L. J. LEVINSON

TEHNILISE MEHAANIKA ALUSED

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1958

2/M2709

A-21840 III

PROF. L. J. LEVINSON

TEHNILISE MEHAANIKA ALUSED

Lubatud NSV Liidu Ministrite Nõukogu juures asuva Tööjõureservide Peavalitsuse Tehnilise Kutsehariduse Õpetatud Nõukogu poolt õppevahendina kasutamiseks tehnika-, tööstus-, raudtee- ja mäetööstuskoolides

EESTI RIIKLIK KIRJASTUS
TALLINN 1958

Originaali tiitel:

Проф. Л. Е. Левинсон

Основы технической механики

Второе исправленное издание
Всесоюзное учебно-педагогическое издательство
Трудрезервиздат
Москва 1955

Tõlkinud A. Korba

KIRJASTUSELT

Käsikirja „Tehnilise mehaanika alused" on trükiks ette valmistanud prof. L. J. Levinson 1953. a.

Käsikirja parandamise, läbivaatamise ja redigeerimise edasise töö tegid füüsika- ja matemaatikateaduste kandidaat prof. G. N. Svešnikov (jaod „Staatika", „Kinemaatika" ja „Dünaamika") ja ins. L. S. Pavluškov (jaod „Masinaelemendid" ja „Tugevusõpetuse alused").

Ettepanekud ja arvamused raamatu kui ka selles kasutatud terminoloogia kohta palub kirjastus saata aadressil: Tallinn, Pärnu mnt. 10, Eesti Riikliku Kirjastuse tehnilise kirjanduse toimetus.

2

Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
42709

ESIMENE OSA

TEOREETILISE MEHAANIKA ELEMENDID

SISSEJUHATUS

§ 1. Mehaaniline liikumine

Liikumisel on kõige erinevamad vormid. Arvutu hulk kehasid liigub Maal, mis ise pöörleb ümber oma telje ja tiirleb ümber Päikese; Päike koos päikesesüsteemi kuuluvate planeetidega liigub tähtede suhtes, mis omakorda liiguvad maailmaruumis. Nimetatud juhtudel toimub kehade liikumine selle sõna kitsamas mõttes. Teadus on aga näidanud hulga teisi liikumise vorme, nagu näiteks soojus, keemilised nähtused, elekter, valgus jt. Liikumise vormiks on ka elu kõigis oma avaldustes.

Seega loob mateeria igavene liikumine maailma kogu lõpmatu mitmekesisuse, kõik maailmas toimuvad nähtused.

Liikumine toimub ruumis ja ajas. Sellest tingituna on ruum ja aeg liikuvast mateeriast lahutamatud.

Kehade liikumise üle me otsustame nende ümberpaigutumise järgi teiste kehade suhtes. *Keha ümberpaigutumist teise keha suhtes nimetatakse mehaaniliseks liikumiseks.*

Teadust, mis uurib mehaanilise liikumise seadusi, nimetatakse mehaanikaks.

§ 2. Paigalseisu mõiste suhtelisus

Mehaanikas tuleb tihti kokku puutuda kehade paigalseisu mõistega. Nii näiteks raudteesilla projekteerimisel arvutatakse see stabiilsusele ja tugevusele, s. o. tagatakse silla liikumatus. Rääkides, et sild on liikumatu, mõistame me selle all silla liikumatust Maa suhtes. Tegelikult aga sild liigub, võttes osa Maa pöörlemisest ümber oma telje ja tiirlemisest ümber Päikese, kogu päikesesüsteemi liikumisest jne.

Absoluutset paigalseisu ei ole. Kui me mehaanikas räägime liikumatust kehast, siis mõistame selle all *suhtelist paigalseisu*, s. o. vaadeldava keha liikumatust teise keha suhtes, kõige sagedamini Maa suhtes. Kui me näiteks räägime, et treipingi spindlikast on liikumatu, siis me peame silmas, et spindlikast on

liikumatult kinnitatud treipingi sängile, mille me loeme tinglikult liikumatuks.

Keha, mida tinglikult loetakse liikumatuks, nimetatakse alussüsteemiks.

§ 3. Mehaanika põhimõisted

Kuna keha liikumine toimub ruumis, siis on ruum üheks mehaanika põhimõisteks. Täpselt samuti kuulub mehaanika põhimõistete hulka ka aeg.

Liikuva keha iga punkt kujundab oma liikumisel alussüsteemi suhtes kindlakujulise joone, mida nimetatakse trajektooriks. Trajektoor võib olla nii sirg- kui ka kõverjooneline, millele vastavalt nimetatakse ka liikumist sirgjooneliseks või kõverjooneliseks. Punkt läbib liikudes kindla teepikkuse. Kindla ajavahemiku jooksul läbitud teepikkus oleneb liikumise kiirusest. Kui punkt läbib võrdsete ajavahemike jooksul võrdsed teed, siis on liikumise kiirus konstantne ning sellist liikumist nimetatakse ühtlaseks; kui see tingimus pole täidetud, siis nimetatakse liikumist ebaühtlaseks ehk muutuvaks.

Kui kiirus võrdsetes ajavahemikes muutub ühe ja sama suuruse võrra, siis nimetatakse liikumist ühtlaselt muutuvaks (ühtlaselt kiirenevaks või ühtlaselt aeglustuvaks). Kiiruse muutumise mõõtu nimetatakse kiirenduseks.

Et uurida keha mehaanilist liikumist ja selle liikumise erijuhtu — paigalseisu, kasutatakse mehaanikas suurust, mis mõõdab teiste kehade mõju antud kehale ning mida nimetatakse jõuks.

Toodud mõistetega piirdumegi. Edasises käsitluses vaatleme neid üksikasjaliselt koos teiste mehaanikasse kuuluvate suurustega.

§ 4. Mehaanikas kasutatavad põhiühikud

Selleks et väljendada mitmesuguseid suurusi arvuliselt, peab kasutama kindlaid mõõtühikuid. Mehaanikas on põhiühikuteks:

meeter — m — pikkuse mõõtmiseks;
kilogramm — kg — jõu mõõtmiseks;
sekund — sek — aja mõõtmiseks.

Nendest põhiühikutest tuletatakse paljude teiste mehaanikas esinevate suuruste mõõtühikud. Näiteks kiiruse (mida mõõdetakse tee ja aja jagatisena) mõõtühikuks on $\frac{\text{pikkusühik}}{\text{ajaühik}}$, s. o. $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$ (või teisiti $\text{m} \cdot \text{sek}^{-1}$); kiirenduse mõõtühikuks on $\frac{\text{kiirusühik}}{\text{ajaühik}}$, s. o. $\frac{\text{m}}{\text{sek} \cdot \text{sek}}$ ehk $\frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$ (teisiti $\text{m} \cdot \text{sek}^{-2}$) jne.

Juhtudel, kus see osutub kohasemaks, kasutatakse mõõtühikuid, mis on tuletatud põhiühikutest m, kg ja sek. Näiteks avaldatakse väikesi kiirusi $\frac{\text{mm}}{\text{sek}}$, rongi või lennuki kiirust aga $\frac{\text{km}}{\text{h}^*}$; metallilõikepinkide lõikekiirus antakse $\frac{\text{m}}{\text{min}}$; suuri jõude mõõdetakse tonnides (t) jne.

Mõõtühiku näitamine suuruste juures on hädavajalik; ülesannete lahendamisel on suuruste mõõtühikute hoolas silmaspidamine mööda pääsmatu õige vastuse saamiseks.

Näide 1. Mitu korda on kiiruse mõõtühik $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ suurem või väiksem kiiruse mõõtühikust $\frac{\text{m}}{\text{min}}$?

Esitatud küsimusele vastamiseks teisendame mõõtühikud samanimelisteks. Arvestades, et 1 km = 1000 m ja 1 h = 60 min, saame:

$$1\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000\ \text{m}}{60\ \text{min}},$$

järelikult

$$1\ \frac{\text{km}}{\text{h}} : 1\ \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{1000\ \text{m}}{60\ \text{min}} : 1\ \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{1000}{60} = 16^2/_3, \text{ s. o.}$$

$1\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$ on $16\ ^2/_3$ korda suurem kui $1\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

§ 5. Masspunkt ja kõva keha

Keha, mille liikumist käsitletakse teoreetiliseks mehaanikaks nimetatavas teaduses, eeldatakse koosnevat väga suurest arvust, kuid kaduvväikeste mõõdetega materiaalsetest osakestest. Iga osakese maht eeldatakse olevat niivõrd väike, et osake läheneb oma mõõdetelt geomeetrilisele punktile. Iga sellist osakest nimetatakse masspunktiks.

Seega kujutab keha endast masspunktide kogumikku (ehk süsteemi).

Liikumise käsitlemisel asendatakse keha mehaanikas sageli masspunktiga. Nii näiteks võib auriku liikumist vaadelda masspunkti liikumisena. Masspunktina võib vaadelda ka liikuvat kuulikest, mis on riputatud pika niidi otsa.

Seega tähendab mõiste „masspunkt" kas keha väga väikest osakest või siis keha ennast, vaadelduna punktina.

Teisel juhul nimetatakse masspunktiks keha, mille mõõted, võrreldes teiste samas ülesandes vaadeldavate kehade mõõdetega, on niivõrd väikesed, et neid ei pruugi arvestada.

---

* h — tunni tähis.

Keha all mõistetakse mehaanikas absoluutselt kõva keha, s. o. sellist keha, mis teiste kehade toimel ei muuda oma kuju ega mõõteid. Absoluutselt kõvaks nimetatakse keha, mille kahe vabalt võetud punkti vaheline kaugus jääb teiste temale mõjuvate kehade igasuguse toime puhul muutumatuks.

§ 6. Mehaanika aine

Nagu eespoolöeldust järeldub, on mehaanika teadus, mis uurib kehade liikumise seadusi.

Mehaanikas lahendatakse mitmesuguseid küsimusi. Kuid vaatamata küsimuste mitmekesisusele võib igaühe nendest liigitada ühte alljärgnevasse tüüpi.

1. Liikuva keha punktide trajektooride määramine, keha ühe või teise punkti asukoha määramine trajektooril antud hetkel, liikumiskiiruse määramine sel hetkel, kiirenduse määramine ja

M. V. Lomonossov

punkti (või keha) poolt etteantud ajavahemikus läbitud teepikkuse määramine jne., s. o. küsimuste lahendamine, mis iseloomustavad keha kui terviku või selle ühtede või teiste üksikute punktide liikumist.

Mehaanika osa, mis käsitleb neid küsimusi, nimetatakse kinemaatikaks. Teisiti öeldes — kinemaatikas uuritakse liikumise geomeetriliste elementide ja aja vahelisi seoseid, ilma et arvestataks liikuvale kehale mõjuvaid jõude.

2. Liikumise laadi määramine olenevalt kehale mõjuvatest jõududest või, ümberpöördult, nende jõudude määramine, mis põhjustavad antud liikumise. Need ülesanded lahendatakse mehaanika osas, mida nimetatakse kineetikaks.

Maa peal me näeme kehasid, mis seisavad paigal, või nagu öeldakse — on tasakaalus; seepärast on mehaanika ülesandeks vaadelda tingimusi, mispuhul kehale mõjuvad jõud tasakaalustuvad, s. o. ei avalda kehale mingisugust toimet tema mehaanilise oleku muutmise mõttes. Kasutades neid tasakaalutingimusi, me tagame mitmesuguste ehituste stabiilsuse.

Kineetika osa, mis uurib jõudude tasakaalutingimusi, järelikult ka selle keha tasakaalutingimusi, millele need jõud on rakendatud, nimetatakse staatikaks. Küsimused aga, mis vaatlevad kehade liikumist nendele mõjuvate jõudude mõjul, kuuluvad kineetika teise osa — dünaamika — valdkonda.

See ongi teoreetiliseks mehaanikaks nimetatava teaduse sisu. Selle teaduse aluseid käsitleb käesoleva raamatu esimene osa järgmises järjekorras: 1) staatika, 2) kinemaatika, 3) dünaamika.

§ 7. Mehaanika arengu põhietapid

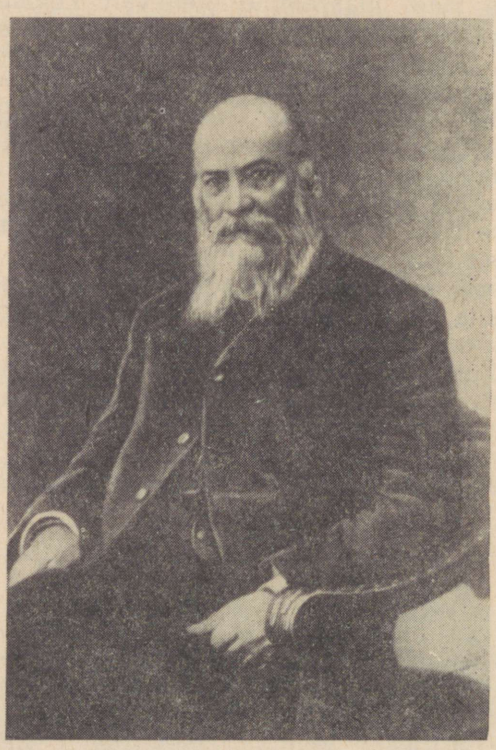
Selleks läks tarvis aastatuhandeid, et inimene hakkas mehaanilisi nähtusi teaduslikult seletama. Esimesed teadaolevad sellealased katsetused kuuluvad umbes neljandasse sajandisse enne meie ajaarvamist. Selle ajajärgu tööriistad ja mehaanilised seadised olid äärmiselt lihtsad, tehnika tase vastas orjanduslikule korrale. Vastavalt sellele olid ka mehaanikale esitatavad nõuded väikesed. Tol ajal tuntud seadiseid, nagu kangi, plokki, vänta jt., uurisid õpetlased peamiselt jõudude tasakaalu, s. o. staatika seisukohalt.

Üks esimesi kohti tolle aja õpetlaste seas kuulub Archimedesele (287—212 e. m. a.), kes tegi staatika valdkonnas rea uurimisi (kangiseadus, õpetus raskuskeskmest jt.).

Intensiivselt hakkas mehaanika arenema alles viieteistkümnendal sajandil seoses üleminekuga primitiivselt käsitöölt täiuslikumatele tootmisviisidele, mida soodustas maailmakaubanduse arenemine. Mehaanika areng tol perioodil on seotud suure õpetlase Leonardo da Vinci nimega (1452—1519), kes tegi mehaanika

mitmesugustes valdkondades rea avastusi (staatiline moment, jõu poolt tehtud töö mõiste jt.), ja Stevini nimega (1548—1620), kes süvendas paljusid Archimedese staatika väiteid ja andis jõudude parallelogrammi reegli, samuti aga uuris kaldpinna mehaanilisi omadusi.

Kuueteistkümnendal sajandil rikastus mehaanika tänu Galileo Galilei (1564—1642) töödele avastustega dünaamika valdkonnas. Galilei uurimuste omapäraks on see, et ta tegi oma järeldused arvutute, hoolikalt läbiviidud katsete põhjal.



H. J. Žukovski

Galilei töid mehaanika valdkonnas jätkas Isaac Newton (1642—1727), kes täiendas mõningate Galilei poolt avastatud seaduste formuleeringuid ning viis dünaamika täppisteaduse tasemeni. Galilei-Newtoni mehaanika, mida nimetatakse klassikaliseks, oli vundamendiks mehaanika edasisel intensiivsel arenemisel.

Kaheksateistkümnes sajand paistab silma uue teaduse — analüütilise mehaanika — loomise poolest, mille rajajaks oli vene akadeemik, kuulus matemaatik ja mehaanik L. Euler (1707—1783).

Kaheksateistkümnendal sajandil elas suur vene teadlane M. V. Lomonossov (1711—1765), kes sai kuulsaks oma väljapaistvate avastustega teaduse mitmesugustes harudes, nende hulgas ka mehaanikas. Tema poolt avastati aine ja liikumise jäävuse seadus, millel on teaduses esmajärguline tähtsus.

Vene esimestest mehaanika alal töötanud teadlastest tuleb veel märkida S. Kotelnikovi, kelle töö „Raamat, mis sisaldab õpetuse keha tasakaalust ja liikumisest" ilmus 1774. aastal.

Alates kahekümnendast sajandist muutus mehaanika arenemine eriti hoogsaks ja mitmekülgseks. Mehaanika järeldused leiavad üha laiemat kasutamist mitmesuguste praktiliste ülesannete lahendamisel.

Vene teadlane P. L. Tšebõšev (1821—1894) lõi oma rohkete teaduslike töödega alused teadusele, mis arenes välja teoreetilisest mehaanikast ja mida nimetatakse „Masinate ja mehhanismide teooriaks" (teisiti „Rakendusmehaanikaks"). Suure panuse vedelate ja gaasiliste kehade mehaanikasse andsid paljud vene teadlased. Üks esimesi kohti nende hulgas kuulub N. J. Žukovskile (1847—1921). N. J. Žukovski oli vene teadlaste koolkonna loojaks lennuteooria alal. „Vene lennuasjanduse isa" N. J. Žukovski töödega rajati tervikuna aerodünaamika ja lennundusteaduse alused. N. J. Žukovski üks väljapaistvamaid õpilasi, sotsialistliku töö kangelane akadeemik S. A. Tšaplõgin (1869—1942) lahendas rea tähtsaid probleeme kaasaja ülikiire lennunduse valdkonnast ja teisi suure teoreetilise ning praktilise tähtsusega küsimusi mehaanika alalt.

Teistest kodumaa teadlastest ja novaatoritest, kes on andnud suure panuse mehaanika arendamisel, jutustame edaspidi vastavate küsimuste käsitlemisel.

STAATIKA

Esimene peatükk

ALGMÕISTEID JÕUDUDEST. STAATIKA ALUSED

§ 8. Jõududest

Vaatleme mõningaid mehaanilisi nähtusi.

Kivi kukub maha.

Trammivagun läheb sirgjooneliselt teeosalt kõverjooneliselet tänu sellele, et rööbaste külgsurve ratastele muudab rataste ja vaguni kui terviku liikumist.

Kaalutava keha asetamine vedrukaalu kausikesele põhjustab vedru deformeerumist ja kausikese allavajumist.

Kõigil nendel juhtudel toimus mehaanilise liikumise (või nagu räägitakse — keha mehaanilise oleku) muutumine teise keha mõjumise tagajärjel vaadeldavale kehale: esimesel ja kolmandal juhul oli mõjuvaks kehaks Maa, teisel juhul — rööpad.

Ühe keha poolt teisele kehale avaldatavat mõju nimetatakse mehaanikas jõuks. Järelikult, kui me räägime, et kehale *A* mõjub mingi jõud, siis selle all me mõtleme, et talle mõjub keha *B*.

Paneme tähele, et vaadeldud näidetes mõjusid vastastikku kaks keha (Maa ja kivi, rööbas ja ratas, kaalutav keha ja vedru). Keha *A* mõjumisel kehale *B* mingi kindla jõuga mõjub keha *B* kehale *A* täpselt sama suure vastassuunalise jõuga.

§ 9. Staatika sisu

Nagu juba eespool öeldud, käsitleb staatika jõudude tasakaalu. Küsimusele, kas antud jõud on tasakaalus või millistel tingimustel see tasakaal püsib, vastamiseks tuleb üksikud jõud liita, s. o. asendada kõik jõud lihtsama jõudude süsteemiga või ainult ühe jõuga, mille mõju kehale on sama, või lahutada jõud komponentjõududeks. Seega vaatleb staatika peamiselt jõudude liitmise ja lahutamise reegleid.

Kehale mõjuvate jõudude hulgas on alati jõud, mis tõmbab

keha maakera tsentri poole, s. o. keha k a a l. Sellest tingituna tuleb staatikas esinevates arvutustes arvestada raskusjõudu.

Kujutame endale ette, et tahame nihutada kohalt mingit maapinnal vabalt asetsevat eset. Katse näitab, et alati see ei õnnestu. Tulemus sõltub reast asjaoludest ning eelkõige maapinna poolt keha ümberpaigutamisele avaldatava takistuse suurusest, s. o. hõõrdejõust, mis on ühtedel ja samadel tingimustel seda suurem, mida raskem on nihutatav keha. Siit tuleneb vajadus käsitleda staatikas hõõrdumisnähtusi.

Nimetatud küsimusi käsitletaksegi lühidalt kursuse käesolevas jaos.

§ 10. Jõudu määravad elemendid

Teise keha poolt vaadeldavale kehale avaldataval mõjul, mida mehaanikas mõõdetakse jõuga, võib olla mitmesugune suund. Vastavalt sellele m ä ä r a t a k s e j õ u d e e l k õ i g e s u u n a g a. Nii näiteks raskusjõud, mis mõjub meid ümbritsevatele kehadele, on suunatud maakera tsentri poole, s. o. vertikaalselt.

Kuid jõu suuna teadmisest on üksi vähe, et määrata mõju, mida jõud avaldab kehale: on enesestmõistetav, et suurem jõud avaldab kehale ühe ja sama mõjumissuuna puhul ka suuremat mõju.

S e e g a t e i s e k s j õ u d u m ä ä r a v a k s e l e m e n d i k s o n t e m a s u u r u s.

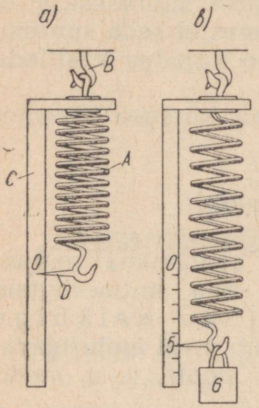
Et määrata jõu suurust, tuleb teda võrrelda mingi ühikuks võetud jõuga. Kõige otstarbekam on mehaanikas vaadeldavaid jõude võrrelda raskusjõuga, millele alluvad kõik maapealsed kehad.

Seepärast on mehaanikas võetud jõu mõõtmise põhiühikuks kaaluühik, s. o. kilogramm (kg), mis võrdub 1 dm^3 vee kaaluga.

Jõudude mõõtmiseks kasutatavaid seadiseid nimetatakse j õ u m õ õ t j a t e k s ehk d ü n a m o m e e t r i t e k s.

Lihtsaima dünamomeetri võime valmistada järgmiselt. Kinnitame liikumatu konksu *B* külge (joon. 1) kruvivedru *A*, mille alumine ots on varustatud osutiga *D*. Kruvivedru ülemise otsa külge kinnitame plaadi *C*. Osuti *D* võtab plaadi suhtes mingi kindla asendi, mille märgime plaadil numbriga *0* (joon. 1, *a*). Riputame nüüd kruvivedru alumise haagi külge mingi koormuse, näiteks 5 kg (joon. 1, *b*). Koormuse kaalu toimel vedru pikeneb ning teatud aja pärast jääb osuti plaadi suhtes püsima uude asendisse. Märgime selle asendi numbriga *5*. Seega koormuse raskusjõud deformeeris vedru, venitades selle pikemaks kindla suuruse võrra. Kui me nüüd eemaldame koormuse kruvivedrult ja hakkame seda tõmbama käega, siis osuti jõudmisel numbrini *5* me võime öelda, et tõmbasime vedrut 5 kg jõuga. Kui koormaksime kruvivedru 2,5 kg kaalupommiga, siis märkaksime, et osuti liigub

allapoole kaks korda väiksema suuruse võrra kui 5 kg korral. Järelikult võime me numbrite *0* ja *5* vahe jagada viieks võrdseks osaks ning mõõta jõudusid 1 kg täpsusega; jagades selle vahe aga kümneks võrdseks osaks, võime jõudusid mõõta juba täpsusega 0,5 kg.

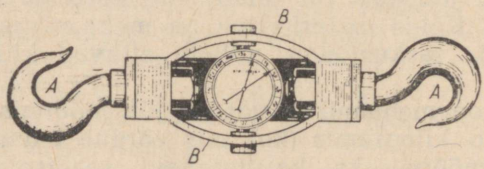


Joon. 1

Dünamomeetreid, millede töötamine põhineb vedru deformeerimisel, nimetatakse vedrudünamomeetriteks. Joonisel 2 on näidatud suuremate jõudude (2—5 t) mõõtmiseks kasutatav lihtne dünamomeeter. Konksudele *A, A* rakendatud tõmbejõudude mõjul plaadid *B, B* lähenevad teineteisele, mille tulemusena pöördub üks osuteist. Kui paigutada selline dünamomeeter veduri ja rongi koosseisu vahele, võib mõõta veduri tõmbejõudu (veojõudu).

Kolmandaks jõudu määravaks elemendiks on tema rakenduspunkt.

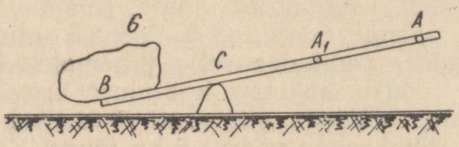
Oletame, et kangi abil tõstetakse raskust *G* (joon. 3). Nagu teada, oleneb jõud, mida oleks tarvis rakendada raskuse tõstmiseks, jõu ja toetuspunkti *C* vahelisest kaugusest. Rakendades jõu näiteks punkti A_1, peab see olema suurem jõust, mis oleks tarvis rakendada punkti *A*. Siit järeldub, et jõu poolt kehale avaldatava mõju üle otsustamiseks peab teadma jõu rakenduspunkti.



Joon. 2

Faktiliselt ei puutu kehad kokku ühes punktis, vaid teatud pinna ulatuses. Seepärast me tinglikult kanname jõu rakenduspunkti mingisse punkti, mis asetseb kokkupuutuvatel pindadel.

Kokkuvõttes määratakse jõud järgmiste elementidega: a) suund, b) suurus ja c) rakenduspunkt.



Joon. 3

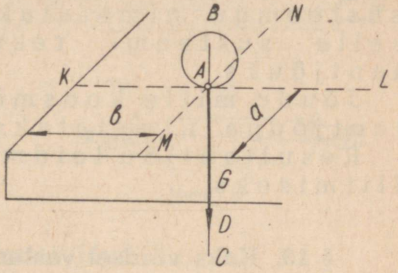
§ 11. Jõudude kujutamise graafiline meetod

Jõududega opereerimine muutub tunduvalt lihtsamaks, kui neid kujutada graafiliselt.

Vaatleme lihtsat näidet.

Olgu tarvis kujutada graafiliselt survejõudu, mida avaldab horisontaalsele plaadile selle esiservast kaugusel *a* ja külgservast kaugusel *b* asetsev liikumatu kuulike kaaluga 2,25 kg.

Antud jõu *G* rakenduspunkt asetseb kuuli ja plaadi kokkupuutekohas. Tõmmates plaadi esiservast kaugusel *a* sirge *KL* ja külgservast kaugusel *b* sirge *MN*, annab viimaste lõikepunkt meile jõu rakenduspunkti *A*. Selles punktis mõjub plaadile kuuli raskusega võrdne jõud. Kuna raskusjõud on suunatud vertikaalselt, siis tõmbame läbi punkti *A* vertikaalse sirge, mida mööda mõjubki antud jõud.



Joon. 4

Jääb ainult sellele sirgele kanda kujutatav jõud, milleks tuleb eelnevalt ette anda mastaap (mõõtkava). Valides mastaabiks näiteks 1 mm 1 kg kohta, kanname sirgele *BC*, alates punktist *A*, allapoole sirglõigu $AD = 22{,}5$ mm ja varustame selle alumise otsa *D* noolega, mis näitab, et kujutatud jõud on suunatud alla.

Sirget, millel asetseb jõudu kujutav sirglõik (vaadeldaval juhul sirge *BC*), nimetatakse jõu mõjusirgeks. Nagu edaspidi näeme, tuleb seda mõistet sageli kasutada.

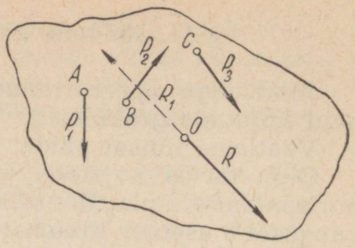
Nagu selgus, on jõud suunaga suurus. Mehaanikas kasutatakse ka teisi suurusi, millel on suund (kiirus, kiirendus jt.). Selliseid suurusi nimetatakse vektoriaalseteks suurusteks ehk vektoriteks, erinevalt skalaarsetest suurustest (näiteks maht jt.), milledel suund puudub.

Lepime kokku, et edaspidi jõudu kahe tähega märkides loeme neid tähti noolega näidatud suunas; et tekstis märkida lõigu vektoriaalset laadi, tõmbame mõlema tähe kohale kriipsu. Vastavalt nendele tingimustele tuleb ka joonisele 4 kantud jõud tähistada kujul $G = \overline{AD}$; oleks see aga suunalt vastupidine, tuleks teda tähistada $G = \overline{DA}$.

§ 12. Jõudude süsteem ja resultantjõud

Olgu kehale punktides *A*, *B*, *C* rakendatud jõud P_1, P_2 ja P_3 (joon. 5). Mitu kehale samaaegselt mõjuvat jõudu moodustavad jõudude süsteemi.

Kui me leiame sellise jõu R, mille mõju vaadeldavale kehale oleks sama, mis antud jõudude süsteemilgi, siis võime kogu antud jõudude süsteemi asendada selle jõuga.



Joon. 5

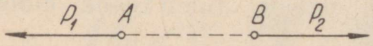
Jõudu, mis avaldab kehale samasugust mõju nagu antud jõudude süsteemgi, nimetatakse selle süsteemi resultantjõuks.

Jõude, mille koosmõju võib asendada resultantjõuga, nimetatakse komponentjõududeks.

Resultantjõu leidmist nimetatakse jõudude liitmiseks.

§ 13. Kaks võrdset vastassuunalist jõudu, mis mõjuvad samal sirgel, on tasakaalus

Kaks meest tõmbavad varrast, hoides seda otstest, vastupidistes suundades. Kui varras hakkab nihkuma esimese tõmbaja poole, siis ütleme, et see mees tõmbab varrast suurema jõuga kui teine; kui varras jääb paigale, siis ütleme, et mehed tõmbavad ühesuguse jõuga. Seega, kui kahte punkti A ja B (joon. 6) on rakendatud võrdsed vastassuunalised jõud P_1 ja P_2, mis mõjuvad nende rakenduspunkte ühendaval sirgel AB, siis on need jõud tasakaalus ega põhjusta keha mehaanilises olekus mingisuguseid muudatusi. Veelgi enam, me võime need jõud P_1 ja P_2 rakendada keha ühte punkti (joon. 7).



Joon. 6

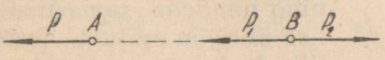
Siit järeldub, et kui kehale mõjub jõudude süsteem, siis sellesse süsteemi kahe samal sirgel asuva võrdse vastassuunalise jõu juurdetoomine ei põhjusta keha mehaanilise oleku muutumist.

§ 14. Rakenduspunkti võib jõu mõjumissirgel ümber paigutada

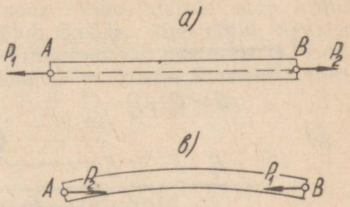
Olgu keha punkti A rakendatud jõud P (joon. 7). Rakendame mingisse punkti B, mis asetseb antud jõu mõjumissirgel, kaks vastassuunalist jõudu P_1 ja P_2, mis on võrdsed jõuga P ning asuvad selle mõjumissirgel; vastavalt eelmises paragrahvis öeldule keha mehaaniline olek selle tagajärjel ei muutu. Tulemusena

saame kolmest ühise mõjumissirgega jõust P, P_1 ja P_2 koosneva süsteemi. Kuid jõud P ja P_2 on omavahel tasakaalus; järelikult keha mehaaniline olek sõltub ainult ühest jõust P_1, mis on võrdne ja samasuunaline jõuga P; teiste sõnadega, me saime sama jõu P, mis on kantud mööda oma mõjumissirget punkti B.

Seda jõu omadust tuleb mehaanikas sageli kasutada.[1]



Joon. 7



Joon. 8

§ 15. Tasakaalustav jõud

Pöördume uuesti § 12 öeldu juurde (joon. 5). Nagu seal selgus, võib jõud P_1, P_2 ja P_3 asendada nende resultantjõuga R.

Rakendame punkti O jõu R_1, mis on suuruselt võrdne jõuga R, kuid suunalt vastupidine. § 13 öeldu põhjal on jõud R ja R_1 tasakaalus, see aga tähendab, et jõud P_1, P_2, P_3 ja R_1, järelikult ka keha, millele nad mõjuvad, on tasakaalus. Kehale rakendatud jõudude süsteemi resultantjõuga R ühisel mõjumissirgel asuvat suuruselt võrdset, kuid suunalt vastupidist jõudu R_1 nimetatakse selle jõudude süsteemi tasakaalustavaks jõuks. Jätkame oma arutelu. Jõudsime tulemusele, et jõud P_1 P_2, P_3 ja R_1 on omavahel tasakaalus. Oletame, et meil oleks süsteem, mis koosneb jõududest P_2, P_3 ja R_1; sel juhul nende resultantjõud võrduks suuruselt jõuga P_1 ning oleks suunalt sellele vastupidine, jõud P_1 ise oleks aga tasakaalustav jõud. See tähendab, et tasakaalus oleva jõudude süsteemi mistahes jõud tasakaalustab kõik ülejäänud jõud.

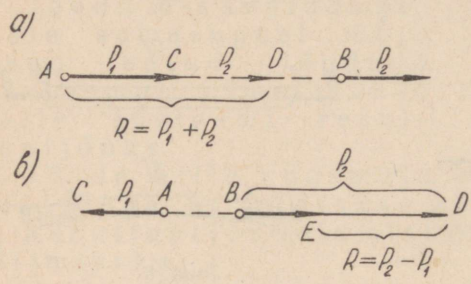
Küsimus

Mille poolest erineb resultantjõud tasakaalustavast jõust?

[1] Öeldu vajab järgmist selgitust. Kujutleme, et vardale on punktides A ja B rakendatud kaks võrdset, kuid vastassuunalist jõudu P_1 ja P_2 (joon. 8, *a*). Jõu P_1 võib kanda punkti B, jõu P_2 aga punkti A (joon. 8, *b*). Nagu näeme, töötab varras esimesel juhul tõmbele, teisel juhul survele, millele vastavalt see võib omandada joonisel toodud kuju. Seega pole füüsikalisest seisukohast lähtudes sugugi ükskõik, kus asetseb jõu rakenduspunkt tema mõjumissirgel. Just sellepärast, nagu juba § 5 öeldi, eeldataksegi teoreetilises mehaanikas põhijärelduste tegemisel, et keha, millele jõud mõjub, on absoluutselt kõva, muudetamatu.

§ 16. Samal sirgel asuvate jõudude liitmine

Olgu kehale punktides A ja B rakendatud kaks jõudu P_1 ja P_2, mis mõjuvad samal sirgel ühes suunas (joon. 9, *a*). On vaja liita need kaks jõudu, s. o. leida nende resultantjõud.



Joon. 9

Katsed näitavad, et kahe sellise jõu mõju keha mehaanilisele olekule on samaväärne nimetatud jõudude summaga võrdse ning nendega samasuunalise ühe jõu mõjuga. Graafiliselt leiame selle summa, kui paigutame jõu P_2 rakenduspunkti jõu P_1 vektori lõpp-punkti C, nagu see on näidatud joonisel. Sel juhul kujutab resultantjõudu vektor $\overline{AD}$. Sama tulemuse saaksime, kui paigutaksime jõu P_1 vektori nii, et selle lõpp satuks punkti B. Seega resultantjõud

$$R = P_1 + P_2.$$

Võtame teise juhu, kus jõud mõjuvad samal sirgel vastupidistes suundades (joon. 9, *b*). On vaja liita jõud $P_1 = \overline{AC}$ ja $P_2 = \overline{BD}$, kusjuures teine jõud on esimesest suurem, s. o. $P_2 > P_1$. Kujutame jõu P_2 kahe samasuunalise jõu summana: jõuga P_1 võrdse vastassuunalise jõu (mida väljendab vektor BE) ja vektoriga $\overline{ED}$ väljendatava jõu summana. Jõud $\overline{AC}$ ja $\overline{BE}$ kui võrdsed vastassuunalised jõud on tasakaalus. Tulemusena mõlemad antud jõud P_1 ja P_2 taanduvad üheks jõuks, s. o. resultantjõuks $\overline{ED}$, mis on võrdne antud jõudude vahega ning mille suund ühtib suurema jõu suunaga, s. o.

$$R = P_2 - P_1.$$

Kui on tarvis leida mitte kahe, vaid suurema arvu ühise mõjumissirgega jõudude resultantjõudu, siis liidame algul kõik ühesuunalised jõud, seejärel vastassuunalised jõud ning leiame äsjakäsitletud meetodil nende kahe jõu resultantjõu.

Lepime kokku ühele poole suunatud jõude lugeda positiivseteks, teisele poole suunatuid aga negatiivseteks.[1]

Niisiis kahe või mitme ühisel sirgel mõjuva jõu resultantjõudon suuruselt võrdne nende jõudude algebralise summaga.

[1] Positiivse suuna valik oleneb igal üksikul juhul ülesande tingimustest ning see ei mõjuta lõpptulemust.

Näide 2. Leida mööda ühist sirget mõjuva viie jõu resultantjõud: $P_1 = 400$ kg, $P_2 = -200$ kg, $P_3 = -350$ kg, $P_4 = 100$ kg ja $P_5 = 175$ kg.

Resultantjõud

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 = 400 - 200 - 350 + 100 - 175 = -225 \text{ kg}.$$

Resultantjõud on suunalt jõududega P_1 ja P_4 vastupidine.

Näide 3. Põrandale asetatud kaalul seisev 82 kg raskune mees tõmbab lakke riputatud trossi vertikaalselt alla.

Kui suur on jõud, millega mees tõmbab trossi, kui kaal näitab 45 kg?

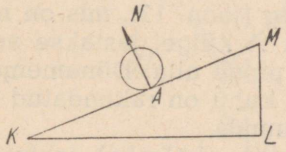
Kaalu näit väljendab jõudu, millega mees rõhub kaalule ning kujutab endast mehe kaalu ja jõu, millega tross mõjub mehele ning mille tähistame P_1, resultantjõudu. Lugedes vertikaalselt alla suunatud jõu positiivseks, peame jõu P lugema negatiivseks (meest tõmmatakse üles). Vastavalt sellele saame võrrandi

$$82 - P = 45, \text{ millest } P = 37 \text{ kg}.$$

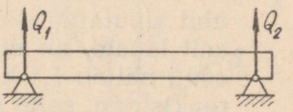
§ 17. Sidemed ja sidemereaktsioonid

Kehade liikumine nendele rakendatud jõudude mõjul võib olla mitmesugune. Kõige sagedamini kohtame sellist liikumist, kus teine keha takistab vaadeldaval kehal võtmast ruumis meelevalu-set asendit. Taoline on näiteks keha liikumine mööda maapinda, võlli pöörlemine laagrites, supordi liikumine mööda treipingi sängi juhtpindu jne.

Keha sellist liikumist nimetatakse mittevabaks. Keha liikumise vabadust piiravaid tingimusi nimetatakse sidemeteks.



Joon. 10



Joon. 11

Teiste, sidemeteks olevate kehade mõju antud kehale mõõdetakse jõuga, mida nimetatakse sidemereaktsiooniks.

Raskusjõu mõjul mööda kaldtasapinda veerevale kuulile avaldab tasapind KM (joon. 10) reaktsiooni, mida väljendab selle tasapinnaga risti olev jõud N.

Kujutame endale ette tala, mis asetseb vabalt kahel toel (joon. 11). Oma raskuse tõttu surub tala tugedele ning need avaldavad talale vastumõju, mida väljendavad jõud Q_1 ja Q_2. Viimaseid nimetatakse toereaktsioonideks.

Tuleb alla kriipsutada järgmist tähtsat asjaolu: jõud, millega keha mõjub sidemele, on rakendatud sidemele, sidemereaktsioon on aga rakendatud kehale endale, s. o. nende kahe jõu rakenduspunktid on erinevad.

Nii on toodud näidetes kuuli surve kaldtasapinnale rakendatud punktis, mis asetseb sellel tasapinnal, tasapinna reaktsioon aga punktis, mis asetseb kuuli pinnal (mõlemad nimetatud pinnad puutuvad kokku punktis *A*); täpselt samuti asetsevad tala surve rakenduspunktid tugedel, tugede reaktsioonide rakenduspunktid aga palgil.

Küsimus

Horisontaalsel plaadil olev kuul kaalub 2 kg. Kuidas on suunatud plaadi reaktsioon, kui suur see on ning kus asetseb selle rakenduspunkt?

§ 18. Kordamisküsimusi

1. Mida me nimetame mehaanikas jõuks ja milles avaldub selle mõju?
2. Kas mõisted „jõu mõjumissirge" ja „jõu mõjumissuund" on üheväärsed?
3. Millises järjekorras tuleb joonisele kanda jõudu määravad elemendid?
4. Milliseid suurusi nimetatakse vektoriaalseteks?
5. Mille poolest erineb jõudude süsteemi resultantjõud seda süsteemi tasakaalustavast jõust?
6. Mida tähendab väljendus „jõudude algebraline summa"?
7. Mille poolest erineb jõud, millega keha mõjub sidemele, sideme reaktsioonist?
8. Kuidas on suunatud seisva veduri rataste poolt põhjustatud reaktsioonijõud?

Joon. 12

§ 19. Harjutusi

1. Raskus *B* kaaluga 3,5 kg (joon. 12), mis on nööri abil riputatud dünamomeetri *A* külge, lastakse aeglaselt lauale, nii et nöör jääb pinge alla. Dünamomeetri osuti näitab 1,5 kg. Määrata, kuhu on rakendatud laua reaktsioon, selle suurus ja suund.

2. Kaalu platvormil seisev mees tõmbab lakke kinnitatud konksu otsas rippuva dünamomeetri külge kinnitatud vertikaalset nööri. Dünamomeeter näitab 15 kg, kaal, mille platvormil mees seisab, 65 kg. Määrata: 1) mehe kaal, 2) platvormi ja nööri poolt mehele avaldatavate reaktsioonide suurus ja suund.

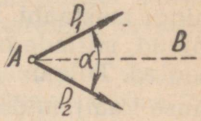
Teine peatükk

KOONDUVATE JÕUDUDE TASAPINNALINE SÜSTEEM

§ 20. Kahe omavahel nurga moodustava jõu liitmine

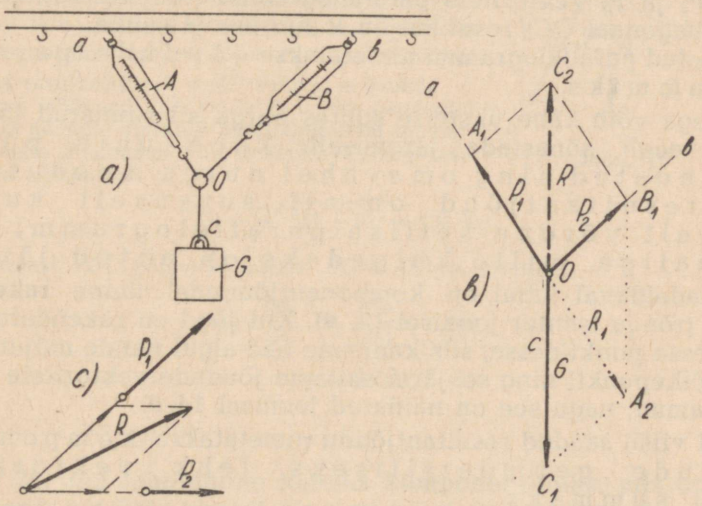
Eespoolvaadeldud juhtudel asusid jõud ühisel sirgel, mistõttu ka nende resultantjõud ühtis sama sirgega. Vaatleme nüüd kahe sellise jõu liitmist, mille mõjumissirged lõikuvad ühes punktis, moodustades omavahel mingi nurga.

Kahe omavahel nurga moodustava jõu liitmise lihtsaim juht esineb siis, kui liidetavad jõud on suuruselt võrdsed. Selline juht on näidatud joonisel 13, kus jõud P_1 ja P_2 on omavahel võrdsed ning moodustavad nurga α. Kuna pole mingit põhjust, et resultantjõud asetseks ühele jõule lähemal kui teisele, siis ta peab jagama jõudude P_1 ja P_2 vahelise nurga pooleks. Üldjuhul aga jagab jõudude tasapinda jääv resultantjõud jõudude mõjumissirgete vahelise nurga α teisiti.



Joon. 13

Teeme järgmise katse. Riputame kaks vedrudünamomeetrit *A* ja *B* (joon. 14) horisontaalse prussi külge kinnitatud konksude otsa. Kummagi dünamomeetri haagi külge seome meelevaldse pikkusega nööri, millede teised otsad ühendame rõngaga. Sama rõnga külge riputame nööri abil ka meile teada oleva raskusega koormuse. Vaadates seda süsteemi me näeme, et nöörid tõmbuvad pingule, dünamomeetrite osutid hakkavad nihkuma ning ka koormus liigub allapoole. Mõne aja pärast võtavad dünamomeetrid koos nööride ja koormusega mingi kindla asendi ning jäävad paigale, s. t. kogu kehade süsteem jääb tasakaalu.



Joon. 14

Vaatame nüüd, millised jõud mõjuvad rõngale. Vasakult mõjub sellele dünamomeetri *A* vedru jõud, paremalt — analoogiline jõud dünamomeetri *B* vedru poolt, vertikaalselt alla — koormuse *C* raskus *G*. Tulemusena jõuame järeldusele, et need kolm jõudu on t a s a k a a l u s.

Võtame papitüki, paigutame selle koostatud konstruktsiooni taha ja märgime ära järgmised punktid: a ja b — dünamomeetrite A ja B kinnituspunktid, O — rõnga keskpunkt, Oc — koormust kandva nööri asendit tähistav sirge.

Nüüd me võime kujutada kartongil kõiki jõude, mis mõjuvad rõngale ning lõikuvad selle tsentris. Kõigepealt tõmbame rõngale rakendatud jõudude mõjumissirged, s. o. sirged sihtidega Oa, Ob ja Oc (joon. 14, b). Koormuse kaal on meil teada, ülejäänud kahe jõu suuruse määrame aga dünamomeetrite näitude järgi. Valides mingi mastaabi, kanname rakenduspunktist O vastava pikkusega lõigud, millede otstesse teeme jõudude mõjumissuundi tähistavad nooled. Tulemusena saame kolm jõudu P_1, P_2 ja G (kus G on koormuse kaal), mida kujutavad vastavalt vektorid $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OB_1}$ ja $\overrightarrow{OC_1}$.

Need kolm jõudu on tasakaalus. Vaadeldes jõudu G kui jõudude P_1 ja P_2 tasakaalustajat, kanname joonisele jõu $R = \overrightarrow{OC_2}$, mis on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine jõuga G. § 12 öeldu põhjal on jõud R jõudude P_1 ja P_2 resultantjõud.

Tõmmates jõu P_1 vektori lõpust A_1 sirge, mis on paralleelne jõu P_2 vektoriga, ning jõu P_2 vektori lõpust B_1 sirge, mis on paralleelne jõu P_1 vektoriga, näeme, et need sirged lõikuvad punktis C_2, s. o. resultantjõu vektori lõpp-punktis. Järelikult, ehitades jõudude P_1 ja P_2 vektoritele parallelogrammi (rööpküliku), määrab selle diagonaal OC_2 resultantjõu R suuruse ja suuna.

Saadud parallelogrammi nimetatakse jõudude parallelogrammiks.

Seega võib kahe üksteise suhtes nurga all suunatud jõu liitmise reegli sõnastada järgmiselt: kahe ühte punkti rakendatud ning omavahel nurga moodustava jõu resultantjõud on nii suuruselt kui ka suunalt võrdne sellise parallelogrammi diagonaaliga, mille külgedeks on antud jõud.

Vaadeldaval juhul on komponentjõududel ühine rakenduspunkt (rõnga tsenter joonisel 14, a). Kui jõud on rakendatud erinevatesse punktidesse, siis kanname nad algul nende mõjumissirgete lõikepunkti ning seejärel ehitame jõudude vektoritele parallelogrammi, nagu see on näidatud joonisel 14, c.

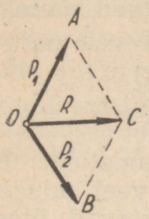
Sel viisil saadud resultantjõudu nimetatakse komponentjõudude geomeetriliseks (ehk vektoriaalseks) summaks.

Parallelogrammi reeglit kasutatakse ka teiste omavahel nurga moodustavate vektoriaalsete suuruste liitmiseks.

Nagu geomeetriast teada, on kolmnurga iga külg väiksem kui kahe ülejäänud külje summa ja suurem kui nende vahe. Kasutades seda tõsiasja resultantjõu juures (joon. 14, b), võime kirjutada:

$$P_1 + P_2 > R > P_1 - P_2.$$

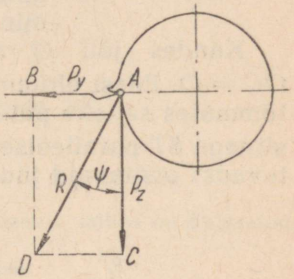
Muutes jõududevahelist nurka, muutub ka resultantjõu suurus: nurga vähenemisel see suureneb, nurga suurenemisel aga väheneb. Kui nurk muutub nulliks, siis asuvad mõlemad komponentjõud ühel sirgel ning on samasuunalised, järelikult nende resultantjõud on $P_1 + P_2$; kui aga nurk on 180°, siis on resultantjõud $P_1 - P_2$. Komponentjõudude vahelise nurga äärmiste väärtuste korral taandub jõudude geomeetriline summa nende algebraliseks summaks. Seega on kahe ühisel sirgel asuva jõu liitmise reegel jõudude parallelogrammi erijuht.



Joon. 15

Näide 4. Kaks suuruselt võrdset jõudu P_1 ja P_2 moodustavad omavahel nurga 120°. Leida nende resultantjõud (joon. 15).

Olles ehitanud nendele jõududele parallelogrammi, me näeme, et see on romb. Seepärast jagab diagonaal OC nurgad AOB ja ACB pooleks. Järelikult $\angle AOC = \angle COB = 60° = \angle ACO = \angle OCB$. Seega moodustab resultantjõud kummagi komponentjõuga nurga 60°. Edasi pole raske näha, et kolmnurgad DAC ja OCB on võrdkülgsed, millest järeldub, et $OC = OA = OB$, s. o. resultantjõud võrdub antud juhul suuruselt kummagi komponentjõuga.



Joon. 16

Näide 5. Treipingil lõigatakse töödeldavasse detaili soont (joon. 16). Dünamomeetriga on määratud, et radiaalsihis mõjuv jõud $P_y = \overline{AB} = 55$ kg ja vertikaalsihis mõjuv jõud $P_z = \overline{AC} = 93$ kg. Määrata resultantjõu $R = \overline{AD}$ suurus ja suund.

Kuna mõlemad komponentjõud on omavahel risti, siis nendele ehitatud parallelogramm on ristkülik, mille diagonaali võib määrata Pythagorase teoreemi põhjal:

$$R = \sqrt{55^2 + 93^2} = 108 \text{ kg}.$$

Kolmnurgast ADC võime kirjutada: $DC = AC\operatorname{tg}\psi$, järelikult

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{DC}{AC} = \frac{55}{93} = 0{,}592$$

ning

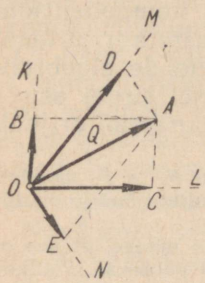
$$\psi = 30°36'.$$

§ 21. Jõu lahutamine kaheks komponentjõuks, mis on rakendatud ühte punkti ning moodustavad omavahel nurga

Jõudude liitmise vastandtehe on jõu lahutamine komponentjõududeks. Lahutada jõud kaheks komponentjõuks — see tähendab leida kaks sellist jõudu, mille mõju on samaväärne antud jõuga, teiste sõnadega, leida kaks sellist jõudu, mille resultantjõud on võrdne antud jõuga.

Pole raske veenduda, et sellisel ülesandel on arvutu hulk lahendeid. Tõepoolest, olgu tarvis lahutada jõud $Q = OA$ kaheks

komponentjõuks (joon. 17). Tõmmates läbi rakenduspunkti Q kaks sirget OK ja OL, ehitame punktist A nendele sirgetega paralleelsed lõigud AC ja AB, mille tulemusena saame parallelogrammi $OBAC$. Viimasest nähtub, et jõud $\overline{OB}$ ja $\overline{OC}$ on jõu Q komponentjõud. Kuid lahutamiseks me võime võtta ka teised sirged, näiteks sirged $\overline{OM}$ ja $\overline{ON}$. Sel juhul saame teise parallelogrammi $ODAE$, millest selgub, et antud jõud Q on ka teise kahe jõu ($\overline{OD}$ ja $\overline{OE}$) resultantjõuks.

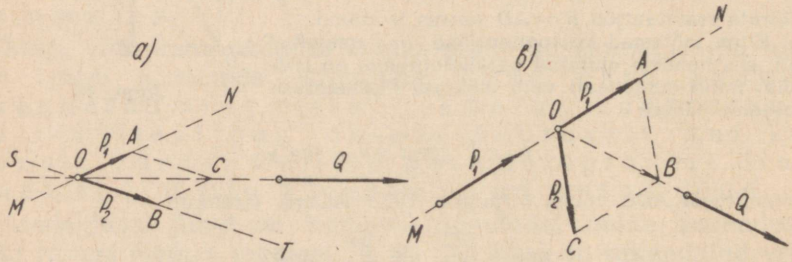


Joon. 17

Seega osutub ülesanne määramatuks. Et saada ühest lahendit, tuleb anda veel mingid täiendavad tingimused, mis täpsustavad ülesannet igal konkreetsel juhul, nagu see selgub alljärgnevatest näidetest.

a) Lahutada jõud Q (joon. 18, *a*) kaheks komponentjõuks P_1 ja P_2, millede mõjumissirged MN ja ST lõikuksid jõu Q mõjumissirgega mingis punktis O.

Kandes jõu Q rakenduspunkti punkti O, saame vektori $\overline{OC} = Q$. Edasi ehitame sellele vektorile parallelogrammi $OACB$, tõmmates selleks punktist C sirgega MN paralleelse lõigu CB ja sirgega ST paralleelse lõigu CA. Saadud vektorid $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ kujutavadki otsitavaid jõude P_1 ja P_2.



Joon. 18

b) Lahutada jõud Q (joon. 18, *b*) kaheks komponentjõuks, milledest ühe (P_1) suurus ja suund on antud.

Leiame kõigepealt mõlema antud jõu mõjumissirgete lõikepunkti O ja kanname sellesse punkti vektorid $\overline{OA} = P_1$ ja $\overline{OB} = Q$. Ühendanud punktid B ja A lõiguga BA, tõmbame seejärel $OC \parallel AB$ ja $BC \parallel MN$. Tulemusena saamegi otsitava teise komponentjõu $P_2 = \overline{OC}$.

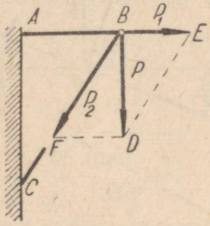
Küsimus

Kas on võimalik antud jõudu lahutada selliseks kaheks komponentjõuks, mis kumbki moodustaks antud jõuga täisnurga?

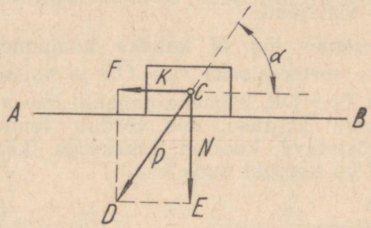
Näide 6. Kronsteinile ABC on rakendatud jõud $P = 1200$ kg. Määrata kronsteini elementidele AB ja BC mõjuvad jõud, kui $AB = 600$ mm ja $AC = 800$ mm (joon. 19).

Nimetatud elementidele mõjuvad jõud kujutavad endast jõu P komponentjõudusid, mis on suunatud piki nimetatud elemente. Konstrueerides jõudu P kujutavale vektorile $\overline{BD}$ parallelogrammi $BEDF$, leiamegi mõlemad komponentjõud P_1 ja P_2.

Nagu näeme, on esimene neist suunatud punktist B punkti E, s. t. punktis A kinnitatud varras AB on selle jõu mõjul tõmmatud; teine komponentjõud BF on aga suunatud punkti C, s. o. varda BC kinnituspunkti; järelikult on varras selle jõu mõjul surutud.



Joon. 19



Joon. 20

Kui mõõta mõlemad komponentjõud samas mastaabis, milles on kujutatud jõud P_1, saamegi iga jõu suuruse.

Jõudude suurused võib leida ka arvutamise teel.

Pole raske märgata, et kolmnurgad ABC ja BED on sarnased, järelikult

$$\frac{BE}{BD} = \frac{P_1}{P} = \frac{AB}{AC} = \frac{600}{800} = \frac{3}{4},$$

millest saame:

$$P_1 = \frac{3}{4} P = \frac{3}{4} \cdot 1200 = 900 \text{ kg}.$$

Edasi

$$\frac{ED}{BD} = \frac{P_2}{P} = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{600^2 + 800^2}}{800} = \frac{1000}{800} = \frac{5}{4},$$

$$P_2 = \frac{5}{4} P = \frac{5}{4} \cdot 1200 = 1500 \text{ kg}.$$

Näide 7. Mööda horisontaalset sirgjoonelist juhtpinda AB (joon. 20) liigub ühtlaselt liugur K, millele on rakendatud jõud P. Määrata juhtpinna poolt liugurile avaldatav reaktsioon.

Otsitav reaktsioon on suunatud juhtpinnaga risti, s. o. vertikaalselt alt üles. Lahutame jõu P kaheks komponentjõuks CE ja CF, milledest üks on juhtpinnaga AB risti, teine aga paralleelne. Jõudude parallelogramm taandus

antud juhul ristkülikuks $CEDF$, mille külg $\overline{CE}$ väljendabki liuguri otsitavat survejõudu juhtpinnale, külg CF aga liikumissuunalist jõudu[1].

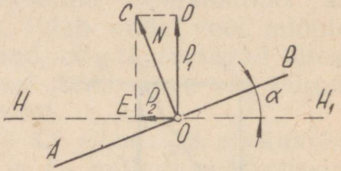
Olgu jõud $P = 80$ kg, ning nurk, mille ta moodustab juhtpinnaga, $\alpha = 60°$. Järelikult $\angle DCE = 90° - \alpha = 30°$.

Täisnurksest kolmnurgast DCE võime kirjutada:

$$CE = CD \cos 30° = 80 \cdot 0{,}866 = 69{,}3 \text{ kg},$$

järelikult otsitav reaktsioon on 69,3 kg ning see on suunalt jõule N vastupidine.

Näide 8. Joonisel 21 kujutab sirge AB horisontaalsihis HH_1 lendava lennuki kandepinna ristlõike telge. Õhu poolt kandepinnale avaldatavat ristsurvet väljendab vektor $\overline{OC}$. Määrata, kui suur on lennuki tõstejõud.

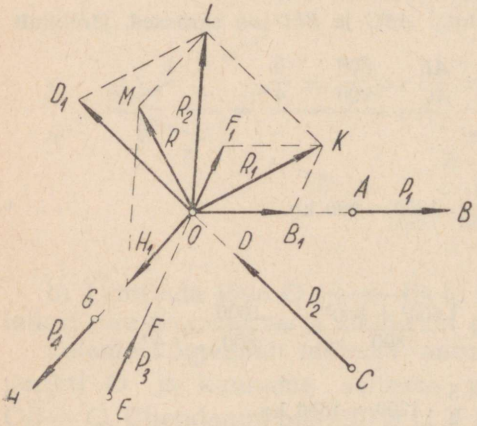


Joon. 21

Lahutame jõu N kaheks komponentjõuks — vertikaalseks $P_1 = \overline{OD}$ ja horisontaalseks $P_2 = \overline{OE}$. Esimene annabki õhu vertikaalsurve suuruse, mis võrdub lennuki poolt tõstetava koorma raskusega (kaasa arvatud ka lennuki enda kaal).

§ 22. Ühel tasapinnal asuva mitme koonduva jõu liitmine

Jõudude parallelogrammi reegel on kehtiv ka juhtudel, kui komponentjõudusid on rohkem kui kaks. Kandes mistahes kaks jõudu mööda nende mõjumissirgeid ühisesse rakenduspunkti, leiame parallelogrammi abil esimese osaresultantjõu R_1. Edasi kanname samasse rakenduspunkti veel ühe jõududest ning liidame selle esimese resultantjõuga R_1. Tulemusena saame teise osaresultantjõu R_2 jne. Liites lõpuks viimase osaresultantjõu viimase komponentjõuga, saamegi antud jõudude süsteemi resultantjõu.



Joon. 22

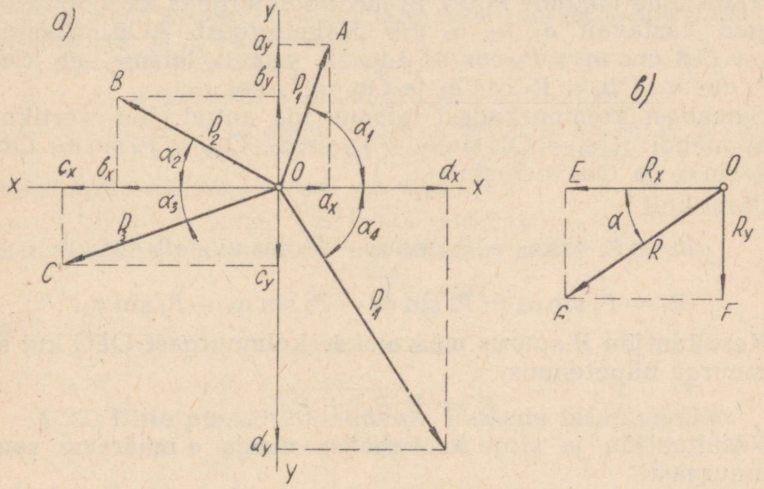
Jõudude liitmise järjekord seejuures lõpptulemusele mõju ei avalda, olgugi et osaresultantjõud on erinevas järjekorras liitmise korral loomulikult erinevad.

Joonisel 22 on näidatud neljast jõust P_1, P_2, P_3 ja P_4 koosnev süsteem. Jõudude mõjumissirged lõikuvad ühes punktis O. Kan-

[1] See jõud tasakaalustatakse liuguri ja juhtpinna liugepindade vahel esineva hõõrdejõuga.

des jõudude P_1 ja P_3 rakenduspunktid sellesse punkti ning ehitades nendele jõudude parallelogrammi OB_1KF_1, saame esimese osaresultantjõu $R_1 = \overline{OK}$. Liites selle samasse punkti O kantud jõuga P_2, saame teise osaresultantjõu $R_2 = \overline{OL}$. Ehitades lõpuks jõudude R_2 ja P_4 vektoritele $\overline{OL}$ ja $\overline{OH_1}$ parallelogrammi $OLMH_1$, saamegi kogu antud jõudude süsteemi resultantjõu $R = \overline{OM}$

Jõudude liitmine käsitletud järjekorras ei ole kohustuslik. Oleksime me näiteks liitnud algul jõud P_1 ja P_2 ning nende resultantjõu jõuga P_4 jne., oleksime saanud täpselt sama tulemuse. Võiksime liita ka jõud paarikaupa, näiteks jõud P_1 ja P_3; P_2 ja P_4, seejärel aga liita omavahel mõlemad saadud resultantjõud.



Joon. 23

Koonduvaid jõude võib liita ka teisiti.

Olgu antud neli jõudu: P_1, P_2, P_3 ja P_4 (joon. 23).

Tõmbame läbi kõigi jõudude ühise rakenduspunkti[1] O (joon. 23, *a*) kaks omavahel risti olevat sirget xx ja yy. Lahutame iga antud jõu kaheks komponentjõuks, millede mõjumissirged ühtivad tõmmatud sirgetega xx ja yy. Tõmmates jõu P_1 vektori lõpust A sirgetele xx ja yy ristsirged Aa_x ja Aa_y, lahutamegi jõu P_1 kaheks komponentjõuks Oa_x ja Oa_y; täpselt samuti toimime ülejäänud jõududega. Tulemusena saame neli komponentjõudu, mis on suunatud mööda horisontaalset sirget (s. o. Oa_x, Od_x, Ob_x ja Oc_x) ning samapalju komponentjõudusid, mis on suunatud mööda vertikaalset sirget yy (Ob_y, Oa_y, Oc_y ja Od_y). Järelikult võime antud jõud asendada leitud kaheksa jõuga.

[1] Kui jõud on rakendatud erinevatesse punktidesse, siis kanname jõud enne liitmist nende mõjumissirgete lõikepunkti O.

Liidame nüüd algebraliselt mööda kumbagi sirget xx ja yy suunatud jõud. Tulemusena saame mööda telge xx suunatud jõudude resultantjõu $R_x = Ob_x + Oc_x - Oa_x - Od_x$; seda resultantjõudu väljendab vektor $\overline{OE}$ joonisel 23, *b*. Täpselt samuti leiame mööda telge yy suunatud jõudude resultantjõu $R_y = Oc_y + Od_y - Ob_y - Oa_y$; seda väljendab joonisel 23, *b* vektor $\overline{OF}$. Seega taandasime kõik antud jõud kaheks omavahel risti olevaks jõuks. Ehitades nendele ristküliku *OEGF*, leiamegi otsitava resultantjõu *R*, mida väljendab vektor $\overline{OG}$.

Resultantjõu suuruse ja suuna võime leida ka arvutamise teel, kasutamata näidatud võtet.

Tähistame jõudude P_1, P_2, P_3 jne. poolt sirgega xx moodustatud nurgad vastavalt α_1, α_2, α_3 jne. Kolmnurgast AOa_x saame, et $Oa_x = OA \cos \alpha_1 = P_1 \cos \alpha_1$; täpselt samuti leiame, et $Od_x = P_4 \cos \alpha_4$, $Ob_x = P_2 \cos \alpha_2$ ja $Oc_x = P_3 \cos \alpha_3$.

Samadest kolmnurkadest leiame iga antud jõu vertikaalse komponendi: $Oc_y = OC \sin \alpha_3 = P_3 \sin \alpha_3$, $Od_y = P_4 \sin \alpha_4$, $Ob_y = P_2 \sin \alpha_2$ ja $Oa_y = P_1 \sin \alpha_1$.

Järelikult

$$R_x = P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 - P_1 \cos \alpha_1 - P_4 \cos \alpha_4$$

ja

$$R_y = P_3 \sin \alpha_3 + P_4 \sin \alpha_4 - P_2 \sin \alpha_2 - P_1 \sin \alpha_1.$$

Resultantjõu *R* suurus määratakse kolmnurgast *OEG* kui selle kolmnurga hüpotenuus:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}.$$

Resultantjõu ja sirge xx vahelise nurga α määrame samast kolmnurgast:

$R_y = R_x \operatorname{tg} \alpha$, millest saame

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}.$$

Seega üldjuhul määratakse *n* ühte punkti koonduvast jõust koosneva süsteemi resultantjõud järgmiste valemitega:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots + P_n \cos \alpha_n \\ R_y &= P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \ldots + P_n \sin \alpha_n \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_y}{R_x}, \quad (3)$$

s. o. ühte punkti koonduvate jõudude süsteemi resultantjõud on võrdne kahe jõu geomeetrilise summaga, milledest kumbki üksikult kujutab endast antud süsteemi komponentjõudude algebralist summat kahes omavahel ristuvas sihis. Resultantjõu poolt hori-

sontaalsihiga moodustatud nurga tangens võrdub vertikaalsete komponentjõudude algebralise summa ja horisontaalsete komponentjõudude algebralise summa jagatisega.

Küsimusi

1. Millega on võrdne resultantjõud ja kuidas on ta suunatud, kui $R_x = 0$ aga $R_y \neq 0$?

2. Kuidas on suunatud resultantjõud, kui $R_x = R_y$?

Näide 9. On antud koonduvate jõudude süsteem: $P_1 = 20$ kg, $P_2 = 25$ kg, $P_3 = 30$ kg ja $P_4 = 40$ kg (joon. 23).

Nurgad, mille need jõud moodustavad horisontaalsihiga, on vastavalt $\alpha_1 = 70°$; $\alpha_2 = 30°$; $\alpha_3 = 20°$; $\alpha_4 = 60°$. Leida selle süsteemi resultantjõud.

Arvutame R_x ja R_y valemitega (1):

$$R_x = -20 \cos 70° + 25 \cos 30° + 30 \cos 20° - 40 \cos 60° = -20 \cdot 0{,}342 + 25 \cdot 0{,}866 + 30 \cdot 0{,}949 - 40 \cdot 0{,}5 = 23 \text{ kg};$$

$$R_y = -20 \cdot \sin 70° - 25 \sin 30° + 30 \sin 20° + 40 \sin 60° = 20 \cdot 0{,}94 - 25 \cdot 0{,}5 + 30 \cdot 0{,}342 + 40 \cdot 0{,}866 = 13{,}6 \text{ kg}.$$

Resultantjõu suuruse arvutame valemiga (2):

$$R = \sqrt{23^2 + 13{,}6^2} = 26{,}7 \text{ kg}.$$

Resultantjõu ja horisontaalsihi vahelise nurga leiame järgmiselt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{13{,}6}{23} = 0{,}591$$

millest

$$\alpha = 30°36'.$$

§ 23. Ühte punkti koonduvate jõudude tasapinnalise süsteemi tasakaal

Nagu juba eespool selgus, on jõudude süsteem tasakaalus, kui selle süsteemi mistahes jõud tasakaalustab kõik ülejäänud jõud, s. o. kui ta on võrdne, kuid vastassuunaline ülejäänud jõudude resultantjõuga. Seega kui me jõudusid joonisel 22 näidatud meetodil liites saaksime resultantjõuks $\overline{OL}$, mis suuruselt on võrdne, kuid suunalt vastupidine jõuga P_4, siis üldine resultantjõud osutuks nulliks, s. o. jõudude süsteem oleks tasakaalus.

Järelikult selleks, et koonduvate jõudude süsteem oleks tasakaalus, peab nende resultantjõud olema null.

Vaatame, millistel tingimustel see nõue on täidetud.

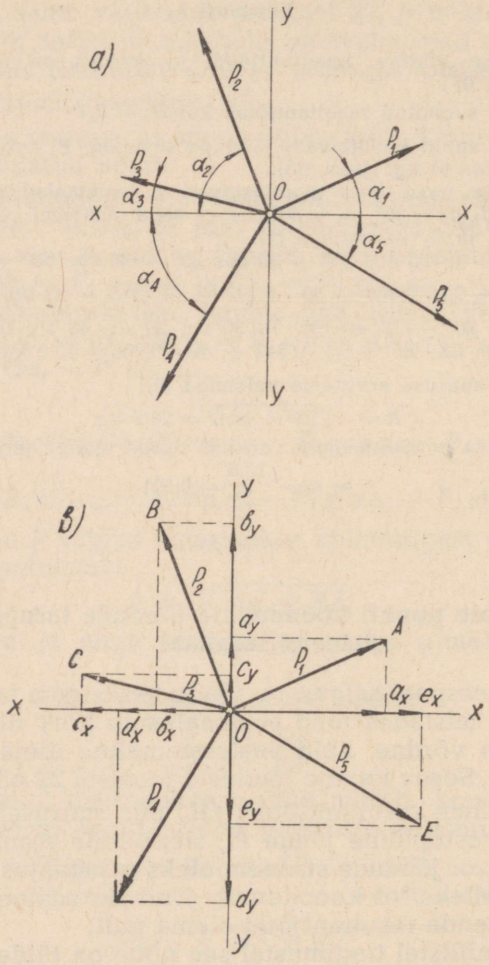
Võtame abiks joonise 23. Nagu me nägime, võib resultantjõu R määrata jõudude R_x ja R_y geomeetrilise summana, kusjuures kumbki nimetatud jõududest kujutab endast antud süsteemi jõudude xx- ja yy-sihiliste komponentjõudude algebralist summat. Järelikult, et süsteem oleks tasakaalus, peab olema rahuldatud tingimus $\sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0$. Kuna aga R_x^2 ja R_y^2 väärtused on alati positiivsed, siis on see tingimus täidetud ainult juhul, kui R_x ja R_y on kumbki võrdne nulliga.

Seega võrrandeid (1) kasutades saame antud süsteemi tasakaalu jaoks järgmised tingimused:

$$R_x = P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + P_3 \cos \alpha_3 + \ldots + P_n \cos \alpha_n = 0 \quad (4)$$

ja

$$R_y = P_1 \sin \alpha_1 + P_2 \sin \alpha_2 + P_3 \sin \alpha_3 + \ldots + P_n \sin \alpha_n = 0, \quad (5)$$



Joon. 24

s. o. ühte punkti koonduvate jõudude tasapinnalise süsteemi tasakaaluks on tarvilik ja piisav, et nende jõudude kahes omavahel risti olevas sihis võetud komponentjõudude algebralised summad oleksid mõlemad nullid.

Näide 10. Antud on koonduvate jõudude tasapinnaline süsteem (joon. 24, *a*): $P_1 = 23$ kg; $P_2 = 27{,}5$ kg; $P_3 = 21{,}3$ kg; $P_4 = 30$ kg ja $P_5 = 30$ kg. Nurgad, mis need jõud moodustavad nende lõikepunkti läbiva horisontaalse sirgega xx, on vastavalt: $\alpha_1 = 26°$, $\alpha_2 = 68°$, $\alpha_3 = 15°$, $\alpha_4 = 59°$ ja $\alpha_5 = 31°$. Tuleb määrata, kas see süsteem on tasakaalus.

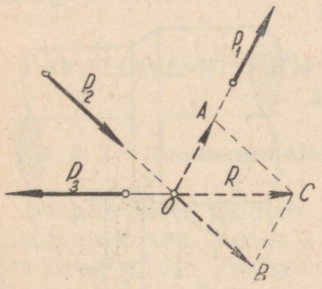
Asetades suuruste arvväärtused võrranditesse (4) ja (5), saame:
$R_x = P_1 \cos 26° - P_2 \cos 68° - P_3 \cos 15° - P_4 \cos 59° + P_5 \cos 31° = 23 \cdot 0{,}899 - 27{,}5 \cdot 0{,}375 - 21{,}3 \cdot 0{,}966 - 30 \cdot 0{,}515 + 30 \cdot 0{,}857 = 20{,}68 - 10{,}31 - 20{,}58 - 15{,}45 + 25{,}71 = 46{,}39 - 46{,}34 = 0{,}05$ kg ≈ 0. $R_y = P_1 \sin 26° + P_2 \sin 68° + P_3 \sin 15° - P_4 \sin 59° - P_5 \sin 31° = 23 \cdot 0{,}438 + 27{,}5 \cdot 0{,}927 + 21{,}3 \cdot 0{,}259 - 30 \cdot 0{,}857 - 30 \cdot 0{,}515 = 10{,}07 + 25{,}49 + 5{,}52 - 25{,}71 - 15{,}45 = 41{,}08 - 41{,}16 = -0{,}08$ kg ≈ 0[1].

Seega võime antud jõudude süsteemi lugeda tasakaalus olevaks.

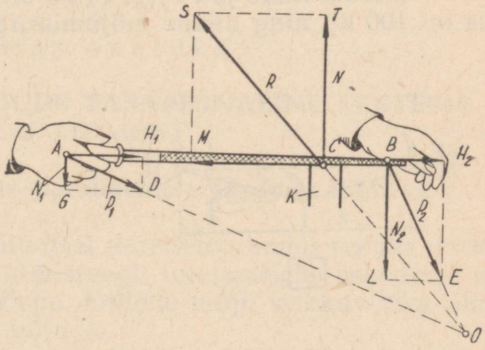
Joonisel 24, *b* on antud ülesande graafiline lahendus (jõudude mastaabiks on võetud 1 kg 1 mm kohta). Nagu jooniselt selgub, on $R_x = 0$ ja $R_y = 0$.

§ 24. Kolm ühel tasapinnal asuvat tasakaalustuvat mitteparalleelset jõudu lõikuvad ühes punktis

Olgu kehale rakendatud kolm jõudu P_1, P_2 ja P_3 (joon. 25), mis on tasakaalus. Kuna iga jõud nendest kolmest tasakaalustab ülejäänud kahte, siis see tähendab, et see jõud peab olema suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine ülejäänud kahe jõu resultantjõuga. Nii näiteks kandes jõud P_1 ja P_2 nende lõikepunkti O ning leides nende jõudude resultantjõu OC, tuleme järeldusele, et jõul P_3 peab olema resultantjõuga R ühine mõjumissirge; teiste sõnadega — ta peab samuti läbima jõudude P_1 ja P_2 lõikepunkti O.



Joon. 25



Joon. 26

Niisiis, kui kolm ühel tasapinnal asuvat mitteparalleelset jõudu on tasakaalus, siis nende mõjumissirged lõikuvad ühes punktis.

Näide 11. Viiliga töödeldakse kruustangide vahele kinnitatud detaili *K* pinda (joon. 26). Viili ühtlaseks edasiviimiseks on tema mõlemasse otsa punk-

[1] Kuna arvutus on ligikaudne, siis võime antud jõududega võrreldes väikesed suurused 0,05 ja 0,08 kg jätta arvestamata.

tidesse A ja B rakendatud käte jõud P_1 ja P_2, mis ületavad töödeldava detaili poolt avaldatavat takistust R, s. o. jõud P_1, P_2 ja R on tasakaalus. Seetõttu peavad kõik kolm jõudu lõikuma mingis ühises punktis O.

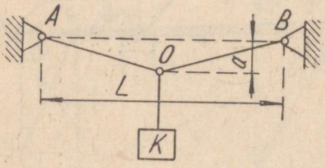
§ 25. Kordamisküsimusi

1. Millist jõudude süsteemi nimetatakse koonduvaks?
2. Kas ülesanne — lahutada üks jõud komponentjõududeks — on üheselt lahendatav, kui üks komponentjõududest on antud oma suuna või suurusega?
3. Vastata eelmisele küsimusele, kui üks jõududest on antud oma suuna ja suurusega.
4. Vastata samale küsimusele, kui on antud ühe jõu suurus ning teise mõjumissirge.
5. Jõudusid P_1, P_2 ja P_3 järjekorras parallelogrammi reegli järgi liites (§ 22, joon. 22) osutus, et süsteem on tasakaalus. Kuidas asetseb osaresultantjõu R_2 mõjumissirge ning kui suur see resultantjõud on?
6. Joonisel 25 antud jõudude süsteem on tasakaalus. Veenduge jõudusid P_2 ja P_3 parallelogrammi reegli järgi liites, et need tasakaalustavad jõu P_1.
7. Kas jõudude süsteem on tasakaalus, kui on rahuldatud ainult üks võrrandeist (4) ja (5)?

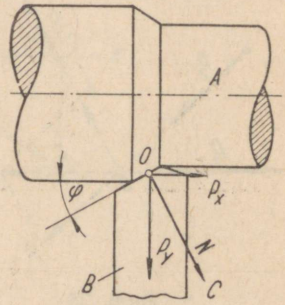
§ 26. Harjutusi

3. Kujutada viis jõudu P_1, P_2, P_3, P_4 ja P_5, milledel on ühine rakenduspunkt, järgmiste andmete põhjal: jõudude mõjumissirgete poolt horisontaalsirgega moodustatud nurgad on vastavalt 30, 120, 270, 300 ja 330° (nurgad arvestada vastu kellaosuti liikumise suunda). Jõudude suurused (kilogrammides): $P_1 = 150$; $P_2 = 200$; $P_3 = 120$; $P_4 = 180$; $P_5 = 80$.

4. Määrata kahe jõu P_1 ja P_2 resultantjõud, kui kummagi suurus on 100 kg ning nende mõjumissirged lõikuvad täisnurga all.



Joon. 27



Joon. 28

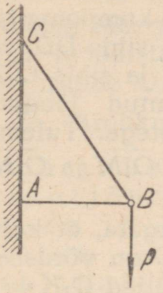
5. Punktide A ja B vahele (joon. 27) on tõmmatud tross, mille keskkohta on riputatud raskus K kaaluga G. Määrata tõmbejõud P trossi kummaski harus, kui $L = 5$ m, $a = 600$ mm ja $G = 100$ kg.

6. Treipingil treitakse teraga B detaili A (joon. 28). Lõikeservaga risti mõjuv jõud $\overline{OC} = 427$ kg. Määrata terale detaili telje

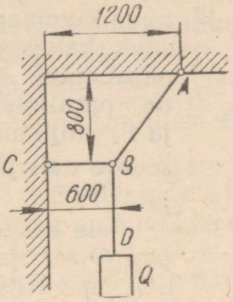
suunas mõjuv jõud P_x ja sellega risti mõjuv jõud P_y, kui nurk φ (mida nimetatakse peanurgaks plaanis) on 35°.

7. Määrata kronsteini elementidele AB ja BC (joon. 29) mõjuvad jõud, kui $AB = 800$ mm, $AC = 1200$ mm ja $P = 900$ kg.

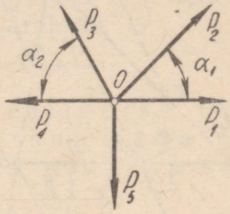
8. Koormus Q kaaluga 200 kg (joon. 30) on riputatud kahe, punktides A ja C šarniirselt kinnitatud varda sõlmpunkti B. Määrata varrastele mõjuvate jõudude suurus ja suund.



Joon. 29



Joon. 30



Joon. 31

9. Kehale on punktis O rakendatud viis jõudu: $P_1 = 20$ kg; $P_2 = 40$ kg; $P_3 = 30$ kg; $P_4 = 33{,}3$ kg ja $P_5 = 54{,}3$ kg (joon. 31). Nurgad $\alpha_1 = 45$; $\alpha_2 = 60°$, jõudude P_1 ja P_4 mõjumissirged ühtivad ning on horisontaalsed, jõud P_5 on suunatud vertikaalselt. Leida resultantjõud.

Kolmas peatükk

PARALLEELSETE JÕUDUDE TASAPINNALINE SÜSTEEM. JÕU MOMENT

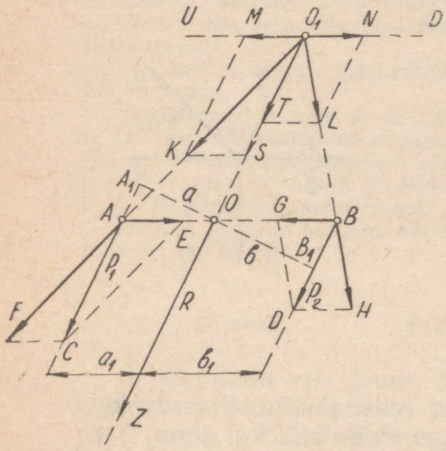
§ 27. Samasuunaliste paralleelsete jõudude liitmine

Paralleelsete jõudude liitmisel parallelogrammi reeglit ilmselt kasutada ei saa. Vastava liitmisreegli tuletamiseks asendame iga jõu kahe sellise lõikuva jõuga, millede mõju kokkuvõttes oleks ühesugune antud jõudude mõjuga.

Niisiis, olgu antud kaks paralleelset jõudu P_1 ja P_2, millede resultantjõud tuleb leida (joon. 32).

Ühendame jõudude rakenduspunktid A ja B omavahel sirglõiguga AB. Lahutame jõu P_1 kaheks meelevaldseks komponentjõuks $\overline{AE}$ ja $\overline{AF}$, milledest esimene on suunatud mööda sirget AB. Edasi lahutame jõu P_2 komponentjõuks nii, et selle komponentjõud $\overline{BG}$ oleks suunatud mööda sama sirget AB ning suuruselt võrduks jõuga $\overline{AE}$. Sel juhul on teine komponentjõud $\overline{BH}$ täieli-

kult määratud. Komponentjõud $\overline{AE}$ ja $\overline{BG}$ on konstruktsiooni põhjal suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised. Seetõttu nad tasakaalustuvad ning järelikult jõud P_1 ja P_2 võib asendada jõududega $\overline{AF}$ ja $\overline{BH}$, mis moodustavad omavahel nurga.



Joon. 32

Kanname mõlemad jõud nende lõikepunkti O_1, s. o. joonestame $\overline{O_1K} = AF$ ja $\overline{O_1L} = BH$. Edasi lahutame kummagi jõu komponentjõududeks kahes sihis: sihis UD, mis on paralleelne AB-ga, ja sihis O_1Z, mis on paralleelne antud jõudude P_1 ja P_2 mõjumissirgetega. Tulemusena saame neli jõudu: $\overline{O_1M}$ ja $\overline{O_1N}$, $\overline{O_1S}$ ja $\overline{O_1T}$.

Pole raske märgata, et kolmnurgad O_1MK ja EAC on võrdsed, sest neil on võrdsed küljed $O_1K = AF$ ja võrdsed lähisnurgad. Sellest järeldub, et $MK = AC$. Kuna aga $MK = O_1S$, siis $O_1S = AC$, s. o. $O_1S = P_1$. Samade kolmnurkade võrdusest järeldub veel, et $O_1M = AE$.

Täpselt samuti tõestame, et $\overline{O_1T} = P_2$ ja $\overline{O_1N} = BG$. Tulemusena saame, et komponentjõud $\overline{O_1M}$ ja $\overline{O_1N}$ kui suuruselt võrdsed ja suunalt vastupidised, tasakaalustuvad; järelikult jõudude $\overline{O_1K} = \overline{AF}$ ja $\overline{O_1L} = \overline{BH}$ resultantjõud väljendub jõudude $\overline{O_1S}$ ja $\overline{O_1T}$ algebralise summana, kuna aga need kaks jõudu on vastavalt võrdsed jõududega P_1 ja P_2, siis jõudude $\overline{AF}$ ja $\overline{BH}$ resultantjõudu väljendab summa $P_1 + P_2$. Kuid jõudude $\overline{AF}$ ja $\overline{BH}$ mõju on samaväärne jõudude P_1 ja P_2 mõjuga, mille põhjal tuleme järeldusele, et jõudude P_1 ja P_2 resultantjõud võrdub nende summaga. Seega on resultantjõu suurus määratud. Jääb veel määrata ainult punkti O asukoht, milleks on resultantjõu mõjumissirge O_1Z ja sirge AB lõikepunkt. Kolmnurkade O_1AO ja O_1KS sarnasusest järeldub, et $\frac{OA}{KS} = \frac{O_1O}{O_1S}$, või pidades silmas, et O_1S väljendab jõu P_1 suurust, saame, et $\frac{OA}{KS} = \frac{O_1O}{P_1}$.

Samuti tuletame võrde:

$$\frac{OB}{TL} = \frac{O_1O}{P_2},$$

Jagades esimese võrduse teisega ning arvestades, et $KS = TL$, saame:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Kui tähistame jõu P_1 rakenduspunktist tõmmatud lõigu OA pikkuse a_1, lõigu OB pikkuse aga b_1, siis võime toodud võrde kirjutada kujul:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Tõmbame läbi punkti O antud jõudude mõjumissirgele ristsirge A_1B_1 ja tähistame lõigu OA_1 tähega a, lõigu OB_1 aga tähega b. Kolmnurkade OAA_1 ja OBB_1 sarnasusest järeldub, et $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$, järelikult $\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1}$, millest $P_1a = P_2b$.

Seega kahe samasuunalise paralleelse jõu resultantjõud on võrdne nende summaga ja on nende jõududega paralleelne ning samasuunaline.

Resultantjõu rakenduspunkt jagab antud jõudude rakenduspunkte ühendava sirglõigu pöördvõrdeliselt jõudude suurustega.

Teiste sõnadega, resultantjõu mõjumissirge jagab liidetavate jõudude mõjumissirgete vahekauguse osadeks, mis on pöördvõrdelised jõudude suurustega.

Üldtut väljendavad järgmised valemid:

$$R = P_1 + P_2, \tag{6}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{P_2}{P_1}, \tag{7}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1}. \tag{8}$$

Võrrutades võrrete (7) ja (8) välisliikmete korrutise siseliikmete korrutisega, saame:

$$P_1a_1 = P_2b_1,$$

$$P_1a = P_2b. \tag{8a}$$

Valemile (8) võib anda ka teise kuju, mis on mõningate ülesannete lahendamiseks kohasem. Moodustades sellest tuletatud võrde, saame $\frac{a+b}{b} = \frac{P_2+P_1}{P_1}$.

Vahetades omavahel siseliikmed, saame $\frac{a+b}{P_2+P_1} = \frac{b}{P_1}$.

Siseliikmete vahetamine võrrandis (8) annab: $\frac{a}{P_2} = \frac{b}{P_1}$. Järelikult $\frac{a+b}{P_2+P_1} = \frac{b}{P_1} = \frac{a}{P_2}$, et aga summa $P_1 + P_2$ kujutab resultantjõudu R, siis $\frac{a+b}{R} = \frac{b}{P_1} = \frac{a}{P_2}$.

1. Kas valemite (6) ja (8) tuletamine oleneb jõudude $\overline{AE}$ ja $\overline{BC}$ suurusest (joon. 32)?
2. Kus asub punkt O, mida läbib resultantjõu mõjumissirge, kui komponentjõud P_1 ja P_2 on suuruselt võrdsed?

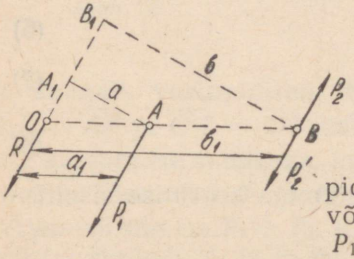
§ 28. Vastassuunaliste paralleelsete jõudude liitmine

On vaja leida kahe vastassuunalise paralleelse jõu P_1 ja P_2 resultantjõud (joon. 32 a), kui $P_1 > P_2$. Asendame jõu P_1 kahe jõuga: jõuga P'_2, mis on rakendatud punkti B ja on võrdne jõuga P_2, kuid suunalt sellele vastupidine, ning jõuga R, mis suuruselt võrdub jõudude P_1 ja P_2 vahega (s. o. $P_1 - P_2$) ja on rakendatud suhtega $\frac{OA}{AB} = \frac{P_2}{R}$ määratud punkti. Antud tingimustel võime jõudu P_1 vaadelda kahe paralleelse jõu $P_1 - P_2$ ja P'_2 resultantjõuna. Kuid jõud P'_2 tasakaalustatakse jõuga P_2, järelikult jõudude antud süsteem taandub üheks jõuks $R = P_1 - P_2$, mis aga tähendab, et see jõud ongi otsitav resultantjõud. Seega resultantjõu suurus on leitud:

$$R = P_1 - P_2. \tag{6 a}$$

Jõu R rakenduspunkti me valisime nii, et kaugused OA ja AB rahuldasid tingimust:

$$\frac{OA}{AB} = \frac{P'_2}{R}.$$



Joon. 32 a

Moodustame sellest tuletatud võrde:

$$\frac{OA}{AB + OA} = \frac{P'_2}{R + P'_2}.$$

Tähistades $OA = a_1$ ja $OB = b_1$ ning pidades silmas, et jõud P'_2 on suuruselt võrdne jõuga P_2, jõud R aga vahega $P_1 - P_2$, saame:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{P_2}{P_1 - P_2 + P_2} \text{ ehk } \frac{a_1}{b_1} = \frac{P_2}{P_1}.$$

Tõmmates punktidest A ja B resultantjõu R mõjumissirgele ristsirged $AA_1 = a$ ja $BB_1 = b$, võime sarnastest kolmnurkadest AA_1O ja BB_1O kirjutada, et $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a}{b}$, ning valemi (7) avaldada kujul:

$$\frac{a}{b} = \frac{P_2}{P_1}, \tag{7 a}$$

millest saame:

$$P_1 a = P_2 b.$$

Seega kahe vastassuunalise paralleelse jõu resultantjõud on võrdne nende jõudude vahega, on nendega paralleelne ning suurema

jõu suunaline. Resultantjõu mõjumissirge asub suurema jõu taga, kusjuures tema kaugused komponentjõudude mõjumissirgetest on pöördvõrdelised jõudude suurustega.

Kui on vaja leida paralleelsete jõudude süsteemi resultantjõud, milles ühed jõud on suunatud ühele poole, teised aga vastaspoole, siis on lihtsam algul liita esimesed, seejärel teised jõud ning pärast seda mõlemad saadud vastassuunalised resultantjõud.

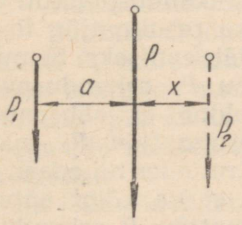
Küsimus

Kuhu nihkub punkt O, mida läbib resultantjõu mõjumissirge, kui jõud P_2 hakkab oma suuruselt lähenema jõule P_1 (rakenduspunktid jäävad samadeks)?

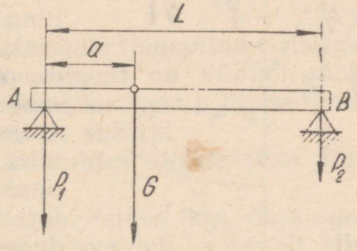
§ 29. Jõu lahutamine paralleelseteks komponentjõududeks

Jõu lahutamine kaheks paralleelseks komponentjõuks on üldkujul, samuti nagu jõu lahutamine koonduvateks komponentjõududekski, määramata ülesanne. Igal üksikul juhul on tarvis täiendavaid andmeid, mis tulenevad ülesande tingimustest. Kui näiteks on antud mõlema komponentjõu rakenduspunktid (või mõjumissirged), või ühe komponentjõu suurus ja selle rakenduspunkt (või mõjumissirge), või ühe komponentjõu rakenduspunkt ja nende suuruste suhe vms., siis ülesanne on määratud ning laseb end lahendada eelmises kahes paragrahvis toodud valemitega.

Olgu näiteks jõud P (joon. 33) tarvis lahutada kaheks paralleelseks ühesuunaliseks komponentjõuks P_1 ja P_2, milledest P_1 on oma suurusega antud; jõudude P ja P_1 mõjumissirgete vahe on a. Jõu P_2 suurus määratakse valemiga (6):



Joon. 33



Joon. 34

$$P_2 = P - P_1.$$

Tema mõjumissirge kaugus x jõust P määratakse valemiga (8), mille põhjal $P_1 a = P_2 x$. Siit saame:

$$x = \frac{P_1}{P_2} a.$$

Näide 12. Mööda tala, mis asetseb kahel toel A ja B (joon. 34), liigub koormus kaaluga $G = 1200$ kg. Määrata koormuse poolt tugedele avaldatavad surved P_1 ja P_2, kui koormus asetseb vasakpoolsest toest kaugusel $a = 1500$ mm; tala pikkus $L = 4500$ mm.

Koormuse liikumisel ei jää tugedele avaldatavad surved konstantseteks; koormuse asetsemisel vasakpoolses äärmises asendis toe A kohal võtab kogu raskuse vastu see tugi. Vastavalt koormuse ümberpaigutamisele vasakult paremale surve vasakpoolsele toele väheneb, parempoolsele aga suureneb; äärmises parempoolses asendis võtab kogu koormuse vastu tugi B.

Seega jõud G on komponentjõudude P_1 ja P_2 resultantjõud ning on suunatud nendega ühele poole.

Kasutades nüüd võrrandit (8 a), saame koormuse antud asendi puhul jõudude P_1 ja P_2 suuruseks:

$$P_2 = \frac{Ga}{L} = \frac{1200 \cdot 1500}{4500} = 400 \text{ kg}$$

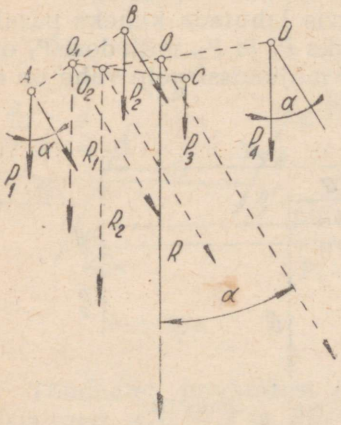
ja

$$P_1 = 1200 - 400 = 800 \text{ kg}.$$

Toereaktsioonid on võrdsed ja vastassuunalised jõududega P_1 ja P_2.

§ 30. Paralleelsete jõudude tasapinnalise süsteemi kese

Olgu antud paralleelsete jõudude P_1, P_2, P_3 ja P_4 süsteem (joon. 35). Liites punktidesse A ja B rakendatud jõud P_1 ja P_2, saame esimese osaresultantjõu R_1, mis on rakendatud punkti O_1. Ühendades punkti O_1 jõu P_3 rakenduspunktiga C, liidame jõud P_3 ja R_1, mille tulemusena saame teise osaresultantjõu R_2. Toimides selle ja viimase komponentjõuga P_4 samuti, saame antud süsteemi resultantjõu R, mis on rakendatud punkti O.



Joon. 35

Oletame nüüd, et kõiki antud jõudusid pööratakse ümber nende rakenduspunkti ühe ja sama meelevaldse nurga α võrra, nagu see on näidatud kriipsjoontega. Kuna jõud P_1 ja P_2 oma suuruselt ei muutunud ning nende rakenduspunktid jäid samaks, siis ka resultantjõu R_1 rakenduspunkt jääb endiseks. Samuti jääb endiseks jõu P_3 rakenduspunkt C, millest järeldub, et jääb muutumatuks ka resultantjõu R_2 rakenduspunkt O_2. Arutledes nii edasi, tuleme järeldusele, et ka kõigi antud jõudude resultantjõu R rakenduspunkt O jääb muutumatuks.

Niisiis, pöörates kõiki jõude ühe ja sama nurga võrra, pöördub ka resultantjõud sama nurga võrra, kuid tema suurus ning rakenduspunkt jäävad seejuures muutumatuks.

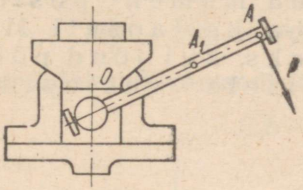
Resultantjõu rakenduspunkti O nimetatakse paralleelsete jõudude keskmeks.

Järelikult paralleelsete jõudude kese jääb muutumatuks paralleelsete jõudude mistahes suuna puhul, kui nende suurused ja rakenduspunktid ei muutu.

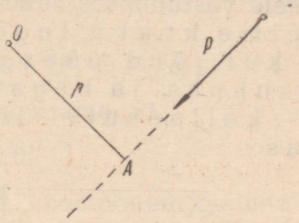
§ 31. Jõu moment punkti suhtes

Kogemuste varal me teame, et detaili on kergem kruustangide vahele kinnitada (joon. 36), kui suruda pöörpulgale võimalikult kaugemal kruvi pöörlemisteljest O. Selleks et detail oleks kruustangide vahele kinnitatud ühetugevuselt nii jõu mõjumisel punktis A kui ka punktis A_1, peab teisel juhul jõud olema suurem.

Seega jõu pöörav toime pöörlemistelje O suhtes oleneb peale jõu suuruse ning suuna ka veel jõu P mõjumissirge ning pöörlemistelje vahelisest kaugusest.



Joon. 36



Joon. 37

Jõu pöörava toime määramiseks kasutatakse mehaanikas suurust, mida nimetatakse j õ u m o m e n d i k s.

Olgu kehale rakendatud jõud P (joon. 37). Võtame vabalt mingi punkti O ning tõmbame sellest jõu mõjumissirgele ristsirge OA. Jõu ja selle ristsirge pikkuse korrutist nimetatakse jõu P momendiks punkti O suhtes. Tähistades momendi tähega M, võime kirjutada:

$$M = Pp,$$

kus P — rakendatud jõu suurus;

p — punktist O jõu mõjumissirgele tõmmatud ristsirge pikkus.

Punkti O, mille suhtes jõu moment on võetud, nimetatakse momendi tsentriks; momendi tsentri kaugust p jõu mõjumissirgest nimetatakse jõu õlaks selle punkti suhtes.

Seega jõu momendiks punkti suhtes nimetatakse jõu ja tema õla korrutist.

Kuna jõudu mõõdetakse kilogrammides (kg), õlga aga pikkusühikutes (m, cm), siis jõu moment avaldub vastavalt **kilogrammmeetrites** (kgm) või **kilogrammsentimeetrites** (kgcm).

Nagu öeldust järeldub, on jõu pöörav toime antud momendi tsentri suhtes seda suurem, mida suurem on jõud ning mida pikem on jõu õlg. Kui momendi tsenter asub jõu mõjumissirgel, siis s e l l e j õ u m o m e n t o n n u l l, sest jõu õlg on null.

Andku jõud P_1 õla p_1 juures momendi M_1, teine jõud P_2 õla p_2 juures aga sama punkti suhtes momendi M_2. Siis $M_1 = P_1p_1$ ja $M_2 = P_2p_2$. Olgu need mõlemad momendid omavahel võrdsed, s. o. $P_1p_1 = P_2p_2$. Siit saame suhte:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_2}{p_1}.$$

Järelikult ühe ja sama punkti suhtes võetud momentide võrdsuse korral on jõudude suurused pöördvõrdelised õlgadega.

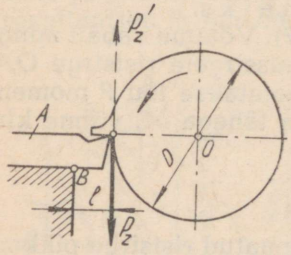
Selleks et jõu mõju kehale oleks täiesti määratud, tuleb lisaks momendi suurusele arvestada ka momendi pöörava mõju suunda.

Nii ühtib joonisel 37 näidatud jõu ja momendi tsentri vastastikuse asendi korral pöörlemise suund kellaosuti liikumise suunaga; kui aga jõud P oleks vastassuunaline või kui punkt O asetseks teisel pool jõu mõjumissirget, siis pöörleks keha kellaosuti liikumisele vastupidises suunas.

Lepime kokku lugeda jõu moment positiivseks, kui jõud pöörab keha kellaosuti liikumise suunas, ja negatiivseks, kui jõud pöörab keha kellaosuti liikumisele vastupidises suunas.

Küsimusi

1. Kas jõu moment antud momendi tsentri suhtes muutub, kui jõud paigutada piki oma mõjumissirget edasi?
2. Missugusel joonel asuvad punktid, millede suhtes jõu momendid võrduvad nulliga?



Joon. 38

3. Kas suuruselt erinevad jõud võivad anda ühe ja sama tsentri suhtes suuruselt võrdsed momendid? Millistel tingimustel?

Näide 13. Treipingil töödeldakse detaili lõiketeraga A (joon. 38). Lõiketera väljaulatus $l = 60$ mm, töödeldava detaili poolt lõiketera peale avaldatava lõikejõu vertikaalkomponent $P_z = 900$ kg. Määrata jõu P_z moment lõiketera äärmise kinnituspunkti B suhtes supordis.

Moment, mis painutab lõiketera (nn. paindemoment), $M = P_z l = 900 \cdot 60 = 54\,000$ kgmm = $= 5400$ kgcm. Nagu näeme, suureneb paindemoment lõiketera õla, s. o. väljaulatuse suurenemisega.

Näide 14. Eelmises näites väljendab jõud P_z detaili vertikaalset mõju lõiketerale. See jõud kutsub esile reaktsiooni P'_z, mis on suunatud lõiketeralt detailile ja on rakendatud viimasele. Nimetatud reaktsioon on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine jõuga P_z. Määrame selle jõu momendi töödeldava detaili teljel oleva punkti O suhtes, kui detaili läbimõõt $D = 80$ mm.

Antud juhul on otsitava momendi õlg $\frac{D}{2}$ ja moment ise $M = \frac{P'_z D}{2} =$

$= 900 \cdot 40 = 36\,000$ kgmm $= 3600$ kgcm.

Selle momendi mõjul detaili (ühes sellega aga ka spindlit, millele detail on kinnitatud) väänatakse, mistõttu seda nimetatakse väändemomendiks.

§ 32. Resultantjõu moment

Olgu meil kaks samasuunalist paralleelset jõudu P_1 ja P_2, millede resultantjõud R on leitud (joon. 39). Võtame momentide tsentriks meelevaldse punkti C. Resultantjõu moment selle punkti suhtes

$$M_R = Rc = (P_1 + P_2)c. \qquad (a)$$

Kirjutame sama punkti O suhtes võetud komponentjõudude momentide avaldised:

$$Mp_1 = -P_1(a - c) = -P_1a + P_1c$$

ja

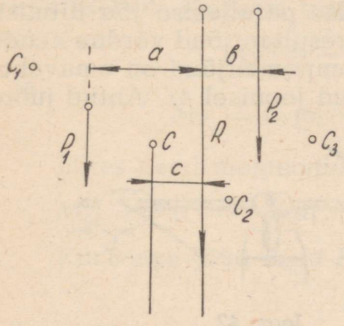
$$Mp_2 = P_2(b + c) = P_2b + P_2c.$$

Summeerides liikmete kaupa nende võrrandite vasakud ja paremad pooled, saame:

$$Mp_1 + Mp_2 = P_2b - P_1a + (P_1 + P_2)c.$$

Varemtuletatud võrrandi (8) alusel saame, et

$$P_2b - P_1a = 0.$$



Joon. 39

Seega komponentjõudude momentide summa on (P_1+P_2) c. Võrreldes seda avaldist resultantjõu momendi ülaltuletatud avaldisega (a), näeme, et resultantjõu moment on võrdne komponentjõudude momentide algebralise summaga.

Pole raske veenduda, et saaksime täpselt sama tulemuse, kui võtaksime momentide tsentriks jõudude tasapinna mistahes teise punkti (näiteks punktid C_1, C_2, C_3 jne.).

Kui paralleelseid jõude on rohkem kui kaks, siis, summeerides need jõud järgemööda ning kasutades äsjasaadud tulemust iga osaresultantjõu juures, tuleksime lõpuks järeldusele, et lõppresultantjõu moment on samuti võrdne kõigi komponentjõudude momentide algebralise summaga.

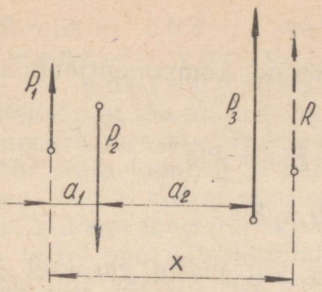
Me tõestasime selle jõudude momentide tähtsa sõltuvuse erijuhul, nimelt paralleelsete ühesuunaliste jõudude momentide kohta. Teoreetilise mehaanika üksikasjalises kursuses tõestatakse, et see sõltuvus kehtib jõudude mistahes tasapinnalise asendi korral.

Seega jõudude tasapinnalise süsteemi resultantjõu moment on võrdne ühe ja sama momentide tsentri suhtes võetud komponentjõudude momentide algebralise summaga.

Seda võib n jõu korral väljendada võrrandiga:

$$M_R = M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + \ldots + M_{P_n}. \qquad (10)$$

Võrrandit kasutades tuleb silmas pidada, et iga jõu moment võetakse tema algebralise märgiga.



Joon. 40

Näide 15. Määrata momentide võrrandi (10) abil paralleelsete jõudude $P_1 = 30$ kg, $P_2 = 53$ kg ja $P_3 = 70$ kg resultantjõud, kui nende mõjumissirgete vahelised kaugused $a_1 = 80$ mm ja $a_2 = 250$ mm (joon. 40).

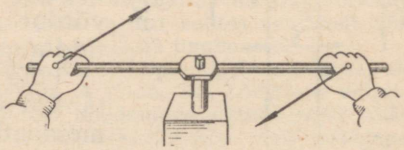
Resultantjõu R suurus on $P_1 + P_3 - P_2 = 30 + 70 - 53 = 47$ kg ning see on suunatud üles.

Momentide tsentri võtame jõu P_1 mõjumissirgel. Kirjutame momentide võrrandi, tähistades resultantjõu tundmatu õla tähega x: $-Rx = P_2a_1 - P_3(a_1 + a_2)$, millest pärast arvväärtustega asendamist saame, et $x = 401$ mm.

§ 33. Jõupaar

Vaatleme nüüd kahe vastassuunalise paralleelse jõu liitmist. Nagu § 28 tõestati, on selliste jõudude resultantjõud võrdne nende vahega. Oletame nüüd, et mõlemad komponentjõud on omavahel suuruselt võrdsed, nagu see on näidatud joonisel 41. Antud juhul

Joon. 41



Joon. 42

valemi (6 a) abil resultantjõudu määrates me saame tulemuseks nulli. Kuid kahe sellise jõu mõju all olev keha pole tasakaalus. Kogemuste varal teame, et sellised jõud panevad keha pöörlema.

Jõudude sellise süsteemi näiteks võib olla käte poolt keermepuuri pöörkangile rakendatud jõud augu keermetamisel (joon. 42).

Kahest võrdsest ja vastassuunalisest paralleelsest jõust koosnevat süsteemi nimetatakse jõupaariks.

Jõupaaril ei ole resultantjõudu.

Jõupaari iseloomustab teda moodustavate jõudude suurus ja nende mõjumissirgete vaheline kaugus. Jõupaari moodustavate jõudude mõjumissirgete vahet nimetatakse jõupaari õlaks.

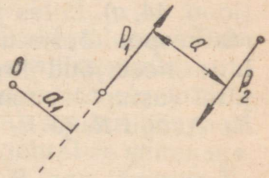
Jõupaari mõju kehale, millele ta on rakendatud, on seda suurem, mida suuremad on paari moodustavad jõud ning mida suurem on õlg. Jõupaari mõju mõõdetakse jõupaari momendiga, mis võrdub ühe jõu ja jõupaari õla korrutisega. Tähistades jõupaari õla (joon. 41) tähega a ning jõu-

paari momendi tähega M, saame jõupaari momendi suuruseks $M = P_1a = P_2a$, või üldkujul:

$$M = Pa. \qquad (11)$$

Jõupaari momenti, nagu jõu momentigi, väljendatakse kilogramm-meetrites (kgm), kilogrammsentimeetrites (kgcm) jne. Jõupaari mõju määramiseks on peale tema suuruse tarvis veel teada, millises suunas kehale rakendatud jõupaar selle pöörlema paneb. Jõupaari moment, nagu jõu momentki, loetakse positiivseks, kui ta püüab keha pöörata kellaosuti liikumise suunas; vastupidisel juhul loetakse jõupaari moment negatiivseks.

Olgu antud jõupaar P_1 ja P_2 õlaga a (joon. 43).



Joon. 43

Selle jõupaari moment $M = P_1a = P_2a$. Kirjutame nüüd seda moodustavate jõudude momendid meelevaldse punkti O suhtes, mis asetseb jõupaari tasapinnas:

$$M_{P_1} = -P_1a_1$$

ja

$$M_{P_2} = P_2(a_1 + a).$$

Liites need momendid, saame:

$$M_{P_1} + M_{P_2} = -P_1a_1 + P_2(a_1 + a) = -P_1a_1 + P_2a_1 + P_2a.$$

Kuna aga jõud P_1 ja P_2 on suuruselt võrdsed, siis

$$P_2a_1 - P_1a_1 = 0$$

ja

$$M_{P_1} + M_{P_2} = P_2a.$$

Nagu näeme, on jõudude P_1 ja P_2 momentide summa (nende algebralisi märke arvestades) punkti O suhtes võrdne jõupaari momendiga.

Seega jõupaari moment selle jõupaari tasapinnas oleva meelevaldse punkti suhtes on nii suuruselt kui ka märgilt võrdne seda jõupaari moodustavate jõudude momentide algebralise summaga.

Jõupaari võib tasakaalustada ainult teine jõupaar, mille moment on suuruselt võrdne, kuid märgilt vastupidine antud jõupaari momendiga. Ühe jõuga pole jõupaari võimalik tasakaalustada.

Küsimusi

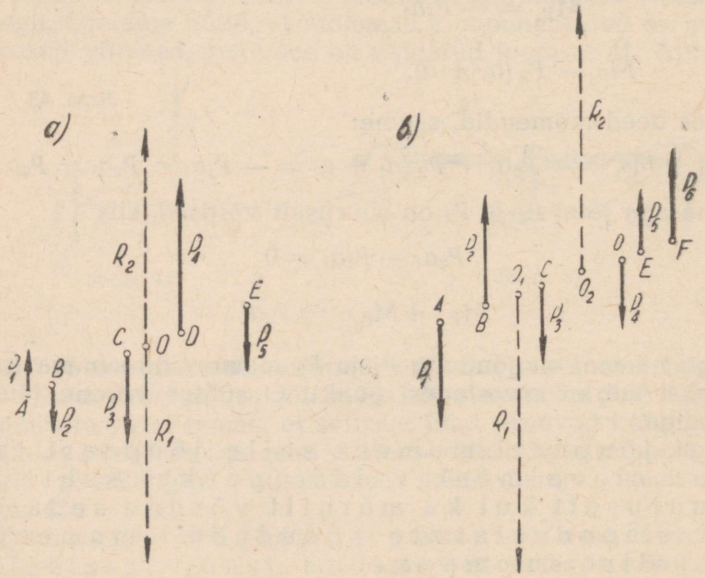
1. Ühe jõupaari õlg on teise jõupaari õlast 5 korda lühem. Kuidas peavad suhtuma neid jõupaare moodustavate jõudude suurused, et jõupaaride momendid oleksid omavahel võrdsed?

2. Uhe jõupaari õlg on teise jõupaari õlast m korda väiksem; esimest jõupaari moodustavad jõud on suuruselt n korda suuremad kui teist jõupaari moodustavad jõud. Kuidas suhtuvad teineteisesse antud jõupaaride momentide suurused?

