Paul Ederberg
Tallinna I. realkooli õpetaja.

Täis- ning murdawaldused ja esimese astme wôrrandid

Algebra ülesannete kogu ja kokkuwõtlik käsiraamat VII ja VIII õppeaasta jaoks.

Tallinnas, 1922 a.
Kirjastus-Ühisus „KOOL"

J. & A. Paalmann'i trükk, Tallinnas.

EESSÕNA.

Ülesannete kogu teisele andele, mis pealkirja all: „Juured ja ruutwõrrandid“ juba warem ilmus, järgneb nüüd käesolewa wihuna I anne. Põhimõtted, mis seal olid makswad, on ka siin aluseks wõetud. Ametiwend hra J. Kiiwet on endisel wiisil lahke kaasabiga ettewõtet toetanud, mille eest temale siin palju tänu ütlen.

Tallinnas, 11. augustil 1922 a.

P. Ederberg.

SISUKORD.

Lhk.

Täisawaldused.

§ 1. Awaldused ja nende arwuwäärtused 1
§ 2. Monoomide ja polünoomide liitmine ja lahutamine . 7
§ 3. Negatiiwsed arwud; nende liitmine ja lahutamine . 13
§ 4. Täisawalduste kaswatamine 19
§ 5. Walemid lühendatud kaswatamiseks 26
§ 6. Täisawalduste jagamine 33
§ 7. Polünoomide lahutamine teguriteks 38

Murrud.

§ 8. Murru mõiste; murdude koondamine ja laiendamine 43
§ 9. Tehted murdudega 47
Lisa: astmenäitaja 0 ja negatiiwsed astmenäitajad. 56

Esimese astme wõrrandid ühe tundmatuga.

§ 10. Ühe tundmatuga esimese astme wõrrandite lahendamine. 57
§ 11. Ühetundmatuga esimese astme wõrrandite seadmine 63
§ 12. Koordinaadid 72
§ 13. Funktsioon ja tema graafiline esitamine 74
§ 14. Lineaarse funktsiooni graafiline esitamine ja esimese astme wõrrandi graafiline lahendamine 81

Esimese astme wõrrandite süsteemid.

§ 15. Kahe tundmatuga lineaarwõrrandite süsteemi graafiline ja aritmeetiline lahendamine 89
§ 16. Kahe tundmatuga esimese astme wõrrandite süsteemide seadmine 97
§ 17. Lineaarwõrrandite süsteemid enam kui kahe tundmatuga. 102

Wastused 105

§ 1. Awaldused ja nende arwuwäärtused.

A.

Näide. Ametnik sai palka a kuu eest b marka. Kui palju sai tema aasta eest? Lahendada see ülesanne üldkujul ja arwutada leitud awalduse wäärtused, kui 1) $a = 5$; $b = 30000$ ja 2) $a = 8$; $b = 56000$.

Sellest ülesandest tuleb järgmiselt aru saada.

Sama tekstiga ülesandeid wõib olla lõpmata palju, mis üksteisest erineksid ainult ülesandes esinewate numbrite poolest. Meil on märgitud kaks juhust: 1) kus ametnik 5-e kuu eest sai palka 30000 marka ja 2) kus keegi 8-a kuu eest teenis 56000 marka. Nende aasta sissetuleku arwutamine on mõlemal puhul ühesugune: antud palga (30000 mk., 56000 mk.) jagamine kuude arwuga (5; 8) ja saadud resultaadi kaswatamine 12-ga. — Tihti tuleb ette, et ei ole waja teada üksiku ametniku aastapalka, waid on waja kõige pealt teada ühtlane niisuguste ülesannete lahendamise käik. Numbrite asemel wõetakse — nagu ülal tehtud — tähed ja arutatakse nagu harilikult: kui a kuu eest saadi b marka, siis ühe kuu eest — a korda wähem kui b marka, s. t. $\frac{b}{a}$ marka, ja aasta eest sellest wiimasest 12 korda rohkem, mis on $\frac{12 \cdot b}{a}$ marka. —

Selle *awalduse* $\frac{12 . b}{a}$ leidmisega on ülesanne üldisel kujul lahendatud. Kui nõutakse — nagu meil ülal —, tuleb leida awalduse *wäärtused* ülesandes nimetatud tähtede arwuwäärtustele wastawalt. Meil on tähe a wäärtused 5 ja 8, tähe b wäärtused 30000 ja 56000. Nendele wastawad awalduse wäärtused 72000 ja 84000.

Märkus I. Kaswatamise märk jääb algebralistes awaldustes tihti panemata, nimelt tähttegurite wahel ja numberteguri ning tähtteguri wahel. Näit. $a . b$ tähendab sedasama, mis ab, ja meie awaldust $\frac{12 . b}{a}$ wõib kirjutada: $\frac{12 b}{a}$. Siin eksitusi ei ole karta. Numbrite wahel peab olema alati märk: 3 korda 5 tuleb kirjutada ikka nii: 3. 5.

Märkus II. Numbertegurit ehk ilmutud arwulist tegurit nimetatakse koeffitsiendiks. Meie awalduses $\frac{12 b}{a}$ on koeffitsient —12. Koeffitsient kirjutatakse harilikult teguritest esimesel kohal.

Järgmised ülesanded lahendada üldkujul ja leida arwuwäärtused wastawalt tähtede antud wäärtustele:

1. $\frac{1}{2}$ meetrit linti maksid a marka. Kui palju maksid b meetrit?

$$a = 35 ; b = 6$$

2. a töölist wõiwad töö b päewa jooksul lõpule wiia. Mitu päewa läheb selleks tarwis c töölisele?

$$a = 6 ; 9 ; \; b = 20 ; 14 ; \; c = 8 ; 21.$$

3. a marka toowad kasu aasta jooksul b marka. Mitu $^0/_0$-i on see?

$$a = 250 ; 400 ; \; b = 10 ; 18.$$

4. Pakk tikkusid maksab a marka. Pakis on 10 karpi, igas karbis b tikku. Mitu tikku tuleb marga peale?

$$a = 14\,;\,15\,;\quad b = 56\,;\,60.$$

5. Kui a marka toowad kasu b marka, mitmest margast saab siis kasu c marka?

$$a = 160\,;\,320\,;\quad b = 8\,;\,11{,}2\,;\quad c = 11\,;\,14.$$

6. Kahel wennal oli raha kokku a marka, wanemal b marka rohkem kui nooremal. Mitu marka oli kummalgi?

$$a = 42\,;\,70\,;\quad b = 6\,;\,10.$$

B.

Meie kursuses käsitatawad põhitehted jagunewad kolme järku:

I. Liitmine ja tema wastastehe — lahutamine.

II. Kaswatamine ja wastastehe — jagamine.

III. Astendamine ja wastastehted: juurimine ja logaritmimine.

Esimese kahejärgu tehted on arutatud aritmeetikas.

A s t e n d a m i n e. Arwu 5 astendada arwuga 4 tähendab: 5 tegurina wõtta 4 korda. Seda suhet tähendatakse nii üles: $5^4 = 5 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 5 = 625$. Kaswatatawat arwu 5 nimetatakse aluseks, arwu 4 — eksponendiks ehk astmenäitajaks, arwu 625 — astmeks.

Arwutada järgnewad astmed:

7. 2^3, 2^5, 3^2, 3^4, 5^3. **9.** $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{1}{2})^3$, $(\frac{1}{3})^3$.

8. 10^6, 10^9, 600^2. **10.** $0{,}1^2$; $0{,}1^5$; $0{,}4^2$; $0{,}4^3$.

11. $0{,}01^2$; $0{,}02^3$.

M ä r k u s. Teist astet nimetatakse ka ruuduks ja kolmandat kuubiks, sest näit. 5^2 on ruudu pindala, mille külg on 5, ja 5^3 kuubi ruumala, mille serw 5.

Juurimine on astendamise wastastehe, kus astme ja eksponendi abil leitakse astme alus. Kui, näit., astme 625 ja eksponendi 4 põhjal tarwis leida alus, mis on 5, siis öeldakse, et 625 juuritud 4-ga on 5 ja kirjutatakse seda olenewust järgmiselt: $\sqrt[4]{625} = 5$.

Sel puhul nimetatakse arwu 625 juuritawaks, 4-ja juurenäitajaks ja wiit juureks.

12. Leida teine juur (ruutjuur) arwudest:

4 ; 9 ; 16 ; 36 ; 64 ; 81 ; 100.

13. Leida kolmas juur (kuupjuur) arwudest:

8 ; 27 ; 64 ; 125 ; 1000.

Arwutada:

14. $\sqrt{25}$ **17.** $\sqrt[3]{343}$ **20.** $\sqrt{0,49}$ **23.** $\sqrt[3]{0,027}$.

15. $\sqrt{49}$ **18.** $\sqrt{\frac{1}{9}}$ **21.** $\sqrt[3]{\frac{1}{64}}$

16. $\sqrt[3]{216}$ **19.** $\sqrt{\frac{1}{64}}$ **22.** $\sqrt[3]{\frac{27}{64}}$

Teine astendamise wastastehe — logaritmimine on tehe, kus astme ja aluse põhjal otsitakse eksponent, mida sel puhul logaritmiks nimetatakse. Logaritmimise arutamine jääb meil edaspidiseks.

C. Tehete järjestus. Klambrid.

Awaldustes loetakse normaalseks niisugune tehete järjestus:

1) 3-da järgu tehted,
2) 2-se „ „ ja
3) 1-se „ „ . Näit. awalduses $157 - 4 . 3^2$ tuleb kõige pealt arwutada 3-e ruut, saadus kaswatada 4-ga ja siis alles toimetada mahaarwamise; saame resultaadi

121. — Kui nõutakse tehete täidesaatmist teises järjes, siis tuleb seda klambrite abil ära tähendada; näit. kui esimese tehtena peab seisma lahutamine, siis kirjutada $(157-4) \cdot 3^2$, mis wõrdub 1377-ga; kui esimesel kohal on kaswatamine, siis $157 - (4 \cdot 3)^2$, mis annab 13.

Tehted ühest ja samast järgust loetakse ühewäärilisteks ja nad teostatakse selles järjes, nagu nad awalduses esinewad, näit. awalduses $12 - 5 + 3$ tuleb esmalt 12-st lahutada 5 ja alles pärast seda liita saadus 3-ga, nii et õige wastus on 10.

Arwutada järgmised awaldused:

24. $28 + 13 - 9$	**33**. $36 - 16 : 2$
25. $28 + (13 - 9)$	**34**. $72 : 12 : 3$
26. $28 - 13 - 9$	**35**. $72 : (12 : 3)$
27. $28 - (13 - 9)$	**36**. $2 \cdot 5^2$
28. $14 + 2 \cdot 5 - 4$	**37**. $(2 \cdot 5)^2$
29. $15 \cdot 6 - 4 \cdot 16$	**38**. $2 + 3^2$
30. $20 - 3 \cdot 5 + 6 \cdot 7$	**39**. $(2 + 3)^2$
31. $74 - 14 \cdot (2 + 3)$	**40**. $4^2 - 3^2$
32. $\frac{1}{3} \cdot 7 + 6 \cdot \frac{1}{2}$	**41**. $(4^2 - 3)^2$

Arwutada järgmised awaldused, kui $a = 6$
$b = 4$
$c = 2$.

42. $5a + 3b - c$
43. $8ab - 5ac + 3bc$
44. $0{,}3a - 0{,}4b + 0{,}5c$
45. $9b\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{4}c\right)$

Arwutada järgmised awaldused, kui 1) $x = 3$
2) $x = 13$.

46. $x^2 + 9x + 8$

47. $x^3 - 8x + 5$

48. $x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 19x - 19{,}5$

Nagu eelmistest näidetest näha, tarwitatakse kõige esmalt — kui normaaljärjestust tuleb ainult üks kord muuta — ümmargusi klambrid ( ); kui aga kaks korda — nurgelisi klambrid [ ], kui kolm korda loogelisi klambrid { }.

Arwutada awaldused:

49. $[(a - 2)\,a + 2]\,a - 2$

50. $30 - \{50 - [3 + (6 - a)\,a]\,a\}\,a$, kui $a = 4$.

Arwutada awaldused:

51. $6\,(a^2b - ab^2) : \left[\frac{(a+b)^2}{4ab} - 1\right]$

52. $\frac{2a}{b} - [(a + b) : a^2 - b^2 : (a - b)]$,

kui $a = \frac{1}{2}$ ja $b = \frac{1}{3}$

D.

Algebralised awaldused jagatakse kahte liiki: monoomideks ja polünoomideks. Monoomideks ehk üksliigeteks nimetatakse niisugused awaldused, milles wiimane tehe on teisest ja kolmandast järgust, näit. awaldused

$$4ab;\quad \frac{5a}{2b};\quad 0{,}4a^2$$

on monoomid. Ka üksikud arwud, nagu a, b, c, loetakse monoomideks.

Kui monoomid on seotud märkidega „+“ ehk „—“, siis sünnitawad nad polünoomi (hulkliikme), näit.

$4ab - \frac{5a}{2b} + 0{,}4a^2$, nii et polünoomis on wiimasena esimese järgu tehe, s. t. liitmine ehk lahutamine.

Polünoomis märkidega „+“ ja „—“ ühendatud monoome nimetatakse polünoomi liigeteks. Ülal toodud polünoomis on 3 liiget.

§ 2. Monoomide ja polünoomide liitmine ja lahutamine.

A. Monoomide ühendamine; polünoomi sarnaste liigete ühendamine.

I juhus.

1-ne näide. Liita a-ga monoomid:

$3bd$, $7bd$, bd ja $4bd$.

Polünoomina üles tähendatud oleks see:

$$a + 3bd + 7bd + bd + 4bd.$$

Liigetel — peale esimese — on siin ühesugused tähttegurid. Niisuguseid polünoomi liikmeid nimetatakse sarnasteks. Sarnaseid liikmeid on wõimalik ühendada. Seekord on nende summa $15\,bd$; järjelikult:

$$a + 3bd + 7bd + bd + 4bd = a + 15bd.$$

2-ne näide. Lahutada a-st monoomid:

$3bd$, $7bd$, bd ja $4bd$.

Siit järgneb:

$$a - 3bd - 7bd - bd - 4bd = a - 15bd.$$

3-as näide: $3\,m + 5\,cm + 6\,cm = 3\,m + 11\,cm.$

Juhis.: sarnased liikmed ühesuguste eesmärkidega arwatakse kokku ja asendatakse nende ette endine märk.

Lihtsustada awaldused:

53. $3 + 6 + 9 + 12 + 15$

54. $a + 7{,}25 + 8{,}5 + 3{,}75$

55. $a - 6{,}75 - 5 - 0{,}25 - 3{,}5$

56. $15a + 13a + 6a$

57. $4a + 13a + 22a + 7a$

58. $23x + 10x + 19x + 11x + 58x$

59. $7x - 5y - 15y - 8y - 32y$

60. $5 + 5xy + 3xy + xy$

61. $7 - 6xy - xy - 11xy$

62. $6a^2 + 5a^2$

63. $3a^2 + 4a^2 + a^2 + 7a^2$

64. $10x^2 - x^2 - 4x^2 - 3x^2$

65. $5{,}3a + 4{,}2a + a + 1{,}5a$

66. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$

67. $\frac{2a}{3} + \frac{3a}{4} + \frac{4a}{5}$

68. $a + \frac{3b}{4} + \frac{2a}{3} + \frac{4}{3}b$

II juhus — sarnaseid liikmeid on kaks, nende eesmärgid on wastupidised.

Näited:

$$a - 3bd + 7bd = a + 4bd$$
$$a + 3bd - 7bd = a - 4bd$$
$$5\,m + 8cm - 10cm = 5m - 2cm$$

Juhis: kui sarnaseid liikmeid on ainult kaks ja nende eesmärgid on wastupidised, siis lahutatakse suuremast liikmest wähem ja resultaat wõetakse suurema liikme eesmärgiga.

Arwutada awaldused:

69. $x + 22 - 17$
70. $x - 23 + 18$
71. $a + 13b - 10b$
72. $a - 13b + 10b$
73. $x - 3xy + xy$
74. $a + 5{,}7b - 3{,}9b$
75. $a - 2{,}2b + 3{,}1b$
76. $x - 0{,}1y + y$
77. $a - \frac{b}{3} - \frac{b}{4}$
78. $a - \frac{2b}{3} - \frac{3b}{4}$

III (üldine) juhus: sarnaseid liikmeid on ükskõik kui palju ja mis tahes märkidega. Awalduse lihtsustamisel wõib talitada esiteks wastawalt esimesele juhusele, ühendades liikmed ühesuguste märkidega, ja selle järele ülejäänud kaks liiget ühendada eelmise teise juhuse juhtlause põhjal.

Näited.

$$a - 3bd + 7bd - bd - 12bd + 2bd = a - 16bd + 9bd = \\ = a - 7bd$$

$$6m + 7cm + 12m - 5cm = 18m + 2cm$$

Lihtsustada awaldused:

79. $a - 7b - 9b + 8b - b - 15b + 20b$
80. $a + 13b + 25b + 16b - 4b - 19b$
81. $17a^2 - 8a^2 + 11a^2 - 9a^2 - 3a^2$
82. $5a - 6b + 9b - 11a$
83. $15a + 9b - 7b - 11a + 35a - 42b + 14a$
84. $3t - 2u + v + 7t + u - 8v + 3u - 4v$
85. $9a^3 + 8a^2 + 3a^3 - 7a^2$
86. $5a^3 + 12b^2 - 3a^3 - 15b^2$
87. $6x^2 - 8x^3 - 9b^2 + 13b^3$
88. $a - 7{,}5b - 7{,}8b - 2{,}9b + b + 6b$
89. $10{,}1a - 9{,}9b - 7{,}6a - 2a - 10{,}1b$
90. $8{,}0823b - 6{,}34y - 9{,}732b + 3{,}67y + 2{,}5897x$

91. $5\frac{5}{6}a + 3\frac{1}{2}b - 2\frac{1}{3}c - 4\frac{1}{6}a - 4\frac{2}{3}b + \frac{5}{6}c$

92. $12\frac{4}{15}a - 7\frac{1}{2}b + 2\frac{1}{7}c - 8\frac{1}{10}a + 4\frac{4}{5}b - 5\frac{1}{2}c$

93. $\frac{x}{3} - \frac{x}{5} + \frac{3x}{10} + \frac{x}{15}$

B. Polünoomide ühendamine.

a) Polünoomide liitmine.

$$15 + (12 - 7 + 3) = 15 + 12 - 7 + 3$$

Üldse: $a + (b - c + d) = a + b - c + d$

Juhis: polünoomi $b - c + d$ liitmiseks awaldusega a on tarwis polünoomi liikmed endiste märkidega awaldusele a juure kirjutada.

Näited:

$$8a + (3{,}4b - 5a - 2{,}7b) = 8a + 3{,}4b - 5a - 2{,}7b = 3a + 0{,}7b.$$

$$4m + (3m\ 20cm) = 7m\ 20cm$$

Arwutada awaldused:

94. $15 + (a + 7)$

95. $12 + (b - 6)$

96. $l + (7 + 3l - 9)$

97. $3b + (2{,}1b - 0{,}9 - 0{,}6b)$

98. $(7ab - 2a^2b) + (3a^2b - 4ab)$

99. $\left(\frac{1}{4}a - \frac{2}{5}b\right) + \left(\frac{a}{12} + \frac{4}{15}b\right)$

Liita polünoomid:

100. $30 + 6a$ ja $42 - 3a - 2a$

101. $25{,}3 - 4{,}7x$ ja $32{,}7 - 0{,}9x - 19{,}6$

b) Polünoomide lahutamine.

$$15 - (12 - 7 + 3) = 15 - 12 + 7 - 3$$

Üldse: $a - (b - c + d) = a - b + c - d$

Juhis: polünoomi $b - c + d$ lahutamiseks awaldusest a peab polünoomi liikmed wastasmärkidega awaldusele a juure kirjutama.

Märkus. Wastupidiste märkide ehk wastasmärkide all mõeldakse siin märgid „+“ ja „—“.

Näited.

$$8a - (3{,}4b - 5a - 2{,}7b) = 8a - 3{,}4b + 5a + 2{,}7b =$$
$$= 13a - 0{,}7b.$$

$$7m\ 82cm - (4m\ 28cm) = 3m\ 54cm$$

Arwutada awaldused:

102. $15 - (a + 7)$ [wrdl. nr. 94]
103. $12 - (a - 6)$ [wrdl. nr. 95]
104. $l - (7 + 3l - 9)$ [wrdl. nr. 96]
105. $7a - 32 - 22 - (4a - 19)$
106. $a^5 + 3a^2 - (a^2 - 5a^5)$
107. $\left(\frac{5a}{9} - \frac{3b}{7}\right) - \left(\frac{2a}{9} - \frac{19b}{28}\right)$

Lahutada polünoomid:

108. $33 - 7a$ ja $27 - 5a + a$
109. $2ab + bc - 2ac$ ja $3ab - bc - ac$
110. $17a^4 - 10a^2$ ja $14a^4 + 6a^2$
111. $22{,}3 - 3{,}8x$ ja $18{,}2x - 6 + 2{,}3$

Arwutada awaldused:

112. $5a + 13b - (9a - 16b) - (a - 15b) + (11a - 20b)$
113. $31x - 16y - (28x + 9y) - (x - 14y) + (x - 8y)$

114. $(11{,}6a - 8{,}9b) + (3{,}6a - 12b) - (3a + 1{,}5b) -$
$- (2{,}2a - 12{,}4b)$

115. $(5\tfrac{1}{3}a - 8b + \tfrac{1}{7}c) - (3\tfrac{1}{2}a - 2\tfrac{1}{4}b - c) +$
$+ (2\tfrac{2}{3}a + 1\tfrac{3}{4}b - \tfrac{3}{7}c)$

Järgmised näited lahendada kahel wiisil: kord awades kõige pealt sisemised, siis keskmised, lõpuks wälimised klambrid, teine kord awades wastupidises järjes.

116. $32 + [35 - (18a + 7)]$
117. $40 - [38 + (16a - 9)]$
118. $23a - [35 - (4a - 7)]$
119. $(13a - 8) - [12a - (11 - a)]$
120. $(15x - 12y) - [(10x + 7y) - (11x - 14y)]$
121. $a - \{b - [c - (d - e)]\}$
122. $5a - \{3a - [a - (2a - 1)]\}$
123. $8x - \{6 + [3x - (11x + 2)]\}$

c) Wastupidine tehe: klambritesse sulgumine.

Punktidest *a*) ja *b*) järgneb, et

$$a + b - c + d = a + (b - c + d) \text{ ja}$$
$$a - b + c - d = a - (b - c + d),$$

s.t. klambritesse sulgumisel tuleb klambrite ette esimese liikme märk ja kui ta on „+“, jääwad järgmiste liigete ette endised märgid, kui „—“, tuleb nad muuta wastupidisteks.

Järgmistes awaldustes liikmed klambritesse sulguda: nnr. 124—126 kahe kaupa, nnr. 127—129 kolme kaupa.

124. $a + b - c - d + e - f$
125. $a - b - c + d - e - f$
126. $a - b + c - d - e + f$
127. $r - s - t + x - y + z$
128. $r + s - t - x - y + z$
129. $r - s + t - x + y - z$

§ 3. Negatiiwsed arwud; nende liitmine ja lahutamine.

A. Lahutame 4-jast margast ühel puhul 1 mark, teisel 2 mk., kolmandal 3 mk. jne. Esimestel juhustel jääb weel raha üle, kuid sel korral, kui nõutakse maksta 4 marka, saab kapital terwelt otsa; kui nõutakse 5 marka, 6 marka jne., saab ära tasuda ainult 4 marka ja jääb wõlgu wastawalt 1 mark, 2 marka jne. Neid suhteid wõib awalduste abil nii ära tähendada:

$$4 - 1 = 3$$
$$4 - 2 = 2$$
$$4 - 3 = 1$$
$$4 - 4 = 0$$
$$4 - 5 = -1$$
$$4 - 6 = -2$$
$$4 - 7 = -3 \text{ jne.}$$

Kui wäiksemast arwust tuleb lahutada suurem, siis tähendatakse saadus nii üles, et wähema ja suurema arwu wahe wõetakse märgiga „—" ($4 - 7 = -3$). Arwusid eesmärgiga „—" nimetatakse negatiiwseteks. Senini tarwitatud arwusid nimetatakse positiiwseteks ja neid kirjutatakse sagedasti eesmärgiga „+", nii et näit. $3 = +3$. Positiiwseid ja negatiiwseid arwusid nimetatakse ühiselt relatiiwseteks, samuti ka algebralisteks arwudeks.

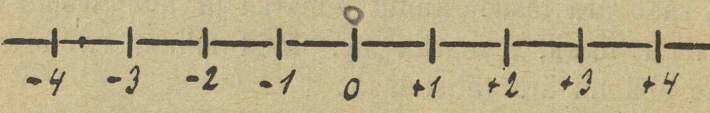
Sellest arutusest järgneb:

1) *Algebralised arwud* seisawad koos kahest osast: eesmärgist ja arwu *absoluutsest wäärtusest*. Näit. arwudel $+3$ ja -3 on wastasmärgid, kuid sama absoluutne wäärtus 3.

2) Kahest negatiiwsest arwust on wähema absoluutse wäärtusega arw suurem, näit. $-2 > -3$.

