

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

G. METS ja I. PETERSEN

ÜLDINE FÜÜSIKA
KINEMAATIKA JA SISSEJUHATUS
MATEMAATILISSE ANALÜÜSI

Tallinn
1969

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

G. METS ja I. PETERSEN

ÜLDINE FÜÜSIKA
KINEMAATIKA JA SISSEJUHATUS
MATEMAATILISSE ANALÜÜSI

Tallinn
1969

§ 1. KINEMAATIKA

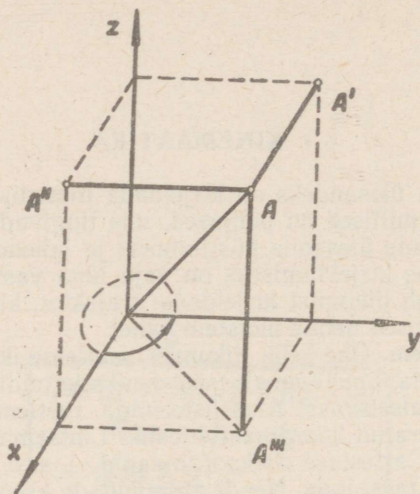
Kinemaatika ülesandeks on kirjeldada liikumist, ilma et seataks küsimus, millised on põhused, mis tingivad ühe või teise liikumise. Viimane ülesanne püstitatakse ja lahendatakse dünaamikas. Liikumise kirjeldamiseks on vaja luua vastavad mõisted, millede abil saab liikumist kirjeldada: trajektor, kiirus, kiirendus j. m. ja leida seosed nende mõistete vahel.

1. **Alussüsteem.** Ühe keha liikumist vaatleme ikka mingi teise keha suhtes, mida nimetame alussüsteemiks ja mida kokkuleppeliselt loeme paigalseisvaks. Alussüsteemina mõtleme kõva keha, millega on määratud koordinaatteljestik. Lihtsamaks koordinaatteljestikuks on Cartesiuse ristkoordinaadid — s. o. kolm teineteisega risti olevat tasapinda. Nende tasapindade asendid on määratud alussüsteemi kehal olevate märkidega. Punkti asend sellises koordinaadistikus on antud selle punkti kaugustega kolmest koordinaattasapinnast. Kaugust mõõdetakse punktist tasapinnale võetud ristjoont mööda. Ühel pool tasapinda loeme kaugused positiivseks, teisele poole tasapinnast negatiivseks.

Kolm koordinaattasapinda lõikuvad kolme sirget mööda. Iga kahe tasapinna lõikejoon on risti kolmanda tasapinnaga. Neid sirgeid nimetatakse koordinaattelgedeks ja kuna nad on rööbikud punkti kaugustega vastavatest tasapindadest, siis kantakse punkti kaugused üle rööbiti iseendaga koordinaattelgedele. Seega telgedel antud pikkused on punkti kaugused vastavatest koordinaattasapindadest.

Kui lepime kokku, kummal pool koordinaattasapindu loeme kaugused positiivseks, kummal pool negatiivseks, siis oleme sellega määranud ka koordinaattelgede positiivsed ja negatiivsed suunad. Nummerdame koordinaatteljed: 1. koordinaat (märgime x -iga) 2. koordinaat (märgime y -iga) ja 3. koordinaat (märgime z -iga). Sellega oleme määranud koordinaatide suundade järjekorra, mida peame alati silmas pidama, sest see on paljudel juhtudel määrava tähtsusega. Kui järjekord on selline, nagu kõrval toodud joonisel, siis nimetame seda teljestikku **p a r e m k ä e t e l**

jestikuks. Võime valida koordinaatide järjekorra ka nii, et saame «vasakukäe» teljestiku, näit. kui vahetame kahe telje järjekorra, ehk muudame ühe telje suuna vastupidiseks.



Joon 1

Parema ja vasaku käe teljestiku mõiste on tihedalt seotud n. n. kruvi reegluga.

Parema käe kruvi on selline kruvi, mille pea pööramisel kellaosuti suunas kruvi nihkub meist eemale, s. t. sellise pööramisega meie keerame parema käe kruvi sisse. Kõik toodetavad kruvid on parema käe kruvid ja ainult seal, kus nõuab mehhanismi liikumine, tehakse vasakukäe kruvi, mis keeramisel kellaosuti suunas nihkub meie poole, s. t. sellise pööramisega keerame vasaku käe kruvi välja. Vankri telgede otstes olevad mutrid, mis lõkestavad ratta äratulekut teljelt, paremal pool (sõidusuunas vaadates) on parema käe kruvi keermega ja vasakul pool vasakukäe keermega.

Vankri sõidul rattad keeravad mõlemad mutrid kinni; oleks vasakul pool olnud parema käe keere, siis keeraks ratas sõidul mutri lahti.

Parema käe kruvi rakendame teljestikule järgmiselt. Kui pöörame esimese (x) telje teise (y) telje

poole üle väiksema nurga (nurk 90° ja mitte 270°), siis sellisel pööramisel paremakäe kruvi nihkub kolmanda (z) telje suunas. Kui kolmas (z) telg näitab vastassuunas, siis on meil tegemist vasaku käe teljestikuga.

2. **Masspunkt.** Igapäevases elus ja tehnikas esinevate kehade liikumine on väga keeruline, mille tõttu tema liikumise jälgimine ja kirjeldamine osutub väga komplitseerituks. Näiteks rattasõitja koos rattaga nihkub tee suunas. Samal ajal rattad pöörlevad, inime ne tallab väntasid, liigub isesuguselt ülekande kett jne. Meie lihtsustame alguses oma probleemi nii, et vaatleme punkti liikumist ja uurime tema liikumise iseloomustavaid suurusi. Dünaamikas peame vaatama sellist punkti, millel on olemas ka inerts ja sellepärast räägime algusest peale masspunktist, s. o. punktist, millel on olemas ka mass, kuigi kinemaatikas inerts omadus ei tule üldse vaatluse alla. Selline probleemi lihtsustamine on vägagi õigustatud. Kõigepealt teatud olukordades võime ka suuri kehi vaadelda punktina, näit. suurt ookeaniaurikut ookeanil, kui jälgime tema liikumist lennukilt mõne kilomeetri kauguselt. Taevamehaanikas vaatleme planeete ka punktina jne. S. t., võime keha vaadelda punktina, kui tema mõõtmed on väikesed, võrreldes teiste kehade kaugustega ja vaatlemiskoha kaugusega. Kui ookeaniaurik siseneb sadamasse, ei saa meie teda enam punktina vaadelda. Peame arvestama, et tema pikkus on palju suurem kui laius ja vastavalt sellele teda nihutama ja pöörama.

