$ lahtine osahulk. Järelduse 1.16 põhjal piisab vaadelda juhtu, kus $W = B(y,r) \times B(z,s)$, kus $y,z \in X$ ja $r,s > 0$. Sel juhul

$$\begin{aligned} &\{x \in D(a,\delta) : F(x) \cap W \neq \varnothing\} \\ &\quad = \{x \in D(a,\delta) : \exists (u,v) \in \big(U \cap B(y,r)\big) \times \big(V \cap B(z,s)\big)\ x = \lambda u + (1-\lambda)v\} \\ &\quad = D(a,\delta) \cap \Big(\lambda\big(U \cap B(y,r)\big) + (1-\lambda)\big(V \cap B(z,s)\big)\Big). \end{aligned}$$

Kuna $U \cap B(y,r)$ ja $V \cap B(z,s)$ on B_X suhteliselt lahtised osahulgad, annab omadus CO, et

$$\lambda\big(U \cap B(y,r)\big) + (1-\lambda)\big(V \cap B(z,s)$$

on ühikkera B_X suhteliselt lahtine osahulk. Seega on

$$D(a,\delta) \cap \Big(\lambda\big(U \cap B(y,r)\big) + (1-\lambda)\big(V \cap B(z,r)\big)\Big)$$

meetrilise ruumi $D(a,\delta)$ lahtine osahulk ja järelikult on F alt poolpidev.

Michaeli valikuteoreemi 1.19 eeldused on täidetud, selle põhjal leidub pidev funktsioon $h\colon D(a,\delta) \to X \oplus_\infty X$ nii, et iga $x \in D(a,\delta)$ korral $h(x) \in F(x)$. Kuna

$$F(x) \subset \overline{U \times V} = \overline{D(b,\varepsilon/2)} \times \overline{D(c,\varepsilon/2)} \subset D(b,\varepsilon) \times D(c,\varepsilon),$$

siis on h väärtused korrutisruumis $D(b,\varepsilon) \times D(c,\varepsilon)$ ja

$$h\colon D(a,\delta) \to D(b,\varepsilon) \times D(c,\varepsilon)$$

(formaalselt läheme üle kujutuse h koahendile). Olgu f ja g kujutuse h koordinaatfunktsioonid, st

$$f\colon D(a,\delta) \to D(b,\varepsilon) \quad \text{ja} \quad g\colon D(a,\delta) \to D(c,\varepsilon)$$

ning $(f(x), g(x)) = h(x)$ iga $x \in D(a,\delta)$ korral. Kujutuse h pidevus on samaväärne kujutuste f ja g pidevusega.

Valides $(u_n, v_n) \in U \times V$ nii, et $\lambda u_n + (1-\lambda)v_n = x$ ja $(u_n, v_n) \to (f(x), g(x))$, saame

$$x = \lambda u_n + (1-\lambda)v_n \to \lambda f(x) + (1-\lambda)g(x).$$

Järelikult $\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = x$ iga $x \in D(a,\delta)$.

Sellega oleme näidanud, et Banachi ruumil X on omadus (co). □

Järeldus 3.2 (vrd [2, lause 2.2]). *Lõplikumõõtmelisel Banachi ruumil on omadus CWO parajasti siis, kui sel on omadus (co).*

Tõestus. Olgu X lõplikumõõtmeline Banachi ruum. Sel juhul langevad ruumi X nõrk ja normitopoloogia kokku, mistõttu on ruumil X omadus CWO parajasti siis, kui sel on omadus CO ehk omadus (co). □

Järeldus 3.3 (vt lause 2.17). *Igal rangelt kumeral Banachi ruumil on omadus CO.*

Järeldus 3.4 (vt lause 2.20). *Igal kahemõõtmelisel Banachi ruumil on omadus CO.*

Kasutatud kirjandus

[1] T. A. Abrahamsen and V. Lima, *Relatively weakly open convex combinations of slices*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 10, 4421–4427. MR 3834668

[2] T. A. Abrahamsen, J. B. Guerrero, R. Haller, V. Lima, and M. Põldvere, *Banach spaces where convex combinations of relatively weakly open subsets of the unit ball are relatively weakly open*, Studia Math. **250** (2020), no. 3, 297–320. MR 4034749

[3] A. Clausing and S. Papadopoulou, *Stable convex sets and extremal operators*, Math. Ann. **231** (1977/78), no. 3, 193–203. MR 467249

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, and V. Zizler, *Banach space theory*, CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, Springer, New York, 2011, The basis for linear and nonlinear analysis. MR 2766381

[5] N. Ghoussoub, G. Godefroy, B. Maurey, and W. Schachermayer, *Some topological and geometrical structures in Banach spaces*, Mem. Amer. Math. Soc. **70** (1987), no. 378, iv+116. MR 912637

[6] A. B. Hansen and A. Lima, *The structure of finite-dimensional Banach spaces with the* 3.2. *intersection property*, Acta Math. **146** (1981), no. 1-2, 1–23. MR 594626

[7] G. López-Pérez and R. Medina, *A characterization of the weak topology in the unit ball of purely atomic L_1 preduals*, J. Math. Anal. Appl. **514** (2022), no. 2, Paper No. 126311, 14. MR 4422399

[8] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998. MR 1650235

[9] M. E. Rudin, *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. Amer. Math. Soc. **20** (1969), 603. MR 236876

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Marko Kolk,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose

   „Banachi ruumide omadused CWO ja CO“,

   mille juhendajad on Rainis Haller ja Märt Põldvere, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 3.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Marko Kolk

21.08.2025