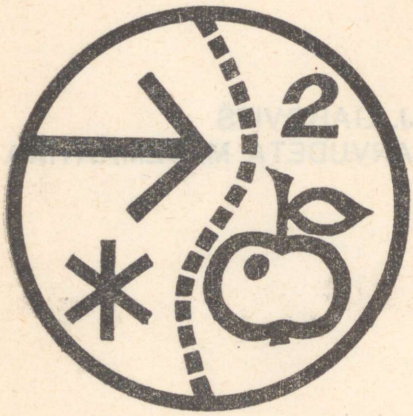


Kontrolleksempler

J. GABOVITŠ

ARVUDETA MATEMAATIKA



KIRJASTUS „VALGUS“

A-29618

J. GABOVITŠ

ARVUDETA MATEMAATIKA

POPULAARNE SISSEJUHATUS TÄNAPÄEVA MATEMAATIKASSE

TALLINN · 1968

51
G01

Kaane kujundas ja illustreeris T. VINT
Joonistas M. NIIN

2
Tartu Riikliku Ülikooli
Raamatukogu
73698

2—2—1
15—67

SISSEJUHATUS

Lugeja, kes näeb tänapäeva matemaatikale pühendatud populaarset raamatut, võib üsnagi segadusse sattuda. Tundub talle matemaatika ju ühe maailmatu keerulise valemite, teoreemide ja raskete arvutuste rägastikuna, millest ükski normaalne inimene ei suuda tema arust midagi taibata, milles ammu on kõik valemid üles leitud, kõik teoreemid tõestatud, nii et põhiline raskus seisab teadaoleva omandamises ja kasutamises. Ja kuidas saab siis olla järsku mingi «populaarne sissejuhatus tänapäeva matemaatikasse»?

Täppisteadustega veidi tuttavamgi lugeja võib samuti olla arvamisel, et matemaatikas tegeldakse nii keeruliste asjadega, millest tavalisele inimesele midagi jutustada on võimatu. Niisugust positsiooni kinnitab, nagu neile lugejatele endale tundub, ka asjaolu, et kui füüsikale, keemiale, astronoomiale, kosmoseuurimisele, bioloogiale ja paljudele teistele teadusharudele on pühendatud suur hulk populaarteaduslikke teoseid, siis matemaatikast antakse neid välja väga vähe, ja ilmuvgi on põhiliselt seotud kas elementaarmatemaatikaga või matemaatiliste meelelahutustega ning «pähklitega».

Kui populaarteadusliku kirjanduse osas on lugejal peaaegu täielikult õigus («peaaegu» sellepärast, et kuigi eesti keeles tõepoolest puuduvad tänapäeva matemaatikale pühendatud populaarsed teosed, siis saksa ja vene keeles, eriti aga inglise keeles on neid välja antud küllaltki suurel hulgal), siis muud tema seisukohad tuleb küll ümber lükata.

Jah muidugi, matemaatikale pühendatud teaduslikke artikleid pole mõtet soovitada lugejale, kellel puudub spetsiaalne matemaatiline haridus. Kuid keegi ei soovita lugejale ka teaduslikke artikleid bioloogiast või füüsikast, kui tal puudub bioloogiline või füüsikaline eriharidus. Vaatamata sellele on igal haritud inimesel tänapäeval teatud ettekujutus sellest, missuguste probleemidega nendes teadusharudes tegeldakse.

Täpselt samuti on põhimõtteliselt täiesti võimalik seletada inimesele, kes tunneb huvi matemaatika vastu, mis laadi probleemid huvitavad tänapäeva matemaatikuid. Siinjuures tuleb kohe märkida, et ehkki igasugune tänapäeval sooritatav mate-

maatiline uurimus kuulub juba tänapäeva matemaatika valdkonda, hakkame käesolevas raamatus kasutama terminit «tänapäeva matemaatika» veidi kitsamas mõttes, jättes näiteks kõrvale kõik uurimused n.-ö. klassikalistes matemaatikaharudes. Tänapäeva matemaatikaks hakkame nimetama möödunud sajandi algusest alates arenema hakanud matemaatilist suunda, mille algatajateks olid Evariste Galois algebras ja Nikolai Lobatševski geomeetrias. Selle suuna edaspidine areng on tihedalt seotud hulgateooria ja matemaatilise loogika tekkimisega, mis toimus tänu Georg Cantori ja Georges Boole'i töödele.

Tänapäeva matemaatikale on iseloomulikud väga suur üldisus, kõrge abstraktsiooniaste ja samal ajal väga lihtne loogiline struktuur ning keeruliste arvutuste puudumine, mis teevad ta põhimõtteliselt arusaadavaks igale inimesele, milline haridus tal ka ei oleks. Kuid põhjalikum tutvumine sellega nõuab teatud matemaatilist kultuuri ja küllaltki suurt püsivust.

Tänapäeva matemaatika erinevus paljudest traditsioonilistest matemaatika osadest väljendub ka erinevates rakendusväljades. Kui klassikalise matemaatika niisuguseid osi, nagu integraal- ja diferentsiaalarvutus või diferentsiaalvõrrandite teooria, kasutatakse põhiliselt tehnikas ja füüsikas (kuigi seal leiavad rakendamist juba ka uued suunad), siis keeleteaduses ja küberneetikas, majandusteaduses ning bioloogias kasutatakse iga päevaga üha rohkem just tänapäeva matemaatikat. Ka matemaatika loodetavad uued rakendamisväljad (õigusteadus, kirjandusteadus, filosoofia jne.) ootavad abi eeskätt just tänapäeva matemaatikalt.

Seoses niisuguse laia rakendamisväljaga ja selle pideva avardumisega on muutunud väga aktuaalseks tänapäeva matemaatika tutvustamine ja õpetamine kõige laiematele rahvahulkadele. Ehkki me oleme juba ammu aru saanud, et vähemalt üks metateadustest — filosoofia — on vajalik igale kõrgema haridusega spetsialistile, siis teiste metateaduste — matemaatika ja küberneetika osas, mida kasutatakse tänapäeval paljude konkreetsete probleemide lahendamisel, — ei ole me veel nii kaugele jõudnud.

Tänapäeva matemaatika aluseid peaks tundma iga keskkoolilõpetaja, kõrgema haridusega spetsialist aga peaks oskama neid rakendada. See pole mitte üksnes hädavajalik, vaid ka täiesti teostatav ülesanne. Vanemate klasside õpilased suudavad kaasaja matemaatika aluseid küllalt hästi omandada. Pealegi muudaks tänapäeva matemaatika õpetamine keskkoolis ka kogu matemaatika palju huvitavamaks ja arusaadavamaks kui praegused arvutuste ja keeruliste valemitega ülekoormatud tunnid.

Kui kaugele me selles suunas juba jõudnud oleme? Mil määral sisaldub tänapäeva matemaatika element keskkooliprogrammis?

Peab tunnistama: olukord on niivõrd halb, et selle parandamiseks ei ole võimalik ükski muu tee peale kogu matemaatika õpetamise täieliku ümberkorraldamise.

Praegu kehtivas matemaatikaprogrammis pole ühtegi tundi eraldatud tänapäeva matemaatikale. Koolimatemaatikas ei kajastu isegi 18. sajandi matemaatika saavutused. Alles viimastel aastatel on programmi sisse lülitatud diferentsiaal- ja integraalarvutuse algeid puudutavad küsimused, mis lahendati juba 17. sajandil.

Enamik kooligeomeetria teoreeme esines juba Eukleidese «Elementides» üle 2000 aasta tagasi. Algebrat tunnevad meie keskkoolilõpetajad vähem kui keskaja matemaatikud, aga trigonomeetria pole keskaja lõpust kaugemale jõudnud.

Kui bioloogiatundides jutustatakse õpilastele väga põhjalikult Darwini ja Pavlovi teooriaist, kui keemia keskkoolikursus lõpeb meie sajandi orgaanilise keemia edusammudega, kui füüsikaõpikutest võivad õpilased tutvuda kümme — kakskümmend aastat tagasi avastatud faktidega, siis tänapäeva ühe dünaamilisema ja kõige laiemalt kasutatavama teadusharu — matemaatika — õpetamine keskkoolis jääb peatuma keskaja saavutustele!

Käesolev raamat ongi mõeldud niisuguse äärmise disproportsiooni vähendamiseks. Kui iga peatüki algul tutvub lugeja mõistetega, mida kasutatakse juba möödunud sajandist või käesoleva sajandi algusest, siis selle lõpus leiab ta viimaste aastakümnete jooksul matemaatikasse toodud mõisteid ja umbes samal ajal avastatud fakte.

Kuigi raamat on populaarne, ei ole teda lugeda niisama lihtne nagu põnevat seiklusromaani või huumoririkast jutustust. Nagu iga matemaatikaraamatu puhul peab lugeja kasutama pliiatsit ja paberit. Raamatu sisu omandab paremini see, kes lahendab ka iga punkti lõpus toodud ülesanded. Enamik neist on küllalt lihtsad ega peaks tähelepanelikule lugejale raskusi valmistama, mõned üksikud ülesanded aga nõuavad rohkem leidlikkust ja suuremaid jõupingutusi. Kui mõnda ülesannet ei õnnestu esimesel katsel lahendada, siis pöörduge selle juurde tagasi hiljem, pärast mõningate, ülesannete lahendamisega seotud kogemuste omandamist.

Et käesolevas raamatus on püütud võrdlemisi tagasihoidlikul lehekülgede arvul anda ülevaade tänapäeva matemaatika kolmest suurest distsipliinist, siis jääb esitatu paratamatult mõnes osas pealiskaudseks. Loomulik on seepärast oletada, et lugejal võib tekkida soov tutvuda ainega teiste raamatute abil. Järgnevalt toomegi väikese loetelu teostest, mis käsitlevad mingit käesolevas raamatus puudutatud küsimust. See kirjanduse loetelu peaks olema eriti kasulik matemaatikaõpetajale, kes oma õpilasi tahab tutvustada tänapäeva matemaatikaga.

Populaarsetest matemaatilistest raamatutest, mis, nagu käesolevgi, on mõeldud esialgseks tutvumiseks, märgime siin järgmisi:

1. Болтянский В. Г., Ефремович В. А., **Очерк основных идей топологии.** М, Гостехиздат 1957—61, kogumik «Математическое просвещение» № 2, 3, 4, 6.

2. Головина Л. И., Яглом И. М., **Индукция в геометрии.** М, Физматгиз 1961.

3. **Детская энциклопедия,** том 2. М, «Просвещение» 1964.

4. Дынкин Е. Б., Успенский В. А., **Математические беседы.** М—Л, Гостехиздат 1952.

5. Калужнин Л. А., **Что такое математическая логика?** М, «Наука» 1964.

6. Курант Р., Роббинс Г., **Что такое математика?** М, «Просвещение» 1967. (Esimene väljaanne: М—Л, Гостехиздат 1947.)

7. Оре О., **Графы и их применение.** М, «Мир» 1965.

8. Рademахер Г., Тёплиц О., **Числа и фигуры.** М, «Наука» 1966.

9. Серпинский В. О., **О теории множеств.** М, «Просвещение» 1966.

10. Столл Р. Р., **Множества, логика, аксиоматические теории.** М, «Просвещение» 1967.

11. Герман Вейль, **Симметрия.** М, «Наука» 1968.

Kergesti on kättesaadavad ka järgmised saksakeelsed populaarteaduslikud raamatud:

12. Haupt, D., **Mengelehre leicht verständlich.** Leipzig 1966.

13. Peter, R., **Spiel mit Unendlichen.** Leipzig 1957. Ilmus venekeelne tõlge: Петер Р., **Игра с бесконечностью.** М, «Просвещение» 1968.

Eestikeelsetest materjalidest võib nimetada järgmisi kogumiku «Matemaatika ja kaasaeg» artikleid (sulgudes kogumiku number, milles antud artikkel avaldati):

14. Jürimäe, E., **Hulgateoreetilised paradoksid ja matemaatika aluste uurimine** (7).

15. Jürimäe, E., **Hulgateoreetilistest paradoksidest** (1).

16. Tauts, A., **Matemaatilise loogika põhimõisteid** (2).

17. Tauts, A., **Matemaatilise loogika rakendusi** (3).

18. Kaasik, Ü., **Algoritmide blokkskeemid** (5).

19. Kull, I., Tombak, M., **Algoritmid ja lahenduvad hulgad ning nende rakendusi** (12).

Samuti tuleks mainida hiljuti eesti keeles ilmunud raamatut

20. Vilenkin, N., **Jutustusi hulkadest.** Kirjastus «Valgus», Tallinn 1968.

«Matemaatika ja kaasaeg» on üldse üks meie vabariigi matemaatikutepere suurimaid saavutusi matemaatilise kultuuri levitamise alal. Võib olla kindel, et selles kogumikus avaldatakse ka edaspidi palju huvitavaid matemaatikale pühendatud artikleid, nii et igale käesoleva raamatu lugejale peaks see väljaanne muutuma südamelähedaseks lugemismaterjaliks.

Peale puhtpopulaarsete teoste on olemas terve rida raamatuid, kus aine esitatakse küllaltki kirjeldavas toonis, tihti ilma tõestusteta, kuid selle-eest pööratakse suuremat tähelepanu ideelisele küljele. Niisugustest raamatutest nimetame eeskätt kolmeköitelist kogumikku:

21. **Математика, её содержание, методы и значение.** М 1956

ning suurepärast tõlketeost

22. Кемени Дж., Снелл Дж., Томсон Дж., **Введение в конечную математику.** М, «Мир» 1966.

Peab mainima veel hästi õnnestunud raamatut

23. Айзерман М. А., Гусев Л. А., Розоноэр Л. И., Смирнова И. М., Таль А. А., **Логика, автоматы, алгоритмы.** М, Физматгиз 1963.

Lugejatele peaks huvi pakkuma ka paljud matemaatikale pühendatud artiklid «Filosoofia entsüklopeediast», näiteks «Математика», «Алгоритмы», «Автоматы» ja paljud teised.

Kuigi käesolev raamat on eelkõige mõeldud inimestele, kellel puudub spetsiaalne matemaatiline haridus, võib ometi loota, et ka matemaatikaosakonna üliõpilased ja isegi lõpetajad leiavad siit üht-teist huvitavat. Just niisugustele lugejatele on mõeldud järgmine nimekiri, kus on toodud terve rida õpikuid ja monograafiaid.

24. Александров П. С., **Введение в теорию множеств и функций.** М—Л, Гостехиздат 1948.
25. Берж К., **Теория графов.** М, ИЛ 1962.
26. Биркгоф Г., **Теория структур.** М, ИЛ 1952.
27. Бурбаки Н., **Теория множеств.** М, «Мир» 1965.
28. Джекобсон Н., **Строение колец.** М, ИЛ 1961.
29. Клини С., **Введение в математику.** М, ИЛ 1957.

30. Курош А. Г., **Лекции по общей алгебре.** М, Физматгиз 1962.
31. Курош А. Г., **Теория групп.** М, «Наука» 1967.
32. Ляпин Е. С., **Полугруппы.** М, Физматгиз 1960.
33. Мальцев А. И., **Алгоритмы и рекурсивные функции.** М, «Наука» 1966.
34. Новиков П. С., **Элементы математической логики.** М, Физматгиз 1959.
35. Постников М. М., **Теория Галуа.** М, Физматгиз 1963.
36. Хаусдорф Ф., **Теория множеств.** М, ОНТИ 1937.
37. Шиханович Ю. А., **Введение в современную математику.** М, «Наука» 1965.
38. Ringel, G., **Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen.** Berlin 1959.
39. Kangro, G., **Kõrgem algebra.** Tallinn, ERK 1962.
40. Kangro, G., **Kõrgem algebra** I osa. Tartu 1948.
II osa. Tallinn-Tartu 1950.
41. Kull, I., **Matemaatiline loogika.** Tallinn, ERK 1964.

1. JUTUSTUS HULGATEOORIAST

Juba tuhandeid aastaid kasutavad matemaatikud lihtsamaid mõisteid ja mõttekäike, mida me tänapäeval seostame hulgateooriaga. Need arutlused puudutavad eeskätt sisaldamist ja kuulumist, millega tutvume käesoleva raamatu esimeses punktis. Kõik seejuures tekkivad küsimused on tavaliselt küllalt lihtsad ja peaaegu alati intuitiivselt taibatavad, nii et mingisugust erilist matemaatilist distsipliini ainult niisuguste vahekordade uurimiseks, ausalt öeldes, ei olegi vaja.

Ent niipea, kui matemaatikud hakkavad niisuguste väljendidite asemel, nagu «punkt kuulub sirgele», «tasand sisaldab punkti» kasutama nendega tihedalt seotud lauseid «sirglõik koosneb punktidest» või «ruum koosneb paralleelsetest tasanditest», s. o. niipea, kui tuleb tegemist lõpmatute hulkadega, kerkivad üles paljud rasked filosoofilised ja matemaatilised probleemid.

Mida on rohkem, kas täisarve või ratsionaalarve? Mida üldse tähendavad lõpmatute hulkade korral sõnad «rohkem», «suurem»? Need ja teised taolised küsimused hakkasid muutuma väga aktuaalseks juba möödunud sajandi matemaatikas. Neile vastas väljapaistva saksa matemaatiku Georg Cantori poolt möödunud sajandi viimasel veerandil loodud hulgateooria.



Joonis 1. Georg Cantor (1845—1918), tuntud saksa matemaatik, hulgateooria looja.

Georg Cantor (joonis 1) sündis 3. märtsil 1845. aastal Peterburis, kuid kõrgema hariduse sai algul Šveitsis ning hiljem Saksa-



Joonis 2. Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831—1916), tuntud saksa matemaatik, andis täpse reaalarvu definitsiooni, mis on tänapäeval väga laialt kasutatav. On palju teinud tänapäeva algebra edasiarendamiseks.

maal. 1867. aastal lõpetas ta Berliini ülikooli ja asus tööle Halles. Seal kaitses ta ka väitekirja ja sai 1872. aastal professori koha. Samal 1872. aastal avaldas ta artikli, milles seoses mõningate matemaatilise analüüsi küsimustega tõi sisse palju hulgateooria põhimõisteid.

G. Cantor jõudis juba 1873. aastal küllalt hämmastavale järeldusele, et täisarve ja ratsionaalarve on n.-ö. ühepalju. Seejärel püstitas ta ratsionaal- ja reaalarvude hulkade võrdlemise küsimuse ning lahendas sellegi probleemi. Osutus, et reaalarve on teatud mõttes rohkem kui ratsionaalarve. Aastatel 1874—1877 püüdis ta tõestada, et sirgel on punkte vähem kui ruumis, kuid jõudis lõpuks veelgi hämmastavamale järeldusele, et mõlemas hulgas on punkte ühepalju.

Niisugused ebatavalised tulemused sundisid Cantorit kogu oma teadusliku tegevuse pühendama hulgateooria väljaarendamisele. Peaaegu kõikide käesolevas raamatus nimetatud hulgateoreetiliste tulemuste ja probleemide autoriks ongi G. Cantor ise. Edaspidi etendasid hulgateooria arendamisel tähtsat osa veel tuntud saksa matemaatikud Ernst Zermelo (1871—1953) ja eriti Julius Wilhelm Richard Dedekind (joonis 2).

Teatud aja jooksul ei leidnud hulgateooria erilist tunnustust. Kuulus tänapäeva matemaatik N. Bourbaki (tema elu ja tegevusega tutvub lugeja viimases peatükis) kirjutab sellest järgmiselt: «Nii julged kontseptsioonid, mis lükkasid ümber kahe tuhande aasta vanused traditsioonid ja viisid ootamatutele, paradoksaalsetele tulemustele, pidid põrkama kokku tugeva opositsiooniga. Ja tõepoolest, tolle aja mõjukatest matemaatikutest suhtus ainult Weierstrass oma endise õpilase Cantori töödesse enam-vähem heatahtlikult. Teised teadlased ei jaganud tema seisukohta ja Cantor põrkas kokku Schwarzi ning eriti Kroneckeri leppimatu opositsiooniga.»

Niisugune vaenulik õhkkond mõjus halvasti G. Cantori tervisele. 1884. aastal ta haigestus ja viibis mõnda aega ravil närvi-

haiglas. Seoses sellega langes ka ta matemaatiline aktiivsus ning teatud ajaks lakkas ta täiesti tegelemast hulgateooriaga, pühendudes tervenisti vaidlustele selle üle, keda lugeda Shakespeare'i teoste autoriks. Peale selle tegeles Cantor palju filosoofiaga ning võttis aktiivselt osa Saksa Matemaatikute Seltsi loomisest, mille esimeseks presidendiks ta valiti.

Vaatamata kõigele sellele avaldas G. Cantor ajavahemikus 1884—1897 terve rea hulgateooriale pühendatud artikleid. Paljudes käsitleti nn. kontiinuumi hüpoteesi, mille tõestamisega Cantor palju vaeva nägi, kuid mis tal ei õnnestunud. Viljatud loomingulised pingutused viisid haiguse uuele teravnemisele ja pärast 1897. aastat ei avaldanud Cantor enam ühtegi artiklit, ehkki kirjavahetuses teiste matemaatikutega võttis ta osa hulgateooria probleemide arutamisest.

Georg Cantor suri 6. jaanuaril 1918. aastal.

Vaatamata Leopold Kroneckeri (1823—1891) ja teiste matemaatikute aktiivsele vastupanule, rakendati G. Cantori ideid ja tulemusi matemaatilises analüüsis üha suuremal määral, ning möödunud sajandi lõpuks leidsid nad peaaegu üldise tunnustuse. See ilmnes esimesel ülemaailmsel matemaatikute kongressil, mis toimus 1897. aastal Zürichis.

Tänapäeval on hulgateooria muutunud matemaatika üheks kõige populaarsemaks suunaks. Ta avaldab üha suuremat mõju kogu matemaatika arengule, olles kujunenud mitme matemaatilise distsipliini, näiteks üldise algebra, topoloogia, funktsionaalanalüüsi, reaalmuutuja funktsioonide teooria ja paljude teiste teoreetiliseks aluseks.

MIS ON HULK?

Hulga mõistet peetakse tänapäeva matemaatikas algmõisteks. Et ta on ühtlasi kõige elementaarsem ja kõige primaarsem mõiste, siis teda ei defineerita, vaid lihtsalt selgitatakse tema olemust näidete varal.

Hulga mõiste selgitamiseks toomegi kõigepealt paar näidet. «Mul on neli kinopiletit,» ütleb tavaline kodanik pärast kassa juures käimist. «Taskus olevate piletite hulk koosneb neljast piletist,» ütleb samasuguses olukorras matemaatik.

«Mul pole raha,» ütleb inimene, kui teeb kindlaks, et rahakotis ei ole ühtegi kopikat. «Müntide hulk rahakotis on tühi,» ütleb sel korral matemaatik.

Mida siis mõtleb matemaatik sõna «hulk» all? G. Cantor selgitab seda mõistet järgmiselt (pidage meeles, et siin ei ole tegemist hulga definitsiooniga): «Hulk on meie kujutluses või mõtlemises olevate kindlalt piiritletud ja erinevate objektide,

niinimetatud hulga elementide kokkuvõte üheks tervikuks.» Rõhutame veel kord, et see lause pole sugugi hulga mõiste definitsioon, sest siin kasutatakse sõnu ja väljendusi, mis ei ole matemaatiliselt rangelt defineeritud (objektid, kokkuvõte jne.). Lauses üksnes kirjeldatakse mõistet, kasutades selleks hulkade intuitiivselt arusaadavaid omadusi.

Nagu mainitud, koosneb hulk mingitest objektidest, mida nimetatakse elementideks. Esimeses ülaltoodud näites olid hulga elementideks kinopiletid ja teises mündid. Toome veel ühe näite. Käesolev raamat on vaadeldav kui hulk, mis koosneb 285-st leheküljest, iga leheküljge võib omakorda vaadelda hulgana, mille elementideks on sellele leheküljele trükitud üksikud erinevad sõnad. Sellise lähenemisviisi puhul pole üksik sõna raamatu lehekülgedest koosneva hulga element, kuid muidugi võib vaadelda ka sellist hulka, mis koosneb raamatu kõikidest sõnadest.

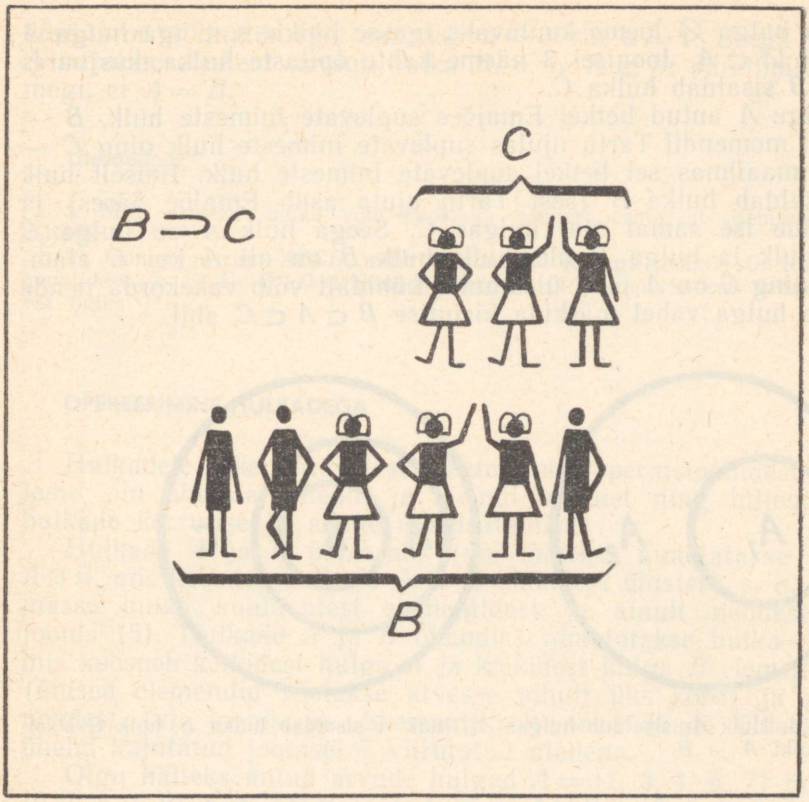
Hulga elemendid peavad olema kindlalt piiritletud. Me ei saa näiteks rääkida lihtsalt silmaga nähtavate tähtede hulgast, sest erinevad inimesed näevad erineval arvul tähti ning isegi üks ja sama inimene võib neid näha rohkem või vähem olenevalt vaatlustingimustest. Võime aga rääkida hulgast, mis koosneb näiteks mingil taevakaardil märgitud tähtedest.

Me loeme hulga antuks, kui iga elemendi puhul on võimalik otsustada, kas ta kuulub sellesse hulka või mitte. Sealjuures pole oluline, kas hulga elemendid on lihtsalt loetletud või on antud mingi muu eeskiri nende eraldamiseks teistest, hulka mittekuuluvatest elementidest. Näiteks hulga, mis koosneb Botvinnikust, Smõslovist, Talist ja Petrosjanist, võib defineerida hulgana, millesse kuuluvad kõik nõukogude maletajad, kes kannavad praegu või on kunagi kandnud malemaailmameistri tiitlit.

Mingi hulga defineerimisel ei ole üldiselt tarvis ette teada, kas see hulk sisaldab mõnda elementi või on ta tühi, s. t. ei sisalda ühtegi elementi. Tänu tühja hulga mõistele ei pea me hulkadega seotud aruteludes iga kord lisama: «kui selles hulgas leidub elemente». Nii võime julgesti rääkida näiteks võrrandi $x^2 + 2 = 0$ täisarvuliste lahendite hulgast, Valga linnas elavate neegrite hulgast või rahakotis olevate müntide hulgast. Tühja hulka tähistatakse sümboliga $\varnothing$.

Hulki tähistame edaspidi suurte ladina tähtedega A, B, C, ... ning nende elemente väikeste ladina tähtedega a, b, c, ... (indeksitega või ilma). Kirjutis $A = \{a_1, a_2, b, c\}$ tähendab, et hulk A koosneb neljast elemendist: a_1, a_2, b ja c. Hulk $B = \{a\}$ koosneb ainult ühest elemendist a (selline on näiteks mingi algarvu a ühest erinevate naturaalarvuliste jagajate hulk).

Hulk võib sisaldada ka lõpmata palju elemente, nagu näiteks kõikide täisarvude hulk või kõikide murdude $\frac{1}{2^k}$ hulk, kus k



Joonis 3. Õpilaste hulk B sisaldab õpilaste hulka C.

omandab kõiki naturaalarvulisi väärtusi. Sel juhul tähistame hulgad vastavalt

$$A = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

või

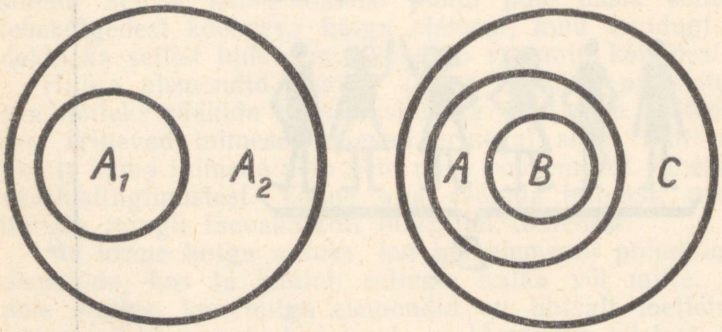
$$B = \left\{\frac{1}{2^k};\ k = 1, 2, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots\right\}.$$

Seda, et a on hulga A element, ehk nagu öeldakse, a kuulub hulka A, tähistatakse kirjutisega $a \in A$. Kirjutis $a \notin A$ tähendab aga, et a ei kuulu hulka A.

Kui hulga A iga element on mingi teise hulga B elemendiks, siis ütleme, et hulk A sisaldub hulgas B (on hulga B alamhulk), ning tähistame seda kas kujul $A \subset B$ või $B \supset A$. Hulga B kohta ütleme sel korral, et ta sisaldab hulka A (on tema ülemhulk).

Tühja hulga $\varnothing$ loeme kuuluvaks igasse hulka, s. t. iga hulga A korral $\varnothing \subset A$. Joonisel 3 näeme kahte õpilaste hulka, kusjuures hulk B sisaldab hulka C.

Olgu A antud hetkel Emajões suplevate inimeste hulk, B — samal momendil Tartu ujulas suplevate inimeste hulk ning C — kogu maailmas sel hetkel suplevate inimeste hulk. Ilmselt hulk A sisaldab hulka B (sest Tartu ujula asub Emajõe ääres) ja sisaldub ise samal ajal hulgas C. Seega hulk A on hulga C alamhulk ja hulga B ülemhulk, hulk B on nii A kui C alamhulk ning C on A ja B ülemhulk. Lühidalt võib vahekorda nende kolme hulga vahel märkida kirjutise $B \subset A \subset C$ abil.



Joonis 4. Hulk A_1 sisaldub hulgas A_2; hulk A sisaldab hulka B, hulk C sisaldab hulki A ja B.

Skemaatiliselt kujutatakse hulki kinnise joonega piiratud aladena, näiteks ringidena. Seda, et üks hulk A_1 on teise hulga A_2 alamhulk, märgitakse selliselt, et hulgale A_1 vastav ala joonistatakse hulgale A_2 vastava ala sisse, nagu seda on tehtud joonisel 4. Samal joonisel on näidatud ka ülal defineeritud suplejate hulkade A, B ja C vahekorrad.

Ühtedest ja samadest elementidest koosnevaid hulki A ja B loetakse võrdseteks ning kirjutatakse $A = B$. Näiteks hulk A, mis koosneb oma ruuduga ühtivatest täisarvudest, ning hulk $B = \{0, 1\}$ on võrdsed.

Hulkade A ja B võrdsuse tõestamiseks kasutatakse tihti järgmist võtet. Algul näidatakse, et $A \subset B$ (s. t. et A iga element on ühtlasi B elemendiks), siis aga, et $B \subset A$ (s. t. et ka B iga element kuulub hulka A). Sellest järeldub, et hulkadel A ja B pole erinevaid elemente ning järelikult peavad nad võrdsed olema: $A = B$.

Illustreerime seda meetodit viimati toodud näite varal. Ilmselt $B \subset A$, sest $0^2 = 0$ ja $1^2 = 1$. Näitame, et ka $A \subset B$. Kui aga $a \in A$, siis tähendab see, et $a^2 = a$, ehk $a(a-1) = 0$. See

võrdus on võimalik vaid siis, kui $a = 0$ või $a = 1$. Seega hulga A suvaline element kuulub hulka B, s. o. $A \subset B$. Järelikult saamegi, et $A = B$.

Ülesandeid.

1. Mitu erinevat hulka võib koostada kolmest erinevast esemest? Aga neljast?
2. Joonistage ruut $ABCD$, mille diagonaalid lõikugu punktis O. Koostage punktidest A, B, C, D, O tekkinud lõikudest ja kolmnurkadest sada erinevat hulka.

OPEREERIMINE HULKADEGA

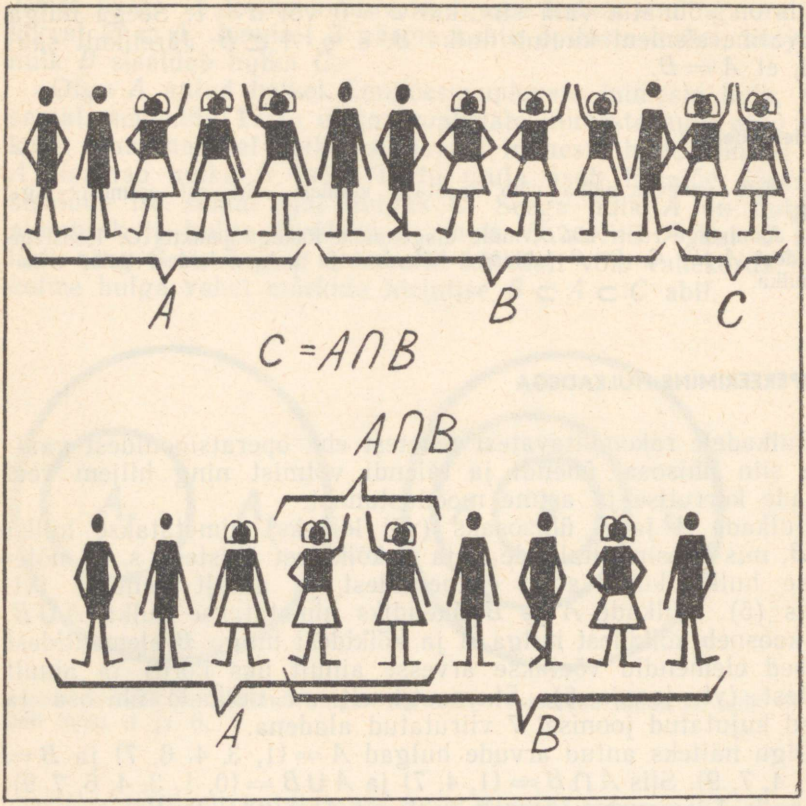
Hulkadele rakendatavatest tehetest ehk operatsioonidest vaatleme siin ühisosa, ühendi ja täiendi võtmist ning hiljem veel hulkade korrutise ja astme moodustamist.

Hulkade A ja B ühisosaks (või lõikeks) nimetatakse hulka $A \cap B$, mis koosneb hulkade A ja B kõikidest ühistest, s. o. mõlemasse hulka kuuluvatest elementidest ja ainult nendest (vt. joonis (5). Hulkade A ja B ühendiks nimetatakse hulka $A \cup B$, mis koosneb kõikidest hulga A ja kõikidest hulga B elementidest (ühised elemendid võetakse arvesse ainult üks kord) ja ainult nendest (vt. joonis 6). Skemaatiliselt on hulkade ühisosa ja ühend kujutatud joonisel 7 viirutatud aladena.

Olgu näiteks antud arvude hulgad $A = \{1, 3, 4, 6, 7\}$ ja $B = \{0, 1, 4, 7, 9\}$. Siis $A \cap B = \{1, 4, 7\}$ ja $A \cup B = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Kui hulk A koosneb vähemalt osaliselt Aasias, hulk B aga vähemalt osaliselt Euroopas asuvatest riikidest, siis $A \cap B$ koosneb Nõukogude Liidust ja Türgist, $A \cup B$ aga kõikidest Euraasia riikidest.

Kahel defineeritud operatsioonil on rida huvitavaid omadusi, mis osalt sarnanevad täisarvude liitmise ja korrutamise omadustega, osalt aga erinevad neist (analoogia otsimisel võrreldakse ühendi võtmist liitmisega ja ühisosa moodustamist korrutamisega).

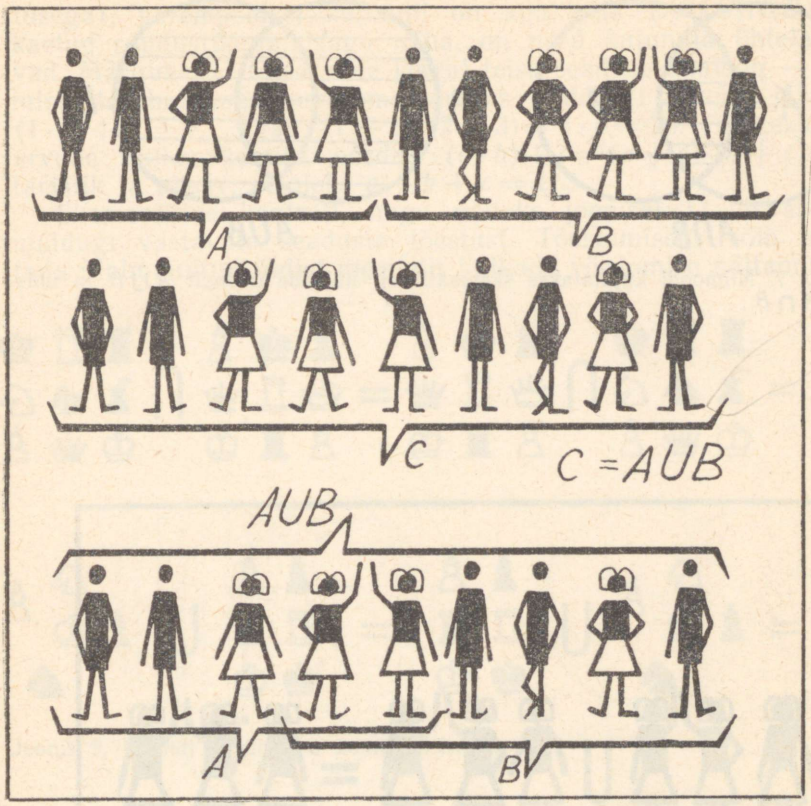
Vahetult definitsioonist järeldub ühendi ja ühisosa nn. idempotentsus: $A \cap A = A$ ja $A \cup A = A$ (vt. joonis 8). Täisarvudest on vastav omadus liitmise suhtes vaid arvul 0 ning korrutamise suhtes arvudel 0 ja 1. Samuti järeldub otse definitsioonist ka hulkade ühendi ja ühisosa moodustamise operatsioonide kommutatiivsus (vt. joonis 9): $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ (ei ole ju operatsioonide $\cap$ ja $\cup$ defineerimisel kusagil olnud juttu hulkade A ja B järjekorrast). Märgime, et kommutatiivsuse omadus on nii täisarvude liitmise kui ka korrutamise operatsioonidel.



Joonis 5. Hulkade A ja B ühisosa.

Kui on antud kolm hulka A, B ja C, siis nende ühendit võib (tänu kommutatiivsusele) moodustada ainult kahel erineval viisil: $(A \cup B) \cup C$ ja $A \cup (B \cup C)$. Kergesti võib näidata, et need hulgad on võrdsed, sest mõlemad koosnevad kõikidest hulga A, kõikidest hulga B ning kõikidest hulga C elementidest ja ainult nendest, kusjuures elemente, mis on ühised vähemalt kahele kolmest vaadeldavast hulgast A, B ja C, võetakse arvesse ainult üks kord. Seost $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ nimetatakse hulkade ühendi assotsiatiivsuse seaduseks. Seda arvestades võib rääkida lihtsalt kolme hulga ühendist $A \cup B \cup C$ (mis on joonisel 10 skemaatiliselt kujutatud viirutatud alana), samuti nelja hulga ühendist $A \cup B \cup C \cup D$ jne.

Kehtib ka ühisosa assotsiatiivsuse seadus: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, mis võimaldab rääkida lihtsalt kolme hulga



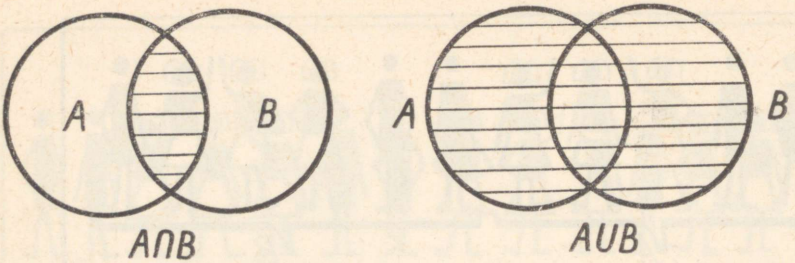
Joonis 6. Hulkade A ja B ühend.

ühisosast (vt. joonis 10), nelja, viie jne. hulga ühisosast. Assotsiatiivsed on muide ka nii täisarvude liitmise kui korrutamise operatsioonid.

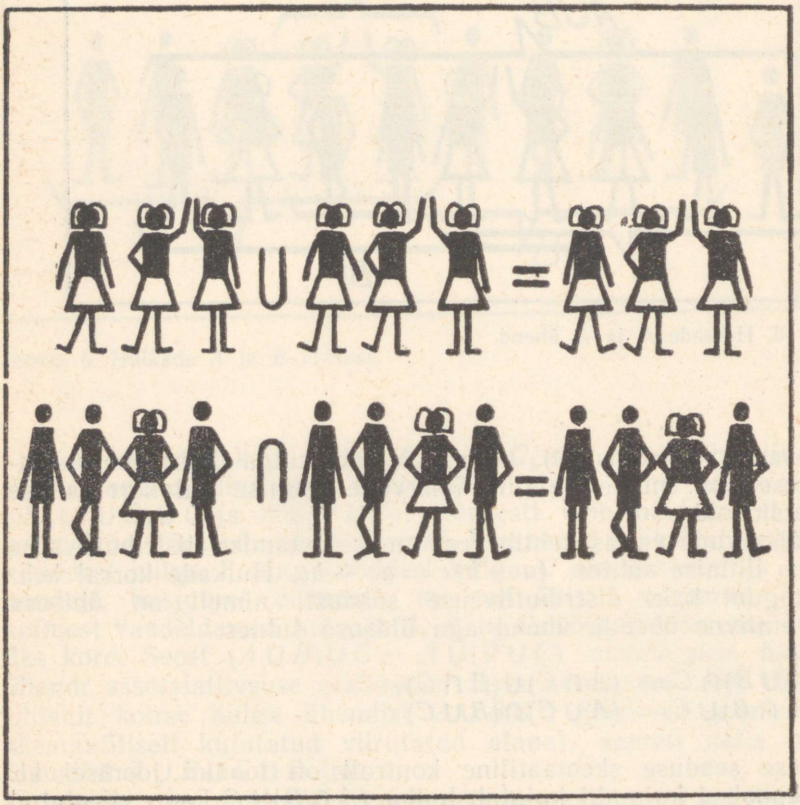
Täisarvude vallas kehtib veel nn. korrutamise distributiivsuse seadus liitmise suhtes: $(a+b)c = ac+bc$. Hulkade korral kehtib koguni kaks distributiivsuse seadust, nimelt on ühisosa distributiivne ühendi, ühend aga ühisosa suhtes:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Esimese seaduse skemaatiline kontroll on toodud joonisel 11. Vasakpoolsel kujundil kujutab hulka $(A \cap B) \cup C$ kogu viirutatud ala (niihästi horisontaal-, vertikaal- kui ka kahesuunalise viiru-



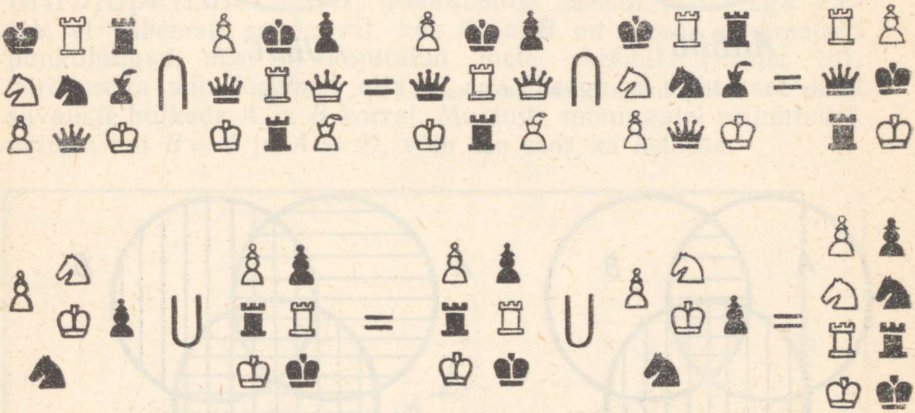
Joonis 7. Niimoodi kujutatakse skemaatiliselt hulkade ühendit $A \cup B$ ja ühisosa $A \cap B$.



Joonis 8. Ühendi ja ühisosa idempotentsus.

tusega), parempoolsel kujundil on aga hulk $(A \cup C) \cap (B \cup C)$ kaetud ruudustikuga. Nagu näha, on need kujundid ühtelangevad. Märgime, et täisarvude korral teise seaduse analoog — liitmise distributiivsus korrutamise suhtes — üldiselt ei kehti. Näiteks $(1 \cdot 2) + 3 = 5$, aga $(1 + 3) \cdot (2 + 3) = 4 \cdot 5 = 20$. Selleks et arvude vallas kehtiks võrdus $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$, on tarvilik ja piisav, et oleks $a + b + c = 1$.

Skemaatiline kontroll, nagu näiteks joonisel 11, ei asenda muidugi vastavate seaduste tõestust. Tõestamiseks võib kasutada ülalmainitud üldist meetodit hulkade võrdumise näitamiseks.



Joonis 9. Ühendi ja ühisosa kommutatiivsus.

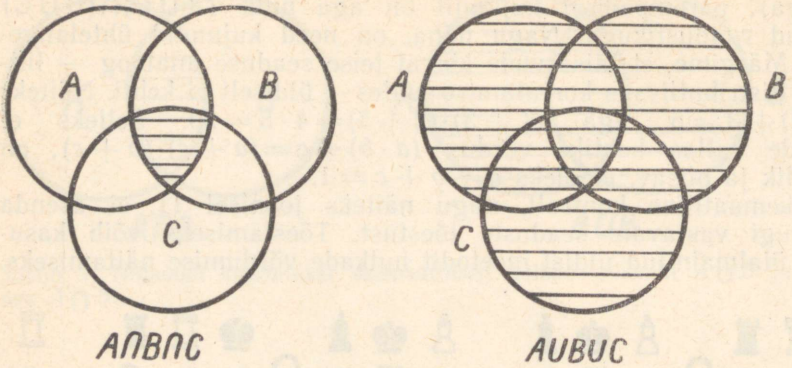
Tihti on otstarbekohane võtta vaatluse alla uuritava situatsiooni nn. universaalne hulk I, mis sisaldab kõiki antud arutelus kasutatavaid elemente. Kui me näiteks tegeleme täisarvudest koosnevate hulkadega, siis on I kõikide täisarvude hulk.

Hulga A täiendiks (universaalse hulga I suhtes) on hulk A', mis koosneb kõikidest hulka A mittekuuluvatest universaalse hulga elementidest ja ainult nendest. Näiteks kui A on kolmega jaguvate naturaalarvude hulk, siis A täiend kõikide naturaalarvude hulga I suhtes koosneb arvudest 1, 2, 4, 5, 7, 8, ... , s. o. naturaalarvudest, mis ei jagu kolmega.

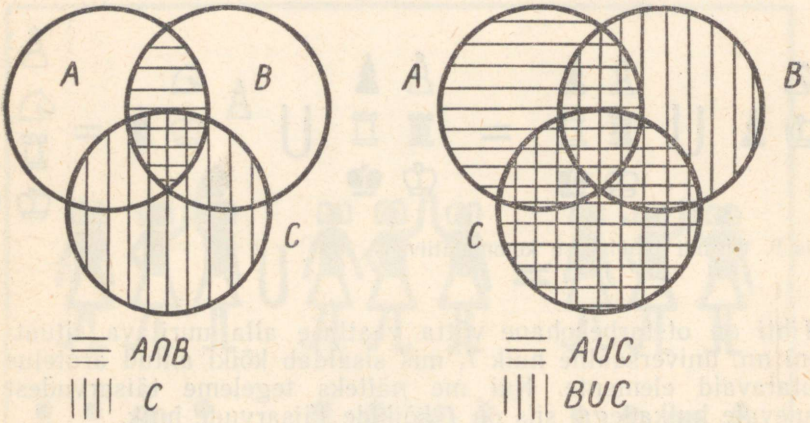
Hulga täiendi skemaatiliseks kujutamiseks kasutatakse järgmist võtet. Kogu antud olukorda illustreeriv skeem paigutatakse ristküliku (või suure ringi) sisse, mis kujutab kõiki vaadeldavaid elemente, s. o. universaalset hulka. Siis vastab hulga A täiendile A' ristküliku (või ringi) see osa, mida A ei kata (vt. joonis 12).

Hulga täiendi definitsioonist järelduvad otsekohe seosed:

$$A \cup A' = I,\ A \cap A' = \varnothing,\ I' = \varnothing,\ \varnothing' = I,\ (A')' = A.$$



Joonis 10. Kolme hulga ühend ja ühisosa.



Joonis 11. Hulkade ühisosa on distributiivne ühendi suhtes.