Piltlikku kujutust relatiiwsete arwude reast annab arwjoon (joon. nr. 1), kus punktist 0 alates on asetatud paremale poole positiiwsed, pahemale poole negatiiwsed arwud.

Joon. nr. 1.



Niisugust lugemist antud punktist wastupidises sihis tuleb palju ette. Selle kohta mõned näited:

130. Wabadel harjutustel astusid wõimlejad 2 sammu ette, siis 5 sammu tagasi. Määrata nende uus seisukoht.

131. Termomeeter näitas wäljas —9°C, toas 15°C. Kui suur on temperatuuride wahe?

132. Rooma *imperium* wältas 30 aastast e. Kr. kunni 476 a. p. Kr. Kui kaua wältas *imperium?*

133. Eestimaa kõige kõrgem punkt Munamägi on 324 m. merepinnast, Läänemere kõige sügawam punkt —460 m. Leida nende punktide wahe.

134. Tartu ja Johannesburg Lõuna-Afrikas asuwad peaaegu ühel meridiaanil. Tartu geograafiline laius on $+58^\circ 23'$ (põhjapoolne), Johannesburgi $-26^\circ 11'$ (lõunapoolne). Kui kaugel on need linnad teineteisest, kui $1^\circ = 111$ km?

135. Ühel meridiaanil asuwatel punktidel on samal ajal keskpäew; kui punkt on teise punktiga wõrreldes 15° lääne poole, on temal lõuna 1 tund hiljem, kui 15° ida poole — 1 tund warem. Sellepärast määratakse ära pikkuste wahe tihti aja üksustes. Järgmises tabelis on antud geograafiline pikkus Greenwich'i suhtes, kusjuures „+“ tähendab lääne, „—“ ida geogr. pikkust.

Narwa	$-1^h\,52^m,8$	Baltiski	$-1^h\,36^m,3$
Wõru	$-1^h\,48^m,0$	Haapsalu	$-1^h\,34^m,3$
Tartu	$-1^h\,46^m,9$	Kuresaare	$-1^h\,30^m,0$
Rakwere	$-1^h\,43^m,3$	Berlin	$-0^h\,52^m,4$
Wiljandi	$-1^h\,42^m,4$	Paris	$-0^h\,9^m,3$
Paide	$-1^h\,42^m,3$	London (Regents Park)	
Tallinn	$-1^h\,39^m,2$		$+0^h\,0^m,6$
Pärnu	$-1^h\,38^m,0$	New York	$+4^h\,51^m,7$

Kui suur on geograaf. pikkuste wahe Tallinna ja teiste nimetatud punktide kohta ja kui palju on kohalik aeg nendes linnades, kui Greenwich'is on keskpäew, kell 10 e. l., kell 3 p. l.

136. Melbourne'i geograafiline laius on $-37^\circ\,50'$, Sydney' laius $-38^\circ\,52'$. Leida laiuste wahe nende linnade kohta ja wõrrelda see wahe Tallinna ($+59^\circ\,26'$) ja Riia wahega ($+56^\circ\,57'$).

137. Leida arwude 68, 72, 75, 70, 79, 74 aritmeetiline keskwäärtus ja nimetada, kui palju üksikud arwud erinewad keskwäärtusest.

138. A omab 2300 marka, B-l on wõlga 1250 marka. Kui palju oleks neil kokku raha?

Kui palju on A kapital B omast suurem?

B. Relatiiwsete arwude liitmine ja lahutamine.

a) Positiiwse arwu liitmine ja lahutamine.

1-ne näide. $(+3)+(+8)$

2-ne näide. $(-3)+(+8)$

3-as näide. $(+3)-(+8)$
4-jas näide. $(-3)-(+8)$

Nagu teada, on $+3=3$ ja $+8=8$; sellepärast:

$(+3)+(+8)=$	$3+8$
$(-3)+(+8)=$	$-3+8$
$(+3)-(+8)=$	$3-8$
$(-3)-(+8)=$	$-3-8$

Kaugem uurimine annab lõpuresultaadi saamiseks samasugused juhised, nagu nad sarnaste liigete ühendamiseks on tähendatud §-is 2, 1-se ja 2-se juhuse all. Sellepärast on resultaadid wastawalt 11, 5, — 5 ja — 11.

139. Arwutada:

$(+7)+(+10)$
$(-9)+(+20)$
$(+2)-(+13)$
$(-11)-(+15)$
$(-16a)-(+7a)$
$(-21ab)-(+22ab)$

140. Liita:

$+15$ ja $+6$
-6 „ $+6$
-10 „ $+18$
-10 „ $+3$
$-2\frac{1}{2}$ ja $+\frac{1}{2}$
$+1\frac{3}{5}$ „ $+\frac{1}{5}$
$-0,6$ „ $+0,4$
$-5a$ „ $+3a$

141. Lahutada:

$+4$ ja $+6$
-6 „ $+6$
-8 „ $+5$
-16 „ $+11$
$-1,4$ „ $+1,4$
$+5a$ „ $+6a$
$-7a$ „ $+5a$

b) Negatiiwse arwu liitmine ja lahutamine.

Näited.

$$(+3)+(-8)$$
$$(-3)+(-8)$$
$$(+3)-(-8)$$
$$(-3)-(-8)$$

Nagu punktis *a*), kaotame ka siin kõige pealt klambrid ära. Selle kohta õpetab teooria, et tuleb käia §-is 2, *B* polünoomide liitmise ja lahutamise jaoks antud juhiste järgi, nii et

$$(+3)+(-8)= \quad 3-8=-5$$
$$(-3)+(-8)=-3-8=-11$$
$$(+3)-(-8)= \quad 3+8=11$$
$$(-3)-(-8)=-3+8=5$$

142. Arwutada:

$$(+14)+(-15)$$
$$(-19)-(-9)$$
$$(-n^2)-(-2n^2)$$
$$(-12)+(-3{,}8)$$
$$(-3a^2)-(-4a^2)$$

143. Liita:

$+5$ ja -5
$+20$ „ -6
-12 „ -3
$-18{,}3$ „ -10
$+2\frac{1}{3}a$ „ $-5a$
$-10x$ „ $-7x$

144. Lahutada:

$+5$ ja -5
$+8$ „ -9
-8 „ -9
$-1\frac{2}{3}$ „ $-2\frac{1}{2}$
-5 „ $-2{,}3$
$-5a$ „ $-4a$

Arwutada awaldused:

145. $-7+(-8-2)+(-21+10)$
146. $-15-[-13+(-17-8)]$
147. $3+[(-5)+(-8)]-[(-6)-(-1)]$
148. $(-8)+\{-6-[-15+(-8)-(-4)]\}$

Lihtsustada awaldused:

149. $(-2a)+(-a)-(-13a)-9a$
150. $7a+(-2a+5b-6)$
151. $a\quad(-8a-4b-6)$
152. $2\frac{1}{2}a+(-3\frac{1}{4}a-4)$
153. $(-5\frac{1}{4}a-2\frac{1}{3}b)-(-3a+7\frac{2}{3}b)$

Liita polünoomid:

154. $$\begin{array}{l} +7a-4b \\ \underline{+5a-2b} \end{array}$$

155. $$\begin{array}{l} -13a+b \\ \underline{+15a-10b} \end{array}$$

156. $$\begin{array}{l} -2\frac{1}{3}a+3\frac{2}{3}b+4\frac{1}{4}c \\ \underline{+3\frac{2}{3}a-4b-3\frac{3}{4}c} \end{array}$$

Lahutada polünoomid (esimesest polünoomist lahutada teine):

157. $$\begin{array}{l} +6a-7b \\ \underline{+3a-9b} \end{array}$$

159. $$\begin{array}{l} -12x+17y \\ \underline{-10x-15y} \end{array}$$

158. $$\begin{array}{l} +5x-3y \\ \underline{-3x+8y} \end{array}$$

160. $$\begin{array}{l} +3a-b+7c \\ \underline{-7a+6b-3c} \end{array}$$

161 $$\begin{array}{l} -2{,}05x^2+1{,}92xy-4{,}08y^2 \\ \underline{+1{,}06x^2+2xy-2{,}8y^2} \end{array}$$

§ 4. Kaswatamine.

A. Astmete kaswatamine.

$$3^4 . 3^5 = 3 . 3 . 3 . 3 \times 3 . 3 . 3 . 3 . 3 . = 3^9$$

Üldse: $a^m . a^n = a^{m+n}$.

Juhis: ühesuguste alustega astmete kaswatamisel astendatakse alus eksponentide summaga.

Kaswatada:

162. $a^3 . a$
163. $n^3 . n^3$
164. $n . n^2 . n^3$
165. $r^3 . r^4 . r$

B. Monoomide kaswatamine.

Näide. Kaswatada monoomid

$0{,}8ab^2c$ ja $0{,}5a^3bc$.

Kaswatamise wahetuwus- ja ühenduwusomaduse põhjal wõime kirjutada:

$$(0{,}8ab^2c) . (0{,}5a^3bc) = 0{,}8 . a . b^2 . c . 0{,}5 . a^3 . b . c =$$
$$= 0{,}8 . 0{,}5 . a . a^3 . b^2 . b . c . c = (0{,}8 . 0{,}5)(aa^3)(b^2b)(cc) =$$
$$= 0{,}4a^4b^3c^2$$

Juhis: monoomide kaswatamisel tuleb kaswatada omawahel koeffitsiendid ja ühesuguste alustega astmed.

Kaswatada:

166. $2a . 7a^2$
167. $3a^2 . 12a^2$
168. $7x . 0{,}4x^2$
169. $4ab^2 . 9a^2b$
170. $13xy . 2yz . 0{,}1xz$
171. $6ab^2 . 1{,}5a^3b . 8ab^4$.
172. $\frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{3}y \cdot \frac{1}{4}z$

C. Polünoomi kaswatamine monoomiga.

$3 \cdot (a - b + c) = (a - b + c) + (a - b + c) + (a - b + c) =$
$= a - b + c + a - b + c + a - b + c = 3a - 3b + 3c.$

Wõib näidata (w. Th. Koik, Elementaarne algebra I, lhk. 49—50), et

$$\frac{2}{3}(a - b + c) = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}c$$

Üldse: $m(a - b + c) = ma - mb + mc.$

Juhis: polünoomi kaswatamisel monoomiga kaswatatakse iga polünoomi liige monoomiga.

Näited:

$$39 \cdot 2534 = (40 - 1) \cdot 2534 = \begin{array}{r} 101360 \\ -2534 \\ \hline 98826 \end{array}$$

$$(2m\,6cm) \cdot 5 = 10m\,30cm$$

Polünoomi ja monoomi kaswatamise seaduse geomeetriline interpretatsioon.

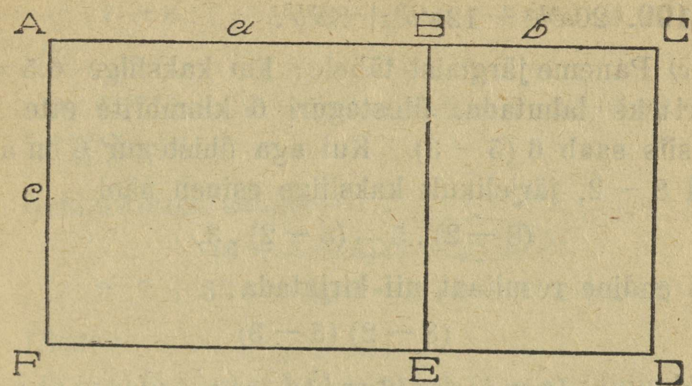
Näide. $(a + b)c = ac + bc$

Püstküliku pindala mõõtarw wõrdub pikkuse ja laiuse mõõtarwude kaswatisega. Kui $a = AB, b = BC$ ja $c = AF$ (joon. nr. 2), siis esitab kaswatis $(a + b)c$ pinda $ACDF$, mis — nagu joonisest näha — seisab koos pindadest: $ABEF = a \cdot c$ ja $BCDE = b \cdot c$.

Arwutada kaswatised:

173. $7(a + 1)$
174. $9(a - 8)$
175. $a^2(a + 1)$
176. $n^2(m + n^3)$
177. $3a(4a + 2b - 7)$
178. $9(2a^2 + a - 8)$
179. $4a^2b(7a^2 - 5ab + 3)$
180. $(2a - b) \cdot 1{,}5a$
181. $(2a^2 - 3a + 5) \cdot 0{,}5a$
182. $3(a - 2) + 2(a + 1)$
183. $4(a + 2) - 3(a + 1)$
184. $x(x - y) - y(x + y)$
185. $a^2(a - b) - a(a^2 - b)$

Joon. nr. 2.



b) Sellepärast, et $m(a - b + c) = ma - mb + mc$, on ka õige ümberpöördult:

$$ma - mb + mc = m(a - b + c),$$

s. t. kui kõigil polünoomi liigetel on ühine tegur, wõib polünoomi teguriteks lahutada, ühisteguri klambrite ette wõttes.

Lahutada teguriteks:

186. $7a + 7$ (wrdl. nr. 173)
187. $7a - 7$
188. $9a - 72$ (wrdl. nr. 174)
189. $ax - x$
190. $a + a^2$
191. $x^2 + x^3$
192. $x^6 + x^9$
193. $mn^2 + n^5$ (wrdl. nr. 176)
194. $24b - 32b^2$
195. $15a + 15b + 15$
196. $b^3 - b^2 + b$
197. $15a^3 - 10a^2 + 5a$

198. $12a^2 + 6ab - 21a$ (wrdl. nr. 177)
199. $20a^5b^2 - 12a^4b^3 + 8a^3b^5$.

c) Paneme järgmist tähele: kui kaksliige $6.5 - 6.3$ teguriteks lahutada, ühisteguri 6 klambrite ette wõttes, siis saab $6\,(5 - 3)$. Kui aga ühistegur 6 on antud kujul $8 - 2$, järjelikult kaksliige esineb näol

$$(8 - 2) . 5 - (8 - 2) . 3,$$

tuleb endine resultaat nii kirjutada:

$$(8 - 2)\,(5 - 3)$$

ja üld kujul: $(a - b)c - (a - b)d = (a - b)(c - d)$.

Harjutused. Lahutada teguriteks:

200. $a(b - c) - 3(b - c)$
201. $2a(x - 2) - b(x - 2)$
202. $(a - b)x - (a - b)$
203. $(a + b)x - a - b$ [Juhatus: teine ja kolmas liige klambritesse panna!]
204. $a(x - y) - x + y$
205. $18a(3a - 5b) + 27a\,(3a - 5b)$

D. Polünoomi kaswatamine polünoomiga.

a) Näide.

$$(6 + 3 - 5)\,(7 - 2)$$

Ajutiselt olgu esimene tegur $6 + 3 - 5$ tema wäärtuse 4-ja näol lühidalt ära tähendatud. Sellepärast

$$(6 + 3 - 5)\,(7 - 2) = \underbrace{4\,(7 - 2) = 4 . 7 - 4 . 2}_{\text{Üleminek § 4, C põhjal.}}$$

Nüüd anname näite esimesele tegurile endise kuju tagasi

$$4 . 7 - 4 . 2 = (6 + 3 - 5) . 7 - (6 + 3 - 5) . 2 =$$
$$= (6 . 7 + 3 . 7 - 5 . 7) - (6 . 2 + 3 . 2 - 5 . 2) =$$

w. tehete järjestus § 1, C.

$$= 6 . 7 + 3 . 7 - 5 . 7 - 6 . 2 - 3 . 2 + 5 . 2$$

Üleminek § 2, *B,b* põhjal.

Kokkuwõttes saame:

$$(6 + 3 - 5)(7 - 2) =$$
$$= 6 . 7 + 3 . 7 - 5 . 7 - 6 . 2 - 3 . 2 + 5 . 2$$

Üldse:

$$(a + b - c)(d - e) = (a + b - c) d - (a + b - c) e =$$
$$= (ad + bd - cd) - (ae + be - ce) =$$
$$= ad + bd - cd - ae - be + ce.$$

Juhis: polünoomi kaswatamisel polünoomiga kaswatatakse kõik ühe polünoomi liikmed üksikult teise polünoomi liigetega; kui mõlemad üksiku kaswatamise liikmed on ühesuguste märkidega, tuleb kaswatis wõtta märgiga „+“, kui wastasmärkidega — märgiga „—“

206. Missugune oleks käsitatud näidete

$$(6 + 3 - 5)(7 - 2) \text{ ja } (a + b - c)(d - e)$$

geomeetriline interpretatsioon?

Kaswatada polünoomid:

207. $(a + 3)(b + 5)$

208. $(a + 3)(b - 5)$

209. $(a + b)(m + n)$

210. $(a + b) m + 1)$

211. $(a + 2)(a - 3)$

212. $(2n - 3)(3n - 2)$

213. $(3a - 1)(2b + 4)$

214. $(x + 1)(y + 2)$

215. $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

216. $(a-b)(a^2+ab+b^2)$

217. $(a-b+c)(2a-b)$

218. $p^2-(p-4)(p-5)$

219. $(2x-1)(3x-2)-(3x+1)(x-4)$

220. $(2a-3b)(a-b)-(3a-2b)(a+b)$

221. $(a+b)(x-y)-(a-b)(x+y)-(a-b)(x-y)$

222. $(a+2)(a-3)-(a+3)(a-2)-4(a-5)$

223. $(a-1)(a+2)(a-3)$

224. $(a+1)(a-2)(a+3)$

225. Kuidas muutub kaswatis ab, kui

1) a 3-e wõrra suurendada,
2) b 5-e wõrra wähendada,
3) korraga a 2-e ja b 6-e wõrra suurendada ja
4) üheaegselt a 4-ja wõrra wähendada ja b 7-e wõrra suurendada?

226. Kuiwõrd suureneb kaswatis 783 . 492, kui kumbagi liiget 1-e wõrra suurendada?

227. Kuiwõrd wäheneb kaswastis 829 . 567, kui kumbagi liiget ühe wõrra wähendada?

228. Kuidas muutub kaswatis 675 . 389, kui tegurit 675 suurendada ja tegurit 389 wähendada 1-e wõrra?

229. Kui palju kaswab püstküliku pindala, mille mõõdud on 625 m. ja 238 m., kui pikemat külge 4 m-i wõrra ja lühemat 5 m-i wõrra pikendada?

230. Kui kaswatamisel on mõlemal kahekohalisel teguril kümned wõrdsed ja ühed täiendawad teineteist 10-ni, wõib tuletada walemi:

$$(a+b)(a+c)=a(a+10)+bc, \text{ kui } b+c=10.$$

Tuletada walem, wäljendada ta sõnadega ja arwutada tema abil kaswatised:

13 . 17; 26 . 24; 42 . 48; 65 . 65.

b) Ümberpöördud transformatsioon: polünoomi muundamine kaswatiseks.

Näide. Muundada kaswatiseks polünoom:

$$ax - bx - ay + by.$$

Rühmitame liikmed niiwiisi, et iga rühma saaks lahutada teguriteks, millest wähemalt üks oleks kõigile rühmadele ühine, mis tegur siis eraldatakse; niiwiisi saame:

$$ax - bx - ay + by = (ax - bx) - (ay - by) =$$
$$= x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x - y).$$

Muundada kaswatisteks järgmised polünoomid:

231. $ma + mb + na + nb$ (*wrdl.* nr. 209)
232. $ma + mb + a + b$ (*wrdl.* nr. 210)
233. $ma - mb + na - nb$
234. $ma - mb + a - b$
235. $2am + 3bm - 2an - 3bn$ 2649.
236. $ax - x - ay + y$
237. $ax - a - x + 1$
238. $6ax - 4bx - 9ay + 6by$

E. Relatiiwsete arwude kaswatamine.

Uurimine näitab, et negatiiwsete arwude kaswatamisel tuleb märkide suhtes käia eelmise juhise järgi, nimelt ühesuguste märkidega liikmed annawad kaswatamisel kaswatise ees märgi „+“ (plus), wastas märkidega liikmed „—“ (minus). Sellepärast:

$$(+3)(+5) = +15$$
$$(-3)(+5) = -15$$

$$(+3)(-5) = -15$$
$$(-3)(-5) = +15$$

Kaswatada:

239. $(+8)(+15)$
$(-6)(-5)$
$(-3)(+9)$
$(+21)(-15)$

240. $(-a)(+b)$
$(-a)(-b)$

241. $(-3a^2)(-6a^4)$

242. $(-0{,}2a)(+0{,}5a^2)$

243. $(-2)(-3)(-4)$

244. $(-2a)(+3b)(-5)$

245. $(-a)(-b)(-c)(-d)$

Arwutada järgmised awaldused, kui 1) $x = -2$
2) $x = -3$.

246. $x^2 - 5x + 4$

247. $x^2 + 12x - 1$

248. $x^3 + x^2 - 2x + 7$

249. $x^3 - 2x^2 - x + 4$

§ 5. Walemid lühendatud kaswatamiseks.

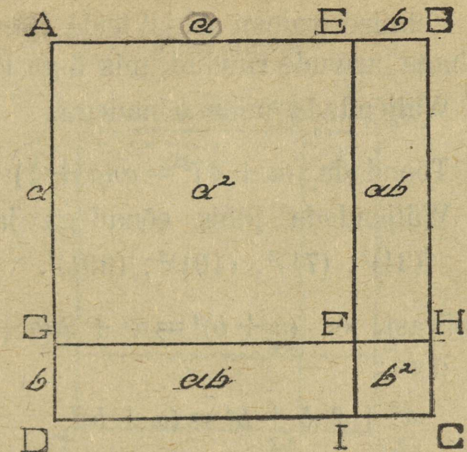
Walemiks ehk wormeliks nimetatakse wõrdust, mis wõimaldab tema eeskujul terwe ülesannete rea lühendatud lahendamist.

1.

$a)$ $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 =$
$a^2 + 2ab + b^2$,

s. t. kahe arwu summa ruut wõrdub mõlema arwu ruutude summaga, liidetud nende arwude kahekordse kaswatisega. Walemi geomeetrilist tähendust selgitab joon. nr. 3.

Joon. nr. 3.



Awaldusele $(a + b)^2$ wastab pind $ABCD$, mis seisab koos pindadest $AEFG$ $(= a^2)$, $FHCI$ $(= b^2)$ ja pindadest $EBHF$ ning $GFID$, mille wiimase kahe summa on $2ab$.

Kahega astendada wormeli abil:

250. $(a + 1)^2$ **254.** $(2x + 3y)^2$
251. $(a + 2)^2$ **255.** $(ab + 1)^2$
252. $(x + 10)^2$ **256.** $(a^2 + 3)^2$
253. $(5 + 3a)^2$ **257.** $(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b)^2$
258. $(0{,}4a + 0{,}7b)^2$

Walem wõimaldab rutulist arwude ruutude leidmist. Näit. kui tarwis leida 83^2, tuleb endale ette kujutada summa $80 + 3$. Kerge on leida, et 80-e ja 3-e ruudud on 6400 ja 9, nende arwude kahekordne kaswatis 480 ja järjelikult kogusumma 6889.

259. Arwutada nimetatud wiisil:

23^2; 34^2; 42^2; 63^2; 81^2; 105^2; 115^2.

260. a) Näidata, et $(a + 5)^2 = a(a + 10) + 25$.

b) Eelmise walemi põhjal leida 45^2, 55^2, 75^2, 95^2, s. t. kahekohaga arwude ruudud, mis 5-ga lõpewad.

c) Wäljendada juhis sõnadega!

261. a) Tõendada: $(a + \frac{1}{2})^2 = a(a + 1) + \frac{1}{4}$

b) Wäljendada juhis sõnadega ja arwutada:

$(3\frac{1}{2})^2$; $(7\frac{1}{2})^2$; $(10\frac{1}{2})^2$; $(69\frac{1}{2})^2$.

b) Sellepärast, et $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, on ka pöördwõrdus õige:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2,$$

s. t. kui awaldus kujutab kahe arwu ruutude summat ühes nende arwude kahekordse kaswatisega, wõib seda awaldust esitada nende arwude summa ruuduna.

Näide:

$$9a^2 + 12ab + 4b^2 = (3a + 2b)^2$$

Esitada summa ruuduna:

262. $a^2 + 2a + 1$

263. $a^2 + 6a + 9$

264. $b^4 + 8a^2 + 16$

265. $b^2 + 4xy + 4y^2$

266. $9r^2 + 6r + 1$

267. $4a^2 + 2a + \frac{1}{4}$

2.

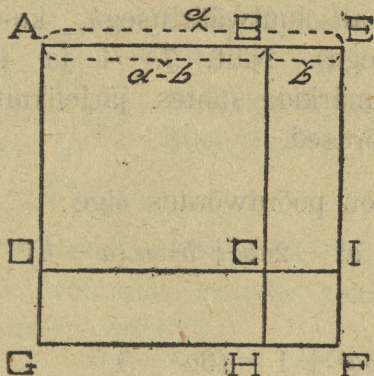
$$a)\ \underline{(a - b)^2} = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 =$$

$$\underline{a^2 - 2ab + b^2},$$

s. t. kahe arwu wahe ruut wõrdub mõlema arwu ruutude summaga, millest on lahutatud antud arwude kahekordne kaswatis.

Walemi geomeetrilist tähendust selgitab joonis nr. 4.

Joon. nr. 4.



Ruut, mille külje pikkus $a - b$, on $ABCD$. Sellesama pinna saame, kui meie pinnast $AEFG$ $(= a^2)$ lahutame $BEFH$ ja $DIFG$, millest kummagi pind on ab, ning liidame ruuduga $CIFH$ $(= b^2)$.