§ 34. Paralleelsete jõudude tasapinnalise süsteemi tasakaal

Vaatame, milliseid tingimusi peab rahuldama paralleelsete jõudude tasapinnaline süsteem, et keha, millele see on rakendatud, oleks tasakaalus.

Olgu antud paralleelsete jõudude P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 süsteem (joon. 44, *a*). Liites jõud P_2, P_3 ja P_5, saame resultantjõu, mille suurus eespooltõestatu põhjal on võrdne nende jõudude summaga. Liites need jõud järgemööda, leiame osaresultantjõu R_1. Liites seejärel vastupidi suunatud jõud P_1 ja P_4, saame teise osaresultantjõu R_2. Asugu R_1 ja R_2 ühisel mõjumissirgel ning olgu R_2 võrdne esi-



Joon. 44

mese osaresultantjõuga R_1, kuid suunalt sellele vastupidine. Seejuures süsteem taandub kaheks suuruselt võrdseks, kuid suunalt vastupidiseks jõuks, nii et süsteemi resultantjõud võrdub nulliga, s. o. süsteem on tasakaalus. Kui aga ühesuunaliste jõudude summa ei ole võrdne vastassuunaliste jõudude summaga, või, teisiti öeldes, kui jõudude algebraline summa ei võrdu nulliga, siis süsteem tasakaalus ei ole.

Joonisel 44, *b* on näidatud teine jõudude süsteem. Toimides nagu eespoolgi, saame jõudude P_1, P_3 ja P_4 liitmisel ühe osaresultantjõu R_1, ning jõudude P_2, P_5 ja P_6 liitmisel teise osaresultantjõu R_2. Mõlemad saadud osaresultantjõud on antud juhul suuruselt võrdsed, kuid nende mõjumissirged on erinevad, s. t. need osaresultantjõud moodustavad jõupaari.

Nagu näeme, on üks tingimus — jõudude algebraline summa olgu null — jõudude tasakaaluks küll tarvilik, kuid ei ole piisav; peab olema täidetud veel teine tingimus, s. o. süsteem ei tohi taanduda jõupaariks ehk teiste sõnadega, jõupaari moment võrdugu nulliga.

Kuidas on aga võimalik kontrollida, et teine tingimus oleks täidetud?

Meenutame eelmises paragrahvis saadud järeldust, mis kõlab: jõupaari moment selle jõupaari tasapinna meelevaldse punkti suhtes on võrdne seda moodustavate jõudude momentide algebralise summaga. See tähendab, et vaadeldaval juhul saadud jõupaari moment võrdub jõudude R_1 ja R_2 momentide algebralise summaga. Kuid R_1 on jõudude P_1, P_3 ja P_4 resultantjõud, R_2 aga jõudude P_2, P_5 ja P_6 resultantjõud. § 32 aga tõestati, et resultantjõu moment on võrdne komponentjõudude momentide algebralise summaga. Järelikult resultantjõu R_1 moment võrdub jõudude P_1, P_3 ja P_4 momentide algebralise summaga, resultantjõu R_2 moment aga jõudude P_2, P_5 ja P_6 momentide algebralise summaga.

Seega tuleme järeldusele, et vaadeldava jõudude süsteemi taandamisel saadud jõupaari moment võrdub nulliga sel juhul, kui kõikide jõudude P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ja P_6 momentide algebraline summa on null.

Niisiis, *n* paralleelsest jõust koosnev tasapinnaline süsteem on tasakaalus, kui:

1) kõikide jõudude algebraline summa on null, s. o.

$$P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n = 0; \tag{12}$$

2) kõikide jõudude momentide algebraline summa jõudude tasapinna meelevaldse punkti suhtes võrdub nulliga, s. o.

$$M_{P_1} + M_{P_2} + M_{P_3} + \ldots + M_{P_n} = 0. \tag{13}$$

Seega paralleelsete jõudude tasakaaluks peavad **ü h e a e g s e l t** olema rahuldatud **m õ l e m a d** tingimused.

Olgu punktis *O* toetatud kangi *AB* (joon. 45, *a*) vasakpoolne õlg koormatud jõududega Q_1 ja Q_2, parempoolne õlg aga jõuga *P*. Selleks et kang oleks tasakaalus, peavad olema täidetud võrranditega (12) ja (13) väljendatud tingimused. Kangile on rakendatud jõud *P*, Q_1 ja Q_2 ning toereaktsioon *R*. Lugedes allapoole suunatud jõud positiivseteks, võime võrrandi (12) kirjutada kujul:

$$P + Q_1 + Q_2 - R = 0,$$

millest

$$R = P + Q_1 + Q_2.$$

Toereaktsioon on seega määratud. Määrame nüüd jõu P suuruse, kasutades selleks tasakaalu teist tingimust. Momentide tsentriks võtame punkti O, mispuhul võrrandi (13) järgi

$$Pb - Q_1a_1 - Q_2a_2 = 0,^*$$

millest saame:

$$P = \frac{Q_1a_1 + Q_2a_2}{b}.$$

Kui kõik jõud oleksid rakendatud ühel pool toetuspunkti (joon. 45, *b*), siis saaksime:

$$Q_1 + Q_2 - P - R = 0, \text{ kust } P + R = Q_1 + Q_2.$$

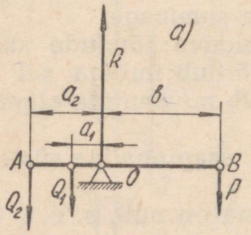
Et sel juhul määrata jõudu P, kirjutame momentide võrrandi punkti O suhtes:

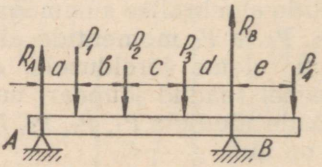
$Q_1a_2 + Q_2a_2 - Pb = 0$, millest $P = \frac{Q_1a_1 + Q_2a_2}{b}$ ja toereaktsioon

$$R = Q_1 + Q_2 - P = Q_1 + Q_2 - \frac{Q_1a_1 + Q_2a_2}{b}.$$

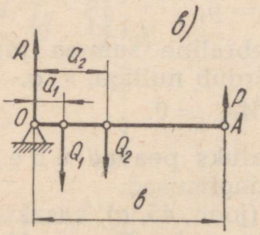
Vaatleme veel üht näidet.

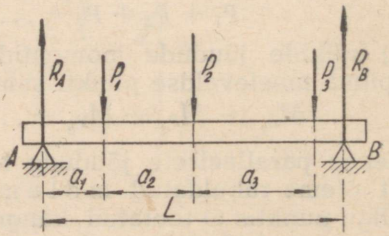
Kahel toel A ja B (joon. 46) asetseb vabalt horisontaalne tala,





Joon. 46





Joon. 45

Joon. 47

mille üks ots ulatub üle toe B. Talale on rakendatud vertikaalsed jõud P_1, P_2, P_3, P_4. Tuleb määrata toereaktsioonid R_A ja R_B.

---

* Jõu R moment punkti O suhtes on null.

Võrrandi (12) põhjal võime kirjutada kahe tundmatuga võrrandi:

$$R_A + R_B = P_1 + P_2 + P_3 + P_4.$$

Määrame reaktsiooni R_B, leides selleks punkti A suhtes võetud momentide algebralise summa:

$$P_1a + P_2(a + b) + P_3\,(a + b + c) - R_B\,(a + b + c + d) + P_4\,(a + b + c + d + e) = 0.$$

Lahendades selle võrrandi ning asetades R_B väärtuse esimesse võrrandisse, saame teise reaktsiooni R_A suuruse.

Näide 16. Kahele toele A ja B (joon. 47) vabalt toetuv tala on koormatud jõududega $P_1 = 200$ kg, $P_2 = 300$ kg ja $P_3 = 250$ kg. Määrata toereaktsioonid R_A ja R_B, kui $a_1 = 1$ m, $a_2 = 1{,}5$ m, $a_3 = 2$ m, tugede vahe $L = 5$ m, tala ühe jooksva meetri kaal on 20 kg, tala pikkus 5,5 m.

Talale rakendatud vertikaalsed jõud P_1, P_2, P_3, palgi omakaal ja tugede reaktsioonid moodustavad jõudude süsteemi, mis on tasakaalus. Määrame kõigepealt jõudude P_1, P_2 ja P_3 poolt põhjustatud toereaktsioonid R_A ja R_B.

Kuna reaktsioonid on suunatud vertikaalselt üles, võime võrrandi (12) kirjutada kujul:

$$P_1 + P_2 + P_3 - R'_A - R'_B = 0, \text{ s. o. } R'_A + R'_B = 200 + 300 + 250 = 750 \text{ kg}.$$

Teise võrrandi saame, kui võrrutame nulliga telje tasapinna meelevaldse punkti suhtes võetud momentide algebralise summa. Arvutamise lihtsustamiseks võtame momentide tsentriks punkti A, mille suhtes reaktsiooni R_A moment on null:

$$P_1a_1 + P_2(a_1 + a_2) + P_3\,(a_1 + a_2 + a_3) - R'_B\,L = 0,$$

mis pärast arvväärtustega asendamist annab $200 \cdot 1 + 300 \cdot 2{,}5 + 250 \cdot 4{,}5 - 5R'_B = 0$. Siit saame, et $R'_B = 415$ kg ja $R'_A = 750 - 415 = 335$ kg.

Kui oleksime momentide tsentri võtnud jõu P_1 mõjumissirgel, oleksime saanud momentide võrrandi kujul:

$$R'_A + 300 \cdot 1{,}5 + 250 \cdot 3{,}5 - 4R'_B = 0, \text{ millest}$$

$$4R'_B - R'_A = 1325.$$

Lahendades selle võrrandi koos võrrandiga $R'_A + R'_B = 750$, oleksime saanud varemleitud tulemuse.

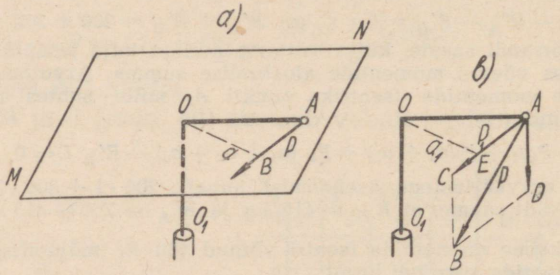
Tala omakaal, mis võrdub $20 \cdot 5{,}5 = 110$ kg, jaguneb mõlemale toele ühtlaselt; järelikult toe A kogureaktsioon $R_A = 335 + \frac{110}{2} = 390$ kg ja toe B kogureaktsioon $R_B = 415 + 55 = 470$ kg.

§ 35. Jõu moment telje suhtes

Oletame, et meil on võll OO_1, mis võib laagrites pöörelda ja millel ülemises otsas on võlliga täisnurga AOO_1 moodustav hoob OA (joon. 48, *a*). Rakendame hoova otsale A jõu P, mis asetseb nagu varda telgki võlli telje OO_1 risttasapinnas MN. Selle jõu mõjul hakkab võll pöörlema. Oletame nüüd, et see jõud P ei asetse tasapinnas MN, vaid moodustab sellega nurga (joon. 48, *b*). Lahutame jõu kaheks komponentjõuks: üheks $\overline{AC}$, mis asetseb varda OA telje pööramistasapinnas, ja teiseks $\overline{AD}$, mis on paralleelne võlli OO_1 teljega.

Pole raske näha, et sel juhul paneb võlli pöörlema jõud $\overline{AC}$, jõud $\overline{AD}$ aga püüab nihutada võlli telgsihis (mille vältimiseks võlli alumine ots toetatakse tugilaagrile). Nagu näeme, paneb esimesel juhul võlli pöörlema terve jõud P (joon. 48, *a*), teisel juhul aga ainult selle üks komponent. Esimesel juhul mõõdetakse jõu pööravat mõju jõu momendiga punkti O suhtes, mis võrdub Pa, kus a on õlg, s. o. pöörlemistsentrist O jõu mõjumissirgele tõmmatud ristsirge OB pikkus. Teisel juhul mõõdetakse jõu P pööravat mõju jõu P_1 momendiga sama punkti O suhtes, mis võrdub P_1a_1, kus a_1 on selle jõu õlg punkti O suhtes. Jõu P komponentjõud P_1 kujutab endast jõu P projektsiooni telje OO_1 risttasapinnale MN. Jõu P_1 momenti, mis võrdub P_1a_1, nimetatakse jõu P momendiks telje suhtes.

Pole raske märgata, et telje risttasapinnas oleva jõu moment sama telje suhtes on võrdne sama jõu momendiga telje ja risttasapinna lõikepunkti suhtes. Jooniselt 48, *b* nähtub veel, et nurga



Joon. 48.

CAB suurenemisega jõu P moment väheneb. Seepärast on kõige otstarbekam rakendada jõud nii, et ta mõjuks keha pöörlemistelje risttasapinnas.

§ 36. Kordamisküsimusi

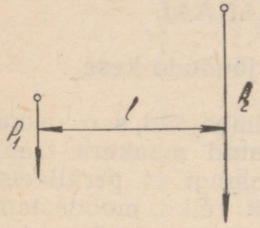
1. Mida nimetatakse jõu momendiks punkti suhtes?
2. Kas on võimalik valida sellist punkti, mille suhtes jõu moment oleks null? Kas selliseid punkte on üks või rohkem?
3. Kuidas on omavahel seotud paralleelsete jõudude süsteemi resultantjõu moment ja üksikute komponentjõudude momendid?
4. Milliseid tingimusi peab rahuldama tasakaalus olev paralleelsete jõudude süsteem?

§ 37. Harjutusi

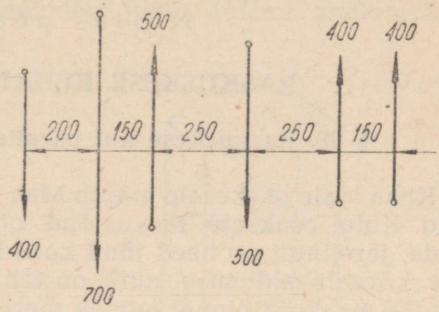
10. On antud kaks paralleelset ühesuunalist jõudu P_1 ja P_2 (joon. 49), millede mõjumissirgete vaheline kaugus $l = 120$ mm. Leida resultantjõu suurus ja mõjumissirge, kui $P_1 = 48$ kg ja $P_2 = 144$ kg.

11. Lahendada eelmine ülesanne, kui jõu P_1 suund on jõule P_2 vastupidine.

12. Leida joonisel 50 antud paralleelsete jõudude süsteemi resultantjõu suurus ja mõjumissirge (jõud on antud kg-des, kaugused mm-tes).

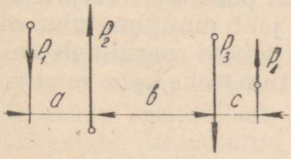


Joon. 49

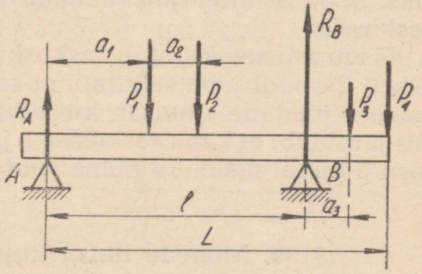


Joon. 50

13. Leida paralleelsete jõudude süsteemi $P_1 = 400$ kg, $P_2 = 900$ kg, $P_3 = 800$ kg, $P_4 = 300$ kg resultantjõud, kui $a = 300$ mm, $b = 600$ mm, $c = 200$ mm (joon. 51).



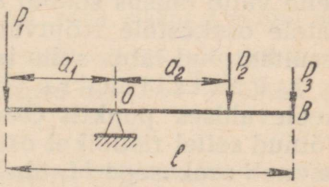
Joon. 51



Joon. 52

14. Tugedele A ja B vabalt toetuv tala (joon. 52) on koormatud vertikaalsete jõududega $P_1 = 300$ kg, $P_2 = 300$ kg, $P_3 = 150$ kg ja $P_4 = 240$ kg. Määrata nende jõudude poolt põhjustatud toereaktsioonid, kui $a_1 = 1{,}8$ m, $a_2 = 0{,}9$ m, $a_3 = 0{,}9$ m, $l = 4{,}5$ m ja $L = 6$ m.

15. Kangile AB, mis on toetatud punktis O (joon. 53), mõjuvad jõud $P_1 = 120$ kg ja $P_2 = 60$ kg, millede mõjumissirgete ja toetuspunkti vahe-



Joon. 53

kaugused $a_1 = 360$ mm ja $a_2 = 375$ mm. Kui suur peab olema kangi otsale rakendatav jõud P_3, et kang jääks tasakaalu, kui ta pikkus $l = 960$ mm? Millega võrdub sel juhul toereaktsioon R? (Kangi omakaal jätta arvestamata.)

Neljas peatükk

RASKUSKESE. KEHADE TASAKAAL

§ 38. Raskuskese kui paralleelsete jõudude kese

Keha igale osakesele mõjub Maa külgetõmbejõud, s. o. raskusjõud. Kõigi osakeste raskusjõud on suunatud maakera tsentri poole, järelikult on need jõud koonduvad, olgugi et paralleelsusest kõrvalekaldumise nurk on tähtsusetult väike, moodustades näiteks maakera pinnal mööda meridiaani teineteisest 31 m kaugusel asuva kahe punkti puhul ainult 1 sekundi. Kuna aga tehnilises mehaanikas vaadeldavate kehade mõõted on maakera raadiusega võrreldes tähtsusetult väikesed, siis vaadeldakse kehade osakeste raskusjõude paralleelsetena.

Liites mõttes kõik keha osakestele rakendatud elementaarsed raskusjõud, saame mingi resultantjõu. **Keha kõigile osakestele mõjuvate raskusjõudude resultantjõudu nimetatakse keha kaaluks. Selle resultantjõu rakenduspunkti nimetatakse keha raskuskeskmeks.**

Nagu näeme, kujutab raskuskese endast paralleelsete jõudude keset. Eespool juba selgitati, et see punkt jääb muutumatuks, olenemata jõudude suunast, kui ainult jõud jäävad paralleelseteks. Siit järeldub, et keha raskuskese jääb muutumatuks keha mistahes asendi puhul maakera pinna suhtes.

§ 39. Mõnede lihtsa kujuga kehade raskuskese

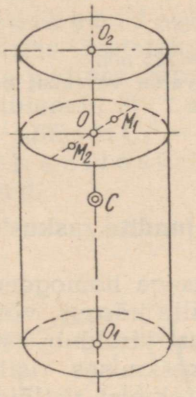
Paljudes keha kaaluga seotud tehnilistes arvutustes on tarvis täpselt teada keha raskuskeskme asukohta. Real juhtudel on raskuskeskme määramine väga lihtne. Vaatleme mõningaid kõige lihtsama geomeetrilise kujuga kehasid.

1. Kera raskuskese asetseb kera tsentris. Selle väite õigsus selgub asjaolust, et kera ühel läbimõõdul asuvatele osakestele mõjuvate kõigi elementaarsete raskusjõudude resultantjõud läbib selle keskkohta, s. o. kera tsentrit.

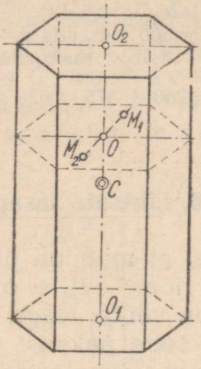
2. Püstsilindri raskuskese (joon. 54). Ehitame meelevaldses punktis O silindri teljega O_1O_2 risti oleva lõike. Võtnud sellel ristlõikel osakese M_1, leiame teise osakese M_2, mis paikneb osakesega M_1 ühel ja samal läbimõõdul ning asetseb ristlõike tsentrist O sama kaugel kui osake M_1. Järelikult nendele

kahele osakesele rakendatud elementaarsete raskusjõudude resultantjõud läbib ristlõike tsentrit. Arutledes samuti silindri mistahes punkti suhtes, tuleme järeldusele, et *silindri kui terviku raskuskese asetseb silindri teljel O_1O_2 selle kõrguse keskkohas punktis C.*

3. *Korrapärase püstprisma raskuskese* (joon. 55). Arutledes nagu eelmisel juhul, tuleme analoogilisele



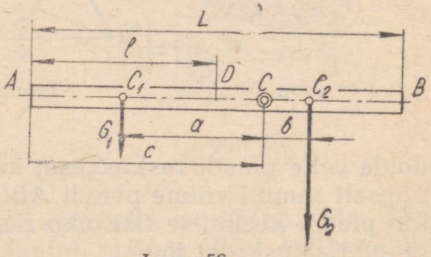
Joon. 54



Joon. 55

järeldusele, ja nimelt: *korrapärase püstprisma raskuskese asetseb tema teljel selle kõrguse keskkohas.*

Kriipsutame alla ühe tähtsa asjaolu. Nagu öeldust nähtub, lähtusime me sellest, et keha osakestele rakendatud elementaarsed raskusjõud on suuruselt võrdsed. See aga tähendab, et keha erikaal on kogu tema mahu ulatuses üks ja sama. Sellist keha nimetatakse homogeenseks[1]. Kui nimetatud homogeensuse tingimus pole täidetud, muutub raskuskeskme leidmine keerulisemaks; selgitame seda järgmise näitega.



Joon. 56

Näide 17. Silindriline varras AB (joon. 56), mille pikkus $L = 1000$ mm, koosneb kahest erineva erikaaluga materjalist: pikkuses $l = \frac{L}{2} = 500$ mm — alumiiniumist erikaaluga $\gamma_1 = 2{,}6$ g/cm³, ülejäänud osas BD — terasest erikaaluga $\gamma_2 = 7{,}85$ g/cm³. Leida varda raskuskese.

[1] Edaspidises, kui keha mittehomogeensus pole eraldi nimetatud, eeldame, et keha on homogeenne.

TRÜ Raamatukogu

Kui varras oleks homogeenne, asetseks raskuskese tema teljel selle keskkohas, s. o. ristlõikes D kaugusel $l = 500$ mm varda lõpust. Et määrata raskuskeskme asukohta antud tingimustel, arvutame varda kummagi osa kaalu.

Tähistades varda ristlõikepindala tähega F, saame alumiiniumist osa AD kaaluks $G_1 = Fl\gamma_1 = 2{,}6\ Fl$ g, terasest osa DB kaaluks aga $G_2 = Fl\gamma_2 = 7{,}85\ Fl$ g. Esimene jõud G_1 on rakendatud osa AD keskkohas punktis C_1, teine G_2 aga osa DB keskkohas punktis C_2. Punktide C_1 ja C_2 vahekaugus on 500 mm. Et leida kogu varda raskuskeset C, peame leidma mõlema saadud paralleelse jõu resultantjõu rakenduspunkti.

Teame, et $\frac{a}{b} = \frac{7{,}85\ Fl}{2{,}6\ Fl} \approx 3$, millest $a = 3b$.

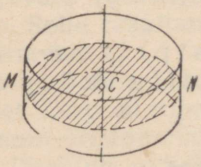
Et aga $a + b = 500$ mm, siis $a = 375$ mm ja $b = 125$ mm.

Järelikult otsitav raskuskese C asetseb varda vasakust otsast kaugusel

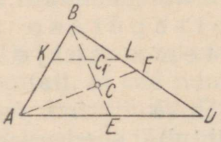
$c = \frac{l}{2} + a = 250 + 375 = 625$ mm.

§ 40. Lihtsate tasapinnaliste kujundite raskuskese

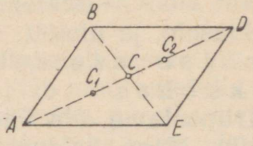
Oletame, et meil on ühtlase paksusega homogeenne ümmargune plaat (joon. 57), s. o. silinder, mille kõrgus, võrreldes läbimõõduga, on väike. Nagu eelpoolöeldust järeldub, asetseb plaadi raskuskese selle paksust poolitavas keskmises ristlõikes MN. Plaadi asemel võime vaadelda tema keskmist ristlõiget, millesse nagu oleks koondatud kogu plaadi materjal. Järelikult võime vaa-



Joon. 57



Joon. 58



Joon. 59

delda selle plaadi raskuskeset kui materiaalse ringi raskuskeset. Täpselt samuti võime plaadi ABD (joon. 58) raskuskeset vaadelda kui plaadi keskmise ristlõike raskuskeset, s. o. nagu kolmnurkse pinna raskuskeset jne.

Vaatleme nüüd mõningate lihtsate kujundite raskuskeskme määramist.

1. Ringi raskuskese asetseb tema geomeetrilises tsentris.

2. Kolmnurga raskuskese asetseb tema mediaanide lõikepunktis.

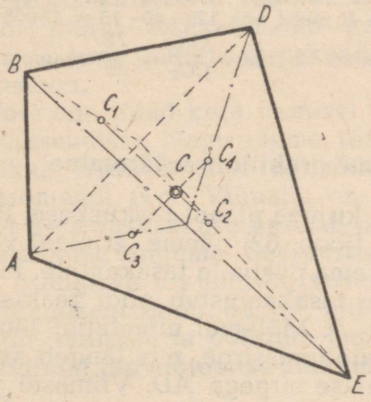
On antud kolmnurk ABD (joon. 58). Tõmbame sellele mediaani BE, mis ühendab tippu B külje AD keskpunktiga E. Edasi tõmbame meelevaldses kohas alusele AD paralleellõigu KL. Kuna tekkinud kolmnurk BKL on sarnane kolmnurgaga BAD, siis $KC_1 = C_1L$. Siit järeldub, et sirglõigul KL asuvatele osakestele

rakendatud kõigi elementaarsete raskusjõudude resultantjõud on rakendatud mediaani ja selle lõigu lõikepunkti C_1.

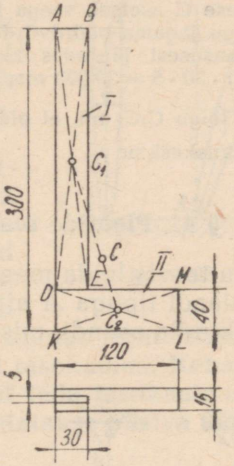
Arutledes analoogiliselt mistahes teise alusega AD paralleelse lõigu suhtes, tuleme järeldusele, et kolmnurga otsitav raskuskese asetseb mediaanil BE.

Tõmbame nüüd teise mediaani AF küljele BD. Äsjatõestatu põhjal peab kolmnurga raskuskese asetsema ka sellel mediaanil. Siit järeldub, et kolmnurga raskuskese asetseb tema mediaanide lõikepunktis.

Geomeetrias tõestatakse, et kolmnurga mediaanide lõikepunkt jagab nende pikkuse vahekorras 1 : 2, s. o. $CE = {}^1/_2BC$ ja $CF = {}^1/_2AC$; siit tuleneb, et raskuskese C asetseb kaugusel $CE = {}^1/_3BE$ või $CF = {}^1/_3AF$, s. o. mediaani $^1/_3$ pikkuse kaugusel sellest küljest, millele mediaan on tõmmatud.



Joon. 60



Joon. 61

3. Parallelogrammi raskuskese (joon. 59). Tõmbame parallelogrammile diagonaalid AD ja BE. Diagonaalide lõikepunkt jagab need pooleks. Järelikult diagonaali AD lõik AC on kolmnurga ABE mediaan, sama diagonaali lõik CD aga kolmnurga BDE mediaan, mistõttu kolmnurkade raskuskeskmed C_1 ja C_2 asetsevad diagonaalil AD. Siit tuleneb, et ka kogu parallelogrammi raskuskese asetseb samal diagonaalil. Täpselt samuti tõestame, et otsitav raskuskese asetseb ka teisel diagonaalil BE.

Järelikult parallelogrammi raskuskese asetseb tema diagonaalide lõikepunktis.

Sama kehtib ka rombi, ristküliku ja ruudu kui parallelogrammi erijuhtude kohta.

4. Teades kolmnurga, parallelogrammi või selle erijuhtude

raskuskeskme asukohta, võime leida mistahes kujundi raskuskeskme, kui see kujund on ainult lahutatav eelnimetatud elementideks.

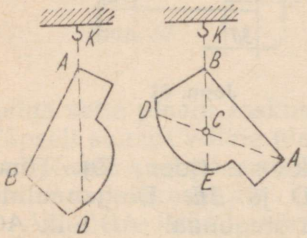
Olgu näiteks tarvis leida meelevaldse kujuga nelinurga (joon. 60) raskuskese.

Jagame selle nelinurga diagonaaliga AD kaheks kolmnurgaks ABD ja ADE. Tõmmates nendele külje AD keskkohast mediaanid, märgime viimastel kummagi kolmnurga raskuskeskme C_1 ja C_2 ning ühendame need lõiguga C_1C_2. Seejärel jagame antud kujundi diagonaaliga BE kaheks kolmnurgaks ABE ja BDE. Korrates äsjakirjeldatud võtet, saame lõigu C_3C_4. Otsitav raskuskese asetseb lõikude C_1C_2 ja C_3C_4 lõikepunktis.

Näide 18. Leida joonisel 61 kujutatud märkimisnurgiku raskuskese. Püstharu *I* raskuskese asetseb diagonaalide AE ja BD lõikepunktis, aluse *II* raskuskese aga diagonaalide DL ja KM lõikepunktis. Nurgiku kui terviku raskuskese C asetseb seega lõigul C_1C_2. Punkti C asukoha leidmiseks peame selle lõigu jagama pöördvõrdeliselt nurgiku kummagi osa kaaluga või nurgiku homogeensusest lähtudes kummagi osa mahuga. Esimese osa *I* maht on $(300—40) \cdot 30 \cdot 5 = 39\,000$ mm^3, teise osa *II* maht aga $120 \cdot 40 \cdot 15 = 72\,000$ mm^3. Jagades lõigu C_1C_2 nii, et oleks rahuldatud tingimus $\frac{C_1C}{CC_2} = \frac{72}{39}$, saamegi otsitava raskuskeskme C.

§ 41. Plaatide raskuskeskme praktiline määramine

Olgu tarvis leida meelevaldse kujuga plaadi raskuskese. Riputades plaadi tipuga A niidile KA (joon. 62) näeme, et plaat võtab teatud kindla asendi, mis vastab tema püsivale tasakaalule. Plaadi raskuse tasakaalustab niidi reaktsioon punktis A. Mõlemal nimetatud jõul on ühine mõjumissirge, mis langeb kokku vertikaalse sirgega AD. Viimasel järelikult asetsebki otsitav raskuskese. Tõmbame selle sirge ja riputame nüüd plaadi üles mingist teisest punktist, näiteks punktist B. Arutledes analoogiliselt ülaltoodule, tõmbame plaadile sirge BE. Kuna otsitav raskuskese peab asetsema üheaegselt sirgetel AD ja BE, tuleme järeldusele, et see asetseb nende sirgete lõikepunktis C.



Joon. 62

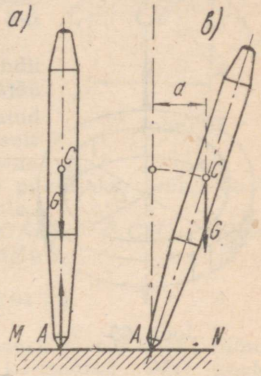
§ 42. Toetuspunkti või -telge omavate kehade tasakaal

Korraldame järgmise katse: võtame mingi teravaotsalise, oma pikitelje suhtes sümmeetrilise eseme, näiteks kärni. Toetades selle teravikuga horisontaalsele tasapinnale MN ning seades ta vertikaalsesse asendisse (joon. 63, *a*) tasakaalustab kärni raskuskeskmesse C rakendatud kaalu G tasapinna poolt avaldatav reakt-

sioonijõud. Katse näitab, et kärn ei jää siiski vertikaalsesse asendisse püsima, vaid kukub pikali, niipea kui eemaldame ainult käed. Seda selgitab asjaolu, et kärni telje nihkumisel vertikaalasendist (joon. 63, *b*) kõrvale tekib raskusjõu moment, mis pöörab kärni ümber tugipunkti *A*.

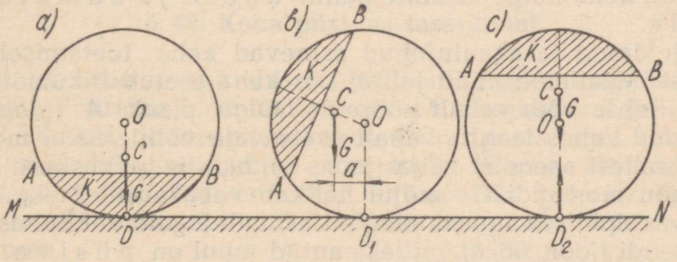
Keha sellist asendit, mille puhul väikseimgi kehale rakendatud jõud viib ta tasakaaluolekust välja, nimetatakse ebapüsiva tasakaalu asendiks. Viimast iseloomustab asjaolu, et tasakaaluolekust kõrvale kaldudes keha raskuskese laskub madalamale.

Vaatleme teist näidet. Oletame, et meil on kahest isesuguse erikaaluga materjalist valmistatud kera (joon. 64). Olgu segmendi *K* materjali erikaal suurem. Sellest tingituna ei asetse kera raskuskese tema geomeetrilises tsentris *O*, vaid eralduspinnaga *AB* (joon. 64, *a*) risti oleva raadiuse *OD* mingis punktis *C*. Joonisel näidatud asendi puhul tasakaalustab kogu kera kaalu *G* kera punkti *D* rakendatud toereaktsioon.



Joon. 63

Pöörame nüüd kera joonisel 64, *b* näidatud asendisse. Nagu näeme, tekitab kera kogukaal *G* antud juhul tugipunkti D_1 suhtes momendi *G a*. Viimane on suunatud nii, et kera raskuskese hakkab pärast käe eemaldamist langema. Seejuures pöördub kera esialgsele liikumisele vastupidises suunas kuni lähteasendi saavutamiseni (joon. 64, *a*)[1], milles ta on tasakaalus. **Keha sellist asendit, millesse ta pöördub tagasi pärast teda tasakaaluasendist väljaviinud jõu mõjumise lakkamist, nimetatakse püsiva tasakaalu**



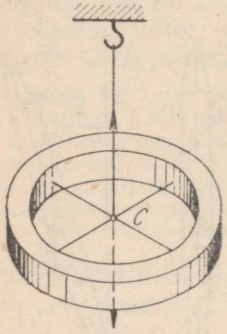
Joon. 64

asendiks. Viimast iseloomustab asjaolu, et keha tasakaaluasendist väljaviiva jõu toimel keha raskuskese tõuseb kõrgemale.

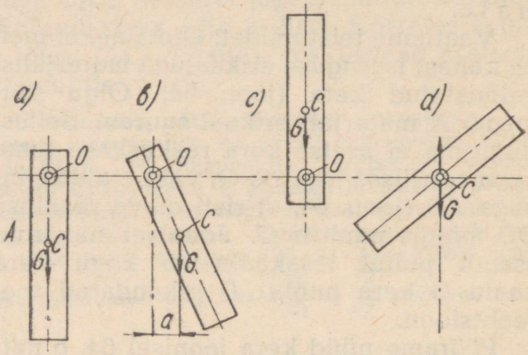
[1] Tegelikult võtab kera selle asendi alles pärast mõningaid võnkumisi.

Seame nüüd kera joonisel 64, *c* näidatud asendisse. Nagu näeme, on see juht analoogiline näitele kärniga (joon. 63, *a*), s. o. kera on ebapüsiva tasakaalu asendis.

Lõpuks kui keha toetada tema raskuskeskmes, siis tasakaalustab toereaktsioon keha kaalu keha igasuguse asendi puhul. Kui näiteks riputada rõngas (joon. 65) üles selle kesklõikesse tõmmatud kahe niidi ristumiskohast, siis säilib rõnga tasakaal igasuguse asendi puhul, mis me talle ka anname, kui raskuskese *C* jääb muutumatuks.



Joon. 65



Joon. 66

Täpselt samuti säilitab homogeenne kera tasakaalu tema igasuguse asendi puhul tasapinnal.

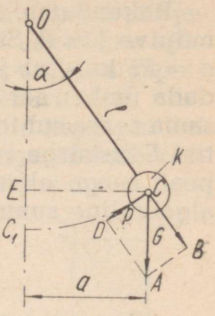
Keha sellist asendit, kus ta jääb tasakaalu igasuguse asendi puhul oma tugipunkti suhtes, nimetatakse ükskõikse tasakaalu asendiks. Viimast, nagu näeme, iseloomustab asjaolu, et raskuskese jääb keha kõigi asendite puhul ühele ja samale kõrgusele.

Kirjeldatud tasakaalujuhud esinevad keha toetamisel ühest punktist. Vaatleme nüüd juhtu, kus keha toetub liikumatule teljele, millel ta võib vabalt pöörelda. Olgu plank *A* (joon. 66, *a*) kinnitatud kahes laagris vabalt asetsevale võllile[1]. Kui me viime plangu sellest asendist välja (joon. 66, *b*), siis raskuskese tõuseb; raskusjõu momendi *Ga* mõjul hakkab vabakslastud plank pöörduma vastupidises suunas ning pärast mõningaid võnkumisi võtab lähteasendi (joon. 66, *a*), milleks antud juhul on püsiva tasakaalu asend. Kui me seame plangu joonisel 66, *c* näidatud asendisse, siis hakkab plank väikseimagi jõu mõjul pöörduma, tema raskuskese langeb ning plank võtab lõppude lõpuks jällegi püsiva tasakaalu asendi. Järelikult oli antud juhul (joon. 66, *c*) tegemist ebapüsiva tasakaalu asendiga.

[1] Laagrid pole joonisel näidatud.

Lõpuks, kui kinnitaksime plangu võllile nii, et plangu raskuskese asetseks võlli pöörlemisteljel (joon. 66, *d*), siis oleks ta igasuguse asendi puhul ükskõikses tasakaalus.

Nagu me edaspidises näeme, esitatakse ümber liikumatu telje pöörlevatele detailidele sageli nõue, et nad oleksid ükskõikses tasakaalus, s. t. et detailid oleksid tasakaalustatud.



Joon. 67

Näide 19. Teljele O on riputatud kerge varras, mille otsa on kinnitatud ketas K kaaluga $G = 5$ kg. Pärast joonisel näidatud asendisse viimist (joon. 67) lastakse varras lahti. Määrata, millise jõu mõjul hakkab pendel pöörduma püsiva tasakaalu asendi poole, kui ketta tsenter asetseb vertikaalist kaugusel $a = 200$ mm ja kui $OC = l = 340$ mm.

Jättes arvestamata varda kaalu, eeldame, et pendli raskuskese asetseb ketta C tsentris. Lahutame raskusjõu kaheks komponentjõuks, millest jõud $\overline{CB}$ on suunatud piki varrast ja jõud CD — sellega risti. Nagu jooniselt selgub, esimene komponentjõud varrast ei pööra, teine aga, mis on raadiuse OC poolt kujundatud kaarele puutujaks, sunnib ketta raskuskeset liikuma püsiva tasakaalu asendi C_1 poole.

Kuna $\angle CAD = \angle ACB = \angle EOC$, siis $\triangle CAD \sim \triangle CEO$, millest $CD : CE = CA : OC$. Siit saamegi otsitava komponentjõu

$$P = \frac{CA \cdot CE}{OC} = \frac{Ga}{l} = \frac{5\,200}{340} = 2{,}94 \text{ kg}.$$

Kui kauguse a asemel oleks olnud antud kaldenurk α, siis oleks tulnud määrata suurus $a = EC$, milleks on täisnurkse kolmnurga OEC kaatet $EC = OC \cdot \sin \alpha$.

Ülesande võib lahendada ka lihtsamalt, kui rakendada § 31 antud järeldust. Jõu G moment telje O suhtes on Ga, komponentjõu $\overline{CB}$ moment aga null (sest jõu $\overline{CB}$ mõjumissirge läbib telge O, mistõttu jõu õlg on null); järelikult $Ga = Pl$, millest $P = \frac{Ga}{l}$; seega saime sama tulemuse.

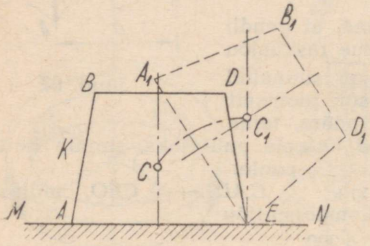
§ 43. Keha püsivus tasapinnal

Toetugu keha K oma alusega horisontaalsele tasapinnale MN (joon. 68). Pöörame teda ümber serva E. Seejuures keha raskuskese C tõuseb, joonistades kaare CC_1. Lastes aga keha jälle vabaks, pöördub see ümber sama serva E oma lähteasendisse $ABDE$ tagasi. Järelikult on kehal lähteasendis p ü s i v tasakaal. Selles asendis tasakaalustab keha kaalu tasapinna poolt avaldatav reaktsioon.

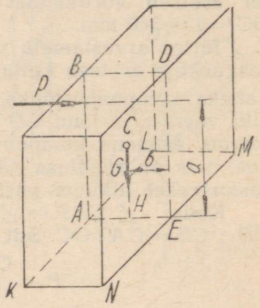
Selline nähe esineb niikaua, kuni keha pole pööratud kriipsjoonega näidatud asendini $A_1B_1D_1E$, mil ta raskuskese asetseks serva E läbival vertikaaltasapinnal. Kui asetame keha nimetatud asendisse, siis ta selles ei püsi, vaid hakkab pöörduma vasakule või paremale, kuni raskuspunkt võtab langedes kõige madalama võimaliku asendi. Seega vastab asend $A_1B_1D_1E$ e b a p ü s i v a l e t a s a k a a l u l e.

Selgitame, millistel tingimustel keha säilitab püsiva tasakaalu asendi. Kujutame endile risttahukat kaaluga G, mis toetub horisontaalsele tasapinnale oma tahuga $KLMN$ (joon. 69).

Rakendame risttahukale tema keskristlõikepinnas $ABDE$ mõjuva jõu P. See jõud annab serva MN suhtes momendi Pa, kus $a = EF$ kujutab jõu P õlga. Selle momendi mõjul püüab keha pöörduda ümber serva E, kuid seda takistab raskusjõu G moment sama serva suhtes. Viimase õla $b = EH$ saame, kui tõmbame punktist E ristsirge raskusjõu mõjumissirgele. Risttahuka tasakaaluks peab seega olema täidetud tingimus, et mõlema antud momendi algebraline summa punkti E suhtes võrduks nulliga, s. o.



Joon. 68



Joon. 69

$$Pa - Gb = 0.$$

Jõu P momenti nimetatakse ümberlükkavaks momendiks, jõu G momenti aga taastavaks momendiks (püsivuse momendiks). Kui $Pa > Gb$, siis keha pöördub ümber serva MN, kui aga $Pa < Gb$, siis jääb keha tasapinnal püsivasse asendisse.

Viimasest võrratusest saame $P < \frac{Gb}{a}$, s. o. keha asend on seda püsivam, mida suurem on taastav moment Gb ja mida väiksem on jõu P õlg telje NM suhtes.

Püsivuse arvutamisel (näiteks tõstekraana, paisu, tugiseina, korstna jne.) tuleb tagada teatud püsivusvaru, mida väljendatakse suhtega

$$k = \frac{M_G}{M_P},$$

kus M_G — taastav moment;
M_P — ümberlükkav moment.

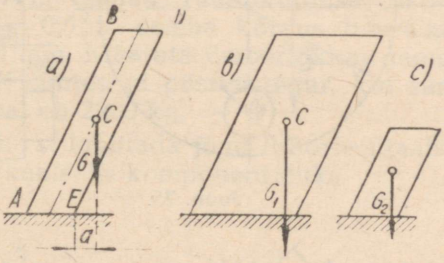
Seda suhet nimetatakse püsivusteguriks. Nagu öeldust järeldub, peab see tegur olema alati suurem kui üks.

Esitatust ei tohi aga järeldada, et keha kaal alati suurendab keha püsivust. Nagu jooniselt 70, *a* nähtub, pöördub keha $ABDE$ ümber oma serva E omakaalu G mõjul, mis annab ümberlükkava momendi Ga. Et hoida keha algasendis, tuleb talle rakendada selline jõud, mis annab ümberlükkava momendiga suuruselt võrdse,

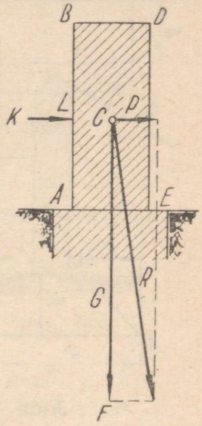
kuid suunalt vastupidise momendi. Nagu näeme, kukub keha ümber sellepärast, et raskusjõud lõikub toetuspinnaga väljaspool keha põhjapinna kontuuri.

Keha püsivust mõjutab ühesuguse kõrguse puhul keha põhjapinna suurus, ühesuguse põhjapinna puhul aga raskuskeskme kõrgus. Nagu jooniselt 70, *b* selgub, lõikub raskusjõud siin toetuspinnaga keha sama kõrguse juures põhjapinna kontuuri sees, mistõttu keha tasakaal on püsiv; joonisel 70, *c* näidatud kehal, millel on ühesuurune põhjapind joonisel 70, *a* tooduga, aga asetseb raskuskese madalamal, mis tagabki keha püsiva tasakaalu.

Seega **keha asetseb tasapinnal püsivas tasakaalus, kui kehale rakendatud kõikide jõudude (kaasa arvatud ka keha enda kaal) resultantjõud lõikub toetuspinnaga keha põhjapinna kontuuri sees.**



Joon. 70



Joon. 71

Keha on seda püsivam, mida suurem on ta põhjapind ning mida madalamal asetseb keha raskuskese.

Näide 20. Ristkülikukujulise ristlõikega *ABDE* (joon. 71) seina kaalu *G* väljendab valitud mastaabis vektor *CF*, seinale avaldatavat maksimaalset tuulesurvet samas mastaabis aga vektor *KL*. Kontrollida seina püsivust.

Kandes tuule survejõu mööda selle mõjumissirget raskuskeskmesse *C*, ehitame jõududele *P* ja *G* jõudude parallelogrammi (antud juhul ristküliku). Nagu näeme, lõikub resultantjõu *R* mõjumissirge toetuspinnaga *AE* keha põhjapinna kontuuri piirides, mistõttu keha säilitab püsiva tasakaalu.

§ 44. Kordamisküsimusi

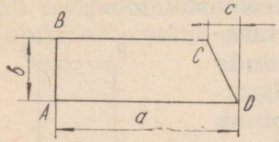
1. Kas kahe ühesuguste mõõdetega ning ühesuguse kujuga homogeense keha raskuskese asetseb mõlemal kehal ühes ja samas punktis, kui need kehad on valmistatud erineva erikaaluga materjalidest?
2. Kas kahe ühesuguste mõõdetega silindri raskuskeskmed asuvad ühes ja samas kohas, kui üks silinder on homogeenne, teine aga koostatud kõrguti isesuguse erikaaluga materjalidest?
3. Ristkülikukujulise raami *ABCD* küljed *AD* ja *BC* on valmistatud ühest ja samast materjalist, küljed *AB* ja *CD* aga teise erikaaluga materjalist. Kas selle raami raskuskese asetseb samas kohas, kus homogeensest materjalist raamilgi?

4. Kas rõnga (joon. 65) ükskõikne tasakaal püsib, kui niitide ristumiskoht, millest rõngas on üles riputatud, ei asetse rõnga kõrguse suhtes keskristlõikes?

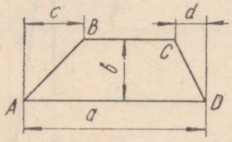
5. Kas plank (joon. 66, *d*) jääb ükskõiksesse tasakaalu, kui kandevõlli geomeetriline telg ei läbi plangu laiuse keskkohta?

§ 45. Harjutusi

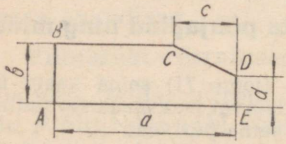
16. Leida kolmnurga *ABC* raskuskese, kui kolmnurga küljed on $AB = 120$ mm, $BC = 90$ mm ja $AC = 150$ mm.



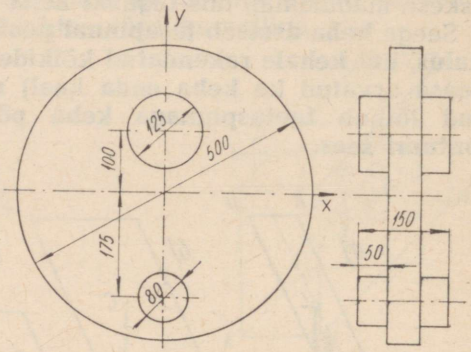
Joon. 72



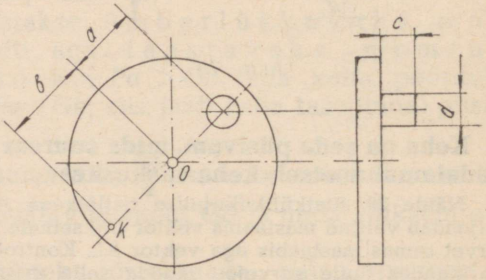
Joon. 73



Joon. 74



Joon. 75



Joon. 76

17. Eelmises ülesandes antud kolmnurk on kujundatud traadist raamina, mille kõik küljed on ühesuguse ristlõikega ning on valmistatud homogeensest materjalist. Leida selle raami raskuskese.

J u h i s: rakendada külgede raskuskeskmetesse vektorid, mis on võrdelised külgede pikkustega, ning leida seejärel nende paralleelsete jõudude kese.

18. Leida trapetsikujulise plaadi *ABCD* (joon. 72) raskuskese, kui selle mõõted on järgmised: $a = 60$ mm, $b = 20$ mm, $c = 10$ mm.[1]

[1] Ülesanded 18—20 lahendada § 40, p. 4 toodud meetodiga.

19. Sama (joon. 73), kui mõõted on: $a = 60$ mm, $b = 20$ mm, $c = 20$ mm, $d = 10$ mm.

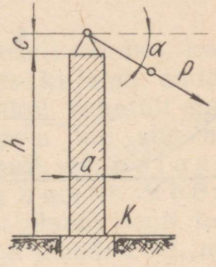
20. Sama (joon. 74), kui mõõted on: $a = 60$ mm, $b = 20$ mm, $c = 20$ mm, $d = 10$ mm.

21. Kettal on kaks paari ühepaksusi juurdevalatisi, mis asetsevad vastakuti mõlemal pool (joon. 75). Leida raskuskese.

22. Malmkettal A on juurdevalatis (joon. 76), mille raskuskese asetseb ketta teljest kaugusel $a = 290$ mm. Millise kaaluga raskus K tuleks kinnitada kettale $b = 420$ mm kaugusel selle teljest (ühel ja samal diameetril), et ketas jääks oma telje suhtes ükskõiksesse tasakaalu, kui juurdevalatise mõõted on: $d = 80$ mm, $c = 100$ mm ning erikaal $\gamma = 7{,}25$ g/cm^3?

23. Samba tippu on kinnitatud varras, mis moodustab horisontaaliga nurga $\alpha = 30°$ ning tõmbab sammast jõuga $P = 200$ kg (joon. 77). Samba ruudukujulise ristlõike külg $a = 0{,}5$ m, samba kõrgus $b = 4$ m ja $c = 200$ mm. Määrata ümberlükkav moment serva K suhtes ja püsivustegur, kui samba 1 m^3 kaal on 2200 kg.

J u h i s: lahutada jõud P horisontaalseks ja vertikaalseks komponentjõuks.



Joon. 77

V i i e s p e a t ü k k

HÕÕRDUMINE

§ 46. Kahjulikud takistused

Kogemuste varal teame, et ühe ja sama koormuse nihutamiseks mööda horisontaalset tasapinda on erinevatel tingimustel tarvis ka erinevat jõudu. Nii näiteks on tunduvalt kergem vedada koormaga saani mööda tihedat lund kui mööda maapinda, samuti koormaga vankrit mööda asfaltteed kui mööda kivisillutisega teed jne. See seletub asjaoluga, et nihutades omavahel teatud jõuga kokkusurutavaid kehi teineteise suhtes, tekib igal üksikul juhul eriline takistusjõud, mida nimetatakse h õ õ r d e j õ u k s.

K a h e t e i n e t e i s e g a k o k k u p u u t u v a k e h a s u h t e l i s e l i i k u m i s e t a k i s t u s t m õ õ d e t a k s e h õ õ r d e j õ u g a.

Toimugu treipingil detaili pikitreimine. Kui puuduks hõõrdumine supordi kelgu ja treipingi sängi juhtpindade vahel, siis kuluks ettenihkemehhanismi poolt supordi kelgule edasiantav jõud täielikult lõikeprotsessi teostamiseks. Hõõrdejõudude tõttu kulub aga osa sellest jõust hõõrdumise ületamiseks, mistõttu trei-

pingi mootor peab andma lisaenergiat. Seepärast loetaksegi hõõrdumist kahjulikuks takistuseks.

Kui mingit keha ümber paigutada, siis tuleb kokku puutuda ka õhu või vedeliku takistusega, s. o. keskkonna takistusega, mille järelikult võib samuti lugeda kahjulikuks takistuseks. Nimetatud takistus on seda suurem, mida suurem on keha liikumiskiirus. Peale käsitletute on veel teisi kahjulikke takistusi. Seepärast on väga tähtis teada, mil määral on võimalik kahjulike takistuste, esmajärjekorras aga hõõrdumise mõju vähendada.

Tuleb aga märkida, et hõõrdumise lugemine „kahjulikuks takistuseks" on tinglik. Nagu edaspidises näeme, osutub hõõrdumine sageli hädavajalikuks.

§ 47. Liuge-ja veerehõõrdumine

Joon. 73

Hõõrdumist on mitut liiki.

Võtame supordi kelgul mingi punkti, mis puutub kokku treipingi sängi juhtpinnaga. Supordi liikumisel see punkt ühtib järgemööda sängi juhtpinna arvutute punktidega, mis asetsevad punkti liikumise sirgjoonel. Sellist liikumist nimetatakse libisemiseks, kokkupuutepindade vahel esinevat hõõrdumist aga liugehõõrdumiseks.

Hoopis teisiti liigub aga näiteks ratas mööda rööbast. Langegu mingil ajahetkel ratta punkt K_1 kokku rööpa punktiga K_2 (joon. 78). Teatud aja pärast sattugu kokku mingid teised kaks punkti L_1 ja L_2, seejärel punktid M_1 ja M_2 jne. Kui $K_1L_1 = K_2L_2$, $L_1M_1 = L_2M_2$ jne., siis sellist liikumist nimetatakse veeremiseks (ilma libisemata). Järelikult iseloomustab veeremist see, et ühe keha iga punkt langeb kokku selle kehaga kokkupuutuva teise keha mingi kindlalt ettemääratud ühe punktiga. Vastavalt sellele on tegemist ka veerehõõrdumisega.

Lõpuks, kui kaare lõigud K_1L_1, L_1M_1 jne. ei ole vastavalt võrdsed lõikudega K_2L_2, L_2M_2 jne., siis on tegemist veere-liugehõõrdumisega.

Liugehõõrdumist nimetatakse mõnikord ka esimese liigi hõõrdumiseks, veerehõõrdumist aga teise liigi hõõrdumiseks.

Nagu näeme, on libisemine ja veeremine olemuselt täiesti erinevad, mistõttu on erinev ka kehade suhtelise liikumise takistus.

Küsimusi

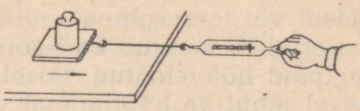
1. Millist liiki hõõrdumine esineb alljärgnevatel juhtudel:
   a) võlli pöörlemisel laagriliudadel;
   b) treipingi spindli pöörlemisel rull- või kuullaagrites;
   c) töödeldava detaili pöörlemisel liikumatul tsentril?
2. Auto rattad libisevad kohaltvõtmisel nii, et auto jääb paigale. Mis liiki hõõrdumine esineb rataste ja maapinna vahel?

§ 48. Liugehõõrdumise põhilised seadused. Liugehõõrdetegur

Hõõrdumine on keeruline füüsikaline nähtus.

Hõõrdejõud oleneb igal üksikul juhul reast tegureist. Vaatleme mõningaid neist rakendatuna liugehõõrdumisele.

Teeme järgmise lihtsa katse. Koormame horisontaalsel tasapinnal asetseva plaadi mingi kindla raskusega (joon. 79) ja hakkame plaati nööri abil tõmbama, kasutades selleks vedrukaalu (dünamomeetrit). Plaadi ühtlaseks ümberpaigutamiseks tuleb kulutada teatud jõudu, mida näitab dünamomeeter. See jõud on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine liikumise takistusega, mis kujutab endast liugehõõrdejõudu. Seejuures märkame, et alghetkel, vahetult enne liikumahakkamist, on dünamomeetri näit suurem kui siis, mil plaat juba liigub ühtlaselt. Siit teeme järelduse, et paigalseisu hõõrdejõud on suurem liikumise hõõrdejõust. Nagu näeme, põhjustab hõõrdumist plaadi poolt toetuspinnale avaldatav surve, s. o. kaalupommi ja plaadi kaal, mis on suunatud risti sellele tasapinnale ning mida nimetatakse normaalsurveks.



Joon. 79

Katseliselt on kindlaks tehtud järgmised liugehõõrdumise seadused.

1. Hõõrdejõud on võrdeline normaalsurvega. Katse näitab, et kui koormuse ja plaadi kaalu Q korral dünamomeeter näitab jõudu F, siis selle kaalu suurendamisel või vähendamisel hõõrdejõud samuti suureneb või väheneb samapalju kordi. See tähendab, et liugehõõrdejõud moodustab mingi osa normaalsurvest ning seda võib väljendada suhtega

$$\frac{F}{Q} = f \text{ või } F = fQ. \qquad (14)$$

Kordajat f nimetatakse **liugehõõrdeteguriks või esimese liigi hõõrdumise teguriks.** Me võime järelikult öelda, et liugehõõrdejõud on suuruselt võrdne normaalsurve ja liugehõõrdeteguri korrutisega.

Kuna jõudusid Q ja F väljendatakse ühesugustes ühikutes, siis liugehõõrdetegur on dimensioonita arv.

2. Oletame, et meil on katseks plaat, mis on valmistatud samast materjalist ning töödeldud ühteviisi eelmises katses kasutatuga, kuid on suurema pinnaga. Kui valida raskus nii, et raskuse ja plaadi kogukaal jääks endiseks, ja korrata kirjeldatud katset, me ei märka liikumapanevas jõus mingit muudatust. Järelikult jäi hõõrdejõud endiseks. See tähendab, et hõõrdejõud ei olene kokkupuutuvate pindade suurusest. Seda võime väljendada ka teisiti. Olgu esimesel juhul

kokkupuutepind S_1 cm^2, teisel juhul aga S_2 cm^2, millele vastavalt surve 1 cm^2-le ehk erisurve oleks esimesel juhul $q_1 = \frac{Q}{S_1}$, teisel juhul aga $q_2 = \frac{Q}{S_2}$. Järelikult võime öelda, et liugehõõrdejõud ei olene erisurvest.

3. Jätkates oma katseid plaadiga, me veendume, et valmistades plaadi või toetuspinna, millel me plaati ümber paigutame, teisest materjalist, muutub ka hõõrdejõud. Edasi olgu ühel juhul plaadi tugipind hööveldatud, teisel juhul aga lihvitud: kahtlemata on teisel juhul ka hõõrdejõud väiksem. Samuti on hõõrdejõud väiksem ka õlitamise kasutamisel, võrreldes kuivalt koostöötavate pindadega.

Seega oleneb hõõrdejõu suurus ühe ja sama normaalsurve puhul kokkupuutuvate kehade materjalist, hõõrduvate pindade töötlemisest, määrimise iseloomust ja selle liigist.

4. Lõpuks, hõõrdejõu suurus ei olene libisemise kiirusest, kuigi liikumise algmomendil hõõrdumine on suurem kui liikumisel, nagu seda öeldi juba selle paragrahvi algul. Vastavalt sellele eristatakse nn. paigalseisu hõõrdumist ja liikumise hõõrdumist.

Lisas I on antud liugehõõrdeteguri ligikaudsed arvväärtused mitmesuguste materjalide ja hõõrdetingimuste kohta.

Küsimusi

1. Kas võib määrata hõõrdejõu suuruse, kui on teada ainult normaalsurve?

2. Mis peab olema teada, et määrata hõõrdejõu suurust?

Näide 21. Millist jõudu on tarvis 1200 kg raskuse puukasti nihutamiseks mööda horisontaalset männilauda, kui hõõrdetegur $f = 0{,}30$?

Valemi (14) abil leiame hõõrdejõu:

$$F = 0{,}3 \cdot 1200 = 360 \text{ kg}.$$

Vajalik jõud ei tohi olla väiksem sellest väärtusest. Kohaltnihutamise alghetkel on tarvis mõnevõrra suuremat jõudu.

Näide 22. Mööda õlitatud horisontaalseid juhtpindu ühtlaselt liikuvale malmprismale raskusega $G = 20$ kg on rakendatud liikumissuunaline jõud $P = 2$ kg. Määrata hõõrdetegur.

Valemiga (14) leiame

$$f = \frac{F}{Q} = \frac{P}{G} = \frac{2}{20} = 0{,}1.$$

Näide 23. Malmprisma kaaluga $G = 12$ kg liigub ühtlaselt jõu $P = 23$ kg mõjul mööda horisontaalset malmplaati (joon. 80). Määrata hõõrdetegur, kui jõud P moodustab vertikaaliga nurga $\alpha = 14°$.

Hõõrdejõud tekib normaalsurve mõjul, mis koosneb prisma kaalu G ja jõu P vertikaalse komponentjõu summast. Määrame selle komponentjõu. Kolmnurgast ABC saame:

$$Q = P \cos \alpha.$$

Täielik normaalsurve

$$Q_1 = Q + G = P \cos \alpha + G.$$

Järelikult hõõrdejõud

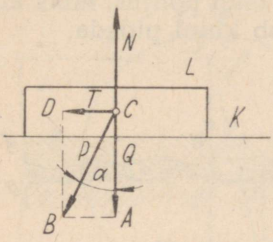
$$F = Q_1 f = (P \cos \alpha + G) f.$$

Ühtlasel liikumisel on liikumapanev jõud $T = P \sin \alpha$ võrdne hõõrdejõuga, s. o.

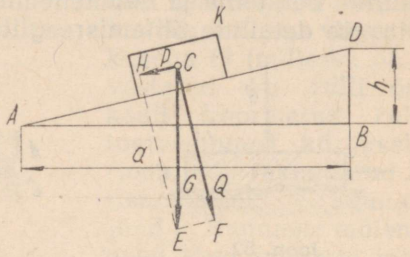
$$(P \cos \alpha + G) f = P \sin \alpha,$$

millest saame:

$$f = \frac{P \sin \alpha}{P \cos \alpha + G} = \frac{23 \sin 14^\circ}{23 \cos 14^\circ + 12} = \frac{23 \cdot 0{,}242}{23 \cdot 0{,}97 + 12} = 0{,}16.$$



Joon. 80



Joon. 81

Näide 24. Mööda kaldtasapinda *ABD* (joon. 81) libiseb omakaalu *G* mõjul ühtlase kiirusega alla prisma *K*. Määrata hõõrdetegur, kui $a = 400$ mm ja $h = 100$ mm.

Lahutame jõu *G* kaheks komponentjõuks, üheks *Q*, mis on risti kaldpinnaga *AD*, ja teiseks *P*, mis on paralleelne kaldpinnaga *AD*. Hõõrdejõud $F = fQ$ tasakaalustatakse komponentjõuga *P*. Määrame viimase.

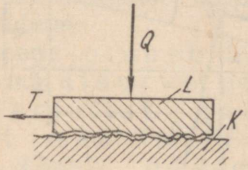
Sarnastest kolmnurkadest *EHC* ja *ABD* võime kirjutada $\frac{P}{h} = \frac{Q}{a}$, millest $P = Q\frac{h}{a}$. Võrrutades selle komponentjõu hõõrdejõuga, saame $Q\frac{h}{a} = fQ$, kust leiame hõõrdeteguri

$$f = \frac{h}{a} = \frac{100}{400} = 0{,}25.$$

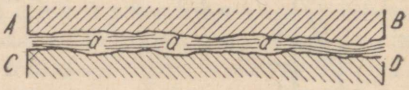
§ 49. Kuiv- ja vedelikhõõrdumise mõiste

Hõõrdejõud oleneb kokkupuutuvate pindade olukorrast. Kui pinnad on kuivad, siis nad puutuvad kokku vahetult, nagu see on skemaatiliselt näidatud joonisel 82. Kui hoolikalt ka kummagi keha pind oleks töödeldud, ikkagi on neil alati suuremad või väiksemad konarused, mille suuruse määrab töötlemise puhtus. Jõu *Q* poolt tekitatava surve mõjul need konarused deformeeruvad, ühe pinna konaruste harjad surutakse teise pinna konaruste vagudesse, mistõttu kummagi pinna osakeste vahel tekib haakejõud. Selle tulemusena on kokkupuutuvate kehade suhteline liikumine takistatud. Seda takistust nimetatakse k u i v h õ õ r d u m i s e k s.

Oletame nüüd, et hõõrduvate pindade vahel on õlikiht (joon. 83). Selle kihi küllaldase paksuse a korral lahutab see pinnad AB ja CD teineteisest ning viimaste konarused pole enam üksteisega kokkupuutes. Tänu sellele ei takista hõõrduvate kehade suhtelist liikumist enam nende pindade konarused, vaid õliosakeste omavaheline toime. Sellist hõõrdumist nimetatakse v e d e l i k h õ õ r d u m i s e k s. Pole raske mõista, et liikumistakistus on antud juhul väiksem kui kuivhõõrdumisel. Samuti on pikemata selge, et vedelikhõõrdumise korral on väiksem ka hõõrduvate detailide kulumine ja kuumenemine. See ongi põhjus, miks koostöötavate detailide õlitamisreeglitest tuleb kinni pidada.



Joon. 82



Joon. 83

Nagu katsed näitavad, kõigub õlikihi paksus piirides 0,005—0,05 mm.

Masinate detailide vedelikhõõrdumise nähtusi on möödunud sajandi lõpul üksikasjaliselt uurinud vene teadlane prof. N. P. Petrov, kes lõi hõõrdumise hüdrodünaamilise teooria, mida kasutatakse vastutusrikaste hõõrduvate detailide õlitamisega seosesolevates arvutustes.[1] Nendes arvutustes peetakse hõõrdejõu määramisel silmas hõõrduvate kehade suhtelist kiirust, normaalset erisurvet, õlikihi paksust ning õli viskoossust (mis iseloomustab osakestevahelist hõõrdejõudu).

Mõnikord võib kohata ka kuiv- ja vedelikhõõrdumise vahepealset hõõrdumist, mille korral õlikiht katab ainult osaliselt hõõrduvate pindade konarusi. Sel juhul nimetatakse hõõrdumist kas p o o l k u i v a k s või p o o l v e d e l i k u l i s e k s hõõrdumiseks, olenevalt sellest, kummale hõõrdumise põhiliigile ta on lähedasem.

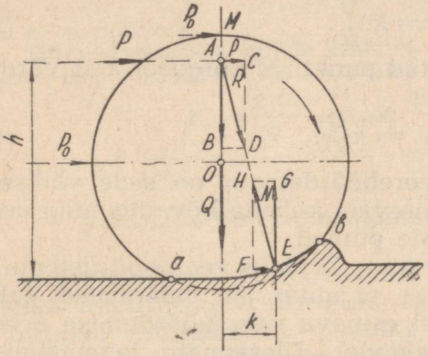
§ 50. Veerehõõrdetegur

On täiesti selge, et ka veerehõõrdumise takistust mõjutavad kummagi keha pinna konarused: mida suuremad need konarused on, seda suurem on ka takistus.

Veeremisel on tähtis üks iseärasus, mis eraldab veeremist libisemisest. Kuna teoreetiliselt silinder ja tasapind puutuvad

[1] Prof. N. P. Petrovi töid jätkasid ning arendasid edasi väljapaistvad vene teadlased N. J. Žukovski ja N. I. Mertsalov.

kokku mööda sirgjoont, kera ja tasapind ühes punktis jne., siis selliste pindade kokkupuutekohas tekib normaalsurve mõjul suur surve. Selle tulemusena kumbki keha selles kohas deformeerub. Nagu joonisel 84 on skemaatiliselt näidatud, muljutakse silindri veeremisel mööda tasapinda silindri pind kaare *ab* ulatuses lamedaks. Seejuures surub silinder toetuspinnale, moodustades enda ette liikumise suunas valli, mis takistab silindri veeremist. Lisaks sellele avaldavad veeremisele takistust ka veel teised nähtused, mida me aga lähemalt ei käsitle. Vaatleme, kuidas määratakse veeretakistuse suurus. Olgu raskusega Q (millesse on arvestatud ka rulli enda kaal) koormatud rullile toetuspinnast kõrgusel h (joon. 84) rakendatud horisontaalselt suunatud jõud P. Kanname mõlemad need jõud viimaste mõjumissirgete lõikepunkti A ning liidame nad seal parallelogrammi reegli järgi. Tulemusena saame nende resultantjõu R,



Joon. 84

mida väljendab vektor $\overline{AD}$. Et rull jääks tasakaalu, peab selle jõu tasakaalustama mingi teine rullile rakendatud jõud. Selliseks jõuks on toetuspinna poolt rullile avaldatav reaktsioon N, mis on punktist E suunatud mööda puutepinna normaali (s. o. risti puutepinnale tõmmatud puutujaga). Et jõud R ja N oleksid tasakaalus, peavad nad olema suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised. Seega jõud R ja N on suuruselt võrdsed.

Lahutame jõu N horisontaalseks $\overline{EF}$ ja vertikaalseks $\overline{EG}$ komponentjõuks. Pole raske näha, et kolmnurgad EHG ja ACD on sarnased, millest järeldub, et $\overline{EF}$ on suuruselt võrdne jõuga P, $\overline{EG}$ aga jõuga Q. Nii saime kaks jõupaari: P ja $\overline{EF}$ ning Q ja $\overline{EG}$. Need jõupaarid peavad olema tasakaalus ja nende momendid peavad olema suuruselt võrdsed, kuid vastupidise märgiga. Esimese jõupaari moment on Ph[1] ning see on positiivne. Teise jõupaari moment on Qk, kus k on reaktsiooni N rakenduspunkti kaugus rulli telge läbivast vertikaaltasapinnast, ning see on negatiivne. Võrrutades need momendid omavahel, saame $Ph = Qk$; siit leiamegi jõu P, mis on tarvilik rulli liikumistakistuse ületamiseks:

$$P = k\frac{Q}{h}. \qquad (15)$$

[1] Võtame jõupaari õlaks h, jättes arvestamata selle muutumise väikese deformatsiooni tagajärjel.

Jõupaari õla k suurus oleneb esmajärjekorras mõlema kokkupuutuva keha materjalide kõvadusest ning nende pindade töötlemisest. Seepärast on lõigu k suurusega hakatud mõõtma veerehõõrdetegurit. Nagu näeme, on veerehõõrdetegur, erinevalt liugehõõrdetegurist, dimensiooniga suurus ning see väljendatakse pikkusühikutes (cm, mm), kusjuures lõigud k ja h peavad olema võetud ühesugustes mõõteühikutes.

Kui jõud P on rakendatud tsentri O kõrgusel, siis, asetades võrrandisse (15) h väärtuse, mis võrdub rulli raadiusega R, saame:

$$P_O = k\frac{Q}{R}. \tag{16}$$

Kui aga jõud P on rakendatud punkti M kõrgusel, mis võrdub rulli läbimõõduga D, siis

$$P_D = k\frac{Q}{D}. \tag{17}$$

Ülalöeldust järeldub, et veerehõõrdetegur on seda väiksem, mida suurem on teineteisel veerevate kehade kõvadus ning mida hoolikamalt on töödeldud nende pinnad.

Lisas II on antud mõningate juhtude jaoks veerehõõrdetegurid.

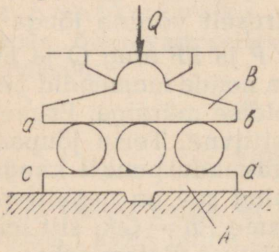
Sõidukite liikumapanemiseks vajaliku jõu määramisel tuleb peale rataste ja teepinna vahel esineva veerehõõrdumise arvestada veel liugehõõrdumist telgedel. Ülesannete lahendamisel kasutatakse valemeid, mis väljendavad tõmbejõu P sõltuvust teljele mõjuvast survest N ning mis arvestavad mõlemaid hõõrdumisliike:

$$P = fN. \tag{18}$$

Tegurit f nimetatakse üldhõõrdeteguriks.

Küsimusi

1. Milles seisab põhiline erinevus veerehõõrdeteguri ja liugehõõrdeteguri vahel?
2. Kuidas on otstarbekam rakendada veeremisel liikumist põhjustav jõud P (tugipinnale lähemale või kaugemale)?



Joon. 85

Näide 25. Puittrummel koos selles oleva koormusega kaalub 1,2 t. Milline jõud P peab olema rakendatud trumlile selle telje kõrgusel, et trummel veereks ühtlaselt mööda horisontaalset puitkatet, kui trumli läbimõõt $D = 1{,}5$ m.

Võttes trumli kaalu kilogrammides, trumli läbimõõdu sentimeetrites ning hõõrdeteguri 0,08 cm, saame:

$$P = 0{,}08\frac{1200}{75} = 1{,}3 \text{ kg}.$$

Kui sama koormus asetseks puitkastis ning seda paigutataks ümber libisemise teel, siis, võttes esimese liigi hõõrdeteguri puit puidul võrdseks $f = 0{,}5$, saame vajalikuks jõuks

$$P = 1200 \cdot 0{,}5 = 600 \text{ kg}.$$

Näide 26. Nagu teada, keha mõõted temperatuuri kõikudes muutuvad. Seda tuleb eriti arvestada metallsildade projekteerimisel. Kui sillal on näiteks kaks tuge, siis tehakse üks neist liikuvana. Selline tugi on skemaatiliselt näidatud

joonisel 85, kus alumise liikumatu padja A ja ülemise, silla sõrestikuga ühendatud padja B vahele on paigutatud silindrilised rullid.

Olgu silla surve toele $Q = 200$ t, rullide läbimõõt $d = 150$ mm. Toe kõik osad on valmistatud terasest. Tuleb määrata toe poolt silla pikenemisele suvel või lühenemisele talvel avaldatav takistusjõud.

Antud juhul toimub iga rulli veeremine mööda kaht tasapinda *ab* ja *cd*. Kuna mõlemad padjad on valmistatud ühest ja samast materjalist, siis on ka hõõrdetegur üks ja sama. Otsitav takistusjõud on $F_1 + F_2$, kus F_1 on veerehõõrdumine tasapinnal *ab*, F_2 aga tasapinnal *cd*. Kasutades võrrandit (17), saame

$$F_1 + F_2 = k\frac{Q}{d} + k\frac{Q + 3G}{d} = k\frac{2Q + 3G}{d},$$

kus G on rulli kaal.

Jättes arvestamata rullide kaalu ($3G$), mis jõuga Q võrreldes on tähtsusetu, ning võttes $k = 0{,}006$ cm, saame piki silda suunatud otsitava jõu

$$P = k\frac{2Q}{d} = 0{,}006\ \frac{2 \cdot 200\,000}{15} = 160 \text{ kg}.$$

§ 51. Hõõrdumise osatähtsus looduses ja tehnikas

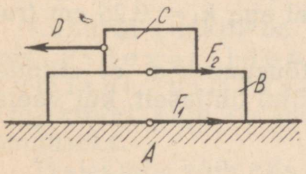
Eespool näidati, et hõõrdumise võib lugeda kahjulikuks takistuseks ainult tinglikult. Pole raske endale ette kujutada, et hõõrdejõu puudumisel osutuks võimatuks käimine tasasel pinnal ja veduri liikumine rööbastel, ükski ese ei püsiks kaldpinnal, naelad ei püsiks kinnitatavates detailides jne.

Tehnikas etendab hõõrdumine kahesugust osa. Põhjustades masinates detailide liikumisele lisatakistusi, nõuab hõõrdumine selle ületamiseks teatud kindla energiakoguse kulutamist, mida muidu võiks tarbida masinas otseseks ülesandeks. Selles mõttes on hõõrdumine kahjulik. Kuid teisest küljest on ainult hõõrdumise tõttu võimalik kasutada polte ja mutreid, rakendada rihmu pöörleva liikumise ülekandmiseks jne.

Seega, võttes tarvitusele abinõud hõõrdumise maksimaalseks vähendamiseks liikuvate detailide juures, me samaaegselt püüame seda maksimaalselt suurendada masina nendes detailides, kus ta etendab positiivset osa.

§ 52. Kordamisküsimusi

1. Plaadil A (joon. 86) asetsevad prismad B ja C. Hõõrdejõud B ja A vahel on F_1, B ja C vahel aga F_2. Prismale C on rakendatud jõud P. Kuidas liiguvad need prismad järgmistel juhtudel:



Joon. 86

a) kui jõud P on jõust F_2 väiksem, kuid jõust F_1 suurem;

b) kui jõud P on jõust F_1 väiksem, kuid jõust F_2 suurem;

c) kui jõud P on väiksem nii jõust F_1 kui ka jõust F_2.

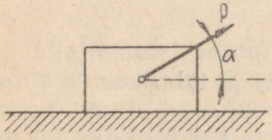
2. Kas on võimalik, et rull (joon. 84) hakkab jõu P mõjul veeremise asemel libisema? Missugustel tingimustel see võib toimuda?

§ 53. Harjutusi

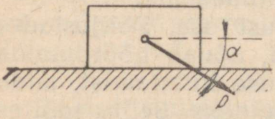
24. 120 kg raskuse koorma ühtlaseks libistamiseks mööda horisontaalset tasapinda on tarvis 15 kg suurust liikumissuunalist jõudu. Määrata hõõrdetegur.

25. Mitu korda oleks hõõrdejõud suurem (näide 26, joon. 85), kui patjade A ja B vahel rullid puuduksid (hõõrdetegur teras kuivalt terasel $f = 0{,}15$)?

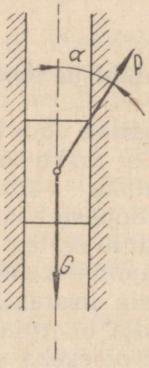
26. Prismale kaaluga $G = 20$ kg on rakendatud jõud P, mis ühel juhul on suunatud horisontaali suhtes nurga $\alpha = 35°$ all üles (joon. 87), teisel juhul aga alla (joon. 88). Kui suur peab kummalgi juhul olema see jõud, et prisma liiguks hõõrdeteguri $f = 0{,}25$ puhul ühtlaselt?



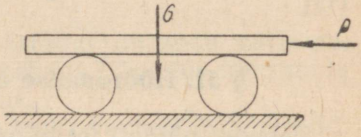
Joon. 87



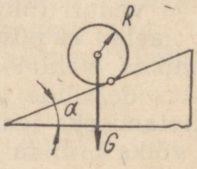
Joon. 88



Joon. 89



Joon. 90



Joon. 91

27. Vertikaalsete malmjuhtpindade vahel (joon. 89) tõuseb vertikaaliga nurka $\alpha = 30°$ moodustava jõu P toimel 10 kg raskune terasliugur. Määrata selle jõu suurus, kui juhtpinnad on õlitatud ($f = 0{,}08$).

28. Lahendada eelmine ülesanne tingimusel, et liugur liigub ühtlaselt alla.

29. Terasplaadil asetseva koormuse ümberpaigutamisel kasutatakse terasrulle läbimõõduga 100 mm, mis veerevad mööda puitalust (joon. 90). Määrata selleks vajalik jõud P, kui koormuse kaal koos plaadiga $G = 300$ kg, hõõrdetegur rullide ja plaadi vahel $k = 0{,}005$ cm, rullide ja aluse vahel aga $k_1 = 0{,}25$ cm (rullide kaalu ei pruugi arvestada).

30. Milline peab olema kaldpinna tõusunurk α, et silinder raadiusega R veereks sellel omakaalu mõjul ühtlaselt, kui veerehõõrdetegur on k (joon. 91)?

KINEMAATIKA

Kuues peatükk

PUNKTI TRAJEKTOOR. TEEPIKKUS JA AEG

§ 54. Kinemaatika sisu

Olgu tarvis treipink häälestada võlli pikitreimiseks. See tähendab, et me peame treipingi häälestama nii, et antud lõikesügavuse juures oleks tagatud vajalik lõikekiirus ja ettenihe, s. o. peame andma töödeldavale võllile vastava pöörete arvu, lõiketerale aga kindla teljesuunalise nihkumise detaili ühe pöörde kohta. Selle me saavutame elektrimootorilt liikumist spindlile ning supordile ülekandvate mehhanismide häälestamisega. Seejuures me aga mingeid arvutusi treipingi detailidele mõjuvate jõudude määramiseks ei tee.

Seega lahendame me ülesande ainult *kinemaatika* seisukohalt, s. o. mehaanika selle osa järelduste põhjal, mis uurib liikumist ilma seda põhjustavaid jõude arvestamata. Kinemaatikas kasutatakse järelikult ainult liikumisega lahutamatult seotud ruumi ja aja mõistet.

Selleks et määrata kõva keha asukohta ruumis, peab oskama määrata kõva keha meelevaldse punkti asukohta mingil kindlal hetkel. Järelikult keha kui terviku liikumise uurimiseks tuleb kõigepealt kindlaks määrata keha ühe punkti liikumise elementide vahelised kinemaatilised seosed. Vastavalt sellele jaguneb kinemaatika punkti kinemaatikaks ja kõva keha kinemaatikaks.

Nagu edaspidises näeme, on paljudel juhtudel keha kui terviku liikumisega seotud ülesannete lahendamiseks küllaldane teada keha ühe punkti liikumist.

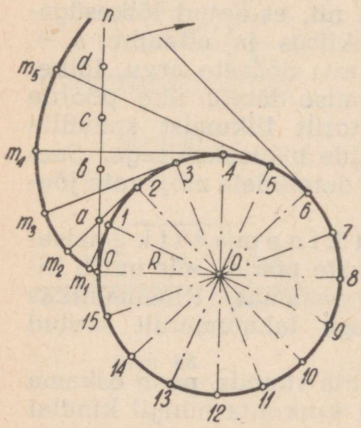
§ 55. Trajektoorid ja liikumise põhiliigid

Liikuval punktil on erinevatel hetkedel erinev asukoht ruumis. *Pidevat joont, mille punkt kujundab liikumisel, nimetatakse punkti trajektooriks.* Trajektoori kuju on üheks punkti liikumist iseloomustavamaks tunnuseks.

Trajektoor võib olla kõverjoon, mis laseb end paigutada tasapinnale; sel juhul nimetatakse liikumist *tasapinnaliseks.*

Selline on näiteks mööda sirgjoonelist rööbast veereva ratta punkti liikumine, treipingi lõiketera meelevaldse punkti liikumine jne. Kui see tingimus pole täidetud, siis on tegemist *ruumilise liikumisega*. Siia kuulub näiteks mutri punkti liikumine mutri keeramisel poldile, puuri lõikeserval asuva punkti liikumine (puurpingi töötamisel) jne.

Kui trajektoor on sirgjooneline, siis nimetatakse liikumist *sirgjooneliseks*, erinevalt *kõverjoonelisest* liikumisest, mil punkti trajektooriks on kõverjoon. Kõverjooneline liikumine võib samuti olla mitmesugune, olenevalt kõvera kujust, millel punkt liigub. Nii võib see olla ringliikumine (kui punkti trajektoor on ringjoon või ringjoone kaar), elliptiline, kruvijooneline jne.



Joon. 92

Küsimusi

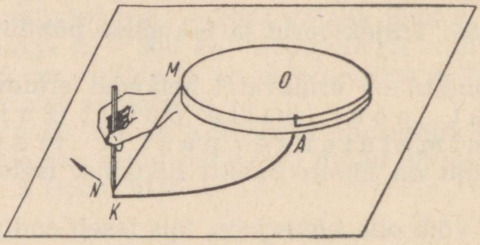
1. Nimetage punkti liikumise laad järgmistel esemetel:
   a) treipingi pöörlev spindel;
   b) treitera pikiettenihkel;
   c) treitera kujutreimisel (kopeeri abil);
   d) treipingi kärnpukki kinnitatud puur (puurimisel).
2. Tooge näiteid teistest liikumise liikidest.

Näide 27. Oletame, et sirgjoon *On* veereb libisemata mööda ringjoont. Joonestame selle sirge punkti *O* poolt kujundatava trajektoori (joon. 92).

Puutugu sirgjoon alghetkel ringjoont punktis *O*. Mõne aja pärast ühtigu sirgjoone mingi punkt *a* ringjoone punktiga *1*. Seejärel ühtivad punktid *b* ja *2*. Järelikult libisemise puudumisel peab lõik *Oa* võrduma kaarega *O1*, lõik *ab* — kaarega *12* jne.

Kanname kaared *01*, *12*, *23* jne. ringjoonele. Kuna puutuja on puutepunktis raadiusega risti, siis, tõmmates punktidest *1*, *2*, *3* jne. raadiustele ristsirged ning kandes nendele kaartega *01*, $01 + 12$, $01 + 12 + 23$ jne. võrdsed lõigud $1m_1$, $2m_2$, $3m_3$ jne., saame rea punkte m_1, m_2, m_3 jne., mis asetsevad otsitaval trajektooril. Joonestamise lihtsustamiseks on otstarbekas jagada ringjoon võrdseteks osadeks ning seejärel kanda üks osa vastav arv kordi puutesirgetele.

Et me aga sirkliga ei mõõda kaari, vaid kõõle, siis saame konstruktsiooni seda täpsema, mida suuremaks arvuks osadeks on jaotatud ringjoon.



Joon. 93

Tekkivat kõverjoont nimetatakse evolvendiks.

Niisiis, kui varras veereb libisemata mööda ketta külgserva, siis varda punkt joonestab trajektoori, mis kujutab endast ringi evolventi.

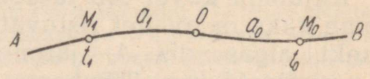
Teisiti võime evolvendi saada järgmiselt. Võtame ümmarguse ketta O (joon. 93) ja kinnitame selle külge peenikese niidi ühe otsa. Kerinud niidi ümber ketta, kinnitame niidi vaba otsa külge pliiatsi. Hoides niiti pingul hakkame nüüd seda kettalt maha kerima ning tõmbame seejuures terava pliiatsiga alates punktist A liikumatule paberile joone. Tulemusena saame paberil evolvendi. Joonisel kujutatud asendis on pliiats joonestanud evolvendi lõigu AK, kusjuures ringilt mahakeritud niidi lõik MK võrdub kaarega MA.

Evolventkõveraid kasutatakse laialdaselt masinaehituses, eriti hammasrataste juures, kus hammaste profiil kujundatakse kõige sagedamini just selle kõvera järgi.

§ 56. Punkti poolt läbitud teepikkuse leidmine punkti asendite järgi trajektooril

Liikuva punkti asendi täielikuks määramiseks trajektooril peab peale viimase veel teadma, kui palju punkt liikus edasi ühes või teises ajavahemikus ning millises suunas.

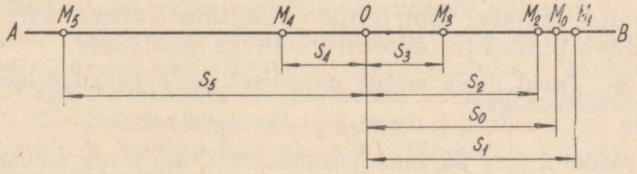
Olgu liikuva punkti M trajektooriks kõver AB (joon. 94). Punkti kaugusi mitmesugustel hetkedel arvestame meelevaldselt võetud punktist O, mida nimetame arvestuse alguspunktiks. Oletame, et hetkel t_0 on liikuv punkt alguspunktist O kaugusel a_0 olevas punktis M_0. Liikudes paremalt vasakule, jõudku punkt hetkel t_1 punkti M_1, mille kaugus samast alguspunktist vastupidises suunas olgu a_1. Edasi muutku punkt oma liikumissuunda, ning liikudes vasakult paremale, olgu hetkel t_2 punktis O. Järelikult kogu vaadeldava aja kestel läbis punkt M teekonna, mis võrdub



Joon. 94

$$a_0 + a_1 + a_1 = a_0 + 2a_1.$$

Kuna punktil võib olla kaks asendit (ühel ja teisel pool arvestuse alguspunkti), millede puhul kaugus arvestuse alguspunktist on üks ja sama, siis kirjutatakse kauguste juurde algebraline märk: kui näiteks loeme kaugusi paremale poole positiivseteks, siis kaugusi vastaspoole tuleb lugeda negatiivseteks.



Joon. 95

Näide 28. Punkt M liigub mööda sirgjoonelist trajektoori nii, et tema kaugus S arvestuse alguspunktist rahuldab igal hetkel võrrandit $s = 25 + 7t - 4t^2$, kus s on kaugus arvestuse alguspunktist sentimeetrites ning t — aeg

sekundites. Leida punkti asend trajektooril hetkedel $t_0 = 0$ sek, $t_1 = 1$ sek, $t_2 = 2$ sek, $t_3 = 3$ sek, $t_4 = 4$ sek ja $t_5 = 5$ sek (joon. 95).

Olgu arvestuse alguspunktiks punkt O. Vaadeldava ajavahemiku algul $t_0 = 0$; asetades selle väärtuse liikumise antud võrrandisse, saame $s_0 = 25$ cm, s. o. alghetkel asetseb punkt m arvestuse alguspunktist O kaugusel $s_0 = 25$ cm olevas punktis M_0. Asendades järgemööda antud võrrandis t tema väärtustega 1, 2, 3, 4 ja 5 sek, saame vastavad kaugused: $s_1 = 28$ cm, $s_2 = 23$ cm, $s_3 = 10$ cm, $s_4 = -11$ cm ja $s_5 = -40$ cm, millede järgi leiame liikuva punkti asendid hetkedel M_1, M_2, M_3, M_4 ja M_5. Positiivsed kaugused kanname punktist O paremale, negatiivsed aga vasakule. Punkti poolt 5 sekundiga läbitud tee on antud juhul $M_0M_1 + M_1M_5 = s_1 - s_0 + s_1 + s_5 = 28 - 25 + 28 + 40 = 71$ cm. Joonisel 95 on kauguste mastaap 1 : 10.

§ 57. Trajektoori ehitamine etteantud koordinaatide järgi

Niisiis liikuva punkti asendi leidmiseks meelevaldsel hetkel tuleb kanda trajektoorile punkti kaugus arvestuse alguspunktist sellel hetkel.

Milliseid andmeid on siis tarvis trajektoori enda ehitamiseks?

Kujutagu kõver AB tasapinnalist trajektoori (joon. 96). Tõmbame kaks omavahel ristuvat telge. Mingil hetkel t_0 olgu liikuv punkt algasendis A, järgneval hetkel t_1 asendis M_1, hetkel t_2 asendis M_2 jne. Tõmbame nendest punktidest A, M_1, M_2 jne. teljele ristsirged Aa_0, M_1a_1, M_2a_2 jne. ning teljele Oy ristsirged Ab_0, M_1b_2 jne. Nagu näeme, määravad nende lõikude pikkused liikuva punkti asendid vastavatel hetkedel.

Järelikult kaks sellist omavahel ristuvat telge võimaldavad meil ristsirgete antud pikkuste järgi ehitada trajektoori. Nende ristsirgete lõikusid, mis annavad punkti kauguse telgedest, nimetatakse koordinaatideks, telgi endid aga koordinaattelgedeks. Lõikusid Oa_0, Oa_1, Oa_2 jne., mis kujutavad punkti kaugusi teljest, nimetatakse abstsissideks, sirget aga abstsisstelgeks; lõikusid Ob_0, Ob_1, Ob_2 jne., mis kujutavad punkti kaugusi abstsisstelgest, nimetatakse ordinaatideks, sirget aga ordinaatteljeks. Nüüd me võime ütelda lühemalt: kandnud vaadeldava hetke kohta liikuva punkti abstsissi ja ordinaadi koordinaattelgedele ning tõmmanud ristsirged, annab viimaste lõikepunkt meile punkti asukoha trajektooril vaadeldaval hetkel.

Tõmmates seejärel läbi leitud punktide sujuva kõverjoone, saame liikuva punkti trajektoori vastavas mastaabis.

Näide 29. Punkt liigub mööda trajektoori, mille punktide koordinaadid määratakse võrranditega

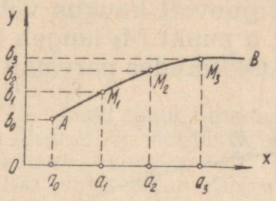
$$x = 2t^2 \text{ ja } y = 5 + 3t,$$

kus koordinaadid x ja y on antud sentimeetrites, aeg t aga sekundites.

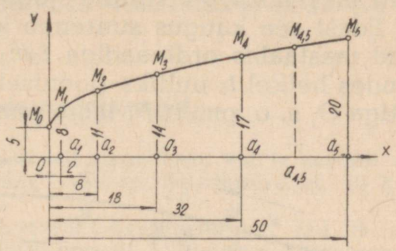
Ehitada punkti liikumise trajektoor esimese viie sekundi kohta.

Tõmbame koordinaatteljed Ox ja Oy (joon. 97). Arvutame punkti koordinaadid alghetke $t = 0$ ning esimese, teise jne. sekundi lõpphetke kohta. Asetades antud võrranditesse $t = 0$, saame $x = 0$ ja $y = 5$ cm. Valime mastaabi 1 : 10 ja kanname teljele Oy alates punktist O lõigu $OM_0 = 5$ mm. Asetades võrranditesse $t = 1$ sek, saame $x_1 = 2$ cm ja $y = 8$ cm, millele vastavalt kan-

name joonisele valitud mastaabis abstsissi $Oa_1 = 2$ mm ja selle punktist a_1 tõmmatud ristsirgele ordinaadi $a_1M_1 = 8$ mm. Tulemusena saame trajektoori teise punkti M_1. Toimides analoogiliselt edasi, saame 6 punkti, mis kuuluvad joonestatavale trajektoorile. Seejärel tõmbame läbi kõigi saadud punktide sujuva kõverjoone, mis kujutabki endast otsitavat trajektoori.[1]



Joon. 96



Joon. 97

Peame meeles, et teades trajektoori, võime me sellel nüüd leida liikuva punkti asendi mistahes hetkel ajavahemikus $t = 0$ sek kuni $t = 5$ sek. Näiteks kui meil oleks tarvis leida punkti asukoht momendil $t = 4{,}5$ sek, siis, arvutanud abstsissi $x = 2 \cdot 4{,}5^2 = 40{,}5$ cm, kanname sellele pikkusele vastava lõigu mastaabis (lõik $Oa_{4,5} = 40{,}5$ mm) Ox teljele ning tõmbame sellele punktist $a_{4,5}$ ristsirge. Punkt $M_{4,5}$ annabki liikuva punkti asukoha.

§ 58. Kauguste kõver ristkoordinaadistikus

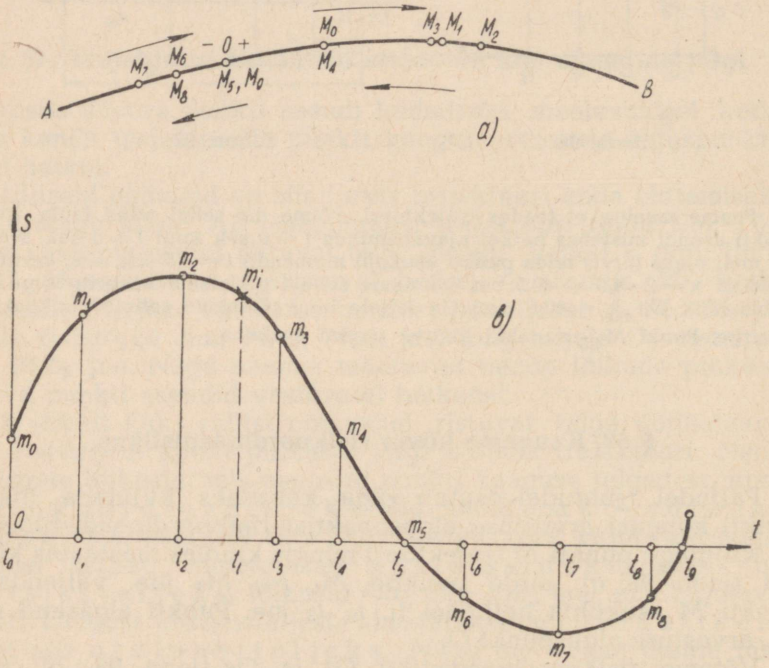
Paljudel juhtudel osutub väga kohaseks kujutada liikuva punkti kaugusi arvestuse alguspunktist ristkoordinaadistikus.

Kujutagu punkti M trajektoori mingis kindlas mastaabis kõver AB (joon. 98, *a*), mille punktid M_1, M_2, M_3 jne. väljendavad punkti M asukohta hetkedel t_1, t_2, t_3 jne. Punkti algasend olgu M_0, arvestuse alguspunkt O.

Võtame ristkoordinaadistiku Ot ja Os (joon. 98, *b*), mille abstsissteljele Ot kanname valitud mastaabis aja, ordinaatteljele Os aga punkti M kaugused arvestuse alguspunktist. Tõmmates punktidest t_1, t_2 jne. ristsirged, kanname viimastele liikuva punkti kaugusi arvestuse alguspunktist O valitud mastaabis väljendavad lõigud, vastavalt nendele hetkedele, lugedes seejuures punktist O paremal asuvad kaugused positiivseteks, vasakul asuvad kaugused aga negatiivseteks. Esimesed kanname ülespoole, teised allapoole. Ühendades kõik sel teel saadud punktid m_0, m_1, m_2 jne. sujuva joonega, saame kõvera, mis võimaldab kiiresti leida liikuva punkti kauguse arvestuse alguspunktist O (joon. 98, *a*) mistahes hetkel piirides $t = t_0 = 0$ kuni $t = t_9$.

[1] Kui punktid mingis osas asetsevad liiga harvalt, mis raskendab kõverjoone tõmbamist, siis võtame lisaks vaheväärtusi (näiteks $t = 2{,}5$ või 3,5 sek jne.).

Sel teel saadud kõverat (joon. 98, *b*) võib järelikult nimetada k a u g u s t e k õ v e r a k s. Viimane näitab ülevaatlikult, kuidas muutub liikuva punkti kaugus arvestuse alguspunktist. Nii näeme, et alghetkel $t = 0$ väljendab punkti kaugust ordinaat Om_0, mis valitud mastaabis on võrdne joonisel 98, *a* kujutatud kaarega OM_0. Edasi see kaugus suureneb kuni hetkeni t_2, mil ta võrdub valitud mastaabis ordinaadiga t_2m_2. Järgnevalt kaugus väheneb, muutudes hetkel t_5 nulliks (joonisel 98, *a* punkt M_5 langeb kokku punktiga *O*, s. o. punkt *M* läbib punkti *O*, liikudes paremalt vasa-



Joon. 98

kule). Pärast seda, jätkates liikumist endises suunas, jõuab punkt negatiivsete kauguste piirkonda, kus ta hetkel t_7 saavutab suurima kauguse t_7m_7, mis võrdub joonisel 98, *a* kujutatud kaarega OM_7. Sel hetkel muudab punkt oma liikumissuunda, hakkab lähenema arvestuse alguspunktile ning hetkel t_9 ühtib punktiga *O*.

Nagu näeme, on positiivsetele kaugustele vastavad ordinaadid kantud abstsissteljest ülespoole, negatiivsetele kaugustele vastavad ordinaadid aga allapoole.

Kauguste kõvera abil võib määrata punkti kauguse arvestuse alguspunktist mistahes hetkel; nii näiteks hetkel t_1 väljendab punkti kaugust ordinaat t_1m_1.

Sama kõver võimaldab ka määrata punkti edasiliikumise ehk, teiste sõnadega, punkti poolt ühe või teise ajavahemiku kestel läbitud teepikkuse. Seepärast võib seda nimetada ka liikumise kõveraks või liikumise diagrammiks, teepikkuse kõveraks; mõnikord nimetatakse seda ka liikumise graafikuks.

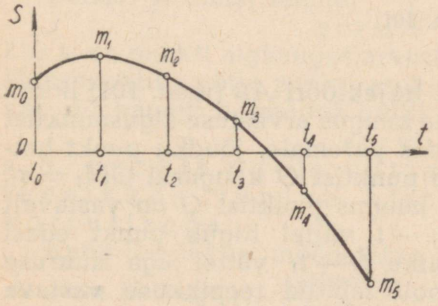
§ 59. Kordamisküsimusi

1. Kas punkt liigub tasapinnaliselt või ruumiliselt, kui ta asetseb a) treipingi padrunil, b) puurpingi padrunil, c) pingi veorihmarattal, d) keermeklupil käsitsi keermetamisel?
2. Kas punkt liigub sirgjooneliselt või kõverjooneliselt, kui ta asetseb a) treipingi otsateral, b) risthöövelpingi liuguril, c) treipingi käigukruvil ning seda haaraval mutril.
3. Milline on liikuva punkti kaugus arvestuse alguspunktist hetkel, kui kauguste kõver lõikab abstsisstelge.

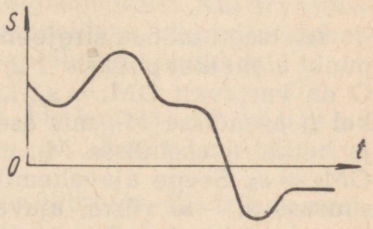
§ 60. Harjutusi

31. Joonestada sirge poolt kujundatav evolvent, kui sirge teeb täispöörde ümber ringjoone läbimõõduga 40 mm.

32. Punkt liigub mööda sirgjoonelist trajektoori nii, et ta kaugus s arvestuse alguspunktist rahuldab võrrandit $s = 20 + 7t - 3t^2$, kus s on antud sentimeetrites, t aga sekundites. Andes ette mastaabi, kanda trajektoorile punkti asukohad hetkedel $t_1 = 1$ sek kuni $t_5 = 5$ sek.



Joon. 99



Joon. 100

33. Liikuva punkti trajektoor määratakse koordinaatidega:

$$x = 10t$$

ja

$$y = 10 + qt,$$

kus t on aeg sekundites. Joonestada trajektoor.

34. Kirjeldada punkti liikumist mööda joonistel 99 ja 100 toodud kauguste kõveraid, näidates: a) kas punkt liigub peatusteta

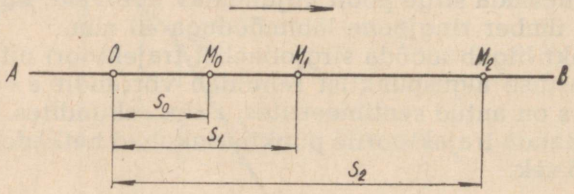
või kas ta ei asetse mingi aja pärast arvestuse alguspunkti suhtes liikumatult, b) millal ta läheneb arvestuse alguspunktile positiivselt poolt, c) sama, kuid negatiivselt poolt, d) kas punkt läbib arvestuse alguspunkti ning millisel hetkel (näidatud abstsissteljel), e) millisel hektel on punkti kaugus arvestuse alguspunktist kõige suurem.

Seitsmes peatükk

PUNKTI SIRGJOONELINE LIIKUMINE

§ 61. Ühtlane liikumine

Kõige lihtsam on punkti sirgjooneline liikumine, mispuhul trajektooriks on sirgjoon. Kuid eespoolöeldu põhjal ei määra trajektoor üksinda täielikult punkti liikumist, vaid on veel tarvis teada, kuidas muutub punkti kaugus arvestuse alguspunktist, s. o. punktist, mis võetakse liikumatuna.



Joon. 101

Asetsegu mööda sirgjoonelist trajektoori AB (joon. 101) liikuv punkt alghetkel punktis M_0, mille kaugus arvestuse alguspunktist O on vastavalt $OM_0 = s_0$. Liikudes paremale, jõudku punkt hetkel t_1 asendisse M_1, mis asetseb punktist O kaugusel $OM_1 = s_1$, ja hetkel t_2 asendisse M_2, mille kaugus punktist O on vastavalt $OM_2 = s_2$. Seega ajavahemiku $t_1 - t_0$ vältel liigub punkt edasi suuruse $s_1 - s_0$ võrra, ajavahemiku $t_2 - t_1$ vältel aga suuruse $s_2 - s_1$ võrra. Jagades punkti poolt läbitud teepikkuse vastava ajavahemikuga, saame:

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} \text{ ja } \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}.$$

Olgu need suhted omavahel võrdsed, s. o.

$$\frac{s_1 - s_0}{t_1 - t_0} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \ldots$$

See tähendab, et punkti poolt läbitud teepikkuste ja vastavate ajavahemike suhe on konstantne suurus. Kui see tingimus on

täidetud, siis nimetatakse liikumist ühtlaseks. Sellise liikumise puhul suureneb punkti poolt läbitud teepikkus niisama palju kordi, kui mitu korda suureneb aeg. Lühidalt võib öelda, et ühtlasel liikumisel on punkti poolt läbitud teepikkus võrdeline ajaga.

Kui $t_2 - t_1 = t_1 - t_0$, siis ka $s_2 - s_1 = s_1 - s_0$, s. o. ühtlasel liikumisel on punkti poolt võrdsetes ajavahemikes läbitud teepikkused omavahel võrdsed.

§ 62. Kiirus ja teepikkus ühtlasel liikumisel

Tähistame üldkujul punkti poolt ühtlasel liikumisel ajavahemiku t vältel läbitud teepikkuse tähega s. Mida suurem on läbitud tee s ja mida väiksem on selle tee läbimiseks kulunud aeg, seda kiirem on antud liikumine, või lühemalt, seda suurem on punkti kiirus. Tähistades punkti kiiruse v, võime järelikult kirjutada:

$$v = \frac{s}{t}, \tag{19}$$

s. o. ühtlase liikumise kiirust mõõdetakse punkti poolt läbitud teepikkuse ja selleks kulunud aja jagatisega.

Kui punkt asetseb alghetkel arvestuse alguspunktist kaugusel s_0, aja t pärast aga punktis, mille kaugus samast alguspunktist on s, siis kiirus avaldub kujul:

$$v = \frac{s - s_0}{t}. \tag{20}$$

Sellest valemist saame:

$$s = s_0 + vt, \tag{21}$$

kus s_0 on punkti algkaugus arvestuse alguspunktist. Kui arvestuse alguspunktiks võtta punkti asukoht vaadeldava liikumise alghetkel, siis kaugus s_0 muutub nulliks ning läbitud teepikkus

$$s = vt, \tag{22}$$

s. o. punkti poolt ühtlasel liikumisel läbitud teepikkus võrdub kiiruse ja kulutatud aja korrutisega.

Kuna teepikkust mõõdetakse pikkusühikutes, siis kiirus avaldatakse ühikuga $\frac{\text{pikkusühik}}{\text{ajaühik}}$.

Kui pikkusühikuks võtta meeter, ajaühikuks aga sekund, siis avaldub kiirus m/sek; kui pikkust mõõta kilomeetrites, aega aga tundides, siis avaldub kiirus km/h jne.

Kui kiirus mingites ühikutes on teada, siis on seda kerge teisendada teistesse ühikutesse, näiteks

$$1\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1000}{60}\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{1000}{60 \cdot 60}\,\frac{\text{m}^1}{\text{sek}} \quad \text{jne.}$$

[1] Nagu algebrast teada, $\frac{a}{b} = ab^{-1}$. Seetõttu kirjutatakse kiiruse dimensioon mõnikord ka kujul msek^{-1}, mmin^{-1} jne.

Kiirus ei ole määratud ainult tema arvulise suurusega, vaid peab olema antud ka suund. Seepärast on kiirus vektoriaalne suurus.[1] Sirgjoonelisel liikumisel on kiirus suunatud mööda trajektoori liikumise suunas.

Näide 30. Treipingil treitakse 1000 mm pikkust võlli. Määrata ühe terakäigu aeg, kus spindel teeb 800 p/min ning ettenihe on 0,2 mm/p.

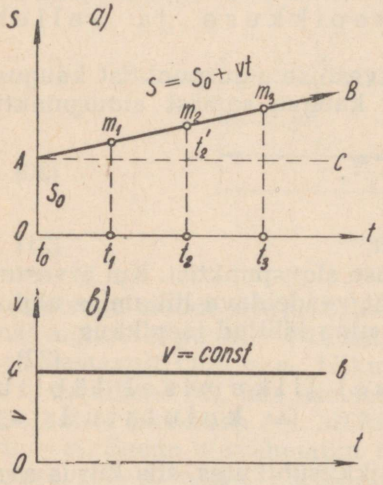
Määrame treitera liikumiskiiruse. 800 pöörde puhul minutis nihkub treitera edasi $0{,}2 \cdot 800 = 160$ mm, s. o. treitera kiirus $v = 160 \frac{\text{mm}}{\text{min}}$. Operatsiooni täitmiseks peab treitera läbima teepikkuse $s = 1000$ mm. Järelikult otsitav aeg

$$t = \frac{s}{v} = \frac{1000}{160} = 6{,}25 \text{ min} = 6 \text{ min } 15 \text{ sek}.$$

§ 63. Teepikkuse ja kiiruse graafik ühtlasel liikumisel

Vaatleme, kuidas väljendub läbitud teepikkuse ja aja vaheline seos ühtlasel liikumisel graafiliselt.

Võtame ristkoordinaadistiku ajateljega Ot ja kauguseteljega Os (joon. 102, *a*). Kanname ordinaatteljele lõigu OA, mis väljendab kindlas mastaabis liikuva punkti kaugust arvestuse alguspunktist alghetkel. Arvutades seejärel valemi (21) abil liikuva punkti kaugused s hetkedel t_1, t_2, t_3 jne. ning ehitades analoogiliselt eespooltoodule kauguste graafiku, veendume, et punkte A, m_1, m_2 jne. läbiv joon on sirge. Siit järeldub, et sirge AB ehitamiseks on küllaldane kanda diagrammile algkaugust s_0 väljendav lõik OA ning teine, mingile hetkele vastav ordinaat. Tõmmates läbi mõlema saadud punkti sirge AB, saame võrrandiga (21) antud sõltuvuse graafilise väljenduse ehk graafiku.



Joon. 102

Saadud graafik võimaldab leida liikuva punkti kauguse arvestuse alguspunktist mistahes hetkel ning määrata punkti poolt läbitud tee; nii näiteks väljendub kaugus hetkel t_2 ordinaadiga t_2m_2, punkti poolt aja $t_2 - t_0$ vältel läbitud tee aga samas mastaabis lõiguga t_2m_2.

Võtame teise ristkoordinaadistiku (joon. 102, *b*), kus teljele Ot kanname aja, ordinaatteljele aga kiiruse meie poolt valitud mastaabis (ordinaat Oa).

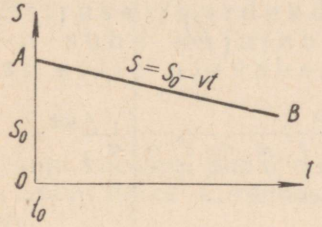
[1] Kiirusevektorit tähistame samuti nagu jõuvektoritki (§ 11).

Kuna kiirus on konstantne, siis, tõmmates punktist a teljega Ot paralleelse sirge ab, saame kiiruse graafiku.

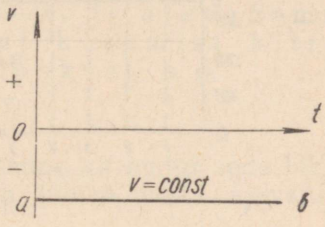
Meie poolt ehitatud graafikud on õiged juhul, kui punkt liigub samas suunas, kuhu kandsime algkauguse s_0 arvestuse alguspunktist ning mida loeme positiivseks. Sel juhul punkti kaugus arvestuse alguspunktist suureneb. Kui liikumine toimub aga vastupidises suunas, siis osutub kiirus negatiivseks ning võrrand (21) avaldub kujul

$$s = s_0 - vt. \tag{23}$$

Vastavalt sellele liikuva punkti kaugus arvestuse alguspunktist aja möödudes väheneb (joon. 103), kiirus aga, olles suuruselt konstantne, on negatiivne, mistõttu sellele vastav lõik tuleb kanda teljest Ot allapoole (joon. 104).



Joon. 103



Joon. 104

Kuna teepikkuse ja aja vaheline sõltuvus väljendub sirgjoonega, siis öeldakse lühidalt, et ühtlane liikumine on lineaarne.

Küsimusi

Kahe ühtlaselt liikuva punkti kohta on joonestatud teepikkuse graafikud, milledel on ühesugused aja ja kauguste mastaabid. Ühe punkti kohta ehitatud sirge AB moodustab horisontaalse sirgega AC (joon. 102, a) suurema nurga, kui teise punkti jaoks ehitatud sirge. Mida võib öelda nende punktide kiiruste kohta?