Ei ole raske tõestada ka järgmiste seoste kehtivust:

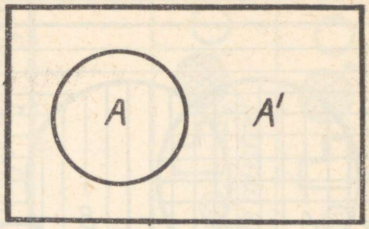
$$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = A; \quad (A \cup B) \cap (A \cup B') = A.$$

Viimane neist seostest on illustreeritud joonisel 14, esimene aga joonisel 15. Eriti tähtsad on nn. De Morgani seadused:

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B',$$

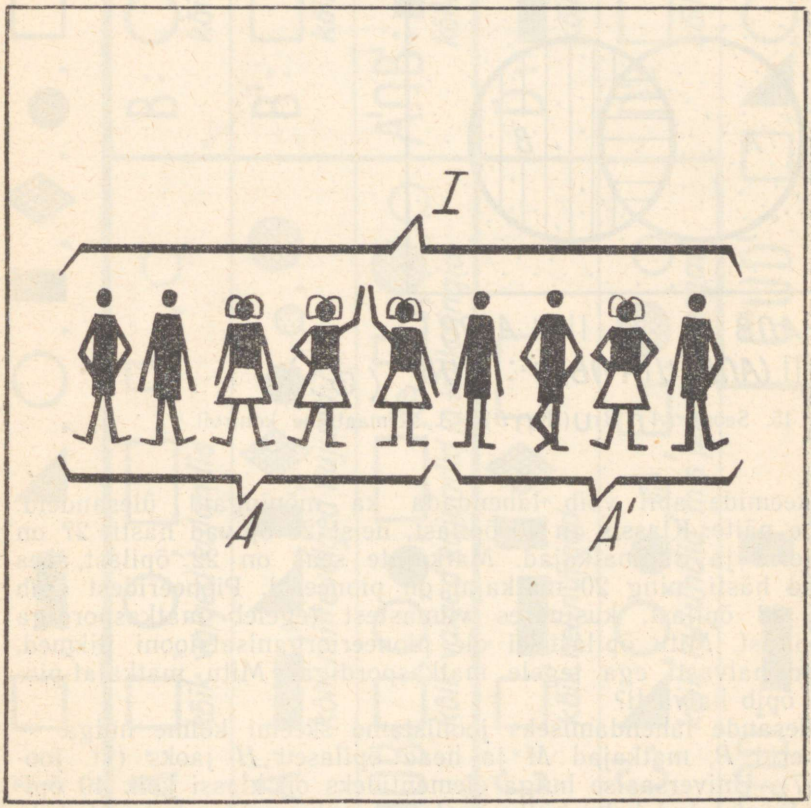
mis on illustreeritud joonisel 16.

Kuigi skeemide abil ei saa tõestada seoseid hulkade vahel, saab neid siiski kasutada ebaõigete väidete ümberlükkamiseks. Oletame näiteks, et kellegi arvates kehtib alati seos

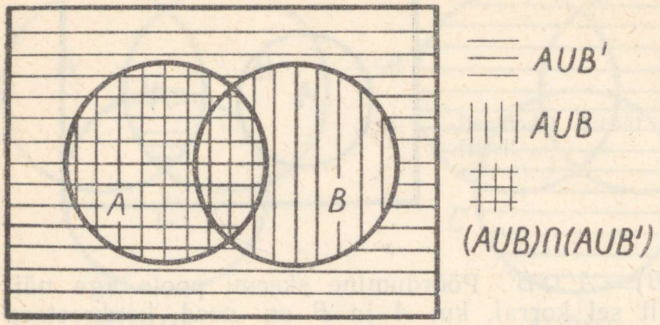


Joonis 12. Hulga täiend (skemaatiliselt).

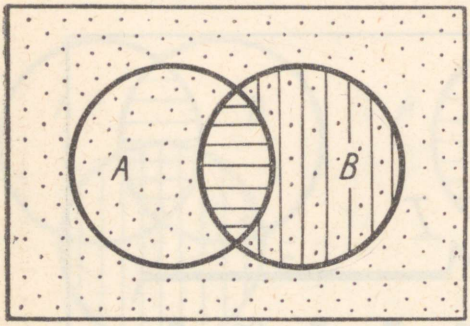
$(A \cap B) \cup (A' \cap B) = A' \cup B'$. Pöördumine skeemi poole aga näitab, et vähemalt sel korral, kui A ja B on need konkreetsed punktihulgad, mis on kujutatud meie skeemil (joonis 15), võrdsusega siin tegemist olla ei saa. Seega ei kehti see seos suvaliste hulkade A ja B korral. Muidugi, mõningatel erijuhtudel, näiteks kui $B = I$ ja $A = \varnothing$, võib see seos ka kehtida.



Joonis 13. Hulga täiend.



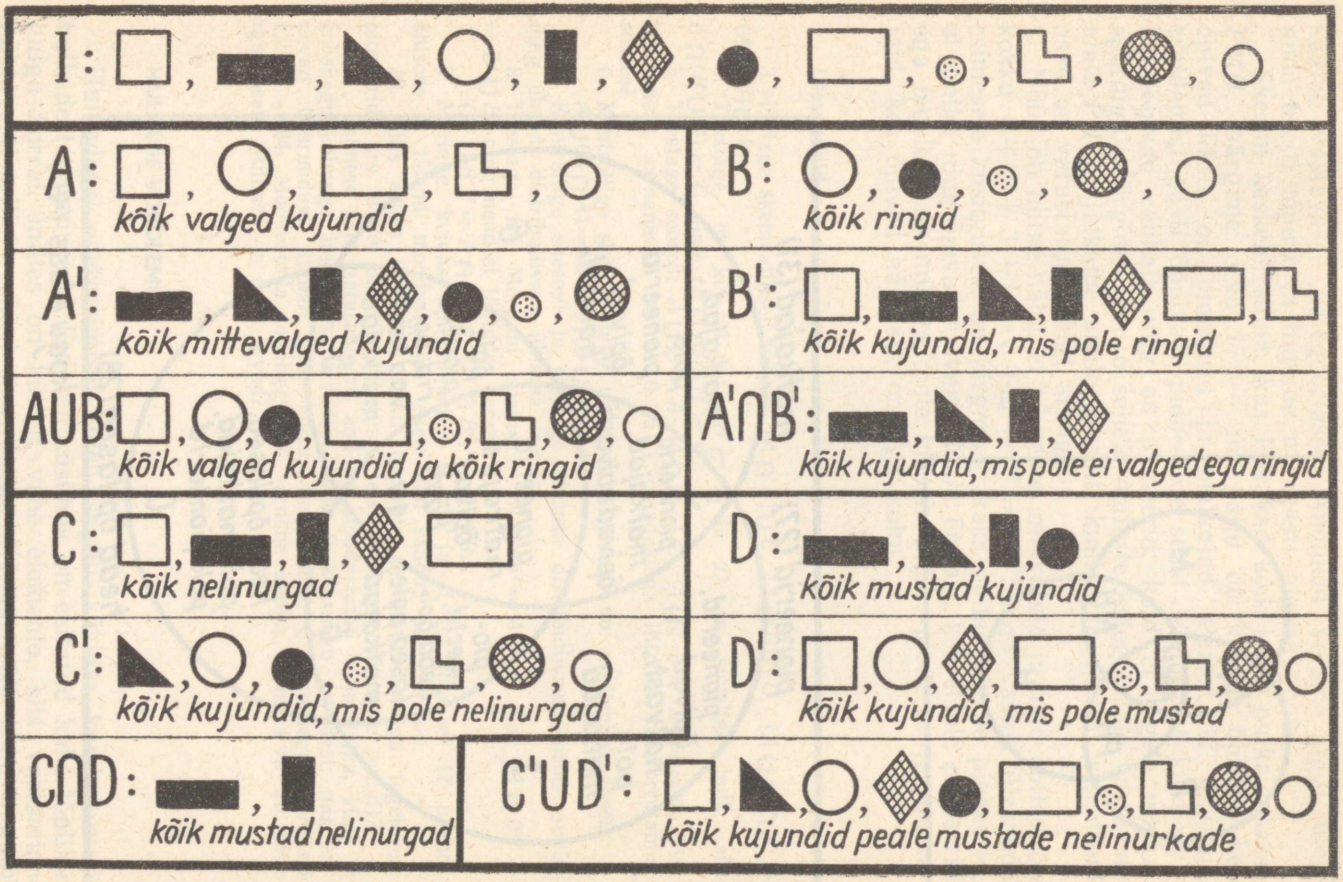
Joonis 14. Seose $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$ skemaatiline kontroll.



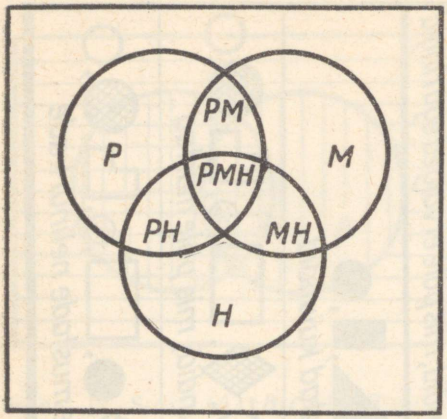
Joonis 15. Seose $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = A$ skemaatiline kontroll.

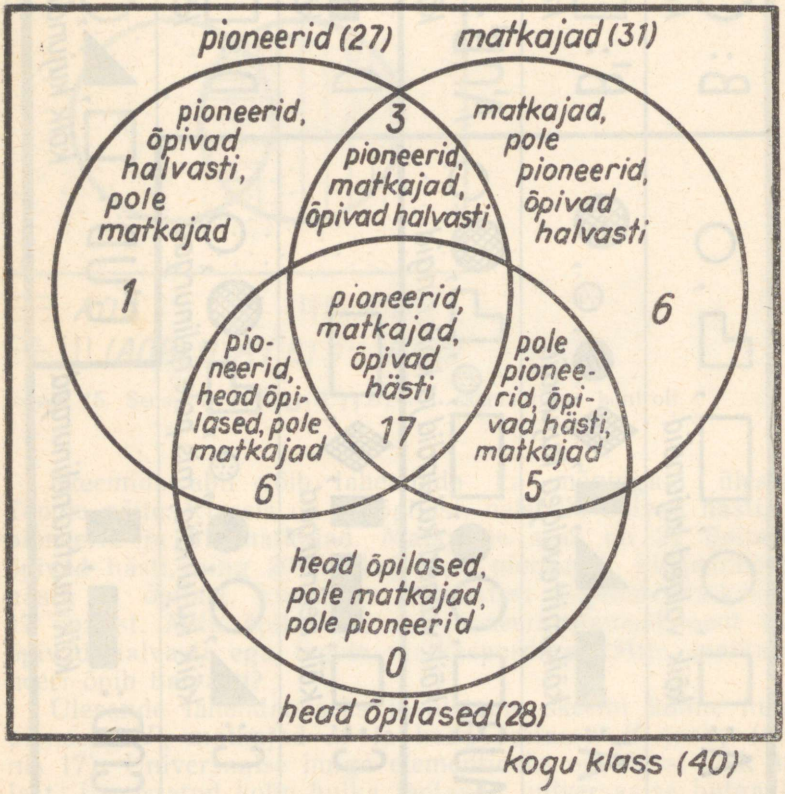
Skeemide abil võib lahendada ka mõningaid ülesandeid. Toome näite. Klassis on 40 õpilast, neist 28 õpivad hästi, 27 on pioneerid ja 31 matkajad. Matkajate seas on 22 õpilast, kes õpivad hästi, ning 20 matkajat on pioneerid. Pioneeridest õpib hästi 23 õpilast, kusjuures viimastest tegeleb matkaspordiga 17 õpilast. Mitu õpilast ei ole pioneeriorganisatsiooni liikmed, õpivad halvasti ega tegele matkaspordiga? Mitu matkajat-pioneeri õpib halvasti?

Ülesande lahendamiseks joonistame skeemi kolme hulga — pioneerid P, matkajad M ja head õpilased H jaoks (vt. joonis 17). Universaalse hulga elementideks on klassi kõik 40 õpilast. Joonistatud kolm hulka jaotavad universaalse hulga kaheksaks osaks. Igal nendest kaheksast osast märgime, mitu õpilast



Joonis 16. De Morgani seadused.





Joonis 17. Mitu matkajat-pioneeri õpib halvasti?

kuulub vastavasse kategooriasse. Andmeid võtame algul ülesande teksti lõpust ja liigume nii teksti alguse poole.

Skeemi keskele, sinna, kus lõikuvad kõik kolm hulka, osasse PMH, märgime arvu 17 — nii palju on klassis õpilasi, kes õpivad hästi, on pioneerid ja matkajad. Pärast 17 matkaja eraldamist hästi õppivate pioneeride seast leiame, et kuus õpilast õpivad edukalt ning on pioneerid, kuid ei tegele matkaspordiga. Märgime arvu 6 sellele õpilaste kategooriale vastavale alale PH ja jätkame analoogiliselt, kuni kõik skeemi sisemised osad on varustatud mingi arvuga.

Nüüd on lihtne näha, et pioneere, matkajaid ja häid õpilasi on kokku $0+1+3+6+6+5+17=38$. Seega vastus ülesande esimesele küsimusele on järgmine: kaks õpilast ei ole pioneerid, ei matka ning õpivad halvasti. Häid õpilasi, kes ei ole pioneerid ega tegele matkamisega, pole klassis üldse, pioneere ja matkajaid, kes õpivad halvasti, on aga kolm.

Ülesandeid.

3. Esitage skemaatiliselt hulgad $(A \cap B) \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \cup B) \cap A$ ja $(A \cap B) \cup A'$.

4. Tõestage, et kui $A \subset C$, $B \subset C$ ja D on suvaline hulk, siis $A \cap (B \cup D) \subset C$ ning $(A \cup B) \cap D \subset C$.

5. Tõestage seosed: $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup I = I$, $A \cap I = A$. Millised neist sarnanevad arvude 0 ja 1 omadustega liitmise ja korrutamise suhtes?

6. Kontrollige skeemil ning tõestage järgmised nn. neelamisseadused: $A \cup (B \cap A) = A$, $A \cap (B \cup A) = A$.

7. Kontrollige skeemil ja tõestage ühisosa distributiivsus ühendi suhtes ning ühendi distributiivsus ühisosa suhtes.

8. Tõestage De Morgani seadused $(A \cup B)' = A' \cap B'$ ja $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ning nendest lähtudes seosed $(A' \cup B')' = A \cap B$ ja $(A' \cap B')' = A \cup B$.

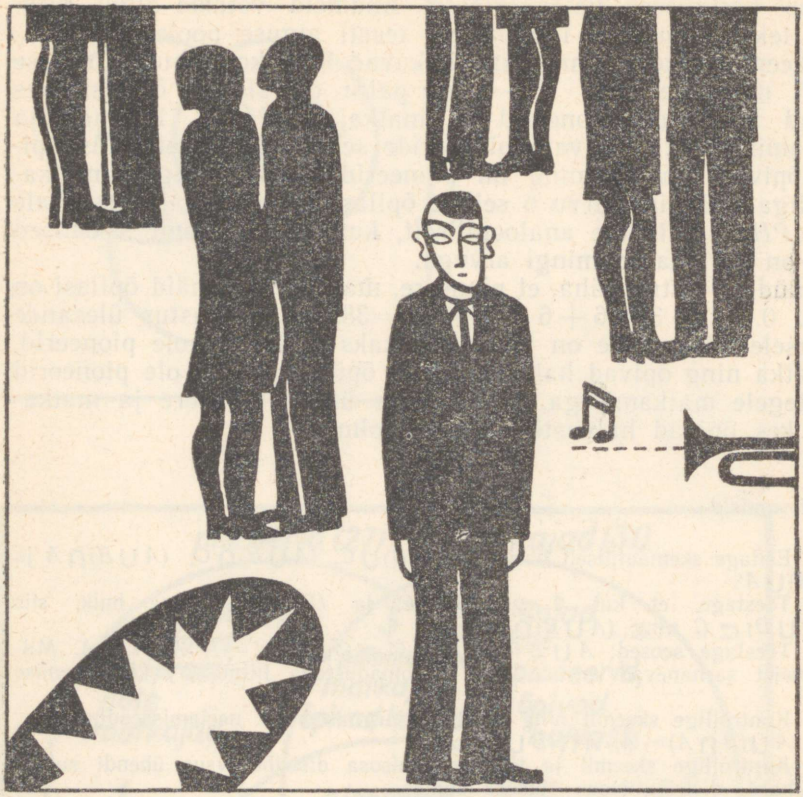
9. Märkige, kuidas lähtehulkadest P, M ja H on joonisel 17 ühendi, ühisosa ja täiendi moodustamise tehete abil saadud kaheksa ala.

10. Miks selles ülesandes hästi õppivate ja matkaspordiga tegelevate pioneeride arv ei või olla 12 (ülesande teiste andmete säilimise puhul)?

11. Esimese saja naturaalarvu abil on moodustatud kolm hulka. Hulk A koosnegu kolmega jaguvatest arvudest, hulk B koosnegu arvudest, mis erinevad täisruudust ülimalt ühe võrra, ning hulk C koosnegu arvudest $1, 2, \ldots, 24$. Moodustada joonisega 17 sarnane skeem. Mitu arvu on selle igas osas? Millised on need arvud?

HULKADE VÕRDLEMINE

Hulkadega opereerimisel tuleb sageli küsida: kumb antud hulkadest on suurem? Kui see küsimus on esitatud kahe lõpliku hulga korral, milles on küllalt vähe elemente, siis vastamine nähtavasti erilisi raskusi ei valmista. Näiteks võib kohe ütelda,



Joonis 18. Meesterahvaid on peol rohkem.

et kasutamata tikutoosis olevate tikkude hulk on suurem kui hapukurkide hulk liitrises purgis ning väiksem kui loteriipiletite hulk ühes seerias. Kuidas jõuda sellistele «sügavatele» järeldustele? Tavaliselt loetakse ära, mitu elementi on vaadeldavates hulkades, ning võrreldakse neid arve omavahel. Toodud juhul oli purgis näiteks seitse kurki, tikutoosis kuuskümmend tikku ning ühes seerias sada loteriipiletit. Nendest arvudest lähtudes saimegi teha ülaltoodud järeldused hulkade suuruste kohta.

Kuid milline vastus tuleb anda küsimusele, kas müügil olevate teatripiletite hulk on suurem või väiksem kui nende teatrisõprade hulk, kes tahavad teatrisse minna? Või küsimusele: keda on peol rohkem, kas mehi või naisi? Kas vastuse andmiseks tuleb hakata lugema teatripiletite, teatrisse minejate ja peost

osavõtjate arvu? Kui arvatakse, et jah, siis lubatagu esitada veel paar küsimust: mida on rohkem, kas kahega või kolmega jaguvaid arve? kas täisarve või reaalarve?

Kõikides nendes küsimustes esinevate hulkade elementide arvu selgitamine on kas praktiliselt raskesti teostatav või isegi võimatu (kui hulgad on lõpmatud). Sellele vaatamata ütleb teatrisõber, kes piletist ilma jäi, et pileteid oli vähem kui inimesi, kes soovisid etendusele minna, kuigi ta ei tea, mitu piletit oli müügil ja mitu inimest soovis teatrit külastada. Ka teisele küsimusele on lihtne vastust saada — tarvitseb vaid oodata tantsu algust. Niipea kui selgub, et näiteks kõik naised juba tantsivad, mõned mehed aga jäid seisma (vt. joonis 18), siis võib kindlalt väita, et mehi on peol rohkem kui naisi. Muidugi pole ka siin tarvis teada peost osavõtvate meeste või naiste üldarvu.

Kuidas siin hulki võrreldi? Kui piletita jäänud teatrisõber oleks matemaatik, siis arutleks ta nii: seame igale piletile vastavusse selle inimese, kes läheb antud piletiga teatrisse. Seega on piletite hulk niisama suur kui teatrisõprade hulga selline osahulk, mis koosneb nendest inimestest, kellel õnnestus hankida teatripilet. Järelikult on esimene hulk väiksem. Teise näite puhul võib arutleda täpselt samuti: seame teineteisele vastavusse selle naise ja selle mehe, kes koos tantsivad. Et igale mehele vastab seejuures naine, mitte aga vastupidi, siis on selge, et naiste hulk on suurem kui meeste hulk. Juhul kui pärast tantsu algust selgus, et saali pole istuma jäänud ühtki inimest, siis ütleksime, et peol olevate naiste ja meeste hulgad on võrdsed. Faktiliselt just nii arutletaksegi, kuigi sellest tavaliselt endale selgesti aru ei anta.

Vahekordade «suurem», «väiksem» ja «suuruselt võrdne» range käsitlus hulkade korral on võimalik üksühese vastavuse mõiste abil. Me ütleme, et hulkade A ja B vahel on korraldatud üksühene vastavus, kui hulga A igale elemendile on seatud vastavusse üks ja ainult üks element hulgast B, kusjuures hulga B iga elemendi jaoks on olemas üks ja ainult üks hulga A element, millega ta on vastavusse seatud. Üksühest vastavust tähistatakse sümboliga $\leftrightarrow$. Näiteks kui $a \in A$ on seatud vastavusse elemendiga $b \in B$, siis kirjutame $a \leftrightarrow b$.

Kui hulkade vahel saab korraldada üksühese vastavuse, siis on loomulik lugeda neid võrdse suurusega hulkadeks. Matemaatikas nimetatakse selliseid hulki ekvivalentseteks ja öeldakse, et neil hulkadel on sama võimsus. Et üksühest vastavust võib tavaliselt korraldada mitmel viisil (teatrikülastajad võivad pileteid vahetada, tantsijad aga vahetavad pidevalt partnereid), siis loeme hulki ekvivalentseiks niipea, kui üksühene vastavus on korraldatav nende vahel vähemalt ühel viisil. Kui A ja B on ekvivalentsed hulgad, siis kirjutatakse $A \sim B$.

Juhul kui hulkade A ja B vahel üksühest vastavust ühelgi viisil korraldada ei saa, küll aga saab korraldada üksühese vastavuse ühelt poolt hulga A ning teiselt poolt hulga B mingi alamhulga B_1 vahel, siis ütleme, et hulk B on suurema võimsusega kui A.

Sellest definitsioonist lähtudes näeme, et kahega ja kolmega jaguvate täisarvude hulgad on ekvivalentsed, sest vastavus $2n \leftrightarrow 3n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ nende hulkade vahel on üksühene. Veelgi enam, paarisarvude hulk on ekvivalentne kõikide täisarvude hulgaga, sest nende hulkade vahel saab korraldada üksühese vastavuse $n \leftrightarrow 2n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Seega võib lõpmatu hulga alamhulk olla ekvivalentne terve selle hulgaga, mis on muidugi täiesti võimatu lõplike hulkade korral.

Pöördume korraks tagasi lõplike hulkade võrdlemise juurde, mis võis toimuda nende hulkade elementide arvu määramise teel. Faktiliselt kasutame ka siin üksühest vastvust. Ülaltoodud esimeses näites seadsime algul kurkide, tikkude ja loteriipiletite hulkadega vastavusse teatud naturaalarvude hulgad, seejärel aga võrdlesime viimaseid omavahel. Muidugi oleks ka siin saanud korraldada vahetu üksühese vastavuse vaadeldavate hulkade elementide vahel.

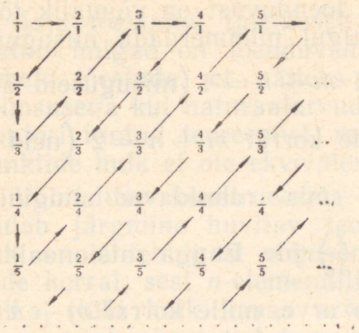
Hulki, mis on ekvivalentsed naturaalarvude hulgaga, on loomulik nimetada loenduvateks. Loenduv on näiteks kõikide täisarvude hulk, sest vajaliku vastavuse saab korraldada kas või nii:

$2n - 2 \leftrightarrow n$, $2n - 1 \leftrightarrow -n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Samuti on loenduv positiivsete ratsionaalarvude hulk. Selle hulga seadmine üksühesesse vastavusse naturaalarvude hulgaga nõuab juba teatavat leidlikkust. Näiteks võib seda teha järgmiselt: paigutame kõik positiivsed ratsionaalarvud järgmisse ruuttabelisse, kus ühes reas on sama nimetajaga, ühes veerus aga sama lugejaga ratsionaalarvud:

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \cdots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \cdots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}$$

ning kirjutame kõigepealt välja need arvud, mille puhul lugeja ja nimetaja summa on kaks $\left(\frac{1}{1}\right)$, siis need arvud, mille puhul see summa on kolm $\left(\frac{1}{2}\right.$ ja $\left.\frac{2}{1}\right)$ jne., jättes sealjuures kõrvale kõik taandamata murrud. Allpool on nooltega näidatud, millises järjekorras me need arvud välja kirjutame:

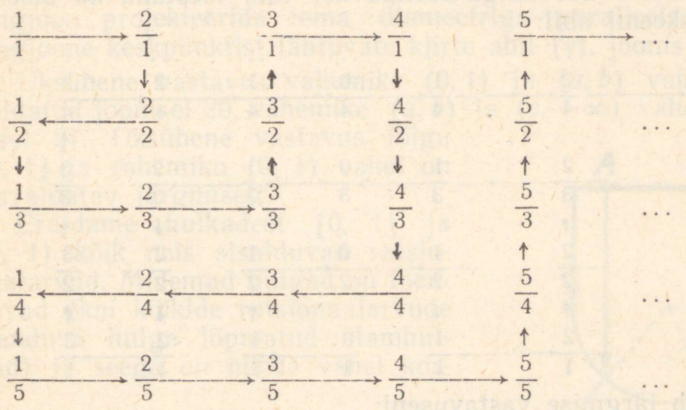


Niimoodi saame vastavuse:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 3 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 5 & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & \ldots, \end{array}$$

mis on üksühene ja hõlmab kõik positiivsed ratsionaalarvud, sest igal ratsionaalarvul on lugeja ja nimetaja summa lõplik ning leidub ainult lõplik hulk selliseid positiivseid ratsionaalarve, mille lugeja ja nimetaja summa võrdub antud arvuga.

Muidugi on olemas teisigi võimalusi üksühese vastavuse korraldamiseks positiivsete ratsionaalarvude hulga elementide ja naturaalarvude vahel. Üks neist on toodud järgmisel skeemil:



Sel teel saame järgmise vastavuse:

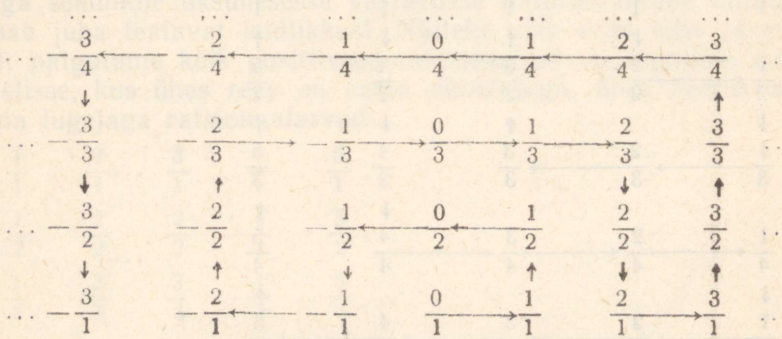
$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} 1 & 2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{2} & 3 & 4 & \frac{4}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{4} & \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \ldots \end{array}$$

Ka kõikide ratsionaalarvude hulga loenduvust on võimalik tõestada mitmel viisil. Võib näiteks algul nummerdada niisugused ratsionaalarvud $\pm\frac{m}{n}$, mille korral $m+n=1$ (niisuguseid arve on ainult üks: $\frac{0}{1}$), siis arvud, mille korral $m+n=2$ (neid on juba kaks: $\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}$), siis arvud, mis rahuldavad tinginiust $m+n=3$ (nendeks on $\pm\frac{1}{2}$ ja $\pm\frac{2}{1}$) jne. Et iga ratsionaalarvu $\pm\frac{m}{n}$ korral on $m+n$ lõplik arv ja arve, mille korral $m+n$ on üks ja seesama, on samuti lõplik arv, siis lõpliku arvu sammude järel jõuame tingimata iga ratsionaalarvuni.

Kuid lähtudes mõnest teadaolevast positiivsete ratsionaalarvude numeratsioonist, võiks nummerdada kõik ratsionaalarvud ka järgmiselt: algul null, seejärel esimene positiivne ratsionaalarv, seejärel tema vastandarv, siis teine positiivne ratsionaalarv, tema vastandarv jne. Teise positiivsete ratsionaalarvude jaoks leitud järjestuse puhul saaksime antud juhul niisuguse üksühese vastavuse naturaalarvudega:

0	1	−1	2	−2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...

Ratsionaalarvude hulga loenduvust võib tõestada ka otseselt järgmise skeemi abil:



See viib järgmise vastavuseni:

0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	−1	−2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	2	3	...
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...

Märgime veel, et loenduva hulga lõpmatu alamhulk on samuti loenduv.

Asja tõestatud tulemused võivad viia mõttele, et kõik lõpmatud hulgad on loenduvad. See pole aga sugugi nii. Saab nimelt tõestada, et näiteks sirge punktide hulk on suurema võimsusega kui naturaalarvude hulk. Niisugune tulemus järeldub Cantori tuntud teoreemist, mis väidab, et lõigul [0, 1] asuvate punktide hulk ei ole ekvivalentne naturaalarvude hulgaga.

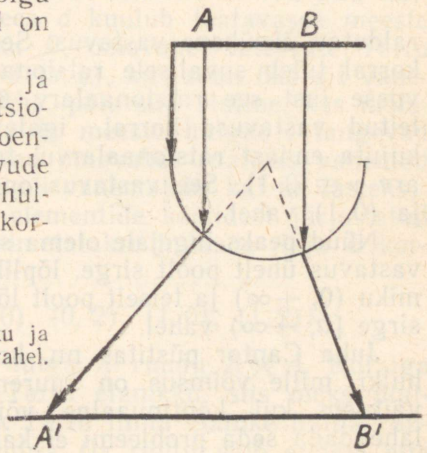
Võimaluse konstrueerida üha suurema võimsusega hulki annab järgmine huvitav teoreem: hulga kõikide alamhulkade hulk on lähtehulgast võimsam. See väide on ilmne lõplike hulkade korral, sest n-elemendilisel hulgal on ju 2^n erinevat alamhulka (tühi hulk kaasa arvatud), kuid ka lõpmatute hulkade korral saab nimetatud teoreemi rangelt tõestada.

Sõnastatud teoreemist järeldub, et kõikide naturaalarvudest koosnevate hulkade hulk ei ole loenduv. Selle hulga võimsust nimetatakse kontinuaalseks. Kontinuaalse võimsusega on näiteks sirge kõikide punktide hulk. Lõigu $[0, 1]$, vahemiku $(0, 1)$, poolsirge $[0, +\infty)$ ja vahemiku $(0, +\infty)$ punktide hulgad on sama võimsusega. Olukord on sama ka lõigu $[a, b]$, vahemiku (a, b), poolsirge $[a, +\infty)$ ja vahemiku $(a, +\infty)$ korral suvaliste a ja b jaoks. Kõik need hulgad on kontinuaalse võimsusega.

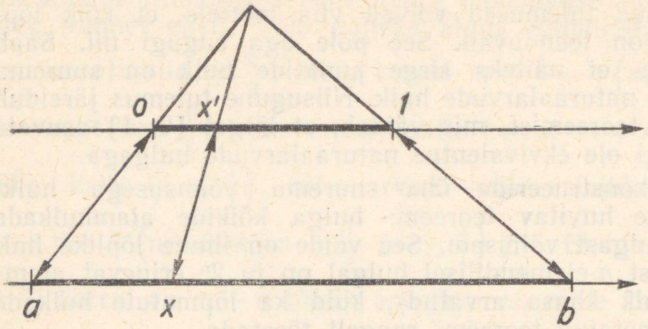
Sirge ja vahemiku (a, b) vaheline üksühene vastavus on korraldatav mitmel viisil. Võib näiteks algul korraldada niisuguse vastavuse vahemiku (a, b) ja otspunktideta poolringjoone vahel selliselt, nagu on nooltega näidatud joonisel 19, ning seejärel leida vastavus poolringjoone ja sirge vahel. Selleks tuleb poolringjoon projekteerida tema diameetriga paralleelsele sirgele ringjoone keskpunktist lähtuvate kiirte abil (vt. joonis 19).

Üksühene vastavus vahemike $(0, 1)$ ja (a, b) vahel on korraldatud joonisel 20, vahemike (a, b) ja $(c, +\infty)$ vahel aga joonisel 21. Üksühene vastavus lõigu $[0, 1]$ ja vahemiku $(0, 1)$ vahel on korraldatav järgmiselt.

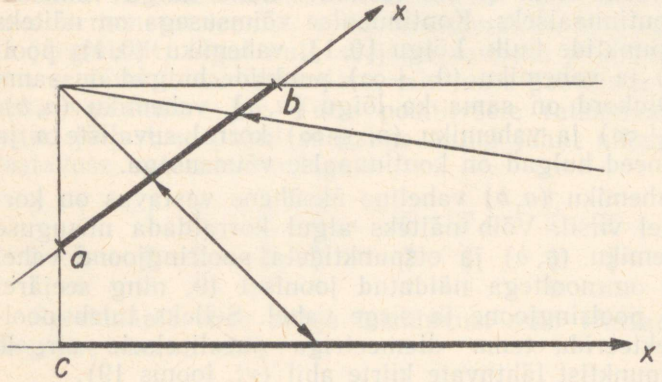
Eraldame hulkadest $[0, 1]$ ja $(0, 1)$ kõik neis sisalduvad ratsionaalarvud. Mõlemad hulgad on loenduvad (kui kõikide ratsionaalarvude loenduva hulga lõpmatud alamhulgad) ja seega on nende vahel kor-



Joonis 19. Üksühene vastavus vahemiku ja sirge punktihulkade vahel.



Joonis 20. Üksühene vastavus kahe vahemiku vahel.



Joonis 21. Üksühene vastavus vahemiku ja poolsirge vahel.

raldatav üksühene vastavus. Selge, et konstrueeritava vastavuse korral tuleb suvalisele ratsionaalarvule $\alpha \in [0, 1]$ seada vastavusse just see ratsionaalarv $\beta \in (0, 1)$, mis vastab talle äsja leitud vastavuse korral, igale reaalarvule $\gamma \in [0, 1]$, mis ei kujuta endast ratsionaalarvu, tuleb aga seada vastavusse sama arv $\gamma \in (0, 1)$. See vastavus ongi üksüheseks vastavuseks $[0, 1]$ ja $(0, 1)$ vahel.

Nüüd peaks lugejale olema selge, kuidas korraldada üksühene vastavus ühelt poolt sirge, lõpliku pikkusega vahemiku või vahemiku $(0, +\infty)$ ja teiselt poolt lõigu, poolsirge $[0, +\infty)$ või poolsirge $[a, +\infty)$ vahel.

Juba Cantor püstitas nn. kontiinuumi probleemi: kas leidub hulki, mille võimsus on suurem kui loenduvatel hulkadel, ent väiksem kui kontinuaalne võimsus. Tema korduvad katsed lahendada seda probleemi ei kandnud vilja. Vastust kontiinuumi

probleemile ei suudetud anda peaaegu saja aasta jooksul. Niisuguse olukorra põhjuse selgitas hiljuti ameerika matemaatik P. J. Cohen, kes näitas, et hulgateoorias endas ei saagi sellele küsimusele anda ei positiivset ega negatiivset vastust. Kahjuks pole siinkohal võimalik sellest üksikasjalisemalt kirjutada, sest Coheni tulemuse selgemaks mõistmiseks peaks peatuma paljudel hulgateooria ja matemaatilise loogika keerulistel küsimustel, see aga nõuaks tervet omaette brošüüri.

Ülesandeid.

12. Tõestada, et lõplik hulk ei saa olla ekvivalentne oma alamhulgaga.
13. Kasutades funktsiooni $f(x) = \tan x$ graafikut, näidata, et vahemiku $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ja kogu sirge punktide hulgad on ekvivalentsed.
14. Võõrastemajas on loenduv hulk voodikohti, mis kõik on juba külaliste poolt hõivatud. Millise ümbertõstmisega saaks ära paigutada ka saabunud külalised, kui:
    1° uusi külalisi on lõplik hulk?
    2° uute külaliste hulk on loenduv?
    3° uued külalised on saabunud rongiga, mis koosneb loenduvast hulgast vaguneist, kusjuures igas vagunis on lõplik hulk inimesi?
    4° igas vagunis on loenduv hulk inimesi?
15. Tõestada, et poolsirge $[a, b)$ on ekvivalentne sirgega.
16. Leida niisugused hulgad A, B, C ja D, et oleks $A \sim B$, $C \sim D$, kuid $A \cup C$ ei oleks ekvivalentne $B \cup D$-ga.

SEOSED JA FUNKTSIOONID

Nii matemaatikas kui ka praktilises elus tuleb tihti koostada paare kahe hulga A ja B elementidest. Nendeks võivad olla näiteks abielupaarid (a, b), kus mees a kuulub teatavasse meeste hulka A ja naine b naiste hulka B, omavahel tuttavate Tartu elanike paarid või inimeste paarid (x, y), kus x on üks y-i vanematest ja y on x-i laps. Nagu näha, pole siin oluline, kas mõlemad hulgad on erinevad (naiste ja meeste hulgad), langevad ühte (Tartu elanikud) või lõikuvad omavahel (näiteks vanemad ja lapsed; leidub inimesi, kes on nii vanemateks kui ka lasteks).

Hulka, mis koosneb A ja B elementide kõikidest järjestatud paaridest, kus $a \in A$ ja $b \in B$, nimetatakse hulkade A ja B korrutiseks ning tähistatakse $A \times B$.

Näiteks $\{0, 1\} \times \{0, 2\} = \{(0, 0), (0, 2), (1, 0), (1, 2)\}$.

Erijuhul, kui $A = B$, saame hulga A ruudu $A \times A$. Kui iga Tartu elanik tunneks iga teist Tartu elanikku, siis oleks ülalvaadeldud tuttavate paaride hulk Tartu linna elanike hulga ruuduks. Positiivsete reaalarvude hulga D^+ ruutu võib endale ette

kujutada kui koordinaattasandi esimest veerandit (vt. joonis 22). Kõikide reaalarvude hulga D ruuduks on kogu tasand.

Kui korrutises $A \times B$ on eraldatud mingi alamhulk Q, siis öeldakse, et hulkade A ja B vahel on defineeritud seos Q (täpsemalt, binaarne seos Q). Hulka Q kuuluvad paarid (a, b) määravad ära hulkade A ja B elemendid, mis on omavahel seoses Q. Sel puhul, s. o. kui $(a, b) \in Q$, kirjutatakse veel aQb või

$a = b \pmod{Q}$.

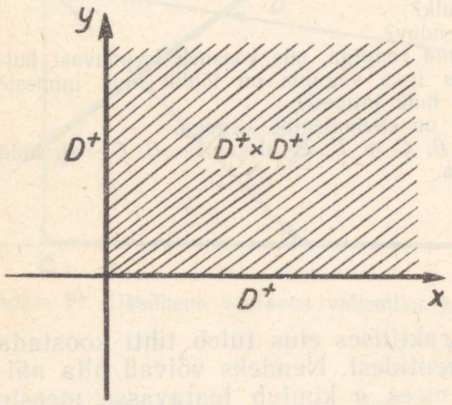
Kui $A = B$, siis öeldakse, et seos Q on defineeritud hulgal A.

Seostest, mis on defineeritud hulkade A ja B vahel, tuleb eristada hulkade B ja A vahel defineeritud seoseid. Viimased on hulga $B \times A$ alamhulkadeks (mitte aga hulga $A \times B$ alamhulkadeks, nagu seda on esimesed seosed: näiteks hulk

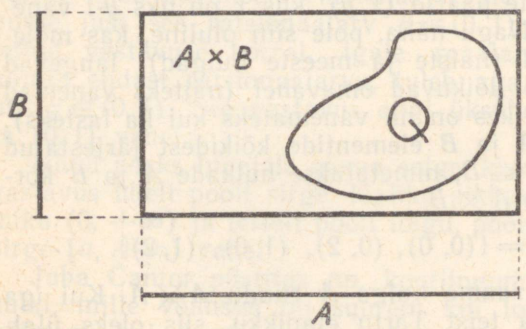
$$\{0, 2\} \times \{0, 1\} = \{(0, 0), (0, 1), (2, 0), (2, 1)\}$$

erineb ülalvaadeldud hulgast $\{0, 1\} \times \{0, 2\}$).

Kui hulki A ja B esitada skemaatiliselt sirglõikudena ning asetada need risti teineteisega, siis nende korrutist $A \times B$ võib



Joonis 22. Positiivsete reaalarvude hulga D^+ ruut $D^+ \times D^+$.

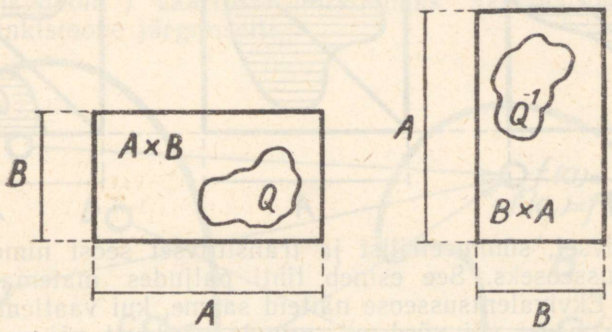


Joonis 23. Nõnda näevad välja hulkade A ja B korrutis ning hulkadel A ja B defineeritud seos Q.

skemaatiliselt esitada ristkülikuna, seost Q aga alamhulgana ristküliku sees (vt. joonis 23).

Kuna binaarsed seosed on lihtsalt hulga $A \times B$ alamhulgad, siis võib nende korral rääkida ühe seose Q kuulumisest teise seosesse R, kahe seose ühisosast $Q \cap R$ ja seose täiendist Q'.

Hulkadel A ja B defineeritud seose Q pöördseoseks Q^{-1} nimetatakse seost, mis on järgmisel viisil defineeritud hulkadel B ja A : $bQ^{-1}a$ siis ja ainult siis, kui aQb. Skemaatiliselt on pöördseos kujutatav järgmiselt:



$A = B$ korral asetsevad hulgad Q ja Q^{-1} skeemil sümmeetriliselt hulga A ruudu $A \times A$, nn. diagonaali E suhtes, mis koosneb kõikidest paaridest (a, a).

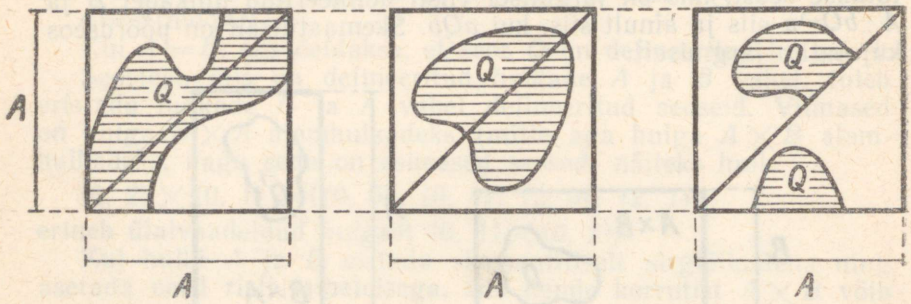
Seose mõiste on väga avar. Tema erijuhuks on nii kahe hulga korrutise ja üksühese vastavuse mõisted kui ka allpool defineeritav tänapäeva matemaatika üks tähtsamaid mõisteid — funktsiooni mõiste (lugeja kindlasti tunneb juba mõningaid konkreetseid funktsioone arvude hulkade jaoks).

Hulgal A defineeritud seoste uurimisel tuleb tihti kohtuda järgmiste omadustega. Seos Q on:

1) refleksiivne, kui iga $a \in A$ korral aQa;
2) transitiivne, kui sellest, et aQb ja bQc, järeldub, et ka aQc;
3) sümmeetriline, kui sellest, et aQb, järeldub, et ka bQa;
4) antisümmeetriline, kui sellest, et aQb ja bQa, järeldub, et $a = b$.

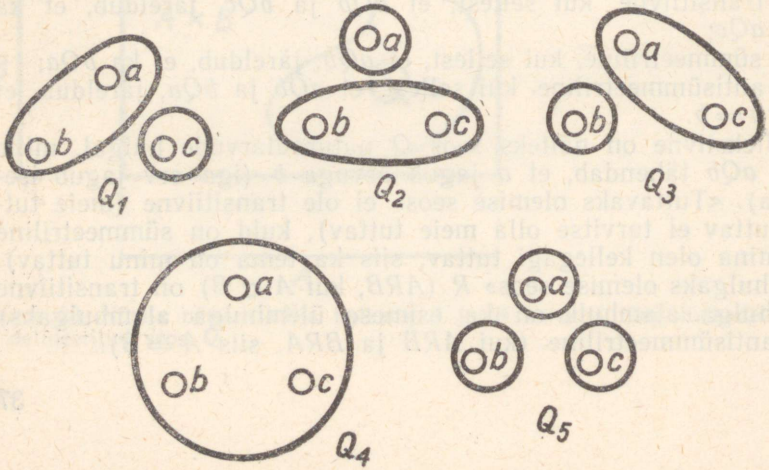
Refleksiivne on näiteks seos Q naturaalarvude hulgal, mille korral aQb tähendab, et a jagub arvuga b (iga arv jagub iseendaga). «Tuttavaks olemise seos» ei ole transitiivne (meie tuttava tuttav ei tarvitse olla meie tuttav), kuid on sümmeetriline (kui mina olen kellegagi tuttav, siis ka tema on minu tuttav). «Alamhulgaks olemise seos» R (ARB, kui $A \subset B$) on transitiivne (alamhulga alamhulk on ka esimese ülemhulga alamhulgaks) ning antisümmeetriline (kui ARB ja BRA, siis $A = B$).

Skeemil tähendaks seose Q refleksiivsus, et alamhulk Q sisaldab diagonaali E; seose Q sümmeetria, et Q on sümmeetriline E suhtes ja sellega $Q^{-1} = Q$, ning seose Q antisümmeetria tähendaks seda, et $Q \cap Q^{-1} \subset E$. Järgmisel skeemil ongi toodud näited refleksiivsest, sümmeetrilisest ja antisümmeetrilisest seostest.

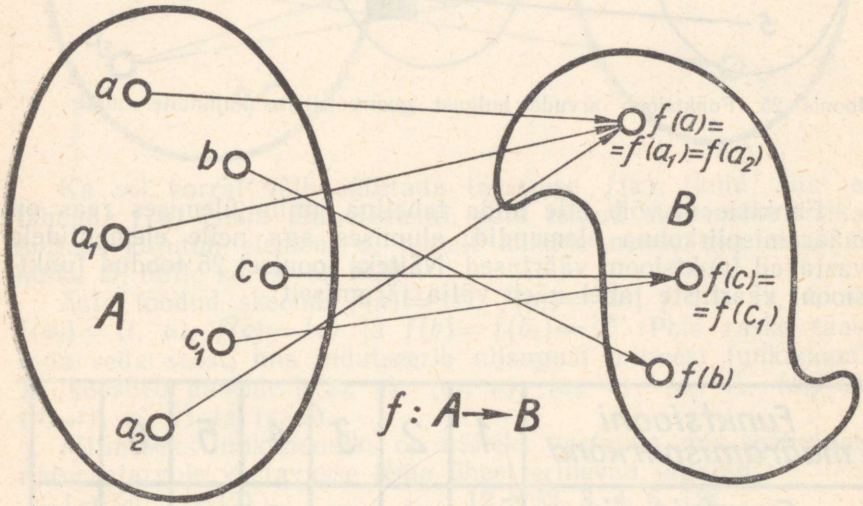


Refleksiivset, sümmeetrilist ja transitiivset seost nimetatakse ekvivalentsusseoseks. See esineb tihti paljudes matemaatilistes aruteludes. Ekvivalentsusseose näiteid saame, kui vaatleme kolmnurkade sarnasust või võrdsust, arvude võrdsust või geomeetriliste kujundite pindvõrdsust.

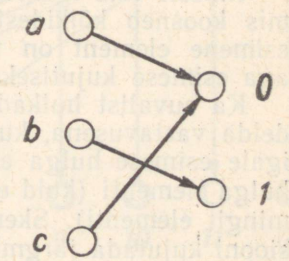
Ekvivalentsusseos Q tekib iga kord, kui kogu hulk on jaotatud mittelõikuvateks alamhulkadeks ja aQb on siis ja ainult siis, kui a ja b satuvad ühte alamhulka. (Proovige seda ise tõestada!) Sellist alamhulkadeks jaotamist tehakse tihti mingisuguste mittelõikuvate omaduste alusel (näiteks punane või mittepunane, paaris või paaritu, jagamisel 5-ga annab jäägi 0, 1, 2, 3 või 4 jne.). Huvitav on see, et iga ekvivalentsusseos määrab ära hulga jaotuse mittelõikuvateks alamhulkadeks. Seepärast on võimalik saada kõiki ekvivalentsusseoseid antud hulgal, kui vaadelda kõiki mittelõikuvateks alamhulkadeks jaotusi. Järgmisel skeemil ongi esitatud kolmeelemendilise hulga kõik ekvivalentsusseosed.



