TARTU ÜLIKOOL
MATEMAATIKA-INFORMAATIKATEADUSKOND
Matemaatika instituut
Matemaatika eriala

Rain Kask

Aasia optsioonide hindamine

Bakalaureusetöö (6 EAP)

Juhendaja:
dotsent Toomas Raus

Autor: ....”.....”juuni 2013
Juhendaja: ....”.....”juuni 2013

TARTU 2013

Sisukord

Sissejuhatus

Optsioonide kui finantsinstrumentide õiglase hinna määramine on optsiooniteooria peamine probleem. Aasia optsiooni hind sõltub lisaks tavalistele optsiooni hinda mõjutavatele teguritele ka alusvara hinna ajaloost, mistõttu selle hinna määramine on keerulisem kui näiteks Euroopa optsiooni korral.

Käesolevas töös vaadeldakse erinevaid numbrilisi meetodeid, mille abil on võimalik leida Aasia ostu- ning müügioptsioonide hinda. Töö peamine eesmärk on kirjeldada, kuidas leida Aasia optsiooni hinda binoommeetodil baseeruva FSG (*forward shooting grid method*) meetodi abil. Aasia optsiooni hind FSG meetodil leitakse analoogselt binoommeetodiga rekursiivselt tagant ettepoole, kuid lisaks alusvara hinna binoompuule konstrueeritakse veel ka alusvara keskmiste hindade võre, mida meetod hinna leidmiseks kasutab.

Töö esimeses peatükis selgitatakse optsiooniteoorias sageli kasutatavaid mõisteid ning tuuakse välja peamised faktorid, mis optsiooni hinna kujunemist mõjutavad. Lisaks uuritakse eeldusi, millel optsiooniteooria põhineb ning tutvustatakse optsiooni hinna leidmist võimaldavat Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandit.

Teises peatükis kirjeldatakse erinevaid numbrilisi meetodeid optsiooni hinna leidmiseks. Vaatluse alla tulevad võremeetodid, diferentsmeetodid ning Monte-Carlo meetod. Uuritakse ka, kuidas binoommeetodi kui võremeetodi erijuhu korral leida Euroopa ostuoptsiooni hinda.

Kolmas peatükk on pühendatud Aasia optsioonile ning selle hinna leidmisele FSG meetodi abil. Esmalt antakse ülevaade Aasia optsioonist ja tutvustatakse FSG meetodi üldideed ning seejärel kirjeldatakse samm-sammult, kuidas FSG meetodi abil Aasia optsiooni hinda leida.

Töö viimases, neljandas peatükis, tuuakse välja FSG meetodil leitud numbriliste eksperimentide tulemused ja hinnatakse saadud näitajaid. Programmid numbriliste eksperimentide tarvis on koostatud programmeerimiskeele Python abil ning on toodud lisas.

1 Optsiooni mõiste

1.1 Põhimõisted

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1], [4] ja [5].

Tuletisväärtpaberiks ehk derivatiiviks nimetatakse finantsinstrumenti, mille väärtus tuleneb mingist teisest varast. Vastavat vara nimetatakse alusvaraks ning alusvara väärtuse tähis järgnevas töös on S. Tüüpilisimaks alusvaraks finantsturgudel on aktsia, kuid alusvaraks võivad olla ka teistsugused muutujad nagu valuuta, tooraine või isegi põllusaak. Üheks enim levinumaks derivatiiviks on optsioon, mis annab õiguse osta või müüa tulevikus mingit alusvara eelnevalt kokkulepitud hinnaga. Nii näiteks annab aktsiaoptsioon õiguse osta või müüa tulevikus aktsiaid eelnevalt kokkulepitud hinnaga. Järgnevas käsitlemegi vaid ühte derivatiivi – optsiooni.

Optsioon on kahepoolne kokkulepe mingi kindla alusvara kauplemise üle fikseeritud ajal tulevikus. Üks osapooltest on optsiooni kirjutaja ning teine osapool optsiooni omanik. Optsiooni kirjutaja määrab optsiooni tingimused ning paneb selle müüki. Sageli on optsiooni kirjutaja rollis pank. Müügis oleva optsiooni ostjast saab optsiooni omanik ning talle kanduvad üle optsiooni tingimustega määratud võimalused. Optsiooni hinnaks nimetame summat, mis tuleb optsiooni omanikul tasuda optsiooniga kaasnevate võimaluste omandamiseks. Optsiooni hinna tähiseks käesolevas töös on V.

Optsiooni, mis annab selle omanikule õiguse osta tulevikus mingit alusvara eelnevalt kokkulepitud hinnaga, nimetatakse ostuoptsiooniks (*Call*). Ostuoptsiooni korral on selle omanikul võimalik teenida tulu, kui alusvara hind kasvab piisaval määral optsiooni eluaja vältel.

Optsiooni, mis annab selle omanikule õiguse müüa tulevikus mingit alusvara eelnevalt kokkulepitud hinnaga, nimetatakse müügioptsiooniks (*Put*). Müügioptsiooni omanik teenib optsiooni pealt tulu, kui alusvara hind langeb optsiooni eluaja jooksul.

Optsiooni eluajaks nimetatakse perioodi optsiooni väljastamisest optsiooni täitmispäevani, kus täitmispäev on mingi kuupäev tulevikus, mil optsioonist tulenevat õigust saab rakendada. Täitmispäeva tähiseks on käesolevas töös T. Täitmispäeva möödudes kaotab optsioon väärtuse.

Realiseerimispäevaks nimetatakse ajahetke optsiooni eluajal, mil optsioonist tulenevaid õigusi rakendatakse. Realiseerimispäeva eripärade alusel jagunevad optsioonid veel Euroopa ja Ameerika optsioonideks. Euroopa optsiooni korral langeb realiseerimispäev kokku täitmispäevaga, mil optsiooni omanikul tuleb otsustada, kas optsioonist tulenevat ostu- või müügiõigust rakendada või mitte. Ameerika optsioonist tulenevat ostu- või müügiõigust saab aga rakendada pikema perioodi vältel, sageli kogu optsiooni eluaja jooksul. Teisisõnu, Ameerika tüüpi optsioonideks peame optsioone, millel on rohkem kui üks realiseerimispäev. Kuna Ameerika optsioon annab investorile enam võimalusi tulu teenimiseks, on nende hind võrreldes Euroopa optsioonidega kallim.

Eelnevalt kokkulepitud hinda, millega optsiooni omanikul on hiljem õigus alusvara osta või müüa, nimetatakse täitmishinnaks (*strike*). Käesolevas töös on täitmishinna tähiseks K. Täitmishinnast sõltuvalt avaldub teenitav tulu realiseerimispäeval Euroopa tüüpi ostuoptsiooni korral kujul

$$C(S(t)) = \max\big\{(S(T) - K), 0\big\}$$

ning müügioptsiooni korral

$$P(S(T)) = \max\big\{(K - S(T)), 0\big\}.$$

Optsiooni hinna kujunemist mõjutavad peamiselt kuus faktorit.

1. Alusvara alghind S_0 (alusvara hind hetkel, mil optsioon ostetakse) – ostuoptsioon on seda kallim, mida kõrgem on alusvara hind optsiooni ostmise hetkel. Müügioptsioon on aga seda odavam, mida kõrgem on alusvara alghind.

2. Optsiooni täitmishind – mida kõrgem on ostuoptsiooni täitmishind võrreldes alusvara alghinnaga, seda odavam on optsioon. Müügioptsiooni korral mida madalam on täitmishind võrreldes alusvara alghinnaga, seda odavam on optsioon.

3. Optsiooni eluiga – mida pikem on optsiooni eluiga, seda kõrgem on optsiooni hind, kuna seda pikem on periood, mil alusvara hind saab muutuda omanikule sobivas suunas.

4. Alusvara volatiilsus σ – suure volatiilsusega kaasneb kõrgem optsiooni hind. Alusvara volatiilsus näitab selle hinna varieeruvust ning mida rohkem kõigub alusvara hind, seda kallim on optsioon.

5. Riskivaba intressimäär r – ostuoptsioon on seda kallim, mida kõrgem on riskivaba intressimäär. Müügioptsiooni korral on seos vastupidine.

6. Oodatavate dividendide maksmine alusvaralt optsiooni eluaja jooksul – dividendide maksmine alusvaralt muudab optsiooni hinna madalamaks.

1.2 Optsiooni hind ja eeldused alusvara hinna liikumisele

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [5].

Kui alusvara hind hetkel T on $S(T)$, siis optsiooni hind hetkel T on võrdne optsiooni maksefunktsiooni väärtusega. Näiteks Euroopa ostuoptsiooni korral on $V(S(T),T) = \max\{S(T) - K, 0\}$. Kuna raha odavnemise tõttu tulevikus omandatav rahasumma ei ole võrdne sama suure praegusel hetkel omandatava rahasummaga, siis optsiooni hinna leidmiseks hetkel $t < T$ tuleb hetke T optsiooni hind diskonteerida. Pidevat riskivaba intressimäära r kasutades on hetkel T saadava summa S_1 nüüdisväärtus ehk diskonteeritud väärtus hetkel $t < T$ suurus $e^{-r(T-t)}S_1$. Seega kui optsiooni hind hetkel T ja hinna $S(T)$ korral on $V(S(T),T)$, siis selle optsiooni hind hetkel $t < T$ on $e^{-r(T-t)}V(S(T),T)$.

Kuna aga alusvara hind hetkel T ei ole täpselt teada ning on vaadeldav juhusliku suurusena, siis saame rääkida keskmisest maksefunktsiooni väärtusest $E(\max\{S(T) - K, 0)\}$, kus E on keskväärtus. Optsiooni hinna leidmiseks tehakse täiendav eeldus, et kõik investorid on riskineutraalsed, mis tähendab et juhusliku rahavoo väärtus on riskineutraalsete investorite jaoks võrdne selle juhusliku tulu keskväärtusega. Riskineutraalsuse eeldusel optsiooni hind $V(T)$ hetkel T on seega võrdne suurusega $V(T) = E(\max\{S(T) - K, 0\}$. Selleks aga, et leida juhusliku tulu $\max\{S(T) - K, 0\}$ keskväärtust, tuleb teha eeldused alusvara hinna käitumisele.

Finantsturgudel eeldatakse, et kehtib efektiivse turu hüpotees, mis väidab peamiselt kahte.

- Alusvara hinna ajalugu peegeldub täielikult selle hetkehinnas, mis ei hoia endas mingisugust edasist informatsiooni;

- Turud reageerivad koheselt igasugusele uuele informatsioonile alusvara hinna kohta.

Kirjeldatud hüpoteesi kehtivuse tõttu turul peetakse alusvara hinna liikumist juhuslikuks. Väljatoodud hüpoteesi omaduste tõttu saab muutusi alusvara hinnas pidada Markovi protsessiks.

