

TARTU ÜLIKOOL

LOODUS- JA TEHNOLOOGIATEADUSKOND

Füüsika instituut

Heido Trofimov

**Rõhu- ja impulssvälja kujunemine tuulises ebahühtlaselt
soojenenud atmosfääris vahelduva maastiku kohal**

Magistritöö

Juhendaja:

Rein Rõõm, füüsika-matemaatikateaduste kandidaat

Kaitsmisele lubatud:

Juhendaja:

allkiri, kuupäev

Tartu 2018

SISUKORD

Sissejuhatus	4
1 Atmosfääridünaamika võrrandid invariantsetl	6
1.1 Liikumisvõrrand impulsihedeusele.....	6
1.2 Pidevusvõrrand tihedusele.....	7
1.3 Temperatuuri evolutsioonivõrrand.....	7
1.4 Piirkond.....	7
1.5 Koordinaadid.....	8
1.6 Võrrandid suhtelistes sfäärilistes ristkoordinaatides.....	9
Impulsihedeuse võrrandid.....	9
Pidevusvõrrand.....	10
1.7 Ääritingimused.....	10
Impulss alapiiril.....	10
Rõhk alapiiril.....	11
Impulss ja rõhk ülapiiril.....	11
2 Anelastne dünaamika	12
2.1 Lainevõrrand tihedusele.....	12
2.2 Anelastse dünaamika teke.....	12
2.3 Rõhu võrrand ja ääreülesanne.....	13
Rõhuvõrrand.....	13
Rõhu ääreväärtusprobleem.....	13
2.4 Impulsi võrrandid.....	13
2.5 Rõhu ääreväärtusülesande lahend.....	14
2.6 Võrdlus hüdrostaatilise dünaamikamudeliga.....	16

3 Rõhuväli paigalseisvas termilises frondis	18
3.1 Rõhuvälja ääreülesanne tsirkumpolaarses termilises frondis.....	18
3.2 Lahend integraalides.....	19
3.3 Numbriline lahendamine.....	20
3.4 Lahendamisnäiteid lihtsamate temperatuurijaotuste korral.....	20
Meridionaalsuunas aeglaselt muutuv temperatuuriväli.....	20
Vertikaalselt isotermiline subtroopilise frondiga atmosfäär.....	23
Stratifitseeritud atmosfääri juhtum.....	29
3.5 Tulemuste analüüs.....	31
4. Arutelu ja kokkuvõte	33
Summary	34
Viited	35
Lisa(d)	37
Lihtlitsents	42

Sissejuhatus

Füüsika instituudi atmosfäärifüüsika laboris on väljatöötamisel uus mittehüdrostaatilise atmosfääridünaamika versioon, mis on jätkuks varasemale mittehüdrostaatilise dünaamika arendusele rõhukoordinaatides [1] – [6].

Loodav mudel peab võimaldama kvaasistatsionaarsete rõhu- ja impulsitiheduse väljade arvutuse ebäühtlaselt soojenenud atmosfääris etteantud ebäühtlase aluspinna kohal. Lähenemine on uus ja erinev kõigist senistest sellealastest arendustest [7] – [12], mis võtavad aluseks hüdrostaatilise mudeli ja hakkavad seda üldistama mittehüdrostaatiliseks. Kõige rohkem on loodaval mudelil ühisjooni tööga [13], kus püütakse ühildada hüdrostaatilist mudelit anelastsega. Siiski, erinevalt [7] - [13]-st on käesoleval juhul aluseks täpsed invariantset esitatud võrrandid impulsitihedusele ja rõhule, kus eraldatakse välja aeglane solenoidaalse impulsiga asümptootika ääritingimuste säilitamisega aluspinnal ja ülapiiril. Tulemuseks on evolutsioonivõrrand solenoidaalsele impulsitihedusele koos diagnostilise Laplace'i võrrandiga rõhule, mis koos vajalike ääritingimustega aluspinnal ja atmosfääri ülapiiril moodustab ääreväärtusülesande rõhu diagnostikaks etteantud solenoidaalse impulssvälja, temperatuurijaotuse ning aluspinna profiili korral. Kui see on lahendatud, on võimalik prognoosida süsteemi edasist arengut impulsi ja temperatuuri evolutsiooni kaudu või hinnata impulssvälja geostroofilises lähendis.

Käesoleva uurimistöö eesmärk on anda ülevaade uuest teooriast (peatükid 1 ja 2) ning uurida numbriliselt mittehüdrostaatilisi rõhuefekte, mida uus lähenemine ennustab tsirkumpolaarse temperatuurijaotusega stratifitseeritud atmosfääris (peatükk 3).

Peatükis 1 antakse ülevaade elastsest atmosfääridünaamikast muutujates impulsitihedus – rõhk – temperatuur ning kirjeldatakse vajalikke alg- ja ääritingimusi.

Peatükis 2 näidatakse, kuidas toimub üleminek täielikelt võrranditelt anelastsele voolamismudelile ääritingimuste säilitamisega, mimoodi formeerub ääreülesanne rõhule ning milline on selle lahend nn. õhukeses atmosfääri (Maa atmosfääri näitel) eeldusel. Seal on ka esile toodud erinevused võrreldes klassikalise hüdrostaatilise dünaamikamudeliga.

Peatükis 3 lahendatakse rõhu ääreülesanne konkreetsete tsirkumpolaarsete temperatuurijaotuste korral orograafiavabas liikumatus atmosfääris. See tuletatakse esmalt üldjuhust ja seejärel ehitatakse numbrilised lahendusalgoritmid Fortran 95 keskkonnas. Tulemusel saadakse mittehüdrostaatilised rõhuparandid hüdrostaatilisele rõhule

mitmesugustes frontaalolukodades. Erilise tähelepanu all on subtroopiline front ja sellega seotud jugavoolu teke.

1. Atmosfääridünaamika võrrandid invariantset

Atmosfääridünaamika põhivõrrandid esitame kõigepealt vektoritena, koordinaatsüsteemi sisse toomata.

1.1 Liikumisvõrrand impulsitihedusele

Liikumisvõrrand on tavaliselt esitatud kiiruse \mathbf{v} suhtes ning on siin toodud Euleri kujul:

$$\partial_t \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \nabla Z - (\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla v^2, \quad (1.1)$$

kus ρ on tihedus, p on rõhk, g on raskuskiirendus, $\boldsymbol{\Omega}$ Maa nurkkiiruse vektor, Z on kõrgus merepinna tasemest ning ∇ on gradientoperaator. Oleme tähistanud $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$. Kiiruse \mathbf{v} all peame antud töös silmas suhtelist kiirust ehk kiirust koordinaattelgede suhtes $\mathbf{v} = \dot{x}^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt} \mathbf{e}_\alpha$. Liikumisvõrrand väljendab Newtoni teist seadust pidevas gaasilises keskkonnas, kujul (1.1), võib öelda ka, et eriimpulsi jäävust. Võime teha sellest võrrandi impulsitihedusele \mathbf{u} asendusega

$$\mathbf{u} = \rho \mathbf{v}. \quad (1.2)$$

Kui kasutame allpool defineeritud pidevuse võrrandit (1.7') ja skaalakõrgust H , mis on defineeritud kujul

$$H = \frac{RT}{g}, \quad (1.3)$$

kus R on universaalne gaasikonstant ja T on temperatuur, ning mis väljendab temperatuuri muutudes rõhu ja tiheduse vähenemist kõrguse kasvades ja mida võib kasutada temperatuuri asemel stratifikatsiooni kirjeldamiseks, siis saame impulsitiheduse võrrandiks

$$\partial_t \mathbf{u} = -\nabla p - \mathbf{b} p, \quad (1.4)$$

kus

$$\mathbf{b} = \frac{(\nabla Z + \mathbf{a})}{H}, \quad (1.5)$$

on gradiendi dimensiooniga vektor, kus

$$\mathbf{a} = \frac{1}{g} \left[(\mathbf{2}\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \frac{gH}{p} \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] \quad (1.6)$$

on dimensioonitu suhtelise kiirenduse vektor ehk kiirenduse suhe raskuskiirendusse. Siin liikmed $(2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2$ väljendavad inertsiaalset kiirendust ruumpunktis, samas kui $\frac{gH}{p}\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{v}{\rho}\partial_t \rho$ on kiirenduse komponent, mis tuleneb tiheduse ajalisest muutlikusest. See komponent on suurusjärke väiksem ning aeglastes protsessides kehtib $\partial_t \rho \approx 0$, nii et rakendustes võime aproksimeerida võrrandit (1.6) avaldisega

$$\mathbf{a} = \frac{1}{g} \left[(2\boldsymbol{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2 \right] \quad (1.6')$$

1.2 Pidevusvõrrand tihedusele

Kui pidevusvõrrand on tavaliselt antud kiiruse suhtes ning esitatud Euleri kujul

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (1.7)$$

siis \mathbf{u} kaudu kirjapanduna on see

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.7')$$

Pidevusvõrrand väljendab massi jäävust. Kui $\partial_t \rho \approx 0$ siis võime rakendada solenoidaalsustingimust ehk anelastset pidevusvõrrandit

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.8)$$

1.3 Temperatuuri evolutsioonivõrrand

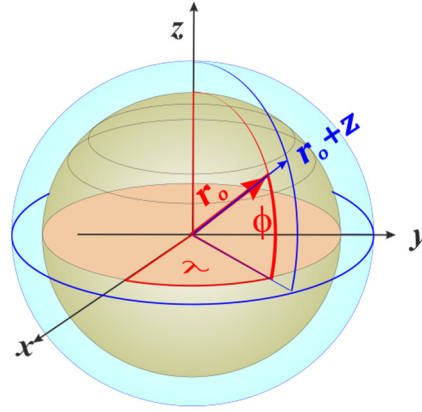
Temperatuuri evolutsioonivõrrand väljendab energiajäävust ning on esitatav kujul

$$\partial_t T = -\mathbf{v} \cdot \nabla T - \frac{RT}{c_v} \nabla \cdot \mathbf{v} + \frac{W}{c_v}, \quad (1.9)$$

kus c_v on isohoorse protsessi erisoojus ja W tähsitab väliseid energiaallikaid. Antud töös seda võrrandit tarvis ei ole, kuid mainime ta ära süsteemi täieliku kirjeldamise mõttes.

1.4 Piirkond

Piirkond on globaalne planeedi atmosfäär. Alumiseks piiriks loeme planeedi üldiselt ebäühtlase aluspinna kõrgust merepinnast, mida võib kirjeldada orograafia funktsiooniga $Z_0(\lambda, \varphi)$, kus λ ja φ on geograafiline pikkus ja laius. Ülalt loeme atmosfääri piiritletuks mõttelise sfääripinnaga kõrgusel Z_M , mis peab olema valitud piisavalt kõrgel (kõrgemal piirkonna kõrgeimast mäetipust). Ülalpool piiri Z_M loeme tiheduse ja rõhu nulliks. Esitame piirkonna kohta ka skemaatilise joonise 1



Joonis 1

Joonisel 1 on esitatud nii geotsentriline ristkoordinaadistik $\{x, y, z\}$ kui ka sfääriline kõrguskoordinaadistik $\{Z, \lambda, \varphi\}$. Z tähistab kõrgust merepinna tasemest, mis rahuldab igas punktis (λ, φ) võrratust

$$Z_0(\lambda, \varphi) \leq Z \leq Z_M \quad (1.10)$$

1.5 Koordinaadid

Kirjeldame ära selles töös kasutatava koordinaatsüsteemi, nõ suhtelised sfäärilised ristkoordinaadid. Ülemineku võib teha kaheastmelisena, kus kõigepealt siirdume geotsentrilistest ristkoordinaatidest $\{x, y, z\}$ sfäärilistesse kõrguskoordinaatidesse $\{Z, \lambda, \varphi\}$ (kus oleme vertikaalse koordinaadi tõstnud esimeseks, kuna see on edaspidi kõige olulisem). Need üleminekuvalemid on teada ja tuntud

$$\begin{cases} x = (Z + r_0) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\lambda) \\ y = (Z + r_0) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\lambda) \\ z = (Z + r_0) \cdot \sin(\varphi) \end{cases} \quad (1.11)$$

Siin $r_0 = 6371$ km tähistab Maa keskmist raadiust, Z absoluutset kõrgust merepinna tasemest, λ pikkuskraadi ja φ laiuskraadi, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Suhtelistes sfäärilistes ristkoordinaatides jäävad koordinaadid (λ, φ) samaks, aga teisendame edasi vertikaalset koordinaati. Kasutame edaspidi dimensioonitult maastikkujälgivat kõrgust $\zeta \in [0, 1]$, mille jaoks võib üleminekuvalemi defineerida kujul

$$Z(\zeta, \lambda, \varphi) = Z_M \zeta + [1 - \zeta] Z_0(\lambda, \varphi). \quad (1.12)$$

Kui modelleerime nõ vesiplaneeti, millest tuleb täpsemalt juttu peatükis 3.1, siis loeme aluspinna kõrguse kõikjal nulliks ja saame

$$Z(\zeta, \lambda, \varphi) = Z_M \zeta. \quad (1.13)$$

Sel juhul on suhteline dimensioonitu kõrgus määratud lihtsalt suhtega

$$\zeta = \frac{Z}{Z_M}. \quad (1.13')$$

Meetiline tensor suhteliste sfääriliste ristkoordinaatide jaoks koordinaatides $\{\zeta, \lambda, \varphi\}$ on

$$\{G_{ij}\} = \begin{pmatrix} Z_{,\zeta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & r_0^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_M^2 & 0 & 0 \\ 0 & r_0^2 \cos^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & r_0^2 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\{G^{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ Z_{,\zeta}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0^2 \cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{Z_M^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0^2 \cos^2 \varphi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r_0^2} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Liikumisvõrrandite esitamisel kõverjoonelistes koordinaatides läheb meil veel vaja suurust

$$D = \sqrt{G} = \cos \varphi r_0^2 Z_M \quad (1.16)$$

kus

$$G \equiv |\{G_{ij}\}| = \cos^2 \varphi r_0^4 Z_M^2 \quad (1.17)$$

on meetrilise tensori determinant ning D langeb kokku absoluutsest sfäärilisest koordinaadistikust suhtelisse sfäärilisse ristkoordinaadistikku teisenduse Jacobi maatriksi determinandiga ehk jakobiaaniga.