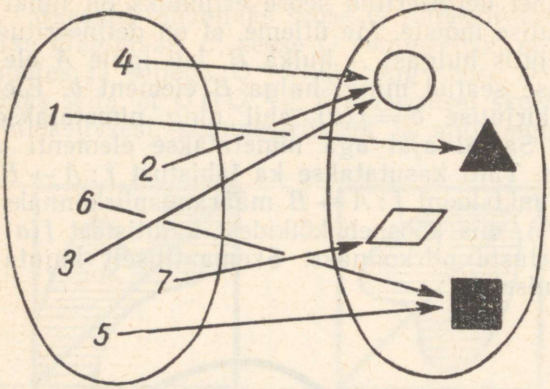
Hulkade A ja B vahel defineeritud seose erijuhuks on funktsiooni ehk (ühese) kujutise mõiste. Me ütleme, et on defineeritud funktsioon $f(x)$ ehk kujutis hulgast A hulka B, kui igale A elemendile a on vastavusse seatud mingi hulga B element b. Elementi b tähistatakse kirjutise $b = f(a)$ abil ning nimetatakse elemendi a kujutiseks. Samal ajal aga nimetatakse elementi a elemendi b originaaliks. Tihti kasutatakse ka tähistust $f : A \to B$. Hulka A nimetatakse funktsiooni $f : A \to B$ määramispiirkonnaks, hulga B alamhulka $f(A)$, mis koosneb kõikidest kujutistest $f(a)$, aga funktsiooni f väärtuste piirkonnaks. Skemaatiliselt kujutatakse funktsioone järgmiselt:



Funktsiooniks naturaalarvude hulgast ratsionaalarvude hulka on näiteks vastavus, mis seab igale naturaalarvule n vastavusse ratsionaalarvu $\frac{n}{2^n}$. Abielupaaride väljaeraldamisega kõikide paaride hulgast määrasime funktsiooni abielus olevate meeste hulgast kõikide naiste hulka, mis seab mehele vastavusse tema naise. Vastavus $a \to 0$, $b \to 1$, $c \to 0$ on funktsiooniks hulgast $\{a, b, c\}$ hulka $\{0, 1\}$ (vt. joonis 24).



Joonis 24. Funktsioon hulgast $\{a, b, c\}$ hulka $\{0, 1\}$.



Joonis 25. Funktsioon arvude hulgast geomeetriliste kujundite hulka

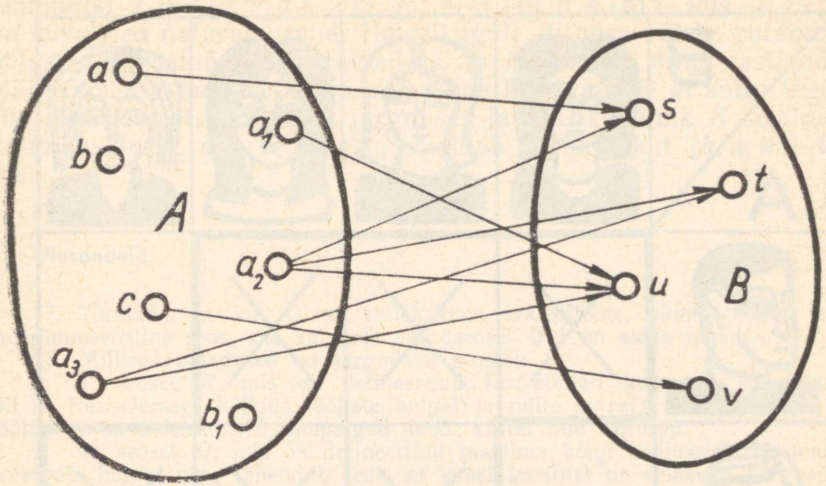
Funktsiooni võib ette anda tabelina, mille ülemises reas on määramispiirkonna elemendid, alumises aga neile elementidele vastavad funktsiooni väärtused. Näiteks joonisel 25 toodud funktsiooni väärtuste tabel näeb välja järgmiselt:

Funktsiooni määramispiirkond	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Funktsiooni väärtuste piirkond	△	○	○	○	□	□	▱

Juhul, kui $A = B$, nimetatakse funktsiooni veel hulga A teisenduseks.

Ilmselt võib iga funktsioon $f(x)$ olla interpreteeritud seosena, mis koosneb kõikidest paaridest $(a, f(a))$, s. o. paaridest, kus esimene element on teise elemendi originaaliks, teine element aga esimese kujutiseks.

Ka suvalist hulkadel A ja B defineeritud seost Q võib vaadelda vastavusena, kuid mitte ühesena, vaid sellisena, mis seab igale esimese hulga elemendile a vastavusse üldiselt mitu teise hulga elementi (kuid ei pruugi seada talle vastavusse üldse mitte mingit elementi). Skemaatiliselt võib sellist n.-ö. mitmest funktsiooni kujutada järgmiselt:



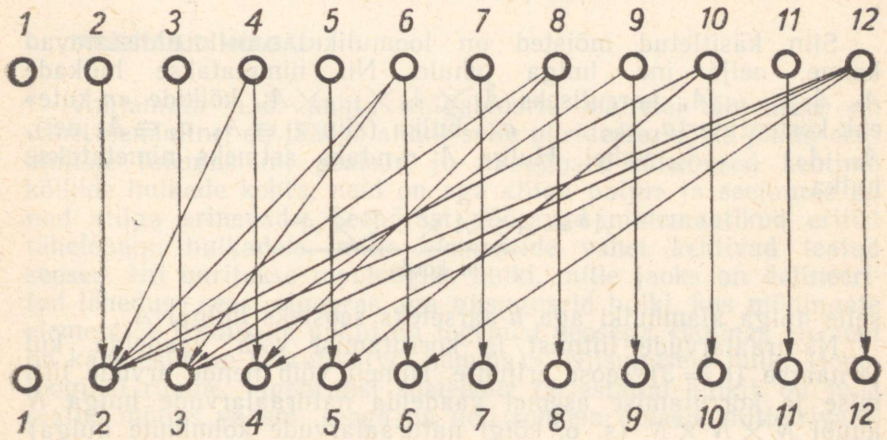
Ka sel korral võib säilitada tähistuse $f(x)$, kuid siin ei tähenda $f(a)$ enam üht elementi, vaid teatud elementide hulka, milleks kujutub element a, nimelt kõikide nende elementide b hulka B, mille korral on aQb.

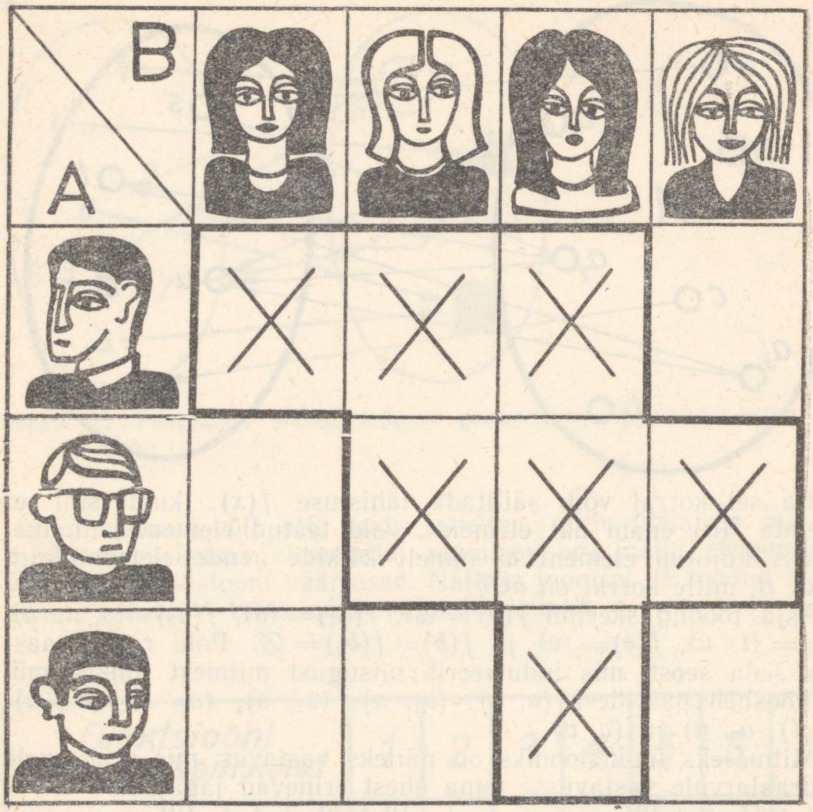
Äsja toodud skeemil $f(a) = \{s\}$, $f(a_1) = \{u\}$, $f(a_2) = \{s, t, u\}$, $f(a_3) = \{t, u\}$, $f(c) = \{v\}$ ja $f(b) = f(b_1) = \varnothing$. Pole raske taastada seda seost, mis indutseerib niisugust mitmest funktsiooni. Ta koosneb paaridest (a, s), (a_1, u), (a_2, s), (a_2, t), (a_2, u), (a_3, t), $a_3, u)$ ja (c, v).

Mitmeseks funktsiooniks on näiteks vastavus, mis seab igale naturaalarvule vastavusse tema ühest erinevad jagajad:

$1 \to \varnothing$, $2 \to \{2\}$, . . . , $12 \to \{2, 3, 4, 6, 12\}$, ...

Järgmisel skeemil on see funktsioon kujutatud lõplikul hulgal, mis koosneb 12 naturaalarvust:





Joonis 26. «Tuttavaks olemise» seos.

Siin käsitletud mõisted on loomulikul viisil üldistatavad kolme, nelja jne. hulga juhule. Nii nimetatakse hulkade $A_1, A_2, \ldots, A_n$ korrutiseks $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ kõikide «n-kute» ehk korteežide $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ hulka (siin $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ jne.). $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vahel. Hulga A n-ndaks astmeks nimetatakse hulka

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ korda}}$$

selle hulga alamhulki aga n-aarseteks seosteks hulgal A.

Naturaalarvude liitmist ja korrutamist võib vaadelda kui ternaarse ($n = 3$) seose erijuhte. Nimelt võib nende arvude liitmise ja korrutamise asemel vaadelda naturaalarvude hulga N kuubi $N \times N \times N$ (s. o. kõigi naturaalarvude kolmikute hulga)

alamhulki $L = \{(a, b, a+b)\}$ ja $K = \{(a, b, a \cdot b)\}$, kus a ja b on suvalised naturaalarvud. Ilmselt igale liitmise või korrutamise omadusele vastab mingi hulkade L ja K omadus ning vastupidi. Näiteks see asjaolu, et naturaalarvude korrutamine ei sõltu tegurite järjekorrast, väljendub järgmises lauses: kui hulk K sisaldab kolmikut $(a, b, a+b)$, siis ta sisaldab ka kolmikut $(b, a, a+b)$ jne.

Ülesandeid.

17. Tõestada, et kui Q on refleksiivne, transitiivne, sümmeetriline või antisümmeetriline seos, siis ka tema pöördseosel Q^{-1} on sama omadus.

18. Millised omadused on järgmistel seostel:

1° seosel R, mis on defineeritud Rockefelleri kompanii «Standard Oil of New Jersey» kõikide tööliste hulgal ja mille korral aRb tähendab, et tööliste a ja b keskmised kuupalgad 1965. aastal olid võrdsed.

2° seosel Q, mis on defineeritud maailma kõigi soojuselektrijaamade korstnate hulgal ning tähendab seda, et kahel korstnal on erinevad kõrgused, kuid võrdsed maksimaalsed ümbermõõdud.

Kumb neist on ekvivalentsusseos?

19. Konstrueerida seosed, millel oleksid järgmised omadused (kuid ei oleks ülejäänud omadusi omaduste rühmast lk. 37):

a) 1 ja 2; b) 1 ja 3; c) 1 ja 4; d) 2 ja 3; e) 3 ja 4; f) 1, 2, 3 ja 4.

20. Naturaalarvude hulgal N on defineeritud ternaarne seos T: $(a, b, c) \in T$, kui $a \leqslant b \leqslant c$ või $a \geqslant b \geqslant c$, s. o. kui b on suuruse poolest a ja c vahel. Näiteks $(1, 7, 7) \in T$, aga $(2, 4, 3) \in T$. Tõestada, et

1° kui $(a, b, c) \in T$, siis ka $(c, b, a) \in T$;

2° kui $(a, b, c) \in T$ ja $(a, c, b) \in T$, siis $b = c$;

3° kui $(a, b, c) \in T$ ja $(a, d, b) \in T$, siis $(a, d, c) \in T$;

4° kui $(a, b, c) \in T$, $(b, c, d) \in T$ ja $b \neq c$, siis $(a, c, d) \in T$;

5° kui $(a, b, c) \in T$ ja $(a, c, d) \in T$, siis $(b, c, d) \in T$.

JÄRJESTATUD HULGAD

Vaatamata n.-ö. puhta hulgateooria suurele tähtsusele on vähe tõenäoline, et, jäädes ainult selle piiridesse, võiks jõuda eriti oluliste tulemusteni: peaksid ju niisugused tulemused kehtima kõikide hulkade kohta, neid on aga «liiga palju» ja seejuures on nad «liiga erinevad». Seepärast pööravad matemaatikud erilist tähelepanu hulkadele, mille elementide vahel kehtivad teatud seosed. Nii uuritakse topoloogias hulki, mille jaoks on defineeritud läheduse seos, algebras aga niisuguseid hulki, kus mõningate elementide kolmikute puhul on tegemist seosega «kolmas element on kahe esimese korrutis (või summa)». Niisuguseid hulki (topoloogilisi ruume, algebralisi süsteeme, järjestatud hulki) on juba teatud mõttes vähem; seega on neil rohkem ühiseid mittetrivaal-

seid omadusi. Seepärast ongi niisugused teooriad tulemuste poolest rikkamad kui «puhas» hulgateooria.

Käesolevas punktis alustame tutvumist hulkadega, milles on määratud järjestuse seos. Hiljem aga vaatleme ka mõningaid topoloogiaga seotud küsimusi.

Nii matemaatikas endas kui ka tema rakendustes tuleb tihti tegelda hulkadega, mille elemendid on mingisugusel viisil järjestatud. Lihtsamaid näiteid selle kohta annavad naturaalarvude hulk N ning reaalarvude hulk D. Nende hulkade iga kahe erineva elemendi korral saab kindlaks teha, kumb nendest elementidest on suurem ja kumb väiksem. Näiteks: $-12 < -5$, $-3 < 0$, $0 < 2$, $7 < 15$, $3{,}14 < \pi$, $\frac{27}{85} < \frac{14}{43}$ jne Inimesi võib järjestada kaalu, haridustaseme, jõu, tarkuse või kasvu järgi (vt. joonis 28).

Siinjuures märgil $<$ ehk seosel «suurem kui» on ilmselt järgmised omadused:

*P*1. ühegi elemendi x jaoks ei kehti $x < x$ (seose «$<$» antirefleksiivsus);

*P*2. kui $x < y$ ja $y < z$, siis $x < z$ (seose «$>$» transitiivsus).

Kui hulga M iga kahe elemendi a ja b jaoks on mingil viisil defineeritud seos «suurem kui» (mille ülesmärkimiseks kasutame sümbolit «$<$»), s. t. kui alati kas $a < b$ või $b < a$, ning suvaliste selle hulga M elementide x, y ja z jaoks on täidetud tingimused *P*1 ja *P*2, siis nimetatakse hulka M järjestatud hulgaks.

Kui $a < b$, siis kirjutame ka $b > a$ ning mõlemal korral ütleme, et «b on suurem kui a» ehk «a on väiksem kui b».

Niisiis on N ja D järjestatud hulgad. Kui mingis inimeste rühmas kõik selle rühma liikmed erinevad üksteisest kasvu poolest, siis, defineerides seose «$>$» selliselt, et üks inimene on teisest suurem, kui ta on pikemat kasvu, muudame selle hulga järjestatud hulgaks.

Üldiselt ei ole sugugi alati võimalik loomulikul viisil defineerida järjestuse seost, mis annab võimaluse võrrelda omavahel iga kaht suvalist elementi. Näiteks kui sõjaväelaste hulgas defineerida seos «suurem» selliselt, et sõjaväelane a on suurem sõjaväelasest b, kui ta on tema ülemuseks, siis kaks reasõdurit või kaks diviisiülemat pole kumbki teineteisest suuremad; sel korral öeldakse, et nad on defineeritud seose suhtes võrreldamatud.

Kuid vaatamata selliste elemendipaaride olemasolule, mille jaoks seos «suurem» pole defineeritud, on käesoleval juhul tingimused *P*1 ja *P*2 alati täidetud. Huvitav on see, et sõjaväelaste hulgas oleksid need tingimused täidetud ka kokkuleppe korral, mille kohaselt me loeksime a suuremaks b-st, juhul kui b on a ülemus.

Selliseid hulki, milles kas või mõningate elemendipaaride jaoks on defineeritud ülalmainitud tingimusi rahuldav seos «suu-



Joonis 27. Sõjavägi on vaadeldav osaliselt järjestatud hulgana.

rem», nimetatakse osaliselt järjestatud hulkadeks. Et järjestatud hulgas on seos «suurem» defineeritud iga kahe elemendi jaoks, siis nimetatakse seda tihti ka lineaarselt järjestatud hulgaks.

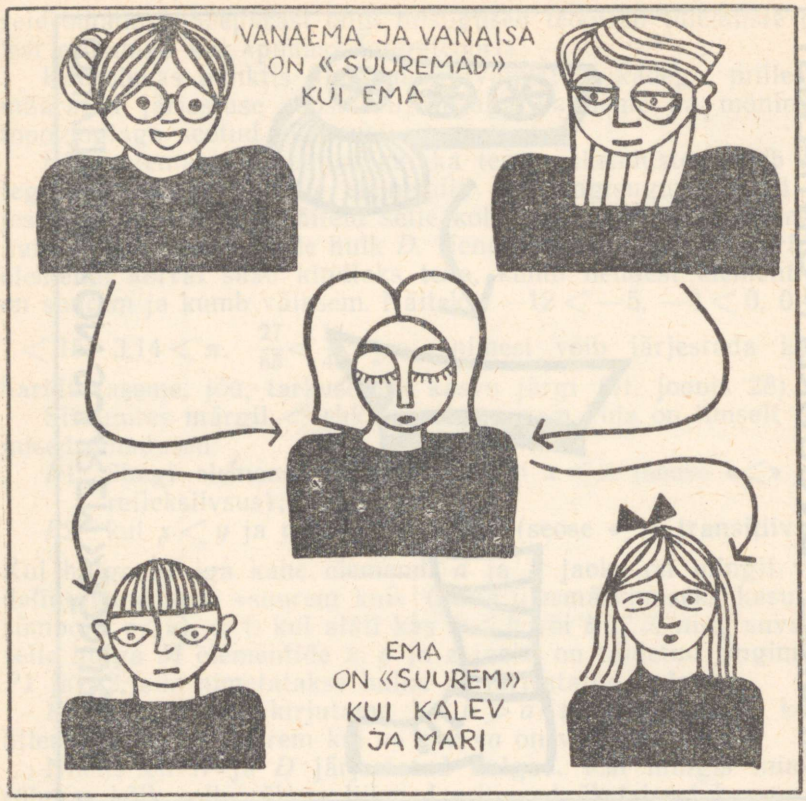
Muidugi on iga järjestatud hulk vaadeldav ka osaliselt järjestatud hulgana.

Niisiis, sõjaväelaste hulk on osaliselt järjestatud hulk. Toome veel mõningaid näiteid osaliselt järjestatud hulkade kohta.

Mingi hulga A kõikide alamhulkade hulk muutub osaliselt järjestatud hulgaks, kui temas defineerida seos «$<$» kahe hulga A alamhulga B ja C jaoks järgmiselt:

$B < C$ siis, kui $B \subset C$ ja $B \neq C$.

Kõikide täisarvude hulgas võib defineerida osalist järjestust tingimusega: $a < b$, kui a^2 on väiksem b^2-st naturaalarvude jär-



Joonis 28. Ka perekond on osaliselt järjestatud hulk.

jestuse mõttes. Selle järjestuse puhul on $-4 > 2$ (sest $16 > 4$), aga 3 ja -3 on võrreldamatud (kuna $3^2 = (-3)^2$).

Kõigi Euroopa elanike hulga muutmiseks osaliselt järjestatud hulgaks võib lugeda inimese a väiksemaks inimesest b, siis kui a põlvneb b-st. Sel korral on pojapoeg väiksem oma vanaemast, kuid tema vanaema ja vanaisa on üldiselt teineteisega võrreldamatud.

Antud lõigul $[a, b]$ defineeritud funktsioonide hulk muutub osaliselt järjestatud hulgaks, kui defineerida kahe funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ jaoks seos «$<$» järgmiselt: funktsioon f on väiksem funktsioonist g ($f < g$) siis ja ainult siis, kui iga $x \in [a, b]$ korral vastavate funktsioonide väärtuste jaoks on $f(x) < g(x)$ reaalarvude järjestuse mõttes. Joonisel 29 on esitatud selle järjestuse mõttes kahe võrreldamatu elemendi $f(x)$ ja $g(x)$ graa-

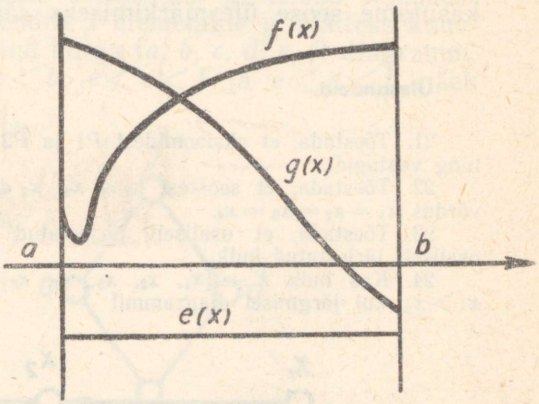
fikud. Samal joonisel kujutatud konstantne funktsioon $e(x)$ on väiksem mõlemast funktsioonist $f(x)$ ja $g(x)$.

Igas osaliselt järjestatud hulgas võib defineerida seose «$\leqslant$»: $a \leqslant b$ siis, kui kas $a < b$ või $a = b$. See seos rahuldab järgmisi tingimusi:

$Q1$. iga x korral $x \leqslant x$ (seos «$\leqslant$» refleksiivsus);

$Q2$. kui $x \leqslant y$ ja $y \leqslant x$, siis $x = y$ (seose «$\leqslant$» antisümmeetria);

$Q3$. kui $x \leqslant y$ ja $y \leqslant z$, siis $x \leqslant z$ (seose «$\leqslant$» transitiivsus).



Joonis 29. Funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on võrreldamatud; $f(x) > e(x)$ ja $g(x) > e(x)$.

(Viimast seost kontrollige ise!) Vastupidi, kui hulgas on mõningate elementide paaride jaoks defineeritud seos «$\leqslant$», mis rahuldab tingimusi $Q1$, $Q2$ ja $Q3$, siis võib selles hulgas defineerida ka seose «$<$» (lugedes, et $a < b$, kui $a \leqslant b$ ja $a \neq b$), mis rahuldab tingimusi $P1$ ja $P2$ (kontrollida!). Seega muutub hulk osaliselt järjestatud hulgaks ja me oleme saanud veel ühe osaliselt järjestatud hulga definitsiooni, nüüd juba seose «$\leqslant$» abil: hulka nimetatakse osaliselt järjestatuks, kui tema mõningate elementide paaride jaoks on defineeritud seos «suurem või võrdne» ning suvaliste selle hulga elementide x, y ja z korral on täidetud tingimused $Q1$, $Q2$, $Q3$.

Kasutades seost «$\leqslant$» võib näidata, et iga hulka saab vaadelda osaliselt järjestatud hulgana (ja seega võib hulgateooriat käsitleda osaliselt järjestatud hulkade teooria osana). Nimelt võime lugeda, et $a \leqslant b$ vaid siis, kui $a = b$ (sellist hulga järjestust nim. triviaalseks). Ilmselt on sel korral tingimused $Q1$, $Q2$ ja $Q3$ täidetud.

Muidugi võib suvalises hulgas tuua sisse ka palju tugevama järjestuse, kui seda on triviaalne järjestus. Näiteks võib valida hulgast mingi suvalise elemendi ning postuleerida, et ta on kõige väiksem selles hulgas, seejärel valida mingi teine hulga

element ning kuulutada see suuruse poolest järgmiseks jne. Jätkates protsessi (vajaduse korral lõpmatuseni), võime hulga elemendid isegi lineaarselt järjestada.

Nii osaline kui ka lineaarne järjestus on hulgal defineeritud seosteks eelmises punktis antud definitsiooni mõttes; nimelt kuuluvad seosesse «$<$» (või «$\leqslant$») kõik paarid (a, b), mille korral $a < b$ (või $a \leqslant b$). Seepärast oleksime võinud algusest peale defineerida osalise järjestuse kui refleksiivse, antisümmeetrilise ja transitiivse seose ning nimetada seda lineaarseks, kui hulga ruudu alamhulk «$\leqslant$» ühtib n.-ö. poolega sellest ruudust. Puhtformaalne vahe on vaid tähistusviisis: tähtede Q, P jne. asemel kasutame seose ülesmärkimiseks sümbolit «$\leqslant$».

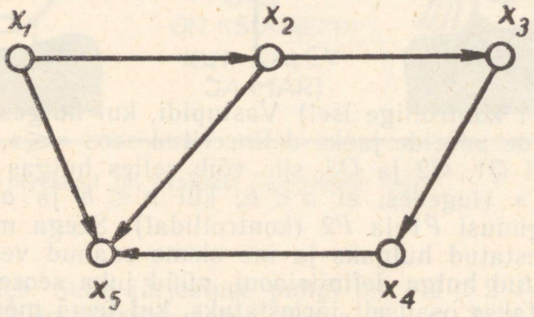
Ülesandeid.

21. Tõestada, et aksioomidest $P1$ ja $P2$ järelduvad aksioomid $Q1$, $Q2$, $Q3$ ning vastupidi.

22. Tõestada, et seostest $x_1 \leqslant x_2$, $x_2 \leqslant x_3$, $x_3 \leqslant x_4$ ja $x_4 \leqslant x_1$ järeldub võrdus $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$.

23. Tõestada, et osaliselt järjestatud hulga iga alamhulk on samuti osaliselt järjestatud hulk.

24. Kas hulk $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ on osaliselt järjestatud seosega $x_i > x_j$, kui järgmisel diagrammil



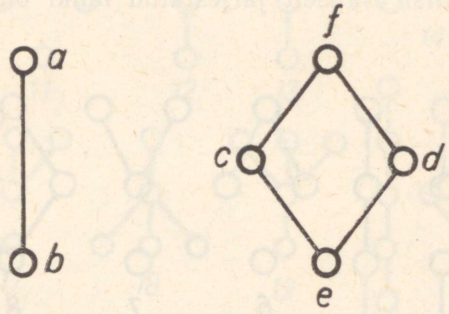
leidub nooltest koosnev «tee», mis viib punktist x_i punkti x_j $(i, j = 1, 2, 3, 4, 5)$?

DIAGRAMMID JA GRAAFID

Me ütleme, et osaliselt järjestatud hulga element b katab elementi a, kui $b > a$ ja ei leidu elementi c, mille korral oleks $b > c > a$. Näiteks naturaalarvude hulgas, mis on tavalisel viisil järjestatud, 5 katab 4 ja 72 katab 71. Kui naturaalarvud järjestada ruutude võrdlemise abil, siis osutub, et —4 katab 3 ja —3

Euroopa elanike osaliselt järjestatud hulgas, mille tõime näitena eelmises punktis, katavad iga inimest tema vanemad ning iga inimene katab kõiki enda lapsi. Seda, et b katab elementi a, väljendatakse veel sõnadega: a eelneb otseselt b-le ehk b järgneb otseselt a-le.

Osaliselt järjestatud hulkade skemaatiliseks kujutamiseks võib kasutada nn. diagramme, millel iga osaliselt järjestatud hulga elementi kujutatakse punktina, kusjuures suurematele elementidele vastavad punktid paigutatakse kõrgemale. Kui element b katab elementi a, siis ühendatakse nad sirglõiguga. Seega iga kord, kui element x on suurem elemendist y, leidub lõikudest koosnev «tee», mis viib elemendilt x elemendile y. Näiteks kuue-elemendilise osaliselt järjestatud hulga $\{a, b, c, d, e, f\}$ diagramm, milles on täidetud seosed $a < b$, $e < c < f$ ja $e < d < f$, näeb välja järgmiselt:

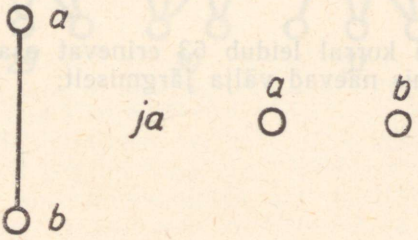


Sellest diagrammist on kohe näha, et a ja b on võrreldamatud elementidega c, d, e ja f ning et $e < f$.

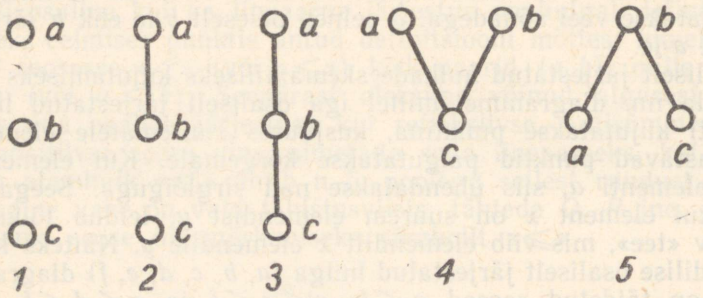
Üldse, kui diagrammil leidub sirglõikudest koosnev ülevalt punktist x alla punktini y viiv tee, siis $y < x$. Vastupidi, iga diagramm, milles pole horisontaalseid lõike, määrab osalise järjestuse diagrammi tippude hulgas.

Diagrammide abil võib üles märkida kõikide küllalt väikese elementide arvuga osaliselt järjestatud hulkade tüübid.

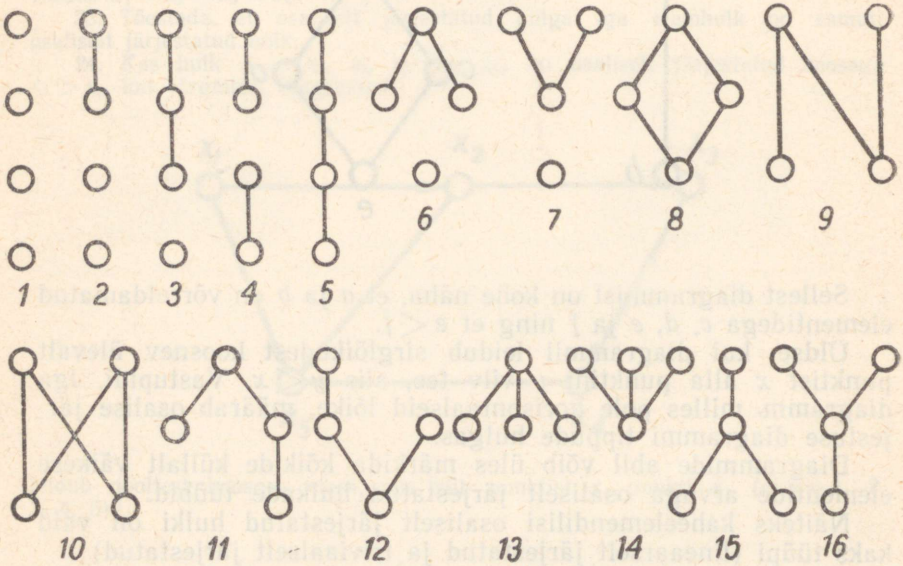
Näiteks kaheelemendilisi osaliselt järjestatud hulki on vaid kaks tüüpi (lineaarselt järjestatud ja triviaalselt järjestatud):



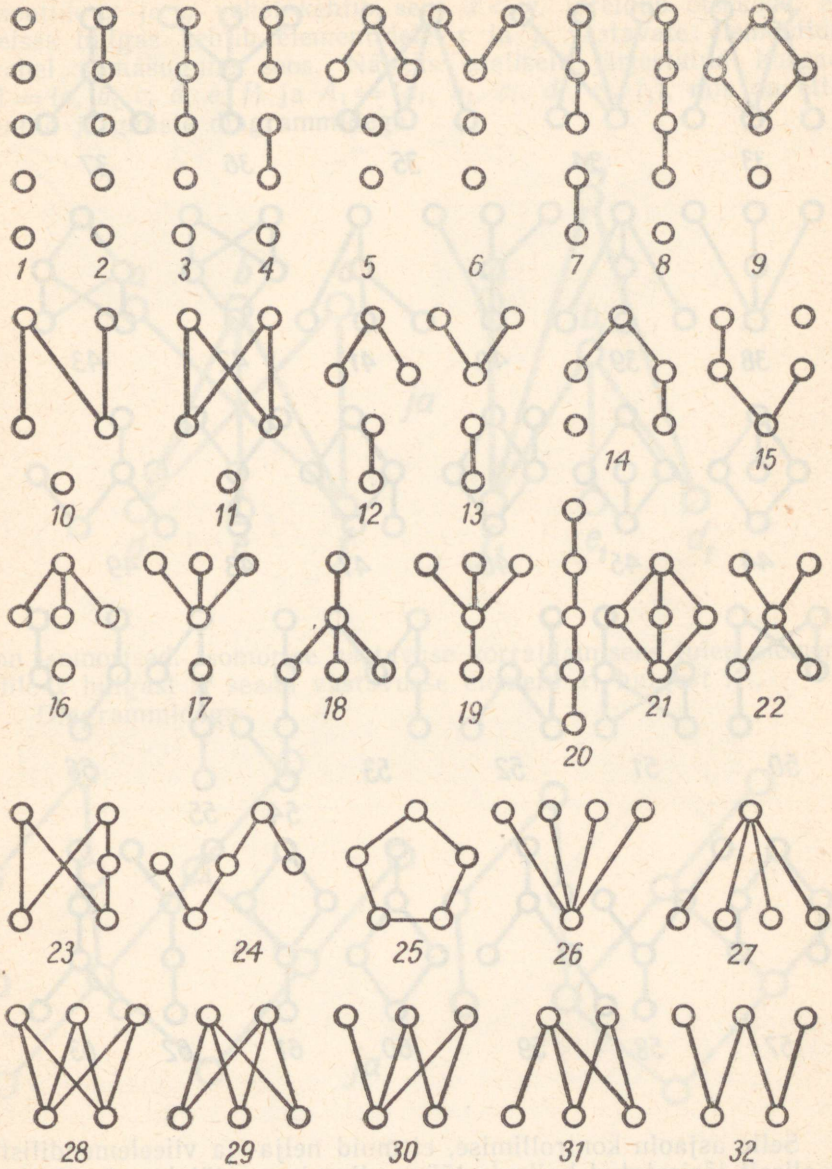
Kolmeelemendiliste osaliselt järjestatud hulkade tüüpide arv on võrdne juba viiega. Nendeks on:



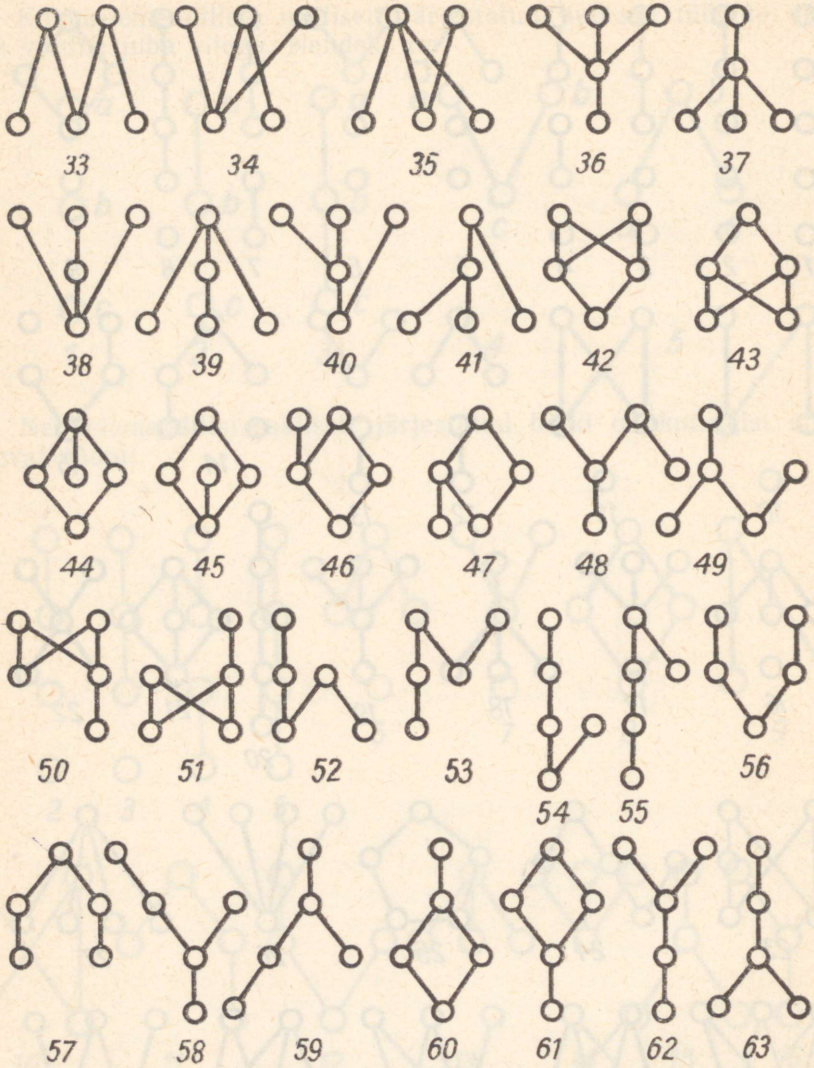
Neljaelemendilisi osaliselt järjestatud hulki on kuusteist erinevat tüüpi:



Viie elemendi korral leidub 63 erinevat osaliselt järjestatud hulkade tüüpi, mis näevad välja järgmiselt:



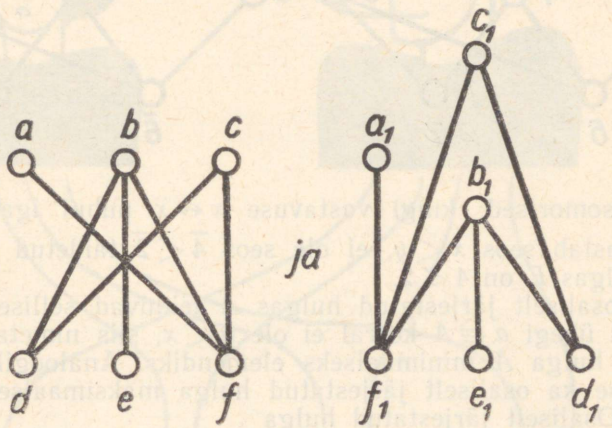
TRÜ Raamatukogu



Selle asjaolu kontrollimise, et muid nelja- ja viieelemendiliste osaliselt järjestatud hulkade tüüpe olla ei saa, jätab autor lugeja hooleks. Asjatute arusaamatuste vältimiseks aga täpsustame, mida tähendab väljendus «ühetüübilised osaliselt järjestatud hulgad».

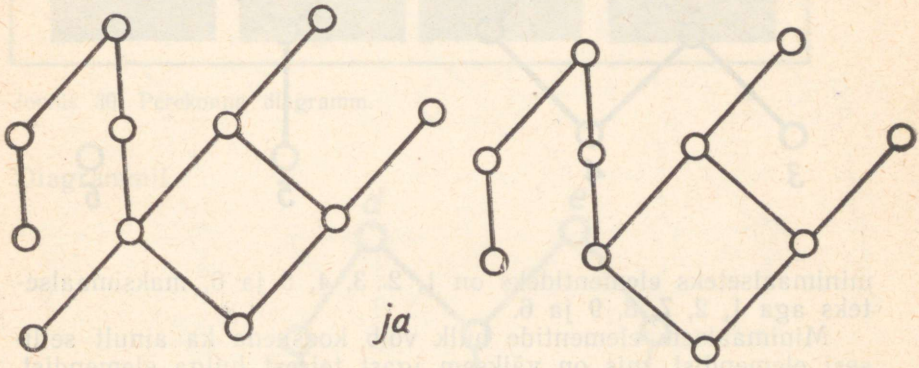
Me loeme, et osaliselt järjestatud hulgad A ja B on isomorfsed ehk ühetüübilised, kui nende elementide vahel on korraldatav üksühene vastavus, kusjuures sellest, et ühes hulgas ele-

mentide x ja y vahel kehtib seos $x < y$, järeldub otsekohe, et teises hulgas kehtib elementidele x ja y vastavate elementide vahel samasugune seos. Näiteks osaliselt järjestatud hulgad $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ja $A_1 = \{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\}$, mis on ette antud järgmiste diagrammidega:

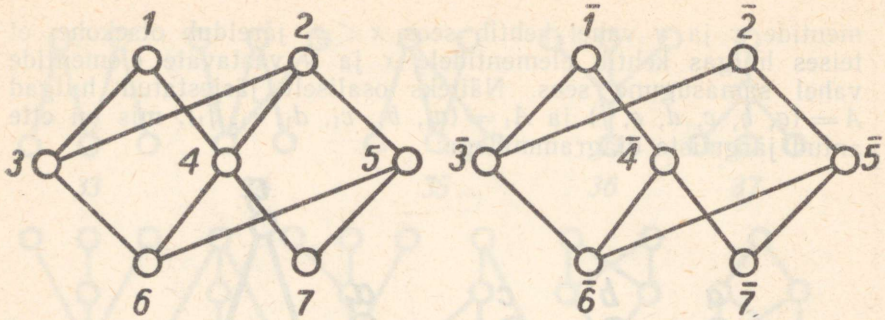


on isomorfsed. Isomorfse vastavuse korraldamiseks tuleb elemendile x hulgast A seada vastavusse element x_1 hulgast A_1.

Diagrammidega

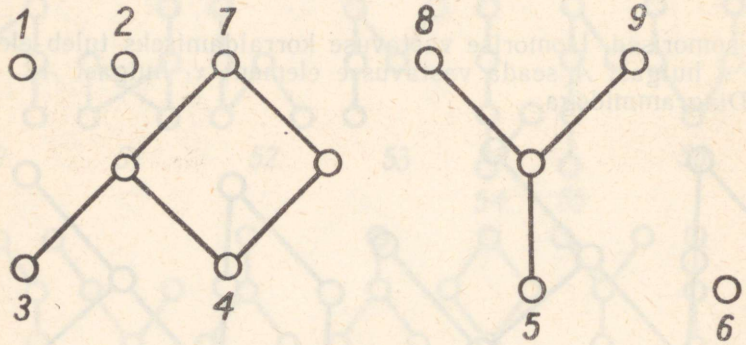


kujutatud osaliselt järjestatud hulgad ei ole isomorfsed, sest nende vahel ei saa korraldada üksühest vastavust (esimeses on 11, teises aga 10 elementi). Ka osaliselt järjestatud hulgad $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ja $\bar{E} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}\}$, mille diagrammid näevad välja järgmiselt:



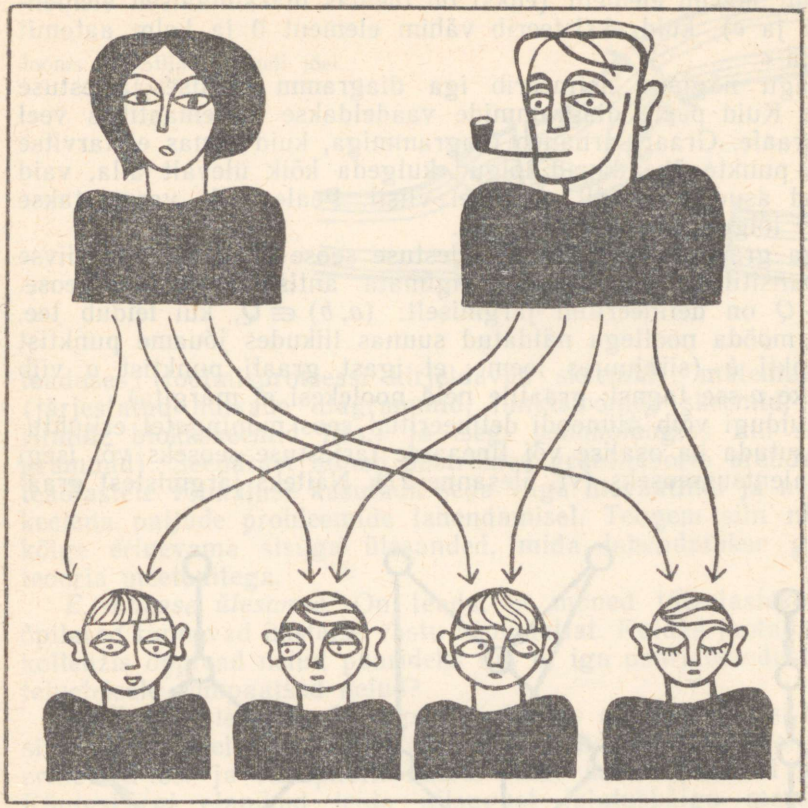
ei ole isomorfsed: kuigi vastavuse $x \leftrightarrow \bar{x}$ puhul igale seosele $\bar{x} < \bar{y}$ vastab seos $x < y$, ei ole seos $\bar{4} < \bar{2}$ täidetud hulgas $\bar{E}$, kuigi hulgas E on $4 < 2$.

Kui osaliselt järjestatud hulgas A leiduvad sellised elemendid x, et ühegi $a \in A$ korral ei ole $a < x$, siis nimetatakse elementi x hulga A minimaalseks elemendiks. Analoogiliselt defineeritakse ka osaliselt järjestatud hulga maksimaalse elemendi mõiste. Osaliselt järjestatud hulga



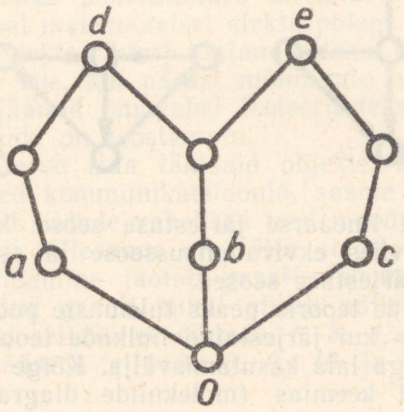
minimaalseteks elementideks on 1, 2, 3, 4, 5 ja 6, maksimaalseteks aga 1, 2, 7, 8, 9 ja 6.

Minimaalsete elementide hulk võib koosneda ka ainult sellisest elemendist, mis on väiksem igast teisest hulga elemendist. Sellist elementi nimetatakse osaliselt järjestatud hulga vähimaks elemendiks. Analoogiliselt defineeritakse ka osaliselt järjestatud hulga suurima elemendi mõiste. Vähima ja suurima elemendi tähistamiseks kasutatakse tavaliselt numbrite 0 ja 1 sümboleid. Osaliselt järjestatud hulga elemente, mis otseselt järgnevad vähimale elemendile (kui see eksisteerib), nimetatakse selle hulga aatomiteks.



Joonis 30. Perekonna diagramm.

Diagrammil

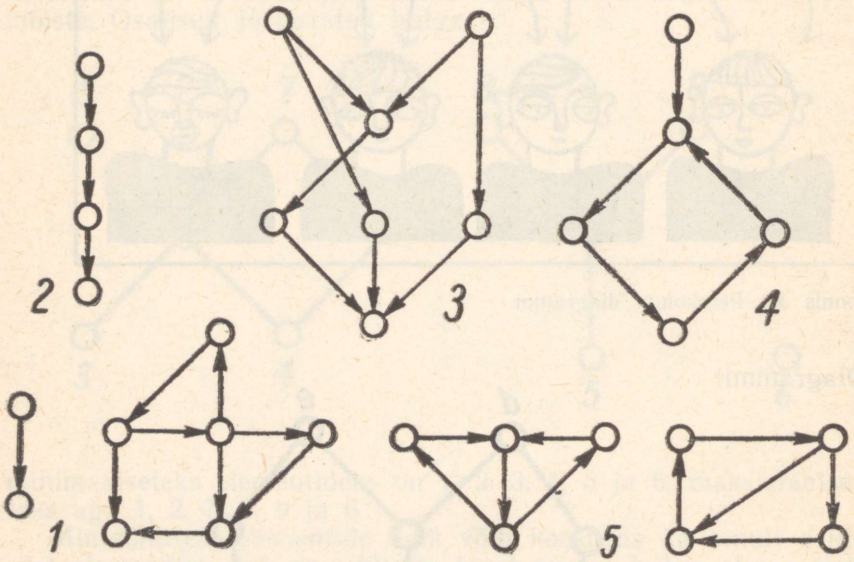


puudub suurim element (ehkki on olemas maksimaalsed elemendid d ja e), kuid eksisteerib vähim element 0 ja kolm aatomit a, b ja c.

Nagu nägime, defineerib iga diagramm osalise järjestuse seose. Kuid peale diagrammide vaadeldakse matemaatikas veel nn. graafe. Graaf sarnaneb diagrammiga, kuid temas ei tarvitse enam punkte ühendavad lõigud kulgeda kõik ülevalt alla, vaid võivad asuda tasandil suvalisel viisil. Peale selle varustatakse graafi lõigud veel noolekestega.

Iga graaf määrab kvaasijärjestuse seose Q, s. o. refleksiivse ja transitiivse, kuid mitte tingimata antisümmeetrilise seose. Seos Q on defineeritud järgmiselt: $(a, b) \in Q$, kui leidub tee, mida mööda nooltega näidatud suunas liikudes jõuame punktist a punkti b (siinjuures loeme, et igast graafi punktist a viib nooleke a-sse tagasi; graafile neid noolekesi ei märgita).

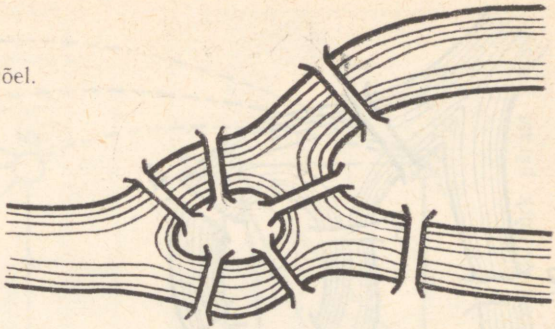
Muidugi võib niimoodi defineeritud seos mõningatel erijuhtudel osutuda ka osalise või lineaarse järjestuse seoseks või isegi ekvivalentsusseoseks (vt. ülesanne 27). Näiteks järgmistest graafidest



defineerib teine lineaarse järjestuse seose, kolmas osalise järjestuse seose, viies ekvivalentsusseose ja esimene ning neljas lihtsalt kvaasijärjestuse seosed.

Kuigi graafide teooria peaks tulemuste poolest põhimõtteliselt olema «vaesem» kui järjestatud hulkade teooria, on ta viimasel ajal leidnud väga laia kasutamisvälja. Kõige loomulikumal viisil tekivad graafid keemias (molekulide diagrammid), majandus-

Joonis 31. Sillad Pregeli jõel.