Astendada walemi põhjal:

268. $(a - 1)^2$	**276.** $(4 - pq)^2$
269. $(a - 3)^2$	**277.** $(4x - 3y)^2$
270. $(a - b)^2$	**278.** $(a^2 - 3)^2$
271. $(b - a)^2$	**279.** $(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b)^2$
272. $(x - 8)^2$	**280.** $(0{,}4a - 0{,}3b)^2$
273. $(8 - x)^2$	**281.** $(a + b)^2 + (a - b)^2$
274. $(5 - 3a)^2$	**282.** $(2a - b)^2 + (3a - 2b)^2$
275. $(ab - 2)^2$	**283.** $(6x - 5y)^2 + (5x - 6y)^2$

Märkus. Nnr. 270 ja 271, 272 ja 273 lahendamine on näidanud, et arwude wahe ruut wõrdub nende arwude pöördwahe ruuduga. See järgneb sellest, et kui wahe $a - b$ on positiiwne, on pöördwahe $b - a$ negatiiwne, ja wastasarwude ruudud on, nagu teada, ühesuurused (wastasarwudeks nimetatakse 2 relatiiwset arwu sama absoluutwäärtusega, kuid wastupidiste märkidega). Näit. $7 - 4$ ja $4 - 7$ erinewad ainult märkide suhtes, järjelikult on nende ruudud wõrdsed.

b) Ka siin on pöördwõrdus õige:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Näide.

$$9a^4 - 6a^2 + 1 = (3a^2 - 1)^2$$

Esitada wahe ruuduna:

284. $a^2 - 2a + 1$

285. $a^2 - 8a + 16$

286. $x^2 - 6xy + 9y^2$

287. $a^4 - 10a^2 + 25$

288. $16a^2 - 24ab + 9b^2$

289. $\frac{9}{4}a^2 - 2ab + \frac{4}{9}b^2$.

Ka arwude ruutude leidmisel wõib kasuga walemit tarwitada. Näit. 89^2 leidmiseks:

$$(90 - 1)^2 = 900 + 1 - 180 = 721.$$

290. Arwutada: 39^2; 47^2, 56^2, 78^2, 98^2, 999^2.

3.

$$a)\ \underline{(a + b)(a - b)} = a^2 + ab - ab - b^2 = \underline{a^2 - b^2},$$

s. t. kahe arwu summa ja wahe kaswatis wõrdub nende arwude ruutude wahega.

291. Missugune oleks selle walemi geomeetriline tähendus?

Arwutada kaswatised:

292. $(a+1)(a-1)$

293. $(a+3)(a-3)$

294. $(7-2a)(7+2a)$

295. $(ab+2)(ab-2)$

296. $(3x+5y)(3x-5y)$

297. $(a^2+2)(a^2-2)$

298. $(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})$

299. $\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{3}\right)\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{3}\right)$

300. $(1{,}1a+1{,}3b)(1{,}1a-1{,}3b)$

301. $(a+b+c)(a+b-c)$

302. $(x-y+z)(x-y-z)$

303. $(x+y-z)(x-y-z)$

Soowitaw on tarwitada walemit kahe arwu kaswatamisel, kui on wõimalik esitada need arwud kahe teise arwu summa ja wahena.

N ä i d e.

$$73 \,.\, 67 = (70+3)(70-3) = 4900 - 9 = 4891.$$

304. Arwutada kaswatised:

28 . 32;	113 . 107;
55 . 65;	152 . 148;
98 . 102;	689 . 711;

b) Tarwitades walemit $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, esitada kaswatistena järgmised binoomid:

305. $a^2 - 1$

306. $a^2 - 16$

307. $x^2 - y^2$

308. $4x^2 - 9y^2$

309. $25p^2 - q^2$

310. $\frac{9}{16}p^2 - \frac{4}{9}q^2$

311. $1 - \frac{a^2}{4}$

312. $1 - 0{,}09b^2$

Walemi $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ põhjal sünnib kahe arwu ruutude wahe arwutamine palju rutem, kui muidu.

N ä i d e. $583^2 - 317^2 = 900 \,.\, 266 = 239400$

313. Arwutada nimetatud wiisil:

$32^2 - 28^2$; $429^2 - 319^2$;

$86^2 - 56^2$; $777^2 - 77^2$;

$82^2 - 18^2$; $958^2 - 42^2$.

4.

$$\underline{(a+b)^3} = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$\underline{a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}.$$

(Paneme tähele, et a aste alaneb ühtlaselt, b aste tõuseb).

314. Leida walemi geomeetriline tähendus, papist kleepides rööptahukaid, mille mõõdud siin on antud tsentimeetrites:

1 kuup mõõtudega $14 \times 14 \times 14$ ja kuup à $6 \times 6 \times 6$;
3 rööptahukat à $14 \times 14 \times 6$ ja 3 à $14 \times 6 \times 6$.

Wõtta kolmas aste:

315. $(a+2)^3$ **316**. $(3a+2b)^3$ **317**. $\left(a+\frac{b}{2}\right)^3$.

5.

$$\underline{(a-b)^3} = (a-b)^2(a-b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) =$$
$$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 =$$
$$\underline{a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}.$$

(Paneme tähele, peale a astme alanemise ja b astme tõusmise, et liikmed on wahelduwate märkidega).

Astendada kolmega:

318. $(a-2)^3$ **319**. $(2a-3b)^3$ **320**. $(2a-\frac{b}{2})^3$

Lisa.

Arwutada järgmised awaldused, kui $x = a + b$,
$y = a - b$.

321. $2x - xy + 3y$

322. $x^2 - xy - y^2$

Asendada awaldusse

323. $x^2 + 3x - 1$ wäärtus $x = a - 2$
324. $x^2 - 5x + \frac{1}{4}$ „ $x = a - \frac{1}{2}$
325. $x^2 + 2x + 1$ „ $x = a^2 - 1$ ja arwutada awaldused.

§ 6. Jagamine.

A. Relatiiwsete arwude jagamine.

Selle §-i juures tuleb alati silmas pidada, et jagamine on kaswatamise wastastehe: kaswatise ja ühe teguri abil otsitakse teine tegur. Näit. —3 jagada +5-ga tähendab: leida niisugune arw, mille kaswatis +5-ga oleks —3. Arusaadaw, et otsitawa arwu märk on „—“, sest ainult negatiiwse arwu kaswatis positiiwse arwuga +5 wõrdub negatiiwse arwuga —3. Otsitawa arwu absoluutse wäärtuse kaswatis 5-ga wõrdub jagatawa absoluutse wäärtusega 3. Sellest järgneb, et resultaadi absoluutne wäärtus on 3-e jagatis 5-ga, nii et

$$(-3):(+5) = -\tfrac{3}{5}.$$

Samasugune arutus näitab, et $(+3):(-5) = -\frac{3}{5}$ ja
$(-3):(-5) = +\frac{3}{5}$.

Üldse:

$$(-a):(+b) = -\frac{a}{b}$$

$$(+a):(-b) = -\frac{a}{b}$$

$$(-a):(-b) = +\frac{a}{b}$$

Juhis; relatiiwsete arwude jagamisel tuleb jagada absoluutsed wäärtused ja asendada saaduse ette märk

„+“, kui märgid on jagatawal ja jagajal ühesugused, märk „—“, kui need märgid on wastupidised.

326. Jagada:

$(-28):(+7)$	$(-13):(-169)$
$(-60):(-12)$	$(+8):(-10)$
$(+19):(-95)$	$(-4{,}2):(-0{,}14)$.

327. Õhu temperatuur oli

hommikul	keskpäewa	õhtul
$+2^0$ C	$+5^0$ C	-1^0 C
-6^0 C	$+1^0$ C	-4^0 C
-11^0 C	-5^0 C	-8^0 C

Leida päewa kesktemperatuurid.

B. Astmete jagamine.

$$a^7 : a^4 = a^{7-4} = a^3, \text{ sest } a^3 \cdot a^4 = a^7.$$

Üldse:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Juhis: Ühesuguste alustega astmete jagamisel astendatakse alus eksponentide wahega.

Jagada:

328. $a^4 : a$	**329.** $10^{25} : 10^{21}$	**330.** $a^{12} : (-a^8)$
$a^5 : a^3$	$16^{12} : 16^{10}$	$(-13^5) : 13^4$.

C. Monoomi jagamine monoomiga.

Näide.

Jagada $15a^4 b^3 x : 3a^3 b^2 x$.

Jagamise definitsioonist järgneb, et jagatiseks peab olema awaldus, mille kaswatis jagajaga $3a^3b^2x$ wõrduks jagatawaga $15a^4b^3x$. Sellepärast:

$$15a^4b^3x : 3a^3b^2x = 5ab \text{ ja}$$

juhis on järgmine: monoomide jagamiseks tuleb jagatawa koeffitsient ja üksikute tähtede astmed jagada wastawalt jagaja koeffitsiendiga ja samade tähtede astmetega (nagu seda eelmine punkt *B.* õpetab).

Jagada:

331. $7ab : a$
332. $52ab : 13ab$
333. $42a^2b : 6ab$
334. $35m^3n^2 : 7mn^2$
335. $3a : \frac{1}{3}$
336. $9x : \frac{3}{5}$
337. $\frac{3}{4}a : 1\frac{7}{8}$
338. $15x ; 0,3$
339. $4a : 0,6$
340. $2\frac{2}{3}abx : 1\frac{1}{3}ax$
341. $18x : (-6)$
342. $(-15a) : (-45)$
343. $(-\frac{1}{2}ax) : \frac{3}{4}a$

D. Polünoomi jagamine monoomiga.

Polünoomi jagamisel monoomiga (w. Th. Koik, Elementaarne algebra I, lk. 61 § 26) tuleb polünoomi liikmed üksikult monoomiga jagada, näit.

$$(a - b + c) : m = a : m - b : m + c : m$$

ehk, jagamise märgina horitsontaalset kriipsu tarwitades,

$$\frac{a - b + c}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m}.$$

Näide. $4197 : 3 = (4200 - 3) : 3 = 1400 - 1 = 1399.$

Jagada:

344. $(14a + 21) : 7$
345. $(20a - 15) : 5$
346. $(4a + 5ab) : a$
347. $(18ax + 30bx) : 6x$
348. $(42ab - 28ac) : 14a$
349. $(r^3 - r^2s + rs^2) : r$
350. $(l^4 - l^3 + l^2) : l^2$.

Jagada polünoom monoomiga. Kui mingisuguse liikme jaoks pole wõimalik täisarwulist jagatist leida, siis tuleb esitada jagatis murruna, s. t. horitsontaalkriipsu tarwitades.

351. $(a+7):7$ **353.** $(a-8):a$

352. $(a-9):3$ **354.** $(15-a):a$

E. Polünoomi jagamine polünoomiga.

Metoodi selgitamiseks kaswatame

polünoomi $3x^2 - 5x + 4$

polünoomiga $2x^2 + 7x - 8$,

korraldades liikmed x-i alanewate ehk langewate astmete järjes ja kirjutades osakaswatised üksteise alla:

$$\begin{array}{lrrrrr}
 & 3x^2 & -\,5x & +\,4 & & \\
 & 2x^2 & +\,7x & -\,8 & & \\
\hline
\text{1-ne osakaswatis} & 6x^4 & -\,10x^3 & +\,8x^2 & & \\
\text{2-ne} \quad " & & +\,21x^3 & -\,35x^2 & +\,28x & \\
\text{3-as} \quad " & & & -\,24x^2 & +\,40x & -\,32 \\
\hline
\text{Kogukaswatis} & 6x^4 & +\,11x^3 & -\,51x^2 & +\,68x & -\,32
\end{array}$$

Osakaswatisi tähele pannes leiame: 1) et ülemliige $6x^4$ on tekkinud tegurite ülemliigete kaswatamisest. Sellepärast ei wõi temal sarnaseid liikmeid olla ja ta läheb niisugusena kogukaswatisesse. Sedasama tuleb ütelda ka alamliikme kohta, kuna keskmiste liigete seas wõib olla sarnaseid ja nad wõiwad ühendamise juures kaduda, nii et kogukaswatise liigete minimaalarw on 2; 2) kui puuduks kaswataja polünoomi ülemliige $2x^2$, puuduks ka 1-ne osakaswatis, kogukaswatis oleks

$$21x^3 - 59x^2 + 68x - 32$$

ja tema ülemliige oleks $21x^3$, millega nüüd ka sarnaseid ei olnud. 3) Kui kaswatajana oleks ainult liige -8, oleks 3-as osakaswatis ka ühes sellega kogukaswatis.

Ümberpöördult, kui jagada polünoomi $6x^4 + 11x^3 - 51x^2 + 68x - 32$ (endist kaswatist) polünoomiga $3x^2 - 5x + 4$ (endise kaswatawaga), leiame 1-se punkti põhjal, et jagatise ülemliige on jagatawa ($6x^4$) ja jagaja ($3x^2$) ülemliigete jagatis. Edasi, jagatise ülemliikme ($2x^2$) kaswatis jagajaga wastab endisele 1-sele osakaswatisele ja 1-ne jääk 2-se ja 3-da osakaswatise summale.

$$
\begin{array}{rl}
6x^4 + 11x^3 - 51x^2 + 68x - 32 & |\,\underline{3x^2 - 5x + 4} \\
\underline{\mp 6x^4 \pm 10x^3 \mp 8x^2} \qquad\qquad & \;\; 2x^2 + 7x - 8 \\
\text{1-ne jääk } 21x^3 - 59x^2 + 68x - 32 & \\
\underline{\mp 21x^3 \pm 35x^2 \mp 28x} \qquad & \\
\text{2-ne jääk } - 24x^2 + 40x - 32 & \\
\underline{\pm 24x^2 \mp 40x \pm 32} &
\end{array}
$$

Punkti 2)-se põhjal tuleb 1-se jäägi ülemliige $21x^3$ jagada uuesti jagaja ülemliikmega $3x^2$ . . . Teine jääk wõrdub 3-da osakaswatisega; tema põhjal leitakse ka 3-as jagatise liige -8.

Täide saata järgmised jagamised, korraldades polünoomide liikmed teatud ühe tähe alanewate astmet järjes:

355. $(a^4 + 5a^3 - 6a^2 + 11a + 15) : (a^2 + 7a + 5)$
356. $(6x^4 - 37x^3 + 63x^2 - 27x - 5) : (3x^2 - 8x + 5)$
357. $(40a - 13a^2 - 6a^3 - 16) : (7a + 2a^2 - 4)$
358. $(p^2 + 11p + 30) : (p + 5)$
359. $(a^2 - a - 110) : (a - 11)$
360. $(a^3 + b^3) : (a + b)$ [wrdl. nr. 215]
361. $(a^3 - b^3) : (a - b)$ [wrdl. nr. 216]
362. $(x^5 - a^5) : (x - a)$
363. $(216\,a^3 + 343b^3) : (6a + 7b)$
364. $(21a^2 + 20b^2 - 47ab) : (3a - 5b)$

365. $(42p^3 - 28q^3 - 55p^2q + 31pq^2) : (6p - 7q)$

366. $(12x^2 + 23xy + 35yz + 28xz + 10y^2) :$
$(3x + 2y + 7z)$

F. Monoomi jagamine polünoomiga.

Näide. Jagada: $a : (b + c - d)$

Monoomi jagamisel polünoomiga ei saa resultaadiks ei monoomi ega polünoomi, sest kumbagi liiki awalduse kaswatis polünoomiga $b + c - d$ ei wõrdu monoomiga a, waid on polünoom. Meie wõime awaldust ainult murruna üles tähendada:

$a : (b + c - d) = \frac{a}{b + c - d}$, kuid sellega pole lahendamise probleem edasi wiidud. Kõik, mis on wõimalik teha, on mõni kord nimetatud murru koondamine (w. nnr. 443 ja 444).

§ 7. Polünoomide lahutamine teguriteks.

(Süstemaatiline käsitlus ja kordamine).

A. Binoomide (kaksliigete) lahutamine.

1) Kõigil polünoomi liigetel on ühine tegur, mis eraldatakse. See juhus on käsitatud lhk. 21 ja 22, §-is 4, *C*, *b* ja *c*.

Lahutada teguriteks:

367. $(a - b)(2x - 5y) + (a - b)(3x + 7y)$

368. $(a + b)(3x + 4y) - (a + b)(2x - 5y)$

Paneme weel järgmist tähele.

1-ne näide. $3 - 5 = -(5 - 3)$

Üldse: $a - b = -(b - a)$

2-ne näide. $p + (3 - 5) = p - (5 - 3)$

Üldse: $p + (a - b) = p + a - b = p - b + a = p - (b - a)$

3-as näide. $p + 4 \,.\, (3 - 5) = p - 4 \,.\, (5 - 3)$
Üldse: $p + 4\,(a - b) = p + (4a - 4b) = p + 4a - 4b =$
$= p - 4b + 4a = p - (4b - 4a) = p - 4\,(b - a)$

Juhis: kui awaldusesse asendada wahe kohale pöördwahe, tuleb klambrite ette wastasmärk panna.

Lahutada teguriteks:

369. $(9a - 17)(b - c) + (8a - 9)(c - b)$
370. $(4a - 5b)(x - y) - (a + 3b)(y - x)$
371. $15a\,(7a - b) + 12a\,(b - 7a)$
372. $(a - b)^2 - a(b - a)$
373. $(a - b)^2 + a(b - a)$

2) Binoomide lahutamine walemi

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

abil (w. lhk. 31, § 5, 3, *b*).

Lahutada teguriteks:

374. $(a + b)^2 - c^2$
375. $p^2 - (q + r)^2$
376. $(a + b)^2 - (a - b)^2$
377. $(9x + 5y)^2 - (5x + 9y)^2$

Jagada:

378. $(a^2 - b^2) : (a + b)$
379. $(25a^4 - b^2) : (5a^2 + b)$
380. $(a^4 - b^4) : (a^2 + b^2)$
381. $(a^4 - b^4) : (a + b)$

3) Binoomide lahutamine walemi

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

põhjal (walemi tuletamise asjus w. ülesanded nnr. 215 ja 360).

Esitada kaswatistena:

382. $a^3 + 8$
383. $a^3 + 1$
384. $a^3 + 27$
385. $27x^3 + 8y^3$

4) Binoomide lahutamine walemi

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

abil (w. ülesanded nr. 216 ja 361.)

Esitada kaswatistena järgmised binoomid:

386. $a^3 - 1$ **389.** $8x^3 - y^3$
387. $a^3 - 8$ **390.** $x^3 - 8y^3$
388. $a^3 - 27$

Jagada:

391. $(125a^3 - 27b^3) : (5a - 3b)$
392. $(a^6 - b^6) : (a - b)$

Polünoomide lahutamiseks tuleb proowida siin nimetatud wõimalusi antud järjekorras.

N ä i d e.

Lahutada binoom $a^5 - a$.

Kõige pealt proowime esimest kriteeriumi — teguri eraldamist. Seekord annab ta positiiwse resultaadi:

$$a^5 - a = a(a^4 - 1)$$

Teise kriteeriumi põhjal saame:

$$a^4 - 1 = (a^2 + 1)(a^2 - 1)$$

ja tunnust weel kord tarwitades

$$a^2 - 1 = (a + 1)(a - 1),$$

nii et täielik lahutus on:

$$a^5 - a = a(a^4 - 1) = a(a^2 + 1)(a^2 - 1) =$$
$$a(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1)$$

— **saaduses 4 tegurit, mis ühes sellega ka on algteguriteks.**

Lahutada teguriteks:

393. $a^5 - a^2$
394. $(11a - 20)(b - c) + (7a - 8)(c - b)$
395. $(a - b)^2 - (b^2 - a^2)$

B. Trinoomide (kolmliigete) lahutamine.

1) Lahutamine ühisteguri eraldamise läbi (w. lhk. 21, § 4, *C,b*),

2) Trinoomide lahutamine walemi

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

põhjal. See juhus on käsitatud lhk. 28, §-is 5, 1, *b*.

Jagada:

396. $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$

397. $(a^2 + 6ab + 9b^2) : (a + 3b)$

3) Trinoomide lahutamine walemi $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ põhjal (w. lhk. 30, § 5, 2, *b*).

Jagada:

398. $(a^2 - 2ab + b^2) : (a - b)$

399. $(4a^2 - 12ab + 9b^2) : (2a - 3b)$

4) Liigete rühmitamise kaudu (w. ka § 4, *C, c*.)

Lahutada teguriteks:

400. $(p - q)r - 2p + 2q$

401. $a(x - y) - 3y + 3x$

402. $20a(b - a) + 15a(a - b) - 10a(a - b)$

403. $p^3 - q^3 + p^2(q - p)$

404. $a^2 - b^2 - (b - a)^2$ [w. lk. 29, § 5, 2,*a*), märkus].

C.

Polünoomidest, mille liigete arw käib üle kolme, paneme siin ainult need tähele, mis lubawad lahutamist kas teguri eraldamise ehk liigete rühmitamise läbi (w. ka § 4, *D*, *b*).

Näide.

Lahutada teguriteks: $4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2$

Awaldus on küll binoom, kuid tema lahutamisel algawaldusteks, s. t. niisugusteks awaldusteks, mida enam teguriteks lahutada ei saa, tuleb meil tegemist teha neliliigete lahutamisega.

$$4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2=$$
$$[2ab+(a^2+b^2-c^2)](2ab-(a^2+b^2-c^2)]=$$
$$=(a^2+2ab+b^2-c^2)(c^2-a^2+2ab-b^2)=$$
$$=[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]=$$
$$=[(a+b)+c][(a+b)-c][c+(a-b))][c-(a-b)]=$$
$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

Samal wiisil lahutada:

405. $(a^2-b^2-c^2)-4b^2c^2$

406. $4b^2c^2-(a^2-b^2-c^2)^2$

Lahutada teguriteks:

407. f^3+g^3-f-g

408. $b-a-a^2+b^2$

409. $a-a^3+b-b^3$

410. $p^2-q^2+2qr-r^2$

411. $x^2-y^2-2yz-z^2$

412. $4a^2-4ab+b^2+b-2a$

413. $x-xy-y^2+2y-1$

Neliliigete jaoks olid küll juba walemid:

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \text{ ja}$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

(w. § 5, *4 ja 5*), kuid lahutamiseks tungiwalt tarwis neid ei ole. Awaldusi $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ja $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ on kerge teguriteks lahutada ilma nende walemite teadmiseta.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a^3+b^3)+(3a^2b+3ab^2)=$$
$$=(a+b)(a^2-ab+b^2)+3ab(a+b)=$$
$$=(a+b)[(a^2-ab+b^2)+3ab]=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=$$
$$=(a+b)^3.$$

414. Näidatud wiisil esitada astmena

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Lahutada teguriteks, kas walemi põhjal wõi ilma:

415. $a^3 + 9a^2 + 27a + 27$

416. $a^3 - 12a^2 + 48a - 64$

417. $a^3 - 1\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}$

§ 8. Murru mõiste; murdude koondamine ja laiendamine.

Teatawasti tähendatakse matemaatikas jagamist peaasjalikult kahel wiisil: näit. kui on tarwis 3 jagada 5-ega, siis kirjutatakse: 3 : 5 ehk $\frac{3}{5}$; kui a jagada b-ga, siis $a : b$ ehk $\frac{a}{b}$. Kirjutust $\frac{a}{b}$, kus jagamise märgina on tarwitatud horitsontaalne kriips, nimetatakse harilikult murruks, a nimetatakse lugejaks, b — nimetajaks jaloetakse: a jagatis b-ga.

A.

Kõige esmalt paneme järgmist tähele.

Meie teame §-ist 6, A, lk. 33, et $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$ (1)

$$\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad (2)$$

ja $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ (3)

Ühendades wõrdused (1) ja (2) leiame: $\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$, s. t. kui murd on märgiga „—“, on ükskõik, kus „—“ seisab, kas lugejas, nimetajas ehk murru ees.

Wõrdus (3) näitab: kui mõlema murru liikme ees on „—“, wõib minused ära jätta.

Märkus. Nagu siin toodud arutusest näha, on kõne all olnud ainult kogu lugejasse ehk kogu nimetajasse suhtuw minus. Sellepärast ŏleks näit. murru $\frac{-a+2}{3-a}$ muundamine niisugune:

a) kui minus murru ette asendada:

$$\frac{-a+2}{3-a}=\frac{-(a-2)}{3-a}=-\frac{a-2}{3-a},$$

b) kui minus nimetajasse üle kanda:

$$\frac{-a+2}{3-a}=\frac{-(a-2)}{3-a}=\frac{a-2}{-(3-a)}=\frac{a-2}{-3+a}$$

ehk, kui tahame murrule lihtsama kuju anda, siis kirjutame $\frac{a-2}{a-3}$

B.

Ka sellel üldkujul, kus murru $\frac{a}{b}$ liikmed a ja b wõiwad tähendada ükskõik, mis arwusid — positiiwseid wõi negatiiwseid, täis- wõi murdarwusid, ja isegi terweid awaldusi, monoome ja polünoome, — on murrul see omadus (w. Koik, Alg. I, lk. 113), et tema wäärtus ei muutu, kui lugejat ja nimetajat kaswatada wõi jagada ühe ja sama arwuga.

See wõimaldab teostada kaht operatsiooni, mis arwutamisel murdudega wäga tähtsad. Need on: 1) murdude koondamine ja 2) murdude laiendamine.

Murdude koondamine.

