Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Dmitrii Avramenko

Arvraadiust saavutavad operaatorid Banachi ruumides

Matemaatika eriala

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Märt Põldvere, PhD

Tartu 2025

ARVRAADIUST SAAVUTAVAD OPERAATORID BANACHI RUUMIDES

Bakalaureusetöö

Dmitrii Avramenko

Lühikokkuvõte

Bakalaureusetöös kirjutatakse üksikasjaliselt lahti järgmise kahe M. D. Acosta ja R. Payá teoreemi [Bull. London Math. Soc., 1993; teoreemid 2.1 ja 4.2] tõestused. Järgnevas on X reaalne või kompleksne Banachi ruum ja $\mathcal{L}(X)$ tähistab ruumis X tegutsevate pidevate lineaarsete operaatorite Banachi ruumi. **Teoreem 1.** *Nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X)$, mille kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse, on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe.* **Teoreem 2.** *Kui ruumil X on Radon-Nikodymi omadus, siis iga operaatori $T \in \mathcal{L}(X)$ ja iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ühemõõtmeline operaator $S \in \mathcal{L}(X)$ nii, et $\|S\| < \varepsilon$ ja operaator $T + S$ saavutab oma arvraadiuse.*

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Märksõnad: Funktsionaalanalüüs, Banachi ruum, operaatori arvraadius, oma arvraadiust saavutav operaator.

NUMERICAL RADIUS ATTAINING OPERATORS ON BANACH SPACES

Bachelor's thesis

Dmitrii Avramenko

Abstract

In this Bachelor's thesis, a detailed presentation of the proofs of the following two theorems by M. D. Acosta and R. Payá [Bull. London Math. Soc., 1993; Thm. 2.1 and 4.2] is given. Let X be a real or complex Banach space, and let $\mathcal{L}(X)$ denote the Banach space of all bounded linear operators from X to X. **Theorem 1.** *The set of the operators in $\mathcal{L}(X)$, whose adjoint operator attains its numerical radius, is dense in $\mathcal{L}(X)$.* **Theorem 2.** *If X has the Radon-Nikodym property, then for every operator $T \in \mathcal{L}(X)$ and every real number $\varepsilon > 0$ there exists a one-dimensional operator $S \in \mathcal{L}(X)$ with $\|S\| < \varepsilon$ such that the sum $T + S$ attains its numerical radius.*

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Key Words: Functional analysis, Banach space, numerical radius of an operator, numerical radius attaining operator.

Sisukord

Sissejuhatus

Olgu X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ning olgu $T \in \mathcal{L}(X)$, s.t. $T : X \to X$ on pidev lineaarne operaator.

Definitsioon 1. Hulka

$$V(T) = \{f(Tx) : x \in X, f \in X^*, \|x\| = \|f\| = f(x) = 1\}$$

nimetatakse operaatori T *arvpiirkonnaks* (ingl. *numerical range*).

Definitsioon 2. Arvu

$$v(T) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\}$$

nimetatakse operaatori T *arvraadiuseks* (ingl. *numerical radius*).

Ülevaade olulisematest tulemustest operaatori arvpiirkonna ja arvraadiuse kohta (kuni aastani 1973) on antud monograafias [BD^{71}] ja selle järjes [BD^{73}].

Definitsioon 3. Öeldakse, et operaator T *saavutab oma arvraadiuse*, kui $v(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \in V(T)\}$, s.t. leiduvad sellised $x_0 \in X$ ja $f_0 \in X^*$, et $\|x_0\| = \|f_0\| = f_0(x_0) = 1$ ning $|f_0(Tx_0)| = v(T)$.

Oma arvraadiust saavutavate (ruumis X tegutsevate) operaatorite hulka tähistame edaspidi sümboliga $R(X)$. Nende operaatorite hulka, mille kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse, tähistame sümboliga $R_1(X)$, s.t.

$$R_1(X) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T^* \in R(X^*)\},$$

ja nende operaatorite hulka, mille teine kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse, tähistame sümboliga $R_2(X)$, s.t.

$$R_2(X) = \{T \in \mathcal{L}(X) : T^{**} \in R(X^{**})\}.$$

On lihtne veenduda, et $V(T) \subset V(T^*)$ (vt. lauset 1.11, *(a)*). Mõnevõrra keerulisem on näidata, et $v(T^*) = v(T)$ (vt. lauset 1.11, *(b)*; siin võrratuse $v(T^*) \leqslant v(T)$ tõestus kasutab Bishop–Phelps–Bollobási teoreemi). Sellest võrdusest järeldub, et kui operaator T saavutab oma arvraadiuse, siis ka kaasoperaator T^* saavutab oma arvraadiuse. Tänu sellele faktile saame sisalduvused

$$R(X) \subset R_1(X) \subset R_2(X).$$

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärk on kirjutada üksikasjaliselt lahti järgmiste kahe M. D. Acosta ja R. Payá teoreemi tõestused aastal 1993 ilmunud artiklist [AP93].

Teoreem 1 (vt. [AP93, teoreem 1.2])**.** *Hulk $R_1(X)$ on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe. Teisisõnu, nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X)$, mille kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse, on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe.*

Öeldakse, et operaator $S \in \mathcal{L}(X)$ on *ühemõõtmeline,* kui tema väärtuste hulk $\{Sx \colon x \in X\}$ on ruumi X ühemõõtmeline alamruum.

Teoreem 2 (vt. [AP93, teoreem 2.4])**.** *Olgu ruumil X Radon–Nikodymi omadus. Siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ühemõõtmeline operaator $S \in \mathcal{L}(X)$ nii, et $\|S\| < \varepsilon$ ja $T + S \in R(X)$. Niisiis, hulk $R(X)$ on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe, s.t. nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X)$, mis saavutavad oma arvraadiuse, on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe.*

Olgu Y Banachi ruum üle sama korpuse, mis X.

Definitsioon 4. Olgu $S : X \to Y$ pidev lineaarne operaator. Öeldakse, et operaator S *saavutab oma normi,* kui leidub element $x \in B_X$ nii, et $\|S\| = \|Sx\|$.

Oma arvraadiust saavutavate operaatorite uurimine on metoodiliselt sarnane oma normi saavutavate operaatorite uurimisega. Sellele sarnasusele viitab ka sarnasus avaldiste vahel operaatori T arvraadiuse ja normi arvutamiseks: kui $X \neq \{0\}$, siis

$$v(T) = \sup\{|f(Tx)| : x \in X, f \in X^*, \|x\| = \|f\| = f(x) = 1\}$$

ja

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|Tx\| : x \in X, \|x\| = 1\} \\ &= \sup\{|f(Tx)| : x \in X, f \in X^*, \|x\| = \|f\| = 1\}.\end{aligned}$$

Aastal 1963 ilmunud artiklis [L, teoreem 1] tõestas J. Lindenstrauss, et nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$, mille teine kaasoperaator saavutab oma normi, on kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $X \to Y$ ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ kõikjal tihe. Modifitseerides Lindenstraussi argumenti, tõestasid Acosta ja Payá aastal 1989 ilmunud artiklis [AP^{89}], et nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X)$, mille teine kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse, on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe. Teoreemi 1 (s.t. [AP^{93}, teoreem 2.4]) tõestus on omakorda selle tõestuse modifikatsioon. Märgime, et, vahepeal, aastal 1973 ilmunud artiklis [Z, lause 4], oli V. Zizler tõestanud, et nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$, mille kaasoperaator saavutab oma normi, on ruumis $\mathcal{L}(X,Y)$ kõikjal tihe, kusjuures tema tõestus oli jällegi Lindenstraussi ülalmainitud tulemuse tõestuse modifikatsioon.

Veel üks huvitav tähelepanek operaatorite $S \in \mathcal{L}(X)$ arvraadiuste $v(S)$ kohta on järgmine: funktsioon $\mathcal{L}(X) \ni S \mapsto v(S) \in \mathbb{R}$ on poolnorm kõigi pidevate lineaarsete operaatorite $X \to X$ vektorruumil $\mathcal{L}(X)$ (poolnormi aksioomid on siin lihtsasti vahetult kontrollitavad). Seejuures eelnevate valemite põhjal operaatori T arvraadiuse $v(T)$ ja normi $\|T\|$ arvutamiseks

$$v(T) \leqslant \|T\|.$$

Bakalaureusetöö koosneb kolmest paragrahvist.