1.6 Võrrandid suhtelistes sfäärilistes ristkoordinaatides

Impulsihede võrrandid

Impulsihede võrrand on komponentides

$$\partial_t u^\zeta = -\partial^\zeta p - b^\zeta p, \quad (1.18)$$

$$\partial_t u^\lambda = -\partial^\lambda p - b^\lambda p, \quad (1.19)$$

$$\partial_t u^\varphi = -\partial^\varphi p - b^\varphi p, \quad (1.20)$$

Kus $u^\zeta = \rho \dot{\zeta}$, $u^\lambda = \rho \dot{\lambda}$, $u^\varphi = \rho \dot{\varphi}$, ning paremal pool võrdusmärki on rõhu gradiendi ja vektori $\mathbf{b} = b^j \mathbf{e}_j$ kontravariantsed komponendid. Kuna $\partial^j = G^{j\alpha} \partial_\alpha$, siis

$$\partial^j p = G^{j\alpha} \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} \quad (1.21)$$

$$b^j = \frac{(\nabla Z + \mathbf{a})^j}{H} = \frac{G^{j\alpha}}{H} \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} + \frac{G^{j\alpha} a_\alpha}{H} \quad (1.22)$$

Pidevusvõrrand

Pidevusvõrrand on koordinaatesituses kujul

$$\partial_t \rho = -\frac{1}{D} \partial_\alpha (D u^\alpha). \quad (1.23)$$

1.7 Ääritingimused

Sektsioonis 1.4 defineeritud piirkonnas peab esitama ääritingimused impulsile ja rõhule nii ülemisel piiril Z_M ehk suhtelistes sfäärilistes ristkoordinaatides tasemel $\zeta = 1$ kui ka alumisel piiril $Z_0(\lambda, \varphi)$ ehk tasemel $\zeta_0 = \frac{Z_0}{Z_M}$, mis vesiplaneedi korral on muidugi tase $\zeta_0 = 0$. Ülejäänud väljadele ääritingimusi ei seata.

Kuna piirkonnaks on globaalne atmosfäär, siis ida-lääne sihis ääritingimusi ei ole vaja rakendada, kuigi peab kehtima perioodsustingimus.

Impulss alapiiril

Aluspinda vaatame läbimatu ja liikumatuna, mis tähendab, et normaalisuunaline impulss peab saama nulliks. Selle tingimuse võib kirja panna aluspinna normaalvektori \mathbf{n}^0 abil

$$(\mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{u})_{\zeta=\zeta_0(\lambda, \varphi)} = 0. \quad (1.24)$$

Aluspinna normaalvektori leidmiseks kasutame järgnevat ideed: defineerime kõigepealt aluspinna generaatorfunktsiooni

$$\zeta(\zeta', \lambda, \varphi) = \zeta' + \zeta_0(\lambda, \varphi). \quad (1.25)$$

Siin ζ on suhteline kõrgus, ζ_0 on aluspinna kõrgus merepinna tasemest suhtelise kõrgusena, ning ζ' on atmosfääripunkti kõrgus aluspinnast suhtelise kõrgusena. Järgmiseks fikseerime mingi atmosfääripunkti $\zeta'^*, \lambda^*, \varphi^*$ kus * tähistab muutuja mistahes konkreetset väärtust. Kehtib

$$\zeta(\zeta', \lambda, \varphi) = \zeta^* = \zeta'^* + \zeta_0(\lambda^*, \varphi^*). \quad (1.26)$$

See võrrand määrab iga ζ^* korral pinna, millel asub ka punkt $(\zeta'^*, \lambda^*, \varphi^*)$. Kui valime $\zeta'^* = 0$, saame aluspinna. Seega oleme defineerinud pinna, mille normaali oskame leida tema gradiendina

$$\mathbf{n}^0 = \nabla \zeta(\zeta', \lambda, \varphi) = \mathbf{e}^\zeta + \mathbf{e}^\lambda \partial_\lambda \zeta_0(\lambda, \varphi) + \mathbf{e}^\varphi \partial_\varphi \zeta_0(\lambda, \varphi) \quad (1.27)$$

Seega ääritingimus impulsile alapiiril tuleb kujul

$$(u^\zeta + \partial_\lambda \zeta_0 u^\lambda + \partial_\varphi \zeta_0 u^\varphi)_{\zeta=\zeta_0} = 0 \quad (1.28)$$

Rõhk alapiiril

Ääritingimuse rõhule võime leida, võttes (1.28)-st ajalise tuletise

$$(\partial_t u^\zeta + \partial_\lambda \zeta_0 \partial_t u^\lambda + \partial_\varphi \zeta_0 \partial_t u^\varphi)_{\zeta=\zeta_0} = 0 \quad (1.28)$$

ning asendades tulemusse sisse võrrandid (1.18)-(1.20), saades

$$[(\partial^\zeta p + b^\zeta p) + \partial_\lambda \zeta_0 (\partial^\lambda p + b^\lambda p) + \partial_\varphi \zeta_0 (\partial^\varphi p + b^\varphi p)]_{\zeta=\zeta_0(\lambda,\varphi)} = 0. \quad (1.29)$$

Lastes esimeses liikmes impulsitiheduse võrrandi eeskujul indeksid alla, saame tänu meetrilise tensori diagonaalsusele kirjutada selle tingimuse ka kujul

$$\left[(\partial_\zeta p + b_\zeta p) + \frac{\partial_\lambda \zeta_0}{G \zeta \zeta} (\partial^\lambda p + b^\lambda p) + \frac{\partial_\varphi \zeta_0}{G \zeta \zeta} (\partial^\varphi p + b^\varphi p) \right]_{\zeta=\zeta_0(\lambda,\varphi)} = 0. \quad (1.29')$$

Impulss ja rõhk ülapiiril

Ülapiiril võib teoreetiliselt valida, kas tegu on vabapinnamudeliga või kõva katuse mudeliga, kus vastavalt $\dot{\zeta}_{\zeta=1} \neq 0$, aga $p_{\zeta=1} = \rho_{\zeta=1} = 0$ või $\dot{\zeta}_{\zeta=1} = 0$, aga $p_{\zeta=1} \neq 0, \rho_{\zeta=1} \neq 0$. Kuigi impulsitiheduse vertikaalne komponent peab mõlemal juhul nulliks saama, kuna see on $\dot{\zeta}$ ja ρ korrutis, oleks küsimus impulsitiheduse horisontaalsetes komponentides, mis vabapinnamudeli puhul saaksid nulliks, aga kõva katuse mudeli puhul mitte.

Tegelikkuses saab mudelid unifitseerida, võttes aluseks, et nõudmisest $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \rho = 0$ tuleneb ligikaudselt nõudmine

$$\lim_{\zeta \rightarrow 1} \rho = 0, \quad (1.30)$$

mida võib rakendada kui Z_M on valitud piisavalt suur. Olekuvõrrandi kaudu järeldub sellest automaatselt ääritingimus rõhule

$$(p)_{\zeta=1} = 0. \quad (1.31)$$

Ning impulsitiheduse definitsioonist saame

$$(u^\zeta)_{\zeta=1} = 0, \quad (u^\lambda)_{\zeta=1} = 0, \quad (u^\varphi)_{\zeta=1} = 0, \quad (1.32)$$

2 Anelastne dünaamika

Anelastset dünaamikat iseloomustab tiheduse väikene muutumiskiirus ajas. Seega anelastne dünaamika tähendab solenoidaalsustingimuse (1.8) rakendamist ning seda võibki nimetada ka solenoidaalse impulsi dünaamikaks.

2.1 Lainevõrrand tihedusele

Leiame esmalt lainevõrrandi tihedusele, alustades pidevusvõrrandist (1.7'). Sellest ajalise tuletise võtmine annab

$$\partial_t^2 \rho = -\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u}. \quad (2.1)$$

$\partial_t \mathbf{u}$ asendame aga liikumisvõrrandist (1.4) ja saame

$$\partial_t^2 \rho = \nabla \cdot (\nabla p + \mathbf{b} p). \quad (2.2)$$

Kui asendame vasakul pool tiheduse olekuvõrrandist rõhu kaudu, saame lainevõrrandi rõhule. Kui aga asendame paremal pool rõhu olekuvõrrandist tiheduse kaudu, saame lainevõrrandi tihedusele

$$\frac{1}{g} \partial_t^2 \rho = \nabla \cdot (\nabla H \rho + \mathbf{b} H \rho). \quad (2.3)$$

2.2 Anelastse dünaamika teke

Rakendame nüüd anelastsuse tingimusi

$$\partial_t \rho = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_t^2 \rho = 0. \quad (2.5)$$

(2.4) toob kaasa impulsi solenoidaalsustingimuse (1.8), (2.5) aga impulsi ajatuletise solenoidaalsuse alghetkel

$$\nabla \cdot \partial_t \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

Kokkusurumatus keskkonnas (näiteks vees) on tingimused (2.4)-(2.5) täidetud täpselt, gaaskeskkonnas vaid ligikaudselt ja seda täpsemalt, mida lähemal on liikumine statsionaarsele. Seega atmosfäridünaamikas on tegemist lähendusega ning (2.4) rakendamine ei tähenda, et tihedus peab igas ruumipunktis rangelt konstantne olema, vaid üksnes seda, et anelastset mudelis oleme loobunud tiheduse otsesest prognoosimisest tema diagnoosimise kasuks temperatuuri ja rõhu kaudu olekuvõrrandist.

2.3 Rõhu võrrand ja ääreväärtusülesanne

Vaatame nüüd üle rõhuvõrrandi ja tema ääretingimused anelastsuse tingimustes.

Rõhu võrrand

Kasutades tingimust (2.5) saab võrrandist (2.2)

$$\nabla \cdot (\nabla p + \mathbf{b} p) = 0. \quad (2.7)$$

Koordinaatesituses on see kujul

$$\partial_\alpha [DG^{\alpha\beta} (\partial_\beta + b_\beta) p] = 0 \quad (2.8)$$

Meetrilise tensori komponendid $G^{\alpha\beta}$ on antud valemiga (1.15), seega detailsem lahtikirjutus on toodav kujule

$$\partial_\zeta [(\partial_\zeta + b_\zeta) p] + \frac{\beta^2}{\cos^2 \varphi} \{ \partial_\lambda [(\partial_\lambda + b_\lambda) p] + \cos \varphi \partial_\varphi [\cos \varphi (\partial_\varphi + b_\varphi) p] \} = 0, \quad (2.9)$$

kus väike parameeter β on

$$\beta = \frac{Z_M}{r_0} \sim 10^{-2}. \quad (2.10)$$

Rõhu ääreväärtusülesanne

Rõhu ääreväärtustingimusest (1.29') saab kõigi indeksite allalaskmisel võrrand

$$\left[(\partial_\zeta p + b_\zeta p) + \beta^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} \zeta_{0,\lambda} (\partial_\lambda + b_\lambda) p + \zeta_{0,\varphi} (\partial_\varphi + b_\varphi) p \right) \right]_{\zeta = \zeta_0(\lambda, \varphi)} = 0. \quad (2.11)$$

Ülemine ääretingimus oli antud (1.31)-ga.

$$(p)_{\zeta=1} = 0. \quad (1.31)$$

Koos moodustavad (2.11) ja (1.31) võrrandile (2.9) ääreväärtusülesande, mis tuleb lahendada igal ajahetkel olemasoleva temperatuurivälja ja impulssvälja korral, mis määravad vektori \mathbf{b} komponendid $b_\zeta, b_\lambda, b_\varphi$. Peale impulsi ja temperatuuri mõjutab ääreülesannet (ja selle lahendit) veel aluspinna orograafia alumisse ääretingimusse (2.3.4) minevate $\zeta_{0,\lambda}, \zeta_{0,\varphi}$ vahendusel. Kui ääreülesanne on üheselt lahenduv, on rõhk selle lahendina määratud igal ajahetkel temperatuurivälja, impulssvälja ja aluspinnaprofiili poolt.

2.4 Impulsi võrrandid

Anelastse mudeli impulsi võrrandid (1.18) – (1.20) säilitavad oma kuju, kuid nende koosseisu kuuluv dimensioonitu kiirendus \mathbf{a} tuleb kasutusele tema aproksimeeritud kujul (1.6'). Samuti

peab võrrandite (1.18)-(1.20) integreerimisel ajas arvesse võtma, et algimpulss komponentidega $u_0^\zeta = (u^\zeta)_{t=0}$, $u_0^\lambda = (u^\lambda)_{t=0}$, $u_0^\varphi = (u^\varphi)_{t=0}$ peab olema solenoidaalne, st rahuldama tingimust (1.8), mis komponentesituses on vastavalt

$$\partial_\alpha(Du_0^\alpha) = 0, \quad (2.12)$$

ning samuti rahuldama ääretingimusi (1.28) ja (1.32):

$$(u^\zeta + \partial_\lambda \zeta_0 u^\lambda + \partial_\varphi \zeta_0 u^\varphi)_{\zeta=\zeta_0} = 0 \quad (2.12)$$

$$(u^\zeta)_{\zeta=1} = 0, \quad (u^\lambda)_{\zeta=1} = 0, \quad (u^\varphi)_{\zeta=1} = 0, \quad (1.32)$$

Kui need tingimused on täidetud alghetkel ja rõhu ääreülesanne on seejuures rahuldatud, siis hakkavad samad tingimused automaatselt kehtima ka kõigil järgnevatel ajahetkedel.