Kehade mehaanikat arendame masspunkti mehaanika abil, vaadeldes kehi kui masspunktide kogusid.

3. **Masspunkti liikumise jälgimine ja kirjeldamine.** Füüsikas vaatlus tähendab mõõtmist. Nii ka siin, punkti liikumisel, mõõdame üksikutel ajamomentidel t_1, t_2, t_3 jne. punkti asukoha koordinaate. Tulemuseks saame tabeli, kus igale ajamomendile on vastavusse seatud punkti kolm asukoha koordinaati.

Kui mõõtmised on tehtud küllalt väikeste ajavahemikkude tagant ja küllalt täpselt, siis võime sellest tabelist saada kõiki

aeg	I koord.	II koord.	III koord.
t_1	x_1	y_1	z_1
t_2	x_2	y_2	z_2
t_3	x_3	y_3	z_3
.....
t_n	x_n	y_n	z_n

liikumist kirjeldavaid suurusi. Edaspidi hakkamegi tutyuma nende mõistetega.

Kõigepealt, saadud tabel esitab meile punkti koordinate kui aja t funktsioone. Koordinaatide olenevust ajast võime esitada ka $x-t$; $y-t$ ja $z-t$ graafikutena, kandes tabelist vastavad punktid ja ühendades neid pideva joonega. Kõige mugavam oleks, kui esitame koordinaatide olenevused ajast analüütiliselt, s. o. võrrandite kujul:

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi(t) \\ y &= \eta(t) \\ z &= \zeta(t) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Kuidas tabeli andmetest saada selliseid seoseid, on puht matemaatiline ülesanne ja sellel meie lähemalt ei peatu. Oletame, et vaatluste tulemusena oleme sellised seosed saanud. Meid huvitab punkti tee — s. o. trajektorikuju, — kas ta on sirge, ellips, sinusoid või mõni muu kõverjoon. Trajektori kuju küsimus on väga lihtne. Nimelt võrranditega (1) ongi antud trajektor parameetrilisel kujul. Kõik oleneb meie analüütilise geomeetria tundmisest. Kui meie analüütilises geomeetrias väga kodus ei ole ja võrranditest (1) ei tea ütelda, mis kõverat nad määravad, võib elimineerida parameetri t , siis saame kaks seost x , y , z -i vahel, millest võibolla tunneme juba kõvera ära. Toome ühe näite. Olgu

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \omega t \\ y &= b \cos \omega t \\ z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Kuna $z = 0$, siis liikumine toimub x y tasapinnal. Jagame esimese võrrandi a -ga, teise b -ga, tõstame mõlemad ruutu ja liidame. Saame

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1 \quad (3)$$

See on aga tuttav ellipsi võrrand.

Edasi meid huvitavad kiirus ja kiirendus igas trajektori punktis, kuid need on komplitseeritumad mõisted. Seepärast järgnevatel punktides tutvume nendega esialgu lihtsamate liikumise erijuhtudel ja siis alles kõige üldisema punkti liikumise korral.

4. Ühtlane sirgjoone liikumine. See on selline liikumine, kus punkt liigub sirgjoonel ja võrdsetes ajavahemikkudes läbib võrdsed tee pikkused. Sellest definitsioonist järgneb, et läbikäidud tee (s) on võrdeline ajaga ja võime kirjutada

$$s = vt \quad (4)$$

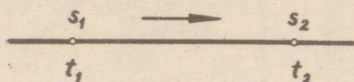
Et selgitada võrdelisuse teguri v füüsikalist tähendust, jagame võrrandi ajaga (t) ja saame:

$$v = \frac{s}{t} \quad (5)$$

Ühe suuruse jagamine teisega tähendab jagatava suuruse taandamist jagava suuruse ühikule. Seega tegur v on ajaühikus läbikäidud tee; seda nimetamegi kiiruseks ühtlases liikumises. Tema

ühikuks CGS süsteemis on $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

5. **Kiiruse mõiste mitteühtlases sirgjoones liikumises.** Mitteühtlane liikumine on selline, kus võrdsetes ajavahemikkudes läbikäidud teed ei ole võrdsed. Mis tuleb mõista sel juhul kiiruse all? Toetume eelmises punktis loodud kiiruse mõistele: see oli — ära käidud tee jagatis vastava ajaga. Olgu momendil t_1 läbikäidud tee s_1 ja momendiks t_2 vastavalt s_2 .



Joon. 2

Seega ajavahemiku $t_2 - t_1$ kestel käidud tee oli $s_2 - s_1$. Moodustame jagatise

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (6)$$

Selle dimensioon on küll pikkus jagatud ajaga, kuid selle suurus oleneb algmomendist (t_1) ja ka ajavahemiku $t_2 - t_1$ pikkusest. Olukorra selgitamiseks mõtleme ühtlaselt kiirenevat liikumist. Kui määrame kiiruse alates algmomendist (kui kiirus on null) kuni teise sekundi lõpuni (s. o. $\Delta t = 2$ sec.), saame väiksema väärtuse, kui siis, kui määraksime kiiruse algmomendist kuni 10-nda sekundi lõpuni (s. o. $\Delta t = 10$ sekundit). Nii et kui tahame olla täpsed, siis koos jagatise väärtusega $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ peame nimetama veel, mis aja momendist alates ja kui pika aja vältel on tee pikkus mõõdetud. Sellist jagatist nimetatakse keskmi s e k s k i i r u s e k s. Füüsikaliselt võiks keskmist kiirust vaadelda kui ühtlase liikumise kiirust, millega ajavahemikus $t_2 - t_1$ käiakse läbi tee $s_2 - s_1$. Keskmise kiiruse mõistet rakendatakse praktilises elus

küll siinseal (näit. rongide sõiduplaani koostamisel), kuid mehaanikas see mõiste ei ole otstarbekohane just selle tõttu, et ta oleneb algmomendist ja ajavahemiku pikkusest. Kiirust antud momendi t_1 läheduses iseloomustaks jagatis $\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$ seda paremini, mida lähemal oleks järgmine moment t_2 momendile t_1 . Seepärast võtame selle jagatise piirväärtuse, kui ajavahemik $t_2-t_1 = \Delta t$ piiramatult läheneb nullile, mille juures ka läbikäidud tee $s_2-s_1 = \Delta s$ läheneb nullile, kuid jagatis annab lõpliku suuruse, mida nimetame hetkkiiruseks, sest ta oleneb nüüd ainult algmomendist t_1 , kuna moment t_2 on sellele lõpmata lähedane

$$v = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (7)$$

Matemaatikas kasvud Δs , Δt piiril ($\Delta s \rightarrow 0$; $\Delta t \rightarrow 0$) tähistatakse ds , dt ja nimetatakse diferentsiaalideks. Seega võiks viimase valemi kirjutada

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \quad (8)$$

Diferentsiaalide jagatist $\left(\frac{ds}{dt}\right)$ nimetatakse tee pikkuse (s) tuletiseks aja (t) järgi, ja tähistatakse s' või \dot{s} (kui tuletis on võetud aja järgi).

