

Tartu Ülikool
loodus- ja täppisteaduste valdkond
matemaatika ja statistika instituut
matemaatika eriala

Siim Sirel

Banachi ruumide sümmeetriline tugev
diameeter-2 omadus

Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: vanemteadur Rainis Haller

Tartu 2018

Banachi ruumide sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus

Siim Sirel

Bakalaureusetöö

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöö põhineb R. Halleri, J. Langemetsa, V. Lima ja R. Nadelil hiljutisel ühisartiklil „*Symmetric strong diameter two property*“ (arXiv:1804.01705). Töös esitame koos üksikasjaliku tõestusega nimetatud artikli teoreemid 2.1, 3.1 ning 5.6 (a) ja (b) osa.

Märksõnad: Diameeter-2 omadus, Banachi ruum, funktsionaal, absoluutne norm, Lipschitzi funktsioon.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Symmetric strong diameter 2 property of Banach spaces

Siim Sirel

Bachelor's thesis

Abstract. This Bachelor's thesis is based on a recent paper “Symmetric strong diameter two property” (arXiv:1804.01705) by R. Haller, J. Langemets, V. Lima, and R. Nadel. In this thesis we give a detailed proof of Theorems 2.1, 3.1, and 5.6 (a) and (b) from that paper.

Keywords: Diameter 2 property, Banach space, functional, absolute norm, Lipschitz function.

CERCS code: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Sisukord

Sissejuhatus	3
1 Sümmeetrilise tugeva diameeter-2 omaduse mõiste ja samaväärsed tingimused	4
2 Absoluutse normaliseeritud normiga kahe Banachi ruumi otsesumma sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus	11
3 Lipschitzi funktsioonide ruumi n -nõrk sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus	14
Viited	22

Sissejuhatus

Bakalaureusetöö on Banachi ruumide geometria alane uurimus funktsionaalanalüüsi valdkonnast. Töö on suures osas referatiivne, selle aluseks on hiljutine teadusartikkel [HLLN], milles uuritakse sümmeetrilist tugevat diameeter-2 omadust. Bakalaureusetöö eesmärgiks oli esitada koos üksikasjaliku tõestusega [HLLN] teoreemid 2.1, 3.1 ja teoreemi 5.6 osad (a) ja (b). Vastavalt on liigendatud ka bakalaureusetöö kolmeks peatükiks. Artiklis [HLLN] on teoreemi 5.6 (b) tõestus esitamata, on vaid viidatud, et see tõestus on sarnane [BLR] vastava tulemuse tõestusega. Meie analüüs näitas, et [BLR, teoreem 2.4] tõestus ei ole siiski üle kantav [HLLN] juhule. Bakalaureusetöös tõestame [HLLN, teoreem 5.6 (b)] arendades sobivalt [HLLN, teoreem 5.6 (a)] tõestuse ideed.

Vaatleme vaid mittetriviaalseid reaalseid Banachi ruume. Kasutatud tähistused on standardsed. Banachi ruumi X kinnist ühikera, ühiksfääri ja kaasruumi tähistame vastavalt B_X , S_X ja X^* . Nõrka topoloogiat tähistame sümboliga w . Elemendi $x \in X$ w -ümbruste baasiks sobib kogum, mis koosneb kõikidest hulkadest kujul

$$U(x, A, \varepsilon) = \{y \in X \mid |x^*(x - y)| < \varepsilon \quad \forall x^* \in A\},$$

kus $\emptyset \neq A \subset S_{X^*}$ on lõplik ja $\varepsilon > 0$ (vt nt [M, lk 213]).

Banachi ruumi X ühikera B_X *viiluks* nimetatakse mis tahes hulka

$$S(x^*, \varepsilon) = \{x \in B_X \mid x^*(x) > 1 - \varepsilon\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\varepsilon > 0$. Kaasruumi X^* ühikera viilu $S(x, \alpha)$ nimetatakse w^* -*viiluks*, kui $x \in S_X$.

1 Sümmeetrilise tugeva diameeter-2 omaduse mõiste ja samaväärsed tingimused

Selle peatüki eesmärk on tuua töösse sisse sümmeetrilise tugeva diameeter-2 omaduse mõiste ja üksikasjalikult esitada [HLLN, teoreem 2.1] tõestus. Viimane tulemus annab neli samaväärset tingimust selleks, et Banachi ruumil oleks sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus.

Definitsioon 1.1. Banachi ruumil X on *sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus* (lühemalt SSD2-omadus), kui iga $\varepsilon > 0$ ja B_X viilude S_1, \dots, S_n ($n \in \mathbb{N}$) korral leiduvad $x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n$ ja $y \in B_X$ nii, et $\|y\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$x_i \pm y \in S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

On teada, et klassikalistest Banachi ruumidest on näiteks $C[0, 1]$, c , c_0 ja ℓ_∞ on SSD2-omadusega, kuid näiteks $L_1[0, 1]$ ei ole.

Näide 1.2. *Banachi ruumil c on SSD2-omadus.*

Põhjendus. Näitame seda SSD2-omaduse definitsiooni kohaselt. Olgu $\varepsilon > 0$. Vaatleme B_c viile $S_1 := S(f_1, \alpha_1), \dots, S_n := S(f_n, \alpha_n)$, kus $f_i = (\mu_k^i)_{k=1}^\infty \in S_{\ell_1}$ ($i \in \{1, \dots, n\}$).

Otsime elemente $x_1 \in S_1, \dots, x_n \in S_n$ ja $y \in B_c$ nii, et $\|y\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$x_i \pm y \in S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Valime $m \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{k=1}^m |\mu_k^i| > 1 - \frac{\alpha_i}{2} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Võtame $x_i = (\text{sgn } \mu_1^i, \dots, \text{sgn } \mu_m^i, 0, 0, \dots)$ ja $y = (\underbrace{0, \dots, 0}_m, 1, 0, 0, \dots)$. Siis $x_i \in S_i$, sest

$$f_i(x_i) = \sum_{k=1}^m |\mu_k^i| > 1 - \frac{\alpha_i}{2}, \quad \|y\| = 1 > 1 - \varepsilon \text{ ja } x_i \pm y \in S_i, \text{ sest}$$

$$f_i(x_i \pm y) = \sum_{k=1}^m |\mu_k^i| \pm \mu_{m+1}^i \geq \sum_{k=1}^m |\mu_k^i| - |\mu_{m+1}^i| > 1 - \frac{\alpha_i}{2} - \frac{\alpha_i}{2} = 1 - \alpha_i,$$

$$\text{sest } |\mu_{m+1}^i| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k^i| - \sum_{k=1}^m |\mu_k^i| < 1 - (1 - \alpha_i/2) = \alpha_i/2.$$

□

Näide 1.3. Banachi ruumil $L_1[0, 1]$ pole SSD2-omadust.