Murdu koondada, tähendab: tema lugejat ja nimetajat jagada ühe ja sama arwuga. Aritmeetikast on teada, et murru koondamiseks oli waja leida murru liigete kõige suurem ühine jagaja, millega siis murru liikmed jagati; näit murrul $\frac{18}{24}$ on kõige suurem ühine jagaja 6, sellepärast on koondatud kuju $\frac{3}{4}$.

Sedasama tuleb ka nüüd teha.

Näide. Koondada murd $\frac{a^3 - a}{a^3 - 2a^2 + a}$

Lugeja lahutus teguriteks on

$$a^3 - a = a\,(a + 1)\,(a - 1),$$

nimetaja $\quad a^3 - 2a^2 + a = a\,(a - 1)^2;$

sellepärast on kõige suurem ühine jagaja $a\,(a - 1)$ ja murru koondatud kuju $\frac{a + 1}{a - 1}$.

Koondada murrud:

418. $\frac{5 + 4}{5 + 7}$

419. $\frac{5 + 10}{5 + 15}$

420. $\frac{3a^2}{6ab}$

421. $\frac{74x^3}{111x^2}$

422. $\frac{14abc}{21ab}$

423 $\frac{6x^2yz^3}{15xy^2z^2}$

424. $\frac{ab}{a^2b + ab^2}$

425. $\frac{p^2 - p}{p^2 + p}$

426. $\frac{4a + 4b}{a + b}$

427. $\frac{a - 3b}{6a - 18b}$

428. $\frac{p - a}{p^2 - ap}$

429. $\frac{x - 1}{x^2 - 1}$

430. $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$

431. $\frac{(a - b)^2}{a^2 - b^2}$

432. $\frac{9p^2 - 4q^2}{3p + 2q}$

433. $\frac{5a^2 - 5b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

434. $\frac{2u^2 - 6uv}{3uv - 9v^2}$

435. $\frac{b - a}{a - b}$ [w. punkt A, märkus].

436. $\frac{3a^2 - 3ab}{ab - a^2}$

437. $\frac{u^2 - v^2}{2v - 2u}$

438. $\frac{2ax - 2ay - 3bx + 3by}{2ax + 2ay - 3bx - 3by}$

Jagada:

439. $12ab : 4a^2$

440. $48a^2b^3 : 42a^3b$

441. $(8ab + 12bc) : 4ac$

442. $(33xy - 44yz) : 11xyz$

443. $4a : (8a^2 - 12ab)$ [wrdl. § 6, F(lk.38)]

444. $a^3b : b\,(a^4b - a^3b^2 + a^2b^3)$

Murdude laiendamine.

Murdu laiendada, tähendab: tema lugejat ja nimetajat kaswatada ühe ja sama arwuga. Murdude laiendamist tuleb tarwitada murdude samanimelisteks muutmisel.

1-ne näide.

Murrud $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{9}$ ja $\frac{8}{15}$ samanimelisteks teha.

Aritmeetikast on teada, et sel puhul otsitakse nimetajate kõige wäiksem ühine kordne, mis nimetajate algteguriteks lahutamise abil leitakse. Seekord on kõige wäiksem ühine kordne (= kõige wäiksem ühine nimetaja) 90. Täiendustegurid on wastawalt 15, 10 ning 6 ja murrud samanimelistena $\frac{75}{90}$, $\frac{40}{90}$ ning $\frac{48}{90}$.

2-ne näide.

Samanimelisteks muuta murrud

$$\frac{2a+1}{a^2-1},\quad \frac{5a+3}{4a+4}\ \text{ja}\ \frac{4a+5}{6a-6}$$

Nimetajate lahutused on

$$a^2 - 1 = (a+1)\,(a-1),$$
$$4a + 4 = 4\,(a+1)\ \text{ja}$$
$$6a - 6 = 6\,(a-1).$$

Nimetajate kõige wäiksema ühise kordse saame, kui meie ühe nimetaja lahutusele puuduwad tegurid teistest nimetajatest juure kirjutame; sellepärast on kõige wäiksem ühine nimetaja $12(a+1)(a-1)$. Antud murdusid tuleb laiendada wastawalt arwudega 12, $3(a-1)$ ja $2(a+1)$, mis annab:

$$\frac{2a+1}{a^2-1}=\frac{\overbrace{2a+1}^{12}}{(a+1)(a-1)}=\frac{24a+12}{12(a^2-1)}$$

$$\frac{5a+3}{4a+4}=\frac{\overbrace{5a+3}^{3a-3}}{4(a+1)}=\frac{15a^2-6a-9}{12(a^2-1)}$$

$$\frac{4a+5}{6a-6}=\frac{\overbrace{4a+5}^{2a+2}}{6(a-1)}=\frac{8a^2+18a+10}{12(a^2-1)}$$

Samanimelisteks muuta murrud:

445. $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ ja $\frac{2}{7}$.

446. $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{10}$ ja $\frac{7}{15}$.

447. $\frac{3}{a}$, $\frac{5}{ab}$ ja $\frac{4}{b^2}$

448. $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{b}$ ja $\frac{3}{a-b}$

449. $\frac{a+b}{a-b}$ ja $\frac{a-b}{a+b}$

450. $\frac{b}{a^2-ab}$, $\frac{a}{ab-b^2}$ ja $\frac{a-b}{ab}$.

451. $\frac{a}{a-b}$ ja $\frac{b}{b-a}$ [w. punkt A, märkus]

452. $\frac{1}{a-b}$, $\frac{a}{2a-2b}$ ja $\frac{2}{b-a}$

§ 9. Tehted murduduga.

A. Liitmine ja lahutamine.

On teada (w. § 6, *D*), et $\frac{a-b+c}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}+\frac{c}{m}$;

järjelikult ümberpöördult: $\frac{a}{m} - \frac{b}{m} + \frac{c}{m} = \frac{a-b+c}{m}$,
s. t. samanimeliste murdude liitmiseks ja lahutamiseks tuleb nõutawad tehted teostada lugejate suhtes ja ja saadus jagada ühise nimetajaga.

Näide.

$$\frac{5}{3a} - \frac{7a-4}{3a} + \frac{4a-3}{3a} = \frac{5-(7a-4)+(4a-3)}{3a} =$$

$$= \frac{5-7a+4+4a-3}{3a} = \frac{6-3a}{3a} = \frac{3(2-a)}{3a} =$$

$$= \frac{2-a}{a} = \frac{2}{a} - 1.$$

Ühendada murrud:

453. $\frac{3a}{7} - \frac{a}{7}$

454. $\frac{7a}{11} + \frac{4a}{11}$

455. $\frac{x}{a} - \frac{y}{a}$

456. $\frac{x}{a} - \frac{x-y}{a}$

457. $\frac{4}{x+1} - \frac{1}{x+1}$

458. $\frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1}$

459. $\frac{5a^2-8b^2}{a-b} + \frac{a^2+2b^2}{a-b}$

460. $\frac{5a^2-7b^2}{a+b} - \frac{a^2-3b^2}{a+b}$

Isenimelised murrud tuleb enne samanimelisteks muuta.

Näide.

$$\frac{2a+1}{a^2-1} + \frac{5a+3}{4a+4} - \frac{4a+5}{6a-6}$$

Kõige wäiksem ühine nimetaja on 12 (a^2-1) (w. eelmine §: murdude laiendamise 2-ne näide), nii et:

$$\frac{2a+1}{a^2-1} + \frac{5a+3}{4a+4} - \frac{4a+5}{6a-6} =$$

$$= \frac{\overset{12}{\overbrace{2a+1}}}{(a+1)(a-1)} + \frac{\overset{3(a-1)}{\overbrace{5a+3}}}{4(a+1)} - \frac{\overset{2(a+1)}{\overbrace{4a+5}}}{6(a-1)} =$$

$$= \frac{(24a+12)+(15a^2-6a-9)-(8a^2+18a+10)}{12(a+1)(a-1)} =$$

$$= \frac{24a+12+15a^2-6a-9-8a^2-18a-10}{12(a+1)(a-1)} =$$

$$= \frac{7a^2-7}{12(a+1)(a-1)} = \frac{7(a+1)(a-1)}{12(a+1)(a-1)} = \frac{7}{12}$$

Ühendada murrud:

461. $\frac{5}{r} - \frac{r}{5}$

462. $\frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \frac{a}{4}$

463. $\frac{a}{2} - \frac{a}{3} + \frac{a}{4} - \frac{a}{5}$

464. $\frac{4a-5}{7} + \frac{2a-6}{21}$

465. $\frac{6x-y}{8} + \frac{8x-3y}{24}$

466. $\frac{x-a}{2a} - \frac{2x-a}{3a} + \frac{3x-a}{4a}$

467. $\frac{x(a-b)}{ab} - \frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a}$

468. $\frac{4}{a+b} - \frac{3}{a-b}$

469. $\frac{4}{p-q} - \frac{3}{p+q}$

470. $\frac{a+1}{2a-2} + \frac{a-4}{3a-3}$

471. $\frac{3a-4b}{4a-4b} - \frac{2a-5b}{5a-5b}$

472. $\frac{a+b}{a-b+c}-\frac{b}{a}$

473. $\frac{4u}{5v-6}-\frac{4u}{5v}$

474. $\frac{1}{a+b}+\frac{3ab}{a^3+b^3}-\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$

475. $\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}-\frac{2x}{1+x^2}$

[Juhatus: eraldi ühendada esimesed kaks liiget]

476. $\frac{2a-1}{3a+3}-\frac{a-3}{4a+4}-\frac{3a+2}{6a+6}$

477. $\frac{4x+1}{2x-2}-\frac{3x-5}{3x+3}-\frac{x^2+5x-1}{x^2-1}$

Kui on tarwis ühendada täisawaldus murruga, siis wõib täisawaldust murruks lugeda, mille nimetaja on 1, näit.:

$$5a-\frac{10a}{a+2}=\frac{\overbrace{5a}^{a+2}}{1}-\frac{10a}{a+2}=\frac{5a(a+2)-10a}{a+2}=\frac{5a^2}{a+2}.$$

Täide saata järgmised liitmised ja lahutamised:

478. $\frac{a}{b}-3$

479. $\frac{u+v}{v}-1$

480. $x-\frac{1}{x}$

481. $\frac{a}{p}-\frac{b}{p}+1$

482. $1-\frac{p-q}{p}$

483. $1-\frac{a}{a-b}$

484. $a+b-\frac{2ab}{a+b}$

485. $p-q-\frac{q^2}{p+q}$

N ä i d e.

Liita murrud $\frac{3a+5}{2a^2-18}$ ja $\frac{a-3}{27-3a^2}$.

Nimetajate lahutused on

$2a^2-18=2(a+3)(a-3)$ ja

$27-3a^2=3(3+a)(3-a)$.

Käies senniste metoodide järele, saaksime ühiseks nimetajaks $6(a+3)(a-3)(3-a)$. Kuid siin peab tähendama, et awaldust $6(a+3)(a-3)(3-a)$ meie ei wõi nimetada **kõige wäiksemaks** ühiseks nimetajaks ja ülesande lahendamine tema kaudu wiiks meid küll õigele resultaadile, kuid tee oleks asjata liiga pikk.

§ 8, *A* märkuse põhjal on teine murd

$$\frac{a-3}{27-3a^2}=-\frac{a-3}{3a^2-27}$$

ja murdude summa

$$\frac{3a+5}{2a^2-18}+\frac{a-3}{27-3a^2}=\frac{3a+5}{2a^2-18}+\left[-\frac{a-3}{3a^2-27}\right]=$$

$$=\frac{3a+5}{2a^2-18}-\frac{a-3}{3a^2-27}$$

Meie paneme siin kaht asjaolu tähele:

1) kui **wahe** nimetajas muudame pöördwaheks, asendatakse murru ette wastasmärk; ja

2) kerge on nüüd näidata, et kõige wäiksemaks ühiseks nimetajaks tuleb lugeda kaswatis

$6(a+3)(a-3)$. Sellepärast:

$$\frac{3a+5}{2a^2-18}+\frac{a-3}{27-3a^2}=\frac{3a+\overset{\overset{3}{\smile}}{5}}{2a^2-18}-\frac{a-\overset{\overset{2}{\smile}}{3}}{3a^2-27}=$$

$$=\frac{9a+15-2a+6}{6(a+3)(a-3)}=\frac{7a+21}{6(a+3)(a-3)}=\frac{7(a+3)}{6(a+3)(a-3)}=$$

$$=\frac{7}{6(a-3)}.$$

Ühendada murrud:

486. $\frac{5}{a-b}+\frac{4}{b-a}$

487. $\frac{3}{2u-2v}+\frac{2}{3v-3u}$

488. $\frac{4a-2}{a-1}-\frac{4a}{a-2}-\frac{a+6}{2-a}$

489. $\frac{2x-3y}{3x-3y}-\frac{x+5y}{5y-5x}$

490. $\frac{3a+2b}{a^2-ab}+\frac{8b-3a}{b^2-ab}$

[Juhatus: kui resultaat on käes, jagada lugeja nimetaja teguriga, mis esineb binoomina].

B. Kaswatamine.

Lause: murdude kaswatis on murd, mille lugeja on lugejate kaswatis ja nimetaja nimetajate kaswatis.

Näitame, et $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$ wõrdub awaldusega $\frac{ac}{bd}$.

Tõendus. Olgu lühidalt $x=\frac{a}{b}$ ja $y=\frac{c}{d}$, kust järgneb:

$$bx=a \quad \text{ja}$$
$$\underline{dy=c\quad}$$
$$bx\,.\,dy=a\,.\,c$$
$$bd\,.\,xy=a\,.\,c$$
$$xy=\frac{ac}{bd}$$

Asendades wiimasesse awaldusesse x-i ja y-i wäärtused, saame:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd},$$

mis oli waja tõendada.

Näide.

$$\frac{15cd}{ab-b^2}\cdot\frac{a^2-ab}{5bc}=\frac{15cd\,.\,a(a-b)}{b(a-b)\,.\,5bc}=\frac{3ad}{b^2}$$

Murdude kaswatamislausest järgneb, et murru kaswatamisel täisarwuga tuleb lugeja kaswatada täisarwuga.

Kaswatada:

491. $\frac{63a}{68} \cdot \frac{17}{81a}$

492. $\frac{27x}{28} \cdot 56a$

493. $8a^2 \cdot \frac{3x}{4a}$

494. $\frac{4a}{5b} \cdot \frac{6b}{9c} \cdot \frac{10c^2}{32a^2}$

495. $\frac{a^2 - ab}{4bc} \cdot \frac{20cd}{ab - b^2}$

496. $\frac{4x - 2}{4x + 8} \cdot \frac{5x + 10}{6x - 3}$

497. $(a - b)^2 \cdot \frac{2}{a^2 - b^2}$

498. $\frac{(a + b)^2}{a + 2b} \cdot \frac{a^2 - 4b^2}{a^2 - b^2}$

499. $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^3 - 8} \cdot \frac{a - 2}{a - 1}$

500. $\frac{p^2 - 1}{p + 2} \cdot \frac{p^2 - 4}{p + 1} \cdot \frac{p - 1}{p - 2}$

501. $\frac{a - b}{a + b} \cdot \frac{b + a}{b - a}$

502. $\frac{x - 1}{xy} \cdot \frac{2xy}{(1 - x)^2}$

Ülesannetes nnr. 503 ja 504, kus tegurina esineb polünoom, muuta ta enne monoomiks (murruks):

503. $\left(\frac{u}{v} - \frac{v}{u}\right) \cdot \frac{uv}{u - v}$ 504. $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{1}{x - y}$

Kaswatada:

505. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) xyz$

506. $\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac}\right) abc$

507. $\left(\frac{a + 2}{a - 2} - \frac{a - 2}{a + 2}\right) (a^2 - 4)$

508. $\left(\frac{x + 3}{x - 3} - \frac{x - 3}{x + 3}\right) (x^2 - 9)$

C. Jagamine.

Jagada $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Oletades, et saadus on $\frac{ad}{bc}$, kaswatame $\frac{ad}{bc}$ jagajaga $\frac{c}{d}$.

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{adc}{bcd} \overset{cd}{=} \frac{a}{b}.$$

Saime jagatawa $\frac{a}{b}$, mis näitab, et oletus oli õige. Järjelikult, murdude jagamisel tuleb kaswatada jagataw jagaja pöördwäärtusega (murru pöördwäärtuseks nimetatakse murdu, kus lugeja ja nimetaja on oma kohti wahetanud).

Järelduslaused: 1) täisarwu jagamisel murruga kaswatatakse täisarw murru pöördwäärtusega, näit.

$$a : \frac{c}{d} = a \cdot \frac{d}{c}$$

2) Murru jagamiseks täisawaldusega kaswatatakse nimetaja selle awaldusega, näit. $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$.

Jagada:

509. $2\frac{1}{2}a : 3\frac{1}{2}b$

510. $\frac{4a}{7b} : 12a$

511. $48p : \frac{16p}{9q}$

512. $\frac{1}{15a} : \frac{a}{18b}$

513. $\frac{a^2-4}{a^2-1} : \frac{2-a}{1-a}$

514. $\frac{a-b}{c} : (a-b)$

515. $\frac{a}{b-c} : (b-c)$

516. $(1-u^2) : \frac{1+u}{1-u}$

517. $\frac{a^2-1}{a-1} : \frac{a^4-1}{a^3-1}$

Järgmistes ülesannetes, kus jagatawas ehk jagajas esineb polünoom, muundada ta enne monoomiks (murruks).

518. $\left(a - \frac{1}{b}\right) : \left(ab - 1\right)$

519. $\left(\frac{1}{x} - x\right) : \left(1 - \frac{1}{x}\right)$

520. $\left(\frac{3a}{5b} - \frac{5b}{3a}\right) : \left(3a - 5b\right)$

521. $\left(\frac{x}{3a} - \frac{3a}{x}\right) : \left(\frac{3a}{x} + 1\right)$

Jagada:

522. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) : \frac{1}{xy}$

523. $\left(\frac{ab^2}{c^2d} - \frac{a}{d} + \frac{b}{c}\right) : \frac{ab}{cd}$

524. $\left(a^3 + \frac{1}{8}\right) : \left(a + \frac{1}{2}\right)$

525. $\left(a^4 - \frac{1}{b^4}\right) : \left(a - \frac{1}{b}\right)$

Mitmekordsed murrud.

Näide.

Arwutada awaldus $\frac{2x+1}{5x-3}$, kui $x=\frac{a}{a-1}$.

Asendades awaldusesse x-i kohale $\frac{a}{a-1}$ saame

n. n. mitmekordse murru $\frac{2\cdot\frac{a}{a-1}+1}{5\cdot\frac{a}{a-1}-3}$.

Lahendamise wiisi suhtes wastab näide eelmistele näidetele, kui horitsontaalkriipsu asemel tarwitada teist jagamise märki, nii et:

$$\frac{2\cdot\frac{a}{a-1}+1}{5\cdot\frac{a}{a-1}-3}=\left(2\cdot\frac{a}{a-1}+1\right):\left(5\cdot\frac{a}{a-1}-3\right)=$$

$$=\frac{2a+a-1}{a-1}:\frac{5a-3a+3}{a-1}=\frac{3a-1}{2a+3}.$$

Mitmekordsete murdudega on tegemist wõrrandite kontrollimisel, kui juur esineb murruna (w. nnr. 614, 615, 624 ja 793).

Arwutada:

526. $\frac{3x-4}{5x-7}$, kui $x=2\frac{1}{3}$

527. $\frac{5x+1}{6x-5}$, kui $x=\frac{a-1}{a}$

528. $\frac{x+y}{x-y}$, kui $x=\frac{a+1}{a}$ ja $y=\frac{a-1}{a}$

Lihtsustada murrud:

529. $\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}$ **530.** $\frac{4a}{a-\frac{a}{3}}$ **531.** $\frac{1+\frac{a}{a-1}}{1-\frac{a}{a-1}}$

532. $\frac{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ **533.** $\frac{\frac{a-1}{a+1}-\frac{a+1}{a-1}}{\frac{a-1}{a+1}+\frac{a+1}{a-1}}$

Lisa:

Astmenäitaja 0 ja negatiiwsed astmenäitajad.

§-ist 6, *B* (lk. 34) on teada, et ühesuguste alustega astmete jagamisel astendatakse alus eksponentide wahega. Meie panime aga seal tähele ainult niisuguseid juhuseid, kus jagatawa astmenäitaja oli jagaja näitajast suurem. Siin laiendame seda eksponentide lahutamist nende juhuste peale, kus jagatawa ja jagaja eksponendid on wõrdsed ehk jagatawa näitaja on isegi jagaja omast wähem.

a) Oletame: $a^5 : a^5 = a^{5-5} = a^0$

On teada: $a^5 : a^5 = 1$

Järjelikult: $a^0 = 1$, s. t. astmel eksponendiga 0 on wäärtus 1.

b) Oletame: $a^5 : a^8 = a^{5-8} = a^{-3}$

Teame: $a^5 : a^8 = \frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3}$

Järjelikult $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$, s. t. aste negatiiwse näitajaga wõrdub astme pöördwäärtusega, mille eksponent on positiiwne, muidu absoluutselt antud eksponendiga samane.

Arwutada awaldused:

534. 7^{-2}; 10^{-1}; 10^{-3}; 10^{-4}

535. -3^{-2}; $(-3)^{-2}$

536. $(-5)^{-1}$; $(\frac{2}{3})^{-4}$; $(\frac{4}{5})^{-3}$

Kujutada järgnewad murrud täisawaldustena, kasutades negatiiwseid astmenäitajaid:

537. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{100}$

538. 0,1; 0,0001

539. $\frac{1}{2a}$; $\frac{5a^2}{7b^3}$

Teooria näitab, et positiiwsete näitajate jaoks makswad kaswatamise ja jagamise juhised on makswad ka negatiiwsete näitajate kohta, näit.

$$a^{-5} . a^2 = a^{(-5)+2} = a^{-3}$$
$$a^{-5} . a^{-2} = a^{-5+(-2)} = a^{-5-2} = a^{-7}$$
$$a^{-5} : a^{-2} = a^{-5-(-2)} = a^{-5+2} = a^{-3} \text{ jne.}$$

Arwutada awaldused:

540. $5 . 10^2 - 6 . 10^1 + 3 . 10^0 - 4 . 10^{-1} - 7 . 10^{-2}$

541. $2^{-4} - (\frac{1}{3})^{-1} + (\frac{1}{4})^{-2} - (\frac{2}{3})^{-3}$

542. $3^{-2} - 3^{-3} - (\frac{1}{3})^{-3} + (\frac{1}{5})^{-2} - 4^2 . 6^{-3}$

543. $15^7 . 15^{-6}$

544. $6^{-5} . 6^3$

545. $a^{-2}a^3a^{-4}$

546. $3a^{-2} . 5a^7$

547. $0{,}7a^{-8} . 0{,}8a^{-1}$

548. $5^2 : 5^{-1}$

549. $10^{-3} : 10^{-2}$

550. $6{,}3a^{-3} : 0{,}9a^{-4}$

551. $(a^3 - a^{-2}) : a^2$

552. $(a^{-6} + a^{-4}) : a^{-5}$

553. $(a^{-1} + b^{-1})(a + b)$

554. $(x^{-1} + y^{-1})(x^2 - y^2)$

555. $a^{-1}(a^{-3} + a^{-2}) - a^{-2}(a^{-1} - a^{-3})$

§ 10. Ühe tundmatuga esimese astme wõrrandite lahendamine.

Wõrrandused on kahesugused; samasused ja wõrrandid. Siiamaani oli meil tegemist samasustega, nüüdjärgnewad wõrrandid. **Samasusteks** nimetatakse niisuguseid wõrdusi, mis jääwad õigeks, ükskõik mis wäärtusi anda wõrduses esinewatele tähtedele, näit. kõik meie walemid

$$m(a - b + c) = ma - mb + mc$$
$$(a + b - c)(d - e) = ad + bd - cd - ae - be + ce$$
$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ jne.}$$

on samasused. Samasustes on teine pool esimese poole transformatsioon.

Wõrdustel, mis nüüd arutusele tulewad, nimetatud omadusi ei ole: nende parem pool ei ole pahema poole transformatsioon ja sellepärast mis tahes arwud neid ei rahulda, näit.

wõrdust $7x - 3 = 32$ rahuldab ainult arw 5,

wõrdust $x^2 - 9x + 18 = 0$ ainult 3 ja 6,

wõrdust $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ arwud 1, 2, 4. Niisuguseid wõrdusi nimetatakse **wõrranditeks** ja arwusid, mis neid rahuldawad (esimeses näites 5, teises 3 ja 6), nimetatakse **wõrrandi juurteks.** Wõrrandite juurte leidmine ehk, kuidas öeldakse, wõrrandite lahendamine on selle §-i ülesanne.

Paneme weel tähele, et wõrrandid jagatakse astmetesse wõrrandis esinewa tundmatu kõige kõrgema astme järgi; meie näidetest on

$7x - 3 = 32$ **esimese astme** wõrrand,

$x^2 - 9x + 18 = 0$ teise astme wõrrand (= **ruutwõrrand**);

$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ on kolmanda astme wõrrand (= **kuupwõrrand**). Selles §-is käsitame esimese astme wõrrandi lahendamist.

Paneme esmalt tähele wõrrandid, mis murdusid ei sisalda, ja selgitame nende lahendamise wiisi näite kaudu.