Paragrahvis 1 esitatakse mõned väljapoole matemaatika bakalaureuseõppekava jäävad analüüsialased mõisted ja tulemused, mis on vajalikud teoreemide 1 ja 2 tõestamiseks. Need mõisted ja tulemused on liigitatud järgmisteks teemadeks, millest igaühele on selles paragrahvis pühendatud omaette jaotis: pideva lineaarse operaatori kaasoperaator ning normeeritud ruumi loomulik sisestus oma teise kaasruuumi; teadmisi üldisest topoloogiast ja topoloogiliste vektorruumide teooriast (topoloogilise ruumi mõiste, perede koonduvus topoloogilises ruumis, osapere mõiste, hulga kompaktsus topoloogilises ruumis, $*$-nõrk topoloogia normeeritud ruumi kaasruumil, Banach–Alaoglu teoreem, Goldstine'i teoreem, funktsiooni ülalt ja alt poolpidevus topoloogilises ruumis); kaasoperaatori arvpiirkond ja arvraadius (tõestatakse, et Banachi ruumis X tegutseva pideva lineaarse operaatori T puhul $V(T^*) \supset V(T)$, s.t. kaasoperaatori T^* arvpiirkond sisaldab operaatori T arvpiirkonda; ning $v(T^*) = v(T)$, s.t. kaasoperaatori T^* arvraadius võrdub operaatori T arvraadiusega); kompleksse normeeritud ruumiga assotsieeruv reaalne ruum; Radon-Nikodymi omadusega Banachi ruumid.

Paragrahvis 2 jaotises 2.2 esitatakse teoreemi 1 üksikasjalik tõestus. Selleks tõestatakse jaotises 2.1 eelnevalt üks abitulemus (lemma 2.2), mis annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et operaatori $S \in \mathcal{L}(X)$ kaasoperaator $S^* \in \mathcal{L}(X^*)$ saavutaks oma arvraadiuse.

Paragrahvis 3 jaotises 3.2 esitatakse teoreemi 2 üksikasjalik tõestus. Selleks näidatakse jaotises 3.1, kuidas taandada küsimus, kas operaator saavutab oma arvraadiuse või mitte, teatavale optimiseerimisülesandele (täpsemalt, küsimusele, kas teatav reaalväärtustega funktsioon Banachi ruumi kinnisel ühikkeral saavutab oma maksimumi või mitte), nii et Radon–Nikodymi omadusega ruumi juhul saab selle küsimuse lahendamisel toetuda C. Stegalli klassikalisele "mittelineaarse optimiseerise printsiibile" [AP^{93}, teoreem 2.1] (vt. käesoleva bakalaureusetöö teoreemi 1.14).

Töös kasutatakse Banachi ruumide teoorias standardseid tähistusi. Normeeritud ruumi X korral tähistavad sümbolid B_X ja S_X vastavalt ruumi X kinnist ühikkera ja ühiksfääri, s.t.

$$B_X = \{x \in X \colon \|x\| \leqslant 1\} \quad \text{ja} \quad S_X = \{x \in X \colon \|x\| = 1\}.$$

Kui Y on normeeritud ruum üle sama korpuse, mis X, siis sümbol $\mathcal{L}(X,Y)$ tähistab kõigi pidevate lineaarsete ruumist X ruumi Y tegutsevate operaatorite hulka. Meenutame, et $\mathcal{L}(X,Y)$ on loomulike tehete suhtes vektorruum ning, veelgi enam, $\mathcal{L}(X,Y)$ on normeeritud ruum järgmise normi suhtes:

$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|Tx\|, \quad \text{kus } T \in \mathcal{L}(X,Y).$$

Seejuures, kui Y on Banachi ruum (s.t. kui Y on täielik), siis ka $\mathcal{L}(X,Y)$ on Banachi ruum (ning juhul $X \neq \{0\}$ on $\mathcal{L}(X,Y)$ Banachi ruum parajasti siis, kui Y on Banachi ruum). Töös kasutatakse tähistust $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X,X)$. Ruumi X kaasruumi tähistatakse sümboliga X^*, s.t. $X^* := \mathcal{L}(X,\mathbb{K})$. Ruumi X *teist kaasruumi,* s.t. kaasruumi X^* kaasruumi tähistatakse sümboliga X^{**}, s.t. $X^{**} := (X^*)^*$.

1 Tarvilikke eelteadmisi

Selles paragrahvis toome välja mõned väljapoole matemaatika bakalaureuseõppekava jäävad analüüsialased mõisted ja tulemused, mis on vajalikud teoreemide 1 ja 2 (vt. Sissejuhatust) tõestamiseks.

1.1 Kaasoperaator ja loomulik sisestus teise kaasruuumi

Olgu X ja Y normeeritud ruumid üle ühe ja sama korpuse $\mathbb{K}$, ning olgu $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Definitsioon 1.1. Operaatorit $T^* : Y^* \to X^*$, mis on defineeritud tingimusega

$$(T^* f)(x) = f(Tx), \quad \text{kus } f \in Y^* \text{ ja } x \in X,$$

nimetatakse operaatori T *kaasoperaatoriks.*

Lause 1.1. *Kaasoperaator $T^* : Y^* \to X^*$ on pidev ja lineaarne, s.t. $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$; seejuures $\|T^*\| = \|T\|$.*

Lause 1.2. *Olgu $x \in X$. Siis funktsionaal*

$$F_x : X^* \ni f \longmapsto f(x) \in \mathbb{K}$$

on pidev ja lineaarne, s.t. $F_x \in X^{**}$; seejuures $\|F_x\| = \|x\|$.

Definitsioon 1.2. Kujutust

$$J : X \ni x \longmapsto F_x \in X^{**}$$

(siin funktsionaal F_x on defineeritud lauses 1.2) nimetatakse ruumi X *kanooniliseks sisestuseks* oma teise kaasruumi.

Kanooniline sisestus J on lineaarne ning lause 1.2 põhjal ka isomeetriline, mistõttu tõlgendatakse ruumi X sageli teise kaasruumi X^{**} alamruumina, samastades elemendid $x \in X$ vastavate kujutistega $Jx \in X^{**}$.

1.2 Teadmisi üldisest topoloogiast ja topoloogiliste vektorruumide teooriast

Selles jaotises me defineerime mõned üldises topoloogias kasutatavad mõisted ja sõnastame töös vajaminevad tulemused nende kohta.

Kõikjal selles jaotises on X mittetühi hulk.

1.2.1 Topoloogilise ruumi mõiste. Punkti ümbrused ja hulga sulund topoloogilises ruumis

Definitsioon 1.3. Öeldakse, et hulga X alamhulkade kogum τ on *topoloogia* (hulgal X), kui on täidetud järgmised tingimused 1°–3°:

1° $\varnothing, X \in \tau$;

2° mistahes alamkogumi $\mathcal{U} \subset \tau$ korral $\bigcup\limits_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau$;

3° mistahes $U, V \in \tau$ korral $U \cap V \in \tau$.

Hulka X koos topoloogiaga τ (ehk paari (X, τ)) nimetatakse *topoloogiliseks ruumiks*. Topoloogiasse τ kuuluvaid hulki nimetatakse *τ-lahtisteks hulkadeks* või lihtsalt *lahtisteks hulkadeks*.

Definitsioon 1.4. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum. τ-lahtiste hulkade täiendhulki nimetatakse *τ-kinnisteks hulkadeks* või lihtsalt *kinnisteks hulkadeks*.

Meenutame, et iga norm vektorruumil indutseerib loomulikul viisil kauguse (meetrika) sellel vektorruumil; teisisõnu, iga normeeritud ruum on ka meetriline ruum. Samuti on teada, et meetrilise ruumi lahtiste hulkade kogum rahuldab definitsiooni 1.3 tingimusi 1°–3°. Niisiis, normeeritud ruumi korral saame rääkida selle ruumi topoloogiast.