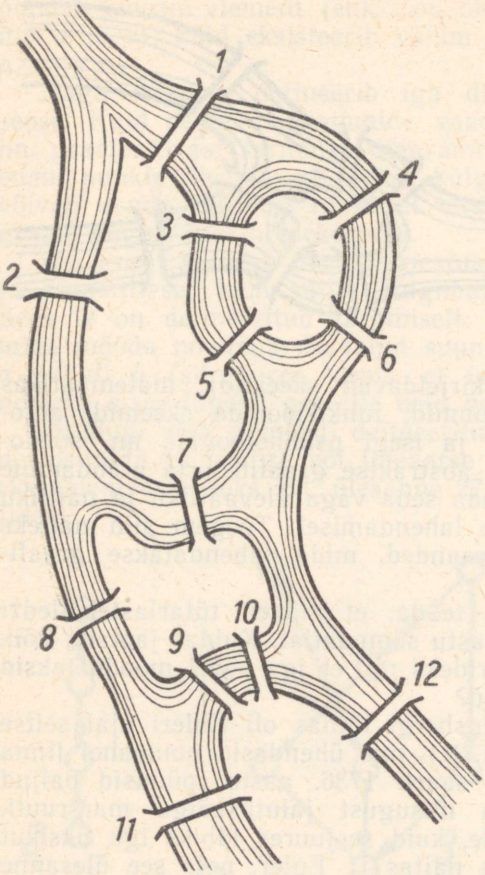
teaduses (tootmisprotsessi kirjeldavad skeemid), matemaatikas (järjestatud hulkade diagrammid, funktsioonide skeemid, algoritmide blokkskeemid jms.) ja isegi psühholoogias nn. sotsiogrammid). Seepärast annab abstraktse graafiteooria arendamine teadlastele võimaluse kasutada seda väga ülevaatliku ja näitliku keelena paljude probleemide lahendamisel. Toogem siin näiteks kõige erinevama sisuga ülesanded, mida lahendatakse graafiteooria meetoditega.

E. Lucase ülesanne. On teada, et mõned tütarlastekolledži õpilased tunnevad üksteise vastu sümpaatiat. Kuidas jaotada kõik kolledžis õppivad neiud paarideks nii, et iga paari moodustaksid teineteisele sümpaatsed neiud?

L. Euleri ülesanne. Königsbergi linnas oli Euleri ajal seitse silda üle Pregeli (vt. joonis 31), mis ühendasid omavahel linna erinevaid osi ja Kneiphoffi saart. 1736. aastal püüdsid paljud Königsbergi elanikud leida niisugust jalutuskäigu marsruuti, mis viiks üle kõikide sildade, kuid seejuures läbiks iga üksikut silda ainult üks kord. Nagu näitas L. Euler, pole see ülesanne lahenduv.

Kommunikatsioonide pommitamise ülesanne. Selleks et saavutada pommitamisel maksimaalset efekti, polegi alati vaja hävitada väga palju objekte. Suurt majanduslikku kahju võib tekitada vaenlasele ka siis, kui pärast mõningate objektide hävitamist osutuvad ülejäänud omavahel isoleerituteks, nii et nendevaheline transportside on teostamatu.

Kui on antud terve rida tähtsaid objekte, siis, joonistades välja nendevahelised kommunikatsioonid, saame graafi. Näiteks joonisel 32 näidatud sildade vahelised teed moodustavad joonisel 33 kujutatud graafi. Ülesanne on välja selgitada need graafi tipud, mille kõrvaldamine jaotab graafi vähemalt kaheks isoleeritud osaks. Antud graafi puhul piisab näiteks sildade *2*, *7* ja *12* hävitamisest, selleks et sildade *1*, *3*, *4*, *5* ja *6* juurest poleks võimalik pääseda sildade *8*, *9*, *10* ja *11* juurde (vt. joonis 34).

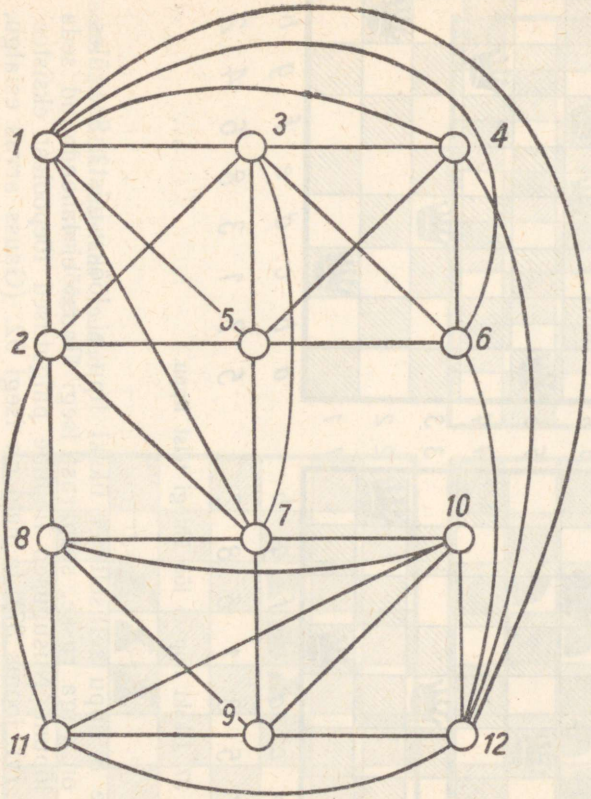


Joonis 32. Missugused sillad tuleb hävitada selleks, et transportside mõningate ülejäänud sildade vahel oleks katkestatud?

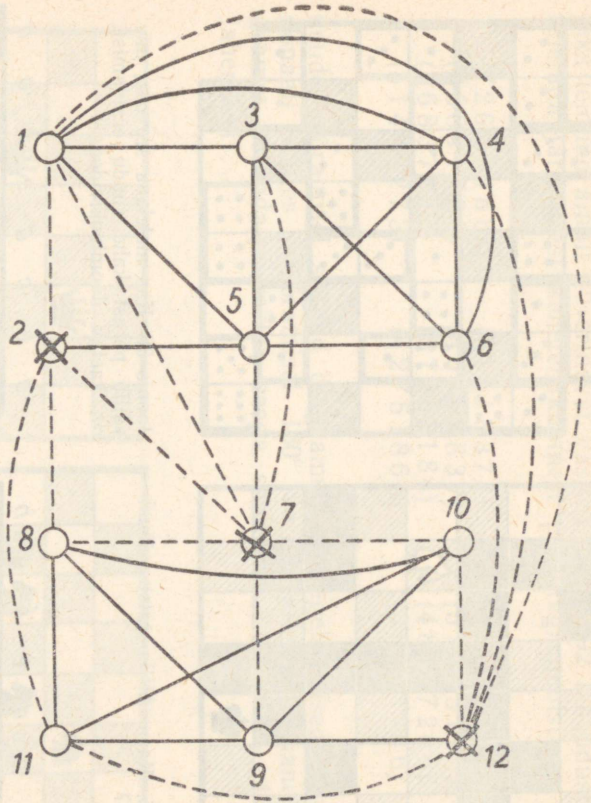
Rida graafiteooria ülesandeid tekib malelaual. Näiteks «*Attila ratsu*» ülesandena on tuntud järgmine küsimus: selgitada, kas valge ratsu suudab jõuda musta kuningani, kui viirutatud ruutudele (need on tules) ta käia ei tohi (vt. joonis 35) ja kui mingilt ruudult ära minnes paneb ratsu ka selle põlema?

Teises malelauaga seotud ülesandes küsitakse, kas on võimalik katta doominokividega niisugust malelauda, millel on ära lõigatud kaks peadiagonaalil asuvat ruutu (vt. joonis 36), kui iga doominokivi katab parajasti kaks laua ruutu ja kive on küllaldasel arvul?

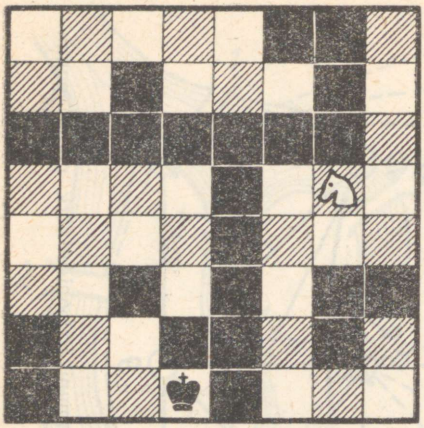
Gaussi ülesandes küsitakse, kas on võimalik asetada male-



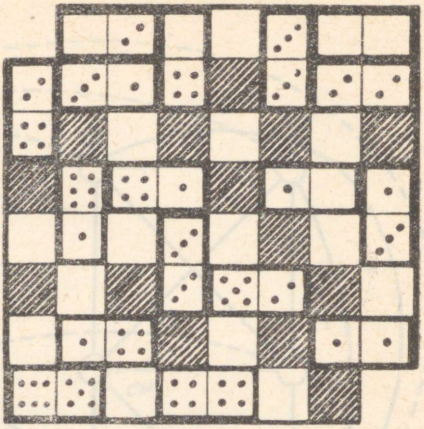
Joonis 33. Kommunikatsioonide võrk enne pommitamist.



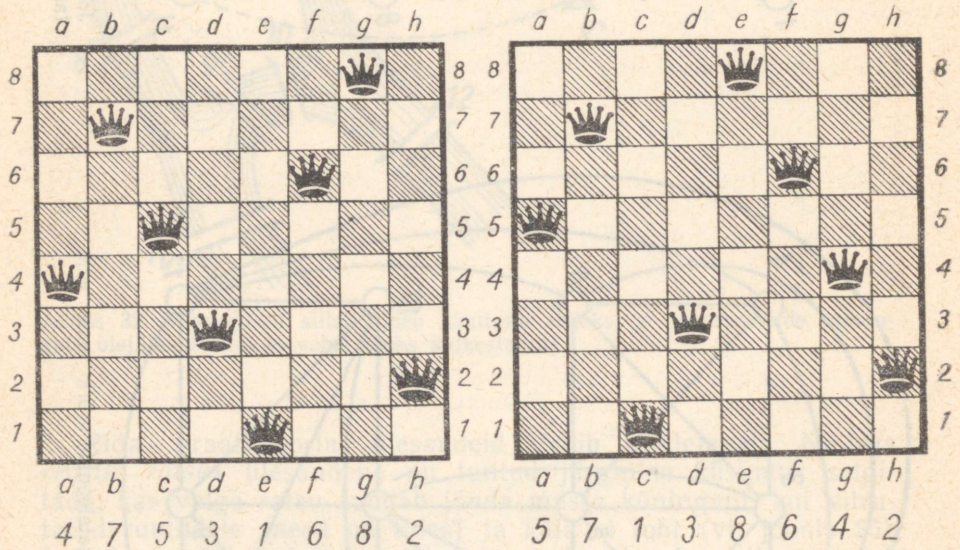
Joonis 34. Kommunikatsioonide võrk pärast pommitamist.



Joonis 35. Kas «Attila ratsu» jõuab kuningani?



Joonis 36. Kas malelaua see osa, mis säilib pärast kahe ruudu eraldamist, on kaetav doominokividega?



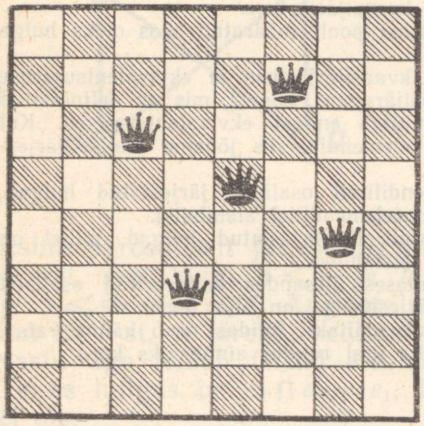
Joonis 37. Ükski lipp ei löö ühtegi teist lippu.

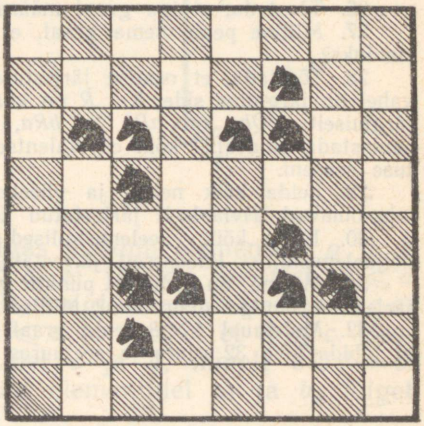
lauale 8 lippu selliselt, et ükski lipp ei lööks teist? See ülesanne on väga raske, seepärast isegi Gauss ei lahendanud seda kohe lõpuni. Niisugused lippude paigutused tõepoolest eksisteerivad (vt. joonis 37) ja neid on isegi 92. (Gauss arvas esialgu,

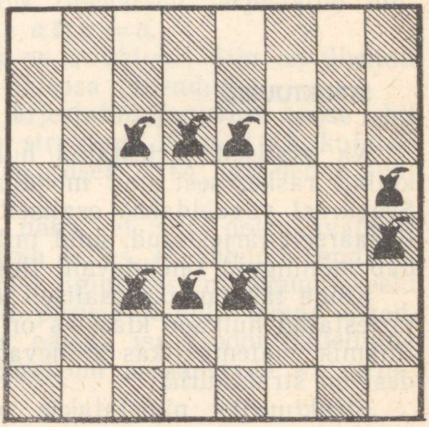
et ülesandel on 76 lahendust, malehuvilised aga olid 1854. aastaks leidnud ainult 40 erinevat vastust.) Kõik 92 lahendust võib tuletada järgmisest kaheteistkümnest põhidiagrammist

(72631485)	(61518374)	(58417263)
(35841726)	(46152837)	(57263148)
(16837425)	(57263184)	(48157263)
(51468273)	(42751863)	(35281746)

nende pööramisel saadud diagrammide peegeldamisega peadiagonaali suhtes (pööramisel 180° võrra langeb viimane diagramm iseendaga kokku, seega saab sel teel $8 \cdot 12 - 4 = 92$ lahendust).







Joonis 38. Kõik malelaua ruudud on löögi all!

Huvitav on ülesanne, milles nõutakse teha iga malendi jaoks kindlaks niisugune minimaalne arv n, et need n malendit hoiaksid tule all terve malelaua. Osutub, et lipu jaoks on see arv 5, oda jaoks 8 ja ratsu jaoks 12 (vt. joon. 38). Vankri korral on ilmselt $n = 8$.

Sellel, kuidas niisuguseid ülesandeid graafiteoorias lahendatakse, me siin kahjuks peatuda ei saa. Kuid asjaolu, et graafiteooriat saab rakendada nii paljudes erinevates ülesannetes, näitab teooria kasutamise avarust.

Ülesandeid.

25. Missugustel viieelemendilistest osaliselt järjestatud hulkadest on:
   1° kolm aatomit;
   2° neli minimaalset elementi;
   3° kolm minimaalset ja kolm maksimaalset elementi?
   4° kaks aatomit ja kolm maksimaalset elementi?
26. Tõestada, et iga graaf määrab kvaasijärjestuse.
27. Milline peab olema graaf, et tema poolt määratud seos oleks hulga ruuduks?
28. Tõestada, et osalise järjestuse, kvaasijärjestuse ja ekvivalentsusseose vahel on järgmine side. Kui R on kvaasijärjestus, siis Q, mis on defineeritud järgmiselt: aQb, kui aRb ja bRa, kujutab endast ekvivalentsusseost. Kui samastada omavahel kõik ekvivalentsed elemendid, siis jõuame osalise järjestuse seoseni.
29. Leida kõik nelja- ja viieelemendilised osaliselt järjestatud hulgad, mis omavad triviaalselt järjestatud kolmeelemendilisi alamhulki.
30. Leida kõik viieelemendilised osaliselt järjestatud hulgad, millel on neljaelemendilisi lineaarselt järjestatud alamhulki.
31. Milline on eelmise punkti viimases ülesandes defineeritud osaliselt järjestatud hulga diagramm? Millise järjestusega on siin tegemist?
32. Malelaual 4×8 leida graaf, mis näitaks, kuidas peab käima ratsu, et läbida kõik 32 ruutu ja seejuures olla igal ruudul ainult üks kord.

STRUKTUURID

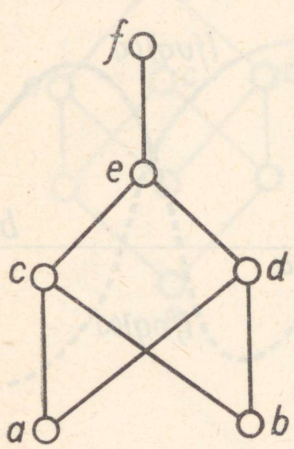
Ka osaliselt järjestatud hulkade uurimine üldkujul on veel küllalt raske, sest nad moodustavad väga laia hulkade klassi. Seepärast vaadeldakse osaliselt järjestatud hulki, mis pole küll lineaarselt järjestatud, kuid mille korral osaline järjestus rahuldab mõningaid täiendavaid tingimusi.

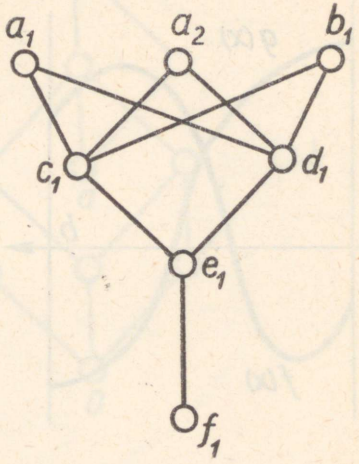
Kõige tähtsamaks osaliselt (kuid mitte tingimata lineaarselt) järjestatud hulkade klassiks on vaieldamatult struktuuride klass. Enamik matemaatikas esinevatest osaliselt järjestatud hulkadest on struktuurid.

Struktuuriks nimetatakse osaliselt järjestatud hulka, mille

igal kahel elemendil a ja b on olemas ühend (s. o. selline element x, et $a \leqslant x$, $b \leqslant x$ ja kui $a \leqslant z$, $b \leqslant z$, siis $x \leqslant z$) ja lõige (s. o. selline element y, et $y \leqslant a$, $y \leqslant b$ ja kui $z \leqslant a$, $z \leqslant b$, siis $z \leqslant y$). Elementide a ja b ühendit tähistatakse sümboliga $a \cup b$ ja lõiget sümboliga $a \cap b$.

Vaatleme näiteks kaht järgmist osaliselt järjestatud hulka:





Esimeses osaliselt järjestatud hulgas puudub elementide a ja b ühend, sest kuigi $a \leqslant c$ ja $b \leqslant c$, ei järeldu seostest $a \leqslant d$ ja $b \leqslant d$, et $c \leqslant d$. Analoogiliselt, kuigi d on suurem nii a-st kui ka b-st, ei järeldu seostest $a \leqslant c$ ja $b \leqslant c$, et $d \leqslant c$. Seevastu aga leidub ühend elementidel c ja d, nimelt $c \cup d = e$. Teises hulgas on $c_1 \cap d_1 = e_1$, kuid elementidel a_1 ja b_1 lõiget ei ole.

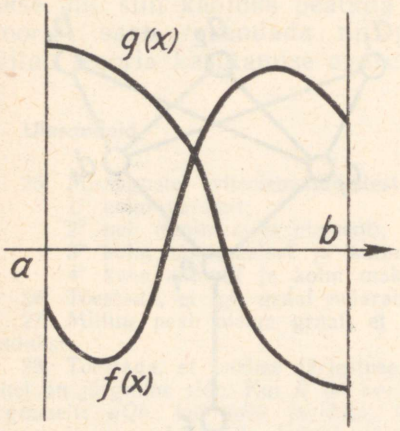
Struktuurideks on muidugi kõik lineaarselt järjestatud hulgad: $a \leqslant b$ korral on $a \cup b = b$ ja $a \cap b = a$.

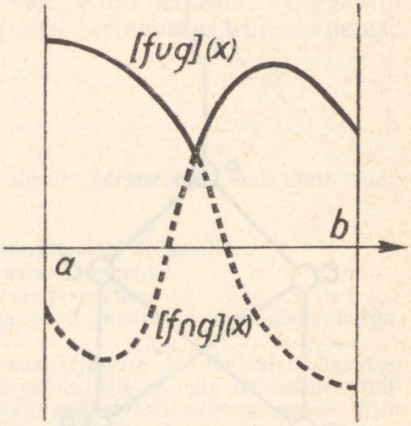
Hulga kõigi alamhulkade hulk on struktuur. Siin on ühendil ja lõikel alamhulkade ühendi ja ühisosa tähendus.

Naturaalarvude hulk, mis on järjestatud jaguvuse seose abil ($a \leqslant b$, kui a on b jagaja), on struktuur. Siin $a \cup b$ kujutab endast arvude a ja b vähimat ühiskordset, $a \cap b$ aga nende suurimat ühistegurit.

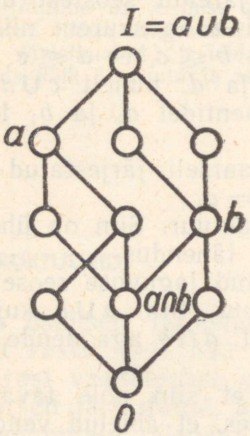
Perekonna diagrammidelt on näha, et siin pole tavaliselt tegemist struktuuriga. Põhjus peitub selles, et abielud vendade-õdede vahel on keelatud. Vanas Egiptuses niisugune keeld puudus. Et aga vaarao võimu pärisid ainult tema tütred, siis pidi vaarao poeg, kes tahtis pärida isa trooni, abielluma oma õega. Seepärast võis seal perekond moodustada ka struktuuri.

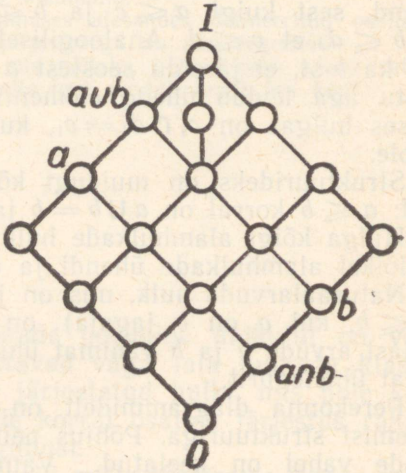
Ka suvalisel lõigul $[a, b]$ defineeritud funktsioonide hulk, milles $f \leqslant g$, kui iga $x \in [a, b]$ korral $f(x) \leqslant g(x)$, moodustab struktuuri. Järgmiselt skeemilt on näha, kuidas leida kahe funktsiooni ühend ja lõige:



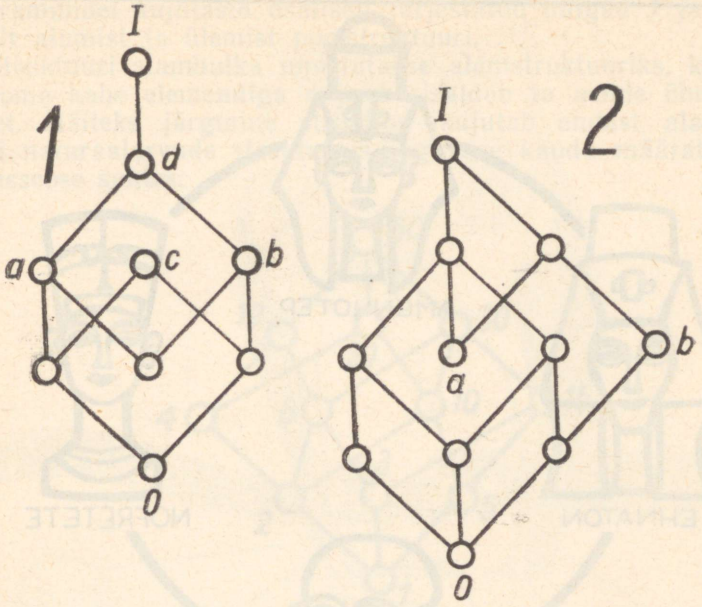


Diagrammidega



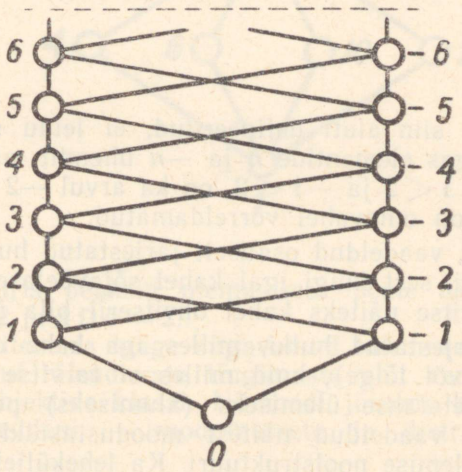


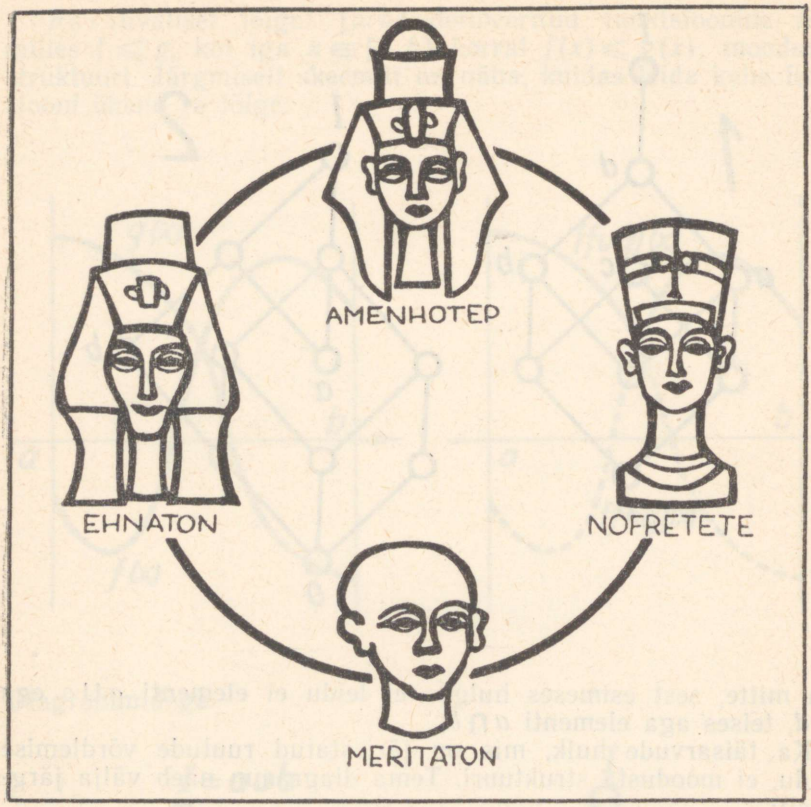
määratud osaliselt järjestatud hulgad moodustavad struktuure, osaliselt järjestatud hulgad



aga mitte, sest esimeses hulgas ei leidu ei elementi $a \cup c$ ega $c \cup d$, teises aga elementi $a \cap b$.

Ka täisarvude hulk, mis on järjestatud ruutude võrdlemise kaudu, ei moodusta struktuuri. Tema diagramm näeb välja järgmiselt:





Joonis 39. Vaarao perekond võis moodustada struktuuri.

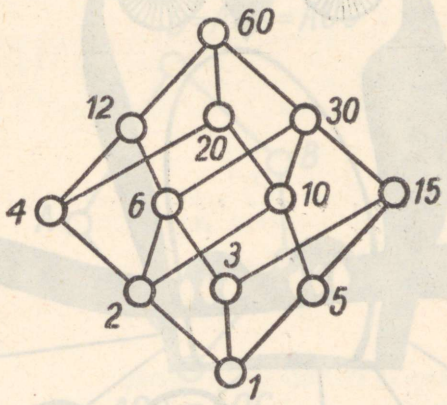
Kuigi $a \cap b$ on siin alati defineeritud, ei leidu selles osaliselt järjestatud hulgas elementide n ja $-n$ ühendit, näiteks elementi $1 \cup (-1)$: kuigi $1 < 2$ ja $-1 < 2$, on ka arvul -2 sama omadus, kuid 2 ja -2 on omavahel võrreldamatud.

Ka sõjavägi, vaadeldud osaliselt järjestatud hulgana, ei moodusta struktuuri, sest kuigi igal kahel sõjaväelasel leidub ühine ülemus, ei tarvitse näiteks kahel ohvitseril olla ühised alluvad.

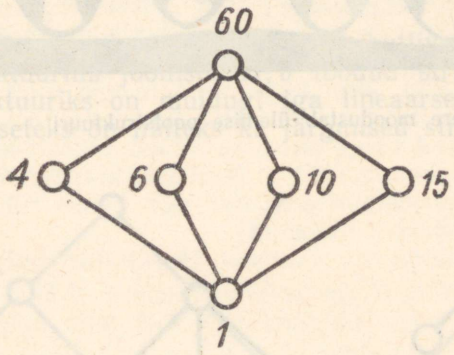
Osaliselt järjestatud hulki, milles iga kahe elemendi jaoks leidub ühend (või lõige), kuid milles ei tarvitse leiduda lõiget (ühendit), nimetatakse ülemiseks (alumiseks) poolstruktuuriks. Kahest viimati vaadeldud näitest moodustasidki esimene alumise ja teine ülemise poolstruktuuri. Ka leheküljel 65 vaadeldud

diagrammidel kujutasid osaliselt järjestatud hulgad *1* ja *2* vastavalt alumist ja ülemist poolstruktuuri.

Struktuuri alamhulka nimetatakse alamstruktuuriks, kui koos iga oma kahe elemendiga *a* ja *b* sisaldab ta nende ühendit ja lõiget. Näiteks järgmine struktuur kujutab endast alamstruktuuri naturaalarvude struktuuris jaguvuse kaudu määratud järjestusseose suhtes:

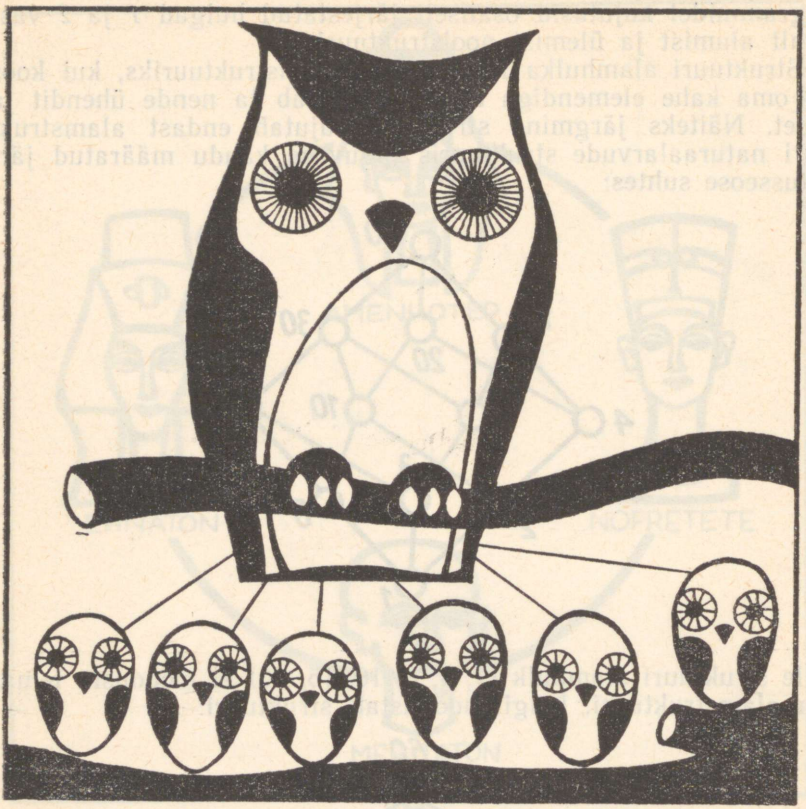


Selle struktuuri alamhulk {1, 4, 6, 10, 15, 60} ei moodusta temas aga alamstruktuuri, kuigi moodustab struktuuri:

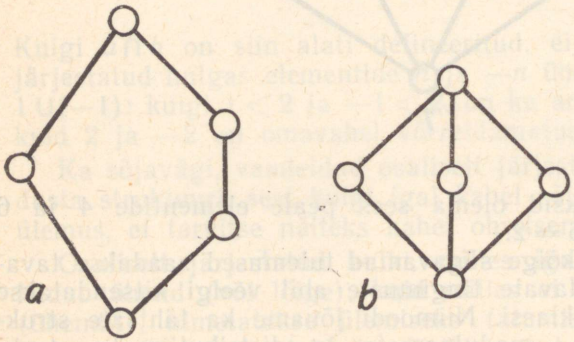


Alamstruktuuris peaksid olema sees peale elementide 4 ja 6 ka $4 \cup 6 = 12$ ja $4 \cap 6 = 2$.

Struktuuriteooria kõige sügavamad tulemused saadakse tavaliselt siis, kui täiendavate tingimuste abil veelgi kitsendatakse uuritavate objektide klassi. Niimoodi jõuame ka tähtsate struktuuride klassideni — modulaarsete ja distributiivsete struktuurideni.



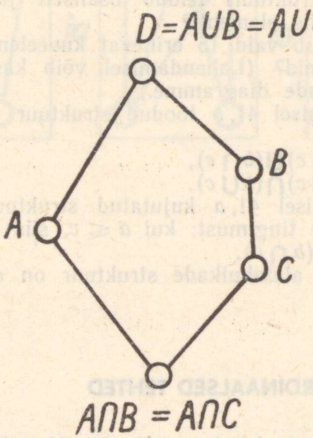
Joonis 40. See pere moodustab ülemise poolstruktuuri.



Joonis 41. Mittemodulaarne ja mittedistributiivne struktuur.

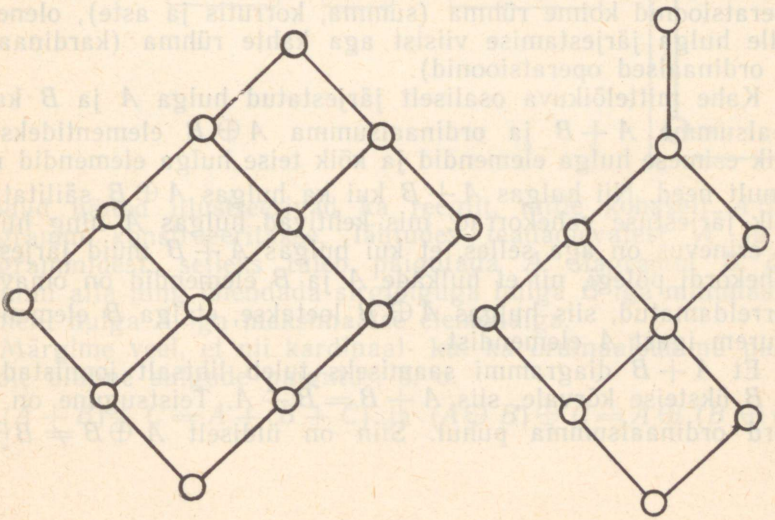
Modulaarseks ehk Dedekindi struktuuriks nimetatakse struktuuri, mis ei sisalda alamstruktuurina joonisel 41, *a* näidatud viieelemendilist struktuuri.

Modulaarsed on kõik nelja- ja viieelemendilised struktuurid, välja arvatud äsja nimetatud struktuur. Ka suvalise hulga alamhulkade struktuur on modulaarne. Tõepoolest, kui ta sisaldab alamstruktuurina struktuuri



siis võrdustest $D = A \cup B$ ja $D = A \cup C$ järeldub, et $B = A' \cup (A \cap B)$ ja $C = A' \cup (A \cap C)$ (siin tähendab A' hulga A täiendit hulga D suhtes). Et aga $B \cap A = C \cap A$, siis järelduks siit, et $B = C$.

Modulaarset struktuuri nimetatakse distributiivseks, kui ta ei sisalda alamstruktuurina joonisel 41, *b* toodud struktuuri. Distributiivseks struktuuriks on muidugi iga lineaarselt järjestatud hulk. Distributiivseteks on näiteks ka järgmised struktuurid:



ja arvu 30 jagajate struktuur. Leheküljel 64 toodud struktuuridest on teine struktuur modulaarne, kuigi mitte distributiivne, aga esimene struktuur pole isegi modulaarne.

Ülesandeid.

33. Mitu erinevat struktuuri leidub osaliselt järjestatud hulkade seas, mis sisaldavad ülimalt viis elementi?

34. Tõestada, et leidub vaid 15 erinevat kuueelemendilist struktuuri. Millised on nende diagrammid? (Lahendamisel võib kasutada neljaelemendiliste osaliselt järjestatud hulkade diagramme.)

35. Tõestada, et joonisel 41, *b* toodud struktuur ei rahulda järgmisi, nn. distributiivsuse seadusi:

$$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c),$$
$$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c).$$

36. Näidata, et joonisel 41, *a* kujutatud struktuuri mõned elemendid ei rahulda nn. modulaarsuse tingimust: kui $a \leqslant c$, siis

$$(a \cup b) \cap c = a \cup (b \cap c).$$

37. Kas hulga kõigi alamhulkade struktuur on distributiivne?

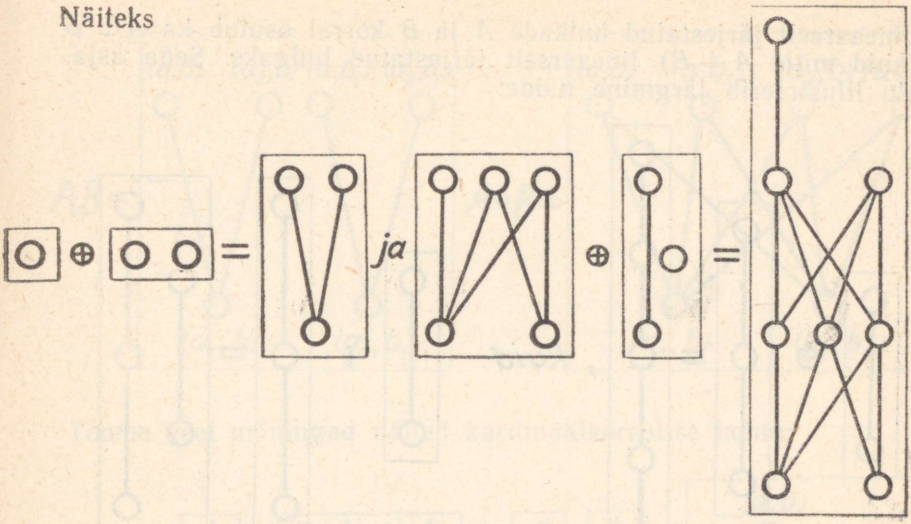
KARDINAALSED JA ORDINAALSED TEHTED

Paljusid tähtsaid, kuid keeruliselt ülesehitatud osaliselt järjestatud hulki on kõige lihtsam ja mugavam esitada vähem keeruliste osaliselt järjestatud hulkade kaudu, kasutades teatavaid niisuguste hulkade jaoks defineeritud operatsioone. Need operatsioonid on rakendatavad suvalistele mittelõikuvatele osaliselt järjestatud hulkadele ja annavad tulemuseks uusi osaliselt järjestatud hulki. Nad üldistavad teatud mõttes liitmise, korrutamise ja astendamise tehteid täisarvude jaoks. Olenevalt tulemuseks peetava hulga saamise viisist jaotatakse kõne all olevad operatsioonid kolme rühma (summa, korrutis ja aste), olenevalt selle hulga järjestamise viisist aga kahte rühma (kardinaalsed ja ordinaalsed operatsioonid).

Kahe mittelõikuva osaliselt järjestatud hulga A ja B kardinaalsumma $A + B$ ja ordinaalsumma $A \oplus B$ elementideks on kõik esimese hulga elemendid ja kõik teise hulga elemendid ning ainult need. Nii hulgas $A + B$ kui ka hulgas $A \oplus B$ säilitatakse kõik järjestuse vahekorrad, mis kehtivad hulgas A ning hulgas B, erinevus on aga selles, et kui hulgas $A + B$ muid järjestuse vahekordi polegi, nii et hulkade A ja B elemendid on omavahel võrreldamatud, siis hulgas $A \oplus B$ loetakse, et iga B element on suurem igast A elemendist.

Et $A + B$ diagrammi saamiseks tuleb lihtsalt joonistada A ja B üksteise kõrvale, siis $A + B = B + A$. Teistsugune on olukord ordinaalsumma puhul. Siin on üldiselt $A \oplus B \neq B \oplus A$.

Näiteks



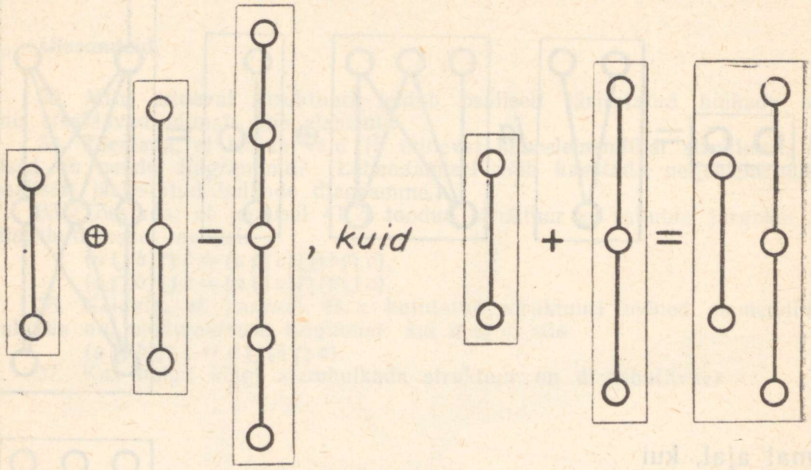
samal ajal, kui

Toodud näited illustreerivad ka reeglit, mille kohaselt $A \oplus B$ diagramm konstrueeritakse, lähtudes teadaolevatest A ja B diagrammidest: selleks tuleb paigutada A diagramm B diagrammi alla ning ühendada sirglõiguga hulga B iga minimaalne element hulga A iga maksimaalse elemendiga.

Märgime veel, et nii kardinaal- kui ka ordinaalsumma puhul ei ole oluline sulgude paigutus, s. o.

$(A + B) + C = A + (B + C)$ ja $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$.

Lineaarselt järjestatud hulkade A ja B korral osutub ka $A \oplus B$ (kuid mitte $A + B$) lineaarselt järjestatud hulgaks. Seda asjaolu illustreerib järgmine näide:



Osaliselt järjestatud hulkade A ja B kardinaalkorrutise AB ja ordinaalkorrutise $A \circ B$ saamiseks tuleb moodustada kõikide võimalike paaride (a, b) hulk, kus $a \in A$ ja $b \in B$, s. o. hulk $A \times B$, ning järjestada see AB puhul reegli

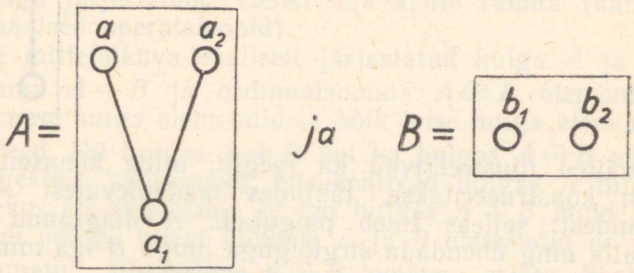
$(a, b) \leqslant (a', b')$ siis

ja ainult siis, kui $a \leqslant a'$ ja $b \leqslant b'$ järgi,

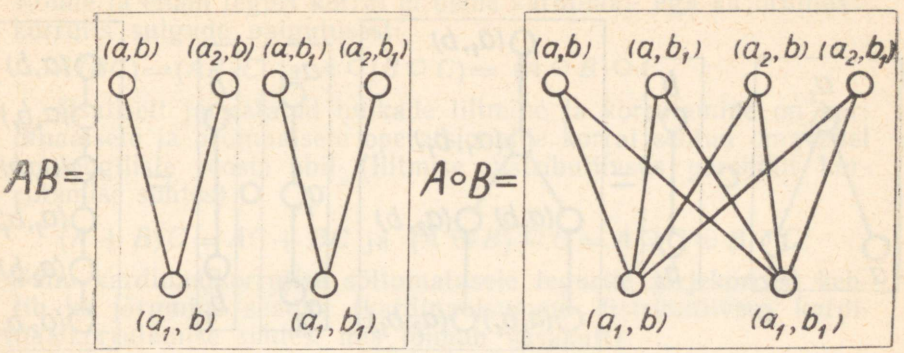
ning $A \circ B$ puhul reegli

$(a, b) \geqslant (a_1, b_1)$ siis ja ainult siis, kui $a \leqslant a_1$ või $a_1 = a$ ja $b \leqslant b_1$ kohaselt.

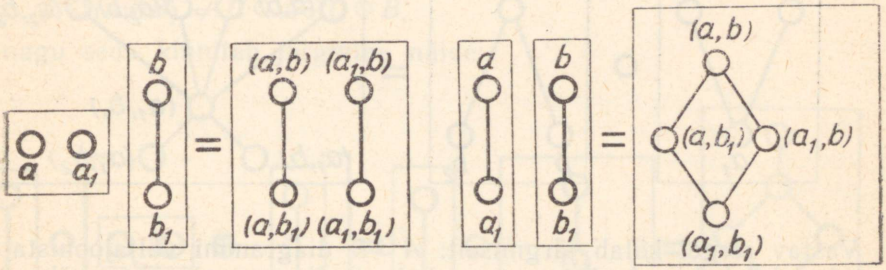
Näiteks osaliselt järjestatud hulkade

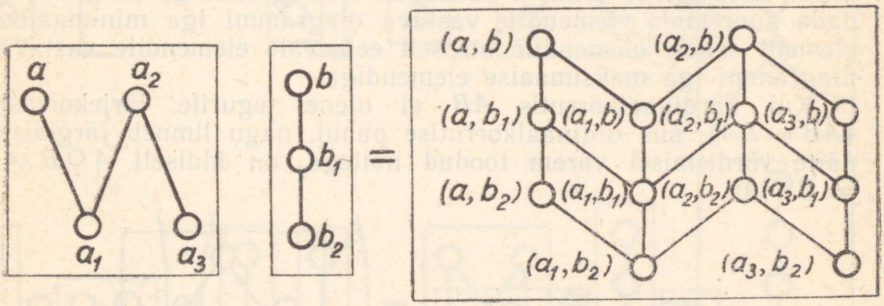


kardinaalkorrutis AB ja ordinaalkorrutis $A \circ B$ koosnevad kumbki kuuest elemendist (a, b_1), (a, b_2), (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1) ja (a_2, b_2), mis on järjestatud järgmiselt:



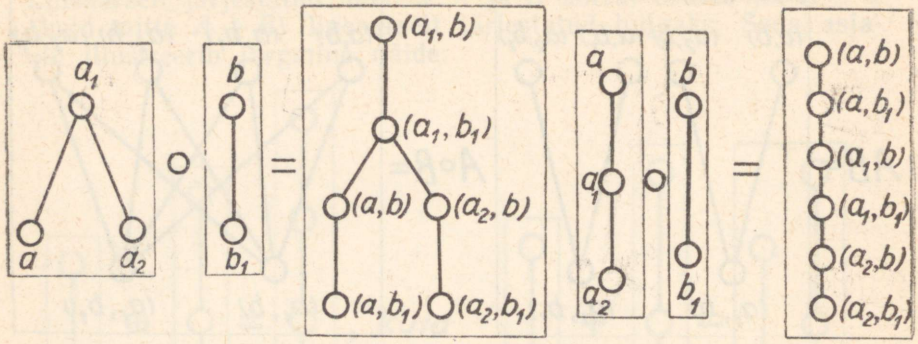
Toome veel mõningad näited kardinaalkorrutise kohta:

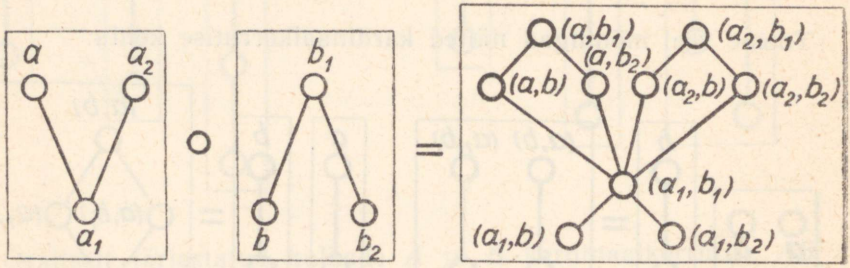




Toodud näidetest ilmneb reegel: osaliselt järjestatud hulga AB diagrammi leidmiseks tuleb iga esimese osaliselt järjestatud hulga A element asendada teise osaliselt järjestatud hulga B diagrammiga ning hulga A elementidele a_1 ja a_2 vastavates diagrammides, juhul kui üks nendest elementidest katab teist, ühendada vastavad elemendid, s. o. ühele B elemendile vastavad elemendid.

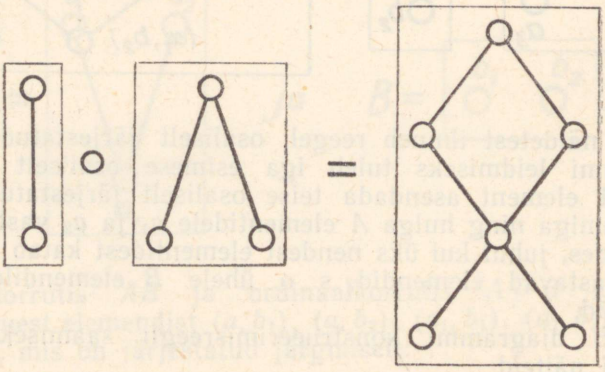
$A \circ B$ diagrammi konstrueerimisreegli saamiseks vaatame järgmisi näiteid:





Vastav reegel kõlab järgmiselt: $A \circ B$ diagrammi väljajoonistamisel tuleb iga A element asendada B diagrammiga ning ühendada suuremale elemendile vastava diagrammi iga minimaalne element sellele elemendile otseselt eelnevale elemendile vastava diagrammi iga maksimaalse elemendiga.