Põhjendus. Näitame seda SSD2-omaduse definitsiooni kohaselt. Olgu $0 < \varepsilon < 1/2$. Vaatleme $B_{L_1[0,1]}$ viile $S_1 := S(f, \varepsilon/6)$ ja $S_2 := S(g, \varepsilon/6)$, kus

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 0, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad \text{ja} \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1, & t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Oletame vastuväiteliselt, et Banachi ruumil $L_1[0, 1]$ on SSD2-omadus. Seega leiduvad $x \in S(f, \varepsilon/6)$, $y \in S(g, \varepsilon/6)$ ja $z \in B_{L_1[0,1]}$ nii, et $x \pm z \in S_1$, $y \pm z \in S_2$ ja $\|z\| > 1 - \varepsilon$. Tingimusest $x \in S(f, \varepsilon/6)$ saame

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x(t) dt > 1 - \frac{\varepsilon}{6},$$

mistõttu

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt > 1 - \frac{\varepsilon}{6}.$$

Kuna $\int_0^1 |x(t)| dt \leq 1$, siis

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t)| dt < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Seega

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|x \pm z\| = \int_0^1 |x(t) \pm z(t)| dt = \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t) \pm z(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t) \pm z(t)| dt \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t)| dt - \int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t)| dt \\ &> 1 - \frac{\varepsilon}{6} - \int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt - \frac{\varepsilon}{6}, \end{aligned}$$

järelikult

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt - \int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Analoogiliselt saame tingimustest $y \in S(g, \varepsilon/6)$ ja $\|y \pm z\| \leq 1$, et

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kokkuvõttes

$$-\frac{\varepsilon}{3} < \int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Kuna $1 - \varepsilon < \|z\| \leq 1$, siis

$$1 - \varepsilon < \int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt \leq 1.$$

Järelikult

$$\frac{1 - \varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{6} < \int_0^{\frac{1}{2}} |z(t)| dt < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{6}$$

ja

$$\frac{1 - \varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{6} < \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt < \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{6}.$$

Jõuame vastuoluni

$$\begin{aligned} 1 \geq \|x \pm z\| &= \int_0^{\frac{1}{2}} |x(t) \pm z(t)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t) \pm z(t)| dt \\ &\geq \int_0^{\frac{1}{2}} ((x(t) \pm z(t)) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |z(t)| dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 |x(t)| dt \\ &> \left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right) + \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{6}\right) - \frac{\varepsilon}{6} = \frac{3}{2} - \varepsilon > 1. \end{aligned}$$

Seega Banachi ruumil $L_1[0, 1]$ pole SSD2-omadust.

□

Teoreem 1.4 ([HLLN, teoreem 2.1]). *Olgu X Banachi ruum. Järgnevad väited on samaväärsed.*

(a) *Banachi ruumil X on SSD2-omadus.*

(b) *Iga $\varepsilon > 0$ ja B_X viilude kumerate kombinatsioonide C_1, \dots, C_n ($n \in \mathbb{N}$) korral leiduvad $x_1 \in C_1, \dots, x_n \in C_n$ ja $y \in B_X$ nii, et $\|y\| > 1 - \varepsilon$ ja*

$$x_i \pm y \in C_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

(c) *Iga $\varepsilon > 0$ ja mittetühjade B_X suhtes w -lahtiste alamhulkade U_1, \dots, U_n ($n \in \mathbb{N}$) korral leiduvad $x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$ ja $y \in B_X$ nii, et $\|y\| > 1 - \varepsilon$ ja*

$$x_i \pm y \in U_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

(d) Iga $\varepsilon > 0$, $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ($n \in \mathbb{N}$) ja nende punktide ning nullpunkti (B_X suhtes) w -ümbruste $U(x_1), \dots, U(x_n), U(0)$ korral leiduvad $y_1 \in U(x_1) \cap S_X, \dots, y_n \in U(x_n) \cap S_X$ ja $z \in U(0) \cap S_X$ nii, et

$$\|y_i \pm z\| < 1 + \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

(e) Iga $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ($n \in \mathbb{N}$) korral leiduvad S_X elementide pered $(x_\alpha^1)_{\alpha \in \mathcal{A}}, \dots, (x_\alpha^n)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ ja $(y_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ nii, et $(y_\alpha) \xrightarrow{w} 0$ ning

$$(x_\alpha^i) \xrightarrow{w} x_i \quad \text{ja} \quad \|x_\alpha^i \pm y_\alpha\| \xrightarrow{\alpha \in \mathcal{A}} 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Tõestus. (a) \Rightarrow (b). Eeldame, et Banachi ruumil X on SSD2-omadus. Olgu $\varepsilon > 0$ ja olgu C_1, \dots, C_n ühikera B_X viilude kumerad kombinatsioonid, täpsemalt olgu C_i viilude $S_1^i, \dots, S_{m_i}^i$ kumer kombinatsioon $\sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^i S_j^i$. Vaatleme korraga kõiki esinevaid viilusid $S_1^1, \dots, S_{m_1}^1, \dots, S_1^n, \dots, S_{m_n}^n$. SSD2-omaduse mõiste kohaselt leiduvad $x_1^i \in S_1^i, \dots, x_{m_i}^i \in S_{m_i}^i$ ($i \in \{1, \dots, n\}$) ja $y \in B_X$ nii, et $\|y\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$x_j^i \pm y \in S_j^i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \forall j \in \{1, \dots, m_i\}.$$

Tähistame iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $x_i := \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^i x_j^i$. Siis $x_i \in \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^i S_j^i = C_i$ ja

$$x_i \pm y = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^i x_j^i \pm y = \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^i (x_j^i \pm y) \in \sum_{j=1}^{m_i} \lambda_j^i S_j^i = C_i,$$

nagu vaja.

(b) \Rightarrow (c) on Bourgaini lemma (vt nt [L, lemma 2.14]) põhjal ilmne, sest see tulemus ütleb, et iga mittetühi B_X suhtes w -lahtine hulk sisaldab mingit B_X viilude kumerat kombinatsiooni.