Lahendada wõrrand:

$$5x - 2 = 8x + 7 \quad . \ . \ . \ (a)$$

Tuleb alati muundada wõrrand niisuguseks, et ühel poolel oleksid ainult liikmed tundmatuga, teisel poolel tuntud liikmed. Seks liidame kummagi poole 2-ga ja lahutame kummastki $8x$. Meie saame: $5x - 8x = 7 + 2$.

Wõrreldes wiimast wõrrandit antud wõrrandiga leiame niisuguse juhtlause: wõrrandi liikme wõib ühelt poolt teisele poole wastasmärgiga üle kanda.

Nüüd ühendame sarnased liikmed; saame: $-3x=9$. Lõpuks jagame mõlemad pooled tundmatu koeffitsiendiga, siin -3-ga: saame $x=-3$.

Kontrolliks, kas tee peal ei ole kogemata wiga sisse sattunud, kas arw -3 on tõesti wõrrandi juur, asendame -3 wõrrandisse (a) x-i kohale ja arwutame mõlemad wõrrandi pooled eraldi.

Pahem pool annab: $5(-3)-2=-15-2=-17$, parem pool: $8(-3)+7=-24+7=-17$. Mõlemal poolel on sama arwuwäärtus, järjelikult on ülesanne õieti lahendatud.

Lahendada wõrrandid:

556. $x+5=8$ **560.** $4-3x=10$

557. $x-3=10$ **561.** $7x-10=9x$

558. $x-2{,}4=5{,}6$ **562.** $8x+15=3$

559. $12x-15=7x$ **563.** $5\frac{1}{2}-5x=7x-9\frac{1}{2}$

564. $9x-2+8x=11x+2$

565. $11x-6-7x=2-x+4x$

566. $13x+23-4x=3x-22-4x$

567. $5x-3a=7a$

568. $ax-b=c$

569. $b^2-a^2-ax=bx$

570. $ax+a^2=bx+b^2$

571. $a^3-ax=b^3-bx$

572. $px-x=p^2-2p+1$

573. $ax-a^2+2b=bx+2a-ab$

Kui tundmatud esinewad klambrites, tuleb kõige pealt klambrid awada.

Lahendada wõrrandid:

574. $2(7x-5)=3(3x+5)$

575. $18(2x+3)=7(5x+7)$

576. $x(x+1)=(x+4)(x-2)$

577. $(x+2)(x-2)=(x+6)(x-4)$

578. $(x-2)(x+1)-(x-1)(x-5)=$
$(x-3)(x+2)-(x+1)(x-6)$

579. $(x-4)(x-2)-(x-1)(x-7)=$
$(x-5)(x+1)-(x-6)(x-2)$

580. $(3x-6)^2+(4x+11)^2=(5x+7)^2$

581. $(13x+16)^2-16(3x+4)^2=(5x+4)^2$

582. $(x+2)^2+(x-1)^2=(x-4)^2+(x+3)^2$

583. $(x-1)^2+(x+3)^2=(x+5)^2+(x-6)^2$

584. $x^2-6^2=(x+7)^2-15^2$

585. $(x+1)^2-20^2=(x-1)^2-16^2$

586. $(a+b)x=a^2-b^2$

587. $b(x+b)-a(x-a)=2ab$

588. $a(x-1)=b(x+1)$

589. $a^2(x-b)=b^2(x+a)$

Kui wõrrandis leiduwad murrud, tuleb need enne kõrwaldada, mis tehtakse järgmisel wiisil.

N ä i d e.

$$\frac{4}{3x+5}=\frac{3}{4}-\frac{5}{12x+20}$$

Murdusid ühenimelisteks muundades saame:

$$\frac{4\,.\,4}{(3x+5)\,.\,4}=\frac{3(3x+5)}{4(3x+5)}-\frac{5}{4(3x+5)}$$

Mõlemad pooled kaswatame ühisnimetajaga; see annb:

$$16=3(3x+5)-5$$

Lahendades edasi tuntud wiisil, leiame, et $x=\frac{2}{3}$

Lahendada wõrrandid:

590. $\frac{3x}{7}=2$

591. $\frac{5ax}{6b}=c$

592. $\frac{13}{2x}=8\frac{2}{3}$

593. $\frac{5,7}{x}=19$

594. $\frac{x}{4}-\frac{x}{5}=1$

595. $\frac{4x}{9}+\frac{2x}{9}=1$

596. $\frac{7x}{8}-\frac{4x}{5}=3$ **598.** $\frac{25+8x}{4x}=7$

597. $\frac{5x}{a}-\frac{2x}{a}=21b$ **599.** $\frac{3}{a}-\frac{13b}{x}=\frac{4}{5a}-\frac{2b}{x}$

600. $\frac{4x-8}{7}-\frac{x-1}{4}=2$

601. $\frac{x+2}{6}-\frac{x+9}{2}=\frac{x-4}{4}-\frac{3+x}{9}$

602. $\frac{5x-2}{20}-\frac{3x-2}{25}=\frac{2x+1}{10}-\frac{x-2}{5}$

603. $\frac{5x-1}{7}-\frac{11x-3}{5}-\frac{4+x}{21}=\frac{x-12}{15}$

604. $\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x+6}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x+4}$

605. $\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-2}$

606. $\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-4}$

607. $\frac{1}{x-4}-\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2}-\frac{4}{x-1}$

608. $\frac{3}{x-9}-\frac{5}{x-7}=\frac{7}{x-5}-\frac{9}{x-3}$

609. $\frac{14}{3(x+7)}-\frac{5}{x+4}=\frac{2}{x-3}-\frac{7}{3(x-8)}$

610. $\frac{x-6}{x-3}-\frac{x-5}{x-2}=\frac{x-1}{x-4}-\frac{x-2}{x-5}$

611. $\frac{x-4}{x-3}+\frac{x-6}{x-5}=\frac{x-3}{x-2}+\frac{x-7}{x-6}$

612. $\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=2$

613. $\frac{x}{a+b}+\frac{x}{a-b}=2a$

614. $\frac{x}{x-a}-\frac{x-a}{x}=\frac{2a-b}{2(x-a)}$

615. $\frac{a(1-x)}{b}+\frac{b(1-x)}{a}=2$

616. $\frac{3a}{2x-a}-\frac{12a}{3x-a}+\frac{10a}{4x-a}=0$

617. $\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$

618. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-c}{a+b}=3$

Eriti paneme tähele juhuse, kus wõrrand esineb proportsiooni kujul.

Näide.

$$\frac{4x-3}{6x+4}=\frac{6x-5}{9x+5}$$

Nagu enne, wõib ka siin ühisnimetajat otsida; kuid rutem jõuame edasi, kui tähele paneme, et proportsiooni wälisliigete kaswatis wõrdub siseliigete kaswatisega.

Sellepärast:

$$(4x-3)(9x+5)=(6x+4)(6x-5)$$
$$36x^2-27x+20x-15=36x^2+24x-30x-20$$
$$-7x-15=-6x-20$$
$$\text{ja}\quad x=5$$

Lahendada wõrrandid:

619. $\frac{2+7x}{3x}=\frac{5}{2}$

620. $\frac{2x-7}{3x-5}=\frac{5}{13}$

621. $(x-5):(x-1)=(x+1):(x+8)$

622. $(3x+1\frac{1}{2}):(4x+7)=(6x-17):(8x-21)$

623. $\frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}=\frac{x-2}{3x+4}$

624. $\frac{a-bx}{b}=\frac{ax+b}{a}$

625. $\frac{a+b}{a+x}=\frac{a-b}{a-x}$

626. $\frac{a-bx}{a+b}=\frac{c-dx}{c+d}$

Nnr. 627 ja 628 lahendada kas eelmisel wiisil otsekohe wõi enne kummastki poolest lahutades 1:

627. $\frac{x}{x-5}=\frac{x+7}{x-3}$

628. $\frac{3x+1}{3x+2}=\frac{2x+5}{2x+6}$

Üles olid tähendatud järgmised wõrrandid ühes nende juurtega, kuid punktidega märgitud kohal oli arw arusaamatalt kirjutatud. Mis arwud olid neil kohtadel?

629. $3x+7=\ldots x-13$
$x=4$

630. $\frac{1}{3}x+4=\ldots x-2$
$x=6$

631. $\ldots x+2=5x-3$
$x=2\frac{1}{2}$

§ 11. Ühe tundmatuga esimese astme wõrrandite seadmine.

m^2 tähendab: ruutmeeter, cm^2 — ruuttsentimeeter.

Märkus: mitmeid ülesandeid, näit. nnr. 632, 633, 663, 665—667, 675, 676, 679—682, 688, 689, 691—693, 697 ja 698, on wõimalik lahendada ka ilma wõrrandi seadmiseta.

632. Kolmel wennal oli kokku 350 marka. Wanemal oli raha 2 korda nii palju, kui kõige nooremal; keskmisel oli 25 marka wähem, kui wanemal. Kui palju oli igaühel raha?

633. Leida nurgad kolmnurgas *ABC*, kui nurk *B* on nurgast *A* $1\frac{3}{5}$ korda suurem ja nurk *C* nurgast *B* $2\frac{1}{8}$ korda suurem?

634. 3500 marka 4-ja isiku wahel niiwiisi ära jagada, et iga järgmine saaks $\frac{1}{3}$-ku wõrra rohkem kui eelmine. Kui palju sai igaüks?

635. Mis arwuga tuleb jagada arw 43,014, et saaks 321?

636. Mis arw tuleb lahutada arwust 604, et kolmekordse otsitawa arwu saada?

637. Kui palju oleks waja lahutada 597-st, et samapalju saada, kui otsitawa arwu liitmisel 389-ga?

638. Mis arw on ühekaugel arwudest $6\frac{5}{6}$ ja $2\frac{1}{6}$?

639. Mis arw, wähendatud 54-ja wõrra, wõrdub oma 10-da osaga?

640. Kui neljakordsest arwust lahutada 29, siis saab niisama palju, kui saame selle arwu 7-dale osale 52 juure arwates. Leida see arw.

641. Noormees on 45-e aasta pärast $3\frac{1}{2}$ korda wanem kui praegu. Kui wana on ta?

642. Missugune üks ja sama arw tuleb ära wõtta kummagi kaswatise 18.41 ja 21.34 kummastki tegurist, et kaswatised oleksid wõrdsed?

643. Kui palju on waja kaswatise 9.17 kummagile tegurile juure arwata ja kaswatise 11.33 kummastki tegurist lahutada, et wõrdseid kaswatisi saada?

644. Kui palju tuleb igale proportsiooni $2:7=4:14$ liikmele juure arwata, et uut proportsiooni saada?

645. Mis arw tuleks liita 5-e ja 7-ga, et summad oleksid wahekorras nagu $6:7$?

646. Mis arw tuleb liita igaühega arwudest 1, 6, 25 ja 60, et saadud arwud antud järjekorras moodustaksid proportsiooni?

647. Mis arw tuleb lahutada arwudest 7, 13 ja 31, et leitud arwud antud järjekorras moodustaksid pidewa proportsiooni?

648. Kahe arwu ruutude wahe on 176. Leida need arwud, kui esimene arw on teisest 8-a wõrra suurem?

649. Leida kaks arwu, mille summa on 24 ja mille ruutude wahe on 48.

650. Püstküliku pind on ruudu pinnast 6 m^2 suurem. Leida ruudu külg, kui wiimane on püstküliku pikemast küljest 4 *m* lühem ja lühemast 2 *m* pikem.

651. Isa on pojast 10 korda wanem. 6 kuud tagasi oli isa 11 korda pojast wanem. Kui wana on poeg?

652. Isa on 45 aastat wana ja seejuures pojast 5 korda wanem. Millal on isa *a)* 4 korda ja *b)* millal oli isa 7 korda wanem kui poeg?

653. Wanem wend on 25 aastat wana, noorem 17 aastat. Millal on nende aastad wahekorras nagu 7 : 5 ja millal wahekorras 5 : 3?

654. Kahest arwust on üks arw teisest 5-e wõrra suurem. Kui kumbagi arwu liita 3-ga, suureneb kaswatis 144-ja wõrra. Leida arwud.

655. Püstkülikus on pikem külg lühemast $2\frac{1}{2}$ korda suurem. Kui iga külje 2 *m*-i wõrra lühendada, wäheneb pindala 38 m^2. Leida püstküliku küljed.

656. Murru wäärtus on $\frac{3}{4}$. Kui kummagile murru liikmele 3 juure arwata, on murru wäärtus $\frac{4}{5}$. Leida esialgne murd,

657. Murru wäärtus on $\frac{4}{7}$. Kui murru lugejat liita 5-ga ja nimetajast lahutada 5, on uue murru wäärtus $\frac{5}{6}$. Mis murd oli wõetud?

658. Murru wäärtus on $\frac{3}{5}$. Kui murru lugejat liita 14-ga ja nimetajat 2-ga, siis saame esialgse murru pöördwäärtuse. Leida esialgne murd.

659. Paljunurga nurkade arw on 1980°. Mitu külge on paljunurgal?

660. Missugusel korrapärasel paljunurgal on nurgad 135°-lised, missugustel 156° ja 168°?

661. Kõõlnelinurgas *ABCD* on nurk *B* nurgast *A* 24° suurem, nurk *C* nurgast *B* 36° wähem. Kui suured on nelinurga nurgad?

662. Seltskonnas oli naiste arw $\frac{3}{5}$ meeste arwust. Kui 6 meest oli oma naistega sealt lahkunud, oli mehi üle jäänud 3 korda rohkem kui naisi. Mitu meest ja mitu naist oli esialgu koos?

663. Kahel isikul *A* ja *B* oli kokku 870 tuhat marka. Ühiseks ettewõtteks andis *A* $\frac{5}{6}$ ja *B* $\frac{3}{4}$ omast kapitalist. *B*-l jäi 30 tuhat marka rohkem üle kui *A*-l. Kui palju raha oli kummalgi esialgu?

664. Wend ja õde käisid wõõrsil. Neilt küsiti, mitu wenda ja õde on neid üleüldse. Wend wastas, temal olewat wendi sama palju kui õdesid; õde wastas, et temal olewat wendi 2 korda rohkem kui õdesid. Mitu wenda ja mitu õde oli perekonnas?

665. 10%-lise soolawee 2 *kg*-ile tuleb mitu kilogrammi puhast wett juure walada, et 8-protsendilist soolawett saada?

/ „10%-line soolawesi“ — s. t. niisugune soolawesi, kus puhast soola on 10% kogu segu kaalust /.

666. 10%-lise soolawee 2-le kilogrammile tuleb kui palju soola juure lisada, et 20%-list soolawett saada?

667. Mitu õpilast on klassis? Kui asendada pingile 2 õpilast, ei ole kohta 6-le õpilasele; kui mahutada pingile 3 õpilast, siis jääwad 4 pinki tühjaks.

668. Kapital on hoiule antud 4%-iga. Aastakasu on nii palju wähem 10400-st margast, kui palju kapital on sellest summast suurem. Kui suur on kapital ja kui suur aastakasu?

669. Pandi hoiule 36000 marka $3\frac{1}{2}$%-ga, aasta pärast 22500 marka 4%-i ja weel üks aasta hiljem 20000 marka $4^1/_2$%-ga. Millal on kasu kahest wiimasest kapitalist kokku sama palju kui esimesest kapitalist ja kui suur on siis kasu kõigist kolmest kapitalist kokku?

670. Küsiti masinakirjutajalt, mitu poognat ta nädalas kirjutab. Tema wastas, et kirjutab päewas 6 tundi. Kui tal wõimalik oleks kirjutada päewas 8 tundi, siis walmistaks ta nädalas nii palju üle 42 poogna, kui palju tema nüüd alla 42 kirjutab. Mitu poognat kirjutab ta nädalas ja kui palju tunnis?

671. Osteti sinist ja musta riiet, sinist $16\frac{1}{2}$ *m*, musta 18 *m* ja makseti ühepalju kummagi riide eest. Kui palju maksis meeter igat seltsi, kui sinise riide meeter oli musta riide meetrist 100 marka kallim?

672. Kahest wennast oli kummalgi 51 õuna. Wanem wend sõi päewas 3 õuna, noorem 5 õuna. Mitme päewa pärast oli wanemal wennal õunu 4 korda rohkem järel kui nooremal?

673. Põllumehel oli aidas 260 puuda rukkid ja 520 puuda kaeru. Hobuste jaoks kulus tal ära iga päew 4 puuda kaeru ja majapidamises iga nädal 1,5 puuda rukkid. Mitme päewa pärast oli tal aidas rukkid 2 korda rohkem kui kaeru?

674. Mängul arwati maha igast wõidust kohe 5 marka heategewaks otstarbeks. A pani mängu 3 korda kõik oma raha ja wõitis iga kord kahekordse sissepaneku. Lõpuks oli tema wõitnud 7 marka. Kui palju pani tema esimesel korral?

675. Kapitalid 7600 ja 8550 marka tõid ühepalju kasu selle tõttu, et esimene kapital kandis $\frac{1}{2}$ protsenti rohkem kui teine. Leida protsendi kõrgus mõlemal kapitalil.

676. Kaks kapitali tõid aasta jooksul 4 ja $3\frac{1}{2}$ protsendil olles 642 marka kasu. Kui suur oli kumbki kapital, kui teine oli esimesest 1200 marga wõrra suurem?

677. Kaks kuud tagasi oli isa 34 aastat wana ja oleks nüüd 5 korda pojast wanem, kui poeg oleks 2 kuud noorem. Kui wana on poeg?

678. 9 aastat tagasi oli isa 6 korda wanem kui poeg, 11-e aasta pärast on tema ainult 2 korda pojast wanem. Kui wana on kumbki nendest?

679. Kell 12 katawad teineteist minuti- ja tunninäitaja. Millal ja mitu korda enne järgmist kella 12-end langewad nad weel ühte?

680. Millal ja mitu korda on 12-ne tunni jooksul minutinäitaja tunninäitajast 90° ees?

681. Kell 9 on tunninäitaja 9-a peal, minutinäitaja 12-e peal. Millal jõuab minutinäitaja tunninäitajale järele?

682. 4 töömeest pidid põllu üles kündma. Üksipäini töötades oleks A tööga 4 päewa jooksul, B 5 päewa, C 6 ja D 8 päewa jooksul walmis saanud. Mitu päewa kuluks neil koos töötades töö peale ära, kui A ja C puudusid 3 päewa ning B ja D 2 päewa?

683. Metsaülem tahtis ruudulise maaala peale ühetasaselt puid istutada. Esimesel arwutamisel jäi temal 116 puud üle. Kui ta iga ritta asetaks 1 puu rohkem, jääks temale puudu 9 puud. Mitu puud oli temal?

684. Kahekohaga arwu ristsumma on 13. Kui arwust lahutada 27, leiame uue kahekohaga arwu, mille numbrid on endised, kuid ümberpöördud järjes. Mis arw oli wõetud? (Ristsumma on nende arwude summa, mida üksikud antud arwu numbrid kujutawad).

685. Kahekohaga arwu ristsumma on 8. Kui mõeldud arwu kahendada (= kahekordselt wõtta) ja liita 10-ga, siis saame arwu ümberasendatud numbritega. Mis arw oli wõetud?

686. Püstküliku pindala ei muutu, kui alust 5-e *cm* wõrra pikendada ja kõrgust 2-e *cm* wõrra lühendada. Leida püstküliku küljed, kui alus on kõrgusest 4 *cm* pikem?

687. Püstküliku pindala, mille alus ja kõrgus on wahekorras 7 : 5, wäheneb 139 cm^2 wõrra, kui alust 3 *cm*-i ja kõrgust 2 *cm*-i wõrra lühendada. Kui pikad on küljed?

688. Kaupmees leidis, et kalewi tükist, mille meeter temal maksis 1600 marka, olid $\frac{3}{4}$ *m* kõlbmata. Kahju katmiseks müüs tema iga meeter 1800 marga eest ja sai selle juures 2250 marka kasu. Mitu meetrit kalewit oli tükis?

689. Kaupmees ostis tüki riiet, mille pikkus 25 *m*, à 1200 marka meeter. Tema müüs riide à 1400 marka meeter, kuid ühe wähe rikutud koha pidi tema à 1000 marka meeter ära andma. Mitu meetrit oli rikkeid saanud, kui kaupmees kogutüki pealt 10% kasu sai?

690. A ütles B-le: anna mulle 20 marka, siis on mul raha 2 korda nii palju kui sinul. B wastas: anna parem sina 20 marka minule, siis on mul 3 korda rohkem kui sinul. Kui palju raha oli kummalgi?

691. Taheti osta 30 õuna. Müüja nõudis nende eest 165 marka, kuid lõpuks andis ta kauba nii mitme marga wõrra odawamalt, kui palju tal müües 3 õuna maksma tulid. Kui suur oli hinnaalandus?

692. Keegi ostis apelsiine ja maksis iga tosina eest 420 marka. Kui iga apelsiin oleks 2 marka odawam olnud, oleks ostja sama raha eest 4 apelsiini rohkem saanud. Mitu apelsiini ostis tema?

693. Kirjastajad annawad raamatukauplustele harilikult 30%-i hinnaalandust. Mitmenda osa wõrra raamatule määratud hinnast wõib raamatu hinda alandada, kui raamatukaupleja lepib 25%-ga ilma, et kirjastaja huwid selle all kannataksid?

694. Naine müüs turul õunu: esimesele ostjale $\frac{1}{5}$ kõigist ja weel 4 õuna, teisele $\frac{1}{4}$ ülejäägist minus 1 õun, kolmandale ostjale $\frac{1}{4}$ uuest ülejäägist ja weel 5 õuna. Selle järele oli tal müümata poolosa kõigist minus 11. Kui palju õunu oli tal esialgu?

695. Isa jättis oma lastele päranduseks kapitali tingimisega, et wanem laps saaks 5 tuhat marka ja ülejäägist $\frac{1}{7}$-diku, järgmine wend 10 tuhat marka ja järgnewast ülejäänud rahast $\frac{1}{7}$, kolmas laps eelmisest 5 tuhat marka rohkem ja wiimasest jäägist $\frac{1}{7}$. Jagamisel selgus, et kõik said ühepalju. Kui suur oli kapital ja mitu last oli isal?

696. Wanem laps pidi saama kapitalist 4 tuhat marka ja $\frac{1}{6}$ ülejäägist, järgmine 8 tuhat mk, ja $\frac{1}{6}$ uuest jäägist, kolmas — teisest 4 tuhat marka rohkem ja $\frac{1}{6}$ järgmisest jäägist jne. Selgus, et kõik said ühepalju. Kui suur oli kapital ja mitu last oli perekonnas?

697. Jalakäija ja wanker tegid sama tee Hanilast Lihulasse. Jalakäija käis tunnis 4 km, wanker — 10 km. Jalamees oli juba Hanilast 9,8 km. eemal, kui wanker wälja sõitis, ja jõudis Lihulasse 3 minutit enne wankri pärale saamist. Mitu kilomeetrit on Hanilast Lihulasse ja kui kaua oli kumbki teel?

698. Maamees sõitis kell 7 hommiku Riisiperest Haapsalu poole tehes iga tund 8 km. Kell $\frac{1}{4}$ 11 sõitis temast mööda auto ka Haapsalu poole kiirusega 30 km tunnis, peatas Haapsalus 2 tundi ja sõitis siis tagasi, kusjuures tema 3 km Haapsalust eemal maameest kohtas. Mitu kilomeetrit on Riisiperest Haapsalu?

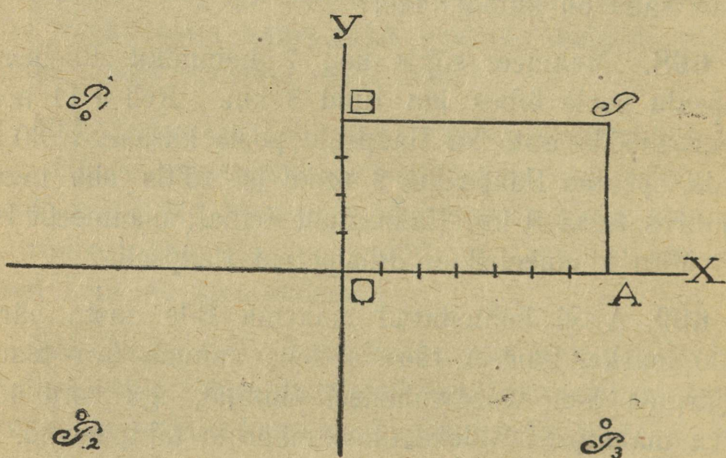
699. A oli kohustatud maksma B-le aasta pärast 30000 marka, kuid A soowis selle summa ära tasuda järkjärgult 5-el wõrdwahelisel tähtajal, iga kord 6000 marka makstes. Millaks tuleb määrata tähtpäewad, kui esimesed 6000 marka makseti 6-e kuu pärast ja B kogusummas sama palju kasuraha saab, kui esimese maksmise wiisi ja protsentarwu juures?

700. A oli kohustatud maksma B-le 9 kuu pärast teatud summa, kuid otsustati, et A maksaks kohe 500 marka, 4-ja kuu pärast 700 marka, 8-a kuu pärast 1000 marka ja aasta pärast ülejäänud summa (eelmise ülesande eelduste juures). Kui palju wõlgnes A B-le?

§ 12. Koordinaadid.