Definitsioon 1.5. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ja olgu $x \in X$. Punkti x *ümbruseks* nimetetakse mistahes hulka $G \subset X$, mille korral leidub $U \in \tau$ nii, et

$$x \in U \subset G.$$

Definitsioon 1.6. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ning olgu $A \subset X$. Hulga A *sulundiks* nimetatakse kõigi hulka A sisaldavate kinniste hulkade ühisosa. Hulga A sulundit tähistatakse sümboliga $\overline{A}$.

Definitsioon 1.7. Olgu $A, B \subset X$. Öeldakse, et hulk A on hulgas B *tihe*, kui $B \subset \overline{A}$. Kui A on hulgas X tihe, siis öeldakse, et A on *kõikjal tihe.*

1.2.2 Pere koonduvus topoloogilises ruumis

Topoloogiliste ruumide teoorias ei etenda koonduvad jadad kaugeltki nõnda olulist rolli kui meetriliste ruumide teoorias. Koonduvate jadade poolt meetriliste ruumide teoorias etendatavaga võrreldavat rolli etendavad topoloogiliste ruumide teoorias *koonduvad pered.*

Definitsioon 1.8. Olgu $\mathcal{A}$ mittetühi hulk ning olgu $\preccurlyeq$ osalise järjestuse seos hulgas $\mathcal{A}$. Hulka $\mathcal{A}$ koos seosega $\preccurlyeq$ (ehk paari $(\mathcal{A}, \preccurlyeq)$) nimetatakse *suunatud hulgaks*, kui mistahes elementide $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ korral leidub element $\gamma \in \mathcal{A}$ selliselt, et $\alpha \preccurlyeq \gamma$ ja $\beta \preccurlyeq \gamma$.

Definitsioon 1.9. Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ning olgu $\mathcal{A}$ suunatud hulk. Mistahes kujutust hulgast $\mathcal{A}$ hulka X nimetatakse *pereks* ruumis X. Kui $f : \mathcal{A} \to X$ on pere, kusjuures iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral $f(\alpha) = x_\alpha$, siis seda pere tähistatakse ka sümboliga $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ või lihtsalt (x_α). Elemente x_α, kus $\alpha \in \mathcal{A}$, nimetatakse selle pere *liikmeteks*. Elementidele $\alpha \in \mathcal{A}$ viidatakse kui selle pere liikmete *indeksitele.*

Siin paneme tähele, et kui mingi pere puhul on vastavaks suunatud hulgaks naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$ (oma loomuliku järjestuse suhtes), siis see pere on jada. Teisisõnu, pered on jadade üldistus.

Definitsioon 1.10. Öeldakse, et pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ topoloogilises ruumis (X,τ) *koondub* punktiks $x \in X$ (topoloogias τ), kui punkti x iga ümbruse U korral leidub indeks $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ nii, et

$$\alpha_0 \preccurlyeq \alpha \quad \Longrightarrow \quad x_\alpha \in U.$$

Sel juhul öeldakse ka, et x on pere (x_α) *piirväärtus* ja kirjutatakse $x_\alpha \xrightarrow[\alpha\in\mathcal{A}]{} x$ või $x_\alpha \underset{\alpha}{\to} x$ või lihtsalt $x_\alpha \to x$.

Märkus 1.1. Perel topoloogilises ruumis võib üldjuhul eksisteerida ka rohkem kui üks piirväärtus.

Järgnev lause kirjeldab etteantud hulga A sulundi $\overline{A}$ punkte topoloogilises ruumis.

Lause 1.3. *Olgu $A \subset X$ ja $x \in X$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) $x \in \overline{A}$;

(ii) leidub hulga A elementide pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, mille piirelement on x, s.t. $x_\alpha \to x$.

1.2.3 Osapere mõiste

Olgu (X,τ) topoloogiline ruum.

Definitsioon 1.11 (vt. nt. [M, lk. 148, definitsioon 2.1.26])**.** Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ ja $(y_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ pered ruumis X. Öeldakse, et pere $(y_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ on pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ *osapere*, kui leidub kujutus $\pi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ nii, et

1° π on *monotoonne,* s.t. kui $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{B}$ ja $\beta_1 \preccurlyeq \beta_2$, siis $\pi(\beta_1) \preccurlyeq \pi(\beta_2)$, 2° iga $\beta \in \mathcal{B}$ korral $y_\beta = x_{\pi(\beta)}$,

3° $\pi(\mathcal{B})$ on *kofinaalne* hulgas $\mathcal{A}$, s.t. iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral leidub $\beta \in \mathcal{B}$ nii, et $\alpha \preccurlyeq \pi(\beta)$.

Lause 1.4. *Olgu $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ pere ruumis X ja olgu $x \in X$. Kui pere $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ koondub elemendiks x ruumis X, siis ka selle pere mis tahes osapere koondub selleks elemendiks ruumis X.*

1.2.4 Hulga kompaktsus topoloogilises ruumis

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ning olgu $K \subset X$.

Definitsioon 1.12. Olgu $\mathcal{G} \subset \tau$ (s.t. $\mathcal{G}$ on mingi ruumi X lahtiste alamhulkade kogum). Öeldakse, et kogum $\mathcal{G}$ on hulga K *lahtine kate,* kui $\bigcup_{U\in\mathcal{G}} U \supset K$. Kui seejuures mingi alamkogum $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ on samuti hulga K lahtine kate, siis sellisele kattele $\mathcal{D}$ viidatakse kui katte $\mathcal{G}$ *alamkattele.*

Definitsioon 1.13. Öeldakse, et

- K on ruumi X *kompaktne* alamhulk (või *kompaktne* hulk ruumis X), kui igal tema lahtisel kattel leidub lõplik alamkate;
- X on *kompaktne* topoloogiline ruum, kui ta on iseenda kompaktne alamhulk, s.t. igal tema lahtisel kattel leidub lõplik alamkate.

Teoreem 1.5. *Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) K on ruumi X kompaktne alamhulk;

(ii) igal hulga K elementide perel leidub osapere, mis koondub mingiks hulga K punktiks.

Definitsioon 1.14. Olgu (X, τ_X) ja (Y, τ_Y) topoloogilised ruumid ning olgu $f : X \to Y$. Öeldakse, et kujutus f on *pidev*, kui $f^{-1}(V) \in \tau_X$ iga $V \in \tau_Y$ korral.

Lause 1.6. *Olgu* (X, τ_X) *ja* (Y, τ_Y) *topoloogilised ruumid ning olgu* $f : X \to Y$ *pidev kujutus. Siis iga kompaktse hulga* K *korral ruumis* X *on kujutishulk* $f(K)$ *kompaktne hulk ruumis* Y*.*

1.2.5 $*$-nõrk topoloogia normeeritud ruumi kaasruumil. Banach–Alaoglu teoreem

Lause 1.7 (vt. nt. [M, lk. 203 ja 204, laused 2.4.1 ja 2.4.4])**.** *Olgu iga* $i \in I$ *korral* Y_i *topoloogiline ruum ja olgu* $f_i : X \to Y_i$*, kus* I *on mingi mittetühi (indeksite) hulk. Siis hulgal* X *leidub vähim topoloogia, mille suhtes iga kujutus* f_i*, kus* $i \in I$*, on pidev. Teisisõnu, leidub topoloogia* τ_I *hulgal* X *nii, et*

1. *iga kujutus* f_i*, kus* $i \in I$*, on pidev;*
2. *kui* τ *on topoloogia hulgal* X*, mille korral iga kujutus* f_i*, kus* $i \in I$*, on pidev, siis* $\tau_I \subset \tau$*.*

Seejuures, kui (x_α) *on pere ruumis* X *ja* $x \in X$*, siis* $x_\alpha \to x$ *topoloogias* τ_I *parajasti siis, kui* $f_i(x_\alpha) \to f_i(x)$ *ruumis* Y_i *iga* $i \in I$ *korral.*

Definitsioon 1.15. Olgu Z normeeritud ruum. Vähimat topoloogiat kaasruumil Z^*, mille suhtes iga funktsionaal

$$Z^* \ni z^* \longmapsto z^*(z) \in \mathbb{K}, \qquad \text{kus } z \in Z,$$

on pidev, nimetatakse $*$-*nõrgaks topoloogiaks* ja tähistatakse sümboliga w^*.