Empiirilised vaatlused on näidanud, et aktsiate hindade käitumist saab selgitada juhusliku ekslemise protsessi kaudu. Nimelt käitub aktsia hind (kui hinda vaadelda võrdsete ajavahemike järel, näiteks aktsia igapäevased hinnad) ligikaudselt vastavalt valemile

$$\log(S(\tau)) = \log(S(\tau - 1)) + \mu + \varepsilon_\tau, \tag{1.1}$$

kus $\tau = t + 1, t + 2, \ldots$, suurus μ on konstant ning ε_τ on sõltumatud identsed normaaljaotusega $N(0, \sigma^2)$ juhuslikud suurused. See tähendab, et $\mathrm{Var}(\varepsilon_\tau) = \sigma^2$, $\mathrm{corr}(\varepsilon_\tau, \varepsilon_{\tau'}) = 0$, kui $\tau \neq \tau'$.

Valemit (1.1) rekursiivselt rakendades saame

$$\log(S(\tau)) = \log(S(t)) + S(\tau - t)\mu + \sum_{j=t+1}^{\tau} \varepsilon_j$$

ehk

$$\log\left(\frac{S(\tau)}{S(t)}\right) = (\tau - t)\mu + \eta_\tau, \tag{1.2}$$

kus $\eta_\tau = \sum\limits_{j=t+1}^{\tau} \varepsilon_j$. Juhuslik suurus η_τ on normaaljaotusega (kuna normaaljaotusega juhuslike suuruste summa on normaaljaotusega) keskväärtusega

$$E\eta_\tau = \sum_{j=t+1}^{\tau} E\varepsilon_j = 0$$

ning dispersiooniga

$$\mathrm{Var}(\eta_\tau) = \mathrm{Var}(\sum_{j=t+1}^{\tau} \varepsilon_j) = \sum_{j=t+1}^{\tau} \mathrm{Var}(\varepsilon_j) = (\tau - t)\sigma^2.$$

Kui võtta $\tau = t + \Delta t$, kus Δt on piisavalt väike ajavahemik, siis

$$\log\left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta S(t)}{S(t)}\right) \approx \frac{\Delta S}{S(t)},$$

kus $\Delta S(t) = S(t + \Delta t) - S(t)$ ning valemi ((1.2)) põhjal

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \approx \mu \Delta t + \eta_t,$$

kus η_t on normaaljaotusega juhuslik suurus keskväärtusega 0 ning dispersiooniga $\sigma^2 \Delta t$. Minnes nüüd piirile $\Delta t \to 0$ saame aktsiahinna käitumist kirjeldava stohhastilise diferentsiaalvõrrandi

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}X. \tag{1.3}$$

Võrrandi (1.3) liige μdt kirjeldab ennustatavat teenitavat tulu, mis on sarnane teenitava tuluga investeerides raha riskivabalt panka. Suurus μ mõõdab alusvara keskmist hinnakasvu ning lihtsamates mudelites fikseeritakse μ konstandina.

Võrrandi (1.3) teine liige $\sigma \mathrm{d}X$ kirjeldab aga muutusi alusvara hinnale väliste mõjude poolt, milleks on näiteks ootamatud uudised. Suurust σ nimetatakse volatiilsuseks ning ta iseloomustab teenitava tulu standardhälvet. Tasub silmas pidada, et volatiilsusel on optsioonihinna kujunemisel väga suur mõju. Suurust $\mathrm{d}X$ nimetatakse Wiener'i protsessiks ning tal on järgmised omadused:

- $\mathrm{d}X$ on normaaljaotusega juhuslik suurus;
- $\mathrm{d}X$ keskväärtus on 0 ehk $\mathrm{E}(\mathrm{d}X) = 0$;
- $\mathrm{d}X$ dispersioon on dt ehk $\mathrm{Var}(\mathrm{d}X) = \mathrm{d}t$.

Võrrand (1.3) on konkreetne näide juhuslikust ekslemisest, mille abil ei ole aktsia hinnale võimalik määrata deterministlikku teekonda. Küll aga annab ta huvitavat ja olulist infot alusvara hinna S muutumisele tõenäosuslikus mõttes. Kui $\log(S)$ järgib juhuslikku ekslemist, mis on antud võrrandiga (1.3), siis hinna kui juhusliku suuruse tihedusfunktsioon on lognormaalse jaotusega, mistõttu võrrandit (1.3) nimetatakse lognormaalseks juhuslikuks ekslemiseks.

1.3 Black-Scholesi võrrand

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [4].

Aastal 1973 tuletasid Fisher Black ja Myron Scholes võrrandi optsiooni hinna leidmiseks. Enne veel kui võrrandi juurde jõuame, toome aga välja eeldused, mille kehtimisel nende mudel välja töötati.

- Alusvara hinna muutus järgib lognormaalset juhuslikku ekslemist (1.3), mida kirjeldasime täpsemalt eelnevas peatükis.

- Riskivaba intressimäär $r = r(t)$ ja alusvara volatiilsus $\sigma = \sigma(t)$ on optsiooni väljastamisel teadaolevad funktsioonid üle kogu optsiooni eluaja.

- Alusvara tehingukulud puuduvad.

- Alusvaralt ei tasuta dividende optsiooni eluaja vältel.

  Sellest eeldusest võib loobuda, kui makstavad dividendid on eelnevalt teada. Dividendide tasumine võib toimuda diskreetsete ajavahemike tagant või pidevalt optsiooni eluaja vältel.

- Arbitraaži võimalused puuduvad.

  Arbitraaži võimaluse puudumine tähendab, et alusvaraga kauplemisel puudub võimalus teenida riskivabalt suuremat tulu kui raha riskivabal paigutamisel panka või ostes valitsuse võlakirju.

- Alusvara ost-müük saab toimuda pidevalt.

- N-ö lühikeselt positisioonilt müümine on lubatud ja alusvarad jaotatavad.

  Kõige lihtsamas mõttes tähendab lühikeselt positsioonilt müümine laenatud aktsiate müümist. Investorid kasutavad lühikeselt positsioonilt müümist, kui neil on põhjust arvata, et aktsiate hind langeb lähiajal. Sellisel juhul on neil võimalik esmalt laenatud akstiad kallima raha eest edasi müüa ning pärast hinna langust laenatud aktsiad odavamalt tagasi maksta.

Käesolevas töös võrrandi tuletuskäiku ei käsitleta. Küll aga tuuakse välja nende töö lõpptulemus, mida tuntakse kui Black-Scholesi diferentsiaalvõrrandit ning mis esitub kujul:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0,$$

kus $V = V(S,t)$ on optsiooni hind, S on alusvara hind, σ alusvara hinna volatiilsus ning r riskivaba intressimäär.

Paneme tähele, et sellisel teist järku osatuletistega diferentsiaalvõrrandil leidub lõpmatult palju lahendeid. Optsiooni hind peaks aga olema ühene, kuna vastasel juhul tekiks arbitraaži võimalus. Seepärast tuleb võrrandile ühese lahendi leidmiseks lisaks ette anda ka alg- ja rajatingimused.

Tingimustest parema ülevaate saamiseks vaatleme esmalt Euroopa ostuoptsiooni, mille hinda tähistame kujul $C(S,t)$. Olgu selle optsiooni täitmishind K ning täitmispäev T. Algtingimus, eeldades arbitraaži võimaluste puudumist, määrab ära, et ajahetkel $t = T$ avaldub optsiooni hind üheselt kujul

$$C(S,T) = \max\{S - K, 0\}. \tag{1.4}$$

Alusvara rajatingimused määrame juhtudel $S = 0$ ning $S \to \infty$. Võrrandist (1.3) saame, et kui $S = 0$, siis ka $dS = 0$. Kuna ajahetke dt möödudes, saab alusvara S uueks hinnaks $S + dS$, siis kui mingil ajahetkel t peaks realiseeruma $S = 0$, jääb see alusvara hinnaks kuni optsiooni eluaja lõpuni. Kui $S = 0$, siis täitmispäeval ostuoptsiooni hind on null ning eelnevat silmas pidades paneme tähele, et

$$C(0,t) = 0.$$

Kui alusvara hind peaks aga piiramatult kasvama, muutub väga tõenäoliseks, et optsiooni rakendatakse täitmispäeval ning täitmishinna mõju teenitavale tulule muutub üha väiksemaks. Seega $S \to \infty$ korral on optsiooni hind ligikaudselt võrdne alusvara hinnaga

$$C(S,t) \sim S, \quad \text{kui } S \to \infty. \tag{1.5}$$

Tingimustel (1.4)–(1.5) on Euroopa ostuoptsiooni hind Black-Scholesi võrrandiga üheselt leitav.

Eelnevat mõttekäiku järgides avalduvad tingimused Euroopa tüüpi müügioptsiooni korral võrrandi üheseks lahenduvuseks kujul

$$\begin{aligned} P(S,T) &= \max\{K - S, 0\}, \\ P(0,t) &= Ke^{-r(T-t)}, \\ P(S,t) &\to 0, \quad \text{kui } S \to \infty. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Erijuhul, kui intressimäär ning volatiilsus on konstantsed terve optsiooni eluaja vältel, on Euroopa tüüpi ostuoptsiooni hind ajahetkel t tingimustel (1.4)–(1.5) leitav analüütiliselt valemiga

$$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2),$$

kus $N(x)$ on standardse normaaljaotusega $N(0,1)$ juhusliku suuruse tihedusfunktsioon, mis avaldub kujul

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}y^2} \mathrm{d}y$$

ning

$$d_1 = \frac{\log(S/K) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$
$$d_2 = \frac{\log(S/K) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Valem müügioptsiooni hinna leidmiseks konstantse intressimäära ja volatiilsuse korral avaldub tingimuste (1.6) korral kujul

$$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1).$$

Keerulisemate optsiooni tüüpide või stohhastilise volatiilsuse korral ei ole optsiooni hind analüütiliselt leitav. Seetõttu vaadeldakse järgmises peatükis numbrilisi meetodeid optsiooni hinna leidmiseks, mis on rakendatavad ka ebatüüpiliste optsioonide korral.

2 Numbrilised meetodid optsiooni hinna leidmiseks

2.1 Võremeetodid

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [2]

Võrelise lähenemise optsiooni hinna määramiseks töötasid välja Cox, Ross ja Rubinstein (1979). Selle meetodiga on võimalik hinnata paljude tavapäraste ja ka mõnevõrra keerukamate optsioonide hindu.

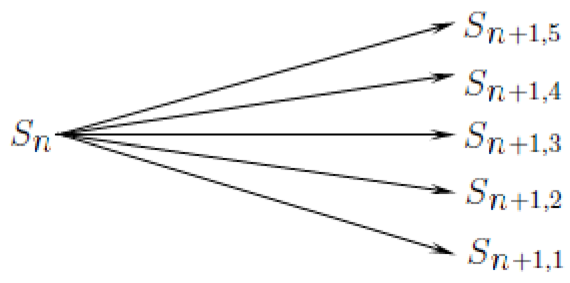
Võremeetodid põhinevad alusvara diskreetsel juhuslikul ekslemisel. Jaotame alusvara eluaja T diskreetseteks ajavahemikeks. Olgu selliste ajavahemike arv N ning olgu $\Delta t = T/N$. Võremeetodite korral eeldatatakse, et alusvara hind saab omandada ajavahemiku algusest M (M on lõplik, tavaliselt 2 või 3) erinevat väärtust ajavahemiku lõpuks. Olgu meil näiteks teada, et alusvara väärtus ajahetkel $t = n\Delta t$ on S_n, siis alusvara väärtus S_{n+1} ajahetkel $t = (n+1)\Delta t$ saab olla üks järgnevatest

$$S_{n+1} \in \{S_{n+1,1}, S_{n+1,2}, \ldots, S_{n+1,M}\},$$

kusjuures tõenäosused, et $S_{n+1} = S_{n+1,m}$ on teada kujul $p_{n,m}$ ning

$$p_{n,1} + p_{n,2} + \ldots + p_{n,M} = 1, \qquad 0 \leq p_{n,m} \leq 1,$$

kus $m = 1, 2, \ldots, M$. Eelnevalt toimides saab moodustada puukujulise struktuuri alusvara väärtuste kujunemisest.



