

TARTU RIIKLIK ÜLIKOOL
MATEMAATILISE STATISTIKA JA PROGRAMMEERIMISE KATEEDER

*Subada kaitmisele
18. VI 73.
"Laane"*

REGRESSIOONFUNKTSIOONIDE
MITMEKE VÕRDELINE

Diplomitöö

Teostaja: M. Timmermann
rak.mat. Vh. üliõpilane

Juhendaja: A. Parring
van.õpetaja

TARTU 1973

1. S I S S E J U H A T U S .

Olgu vektor \mathbf{y} juhuslik suurus, mis sõltub argumentidest x_1, \dots, x_p . Olgu sõltuvus selline, et juhusliku suuruse Y keskväärtus on avaldatav argumentide ja tundmatute parameetrite funktsioonina

$$E(Y) = f(x_1, \dots, x_p; \beta_1, \dots, \beta_p). \quad (1.1)$$

Meie käsutuses on vaatlusandmete tabel

$$\begin{array}{cccc} y_1 & x_{11} & \dots & x_{1p} \\ y_2 & x_{21} & \dots & x_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n & x_{n1} & \dots & x_{np} \end{array} \quad (1.2)$$

kus y on juhusliku suuruse väärtus argumentide komplekti

(x_{i1}, \dots, x_{ip}) korral.

Eeldame, et vaatlused on sõltumatud ja Y on normaaljaotusega $(y_1, \dots, y_n) \sim N(f_1(x_1, \dots, x_p; \beta_1, \dots, \beta_p), \dots, f_n(x_1, \dots, x_p; \beta_1, \dots, \beta_p), \sigma^2 I)$

Oletame, et funktsioon (1.1) on tundmatute parameetrite lineaarfunktsioon ning avaldub kujul

$$E(y_i) = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Seega olme saanud teatava matemaatilise mudeli. Tundmatutele kordajatele β_1, \dots, β_p saame leida hinnanguid $\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_p$ vähemruutude meetodil:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y,$$

kus X ja Y on vastavad suurused vaatlusandmete tabelist.

Praktikas on sageli raske täpselt kindlaks määrata mudelis kasutatavate argumentide hulka. Ühe eksperimendi vaatlusandmete statistiliseks töötlemiseks võime kasutada mitut erinevat mudelit. Käesolevas töös püüame anda algoritmi, mille alusel võib lugeda kaks mudelit samaväärseks või ühte eelistada teisele.

2. BELDUSED JA PROBLEEMID.

Olgu meile antud juhuslik vektor y jaotusega $N(\eta, \sigma^2 I)$, kus η ja σ on tundmatud parameetrid. Oletame, et on võimalik vektorit η kirjeldada võrduse

$$\eta = X\beta \quad (2.0)$$

kaudu, kus X on teadaolevate elementidega $n \times p$ matriks astakuga p ja β on tundmatu p elemendiline vektor. Võrdusega (2.0) kirjeldatud seost nimetatakse regressioonfunktsiooniks. Nagu teada avaldub vektori β vähemruutude hinnang kujul

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y, \quad (2.1)$$

kusjuures selle hinnangu keskväärts avaldub järgmiselt:

$$E\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'\eta. \quad (2.2)$$

Kasutades hinnangut $\hat{\beta}$, saame järgmise hinnangu η -le

$$\hat{\eta} = X\hat{\beta} = X'(X'X)^{-1}X'y \quad (2.3)$$

keskväärtusega

$$E\hat{\eta} = X'(X'X)^{-1}X'\eta. \quad (2.4)$$

Hinnang $\hat{\eta}$ on y projektsioon $C(X)$ -le.

[$C(A)$ -ga tähistame matriksi A veeruvektorite poolt moodustatud A lineaarkatet].

$E\eta$ on η projektsioon samasse ruumi. Viimane on võrdne η -ga ainult siis, kui $\eta \in C(X)$ s.t. esialgne oletus kehtib.

Dispersioon σ^2 hinnanguks on suurus

$$s^2 = \frac{(y - \hat{\eta})'(y - \hat{\eta})}{n - p}, \quad (2.5)$$

kus $\frac{(n-p)s^2}{\sigma^2}$ on χ^2 -jaotusega, vabadusastmete arvuga $n-p$ ja statistiliselt sõltumatu $\hat{\eta}$ -st (vt. [3] lk. 102).

See on tsentraalne χ^2 -jaotus, kui $\eta \in C(X)$; kui see nii ei ole, siis on jaotus mittetsentraalne parameetritega $\sigma^{-2}\eta'(I - X'(X'X)^{-1}X)\eta$.

Sellest järeldub, et

$$Es^2 = \sigma^2 + \eta'(I - X'(X'X)^{-1}X)\eta / (n - p). \quad (2.6)$$

Võtame sama ülesande korral vaatluse alla kaks erinevat mudelit regressioonfunktsioonidega $\eta_1 = X_1' \beta_1$ ja $\eta_2 = X_2' \beta_2$. Meil on vaja leida teatud mõttes nende headuse hinnang. Maatriksid X_i on maatriksi X teatavast n_i veerust moodustatud $n \times n_i$ maatriksid astakuga n_i ja $C(X_i) \subset C(X)$, $i=1,2$. Hinnanguks η_i -le on $\hat{\eta}_i = X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i' y$, $i=1,2$, keskvaartusega

$$E(\hat{\eta}_i) = X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i' \eta \quad (2.7)$$

Tähistame $\eta_i = E(\hat{\eta}_i)$.

Kui kehtiks seos $\eta = X \beta$, siis η_i väärtus langeks kokku η väärtusega s.t. $\eta - \eta_i = 0$.

Mudeli "headuse" mõõduks valimegi suuruse $\|\eta - \eta_i\|^2$ ehk

$$(\eta - \eta_i)'(\eta - \eta_i).$$

$$(\eta - \eta_i)'(\eta - \eta_i) = \eta' \eta - \eta' \eta_i - \eta_i' \eta + \eta_i' \eta_i,$$

kus $\eta_i' = \eta' X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i$.

$$\begin{aligned} \text{Teisendame: } \eta_i &= \eta' X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i \eta = \\ &= \eta' X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i \eta = \eta_i' \eta. \end{aligned}$$

$$\text{Järelikult } (\eta - \eta_i)'(\eta - \eta_i) = \eta' \eta - \eta_i' \eta.$$

Mida väiksem on saadud vahe, seda "paremaks" loeme mudeli ehk, mida suurem on väärtus

$$\eta_i' \eta = \eta' X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i \eta, \quad (2.8)$$

seda "parem" on mudel, kus $\eta' X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i \eta$ on η projektsioon

$C(X_i)$ -le pikkuse ruut. Selle projektsiooni võib avaldada kujul

$$X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i X'(X X')^{-1} X \eta, \quad \text{kuna } C(X_i) \subset C(X) \text{ ja } X'(X X')^{-1} X \eta$$

on η projektsioon $C(X)$ -le. Rakendades viimast tulemust, saame va-

$$\text{lemile (2.8) anda kuju } \beta' X X_i'(X_i X_i)^{-1} X_i X \beta. \quad (2.9)$$

Saame leida kahe regressioonfunktsiooni "headuse" vahe, mis avaldub valemiga

$$\beta'(X X_2'(X_2 X_2)^{-1} X_2 X' - X X_1'(X_1 X_1)^{-1} X_1 X') \beta. \quad (2.10)$$

Seega oleme jõudnud valemi (2.10.) poolt funktsiooni
mitmese võrdlemise probleemini. Selle probleemi lahenduse
anname järgmises punktis.