Lause 1.7 sõnaga "Seejuures" algava väite põhjal tähendab pere (z^*_α) koonduvus funktsionaaliks z^* kaasruumi Z^* $*$-nõrgas topoloogias, et

$$z^*_\alpha(z) \to z^*(z) \qquad \text{iga } z \in Z \text{ korral.}$$

Teoreem 1.8 (Banach–Alaoglu teoreem; vt. nt. [M, lk. 229, teoreem 2.6.18])**.** *Olgu* X *normeeritud ruum. Siis kinnine ühikkera* B_{X^*} *on* $*$*-nõrgalt kompaktne.*

1.2.6 Goldstine'i teoreem

Teoreem 1.9 (Goldstine'i teoreem; vt. nt. [M, lk. 232, teoreem 2.6.26])**.** *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $J : X \to X^{**}$ kanooniline sisestus. Siis kujutishulk $J(B_X)$ on ühikkeras $B_{X^{**}}$ $*$-nõrgalt tihe.*

Järeldus 1.10. *Olgu X normeeritud ruum ning olgu $J : X \to X^{**}$ kanooniline sisestus. Siis kujutishulk $J(S_X)$ on ühiksfääris $S_{X^{**}}$ $*$-nõrgalt tihe.*

Tõestus. Olgu $F \in S_{X^{**}}$. Lause 1.3 põhjal piisab järelduse tõestuseks leida selline pere (x_α) ruumis X, et iga indeksi α korral $\|x_\alpha\| = 1$ ning $Jx_\alpha \xrightarrow{w^*} F$ (teises kaasruumis X^{**}). Goldstine'i teoreemi 1.9 põhjal leidub pere (z_α) ühikkeras B_X nii, et $Jz_\alpha \xrightarrow{w^*} F$. Paneme tähele, et $\|z_\alpha\| \to 1$. Tõepoolest, iga $\alpha \in \mathcal{A}$ korral $\|z_\alpha\| \leqslant 1$, sest pere (z_α) elemendid on valitud ühikkerast B_X. Olgu $\varepsilon > 0$. Siis leidub selline $f \in B_{X^*}$, et

$$\lim_\alpha |f(z_\alpha)| = \lim_\alpha |(Jz_\alpha)(f)| = |F(f)| > \|F\| - \varepsilon.$$

Pere (z_α) indeksite hulgas leidub selline α_ε, et

$$1 - 2\varepsilon = \|F\| - 2\varepsilon < |F(f)| - \varepsilon < |f(z_\alpha)| \leqslant \|z_\alpha\| \leqslant 1 \qquad \text{alati, kui } \alpha_\varepsilon \preccurlyeq \alpha;$$

niisiis $\|z_\alpha\| \to 1$. Defineerime iga α korral $x_\alpha = \frac{z_\alpha}{\|z_\alpha\|}$. Siis iga α korral $\|x_\alpha\| = 1$, kusjuures $Jx_\alpha \xrightarrow{w^*} F$. □

1.2.7 Funktsiooni ülalt ja alt poolpidevus topoloogilises ruumis

Olgu (X, τ) topoloogiline ruum ning olgu $f \colon X \to \mathbb{R}$.

Definitsioon 1.16. Öeldakse, et funktsioon f on

- *ülalt poolpidev,* kui iga arvu $a \in \mathbb{R}$ korral on hulk $\{x \in X \colon f(x) < a\}$ lahtine;

- *alt poolpidev,* kui iga arvu $a \in \mathbb{R}$ korral on hulk $\{x \in X \colon f(x) > a\}$ lahtine.

Märkus 1.2. Pole raske näidata, et *funktsioon f on pidev parajasti siis, kui ta on nii ülalt kui ka alt poolpidev.*

1.3 Kaasoperaatori arvpiirkond ja arvraadius

Lause 1.11. *Olgu X reaalne või kompleksne Banachi ruum ning olgu $T \in \mathcal{L}(X)$. Siis*

(a) $V(T^*) \supset V(T)$, s.t. kaasoperaatori T^* arvpiirkond sisaldab operaatori T arvpiirkonda;

(b) $v(T^*) = v(T)$, s.t. kaasoperaatori T^* arvraadius võrdub operaatori T arvraadiusega.

Lause 1.11 väite *(b)* tõestus toetub järgnevale optimaalsele versioonile Bishop–Phelps–Bollobási teoreemist.

Teoreem 1.12 (vt. nt. [CKMMS, lause 1.2])**.** *Olgu X Banachi ruum ning olgu $0 < \varepsilon < 2$. Olgu $x \in B_X$ ja $f \in B_{X^*}$ sellised, et $\operatorname{Re} f(x) > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$. Siis leiduvad $x_0 \in S_X$ ja $f_0 \in S_{X^*}$ selliselt, et $f_0(x_0) = 1$ ning $\|f - f_0\| < \varepsilon$ ja $\|x - x_0\| < \varepsilon$.*

Lause 1.11 tõestus. (a). Olgu $\upsilon \in V(T)$. Siis leiduvad sellised $x \in X$ ja $f \in X^*$, et $\|x\| = \|f\| = f(x) = 1$ ja $f(Tx) = \upsilon$ ning seega

$$(Jx)(T^*f) = (T^*f)(x) = f(Tx) = \upsilon,$$

kus $J : X \to X^{**}$ on kanooniline sisestus. Kuna

$$\|Jx\| = \|x\| = \|f\| = 1 = f(x) = (Jx)(f),$$

siis $\upsilon \in V(T^*)$ ning seega $V(T) \subset V(T^*)$.

(b). Võrratus $v(T^*) \geqslant v(T)$ järeldub väitest *(a)*. Lause tõestuseks jääb näidata, et $v(T^*) \leqslant v(T)$; seejuures võime üldisust kitsendamata eeldada, et $\|T\| = \|T^*\| = 1$. Olgu $f \in X^*$ ja $F \in X^{**}$ sellised, et $\|f\| = \|F\| = F(f) = 1$, ning olgu $0 < \varepsilon < 2$. Goldstine'i teoreemi 1.9 põhjal leidub $x \in B_X$ selliselt, et

$$F(f) - \operatorname{Re} f(x) \leqslant |F(f) - \operatorname{Re} f(x)| \leqslant |F(f) - f(x)| < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ja

$$|F(T^*f)| - |f(Tx)| \leqslant |F(T^*f) - f(Tx)| < \varepsilon.$$

Siit saame, et

$$1 - \frac{\varepsilon^2}{2} < \operatorname{Re} f(x) \tag{1.1}$$

ja

$$|F(T^*f)| \leqslant |f(Tx)| + \varepsilon.$$

Võrratuse (1.1) ning Bishop–Phelps–Bollobási teoreemi 1.12 põhjal leiduvad $x_0 \in X$ ja $f_0 \in X^*$ selliselt, et $\|x_0\| = \|f_0\| = f_0(x_0) = 1$ ning $\|x - x_0\| < \varepsilon$ ja $\|f - f_0\| < \varepsilon$. Seega

$$\begin{aligned}
|F(T^*f)| &\leqslant |f(Tx)| + \varepsilon \\
&\leqslant |f_0(Tx)| + |(f - f_0)(Tx)| + \varepsilon \\
&\leqslant |f_0(Tx_0)| + \big|f_0\big(T(x - x_0)\big)\big| + \big|(f - f_0)(Tx)\big| + \varepsilon \\
&\leqslant |f_0(Tx_0)| + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon \\
&\leqslant v(T) + 3\varepsilon,
\end{aligned}$$

millest $v(T^*) \leqslant v(T) + 3\varepsilon$ ning järelikult $v(T^*) \leqslant v(T)$, nagu soovitud. □

1.4 Kompleksse normeeritud ruumiga assotsieeruv reaalne ruum

Selle jaotise materjal on reprodutseeritud konspektist [P, lk. 34–35, § 9.4].