Joonis 1. Võremeetodi samm sõlmest S_n

Idee seisneb selles, et kui alusvara alghind hetkel $t_0 = 0$ on teada, saame selle põhjal üles ehitada alusvara hinnapuu kuni kõikvõimalike alusvara väärtusteni täitmiskuupäeval. See võimaldab leida alusvara kõikvõimalikud väärtused ja nende tõenäosused täitmiskuupäeval.

Tehes riskineutraalse maailma eelduse, on mõistetav, et optsiooni hind $V_n = V(S_n, n\Delta t)$ ajahetkel $n\Delta t$ ja alusvara hinna S_n korral peab võrduma optsiooni diskonteeritud oodatava väärtusega ajahetkel $(n+1)\Delta t$

$$V_n = e^{-r\Delta t} E\left(V_{n+1}\right) = e^{-r\Delta t} \sum_{m=1}^{M} p_{n,m} V(S_{n+1,m}, (n+1)\Delta t).$$

Kuna kõik võimalikud alusvara väärtused ning nende tõenäosused täitmiskuupäeval on teada, saame optsiooni maksefunktsiooni (*payoff function*) abil kergesti välja arvutada optsiooni hinnad ja nende tõenäosused täitmiskuupäeval.

Kõike seda teades on võimalik välja arvutada kõikvõimalikud optsiooni hinnad täitmiskuupäeva eelsel ajahetkel $(N-1)\Delta t$. Üldisemalt öeldes võimaldab selline süsteem välja arvutada optsiooni hinnad ajahetkel $n\Delta t$, kasutades selleks optsiooni hindu ja tõenäosusi ajahetkel $(n+1)\Delta t$. Sedasi rekursiivselt ajas tagant ettepoole liikudes, saab lõpuks leida optsiooni hinna esialgsel ajahetkel $t_0 = 0$. Võremeetodite levinumateks juhtudeks on binoommeetod, kus $M = 2$ ning trinoommeetod, kus $M = 3$.

2.2 Binoommeetod Euroopa optsiooni hinna määramiseks

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [2].

Võremeetodit, kus $M = 2$, nimetatakse binoommeetodiks. Binoommeetodi korral eeldatakse, et alusvara hind S_n ajahetkel $n\Delta t$ saab ajahetkeks $(n+1)\Delta t$ kasvada väärtuseni $u_n S_n$ $(u_n > 1)$ või langeda väärtuseni $d_n S_n$ $(d_n < 1)$. Tõenäosus kasvamiseks on p_n ning langemiseks $1 - p_n$. Seega saame S_{n+1} avaldada järgnevalt

$$S_{n+1} = \begin{cases} u_n S_n & \text{tõenäosusega } p_n, \\ d_n S_n & \text{tõenäosusega } 1 - p_n. \end{cases}$$

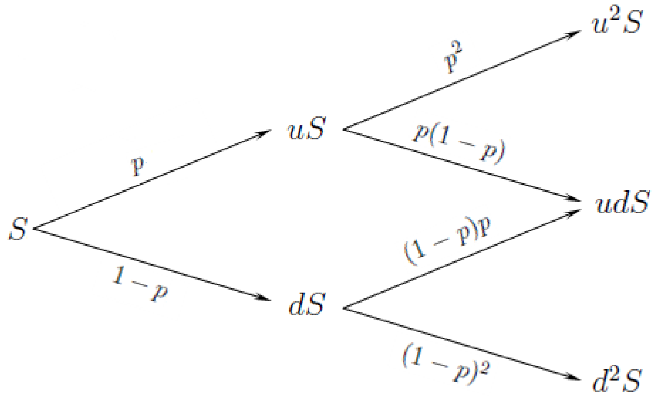
Tavaliselt eeldatakse binoommeetodi korral, et parameetrid u_n, d_n ja p_n on konstantsed terve optsiooni eluaja vältel ehk

$$u_n = u, \quad d_n = d, \quad p_n = p \quad \text{iga } n \text{ korral.}$$

Kirjeldame nüüd hinnapuu konstrueerimist. Fikseerime esmalt alusvara väärtuse praegusel ajahetkel $t_0 = 0$. Jagame optsiooni kogu eluaja N-ks võrdseks ajavahemikuks nii, et $\Delta t = T/N$. Mida suurem N valida, seda suurem puu tuleb konstrueerida. Esimesel ajahetkel Δt omab alusvara kahte võimalikku väärtust, milleks on uS ja dS. Teisel ajahetkel $2\Delta t$ on kolm võimalikku alusvara väärtust u^2S, $udS = duS$ ja d^2S. Kolmandal ajahetkel $3\Delta t$ saab alusvara omada nelja erinevat väärtust, milleks on u^3S, u^2dS, ud^2S ja d^3S. Paneme tähele, et n-ndal ajahetkel saab alusvara omada $n+1$ võimalikku väärtust,

$$d^{n-m}u^mS, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Viimasel ajahetkel $N\Delta t$ on meil alusvara väärtuseks $N+1$ võimalikku varianti. Parameetrid p, u ja d määratakse binoommudelis nii, et alusvaraga kauplemine



Joonis 2. Binoommeetodi kaks ajasammu.

ei tekitaks arbitraaži võimalust ning et alusvara hinna käitumine mudelis vastaks peatükis (1.2) tehtud eeldustele alusvara hinna käitumise kohta.

Vaatleme perioodi $[t, t+\Delta t]$. Kui hetkel t on alusvara hind S, siis hetkel $t+\Delta t$ on alusvara hind uS või dS. Arbitraaživabas mudelis peab riskineutraalsete investorite jaoks alusvara keskmine väärtus perioodi lõpuks olema $Se^{r\Delta t}$, kus r on riskivaba intressimäär. Seega

$$Se^{r\Delta t} = puS + (1-p)dS,$$

millest saame, et

$$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)dS. \tag{2.1}$$

Punktis (1.2) tehtud eeldustel alusvara hinna käitumisele on hinna dispersioon võrdeline ajaga. Kuna juhusliku suuruse Q dispersioon avaldub kujul

$$\mathrm{Var}(Q) = E(Q^2) - (E(Q))^2,$$

siis võttes $Q = S_{t+\Delta t}$ saame seose

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2 \Delta t. \tag{2.2}$$

Selleks, et määrata üheselt kolme tundmatu p, u ja d väärtusi, on lisaks tingimustele (2.1) ja (2.2) vaja veel ühte lisatingimust, milleks sageli võetakse tingimus

$$u = \frac{1}{d}. \tag{2.3}$$

Võrrandi (2.1) põhjal saame, et

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{2.4}$$

Kasutades seoseid (2.1), (2.3) ja (2.4) saame

$$\begin{aligned} pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 &= p(u^2 - d^2) + d^2 - e^{2r\Delta t} \\ = (e^{r\Delta t} - d)(u + d) + d^2 - e^{2r\Delta t} &= e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} \end{aligned}$$

ning seega saab tigimuse (2.2) esitada kujul

$$e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} = \sigma^2 \Delta t. \tag{2.5}$$

Võrrandi (2.5) ligikaudseks lahendiks täpsusega $O(\Delta t)$ on

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{2.6}$$

ning sellest kasutades seost (2.3) saame, et

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{2.7}$$

Näitame seda. Kasutades Taylori valemit saame

$$\begin{aligned} e^{r\Delta t} &= 1 + r\Delta t + O(\Delta t), \\ u = e^{\sigma\Delta t} &= 1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t + O(\Delta t), \\ d = e^{-\sigma\Delta t} &= 1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{\sigma^2}{2}\Delta t + O(\Delta t). \end{aligned}$$

Nüüd saame

$$\begin{gathered} e^{r\Delta t}(u + u^{-1}) - 1 - e^{2r\Delta t} \\ = (1 + r\Delta t + O(\Delta t))(2 + \sigma^2\Delta t + O(\Delta t)) - 1 - 1 - 2r\Delta t + O(\Delta t) \\ = 2 + 2r\Delta t + \sigma^2\Delta t + O(\Delta t) - 2 - 2r\Delta t + O(\Delta t) \\ = \sigma^2\Delta t + O(\Delta t) \end{gathered}$$

ning $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ on tõepoolest võrrandi (2.5) ligikaudseks lahendiks täpsusega $O(\Delta t)$.

Olgu meil tarvis leida Euroopa ostuoptsiooni hind, mille maksefunktsioon avaldub kujul

$$C_{N,m} = \max\big\{S_{N,m} - K, 0\big\}, \quad m = 0, 1, \ldots, N,$$

kus K on täitmishind ning $S_{N,m}$ tähistab alusvara realiseerunud väärtust täitmiskuupäeval (ajahetkel $N\Delta t$). Teades kõiki optsiooni väärtusi $C_{N,m}$ ajahetkel M, saame leida optsiooni kõikvõimalikud väärtused sellele eelneval ajahetkel $(N-1)\Delta t$, kuna tõenäosused alusvara hinna liikumistele ajahetkede vahel on teada. Kasutades riskineutraalsuse eeldust avaldub Euroopa ostuoptsiooni hind ajahetkel $n\Delta t$ ostuoptsiooni hinnast ajahetkel $(n+1)\Delta t$ järgnevalt

$$C_{n,m} = e^{-r\Delta t}(pC_{n+1,m+1} + (1-p)C_{n+1,m}), \qquad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Sellise meetodiga saame mööda hinnapuud sammhaaval tagant ettepoole liikudes leida ostuoptsiooni hinna $C_{0,0}$ hetkel $t_0 = 0$. Tähele tasub veel panna seda, et ainus alusvara hind $S_{n,m}$, mida eelnev protsess kasutab, on $S_{N,m}$ leidmaks optsiooni hinda $C_{N,m}$. Ühtlasi tähendab see seda, et olles leidnud alusvara hinna $S_{n+1,m}$, võime kustutada hinna $S_{n,m}$ ning kui $C_{N,m}$ on leitud, võime kustutada ka $S_{N,m}$. See tähelepanek võimaldab optsioonihinna määramiseks genereerida väga mälusäästliku algoritmi.

2.3 Diferentsmeetodid

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [6].