(c) \Rightarrow (d). Kehtigu tingimus (c). Olgu $\varepsilon > 0$ ja $x_1, \dots, x_n \in S_X$. Vaatleme nullpunkti ja punktide x_1, \dots, x_n w -ümbrusi $U(0), U(x_1), \dots, U(x_n)$ (ühikkeras B_X). Nõrga topoloogia mõiste kohaselt leiduvad $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n > 0$ ja mittetühjad lõplikud alamhulgad

$A_0, A_1, \dots, A_n \subset S_{X^*}$ nii, et

$$U(0, A_0, \varepsilon_0) := \{x \in B_X \mid |x^*(x)| < \varepsilon_0 \ \forall x^* \in A_0\} \subset U(0),$$

$$U(x_i, A_i, \varepsilon_i) := \{x \in B_X \mid |x^*(x - x_i)| < \varepsilon_i \ \forall x^* \in A_i\} \subset U(x_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \leq \varepsilon < 1$. Olgu $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$ sellised, et $x_1^*(x_1) = \dots = x_n^*(x_n) = 1$. Tähistame

$$\begin{aligned} U_0 &:= U\left(0, A_0, \frac{\varepsilon_0}{2}\right), \\ U_1 &:= S\left(x_1^*, \frac{\varepsilon_1}{2}\right) \cap U\left(x_1, A_1, \frac{\varepsilon_1}{2}\right), \\ &\dots \\ U_n &:= S\left(x_n^*, \frac{\varepsilon_n}{2}\right) \cap U\left(x_n, A_n, \frac{\varepsilon_n}{2}\right). \end{aligned}$$

Siis U_0, U_1, \dots, U_n on mittetühjad B_X suhtes w -lahtised hulgad. Tingimuse (c) kohaselt saame leida $u_0 \in U_0, u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$ ja $v \in B_X$ nii, et $\|v\| > 1 - \varepsilon_0/2, u_0 \pm v \in U_0$ ja

$$u_i \pm v \in U_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Tähistame iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $y_i := u_i/\|u_i\|$. Näitame, et $y_i \in U(x_i)$. Kuna $u_i \in S(x_i^*, \varepsilon_i/2)$, siis $\|u_i\| > 1 - \varepsilon_i/2$, mistõttu

$$\begin{aligned} \|y_i - u_i\| &= \left\| \frac{u_i}{\|u_i\|} - u_i \right\| = \left\| \frac{u_i}{\|u_i\|} (1 - \|u_i\|) \right\| \\ &= (1 - \|u_i\|) \left\| \frac{u_i}{\|u_i\|} \right\| = 1 - \|u_i\| \\ &< \frac{\varepsilon_i}{2}. \end{aligned}$$

Järelikult $y_i \in U(x_i, A_i, \varepsilon_i)$, sest iga $x^* \in A_i$ korral

$$\begin{aligned} |x^*(y_i - x_i)| &= |x^*(y_i - u_i + u_i - x_i)| = |x^*(y_i - u_i) + x^*(u_i - x_i)| \leq \\ &\leq |x^*(y_i - u_i)| + |x^*(u_i - x_i)| < \frac{\varepsilon_i}{2} + \frac{\varepsilon_i}{2} = \\ &= \varepsilon_i. \end{aligned}$$

Kuna $u_0 \pm v \in U_0$, siis ilmselt ka $-(u_0 \pm v) \in U_0$. Hulga U_0 kumeruse tõttu

$$v = \frac{1}{2}(-u_0 + v) + \frac{1}{2}(u_0 + v) \in U_0.$$

Tähistame $z := v/\|v\|$. Siis $z \in U(0)$, sest $x^* \in A_0$ korral saame $\|v\| > 1 - \varepsilon_0/2$ abil

$$|x^*(x)| = \frac{1}{\|v\|} x^*(v) < \frac{\varepsilon_0/2}{1 - \varepsilon_0/2} \leq \varepsilon_0.$$

Lõpetuseks paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \|y_i \pm z\| &= \|y_i - u_i + u_i \pm v \mp v \pm z\| \\ &\leq \|y_i - u_i\| + \|u_i \pm v\| + \|v - z\| \\ &< \frac{\varepsilon_i}{2} + 1 + \frac{\varepsilon_0}{2} \leq 1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

(d) \Rightarrow (e). Eeldame, et kehtib tingimus (d). Olgu $x_1, \dots, x_n \in S_X$. Olgu \mathcal{A} kõigi selliste järjendite $(U_1, \dots, U_n, U, \varepsilon)$ hulk, kus U_i ($i \in \{1, \dots, n\}$) ja U on vastavalt ühikkeru B_X suhtes punkti x_i ja nullpunkti w -ümbrused ning $\varepsilon > 0$. Hulk \mathcal{A} on suunatud hulk, kui temas defineerida osaline järjestus

$$(U_1, \dots, U_n, U, \varepsilon) \leq (U'_1, \dots, U'_n, U', \varepsilon')$$

parajasti siis, kui $U'_1 \subset U_1, \dots, U'_n \subset U_n, U' \subset U$ ja $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Tingimuse (d) põhjal saame iga $\alpha = (U_1, \dots, U_n, U, \varepsilon) \in \mathcal{A}$ korral leida $y_\alpha^1 \in U_1 \cap S_X, \dots, y_\alpha^n \in U_n \cap S_X$ ja $z_\alpha \in U \cap S_X$ nii, et

$$\|y_\alpha^i \pm z_\alpha\| < 1 + \varepsilon \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Saame S_X elementide pered $(y_\alpha^1)_{\alpha \in \mathcal{A}}, \dots, (y_\alpha^n)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, mille korral $z_\alpha \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{} 0$ ning

$$y_\alpha^i \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{} x_i \quad \text{ja} \quad \|y_\alpha^i \pm z_\alpha\| \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{} 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Põhjendame siinkohal ainult, et $z_\alpha \xrightarrow{} 0$ (analoogiliselt on võimalik näidata, et $y_\alpha^i \xrightarrow{} x_i$ ja $\|y_\alpha^i \pm x_\alpha\| \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{} 1$). Olgu W punkti 0 w -ümbrus. Tähistame $U := W \cap B_X$. Fikseerime vabalt $\alpha_0 = (U_1, \dots, U_n, U, \varepsilon) \in \mathcal{A}$. Siis iga $\alpha_0 \leq \alpha$ ($\alpha \in \mathcal{A}$) korral ilmselt $z_\alpha \in U$. Seega

$$z_\alpha \xrightarrow{} 0.$$

(e) \Rightarrow (a). Eeldame, et kehtib tingimus (e). Olgu $\varepsilon \in (0, 1)$ ja vaatleme B_X viilusid $S_1 := S(x_1^*, \alpha_1), \dots, S_n := S(x_n^*, \alpha_n)$. Valime $\delta > 0$ nii, et

$$\frac{1}{1 + \delta} > 1 - \varepsilon \quad \text{ja} \quad \frac{1 - 2\delta}{1 + \delta} > 1 - \alpha_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Fikseerime vabalt $x_1 \in S_X \cap S(x_1^*, \delta), \dots, x_n \in S_X \cap S(x_n^*, \delta)$.