Hetkkiirus on seega kiirus vaadeldaval momendil, — mõnel teisel momendil on ta juba teine jne., seega ta oleneb ajast. Kuna hetkkiiruse arvutamisel läbikäidud teed jagame ajaga, siis võime jagamise kui ühikule taandamise mõttes rääkida, et hetkkiirus on ajaühikus läbikäidud tee. Seejuures meie ei mõtle muidugi teed, mida masspunkt sekundis läbi käib. Näiteks elektron aatomis võngub sagedusega 10^{14} Hz, s. t. ühes sekundis elektroni kiirus muutub 10^{14} korda nullist kuni 10^8 cm/sek. uuesti nulliks ja — 10^8 cm/sek.

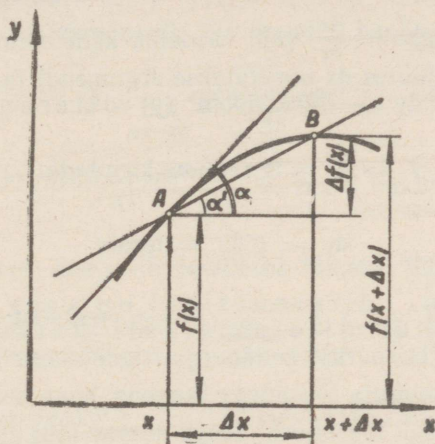
6. Tuletise mõistest. Kõrgema matemaatika kursuses tuletise mõistet käsitatakse väga põhjalikult, kuid veidi hiljem. Füüsika kursuses esineb ta mitmel korral. Seepärast peatume sellel mõistel pikemalt.

Füüsikas leiame väga palju suurusi, mis on teise suuruse funktsioonid. Iga füüsika seadus, iga valem annavad meile olenevusi suuruste vahel. Näit. Newtoni II liikumisseadus annab võrdelise seose tungi ja kiirenduse vahel, pöördvõrdelise olenevuse

massi ja kiirenduse vahel. Gravitatsiooniseadus annab kahe keha vahel mõjuva tungi, mis on pöörvõrdeline kehade kauguse ruuduga. Maxwelli kiiruste jaotus annab molekulide arvu, millede kiirus on v , keeruka avaldisega, mis oleneb molekuli kiirusest:

$$n_v dv = n c v^2 dv \exp\left(-\frac{v^2}{\alpha^2}\right) jne.$$

Seepärast vaatame asja veidi üldisemalt. Suurust, näit. (y), mis oleneb teisest, näit. (x -ist), nimetame teise suuruse (x) funktsiooniks. Kirjutame $y = f(x)$ ja ütleme, et y on x -i funktsioon. Siin



Joon 3.

vaatame x -i kui olenematut muutujat ja nimetame funktsiooni (y -i) argumendiks. Kõikide nende suuruste juures huvitab meid nende muutumise intensiivsus s. t. funktsiooni muutus taandatud argumendi muutuse ühikule $\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)$ (muutumise kiirus). Kuna $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ei ole üldiselt sõltumatu Δx -ist (nagu selgitatud näites kiiruste kohta), leiame piirväärtuse $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, mida nimetame funktsiooni $f(x)$ tuletiseks x -i järgi ning mis oleneb vaid argumendist x .

Joonisel näeme, et $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ ja tuletis x -i järgi oleks

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (9)$$

Viimane avaldis on üldine eeskiri funktsiooni tuletise arvutamiseks. Tuletise üldine sisu on funktsiooni muutumise kiirus. Jooniselt leiame aga ka geomeetrilise tõlgenduse

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (10)$$

Kui läheme piirile üle $\Delta x \rightarrow 0$, siis $B \rightarrow A$ ja lõikaja AB on siis funktsiooni graafiku puutujaks punktis A ; seega $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$.

Tuletise sümbolit $\frac{dy}{dx}$ võib vaadelda kahe suuruse dy ja dx jagatisena, kusjuures dx nimetatakse argumendi (x) diferentsiaaliks ja dy — funktsiooni (y) diferentsiaaliks. Seosest

$$y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \text{ võime kirjutada} \quad (11)$$

$$dy = y' dx = \operatorname{tg} \alpha dx \quad (12)$$

Funktsiooni diferentsiaal on seega tuletise ja argumendi diferentsiaali korrutis. Joonise kohaselt see on täisnurkse kolmnurga trigonomeetiline seos, kusjuures $\operatorname{tg} \alpha$ on puutuja tõusnurga tangens, kuna seoses $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha_1$ nurk α_1 on lõikaja tõusunurk. Seega seosed (10) ja (11) üldiselt ei ole täiesti identsed. Nende erinevus on seda väiksem, mida väiksem on Δx .

Illustreerime öeldu füüsikalise näitega. Hetkkiirus $v = \frac{ds}{dt}$, siit $ds = v dt$ tähendab tee pikkust, mida läbiks punkt ajavahe dt vältel konstantse kiirusega, mis temal oli momendil t . Seega erineb tegelikult aja Δt jooksul läbikäidud tee Δs tee diferentsiaal ds , kuna kiirus muutub. Kuid mida väiksem on ajavahe $\Delta t \rightarrow dt$, seda vähem muutub kiirus selle ajavahe jooksul ja seda vähem erineb tegelikult läbikäidud tee Δs , tee diferentsiaal ds . Järelikult võimaldab funktsiooni diferentsiaal küllalt väikeste argumendi muutuste ulatuses otsustada funktsiooni muutumise üle.

Näiteid funktsiooni tuletise arvutamisest.

1) Kuna konstandi (näit. a) kasv on alati null, siis ka $a' = \frac{\Delta a}{\Delta x} = 0$, s. t. konstandi tuletis on null.

2) Olgu $y = a + bx$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a + b(x + \Delta x) - (a + bx)}{\Delta x};$$

avame sulud, siis:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a + bx + b\Delta x - a - bx}{\Delta x} \quad (14)$$

Liikmed a ja bx koonduvad, siis taandub ka Δx ja tulemuseks on b .