Olgu X kompleksne vektorruum (s.t. vektorruum üle korpuse $\mathbb{C}$). Siis X on loomulikul viisil tõlgendatav reaalse vektorruumina, defineerides seal liitmise ja reaalarvuga korrutamise nagu kompleksse ruumi X puhul – kompleksarvude korpus sisaldab reaalarvude korpuse, seega on elemendi korrutamine reaalarvuga ruumis X defineeritud. Ruumi X, tõlgendatuna sel viisil reaalse ruumina, nimetatakse (kompleksse) ruumiga X *assotsieeruvaks reaalseks (vektor)ruumiks* ja tähistatakse sümboliga $X_{\mathbb{R}}$. Rõhutame, et kui $X \neq \{0\}$, siis ruumid X ja $X_{\mathbb{R}}$ on algebralises mõttes erinevad: näiteks kui $x \neq 0$, siis elemendid x ja ix on ruumis X lineaarselt sõltuvad, ruumis $X_{\mathbb{R}}$ aga lineaarselt sõltumatud.

Öeldakse, et funktsionaal $u\colon X \to \mathbb{R}$ on *reaallineaarne,* kui mis tahes $x, y \in X$ ja $\alpha \in \mathbb{R}$ korral

1° $u(x+y) = u(x) + u(y)$,

2° $u(\alpha x) = \alpha u(x)$.

Teisisõnu, reaallineaarseteks funktsionaalideks kompleksel vektorruumil X nimetatakse lineaarseid funktsionaale assotsieeruval reaalsel ruumil $X_{\mathbb{R}}$.

Lineaarseid funktsionaale $X \to \mathbb{C}$ nimetame edaspidi ka *kompleksslineaarseteks* funktsionaalideks.

Komplekslineaarse funktsionaali $f\colon X \to \mathbb{C}$ reaal- ja imaginaarosa $\operatorname{Re} f$ ja $\operatorname{Im} f$ defineeritakse loomulikul viisil:

$$(\operatorname{Re} f)(x) = \operatorname{Re}\bigl(f(x)\bigr) \quad \text{ja} \quad (\operatorname{Im} f)(x) = \operatorname{Im}\bigl(f(x)\bigr), \quad \text{kus } x \in X.$$

Edasises jätame avaldistes $\operatorname{Re} f(x)$ ja $\operatorname{Im} f(x)$ täiendavad sulud panemata, sest sõltumata nende asukohast on avaldise tähendus sama.

Kui X on normeeritud ruum, siis ka $X_{\mathbb{R}}$ on normeeritud ruum sama normi suhtes. (Juhime tähelepanu, et meetriliste ruumidena on X ja $X_{\mathbb{R}}$ identsed, kuid normeeritud ruumidena juhul $X \neq \{0\}$ mitte, sest nad on vektorruumidena erinevad.)

Järgnev lause selgitab pideva komplekslineaarse funktsionaali ning tema reaal- ja imaginaarosa vahekorda.

Lause 1.13 (vt. nt. [M, lk. 72, lause 1.9.3]). *Olgu X kompleksne vektorruum.*

(a) Olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $\operatorname{Re} f\colon X \to \mathbb{R}$ *on reaallineaarne. Seejuures*

$$f(x) = \operatorname{Re} f(x) - i \operatorname{Re} f(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(b) Olgu $u\colon X \to \mathbb{R}$ reaallineaarne funktsionaal. Siis leidub parajasti üks komplekslineaarne funktsionaal $f\colon X \to \mathbb{C}$ nii, et $u = \operatorname{Re} f$. Seejuures

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \textit{iga } x \in X \textit{ korral.}$$

(c) Olgu X normeeritud ruum ning olgu $f\colon X \to \mathbb{C}$ komplekslineaarne funktsionaal. Siis $f \in X^*$ parajasti siis, kui $\operatorname{Re} f \in (X_{\mathbb{R}})^*$. *Seejuures* $\|f\| = \|\operatorname{Re} f\|$.

1.5 Radon–Nikodymi omadusega Banachi ruumid

Olgu X Banachi ruum.

Definitsioon 1.17 (vt. nt. [AP^{93}, teoreemile 2.1 eelnev lõik]). Olgu $C \subset X$ ning olgu $\phi : C \to \mathbb{R}$ ülalt tõkestatud funktsioon. Öeldakse, et funktsioon ϕ *eksponeerib tugevalt* hulka C, kui see funktsioon saavutab oma maksimumi mingis punktis $x \in C$, kusjuures iga jada (x_n) korral hulgas C, mis rahuldab tingimust $\phi(x_n) \to \phi(x)$, kehtib $x_n \to x$.

Definitsioon 1.18 (vt. nt. [AP^{93}, teoreemile 2.1 eelnev lõik]). Olgu X reaalne Banachi ruum ning olgu $B \subset X$ kinnine tõkestatud kumer alamhulk. Öeldakse, et hulk B on *Radon–Nikodymi hulk,* kui iga kinnise alamhulga $C \subset B$ korral hulka C tugevalt eksponeerivate funktsionaalide hulk kaasruumis X^* on kõikjal tihe selles kaasruumis.

Kompleksse Banachi ruumi kinnise tõkestatud kumera alamhulga puhul öeldakse, et see hulk on *Radon–Nikodymi hulk,* kui see hulk on Radon–Nikodymi hulk vaadeldava Banachi ruumiga assotsieeruvas reaalses ruumis.

Öeldakse, et ruumil X on Radon–Nikodymi omadus, kui iga tema kinnine tõkestatud kumer alamhulk on Radon–Nikodymi hulk.

Järgnevale C. Stegalli klassikalisele tulemusele viidatakse kui tema "mittelineaarse optimiseerise printsiibile".

Teoreem 1.14 (vt. nt. [AP^{93}, teoreem 2.1]). *Olgu X reaalne Banachi ruum, olgu $B \subset X$ Radon–Nikodymi hulk ning olgu $\phi : B \to \mathbb{R}$ ülalt tõkestatud ülalt poolpidev funktsioon. Siis hulk*

$$\{f \in X^* : \textit{funktsioon } f + \phi \textit{ eksponeerib tugevalt hulka } B\}$$

on kõikjal tihe G_δ kaasruumis X^*.

Järgnev tulemus on vahetu järeldus eelnevast teoreemist 1.14 ja lausest 1.13.

Järeldus 1.15. *Olgu X (reaalne või kompleksne) Banachi ruum, olgu $B \subset X$ Radon–Nikodymi hulk ning olgu $\phi : B \to \mathbb{R}$ ülalt tõkestatud ülalt poolpidev funktsioon. Siis hulk*

$$\{f \in X^* : \textit{funktsioon } \operatorname{Re} f + \phi \textit{ eksponeerib tugevalt hulka } B\}$$

on kõikjal tihe G_δ kaasruumis X^*.

2 Operaatorid, mille kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse

Kõikjal selles paragrahvis on X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Selles paragrahvis me esitame teoreemi 1 tõestuse. Parema jälgitavuse huvides formuleerime me selle teoreemi siinkohal uuesti.

Teoreem 2.1 (sama, mis teoreem 1 sissejuhatuses; vt. [AP93, teoreem 1.2])**.** *Hulk $R_1(X)$ on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe. Teisisõnu, nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X)$, mille kaasoperaator saavutab oma arvraadiuse, on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe.*

2.1 Arvraadiuse saavutamise kriteerium

Teoreemi 2.1 tõestamisel on mugav toetuda järgnevale lemmale, mis annab tarviliku ja piisava tingimuse selleks, et operaatori $S \in \mathcal{L}(X)$ kaasoperaator $S^* \in \mathcal{L}(X^*)$ saavutaks oma arvraadiuse.