Kui kardinaalkorrutis AB ei olene tegurite järjekorrast ($AB = BA$), siis ordinaalkorrutise puhul, nagu ilmneb järgmise näite võrdlemisel varem toodud näitega, on üldiselt $A \circ B \neq B \circ A$:



Kolme ja enam teguri korral ei olene kardinaal- ega ka ordinaalkorrutis sulgude paigutusest:

$$A(BC)=(AB)C \text{ ja } A\circ(B\circ C)=(A\circ B)\circ C.$$

Osaliselt järjestatud hulkade liitmine ja korrutamine on kardinaalsete ja ordinaalsete operatsioonide korral seotud omavahel analoogiliste seoste abil (liitmise distributiivsus paremalt korrutamise suhtes):

$$(A+B)C=AC+BC \text{ ja } (A\oplus B)\circ C=A\circ C\oplus B\circ C.$$

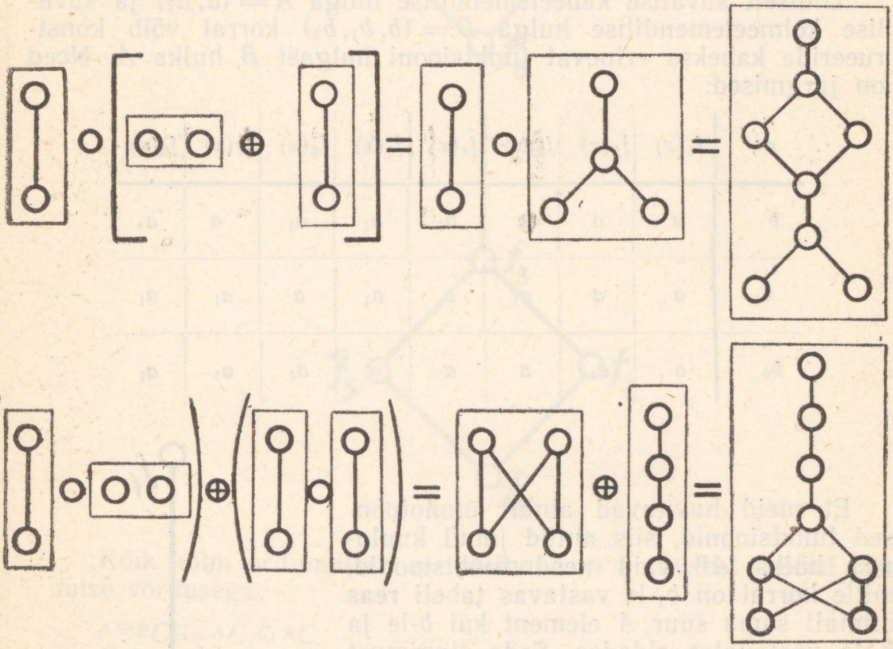
Tänu kardinaalkorrutise sõltumatusele tegurite järjekorrast kehtib ka järgmine seadus (kardinaalsumma distributiivsus kardinaalkorrutamise suhtes, mis toimub vasakult):

$$C(A+B)=CA+CB.$$

Ordinaalsete operatsioonide puhul aga üldiselt

$$C\circ(A\oplus B)\neq C\circ A\oplus C\circ B,$$

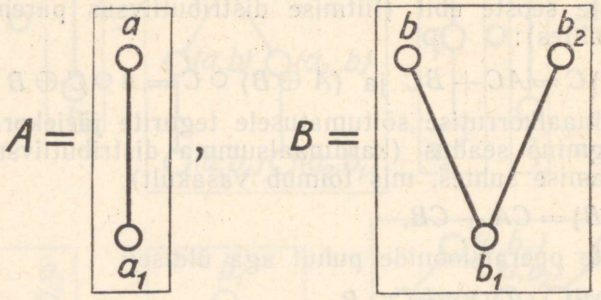
nagu seda kinnitab järgmine näide:



Kardinaalaste A^B koosneb kõikidest monotoonsetest funktsioonidest hulgast B hulka A (funktsioon $f(x)$ on monotoonne, kui igast seosest $b\leqslant b_1$ järeldub, et $f(b)\leqslant f(b_1)$). Kahe hulka A^B

kuuluva funktsiooni f ja g korral loeme, et $f \leqslant g$, kui iga $b \in B$ korral $f(b) \leqslant g(b)$. On lihtne veenduda, et A^B muutub seejuures osaliselt järjestatud hulgaks.

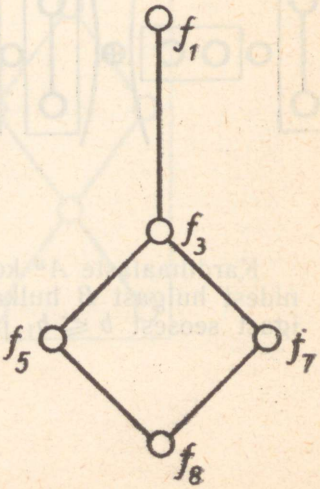
Selgitame näiteks, kuidas näeb välja osaliselt järjestatud hulk A^B, kui



Üldiselt suvalise kaheelemendilise hulga $A = \{a, a_1\}$ ja suvalise kolmeelemendilise hulga $B = \{b, b_1, b_2\}$ korral võib konstrueerida kaheksa erinevat funktsiooni hulgast B hulka A. Need on järgmised:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$f_6(x)$	$f_7(x)$	$f_8(x)$
b	a	a	a	a_1	a_1	a_1	a	a_1
b_1	a	a	a_1	a	a_1	a	a_1	a_1
b_2	a	a_1	a	a	a	a_1	a_1	a_1

Et meid huvitavad ainult monotoonsed funktsioonid, siis antud juhul kuuluvad hulka A^B vaid need funktsioonid, mille korral on b_1-le vastavas tabeli reas ülimalt sama suur A element kui b-le ja b_2-le vastavates ridades. Seda tingimust ei rahulda funktsioonid f_2, f_4 ja f_6. Seega koosneb A^B viiest elemendist, mis moodustavad järgmise osaliselt järjestatud hulga:

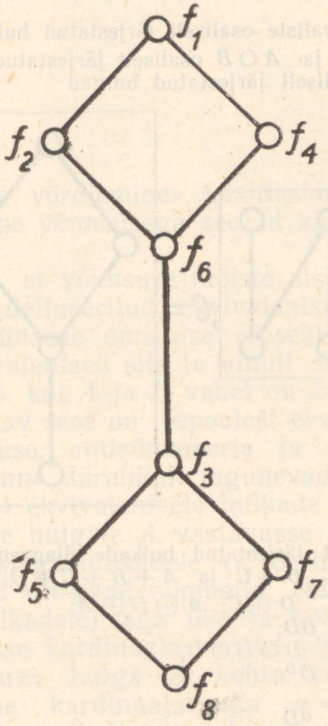


Kardinaalastme kohta kehtivad järgmised seadused, mis ühendavad teda kardinaalsumma ja kardinaalkorrutisega:

$A^{B+C} = A^B A^C$, $(AB)^C = A^C \cdot B^C$, $(A^B)^C = A^{BC}$.

Ordinaalaste ${}^BA$ koosneb kõikidest, mitte enam tingimata monotoonsetest funktsioonidest hulgast B hulka A, kusjuures see funktsioonide hulk on järjestatud leksikograafiliselt, s. o. esimeste erinevate väärtuste järgi. Veidi teisiti öelduna on $f < g$ siis ja ainult siis, kui iga sellise hulga B elemendi b korral, et $f(b) > g(b)$, leidub hulgas B veel element $b_1 < b$, nii et $f(b_1) < g(b_1)$.

Näiteks äsja vaadeldud hulkade A ja B korral näeb ${}^BA$ diagramm välja järgmiselt:



Kõik kolm ordinaalset operatsiooni on omavahel seotud järgmise võrdusega:

${}^{A \oplus B}C = {}^AC \circ {}^BC$.

Käesoleva punkti alguses oli öeldud, et käsitletavad kardinaalsed ja ordinaalsed operatsioonid lubavad esitada keerukamaid osaliselt järjestatud hulki lihtsamate kaudu. Loomulikult kerkib küsimus: kas need operatsioonid annavad suvaliste osa-

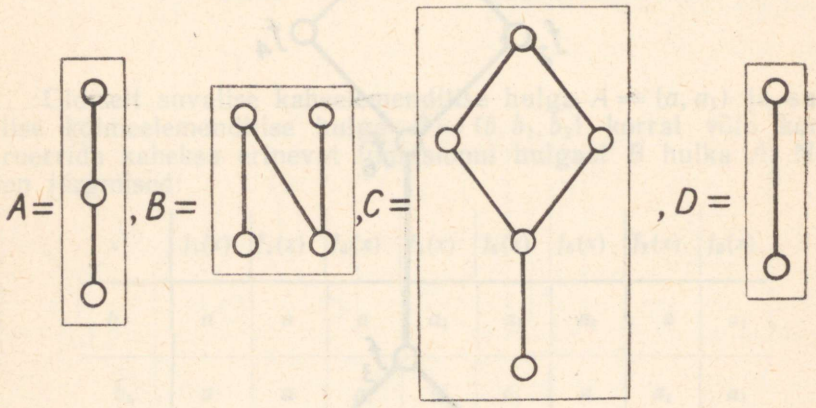
liselt järjestatud hulkade A ja B puhul alati tulemuseks osaliselt järjestatud hulga?

$A+B$, $A \oplus B$, AB, $A \circ B$ ja A^B korral on vastus sellele küsimusele alati positiivne. 1942. aastal ilmunud tuntud ameerika matemaatiku G. Birkhoffi artiklis «Generalized Arithmetic» («Üldistatud aritmeetika») oli märgitud, et ka ${}^BA$ on alati osaliselt järjestatud hulk. Kuid hiljem selgus, et see pole alati nii. Nimelt ei tarvitse ${}^BA$-s defineeritud seos «$\leqslant$» rahuldada alati transitiivsuse tingimust.

Ülesandeid.

38. Tõestada, et suvaliste osaliselt järjestatud hulkade A ja B korral on $A+B$, AB, A^B, $A \oplus B$ ja $A \circ B$ osaliselt järjestatud hulgad.

39. Olgu antud osaliselt järjestatud hulgad



Leida järgmiste osaliselt järjestatud hulkade diagrammid:

1° $A+B$, $A+C$, $B+C$ ja $A+B+C+D$;

2° $A \oplus B$, $B \oplus C$; $D \oplus C$; $A \oplus D \oplus A$;

3° AB, BC, CD, BD;

4° $A \circ B$, $B \circ C$, $D \circ D \circ D$;

5° A^D; ${}^AD$; B^D; D^D.

Kas hulgad

6° ${}^AD$; ${}^DA$; ${}^AA$; ${}^DD$

on osaliselt järjestatud? Missugused on nende diagrammid?

40. Missugused hulkadest $A+B$, AB, $A \oplus B$, A^B on lineaarselt järjestatud, kui A ja B on lineaarselt järjestatud hulgad? Missugused neist on triviaalselt järjestatud, kui A ja B on triviaalselt järjestatud hulgad?

41. Tõestada, et ${}^IB$ ei ole osaliselt järjestatud (ei ole täidetud transitiivsusnõue), kui I on tavalisel viisil järjestatud täisarvude hulk.

42. Tähistame n elemendist koosneva triviaalselt järjestatud hulga sümboliga $\overline{n}$ ja lineaarselt järjestatud hulga sümboliga $\underline{n}$. Tõestada, et kardinaalne ja ordinaalne korrutamine ja liitmine rahuldavad sel korral järgmisi tingimusi:

$\overline{n}+\overline{m}=\overline{m}+\overline{n}$; $\underline{n}\oplus\underline{m}=\underline{m}\oplus\underline{n}$;

$\overline{n}\,\overline{m}=\overline{m}\,\overline{n}$; $\underline{n}\circ\underline{m}=\underline{m}\circ\underline{n}$;

$(\overline{n}+\overline{m})+\overline{l}=\overline{n}+(\overline{m}+\overline{l})$; $(\underline{n}\oplus\underline{m})\oplus\underline{l}=\underline{n}\oplus(\underline{m}\oplus\underline{l})$;

$(\overline{n}\,\overline{m})\,\overline{l}=\overline{n}(\overline{m}\,\overline{l})$; $(\underline{n}\circ\underline{m})\circ\underline{l}=\underline{n}\circ(\underline{m}\circ\underline{l})$;

$(\overline{n}+\overline{m})\,\overline{l}=\overline{n}\,\overline{l}+\overline{m}\,\overline{l}$; $(\underline{n}\oplus\underline{m})\circ\underline{l}=\underline{n}\circ\underline{l}\oplus\underline{m}\circ\underline{l}$,

mis on täiesti analoogilised täisarvude vastavate omadustega.

43. A ja B on struktuurid. Missugused hulkadest $A\oplus B$, AB ja $A\circ B$ moodustavad samuti struktuuri?

43. A ja B on modulaarsed (või distributiivsed) struktuurid. Missugused hulkadest $A\oplus B$, AB ja $A\circ B$ moodustavad samuti modulaarse (või distributiivse) struktuuri?

LÕPMATUD ARVUD

Punktis «Hulkade võrdlemine» käsitlesime hulga võimsuse mõistet. Siin vaatleme võimsusega seotud küsimusi teistsugusest aspektist.

Me võime lugeda, et võimsuse mõiste sissetoomisega on kõikide hulkade seas defineeritud ekvivalentsusseos, mida võiks nimetada võrdse võimsuse omamise seoseks. Selle kohaselt on hulgad A ja B ekvivalentsed siis ja ainult siis, kui nende võimsused on samad, s. o. kui A ja B vahel on korraldatav üksühene vastavus. Et vaadeldav seos on tõepoolest ekvivalentsusseos, s. o. rahuldab refleksiivsuse, antisümmeeria ja transitiivsuse tingimusi, on küllaltki ilmne. Järelikult jagunevad kõik hulgad mittelõikuvateks omavahel ekvivalentsete hulkade klassideks.

Seame nüüd igale hulgale A vastavusse sümboli $\alpha=|A|$ nii, et erinevate võimsustega hulkadele (s. o. hulkadele erinevatest klassidest) vastaksid erinevad sümbolid, ekvivalentsetele hulkadele (ühe klassi hulkadele) aga üks ja seesama sümbol. Neid sümboleid nimetatakse kardinaalarvudeks või vastavate hulkade võimsusteks, kusjuures hulga A kohta räägitakse, et tema võimsus on võrdne kardinaalarvuga $\alpha=|A|$, või lihtsalt, et hulgas A on α elementi. Kardinaalarvud ja omavahel ekvivalentsete hulkade klassid on teineteisega üksüheses vastavuses.

n elementi sisaldava lõpliku hulga A korral lepime kokku kirjutada $\alpha=|A|=n$, tühja hulga korral aga $|\varnothing|=0$. Kardinaalarvu, mis vastab naturaalarvude hulgale ja igale teisele loenduvale hulgale, tähistatakse heebrea tähestiku esimese tähe $\aleph$ («alef») abil: $\aleph_0$. Reaalarvude hulga võimsust märgitakse lihtsalt sümboliga $\aleph$ ning, nagu juba mainitud, nimetatakse seda kontiinuumi võimsuseks.



Joonis 42. Selle hulga võimsus on 8.

Kardinaalarvu, mis väljendab hulga A kõikide alamhulkade hulga võimsust, märgitakse sümboliga 2^{α}, kus $\alpha = |A|$. See on kooskõlas sellega, et n elemendist koosneval lõplikul hulgal on 2^n alamhulka (hulk ise ja $\varnothing$ kaasa arvatud). Kolmandas punktis mainisime juba, et $2^{\alpha} > \alpha$, kusjuures seost $<$ kardinaalarvude jaoks tuleb mõista järgmiselt: $\alpha = |A| < \beta = |B|$, kui hulgad A ja B ei ole ekvivalentsed ja hulgas B leidub niisugune alamhulk B_0, et $A \sim B_0$.

Võrratus $2^{\alpha} > \alpha$ annab võimaluse konstrueerida lõpmata palju kardinaalarve, mis kujutavad endast lõpmatute hulkade võimsusi:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} = \aleph < 2^{\aleph} < 2^{2^{\aleph}} < \dots$$

Kardinaalarvude jaoks võib vaadelda liitmise, korrutamise ja astendamise operatsioone. Nende defineerimisel lähtume kardinaalsete operatsioonide definitsioonist (osaliselt järjestatud hulkade jaoks) ning sellest, et iga hulk on vaadeldav triviaalselt osaliselt järjestatud hulgana.

Täpsemini, kahe kardinaalarvu α ja β summaks loeme niisuguse hulga $A+B$ võimsust, et $|A|=\alpha$, $|B|=\beta$, $A\cap B=\varnothing$. See definitsioon on muidugi üldistatav suvalisele liidetavate arvule. Toome mõningaid näiteid kardinaalarvude liitmisest. Nagu lugeja selles kohe veendub, erineb see tunduvalt tavaliste arvude liitmisest.

Kuna arvud $\{2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$ moodustavad loenduva hulga ning $\{1\}+\{2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ on naturaalarvude hulk, siis

$$1+\aleph_0=\aleph_0=\aleph_0+1$$

(kardinaalarvude liitmise kommutatiivsus järeldub sellest, et $A+B=B+A$). Analoogiliselt saame

$$n+\aleph_0=\aleph_0=\aleph_0+n.$$

Täisarvude loenduvat hulka võib jagada kaheks loenduvaks hulgaks: naturaalarvud ja mittepositiivsed täisarvud; seega

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

Naturaalarvude hulk koosneb kolmest loenduvast hulgast, mille moodustavad arvud, mis jagamisel kolmega annavad jäägiks vastavalt 0,1 või 2; järelikult on

$$\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0.$$

Analoogilised võrdused kehtivad ka kontinuaalse võimsuse korral. Kuna $(-1,0]+(0,1]=(-1,1]$ ja iga poolvahemiku võimsus on $\aleph$ (vt. ülesanne 15 lk. 35), siis

$$\aleph+\aleph=\aleph.$$

Kui n on lõplik, siis võrratustest

$$\aleph\leqslant\aleph+n\leqslant\aleph+\aleph_0\leqslant\aleph+\aleph=\aleph$$

järelduvad võrdused

$$\aleph+n=\aleph+\aleph_0=\aleph.$$

Kuna kardinaalsumma on assotsiatiivne, siis

$$\underbrace{\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0+\ldots+\aleph_0}_{n\text{ korda}}=(\aleph_0+\aleph_0)+\underbrace{\aleph_0+\ldots+\aleph_0}_{n-2\text{ korda}}=$$

$$=\underbrace{\aleph_0+\aleph_0+\ldots+\aleph_0}_{n-1\text{ korda}}=\underbrace{\aleph_0+\ldots+\aleph_0}_{n-2\text{ korda}}=\ldots=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$$

ja analoogiliselt

$$\aleph+\aleph+\ldots+\aleph=\aleph.$$

Ratsionaalarvude hulga loenduvuse tõestamiskäigust järeldub võrdus

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots + \aleph_0 + \ldots = \aleph_0,$$

sellest aga, et poolsirge $[0, +\infty)$ on esitatav loenduva arvu poolsirgete summana

$$[0, +\infty) = [0,1) + [1,2) + [2,3) + \ldots,$$

järeldame, et

$$\aleph + \aleph + \ldots + \aleph + \ldots = \aleph.$$

Kahe kardinaalarvu α ja β korrutiseks $\alpha\beta$ nimetatakse niisuguse hulga AB võimsust, et $|A| = \alpha$ ja $|B| = \beta$. Ka see definitsioon on lihtsalt üldistatav suvalise arvu tegurite juhule.

Toome näiteid kardinaalarvude korrutamise kohta. Kuna iga ratsionaalarvu $\frac{m}{n}$ võib vaadelda paarina (m, n), kusjuures nii lugejate kui ka nimetajate hulgad on loenduvad, siis

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0.$$

Nullist erinevaid täisarve n võib samuti vaadelda paaridena $(\varepsilon, |n|)$, kus esimesel kohal on arvu märk, s. o. hulga $\{+, -\}$ element, teisel aga naturaalarv — arvu n absoluutväärtus. Näiteks $2 = (+, 2)$, $-3 = (-, 3)$. Et hulga $\{+, -\}$ võimsus on 2, siis

$$2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \cdot 2 = \aleph_0.$$

Ka lõpmatute kardinaalarvude korral taandub nende korrutamine korduvale liitmisele. Näiteks võrdust $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$ võib mõista ka järgmiselt:

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \ldots \aleph_0 + \ldots = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0.$$

Kardinaalarvude α ja β korral on aste α^β defineeritud jällegi niisuguse hulga A^B võimsusena, et $|A| = \alpha$ ja $|B| = \beta$. Nagu tavaliste arvude korralgi avaldub see aste korrutise kaudu. Näiteks

$$\aleph_0^2 = \aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0 \text{ ja } \aleph_0^n = \aleph_0 \aleph_0 \ldots \aleph_0 = \aleph_0.$$

Kuna iga reaalarv lõigult $[0, 1]$ on esitatav kümnendmurruna $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$, kusjuures niisuguseid esitusi võib olla ülimalt kaks, siis on

$$\aleph \leqslant 10^{\aleph_0} \leqslant 2^{\aleph} = \aleph.$$

Tõepoolest, jadad $a_1 a_2 a_3 \ldots$ kujutavad endast kõiki funktsioone naturaalarvude hulgast numbrite hulka $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, seega on niisuguste jadade hulga võimsus $10^{\aleph_0}$. Siit järeldub võrdus $10^{\aleph_0} = \aleph$. Analoogiliselt saaks tõestada, et

$$2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0} = \ldots = 57^{\aleph_0} = \ldots = \aleph.$$

Kuna kardinaalarvude tehete jaoks kehtivad kõik kardinaaltehete omadused, siis

$$\aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

Seda tüüpi valemid on väga huvitavalt interpreteeritavad. Näiteks võrdus $\aleph^2 = \aleph \aleph = \aleph$ tähendab, et sirge ja tasandi punktide hulgad on ekvivalentsed. Võrdust $\aleph^3 = \aleph$ võime mõista näiteks selliselt, et ruumis on niisama palju punkte kui lõigul $\left[\frac{17}{11111}, \frac{18}{11111}\right]$ jne.

Ülesandeid.

45. Millised hulgad omavad võimsusi:

$$\aleph_0 + 1,\ 1 + \aleph_0 + 1,\ 1 + \aleph,\ 1 + \aleph + 1,\ \aleph_0 + 1 + \aleph_0?$$

46. Leida järgmised kardinaalarvude summad:

$$\aleph_0 + 1 + \aleph_0,\ \aleph_0 + 3 + \aleph_0 + 2 + \aleph_0,\ 1 + \aleph_0 + 2,$$

$$\aleph + 1 + \aleph_0,\ \aleph + 3 + \aleph_0 + 2 + \aleph,\ 1 + \aleph + 2$$

47. Leida järgmised kardinaalarvud:

$$(2^{\aleph_0} + 3 \cdot \aleph)^{\aleph_0},\ (\aleph_0^2 + 2^{\aleph_0})^5 \cdot \aleph^3 + \aleph$$

VEEL UKS LÕPMATUTE ARVUDE ARITMEETIKA

Hulkade uurimine ainult võimsuste seisukohalt tundub mõnest vaatenurgast liiga «jämedana». «Liiga palju» on niisuguseid hulki, mis omavad võrdseid võimsusi. Seepärast defineeritakse lisaks kardinaalarvudele veel ordinaalarvud, mis vastavad mõnes mõttes kitsamatele hulkade klassidele.

Selleks ei vaadelda enam hulki triviaalselt järjestatuna, vaid järjestatakse need lineaarselt. Seejärel nimetatakse kahte hulka sarnasteks, kui nad on isomorfsed osaliselt järjestatud hulkade teooria mõttes, s. o. nende vahel on korraldatav üksühene vastavus, mis säilitab järjestuse. Sarnaseid hulki märgitakse sümboli $\simeq$ abil: $A \simeq B$.

Näiteks järgmised hulgad on sarnased:

$\{1, 2, 3, 4, \ldots\} \simeq \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

kuid järjestatud hulgad:

1, 2, 3, 4, ...,
..., 4, 3, 2, 1,
..., —2, —1, 0, 1, 2, ...,
1, 3, 5, ..., 2, 4, 6, ...

on kõik paarikaupa mitteisomorfsed ja seega ükski nende hulkade paar ei koosne sarnastest hulkadest (siin on hulkade elemendid üles kirjutatud vastavalt hulgas defineeritud järjestusele). Hulkade mittesarnasus nähtub kas või sellest, et esimesel ja neljandal hulgal on olemas minimaalne element, mis puudub teisel ja kolmandal hulgal; neljanda hulga elemendile 2 eelneb lõpmata palju elemente — esimesel hulgal niisugune element puudub; ka teine ja kolmas hulk ei ole sarnased, kuna teisel on olemas maksimaalne element, kolmandal aga mitte (on lihtne näidata, et siin kasutatud järjestatud hulkade omadused isomorfismi puhul tõepoolest säilivad).

Edaspidi, kui kirjutame $A = B$, mõistame selle all hulkade A ja B koosnemist samadest elementidest ning et nad peale selle on ka ühtemoodi järjestatud. Tähistus A^* märgib seda, et tegemist on hulgaga, mis koosneb samadest elementidest nagu A, kuid milles järjestus on vastupidine A omaga. Näiteks

$$\{\ldots, 4, 3, 2, 1\} = N^*.$$

Lõplike hulkade korral on muidugi

$$A = \{1, 2, 3, \ldots, n\} \simeq A^* = \{n, n-1, n-2, \ldots, 1\}.$$

Üldse kõik n elemendist koosnevad lõplikud järjestatud hulgad on sarnased.

Lõpmatute hulkade korral, nagu nägime, võib võrdse võimsusega hulkade seas olla palju mittesarnaseid. Ülaltoodud näidetes mittesarnastest hulkadest oli tegemist kogu aeg loenduvate hulkadega. Nii et loenduvate hulkade korral leidub vähemalt neli mittesarnast hulka. Faktiliselt aga on neid lõpmata palju, nagu ilmneb järgmisest näidete seeriast:

$\ldots, 4, 3, 2, 1,$

$\ldots, 4, 3, 2, 1, \ldots, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1},$

$\ldots, 4, 3, 2, 1, \ldots, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}, \ldots, \overline{\overline{4}}, \overline{\overline{3}}, \overline{\overline{2}}, \overline{\overline{1}},$

. . . . . .

Nüüd peaks lugejale olema selge, et ühesuguse võimsusega hulkadele, s. o. ühele kardinaalarvule vastab üldiselt lõpmata palju ordinaalarve. Kui lugeja ei suuda seda veel hästi ette kujutada, jõuab ta sellele järeldusele siis, kui tutvub järgmise ordinaalarvu definitsiooniga.

Ordinaalarvudeks nimetatakse sümboleid $\varphi = \downarrow A \downarrow$, mis seatakse vastavusse järjestatud hulkadega niimoodi, et need sümbolid on võrdsed ($\downarrow A \downarrow = \downarrow B \downarrow$) siis ja ainult siis, kui $A \simeq B$ (s. o. kõikidele omavahel sarnastele hulkadele vastab üks ja seesama ordinaalarv, mittesarnastele aga erinevad).

Lõplikele hulkadele vastavaid ordinaalarve sümboliseerivad naturaalarvud — segiajamist lõplike kardinaalarvudega pole tavaliselt karta: $\downarrow\{5, 9, 1, 3\}\downarrow = 4$.



Joonis 43. Bernard Bolzano (1781—1848), tuntud tšehhi matemaatik. Avastas palju sisukaid teoreeme, edestades oluliselt teisi matemaatikuid. Ka lõpmatute hulkade teooriat hakkas ta arendama esimesena. Kahjuks jäi enamik Bolzano töid kuni 1930. aastani kirjastamata ning ei avaldanud seepärast erilist mõju matemaatika arengule.

Loomulikul viisil järjestatud naturaalarvude hulgale vastavat ordinaalarvu tähistatakse sümboliga ω, hulgale $N^* = \{\ldots, 3, 2, 1\}$ vastavat ordinaalarvu ω^*. Täisarvude tavalisel viisil järjestatud hulgale vastab ordinaalarv π.

Iga ordinaalarvu φ korral võib vaadelda ka ordinaalarvu φ^*, mis vastab pööratud järjestusega hulgale. Mõnikord on ka lõpmatute hulkade korral $\varphi = \varphi^*$, nagu näiteks täisarvude hulga korral $\pi = \pi^*$.

Selleks et avaldada ülalpool vaadeldud hulkadele vastavaid ordinaalarve naturaalarvude (täpsemini, lõplike ordinaalarvude) ja ω kaudu, toome sisse ordinaalarvude liitmise ja korrutamise, mis on veelgi omapärasemad kui analoogilised operatsioonid kardinaalarvude korral.

Ordinaalarvude $\downarrow A\downarrow$ ja $\downarrow B\downarrow$ summaks nimetatakse järjestatud hulkade A ja B ordinaalsummale $A \oplus B$ vastavat ordinaalarvu $\downarrow A \oplus B\downarrow$:

$$\downarrow A\downarrow + \downarrow B\downarrow = \downarrow A \oplus B\downarrow.$$

Analoogiliselt on defineeritud ka ordinaalarvude korrutis:

$$\downarrow A\downarrow \cdot \downarrow B\downarrow = \downarrow A \circ B\downarrow.$$

Kuna suvaliste osaliselt järjestatud hulkade korral on nii ordinaalsumma kui ka ordinaalkorrutis assotsiatiivsed, siis võib ordinaalarvude liitmist ja korrutamist defineerida ka suvalise liidetavate või tegurite arvu puhul.

Nüüd võime leida ordinaalarvud, mis vastavad käesoleva punkti alguses vaadeldud neljale hulgale. Need on ω, ω^*, π ja $\omega + \omega$. Lõpmatu ordinaalarvude seeria, mida me eespool nimetasime, moodustavad järgmised ordinaalarvud:

$$\omega^*,\ \omega^* + \omega^*,\ \omega^* + \omega^* + \omega^*,\ \ldots$$

Teise lõpmatu seeria moodustavad ordinaalarvud

$$\omega + 1,\ \omega + 2\ \ldots,\ \omega + n,\ \ldots,$$

mis vastavad järgmistele mitteisomorfsetele järjestatud hulkadele:

$$1, 2, 3, 4, \ldots, \overline{1},$$
$$1, 2, 3, 4, \ldots, \overline{1}, \overline{2},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$1, 2, 3, 4, \ldots, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Selle seeria jätkamisel saame järgmise ordinaalarvude rea

$$\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2,\ \ldots,\ \omega + n,\ \ldots,$$
$$\omega + \omega,\ \omega + \omega + 1,\ \omega + \omega + 2,\ \ldots,\ \omega + \omega + n,\ \ldots,$$
$$\omega + \omega + \omega,\ \omega + \omega + \omega + 1,\ \ldots,\ \omega + \omega + \omega + n,\ \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\underbrace{\omega + \omega + \omega + \ldots + \omega}_{n \text{ korda}},\ \underbrace{\omega + \omega + \omega + \ldots + \omega}_{n \text{ korda}} + 1,\ \ldots.$$

Analoogilisi lõpmatuid ordinaalarvude ridu võib konstrueerida ordinaalarvude ω^* või π abil.

Kõik ordinaalarvud, mis vastavad loenduvatele hulkadele, moodustavad kontinuaalse võimsusega hulga. See tähendab muuseas seda, et naturaalarvude hulga erinevaid lineaarseid järjestusi on niisama palju kui erinevaid reaalarve.

Kuna operatsioon $\oplus$ oli osaliselt järjestatud hulkade korral mittekommutatiivne, siis ka ordinaalarvude liitmine ei tarvitse olla kommutatiivne. Selles, et olukord on tõepoolest niisugune, võib veenduda otseselt. Näiteks: $\omega^* + 5 \neq 5 + \omega^*$, kuna $\omega^* + 5$ vastab järjestatud hulgale

$$\ldots, 4, 3, 2, 1, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5} \text{ ehk } \ldots, 9', 8', 7', 6', 5', 4', 3', 2', 1',$$

nii et $\omega^* + 5 = \omega^*$, aga $5 + \omega^*$ vastab viimase järjestatud hulgaga mitteisomorfsele hulgale, $\ldots, \overline{5}, \overline{4}, \overline{3}, \overline{2}, \overline{1}, \ldots, 5, 4, 3, 2, 1$.

Ka ordinaalarvude korrutamine on mittekommutatiivne. Näiteks $\omega 2 = \downarrow\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), \ldots\}\downarrow = 2 + 2 + 2 \ldots = \omega \neq 2\omega = \downarrow\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \ldots, (2, 1), (2, 2), (2, 3), \ldots\}\downarrow = \omega + \omega$. Üldiselt:

$$\omega n = n + n + n + \ldots = \omega \neq n\omega = \underbrace{\omega + \omega + \ldots + \omega}_{n \text{ liidetavat}}.$$

Distributiivsuse seadus ordinaalarvude jaoks üldiselt ei kehti, õigemini, kehtib ainult n.-ö. parempoolne distributiivsus, s. o.

$$(\varphi + \psi)\chi = \varphi\chi + \psi\chi,$$

kuid vasakpoolne distributiivsus ei tarvitse kehtida. Näiteks

$$3(\omega + 2) = (\omega + 2) + (\omega + 2) + (\omega + 2) = \omega + (2 + \omega) + (2 + \omega) + 2 = \omega + \omega + \omega + 2 = 3\omega + 2.$$

Samal ajal aga

$$3\omega + 3 \cdot 2 = 3 + 3 + 3 + \ldots + (3 + 3) = 3\omega + 6.$$

Kuid teise tegurite järjekorra puhul

$$(\omega + 2)3 = 3 + 3 + 3 + \ldots + 3 + 3 = \omega + 6$$

ja

$$\omega 3 + 2 \cdot 3 = 3 + 3 + 3 + \ldots + 2 \cdot 3 = \omega + 6.$$

Ülesandeid.

48. Leida järgmistele järjestatud hulkadele vastavad ordinaalarvud:

$\underbrace{1, 2, \ldots}, \bar{1}, \bar{2};$

$\underbrace{1, 2, \ldots}, \underbrace{\ldots, \bar{2}}\ \bar{1};$

$\bar{1}, \bar{2}, \underbrace{\ldots, 2}, 1,$

kus loogeliste sulgudega on näidatud kõikidest naturaalarvudest koosnev hulk.

49. Olgu φ ja ψ ordinaalarvud. Kuidas avaldub φ ja ψ kaudu $(\varphi + \psi)^*$ ja $(\varphi\psi)^*$?

PARADOKSID HULGATEOORIAS

Möödunud sajandi lõpul Georg Cantori poolt loodud hulgateooriat, millega me siin tutvusime, nimetatakse tänapäeval naiivseks hulgateooriaks. Niisugune nimetus on seotud asjaoluga, et hulgateooria meetodid ja põhimõisted ei olnud tema looja poolt küllaldaselt formaliseeritud ja aksiomatiseeritud ning seetõttu jäid teooria üldloogilised alused lünklikeks. Et sellest võib tuleneda ebameeldivusi, selgus juba üsna pea. Nimelt avastati hulgateoorias 1895. aastast peale üksteise järele mitu nn. paradoksi ehk vastuolulist väidet.

Mitmed paradoksidest näitasid, et mõistet hulk on seni liiga vabalt käsitletud ja et on olemas niisugused objektide kogud, mis ei moodusta hulka.

Ühe siinjuures tekkiva paradoksi avastas 1899. aastal Cantor ise. Ta vaatles hulka K, mille elementideks on kõikvõimalikud hulgad (K kaasa arvatud). Hulga K kõikide alamhulkade hulk A peab kuuluma alamhulgana hulka K ja seega omama mitte suuremat võimsust kui $|K|$. Kuid teiselt poolt on A võimsus $2^{|K|}$, mis on tunduvalt suurem kui K võimsus. Selles seisabki Cantori poolt avastatud vastuolu.

Seda tüüpi paradokse õnnestub tänapäeval vältida tänu hulgateooria rangele formaliseerimisele. Nimelt konstrueeritakse nüüd hulgateooria niisuguse aksiomaatika alusel, mille kohaselt elementide kogud moodustavad hulki, aga hulkade kogud ei ole hulgad, vaid teist liiki objektid, mida nimetatakse klassideks. Klasside kogud ei kujuta omakorda mitte klasse, vaid jällegi uusi objekte jne. Niimoodi tekib klasside hierarhia ehk astmestik, mis võimaldabki vältida Cantori ja mõningaid teisi paradokse. Kuid sel kujul muutub hulgateooria küllaltki keeruliseks, mis oluliselt raskendab tema kasutamist, seepärast tarvitatakse matemaatikas ka tänapäeval naiivset hulgateooriat. Igatahes ei kavatse matemaatikud loobuda hulgateooriast ning nendest eelistest, mida toob hulgateoreetilise mõtlemisviisi rakendamine. «Keegi ei suuda ajada meid välja paradiisist, mille on loonud meile Cantor,» ütles kord D. Hilbert.

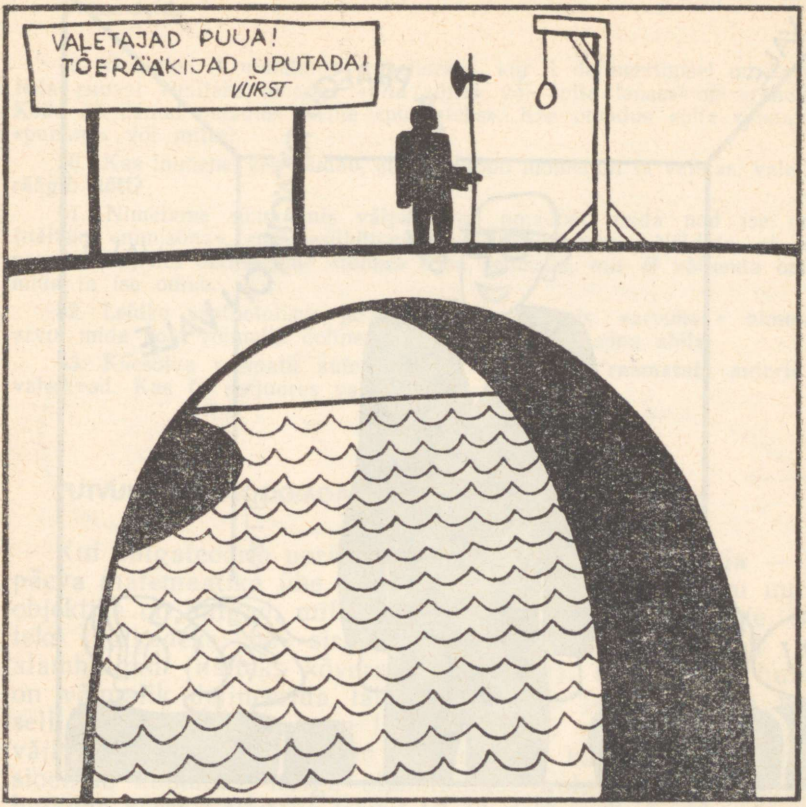
Teiselt poolt selgus paradokside uurimisel, et enamikul neist ei ole mitte niivõrd matemaatiline kui just üldloogiline iseloom ja seepärast pole kõik vastuolud kõrvaldatavad puhtmatemaatiliste vahenditega(uued definitsioonid, range tõestuskäik jne.) Lähemalt võib selle küsimuse kohta lugeda teisest peatükist.

Ajalooliselt esimesena avastati nn. *Russelli paradoks*. See on järgmine.

Nimetame «headeks» hulkadeks niisuguseid hulki, mis ei ole iseenda elementideks (näiteks raamatute hulk raamatukogus) ning vaatleme kõikide «heade» hulkade hulka H. Paradoksini jõuame, kui esitame küsimuse: kas H on «hea» hulk? Tõepoolest, kui me oletame, et H on «hea», siis peab ta kuuluma iseendasse (H on kõikide «heade» hulkade hulk), mis on vastuolus tema headusega. Kui aga H ei ole «hea», s. t. kui ta ei tohi kuuluda vaadeldud kõikide «heade» hulkade hulka H, siis peab ta olema «hea», sest ta ei sisalda elemendina iseennast.

Selle paradoksi puhtloogiline iseloom saab ilmseks, kui vaadelda temaga tihedalt seotud antiikajast tuntud loogilisi paradokse.

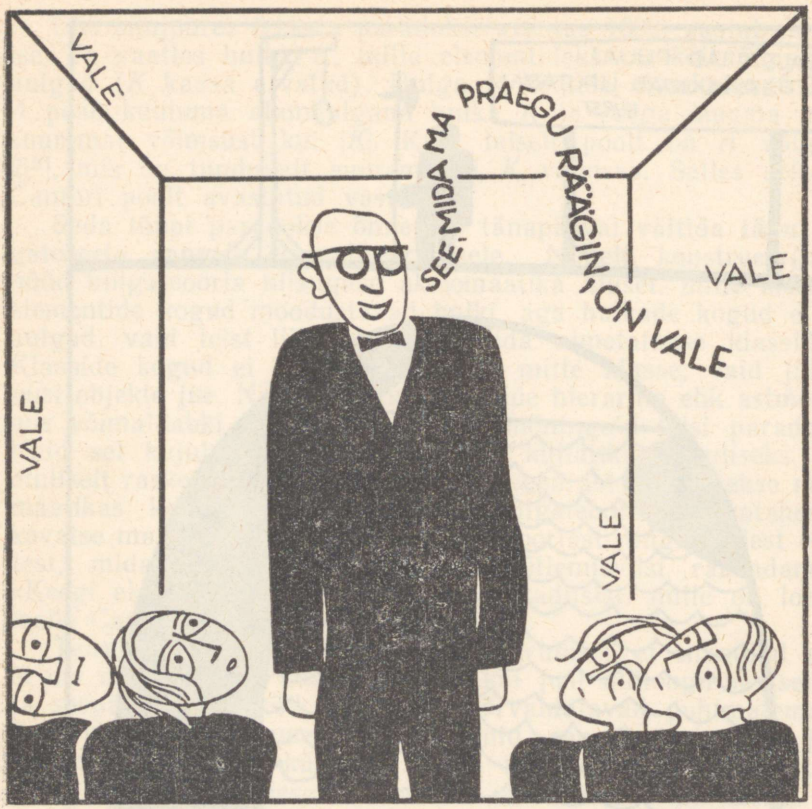
Esimene neist on tuntud *valetaja paradoksi* nime all. Kui inimene ütleb: «Antud momendil ma valetan,» kas räägib ta siis tõtt või mitte? Selgub, et ta ei tee ei ühte ega teist. Nimelt kui oletada, et ta valetab, siis järeldub sellest, et ta räägib tõtt (ta väidab ju just seda, et ta valetab). Kui aga oletada, et ta räägib tõtt, siis on lause «antud momendil ma valetan» väär.



Joonis 44. Kuidas pääseda üle silla?

Teine niisugust laadi paradoks on tuntud *habemeajaja paradoksi* nime all: kas ajab enda habet habemeajaja, kelle elukutseks on ajada habet neil inimestel, kes ise endal habet ei aja? Ka antud korral viivad mõlemad oletused — habemeajaja ajab endal habet ja habemeajaja ei tee seda — vastuolule.

Paradoksaalseks osutus ka ühe saksa vürsti legendaarne käsk, mis keelas temale kuuluva silla kasutamise ilma vürsti loata ning määras keelust üleastujale karistuseks ülespoomise või uputamise, olenevalt sellest, kas süüdlane ütleb tõese või väära lause. Legendis väidetakse, et keegi kaval talupoeg käis pidevalt üle selle silla ning iga kord, kui sõdurid said ta kätte, ütles talupoeg neile: «Nüüd te uputate mu ära!» ning sõdurid ei saanud vürsti käsku täita, sest kui nad oleksid poonud talu-



Joonis 45. Kas see kirjanik valetab või räägib tõtt?

poja üles, siis selgunuks, et ta valetas, mille eest aga pidi uputama; kui sõdurid oleksid ta uputanud, siis osutunuks öeldud lause tõeseks; tõese lause korral aga pidi süüdlane üles poodama.

Hulgateoreetiliste paradokside avastamine ja uurimine andis väga suure tõuke matemaatika arengule meie sajandi esimesel poolel. Tulemusena hakati tähelepanu pöörama matemaatika aluste uurimisele, matemaatika, loogika ja tegelikkuse vahekordade selgitamisele. Juba see, et nende küsimustega tegelesid niisugused tuntud matemaatikud, loogikud ja filosoofid, nagu Cantor, Hilbert, Russell, Brauer, Heiting, Gödel ja teised, rõhutab nende tähtsust tänapäeva matemaatika jaoks. Uurimused selles suunas jätkuvad praegugi.

49. Omadust A nimetame «roheliseks», kui A defineerimisel on kasutatud teda ennast (näiteks omadus «olla sõna» või «olla lause» on «rohelised»). Kõiki ülejäänud omadusi loeme «punasteks». Kas omadus «olla «punane» on «punane» või mitte?

50. Kas inimene, kes väidab, et möödunud momendil ta valetas, valetab või räägib tõtt?

51. Nimetame sõnu, mis väljendavad omadust, mida nad ise omavad (näiteks «nimisõna», «mitmesilbiline» jne.), «vedelateks». Näidata, et jõuame paradoksini, kui defineerime «tahke» sõna sellisena, mis ei väljenda omadust, mida ta ise omab.

52. Leidke vastuolulisus järgmises definitsioonis: «arvuks r nimetatakse arvu, mida pole võimalik defineerida vähem kui 20 sõna abil».

53. Käesolva raamatu autor väidab, et kõikide raamatute autorid alati valetavad. Kas ta seejuures valetab või räägib tõtt?

TUTVUME TOPOLOOGIAGA

Kui hulgateooria uurib suvalisi hulki, siis topoloogia — tänapäeva matemaatika ühe moodsama ja huvitavama haru uurimisobjektiks on hulgad, milles omab mõtet läheduse mõiste. Sellisteks hulkadeks on sirge, tasand, ruum ja paljud nende alamhulgad (näiteks kõverad ja pinnad). Ka arvude hulkades on võimalik defineerida läheduse mõiste ja teha seda näiteks selliselt: arvud a ja b on lähedased, kui vahe $a-b$ on küllalt väike. Läheduse mõiste on defineeritav ka vektorite ja funktsioonide hulkades, hulga alamhulkade hulgas ja paljude teiste hulkade korral. Näiteks lõigul $[0, 1]$ defineeritud pidevate funktsioonide hulgas võib lugeda, et funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ on lähedased, kui arv

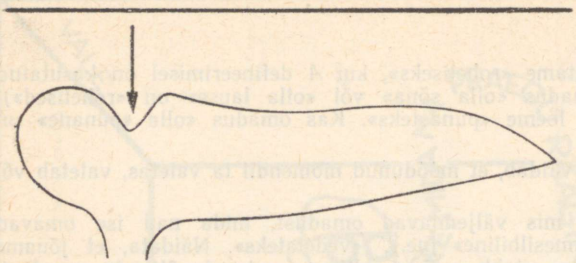
$$\sqrt{[f(0)-g(0)]^2+\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right)-g\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2+[f(1)-g(1)]^2}$$

on küllalt väike.

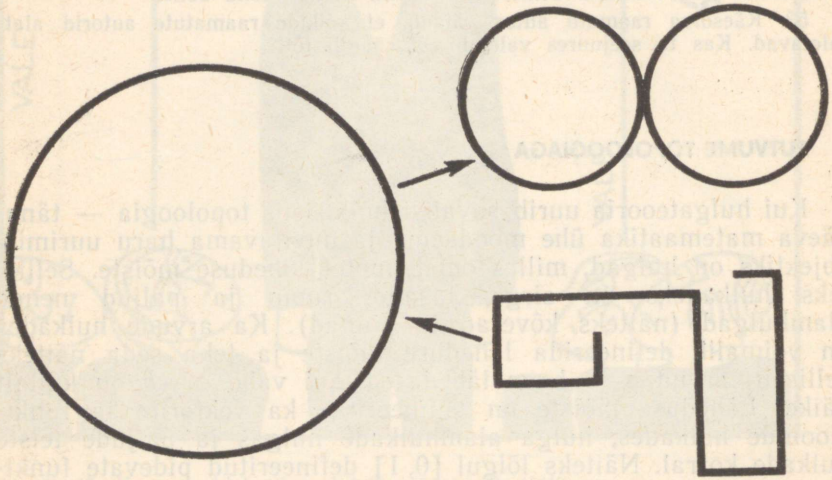
Me kasutame siin kogu aeg väljendit «küllalt väike». Kuigi sellel mõistel võiks üksikasjalisemalt peatuda, ei hakka me seda tegema, et lugejat mitte üle koormata keeruliste definitsioonidega. Ütleme vaid, et topoloogias leiab ka mõiste «küllalt väike» matemaatiliselt range käsitluse.

Teine topoloogia iseloomulik külg seisab selles, et suvaliste teisenduste asemel vaadeldakse siin ainult nn. pidevaid teisendusi, suvaliste üksüheste teisenduste asemel aga nn. topoloogilisi teisendusi. Peatumegi nende mõistete selgitamisel.

Hulga teisendust nimetatakse pidevaks, kui selle teisenduse korral teisenevad lähedased punktid samuti lähedasteks punktideks. Näitlikult võib seda mõista selliselt, et pideva teisenduse



Joonis 46. Sirge topoloogiline teisendus.



Joonis 47. Pidevad mittetopoloogilised teisendused.

korral ei tohi toimuda hulkade katkirebenemist. Pidevad on näiteks teisendused, mis on kujutatud joonistel 46—48. Esimesel neist on näidatud sirge pidev teisendus, viimasel aga ringjoone mitmed pidevad teisendused. Nagu nähtub joonisel 47 toodud teisendusest, võib pideva teisenduse korral toimuda hulga n.-ö. kokkukleepumine, mille puhul kaugel asuvad punktid teisenevad lähedasteks punktideks. Joonisel 49 on esitatud pidev teisendus, mille korral ei kleepu kokku mitte enam üksikud punktid, vaid terved lõpmatud alamhulgad.