3) Olgu $y = ax^2$; $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^2 - ax^2}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + 2ax\Delta x + a\Delta x^2 - ax^2}{\Delta x} = 2ax + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a\Delta x = 2ax \quad (15)$$

4) Olgu $y = ax^n$, kus n on positiivne täisarv. Siis

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a(x + \Delta x)^n - ax^n}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \left[x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} \cdot \Delta x + \right. \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x^n \left. \right] = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[nx^{n-1} + \right. \\ &+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} \cdot \Delta x + \dots + (\Delta x)^{n-1} \left. \right] = a \cdot nx^{n-1} \quad (16) \end{aligned}$$

Saadud tulemus kehtib ka negatiivse ja murdarvulise n -i korral.

5) Olgu $y = \frac{a}{x}$. Siis

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{x + \Delta x} - \frac{a}{x}}{\Delta x} = a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x - x - \Delta x}{\Delta x \cdot (x + \Delta x)x} = \\ &= a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{a}{x^2}. \quad (17) \end{aligned}$$

Sama tulemuse saame, rakendades eelmise tulemuse $(ax^n)' = anx^{n-1}$

6) Olgu $y = \log_a x$. Siis

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \log_a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right]^{\frac{1}{x}} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \lim_{z \rightarrow 0} \log_a (1+z)^{\frac{1}{z}}, \end{aligned}$$

kus $z = \frac{\Delta x}{x}$ läheneb nullile koos Δx nullile lähenemisega. Aval-

dis $(1+z)^{\frac{1}{z}}$ omandab $z=1$, $z=0,5$, $z=0,1$, $z=1,01$, $z=0,001, \dots$ puhul vastavalt väärtused 2, 2,25, 2,59, 2,705, 2,717, ... Selle avaldise piirväärtust tähistatakse e ja tema neljakohaline lähisväärtus on $e=2,718$. Siis $\log_a e = \log_a 2,718$. Kui $a=10$ siis $\log_{10} 2,718 = 0,4343 = m$. Seega

$$\frac{d}{dx} (\lg_a x) = \frac{\lg_a e}{x}. \quad (18)$$

Tulemus saab lihtsama kuju, kui $y = \log_a x$ asemel võtta $y = \log_e x$. Siis $\log_e e = 1$. Logaritme alusel e nimetatakse naturaallogaritmideks ja tähistatakse sümboliga \ln . Arvu e nimetame naturaallogaritmide aluseks.

Seega, kui $y = \ln x$, siis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \quad (19)$$

7) Olgu $y = a^x$

Pöörame funktsiooni ja arvutame esialgu $\frac{dx}{dy}$ ja siis selle pöördväärtuse $\frac{dy}{dx}$.

$$x = \log_a y; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{\log_a e}{y} \text{ ja } \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\log_a e};$$

kuna $\log_a e = \frac{1}{\ln a}$, siis $\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$. (20)

$$\text{Kui } a = e \approx 2,718, \text{ siis } y = e^x \text{ ja } y' = e^x, \quad (21)$$

s. o. eksponentsiaalfunktsiooni muutumise kiirus on võrdne funktsiooni väärtusega.

8) Olgu

$$\begin{aligned} y = \sin \omega x: y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega(x + \Delta x) - \sin \omega x}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega x \cos \omega \Delta x + \sin \omega \Delta x \cos \omega x - \sin \omega x}{\Delta x} \end{aligned}$$

piiril $\cos \omega \Delta x \rightarrow 1$ ja $\sin \omega x \cos \omega \Delta x = \sin \omega x$, esimene ja viimane liige koonduvad

$$y' = \cos \omega x. \quad \omega \lim_{\omega \Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \omega \Delta x}{\omega \Delta x} = \omega \cos \omega x. \quad (22)$$

9) Olgu $y' = \cos \omega x$;

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \omega(x + \Delta x) - \cos \omega x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos \omega x \cos \omega \Delta x - \sin \omega x \sin \omega \Delta x - \cos \omega x}{\Delta x}$$

Esimene ja viimane liige piiril koonduvad (vaata p. 8). Tulemuseks saame

$$y' = -\omega \sin \omega x. \quad (23)$$

Tutvume veel mõningate üldiste diferentsimise reeglitega.

10) **Kahe funktsiooni korrutise tuletis.**

$$y' = f(x) \cdot \varphi(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) \varphi(x + \Delta x) - f(x) \cdot \varphi(x) + f(x + \Delta x) \varphi(x) - f(x + \Delta x) \varphi(x)}{\Delta x}$$

Lisasime liikme $f(x + \Delta x) \varphi(x)$ ja lahutasime, nii et midagi ei muutunud. Nüüd võime aga esimesest ja viimasest liikmest võtta sulgude ette $f(x + \Delta x)$ ja teisest ja kolmandast $\varphi(x)$. Saame

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)[\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)] + [f(x + \Delta x) - f(x)]\varphi(x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[f(x + \Delta x) \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{dx} \varphi(x) \right] = f(x) \frac{d\varphi}{dx} + \frac{df}{dx} \varphi(x), \quad (24) \end{aligned}$$

s. t. tuletist funktsioonide korrutisest võtame nii, et esialgu vaatame muutuvana ainult ühe teguri ja võtame siis tuletise temast, teisi tegureid vaatleme konstantidena; siis liidame liikme, kus on võetud tuletis teisest tegurist ja ülejäänud tegurid on vaadeldud konstantidena. See on üldine seadus. Nii et kui

$$y=f(x)\varphi(x)\psi(x), \dots \text{ siis}$$

$$y'=f'(x)\varphi(x)\psi(x)+f(x)\varphi'(x)\psi(x)+f(x)\varphi(x)\psi'(x) \dots + \dots$$

11) **Funktsioon funktsioonist.** Kui $y=f(\varphi)$, aga $\varphi=\varphi(x)$, siis $y=f[\varphi(x)]$. On vaja leida $y'=\frac{dy}{dx}$. Laiendame seda murdu $\frac{d\varphi}{dx}$ -ga ja kirjutame ta nii:

$$y'=\frac{dy}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \quad (25)$$

Viimane rida tähendab seda, et tuleb võtta y -i tuletis φ -i järgi ja teda korrutada φ -i tuletisega x 'i järgi.