Lemma 2.2 (vt. [AP93, lemma 1.1])**.** *Olgu $S \in \mathcal{L}(X)$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) kaasoperaator S^* saavutab oma arvraadiuse;

(ii) leiduvad jadad (x_n) ja (f_n) vastavalt ruumis X ja kaasruumis X^* ning positiivsete reaalarvude jadad (δ_n) ja (ε_n) selliselt, et

(a) $\|x_n\| = \|f_n\| = 1$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral,

(b) $\delta_n \to 0$ ja $\dfrac{\varepsilon_n}{\delta_n} \to 0$,

(c) kõikide $n, k \in \mathbb{N}$ korral

$$1 + \delta_n v(S) \leqslant |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n |f_{n+k}(Sx_n)| + \varepsilon_n.$$

Tõestus. $(i) \Rightarrow (ii)$. Olgu $F \in X^{**}$ ja $f \in X^*$ sellised, et $\|F\| = \|f\| = F(f) = 1$ ja $|F(S^*f)| = v(S^*) = v(S)$, ning olgu (δ_n) ja (ε_n) suvalised positiivsete reaalarvude jadad, mis rahuldavad tingimust *(b)*. Defineerime iga $n \in \mathbb{N}$ korral $f_n = f$. Järelduse 1.10 põhjal leidub iga $n \in \mathbb{N}$ korral element $x_n \in S_X$ selliselt, et

$$|F(f)| - |f(x_n)| \leqslant |F(f) - f(x_n)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2}$$

ja

$$|F(S^*f)| - |f(Sx_n)| \leqslant |F(S^*f) - f(Sx_n)| \leqslant \frac{\varepsilon_n}{2\delta_n}.$$

Siit saame, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$1 \leqslant |f(x_n)| + \frac{\varepsilon_n}{2}$$

ja

$$v(S) \leqslant |f(Sx_n)| + \frac{\varepsilon_n}{2\delta_n},$$

järelikult

$$1 + \delta_n v(S) \leqslant |f(x_n)| + \delta_n |f(Sx_n)| + \varepsilon_n,$$

seega kehtib *(c)*.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Banach–Alaoglu teoreemi 1.8 ja teoreemi 1.5 põhjal leiduvad jadadel (x_n) ja (f_n) osapered, mis koonduvad vastavalt mingiteks funktsionaalideks $F \in B_{X^{**}}$ ja $f \in B_{X^*}$ vastavalt ruumide X^{**} ja X^* $*$-nõrgas topoloogias. Tingimuste *(c)* ja *(a)* põhjal kõikide $n, k \in \mathbb{N}$ korral

$$1 + \delta_n v(S) \leqslant |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n \|S\| + \varepsilon_n,$$

seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$1 + \delta_n v(S) \leqslant |f(x_n)| + \delta_n \|S\| + \varepsilon_n,$$

millest tingimuse *(b)* põhjal saame $1 \leqslant |F(f)|$. Siit järeldub, et $\|F\| =$

$\|f\| = |F(f)| = 1$ ja seega $F(S^*f)/F(f) \in V(S^*)$. Kõikide $n, k \in \mathbb{N}$ korral $|f_{n+k}(x_n)| \leqslant 1$, järelikult tingimuse *(c)* põhjal

$$v(S) \leqslant |f_{n+k}(Sx_n)| + \frac{\varepsilon_n}{\delta_n},$$

seega iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$v(S) \leqslant |f(Sx_n)| + \frac{\varepsilon_n}{\delta_n},$$

millest saame

$$v(S) \leqslant |F(S^*f)| = \frac{|F(S^*f)|}{|F(f)|}.$$

Seega kaasoperaator S^* saavutab oma arvraadiuse. □

2.2 Teoreemi 1 tõestus

Teoreemi 1 (ehk teoreemi 2.1) tõestus. Olgu $T \in \mathcal{L}(X)$ selline, et $\|T\| = 1$, ning olgu $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Valime kahanevad positiivsete reaalarvude jadad (δ_n) ja (α_n) selliselt, et

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\delta_n + 2\delta_n^2) < \varepsilon, \qquad \frac{1}{\delta_n^2}\sum_{i=n+1}^{\infty}(\delta_i + 2\delta_i^2) \to 0, \qquad \frac{\alpha_n}{\delta_n^2} \to 0 \tag{2.1}$$

(me võime võtta näiteks $\delta_n = \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot 2^{n!}}$ ja $\alpha_n = \delta_n^3$). Tõestuse põhiidee on järgmine. Me konstrueerime induktiivselt operaatorite jada (T_n) ruumis $\mathcal{L}(X)$ selliselt, et see jada on Cauchy jada ning seega koonduv ruumis $\mathcal{L}(X)$, kusjuures selle jada piirväärtus $S \in \mathcal{L}(X)$ rahuldab tingimust $\|S - T\| < \varepsilon$ ning lemma 2.2 väite *(ii)* tingimusi, mistõttu selle lemma põhjal saavutab kaasoperaator S^* arvraadiuse.

Defineerime $T_1 = T$ ning eeldame seejärel, et mingi $n \in \mathbb{N}$ korral on operaator T_n defineeritud, kuid operaator T_{n+1} on veel defineerimata. Valime $x_n \in X$ ja $f_n \in X^*$ selliselt, et

$$\|f_n\| = \|x_n\| = f_n(x_n) = 1 \qquad \text{ja} \qquad |f_n(T_nx_n)| \geqslant v(T_n) - \alpha_n, \tag{2.2}$$

ning olgu arv $\lambda_n \in \mathbb{K}$ selline, et $|\lambda_n| = 1$ ja

$$f_n(T_n x_n) = \lambda_n |f_n(T_n x_n)|. \tag{2.3}$$

Defineerime operaatori $T_{n+1} : X \to X$ tingimusega

$$T_{n+1}x = T_n x + \lambda_n \delta_n f_n(x) x_n + \delta_n^2 f_n(x) T_n x_n \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral;} \tag{2.4}$$

siis ilmselt $T_{n+1} \in \mathcal{L}(X)$.

Näitame induktsiooni abil, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|T_{n+1}\| \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} (\delta_i + 2\delta_i^2) \leqslant 2. \tag{2.5}$$

Kui $n = 1$, siis võrratused (2.5) kehtivad, sest

$$\begin{aligned} \|T_2\| &= \|T_1 + \lambda_1 \delta_1 f_1(\cdot) x_1 + \delta_1^2 f_1(\cdot) T_1 x_1\| \\ &\leqslant 1 + \delta_1 + 2\delta_1^2 \leqslant 2. \end{aligned}$$

Eeldame nüüd, et võrratused (2.5) kehtivad mingi $n \in \mathbb{N}$ korral, ja näitame, et sel juhul need kehtivad ka siis, kui seal asendada arv n arvuga $n + 1$:

$$\begin{aligned} \|T_{n+2}\| &= \|T_{n+1} + \lambda_{n+1} \delta_{n+1} f_{n+1}(\cdot) x_{n+1} + \delta_{n+1}^2 f_{n+1}(\cdot) T_{n+1} x_{n+1}\| \\ &\leqslant \|T_{n+1}\| + \delta_{n+1} + \delta_{n+1}^2 \|T_{n+1}\| \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{n} (\delta_i + 2\delta_i^2) + \delta_{n+1} + 2\delta_{n+1}^2 \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i + 2\delta_i^2) \leqslant 2. \end{aligned}$$

Niisiis võrratused (2.5) kehtivad iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Tingimusest (2.4) järeldub nüüd, et iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\|T_{n+1} - T_n\| = \|\lambda_n \delta_n f_n(\cdot) x_n + \delta_n^2 f_n(\cdot) T_n x_n\| \leqslant \delta_n + 2\delta_n^2.$$

Seega kõikide $n, k \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}\|T_{n+k} - T_n\| &= \|T_{n+k} - T_{n+k-1} + T_{n+k-1} - T_{n+k-2} + \cdots + T_{n+1} - T_n\| \\ &\leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} \|T_{i+1} - T_i\| \leqslant \sum_{i=n}^{n+k-1} (\delta_i + 2\delta_i^2) \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} (\delta_i + 2\delta_i^2). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tingimuste (2.6) ja (2.1) põhjal on jada (T_n) Cauchy jada ruumis $\mathcal{L}(X)$, seega see jada koondub normi järgi mingiks operaatoriks $S \in \mathcal{L}(X)$. Tingimusest (2.6) järeldub, et

$$\|S - T_n\| \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} (\delta_i + 2\delta_i^2) < \varepsilon \qquad \text{iga } n \in \mathbb{N} \text{ korral} \tag{2.7}$$

ning seega $\|S - T\| < \varepsilon$.