Topoloogiliseks teisenduseks (see mõiste on topoloogias üks tähtsamaid) nimetatakse niisugust üksühest teisendust, mis on ise pidev ja mille pöördteisendus on samuti pidev. Kui oletada, et topoloogias vaadeldud hulgad (kõverad, pinnad jne.) on tehtud õhukesest elastsest kilest, mida võib lihtsalt ja kuitahes

palju deformeerida, siis võib topoloogilist teisendust endale näitlikult ette kujutada sellise pideva deformatsioonina (venitusena, kokkusurumisena jms.), mille puhul ei toimu ei katkirebenemist ega kokkukleepumist (kui teisenduse puhul toimub kokkukleepumine, pole selle teisenduse pöördteisendus pidev). Joonistel 46 ja 48 kujutatud teisendused pole pidevad. Seevastu joonistel 47 ja 49 on just tegemist pidevate teisendustega.

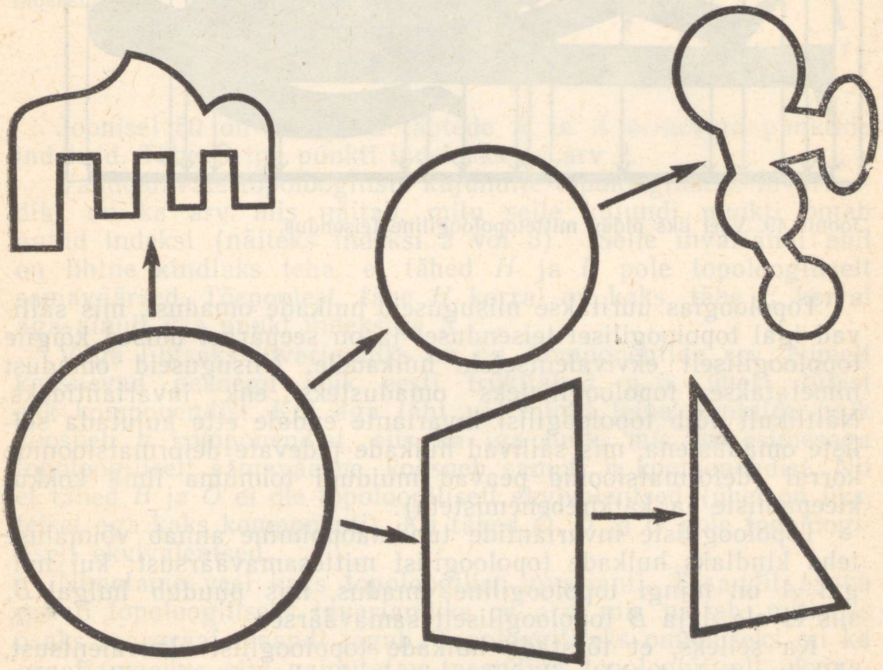
Me ütleme, et kaks hulka (näiteks kaks geomeetrilist kujundit) on topoloogiliselt samaväärsed ehk ekvivalentsed, kui leidub niisugune topoloogiline teisendus, mis teisendab ühe hulga (kujundi) teiseks. Topoloogia seisukohalt ei erine topoloogiliselt samaväärsed hulgad millegi poolest üksteisest. Neid samastatakse teineteisega täpselt niisamuti, nagu samastatakse geomeetrias võrdseid kolmnurki või aritmeetikas võrdseid arve.

Topoloogiliselt ekvivalentseteks kujunditeks on näiteks ringjoon, kolmnurk, ruut, trapets ja üldse iga hulknurk (vt. joonis 48). Topoloogiliselt ekvivalentsed on ka tähed

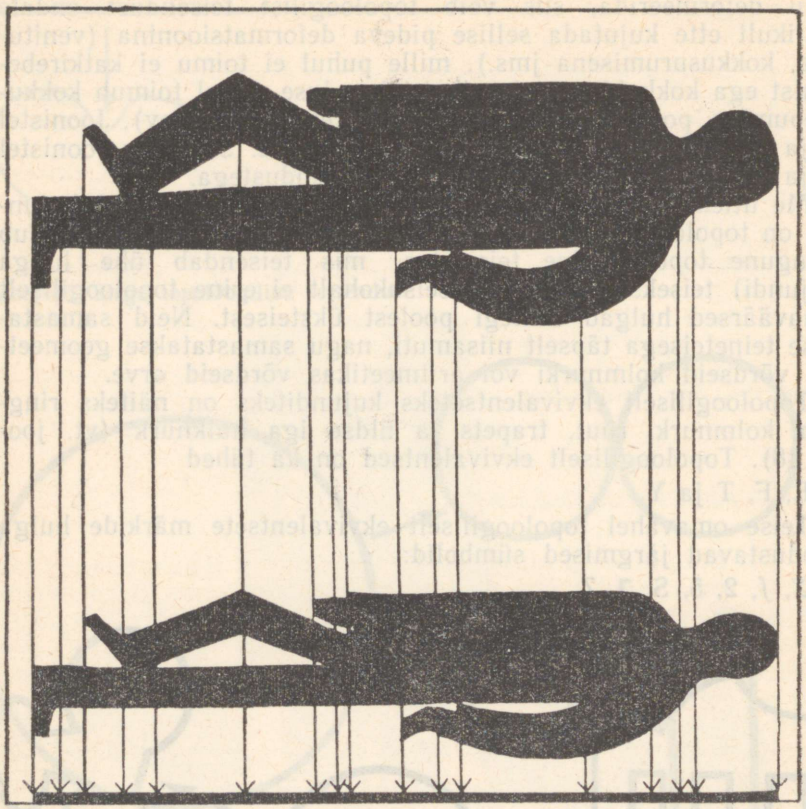
E, F, T ja Y.

Teise omavahel topoloogiliselt ekvivalentsete märkide hulga moodustavad järgmised sümbolid:

Σ, $\int$, 2, 5, S, ⅂, Z.



Joonis 48. Ringjoone topoloogilised teisendused.



Joonis 49. Veel üks pidev mittetopoloogiline teisendus.

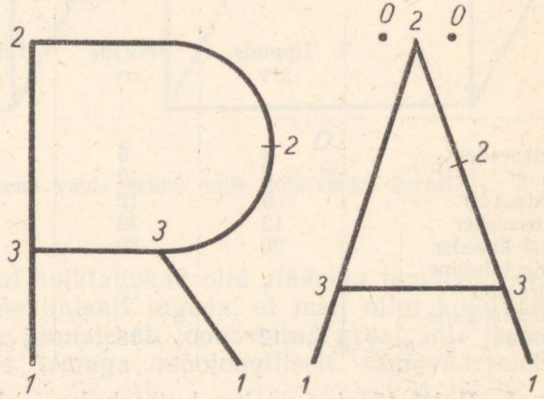
Topoloogias uuritakse niisuguseid hulkade omadusi, mis säilivad igal topoloogilisel teisendusel ja on seepärast ühised kõigile topoloogiliselt ekvivalentsetele hulkadele. Niisuguseid omadusi nimetatakse topoloogilisteks omadusteks ehk invariantideks. Näitlikult võib topoloogilisi invariante endale ette kujutada selliste omadustena, mis säilivad hulkade pidevate deformatsioonide korral (deformatsioonid peavad muidugi toimuma ilma kokkukleepumiste ja katkirebenemisteta).

Topoloogiliste invariantide tundmaõppimine annab võimaluse teha kindlaks hulkade topoloogilist mittesamaväärsust: kui hulgal A on mingi topoloogiline omadus, mis puudub hulgal B, siis ei ole A ja B topoloogiliselt samaväärsed.

Ka selleks, et tõestada hulkade topoloogilist ekvivalentsust, võib kasutada topoloogilisi invariante, kuid seejuures mitte enam üksikuid invariante, vaid nn. täielikke invariantide süsteeme,

s. o. selliseid topoloogiliste omaduste süsteeme, kus kaks isesugust hulka, mille korral on täidetud kõik selle süsteemi omadused, osutuvad topoloogiliselt samaväärseteks.

Tutvume mõningate lihtsamate topoloogiliste invariantidega. Näiteks kujundite puhul, mis koosnevad üksikutest punktidest ja kõverate kaartest (sellisteks kujunditeks on kõik tähed, igasugused joonised ja antud raamatus toodud mitmesugused diagrammid), on topoloogiliseks invariandiks punkti nn. indeks — arv, mis näitab, mitu vaadeldava kujundi kaart väljub sellest punktist.



Joonis 50. Punktide indeksid.

Joonisel 50 on märgitud tähtede *R* ja *Ä* erinevate punktide indeksid. Tähe *O* iga punkti indeksiks on arv 2.

Vaadeldavate topoloogiliste kujundite topoloogiliseks invariandiks on ka arv, mis näitab, mitu selle kujundi punkti omab antud indeksi (näiteks indeksi 2 või 3). Selle invariandi abil on lihtne kindlaks teha, et tähed *H* ja *E* pole topoloogiliselt samaväärsed. Tõepoolest, tähe *H* korral on kaks, tähe *E* korral aga ainult üks punkt indeksiga 3.

Väga lihtsaks invariandiks on nn. komponentide arv. Nimelt koosnevad peaaegu kõik eesti trükitähed n.-ö. ühest tükist ehk komponendist. Kui aga täht või mingi teine punktide hulk koosneb *n* komponendist, siis ka iga hulk, mis on esimesega topoloogiliselt samaväärne, koosneb samuti *n* komponendist. Nii et tähed *B* ja *Õ* ei ole topoloogiliselt ekvivalentsed (ühel on üks, teisel aga kaks komponenti). Ka tähed *Ö*, *Õ* ja *O* pole topoloogiliselt ekvivalentsed.

Nimetame veel kaks topoloogilist invarianti. Tasandil asuva graafi topoloogiliseks invariandiks on arv, mis näitab, mitmeks osaks see graaf tasandi jagab. Topoloogiliseks omaduseks on ka graafi omadus olla paigutatav tasandiga topoloogiliselt ekvivalentsele pinnale.

Väga oluline on hulktahukate ja teiste pindade topoloogiline invariant, mille avastas ja mille invariantsuse tõestas juba L. Euler. Ta pani tähele, et korrapäraste hulktahukate (tetraeeder, kuup, oktaeeder, ikosaeeder ja dodekaeeder) ning paljude teiste hulktahukate korral on tippude ja tahkude arvu summa alati kahe võrra suurem kui servade arv. Et see tõepoolest nii on, selles veendub lugeja pärast tutvumist järgmise tabeliga, milles on toodud korrapäraste hulktahukate (joonised 130—134) ja mõningate teiste hulktahukate (vt. joonised 127, 129) tippude, servade ja tahkude arvud.

	Tippude arv	Servade arv	Tahkude arv	Tippude ja tahkude arvude summa
Tetraeeder	4	6	4	8
Kuup	8	12	6	14
Oktaeeder	6	12	8	14
Ikosaeeder	12	30	20	32
Dodekaeeder	20	30	12	32
Kuuetahuline püramiid	7	12	7	14
Kuuetahuline prisma	12	18	8	20

L. Euler tõestas, et iga hulktahuka jaoks, mille pind on topoloogiliselt ekvivalentne sfääriga (kõik vaadeldud hulktahukad on niisugused; et selles veenduda, asetage igaüks neist suure sfääri sisse ning projekteerige hulktahukas mõnest sisepunktist sfäärile — tekib topoloogiline teisendus) ja mille iga tahk on topoloogiliselt ekvivalentne ringiga, on tippude arv B, servade arv S ja tahkude arv T omavahel seotud järgmiselt:

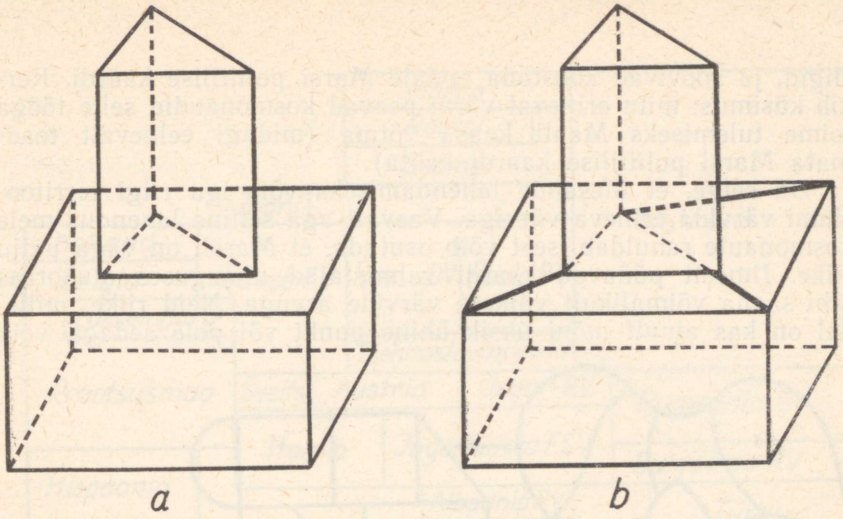
$$B - S + T = 2.$$

Et ülalvaadeldud hulktahukate korral oli tõepoolest iga tahk topoloogiliselt samaväärne ringiga, selles on lihtne veenduda. Et aga see tingimus on tõepoolest tarvilik viimase seose kehtimiseks, seda näitab joonisel 51, *a* kujutatud hulktahukas. Siin on $B = 14$, $S = 21$ ja $T = 10$, nii et

$$B - S + T = 14 - 21 + 10 = 3,$$

mitte aga 2. See on tingitud vaadeldava hulktahuka ühe tahu topoloogilisest ekvivalentsusest mitte ringi, vaid tasandilise rõngaga. Kui mainitud tahk jaotada täiendavate servadega (joonisel 51, *b* on nad näidatud jämedate joontega) ringiga topoloogiliselt samaväärseteks piirkondadeks, siis rahuldab uus hulktahukas Euleri teoreemi eeldusi ning siis on ka

$$B - S + T = 14 - 24 + 12 = 2.$$



Joonis 51. Kas Euleri teoreemi väide kehtib selle hulktahuka korral?

Kuna kõik vaadeldud hulktahukad olid sfääriga topoloogiliselt samaväärsed, siis võime lihtsalt lugeda, et meil oligi kogu aeg tegemist sfääriga, mille pinnale oli joonestatud graaf, mis jaotab ringi lõplikuks arvuks temaga topoloogiliselt samaväärseteks aladeks.

Euleri teoreem väidab, et arv $B - S + T$, mida nimetatakse sfääri Euleri karakteristikaks, on sfääri topoloogiliseks invariandiks ja võrdub alati kahega, olenemata graafi keerukusest.

Ülesandeid.

54. Jaotage kõik eesti trükitähed omavahel topoloogiliselt samaväärsete tähtede rühmadeks.

55. Teostage samasugune analüüs hulga jaoks, mis koosneb kõikidest vene trükitähtedest.

56. Teostage analoogiline jaotus arvudest $1 \div 25$ koosneva hulga jaoks.

57. Arvutage Euleri karakteristik n-tahulise prisma ja n-tahulise püramiidi jaoks.

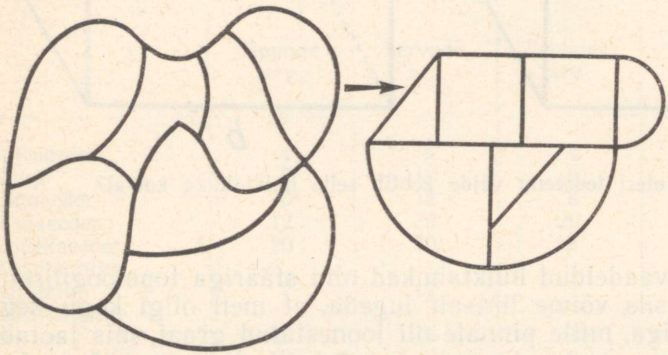
NELJA VÄRVI PROBLEEM

Huvitavad topoloogilised probleemid on seotud nn. topoloogiliste kaartide värvimisega. Eriti kuulus on nende probleemide seas tänapäevani lahendamata nelja värvi probleem.

Kujutame endale ette järgmist olukorda. Kosmonaudid on saabunud näiteks Marsile ning leiavad, et ka seal on olemas

riigid, ja soovivad koostada endale Marsi poliitilise kaardi. Kerkib küsimus: mitu erinevat värvi peavad kosmonaudid selle tööga toime tulemiseks Maalt kaasa võtma (midagi eelnevalt teadmata Marsi poliitilise kaardi kohta).

On selge, et ülesande lahendamiseks võib iga riigi territooriumi värvida erineva värviga. Vaevalt aga selline lahendus meie kosmonaute rahuldab, sest võib osutuda, et Marsil on väga palju riike. Ilmselt püüavad kaardi valmistajad niisuguses olukorras läbi saada võimalikult väikese värvide arvuga. Neid riike, milledel on kas ainult mõni üksik ühine punkt või pole sedagi, võib

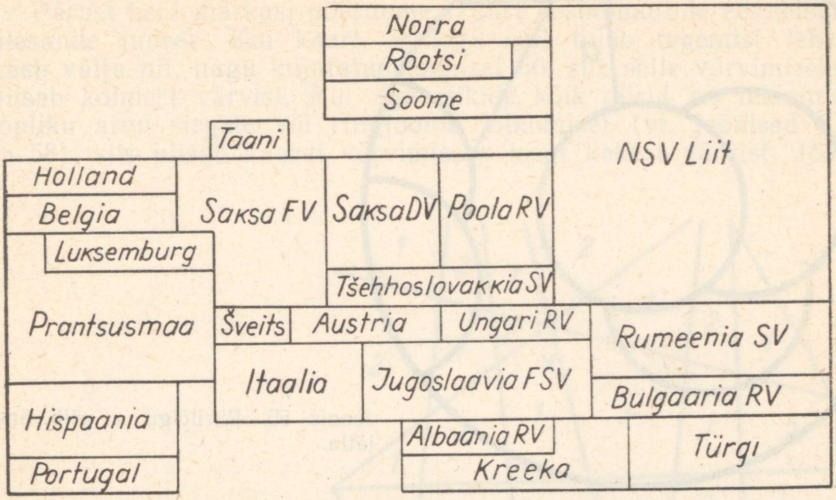


Joonis 52. Kaardi teisendamine topoloogilise teisenduse abil.

ju värvida ka ühe ja sama värviga. Kui veel lihtsustuseks eeldada, et iga riik koosneb ainult ühest osast, siis niimoodi saab erinevaid riike üksteisest täielikult eraldada. Seega võime küsimuse täpsustada: milline on erinevate värvide minimaalne arv, mille abil saab kaarti niiviisi värvida, et naaberriigid on erinevates toonides?

Üldisust kitsendamata võib eeldada, et vaadeldav kaart on joonistatud tasandile, sest iga kaart Marsi pinnal on mõne riigi sisepunktist projekteeritav selle punkti diametraalselt vastaspunktis võetud Marsi puutujatasandile. Sealjuures riik, milles fikseerisime projektsiooni tsentri, projekteerub tasandile «ookeanina», mis ümbritseb tekkinud kaardi ülejäänud osa. Kuid ka «ookeani» võib vaadelda riigina ning värvida see näiteks helesiniseks. Seega on arusaadav, et Marsi pinnale ja tasandile joonistatud kaartide värvimiseks on vaja ühepalju erinevaid värve.

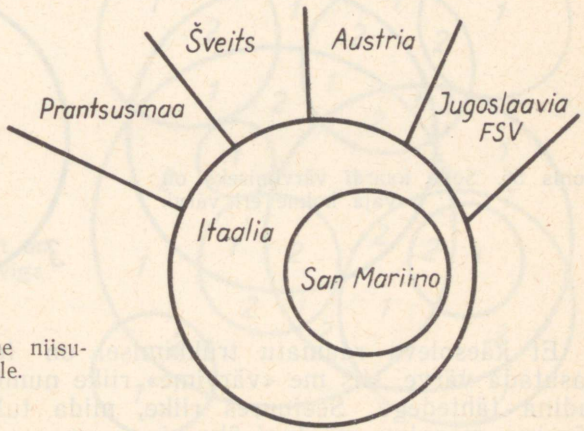
Niiviisi tasandile joonistatud kaarti nimetatakse topoloogiliseks kaardiks, rõhutades seda, et värvimise juures pole oluline üksikute riikide geomeetriline kuju, suurus, piirjoonte sirg- või kõverjoonelisus jms., mis topoloogiliste teisenduste korral võib muutuda, vaid ainult see, mitu naaberriiki on igal vaadeldaval



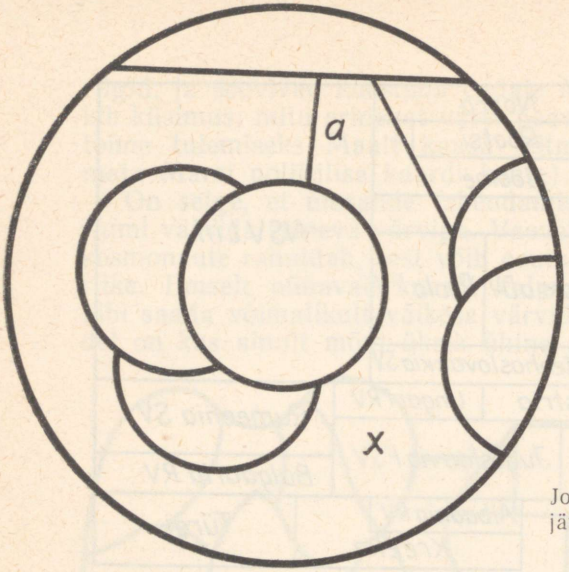
Joonis 53. Euroopa poliitiline kaart.

riigil ja milliseid servi (piirjooni) mööda ta nendega kokku puutub. Seepärast võime kaarti pidevalt deformeerida, pidades vaid silmas, et ei toimuks servade katkirebenemist ega kokkukleepumist. Seda me edaspidi teemegi, püüdes anda kaardile niisuguse kuju, et ta servad koosneksid sirglõikudest ja ringjoone kaartest (vt. joonis 52). Näiteks kõigile hästi tuntud Euroopa poliitilist kaarti võib pärast pidevaid deformatsioone esitada sel kujul, nagu näidatud joonisel 53 (mõned väikeriigid on kaardilt ära jäetud).

Edaspidi oletame, et topoloogiline kaart rahuldab mõningaid

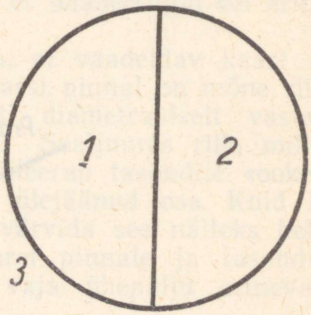


Joonis 54. Edaspidi me niisugust olukorda ei vaatle.



Joonis 55. Piirilõigu *a* võib ära jätta.

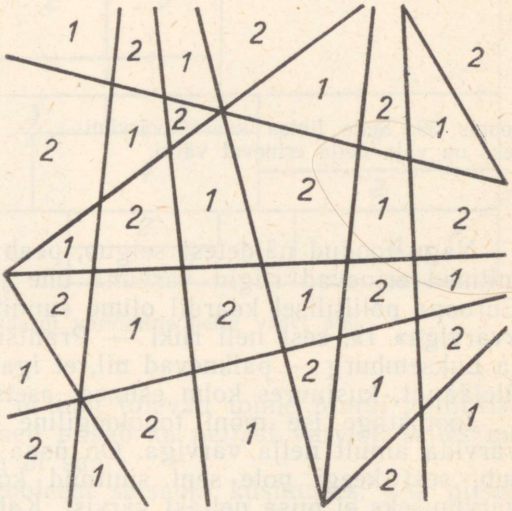
lihtsaid tingimusi. Oletame nimelt, et igal riigil on vähemalt kaks naaberriiki ja seega jätame vaatlusest välja olukorra, millal üks riik asetseb tervenisti teise sees, nagu see on näiteks San Mariino ja Itaalia puhul (joonis 54) (ilmselt ei ole niisugusel juhul sisemise riigi (San Mariino) värvimine mingiks probleemiks— meid rahuldab iga värv peale selle, millega on värvitud välimine riik (Itaalia)). Oletame veel, et ükski riik ei puutu iseennast, nagu seda on joonisel 55 riigi *X* puhul (võib ju iga sellise kaardi asendada teisega, millel kõik riigid on jäänud samadeks, ühine piirilõik *a* aga ära jäetud).



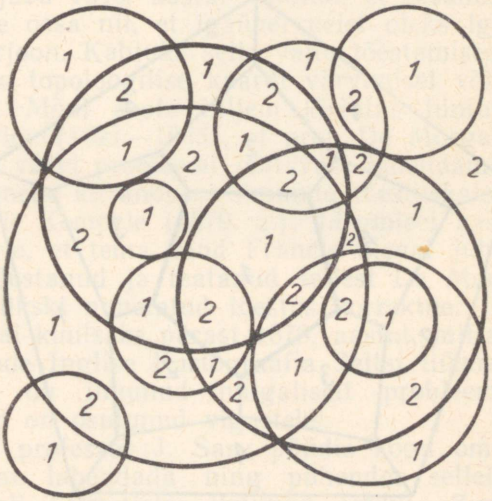
Joonis 56. Selle kaardi värvimiseks on vaja kolme eri värvi.

Et käesoleva raamatu trükkimisel on tehniliselt keeruline kasutada värve, siis me «värvime» riike numbritega või väikeste ladina tähtedega. Seejuures riike, mida tuleb värvida sama värviga, märgime muidugi ühe ning sama numbri või tähega.

Pärast neid märkusi pöördume tagasi kosmonautide ees seisva ülesande juurde. Kui kaart, millega neil tuleb tegemist teha, näeb välja nii, nagu kujutatud joonisel 56, siis selle värvimiseks piisab kolmest värvist. Kui aga riikide kõik piirid on tekkinud lõpliku arvu sirgete või ringjoonte lõikumisel (vt. joonised 57 ja 58), siis piisab kaardi värvimiseks isegi kahest värvist. Joo-

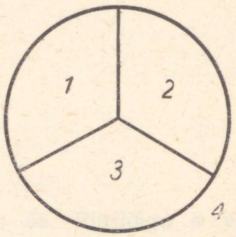


Joonis 57. Kahe värviga värvitud kaart.



Joonis 58. Ka see kaart on värvitav kahe värviga.

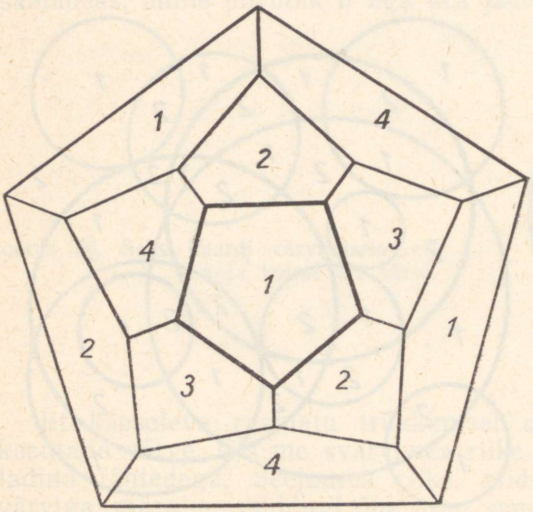
nisel 59 on seevastu esitatud lihtne kaart, mille värvimiseks läheb tarvis juba nelja erinevat värvi. Sama värvide arvuga saab läbi ka joonisel 60 toodud palju keerulisema kaardi korral (see kaart on saadud dodekaeedri projekteerimisel tasandile). Neljast värvist piisab samuti Euroopa poliitilise kaardi värvimiseks (vt. joonis 61).



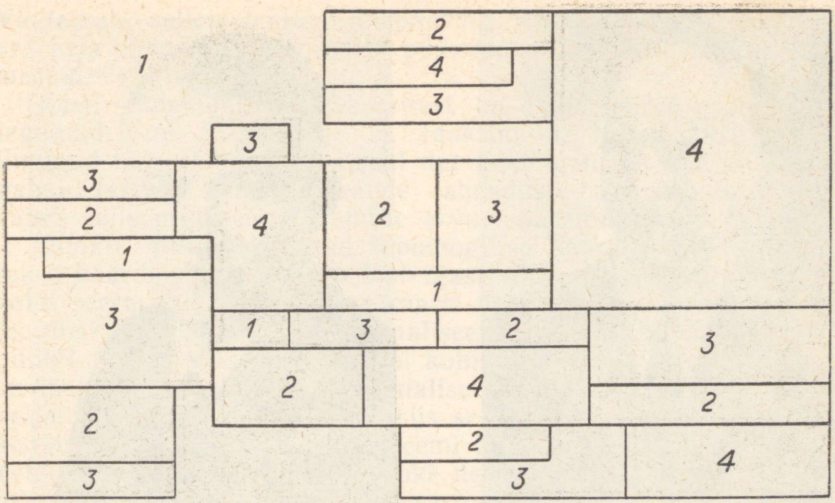
Joonis 59. Selle lihtsa kaardi värvimiseks on vaja nelja erinevat värvi.

Nagu toodud näidetest selgub, peab keeruliste kaartide puhul mitmed erinevad riigid värvima ühe ja sama värviga. Näiteks Euroopa poliitilisel kaardil olime sunnitud värvima Luksemburgi «värviga» 1», sest neli riiki — Prantsusmaa, Saksa FV, Belgia ja Luksemburg — paiknevad nii, et igaüks neist puudutab kolme ülejäänut, kusjuures kolm esimest asetsevad mere ääres.

Joonistage ise mõni topoloogiline kaart ning püüdke seda värvida ainult nelja värviga. On üsna kindel, et see teil õnnestub, sest keegi pole seni suutnud konstrueerida kaarti, mille värvimiseks ei piisa neljast värvist. Kahjuks pole aga ka kellelgi õnnestunud tõestada, et igasuguse kaardi värvimiseks tõepoolest piisab neljast värvist. Seega, kui kosmonaudid varustada viie



Joonis 60. Ka see kaart on värvitav nelja värviga.



Joonis 61. Euroopa poliitilise kaardi värvimine nelja värvi abil.

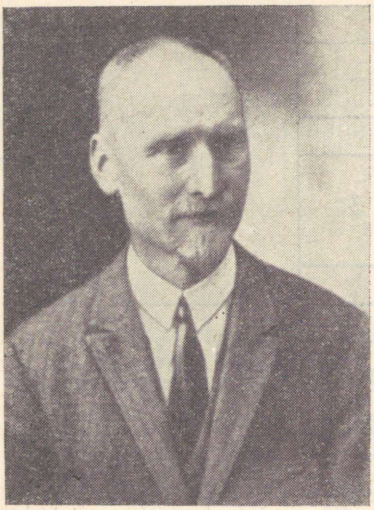
värviga, võib kindel olla, et nad tulevad toime Marsi poliitilise kaardi koostamisega. Et neil piisab ka neljast värvist, selles me esialgu päris kindlad olla ei saa.

Tuntud nelja värvi probleem seisabki küsimuses: kas piisab neljast erinevast värvist igasuguse topoloogilise kaardi värvimiseks?

On andmeid, mille kohaselt tuntud saksa geomeeter A.-F. Möbius (1790—1868) olevat juba 1840. aastal väitnud, et tasandit pole võimalik jagada viide ossa nii, et igaühel neist oleks iga ülejäänud osaga ühine piirjoon. Kahjuks selle väite tõestamisest aga veel ei järeldu, et iga topoloogilise kaardi värvimisel võib läbi saada nelja värviga. Mõni aasta hiljem kirjutas tuntud inglise matemaatik A. Cayley (1821—1895), et prof. De Morgan olevat talle teatanud nelja värvi probleemi jaatavast lahendamisest. Nelja värvi lause esimene kirjanduses ilmunud tõestuskatse kuulub saksa matemaatikule Kempele (1879. a.). Järgmisel aastal teatas Frederick Guthrie, et tema vend Francis olevat juba 1850. aastal selle lause tõestanud ja teatanud sellest De Morganile. Kahjuks ei olnud ükski nimetatud tõestus korrektne.

Nelja värvi probleem sai kuulsaks pärast 1879. aastat, millal Cayley tegi sellest ettekande Inglise Kartograafia Seltsi liikmetele. Sellest ajast saadik on ilmunud hulgaliselt probleemi «lahendusi», kuid kõik nad on osutunud vigasteks.

Tartu Riikliku Ülikooli professor J. Sarv püüdis kogu oma elu jooksul seda probleemi lahendada ning pühendas sellele 1927. aastal Tartu Ülikooli Toimetistes ilmunud artikli «Zum







Joonis 62 (*ülal vasakul*). Professor Jaan Sarv (1877—1954), esimene eesti rahvusest kõrgema haridusega matemaatik.

Joonis 63 (*ülal paremal*). Jüri Nuut (1892—1952) — esimene ENSV TA liige matemaatika alal.

Joonis 64. Professor Elmar Jaakson (1891—1964), esimene eestlane — matemaatikadoktor.

Beweis des Vierfarbensatzes» («Nelja värvi lause tõestuseks»). Hilisematel aastatel hoiatas ta väga sageli oma üliõpilasi, et nad ei kulutaks nelja värvi probleemi lahendamisele liiga palju jõudu ja aega. Umbes samasuguste soovitustega pöördub nooremate lugejate poole ka saksa professor Gerhard Ringel, kellelt on pärit tänapäeva parim nelja värvi probleemile ja selle üldistustele pühendatud monograafia «Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen» («Värvimisprobleemid pindadel ja graafidel»).

Vaatamata sellele leidub tänapäevalgi veel matemaatikahuvilisi, kes asja olemusse süvenemata püüavad probleemi elementaarsete meetoditega lahendada.

Eesti matemaatikaprofessoritest on nelja värvi probleemiga tegelnud veel J. Nuut ja H. Jaakson. J. Nuudi 1929. aastal ilmunud töös «Über die Anzahl der Lösungen der Vierfarbenaufgabe» («Nelja värvi ülesande lahenduste arvust») on antud valem selle probleemi lahendite arvu määramise jaoks.

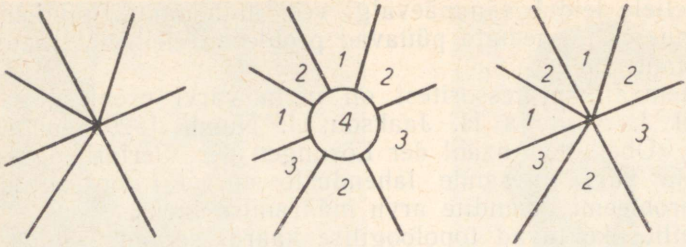
Punkti, milles kohtuvad topoloogilise kaardi servad, nimetatakse kaardi sõlmpunktiks. Kui igast sõlmpunktist väljub ainult kolm serva, siis nimetatakse kaarti normaalseks. Mistahes topoloogilist kaarti võib aga normaliseerida, ümbritsedes iga sõlmpunkti, millest väljub enam kui kolm serva, uue «riigiga», nagu on tehtud joonisel 65. Kui normaliseeritud kaardi jaoks on leitud nelja värvi probleemi lahend, siis sellest lähtudes saab otsekohe konstrueerida nelja värvi probleemi lahendi ka lähtekaardi jaoks (vt. joonis 65). Seepärast võibki nelja värvi probleemi käsitlemisel piirduda ainult normaalkaartidega. J. Nuudi ülalmainitud töös leidub muuseas väide, et ükski normaalkaart ei saa koosneda ainult kuusnurkadest ning et ei leidu normaalkaarti, mis ei sisalda ühtegi kolm-, neli- või viisnurka.

Kogu oma elu jooksul tegeles nelja värvi probleemiga ka prof. H. Jaakson. Ta tõestas oma 1961. aastal ilmunud töös «О решениях топологической задачи о четырех красках» («Nelja värvi topoloogilise ülesande lahenditest»), et kolm-, neli- ja viisnurkadest saab koostada vaid lõpliku arvu erinevaid normaalkaarte. Samuti tõestas ta, et iga normaalkaart, mis koosneb ainult viis- ja kuusnurkadest, sisaldab alati täpselt 12 viisnurka (vt. näiteks joonis 60).

Professor H. Jaakson on palju ära teinud nelja värvi probleemi populariseerimiseks Eesti NSV matemaatikute seas. Aastail 1957—1960 kirjutati tema juhendamisel Tartu Riiklikus Ülikoolis rida diplomitöid kaartide värvimise probleemi kohta.

Paljude matemaatikute uurimused olid pühendatud niisuguste probleemide leidmisele, mis, olles nelja värvi probleemist erinevalt sõnastatud, on temaga sisuliselt samaväärsed. Osa niisuguseid probleeme tekkis nelja värvi probleemi tõestuskatsetel. Nimelt toetusid paljud probleemi «tõestused» mingisugustele väidetele, mis tundusid nende tööde autoritele ilmsetena, kuid lähemal uurimisel selgus, et need «lihtsad» väited on samaväärsed vaadeldava ülikeerulise probleemiga. Mõningate niisuguste nelja värvi probleemi ekvivalentide sõnastused on toodud ülesannetes 58 ja 59.

Siinkohal peab mainima, et nelja värvi probleemiga samaväärsete probleemide püstitamine ei ole küsimust ennast kahjuks otsustavalt edasi viinud, sest ükski neist pole seni veel lahendatud.



Joonis 65. Kaardi normaliseerimine.

Ülesandeid.

58. Juba 1880. aastal näitas inglise teadlane P. G. Tait (1831—1901), et topoloogilise kaardi nelja värvi probleem on samaväärne järgmise kolme värvi probleemiga: kas on võimalik värvida normaalkaardi riikide servad kolme värviga nii, et igast sõlmpunktist lähtuvad servad oleksid värvitud igaüks eri värviga? Värvige niisugusel viisil Euroopa poliitilise kaardi servad.

59. On olemas ka kahe värvi probleeme, mis osutuvad samaväärseteks nelja värvi probleemiga. Üks neist formuleeritakse järgmiselt: kas saab värvida normaalkaardi sõlmpunktid «värvidega» $+1$ ja -1 nii, et iga riigi juurde kuuluvate sõlmpunktide «värvide summa» jaguks kolmega? Värvige niisugusel viisil Euroopa poliitilise kaardi sõlmpunktid.

60. Värvige nelja värviga Kesk- ja Lõuna-Ameerika poliitiline kaart. Tehke seda ka Aafrika ja Aasia poliitiliste kaartidega, lugedes ühe riigi üksikuid, teineteisest eraldatud osi (näiteks Pakistani korral) iseseisvateks riikideks.

VEEL KORD KAARTIDE VÄRVIMISEST

Huvitav oleks selgitada, missugused kaardid on värvitavad kahe ja kolme värviga. Nimetame mõned tulemused niisuguste kaartide puhul.

Me ütleme, et kaardi sõlmpunkti indeksiks on n, kui sellest sõlmpunktist väljub n vaadeldava topoloogilise kaardi serva (nagu me eespool mainisime, on punkti indeks tema topoloogiliseks invariandiks). On tõestatud järgmine teoreem: topoloogiline kaart on värvitav kahe värviga siis ja ainult siis, kui selle kaardi kõikide sõlmpunktide indeksid on paarisarvud.

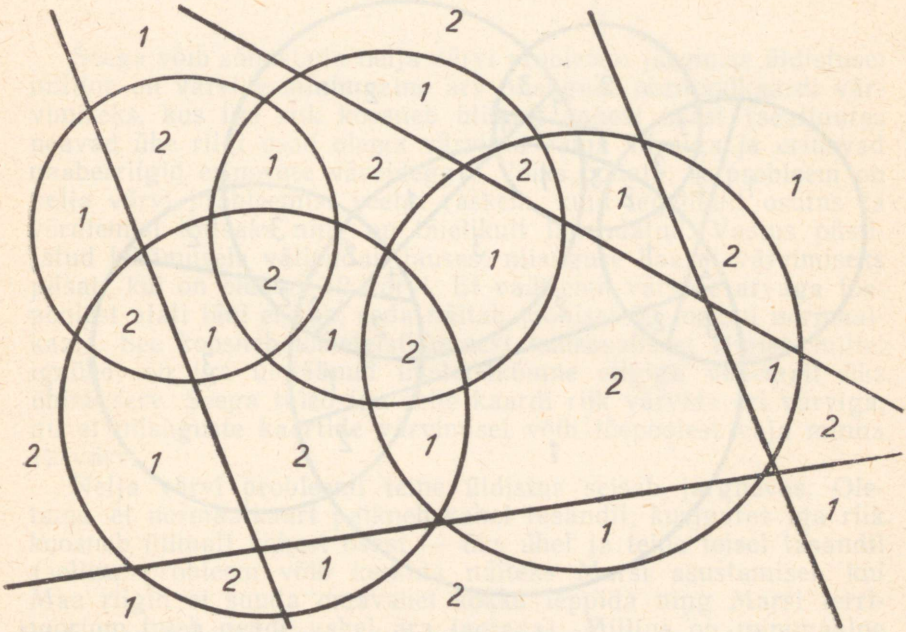
Nüüd on selge, miks piisas kahest värvist iga niisuguse kaardi värvimiseks, mis tekib kas sirgete või ringjoonte lõikumisel. Samal põhjusel võib väita, et kahe värviga on värvitav ka iga kaart, mis on moodustatud teatud arvu sirgete ja ringjoonte lõikumisel (vt. näiteks joonis 66).

Normaalkaarte, mis on värvitavad kolme värviga, kirjeldatakse

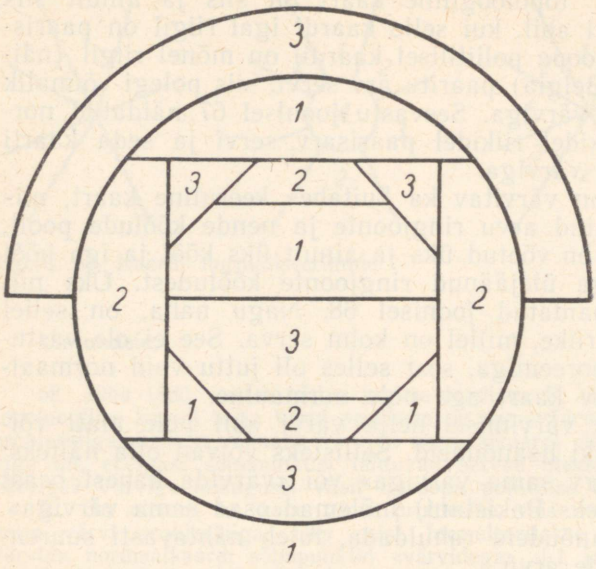
järgmise lause abil: topoloogiline kaart on siis ja ainult siis värvitav kolme värvi abil, kui selle kaardi igal riigil on paarisarv servi. Kuna Euroopa poliitilisel kaardil on mõnel riigil (näiteks Ungari RV ja Belgia) paaritu arv servi, siis polegi võimalik seda värvida kolme värviga. Seevastu joonisel 67 näidatud normaalkaardil on kõikidel riikidel paarisarv servi ja seda kaarti saab värvida kolme värviga.

Kolme värviga on värvitav ka kuitahes keeruline kaart, mis on moodustatud teatud arvu ringjoonte ja nende kõõlude poolt, kui igas ringjoones on võetud üks ja ainult üks kõõl ja iga kõõl lõikub ülimalt ühega ülejäänud ringjoonte kõõludest. Üks niisugune kaart on näidatud joonisel 68. Nagu näha, on sellel kaardil ka selliseid riike, millel on kolm serva. See ei ole vastuolus ülalmainitud teoreemiga, sest selles oli juttu vaid normaalkaartidest, vaadeldav kaart aga pole normaalne.

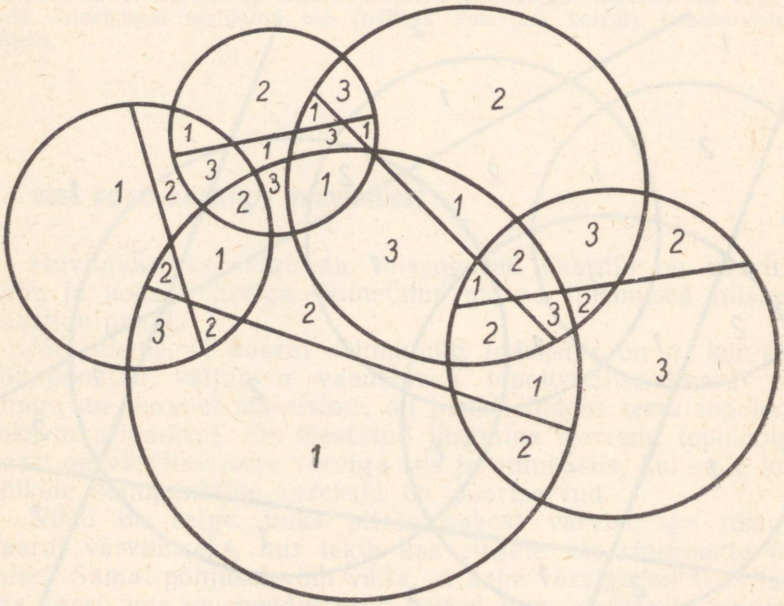
Poliitilise kaardi värvimisel nelja värvi abil pole alati võimalik rahuldada kõiki lisanõudeid. Sellisteks võivad olla näiteks: «värvida meri ja järv sama värviga» või «värvida kahest osast koosneva riigi (näiteks Pakistani) mõlemad osad sama värviga». Selleks, et neid lisanõudeid rahuldada, tuleb nähtavasti suurendada vajalike värvide arvu.



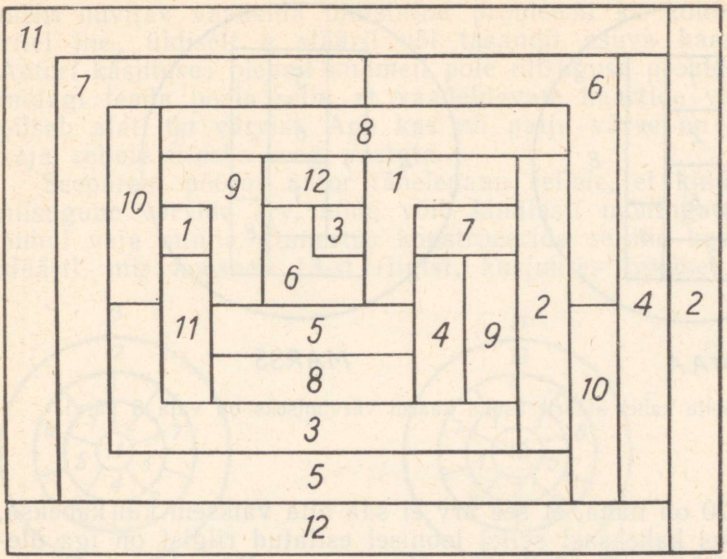
Joonis 66. Ka see kaart on värvitud kahe värviga.



Joon. 67. Selle kaardi igal riigil on paarisarv servi.



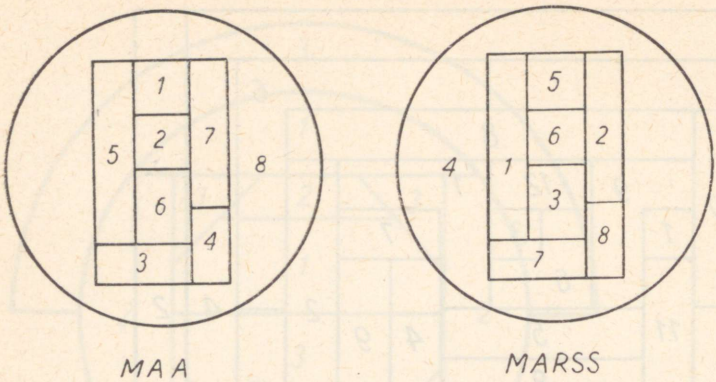
Joonis 68. Kolme värviga värvitav ringjoontest ja nende kõõludest moodustatud kaart.



Joonis 69. See kaart koosneb kaheteistkümnest kaheosalisest riigist ja iga kaks riiki on teineteisele naabreiks.

Seega võib sõnastada nelja värvi probleemi järgmise üldistuse: milline on värvide minimaalne arv niisuguse normaalkaardi värvimiseks, kus iga riik koosneb ülimalt kahest osast (sealjuures peavad ühe riigi osad olema värvitud sama värviga ja erinevad naaberriigid erinevate värvidega)? Võiks oodata, et probleem on nelja värvi probleemist veelgi raskem, kuid tegelikult osutus ta võrdlemisi lihtsaks ning on täielikult lahendatud. Vastus püstitatud küsimusele väljendub lauses: niisuguse kaardi värvimiseks piisab, kui on olemas 12 värvi. Et väiksema värvide arvuga tõepoolest alati läbi ei saa, seda näitab joonisel 69 toodud normaalkaart. See koosneb kaheteistkümnest kaheosalisest riigist, millel igaühel on iga ülejäänud üheteistkümne riigiga vähemalt üks ühine serv. Seega tuleb iga selle kaardi riik värvida eri värviga, nii et niisuguste kaartide värvimisel võib tõepoolest vaja minna 12 värvi.

Nelja värvi probleemi teine üldistus seisab järgnevas. Oletame, et normaalkaart paikneb kahel tasandil, kusjuures iga riik koosneb ülimalt kahest osast — üks ühel ja teine teisel tasandil (selline probleem võib kerkida näiteks Marsi asustamisel, kui Maa riigid ei suuda omavahel kokku leppida ning Marsi territoorium tuleb nende vahel ära jaotada). Milline on minimaalne värvide arv, mida võib vaja minna niisuguse kaardi värvimiseks?

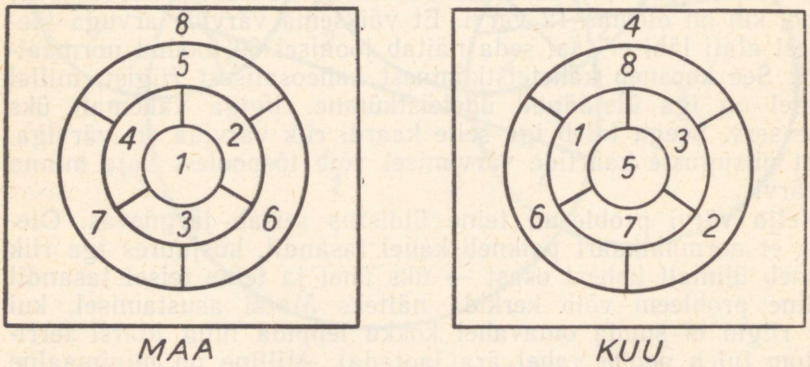


Joonis 70. Selle kahel sfääril asuva kaardi värvimiseks on vaja 8 värvi.