Diferentsmeetod on numbriline meetod diferentsiaalvõrrandite lahendamiseks. Optsioonide hindamiseks rakendasid diferentsmeetodeid esmakordselt Brennan ja Schwartz (1978). Meetodist parema ülevaate saamiseks vaatleme, kuidas hinnata diferentsmeetodi abil Euroopa müügioptsiooni hinda. Diferentsiaalvõrrand, mida optsioon peab rahuldama, on tüüpilisel kujul Black-Scholesi võrrand ehk

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV. \tag{2.8}$$

Olgu optsiooni eluaja pikkus T ning jagame selle N võrdseks perioodiks nii, et $\Delta t = T/N$. Kokku moodustatakse seega $N+1$ ajahetke

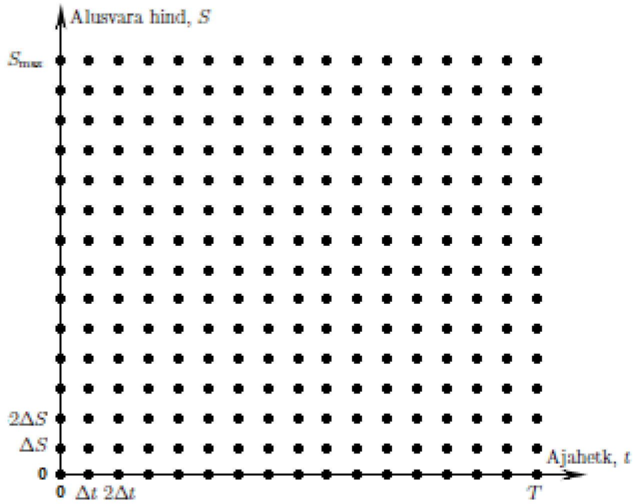
$$0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots, T.$$

Jagame alusvara hinna $M+1$ võrdseks vahemikuks, $\Delta S = S_{\max}/M$. Siin suurus $S_{\max}$ on valitud nii, et oleks täidetud järgmised tingimused.

1. Optsiooni hind $S \geq S_{\max}$ korral on null (s.t $S_{\max} \geq K$)

2. Alusvara hind S_0 hetkel $t_0 = 0$ asub hindade võre ühes sõlmes, s.t leidub j_* nii, et $S_0 = j_* \Delta S$

Aja ning alusvara hinna sõlmede põhjal saame konstrueerida $(M+1) \times (N+1)$ mõõtmetega võre (vaata joonis 3). Olgu optsiooni hind punktis (i,j) tähistatud kujul $V_{i,j}$.



Joonis 3. Diferentsmeetodi võre

Diferentsmeetodi idee seisneb selles, et osatuletised punktis (i,j) lähendatakse diferentsidega. Võre sisepunktis (i,j) saame osatuletist $\partial V/\partial S$ lähendada kas kujul

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S} \tag{2.9}$$

või kujul

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta S}. \tag{2.10}$$

Diferentsi valemis (2.9) nimetatakse diferentsiks ette ning diferentsi valemis (2.10) diferentsiks taha. Edasises kasutame aga enam sümmeetrilist hinnangut

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S}. \tag{2.11}$$

Osatuletise $\partial V/\partial t$ jaoks kasutame aga diferentsi ette kujul

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t}. \tag{2.12}$$

Osatuletise $\partial V/\partial S$ jaoks punktis (i, j) on diferents taha antud valemiga (2.10) ning punktis $(i, j+1)$ valemiga

$$\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S}.$$

Nende seoste põhjal saame teist järku osatuletist lähendada punktis (i, j) valemiga

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{\left(\frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta S} - \frac{V_{i,j} - V_{i,j-1}}{\Delta S}\right)}{\Delta S}$$

ehk

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta S^2}. \tag{2.13}$$

Asendades nüüd võrrandid (2.11), (2.12) ja (2.13) võrrandisse (2.8) ning pidades silmas, et $S = j\Delta S$, saame

$$\frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{V_{i,j+1} + V_{i,j-1} - 2V_{i,j}}{\Delta S^2} = rV_{i,j},$$

kus $j = 1, 2 \ldots, M-1$ ja $i = 0, 1, \ldots, N-1$. Saadud võrrandit lihtsustades saab selle viia kujule

$$a_j V_{i,j-1} + b_j V_{i,j} + c_j V_{i,j+1} = V_{i+1,j}, \tag{2.14}$$

kus

$$a_j = \frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t, \qquad b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t, \qquad c_j = -\frac{1}{2}rj\Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t.$$

Müügioptsiooni hind viimasel ajahetkel T avaldus kujul $\max\{K - S_T,\ 0\}$, kus S_T on alusvara hind ajahetkel T. Seega iga $j = 0, 1, \ldots, M$ korral

$$V_{N,j} = \max\{K - j\Delta S,\ 0\}. \tag{2.15}$$

Kui alusvara hind $S = 0$, siis müügioptsiooni väärtus on K ehk iga $i = 0, 1, \ldots, N$ korral

$$V_{i,0} = K. \tag{2.16}$$

Eelduse kohaselt, kui $S = S_{\max}$ on müügioptsiooni väärtus null, millest saame, et iga $i = 0, 1, \ldots, N$ korral

$$V_{i,M} = 0. \tag{2.17}$$

Võrrandite (2.15)-(2.17) abil saame leida optsiooni hinna joonisel 3 toodud võre punktides kolmel võre serval ehk võrepunktides, kus $S = 0$, $S = S_{\max}$ ja $t = T$. Leidmaks aga müügioptsiooni V hinda kõigis ülejäänud võre punktides, kasutame valemit (2.14) ning püüame esmalt leida võrepunktide väärtused ajahetkel $T - \Delta t$. Valem (2.14) saab ajahetkel $i = N - 1$ kuju

$$a_j V_{N-1,j-1} + b_j V_{N-1,j} + c_j V_{N-1,j+1} = V_{N,j}, \tag{2.18}$$

iga $j = 1, 2, \ldots, M - 1$ korral. Saadud võrrandite parempoolsed väärtused on meil teada valemist (2.15) ning valemitest (2.16), (2.17) saame, et $V_{N-1,0} = K$ ja $V_{N-1,M} = 0$. Kõike eelnevat arvesse võttes saame seosest (2.18) $M - 1$ üheaegselt kehtivat võrrandit tundmatute $V_{N-1,1}, V_{N-1,2}, \ldots, V_{N-1,M-1}$ jaoks (kokku $M - 1$ tundmatut), mis on võimalik leida. Olles leidnud optsioonihinnad ajahetkel $T - \Delta t$, leitakse hinnad ajahetkel $T - 2\Delta t$ analoogselt jne, kuni lõpuks saadakse kätte hinnad $V_{0,1}, V_{0,2}, \ldots, V_{0,M-1}$, millest j_*-le vastav hind ongi huvipakkuv optsiooni hind. Selles punktis esitatud diferentsmeetodit nimetatakse ilmutamata diferentsmeetodiks. Kirjanduses on tuntud ka ilmutatud diferentsmeetod (kui kasutame diferentsi ette) ja Crank-Nicholsoni meetod.

2.4 Monte-Carlo meetod

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [1] ja [2].

Monte-Carlo meetod on numbriline protseduur juhuslike suuruste parameetrite hindamiseks. Optsioonide hindamisel käsitletakse alusvara hinnaliikumist kui juhuslikku protsessi. Teades juhusliku protsessi parameetreid saame genereerida juhusliku protsessi üksikuid realisatsioone ehk alusvara hinna aegridu. Iga realisatsiooni korral arvutatakse välja optsiooni omamisega kaasnev tulu täitmispäeval T. Riskineutraalsuse eeldusel on Euroopa optsiooni hind V_0 hetkel $t_0 = 0$ võrdne optsiooni diskonteeritud väärtusega $e^{rT}\max\{V(S(T), T), 0\}$. Optsiooni hinnaks võetakse keskmine optsiooni hind üle kõigi realisatsioonide ehk üle kõigi saadud hindade V_0.

Anname Monte-Carlo meetodist parema ülevaate Euroopa ostuoptsiooni hinna leidmisel. Eeldame, et ostuoptsiooni hind sõltub alusvara hinnast S ning olgu alusvara volatiilsus σ ja riskivaba intressimäär r konstantsed. Euroopa ostuoptsiooni korral on täitmiskuupäeval teenitav keskmine tulu

$$E\left(\max\{S_T - K, 0\}\right)$$

ning selle tulu nüüdisväärtus ehk diskonteeritud väärtus ajahetkel $t_0 = 0$ avaldub seega kujul

$$e^{-rT} E\left(\max\{S_T - K, 0\}\right),$$

kus S_T on alusvara hind täitmiskuupäeval T ja K on täitmishind. Alusvara hinna liikumise lognormaalset jaotust eeldades avaldub hinna dünaamika riskineutraalsust arvesse võttes valemiga

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\epsilon\sqrt{\Delta t}}, \tag{2.19}$$

kus $\Delta t = T/N$ on ajasamm, σ on alusvara volatiilsus ja r on riskivaba intressimäär. Suurus ϵ on standardse normaaljaotusega juhuslik suurus, $\epsilon \sim N(0,1)$. Simuleerimaks üht realisatsiooni alusvara väärtusest S_0 alusvara väärtuseni $S_T = S_{N\Delta t}$, rakendatakse seost (2.19) N korda. Seejärel saab simuleeritud alusvara hinna põhjal leida ostuoptsiooni hinna V maksefunktsiooni väärtust diskonteerides

$$V = e^{-rT} \max\{S_T - K, 0\}.$$

Sellega lõpeb Monte-Carlo meetodil Euroopa ostuoptsiooni hinna määramise mudelis üks simulatsioon.

Korrates simulatsioone piisavalt suur arv kordi, leitakse oodatav ostuoptsiooni hind kõikidest simulatsioonidest saadud hinnangutest keskmise võtmisel. Võttes simulatsioonide arvuks M ning tähistades ostuoptsiooni hinna i-ndas simulatsioonis V_i-ga, avaldub ostuoptsiooni hind kujul

$$\hat{V} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} V_i$$

ning hinna dispersioon on

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(V_i - \hat{V})^2.$$

Saab näidata, et kui simulatsioonide arv M on piisavalt suur, siis juhuslik suurus

$$\frac{\hat{V} - V}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{M}}}$$

on standardse normaaljaotusega. Kuna Monte-Carlo meetodil leitud optsiooni hinna $\hat{V}$ standardhälve on $\hat{s}/\sqrt{M}$, siis hinna usalduspiire saab vähendada kui suurendada simulatsioonide arvu M. Paneme tähele, et kuna suurus M esineb standardhälbe avaldises kujul $1/\sqrt{M}$, siis standardhälbe vähendamiseks 10 korda ehk täpsuse suurendamiseks 10 korda tuleb simulatsioonide arvu suurendada 100 korda.

Monte-Carlo meetod võimaldab leida optsioonihinda ka keerukamate optsioonitüüpide jaoks. Meetodit rakendades saab igas simulatsioonis leida ka näiteks optsioonihinna keskmise või ekstremaalsed väärtused tema eluaja vältel, mistõttu sobib Monte-Carlo meetod hästi ka nende optsioonide hindamiseks, mille hind sõltub alusvara hinnast kogu perioodil $[0, T]$. Monte-Carlo meetodi suurimaks probleemiks on aga see, et täpsete tulemuste saamiseks tuleb teha väga palju simulatsioone. Probleemi leevendamiseks on välja töötatud mitmeid tehnikaid hinnangute dispersiooni vähendamiseks, mida aga käesolevas töös täpsemalt ei uurita.

3 Aasia optsiooni hinna leidmine FSG meetodil

3.1 Aasia optsioon

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [2] ja [3].