12) Olgu $y=\text{tg } x=\sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$. Rakendame reegli (24):

$$y'=\frac{dy}{dx}=(\sin x)' \cdot \frac{1}{\cos x} + \sin x \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = 1 + \sin x \cdot \left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

Tähistame $\cos x=\varphi(x)$ ja rakendame viimasele tegurile reegli (17)

$$\left[\frac{1}{\varphi(x)}\right]' = -\frac{1}{\varphi(x)^2} \cdot \varphi'(x) = -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\cos x)' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Seega

$$y'=1 + \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (26)$$

Võtame lühidalt kokku saadud tulemused. See on kõrgema matemaatika «väike 1×1 » ja ta tuleb kindlalt ära õppida.

$$(\text{const})'=0 \quad (13a)$$

$$(a+bx)'=b \quad (14a)$$

$$(ax^2)'=2ax \quad (15a)$$

$$(ax^n)'=nax^{n-1} \quad (16a)$$

$$\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2} \quad (17a)$$

$$(\log_a x)' = \frac{\log_a e}{x} \quad (18a)$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (19a)$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \quad (20a)$$

$$(e^x)' = e^x \quad (21a)$$

$$(\sin \omega x)' = \omega \cos \omega x \quad (22a)$$

$$(\cos \omega x)' = -\omega \sin \omega x \quad (23a)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (26a)$$

$$[f(x) \cdot \varphi(x)]' = f'(x) \varphi(x) + f(x) \varphi'(x) \quad (24a)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ f[\varphi(x)] \right\} = \frac{df}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} \quad (25a)$$

7. Läbitud teepikkuse leidmine kiiruse järgi; integrali mõiste.

Praktikas esineb sageli selline ülesanne, et on antud sirgjoonel liikuva masspunkti kiirus v aja funktsioonina: $v=F(t)$; on vaja leida läbitud tee aja funktsioonina. Selle ülesande lahendamisel lähtume eelmise punkti tulemustest. Võime üles kirjutada lühikesel hetkel jooksul läbikäidud tee diferentsiaalina [p. 6(12)]

$$ds=v dt=F(t) dt, \quad (27)$$

kus $F(t)$ peab olema teepikkuse tuletis aja järgi. Kui leiame selle funktsiooni $f(t)$, mille tuletis on $F(t)$, siis meie ülesanne ongi lahendatud.

Funktsiooni leidmist tema diferentsiaali järgi nimetatakse integrimiseks ja see taandub funktsiooni leidmisele, kui on antud funktsiooni tuletis. Seega integrimine on diferentsimise pöördtehe.

Oletame, et oleme leidnud ühe sellise funktsiooni $s_1=f(t)$, mille diferentsiaal on $F(t)dt$ [või mille tuletis on $F(t)$]; siis konstandi C liitmisel $f(t)$ -le saame: $s=f(t)+C$; kuid tema diferentsiaal ds on ikka $F(t) dt$, sest C kui konstandi diferentsiaal on null. Avaldist $f(t)+C$, milles C on meelevaldne konstant ja $f(t)$ üks niisugune funktsioon, mille diferentsiaal on $F(t) dt$, nimetatakse diferentsiaalavaldise $ds=F(t)dt$ [(ehk funktsiooni $F(t)$] üldintegraliks ja tähistatakse

$$\int F(t) dt = f(t) + C. \quad (28)$$

Seega avaldub sirgjoonel kiirusega $v=F(t)$ liikuva punkti poolt läbitud teepikkus s kujul

$$s = \int F(t) dt = f(t) + C. \quad (28a)$$

Nagu näha, esineb läbitud teepikkuse avaldises meelevaldne konstant C. Selle konstandi leidmiseks tuleb peale liikumiskiiruse veel lisaks teada punkti asukoht ühel hetkel (näiteks hetkel $t=0$). Konstanti C pole vaja leida, kui meid huvitab ajavahemikul t_1 -st kuni t_2 -ni läbitud teepikkus, sest see avaldub iga C puhul vahena

$$s(t_2) - s(t_1) = f(t_2) + C - [f(t_1) + C] = f(t_2) - f(t_1), \quad (29)$$

milles C koondub. Sellist üldintegraali $\int F(t) dt = f(t) + C$ argumendi väärtustele t_2 ja t_1 vastavate väärtuste vahet $f(t_2) - f(t_1)$ nimetatakse määratud integraliks funktsioonist $F(t)$ rajades t_1 -st t_2 -ni ja tähistatakse

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t) dt = f(t_2) - f(t_1). \quad (29a)$$

Järelikult avaldub kiirusega $v = F(t)$ sirgjoonel liikuva punkti poolt hetkest t_1 hetkeni t_2 läbitud teepikkus kujul

$$s = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt. \quad (30)$$

Näiteid:

1. P. 6. reegli 4 järgi on funktsiooni t^n tuletis nt^{n-1} ; seega funktsiooni $\frac{t^n}{n}$ tuletis on t^{n-1} , ehk võttes $n-1=m$, $n=m+1$, on funktsiooni $s = \frac{t^{m+1}}{m+1}$ tuletis $\frac{ds}{dt} = t^m$ iga arvu $m \geq 0$ puhul. Kiirusega $v = bt^m$ liikuva punkti poolt hetkest t_1 hetkeni t_2 läbitud teepikkus s avaldub järelikult kujul

$$s = \int_{t_1}^{t_2} bt^m dt = b \left(\frac{t_2^{m+1}}{m+1} - \frac{t_1^{m+1}}{m+1} \right). \quad (31)$$

2. P. 6 nägime, et üheks funktsiooniks, mille diferentsiaal on $ds = b \frac{dt}{t}$ on funktsioon $s = b \ln t$. Järelikult siin

$$s = \int_{t_1}^{t_2} b \frac{dt}{t} = b \ln t_2 - b \ln t_1 = b \ln \frac{t_2}{t_1}. \quad (32)$$

8. Määratud integraal summa piirväärtusena. Määratud integraali kui teatud ajavahemiku jooksul läbitud teepikkust saab avaldada veel teisel viisil. Liikugu masspunkt endiselt kiirusega $v=F(t)$ sirgjoonel ja huvitagu meid hetkest t_0 hetkeni t läbitud teepikkus s . Jaotame ajavahemiku t_0 -st t -ni n osavahemikuks jaotuspunktidega $t_0, t_1, t_2, \dots, t = t_n$. Vaatleme osavahemikku t_{i-1} ja t_i vahel. Olgu kiiruse $v=F(t)$ minimaalne väärtus selle osavahemiku kestel m_i ja maksimaalne M_i , ning olgu selle osavahemiku kestel läbitud teepikkus s_i . Siis on $m_i(t_i - t_{i-1})$ ajavahemiku $t_i - t_{i-1}$ jooksul konstantse kiirusega m_i läbitud teepikkus ja $M_i(t_i - t_{i-1})$ sama ajaga konstantse kiirusega M_i läbitud teepikkus. Muutliku kiirusega, mis on suurem m_i -st ja väiksem M_i -st läbitud teepikkus s_i on nende kahe vahepealne. Seega