Tingimuse (e) põhjal leiduvad S_X elementide pered $(y_\alpha^1), \dots, (y_\alpha^n)$ ja (z_α) nii, et $(z_\alpha) \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{w} 0$ ning

$$(y_\alpha^i) \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{w} x_i \quad \text{ja} \quad \|y_\alpha^i \pm z_\alpha\| \xrightarrow[\alpha \in \mathcal{A}]{} 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Valime $\alpha \in \mathcal{A}$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$y_\alpha^i \in S(x_i^*, \delta), \quad |x_i^*(z_\alpha)| < \delta \quad \text{ja} \quad \|y_\alpha^i \pm z_\alpha\| \leq 1 + \delta.$$

Tähistame $y_1 := y_\alpha^1/(1 + \delta), \dots, y_n := y_\alpha^n/(1 + \delta)$ ja $z := z_\alpha/(1 + \delta)$. Siis $y_i \in S_i$ ja $y_i \pm z \in S_i$, kusjuures $\|z\| > 1 - \varepsilon$. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} \|y_i\| &= \frac{1}{1 + \delta} \|y_\alpha^i\| = \frac{1}{1 + \delta} \leq 1, \quad \|z\| = \frac{1}{1 + \delta} \|z_\alpha\| = \frac{1}{1 + \delta} > 1 - \varepsilon, \\ x_i^*(y) &= \frac{1}{1 + \delta} x_i^*(y_\alpha^i) > \frac{1}{1 + \delta} (1 - \delta) > 1 - \alpha_i, \\ x_i^*(y_i \pm z) &= \frac{1}{1 + \delta} x_i^*(y_\alpha^i \pm z_\alpha) \geq \frac{1}{1 + \delta} (x_i^*(y_\alpha^i) - |x_i^*(z_\alpha)|) \\ &> \frac{1}{1 + \delta} (1 - \delta - \delta) > 1 - \alpha_i. \end{aligned}$$

□

Näide 1.5 ([HLLN, näide 2.2]). *Banachi ruumil $C[0, 1]$ on SSD2-omadus.*

Põhjendus. Kasutame teoreemi 1.4 osa (e). Olgu $f_1, \dots, f_n \in S_{C[0,1]}$. Valime $a > 0$ ja punktid $t_1, \dots, t_n \in [0, 1]$ nii, et $2a/n < 1$ ja $|f_i(t_i)| = 1$. Kuna

$$R := [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^n [t_i - a, t_i + a] \neq \emptyset,$$

siis R sisaldab paarikaupa lõikumatu vahemikke U_1, U_2, \dots . Olgu $g_1, g_2, \dots \in S_{C[0,1]}$ sellised, et $g_k \geq 0$ ja $\text{supp}(g_k) \subset U_m$. Siis $(g_k)_{k=1}^\infty$ on tõkestatud jada, mis koondub punktiviisi elemendiks 0, seega $g_k \xrightarrow{w} 0$ (Banachi ruumis $C[0, 1]$ koondub tõkestatud jada nõrga topoloogia suhtes parajasti siis, kui see jada koondub punktiviisi, vt nt [HHZ, ül 13, lk 54]).

Defineerime iga $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $k \in \mathbb{N}$ korral $h_{i,k} = (1 - g_k)f_i \in C[0, 1]$, st $h_{i,k}: t \mapsto (1 - g_k(t))f_i(t)$. Siis $h_{i,k} \xrightarrow{w} f_i$, $\|h_{i,k}\| = 1$ ja $\|h_{i,k} \pm g_k\| = 1$, sest $|h_{i,k}(t_i)| = |h_{i,k} \pm g_k(t_i)| = 1$. □

2 Absoluutse normaliseeritud normiga kahe Banachi ruumi otsesumma sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus

Vektorruumi \mathbb{R}^2 normi N nimetatakse *absoluutseks*, kui

$$N(a, b) = N(|a|, |b|) \quad \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

ja *normaliseerituks*, kui

$$N(0, 1) = N(1, 0) = 1.$$

On teada, et vektorruumi \mathbb{R}^2 norm N on absoluutne parajasti siis, kui ta on monotoonne, st

$$(|a|, |b|) \leq (|c|, |d|) \implies N(a, b) \leq N(c, d) \quad \forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2.$$

Kui X ja Y on Banachi ruumid ja N on absoluutne normaliseeritud \mathbb{R}^2 norm, siis $X \oplus_N Y$ tähistab otsesummat $X \oplus Y$, mis on varustatud normiga $\|\cdot\|_N$, kus

$$\|(x, y)\|_N = N(\|x\|, \|y\|) \quad \forall (x, y) \in X \times Y.$$

Erijuhul, kui $N(\|x\|, \|y\|) = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, kirjutatakse $X \oplus_N Y$ asemel $X \oplus_\infty Y$. Märkime, et on teada, et $(X \oplus_N Y)^* = X^* \oplus_{N^*} Y^*$, kus

$$N^*(c, d) = \max_{N(a,b) \leq 1} (|ac| + |bd|) \quad \forall (c, d) \in \mathbb{R}^2.$$

Teoreem 2.1 ([HLLN, teoreem 3.1 (a)]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid. Banachi ruum $X \oplus_\infty Y$ on SSD2-omadusega parajasti siis, kui X või Y on SSD2-omadusega.*

Tõestus. Eeldame esmalt, et korrutisruumi $Z := X \oplus_\infty Y$ ühel teguril on SSD2-omadus, olgu näiteks Banachi ruumil X on SSD2-omadus (tõestus on sarnane, kui eeldada, et SSD2-omadus on Banachi ruumil Y). Olgu $\varepsilon > 0$ ja W_1, \dots, W_n mittetühjad B_Z suhtes w -lahtised hulgad. Fikseerime iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral punkti $(u_i, v_i) \in W_i$. Kuna korrutisruumi nõrk topoloogia on tegurite nõrkade topoloogiate korrutistopoloogia, siis leiduvad B_X suhtes w -lahtised U_1, \dots, U_n ja B_Y suhtes w -lahtised V_1, \dots, V_n nii, et

$$(u_i, v_i) \in U_i \times V_i \subset W_i.$$

Eelduse järgi on Banachi ruumil X SSD2-omadus, seega leiduvad teoreemi 1.4 (c) põhjal

$x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$ ja $u \in B_X$ nii, et $\|u\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$x_i \pm u \in U_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Tähistame $z_i := (x_i, v_i)$ ja $z := (x, 0)$. Siis $z_i \pm z \in W_i$ ja $\|z\|_\infty = \|u\| > 1 - \varepsilon$, nagu vaja.