Aasia optsioon on alusvara hinna minevikust sõltuv optsioon, mis tähendab seda, et tema maksefunktsioon sõltub minevikust sõltuvast funktsioonist $F_t = F(S_t, t)$. Täpsemalt sõltub Aasia optsiooni maksefunktsioon alusvara keskmisest hinnast mingi perioodi vältel. Alusvara keskmiseks hinnaks võib seejuures olla näiteks alusvara aritmeetiline keskmine, geomeetriline keskmine või isegi harmooniline keskmine. Keskmise hinna määramise meetod lepitakse eelnevalt kokku.

Maksefunktsiooni erinevuste alusel jagunevad Aasia optsioonid fikseeritud täitmishinnaga (*fixed strike*) ja keskmise täitmishinnaga (*average strike*) Aasia optsioonideks. Fikseeritud täitmishinnaga Aasia ostuoptsiooni maksefunktsioon avaldub kujul

$$\max\{A - K, 0\}$$

ning sama tüüpi müügioptsiooni maksefunktsioon kujul

$$\max\{K - A, 0\},$$

kus A on alusvara keskmine hind eelnevalt kokkulepitud ajaperioodi vältel ning K on täitmishind. Fikseeritud täitmishinnaga Aasia optsioonide üheks eeliseks on see, et täitmiskuupäeva lähenemisel optsiooni maksefunktsioon enam palju muutuda ei saa, mistõttu on optsiooni eluea lõppfaasis ootamatutest hinnamuutustest tulenevad riskid madalad. Madalatest riskidest tulenevalt on üldjuhul selliste optsioonide hind ka madalam kui tavalistel optsioonidel.

Keskmise täitmishinnaga ostuoptsiooni maksefunktsioon avaldub kujul

$$\max\{S - A, 0\} \tag{3.1}$$

ning keskmise täitmishinnaga müügioptsiooni maksefunktsioon avaldub kujul

$$\max\{A - S, 0\}.$$

Ostuoptiooni korral teenib investor tulu juhul, kui alusvara lõpphind ületab selle keskmist hinda mingi perioodi vältel ning müügioptsiooni korral vastupidiselt.

Aasia optsioonide hinna leidmiseks saab kasutada kõiki kolme eespool vaadeldud numbrilist meetodit: Monte-Carlo meetodit, diferentsmeetodit ning binoommeetodit. Monte-Carlo meetodit saab kasutada analoogselt nagu punktis (2.4), ainult iga simulatsiooni korral tuleb lisaks alusvara hinnale S leida ka alusvara keskmine väärtus A. Järgnevas vaatleme aga põhjalikumalt binoommeetodi baasil välja töötatud meetodit Aasia optsiooni hindamiseks.

3.2 FSG meetodi üldidee

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [2] ja [3].

Alusvara teekonnast sõltuvate optsioonide hind sõltub ka teekonda kirjeldavast funktsioonist $F_t = F(S,t)$ ehk $V(t,S) = V(t,S,F_t)$. Funktsioon F_t defineeritakse konkreetse optsiooni liigi eripäradele vastavalt. Näiteks tagasivaatavate (*lookback*) optsioonide korral kirjeldab F_t kõrgeimat või madalaimat alusvara hinda, mis saavutati optsiooni eluaja jooksul. Aasia optsiooni korral kirjeldab funktsioon F_t optsiooni hinna keskmist mingil perioodil. Kuna optsiooni hind sõltub ka funktsioonist F_t, tuleb võremeetodit rakendades igas sõlmes optsiooni hind leida kõikvõimalike F_t väärtuste korral. Selleks aga, et meetod oleks piisavalt efektiivne, on tarvis, et teekonda kirjeldav funktsioon oleks Markovi protsess ehk funktsiooni $F_{t+\Delta t}$ väärtus peab olema kergesti arvutatav suurustest F_t ja $S_{t+\Delta t}$. Sellisel juhul ei kasva kõikvõimalike $F(S,t)$ väärtuste hulk ajasammude kasvamisel ülemäära suureks. Lähenemist, kus igale võremeetodi puu sõlmele lisatakse abivektor funktsiooni F_t võimalikest väärtustest, nimetatakse FSG meetodiks (*forward shooting grid method*).

FSG meetodile panid aluse Hull ja White (1993), kes rakendasid seda meetodit hindamaks Ameerika ja Euroopa tüüpi Aasia ning tagasivaatavate optsioonide hinda. Süstemaatilise raamistiku FSG meetodi rakendamiseks teekonnast sõltuvate optsioonide hindamiseks avaldasid Barraquand ja Pudet (1996).

Olgu meil tegemist binoommeetodil konstrueeritud puuga, kus alusvara hinna kasvamise ja kahanemise tõenäosused on vastavalt p ja $1-p$. Tähistagu $V^n_{j,k}$ eksootilise optsiooni hinda ajahetkel $t = n\Delta t$, kus j on alusvara hinna kasvamiste arv alates puu esimesest tipust ning k indeks tähistamaks ühte kõikvõimalikest funktsiooni F_t väärtustest sõlmes (n,j). Tähistagu G funktsiooni, mis kirjeldab F_t muutumist perioodi Δt jooksul, see tähendab

$$F_{t+\Delta t} = G(F_t, S_{t+\Delta t}).$$

Olgu võrefunktsioon $g(k,j)$ funktsiooni G diskreetne analoog. Siis võremeetodil konstrueeritud hinnapuu korral leitakse optsiooni hind rekursiivselt tagant ettepoole liikudes kujul

$$V_{j,k}^{n} = \left(pV_{j+1,g(k,j+1)}^{n+1} + (1-p)V_{j-1,g(k,j-1)}^{n+1}\right)e^{-r\Delta t},$$

kus $e^{-r\Delta t}$ on diskonteerimistegur. Määramaks teekonnast sõltuva optsiooni väärtust FSG meetodiga, tuleb ära fikseerida vastav võrefunktsioon $g(k,j)$.

3.3 FSG meetod Aasia optsiooni hinna leidmiseks

Käesoleva punkti kirjutamisel on kasutatud materjale [2] ja [3].

Aasia optsiooni hinna määramisel leitakse optsiooni hind igas sõlmes teekonnafunktsiooni $F(S,t)$ kõikvõimalike väärtuste korral antud sõlmes. Binoommeetodi korral kasvab sõlmede arv igal ajasammul 1 võrra. Kõikvõimalike keskmiste väärtuste hulk sõlmedes kasvab aga erinevate võre läbimise võimaluste tõttu eksponentsiaalselt kiirusega 2^n, mistõttu on tavapärase ilma piiranguteta binoomskeemi kasutamine suure n korral teostamatu. Üks lahendus selle probleemi vältimiseks on vaadata vaid funktsiooni F mõningaid väärtusi. Siis optsiooni hind $V(S,F,t)$ ülejäänud funktsiooni F väärtuste jaoks leitakse teadaolevatest optsioonihinna V väärtustest interpoleerimise teel (Barraquand ja Pudet, 1996; Forsyth et al., 2002).

Interpoleerimise meetodist parema ülevaate saamiseks anname järgnevas ülevaate keskmise täitmishinnaga ostuoptsiooni hinna leidmisest. Olgu T vastava optsiooni eluiga ning jaotame selle N diskreetseks ajavahemikuks. Olgu $\Delta t = T/N$. Moodustame alusvara hinnapuu vastavalt binoommudelile, kus

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} uS_t & \text{tõenäosusega } p, \\ dS_t & \text{tõenäosusega } 1-p, \end{cases}$$

kus u, d ja p on valitud vastavalt riskineutraalsuse eeldusele (valemid (2.6) (2.7) ja (2.4)). Tähistame alusvara hinna ajahetkel $n\Delta t$ sõlmes j tähisega S_j^n. Siis

$$S_j^n = S_0 u^j = S_0 e^{j\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

kus $j = -n, -n+2, \ldots, n-2, n$. Lisaks hinnapuule tuleb FSG meetodi korral moodustada veel hinna keskmiste väärtuste võre ajahetkedel $n\Delta t$, $n = 0, 1, \ldots, N$. Barraquand ja Pudet kasutasid oma töös keskmiste võre kujul

$$A_k^n = S_0 e^{k\rho\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

kusjuures $A_0^0 = S_0$. Tähistades $\Delta Y = \rho\sigma\sqrt{\Delta t}$ saame keskmiste väärtuste võrele kuju

$$A_k^n = S_0 e^{k\Delta Y},$$

kus $k = -k_n, -k_n + 1, \ldots, k_n - 1, k_n$ ning $k_n = \text{int}\left(\frac{n}{\rho}\right)$. Parameeter ρ on vabalt valitav poollõigus $(0, 1]$. Suuruse ρ valik võimaldab meil muuta sõlmede arvu alusvara keskmiste väärtuste võres ehk suuruse ρ abil saame määrata võre tiheduse.

Kuna k piirid valime selliselt, et $-k_n \leq k \leq k_n$ ning $k_n = \text{int}\left(\frac{n}{\rho}\right)$, siis paneme tähele, et igas võre kihis (st igas kihis n) kehtib seos

$$S_{-n}^n = S_0 e^{-n\sigma\sqrt{\Delta t}} \leq A_k^n \leq S_0 e^{n\sigma\sqrt{\Delta t}} = S_n^n$$

ehk keskmiste võre väärtused jäävad alati alusvara väärtuste vahele. Samas võib aga juhtuda, et $A_k^n = S_{-n}^n$ ja $A_k^n = S_n^n$, mis tegelikkuses kindlasti võimalik pole, kuna keskmiste väärtuste piirid on tunduvalt kitsamad kui alusvara võimalike väärtuste piirid. Paneme tähele, et alusvara keskmise maksimaalne väärtus ajahetkel $n\Delta t$ avaldub geomeetrilise progressiooni valemit kasutades kujul

$$\begin{aligned} A_{max}^n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} e^{k\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+1} &= \frac{e^0 + e^{1\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \ldots + e^{n\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+1} \\ &= \frac{1 - e^{\sigma\sqrt{\Delta t}(n+1)}}{(n+1)\left(1 - e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Sarnaselt avaldub keskmiste minimaalne väärtus ajahetkel $n\Delta t$ kujul

$$\begin{aligned} A_{min}^n = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} e^{-k\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+1} &= \frac{e^0 + e^{-1\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-2\sigma\sqrt{\Delta t}} + \ldots + e^{-n\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+1} \\ &= \frac{1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}(n+1)}}{(n+1)\left(1 - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Saab näidata, et

$$A_{\max}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} O\left(\frac{e^{\sigma(n+1)\sqrt{\Delta t}}}{(n+1)\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1\right)}\right),$$

$$A_{\min}^n \xrightarrow[n\to\infty]{} O\left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}}{(n+1)\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - 1\right)}\right).$$

Artiklis [3] on välja pakutud modifitseeritud Hull ja White meetod, kus ülaltoodud keskmiste piire (3.3) ja (3.2) kasutades on võimalik saada parem meetod Aasia optsiooni hinna leidmiseks, kui seda on Barraquand ja Pudet meetod. Modifitseeritud