3. RUUTFUNKTSIOONI MITME NE VÕRDLEMINE.

Olgu meile antud suvaline vektor $\hat{\psi} = (\hat{\psi}_1, \dots, \hat{\psi}_q)'$,
jaotusega $N(\psi, \sigma^2 B)$, kus $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_q)$ ja σ^2 on tundmatud
parameetrid, B aga teadaolev positiivselt määratud maatriks.
Olgu s^2 parameetri σ^2 hinnang, mis on sõltumatu $\hat{\psi}$ -st ja
on χ^2 -jaotusega, vabadusastmete arvuga ν .

Meie eesmärk on leida kõikidele kujul $\psi' C \psi$ avalduvatele
ruutfunktsioonidele intervallhinnang, kus C on mingi ette-
antud sümmeetriline $q \times q$ maatriks.

Tõestame järgmise abitulemuse:

Lemma 1: Sõltugu X jaotus parameetritest (θ, ξ) ja olgu $\{S(x)\}$
usalduspiirkondade pere usaldusnivooga $1-\alpha$. Olgu $\{F\}$ para-
meetrist θ sõltuvate funktsioonide pere.

Pere $\{F\}$ funktsioonide samaaegne usalduspiirkondade pere
avaldub kujul $\{f(S(x))\}, f \in F$

see tähendab, et $P_{\theta, \xi} \{f(\theta) \in f(S(x)), f \in F\} \geq 1-\alpha$.

Tõestus: Näitame, et $\forall f \in F$ korral

$$\{x: \theta \in S(x)\} \subseteq \{x: f(\theta) \in f(S(x))\}.$$

Oletame, et $x_0 \in \{x: \theta \in S(x)\}$, siis $\theta \in S(x_0)$

ja järelikult $f(\theta) \in f(S(x_0)) \forall f \in F$ korral.

See lemma annab meile tee meid huvitava funktsiooni usaldus-
intervalli leidmiseks.

Käesolevas probleemis suurus

$$\frac{(\psi - \hat{\psi})' B^{-1} (\psi - \hat{\psi})}{q s^2} \tag{3.0}$$

on F -jaotusega vabadusastmetega q ja ν (vt. [3] lk.48).

Järelikult

$$P[(\psi - \hat{\psi})' B^{-1} (\psi - \hat{\psi}) \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu}] = 1-\alpha,$$

kus $F_{\alpha, q, \nu}$ on q ja ν vabadusastmega F -jaotuse $1-\alpha$ -kvantiil.

Olgu $\theta = \psi$ ja pereks F ruutfunktsioonide $\psi' C \psi$ pere. Maatriks C
on sümmeetriline ja reaalarvuliste elementidega maatriks. Iga
sellise C korral saab leida funktsiooni $\psi' C \psi$ väärtuste hulga,

kus ψ kuulub ellipsoidi

$$(\psi - \hat{\psi})' B^{-1} (\psi - \hat{\psi}) \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu} \quad (3.1)$$

Selleks väärtuste hulgaks on intervall, mille ülemise ja alumise raja määravad funktsiooni $\psi' C \psi$ ekstermaalsed väärtused piirkonnas (3.1). Lemma põhjal on see ka usaldusintervall usaldusnivooga $1-\alpha$. Maatriksi C jaoks on võimalik leida regulaarne $q \times q$ maatriks P , mis rahuldab tingimusi $P' B^{-1} P = I$ ja $P' C P = D$, kus D on diagonaalmaatriks reaalarvuliste diagonaalelementidega d_1, \dots, d_q (vt. [2] lk.52).

Defineerime vektori $\hat{\mu} = (\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_q)$, $\hat{\mu} = P' \hat{\psi}$.

Funktsiooni $\mu' D \mu$ väärtuste hulk μ korral, mis asub sfääris

$$(\mu - \hat{\mu})' (\mu - \hat{\mu}) \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu}$$

ühtib funktsiooni $\psi' C \psi$ väärtuste hulgaga, kus ψ on ellipsoidis (3.1). Seega huvitavad meid funktsiooni $\mu' D \mu$

ekstermaalsed väärtused piirkonnas

$$(\mu - \hat{\mu})' (\mu - \hat{\mu}) \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu} \quad (3.2)$$

Olgu λ_{min} ja λ_{max} võrrandi

$$\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{\mu}_i^2}{(d_i - \lambda)^2} = q s^2 F_{\alpha, q, \nu} \quad (3.3)$$

minimaalne ja maksimaalne juur.

Võtame $a = -\min(\min d_i, \lambda_{min})$ ja $b = \max(\max d_i, \lambda_{max})$.

Otsitava usaldusintervalli määramiseks on tõestatud järgmine teoreem.

Teoreem: Tõenäosusega vähemalt $1-\alpha$ kehtib kogu ruutfunktsioonide pere $\psi' C \psi$ jaoks järgmine hinnang

$$A_1 \leq \psi' C \psi \leq A_2, \quad (3.4)$$

kus $A_1 = a \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{\mu}_i^2}{(a+d_i)^2} - q s^2 F_{\alpha, q, \nu} \right)$ ja

$$A_2 = b \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{\mu}_i^2}{(b-d_i)^2} - q s^2 F_{\alpha, q, \nu} \right).$$

väljaarvatud erijuhud:

$A_1 = 0$, kui kõik $d_i \geq 0$ ja $\sum_{d_i > 0} \hat{\mu}_i^2 \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu}$
 ja $A_2 = 0$, kui kõik $d_i \leq 0$ ja $\sum_{d_i < 0} \hat{\mu}_i^2 \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu}$.

Töestus: Tuleb leida funktsiooni $T(\mu) = \mu'D\mu$ minimaalne ja maksimaalne väärtus tingimusel, et μ asub piirkonnas

$$(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) \leq c^2,$$

kus $c^2 = q^2 F_{2, q, v}$.

Näitame, et otsitavad väärtused saavutatakse kas $\mu = 0$ korral või kitsendustega näidatud sfääril, s.t. μ korral, kus

$(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) = c^2$. Piirdumise ainult miinimumi leidmise probleemiga, sest maksimumi leidmine toimub analoogiliselt. Kõigepealt vaatleme juhtumit, kus kõik $d_i \geq 0$ ja $\sum_{d_i > 0} \hat{\mu}_i^2 \leq c^2$. Kuna $d_i \geq 0$, siis $T(\mu)$ on alati mittenegatiivne.