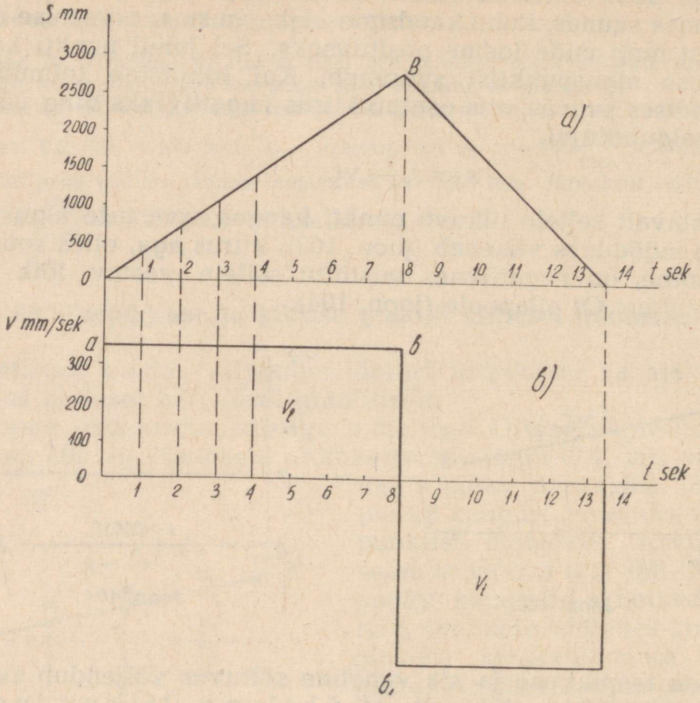
Näide 31. Pikihöövelpingil töödeldakse 2800 mm pikkust detaili, kusjuures lõikekiirus $v_l = 21$ m/min, tühikäigukiirus aga $v_t = 30$ m/min. Joonestada teepikkuse ja kiiruse graafik.

Antud kiiruste puhul on töökäigu kestus $t_l = \frac{2{,}8}{21}$ min $= \frac{2{,}8}{21} \cdot 60$ sek $=$ $= 8$ sek ja tühikäigu kestus $t_t = \frac{2{,}8}{30}$ min $= \frac{2{,}8}{30} \cdot 60$ sek $= 5{,}6$ sek.

Tõmbame teljed Ot, Os ja Ot, Ov (joon. 105). Telgedele Ot kanname aja mastaabis 1 mm = 5 sek. Teljele Os kanname kaugused mastaabis 1 : 100, teljele Ov aga kiirused mastaabis 20 mm/sek = 1 mm.

Kaheksanda sekundi lõpul on detaili meelevaldse punkti kaugus algasendist 2800 mm (punkt B joonisel 105, a). Seejärel hakkab detail liikuma vastupidises suunas ning 13,6 sek lõpuks jõuab algasendisse (punkt O).

Kiirus $v = 21$ m/min $= 350$ mm/sek on konstantne kuni kaheksanda sekundi lõpuni (punkt *b* joonisel 105, *b*), misjärel ta muudab oma märki (töölaud liigub vastupidises suunas).



Joon. 105

§ 64. Ebaühtlane liikumine. Keskmine kiirus ja keskmine kiirendus

Muutuvaks ehk ebaühtlaseks nimetatakse liikumist, mille puhul punkt võrdsetes ajavahemikes läbib ebavõrdsed teepikkused.

Asetsegu punkt hetkel t_1 arvestuse alguspunktist kaugusel s_1, hetkel t_2 aga kaugusel s_2. Järelikult punkti poolt ajavahemikul $t_2 - t_1$ läbitud teepikkus on $s_2 - s_1$. Jagades selle teepikkuse vastava ajavahemikuga, saame mingi kiiruse v_k, mida nimetatakse keskmiseks kiiruseks antud ajavahemikus, s. o.

$$v_k = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}. \qquad (24)$$

Tegelikult ei liikunud punkt selles ajavahemikus ühe ja sama kiirusega. Keskmisel kiirusel on ainult see mõte, et kui punkt liiguks ühtlase kiirusega v_k, läbiks ta ajavahemikus $t_2 - t_1$ sama tee $s_2 - s_1$, mille ta tegelikult läbib muutuva kiirusega liikudes. Seega keskmine kiirus ei anna ettekujutust punkti tegelikust kiirusest mitmesugustel hetkedel.

Kuid tehnikas tuleb paljudel juhtudel kasutada keskmise kiiruse mõistet.

Erinevalt keskmisest kiirusest määratakse muutuva liikumise kiirus *väga väikese ajavahemiku kohta*, s. o. muutuva liikumise tõeline kiirus on *hetkeline*. Kui vaadeldaval hetkel t jätkuks liikumine ühtlaselt, siis hetkkiirus sellel hetkel võrduks edasise ühtlase liikumise kiirusega.

Oeldust järeldub, et mida väiksem võtta ajavahemik valemis (24), seda lähedasem on keskmise kiiruse arvväärtus hetkkiiruse arvväärtusele.

Kuna muutuva liikumise kiirus ei ole konstantne, siis saab ta igal hetkel mingi juurdekasvu, mis võib olla positiivne või negatiivne: esimesel juhul kiirus suureneb, teisel juhul aga väheneb.

Olgu hetkel t_1 kiirus v_1, hetkel t_2 aga v_2.

Kiiruse juurdekasvu $v_2 - v_1$ *ja ajavahemiku* $t_2 - t_1$ *suhe kujutab endast keskmist kiirendust selle ajavahemiku jooksul*, s. o.

$$a_k = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}. \tag{25}$$

Nagu kiirusegi puhul on ka keskmine kiirendus seda lähedasem antud hetke kiirendusele, mida lühem võtta ajavahemik $t_2 - t_1$.

Kiirendus nagu kiiruski on vektoriaalne suurus.

Kui kiirendusel on kiirusega ühesugune märk, siis on ta suunatud liikumise poole; vastupidisel juhul on ta suunatud liikumisele vastu.

Nagu valemist (25) selgub, väljendub kiirus

$$\frac{\text{pikkusühik}}{\text{ajaühik}} : \text{ajaühik} = \frac{\text{pikkusühik}}{(\text{ajaühik})^2}.$$

Kui näiteks väljendada kiirust m/sek, saame kiirenduse dimensiooniks $\text{m/sek}^2 = \text{msek}^{-2}$.

Näide 32. Risthöövelpingi ebaühtlaselt liikuval liuguril kulub 400 mm töökäigu tegemiseks 1,25 sek. Jaganud 1,25 sek kaheksaks võrdseks ajavahemikuks, saadi, et esimesel ajavahemikul liikus lõiketera edasi $s_1 = 22$ mm, teisel ajavahemikul $s_2 - s_1 = 71 - 22 = 49$ mm, kolmandal ajavahemikul $s_3 - s_2 = 134 - 71 = 63$ mm, neljandal ajavahemikul $s_4 - s_3 = 200 - 134 = 66$ mm jne.

Määrame liuguri keskmise kiiruse kogu käigu ulatuses, s. o. 1,25 sek vältel.

$$v_k = \frac{400}{1{,}25} = 320 \text{ mm/sek} = 19{,}2 \text{ m/min}.$$

Edasi saame keskmise kiiruse esimesel ajavahemikul $t_1 - t_0$:

$$v_{k_1} = \frac{22 \cdot 8}{1{,}25} \approx 141 \text{ mm/sek} = 8{,}45 \text{ m/min}.$$

Keskmine kiirus teisel ajavahemikul $t_2 - t_1$:

$$v_{k_2} = \frac{49 \cdot 8}{1{,}25} \approx 314 \text{ mm/sek} = 18{,}82 \text{ m/min}.$$

Keskmine kiirus kolmandal ajavahemikul t_3—t_2:

$$v_{k_3} = \frac{63 \cdot 8}{1{,}25} = 403 \text{ mm/sek} = 24{,}19 \text{ m/min.}$$

Keskmine kiirus neljandal ajavahemikul t_4—t_3:

$$v_{k_4} = \frac{66 \cdot 8}{1{,}25} \approx 422 \text{ mm/sek} = 25{,}34 \text{ m/min.}$$

Nagu näeme, erinevad keskmised kiirused üksikutel võrdsetel ajavahemikel tunduvalt nii üksteisest kui ka liuguri kogu käigu keskmisest kiirusest.

§ 65. Ühtlaselt muutuv liikumine. Kiirus ja kiirendus

Muutuva liikumise lihtsaimaks juhuks on ühtlaselt muutuv liikumine, mispuhul kiirus võrdsetes ajavahemikes muutub ühe ja sama suuruse võrra. Teiste sõnadega, muutuvat liikumist, mille puhul kiirendus on konstantne, nimetatakse ühtlaselt muutuvaks liikumiseks.

Vaatleme, kuidas määratakse ühtlaselt muutuva liikumise kiirus antud hetkel.

Olgu liikuva punkti kiirus alghetkel v_o. Kui kiirendus on a, siis kiiruse juurdekasv ajavahemikul t on at. Järelikult selle ajavahemiku lõpul on kiirus

$$v_t = v_o + at. \tag{26}$$

Kui punkti algkiirus $v_o = 0$, siis lõppkiirus

$$v_t = at. \tag{27}$$

Seejuures tuleb meeles pidada, et kiirendus võib olla nii positiivne kui ka negatiivne: esimesel juhul ühtib kiirenduse suund liikumise suunaga ning liikumist nimetatakse sel juhul ühtlaselt kiirenevaks, teisel juhul aga on kiirenduse suund liikumise suunale vastupidine, millele vastavalt liikumist nimetatakse ühtlaselt aeglustuvaks. Viimasel juhul tuleb kiirendus valemisse (26) asetada miinusmärgiga.

Küsimusi

1. Kuidas muutub liikuva punkti kiirus ühtlaselt muutuval liikumisel, kui kiirendus on positiivne?
2. Sama, kui kiirendus on negatiivne?

Näide 33. Rong, mille kiirus on 45 km/h, sõitis teatud hetkel teelangusele, kus ta kiirus kasvas 1,5 min vältel väärtuseni $v_1 = 54$ km/h. Määrata kiirendus.

Kasutame valemit (26), milles algkiirus $v_o = 45$ km/h $= 12{,}5$ m/sek, ajavahemik $t = 1{,}5$ min $= 90$ sek ja sellele hetkele vastav kiirus $v_t = v_{90} =$ $= 54$ km/h $= 15$ m/sek. Tehes need asendused, saame: $15 = 12{,}5 + a \cdot 90$, millest $a = \frac{15 - 12{,}5}{90} = 0{,}028$ m/sek^2.

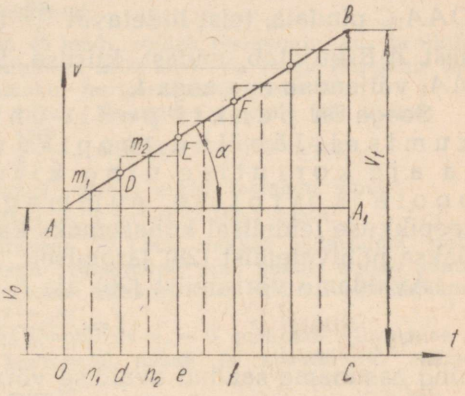
§ 66. Läbitud teepikkus ühtlaselt muutuval liikumisel

Teades, kuidas leida ühtlaselt muutuva kiirusega liikuva punkti kiirust mistahes hetkel, asume vaatlema, kuidas leida punkti poolt läbitud teepikkust.

Kujutame eespoolsaadud võrrandi (26), mis annab kiiruse, kiirenduse ja aja vahelise seose, graafiliselt.

Võtame ristkoordinaadistiku Ot ja Ov (joon. 106), kus abstsissteljele kanname aja, ordinaatteljele aga valitud hetkele vastava kiiruse. Nagu varem selgus, saame ühtlasel liikumisel kiiruse graafikuks ajateljega Ot paralleelse sirge, sest kiirus on konstantne. Ühtlaselt muutuva liikumise korral asub see sirge aga kaldu, moodustades horisontaalteljega mingi nurga.

Alghetkel $t = 0$ on punkti kiirus v_0, mistõttu kanname Ov-teljele seda kiirust valitud mastaabis väljendava lõigu OA. Ühtlaselt muutuval liikumisel on kiiruse juurdekasv võrdeline ajaga. Seepärast, arvutanud punkti kiiruse mingil hetkel, joonestame vastavast punktist abstsissteljele ristsirge ning kanname valitud mastaabis sellele saadud kiiruse. Tõmmates läbi punkti A ning leitud punkti sirgjoone, saamegi kiiruse graafiku.



Joon. 106

Punkti poolt aja t vältel läbitava teepikkuse s määramiseks toimime järgmiselt. Jagame ajavahemiku t mitmeks võrdseks osaks ($Od = de = ef = \ldots$). Igas saadud osas asendame ühtlaselt muutuva liikumise ühtlase liikumisega, mis toimub keskmise kiirusega. Viimane on võrdne selle ajavahemiku alg- ja lõppkiiruse poolsummaga. Sel teel saame, et ajavahemikus Od toimuva ühtlase liikumise kiirust väljendab ordinaat $n_1m_1 = \frac{OA + dD}{2}$, ajavahemiku de puhul lõik $n_2m_2 = \frac{dD + eE}{2}$ jne.

Tõmbame läbi punkti m_1 teljega Ot paralleelse sirge. Tekkivas ristkülikus väljendab alus ajavahemikku, mille vältel toimub liikumine, kõrgus n_1m_1 aga kiirust. Järelikult ristküliku pindala, mõõdetuna vastavas mastaabis, annab ühtlaselt liikuva punkti poolt ajavahemikus Od läbitud teepikkuse. Kuid see pindala on võrdne trapetsi $OADd$ pindalaga, sest lõik n_1m_1 on trapetsi keskjoiguks. Järelikult punkti poolt ajavahemikus Od läbitud teepik-

kust väljendab trapetsi *OADd* pindala. Täpselt samuti tõestame, et punkti poolt ajavahemikus *de* läbitud teepikkust väljendab trapetsi *dDEe* pindala jne. Järelikult punkti poolt ühtlaselt muutuval liikumisel ajavahemiku *OC* vältel läbitud teepikkust kujutab vastavas mastaabis trapetsi *OABC* pindala, mida piiravad alg- ja lõppkiirust väljendavad ordinaadid, kiiruste kõver (ühtlaselt muutuval liikumisel — sirge *AB*) ja ajatelg.

Üeldu põhjal võime kirjutada, et teepikkus

$$s = \frac{v_o - v_t}{2} t;$$

asendades $v_t = v_o + at$, saame:

$$s = v_o t + \frac{at^2}{2}. \tag{28}$$

Jooniselt 106 näeme, et liidetavat $v_o t$ väljendab ristküliku OAA_1C pindala, teist liidetavat $\frac{at^2}{2}$ aga kolmnurga ABA_1 pindala, sest A_1B kujutab endast kiiruse juurdekasvu at, teine kaatet AA_1 väljendab aga aega t.

Seega on punkti poolt ühtlaselt muutuval liikumisel läbitud teepikkus võrdne algkiiruse ja aja korrutise ning kiirenduse ja aja ruudu poole korrutise summaga. Mõnikord osutub läbitud teepikkuse leidmisel kohasemaks kasutada teist valemit, mis saadakse põhivalemist (28) järgmiselt.

Avaldame võrrandist (26) aja t:

$$t = \frac{v_t - v_o}{a}$$

ning asendame saadud avaldise võrrandisse (28):

$$s = v_o \frac{v_t - v_o}{a} + \frac{a}{2} \cdot \frac{(v_t - v_o)^2}{a^2},$$

mis pärast lihtsustamist annab:

$$s = \frac{v_t^2 - v_o^2}{2a}, \tag{29}$$

s. o. punkti poolt läbitud teepikkus on võrdne alg- ja lõppkiiruste ruutude poole vahe ning kiirenduse jagatisega.

Nagu varemöeldust järgneb, tuleb kiirenduse väärtus asetada tuletatud võrrandisse vastava märgiga ja nimelt: märgiga + (pluss) ühtlaselt kiireneval liikumisel ja märgiga — (miinus) — ühtlaselt aeglustuval liikumisel.

Kui aja arvestamise alghetkel on punkti liikumiskiirus null (teiste sõnadega — punkti algkiirus on null), siis tuleb ülaltoodud valemites (28) ja (29) võtta $v_o = 0$, millele vastavalt saame:

$$s = \frac{at^2}{2} \tag{30}$$

ja

$$s = \frac{v_t^2}{2a}. \tag{31}$$

Kui punkt, mis liigub kindla ajavahemiku kestel ühtlaselt aeglustuvalt, jääb t sekundi lõpuks seisma, siis tuleb valemites (26) ja (29) võtta $v_t = 0$.

Igal võrrandil peavad mõlemad osad olema võetud ühise dimensiooniga. Kontrollime seda näiteks võrrandi (28) juures. Vasak pool on antud meetrites, parema poole esimene liige $\frac{m}{sek} \cdot sek = m$, teine liige $\frac{m}{sek^2} \cdot sek^2 = m$.

Nagu näeme, on võrrandi kõigil liikmeil üks ja sama dimensioon.

Küsimusi

1. Kuidas on suunatud sirge AB (joon. 106) ühtlaselt aeglustuval liikumisel?
2. Kontrollige valemi (29) dimensiooni.

Näide 34. Rong, mille kiirus on 45 km/h, sõidab teelangule, kus ta ühtlaselt kiirenevalt liikudes katab 2 minutiga 2500 m. Leida rongi kiirendus teelangul sõites ja tema kiirus üleminekul horisontaalsele teeosale.

Algkiirus $v_0 = 45$ km/h $= 12{,}5$ m/sek. Kasutades valemit (28) saame:

$$2500 = 12{,}5 \cdot 120 + \frac{a \cdot 120^2}{2}, \text{ millest } a = 0{,}139 \text{ m/sek}^2.$$

Seega rongi kiirendus $a = 0{,}139$ m/sek^2. Rongi kiirus teelangu lõpul

$$v_{120} = 12{,}5 + 0{,}139 \cdot 120 = 29{,}18 \text{ m/sek} = 105{,}1 \text{ km/h}.$$

Näide 35. Rong, mis liikus kiirusega 72 km/h, hakkas pidurduma, mille tagajärjel ta jätkas liikumist ühtlaselt aeglustuvalt ning peatus kolme minuti pärast. Määrata rongi poolt pidurdumise algusest kuni täieliku seismajäämiseni läbitud teepikkus.

Kasutades võrrandit (26), milles lõppkiirus $v_t = 0$, määrame kiirenduse a. Asendades võrrandisse $v_0 = 72$ km/h $= 20$ m/sek ja $t = 180$ sek, saame: $0 = 20 + a \cdot 180$, millest $a = -\frac{1}{9}$ m/sek^2.

Nüüd võime võrrandiga (28) määrata läbitud teepikkuse:

$$s = 20 \cdot 180 - \frac{180^2}{9 \cdot 2} = 3600 - 1800 = 1800 \text{ m} = 1 \text{ km } 800 \text{ m}.$$

Näide 36. Rong, mis liikus kiirusega 54 km/h, hakkas pidurduma, mille tulemusena ta ühtlaselt aeglustuvalt liikudes läbis enne täielikku peatumist 900 m. Määrata pidurdumise aeg.

Määrame võrrandist (29) kiirenduse:

$$a = \frac{v_t^2 - v_0^2}{2s}.$$

Asendades $v_t = 0$, $v_0 = 54$ km/h $= 15$ m/sek, $s = 900$ m, saame, et $a = -0{,}125$ m/sek^2. Kasutades võrrandit (26), milles $v_t = 0$, $v_0 = 15$ m/sek ja $a = -0{,}125$ m/sek^2, saame $t = 120$ sek $= 2$ min.

§ 67. Vertikaalne liikumine raskusjõu mõjul

Ühtlaselt muutuva sirgjoonelise liikumise näiteks on keha liikumine[1] vertikaalsihis raskusjõu mõjul. Kui keha on visatud üles

[1] Rääkides keha liikumisest, mõtleme me selle all keha raskuskeskme liikumist, s. o. vaatleme keha masspunktina.

mingisuguse algkiirusega, siis liikumine on aeglustuv, s. o. keha kiirus väheneb. Tõusnud mingile kõrgusele, keha hetkeks peatub ning hakkab seejärel ühtlaselt suureneva kiirusega langema.

Raskusjõu poolt põhjustatud kiirendus on konstantne ning võrdub 9,81 m/sek^2. Raskuskiirendust tähistatakse tähega g.

Et kasutada eespooltuletatud ühtlaselt muutuva liikumise võrrandeid, tuleb nendes kiirendus a asendada raskuskiirendusega g, võttes selle ühtlasi vastava märgiga.

Vertikaalselt algkiirusega v_o ülesvisatud keha liigub ühtlaselt aeglustuvalt, sest raskuskiirendus on suunalt liikumisele vastupidine. Sel juhul võtame kiirenduse g märgiga miinus. Võrrand (26) avaldub järgmisel kujul:

$$v_t = v_o - gt. \tag{32}$$

Kõrgus, milleni keha oma algasendist tõuseb, tähistatakse tähega h ning see määratakse võrrandiga (28):

$$h = v_o t - \frac{gt^2}{2}. \tag{33}$$

Võrrand (29) aga avaldub kujul:

$$h = \frac{v_t^2 - v_o^2}{-2g} \quad \text{või} \quad h = \frac{v_o^2 - v_t^2}{2g}. \tag{34}$$

Hetkel, mil keha saavutab maksimaalse kõrguse, on kiirus null, s. o. $v_t = 0$, millele vastavalt võrrand (32) annab:

$$v_o = gt, \text{ millest } t = \frac{v_o}{g}, \tag{35}$$

s. o. aeg, mis kehal kulub tõusmiseks kõrgeimasse asendisse, võrdub algkiiruse ja raskuskiirenduse jagatisega.

Võrrand (34) avaldub sel juhul kujul:

$$h = \frac{v_o^2}{2g},$$

millest

$$v_o^2 = 2gh \text{ või } v_o = \sqrt{2gh}, \tag{36}$$

s. o. algkiirus on võrdne ruutjuurega raskuskiirenduse ja tõusukõrguse kahekordsest korrutisest.

Keha vabal langemisel ühtib raskuskiirenduse suund liikumise suunaga, mistõttu keha liigub ühtlaselt kiirenevalt. Seepärast tuleb ka kiirendus g võtta märgiga pluss.

Kui langeva keha algkiirus on null, siis $v_o = 0$ ning võrrandid (27), (30) ja (31) avalduvad kujul:

$$v_t = gt, \tag{37}$$

$$h = \frac{gt^2}{2}, \tag{38}$$

$$h = \frac{v_t^2}{2g}. \tag{39}$$

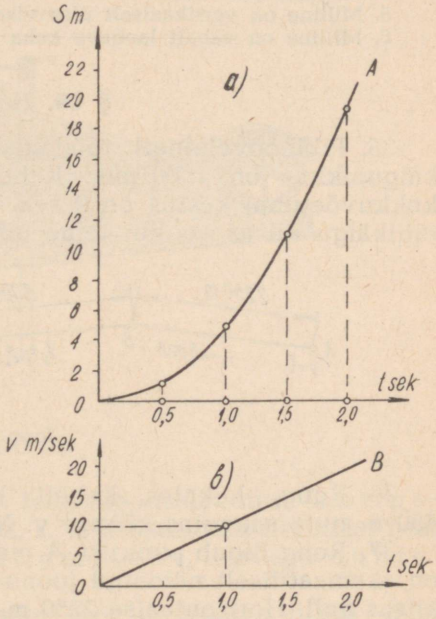
Võrrandist (39) saame:

$$v_t^2 = 2gh \text{ või } v_t = \sqrt{2gh}, \tag{40}$$

s. o. langemise lõppkiirus võrdub ruutjuurega raskuskiirenduse ja langemiskõrguse kahekordsest korrutisest.

Võrrandite (36) ja (40) võrdlemisel näeme, et $v_t = v_o$, s. o. keha kiirus langemise lõpphetkel võrdub suuruselt (suunalt on aga vastupidine) kiirusega, mida keha omas sellel kõrgusel tõusmise alghetkel.

Joonisel 107, *a* on näidatud vabalt langeva keha liikumisgraafik, kus algkiirus $v_o = 0$. Teljele *Ot* on kantud võrdsed lõigud, milledest igaüks väljendab 0,5 sek, teljele *Os* aga kaugused meetrites. Kasutades võrrandit (38) ning asendades selles t järjekorras väärtustega 0,5 sek, 1 sek, 1,5 sek jne. ja $g = 9{,}81$ m/sek^2, saame langeva keha poolt vastavates ajavahemikes läbitud teepikkuse, arvestades algasendist, ja nimelt: 0,5 sek jooksul läbitud teepikkus on 1,226 m, 1 sek — 4,905 m, 1,5 sek — 11,036 m, 2 sek — 19,62 m jne. Ehitades nende hetkede jaoks ordinaadid, saame rea punkte, mis ühendame sujuva kõveraga *OA*. Viimane kujutab endast liikumise kõverat. Kui on tarvis määrata, millise teepikkuse läbib langev punkt näiteks 1,75 sek jooksul, arvates langemise alghetkest, siis, tõmmates sellele hetkele vastavast abstsissi punktist ristsirge, saamegi läbitud teepikkuse.



Joon. 107

Joonisel 107, *b* on antud kiiruse graafik. Nagu nähtub võrrandist (37), muutub kiirus võrdeliselt ajaga, s. o. kiiruse ja aja vahelist sõltuvust väljendab sirgjoon. Seepärast arvutame võrrandiga (37) kiiruse mingil hetkel (näiteks 1. sekundi lõpul oleks kiirus $v_1 = 9{,}81 \cdot 1 = 9{,}81$ m/sek) ning kanname selle vastavas mastaa-

bis diagrammile. Kuna alghetkel on kiirus null, siis, tõmmates läbi koordinaatide alguspunkti ning leitud punkti sirgjoone OB, saamegi kiiruste graafiku.

Näide 37. Milliselt kõrguselt langes keha maapinnale, kui langemine kestis 10 sek, ning milline oli keha lõppkiirus?

Võrrandi (38) järgi saame: $h = \frac{9{,}81 \cdot 10^2}{2} = 490{,}5$ m.

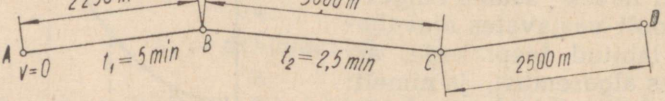
Võrrandi (37) järgi saame: $v_t = 9{,}81 \cdot 10 = 98{,}1$ m/sek.

§ 68. Kordamisküsimusi

1. Mille poolest erineb muutuv liikumine ühtlasest liikumisest?
2. Millise seaduse järgi muutub liikuva punkti kaugus algasendist ühtlasel liikumisel?
3. Millise seaduse järgi muutub ühtlaselt kiirenevalt liikuva punkti kiirus, kui algkiirus on null?
4. Millistel juhtudel tuleb kiirendus lugeda positiivseks, negatiivseks?
5. Milline on vertikaalselt üles visatud keha liikumine?
6. Milline on vabalt langeva keha liikumine?

§ 69. Harjutusi

35. Pikihöövelpingil töödeldakse detaili, kusjuures töölaua käigupikkus on 1500 mm. Kahekordse käigu (töö- ja tühikäik kokkuvõetuna) kestus on 9 sek. Määrata töökäigu kiirus v_t ja tühikäigu kiirus v_{t_1}, kui teine on esimesest kaks korda suurem.



Joon. 108

36. Rong, hakates kohalt liikuma, läbis minuti jooksul 450 m ning saavutas kiiruse v. Määrata kiirendus a ja kiirus v.

37. Rong liigub punktist A punkti D mööda teed, mille profiil on skemaatiliselt näidatud joonisel 108. Punktis A oli rongi algkiirus null. Horisontaalse 2250 m pikkuse teeosa läbis ta 5 minutiga, 3000 m pikkuse languse aga 2,5 minutiga. Sõites punktis C horisontaalsele teeosale, hakkas rong pidurduma, mille tulemusena ta peatus punktis D. Pidurdumisel läbis rong teeosa $CD = 2500$ m. Määrata kiirendus teeosal CD, rongi liikumisaeg T punktist A punkti D ning ta keskmine kiirus kogu teepikkuse ulatuses.

38. Kui kõrgele tõuseb kivi ning palju tal kulub lendamiseks aega (üles ja alla), kui see visata vertikaalselt üles algkiirusega $v_0 = 39{,}24$ m/sek?

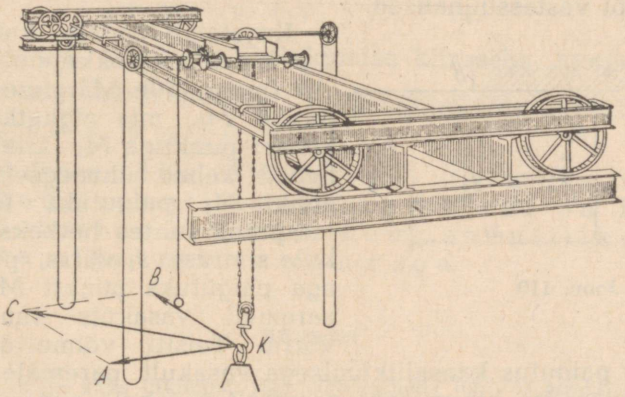
39. Kujutada graafiliselt algkiirusega $v_0 = 19{,}62$ m/sek vertikaalselt ülesvisatud keha liikumine ning kiirus.

PUNKTI LIHTSAMATE LIIKUMISTE LIITMINE

§ 70. Liitliikumine. Absoluutne ja suhteline liikumine

Oletame, et tsehhis teisaldatakse raskusi sildkraana abil, mis skemaatiliselt on näidatud joonisel 109. Kraana liigub piki tsehhi noolega *A* näidatud suunas.

Liikugu samal ajal kraana vanker koos selle küljes rippuva konksuga piki kraana tala, s. o. noole *B* suunas. Nagu näeme, koosneb kraana vankri küljes rippuva koormuse liikumine kahest liikumisest, mis toimuvad kahes teineteisega ristuvas sihis: kraana tala liikumisest Maa suhtes ja vankri liikumisest tala suhtes. Seega koormuse liikumine on liitliikumine, mille laad sõltub



Joon. 109

tala ja vankri liikumistest, s. o. teda moodustavatest komponentliikumistest. Esimest, s. o. kraana tala liikumist Maa suhtes, nimetatakse kaasaliikumiseks, teist aga suhteliseks liikumiseks.

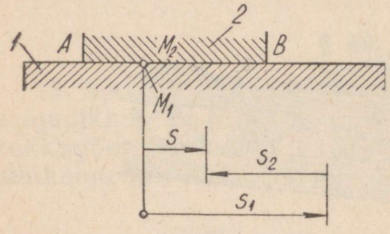
Kui mingi kindla ajavahemiku jooksul kraana liikus edasi suuruse *KA* võrra, kraana konks aga paigutus sama ajavahemiku vältel kraana suhtes ümber pikkuse *KB* võrra, siis võib öelda, et kaasaliikumine on *KA*, suhteline liikumine aga *KB*.

Kuna kõik kehad alati liiguvad, siis on mehaanikas vaadeldavate kehade igasugune liikumine suhteline, mistõttu me lepime igal üksikul juhul kokku lugeda see või teine keha liikumatuks. Kõige sagedamini vaatleme kehade liikumist Maa suhtes ning nimetame sellist liikumist absoluutseks. Seega koormuse liikumine kraana suhtes on antud juhul suhteline liikumine, kraana enda kaasaliikumine ja koormuse liikumine mööda tsehhi aga absoluutsed liikumised.

Toodud näites on absoluutne liikumine tingitud suhtelisest ja kaasaliikumisest. Seda tüüpi liikumistega tuleb kõige sagedamini kokku puutuda masinates. Kuid mehaanikas tuleb tihti vaadelda omavahel mitteseotud kehade liikumisi. Kujutame näiteks, et jaamast väljus rong. Loomulikult võib samale teele teatud aja möödudes lähetada samas suunas veel teise rongi, arvestusega, et mõlema liikuva rongi vahekaugus mistahes hetkel ei oleks väiksem lubatavast. Sellise ülesande lahendamisel huvitab meid eelkõige mõlema rongi suhteline liikumiskiirus ja neid lahutav vahemaa.

§ 71. Samal sirgel toimuvate ühtlaste liikumiste liitmine

Kõige lihtsam liitliikumine esineb juhul, kui liikumise mõlemad komponendid asuvad samal sirgjoonel, olles siis samasuunalised või vastassuunalised.



Joon. 110

Kujutame endale kaht keha *1* ja *2*, millede kokkupuutepind on *AB* (joon. 110). Märgime kehal *2* punkti M_2, mis alghetkel ühtib keha *1* punktiga M_1. Liikugu mõlemad kehad üheaegselt nii, et punkt M_1 paigutuks liikumatu tasapinna suhtes hetkeks t vasakule suuruse s_1 võrra, punkt M_2 aga paigutuks punkti M_1 suhtes paremalt vasakule suuruse s_2 võrra. Teisiti võime öelda, et punkt M_2 paigutus kaasaliikumisega vasakult paremale suuruse s võrra, suhtelise liikumisega paremalt vasakule aga suuruse s_2 võrra. Kui suur on punkti M_2 absoluutne nihe?

Esitatud küsimusele vastamiseks arutleme järgmiselt. Oletame, et punkti M_2 asend punkti M_1 suhtes ei muutu. Sel juhul oleks ta absoluutne liikumine samuti s_1 ning see oleks suunatud vasakult paremale. Kuna aga tegelikult punkt M_2 paigutus punkti M_1 suhtes paremalt vasakule suuruse s_2 võrra, siis ta ümberpaigutumine liikumatu tasapinna suhtes, s. o. tema absoluutne nihe vasakult paremale

$$s = s_1 - s_2.$$

On pikemata selge, et kui mõlemad liikumised oleksid suunatud vasakult paremale, siis punkti M_2 absoluutne nihe oleks samuti suunatud vasakult paremale ning võrduks:

$$s = s_1 + s_2.$$

Lugedes vasakult paremale suunatud nihked positiivseteks, vastassuunalised nihked aga negatiivseteks, võime juhul, kui mõlemad liikumised on suunatud paremalt vasakule, kirjutada:

$$-s = -s_1 + (-s_2) = -(s_1 + s_2).$$

Arutledes samuti mistahes arvu komponentliikumiste puhul, tuleme järeldusele, et punkti absoluutne nihe sirgjoonelisel liitliikumisel on võrdne komponentnihete algebralise summaga.

Selle me võime väljendada võrrandiga

$$s = s_1 + s_2 = s_3 + \ldots + s_n, \tag{41}$$

kus iga komponentnihe tuleb võtta vastava märgiga.

Toimugu kõik komponentnihked ühtlaselt mingi ajavahemiku t jooksul. Tähistame komponentliikumiste kiirused vastavalt tähtedega $v_1, v_2, v_3 \ldots v_n$; siis $s_1 = v_1 t$, $s_2 = v_2 t$, $s_3 = v_3 t \ldots$ $s_n = v_n t$. Asetades need väärtused valemisse (41), saame:

$$s = v_1 t + v_2 t + v_3 t + \ldots + v_n t = (v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n)\, t,$$

millest

$$\frac{s}{t} = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n.$$

Kuid $\frac{s}{t} = v$, s. o. võrdub liitliikumise kiirusega, kusjuures liitliikumine on samuti ühtlane.

Niisiis $v = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$.

Järelikult mööda üht sirget toimuvate ühtlaste komponentliikumiste korral on liitliikumise kiirus võrdne komponentliikumiste kiiruste algebralise summaga.

Küsimusi

1. Punktil on kaks liikumist. Kas võib esineda juht, et punkti absoluutne liikumine on null? Millistel tingimustel?

2. Mingil hetkel keha 2 punkt M_2 (joon. 110) langes kokku keha 1 punktiga M_1, misjärel punkt M_1 paigutus vasakult paremale suuruse s_1 võrra, punkt M_2 aga paigutus sama ajavahemiku vältel punkti M_1 suhtes paremalt vasakule suuruse s_2 võrra. Millega võrdub punkti M_2 absoluutne liikumine ja milline on selle suund igal alljärgneval neljal juhul: a) $s_1 > s_2$, b) $s_1 < s_2$, c) $s_1 = s_2$, d) $s_1 = 0$?

Näide 38. Jõe ääres asuva kahe linna A ja B vahekaugus on 22,5 km; linn B asetseb allavoolu. Linnast A väljudes jõuab aurik linna B 1,5 tunniga, linnast B väljudes linna A aga 2,5 tunniga. Lugedes liikumise ühtlaseks, määrata jõe voolamiskiirus v_1 ja auriku liikumiskiirus vee suhtes v_2.

Auriku liikumiskiirus vee suhtes v_2 on üks ja sama, vaatamata sellele, kas vesi voolab või on liikumatu. Järelikult allavoolu liikudes sõidab aurik absoluutse kiirusega (kallaste suhtes) $v_1 + v_2$. Vastuvoolu sõites on auriku absoluutne kiirus $v_2 - v_1$. Tulemusena saame süsteemi kahest võrrandist:

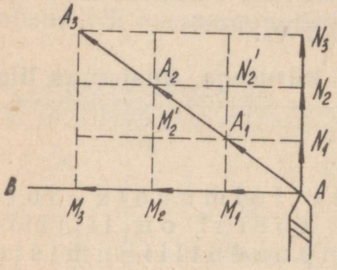
$$(v_1 + v_2) \cdot 1{,}5 = 22{,}5 \text{ ja } (v_2 - v_1) \cdot 2{,}5 = 22{,}5.$$

Lahendades selle võrrandite süsteemi, saame, et $v_1 = 3$ km/h ja $v_2 = 12$ km/h.

§ 72. Kahe omavahel nurga moodustava ühtlase sirgjoonelise liikumise liitmine

Vaatleme nüüd kahe omavahel nurga moodustava ühtlase sirgjoonelise liikumise liitmist.

Oletame, et me automaatse pikiettenihkemehhanismi abil anname treipingi supordile teljesuunalise nihkumise AB (joon. 111). Samaaegselt sellega paigutame ühtlaselt edasi treitera, pöörates selleks ristiettenihke käepidet. Tulemusena treitera iga punkt võtab osa kahest liikumisest: supordi kelgu liikumisest piki juhtpindu (kaasaliikumine) ja supordi ristkelgu suhtelisest liikumisest ristsuunas. Vaatleme treitera tipu A liikumist. Paigutugu see mingi ajavahemiku jooksul koos supordi kelguga asendisse M_1, suhtelisel liikumisel koos supordi ristkelguga aga asendisse N_1. Oletame, et mõlemad liikumised toimuvad järgemööda: algul punkt A paigutub piki juhtpindu edasi suuruse AM_1 võrra, seejärel aga ristsuunas suuruse $M_1A_1 = AN_1$ võrra. Treitera tipu nende kahe liikumise tulemusena osutuks see olevat punktis A_1. Kuna mõlemad need liikumised toimuvad ühe ja sama ajavahemiku vältel, siis võtab treitera tipp nende kahe üheaegselt toimuva liikumise tulemusena sama asendi A_1. Seega treitera tipp paigutus punkti A_1, mis on parallelogrammi (antud juhul ristküliku) $AM_1A_1N_1$ tipuks.



Joon. 111

Täpselt samuti leiame, et järgmise ajavahemiku jooksul paigutub tera tipp punkti A_2, s. o. parallelogrammi $A_1M'_2A_2N'_2$ tippu jne.

Tõestame, et treitera tipu liikumine punktist A punkti A_2 toimub sirgjooneliselt, teiste sõnadega, et diagonaalid AA_1 ja A_1A_2 asetsevad ühel sirgel. Toimugu ümberpaigutused AM_1, AN_1 ja M_1M_2, N_1N_2 võrdsete ajavahemike vältel; sel juhul $M_1M_2 = AM_1$ ja $N_1N_2 = A_1N'_2$. Kuna aga $A_1M'_2 = M_1M_2$ ja $M'_2A_2 = N_1N_2$, siis kolmnurgad $A_1M'_2A_2$ ja AM_1A_1 on omavahel võrdsed, järelikult on võrdsed ka nurgad $\angle A_2A_1M'_2 = \angle A_1AM_1$, s. t. lõigud A_1A_2 ja AA_1 asetsevad ühel sirgel. Samade kolmnurkade võrdsusest järeldub veel, et need lõigud on omavahel võrdsed, see aga tähendab, et punkt A oma liitliikumisel läbib võrdsetes ajavahemikes võrdsed teepikkused, s. o. liitliikumine on samuti nagu komponentliikumisedki ühtlane.

Jagades ümberpaigutused ühele ja samale ajavahemikule, mille vältel nad toimuvad, saame iga ümberpaigutuse kiiruse. Järelikult kui AM_1 kujutab kaasaliikumise kiirust, AN_1 aga suhtelise liikumise kiirust, siis diagonaal AA_1 annab absoluutse liikumise kiiruse nii suuruselt kui suunalt.

Kahest ühtlasest sirgjoonelisest liikumisest osavõtva punkti absoluutne liikumine on samuti ühtlane ja sirgjooneline. Punkti absoluutne liikumine on nii suunalt kui ka suuruselt võrdne punkti komponentliikumistele ehitatud parallelogrammi diagonaaliga.

Absoluutne kiirus on võrdne komponentkiirustele ehitatud parallelogrammi diagonaaliga.

On võimalik tõestada, et ühtlaste sirgjooneliste komponentliikumiste korral, millede algkiirus on null, on liitliikumine samuti ühtlane ja sirgjooneline.

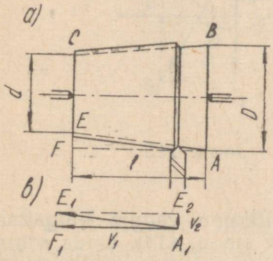
Näide 39. Kuidas peavad omavahel suhtuma treitera pikiettenihke kiirus (v_1) ja ristettenihke kiirus (v_2), et treida tüvikoonus $ABCE$ (joon. 112, *a*) mõõdetega: $D = 80$ mm, $d = 60$ mm ja $l = 100$ mm?

Treitera pikiettenihke kiiruse ja ristettenihke kiiruse summa peab andma liitliikumise kiiruse, mis on suunatud piki koonuse moodustajat, s. o. piki komponentkiirustele A_1F_1 ja A_1E_2 ehitatud parallelogrammi $A_1F_1E_1E_2$ diagonaali (joon. 112, *b*).

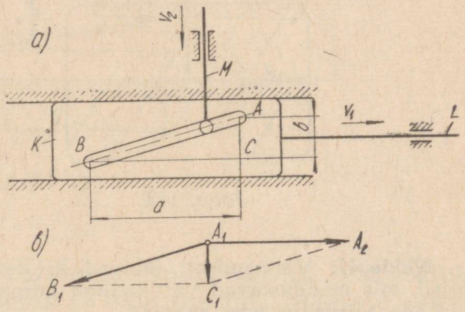
Kolmnurkade $A_1F_1E_1$ ja AFE sarnasusest järeldub, et $\frac{A_1F_1}{AF} = \frac{E_1F_1}{EF}$, mis pärast arvväärtuste $AF = 100$ mm ja $EF = \frac{D-d}{2} = \frac{80-60}{2} = 10$ mm sisseviimist annab:

$$\frac{v_1}{100} = \frac{v_2}{10}, \text{ millest } \frac{v_1}{v_2} = \frac{100}{10} = 10.$$

Pikiettenihke kiirus peab olema 10 korda suurem ristettenihke kiirusest.



Joon. 112



Joon. 113

Näide 40. Liugur K liigub tõmbitsa L mõjul mööda liikumatuid juhtpindu edasi-tagasi kiirusega $v_1 = 60$ mm/sek (joon. 113, *a*). Liuguri väljalõikes AB asetseb liikumatute juhtpindade suhtes libiseva varda M lõppu kinnitatud rull. Määrata varda M kiirus v_2, kui väljalõige AB moodustab liuguri liikumissuunaga nurga ABC, mis on määratud mõõdetega $BC = a = 120$ mm, ja $AC = b = 30$ mm.

Varda M absoluutset liikumist võime vaadelda kui liitliikumist, mis koosneb liuguri kaasaliikumisest (vaadeldaval hetkel suunatud vasakult paremale) ja rulli suhtelisest liikumisest väljalõikes. Seepärast ehitame nende komponentliikumiste kiirustele kiiruste parallelogrammi (joon. 113, *b*). Kanname vabalt võetud punktist A_1 valitud mastaabis liuguri kiirust v_1 väljendava vektori A_1A_2 ning varda M kiirusega paralleelse sirge kuni lõikumiseni väljalõike AB teljesihilise sirgega A_2C_1 punktis C_1. Saadud punktide põhjal ehitame lõpuni parallelogrammi $A_1A_2C_1B_1$. Nagu näeme, on komponent A_1B_1, mis annab rulli tsentri liikumiskiiruse liuguri suhtes, suunatud paremalt vasakule, nagu see peabki olema: kui liugur liigub vasakult paremale, liigub rull selle suhtes vastupidi. Mõõtes parallelogrammi diagonaali A_1C_1 ja korrutades selle pikkuse kiiruste valitud mastaabiga, saame otsitud kiiruse v_2.

Selle suuruse võib leida ka arvutamise teel. Pidades silmas, et kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on sarnased, võime kirjutada:

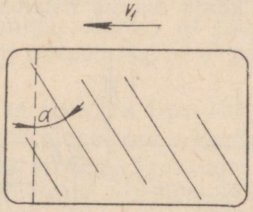
$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC} \quad \text{või} \quad \frac{v_2}{b} = \frac{v_1}{a},$$

millest

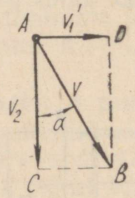
$$v_2 = v_1\frac{b}{a} = 60 \cdot \frac{30}{120} = 15 \text{ mm/sek.}$$

§ 73. Kiiruse lahutamine komponentkiirusteks

Mehaanikas tuleb tihti kokku puutuda tehtega, mis on vastupidine kiiruste liitmisele ja nimelt: kiiruse lahutamisega kaheks komponentkiiruseks. Üldkujul on see ülesanne nagu jõugi lahutamine komponentjõududeks määramatu, kuid igal üksikul juhul see lahendatakse vastavalt täiendavatele andmetele (komponentkiiruste suund, ühe komponentkiiruse suund ja suurus jne.), nagu see selgub järgnevast näitest.



Joon. 114



Joon. 115

Näide 41. Vihmapiisad jätavad kiirusega v_1 liikuva vaguni külgaknale jäljed, mis moodustavad vertikaaliga nurga $\alpha = 30°$ (joon. 114). Leida vihmapiiskade kiirus v_2 maa suhtes.

Akna suhtes liiguvad piisad vertikaalselt kiirusega v_2, horisontaalselt aga kiirusega v_1, mis on suunatud vaguni liikumisele vastupidi. Nüüd võime ehitada parallelogrammi $ABCD$ (joon. 115); ehitanud kiirust v'_1 väljendava vektori $\overline{AD}$, tõmbame vertikaali suhtes $\alpha = 30°$ nurga all sirge, punktist D aga vertikaalse sirge; mõlemad need sirged lõikuvad punktis B. Järgnevalt lõpetame parallelogrammi ehitamise, kusjuures selle külg AC annab meile otsitava kiiruse v_2 samas mastaabis, milles me ehitasime külje AD. Arvutades saame:

$$v_2 = v_1 \operatorname{ctg} \alpha.$$

§ 74. Kordamisküsimusi

1. Treipingi suport liigub mingi kiirusega paremalt vasakule; supordi ülemine osa, mille juhtpinnad on paralleelsed treipingi teljega, paigutub suuruselt samasuguse kiirusega vasakult paremale. Milline on treitera absoluutne kiirus?

2. Vastata eelmisele küsimusele juhul, kui supordi ülemine osa asetseb treipingi telje suhtes kaldu.

3. Metroo eskalaatori trepp liigub üles mingi kiirusega v_1; eskalaatoril olev inimene liigub mööda seda alla kiirusega v_2. Milline on inimese absoluutne kiirus igal järgneval kolmel juhul.

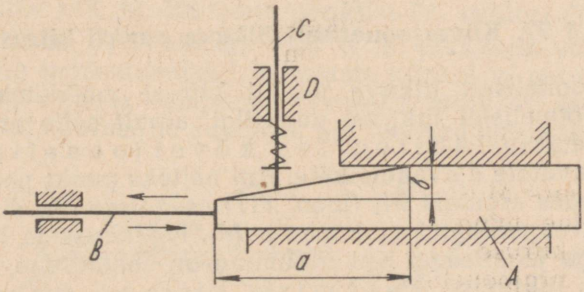
a) $v_2 > v_1$; b) $v_2 < v_1$; c) $v_2 = v_1$.

§ 75. Harjutusi

40. Mööda jõge, mille voolukiirus on 4 km/h, ujub aurik vastuvoolu kiirusega 10 km/h. Milline on auriku absoluutne kiirus ja milline see oleks, kui veevool puuduks?

41. Aurik kattis allavoolu sõites vahemaa 30 km kahe tunniga. Teades, et liikumatu vee korral arendab aurik kiirust 12 km/h, määrata, millise vahemaa kataks aurik sama aja jooksul vastuvoolu sõites?

42. Mööda tasapinnalist liikumatut juhtpinda libiseb liugur A, millele annab edasi-tagasi liikumise tõmbits B (joon. 116).



Joon. 116

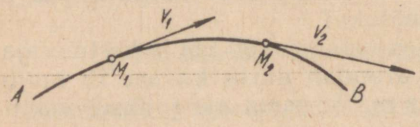
Vastu liuguri kaldpinda surutakse vedru mõjul liikumatute juhtpindade vahel libisev varras C oma otsaga. Määrata varda liikumiskiirus v, kui liuguri liikumiskiirus on 600 mm/min, $a = 300$ mm ja $b = 50$ mm. Määrata samuti varda otsa liikumiskiirus v_1 mööda liuguri kaldpinda.

PUNKTI KÕVERJOONELINE LIIKUMINE

§ 76. Punkti ühtlane ja muutuv kõverjooneline liikumine

Eespool me tutvusime punkti sirgjoonelise liikumisega. Vaatleme nüüd liikumise keerukamat juhtu, mil punkti trajektooriks on tasapinnaline kõverjoon.

Olgu punkti trajektooriks kõverjoon (joon. 117). Olgu punkt mingil hetkel t asendis M_1, hetkel t_2 aga asendis M_2. Vastavalt sellele läbis punkt ajavahemikus $t_1 - t_2$ tee, mida väljendab kõverjoone lõik M_1M_2. Kui liikumine toimub nii, et mistahes võrdsetes ning kuitahes väikestes ajavahemikes punkti poolt läbitud teepikkused on samuti võrdsed, siis on liikumine ühtlane. Vastupidisel juhul oleks see aga ebaühtlane, s. o. muutuv. Vaadeldav liikumine erineb sirgjoonelisest peamiselt selle poolest, et punkti poolt läbitud teepikkusi ei mõõdeta sirgjoonte, vaid kõverjoonte lõikudega.



Joon. 117

§ 77. Kõverjooneliselt liikuva punkti kiirus

Kõverjooneliselt liikuva punkti kiirust mõõdetakse samuti nagu sirgjooneliselt liikuval punktilgi, ainult selle erinevusega, et siin jagatakse läbitud tee kõverjoonelised lõigud vastavatele ajavahemikele. Kui näiteks punkt paigutus ühtlaselt liikudes asendist M_1 (joon. 117) asendisse M_2, siis selle liikumise kiirus määratakse kaare M_1M_2 pikkuse ja liikumiseks kulunud aja jagatisena. Kui liikumine on ebaühtlane, siis annab see jagatis liikumise keskmise kiiruse, mis on tõelisele kiirusele (s. o. hetkelisele kiirusele) seda lähedasem, mida väiksem on kaare M_1M_2 pikkus.

Vaatleme nüüd, kuidas määratakse punkti kõverjoonelisel liikumisel kiiruse suund.

Punkti sirgjoonelisel liikumisel jääb punkti ümberpaigutumise suund konstantseks, kuna aga kõverjoonelise trajektoori puhul liikumise suund pidevalt muutub, vastavalt trajektoori kõverusele. Siit tuleme järeldusele, et muutub ka kiiruse suund.

Kuidas siis määrata kiiruse suunda?

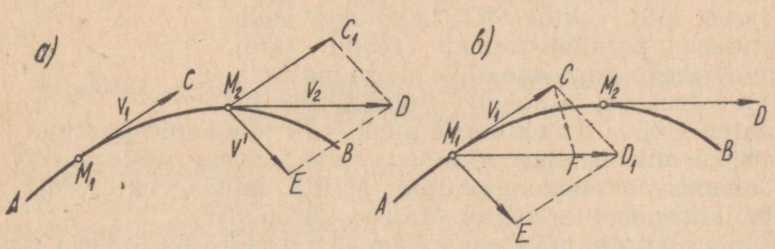
Oletame, et hetkel, mil liikuva punkti asend on M_1 (joon. 117), lakkas mõjumast põhjus, mis kallutas punkti kõrvale sirgjoonelisest liikumisest. On pikemata selge, et punkt liiguks sel juhul edasi sirgjooneliselt ja nimelt trajektoorile punktis M_1 tõmmatud

puutujat mööda. Siit järeldub, et ka kiirus osutub suunatuks mööda seda puutujat liikumise poole ning seda väljendab kindlas mastaabis vektor v_1. Täpselt samuti väljendab punkti kiirust asendis M_2 vektor v_2, mis on suunatud mööda trajektoorile selles punktis tõmmatud puutujat. Niisiis kõverjooneliselt liikuva punkti kiirus on suunatud mööda trajektoori puutujat, mis on tõmmatud vaadeldavale hetkele vastavast punktist, liikumisega samale poole.

Öeldut võib illustreerida järgmise näitega. Oletame, et me keerutame horisontaaltasapinnas niiti selle külge kinnitatud väikese raskusega. Mingi pöörlemiskiiruse juures niit katkeb, mispuhul raskuse kõverjooneline liikumine muutub sirgjooneliseks. Viimane on suunatud mööda trajektoori puutujat ning see toimub kiirusega, mis oli raskusel vahetult enne niidi katkemist.

§ 78. Kõverjooneliselt liikuva punkti kiirendus

Liikugu punkt mööda kõverjoonelist trajektoori nii, et teatud hetkel oleks ta asendis M_1, mingi väikese ajavahemiku Δt[1] möödudes aga asendis M_2. Kujutagu punkti kiirust asendis M_1 vektor $\overline{M_1C}$, asendis M_2 aga vektor $\overline{M_2D}$. Määrame nüüd, milline on kiiruse muutus vaadeldavas ajavahemikus Δt. Selleks toimime järgmiselt (joon. 118, *b*). Ehitanud punktist M_1 vektori $\overline{M_1D_1}$, mis on võrdne kiiruse v_2 vektoriga $\overline{M_2D}$ (s. o. pikkuselt võrdne, paralleelne ning samasuunaline), lahutame kiiruse v_2 parallelogrammi reegli järgi kaheks komponentkiiruseks, milledest üks ja nimelt v_1 on antud suuruse ja suunaga. Sel teel saadud parallelogrammi



Joon. 118

M_1CD_1E külg M_1E kujutab endast mingit kiirust v', mis väljendab liikuva punkti kiiruse muutumist ajavahemikus Δt, mille vältel punkt paigutus asendist M_1 asendisse M_2. Jagades seejärel kiiruse v' ajavahemikuga Δt, saame keskmise kiirenduse a_k, s. o.

[1] Märki Δ (kreeka keele täht „delta") kasutatakse harilikult väikeste suuruste tähistamiseks.

$$a_k = \frac{v'}{\Delta t}. \qquad (43)$$

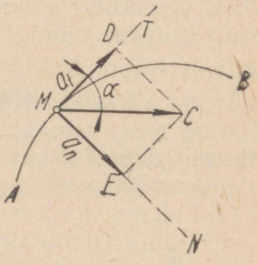
Mida väiksem on võetud ajavahemik Δt, seda lähedasem on a_k väärtus punkti kiirenduse väärtusele hetkel, mis vastab punkti asendile M_1 trajektooril.

Nagu näeme, pole kiirendus, erinevalt kiirusest, kõverjoonelisel liikumisel suunatud mööda puutujat, vaid moodustab sellega mingi nurga, mis asetseb trajektoori kujutava kõvera nõgususe pool (trajektoori sees).

§ 79. Tangentsiaal- ja tsentripetaalkiirendus

Nagu öeldust näeme, iseloomustab kiirendus nii kiiruse suuruse kui ka suuna muutumist. Seepärast nimetatakse seda ka täiskiirenduseks. Nagu me edasises näeme, tuleb kõverjoonelist liikumist käsitlevate ülesannete lahendamisel arvestada eraldi kiiruse suurust muutva kiirendusega ja kiiruse suunda muutva kiirendusega, mis on tingitud trajektoori kõverusest.

Nende kiirenduste mõisteid selgitab joonis 118, *b*. Kanname kiiruse vektorile M_1D_1 lõigu M_1F, mis on suuruselt võrdne vektoriga $v_1 = M_1C$. Nagu näeme, väljendab lõik FD_1 punkti kiiruse suuruse muutumist, lõik CF aga kiiruse suuna muutumist.



Joon. 119

Väljendagu punkti kiirendust a asendis M (joon. 119) vektor MC. Lahutame selle kiirenduse parallelogrammi reegli järgi samuti kaheks komponendiks, nagu me seda tegime kiirusega, ja nimelt — üheks, mis on suunatud mööda trajektoorile punktis M tõmmatud puutujat MT, ja teiseks, mis on suunatud mööda selle puutuja ristsirget MN.

Tulemusena saame ristküliku $MDCE$, milles vektor MD väljendab kiirendust a_t, vektor ME aga kiirendust a_n.

Kiirendus, mis on suunatud mööda sama puutujat mis kiiruski, väljendab kiiruse suuruse muutumist ning seda nimetatakse puute- ehk tangentsiaalkiirenduseks a_t, kiirendust aga, mis on suunatud mööda puutuja ristsirget ning mis iseloomustab kiiruse suuna muutumist, nimetatakse normaal- ehk tsentripetaalkiirenduseks a[1].

[1] See nimetus tuleneb sellest, et puutujale puutepunktis tõmmatud ristsirget nimetatakse normaaliks.

Siit järgneb, et kui tangentsiaalkiirendus on kiirusega samasuunaline, siis punkt liigub kiirenevalt, kui see on kiirusele vastassuunaline, siis on punkti liikumine aeglustuv, kui see on aga null, siis on liikumine ühtlane.

Seega võib punkti liikumise kõik võimalikud juhud kujutada järgmise skeemina:

Kiirendus	Kiirus muutub	Liikumine on
1. Mõlemad kiirendused a_t ja a_n	suuruselt ja suunalt	muutuv kõverjooneline
2. Üks kiirendus a_n	suunalt	ühtlane kõverjooneline
3. Üks kiirendus a_t	suuruselt	muutuv sirgjooneline

Kui puuduvad mõlemad kiirendused, siis on liikumine sirgjooneline ja ühtlane.

Täiskiirenduse ja selle komponentide vahel kehtib lihtne seos. Täisnurksest kolmnurgast MCD saame, et $CD = MD \operatorname{tg} \alpha$, kus α on nurk, mille täiskiirendus moodustab puutujaga; järelikult

$$a_n = a_t \operatorname{tg} \alpha. \tag{44}$$

Lähtudes sellest, et kaatet võrdub hüpotenuusi ja selle vastasnurga siinuse või lähisnurga koosinuse korrutisega, saame:

$$a_n = a \sin \alpha; \tag{45}$$

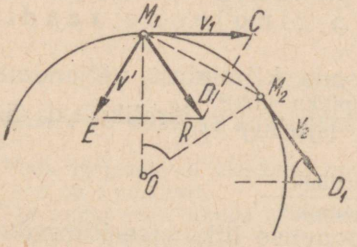
$$a_t = a \cos \alpha. \tag{46}$$

Lõpuks Pythagorase teoreemi järgi:

$$a = \sqrt{a^2_t + a^2_n}. \tag{47}$$

§ 80. Tsentripetaalkiirendus punkti ühtlasel liikumisel mööda ringjoont

Vaatleme lähemalt kõverjoonelise liikumise üht erijuhtu ja nimelt — punkti ühtlast liikumist mööda trajektoori, mis kujutab endast ringjoont raadiusega R (joon. 120). Sel juhul esineb ainult tsentripetaalkiirendus a_n, kuna tangentsiaalkiirendus $a_t = 0$ (2. juht ülaltoodud skeemis).



Joon. 120

Toimides samuti nagu eelmises paragrahvis, saame me kiiruse v_2 komponentkiiruse v', mis väljendab kiiruse muutumist ajavahemikus Δt, mille vältel punkt läbis kaare

M_1M_2. Kuna aga punkt liigub ühtlaselt, siis on vektorid M_1C ja M_2D_1 suuruselt võrdsed, mistõttu erinevalt eespoolkäsitletud üldjuhust vektor M_1E väljendab kiiruse suuna muutumist.

Nagu näeme, on kolmnurk M_1DE antud tingimustel võrdhaarne (sest $M_1D = M_1C$). Samuti on võrdhaarne ka kolmnurk M_1OM_2, sest OM_1 ja OM_2 on ühe ja sama ringjoone raadiused. Lisaks öeldule on need kolmnurgad sarnased, sest $\angle M_1OM_2 = \angle M_1DE$ kui omavahel ristuvate külgedega nurgad (järelikult on ka ühe kolmnurga ülejäänud nurgad võrdsed teise kolmnurga vastavate nurkadega).

Sellest järeldub, et

$$\frac{M_1E}{M_1M_2} = \frac{M_1D}{OM_2},$$

millest

$$M_1E = \frac{M_1D}{OM_2} \cdot M_1M_2. \qquad \text{(a)}$$

Punkti kiirusi v_1 ja v_2 asendites M_1 ja M_2 väljendavad vastavalt omavahel suuruselt võrdsed vektorid $\overline{M_1C}$ ja $\overline{M_2D_1}$. Tähistades selle suuruse tähega v, saame $M_2D_1 = v_2 = v$. Pidades edasi silmas, et $OM_2 = R$, asetame selle väärtuse võrrandisse (a), mis annab

$$M_1E = \frac{v}{R} M_1M_2.$$

Jagades saadud võrrandi mõlemad pooled ajavahemikuga Δt, mille vältel punkt liikus asendist M_1 asendisse M_2, saame:

$$\frac{M_1E}{\Delta t} = \frac{v}{R} \cdot \frac{M_1M_2}{\Delta t}. \qquad \text{(b)}$$

Selle võrrandi vasak pool kujutab endast keskmist kiirendust vaadeldaval ajavahemikul. Vastavalt ajavahemiku vähenemisele läheneb keskmine kiirendus tsentripetaalkiirendusele a_n; sel tingimusel võib kõõl M_1M_2 saada võrdseks kaarega, millele ta toetub, jagatis $\frac{M_1M_2}{\Delta t}$ kujutab endast aga kiirust v. Tehes need asendused võrrandis (b), saame lõplikult:

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \qquad (48)$$

Seega saime järgmise tähtsa sõltuvuse: mööda ringjoont liikuva punkti tsentripetaalkiirendus on võrdne kiiruse ruudu ja ringjoone raadiuse jagatisega.

Vaatleme, millistes ühikutes seda kiirendust väljendatakse. Lugeja väljendub $\left(\frac{\text{pikkusühik}}{\text{ajaühik}}\right)^2 = \frac{(\text{pikkusühik})^2}{(\text{ajaühik})^2}$, järelikult a_n dimensioon on

$$\frac{(\text{pikkusühik})^2}{(\text{ajaühik})^2} : (\text{pikkusühik}) = \frac{\text{pikkusühik}}{(\text{ajaühik})^2},$$

s. o. sama dimensioon, mis sirgjoonelise liikumise kiirenduselgi (§ 64).

See kiirendus on suunatud selle ringjoone tsentri poole, mida mööda punkt liigub (seepärast seda nimetataksegi tsentripetaalkiirenduseks).

§ 81. Täiskiirendus ringliikumisel

Vaatlesime juhtu, mil punkt liikus mööda ringjoont ühtlaselt. Kui liikumine toimub ebaühtlaselt, siis lisaks tsentripetaalkiirendusele, mille suurus määratakse valemiga (48), esineb ka tangentsiaalkiirendus, mis on suunatud mööda puutujat ühele või teisele poole. Kui selle kiirenduse suurus on konstantne, siis on liikumine ühtlaselt muutuv. Mingi ajavahemiku vältel punkti poolt läbitud teepikkus määratakse valemiga, mille eespoolt tuletasime ühtlaselt muutuva sirgjoonelise liikumise kohta (§ 65) ning seda mõõdetakse kaare pikkusega.

Ühtlasel ringjoonelisel liikumisel on täiskiirendus sama mis tsentripetaalkiirenduski. Ebaühtlasel ringliikumisel määratakse täiskiirendus valemiga (47) kui ruutjuur tangentsiaal- ja tsentripetaalkiirenduste ruutude summast, täiskiirenduse ja puutuja vaheline nurk aga ühega võrranditest (45) või (46).

Näide 42. Punkt liigub mööda ringjoont, mille raadius $R = 1$ m, konstantse tangentsiaalkiirendusega 0,2 m/sek^2. Alghetkel kiirus $v_0 = 0$. Leida punkti kiirus ja kiirendus 3 sekundi pärast, arvates liikumise alghetkest, ja teepikkus, mille punkt selles ajavahemikus läbib.

Määrame valemiga (27) kiiruse v_3 kolmanda sekundi lõpul:

$$v_3 = a_t t = 0{,}2 \cdot 3 = 0{,}6 \text{ m/sek}.$$

Normaalkiirendus valemi (48) põhjal

$$a_n = \frac{v_3^2}{R} = \frac{0{,}36}{1} = 0{,}36 \text{ m/sek}^2.$$

Täiskiirenduse kolmanda sekundi lõpul määrame valemiga (47):

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}04 + 0{,}129} = 0{,}412 \text{ m/sek}^2.$$

Täiskiirenduse ja puutuja vahelise nurga tangens valemi (44) põhjal on:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{0{,}36}{0{,}2} = 1{,}8,$$

millest

$$\alpha = 61^\circ.$$

Punkti poolt esimese kolme sekundi vältel läbitud teepikkuse määrame valemiga (30):

$$s = \frac{a_t t^2}{2} = \frac{0{,}2 \cdot 9}{2} = 0{,}9 \text{ m}.$$

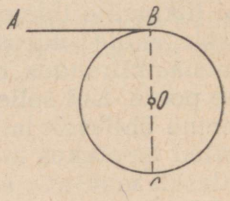
§ 82. Kordamisküsimusi

1. Kuidas on suunatud kõverjooneliselt liikuva punkti kiirus trajektoori suhtes?
2. Mida väljendavad üksikult tangentsiaal- ja tsentripetaalkiirendus ning kuidas nad on suunatud?
3. Kas punkt võib liikuda kõverjooneliselt, kui puudub tangentsiaalkiirendus, tsentripetaalkiirendus?
4. Milliseid ühtlaselt kiirenevaid liikumisi te tunnete?

§ 83. Harjutusi

43. Punkt, mille algkiirus on 0, liigub ühtlaselt kiirendatult mööda ringjoont, mille raadius on 2 m, ning läbib 5 sekundiga tee 3 m. Leida kiirus, tangentsiaalkiirendus, tsentripetaalkiirendus ja täiskiirendus viienda sekundi lõpul.

44. Punkt, mille algkiirus asendist *A* väljudes on null (joon. 121), liigub ühtlaselt kiirenevalt ning jõuab 3 sekundi pärast asendisse *B*, mis asetseb punktist *A* kaugusel 0,45 m, misjärel jätkab ühtlaselt liikumist mööda ringjoont raadiusega 0,5 m. Määrata punkti kiirus *v* ja kiirendus diametraalses vastasasendis *C*. Sirge *AB* on ringjoonele puutuja.



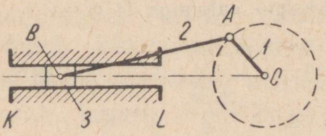
Joon. 121

Kümnes peatükk

KÕVA KEHA LIHTSAMAD LIIKUMISED

§ 84. Kõva keha ja punkti liikumiste erinevused

Eelmistes peatükkides vaatlesime ainult masspunkti liikumist. Asume nüüd käsitlema kõva keha, s. o. masspunktide muutumatu süsteemi lihtsamaid liikumisi. Keha kui terviku liikumisel liiguvad selle punktid erinevalt, s. o. mööda erinevaid trajektoore erinevate kiiruste ja kiirendustega.



Joon. 122

Näitena vaatleme väntmehhanismi (joon. 122). Võllile *O* kinnitatud v ä n t *1* pöörleb koos võlliga. Vända külge on šarniirselt kinnitatud k e p s *2*, mille teine ots on samuti šarniirselt sõrme *B* abil ühendatud mööda liikumatuid juhtpindu libiseva liuguriga *3*. Seega vända pöörlemisel kujundavad selle kõik punktid erinevate raadiustega ringjooni, millele vastavalt on erinevad ka nende punktide kiirused. Liuguri kõik punktid liiguvad mööda ühesuguseid sirgjoonelisi trajektoore ühe ja sama kiirusega. Kepsu liikumine on aga erinevalt vända ja liuguri liikumisest omapärasem: selle parempoolne ots (šarniiri *A* tsenter) liigub mööda ringjoont, vasakpoolne ots (šarniiri *B* tsenter) aga mööda sirgjoont, kuna kõik ülejäänud punktid mööda mitmesuguseid kõveraid.

Selles peatükis me tutvume kõva keha lihtsamate liikumistega seotud ülesannete lahendamisega. Seejuures oletame, et keha liikumine on t a s a p i n n a l i n e, s. o. k e h a l i i k u m i s e l

tema kõikide punktide poolt kujundatud trajektoorid asetsevad tasapindades, mis on paralleelsed ühe ja sama muutumatu tasapinnaga. Selliselt just liiguvadki äsjavaadeldud mehhanismi kõik elemendid: nende elementide kõik punktid liiguvad kogu aeg mööda trajektoore, millede tasapinnad on paralleelsed ühe ja sama vertikaaltasapinnaga.

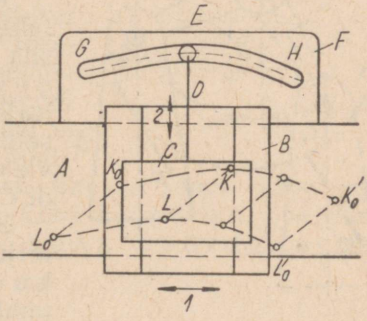
§ 85. Keha kulgev liikumine

Asume kõva keha liikumist vaatlema kõige lihtsamast juhust.

Kujutleme endale rongi, mis sõidab mööda sirgjoonelisi rööpaid. Rongi kõik punktid (välja arvatud teljed ratastega ja teised elemendid, mis liiguvad suhteliselt veduri ja vagunitega) liiguvad mööda ühesuguseid trajektoore. Need trajektoorid on paralleelsed rööbastega ning järelikult ka omavahel. Täpselt samuti liiguvad tasapinnaliste juhtpindadega väntmehhanismi liuguri *3* kõik punktid (joon. 122), paralleelkruustangide liikuva moka kõik punktid jne.

Vaatleme keerulisemat näidet.

Mööda tasapinnalist horisontaalset liikumatut juhtpinda *A* (joon. 123) võib paigutuda vasakule ja paremale (nooltega näidatud suundades) plaat *B*. Nimetatud plaadil on ülaosas juhtpinnad, milledel võib alumise plaadiga *A* ristsihis (noole *2* sihis) libiseda plaat *C*, mis on jäigalt kinnitatud rulliga *E* lõppeva vardaga *D*. Rull *E* paigutub plaadiga *A* üht tervikut moodustava plaadi *F* kõverjoonelisse juhtsoonde *GH*.



Joon. 123

Olgu plaadile *B* antud pikiliikumine mööda juhtpinda *A*. On pikemata selge, et plaat *C* peab sel juhul kõverjoonelise juhtsoone *GH* mõjul hakkama suhteliselt liikuma mööda plaati *B*, kusjuures see liikumine liitub plaadi *B* enda liikumisega sihis *1*. Nende kahe liikumise tulemusena on nii plaadi *D* kui ka varda *C* mistahes punktide trajektoorid täiesti ühesugused ning paralleelsed kõveraga *GH*. Näiteks mingi punkt *K* liigub mööda trajektoori $K_0K'_0$, mingi teine punkt *L* mööda trajektoori $L_0L'_0$ jne. Nagu näeme, on plaadi *C* liikumine selline, et kõik temaga seotud punktid kujundavad täiesti ühesugused ning paralleelsed trajektoorid[1].

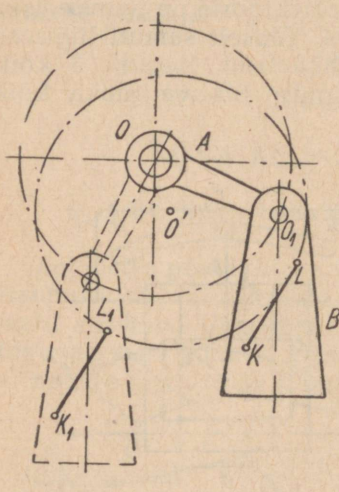
Kui võtame plaadil mingi kaht punkti *K* ja *L* ühendava lõigu

[1] Seda tüüpi liikumist kasutatakse üsna laialdaselt, näiteks treipinkidel töötlemiseks šablooni järgi, kõverjoonelise profiiliga või kooniliste pindadega pöördkehade treimisel.

KL, siis plaadi *C* liikumisel see lõik, nagu iga teinegi selle plaadi mistahes kaht punkti ühendav lõik, jääb iseendaga paralleelseks. Sama võime nähtavasti öelda ka eespoolvaadeldud liikuva rongi, treipingi supordi kelgu, paralleelkruustangide jne. mistahes kaht punkti ühendava lõigu kohta.

Keha liikumist, mille juures keha mistahes kaht punkti ühendav sirglõik paigutub ümber paralleelselt iseendaga, nimetatakse kulgevaks liikumiseks.

Keha kulgeval liikumisel kujundavad selle kõik punktid ühesugused trajektoorid, kusjuures punktide kiirused ning kiirendused on igal hetkel suuruselt võrdsed ning suunalt paralleelsed.



Joon. 124

Selle põhjal me tuleme järgmisele tähtsale järeldusele: kõva keha kulgeva liikumisega seotud ülesannete lahendamisel on kasutatavad eespool liikuva punkti kohta tuletatud seosed.

Kui kulgevalt liikuva keha mistahes punkti trajektoor on sirgjoon, siis liikumine tervikuna on kulgev sirgjooneline. Kui aga trajektoorid on kõverjoonelised, siis selline liikumine on kulgev kõverjooneline. Taoline on plaadi *C* liikumine vaadeldud näites.

Kulgeva kõverjoonelise liikumise erijuhuks on kulgev ringliikumine, mille puhul keha kõik punktid kujundavad ühe ja sama raadiusega ringjooni. Taolise liikumise näide on toodud joonisel 124. Võllile *O* on kinnitatud vänt *A*, mille lõppu on šarniirselt riputatud plaat *B* (plaadi raskuskese asetseb šarniiri O_1 teljest madalamal). Viimane võtab oma raskuse mõjul vertikaalse asendi. Seega vända pöörlemisel ümber telje *O* liigub plaat nii, et selle mistahes kaht punkti ühendav lõik *KL* paigutub ümber paralleelselt iseendaga, punktid *K* ja *L* aga kujundavad ühesuguse raadiusega ringjooned. Järelikult plaadi *B* liikumine on kulgev ringliikumine.

Küsimusi

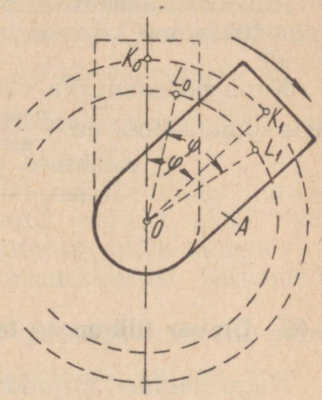
1. Milline liikumine on risthöövelpingi liuguril, pikihöövelpingi töölaual?
2. Milline on § 72 (joon. 111) vaadeldud treitera liikumine?

§ 86. Keha pöörlemine ümber liikumatu telje. Pöördenurk

Asume vaatlema keha pöörlevat liikumist, kui pöörlemistelje asend ei muutu.

Kujutleme endale keha A, mis pöörleb ümber joonise tasapinnaga ristuva telje O. Olgu mingil hetkel keha punkt K asendis K_0. Keha pöörlemisel kujundab see punkt ringjoone raadiusega OK_0, mis on võrdne sellest punktist pöörlemisteljele tõmmatud ristsirge pikkusega. Seda raadiust nimetatakse *pöörlemisraadiuseks*.

Ehitame läbi punkti K ja pöörlemistelje tasapinna. Viimane pöörleb koos kehaga. Olgu alghetkel selle tasapinna asend OK_0, mingi ajavahemiku vältel pöördugu see aga asendisse OK_1, mis algasendiga moodustab joonnurgaga $\varphi = K_0OK_1$ mõõdetava kahetahulise nurga. Nurga φ moodustavad pöörlemisraadiuse kaks asendit — algasend ja pööratud asend. Täpselt analoogiliselt pöördub mingit teist meelevaldset punkti L ja pöörlemistelge läbiv tasapind sama nurga φ võrra, mida mõõdetakse pöörlemisraadiuse OL algasendi OL_0 ja pööratud asendi OL_1 vahelise nurgaga. Seega on keha kõigi punktide pöörlemisraadiuse pöördenurk ühe ja sama ajavahemiku korral üks ja sama. See on kogu keha kui terviku pöördumise mõõduks ning seda nimetatakse *keha pöördenurgaks antud ajavahemikul*.



Joon. 125

§ 87. Nurkkiirus ja nurkkiirendus

Kui keha võrdsetes ajavahemikes pöördub võrdsete nurkade võrra, siis on keha pöörlemine ühtlane, vastupidisel juhul aga ebaühtlane (muutuv).

Olgu keha pöördenurk ajavahemiku t_1 lõpuks φ_1, ajavahemiku t_2 lõpuks aga φ_2, arvestades samast algasendist. Vastavalt sellele on ajavahemikule $t_2 - t_1$ vastav pöördenurk $\varphi_2 - \varphi_1$. Võttes teise ja esimese suuruse suhte, saame *keskmise nurkkiiruse* selles ajavahemikus:

$$\omega_k = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1}. \qquad (49)$$

Siin võib korrata punkti muutuva liikumise keskmise kiiruse kohta öeldut (§ 64). Mida väiksem võtta ajavahemik $t_2 - t_1$, seda lähedasema saame keskmise nurkkiiruse väärtuse tema väärtu-

sele hetkel t_1. Seega ei ole muutuva pöörleva liikumise nurkkiirus konstantne suurus. Olgu hetkel t_1 nurkkiirus ω_1, hetkel t_2 aga ω_2; järelikult ajavahemikus $t_2 - t_1$ muutus nurkkiirus väärtuse $\omega_2 - \omega_1$ võrra. Nurkkiiruse juurdekasvu ja vastava ajavahemiku jagatist nimetatakse keskmiseks nurkkiirenduseks, s. o.

$$\varepsilon_k = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}. \tag{50}$$

Kui nurkkiirendusel on sama märk mis nurkkiiruselgi, siis on keha liikumine kiirenev, vastupidisel juhul pöörleb keha aeglustuvalt.

Kuna pöördenurka väljendatakse nurgaühikutes, siis nurkkiiruse dimensioon on $\frac{\text{nurgaühik}}{\text{ajaühik}}$, nurkkiirendusel aga

$$\frac{\text{nurgaühik}}{\text{ajaühik}} : (\text{ajaühik}) = \frac{\text{nurgaühik}}{(\text{ajaühik})^2}.$$

§ 88. Ümber liikumatu telje pöörleva keha punktide joonkiirus

Nagu nägime, kujundavad keha pöörlemisel kõik tema punktid, milledel on üks või teine kaugus pöörlemisteljest, ringjooned. Geomeetriast on teada, et ringjoone kaare pikkus on seda suurem, mida suuremad on kaare raadius ja kesknurk, millele see toetub. Kuna aga keha pöörlemisel kõik pöörlemisraadiused pöörduvad ühe ja sama nurga võrra, siis pöörlemisteljest mitmesugusel kaugusel asetsevate keha punktide poolt läbitud teed on erinevad ja nimelt — need teed on võrdelised pöörlemisraadiustega. Nii näiteks punkti K (joon. 125) poolt kujundatud tee, mida mõõdetakse kaare K_0K_1 pikkusega, on nii mitu korda suurem punkti L poolt läbitud teest, mida mõõdetakse kaarega L_0L_1, kui mitu korda pöörlemisraadius OK on suurem pöörlemisraadiusest OL.

Nagu näeme, läbivad pöörleva keha erinevad punktid samas ajavahemikus erinevad teepikkused. Järelikult sõltub iga punkti liikumiskiirus pöörlemisraadiuse suurusest ja nimelt — pöörleva keha punktide kiirused on samuti võrdelised pöörlemisraadiustega.

Pöörleva keha punkti kiirust nimetatakse joonkiiruseks ja seda väljendatakse $\frac{\text{pikkusühik}}{\text{ajaühik}}$.

Seega on nurkkiirus kogu keha kui terviku pöörlemise mõõduks ning see on kõikide pöörlemisraadiuste jaoks üks ja sama; pöörlemisteljest mitmesugusel kaugusel asetsevate erinevate punktide joonkiirused on erinevad. Siit järeldub, et kõigi nende punktide kiirendused on samuti erinevad.

§ 89. Keha ühtlane pöörlemine ümber liikumatu telje

Kui keha pöördenurgad on võrdsetes ajavahemikes võrdsed, siis nimetatakse liikumist ühtlaseks pöörlevaks liikumiseks. On ilmne, et sel juhul on nurkkiirus konstantne.

Liikugu keha ühtlaselt nii, et ajavahemiku t vältel ta pööreduks mingi nurga võrra. Sel juhul nurkkiirus

$$\omega = \frac{\varphi}{t}. \qquad (51)$$

Kiiruse dimensioon oleneb sellest, millistes ühikutes on antud selle võrrandi parema poole lugeja ja nimetaja: kui pöördenurk on antud kraadides, aeg aga sekundites, siis kiirus avaldub $\frac{\text{kraad}}{\text{sek}}$; kui aeg on antud minutites, siis saaksime nurkkiiruse $\frac{\text{kraad}}{\text{min}}$ jne. Edaspidises käsitluses on nurk φ antud kraadides[1].

Suuremal osal juhtudel iseloomustatakse tehnikas ühtlast pöörlevat liikumist pöörete arvuga minutis (näiteks elektrimootori, tööpingi spindli jne. pöörete arv minutis), mida tähistatakse tähega n. Neil juhtudel võib pöörlemise nurkkiirust väljendada järgmiselt.

Ühe pöörde puhul pöördub keha 360° minutis, n pöörde puhul $360n$ kraadi, ühes sekundis aga $\frac{360n}{60} = 6n$ kraadi. Kui näiteks võll pöörleb kiirusega n pööret minutis, siis see tähendab, et tema nurkkiirus

$$\omega = 6n\ \frac{\text{kraad}}{\text{sek}} = 360n\ \frac{\text{kraad}}{\text{min}}. \qquad (52)$$

Vaatleme ühtlaselt pöörleva keha üksikute punktide liikumist. Pöörelgu rihmaratas ümber geomeetrilise telje O (joon. 126). Rihmaratas teeb n pööret minutis. Võtame rihmaratta pinnal punkti K. Kui tähistame rihmaratta läbimõõdu D, siis ühe pöörde korral kujundab see punkt ringjoone läbimõõduga D. Järelikult punkti poolt läbitud tee võrdub πD, kus π kujutab endast ringjoone pikkuse ja läbimõõdu suhet; n pöördel minutis on punkti

---

[1] Valemile (51) võib anda teise kuju. Nurga mõõtühikuna kasutatakse sageli suurust, mida nimetatakse radiaaniks.

Radiaan kujutab endast kesknurka, mille kaare pikkus on võrdne raadiusega. Tähistades radiaani arvulise väärtuse kraadides tähega x, temale vastava raadiuse aga tähega R, saame radiaani määrangu põhjal $\frac{2\pi R}{360}\, x = R$, millest $x = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ 17' 44''$.

Siis pöördenurk, väljendatuna kraadides, võrdub $\frac{\varphi^\circ}{x^\circ} = \frac{\pi}{180^\circ}\ \varphi^\circ$, nurkkiirus aga $\omega = \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \frac{\varphi^\circ}{t} \cdot \frac{1}{\text{sek}}$.

poolt läbitud tee πDn, sekundis aga $\frac{\pi Dn}{60}$. Kuna rihmaratta läbimõõt antakse millimeetrites, siis saame punkti K joonkiiruseks

$$v = \frac{\pi Dn}{60 \cdot 1000} \text{ m/sek.} \qquad (53)$$

Samasugune joonkiirus on rihmaratta kõigil teistel punktidel, mis asetsevad selle pöial, s. o. kõige kaugemal pöörlemisteljest. Seda kiirust nimetatakse rihmaratta ringkiiruseks.

Võtame nüüd mingi punkti L, mis ei asetse rihmaratta pöial, vaid mingil kaugusel r pöörlemisteljest.

Arutledes samuti nagu punkti K juures, saame punkti L joonkiiruseks

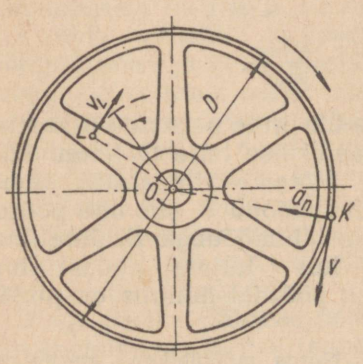
$$v_L = \frac{2\pi rn}{60} \text{ mm/sek} = 2\pi rn \text{ mm/min.}$$

Jagades kiiruse v kiirusele v_L, saame:

$$\frac{v}{v_L} = \frac{D}{2r},$$

s. o. joonkiiruste suhe on võrdne pöörleva keha punktide poolt kujundatud ringjoonte läbimõõtude, või, mis on sama, raadiuste suhtega.

Valem (53) väljendab keha ringkiirust (või keha punkti joonkiirust) olenevalt keha läbimõõdust ja pöörete arvust minutis. Kui on antud läbimõõt ja ringkiirus ning on vaja leida pöörete arv minutis, siis avaldub sama valem kujul:



Joon. 126

$$n = \frac{60 \cdot 1000v}{\pi D} \text{ p/min.} \qquad (54)$$

Kui aga on antud ringkiirus ja pöörete arv minutis, siis määratakse läbimõõt millimeetrites järgmise valemiga:

$$D = \frac{60 \cdot 1000v}{\pi n} \text{ mm.} \qquad (55)$$

Valemites (54) ja (55) on kiirus väljendatud m/sek.

Küsimusi

1. Pöörleva keha ühel ja samal raadiusel asetseb kaks punkti, milledest üks asetseb pöörlemisteljest kaks korda kaugemal kui teine. Kuidas suhtuvad nende kahe punkti kiirused?

2. Kuidas suhtuvad nende kahe punkti tsentripetaalkiirendused?

Näide 43. Rihmaratas läbimõõduga $D = 2000$ mm, mis on kinnitatud võllile läbimõõduga $d = 125$ mm, pöörleb ühtlaselt kiirusega $n = 240$ p/min. Määrata

rihmaratta ja võlli ringkiirused v_1 ja v_2 ning rihmaratta pöial asetseva punkti tsentripetaalkiirendus.

Valemi (53) järgi rihmaratta ringkiirus

$$v_1 = \frac{\pi Dn}{60 \cdot 1000} = \frac{3{,}14 \cdot 2000 \cdot 240}{60 \cdot 1000} = 25{,}12 \text{ m/sek.}$$

Võlli ringkiiruse võib määrata samuti või lähtudes sellest, et joonkiirused on võrdelised läbimõõtudega $\frac{v_2}{v_1} = \frac{d}{D}$, millest

$$v_2 = v_1 \frac{d}{D} = 25{,}12 \cdot \frac{125}{2000} = 1{,}57 \text{ m/sek.}$$

Rihmaratta pöial asetseva punkti tsentripetaalkiirenduse määrame valemiga (48), kus läbimõõt tuleb võtta meetrites (sest kiirus on antud m/sek):

$$a_n = \frac{v_1^2}{D/2} = \frac{2v_1^2}{D} = \frac{2 \cdot 25{,}12^2}{2} = 631 \text{ m/sek}^2.$$

Näide 44. Mitu pööret minutis peab tegema kiirlõiketerasest 14 mm läbimõõduga puur pehme malmi puurimisel, et lõikekiirus oleks 50 m/min?

Puurimisel on lõikekiiruseks puuri ringkiirus.

Otsitava pöörete arvu minutis määrame valemiga (54):

$$n = \frac{1000v}{\pi D} = \frac{1000 \cdot 50}{3{,}14 \cdot 14} = 1137 \text{ p/min.}$$

Näide 45. Milline peab olema rihmaratta läbimõõt, et pöörlemiskiirusel 1500 p/min oleks ringkiirus 22 m/sek?

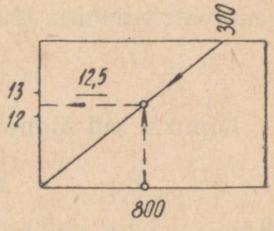
Kasutades valemit (55), saame:

$$D = \frac{60 \cdot 1000v}{\pi n} = \frac{60 \cdot 1000 \cdot 22}{3{,}14 \cdot 1500} = 280 \text{ mm.}$$

§ 90. Ringkiirust, läbimõõtu ja pöörete arvu siduvad graafikud

Vaatamata eelmises paragrahvis toodud valemite lihtsusele on nende kasutamine mahukate arvutuste tõttu tülikas, eriti seetõttu, et need arvutused tuleb sageli teha tsehhitingimustes (näiteks tööpingi spindli vajaliku pöörete arvu määramiseks antud lõikekiirusest lähtudes).

Seepärast on praktiliste ülesannete lahendamisel mugavam kasutada valmis graafikuid, mis võimaldavad kiiresti ning seatud eesmärgi jaoks küllaldase täpsusega leida nõutavad suurused.



Joon. 127

Neid graafikuid, mis seovad pöörleva keha ringkiiruse tema läbimõõdu ning pöörete arvuga, nimetatakse nomogrammideks. Viimaste abil, andes ette kaks suurust, näiteks läbimõõdu ($D = 800$ mm) ja pöörete arvu ($n = 300$ p/min), leiame ringkiiruse $v = 12{,}5$ m/sek (joon. 127).

Praktikas kasutatakse laialdaselt kaht tüüpi nomogramme —

kiirelisi nomogramme ja logaritmilisi nomogramme. Nomogrammide ehitamist ning nende kasutamist praktiliseks arvutamiseks käsitletakse eritehnoloogia kursusel.

§ 91. Keha ühtlaselt muutuv pöörlemine ümber liikumatu telje

Kui keha pöörlemisel tema nurkkiirus kasvab võrdsetes ajavahemikes võrdsete suuruste võrra, siis on see pöörlemine ühtlaselt muutuv; kui nurkkiirus aja möödumisel suureneb, siis on pöörlemine ühtlaselt kiirenev, vastupidisel juhul on see ühtlaselt aeglustuv.

Vastandades keha pöörleva liikumise punkti sirgjoonelise liikumisega, näeme, et pöördenurk esimesel juhul on analoogiline läbitud teepikkusega teisel juhul; täpselt samuti nurkkiirus ja nurkkiirendus, mis iseloomustavad pöörlevat liikumist, vastavad punkti sirgjoonelise liikumise kiirusele ja kiirendusele. Seepärast võime valemid, mis seovad pöördenurka, nurkkiirust ja nurkkiirendust ühtlaselt muutuval pöörlemisel, tuletada samuti, nagu me seda tegime läbitud teepikkuse, kiiruse ja kiirenduse leidmisel punkti ühtlaselt muutuval sirgjoonelisel liikumisel (§ 65 ja 66).

Tulemusena saame järgmised valemid.

Nurkkiirus hetkel t:

$$\omega_t = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{56}$$

kus ω_0 on algnurkkiirus ja ε — nurkkiirendus (on ühtlaselt muutuval pöörlemisel konstantne suurus). Kui algnurkkiirus $\omega_0 = 0$, siis

$$\omega_t = \varepsilon t. \tag{56a}$$

Analoogiliselt valemile (28) saame pöördenurga aja t vältel:

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{57}$$

vastavalt valemile (29)

$$\varphi = \frac{\omega_t^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \tag{58}$$

Lõpuks, kui algnurkkiirus on null, siis

$$\varphi = \frac{\varepsilon t^2}{2} \tag{59}$$

ja

$$\varphi = \frac{\omega t^2}{2\varepsilon}. \tag{60}$$

Näide 46. Rihmaratas hakkab pöörlema ühtlaselt kiirendatult, tehes esimese 5 sekundiga 12,5 pööret. Milline on rihmaratta nurk- ja ringkiirus selle ajavahemiku lõpul, kui rihmaratta läbimõõt $D = 2000$ mm?

Leiame pöördenurga, pidades silmas, et ühele pöördele vastab 360°:

$$\varphi = 360 \cdot 12{,}5 = 4500°.$$

Lähtudes sellest, et algkiirus on null, kasutame nurkkiirenduse leidmiseks valemit (59):

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = \frac{9000}{5^2} = 360 \text{ kraadi/sek}^2.$$

Nurkkiiruse 5. sekundi lõpuks määrame valemiga (56 a):

$$\omega_5 = \varepsilon t = 360 \cdot 5 = 1800 \text{ kraadi/sek}.$$

See nurkkiirus vastab $\frac{1800}{360} = 5$ pöördele sekundis. Järelikult ringkiirus sel hetkel

$$v_5 = \frac{\pi \cdot 2000 \cdot 5}{1000} = 31{,}4 \text{ m/sek}.$$

Näide 47. Rihmaratas, mille läbimõõt on 1200 mm, pöörleb kiirusega $n = 400$ p/min. Mingil hetkel lülitatakse võll välja, misjärel rihmaratas koos võlliga jätkab pöörlemist ühtlaselt aeglustuvalt ning peatub 2 min 30 sek pärast. Määrata üldine pöörete arv, mis rihmaratas tegi kuni täieliku seismajäämiseni, ning pöial asuva punkti tangentsiaalkiirendus sel ajavahemikul.

Rihmaratta nurkkiirus üleminekul ühtlaselt pöörlemiselt ühtlaselt aeglustuvale pöörlemisele on valemi 52 põhjal:

$$\omega_0 = 6n = 6 \cdot 400 = 2400 \text{ kraadi/sek}.$$

Nurkkiirenduse (aeglustuse) määramiseks kasutame valemit (56 a), võttes selles lõppkiiruse algkiiruseks:

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2400}{150} = 16 \text{ kraadi/sek}^2.$$

Nüüd võime valemi (59) põhjal leida pöördenurga:

$$\varphi = \frac{16 \cdot 150^2}{2} = 180\,000°.$$

Kuna ühele pöördele vastab 360°, siis kuni peatumiseni rihmaratas tegi $\frac{180\,000}{360} = 500$ pööret.

Et määrata rihmaratta pöia tangentsiaalkiirendust, leiame nurkkiirendusele $\varepsilon = 16$ kraadi/sek^2 vastava kaare pikkuse. Ringi läbimõõdu $D = 1200$ mm $= 1{,}2$ m korral on kesknurgale 16° toetuva kaare pikkus

$$\frac{\pi D \cdot 16}{360} = \frac{\pi \cdot 1{,}2 \cdot 16}{360} \text{ m} = \frac{4\pi}{75} \text{m}.$$

Järelikult otsitav tangentsiaalkiirendus on

$$\frac{4 \cdot 3{,}14}{75} \approx 0{,}17 \text{ m/sek}^2.$$

§ 92. Kordamisküsimusi

1. Missugust keha liikumist nimetatakse kulgevaks ning millised on selle liikumise liigid?
2. Vagun sõitis sirgjooneliselt teeosalt kõverjoonelisele. Kas vaguni liikumine on endiselt kulgev?
3. Vagun sõitis horisontaalselt sirgjooneliselt teeosalt kallakuga sirgjoonelisele teeosale. Kas vaguni liikumine jääb kulgevaks?
4. Milline on jalgratta pedaali liikumine jalgrattaga sõites?

5. Kas nurkkiiruse suurus oleneb pöörlemisraadiusest?
6. Kas joonkiiruse suurus oleneb pöörlemisraadiusest?
7. Kaks erineva läbimõõduga silindrilist keha pöörlevad oma geomeetriliste telgede ümber. Millist tingimust peavad rahuldama nende pöörete arvud ühes ja samas ajavahemikus, et mõlema keha ringkiirus oleks üks ja sama?
8. Kahe erineva läbimõõduga rihmaratta pöörete arvud on võrdsed. Mida võib öelda nende nurk- ja ringkiiruste kohta?

§ 93. Harjutusi

45. Mitu pööret minutis peab tegema ühtlaselt pöörlev rihmaratas, mille läbimõõt on 460 mm, et ta ringkiirus oleks 24 m/sek?
46. Milline peab olema rihmaratta läbimõõt, et 1500 p/min korral ta ringkiirus oleks 22 m/sek?
47. Millise lõikekiirusega (s. o. ringkiirusega) töödeldakse treipingil kiirlõiketerasest treiteraga 60 mm läbimõõduga terasdetaili, kui see teeb 1140 p/min?
48. Mitu pööret minutis peab tegema treipingi kiirlõiketerasest teraga töödeldav valgevasest 60 mm läbimõõduga detail, et lõikekiirus oleks 430 m/min?
49. 1400 mm läbimõõduga rihmaratta ringkiirus mingil ajahetkel oli 9 m/sek, 2,5 minuti pärast aga 12 m/sek. Lugedes rihmaratta pöörlemise ühtlaselt kiirenevaks, leida nurk- ja tangentsiaalkiirendus pöial, samuti ka nurk- ja ringkiirus 1,5 minuti pärast, arvestades hetkest $t = 0$.
50. Mootori hooratas, mille läbimõõt on 1500 mm, tegi 45 sekundiga, arvates käivitamishetkest, 60 pööret. Lugedes liikumise ühtlaselt kiirenevaks, määrata nurk- ja tangentsiaalkiirendus, nurk- ja ringkiirus hetkel $t = 60$ sek.
51. Hooratas pöörleb nurkkiirusega, millele vastab 210 p/min. Jõudude mõjumise lakkamisel jätkab hooratas pöörlemist ühtlaselt aeglustuvalt ning peatub 4 min 24 sek pärast. Leida hooratta nurkkiirendus ja kogu pöörete arv kuni peatumiseni.

DÜNAAMIKA

Üheteistkümnes peatükk

DÜNAAMIKA PÕHISEADUSED

§ 94. Dünaamika sisu

Mehaanika eelmises jaos, kinemaatikas, me tuletasime kõva keha ja selle üksikute punktide liikumist iseloomustavate elementide vahelised seosed. Kuid liikumise laadi muutumine, või nagu räägitakse — keha mehaanilise olukorra muutumine, ei toimu iseenesest, ilma teiste kehade mõjumiseta, s. o. ilma jõudude mõjumiseta. Järelikult selleks, et keha liikumisest saada täielikku pilti, peame teadma, kuidas on keha see või teine liikumine seotud jõududega, mis kehale mõjuvad. Selle küsimuse lahendamisega tegeleb mehaanika osa, mida nimetatakse dünaamikaks. Niisiis võime öelda, et *dünaamikas uuritakse keha liikumist temale rakendatud jõudude mõjul.*

Dünaamikas vaadeldavad ülesanded võivad olla kaht liiki: ühel juhul, lähtudes keha liikumist iseloomustavatest kinemaatilistest seostest, määrame jõud, mis seda liikumist põhjustavad; teisel juhul me määrame keha liikumise, olenevalt temale rakendatud jõududest.

§ 95. Mehaanika esimene seadus (Newtoni esimene seadus)

Kogemuste põhjal me teame, et paigalseisev keha ilma välisjõudude mõjuta seda olukorda ei muuda ning püsib selles lõpmatult kaua. Teiselt poolt paneme tähele, et ühtlaselt ja sirgjooneliselt liikuva keha liikumise muutmiseks peab sellele mõjuma mingi teine keha.

Kujutame endile, et me tõukasime põrandal asetsevat kuuli. Jälgides selle liikumist me näeme, et see on sirgjooneline. Mida kõvemast materjalist on kuulike tehtud ning mida siledam on kuulikese ja põranda pind, seda kauem ta liigub sirgjooneliselt, ning seda vähem muutub liikumiskiirus. Kui liikumine toimuks õhuta ruumis, siis kestaks liikumine veelgi kauem. Nagu näeme, avalduvad põranda ja õhu mõju selles, et meie poolt vaadeldav liikumine toimub ebaühtlaselt, s. o. negatiivse kiirendusega.

Oeldu põhjal võib järeldada, et enda hooleks jäetud kuulike, millele ei mõju teised kehad, liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt, s. o. kiirusega, mille suurus ja suund on konstantsed.

Keha omadust säilitada oma kiirust (järelikult ka paigalseisu) nimetatakse inertsiks.

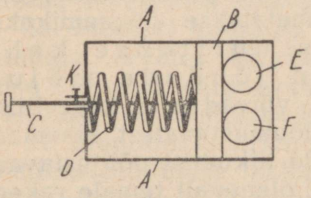
Seega me tulime järeldusele, mis kujutab endast inertsiseadust ehk Newtoni esimest seadust: iga keha kas seisab paigal või liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt seni, kuni mingi teine keha ei põhjusta selle oleku muutumist.

Tuleb alla kriipsutada, et ühe keha mõjumine teisele ei pea toimuma vahetu kokkupuute teel. Nii näiteks horisontaalselt visatud keha ei liigu sirgjooneliselt, vaid maakera külgetõmbejõu tõttu kõverjooneliselt.

§ 96. Dünaamika põhivõrrand (Newtoni teine seadus)

Teeme järgmise katse.

Juhtpindadel *A* võib liikuda liugur *B* (joon. 128), mida surub paremale vedru *D*. Lükanud liuguri vasakule, kinnitame viimase kruvi *K* abil sellesse asendisse. Asetame liugurile tihedalt kaks ühesuguse läbimõõduga, kuid erineva erikaaluga materjalidest valmistatud kuulikest *E* ja *F*. Kuna kuulikesed on valmistatud erinevatest materjalidest, siis on ka nende kaalud erinevad. Vabastame nüüd varda *C*. Liikudes paremale, annab liugur üheaegselt mõlemale kuulikesele tõuke, mis hakkavad veerema paremale. Jälgides kuulikeste liikumist, näeme, et mõlemad nad liiguvad sirgjooneliselt, kuid nende poolt ühe ja sama ajavahemiku vältel kaetud teed on erinevad ja nimelt — kergem kuulike jõuab raskemast ette, s. o. ta liigub suurema kiirusega. Kui oleksime võtnud kaks ühe ja sama erikaaluga materjalist valmistatud kuulikest, siis oleksid need loomulikult liikunud ühesuguse kiirusega ning peatunud (nendele mõjuvate liikumistakistuste tõttu) ühel ja samal kaugusel algasendist.



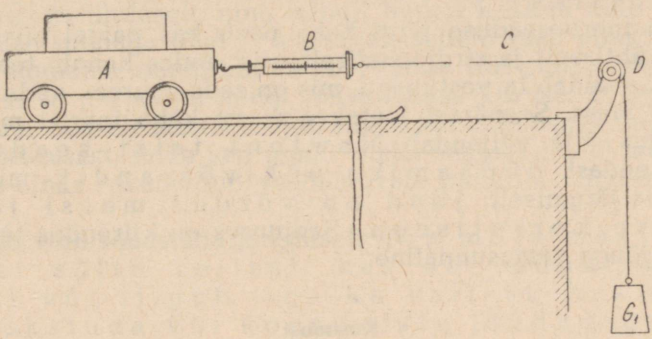
Joon. 128

Korrates seda katset tugevamini kokkusurutud vedruga (s. o. paigutades liuguri enam vasakule kui esimesel juhul) näeme, et mõlemad kuulikesed liiguvad suurema kiirusega, kuid analoogiliselt eeltoodule on ka nüüd raskema kuulikese kiirus igal hetkel väiksem kergema kuulikese kiirusest.

Nende katsete põhjal tuleme järgmisele järeldusele. Kuulikesed seisavad hetkel paigal. Vedru mõjul, s. o. liuguri poolt nendele mõjuvate võrdsete jõudude mõjul hakkavad nad liikuma,

kumbki mingi kindla kiirusega. Teisiti võime öelda, et võrdsete jõudude mõjul sai kumbki keha erineva kiirenduse ja nimelt, — raskem keha sai väiksema kiirenduse. Lisaks sellele, kõrvutades teist katset esimesega, näeme, et suurem jõud annab ühele ja samale kehale suurema kiirenduse.

Et selgitada seda sõltuvust, teeme veel ühe katse. Sirgjoonelistel ning horisontaalsetel rööbastel asuvale vankrile A (joon. 129) kinnitame dünamomeetri B, viimase külge aga nööri C, mille viime üle juhtrulli D. Nööri lõppu riputame raskuse G_1. Lastes vankri nööri otsa riputatud raskuse G_1 mõjul liikuma, märgime



Joon. 129

ära jõu P_1 suuruse, mida näitab dünamomeeter. Jälgides vankri liikumist (näiteks arvestades teid, mida vankri mingi punkt läbib võrdsetes ajavahemikes) veendume, et see toimub ühtlaselt kiirendatult.

Vankri poolt läbitud teede ning viimastele vastavate ajavahemike põhjal määrame kiirenduse a_1, millega vanker liigub.

Asendades raskuse G_1 mingi teise raskusega G_2, kordame katset. Tulemusena leiame, et dünamomeetri poolt näidatava uue jõu P_2 juures vanker liigub kiirendusega a_2. Kui konstrueerida vanker nii, et hõõrdumine oleks väga väike, siis selle katse põhjal leiame, et jõudude P_1 ja P_2 suhe väga vähe erineb nende poolt põhjustatud kiirenduste suhtest.

Seega määrasime kindlaks, et jõud ja nende poolt põhjustatud kiirendused on võrdelised:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

ehk siseliikmeid ümber paigutades:

$$\frac{P_1}{a_1} = \frac{P_2}{a_2} = \text{const.}$$

Korrates sama katset mistahes arv kordi, me veendume, et iga kord on jõu ning selle poolt ühele ja samale kehale antud kiirenduse suhe üks ja sama.

Nagu näeme, on jõu ja selle poolt põhjustatud kiirenduse suhe iga keha puhul konstantne suurus. Tähistades selle suuruse tähega m, saame:

$$\frac{P}{a} = m,$$

või

$$P = ma. \tag{61}$$

Sellest võrdusest järeldub, et mida suurem on m, seda suuremat jõudu on tarvis kehale ühe ja sama kiirenduse a andmiseks. Suurust m nimetatakse keha massi mõõduks või lühidalt keha massiks.

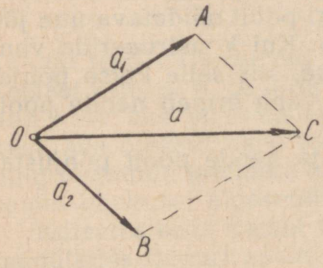
Kuna inertsiseaduse järgi keha peab kas paigal püsima või liikuma ühtlaselt ja sirgjooneliselt, siis, andes kehale teatud kiirenduse, avaldab ta vastupanu, mis on seda suurem, mida suurem on keha mass. Seepärast loetakse massi keha inertsi mõõduks.

Võrdus (61) väljendab Newtoni teist seadust ja kujutab endast dünaamika põhivõrrandit, mille võib sõnastada järgmiselt: jõud on võrdne massi ja kiirenduse korrutisega. Seejuures on kiirendus teda põhjustava jõuga samasuunaline.

Küsimusi

1. Kuidas muutub keha kiirendus, kui suurendada kehale mõjuvaid jõude n korda?
2. Mingi masspunkti A mass on n korda suurem teise masspunkti B massist, samuti on esimese punkti kiirendus n korda suurem teise punkti kiirendusest. Mitu korda on punktile A rakendatud jõud suurem punktile B rakendatud jõust?

§ 97. Jõudude mõju sõltumatuse seadus



Joon. 130

Liikugu masspunkt jõu P_1 mõjul kiirendusega a_1 (joon. 130). Mingil hetkel hakaku sellele punktile mõjuma veel üks jõud P_2. Kui punktile mõjuks ainult jõud P_2, siis saaks punkt jõusuunalise kiirenduse $a_2 = \frac{P_2}{m}$, kus m on selle masspunkti mass.

Katse näitab, et mõlema antud jõu P_1 ja P_2 üheaegsel mõjumisel saab see masspunkt kiirenduse a, mida väljendab mõlemale kiirendusele $\overline{OA}$ ja $\overline{OB}$ kui külgedele ehitatud parallelogrammi $OABC$ diagonaali kujutav vektor $\overline{OC}$. Teisiti võime öelda, et masspunkti kiirendus on võrdne mõlema kiirenduse geomeetrilise summaga.

Kui korrutada kiirendused a_1 ja a_2 keha massiga, saame jõud P_1 ja P_2. Seega me võime samaaegselt arvestada, et parallelogramm $OACB$ on ehitatud jõu vektoritele P_1 ja P_2 (vastavas mastaabis), vektor $\overline{OC}$ aga kujutab samas mastaabis mõlema komponentjõu P_1 ja P_2 resultantjõudu.

Siit tuleme järgmisele järeldusele: kui liikuvale masspunktile mõjub üheaegselt mitu jõudu, siis punktile antav kiirendus võrdub iga jõu poolt üksikult antavate kiirenduste geomeetrilise summaga.

Oletame, et masspunkt liigub inertsi mõjul, järelikult sirgjooneliselt ja ühtlaselt, ning mingil hetkel hakkab talle mõjuma konstantse suunaga jõud P. Vastavalt sellele saab punkt nimetatud jõu suunalise mingi kindla kiirenduse. Kui punkt seisaks paigal, saaks ta jõu mõjul mingi jõusuunalise kiiruse. Et aga punkt liigub samaaegselt inertsi mõjul, siis ta kiirus koosneb inertskiirusest ja kiirusest, mida see punkt oleks saanud jõu P mõjul, kui viimane oleks rakendatud vaadeldavale punktile viimase paigalseisus.

Üldu võib sõnastada järgmiselt: jõu mõju masspunktile ei sõltu sellest, kas see punkt seisab paigal või liigub, ega ka sellest, kas mõjub jõud üksinda või koos teiste jõududega.

Siit järeldub samuti, et kui masspunkt liigub inertsi mõjul ning talle on rakendatud jõudude tasakaalustatud süsteem, siis see liikumine toimub ühtlaselt ja sirgjooneliselt.

Üldu moodustab mehaanika seaduse sisu, mida nimetatakse jõudude mõju sõltumatuse seaduseks (või teisiti — jõudude koosmõju seaduseks).

§ 98. Käsitletud mehaanikaseadustest tulenevad järeldused

Äsjakäsitletud mehaanikaseadustest tulenevad järgmised katseliselt tõestatud reeglid.

1. Mõjugu sirgjooneliselt liikuvale masspunktile jõud. Vastavalt teisele seadusele on sel juhul liikumine muutuv. Kui mingil hetkel jõu mõjumine lakkab, siis edasine liikumine toimub inertsi mõjul ühtlaselt ja sirgjooneliselt, kusjuures liikumise kiirus vastab jõu poolt punktile jõu lakkamise hetkeks antud kiirusele. Nii liiguks näiteks rong mööda sirgjoonelisi ja horisontaalseid rööpaid pärast auru andmise lõpetamist veduri silindrisse, kui puudub liikumistakistus. Mida väiksemad on liikumist takistavad jõud, seda kauem jätkub rongi liikumine inertsi mõjul ning seda ühtlasem on liikumine.

2. Liikugu masspunkt kõverjooneliselt. Esimese kahe sea-

duse põhjal võib selline liikumine esineda ainult jõu mõjumisel. Kui jõud lakkab mõjumast, siis liigub punkt edaspidi mööda sirgjoont, mis on trajektoori puutujaks jõu lakkamise hetkele vastavas punktis. Näitena võime vaadelda niidi otsa kinnitatud raskuse keerutamist, kui niiti hoitakse teist otsa pidi peos. Niidi katkemisel lendab raskus minema mööda raskuse raskuskeskme poolt kujundatud ringjoone puutujat. Samuti liigub ka pöörleva terituskäia küljest lahtimurduv tükike.

3. Vaatleme rongi liikumist mööda sirgjoonelisi horisontaalseid rööpaid. Et säilitada rongi ühtlast liikumist, peab vedur arendama teatud tõmbejõudu, mis kulub liikumisele vastassuunaliste kahjulike takistuste ületamiseks. Kui tõmbejõud ületab takistusjõud, siis selle ülejääk läheb rongile positiivse kiirenduse andmiseks, s. t. liikumine on kiirenev; kui aga takistusjõud ületavad tõmbejõu, siis nende ülejääk läheb liikumisele vastassuunalise kiirenduse andmiseks, millele vastavalt rongi liikumine on aeglustuv.

Öeldust tuleneb järgmine tähtis järeldus.

Kuna rongi ühtlane liikumine toimub ühelt poolt veduri tõmbejõu, teiselt poolt aga takistusjõudude mõjul, mis mõlemad on omavahel täpselt võrdsed, siis need jõud tasakaalustuvad.