2.5 Rõhu ääreväärtusülesande lahend

Võrrandi (2.9) lahendamisel üheskoos tema ääretingimustega (1.31) ja (2.11) kasutame parameetri $\beta^2 \sim 10^{-4}$ väiksust. Otsime lahendit kujul

$$p = \bar{p} + p', \quad (2.13)$$

kus \bar{p} on lahend siis, kui oleme võtnud $\beta^2 = 0$, ning p' on väike parand sellele väikese, kuid lõpliku β^2 korral. Nimetame neid vastavalt peakomponendiks ja fluktuatiivseks komponendiks.

Tingimusel $\beta^2 = 0$ saame peakomponendi jaoks seega vastava võrrandi

$$\partial_\zeta [(\partial_\zeta + b_\zeta)\bar{p}] = 0, \quad (2.14)$$

ning tema ääretingimusteks

$$[(\partial_\zeta + b_\zeta)\bar{p}]_{\zeta=0} = 0, \quad (2.15)$$

$$(\bar{p})_{\zeta=1} = 0. \quad (2.16)$$

(2.15) oleme alumise ääretingimuse seadnud merepinnatasemele. Seda võib teha, sest kui me eemaldaksime pinnase kuni merepinnatasemeni, siis õhurõhk selles geograafilises punktis, kus enne oli aluspind, jääks samaks, nagu enne pinnase asendamist õhuga. Võiksime kasutada ka tingimust $[(\partial_\zeta + b_\zeta)\bar{p}]_{\zeta=\zeta_0} = 0$, kuid lõpplahend tuleb ikka kujul (2.19) allpool.

(2.14) esimene integraal annab

$$(\partial_\zeta + b_\zeta)\bar{p} = C, \quad (2.17)$$

kus konstandi C saame ääretingimusest (2.15), millest saame üldistatud hüdrostaatikavõrrandi rõhule

$$(\partial_{\zeta} + b_{\zeta})\bar{p} = 0, \quad (2.18)$$

mille lahendiks on üldistatud hüdrostaatiline rõhk liikuvast atmosfääris ebäühtlase temperatuurijaotuse korral

$$\bar{p}(\zeta, \lambda, \varphi) = p_0 \exp \left[- \int_0^{\zeta} b_{\zeta}(\zeta', \lambda, \varphi) d\zeta' \right] = p_0 \exp \left[- \int_0^{\zeta} \frac{Z_M + a_{\zeta}(\zeta', \lambda, \varphi)}{H(\zeta', \lambda, \varphi)} d\zeta' \right], \quad (2.19)$$

kus oleme eeldanud, et merepinna taseme rõhk $\bar{p}(0, \lambda, \varphi) = p_0 = 1012.5 \text{ hPa}$ on konstant kõikjal üle planeedi. Kui vaatame liikumatut atmosfääri, siis $a_{\zeta} = 0$ ja saame tavalise baromeetrilise valemi

$$\bar{p}(\zeta, \lambda, \varphi) = p_0 \exp \left[- \int_0^{\zeta} \frac{Z_M}{H(\zeta', \lambda, \varphi)} d\zeta' \right]. \quad (2.20)$$

Edasi paneme rõhuvõrrandisse (2.9) kogurõhu (2.13), arvestades, et peakomponent rahuldab võrrandeid (2.14)-(2.16). Kui viskame ära kõrgemat järku väikesed suurused $\beta^2 p' \sim \beta^4 \bar{p}$, saame fluktuatiivse komponendi jaoks vastavateks võrranditeks

$$\partial_{\zeta} [(\partial_{\zeta} + b_{\zeta})p'] = -S, \quad (2.21)$$

$$[(\partial_{\zeta} + b_{\zeta})p']_{\zeta=\zeta_0(\lambda, \varphi)} = -\sigma, \quad (2.22)$$

$$(p')_{\zeta=1} = 0, \quad (2.23)$$

kus ruum- ja pindallikad on vastavalt

$$S = \frac{\beta^2}{\cos^2 \varphi} \{ \partial_{\lambda} [(\partial_{\lambda} + b_{\lambda})\bar{p}] + \cos \varphi \partial_{\varphi} [\cos \varphi (\partial_{\varphi} + b_{\varphi})\bar{p}] \}, \quad (2.24)$$

$$\sigma = \beta^2 \left[\frac{1}{\cos^2 \varphi} \zeta_{0,\lambda} (\partial_{\lambda} + b_{\lambda})\bar{p} + \zeta_{0,\varphi} (\partial_{\varphi} + b_{\varphi})\bar{p} \right]_{\zeta=\zeta_0(\lambda, \varphi)}. \quad (2.25)$$

(2.21) esimesel integreerimisel saame

$$(\partial_{\zeta} + b_{\zeta})p' = - \left(C + \int_{\zeta_0(\lambda, \varphi)}^{\zeta} S d\zeta' \right), \quad (2.26)$$

kus, seades $\zeta = \zeta_0$, saame integreerimiskonstandi määrata (2.22)-st. Seega saab (2.26) esitada kujul

$$(\partial_{\zeta} + b_{\zeta})p' + B = 0, \quad (2.27)$$

kus

$$B(\zeta, \lambda, \varphi) = \int_{\zeta_0(\lambda, \varphi)}^{\zeta} S(\zeta', \lambda, \varphi) d\zeta' + \sigma. \quad (2.28)$$

(2.27) üldlahendiks on

$$p'(\zeta, \lambda, \varphi) = e^{-\tau(\zeta_0, \zeta)} \left[p'_0 - \int_{\zeta_0}^{\zeta} e^{\tau(\zeta_0, \zeta')} B(\zeta', \lambda, \varphi) d\zeta' \right], \quad (2.29)$$

kus

$$\tau(\zeta_1, \zeta_2, \lambda, \varphi) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} b_{\zeta}(\zeta, \lambda, \varphi) d\zeta. \quad (2.30)$$

Arvestades, et $p'(1; \lambda, \varphi) = 0$, saame seda (2.29)-sse asendades arvutada ka aluspinna rõhufluktuatsiooni p'_0

$$p'_0 = \int_{\zeta_0}^1 e^{\tau(\zeta_0, \zeta')} B(\zeta', \lambda, \varphi) d\zeta'. \quad (2.31)$$

Selle abil võib kirjutada (2.29) ümber kujul

$$p'(\zeta, \lambda, \varphi) = \int_{\zeta}^1 e^{\tau(\zeta, \zeta', \lambda, \varphi)} B(\zeta', \lambda, \varphi) d\zeta'. \quad (2.32)$$

2.6 Võrdlus hüdrostaatilise dünaamikamudeliga

Hüdrostaatilises mudelis eeldatakse, et atmosfäär on hüdrostaatilises tasakaalus, st rõhu gradientjõud on tasakaalus gravitatsioonijõuga, ning vertikaalset liikumisvõrrandit asendab hüdrostaatikavõrrand.

Seega hüdrostaatilises mudelis kehtivad samasugused võrrandid nagu (1.18)-(1.20), kuid vertikaalses impulsivõrrandis

$$\partial_t u^{\zeta} = -\partial^{\zeta} \tilde{p} - b^{\zeta} \tilde{p} \quad (2.34)$$

tehakse eeldus, et suurus $u_{\zeta} = \rho \dot{\zeta}$ on nii väike, et selle võib aproksimeerida nulliga, nii et (2.34) annab üldistatud hüdrostaatikavõrrandi

$$(\partial_\zeta + b_\zeta)\tilde{p} = 0. \quad (2.36)$$

Oleme siin hüdrostaatilise rõhu tähistanud \tilde{p} -ga. (2.36) nimetatakse üldistatuks sellepärast, et tavaliselt ilmaennustus- ja kliimamudelites seatakse $a_\zeta \rightarrow 0$, mis viib meid klassikalise hüdrostaatilise tasakaalu võrrandile

$$\tilde{p}_{,\zeta} + \frac{\tilde{p}}{H} Z_{,\zeta} = 0. \quad (2.37)$$

Hüdrostaatilises mudelis saab rõhu analoogiliselt jagada komponentideks

$$\tilde{p}(\zeta, \lambda, \varphi, t) = \bar{p}(\zeta, \lambda, \varphi, t) + \tilde{p}'(\zeta, \lambda, \varphi, t), \quad (2.38)$$

Kus mõlemad komponendid arvutatakse tavalise baromeetrilise valemiga

$$\bar{p}(\zeta, \lambda, \varphi, t) = p_0 \exp \left[- \int_0^\zeta \frac{Z_M}{H(\zeta', \lambda, \varphi, t)} d\zeta' \right], \quad (2.39)$$

$$\tilde{p}'(\zeta, \lambda, \varphi, t) = \tilde{p}'_0(\lambda, \varphi, t) \exp \left[- \int_0^\zeta \frac{Z_M}{H(\zeta', \lambda, \varphi, t)} d\zeta' \right], \quad (2.40)$$

kus oleme näidanud üldisuse huvides argumendina ka aega. Kogurõhk hüdrostaatilises mudelis arvutub seega ühtekokku valemiga

$$\tilde{p}(\zeta, \lambda, \varphi, t) = (p_0 + \tilde{p}'_0(\lambda, \varphi, t)) \exp \left[- \int_0^\zeta \frac{Z_M}{H(\zeta', \lambda, \varphi, t)} d\zeta' \right]. \quad (2.41)$$

Erinevalt (2.20)-st on siin $(p_0 + \tilde{p}'_0(\lambda, \varphi, t))$ tegelik hüdrostaatiline rõhk merepinnaval, mis koosneb konstantsest keskmisest p_0 ja fluktuatiivsest hälbest $\tilde{p}'_0(\lambda, \varphi, t)$ merepinnaval tasemel. Fluktuatiivse hälbe leidmiseks kasutatakse hüdrostaatilises mudelis prognoosivõrrandit

$$\partial_t \tilde{p}'_0 = -gZ_M \int_0^1 \left[\partial_\lambda (u^\lambda) + \frac{1}{\cos \varphi} \partial_\varphi (\cos \varphi u^\varphi) \right] d\zeta. \quad (2.42)$$

Seega kokkuvõtlikult erineb hüdrostaatilise mudeli rõhk (2.41) meie mittehüdrostaatilisest rõhust (2.13) selle poolest, et kogurõhk arvutatakse üldise baromeetrilise valemi abil, väljaarvatud aluspinnal, kus rõhu fluktuatiivse komponendi arvutusalgorithm on aga samuti teistsugune, kui mittehüdrostaatilises mudelis.

3 Rõhuväli paigalseisvas termilises frondis

Suundume nüüd konkreetse modelleerimisülesande juurde, mis oli antud töö praktilise osa eesmärgiks.

3.1 Rõhuvälja ääreülesanne tsirkumpolaarses termilises frondis

Tsirkumpolaarsel voolamisel ehk ümber pooluse sümmeetrilisel voolamisel puudub sõltuvus asimuudist λ ning kõik väljad on vaid kõrguse ζ ja geograafilise laiuse φ funktsioonid, millele üldisel (mittestatsionaarsel) juhul lisandub ka sõltuvus ajast t , mida me antud töös aga ei vaata. Modelleerime rõhuvälja kujunemist ilma orograafiata „vesiplaneedil“, mis tähendab, et orograafiafunktsioon on kõikjal

$$\zeta_0(\varphi) = 0. \quad (3.1)$$

Üldisel juhul peaksime edasi vaatama eraldi prognostilisi välju ja neile vastavaid prognoosivõrrandeid, mis antud juhul oleksid $u_\lambda(\zeta, \varphi, t)$, $u_\varphi(\zeta, \varphi, t)$, $T(\zeta, \varphi, t)$ ja

$$\partial_t u_\lambda = -\partial_\lambda p - b_\lambda p, \quad (3.2)$$

$$\partial_t u_\varphi = -\partial_\varphi p - b_\varphi p, \quad (3.3)$$

$$\partial_t T = -v^\zeta \partial_\zeta T - v^\varphi \partial_\varphi T - \frac{RT}{c_v D} (\partial_\zeta D v^\zeta + \partial_\varphi D v^\varphi) + \frac{W}{c_v}. \quad (3.4)$$

Kuid antud juhul jätame prognoosiülesande lahendamata. Vaatame paigalseisvat atmosfääri, kus

$$\mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

ning loeme temperatuurivälja $T(\zeta, \varphi)$ etteantuks. Nii saame lahendada koheselt vaid diagnoosiülesande: diagnostika alla kuuluvad arvutusvalemid nii diagnostiliste väljade u_ζ , p, ρ kui ka vektori $\mathbf{b} = \{b_\zeta, b_\lambda, b_\varphi\}$ leidmiseks igal ajatasemel etteantud prognostiliste väljade u_λ, u_φ, T teadmisel ja nende kaudu. Kuna u_ζ seadsime koos ülejäänud impulsiga nulliks ning p ja ρ on üksteisega seotud olekuvõrrandi kaudu, jääb lahendada vaid rõhu diagnoosimine etteantud temperatuurivälja kaudu.