Kuid sellisel juhtumil väärtus 0 saavutatakse, kui võtta $\mu_i = 0$ indeksite i puhul, mille korral $d_i = 0$.

Järgnevalt vaatleme juhtumit, kus kõik $d_i \geq 0$ ja $\sum_{d_i > 0} \hat{\mu}_i^2 > c^2$, siis ka $\sum_{i=1}^2 \hat{\mu}_i^2 > c^2$. Väärtus null pole saavutatav. Järelikult sfäär $(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) \leq c^2$ ei sisalda koordinaatide alguspunkte.

Ellipsoidi $T(\mu) = \sum_{i=1}^2 d_i \mu_i^2$ keskpunkt on aga koordinaatide alguspunktis. Funktsiooni $\mu'D\mu$ minimaalne väärtus μ korral

sfääril $(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) = c^2$ saavutatakse antud juhul sfääril $(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) = c^2$, kui puutepunkt ellipsoidiga $T(\mu) = \sum_{i=1}^2 d_i \mu_i^2$.

Lõpuks vaatleme veel juhtu, kus mitte kõik $d_i \geq 0$. Me võime kirjutada

$$T(\mu) = \sum_{d_i < 0} d_i (\mu_i - \hat{\mu}_i + \hat{\mu}_i)^2 + \sum_{d_i > 0} d_i \mu_i^2.$$

Olgu μ^* korral $(\mu^* - \hat{\mu})'(\mu^* - \hat{\mu}) < c^2$. Saame leida sellise μ^{**} , et vähemalt ühe i korral, kus $d_i < 0$ kehtib võrdus $|\mu_i^{**} - \hat{\mu}_i| >$

$> |\mu_i^* - \hat{\mu}_i|$ ja vahe $(\mu^{**} - \hat{\mu})$ on sama märgiga kui $\hat{\mu}_i$. Järelikult $\mu^{**} < \mu^*$ ja ka sellisel juhtumil otsitav miinimum astseb sfääril $(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) = c^2$.

Analoogiliselt võib näidata, et ka maksimum saavutatakse sfääril

$$(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) = c^2 \quad \text{või on selleks null.}$$

Seega on meil probleemiks leida funktsiooni $T(\mu)$ ekstermaalsed väärtused tingimusel, et $(\mu - \hat{\mu})'(\mu - \hat{\mu}) = c^2$.

Selleks kasutame Lagrange'i kordajate meetodit (vt. [1] lk. 320)

Moodustame funktsiooni G ja leiame punktid, milles on rahuldatud ekstreemumi tarvilikud tingimused

$$G = \sum_{i=1}^q d_i \mu_i^2 - \lambda \left(\sum_{i=1}^q (\mu_i - \hat{\mu}_i)^2 - c^2 \right). \quad (3.5)$$

Ekstreemumi saavutamiseks tarvilikud tingimused on, et

$$\frac{\partial G}{\partial \mu_i} = 0, \quad i=1, \dots, q.$$

Leiame osatuletised, saame süsteemi

$$d_i \mu_i - \lambda (\mu_i - \hat{\mu}_i) = 0 \quad i=1, \dots, q.$$

Avaldame saadud võrrandist $\mu_i, i=1, \dots, q.$

$$\mu_i = \frac{\lambda \hat{\mu}_i}{\lambda - d_i} \quad (3.6)$$

ning asenda me μ_i lisatingimustesse

$$\sum_{i=1}^q (\mu_i - \hat{\mu}_i)^2 = c^2. \quad (3.7)$$

Saame võrrandi λ süntes

$$\sum_{i=1}^q \frac{(\lambda \hat{\mu}_i - \lambda \hat{\mu}_i + d_i \hat{\mu}_i)^2}{(\lambda - d_i)^2} = c^2,$$

siit

$$\sum_{i=1}^q \frac{d_i^2 \hat{\mu}_i^2}{(d_i - \lambda)^2} = c^2.$$

Valime $a = -\min(\min d_i, \lambda_{\min})$ ning

leiame vastavad μ_i

$$\mu_i = \frac{a \hat{\mu}_i}{-(d_i + a)}.$$

Asendame saadud suurused avaldise $T(\mu) = \sum_{i=1}^q d_i \mu_i^2$ ning

liidame nulliga võrdse suuruse

$$a \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i^2 \hat{\mu}_i^2}{(d_i + a)^2} - q s^2 \tilde{F}_{a, q, v} \right).$$

Saame $\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{\mu}_i^2 a^4}{(d_i + a)^2} + a \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i^2 \hat{\mu}_i^2}{(d_i + a)^2} - q s^2 \tilde{F}_{a, q, v} \right) =$

$$= a \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{\mu}_i^2 (a + d_i)}{(a + d_i)^2} - q s^2 \tilde{F}_{a, q, v} \right) =$$

$$= a \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{\mu}_i^2}{a + d_i} - q s^2 \tilde{F}_{a, q, v} \right) = A_2.$$

seega oleme saanud funktsiooni $\Psi^T C \Psi$ alumise tükke. (vt. [4]).

Valime $b = \max(\max d_i, 1) \max$ ning leiame vastavad μ_i

$$\mu_i = \frac{b \hat{j}_i}{d_i - b}.$$

Asendame μ_i avaldisse $T(\mu) = \sum_{i=1}^q d_i \mu_i^2$ ning lahutame nulliga võrdse suuruse

$$b \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i^2 \hat{j}_i^2}{(d_i - b)^2} - q s^2 F_{d,q,v} \right).$$

Saame, et

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{j}_i^2 b^2}{(b - d_i)^2} - b \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{j}_i^2}{(b - d_i)^2} - q s^2 F_{d,q,v} \right) &= \\ = b \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{j}_i^2 (b - d_i)}{(b - d_i)^2} + q s^2 F_{d,q,v} \right) &= \\ = b \left(\sum_{i=1}^q \frac{d_i \hat{j}_i^2}{b - d_i} + q s^2 F_{d,q,v} \right) &= A_2, \end{aligned}$$

mis on $\psi' C \psi$ ülemiseks tõkkeks (vt. [4])

Seega on teoreem tõestatud.

Pöördume tagasi punktis 2 vaadeldud kahe regressioonifunktsiooni $\eta_1 = X_1' \beta_1$ ja $\eta_2 = X_2' \beta_2$ poole, kus μ_i oli matriksi X_i astak. üldsust kahandamata eeldame, et $\mu_1 \leq \mu_2$. Olgu $\mu_0 = \min(\mu_1, \mu_2)$ $C(X_1)$ ja $C(X_2)$ lõike dimensioon ja μ matriksi X' dimensioon. Leiame eelpool toodud teoreemi põhjal usaldusintervalli funktsiooni (2.10) jaoks. Valemis (3.3.) kasutatud suurused d_i on võrrandi

$|C - d B^{-1}| = 0$ lahendiks (vt. [4] lk. 1019). Vaadeldaval juhul onandab see võrrandi kuju:

$$|X X_2' (X_2 X_2')^{-1} X_2 X_1' - X X_1' (X_1 X_1')^{-1} X_1 X_2' - d X X'| = 0. \quad (3.8)$$

Tõestame abitulemuse, mis võimaldab kindlaks määrata võrrandi (3.8) nullist erinevate lahendite arvu.