Seega kui masspunkt liigub jõudude mõjul ühtlaselt ja sirgjooneliselt, siis need jõud on tasakaalus ega avalda punkti liikumisele mingit mõju, s. t. punkt liigub inertsi mõjul ja vastupidi — kui masspunktile rakendatud välisjõud on tasakaalus, siis punkt kas liigub ühtlaselt ja sirgjooneliselt või seisab paigal.

See on tehnilise mehaanika üks tähtsamaid seadusi. Vastavalt sellele lihtsustub kõigi sirgjoonelise ja ühtlase liikumisega seotud ülesannete lahendamine, sest seda võib teha staatika seadusi kasutades.

Kirjutame kõik saadud järeldused välja järgmise tabeli kujul.

Kui masspunkt, mis algul seisis paigal, liigub:	Siis punkti liikumine on:
1. suuruselt ja suunalt konstantse jõu mõjul	ühtlaselt muutuv sirgjooneline
2. suunalt konstantse, kuid suuruselt muutuva jõu mõjul	muutuv sirgjooneline
3. jõu mõjul, mis annab punktile muutuva kõverjoonelise liikumise ning siis teatud hetkel lakkab	ühtlane sirgjooneline mööda trajektoori puutujat
4. jõu mõjul, mis annab punktile muutuva sirgjoonelise liikumise ning siis teatud hetkel lakkab	ühtlane sirgjooneline (alates jõu lakkamise momendist)

Küsimusi

1. Inertsi mõjul liikuvale masspunktile hakkab mõjuma liikumisele vastassuunaline konstantne jõud. Milline on punkti edasine liikumine?
2. Inertsi mõjul liikuvale masspunktile hakkavad mõjuma kaks suuruselt võrdset, kuid suunalt vastupidist jõudu. Kas selle tulemusena punkti liikumine muutub?

§ 99. Ühikute tehniline ja füüsikaline süsteem

Võrrandis (61) on omavahel seotud kolm suurust: jõud, mass ja kiirendus. Kiirendus väljendub $\frac{\text{pikkusühik}}{(\text{ajaühik})^2}$. Kuna tehnikas on võetud pikkuse põhiühikuks meeter (m), aja põhiühikuks aga sekund (sek), siis kiirendus avaldub $\text{m/sek}^2 = \text{msek}^{-2}$.

Mis puutub selles valemis esinevatesse ülejäänud suurustesse, siis võime põhisuuruseks valida nii jõu kui ka massi; seega tuleks esimesel juhul määrata massi dimensioon, teisel juhul aga jõu dimensioon. Võtame jõu põhiühikuks, nagu seda tegime staatikas, kilogrammi. Leiame, kuidas avaldub sel juhul mass.

Eespool tuletasime järgmise sõltuvuse: $m = \frac{P}{a}$. Kirjutades jõu asemele 1 kg, kiirenduse asemele aga 1 m/sek^2, võime massi ühiku avaldada nende suuruste kaudu järgmiselt:

$$\text{kg} : \frac{\text{m}}{\text{sek}^2} = \frac{\text{kg} \cdot \text{sek}^2}{\text{m}} = \text{kgm}^{-1} \cdot \text{sek}^2.$$

Sellist ühikute süsteemi (kg, m ja sek), kus massiühik avaldatakse valitud ühikute kaudu, on tehnikas hakatud nimetama tehniliseks ühikute süsteemiks. Seda süsteemi kasutame ka meie edaspidi.

Võtame nüüd põhisuuruseks massi. Kui massi põhiühikuks võtta 1 g, siis annab võrrand (61) jõu ühiku jaoks järgmise avaldise:

$$\text{jõuühik} = (\text{massiühik}) \cdot (\text{kiirenduseühik}) = \text{g}\frac{\text{pikkusühik}}{(\text{ajaühik})^2}.$$

Selles ühikute süsteemis, mida kasutatakse füüsikas, on pikkusühikuks võetud sentimeeter (cm) ning ajaühikuks sekund, millele vastavalt jõuühik (düün) avaldub kujul:

$$\text{g} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{sek}^2} = \text{gcmsek}^{-2}.$$

Seda süsteemi nimetatakse füüsikaliseks ehk absoluutseks ühikute süsteemiks, või teisiti — CGS-süsteemiks (sentimeeter, gramm, sekund).

§ 100. Keha massi ja kaalu vaheline seos

Langegu keha vabalt õhutühjas ruumis, ilma et ta kohtaks mingit takistust. Nagu teada, langeb keha raskusjõu või, teisiti öeldes, omakaalu mõjul.

Olles suuruselt ja suunalt konstantse jõu mõju all, langeb keha konstantse kiirendusega.

On pikemata selge, et dünaamika põhivõrrand (61) on kasutatav ka raskusjõu mõjumisel. Sel juhul tuleb võrrandis (61) jõud P asendada keha kaaluga G, kiirendus a aga raskuskiirendusega g, mille tulemusena saame võrrandi:

$$G = mg. \tag{62}$$

Kuna keha mass on konstantne, kiirendus aga võib olla erinev, siis on ühe ja sama keha kaalu G arvuline väärtus erinevatel laiuskraadidel asetsevates punktides erinev, mida kinnitab keha kaalumine vedrukaaludega. Sellest me näeme, et keha mass ja kaal oluliselt erinevad teineteisest. Mass on igasuguse keha lahutamatu omadus ning on igal mehaanikas vaadeldaval kehal muutumatu. Keha kaal oleneb aga maakera külgetõmbejõust ning selle suurus on maakera mitmesugustes punktides erinev, olenevalt raskuskiirenduse suurusest.

Näide 48. Määrata keha kaal, kui keha, omades algkiirust 10 m/sek, läbib 20 kg jõu mõjul 5 sekundiga teekonna 200 m. Raskuskiirenduseks võtta 9,81 m/sek^2.

Kuna keha liikumine on ühtlaselt kiirenev, siis kiirenduse valemi (28) järgi:

$$S = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

millesse arvulisi väärtusi asetades saame $a = 12$ m/sek^2. Keha mass

$$m = \frac{P}{a} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}\ \text{kgm}^{-1}\text{sek}^2.$$

Järelikult keha kaal

$$G = mg = \frac{5}{3} \cdot 9{,}81 = 16{,}35\ \text{kg}.$$

Näide 49. Keha kaaluga $G = 29{,}43$ kg liigub inertsi mõjul kiirusega $v_0 = 10$ m/sek. Mingil hetkel hakkab kehale mõjuma jõud $P = 2$ kg, mis on suunatud liikumisele vastupidi. Määrata keha kiirus 3 sekundi pärast, arvates jõu P rakendamise hetkest.

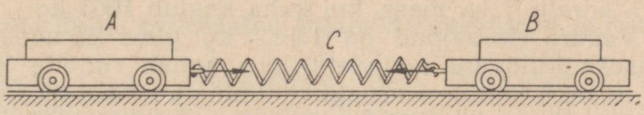
Kuna jõud mõjub liikumisele vastupidises suunas, siis on selle poolt põhjustatud kiirendus negatiivne ning liikumine ühtlaselt aeglustuv. Kasutades valemit (26) saame:

$$v_3 = v_0 - at = 10 - 3a.$$

Kiirendus $a = \frac{P}{m}$, mass $m = \frac{G}{g} = \frac{29{,}43}{9{,}81} = 3$ kgm^{-1}sek^2, järelikult kiirendus $a = \frac{2}{3}$ m/sek^2; otsitav kiirus $v_3 = 10 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 8$ m/sek.

§ 101. Mõju ja vastumõju võrdsuse seadus (Newtoni kolmas seadus)

Kui mingi keha *A* saab jõu poolt teatud kiirenduse, siis see tähendab, et kehale *A* mõjub selle jõuga mingi teine keha *B*. Keha *B* võib mõjuda kehale *A* kas vahetu kokkupuutumise teel või siis vahemaa tagant (nii mõjub näiteks ülemaailmne külgetõmbejõud).



Joon. 131

Teeme järgmise katse. Asetame rööbastele kaks teineteisest teatud kaugusel olevat vankrikest *A* ja *B* (joon. 131), milliseid ühendab väljavenitatud vedru *C*.

Vabastades üheaegselt mõlemad vankrikesed, jälgime nende liikumist. Vedru mõjul hakkavad nad liikuma teineteise poole. Kummagi vankrikese poolt läbitud tee põhjal saame arvutada kiirendused, millega need liikusid vastaval ajavahemikul. Olgu vankrikese *A* kiirendus a_1, vankrikese *B* kiirendus aga a_2.

Arvutanud vankrikeste massid ning kõrvutades need kiirendustega, veendume, et katse hoolikal läbiviimisel kehtib küllaldase täpsusega võrdus

$$m_1 a_1 = m_2 a_2.$$

Kuid vastavalt teisele seadusele on massi ja kiirenduse korrutis võrdne jõuga, mis annab selle kiirenduse.

Seega me näeme, et vankrikesele *A* mõjub jõud suunaga vasakult paremale, vankrikesele *B* aga sama suur, kuid suunalt vastupidine, s. o. paremalt vasakule suunatud jõud.

Üeldu kinnitab mehaanika kolmandat seadust (Newtoni kolmandat seadust), mille võib lühidalt sõnastada järgmiselt: m õ j u on võrdne vastumõjuga.

Kahe keha vastastikune mõjumine viitab kahe jõu olemasolule, mis on suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised. Jõud järelikult mõjuvad kahekaupa, olles rakendatud mõlemale omavahel mõjuvale kehale.

Seda seadust me juba kasutasime staatikas kehade tasakaalu vaatlemisel, kus ilmnes, et keha mõju toele põhjustab suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise toereaktsiooni.

§ 102. Kordamisküsimusi

1. Milles seisneb inertsiseadus?
2. Kehale *A* mõjuv jõud on *n* korda suurem kehale *B* mõjuvast jõust, kusjuures keha *B* mass on *n* korda suurem keha *A* massist. Kuidas suhtuvad mõlema keha kiirendused?

3. Milline on massi mõõtühik tehnilises ja füüsikalises mõõtühikute süsteemis?

4. Millisel juhul liigub masspunkt, millele on rakendatud jõudude süsteem, ühtlaselt ja sirgjooneliselt?

§ 103. Harjutusi

52. Määrata keha mass, kui keha kaalub 1963 kg.

53. Veduri tõmbejõud on 12 000 kg (ilma liikumistakistuste ületamiseks kuluvate kadudeta), mis annab rongile kiirenduse $a = 0{,}1$ m/sek^2. Milline on rongi kaal ning kui suur on rongi kiirus 45 sek pärast, arvates liikumahakkamise alghetkest?

54. Milline tõmbejõud (arvestades ka takistuste ületamiseks kuluvat jõudu) annab 2000 t raskusele rongile kiirenduse 0,05 m/sek, kui liikumistakistus moodustab 0,005 rongi kaalust?

55. 1200 t raskune rong, hakates paigalt liikuma, saavutas horisontaalsel sirgjoonelisel teel 3 minutiga kiiruse 40 km/h. Milline oli veduri tõmbejõud (lugedes selle konstantseks), kui liikumistakistus moodustab 0,005 rongi kaalust?

56. Kui kaua ning kui kaugele veereb mööda horisontaalset teed algkiirusega 35 km/h liikuv pidurdatud trammivagun, kui kõik liikumistakistused, kaasa arvatud ka pidurdamine, moodustavad 200 kg vaguni kaalu 1 t kohta?

Kaheteistkümnes peatükk

MASSPUNKTI DÜNAAMIKA ALUSED

§ 104. Masspunkti dünaamika mõiste sisu

Kinemaatikat uurides nägime, et kõva keha pöörlemisel ümber liikumatu telje kujundavad keha punktid, liikudes erinevate kiiruste ning kiirendustega, erineva raadiusega ringjooni.

Kulgeval liikumisel on aga liikumist iseloomustavad elemendid ühesugused keha kõigi punktide jaoks. Seepärast, vaadeldes keha kulgevat liikumist temale rakendatud jõudude mõjul, võime jätta keha mõõted tähele panemata ning vaadelda keha mistahes punkti (tavaliselt raskuskeskme) liikumist, eeldades, et sellesse on koondatud kogu keha mass. Sellist punkti, mis asendab keha kui tervikut, nimetatakse vastavalt kursuse algul öeldule masspunktiks.

Kuid masspunkti mõiste ei piirdu ainult nende juhtudega. See osutub kasulikuks ka keerukamate liikumiste uurimisel. Kujutleme endile, et mööda mingit pinda veereb kuul. Liikumise tulemusena kuuli raskuskese kujundab mingi joone (sirge või kõverjoone), kuuli ülejäänud punktide trajektoorideks on aga mitmesugused keerulisemad kõverjooned.

Kui meid ülesannete lahendamisel huvitab ainult kuuli tsentri liikumine, siis vaatleme kuuli masspunktina, mis asetseb kuuli tsentris ning millesse on koondatud kogu kuuli mass.

Vastavalt sellele lepime kokku, et rääkides edaspidi keha liikumisest, käsitleme keha masspunktina, mille mass on võrdne keha massiga.

§ 105. Keha vertikaalne liikumine raskusjõu mõjul

Olgu keha visatud vertikaalselt üles. Kui kehale ei mõjuks Maa külgetõmbejõud, siis keha liiguks inertsi mõjul ühtlaselt ja sirgjooneliselt kiirusega, mis talle anti alghetkel. Maa külgetõmbe tõttu mõjub aga kehale raskusjõud, mille suuruse määrab viimase poolt kehale antud kiirendus g ning keha mass.

Seega ülesvisatud keha kiirus on meelevaldsel hetkel võrdne konstantse kiiruse v_0 ja kiiruse gt vahega, kusjuures v_0 on kiirus, millega keha liiguks inertsi mõjul, ja gt kiirus, mille keha saavutaks raskusjõu mõjul hetkeks t. Oeldu põhjal saame valemi (32), mille tuletasime juba kinemaatikas:

$$v_t = v_0 - gt.$$

Hetkel, mil raskusjõu poolt kehale antav kiirus gt muutub suuruselt võrdseks inertsi mõjul toimuva liikumise kiirusega, osutub keha kiirus nulliks. Selleks hetkeks on keha saavutanud maksimaalse kõrguse ning edasi hakkab ta langema ainult raskusjõu mõjul (kui jätta arvestamata õhutakistus); see liikumine toimub ühtlaselt kiirenevalt, kusjuures kiirus hetkel t võrdub gt.

Oeldu selgitab kinemaatilisi sõltuvusi, mis on tuletatud eespool § 66.

§ 106. Horisondi suhtes nurga all visatud keha liikumine

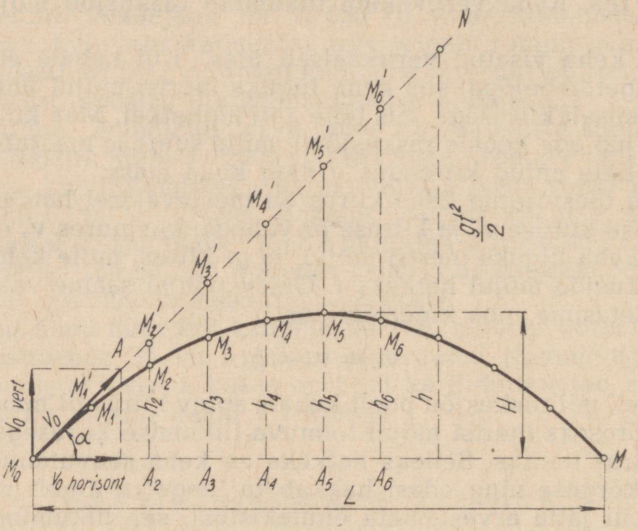
Vaatleme nüüd keerukamat keha liikumise juhtu raskusjõu mõjul ja nimelt — mitte vertikaalselt, vaid kaldu ehk, nagu öeldakse, horisondi suhtes nurga all ülesvisatud keha liikumist (joon. 132).

Niisiis olgu keha M visatud algasendist suunas M_0N, mis moodustab horisontaalsihiga nurga α, kiirusega v_0. Kui kehale ei mõjuks raskusjõud, siis liiguks keha ühtlaselt ja sirgjooneliselt suunas M_0N kiirusega v_0. Raskusjõu mõju avaldub aga selles, et keha kaldub pidevalt kõrvale sirgjoonelisest sihist, mistõttu ta teatud hetkel langeb maapinnale punktis M kaugusel $L = M_0M$ algasendist.

Lahutame kiiruse v_0, mida valitud mastaabis väljendab vektor $\overrightarrow{M_0A}$, kaheks komponendiks: horisontaalsihiliseks $v_{0\,\text{hor}}$ ja vertikaalsihiliseks $v_{0\,\text{vert}}$. Milline ka ei oleks keha liikumise trajek-

toor[1], horisontaalsihis liigub keha ühtlaselt, sest nimetatud sihis ei mõju talle mingid jõud. Mis puutub aga keha vertikaalsihilise liikumise kiirusse, siis see ei ole konstantne ning väljendub igal hetkel algkiiruse $v_{o\,vert}$ ja raskusjõu poolt põhjustatud kiiruse gt vahena. Kiirus v_{vert}, millega keha liigub vertikaalsihis, määratakse valemiga (32), mis antud juhul avaldub kujul:

$$v_{vert} = v_{o\,vert} - gt.$$



Joon. 132

Nagu näeme, liigub keha vertikaalsihis ühtlaselt aeglustuvalt ning teatud hetkel, mil gt saab võrdseks $v_{o\,vert}$, muutub keha kiiruse vertikaalne komponent nulliks; sel hetkel on keha kõrgeimas asendis. Edasi hakkab keha liikuma kiirendatult, sest vertikaalsihiline komponent kasvab. Teatud hetkel langeb keha maapinnale.

Milline on keha raskuskeskme trajektoor?

Kogemustest teame, et sellistel juhtudel on trajektooril kõverjooneline kuju. Trajektoori võime leida järgmiselt. Olgu keha lendamise aeg T. Jagame selle aja mitmeks võrdseks ajavahemikuks t_1, t_2, t_3 jne. Kanname sirgele M_oN punktid M'_1, M'_2, M'_3 jne., mis vastavad keha asenditele hetkedel t_1, t_2, t_3 jne., kui keha liiguks inertsi mõjul. Kui see liikumine toimuks ühtlaselt ja sirgjooneliselt, siis $M_oM'_1 = v_ot_1$. $M_oM'_2 = v_ot_2$, $M_oM'_3 = v_ot_3$ jne. ning keha kõrgust maapinnast väljendaksid lõigud M'_1A_1, M'_2A_2,

[1] Peame meeles, et me käsitleme keha masspunktina.

$M'_3\ A_3$ jne. Kuid raskusjõu mõjul nihkub keha ühtlaselt kiirendatult allapoole ajavahemiku t_1 vältel pikkuse $M'_1\ M_1 = \frac{gt_1^2}{2}$ võrra, ajavahemiku $T_2 = 2\ t_1$ vältel pikkuse $M'_2\ M_2 = \frac{gT_2^2}{2}$ võrra, ajavahemiku $T_3 = 3\ t_1$ vältel pikkusega $M'_3\ M_3 = \frac{gT_3^2}{2}$ võrra jne. Seega lõigud M'_1M_1, M'_2M_2, M'_3M_3 jne. suhtuvad üksteisesse nagu $\frac{gt_1^2}{2} : \frac{gT_2^2}{2} : \frac{gT_3^2}{2}$ jne. Et aga $T_2 = 2t_1$, $T_3 = 3t_1$ jne., siis järelikult $M'_1M_1 : M'_2M_2 : M'_3M_3$ jne. $= t_1^2 : 4t_1^2 ; 9t_1^2$ jne. $= 1 : 4 : 9$ jne. Järelikult, kandes punktidest M'_1, M'_2, M'_3 jne. vertikaalselt alla lõigud M'_1M_1, $M'_2M_2 = 4M'_1M_1$, $M'_3M_3 = 9M'_1M_1$ jne., saame rea punkte, mis asetsevad liikuva keha trajektooril. Üksikasjalisemal kursusel tõestatakse, et see trajektoor kujutab endast kõverjoont, mida nimetatakse p a r a b o o l i k s.

Määrame keha lennu kestuse T asendist M_0 asendisse M, maksimaalse lennukõrguse H ja lennukauguse L.

Nagu äsja selgitati, on ülesliikumine ühtlaselt aeglustuv, kusjuures keha kõrgeimas asendis kiiruse vertikaalne komponent muutub nulliks, millele vastavalt $v_{vert} = v_{0\ vert} - gT' = 0$. Siit saame, et $T' = \frac{v_{0\ vert}}{g}$, kus T' on ülestõusu lennu kestus. Pidades silmas, et $v_{0\ vert} = v_0 \sin\alpha$, saame lennukestuse algasendist kõrgeimasse asendisse:

$$T' = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}.$$

Pole raske veenduda, et lennukestus kõrgeimast asendist asendisse M on täpselt sama. Järelikult keha kogu lennukestus asendist M_0 asendisse M on:

$$T = \frac{2\ v_0 \sin\alpha}{g}. \qquad (63)$$

Nüüd võime määrata lennukõrguse H. Kasutades varemtuletatud valemit (29), peame selles võtma $v_t = 0$ (sest lõppkiirus vertikaalsihis on kõrgeimas asendis null); algkiiruse $v_{0\ vert}$ asendame avaldisega $v_0 \sin\alpha$ ja kiirenduse a raskuskiirendusega g, mille tulemusena saame lennukõrguse

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{g}. \qquad (64)$$

Lõpuks määrame lennukauguse L.

Pidades silmas, et horisontaalsihis toimub liikumine ühtlaselt, võime kirjutada:

$$L = v_{0\ hor} T. \qquad (a)$$

Kiiruse $v_{0\ hor}$ leitakse, kui antud hüpotenuusi v_0 ja selle lähisteravnurga α järgi ehitatud täisnurkse kolmnurga kaatet:

$$v_{0\ hor} = v_0 \cos\alpha.$$

Pärast $v_{0\,hor}$ saadud väärtuse ning varemleitud lennuaja T asendamist saame:

$$L = v_0 \cos\alpha \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g} \cdot 2 \sin\alpha\cos\alpha.$$

Trigonomeetrias on tõestatud, et $2 \sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$; järelikult

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \qquad (65)$$

Kuna siinuse suurim väärtus, mis on üks, on nurgal 90°, siis suurim lennukaugus esineb juhul, kui $2\alpha = 90°$ või $\alpha = 45°$.

Keha liikumine vertikaali mööda on vaadeldud liikumise erijuht.

Tõepoolest, liikumisel vertikaali mööda nurk $\alpha = 90°$ ja $2\alpha = 180°$, $\sin 180° = 0$, järelikult $L = 0$, s. t. keha kukub tagasi oma lähteasendisse. Edasi $\alpha = 90°$ puhul saame $\sin 90° = 1$ ja $H = \frac{v_0^2}{2g}$, s. o. sama avaldis, mille me saime eespoolgi (§ 66).

Näide 50. Mürsk tulistati kahurist välja horisondi suhtes nurga all $\alpha = 30°$ algkiirusega $v_0 = 500$ m/sek. Kui pika aja järel ning kui kaugele langeks mürsk maha, kui puuduks õhutakistus?

Lennukestuse määrame valemiga (63):

$$T = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot 500 \sin 30°}{9{,}81} \approx 51 \text{ sek.}$$

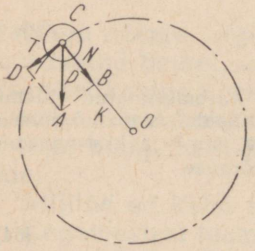
Lennukaugus valemi (65) põhjal:

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{500^2}{9{,}81} \sin 60° \approx 22 \text{ km } 70 \text{ m.}$$

§ 107. Tangentsiaal- ja tsentripetaaljõud masspunkti liikumisel mööda ringjoont

Kujutleme endale, et varras K, mille otsa on kinnitatud kuul C, pöörleb horisontaaltasapinnas ümber telje O (joon. 133). Kui kuuli tsenter liigub mööda ringjoont ebaühtlaselt, siis kiiruse suuruse muutumist iseloomustab tangentsiaalkiirendus a_t. Kiiruse suuna muutumine määratakse tsentripetaalkiirenduse valemiga (48):

$$a_n = \frac{v^2}{R}.$$



Joon. 133

Korrutame kumbagi kiirendust kuuli massiga m. Kuuli massi ja tangentsiaalkiirenduse a_t korrutis ma_t annab mööda kuuli tsentri poolt kujundatud ringjoone puutujat suunatud jõu $T = \overline{CD}$. Seda jõudu nimetatakse p u u t e - e h k t a n g e n t s i a a l j õ u k s. Korrutis $ma_n = \frac{mv^2}{R} = N = \overline{CB}$ kujutab endast jõudu, mis on suunatud ringjoone tsentrisse, ning seda nimetatakse n o r m a a l - e h k t s e n t r i p e t a a l j õ u k s.

Niisiis tangentsiaaljõud

$$T = ma_t \tag{66}$$

ja tsentripetaaljõud

$$N = \frac{mv^2}{R}. \tag{67}$$

Mõlemad need jõud on jõu $P = \overline{CA}$ komponentjõud. Jõudu P väljendab ristküliku $ABCD$ diagonaal:

$$P = \sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (ma_t)^2} = m\sqrt{\frac{v^4}{R^2} + a^2_t}. \tag{68}$$

Kui liikumine toimub ühtlaselt, siis $a_t = 0$, millele vastavalt tangentsiaaljõud $T = 0$.

§ 108. Inertsijõud

Hakaku mingil hetkel paigalseisvale kehale A teatud jõuga mõjuma teine keha B. Varemkäsitletu põhjal teame, et see mõju annab kehale A vastava kiirenduse. Kuid inertsiseaduse põhjal püüab keha A säilitada oma paigalseisu, avaldades paigalseisu muutmisele teatud kindlat takistust. See takistus ilmneb mingi jõu kujul, millega keha A mõjub kehale B. Teisiti võime öelda, et keha B mõjumine kehale A põhjustab viimase vastumõjumise kehale B, kusjuures see vastumõju on suunalt vastupidine ning mehaanika kolmanda seaduse põhjal suuruselt võrdne algmõjuga.

Vastumõju, mida liikumapanevale kehale avaldab liikumapandav keha, nimetatakse inertsijõuks.

Öeldu põhjal võib teha järgmise tähtsa järelduse. Kui keha A saab kiirenduse keha B mõjul, siis jõud, mis väljendab seda mõju, on rakendatud kehale A; selle jõuga suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine inertsijõud on aga rakendatud kehale B.

Seega mõlemad need jõud on rakendatud erinevatele vastastikku mõjuvatele kehadele, mistõttu nad erinevad staatikas vaadeldud kahest ühele ja samale kehale rakendatud võrdsest ja vastassuunalisest jõust.

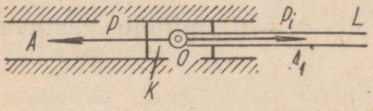
Lõpuks kriipsutame alla, et inertsijõudu ei esine, kui puudub kehale kiirendust andev jõud. Järelikult esimene mõjub ainult üheaegselt teisega.

§ 109. Inertsijõud masspunkti sirgjoonelisel liikumisel

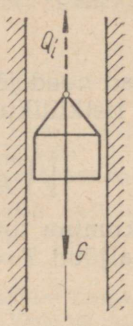
Oletame, et mööda sirgjoonelisi juhtpindu liigub varda L mõjul liugur K (joon. 134). Tähistades varda poolt liugurile avaldatava jõu tähega P, võime kirjutada $P = ma$, kus a on liuguri kiirendus. Jõud P kutsub esile liuguri poolt reaktsiooni OA_1,

mis on rakendatud vardale. Mehaanika kolmanda seaduse põhjal on see reaktsioon suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine jõuga P, olles järelikult suunalt liuguri kiirendusele vastupidine. Tähistades selle reaktsiooni tähega P_1, võime kirjutada, et $P_1 = -P = -ma$.

See on liuguri poolt arendatav inertsijõud ning on rakendatud vardale.



Joon. 134



Joon. 135

Liikugu mööda horisontaalseid ja sirgjoonelisi rööpaid vedur koos tendriga. Mingil hetkel suurenegu veduri poolt arendatav veojõud. Vastavalt sellele annab vedur tendrile mingi kiirenduse a. Veduri poolt tendrile mõjuv täiendav jõud on $P = ma$, kus m on tendri mass (tendrit vaatleme kui masspunkti, ilma et arvestaks rataste ja telgede pöörlemist). Järelikult veojõu suurenemise hetkel hakkab tendri poolt vedrule mõjuma inertsijõud $P = -ma$, mis on suunalt vastupidine jõuga P.

Näide 51. Tõstuki platvorm kaaluga $G = 300$ kg (joon. 135) laskub šahti kiirendusega 2 m/sek^2. Milline on tõmbejõud trossis selle kinnituskohas platvormiga?

Trossile mõjub ülalt alla platvormi kaaluga $G = 300$ kg võrdne jõud. Laskudes kiirendusega $a = 2$ m/sek^2 avaldab platvorm inertsijõudu $Q_1 = -ma = -\frac{300 \cdot 2}{g} = -61{,}2$ kg, mis on rakendatud trossile ning on suunatud alt üles.

Järelikult trossi tõmbav jõud

$$R = G - Q_1 = 300 - 61{,}2 = 238{,}8 \text{ kg}.$$

Kui platvorm ei laskuks, vaid tõuseks sama kiirendusega, oleks tõmbejõud trossis

$$R = G + Q_1 = 361{,}2 \text{ kg}.$$

§ 110. Inertsijõud masspunkti liikumisel mööda ringjoont. Tsentrifugaaljõud

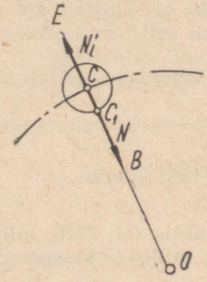
Eespool me nägime, et üldjuhul võib mööda ringjoont liikuvale masspunktile rakendatud jõu lahutada kaheks komponendiks: üheks jõuks T, mis on suunatud mööda liikumisringjoone puutujat, ja teiseks N, mis on suunatud mööda selle ringjoone raadiust. Tangentsiaaljõud T annab liikuvale masspunktile kiirenduse, mis määrab kiiruse muutumise suuruse, tsentripetaaljõud aga muudab kiiruse suunda.

Nagu ülalöeldust järeldub, mõjub kehale, mis vaadeldavale kehale annab tangentsiaal- ja tsentripetaalkiirenduse, üheaegselt kaks inertsijõudu: tangentsiaalinertsijõud $T_i = -T = -ma_t$ ja inertsijõud N_i, mis on võrdne ja vastupidine tsentripetaaljõuga.

Vaatleme teist inertsijõudu N_i lähemalt.

Liikugu kuulikese C tsenter ühtlaselt ümber telje O pöörleva kerge varda otsas mööda ringjoont (joon. 136). Kuna tangentsiaalkiirendus on antud juhul null, siis mõjub kuulikesele ainult tsentripetaaljõud N, mis paneb kuulikese liikuma kõverjooneliselt. See jõud on rakendatud kuulikesele punktis C_1 ning on suunatud tsentrisse O.

Samaaegselt jõuga N mõjub sellega võrdne ja vastupidine inertsijõud N_i, mis väljendab kuulikese vastupanu kiiruse suuna muutmisele inertsi mõjul saadavast suunast. See jõud on rakendatud vardale punktis C_1, on suunatud tsentrist välja mööda raadiust OC ning seda nimetatakse tsentrifugaaljõuks.



Joon. 136

Joon. 137

Kuna antud juhul me vaatleme kuulikest masspunktina, mis asetseb kuulikese raskuskeskmes C ning millesse on koondatud kogu kuulikese mass, siis võib mõlemad jõud N ja N_i kokkuleppeliselt kanda mööda nende mõjumissirget punkti C, nagu see on näidatud joonisel 137. Tuleb aga meeles pidada, et need jõud on rakendatud erinevatele kehadele, mistõttu nad ei tasakaalustu.

Seega **jõudu, millega ühtlaselt mööda ringjoont liikuv masspunkt inertsi tõttu mõjub kinnihoidvale kehale, nimetatakse tsentrifugaaljõuks.**

Tsentrifugaaljõud määratakse valemiga:

$$N_i = \frac{mv^2}{R}, \tag{69}$$

tangentsiaalinertsijõud aga valemiga:

$$T_i = ma_t. \tag{70}$$

Kasutades valemit (53), võime valemi (69) kirjutada kujul:

$$N_i = \frac{m}{R} \cdot \left(\frac{\pi Rn}{30}\right)^2 = \frac{\pi^2 n^2 mR}{900} \text{ kg}, \qquad (71)$$

kus m — masspunkti mass;
n — pöörete arv minutis;
R — masspunkti kaugus pöörlemisteljest meetrites.

Lõpuks võib selle valemi anda veel teisel kujul, avaldades massi kaalu G kaudu:

$$N_i = \frac{G}{9{,}81} \cdot \frac{\pi^2 n^2 R}{900} = 0{,}00112\, GRn^2. \qquad (72)$$

Küsimusi

1. Missugustel tingimustel on liikuva masspunkti tangentsiaalinertsijõud konstantse suurusega?
2. Vastata eelmisele küsimusele tsentrifugaaljõu seisukohast.

Näide 52. Treipingi tsentrite vahele on töötlemiseks kinnitatud ümmargune toorik läbimõõduga 60 mm; lõikekiiruseks on valitud 425 m/min. Milline tsentrifugaaljõud tekib tooriku pöörlemisel, kui selle raskuskese asetseb pöörlemisteljest 1,5 mm kaugusel[1] ning tooriku kaal on 1,6 kg?

Et kasutada valemit (72), tuleb määrata töödeldava detaili vajalik pöörete arv minutis.

Valemi (54) põhjal saame

$$n = \frac{1000v}{\pi D} = \frac{1000 \cdot 425}{3{,}14 \cdot 60} = 2257 \text{ p/min}.$$

Oletame, et spindli lähim pöörete arv minutis on 2250, mille ka valime.

Arvutame tsentrifugaaljõu valemiga (72), milles ekstsentrilisuse võtame meetrites, s. o. $R = 1{,}5$ mm $= 0{,}0015$ m;

$$N_i = 0{,}00112GRn^2 = 0{,}00112 \cdot 1{,}6 \cdot 0{,}0015 \cdot 2250^2 = 13{,}6 \text{ kg}.$$

Nagu näeme, ületab tsentrifugaaljõud antud juhul detaili enda kaalu $\frac{13{,}6}{1{,}6} = 8{,}5$ korda.

Selle nähte kahjulik mõju avaldub treipingi spindli laagrite kulumises.

Näide 53. Rong sõitis sirgjooneliselt teeosalt kurvi. Sirgjoonelisel liikumisel tasakaalustavad iga vaguni kaalu rööbaste reaktsioonid, kusjuures mõlemad rööpad on koormatud võrdselt. Sõitmisel kõverjoonelisele teeosale tekib tsentripetaaljõud N, mis sunnib vagunite raskuskeset liikuma kõverjooneliselt, üheaegselt sellega hakkab aga mõjuma ka tsentrifugaaljõud, mis on suunatud vaguni ratastelt rööbastele ning on rakendatud välisele rööpale ratta bandaaži ja rööpa kokkupuutepunktis.

Kui kaare tsenter asetseb paremal, siis tsentrifugaaljõud N_i mõjub vasakule, s. o. välisele rööpale (joon. 139, *a*). See jõud mõjub negatiivselt raudtee muldkehale (purustab seda) ja rongi liikumisele, suurendades hõõrdumist rataste ja rööbaste vahel, ning võib põhjustada isegi rongi väljajooksmise rööbastelt.

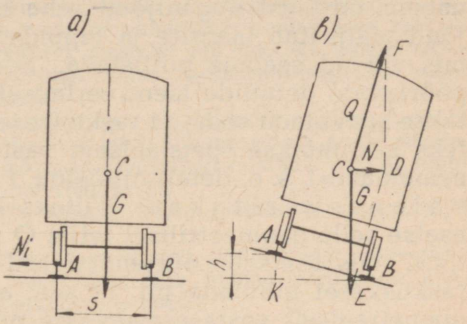
Et vältida tsentrifugaaljõu sellist kahjustavat toimet, paigutatakse väline rööbas sisemisest mingi suuruse h võrra kõrgemale (joon. 138, *b*). See kõrgus peab olema valitud selline, et muldkeha reaktsioon Q vagunitele oleks risti

[1] Raskuskeskme sellist kõrvalekaldumist nimetatakse ekstsentrilisuseks.

muldkeha ristlõikega, sest nimetatud tingimusel ei mõju rööbastele külgsurvet. Siit järgneb, et tsentripetaaljõud N peab olema võrdne raskuse G ja reaktsiooni Q resultantjõuga. Vaadeldes vagunit kui masspunkti, mis asetseb vaguni raskuskeskmes C, saame parallelogrammi $CEDF$, mille horisontaalselt (s. o. mööda pöörderaadiust) suunatud diagonaal $\overline{CD}$ väljendab tsentripetaaljõudu $N = \frac{mv^2}{R}$, kus m on vaguni mass ja h — kõverusraadius, küljed $\overline{CE}$ ja $\overline{CF}$ aga väljendavad vastavalt vaguni kaalu $G = mg$ ja muldkeha reaktsiooni.

Määrame nüüd suuruse h. Kolmnurkade CDF ja ABK sarnasusest järeldub, et $\frac{F}{s} = \frac{CD}{h}$, millest $h = \frac{CD \cdot s}{CF}$

(kus s on rataste vahe, joon. 138, *a*).



Joon. 138

Pidades silmas, et $\overline{CD}$ väljendab vastavas mastaabis tsentripetaaljõudu $N = \frac{mv^2}{R}$, $\overline{CF}$ aga reaktsiooni Q, mille võime määrata kui täisnurkse kolmnurga CDF hüpotenuusi, saame:

$$h = \frac{mv^2 s}{RQ} = \frac{mv^2 s}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{N^2 + G^2}} =$$

$$= \frac{mv^2 s}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{mv^2}{R}\right)^2 + (mg)^2}}.$$

Pärast algebralisi teisendusi saame lõplikult:

$$h = \frac{v^2 s}{Rg \sqrt{1 + \frac{v^4}{g^2 R^2}}}.$$

Praktikas kasutatavate v ja R väärtuste juures on liikme $\frac{v^4}{g^2R^2}$ väärtus väga väike (näiteks kui $v = 60$ km/h $= 16{,}6$ m/sek ja $R = 300$ m, siis $\frac{v^4}{g^2R^2} = 0{,}0089$), võrreldes ühega, mistõttu selle võib jätta arvestamata. Nimetatud juhul avaldub valem lihtsamalt:

$$h = \frac{v^2 s}{Rg}.$$

Nagu sellest valemist näeme, peab välimine rööbas asetsema sisemisest seda kõrgemal, mida suurem on rongi liikumiskiirus ning mida väiksem on kõverusraadius. See on ka täiesti mõistetav, sest nimetatud tingimustel on tsentrifugaaljõud suurem.

Tee projekteerimisel lähtutakse rongide mingist keskmisest kiirusest antud kõverjoonelisel teeosal ja kõverusraadiusest ning määratakse nende põhjal suurus h.

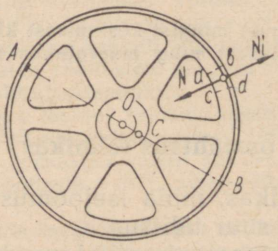
§ 111. Inertsijõudude osatähtsus tehnikas

Inertsijõul on tänapäeva tehnikas, mida iseloomustavad suured kiirused ja kiirendused, väga suur tähtsus.

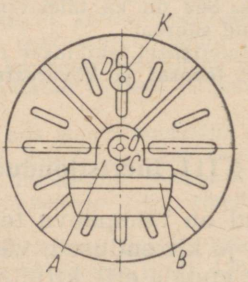
On raske endale ette kujutada masinat, millel puuduvad pöörlevad detailid. Pöörlemiskiiruste juures, mis on detailidel täna-

päeva masinates ning mis küünivad mitmekümne tuhande pöördeni minutis, on eriline tähtsus tsentrifugaaljõul. Näites 52 me nägime, et selle suurus võib ületada detaili kaalu mitmekordselt. Asetsegu masspunktina vaadeldava pöörleva keha raskuskese pöörlemisteljest kaugusel ϱ. Keha kaal on G. Pöörlemiskiirusel $n = 20\,000$ p/min on tsentrifugaaljõud valemi (72) põhjal $N_1 = 448\,000\, G\varrho$. Kui keha kaal $G = 1$ kg, ekstsentrilisus aga ainult 0,5 mm = 0,0005 m, siis tsentrifugaaljõud $N_1 = 224$ kg. Nagu näeme, on tsentrifugaaljõud keha kaalust 224 korda suurem. See jõud põhjustab laagrite ja tappide tugevat kulumist ning lööke, mis võivad seadme purustada. Seepärast pühendatakse kiirelt pöörlevate detailide tsentreerimisele suurt tähelepanu ning püütakse saavutada seda, et raskuskese asetseks pöörlemisteljel, milleks kasutatakse spetsiaalseid vastukaale või üleliigse materjali eemaldamist, s. o. detail nii-öelda tasakaalustatakse ehk balansseeritakse. Näiteks kui rihmaratta raskuskese ei asetse selle geomeetrilisel teljel O (joon. 139), vaid mingis punktis C, mis asetseb pöörlemisteljest kaugusel OC, siis me võime raskuskeset nihutada nii, et see asetseks teljel. Selleks tuleb diametraalselt vastasasetsevasse punkti A kinnitada lisaraskus, või samal läbimõõdul olevast punktist B eemaldada üleliigne materjal (näiteks puurides rihmaratta pöida kindla läbimõõduga ava). Detailide tasakaalustamine toimub spetsiaalsetel balansseerimispinkidel.

Treitagu treipingi plaanseibile nurgiku B abil kinnitatud laagrit A (joon. 140). Kui plaanseibi enda raskuskese asetseb spindli teljel, siis pärast nurgiku ning detaili kinnitamist plaanseibile nihkub selle raskuskese mingisse punkti C, s. o. nende detailide süsteem ei ole enam tasakaalus. Et nüüd spindli laagritele ei hakkaks mõjuma tsentrifugaaljõud, tuleb süsteem tasakaalustada. Selleks kinnitatakse punkte O ja C läbivale diameetrile vastukaal K. Tähistades nurgiku ja töödeldava detaili kaalu tähega G, raskuse K kaalu aga G_1, peavad nende kahe jõu momendid telje O suhtes olema suuruselt võrdsed, s. o. peavad rahuldama tingimust $G \cdot OC = G_1 \cdot OD$.



Joon. 139



Joon. 140

§ 112. Kordamisküsimusi

1. Rong hakkab jaamast liikuma, suurendades kiirust teatud hetkeni, misjärel jätkab liikumist ühtlaselt mööda sirgjoonelist horisontaalset teed. Vastata järgmistele küsimustele.

a) Millised jõud mõjuvad veduri ja üksikute vagunite haakidele ning kuidas on need jõud suunatud?

b) Kas need jõud on suuruselt võrdsed?

Vastused anda eraldi nii kiirendatud kui ka ühtlase liikumise perioodi kohta.

2. Rong sõidab teatud kindla kiirusega mööda sirgjoonelist horisontaalset teed. Millised jõud tekiksid üksikute vagunite vahel ning kuidas need oleksid suunatud, kui vagunitel puuduksid pidurid, masinist aga hakkaks järsku veduri pidurdama? Kas veduri juures ja rongi lõpus asetsevate vagunite vahel tekkivad jõud oleksid suuruselt võrdsed?

3. Liikuva rongi vagunis istuvad teineteise vastas kaks reisijat *A* ja *B*, kes toetuvad vastu kupee seina; reisija *A* istub liikumissuuna poole näoga, reisija *B* aga seljaga. Millised jõud mõjuvad kummalegi reisijale, kui: a) rongi liikumiskiirus suureneb ja b) rongi pidurdatakse?

4. Sprinter jooksis sirgjooneliselt; minnes kurvi jooksis ta rajalt välja. Kuidas seletada seda nähet?

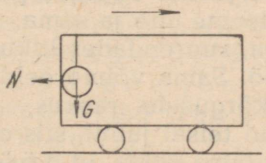
5. Vertikaalses tasapinnas pöörleb kerge varras (mille massi võib jätta arvestamata) selle otsa kinnitatud raskusega. Kas tõmme vardas on ühesugune nii raskuse ülemises kui ka alumises asendis?

§ 113. Harjutusi

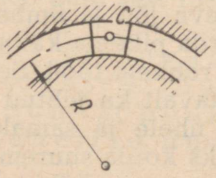
57. Mööda horisontaalseid sirgjoonelisi rööpaid kiirendusega $a = 0{,}1$ m/sek^2 liikuva vaguni tagumise seina juurde on riputatud kuul kaaluga $G = 10$ kg (joon. 141). Määrata kuuli poolt seinale avaldatav surve N.

58. Millise jõuga tõmbab rongi koossead, mis kaalub 1200 t, veduri haaki, kui liikumistakistus on 0,005 rongi kaalust ning rong liigub kiirendusega $a = 0{,}12$ m/sek^2?

59. 0,8 m pikkuse niidi otsa on seotud raskus kaaluga 0,25 kg. Hoides niiti teist otsa pidi käes, pannakse raskus pöörlema vertikaalses tasapinnas, kusjuures raskuse kiirus selle madalaimas asendis on 9,6 m/sek. Määrata tõmbejõud niidis raskuse kõige madalama ja kõrgema asendi puhul.



Joon. 141



Joon. 142

Joon. 143

60. Kõverjoonelises juhtsoones liigub kellaosuti pöörlemise suunas liugur kaaluga $G = 2$ kg (joon. 142). Määrata tangentsiaalinertsijõud ja tsentrifugaaljõud ning nende suunad, kui liuguri raskuskeskme kaugus tema poolt läbitava kaare tsentrist $R = 800$ mm, liuguri kiirus vaadeldaval hetkel on 250 p/min ning tangentsiaalkiirendus 1,2 m/sek^2.

61. Jalgrattur sõidab kurvi, mille raadius $R = 20$ m, kiirusega $v = 5$ m/sek. Millise nurga α peab moodustama jalgratta kesktasapind vertikaaliga, et jalgratta asend oleks püsiv?

Juhis. Jalgratta stabiilsuse tagamiseks peab maapinna reaktsioon asetsema jalgratta tasapinnas. Tsentripetaaljõud peab olema selle reaktsiooni ja jalgratta ning jalgratturi kaalu resultant.

Kolmeteistkümnes peatükk

TÖÖ JA VÕIMSUS

§ 114. Töö mõiste

Oletame, et me tõstsime raskuse mingile kõrgusele. Seda tehes me ületasime raskusjõu, s. o. keha kaalu. Täpselt samuti, paigutades raskust edasi horisontaaltasapinnal, peame ületama keha liikumistakistust — peamiselt hõõrdumist kokkupuutuvate pindade vahel.

Viilides tooriku mingit pinda, peame samuti kulutama jõudu laastude võtmiseks metallilt, s. o. me ületame osakestevaheliste jõudude poolt tekitatud takistusjõu. Analoogiliselt öeldule toimub ka metallide töötlemine näiteks höövelpingil.

Kõigil neil juhtudel esineb kehale mõjuv jõud ja keha ümberpaigutumine selle jõu mõjul. Nimetatud juhtudel me ütleme, et tehakse *mehaanilist tööd*.

Seega mehaaniliseks tööks on vaja jõudu ja liikumist.

§ 115. Töö mõõtmine

Nagu äsjaöeldust järeldub, võime tehtud töö suuruse üle otsustada liikumapaneva jõu ja ümberpaigutuse suuruse põhjal. Andes viilile kaks korda pikema käigu, teeme ühe ja sama surve juures ka kaks korda rohkem tööd. Seega, suurendades liikumise ulatust, suureneb vastavalt ka tehtud töö. Sama võime öelda ka jõu kohta. Kui tõsta ühele ja samale kõrgusele raskus, mille kaal ühel juhul on kaks korda suurem kui teisel juhul, siis on ka tehtud töö kaks korda suurem. Lühidalt võime öelda, et *töö on võrdeline jõu ja läbitud teepikkusega*.

Tähistades jõu tähega P ja keha poolt selle jõu mõjumise suunas läbitud teepikkuse tähega s, võime töö A avaldada kujul:

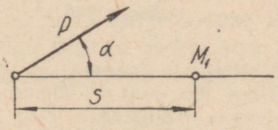
$$A = Ps. \tag{73}$$

Kuna tehnilises ühikute süsteemis mõõdetakse jõudu kilogrammides, teepikkust aga meetrites, siis töö avaldub kilogramm-meetrites; kui teepikkus väljendada sentimeetrites, siis mõõdetakse tööd kilogramm-sentimeetrites jne.

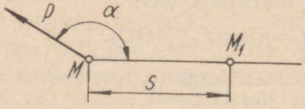
Füüsikalises ühikute süsteemis mõõdetakse jõudu, nagu me nägime, düünides, läbitud teed aga sentimeetrites; vastavalt sellele avaldub töö düünsentimeetrites ehk ergides. Sageli väljendatakse tööd džaulides (1 džaul on 10^7 ergi).

Võrrandit (73) kasutades tuleb aga silmas pidada, et see kehtib juhul, kui jõu mõjumissirge ja keha liikumissuund ühtivad. Vaatleme nüüd keerukamat juhtu, mil see tingimus pole täidetud.

Liikugu masspunkt mööda sirgjoonelist trajektoori asendist M



Joon. 144



Joon. 145

asendisse M_1 (joon. 144) suuruselt ja suunalt konstantse jõu mõjul, mis moodustab trajektooriga nurga α. Sel juhul nimetatakse jõu poolt tehtud tööks jõu ja läbitud teepikkuse ning nurga α koosinuse korrutist, s. o.

$$A = Ps \cos \alpha. \tag{74}$$

Kuna nurga vähenedes selle koosinus suureneb, siis on töö seda suurem, mida väiksema nurga moodustab jõu mõjumissirge liikumissuunaga. Kui $\alpha = 0°$, siis $\cos \alpha = \cos 0° = 1$ ja valem (74) taandub valemiks (73). Kui jõu mõjumissirge on risti liikumissuunaga, siis $\alpha = 90°$ ja $\cos \alpha = 0$, millele vastavalt võrrand (74) annab $A = Ps \cdot 0 = 0$, s. o. antud juhul jõud P tööd ei tee. See on täiesti mõistetav, sest mingit ümberpaigutust jõu suunas ei ole.

Nii näiteks mingi keha liikumisel horisontaaltasapinnas on keha raskusjõu poolt tehtud töö null, sest raskusjõud mõjub risti liikumissuunale.

Seega sirgjooneliselt liikuvale masspunktile rakendatud konstantse jõu poolt tehtud töö on võrdne jõu ja punkti poolt läbitud teepikkuse ning nendevahelise nurga koosinuse korrutisega.

Kuna takistusjõud on suunalt liikumisele vastupidine, siis selle poolt tehtud töö võetakse märgiga „miinus", s. o. see loetakse

negatiivseks. Nii on näiteks negatiivne liikumissuunaga nürinurka α moodustava jõu poolt tehtud töö (joon. 145).

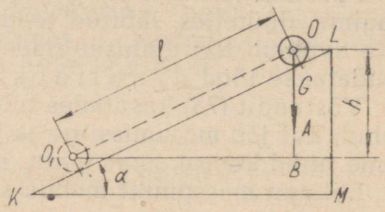
Näide 54. Pump annab minutis 100 l vett 20 m kõrgusele. Kui suur on pumba poolt 1 tunni kestel tehtud töö?

Pumba töö kulutatakse raskusjõu ületamiseks. Vee tõstmisel tasakaalustab selle kaalu pumba poolt tekitatav jõud. Vee poolt läbitud teepikkus on 20 m, kusjuures veele rakendatud jõud on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine selle kaaluga. Seetõttu on pumba poolt minutis tehtud töö $100 \cdot 20 = 2000$ kgm, tunnis tehtud töö aga $2000 \cdot 60 = 120\,000$ kgm.

Näide 55. Vabakslastud kuulike veereb mööda kaldpinda asendist O asendisse O_1 (joon. 146). Määrata raskusjõu poolt tehtud töö teepikkusel l.

Kuulike veereb omakaalu G mõjul, mida väljendab liikumissuunaga nurka O_1OA moodustav vektor $\overline{OA}$. Järelikult selle jõu poolt tehtud töö teekonnal OO_1

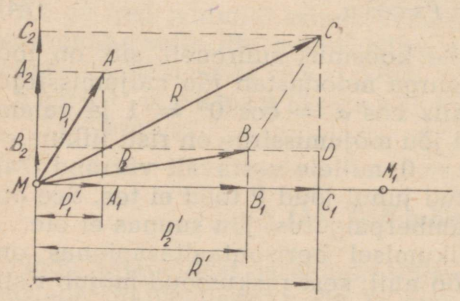
$$A = Gl\cos \angle AOO_1.$$



Joon. 146

Tähistades kaldpinna tõusunurga MKL tähega α, näeme, et $\angle AOO_1 = 90° - \alpha$ ja jõu G poolt tehtud töö $A = Gl\cos(90° - \alpha) = Gl\sin\alpha$. Täisnurksest kolmnurgast OO_1B näeme, et $OB = l\sin\alpha$. Tähistades OB, s. o. kõrguse, mille võrra kuulikese raskuskese laskus paigutumisel asendist O asendisse O_1, tähega h, saame $A = Gl\sin\alpha = Gh$, s. t. raskusjõu töö on võrdne kuulikese kaalu ja tema raskuskeskme alg- ning lõppasendi nivoode vahe korrutisega.

§ 116. Resultantjõu töö



Joon. 147

Vaatleme juhtu, kus masspunktile mõjub üheaegselt mitu konstantset jõudu. Olgu punkti M, mis liigub mööda sirgjoonelist trajektoori MM_1 (joon. 147), rakendatud jõud P_1 ja P_2. Lahutame kummagi jõu kaheks komponendiks, milledest ühe siht ühtib liikumissihiga (vektorid $\overline{MA_1}$ ja $\overline{MB_1}$) ja teine on sellega risti (vektorid $\overline{MA_2}$ ja $\overline{MB_2}$). Ehitanud mõlemale jõule parallelogrammi $MACB$, leiame resultantjõu R, mille lahutame samuti kaheks komponendiks nimetatud sihtides (vektorid $\overline{MC_1}$ ja $\overline{MC_2}$). Vaadeldes vektoreid $\overline{MA_2}$, $\overline{MB_2}$ ja $\overline{MC_2}$, tuleme järeldusele, et kõigi nende poolt tehtud töö on null, sest

nad moodustavad liikumissihiga nurga 90°. Seega jõudude P_1, P_2 ja R poolt tehtud töö leitakse nende horisontaalsihiliste komponentide ning läbitud teepikkuse $MM_1 = s$ korrutisena.

Niisiis jõu P_1 poolt tehtud töö $A_{P_1} = MA_1 \cdot s = P'_1 s$ ja jõu P_2 poolt tehtud töö $A_{P_2} = MB_1 \cdot s = P'_2 s$.

Liites need võrdused liikmete kaupa, saame:

$$A_{P_1} + A_{P_2} = P'_1 s + P'_2 s = (P'_1 + P'_2)s. \qquad \text{(a)}$$

Resultantjõu R töö $A_R = MC_1 \cdot s = R's$. Jooniselt näeme, et $MC_1 = MB_1 + B_1C_1 = MB_1 + BD$. Kuid täisnurksete kolmnurkade BCD ja MAA_1 võrdsusest järeldub, et $BD = MA_1$, mistõttu $MC_1 = MB_1 + MA_1$ ja resultantjõu R töö $A_R = (P'_1 + P'_2)\, s$.

Võrreldes seda võrrandit võrrandiga (a), saame, et

$$M_R = A_{P_1} + A_{P_2}.$$

Kui meil oleks olnud kahe asemel mistahes meelevaldne arv jõude, siis neid järjekorras liites oleksime tulnud samale tulemusele. Seejuures peab aga meeles pidama, et juhul, kui mingi jõud teeb negatiivset tööd, tuleb see töö võtta summasse märgiga „miinus".

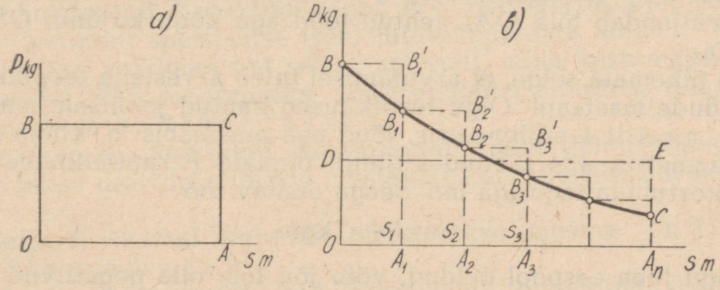
Seega mistahes arvu konstantsete jõudude resultantjõu töö tema rakenduspunkti teataval nihkumisel on võrdne komponentjõudude tööde algebralise summaga samal nihkumisel.

§ 117. Töö graafiline kujutamine

Jõu poolt tehtud töö arvutamine muutub lihtsamaks, kui võtta kasutusele graafiline meetod.

Vaatleme algul lihtsaimat juhtu, kus jõud jääb konstantseks nii suuruselt kui ka suunalt.

Tõmbame kaks omavahel ristuvat telge OS ja OP (joon. 148, a) ning kanname valitud mastaabis esimesele teljele keha poolt

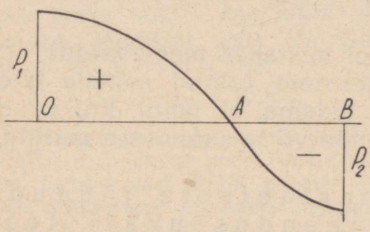


Joon. 148

läbitud teepikkust s väljendava lõigu OA, teisele teljele aga sellel teepikkusel kehale liikumise suunas mõjuvat jõudu P väljendava lõigu OB. Ehitanud nendele lõikudele ristküliku $OBCA$, saame, et selle pindala $OB \cdot OA$ väljendab teatud mastaabis jõu P poolt teekonnal s tehtud tööd.

Oletame nüüd, et jõud ei jää teepikkusel s konstantseks, vaid muudab oma suurust ja suunda (joon. 148, b).

Olgu jõu suurus alghetkel P_0 ning moodustagu ta liikumissuunaga nurga α_0; mingi väikese ajavahemiku pärast, mille kestel keha paigutus edasi suuruse s võrra, olgu jõu suurus P_1 ning moodustagu ta nüüd liikumissuunaga nurga α_1; mingil järgmisel hetkel olgu jõu suurus P_2 ning moodustagu ta liikumissuunaga nurga α_2, keha edasipaiknemine sellel ajavahemikul olgu aga s_2 jne.



Joon. 149

Vastavalt sellele, kandnud ordinaatteljele valitud mastaabis jõu $P_0 \cos \alpha_0$ suurust väljendava lõigu OB, tõmbame abstsissteljega paralleelse sirge BB_1' kuni lõikumiseni punktist A_1 tõmmatud ristsirgega; järgnevalt kanname sellele ristsirgele jõudu $P_1 \cos \alpha_1$ väljendava lõigu A_1B_1, tõmbame sirge B_1B_2' kuni lõikumiseni punktist A_2 püstitatud ristsirgega jne.

Kui teepikkuste s_1, s_2, s_3 kestel jõud jääksid konstantseteks, siis nende jõudude poolt nimetatud ümberpaigutustel tehtud töid väljendaksid ristkülikute $OBB_1'A_1$, $A_1B_1B_2'A_2$, $A_2B_2B_3'A_3$ jne. pindalad. Kuid nimetatud jõudude suurus pidevalt muutub, mistõttu tegelik töö on järelikult väiksem. Mida väiksemad on teepikkused s_1, s_2, s_3 jne., seda vähem erineb iga ristküliku pindala igal ümberpaigutusel tehtud tegelikku tööd väljendavast pindalast, s. o. punkt B_1' läheneb punktile B_1, punkt B_2' — punktile B_2, punkt B_3'— punktile B_3 jne. Järelikult, tõmmates läbi punktide B, B_1, B_2, B_3 jne. sujuva kõverjoone, jõuame järeldusele, et jõudude tööd teepikkusel s_1 väljendab kujundi OBB_1A_1 pindala, tööd teepikkusel s_2 — kujundi $A_1B_1B_2A_2$ pindala jne., kogu teepikkusel s, mida väljendab lõik OA_n, tehtud tööd aga kogu kujundi $OBCA_n$ pindala.

On pikemata selge, et arvutamisel tuleb arvestada teepikkuste ja jõudude mastaapi. Olgu teepikkused kantud joonisele mastaabis m meetrit 1 millimeetris, jõud aga mastaabis n kilogrammi 1 millimeetris, siis saadud kujundi pindala F ruutmillimeetrites tuleb korrutada teguriga mn. Seega otsitav töö

$$A = Fmn \text{ kgm.}$$

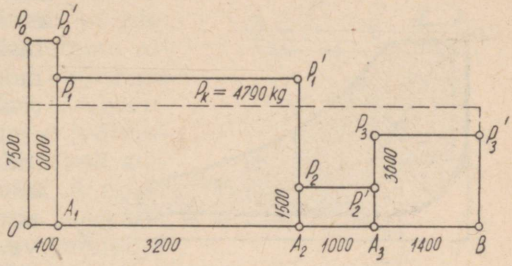
Nagu juba eespool öeldud, võib jõu töö olla negatiivne (näiteks takistusjõududel, mis on suunalt liikumisele vastupidised).

Seepärast on hakatud positiivseid jõudusid (suunatud liikumise poole) kandma abstsissteljest ülespoole, negatiivseid aga alla, nagu see on näidatud joonisel 149. Sellisel juhul väljendab kujundi pind, mis paikneb teljest kõrgemal, positiivset tööd, teljest madalamal olev pind aga negatiivset.

Jagades kujundi $OBCA_n$ pindala (joon. 148) alusega OA_n, saame lõigu OD, mis on ühtlasi antud kujundiga pindvõrdse ristküliku $ODEA_n$ kõrgus. See lõik väljendab mingit keskmist jõudu $P_k = \frac{w}{s}$, mis, jäädes konstantseks, sooritab samasuure töö kui tegelik muutuv jõudki.

Näide 56. Rongi liikumahakkamisel oli veduri veojõud 7500 kg; pärast rongi poolt esimese 400 m läbimist vähenes veojõud väga lühikese ajavahemiku kestel väärtuseni 6000 kg, millega rong läbis veel 3200 m; edasi järgnes 1000 m pikkune teelang, millel veojõud moodustas 1500 kg, ning siis tõus, kus vedur hakkas arendama veojõudu 3600 kg, millega rong läbis viimased 1400 m.

Kujutada veduri poolt tehtud töö graafiliselt ning leida veojõu keskmine väärtus nimetatud teel.



Joon. 150

Võttes mastaapideks 100 m — 1 mm ja 300 kg — 1 mm, kanname abstsissteljele veduri poolt läbitud teed, ordinaatteljele aga veojõud (joon. 150). Tulemusena saadud kujundi $OP_oP_o'P_1P_1'P_2P_2'P_3P_3'BO$ pindala väljendabki tehtud tööd. See pindala koosneb üksikute ristkülikute $OP_oP_o'A_1 + A_1P_1P'_1A_2 +$ jne. pindalade summast. Korrutades leitud pindala (mm^2) töö mastaabiga, s. o. $100 \cdot 300 = 30000$, saame tehtud töö kilogramm-meetrites, mis antud juhul on $A = 28\,740\,000$ kgm. Jagades selle töö kogu teepikkusega $s = 6000$ m, saame keskmise veojõu $P_o = \frac{28\,740\,000}{6000} = 4790$ kg.

§ 118. Soojusjõumasina indikaatordiagramm

Tehnikas töö diagrammi sageli ei konstrueerita, vaid see saadakse vahetult spetsiaalse isekirjutava aparaadi abil.

Näitena vaatleme üht sellist aparaati, mida kasutatakse auru või gaasi rõhu mõõtmiseks soojusmootori silindris ning mida nimetatakse indikaatoriks.

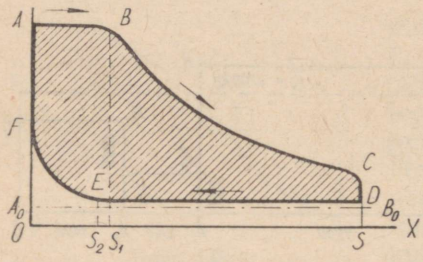
Indikaator joonestab automaatselt paberilehele gaasirõhu muutumise mootori silindris, vastavalt kolvi meelevaldsele asendile.

Selliselt saadud kujundit nimetatakse masina indikaatordiagrammiks.

Joonisel 151 on näidatud aurumasina nimetatud diagramm. Kolvikäik vastab teatud kindlas mastaabis lõigu OS pikkusele.

Auru rõhk kolvi töökäigu (antud juhul vasakult paremale) vältel ei ole konstantne.

Kolvi liikumahakkamisel vasakpoolsest algasendist ehk nn. surnud seisust väljendab auru rõhku kilogrammides ühele ruutsentimeetrile lõik *OA*. Kolvikäigu osal, mida kujutab lõik OS_1, toimub värske auru sisselaskmine konstantsel rõhul, mis on ligikaudu võrdne algrõhuga *OA*; vastavalt sellele on ka sirge *AB* ligikaudu paralleelne *Ox*-teljega. Kolvi asendis S_1, millele diagrammil vastab punkt *B*, lõpeb täide, s. o. katkestatakse auru sisselaskmine silindrisse, misjärel silindri vasakusse ossa jäänud aur hakkab paisuma, sooritades tööd vastavalt kolvi edasisele liikumisele. Auru rõhk seejuures langeb. Kolvi äärmises parempoolses asendis *S* väljendab auru rõhku ordinaat *SC*, kusjuures kolvi jõudmisel sellesse asendisse algab auru väljalaskmine silindrist (kas atmosfääri või kondensaatorisse). Seejärel kolb, muutes oma liikumissuunda, hakkab liikuma paremalt vasakule, auru väljavool jätkub ning auru rõhk silindri vaadeldavas (s. o. vasakus) pooles jääb konstantseks, kusjuures seda väljendab ordinaat *SD*, mis mõnevõrra ületab atmosfääri või kondensaatori rõhu. Asendis *S* katkestatakse auru väljalaskmine, kolb aga jätkab liikumist vasakule, surudes silindrisse jäänud auru kokku, mistõttu viimase rõhk tõuseb. Edasi avatakse auru sisselaskeorgan ning kolvi jõudmisel vasakpoolsesse äärmisesse asendisse mõjub silindri vasakus pooles jälle auru täisrõhk, mida väljendab ordinaat *OA*. Sirge *Ox* on nulljoon, millest ülespoole loetakse igale hetkele vastavat aururõhku kg/cm² väljendavaid ordinaate.



Joon. 151

Nagu eespoolöeldust järgneb, mõõdetakse auru tööd kolvi liikumisel vasakult paremale kujundi *OABCSO* pindalaga, kolvi liikumisel paremalt vasakule aga kujundi *DEFOSD* pindalaga (kusjuures see pindala väljendab negatiivset tööd, sest auru rõhk on suunatud liikumisele vastupidi). Järelikult kolvi edasi-tagasi käigul (s. o. vända ühe pöörde vältel) sooritatud tööd kolvi ristlõike 1 cm² kohta (sest ordinaadid väljendavad rõhkusid 1 cm²) kujutab nende kahe pindala vahe, s. o. kujundi viirutatud pind *ABCDEFA*. Mõõtnud selle pindala ja korrutanud viimast vastava mastaabiga, saame auru töö kolvi ristlõikepinna 1 cm² kohta. Korrutades leitud töö kolvi pindalaga, saame auru poolt silindri ühes pooles sooritatud kogutöö vända ühe pöörde vältel.

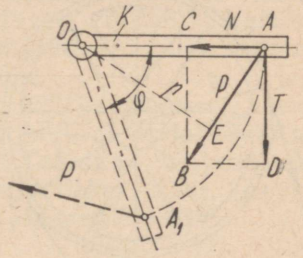
Selle töö võib leida ka teisiti. Leides eespoolkirjeldatud viisil

auru keskmise indikaatorrõhu ja korrutades selle kolvipinna ning kolvikäiguga, saame auru töö vända ühe pöörde vältel.

§ 119. Konstantse suurusega jõu töö pöörleval liikumisel

Olgu ümber telje O pöörlevale vardale K (joon. 152) punktis A rakendatud konstantse suurusega jõud P, mis mõjub pöörlemistasapinnas ning moodustab varda OA pikiteljega konstantse nurga OAB. Lahutame selle jõu kaheks omavahel ristuvaks komponendiks: radiaalseks N, mis on suunatud pöörlemistelje poole, ja puutujasihiliseks (tangentsiaalseks) T, mis on suunatud rakenduspunkti A poolt kujundatava ringjoone puutujat mööda.

Esimene komponent pööravat toimet ei avalda, sest ta lõikab pöörlemistelge. Seega toimub pöörlemine ainult komponendi T mõjul. Pöördugu varras ümber telje O asendist OA asendisse OA_1, s. o. pöördenurga φ (väljendatuna kraadides) võrra. Vastavalt sellele on jõu T rakenduspunkti A poolt läbitud tee võrdne kesknurga haarade vahele raadiusega $OA = R$ tõmmatud kaare AA_1 pikkusega.



Joon. 152

Selle kaare pikkus:

$$s = \frac{2\pi R\varphi}{360} = \frac{\pi\varphi}{180} R.$$

Kuna jõud T on kogu aeg risti pöörlemisraadiusega ning moodustab punkti A liikumissihiga nurga, mis võrdub nulliga, siis valemis (74) $\cos\alpha = 1$ ning järelikult jõu poolt kaare s läbimisel tehtud töö

$$A = Ts = \frac{\pi\varphi}{180} RT. \qquad \text{(a)}$$

Pöördume nüüd uuesti antud jõu P juurde, mida väljendab vektor $\overline{AB}$. Kirjutame selle jõu momendi avaldise telje O suhtes; et seda momenti määrata, tõmbame punktist O ristsirge antud jõu mõjumissirgele. Sel juhul lõik $OE = p$ kujutab momendi õlga ning moment ise

$$M_p = Pp.$$

Seda momenti nimetatakse pöörde- (või väände-) momendiks.

Kuna täisnurksed kolmnurgad ABD ja AOE on sarnased (teravnurgad BAD ja AOE ristuvate külgede vahel on võrdsed), võime kirjutada:

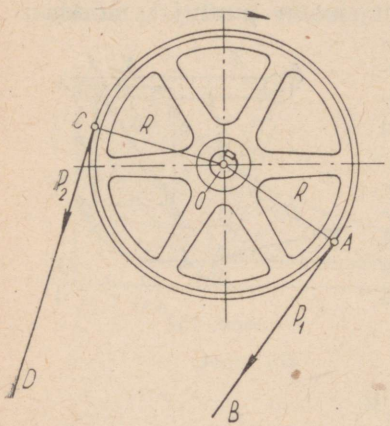
$$\frac{P}{T} = \frac{OA}{OE} \text{ või } \frac{P}{T} = \frac{R}{p}, \text{ millest } TR = Pp.$$

Tehes asenduse võrrandis (a), saame jõu P poolt tehtud töö rakenduspunkti teekonna s ulatusel:

$$A = \frac{\pi\varphi}{180} Pp \text{ ehk } A = \frac{\pi}{180} M_P \varphi,^* \qquad (75)$$

s. o. ümber liikumatu telje pöörlevale kehale rakendatud konstantse suurusega jõu poolt tehtud töö on võrdne pöördemomendi, pöördenurga (kraadides) ja teguri $\frac{\pi}{180}$ korrutisega.

Nagu järeldusest nähtub, tuleb kehale rakendatud mitme jõu korral pöördemomendi all mõista pöörlemistelje suhtes võetud kõigi jõudude momentide algebralist summat.



Joon. 153

Näide 57. Võllile kinnitatud rihmaratas pannakse pöörlema noolega näidatud suunas (joon. 153) rihma abil, mida käitab teine, veelav rihmaratas (pole joonisel näidatud). Rihma mahajooksev haru, olles tõmbavaks, mõjub jõuga $P_1 = 150$ kg, rihma pealejooksvat haru CD aga tõmmatakse jõuga $P_2 = 80$ kg. Määrata töö, mis need jõud tegid rihmaratta ühe pöörde vältel, kui rihmaratta läbimõõt $D = 800$ mm.

Rihmaratta ühel täispöördel on pöördenurk $\varphi = 360°$. Võttes jõudude P_1 ja P_2 momendid pöörlemistelje suhtes, saame võrrandi (75) järgi:

$$A = \frac{\pi}{180} (P_1 R - P_2 R) \cdot 360 =$$
$$= 2\pi (150 - 80) \cdot 0{,}4 = 176 \text{ kgm}.$$

§ 120. Võimsus ja selle mõõtmine

Rääkides jõu tööst me ei arvestanud aega, mille kestel töö tehti. Seega ei iseloomusta töö iseendast veel jõu mõju efektiivsust. Väiksem jõud, mõjudes pikemat aega, võib teha rohkem tööd kui suurem jõud, mis mõjub lühemat aega. Igasuguse masina töötamisel huvitab meid selle võime teha ajaühikus, näiteks ühes sekundis, mingi kindel hulk tööd; mida suurem on tehtud töö, seda tootlikumalt masin töötab; selle sekundilise töö suuruse järgi võime me masinaid võrrelda, lähtudes nende poolt arendatavast mehaanilisest efektist. Seepärast kasutatakse mehaanikas kõrvuti töö mõistega ka võimsuse mõistet. Võimsust mõõdetakse ühes sekundis tehtud tööga. Kui jõud t sekundi kestel tegi tööd

* Kui pöördenurk on väljendatud radiaanides, siis võrrand avaldub kujul: $A = M_P \varphi$.

A kgm, siis võimsus võrdub tehtud töö ja selleks kulutatud aja jagatisega, s. o. $\frac{A}{t}$.

Oletame, et töö, mida jõud teeb võrdsetes ajavahemikes, ei ole konstantne suurus. On selge, et siis ka võimsus pole erinevatel hetkedel ühesugune; sel juhul jagatis $\frac{A}{t}$ kujutab endast k e s k m i s t v õ i m s u s t ajavahemikus t.

Mida väiksem võtta ajavahemik, seda lähedasem on keskmine võimsus hetkvõimsusele.

Nagu nägime, on töö ühikuks kilogramm-meeter, järelikult võimsuse ühikuks on $\frac{\text{kgm}}{\text{sek}} = \text{kgmsek}^{-1}$.

Tehnikas on hakatud kasutama suuremat võimsuse ühikut, mida nimetatakse h o b u j õ u k s (HJ) ja mis võrdub 75 kgm/sek.

Seega võimsuse väljendamiseks hobujõududes tuleb võimsus, mis on väljendatud kgm/sek, jagada 75-ga.

Mõõtühikute füüsikalises süsteemis (CGS-süsteemis) kasutatakse võimsuse mõõtühikuna vatti, mis kujutab endast sekundis tehtud tööd, väljendatuna džaulides. Tehnikas väljendatakse võimsust selles süsteemis tavaliselt kilovattides (kW). Arvutamine annab seose: 1 kW = 1,36 HJ ja 1 HJ = 0,736 kW.

Küsimusi

1. Mille poolest erineb võimsus tööst?
2. Kas jõu rakenduspunkti liikumiskiirus mõjutab võimsuse suurust?

§ 121. Võimsus keha ühtlasel kulgeval liikumisel

Kui keha liigub ühtlaselt ja kulgevalt ning talle on rakendatud jõudude süsteem, siis vastavalt § 98 öeldule on see jõudude süsteem tasakaalus. Liikugu keha edasi teepikkuse s võrra. Sel juhul on antud süsteemi ühe jõu P poolt tehtud töö $A = Ps \cos \alpha$.

Et määrata sellele tööle vastavat võimsust, peame nimetatud töö jagama ajaga, väljendatuna sekundites. Tähistades võimsuse tähega N, saame:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{Ps \cos \alpha}{t}.$$

Kuna $\frac{s}{t}$ kujutab kiirust, siis juhul, kui s on väljendatud meetrites, saame:

$$N = Pv \cos \alpha \frac{\text{kgm}}{\text{sek}}, \qquad (76)$$

s. o. jõu P (kg) võimsus (kgm/sek) on kiiruse v (m/sek) korral i g a l h e t k e l v õ r d n e j õ u, k i i r u s e j a j õ u n i n g l i i k u m i s s u u n a v a h e l i s e n u r g a k o o s i n u s e k o r r u t i s e g a.

Avaldades võimsuse hobujõududes, saame:

$$N = \frac{Pv \cos \alpha}{75} \text{ HJ.} \qquad (77)$$

Näide 58. Määrata pikihöövelpingi töölaua töökäiguks vajalik võimsus, kui lõiketakistus (lõikejõud) $P = 800$ kg ja töölaua liikumiskiirus (lõikekiirus)

$$v = 24 \frac{\text{m}}{\text{min}}.$$

Kasutame valemit (77), milles tuleb võtta $\cos \alpha = 1$, sest jõu mõjumissirge ühtib kiiruse suunaga:

$$N = \frac{800 \cdot 24}{60 \cdot 75} = 4{,}3 \text{ HJ.}$$

Nimetajasse on asetatud kordaja 60 sellepärast, et kiirus tuleb võtta $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$, on aga antud $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.

§ 122. Võimsus keha ühtlasel pöörleval liikumisel

Kui keha pöörleb, siis avaldub võimsus nurkkiiruse kaudu, sest antud juhul oleneb töö pöördenurgast.

Olgu ühtlaselt pöörlev keha 1 sekundi kestel pöördunud nurga φ võrra. Ühtlasel pöörlemisel kehale rakendatud jõudude momendid tasakaalustuvad. Kui mingi jõu pöördemoment on M_p, siis selle poolt ühes sekundis tehtud töö

$$\frac{A}{t} = \frac{\pi}{180} M_p \frac{\varphi}{t}.$$

Kuna pöörlemine toimub ühtlaselt, siis selle võrduse vasak pool väljendab võimsust, suurus $\frac{\varphi}{t}$ aga pöörlemise nurkkiirust ω. Seega otsitav võimsus N on:

$$N = \frac{\pi}{180} M_p \omega. \qquad (78)$$

Selgitame, millistes ühikutes see avaldub. Juhul kui jõud on väljendatud kilogrammides, pöörlemisraadius aga meetrites, nagu neid tavaliselt väljendatakse, siis pöörde- (väände-) moment saadakse kilogramm-meetrites; nurkkiiruse dimensioon on teatavasti $\frac{\text{kraad}}{\text{sek}}$; arvul 180 on k r a a d i dimensioon; järelikult võimsuse dimensioon on:

$$\frac{\text{kgm}}{\text{kraad}} \cdot \frac{\text{kraad}}{\text{sek}} = \frac{\text{kgm}}{\text{sek}},$$

s. o. sama dimensioon, mis kulgeva liikumise korralgi.

Kui väljendada võimsus hobujõududes, saame:

$$N = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{M_p \omega}{75} \text{ HJ.} \qquad (79)$$

Lõpuks, pöörleva jõu võimsus, kui jõud on suunatud mööda tema rakenduspunkti poolt kujundatud ringjoone puutujat, on võrdne jõu ja selle rakenduspunkti kiiruse (joonkiiruse) korrutisega:

$$N = Pv \text{ kgm/sek} = \frac{Pv^*}{75} \text{ HJ}, \qquad (80)$$

kusjuures kiirus v peab olema antud $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$.

Näide 59. Määrata rihma poolt rihmarattale üleantav võimsus näites 57 toodud andmetel, kui rihmaratas teeb 180 p/min.

Viidatud näites leiti, et rihmarattale antakse selle ühe pöörde vältel, mis vastab $\frac{1}{180}$ min $= \frac{1}{3}$ sek, üle töö $W = 176$ kgm.

Järelikult seejuures arendatav võimsus

$$N = \frac{176}{1/3 \cdot 75} \approx 7{,}1 \text{ HJ}.$$

Näide 60. Milline ringjõud kantakse üle rihmarattale läbimõõduga $D = 600$ mm, kui saadava võimsuse $N = 6$ HJ juures rihmaratta pöörlemiskiirus $n = 240$ p/min?

Määrame võrrandiga (79) pöördemomendi:

$$M_p = \frac{180 \cdot 75N}{\pi\omega}.$$

240 pöörde korral minutis on valemi (52) põhjal nurkkiirus $\omega = 6n = 6 \cdot 240 = 1440 \frac{\text{kraadi}}{\text{sek}}$. Järelikult pöördemoment $M_p = \frac{180 \cdot 75 \cdot 6}{\pi \cdot 1440} \approx 17{,}91$ kgm; siis $P = \frac{2M_p}{0{,}6} = \frac{17{,}91}{0{,}3} = 59{,}7$ kg.

Näide 61. Määrata jõu P_z võimsus näites 5 (§ 20, joon. 16) toodud operatsiooni täitmisel, kui $P_z = 400$ kg, töödeldava detaili läbimõõt $D = 80$ mm ja pöörete arv minutis $n = 477$.

Töödeldava detaili ringkiirus (lõikekiirus) on valemi (53) põhjal:

$$v = \frac{\pi Dn}{1000} = \frac{\pi \cdot 80 \cdot 477}{1000} \frac{\text{m}}{\text{min}} = 120 \frac{\text{m}}{\text{min}} = \frac{120}{60} \frac{\text{m}}{\text{sek}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{sek}};$$

$$N = \frac{P_z v}{75} = \frac{400 \cdot 2}{75} = 10{,}65 \text{ HJ}.$$

§ 123. Pöördemomendi, ülekantava võimsuse ja pöörete arvu vaheline seos

Arvutustes, mis on seotud võimsuse määramisega pöördemomendi järgi, on otstarbekam kasutada võrrandit (79) muudetud kujul, asendades selles nurkkiiruse pöörete arvuga minutis.

---

* Selle valemi võib tuletada ka valemist (79) ja nimelt:

$$\frac{\pi}{180} \cdot \frac{M_p}{75} \cdot \omega = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{PR}{75} \cdot \omega = \frac{\pi R\omega}{180} \cdot \frac{P}{75} = \frac{vP}{75},$$

kus R on jõu P rakenduspunkti kaugus pöörlemisteljest; v — jõu rakenduspunkti joonkiirus.

Asetades valemis (79) nurkkiiruse ω asemele tema väärtuse valemist (52), s. o. $\omega = 6n$, saame $N = \frac{6\pi n}{180 \cdot 75} M_p = \frac{\pi n}{2250} M_p$, millest $M_p = \frac{2250}{\pi} \cdot \frac{N}{n}$. Võttes $\pi = 3{,}1416$, saame lõplikult

$$M_p = 716{,}2 \frac{N}{n} \text{ kgm.} \tag{81}$$

Kriipsutame alla, et nagu nähtub kogu eelnevast tuletuskäigust, on selle valemi järgi saadud pöördemoment väljendatud kilogramm-meetrites. Kui pöördemoment väljendada kilogramm-sentimeetrites, siis see valem avaldub kujul

$$M_p = 71\,620 \frac{N}{n} \text{ kgcm.} \tag{82}$$

Teades nende võrranditega seotud kolmest suurusest kaht, võime määrata kolmanda.

Nii näiteks, kui on teada pöördemoment ja pöörete arv minutis, võime määrata tarbitava võimsuse:

$$N = \frac{M_p n}{716{,}2} \text{ HJ.} \tag{83}$$

Kui on teada üleantav võimsus ja pöördemoment, võib leida pöörete arvu minutis:

$$n = \frac{716{,}2\,N}{M_p}, \tag{84}$$

kusjuures M_p tuleb mõlemas valemis võtta kilogramm-meetrites.

Jõudu, mis on rakendatud pöörleva ümmarguse detaili (näiteks rihmaratta) pinnale ja mis tekitab pöördemomendi, nimetatakse r i n g j õ u k s.

Küsimusi

1. Millise kuju võtab valem (81), kui moment väljendada kgmm-tes?
2. Konstantse pöördemomendi juures suurenes võimsus m korda. Kuidas muutus pöörete arv minutis?
3. Konstantse võimsuse juures suurenes pöörete arv m korda. Kuidas muutus pöördemoment?

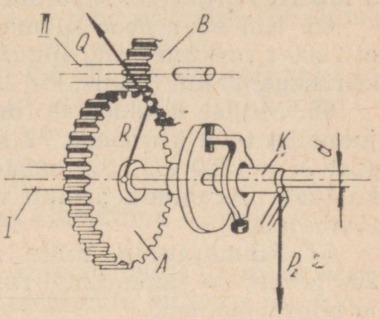
Näide 62. Milline ringjõud antakse üle rihmarattale läbimõõduga 1000 mm, kui võimsuse $N = 24$ HJ juures see teeb 450 p/min.

Tehes asenduse valemis (81), saame $M_p \approx 38{,}2$ kgm. Järelikult otsitav ringjõud

$$P = \frac{2M_p}{D} = 76{,}4 \text{ kg.}$$

Näide 63. Treipingis treitakse võllikut (joon. 154) läbimõõduga $d = 80$ mm. Spindli *I* paneb pöörlema sellele kinnitatud hammasratas *A*, mis omakorda pannakse pöörlema võllile *II* kinnitatud hammasratta poolt. Lõikejõud (s. o. ringjõud töödeldaval detailil), mille võtab vastu treitera, on $P_z = 600$ kg, lõikekiirus (s. o. töödeldava detaili ringkiirus) aga $90 \frac{\text{m}}{\text{min}}$. Määrata:

1) lõikeprotsessiks tarbitav võimsus,
2) pöördemoment treipingi spindlil,
3) ringjõud hammasrattal *A*, kui selle läbimõõt $D = 240$ mm.



Joon. 154

Lõikeprotsessiks tarbitava võimsuse määrame valemiga (80), millesse kiirus v tuleb asetada $\frac{\text{m}}{\text{sek}}$, s. o. $v = \frac{90}{60} = 1{,}5$ m/sek.

$$N = \frac{Pv}{75} = \frac{600 \cdot 1{,}5}{75} = 12 \text{ HJ}.$$

Pöördemoment spindlil on sama mis töödeldaval detaililgi, kuna nad kinemaatilises mõttes moodustavad tööprotsessis ühe terviku.

Selle momendi määrame ringjõu P_z ja töödeldava detaili raadiuse korrutisena:

$$M_p = 600 \cdot 0{,}04 = 24 \text{ kgm},$$

hammasrattal *A* mõjuva ringjõu aga pöördemomendi ja töödeldava detaili raadiuse jagatisena:

$$Q = \frac{M_p}{R} = \frac{24}{0{,}12} = 200 \text{ kg}.$$

§ 124. Kordamisküsimusi

1. Kui suur on jõu töö, kui jõud moodustab liikumissuunaga nurga $\alpha = 90°$?
2. Liikuvale kehale rakendatud kaks jõudu on suuruselt võrdsed, kuid suunalt vastupidised, moodustades liikumissuunaga nurga. Kui suur on nimetatud kahe jõu poolt tehtud tööde summa?
3. Millega on võrdne kahe jõu resultantjõu töö, kui üks jõud langeb kokku liikumissuunaga, teine on aga sellega risti?
4. Jõu töö diagramm on joonestatud mastaabis *m* meetrit 1 millimeetris ja *n* kilogrammi 1 millimeetris. Millega tuleb korrutada diagrammi pindala, mõõdetuna mm², et leitav töö avalduks kilogramm-meetrites?
5. Kas töö hulga järgi on võimalik otsustada jõu suuruse üle, mis tegi selle töö?
6. Kuidas muutub pöördemoment nurkkiiruse suurendamisel konstantse võimsuse juures?
7. Pöördemoment suurenes *m* korda. Kuidas muutub nurkkiirus ühe ja sama võimsuse juures?

§ 125. Harjutusi

62. Sirgjooneliselt liikuvale punktile on rakendatud jõud P_1, mille mõjumissuund ühtib liikumissuunaga, ja jõud $P_2 = 2P_1$, mis moodustab liikumissuunaga nurga $\alpha = 60°$. Kui suur on nende jõudude resultantjõu poolt tehtud töö, kui läbitud tee on *S*?

63. Detaili pikihöövelpingil töödeldes on lõiketakistus 400 kg, töölaua käik 1,8 m. Kui suur on lõikejõudude töö ühe töökäigu kestel ja seejuures kulutatud võimsus, kui laua töökäik kestab 3,6 sek?

64. Inimene kaaluga 60 kg tõuseb mööda treppi 10 sekundiga 5 meetri kõrgusele. Määrata kulutatud võimsus.

65. Kui suur peab olema veduri tõmbejõud P ja võimsus N, et 2000 t raskune rong liiguks mööda horisontaalset teed ühtlase kiirusega 48 km tunnis, kui liikumistakistus on 0,005 rongi kaalu?

66. Millise kaaluga G rongi jõuab vedur vedada mööda sirgjoonelist teed kiirusega 72 km tunnis, kui vedur arendab võimsust $N = 1500$ HJ, liikumistakistus aga moodustab 0,0705 rongi kaalust? Arvutada samuti nendele tingimustele vastav veduri tõmbejõud.

67. Rihmarattale, mille läbimõõt $D = 1200$ mm ja mis teeb 200 p/min, on rakendatud ringjõud $P = 180$ kg. Määrata võimsus ja pöördemoment.

68. 5,5 kW võimsusega elektrimootori rihmaratas teeb 1500 pööret minutis. Määrata pöördemoment ja ringjõud rihmarattal, kui selle läbimõõt on 180 mm.

69. Rihmaratas annab pöördemomendi $M_p = 48{,}7$ kgm juures edasi võimsust $N = 12$ kW. Määrata rihmaratta pöörete arv minutis.

70. Treipingi spindlile ülekantav pöördemoment on 150 mm läbimõõduga detaili treimisel $M_p = 60$ kgm.

Töötlemine toimub lõikekiirusega (s. o. ringkiirusega) $v = 75$ m/min. Määrata lõikeprotsessis kulutatav võimsus N ja lõikejõud P_z (vt. näide 59).

71. Vintsi trumlile läbimõõduga $D = 500$ mm on keritud tross, millele on riputatud raskus $Q = 1{,}5$ t. Määrata raskuse tõstmiskiirus, kui trumlile rakendatud võimsus $N = 6{,}75$ HJ.

J u h i s: Raskuse tõusukiirus on võrdne trumli ringkiirusega.

N e l j a t e i s t k ü m n e s p e a t ü k k

MEHAANILINE ENERGIA

§ 126. Kineetilise energia mõiste

Eespool käsitlesime mitmel korral raudteerongi liikumist. Pöördume uuesti selle näite juurde ja vaatleme seda uuest seisukohast.

Pärast auru laskmist veduri silindrisse hakkab kohaltliikuv rong kiirust arendama. Varemkäsitletus nägime, et nimetatud liikumisel veduri tõmbejõud tegi tööd. Seame nüüd endile küsimuse: milleks kulutati see töö, kas see kulutati jäljetult?

Sellele küsimusele tuleb vastata järgmiselt. Kuna tõmbejõud vaadeldava ajavahemiku kestel ületas liikumistakistuse, siis liikus

rong kasvava kiirusega. Seega liikumapaneva jõu (see on tõmbejõu ja liikumistakistuse vahe) töö kulutati liikumiskiiruse suurendamiseks. Oletame nüüd, et auru andmine veduri aurumasina silindrisse katkestati. Rong jätkab liikumist väheneva kiirusega, ületades liikumisele vastassuunalisi takistusjõude.

Seega kehale mingi kindla kiiruse andmiseks kulutatud töö ei kao jäljetult: ta annab kehale võime teha edaspidi tööd ilma selleks uute liikumapanevate jõudude rakendamiseta.

Tööd, mis liikuv keha võib teha, nimetatakse keha kineetiliseks energiaks (liikumisenergiaks).

§ 127. Kulgevalt liikuva keha kineetiline energia

Et keha kulgeval liikumisel kõik keha punktid liiguvad ühtemoodi, siis me vaatleme keha kui masspunkti, millesse on koondatud kogu keha mass ja mis asetseb keha raskuskeskmes.

Keha kineetiline energia on igal üksikjuhul erinev. Kui liikumapanev jõud mõjub kehale kauem, siis ka töö, mis on kulutatud kehale vastava kiiruse andmiseks, on samuti suurem. Seega mõõdetakse kineetilist energiat kehale rakendatud jõudude poolt tehtud tööga.

Tuletame valemi kulgevalt liikuva keha kineetilise energia määramiseks.

Hakaku niisiis paigalseisev keha massiga m liikuma jõu P mõjul, mille mõjumissirge ühtib liikumissuunaga. See liikumine, nagu me teame, on ühtlaselt kiirendatud. Võtame dünaamika põhivõrrandi $P = ma$ ja korrutame selle mõlemaid pooli teepikkusega s, millel jõud mõjus:

$$Ps = mas.$$

Selle võrrandi vasak pool väljendab jõu P poolt tehtud tööd. Paremal pool asendame teepikkuse s tema väärtusega valemist (31), mille tulemusena saame:

$$Ps = ma\,\frac{v_t^2}{2a} = \frac{mv_t^2}{2}$$

või üldkujul

$$Ps = \frac{mv^2}{2}, \tag{85}$$

kus v on massiga m keha kiirus vaadeldaval hetkel.

Avaldist $\frac{mv^2}{2}$ on hakatud lugema kineetilise energia mõõduks.

Seega kulgevalt liikuva keha kineetilist energiat mõõdetakse keha massi ja vaadeldaval hetkel esineva kiiruse ruudu poole korrutisega.

Valem (85) on kehtiv juhul, kui keha algkiirus on null. Kui

vaadeldava ajavahemiku t alghetkel kiirus oli v_o, siis valemit (29) kasutades saame:

$$Ps = \frac{mv_t^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}. \qquad (85\ a)$$

Saadud võrrandi parema poole esimene liige väljendab järelikult keha kineetilist energiat lõpphetkel t, teine liige aga kineetilist energiat alghetkel t_o. Vastavalt sellele võib võrrandi (85 a) sõnastada järgmiselt: liikumapaneva jõu poolt tehtud töö antud tee ulatuses võrdub kineetilise energia juurdekasvuga sellel teepikkusel.

Vaatleme mõningaid erijuhte.

1. Kehale mõjub jõud P, mille mõjumissuund ühtib liikumissuunaga, ja takistusjõud F; nende kahe jõu resultantjõu poolt tehtud töö võrdub $(P - F)s$ ning võrrand (85) avaldub kujul:

$$(P - F)s = \frac{mv_t^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} \text{ ehk } Ps = Fs + \frac{mv_t^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2} \qquad (86)$$

s. o. liikumapaneva jõu töö on võrdne sellel teepikkusel takistusjõu ületamiseks kulutatud töö ja kineetilise energia juurdekasvu summaga.

2. Keha liigub ühtlaselt, millele vastavalt $v_t = v_o$. Sel juhul võrrandi (86) paremal poolel vahe $\frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = 0$ ning võrrand avaldub kujul

$$Ps = Fs. \qquad (87)$$

Kulgeval ühtlasel liikumisel on liikumapaneva jõu töö võrdne takistusjõu ületamiseks kulutatud tööga. Kineetiline energia jääb seejuures konstantseks.

3. Keha seisab alghetkel paigal, s. o. $v_o = 0$. Takistusjõudude esinemisel kirjutatakse võrrand (86) järgmisel kujul:

$$Ps = Fs + \frac{mv^2}{2}, \qquad (87\ a)$$

s. o. kui keha algkiirus on null, siis liikumapaneva jõu töö võrdub takistusjõu ületamiseks kulutatud töö ja sellel teekonnal omandatud kineetilise energia summaga.

See juhus vastab rongi liikumise esimesele etapile, mida käsitlesime eelmises paragrahvis (tõmbejõu mõjumise periood).

4. Kehale, millel on teatud kindel kiirus, mõjub pärast liikumapaneva jõu mõjumise lakkamist ainult hõõrdejõud. Sellele vastavalt $Ps = 0$ ning võrrand (86) annab:

$$0 = Fs + \frac{mv_t^2}{2} - \frac{mv_o^2}{2}, \text{ millest}$$

$$\frac{mv_o^2}{2} = Fs + \frac{mv_t^2}{2}, \qquad (88)$$

s. o. kineetiline energia liikumapaneva jõu lakkamise hetkel on võrdne vaadeldaval ajavahemikul takistusjõudude poolt tehtud töö ja sama ajavahemiku lõpul omatava kineetilise energia summaga.

Võrrandist (88) nähtub, et $\frac{mv_t^2}{2} < \frac{mv_0^2}{2}$, millest $v_t < v_0$, s. o. keha liigub aeglustuvalt. Kui kogu kineetiline energia on kulutatud, siis $\frac{mv_t^2}{2} = 0$, millele vastavalt $v_t = 0$, s. o. keha lõppkiirus muutub nulliks ning keha peatub. Siis võrrand (88) annab $\frac{mv_0^2}{2} = Fs$, s. o. kogu esialgne kineetiline energia on kulutatud hõõrdejõudude ületamiseks.

Nagu võrrandi (85) vasakust poolest näeme, tuleb kineetilist energiat väljendada tööühikutes, s. o. kilogramm-meetrites; tõepoolest: $\frac{mv^2}{2}$ $\text{kgm}^{-1} \cdot \text{sek}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{sek}^{-2} = \text{kgm}$.

Kineetiline energia etendab tehnikas määratu suurt osa. Selle kasutamise mõningaid näiteid käsitleme edaspidi.

Küsimusi

1. Kas kahel erineva massiga kehal võib olla ühesugune kineetiline energia ja millistel tingimustel?
2. Kulgevalt liikuva keha kiirus suurenes n korda. Kuidas muutus kineetiline energia?

Näide 64. Määrata, millise vahemaa s järel peatub rong täielikul pidurdamisel, kui pidurdamise alghetkel oli rongi kiirus v_0.

Pidurdamise alghetkel on rongi kineetiline energia $T = \frac{mv_0^2}{2}$, või, tähistades rongi kogu koosseadu kaalu tähega G, saame, et mass $m = \frac{G}{g}$ ja siis $T = \frac{Gv_0^2}{2g}$.

Tähistades hõõrdejõu tähega F ja hõõrdeteguri tähega f, saame võrrandist (88):

$$Fs = \frac{Gv_0^2}{2g}.$$

Kuna aga $F = fG$, siis $fGs = \frac{Gv_0^2}{2g}$, millest saame:

$$s = \frac{v_0^2}{2gf}.$$

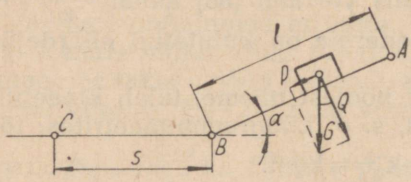
Nagu näeme, ei olene vahemaa s, mille ulatuses rongi võib pidurdada, rongi massist ega kaalust, vaid ainult kiirusest ja hõõrdetegurist.

Näide 65. Mööda kaldpinda AB (joon. 155) raskusjõul libisev keha jätkab liikumist horisontaalsel pinnal ning peatub punktis C kaugusel s punktist B. Määrata hõõrdetegur f, kui liikumine algas punktist A ilma algkiiruseta kaugusel $AB = l$ punktist B.

Keha kiirus asendites A ja C on null, millele vastavalt on mõlemas nimetatud asendis null ka kineetiline energia. Osa AB ulatuses mõjub kehale raskusjõud, s. o. keha kaal G, ning hõõrdejõud F: osa BC ulatuses mõjub aga kehale ainult hõõrdejõud.

Määrame kineetilise energia, mille keha sai liikudes punkti B. Jõu G töö A_1 tee l ulatuses on $Pl = Gl \sin \alpha$, hõõrdejõu F töö aga $A_2 = Fl = fGl = fG \cos \alpha l$. Järelikult liikumapaneva jõu ja takistusjõu summa on $A_1 + A_2 = Gl \sin \alpha - Gfl \cos \alpha$. Võrrutades selle summa kineetilise energiaga punktis B, saame:

$$Gl \sin \alpha - Gfl \cos \alpha = \frac{mv^2}{2}.$$



Joon. 155

Kuna edasine liikumine toimub selle kineetilise energia arvel, mis täielikult kulutatakse teekonnal s, siis võime kirjutada, et $fGs = \frac{mv^2}{2}$ ning saame lõppvõrrandi:

$$Gl \sin \alpha - Gfl \cos \alpha = fGs,$$

millest saame:

$$f = \frac{l \sin \alpha}{l \cos \alpha + s}.$$

§ 128. Raskusjõu mõjul liikuva keha energia. Potentsiaalne energia

Kineetilise energia muutumise seadust saab ilmselt rakendada ka raskusjõu juures.

Kui me viskame kivi üles, anname me sellele kindla kiiruse, järelikult ka kineetilise energia, mis vastab antud algkiirusele; õhutakistuse puudumisel kulutatakse see energia kivi tõstmiseks kindlale kõrgusele. Tõusu lõpp-punkti jõudmisel on kivi kogu kineetiline energia kulutatud ning kivi kiirus muutub nulliks. Seejärel kivi hakkab langema, tema kineetiline energia kasvab jälle vastavalt kiiruse suurenemisele ning kukkumisel maapinnale on kivil uuesti sama kiirus, mis tal oli ülesviskamise hetkel, nagu see selgus juba kinemaatikas (§ 67).

Kasutades võrrandit (85 a) ja võttes selles ülesliikumise kohta $v_t = 0$ (tõusukiirus kõrgeimas asendis), allaliikumise kohta aga $v_0 = 0$ (langemise algkiirus), saame kaks järgmist võrrandit:

$$\left.\begin{aligned} Ph &= \frac{mv_0^2}{2} \text{ tõusmisel} \\ \text{ja} \\ Ph &= \frac{mv_t^2}{2} \text{ langemisel,} \end{aligned}\right\} \quad (89)$$

kus h on tõusukõrgus.

Ülesliikumine on sarnane rongi liikumisele ilma tõmbejõuta, kus kineetiline energia k u l u b takistuse ületamiseks.

Allaliikumine on analoogiline rongi liikumisele takistusjõude ületava tõmbejõu mõjul, mistõttu rongi kineetiline energia k a s v a b.

Langegu keha, mille kaal on G ja mass m, mingilt kindlalt kõrguselt maapinnale. Märgime ära keha raskuskeskme kaks asendit O_1 ja O_2 (joon. 156); keskpunkti kõrguse maapinnast asendis O_1 tähistame h_1, asendis O_2 aga h_2. Kui langeva keha kiirus asendis O_1 on v_1, asendis O_2 aga v_2, siis asendi O_2 kohta avaldub kineetilise energia võrrand (85 a) kujul:

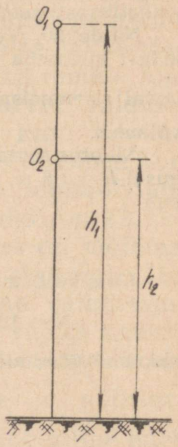
$$G(h_1 - h_2) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (90)$$

ehk

$$Gh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = Gh_2 + \frac{mv_2^2}{2}, \qquad (91)$$

s. o. keha langemisel raskusjõu mõjul on keha kaalu ning kõrguse (maapinnast) korrutise ja sellel kõrgusel kehal oleva kineetilise energia summa konstantne suurus.

Esimest liidetavat, mis kujutab endast keha tõstmiseks antud kõrgusele kulutatud tööd, nimetatakse keha potentsiaalseks energiaks. Potentsiaalse energia suurus oleneb kõrgusest, seepärast võib seda nimetada ka asendienergiaks; kineetilise energia suurus määratakse kiirusega, seepärast nimetatakse seda liikumisenergiaks.



Joon. 156

Mehaanika üksikasjalisemas kursuses tõestatakse, et võrrand (90) on kehtiv mitte ainult siis, kui keha liigub raskusjõu mõjul vertikaalsihis, vaid ka igasuguse teise trajektoori korral.

Seega keha potentsiaalse ja kineetilise energia summa on keha mistahes kõrguse korral konstantne suurus ning see ei olene trajektoorist, mida mööda keha liigub.

Võrrandis (91) näeme, et keha ülesliikumise alghetkel on tal ainult kineetiline energia ($h_1 = 0$), tõusnud aga suurimale kõrgusele ($v_2 = 0$), läheb kogu kineetiline energia üle potentsiaalseks, mis keha langemisel maapinnale uuesti muutub kineetiliseks.

Seega ülesliikuva ning taas allalangeva keha energia, jäädes konstantseks, muudab oma kuju, minnes kineetilisest üle potentsiaalseks ja vastupidi. See mehaanilise energia üleminek ühest kujust teise on energia jäävuse seaduse üks väljendusi.

See seadus on suure vene teadlase M. V. Lomonossovi poolt avastatud energia jäävuse üldseaduse erijuht.

Liikuva keha kineetilist energiat kasutatakse laialdaselt näiteks vaiade rammimisel, metallide sepistamisel ja muudel analoogilistel töödel. Ühel juhul tehakse tööd kineetilise energia arvel, mille keha omandab vabal langemisel (käsiramm, friktsioonvasar jne.), teisel juhul kasutatakse kõrvuti selle energiaga

veel täiendavat kineetilist energiat, mis antakse kehale langemisel (näiteks auruvasaras, töötamisel käsivasaraga jne.).

Kineetilise energia üleminek potentsiaalseks ja vastupidi ei esine mitte ainult keha langemisel. Kulutades tööd vedru deformeerimiseks me anname sellele teatud potentsiaalse energia (siseelastsusjõudude arvel), mis muundub uuesti kineetiliseks energiaks vedru esialgse kuju taastumisel.

Küsimusi

1. Mille poolest erinevad teineteisest potentsiaalne ja kineetiline energia?
2. Kaks ühesuguse massiga keha asetsevad erinevatel kõrgustel h ja nh. Kummal neist on suurem potentsiaalne energia ja mitu korda?
3. Ühe keha kiirus on langemisel maapinnale n korda suurem teise keha omast. Mitu korda on esimese keha kineetiline energia suurem teise keha kineetilisest energiast?

Näide 66. Vesi siseneb hüdroturbiini kiirusega $v_1 = 4$ m/sek, väljub aga sellest kiirusega $v_2 = 1$ m/sek, kusjuures väljumisnivoo on 1,8 m võrra madalamal sisenemisnivoost. Veekulu $Q = 6 \frac{m^3}{sek}$. Määrata mootori poolt kasutatav võimsus.

Mootor töötab esiteks vee potentsiaalse energia arvel, mida see omab kõrgusel $h = 1{,}8$ m, ja teiseks kineetilise energia arvel. Esimene on $1000\,Qh$, teine aga

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{1000\,Q}{2g}(v_1^2 - v_2^2).$$

Järelikult mootori poolt sekundis kasutatud energia

$$N = 1000\,Q\left(h + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g}\right) = 1000 \cdot 6\left(1{,}8 + \frac{4^2 - 1^2}{2 \cdot 9{,}81}\right) \frac{kgm}{sek}$$

ehk hobujõududes

$$N = \frac{1000 \cdot 6}{75}\left(1{,}8 + \frac{4^2 - 1^2}{2 \cdot 9{,}81}\right) = 205 \text{ HJ}.$$

§ 129. Ümber liikumatu telje pöörleva keha kineetilise energia mõiste

Liikugu keha, millele on rakendatud üks või mitu jõudu, mitte kulgevalt, vaid pöörelgu ümber liikumatu telje.

Vaatleme, kuidas sel juhul on võimalik kasutada masspunkti jaoks tuletatud võrrandit (85 a): $Ps = \frac{mv_t^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$.

Kuna keha kulgeval liikumisel kõik tema punktid liiguvad ühtemoodi, siis see võrrand on rakendatav ka massiga m keha kui terviku liikumisel. Pöörleval liikumisel muutub asi keerukamaks seetõttu, et keha erinevad punktid ei liigu ühteviisi, vaid kujundavad mitmesuguseid teid ning neil on ühel ja samal hetkel erinevad kiirused ja kiirendused.

Võrrandi (85 a) vasakul poolel on jõu P poolt teepikkusel s tehtud töö avaldis. Pöörleval liikumisel see töö avaldatakse vale-

miga (75), kus töö määratakse olenevalt pöördemomendist ja pöördenurgast. Mis puutub võrrandi (85 a) paremasse poolde, siis alg- ning lõppmomendi kiirused v_t ja v_0 tulevad võtta keha iga üksiku osakese jaoks eraldi, nagu mass m-gi. Et aga punktide kiirused on võrdelised pöörlemisraadiusega, nagu teame kinemaatikast, siis võrrandi paremaks pooleks on osakeste massi ja nende kauguste ruudu (mõõdetuna pöörlemisteljest) korrutiste summa, võetuna keha kõigi osakeste kohta. Seda summat nimetatakse keha i n e r t s m o m e n d i k s pöörlemistelje suhtes. Nagu äsjaöeldust selgub, on inertsmomendi dimensiooniks massiühiku ja pikkusühiku ruudu korrutis, s. o.

$$\text{kgm}^{-1}\text{sek}^2\,\text{m} = \text{kgm sek}^2.$$

Et mõista inertsmomendi füüsikalist mõtet, vaatleme järgmist näidet. Oletame, et kahele ühesugusele võllile on kinnitatud kaks võrdse kaaluga ning ühest ja samast materjalist valmistatud, kuid erineva läbimõõduga silindrit. Paneme mõlemad võllid pöörlema ühesuguse nurkkiirusega. Pöördemomendi mõjumise lakkamise hetkel jätkab kumbki võll pöörlemist temasse kui ka temale kinnitatud silindrisse salvestatud kineetilise energia arvel. Jälgides kummagi võlli pöörlemisaega (või pöörete arvu) kuni täieliku seismajäämiseni, veendume, et ühesuguse pöörlemistakistuse korral pöörleb võll, millele on kinnitatud suurema läbimõõduga silinder, kauem, see aga tähendab, et nimetatud juhul on ka salvestatud kineetiline energia suurem, kuna aga mass on mõlemal silindril üks ja seesama. Seda selgitab asjaolu, et suurema läbimõõduga silindril on inertsmoment suurem. Kui me valmistame silindri õhukese ketta kujulisena, siis see pöörleb veelgi kauem.

Ümber oma geomeetrilise telje pöörleva silindri inertsmoment $I = \frac{mR^2}{2}$, kus R on silindri raadius[1]. Siit näeme, et pöörleva silindri raadiuse suurendamisel n korda suureneb kineetiline energia n^2 korda.

Kõigest eelöeldust tuleneb samuti, et suurema läbimõõduga silindrile sama nurkkiiruse andmine mis väiksemalegi nõuab suuremat pöördemomenti või suuruselt võrdsete pöördemomentide korral selle pikemaajalist mõjumist.

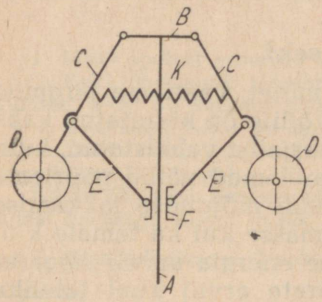
§ 130. Jõumasinate reguleerimise mõiste. Hooratta tähtsus

Kineetiline energia etendab masinate töös tähtsat osa.

Nagu eespool nägime, omandab keha liikumapaneva jõu mõjul seda suurema kineetilise energia, mida väiksem on takistusjõudude töö. See kehtib võrdsel määral ka omavahel ühendatud liikuvatest lülidest koosneva masina kui terviku tööprotsessi

[1] Inertsmomenti on hakatud märkima tähega I.

kohta. Kujutleme endile soojusmootorit, mis käitab elektrienergiat tootvat generaatorit. Elektrienergia tarbimise vähenemisel väheneb ka mootori koormus. Järelikult mootori väntvõllile mõjuva pöördemomendi konstantseks jäämisel osutub liikumapanev jõud takistusjõust suuremaks; vastavalt sellele suureneb ka lülide kiirus ja kineetiline energia. Siit järgneb, et mootor peab olema varustatud sellise seadmega, mis võimaldaks hoida varem kindlaks määratud pöörete arvu konstantsena. See saavutatakse seadme abil, mida nimetatakse regulaatoriks.



Joon. 157

Regulaatoreid on mitut tüüpi. Näitena on joonisel 157 toodud üht tüüpi tsentrifugaalregulaatori skeem. Mootori võlli poolt pöörlema pandavale spindlile *A* on kinnitatud ristliist *B*. Viimasega on šarniirselt ühendatud tõmbitsad *C,C*, millede otstesse on kinnitatud raskused *D,D*. Tõmbitsatega *C,C* on šarniirselt ühendatud veel kaks teist tõmbitsat *E,E*, millede teised otsad on šarniirselt kinnitatud spindlil vabalt liikuvale muhvile *F*. Mõlemad tõmbitsad *C,C* on sidestatud tõmbe all oleva kruvivedruga *K*. Nagu näeme, mõjuvad tõmbitsatele *C,C* järgmised jõud: omakaal ja teiste lülide kaal (lülid *E,E*), kuulide kaalud, vedru tõmbejõud ja kuulide poolt arendatav tsentrifugaaljõud. Vedru *K* pinguse võib reguleerida nii, et spindli mingi kindla pöörete arvu juures oleksid tõmbitsad tasakaalus. Sel juhul püsiks muhv *F* spindli suhtes liikumatuna. Suurenegu nüüd spindli pöörete arv. Sellele vastavalt suureneb ka kuulikeste poolt arendatav tsentrifugaaljõud, tõmbitsad *C,C* eemalduvad teineteisest ning tõstavad tõmbitsate *E,E* abil muhvi *F*, mis on ühendatud, auru või kütuse etteandmist mootori silindrisse reguleeriva mehhanismiga. Seega muhvi *F* ümberpaigutumisel muutub juurdeantava auru või kütuse kogus, mille tagajärjel mootori võlli pöörlemiskiirus viiakse nõutud tasemele.