Eeldame nüüd, et Banachi ruumil $Z := X \oplus_\infty Y$ on SSD2-omadus. Oletame vastuväiteliselt, et kummalgi teguril ei ole SSD2-omadust. See tähendab, et

- (a) leiduvad $\varepsilon > 0$ ja mittetühjad B_X suhtes w -lahtised U_1, \dots, U_n nii, et iga $x_1 \in U_1, \dots, x_n \in U_n$ ja $x \in B_X$, $\|x\| > 1 - \varepsilon$, korral leidub mingi $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ nii, et $x_{i_0} + x \notin U_{i_0}$ või $x_{i_0} - x \notin U_{i_0}$,

ja

- (b) leiduvad $\delta > 0$ ja mittetühjad B_Y suhtes w -lahtised V_1, \dots, V_m nii, et iga $y_1 \in V_1, \dots, y_m \in V_m$ ja $y \in B_Y$, $\|y\| > 1 - \delta$, korral leidub mingi $j_0 \in \{1, \dots, m\}$ nii, et $y_{j_0} + y \notin V_{j_0}$ või $y_{j_0} - y \notin V_{j_0}$,

Tähistame iga $i \in \{1, \dots, n\}$ ja $j \in \{1, \dots, m\}$ korral $W_{ij} := U_i \times V_j$. Siis on iga W_{ij} ühikera B_Z suhtes w -lahtine ning eelduse järgi peaks $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in W_{i_0 j_0}$ jaoks leiduma $(x, y) \in B_Z$ nii, et

$$(x_{i_0}, y_{j_0}) \pm (x, y) \in W_{i_0 j_0} \quad \text{ja} \quad \|(x, y)\|_\infty > 1 - \max\{\delta, \varepsilon\},$$

mis on aga eelneva arutelu põhjal võimatu. □

Teoreem 2.2 ([HLLN, teoreem 3.1 (b)]). *Olgu X ja Y mittetriviaalsed Banachi ruumid ning olgu N absoluutne normaliseeritud norm vektorruumil \mathbb{R}^2 . Kui $N(1, 1) > 1$, siis Banachi ruumil $X \oplus_N Y$ ei ole SSD2P-d.*

Tõestus. Olgu $a \in (0, 1)$ selline, et $N(a, a) = 1$. Kuna $N(a, 1) > 1$ ja $N(1, a) > 1$, siis leidub $\varepsilon > 0$ nii, et

- (a) kui $N(b, c) \leq 1$ ja $b > 1 - \varepsilon$, siis $c < a - \varepsilon$,

- (b) kui $N(b, c) \leq 1$ ja $c > 1 - \varepsilon$, siis $b < a - \varepsilon$.

Tähistame $Z := X \oplus_N Y$. Vaatleme B_Z kahte viilu $S_1 := S((x^*, 0), \varepsilon)$ ja $S_2 := S((0, y^*), \varepsilon)$, kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $y^* \in S_{Y^*}$. Oletame vastuväiteliselt, et Banachi ruumil Z

on SSD2-omadus. See tähendab, et leiduvad $z_1 = (x_1, y_1) \in S_1, z_2 = (x_2, y_2) \in S_2$ ja $w = (u, v) \in B_Z$ nii, et

$$z_1 \pm w \in S_1, \quad z_2 \pm w \in S_2 \quad \text{ja} \quad \|w\| > 1 - \varepsilon.$$

Siit saame, et

$$1 - \delta < (x^*, 0)(z_1 \pm w) = x^*(x_1 \pm u) + 0(y_1 \pm v) = x^*(x_1 \pm u),$$

millest järeldub, et $\|x_1 \pm u\| > 1 - \varepsilon$. Analoogiliselt $\|y_2 \pm v\| > 1 - \varepsilon$. Järelikult saame punktide (a) ja (b) põhjal

$$\|y_1 \pm v\| < a - \varepsilon, \quad \|x_2 \pm u\| < a - \varepsilon.$$

Paneme tähele, et

$$\|v\| \leq \frac{1}{2} \left(\|y_1 + v\| + \|y_1 - v\| \right) < a - \varepsilon.$$

Analoogiliselt $\|u\| < a - \varepsilon$. Seega

$$\begin{aligned} 1 - \varepsilon < \|w\| &= N(\|u\|, \|v\|) \leq N(a - \varepsilon, a - \varepsilon) \\ &\leq N\left((1 - \varepsilon)a, (1 - \varepsilon)a\right) \\ &= (1 - \varepsilon)N(a, a) \\ &= 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

mis annab vastuolu.

□

3 Lipschitzi funktsioonide ruumi w^* -nõrk sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus

Selles paragrahvis on eesmärgiks näidata, et Lipschitzi funktsioonide ruumil $Lip_0(M)$ on w^* -SSD2-omadus juhul, kui meetriline ruum M on tõkestamata, st $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\} = \infty$, või kui meetrilises ruumis M on $\inf\{d(x, y) \mid x, y \in M, x \neq y\}$. Artiklis [HLLN] on vastava tulemuse tõestus antud juhul, kui M on tõkestamata ning teise juhu kohta on väidetud, et tõestus on sisuliselt sama nagu sarnase tulemuse [BLR, teoreem 2.4] tõestus w^* -SD2-omaduse kohta. Täpsem analüüs näitab, et kahjuks ei ole [BLR, teoreem 2.4] tõestus üle kantav w^* -SSD2-omaduse juhule. Allpool esitatud tõestuse ideeni jõudsimise tõkestamata meetrilise ruumi juhu tõestuse idee analüüsimisel. Alustame sellest, et selgitame, mis on w^* -SSD2-omadus ja mis on Lipschitzi ruum $Lip_0(M)$.

Olgu (M, d) meetriline ruum. Fikseerime vabalt ühe punkti $0 \in M$. $Lip_0(M)$ on Banachi ruum, mille elementideks on kõik sellised Lipschitzi funktsioonid $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, et $0 \mapsto 0$, ja mille norm on $\|\cdot\|_L$, kus $f \in Lip_0(M)$ korral on $\|f\|_L$ vähim Lipschitzi konstant L , et

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot d(x, y) \quad \forall x, y \in M.$$

Iga $x \in M$ korral olgu $\delta_x \in (Lip_0(M))^*$ defineeritud seosega $\delta(f) = f(x)$. Tähistame $\hat{M} = \{\delta_x \mid x \in M\}$. On teada, et $(\text{span}(\hat{M}))^* = Lip_0(M)$ (vt nt [GK]).

Lause 3.1. *Olgu X Banachi ruum ning Y tema kõikjal tihe alamruum. Järgnevad väited on samaväärsed:*

- (a) *Banachi ruumil X^* on w^* -SSD2-omadus,*
- (b) *iga $\varepsilon > 0$ ja B_{X^*} w^* -viilude S_1, \dots, S_n ($n \in \mathbb{N}$) korral, kus $S_i = S(y_i, \alpha_i)$ ja $y_i \in S_Y$, leiduvad $x_1^* \in S_1, \dots, x_n^* \in S_n$ ja $y^* \in B_{X^*}$ nii, et $\|y^*\| > 1 - \varepsilon$ ja*

$$x_i^* \pm y^* \in S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Tõestus. (a) \Rightarrow (b) on ilmne w^* -SSD2-omaduse definitsiooni põhjal.