$$m_i(t_i - t_{i-1}) \leq s_i \leq M_i(t_i - t_{i-1}) \quad (33)$$

ehk

$$m_i \leq \frac{s_i}{t_i - t_{i-1}} \leq M_i. \quad (33a)$$

Sellest võrratusest nähtub, et avaldis $\frac{s_i}{t_i - t_{i-1}}$ (keskmine kiirus vaadeldavas ajavahemikus) on suuruselt kiiruse $v=F(t)$ minimaalse ja maksimaalse väärtuse vahepealne. Järelikult kui $v=F(t)$ muutub pidevalt, siis omandab ta teatud hetkel τ_i vaadeldavas osavahemikus selle vahepealse väärtuse:

$$F(\tau_i) = \frac{s_i}{t_i - t_{i-1}}, \quad (34)$$

ehk

$$s_i = F(\tau_i)(t_i - t_{i-1}), \quad (35)$$

$$t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i.$$

Hetkest t_0 hetkeni t läbitud teepikkuse avaldamiseks võtame selle võrduse $i=1, 2, \dots, n$ ja liidame tulemused.

Saame

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_n = F(\tau_1)(t_1 - t_0) + F(\tau_2)(t_2 - t_1) + \dots + F(\tau_n)(t_n - t_{n-1}) \quad (36)$$

Olenemata sellest, kuidas meie jagame vahemikku $t-t_0$ osavahemikeks, jääb läbikäidud teeavaldis muutumatuks. Peenedame seda osavahemikeks jaotust uute jaotuspunktide juurdevõtmisega nii, et ka kõige pikema osavahemiku $(t_i - t_{i-1})$ maksimaalne kestvus läheneks nullile (jaotuspunktide arv läheneb seejuures lõpmatussele). Kogu teepikkus s võrduse (36) vasakul pool sellest ei muutu, nii et piiril saame

$$s = \lim_{\substack{\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} [F(\tau_1)(t_1 - t_0) + F(\tau_2)(t_2 - t_1) + \dots + F(\tau_n)(t_n - t_{n-1})].$$

Et teiselt poolt s avaldus kujul

$$s = \int_{t_0}^t F(t) dt, \text{ siis}$$

$$\int_{t_0}^t F(t) dt = \lim_{\substack{\max(t_i - t_{i-1}) \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} [F(\tau_1)(t_1 - t_0) + F(\tau_2)(t_2 - t_1) + \dots + F(\tau_n)(t_n - t_{n-1})].$$

Tähistades siin $t_1 - t_0 = \Delta t_1, t_2 - t_1 = \Delta t_2, \dots, t_n - t_{n-1} = \Delta t_n$ ja kasutades summa sümbolit $\sum_{i=1}^{i=n} s_i = s_1 + s_2 + \dots + s_n$, võime määratud integrali esitada kujul

$$\int_{t_0}^t F(t) dt = \lim_{\substack{\max \Delta t \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n F(\tau_i) \Delta t_i. \quad (37)$$

Integralile võime anda geomeetrilise interpretatsiooni. Selleks vaatame integritava funktsiooni graafikut (joon. 4) Sellel graafikul summa üksikud liikmed $F(\tau_i) \Delta t_i$ on ristkülikute pindalad, millede alused on Δt_i ja kõrgused $F(\tau_i)$. Ei ole raske näha, et nende ristkülikute pindade summa annab pindala tüki, mis on piiratud graafiku joonega, abstsisside teljega ja ordinaatidega kohas t_0 ja kohas t . Kui võtaksime ristkülikute kõrgusteks näiteks funktsiooni $F(t)$ minimaalse väärtuse m_i antud vahemikus Δt_i , siis vastava ristküliku ABCD pindala on kõveraga piiratud pindalast ABED pindala BCE võrra väiksem. Kui läheme piirile üle, — $\Delta t \rightarrow 0$, — siis vähenevad pinnad BCE ja väheneb nende summa; piiril on nende summa null ja kõveraga piiratud pindala võrdub integraliga.

dud tee valemite ühtlaselt kiirenevale liikumisele. Kui vaatleme ühtlaselt kiirenevat liikumist väga lühikese aja jooksul Δt , siis kiirus selle aja jooksul muutub väga vähe, — nii, et võime kiiruse lugeda selle aja vältel konstantseks ja selle ajavahemiku jaoks kirjutada läbikäidud tee:

$$\Delta s_1 = v_1 \Delta t_1, \quad (41)$$

Järgmisel ajavahemikul on kiirus veidi teine ja läbikäidud tee avaldub

$$\Delta s_2 = v_2 \Delta t_2 \text{ jne.}$$

Kogu läbikäidud tee saamiseks tuleb kõik osa-tee summeerida tingimusel, et ajavahemikud lähenevad nullile, ajavahemikute arv läheneb aga lõpmatusse. Sellise summa piirväärtus vastavalt p. 8 on määratud integraal. Kui arvutame läbikäidud tee momendist null kuni t , siis piirid on vastavalt null ja t .

$$\lim_{\substack{\Delta t_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{i=n} v_i \Delta t_i = \int_0^t v dt = s(t) - s(0).$$

Asetame kiiruse avaldisest (40) ja integreime

$$s(t) - s(0) = \int_0^t (v_0 + at) dt = [v_0 t + \frac{1}{2} at^2]_0^t = v_0 t + \frac{1}{2} at^2.$$

Momendiks $t=0$ läbikäidud tee ei pruugi üldiselt olla null. Tähistame teda s_0 -ga. Lahendame viimase võrrandi $s(t)$ suhtes:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2. \quad (42)$$

Erijuhul $s_0=0$ ja $v_0=0$ saame valemi:

$$s(t) = \frac{1}{2} at^2. \quad (43)$$

Valemitest (38) ja (43) võime aeg t elimiinerida ja saame seose kiiruse, kiirenduse ja läbikäidud tee vahel ühtlaselt kiireneva liikumise erijuhul, kui algkiirus $v_0=0$ ja momendiks $t=0$ läbikäidud tee $s_0=0$.

$$\frac{v^2}{2a} = s \quad (44)$$

ehk:

$$v = \sqrt{2as} \quad (45)$$

10. **Hetkkiirendus sirgjoonelises mitteühtlaselt kiirenevas liikumises.** Mitteühtlaselt kiirenev liikumine on selline, kus võrdsetes ajavahemikkudes kiirus kasvab mittevõrdsete suuruste võrra. Kiiruse muutumise intensiivsus antud momendil oleks siis piirväärtus kiiruse kasvu jagatisest vastava ajavahemikuga:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (46)$$

Selline piirväärtus on aga kiiruse tuletis aja järgi. Kuna kiirus on omakorda läbikäidud tee tuletis aja järgi, siis kiirendus on läbikäidud tee teine tuletis aja järgi, mida sümbolsest kirjutatakse $\frac{d^2s}{dt^2}$. Selle sümboli päritolu selgub võrrandist (46), kuna seal lugejas esineb $d \cdot ds$, mida sümbolsest kirjutatakse d^2s , ja nimetajas $dt \cdot dt$, mida sümbolsest kirjutatakse dt^2 .