Jooniselt 70 on näha, et see arv ei saa olla väiksem kui kaheksa, sest igaühel kaheksast sellel joonisel esitatud riigist on iga ülejäänud riigiga vähemalt üks ühine serv. Käesoleva raamatu autoril õnnestus leida veel üks kaart kahel tasandil (või kahel sfääril), millel on sama omadus. See kaart on kujutatud joonisel 71.

Sõnastatud probleemi kohta on küll tõestatud, et kaheteistkümnest värvist piisab alati niisuguste kaartide värvimiseks, kuid rohkem pole sellest tänapäeval midagi teada. G. Ringeli arvates sobib arvudest 8, 9, 10, 11 ja 12 (mis võivad praeguste andmete kohaselt olla selle probleemi lahenditeks) kõige enam arv 8.

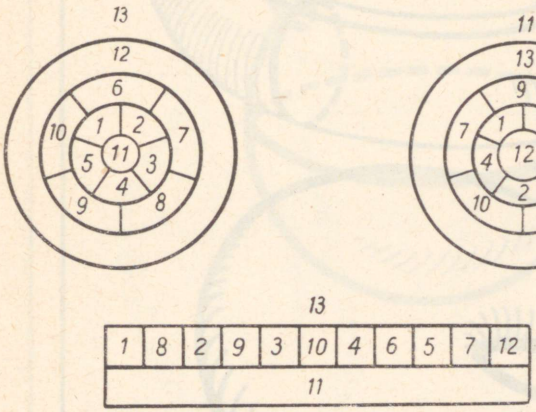
Kuna see nelja värvi probleemi üldistus osutub niisama raskeks või veelgi raskemaks probleemiks kui lähteprobleem, siis



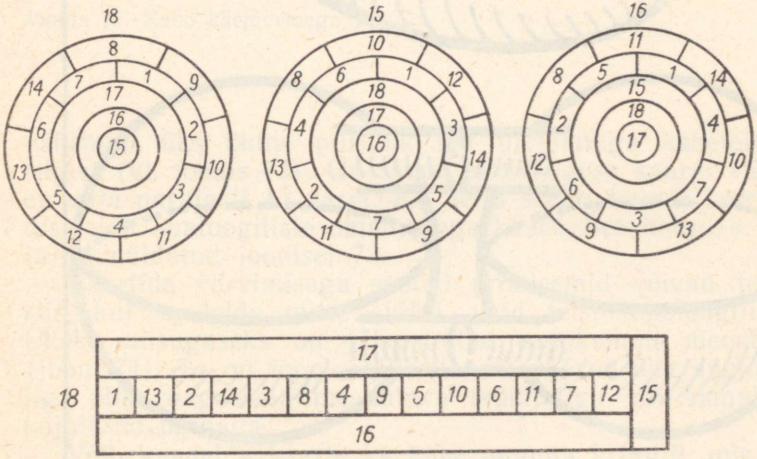
Joonis 71. Teine sama omadusega kaart.

oleks huvitav vaadelda üldistatud probleemi ka kolmel, neljal, viiel jne., üldiselt n sfääril või tasandil asuva kaardi jaoks. Autori käsutuses olevail andmeil pole niisuguse probleemi kohta midagi teada peale selle, et vaadeldavate kaartide värvimiseks piisab alati $6n$ värvist. Aga kas nii palju värve on tõepoolest vaja, sellele ei oska keegi vastata.

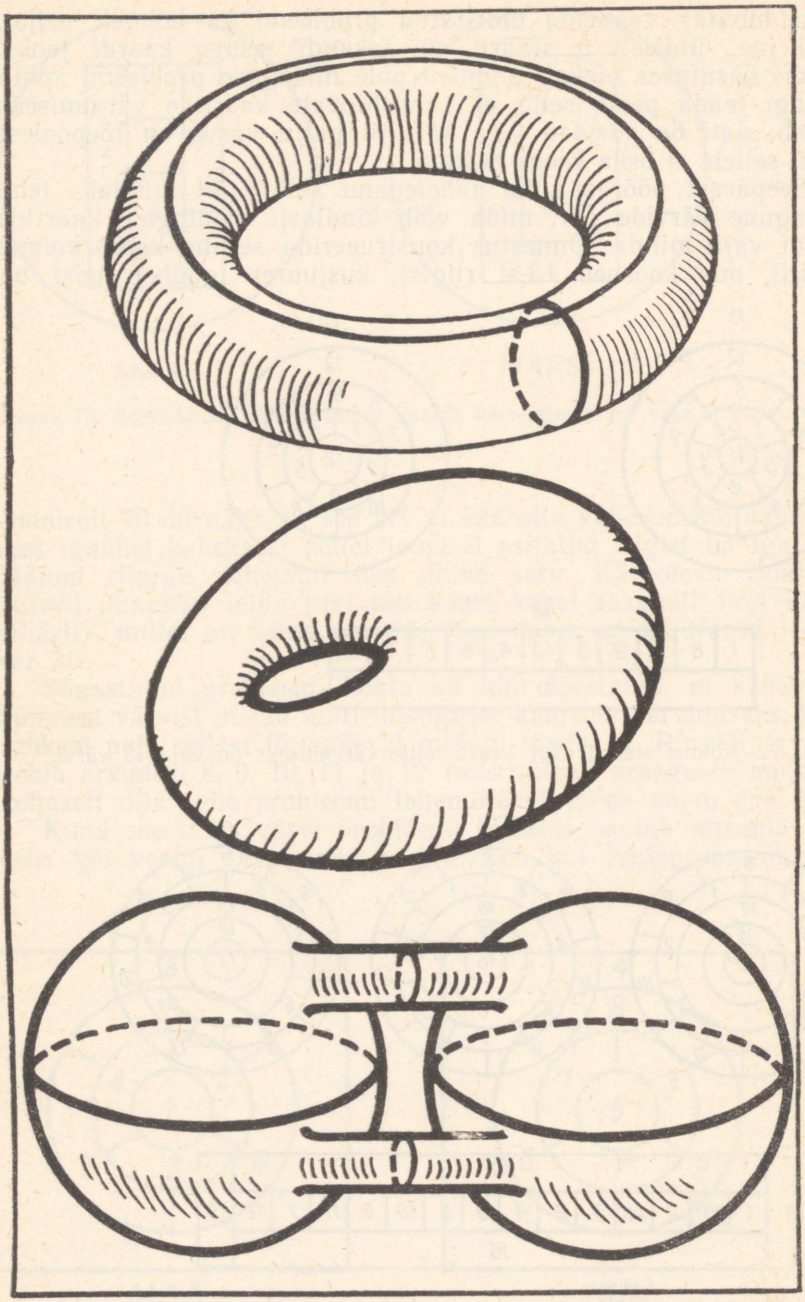
Seepärast pööras autor tähelepanu sellele, et kindlaks teha niisugune värvide arv, mida võib kindlasti mõningate kaartide puhul vaja minna. Õnnestus konstrueerida selline kaart kolmel sfääril, mis koosneb 13-st riigist, kusjuures igaühel neist on



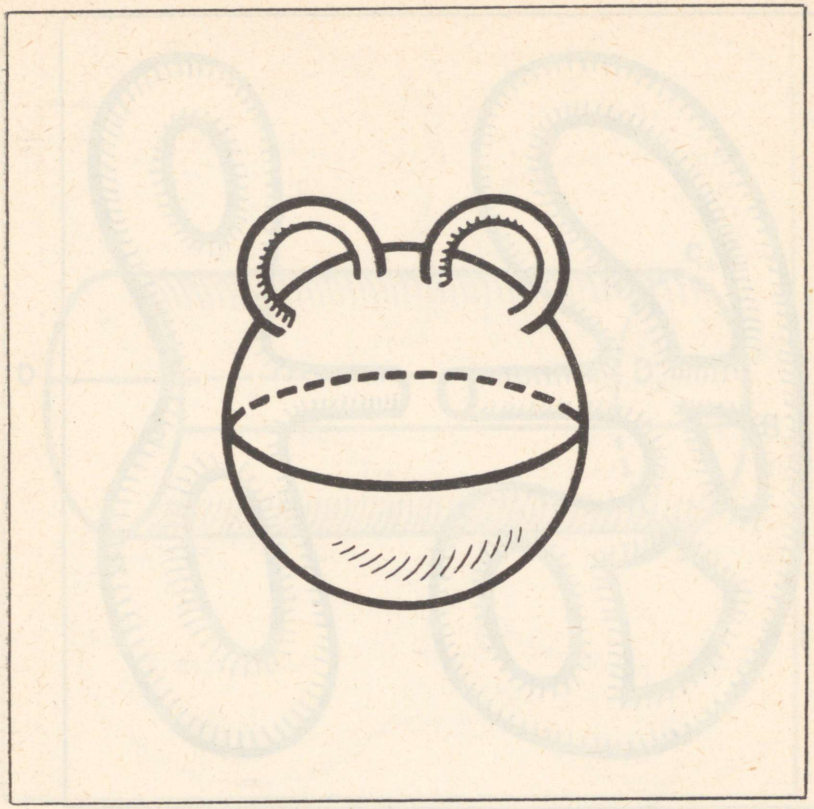
Joonis 72. Kolmel sfääril asuv kaart, mille värvimiseks on vaja 13 värvi.



Joonis 73. Neljal sfääril asuv kaart, mille värvimiseks on vaja 18 värvi.



Joonis 74. Need kolm pinda on omavahel topoloogiliselt samaväärsed.

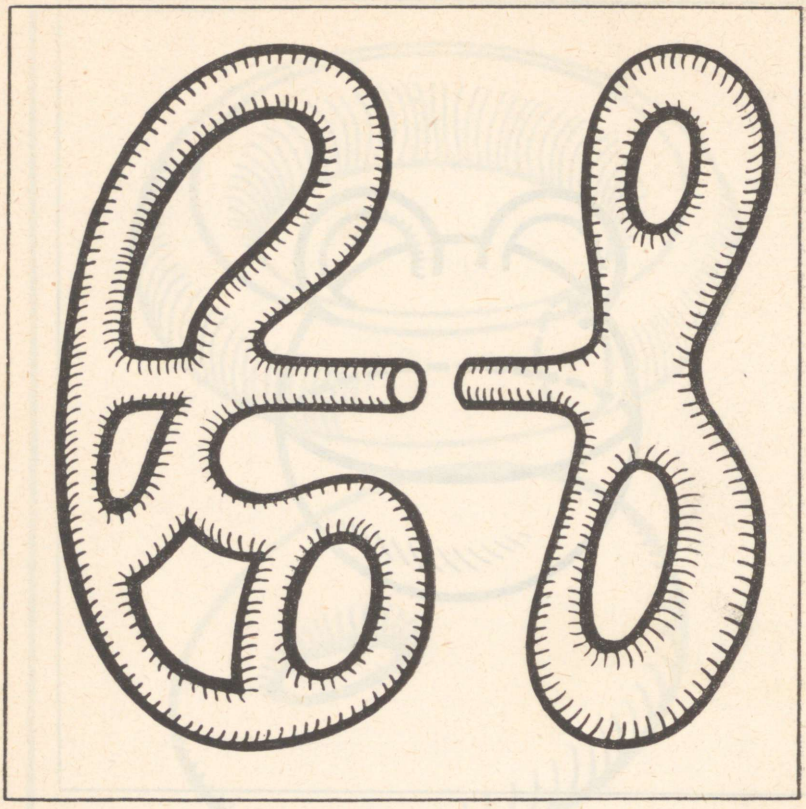


Joonis 75. Kahe käepidemega sfäär.

vähemalt üks ühine piirilõik iga ülejäänuga kaheteistkümnest riigist (vt. joonis 72). On selge, et niisuguse kaardi värvimiseks on vaja parajasti 13 värvi. Ka nelja sfääri kaardi korral õnnestus leida analoogiliste omadustega kaart. See koosneb 18 riigist ja on näidatud joonisel 73.

Kaartide värvimisega seotud probleemid võivad tekkida ka siis, kui vaadelda mitte sfääri, vaid teisi topoloogilisi pindu. Üheks niisuguseks on täispuhutud autokummi meenutav toor (joon. 74). Ta on topoloogiliselt samaväärne ühe auguga kringliga ehk rõngassaia meenutava tsükliidiga või samal joonisel kujutatud pinnaga.

Võib vaadelda kaarte ka kahe auguga kringlil, mis on topoloogiliselt ekvivalentne sfääriga, mille juurde on kinnitatud kaks käepidet (joonis 75), või veelgi keerulisematel pindadel.

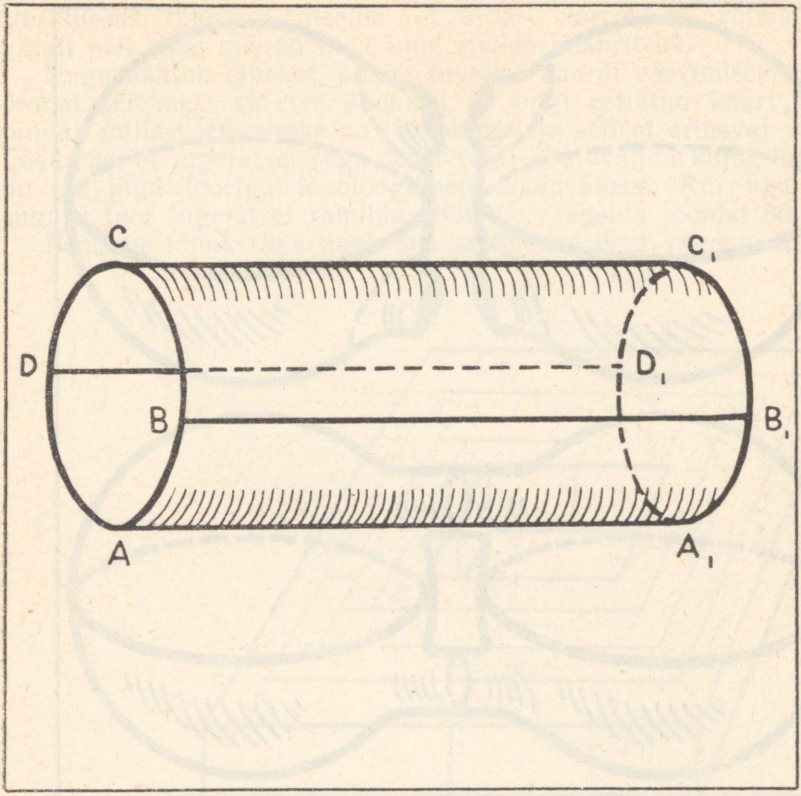


Joonis 76. Augu kinnikleepimine.

Iga niisuguse topoloogilise pinna jaoks osutub Euleri karakteristik tema topoloogiliseks invariandiks. Millega võrdub toori, kahe auguga kringli ja teiste topoloogiliste pindade Euleri karakteristik? Selle selgitamiseks vaatleme kahte topoloogiliste pindade teisendust: aukude väljalõikamist ja nende kinnikleepimist.

Kuna iga hulknurk on topoloogiliselt samaväärne ringiga, siis võime oletada, et sfäärist väljalõigatud augud kujutavad endast endise hulknurkadeks jaotuse üksikuid tahke. Seepärast on niisuguse pinna Euleri karakteristik, mis on saadud pärast n augu väljalõikamist, n võrra väiksem esialgse pinna Euleri karakteristikust (servade ja tippude arv jäi muutumatuks, tahkude arv aga vähenes n võrra). Seega $B - S + T = 2 - n$.

Kui topoloogilise pinna auk kleebitakse kinni teise topoloogilise pinnaga (vt. joonis 76), siis saadud pinna Euleri karakteristik

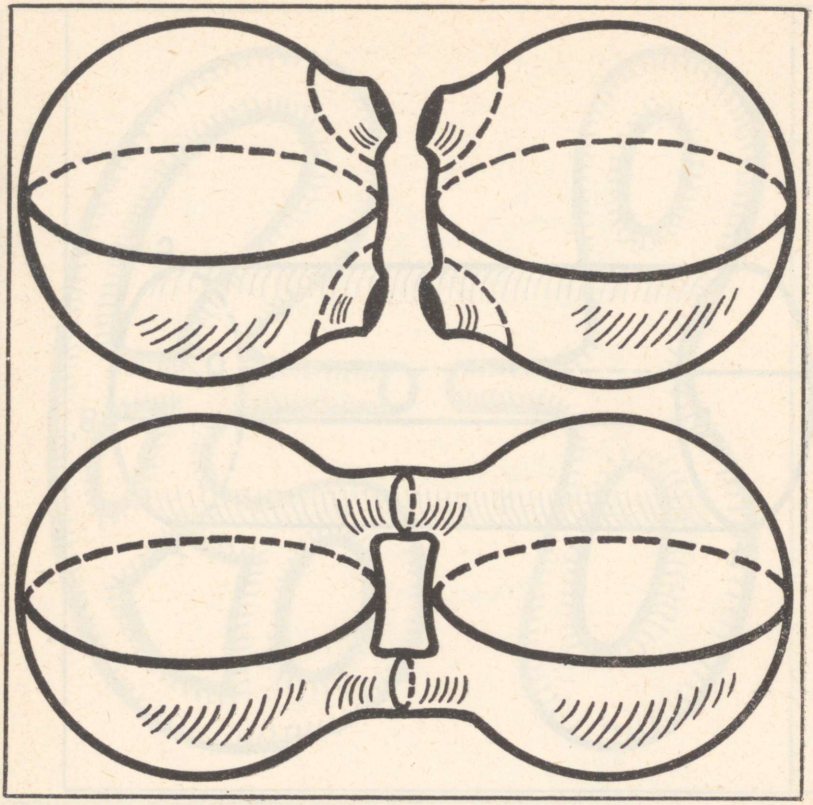


Joonis 77. Silindrilise «käepideme» Euleri karakteristik on null.

on nende pindade karakteristikute summa. Tavaliselt kasutatakse kinnikleepimiseks «käepidemeid». «Käepidemed» on topoloogiliselt ekvivalentsed silindrilise pinnaga, mille Euleri karakteristik on null: tõepoolest, jooniselt 77 leiame, et $B = 8$, $S = 12$ ja $T = 4$. Sama tulemus järeldub ka sellest, et silinder on topoloogiliselt samaväärne sfääriga, millest on välja lõigatud kaks auku.

Kuna kahe augu väljalõikamine sfäärist vähendab tema Euleri karakteristikut kahe võrra, siis, kleepides need augud silindrilise pinnaga kinni, saame Euleri karakteristiku väärtuseks nulli. Üldse vähendab iga «käepideme» juurdetoomine pinna Euleri karakteristikut kahe võrra, nii et n käepidemega sfääril on Euleri karakteristik $2 - 2n$.

Huvitav on märkida, et kaartide värvimise probleem, mis



Joonis 78. Toori Euleri karakteristik on null: aukudega sfääride Euleri karakteristik on null, aga saadud pind on topoloogiliselt samaväärne tooriga.

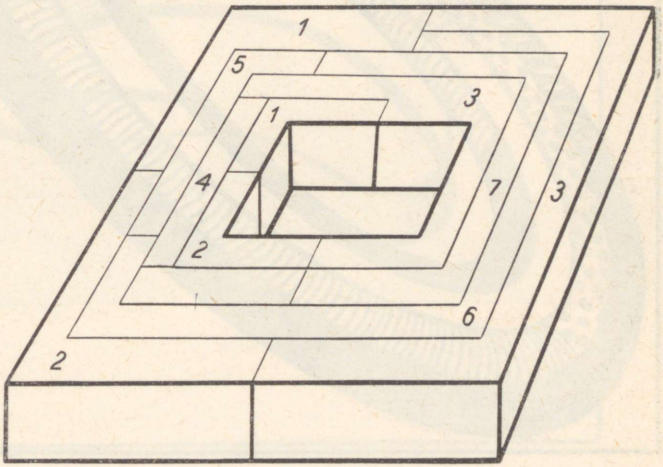
osutus nii raskeks sfääri korral, on võrdlemisi lihtsalt lahendatav toori, kahe auguga kringli ja üldse n «käepidemega» sfääri korral ($n > 0$). Selgus nimelt, et nende pindade jaoks on vajalik värvide arv võrdne niisuguste riikide maksimaalarvuga, mis on kõigi ülejäänud riikide naabriteks. See arv aga on põhimõtteliselt lihtsalt arvutatav. Järgmises tabelis ongi toodud selle arvu väärtus sfääri jaoks, millel on kuni 9 «käepidet».

Käepidemete arv	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Värvide arv	7	8	9	10	11	12	12	13	13

Võrdluseks tuletame meelde, et sfääri korral on võimalikud ainult neli riiki, mis on ülejäänud riikide naabriteks.

Nagu nähtub tabelist, piisab suvalise kaardi värvimiseks toori pinnal seitsmest värvist. Joonisel 79 ongi esitatud kaart toori pinnal, mille värvimiseks on tõepolest vaja seitset erinevat värvi. Loodame, et lugejat ei sega toori veidi ebatavaline kuju: ilmselt on see pind tooriga topoloogiliselt samaväärne. Kui aga niisugune toor lugejat ei rahulda, võib ta vaadelda joonist 80.

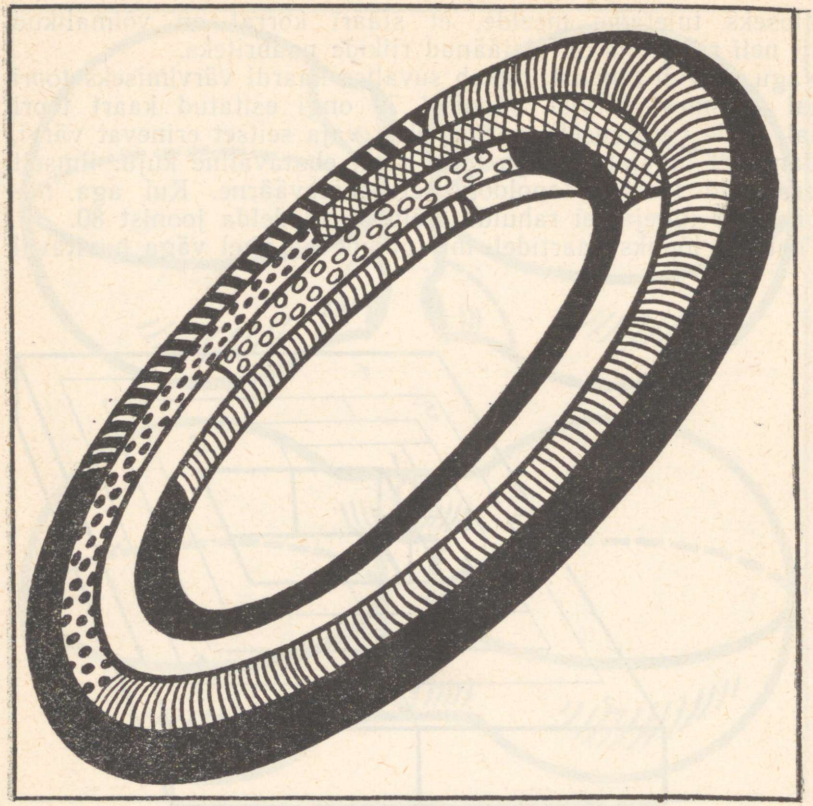
Peatume lõpuks kaartidel, mis paiknevad ühel väga huvitaval



Joonis 79. Selle seitsmest riigist koosneva toori pinnal asuva kaardi värvimiseks on vaja 7 värvi.

topoloogilisel pinnal. See on kujutatud joonisel 81 ja seda nimetatakse Möbiuse lindiks ehk Möbiuse pinnaks saksa geomeetri Möbiuse nime järgi, kes esimesena kirjeldas niisuguse pinna huvitavaid omadusi.

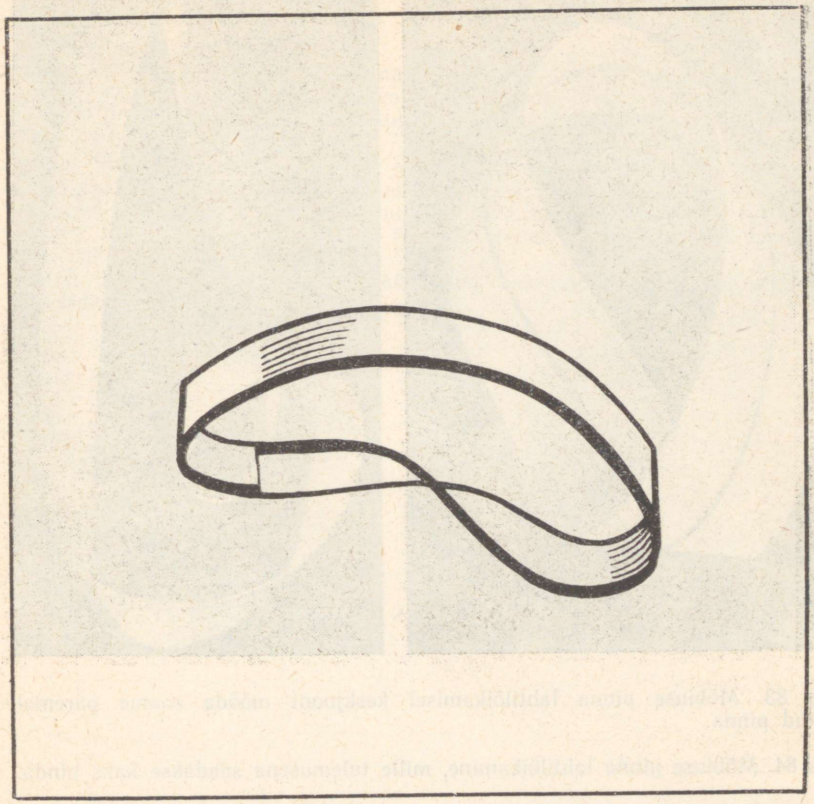
Möbiuse pinda on väga lihtne konstrueerida. Selleks tuleb võtta pikk pabeririba ning kleepida tema vastasotsad kokku, keerates ribale enne ühe keeru peale. Tekkinud pinna iseärasuseks on see, et temal on ainult üks külg: liikudes mööda seda pinda, võime jõuda igasse soovitavasse punkti, ilma et meil tuleks minna üle pinna ääre (vt. joonis 82). Sama omadus väljendub asjaolus, et alustades Möbiuse pinna värvimist ja liigutades pintslit pidevalt mööda pinda, saame värvida kogu Möbiuse pinna, ületamata kordagi tema äärt.



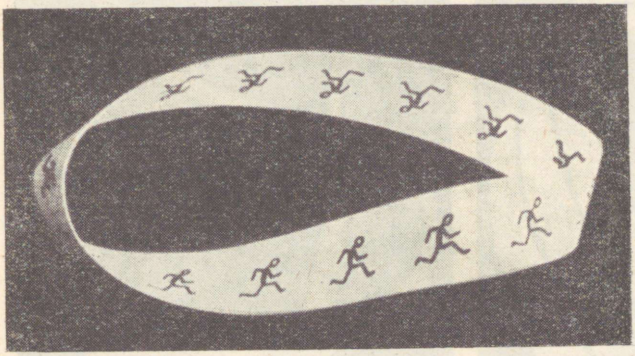
Joonis 80. Veel üks samasuguse omadusega kaart toori pinnal.

Huvitav on märkida, et Möbiuse pinna lahtilõikamisel mööda keskjoont ei saa me kaht Möbiuse pinda, nagu võiks oletada, tuginedes analoogiale silindrilise pinnaga, vaid ühe lindi, mille üks ots on enne kokkukleepimist pööratud 360° võrra (vt. joonis 83). Kui aga lõikamisel hoida käärid kogu aeg $^1/_3$ paela laiuse kaugusel Möbiuse pinna äärest, siis on tulemuseks kaks teineteise sees asuvat pinda (joonis 84).

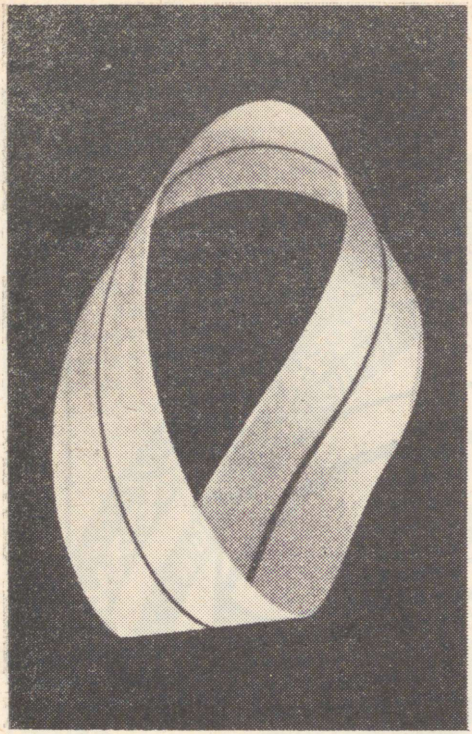
On tõestatud, et iga kaart Möbiuse pinnal on värvitav kuue värviga ning on konstrueeritud ka kaardid, mille värvimiseks on tõepoolest vaja kuut värvi. Vastava näite konstrueerimise aga jätame lugeja enda hooleks.

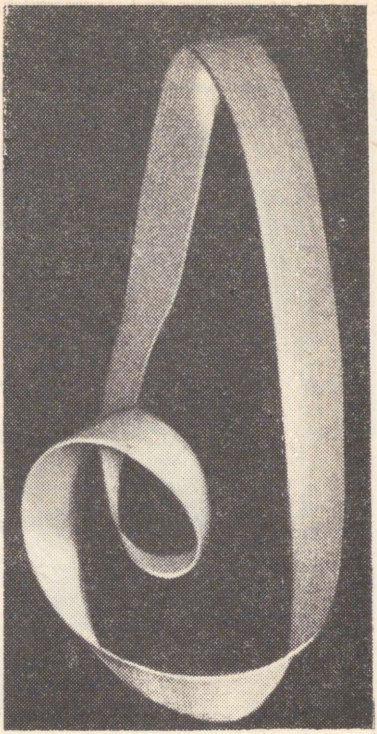


Joonis 81. Möbiuse pind.



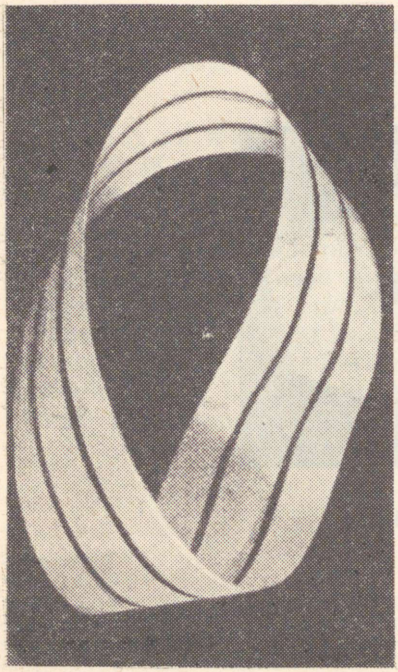
Joonis 82. Möbiuse pinnal on ainult üks külg.

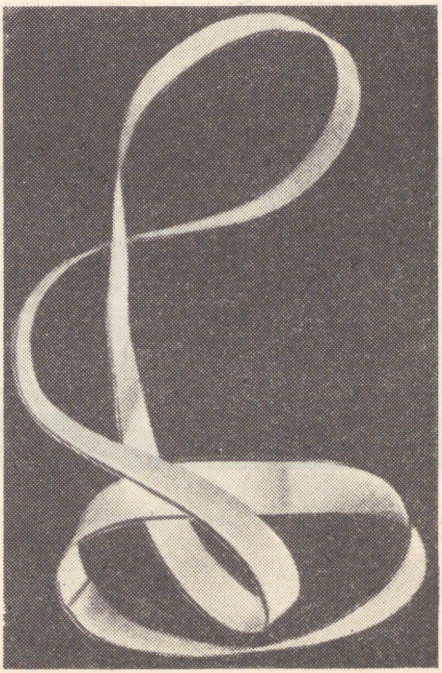




Joonis 83. Möbiuse pinna lahtilõikamisel keskjoont mööda saame paremal näidatud pinna.

Joonis 84. Möbiuse pinna lahtilõikamine, mille tulemusena saadakse kaks pinda.





Ülesandeid.

61. Tõestada, et Möbiuse pinna Euleri karakteristik on null.

62. Tõestada, et kahe pinna kokkukleepimisel tuleb nende Euleri karakteristikud liita (lähtuda jaotusest hulktahukateks, mille korral on kokkukleebitavatel äärtel ühepalju tippe).

63. Milline on minimaalne arv värve, millega on värvitav joonise 72 ülemises osas toodud kaart (kaart paikneb kahel sfääril; ühe riigi osariigid on märgitud ühe numbriga ja need tuleb värvida ühe värviga)?

64. Kontrollida, kas joonistel 71—73 toodud kaartidel on tõepoolest iga kaks riiki teineteise naabreiks.

65. Kas joonistel 70 ja 71 kujutatud kaardid on topoloogiliselt samaväärsed?

2. JUTUSTUS MATEMAATILISEST LOOGIKAST

Matemaatiline loogika, nagu näha juba nimetusest endast, on teadusharu, mis on tihedalt seotud nii matemaatikaga kui ka tavalise ehk klassikalise loogikaga. Ta aitab uurida tõestamise teooriat ja leiab seetõttu laialdast kasutamist paljudes teistes teadusharudes, eeskätt aga just matemaatikas endas.

Argumenteerimist ja tõestamist hakkasid oma aruteludes kasutama juba vana-kreeka filosoofid alates V sajandist e. m. a. (enne seda filosoofid ainult väitsid ja ennustasid ega pidanud vajalikuks oma väiteid tõestada). Tuntud selle aja filosoof Zenon kasutas meisterlikult vastuväitelist tõestusmeetodit, mis ka tänapäeval leiab laialdast rakendamist: mingi lause tõestamisel ta oletas, et lause pole tõene ja püüdis seejärel näidata, et sellest oletusest järeldub mingi ilmselt mõttetu, absurdne väide. Siit järeldas Zenon, et tõestatav lause on õige. Kreeka suure filosoofi Platoni dialektilises tõestusmeetodis muutub vastuväiteline tõestus peamiseks tõestamise viisiks.

Kreeka tuntud filosoof Aristoteles klassifitseeris ja süstematiseeris arutlemise ja tõestamise võtteid, mida tolle aja filosoofid kasutasid, ning väljendas esmakordselt teesi: iga tõestuskäik on taandatav teatud väikese arvu reeglite süstemaatilisele kasutamisele. See väide on saanud tänapäeva matemaatilise loogika üheks põhiteesiks.

Kuid Aristotelese loogika ei haaranud isegi kõiki neid loogilisi arutelusid, mida kasutasid vana-kreeka matemaatikud. Kuni möödunud sajandi teise pooleni olukord selles valdkonnas ei muutunud: loogika jäi kogu aeg tunduvalt maha matemaatikast. Seejuures on põhilisteks loogika edasiarendajateks tänapäevani olnud need matemaatikud või loogikud, kes tegelesid matemaatilise ehk formaalse loogikaga.

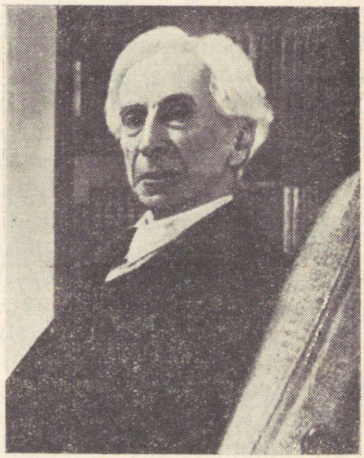
Suure tõuke arenguks sai loogika siis, kui matemaatikas hakati kasutama tähistusi. Nagu selgus käesoleva sajandi algul, tarvitas tuntud saksa filosoof ja matemaatik G. W. Leibniz loo-

giliste tehete jaoks mitmeid tähistusi ja tuletas neid kasutades peaaegu kõik Aristotelese väited, lähtudes mõnedest eriti lihtsatest väidetest. Ta unistas niisuguse sümboolse loogika loomisest (Leibniz ise nimetas seda *Calculus ratiocinator*), mis lubaks üles kirjutada igat mõeldavat matemaatilist väidet sümbolite abil. Seejärel oleks võimalik luua selline universaalne masin, mis oskaks neid sümboleid reeglitepäraselt teisendada, nii et rakendades seda masinat teatud lihtsate tõdede korral, saaks tuletada kõik tõed, mis on üldse võimalikud.

Leibnizi idee, mis tänapäevalgi väga paljudele inimestele utoopilisena tundub, hakkas hiljuti realiseeruma tänu ameerika matemaatiku Wang Hao uurimustele. Teadlane koostas arvuti jaoks nimelt niisuguse programmi, mille abil see masin võis uuesti tõestada teadaolevaid teoreeme ning püstitada isegi uusi hüpoteese ja iseseisvalt kontrollida nende kehtivust. Suurepärane saavutus, mis võib juba lähemal ajal esile kutsuda tõelise revolutsiooni kõikide teadlaste töös ja selle töö tulemuste hindamisel, sai võimalikuks just tänu tohutule progressile matemaatilises loogikas, mis on toimunud viimase saja aasta jooksul ja millest Leibniz võis ainult unistada. Eriti sümboolne on asjaolu, et esimeseks raamatuks, mille teoreeme arvutil kontrolliti ja üle tõestati, oli aastail 1910—1913 Bertrand Russelli ja Alfred North Whiteheadi (1861—1947) poolt loodud matemaatilise loogika kolmeköiteline suurteos «Principia Mathematica».



Joonis 85. Väljapaistev saksa matemaatik, loogik ja filosoof Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), üks matemaatilise analüüsi loojaid.



Joonis 86. Tuntud inglise filosoof, matemaatik ja rahuvõitleja Bertrand Russell (sünd. 1872).

Kahjuks ei avaldanud Leibnizi ideed matemaatilise loogika arengule erilist mõju, sest enamik tema töid jäi avaldamata. Ka mõnede teiste XVIII sajandi ja möödunud sajandi esimese poole matemaatikute analoogilised katsed ei kandnud vilja ega küündinud kaugemale Leibnizi omadest. Enamasti jäid need loogikaalased tööd avaldamata, nii et iga järgmine matemaatik pidi otsast peale hakkama.

Niisugustes tingimustes algas matemaatilise loogika looja, tuntud inglise matemaatiku Georges Boole'i teaduslik tegevus.

G. Boole sündis 1815. aasta novembris. Tema isa John Boole oli kingsepp, kuid tundis väga tõsist huvi matemaatika ja füüsika vastu ning konstrueeris iseseisvalt isegi küllalt hea teleskoobi.

Georges Boolé sai võrdlemisi tagasihoidliku hariduse alg- ja kommertskoolis, mis jäi tal aga lõpetamata. Ent huvi teadmiste järele oli suur ja ta õppis iseseisvalt vana-kreeka, prantsuse ning saksa keelt ja luges väga palju.

Matemaatikat hakkas Georges Boole süstemaatiliselt õppima 17-aastaselt. Nagu ta hiljem ise väitis, põhjustas tema huvi matemaatika vastu asjaolu, et matemaatikaalased raamatud olid sel ajal Inglismaal märksa odavamad kui näiteks ajaloole ja klassikalisele filoloogiale pühendatud teosed.

G. Boole astus kirjavahetusse Cambridge'i matemaatikutega, kes kiiresti märkasid tema matemaatiliste ideede omapära ning soovitasid talle avaldada oma uurimusi trükis. 1844. aastal sai G. Boole ühe matemaatilisele analüüsile pühendatud uurimuse eest kuldmedali. Viie aasta pärast sai G. Boole'ist tänu Cambridge'i sõprade abile matemaatikaprofessor.

Huvitav on märkida, et G. Boole'i naine, tuntud inglise reisija, maailma kõrgeima mäetipu Everesti avastaja tütar, oli viie tütre ema, kusjuures vanim tütar sai hiljem Inglismaa esimeseks naisprofessoriks keemia alal, noorim on aga Ethel Lilian Voynichi (1864) nime all tuntud kuulsa romaani «Kiin» autor. Mainime veel, et G. Boole'i keskmine tütar oli küllaltki hea matemaatik.

Peale matemaatika kuulusid Boole'i huvideringi veel filosoofia, eetika ja loogika. Viimase ümberkorraldamisele pühendas ta kaks ulatuslikku uurimust: «The Mathematical Analysis of Logic» (1847) («Loogika matemaatiline analüüs»), milles on tehtud katse esitada suurem osa Aristotelese loogikast matemaatiliselt rangel kujul, ning «An Investigation of the Laws of Thought . . .» (1854) («Mõtlemise seaduste uurimine»), milles oligi esmakordselt välja arendatud matemaatiline loogika ehk, nagu veel öeldakse, loogika algebra.

Boole'i põhiidee seisis selles, et loogikat tuleb vaadelda algebralise süsteemina, milles arvude osa etendavad üksikud väited ehk laused, liitmise, korrutamise ja teiste operatsioonide osa aga protseduurid, mille abil nendest lausetest, kasutades erinevaid sidesõnu, moodustatakse uusi lauseid ehk liitlauseid.



Joonis 87. David Hilbert (1862—1943), käesoleva sajandi alguse silmapaistvaim matemaatik.

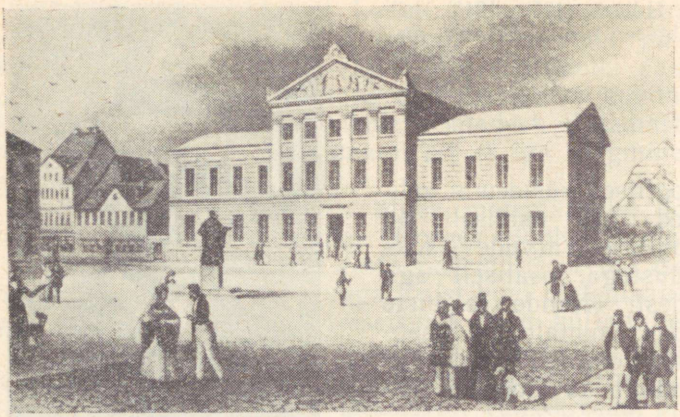
Niisuguses loogilises süsteemis kehtivad seadused, mis osaliselt on täiesti analoogilised arvude jaoks kehtivate seadustega, osaliselt aga erinevad nendest. Nende seaduste kindlakstegemine võimaldab lahendada terve hulga loogilisi probleeme, muuseas lahendada ka loogilisi võrrandeid.

Boole'i ideid arendasid edasi loogikute nn. inglise koolkonna esindajad Jevons, De Morgan ja Piers, kes andsid loogika algebrale tänapäeval tuntud kuju. Kuid kõik selle koolkonna esindajad suhtusid matemaatilisse loogikasse kui puhtformaalsesse süsteemi. Edaspidine matemaatilise loogika areng aga oli väga suurel määral seotud tema rakendamisega matemaatika, eeskätt aritmeetika aluste uurimisel.

Väga suured teened on nende probleemide lahendamisel saksa matemaatikul Gottlob Fregel (1848—1925) ja itaalia matemaatikute koolkonnal eesotsas Giuseppe Peanoga (1858—1932). Nende töödes muutus matemaatiline loogika tõeliseks matemaatika keeleks. Sellest ajast pärinevad ka väga paljud tänapäeva matemaatikas laialt kasutatavad sümbolid. Selle suuna arengu tipuks on kahtlemata eespool mainitud «Principia Mathematica», milles arendatud formaalset keelt tarvitatakse tänapäeva matemaatikas peaaegu samasugusel kujul, nagu kasutasid B. Russell ja A. N. Whitehead.

Matemaatilise loogika areng järgmistel aastatel on seotud sajandivahetuse suurima matemaatiku David Hilberti formalistliku ja L. E. J. Broweri intuitsionistliku suunaga. Need suunad on tänapäeval matemaatikas küll üsnagi tagasihoidlikel kohtadel, kuid omal ajal oli neil väga suur tähtsus matemaatika arengu seisukohalt. D. Hilberti ja P. Bernaysi teos «Grundlagen der Mathematik» («Matemaatika alused»), mille esimene osa ilmus 1934. ja teine 1939. aastal, pole kaotanud oma tähtsust tänapäevalgi.

Viimane etapp matemaatilise loogika arengus sai alguse meie sajandi kolmanda aastakümne algul noore austria matemaatiku Kurt Gödeli töödest, kes näitas, et formalistide pretensioonid oma meetodi universaalsusele on vastuolus tegelikkusega. Formalistid väitsid, et kui matemaatiline teooria esitada rangelt aksiomatiseeritud ehk formaliseeritud kujul, siis saab iga hüpoteesi



Joonis 88. Göttingeni ülikool oli möödunud sajandil ja käesoleva sajandi algul tähtsaimaks matemaatikakeskuseks Euroopas.

kas tõestada või ümber lükata. K. Gödel näitas, et igas küllalt keerulises loogilises süsteemis leiduvad alati hüpoteesid, mida ei saa ei tõestada ega ümber lükata.

Selle probleemiga osutus seotuks ka küsimus mõningate ülesannete lahendamiseks vajalike eeskirjade olemasolust. Niisuguseid eeskirju nimetatakse algoritmideks ning tuhandete aastate jooksul oskasid matemaatikud lahendada küsimust nende eksisteerimisest ainult ühes suunas: nad oskasid algoritme otsida ning peaaegu alati õnnestus neil neid leida. Siis aga, kui algoritme ei leitud, arvati, et tuleb lihtsalt jätkata otsinguid. Tõsi küll, kui need otsingud juba liiga kaua kestsid, tekkis kahtlus, et vastavat algoritmi pole olemas, kuid niisugust oletust ei saanud tõestada, sest puudus algoritmi mõiste täpne matemaatiline sõnastus.

Kolmekümnendate aastate lõpul jõudsid mitmed matemaatikud üksteisest sõltumatult erinevate, kuid nagu hiljem selgus, sisult samaväärsete algoritmi definitsioonideni. Samal ajal tõestati ka esimesed teoreemid üksikute probleemide lahendamiseks vajalike algoritmide puudumisest. Tänapäeval on väga paljud matemaatilise loogika alased uurimused pühendatud kas algoritmi mitteeksisteerimise tõestamisele või, juhul kui algoritm peab eksisteerima, niisuguse algoritmi otsinguile, mis korraga lahendab terve rea analoogilisi ülesandeid või annab isegi võimaluse tuletada mingi matemaatilise teooria iga teoreem, lähtudes selle teooria aksioomidest. Taolised tulemused ja nende realiseerimine täiuslike arvutite abil, nagu seda hiljuti tegi Wang Hao, omavad tänapäeva matemaatika jaoks väga suurt tähtsust.

Tänapäeval on matemaatiline loogika muutunud väga laia küsimuste ringiga teadusharuks, nii et täielikku ülevaadet sellest pole võimalik anda ka ulatusliku monograafia piirides. Teatud pildi sellest saab 1952. aastal ilmunud ameerika matemaatiku Stephan Cole Kleene'i suurepärasest raamatust «Introduction to Metamathematics» («Sissejuhatus metamatemaatikasse»), mis 1957. aastal tõlgiti ka vene keelde.

Käesoleva peatüki eesmärgiks polegi esile tuua kõik matemaatilise loogika probleemid ja meetodid. Kui autoril õnnestub äratada lugejas huvi selle omapärase ja laialt tarvitatava matemaatika osa vastu, kui ta suudab populaarselt selgitada mõningaid lihtsamaid matemaatilise loogika põhimõisteid ja tutvustada nende kõige arusaadavamaid rakendusi, peab ta oma ülesande täidetuks.

Paljudes riikides on tehtud edukaid katseid õpetada matemaatilise loogika algeid kuuendast-seitsmendast klassist alates. See probleem muutub eriti aktuaalseks meiegi riigis, sest analoogilised kavatsused on ka NSV Liidu Haridusministeeriumil.

LAUSED, LIITLAUSED, TÕEVÄÄRTUSED

Matemaatilise loogika kõige elementaarsema osa — lausearvutuse uurimisobjektiks on laused. Mis on lause? Me loeme, et väljend

«Täna on ilus ilm»

on lause, aga

«Milline ilm on täna?»

ei ole lause. Täpselt samuti

«$2 \times 2 = 22$»

on lause, kuid

«Huvitav, kui palju on 2×2»

ei ole lause.

«Peeter I oli neeger»

on lause, kuid küsimust

«Kes oli Peeter I?»

me lauseks ei loe.

Nendest näidetest peaks olema selge, et me loeme lauseteks selliseid väljendeid, millel on teatud seos tegelikkusega, mis võimaldab otsustada, kas antud väljend on tõene või väär. Seepärast väljendid

«Tere, sõber»,

«Sõidaks õige kinno»,

«Lähme sauna, poisid» jne.

pole laused, samal ajal aga väited

«Mina olen naine»
või
«Elevant armastab mängida malet»
on laused, kuigi nad võivad olla mittetõesed. Lauseteks on ka
«Mina kaalun 273 kilo»
või
«See tahvel on pruun»,
kuid mitte
«$2 + 73{,}5$»
või
«$\sin x + \cos x$»,
mis midagi ei väida.

Igasuguste hüpoteeside kohta, kuni nad pole tõestatud või ümber lükatud, on võimatu öelda, kas nad on väärad või tõesed, seepärast me neid lauseteks ei loe. Näiteks on teada, et

$$3^2 + 4^2 = 5^2,$$

kuid ei leidu selliseid naturaalarve x, y ja z, et oleks õige

$$x^3 + y^3 = z^3.$$

Tuntud prantsuse matemaatik Fermat püstitas umbes 300 aastat tagasi hüpoteesi, mis väidab, et kahe arvu n-date astmete summa (kui n on suurem kui kaks) pole kunagi võrdne kolmanda arvu n-da astmega (seda hüpoteesi nimetatakse Fermat' suureks teoreemiks):

$$x^n + y^n \neq z^n \quad (n > 2).$$

Tänapäevani pole suudetud seda väidet tõestada, seepärast ei loe me teda praegu lauseks. Kui Fermat' teoreem kunagi tõestatakse (või ümber lükatakse), muutub ka tema väide lauseks.