(b) \Rightarrow (a). Olgu $\varepsilon > 0$ ja S_1, \dots, S_n ühikera B_{X^*} suvalised w^* -viilud, kus $S_i = S(x_i, \alpha_i)$. Kuna Y on kõikjal tihe alamruum, siis leiduvad $y_i \in S_Y$ nii, et $\|x_i - y_i\| < \alpha_i/2$.

Tingimuse (b) kohaselt leiduvad $x_1^* \in S_1(y_1, \alpha_1/2), \dots, x_n^* \in S_n(y_n, \alpha_n/2)$ ja $y^* \in B_{X^*}$ nii, et $\|y^*\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$x_i^* \pm y^* \in S(y_i, \alpha_i/2) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Siis $S(y_i, \alpha_i/2) \subset S(x_i, \alpha_i)$. Tõepoolest, kui $x^* \in S(y_i, \alpha_i/2)$, siis

$$x^*(x_i) = x^*(x_i - y_i) + x^*(y_i) \geq -\|x_i - y_i\| + x^*(y_i) > -\frac{\alpha_i}{2} + 1 - \frac{\alpha_i}{2} = 1 - \alpha_i.$$

□

Teoreem 3.2 ([HLLN, teoreem 5.6 (a)]). *Kui (M, d) on tõkestamata meetriline ruum ehk $\sup\{d(x, y) \mid x, y \in M\} = \infty$, siis Banachi ruumil $Lip_0(M)$ on w^* -SSD2-omadus.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Vaatleme Banachi ruumi $Lip_0(M)$ ühikkeri w^* -viile S_1, \dots, S_n , kus $S_i = S(\mu_i, \alpha_i)$ ja $\mu_i \in \text{span}(\hat{M})$. Näitame, et leiduvad $f_1 \in S_1, \dots, f_n \in S_n$ ja $g \in Lip_0(M)$ nii, et $\|g\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$f_i \pm g \in S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Valime esmalt $h_1 \in S_1, \dots, h_n \in S_n$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $h_i(\mu_i) = 1$. Sel juhul on muidugi $\|h_i\| = 1$. Iga μ_i puhul peame tõestuse lõpuni silmas mingit tema esitust vektorruumis $\text{span}(\hat{M})$ kujul $\mu_i = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{x_j}$ ja sel juhul tähistame $\text{supp}(\mu_i) = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Tähistame

$$N := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n \text{supp}(\mu_i).$$

Fikseerime vabalt $0 < \delta < 1$. Valime järgnevas teatud $r, s, t > 0$. Esiteks, olgu $r > 0$ selline, et $N \subset B(0, r)$. Võtame $s := 2r$. Olgu $t > 0$ selline, et $\delta t \geq 2s$. Paneme tähele kahte asjaolu, mida kasutame tõestuse hilisemas käigus:

1) iga $x \in B(0, r)$ ja $y \in M \setminus B(0, s)$ korral

$$d(x, 0) \leq d(x, y),$$

2) iga $x \in B(0, s)$ ja $y \in M \setminus B(0, t)$ korral

$$(1 - \delta)(d(x, 0) + d(y, 0)) \leq d(x, y).$$

Kuna M on tõkestamata, siis leidub $u \in M \setminus B(0, t/\delta)$.

Defineerime funktsioonid \tilde{g} ja $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$,

$$\tilde{g}: B(0, t) \cup \{u\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_i: M \setminus B(0, s) \cup N \rightarrow \mathbb{R},$$

seostega

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in B(0, t), \\ d(u, 0) - t, & \text{kui } x = u, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in M \setminus B(0, s), \\ h_i(x), & \text{kui } x \in N. \end{cases}$$

Näitame, et $1 - \delta < \|\tilde{g}\|_L \leq 1$ ja $\|\tilde{f}_i\|_L \leq 1$. Esimese võrratuse jaoks paneme tähele, et

$$|\tilde{g}(u) - \tilde{g}(0)| = d(u, 0) - t \geq d(u, 0) - \delta d(u, 0) = (1 - \delta)d(u, 0).$$

Võrratus $\|\tilde{g}\|_L \leq 1$ kehtib, sest $x \in B(0, t)$ korral

$$|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(u)| = d(u, 0) - t \leq d(u, 0) - d(x, 0) \leq d(x, u).$$

Võrratuse $\|\tilde{f}_i\|_L \leq 1$ jaoks paneme tähele, et $x \in N$ ja $y \in M \setminus B(0, s)$ korral

$$|\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| = |h_i(x) - 0| = |h_i(x) - h_i(0)| \leq d(x, 0) \leq d(x, y).$$

Jätkame funktsioonid \tilde{g} ja $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ Lipschitzi normi säilides kogu ruumile M . Kusjuures tähistame saadud jätkusid edasi sümboolitega \tilde{g} ja $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$. Paneme tähele, et $\|\tilde{f}_i \pm \tilde{g}\|_L \leq 1/(1 - \delta)$. Tõepoolest, selleks paneme tähele, et $x \in B(0, s)$ ja $y \in M \setminus B(0, t)$ korral

$$\begin{aligned} |(\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(x) - (\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(y)| &\leq |\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| + |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| \\ &= |\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(0)| + |\tilde{g}(0) - \tilde{g}(y)| \\ &\leq d(x, 0) + d(0, y) \\ &\leq \frac{1}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

Võtame $g := (1 - \delta)\tilde{g}$ ja $f_1 := (1 - \delta)\tilde{f}_1, \dots, f_n := (1 - \delta)\tilde{f}_n$. Siis on $\|g\|_L > (1 - \delta)^2$ ja

$$\mu_i(f_i) = (1 - \delta)\mu_i(\tilde{f}_i) = (1 - \delta)\mu_i(h_i) = 1 - \delta \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Kuna $g|_N = 0$, siis iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on $\mu_i(g_i) = 0$, mistõttu $\mu_i(f_i \pm g) = \mu_i(f_i) = 1 - \delta$.

Täpsustame lõpetuseks δ valiku nii, et saadud g ja f_1, \dots, f_n oleksidki otsitavad. On selge, et δ tuleb valida nii, et $(1 - \delta)^2 \geq 1 - \varepsilon$ ja iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $1 - \delta \geq 1 - \alpha_i$. \square

Teoreem 3.3 ([HLLN, teoreem 5.6 (b)]). *Kui M on meetriline ruum ja tema kuhjumispunktide hulk M' ei ole tühihulk, siis Banachi ruumil $Lip_0(M)$ on w^* -SSD2-omadus.*

Tõestus. Olgu M selline meetriline ruum, et $M' \neq \emptyset$. Näitame, et Banachi ruumil $Lip_0(M)$, kus $0 \in M'$, on w^* -SSD2-omadus.