11. **Kiirus kõverjoones liikumises.** Nüüd püüame luua kiiruse mõiste juhuks, kui punkt liigub mitteühtlaselt kõveral joonel. See on kõige üldisem punkti liikumine. Kõik seni vaadeldud juhud olid liikumise erijuhud. Sirgjoones liikumises kiirus oli läbikäidud tee tuletis aja järgi. Antud juhul läbikäidud tee on kõverjoone pikkus ja meie peaksime õppima seda arvutama. Kuid kiiruse mõistele võime jõuda ka ilma, et õpiksime arvutama kõvera joone pikkust.

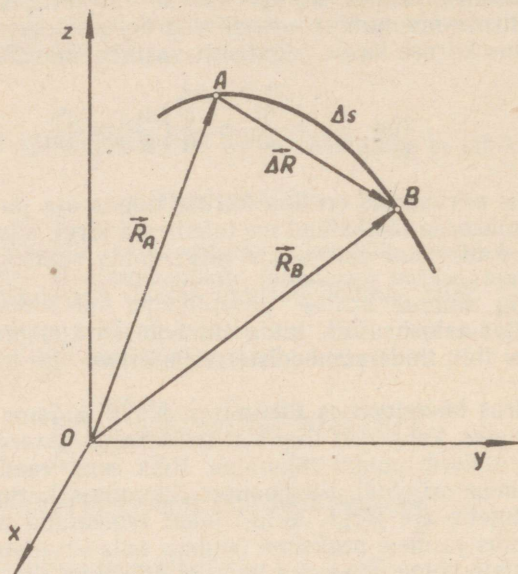
Olgu liikuv punkt momendil t_1 kohas A ja hiljem momendil t_2 kohas B (joon. 5.) Vaatame sirglõigu \overline{AB} jagatist vastava ajaga $t_2 - t_1$.

$$\frac{\overline{AB}}{t_2 - t_1}$$

Kaar \widehat{AB} on pikem, kui kõõl \overline{AB} . Täheandab, see avaldis on väiksem, kui läbikäidud tee jagatis ajaga. Kui vaatleme aga piirprotsessi, kus ajavahemik $t_2 - t_1$ piiramatult kahaneb, siis läheneb punkt B punktile A . Piiril kõõlu seis on puutuja. Kõõlu pikkus piiramatult läheneb vastava kaare pikkusele nii, et vaadeldava avaldise piirväärtus on võrdne läbikäidud tee jagatud ajaga, mis ongi hetkkiirus kõverjoonesel liikumisel.

Nüüd peame leidma arvutamise eeskirjad. Oletame, et liikuva punkti koordinaadid on antud aja funktsioonidena $x(t)$, $y(t)$ ja $z(t)$. Punkti koordinaate võime vaadelda raadiusvektori komponentidena. See on selline vektor, mis viib koordinaatide algusest

antud punkti. Raadiusvektor määrab seega punkti asukoha. Raadiusvektori mõiste sissetoomine, nagu varsti näeme, toob suuri eeliseid.



Joon. 5.

Nüüd võime ütelda, et punkt A on antud raadiusvektoriga \vec{R}_A ja punkt B raadiusvektoriga \vec{R}_B . Sirglõigu \overline{AB} võime esitada selle kahe vektori vahena $\vec{\Delta R} = \vec{R}_B - \vec{R}_A$, mis on aga vektor suunaga A-st B-sse.

Vahevektori komponendid on lahutatavate vektorite vastavate komponentide vahed, s. o.

$$\text{kui } \vec{R}_A \equiv [x(t_1); y(t_1); z(t_1)] \text{ ja } \vec{R}_B \equiv [x(t_2); y(t_2); z(t_2)], \quad (47)$$

siis

$$\begin{aligned} \vec{\Delta R} = \vec{R}_B - \vec{R}_A &\equiv [x(t_2) - x(t_1); y(t_2) - y(t_1); z(t_2) - z(t_1)] \equiv \\ &\equiv (\Delta x; \Delta y; \Delta z) \end{aligned} \quad (48)$$

Uue mõiste abil võime hetkkiiruse üles kirjutada:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta t} = \frac{d\vec{R}}{dt}. \quad (49)$$

Vektori jagamisel arvuga (Δt) tuleb jagada selle arvuga vektori komponendid ja piirväärtust tuleb siis võtta iga komponendi jagatisest:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta R}}{\Delta t} &= \frac{d\vec{R}}{dt} = \left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right] = \\ &= \left[\frac{dx}{dt}; \frac{dy}{dt}; \frac{dz}{dt} \right] \equiv \vec{v} \end{aligned} \quad (49a)$$

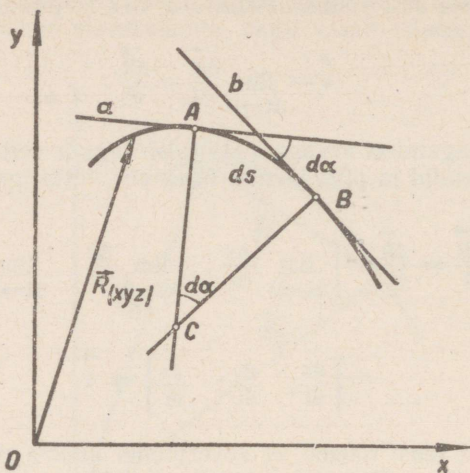
Viimasest reast näeme, et kõverjoonel liikuva punkti hetkkiirus on punkti raadiusvektori tuletis aja järgi. Vektori tuletise saame aga sel teel, et võtame tuletised tema komponentidest. Eelnevast on ka selge, et selle vektori pikkus (absoluutväärtus) on võrdne piirväärtusega läbikäidud tee jagatisest vastava ajaga, ja kiirusvektori siht on puutuja siht kõvera antud punktis. Eelnevast selgub samuti, et raadiusvektori diferentsiaal $d\vec{R}$ on puutuja sihiline ja suuruselt võrdne kaare elemendi pikkusega. See tähendab, et kaare lõik piiril saab võrdseks vastava kõõluga. Rakendades Pythagorase lauset, saame kaare diferentsiaali pikkuseks:

$$ds = \sqrt{d\vec{R}^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (50)$$

Edaspidi vaatlemegi kaare elemendi pikkust ds kui skaalarit.