Lemme 2: Võrrandis (3.8) $\mu = \mu_1 - \mu_2 + 2\mu_0$ lahendit on võrdsed nulliga, $\mu_2 - \mu_1$ lahendit on võrdsed 1-ga ja ülejäänud $2(\mu_1 - \mu_0)$ lahendiks on arvupaarid $\pm d_i$, $i = 1, \dots, \mu_1 - \mu_0$.

Tõestus: Moodustagu vektorid $d_{\mu_2 + \mu_2 - 2\mu_0}, \dots, d_{\mu_1 + \mu_2 - \mu_0}$ ortogonaalse baasi ruumis $C(X_1) \cap C(X_2)$.

Valime vektorid $d_1, \dots, d_{\mu_1 - \mu_0}$ nii, et $d_1, \dots, d_{\mu_1 - \mu_0}$ ja $d_{\mu_2 + \mu_2 - 2\mu_0 + 1}, \dots, d_{\mu_2 + \mu_2 - \mu_0}$ moodustavad ortonormeeritud baasi ruumis $C(X_2)$. Täiendame saadud baasi vektoritega

$d_{\mu_1 - \mu_0 + 1}, \dots, d_{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_0}, d_{\mu_2 + \mu_2 - \mu_0}, \dots, d_n$ ortonormeeritud baasini

ruumis E_n . Vektori η uued koordinaadid avalduvad kujul

$$\eta = A' \eta,$$

kus A on maatriks, mille veergudeks on eelpool konstrueeritud baasivektorid $\alpha_i, i=1, \dots, n$. Vektori η_1 , mis oli η projektsioon ruumi $C(X_1')$, uued koordinaadid on järgmised:

$$\eta_1 = (\eta_1, \dots, \eta_{\mu-\mu_0}, 0, \dots, 0, \eta_{\mu+\mu_2-2\mu_0+1}, \dots, \eta_{\mu+\mu_2-\mu_0}, 0, \dots, 0)$$

Meid huvitab suurus $\eta_1 \eta_1$. Kuna skalaarkorrutise väärtus ei muutu, kui korrutatavatele vektoritele rakendada ortogonaalteisendust, saame

$$\eta_1 \eta_1 = \eta_1' \eta_1 = \sum_{i=1}^{\mu-\mu_0} \eta_i'^2 + \sum_{i=\mu+\mu_2-2\mu_0+1}^{\mu+\mu_2-\mu_0} \eta_i'^2. \quad (3.10)$$

Konstrueerime ruumis E_n teistsuguse ortonormeeritud baasi.

Võtame vektorid $\alpha_{2\mu-2\mu_0+1}, \dots, \alpha_{\mu+\mu_2-\mu_0}$. Täiendame nende poolt määratud baasi vektoritega $\alpha_{\mu-\mu_0+1}^{(1)}, \dots, \alpha_{\mu+\mu_2-2\mu_0}^{(1)}$ ortonormeeritud baasini ruumis $C(X_1')$. Saadud baasi täiendame vektorite $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{\mu-\mu_0}^{(1)}, \alpha_{\mu+\mu_2-\mu_0}, \dots, \alpha_n$ lisamisega ortonormeeritud baasini ruumis E_n . Vektori η uued koordinaadid avalduvad saadud baasis kujul

$${}''\eta = A_1' \eta, \quad (3.11)$$

kus A_1 on maatriks, mille veergudeks on baasivektorid $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n$. Vektor ${}''\eta$ projektsiooni ruumis $C(X_2')$ tähistame ${}''\eta_2$ -ga ning

$${}''\eta_2 = (0, \dots, 0, {}''\eta_{\mu-\mu_0+1}, \dots, {}''\eta_{\mu+\mu_2-\mu_0}, 0, \dots, 0).$$

Meid huvitav suurus $\eta_1' \eta_2$ on siis esitatav järgmiselt:

$$\eta_1' \eta_2 = {}''\eta_1' {}''\eta_2 = \sum_{i=\mu-\mu_0+1}^{\mu+\mu_2-2\mu_0} {}''\eta_i'^2 + \sum_{i=\mu+\mu_2-2\mu_0+1}^{\mu+\mu_2-\mu_0} {}''\eta_i'^2. \quad (3.12)$$

Vaatleme vahet $\eta_1' \eta_2 - \eta_2' \eta_1 =$

$$\begin{aligned} &= \eta_1' \eta_2 - \eta_2' \eta_1 = \sum_{i=\mu-\mu_0+1}^{\mu+\mu_2-2\mu_0} {}''\eta_i'^2 + \sum_{i=\mu+\mu_2-2\mu_0+1}^{\mu+\mu_2-\mu_0} {}''\eta_i'^2 - \\ &- \sum_{i=1}^{\mu-\mu_0} \eta_i'^2 - \sum_{i=\mu_1+\mu_2-2\mu_0+1}^{\mu_1+\mu_2-\mu_0} \eta_i'^2. \end{aligned}$$

Kuna $\alpha_{\mu_1+\mu_2-2\mu_0+1}, \dots, \alpha_{\mu_1+\mu_2-\mu_0}$
korral samad, siis

on nõlemal

$$\sum_{i=\mu_1+\mu_2-2\mu_0+1}^{\mu_1+\mu_2-\mu_0} \eta_i^2 = \sum_{i=\mu_1+\mu_2-2\mu_0+1}^{\mu_1+\mu_2-\mu_0} \eta_i^2,$$

siit aga

$$\eta_2' \eta_2 - \eta_2 \eta_2' = \sum_{i=\mu_1-\mu_0+1}^{\mu_1+\mu_2-2\mu_0} \eta_i^2 - \sum_{i=1}^{\mu_1-\mu_0} \eta_i^2, \quad (3.13)$$

Defineerime matriksid

$$Q_2 = (\alpha_{\mu_1-\mu_0+1}^{(1)}, \dots, \alpha_{2\mu_2-2\mu_0}^{(1)}) \quad \text{ning} \quad Q_3 = (\alpha_{2\mu_1-2\mu_0+1}^{(1)}, \dots, \alpha_{\mu_1}^{(1)}),$$

siis $Q_i' Q_i = I, i = 1, 2, 3, \quad Q_i' Q_3 = 0, i = 1, 2.$

Defineerime vektori $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_\mu)$ järgmise võrdusega

$$\theta = (Q_2' Q_2, Q_3') \eta.$$

Arvestades seoseid (3.9) ja (3.11), võib valemi (3.12) kirjutada kujul

$$\sum_{i=\mu_1-\mu_0+1}^{\mu_1+\mu_2-2\mu_0} \theta_i^2 - \sum_{i=1}^{\mu_1-\mu_0} \theta_i^2 = \theta' G \theta. \quad (3.14)$$