Rõhu peakomponendi saame arvutada valemist (2.20). Edasi tuleks diagnoosida vektori \mathbf{b} komponendid, mis üldjuhul oleksid

$$b_\zeta = \frac{Z_M + a_\zeta(\zeta, \varphi)}{H(\zeta, \varphi)}, \quad b_\lambda = \frac{a_\lambda(\zeta, \varphi)}{H(\zeta, \varphi)}, \quad b_\varphi = \frac{a_\varphi(\zeta, \varphi)}{H(\zeta, \varphi)}, \quad (3.6)$$

kus kovariantsed komponendid leiaksime meetrilise tensori (1.14) abil indekse allalaskmisel

$$a_j(\zeta, \varphi) = G_{jj} a^j(\zeta, \varphi), \quad (3.7)$$

kusjuures paigalseisvas atmosfääris lihtsustuvad komponendid kujule

$$b_\zeta = \frac{Z_M}{H(\zeta, \varphi)}, \quad b_\lambda = 0, \quad b_\varphi = 0. \quad (3.6')$$

Täisrõhu diagnoosimiseks on vajalik leida veel fluktuatiivne komponent $p'(\zeta, \varphi)$. Üldisel kujul on see teada valemist (2.32), mis siinsel juhul on

$$p'(\zeta, \varphi) = \int_{\zeta}^1 e^{\tau(\zeta, \zeta', \varphi)} B(\zeta', \varphi) d\zeta', \quad (3.8)$$

kus τ on

$$\tau(\zeta_1, \zeta_2, \varphi) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} b_\zeta(\zeta, \varphi) d\zeta \quad . \quad (3.9)$$

B puhul, defineeritud üldisel juhul valemis (2.28), peab arvesse võtma, et et orograafia puudumisel pindallikad puuduvad, s.t $\sigma = 0$, mistõttu B lihtsustub kujule

$$B(\zeta, \varphi) = \int_0^{\zeta} S(\zeta', \varphi) d\zeta', \quad (3.10)$$

kus S , üldisel juhul valemis (2.24), saab antud juhul

$$S(\zeta, \varphi) = \frac{\beta^2}{\cos \varphi} \partial_\varphi [\cos \varphi (\partial_\varphi + b_\varphi) \bar{p}] \quad . \quad (3.11)$$

3.2 Lahend integraalides

Eelpool toodud lahendeid maksimaalselt avades saame arvutusvalemiteks lõppkokkuvõttes rõhu peakomponendi jaoks

$$\bar{p}(\zeta, \varphi) = p_0 \exp \left[-\frac{g}{R} \int_0^{\zeta} \frac{Z_M}{T(\zeta', \varphi)} d\zeta' \right] \quad (3.12)$$

ning fluktuatiivse komponendi jaoks

$$p'(\zeta, \varphi) = \int_{\zeta}^1 e^{\frac{g}{R} \int_{\zeta}^{\zeta'} \frac{Z_M}{T(\zeta'', \varphi)} d\zeta''} \int_0^{\zeta'} \frac{\beta^2}{\cos \varphi} \partial_\varphi [\cos \varphi (\partial_\varphi + b_\varphi) \bar{p}(\zeta'', \varphi)] d\zeta'' d\zeta'. \quad (3.13)$$

3.3 Numbriline lahendamine

Numbrilise lahendamise viime läbi programmeerimiskeeles Fortran. Fortran on atmosfäärifüüsikas ja numbrilises ilmaennustuses laialt levinud keel ühelt poolt ajaloolistel põhjustel (seda on kasutatud algusest peale ning seda ümber vahetada ei oleks kerge), ning teisalt see lihtsalt ongi suuremahulisteks numbrilisteks teadusarvutusteks eelistatud keel, mida kasutatakse laialdaselt ka teistes distsipliinides, kus kasutatakse superarvutite abi.

Fortrani kood saab sisendiks temperatuurivälja $T(i, j) = T(\zeta_i, \varphi_j)$ ning seab sellele vastavusse rõhu mõlemad komponendid $\bar{p}(i, j) = \bar{p}(\zeta_i, \varphi_j)$, $p'(i, jk) = p'(\zeta_i, \varphi_j)$.

Alamprogrammideks on

$\bar{p}(i, j)$ leidmine valemist (3.12) temperatuuri $T(i, j)$ kaudu

$\tau(i_1, i_2, j)$ leidmine valemist (3.9) eeldusel $b_\zeta(i, j) = \frac{Z_M}{H(i, j)}$ (s.t. $a_\zeta(i, j) = 0$)

temperatuuri $T(i, j)$ kaudu

$S(i, j)$ leidmine valemist (3.11) eeldusel $b_\varphi = 0$ $\bar{p}(i, j)$ kaudu

$p'(i, j)$ leidmine valemist (3.8) $\tau(i_1, i_2, j)$ ja $S(i, j)$ kaudu

Fortrani kood on toodud ära lisas.

3.4 Lahendamisnäited konkreetsete temperatuurijaotuste korral

Demonstreerime tulemusi erinevate etteantud $T(i, j)$ -de korral. Pildid on tehtud Fortranist saadud andmete põhjal Pythoniga.

Meridionaalsuunas aeglaselt muutuv temperatuuriväli

Valime tipptaseme $Z_M \leq 36 \text{ km}$ ning kirjeldame temperatuurimudelit ruutsõltuvusega

$$T(\varphi, z) = T_0(\varphi) - \gamma_t(\varphi)z + \mu(\varphi)z^2. \quad (3.14)$$

Oleme siin esituse lihtsuse mõttes kasutanud vertikaalse koordinaadina z -i kui tavakõrgust merepinna tasemest. $T_0(\varphi)$ on aluspinnatemperatuur, $\gamma_t = (-\partial_z T)_{z=0}$ on temperatuurigradient alumises troposfääris ning ruutliikme kordaja μ määrab temperatuuri kasvu tropopausist ülespoole.

Määra tropopausi kui alt esimese temperatuurimiinimumi taseme tingimusega $(\partial_z T)_{z_{tp}} = 0$, saame tropopausi kõrguse määramiseks avaldise

$$z_{tp}(\varphi) = \frac{\gamma(\varphi)}{2\mu(\varphi)}. \quad (3.15)$$

Selles lähtuvalt on mõistlik ruutmudeli primaarseteks parameetriteks valida $T_0(\varphi)$, $\gamma_t(\varphi)$ ja $z_{tp}(\varphi)$. (3.15) saab sel juhul kujul

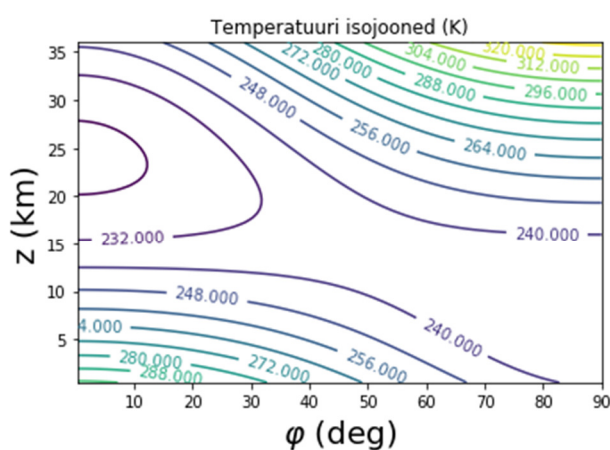
$$T(\varphi, z) = T_0(\varphi) - \gamma(\varphi)z + \frac{\gamma(\varphi)}{2z_{tp}(\varphi)} z^2. \quad (3.16)$$

Valime sisendparameetrite sõltuvuse geograafilisest laiusest kujul

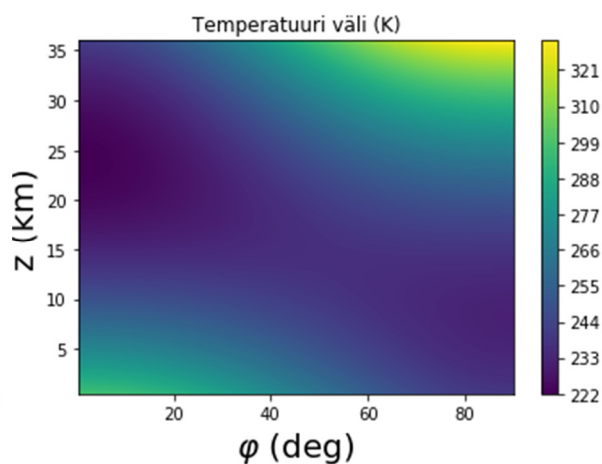
$$\begin{aligned} T_0(\varphi) &= 300 - 60 \cdot \sin^2(\varphi) [K], \\ \gamma(\varphi) &= 6.5 - 4.5 \cdot \sin^2(\varphi) \left[\frac{K}{km} \right], \\ Z_{tp}(\varphi) &= 24 - 16 \cdot \sin^2(\varphi) [km]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Ruutsiinusfunktsiooni kasutamine hoolitseb siin selle eest, et $\partial_\varphi T(\varphi, z)$ saaks nulliks poolustel ja ekvaatoril, nagu eeldab tsirkumpolaarne mudel.

Toodud mudeli kohaselt toimub temperatuuri $T(\varphi, z)$ sujuv frondivaba siire troopiliselt temperatuurijaotuselt polaarsetele. Temperatuuriprofiili kirjeldavad joonised 2 ja 3.

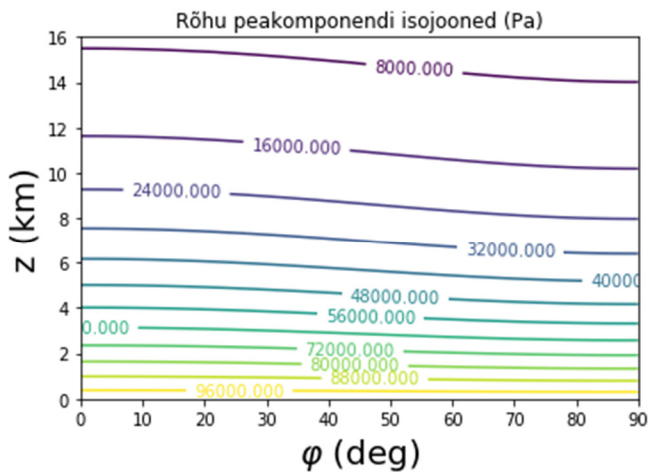


Joonis 2

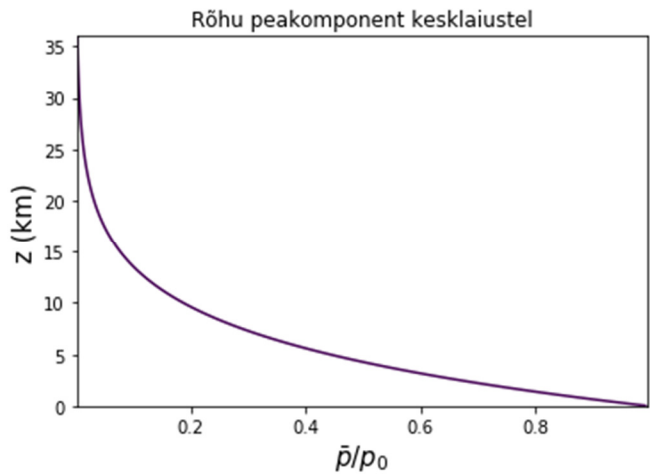


Joonis 3

Rõhu peakomponent antud temperatuuriprofiili korral on visualiseeritud joonistel 4, 5.

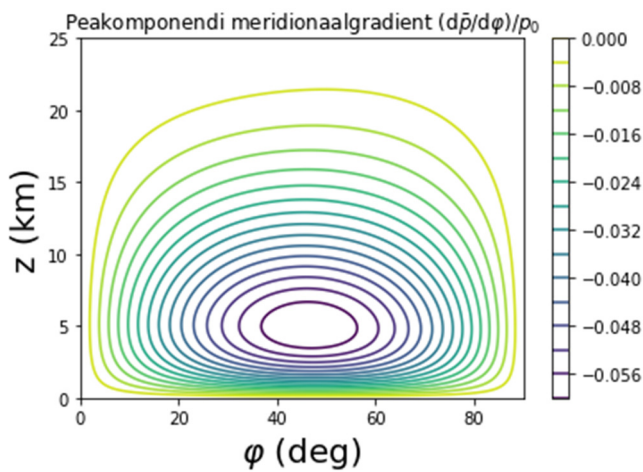


Joonis 4

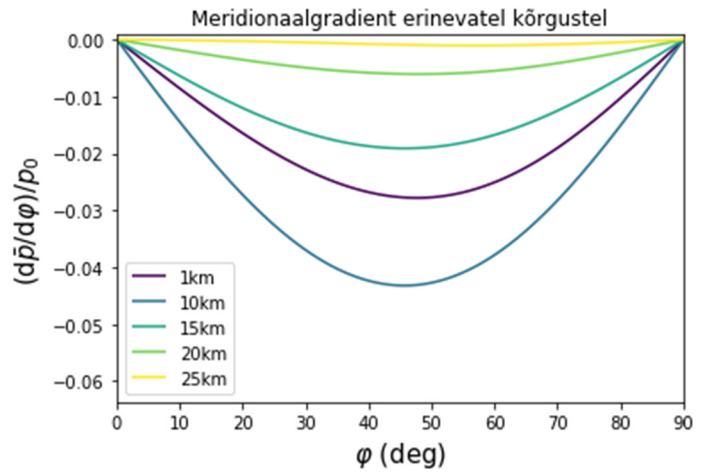


Joonis 5

Joonistel 6 ja 7 on näidatud suhtelise rõhu peakomponendi meridionaalgradienti.

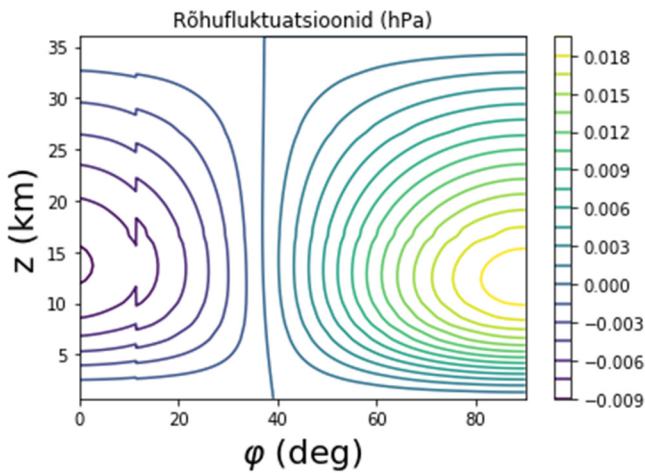


Joonis 6

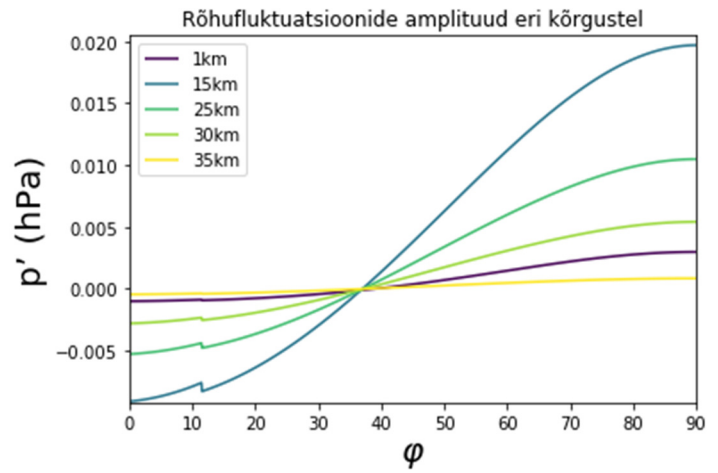


Joonis 7

Joonistel 8 ja 9 on näidatud rõhufluktuatsioone.