Hull ja White meetodi korral konstrueeritakse alusvara keskmiste väärtuste võre vastavalt valemile

$$A_k^n = S_0 e^{kh}, \quad h = \alpha \sqrt{\frac{0.25}{T} \sigma^2 \Delta t},$$

kus α on etteantud parameeter, mis määrab võre tiheduse (mida väiksem α, seda tihedam võre) ning kõigi indeksite k korral peavad kehtima võrratused

$$A_{min}^n \leq A_k^n \leq A_{max}^n.$$

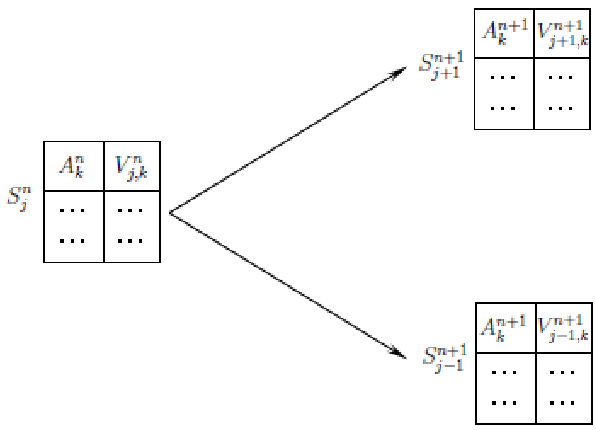
Viimastest võrratustest saame indeksit k alt hinnata järgnevalt

$$\begin{aligned} S_0 e^{kh} &\geq A_{min}^n, \\ \log S_0 + kh &\geq \log A_{min}^n, \\ k &\geq \frac{1}{h} \log \left(\frac{A_{min}^n}{S_0} \right). \end{aligned}$$

Analoogselt saame indeksit k ülalt hinnata

$$k \leq \frac{1}{h} \log \left(\frac{A_{max}^n}{S_0} \right).$$

Kogu edasine mudel Aasia optsiooni hinna leidmiseks on mõlema meetodi korral sama.



Joonis 4. Hinnapuu üks samm ja keskmiste võre Aasia optsiooni hindamisel.

Edasi uurime, kuidas leida keskmise täitmishinnaga Aasia ostuoptsiooni hinda FSG meetodil. Nagu võremeetodi korral ikka, leitakse optsiooni hind liikudes binoompuul ajas tagant ettepoole. Kihil N saame iga alusvara hinna S_j^N ja kõigi keskmiste väärtuste A_k^N korral leida ostuoptsiooni hinna tulenevalt valemist (3.1) kujul

$$\begin{gathered} V_{j,k}^N = \max\{S_j^N - A_k^N, 0\} = \max\{S_0 e^{j\sigma\sqrt{\Delta t}} - S_0 e^{k\Delta Y}, 0\}, \\ j = -N, -N+2, \ldots, N-2, N, \quad k = -k_N, \ldots, k_N. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Vaatleme nüüd kuidas leida optsiooni hinda sõlmes S_j^n keskmise väärtuse A_k^n korral (vaata joonis 4), teades optsiooni hindu kihil $n+1$ ehk teades hindu

$$V_{j,k}^{n+1}, \quad j = -(n+1), -n+1, \ldots, n+1, \quad k = -k_{n+1}, \ldots, k_{n+1}.$$

Kui sõlmest S_j^n liigume üles, siis alusvara uueks hinnaks ajahetkel $(n+1)\Delta t$ on

$$S_{j+1}^{n+1} = uS_j^n = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}\, S_0 e^{j\sigma\sqrt{\Delta t}} = S_0 e^{(j+1)\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

ning keskmine väärtus ajahetkel $(n+1)\Delta t$ on

$$A_{k+}^{n+1} = (n+1)\frac{A_k^n}{n+2} + \frac{S_{j+1}^{n+1}}{n+2} = \frac{(n+1)A_k^n + S_{j+1}^{n+1}}{n+2}.$$

Kui sõlmest S_j^n liigume alla, siis uueks alusvara hinnaks ajahetkel $(n+1)\Delta t$ on

$$S_{j-1}^{n+1} = dS_j^n = S_0\, e^{(j-1)\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

ning uus keskmine väärtus avaldub sarnaselt üles liikumisega kujul

$$A_{k-}^{n+1} = \frac{(n+1)A_k^n + S_{j-1}^{n+1}}{n+2}.$$

Üldjuhul aga ei asu väärtused A_{k+}^{n+1} ja A_{k-}^{n+1} keskmiste võre A_k^{n+1} sõlmedes, mistõttu leiame keskmistele A_{k+}^{n+1} ja A_{k-}^{n+1} lähimad võre A_k^{n+1} sõlmed. See tähendab, et leiame indeksid k_f^+, $k_c^+ = k_f^+ + 1$ ning k_f^-, $k_c^- = k_f^- + 1$ (f sõnast *floor*, c sõnast *ceil*) nii, et

$$\begin{aligned} A_{k_f^+}^{n+1} &\leq A_{k+}^{n+1} \leq A_{k_c^+}^{n+1}, \\ A_{k_f^-}^{n+1} &\leq A_{k-}^{n+1} \leq A_{k_c^-}^{n+1}. \end{aligned}$$

Kui sellised tingimused kehtivad on selge, et ka

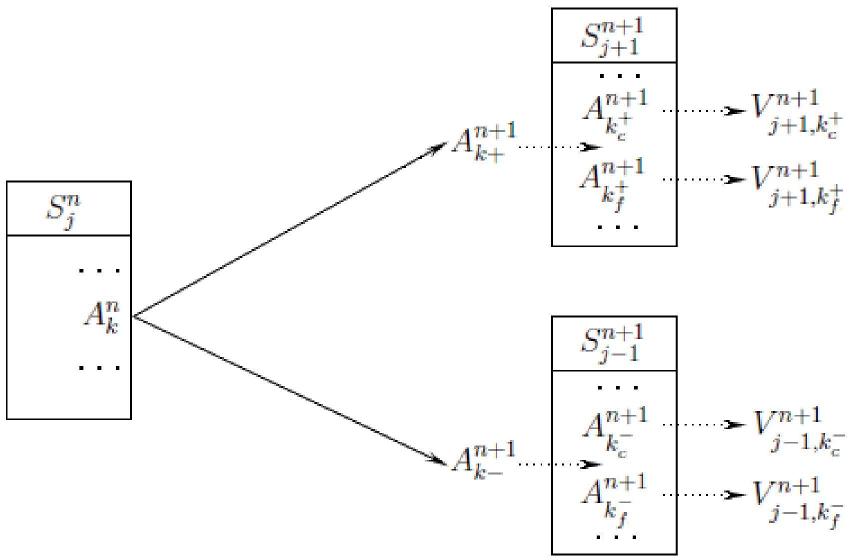
$$\ln A_{k_f^-}^{n+1} \leq \ln A_{k-}^{n+1} \iff \frac{\ln A_{k-}^{n+1}}{\ln A_{k_f^-}^{n+1}} \leq 1 \iff \frac{1}{\Delta Y}\ln\frac{(n+1)e^{k\Delta y} + e^{(j-1)\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+2} \geq k,$$

millest saame, et k_f^- on leitav valemiga

$$k_f^- = \text{floor}\left(\frac{1}{\Delta Y}\ln\frac{(n+1)e^{k\Delta Y}+e^{(j-1)\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+2}\right),$$

kus floor(x) tähistab suurimat täisarvu väiksem või võrdne x-ga. Analoogselt avaldub valem k_f^+ jaoks kujul

$$k_f^+ = \text{floor}\left(\frac{1}{\Delta Y}\ln\frac{(n+1)e^{k\Delta Y}+e^{(j+1)\sigma\sqrt{\Delta t}}}{n+2}\right).$$



Joonis 5. Sõlmes S_j^n keskmisele A_k^n vastava optsiooni hinna leidmine sõlmede S_{j+1}^{n+1} ja S_{j-1}^{n+1} abil.

Kuna optsiooni hinnad sõlmedes $V_{j,k_f^+}^{n+1}$ ja $V_{j,k_c^+}^{n+1}$ on meil teada (vaata joonis 5), siis optsiooni hinna $V_{j+1,k+}^{n+1}$ leidmiseks alusvara väärtuse S_{j+1}^{n+1} ja keskmise A_{k+}^{n+1} korral saame kasutada interpoleerimist. Lineaarse interpolatsiooni korral leitakse funktsiooni väärtus $f(x)$ funktsiooniga

$$P_1(x) = c_0 + c_1x.$$

Teades funktsiooni $f(x)$ väärtusi kahes punktis x_0 ja x_1, ehk teades väärtusi $f(x_0)$ ja $f(x_1)$, saame

$$P_1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0} f(x_0).$$

Meil on funktsiooni väärtused kahes puntkis $x_0 = A^{n+1}_{k_f^+}$ ja $x_1 = A^{n+1}_{k_c^+}$ teada kujul $f(x_0) = V^{n+1}_{j,k_f^+}$ ning $f(x_1) = V^{n+1}_{j,k_c^+}$, millest tulenevalt saame $P_1(x) = V^{n+1}_{j+1,k+}$ väärtuse leida kujul

$$V^{n+1}_{j+1,k+} = \epsilon^+ V^{n+1}_{j+1,k_f^+} + (1 - \epsilon^+) V^{n+1}_{j+1,k_c^+},$$

kus

$$\epsilon^+ = \frac{A^{n+1}_{k+} - A^{n+1}_{k_f^+}}{A^{n+1}_{k_c^+} - A^{n+1}_{k_f^+}}.$$

Lihtne on veenduda, et $0 \leq \epsilon^+ \leq 1$, kusjuures $\epsilon^+ = 0$, kui $A^{n+1}_{k+} = A^{n+1}_{k_f^+}$ ning $\epsilon^+ = 1$, kui $A^{n+1}_{k+} = A^{n+1}_{k_c^+}$. Analoogselt leiame optsiooni hinna $V^{n+1}_{j-1,k-}$ alusvara väärtuse S^{n+1}_{j-1} ja keskmise A^{n+1}_{k-} korral

$$V^{n+1}_{j-1,k-} = \epsilon^- V^{n+1}_{j-1,k_f^-} + (1 - \epsilon^-) V^{n+1}_{j-1,k_c^-},$$

kus

$$\epsilon^- = \frac{A^{n+1}_{k-} - A^{n+1}_{k_f^-}}{A^{n+1}_{k_c^-} - A^{n+1}_{k_f^-}}.$$

Teades nüüd optsiooni hindu sõlmes S^{n+1}_{j+1} keskmise A^{n+1}_{k+} ja sõlmes S^{n+1}_{j-1} keskmise A^{n+1}_{k-} korral, saame leida optsiooni hinna sõlmes S^n_j keskmise A^n_k korral vastavalt valemile

$$\begin{aligned} V^n_{j,k} &= e^{-r\Delta t} E\left(V^{n+1} \mid S = S^n_j, A = A^n_k\right) \\ &= e^{-r\Delta t}\left(p V^{n+1}_{j+1,k+} + (1-p) V^{n+1}_{j-1,k-}\right) \\ &= e^{-r\Delta t}\Bigg\{ p\left(\epsilon^+ V^{n+1}_{j+1,k_c^+} + (1-\epsilon^+) V^{n+1}_{j+1,k_f^+}\right) \\ &\quad + (1-p)\left(\epsilon^- V^{n+1}_{j-1,k_c^-} + (1-\epsilon^-) V^{n+1}_{j-1,k_f^-}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Kasutades kihil N valemit (3.4) ning kihtide n, $0 \leq n < N$ korral valemit (3.5), saame ajas tagant ettepoole liikudes leida optsiooni hinna $V^0_{0,0}$ ajahetkel $t_0 = 0$.