Kolbmootorites (aurumasinates, sisepõlemismootorites) kasutatakse väntmehhanismi (vt. joon. 122), kus liuguriks on kolb. Nagu kursuse teises osas[1] selgub, esineb väntmehhanismis liikumise ülekandmisel liugurilt vändale see iseärasus, et vända pöörlemine ei toimu konstantse nurkkiirusega. Seejuures nurkkiiruse kõikumine toimub liuguri iga kaksikkäigu ajal, s. t. perioodiliselt. Et seda negatiivset nähet kõrvaldada, kinnitatakse mootori peavõllile hooratas, mis salvestab endasse mehaanilist energiat ühel perioodil ja annab selle ära teisel perioodil. Tänu sellele muutub peavõlli pöörlemine enam-vähem ühtlaseks.

[1] Vt. II osa, § 188.

Hooratast kasutatakse ka siis, kui mingi lühikese ajavahemiku kestel on tarvis teha suur kogus tööd, mis nõuaks mootori võimsuse märkimisväärset tõstmist (näiteks pressides, võimsates metallikäärides jne.). Nagu ülalöeldust selgub, oleneb hoorattas salvestuva kineetilise energia suurus hooratta inertsmomendist, s. o. tema massist, läbimõõdust ja materjali paigutusest. Mida kaugemal asetseb üks ja sama mass pöörlemisteljest, seda suurem on inertsmoment. Seepärast tehakse hooratta pöid, erinevalt tavalisest rihmarattast, raskemana.

§ 131. Mehaaniline kasutegur

Igasugune masin on ette nähtud kasulike takistuste ületamiseks (metalli takistus lõikamisele, raskuse takistus ümberpaigutamisele jne.). Tähistame kasuliku takistuse ületamiseks sooritatava töö tähega A_{kas}. Samaaegselt esineb masinas ka kahjulikke takistusi (hõõrdumine, õhutakistus), millede töö tähistame tähega A_{kahj}. Selleks et masin töötaks ühtlaselt, peab kogutöö A_{lp} võrduma kõigi takistuste tööde summaga, s. o.

$$A_{lp} = A_{kas} + A_{kahj}. \qquad (92)$$

Masina sellist liikumist, mil tema organite kiirused pärast võlli iga pööret on ühed ja samad, nimetatakse masina stabiilseks liikumiseks.

Kui $A_{lp} > A_{kas} + A_{kahj}$, siis töö ülejääk kulutatakse kineetilise energia suurendamiseks, millele vastavalt suureneb ka kiirus. See leiab aset näiteks mootori käivitamisperioodil, mil $A_{kas} = 0$, s. o. kasulik takistus puudub.

Kui aga liikumapanev jõud lülitatakse välja, siis edasine liikumine toimub masinasse kogutud kineetilise energia arvel; kui seejuures on välja lülitatud ka kasulik takistus, siis see energia kulutatakse kahjulike takistuste tööks; mõninga aja möödumisel jääb masin seisma.[1]

Seega masina stabiilsel liikumisel peab olema rahuldatud võrrand (92). Jagame selle võrrandi mõlemad pooled A_{lp}:

$$\frac{A_{kas}}{A_{lp}} + \frac{A_{kahj}}{A_{lp}} = 1.$$

Vasakpoolse osa esimene liidetav näitab, milline osa masina kogutööst kulutatakse kasulikuks tööks, s. o. otseseks ülesandeks. Seda avaldist nimetatakse mehaaniliseks kasuteguriks, mis on järelikult mehaanilise energia kasuliku tarbimise mõõduks.

---

[1] Teadust, mis uurib masinate liikumist sõltuvalt nende lülidele mõjuvatest jõududest, nimetatakse masinate dünaamikaks. Põhjapanevad tööd sel alal kuuluvad vene teadlastele N. J. Žukovskile, K. E. Rerihhile, N. I. Mertsalovile jt.

Tähistades selle liidetava kokkuleppe kohaselt tähega η, saame:

$$\eta = \frac{A_{kas}}{A_{lp}}. \qquad (93)$$

Teine liidetav näitab tehtava töö osa, mis kulub kahjulike takistuste ületamiseks. Järelikult võrrandi (a) võib avaldada kujul:

$$\eta = 1 - \frac{A_{kahj}}{A_{lp}}. \qquad (93\ a)$$

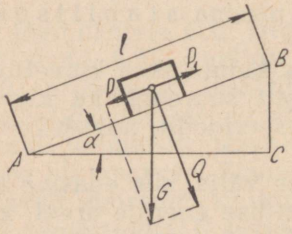
Nagu näeme, on kasutegur alati väiksem kui üks.

Küsimusi

1. Millisel juhul toimub masina töö võrrandi järgi $A_{lp} = A_{kas}$? Millega võrdub sel juhul kasutegur?
2. Kas masin võib teha kasulikku tööd, kui $A_{kahj} = A_{lp}$? Millega võrdub sel juhul kasutegur?

Näide 67. Konstantse jõu P_1 mõjul liikus keha, mille kaal on G, konstantse kiirusega mööda kaldpinda asendist A asendisse B (joon. 158). Määrata kasutegur, kui hõõrdetegur $f = 0{,}1$ ning kaldpinna tõusunurk $\alpha = 27°$.

Ühtlasel liikumisel kehtib võrrand $A_{lp} = A_{kas} + A_{kahj}$. Jõu poolt raskusjõu ületamisel tehtud kasulik töö $A_{kas} = Pl = G \sin \alpha\, l$. Hõõrdejõudude töö $A_{kahj} = Qfl = G \cos \alpha fl$, järelikult $A_{lp} = Gl \sin \alpha + Gfl \cos \alpha$ ja



Joon. 158.

$$\eta = \frac{Gl \sin \alpha}{Gl (\sin \alpha + f \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha + f \cos \alpha}.$$

Jagades parema poole lugeja ja nimetaja $\cos \alpha$, saame:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + f} = \frac{0{,}51}{0{,}51 + 0{,}1} \approx 0{,}84.$$

§ 132. Perpetuum mobile ehitamise võimatus

Paljude sajandite jooksul on tehtud viljatuid katseid leiutada masin (nn. perpetuum mobile[1] ehk igavene jõumasin), mis, olles kord käima pandud, töötaks edasi ilma väljastpoolt energiat juurde saamata, s. o. ilma liikumapaneva jõu rakendamiseta[2]. Vastavalt sellele tingimusele avaldub võrrand (92) kujul:

$$A_{lp} = A_{kas} + A_{kahj} = 0.$$

Siit järeldub, et selline masin võiks töötada konstantse kiirusega igavesti, kui $A_{kas} = 0$ ja $A_{kahj} = 0$, s. o. igasuguse takistuse puudumisel. Oletame, et masin kasulikku tööd ei tee ($A_{kas} = 0$).

[1] „Perpetuum mobile" lad. k. — „igavesti liikuv".
[2] On teada, et seda ülesannet püüti lahendada veel XVIII sajandil.

Sel juhul ka A_{kahj} peab olema 0, s. o. kahjulike takistuste töö peab puuduma. See pole aga võimalik: kahjulikud takistused kaasnevad igasugusele kokkupuutuvate kehade suhtelisele liikumisele.

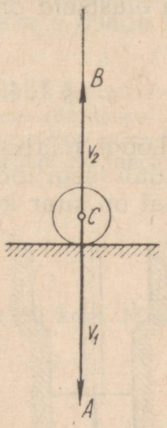
Järelikult, kui väikesed need takistused ka ei oleks, peab mootor, kulutanud temale käimapanemisel antud kineetilise energia, varem või hiljem seisma jääma.

Nagu näeme, on võimatu ehitada sellist mootorit, mis teeks lõpmatult kaua kasulikku tööd, ja ka sellist, mille kogu töö läheks ainult kahjulike takistuste ületamiseks.

§ 133. Kehade põrke mõiste

Kui keha oma liikumisel puutub ootamatult kokku teise kehaga (liikuvaga või paigalseisvaga), siis kehade vahel ilmnevat vastastikust mõjumist nimetatakse *põrkeks* ehk *löögiks*.

Katse näitab, et löögile kaasneb kokkupõrkavate kehade *deformeerumine*. Deformatsiooni suurus oleneb kehade füüsikalistest omadustest. Pärast löögi mõjumise lakkamist ühed kehad taastavad oma esialgse kuju, teised aga jäävad deformeerituks. Deformeeritud kehade omadust taastada oma esialgne kuju nimetatakse *elastsuseks*. Tuleb öelda, et täiesti elastseid materjale, nagu ka täiesti plastilisi materjale ei ole olemas. Kuid ühtesid materjale võib lugeda elastseteks (näiteks elevandiluu, karastatud teras), teisi aga plastilisteks (näiteks savi). Vastavalt selle toimub kehadevaheline kokkupuude olenevalt materjalist kas elastse või plastilise põrkega.



Joon. 159

Kujutame endale ette vabalt langevat kuulikest massiga m (joon. 159). Kukkudes liikumatule horisontaalsele plaadile kuulike väga lühikese ajavahemiku kestel deformeerub. Kui plaat ja kuulike oleksid absoluutselt plastilised, jääks kuulike liikumatuks. Kui kuulikesel oleks plaadile langemise hetkel kiirus v_1, siis tal oleks kineetiline energia $\frac{mv_1^2}{2}$, mis järgnevalt kuluks kõik deformatsioonitööks.

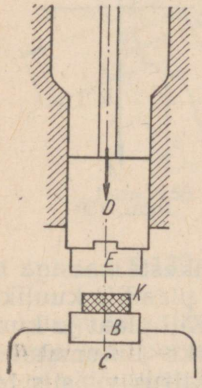
Olgu plaat ja kuulike valmistatud täiesti elastsetest materjalidest. Sel juhul kulutatakse kuulikese kineetiline energia väga lühikese ajavahemiku jooksul elastsuse sisejõudude ületamiseks, s. o. deformatsiooniks; kineetiline energia läheb üle deformeeritud kehade potentsiaalseks energiaks. Järgnevalt toimub vastupidine nähe. Mõlemad kehad taastavad elastsusjõudude mõjul

oma esialgse kuju, potentsiaalne energia muundub uuesti kineetiliseks energiaks väärtusega $\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2}$ ning kuulike hakkab liikuma vastupidises suunas kiirusega v_2, mis on suuruselt võrdne kuulikese kiirusega v_1 langemise hetkel. Täiesti elastse põrke korral on tagasipõrkumise kiirus võrdne langemiskiirusega. Kui kaks võrdse massiga kuulikest liiguvad teineteisele vastu erinevate kiirustega, siis pärast kokkupõrget nad liiguvad vastupidistes suundades suuruselt endiste kiirustega.

Oletame nüüd, et põrge ei ole täiesti elastne. See tähendab, et kuulikesel kokkupõrke hetkel olev kineetiline energia $\frac{mv_1^2}{2}$ ei taastu täielikult löögi lõpul, s. o. $\frac{mv_2^2}{2} < \frac{mv_1^2}{2}$. Järelikult $v_2 < v_1$ ja kuulike põrkub tagasi väiksema kiirusega. Suhet $\frac{v_2}{v_1} = k$ nimetatakse taastumisteguriks ning see iseloomustab materjalide elastseid omadusi.

§ 134. Löök vabalt langeva vasara töötamisel

Löögi nähtust kasutatakse laialdaselt tehnikas, sest see võimaldab isegi löögist osavõtva keha väikese massi korral, kui sel kehal on suur kiirus, väikese liikumisteekonna juures teha suurt tööd. Seda nähtust kasutatakse käsivasaraga töötamisel, vaiade rammimisel jne.



Joon. 160

Vaatleme vasara tööd, mille löögipea D koos pinniga E (joon. 160) langeb vabalt raskusjõudude mõjul. Olgu langevate osade kaal G, nende langemiskõrgus aga H. Kiirus v_1, mille nad omandavad langemisel, on valemi (36) põhjal $v_1 = 2gH$, millele vastavalt nende kineetiline energia $\frac{mv_1^2}{2} = GH$.

Nagu eelmises paragrahvis juba selgitati, on plastilise löögi korral tagasipõrkumise kiirus v_2 väiksem langemiskiirusest v_1, millele vastavalt $\frac{mv_2^2}{2} < \frac{mv_1^2}{2}$, s. o. taolisel juhul kulutatakse osa kineetilist energiat kokkupõrkavate kehade deformeerimiseks. Kuna aga sepistamisprotsessi ülesandeks on saada toorikul võimalikult suuremaid deformatsioone, siis sepistamine on seda efektiivsem, mida suurem osa langeva vasarapea kineetilisest energiast kasutatakse selleks eesmärgiks.

Sepistamisel asetseb toorik K (joon. 160) alasil B, mis on kinnitatud massiivsele terasest šabotile C. Viimane on omakorda kinnitatud vundamendile. Vasara löögi tagajärjel ei deformeerita

üksnes sepist, vaid pannakse põruma ka kogu šabott vundamendiga, s. o. osa kineetilisest energiast kulutatakse veel vasara kõigi nende osade ümberpaigutustööks. On pikemata selge, et vasarapea energia kasutamine on seda efektiivsem, mida väiksemad on need ümberpaigutused. Järelikult peavad toetavad osad olema võimalikult massiivsemad. Mehaanika üksikasjalisemas kursuses tõestatakse, et vasara kasutegur avaldub valemiga:

$$\eta = \frac{1}{\frac{G}{G_0} + 1}(1 - k^2),$$

kus G on vasara langevate osade kaal, G_0 — sepise ja toetavate osade kaal, k — taastumistegur.

Valemist selgub, et mida suurem on G_0, seda väiksem on nimetaja ning ühtlasi seda suurem on vasara kasutegur. Tavaliselt võetakse šaboti kaal vabalt langevate löögiosadega vasaratel 10—15 korda (mõnikord aga ka 20 korda) suurem langevate osade kaalust.

Näide 68. Detaili sepistamine toimus 10 löögiga, kusjuures kasutati vasarat langevate osade kaaluga $G = 2250$ kg ning langemiskõrgusega $H = 1500$ mm $= 1{,}5$ m. Arvutada kasulikult kulutatud mehaaniline energia A, kui šaboti kaal $G_0 = 45$ t, taastumistegur $k = 0{,}4$ ning energiakadu langevates osades on 5%.

Ühe löögi kineetiline energia

$$A_1 = 0{,}95\,\frac{mv^2}{2} = 0{,}95\,GH = 3206 \text{ kgm}.$$

Järelikult on 10 löögiga kulutatud töö $A = 3206 \cdot 10 = 32\,060$ kgm. Määrame võrrandiga (94) vasara kasuteguri:

$$\eta = \frac{1}{\frac{2250}{45\,000} + 1}(1 - 0{,}4) = 0{,}8.$$

Järelikult sepistamisprotsessis vahetult kulutatud kineetiline energia

$$A_{kas} = 32\,060 \cdot 0{,}8 \approx 25\,650 \text{ kgm}.$$

§ 135. Kordamisküsimusi

1. Selgitage, miks vagunitel ja veduril on puhvrid.
2. Liikuva rongi mõnedel viimastel vagunitel ei ole pidureid. Analüüsige, milline nähtus esineb rongi pidurdamisel. Kas nende vagunite vahelised puhvrivedrud deformeeruvad ühepalju?
3. Keha kaaluga G langes kõrguselt h_1 asendisse, mille kõrgus on h_2. Kuidas muutus keha potentsiaalne energia?
4. Kas on otstarbekas varustada hoorattaga sellist masinat, milline peab lühikeste ajavahemike tagant muutma oma pöörlemissuunda?
5. Miks veduri aurumasinal pole tarvis hooratast?
6. Milline on masina liikumine, kui $A_{lp} < A_{kas} + A_{kahj}$?
7. Kas kasutegur võib olla suurem kui 1?

8. Takistusega kokkupõrkamisel jäi keha seisma. Milleks kulutati keha kineetiline energia?

9. Selgitage, miks on otstarbekam raiuda massiivsetes kruustangides ja raskemal töölaual?

10. Ühel kahest vasarast on alasi ja toetavate osade kaal suurem kui teisel. Kumb vasar töötab suurema tootlikkusega?

§ 136. Harjutusi

72. Rongi kaaluga 1500 t tõmbab mööda horisontaalset teed vedur jõuga 15 000 kg. Teades, et liikumistakistus moodustab 0,005 rongi kaalust, määrata kineetiline energia, mis on rongil kahe minuti möödumisel pärast liikumahakkamist, ja sellel teeosal tehtud töö (lugedes tõmbejõu konstantseks).

73. Pärast 6 minuti möödumist sõitis sama rong tõusule, liikudes seal liikumistakistusega 0,075 rongi kaalust. Millise aja pärast ning kui kaugel tõusu algusest peatuks rong, kui nimetatud hetkel sulgeda aur?

74. Rong kaaluga 400 t hakkab jaamast liikuma ning pärast $s = 1600$ m sõitmist arendab kiirust 72 km/h. Määrata tõmbejõud P, kui alates sellest hetkest läbis rong pidurdades (ilma auru juurde andmata) teeosa $s = 2000$ m. Liikumistakistus (ilma pidurdamiseta) võtta võrdseks 0,005 rongi kaalust.

75. Vasara langevate osade kaal $G = 3$ t, alasil koos sepise ning toetavate osadega aga 40 t. Määrata vasara kasutegur, kui taastumistegur $k = 0{,}4$.

TEINE OSA

MASINAELEMENDID JA TUGEVUSÕPETUSE ALUSED

MASINAELEMENDID

SISSEJUHATUS

§ 137. Masinad ja mehhanismid

Kujutleme, et universaaltreipingil lõigatakse keeret. Elektrimootori pöörlev liikumine kantakse pingi veospindlile ja edasi käigukruvile. Kruvi pöörlemine muudetakse supordi kulgevaks liikumiseks. Pärast pingi häälestamist saame vajalikud kruvi pöörlemise ja supordi kulgeva liikumise kiirused.

Omavahel liikuvalt seotud kehade süsteemi, mis sooritab etteantud liikumist, nimetatakse mehhanismiks. Kehi, mis kuuluvad mehhanismi koosseisu ja on suhtelises liikumises, nimetatakse mehhanismi lülideks.

Mehhanismi lüli, mis paneb ülejäänud lülid liikuma, nimetatakse vedavaks lüliks; lülisid, mis saavad liikumise vedavalt lülilt, nimetatakse veetavateks.

Metallilõikepingid pannakse liikuma elektrimootoritega. Elektrimootor, tarbides elektrienergiat, muundab selle mehaaniliseks energiaks, mis kulub tööpingi kasulike takistuste, s. o. lõiketakistuste ületamiseks. Elektrimootor saab elektrienergiat omakorda elektrigeneraatorilt, mida samuti käitab mõni jõumasin (näiteks hüdroturbiin, sisepõlemismootor jms.), mis töötab temasse juhitud energia (hüdroturbiinides mehaanilise energia, sisepõlemismootoris kütuse energia) arvel.

Kõigil juhtudel näeme, et masin kas muundab mehaanilise energia mõneks teiseks energialiigiks (generaator) või mingi teisekujulise energia mehaaniliseks energiaks (elektrimootor, sisepõlemismootor, auruturbiin) või, lõpuks, teeb mehaanilist tööd temale antava mehaanilise energia arvel (hüdroturbiin, metallilõikepink).

Mehhanismide kompleksi, mis on ette nähtud energia otstarbekaks muundamiseks ja selle arvel teatud kasuliku töö tegemiseks, nimetatakse masinaks.

Mehhanisme ei kasutata ainult masinates, vaid ka omaette seadistena. Nii näiteks ei saa kella lugeda masinaks, sest tema ülesanne ei ole energia muundamine ega kasuliku takistuse ületamine.

§ 138. Masinaehituse areng Venemaal ja Nõukogude Liidus

On teada, et andekad vene inimesed lahendasid juba ammu praktiliselt kõige keerukamaid mehaanikaülesandeid, mis on seotud näiteks mitmetesse tuhandetesse puudadesse ulatuvate hiigelraskuste tõstmisega suurele kõrgusele ning veskite, pumpade ja mitmesuguste mehhanismide, seadeldiste jne. valmistamisega.

Kõrge taseme saavutasid need teadmised ja oskused Peeter I ajal, kes tõmbas sellele tööle kaasa paljusid väljapaistvaid leidureid ja mehaanikuid (A. K. Nartovi, N. Pikolenko, M. Sidorovi ja palju teisi). A. K. Nartov valmistas XVIII sajandi esimesel poolel esimesena maailmas supordiga treipingi ja kopeertreipingi. Paljude XVIII sajandi vene leiutiste hulgas tuleb eriti märkida I. I. Polzunovi (1728—1766) poolt leiutatud ja tema juhatusel 1764.—1765. aastatel ehitatud aurumasinat.

Geniaalne vene õpetlane M. V. Lomonossov tegi oma suurte teaduslike tööde kõrval rea leiutisi ka masinaehituse valdkonnas (sfääritreimis-, lihvimis- ja plaantreimispinkide leiutamine).

XVIII sajandi leidurite hulgas on tähtis koht I. P. Kulibinil (1735—1818), kes on tuntud oma väljapaistvate leiutistega mitmesugustel tehnikaaladel.

Samaaegselt tehti teoreetilist tööd masinate töö uurimisel. Nii ilmus 1722. a. Venemaal esimene trükitud mehaanika-alane töö, mille koostajaks on G. G. Skornjakov-Pissarev ja mis käsitleb kangide, pöörade ja muude lihtmasinate mehaanilist arvutust. XVIII sajandi lõpus hakkab hoogsalt arenema masinate mehaanikat käsitlev teadusharu, tänu suurtele teadlastele P. L. Tšebõševile, I. A. Võšnegradskile, N. P. Petrovile, V. L. Kirpitšovile, N. J. Žukovskile ja paljudele teistele.

Kõik need vene õpetlaste ja leidurite edusammud masinaõpetuse alal ei leidnud tsaari-Venemaal väärikat toetust ega praktilist rakendamist. Hoopis uutmoodi ja põhimõtteliselt erinevalt kulges masinaehituse areng pärast Suurt Sotsialistlikku Oktoobrirevolutsiooni, mis likvideeris jäädavalt inimese ekspluateerimise inimese poolt ja tootmisvahendite eraomanduse.

Kolmandal ülevenemaalisel nõukogude kongressil 1918. a. ütles V. I. Lenin oma aruande lõppsõnas: „Varem lõi kogu inimmõistus, kogu tema geenius ainult selleks, et anda ühtedele kõik tehnika ja kultuuri hüved, teised aga jätta ilma kõige hädavajalikumast — haridusest ja arengust. Nüüd aga saavad kõik tehnikaimed, kõik kultuurisaavutused rahva ühisvaraks, ja nüüdsest peale ei muudeta inimmõistust, tema geeniust iialgi enam vägivalla vahendiks, ekspluateerimise vahendiks."[1]

V. I. Lenini geniaalne ettenägelikkus täitub meie silme ees. Iga aastaga laieneb meil üha enam töömahukate tootmisprotsesside mehhaniseerimine ja laialdane automatiseerimine, mis on

[1] V. I. Lenin, Teosed, 26. köide, lk. 442.

mehhaniseerimise kõrgeim aste. Masinaehituses on laialt kasutusel suure tootlikkusega originaalsed kodumaised automaatpingid ja vooltootmisliinid mitmesuguste masinaosade töötlemiseks.

Esimesena maailmas töötati Nõukogude Liidus välja paljude mäetööstusemasinate, eriti söekaevandamismasinate konstruktsioonid. Nii asendab söekombain terve rea masinaid, mis teostasid eraldi raiumis- ja puurimistöid ning koristasid lõhkamisel saadud söe koristuskonveierile. Juba teise viisaastaku lõpul (1937. a.) oli Nõukogude Liit söetootmise mehhaniseerimise alal esikohal maailmas.

Meie masinaehitus areneb ennenägematu tempoga, kasvades pidevalt aastast aastasse, kuust kuusse.

Töömahukate protsesside kasvav mehhaniseerimine ja automatiseerimine kergendab tööd ning tagab tööviljakuse pideva kasvu.

Kogu ühiskonna pidevalt kasvavate vajaduste maksimaalne rahuldamine pidevalt kasvava ja täieneva sotsialistliku tootmise baasil on sotsialistliku majanduse põhiseadus.

Viieteistkümnes peatükk

KALDPIND, PLOKK, PÖÖR

Juba tehnika koidikul olid kaldpind, plokk ja pöör kõige laialdasemalt levinud. Neid kasutatakse mitmesuguste masinate ja mehhanismide koostisosadena ka praegu. Seepärast alustame masinaehituse elementidega tutvumist kaldpinna, ploki ja pööra käsitlemisega.

§ 139. Kaldpind

Asugu kaldpinnal KM (joon. 161, *a*) keha, mille kaal on G. Lahutame raskusjõu G, mida kujutab vektor $\overline{CA}$, komponendiks $\overline{CD}$, mis on risti kaldpinnaga KM, ja komponendiks $\overline{CB}$, mis on paralleelne kaldpinnaga KM. Jõudu $\overline{CD}$ tasakaalustab vastassuunaline reaktsioon N; järelikult toimub keha liikumine kaldpinnal jõu $\overline{CD}$ mõjul. Kui puuduks hõõrdejõud kaldpinna ja keha vahel, siis keha libiseks mööda kaldpinda alla teatud kiirendusega. Et keha jääks tasakaalu (s. o., et ta seisaks paigal või liiguks mööda tasapinda ühtlaselt), tuleb temale rakendada mingi jõud P, mida väljendab vektor $\overline{CE}$, mis on võrdne ja vastassuunaline vektoriga $\overline{CB}$. Niisiis on keha tasakaalus kolme jõu G, N ja P toimel.

Leiame jõu P suuruse.

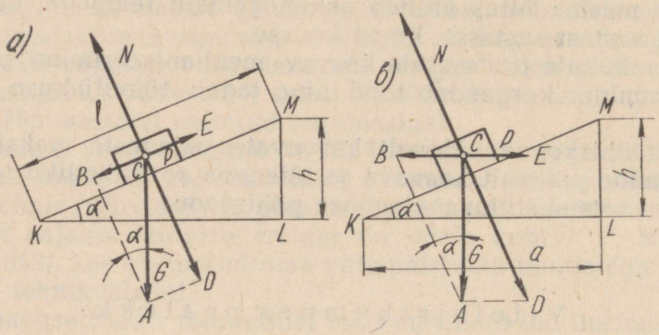
Tähistades kaldpinna KM pikkuse tähega l ning kõrguse LM

tähega h, saame täisnurksete kolmnurkade KLM ja ABC sarnasuse põhjal:

$$\frac{CB}{ML} = \frac{CA}{KM}, \text{ millest } CB = CA \cdot \frac{ML}{KM} = CA\,\frac{h}{l}.$$

Kuna otsitavat jõudu P kujutab vektor $\overline{CE}$, mis on võrdne vektoriga $\overline{CB}$, siis

$$P = G\,\frac{h}{l}. \tag{95}$$



Joon. 161

Seda valemit võib esitada teisel kujul. Tähistades kaldpinna nurga LKM tähega α, saame kolmnurgast KLM:

$$h = l \sin \alpha,$$

$$\text{millest } \frac{h}{l} = \sin \alpha,\ P = G \sin \alpha. \tag{96}$$

Vaatleme juhtu, kus jõud P ei ole paralleelne kaldpinnaga, vaid alusega KL (joon. 161, *b*).

Sel juhul lahutame jõu G kaldpinnaga ristuvaks komponendiks $\overline{CD}$ ja alusega KL paralleelseks komponendiks $\overline{CB}$. Arutledes samuti nagu eespool, võime kirjutada sõltuvuse:

$$\frac{CB}{ML} = \frac{CA}{KL}, \text{ millest } CB = CA\ \frac{ML}{KL} = CA\ \frac{h}{a},$$

järelikult

$$P = G\,\frac{h}{a}, \tag{97}$$

kus a on kaldpinna alus.

Kolmnurgast KLM saame, et $h = a \operatorname{tg} \alpha$, millest $\frac{h}{a} = \operatorname{tg} \alpha$ ja

$$P = G \operatorname{tg} \alpha. \tag{98}$$

Niisiis, esimesel juhul saime, et hõõrumise puudumisel tuleb kaldpinnal asuva keha tasakaalustamiseks rakendada kaldpinnaga paralleelset jõudu, mis on võrdne keha kaalu ja kaldpinna kõrguse ning pikkuse suhte korrutisega ehk, teiste sõnadega, keha kaalu ja kaldpinna tõusunurga siinuse korrutisega. Teisel juhul, kui jõud P on paralleelne alusega, peab tasakaalustav jõud olema võrdne keha kaalu ja kaldpinna kõrguse ning aluse suhte korrutisega ehk, teiste sõnadega, keha kaalu ja kaldpinna tõusunurga tangensi korrutisega.

Valemite (95) ja (97) võrdlemisel näeme, et esimesel juhul tuleb keha tasakaalustamiseks rakendada väiksemat jõudu, mis on samuti näha valemitest (96) ja (98), sest $\sin\alpha$ on väiksem kui $\operatorname{tg}\alpha$.

Kui kehale rakendada ühe jõu P asemel mitu jõudu, siis peame võtma nende resultantjõu, mis on paralleelne kaldpinnaga või kaldpinna alusega.

Kujutleme, et keha liigub ühtlaselt mööda kaldpinda üles; sel juhul kujutab keha kaal G endast kasulikku takistust, mida ületab jõud P. Olgu see jõud kaldpinnaga paralleelne (joon. 161, *a*). Kuna nurga siinus ei ole kunagi suurem kui üks, siis järeldub valemist (96), et kui $\alpha < 90°$, siis on P alati väiksem kui G, s. t. kui jõud P on suunatud kaldpinnaga paralleelne, võimaldab kaldpind võita jõu suhtes. Seda võitu väljendab takistusjõu G ja liikumapaneva jõu P suhe, mis valemi (95) järgi võrdub:

$$\frac{G}{P} = \frac{l}{h}.$$

Niisiis, et tõsta keha kõrgusele $h = ML$, peab jõud P mõjuma teepikkusel $l = KM$. Samale kõrgusele h võime keha tõsta ka ilma kaldpinna abita, kui rakendame temale vertikaalse jõu, mis on võrdne ja vastassuunaline keha kaaluga G.

Sellest suhtest saame järelikult, et niimitu korda, kui me võidame jõus, kaotame liikumises, ja vastupidi.

Selles seisab nn. „mehaanika kuldreegel".

Saadud järeldust kasutame ka teisel eespoolkäsitletud juhul, kus jõud P on paralleelne kaldpinna alusega. Seejuures tuleb silmas pidada, et, nagu nähtub valemist (98), kui $\alpha < 45°$, siis on jõud P väiksem jõust G; kui $\alpha = 45°$, siis on mõlemad jõud omavahel võrdsed ning kui $\alpha > 45°$, siis on $P > G$, mis on näha valemist (98).

Kõrvutame nüüd tööd, mida teevad kaldpinnal asuvale kehale rakendatud jõud, kui keha on ühtlases liikumises. Nagu eespool nägime, mõjuvad kehale jõud G, P ja N. Jooniselt 161, *a* on näha,

et jõud G moodustab kaldpinnaga nurga $ACB = 90° - \alpha$. Kasutades valemit (74), saame töö, mida teeb see jõud teepikkusel l: $A_G = Gl \cos (90° - \alpha) = Gl \sin \alpha$. Jõu P töö $A_P = Pl$, ehk, asendades valemist (96) jõu $P = G \sin \alpha$, saame, et $A_P = Pl = G \sin \alpha \, l = Gl \sin \alpha$.

Liikumissuunaga ristuva jõu N töö on võrdne nulliga. Nagu näeme, $A_G = A_P$, s. o. liikumapanevate jõudude töö võrdub takistusjõudude tööga.

Seni me rääkisime keha ühtlasest liikumisest mööda kaldpinda üles, arvestamata seejuures nende vahel esinevat hõõrdumist. Tegelikult vähendab hõõrdumise olemasolu kasulikku jõudu. Niisiis, peale jõu $\overline{CB}$ mõjub liikumisele vastupidises suunas veel hõõrdejõud $F = fN$, kus f on hõõrdetegur. Kuna aga jõud N on suuruselt võrdne jõuga $\overline{CD}$, mis kaldpinnaga paralleelse jõu korral omakorda võrdub $G \cos \alpha$, siis $F = Gf \cos \alpha$.

Selleks et keha liiguks üles ühtlaselt, peab jõud P võrduma takistusjõudude summaga, s. o.

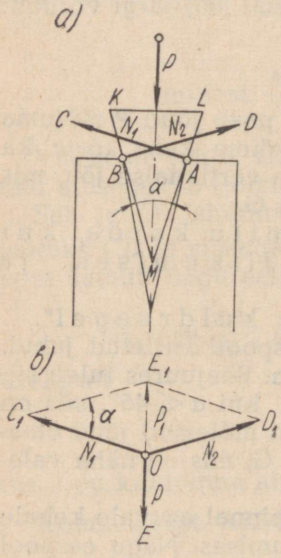
$$P = G \sin \alpha + Gf \cos \alpha = G(\sin \alpha + f \cos \alpha). \qquad (99)$$

Näide 69. Mööda kaht paralleelset kaldtala, millede kummagi pikkus on 5 m, tuleb üles tõsta raskus $G = 400$ kg kõrgusele 0,5 m. Leida selle töö tegemiseks vajalik jõud, kui hõõrdetegur $f = 0{,}15$.

Kui $h = 0{,}5$ m ja $l = 5$ m (joon. 161, a), siis $0{,}5 = 5 \sin \alpha$, kust $\sin \alpha = 0{,}1$; $\alpha = 5° 45'$, $\cos \alpha = 0{,}995$ ja otsitav jõud

$$P = 400 \ (0{,}1 + 0{,}15 \cdot 0{,}995) \approx 100 \text{ kg}.$$

§ 140. Kiil



Joon. 162.

Kiil kujutab endast kaldpinna erikuju ja ta sarnaneb kolmetahulise prismaga (joon. 162, *a*). Prisma ristlõikes on nurk $\alpha = KML$ tunduvalt väiksem kui kaks ülejäänud nurka; tahku KL nimetatakse kiilu peaks, tahke KM ja LM — põskedeks.

Tungigu kiil jõu P mõjul ühtlaselt liikudes teise kehasse. See keha osutab liikumisele takistust, mis väljendub külgtahkudega KM ja LM risti olevate reaktsioonidena N_1 ja N_2. Et kiil oleks tasakaalus, peavad jõud P, N_1 ja N_2 vastastikku tasakaalustuma (arvestamata hõõrdejõude). Koondame need kolm jõudu meelevaldsesse punkti O ja ehitame vektoritele $\overline{OC_1}$ ja $\overline{OD_1}$ parallelogrammi $OC_1E_1D_1$ (joon. 162, *b*). Tasakaalu korral peab diagonaal OE_1 olema võrdne ja vastassuunaline vektoriga $\overline{OE}$, mis väljendab jõudu P. Kolmnurkade OC_1E_1 ja KLM võrdlemisel

leiame, et nad on sarnased, sest nende nurki moodustavad vastastikku ristuvad küljed, millest saame, et

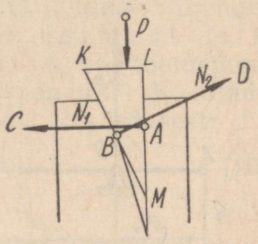
$$P : N_1 : N_2 = KL : ML : KM. \qquad (100)$$

Kui kiil, nagu näidatud joonisel, on võrdkülgne, (s. o. $KM = ML$), siis

$$\frac{N}{P} = \frac{KM}{KL}, \qquad (101)$$

s. o. võit jõus võrdub külgtahkude pikkuse ja pea paksuse suhtega. Kuna pea on seda õhem, mida väiksem on kiilu nurk α, siis selle nurga vähenemisel kiiluga saadav efekt suureneb.

Seda kiilu omadust kasutatakse mitmesuguste lõhestamis- ja lõikeriistade juures ja muudel juhtudel. Allpool (§ 204) tutvume sellega, kuidas kasutatakse kiilu detailide kinnitamisel.



Joon. 163

Tuleb alla kriipsutada, et hõõrdejõudude mõju suureneb nurga α vähenemisel. Nii on näiteks teada, et puid on kergem lõhkuda paksu silmaga kirvega (lõhkumiskirvega) mitte ainult sellepärast, et sellel on suurem mass ja kineetiline energia, vaid ka sellepärast, et teda on kergem tekkinud praost välja tõmmata kui puusepakirvest.

Näide 70. Leida, kui suured on jõud N_1 ja N_2 kiilu KLM ühtlasel liikumisel, kui kiilu pea paksus $KL = 25$ mm ja külgtahkude pikkus $LM = 200$ mm. Kiilule mõjuv jõud $P = 50$ kg; hõõrdejõu jätame arvestamata.

Valemist (100) saame, et $\frac{P}{N_1} = \frac{KL}{ML} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$; millest $N_1 = 8P = 400$ kg.

Sama valemiga saame, et $N_2 = P \cdot \frac{KM}{KL} = 50 \frac{\sqrt{25^2 + 200^2}}{25} \approx 403$ kg.

§ 141. Kang

Olgu sirgele kangile (joon. 164) rakendatud kaks paralleelset jõudu P ja Q, mis on risti kangi AB pikiteljega; punkt O, mida nimetatakse toetuspunktiks, asub jõudude Q ja P rakenduspunktidest kaugusel a ja b.

Selleks et kang oleks tasakaalus, peab olema täidetud kaks tingimust, mis on toodud § 34, ja nimelt: a) kõigi jõudude algebraline summa peab võrduma nulliga — valem (12) ja b) kõigi jõudude momentide algebraline summa peab võrduma nulliga — valem (13).

Esimest tingimust märgitakse järgmiselt:

$$P + Q - R = 0, \text{ millest } P + Q = R,$$

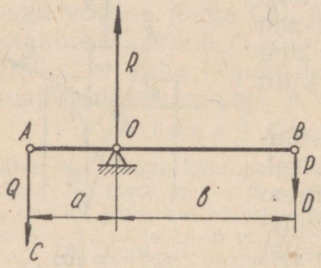
kus R on toereaktsioon.[1]

Võtnud kõigi jõudude momentide algebralise summa punkti O suhtes, saame:

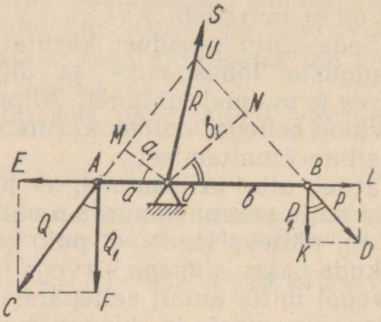
$$Pb = Qa = 0 \text{ ehk } \frac{Q}{P} = \frac{b}{a}, \tag{102}$$

s. o. jõud on pöördvõrdelised kangi õlgadega.

Vaatleme nüüd keerukamat juhtu, kus jõud P ja Q ei ole kangi pikiteljega risti (joon. 165).



Joon. 164



Joon. 165

Lahutame jõu P komponendiks $\overline{BL}$, mis on suunatud piki kangi telge, ning komponendiks $\overline{BK}$, mis on kangi teljega risti; toiminud samuti jõuga Q, saame jõud $\overline{AE}$ ja $\overline{AF}$. Kui tugi on konstrueeritud selliselt, et kang ei saa horisontaalsihis liikuda, siis jõudude $\overline{BL}$ ja $\overline{AE}$ resultantjõu tasakaalustab toereaktsiooni R horisontaalne komponent: järelikult, et kang jääks tasakaalu, on vaja, et ülejäänud jõudude momentide summa mistahes punkti suhtes võrduks nulliga. Võttes momentide tsentriks punkti O, saame:

$$P_1 b = Q_1 a. \tag{a}$$

Tõmbame punktist O jõudude Q ja P mõjusirgetele ristjooned $OM = a_1$ ja $ON = b_1$. Võrreldes täisnurkseid kolmnurki OMA ja AFC, samuti kolmnurki ONB ja BKP näeme, et neil on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, järelikult on need kolmnurgad paarikaupa sarnased: $\triangle OMA \sim \triangle AFC$ ja $\triangle ONB \sim BKD$, millest järeldub:

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OM}{AF} \text{ ehk } \frac{a}{Q} = \frac{a_1}{Q_1}, \text{ millest } Q_1 a = Q a_1.$$

[1] Kangi omakaalu arvesse ei võeta, sest tavaliselt on see temale rakendatavate jõududega võrreldes tühine.

Täpselt samuti saame, et $P_1b = Pb_1$.

Asetanud need P_1b ja Q_1a avaldised eespoolkirjutatud võrrandisse *(a)*, saame:

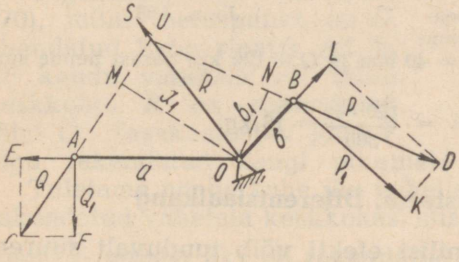
$$Pb_1 = Qa_1 \text{ ehk } \frac{Q}{p} = \frac{b_1}{a_1}. \qquad (102\text{ a})$$

Niisiis saime avaldised, mis on analoogilised avaldisega (102); erinevus seisab ainult selles, et kangi õlgade a ja b asemel esinevad selles jõudude P ja Q momentide õlad toetuspunkti suhtes.

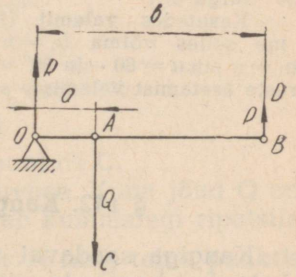
Käsitleme nüüd üldjuhtu, kui kang ei ole sirge (joon. 166). Lahutanud kummagi jõu P ja Q komponentideks $\overline{BL}$, $\overline{BK}$ ja $\overline{AF}$, $\overline{AE}$, kusjuures $BK \perp OB$ ja $AF \perp OA$ ning, arutledes nagu eespool, saame samasuguse avaldise kui (102 a)[1].

Vaadeldud juhtudel asetses toetuspunkt O jõudude rakenduspunktide vahel. Niisugust kangi nimetatakse e s i m e s t l i i k i k a n g i k s, erinevalt t e i s t l i i k i k a n g i s t, kus toetuspunkt O asetseb rakendatud jõududest ühel pool (joon. 167). Kasutades sel juhul valemit (12), määrame toereaktsiooni R võrdusest:

$$Q - P - R = 0, \text{ millest } R = Q - P. \qquad (103)$$



Joon. 166



Joon. 167

Seejärel, võtnud jõudude momentide algebralise summa punkti O suhtes, saame, et $Qa - Pb = 0$, millest

$$Pb = Qa. \qquad (104)$$

Kui jõudude mõjusirged ei oleks kangi teljega risti või kang ei oleks sirge, siis tuleksime samale järeldusele mis esimest liiki kangi juures.

Niisiis on kõigil juhtudel kangi tasakaalu korral s e l l e l e r a k e n d a t u d j õ u d P j a Q p ö ö r d v õ r d e l i s e d n e n d e m õ j u s i r g e t e k a u g u s t e g a r a k e n d u s p u n k t i s t.

[1] Toereaktsiooni võib määrata järgmisel viisil. Paragrahvis 24 tõestatu põhjal lõikuvad jõudude P, Q ja R mõjusirgel ühes punktis U, järelikult on reaktsiooni mõjusirge teada. Ehitanud kõrvale jõudude P ja Q parallelogrammi, saame resultantjõu. Reaktsioon OS on sellega võrdne ja vastupidine.

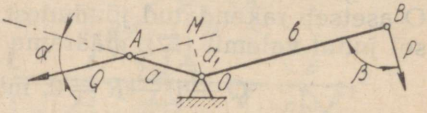
Siit näeme, et kang võimaldab väiksema jõuga tasakaalustada suuremat, s. o. võita jõus. Samaaegselt on kerge veenduda, et teepikkus, mille läbib väiksema jõu P rakenduspunkt, on nii mitu korda suurem jõu Q rakenduspunkti poolt läbitavast teepikkusest, kui mitu korda on jõud Q suurem jõust P, s. t. ka siin kehtib „mehaanika kuldreegel".

Võttes arvesse, et kangil esineb toetuspunktis hõõrdumine, on kasulik töö mõnevõrra väiksem liikumapaneva jõu tööst.

Kangi ei kasutata mitte ainult väiksema jõu suuremaks muutmiseks, vaid ka võitmiseks liikumises; näiteks nihutades punkti A (joon. 167) teatud suuruse võrra, nihkub punkt B nii mitu korda rohkem kui mitu korda on õlg b pikem õlast a. Seda kangi omadust kasutatakse sageli mõõteriistade juures.

Kangi kasutatakse laialdaselt masinates, mehhanismides, mitmesugustes seadistes jne.

Näide 71. Põlvkangi AOB (joon. 168) õlg $a = 80$ mm; $b = 300$ mm. Kui suur peab olema õlaga OB risti olev jõud P, et tasakaalustada jõudu $Q = 120$ kg, mis mõjub õla OA suhtes 30° nurga all?



Joon. 168

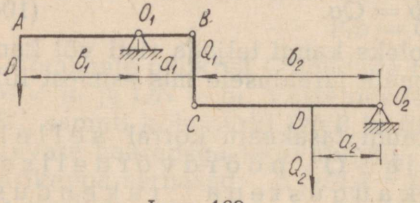
Kasutades valemit (102 a) peame selles võtma $b_1 = b = 300$ mm; $a_1 = a \sin\alpha = 80 \cdot \sin 30° = 80 \cdot 0{,}5 = 40$ mm ja $Q = 120$ kg; pärast nende suuruste asetamist valemisse saame:

$$P = \frac{Qa_1}{P_1} = \frac{120 \cdot 40}{300} = 16 \text{ kg}.$$

§ 142. Kangide süsteem. Diferentsiaalkang

Kangiga saadavat mehaanilist efekti võib tunduvalt suurendada, kui kasutada mitme, omavahel ühendatud kangi süsteemi.

Võtame kaks kangi, mis moodustavad joonisel 162 kujutatud süsteemi. Toetuspunktiga O_1 varustatud kangi AB otsale B on ripatsi BC abil ühendatud teise kangi ots C. Teine kang on toetatud punktis O_2. Rakendades otsas A jõu P, saame otsas B jõu Q, mille suuruse võib leida suhtest $Pb_1 = Q_1a_1$, millest $Q_1 = \frac{Pb_1}{a_1}$.



Joon. 169

See jõud kantakse üle kangi CO_2 otsale C. Kangile CO_2 mõjuvate jõudude vahel kehtib seos $Q_1b_2 = Q_2a_2$, millest punktis D saadud jõud

$$Q_2 = Q_1 \frac{b_2}{a_2}.$$

Asetades sellesse avaldisse äsjasaadud Q_1 väärtuse, saame:

$$Q_2 = P \frac{b_1b_2}{a_1a_2}. \qquad (105)$$

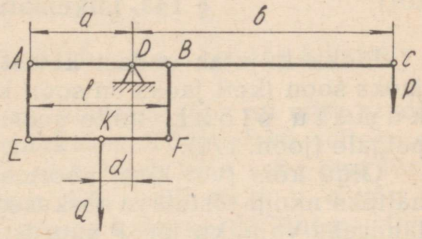
Kui me võtaksime süsteemi, mis koosneb kolmest kangist, siis saaksime:

$$Q_3 = P\frac{b_1}{a_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}\cdot\frac{b_3}{a_3}\text{ jne.}$$

Niisiis, kogu kangide süsteemiga saadav võit jõus avaldub korrutisena teguritest, mis väljendavad süsteemi kuuluva iga üksiku kangi võitu jõus.

Kui me võtaksime kaks kangi, mille õlgade suhted $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=10$, siis kogu võit jõus oleks $\frac{Q}{P}=10^2=100$. Vastavalt sellele, kui punkti D liikumine oleks 0,1 mm, siis peaks punkt A liikuma $0{,}1\cdot 100=10$ mm.

Selline kangide süsteem aga osutuks väga kohmakaks. Seepärast kasutatakse sellist kangide süsteemi teisel kujul, mida nimetatakse diferentsiaalkangiks.



Joon. 170

Olgu kangidega AC (joon. 170), mille toetuspunkt on D, ühendatud kahe ripatsi AE ja BF kaudu vahetala EF, mille keskkohta K on rakendatud jõud Q. Tasakaalustav jõud P olgu rakendatud kangi pikemale õlale punktis C.

Tuletame nende kahe jõu vahelise sõltuvuse. Kuna jõud Q on rakendatud vahetala keskkohas, siis jaguneb kummalegi ripatsile jõud $\frac{Q}{2}$, millest üks on rakendatud punktis A ning teine punktis B. Kirjutame kangi tasakaalutingimuse, kasutades võrrandit (12), sest kõik jõud on paralleelsed (kangi kaalu jätame arvesse võtmata):

$$-\frac{Q}{2}a+\frac{Q}{2}(l-a)+Pb=0$$

ehk

$$\frac{Q}{2}(l-a-a)+Pb=Q\left(\frac{l}{2}-a\right)+Pb=0,$$

millest

$$Q=P\frac{b}{a-\frac{l}{2}}.$$

Tähistades jõu Q mõjusirge kauguse toetuspunktist tähega d, s. o. $d=a-\frac{l}{2}$, saame lõplikult:

$$Q=P\frac{b}{d}. \qquad (106)$$

Nagu näeme, võrdub võit jõus kangi pikema õla pikkuse CO ja vahetala keskkohta K ning toetuspunkti D läbivate vertikaalsete sirgete vahekauguse suhtega. Kuna selle vahekauguse võib teha kuitahes väikeseks, siis võib saada kuitahes suurt võitu jõus. Diferentsiaalkangi võib konstrueerida ka teistsuguste skeemide järgi, kuid ripatsite ja vahetala kasutamise põhimõte jääb samaks.

Diferentsiaalkangide süsteemi kasutatakse tegelikult detsimaal- ja sentimaalkaaludes.

Näide 72. Äsjavaadeldud diferentsiaalkangi õlg $b = 1000$ mm, õlg $a = 251$ mm ja õlg $l = 500$ mm; siis $d = 251 - \frac{500}{2} = 1$ mm. Paigutanud need väärtused valemisse (106), saame, et $Q = 1000\ P$.

§ 143. Liikumatu ja liikuv plokk

Plokk kujutab endast ketast, mille pöiasse on tehtud köie jaoks soon (keti jaoks on soon koos pesadega). Lihtsaim on liikumatu plokk, mille geomeetriline telg jääb töötamise ajal paigale (joon. 171).

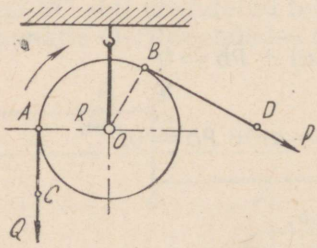
Olgu köis (või kett) koormatud ühelt poolt mingi jõuga Q, näiteks mingi tõstetava raskusega. Et määrata jõu Q tasakaalustamiseks vajaliku jõu P suurust, mis on rakendatud köie teisele otsale, vaatleme plokki kui põlvkangi AOB, mis on võrdõlgne, sest $AO = OB = R$, kus R on plokiratta raadius. Kirjutanud selle kangi tasakaalutingimused tema toetuspunkti O suhtes, saame:

$$PR = QR,$$

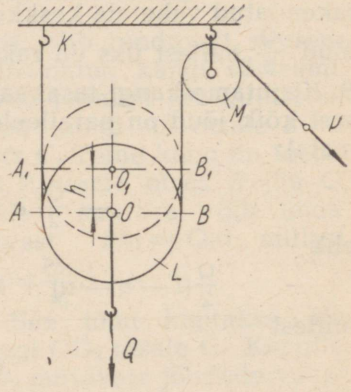
millest

$$P = Q.$$

Nagu näeme, ei muutu liikumatus plokis suuruse poolest ei jõud ega kiirus. Muutub ainult jõu suund.



Joon. 171



Joon. 172

See on paljudel juhtudel kasulik. Näiteks selle asemel, et mingit raskust vahetult vertikaalselt tõsta, on palju mugavam kasutada liikumatut plokki, rakendades köiele ülevalt alla suunatud jõu.

Kahjulikkude takistuste tõttu on ploki kasutegur tavaliselt 0,8—0,9.

Joonisel 172 skemaatiliselt kujutatud plokki, mille telg töötamisel liigub, nimetatakse liikuvaks.

Köis, mille ots on kinnitatud liikumatu konksu K külge, läheb alt ümber ploki L; köie teisele otsale[1] mõjub liikumapanev jõud P. Takistav jõud Q (näiteks tõstetava raskuse kaal) on rakendatud liikuva ploki põskedele, milles pöörleb ploki telg.

Tuletame liikumapaneva jõu P ja takistava jõu Q vahelise sõltuvuse. Vaadeldes ploki läbimõõtu AB teist liiki kangina, mis jõu P toimel pöördub ümber punkti A, kasutame valemit (104), milles b asendame läbimõõduga AB, ning a raadiusega AO. Seega saame, et $\frac{P}{Q} = \frac{R}{2R}$, millest

$$P = \frac{Q}{2}, \tag{107}$$

s. o. liikumapanev jõud võrdub poole takistava jõuga.

On ilmne, et ka antud juhul me võidame jõus nii mitu korda, kui mitu korda me kaotame teepikkuses. Tõepoolest: selleks et tõsta ploki tsentrit kõrgusele $OO_1 = h$, tuleb köie vaba otsa tõmmata pikkuse võrra, mille suurus $AA_1 + BB_1 = 2h$, s. o. jõu Q rakenduspunkt läbib teepikkuse, mis on kaks korda lühem sellest teepikkusest, mille läbib jõud P. Samaaegselt näeme, et jõu Q töö $Qh = 2Ph$, ning jõu P töö moodustab $P \cdot 2h$, s. o. liikumapaneva jõu töö võrdub tõstetava jõu tööga, nagu peabki olema.

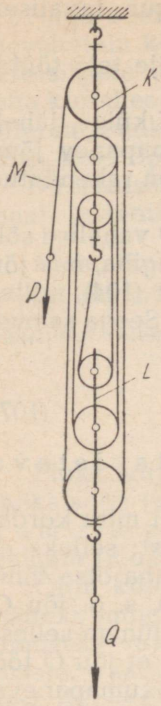
§ 144. Plokkide süsteem. Diferentsiaalplokk

Plokkide nagu kangidegi mehaanilise efekti suurendamiseks ühendatakse nad süsteemiks.

Joonisel 173 on näidatud ühe niisuguse süsteemi skeem. Nagu sellelt skeemilt näeme, koosneb süsteem mitmest (antud juhul kolmest) liikumatust plokist, mis pöörlevad liikumatutes põskedes K ja samast arvust liikuvatest plokkidest, mis pöörlevad teistes põskedes L. Köis, mille ots on kinnitatud liikumatu põse konksu külge, läheb järgemööda üle kõigi plokkide ja lõpeb vaba otsaga M, mille külge rakendatakse liikumapanev jõud P. Antud juhul jaguneb jõud Q ühe ja sama köie kuuele harule ja seepärast tuleb igale harule koormus $\frac{Q}{6}$; köie vabale otsale rakendatav tasakaalustav jõud

$$P = \frac{Q}{6} = \frac{Q}{2 \cdot 3}.$$

[1] Kuna liikuvat plokki kasutatakse tavaliselt raskuste tõstmiseks, mille juures liikumapanev jõud on suunatud alla, siis on skeemil näidatud ka liikumatu plokk M.



Joon. 173

Kui süsteemis oleks 4 paari plokke, siis jõud $P = \frac{Q}{8} = \frac{Q}{2 \cdot 4}$. Niisiis näeme, et võit jõus võrdub liikuvate plokkide kahekordse arvuga: kui liikuvas põses on n plokki, siis liikumapanev jõud

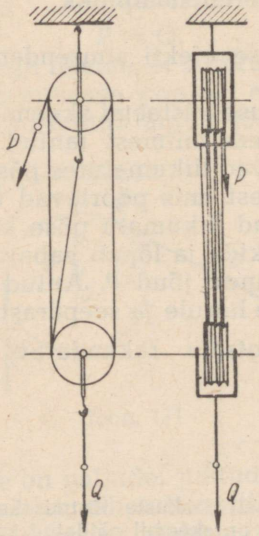
$$P = \frac{Q}{2n}. \qquad (108)$$

Kuid vastavalt meile tuntud reeglile peab jõu P rakenduspunkti liikumine olema $2n$ korda suurem tõstetava jõu Q rakenduspunkti liikumisest.

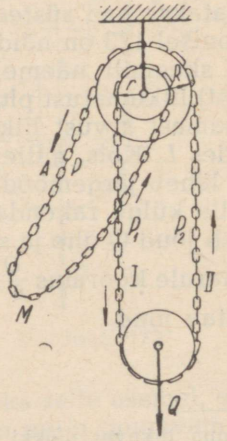
Selle asemel, et paigutada plokke üksikutele telgedele vertikaalsihis, paigutatakse nad tavaliselt kummaski põskedepaaris ühisele horisontaalteljele (joon. 174).

Plokkide (liikuvate ja liikumatute) süsteemi, mis on rühmitatud põskedesse ja ühendatud köie või ketiga, nimetatakse polüspastiks ehk taliks.

Analoogiliselt diferentsiaalkangile kasutatakse diferentsiaalplokki (joon. 175). Ülemine liikuv plokk on kaksikratastega, mille astmete raadiused on R ja r. Nagu skeemilt nähtub, käib üle selle ploki ja liikumatu ploki lõputu kett, mis läheb alumiselt plokilt ülemise suuremale astmele ja seejärel uuesti alla, moodustades lahtise aasa M, mille üht haru tõmmatakse käsitsi. Seejärel läheb kett ümber väiksema astme ja edasi ümber liikuva ploki.



Joon. 174



Joon. 175

Liikumapaneva jõu P ja tõstetava jõu Q vahelise sõltuvuse määramiseks vaatleme, millised jõud mõjuvad ülemisele plokile. Jõu Q toimel tekivad kummaski ketiharus I ja II jõud $P_1 = P_2 = \frac{Q_1}{2}$. Kujutleme, et ülemine plokk teeb ühe pöörde. Liikumapaneva jõu P töö selle aja kestel $A = P \cdot 2\pi R$. Samal perioodil teeb jõud P_1 töö $A_1 = P_1 \cdot 2\pi r = \frac{Q}{2} \cdot 2\pi r = Q\pi r$. Jõu P_2 töö

$$A_2 = P_2 \cdot 2\pi R = \frac{Q}{2} \cdot 2\pi R = Q\pi R.$$

Kaks esimest jõudu on liikumapanevad jõud, viimane on takistusjõud. Kuna liikumapanevate jõudude töö peab võrduma takistusjõudude tööga: $2\pi PR + \pi Qr = \pi QR$, siis

$$P = Q\,\frac{R-r}{2R} = Q\,\frac{R-r}{D}, \qquad (109)$$

kus R ja r on vastavalt liikumatu plokiratta suurema ja väiksema astme raadiused, ning D suurema astme läbimõõt. Niisiis, *diferentsiaalploki liikumapanev jõud võrdub korrutisega, mille esimeseks teguriks on takistusjõud ja teiseks teguriks liikumatu ploki astmete raadiuste vahe ning suurema astme läbimõõdu suhe.*

Kuna vahe $R - r$ võib võtta kuitahes väikese, siis võib kirjeldatud plokk anda suure võidu jõus.

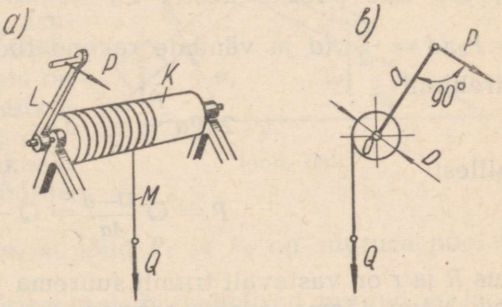
Näide 73. Millise läbimõõduga tuleb valida liikumatu plokiratta väiksem aste, et saada jõus võitu $\frac{Q}{P} = 8$, kui suurema astme läbimõõt $D = 200$ mm ning ploki kasutegur $\eta = 0{,}8$.

Valemi (109) järgi $\frac{Q}{P} = \frac{D}{R-r}$ ning, arvestades kahjulikke takistusi, võit jõus $\frac{Q}{P} = \frac{D}{R-r} \cdot \eta$. Pärast arvsuurustega asendamist saame, et $8 = \frac{200 \cdot 0{,}8}{100-r}$, millest $r = 80$ mm ning väiksema ratta läbimõõt peab olema 160 mm.

§ 145. Harilik ja diferentsiaalpöör

Lihtsaimaks seadmeks võitmiseks jõus on pöör (joon. 176).

Kahel laagril pöörlevale võllile on kinnitatud trummel K (joon. 176, *a*). Võllile antakse pöörlev liikumine võlli otsa kinnitatud käsivända L abil. Seejuures köis M, mis on ühe otsaga kinnitatud trumli pinnale ja mille teise

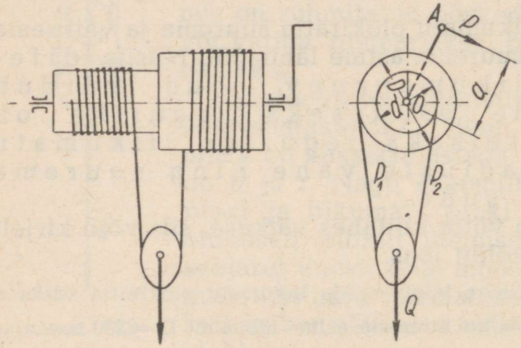


Joon. 176

otsa on rakendatud jõud Q, mähitakse ümber trumli. Olgu trumli läbimõõt D ning vända pikkus a, mille otsale on rakendatud liikumapanev jõud P (joon. 176, *b*). Et määrata jõudude Q ja P vahelist sõltuvust, võrrutame tööd, mida kumbki jõud teeb ühe pöörde vältel. Jõu P töö $A_P = P \cdot 2\pi a$ ning jõu Q töö $A_Q = Q\pi D$, kus D on trumli läbimõõt. Sellele vastavalt saame, et $P \cdot 2\pi a = Q\pi D$, millest

$$P = Q\frac{D}{2a}, \tag{110}$$

s. o. liikumapanev jõud võrdub takistusjõu ja trumli läbimõõdu ning vända kahekordse pikkuse suhte korrutisega.



Joon. 177

Suurt võitu jõus annab lihtpööraga võrreldes diferentsiaalpöör (joon. 177). Erinevalt lihtpöörast on diferentsiaalpööra trummel kaheastmeline.

Tähistame trumli suurema astme läbimõõdu tähega D ning väiksema astme läbimõõdu tähega d.

Kui pöörata vänta päripäeva, siis mähitakse köit trumli suuremale astmele peale ning väiksemalt astmelt maha. Jättes arvestamata liikuva ploki ümber minevate köieharude mitteparalleelsuse, eeldame, et kumbki neist on koormatud jõuga $P_1 = P_2 = \frac{Q}{2}$. Võrrutame liikumapanevate jõudude töö takistusjõu tööga. Jõu P_1 töö ühe pöörde kestel $A_1 = P_1\pi D = \frac{Q}{2}\pi D$; jõu P_2 töö $A_2 = P_2\pi d = \frac{Q}{2}\pi d$ ja vändale rakendatud jõu P töö $A = P \cdot 2\pi a$, järelikult

$$2\pi Pa + \frac{\pi Q}{2}d = \frac{\pi Q D}{2},$$

millest

$$P = Q\frac{D-d}{4a} = Q\frac{R-r}{2a}, \tag{111}$$

kus R ja r on vastavalt trumli suurema ja väiksema astme raadiused. Nagu näeme, saame samasuguse avaldise mis diferentsiaalploki jaoks.

Näide 74. Kui pikk tuleb teha diferentsiaalpööra vänt, kui trumli astmete läbimõõdud $D = 350$ mm ja $d = 300$ mm, tõstetav raskus $Q = 200$ kg ja vändale on rakendatud jõud 16 kg. Pööra kasutegur $\eta = 0{,}6$?

Hõõrdejõudu arvestades saab valem (111) järgmise kuju:

$$P\eta = Q\frac{R-r}{2a},$$

kus $P = 16$ kg, $\eta = 0{,}6$, $Q = 200$ kg, $R = 175$ mm ja $r = 150$ mm.

Avaldades sellest vända pikkuse a ja asetades valemisse arvsuurused, saame

$$a = \frac{Q\,(R-r)}{2\,P\eta} = \frac{200 \cdot 25}{2 \cdot 16 \cdot 0{,}6} \approx 260 \text{ mm}.$$

§ 146. Kordamisküsimusi

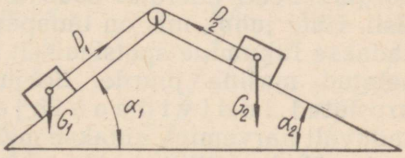
1. Kuidas muutub jõud P (joon. 161, *a*) keha ühtlasel liikumisel mööda kaldpinda üles, kui suurendada kaldpinna pikkust kõrguse h endiseks jäädes?
2. Kuidas muutub jõu P suurus kiilu ühtlasel liikumisel tema mõjumise suunas, kui vähendada kiilu paksust põskede pikkuse endiseks jäädes?
3. Kuidas on kasulikum kangile rakendada liikumapanevat jõudu P, kas risti või kaldu kangi õla suhtes?
4. Kas muutub põlvkangi AOB (joon. 166) tasakaalustamiseks vajaliku jõu P suurus, kui kangi õlgu suurendada sama arv kordi?
5. Kolmest kangist koosnevas süsteemis võimaldab neist üks võita jõus 3 korda, teine 5 korda ja kolmas 7 korda. Millega võrdub üldine võit jõus?
6. Millised eelised on diferentsiaalkangil?
7. Jutustage, mille poolest erinevad teineteisest mehaanilise efekti suhtes liikumatu ja liikuv plokk.
8. Mida nimetatakse taliks?
9. Milles seisavad diferentsiaalploki ja diferentsiaalpööra eelised?

§ 147. Harjutusi

76. Mööda kaldpinda, mille tõusunurk on 30°, liigub ühtlaselt üles raskus $G = 200$ kg. Määrata liikumapanev jõud P, mis on suunatud kaldpinnaga paralleelselt, kui hõõrdetegur $f = 0{,}10$.

77. Määrata eelmise ülesande andmeil kaldpinna kasutegur.

78. Kahel kaldpinnal (joon. 178), mis moodustavad horisontaalsihiga nurgad α_1 ja α_2, asuvad kaks raskust kaaluga $G_1 = 10$ kg ja $G_2 = 15$ kg, mis on omavahel ühendatud üle liikumatu ploki mineva nööriga.



Joon. 178

Määrata nurk α_2 tasakaalu korral, kui $\alpha_1 = 30°$ ja hõõrdejõudu arvesse ei võeta.

Juhis. Võtta arvesse, et jõud P_1 ja P_2 on suuruse poolest omavahel võrdsed.

79. Kaldpindade ja horisontaalsihi vahelised nurgad α_1 ja α_2 (joon. 178) on vastavalt 30° ja 45°. Kuidas peavad omavahel suh-

tuma nööriga ühendatud raskuste G_1 ja G_2 kaalud, et raskused jääksid tasakaalu? Hõõrdumisjõudu arvesse ei võeta.

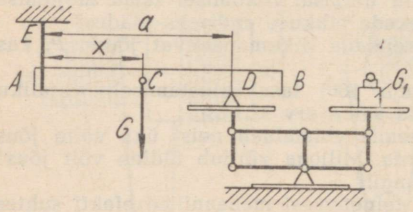
80. Et määrata mittehomogeense prussi AB raskuskeskme C kaugust x otsast A (joon. 179), riputati tema ots A liikumatule toele E ja seejärel asetati pruss kaalukausile, kuhu ta toetus punktis D. Määrata kaugus x, kui $a = 300$ mm, prussi kaal $G = 1{,}5$ kg ning kaalukausile mõjuvat prussi survet tasakaalustab viht kaaluga $G_1 = 1$ kg.

81. Tuletada valem (102 a) teist liiki sirge kangi kohta.

82. Tuletada sama valem (102 a) teist liiki põlvkangi kohta.

83. Kui suur peab olema jõud P diferentsiaalkangil (joon. 170), et tasakaalustada jõudu $Q = 1$ tonn, kui $AD = DB = 250$ mm, $EK = 249$ mm, $KF = 251$ mm ja $DC = 1000$ mm?

84. Polüspastil (joon. 174) on 5 liikuvat plokki. Millise jõuga P on vaja tõsta raskust, mille kaal on 200 kg?



Joon. 179

85. Diferentsiaalploki (joon. 175) astmete läbimõõdud $D = 360$ mm ja $d = 320$ mm. Kui suurt võitu annab ta jõus?

86. Millist jõudu P on vaja rakendada diferentsiaalpöörale (joon. 177), et tõsta raskust kaaluga 500 kg, kui $D = 300$ mm, $d = 250$ mm, $a = 400$ mm ning kasutegur $\eta = 0{,}7$?

Kuueteistkümnes peatükk

PARALLEELSETE VÕLLIDEGA ÜLEKANDED

§ 148. Üldteadmisi ülekannetest

Masinate liikumapanemiseks on vaja kulutada mehaanilist energiat. Seda energiat saab masinatesse juhtida mitmesugusel viisil. Ühel juhul, mis on tänapäeval kõige sagedamini kasutusel, saadakse liikumine spetsiaalselt elektrimootorilt, mis on vahetult asetatud masina juurde. Seejuures öeldakse, et see masin on varustatud individuaalajamiga. Teisel juhul, mis esineb tunduvalt harvemini, antakse mehaanilist energiat paljudele masinatele ühelt võllilt, mida nimetatakse transmissioonivõlliks, ning mis saab pöörlemise mootorilt. Niisugust ajamit nimetatakse rühmajamiks. Sageli teenindavad üht masinat mitu elektrimootorit, nagu see esineb suurtes metallilõikepinkides ja teistes masinates.[1] Nii individuaal- kui ka rühmajami puhul

[1] Näiteks on sammuv ekskavaator „ЭШ-14/65" varustatud 48 elektrimootoriga (mille üldvõimsus on 5200 kW).

kasutatakse mõnikord masina ja elektrimootori vahel eriseadiseid, mis võimaldavad masina veetavale võllile anda erinevaid nurkkiirusi (erinevaid pöörete arve minutis).

Seega kasutatakse mehaanilise energia ülekandmiseks nii masinale tervikuna kui ka selle sees üksikute lülide vahel mitmesugust liiki mehaanilisi seadmeid, mida üldiselt nimetatakse ülekanneteks.

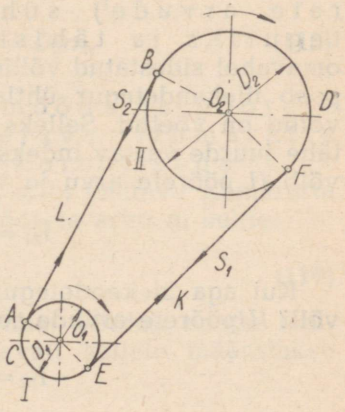
Kõige levinumaks ülekandeliigiks on pöörleva liikumise ülekandmine ühelt võllilt teisele.

Võllide vastastikune asend ruumis võib olla mitmesugune: teljed võivad asuda ühes tasapinnas või nad võivad asetseda ruumis kiivalt, nii et neist ühist tasapinda pole võimalik läbi panna. Kui võllide teljed paiknevad ühes tasapinnas, siis võivad nad lõikuda või olla teineteisega paralleelsed. Nende erinevate ülekandeliikide käsitlemist alustame lihtsaimast liigist, nimelt kui võllide teljed on teineteisega paralleelsed.

§ 149. Elastse sidestusega ülekande põhimõte

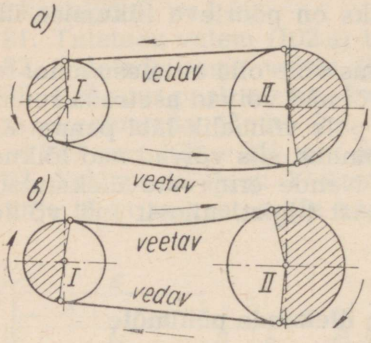
Laialdaselt kasutatakse paralleelsete võllide vahel pöörlemise ülekandmiseks lamerihmu (üksikutel juhtudel köisi), mis haaravad kummalegi võllile kinnitatud rattaid, mida nimetatakse rihmaratasteks. Olgu vaja kanda pöörlemine võllilt O_1 võllile O_2 (joon. 180). Kinnitame võllidele kohakuti kaks rihmaratast, mille üle tõmbame lõputu rihma *ABDFECA* nii, et see oleks pingul ja liibuks tihedalt vastu rihmarattaid. Kui rihmarataste ja rihmade vahel mõjub küllalt suur hõõrdejõud, siis on tagatud pöörlemise ülekandmine ühelt võllilt teisele. Võlli (rihmaratast) O_1, millelt antakse liikumine võllile O_2, nimetatakse vedavaks võlliks. Võlli (rihmaratast) O_2, mis saab liikumise vedavalt võllilt, nimetatakse veetavaks võlliks.

Nurki AO_1E ja BO_2F, mis vastavad kaartele *ACE* ja *BDF*, mille ulatuses toimub kokkupuutumine rihma ja rihmaratta pöia vahel, nimetatakse haardenurkadeks. Mida suurem on haardenurk, seda kindlamini toimub liikumise ülekandmine, sest seda suurem on kokkupuutekaar rihmaratta ja rihma vahel. Seepärast teostatakse rihmülekanne selliselt, et haardenurk oleks võimalikult suur.



Joon. 180

Olgu võll *I* (joon. 181, *a*) vedav ning võll *II* veetav. Näidatud pöörlemissuuna korral on rihma ülemine haru tugevamini pingutatud kui alumine, sest ta kannab üle jõudu, mis paneb pöörlema veetava rihmaratta. Seepärast on ülemine rihmaharu peaaegu sirge, alumine haru aga ripub läbi omakaalu mõjul. Joonisel 181, *b* näidatud pöörlemissuuna puhul tekib vastupidine pilt — läbirippuvaks haruks on ülemine. Võrreldes haardenurki vedaval ja veetaval rihmarattal, näeme, et teisel juhul on nad suuremad, mistõttu pöörlemise ülekanne toimub paremini. Siit järeldub, et ülekanne tuleb korraldada nii, et rihma vedav haru paikneks all.



Joon. 181

Rihm, mis ühendab mõlemat rihmaratast, peab olema võimalikult elastne (painduv), seepärast nimetatakse seda liiki ülekannet elastse sidestusega ülekandeks.

§ 150. Ülekandetegur ja ülekandearv elastse sidestusega ülekandes

Pöörleva liikumise ülekande arvutustes on hakatud kasutama suurust, mis näitab, mitu korda on ühe võlli nurkkiirus ehk pöörete arv minutis suurem või väiksem teise, temaga ühendatud võlli nurkkiirusest (pöörete arvust minutis). Kahe pöörlemisest osa võtva võlli nurkkiiruste (ehk pöörete arvude[1]) suhet nimetatakse ülekandeteguriks ja tähistatakse tähega *i*. Kuna kahest omavahel sidestatud võllist on üks vedav ning teine veetav, siis peab ülekandetegur ühtlasi näitama, millises järjekorras need võllid on võetud. Selleks kirjutatakse ülekandetegurit tähistava tähe juurde vastav indeks. Kui ülekandetegur väljendab veetava võlli *II* pöörete arvu ja vedava võlli *I* pöörete arvu suhet, siis

$$i_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}. \qquad (112)$$

Kui aga ülekandetegur väljendab vedava võlli *I* ja veetava võlli *II* pöörete arvude suhet, siis

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (113)$$

[1] Oeldes lühidalt „pöörete arv", mõistame selle all pöörete arvu minutis.

Teist suhet, s. o. vedava võlli ja veetava võlli pöörete arvu suhet nimetatakse ülekandearvuks.

Kui $n_1 = 1$, siis valemi (112) järgi $i_{21} = n_2$; järelikult võime öelda, et i_{21} näitab veetava võlli pöörete arvu, kui vedav võll teeb ühe pöörde.

Kirjutame lõpuks valemite (112) ja (113) põhjal järgmise seose:

$$i_{21} \cdot i_{12} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \frac{n_1}{n_2} = 1, \qquad (114)$$

millest $i_{21} = \frac{1}{i_{12}}$,

s. o. ülekandetegur vedavalt võllilt veetavale ja ülekandetegur veetavalt võllilt vedavale on teineteise pöördväärtuseks.

Küsimusi

1. Milline võll pöörleb suurema nurkkiirusega, kui $i_{21} > 1$, kui $i_{21} < 1$ ning kui $i_{21} = 1$?
2. Millega võrdub ülekandearv, kui $i_{21} = 1$?

§ 151. Ühe rihmarattapaariga ülekande kinemaatika

Pöördume joonise 181 juurde. Oletame, et rihm, mis läheb üle mõlema rihmaratta, ei veni ega libise rihmaratastel. Sel juhul on rihma liikumiskiirus kõigis tema punktides ühesugune ning võrdub kummagi rihmaratta pöia mistahes punkti kiirusega. Lühemalt võime öelda, et rihmaratta *II* ringkiirus võrdub vedava rihmaratta *I* ringkiirusega, millest saame:

$$\frac{\pi D_1 n_1}{60} = \frac{\pi D_2 n_2}{60} \text{ ehk } D_1 n_1 = D_2 n_2, \qquad (115)$$

s. o. vedava rihmaratta läbimõõdu ja pöörete arvu korrutis võrdub veetava rihmaratta läbimõõdu ja pöörete arvu korrutisega.

Siit võib määrata ülekandeteguri i_{21}, s. o. veetava rihmaratta pöörete arvu n_2 ja vedava rihmaratta pöörete arvu n_1 suhte:

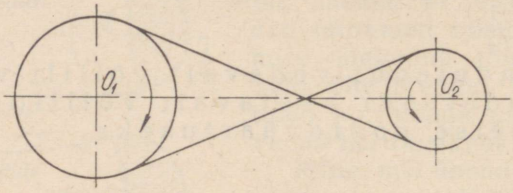
$$i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D_2}, \qquad (116)$$

s. o. ülekandetegur kahe rihmaratta vahel võrdub nende läbimõõtude suhte pöördväärtusega. Vastavalt sellele määratakse veetava võlli pöörete arv järgmiselt:

$$n_2 = n_1 i_{21} = n \frac{D_1}{D_2}. \qquad (116\ a)$$

Veetava võlli pöörete arv võrdub vedava võlli pöörete arvu ja ülekandeteguri (s. o. vedava rihmaratta läbimõõdu ja veetava rihmaratta läbimõõdu suhte) korrutisega.

Nagu jooniselt näeme, pöörleb veetav rihmaratas samas suunas vedava rihmarattaga. Niisugust ülekannet nimetatakse lahtiseks, erinevalt ristuva rihmaga ülekandest, mispuhul rihm ristub kaheksakujuliselt (joon. 182). Sel juhul pöörleb veetav rihmaratas vedava rihmaratta suhtes vastassuunas.



Joon. 182

Valem (116) seob omavahel nelja suurust: kahe omavahel sidestatud rihmaratta läbimõõte D_1 ja D_2 ja nende pöörete arvusid. Teades neist kolme, võib määrata neljanda.

Näide 75. Elektrimootori rihmaratas, mille läbimõõt on 180 mm, teeb 100 p/min. Millise läbimõõduga tuleb võtta veetav rihmaratas, kui see peab tegema $n_2 = 320$ p/min?

Valemi (116) järgi saame:

$$D_2 = D_1 \frac{n_1}{n_2} = 180 \cdot \frac{1000}{320} \approx 560 \text{ mm}.$$

Näide 76. Mitu pööret minutis n_1 teeb elektrimootori rihmaratas, mille läbimõõt on 300 mm, kui temaga sidestatud veetava rihmaratta läbimõõt on 560 mm ja ta teeb $n_1 = 400$ p/min?

Kasutades valemit (116), saame:

$$n_1 = n_2 \frac{D_2}{D_1} = 400 \cdot \frac{500}{300} \approx 750 \text{ p/min}.$$

§ 152. Mitme rihmarattapaariga ülekande kinemaatika

Minnes järgemööda ühelt võllilt teisele, võime saada ülekandeteguri ükskõik kui suure arvu rihmarataste jaoks.

Antagu võlli O_1 pöörlemine (joon. 183) võllile O_4 rihmarataste D_1 ja D_2, D_3 ja D_4, D_5 ja D_6 vahendusel. Nagu näeme skeemilt, on rihmarattad D_1, D_3 ja D_5 vedavad ning rihmarattad D_2, D_4 ja D_6 veetavad. Ülekandetegur võllide O_2 ja O_1 vahel $i_{21} = \frac{D_1}{D_2}$ ja võlli O_2 pöörete arv $n_2 = n_1 i_{21} = n_1 \frac{D_1}{D_2}$. Täpselt samuti ülekandesuhe võllide O_3 ja O_2 vahel $i_{32} = \frac{D_3}{D_4}$ ning võlli O_3 pöörete arv

$$n_3 = n_2 i_{32} = n_1 i_{21} i_{32} = n_1 \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{D_3}{D_4}.$$

Lõpuks viimase rihmarataste paari ülekandetegur $i_{43} = \frac{D_5}{D_6}$ ja viimase veetava võlli O_4 pöörete arv

$$n_4 = n_3 i_{43} = n_1 i_{21}\ i_{32}\ i_{43} = n_1 \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{D_3}{D_4} \cdot \frac{D_5}{D_6}.$$

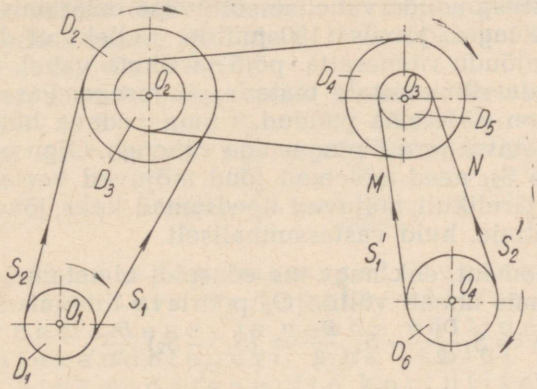
Tähistades ülekandeteguri võlli O_4 ja veetava võlli O_1 vahel tähisega i_{41}, saame:

$$n_4 = n_1 i_{41} = n_1 \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{D_3}{D_4} \cdot \frac{D_5}{D_6}, \tag{117}$$

kus

$$i_{41} = i_{21}\ i_{32}\ i_{43} = \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{D_3}{D_4} \cdot \frac{D_5}{D_6}. \tag{118}$$

Niisiis, kogu ülekandetegur võrdub kõigi vaheülekannete ülekandetegurite, s. o. naabervõllide ülekandetegurite korrutisega.



Joon. 183

Veetava võlli pöörete arv on võrdne kõigi vedavate rihmarataste läbimõõtude korrutise ja kõigi veetavate rihmarataste läbimõõtude korrutise suhte ja vedava võlli pöörete arvu korrutisega.

Nagu teada, ei olene korrutis tegurite järjekorrast. Siit järeldub, et me võime omavahel vahetada ükskõik millised kaks rihmaratast, mille läbimõõdud seisavad võrduste (117) või (118) paremal poolel kas nimetajas või lugejas. See tähendab, et veetava võlli pöörete arv ei muutu, kui asetada ümber veetavad rihmarattad või vedavad rihmarattad; seejuures on ilmne, et ei tohi vahetada omavahel veetavaid rihmarattaid vedavatega (näiteks rihmaratta D_2 asemele asetada rihmaratas D_1 või rihmaratta D_5 asemele asetada D_6 jne.),

sest niisuguse ümberpaigutuse korral muutuks kogu ülekandetegur ja järelikult ka veetava võlli pöörete arv.

Näide 77. Elektrimootorilt, mille rihmaratta D_1 läbimõõt on 180 mm ja mis teeb $n_1 = 1500$ p/min, kantakse rihmarataste $D_2 = 540$ mm, $D_3 = 160$ mm ja $D_4 = 400$ mm vahendusel pöörlemine võllile O_3. Määrata üldine ülekandetegur i_{31} ja võlli O_3 pöörete arv.

Valemi (117) abil saame, et $i_{31} = \frac{180}{540} \cdot \frac{160}{400} = \frac{2}{15}$ ja $n_3 = n_1 i_{31} =$

$= 1500 \frac{2}{15} = 200$ p/min.

§ 153. Rihmülekande staatika

Käsitlenud rihmülekande pöörleva liikumise kinemaatikat, pöördume nüüd selle ülekande staatika juurde, s. o. liikuvate jõudude ja takistusjõudude vahelise sõltuvuse määramisele.

Pöördume tagasi joonise 180 juurde. Selleks et tagada vajalikku hõõrdejõudu rihmaratta pöia ja rihma vahel, tõmmatakse rihm mõlemale rihmarattale teatava pingusega. Pärast seda, kui rihmarattad on pöörlema pandud, rihma vedava haru K pingus suureneb, veetava haru L pingus aga väheneb. Olgu esimene jõud S_1 ning teine S_2; need mõlemad jõud mõjuvad veetavale rihmarattale ning järelikult mõjuvad needsamad kaks jõudu ka vedavale rihmarattale, kuid vastassuunaliselt.

Pöörav moment, ehk nagu me edaspidi nimetame, p ö ö r d e m o m e n t, mis annab võllile O_2 pöörleva liikumise, on võrdne

$$M_2 = S_1 \frac{D_2}{2} - S_2 \frac{D_2}{2} = (S_1 - S_2) \frac{D_2}{2}.$$

Pinguste vahet $S_1 - S_2$ nimetatakse ringjõuks ja tähistatakse tähega P.

Järelikult pöördemoment üldkujul

$$M_p = P \frac{D_2}{2}, \tag{119}$$

ning ringjõud

$$P = \frac{2M_p}{D_2}. \tag{119 a}$$

Niisiis, pöördemoment veetaval võllil

$$M_2 = P \frac{D_2}{2}.$$

Valemist (116) saame:

$$D_2 = D_1 \frac{n_1}{n_2} = D_1 \frac{1}{i_{21}} \text{ ja } M_2 = P \frac{D_1}{i_{21}}.$$

Nagu öeldud, mõjuvad rihmarattale O_1 samasugused kaks jõudu S_1 ja S_2 ning järelikult pöördemoment vedaval võllil

$$M_1 = P\,\frac{D_1}{2}.$$

Võrrutades M_1 ja M_2 avaldised, saame lõplikult:

$$M_2 = \frac{M_1}{i_{21}}, \tag{120}$$

s. o. pöördemoment veetaval võllil võrdub vedavale võllile rakendatud pöördemomendi ja nendevahelise ülekandeteguri i_{21} suhtega.

On kerge tõestada, et valem (120) kehtib ükskõik kui suure arvu rihmarattapaaride kohta.

Tehku esimene vedav rihmaratas, mille läbimõõt on D_1 (joon. 183), üks pööre. Seejuures teeb võllile O_4 istatud viimane veetav ratas valemi (118) põhjal $i_{41} = i_{21}i_{32}i_{43}$ pööret. Arutledes endist viisi edasi, saame jõudude S_1 ja S_2 tööks vedaval rihmarattal $A_1 = (S_1 - S_2)\,\pi D_1 = P_1\pi D_1$.

Samal ajavahemikul moodustab viimase veetava rihmaratta töö jõudude S'_1 ja S'_2 toimel $A_4 = (S'_1 - S'_2)\pi D_6 i_{41} = P_4\pi D_6 i_{21}i_{32}i_{43}$.

Kuna aga $A_4 = A_1$, siis saame, et $P_1D_1 = P_4D_6i_{41}$, millest

$$M_4 = \frac{M_1}{i_{41}} = \frac{M_4}{i_{21}i_{32}i_{43}}, \tag{121}$$

s. o. pöördemoment viimasel veetaval võllil võrdub esimesele vedavale võllile rakendatud pöördemomendi ja nende võllide vahelise üldise ülekandeteguri (ehk kõigi vaheülekannete ülekandetegurite korrutise) suhtega.

Valemid (120) ja (121) ei võta arvesse ülekandes esinevatest kahjulikkudest takistustest tingitud kadusid. Nende takistuste olemasolu vähendab veetavale võllile antavat mehaanilist energiat ning järelikult ka pöördemomenti ja ringjõudu. Arvestades neid kadusid, võtab valem (120) järgmise kuju:

$$M_2 = \frac{M_1}{i_{21}}, \tag{122}$$

kus η on ülekande kasutegur.

Rihmülekannetes kõigub η väärtus piirides 0,94 kuni 0,985.

Küsimusi

1. Ülekandetegur $i_{21} < 1$. Mida võib öelda pöördemomendi kohta veetaval võllil — kas ta on suurem või väiksem vedava võlli momendist?
2. Vastata eelmisele küsimusele, kui $i_{21} = 1$.

Näide 78. Määrata näite 77 andmetel pöördemoment võllil O_3 ning ringjõud rihmarattal O_4, kui elektrimootor arendab võimsust $N = 7{,}4$ kW.

Kui võimsus $N = 7{,}4$ kW $= 7{,}4 \cdot 1{,}36 \approx 10$ HJ ja pöörete arv $N =$ $= 1500$ p/min, siis pöördemoment vedaval võllil valemi (81) põhjal

$$M_p = 716{,}2 \cdot \frac{10}{1500} = 4{,}775 \text{ kgm.}$$

Kasutades valemit (121), saame võllil O_3 pöördemomendi

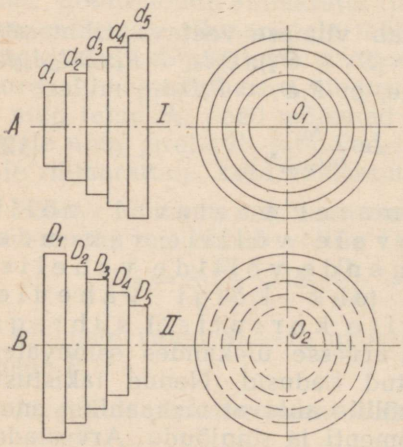
$$M_3 = \frac{M_4}{i_{31}} = 4{,}775 : \frac{2}{15} = 35{,}812 \text{ kgm}$$

ja rihmarattal D_4 ringjõu

$$P_4 = \frac{2M_3}{D_4} = \frac{2 \cdot 35\,812}{400} = 179 \text{ kg.}$$

§ 154. Muutuva ülekandeteguriga rihmülekanne

Paljudel juhtudel osutub vajalikuks teostada pöörlemise ülekanne sellisel viisil, et vedava võlli püsival pöörlemiskiirusel anda veetavale võllile erinevaid pöörlemiskiirusi. Üheks levinumaks viisiks, mida selleks otstarbeks kasutatakse, on ülekanne astmeratastega.



Joon. 184

Kinnitame vedavale võllile *I* (joon. 184) ja veetavale võllile *II* kohakuti kaks rihmaratast, milledel on mitmesuguse läbimõõduga astmed. Sel viisil võib rihm töötada ükskõik millisel astmepaaril: d_1 ja D_1, d_2 ja D_2 jne., millele vastavalt saame erinevad ülekandetegurid: $i_{21} = \frac{d_1}{D_1}, \frac{d_2}{D_2}$ jne. Neid ülekandetegureid on sama palju, kui palju astmeid on rihmarattal. On ilmne, et niisuguse ülekande realiseerimiseks peab rihma pikkus tema mitmesugustes asendites olema ühesugune. Selle nõude rahuldamiseks tuleb täita järgmisi tingimusi:

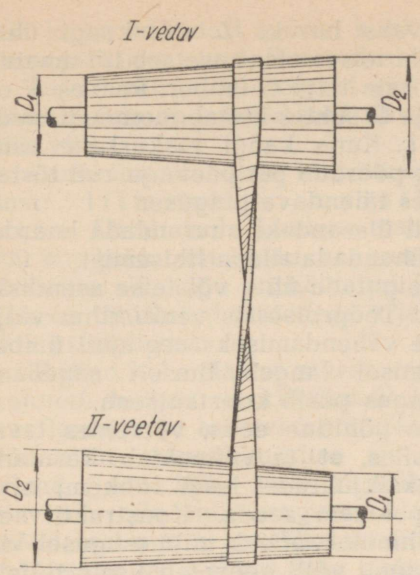
$$d_1 + D_1 = d_2 + D_2 = \ldots\ldots d_5 + D_5, \qquad (123)$$

s. o. kohakuti asetsevate astmete läbimõõtude summa peab olema konstantne.

Olgu vedava võlli pöörete arv minutis n. Viieastmelise rihmaratta korral võime veetaval võllil saada viis erinevat pöörete arvu:

$$n_1 = n \frac{d_1}{D_1}, n_2 = n \frac{d_2}{D_2}, n_3 = n \frac{d_3}{D_3}, n_4 = n \frac{d_4}{D_4}, n_5 = n \frac{d_5}{D_5},$$ kuid

igasugust pöörete arvu vahemikus n_5 ja n_2 ei ole võimalik saada. Teiste sõnadega, veetava võlli pöörete arvu võime muuta



Joon. 185

hüppeliselt, mitte aga sujuvalt. Ülekandeteguri sujuvaks muutmiseks kasutatakse teisi mooduseid.

Paigutame kohakuti kaks koonilist trumlit, mille põhjade läbimõõdud on vastavalt D_1 ja D_2 (joon. 185). Rihma äärmise vasakpoolse asendi korral on ülekandetegur $i_{21} = \frac{D_1}{D_2}$ ning äärmise parempoolse asendi korral $i_{21} = \frac{D_2}{D_1}$. Niisiis võib ülekandetegur omada kõik võimalikud väärtused alates $i_{21} = \frac{D_1}{D_2}$ kuni $i_{21} = \frac{D_2}{D_1}$.

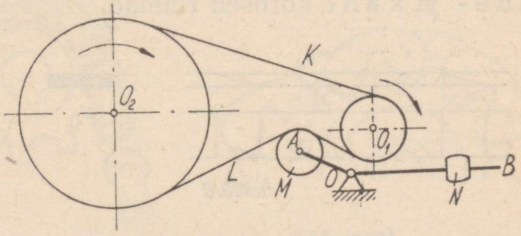
Trumleid võib kujundada mitte ainult sirgete, vaid ka kõverjooneliste moodustajatega.

On olemas ka teisi mooduseid ülekandeteguri astmeteta muutmiseks paralleelsete võllide vahel.

§ 155. Pingutusrulliga rihmülekanne

Et vähendada masina üldisi mõõteid, tehakse sageli vedava ja veetava võlli vahekaugus võimalikult väike, mis aga mõjub rihmülekande töötamisele ebasoodsalt. See seisab kõigepealt selles, et telgede vahekauguse vähendamisel väiksemal (tavaliselt vedava) rihmarattal haardenurk väheneb, mis põhjustab rihma libisemist.

Peale selle nõuab elektrimootori suur pöörete arv vajaliku ülekandeteguri saamiseks võimalikult väiksema läbimõõduga rihmaratta kasutamist.



Joon. 186

Et rihmülekanne töötaks rahuldavalt, ei tohi ülekandetegur olla suurem kui 3 (ainult erandjuhul kuni 5). Sageli tuleb pöörlemist aeglustada enam kui 3 korda.

Seoses nende nõuetega on võetud kasutusele pingutusrulliga ülekanded. Olgu võll O_1 vedavaks ning võll O_2 veetavaks (joon. 186). Rihmarataste näidatud pöörlemissuuna korral on

vedavaks haruks *K*, ning veetavaks haruks *L*. Põlvkangi ühes otsas *A* pöörleb vabalt rull *M*, õla teises otsas asetseb liikumatult raskus *N*; kangi saab vabalt pöörata telje *O* ümber. Raskus *N* on asetatud nii, et selle moment telje *O* suhtes ületab momendi, mida tekitab rulli kaal ja rihmaharu *L*. Kuna kangi raskuskese asub teljest *O* paremal pool, siis kang pöördub päripäeva ja rull tõstab üles rihmaharu *L*, tekitades selles täiendava pinguse.

Nagu näeme, on pingutusrulli ülesandeks suurendada haardenurka mõlemal rihmarattal ja vähendada rihma libisemist.

Raskust *N* võib kangi õlal paigutada ühte või teise asendisse ja sellega muuta rihma pingust. Tööprotsessis venib rihm välja ja seepärast tuleb teda pikkuse vähendamiseks aeg-ajalt ümber õmmelda. Pingutusrulli kasutamisel langeb ilmselt sagedane ümberõmblemine ära. Rihma pingus püsib konstantsena.

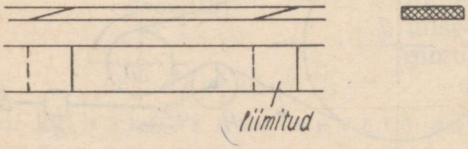
Pingutusrulliga rihmülekande põhiline eelis, võrreldes tavalise rihmülekandega, seisab selles, et ta võimaldab kasutada suuri ülekandearve (kuni 10, üksikjuhtudel isegi rohkem) ning koos sellega saavutatakse kompaktsem seade. Konstruktiivselt lahendatakse pingutusrulliga rihmülekandeid mitmesugusel viisil. Kangi telg *O* paigutatakse sageli võlli geomeetrilisele teljele O_1, mis mitmel juhul osutub kasulikumaks. Väikese võimsusega ülekannete korral kasutatakse raskuse *N* asemel vedrut.

§ 156. Lame- ja kiilrihmad

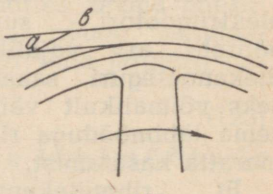
Rihmad valmistatakse mitmesugusest materjalist ja mitmesuguse ristlõikega.

Ristlõike kuju järgi jaotatakse rihmad l a m e r i h m a d e k s ja k i i l r i h m a d e k s.

Rihm töötab ülekandel tõmbele; mida suurem on ülekantav ringjõud, seda tugevam peab rihm olema. Seepärast on kasutusel ü h e - ja k a h e kordsed rihmad.



Joon. 187



Joon. 188

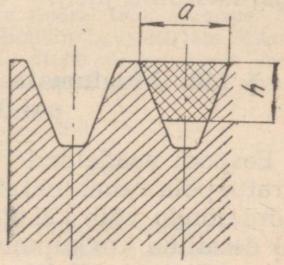
Ü h e k o r d s e d nahkrihmad valmistatakse pikuti kokkuliimitud (joon. 187) ribadest. Nende minimaalne paksus on 3,0 mm, maksimaalne — 5,5 mm ning suurim laius 300 mm. Kui arvutuse kohaselt ei saa kasutada ühekordset rihma, mis omaks vajalikku vastupidavust, siis kasutatakse k a h e k o r d s e t rihma,

mis kujutab endast kahte kokkuliimitud ja läbiõmmeldud või kogu pikkuses ainult liimitud rihma.

Laialdaselt on käesoleval ajal levinud tekstiil- ja kummeeritud rihmad, mis on valmistatud mitmesugust liiki kiudainetest (puuvill, vill).

Lamerihmade otste kinnitamiseks on kasutusel kolm moodust: liimimine, metall-liitmikud ja õmblemine. Liimimisele kuuluva nahkrihma otsad lõigatakse 100—200 mm pikkuselt kaldu; seejuures tuleb rihm rihmarattale peale tõmmata nii, nagu on näidatud joonisel 188, kus rihma liimitud jätk on tähistatud tähtedega *a* ja *b*. Kummeeritud rihmal tehakse jätk astmelisena.

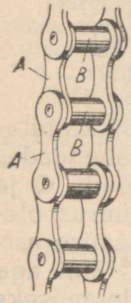
Eriline koht elastse sidestusega ülekannete hulgas on kiilrihm-ülekandel, kus lamerihma asemel kasutatakse üht või mitut trapetsikujulise ristlõikega rihma (joon. 189); selle ristlõikepindala võib olla mitmesugune, olenevalt mõõdetest *a* ja *h*; ristlõike minimaalsed mõõted on 10 ja 6 mm ning maksimaalsed — 50 ja 30 mm. Kiilrihm-ülekannet kasutatakse võllide väikese vahekauguse ja suure ülekandearvu korral.



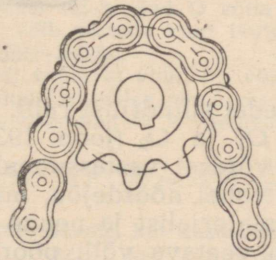
Joon. 189

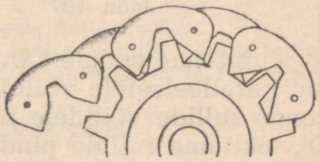
§ 157. Kettülekande mõiste

Eriliiki elastse sidestusega ülekandeks on kettülekanne, milles rihm on asendatud ketiga. Kuna keti lülid hambuvad ratta pöia hammastega, siis selles ülekandes ei ole libisemine võimalik ning on tagatud ülekandeteguri püsivus.



Joon. 190


Joon. 191


Joon. 192

Seda liiki ülekannet kasutatakse suurte ülekandearvude korral (kuni 15). Ülekantav võimsus ulatub kuni 5000 HJ. Kõige sagedamini kasutatakse kettülekannet võllide väikese vahekauguse korral, kuid ta on kasutatav ka vahekauguseni kuni 8 m.

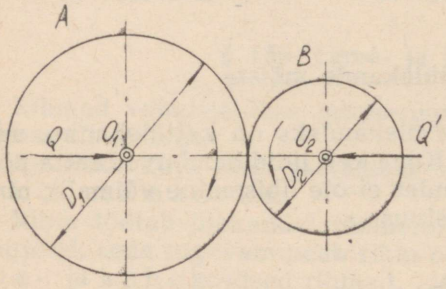
Kette on olemas mitmesuguse konstruktsiooniga, olenevalt nende otstarbest. Joonisel 190 on näidatud plaatrullkett. Nagu jooniselt näha, koosneb kett plaatidest *A*, mis on omavahel ühendatud šarniiridega ja rullidega *B*. Need rullid istuvad vabalt puksidel ja lähevad ajami töötamisel ketiratta (mida nimetatakse ka tähtrattaks) hammaste vahedesse (joon. 191).

Samasuguseid kahe- ja mitmerealisi kette kasutatakse suurte võimsuste ülekandmiseks. Täiuslikumateks on hammasketid (joon. 192), mis töötavad sujuvalt, ilma tõugeteta ja võimaldavad suuri liikumiskiirusi. Neid nimetatakse ka müratuteks kettideks.

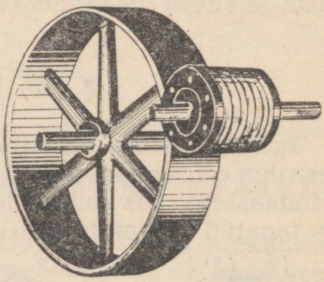
Kettülekannetes on ette nähtud keti pinguse reguleerimine (pingutusrullid jne.).

§ 158. Muutumatu ülekandeteguriga friktsioonülekanne paralleelsete võllide vahel

Eespool vaadeldud rihmülekanne, nagu nägime, töötab rihma ja ratta pöia vahel tekkiva hõõrdejõu kasutamise põhimõttel. Kuid hõõrdejõudu võib kasutada ka vahetult, ilma elastse sidestuseta, kui detailide kokkupuutekohti surutakse teineteise vastu teatud jõuga. Niisugust ülekannet nimetatakse friktsioonülekandeks.



Joon. 193



Joon. 194

Kujutleme endale kaht siledat silindrilist rulli, mis on kinnitatud paralleelsetele võllidele O_1 ja O_2 (joon. 193). Rakendades nende rullide võllidele kaks võrdset vastassuunalist jõudu Q ja Q', tekitame rullide pindade vahel hõõrdejõu, mille suurus oleneb surve suurusest, rullide materjalist ja nende töötlemise astmest. See hõõrdejõud paneb veetava võlli pöörlema. Kui aga hõõrdejõud ei osutu veetava rulli pöörlemistakistuse ületamiseks küllaldaseks, siis hakkavad nad teineteisel libisema. Niisiis selleks, et ülekanne töötaks rahuldavalt, tuleb luua niisugused tingimused, mis puhul pindade vahel tekiks võimalikult suur hõõrdejõud. Rullid valmistatakse mitmesugustest materjalidest — mõlemad malmist, üks terasest või malmist ning teine tekstoliidist jne. Joonisel 194 on näidatud friktsioonketaste paar, millest väik-

sem on valmistatud nahkplaatidest, mis on telgsuunas kahe seibi vahele kinni tõmmatud.

Libisemise puudumisel on mõlema rulli ringkiirused omavahel võrdsed. Seepärast on siin täiesti kasutatavad valemid (115) ja (116), mis on tuletatud elastse sidestusega ülekande jaoks.

Samuti on kasutatav ka valem (123), kus M_1 tähendab pöördemomenti veetaval võllil ning i_{21} — ülekandetegurit mõlema võlli vahel.

Friktsioonrullid võivad töötada ka siis, kui nad teineteisega vahetult kokku ei puutu. Näiteks võib pöörlemist üle kanda mõlema rulli vahele surutud teras- või nahkrõnga abil (joon. 195).

Näide 79. Võllilt O_1 kantakse võllile O_2 üle (joon. 195) võimsus $N = 1{,}5$ HJ. Vedav ketas teeb $n_1 = 200$ p/min ja ta läbimõõt $D_1 = 400$ mm. Määrata veetava ketta läbimõõt D_2, kui ta peab tegema $n_2 = 1000$ p/min, vajalik survejõud Q ja pöördemoment veetaval võllil, kui mõlemad rullid on malmist (hõõrdetegur $f = 0{,}15$).

Määrame valemi (116) järgi veetava rulli läbimõõdu:

$$D_2 = \frac{D_1}{i_{21}} = D\,\frac{n_1}{n_2} = 400 \cdot \frac{200}{1000} = 80 \text{ mm}.$$

Jõu Q leidmiseks peab eelnevalt teada olema rullidele edasiantav ringjõud P, mis omakorda tuleb määrata pöördemomendi kaudu. Kasutades valemit (82), saame pöördemomendi vedaval võllil

$$M_1 = 71\,620\,\frac{N}{n_1} = 71\,620\,\frac{1{,}5}{200} = 537{,}15 \text{ kgcm}.$$

Järelikult jõud

$$P = \frac{M_1}{R_1} = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{1074{,}3}{40} = 26{,}86 \text{ kg}.$$

Survejõud Q määratakse võrrandist $P = fQ$, millest

$$Q = \frac{P}{f} = \frac{26{,}86}{0{,}15} = 179 \approx 180 \text{ kg}.$$

Märgime, et 180 kg kujutab endast minimaalset survejõudu. Olenevalt ülekande töötingimustest tuleb jõud Q võtta teatud tagavaraga, mis väga ebaühtlase töö puhul võib ulatuda kuni 100%-ni, s. t. et niisugusel juhul tuleb jõud Q võtta $2 \cdot 180 = 360$ kg.

Pöördemomendi veetaval võllil M_2 võime leida mitmel viisil:

a) kuna ringjõud libisemise puudumisel on mõlemal rullil võrdne, võime määrata M_2, korrutades ringjõu P veetava rulli raadiusega, mille tulemusena saame:

$$M_2 = P\,\frac{D_2}{2} = 26{,}86\,\frac{8}{2} = 107{,}44 \text{ kgcm};$$

b) sama väärtuse saame, kui kasutame valemit (120):

$$M_2 = \frac{M_1}{i_{21}} = \frac{M_1}{\frac{n_2}{n_1}} = \frac{537{,}15}{5} = 107{,}43 \text{ kgcm}^*;$$

c) lõpuks me võime otsitava momendi määrata ka valemi (82) abil:

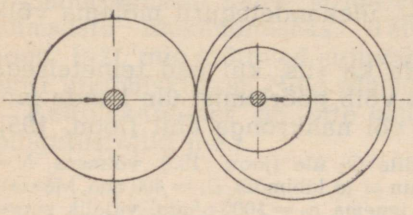
$$M_2 = 71\,620\,\frac{N}{n_2} = 71\,620 \cdot \frac{1{,}5}{1000} = 107{,}43 \text{ kgcm}.$$

---

* Väike erinevus 0,01 kgcm võrra tekkis seetõttu, et me P arvutamisel sajandikud ümardasime.

§ 159. Muutuva ülekandeteguriga friktsioonülekanne paralleelsete võllide vahel

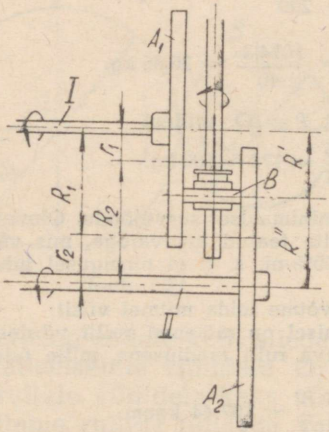
Friktsioonülekanne on soodne neil juhtudel, kui vedava võlli püsiva pöörete arvu korral tuleb veetavale võllile anda teatud piirides mitmesuguseid pöörete arve.



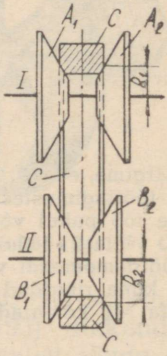
Joon. 195

Kujutleme, et me asetame eespoolkirjeldatud kaks trumlit (joon. 185) kohakuti, nii et nende moodustajate vahele jääks väike pilu. Rihma asemel kasutame rõngast, mille asetame alumisele trumlile. Kui see rõngas suruda mõlema trumli vahele (selliselt nagu see on näidatud joon. 195, kus me kasutame silindrilisi rullе), siis antakse tema vahendusel liikumine vedavalt rullilt veetavale. Hoides rõngast trumlite vahel ühes või teises kohas, võime saada veetaval võllil igasuguseid pöörete arve piirides $n_1 = \frac{D_1}{D_n}$ kuni $n_1 = \frac{D_2}{D_1}$.

Joonisel 196 on näidatud teise astmeteta friktsioonülekande skeem kahe paralleelse võlli korral. Olgu võll *I* vedav ning võll



Joon. 196



Joon. 197

II veetav. Asetame nende kummagi võlli otsa kettad A_1 ja A_2, mille vahele on surutud vaherull B, mida saab nihutada piki võlli, millele ta on istatud, ning kinnitada teda sellel võllil vajalikus kohas. Tehku võll *I* n_1 pööret minutis. Kui ketaste ja rullide vahel puudub libisemine, siis rulli ringkiirus skeemil näidatud asendi korral võrdub kettal A_1 kaugusel R' asuva ringi iga punkti kiirusega, s. o. see kiirus võrdub $v_1 = \frac{2\pi R' n_1}{60}$ mm/sek. Teisest küljest

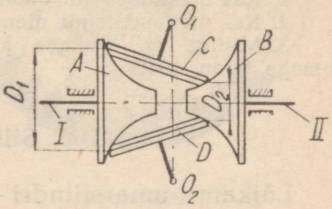
on sama kiirus ketta A_2 igal punktil, mis asub ringjoonel, mille raadius on R''; see kiirus ketta pöörete arvu puhul n_2 p/min võrdub $v_2 = \frac{2\pi R'' n_2}{60}$ mm/sek.

Võrrutades need mõlemad kiirused teineteisega, saame: $\frac{2\pi R' n_1}{60} = \frac{2\pi R'' n_2}{60}$ ehk $R' n_1 = R'' n_2$, millest $i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{R'}{R''}$.

Nagu näeme, on ülekandetegur pöördvõrdeline rulli ristlõike keskmise kaugusega võllide geomeetrilistest telgedest. Suurim ülekandetegur i_{21} võrdub $\frac{R_1}{r_2}$, ning väikseim ülekandetegur võrdub $\frac{r_1}{R_2}$. Järelikult võib selle mehhanismi abil saada veetaval võllil igasuguseid pöörete arve alates $n_1 \frac{r_1}{R_2}$ kuni $n_1 \frac{R_1}{r_2}$.

On kerge veenduda, et veetav võll pöörleb samas suunas vedavaga.