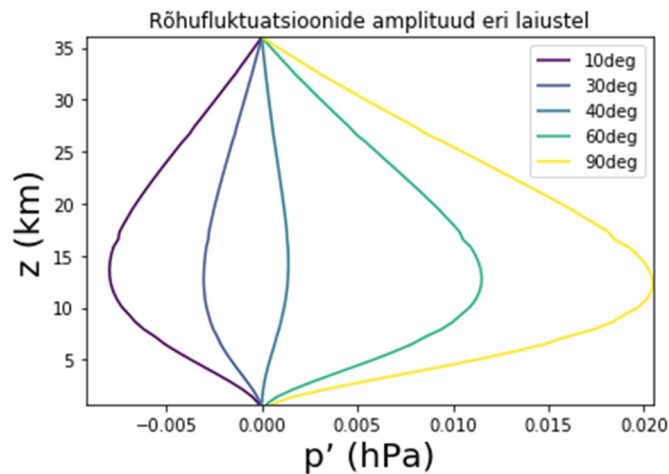


Joonis 8



Joonis 9

Paneme tähele, et rõhufluktuatsioonid kasvavad kuni teatud kõrguseni, ning hakkavad siis jälle langema, nagu näitab ka joonis 10



Joonis 10

Vertikaalselt isothermiline subtropilise frondiga atmosfäär

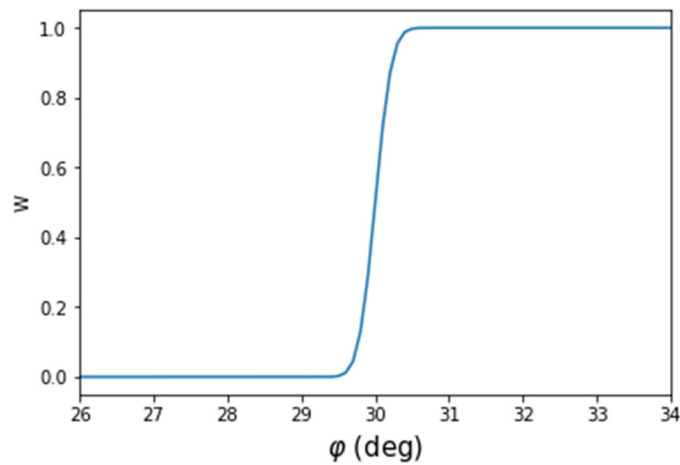
Vaatame juhtu, kus esineb tugev temperatuurifront. Selleks asendame temperatuuriprofiilis kasutatud siinusruutfunktsiooni, mis muutus väga aeglaselt, nn veafunktsiooniga. Samuti piirdume esialgu vertikaalselt isothermilise juhuga. Temperatuuri võib siis esitada kujul

$$T(\varphi) = T_0 - \Delta T \cdot W(\varphi; \varphi_0, \Delta) \quad (3.18)$$

kus kaalufunktsioon W on defineeritud kui

$$W(\varphi; \varphi_0, \Delta) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \frac{\varphi - \varphi_0}{\Delta} \right) \quad (3.19)$$

kus φ_0 on frondi tsepter ja Δ on selle poollaius. Parameetrite $\varphi_0 = 30$ ja $\Delta = 0.25$ juures on kaalufunktsioon W näidatud joonisel 11

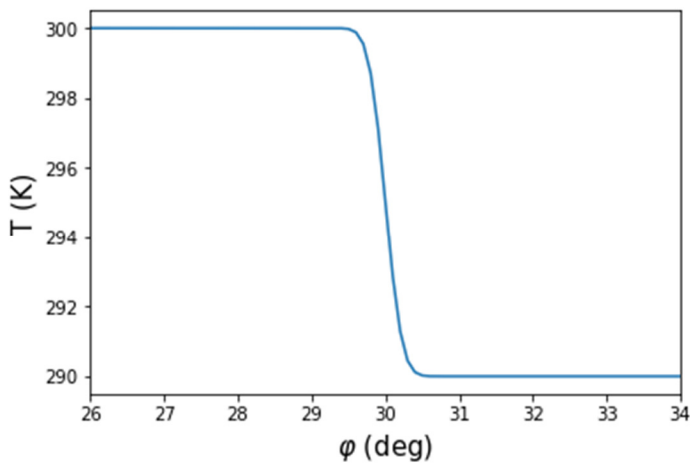


Joonis 11

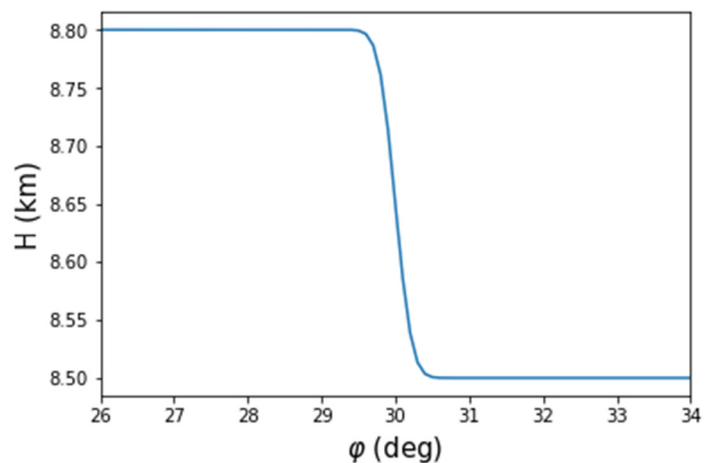
Mudel (3.18) vastab olukorrale, kus aluspinnatemperatuur T_0 läheb frondist tseptriga φ_0 juures ja laiusega $\sim 4 \Delta$ läbiminekul üle temperatuuriks $T_0 - \Delta T$. Analoogiliselt võime esitada ka kõrgusskaala jaotuse

$$H(\varphi) = H_0 - \Delta H \cdot W(\varphi; \varphi_0, \Delta). \quad (3.20)$$

Parameetrite $T_0 = 300K$, $\Delta T = 10K$, $H_0 = 8.8km$, $\Delta H = 0.3km$, $\varphi_0 = 30$ ja $\Delta = 0.25$ juures on temperatuur ja kõrgusskaala visualiseeritud joonistel 12 ja 13.



Joonis 12

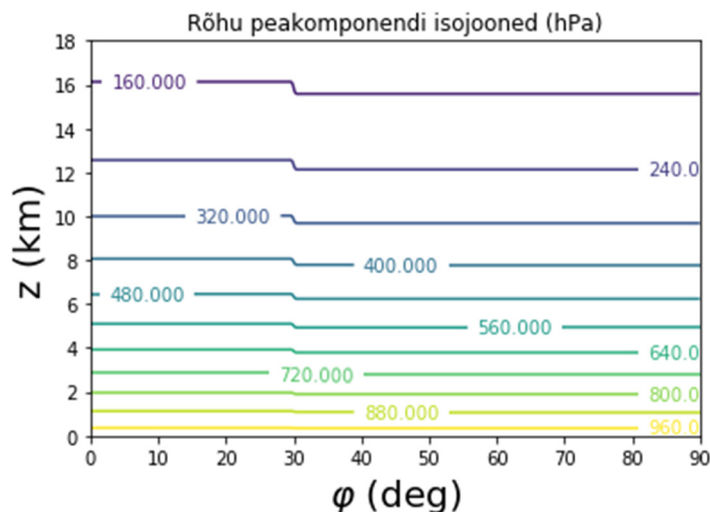


Joonis 13

Rõhu peakomponent lihtsustub kujule

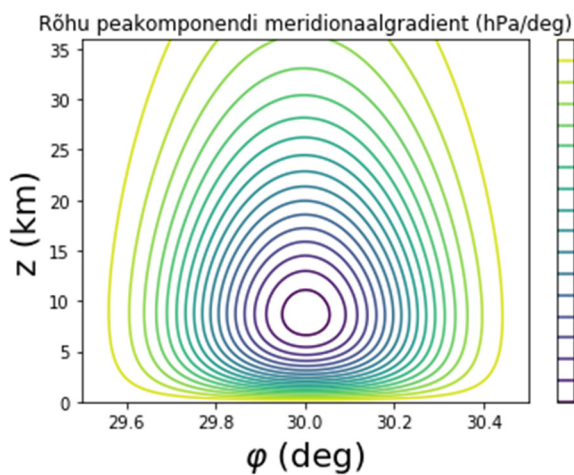
$$\bar{p}(z, \varphi) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H(\varphi)}\right) \quad (3.21)$$

Rõhu peakomponent on näidatud joonisel 14.

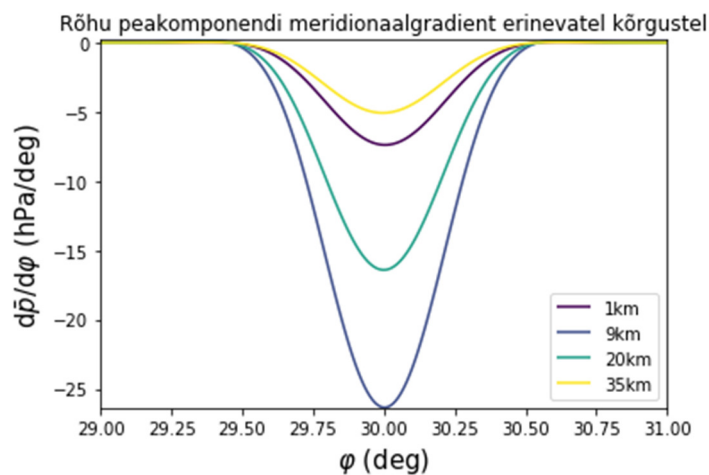


Joonis 14

Ning rõhu peakomponendi meridionaalgradient joonistel 15 ja 16.



Joonis 15



Joonis 16

Nn integraalne rõhk on vastavalt

$$P_{int}(z, \varphi) = \int_0^z \bar{p}(z', \varphi) dz' = p_0 H(\varphi) \left[1 - \exp\left(-\frac{z}{H(\varphi)}\right) \right]. \quad (3.22)$$

Edasi, kuna $\cos \varphi$ muutub frondis $4 \Delta = 1^\circ$ väga vähe, võib selle (3.11)-s diferentsiaali alt välja tuua. Sel juhul (3.10) saab kuju

$$B(z, \varphi) = \frac{1}{r_0^2} \partial_\varphi \partial_\varphi P_{int}(z, \varphi). \quad (3.23)$$

Samuti τ saab kuju

$$\tau(z_1, z_2, \varphi) = \frac{z_2 - z_1}{H(\varphi)} \quad (3.24)$$

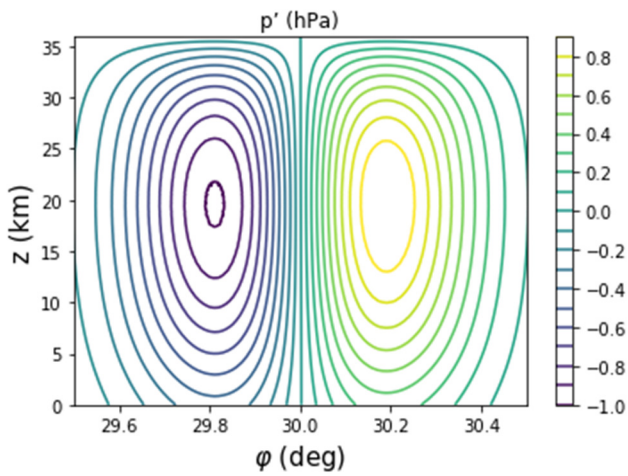
ning rõhuparand saab lõpuks kuju

$$p'(z, \varphi) = \int_z^{z_M} e^{-\frac{z'-z}{H(\varphi)}} B(z', \varphi) dz', \quad (3.25)$$

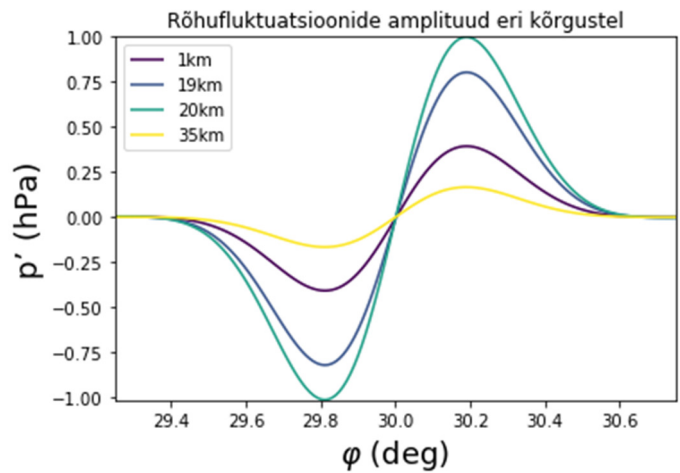
mille võib ekvivalentselt esitada

$$p'(z, \varphi) = \int_0^{z_M-z} e^{-\frac{z''}{H(\varphi)}} B_0(z'' + z, \varphi) dz''. \quad (3.25')$$

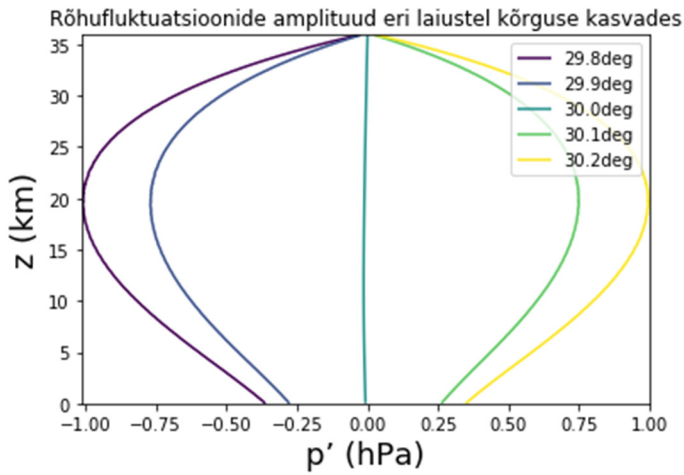
Tulemused rõhufluktuatsiooni kohta on kujutatud joonistel 17-19.