Punkti asupaika tasapinnal wõib määrata samal tasapinnal wõetud kahe wastastikku ristiolewa sirgjoone abil: üks nendest wõetakse harilikult horitsontaalselt (OX, joon. nr. 5), teine — wertikaalselt (OY). Kui on teada, et punktist P ülalnimetatud sirgjoontele tõmmatud ristjoonte BP ($=OA$) ja PA ($=OB$) pikkused on $OA = a$ (cm) ja $OB = b$ (cm), wõib punkti P paika kergesti

Joon. nr. 5.



kätte saada: selleks on ainult tarwis — punktist O alates — asetada horitsontaaljoonele $OA=a$ ja wertikaaljoonele $OB=b$ ja nende peal paralleelogrammi konstruida.

Arwu a, millele wastaw lõik horitsontaaljoonele asetatakse, nimetatakse **abstsissiks** (Ladinakeelsest ***abscissus,*** mis tähendab: ära lõigatud, lõik), arwu b — **ordinaadiks** (Ladina ***ordinatus*** — korraldatud, määratud). Sellepärast nimetatakse ka horitsontaaljoont OX abstsisside teljeks, wertikaaljoont OY — ordinaatide teljeks. Abstsissi ja ordinaadi ühine nimetus on **koordinaat** („kõrwu korraldatud"). Koordinaatide telgede lõikepunkti (punkt O) nimetatakse koordinaatide alguspunktiks.

Seda, et punkt P määratakse koordinaatide a ja b kaudu, tähendatakse sümbooliliselt: „$P(a,b)$", kus klambrites **esimesel** kohal asub **abstsiss**, teisel — ordinaat.

Koordinaatide teljed jagawad tasapinna 4-jaks osaks, mida weeranditeks ehk kwadrantideks nimetatakse. Koordinaatidele a ja b wastawad tasapinnal 4 punkti: P, P_1, P_2 ja P_3. Määramatuse ärahoidmiseks wõetakse koordinaadid, mis koordinaatide alguspunktist pahemale poole ja alla poole sihitud, negatiiwse eesmärgiga, nii et koordinaadid on neil punktidel:

$$P_1 : -a \text{ ja } b,$$
$$P_2 : -a \text{ ja } -b,$$
$$P_3 : \ a \text{ ja } -b.$$

Harjutused.

Näidata tasapinnal punktid, mille koordinaadid on:

701. 1 ja 4; 3 ja 5; — 2 ja 3; — 3 ja 4; — 6 ja 0.

702. — 2 ja — 1; — 5 ja — 3: 0 ja — 6; 2 ja — 6.

703. Märkida tasapinnal punktid:

(2,3; 3,5), (— 5,2; 4,7), (— $1\frac{1}{2}$; 0), ($2\frac{1}{2}$; — $3\frac{1}{2}$), (0; — $4\frac{1}{2}$), (— 1,8; — 5,1).

§ 13. Funktsioon ja tema graafiline esitamine.

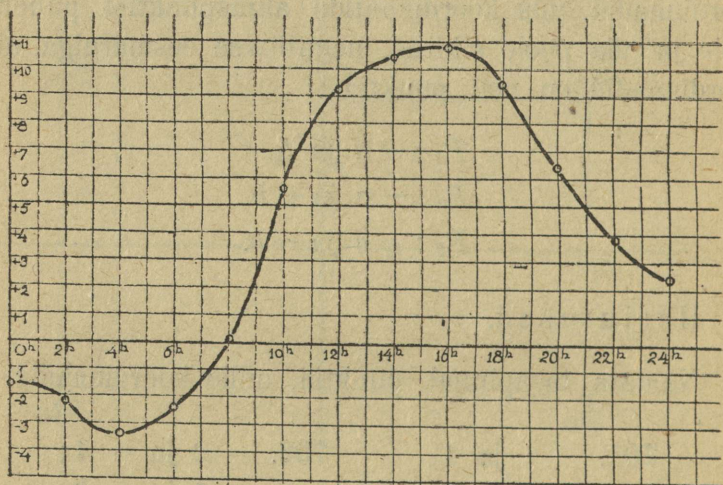
I.

Aprilli kuus on ühe öö-päewa jooksul iga kahe tunni järele mõõdetud õhu temperatuur ja leitud järgmised wäärtused:

Aeg	0^h	2^h	4^h	6^h	8^h	10^h	12^h	14^h	16^h	18^h	20^h	22^h	24^h
Temperat.	–1,6°	–2,1°	–3,3°	–2,4°	0,1°	5,6°	9,2°	10,4°	10,8°	9,4°	6,5°	3,8°	2,5°

Temperatuuri muutumine öö-päewa jooksul on graafiliselt kujutatud joonisel nr. 6. Koordinaatide alguspunktist alates tsentimeetri kaugusel üksteisest on asetatud

Joon. nr. 6.



X-teljele antud tunnid ja ordinaatideks on wõetud temperatuuri wäärtused niiwiisi, et kraadile wastaks $\frac{1}{2}$ cm. Ühendades kõik lähispunktid, kõwerjoone käiku wahepeal aimamise põhjal wõttes, saame päewa temperatuurkõwera.

Temperatuur oleneb waatluse ajast. Kui kaks suurust on niiwiisi seotud, et ühe suuruse teatud wäärtusele wastab sellest wäärtusest äraolenew teise suuruse wäärtus, siis nimetatakse esimest suurust olenematuks suuruseks ehk

argumendiks, teist suurust — esimesest suurusest olenewaks suuruseks ehk esimese suuruse **funktsiooniks**. Meie näites on aeg — argument, temperatuur — aja funktsioon. Nii kui siin, olgu ka järgmistes näidetes argument wõetud abstsissiks, funktsioon ordinaadiks.

704. On leitud, et keskmised temperatuurid on alal nimetatud punktides järgmised (Celsiuse termomeetri kraadides):

Jaamad	Laius	Pikkus Greenwich'ist	Jaan.	Weebr.	Märts	Aprill	Mai	Juuni	Juuli	Aug	Sept.	Okt.	Now.	Dets.	Aasta
Tallinn . .	59°26′	24°45′	—6,4	— 6,5	—3,8	1,5	8,0	13,8	**16,6**	15,8	11,3	5,9	0,1	— 3,4	4,4
Narwa . .	59°23′	28°12′	—8,2	—8,6	—4,9	1,9	9,0	14,8	**17,3**	16,7	11,6	5,3	—1,0	— 5,1	4,1
Baltiski .	59°21′	24° 4′	—5,4	— 5,6	—3,4	1,5	7,4	13,2	**16,0**	15,5	11,5	6,2	0,6	—3,0	4,5
Tartu . . .	58°23′	26°43′	—8,1	— 7,3	—3,6	2,7	9,6	15,4	**17,3**	15,9	10,7	5,0	—1,1	—5,3	4,3
Wilsand .	58°23′	21°50′	—3,6	—4,4	—2,3	2,8	7,5	12,9	16,3	**17,2**	13,3	7,8	2,9	—0,7	5,8
Wiljandi .	58°22′	25°36′	—7,7	—7,2	—4,1	2,2	10,3	16,1	**17,2**	15,8	10,7	5,1	—1,5	— 5,0	4,3

Joonistada temperatuuri kõwerad nimetatud kohtade jaoks (wõrdlemiseks mahutada neid paari wõi rohkema kaupa ühele joonisele).

705. Pilwituse astme määramiseks mõeldakse taewas jagatud kümneks osaks ja loetakse, mitu osa nendest on pilwedega kaetud, nii et pilwituse suhtes tähendab: 0 -pilweta taewas, 10 -täiesti pilwine taewas.

25—30 aasta jooksul ettewõetud waatlusel saadi keskmise pilwituse jaoks allnimetatud punktides järgmised andmed:

Jaamad	Laius	Pikkus Greenwich'ist	Jaan.	Weebr	Märts	Aprill	Mai	Juuni	Juuli	Aug.	Sept.	Okt.	Now.	Dets.	Aasta
Tallinn . .	59°26′	24°45′	8,2	6,9	6,3	5,7	5,4	**4,6**	5,1	5,4	6,2	7,4	8,2	8,2	6,5
Tartu . . .	58°23′	26°43′	8,3	7,3	6,7	6,1	6,4	**5,6**	6,1	6,2	6,4	7,6	8,4	8,3	6,9
Pärnu. . .	58°23′	24°30′	8,2	7,2	6,5	6,0	6,0	**5,7**	6,1	6,0	6,2	7,5	8,2	8,2	6,8

Joonistada wastawad kõwerad!

706. Sademete hulga (wihm, lumi, rahe) mõõtmiseks on waatlusjaamadel lahtise taewa all anum, n.n. wihmamõõtja, mille järgi loetakse, mitu millimeetrit kõrge on langenud wee hulk. (Lumi ja rahe tuleb enne sulama panna).

Alljärgnewas tabelis on antud keskmised sademete hulgad mõnes punktis, mis 1886—1900 aasta waatluste põhjal wälja on arwatud.

Jaamad	Geogr. laius.	Pikkus Greenwich'ist	Jaan.	Weebr	Märts	Aprill	Mai	Juuni	Juuli	Aug.	Sept.	Okt.	Now.	Dets.	Aasta
Kõpu (Hiiumaal)	58°55′	22°15′	38,5	29,5	33,9	24,6	31,7	36,4	49,8	62,1	60,3	**65,7**	44,5	48,55	25,5
Pärnu. . .	58°23′	24°30′	21,8	17,5	23,7	30,0	39,8	47,9	71,4	**77,8**	57,4	52,1	29,7	38,35	07,4
Tallinn . .	59°26′	24°45′	30,9	24,6	25,0	22,4	39,7	42,3	51,1	**68,0**	58,9	53,4	35,5	35,84	87,6
Wiljandi .	58°22′	25°36′	36,4	26,4	29,5	29,2	49,4	56,9	**79,3**	74,3	60,0	57,8	38,1	45,05	82,3
Rakwere .	59°21′	26°22′	33,0	32,2	32,4	30,8	47,8	51,3	73,5	**83,7**	67,1	59,3	41,4	40,95	93,4
Tartu . . .	58°23′	26°43′	37,8	28,8	29,3	29,8	42,3	58,3	**82,3**	63,8	59,1	46,8	38,9	42,15	59,3
Mustwee .	58°51′	26°58′	27,1	26,6	26,1	27,0	35,5	53,8	**68,3**	60,7	55,3	43,8	33,3	33,74	91,2

Joonistada wastawad kõwerad.

707. Järgmises tabelis on näidatud, mitu lumesaju päewa tuli Tallinnas ja Tartus keskmiselt igal kuul 100-ja päewa kohta arwates. (Andmed Tallinna kohta on keskmised 36-eaastalistest waatlustest, Tartu kohta — 17-e aasta keskwäärtused). Esitada see olenewus graafiliselt.

Jaamad	Jaan.	Weebr	Märts	Aprill	Mai	Juuni	Juuli	Aug.	Sept.	Okt.	Now.	Dets.	Aasta
Tallinn	92	94	95	54	12	—	—	—	2	15	54	82	40,3
Tartu	88	90	87	49	17	—	—	—	—	18	58	85	43,1

708. Järgmises tabelis on näidatud keskmised paralleelringide temperatuurid maakeral.

Geogr. laius	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Põhja poolkera	26,6	27,1	24,9	20,2	13,9	5,8	—1,2	—10,2	—16,9	—20,0
Lõuna poolkera	26,6	25,7	23,3	18,3	12,2	5,3	—1,1	—	—	—

Graafiliselt kujutada temperatuuri olenewus koha kaugusest ekwaatorist põhja ja lõuna poolkeral.

709. Paralleelringi kraadi pikkus kilomeetrites on järgmine:

Laius	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Kilomeetrid. . .	111,3	109,6	104,6	96,5	85,4	71,7	55,8	38,2	19,4	0

Esitada graafiliselt kraadi pikkuse olenewus koha kaugusest ekwaatorist.

710. Päewa wältus oleneb punkti kaugusest ekwaatorist. Kujutada graafiliselt kõige pikema (21. juuni) ja kõige lühema päewa (21. detsember) wältus antud laiuste all:

Geogr. laius	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°
Kõige pikem päew (21 VI)	$12^h\,0^m$	$12^h\,35^m$	$13^h\,13^m$	$13^h\,56^m$	$14^h\,51^m$	$16^h\,9^m$	$18^h\,30^m$
Kõige lühem päew (21 XII)	$12^h\,0^m$	$11^h\,25^m$	$10^h\,47^m$	$10^h\,4^m$	$9^h\,9^m$	$7^h\,51^m$	$5^h\,30^m$

711. Elanikkude (keskmine) arw allnimetatud aastatel oli Tallinnas järgmine:

1911 a. 99329	1915 a. 140351	1919 a. 103000
1912 a. 108641	1916 a. 153301	1920 a. 106974
1913 a. 123440	1917 a. 158044	1921 a. 115126
1914 a. 132876	1918 a. 103716	

Graafiliselt kujutada elanikkude arwu muutuwus nimetatud aastatel.

II.

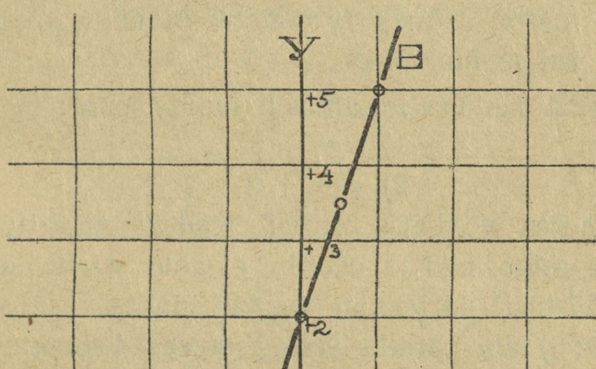
a) Funktsiooni $y = 3x + 2$ graafiline esitamine. Walemis $y = 3x + 2$ wõib wõtta x argumendiks ja wõib temale wabalt wäärtusi anda. Nendest oleneks y-i wäärtus. y *on* x-i funktsioon.

x	y
$+1$	$+5$
$+\frac{1}{2}$	$+3\frac{1}{2}$
0	$+2$
—	$+\frac{1}{2}$
-1	-1

Arwutame rida wäärtusi ja asendame nad tabelisse.

Nagu enne, olgu ka seekord argumendid horitsontaalteljele asetatud, teiste sõnadega x-i wäärtused abstsissideks wõetud. Ordinaatideks on siis wastawad y-i wäärtused. Talitades endisel wiisil leiame sirgjoone AB

Joon. nr. 7.



(joon. nr. 7 — funktsiooni $y = 3x + 2$ graafiline esitus.

Harjutused.

Graafiliselt esitada funktsioonid:

712. $y = x + 2$ **715.** $y = -x - 3$

713. $y = x - 4$ **716.** $y = 2x + 3$

714. $y = 3 - x$ **717.** $y = 5 - \frac{x}{2}$

Järgmised funktsioonid enne graafilist esitamist ilmutada y-i suhtes.

718. $3x + 2y = 6$ **720.** $5x + 8y = 20$

719. $x - 2y = 3$ **721.** $15x - 14y = 21$

Märkus. Numbrites 712—721 käsitatud funktsioonid on kõik esimese astme funktsioonid, s.t. niisugused funktsioonid, kus x ilmub ainult esimeses astmes ($y = 3x^2 + 2$, näit., oleks teise astme funktsioon.

b) **722.** Esitada graafiliselt funktsioonid:

1) $x = +3$ ja

2) $y = +3$

Esimeses wõrduses on x-il jäädaw wäärtus, kuna y seal ei esine, mis tähendab, et y-ile wõib anda mis tahes wäärtusi. Järjelikult wastab funktsioonile $x = +3$ punkti (3; 0) läbi paralleelselt Y-teljega tõmmatud sirge. Sarnasel wiisil leida ka funktsioonile $y = +3$ wastaw joon.

Harjutused.

723. Graafiliselt kujutada funktsioonid:

1) $x = -3$;

2) $y = -3$.

724. Leida nende punktide geomeetriline koht, mille koordinaat y on:

1) 3; 2) 1,4; 3) -2

§ 14. Lineaarse funktsiooni graafiline esitamine ja esimese astme wõrrandi graafiline lahendamine.

Juba eelmises §-is tutwunesime lineaarsete funktsioonide graafilise esitamisega. Siin arutame asja süstemaatiliselt.

I.

x	y
$+2$	$+5$
$+1$	$+4$
0	$+3$
-1	$+2$
-2	$+1$
-3	0
-4	-1

1. *a*) Kujutada graafiliselt funktsioon:

$$y = x$$

Wõrdusele wastawad kõik punktid, mille abstsiss ja ordinaat on ühesuurused.

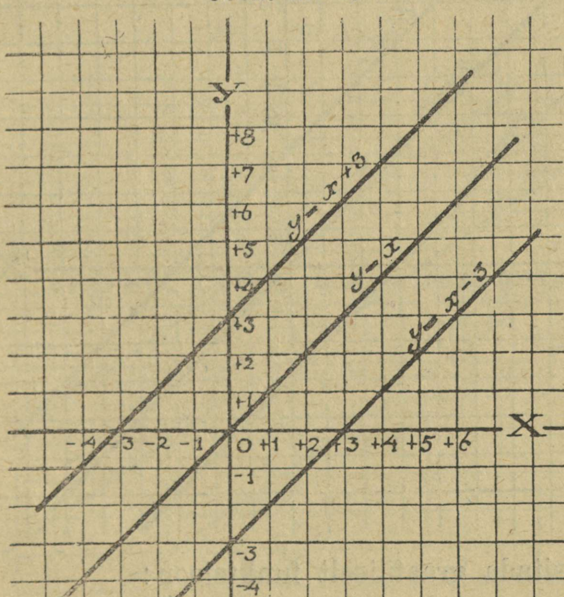
Otsitaw kujutus on sirgjoon (joon. nr. 8)

b) Kujutada graafiliselt funktsioon:

$$y = x + 3$$

Wäärtuste tabelit seades leiame, et iga ordinaat on wastawast abstsissist 3-e wõrra suurem (joon. nr. 8).

Joon. nr. 8.



c) Kujutada graafiliselt funktsioon:

$$y = x - 3$$

Siin on ordinaat 3-e wõrra abstsissist lühem (joon. nr. 8).

H a r j u t u s e d.

Esitada graafiliselt:

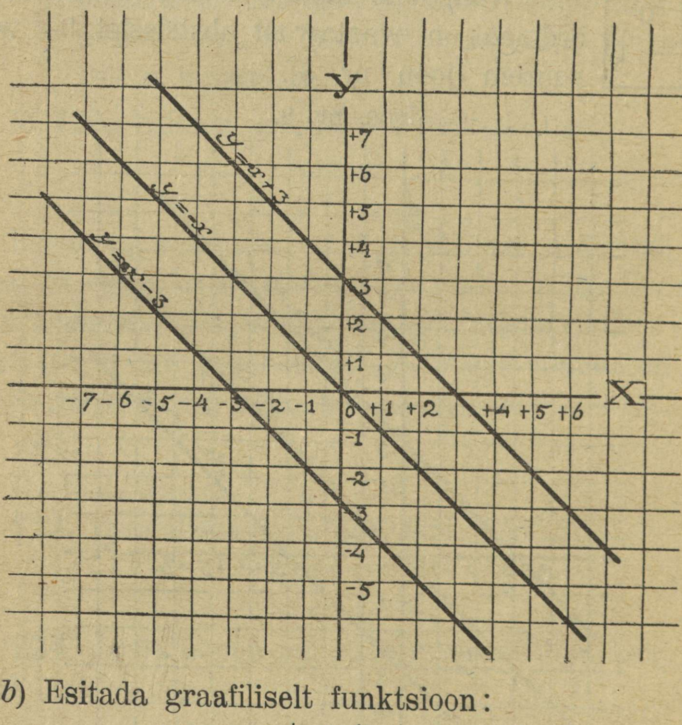
725. $y = x + 2$ **726.** $y = x + 3{,}5$

$y = x - 2$ $y = x - 3{,}5$

2. *a*) Esitada graafiliselt funktsioon: $y = -x$

x ja y on ühesuurused absoluutsete wäärtuste poolest, kuid wastasmärkidega (joon. nr. 9).

Joon. nr. 9.



b) Esitada graafiliselt funktsioon:

$y = -x + 3$ (joon. nr. 9).

c) Funktsiooni $y = -x - 3$ graaf. esitus (joon. nr. 9).

Harjutused.

Esitada graafiliselt:

727. $y = -x + 2$ **728.** $y = -x + 3{,}5$

$y = -x - 2$ $y = -x - 3{,}5$

3. Funktsiooni $y = \frac{2}{3}x$ graafiline esitus.

x	y
-6	-4
-3	-2
0	0
$+3$	$+2$
$+6$	$+4$

Wäärtuste tabelit seades leiame, et kui abstsiss kaswab 3-e wõrra, siis kaswab ordinaat ainult 2-e wõrra. Ka seekord kujutab funktsiooni sirgjoon (joon. nr. 10).

Harjutused.

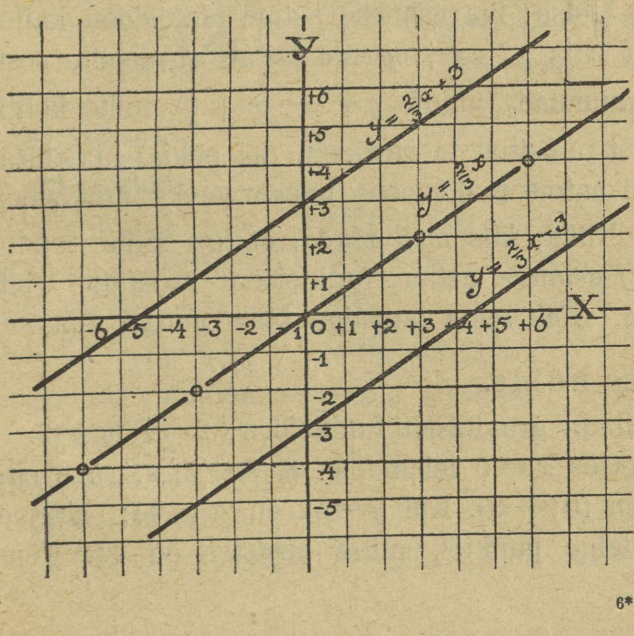
Esitada graafiliselt:

729. $y = \frac{3}{2}x$ **730.** $y = -\frac{3}{2}x$

$y = \frac{1}{3}x$ $y = -\frac{2}{5}x$

$y = \frac{2}{5}x$

Joon. nr. 10.



b) Esitada graafiliselt funktsioon: $y = \frac{2}{3}x + 3$
Eelmise funktsiooniga wõrreldes on sama abstsissi juures ordinaat alati 3-e wõrra suurem (joon. nr. 10).

c) Esitada graafiliselt funktsioon: $y = \frac{2}{3}x - 3$
(joon. nr. 10).

Harjutused.

Esitada graafiliselt:

731. $y = \frac{3}{2}x + 2$
$y = \frac{1}{3}x - 3$
$y = \frac{2}{5}x - 1{,}6$

732. $y = -\frac{3}{2}x - 1\frac{2}{5}$
$y = -\frac{2}{5}x + 2{,}1$

Eelmised juhused kokku wõttes jõuame järgmisele otsusele:

funktsiooni tüüp $y = mx + n$ esitab sirgjoont, kusjuures x-i koeffitsient m määrab sirge kallakuse ehk kalde X-telje wastu ja liige b näitab, kus punktis sirge Y-telge lõikab.

4) Üldse: iga esimese astme funktsioon kahe tundmatuga x ja y: $ax + by = c$ esitab sirgjoont, sest teda wõib muundada kujule $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, mille kohta juba teame, et ta esitus on sirgjoon. Sel põhjal nimetatakse ka esimese astme funktsioone lineaarseteks funktsioonideks.

5) Nüüd, kus meil teada, et iga kahe tundmatuga (x ja y) esimese astme funktsiooni graafiline esitus on sirgjoon, wõib tema asupaiga kahe punkti abil määrata.

1-ne näide.

Esitada graafiliselt funktsioon: $2x - 3y = 9$.

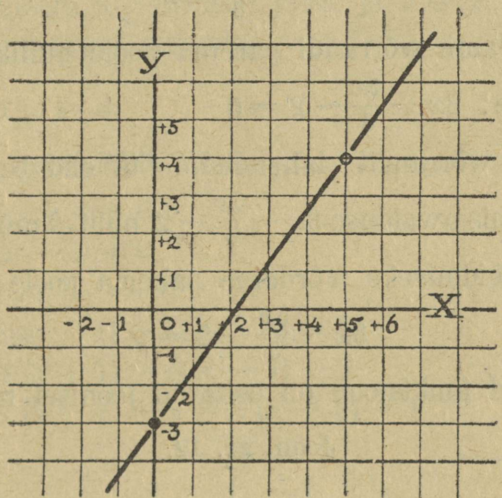
Wõttes $x = 0$ leiame, et $y = -3$, s.t. üks sirgjoone punkt on $(0; -3)$. Kui $y = 0$, on $x = 4\frac{1}{2}$: sirgjoon lõikab X-telge punktis, mille abstsiss on $4\frac{1}{2}$. Tõmmates läbi punktide (0; — 3) ja ($4\frac{1}{2}$; 0) sirgjoone, saame antud funktsiooni graafilise esituse (joon. nr. 10).

2-ne näide.

Graafiliselt kujutada: $7x - 5y = 15$.

Kui $x = 0$, on $y = -3$; kui $x = 5$, on $y = 4$. Funktsioon on esitatud joonisel nr. 11.

Joon. nr. 11.



Harjutused.