Kujutleme kaht paari tüvikoonuseid A_1, A_2 ja B_1, B_2 (joon. 197), millest esimene paar istub vedaval võllil *I*, ning teine paar veetaval võllil *II*. Need koonused on paigutatud liugpõõnadele ja kumbagi paari saab erimehhanismi abil laiali lükata. Üle mõlema koonusepaari läheb terasrõngas *C* (näidatud lõikes). Vedavad koonused, mis on surutud vastu rõngast, veavad seda hõõrdumise mõjul kaasa, rõngas omakorda annab liikumise edasi veetavatele koonustele ja need panevad pöörlema veetava võlli *II*. Rõnga asendi korral, mis on näidatud skeemil, on ülekandetegur



Joon. 198

$$i_{21} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Kui eemaldada vedaval võllil asuvaid koonuseid veelgi enam ja samaaegselt lähendada teise paari koonuseid, siis, nagu seda kerge on näha, väheneb R_1 ja suureneb R_2, millele vastavalt ülekandetegur väheneb. Niisiis on võimalik vedava võlli püsiva pöörete arvu juures veetaval võllil teatud piirides saada mitmesuguseid pöörete arvusid.[1]

Esineb juhtusid, kus liikumist tuleb erinevate pöörete arvuga üle kanda teisele samal teljel asetsevale võllile. Niisuguse ajami näide on skemaatiliselt kujutatud joonisel 198. Vedavalt võllilt *I* tuleb pöörlemine kanda muutuva ülekandeteguriga teisele samatelgsele võllile *II*. Kummagi võlli otstele on kinnitatud kaks kõverjooneliste moodustajatega friktsioonketast *A* ja *B*. Nende külgpindade vastu on surutud kaks rulli *C* ja *D*. Vedav ketas *A*

[1] On olemas samasuguse konstruktsiooniga seadmeid, kus rõnga asemel kasutatakse spetsiaalse konstruktsiooniga kiilrihma, ketti jm.

annab pöörleva liikumise veetavale kettale B nende rullide kaudu, mis pöörlevad oma telgede ümber. Võlle, milledel need rullid istuvad, saab üheaegselt telgede O_1 ja O_2 suhtes vajaliku nurga võrra pöörata; seejuures puudutavad rullid kettaid A ja B erinevatel raadiustel, millele vastavalt muutub ülekandetegur. Skeemil näidatud rullide asendi korral ülekandetegur

$$i_{21} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Friktsioonülekannete toodud näited kujutavad endast pöörleva liikumise astmeteta ülekandemehhanismide erikujusid ja neid nimetatakse v a r i a a t o r i t e k s. Nad on leidnud laialdast kasutamist, eriti metallilõikepinkide ajamites.

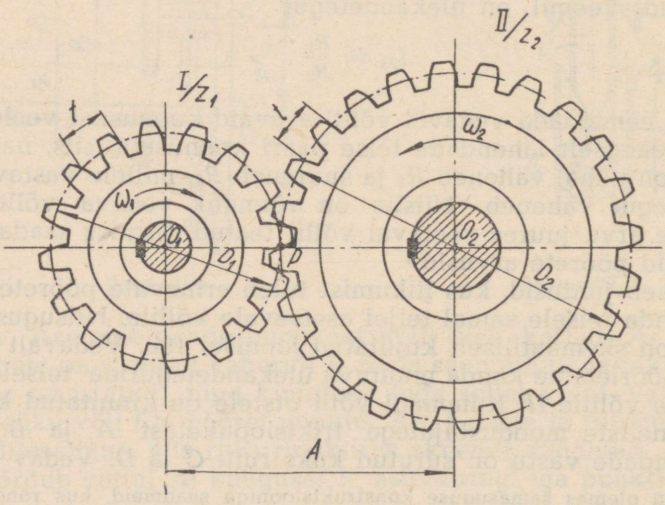
Küsimusi

1. Kas ülekandetegur oleneb (joon. 195 ja 197) rõnga läbimõõdust?
2. Kas ülekandetegur oleneb rulli B läbimõõdust (joon. 196)?
3. Milline on veetava ketta pöörlemissuund võrreldes vedava ketta omaga (joon. 198)?

§ 160. Silindrilised hammasrattad

Lõikame ümarsilindri külgpinnasse teatud profiiliga sooned, mis asuvad teineteisest võrdsel kaugusel, ja me saame s i l i n d r i l i s e h a m m a s r a t t a.

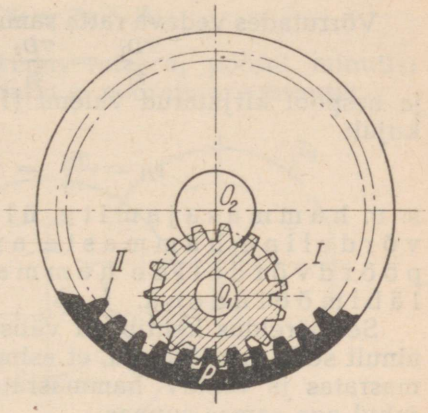
Kui paigutada kaks hammasratast nii, et ühe ratta hambad lähevad teise ratta hammaste vahedesse, ja kinnitada nad võllidele O_1 ja O_2 (joon. 199), mis pöörlevad liikumatutes laagrites, siis



Joon. 199

üks nendest, mida nimetatakse v e d a v a k s, paneb pöörlema teise ratta, mida nimetatakse v e e t a v a k s. Sel juhul paiknevad hambad välistel silindrilistel pindadel; niisugust hambumist nimetatakse v ä l i s e k s erinevalt s i s e h a m b u m i s e s t, mis on näidatud joonisel 200, kus hammasratta *I* hambad hambuvad hammasratta *II* hammastega, mis paiknevad silindrilisel sisepinnal.

Mõlema ratta pöörlemisel võib kujutleda kaht ringjoont, mis on tõmmatud tsentritest O_1 ja O_2 ning puutuvad libisemata teineteist punktis, mis langeb kokku teatava püsiva punktiga P ja asub tsentreid O_1 ja O_2 ühendaval sirgel. Seepärast nimetatakse neid ringjooni algringjoonteks. Nad on analoogilised friktsioonketaste ringjoontega (joon. 193). Erinevus seisab ainult selles, et friktsioonketastel on võimalik nende libisemine, kuna silindriliste hammasrataste libisemine algringjoontel on võimatu hammaste vastastikuse toime tõttu. Siit järeldub, et hammasülekanne osutub suurte momentide ülekandmisel ja täpse ülekandeteguri pidamisel kindlamaks.



Joon. 200

§ 161. Hammasajami ülekandetegur ja ülekandearv

Lähtudes sellest, et koostöötavate hammasrataste pöörlemisel nende algringjooned puutuvad teineteist libisemata, võime ülekandeteguri määramisel arutleda samuti nagu rihmülekande ja friktsioonajami ülekandetegurite määramisel, mille tulemusena saame sama valemi (116):

$$i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D_2},$$

kus D_1 ja D_2 tähendavad antud juhul vastavalt vedava ja veetava ratta algringjoonte läbimõõte.

Nagu näeme, peab ülekandeteguri määramiseks teadma läbimõõte D_1 ja D_2. Kuid hammasrataste algringjooned ei ole nähtavad ning nende läbimõõtude mõõtmine on üsna raske. Seepärast kasutatakse seda valemit teisel kujul.

Hammasratta kõik hambad paiknevad ratta ümbermõõdul üksteisest võrdsel kaugusel, mida mõõdetakse algringjoone kaarega ühe hamba algusest kuni järgmise hamba alguseni (ehk ühe kesk-

kohast või lõpust teise keskkoha või lõpuni). Seda kaugust nimetatakse hambumissammuks ja tähistatakse tähega t (joon. 199). On ilmne, et teineteisega hambuvad hammasrattad peavad olema ühe ja sama sammuga. Kui tähistame hammasratta hammaste arvu tähega z, siis samm võrdub algringjoone pikkuse ja hammaste arvu jagatisega, s. o.

$$t = \frac{\pi D}{z}. \tag{124}$$

Võrrutades vedava ratta sammu veetava ratta sammuga, saame

$$\frac{\pi D_1}{z_1} = \frac{\pi D_2}{z_2} \text{ ehk } \frac{D_1}{D_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

ja eespool kirjutatud valemi (116) võime kirjutada niisugusel kujul:

$$i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{D_1}{D_2}, \tag{125}$$

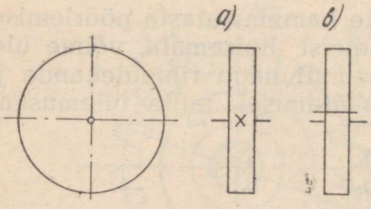
s. o. hammasajamite ülekandetegur on pöördvõrdeline hammaste arvuga, ehk, mis on sama, pöördvõrdeline hammasrataste algringjoonte läbimõõtudega.

See järeldus kehtib nii välis- kui ka sisehambumise korral, ainult selle erinevusega, et esimesel juhul pöörlevad vedav hammasratas ja veetav hammasratas erinevates suundades, teisel juhul aga samas suunas.

§ 162. Mitme hammasrattapaariga ülekannete kinemaatika

Hammasrattaid kasutatakse kõige mitmesugusemates kombinatsioonides, olenevalt ülesseatud ülesandest.

Lepime kokku, et kujutame hammasrattaid ringjoonega, mis vastab selle algringjoonele. Tähe all, millega me tähistame ratast, mõistame samaaegselt tema hammaste arvu. Hammasratast, mis istub võllil liikumatult (mis on võlli küljes kinni), tähistatakse külgvaates ristikesega, nagu see on näidatud joonisel 201, *a*. Sageli kasutatakse ratta asetamiseks võllile mõnda muud viisi: ratast saab võllil nihutada koos kiiluga (põõnaga), mis libiseb kiilunuudis, või saab ratast nihutada pikemal kiilul (põõnal), mis on kinnitatud võlli külge. Neil juhtudel pöörleb hammasratas koos võlliga, asetsedes võlli pikkuse suhtes selles või teises asendis.[1] Ratta ja võlli niisuguse koostöö tähistamine on näidatud joonisel 201, *b*.



Joon. 201

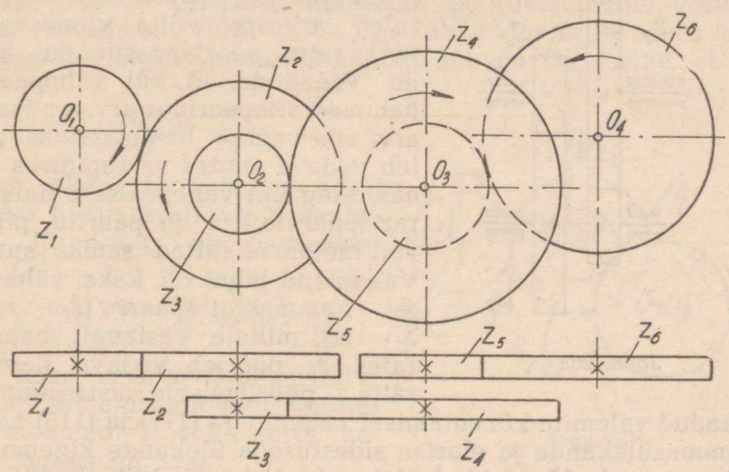
[1] Hammasrataste niisugust paigutust esineb sageli metallilõikepinkide juures.

Olgu meil paariviisi hambuvate hammasrataste $z_1 - z_6$ süsteem (joon. 202), milles hammasratas z_1 on vedav.

Lepime kokku, et edaspidi paigutame lühiduse pärast hambuvate hammasrataste tähistuste vahele märgi $\times$ ja ühele võllile kinnitatud hammasrataste tähistuste vahele märgi —. Vastavalt sellele võib joonisel 202 kujutatud hammasrataste süsteemi väljendada järgmise skeemiga:

$$z_1 \times z_2 - z_3 \times z_4 - z_5 \times z_6.$$

Tehku võllile O_1 kinnitatud vedav ratas n_1 pööret minutis; vaja on määrata viimase veetava ratta z_6 pöörete arv minutis.



Joon. 202

Valemi (125) põhjal saame võlli O_2 pöörete arvu minutis:

$$n_2 = n_1 i_{21} = \frac{n_1 z_1}{z_2}.$$

Minnes edasi võlli O_3 juurde, näeme, et ta saab pöörlemise hammasrataste z_3 ja z_4 kaudu, milledest esimene on vedavaks rattaks, millele vastavalt ülekandetegur $i_{32} = \frac{z_3}{z_4}$ ja võlli O_3 pöörete arv

$$n_3 = n_2 i_{32} = n_1 i_{21} i_{32} = n_1 \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4}.$$

Hammasratas z_6 saab pöörlemise rattalt z_5 ning ülekandetegur $i_{43} = \frac{z_5}{z_6}$ ja võlli O_4 pöörete arv

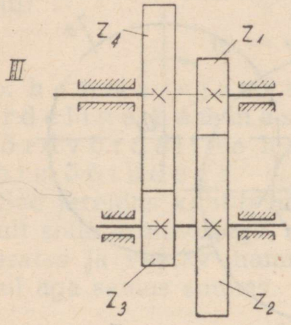
$$n_4 = n_3 i_{43} = n_1 \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_3}{z_4} \cdot \frac{z_5}{z_6}. \qquad (126)$$

Viimase veetava võlli O_4 pöörete arvu n_4 jagatist esimese vedava võlli O_1 pöörete arvuga n_1 nimetame **koguülekandeteguriks** i_{41} ja, nagu näeme, võrdub see

$$i_{41} = i_{21} i_{32} i_{43}. \qquad (127)$$

Meie arutluse käigust on näha, et valemeid (126) ja (127) võib laiendada ükskõik kui suurele arvule hammasrattapaaridele.

Niisiis, üldülekandetegur võrdub kõigi antud süsteemi moodustavate hammasrattapaaride üksikute ülekandetegurite korrutisega.



Joon. 203

Seejuures kriipsutame alla, et tuleb arvesse võtta viimase veetava ratta pöörlemissuunda. Kerge on veenduda, et kui vahepealsete hammasrattapaaride arv on paarisarv, siis veetav hammasratas pöörleb vedava suhtes vastupidises suunas, ning kui vahepealsete hammasrattapaaride arv on paaritu, pöörlevad mõlemad rattad samas suunas. Vaadeldud juhul oli kaks vahepealset hammasrattapaari ($z_2 — z_3$ ja $z_4 — z_5$), millele vastavalt hammasratas z_6 pöörleb vedava hammasratta z_1 pöörlemisele vastassuunas.

Saadud valemite kõrvutamisel valemitega (117) ja (118) näeme, et hammasülekande ja elastse sidestusega ülekande kinemaatika on ühesugused. Vaadeldud ülekande kohta kehtib täielikult ka § 152 öeldu kõigi vedavate ja veetavate rataste ümberpaigutuse kohta.

Küsimusi

1. Kas muutub võlli O_3 pöörete arv (joon. 202), kui vahetada hammasrataste z_1 ja z_3 kohad? Kas seejuures võlli O_2 pöörete arv muutub?
2. Kas võlli O_4 pöörete arv muutub, kui suurendada z_1 ja z_3 kumbagi m korda; kui suurendada z_1 m korda ning z_5 vähendada sama palju kordi; kui suurendada z_3 ja z_6 kumbagi m korda?

Näide 80. Vedaval võllil O_1 on hammasratas (joon. 204), mille hammaste arv $z_1 = 20$, ülejäänud hammasrataste hammaste arvud $z_2 = 50$, $z_3 = 30$, $z_4 = 60$, $z_5 = 25$, $z_6 = 100$. Mitu pööret minutis teevad võllid O_3 ja O_4, kui $n_1 = 1500$ p/min?

$$\text{Saame: } n_3 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = 1500 \cdot \frac{20 \cdot 30}{50 \cdot 60} = 300 \text{ p/min}$$

$$\text{ja } n_4 = n_1 \frac{z_1 z_3 z_5}{z_2 z_4 z_6} = 1500 \cdot \frac{20 \cdot 30 \cdot 25}{50 \cdot 60 \cdot 100} = 75 \text{ p/min.}$$

Näide 81. Vedaval hammasrattal, mis istub võllil I, on $z_1 = 14$ hammast (joon. 203). Hammaste arvud $z_2 = 70$, $z_3 = 15$ ja $z_4 = 45$. Määrata võlli III pöörete arv, kui vedav võll teeb $n_1 = 750$ p/min:

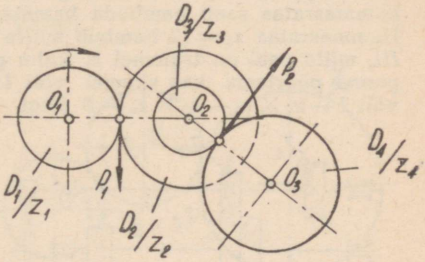
$$n_3 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = 750 \cdot \frac{14 \cdot 15}{70 \cdot 45} = 50 \text{ p/min.}$$

§ 163. Silindriliste hammasratastega ülekande staatika

Hakkame nüüd määrama hammasratas-ülekandes võllide vahel pöördemomentide ja ringjõudude vahekorda analoogiliselt sellele, nagu me tegime elastse sidestusega ülekande juures.

Antagu pöörleminę võllilt O_1 võllile O_3 (joon. 204) skeemi $z_1 \times z_2 - z_3 \times z_4$ kohaselt. Määrame pöördemomendi võllil O_3, kui pöördemoment võllil O_1 on M_1. Tähistades sellel võllil istuva hammasratta algringjoone läbimõõdu tähega D_1, saame, et ringjõud

$$P_1 = \frac{M_1}{R_1} = \frac{2M_1}{D_1}.$$



Joon. 204

See ringjõud antakse edasi veetava hammasratta z_2 hammastele. Järelikult pöördemoment võllil O_2

$$M_2 = P_1 \frac{D_2}{2} = \frac{2M_1}{D_1} \cdot \frac{D_2}{2} = M_1 \frac{D_2}{D_1}$$

ning teise vedava hammasratta z_3 ringjõud algringjoonel võrdub selle momendi ja selle ratta raadiuse jagatisega, s. o.

$$P_2 = \frac{2M_2}{D_3} = P_1 \frac{D_2}{D_3} = 2M_1 \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{1}{D_3}.$$

Samasugune ringjõud kantakse edasi hammasrattale z_4, mille läbimõõt on D_4. Seepärast pöördemoment võllil O_3

$$M_3 = P_1 \frac{D_2}{D_3} \cdot \frac{D_4}{2} = 2M_1 \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_4}{2D_3} = M_1 \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_4}{D_3}.$$

Ülalpool saadud valemist (125) järeldub, et kahe hambuva hammasratta läbimõõdud on võrdelised nende hammaste arvuga, s. o. $\frac{D_2}{D_1} = \frac{z_2}{z_1}$ ja $\frac{D_4}{D_3} = \frac{z_4}{z_3}$, järelikult saame lõplikult:

$$M_3 = M_1 \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3}. \qquad (128)$$

Kuid $\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}$ kujutab endast ülekandeteguri i_{31} pöördväärtust, seepärast

$$M_3 = \frac{M_1}{i_{31}}. \qquad (129)$$

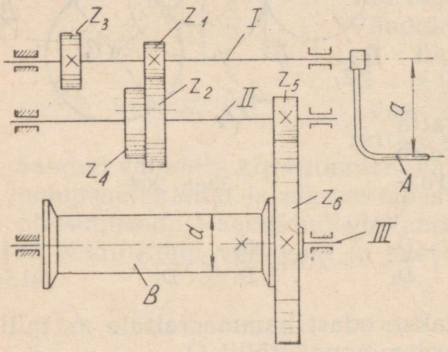
Niisiis pöördemoment hammasülekande veetaval võllil võrdub vedavale võllile rakendatud pöördemomendi ja ülekandeteguri jagatisega. Kui võtta arvesse kahjulikke takistusi, siis peame tuletatud valemisse sisse viima kasuteguri, millele vastavalt valem saab niisuguse kuju:

$$M_3 = \frac{M_1}{i_{31}} \cdot \eta, \qquad (129\ a)$$

kus M_1 — moment esimesel vedaval võllil, M_3 — moment järgmisel vedaval võllil ning i_{31} ülekandetegur.

Kasuteguri suurus sõltub hammaste töötlemise kvaliteedist ning võllidest ja tugedest, milles pöörlevad võllid. Hõõrdekaod hästi hambuvate hammaste vahel ei ületa 1%.

Näide 82. Joonisel 205 on antud käsiajamiga vintsi kinemaatiline skeem. Võll *I* pannakse käsitsi pöörlema vända *A* abil. Sellele võllile on kinnitatud kaks hammasratast $z_1 = 12$ ja $z_3 = 22$. Võllil *II* asub kahest hammasrattast $z_2 = 12$ ja $z_4 = 22$ koosnev liugkiilul istuv hammasratasplokk, millest esimene hammasratas saab hambuda hammasrattaga z_1 ning teine hammasrattaga z_3. Hammasratas $z_5 = 12$ hambub suure hammasrattaga $z_6 = 76$, mis istub võllil *III*, mille peal on trummel *B*, kuhu peale mähitakse tross. Niisiis võib trumlit panna pöörlema kas skeemi võll $I - z_1 \times z_2 - z_5 \times z_6 - B$ järgi või skeemi võll $I - z_3 \times z_4 - z_5 \times z_6 - B$ järgi.



Joon. 205

Määrata töötamisel esimese skeemi järgi: a) jõud *P*, mis tuleb rakendada vändale *A*, kui tõstetakse (liikumatu ploki abil) raskust $G = 0{,}6$ t, b) kiirus *v*, millega liigub raskus, kui vänta pöörata kiirusega $n = 25$ p/min, c) vändal tarbitav võimsus. Vända õla pikkus $a = 300$ mm, trumli läbimõõt $d = 200$ mm, vintsi kasutegur $\eta = 0{,}9$.

a) Valemi (129) järgi pöördemoment võllil *III*

$$M_3 = \frac{M_1}{i_{31}} \eta,$$

kus moment võllil *I*

$$M_1 = Pa = P \cdot 0{,}3 = 0{,}3P \text{ kgm};$$

$$i_{31} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_5}{z_6} = \frac{12}{36} \cdot \frac{12}{72} = \frac{1}{18} \text{ ja } \eta = 0{,}9.$$

Tehes need asendused, saame:

$$M_3 = \frac{0{,}3\,P}{\frac{1}{18}} \cdot 0{,}9.$$

Teiselt poolt

$$M_3 = G\frac{d}{2} = 600 \cdot \frac{0{,}2}{2} = 60 \text{ kgm}.$$

Järelikult

$$60 = 0{,}3 \cdot 18 \cdot 0{,}9\ P,$$

millest vajalik jõud $P = 12{,}3$ kg.

b) Kui vänt teeb $n_1 = 25$ p/min, siis võll *III* teeb $n_3 = n_1 i_{31}$ p/min $= \frac{25}{18}$ ning raskuse liikumiskiirus võrdub trumli ringkiirusega, s. o.

$$v = \frac{\pi d n_3}{60} \text{ m/sek} = \frac{\pi \cdot 0{,}2 \cdot 25}{60 \cdot 18} = 0{,}015 \text{ m/sek} \approx 15 \text{ mm/sek}.$$

c) Tarbitava võimsuse määrame valemi (80) järgi $N = \frac{Pv}{75}$, kus P on vändale rakendatud jõud, ning v — vända joonkiirus raadiuse a kaugusel, mis võrdub

$$\frac{2\pi an}{60 \cdot 1000} = \frac{\pi \cdot 0{,}3 \cdot 25}{30} \text{ ja } N = \frac{12{,}5 \cdot \pi \cdot 0{,}3 \cdot 25}{30 \cdot 75} = 0{,}13 \text{ HJ}.$$

§ 164. Parasiithammasrattad

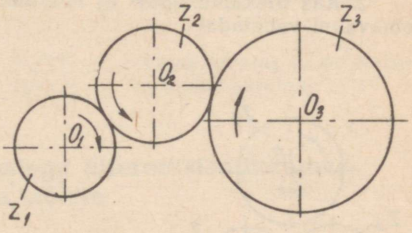
Olgu antud kolm hambuvat hammasratast z_1, z_2 ja z_3 (joon. 206), millede hulgas z_1 on vedav. Määrame ülekandeteguri võllide O_3 ja O_1 vahel.

Ülekandetegur võllide O_2 ja O_1 vahel

$$i_{21} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Minnes võllilt O_2 võllile O_3 näeme, et hammasrattapaaris z_2 ja z_3 on esimene vedav ja ülekandetegur

$$i_{32} = \frac{z_2}{z_3}$$



Joon. 206

ja kogu ülekandetegur

$$i_{31} = i_{21} \cdot i_{32} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3}.$$

Nagu näeme, ei olene ülekandetegur võllide O_3 ja O_1 vahel asetseva vahehammasratta z_2 hammaste arvust. Seda hammasratast nimetatakse p a r a s i i t h a m m a s r a t t a k s.

Võrreldes seda hammasratast ülejäänutega, näeme, et ta on üheaegselt veetavaks rattaks z_1 suhtes ning vedavaks z_3 suhtes. Selles ongi parasiithammasratta iseärasus. Kas hammasratas on parasiithammasratas või töötav hammasratas, oleneb osast, mida ta etendab antud hammasrataste süsteemis.

Parasiitrattaid kasutatakse kahel juhul.

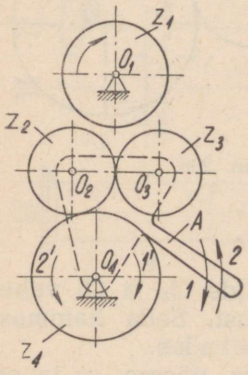
Kujutleme endile, et kahe hambuva hammasratta telgede vahe on suur, mis nõuab suurte läbimõõtudega hammasrataste kasutamist. Paigutades nende vahele üks või mitu hammasratast, võime me pöörlemist üle kanda ükskõik millisele kaugusele, olenemata tööratastе läbimõõtudest. Peale selle pöörleksid hammasrattad z_1 ja z_3 vahetu hambumise korral vastupidistes suundades. Võttes kasutusele ühe parasiithammasratta, paneme veetava ratta pöör-

lema vedava rattaga samas suunas. Niisiis kasutatakse parasiitrattaid neil juhtudel, kui on vaja muuta veetava ratta pöörlemissuunda. Ühe parasiithammasratta korral pöörleb veetav hammasratas samas suunas mis vedav hammasrataski.

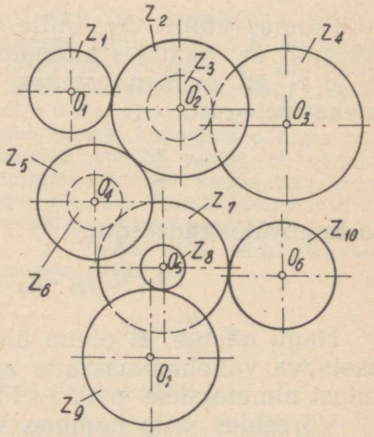
Kõigest öeldust järeldub, et parasiithammasrattaks nimetatakse niisugust hammasratast, mis üheaegselt hambub kahe teise hammasrattaga, olles neist ühe suhtes veetavaks ning teise suhtes vedavaks. Parasiithammasratas ei muuda ülekandetegurit nende hammasrataste vahel, kuid muudab veetava ratta pöörlemissuuna vastupidiseks.

Küsimusi

1. Võllilt O_1 (joon. 206) on vaja pöörlemine kanda võllile O_3 nii, et see pöörleks O_1 pöörlemisele vastassuunas. Hammasrattad z_1 ja z_2 omavahel ei hambu. Mitut parasiithammasratast tuleb kasutada?
2. Kas ülekandetegur i_{31} muutub, kui hammasrattad z_1 ja z_3 või z_2 ja z_3 omavahel vahetada?



Joon. 207



Joon. 208

Näide 83. Vedavalt võllilt O_1 (joon. 207) kantakse pöörlemine võllile O_4 järgmisel viisil. Võllil O_4 istub vabalt plaat, mis on varustatud käepidemega A. Tappidel O_2 ja O_3, mis oma otstega on kinnitatud selle plaadi külge, istuvad vabalt hammasrattad z_2 ja z_3, olles püsivalt hambumises. Hammasratas z_2 on peale selle püsivas hambumises hammasrattaga z_4, mis on kinnitatud võllile O_4. Mehhanismi niisuguses asendis, mis on kujutatud joonisel, pöörlemist võllilt O_1 edasi ei anta, sest hammasratas z_1 ei hambu mehhanismi ühegi hammasrattaga. Pöörame käepidet noole *1* suunas, mille tulemusel hammasratas z_2 läheb hambumisse vedava hammasrattaga z_1 ning mehhanism hakkab töötama skeemi järgi $z_1 \times z_2 \times z_4$, kus veetava hammasratta pöörlemine toimub noole *1'* suunas.

Pöörame nüüd käepidet A noole 2 suunas; hammasratas z_1 on nüüd hambumises hammasrattaga z_3; sel juhul töötab mehhanism skeemi järgi $z_1 \times z_3 \times z_2 \times z_4$ ning hammasratas z_4 hakkab pöörlema noole 2′ suunas, s. o. vastupidises suunas. Nagu näeme, on esimesel juhul ühe parasiithammasratta puhul ülekandetegur $i_{41} = \frac{z_1}{z_4}$, ning teisel juhul kahe parasiithammasratta korral $i_{41} = \frac{z_1}{z_4}$, kuid pöörlemissuund on vastupidine. Niisugust mehhanismi, mida nimetatakse t r e n s e l i k s, kasutatakse treipinkidel supordi ettenihke suuna muutmiseks (reverseerimiseks) ja selle väljalülitamiseks.

Näide 84. Ühelt vedavalt rattalt z_1 (joon. 208) antakse pöörlemine edasi kolmele hammasrattale z_4, z_9 ja z_{10} järgmiste skeemide kohaselt: 1) $z_1 \times z_2 — z_3 \times z_4$; 2) $z_1 \times z_2 \times z_5 — z_6 \times z_7 — z_8 \times z_9$ ja 3) $z_1 \times z_2 \times z_5 — z_6 \times z_7 \times z_{10}$.

Määrata võllide O_3, O_6 ja O_7 pöörete arvud minutis, kui võlli O_1 pöörete arv on n_1 p/min.

1. Võlli O_3 pöörete arv minutis:

$$n_3 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}.$$

2. Võlli O_6 pöörete arv minutis:

$$n_6 = n_1 \frac{z_1 z_6}{z_5 z_{10}}$$

(hammasrattad z_2 ja z_7 on parasiithammasrattad).

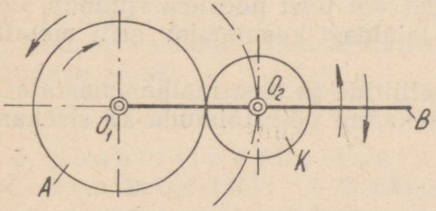
3. Võlli O_7 pöörete arv minutis:

$$n_7 = n_1 \frac{z_1 z_6 z_8}{z_5 z_7 z_9}$$

(hammasratas z_2 on parasiithammasratas).

§ 165. Silindriliste hammasratastega diferentsiaalhammasmehhanismi mõiste

Eespoolvaadeldud hammasülekannetes pöörlesid kõik hammasrattad liikumatute telgede ümber, kusjuures liikumine saadi ühelt vedavalt hammasrattalt.



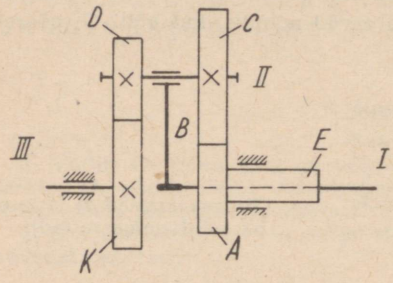
Joon. 209

Olgu hammasratastest A ja K koostatud paar järgmisel viisil (joon. 209). Esimene ratas pöörleb ümber liikumatu telje O_1. Olenemata rattast A pöörleb ümber telje ühes või teises suunas liist B, mida nimetatakse v e d a j a k s. Tapil, mis on kinnitatud selle plaadi külge, pöörleb vabalt ümber telje O_2 hammasratas K, olles hambumises hammasrattaga A.

Niisiis, hammasratta K pöörlemine koosneb kahest pöörlemisest: tema pöörlemisest koos vedajaga ja pöörlemisest vedaja suhtes. Valides hammasratta A ja vedaja pöörete arvu, kummagi pöörlemissuuna ja mõlema hammasratta hammaste arvu, võime saada hammasratta K ühe või teistsuguse pöörlemissuuna ja pöörete arvu. Niisuguseid mehhanisme, mis koosnevad mitmest üks-

teisest sõltumatust liikumisest, nimetatakse diferentsiaalmehhanismideks.

Kujutatud mehhanism on lihtsaim. Seda liiki keerukama mehhanismi näitena on joonisel 210 skemaatiliselt kujutatud teine diferentsiaalmehhanism. Ratas *A* moodustab koos puksiga *E* ühe terviku ja saab pöörlemise mingilt liikumisallikalt. Läbi selle puksi läheb vabalt võll *I*, mis saab pöörlemise mõnelt teiselt liikumisallikalt. Selle võlli vasakpoolsele otsale on kinnitatud vänt *B*, mis on vedajaks; vända otsas on puks, milles pöörleb võll *II*, millele on kinnitatud hammasrattad *C* ja *D*; esimene on hambumises hammasrattaga *A* ning teine hammasrattaga *K*, mis on kinnitatud eraldi võllile *III* ja on ühistelgne võlliga *I*. Võlli *I* pöörlemisel veereb hammasratas *C* mööda hammasratast *A* ning seega antakse hammasrataste *D* ja *K* kaudu pöörlemine võllile *III* ettenähtud pöörete arvuga ja ettenähtud suunas. Vahehammasrattaid *C* ja *D* nimetatakse satelliitideks (planeetratasteks). Seda mehhanismi võib muuta ka selliselt, et hammasratas *A* on liikumatu. Niisuguse skeemi korral antakse liikumine võllile *III* ainult võllilt *I*. Niisugust ülekannet nimetatakse planetaarülekandeks. Hammasrattaid *A* ja *K*, millel jooksevad satelliithammasrattad, nimetatakse päikeseratasteks ehk tsentraalhammasrataste ks.



Joon. 210

Seda liiki mehhanismid, tänu reale nende headele omadustele (liikumiste ülekanne mitmelt allikalt, võimalus saada ükskõik kui väikest ülekandetegurit ning üht või teist pöörlemissuunda, ehituse kompaktsus), on leidnud laialdast kasutamist eriti metallilõikepinkide juures.

Toodud näidetes esineb satelliitide ja tsentraalhammasrataste vahel välishambumine, kuid ülekanne võib toimuda ka sisehambumise teel.

§ 166. Hambumise geomeetrilised elemendid

Väljendame algringjoone läbimõõdu *D* sammu *t* kaudu, kasutades valemit (124):

$$t = \frac{\pi D}{z},$$

millest

$$D = \frac{t}{\pi} z. \qquad (130)$$

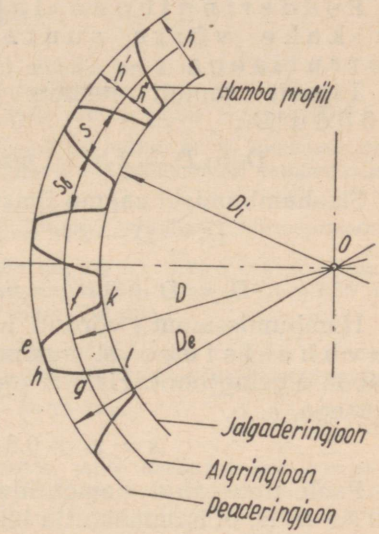
Järelikult, kahe koostöötava hammasratta telgede O_1 ja O_2 vahekaugus (joon. 199)

$$A = O_1O_2 = \frac{D_1 + D_2}{2} = \frac{t}{\pi} \cdot \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (131)$$

Nagu näeme, on see vahekaugus väljendatud irratsionaalse arvu π kaudu, ei ole täpselt välja arvutatav ning annab praktiliseks kasutamiseks ebasoodsa murru. Seejuures tuleb seda mõõdet hammasmehhanismi koostamisel pidada suure täpsusega. Seepärast nimetatakse kasutuselevõetud suurust, mis kujutab endast sammu ja π suhet, hammasratta mooduliks. Kuna sammu väljendatakse millimeetreis ning π on nimetu arv, siis on moodulil sama mõõt mis sammul. Moodulit tähistatakse tähega m. Niisiis moodul

$$m = \frac{t}{\pi} \text{ mm} \qquad (132)$$

ja samm $t = \pi m$ mm. (133)



Joon. 211

Viies sisse selle suuruse, saame valemist (130) algringjoone läbimõõdu jaoks järgmise avaldise:

$$D = mz, \qquad (134)$$

s. o. hammasratta algringjoone läbimõõt millimeetrites võrdub mooduli ja hammasratta hammaste arvu korrutisega.

Sellele vastavalt saame lihtsa avaldise ka tsentritevahelise kauguse jaoks:

$$A = m \frac{z_1 + z_2}{2}, \qquad (135)$$

s. o. tsentritevaheline kaugus millimeetrites võrdub mooduli ja hambuvate hammasrataste hammaste poolsumma korrutisega.

Hamba osa *efgh* (joon. 211), mis asub väljaspool algringjoont, nimetatakse hamba peaks ning osa *fklg*, mis asub seespool seda ringjoont, nimetatakse hamba jalaks. Vastavalt sellele tehakse vahet hamba pea kõrguse h' ja jala kõrguse h'' vahel, mida mõõdetakse mööda ratta raadiust. Nende suurused valitakse sõltuvalt moodulist:

$$h' = m, \qquad (136)$$

$$h'' = 1{,}2\, m. \qquad (137)$$

Järelikult hamba kõrgus $h = h' + h'' = 2{,}2\, m$. (138)

Kui hamba pea kõrgus on teada, võime väljendada selle ringjoone läbimõõdu, millel asuvad kõigi hammaste tipud ning mida nimetatakse peaderingjooneks:

$$D_e = D + 2h',$$

ja mis pärast D ja h' väärtuste asendamist valemitest (134) ja (136) annab:

$$D_e = mz + 2m = m(z + 2). \quad (139)$$

Peaderingjoone läbimõõt võrdub mooduli ja kahe võrra suurendatud hammaste arvu korrutisega.

Täpselt samuti leiame jalgaderingjoone läbimõõdu D_i:

$$D_i = D - 2h'' = mz - 2{,}4\,m = m\,(z - 2{,}4). \quad (140)$$

Sisehambumisel saame ilmselt järgmised sõltuvused:

$$D_e = D - 2h' = mz - 2m = m\,(z - 2) \quad (141)$$

ja

$$D_i = D + 2h'' = mz + 2{,}4\,m = m\,(z + 2{,}4). \quad (142)$$

Hambumissamm t võrdub hamba paksuse s ja hambavahe laiuse s_b summaga, mida järelikult mõõdetakse mööda algringjoont. Hamba paksus võetakse võrdne hambavahe laiusega, s. o.

$$s = s_b = 0{,}5\,t = 0{,}5\,\pi m. \quad (143)$$

Peale nimetatud elementide eristatakse veel hamba pikkust b (s. o. hammasratta hammasvöö laiust). See mõõde ei ole standardiseeritud ja määratakse eraldi igal üksikjuhul olenevalt hambale langevast koormusest.

NSV Liidus on kehtestatud normaalmoodulite standard (vt. lisa III).

Ameerika Uhendriikides ja Inglismaal kasutatakse mooduli asemel pitši (pitch) ehk nn. diametraalsammu, mis kujutab endast hammaste arvu ja algringjoone läbimõõdu jagatist, mis on väljendatud tollides[1]. Teisiti öeldes väljendab pitš hammasratta algringjoone läbimõõdu ühe tolli kohta tulevat hammaste arvu.

Tähistades pitši tähega p, saame järelikult

$$p = \frac{z}{D} \text{ tolli.} \quad (144)$$

Väljendades võrduses $z = \frac{\pi D}{t}$ D ja t tollides, asetame z avaldise äsjakirjutatud valemisse (144). Siis saame:

$$p = \frac{\pi D}{tD} = \frac{\pi}{t} \text{ tolli,}$$

s. o. pitš võrdub π ja tollides väljendatud hambumissammu jagatisega.

[1] Ameerika Uhendriikides ja Inglismaal on toll pikkuse põhiühikuks.

Leiame sõltuvuse diametraalsammu ja mooduli vahel.

Asetades valemisse (144) $D = mz$ mm (134) ja võttes arvesse, et $1'' = 25{,}4$ mm, saame:

$$p = z : \frac{mz}{25{,}4} = \frac{25{,}4\ z}{mz} = \frac{25{,}4}{m}. \qquad (146)$$

Nagu näeme, on moodul ja diametraalsamm teineteisega pöördvõrdelised — mida suurem on neist üks, seda väiksem on teine. Samuti võib öelda, et mooduli suurenemisel hambumissamm suureneb ning pitši suurenemisel samm väheneb.

Küsimusi

1. Arvutage peast sammu pikkus, kui moodul on 2; 5; 10 mm.
2. Arvutuse järgi on hambumissamm $t = 15$ mm.
Milline lähim mooduli väärtus sobib selle sammu jaoks (vt. lisa III)?

Näide 85. Arvutamisel saadi, et hammasrattal, millel on 60 hammast, peab samm olema ligikaudu vähemalt 15 mm. Arvutada hambumise geomeetrilised põhielemendid.

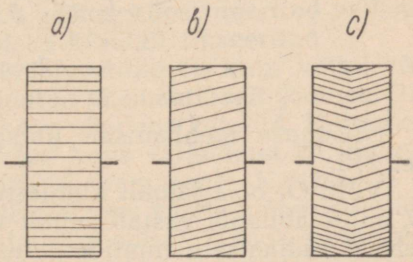
Moodul $m \approx \frac{15}{\pi} = 4{,}7764$. Valime lähima suurema normaalmooduli $m = 5$ mm; siis pea kõrgus $h = 5$ mm, jala kõrgus $h = 1{,}2 \cdot 5 = 6$ mm, hamba kõrgus $h = 11$ mm, hamba paksus ja vahe laius $s = s_b = 0{,}5 \cdot \pi \cdot n \approx 7{,}85$ mm.
Peade ringjoone läbimõõt $D_e = 5\,(60 + 2) = 310$ mm.

Näide 86. Määrata hammasratta mõõtmise põhjal tema moodul. Mõõdame peaderingjoone läbimõõdu, mis on näiteks 126 mm. Loeme ära hammaste arvu ja saame näiteks 34. Siis moodul $m = \frac{126}{36} = 3{,}5$ mm.

Näide 87. Tuleb valmistada hammasratas, mille hammaste arv $z = 45$ ja moodul 4 mm. Kui suure läbimõõduga toorik tuleb anda treialile ja kui suure lõikesügavusega peab töötama freesija, et saada normaalhammastega hammasratas?
Treial peab tooriku töötlema peaderingjoone läbimõõdule, s. o. peab saama tooriku läbimõõduga $D = 4\,(45 + 2) = 188$ mm.
Freesija peab lõikama hammaste vahed sügavuseni, mis võrdub hamba kõrgusega, s. o. sügavuseni $h = 2{,}2 \cdot 4 = 8{,}8$ mm.

§ 167. Silinderhammasrataste hammaste põhikujud

Selleks et koostöötav hammasrattapaar töötaks rahuldavalt, antakse mõlema hammasratta hammaste külgpindadele teatud kindel kuju. Kõverjoont, mille järgi on kujundatud hamba külgpind, nimetatakse hamba profiiliks. Koostöötavate hammasrataste hamba profiili konstrueerimisel lähtutakse tingimusest, et ülekandetegur oleks igal hetkel



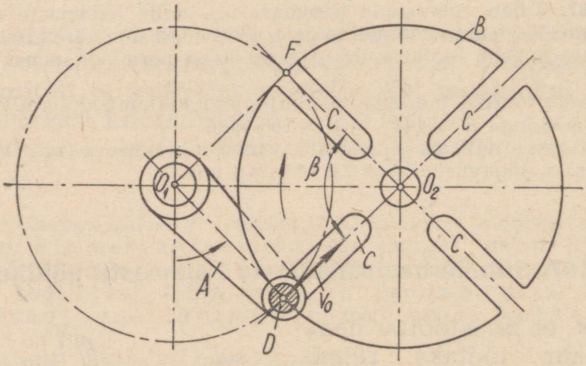
Joon. 212

konstantne. Kõige enam on levinud nn. evolventhambad, mispuhul hamba profiiliks on evolvent (joon. 211).

Hammasrattaid eristatakse ka hammaste asetuse järgi. Kõige sagedamini kasutatakse hammasrattaid, mille hambad on suunatud mööda silindri moodustajat ning midá sellele vastavalt nimetatakse sirgete hammastega hammasratasteks (joon. 212, *a*). Kui hambad asuvad moodustaja suhtes nurga all, siis nimetatakse neid rattaid kaldhammastega hammasratasteks (joon. 212, *b*). Sageli valmistatakse kaldhammastega hammasrataste hambad nii, nagu on näidatud joonisel 212, *c*, kus hammas on kujundatud kahest kaldhamba osast, mis lõikuvad nurga all. Niisuguseid hammasrattaid nimetatakse noolhammastega hammasratasteks. Kaldhammastega ja noolhammastega hammasrattad töötavad ülekandel vaiksemalt ning viimaste hambad on tugevamad.

§ 168. Pöörleva liikumise katkeline ülekanne

Pöörleva liikumise ülekandmisel tuleb seda mõnikord teostada sellisel viisil, et vedava võlli püsival pöörlemisel pöörduks veetav võll katkendlikult, tehes täispöörde mitme käiguga, mida üksteisest lahutab ajavahemik, kus veetav võll seisab paigal. Üks mehhanisme, mida selleks otstarbeks kasutatakse, on malta rist.



Joon. 213

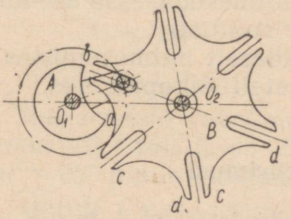
Niisuguse mehhanismi lihtsaim variant on näidatud joonisel 213.

Võlli O_1 otsa jäigalt kinnitatud vända *A* teises otsas on sõrm *D*, mille läbimõõt vastab jäigalt võllile O_2 kinnitatud ketta *B* sisse tehtud radiaalsete nuutide laiusele. Minnes ükskõik millisesse ketta *B* nuuti, paneb sõrm *D* vända püsival liikumisel ketta *B* liikuma nii kauaks, kuni sõrm väljub ketta nuudist. Sel hetkel

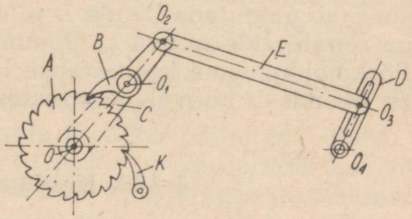
jääb ketas seisma ja püsib paigal vända liikumise ajal seni, kuni vänt läheb ketta järgmisse nuuti ning ketta liikumine toimub samasuguselt jne.

Niisiis, sõrme D telg, moodustades telje O_1 ümber silindrilise pinna, liigub ketta nuudi radiaalsihis ning kord läheneb ketta pöörlemisteljele O_2, kord kaugeneb sellest. Peatuste arv, mida teeb ketas B, oleneb nuutide arvust. Kui kettasse on tehtud kolm nuuti, siis ketas pöördub iga käigu ajal nurga $\beta = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ võrra, ning nelja nuudi korral nurga $\beta = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ võrra.

Vända A ühtlasel pöörlemisel pöördub ketas ebaühtlaselt: sõrme sisseminekul nuuti on sõrme keskkoha kiirus v_0 suunatud ketta tsentri poole ning viimase kiirus on järelikult null, edasi ketta kiirus kasvab ja saavutab suurima väärtuse hetkel, kui vänt asub tsentrite O_1 ja O_2 ühendusjoonel. Seejärel ketta kiirus hakkab vähenema ja muutub nulliks, kui vänt väljub nuudist ja saavutab asendi O_1F.



Joon. 214



Joon. 215

Siiski ei taga vaadeldud lihtsaim variant mehhanismi kindlat töötamist. Kujutame endale ette, et pärast sõrme väljumist nuudist pöördub ketas mingil põhjusel veel väikese nurga võrra. Sel juhul sõrm, tulles oma lähteasendisse, ei satu järgmisse nuuti, ning selle tulemuseks on mehhanismi purunemine. Selle võimaluse vältimiseks peab mehhanism olema konstrueeritud selliselt, et ketas oma paigalseisu ajal oleks kindlalt fikseeritud.

Niisugune mehhanism, mis annab võllile O_2 kuus käiku võlli O_1 ühe täispöörde kestel, on näidatud skemaatiliselt joonisel 214. Võllile O_1 on jäigalt kinnitatud koos vändaga ketas A. Kettasse B on peale radiaalsete nuutide tehtud kuus väljalõiget cd, millede kõverusraadiused võrduvad ketta A raadiusega. Kettasse A on tehtud väljalõige ab nii, et see võimaldaks vända tööperioodi ajal kettal B pöörduda, nagu on näidatud joonisel. Vända sõrme väljumisel ketta B nuudist läheb ketas A vastavasse väljalõikesse cd, mille tulemusena ketas B osutub blokeerituks. Ketast A aga ei

sega miski pöörlemast, sest ta libiseb oma külgpinnaga selles väljalõikes. Seda tüüpi mehhanisme kasutatakse kinoaparaatides, tööpinkide pöördeseadmetes jne.

Teise katkelise pöörlemise näitena vaatleme p õ r k m e h h a n i s m i liikumist.

Võllile O, mis peab pöörduma katkeliselt (joon. 215), on liikumatult istatud p õ r k r a t t a k s nimetatav ratas A, millele on sisse lõigatud hambad. Detail B, mida nimetatakse p õ r k l i n g i k s, on vabalt sõrmel O_1, mis on kinnitatud hoovale C ja surutakse vastu ratast A vedru mõjul (joonisel ei ole näidatud). Hoob C on šarniiri O_2 kaudu ühendatud kepsuga E, mille teine ots on punktis O_3 samuti šarniirselt ühendatud vändaga D, mis pidevalt pöörleb ümber liikumatu telje O_4. Kui hoob C pöörleb vastu kellaosuti liikumise suunda, toetub põrklink vastu põrkratta hammast ning olenevalt õõtsumise nurgast, pöörab põrkratast vastava nurga võrra. Kui hoob pöördub vastupidises suunas, siis libiseb põrklink üle põrkratta hammaste, jättes põrkratta paigale. Et vältida sel perioodil võlli O võimalikku pöördumist, kasutatakse teist põrklinki K, millel on paigalpüsiv pöördetelg. Šarniiri O_3 sõrme saab paigutada vända D pilus mitmesugusesse asendisse ja seega reguleerida hoova C õõtsumise suurust.

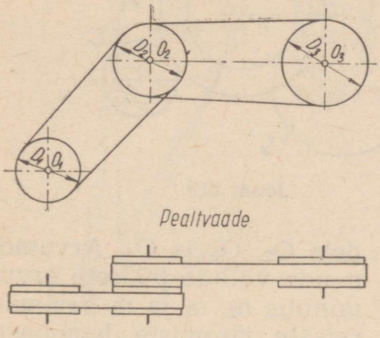
Põrkmehhanisme kasutatakse laialdaselt mitmesugustes masinates, peamiselt höövel- ja muudes metallilõikepinkides.

§ 169. Kordamisküsimusi

1. Mille poolest erinevad teineteisest ülekandetegurid i_{21} ja i_{12}?
2. Ülekandetegur $i_{21} = \frac{1}{5}$. Millega võrdub ülekandearv?
3. Elastse sidestusega ülekandes on vaja suurendada veetava võlli pöörete arvu m korda. Kuidas tuleb muuta vedava võlli rihmaratta läbimõõtu? Kuidas tuleb muuta veetava rihmaratta läbimõõtu?
4. Rihmülekandes (joon. 183) on vaja võll O_4 panna pöörlema vastupidises suunas, kusjuures vedava võlli pöörlemissuund jääb endiseks. Kuidas seda teha?
5. Kas rihmade kiirused (joon. 183) võllide O_1 ja O_2, O_2 ja O_3, O_3 ja O_4 vahel on võrdsed (kui mitte arvestada libisemist), kui rihmarataste läbimõõdud on erinevad?
6. Kas pöördemomendid ja võimsused võllidel O_1, O_2, O_3 ja O_4 (joon. 183) on võrdsed (arvestamata kahjulikke takistusi)?
7. Kas rihma kiirus astmeliste rataste erinevatel astmetel on konstantne, kui vedava võlli pöörete arv on muutumatu?
8. On kaks paari hammasrattaid; üks paar töötab välishambumisega, teine sisehambumisega. Esimese paari vedava ja veetava hammasratta hammaste arvud on vastavalt võrdsed teise paari hammasrataste hammaste arvudega. Mille poolest erineb veetavate hammasrataste pöörlemine?
9. Milliseid ümberpaigutusi tohib teha hammasülekandes, mis koosneb mitmest paarist, ilma et üldine ülekandetegur muutuks?
10. Kuidas eristada hammasrataste süsteemis parasiithammasratast töö-hammasrattast?
11. Kas muutub võllide O_4 ja O_5 pöörete arv (joon. 208), kui vahetada omavahel hammasrattad z_2 ja z_5?

§ 170. Harjutusi

87. Joonisel 216 on näidatud rihmülekanne võllide O_1 ja O_3 vahel. Nende võllide vahel paikneb võll O_2, millel istub rihmaratas läbimõõduga D_2, mis on ühelt poolt ühendatud rihma abil vedava rihmarattaga D_1 ja teise rihma abil veetava rihmarattaga D_3.



Joon. 216

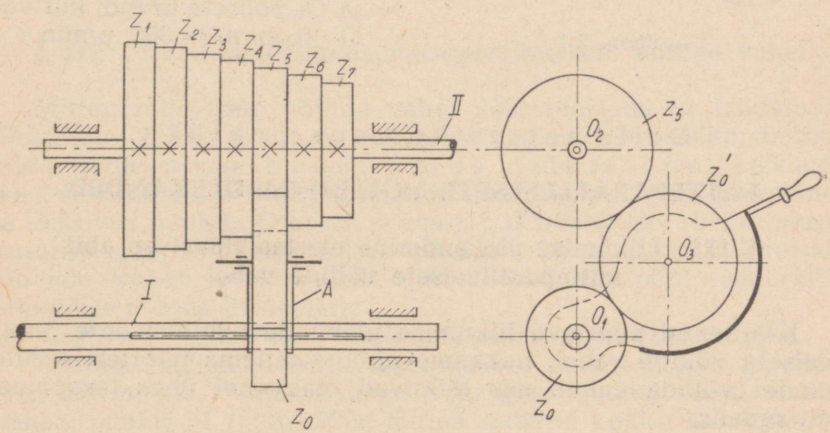
Milline on veetava võlli pöörete arv minutis, kui vedava võlli pöörete arv on n_1?

88. Võll O_1 (joon. 183) teeb 1500 p/min. Määrata võlli O_4 pöörete arv minutis ja pöördemoment sellel võllil järgmistel andmetel: ülekantav võimsus $N = 22{,}5$ kW, rihmarataste läbimõõdud $D_1 = 300$, $D_2 = 450$, $D_3 = 200$, $D_4 = 800$, $D_5 = 200$ ja $D_6 = 250$ mm.

89. Eelmise ülesande andmetel määrata võlli O_2 pöörete arv minutis ja pöördemoment sellel võllil.

90. Kui suurele vahekaugusele R_1 tuleb paigutada võlli I teljest (joon. 196) rull B, et võll II teeks $n_2 = 250$ p/min, kui võll I teeb $n_1 = 750$ p/min ning mõlema telje vahekaugus on 800 mm.

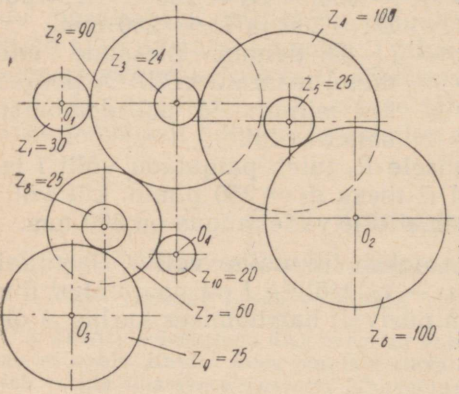
91. Võllilt I (joon. 217) kantakse liikumine võllile II, millele on kinnitatud hammasrattad $z_1 - z_7$. Võllile I on paigutatud liugkiilule hammasratas z_0, mis on püsivalt hambumises karbis A ole-



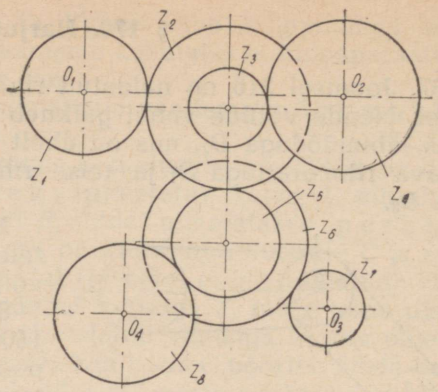
Joon. 217

val teljel pöörleva hammasrattaga z'_o. Paigutades selle karbi piki telge O_1 ükskõik millise hammasratta z_1—z_7 kohale ja viies sellega hambumisse hammasratta z_o, võib pöörlemist anda võllilt *I* võllile *II* vastava ülekandeteguriga. Kirjutada välja kõik ülekandetegurid, mida annab see mehhanism.

92. Hammasrataste süsteem (joon. 218) annab pöörlemise võllilt O_1, mis teeb $n = 150$ p/min, võllidele O_2, O_3 ja O_4. Arvutada nende võllide pöörete arvud minutis n_2, n_3 ja n_4 hammasrataste järgmiste hammaste arvude korral: $z_1 = 30$, $z_2 = 50$, $z_3 = 20$, $z_4 = 50$, $z_5 = 25$, $z_6 = 50$, $z_7 = 20$ ja $z_8 = 45$.



Joon. 218



Joon. 219

93. Eelneva ülesande andmetel määrata pöördemoment võllil O_4, kui ülekantav võimsus $N = 15$ HJ.

94. Arvutada joonisel 219 skemaatiliselt kujutatud mehhanismi võllide O_2, O_3 ja O_4 pöörete arvud, kui võll O_1 teeb $n_1 = 300$ p/min.

Seitsmeteistkümnes peatükk

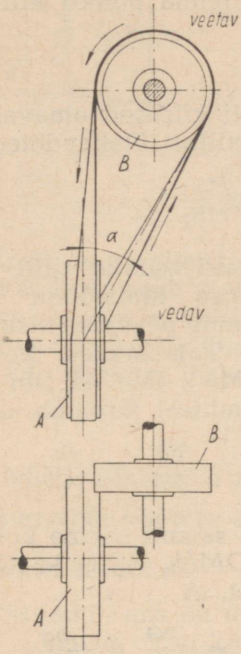
MITTEPARALLEELSETE VÕLLIDEGA ÜLEKANDED

§ 171. Liikumise ülekandmine elastse sidestuse abil mitteparalleelsete võllide vahel

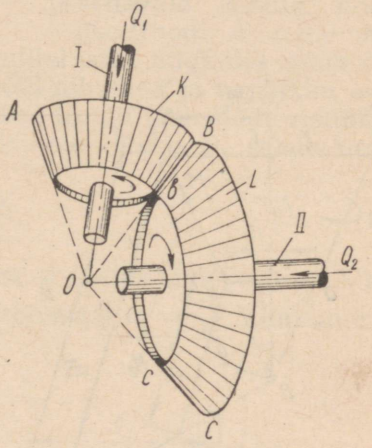
Käsitlenud pöörleva liikumise ülekande põhielemente paralleelsete võllide vahel, hakkame nüüd vaatlema pöörlemise ülekannet võllide vahel, mis lõikuvad omavahel ühes tasapinnas või ruumis.

Samuti nagu paralleelsete võllide puhul kasutatakse ka neil juhtudel rihmülekannet.

Joonisel 220 on näidatud rihmülekanne kahe võlli vahel, mis moodustavad ruumis 90° nurga. Seejuures peavad rihmaratastele *A* ja *B* pealejooksvate rihmaharude keskjooned asuma ligilähedaselt vastavate rihmarataste keskpindades. Niisugust ülekannet nimetatakse ristuvate võllidega ülekandeks. Kogemused näitavad, et niisugune ülekanne töötab rahuldavalt, kui vedavalt rihmarattalt mahajooksev rihmaharu moodustab rihmaratta keskpinnaga nurga α, mis ei ületa ligikaudu 25°. Vahel kasutatakse neil juhtudel juhtrulle.



Joon. 220



Joon. 221

§ 172. Friktsioonülekanne mitteparalleelsete võllide vahel

Mitteparalleelsete võllide vahel võib teostada ka friktsioonülekannet. Joonisel 221 on näidatud üks selliseid ülekandeliike, mida nimetatakse k o o n i l i s e k s f r i k t s i o o n ü l e k a n d e k s. Võllide *I* ja *II* otstel, millede teljed asuvad ühes tasapinnas ja lõikuvad punktis *O* mingi nurga all, istuvad kaks tüvikoonusekujulist rulli. Kui teljesihiliste jõudude Q_1 ja Q_2 toimel rullide pindade vahel tekib vajalik hõõrdejõud, siis pöörlevad rullid teineteise suhtes libisemata.

Vaatleme, kuidas neis tingimusis määrata ülekandetegurit.

Puutugu mõlemad rullid vaadeldaval hetkel kokku moodustajat *Bb* mööda. Võtame sellel kokkupuutejoonel mingi meelevaldse punkti *M* (joon. 222), milles satuvad kokku kaks punkti, mis asuvad kummagi koonuse pinnal. Vedavale rullile *K* kuuluv punkt asub oma pöörlemisteljest raadiuse MN_1 kaugusel. Kui see

rull teeb n_1 pööret minutis, siis selle punkti kiirus valemi (53) järgi:

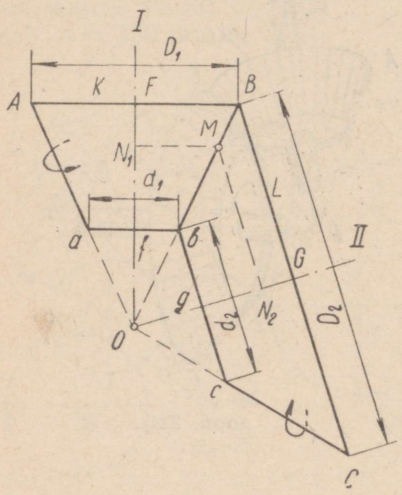
$$v_1 = 2\pi \cdot MN_1 \cdot n_1.$$

Täpselt samuti avaldub veetava rulli L pinna punkti kiirus:

$$v_2 = 2\pi \cdot MN_2 \cdot n_2.$$

Libisemise puudumisel on mõlema punkti kiirused omavahel võrdsed, s. o. $2\pi \cdot MN_1 \cdot n_1 = 2\pi \cdot MN_2 \cdot n_2$, millest ülekandetegur

$$i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{2\pi \cdot MN_1}{2\pi \cdot MN_2} = \frac{MN_1}{MN_2}. \qquad (a)$$



Joon. 222

Tähistame vedava rulli jämedama otsa läbimõõdu AB tähega D_1 ning peenema otsa ab tähega d_1. Täisnurksed kolmnurgad OMN_1, OBF ja Obf on sarnased, millest järeldub, et

$$\frac{MN_1}{OM} = \frac{FB}{OB} = \frac{fb}{Ob}.$$

Täpselt samuti saame kolmnurkade OMN_2, OBG ja Obg sarnasusest, et

$$\frac{MN_2}{OM} = \frac{BG}{OB} = \frac{bg}{Ob}.$$

Jagades esimese suhete süsteemi teisega, saame:

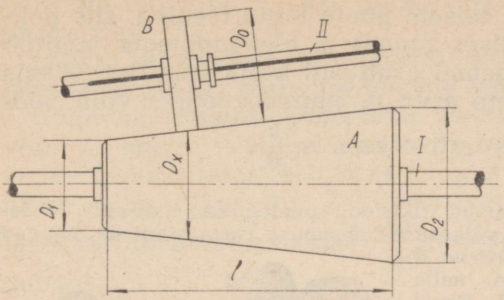
$$\frac{MN_1}{MN_2} = \frac{FB}{BG} = \frac{fb}{bg}.$$

Kõrvutades selle võrrandi võrrandiga (a), saame:

$i_{21} = \frac{FB}{BG} = \frac{fb}{bg}$; kuid $FB = \frac{D_1}{2}$ ja $BG = \frac{D_2}{2}$ ning $fb = \frac{d_1}{2}$ ja $bg = \frac{d_2}{2}$, järelikult saame lõplikult:

$$i_{21} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{d_1}{d_2}, \qquad (147)$$

s. o. kahe friktsioon-koonusrulli ülekandetegur on pöördvõrdeline jämedamate või peenemate otste läbimõõtudega.

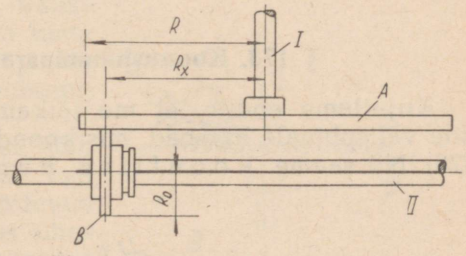


Joon. 223

Friktsioonülekannet teostatakse mitteparalleelsete võllide vahel ka muutliku ülekandeteguriga. Antagu vedavalt võllilt *I* (joon. 223), mis pöörleb konstantse kiirusega, pöörlemine edasi võllile *II*, kusjuures vajaduse korral peab veetav võll pöörlema selle või teise nurkkiirusega. Kinnitame vedavale võllile koonilise trumli *A*, mille moodustaja on paralleelne võlliga *II*, millel istub liugkiilul silindriline rull *B*. Rulli saab järelikult piki võlli nihutada ja vajalikku asendisse paigutada. Tähistades koonilise trumli läbimõõdu ristlõikes, mis vastab rulli *B* keskmisele ristlõikele, tähega D_x, saame nende võllide vahelise ülekande:

$$i_{21} = \frac{D_x}{D_0}. \qquad (148)$$

Niisiis saab võlli *I* pöörete arvu *n* juures anda võllile *II* mitmesuguseid pöörete arve, alates vähimast $n_1 = \frac{D_1}{D_0}$ kuni suurima pöörete arvuni $n_1 = \frac{D_2}{D_0}$.



Joon. 224

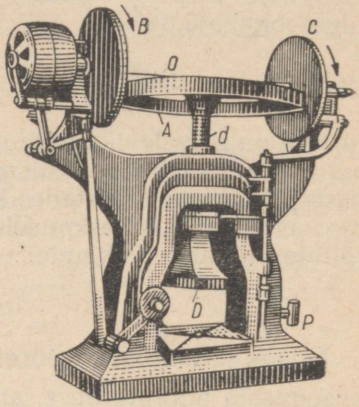
Skeemil, mis on näidatud joonisel 224, kasutatakse muudetava ülekandetegurina friktsioonülekannet võllide vahel, mis lõikuvad täisnurga all. Ketas *A*, mis on kinnitatud veetavale võllile *I*, surutakse vastu silindrilist rulli *B*, mis istub liugkiilul ning mida on võimalik piki veetavat võlli *II* paigutada vajalikku asendisse. Vastavalt sellele saadakse see- või teistsugune ringjoone raadius R_x, mida mööda toimub ketta ja rulli *B* kokkupuutumine. Rulli joonisel kujutatud asendi korral ülekandetegur

$$i_{21} = \frac{R_x}{R_0}. \qquad (149)$$

On ilmne, et rulli paigutamisel paremale ülekandetegur väheneb; kui rulli kesklõige paigutada võlli *I* keskkohta, siis ülekandetegur muutub nulliks, s. o. veetav ketas ei pöörle. Kui rulli

paigutada veelgi paremale, teisele poole ketta tsentrit, siis hakkab rull pöörlema vastupidises suunas ja ülekandetegur muutub seda suuremaks, mida kaugemal asub rull ketta tsentrist. Niisiis muutub vedava võlli pöörete arvu n_1 juures veetava võlli pöörete arv n_2 mõlemas suunas nullist kuni $n_1 \frac{R}{R_0}$.

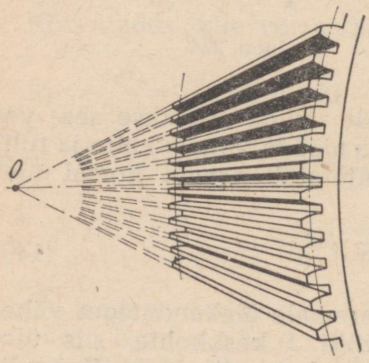
Näide 88. Joonisel 225 on toodud friktsioon-spindelpressi üldvaade. Vedaval võllil *O*, mida saab telgsihis väikese vahekauguse võrra nihutada, istuvad kaks friktsioonketast *B* ja *C*. Kruvile *d* on kinnitatud friktsioonratas *A*, mille pöid on nahaga üle tõmmatud. Kruvi pöörleb mutris, mis on kinnitatud pressi keresse. Kruvi alumine ots on ühendatud templiga nii, et kruvi saab oma telje ümber pöörelda. Tempel libiseb pressi kere juhtteedes. Ratas *A* on surutud ketta *B* vastu. Kui ketas *B* pöörleb joonisel näidatud suunas, ja kruvil on parempoolne keere, siis keerab kruvi end mutrisse ja paneb templi ülevalt alla liikuma suureneva kiirusega, sest ratta *A* kaugus ketta *B* tsentrist kasvab. Pärast stantsimisoperatsiooni teostamist nihutatakse võlli *O* erimehhanismi abil telgsihis ja tööle hakkab ketas *C*, kruvi hakkab pöörlema vastupidises suunas ning tempel hakkab väheneva kiirusega üles liikuma.



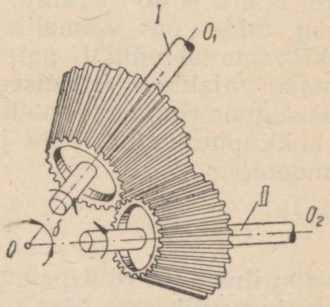
Joon. 225

§ 173. Koonushammasratastega ülekanne

Kujutleme endile, et me lõikame koonilistele friktsioonrullide välispinnale hambad, mis koonduvad koonuse tipus *O* (joon. 226). Nii saame k o o n i l i s e h a m m a s r a t t a. Mõlema ham-



Joon. 226



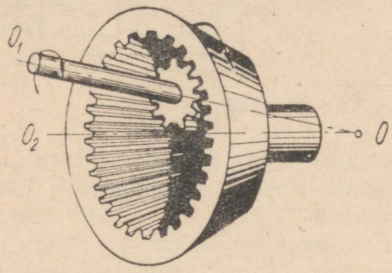
Joon. 227

masratta teljed O_1 ja O_2 (joon. 227) lõikuvad seejuures mingi nurga δ all.

Kõige sagedamini kasutatakse koonushammasratastega ülekannet omavahel ristuvate telgede vahel.

Olgu hammasrattal, mis istub vedaval võllil *I*, z_1 hammast ning võllil *II* istuval veetaval hammasrattal z_2 hammast. Oletame, et vedav hammasratas teeb ühes minutis z_2 pööret, s. o. $n_1 = z_2$, siis läheb läbi liikumatu kokkupuutepunkti z_2z_1 hammast ning järelikult teeb veetav ratas $\frac{z_2z_1}{z_2} = z_1 = n_2$ pööret; öeldust järeldub, et

$$i_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{z_1}{z_2}. \qquad (150)$$



Joon. 228

Niisiis kooniliste hammasrataste i_{21} ülekandetegur, nagu silindrilistel hammasratastelgi, võrdub vedava hammasratta hammaste arvu ja veetava hammasratta hammaste arvu suhtega.

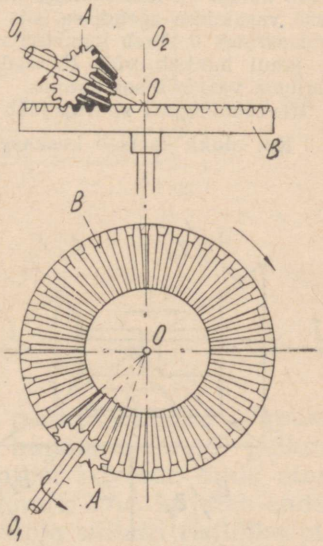
Kõneldes kooniliste hammasrataste pöörlemissuunast, peame selle määramisel vaatlema kõiki pöörlevaid rattaid kas suurema või väiksema põhja poolt.

Kooniliste hammasrataste välise hambumise korral on veetava hammasratta pöörlemissuund vastupidine vedava hammasratta pöörlemissuunaga.

Koonilist hammasülekannet võib teostada ka sisehambumise teel (joon. 228). Sel juhul pöörlevad vedav ja veetav hammasratas ühes suunas. Niisugust liiki ülekannet kasutatakse harva seetõttu, et sisehambumisega koonushammasratast on raske valmistada.

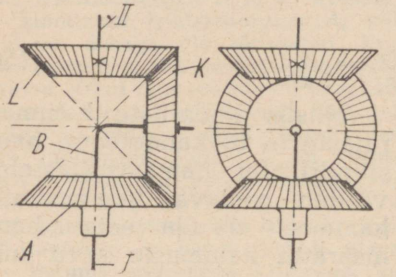
Joonisel 229 on näidatud koonilise ülekande teine erikuju, milles kooniline ratas *A* hambub hammaskettaga *B*.

Koonilistest hammasratastest, analoogiliselt silindrilistele, konstrueeritakse diferentsiaalmehhanisme. Lihtsaima koonusdiferentsiaalmehhanismi skeem on

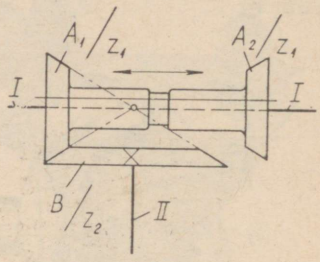


Joon. 229

kujutatud joonisel 230. Läbi ratta *A* puksi läheb vabalt võll *I*, mille ots moodustab juhttapi *B*, millel vabalt istub hammasratas *K*, olles üheaegselt hambumises ratastega *A* ja *L*. Viimane on kinnitatud võllile *II*. Hammasratta *A* ning võlli *I* pöörlemisel ühes juhttapiga mõlemad pöörlemised liituvad ja selle tulemusel pöörleb ratas *L* koos võlliga *II*. Kui hoida ratas *A* paigal, siis saab võll *II* pöörlemise üheltainsalt liikumisallikalt, nimelt võllilt *II*. Ratas *K* on satelliithammasrattaks.



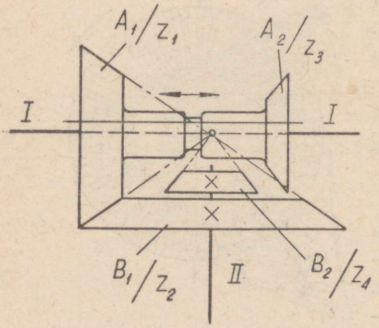
Joon. 230



Joon. 231

Näide 89. Joonisel 231 on kujutatud koonushammasratas-ülekanne, mis võimaldab muuta veetava võlli pöörlemissuunda. Vedaval võllil *I* istub liugkiilul plokk, mis koosneb kahest ühesugusest koonilisest hammasrattast A_1 ja A_2, mis on pööratud teineteise poole oma peenemate otstega. Veetaval võllil *II*, mis on vedava võlliga risti, istub hammasratas *B*. Skeemil näidatud ploki asendi korral on hambumises hammasrattad A_1 ja *B*. Kui plokk paigutada äärmisse vasakusse asendisse, siis lahkuvad need hammasrattad hambumisest ja hammasratas *B* läheb hambumisse hammasrattaga A_2. On kerge aru saada, et sel juhul hakkab võll *II*, vedava võlli pöörlemissuuna endiseks jäämisel, pöörlema vastupidises suunas.

Ülekandeteguri suurus jääb mõlemal juhul üheks ja samaks ning võrdub $\frac{z_1}{z_2}$. Kui plokk asetseb keskasendis, siis võll *II* ei pöörle.



Joon. 232

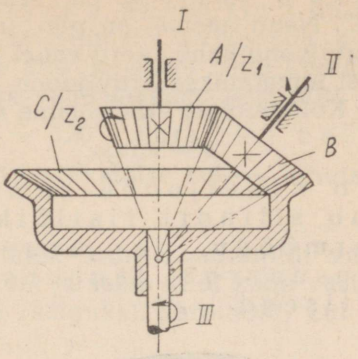
Näide 90. Joonisel 232 on kujutatud koonilise ülekande skeem, mis võimaldab vedava võlli *I* püsiva pöörlemiskiiruse korral saada vedaval võllil *II* suuruse ja suuna poolest kaht erinevat nurkkiirust.

Erinevalt näitest 89 koosneb plokk kahest hammasrattast A_1 ja A_2, millel on erinevad hammaste arvud z_1 ja z_3 ning veetaval võllil istuvad kaks hammasratast B_1 ja B_2, millede hammaste arvud on vastavalt z_2 ja z_4. Ploki niisuguse asendi korral, mis on näidatud joonisel, on ülekandetegur $i_{21} = \frac{z_1}{z_2}$, äärmise vasakpoolse asendi korral on pöörlemissuund vastupidine ja $i_{21} = \frac{z_3}{z_4}$.

Ploki keskmise asendi puhul on võll *II* välja lülitatud.

Näide 91. Joonisel 233 on kujutatud mehhanism, millel on kooniline parasiithammasratas. Vedavalt võllilt *I* antakse pöörlemine võllile *III* hammasrataste *A* ja *B* vahendusel, milledest teine on sisehambumises koonilise hammasrattaga *C*, mis on kinnitatud võllile *III*. Võllid *I* ja *III* on ühistelgsed, s. o. pöörlevad ümber ühe ja sama telje.

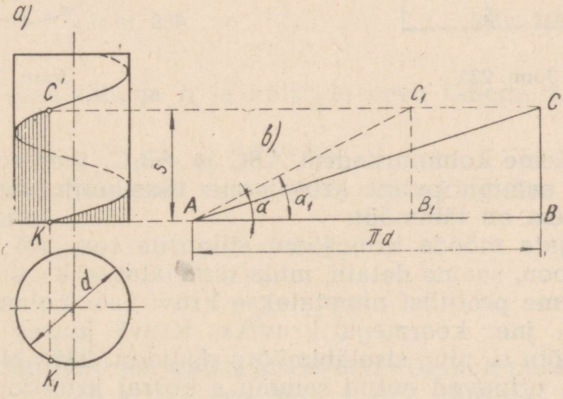
Nagu näeme, on ratas *B* parasiithammasratas ning järelikult on ülekandetegur $i_{31} = \frac{z_1}{z_2}$ ja võll *III* pöörleb vedava võlli pöörlemissuuna suhtes vastupidiselt.



Joon. 233

§ 174. Kruvi põhielemendid

Lõikame paberist välja kolmnurga *ABC* (joon. 234), mille kaatet *AB* võrdub ümarsilindri ümbermõõdu pikkusega. Silinder on joonisel 234, *a* kujutatud kahes projektsioonis. Mähime selle kolmnurga ümber silindri, mille läbimõõt on *d*, nii et kolmnurga tipp asuks silindri teljega risti oleva põhja meelevaldses punktis *K* ning kaatet paikneks aluse tasapinnas. Et see kaatet võr-



Joon. 234

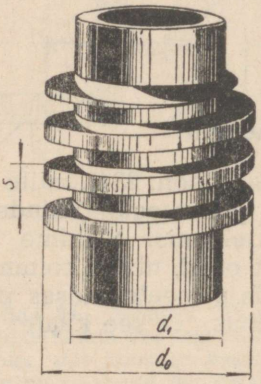
dub aluse ümbermõõduga, siis langeb punkt *B* kokku algpunktiga *K*, milles asub punkt *A*, ning hüpotenuus *AC* paikneb silindri külgpinnal mööda teatud ruumilist kõverat, mida nimetatakse kruvijooneks. Kolmnurga nurk *BAC* kujutab endast nurka, mille moodustab kruvijoone puutuja silindri ristlõike pinnaga ning mida nimetatakse kruvijoone tõusunur-

gaks α. Kaatet BC paikneb silindri moodustajal ja on asendis KC'. Nagu näeme, on piki moodustajat mõõdetud vahekaugus kruvijoone kahe keeru vahel püsiv suurus ja võrdub s. Seda kaugust nimetatakse kruvijoone sammuks.

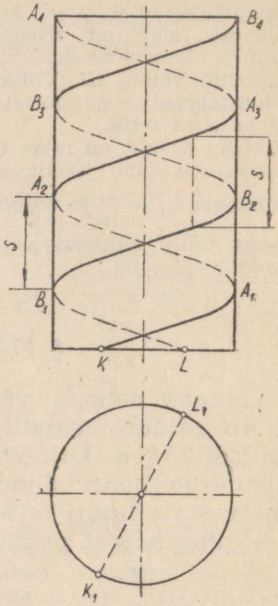
Kolmnurgast ABC saame sõltuvuse:

$$s = \pi d \operatorname{tg}\alpha, \qquad (151)$$

s. o. kruvijoone samm võrdub silindri ristlõike ümbermõõdu ja kruvijoone tõusunurga tangensi korrutisega.



Joon. 235



Joon. 236

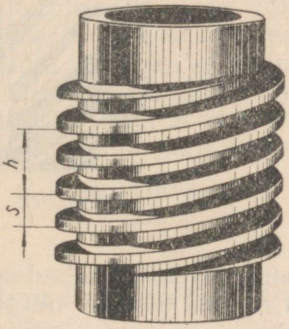
Nagu näeme kolmnurkadest ABC ja AB_1C_1 joonisel 234, *b*, on samasuure sammu puhul kruvijoone tõusunurk seda suurem, mida väiksem on läbimõõt.

Kui lõigata mööda kruvijoont silindrile see- või teistsuguse profiiliga soon, saame detaili, mida nimetatakse kruviks. Olenevalt keerme profiilist nimetatakse kruvi kas kolmnurk-, täisnurk-, ruut- jne. keermega kruviks. Kruvi juures eristatakse välisläbimõõtu d_0 ning siseläbimõõtu d_1 (joon. 235). Nagu ilmneb äsjaöeldust, erinevad antud sammu s korral kruvijoonte tõusunurgad välisel ja sisemisel silindril ning seepärast arvestatakse seda keskmise läbimõõdu järgi, mida tähistatakse d_k.

Kujutleme, et pärast seda, kui on moodustatud kruvijoon $KA_1A_2A_3A_4 \ldots$, kanname silindrile teise samasuure tõusunurgaga kruvijoone $LB_1B_2B_3B_4 \ldots$ (joon. 236). Kui me teise kruvijoone pealekandmist alustame ristlõike diametraalselt vastaspoolel asetsevast punktist (punkt L_1 pealtvaates), siis asetseb see kruvijoon esimese kruvijoone vahel, jagades selle käigu pooleks. Kruvi, mis on lõigatud sellisel viisil, s. t. millel on, nagu räägitakse, kaks

niiti, nimetatakse *kahekäiguliseks*. Selline kruvi on näidatud joonisel 237. Täpselt samuti on võimalik kujundada *kolmekäiguline kruvi*, millel ühe ja sama niidi keerdude vahele on paigutatud kaks võrdsete vahemaadega teist niiti, mis on üksteise suhtes nihutatud $\frac{360°}{3} = 120°$ võrra ning *neljakäiguline* kruvi, millede niidid on üksteise suhtes nihutatud $\frac{360°}{4} = 90°$ võrra jne.

Mitmekäigulisel kruvil nimetatakse kahe naaberniidi vastavat vahekaugust s sammuks ning ühe ja sama niidi kahe vastava punkti vahekaugust kruvi tõusuks (käiguks). Järelikult, kui viimast tähistame tähega h ja käikude arvu tähega z, siis võime kirjutada:



Joon. 237

Joon. 238

$$h = sz. \tag{152}$$

Vastavalt sellele saab valem (152) mitmekäigulise kruvi puhul järgmise kuju:

$$h = \pi d \operatorname{tg}\alpha \tag{152 a}$$

ja samm

$$s = \frac{\pi d \operatorname{tg}\alpha}{z}. \tag{152 b}$$

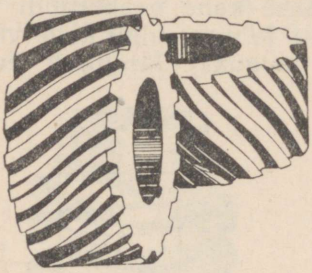
Vaadeldud juhtudel tõusis kruvijoon vasakult paremale. Kruvi keeret, mis vastab kruvijoone niisugusele tõusule, nimetatakse *parempoolseks*. Kui kruvijoon tõuseb paremalt vasakule (joon. 238), siis niisuguse suunaga kruvi nimetatakse *vasakpoolseks*.

Küsimusi

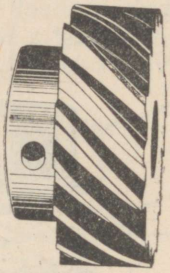
1. Kahel erineva läbimõõduga silindril on kruvijoone tõusunurk üks ja sama. Mida võib öelda sammu kohta?
2. Kahel ühesuguse tõusunurgaga kruvijoonel on silindritel erinev samm. Mida võib öelda nende silindrite läbimõõtude kohta?

§ 175. Ülekanne kruviratastega ja tiguülekanne

Alustame nüüd selliste ülekannete käsitlemist, kus ülekanne toimub hammasrataste abil võllide vahel, millede teljed ristuvad ruumis. Selleks otstarbeks kasutatakse *kruvirattaid* (joon. 239). Kruviratas kujutab endast mitmekäigulist kruvi, millel on erilise (evolvent-) profiiliga keere ning millel käikude arv on võrdne ratta hammaste arvuga (joon. 240).

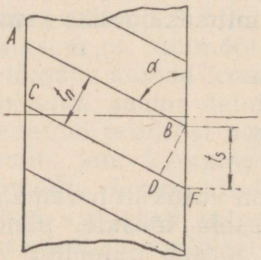


Joon. 239

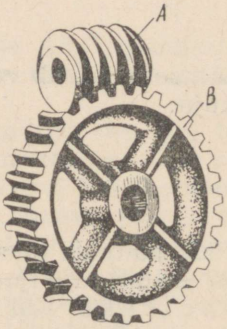


Joon. 240

Kõige sagedamini kasutatakse niisuguseid ülekandeid juhtudel, kui võllide teljed moodustavad ruumis 90°-lise nurga. Nagu kooniliste hammasrataste puhul, tuleme ka siin järeldusele, et vedava ratta ühe pöörde puhul teeb veetav ratas $\frac{z_1}{z_2}$-pööret, kus z_1 — vedava hammasratta hammaste arv ning z_2 — veetava ratta hammaste arv.



Joon. 241



Joon. 242

Niisiis ülekandetegur kruvirataste korral

$$i_{21} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Kruviratta juures tuleb vahet teha normaalsammu ja laupsammu vahel. Kujutagu *AB* ja *CF* (joon. 241) kahe naaber-

hamba keskjooni. Nende ristsihilist vahekaugust $t_n = BD$ nimetatakse normaalsammuks. Mööda lauppinda mõõdetud kaugust $t_s = BF$ nimetatakse laupsammuks. Kui tähistada nagu tavalise kruvi puhulgi kruvijoone tõusunurk tähega α, siis saame kolmnurgast BDF sõltuvuse nende kahe sammu vahel:

$$t_n = t_s \sin\alpha. \tag{153}$$

Kruvihammasratas-ülekande eriliigiks on laialt kasutuselolev tiguülekanne. Tigu A (joon. 242), mis on kinnitatud vedavale võllile, annab pöörlemise tigurattale B, mis on asetatud liikumatult veetavale võllile. Nagu jooniselt on näha, kujutab tigu endast kruvikeermega silindrit, mille keerud käivad tiguratta hammaste vahedes. Tigu võib olla valmistatud ühe- või mitmekäigulisena, kas parem- või vasakpoolse keermega. Teo ja temaga koostöötava tiguratta samm peab olema ilmselt üks ja sama.

Tähistame teo käikude arvu tähega z_t ning ratta hammaste arvu tähega z_r. Kui $z_t = 1$, s. o. tigu on ühekäiguline, siis tema ühe pöörde puhul pöördub ratas ühe hamba võrra, s. o. ühe pöörde $\frac{1}{z_r}$ osa võrra, ning ülekandetegur

$$i_{tr} = \frac{1}{z_r}.$$

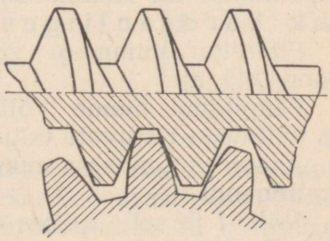
Kui tigu on mitmekäiguline, siis tema ühe pöörde puhul pöördub ratas z_t hamba võrra ehk $\frac{z_t}{z_r}$ osa täispöördest ning järelikult ülekandetegur

$$i_{rt} = \frac{n_r}{n_t} = \frac{z_t}{z_r}, \tag{154}$$

s. o. tiguratta pöörete arvu suhe teo pöörete arvusse võrdub teo keermekäikude arvu ja tiguratta hammaste arvu suhtega.

Nagu näeme, väljendub tigumehhanismi ülekandetegur samuti kui hammasmehhanismi ülekandetegur, kui vedava hammasratta hammaste arv asendada teo käikude arvuga. Tiguülekande iseärasuseks on see, et ta võimaldab saada väga väikseid ülekandetegureid.

Ratta pöörlemissuund oleneb teo pöörlemissuunast ja sellest, milline on selle keere, kas parem- või vasakpoolne. Liikumise ülekandmine tigurattalt teole ei ole alati võimalik. Pöörlemise ülekandmise võimalikkus tigurattalt teole oleneb teo keermeniitide tõusunurgast ning hõõrdetegurist tema keerme ja tiguratta hammaste vahel ja nimelt — mida suurem on see tegur, seda suurem peab olema tõusunurk.

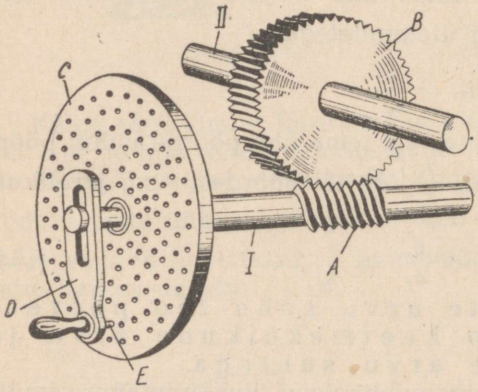


Joon. 243

Joonisel 243 on näidatud hambumine teo ja ratta vahel, kus on näha, et teo keermeniidid on võrdkülgse trapetsi kujulised.

Näide 92. Joonisel 244 on toodud horisontaalfreespingi lihtsa jagamispea skeem. Tigu *A*, olles ühest tükist võlliga *I*, hambub tigurattaga, mis on kinnitatud võllile *II*, millega on ühendatud töödeldav detail. Võll *I*, mille eesmisele otsale on kinnitatud vänt *D*, läheb vabalt läbi liikumatult kinnitatud jagamisketta, millesse on kontsentrilistele ringjoontele üksteisest võrdsetele vahekaugustele puuritud augud. Vänta *D* saab võlli *I* külge kinnitada nii, et selle fiksaator *E* asub ühe või teise aukuderingi kohal. Olgu vaja töödeldavat detaili pöörata $\frac{1}{z}$ pöörde võrra. Seadnud fiksaatori ringjoone kohale, milles on q jaotust ja pööranud vänta selle ringi suhtes p jaotuse võrra, teeme seega tiguvõlliga $\frac{p}{q}$ pööret. Kui teo käikude arv on z_t, ning tiguratta hammaste arv z_r, siis saame, et $\frac{p}{q} \cdot \frac{z_t}{z_r} = \frac{1}{z}$, millest $\frac{p}{q} = \frac{z_r}{z_t z}$.

Jagamispeades tehakse tigu ühekäigulisena ning ratta hammaste arv valitakse tavaliselt 40, s. t. $z_t = 1$ ja $z_r = 40$, siis $\frac{p}{q} = \frac{40}{z}$.



Joon. 244

Olgu pingil vaja freesida 28 hambaga hammasratas; asetades sellesse valemisse $z = 28$, saame

$$\frac{p}{q} = \frac{40}{28} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}.$$

Niisiis peame võlli vändaga tegema $1\frac{3}{7}$ pööret. Valime jagamiskettal ringjoone, mille jaotuste arv on 7-kordne, näiteks 49. Seadnud vända nii, et tihvt *E* asub selle ringi kohal, pöörame iga ülemineku järel vänta $1\frac{3}{7} = 1\frac{21}{49}$ pöörde võrra, s. o. teeme vändaga ühe ringi ja pöörame veel 21 jaotuse võrra.

§ 176. Universaalliigend

Pöörlemise ülekandmiseks mitteparalleelsete võllide vahel kasutatakse ka mehhanismi, mida nimetatakse universaal- ehk kardaanliigendiks.

Pöörelgu kummagi võlli *I* ja *II* otsad laagrites *M* ja *N* (joon. 245, *a*).

Paigutame nende võllide otstele kahvlid *C* ja *A*, milledes on võllidega ristuvate telgede jaoks augud *III* ja *IV*.

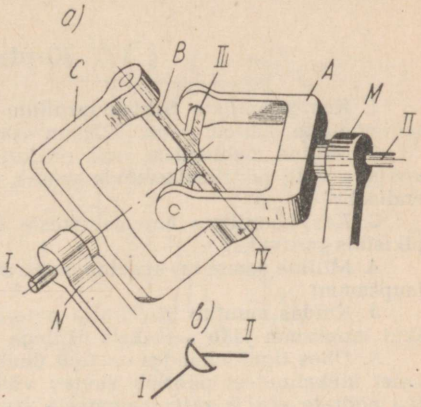
Asetades nendesse aukudesse ristmiku *B* otsad, saame universaalliigendi.

Võlli *I* ja selle küljes oleva kahvli *C* pöörlemisel pöörleb ka ristmik, pöördudes samaaegselt oma otstega kahvli aukude *III* ja *IV* telje ümber ning pannes pöörlema kahvli *A* koos võlliga *II*.

Joonisel 245, *b* on toodud selle mehhanismi tingmärk, mida kasutatakse kinemaatilistes skeemides. Vedava võlli ühe pöörde puhul teeb veetav võll samuti ühe pöörde.

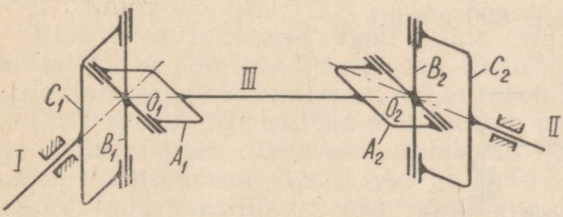
Kuid veetava võlli nurkkiirus ei ole ühe pöörde kestel püsiv, s. o. vedava võlli ühtlasel pöörlemisel pöörleb veetav võll ebaühtlaselt.

Selleks et võimaldada pöörlemise ülekannet mitteparalleelsete ja mittelõikuvate võllide vahel, kasutatakse mõnikord (autodel, tööpinkidel jne.) kahekordset universaalliigendit (joon. 246), mispuhul mõlemad võllid *I* ja *II* on vahevõlliga *III* ühendatud kahe liigendi $A_1B_1C_1$ ja $A_2B_2C_2$ abil. Seejuures on nõutav, et kahvlite A_1 ja A_2 teljed asuksid ühes tasapinnas ning võllide *I* ja *II* teljed oleksid paralleelsed või liigendite tsentreid ühendavate joonte O_1O_2 suhtes sümmeetrilised.

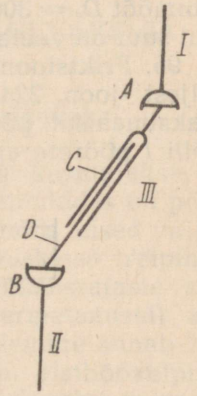


Joon. 245

Sageli tuleb pöörlemist üle kanda veetavale võllile, mille asend ei ole püsiv. Joonisel 247 on skemaatiliselt näidatud niisugustel juhtudel kasutatav mehhanism. Kujutleme, et veetav võll *II* mehhanismi töötamisel muudab võlli *I* suhtes oma asendit; järelikult ei jää siis liigendite vahekaugus püsivaks. Seepärast peab lüli *III* pikkus olema muutuv ning selleks kujundatakse ta järgmisel kujul. Võll *D*, mille ühes otsas on liigendi *B* kahvel, saab telje sihis nihkuda torus *C*, mis on kinnitatud teise liigendi *A* külge.



Joon. 246



Joon. 247

Selles võllis on moodustaja sihis kiilunuut, millesse vabalt läheb torusse kinnitatud kiil. Niisuguse konstruktsiooni korral saab võll *II* nihkuda, saades pöörlemise muutuva pikkusega lülilt *III*, mida nimetatakse teleskooptoruks.

Niisugust kahe liigendi ja teleskooptoruga mehhanismi kasutatakse mõnedes metallilõikepinkides.

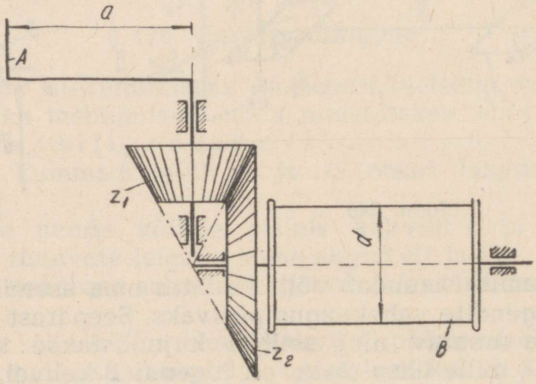
§ 177. Kordamisküsimusi

1. Kas kooniliste friktsioonrullide punkte *B*, *M* ja *b* läbivate ringjoonte läbimõõtude suhted (joon. 222) on võrdsed?
2. Milline mehhanism, mis on kujutatud joonisel 223 ja 224, võimaldab veetava võlli pöörlemissuunda muuta, kui vedava võlli pöörlemissuund jääb endiseks?
3. Kas kooniliste hammasrataste hambumisel jääb hamba samm hamba pikisihis püsivaks?
4. Milline samm on kruvihammasratta juures suurem, kas normaalsamm või laupsamm?
5. Kuidas muutub kruviratta normaalsamm tõusunurga suurenemise korral (kui laupsamm jääb samaks)? Millega ta võrdub, kui $\alpha = 90°$?
6. Ühes tiguülekandes on tigu ühekäiguline, teises kahekäiguline. Kummas neist ülekannetest pöörleb veetav võll kiiremini ja mitu korda, kui mõlema teo pöörete arv ja ratta hammaste arv on üks ja sama?

§ 178. Harjutusi

95. Friktsioontrumli peenema otsa läbimõõt (joon. 223) $D_1 = 280$ mm, jämedama otsa läbimõõt $D_2 = 400$ mm ning rulli läbimõõt $D_0 = 300$ mm. Vedava võlli pöörete arv minutis $n = 350$. Kui suur on veetava võlli väikseim ja suurim pöörete arv minutis?

96. Friktsioonülekandes on rulli *B* suurim kaugus *R* ketta *A* teljest (joon. 224) 250 mm, rulli läbimõõt on 125 mm. Kui suurt maksimaalset pöörete arvu võib saada veetavalt võllilt *II*, kui võlli *I* pöörete arv $n_1 = 800$ p/min?



Joon. 248

97. Pööra A (joon. 248) vänt pöörleb ringkiirusega $v_0 = 0{,}785$ m/sek. Arvutada trumlile B mähitava köie külge kinnitatud raskuse liikumiskiirus, kui $a = 250$ mm, $z_1 = 15$, $z_2 = 45$ ning $d = 180$ mm.

98. Ühekäiguline tigu, mis teeb 900 p/min, töötab koos tigurattaga, millel on 45 hammast. Määrata ratta pöörete arv minutis.

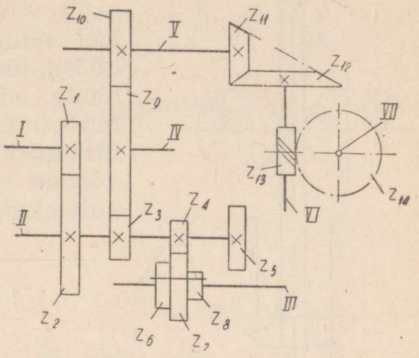
99. Lahendada eelmine ülesanne kolmekäigulise teo puhul.

100. Vedavalt võllilt I (joon. 249) antakse pöörlemine:

a) võllile III võlli II kaudu skeemi järgi: $z_1 \times z_2 - z_3 \times z_6$ või $z_4 \times z_7$ või $z_5 \times z_8$;

b) võllile VII võllide II, IV, V ja VI kaudu skeemi järgi: $z_1 \times z_2 - z_3 \times z_9 \times z_{10} - z_{11} \times z_{12}$ tigu käikude arvuga $z_{13} \times z_{14}$.

Võll I teeb n_1 p/min. Määrata võllide III ja IV pöörete arv minutis.



Joon. 249

Kaheksateistkümnes peatükk

PÖÖRLEVA LIIKUMISE MUUTMINE KULGEVAKS JA VASTUPIDI

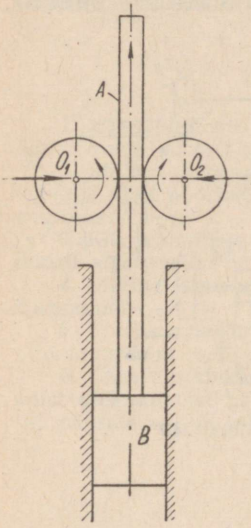
§ 179. Pöörleva liikumise muutmine kulgevaks

Kõik need liikumise liigid, mida tehnikas kasutatakse, ei piirdu üksnes pöörleva liikumisega. Metallilõikepinkides on pöörlev liikumine põhiliikumiseks, millelt võetakse kõik teised vajalikud liikumised. Nii näiteks muudetakse universaalses treipingis ajamvõlli pöörlev liikumine hammaslati ja hammasrataste süsteemi (pikitreimisel) või kruvi ja mutri (keermetamisel) abil supordi kulgevaks liikumiseks; rihmaratta pöörlemine annab kulgeva liikumise pikihöövelpingi töölauale või risthöövelpingi lõiketerale jne. Kulgeva liikumise muutmist pöörlevaks, nagu see toimub kolbmootorites, esineb harvem.

Masinates on detailidel aga sageli palju keerukam liikumine. Käesolevas peatükis käsitleme põhimooduseid, kuidas muuta pöörlevat liikumist sirgjooneliselt kulgevaks liikumiseks ja vastupidi — kulgevat liikumist pöörlevaks liikumiseks.

§ 180. Friktsioonmehhanism kulgeva liikumise saamiseks

Taolise mehhanismi näitena vaatleme mehhanismi, mis annab liikumise lati abil friktsioonstantsimismasinale (joon. 250). Vasara löögiosa *B* libiseb aluse juhtpindadel ning on kinnitatud pöörlevate rullide vahele surutud lati *A* külge (latt on valmistatud kõvast puust — tavaliselt valgest pöökpuust või pöökpuust). Kui nüüd rullide ja lati vahel mõjuv hõõrdejõud ületab vasara löögiosa ja lati kaalu, siis rullide pöörlemisel joonisel näidatud suunas tõstetakse latt üles. Lati liikumiskiirus *v* on libisemise puudumisel võrdne rullide ringkiirusega ning järelikult avaldub seosega:



Joon. 250

$$v = \frac{\pi Dn}{60 \cdot 1000}, \qquad (155)$$

kus *D* — rulli läbimõõt mm;
n — rulli pöörete arv minutis;
v — vasara löögiosa kiirus m/sek.

Vasara löögiosa allaliikumine toimub omakaalu mõjul. Seejuures rullid eemaldatakse latist erimehhanismi abil, mida joonisel pole näidatud.

Samal printsiibil põhineb tooriku kulgev liikumine valtspingi valtside vahel, palgi liikumine saeraamis jne.

Näide 93. Kahe rulliga käitatava friktsioonvasara langevate osade kaal $G = 450$ kg. Määrata vajalik jõud *Q*, millega tuleb suruda rulle vastu latti, ning lati tõusmiskiirus järgmistel andmetel: hõõrdetegur rullide ja lati vahel $f = 0{,}45$, latti koos löögiosaga tõstev jõud peab olema kaks korda suurem nende kaalust, rulli läbimõõt $D = 350$ mm ja kummagi rulli pöörlemiskiirus $n = 135$ p/min.

Rullide ja lati vaheline hõõrdejõud $F = 2fQ$, millest $Q = \frac{F}{2f}$. Kuna aga hõõrdejõud peab olema kaks korda suurem kaalust *G*, siis

$$Q = \frac{2G}{2f} = \frac{G}{f} = \frac{G}{0{,}45} \approx 2{,}2\,G = 990 \text{ kg}.$$

Tõstmiskiirus

$$v = \frac{\pi \cdot 350 \cdot 135}{60 \cdot 1000} \text{ m/sek} \approx 2{,}5 \text{ m/sek}.$$

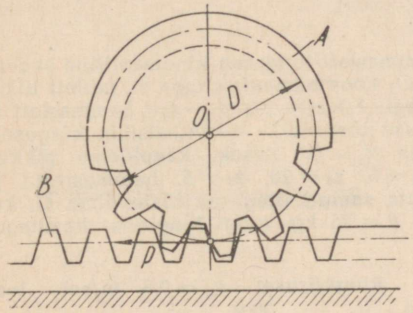
§ 181. Hammaslattülekanne

Eelmises paragrahvis käsitletud ülekandes saadi liikumine hõõrdejõudude mõjul. Oletame, et lõikame lati ja rullide välispinnale hambad. Sel juhul saame hammasmehhanismi, mis koos-

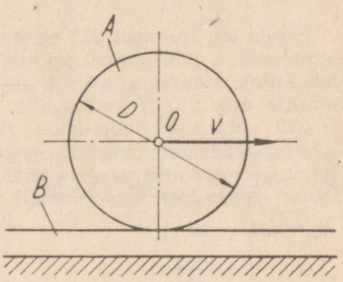
neb silindrilisest hammasrattast *A* (joon. 251) ja hammaslatist *B*. Sellist ülekannet kasutatakse näiteks pikihöövelpingi töölauale liikumise andmiseks, puurpingi spindlile ettenihke andmiseks jne.

Hammaslati liikumiskiirus on ilmselt võrdne hammasratta algringjoone ringkiirusega; seepärast väljendatakse seda sama valemiga (155) mis friktsioonülekande puhulgi. Nimetatud valemit on aga otstarbekam kasutada teisel kujul. Pidades silmas, et hammasratta algringjoone läbimõõt $D = mz$, saame hammaslati liikumiskiiruseks

$$v = \frac{\pi Dn}{60} = \frac{\pi mzn}{60} \text{ mm/sek} = \frac{\pi mzn}{60 \cdot 1000} \text{ m/sek}, \qquad (156)$$



Joon. 251



Joon. 252

kus m — hambumismoodul;
z — hammasratta hammaste arv;
n — hammasratta pöörete arv minutis.

Samuti pole raske leida ka jõudu P, mis annab hammaslatile kulgeva liikumise. Kui tähistame hammasratta võllile O avaldatava pöördemomendi M_p, siis hammasratta algringjoonel mõjuv ringjõud on $\frac{M_p}{R}$, kus R on algringjoone raadius. Järelikult

$$P = \frac{2M_p}{D}. \qquad (157)$$

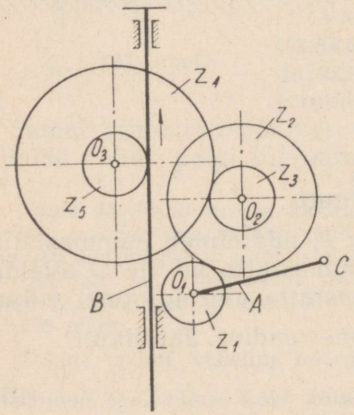
Me eeldasime, et hammasratas paneb liikuma hammaslati. Kuid on võimalik ka vastupidine juht, kus kulgevalt liikuv hammaslatt paneb pöörlema hammasratta. On pikemata selge, et äsjatuletatud sõltuvused jäävad ka antud juhul kehtima: teades hammaslati liikumiskiirust, arvutame valemiga (156) hammasratta pöörete arvu minutis, valemiga (157) määrame aga hammaslatile rakendatud tuntud jõu põhjal hammasrattal mõjuva ringjõu.

Mõlemal kirjeldatud juhul pöörleb hammasratas ümber liikumatu telje O. Kujutame endile nüüd ette hammasratast A, mis veereb mööda liikumatut hammaslatti B (joon. 252). Selline üle-

kanne on analoogiline ratta veeremisele mööda tasapinda. Pole raske näha, et hammasratta ühe pöörde vältel liigub tema telg edasi teekonna $l = \pi D$ võrra, s. o. hammasratta algringjoone pikkuse võrra, n pöörde korral (kus n on kas täis- või murdarv) aga teekonna $l = \pi Dn$ võrra. Taolist ülekannet kasutatakse näiteks treipingi automaatses pikiettenihkemehhanismis: treipingi sängi külge liikumatult kinnitatud hammaslatiga hambub supordi põlles asetsevale võllile kinnitatud hammasratas; pandud ettenihkemehhanismi poolt pöörlema, veereb hammasratas mööda hammaslatti, millega annabki supordile kulgeva liikumise.

Märgime lõpuks, et mõnikord kasutatakse ka t i g u - h a m m a s l a t t ü l e k a n n e t, milles vedavaks lüliks on hammasratta asemel tigu.

Näide 94. Joonisel 253 on antud hammaslatt-tungraua kinemaatiline skeem. Käepideme A pööramisel pöördub võll O_1 koos hammasrattaga z_1, millelt liikumine antakse hammaslatile B skeemi järgi: $z_1 \times z_2 - z_3 \times z_4 - z_5 \times$ hammaslatt B. Määrata aeg t, mis on vajalik koormuse tõstmiseks vertikaalsihis kõrgusele $h = 220$ mm, kui käepideme ringkiirus $v_o = 0{,}8$ m/sek, käepideme pikkus $O_1C = a = 250$ mm, $z_1 = 5$, $z_2 = 20$, $z_3 = 5$, $z_4 = 20$, $z_5 = 5$, hammasratta ja hammaslati moodul $m = 14$ mm. Määrata samuti tungraua tõstevõime Q, kui tööline rakendab käepidemele jõudu $P = 35$ kg ning tungraua kasutegur $\eta = 0{,}75$.



Joon. 253

Ringkiirusel $v_o = 0{,}8$ m/sek teeb käepide $n_1 = \frac{30\, v_o}{\pi a} = 30{,}55$ p/min. Ülekandesuhe võllilt O_1 võlli O_2 kaudu võllile O_3 $i_{31} = \frac{5 \cdot 5}{20 \cdot 20} = \frac{1}{16}$; järelikult käepideme n_1 pöörde puhul minutis hammasratas z_5 teeb $n_3 = n_1 \cdot i_{31} = 30{,}5 \cdot \frac{1}{16}$ pööret. Vastavalt sellele paigutub hammaslatt minutis edasi pikkuse $h_1 = \pi m z_5 n_3 = \frac{\pi \cdot 14 \cdot 5 \cdot 30{,}5}{16} = 420$ mm võrra. Järelikult koorma tõstmiseks $h = 220$ mm kõrgusele vajalik aeg

$$t = \frac{220}{420} = 0{,}525 \text{ min} = 31{,}5 \text{ sek.}$$

Tõstejõu Q leidmiseks kasutame valemit (129 a), kust saame pöördemomendi võllil O_3:

$$M_3 = \frac{M_1}{i_{31}} \cdot \eta = \frac{35 \cdot 250}{\frac{1}{16}} \cdot 0{,}75 = 35 \cdot 250 \cdot 16 \cdot 0{,}75 \text{ kgmm.}$$

Hammasratta z_5 läbimõõt $D_5 = mz_5 = 14 \cdot 5$ mm ning valemi (157) põhjal

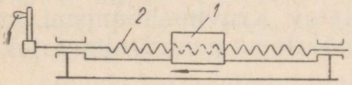
$$Q = \frac{2M_p}{D} = \frac{2 \cdot 35 \cdot 250 \cdot 16 \cdot 0{,}75}{14 \cdot 5} = 3000 \text{ kg} = 3 \text{ t.}$$

§ 182. Kruvipaari kinemaatika

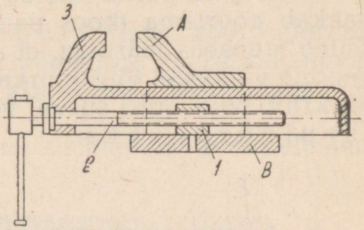
Pöörleva liikumise muutmisel kulgevaks kasutatakse laialdaselt kruvipaari, mis koosneb kruvist ja mutrist.

Pöörelgu liikumatus laagris (joon. 254) ühekäiguline kruvi *2*, millel asetseb mutter *1*, kusjuures viimasel pöörlemisvõimalus puudub. Kui nüüd kruvi samm on *s*, siis kruvi ühe pöörde vältel paigutub mutter juhtpindadel edasi selle sammu *s* võrra, kruvi poole pöörde vältel 0,5 *s* võrra, veerandpöördel 0,25 *s* võrra jne. Üldkujul võime öelda, et kruvi $\frac{p}{q}$ pöörde vältel paigutub mutter edasi suuruse *S* võrra, mis võrdub

$$S = \frac{p}{q} \cdot s. \qquad (158)$$



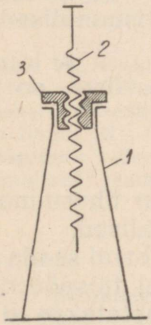
Joon. 254



Joon. 255

Sellist ülekannet kohtame näiteks universaaltreipingi supordile keermetamisel liikumist andvas mehhanismis, kus käigukruvi pöörlev liikumine muudetakse supordipõllega seotud mutri kulgevaks liikumiseks.