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et sobivalt valitud jada (ε_n) korral kehtivad lemma 2.2 väite (ii) tingimused *(b)* ja *(c)*. Selleks paneme kõigepealt tähele, et kui $f \in X^*$ ja $x \in X$ on sellised, et $\|f\| = \|x\| = 1$, siis kõikide $i, j \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} |f(T_i x)| &= |f(T_j x) + f(T_i x) - f(T_j x)| \\ &\leqslant |f(T_j x)| + \big|f\big((T_i - T_j)x\big)\big| \\ &\leqslant |f(T_j x)| + \|T_i - T_j\| \end{aligned} \tag{2.8}$$

ning järelikult

$$v(T_i) \leqslant v(T_j) + \|T_i - T_j\|. \tag{2.9}$$

Kasutades tingimusi (2.2), (2.8), (2.9) ja (2.6) ning jada (α_n) kahanevust, saame kõikide $n, k \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned}
|f_{n+k}(T_{n+1}x_{n+k})| &\geqslant |f_{n+k}(T_{n+k}x_{n+k})| - \|T_{n+1} - T_{n+k}\| \\
&\geqslant v(T_{n+k}) - \alpha_{n+k} - \|T_{n+1} - T_{n+k}\| \\
&\geqslant v(T_{n+1}) - \alpha_{n+k} - 2\|T_{n+1} - T_{n+k}\| \\
&\geqslant v(T_{n+1}) - \alpha_n - 2\sum_{i=n+1}^{\infty}(\delta_i + 2\delta_i^2).
\end{aligned}$$

Tähistame $\rho_n = \alpha_n + 2\sum_{i=n+1}^{\infty}(\delta_i + 2\delta_i^2)$; siis

$$\begin{aligned}
v(T_{n+1}) &\leqslant |f_{n+k}(T_{n+1}x_{n+k})| + \rho_n \\
&= |f_{n+k}(T_nx_{n+k}) + \lambda_n\delta_n f_n(x_{n+k})f_{n+k}(x_n) \\
&\qquad\qquad + \delta_n^2 f_n(x_{n+k})f_{n+k}(T_nx_n)| + \rho_n \\
&\leqslant |f_{n+k}(T_nx_{n+k})| + \delta_n|f_{n+k}(x_n)| + \delta_n^2|f_{n+k}(T_nx_n)| + \rho_n \\
&\leqslant v(T_n) + \delta_n|f_{n+k}(x_n)| + \delta_n^2|f_{n+k}(T_nx_n)| + \rho_n.
\end{aligned}$$

Teiselt poolt, tingimusi (2.3) ja (2.2) kasutades saame

$$\begin{aligned}
v(T_{n+1}) &\geqslant |f_n(T_{n+1}x_n)| = |f_n(T_nx_n) + \lambda_n\delta_n + \delta_n^2 f_n(T_nx_n)| \\
&= (1 + \delta_n^2)|f_n(T_nx_n)| + \delta_n \\
&\geqslant (1 + \delta_n^2)\big(v(T_n) - \alpha_n\big) + \delta_n.
\end{aligned}$$

Eelnevaid kahte võrratusteahelat kombineerides saame

$$(1 + \delta_n^2)\big(v(T_n) - \alpha_n\big) + \delta_n \leqslant v(T_n) + \delta_n|f_{n+k}(x_n)| + \delta_n^2|f_{n+k}(T_nx_n)| + \rho_n,$$

millest

$$1 + \delta_n v(T_n) \leqslant |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n|f_{n+k}(T_nx_{n+k})| + \frac{1}{\delta_n}(\rho_n + \alpha_n + \alpha_n\delta_n^2). \quad (2.10)$$

Kuna

$$
\begin{aligned}
1 + \delta_n v(S) &\leqslant 1 + \delta_n v(T_n) + \delta_n v(S - T_n) \\
&\leqslant 1 + \delta_n v(T_n) + \delta_n \|S - T_n\|,
\end{aligned}
$$

siis arvestades, et

$$
\begin{aligned}
\bigl|f_{n+k}(T_n x_{n+k})\bigr| &\leqslant |f_{n+k}(Sx_{n+k})| + \bigl|f_{n+k}\bigl((T_n - S)x_{n+k}\bigr)\bigr| \\
&\leqslant |f_{n+k}(Sx_{n+k})| + \|S - T_n\|,
\end{aligned}
$$

järeldub võrratusest (2.10) ja (2.7), et

$$
\begin{aligned}
1 + \delta_n v(S) \leqslant{} & |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n |f_{n+k}(Sx_{n+k})| \\
& \qquad + 2\delta_n \|S - T_n\| + \frac{1}{\delta_n}(\rho_n + \alpha_n + \alpha_n \delta_n^2) \\
\leqslant{} & |f_{n+k}(x_n)| + \delta_n |f_{n+k}(Sx_{n+k})| + \varepsilon_n,
\end{aligned}
$$

kus

$$
\varepsilon_n = 2\delta_n \sum_{i=n}^{\infty} (\delta_i + 2\delta_i^2) + \frac{1}{\delta_n}\left(2\alpha_n + 2 \sum_{i=n+1}^{\infty} (\delta_i + 2\delta_i^2) + \alpha_n \delta_n^2\right).
$$

Kuna tingimuste (2.1) põhjal $\dfrac{\varepsilon_n}{\delta_n} \to 0$, siis lemma 2.2 väite *(ii)* tingimused *(b)* ja *(c)* kehtivad, nagu soovitud. $\square$

3 Arvraadiust saavutavad operaatorid Radon–Nikodymi omadusega Banachi ruumides

Olgu X Banachi ruum üle korpuse $\mathbb{K}$, kus $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ või $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, ning olgu $T \in \mathcal{L}(X)$.

Selles paragrahvis me esitame teoreemi 2 tõestuse. Parema jälgitavuse huvides formuleerime me selle teoreemi siinkohal uuesti.

Teoreem 3.1 (sama, mis teoreem 2 sissejuhatuses; vt. [AP^{93}, teoreem 2.4])**.** *Olgu ruumil X Radon–Nikodymi omadus. Siis iga reaalarvu $\varepsilon > 0$ korral leidub ühemõõtmeline operaator $S \in \mathcal{L}(X)$ nii, et $\|S\| < \varepsilon$ ja $T + S \in R(X)$. Niisiis, hulk $R(X)$ on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe, s.t. nende operaatorite hulk ruumis $\mathcal{L}(X)$, mis saavutavad oma arvraadiuse, on ruumis $\mathcal{L}(X)$ kõikjal tihe.*

3.1 Operaatori arvraadiuse saavutamise uurimise taandamine optimiseerimisülesandele

Osutub, et küsimus, kas operaator T saavutab oma arvraadiuse või mitte, on taandatav teatavale optimiseerimisülesandele või, täpsemalt, küsimusele, kas teatav reaalväärtustega funktsioon ruumi X ühiksfääril saavutab oma maksimumi või mitte. Tõepoolest, olgu $x \in S_X$. Defineerime

$$D(x) = \{f \in X^* : \|f\| = f(x) = 1\};$$

siis $D(x)$ on kaasruumi X^* $*$-nõrgalt kompaktne alamhulk. Iga $y \in X$ korral on funktsioon $X^* \ni f \mapsto |f(y)| \in \mathbb{K}$ pidev, järelikult lause 1.6 põhjal on hulk

$$\{|f(y)| \in \mathbb{R} : f \in D(x)\}$$

kinnine ja tõkestatud. Seega, defineerides funktsiooni $\Phi_T : S_X \to \mathbb{R}$ tingimusega

$$\Phi_T(x) = \max\{|f(Tx)| : f \in D(x)\} \qquad \text{iga } x \in S_X \text{ korral,}$$

on ilmne, et operaator T saavutab oma arvraadiuse parajasti siis, kui funktsioon Φ_T saavutab oma supreemumi. See asjaolu võimaldab kasutada operaatori arvraadiuse saavutamise uurimisel optimiseerimismeetodeid.

Teoreemi 3.1 tõestuse põhiidee on rakendada teoreemi 1.14 funktsioonile Φ_T või, täpsemalt, selle funktsiooni loomulikule jätkule. Selleks jätkame kõigepealt funktsiooni Φ_T loomulikul viisil kogu ühikkerale B_X. Defineerime funktsiooni $\Psi_T : B_X \to \mathbb{R}$ tingimustega

$$\Psi_T(x) = \begin{cases} \Phi_T(x), & \text{kui } \|x\| = 1, \\ \|x\|\Phi_T\big(\frac{x}{\|x\|}\big), & \text{kui } 0 < \|x\| < 1, \\ 0, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

On ilmne, et funktsioon Ψ_T on ülalt tõkestatud, seega teoreemi 1.14 rakendamiseks jääb veenduda, et ta on ka ülalt poolpidev.