Joonis 17

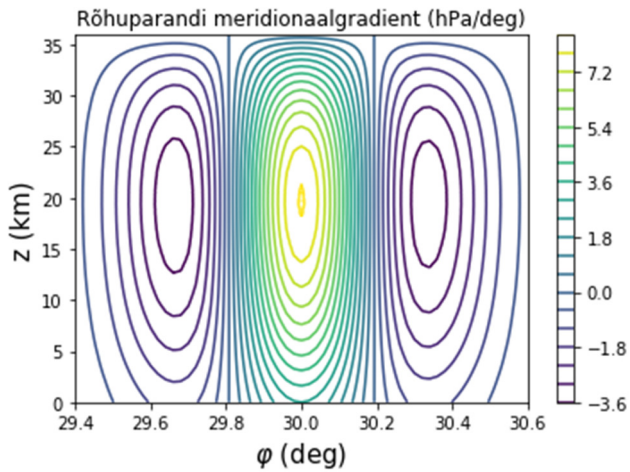


Joonis 18

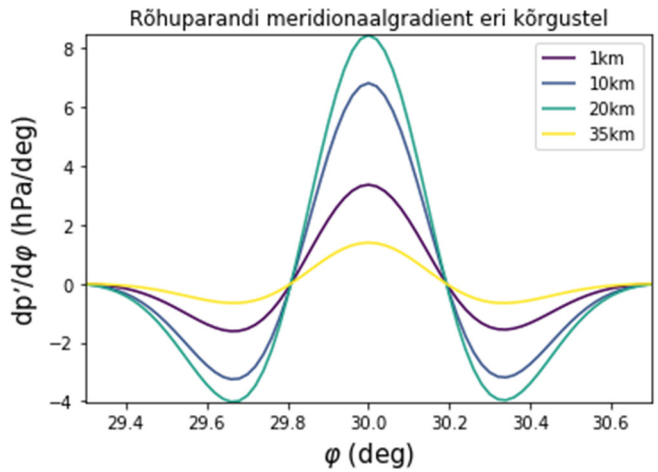


Joonis 19

Viimaseks toome ära ka joonised rõhufluktuatsiooni meridionaalgradiendi kohta

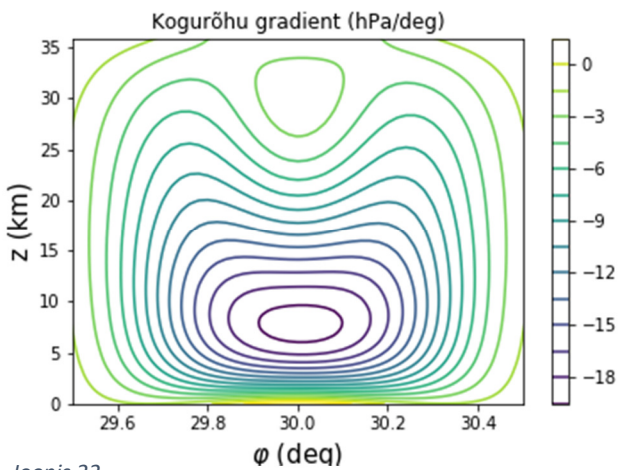


Joonis 20

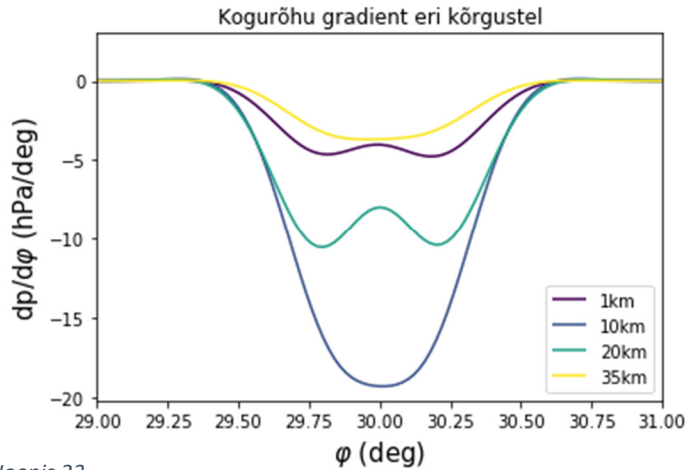


Joonis 21

Ning terve rõhu gradiendi

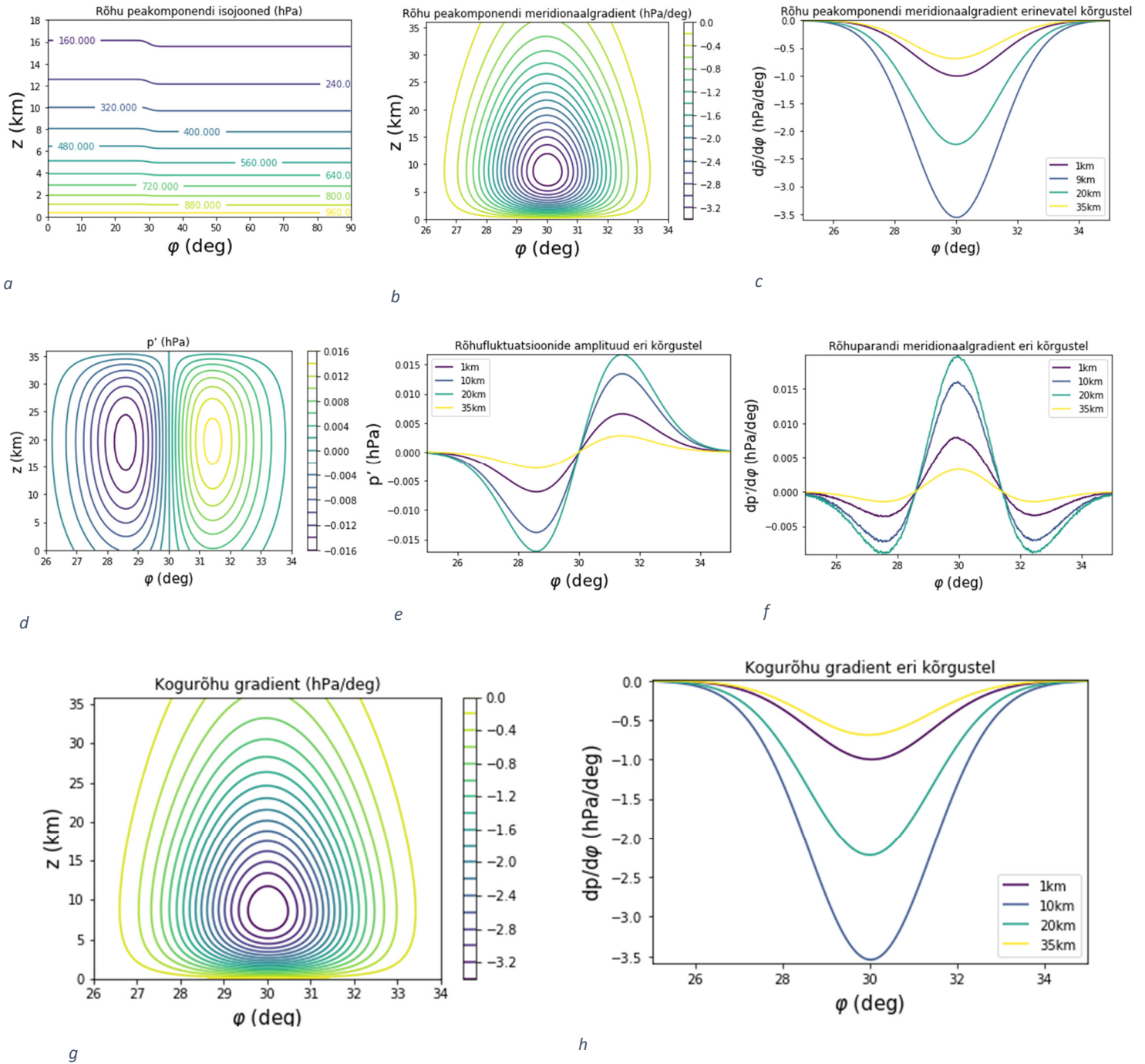


Joonis 22



Joonis 23

Frondi laiuze määras parameeter Δ . Ülaltoodud näites valisime $\Delta = 0.25^\circ$, mida võib pidada kitsaks frondiks. Võrdluse mõttes toome kokkuvõtlikult ära tulemused ka nõ laia frondi kohta, kus $\Delta = 2^\circ$.



Joonis 24

Stratifitseeritud atmosfääri juhtum

Viimaks proovime diagnoosida rõhku temperatuurifrondi korral stratifitseeritud atmosfääris.

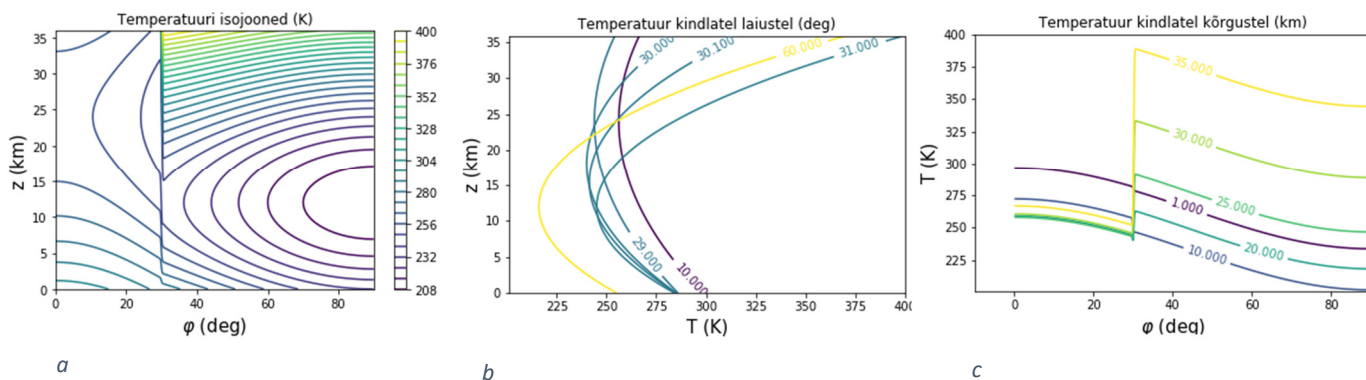
Aluseks võtame jälle temperatuuriprofiili (3.16), kus aga parameetrid on vastavalt

$$T_0(\varphi) = 300 - 60 \cdot \sin^2(\varphi)$$

$$\gamma(\varphi) = 3.5 + 3 \cdot W(\varphi; 30, 0.25) \quad (3.26)$$

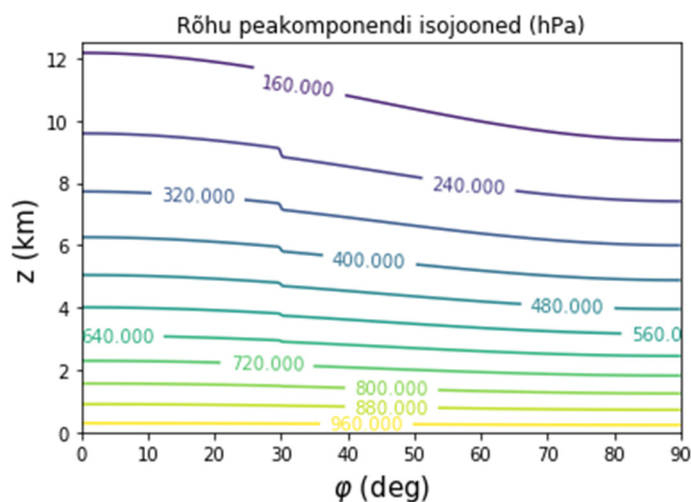
$$z_{tp}(\varphi) = 24 - 12 \cdot W(\varphi; 30, 0.25)$$

See vastab olukorrale, kus pinnafont puudub ja ilmub alles kõrguse kasvades. Saadud temperatuuriprofiili on demonstreeritud joonisel 26.