See moodus pöörleva liikumise muutmiseks kruvipaari abil kulgevaks pole ainuke. Nii näiteks, jälgides paralleelkruustangide töötamispõhimõtet, näeme, et kruvi *2* pööramisel kruustangide aluse *B* külge kinnitatud liikumatus mutris *1* pöördub see kruvi ka vabalt liikuvas osas *3*, tõmmates seda endaga kaasa ning andes sellele kulgeva liikumise, mille tulemusena detail surutakse liikumatu moka *A* ja liikuva moka *3* vahele.



Joon. 256

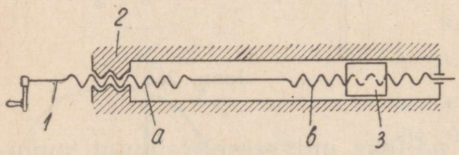
Vaadeldud juhtudel oli vedavaks lüliks kruvi. Võimalik on aga ka vastupidine juhus, mil liikumine antakse kru-

Joon. 257

vile. Taoline näide on toodud joonisel 256, kus on skemaatiliselt näidatud kruvitungraua üks erijuht. Korpuses *1* võib vabalt pöörduda mutter *3* (ilma telgsihis edasi paigutumata). Mutrit läbib kruvi *2*, millel puudub pöörlemisvõimalus. Nendel tingimustel mutrit pöörates anname kruvile kulgeva liikumise. On täiesti selge, et kõigil neil juhtudel on kasutatav valem (158), milles $\frac{p}{q}$ tähistab kruvi pööret mutris või mutri pööret kruvil täispöörde osades. Kruvi või mutri edasipaigutumise suund oleneb sellest, kas keere on parem- või vasakpoolne ning millises suunas pöörata kruvi või mutrit.

Ülekanne kruvipaari abil võimaldab ka kulgevat liikumist pöörlevaks muuta; näiteks liigutades mutrit telgsihis, anname me keerme küllalt suure tõusunurga korral kruvile pöörleva liikumise.

Sellel põhimõttel töötab käsitrell (joon. 257), mille kruvi *2* hakkab pöörlema (koos padruniga *1*), liigutades edasi mutrit *3*. Tuleb muuseas märkida, et selline ülekanne mutrilt kruvile pole keerme väikestel tõusunurkadel teostatav. Kruvimehhanismi, milles kruvi pole mutri survel võimalik pöörlema panna, nimetatakse isepiduruvaks.



Joon. 258

Joonisel 258 on näidatud mehhanismi skeem, mille kruvil *1* on osas *a* keere sammuga s_a, osas *b* aga keere sammuga s_b. Kruvi osa *a* pöörleb liikumatus mutris *2*, osa *b* aga mutris *3*, millel puudub pöörlemisvõimalus. Olgu keermed *a* ja *b* ühesuunalised. Pöörates kruvi ühe täispöörde võrra, nihkub see mutris *2* telgsihis edasi sammu s_a võrra. Kui mutter *3* pöörleks koos kruviga, siis ta nihkuks samuti telgsihis edasi suuruse s_a võrra. Kuna aga mutter pöörelda ei saa, siis ta paigutub kruvil edasi vastupidises suunas sammu s_b võrra. Järelikult, mutri absoluutne edasinihkumine liikumatu juhtpinna suhtes on $s_a - s_b$. Kui aga keermed *a* ja *b* on erisuunalised, siis mutri *3* edasipaigutumine on $s_a + s_b$.

Siit saame, et keerates kruvi $\frac{p}{q}$ täispöörde võrra, on mutri edasinihkumine

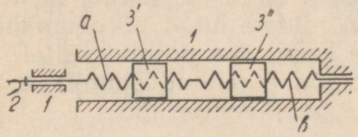
$$s = \frac{p}{q}(s_a \pm s_b), \tag{159}$$

kus märk miinus kuulub juhule, mil keermed on ühesuunalised, märk pluss aga juhule, mil keermed on erisuunalised.

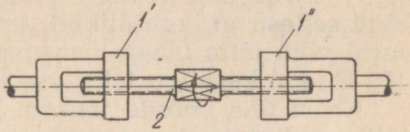
Nagu näeme, võime ühesuunaliste keermete korral saada mutri väga väikese edasinihkumise, kuna selleks ühel täispöördel on keermete sammude vahe. Sellist mehhanismi nimetatakse diferentsiaalseks kruvimehhanismiks.

Vaadeldud lihtsatest kruvimehhanismidest võib edasi saada kõikvõimalikke erijuhte. Näiteks lõigates kruvile 2 (joon. 259), mille telgnihkumist takistab laager *1*, osades *a* ja *b* ühesuguse sammuga, kuid erisuunalised keermed, saame mehhanismi, milles kruvi pööramisel mitte pöörelda võivad mutrid *3′* ja *3″* kas lähenevad või eemalduvad teineteisest ühesuguse kiirusega.

Taolist mehhanismi kasutatakse kahepakilises puurpadrunis.



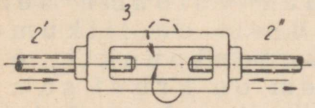
Joon. 259



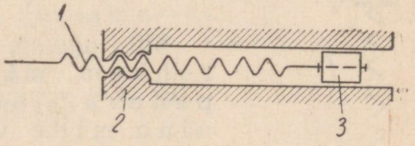
Joon. 260

Samal põhimõttel töötab ka p i n g u t i (joon. 260): pöörates kruvi *2*, millel kummaski otsas on erisuunaline keere, lähenevad klambrid *1′* ja *1″* koos nende külge kinnitatud tõmbitsatega (või trossidega) teineteisele.

Joonisel 261 näidatud pinguti erineb kirjeldatust ainult elementide paigutuse poolest.



Joon. 261



Joon. 262

Näide 95. Parempoolse keermega kruvi *1* (joon. 262) sammuga $s = 2{,}5$ mm pöörleb liikumatus mutris *2*, teise otsaga aga vabalt liuguris *3*, mis libiseb mööda liikumatuid juhtpindu. Mitu pööret tuleb teha kruviga ning millises suunas, et liuguri nihkumine vasakult paremale oleks $s = 81$ mm?

$\frac{p}{q} = \frac{S}{s} = \frac{81}{2{,}5}$ pööret $= 32{,}4$ pööret $= 32$ täispööret ja 144° (pöörata kellaosuti liikumise suunas).

Näide 96. Kruvipaaril (joon. 258) on osas *a* parempoolne keere sammuga $s_a \doteq 4$ mm, osas *b* aga samasuunaline keere, kuid sammuga $s_b = 3{,}5$ mm. Kruvi pööratakse kellaosuti liikumise suunas 45° võrra. Kui palju ja millises suunas nihkub liugur *3*?

Kasutades valemit (159), milles tuleb võtta märk miinus, sest keermed on ühesuunalised, saame:

$$S = \frac{45}{360}(4 - 3{,}5) = 0{,}0625 \text{ mm}.$$

Kruvi pööramisel näidatud suunas (kellaosuti liikumise suunas) nihkub liugur vasakult paremale.

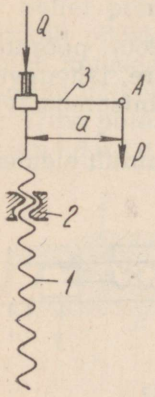
§ 183. Kruvipaari staatika

Olgu kruvile *1* (joon. 263) kinnitatud käepideme *3* õlale *a* rakendatud punktis *A* jõud *P*. Selle jõu mõjul pöördub kruvi liikumatus mutris *2* ning tõuseb üles, ületades kasuliku takistuse *Q*. Tuletame jõudude *P* ja *Q* vahelise seose.

Nagu eespool juba korduvalt märkisime, peab liikumapaneva jõu töö võrduma takistusjõudude tööde summaga. Lähtume esialgu sellest, et kahjulikud takistused on tähtsusetud, mistõttu need võib jätta tähele panemata. Võrdleme nüüd liikumapaneva jõu *P* tööd kasuliku takistuse tööga kruvi ühe pöörde vältel.

Kruvi ühe pöörde jooksul läbib jõu *P* rakenduspunkt *A* tee, mille pikkus on $2\pi a$. Järelikult jõu *P* poolt tehtud töö

$$A_P = 2\pi Pa.$$



Joon. 263

Ühe pöörde jooksul nihkub kruvi oma telje suunas edasi keerme sammu võrra, millele vastavalt takistusjõu *Q* poolt tehtud töö $W_q = Qs$.

Võrrutades leitud tööd omavahel, saame:

$$2\pi Pa = Qs,$$

millest

$$Q = 2\pi \frac{a}{s} P. \qquad (160)$$

Siit näeme, et jõus võidame seda rohkem, mida suurem on liikumapaneva jõu rakenduspunkti õlg ning mida väiksem on kruvi samm.

Et väljendada praktiliselt saadavat jõudu *Q*, peame leitud võrrandi paremat poolt korrutama ülekande kasuteguriga η:

$$Q = 2\pi \frac{a}{s} P\eta. \qquad (161)$$

Võrrandi (160) võib avaldada teisel kujul. Avaldame kruvi sammu keskmise läbimõõdu d_k kaudu, kasutades valemit (151):

$$s = \pi d_k \operatorname{tg}\alpha.$$

Asetades selle avaldise võrrandisse (160), saame:

$$Q = \frac{2a}{d_k \operatorname{tg}\alpha} P, \qquad (162)$$

s. o. võidame jõus seda rohkem, mida suurem on liikumapaneva jõu rakenduspunkti õlg ning mida väiksem on kruvi keskmine läbimõõt ja keskmisele silindrile lõigatud kruvijoone tõusunurga tangens.

Hõõrdejõudusid arvestades annab valem (162) vastavalt:

$$Q = \frac{2a}{d_k \operatorname{tg}\alpha} P\eta. \qquad (163)$$

Lõpuks on võimalik meid huvitav seos saada veel teisel viisil. Pidades meeles, et Pa kujutab endast jõu P momenti kruvi telje suhtes, s. o. pöördemomenti, M_p kruvil, võime kirjutada:

$$Q = \frac{2M_p}{d_k \operatorname{tg}\alpha}\eta, \tag{164}$$

s. o. kruvi telje sihis mõjuv jõud on suuruselt võrdne kahekordse pöördemomendiga, mis on korrutatud kasuteguriga ning jagatud kruvikeermе keskmise läbimõõduga ning sellele keskmisele läbimõõdule vastava tõusunurga tangensiga.

Kuna kruvikeerme tõusunurga võib võtta küllalt väikese, siis kruviülekandega võib võita väga palju jõus. Kruvi ja mutri abil tõmbame me väikese käejõu abil suure jõuga kokku omavahel ühendatavad detailid, kinnitame töödeldava detaili kruustangidesse; samuti kasutame seda ülekannet kruvitungraudades, kruvipressides jne.

Kasutegur arvutatakse igal konkreetsel juhul olenevalt keerme tõusunurgast ja hõõrdetegurist.

Näide 97. Määrata jõud P, mis on tarvis raskuse $Q = 3$ t ühtlaseks tõstmiseks joonisel 263 näidatud skeemi järgi töötava kruvitungraua abil, kui kruvi samm $s = 8$ mm, õlg $a = 800$ mm, kasutegur $\eta = 0{,}4$.[1]

Võrrandist (161) saame:

$$P = \frac{Qs}{2\pi a\eta} = \frac{3000 \cdot 8}{2\pi \cdot 800 \cdot 0{,}4} \approx 12 \text{ kg}.$$

§ 184. Kruvide põhitüüpide keermeprofiilid

Lõigates kruvi tasapinnaga, mis läbib kruvi telge, lõikame läbi ka keermeniidid. Olenevalt keerme profiilist, s. o. sellest, millise kujundi me saame niidi lõikepinnas, on keermel üks või teine nimetus. Kasutatakse mitmesuguse profiiliga keermeid. Selle või teise profiili valik sõltub kruvi ülesandest.

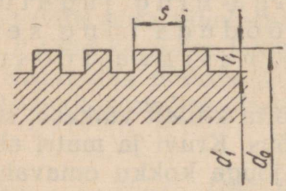
Kui kruvi on ette nähtud liikumise ülekandmiseks, siis kahtlemata huvitab meid suurim kasutegur, mille saavutamiseks peame viima miinimumini mehaanilised kaod ülekandes; kui aga kruvi on ette nähtud mingisuguste detailide kinnitamiseks, siis, vastupidi, peame konstrueerima kruvi ja mutri nii, et nende kokkupuutepinnas mõjuks võimalikult suur hõõrdejõud, mis takistaks mutri iseenesest lahtipöördumist.

Nagu tõestatakse tehnilise mehaanika vastavatel kursustel, on ühtede ja samade geomeetriliste elementide korral hõõrdekaod

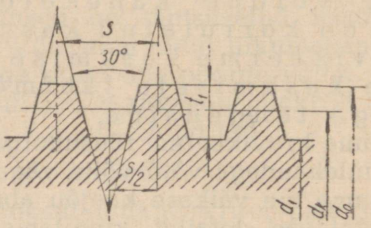
[1] Kruvitungrauad peavad olema isepidurduvad, s. o. kruvi ei tohi pöörduda telgjõu mõjul. Tuleb märkida, et selle tingimuse täitmisel on tungraua kasutegur alati alla 0,5.

vähimad ristkülikukujulisel keermel (joon. 264), mis on kujundatud tavaliselt nii, et keerme sügavus t_1 on poole väiksem keerme sammust, s. o. $t_1 = \frac{s}{2}$.

Sellist ristkülikukujulist keeret nimetatakse ruutkeermeks.



Joon. 264



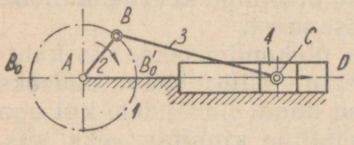
Joon. 265

Ristkülikukujulisel keermel on aga ka mõningaid puudusi, milledest olulisim on keerme täpse valmistamise raskus. Seepärast on ristkülikukujulise keerme välja tõrjunud teine, nn. trapetskeere (joon. 265). Selle keerme niitide ristlõikeks on võrdkülgsed trapetsid, millede küljed moodustavad omavahel nurga 30°.

Joonistel 264 ja 265 kujutatud keermete ülejäänud elementide nimetused on antud paragrahvis 200 (joon. 293).

§ 185. Väntmehhanism

Pöörleva liikumise muutmiseks kulgevaks kasutatakse ka väntmehhanismi, mis skemaatiliselt on näidatud joonisel 266.



Joon. 266

Aluse *1* liikumatutes laagrites pöörleva võlliga *A* ühise terviku moodustav vänt *2* on šarniiri *B* abil ühendatud kepsuga *3*. Kepsu teine ots on šarniiri *C* abil ühendatud liuguriga *4*, mis libiseb mööda sirgjoonelisi liikumatuid juhtpindu. Nagu näeme, on liuguril vända pideval pöörlemisel kulgev edasi-tagasi liikumine, s. o. käigu lõpul muudab liugur oma liikumissuunda. Seega vända ühe pöörde jooksul teeb liugur kaks käiku — algul ühes, seejärel aga vastupidises suunas. Nimetatu ongi peamine erinevus, mille poolest see mehhanism erineb teistest käesolevas peatükis käsitletud mehhanismidest.

Väntmehhanismi kasutatakse ka kulgeva edasi-tagasi liikumise muutmiseks pöörlevaks, nagu näiteks aurumasinates ja sisepõlemismootorites, kus vedavaks lüliks on kolb, mis kepsu abil paneb pöörlema mootori väntvõlli. Mehhanismi sellise tööskeemi korral ilmneb veel üks iseärasus. Liikugu liugur vasakult paremale, millele vastavalt vänt pöörleb kellaosuti suunas. Liuguri jõudmisel äärmisesse parempoolsesse asendisse võtab vänt asendi AB'_0, misjärel liugur hakkab liikuma vastupidises suunas. Vända seda asendit nimetatakse surnud (piir-) seisuks, sirget B_0D aga surnud seisude jooneks. Vända üleviimiseks surnud seisudest, juhul kui vänt on vedavaks lüliks, on hooratas — väntvõllile pressitud ratas raske põiaga.

Hooratta kineetiline energia tagab mehhanismi pideva (katkematu) liikumise.

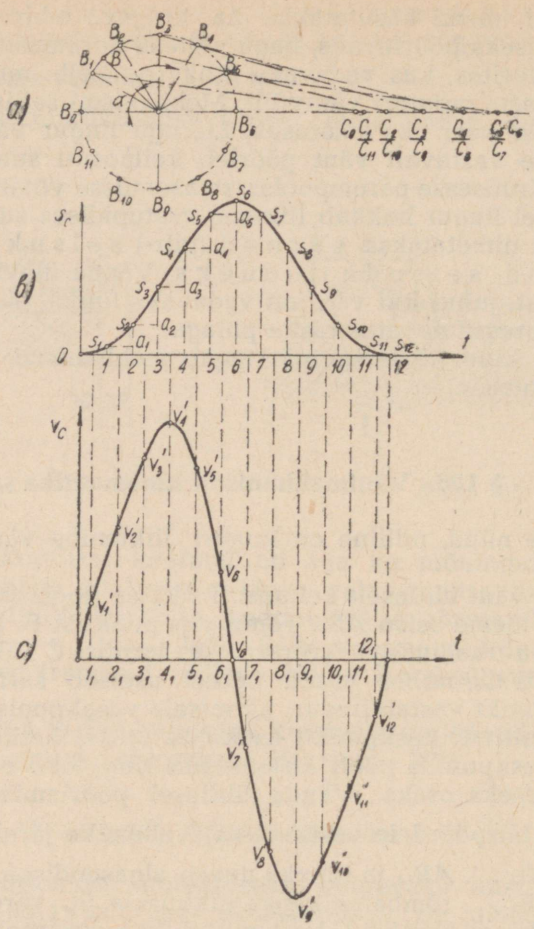
§ 186. Väntmehhanismi kinemaatika

Vaatleme nüüd, milline on liuguri liikumine vända ühtlasel pöörlemisel.

Pöörelgu vänt ühtlaselt kellaosuti suunas (joon. 267, *a*). Vända algasendiks loeme seisu AB_0. Tõmmates punktist B_0 kepsu pikkusele võrduva raadiusega kriipsukese šarniiri C liikumissirgele, saame punkti C_0, milles antud hetkel asetseb šarniiri C keskpunkt. See punkt vastab liuguri äärmisele vasakpoolsele asendile. Et leida šarniiri C keskpunkti asukohta teistel hetkedel, jagame šarniiri B keskpunkti poolt kujundatud ringjoone mitmeks, näiteks 12 võrdseks osaks. Vända ühtlasel pöörlemisel jõuab see võrdsete, $\frac{1}{12}$ täispöördele vastavate ajavahemike järel asenditesse AB_1, AB_2, AB_3 ... AB_{11} ja lõpuks uuesti algasendisse AB_0. Punktidest B_1, B_2, B_3 ... tõmbame kepsu pikkusele BC võrduva raadiusega kriipsukesed šarniiri C keskpunkti liikumissirgele, mille tulemusena leiame, et vända $\frac{1}{12}$ pöörde järgi punkt C võtab asendi C_1, liikudes edasi pikkuse $S_1 = C_0C_1$ võrra; kahe sellise ajavahemiku möödudes moodustab punkti C edasiliikumine $S_2 = C_0C_2$; kolme sellise ajavahemiku möödudes on edasiliikumine $S_3 = C_0C_3$ jne. Vända asendis AB_6 asetseb punkt C punktist B_6 kepsu pikkuse kaugusel punktis C_6, mis vastab liuguri äärmisele parempoolsele asendile. Edasi hakkab liugur liikuma vastupidises suunas (s. o. paremalt vasakule), kusjuures ta kaugus algasendist pidevalt väheneb; nii vastab vända asend AB_7 šarniiri keskpunkti C asendile C_7, mis langeb kokku punktiga C_5; vända asend AB_8 vastab šarniiri keskpunkti C asendile C_8 jne.

Hetkel, mil vänt jõuab tagasi algasendisse, asetseb punkt C punktis C_0.

Nagu näeme sellest konstruktsioonist, võrdub lõik C_0C_6 lõi-



Joon. 267

guga B_0B_6, s. o. šarniiri B keskpunkti poolt kujundatava ringjoone läbimõõduga, viimane aga on võrdne vända kahekordse pikkusega.

Tähistades vända pikkuse tähega r, liuguri käigu pikkuse aga tähega H, võime järelikult kirjutada:

$$H = 2r. \qquad (164\ a)$$

Niisiis, väntmehhanismis on liuguri käik võrdne vända kahekordse pikkusega.

Üeldust järeldub, et liuguri asendi leidmiseks mistahes hetkel peame leidma sellele hetkele vastava vända asendi ning vända ja kepsu šarniirühenduse keskpunktist tõmbama kepsu pikkusele

vastava raadiusega kriipsukese liuguri tsentri keskpunkti liikumise trajektoorile. Samuti vastupidi — kui on antud liuguri asend, tuleb liuguri ja kepsu šarniirühenduse keskpunktist tõmmata sama raadiust kasutades kriipsuke ringjoone vastavale poolele, mille kujundab vända ja kepsu šarniirühenduse tsenter.

Teades liuguri C šarniiri tsentri asendit, võime juba ehitada liuguri kaugusi algasendist C_0 kujutava kõvera, rakendades selleks meetodit, mida käsitlesime kinemaatikas (§ 57). Kasutades ristkoordinaadistikku (joon. 267, *b*), kanname abstsissteljele Ot võrdsed lõigud, milledest igaüks väljendab valitud mastaabis vända pöördumiseks $\frac{1}{12}$ täispöörde võrra kuluvat aega. Püstitades punktidest *1, 2, 3* jne. ristsirged ning kandes nendele kaugusi algasendist C_0C_1, C_0C_2, C_0C_3 jne. väljendavad lõigud $1 — S_1$, $2 — S_2$, $3 — S_3$ jne., saame rea punkte S_1, S_2, S_3 jne., mis ühendame sujuva kõveraga. Tulemusena saame liuguri šarniiri C tsentri kauguste S diagrammi, millelt võime leida liuguri asendi mistahes hetkel.

Sellelt kõveralt näeme, et vända ühtlasel pöörlemisel ei ole liuguri poolt võrdsetes ajavahemikes läbitud teekonnad võrdsed: nii näiteks vända pöördumisel nurga B_0AB_1 võrra liugur nihkub edasi suuruse $1 — S_1$ võrra, vända pöördumisel järgmise nurga B_1AB_2 võrra väljendab liuguri edasinihkumist aga lõik $a_1 — S_2$, pöördumisel nurga B_2AB_3 võrra lõik $a_2 — S_3$ jne. Nagu näeme, lõigud algul suurenevad, seejärel aga vähenevad.

Siit teeme järelduse, et vända ühtlasel pöörlemisel liugur liigub ebaühtlaselt ja vastupidi, kui vedavaks lüliks on liugur, siis selle ühtlasel liikumisel vänt pöörleb ebaühtlaselt.

See asjaolu on vändmehhanismi tähtsaks iseärasuseks.

Teades kauguste kõverat, või mis on sama — ümberpaigutumiste kõverat, saame ehitada kiiruste kõvera, mis võimaldab määrata liuguri kiirust meelevaldsel hetkel. Nagu nägime, paigutus liugur aja vältel, mis vändal kulus nurga B_0AB_1 (joon. 267, *a*) läbimiseks, edasi suuruse võrra, mida väljendab lõik $1 — S_1$ (joon. 267, *b*). Jagades selle ümberpaigutumise ajaga, mille kestel see toimus, saame liuguri keskmise kiiruse sellel teel; täpselt samuti, jagades edasiliikumise $a_1 — S_2$ samasuguse ajavahemikuga (sest me jagasime vända täispöörde võrdseteks osadeks), saame keskmise kiiruse sellel teel jne. Sel viisil arvutame keskmise kiiruse vända pöörde ulatuses 180°.

Nüüd joonestame ristkoordinaadistiku, milles teljele Ot kanname aja, teljele Ov (joon. 267, *c*), aga valitud mastaabis liuguri punkti C keskmised kiirused. Need keskmised kiirused kanname ajateljele Ot lõikude $0 — 1$, $1 — 2$, $2 — 3$ jne. keskpunktidest 1_1, 2_1, 3_1 jne. püstitatud ristsirgetele (joon. 267, *b*). Tulemusena leiame punktid v'_1, v'_2, v'_3 jne. (joon. 267, *c*), mida sujuva kõverjoonega $Ov'_1v'_2v'_3v'_4v'_5v_6'v_6$ ühendades saamegi liuguri liikumiskiirust vända esimesel poolpöördel (s. o. aja vältel, mis vändal

kulub pöördumiseks asendist AB_0 asendisse AB_6) väljendava kõvera.

Sellest hetkest alates liigub liugur vastupidises suunas paremalt vasakule, kusjuures tema kiirus on samuti suunatud vastupidi. Seepärast ehitame kõvera teise haru sümmeetriliselt esimesega, kuid ajateljest allapoole.

Analüüsides saadud kiiruste kõverat, näeme, et vända vasakpoolses surnud seisus AB_0 on liuguri kiirus null (punkt O joonisel 267, *c*).

Vända edasisel pöördumisel liuguri kiirus kasvab ning mingil hetkel, mis vastab vända kindlale asendile AB_3 ja AB_4 vahel (joon. 267, *a*), saavutab suurima väärtuse. Seejärel hakkab kiirus vähenema, muutudes uuesti nulliks vända parempoolses surnud seisus AB_6, misjärel vända teise poolpöörde kestel pilt kordub vastupidises järjekorras.

Küsimusi

1. Millega võrdub lõikude $1 - S_1$, $a_1 - S_2$, $a_2 - S_3$, $a_3 - S_4$, $a_4 - S_5$, $a_5 - S_6$ (joon. 267, *b*) summa?
2. Näidake nende liidetavate summa joonise 267, *a* parempoolsel ja vasakpoolsel osal.
3. Näidake joonisel 267, *a* vända asend, mis vastaks ajatelje punktile v_c joonisel 267, *c*.

Näide 98. Vända AB pikkus on 120 mm, kepsu BC pikkus aga 420 mm (joon. 266). Vända pöörlemiskiirus $n = 180$ p/min. Ehitada punkti C ümberpaigutuste ja kiiruste kõverad ning määrata selle punkti kiirus hetkel, mil vänt moodustab vasakpoolse surnud seisuga nurga $\alpha = 50°$.

Joonistame mehhanismi skeemi (joon. 267, *a*), võttes mastaabiks 1 : 8, ning jaotame punkti C poolt kujundatava ringjoone 12 võrdseks osaks. Tõmmanud raadiusega, mille pikkus on $\frac{420}{8} = 52{,}5$ mm, joonekesed, ehitame ümberpaigutuste kõvera (joon. 267, *b*). Pöörlemiskiirusel 180 p/min väljendavad lõigud *0—1*, *1—2*, *2—3* jne., millede pikkus on 5 mm, ajavahemikke $\frac{60}{180 \cdot 12} = \frac{1}{36}$ sek või vända pöördenurki 30°.

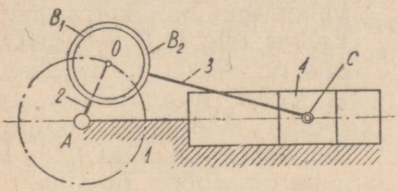
Mõõtes ümberpaigutused $1—S_1$, $a_1—S_2$, $a_2—S_3$ jne. ning korrutades need mastaabiga 8 ja jagades $\frac{1}{36}$ sek, saame keskmise kiiruse igal ajavahemikul. Võttes kiiruste mastaabiks 50 mm/sek = 1 mm, tõmbame punktidest 1_1, 2_1, 3_1 jne. ordinaadid, mis väljendavad samas mastaabis keskmisi kiirusi, ning ühendame need sujuva kõveraga.

Vända AB asend, mis moodustab surnud seisuga AB_0 nurga $\alpha = 50°$, vastab joonisel 267, *b* punktist *1* kaugusel $\frac{5 \cdot 20}{30} = 3\frac{1}{3}$ mm asetsevale punktile. Tõmmates läbi selle punkti vertikaaljoone kuni lõikumiseni teljega *Ot* kiiruste kõveral, saame 28,5 mm pikkuse ordinaadi, mis valitud mastaabis annab otsitava kiiruse $v_c = 28{,}5 \cdot 50 = 1425$ mm/sek = 1,425 m/sek.

§ 187. Ekstsentrikmehhanism

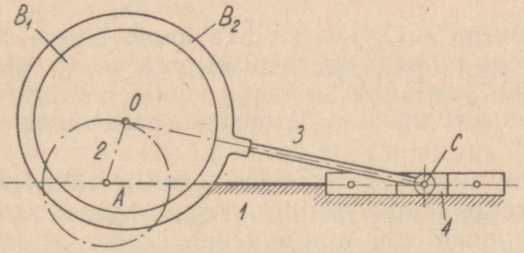
Oletame, et me suurendasime vända *2* ja kepsu *3* ühendussarniiri mõõteid kuni joonisel 268 näidatud vahekorrani, kusjuures tapp B_1 moodustab endiselt ühe terviku vändaga, tappi ümbritsev rõngas aga kepsuga. Nagu näeme, jääb see mehhanism väntmehhanismiks, milles vända *2* pikkus on *AO*, kepsu *3* pikkus aga *OC*, kus *O* on endiselt šarniiri tsenter.

Suurendades edasi šarniiri läbimõõtu, saame mehhanismi, mis on skemaatiliselt näidatud joonisel 269. Telje *A* ümber pöörleb ümmargune ketas B_1, mida ümbritseb vabalt sellel asetsev ning kepsuga *3* ühist tervikut moodustav rõngas B_2. See mehhanism töötab täiesti ühteviisi väntmehhanismiga, millel vända *2* pikkus võrdub ketta B_1 pöörlemistelje *A* ja sama ketta geomeetrilise telje *O* vahelise kaugusega *AO*, kepsu *3* pikkus aga sama telje ja kepsu *3* ning liuguri *4* ühendussarniiri telje *C* vahelise kaugusega *OC*. Sellist mehhanismi nimetatakse ekstsentrikmehhanismiks, ketast B_1 — ekstsentrikuks, kepsu *3* — ekstsentriku vardaks, lõiku *AO* aga ekstsentriku ekstsentrilisuseks.



Joon. 268

Nagu öeldust järeldub, töötab ekstsentrikmehhanism samuti nagu väntmehhanism, milles vända pikkus võrdub ekstsentrilisusega, kepsu pikkus aga ekstsentriku varda telgede *O* ja *C* vahelise kaugusega.

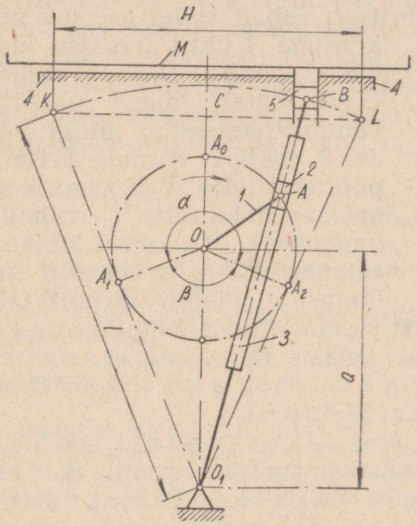


Joon. 269

Kirjeldatud mehhanismil on see eelis, et ta võimaldab vända tapi küllaltki suurte läbimõõtude korral, mis on tarvilik suurtel survetel, saada võrdlemisi väike liuguri käik. Ekstsentrikmehhanisme kasutatakse eriti laialdaselt sepistamis- ja stantsimispressides ning mujal.

§ 188. Mehhanism õõtsuva kulissiga

Kujutame endile ette vänta *1* (joon. 270), mis pöörleb ümber liikumatu telje *O*. Vända lõpus olgu sõrm teljega *A*, millel vabalt istuv liugur võib liikuda mööda kangi *3* lõigatud sirgjoonelist juhtsoont. Kang, mida nimetatakse kulissiks, võib pöörduda ümber liikumatu telje O_1. Vända pöörlemisel libiseb kulissikiviks nimetatav liugur kulissipilus, pannes kulissi pöörduma ümber õõtsumistelje O_1.



Joon. 270

Pöörelgu vänt noolega näidatud suunas. Mingi ajavahemiku möödudes võtab kulissi telg O_1B asendi O_1L, mis on vända sõrme tsentri *A* poolt kujundatava ringjoone $A_1A_0A_2A'_0$ puutuja. Sel hetkel on vänt OA_2 kui selle ringjoone raadius risti kulissi teljega. On pikemata selge, et see on kulissi äärmine parempoolne asend, sest vända edasisel pöörlemisel antud suunas hakkab kuliss pöörduma vastupidises suunas, s. o. paremalt vasakule, ja vända pöördudes nurga $A_2OA_1 = \beta$ võrra võtab kuliss äärmise vasakpoolse asendi O_1K, mis on risti vändaga OA_1. Edasi pöördub kuliss vasakult paremale ning pärast vända pöördumist nurga $A_1OA_2 = \alpha$ võrra jõuab uuesti asendisse O_1L.

Seega vända pideval pöörlemisel on kulissil õõtsuv liikumine ümber telje O_1, kusjuures ta liigub vända pöörde jooksul äärmisest vasakpoolsest asendist äärmisesse parempoolsesse asendisse ja tagasi.

Olgu kulissi ülemisel otsal sõrm *B*, millel võib vabalt pöörduda liugur *5*, libisedes samaaegselt liuguriga *M* ühist tervikut moodustatavatel sirgjoonelistel juhtpindadel. Liugur *M* ise aga libiseb liikumatutel juhtpindadel *4*.

Sellise ehituse korral annab liugur *5*, libisedes juhtpindadel, kulissi õõtsuva liikumise nende juhtpindadega ühist tervikut moodustavale liugurile *M*. Liugur paigutub ühest äärmisest seisust teise ja tagasi.

Nagu näeme, muudetakse vända pöörlev liikumine liuguri kulgevaks edasi-tagasi liikumiseks kulissi abil. Vänt konstrueeritakse tavaliselt

selliselt, et oleks võimalik muuta selle pikkust, järelikult ka liuguri käiku.

Meie poolt vaadeldud kulissmehhanismi skeemi kasutatakse näiteks risthöövelpinkides.

§ 189. Õõtsuva kulissiga mehhanismi kinemaatika

Niisiis muudab kulissmehhanism pöörleva liikumise kulgevaks edasi-tagasi liikumiseks. Selles suhtes on ta sarnane eespoolkäsitletud väntmehhanismiga. Kuid vaatamata öeldule erinevad need mehhanismid oluliselt teineteisest.

Eelkõige selgitame, kuidas määrata liuguri A käiku, olenevalt mehhanismi geomeetrilistest mõõdetest. Tähistame vända OA pikkuse tähega r, kulissi $O_1B = O_1K = O_1L$ pikkuse tähega l, vända pöörlemistelje ja kulissi õõtsumistelje vahelise kauguse OO_1 aga tähega a.

Täisnurksed kolmnurgad O_1CK ja O_1A_1O, milledel on ühine teravnurk, on sarnased. Sellest järgneb, et $\frac{O_1K}{O_1O} = \frac{KC}{OA_1}$ ehk $\frac{l}{a} = \frac{H}{2r}$, kus $\frac{H}{2} = KC$ kujutab liuguri poolt käiku.

Siit saame käigupikkuse, mis võrdub

$$H = \frac{2rl}{a}. \tag{165}$$

Nagu näeme, on liuguri käigupikkus võrdeline vända kulissi pikkustega ning pöördvõrdeline vända ja kulissi pöörlemistelgede vahega.

Risthöövelpinkides vända pikkust reguleeritakse[1]. Järelikult kauguse $r = OA$ määramiseks antud käigu järgi saame seose:

$$r = \frac{Ha}{2l}. \tag{166}$$

Seega käigu vasakult paremale teeb liugur aja jooksul, mille kestel vänt katab nurga α, vastupidise käigu aga aja jooksul, mil vänt pöördub nurga β võrra.

Tähistame aja, mis vändal kulub pöördumiseks nurga α võrra, tähega t_α, aja aga, mis kulub pöördumiseks nurga β võrra, tähega t_β. Sel juhul on liuguri keskmine kiirus liikumisel vasakult paremale $v'_k = \frac{H}{t_\alpha}$, liikumisel paremalt vasakule aga $v''_k = \frac{H}{t_\beta}$. Nende kiiruste suhe avaldub kujul:

$$\frac{v'_k}{v''_k} = \frac{H}{t_\alpha} : \frac{H}{t_\beta} = \frac{t_\beta}{t_\alpha}. \tag{167}$$

[1] See saavutatakse sõrme A ümberpaigutamisega hammasratta ketta radiaalses soones. Hammasratas asetseb võllil O ning kujutab endast vända õlga.

Kuna vänt pöörleb ühtlaselt, siis ajavahemikud, mis tal kulub nurkade α ja β võrra pöördumiseks, on võrdelised nurkadega, s. o.

$$\frac{t_\beta}{t_\alpha} = \frac{\beta}{\alpha},$$

mille asetamisel võrrandisse (167) saame:

$$\frac{v'_k}{v''_k} = \frac{\beta}{\alpha}. \qquad (168)$$

Nimetades liuguri käigu vasakult paremale, mis vastab vända pöördumisele nurga α võrra, p ä r i l i i k u m i s e k s, liuguri käiku paremalt vasakule (vända pöördumisel nurga β võrra) aga t a g a s i l i i k u m i s e k s, võime valemi (168) põhjal ütelda, et l i u g u r i p ä r i - j a t a g a s i k ä i g u k e s k m i s e d k i i r u s e d o n p ö ö r d v õ r d e l i s e d v ä n d a v a s t a v a t e p ö ö r d e n u r k a d e g a. Nagu näeme, on tagasikäigu kestus pärikäigu kestusest lühem nii mitu korda, kui mitu korda nurk α on suurem nurgast β.

Selles seisabki vaadeldava mehhanismi põhiline erinevus väntmehhanismist. Kulissmehhanismi see iseärasus tingibki tema kasutamist risthöövelpingis, milles pärikäigu (töökäigu) kiirust piirab lubatud lõikekiirus, tagasikäigu (tühikäigu) kiirus peab aga olema ajakadude vältimiseks võimalikult suur.

Seni oli meil juttu liuguri k e s k m i s t e s t kiirustest. Tõelised kiirused ei ole aga konstantsed. Liuguri äärmistes asendites on tema kiirus null. Liuguri üleminekul ühest äärmisest asendist teise kiirus kasvab kuni hetkeni, mil vänt jõuab keskasendisse, seejärel kiirus aga langeb ning teises äärmises asendis muutub uuesti nulliks. Seega k u l i s s m e h h a n i s m i s o n l i u g u r i l i i k u m i n e v ä n d a ü h t l a s e l p ö ö r l e m i s e l e b a ü h t l a n e n a g u v ä n t m e h h a n i s m i s k i.

On olemas kulissmehhanisme, milles kuliss ei õõtsu, vaid pöörleb (pöörleva kulissiga mehhanism).

Näide 99. Risthöövelpingi lõiketera vajalik käigupikkus $H = 400$ mm (joon. 270). Määrata: a) millisele kaugusele $OA = r$ vända pöörlemisteljest tuleb kinnitada kulissikivi tsenter 2; b) töökäigu ja tühikäigu keskmised kiirused $v_{töö}$ ja $v_{tühi}$, kui $l = 900$ mm, $a = 540$ mm ning vända pöörlemiskiirus $n = 40$ p/min.

Vända vajaliku pikkuse r määrame valemiga (166):

$$r = \frac{Ha}{2l} = \frac{400 \cdot 540}{2 \cdot 900} = 120 \text{ mm}.$$

Määrame nurgad α ja β.

Kolmnurgast A_1O_1O saame, $OA_1 = OO_1 \cos \frac{\beta}{2}$, millest

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{OA_1}{OO_1} = \frac{r}{a} = \frac{120}{540} = 0{,}222 \text{ ja } \frac{\beta}{2} = 77°10'.$$

$$\beta = 154°20' \text{ ja } \alpha = 360° - 154°20' = 205°40'.$$

Kui vänt teeb 40 pööret minutis, siis ühe täispöörde tegemiseks kulub aega $\frac{1}{40}$ min $= \frac{60}{40} = 1{,}5$ sek, nurga $\alpha = 205°40'$ võrra pöördumiseks aga

$$t_\alpha = \frac{1{,}5 \cdot 205°40'}{360°} = 0{,}857 \text{ sek;}$$

järelikult

$$t_\beta = 1{,}5 - 0{,}857 = 0{,}643 \text{ sek.}$$

Töökäigu keskmine kiirus

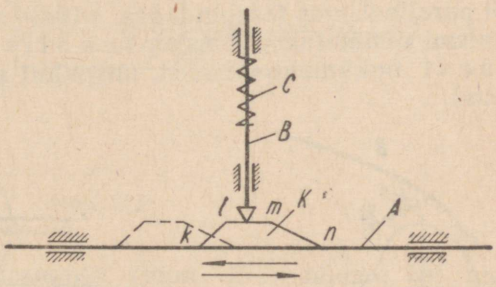
$$v_{\text{k töö}} = \frac{400}{0{,}857} = 467 \text{ mm/sek} = \frac{467 \cdot 60}{1000} \text{ m/min} = 28{,}0 \text{ m/min.}$$

Tühikäigu keskmine kiirus

$$v_{\text{k tühi}} = \frac{400}{0{,}643} = 622 \text{ mm/sek} = \frac{622 \cdot 60}{1000} \text{ m/min} = 37{,}3 \text{ m/min.}$$

§ 190. Nukkmehhanismid

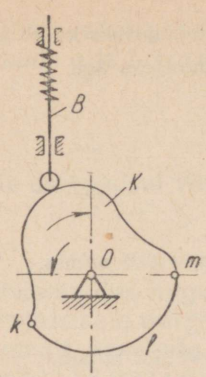
Olgu liuguril *A* (joon. 271) kulgev edasi-tagasi liikumine liikumatutel juhtpindadel. Liugurile on kinnitatud klots *K*, mida nimetatakse n u k i k s. Sellele nukile toetub oma otsaga vedru *C* mõjul varras *B*, mis võib libiseda liikumatutel juhtpindadel. Seda varrast nimetatakse t õ u k u r i k s. Olgu nukk punktiiriga näidatud asendis, tõukur aga asetsegu oma otsaga liuguril *A*. Viimase liikumisel vasakult paremale saabub hetk, mil tõukuri ots satub nuki profiili osale *nm*. Sellest hetkest alates tõstetakse tõukurit seni, kuni viimase otsa alla jõuab punkt *m*. Pärast seda jääb tõukur nuki edasisel ümberpaiknemisel liikumatuks (kui profiili osa *ml* on paralleelne liuguri teljega) osa *ml* kogu läbimisaja kesteks. Üleminekul osale *lk* hakkab tõukur laskuma alla ning see liikumine kestab seni, kuni kogu nukk on jõudnud tõukuri alt lahkuda. Kui nuki profiilil puuduks horisontaalne osa *lm*, siis tõukuri ülemises asendis paigalseisu periood puuduks: pärast tõusmist hakkab ta kohe laskuma.



Joon. 271

Nuki vastupidises suunas liikumisel toimub ka tõukuri liikumine vastupidises järjekorras. Tõukuri liikumise laad (kiirus ja kiirendus) liuguri ühtlasel liikumisel oleneb ilmselt nuki profiilist ja liuguri kiirusest.

Kui kujundada tõukur kangina, mille üks ots on vedru mõjul surutud vastu nukki, siis saab tõukur õõtsuva liikumise ümber oma pöörlemistelje.



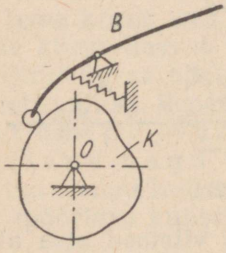
Joon. 272

Tõukuri libisemisel vahetult mööda nuki pinda tekiks teatud hõõrdejõud ning mõlemad hõõrdepinnad kuluksid tugevasti. Selle vältimiseks asetatakse tõukuri otsa rull, mis veereb mööda nuki pinda.

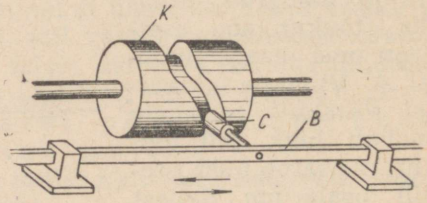
Mõlemal äsjakäsitletud juhul muudeti ühesuunaline kulgev liikumine teisesuunaliseks kulgevaks liikumiseks või siis õõtsumiseks.

Joonisel 272 on näidatud skeem p ö ö r l e v a liikumise muutmiseks kulgevaks. Ümber telje *O* pöörlev nukk-ketas annab tõukurile *B* kulgeva edasi-tagasi liikumise, mille iseloomu määrab nukk-ketta kuju. Kui nukk-ketta profiil on osas *klm* kujundatud tsentrist *O* tõmmatud ringjoone kaarena, siis rulli liikumisel sellel osal jääb tõukur liikumatuks. Joonisel 273 on skemaatiliselt näidatud nukk-ketta *K* pöörleva liikumise muutmine tõukuri *B* õõtsuvaks liikumiseks.

Toodud näidetes asetsevad nuki profiili moodustavad kõverad ja tõukuri mitmesuguste punktide trajektoorid ühes tasapinnas või paralleelsetes tasapindades, millele vastavalt sellist nukkmehhanismi nimetatakse t a s a p i n n a l i s e k s, erinevalt r u u m i l i s e s t nukkmehhanismist, mispuhul see tingimus ei ole rahuldatud.



Joon. 273



Joon. 274

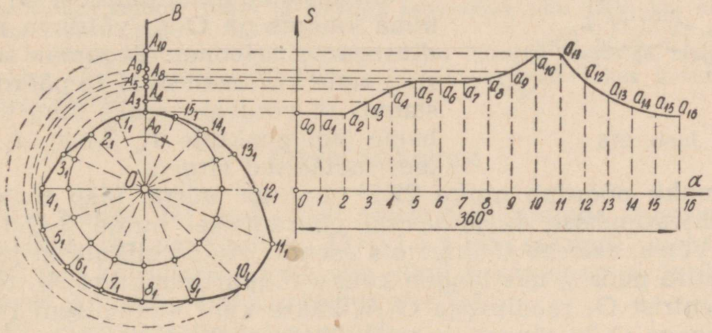
Näitena on selline mehhanism skemaatiliselt toodud joonisel 274. Nukk-ketta osa etendavasse silindrisse *K* on lõigatud silindri ristlõikega mitteparalleelne kinnine soon, mida nimetatakse nuudiks. Viimases veereb rull, mis asetseb liuguri *B* külge kinnitatud teljel *C*. Liugur *B* võib ise liikumatutel juhtpindadel libiseda paralleelselt nukk-ketta pöörlemisteljega. Nukk-ketta pöörlemisel saab tõukur kulgeva edasi-tagasi liikumise.

Nagu ülalöeldust järgneb, määrab nukkmehhanismi veetava lüli liikumise nuki profiil. Järelikult võimaldavad nukkmehhanismid tõukuri liikuma panna väga erinevate seaduste järgi. Sellega seletubki nende laialdane kasutamine, eriti mitmesugust tüüpi automaatides, näiteks automaatsetes metallilõikepinkides.

§ 191. Tasapinnalise nuki profiili konstrueerimine

Nuki profiili leidmiseks peab olema teada tõukuri liikumise laad või, nagu öeldakse, tõukuri liikumisseadus. Tutvume näite varal, kuidas seda tehakse.

Olgu tõukuri liikumisseadus antud joonisel 275 toodud ümberpaigutuste kõveraga, kus abstsissteljele $O\alpha$ on kantud nuki pöördenurgad α, ordinaatteljele OS aga tõukuri B otsa A vastavad kaugused nuki pöörlemisteljest O_1. Samuti on antud, et nukk pöörleb ühtlaselt ning et tõukuri telg ristub nuki pöörlemisteljega. Lõik, mis vastab nuki ühele pöördele, on jagatud 16 võrdseks osaks.



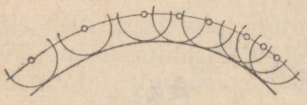
Joon. 275

Ümberpaigutuste diagrammilt (joon. 275) näeme, et nuki pöördumisel $\frac{2}{16}$ täispöörde võrra jääb tõukuri otsa kaugus pöörlemisteljest konstantseks ning seda väljendavad võrdsed lõigud $O - a_0 = 1 - a_1 = 2 - a_2$*, edasi see kaugus aga suureneb: $\frac{3}{16}$ täispöörde pärast võrdub see lõiguga $3 - a_3$, $\frac{4}{16}$ ja $\frac{5}{16}$ täispöörde pärast aga vastavalt lõikudega $4 - a_4$ *ja* $5 - a_5$. Järgnevalt jääb tõukur täispöörde kahe sellise osa võrra pöördumisel jälle liikumatuks, misjärel kaugus uuesti suureneb kuni jaotusele *10* vastava hetkeni. Pöörde *10* — *11* kestel jääb tõukur veelkord paigale, kuid alates hetkest *11* hakkab kaugus vähenema, s. o. tõukur hakkab liikuma vastupidises suunas. Nuki täispöördele vastaval hetkel väljendab tõukuri otsa kaugust pöörlemisteljest lõik *16*—*a*, mis võrdub algkaugusega *O*—*a*. See tähendab, et tõukur jõudis algasendisse; nuki edasisel pöördumisel kordub tõukuri liikumine

* Tavaliselt joonestatakse nuki profiil välja loomulikus suuruses.

samas järjekorras ehk, nagu sel puhul öeldakse, kordub sama tsükkel.

Nüüd asume konstrueerima nuki profiili (joon. 275). Pikendanud telge $O\alpha$ vasakule, märgime sellele horisontaalsele sirgele punkti O_1, mille loeme nuki pöörlemisteljeks. Liikugu tõukur B vertikaalsihis. Kuna ülesande kohaselt tõukuri telg ristub nuki pöörlemisteljega, siis tõmbame läbi punkti O_1 vertikaalse sirge. Kandes sellele sirgele lõigu $O_1A_0 = O\alpha_0$, mis võrdub tõukuri otsa algkaugusega pöörlemisteljest O_1, saame selle otsa algasendi A_0. Hetkel 3 on tõukuri A ots eemaldatud pöörlemisteljest kaugusele $3—a_3$, mis vastab otsa asendile A_3. Kandes näidatud viisil tõukuri teljele ka ümberpaigutuste kõvera ülejäänud punktid a_4, a_5, a_6 jne., saame tõukuri otsa rea asendid A_4, A_5 (milledega ühtivad asendid A_6 ja A_7), A_8, A_9, A_{10} (millega ühtib asend A_{11}) jne.[1]



Joon. 276

Joonestame nüüd punktist O_1 vähima kaugusega O_1A_0 võrduva raadiusega ringjoone. Jagame selle ringjoone vastavalt nuki 16 pöördele samuti 16 võrdseks osaks ning tõmbame läbi punktide 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1 jne. radiaalsed sirged.

Kui nukk pöördub nurga $22{,}5° \cdot 2 = 45°$ võrra, jääb tõukuri ots A lähteasendisse A_0, järgneval pöördumisel nurga $2_1O_13_1 = 22{,}5°$ võrra, asetseb tõukuri ots asendis A_3. Järelikult, et leida nuki profiili punkti, mis langeb kokku tõukuri punktiga A_3, tõmbame tsentrist O_1 raadiusega O_1A_3 kaare kuni lõikumiseni radiaalse sirgega O_13_1; täpselt samuti ühtib tõukuri otsa asend A_4 profiili punktiga 4_1 jne. Toimides taoliselt tõukuri kõigi ülejäänud asenditega, saame profiili ülejäänud punktid, ning ühendades need kõverjoonega, saame nuki otsitava profiili. Punktide 5_1 ja 7_1, 10_1 ja 11_1 vahel (nagu A_0 ja 2_1 vahelgi) on selleks ringjoone kaared.

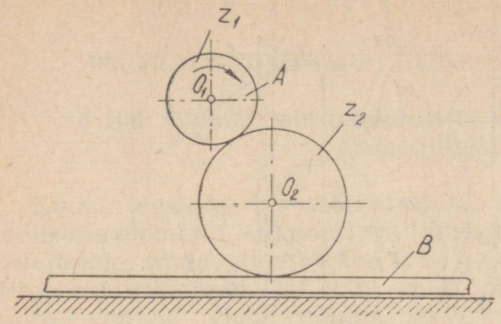
Kui tõukuril oleks otsas rull, siis leiaksime algul rulli telje liikumiskõvera, seejärel aga tõmbaksime selle kõvera mitmesugustes punktides ringjooned, millede raadius võrdub rulli raadiusega. Tõmmates nüüd kõiki ringjooni (või kaari) puutuva kõverjoone, saamegi nuki profiili (joon. 276).

§ 192. Kordamisküsimusi

1. Joonisel 277 on antud hammaslatt-ülekande skeem: hammasrattalt A antakse liikumine hammasratta z_2 kaudu hammaslatile B. Kuidas muutuks hammaslati liikumine (kiiruse ja suuna mõttes), kui hammasratas A viia vahetult hambumisse hammaslatiga?

2. Kahel erineva läbimõõduga kruvil on ühesuguse sammuga keere. Mida võib öelda nende keermete tõusunurkade kohta?

[1] Joonise lihtsustamiseks pole asendid A_{12}, A_{13}, A_{14} ja A_{15} sellel näidatud.



Joon. 277

3. Kahel ühesuguse läbimõõduga kruvil on naaberkeermeniitide vaheline kaugus üks ja sama, kuid üks keermetest on ühekäiguline, teine aga mitmekäiguline. Mida võib öelda keermete tõusunurkade kohta?

4. Mehhanismil, mille skeem on antud joonisel 258, on osadel *a* ja *b* ühesuunaline ja ühesuguse sammuga keere. Millega võrdub mutri *3* absoluutne edasinihkumine kruvi *1* pööramisel?

5. Vastata eelmisele küsimusele, kui keere osadel *a* ja *b* on erineva suunaga.

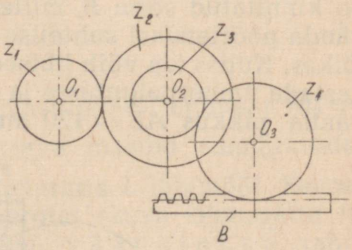
6. Kuidas muutub kruvi ja mutriga saavutatav võit jõus, kui vähendada keerme tõusunurka?

7. Millised kinemaatilised erinevused on õõtsuva kulissiga mehhanismil, võrreldes väntmehhanismiga? Miks pole viimast otstarbekas kasutada risthöövelpinkides?

§ 193. Harjutusi

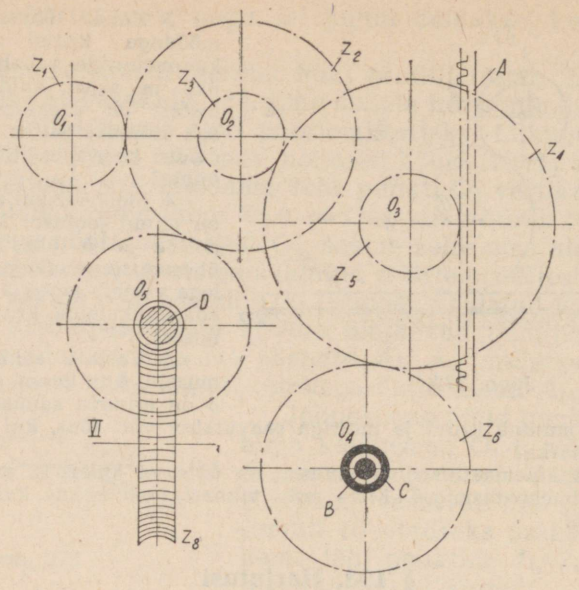
101. Näites 97 (joon. 263) toodud andmetega tungraua abil tõstetakse raskus kaaluga $Q = 1{,}5$ t 25 sekundi jooksul $h = 180$ mm kõrgusele. Arvutada jõud P käepidemel ja tarbitav võimsus, kui tungraua kasutegur $\eta = 0{,}4$.

102. Hammasratas z_1 paneb hammasrataste z_2, z_3 ja z_4 kaudu liikuma hammaslati B (joon. 278). Võimsus võllil O_1 on $N = 12$ HJ. Määrata hammaslatile mõjuv jõud ja hammaslati liikumiskiirus, kui vedava võlli pöörete arv $n_1 = 900$ p/min, $z_1 = 24$, $z_2 = 60$, $z_3 = 25$, $z_4 = 75$, viimase hammasratta moodul $m = 5$ mm, ülekande kasutegur $\eta = 0{,}85$.



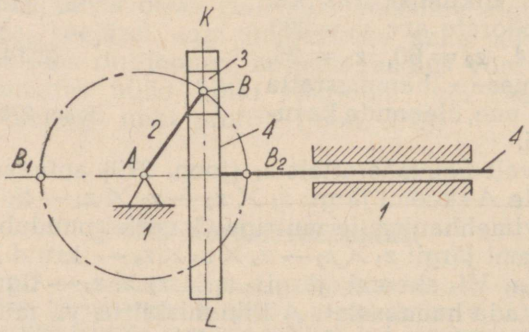
Joon. 278

103. Vedavalt hammasrattalt z_1 (joon. 279) antakse liikumine 1) hammaslatile A skeemi järgi: $z_1 \times z_2 - z_3 \times z_4 - z_5 \times$ hammaslatt A, 2) kruvimehhanismile mutriga C, millel puudub pöörlemisvõimalus, skeemi järgi: $z_1 \times z_2 - z_3 \times z_4 \times z_6 -$ kruvi $B \times$ mutter C ja 3) võllile VI skeemi järgi: $z_1 \times z_2 \times z_7 -$ tigu $D \times$ tiguratas z_8. Arvutada hammaslati A liikumiskiirus v_a, mutri C kiirus v_c ja võlli VI pöörete arv minutis järgmiste andmete korral: $z_1 = 30$, $z_2 = 60$, $z_3 = 25$, $z_4 = 80$, $z_5 = 40$, $z_6 = 50$, $z_7 = 40$; hammaslati moodul $m_5 = 4$ mm, kruvi B samm on 5 mm, tigu D on kolmekäiguline, tiguratta hammaste arv $z_8 = 60$, vedava võlli pöörete arv $n = 400$ p/min.



Joon. 279

104. Joonisel 280 on antud vänt-kulissmehhanismi skeem, mis töötab järgmiselt. Ümber liikumatu telje *A* pöörleva vända *2* otsa on kinnitatud sõrm *B*, millel vabalt istub liugur *3*. Viimane saab vända pöörlemisel suhtelise edasi-tagasi liikumise kulissi *4* väljalõikes. Kuliss ise võib libiseda mööda liikumatut juhtpinda *1*. Joonestada ümberpaigutuste ja kiiruste kõverad mehhanismile, millel vända pikkus $AB = 120$ mm ja pöörlemiskiirus $n = 180$ p/min.

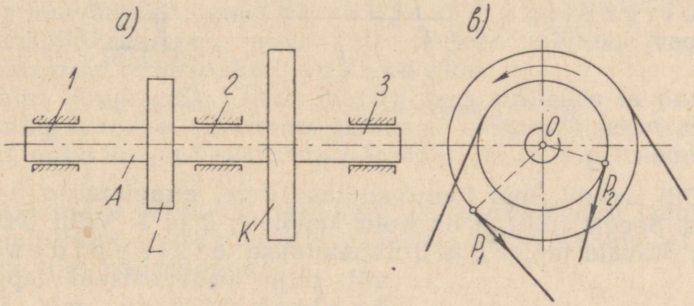


Joon. 280

PÖÖRDLIIKUMISEGA ÜLEKANDE ABIDETAILID

§ 194. Üldmõisteid telgedest ja võllidest ning nende elementidest

Rihmaratastele, hammasratastele, nukk-ketastele ja teistele taolistele elementidele pöörleva liikumise andmiseks istatakse nad detailidele, mida nimetatakse telgedeks ja võllideks. Rihmaratas K (joon. 281, *a*, *b*) saab rihmalt pöörleva liikumise, mille ta annab edasi rihmarattale L. Pöörlemine antakse edasi ringjõuga P_1, mis tekitab väändemomendi $M_1 = P_1 \cdot \frac{D_1}{2}$, kus D_1 on rihmaratta K (joon. 281, *b*) läbimõõt. Sellele momendile mõjub



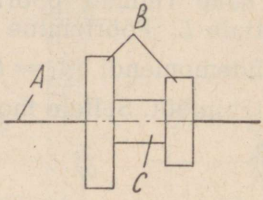
Joon. 281

vastu suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine moment $M_2 = P_2 \frac{D_2}{2}$, kus P_2 on rihmarattalt L veetava masina rihmarattale rihma abil edasiantav jõud, D_2 aga rihmaratta L läbimõõt. Seega võlli osa, mis asetseb mehaanilist energiat saava rihmaratta K ja seda edasiandva rihmaratta L vahel, väänatakse kahe suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise momendi poolt. Peale selle võlli painutatakse, sest see asetseb omakaalu, rihmarataste kaalu ja rihma tõmbejõu mõju all. Seepärast võib öelda, et võll töötab nii väändele kui ka paindele.

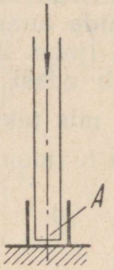
Kujutleme endale nüüd plokki B, mis koosneb kahest, vabalt silindrilisel vardal A pöörlevast hammasrattast (joon. 282). Nagu näeme, sel juhul varrast A ainult painutatakse, sest väändemoment antakse ühelt hammasrattalt teisele neid ühendava puksi C kaudu. Seda tüüpi detaile, milledel geomeetriline telg ühtib temal pöörlevate detailide teljega, nimetatakse telgedeks. Seega võlli ja telje põhiline erinevus seisab selles, et teljele mõjub ainult paine, kuna võllile mõjub peale painde veel vääne. Äsjatoodud näites pole telje pöörlemine nõu-

tud liikumise saamiseks vajalik. Teistel juhtudel peab aga telg kindlasti pöörlema. Taolise juhu näiteks võib olla vagunitelg, mis temale kinnitatud ratta veeremisel samuti pöörleb, kuid väändemomente talle ei mõju.

Igasugune võll (või telg) toetatakse vastavalt kujundatud tugedele. Nii näiteks joonisel 281, *a* skemaatiliselt kujutatud ülekandevõll *A* on asetatud kolmele toele, kolmele liugelaagrile.

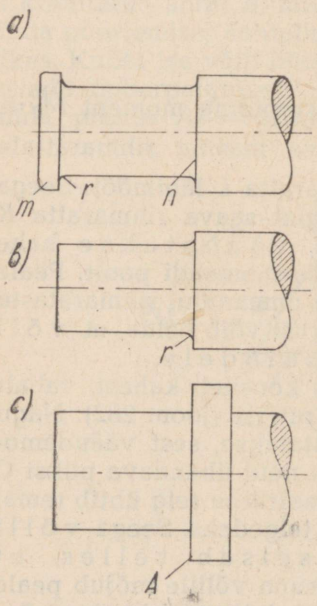


Joon. 282



Joon. 283

Võlli osasid, mis toetuvad laagritele, nimetatakse tappideks. Seega võllil *A* on kolm tappi: *1*, *2* ja *3*. Võlli (või telje) otstes olevaid tappe *1* ja *3* nimetatakse otstappideks, võlli või telje vahepealseid tappe aga kaelteks (tapp, mis joonisel 281, *a* on tähistatud numbriga 2). Piki võlli või telge mõjuvate suurte jõudude korral (joon. 283) nimetatakse otstappi *A* tugitapiks, ja sellele vastavalt ka laagrit tugilaagriks.



Joon. 284

Võll ja laagrid peavad kokku puutuma nii, et oleks välditud võlli nihkumine telgsihis. See saavutatakse mitmel viisil. Treides näiteks võlli või telje otsa silindrilise pinna, mille läbimõõt on väiksem võlli või telje enda läbimõõdust, saame kahe randiga otstapi (*m* ja *n* joonisel 284, *a*). Randid ongi, mis takistavad võlli või telje telgnihkumist.

Lihtsama konstruktsiooniga on ühe randiga otstapp (joon. 284, *b*). Üleminekut suurema läbimõõduga pinnalt väiksema läbimõõduga pinnale (*r* joonisel 284, *a* ja *b*) nimeta-

takse õndlaks ning see kujundatakse iga läbimõõdu jaoks mingi kindla raadiusega. Õnnal on võlli või telje pikaajalise töötamise tagamiseks hädavajalik.

Sageli kasutatakse võlli telgnihkumise vältimiseks seaderõngaid (*A* joonisel 284, *c*), mis kinnitatakse võllile kruvide abil. Vajaduse korral asetatakse need rõngad ka kaela juurde võllil või teljel.

§ 195. Liugelaagrite põhitüübid

Tuge, millel võll või telg pöörleb, nimetatakse laagriks. Ühtedes laagrites on võlli poolt mõjuvad jõud suunatud risti laagri teljega (joon. 281), millele vastavalt neid nimetatakse radiaallaagriteks; teistel juhtudel on jõud suunatud piki võlli või telge ning sel juhul nimetatakse laagreid tugilaagriteks. Lõpuks leiavad kasutamist ka radiaal-tugilaagrid.

Transpordiseadmete pöörlevate telgede (näiteks vagunitelgede) laagreid nimetatakse puksideks.

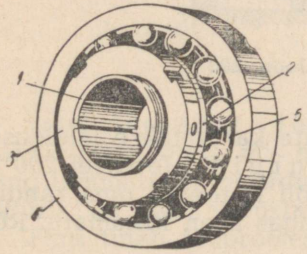
Laagri tüübi valik sõltub tingimustest, milledes ta peab töötama, ning laagrile esitatavaist nõudeist — esmajärjekorras koormusest, mille laager vastu võtab, ja võlli või telje pöörlemiskiirusest.

Liugelaagris võlli või telje tapp, puutudes kokku laagri sisepinnaga, libiseb mööda seda, s. o. sellise laagri töötamisel esineb esimese liigi hõõrdumine.

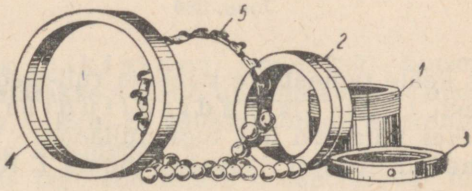
§ 196. Veerelaagrid

Nagu eespool selgus (§ 50), on kaod veerehõõrdumisel tunduvalt väiksemad kadudest liugehõõrdumisel, millest ongi tingitud veerelaagrite laialdane kasutamine.

Veerelaagreid on mitut tüüpi, olenevalt nendele mõjuvate jõudude suunast. Joonistel 285 ja 286 on näidatud kuullaager ja selle detailid (mõlemal joonisel on iga detail tähistatud ühe ja sama numbriga).

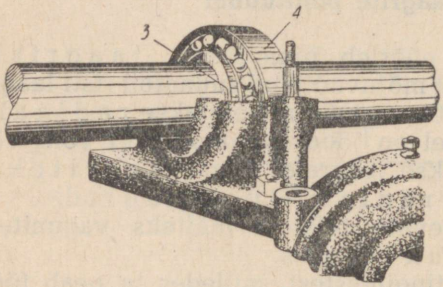


Joon. 285

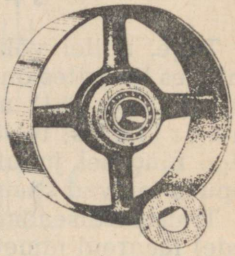


Joon. 286

Telje või võlli tapile asetatakse lõikega puks *1*, mille välispind moodustab väikese nurgaga koonuse. Puksile pressitakse sisemine rõngas *2* koos selles asetseva kontsentrilise välisrõngaga *4* ning rõngaste vahel paiknevate teraskuulidega. Keerates puksile *1* ümmarguse mutri *3*, tõmmatakse puks rõngasse *2*, mille tulemusena see kinnitubki tapile. Pöörates üht rõngast teise suhtes, veerevad kuulid sisemise rõnga välispinnale ja välise rõnga sisepinnale tehtud soontes. Et kuulide vahekaugus püsiks konstantne, paigutatakse nad nn. s e p a r a a t o r i *5* pesadesse.



Joon. 287

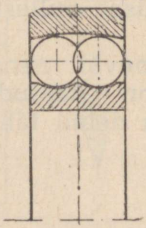


Joon. 288

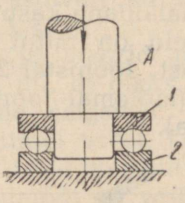
Kinnitades välisrõnga *4* keresse (joon. 287)[1], saame laagri, mis võib olla toeks pöörlevale võllile või teljele. Joonisel 288 on näidatud rihmaratas, mille rummu on asetatud kuullaager.

Vaadeldavas laagris asetsevad kuulid ühes reas; seetõttu seda nimetatakse ü h e r e a l i s e k s kuullaagriks. Joonisel 289 on näidatud lõikes k a h e r e a l i n e kuullaager.

Veerelaagrites kasutatakse peale kuulide ka rulle. Sel juhul nimetatakse laagreid rull-laagriteks.



Joon. 289



Joon. 290

Peale radiaalsete kuul- ja rull-laagrite kasutatakse laialdaselt veel t u g i- ja r a d i a a l t u g i l a a g r e i d. Joonisel 290 on lõikes näidatud üks tugikuullaager. Võll *A* toetub oma randiga tihedalt otstapil istuvale rõngale *1*. Rõngas *2* on liikumatu. Rõn-

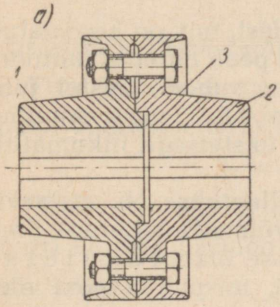
[1] Kere on näidatud mahavõetud kaanega, mis asetseb kõrval.

gaste ringikujulistes soontes veerevad kuulid, mis võtavad vastu võllile mõjuva telgkoormuse.

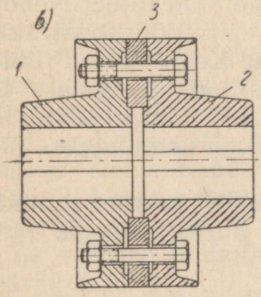
Veerelaagritel on rida eeliseid, võrreldes liugelaagritega, ja nimelt: väiksemad hõõrdekaod, väiksem määrdeainekulu, väiksemad mõõted telgsihis jt. Seejuures pole nad vabad ka mõnedest puudustest, nagu näiteks suur läbimõõt, montaaži raskus mõningatel juhtudel jt.

§ 197. Üldmõisteid siduritest

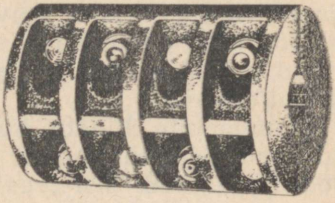
Ühistelgsete võllide sidestamiseks kasutatakse seadmeid, mida nimetatakse siduriteks.



Lihtsaim on sidur, millega ühendatakse jäigalt kaks võlli üheks tervikuks. Seda tüüpi sidureid nimetatakse jäikadeks. Joonisel 291 on näidatud j ä i k k e t a s s i d u r. Kummagi ühendatava võlli otsa surutakse pinguga siduri pooled *1* ja *2*, mis seejärel poltidega kokku tõmmatakse. Et mõlema võlli teljed pärast koostamist kokku langeksid, tehakse ühele kettale tsentreeriv väljaaste *3*, mis satub teise ketta vastavasse väljalõikesse.



Joon. 291



Joon. 292

Teist tüüpi sidur, j ä i k p i k i s i d u r (joon. 292) koosneb kahest pikipoolest, mis asetatakse võllide ühendatavatele otstele ning tõmmatakse poltidega kokku. Et vältida võllide pöördumist siduris, on need varustatud kiiludega.

Tihti tuleb tööprotsessis lahutada kahte koospöörlevat ühistelgset võlli või, ümberpöördult, ühendada neid. Selleks kasutatakse l a h u t a t a v a i d s i d u r e i d.

§ 198. Kordamisküsimusi

1. Milline on võllide ja telgede põhiline erinevus?
2. Mille poolest erineb võlli või telje kael otstapist?
3. Millisel juhul nimetatakse tuge tugilaagriks?
4. Milleks kasutatakse seaderõngaid?
5. Kuidas klassifitseeritakse laagreid neile mõjuvate koormuste ning pöörlemisele kaasneva hõõrdumise järgi?

Kahekümnes peatükk

LAHUTATAVAD LIITED

§ 199. Keermega liited

Iga masin või seadeldis koosneb detailidest, mis on koondatud sõlmedesse. Sõlme moodustavatel detailidel peab ühtedel juhtudel olema võimalus suhteliselt liikuda üksteise suhtes, teistel juhtudel peavad nad aga moodustama ühe terviku (mitte muutma oma suhtelist asendit), s. o. peavad olema üksteisega liikumatult ühendatud.

Seejuures ühendatavad detailid sageli liidetakse nii, et tarviduse korral (näiteks remondil) neid oleks võimalik lahutada ilma ühendust kahjustamata. Sel juhul nimetatakse liidet l a h u t a t a v a k s, erinevalt l a h u t a m a t u s t liitest, mispuhul mõni element tuleb purustada.

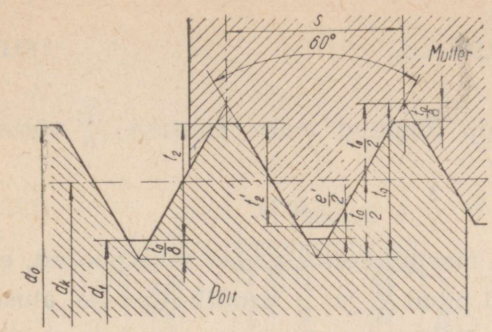
Lahutatavate liidete põhitüübiks on keermetatud liited. Nende konstruktsiooni määrab eelkõige liidetavate detailide konstruktsioon ja liitele mõjuvate koormuste iseloom. Keermetatud liide kujundatakse tavaliselt kruvikeerme abil, millega varustatakse kas liidetavad detailid ise või siis spetsiaalsed kinnitusdetailid (kruvid, poldid, mutrid, tikkpoldid jm.), milledega ühendatakse liidetavad detailid.

Lahutamatute liidete hulka kuuluvad neet- ja keevisliited; neid saab lahutada ainult põhielementide purustamisega, mis moodustavad neet- või keevisõmbluse.

§ 200. Kinnituskeermed

Keermetatud liidete põhiliseks elemendiks on kruvikeere, mille määravad selle läbimõõt, samm ja profiil. Kõik need elemendid on NSV Liidus standardiseeritud, kusjuures nendest standarditest (nagu teistestki OCT-idest ja ГОСТ-idest) kinnipidamine on rangelt kohustuslik.

Keermetatud liite kindlus sõltub liite elementidel mõjuvast hõõrdejõust: mida suurem on see jõud, seda kindlam on liide. Kuna suurim hõõrdejõud saadakse kolmnurkkeerme korral, siis



Joon. 293

kinnituskeermetele antaksegi kolmnurgakujuline profiil. Joonisel 293 on näidatud põhimeeterkeere, mida kasutatakse läbimõõtudel 1 kuni 600 mm. Nagu jooniselt näeme, on selle keerme tipunurk 60°; kuna profiili küljed moodustavad poldi teljega ühesugused nurgad, siis saadud kujund on võrdkülgne kolmnurk, mille kõrgus

$$t_o = 0{,}866s, \tag{168}$$

kus s on keerme samm.

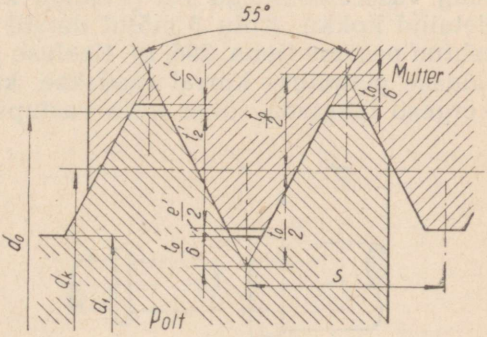
Tipu ja kolmnurga aluse juures on keere suuruse $\frac{t_o}{8}$ võrra maha võetud, millele vastavalt profiili tegelik kõrgus

$$t_2 = t_o - 2 \cdot \frac{t_o}{8} = 0{,}75t_o = 0{,}6495s. \tag{169}$$

Edasi me näeme, et poldi keerme põhjade (läbimõõt d_1) ja mutri keerme harjade vahele jääb pilu, mille suurus on $\frac{e'}{2}$. Selle pilu suurus

$$\frac{e'}{2} = t_2 - t'_2, \tag{170}$$

kus t'_2 on profiili töötavosa sügavus. OCT-i tabelites on iga välisläbimõõdu d_o jaoks antud keskmine läbimõõt d_k ja siseläbimõõt d_1, samuti keerme samm s, profiili kõrgus t_2 ja pilu suurus läbimõõdu järgi, s. o. e'.



Joon. 294

Seda tüüpi meeterkeeret märgitakse tähega M, kusjuures antakse ka välisläbimõõt ja samm; nii näiteks tähistus M 30 × 3,5 näitab, et on tegemist meeterkeermega, mille välisläbimõõt on 30 mm ja samm 3,5 mm. Peale meeterkeerme kasutatakse NSV Liidus veel tollkeeret, mille välisläbimõõt antakse tollides. Joonisel 294 on näidatud tollkeere profiilinurgaga 55° läbimõõtudele $^3/_{16}$″ kuni 4″ (OCT 1260). Nagu näeme, on profiili lähtekujuks võrdhaarne kolmnurk tipunurgaga 55°.

Selle kolmnurga kõrgus

$$t_0 = 0{,}96049s, \qquad (171)$$

kus s on keerme samm.

Sellel kolmnurgal on tipp lõigatud maha suuruse $\frac{t_0}{6}$ võrra, mistõttu

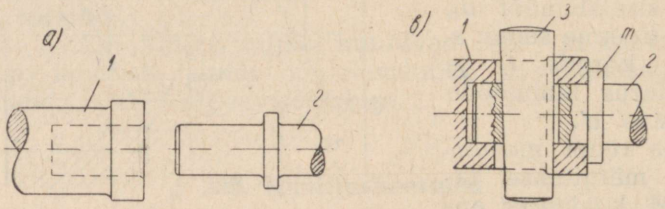
$$t_2 = t_0 - 2\frac{t_0}{6} = \frac{2}{3}t_0 = 0{,}6403s. \qquad (172)$$

Nimetatud keere erineb meeterkeermest veel selle poolest, et tal on ette nähtud erinevad pilud $\frac{e'}{2}$ ja $\frac{c'}{2}$ profiili tipu ja aluse juures mutri ja poldi vahel. Ülejäänud tähistused on joonisel 294 samad mis meeterkeermelgi.

Keermeniitide arv ühes tollis on olenevalt keerme läbimõõdust 24 (läbimõõdul $^3/_{16}''$) kuni 3 (läbimõõdul 4″). Tollkeeret on keelatud kasutada uute toodete valmistamisel. Teistest kinnituskeermetest näeb ГОСТ 6357-52 (ОСТ 266 asemel) veel ette torukeeret läbimõõtudele $^1/_8'' - 18''$.

§ 201. Mõisteid kiilliidetest

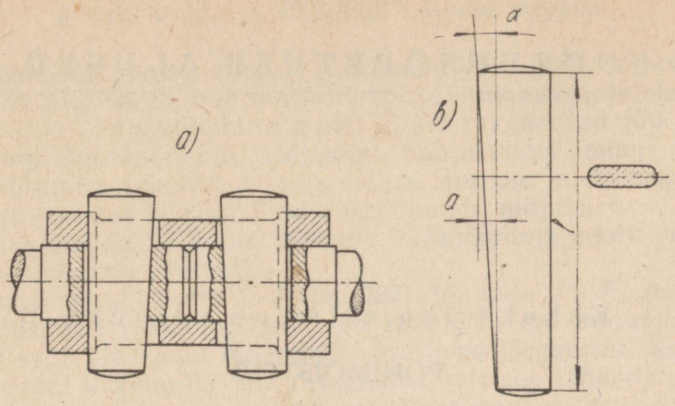
Lahutatavates liidetes kasutatakse ühendava elemendina mõnikord kiilu, millele vastavalt selliseid ühendusi nimetatakse kiilliideteks. Olgu tarvis ühendada kaks detaili *1* ja *2* (joon. 295, *a*). Teinud mõlemasse detaili kiilu ristlõikele vastava kujuga pikergused avad (joon. 295, *b*), asetame kiilu viimastesse ning vasaralöökidega või pressiga kiilu sisse surudes tõmbame detailid kokku. Kiilu *3* mõjul detaili *2* ots tõmmatakse detaili *1* tehtud pesasse (joon. 295, *b*). Kaeluse *m* olemasolul ning kiilu küllaldase pingutuse korral saadakse kindel liide, mille võib aga kergesti lahutada, lüües kiilu vastupidises suunas välja.



Joon. 295

Kiilliite võib kujundada ka joonisel 296, *a* näidatud viisil: ühendatavate detailide otsad asetatakse ühisesse puksi ning kinnitatakse kahe kiiluga.

Kiil püsib ühendatud detailides hõõrdejõu mõjul, mis on seda suurem, mida suuremad on jõud N_1 ja N_2 (joon. 162). Nagu juba



Joon. 296

selgitati (§ 140), suurenevad need jõud kiilu kaldenurga α vähenemisega. Seepärast tehakse nurk α väike, suhteks $\frac{a}{l}$ (joon. 296, *b*), mida nimetatakse kiilu kaldeks, võetakse aga $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{40}$ või $\frac{1}{30}$. Suuremaid kaldeid kasutatakse harva.

TUGEVUSÕPETUSE ALUSED

Kahekümne esimene peatükk

PÕHIMÕISTEID

§ 202. Kehade deformeerumine välisjõudude toimel

Kujutame endale ette sirgjoonelist varrast, mis oma otstega asetseb kahel toel. Koormame seda mingis tugedevahelises punktis jõuga (näiteks riputame sellele kindla kaaluga raskuse). Selle koormuse mõjul varras paindub, s. o. võtab kõverjoonelise kuju. Korrates seda katset mitmesuguses suuruses jõududega, mis kõik rakendatakse samal ristlõikel, näeme, et koormuse suurenemisega suureneb ka varda läbipaindumine. Keha kuju kui ka mõõdete muutumist temale rakendatud jõudude (või, nagu teisiti öeldakse — koormuste) mõjul nimetatakse keha *deformeerumiseks*.

Jälgides varda kuju pärast koormamist, s. o. pärast deformatsiooni esilekutsuva jõu mõjumise lakkamist, võime tähele panna kahte juhtu: varras kas sirgub täiesti, omandades uuesti esialgse kuju, või taastab ta oma esialgse kuju ainult osaliselt. Esimesel juhul allub varras elastsele deformatsioonile, teisel juhul jääb aga varras osaliselt deformeerituks ning seda deformatsiooni nimetatakse *jäävaks* (plastiliseks). Keha koormamisel, nagu näeme, võivad elastsed deformatsioonid kindlatel tingimustel esineda koos jäävate deformatsioonidega. Koormuse edasisel suurendamisel deformatsioonid kasvavad niivõrd, et keha puruneb.

Deformeerumist põhjustab mitte üksnes ühe keha vahetu mõjumine temaga kokkupuutuvale teisele kehale, vaid ka keha omakaal. Kui näiteks asetada pikk metallvarras, mille ristlõige on pikkusega võrreldes väike, kahele toele, näeme, et varras võtab omakaalu ja toereaktsioonide mõjul kõverjoonelise kuju.

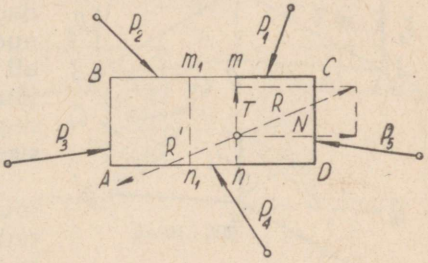
Vaadeldud näidetes on deformatsioonid niivõrd suured, et võime neid jälgida vahetult. Masinates ja seadmetes pole aga sellised deformatsioonid lubatud, välja arvatud need juhud, mil spetsiaalselt kasutatakse märkimisväärsete elastsete deformatsioonide saamiseks ettenähtud detaile (näiteks mitut tüüpi vedrud). Kuid ka masina või ehitise mistahes detail deformeerub temale rakendatud jõudude mõjul, kusjuures deformatsiooni võib mõõta täpsete riistadega.

§ 203. Välis- ja sisejõud. Lõigete meetod

Kogemustest teame, et mida suurem on kõva keha deformeeriv jõud, seda suurem on deformatsioon. Nii sõltub eespoolkirjeldatud näites varda läbipaindumine antud lõikel rakendatud jõu suurusest. Kõigil juhtudel, kui välisjõud põhjustavad mingi detaili deformeerumist, tekivad detailis sellise suuruse ja suunaga sisejõud, mis takistavad nimetatud välisjõudude mõjumist.

Kuidas siis on võimalik määrata välisjõudude poolt esilekutsutud sisejõudude suurust?

Mõjugu prussile *ABCD* (joon. 297) jõudude P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 tasakaalustatud süsteem. Määrame ristlõikes *mn* mõjuvad sisejõud. Et seda ülesannet lahendada, arutleme järgmiselt. Kui vaadeldav pruss kui tervik on tasakaalus, siis see tähendab, et ka prussi iga üksik osa on tasakaalus. Vaatleme, milliste jõudude mõju all asetseb näiteks prussi osa *mCDn*. Kõigepealt on sellele rakendatud välisjõud P_1 ja P_5, edasi on sellele ilmselt rakendatud mingid koosmõjujõud prussi osa *BmnA* poolt. Lõikame vaadeldava prussi mõtteliselt mööda lõiget *mn* pooleks ning eemaldame teise osa *BmnA*. Kui tähistada kõrvalejäetud osa poolt allesjäänud osale mõjuvate kõikide elementaarjõudude resultantjõud tähega *R*, siis võime öelda, et allesjäänud osa *mCDn* on jõudude P_1, P_5 ja *R* mõjul tasakaalus. Jõud *R* ongi sisejõud, mis tasakaalustab jõud P_1 ja P_5. Nagu staatikas selgus, on tasakaalustatud jõudude süsteemis iga jõud ülejäänud jõududele tasakaalustavaks jõuks. Siit järgneb, et jõud *R* on suuruselt võrdne jõudude P_1 ja P_5 resultantjõuga, kuid suunalt sellele vastupidine.



Joon. 297

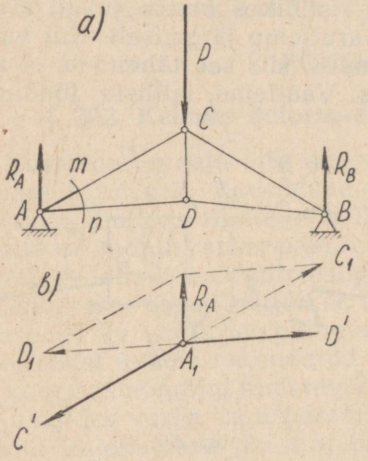
Arutledes täpselt samuti osa *AnmB* suhtes (s. o. heidame mõtteliselt kõrvale prussi osa *mnDC*), tuleme järeldusele, et see on sisejõu *R'* mõju all, mis võrdub jõudude P_1 ja P_5 resultantjõuga, või, mis on sama, osale *AnmB* mõjuvaid välisjõude P_2, P_3 ja P_4 tasakaalustava jõuga.

Seega osutuvad sisejõud nii parempoolse kui ka vasakpoolse osa jaoks suuruselt võrdseks (nagu see peabki olema mõju ja vastumõju seaduse põhjal), kuid jõu suund oleneb sellest, millist osa me just vaatleme. Nagu edaspidises näeme, määrab sisejõu suund kehal tekkiva deformatsiooni laadi.

Vaadeldaval juhul on välisjõudude süsteem selline, et sisejõudude resultantjõud *R* ei ole risti lõikega *mn*. Lahutades jõu kaheks komponendiks — üheks *N*, mis on risti selle lõikega, ja

teiseks T, mis asetseb sellel lõikel, võime jõu R asendada nende kahe komponentjõuga. Esimest nimetatakse n o r m a a l j õ u k s, teist t a n g e n t s i a a l j õ u k s.

Vastame nüüd küsimusele: kas sisejõud on üks ja sama prussi igas lõikes? Oletame, et me mõtteliselt lõikasime prussi mööda lõiget m_1n_1, mis on paralleelne lõikega mn, ning eemaldasime vasakpoolse osa ABm_1n_1. Jõudude antud paigutuse korral näeme, et allesjäänud osale ei mõju nüüd kaks, vaid juba kolm jõudu P_1, P_5 ja P_4. Järelikult neid tasakaalustav jõud, mis suuruselt võrdub kõrvaleheidetud jõudude P_2 ja P_3 resultantjõuga, on teise väärtusega, mistõttu ka sisejõud selles ristlõikes on teise väärtusega.



Joon. 298

Edasi, kui võtaksime lõike asemel, mis on risti prussi teljega, mingi teise lõike, mis asetseb kuidagi teisiti, siis jõud R oleks uuele lõikele suunatud teise nurga all ning järelikult ka komponentjõud N ja T oleksid teise väärtusega. Järelikult üldjuhul saadakse sisejõud erinevad.

Äsjakäsitletud moodust sisejõudude määramiseks deformeeritud kehas nimetatakse l õ i g e t e m e e t o d i k s; kehade deformatsioone käsitlevate ülesannete lahendamisel tuleb seda laialdaselt kasutada.

Näide 100. Sõrestik toetub kahele toele A ja B (joon. 298, *a*). Sõlmes C on rakendatud vertikaalne jõud P. Kuna sõrestik on varda CD suhtes sümmeetriline, siis toereaktsioonid üksikult võrduvad $\frac{P}{2}$, s. o. $R_A = R = 0{,}5\ P$. Määrata sisejõud varrastes AC ja AD.

Eraldame mõtteliselt lõikega mn sõlme A. See on tasakaalus toereaktsiooni R_A ja kummaski vardas esinevate sisejõudude mõjul. Võtame nüüd joonise pinnal punkti A_1 (joon. 298, *b*) ning, ehitanud jõu R_A vektori, lahutame selle kaheks komponentjõuks A_1D_1 ja A_1C_1, mis on suunatud piki vardaid AD ja AC. Et need jõud tasakaalustaksid jõu R_A, peavad nad olema suunatud vastaspoole. Seega saame jõudude R_A, A_1D' ja A_1C' tasakaalus süsteemi. Siit näeme, et varrast AD tõmmatakse, varrast AC aga surutakse.

§ 204. Elastsussisejõud

Keha deformeerimisel välisjõudude mõjul paigutuvad nende jõudude rakenduspunktid üht- või teistviisi ümber; teisiti võime öelda, et deformeerimiseks kulutatakse mingi kindel hulk tööd, mida teevad need jõud. See töö on võrdne keha deformeerimist

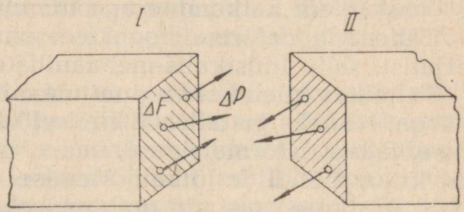
takistavate sisejõudude negatiivse tööga. Kui deformatsioon on elastne, siis on sisejõudude töö võrdne deformeeritud kehasse salvestatud potentsiaalse energiaga. See energia vabaneb keha esialgse kuju taastamisel elastsussisejõudude toimel.

Elastsete deformatsioonide neid omadusi rakendatakse tehnikas tihti, eriti masinates ja aparaatides, kasutades mitmesugust tüüpi vedrusid, membraane jt. detaile.

§ 205. Pinge deformeeritavas kehas

Paragrahvis 203 saadud jõud R ja R' kujutavad endast deformeeritava keha kahe vaadeldava osa üksikute osakeste vahel mõjuvate elementaarjõudude resultantjõude.

Seega, kui lõikame deformeeritud keha mõtteliselt pooleks (joon. 299), peame endale kujutlema, et igale materiaalsele osakesele on rakendatud selline elementaarjõud.



Joon. 299

Mõjugu keha osa I mingi väga väikesele pinnakesele ΔF elementaarjõud ΔP. See jõud on ilmselt seda suurem, mida enam on pingestatud materjal. Materjali pingestatuse mõõduks lõike antud punktis on suurus, mida nimetatakse p i n g e k s ning mis kujutab endast elementaarjõu ΔP jagatist pindalaga ΔF. Tähistades pinge tähega σ, saame

$$\sigma = \frac{\Delta P}{\Delta F}. \tag{173}$$

Üldjuhul on pinge deformeeritud keha erinevates lõigetes erinev.

Kuna me jõudu väljendame kilogrammides, siis, võttes pinna kas sentimeetrites või millimeetrites, saame pinge dimensiooniks kg/cm^2 või kg/mm^2.

Kui sisejõud vaadeldavas lõikes jaotub ühtlaselt, siis on pinge kõigis lõike punktides üks ja sama ning see määratakse jõu P ja kogu pinna F jagatisega, s. o.

$$\sigma = \frac{P}{F}. \tag{174}$$

§ 206. Tugevuse ning lubatava pinge arvutamise mõiste

Võtame kaks ühesugusest materjalist ning ühesuguse pikkusega, kuid erineva läbimõõduga terastraadi tükki ning riputame need vertikaalselt üles. Kinnitame nendele ühesugused raskused. Mõõtes kummagi traadi pikenemise, näeme, et väiksema läbimõõduga traat pikenes enam. Seega on ühe ja sama koormuse

poolt põhjustatud deformatsioonid erinevad. Koormates proovitavaid traate edasi, märkame, et koormuse teatud suuruse juures tekib peenemas traadis jääv deformatsioon, mis pärast koormuse kõrvaldamist ei kao; seejuures jääb aga jämedama traadi deformatsioon elastsuspiiridesse. Lõpuks koormuse mingi väärtuse juures esimene, peenem traat katkeb, jämedam jääb aga terveks.

Nagu näeme, on mõlema traadi deformeerumine ühe ja sama koormuse mõjul erinev. Seda põhjustab asjaolu, et pinge on jämedama traadi ristlõikes väiksem, sest selle ristlõikepindala on suurem.

Siit järeldub, et deformatsiooni iseloomu määravaks põhisuuruseks ei ole koormus, vaid pinge. Kuid pinge üksinda ei määra siiski veel deformatsiooni iseloomu. Tõepoolest, kujutame endale, et koos kirjeldatud katsega tõmbame me sama koormusega ka v a s k t r a a t i. Sel juhul näeme, ühtede ja samade mõõdete ning koormuste korral on vasktraadi pikenemine suurem kui terastraadil, vasktraadi katkemine aga toimub väiksemal koormusel.

Tähendab, deformatsiooni iseloom ja suurus olenevad veel materjalist, selle füüsikalis-mehaanilistest omadustest.

Tehnikas tuleb kokku puutuda mitmesugust liiki deformatsioonidega. Näiteks metalli valtsimisel või sepistamisel saab see plastilise, jääva deformatsiooni, mis võimaldab anda materjalile nõutud kuju; metallide lõiketöötlemisel mõjuvad jõud, mis on vajalikud üksikute laastude eraldamiseks jne. Kõikidel taolistel juhtudel me tekitame metallis pinge, mis vastab soovitavale deformatsioonile.

Täiesti vastupidiselt lahendatakse ülesanne masinate ja seadmete valmistamisel. Nimetatud juhtudel kahtlemata detailis jäävaid deformatsioone ei tohi esineda, sest selle tagajärjel muutuks tunduvalt detaili kuju, normaalsed töötingimused saaksid rikutud ning detail puruneks. Seepärast masinate ja seadmete detailides võivad esineda ainult elastsed deformatsioonid, mis koormuse mõjumise lakkamisel kaovad.

Vastavalt sellele nõudele arvutatakse masinate detailid nii, et need ei deformeeruks üle lubatud piiride, siit aga järeldub, et detailides koormuse mõjul tekkivad pinged peavad tagama selle nõude täitmise. Seega detailide arvutamisel lähtutakse mingist l u b a t a v a s t p i n g e s t, mis moodustab ainult teatud osa sellest pingest, mille juures detail puruneks. On pikemata selge, et lubatava pinge suurus sõltub esimeses järjekorras materjalist, millest detail tuleb valmistada.

Kõiki neid küsimusi, mis haaravad välisjõudude mõjul tekkivate deformatsioonide ja pingete määramist ning masinate ja elementide tugevusarvutust, käsitletakse teadusharus, mida nimetatakse t u g e v u s õ p e t u s e k s.

§ 207. Staatiline ja dünaamiline koormus

Koormus võib mõjuda konstruktsioonile mitmeti.

Kujutledes endale jalakäijate silla töötingimusi, tuleme järeldusele, et selle koormus muutub väikestes piirides. Silla omakaal on konstantne, silda ületavate inimeste poolt põhjustatud koormus muutub aga järk-järgult võrdlemisi pika ajavahemiku vältel. Samasuguselt muutub mitmekordsetes majades vahelagede koormus, vee poolt tammile avaldatav surve jne.

Seda liiki koormusi, mis kasvavad järk-järgult ning seejärel jäävad konstantseteks või muutuvad võrdlemisi vähe, nimetatakse staatilisteks.

Teistel juhtudel ei kasva kehale rakendatud jõud järk-järgult, vaid hakkavad mõjuma järsku kogu oma suuruses; lõpuks võivad jõud veel mõjuda väga lühikese aja vältel, mispuhul esineb löök. Selliseid koormusi nimetatakse dünaamilisteks; need esinevad näiteks vagunihaakides rongi järsul liikumahakkamisel, vasaraga sepistamisel, halvasti tsentreeritud detaili treimisel jne.

Dünaamilisel koormamisel tekivad suuremad deformatsioonid ja pinged kui jõu staatilisel mõjumisel. Seepärast püütakse masinate ja seadmete projekteerimisel ning ekspluateerimisel dünaamilisi koormusi vältida, välja arvatud juhud, mil löök tekitatakse sihilikult suurema efekti saamiseks (vasara või rammnuia löök vaiade sisselöömisel jne.).

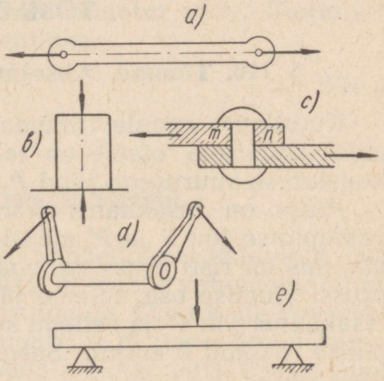
§ 208. Deformatsioonide põhiliigid

Erineva konstruktsiooniga detailid mõjuvad üksteisele erinevalt, millele vastavalt ühe detaili poolt teisele avaldatav jõud põhjustab ka erinevaid deformatsioone. Nii näiteks tõstuki trossi tõmmatakse, ehituse vundamenti surutakse, horisontaalset tala painutatakse jne.

Deformatsioonid võivad olla järgmised (joon. 300):

1. Tõmme ja surve (joon. 300, *a* ja *b*). Sellised deformatsioonid esinevad silla sõrestike elementides, vasara töötavosas, mutriga pingutatud poldis jne.

2. Nihe (lõige) (joon. 300, *c*). Võrdsete, kuid vastassuunaliste jõudude mõjul võib lõigata läbi needi ristlõike *mn*, polti mutriga ülemäära pingutades võib lõigata maha keerme poldi silindriliselt pinnalt jne.



Joon. 300

3. V ä ä n e (joon. 300, *d*). Väändedeformatsioon esineb kõigis detailides, mis on koormatud väändemomendiga. Kõige levinumaks seda tüüpi detailideks on võllid.

4. P a i n e (joon. 300, *e*). Painet iseloomustab mitmesugust tüüpi talade töötamine. Paindedeformatsioon esineb ka teljes omakaalu, teljele kinnitatud detailide kaalu kui ka teljele mõjuvate jõudude mõjul jne.

Loetletud deformatsioone nimetatakse l i h t d e f o r m a t s i o o n i d e k s. Väga sageli mõjuvad masinate detailidele mitmesugused deformatsiooniliigid korraga, nagu näiteks võllide puhul, milledele üheaegselt mõjub nii vääne kui ka paine. Selliseid deformatsioone nimetatakse l i i t d e f o r m a t s i o o n i d e k s.

§ 209. Kordamisküsimusi

1. Mida nimetatakse deformatsiooniks ja millistest teguritest oleneb selle suurus?
2. Kas deformatsiooni suuruse üle saab otsustada ainult koormuse suuruse järgi, mis mõjub detailile?
3. Millistel juhtudel on tarvis tekitada materjalile jäävaid deformatsioone?
4. Milleks kasutatakse lõigete meetodit ning milles seisab selle olemus?
5. Mis liiki deformatsioonid esinevad:
a) tavalises treiteras välistreimisel;
b) universaaltreipingi käigukruvis keermetamisel;
c) treipingi padruni pakkides detaili kinnitamisel välisläbimõõdult;
d) paralleelkruustangide kruvis detaili kinnitamisel;
e) needi ristlõikes, mis asetseb liidetavate detailide kokkupuutepinnas, ja mõlemas neetimisvasaras?

K a h e k ü m n e t e i n e p e a t ü k k

TÕMME JA SURVE

§ 210. Tõmme. Absoluutne ja suhteline pikenemine

Kujutleme endale liikumatult kinnitatud prismaatilist prussi, mille alumisele otsale on rakendatud piki prussi telge mõjuv konstantse suurusega jõud P (joon. 301).

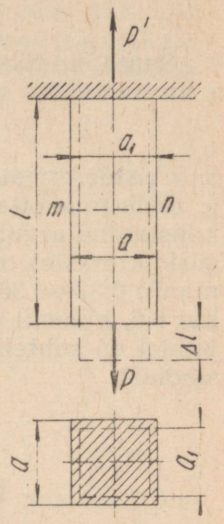
Pruss on tasakaalus kahe suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise jõu P ja P' mõjul.[1] Teeme meelevaldses kohas lõike *mn*, mis on risti prussi teljega. Heites mõtteliselt kõrvale näiteks prussi alumise osa, tuleme järeldusele, et prussi ülemine osa on tasakaalus jõu P' ja sellega suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise sisejõu P mõjul. Seega tõmmatakse prussi kogu tema

[1] Antud näites me prussi omakaalu ei arvesta.

pikkuse ulatuses jõuga P. Kui prussi ristlõikepind on F, siis pinge prussi ristlõikes

$$\sigma = \frac{P}{F}, \text{ millest } P = \sigma F. \tag{175}$$

Muutes jõu P suurust, märkame, et vastavalt selle suurendamisele suureneb ka prussi pikenemine. Olgu prussi pikkus jõu P mingi väärtuse korral $l_1 = l + \Delta l$, kus l on prussi esialgne pikkus, Δl aga prussi pikkuse suurenemine deformeerimisel. Seda pikkuse suurenemist nimetatakse absoluutseks pikenemiseks.



Joon. 301

Kuid absoluutne pikenemine ei iseloomusta veel täielikult deformatsiooni. Selles võib veenduda järgmise lihtsa katse abil. Lõigates kumminööri kaheks erineva pikkusega tükiks ning hakates neid kumbagi tõmbama ühe ja sama jõuga (riputades neile näiteks üheraskused koormused), näeme, et nende pikenemised on erinevad. Järelikult absoluutse pikenemise põhjal ei saa otsustada deformatsiooni suuruse üle antud jõuga tõmbamisel. Kui me aga võrdleme selles näites kummagi nööri pikkusühikule taandatud pikenemisi, näeme, et need on võrdsed.

Sellist pikenemist nimetatakse suhteliseks pikenemiseks ning see kujutab endast absoluutse pikenemise ja algpikkuse jagatist. Tähistades selle tähega ε, võime järelikult kirjutada:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{176}$$

Kuna aga selle murru lugejat ja nimetajat väljendatakse pikkusühikutes, siis kujutab murd endast nimetut arvu. Tavaliselt antakse suhteline pikenemine protsentides.

Sel juhul $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%$. (176 a)

§ 211. Ristdeformatsioon tõmbel

Nagu katsed näitavad, kaasneb tõmbedeformatsioonile ristlõike mõõdete vähenemine, s. o. lõike mõõdete vähenemine, mis on risti tõmbava koormuse mõjumissuunaga. Olgu kahe suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise jõuga P ja P' tõmmataval vardal ruudukujuline ristlõige küljepikkusega a (joon. 301). Prussi pikenemisel Δl võrra väheneb ristlõike mõõde a väärtuseni a_1, millele

vastavalt algmõõte a ja lõppmõõte a_1 vahe kujutab endast absoluutset ristdeformatsiooni Δa, s. o.

$$\Delta a = a - a_1. \tag{177}$$

Varda ristdeformatsiooni mõõduks on suhteline ristdeformatsioon:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \tag{178}$$

Suhteline ristdeformatsioon ε' ja suhteline pikideformatsioon ε on omavahel seotud kujul:

$$\varepsilon' = \mu\varepsilon, \tag{179}$$

s. o. ristdeformatsioon on võrdeline pikideformatsiooniga. Teguril μ, mida nimetatakse ristsurve teguriks, on iga materjali puhul konstantne arvuline väärtus, mis määratakse katseliselt. Näiteks süsinikterastel on see tegur 0,24—0,28, vasel 0,31—0,34, alumiiniumil 0,32—0,36 jne. Enamiku materjalide jaoks on ta väiksem kui 0,5, kummil on see aga ligikaudu 0,5. Seega enamikul materjalidel on suhteline pikenemine 3—4 korda suurem ristdeformatsioonist.

§ 212. Pingete diagramm tõmbel

Materjaliõpetuse kursuses metalli omaduste uurimisel selgitati, kuidas muutub keha pikenemine tõmbemasinaga tõmbamisel.[1] Tõmbediagrammil kantakse koormused vertikaalteljele, nendele koormustele vastavad absoluutsed pikenemised aga horisontaalteljele. Koormuseni P_{pr} on pikenemised võrdelised koormustega, suurematel koormustel kasvavad pikenemised aga koormustest kiiremini ning mingil koormusel P_T hakkab keha pikenema ilma jõudu suurendamata, s. o. materjal „voolab". Seejärel materjali deformatsioonitakistus kasvab kuni mingi suurimale koormusele vastava punktini, milleni jõudes proovikehal hakkab tekkima kuskil tema pikkusel märgatav peenenemine (nn. „kael"). Viimane tähistab proovikeha purunemise algust. Järgnevalt proovikeha ristlõige väheneb selles kohas intensiivselt isegi väikestel koormustel ning lõpuks proovikeha katkeb.

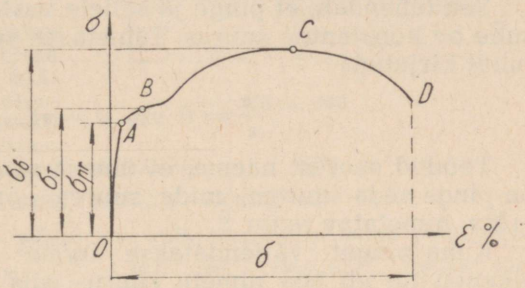
Teades antud materjali tõmbediagrammi, võime saada pingete diagrammi, mis annab pingete ja suhteliste pikenemiste vahelise seose.

Joonestame ristkoordinaadistiku, kusjuures abstsissteljele kanname suhtelised pikenemised protsentides ($\varepsilon\%$), ordi-

[1] Н. Н. Остапенко, Н. П. Кириллов, Материаловедение, Трудрезервиздат 1953, § 50.

naatteljele aga nendele vastavad pinged σ (joon. 302). Kujult on see diagramm analoogiline tõmbediagrammiga. Diagrammi punkt *A* vastab suurimale pingele, milleni säilib pinge ja suhtelise pikenemise vaheline võrdelisus. Seda pinget nimetatakse proportsionaalsuspiiriks ning tähistatakse σ_{pr}. Diagrammi punkt *B* annab pinge σ_T, mida nimetatakse voolavuspiiriks. Punkt *C* tähistab pinget σ_b, mis vastab kaela tekkimise alghetkele proovikehal, s. o. proovikeha purunemise alghetkele, ning seda nimetatakse tugevuspiiriks (tõmbetugevuseks). Punkt *D* vastab proovikeha katkemishetkele.

Märgime veel, et punktist *A* mõnevõrra kõrgemal asetseb punkt, millele vastav pinge tähistab hetke, kus elastsed deformatsioonid lähevad üle jäävateks; seepärast nimetatakse seda punkti elastsuspiiriks. Kuna aga see asetseb proportsionaalsuspiirile väga lähedal, siis võib proportsionaalsuspiirile ja elastsuspiirile vastavad pinged lugeda võrdseteks.



Joon. 302

Pinged σ_b, σ_T, σ_{pr} iseloomustavad materjali mehaanilisi omadusi, s. o. tema võimet taluda keha deformeerimist ja purunemist põhjustavaid välisjõude. Näiteks 0,15% süsinikku sisaldaval terasel $\sigma_b = 61 - 87$ kg/mm^2 ja $\sigma_T = 50$ kg/mm^2, kroomnikkelterasel aga $\sigma_b = 90$ kg/mm^2 ja $\sigma_T = 75$ kg/mm^2. Siit näeme, et terase tugevus suureneb süsinikusisalduse suurenemisel, kuid samuti ka spetsiaalsete legeerivate elementide lisamisel. Materjali suhteline pikenemine tõmbamisel kuni katkemiseni tähistatakse tähega δ ning see antakse protsentides. Suhteline pikenemine iseloomustab materjali plastilisust — mida väiksem see on, seda hapram on materjal; näitena võime vaadelda hallmalmi, millel katkemisel suhtelist pikenemist ja ristlõike peenenemist peaaegu ei esine. Malmi tugevuspiir on tunduvamalt madalam kui terasel, moodustades hallmalmil $\sigma_b = 18 - 27$ kg/mm^2. Seetõttu hapràte materjalide pingete diagramm erineb oluliselt vaadeldud diagrammist.

§ 213. Pinge ja suhtelise pikenemise vaheline seos. Esimese liigi elastsusmoodul

Niisiis kuni proportsionaalsuspiirini σ_{pr} kasvavad proovikeha pikenemised võrdeliselt pingega, nagu see nähtub diagrammilt (joon. 302), kus lõik OA on sirgjooneline. Seega nimetatud piirides, kui proovikeha pinge σ_1 mõjul saab pikenemise ε_1, pinge σ_2 mõjul pikenemise ε_2 jne., kehtib seos:

$$\frac{\sigma_1}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2} = \frac{\sigma_3}{\varepsilon_3} = \text{jne.}$$

See tähendab, et pinge ja sellele vastava suhtelise pikenemise suhe on konstantne suurus. Tähistades selle tähega E, võime üldjuhul kirjutada

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \text{ või } \sigma = \varepsilon E. \qquad (180)$$

Toodud seosest näeme, et ühe ja sama deformatsiooni korral on pinge seda suurem, mida suurem on elastsusmoodu liks nimetatav tegur E.

Kuna pinget väljendatakse kg/cm² (või kg/mm²), suhteline pikenemine on aga nimetu suurus, siis elastsusmoodul avaldub samades ühikutes mis pingegi. Tavaliselt see antakse kg/cm².

Eespool näidati, et proportsionaalsuspiiri võib lugeda kokkulangevaks elastsuspiiriga, mistõttu valemit (180) võib kasutada elastse deformatsiooni määramiseks antud pinge järgi ja vastupidi, pinge määramiseks antud deformatsiooni järgi. Mitmesuguste materjalide elastsusmooduli arvuline väärtus määratakse katseliselt deformatsioonide ja neile vastavate pingete järgi (s. o. valemi $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ järgi).

Näitena toome elastsusmooduli E väärtused (kg/cm²) mõningatele materjalidele: süsinikteras 2 000 000 — 2 200 000, terasvalu 1 750 000, külmalttõmmatud valgevask 910 000—990 000, puu pikikiudu 90 000 — 120 000, puu ristikiudu 4000 — 10 000, nahkrihmad 2000 — 6000.

Näide 101. Terasest proovikeha ristlõikepinnaga $F = 181{,}2$ cm² pikeneb tõmbemasinas koormuse $P = 500$ kg mõjul elastselt pikkuse $\Delta l = 0{,}0272$ mm võrra. Määrata elastsusmoodul E, kui proovikeha algpikkus on 200 mm?

Määrame pinge: $\sigma = \frac{P}{F} = \frac{500}{181{,}2}$ kg/mm², suhtelise pikenemise $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{0{,}0272}{200}$ ning lõpuks elastsusmooduli valemi (180) järgi

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Pl}{F\Delta l} = \frac{500 \cdot 200}{181{,}2 \cdot 0{,}0272} = 20\,250 \text{ kg/mm}^2 = 2\,025\,000 \text{ kg/cm}^2.$$

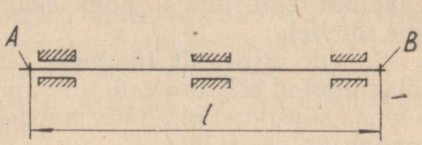
Näide 102. Kui palju pikeneb $l = 2$ m pikkune terasvarras, mille ristlõikepindala $F = 2$ cm², kui seda tõmmata jõuga $P = 3$ t?