Olgu $\varepsilon > 0$. Vaatleme Banachi ruumi $Lip_0(M)$ ühikera w^* -viile S_1, \dots, S_n , kus $S_i = S(\mu_i, \alpha_i)$ ja $\mu_i \in \text{span}(\hat{M})$. Näitame, et leiduvad $f_1 \in S_1, \dots, f_n \in S_n$ ja $g \in Lip_0(M)$ nii, et $\|g\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$f_i \pm g \in S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Valime esmalt $h_1 \in S_1, \dots, h_n \in S_n$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $h_i(\mu_i) = 1$. Sel juhul on muidugi $\|h_i\| = 1$. Iga μ_i puhul peame tõestuse lõpuni silmas mingit tema esitust vektorruumis $\text{span}(\hat{M})$ kujul $\mu_i = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{x_j}$ ja sel juhul tähistame $\text{supp}(\mu_i) = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Tähistame

$$N := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n \text{supp}(\mu_i).$$

Fikseerime vabalt $0 < \delta < 1$. Valime järgnevas teatud $r, s, t > 0$. Esiteks, olgu $t = d(0, N \setminus \{0\})$. Olgu $r, s > 0$ sellised, et $\delta t \geq 2s$ ja $\delta s \geq 4r$. Paneme tähele, et

1) $x \in B(0, s)$ ja $y \in N$ korral $d(x, 0) \leq \delta d(x, y)$:

$$\delta d(x, y) \geq \delta(d(y, 0) - d(x, 0)) \geq \delta(t - s) \geq 2s - \delta s > s \geq d(x, 0);$$

2) $x \in B(0, r)$ ja $y \in M \setminus B(0, s)$ korral $(2 + \delta)d(x, 0) \leq \delta d(x, y)$:

$$\delta d(x, y) \geq \delta(d(y, 0) - d(x, 0)) \geq \delta(s - r) \geq 4r - \delta r \geq 3r > (2 + \delta)r \geq (2 + \delta)d(x, 0).$$

Valime $u \in M \setminus \{0\}$ nii, et $d(u, 0) < r/2$.

Defineerime funktsioonid \tilde{g} ja $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$,

$$\tilde{g}_i : \{u, 0\} \cup M \setminus B(0, s) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n : N \cup B(0, r) \rightarrow \mathbb{R},$$

seostega

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0 \text{ või } x \in M \setminus B(0, r), \\ d(u, 0), & \text{kui } x = u, \end{cases}$$

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \in B(0, s), \\ h_i(x), & \text{kui } x \in N. \end{cases}$$

Näitame, et $\|\tilde{g}\|_L = 1$ ja $\|\tilde{f}_i\|_L \leq 1 + \delta$. Esimese jaoks paneme tähele, et $x \in M \setminus B(0, r)$ korral

$$|\tilde{g}(x) - \tilde{g}(u)| = d(u, 0) < r/2 < d(x, u)$$

ja muidugi on

$$|\tilde{g}(u) - \tilde{g}(0)| = d(u, 0).$$

Teise jaoks paneme tähele, et $x \in B(0, s)$ ja $y \in N$ ja korral

$$|\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| = |0 - h_i(y)| = |h_i(0) - h_i(y)| \leq d(0, y) \leq d(x, y) + d(x, 0) \leq (1 + \delta)d(x, y).$$

Jätkame funktsioonid \tilde{g} ja $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ Lipschitzi normi säilides kogu ruumile M . Kusjuures tähistame saadud jätkusid edasi sümboolitega \tilde{g} ja $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$. Paneme tähele, et $\|\tilde{f}_i \pm \tilde{g}\|_L \leq 1 + 2\delta$. Tõepoolest, selleks paneme tähele, et $x \in B(0, r)$ ja $y \in M \setminus B(0, s)$ korral

$$\begin{aligned} |(\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(x) - (\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(y)| &\leq |\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(y)| + |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| \\ &= |0 - \tilde{f}_i(y)| + |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(y)| = |\tilde{f}_i(0) - \tilde{f}_i(y)| + |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(0)| \\ &\leq (1 + \delta)d(0, y) + d(x, 0) \leq (1 + \delta)(d(x, y) + d(x, 0)) + d(x, 0) \\ &\leq (1 + 2\delta)d(x, y). \end{aligned}$$

Võtame $g := 1/(1 + 2\delta)\tilde{g}$ ja $f_1 := 1/(1 + 2\delta)\tilde{f}_1, \dots, f_n := 1/(1 + 2\delta)\tilde{f}_n$. Siis on $\|g\|_L > 1/(1 + 2\delta)$ ja

$$(1 + 2\delta)\mu_i(f_i) = \mu_i(\tilde{f}_i) = \mu_i(h_i) = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Kuna $g|_N = 0$, siis iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral on $\mu_i(g_i) = 0$, mistõttu $\mu_i(f_i \pm g) = \mu_i(f_i) = 1/(1 + 2\delta)$.

Täpsustame lõpetuseks δ valiku nii, et saadud g ja f_1, \dots, f_n oleksidki otsitavad. On

selge, et δ tuleb valida nii, et $1/(1 + 2\delta) \geq 1 - \varepsilon$ ja $1/(1 + 2\delta) \geq 1 - \alpha_i$ iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral.

□

Teoreem 3.4 ([HLLN, teoreem 5.6 (b)]). *Olgu (M, d) selline meetriline ruum, et $\inf\{d(x, y) \mid x, y \in M, x \neq y\} = 0$, kuid $M' = \emptyset$. Siis on Banachi ruumil $Lip_0(M)$ w^* -SSD2-omadus.*

Tõestus. Olgu $\varepsilon > 0$. Vaatleme Banachi ruumi $Lip_0(M)$ ühikera w^* -viile S_1, \dots, S_n , kus $S_i = S(\mu_i, \alpha_i)$ ja $\mu_i \in \text{span}(\hat{M})$. Näitame, et leiduvad $f_1 \in S_1, \dots, f_n \in S_n$ ja $g \in Lip_0(M)$ nii, et $\|g\| > 1 - \varepsilon$ ja

$$f_i \pm g \in S_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Valime esmalt $h_1 \in S_1, \dots, h_n \in S_n$ nii, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $h_i(\mu_i) = 1$. Sel juhul on muidugi $\|h_i\| = 1$. Iga μ_i puhul peame tõestuse lõpuni silmas mingit tema esitust vektorruumis $\text{span}(\hat{M})$ kujul $\mu_i = \sum_{j=1}^m a_j \delta_{x_j}$ ja sel juhul tähistame $\text{supp}(\mu_i) = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Tähistame

$$N := \{0\} \cup \bigcup_{i=1}^n \text{supp}(\mu_i).$$

Fikseerime vabalt $0 < \delta < 1$. Valime järgnevas teatud $r, s, t > 0$. Kuna N on lõplik hulk ja kuna $M' = \emptyset$, siis leidub $t > 0$ nii, et $B(x, t) = \{x\}$ iga $x \in N$ korral. Valime $r, s > 0$ nii, et $\delta t \geq 4s$ ja $\delta s \geq 4r$.