Võrdusega (3.14) oleme defineerinud matriksi G. Defineerime vektori $\hat{\theta}$ järgmise võrdusega;

$$\hat{\theta} = (Q_2' Q_2, Q_3') \eta. \quad (3.15)$$

Kuna η on normaaljaotusega juhuslik suurus kovariatsioonimatriksiga $\sigma^2 I$, siis $\hat{\theta}$ kovariatsioonimatriks on $\sigma^2 A$, kus

$$A = \begin{pmatrix} I & Q_1' Q_2 & 0 \\ Q_2' Q_2 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Seega saame esialgse ülesandega samaväärse ülesande: leida funktsiooni $\hat{\theta}' G \hat{\theta}$ ekstermaalsed väärtused tingimusel, et $\hat{\theta}$

kuulub ellipsoidi

$$(\theta - \hat{\theta}) A^{-1} (\theta - \hat{\theta}) \leq q s^2 F_{\alpha, q, \nu} \quad (3.17)$$

Leiame selle üleande lahendamiseks vajalikud suurused $d_i, i=1, \dots, p$. Maatriks G on meil järgmisel kujul

$$G = \begin{pmatrix} -I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

kus $-I$ on $\mu - \mu_0$ dimensionaalne ruutmaatriks ja I on $\mu_2 - \mu_0$ dimensionaalne ruutmaatriks.

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix}, \quad \text{kus} \quad K = \begin{pmatrix} I & Q_1' Q_2 \\ Q_2' Q_1 & I \end{pmatrix},$$

siis

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix} \quad (\text{vt. [5] lk.134}). \quad (3.19)$$

Valemist (3.18) ja (3.19) on ilmne, et $|G - dA^{-1}| = 0$ võib kirjutada kujul

$$(1-d)^{\mu_2 - \mu_0} d^{\mu - \mu_0 - \mu_2 + 2\mu_0} \left| \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix} - dK^{-1} \right| = 0. \quad (3.20)$$

Siit saame vahetult, et $\mu - \mu_0 - \mu_2 + 2\mu_0$ lahendit $d_i = 0$ ja $\mu_2 - \mu_0$ lahendit $d_i = 1$.

Meil jääb veel lahendada võrrand

$$\left| \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix} - d\hat{K} \right| = 0,$$

see on aga samaväärne võrrandi

$$\left| \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q_1' Q_2 \\ Q_2' Q_1 & I \end{pmatrix} - dI \right| = 0$$

lahendamisega. Kahe maatriksi determinantide korrutis võrdub korrutusmaatriksi determinandiga,

$$\left| \begin{pmatrix} I & Q_1' Q_2 \\ Q_2' Q_1 & I \end{pmatrix} \right| \neq 0.$$

Maatriksite korrutamisel ja lahutamisel saame, et

$$\left| \begin{pmatrix} -(1+d)I & -Q_1' Q_2 \\ Q_2' Q_1 & (1-d)I \end{pmatrix} \right| = 0, \quad (3.21)$$

Determinandi (3.21) võib kirjutada järgmisel kujul

$$\left| Q_2' Q_2 Q_2' Q_1 - (1-d^2)I \right| = 0. \quad (3.22)$$

Siit järeldub, et $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m-\mu_0}$ on positiivselt määratud maatriksi $Q_1' Q_2 Q_2' Q_1$, omaväärtused, siis ülejäänud $2(m-\mu_0)$ lahendit on esitatavad kujul $d_i = \pm (1 - \epsilon_i)^{1/2}$ $i = 1, \dots, m-\mu_0$. Seega on lemma tõestatud.

Lemma võimaldab väiksema töömahuga leida intervallhinnangu leidmiseks vajalikud suurused d_i . Intervallhinnangu leidmiseks on veel tarvis leida suuruste \hat{j}_i väärtused, $\hat{j}_i = F\hat{\theta}$. Maatriks F peab olema selline, et $F'A^{-1}F$ ja $F'GF = D$, s.t. teisendaks diagonaalmaatriksi G diagonaalmaatriksiks D . Kuna maatriks A^{-1} avaldub kujul (3.19), siis on ilmne, et maatriks F avaldub kujul

$$F = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

kus T on selline $(2\mu - 2\mu_0) \times (2\mu - 2\mu_0)$ maatriks, et $T'K^{-1}T = I$ ja teisendab diagonaalmaatriksi G diagonaalmaatriksiks D . Siit on ilmne, et kui $K^{-1} = I$, s.t. $Q_1' Q_2 = 0$, siis $T = I$ ja $\hat{j}_i = \hat{\theta}$.

4. M Õ N E D E R I J U H U D

A. Olgu $\mu = \mu_0$, see tähendab, et regressioonfunktsioon $X_2' \beta_2$ saadakse regressioonfunktsioonile $X_1' \beta_1$ lisades $\mu_2 - \mu_1$ sõltumatut muutjat.

Sel juhul avaldis (3.14) omab kuju $\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2$. Matriksid Q_1 ja Q_2 ei eksisteeri. Kõik võrrandi (3.20) lahendid on võrdsed ühega ning $\hat{\theta}$ kovariatsioonimatriks on $\sigma^2 I$. Vektoriteks $\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_{\mu_2 - \mu_1}$ võime kasutada $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{\mu_2 - \mu_1}$. Võrrand (3.3) on kujul

$$\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \frac{\hat{\theta}_i^2}{(1 - \eta)^2} = c^2$$

ning lahenditeks on

$$\eta_{\min} = 1 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{c} \quad \eta_{\max} = 1 + \frac{\left(\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} c^2}$$

Teoreemi põhjal me saame usaldusintervalli jaoks kujul

$$\left(\max\left(0, \left(\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} - c\right) \right) \leq \sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2 \leq \left(\left(\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2\right)^{\frac{1}{2}} + c \right)^2$$

Usaldusintervall ei sisalda nulli ainult siis, kui $\sum_{i=1}^{\mu_2 - \mu_1} \hat{\theta}_i^2 > c^2$.

Ainult sel juhul me võime öelda, et $X_2' \beta_2$ on parem kui $X_1' \beta_1$. Erijuhul, kui $\mu_2 = \mu_1 + 1$, me saame võrratuse

$$|\hat{\theta}_1| > 5 \left(\mu F_{\alpha, \mu, n - \mu} \right)^{\frac{1}{2}}$$

B. Olgu $\mu_1 - \mu_0 = 1$ ja $\mu_2 - \mu_0 = 1$. Sel erijuhul on meil võimalik samahaaval valida muutujaid regressioonfunktsiooni. Matriksid

Q_1 ja Q_2 on üheveerulised. Vektorid d_1 ja d_2 mida me kasutame on kergesti määratlevad. Avaldis (3.14) on järgmine

$$\sum_{i=2}^{\mu_2 - \mu_0} \hat{\theta}_i^2 - \hat{\theta}_1^2$$

Matriksite Q_1 ja Q_2 korrutis on skalaarne suurus, tähistame selle a -ga. Võrrandil (3.22), mis vaadeldaval erijuhul omab kuju $a^2 - (1 - d^2) = 0$, on kaks nullist erinevat lahendit

$$d_1 = (1 - a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ja} \quad d_2 = (1 + a^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ning} \quad \mu_2 - \mu_1 \quad \text{kordne lahend} \quad d = 1$$

C. Olgu $Q_1' Q_2 = 0$. Sellisel juhul matriksite X_1' ja X_2' veeruvektorid, mis ei kuulu $C(X_1') \cap C(X_2')$ on ortogonaalsed. See on situatsioon, mis tõenäoliselt väga sageli ei esine, kuid sel juhul on arvutused lihtsad. $\hat{\theta}$ kovariatsioonimatriks

valemist (3.16) on $\sigma^2 I$ ja valemist (3.13) saame, et $d=1$ on $(\mu_2 - \mu_0)$ kordne lahend ning $d=-1$ on $(\mu_1 - \mu_0)$ kordne lahend.