Esitada graafiliselt:

733. $x + 5y = 2$

734. $x - 3y - 3 = 0$

735. $2x + y - 3 = 0$

736. $4x + 2y = 1$

737. $3x + 5y = 15$

738. $4x - 3y + 12 = 0$

739. $3x + 2y = 0$

740. $4x - 5y = 0$

Sirgjooned on tõmmatud läbi punktide:

741. (2; 3) ja (6; 5)

742. (— 3; 4) ja (6; — 2)

743. (0; 0) ja (— 3; — 2)

744. (0; — 5) ja (— 3; 0)

Millimeetripaberil joonistada need sirged ja joonisest leida wõrrandile $y = mx + n$ wastawad parameetrid m ja n.

II. Esimese astme wõrrandi graafiline lahendamine.

Näide.

Lahendada graafiliselt wõrrand:

$$3x - \frac{5x}{3} = 2$$

Taandame wõrrandi parema poole nulliks.

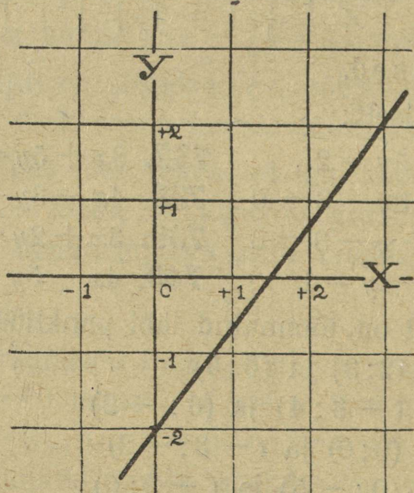
Saame: $3x - \frac{5x}{3} - 2 = 0$

Seda wõrrandit lahendada, tähendab: leida x-i wäärtus, mis awalduse $3x - \frac{5x}{3} - 2$ nulliks muudab. Selle wäärtuse leidmiseks wõrdame pahema poole y-ga:

$$3x - \frac{5x}{3} - 2 = y$$

Saadud funktsioon on esitatud joonisel nr. 12.

Joon. nr. 12.



Wäärtusele $y = 0$ wastaw x-i wäärtus on antud wõrrandi juur. Järjelikult on wõrrandi juur kujutatud sirgjoone ja X-telje lõikepunkti abstsiss. Nagu joonisest näha, on meie ülesandes see wäärtus $1\frac{1}{2}$.

Juhis: ühe tundmatuga wõrrandi graafiliseks lahendamiseks taandakse wõrrandi parem pool nulliks, wõrratakse pahem pool y-ga ja saadud funktsioon esitatakse graafiliselt. Konstruitud joone ja X-telje lõikepunkti abstsiss on otsitaw lahendus.

Harjutused.

Lahendada graafiliselt:

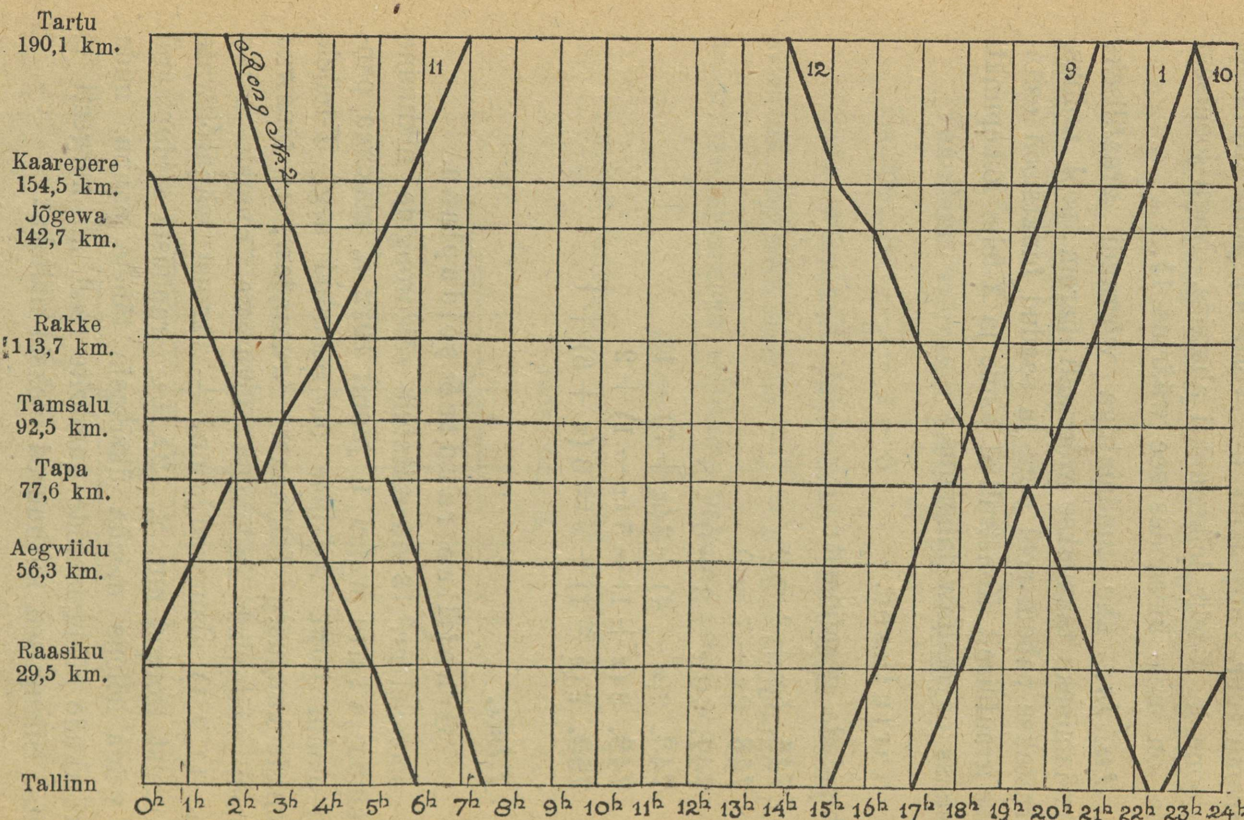
745. $5x + 3 = 0$
746. $2x - 7 = 0$
747. $10x - 3 = 0$
748. $2(x - 4) + 3(x + 3) = 11$
749. $3(x + 1) = 5(x - 1) + 2$
750. $7(x - 1) + x = 3(x + 3) + 1$

Lisa.

Graafiline raudtee sõiduplaan.

Joonisel nr. 13 on esitatud sõidurongide liikumine Tallinna ja Tartu wahel 1. juunil 1922 a. maksma pandud plaani järgi. X-teljele on asetatud aeg, Y-teljele jaamade kaugused Tallinnast. Arusaadaw, et tõuswad jooned näitawad Tallinnast liikuwate rongide käiku (nnr. 11, 9, 1), alanewad jooned — Tartust wäljasõitwate liikumist (rongid nnr. 2, 12, 10). Graafilisel sõiduplaanil on wäga hõlpus mõnda üksikasja tähele panna, mida harilikkude sõiduplaanide numbrite read nii kergesti ei näita. Niisugused küsimused oleksid näiteks:

Joon. nr. 13.



Rong nr. 9 on käigus ainult laupäewadel, rong nr. 10 ainult pühapäewadel.

1) Kas rong sõidab alati ühesuuruse kiirusega?

2) Mis rong sõidab teistest kiiremini?

3) Mis rongil on pea terwe tee peal ühesuurune kiirus?

4) Mis rongid kohtuwad mis jaamades ja millal?

5) Kui kaua wõib peatada teatud jaamas, et samal päewal jälle tagasi sõita?

6) Millal on wõimalik kahe rongi wahele lisarongi mahutada? millal mitte?

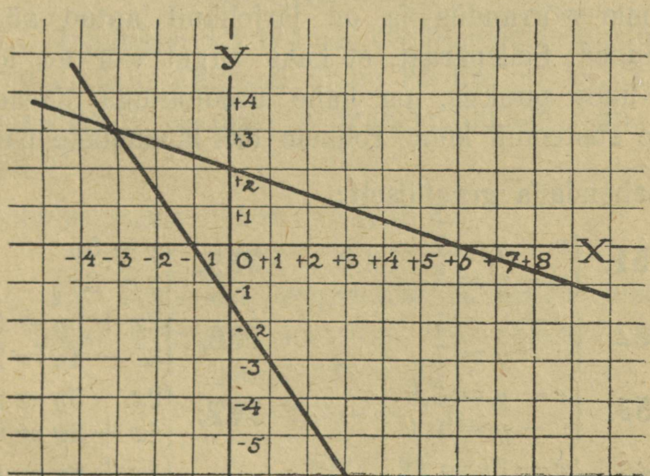
§ 15. Kahe tundmatuga lineaarwõrrandite süsteemi graafiline ja aritmeetiline lahendamine.

Näide.

Lahendada wõrrandite süsteem:

$$\begin{cases} x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = -3 \end{cases}$$

Joon. nr. 14.



See tähendab: leida need wäärtuste paarid x-ile ja y-ile, mis korraga rahuldaksid mõlemaid wõrrandid. Selleks olgu esitatud mõlema wõrrandi kujutused (joon. nr. 14). Kummagi funktsiooni esitus on sirgjoon. Sellepärast määrame igaühel kaks punkti.

Esimesest wõrrandist leiame:

kui $x = 0$, on $y = 2$;
kui $y = 0$, on $x = 6$.

Esimesele wõrrandile wastaw sirge lõikab koordinaatide telgi punktides $(6 ; 0)$ ja $(0 ; 2)$.

Teine wõrrand annab:

kui $x = 0$, on $y = -1\frac{1}{2}$;
kui $y = 0$, on $x = -1$.

Teine wõrrand lõikab telgi punktides $(-1 ; 0)$ ja $(0 ; -1\frac{1}{2})$.

Joonisest on näha, et sirgete lõikepunkt on $(-3 ; 3)$. Selle punkti koordinaadid $x = -3$ ja $x = 3$ wastawad mõlemale wõrrandile ja on järjelikult antud süsteemi lahendused. Sellepärast, et kaks sirget wõiwad lõikuda ainult ühes punktis, on kahe tundmatuga lineaarwõrrandite süsteemil kõige rohkem üks lahenduste paar.

Lahendada graafiliselt:

751. $\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3 \end{cases}$

752. $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 7 \end{cases}$

753. $\begin{cases} x + y = 5{,}8 \\ x - y = 1{,}4 \end{cases}$

754. $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ x = y \end{cases}$

755. $\begin{cases} x = 3y \\ y = 3x \end{cases}$

756. $\begin{cases} 2x + 5y = 32 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$

757. $\begin{cases} 2x - 5y = 26 \\ 4x + 3y = 0 \end{cases}$

758. $\begin{cases} 5x + 8y = 12 \\ 3x + 10y = 2 \end{cases}$

759. $\begin{cases} \dfrac{4x+3}{2y+3}=\dfrac{3}{2} \\ x-y=1 \end{cases}$ **760.** $\begin{cases} \dfrac{3x+2}{2y-5}=2 \\ \dfrac{x+5}{4y-5}=3 \end{cases}$

Wõrrandite süsteemide aritmeetilistest lahendamise wiisidest paneme kaks tähele:

1) liitmise ja lahutamise wiis ja

2) asenduswiis.

I.

Liitmise ja lahutamise wiis.

Näide.

$$\begin{cases} x-\dfrac{6y+3}{10-3x}=\dfrac{3x-2}{3} \\ \dfrac{16}{3-x}=\dfrac{9}{2-y} \end{cases}$$

Kõige esmalt antakse wõrranditele normaalkuju

$$ax+by=c\,.$$

Seekord saame:

$$\left.\begin{aligned} 6x+18y&=11 \\ 9x-16y&=-5 \end{aligned}\right\}(a)$$

X-i elimiinimiseks peame koeffitsiendid tasandama. 6-e ja 9-a kõige wäiksem ühine kordne on 18; sellepärast kaswatame esimese wõrrandi liikmed 3-ga, teisel — 2-ga.

Niiwiisi saame: $18x+54y=33$

$$18x-32y=-10$$

x kaob, kui esimesest wõrrandist lahutada teine, kus juures teisel wõrrandil ilmuwad wastupidised märgid:

$$\begin{array}{r} 18x+54y=33 \\ \underline{\mp 18x\pm 32y=\pm 10} \\ 86y=43 \end{array}$$

ja $\quad y=\frac{1}{2}$.

x-i määramiseks wõiks samal wiisil elimiinida y antud wõrranditest: nimelt kaswatada wõrrandid (a) 8-ga ja 9-ga ja siis liita wõrrandid. Kuid lühem tee on järgmine: asendada ühte wõrrandisse, näit. wõrrandisse $6x + 18y = 11$ wäärtus $y = \frac{1}{2}$ ja lahendada wõrrand ühe tundmatuga x, kust leidub $x = \frac{1}{3}$.

Lahendada wõrrandite süsteemid:

761. $\begin{cases} 5x + 2y = 41 \\ 3x + 5y = 36 \end{cases}$

762. $\begin{cases} 3x - 8y = 19 \\ 4x + 7y = -63 \end{cases}$

763. $\begin{cases} 6x + 5y = 1 \\ 4x - 3y = 83 \end{cases}$

764. $\begin{cases} 6x + 11y = 11 \\ 11x + 6y = 91 \end{cases}$

765. $\begin{cases} 7x - 5y = 31 \\ 13x - 8y = 64 \end{cases}$

766. $\begin{cases} 5x - 2 = 3y + 9 \\ 4x + 15 = 9y - 29 \end{cases}$

767. $\begin{cases} 4(x + 2) = 3(y - 8) \\ 5(x + 3) = 2(y + 5) \end{cases}$

768. $\begin{cases} 7(x+12) - 15(y+1) = 0 \\ 5(x - 6) - 6(y - 3) = 0 \end{cases}$

769. $\begin{cases} 6(x-2) + 5(y+3) = 25 \\ 9(x-2) - 10(y+3) = 55 \end{cases}$

770. $\begin{cases} (x+8)(y-9) = xy - 75 \\ (x-7)(y+4) = xy - 6 \end{cases}$

771. $\begin{cases} 2{,}4x - 1{,}7y = 10 \\ 1{,}8x + 1{,}3y = 17{,}8 \end{cases}$

772. $\begin{cases} 4\frac{1}{2}x - 7\frac{1}{3}y = 1 \\ 3\frac{3}{5}x - 5\frac{1}{2}y = 3 \end{cases}$

773. $\begin{cases} 4x - 3y = a - 7b \\ 3x + 4y = 7a + b \end{cases}$

II. Asenduswiis.

Näide.

$$\frac{2x - 1}{2y + 3} = \frac{3x - 8}{3y - 7}$$

$$\frac{9x + 5y + 13}{7x - 4y + 9} = 7$$

Kui wõrranditele on antud normaalkuju:

$$23x - 13y = 31$$

$$40x - 33y = -50,$$

lahendame esimese wõrrandi x-i suhtes:

$$x = \frac{31 + 13y}{23}$$

ja leitud awalduse asendame teise wõrrandisse:

$$40 . \frac{31 + 13y}{23} - 33y = -50,$$

kust leiame tundmatu y.

$$40(31 + 13y) - 33 . 23y = -50 . 23$$
$$40 . 13y - 33 . 23y = -50 . 23 - 40 . 31$$
$$y = 10.$$

Wõrdusesse $x = \frac{31 + 13y}{23}$ asendades $y = 10$, leiame: $x = 7$.

Lahendada järgmised wõrrandite süsteemid asenduswiisil:

774. $\begin{cases} 6x - 5y = 39 \\ x = 3y \end{cases}$

775. $\begin{cases} 7x - 4y = 6 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

776. $\begin{cases} 7x - 3y = 13 \\ 4x = y + 8 \end{cases}$

777. $\begin{cases} 8x - 3y = 5 \\ 12x + y = 5\frac{2}{3} \end{cases}$

778. $\begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 9x = 8y \end{cases}$

779. $\begin{cases} (x + 2) : (y + 1) = 3 : 1 \\ (x - 1) : (y - 1) = 4 : 1 \end{cases}$

780. $\begin{cases} 8x + 10y = 1 \\ y = \dfrac{1 - 3x}{4} \end{cases}$

781. $\begin{cases} x - y = 2 \\ x : y = 9 : 5 \end{cases}$

782. $\begin{cases} 3x - \dfrac{5y}{2} = 23 \\ y = \frac{1}{3}x - 4 \end{cases}$

783. $\begin{cases} - = \dfrac{b}{y} \\ \dfrac{a^2}{x} - \dfrac{b^2}{y} = a - b \end{cases}$

Lahendada süsteemid:

784. $\begin{cases} \dfrac{2}{2 - x} = \dfrac{3}{3 - y} \\ 3(x + 4) - 5(y - 2) = 20\frac{1}{2} \end{cases}$

785. $\begin{cases} \dfrac{2x+5y-1}{4x-3y+11}=7 \\ \dfrac{7x-19}{6}-\dfrac{3y-6}{8}=2 \end{cases}$

786. $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{y+2}=\dfrac{7}{3} \\ \dfrac{3x+2}{5y-3}=\dfrac{5}{8} \end{cases}$

787. $\begin{cases} \dfrac{7x-4y}{7x+4y}=\dfrac{2}{3} \\ \dfrac{x+4y}{3-x}=-6 \end{cases}$

788. $\begin{cases} \dfrac{5x-3y+6}{2x-y-9}=5 \\ \dfrac{x-y+5}{2x-y-4}=\dfrac{4}{7} \end{cases}$

789. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{12} \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$

790. $\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}=46 \\ \dfrac{6}{x}-\dfrac{4}{y}=4 \end{cases}$

791. $\begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=-\dfrac{1}{40} \\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{3}{y}=\dfrac{11}{8} \end{cases}$

792. $\begin{cases} x : y = (a-b+c) : (a+b-c) \\ (a-b+c)x-(a+b-c)y=4a(c-b) \end{cases}$

793. $\begin{cases} \dfrac{x-y+1}{x+y-1}=\dfrac{a+1}{a-1} \\ \dfrac{x-y-1}{x+y+1}=\dfrac{b+1}{b-1} \end{cases}$

794. $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ ax-by=a^2+b^2 \end{cases}$

Lahendada järgmised süsteemid, mis esimese astme wõrrandite süsteemideks taanduwad:

795. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 48 \\ x + y = 24 \end{cases}$

[Juhatus: jagada 1-ne wõrrand teisega]

796. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 203 \\ x - y = 7 \end{cases}$

797. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ (x + 3)^2 - (y - 3)^2 = 144 \end{cases}$

798. $\begin{cases} x^2 - 15^2 = y^2 - 6^2 \\ (x - 4)^2 - (4 - y)^2 = 133 \end{cases}$

Märkus. Kui kahes wõrrandis $ax + by = c$ ja $a_1x + b_1y = c_1$ on koeffitsiendid x ja y juures proportsionaalsed, s. t. $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, siis on wõrranditele wastawad sirged paralleelsed.

Näide. $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ 4x + 6y = 15 \end{cases}$

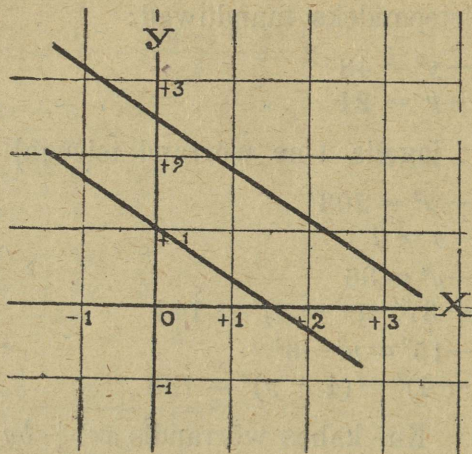
Koeffitsiendid x ja y juures on proportsionaalsed. Antud süsteemi wõib nii üles tähendada:

$$\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{4}{6}x + 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

Esimene sirge lõikab Y-telge punktis (0 ; 1), teine — punktis (0 ; $2\frac{1}{2}$) (joon. nr. 15); kaldekoeffitsient on mõlemal sirgel ühesuurune $\left(-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}\right)$; järjelikult on sirged paralleelsed.

Mis annaks ülal toodud süsteemi aritmeetiline lahendamine asendus- ja lahutuswiisil?

Joon. nr. 15.



Harjutus.

799. Näidata, missugused järgnewatest wõrranditest esitawad omawahel paralleelseid sirgjooni, missugused mitte.

$x - y = 5$	$5x - 4y = 1$
$3x - 2y = 7$	$6y = 9x - 28$
$y = 1\frac{1}{2}x - 4$	$4{,}5x - 3y = 14$
$5y = 5x - 21$	$6x + 4y = 17$

Lisa.

Joonise põhjal nimetada, mis punktidest täisarwuliste ja positiiwsete koordinaatidega lähewad läbi järgmised sirged:

800. $x + y = 4$
801. $x - y = 3$
802. $x + 5y = 16$
803. $7x + y = 22$
804. $5x - 2y = 1$
805. $4x - 7y = 5$
806. $\frac{y}{x} = \frac{4}{5}$
807. $\frac{x}{2} = \frac{y}{7}$

Määramatu wõrrandid — nagu eeltoodud, kus otsitakse täisarwulisi ja positiiwseid juuri — nimetatakse ka Diophantos'e wõrranditeks (Diophantos — matemaatik Alexandria's, elas umbes 275 a. p. Kr.).

§ 16. Kahe tundmatuga esimese astme wõrrandite süsteemide seadmine.

Märkus. Ehk küll §-i pealkiri paneb ette alal toodud ülesannete lahendamiseks süsteeme seada, siiski ei ole see iga kord tungiwalt tarwilik. Mitmeid ülesandeid wõib hõlpsasti lahendada ka ühe tundmatu abil ja järjelikult ka ühe wõrrandi seadmisega. Isegi niisuguseid ülesandeid leidub siin, näit nnr. 808, 809, 811, 813, 823, 824, 839, 843, mille lahendamist wõib korda saata ilma mingisuguse wõrrandi seadmiseta.

808. Kahe arwu summa on $38\frac{1}{6}$, nende wahe $6\frac{5}{6}$. Leida need arwud.

809. Kuresaares on pilwiseid päewi juuni kuus 22-e wõrra, juulis 15-e wõrra ja augustis 9-a wõrra wähem kui päewi, mil päikene paistab. Mitu selget päewa on Kuresaares keskmiselt igas nimetatud kuus?

810. Kahe arwu summa on 160. Kui üht arwu jagada 2-ga ja teist 3-ga, siis saab summas 74. Mis arwud on need?

811. Õhulaew läks päri tuult 140,4 km ja wastu tuult 39,6 km tunnis. Arwutada õhulaewa ja tuule kiirus sekundis.

812. Ühiseks ettewõtteks andsid A ja B teatud summa. Kui B oleks andnud 15 tuhat marka rohkem, oleksid mõlema sissemakstud summad olnud wõrdsed. Kui A oleks oma summale juure lisanud 15 tuhat marka, oleks A antud summa B summast 4 korda suurem olnud. Kui palju andis kumbki?

813. Koolipoisil on 2 rahataskut. Kui ta esimesest taskust 14 marka teise paneb, on mõlemas ühepalju. Kui ta aga teisest 14 marka esimesesse paigutab, on wiimases kaks korda rohkem raha, kui teises. Kui palju raha on kummaski taskus?

814. On wõetud kaks arwu. 4-ja kordse esimese ja 7-mekordse teise arwu summa on 50; 7-mekordse esimese ja 4-jakordse teise arwu summa on 38. Leida need arwud.

815. Kolmekordse esimese ja 5-ekordse teise arwu summa on 13; esimese arwu jagatis 3-ega ja teise arwu jagatis 5-ega annawad summas 5. Leida arwud.

816. Kahe arwu summa on 103. Esimese arwu jagamine teisega annab jagatises 7 ja ka ülejäägi 7. Mis arwud on need?

817. Missuguse murru wäärtus muutub $\frac{1}{3}$-ks, kui lugejat ja nimetajat liita 2-ga; ja $\frac{1}{5}$-ks, kui lugejast ja nimetajast lahutada 2?

818. Missuguse murru wäärtus muutub $\frac{1}{3}$-ks, kui lugejat ja nimetajat liita 3-ga, ja muutub pöördwäärtuseks, kui lugejat liita 10-ga ning nimetajast lahutada 10? [Juhatus: teine wõrrand koondada $(x + y)$-ga].

819. Leida kaks arwu, mille summa ja jagatis on kumbki 5.

820. Leida kaks arwu, mille wahe ja jagatis on kumbki 5.

821. Nimetada kaks arwu, mille wahe on 7 ja mille ruutude wahe on 161.

822. Isa ja poja aastate arw on kokku 70. 11 aastat tagasi oli isa pojast 7 korda wanem. Kui wana on kumbki nendest?

823. Kapital andis aastas 840 marka intressa. Kui ta oleks $\frac{1}{2}$% rohkem kandnud, oleks ta 120 marka rohkem kasu toonud. Kui suur oli kapital ja mitu protsenti kandis ta?

824. Kaks kapitali olid hoiule antud, üks $4\frac{1}{2}$%-i, teine $5\frac{1}{2}$%-i peale, ja tõid aastas kasu kokku 5100 marka. Kui kumbki kapital kannaks $\frac{1}{2}$%-i rohkem, oleksid aastaintressid kogusummas 500 marka suurem. Leida kapitalide suurused.