Olgu $x, y \in M$ sellised, et $d(x, y) < r/2$, kusjuures $y \notin N$. Defineerime kujutused $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ ja \tilde{h} ,

$$\tilde{f}_i: B(x, s) \cup N \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{g}: \{x, y\} \cup M \setminus B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$$

seostega

$$\tilde{f}_i(u) = \begin{cases} h_i(u), & \text{kui } u \in N, \\ h_i(x), & \text{kui } u \in B(x, s). \end{cases}$$

$$\tilde{g}(u) = \begin{cases} 0, & \text{kui } u = x \text{ või } u \in M \setminus B(x, r), \\ d(x, y), & \text{kui } u = y. \end{cases}$$

Näitame, et $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ ja \tilde{g} on Lipschitzi kujutused, kusjuures $\|\tilde{f}_i\|_L \leq 1 + \delta$ ja $\|\tilde{g}\|_L \leq 1$. Normi $\|f_i\|_L$ hinnangu saamiseks hindame $u, v \in B(x, s) \cup N$ korral suurust $|\tilde{f}_i(u) - \tilde{f}_i(v)|$.

Piisab vaadelda kolme juhtu: 1) $u, v \in B(x, s)$, 2) $u, v \in N$, 3) $u \in B(x, s)$ ja $v \in N$.
Esimesel juhul on $|\tilde{f}_i(u) - \tilde{f}_i(v)| = 0$ ja teisel juhul saame $\|g_i\|_L = 1$ tõttu

$$|\tilde{f}_i(u) - \tilde{f}_i(v)| = |h_i(u) - h_i(v)| \leq d(u, v).$$

Kolmandal juhul saame

$$|\tilde{f}_i(u) - \tilde{f}_i(v)| = |h_i(x) - h_i(v)| \leq d(x, v) \leq d(u, v) + d(x, u) \leq (1 + \delta)d(u, v),$$

sest

$$d(x, u) \leq s \leq \delta(t - s) \leq \delta(d(u, v) - d(x, u)) \leq \delta d(u, v).$$

Normi $\|\tilde{g}\|_L$ hinnangu saamiseks hindame $u, v \in \{x, y\} \cup M \setminus B(x, r)$ korral suurust $|\tilde{g}(u) - \tilde{g}(v)|$. Piisab vaadelda kahte juhtu 1) $u = x$ ja $v = y$, 2) $u \in M \setminus B(x, r)$ ja $v = y$.
Esimesel juhul on $|\tilde{g}(u) - \tilde{g}(v)| = d(u, v)$. Teisel juhul saame

$$|\tilde{g}(u) - \tilde{g}(v)| = |d(x, y) - 0| = d(x, y) < r/2 = r - r/2 \leq d(u, x) - d(x, v) \leq d(u, v).$$

Jätkame kujutused $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ ja \tilde{g} Lipschitzi normi säilitavalt kogu meetrilisele ruumile M , kusjuures tähistame saadud jätkusid edasi vastavalt $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$ ja \tilde{g} . Paneme tähele, et iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\|\tilde{f}_i \pm \tilde{g}\|_L \leq 1 + 2\delta.$$

Tõepoolest, hindame $u, v \in M$ korral suurust $|(\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(u) - (\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(v)|$. Piisab vaadelda kolme juhtu: 1) $u, v \in B(x, s)$, 2) $u, v \notin B(x, r)$, 3) $u \in B(x, r)$ ja $v \notin B(x, s)$. Esimesel juhul on

$$|(\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(u) - (\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(v)| = |\tilde{g}(u) - \tilde{g}(v)| \leq d(u, v).$$

Teisel juhul on

$$|(\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(u) - (\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(v)| = |\tilde{f}_i(u) - \tilde{f}_i(v)| \leq (1 + \delta)d(u, v).$$

Kolmandal juhul saame

$$\begin{aligned}
|(\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(u) - (\tilde{f}_i \pm \tilde{g})(v)| &= |\tilde{f}_i(x) \pm \tilde{h}(u) - \tilde{f}_i(v) \mp 0| \\
&\leq |\tilde{f}_i(x) - \tilde{f}_i(v)| + |\tilde{h}(u) - \tilde{h}(x)| \\
&\leq (1 + \delta)d(x, v) + d(u, x) \\
&\leq (1 + \delta)(d(u, v) + d(u, x)) + d(u, x) \\
&= (1 + \delta)d(u, v) + (2 + \delta)d(u, x) \\
&\leq (1 + 2\delta)d(u, v),
\end{aligned}$$

sest

$$(2 + \delta)d(u, x) \leq (2 + \delta)r \leq \delta(s - r) \leq \delta(d(x, v) - d(u, x)) \leq \delta d(u, v).$$

Võtame

$$f_1 = \frac{1}{1 + 2\delta}\tilde{f}_1, \dots, f_n = \frac{1}{1 + 2\delta}\tilde{f}_n \quad \text{ja} \quad g = \frac{1}{1 + 2\delta}\tilde{g}.$$

Siis on ilmselt $\|f_i\|_L \leq 1$ ja $\|f_i \pm g\|_L \leq 1$. Veel paneme tähele, et

$$\mu_i(f_i) = \frac{1}{1 + 2\delta} > 1 - \alpha_i$$

ja kuna $g|_N = 0$, siis $\mu_i(f_i \pm g) = \mu_i(f_i) > 1 - \alpha_i$. Järelikult on $f_i \in S_i$ ja $f_i \pm g \in S_i$.

Seejuures on $\|g\| = 1/(1 + 2\delta) > 1 - \varepsilon$.

□

Viited

- [BLR] J. Becerra Guerrero, G. López-Pérez, ja A. Rueda Zoca, *Octahedrality in Lipschitz-free Banach spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, ilmumas.
- [GK] G. Godefroy ja N. J. Kalton, *Lipschitz-free Banach spaces*, Studia Math. **159** (2003).
- [HHZ] P. Habala, P. Hájek ja V. Zizler, *Introduction to Banach spaces I and II*, Matfyzpress, Praha, 1996.
- [HLLN] R. Haller, J. Langemets, V. Lima ja R. Nadel, *Symmetric Strong Diameter Two Property*, arXiv:1804.01705v1 [math.FA], ilmumas.
- [L] J. Langemets, *Diameter 2 properties*, magistratöö, Tartu Ülikool, 2012.
- [M] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 183, Springer-Verlag, New York, 1998.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Siim Sirel,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose „Banachi ruumide sümmeetriline tugev diameeter-2 omadus“, mille juhendaja on Rainis Haller,

1.1 reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **07.05.2018**