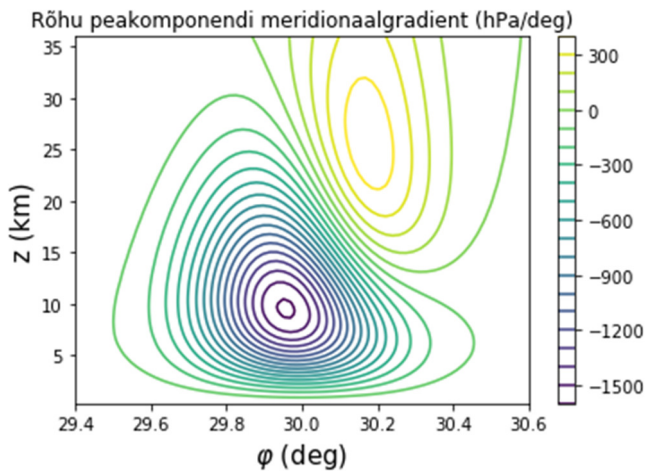


Joonis 25

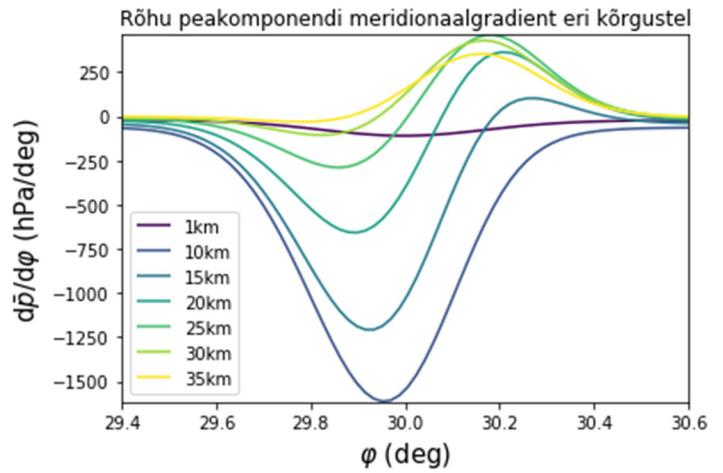
Rõhu peakomponent antud profiili korral on näidatud joonisel 26



Joonis 26

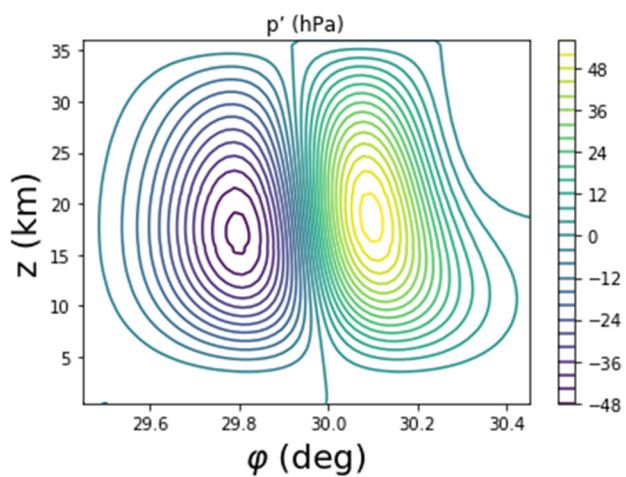


Joonis 27

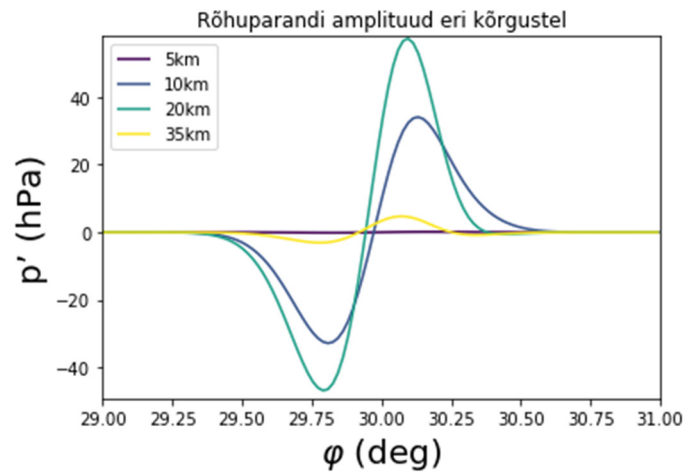


Joonis 28

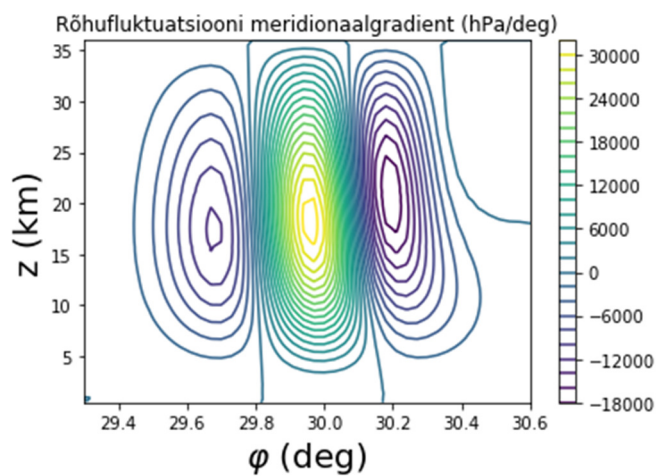
Joonistel 29-32 järgneb ülevaade rõhufluktuatsioonidest antud temperatuuriprofiili korral



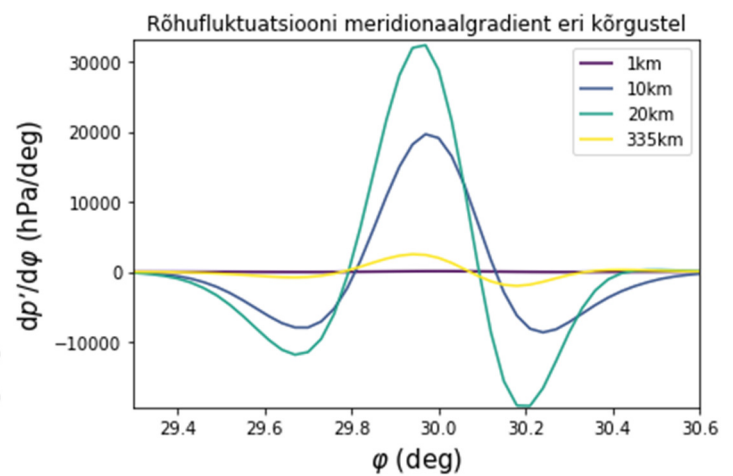
Joonis 29



Joonis 30

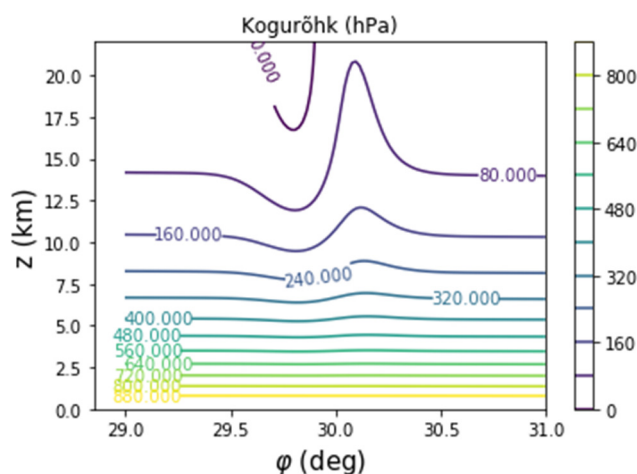


Joonis 31

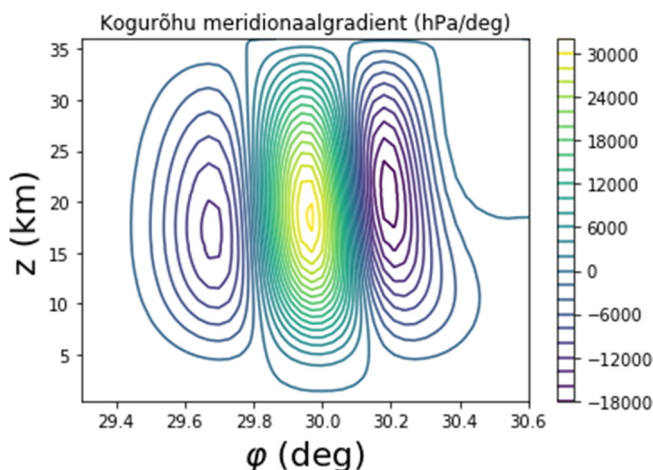


Joonis 32

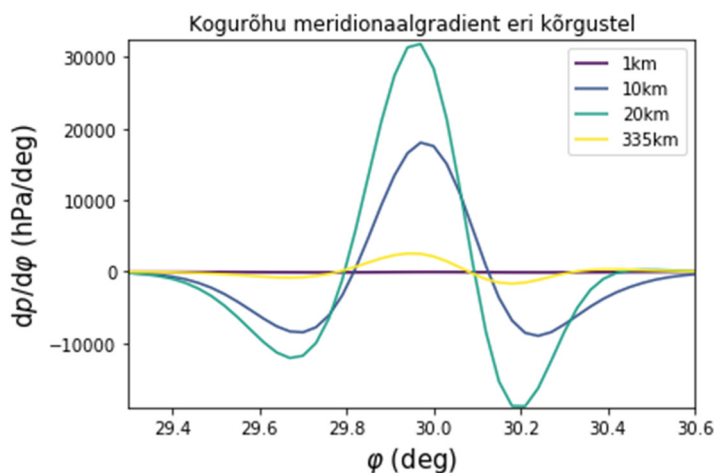
Ning viimaks kogurõhk ja tema gradient



Joonis 33



Joonis 34



Joonis 35

3.5 Tulemuste analüüs

Tulemused sõltuvad tugevalt temperatuuriprofiili valikust. Meridionaalsuunas aeglaselt muutuva temperatuurivälja puhul, kus temperatuuris järske muutusi ei esine ja hüdrostaatilise rõhu meridionaalgradient oli väga väikene, osutus vastavalt ka rõhuparand tühiseks ning tema leidmine kogurõhule midagi juurde ei andnud.

Hüpoteesi kohaselt mittehüdrostaatiline rõhuparand pidi muutuma oluliseks siis, kui hüdrostaatilise rõhu meridionaalgradient saab suureks, mis toimub temperatuurifrontide korral. Tulemused profiili (3.18) korral kinnitasid seda hüpoteesi, kus rõhuparand saavutas teatud piirkondades kuni ühe hektopaskali väärtuse. Samuti muutis rõhuparandi gradiendi arvestamine oluliselt kogurõhu gradienti, nagu nähtub jooniste 15-16 ja 22-23 võrdlemisest.

Siiski on ka temperatuurifrondi olemasolul rõhuparandi arvestamine oluline pigem siis, kui front on kitsas: kui tegime frondi 4 korda laiemaks, siis joonistelt 25 nähtub, et rõhuparandi mõju on märksa tagasihoidlikum, rõhufluktuatsioonide amplituud kahanes ligi 60 korda ning kogurõhu gradienti rõhuparandi gradient samuti märgatavalt ei muutnud. Laia frondi puhul on rõhuparand samas suurusjärgus, nagu aeglaselt muutuva temperatuurivälja puhul.

Isotermiline juhtum sobis lihtsuse tõttu erinevate parameetrite katsetamiseks, kuid realistlikuma stratifitseeritud temperatuurivälja puhul osutus parandi amplituud isegi suurusjärgu võrra suuremaks, saavutades modelleerimistulemuste järgi kõrgusel $\sim 20\text{km}$ ja umbes pool kraadi frondist eemal frondi mõlemal küljel väärtuse 60hPa . Kaugemal kui üks kraad frondist, samuti atmosfääri alumises ja ülemises osas oli parand endiselt nullilähedane. Rõhugradiendis domineeris väga tugevalt rõhuparandi gradient.

Meridionaalgradiendi joonistelt nähtuvate maksimumide-miinumide kõrgus vastab idaläänesuunaliste jugavoolude kõrgusele. Näeme seda, kui rakendame võrrandile (3.3) statsionaarsuse nõuet, kuid eeldame, et atmosfäär liigub tsirkumpolaarselt, mitte ei seisa paigal, ehk $b_\varphi \neq 0$. Saame kirjutada

$$\partial_\varphi p = -b_\varphi p = -\frac{a_\varphi}{H} p = -\frac{G_{\varphi j} a^j}{H} p = -\frac{p r_0^2}{H} a^\varphi \quad (3.27)$$

a^φ avaldame valemist (1.6'), jättes alles vaid peamise geostroofilise osa

$$\begin{aligned} a^\varphi &= \frac{1}{g} \left[(2\mathbf{\Omega} + \nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla v^2 \right]^\varphi \approx \frac{2}{g} [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}]^\varphi = \frac{2}{g} \left[\mathbf{\Omega} \times \frac{gH}{p} \mathbf{u} \right]^\varphi = \frac{2H}{p} [\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}]^\varphi \\ &= \frac{2H}{p} \frac{1}{D} \varepsilon^{\varphi\alpha\beta} \Omega_\alpha u_\beta = \frac{2H}{p} \frac{1}{r_0^2 Z_M \cos \varphi} \Omega_\zeta u_\lambda \end{aligned} \quad (3.28)$$

Teisendame nurkkiiruse vektori komponendi füüsikaliseks komponendiks

$$\Omega_\zeta = \sqrt{|G_{\zeta\zeta}|} \Omega_z = Z_M \Omega_z = Z_M \Omega \sin \varphi, \quad (3.29)$$

kus $\Omega = |\mathbf{\Omega}| = 7.27 \cdot 10^{-5} 1/s$ on Maa nurkkiiruse vektori pikkus. Saame valemi geostroofilise impulsi arvutamiseks etteantud/teadaoleva meridionaalse rõhugradiendi kaudu

$$u_\lambda = -\frac{\cos \varphi \partial_\varphi p}{2\Omega \sin \varphi}, \quad (3.30)$$

kust on näha, et $\partial_\varphi p$ miinumidele vastavad u_λ maksimumid, s.o jugavoolud.

4. Arutelu ja kokkuvõte

Käesoleva töö eesmärgiks oli esitada täpsed võrrandid impulsitihedusele ja rõhule, eraldades välja aeglase solenoidaalse impulsiga asümptootika. Tulemuseks olid evolutsioonivõrrandid (1.18) – (1.20) solenoidaalsele impulsitihedusele ning diagnostiline Laplace'i võrrand (2.2) rõhule. Arvestades ääritingimusi (1.28) ja (1.29) aluspinnal ja tingimusi (1.31) ja (1.32) ülapiiril, esitasime rõhuvõrrandi lahendi kahes osas hüdrostaatilise peakomponendina (2.20) ja parandina (2.32). See võimaldab etteantud solenoidaalse impulssvälja, temperatuurijaotuse ja aluspinna profiili korral diagnoosida rõhuvälja, millest omakorda on võimalik prognoosida süsteemi edasist arengut impulsi ja temperatuuri evolutsiooni kaudu (võrrandid (3.2)-(3.4)).