Analoogselt toimides on võimalik leida ka keskmise täitmishinnaga Aasia müügioptsiooni hind, asendades valemi (3.4) valemiga

$$V_{j,k}^N = \max\bigl\{A_k^N - S_j^N, 0\bigr\}, \text{ kus } j = -N, -N+2, \ldots, N-2, N, \quad k = -k_N, \ldots, k_N$$

ning fikseeritud täitmishinnaga Aasia ostu- ja müügioptsiooni hinnad asendades valemi (3.4) vastavalt valemitega

$$V_{j,k}^N = \max\bigl\{A_k^N - K, 0\bigr\}, \text{ kus } j = -N, -N+2, \ldots, N-2, N, \quad k = -k_N, \ldots, k_N,$$

$$V_{j,k}^N = \max\bigl\{K - A_k^N, 0\bigr\}, \text{ kus } j = -N, -N+2, \ldots, N-2, N, \quad k = -k_N, \ldots, k_N.$$

4 Numbrilised eksperimendid

Järgnevas võrdleme FSG meetodil leitud Aasia ostuoptsioonide hindu, kus ühel juhul on keskmiste võre A_k^n konstrueeritud Barraquand ja Pudet (edaspidi BP) meetodil ning teisel juhul modifitseeritud Hull ja White (edaspidi lihtsalt HW) meetodil. Optsioonihindade leidmiseks erinevate lähenemiste korral kootasime programmi programmeerimiskeele Pyhton abil, mis on toodud lisas 1. Võrdleme saadud tulemusi analüütiliste tulemustega, mis on võetud kasutatud ariklist (allikas [3]). Parameetrid, mida optsiooni hindade leidmiseks kasutasime olid:

- optsiooni täitmiskuupäev $T = 0.25$ aastat;
- alusvara alghind $S = 100$;
- volatiilsus $\sigma = 0.1$;
- riskivaba intressimäär $r = 0.1$;
- ajasammude arv $= 5, 20, 35, 50, 65$.

BP meetodi korral, kus keskmiste võre tiheduse määrab suurus $0 < \rho \leq 1$, uurisime optsiooni hindu juhtudel $\rho = 1.0$, $\rho = 0.5$ ja $\rho = 0.1$. Tuletame siinkohal meelde, et mida väiksem on ρ, seda tihedam on BP meetodi korral keskmiste võre A_k^n. HW meetodi korral, kus A_k^n tiheduse määrab suurus α (mida väiksem on α, seda tihedam on A_k^n võre), uurisime optsiooni hindu juhtudel $\alpha = 40$, $\alpha = 20$ ja $\alpha = 5$. Märgime veel ära, et ajasammude $N = 65$ korral sisaldas keskmiste võre A_k^n viimases sõlmes BP meetodi korral ($\rho = 0.1$) 1301 sõlme ning HW meetodi korral ($\alpha = 5$) 2098 sõlme. Keskmiste võre A_k^n sõlmede arvu erinevusest tulenevalt kulus programmil hinna leidmiseks HW meetodil ka selgelt rohkem aega.

Esimese ülesande korral on vaadeldud n-ö piirjuhtu, kus optsiooni täitmishinnaks on võetud $K = 0$. Sel juhul on fikseeritud keskmisega Aasia ostuoptsiooni analüütiline hind teada - 98.7604 (artiklist [3]). Paneme tähele, et BP meetodi korral saame väga sarnased tulemused analüütilisele väärtusele sõltumata ρ valikust juba $N \geq 35$ korral ning ka $N = 20$ korral on saadud tulemused üsna täpsed. HW meetod annab täpsed tulemused $\alpha = 5$ ning $N \geq 20$ korral. Suurema α korral (so $\alpha = 40$ ja $\alpha = 20$) võib täpseks lugeda tulemusi juhul $N \geq 65$.

Ülesandes 2 kasutatud täitmishinna $K = 100$ korral on Aasia ostuoptsiooni diferentsmeetodi põhjal leitud hinnaks 1.8512 ± 0.001 (artiklis [3]). BP meetod ei anna sellele lähedasi tulemusi kui $\rho = 1.0$ või $\rho = 0.5$. Juhul kui $\rho = 0.1$ ning

$N = 65$ on saadud tulemus aga juba lähedane õigele hinnale. HW meetod tagastab analüütilisele väärtusele lähimad tulemused $\alpha = 20$, kuid jääb sellest siiski veidi kaugele. Kui suurendada ajasammude arvu $N > 65$, võib ka $\alpha = 5$ korral saada õigele väärtusele lähedasi tulemusi.

K=0 S=100	T=0.25 aastat	σ=0.1	r=0.1
Barraquand ja Pudet	ρ=1.0	ρ=0.5	ρ=0.1
N=5	98.76138	98.76138	98.76138
N=20	98.76069	98.76060	98.76060
N=35	98.76049	98.76049	98.76049
N=50	98.76045	98.76045	98.76045
N=65	98.76043	98.76043	98.76043
Hull ja White	α=40	α=20	α=5
N=5	98.75644	98.76138	98.75731
N=20	98.76026	98.75771	98.76058
N=35	98.74174	98.76049	98.76029
N=50	98.75947	98.75904	98.76045
N=65	98.76043	98.76043	98.76043

Tabel 1. Euroopa tüüpi fikseeritud täitmishinnaga ($K = 0$) Aasia ostuoptsiooni hinnad erinevate keskmiste võre valikute korral.

Tabelis 3 on toodud Euroopa tüüpi keskmise täitmishinnaga Aasia ostuoptsiooni hinnad. Seda tüüpi optsiooni väärtust uuritud artiklites ei kajastatud, kuid hindamaks saadud tulemusi leidsime selle optsiooni hinna ka Monte-Carlo meetodil (toodud lisas 2), kus 1000000 simulatsiooniga saime optsiooni hinnaks 1.86273. BP meetod annab sellele tulemusele lähedased $\rho = 0.1$ korral, kui $N \geq 20$. HW meetodil saadud väärtused on sarnased iga α korral, kuid lähedasemad on siiski tulemused juhtudel $\alpha = 20$ ning $\alpha = 5$.

K=100 S=100 T=0.25 aastat σ=0.1 r=0.1			
Barraquand ja Pudet	ρ=1.0	ρ=0.5	ρ=0.1
N=5	1.88010	1.84599	1.83144
N=20	1.87936	1.85984	1.84492
N=35	1.87637	1.86076	1.84807
N=50	1.87391	1.86049	1.84935
N=65	1.87212	1.86011	1.85005
Hull ja White	α=40	α=20	α=5
N=5	1.86701	1.84339	1.82763
N=20	1.85741	1.84618	1.84438
N=35	1.84267	1.84961	1.84725
N=50	1.85352	1.84925	1.84862
N=65	1.85359	1.85050	1.84929

Tabel 2. Euroopa tüüpi fikseeritud täitmishinnaga ($K = 100$) Aasia ostuoptsiooni hinnad erinevate keskmiste võre valikute korral.

Keskmine täitmishind S=100 T=0.25 aastat σ=0.1 r=0.1			
Barraquand ja Pudet	ρ=1.0	ρ=0.5	ρ=0.1
N=5	1.87769	1.84832	1.84459
N=20	1.88998	1.87232	1.86008
N=35	1.88849	1.87434	1.86351
N=50	1.88683	1.87461	1.86492
N=65	1.88545	1.87451	1.86569
Hull ja White	α=40	α=20	α=5
N=5	1.88818	1.86173	1.84211
N=20	1.87274	1.86244	1.85956
N=35	1.86831	1.86504	1.86286
N=50	1.86908	1.86561	1.86425
N=65	1.86880	1.86613	1.86499

Tabel 3. Euroopa tüüpi keskmise täitmishinnaga Aasia ostuoptsiooni hinnad erinevate keskmiste võre valikute korral.

Kokkuvõttes näeme, et BP ja HW meetodil saadud tulemused on sarnased, kui keskmiste võre tihedus on valitud piisavalt suur. HW meetodi korral võib ka suhteliselt hõreda keskmiste võrguga saavutada häid tulemusi, kui suurendada ajasammude N arvu. BP meetodi ja hõredama võrgu korral ($\rho = 1$ ja $\rho = 0.5$) jääb BP meetodil saadud optsiooni hind ülesannete 2 ja 3 korral tegelikust pisut kõrgemaks. Ka teoreetilised tulemused (artikkel [3]) näitavad, et HW meetod koondub N kasvades optsiooni tegelikuks hinnaks, kuid BP meetodil leitud hind ei pruugi interpolatsioonivigade kuhjumise korral koonduda tegelikuks hinnaks vaid anda tegelikust hinnast veidi kõrgema väärtuse. Märgime, et BP meetod koondub, kui kasutada lineaarse interpolatsiooni asemel ruutinterpolatsiooni.

Pricing Asian options

Bachelor's Thesis

Rain Kask

Summary

Determining the correct value of an option is the main problem in option theory. There are several factors which determine the price of an option. In addition to these factors, Asian options also depend on the history of the underlying asset which complicates the correct pricing of an Asian option.

Although the structure of an Asian option is more complex than for example European option's, many of the typical numerical methods can still be used to find the price of an Asian option when modified correctly. In the first part of this thesis some of these typical numerical methods are introduced. The basic idea of lattice method, differential method and Monte-Carlo method are described by showing how to find a value of a usual European option step by step.

The last and main part of this thesis is dedicated to Asian options and lattice method. It is shown how to modify the lattice method so that it could be used for pricing an Asian option. The modified lattice method for pricing an Asian option is called forward shooting grid method (FSG) and was first used in 1993 by Hull and White for finding the value of Asian and lookback options. The method is described thoroughly and 2 different approaches (Barraquand-Pudet method and modified Hull-White method) for choosing the average price of an underlying asset are introduced.

To ensure that the FSG method can truly be used for pricing an Asian option, some results obtained by using the FSG method with different parameters N, ρ and α are brought out in the last section of the thesis. The prices found by Barraquand and Pudet method and modified Hull and White method are compared with a price of an unrealistic Asian option, which analytical value can be found. For one more realistical case of an Asian option the prices found by FSG method are compared with a price found by Monte-Carlo method. Source codes (written in Python) for FSG method and Monte-Carlo method are brought out in Appendixes (Lisad).

Kirjandus

[1] Paul Wilmott, Jeff Dewynne, Sam Howison, *Option Pricing: Mathematical Models and Computation*, Oxford Financial Press, 1993, 457 lk.

[2] Yue-Kuen Kwok, *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer, 2nd ed. 2008, XV, 530 lk.

[3] P. Forsyth, K. Vetzal, R. Zvan, *Convergence of numerical methods for valuing path-dependent options using interpolation.* Review of Derivatives Research, Volume 5(3), Springer Journals, 2002, 42 lk.

[4] Peep Miidla, *Sissejuhatus finantsmatemaatikasse, loengukonspekt, Optsioonid*, kättesaadav: `https://moodle.ut.ee/pluginfile.php/97242/mod_resource/content/0/T4_derivatiivid/Optsioonid_1.pdf`, Tartu, 2012, 3 lk.