12. Kõverusring, kõverusraadius. Kõverusringiks kõvera antud punktis nimetatakse sellist ringi, millel on kõveraga ühine puutuja antud punktis ja ka selle naaberpunktis.

Kui tahame konstruuda kõvera antud punktis ringi, millel on kõveraga ühine puutuja, siis peame tõmbama antud punktis kõverale puutuja ja puutepunktis konstruima sellele ristjoone (joon. 6.). Siis igal ringil, mille senter asub ristjoonel ja mis läbib puutepunkti on meie kõveraga ühine puutuja (kuna ringi puutuja on risti raadiusega). Selliseid ringe on lõpmata palju. Meie võime teha samasugust konstruktsiooni punktis B. Mõlemad ristjooned lõikuvad punktis C. Kui tõmbame ringi sentriga



Joon. 6.

C—s läbi punkti A, siis ei lähe see ring täpselt läbi B, kuna vaadeldav kõver ei ole mitte ring. Kui teeme läbi piirprotsessi, kus punkt B piiramatult läheneb punktile A, siis ristjoonte lõikepunkt C veidi nihkub ja tuleb mingisugusesse kindlasse piirseisu, kuna aga raadiused CB ja CA saavad võrdseks. Punkti C piirseisu nimetame kõveruskesks, raadiuse $r=CA=CB$ aga nimetame kõvera kõverusraadiuseks kõvera antud punktis. Kõverusraadiuse pöördväärtust $\frac{1}{r}$ nimetame kõveruseks antud punktis.

Kui tähistame piiril $\widehat{AB}=ds$ ja sentraalne nurk $d\alpha$, siis nurga kohta võime kirjutada:

$$d\alpha = \frac{ds}{r} \quad (51)$$

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds} \quad (51a)$$

Nurk $d\alpha$ on ühtlasi nurk puutujate a ja b vahel (risti olevate haaradega nurgad). Seega $d\alpha$ on puutuja kaldenurga muutus. Vaatleme jagatist:

$$\frac{d\vec{R}}{ds} = \vec{\tau} \quad (52)$$

Eespool selgitasime, et \vec{dR} on puutuja suunaline vektor, mille absoluutväärtus võrdub piiril kaare elemendiga ds . Seega kogu see jagatis on puutuja suunaline vektor pikkusega üks ühik. Seega punktist punkti muutub selle vektori suund, mitte aga pikkus ja teda nimetatakse puutuja ühikvektoriks. Selle vektori muutust $d\vec{\tau}$ võime vaadelda kui ringi kõõlu, mille raadius on $|\vec{\tau}|=1$. Piiril kõõlu seis on puutuja ja seega risti raadiusega. Piiril kõõlu pikkus $|d\vec{\tau}|=ds$. Kuna aga ringi raadius on üks, siis kaar ds võrdub sentraalnurgaga $d\alpha$ s. o. puutuja kaldenurga muutusega. Sellepärast võime kirjutada $d\vec{\tau}=\vec{n} d\alpha$, kus \vec{n} on normaali suunaline ühikvektor.

Arvestades võrrandit (51), võime kirjutada:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \vec{n} \frac{d\alpha}{ds} = \vec{n} \frac{1}{r}; \quad (53)$$

See tähendab, et puutuja kaldenurga tuletis kaare järgi on kõverus.

13. Kiirendus kõverjoones liikumises. Kiirenduse tangentsiaalne ja normaalne komponent. Kiirendus kõverjoones liikumises on kiiruse vektori tuletis aja järgi, s. t. kiirusvektori muutus taandatud ajaühikule. Kiirusvektor muutub nii pikkuselt kui ka suunalt. Kiirusvektori absoluutväärtuse (pikkuse) muutus annab kiirusvektori suunalise kiirenduse komponendi — tangentsiaal-komponendi (s. o. puutuja suunalise komponendi), kuna kiirusvektori suuna muutus annab normaali suunalise komponendi.

Esitame kiirusvektori puutujasuunalise ühikvektori ja kiiruse absoluutväärtuse korrutisena:

$$\vec{v} = \vec{\tau} v. \quad (54)$$

Võtame sellest avaldisest tuletise aja järgi, — saame:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{\tau} \cdot v) = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot v + \vec{\tau} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} v + \vec{\tau} \frac{dv}{dt} = \\ &= \frac{\vec{n}}{r} v^2 + \vec{\tau} \frac{dv}{dt}. \end{aligned} \quad (55)$$

Saime tõepoolest avaldise kahest liikmest, — üks on normaalsuunaline absoluutväärtusega $\frac{v^2}{r}$ ja teine puutuja suunaline absoluutväärtusega $\frac{dv}{dt}$. Kogu kiirenduse absoluutväärtuse saame, kui rakendame Pythagorase lauset:

$$a = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}. \quad (56)$$

On õpetlik arvutada kiiruse absoluutväärtuse tuletis:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dt}{d} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \cdot \left(2v_x \frac{dv_x}{dt} + 2v_y \frac{dv_y}{dt} + 2v_z \frac{dv_z}{dt} \right). \end{aligned}$$

Viimast avaldist võime kahega koondada. Sulgudes seisev avaldis on aga kiirusvektori $\vec{v} \equiv (v_x; v_y; v_z)$ skalaarne korrutis kiirenduse vektoriga

$$\vec{a} \equiv \left(\frac{dv_x}{dt}; \frac{dv_y}{dt}; \frac{dv_z}{dt} \right).$$

Seepärast võime kogu avaldise ümber kirjutada järgmiselt

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{v} \cdot \vec{v} \cdot \vec{a} \cdot \cos\theta = a \cos\theta, \quad (57)$$

kus θ on nurk kiirendusvektori \vec{a} ja kiirusvektori \vec{v} vahel.

Seega $\frac{dv}{dt}$ ei ole midagi muud, kui kiirendusvektori projektioon kiirusvektorile (puutuja suunale), mida võis juba ette näha.

ТАЛЛИНСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Г.Метс и И.Петерсен

ОБЩАЯ ФИЗИКА

Кинематика и введение в математический анализ

Vastutav toimetaja G.Peets

Trükkimisele antud 24.II 69.Paber 60x84, 1/16
Trükipg. 1,75. Tingpg. 1,6. Tiraaz 1500
MB-00052. TPI rotaprint, Tallinn, Pikk jalg 14
Tell.77 . Hind 5 kop.

Hind 5 kop.

A-29903

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00410702 7