825. A-l ja B-l oli ühist wõlga 380 marka tasuda. A ütles B-le: anna mulle $\frac{1}{4}$ omast rahast, siis ma wõin terwe wõla üksi kustutada. B wastas: anna sa minule ainult $\frac{1}{5}$ omast rahast, siis wõin mina terwe wõla ise tasuda. Kui palju raha oli kummalgi?

826. Kahe arwu ruutude wahe on 245. Kui kumbki arwudest oleks 5-e wõrra wähem, oleks ruutude wahe 195. Leida arwud.

(Seatud wõrrandite lahendamiseks w. nnr. 795—798).

827. Kahe arwu ruutude wahe on 657. Kui esimene oleks 3-e wõrra wähem ja teine 3 üksust suurem, oleks ruutude wahe 219. Mis arwud on need?

828. Leida kaks arwu, mille kohta on teada, et nende kaswatis ei muutu, kui esimest 11-e wõrra suurendada ja teist arwu sama palju wähendada, ja et kaswatis wäheneb 12-e wõrra, kui esimest arwu 3-e wõrra suurendada ja teist 4-ja wõrra wähendada?

829. Püstkülikus on kahe lähiskülje wahekord $\frac{8}{5}$. Kui pikem külg oleks 3 cm lühem ja lühem külg 5 cm. pikem, oleks pindala 260 cm^2 suurem. Kui pikad on küljed?

830. Püstküliku pindala jääb muutmata, kui üht külge 6 m-i wõrra lühendada ja teist 8 m-i wõrra pikendada. Kui aga esimest 2 m-i wõrra pikendada ja teist 1 m-i wõrra lühendada, kaswab pindala 7 m^2. Kui pikad on küljed?

831. Kui püstküliku alust suurendada tema $\frac{1}{4}$-ku wõrra ja kõrgust 4 cm-i wõrra, siis suureneb pindala 160 cm^2. Kui aga alust $\frac{1}{4}$-ku ja kõrgust 4 cm-i wõrra wähendada, siis saab pindala poolosa endisest. Kui suur on alus ja kõrgus?

Ülesanded nr. 832—837 lahenduwad Pythágorase teoreemi põhjal.

832. Kui täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusi pikkust muutmata jätta ja üht kateeti 8 tsentimeetri wõrra wähendada, siis kaswab teine kateet 4 tsentimeetri wõrra. Kateedi suurendamisega 9 tsentimeetri wõrra wäheneb sama hüpotenuusi juures teine kateet 13 tsentimeetrit. Kui pikad olid kateedid?

833. Kaldnurkse kolmnurga kahe külje summa on 42 cm, nende külgede projektsioonid wõetud kolmandal küljel on 8 ja 20 cm. Arwutada kolmnurga küljed.

834. Kahe kolmnurga külje wahe on 14 cm, nimetatud külgede projektsioonid wõetud kolmandal küljel on 30 ja 12 cm. Kui pikad on küljed?

835. Kaldnurkse kolmnurga kõrgus jagab aluse osadeks, mille suurused on 5 ja 35 cm. Mõlema teise külje summa on 50 cm. Kui pikad on küljed?

836. Kolmnurga kõrgus jagab aluse osadeks, mille pikkused on 16 ja 5 cm. Mõlema teise külje wahe on 7 cm. Leida küljed.

837. Kaldnurkse kolmnurga küljed on 30, 35 ja 40 cm. Leida iga külje projektsioonid kahel teisel küljel.

838. Anumal, mille suurus 480 m^3, on kaks kraani. Kui esimene kraan on awatud 1 ja teine 5 minutit, woolab anumasse 40 m^3 wett. Kui aga esimene kraan on awatud 4 ja teine 2 minutit, siis woolab sinna 52 m^3 wett. Mitu m^3 wett woolab kummagi kraani läbi minutis ja mitme minuti jooksul wõiwad mõlemad kraanid koos awatult anuma täita?

839. Kaks töölist A ja B wõiwad koos töötades 20 päewa jooksul töö lõpule wiia. Kui A töötaks 6 ja B 15 päewa, saaks tehtud ainult $\frac{1}{2}$ kogutööst. Kui palju aega wajab kumbki tööline üksikult töötades terwe töö jaoks?

840. Ringjoont mööda, mille pikkus 120 m, liiguwad jalakäija ja jooksja. Liikudes samas sihis kohtawad nad teineteist iga 30 sekundi järel, wastupidises sihis liikudes aga iga minuti järel. Leida nende kiirused.

841. Ringkujulist teed mööda, mille pikkus 864 m, liiguwad samas sihis jalakäija ning ratsanik ja kohtawad teineteist iga 3-e minuti järgi. Leida kummagi kiirus, kui ratsahobuse kiirus on jalakäija kiirusest 5 korda suurem,

842. Kahest kohast, mille wahe 40 km, lähewad kaks teekäijat A ja B teineteisele wastu. A läks 1 tund 15 min. warem teele kui B, ja nad kohtasid teineteist 3 tundi 45 minutit pärast B wäljaminekut. Kui B oleks läinud teele 1 tund warem kui A, siis oleksid nad kohtanud teineteist 4 tundi peale A wäljaminekut. Mitu kilomeetrit käis kumbki tunnis?

843. Õpilane lahendas jagamisülesannet. Tema leidis jagatiseks 43 ja jäägina 37. Järelkatseks kaswatas tema jagaja jagatisega ja liitis resultaadi jäägiga. Kuid leitud arw 74771 ei wastanud tõele. Wiga tuli sellest, et tema kaswatamisel jagajas sadade kohal seiswa 4 oli 7-eks lugenud. Missuguse arwu jagas õpilane ja mis arwuga?

844. Õpetaja andis kahele õpilasele ülesande: kaswatada kaks arwu ja järel katsuda resultaadi õigeolu, jagades kaswatise wähema teguriga. Kuid kumbki ei saanud asjaga hakkama. Esimene õpilane sai jagatises 505 ja jäägi 143, teine jagatises 525 ja jäägi 383. Kaswatades oli kumbki unustanud liita 1, esimene 5-dal, teine 3-dal kohal, nii et kaswatised olid wastawalt 10000-e ja 100-ja wõrra liig wäiksed. Mis arwud andis õpetaja kaswatada?

§ 17. Lineaarwõrrandite süsteemid enam kui kahe tundmatuga.

Lahendada süsteemid:

845. $\begin{cases} x + y = 35 \\ x + z = 36 \\ y + z = 37 \end{cases}$

846. $\begin{cases} 4x - y = 65 \\ 4y - z = 48 \\ 4z - x = 28 \end{cases}$

847. $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ 4x - 3z = 7 \\ 5y + 2z = 25 \end{cases}$

848. $\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 37 \\ 4x + 3y + 2z = 7 \\ 5x - 4y - 7z = 19 \end{cases}$

849. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{y+1} = 1 \\ \dfrac{x+y}{y-z} = 4 \\ \dfrac{x-z}{y-5} = 3 \end{cases}$

850. $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 8 \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 5 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{z} = 7 \end{cases}$

851. $$\begin{cases} \frac{4}{y}+\frac{5}{y}+\frac{6}{z}=38 \\ \frac{5}{x}+\frac{7}{y}-\frac{2}{z}=11 \\ \frac{8}{x}-\frac{9}{y}+\frac{10}{z}=30 \end{cases}$$

852. $$\begin{cases} \frac{x+2}{3}+\frac{y-1}{2}=7-\frac{z+3}{4} \\ \frac{x+1}{5}+\frac{z-3}{2}=3+\frac{y-1}{4} \\ \frac{y-1}{4}-\frac{z-3}{6}=1-\frac{x-1}{3} \end{cases}$$

853. $$\begin{cases} x-y+z+t=26 \\ x+y-z+t=22 \\ x+y+z-t=20 \\ -x+y+z+t=28 \end{cases}$$

854. Kui kolmest arwust moodustada kahe kaupa wõetud arwude summad ja iga kord kolmanda arwu lahutada summast, siis saadakse arwud 6, 28 ja 42. Määrata otsitawad arwud.

855. Leida kolm arwu, kui on teada, et iga kaks arwu ühes kahekordse kolmanda arwuga sünnitawad summad 47, 44 ja 41.

856. Kolmnurga wälisnurga ja ühe mitte kõrwu olewa sisenurga summa on 173°, wälisnurga ja teise mitte kõrwu olewa sisenurga summa on 160°. Leida kolmnurga nurgad.

857. Isa on kaks korda nii wana kui mõlemad pojad kokku. Kaks aastat tagasi oli isa aastate arw 4 korda suurem kui wanemal pojal ja 5 aastat tagasi oli ta 7 korda wanem kui noorem poeg. Kui wana on isa ja kumbki poeg?

858. Palgati tööle kolm töölist A, B ja C. A ja B wõiwad koos 10 päewa jooksul töö lõpule wiia, B ja C $7\frac{1}{2}$-e päewa, A ja C 6-e päewa jooksul. Mitme päewa jooksul wõiwad nemad koos töötades ja mitme päewa jooksul suudaks igaüks eraldi antud töö lõpetada?

859. Kolm kapitali, mille kogusumma 200 tuhat marka, olid hoiule antud wastawalt $3\frac{1}{2}$, 4 ja $4\frac{1}{2}$ protsendiga ja tõid kasu aastas kogusummas 8100 marka. Kui kapitalid kannaksid wastawalt $4\frac{1}{4}$, 4 ja $3\frac{1}{2}$ protsenti, oleksid aastaintressid 300 marka wähem. Kui suured olid kapitalid?

860. Nelinurga iga kolme külje summad on järgselt 69 cm, 74 cm, 62 cm ja 77 cm. Kui pikk on iga külg?

Wastused.

§ 1.

1. $2ab$

2. $\frac{ab}{c}$

3. $\frac{100b}{a}$ %

4. $\frac{10b}{a}$

5. $c : \frac{b}{a}$

6. $\frac{a-b}{2} + b$; $\frac{a-b}{2}$

32. $5\frac{1}{3}$

33. 28

34. 2

35. 18

36. 50

37. 100

38. 11

39. 25

40. 7

41. 169

42. 40

43. 156

44. 1,2

45. 42

46. 44; 294

47. 8; 2098

48. 60; 2340

49. 38

50. 6

51. 4

52. $\frac{1}{3}$

§ 2.

61. $7 - 18xy$

67. $2\frac{13}{60}a$

76. $x + 0{,}9y$

78. $a - 1\frac{5}{12}b$

82. $3b - 6x$

83. $53a - 40b$

84. $10t + 2u - 11v$

87. $5x^3 - 3x^2$

89. $0{,}5a - 20b$

90. $0{,}94x - 2{,}67y$

91. $1\frac{2}{3}a - 1\frac{1}{6}b - 1\frac{1}{2}c$

92. $4\frac{1}{6}a - 2{,}7b - 3\frac{5}{14}c$

93. $\frac{x}{2}$

97. $4{,}5x - 0{,}9$

98. $3ab + a^2b$

99. $\frac{1}{3}a - \frac{2}{15}b$

101. $38{,}4 - 5{,}6x$

104. $2 - 2l$

107. $\frac{a}{3} + \frac{b}{4}$

109. $2bc - ab - ac$

112. $6a + 24b$
113. $3x - 19y$
114. $10a - 10b$
115. $4\frac{1}{2}a - 4b + \frac{5}{7}c$
116. $60 - 18a$
117. $11 - 16a$
118. $27a - 42$
119. 3
120. $16x - 33y$
122. $a + 1$
123. $16x - 4$

§ 3.

137. Keskwäärtus 73
145. -28
146. 23
147. -5
148. 5
149. a
150. $5a + 5b - 6$
151. $9a + 4b + 6$
152. $4 - \frac{}{4}a$
153. $-2\frac{1}{4}a - 10b$
154. $12a - 6b$
156. $1\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$
157. $3a + 2b$
160. $10a - 7b + 10c$
161. $-3{,}11x^2 - 0{,}08xy - 1{,}28y^2$

§ 4.

169. $36a^3b^3$
170. $2{,}6x^2y^2z^2$
171. $72a^5b^7$
183. $a + 5$
184. $x^2 - 2xy - y^2$
185. $ab - a^2b$
199. $4a^2b(5a^3b - 3a^2b^2 + 2ab^4)$
205. $45a(3a - 5b)$
215. $a^3 + b^3$
216. $a^3 - b^3$
217. $2a^2 - 3ab + 2ac + b^2 - bc$
218. $9p - 20$
219. $3x^2 + 4x + 6$
220. $5b^2 - 6ab - a^2$
221. $3bx - by - ax - ay$
222. $20 - 6a$
223. $a^3 - 2a^2 - 5a + 6$
224. $a^3 + 2a^2 - 5a - 6$
233. $(a - b)(m + n)$
234. $(a - b)(m + 1)$
235. $(2a + 3b)(m - n)$
236. $(a - 1)(x - y)$
237. $(a - 1)(x - 1)$
238. $(3a - 2b)(2x - 3y)$
246. 18; 28
247. -21; -28
248. 7; -5
249. -10; -38

§ 5.

257. $\frac{a^2}{4} + \frac{ab}{3} + \frac{b^2}{9}$
258. $0{,}16a^2 + 0{,}56ab + 0{,}49b^2$
267. $(2a + \frac{1}{2})^2$
280. $0{,}16a^2 - 0{,}24ab + 0{,}09b^2$
281. $2a^2 + 2b^2$
282. $13a^2 - 16ab + 5b^2$
283. $61x^2 - 120xy + 61y^2$
288. $(4a - 3b)^2$
289. $(\frac{3}{2}a - \frac{2}{3}b)^2$
299. $\frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{9}$
300. $1{,}21a^2 - 1{,}69b^2$
310. $(\frac{3}{4}p + \frac{2}{3}q)(\frac{3}{4}p - \frac{2}{3}q)$
312. $(1 + 0{,}3b)(1 - 0{,}3b)$

316. $27a^3+54a^2b+36ab^2+8b^3$
317. $a^3+1\frac{1}{2}a^2b+\frac{3}{4}ab^2+\frac{1}{8}b^3$
319. $8a^3-36a^2b+54ab^2-27b^3$
320. $8a^3-6a^2b+1\frac{1}{2}ab^2-\frac{1}{8}b^3$
321. $5a-b-a^2+b^2$
322. $4ab-a^2+b^2$
323. a^2-a-3
324. a^2-6a+3
325. a^4

§ 6.

337. $0{,}4a$
340. $1\frac{2}{3}b$
355. a^2-2a+3
356. $2x^2-7x-1$
357. $4-3a$
358. $p+6$
359. $a+10$
362. $x^4+ax^3+a^2x^2+a^3x+a^4$
363. $36a^2-42ab+49b^2$
364. $7a-4b$
365. $7p^2-pq+4q^2$
366. $4x+5y$

§ 7.

367. $(a-b)(5x+2y)$
368. $(a+b)(x+9y)$
369. $(a-8)(b-c)$
370. $(5a-2b)(x-y)$
371. $3a(7a-b)$
372. $(a-b)(2a-b)$
373. $b(b-a)$
375. $(p+q+r)(p-q-r)$
376. $4ab$
377. $56(x+y)(x-y)$
381. $(a-b)(a^2+b^2)$
385. $(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$
389. $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$
391. $25a^2+15ab+9b^2$
392. $(a+b)(a^4+a^2b^2+b^4)$
393. $a^2(a-1)(a^2+a+1)$
394. $4(a-3)(b-c)$
395. $2a(a-b)$
400. $(p-q)(r-2)$
401. $(a+3)(x-y)$
402. $15a(b-a)$
403. $q(p-q)(p+q)$
404. $2b(a-b)$
405. $(a+b+c)(a+b-c).$
$.(a-b+c)(a-b-c)$
406. $(a+b+c)(a+b-c).$
$.(a-b+c)(b+c-a)$
407. $(f+g)(f^2-fg+g^2-1)$
408. $(b-a)(a+b+1)$
409. $(a+b)(1-a^2+ab-b^2)$
410. $(p+q-r)(p-q+r)$
411. $(x+y+z)(x-y-z)$
412. $(2a-b)(2a-b-1)$
413. $(1-y)(x+y-1)$
417. $(a-\frac{1}{2})^3$

§ 8.

434. $\frac{2u}{3v}$
435. -1
436. -3
437. $-\frac{u+v}{2}$
438. $\frac{x-y}{x+y}$
444. $\frac{a}{a^2-ab+b^2}$

§ 9.

454. a
456. $\frac{y}{a}$

458. 1

459. $6(a+b)$

460. $4(a-b)$

462. $1\frac{3}{12}a$

463. $\frac{13a}{60}$

464. $\frac{2}{3}a-1$

465. $\frac{5x}{12}$

466. $\frac{7x-5a}{12a}$

467. $\frac{a^2-b^2}{ab}$

468. $\frac{a-7b}{a^2-b^2}$

470. $\frac{5}{6}$

471. $\frac{7a}{20(a-b)}$

473. $\frac{24u}{5v(5v-6)}$

474. $\frac{2b}{a^2-ab+b^2}$

475. $\frac{4x^3}{1-x^4}$

476. $\frac{1-a}{12(1+a)}$

477. $\frac{1}{6(x+1)}$

482. $\frac{q}{p}$

484. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$

486. $\frac{1}{a-b}$

487. $\frac{5}{6(u-v)}$

488. $\frac{a+1}{a-1}$

489. $\frac{13x}{15(x-y)}$

490. $\frac{3a-2b}{ab}$

494. $\frac{c}{6a}$

495. $\frac{5ad}{b^2}$

496. $\frac{5}{6}$

498. $\frac{(a+b)(a-2b)}{a-b}$

499. $\frac{a-1}{a^2+2a+4}$

500. $(p-1)^2$

501. -1

507. $8a$

508. $12x$

513. $\frac{a+2}{a+1}$

517. $1+\frac{a}{a^2+1}$

518. $\frac{1}{b}$

519. $-(1+x)$

520. $\frac{1}{3a}+\frac{1}{5b}$

521. $\frac{x}{3a}-1$

523. $\frac{b}{c}-\frac{c}{b}+\frac{d}{a}$

524. $\frac{4a^2-2a+1}{4}$

525. $\frac{(ab+1)(a^2b^2+1)}{b^3}$

526. $\frac{9}{14}$

527. $\frac{6a-5}{a-6}$

528. a

529. $8\frac{1}{2}$

530. 6

531. $1-2a$

532. $b-a$

533. $-\frac{2a}{a^2+1}$

535. $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{9}$

540. 442,53
541. $9\frac{1}{16}$
542. —2
548. 125
553. $2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$
555. $\frac{a+1}{a^5}$

§ 10.

559. 3
560. —2
563. $1\frac{1}{4}$
564. $\frac{2}{3}$
566. $-4\frac{1}{2}$
567. $2a$
569. $b - a$
570. $-(a+b)$
571. $a^2 + ab + b^2$
573. $a + 2$
574. 5
575. —5
576. 8
577. 10
578. 7
579. 9
580. 6
581. —2
582. 5
583. $8\frac{1}{2}$
584. 10
585. 36
587. $a - b$
588. $\frac{a+b}{a-b}$
589. $\frac{ab}{a-b}$
596. $40'$
598. $\frac{5}{4}$
599. $5ab$
600. 9
601. —6
602. 4
603. $\frac{2}{3}$
604. $\frac{1}{2}$
605. —2
606. $-2\frac{1}{2}$
607. $2\frac{1}{2}$
608. 6
609. $\frac{1}{2}$
610. $3\frac{1}{2}$
611. 4
612. $a + b$
613. $a^2 - b^2$
614. $\frac{2a^2}{2a+b}$
615. $\frac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$
616. $-a$
617. $a + b + c$
618. $a + b + c$
619. 4
620. 6
621. 13
622. $3\frac{1}{2}$
623. Samasus !
624. $\frac{a^2 - b^2}{2ab}$
625. b
626. —1
627. 7
628. 4

§ 11.

632. 150, 125 ja 75 mk.
633. 60°; 96°; 204°.

634. 540, 720, 960 ja 1280 mk.
635. 0,134
636. 151
637. 104
638. $4\frac{1}{2}$
639. 60
640. 21
641. $18a$
642. 6
643. 3
644. 0
645. 7
646. 3
647. 4
648. 15 ja 7
649. 13 ja 11
650. 7 m
651. $5a$
652. a) 3 a. pärast
b) 3 a. tagasi
653. 3-e a. pärast
5 a. tagasi
654. 25 ja 20
655. 6 ja 15 m
656. $\frac{9}{12}$
657. $\frac{20}{35}$
658. $\frac{6}{10}$
659. 13 külge
660. 8-nurk, 15- ja 30-nurk
661. 96°; 120°; 84°; 60°.
662. 15 meest ja 9 naist
663. 450 ja 420 tuhat
664. 4 wenda ja 3 õde
665. $\frac{1}{2}$ kg
666. $\frac{1}{4}$ kg
667. 42 õpilast
668. 20000 mk; 800 mk.
669. 5 a.; 12600 mk.
670. 36 poogn.; 1 poogen.
671. 1200 ja 1100 mk.
672. 9 päewa
673. 120 päewa pärast
674. 6 marka
675. $4\frac{1}{2}\%$ ja 4%
676. 8000 ja 9200 mk.
677. 7 a.
678. Isa 39 a., poeg 14 a.
679. 10 korda; iga $65\frac{5}{11}$ min. pärast
680. 11 korda; iga $65\frac{5}{11}$ min. pärast
681. $49\frac{1}{11}$ min. pärast
682. 4 päewa [ligikaudu]
683. 3960 puud
684. 85
685. 26
686. 10 ja 6 cm.
687. 35 ja 25 cm.
688. 18 m.
689. 5 m.
690. 44 mk. ja 52 mk.
691. 15 mk.
692. $5\frac{1}{2}$ tosinat
693. $\frac{1}{15}$ wõrra
694. 90 õuna
695. 180 tuhat mk; 6 last
696. 100 tuhat mk; 5 last
697. 16 km; 4 ja 1,6 tundi
698. 53 km.
699. 6, 9, 12, 15, 18 kuu pärast
700. 5200 mk.

§ 14.

741. $\frac{1}{2}$; 2
742. $-\frac{2}{3}$; 2
743. $\frac{2}{3}$; 0
744. $-\frac{5}{3}$; -5

§ 15.

761. 7; 3
762. —7; —5
763. 11; —13
764. 11; —5
765. 8; 5
766. 7; 8
767. 7; 20
768. 18; 13
769 7; —4
770. —5; —6
771. 7; 4
772. 10; 6
773. $a - b$; $a + b$
774. 9; 3
775. 1,6; 1,3
776. 2,2; 0,8
777. $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{3}$
778. $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$
779. 13; 4
780. —3; $2\frac{1}{2}$
781. $4\frac{1}{2}$; $2\frac{1}{2}$
782. 6; —2
783. a; b
784. $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$
785. 7; 10
786. 6; 7
787. 5; $1\frac{3}{4}$
788. 15; 12
789. 4; 6
790. $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$
791. 5; —8
792. $a - b + c$; $a + b - c$
793. $-\frac{2ab}{a - b}$; $\frac{a + b}{a - b}$
794. $a + b$; $a - b$
795. 13; 11
796. 18; 11
797. 10; 8
798. 17; 10.

§ 16.

808. $22\frac{1}{2}$ ja $15\frac{2}{3}$
809. 26, 23 ja 20 päewa
810. 124 ja 36
811. 25 ja 14 m
812. 25 ja 10 tuhat mk.
813. 98 ja 70 mk.
814. 2 ja 6
815. 21 ja —10
816. 91 ja 12
817. $\frac{6}{22}$
818. $\frac{2}{12}$
819. $4\frac{1}{6}$ ja $\frac{5}{6}$
820. $6\frac{1}{4}$ ja $1\frac{1}{4}$
821. 15 ja 8
822. 53 ja 17 a.
823. 24000 mk.; $3\frac{1}{2}\%$
824. 40000 ja 60000 mk.
825. 300 mk.; 320 mk.
826. 27 ja 22
827. 41 ja 32
828. 33 ja 44
829. 88 ja 55 cm.
830. 15 ja 12 m.
831. 20 ja 12 cm.
832. 15 ja 20 cm.

833. 17, 25, 28 cm.
834. 20, 34 ja 42 cm.
835. 13, 37, 40 cm.
836. 13, 20, 21 cm.
837. 30 cm-lisel küljel:
$7\frac{1}{2}$ ja $15\frac{15}{16}$,
35 cm-lisel küljel:
$8\frac{3}{4}$ ja $24\frac{1}{16}$,
40 cm-lisel küljel:
$21\frac{1}{4}$ ja $27\frac{1}{2}$
838. 10 ja 6 m^3; 30 min.
839. 36 päewa; 45 päewa
840. 1 ja 3 m sekundis
841. 1,2 ja 6 m sekundis
842. 5 km.; 4 km.
843. 61871 ja 1438.
844. 526 ja 483

§ 17.

845. 17; 18; 19.
846. 20; 15; 12;
847. —2; 7; —5
848. 4; —5; 3
849. 9; 7; 3;
850. $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$;
851. 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$
852. 4; 5; 9
853. 10; 11; 13; 14
854. 17; 24; 35
855. 8; 11; 14
856. 49°, 62° ja 69°
857. 54 a., 15 a., 12 a.
858. 5 päewa; 15, 30, 10 päewa
859. 40000, 100000 ja 60000 marka
860. 20, 32, 17 ja 25 cm.

Õiendus.

Lhk. 57 alt 12-es rida on **wõrrandused**, peab olema **wõrdused**.

2649.

Ak 2