[5] Karin Liiklane, Villu Zirnask, *Raha, pangad ja finantsturud, I osa*, HP toimetised, Tallinn, 1994, 232 lk.

[6] John C. Hull, *Options, Futures and other Derivatives,* 6^{th} *Edition*, Prentice Hall, 2006, 816 lk.

Lisad

Lisa 1. Aasia optsiooni hinna leidmine FSG meetodil.

```
from math import*

#Fikseerime alusvara- ning FSG meetodi parameetrid
T=0.25          #aeg optsiooni täitmiskuupäevani (aastat)
N=65            #ajasammude arv
S0=100          #alusvara alghind
sigma=0.1       #alusvara volatiilsus
intress=0.1     #riskivaba intressimäär
roo=1.0         #A võre tiheduse määraja - BP meetod
alfa=40         #A võre tihedduse määraja - HW meetod
deltat=T/N      #ajasamm
W=sigma*sqrt(deltat)

def viimanes6lm(tyyp,meetod): #arvutab optsiooni hinnad viimasel ajahetkel
    V=[]
    S=list(Spuu(N)) #S võre viimases sõlmes (N)
    if meetod==1:
        A=list(ApuuBP(N)) #A võre viimases sõlmes (N) BP meetodi korral
    elif meetod==2:
        A=list(ApuuHW(N)) #A võre viimases sõlmes (N) HW meetodi korral
    #optsiooni tüübi määramine
    if tyyp==1:
        K=input("Sisestage optsiooni täitmishind: ")
        for i in range(len(S)):
            for j in range(len(A)):
                Vv=max((A[j]-K),0) #arvutame optsiooni hinnad viimasel
                #ajahetkel kõigis sõlmedes kõikide keskmiste korral
                V.append(Vv)
    elif tyyp==2:
        K=input("Sisestage optsiooni täitmishind: ")
        for i in range(len(S)):
            for j in range(len(A)):
                Vv=max((K-A[j]),0) #analoogne tyyp 1'ga,
                #optsiooni hinna valem teisel kujul tulenevalt tüübist
                V.append(Vv)
    elif tyyp==3:
        for i in range(len(S)):
            for j in range(len(A)):
                Vv=max((S[i]-A[j]),0) #analoogne tyyp 1'ga,
                #optsiooni hinna valem teisel kujul tulenevalt tüübist
                V.append(Vv)
    elif tyyp==4:
        for i in range(len(S)):
            for j in range(len(A)):
                Vv=max((A[j]-S[i]),0) #analoogne tyyp 1'ga,
                #optsiooni hinna valem teisel kujul tulenevalt tüübist
                V.append(Vv)
    return V #tagastab järjendi optsiooni hindadega viimasel ajahetkel (so. N)
```

```
def Spuu(N): #Konstureerib S võre etteantud ajahetkel
    S=[]
    if ((N+1)%2==0): #Kui paarituarvuline ajahetk (ajahetked 1, 3, 5, ... )
        for i in range(-N,0,2):
            Ss=S0*exp(i*W)
            S.append(Ss)
        for i in range(1, (N+1), 2):
            Ss=S0*exp(i*W)
            S.append(Ss)
    else:
        for i in range(-N,N+1,2): #Kui paarisarvuline ajahetk (2, 4, 6, ... )
            Ss=S0*exp(i*W)
            S.append(Ss)
    return S #tagastab järjendi võimalike S väärtustega etteantud ajahetkel

def ApuuHW(N):     #Keskmiste võre konstrueerimine HW meetodil
    A=[]
    Y=alfa*sqrt(0.25/T)*sigma*sigma*deltat
    Amax=S0*(1-exp(sigma*sqrt(deltat)*(N+1)))/((N+1)*(1-exp(sigma*sqrt(deltat))))
    #maksimaalne keskmine väärtus ajahetkel N
    Amin=S0*(1-exp(-sigma*sqrt(deltat)*(N+1)))/((N+1)*(1-exp(-sigma*sqrt(deltat)))
    #minimaalne keskmine väärtus ajahetkel N
    kmin=int((log(Amin)-log(S0))/Y)-1 #minimaalne indeks
    kmax=int((log(Amax)-log(S0))/Y)+1 #maksimaalne indeks
    if N==0:
        A.append(S0)
    else:
        for i in range((kmin),((kmax)+1),1):
            c=S0*exp(i*Y)
            A.append(c) #
    return A    #tagastab A võre etteantud ajahetkel N

def ApuuBP(N):     #Keskmiste võre konstrueerimine BP meetodil
    A=[]
    Y=roo*W
    a=int(N/roo)
    for i in range((-a),((a)+1),1):
        c=S0*exp(i*Y)
        A.append(c)  #kanname elemendid järjendisse A
    return A    #tagastab A võre etteantud ajahetkel N


def sammhaaval(tyyp,meetod):
    C=[]
    W=sigma*sqrt(deltat)
    p=(exp(intress*deltat)-exp(-sigma*sqrt(deltat)))/\
     (exp(sigma*sqrt(deltat))-exp(-sigma*sqrt(deltat)))
    #arvutame hinna kasvamise tõenäosuse p
    V=list(viimanes6lm(tyyp,meetod))
    #leiab optsiooni väärtused viimasel ajahetkel N=T
```

```
for h in range(N-1,-1,-1):
    #Hakkame leidma optsiooni väärtusi tagant ettepoole
    #print h
    C=[]
    S=list(Spuu(h)) #konstrueerime S puu h'ndal ajahetkel
    if (meetod == 1):
        A=list(ApuuBP(h)) #konstrueerime A võre h'ndal ajahetkel BP meetodil
        Ahiljem=list(ApuuBP(h+1)) #ning h+1 ajahetkel
    elif (meetod==2):
        A=list(ApuuHW(h)) #konstrueerime A võre h'ndal ajahetkel HW meetodil
        Ahiljem=list(ApuuHW(h+1)) #ning h+1 ajahetkel
    for j in range (0, len(S)): #Käime läbi kõik S sõlmed
        for k in range(0, len(A)): #Käime läbi kõikvõimalikud keskmised
            #Arvutame Amiinus ja Apluss valemitest (3.15) ja (3.14)
            Amiinus=((h+1)*A[k]+(S[j]*exp(-W)))/(h+2)
            Apluss=((h+1)*A[k]+(S[j]*exp(W)))/(h+2)
            for a in range(0,len(Ahiljem)):
                if (0<=Ahiljem[a]-Amiinus): #otsime Amiinusfloor'i
                    #listi läbi käimise teel
                    break #otsimine peatub otsitava indeksini jõudes
            if Ahiljem[a]==Amiinus:
                Amiinusfloor=Ahiljem[a]
                Amiinusceil=Ahiljem[a+1] #ceil 1 indeksi võrra suurem
                Vmiinusfloor=V[j*len(Ahiljem)+a] #seome saadud keskmiste
                #võre väärtused optsioonihindadega
                Vmiinusceil=V[j*len(Ahiljem)+a+1]
            else:
                Amiinusceil=Ahiljem[a] #ceil 1 indeksi võrra suurem
                Amiinusfloor=Ahiljem[a-1]
                Vmiinusfloor=V[j*len(Ahiljem)+a-1] #seome saadud keskmiste
                #võre väärtused optsioonihindadega
                Vmiinusceil=V[j*len(Ahiljem)+a]

            for b in range(0,len(Ahiljem)):
                if (0<=Ahiljem[b]-Apluss): #otsime Aplussceil'i
                    #listi läbi käimise teel
                    break
            if Ahiljem[b]==Apluss: #analoogne Amiinusega
                Aplussfloor=Ahiljem[b]
                Aplussceil=Ahiljem[b+1]
                Vplussfloor=V[(j+1)*len(Ahiljem)+b]
                Vplussceil=V[(j+1)*len(Ahiljem)+b+1]
            else:
                Aplussceil=Ahiljem[b]
                Aplussfloor=Ahiljem[b-1]
                Vplussfloor=V[(j+1)*len(Ahiljem)+b-1]
                Vplussceil=V[(j+1)*len(Ahiljem)+b]
            epluss=(Apluss-Aplussfloor)/(Aplussceil-Aplussfloor)
            #arvutame epsilon plussi
            #lineaarse interpolatsiooni abil  (valem 3.20)
```

```
                emiinus=(Amiinus-Amiinusfloor)/(Amiinusceil-Amiinusfloor)
                #arvutame epsilon miinuse
                #lineaarse interpolatsiooni abil  (valem 3.22)

                VV=exp(-intress*deltat)*(p*(epluss*Vplussceil+\
                (1-epluss)*Vplussfloor)+(1-p)*\
                (emiinus*Vmiinusceil+(1-emiinus)*Vmiinusfloor))
                #Arvutame välja optsiooni hinnad j'ndas sõlmes
                #k'nda keskmise korral ning kanname need järjendisse C
                C.append(VV)
        V=list(C)
    return V


tyyp=input("Sisestage optsiooni tüübinumber \n"
"1 - Fikseeritud täitmishinnaga ostuoptsioon,\n"
"2 - Fikseeritud täitmishinnaga müügioptsioon,\n"
"3 - Keskmise täitmishinnaga ostuoptsioon,\n"
"4 - Keskmise täitmishinnaga müügioptsioon \n"
"Sisestus: ")
meetod=input("Sisestage A võre konstrueerimise meetod\n"
"1 - Barraquand ja Pudet\n"
"2 - Hull ja White.\n"
"Sisestus: ")
print "Uuritava optsiooni hind on: " + str(sammhaaval(tyyp,meetod))
```

Lisa 2. Keskmise täitmishinnaga Aasia ostuoptsiooni hinna leidmine Monte-Carlo meetodil.

```
import numpy
from math import*

S0=100       #alusvara alghind
T=0.25       #aeg optsiooni täitmiskuupäevani (aastat)
N=300        #ajasammude arv
deltat=T/N   #ajasamm
V=[]
sigma=0.1    #alusvara volatiilsus
M=1000000    #simulatsioonide arv
r=0.1        #riskivaba intressimäär

for j in range(1,M):
    #if (j%1000==0):
        #print str(j)
    S=[]
    S.append(S0)
    A=S[0]
    e=numpy.random.normal(0,1,N)
    #e juhuslik suurus normaaljaotusest keskmisega 0
    #dispersiooniga 1
    for i in range(1,N):
        abi=1
        S.append(abi)
        #lisame järjendisse lisaliikme, mille järgnevas asendame
        S[i]=S[i-1]*exp((r-(sigma*sigma/2))\
        *deltat+sigma*e[i]*sqrt(deltat))
        #arvutame järgmise S väärtuse pärast ühte ajasammu
        A=(A+S[i])
    Amean=A/(len(S))
    V1=exp(-r*T)*max(S[len(S)-1]-Amean, 0)
    V.append(V1)

print "Keskmise täitmishinnaga Aasia ostuoptsiooni\
hind on " + str(sum(V)/len(V))
```

Litsents

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks.

Mina, Rain Kask (sünnikuupäev: 11.06.1991)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

   Aasia optsioonide hindamine,

   mille juhendaja on Toomas Raus,

   1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

   1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 3. juuni 2013. a.