Ülevaade teoriast anti peatükkides 1 ja 2 ning 3. peatükis lahendati rõhu ääreülesanne konkreetsetes tingimustes, kus atmosfäär seisab paigal ja orograafia puudub. Seega kolmest mittehüdrostaatilisi efekte põhjustavast tegurist – (1) horisontaalselt ebahühtlane temperatuurijaotus; (2) atmosfääri liikumine; (3) orograafia – arvestati modelleerimisel vaid esimesega.

Piirduti lihtsate juhtudega, kus temperatuurijaotused valiti tsirkumpolaarsed, kaotades sellega sõltuvuse geograafilisest pikkusest λ . Lahendusalgoritm realiseeriti programmeerimiskeeles Fortran 95. Nelja erineva temperatuuriprofiiliga arvutuste läbiviimise tulemusena võib öelda, et täpse rõhu leidmine rõhuparandi väljaarvutamise näol pole vajalik meridionaalsuunas aeglaselt muutuva temperatuurijaotuse korral, kuid rõhuparand omandab arvestatava suuruse temperatuurifrondi olemasolu korral, kusjuures kitsa frondi korral oli parandi amplituud suurem, kui laia frondi korral, ning eriti suuri väärtusi omandas rõhuparand stratifitseeritud atmosfääris.

Analüüsides ilmneb, et leitud rõhugradientide miinimumide ja maksimumide kõrguse järgi saab lisaks leida vastavalt ida- või läänesuunas levivate jugavoolude asukohad ja tugevuse. Mittehüdrostaatilise mudeli tähelepanuväärne omadus on mitme jugavoolu esinemise/tekke võimalus (joonis 22) erinevalt hüdrostaatilise mudeli ühestainsast jugavoolust (joonis 15).

Rõhuparandi arvestamata jätmine tähendab süstemaatilist viga rõhugradiendis, mis omakorda põhjustab süstemaatilise ja akumulieruva vea ka impulssvälja arvutustes. Seega pikema aja jooksul võivad ka väikesed vead põhjustada süsteemi arengu prognoosis tõsiseid vigu. Kvantitatiivseks vea hindamiseks tuleks võrrelda täpse mittehüdrostaatilise mudeli ja hüdrostaatilise lähendmudeli käitumist pikema aja jooksul. Aga see on juba tulevikuülesanne.

Summary

Formation of momentum and pressure fields in the windy, unevenly heated atmosphere over complex terrain

The aim of this paper is to present exact equations of momentum and pressure in atmosphere in the case of solenoidal dynamics. In the first part of this paper the main dynamic equations of atmosphere are presented in their invariant vector form. Then the choice of coordinates is discussed and the components of the equation of motion and continuity equation are presented in the preferred coordinate system and the boundary conditions for the momentum and pressure are discussed in lower and upper atmosphere.

In the second part the boundary condition problem is solved in the case of solenoidal dynamics. A generalized Laplace equation is derived for pressure field in the place of common approximate hydrostatic pressure-equation. The solution for pressure is presented in two parts, as the main or hydrostatic component (2.20) and a small correction to it (2.32).

The solution provides exact pressure distribution in the whole atmosphere if the fields of temperature and momentum and the function of terrain are given. This solution is realized in the third part of this paper, with numerical algorithms carried out in Fortran 95 programming language. Momentum and the function of terrain are both set to zero and only circumpolar temperature distributions are chosen, thus eliminating dependency on longitude λ .

It can be assumed from the results of the modelling that finding the exact pressure can be important in case of tropical fronts, especially if the front is narrow and atmosphere is stratified. The long-term influence of finding the exact pressure instead of the approximated one on the prognostic variables such as wind field must be evaluated in further papers.

Viited

- [1] Rõõm, R., 2001: Nonhydrostatic adiabatic kernel for HIRLAM. Part I: Fundamentals of nonhydrostatic dynamics in pressure-related coordinates. Hirlam Technical Report No 48, 25 p.
- [2] Männik, A., Rõõm, R., 2001: Nonhydrostatic adiabatic kernel for HIRLAM. Part II: Anelastic, hybrid-coordinate, explicit-Eulerian model. Hirlam Technical Report No 49, 53 p.
- [3] Rõõm, R., Männik, A., 2002: Nonhydrostatic adiabatic kernel for HIRLAM. Part III: Semi-implicit Eulerian scheme. Hirlam Technical Report No 55, 29 p.
- [4] Rõõm, R., A. Männik, A. Luhamaa, 2006: Non-hydrostatic Adiabatic Kernel for HIRLAM. Part IV: Semi-implicit Lagrangian scheme. *HIRLAM Technical Report*, **65**, 46p.
- [5] Rõõm, R., Männik, A., Luhamaa, A. (2007). Nonhydrostatic semi-elastic hybrid-coordinate SISL extension of HIRLAM. Part I: Numerical scheme. *Tellus: Series A*, 59(5), 650 -660.
- [6] Rõõm, R., Männik, A., Luhamaa, A. (2007). Nonhydrostatic semi-elastic hybrid-coordinate SISL extension of HIRLAM. Part II: Numerical testing. *Tellus: Series A*, 59(5),661 - 673.
- [7] Miller, M. J., 1974: On the use of pressure as vertical co-ordinate in modeling convection. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 100, 155–162.
- [8] Laprise, R., 1992: The Euler equations of motion with hydrostatic pressure as an independent variable. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 197–207.
- [9] Janjic Z. I., J. P. Gerrity, and S. Nickovic, 2001: An alternate approach to nonhydrostatic modeling. *Mon. Wea. Rev.*, 129, 1164–1178.
- [10] Bubnova, R., G. Hello, P. Benard, and J.-F. Geleyn, 1995: Integration of the fully elastic equations cast in the hypostatic pressure terrain-following coordinate in the framework of the ARPEGE/Aladin NWP system. *Mon. Wea. Rev.*, 123, 515– 535.
- [11] T. Davies, M. J. P. Cullen, A. J. Malcolm, M. H. Mawson, A. Staniforth, A. A. White, N. Wood, *A new dynamical core for the Met Office's global and regional modelling of the atmosphere*, *Q. J. R. Meteorol. Soc.* (2005), 131, pp. 1759–1782

[12] Akio Arakawa, Celal S. Konor (2009). Unification of the Anelastic and Quasi-Hydrostatic Systems of Equations. *Monthly Weather Review*, 137, 710 – 726.

Lisad

Järgnevalt Fortran 95 kood, millega arvutati antud töös rõhuparand temperatuuriprofiili (3.26) puhul. Ülejäänud suuruste arvutamiseks kasutatud koodid sisalduvad selle koodi alamrutiinides.

```
program primmtuletis
integer, parameter :: N=100
integer, parameter :: vertical = 80
integer, parameter :: M = 3000
integer i,j,k
real e1,e2,f,vastus

open(1, file = 'parandituletis.dat', status = 'new')
do i=1,vertical
  e=real(i,3)/real(vertical,3)
  do j=966,1033
    f=real(j,3)*90/real(M,3)
    f = 3.14*f/180.0
    call pt(vastus,N,e,f)
    write(1,*) e*36, f, vastus
  end do
  print *,i
end do
close(1)
end program primmtuletis
```

```
subroutine a1(t,f)
real t,f
t = 300-60*(sin(f))**2
return
end subroutine a1
```

```
subroutine b1(v,f)
real f,f2,fo,d,a,w,v
f2 = 180.0*f/3.14
fo=30.0
d=0.25
a = (f2-fo)/d
w = (1.0/2.0)*(1+ERF(a))
v = 3.5+3*w
return
end subroutine b1
```

```
subroutine c1(z,f)
real z,f,vf2,fo,d,a,w
f2 = 180.0*f/3.14
fo=30.0
d=0.25
```

```

a = (f2-fo)/d
w = (1.0/2.0)*(1+ERF(a))
call b1(v,f)
z = v/(2.0*(24-12*w))
return
end subroutine c1

```

```

!Rõhu peakomponendi analüütiline avaldis
subroutine avaldis(vastus,e,f)
real vastus,e,f,a,b,c,integr
call c1(c,f)
call b1(b,f)
call a1(a,f)
integr = -84.86889578*atan((b-72.0*c*e)/(sqrt(4.0*a*c-b**2)))/(sqrt(4.0*a*c-b**2.0))
integr = integr + 84.86889578*atan(b/(sqrt(4.0*a*c-b**2)))/(sqrt(4.0*a*c-b**2.0))
vastus = 1000*exp(-integr)
return
end subroutine avaldis

```

```

subroutine tuletis(v,e,f)
real e,f,df,fe1, fe2,fp1,fp2
df = 0.001
call avaldis(fe1,e,f-df)
call avaldis(fe2,e,f-2*df)
call avaldis(fp1,e,f+df)
call avaldis(fp2,e,f+2*df)
v = ((1.0/12.0)*fe2-(2.0/3.0)*fe1+(2.0/3.0)*fp1-(1.0/12.0)*fp2)/df
return
end subroutine tuletis

```

```

subroutine teinetuletis(v,e,f)
real e,f,s,a,b,c,df,fe1, fe2,fp1,fp2,fn
df = 0.001
if(f-2*df<0)then
  call avaldis(fn,e,f)
  call avaldis(fp1,e,f+df)
  call avaldis(fp2,e,f+2*df)
  s = (fn-2*fp1+fp2)/df**2
else
  if(f+2*df>90)then
    call avaldis(fn,e,f)
    call avaldis(fp1,e,f-df)
    call avaldis(fp2,e,f-2*df)
    s = (fn-2*fp1+fp2)/df**2
  else
    call avaldis(fe1,e,f-df)
    call avaldis(fe2,e,f-2*df)
    call avaldis(fp1,e,f+df)
    call avaldis(fp2,e,f+2*df)
    call avaldis(fn,e,f)

```

```

    s = (-1.0/12.0)*fe2+(4.0/3.0)*fe1-(5.0/2.0)*fn+(4.0/3.0)*fp1-(1.0/12.0)*fp2)/df**2
  end if
end if
v = s
return
end subroutine teinetuletis

```

```

subroutine S(v,e,f)
real t1,t2,b,v
b = 36.0/6371.0
call tuletis(t1,e,f)
call teinetuletis(t2,e,f)
v = -b**2*tan(f)*t1+b**2*t2
end subroutine S

```

```

subroutine B(sum,n,e,f)
integer n,i
real k,e,de,sum,z,Sp,t
i=0
sum = 0
de =e/real(n,3)
do k = 0,e,de
  z=k*36
  call S(t,k,f)
  if(k==0 .or. abs (k - e) < 1.0D-5) then
    sum = sum+t
  else
    if( MOD(i, 2)==0) then
      sum = sum +2*t
    else
      sum = sum+4*t
    end if
  end if
  i = i+1
end do
sum = sum*de/3
return
end subroutine B

```

```

subroutine tau(vastus,n,e1,e2,f)
integer n,i
real k,e1,e2,de,s, vastus,z,temp,vahe, mark
s = 0
de =abs(e2-e1)/real(n,3)
if(e1==e2)then
  vastus = 0
else
  if(e1<e2)then
    mark = 1.0
  else

```

```

    vahe = e1
    e1 = e2
    e2 = vahe
    mark = -1.0
end if
i=0
do k = e1,e2,de
    z=k*36
    call temperatuur(t,f,z)
    temp = t
    if(abs(k - e1) < (1.0D-5) .or. abs (k - e2) < (1.0D-5)) then
        s = s+1/temp
    else
        if( MOD(i, 2)==0) then
            s = s +2/temp
        else
            s = s+4/temp
        end if
    end if
    i = i+1
end do
s = mark*36*9.81/8.314*s*de/3
end if
vastus = s
return
end subroutine tau

```

```

subroutine funktsioon(v,n,e,e2,f)
real v,e,e2,f,bv,tvv,tv
integer i,n
call B(bv,n,e,f)
call tau(tv,n,e,e2,f)
v = bv*tv
return
end subroutine funktsioon

```

```

subroutine integr(vastus,n,e,f)
real v,e,e2,f, k,de,v1
integer n,i
v = 0
i=0
de =(1.0-e)/real(n,3)
do k = e,1,de
    z=k*36
    call funktsioon(v1,n,e,k,f)
    if(abs(1-k) < 1.0D-5 .or. abs (k - e) < 1.0D-5) then
        v = v+v1
    else
        if( MOD(i, 2)==0) then
            v = v +2*v1
        end if
    end if
    i = i+1
end do
return
end subroutine integr

```

```

    else
      v = v+4*v1
    end if
  end if
  i = i+1
end do
vastus = v
return
end subroutine integr

```

```

subroutine primm(vastus,N,e,f)
real vastus,e,f,v,f2
integer N
if(e==1)then
  v = 0
else
  call integr(v,N,e,f)
end if
vastus = v
return
end subroutine primm

```

```

subroutine pt(vastus,N,e,f)
real e,f
integer s
real df
real fe1, fe2,fp1,fp2
df = 0.001
call primm(fe1,N,e,f-df)
call primm(fe2,N,e,f-2*df)
call primm(fp1,N,e,f+df)
call primm(fp2,N,e,f+2*df)
vastus = ((1.0/12.0)*fe2-(2.0/3.0)*fe1+(2.0/3.0)*fp1-(1.0/12.0)*fp2)/df
end subroutine pt

```

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Heido Trofimov

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose

Rõhu- ja impulssvälja kujunemine tuulises ebaühtlaselt soojenenud atmosfääris vahelduva maastiku kohal

mille juhendaja on prof. Rein Rõõm

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega

isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **20.06.2018**