Na $\hat{f}_1, \dots, \hat{f}_{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_0}$ me võime valida vastavalt $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_0}$ -ga.

Võrrand (3.3) omab kuju

$$\sum_{i=1}^{\mu_1 - \mu_0} \frac{\hat{\theta}_i^2}{(1+\eta)^2} + \sum_{i=\mu_1 - \mu_0 + 1}^{\mu_1 + \mu_2 - 2\mu_0} \frac{\hat{\theta}_i^2}{(1-\eta)^2} = c^2.$$

5. R E G R E S S I O O N F U N K T S I O O N I D E
V Õ R D L E M I S E P R O G R A M M

A. Algoritmi kirjeldus.

Programmi algoritm tugineb põhiliselt punktis 3 toodud teoreemi tulemustele ja töötab juhtumil, kui X_1' ja X_2' on samamõõtmelised maatriksid ning kummaski on üks erinev veerg.

1. Alandmetena sisestama parameetrid $F_{2,p,n-p}$, vaatlusandmete maatriksi X veergude arvu N ja ridade arvu P ning vaatlusandmete maatriks X ja Y.

Seejärel näitame arvureana, millistest maatriksi X' veergudest on moodustatud maatriksid X_1' ja X_2' .

2. Leiame maatriksid B^{-1} ja C.

3. Leiame maatriksi P, mis rahuldab tingimust $P'CP = D$ ja $P'BP = I$. See on samaväärne sellise maatriksi P leidmisega, et $P'BCP = D$. Maatriksiks P sobib maatriksi BC omavektoritest moodustatud maatriks ning maatriksiks D vastavatest omaväärtustest moodustatud diagonaalmaatriks. Kuna algoritmilises keeles MALGOL on olemas protseduur nende suuruste leidmiseks sümmeetriliste maatriksite korral, siis otsime maatriksiga BC sarnast sümmeetrilist maatriksit. Selleks osutub maatriks $S \cdot S = F^{-1}AF$, kus $FF = B^{-1}$ ja $A = F^{-1}CF^{-1}$. Kasutades olemasolevat protseduuri leiame maatriksi A omaväärtused ja omavektorid. Kuna teisendus $F^{-1}AF$ jätab omaväärtused muutmata, siis langevad maatriksite A ja S omaväärtused kokku. Maatriksi S omavektorite leidmiseks peame maatriksi A omavektoritest moodustatud maatriksit korrutama maatriksiga T^{-1} .

4. Vektorid $\hat{\beta}, \hat{\eta}, \hat{y}$ leiame punktis 3 avaldatud valemite põhjal.

5. Arvutame parameetri

$$s^2 = \frac{(y - \hat{y})'(y - \hat{y})}{(N - P)}.$$

6. Võrrandist (3;3) leiame λ_{min} ja λ_{max} iteratsioonimeetodil (vt. [5], lk. 55).

7. Leiame suurused a ja b.

8. Arvutame teoreemis antud intervallhinnangud A_1 ja A_2 ning trükime välja laitrükis.

B. Juhend programmi kasutamiseks.

Algandmed tuleb perforcerida järgmiselt:

1. Perforcerida parameetrid $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}, P$.
2. Perforeerida maatriks X ridde kaupa.
3. Perforcerida vektor Y .
4. Perforcerida maatriksi X' veeru indeksid, millest on moodustatud maatriks X'_1 (näiteks 1,3,5,6).
5. Perforeerida maatriksi X veeru indeksid, millised on moodustatud maatriks X'_2 (näiteks 1,2,3,5).

Tulemused trükitakse kujul $A_1 = \dots, \dots, A_2 = \dots, \dots$.

K I R J A N D U S

1. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Москва, 1968.
2. С. Р. Рао. Линейные статистические методы и их применения. Москва, 1968.
3. Г. Шеффе. Дисперсионный анализ. Москва, 1963.
4. By Emil Spjøtvoll. Multiple Comparison of Regression Functions. The Annals of Mathematical Statistics 1972, Vol.43, No.4, 1076-1088
5. L.Võhandu, E.Tamme, L.Luht. Arvutusmeetodid.
Tallinn. 1971.

МНОЖЕСТВЕННОЕ СРАВНЕНИЕ РЕГРЕССИОННЫХ ФУНКЦИЙ

М. Тиммерманн

Резюме

Целью настоящей дипломной работы является исследование метода для изыскания "лучшей" из регрессионных функций. Для этого используется метод множественного сравнения, который в известной мере подобен S -методу и T -методу (см. [3] стр. 115). В первых двух пунктах работы приведены необходимые для этой проблемы понятия и предположения. В третьем пункте доказаны теорема и две леммы, которые дают интервальную оценку интересующей нас квадратной функций и предписание для вычисления необходимых величин. В четвертом пункте приведены некоторые особые случаи. В приложении приведена программа, которая реализует рассмотренный алгоритм на языке *MALGOL-72*.