Lemma 3.2 (vt. [AP^{93}, lemma 2.3])**.** *Funktsioon Ψ_T on ülalt poolpidev.*

Tõestus. Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\|T\| = 1$ ning seega $0 \leqslant \Psi_T(x) \leqslant 1$ iga punkti $x \in B_X$ korral. Oletame vastuväiteliselt, et funktsioon Ψ_T ei ole ülalt poolpidev. Siis leidub arv $r \in \mathbb{R}$ selliselt, et hulk $\{x \in B_X : \Psi_T(x) < r\}$ ei ole ühikkera B_X kui meetrilise ruumi lahtine alamhulk, s.t. mingi selle hulga punkt ei ole selle hulga sisepunkt, s.t. leidub $x_0 \in B_X$ nii, et $\Psi_T(x_0) < r$, kuid leidub selline punktiks x_0 koonduv jada (x_n) ühikkeras B_X, et $\Psi_T(x_n) \geqslant r$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral. Sel juhul $\|x_n\| \geqslant r$ iga $n \in \mathbb{N}$ korral ja seega ka $\|x_0\| \geqslant r > 0$. Tähistame iga $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ korral $y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}$; siis $\|y_n - y_0\| \to 0$. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral fikseerime $f_n \in D(y_n)$ selliselt, et $|f_n(Ty_n)| = \Psi_T(y_n)$. Banach–Alaoglu teoreemi 1.8 ja teoreemi 1.5 põhjal leidub jadal (f_n) osapere, mis koondub mingiks funktsionaaliks $f_0 \in B_{X^*}$

ruumi X^* $*$-nõrgas topoloogias. Iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} |1 - f_0(y_0)| = |f_n(y_n) - f_0(y_0)| &\leqslant |f_n(y_n - y_0)| + |f_n(y_0) - f_0(y_0)| \\ &\leqslant \|y_n - y_0\| + |f_n(y_0) - f_0(y_0)|, \end{aligned}$$

seega $f_0(y_0) = 1$ ning järelikult $\|f_0\| = \|y_0\| = 1$; niisiis $f_0 \in D(y_0)$. Samuti iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$\begin{aligned} |f_n(Ty_n) - f_0(Ty_0)| &\leqslant |f_n(Ty_n - Ty_0)| + |f_n(Ty_0) - f_0(Ty_0)| \\ &\leqslant \|y_n - y_0\| + |f_n(Ty_0) - f_0(Ty_0)|; \end{aligned}$$

niisiis jada $\big(f_n(Ty_n)\big)$ koondub punktiks $f_0(Ty_0)$. Kuna iga $n \in \mathbb{N}$ korral

$$|f_n(Ty_n)| = \Psi_T(y_n) = \frac{1}{\|x_n\|}\Psi_T(x_n) \geqslant \frac{r}{\|x_n\|},$$

siis järeldub siit, et

$$\Psi_T(y_0) = \Phi_T(y_0) \geqslant |f_0(Ty_0)| \geqslant \frac{r}{\|x_0\|},$$

seega $\Psi_T(x_0) = \|x_0\|\Psi_T(y_0) \geqslant r$. Jõudsime vastuoluni. □

3.2 Teoreemi 2 tõestus

Teoreemi 2 (ehk teoreemi 3.1) tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Järelduse 1.15 põhjal eksisteerib selline funktsionaal $g \in X^*$, et $0 < \|g\| < \varepsilon$ ja funktsioon $\Psi_T + \operatorname{Re} g$ eksponeerib tugevalt ühikkera B_X. Siit järeldub, et leidub $x_0 \in B_X$ selliselt, et

$$\Psi_T(x_0) + \operatorname{Re} g(x_0) \geqslant \Psi_T(x) + \operatorname{Re} g(x) \qquad \text{iga } x \in B_X \text{ korral.} \tag{3.1}$$

Iga tingimust $|\lambda| \leqslant 1$ rahuldava arvu $\lambda \in \mathbb{K}$ korral $\Psi_T(\lambda x) = |\lambda|\Psi_T(x)$, järelikult tingimuse (3.1) põhjal

$$\Psi_T(x_0) + \mathrm{Re}\ g(x_0) \geqslant \Psi_T(x) + |g(x)| \qquad \text{iga } x \in B_X \text{ korral.}$$

Võttes $x = x_0$, järeldub siit, et $g(x_0) \geqslant 0$. Paneme tähele, et $\|x_0\| = 1$. Olgu $f_0 \in X^*$ selline, et

$$\|f_0\| = f_0(x_0) = 1 \quad \text{ja} \quad |f_0(Tx_0)| = \Psi_T(x_0),$$

ning olgu arv $\lambda \in \mathbb{K}$ selline, et $|\lambda| = 1$ ja

$$f_0(Tx_0) = \lambda |f_0(Tx_0)|.$$

Defineerime operaatori $S : X \to X$ tingimusega

$$Sx = \lambda g(x) x_0 \qquad \text{iga } x \in X \text{ korral;}$$

siis $S \in \mathcal{L}(X)$, kusjuures $\|S\| = \|g\|\,\|x_0\| < \varepsilon$ ja S on ühemõõtmeline operaator.

Teoreemi tõestuseks jääb näidata, et $T + S \in R(X)$, s.t. operaator $T + S$ saavutab oma arvraadiuse. Olgu $x \in X$ ja $f \in X^*$ sellised, et $\|x\| = \|f\| = f(x) = 1$. Siis

$$\begin{aligned}
\big|f\big((T+S)x\big)\big| &\leqslant |f(Tx)| + |\lambda g(x) f(x_0)| \leqslant \Psi_T(x) + |g(x)| \\
&\leqslant \Psi_T(x_0) + g(x_0) = |f_0(Tx_0)| + g(x_0) \\
&= \big|\lambda |f_0(Tx_0)| + \lambda g(x_0) f_0(x_0)\big| \\
&= \big|f_0(Tx_0) + f_0(Sx_0)\big| \\
&= \big|f_0\big((T+S)x_0\big)\big|,
\end{aligned}$$

seega $v(T + S) = \big|f_0\big((T + S)x_0\big)\big|$ ning järelikult $T + S \in R(X)$, nagu soovitud. $\square$

Kirjandus

[AP89] M. D. Acosta ja R. Payá. *Denseness of operators whose second adjoints attain their numerical radii.* Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989), no. 1, 97–101.

[AP93] ______. *Numerical radius attaining operators and the Radon-Nikodým property.* Bull. London Math. Soc. **25** (1993), no. 1, 67–73.

[CKMMS] M. Chica, V. Kadets, M. Martín, J. Merí ja M. Soloviova. *Two refinements of the Bishop-Phelps-Bollobás modulus.* Banach J. Math. Anal. **9** (2015), no. 4, 296–315.

[BD71] F. F. Bonsall ja J. Duncan. *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras.* London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 2, Cambridge University Press, London-New York, 1971.

[BD73] ______. *Numerical ranges. II.* London Mathematical Society Lecture Note Series, No. 10, Cambridge University Press, New York-London, 1973.

[L] J. Lindenstrauss. *On operators which attain their norm.* Israel J. Math. **1** (1963), 139–148.

[M] R. E. Megginson. *An Introduction to Banach Space Theory.* Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

[P] M. Põldvere. *Funktsionaalanalüüs II,* MTMM.00.104. Loengukonspekt, URL: `https://courses.ms.ut.ee/MTMM.00.104/2022_fall/uploads/Main/FA2-loengukonspekt.pdf` (vaadatud 27.05.2025).

[Z] V. Zizler. *On some extremal problems in Banach spaces.* Math. Scand. **32** (1973), 214–224 (1974).

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Dmitrii Avramenko,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose "Arv-raadiust saavutavad operaatorid Banachi ruumides" mille juhendaja on Märt Põldvere, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhul-gas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguse kehtivuse lõppe-miseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalar-hiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni.

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Dmitrii Avramenko
29. mai 2025. a.