Valemi (180) põhjal suhteline pikenemine $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$; pinge $\sigma = \frac{P}{F}$, järelikult

$\varepsilon = \frac{P}{EF} = \frac{\Delta l}{l}$, millest $\Delta l = \frac{Pl}{EF}$. Võttes $E = 2\,000\,000$ kg/cm² ja tehes vastavad asendused, saame $\Delta l = \frac{3000 \cdot 200}{2\,000\,000 \cdot 2} = 0{,}15\text{cm} = 1{,}5$ mm.

Näide 103. Võll toetub mitmele laagrile (joon. 303). Telgnihkumise vältimiseks on võlli otstesse asetatud seaderõngad *A* ja *B*. Olgu seaderõngad kinnitatud võllile tihedalt vastu laagreid suvel temperatuuri juures 30° C. Määrame, millise jõuga suruvad rõngad laagri otspindadele talvel, mil temperatuur hoones oli 10° C. Võlli pikkus $l = 20$ m ja läbimõõt $d = 50$ mm.

Terase joonpaisumistegur on 0,0000125. Kuna temperatuur hoones langes $30° - 10° = 20°$ *C* võrra, siis võll pidi lühenema $0{,}0000125 \cdot 20 = 0{,}0025$ oma pikkuse võrra. Vastavalt sellele tekivad materjalis tõmbepinged, mis määratakse valemiga (180), kus elastsusmoodul tuleb võtta $E = 2\,000\,000$ kg/cm² ja suhteline pikenemine $\varepsilon = 0{,}00025$. Tehes vastavad asendused, saame:



Joon. 303

$$\sigma = \varepsilon E = 0{,}00025 \cdot 2\,000\,000 = 500 \text{ kg/cm}^2.$$

Et määrata jõudu *P*, mis mõjub piki võlli, korrutame leitud pinget võlli ristlõikepindalaga $F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \cdot 5^2}{4} = 19{,}6$ cm². Järelikult, otsitav jõud $P = 500 \cdot 19{,}6 = 9800$ kg.

Kui võlli midagi ei takistaks, lüheneks see absoluutse deformatsiooni võrra, mis võrrandi (176) põhjal on:

$$\Delta l = \varepsilon l = 0{,}00025 \cdot 20 = 0{,}005 \text{ m ja } 5 \text{ mm}.$$

Nagu näeme, suruvad seaderõngad laagritele suure jõuga. Transmissiooni normaalne töötamine on rikutud.

Näide 104. Ärgu olgu vertikaalselt rippuvale prussile (joon. 301) rakendatud mingit väliskoormust *P*. Sel juhul mõjub prussile ainult omakaal. Meelevaldses lõikes *mn* mõjub sisejõud, mis võrdub sellest lõikest allpool asetseva prussiosa kaaluga. On pikemata selge, et sisejõud on seda suurem, mida kõrgemal asetseb vaadeldav lõige. Suurim on see jõud ülemises, prussi kinnituskoha lõikes. Vastavalt sellele on suurim nimetatud lõikes ka pinge, mis võrdub $\sigma = \frac{F}{G}$, kus *G* on prussi kaal, *F* aga prussi ristlõikepindala; tähistades erikaalu γ, saame $G = Fl\gamma$ ja $\sigma = \frac{Fl\gamma}{F} = l\gamma$. Nagu näeme, ei olene antud juhul pinge prussi ristlõikepindalast.

§ 214. Surve

Survedeformatsioon on tõmbedeformatsiooni vastandjuht. Kõik tõmbe kohta tuletatud sõltuvused on kehtivad ka surve korral. Kui näiteks prussile mõjuvad teda suruvad jõud *P* ja *P'* (joon. 304), siis meelevaldses lõikes, mis on risti koormuse mõjumissihiga, tekivad survepinged $\sigma = \frac{P}{F}$, kus *P* on koormus, *F* aga prussi ristlõikepindala. Koormuse mõjumissihis saab proovikeha

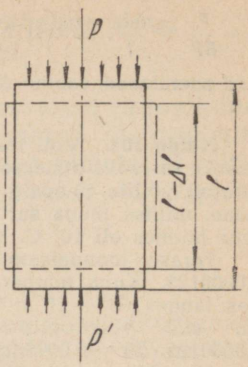
suhtelise pikideformatsiooni, mida väljendatakse prussi pikkuse suhtelises lühenemises $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ või siis protsentides

$$\varepsilon\% = \frac{\Delta l}{l} \cdot 100\%.$$

Survepinge on võrdeline suhtelise pikideformatsiooniga, s. o. $\sigma = E\varepsilon$.

Elastsusmoodulil E on surve korral enamiku materjalide jaoks sama väärtus mis tõmbelgi.

Survel, erinevalt tõmbest, prussi ristlõikemõõted suurenevad, kusjuures suurenemise sõltuvust pikideformatsioonist väljendab valem (178).



Joon. 304

§ 215. Arvutusvalem ning lubatav pinge tõmbel ja survel

Tõmbel või survel koormuse mõjumissihis tekkiv pinge määratakse eespooltuletatud võrrandiga (175) $\sigma = \frac{P}{F}$.

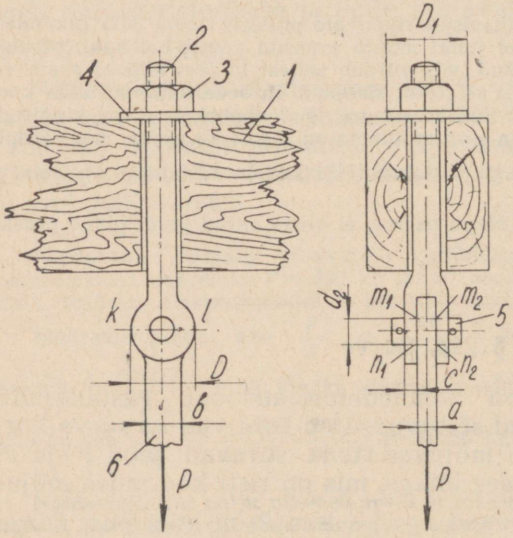
Nagu selgitati § 206, lähtutakse mitmesuguste detailide projekteerimisel sellest, et nendes tekkivad pinged ei ületaks lubatud piire. Asetades võrrandis (175) pinge σ asemele lubatava tõmbe- või survepinge, võime antud koormuse järgi määrata vajaliku ristlõikepindala, mis tagab arvutatava detaili tugevuse. Lubatav tõmbepinge tähistatakse $[\delta_t]$. Vastavalt sellele avaldub võrrand (175) kujul:

$$P = F[\sigma_t]. \quad (181)$$

Asendades samas võrrandis pinge σ lubatava survepingega $[\sigma_s]$, saame

$$P = F[\sigma_s].$$

Seega projekteeritava detaili ristlõikemõõdete määramisel peab teadma tõmbava või suruva jõu suurust ning lubatavat pinget.



Joon. 305

Eespool näidati, et lubatavaks pingeks võetakse teatud osa tugevuspiirist ning selle võib avaldada järgmise valemiga:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_b}{n}, \qquad (183)$$

kus $[\sigma]$ — lubatav tõmbe- või survepinge $[\sigma_t]$ või $[\sigma_s]$;

σ_b — tugevuspiir;

n — arv, mis näitab, mitu korda on lubatav pinge väiksem tugevuspiirist; seda arvu nimetatakse tugevusvaruks.

Tugevusvarul ei ole konstantset arvulist väärtust. Ta peab tagama ainult detaili töötamise elastsete deformatsioonide piirkonnas ning oleneb reast teguritest. Näiteks hapratel materjalidel võetakse tugevusvaru suurem kui plastilistel, dünaamilistel koormustel suurem kui staatilistel jne.

Näide 105. Näites 6 (§ 21) kirjeldatud kronsteini varras AB peab olema valmistatud pehmest ümarterasest. Määrata varda läbimõõt d, kui lubatav pinge $[\sigma] = 1400$ kg/cm^2.

Valemi (181) põhjal saame $F = \frac{P}{[\sigma]}$. Tähendatud näites oli piki seda varrast mõjuv jõud $P_1 = 900$ kg. Järelikult

$$F = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{P}{[\sigma]},$$

millest

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 900}{\pi \cdot 1400}} = 9 \text{ mm}.$$

Näide 106. Läbi puitpalgi *1* (joon. 305) on vabalt lastud polt *2*, mille aasadesse on sõrme *5* abil kinnitatud jõuga P tõmmatud tõmbits. Arvutada selle ühenduse elemendid tõmbele. Tähistades poldi siseläbimõõdu tähega d_1, saame valemit (181) kasutades:

$$F = \frac{P}{[\sigma]} = \frac{\pi d_1^2}{4}, \text{ millest } d_1 = 2\sqrt{\frac{P}{\pi[\sigma]}}.$$

Asetades võrrandisse lubatava pinge väärtuse, saame poldi siseläbimõõdu, misjärel OCT-i tabelitest leiame sobiva läbimõõduga poldi.

Edasi arvutame poldi aasad. Nagu näeme, võivad need katkeda lõikes kl, mille pindala mõlemal aasal kokku on $2(D - d_2)c$, kus d_2 on sõrmeava läbimõõt, c — aasapõskede paksus. Järelikult arvutusvõrrand on järgmine:

$$P = 2(D - d_2)c[\sigma].$$

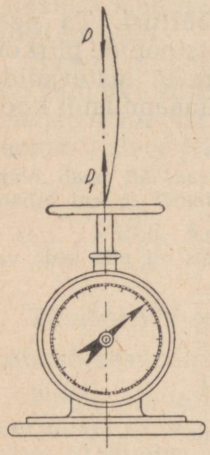
Lõpuks arvutame tõmbitsa *6*. Viimase tõmbele töötav pind on paksuse a ja laiuse b korral $F = ab$; arvutusvõrrand on $ba[\sigma] = P$, millest saame ristlõike ühte mõõdet (a või b) ette andes teise. Et lõikes kl on tõmbits sõrme *5* ava tõttu nõrgestatud, siis peab olema rahuldatud võrrand:

$$(D - d_2)a[\sigma] \geqslant P.$$

§ 216. Surve ja nõtke

Teeme järgmise katse. Võtame taldrikvedrukaalu (joon. 306) ning asetame sellele vertikaalselt peene terasvarda. Hakkame käega suruma terasvarda otsale telgsihis, kusjuures suurendame

järk-järgult survejõudu P, jälgides samaaegselt, et varras püsiks vertikaalasendis. Vedrukaalu osuti järgi me näeme, et jõud P suureneb, varda telg jääb aga sirgjooneliseks. Jätkates katset, märkame, et survejõu teatud suurusel varras veidi paindub, jõu eemaldamisel sirgub aga uuesti. Kui me aga suurendame survejõudu, mille juures varras hakkas painduma, siis varda deformatsioon suureneb; jõu edasisel suurendamisel tekivad vardas algul jäävad deformatsioonid, seejärel varras aga juba puruneb.



Joon. 306

Korrates kirjeldatud katset mitmesuguse pikkusega varrastega, mis on valmistatud ühest ja samast materjalist ning milledel on ühesuguse kuju ja mõõdetega ristlõiked, näeme, et survejõud, mille korral deformatsioonid lakkavad olemast elastsed, oleneb varda pikkusest ja nimelt, varda pikkuse suurenemisel see jõud väheneb. Seda jõudu nimetatakse kriitiliseks jõuks ja tähistatakse P_{kr}.

Järelikult surutud varda purunemist ei põhjusta lubatavaid pingeid ületavad pinged, vaid hoopis tema kõverdumine, või nagu öeldakse, stabiilsuse kadumine. Vaadeldud juhul esinevat nähet nimetatakse üldiselt nõtkeks.

Esimesena uuris nõtket kuulus vene teadlane akadeemik L. Euler. Sellele deformatsioonile töötavate varraste arvutusvalem kannab samuti tema nime.

Nõtkele töötavad sambad, surutud vardad mitmesugustes sõrestikes (sildade, katuse kandekonstruktsioonide, tõstekraanade jne. sõrestikes), kolbmootorite kepsud ja seadmete ning masinate teised detailid.

§ 217. Kordamisküsimusi

1. Kaks ühesuguse ristlõikega ning ühest ja samast materjalist varrast saavad ühesuguste koormuste mõjul erinevad absoluutsed pikenemised. Kuidas seda seletada? Mida võib öelda suhteliste pikenemiste kohta?
2. Kas võib kinnitada, et mida suurem on deformeeritava keha absoluutne pikenemine, seda suurem on ka suhteline pikenemine?
3. Miks on masinate detailides lubamatud elastsuspiire ületavad deformatsioonid?
4. Kas saab otsustada pinge üle materjalis ainult koormuse järgi? ainult absoluutse deformatsiooni järgi?
5. Mida võib öelda materjalide elastsusmoodulite kohta, kui materjalid ühesuguste pingete mõjul saavad erinevad suhtelised pikenemised?
6. Millistel tingimustel katkeb vertikaalselt rippuv varras omakaalu mõjul? Millises lõikes toimub katkemine?

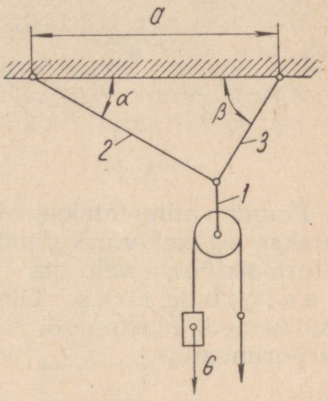
§ 218. Harjutusi

105. Ketile, mille lülid on valmistatud ümarterasest läbimõõduga 16 mm, on riputatud raskus kaaluga 2 t. Määrata tõmbepinged keti lülides.

106. Kui suur on ümmarguse 8 m pikkuse ning 60 mm läbimõõduga terasvarda absoluutne pikenemine, kui seda tõmmata jõuga $P = 30$ t? Terase elastsusmoodul $E = 2\,000\,000$ kg/cm^2.

107. Kui suur pinge tekib 6 m pikkuses ja 25 mm jämeduses terasvardas, kui absoluutne pikenemine selle tõmbamisel on 3 mm? Elastsusmoodul $E = 2\,000\,000$ kg/cm^2.

108. Kahe mittejäreleandva seina vahele on asetatud temperatuuril 15° C 100 mm läbimõõduga vaskvarras. Millised pinged tekivad vardas ja kui suurt survet avaldab varras seintele temperatuuril 50° C? Vase joonpaisumistegur on 0,0000167 ja elastsusmoodul $E = 1\,000\,000$ kg/cm^2.



Joon. 307

109. Millise pikkuse juures katkeb pehmest terasest varras omakaalu mõjul, kui terase tõmbetugevus $\sigma_b = 4000$ kg/cm^2? Terase erikaal $\gamma = 7{,}85$ g/cm^3.

110. Punasest vasest proovikeha tõmbamisel jõuga $P = 500$ kg suurenes proovikehale teineteisest 200 mm kaugusele tehtud märkide vahemaa 0,032 mm võrra. Määrata elastsusmoodul, kui proovikeha läbimõõt on 20 mm.

111. Tõstuki ketile on riputatud raskus $G = 500$ kg. Määrata tõmbepinged keti lülides, kui need on valmistatud ümarterasest läbimõõduga 8 mm.

Juhis. Arvestada, et koormus jaguneb kahele lõikele.

112. Kui suur peab olema liikumatut plokki kandvate varraste *1*, *2*, *3* (joon. 307) läbimõõt, kui ploki abil tõstetakse raskust $G = 2$ t? Lubatav pinge $[\sigma_t] = 1400$ kg/cm^2, $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$.

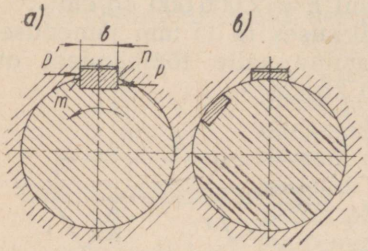
Kahekümne kolmas peatükk

NIHE JA VÄÄNE

§ 219. Nihke (lõike) mõiste

Olgu noolega näidatud suunas pöörlevale võllile (joon. 308, *a*) kinnitatud prismaatilise kiilu abil rihmaratas, mis annab pöörlemise edasi paralleelsel võllil asetsevale veetavale rihmarattale. Nimetatud tingimustel mõjub kiilu alumisele osale võlli poolt (paremalt vasakule) jõud P, rihmaratta rummu soones olevale

kiilu osale aga sellega suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine jõud P'. Kui kiil ei ole piisavalt tugev, võib ta mööda mõlemat osa lahutavat pinda *mn* pooleks lõikuda, nagu see on näidatud joonisel 308, *b*. Siit järeldub, et nende jõudude mõjumise tulemusena tekivad lõikes *mn* sisejõud, mis takistavad kiilu ühe osa kirjeldatud nihkumist teise suhtes.



Joon. 308

Jagades sisejõu, mis suuruselt võrdub jõuga P, lõike *mn* pindalaga, saame pinge

$$\tau = \frac{P}{F}, \qquad (184)$$

või, tähistades kiilu laiuse tähega *b*, pikkuse aga tähega *l*, saame

$$\tau = \frac{P}{bl}. \qquad (184\,a)$$

Pinget τ nimetatakse nihke- (lõike-) pingeks ja seda väljendatakse kg/cm^2 või kg/mm^2. Need pinged on suunatud mööda deformatsioonipinda *mn* ning neid nimetatakse tangentsiaalpingeteks. Olenevalt tangentsiaalpingete suurusest võib esineda elastne või jääv deformatsioon või lõpuks keha täielik purunemine.

§ 220. Nihkedeformatsiooni mõõt. Nihkemoodul

Selgitame, nagu me seda tegime tõmbe juureski, kuidas on võimalik mõõta nihkedeformatsiooni suurust.

Olgu prussile (joon. 309, *a*) lõigetes *AC* ja *BD*, millede vahekaugus *x* on väike, rakendatud kaks suuruselt võrdset, kuid suunalt vastupidist jõudu P ja P'. Nende jõudude mõjul ristkülik *ABDC* (näidatud joonisel 309, *b* suurendatult) deformeerub ning muutub parallelogrammiks AB_1D_1C (joon. 309, *c*). Vastavalt sellele paigutuvad punktid *B* ja *D*, samuti nagu igasugused teised lõikel *BD* olevad punktid, lõike *AC* suhtes suuruse $BB_1 = DD_1 = s$ võrra edasi.

Seda suurust *s* võime vaadelda kui prussi käsitletava elemendi absoluutset nihkedeformatsiooni. Kuna aga absoluutse deformatsiooni järgi ei saa täielikult otsustada keha deformatsiooni suuruse üle, siis ka absoluutne nihkedeformatsioon ei iseloomusta nihet täielikult, sest deformatsiooni suurus sõltub vaadeldava elemendi mõõdetest.

Kui võtame lõikest *AC* kaugusel x_1 oleva lõike $B'D'$, siis absoluutne deformatsioon on $B'B'_1 = D'D'_1 = s_1$. Sarnastest kolmnurkadest ABB_1 ja $AB'B'_1$ saame:

$$\frac{s}{s_1} = \frac{x}{x_1} \text{ või } \frac{s}{x} = \frac{s_1}{x_1} = \text{mingi suurus } \gamma.$$

Nagu näeme, on absoluutse deformatsiooni ja lõigete vahelise kauguse suhe konstantne suurus, mistõttu seda kasutataksegi nihke mõõtmisel.

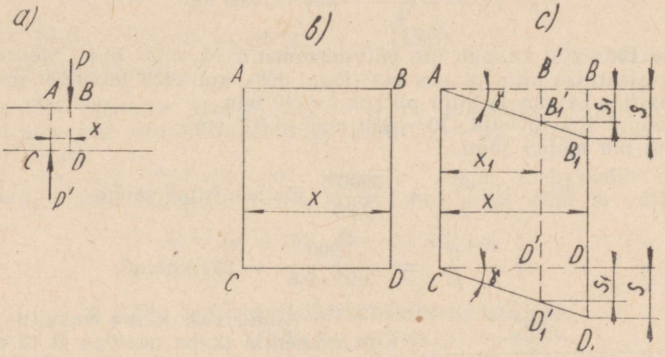
Suurust γ nimetatakse *suhteliseks nihkeks* (*nihkenurgaks*).

Seega *suhteline nihe võrdub absoluutse nihkedeformatsiooni ja lõigetevahelise kauguse jagatisega*.

Tõmbedeformatsiooni vaadeldes me nägime, et pinge τ on elastsuspiirides võrdeline suhtelise pikenemisega. Katsetega tõestatud uurimised näitavad, et selline sõltuvus kehtib ka nihke korral ja nimelt:

$$\tau = G\gamma, \tag{185}$$

kus τ on nihkepinge, γ — suhteline nihe, G — võrdelisuse tegur, mida nimetatakse *nihkemooduliks*. Nagu näeme, on see



Joon. 309

sõltuvus analoogiline võrrandiga (180) avaldatud sõltuvusega. Kuna τ väljendatakse kg/cm^2 (või kg/mm^2), γ aga on nimetu arv, siis nihkemoodulil on sama dimensioon mis pingelgi (tavaliselt see antakse kg/cm^2).

Mooduli G väärtused (kg/cm^2) mõningate materjalide kohta: süsinikteras 810 000, alumiinium 260 000—270 000, vask 400 000 jne.

§ 221. Lubatav lõikepinge

Tähistame lubatava nihkepinge, mis tagab detaili ohutu töötamise, tähega $[\tau]$.

Seda pinget on hakatud nimetama *lubatud lõikepingeks*. Tehes oletuse, et pinged jaotuvad kogu lõikes ühtlaselt, saame lõike arvutusvõrrandi järgmisel kujul:

$$P = F[\tau], \tag{186}$$

millest antud jõu P ja valitud lubatava pinge $[\tau]$ järgi võime määrata detaili vajalikku tugevust tagava ristlõikepindala.

Lubatav pinge $[\tau]$ valitakse igal üksikjuhul, nagu tõmbe ja surve arvutamiselgi, antud materjali puhul olenevalt detaili konkreetsetest töötingimustest. Lubatav lõikepinge on väiksem lubatavast tõmbepingest $[\sigma_t]$. Orienteeruvalt võib arvestada, et plastilistel materjalidel $[\tau]$ moodustab (0,55—0,7) $[\sigma]$, hapratel materjalidel aga (0,8—1) $[\sigma]$.

Näide 107. Näites 106 vaadeldud liite sõrme 5 (joon. 305) läbimõõt $d_2 = 15$ mm. Kui suurt maksimaalset lõikekoormust P võib sõrm taluda, kui lubatav pinge $[\tau] = 900$ kg/cm²?

Koormuse P mõjul võib sõrmel tekkida lõige kahes tasapinnas m_1n_1 ja m_2n_2, mis vastavad aasade ja tõmbitsa 6 kokkupuutepindadele. Seega lõikedeformatsiooni võtavad vastu kaks lõiget pindalaga $\frac{\pi d_2^2}{4}$ kumbki. Järelikult valemi (186) põhjal saame:

$$P = \frac{2\pi \cdot 1{,}5^2}{4} \cdot 900 \approx 3200 \text{ kg}.$$

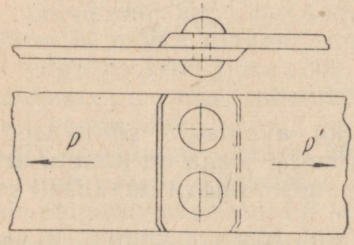
Näide 108. Võll kannab üle pöördemomenti $M_p = 29$ kgm. Määrata lõikepinge prismaatilise kiilu pinnas mn (joon. 308), kui võlli läbimõõt $d = 45$ mm, kiilu laius $b = 14$ mm ja kiilu pikkus $l = 70$ mm.

Lõikepind $F = bl = 14 \cdot 70 = 980$ mm² $= 9{,}8$ cm².

Lõikes mn mõjuv jõud

$$P = M_p : \frac{d}{2} = \frac{2900^*}{2{,}25} \text{ kg ja otsitav pinge}$$

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{2900}{2{,}25 \cdot 9{,}8} = 132 \text{ kg/cm}^2.$$



Joon. 310

Näide 109. Kahte vaheliti needitud teraseriba (kahe neediga Ø 13 mm) tõmmatakse jõuga $P = P' = 2900$ kg (joon. 310). Määrata lõikepinge neetides.

Lõige võib neetides tekkida nende keskristlõikes, kahe kokkuliidetud detaili kokkupuutepinnas. Kahe needi lõikele töötav pindala $F = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4}$ ja otsitav pinge

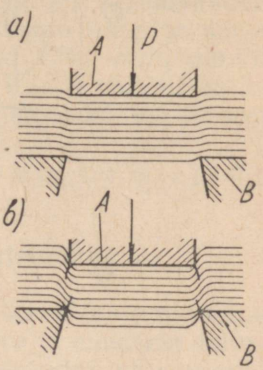
$$\tau = \frac{P}{F} = 2900 : \frac{\pi \cdot 1{,}3^2}{2} = 1094 \text{ kg/cm}^2.$$

§ 222. Augu löömine ja lõikamine kääridega

Lõikedeformatsiooni kasutatakse metallide lõikamisel stantsidega ja kääridega. Erinevalt elastsetest deformatsioonidest detailide töötamisel mitmesugustes konstruktsioonides, toimub lõikamisel deformeerimine kuni lõigatava materjali purustamiseni lõikepinnas.

* Väljendame pöördemomendi kgcm-tes, läbimõõdu aga cm-tes.

Joonisel 311 on skemaatiliselt näidatud metalli deformeerumine augu löömisel stantsiga. Templi A surve P mõjul metall algul painutatakse matriitsi B sisse (joon. 311, *a*), kusjuures metall töötab samaaegselt ka muljumisele. Templi edasisel surumisel metalli saavutab pinge sellise väärtuse, mille juures metallis hakkab tekkima lõige. See väljendub toorikus pragude tekkimises templi ja matriitsi kontuuri järgi (joon. 311, *b*). Sama nähe toimub kääridega lõikamisel.



Joon. 311

Jõud P määratakse valemiga:

$$P = F\sigma, \qquad (187)$$

kus F on lõike pindala (lõike pikkuse l korrutis metalli paksusega δ); σ — metalli lõikepinge, mis määratakse katseliselt.

Näiteks terase jaoks on katseliselt saadud

$$\sigma = 11{,}0 + 0{,}56\,\sigma_b \text{ kg/mm}^2, \qquad (188)$$

kus σ_b on tugevuspiir.

Näide 110. Määrata jõud P, mis on tarvis rakendada templile, et lüüa $\delta = 8$ mm paksusse lehterasesse (tugevuspiir $\sigma_b = 60$ kg/mm^2) auk läbimõõduga $d = 10$ mm.

Pinge $\sigma = 11{,}0 + 0{,}56 \cdot 60 \approx 45$ kg/mm^2. Augu ümbermõõt $l = \pi d = \pi \cdot 10 = 31{,}4$ mm, lõikepindala $F = l\sigma = 31{,}4 \cdot 8 \approx 251$ mm^2 ja vajalik jõud

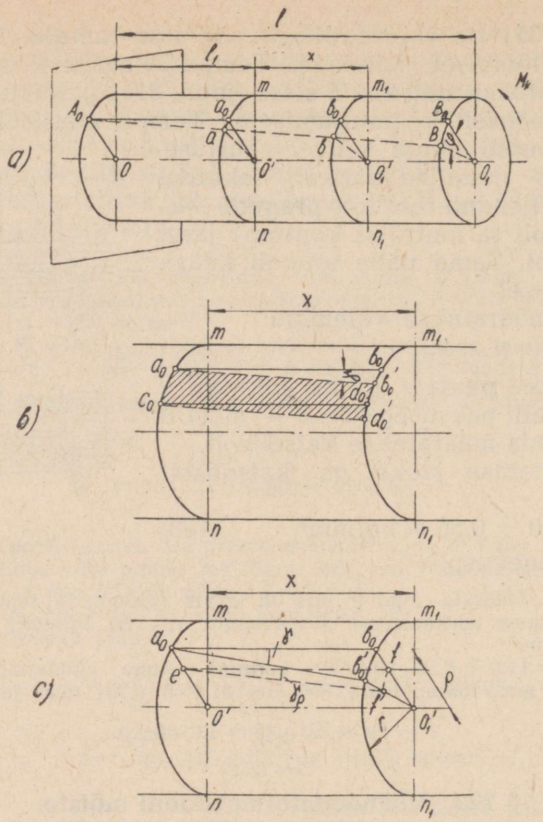
$$P = F\sigma = 251 \cdot 45 \approx 11\,300 \text{ kg}.$$

§ 223. Väändedeformatsiooni mõiste. Väände mõõt

Kujutleme endale silindrit, mille külgpinnale on märgitud mingi moodustaja A_oB_o ja kaks ringjoont, mis asetsevad teineteisest kaugusel x paiknevates ristlõiketasapindades mn ja m_1n_1 (joon. 312, *a*). Olgu silindri vasakpoolne ots kinnitatud liikumatult, parempoolsele otsale olgu aga rakendatud väändemoment M_v, mis tasakaalustub liikumatult kinnitatud otsas mõjuva suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise momendiga. Nende momentide mõjul silinder mõnevõrra deformeerub.

Seda deformeerumist väljendab lõigete mn ja m_1n_1 pöördumine teineteise suhtes ümber silindri telje OO_1; sirge A_oB_o, mis enne deformeerimist oli risti ristlõikepinnaga, muutub kruvijooneks.

Kaks punkti A_o ja B_o, mis enne deformeerimist asetsesid ühisel moodustajal silindri otslõigetes, paigutuvad teineteise suhtes edasi kaare B_oB võrra, millele vastab kesknurk $B_oO_1B = \varphi$. Seda nurka nimetatakse v ä ä n d e n u r g a k s ning see väljendab absoluutset deformatsiooni väändel. Jagades selle nurga väänatava silindri pikkusega l, saame s u h t e l i s e d e f o r m a t s i o o n i n u r g a, mis on taandatud pikkusühikule.



Joon. 312

Tähistades selle nurga tähega Θ, võime järelikult kirjutada:

$$\Theta = \frac{\varphi}{l}. \qquad (189)$$

Kui nurka φ mõõdame kraadides, siis suhteline deformatsioon väändel väljendub kraadides, pikkusühiku (meeter, sentimeeter) kohta. Teades suhtelist nurka Θ, võib määrata ühe lõike suhtelise nurkümberpaigutuse teise suhtes, kui on antud lõigetevaheline kaugus x. Näiteks lõike m_1n_1 pöördumine lõike mn suhtes $\varphi_x = \Theta x$, ja äärmise vasakpoolse lõike suhtes $\Theta(l_1 + x)$.

§ 224. Vääne kui nihke erijuht

Olgu samale silindrile tõmmatud enne deformeerimist kahe lõike mn ja m_1n_1 vahele kaks moodustajat a_ob_o ja c_od_o (joon. 312, *b*). Tasapinnale laotatult on sel teel saadud kujund $a_ob_od_oc_o$ ristkülik. Pole raske näha, et see ristkülik muutub pärast defor-

meerimist parallelogrammiks $a_0b'_0d'_0c_0$. Lõik a_0b_0, mis on risti lõikega mn, kaldub seejuures kõrvale mingi nurga $b_0a_0b'_0$ võrra, punkt b_0 paigutub punkti b'_0, lõik c_0d_0 kaldub kõrvale nurga $\angle d_0c_0d'_0 = \angle b_0a_0b'_0$ võrra, punkt d_0 paigutub aga edasi pikkuse $d_0d'_0 = b_0b'_0$ võrra. Võrreldes seda deformatsiooni varemvaadeldud nihkedeformatsiooniga (joon. 309, *c*), näeme ühte ja sama pilti, ainult selle erinevusega, et antud juhul lõike m_1n_1 punkti ümberpaigutumine toimub mööda ringjoone kaart, varemkäsitletud juhul paigutus aga punkt *B*, samuti nagu lõike *BD* iga teinegi punkt, edasi sirgjooneliselt.

Seega tuleme järeldusele, et v ä ä n e o n n i h k e e r i j u h t.

§ 225. Väändepingete jaotumine ristlõikes

Kuna väändedeformatsiooni iseloomustab ühe lõike nihkumine teise suhtes, siis on ka siin rakendatav pingete ja elastsete deformatsioonide vahel sama sõltuvus, mis on eespool väljendatud valemiga (185) ja nimelt:

$$\tau = G\gamma,$$

kus *G* on nihkemoodul.

Jääb ainult selgitada, kas tangentsiaalpinge τ on ühesugune ristlõike kõigis punktides või muutub see mingi seaduse järgi. Et sellele küsimusele vastata, peab jõudma selgusele, kas suhteline deformatsioon γ on konstantne selle lõike kõigis punktides.

Väljendagu nagu varemgi teineteisest väikesel kaugusel asuvate lõigete *mn* ja m_1n_1 korral absoluutset deformatsiooni kaar $b_0b'_0$ (joon. 312, *c*). Selle kaare pikkuse *s* ning nurga $b_0a_0b'_0$ (väljendatuna kraadides) ja kauguse x vahel kehtib seos:

$$s = b_0b'_0 = \frac{2\pi x}{360}\alpha = \frac{\pi x\alpha}{180}.$$

Asendades suuruse $\frac{\pi\alpha}{180}$ suhtelise nihkega γ, saame:

$$s = \gamma x. \qquad (190)$$

Teisest küljest võime selle kaare pikkuse avaldada lõikest m_1n_1, kus ta vastab kesknurgale $b_0O'_1b'_0$, viimane aga väljendab, nagu selgitati § 223, väändenurka φ_x pikkusel x, s. o. Θx:

$$s = \frac{2\pi r\,\Theta x}{360} = \frac{\pi r}{180}\Theta x,$$

kus *r* on ristlõike raadius.

Võrrutades saadud võrduse parema poole võrdusega (190), saame:

$$\gamma x = \frac{\pi r}{180}\Theta x, \text{ millest } \gamma = \frac{\pi r\Theta}{180}. \qquad (a)$$

Võtame lõike m_1n_1 raadiusel O'_1b_o punkti f, mis asetseb teljest kaugusel ϱ, ja leiame selle punkti kohta absoluutse nihke, mida väljendab kaar ff'. Selle kaare pikkus on võrrandi (190) põhjal

$$s_\rho = \gamma_\rho x, \qquad (b)$$

kus γ_ρ on suhteline nihe valitud punktis. Vaatamata sellele, et pikkus x on endine, γ_ρ ei võrdu γ_ρ-ga, sest $s_\rho \neq s$. Teisest küljest:

$$s_\rho = \frac{2\pi\varrho}{360}\Theta x = \frac{\pi\varrho}{180}\Theta x.$$

Võrrutades selle võrrandi parema poole võrrandiga (b), saame:

$$\gamma_\rho = \frac{\pi\varrho\Theta}{180}.$$

Jagades tuletatud võrrandi võrrandiga (a), saame meid huvitava seose:

$$\frac{\gamma_\rho}{\gamma} = \frac{\varrho}{r}, \qquad (191)$$

s. o. suhtelised deformatsioonid ristlõike mitmesugustes punktides on võrdelised nende punktide kaugustega väänatava silindri teljest.

Tähistades silindri külgpinnal asuvas punktis mõjuva nihkepinge tähega τ, samal pinnal teljest kaugusel ϱ asuvas punktis aga τ_ρ, võime valemi (185) põhjal kirjutada:

$$\tau = G\gamma; \qquad (192)$$

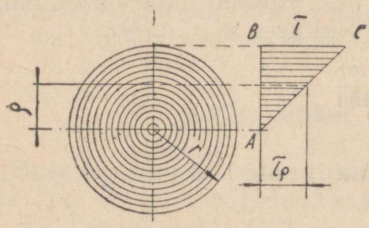
$$\tau_\rho = G\gamma_\rho \qquad (193)$$

ja

$$\frac{\tau_\rho}{\tau} = \frac{\varrho}{r}. \qquad (194)$$

Seega pinge silindri ristlõike mitmesugustes punktides ei ole antud väändemomendi korral konstantne suurus: pinge on võrdeline punkti kaugusega silindri teljest.

Suurim pinge esineb teljest kõige kaugemal asuvais punktides, s. o. silindri pinnal. Nagu esitatust nähtub, on nihkedeformatsioon silindri teljel null, mistõttu ka pinge on siin null. Öeldut võib väljendada graafiliselt, nagu on näidatud joonisel 313. Kujutledes endale lõiget, mis koosneb väga õhukestest rõngastest, saame pingete muutumise seaduse kolmnurga ABC kujul, milles horisontaalsed lõigud mingis mastaabis väljendavad vastava rõnga kõigis punktides mõjuvat pinget.



Joon. 313

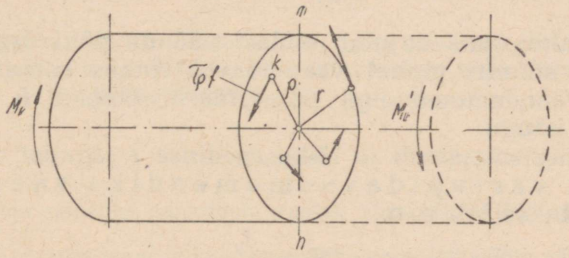
1. Kumb nurkadest γ ja γ_ρ (joon. 312, c) on suurem?

2. Kas absoluutne nihkedeformatsioon on ristlõike mitmesugustes punktides üks ja sama? Aga suhteline deformatsioon?

§ 226. Väände põhivõrrand

Kõigil eelnevatel juhtudel me määrasime kindlaks deformeeritud kehas esinevate pingete ja neid pingeid põhjustavate välisjõudude vahelise seose. Väändel tekivad deformatsioonid väändemomentide mõjul. Tutvume nüüd, kuidas on võimalik määrata väändepingeid, kui need momendid on teada.

Kasutame tavalist lõigete meetodit. Väändugu silinder tema otspindadele rakendatud kahe suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise väändemomendi M_v ja M'_v (joon. 314) mõjul. Lõikame silindrit mõtteliselt tasapinnas *mn* ja, heites kõrvale silindri parempoolse osa, vaatleme, milliste jõudude või momentide mõjul on allesjäänud osa tasakaalus.



Joon. 314

Ühelt poolt on silindri sellele osale rakendatud moment M_v. Vaadeldavas lõikes *mn* mõjuvad elementaarsed nihkejõud, mis on suunalt mõjuvale momendile M_v vastupidised.

Silindri vaadeldava osa tasakaaluks peab nende elementaarsete nihkejõudude momentide summa võrduma välisjõudude momendiga M_v.

Eraldame meelevaldses punktis K lõpmatult väikese pinna f, mille kaugus silindri teljest on ϱ. Tähistades nihkepinge selles punktis τ_ρ, võime sellel pinnal mõjuva elementaarse nihkejõu avaldada kujul $\tau_\rho f$, ning selle jõu momendi silindri telje suhtes kujul $\tau_\rho f\varrho$. Selliseid momente on nii palju, kui palju on lõikes *mn* pinnakesi, millede summa annab lõike kogupinna. Järelikult, nummerdades kõik need pinnakesed, pinnakeste kaugused silindri teljest ja vastavad pinged, saame silindri vaadeldava osa kohta järgmise tasakaaluvõrrandi:

$$M_v = \tau_{\rho_1} f_1 \varrho_1 + \tau_{\rho_2} f_2 \varrho_2 + \tau_{\rho_3} f_3 \varrho_3 + \text{jne.} \qquad \text{(a)}$$

Tähistades nagu varemgi ristlõike ringjoonel, mille raadius on r, mõjuva pinge tähega τ, võime valemi (194) põhjal kirjutada

$$\tau_{\varrho_1} = \tau \frac{\varrho_1}{r}\ ;\ \tau_{\varrho_2} = \tau \frac{\varrho_2}{r}\ ;\ \tau_{\varrho_3} = \tau \frac{\varrho_3}{r}\ \text{jne.},$$

mis pärast asendamist võrrandisse (*a*) annab:

$$M_v = \tau \frac{\varrho_1}{r} f_1 \varrho_1 + \tau \frac{\varrho_2}{r} f_2 \varrho_2 + \tau \frac{\varrho_3}{r} f_3 \varrho_3 + \text{jne.}$$

ehk

$$M_v = \frac{\tau}{r} (f_1 \varrho^2_1 + f_2 \varrho^2_2 + f_3 \varrho^2_3 \ldots + \text{jne.}). \qquad (b)$$

Sulgudes seisev avaldis kujutab endast kõigi elementaarpindade ja nende vastavate kauguste (silindri teljest) ruutude korrutiste summat ning seda nimetatakse lõikepinna polaarinertsmomendiks selle telje suhtes ja tähistatakse I_p.

Seega võrrand (b) avaldub järgmisel kujul:

$$M_v = \frac{I_p}{r} \tau. \qquad (195)$$

See avaldis, mis kujutab endast väände põhivõrrandit, seob väänatava silindri pinnal vaadeldavas lõikes esineva suurima pinge τ väändemomendiga polaarinertsmomendi I_p ja ristlõike raadiuse r kaudu.

Polaarinertsmomendi ja lõike raadiuse r jagatist nimetatakse silindri vastupidavusmomendiks väändel ning see tähistatakse W_p, s. o.

$$W_p = \frac{I_p}{r} \qquad (196)$$

ja

$$M_v = W_p \tau. \qquad (197)$$

Tingituna polaarinertsmomendi I_p arvutusvalemi tuletamise keerukusest anname selle kohe lõplikul kujul:

$$I_p = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}, \qquad (198)$$

kus r — lõikepinna raadius;
d — lõikepinna läbimõõt.

Asetades selle väärtuse valemisse (196), saame:

$$W_p = \frac{\pi r^4}{2r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \qquad (199)$$

ja

$$M_v = \frac{\pi d^3}{16} \tau. \qquad (200)$$

Pole raske veenduda, et selle võrrandi mõlemad pooled avalduvad ühtedes ja samades ühikutes. Kui võtta d sentimeetrites,

τ aga kg/cm^2, siis võrrandi parema poole dimensiooniks on cm^{3}kg/cm^2 = kgcm, millele vastavalt ka vasaku poole dimensiooniks on kgcm.

Teades pinge τ ja väändemomendi vahelist sõltuvust, võime määrata silindri väändenurga φ. Võrrandist (195) saame:

$$\tau = \frac{M_v r}{I_p}.$$

Teisest küljest võrrandi (192) põhjal teame:

$$\tau = G\gamma.$$

Järelikult $G\gamma = \frac{M_v r}{I_p}$, millest $\gamma = \frac{M_v r}{GI_p}$. Asetades siia γ väärtuse võrrandist (a) paragrahvis 225, saame:

$$\frac{\pi r \Theta}{180} = \frac{M_v r}{GI_p}, \text{ millest } \Theta = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_v}{GI_p}. \qquad (201)$$

Nurk Θ kujutab endast kraadides väljendatud ja pikkusühikule taandatud väändenurka. Järelikult kogu väändenurk pikkusel l on:

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{M_v l}{GI_p}. \qquad (202)$$

Nagu näeme, on see nurk seda suurem, mida suuremad on väändemoment ning võlli pikkus ja seda väiksem, mida suuremad on nihkemoodul ning võlli läbimõõt. See on ka täiesti mõistetav.

Küsimusi

1. Millistele ristlõike punktidele vastab võrrandites (195), (197) ja (200) esinev pinge τ?
2. Kuidas muutub pinge τ, kui muuta lõikepinna läbimõõtu väändemomendi jäämisel üheks ja samaks?

Näide 111. Terasvõlli, mille läbimõõt $d = 60$ mm ja pikkus $l = 1500$ mm, väänatakse kahe suuruselt võrdse, kuid suunalt vastupidise momendiga $M_v = M'_v = 8600$ kgcm. Määrata suurim pinge võlli ristlõikes ja väändenurk φ.

Pinge τ võlli pinnal määrame valemiga (200):

$$\tau = \frac{16\, M_v}{\pi d^3} = \frac{16 \cdot 8600}{\pi \cdot 6^3} = 203 \text{ kg/cm}^2.$$

Väändenurga φ kraadides leiame valemiga (202), asetades sellesse pikkuse $l = 150$ cm ja nihkemooduli $G = 800\,000$ kg/cm^2:

$$\varphi = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{8600 \cdot 150 \cdot 2}{800\,000 \cdot \pi \cdot 3^4} \approx 0{,}73^\circ.$$

§ 227. Võllide väändele arvutamise mõiste

Nagu nägime, kujutab pinge τ endast suurimat nihkepinget, mis tekib silindris väändemomendi M_v mõjul. Kui asendada võrrandis (200) pinge τ lubatava nihke- (lõike-) pingega $[\tau]$, siis võib

võrrandit kasutada väändemomenti M_v edasiandva võlli tugevuse arvutamiseks.

Sel juhul avaldub võrrand kujul:

$$M_v = \frac{\pi d^3}{16} [\tau] \approx 0{,}2\, d^3 [\tau], \qquad (203)$$

millest võib määrata nõutud läbimõõdu

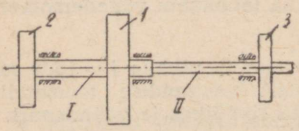
$$d = \sqrt[3]{\frac{M_v}{0{,}2\,[\tau]}}. \qquad (204)$$

Võlli läbimõõdu võib avaldada ka edasiantava võimsuse ja pöörete arvu kaudu, asendades võrrandis $M_v = 71\,620 \frac{N}{n}$ kgcm:

$$d = \sqrt[3]{\frac{71\,620}{0{,}2\,[\tau]} \cdot \frac{N}{n}}. \qquad (205)$$

Mis puutub lubatavasse pingesse $[\tau]$, siis selle suurus valitakse olenevalt materjali tugevusest ja töötingimustest ning see kõigub terasel piirides 200 kuni 1200 kg/cm^2. Näiteks terasest transmissioonvõllide korral võetakse tavaliste töötingimuste korral $[\tau] = 420$ kg/cm^2, lühikestele, mitte tugevasti koormatud transmissioonvõllidele $[\tau] = 600$ kg/cm^2, löökkoormusele töötavatele võllidele aga $[\tau] = 280$ kg/cm^2 jne.

Kirjeldatud viisil tehtud arvutus tagab võlli tugevuse; kuid sageli kontrollitakse spetsiaalarvutuse abil veel saadud läbimõõduga võlli suhtelist väändenurka, mis tavaliselt ei tohi ületada $^1/_4$ kuni $^1/_2{}^\circ$ võlli 1 m pikkuse kohta.



Joon. 315

Raskelt koormatud võllide (näiteks aurumasinate, turbiinide ja sisepõlemismootorite võllid jne.) arvutus on tunduvalt keerukam, sest lisaks väändele töötavad nad ka veel paindele. Vastutusrikaste konstruktsioonide arvutamisel tuleb veel arvestada võlli ristlõike nõrgenemist kiilusoone, erineva läbimõõduga ristlõigete vahelise ülemineku, dünaamilise koormuse ja paljude teiste tegurite tõttu.

Näide 112. Võllile kinnitatud rihmarattale *1* (joon. 315) antakse üle võimsus $N_1 = 18$ HJ pööretel $n = 200$ p/min. See võimsus kantakse kahe rihmaratta abil edasi järgmistele võllidele. Nii annab rihmaratas *2* teisele võllile võimsuse $N_2 = 12$ HJ, rihmaratas *3* aga kolmandale võllile võimsuse $N_3 = 6$ HJ. Milline peab olema võlli läbimõõt, kui lubatav nihkepinge $[\tau] = 400$ kg/cm^2?

Nagu skeemilt selgub, on võlli osa *I* koormatud võimsusega $N_2 = 12$ HJ, millele vastavalt võlli läbimõõt selles osas peab võrrandi (205) põhjal olema:

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{71\,620}{0{,}2 \cdot 400} \cdot \frac{12}{200}} \approx 3{,}8 \text{ cm} = 38 \text{ mm}.$$

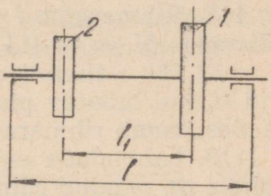
Kuna OCT-is sellist läbimõõtu ei esine, siis võtame lähima suurema läbimõõdu $d_1 = 40$ mm.

Samuti arvutame võlli osa II läbimõõdu:

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{71\,620 \cdot 6}{0{,}2 \cdot 400 \cdot 200}} \approx 3 \text{ cm} = 30 \text{ mm}.$$

§ 228. Kordamisküsimusi

1. Kuidas mõõdetakse nihkedeformatsiooni?
2. Millises tasapinnas mõjuvad nihkepinged, võrreldes välisjõudude mõjumise tasapinnaga?
3. Mida tähistavad nurk γ ja lõik s joonisel 309, *c*?
4. Sõnastage võrrandi (191) sisu. Kas seda võrrandit võib kasutada jäävate deformatsioonide esinemisel?
5. Miks võib väänet käsitleda nihke erijuhuna?
6. Mille poolest erineb vääne lihtnihkest?
7. Mida tähistavad ja mida väljendavad γ, nurk $b_0O_1b'_0$ ja kaar $b_0b'_0$ joonisel 312, *c*?
8. Rihmaratta *1* poolt saadud mehaaniline energia (joon. 316) antakse rihmaratta *2* abil teisele võllile. Millises pikkuses (kas *1* või l_1) väänatakse võlli?

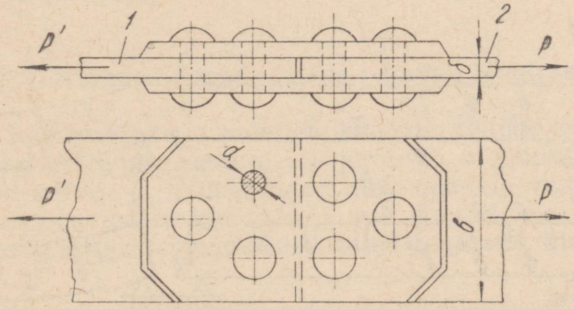


Joon. 316

9. Kuidas on suunatud elementaarjõud $\tau_\rho f$ lõikes *mn* (joon. 314), kui me vaatleme väänatava silindri parempoolset osa, heites mõtteliselt kõrvale vasakpoolse?
10. Kuidas muutuks näite 112 lahendus, kui rihmarattad *1* ja *3* annaksid edasi rihmaratta *2* poolt vastuvõetud võimsust?

§ 229. Harjutusi

113. Neetliites (joon. 317) on ühendatud elementide *1* ja *2* paksus $\delta = 8$ mm, laius $b = 100$ mm ja neetide läbimõõt $d = 13$ mm. Määrata lõikepinge τ needi vardas ja tõmbepinge σ ühendatud elementides, arvestades, et kõik needid on koormatud võrdselt ning välisjõud $P = P' = 4000$ kg.



Joon. 317

Juhis: tuleb arvestada ka nende elementide nõrgenemist neediaukude tagajärjel.

114. Rihmaratas, mille läbimõõt $D = 800$ mm, pöörleb ühtlaselt ringjõu $P = 50$ kg mõjul. Määrata lõikepinge prismaatilises kiilus (joon. 308), kui võlli läbimõõt $d = 50$ mm ning kiilu mõõted: pikkus $l = 80$ mm, laius $b = 16$ mm.

115. Määrata suurim pinge τ eelmises ülesandes toodud võlli lõikes.

116. Määrata suurim pinge, mis mõjub võllis läbimõõduga $d = 45$ mm, kui võll annab pööretel $n = 180$ p/min edasi võimsuse $N = 18$ HJ.

117. Rihmaratas *1* (näide 112, joon. 315), mis võtab vastu sama võimsuse $N_1 = 18$ HJ ja rihmaratas *2*, mis annab edasi võimsust $N = 12$ HJ, vahetati omavahel. Arvutada võlli vajalik läbimõõt *I* ja *II*, kui lubatav pinge on 400 kg/cm^2, ning vastata küsimusele osades, kumb rihmarataste paigutuse variant on otstarbekam.

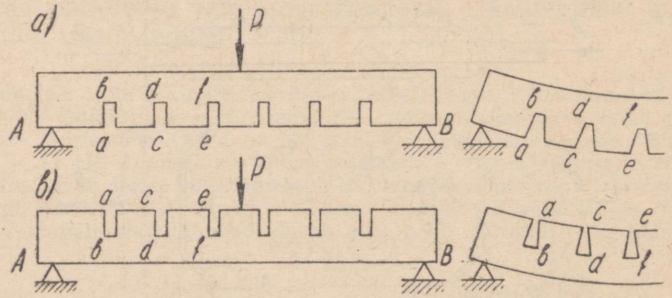
118. Lahendada eelmine ülesanne tingimusel, et rihmaratta *2* kohale on pandud rihmaratas *1* ($N_1 = 18$ HJ), rihmaratta *1* kohale rihmaratas *3* ($N_3 = 6$ HJ), rihmaratta *3* kohale aga rihmaratas *2*.

Kahekümne neljas peatükk

PAINE

§ 230. Paindedeformatsiooni mõiste

Võtame prismaatilise puitprussi, millele teeme mõned sisselõiked *ab, cd, ef* jne. risti prussi teljega ja kuni prussi ristlõike poole kõrguseni. Asetame prussi tugedele *A* ja *B*, nii et väljalõiked jäävad allapoole (joon. 318, *a*), ja koormame prussi jõuga *P*. Selle jõu mõjul pruss paindub, sisselõiked *a, c, e* jne. laienevad, s. o. võtavad trapetsi kuju, nagu see on näidatud samal joonisel paremal. Võrreldes samamõõtelise terve prussiga, s. o. prussiga, millel väljalõiked puuduvad, on vaadeldava prussi läbipaindumine ühe ja sama jõu korral tunduvalt suurem ning purunemine kiirem.

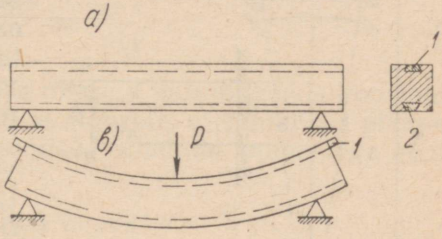


Joon. 318

Väljalõigete kuju muutumise iseloom viitab sellele, et prussi alumised, kumerdatud osa kiud[1] on tõmmatud. Selles osas olevad väljalõiked nõrgendavad prussi tugevust.

Kordame nüüd sama katset, asetades prussi väljalõigetega ülespoole. Koormates prussi jälle mingi jõuga *P*, märkame, et väljalõigete välimised servad *a*, *c*, *e* jne. lähenevad, nagu see on näidatud paremal ning jõu *P* mingil väärtusel puutuvad kokku, millisest momendist alates prussi vastupanu edasisele läbipaindumisele kasvab tunduvalt. Kõrvaldame nüüd koormuse ja asetame prussi väljalõigetesse täpselt nende laiusele vastava paksusega plaadikesed. Seda tehes näeme, et pruss avaldab nüüd jõu *P* mõjule just samasugust vastupanu nagu terve, ilma väljalõigeteta prusski. Kui püüame plaadikesi selle jõu mõjul deformeeritud prussi väljalõigetest kõrvaldada, veendume, et need on tugevasti kinni pigistatud.

Üeldu põhjal võime teha järelduse, et prussi nõgusal poolel olevad kiud on surutud.



Joon. 319

Et endile paremini selgitada kirjeldatud nähtuse olemust, teeme veel ühe katse teistsuguse puitprussiga. Oletame, et prussi vastastahkudele on lõigatud kaks kalasabakujulise ristlõikega pikisoont (joon. 319, *a*), milledesse on lükatud prussi pikkused ja soonte ristlõikega liistud. Deformeerimata olekus ühtivad prussi ja liistude otspinnad. Pärast prussi painutamist jõuga *P* (joon. 319, *b*) aga näeme, et liistu *1* otsad ulatuvad prussist välja, liistu *2* otsad on aga tõmbunud tagasi soonte sisse. Sellest võime jälle teha järelduse, et prussi nõgusa külje poolsed kiud on lühenenud, kumera külje poolsed kiud aga pikenenud.

Järelikult painutatud prussis on nõgususe pool kiud surutud, kumeruse pool aga tõmmatud.

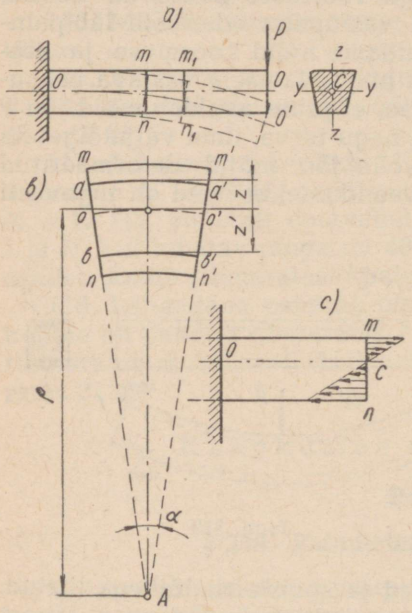
§ 231. Normaalpingete jaotus paindel. Neutraalkiht

Niisiis katse näitab, et paindele kaasneb ühtede kiudude lühenemine ning teiste pikenemine. Siit järeldub, et painutatavas prussis tekivad surve- ja tõmbepinged ning nendele vastavad deformatsioonid. Et vastata küsimusele, kui suured on need pinged ristlõike mitmesugustes punktides, tuleb selgitada, kuidas muutub

[1] Kiududeks me nimetame võlli, prussi jne. pikki elemente, mille ristlõikemõõted on erakordselt väikesed.

deformatsioon prussi mitmesugustes kiududes, mis asetsevad prussi ristlõike suhtes erinevatel kõrgustel.

Olgu ühest otsast jäigalt kinnitatud pruss koormatud teises otsas jõuga *P*, mis asetseb prussi sümmeetriatasapinnas *zz* (joon. 320, *a*). Selle jõu toimel pruss paindub, tema telg kõverdub, kuid jääb samasse sümmeetriatasapinda.



Joon. 320

Olgu prussi külgtahule enne jõu rakendamist tõmmatud kaks prussi teljega risti olevat ning teineteisest meelevaldsel kaugusel asetsevat sirgjoont *mn* ja *m′n′*. Katse näitab, et pärast prussi deformeerimist on need lõigud endiselt sirgjoonelised, kuid mitte enam paralleelsed. See tähendab, et ristlõikepinnad jäävad deformeerimisel tasapinnalisteks, kuid pöörduvad teineteise suhtes mingi nurga võrra.

Võtame kaks teineteisele väga lähedast lõiget *mn* ja *m′n′* (joon. 320, *b*). Pärast deformeerimist moodustavad need lõiked omavahel vastavalt väikese nurga $mAm' = \alpha$. Nagu eespoolöeldust selgub, on kumeruse pool asetsevad kiud (näiteks kiud, mis on ühes ja samas tasapinnas kiududega *mm′*, *aa′* jne.) tõmmatud, kiududega *nn′*, *bb′* jne. ühes tasapinnas olevad kiud aga surutud, kusjuures kiud on tõmmatud või surutud seda vähem, mida kaugemal nad asetsevad kumerast või nõgusast pinnast. Järelikult peab prussis olema kiudusid, mis pole ei tõmmatud ega surutud. Sellised kiud on painutatud prussis tõesti olemas. Need asetsevad pinnas *yy* (joon. 320, *a*, ristlõige), milles asetseb ka ristlõike[1] raskuskeset *C* läbiv telg *OO*. Pinda, milles asetsevad need deformeerimata kiud, nimetatakse n e u t r a a l k i h i k s.

Nüüd võime öelda, et kõik kiud, mis asetsevad neutraalkihist kumeruse pool, on tõmmatud, mis asetsevad aga nõgususe pool — surutud.

Selgitame nüüd, kuidas muutub kiudude deformeerimine, mis asetsevad mitmesugustes neutraalkihiga paralleelsetes pindades. Võtame prussi deformeeritud osas *mm′n′n* (joon. 320, *b*) kiu *aa′*, mis asetseb neutraalkihist *oo′* kaugusel *z*. Kuna neutraalkiht ei ole tõmmatud ega surutud, siis selle kiu väga väikese lõigu *aa′*

[1] Nagu näeme, on see tasapind risti sümmeetriatasapinnaga *zz*.

(lõigete mn ja $m'n'$ vahel) pikkus enne deformatsiooni võrdub oo'. Järelikult selle lõigu absoluutne pikenemine on $aa' - oo'$.

Tähistades nende lõigete vahelise nurga mAm' tähega α, saame $aa' - oo' = \frac{2\pi(\varrho + z)\alpha}{360} - \frac{2\pi\varrho\alpha}{360} = \frac{\pi\alpha}{180} z$, kus ϱ on väga väikese kaare oo' raadius.

Järelikult selle lõigu suhteline pikenemine

$$\varepsilon = \frac{aa' - oo'}{oo'} = \frac{\pi\alpha}{180} z : \frac{\pi\alpha}{180} \varrho = \frac{z}{\varrho}. \qquad (a)$$

Tehes sama arvutuse neutraalkihist kaugusel z' asetseva surutud kiu väga väikese lõigu bb' kohta, saame selle lõigu suhteliseks lühenemiseks:

$$\frac{oo' - bb'}{oo''} = \frac{z'}{\varrho}. \qquad (b)$$

Raadiuse ϱ võib väga väikese nurga α juures lugeda konstantseks suuruseks, mistõttu tuleme järeldusele, et suhtelised pikenemised ja lühenemised on võrdelised kiudude kaugustega neutraalkihist.

Võrrandid *(a)* ja *(b)* võime liita üheks:

$$\varepsilon = \frac{z}{\varrho}. \qquad (c)$$

Kuna elastsete deformatsioonide piirides on pinged võrdelised suhteliste pikenemistega, saame:

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{z}{\varrho}, \qquad (206)$$

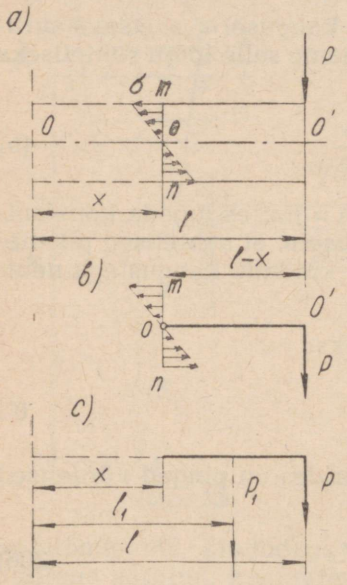
kus E on pikielastsusmoodul, mille loeme tõmbel ja survel üheks ja samaks.

Siit näeme, et antud lõikes on pinged võrdelised kiudude kaugusega neutraalkihist. Suurimad pinged esinevad järelikult neutraalkihist kõige kaugemal asetsevates kiududes (deformeeritud prussi kumeral ja nõgusal pinnal). Graafiliselt kujutatakse lõikes mn mõjuvaid normaalpingeid joonisel 320, *c* näidatud viisil, eemaldades mõtteliselt prussi parempoolse osa.

Lõpuks märgime ära veel ühe tähtsa asjaolu. Kuna neutraalkihis olevad kiud prussi paindumisel oma pikkust ei muuda, siis sellest järeldub, et ristlõiked pöörduvad telje oo' ümber jne. (joon. 320, *b*), s. o. sirgete ümber, mida mööda need lõiked ristuvad neutraalkihiga. Iga sellist sirget nimetatakse vaadeldava lõike neutraalteljeks; nad on risti sümmeetriatasapinnaga (telg yy ristlõikel joonisel 320, *a*).

§ 232. Painde põhivõrrandi mõiste

Selleks et määrata valemiga (206) normaalpinget σ paindunud prussi ristlõike mingis punktis, peame teadma peale antud materjali elastsusmooduli E ja selle punkti kauguse neutraalkihist z veel ka ristlõike raskuskeset läbiva kõverdunud pikitelje lühikese lõigu oo' raadiust ϱ. Viimane aga ei ole meil teada. Seepärast tuleb meil see võrrand avaldada kujul, kus raadiuse asemel esinevad prussi painutavad jõud. Jätkame sama prussi deformatsiooni vaatlemist, kasutades seejuures meile juba tuttavat lõigete meetodit.



Joon. 321

Teeme prussile mõtteliselt kinnituskohast kaugusel x lõike mn (joon. 321, *a*) ja heidame kõrvale prussi vasakpoolse osa[1]. Allesjäänud parempoolne osa on tasakaalus ühelt poolt välisjõu P, teiselt poolt aga vaadeldava lõikega mn ristuvate sisenormaaljõudude mõjul. Tulemusena saame seega kolmeõlgse kangi $mnoO'$ (joon. 321, *b*) skeemi.

Nagu eelmises paragrahvis selgitati, pöördub lõige mn deformeerimisel ümber punkti O läbiva neutraaltelje. Et kirjutada sellise kangi tasakaalutingimust, peame võrrutama neutraaltelje suhtes võetud sisejõudude momentide algebralise summa välisjõu P momendiga sama telje suhtes. Võttes lõikes mn väga väikese pinna f_1 kaugusel z_1 neutraalteljest, saame selles pinnas mõjuva jõu momendiks $\sigma_1 f_1 z_1$, kõikide momentide algebraliseks summaks aga $\sigma_1 f_1 z_1 + \sigma_2 f_2 z_2 + \sigma_3 f_3 z_3$ jne.

Välisjõudude momenti vaadeldava lõike neutraaltelje suhtes nimetatakse selle lõike p a i n d e m o m e n d i k s. Tähistades nimetatud momendi tähega M, saame:

$$M = \sigma_1 f_1 z_1 + \sigma_2 f_2 z_2 + \sigma_3 f_3 z_3 + \ldots \text{ jne.}$$

Kasutades valemit (206), võime saadud võrrandi kirjutada kujul:

$$M = \frac{E}{\varrho} f_1 z^2_1 + \frac{E}{\varrho} f_2 z^2_2 + \frac{E}{\varrho} f_3 z^2_3 + \ldots \text{ jne.} =$$
$$= \frac{E}{\varrho} (f_1 z^2_1 + f_2 z^2_2 + f_3 z^2_3 + \ldots \text{ jne.}).$$

[1] Kuna elastsed deformatsioonid on väga väikesed, siis kujutame prussi lihtsuse pärast sirgena.

Sulgudes olevat summat nimetatakse lõike inertsmomendiks neutraaltelje suhtes (s. o. telje yy suhtes joonisel 320, *a*) ning seda tähistatakse tähega *I*. Seega

$$M = \frac{EI}{\varrho}.$$

Võrrandist (206) saame:

$$\frac{E}{\varrho} = \frac{\sigma}{z}.$$

Tehes selle asenduse võrrandis (a), saame lõplikult

$$M = \frac{I}{z}\sigma, \qquad (207)$$

millest

$$\sigma = \frac{Mz}{I}. \qquad (207\ a)$$

Seega, kui paindemoment ja prussi ristlõike inertsmoment on teada, võime määrata normaalpinged selle lõike meelevaldses punktis, mis asetseb neutraalteljest kaugusel *z*.

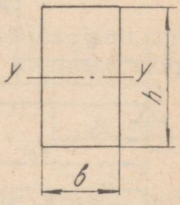
Nagu näeme, on pinge seda suurem, mida suuremad on moment *M* ja kaugus *z*. See pinge on igas lõikes maksimaalne kauguse *z* suurimal väärtusel, s. o. punktides, mis asetsevad neutraalteljest kõige kaugemal. Neutraalkihis ($z = 0$) on pinge null, nagu see peabki olema, sest neutraalkihis deformatsioonid puuduvad.

Valemid (207) ja (207 a) võib avaldada teisel kujul. Inertsmomendi ja neutraalkihist kõige kaugemal asuva punkti kauguse jagatist nimetatakse v a s t u p i d a v u s m o m e n d i k s *W*. Sel juhul valem (207) kirjutatakse kujul:

$$M = W\sigma, \qquad (208)$$

valem (207 a) aga kujul

$$\sigma = \frac{M}{W}. \qquad (208\ a)$$



Joon. 322

Inertsmomendi väärtus nagu vastupidavusmomendi omagi sõltub ristlõike mõõdetest ja kujust[1].

Näiteks ristkülikukujulisel ristlõikel, kui selle alus on *b* ja kõrgus *h* (joon. 322), on inertsmoment telje yy suhtes $I = \frac{bh^3}{12}$, millele vastavalt

$$z = \frac{h}{2} \text{ ja } W = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \qquad (209)$$

[1] Tehnika käsiraamatutes on antud valemid painde ja väände vastupidavusmomentide arvutamiseks mitmesuguse kujuga ristlõigete korral.

Ringikujulisel ristlõikel

$$I = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64}, \text{ kuna aga } z = r = \frac{d}{2},$$

siis

$$W = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (210)$$

Asetades väärtuse W valemisse (208 a), saame suurima pinge vaadeldavas lõikes.

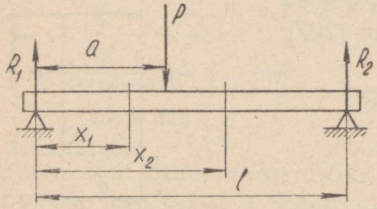
Asetades samasse valemisse paindemomendi kilogramm-meetrites ning võttes ristlõike mõõted sentimeetrites, saame pinge σ kgcm/cm^3 = kg/cm^2, nagu see peabki olema.

§ 233. Paindemomendi mõiste

Nagu äsjaöeldust selgub, on pinge määramiseks paindunud tala meelevaldses ristlõikes tarvis veel teada paindemomenti, s. o. välisjõudude momenti vaadeldava lõike neutraaltelje suhtes.

Vaatleme mõningaid lihtsaid näiteid.

Tähistades lõike kauguse tala kinnituspinnast tähega x (joon. 321, *a*), saame jõu P momendiks lõike *mn* telje O suhtes $M = P(l - x)$. Vaadeldes järjest uusi lõikeid, mis asetsevad lõikest *mn* vasakul, näeme, et õlg $l - x$ suureneb, millele vastavalt suureneb ka paindemoment. Viimane saavutab maksimaalse väärtuse nähtavasti kinnituslõikes O, kus $x = 0$. Seega varemöeldu põhjal on pinge maksimaalne äärmises vasakpoolses lõikes ning see määratakse valemiga (208 a):



Joon. 323

$$\sigma = \frac{M}{W} = \frac{Pl}{W}.$$

Kui prussil on ristkülikukujuline ristlõige, siis paindepinge

$$\sigma = Pl : \frac{bh^2}{6} = \frac{6Pl}{bh^2}. \quad (211)$$

Lõiget, milles normaalpinged saavutavad suurima väärtuse, nimetatakse o h t l i k u k s l õ i k e k s.

Olgu vaadeldavale prussile peale esialgse jõu P rakendatud kinnituslõikest kaugusel l_1 veel üks jõud P_1 (joon. 321, *c*). Sel juhul paindemoment lõikes *mn* võrdub staatika põhjal mõlema jõu momentide summaga, s. o.

$$M = P(l - x) + P_1(l_1 - x).$$

Nagu näeme, on moment jälle seda suurem, mida lähemale minna kinnituskohale.

Määrame nüüd paindemomendi kahel toel asetseva tala mitmesugustes lõigetes (joon. 323). Võtame lõike, mis asetseb vasakust toest kaugusel x_1. Jättes kõrvale sellest lõikest paremale jääva talaosa, saame paindemomendiks $M_{x1} = R_1 x_1$, kus R_1 on vasakpoolne reaktsioon. Kui $x_1 = 0$, siis võrdub ka see moment nulliga, s. o. vasaku toe kohal talas mingit paindemomenti ei esine. Vastavalt kauguse x_1 suurenemisele suureneb ka moment $R_1 x_1$ ning väärtusel $x_1 = a$ moment:

$$M_a = R_1 a.$$

Kuna reaktsioon $R_1 = P - R_2$, võime kirjutada:

$$M_a = (P - R_2)\, a = Pa - R_2 a. \qquad \text{(a)}$$

Võtame nüüd lõike, mis asetseb jõu P rakenduspunktist paremal, s. o. $x_2 > a$. Paindemoment selles lõikes:

$$M_{x2} = R_1 x_2 - P\,(x_2 - a) = R_1 x_2 - P x_2 + Pa = \\ = Pa - (P - R_1)\, x_2 = Pa - R_2 x_2.$$

Võrreldes saadud võrrandit võrrandiga (a) näeme, et $M_{x2} < M_a$. Seega, alates jõu P rakenduslõikest paindemoment väheneb ning paremal toel, s. o. kui $x_2 = l$, moment võrdub $M_l = Pa - R_2 l = 0$, sest tasakaalu korral vasaku toe (nagu iga teisegi punkti) suhtes võetud momentide algebraline summa võrdub nulliga.

Niisiis vaadeldaval talal on paindemoment tugede kohal null, tugede vahel see aga suureneb, vastavalt sellele, mis määral me läheneme välisjõu P mõjumise lõikele, kus paindemoment on maksimaalne.

Järelikult see on ohtlik lõige, sest selles esinevad maksimaalsed normaalpinged.

Kui talal on ristkülikukujuline ristlõige, määratakse suurimad tõmbe- ja survepinged (alumises kumerdunud ja ülemises nõgusas pinnas) valemiga (208 a):

$$\sigma = R_1 a \,:\, \frac{bh^2}{6} = \frac{6R_1 a}{bh^2} = \frac{6(P - R_2)a}{bh^2}. \qquad (212)$$

Märgime, et kõik eespoolöeldu kehtib painde korral, mille põhjustavad tala mitmesugustes lõigetes rakendatud välisjõud, ilma tala omakaalu arvestamata.

Näide 113. Kahel toel asetseval puittalal on kogu tema pikkuses ristkülikukujuline ristlõige mõõdetega $b = 140$ mm ja $h = 200$ mm (joon. 323). Määrata suurim pinge ohtlikus lõikes, kui tala on vasakust toest kaugusel $a = 1{,}5$ m koormatud jõuga $P = 1$ t. Tugede vahekaugus $l = 4$ m.

Arvutame toereaktsiooni R_1, võrrutades selleks nulliga parempoolse toe suhtes võetud välisjõudude momentide algebralise summa.

$R_1 l - P\,(l - a) = 0$, millest $R_1 = \frac{P(l-a)}{l} = \frac{1000\,(400 - 150)}{400} = 625$ kg.

Tehes asenduse võrrandis (212), saame:

$$\sigma = \frac{6 \cdot 625 \cdot 150}{14 \cdot 20^2} = 100{,}5 \text{ kg/cm}^2.$$

Näide 114. Näites 13 toodud tööprotsessis (joon. 38) lõikab metalli treitera, mis on kinnitatud täisnurkse ristlõikega terahoidjasse. Viimase mõõted on $b = 30$ mm ja $h = 40$ mm (joon. 322). Määrata suurim normaalpinge terahoidja ohtlikus lõikes, kasutades selleks nimetatud näites toodud andmeid.

Suurim paindemoment $M = P_2 l = 5400$ kgcm.

Valemi (212) abil saame:

$$\sigma = M : \frac{bh^2}{6} = \frac{5400 \cdot 6}{3 \cdot 4^2} = 675 \text{ kg/cm}^2.$$

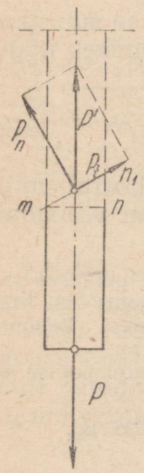
§ 234. Kordamisküsimusi

1. Kuidas on normaalpinged suunatud kõvera prussi lõike suhtes, mis on risti prussi teljega?
2. Kuidas on normaalpinged suunatud lõikes *mn* (joon. 320, c), kui vaatleme prussi parempoolset osa (heites mõttes kõrvale vasakpoolse)?
3. Kas normaalpinged joonisel 320, *a* näidatud paindunud prussi lõigetes *mn* ja m_1n_1 on ühesuurused?
4. Mida nimetatakse neutraalkihiks ja mida neutraalteljeks? Kuidas nad teineteise suhtes asetsevad?
5. Prussile (joon. 321, *c*) on jõu P_1 asemel (näidatud kriipsjoonega) rakendatud sellega suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine jõud. Kuidas muutuvad suurimad pinged ohtlikus lõikes?
6. Prussil on ristkülikukujuline ristlõige (joon. 322). Millisel juhul on pruss tugevam, kas asetatuna tugedele laiema *(h)* või kitsama *(b)* küljega?
7. Miks tuleb treitera kinnitada võimalikult väikese väljaulatusega?

Kahekümne viies peatükk

ÜLDMÕISTEID LIITDEFORMATSIOONIST

§ 235. Liht- ja liitdeformatsioonid



Joon. 324

Eespool käsitlesime nn. lihtdeformatsioonide põhiliike, s. o. tõmmet, survet, nihet, väänet ja painet.

Kuid ei tule mõelda, et mitmesuguste konstruktsioonide detailid töötavad igal üksikjuhul ainult ühele loetletud deformatsioonidest. Väga sageli on detailile mõjuvad jõud rakendatud selliselt, et üheaegselt esineb mitu deformatsiooni, millele kaasnevad ka vastavad kindlaksmääratud pinged. Viimaseid tulebki detailide tugevusarvutusel arvestada.

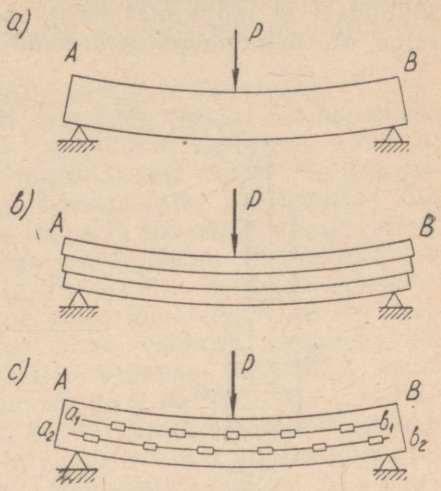
Selliseid deformatsioone, erinevalt lihtdeformatsioonidest, nimetatakse liitdeformatsioonideks.

Siinjuures tuleb aga märkida, et ka lihtdeformatsioonid ei esine üksteisest isoleeritult. Nii näiteks teame, et väändele kaasub nihe jne.

Pöördume uuesti tõmbedeformatsiooni juurde. Olgu prussile rakendatud selle raskuskeskmes jõud P (joon. 324). Teeme prussile mingi ristlõikega *mn* kaldu oleva lõike mn_1. Heites mõtteliselt

kõrvale prussi ülemise osa, saame sisejõu P', mis on suuruselt võrdne, kuid suunalt vastupidine jõuga P. Jagame jõu P' komponentideks, milledest P_n mõjub risti lõikele mn_1, P_t aga lõike pinnas. Seda tehes näeme, et peale tõmbedeformatsiooni esineb prussi kaldlõigetes veel nihkedeformatsioon.

Kujutleme endile kahel toel asuvat ristkülikukujulise ristlõikega puittala (joon. 325, *a*). Jõu P mõjul tala paindub ning selle otspinnad A ja B pöörduvad teineteise suhtes. Oletame nüüd, et tala on saetud pikuti kolmeks lauaks. Asetades need samuti tugedele ning rakendades nendele sama jõu P (joon. 325, b), näeme, et läbipaindumine on suurem ning tala otsad A ja B pole enam tasapinnalised, vaid astmelised. Sellest võime järeldada, et lauad, paindudes koormuse mõjul, libisevad kokkupuutepindadel üksteise suhtes ning nende vastupanu paindele on ühel ja samal koormusel väiksem. Lõikame nüüd laudadesse ristsooned ning asetame viimastesse tihedalt kiilud, nagu see skemaatiliselt on näidatud joonisel 325, *c*. Jälgides nüüd tala käitumist sama jõu P mõjul, veendume, et läbipaine on täpselt sama mis tervel talalgi (joon. 325, *a*) ning laudade otsad jäävad ühte tasapinda. Sellest järeldame, et painutatud talas esinevad nihkepinged. Kui kiilud ei ole küllalt tugevad, siis lõigatakse need mööda pindasid a_1b_1 ja a_2b_2 läbi. Täpselt sama kehtib ka metalltala kohta, mis ristlõike kõrguse h suhtes koosneb üksikutest kokkuneeditud lehtedest. Taolises talas töötavad needid üksikute lehtede kokkupuutepindades lõikele. Järelikult esineb paindel üheaegselt tõmme, surve ja nihe[1].



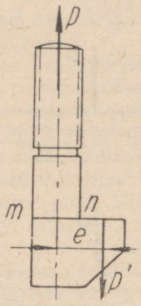
Joon. 325

§ 236. Tõmme (surve) ja paine

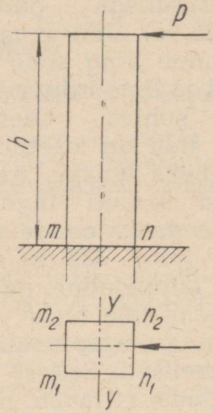
Joonisel 326 on näidatud konkspeaga polt. Kui selle poldi abil pingutada liide kokku jõuga P, mõjub sama jõud ka poldis. Teiselt poolt mõjub poldi peale liidetava detaili poolt reaktsioon P', mis suuruselt on võrdne jõuga P, kuid on viimasele suunalt vastupidine. Seega töötab polt samaaegselt ka paindele, tingituna jõupaari P ja P' momendist $P'e$, kus e on ekstsentrilisus, s. o.

[1] Ainult erijuhtudel (nn. puhtal paindel), nagu näitavad katsed, nihe puudub.

detaili poolt poldi peale mõjuvate elementaarjõudude resultantjõu P' rakenduspunkti kaugus poldi teljest. Tõmbe ja painde üheaegne esinemine suurendab märkimisväärselt poldis mõjuvaid tõmbepingeid, ning need on seda suuremad, mida suurem on momendi õlg e. Siit näeme, et ekstsentrilisel tõmbel, mil üks jõududest ei mõju piki sirgjoonelise varda raskuskeset läbivat telge, on tõmbepinged suuremad kui lihttõmbel.



Joon. 326



Joon. 327

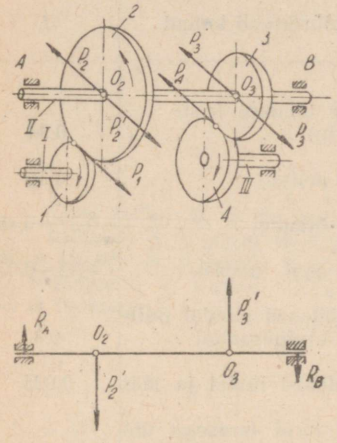
Tõmbe ja painde liitdeformatsioonile on analoogiline surve ja painde liitdeformatsioon. Oletame, et ristkülikukujulise ristlõikega sambale, mille kõrgus on h, on ülemises lõikes rakendatud jõud P (joon. 327). Viimane mõjub sümmeetriatasapinnas ning painutab sammast. Paindemoment saavutab maksimaalse väärtuse Ph lõikes mn, kus neutraaltelje yy ja serva n_1n_2 vahel mõjuvad tõmbepinged, neutraaltelje yy ja serva m_1m_2 vahel aga survepinged. Peale selle mõjuvad samas lõikes samba omakaalust tingitud ühtlaselt jaotatud survepinged, mis suuruselt on võrdsed samba kaalu ja ristlõikepindala jagatisega. Seega telje yy ja serva m_1m_2 vahel mõlemad pinged liituvad. Telje yy ja serva n_1n_2 vahel võrdub summaarne pinge aga mõlema pinge vahega, ning olenevalt sellest, kumb pingetest on suurem, mõjuvad siin kas tõmbe- või survepinged. Et vältida tõmbepingete tekkimist (millele kivipost töötab halvemini kui survele), tuleb posti ristlõikemõõted arvutada selliselt, et paindest tekitatud tõmbepinged servas n_1n_2 ei ületaks omakaalust tingitud survepingeid.

§ 237. Vääne ja paine

Väänet koos paindega esineb väga palju. Andes edasi mingit kindlat väändemomenti esineb võllis samal ajal ka paine, mida

põhjustab võlli omakaal, võllil olevate rihmarataste või hammasrataste kaal, rihmade tõmme või hammasrataste poolt edasiantavad ringjõud.

Näitena vaatleme võlli *II* tööd (joon. 328, *a*), millele kinnitatud kahest hammasrattast *2* ja *3* esimene saab pöörlemise võllile *I* istatud hammasrattalt *1*, teine annab aga pöörlemise võllile *III* istatud hammasrattale *4*.



Joon. 328

Väljendagu hammasrattal *2* mõjuvat ringjõudu vektor P_1, hammasratta *3* poolt hammasrattale *4* mõjuvat ringjõudu aga vektor P_4. Rakendame hammasratta *2* tsentrisse O_2 kaks jõuga P_1 suuruselt võrdset ning sellega paralleelset vastassuunalist jõudu P_2 ja P'_2. Selle tulemusena saame kolm jõudu P_1, P_2 ja P'_2, milledest kaks esimest moodustavad jõupaari. Viimase õlg on võrdne hammasratta *2* algringjoone raadiusega r_2. Järelikult jõupaari moment on $P_1 r_2$, mis võrdub võllile *II* edasiantava väändemomendiga. Mis puutub kolmandasse jõusse P'_2, siis mõjub see võlli telgpinnas.

Läheme üle hammasratta *3* juurde. Veetava hammasratta *4* poolt mõjub sellele jõud P_4, mis suuruselt võrdub võllil *II* mõjuva väändemomendi ja hammasratta *3* raadiuse r_3 jagatisega, s. o. $\frac{P_1 r_2}{r_3}$. Rakendame nüüd selle hammasratta tsentrisse O_3 kaks teineteisele vastupidist jõudu P_3 ja P'_3, mis on suuruselt võrdsed ning paralleelsed jõuga P_4. Tulemusena saame jällegi jõupaari P_4 ja P_3, mille moment suuruselt võrdub momendiga $P_1 r_2$, kuid on suunalt sellele vastupidine. Ülejäänud jõud P'_3 on rakendatud võllile lõikes O_3.

Sel teel me selgitasime, et võllile *II* mõjub lõigete O_2 ja O_3 vahel väändemoment $M_v = P_1 r_2 = P_4 r_3$ ja nendes lõigetes kaks jõudu P'_2 ja P'_3. Antud juhul on mõlemad need jõud paralleelsed. Joonisel 328, *b* on skemaatiliselt näidatud võllile rakendatud jõudude süsteem: jõud P'_2 ja P'_3 ning laagrite reaktsioonid R_A ja R_B. Nende jõudude mõjul võlli painutatakse kogu laagritevahelises pikkuses, kuid lisaks sellele väänatakse veel pikkusel O_2O_3.

Tugevusõpetuse ja masinaelementide üksikasjalisemas kursuses antakse raskelt koormatud võllide arvutusmeetodid, milledes arvestatakse väände- ja paindemomentidest põhjustatud pingeid. Juhul aga, kui paindemoment on väändemomendiga võrreldes tähtsusetu (näiteks transmissioonivõllidel), jäetakse paindemoment arvesse võtmata ning arvutus tehakse ainult väändedeformatsiooni järgi, andes ette väiksema lubatava pinge.

Lisa I

Liugehõõrdetegur *f* (kuivadel kehadel)

Hõõrduvad kehad	*f*	Hõõrduvad kehad	*f*
Pehme teras pehmel terasel	0,14—0,19	Tamm tammel (risti kiudu)	0,34
Malm malmil	0,16	Nahk malmil	0,56
Pronks pronksil . . .	0,20	Nahk tammel	0,37—0,48
Pehme teras pronksil .	0,18	Teras jääl (uisud) . .	0,02—0,03
Malm pronksil	0,21	Terasjalased siledal puit- või kivipõrandal . .	0,4
Malm tammel	0,49	Puitjalased lumel ja jääl	0,035
Puu puul	0,32—0,60	Sama, kuid terasega üle löödud	0,02
Tamm tammel (piki kiudu)	0,48		

Lisa II

Veerehõõrdetegur *k* sentimeetrites

Hõõrduvad kehad	*k*	Hõõrduvad kehad	*k*
Puu puul	0,05—0,08	Terasest vagunirattad rööbastel	0,05
Teras terasel	0,005		
Teraskuul terasel . .	0,0005—0,001	Sama puul	0,15—0,25

Lisa III

Hammasrataste moodulid OCT 1597 järgi

0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 1; 1,25; 1,5; 1,75; 2; 2,25; 2,5; (2,75); 3; (3,25); 3,5; (3,75); 4; (4,25); 4,5; 5,5; 6; 6,5; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 18; 20; 22; 26; 28; 30; 33; 36; 39; 42; 45; 50.

Sulgudes olevaid mooduleid võimalust mööda mitte kasutada.

Koonilistel hammasratastel määratakse moodul suurema läbimõõdu järgi.

Lisa IV

Kreeka tähestik

A, α (alfa), B, β (beeta), Γ, γ (gamma), Δ, δ (delta), E, ε (epsilon), Z, ζ (dzeeta), H, η (eeta), Θ, ϑ (deeta), I, ι (ioota), K, κ (kappa), Λ, λ (lambda), M, μ (müü), N, ν (nüü), Ξ, ξ (ksii), O, o (omikron), Π, π (pii), P, ϱ (roo), Σ, σ (sigma), T, τ (tau), Υ, υ (üpsilon), Φ, φ (fii), X, χ (hii), Ψ, ψ (psii), Ω, ω (oomega).

HARJUTUSTE VASTUSED

Staatika

4. 141 kg; 5. $P = 429$; 6. $P_x = 245$ kg; $P_y = 350$ kg; 7. Varrast AB surutakse jõuga 600 kg, varrast BC tõmmatakse jõuga 1082 kg; 8. Varrast CB tõmmatakse jõuga 150 kg, varrast AB jõuga 250 kg; 9. Süsteem on tasakaalus; 10. 90 mm kaugusel jõu P_1 mõjumissirgest; 11. Jõu P_2 mõjumissirgest 60 mm paremal; 12. $R = 300$ kg (suunatud alla) ning mõjub äärmisest vasakpoolsest jõust 1583 mm kaugusel; 13. Jõupaar momendiga 120 kgm; 14. $R_A = 190$ kg ja $R_B = 800$ kg, mõlemad reaktsioonid on suunatud üles; 15. $P_3 = 34{,}5$ kg, $R = 214{,}5$ kg; 22. 2,515 kg; 23. Ümberlükkav moment 727,4 kgm, taastumistegur 1,73; 25. 187,5 korda; 26. $P = 5{,}2$ ja 7,5 kg; 27. $P = 12{,}1$ kg; 28. $P = 11$ kg; 29. $P = 7{,}65$ kg; 30. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{k}{R}$.

Kinemaatika

35. $v_t = 15$ m/min, $v_{tk} = 30$ m/min; 36. $a = 0{,}25$ m/sek^2, $v = 54$ km/h; 37. $a = 0{,}125$ m/sek^2, $T = 10$ min 50 sek, $v_k = 55{,}8$ km/h; 38. $h = 78{,}48$ m, $T = 8$ sek; 41. 18 km; 42. $v = 100$ mm/min, $v_1 = 608$ mm/min; 43. $v_5 = 1{,}2$ m/sek; $a_t = 0{,}24$ m/sek^2, $a_n = 0{,}72$ m/sek^2; $a_3 = 0{,}76$ m/sek^2; 45. ≈ 1000 p/min; 46. $D = 280$ mm; 47. $v = 215$ m/min; 48. ≈ 2740 p/min; 49. $\varepsilon = 1{,}64$ kraadi/sek^2, $a_t = 0{,}02$ m/sek^2, $\omega = 884$ kraadi/sek, $v = 10{,}8$ m/sek; 50. $\varepsilon = 21{,}33$ kraadi/sek^2, $a_t = 0{,}238$ m/sek^2, $v = 16{,}7$ m/sek; 51. $\varepsilon = 4{,}8$ kraadi/sek^2, $n \approx 460$ pööret.

Dünaamika

52. 200 kgm^{-1} sek^2; 53. $G = 1177{,}2$ t, $v = 6{,}75$ m/sek; 54. $P = 20\,194$ kg; 55. $P = 13\,551$; 56. $S = 26{,}5$ m; 57. $N = 0{,}102$ kg; 58. $\approx 20\,680$ kg; 59. Kõrgeimas asendis 1,67 kg, madalaimas asendis 3,17 kg; 60. $T_i = 0{,}245$ kg; $N_1 = 112$ kg; 61. $\alpha = 7°20'$; 62. $A = 2PS$; 63. 2,67 HJ; 64. 30 kgm/sek; 65. $N = 1778$ HJ; 66. $G = 750$ t, $P = 5625$ kg; 67. $N = 30{,}2$ HJ, $M_2 = 108$ kgm; 68. $M_v = 3{,}56$ kgm, $P = 39{,}5$ kg; 69. $n = 240$ p/min; 70. $N = 13{,}3$ HJ, $P_z = 800$ kg; 71. $v \approx 0{,}34$ m/sek; 72. 2 648 700 kgm, 5 297 400 kgm; 73. ≈ 4 min, $S = 2119$ m; 74. $P = 7097$ kg, $N = 946$ HJ, $F = 4078$ kg; 75. $\eta = 0{,}78$.

Masinaelemendid

76. $P = 117{,}3$ kg; 77. $\eta = 0{,}85$; 78. 19°28′; 79. $G_1 = 1414$ G_2; 80. $x = 200$ mm; 83. $P = 1$ kg; 85. 18 korda; 86. $P \approx 21{,}9$ kg; 87. $n_2 = n_1 \frac{D_1}{D_3}$; 88. $n_4 = 200$ p/min; $M_4 = 109{,}5$ kgm; 89. $M_2 = 21{,}92$ kgm, $n_2 = 1000$ p/min; 90. $R_1 = 200$ mm; 91. $\frac{z_0}{z_1}$, $\frac{z}{z_2}$, $\frac{z}{z_3}$ ... $\frac{z}{z_7}$; 92. $n_2 = 36$, $n_3 = 450$, $n_4 = 100$ p/min; 93. $M_4 = 10{,}74$ kgm;

94. $n_2 = 6$, $n_3 = 50$, $n_4 = 450$ p/min; 95. 327 ja 467 p/min; 96. $n_2 = 3200$ p/min; 97. 0,094 m/sek; 98. 20 p/min; 99. 60 p/min; 100. $n_3 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_6}$ või $n_1 \frac{z_1 z_4}{z_2 z_7}$ või $n_1 \frac{z_1 z_5}{z_2 z_8}$; $n_1 = \frac{z_1 z_3 z_{11} z_{13}}{z_2 z_{10} z_{12} z_{14}}$; 101. $P \approx 6$ kg, $N = 0{,}036$ HJ; 102. $P = 324$ kg, $v = 141{,}8$ m/min; 103. $v_a = 31{,}4$ m/min, $v_c = 0{,}5$ m/min, $n_6 = 15$ p/min.

Tugevusõpetuse alused

105. $\sigma = 497$ kg/cm^2; 106. $\Delta l = 4{,}24$ mm; 107. $\sigma = 1000$ kg/cm^2; 108. $\sigma = 584{,}5$ kg/cm^2, $P = 45\,900$ kg; 109. 5 km 96 m; 110. $\approx 1\,000\,000$ kg/cm; 111. $\sigma = 495$ kg/cm^2; 112. $d_1 = 19$ mm, $d_2 = 13{,}5$ mm, $d_3 = 17{,}8$ mm; 113. $\sigma = 675$ kg/cm^2, $\tau = 502$ kg/cm^2; 114. $\tau = 62{,}5$ kg/cm^2; 115. $\tau = 81{,}5$ kg/cm^2; 116. $\tau = 393$ kg/cm^2; 117. $d_1 = 43 \approx 45$ mm, $d_2 = 30$ mm; esimene variant on sobivam; 118. $d_1 = 43 \approx 45$ mm, $d_2 = 38 \approx 40$ mm; kõige ebasobivam variant.

SISUKORD

Esimene osa

TEOREETILISE MEHAANIKA ELEMENDID

Sissejuhatus 5
§ 1. Mehaaniline liikumine 5
§ 2. Paigalseisu mõiste suhtelisus 5
§ 3. Mehaanika põhimõisted 6
§ 4. Mehaanikas kasutatavad põhiühikud 6
§ 5. Masspunkt ja kõva keha 7
§ 6. Mehaanika aine 8
§ 7. Mehaanika arengu põhietapid 9

ESIMENE JAGU. **STAATIKA**

Esimene peatükk. **Algmõisted jõududest. Staatika alused**

§ 8. Jõududest 12
§ 9. Staatika sisu 12
§ 10. Jõudu määravad elemendid 13
§ 11. Jõudude kujutamise graafiline meetod 15
§ 12. Jõudude süsteem ja resultantjõud 15
§ 13. Kaks võrdset vastassuunalist jõudu, mis mõjuvad samal sirgel, on tasakaalus 16
§ 14. Rakenduspunkti võib jõu mõjumissirgel ümber paigutada . . . 16
§ 15. Tasakaalustav jõud 17
§ 16. Samal sirgel asuvate jõudude liitmine 18
§ 17. Sidemed ja sidemereaktsioonid 19
§ 18. Kordamisküsimusi 20
§ 19. Harjutusi 20

Teine peatükk. **Koonduvate jõudude tasapinnaline süsteem**

§ 20. Kahe omavahel nurga moodustava jõu liitmine 20
§ 21. Jõu lahutamine kaheks komponentjõuks, mis on rakendatud ühte punkti ning moodustavad omavahel nurga 23
§ 22. Ühel tasapinnal asuva mitme koonduva jõu liitmine 26
§ 23. Ühte punkti koonduvate jõudude tasapinnalise süsteemi tasakaal 29
§ 24. Kolm ühel tasapinnal asuvat tasakaalustuvat mitteparalleelset jõudu lõikuvad ühes punktis 31
§ 25. Kordamisküsimusi 32
§ 26. Harjutusi 32

Kolmas peatükk. **Paralleelsete jõudude tasapinnaline süsteem. Jõu moment**

§ 27. Samasuunaliste paralleelsete jõudude liitmine 33
§ 28. Vastassuunaliste paralleelsete jõudude liitmine 36
§ 29. Jõu lahutamine paralleelseteks komponentjõududeks 37
§ 30. Paralleelsete jõudude tasapinnalise süsteemi kese 38
§ 31. Jõu moment punkti suhtes 39
§ 32. Resultantjõu moment 40
§ 33. Jõupaar 42
§ 34. Paralleelsete jõudude tasapinnalise süsteemi tasakaal 44
§ 35. Jõu moment telje suhtes 47
§ 36. Kordamisküsimusi 48
§ 37. Harjutusi 48

Neljas peatükk. **Raskuskese. Kehade tasakaal**

§ 38. Raskuskese kui paralleelsete jõudude kese 50
§ 39. Mõnede lihtsa kujuga kehade raskuskese 50
§ 40. Lihtsate tasapinnaliste kujundite raskuskese 52
§ 41. Plaatide raskuskeskme praktiline määramine 54
§ 42. Toetuspunkti või -telge omavate kehade tasakaal 54
§ 43. Keha püsivus tasapinnal 57
§ 44. Kordamisküsimusi 59
§ 45. Harjutusi 60

Viies peatükk. **Hõõrdumine**

§ 46. Kahjulikud takistused 61
§ 47. Liuge- ja veerehõõrdumine 62
§ 48. Liugehõõrdumise põhilised seadused. Liugehõõrdetegur 63
§ 49. Kuiv- ja vedelikhõõrdumise mõiste 65
§ 50. Veerehõõrdetegur 66
§ 51. Hõõrdumise osatähtsus looduses ja tehnikas 69
§ 52. Kordamisküsimusi 69
§ 53. Harjutusi 70

TEINE JAGU. KINEMAATIKA

Kuues peatükk. **Punkti trajektoor. Teepikkus ja aeg**

§ 54. Kinemaatika sisu 71
§ 55. Trajektoorid ja liikumise põhiliigid 71
§ 56. Punkti poolt läbitud teepikkuse leidmine punkti asendite järgi trajektooril 73
§ 57. Trajektoori ehitamine etteantud koordinaatide järgi 74
§ 58. Kauguste kõver ristkoordinaadistikus 75
§ 59. Kordamisküsimusi 77
§ 60. Harjutusi 77

Seitsmes peatükk. **Punkti sirgjooneline liikumine**

§ 61. Ühtlane liikumine 78
§ 62. Kiirus ja teepikkus ühtlasel liikumisel 79
§ 63. Teepikkuse ja kiiruse graafik ühtlasel liikumisel 80

§ 64. Ebaühtlane liikumine. Keskmine kiirus ja keskmine kiirendus . . 82
§ 65. Ühtlaselt muutuv liikumine. Kiirus ja kiirendus 84
§ 66. Läbitud teepikkus ühtlaselt muutuval liikumisel 85
§ 67. Vertikaalne liikumine raskusjõu mõjul 87
§ 68. Kordamisküsimusi 90
§ 69. Harjutusi 90

Kaheksas peatükk. **Punkti lihtsamate liikumiste liitmine**

§ 70. Liitliikumine. Absoluutne ja suhteline liikumine 91
§ 71. Samal sirgel toimuvate ühtlaste liikumiste liitmine 92
§ 72. Kahe omavahel nurga moodustava ühtlase sirgjoonelise liikumise liitmine 94
§ 73. Kiiruste lahutamine komponentkiirusteks 96
§ 74. Kordamisküsimusi 97
§ 75. Harjutusi 97

Üheksas peatükk. **Punkti kõverjooneline liikumine**

§ 76. Punkti ühtlane ja muutuv kõverjooneline liikumine 98
§ 77. Kõverjooneliselt liikuva punkti kiirus 98
§ 78. Kõverjooneliselt liikuva punkti kiirendus 99
§ 79. Tangentsiaal- ja tsentripetaalkiirendus 100
§ 80. Tsentripetaalkiirendus punkti ühtlasel liikumisel mööda ringjoont 101
§ 81. Täiskiirendus ringliikumisel 103
§ 82. Kordamisküsimusi 103
§ 83. Harjutusi 104

Kümnes peatükk. **Kõva keha lihtsamad liikumised**

§ 84. Kõva keha ja punkti liikumiste erinevused 104
§ 85. Keha kulgev liikumine 105
§ 86. Keha pöörlemine ümber liikumatu telje. Pöördenurk 107
§ 87. Nurkkiirus ja nurkkiirendus 107
§ 88. Ümber liikumatu telje pöörleva keha punktide joonkiirus . . . 108
§ 89. Keha ühtlane pöörlemine ümber liikumatu telje 109
§ 90. Ringkiirust, läbimõõtu ja pöörete arvu siduvad graafikud . . . 111
§ 91. Keha ühtlaselt muutuv pöörlemine ümber liikumatu telje . . . 112
§ 92. Kordamisküsimusi 113
§ 93. Harjutusi 114

KOLMAS JAGU. **DÜNAAMIKA**

Üheteistkümnes peatükk. **Dünaamika põhiseadused**

§ 94. Dünaamika sisu 115
§ 95. Mehaanika esimene seadus (Newtoni esimene seadus) . . . 115
§ 96. Dünaamika põhivõrrand (Newtoni teine seadus) 116
§ 97. Jõudude mõju sõltumatuse seadus 118
§ 98. Käsitletud mehaanika seadustest tulenevad järeldused . . . 119
§ 99. Ühikute tehniline ja füüsikaline süsteem 121
§ 100. Keha massi ja kaalu vaheline seos 122
§ 101. Mõju ja vastumõju võrdsuse seadus (Newtoni kolmas seadus) 123
§ 102. Kordamisküsimusi 123
§ 103. Harjutusi 124

Kaheteistkümnes peatükk. **Masspunkti dünaamika alused**

§ 104. Masspunkti dünaamika mõiste sisu 124
§ 105. Keha vertikaalne liikumine raskusjõu mõjul 125
§ 106. Horisondi suhtes nurga all visatud keha liikumine 125
§ 107. Tangentsiaal- ja tsentripetaaljõud masspunkti liikumisel mööda ringjoont 128
§ 108. Inertsijõud 129
§ 109. Inertsijõud masspunkti sirgjoonelisel liikumisel 129
§ 110. Inertsijõud masspunkti liikumisel mööda ringjoont. Tsentrifugaaljõud 130
§ 111. Inertsijõudude osatähtsus tehnikas 133
§ 112. Kordamisküsimusi 135
§ 113. Harjutusi 135

Kolmeteistkümnes peatükk. **Töö ja võimsus**

§ 114. Töö mõiste 136
§ 115. Töö mõõtmine 136
§ 116. Resultantjõu töö 138
§ 117. Töö graafiline kujutamine 139
§ 118. Soojusjõumasina indikaatordiagramm 141
§ 119. Konstantse suurusega jõu töö pöörleval liikumisel 143
§ 120. Võimsus ja selle mõõtmine 144
§ 121. Võimsus keha ühtlasel kulgeval liikumisel 145
§ 122. Võimsus keha ühtlasel pöörleval liikumisel 146
§ 123. Pöördemomendi, ülekantava võimsuse ja pöörete arvu vaheline seos 147
§ 124. Kordamisküsimusi 149
§ 125. Harjutusi 149

Neljateistkümnes peatükk. **Mehaaniline energia**

§ 126. Kineetilise energia mõiste 150
§ 127. Kulgevalt liikuva keha kineetiline energia 151
§ 128. Raskusjõu mõjul liikuva keha energia. Potentsiaalne energia . . 154
§ 129. Ümber liikumatu telje pöörleva keha kineetilise energia mõiste 156
§ 130. Jõumasinate reguleerimise mõiste. Hooratta tähtsus 157
§ 131. Mehaaniline kasutegur 159
§ 132. Perpetuum mobile ehitamise võimatus 160
§ 133. Kehade põrke mõiste 161
§ 134. Löök vabalt langeva vasara töötamisel 162
§ 135. Kordamisküsimusi 163
§ 136. Harjutusi 164

Teine osa

MASINAELEMENDID JA TUGEVUSÕPETUSE ALUSED

NELJAS JAGU. MASINAELEMENDID

Sissejuhatus 167
§ 137. Masinad ja mehhanismid 167
§ 138. Masinaehituse areng Venemaal ja Nõukogude Liidus 168

Viieteistkümnes peatükk. **Kaldpind, plokk, pöör**

§ 139. Kaldpind 169
§ 140. Kiil 172
§ 141. Kang 173
§ 142. Kangide süsteem. Diferentsiaalkang 176
§ 143. Liikumatu ja liikuv plokk 178
§ 144. Plokkide süsteem. Diferentsiaalplokk 179
§ 145. Harilik ja diferentsiaalpöör 181
§ 146. Kordamisküsimusi 183
§ 147. Harjutusi 183

Kuueteistkümnes peatükk. **Paralleelsete võllidega ülekanded**

§ 148. Üldteadmisi ülekannetest 184
§ 149. Elastse sidestusega ülekande põhimõte 185
§ 150. Ülekandetegur ja ülekandearv elastse sidestusega ülekandes . . 186
§ 151. Ühe rihmarattapaariga ülekande kinemaatika 187
§ 152. Mitme rihmarattapaariga ülekande kinemaatika 188
§ 153. Rihmaülekande staatika 190
§ 154. Muutuva ülekandeteguriga rihmülekanne 192
§ 155. Pingutusrulliga rihmülekanne 193
§ 156. Lame- ja kiilrihmad 194
§ 157. Kettülekande mõiste 195
§ 158. Muutumatu ülekandeteguriga friktsioonülekanne paralleelsete võllide vahel 196
§ 159. Muutuva ülekandeteguriga friktsioonülekanne paralleelsete võllide vahel 198
§ 160. Silindrilised hammasrattad 200
§ 161. Hammasajami ülekandetegur ja ülekandearv 201
§ 162. Mitme hammasrattapaariga ülekannete kinemaatika 202
§ 163. Silindriliste hammasratastega ülekande staatika 205
§ 164. Parasiithammasrattad 207
§ 165. Silindriliste hammasratastega diferentsiaal hammasmehhanismi mõiste 209
§ 166. Hambumise geomeetrilised elemendid 210
§ 167. Silinderhammasrataste hammaste põhikujud 213
§ 168. Pöörleva liikumise katkeline ülekanne 214
§ 169. Kordamisküsimusi 216
§ 170. Harjutusi 217

Seitsmeteistkümnes peatükk. **Mitteparalleelsete võllidega ülekanded**

§ 171. Liikumise ülekandmine elastse sidestuse abil mitteparalleelsete võllide vahel 218
§ 172. Friktsioonülekanne mitteparalleelsete võllide vahel 219
§ 173. Koonushammasratastega ülekanne 222
§ 174. Kruvi põhielemendid 225
§ 175. Ülekanne kruviratastega ja tiguülekanne 228
§ 176. Universaalliigend 230
§ 177. Kordamisküsimusi 232
§ 178. Harjutusi 232

Kaheksateistkümnes peatükk. **Pöörleva liikumise muutmine kulgevaks ja vastupidi**

§ 179. Pöörleva liikumise muutmine kulgevaks 233
§ 180. Friktsioonmehhanism kulgeva liikumise saamiseks 234
§ 181. Hammaslattülekanne 234
§ 182. Kruvipaari kinemaatika 237

§ 183. Kruvipaari staatika 240
§ 184. Kruvide põhitüüpide keermeprofiilid 241
§ 185. Väntmehhanism 242
§ 186. Väntmehhanismi kinemaatika 243
§ 187. Ekstsentrikmehhanism 247
§ 188. Mehhanism õõtsuva kulissiga 248
§ 189. Õõtsuva kulissiga mehhanismi kinemaatika 249
§ 190. Nukkmehhanismid 251
§ 191. Tasapinnalise nuki profiili konstrueerimine 253
§ 192. Kordamisküsimusi 254
§ 193. Harjutusi 255

Üheksateistkümnes peatükk. **Pöördliikumisega ülekande abidetailid**

§ 194. Üldmõisteid telgedest ja võllidest ning nende elementidest . . 257
§ 195. Liugelaagrite põhitüübid 259
§ 196. Veerelaagrid 259
§ 197. Üldmõisteid siduritest 261
§ 198. Kordamisküsimusi 262

Kahekümnes peatükk. **Lahutatavad liited**

§ 199. Keermega liited 262
§ 200. Kinnituskeermed 262
§ 201. Mõisteid kiilliidetest 264

VIIES JAGU. TUGEVUSÕPETUSE ALUSED

Kahekümne esimene peatükk. **Põhimõisteid**

§ 202. Kehade deformeerumine välisjõudude toimel 266
§ 203. Välis- ja sisejõud. Lõigete meetod 267
§ 204. Elastsussisejõud 268
§ 205. Pinge deformeeritavas kehas 269
§ 206. Tugevuse ning lubatava pinge arvutamise mõiste 269
§ 207. Staatiline ja dünaamiline koormus 271
§ 208. Deformatsioonide põhiliigid 271
§ 209. Kordamisküsimusi 272

Kahekümne teine peatükk. **Tõmme ja surve**

§ 210. Tõmme. Absoluutne ja suhteline pikenemine 272
§ 211. Ristdeformatsioon tõmbel 273
§ 212. Pingete diagramm tõmbel 274
§ 213. Pinge ja suhtelise pikenemise vaheline seos. Esimese liigi elastsusmoodul 276
§ 214. Surve 277
§ 215. Arvutusvalem ning lubatav pinge tõmbel ja survel 278
§ 216. Surve ja nõtke 279
§ 217. Kordamisküsimusi 280
§ 218. Harjutusi 281

Kahekümne kolmas peatükk. **Nihe ja vääne**

§ 219. Nihke (lõike) mõiste 281
§ 220. Nihkedeformatsiooni mõõt. Nihkemoodul 282
§ 221. Lubatav lõikepinge 283
§ 222. Augu löömine ja lõikamine kääridega 284
§ 223. Väändedeformatsiooni mõiste. Väände mõõt 285
§ 224. Vääne kui nihke erijuht 286
§ 225. Väändepingete jaotumine ristlõikes 287
§ 226. Väände põhivõrrand 289
§ 227. Võllide väändele arvutamise mõiste 291
§ 228. Kordamisküsimusi 293
§ 229. Harjutusi 293

Kahekümne neljas peatükk. **Paine**

§ 230. Paindedeformatsiooni mõiste 294
§ 231. Normaalpingete jaotus paindel. Neutraalkiht 295
§ 232. Painde põhivõrrandi mõiste 298
§ 233. Paindemomendi mõiste 300
§ 234. Kordamisküsimusi 302

Kahekümne viies peatükk. **Üldmõisteid liitdeformatsioonidest**

§ 235. Liht- ja liitdeformatsioonid 302
§ 236. Tõmme (surve) ja paine 303
§ 237. Vääne ja paine 304
Lisad 306
Harjutuste vastused 308

Л. Е. Левинсон

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

На эстонском языке

Эстонское Государственное Издательство
Таллин, Пярнуское шоссе, 10

*

Toimetaja L. Abo

Tehniline toimetaja A. Sepp

Korrektorid P. Hiie ja M. Sepp

Ladumisele antud 19. VI 1957. Trükkimisele antud 6. I 1958. Paber 60×92, 1/16. Trükipoognaid 19,75. Arvutuspoognaid 20,5. Trükiarv 3000. Tell. nr. 1070.

Trükikoda „Punane Täht", Tallinn, Pikk tn. 54/58

Hind rbl. 6.10

2—3

Trükivigu

Lk.	Rida	On trükitud	Peab olema
68	7. alt	libisemise	libistamise
175	3. alt	mõjusirgel	mõjusirged
264	4. ülalt	$\frac{t_c}{6}$	$\frac{t_o}{6}$
268	14. alt	$R_A = R = 0{,}5\ P$	$R_A = R_B = 0{,}5\ P$
288	6. ülalt	γ_ρ ei võrdu γ_ρ -ga	γ ei võrdu γ_ρ -ga
218	Joonised 218 ja 219 omavahel vahetada		

Rbl. 6.10

A-21840

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00388802 3