L I S A

```

R001 COMMENT 'MITMENE VORDLEMINE;
R002 ALGUS:READ1'(F,N,P);
R003 ARRAY'X.(1:P,1:N),Y.(1:N),XT.(1:N,1:P);
R004 READAR'(X.,Y.);
R005 TRANSP'(X.,XT.);
R006 READX'(0,M1);
R007 ARRAY'X1I.(1:M1);
R010 DECOCT'(X1I.);
R011 READX'(0,M2);
R012 ARRAY'X2I.(1:M2);
R013 DECOCT'(X2I.);
R014 ARRAY'X1T.(1:N,1:M1),X2T.(1:N,1:M2);
R015 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
R016 FOR'K:=1 STEP'1 UNTIL'M1 DO'
R017 X1T.(I,K).:=XT.(I,X1I.(K).);
R020 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
R021 FOR'K:=1 STEP'1 UNTIL'M2 DO'
R022 X2T.(I,K).:=XT.(I,X2I.(K).);
R023 PRINTARRAY'(XT.,X1T.,X2T.);
R024 ARRAY'X2.(1:M2,1:N);
R025 TRANSP'(X2T.,X2.);
R026 TRANSP'(XT.,X.);
R027 ARRAY'R1.(1:M2,1:M2),R2.(1:N,1:M2),R3.(1:N,1:N);
R030 MULT'(X2.,X2T.,R1.);
R031 PRINTARRAY'(R1.);
R032 INVERS'(R1.);
R033 MULT'(X2T.,R1.,R2.);
R034 PRINTARRAY'(R1.,R2.);
R035 MULT'(R2.,X2.,R3.);
R036 DELETE'(R1.,R2.);
R037 ARRAY'R1.(1:P,1:N),R2.(1:P,1:P);
R040 MULT'(X.,R3.,R1.);
R041 MULT'(R1.,XT.,R2.);
R042 PRINTARRAY'(R3.,R1.,R2.);
R043 DELETE'(R1.,R3.);
R044 ARRAY'X1.(1:M1,1:N),A1.(1:M1,1:M1),A2.(1:N,1:M1),A3.(1:N,1:N);
R045 TRANSP'(X1T.,X1.);
R046 MULT'(X1.,X1T.,A1.);
R047 PRINTARRAY'(A1.);
R050 INVERS'(A1.);
R051 MULT'(X1T.,A1.,A2.);
R052 PRINTARRAY'(A1.,A2.);
R053 MULT'(A2.,X1.,A3.);
R054 DELETE'(A1.,A2.);
R055 ARRAY'A1.(1:P,1:N),A2.(1:P,1:P),C.(1:P,1:P);
R056 MULT'(X.,A3.,A1.);
R057 MULT'(A1.,XT.,A2.);
R060 PRINTARRAY'(A3.,A1.,A2.);
R061 SUBTRACT'(R2.,A2.,C.);
R062 PRINTARRAY'(C.);
R063 DELETE'(R2.,A2.);
R064 ARRAY'B.(1:P,1:P),BB.(1:P,1:P),TT.(1:P,1:P),T.(1:P,1:P);
R065 A.(1:P,1:P),AA.(1:P,1:P);
R066 MULT'(X.,XT.,BB.);
R067 ARRAY'KK.(1:P*(P+1)/2),D.(1:P),B1.(1:P,1:N),BETA.(1:P);
R070 EETA.(1:N),GAMMA.(1:P),PT1.(1:P,1:P),P1.(1:P,1:P);
R071 PT.(1:P,1:P),P.(1:P,1:P);
R072 NULL'(A.);
R073 ARRQ3'(BB.,KK.);
R074 EPS:=10-3;
R075 EIGENV'(KK.,D.,TT.,EPS);

```

```

R076 TRANSP'(TT,,T,);
R077 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'P DO'
R100 A,(I,I).:=SQRT'(D,(I,));
R101 MULT'(TT,,A,,AA.);
R102 MULT'(AA,,T,,PT1.);
R103 TRANS'(PT1,,P1.);
R104 INVERS'(P1.);
R105 PRINTARRAY'(D,,T,,PT1.);
R106 NULL'(TT,,T,,A,,AA,,KK,,D.);
R107 MULT'(P1,,C,,TT.);
R110 MULT'(TT,,P1,,T.);
R111 ARRQ3'(T,,KK.);
R112 EIGENV'(KK,,D,,PT,,EPS);
R113 TRANSP'(PT,,P.);
R114 PRINTARRAY'(P.);
R115 MULT'(P1,,P,,AA.);
R116 TRANS'(AA,,P.);
R117 PRINTARRAY'(A,,P.);
R120 TRANS'(BB,,B.);
R121 INVERS'(B.);
R122 MULT'(B,,X,,B1.);
R123 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'P DO'
R124 FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
R125 BETA,(I).:=BETA,(I).+B1,(I,J).*V,(J).;
R126 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
R127 FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'P DO'
R130 EETA,(I).:=EETA,(I).+XT,(I,J).*BETA,(J).;
R131 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'P DO'
R132 FOR'J:=1 STEP'1 UNTIL'P DO'
R133 GAMMA,(I).:=GAMMA,(I).+PT,(I,J).*BETA,(J).;
R134 ARRAY'K,(1:N).;
R135 PRINTARRAY'(BETA,,EETA,,GAMMA.);
R136 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
R137 K,(I).:=V,(I).-EETA,(I).;
R140 S:=0;
R141 EPS:=10-1;
R142
R143 FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'N DO'
R144 S:=S+K,(I).*K,(I).;
R145 S:=S/(N-P);
R146 R:=P*S*F;
R147 NULL'(A,,AA.);
R150 MULT'(PT,,B,,AA.);
R151 MULT'(AA,,P,,A.);
R152 PRINTARRAY'(A.);
R153 NULL'(A,,AA.);
R154 MULT'(PT,,C,,AA.);
R155 MULT'(AA,,P,,A.);
R156 PRINTARRAY'(A.);
R157 ARRAY'DE,(1:3),GI,(1:3).;
R160 K:=1;FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'P DO'
R161 BEGIN'IF'ABS'(D,(I,).):)2*EPS THEN'
R162 BEGIN'DE,(K).:=D,(I).;GI,(K).:=GAMMA,(I).;K:=K+1;END';END';
R163 R1:=*DE,(1).*DE,(1).*(2*R+GI,(1).**2+GI,(2).**2);
R164 R2:=2*DE,(1).*3*(GI,(1).**2-GI,(2).**2);
R165 R3:=DE,(1).**4*(R-GI,(1).**2-GI,(2).**2);
R166 AM:=-R1;
R167 IF'R2(=AM THEN'AM:=R2;
R170 IF'R3(=AM THEN'AM:=R3;
R171 AM:=ABS'(AM);
R172 BMAX:=1+SQRT'(AM/R);
R173 AMIN:=-R1;
R174 IF'-R2(=AMIN THEN'AMIN:=-R2;

```

```

R175 IF'R3(=AMIN THEN'AMIN:=R3;
R176 AMIN:=ABS'(AMIN);
R177 BMIN:=-1-SQRT'(AMIN/R);
R200 M:=10+6;
R201 X:=BMIN;
R202 T:=0;
R203 AK:X:=X+ABS'(T/M);
R204 T:=(R*X*X-R1)*X+R2)*X+R3;
R205 IF'ABS'(T):)2*EPS THEN'GOTO'AK;
R206 A:=X;
R207 X:=-BMAX;
R210 T:=0;
R211 AL:X:=X+ABS'(T/M);
R212 T:=(R*X*X-R1)*X-R2)*X+R3;
R213 IF'ABS'(T):)2*EPS THEN'GOTO'AL;
R214 B:=-X;
R215 IF'DE.(1).(=A THEN'A1:=+M;
R216 IF'DE.(2).(=A THEN'A1:=+M;
R217 IF'A1(=M THEN'GOTO'M;
R220 A:=-A;
R221 A1:=0;
R222 IF'DE.(1).(=0 THEN'GOTO'L;
R223 IF'DE.(2).(=0 THEN'GOTO'L;
R224 U:=GI.(1).**2+GI.(2).**2;
R225 IF'U(=R THEN'GOTO'M;
R226 L:FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'P DO;
R227 A1:=A1+(D.(I).*GAMMA.(I).**2)/(A+D.(I).);
R230 A1:=(A1-R)*A;
R231 M:IF'DE.(1).(=)B THEN'A2:=M;
R232 IF'DE.(2).(=)B THEN'A2:=M;
R233 IF'A2(=)M THEN'GOTO'LL;
R234 A2:=0;
R235 IF'DE.(1).(=)0 THEN'GOTO'N;
R236 IF'DE.(2).(=)0 THEN'GOTO'N;
R237 U:=GI.(1).**2+GI.(2).**2;
R240 IF'U(=R THEN'GOTO'LL;
R241 N:FOR'I:=1 STEP'1 UNTIL'P DO;
R242 A2:=A2+(D.(I).*GAMMA.(I).**2)/(B-D.(I).);
R243 A2:=(A2+R)*B;
R244 LL:OUTPUT'(3);
R245 TEXT10'(7,3,' A1=',A1,' A2=',A2);
R246 OUTPUT'(3);
R247 STOP';
R250 START'ALGUS;
R251 FINISH';
R252
R253

```

COMMENT' MITMENE VORDLEMINI;

MEMORY PLAN

VARIABLES	3561	V	3616	PT	5775	LL	
3502 F	3562	XT	3617	P	PROCEDURES		
3503 N	3563	X1I	3620	K	0510	0633 READ1	
3504 P	3564	X2I	3621	DE	0634	0747 ARRAY	
3505 M1	3565	X1T	3622	GI	0750	1060 READAR	
3506 M2	3566	X2T	SUBROUTINES:			1061	1152 TRANSP
3507 I	3567	X2	4001	4032	1153	1211 READX	
3510 K	3570	R1	4013	4031	1212	1262 DECOCT	
3514 EPS	3571	R2	4045	4076	1263	1476 PRINTA	
3515 J	3572	R3	4057	4075	1477	1617 MULT	
3516 S	3573	X1	4537	4552	1620	1730 INVERS	
3517 R	3574	A1	4665	4721	1731	2007 DELETE	

3520	R1	3575	A2	4677	4720	2010	2052	SUBTRA
3521	R2	3576	A3	4734	4770	2053	2077	NULL
3522	R3	3577	C	4746	4767	2100	2157	ARRQ3
3523	AM	3600	B	5003	5037	2160	2673	EIGENV
3524	BMAX	3601	BB	5015	5036	2725	2762	TRANS
3525	AMIN	3602	TT	5062	5076	3112	3136	OUTPUT
3526	BMIN	3603	T	5113	5124	3137	3460	TEXT10
3527	M	3604	A	5207	5243			FUNCTIONS
3530	X	3605	AA	5612	5633	2674 -	2724	SQRT
3531	T	3606	KK	5747	5772	2763 -	3111	xx
3532	A	3607	D					OPERATING VARIABLES
3533	B	3610	B1	3677	ALGUS	3537 -	3540	
3534	A1	3611	BETA	5426	AK			CONSTANTS
3535	U	3612	EETA	5454	AL	3541 -	3557	
3536	A2	3613	GAMMA	5600	L			PROGRAM
	TABLE OF ARRAYS	3614	PT1	5636	M	3666 -	6013	
3560	X	3615	P1	5735	N			START 0105

10000) +4000000000001 = +1000000+01
10002) +4000000000001 = +1000000+01
10004) +4000000000001 = +1000000+01
10006) +4000000000001 = +1000000+01
10010) +4000000000001 = +1000000+01
10012) +4000000000001 = +1000000+01
10014) +6000000000002 = +3000000+01
10016) +4000000000002 = +2000000+01
10020) +4000000000002 = +2000000+01
10022) +4000000000001 = +1000000+01
10024) +4000000000002 = +2000000+01
10026) +4000000000003 = +4000000+01
10030) +4000000000003 = +4000000+01
10032) +5000000000003 = +5000000+01
10034) +5000000000003 = +5000000+01
X= 10036) +6000000000002 = +3000000+01
10040) +4000000000002 = +2000000+01
10042) +4000000000001 = +1000000+01
10044) +4000000000003 = +4000000+01
10046) +4000000000003 = +4000000+01
10050) +4000000000003 = +4000000+01
10052) +4000000000001 = +1000000+01
10054) +6000000000002 = +3000000+01
10056) +4000000000002 = +2000000+01
10060) +6000000000002 = +3000000+01
10062) +4000000000002 = +2000000+01
10064) +4000000000003 = +4000000+01
10066) +4000000000003 = +4000000+01
10070) +6000000000002 = +3000000+01
10072) +4000000000002 = +2000000+01

y= 10074) +514631463005 = +2079999+02
10076) +537146315006 = +4390000+02
10100) +420631463006 = +3410000+02
10102) +476314631406 = +3979999+02
10104) +753146315005 = +3070000+02

10001) +4000000000001 = +1000000+01
10003) +4000000000001 = +1000000+01
10005) +4000000000001 = +1000000+01
10007) +4000000000001 = +1000000+01
10011) +4000000000001 = +1000000+01
10013) +4000000000002 = +2000000+01
10015) +4000000000003 = +4000000+01
10017) +4000000000001 = +1000000+01
10021) +5000000000003 = +5000000+01
10023) +5000000000003 = +5000000+01
10025) +6000000000002 = +3000000+01
10027) +4000000000002 = +2000000+01
10031) +4000000000003 = +4000000+01
10033) +4000000000002 = +2000000+01
10035) +4000000000003 = +4000000+01
10037) +4000000000003 = +4000000+01
10041) +4000000000001 = +1000000+01
10043) +6000000000002 = +3000000+01
10045) +6000000000002 = +3000000+01
10047) +6000000000002 = +3000000+01
10051) +4000000000002 = +2000000+01
10053) +4000000000003 = +4000000+01
10055) +4000000000002 = +2000000+01
10057) +4000000000003 = +4000000+01
10061) +4000000000002 = +2000000+01
10063) +4000000000001 = +1000000+01
10065) +6000000000002 = +3000000+01
10067) +5000000000003 = +5000000+01
10071) +4000000000002 = +2000000+01
10073) +4000000000001 = +1000000+01

10075) +413146315006 = +3340000+02
10077) +5600000000006 = +4599999+02
10101) +663146315005 = +2720000+02
10103) +706314631406 = +5680000+02
10105) +763146315006 = +6240000+02

X1I = 10202) +4000000000001 = +1000000+01
10204) +6000000000002 = +3000000+01

10203) +4000000000002 = +2000000+01
10205) +4000000000003 = +4000000+01

X2I = 10206) +4000000000001 = +1000000+01
10210) +4000000000003 = +4000000+01

10207) +6000000000002 = +3000000+01
10211) +5000000000003 = +5000000+01

A1 = -1000000

A2 = -13.612

S I S U K O R D

Sissejuhatus

2. Eeldused ja probleemid	2
3. Ruutfunktsiooni mitmene võrdlemine.....	5
4. Mõned erijuhud	14
5. Regressioonfunktsioonide võrdlemise programm	16
Kirjandus.....	18

Lisa

Resümee