Niisiis lepime algusest peale kokku, et iga lause korral on võimalik kindlaks teha, kas ta on tõene või väär.

Kui lause esitada küsimuse vormis *«Kas on õige, et...»* (punktide asemele tuleb lause tekst), siis peab alati olema võimalik vastata kas «jah» või «ei». Kuidas antud lause tõesust või mittetõesust näidatakse, see meid antud juhul ei huvita.

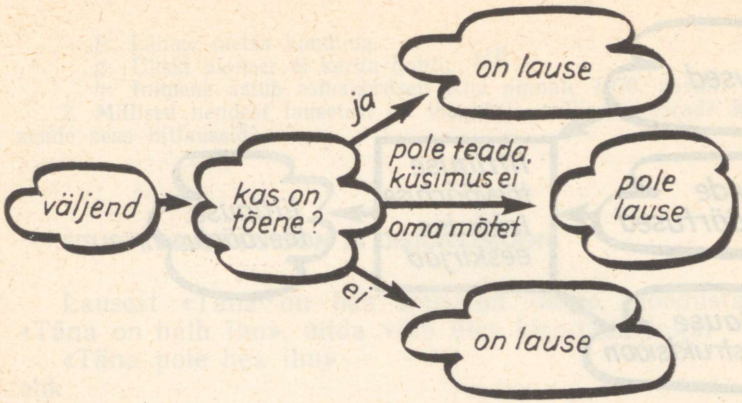
«Iga nullist erineva täisarvu ruut on positiivne»
on tõene lause. See meid just huvitabki, mitte aga viis, kuidas seda teoreemi tõestatakse ja isegi mitte see, mida tähendab «arvu ruut», «positiivne» jms.

Üksikuid lauseid tähistame väikeste ladina tähtedega:

a, b, c, d... või x, y, z, s, t, u ... .

Neid lauseid, mis on ette antud ja millest me hakkame uusi lauseid konstrueerima, vaatleme lihtlausetena, ehkki nad võivad olla küllalt keerulise ehitusega ja kuitahes pikad. Näiteks lauset

«Kui homme plahvatab aatomipomm, siis on $\sin x = 3$»
võime lugeda lihtlauseks (sel korral ei uuri me tema struktuuri),



Joonis 89. See skeem näitab, kuidas otsustada, kas antud väljend on lause või mitte.

ehkki ta ise on koostatud kahest lihtsamast lausest «homme plahvatab aatomipomm» ja «$\sin x = 3$».

Niisiis nimetame mõningaid lauseid lihtlauseteks. Kui meile on ette antud lihtlaused a, b, c jne., siis võime neist koostada liitlauseid. Tuletame meelde, et lihtlausegi võib omada keerulist struktuuri. Olgu näiteks antud lihtlaused

a: «$3 - 2 = 1$»;

b: «$5^2 > 100$ siis ja ainult siis, kui $2 > 5$»;

c: «$\sqrt{-1} = 2$».

Nendest võib moodustada näiteks järgmisi liitlauseid:

d: «$3 - 2 = 1$ ja $\sqrt{-1} = 2$»;

e: «$\sqrt{-1} = 2$ või ($5^2 > 100$ siis ja ainult siis, kui $2 > 5$)»;

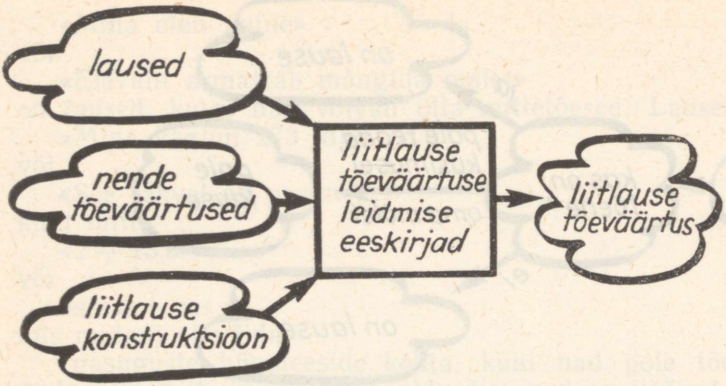
f: «Kui $\sqrt{-1} = 2$, siis $3 - 2 = 1$»;

g: «Pole õige, et $\sqrt{-1} = 2$».

Lausearvutuses oletame kogu aeg, et lihtlausete kohta on meil teada, kas nad on tõesed või väärad, ja püüame seejärel selgitada, kas keeruline liitlause on tõene või väär. Seejuures lähtume ainult liitlause struktuurist ja informatsioonist lihtlausete tõesuse või vääruse kohta. Meid ei huvita lihtlausete ning liitlause sisu ega see, kas nad vastavad traditsioonilisele ettekujutusele mõtet omavast lausest.

Kui lause on tõene, siis tähistatakse teda tavaliselt tähega «t» või arvuga 1: $a = t$ või $a = 1$. Lauset, mis on väär, tähistatakse vastavalt kas tähega «v»: $a = v$ või arvuga 0: $a = 0$. Edaspidi hakkame kasutama eranditult ainult teist tähistusviisi.

Nüüd peaks olema arusaadav lausearvutuse veel ühe põhimõiste — tõeväärtuse definitsioon, mis kõlab järgmiselt: me



Joonis 90. Liitlause tõeväärtus peab sõltuma ainult lihtlausete tõeväärtustest ja liitlause konstruktsioonist.

loeme tõese lause tõeväärtuseks sümbolit 1 ning väära lause tõeväärtuseks sümbolit 0.

Seega on ülalvaadeldud lausete *a*, *b* ja *c* korral lause *a* tõeväärtus 1 ja lause *c* tõeväärtus 0. Et *b* kujutab endast faktiliselt liitlauset (mida antud olukorras vaadeldakse lihtlausena), siis tema tõeväärtuse selgitamisel peaks lähtuma tema struktuurist ning sellest, et «$5^2 > 100$» ja «$2 > 5$» on laused, mille tõeväärtused on võrdsed nulliga. Esialgu ei oska me veel teostada sellist analüüsi, kuid hiljem selgub, et *b* tõeväärtus on üks. Ülal moodustasime liitlauseid *d*, *e*, *f* ja *g*. Ilmselt on *d* tõeväärtus 1 ja *e* tõeväärtus 0, kuid *f* ja *g* tõeväärtuste leidmine tekitab lugejale kindlasti raskusi. Järgmistes punktides tutvumegi sellega, kuidas määrata liitlause tõeväärtust, lähtudes lihtlausete tõeväärtusest ja liitlause struktuurist. Rõhutame veel kord, et seejuures peab olema täidetud tingimus:

niipea kui teame kõikide lihtkomponentide tõeväärtusi, võib kohe leida, milline on liitlause tõeväärtus; seda saab teha olenemata sellest, kas liitlause omab mõtet ja leiab kasutamist tavalises keeles või mitte.

Ülesandeid.

1. Missugused järgmistest fraasidest on laused ja missugused mitte:
   a: Helesinine taevas või must kass.
   b: Iga USA kodanik valitakse vähemalt üks kord tema elu jooksul USA presidendiks.
   c: 1966. aasta esimesel aprillil metsa läksin ma ja metsa läksid sa.
   d: Inimene võib elada rohkem kui 160 aastat ja inimene võib surra 16-aastasena.
   e: Kas sinu nimi on Andres?

f: Lähme metsa kõndima.
g: Ükski pioneer ei karda hunti.
h: Inimene astub esmakordselt Kuu pinnale 1970. aastal.

2. Millised nendest lausetest on tõesed ja millised väärad? Kui palju on nende seas liitlauseid?

EITUS, KONJUNKTSIOON JA DISJUNKTSIOON

Lausest «Täna on hea ilm» on lihtne moodustada lauset «Täna on halb ilm», mida võib üles kirjutada kujul

«Täna pole hea ilm»

ehk

«Pole õige, et (täna on hea ilm)».

Ka lause «$3 - 2 \neq 1$» on tuletatud lausest «$3 - 2 = 1$»

«Pole õige, et $(3 - 2 = 1)$».

Lauset «pole õige, et *a*» nimetatakse lause *a* eituseks ning tähistatakse sümboliga $\neg a$ või sümboliga $\bar{a}$.

Ilmselt on lause $\neg a$ tõeväärtus 0, kui *a* tõeväärtus on 1, ja 1, kui $a = 0$. Lausete *a* ja $\neg a$ tõeväärtused on märgitud järgmises tabelis.

a	$\neg a = \bar{a}$
1	0
0	1

Seda nimetatakse eituse tõeväärtustabeliks ehk tõeväärtusmaatriksiks.

Vaatleme nelja lauset, millega liitlausete konstrueerimisel hakkame opereerima.

k: «Nõukogude Liidul on Hiina Rahvavabariigiga ühine riigipiir.»

l: «Šokolaadijäätis maksab 15 kopikat.»

m: «Tartu on Inglismaa pealinn.»

n: «Üks pliiats kaalub seitse tonni.»

Neist kaks esimest lauset on tõesed, viimased kaks aga väärad.

Lausetest *k*, *l*, *m* ja *n* võib moodustada järgmise liitlause.

«Nõukogude Liidul on Hiina Rahvavabariigiga ühine riigipiir ja šokolaadijäätis maksab 15 kopikat»,

mis on ilmselt tõene.

Peale selle on võimalik moodustada terve hulk vääraid lauseid. Näiteks:

«Tartu on Inglismaa pealinn ja Nõukogude Liidul on Hiina Rahvavabariigiga ühine riigipiir»

või

«Üks pliiats kaalub 7 tonni ja Tartu on Inglismaa pealinn».

Üldiselt liitlause, mis on konstrueeritud kahest lihtlausest sidesõna «ja» abil, on alati väär, välja arvatud juhus, kus mõlemad komponentlaused on tõesed.

Lauset «a ja b» nimetatakse lausete a ja b konjunktsiooniks ning tähistatakse $a \& b$ või $a \wedge b$ (märki & kasutatakse laialt firmade nimetuste märkimiseks Inglismaal — matemaatilise loogika loojate kodumaal; näiteks «Thompson & Co», «Vennad Brown & pojad» jne.).

Lause $a \& b = a \wedge b$ tõeväärtused, olenevalt lausete a ja b tõeväärtustest, on toodud järgmises tõeväärtusmaatriksis:

&	0	1
0	0	0
1	0	1

mille võib üles kirjutada ka selliselt:

a	b	$a \& b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konjunktsiooni võib rakendada ka enam kui kahele lausele. Näiteks võib koostada lause $k \& (l \& m)$. See lause on ilmselt väär. Lihtne on näha, et lõpliku arvu lausete konjunktsioon on tõene siis ja ainult siis, kui kõik komponentlaused on tõesed.

Liitlauseid võib konstrueerida lihtlausetest ka sidesõna «või» abil. Selleks et vältida arusaamatusi, tuleb selgitada, millises tähenduses me tavaliselt seda sidesõna kasutame.

Lausetes

«Ma abiellun Mallega või ma abiellun Sirjega»

ja

«Mulle meeldib Peeter või mulle meeldib Ants»

on sidesõnal «või» kaks erinevat tähendust. Esimesel korral

on tegemist nn. välistava *või*'ga (ma abiellun kas ühe või teisega, kuid mitte mõlemaga korraga). Teises lauses on tegemist mittevälistava *või*'ga (võib ju küsimusele «Kes sulle meeldib, kas Peeter või Ants?» tihti kuulda vastust «Meeldivad mõlemad.»)

Siin hakkame kasutama sidesõna «või» tema mittevälistavas tähenduses. Seepärast lauseid

«Nõukogude Liidul on Hiina Rahvavabariigiga ühine riigipiir või šokolaadijäätis maksab 15 kopikat»

ja

«Šokolaadijäätis maksab 15 kopikat või Tartu on Inglismaa pealinn»

me loeme tõesteks ja ainult lauset

«Tartu on Inglismaa pealinn või pliiats kaalub 7 tonni» vääraks.

Üldiselt lauset «*a* või *b*», mida nimetatakse lausete *a* ja *b* disjunktsiooniks ning tähistatakse sümboliga $a \vee b$ (meeldejätmiseks: sümbol $\vee$ on sarnane sõna «*või*» esimese tähega *v*), loetakse tõeseks, kui vähemalt üks komponentlausetest on tõene.

Disjunktsiooni tõeväärtusmaatriks on järgmine:

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Teda võib üles kirjutada veel selliselt:

a	b	$a \vee b$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Nagu konjunktsioonigi korral võib disjunktsiooni märgiga ühendada enam kui kaks lauset. Näiteks võib moodustada liitlause $k \vee (l \vee m) \vee n$. See lause on tõene. Üldiselt, kui liitlause

on moodustatud disjunktsiooni abil lõplikust arvust lihtlausetest, siis on ta väär sel ja ainult sel korral, kui kõik laused on väärad, ning tõene, kui vähemalt üks neist on tõene.

Kolme operatsiooni — eituse, konjunktsiooni ja disjunktsiooni abil võime koostada küllalt keerulisi lauseid. Näiteks:

«Tartu on Inglismaa pealinn ja pole õige, et šokolaadijäätis maksab 15 kopikat või üks pliiats kaalub 7 tonni.»

Sellise lause sümboolsel kirjutamisel tuleb ära märkida loogiliste operatsioonide rakendamise järjekord, sest vastasel korral võib tekkida arusaamatus. Äsja toodud lause korral võis olla tegemist lausetega:

$m \,\&\, [(\neg l) \vee n]$, $m \,\&\, [\neg(l \vee n)]$ ja $[m \,\&\, (\neg l)] \vee n$.

Nende tõeväärtused on küll võrdsed (kõik laused on väärad), kuid alati see nii ei ole. Näiteks:

$$0 \vee [(\neg 1) \,\&\, 0] = 0 \vee (0 \,\&\, 0) = 0 \vee 0 = 0,$$

kuid

$$0 \vee [\neg(1 \,\&\, 0)] = 0 \vee (\neg 0) = 0 \vee 1 = 1.$$

Seega oleneb lause tõeväärtus üldiselt sulgude paigutusest. Mõnede eranditega sellest reeglist tutvume hiljem. Esialgu lepime liitlausete üleskirjutuse lihtsustamiseks kokku, et eituse märk on rakendatav ainult temale otseselt järgnevale lausele. Näiteks:

$\neg a \,\&\, b = (\neg a) \,\&\, b$,

mitte aga

$\neg a \,\&\, b = \neg(a \,\&\, b)$.

Liitlause tõeväärtuste arvutamisel võib järk-järgult teostatud arvutused paigutada tabelisse, mis näiteks lihtsa lause $\neg(l \vee n)$ korral näeks välja järgmiselt:

l	n	$l \vee n$	$\neg(l \vee n)$
1	0	1	0

lause $m \,\&\, \neg(l \vee n)$ korral aga

m	l	n	$\neg l$	$\neg l \vee n$	$m \,\&\, (\neg l \vee n)$
0	1	0	0	0	0

Kuid neidsamu arvutusi võib üles kirjutada ka kokkuhoidlikumal kujul, kui jätta välja märkimata kõik lause osad, tuues ainult

tulemused ning järjekorra, milles tehted teostatakse. Näiteks $a = 1$ ja $b = 0$ korral võime arvutada lause $(\neg a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, \neg b)$ tõeväärtuse järgmiselt:

a	b	$(\neg a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, \neg b)$
1	0	0 1 0 0 0 0 1 0 1 0
tehte sooritamise jrk. nr.		(1) (2) (6) (3) (5) (4)

Niimoodi võib leida selle lause tõeväärtused ka igasuguste teiste a ja b tõeväärtuste kombinatsioonide korral (kokku on neid neli). Vastavad arvutused ongi koondatud tabelisse ning tulemused ümbritsetud raamiga (arvutuste lihtsustamiseks on siin toodud ka $a \,\&\, b$ ning $a \vee b$ tõeväärtustabelid):

Tehte sooritamise jrk. nr.				(1) (2) (5) (3) (4)
a	b	$a \,\&\, b$	$a \vee b$	$(\neg a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, \neg b)$
1	1	1	1	0 1 0 1 **0** 0 1 0 0 1
1	0	0	1	0 1 0 0 **0** 0 1 0 1 0
0	1	0	1	1 0 1 1 **1** 1 0 0 0 1
0	0	0	0	1 0 0 0 **1** 1 0 1 1 0

Juhul kui liitlause on koostatud kolmest lihtlausest, võib esineda kaheksa erinevat komponentlausete tõeväärtuste kombinatsiooni. Järgmises tabelis ongi kõikidel nendel juhtudel arvutatud lause

$$[\neg(a \vee \neg c) \,\&\, (\neg b \vee c)] \,\&\, (c \vee b)$$

tõeväärtused:

Tehte sooritamise jrk. nr.			(3) (2)(1) (7)(4) (5) [(8) (6)
a	b	c	$[\neg(a \vee \neg c) \,\&\, (\neg b \vee c)] \,\&\, (c \vee b)$
1	1	1	0 1 1 0 1 0 0 1 1 1 **0** 1 1 1
1	0	1	0 1 1 0 1 0 1 0 1 1 **0** 1 1 0
0	1	1	1 0 0 0 1 1 0 1 1 1 **1** 1 1 1
0	0	1	1 0 0 0 1 1 1 0 1 1 **1** 1 1 0
1	1	0	0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 **0** 0 1 1
1	0	0	0 1 1 1 0 0 1 0 1 0 **0** 0 0 0
0	1	0	0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 **0** 0 1 1
0	0	0	0 0 1 1 0 0 1 0 1 0 **0** 0 0 0

Ülesandeid.

3. Arvutada lausete $(a \& b) \vee c$ ja $(a \vee c) \& (b \vee c)$ tõeväärtused kõikide a, b ja c tõeväärtuste kombinatsioonide korral.

4. Teha sama lausete $\neg(a \& b) \& c$ ning $\neg(a \& c) \vee (b \& \neg c)$ jaoks.

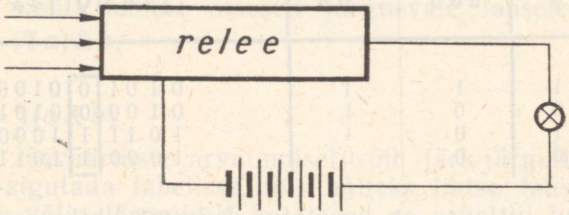
5. Mitu erinevat lihtlausete tõeväärtuste kombinatsiooni on liitlause $(a \& d) \vee (a \& c) \vee (a \& \neg b) \vee (b \& d)$ puhul?

6. Mitu erinevat lihtlausete tõeväärtuste kombinatsiooni on liitlause puhul, mis on koostatud viiest lihtlausest? aga kuuest lihtlausest? 20-st lihtlausest? k lihtlausest?

7. Kas lause $a \& [b \& (c \vee \neg b)]$ tõeväärtus võib muutuda, kui muuta sulgude paigutust temas? Kas leidub selline a, b ja c tõeväärtuste valik, mille korral kõigi sulgude ümberpaigutuste abil saadud liitlausete tõeväärtused oleksid samad?

LOOGILISTE TEHETE INTERPRETEERIMINE KONTAKTRELEE SKEEMIDE ABIL

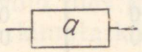
Paljudes tehnikaga ja automaatikaga seotud küsimustes (muuseas ka elektronarvutite korral) on tegemist järgmiste skeemidega:



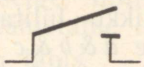
Skeem sisaldab vooluallika, elektrilambi ja mingisuguse relee, mille sisemist seisundit võib muuta (muutused toimuvad mingi välismõju tulemusena, skeemil on see sümboolselt märgitud noolekestega). Olenevalt sisemisest seisundist võib relee elektrivoolu läbi lasta või takistada tema liikumist.

Releed võivad olla küllalt keeruka ehitusega ja koosneda kõige erinevamatest elementidest — elektronlampidest, pooljuhtidest, takistitest jne. Siin vaatleme vaid kõige lihtsamaid releesid, mis koosnevad ainult kontaktidest ja juhtmetest. Seepärast nimetatakse skeeme, mida uurima hakkame, kontaktrelee skeemideks.

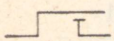
Me märgime kontakte väikeste ladina tähtedega ning tähistame skemaatiliselt järgmiselt:



Kontaktide konstruktsioon meid ei huvita. Kontakti a puhul huvitab meid vaid see, kas vool läheb sellest läbi või mitte. Seepärast võib suvalisel kontaktil olla kaks seisundit. Ta võib olla välja lülitatud, mida skemaatiliselt märgitakse järgmiselt:



kusjuures selles seisundis ta voolu läbi ei lase, ning sisse lülitatud, mida skemaatiliselt kujutatakse niimoodi:

 , ja selles seisundis ta laseb voolu läbi.

Ühes relees võib olla kaks või enam kontakti a. Oletame, et kõik need kontaktid on üheaegselt kas sisse lülitatud või välja lülitatud. Peale selle võib relees esineda ka niisuguseid kontakte $\bar{a}$, mis alati on lülitatud välja, kui kontaktid a on sisse lülitatud, ning sisse lülitatud siis, kui kontaktid a on välja lülitatud.

Kui kontaktiga a siduda lause

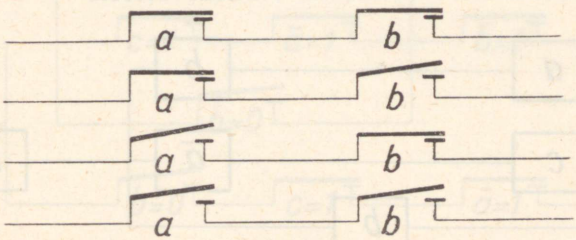
«Kontakt a laseb voolu läbi»,

mida me tähistame samuti tähega a, siis peaks kontaktile $\bar{a}$ vastama selle lause eitus $\neg a$. Seepärast võiksime tähistada kontakti $\bar{a}$ sümboliga $\neg a$, mida vahel tehaksegi.

Kontaktide a ja $\bar{a}$ vahekorda näitab järgmine skeem:

kui a on asendis  , siis $\bar{a}$ on asendis  , kui aga a on asendis  , siis $\bar{a}$ on asendis .

Vaatleme kõige lihtsamaid kontaktrelee skeeme, mis koosnevad ainult kahest kontaktist. Olgu kontaktid a ja b ühendatud järjestikku. Olenevalt sellest, kas kontaktid a ja b on sisse või välja lülitatud, tekib releel neli erinevat seisundit:



On selge, et ainult esimese seisundi korral laseb relee voolu läbi. Kuid nagu me juba mainisime, võib kontaktiga a siduda lause

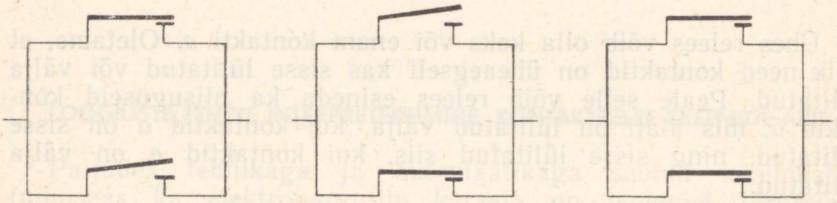
«Kontakt a laseb voolu läbi».

Analoogiliselt võime öelda, et b on tihedalt seotud lausega «Kontakt b laseb voolu läbi».

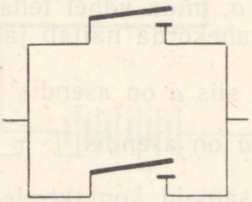
On ilmne, et relee, mis koosneb järjestikku paigutatud kontaktidest a ja b, laseb voolu läbi vaid siis, kui lause $a \& b$ on tõene. Seepärast tähistatakse seda releed sümboliga $a \& b$.

Kui oleks kolm järjestikku lülitatud kontakti, siis ilmselt vastaks sellele releele lause $a \& b \& c$ ning sellist kontakti oleks mõistlik tähistada sümboliga $a \& b \& c$.

Nüüd võime veenduda selles, et kontaktide a ja b paralleelsele lülitusele vastab vaadeldud lausete disjunktsioon: $a \vee b$. Tõepoolest, niisugune relee laseb voolu läbi siis, kui sisse on lülitatud kas kontakt a või kontakt b või need mõlemad

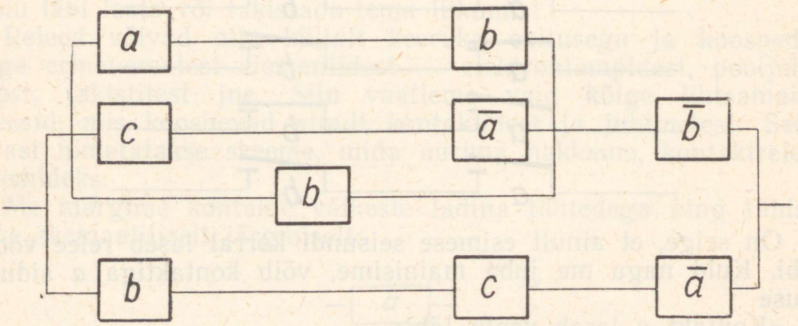


ega lase voolu läbi ainult sel korral, kui mõlemad kontaktid on välja lülitatud:



Seepärast tähistame sellist releed sümboliga $a \vee b$.

Neid kokkuleppeid kasutades võime leida liitlauseid, mis vastavad keerulisematele releedele. Näiteks releele



vastab liitlause

$$\{[(a \& b) \vee (c \& \neg a) \vee b)] \& \neg b\} \vee (b \& c \& \neg a).$$

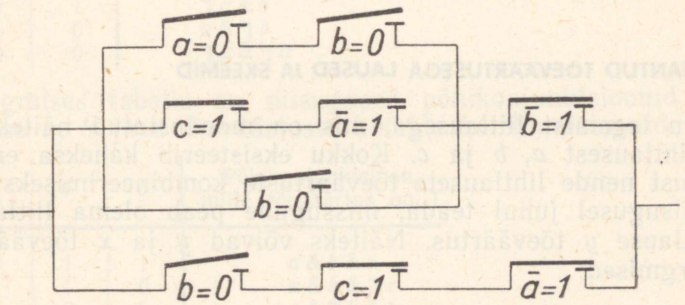
Pole sugugi otseselt selge, millal vool seda releed läbib. Selle kindlakstegemiseks tähistame c-ga lause

«Kontakt c laseb voolu läbi»

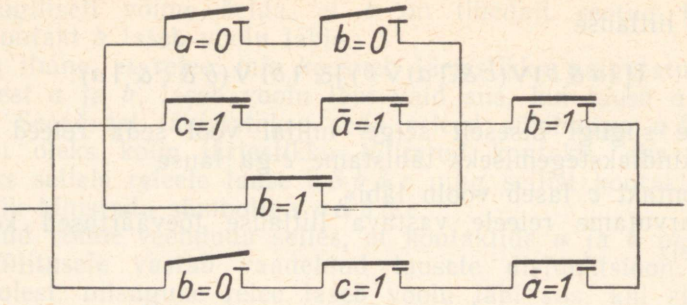
ning arvutame releele vastava liitlause tõeväärtused kõikidel juhtudel:

			(1)	(4)	(3)(2)		(5)	(7)(6)		(11)	(9)	(10)(8)	
a	b	c	$(a \& b)$	$\vee$	$(c \& \neg a)$	$\vee b$		$\& \neg b\}$	$\vee$	$(b \& c \& \neg a)$			
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0

Siit on näha [vt. tabeli veerg (11)], et see relee laseb voolu läbi ainult kahel juhul (need on tabelis eraldatud raamikesega): esiteks, kui c on sisse lülitatud ning a ja b välja lülitatud, ning teiseks, kui a on välja lülitatud, kuid ülejäänud kontaktid on sisse lülitatud. Esimesel korral näeb relee välja selliselt:



teisel korral aga niimoodi:



Nagu näeme, lihtsustab juba lausearvutuse elementaarsete mõistete rakendamine keeruka puhttehnilise küsimuse lahendamist. On selge, et kontaktrelee komplitseeritud skeemide korral, kus skeemi konstruktsiooni otsene analüüs on praktiliselt teostamatu, omab matemaatilise loogika meetodite rakendamine eriti suurt tähtsust. See kasvab veelgi seoses asjaoluga, et äsja lahendatud ülesandega analoogiliste ülesannete lahendamine on teostatav elektronarvutite abil, mille puhul suur arvutuste maht pole enam nii oluliseks takistuseks.

Ülesandeid.

8. Konstrueerida lausele
$\{c \,\&\, (a \,\&\, b) \vee \neg c\} \vee [(\neg b \,\&\, c) \vee (a \,\&\, \neg b \,\&\, c)]$
vastav kontaktrelee skeem.
9. Kas väljalülitatud kontakti c korral läbib vool seda releed?
10. Millal sellest releest läheb läbi vool?

ETTEANTUD TÕEVÄÄRTUSEGA LAUSED JA SKEEMID

Olgu tegemist liitlausega, mis on moodustatud näiteks kolmest lihtlausest a, b ja c. Kokku eksisteerib kaheksa erinevat võimalust nende lihtlausete tõeväärtuste kombineerimiseks. Olgu igal niisugusel juhul teada, missugune peab olema liitlause x või liitlause y tõeväärtus. Näiteks võivad y ja x tõeväärtused olla järgmised:

a	0	0	0	0	1	1	1	1
b	0	0	1	1	0	0	1	1
c	0	1	0	1	0	1	0	1
x	0	0	0	0	1	0	1	0
y	0	0	1	0	0	1	0	1

Kas sellised laused x ja y üldse eksisteerivad ja kuidas saab neid konstrueerida?

Jah, alati leidub selline lause, kusjuures teda saab konstrueerida mitmel eri viisil. Siin esitame ühe paljudest võimalikest meetoditest niisuguse lause konstrueerimiseks, mille tõeväärtused ühtivad etteantud tõeväärtustega.

Kõigepealt moodustatakse nn. põhikonjunktsioonid, s. o. lausete a, b, c, ... ja nende eituste konjunktsioonid, millest iga lause võtab osa üks ja ainult üks kord. Näiteks kahe lause a ja b korral on põhikonjunktsioonideks $a \& b$, $\neg a \& b$, $a \& \neg b$, $\neg a \& \neg b$. Kui arvutada põhikonjunktsioonide tõeväärtused kõikide lihtlausete tõeväärtuste kombinatsioonide korral, siis selgub, et iga põhikonjunktsioon omandab tõeväärtuse 1 ühel ja ainult ühel juhul. Kahe ja kolme lause puhul on need juhud järgmised:

a	b	Põhikonjunktsioon, mille tõeväärtus on 1
1	1	$a \& b$
0	1	$\neg a \& b$
1	0	$a \& \neg b$
0	0	$\neg a \& \neg b$

Järgmises tabelis on niisugused põhikonjunktsioonid kolme lihtlause a, b ja c tõeväärtuste kõikide kombinatsioonide jaoks:

a	b	c	Põhikonjunktsioon, mille tõeväärtus on 1
1	1	1	$a \& b \& c$
1	1	0	$a \& b \& \neg c$
1	0	1	$a \& \neg b \& c$
1	0	0	$a \& \neg b \& \neg c$
0	1	1	$\neg a \& b \& c$
0	1	0	$\neg a \& b \& \neg c$
0	0	1	$\neg a \& \neg b \& c$
0	0	0	$\neg a \& \neg b \& \neg c$

Meie ülesande lahendamiseks tarvitseb vaid ühendada disjunktsiooni märgiga need põhikonjunktsioonid, millel on tõeväärtus 1 sel juhul, kui konstrueeritava lause tõeväärtus on 1. Niimoodi konstrueeritud lause z omandab just etteantud väärtusi. Selle selgitamiseks vaatleme järgmist näidet.

Olgu z kahest lihtlausest a ja b moodustatud liitlause, mille tõeväärtused on järgmised: $z = 1$, kui $a \neq b$, ja $z = 0$, kui $a = b$. Meie väite kohaselt peab sellist olukorda realiseerima liitlause

$$z = (\neg a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \neg b).$$

Ja tõepoolest, kui $a = b = 1$ või $a = b = 0$, siis on nii esimene kui ka teine põhikonjunktsioon, millest koosneb lause z, võrdsed nulliga ja seega ka $z = 0$. Kui aga $a = 1$, $b = 0$ või $a = 0$, $b = 1$, siis on üks põhikonjunktsioonidest 1 ja seega kogu $z = 1$.

Et vaadeldav meetod ei anna kõige lühemal kujul üleskirjutatavat vastust, seda selgitab järgmine näide. Nimelt meie meetodi kohaselt lause z, mille tõeväärtustabel on järgmine:

a	b	z
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

omab kuju

$$z = (a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \neg b).$$

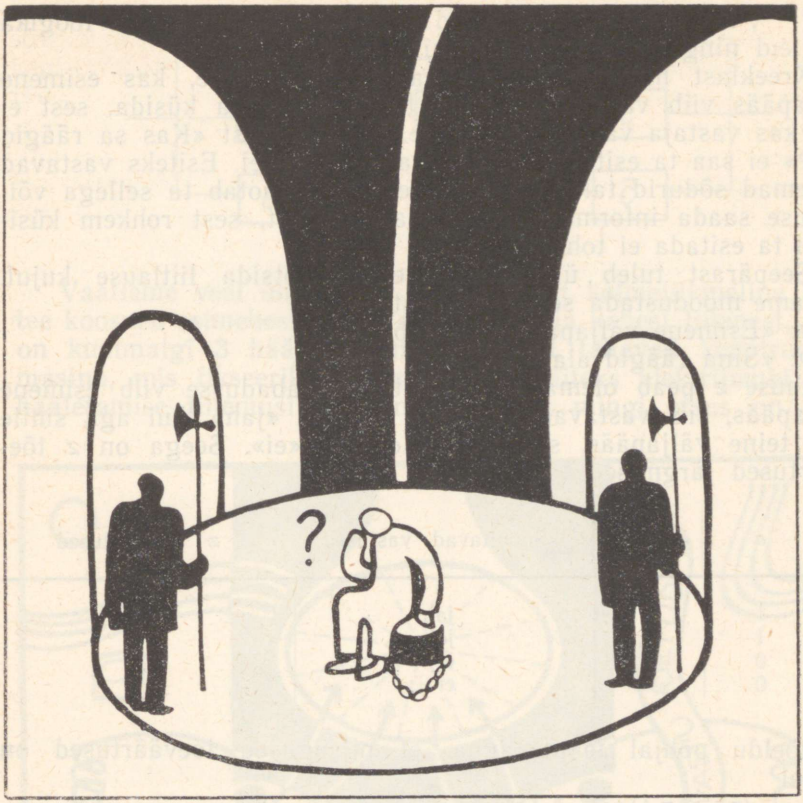
Kuid samad tõeväärtused on ka palju lihtsamal lausel

$$z = a \vee b.$$

Nüüd ei peaks lugejatele raskusi tegema analoogilised ülesanded kolmest, neljast ja veelgi suuremast arvust lihtlausetest moodustatud liitlausete konstrueerimisest etteantud tõeväärtuste järgi. Näiteks punkti alguses nimetatud laused x ja y võib realiseerida järgmiselt:

$$x = (a \,\&\, \neg b \,\&\, \neg c) \vee (a \,\&\, b \,\&\, \neg c),$$
$$y = (a \,\&\, \neg b \,\&\, c) \vee (a \,\&\, b \,\&\, c) \vee (\neg a \,\&\, b \,\&\, \neg c).$$

Esitatud teooria võimaldab lahendada järgmist, juba Vana-Kreekas tuntud huvitavat ülesannet. Kreeka loogik sattus vangi



Joonis 91. Kumb väljapääs viib vabadusse?

ning ta mõisteti surma. Kuid vaenlase väejuht lubas anda talle teatud pääsemisvõimaluse. Kreeklane viidi keldrisse ning väejuht ütles talle: «Sellest keldrist on kaks väljapääsu. Üks viib sind vabadusse, teine surma. Kummagi väljapääsu juures seisab sõdur. Et sul oleks lihtsam pääseda, võid pöörduda ükskõik millise sõduri poole üheainsa küsimusega, kuid pea meeles, et üks sõduritest räägib tõtt, teine valetab.» Seejärel väejuht lahkus keldrist, arvates, et kreeklasel on vähe lootust pääseda, sest ta ei tea, kumb sõduritest räägib tõtt ja kumb valetab.

Kuid kreeklase olukord pole sugugi lootusetu. Ta võib esitada sõdurile niisuguse küsimuse, mille vastus ütleb talle täpselt ära, kumb väljapääs viib vabadusse. Millise küsimuse ta peab

esi[illegible], kui oletada, et sõdurid tunnevad matemaatilise loogika reegleid ning peavad neist kinni?

Kreeklast huvitab näiteks vastus küsimusele, kas esimene väljapääs viib vabadusse. Kuid ta ei saa seda küsida, sest ei tea, kas vastaja valetab või mitte. Ka küsimust «Kas sa räägid tõtt?» ei saa ta esitada ja seda kahel põhjusel. Esiteks vastavad mõlemad sõdurid talle «jah», teiseks aga kaotab ta sellega võimaluse saada informatsiooni väljapääsudest, sest rohkem küsimusi ta esitada ei tohi.

Seepärast tuleb ülesande lahendust otsida liitlause kujul. Püüame moodustada selle lausetest:

a: «Esimene väljapääs viib vabadusse»,

b: «Sina räägid alati tõtt».

Liitlause *z* peab olema selline, et kui vabadusse viib esimene väljapääs, siis vastavad mõlemad sõdurid «jah», kui aga sihile viib teine väljapääs, siis vastavad nad «ei». Seega on *z* tõeväärtused järgmised:

a	*b*	Soovitavad vastused	*z* tõeväärtused
1	1	jah	1
1	0	jah	0
0	1	ei	0
0	0	ei	1

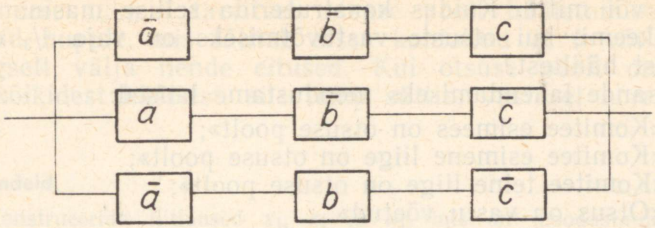
Ülalõeldu põhjal teame juba, et niisugused tõeväärtused on lausel

$$z = (\neg a \,\&\, \neg b) \vee (a \,\&\, b).$$

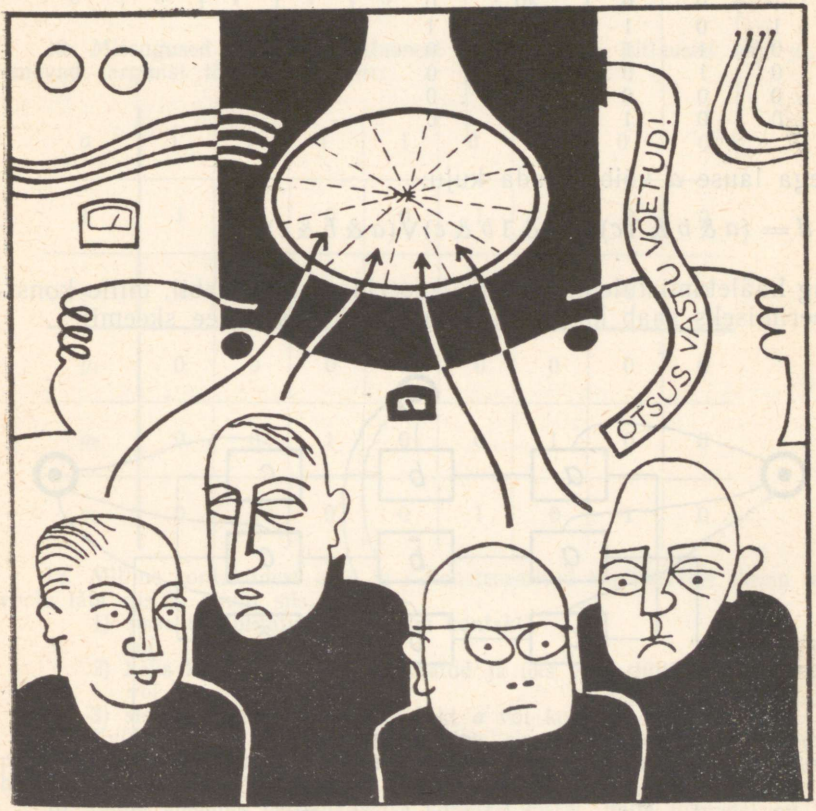
Seega peab kreeklane pöörduma ükskõik millise sõduri poole küsimusega: «Kas on õige, et esimene väljapääs viib vabadusse ja sa räägid alati tõtt või et esimene väljapääs ei vii vabadusse ja sa valetad alati?»

Käesolevas punktis vaadeldud meetod on rakendatav ka kontaktrelee skeemidele. Sel korral tuleb lähtuda lausetest «kontakt *a* laseb voolu läbi», «kontakt *b* laseb voolu läbi» jne., ning lause «kontaktrelee skeem laseb voolu läbi» jaoks anda ette tõeväärtustabel, mis vastab vajalike omadustega skeemile. Selleks et konstrueerida nende etteantud omadustega kontaktrelee skeem, tuleb moodustada põhikonjunktsioonid, millel on tõeväärtus 1 ainult ühe lihtlausete tõeväärtuste kombinatsiooni puhul, ning seejärel ühendada disjunktsiooni märgi abil need põhikonjunktsioonid, mis vastavad tõeväärtusele 1 otsitavas lauses. Sellele lausele vastav kontaktrelee skeem ongi otsitavaks skeemiks.

Näiteks järgmine skeem laseb voolu läbi siis ja ainult siis, kui on sisse lülitatud üks ja ainult üks kontakt (miks?).



Vaatleme veel üht näidet. Oletame, et kolmeliikmeline komitee koosneb esimehest, kellel on 4 häält, ja kahest liikmest, kellel on kummalgi 3 häält. Komitee liikmed tahavad konstrueerida masina, mis fikseeriks automaatselt (näiteks elektrilambi abil) hääletamise tulemusi ning näitaks, kas mingi otsus on vastu



Joonis 92. Hääletamise läbiviimiseks võib kasutada matemaatilise loogika abil konstrueeritud masinat.

võetud või mitte. Kuidas konstrueerida sellise masina kontaktrelee skeemi, kui otsuste vastuvõtmiseks on vaja $^2/_3$ ehk 67% kõikidest häältest?

Ülesande lahendamiseks moodustame laused:

a: «Komitee esimees on otsuse poolt»;
b: «Komitee esimene liige on otsuse poolt»;
c: «Komitee teine liige on otsuse poolt»;
d: «Otsus on vastu võetud».

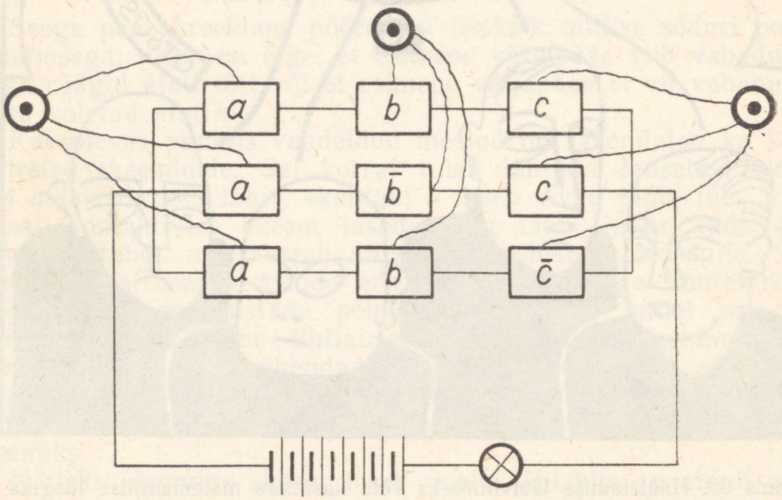
Otsitaval liitlausel peab olema järgmine tõeväärtustabel:

a	*b*	*c*	Häälte %	*d*
1	1	1	100	1
1	1	0	70	1
1	0	0	40	0
1	0	1	70	1
0	1	1	60	0
0	1	0	30	0
0	0	0	0	0
0	0	1	30	0

Seega lause *d* võib omada kuju:

$$d = (a \,\&\, b \,\&\, \neg c) \vee (a \,\&\, \neg b \,\&\, c) \vee (a \,\&\, b \,\&\, c)$$

ning hääletamistulemusi võib fikseerida masina abil, mille konstrueerimiseks saab kasutada niisugust kontaktrelee skeemi:



Igal komitee liikmel tarvitseb otsuse poolt hääletamisel vajutada vaid nupule, mis lülitab sisse kontaktid *a*, *b* või *c* ning samaaegselt välja nende eitused. Kui otsuse poolt on antud üle $^2/_3$ kõikidest häältest, siis lamp süttib, vastasel korral seda ei juhtu.

Ülesandeid.

11. Konstrueerida liitlaused x_1, x_2 ja x_3, mis on moodustatud kahest lihtlausest ning omavad järgmist tõeväärtustabelit:

a	b	x_1	x_2	x_3
1	1	0	1	0
1	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0

12. Missugused kolmest lihtlausest moodustatud liitlaused y_1, y_2, y_3 omavad järgmist tõeväärtustabelit:

a	1	1	1	1	0	0	0	0
b	1	1	0	0	1	1	0	0
c	1	0	1	0	1	0	1	0
y_1	0	0	0	1	0	0	0	0
y_2	0	0	1	0	0	1	0	0
y_3	0	1	0	0	1	0	1	0

13. Milline kontaktidest *a*, *b* ja *c* konstrueeritud kontaktrelee skeem laseb voolu läbi siis ja ainult siis, kui

1) sisse on lülitatud kõik kolm kontakti,
või
2) kaks kontakti on sisse lülitatud ja üks välja lülitatud
või
3) sisse on lülitatud kas kontakt *a* või kontakt *c*?

14. Kuidas näeb välja hääletusmasina skeem kolmeliikmelise komitee puhul, milles igal liikmel on üks hääl ja otsused võetakse vastu tavalise häälteenamusega?

15. Sama küsimus neljaliikmelise komitee korral, mille liikmetel on vastavalt 8, 5, 4 ja 3 häält. Otsus loetakse vastuvõetuks, kui tema poolt on hääletanud vähemalt kolm liiget ning otsuse pooldajatel on kokku vähemalt $^2/_3$ kõikidest häältest.

Peale eituse, konjunktsiooni ja disjunktsiooni kasutatakse lausearvutuses veel teisigi loogikatehteid. Neist tutvume implikatsiooniga, ekvivalentsiga, antiekvivalentsiga ja Shefferi tehtega.

Implikatsiooni tähistatakse $a \to b$. See loogikatehe üldistab teatud mõttes tavalistes aruteludes kasutatavaid järelduste tegemise võtteid. Tavalises kõnekeeles vastavad talle laused sidesõnadega «kui..., siis». Sellisteks on näiteks järgmised laused: «Kui (täna on ilus ilm), siis (ei pane ma vihmamantlit selga).» «Kui ($x^2 > 0$ iga täisarvu x korral), siis ($(-2)^2 > 0$).» Siin on tegemist seosega põhjuse ja järelduse ning üldise ja üksiku vahel.

Juhul kui esimene lause on tõene, võib sellest ilmselt järeldada tõese lause ning ei saa järeldada mittetõest. Seepärast loeme, et tõese ja tõese implikatsioon on tõene, tõese ja väära korral aga väär. Kui aga esimene lause on väär, siis peetakse implikatsiooni definitsiooni kohaselt tõeseks, teiste sõnadega, väärast lausest võib järeldada nii tõese kui ka väära lause. Seega on implikatsioon defineeritud järgmise tõeväärtustabeliga:

a	b	$a \to b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

ehk

$\to$	0	1
0	1	1
1	0	1

Nagu näha, on implikatsioon esimene loogikaoperatsioon, mis ei rahulda kommutatiivsuse seadust: $a \to b \neq b \to a$ (seni oli $a \& b = b \& a$ ja $a \vee b = b \vee a$). Tõepoolest, kui $a = 1$ ja $b = 0$ (või vastupidi), siis on

$$1 \to 0 = 0 \neq 0 \to 1 = 1.$$

Implikatsiooni $a \to b$ tõeväärtus ei olene sellest, kas laused a ja b on omavahel sisuliselt seotud. Seepärast lause

«Kui (valguse kiirus on 300 000 km/s), siis $(2 > 0)$»

on tõene, aga lause

«Kui (valguse kiirus on 300 000 km/s), siis $(2 < 0)$»

on väär. Ka laused

«Kui $(2 < 0)$, siis (täna on ilus ilm)»,

«Kui $(2 < 0)$, siis $(5 + 3 = 8)$»,

«Kui $(2 < 0)$, siis $(3 < 0)$»

on tõesed, seejuures esimene neist on tõene, olenemata sellest, milline ilm on täna, s. t. olenemata sellest, kas teine lihtlause osutub tõeseks või vääraks.

Ekvivalents on samuti loogikaoperatsioon, mis seob kahte lauset. Ta on tõene, kui a ja b on üheaegselt tõesed või väärad. Tihti on ekvivalentsi vasteks tavalises kõnekeeles laused sidesõnadega «siis ja ainult siis, kui». Näiteks:

«$52 + x > 52$, siis ja ainult siis, kui $(x > 0)$.»

Paremal pool on antud tarvilik ja piisav tingimus selleks, et vasakul seisev lause oleks tõene: lause «$(52 + x > 52)$» on tõene siis ja ainult siis, kui lause «$x > 0$» on tõene. Täpselt samuti on ta väär parajasti siis, kui teine lause on väär, s. o. $x \leqslant 0$ puhul.

Tarvilikud ja piisavad tingimused etendavad väga tähtsat osa matemaatikas. Väga paljud teoreemid kujutavad endast just tarvilikke ja piisavaid tingimusi. Näitena võib tuua järgmisi tarvilikke ja piisavaid tingimusi.

1. Selleks et arv N oleks suurem arvust M, on tarvilik ja piisav, et vahe $N - M$ oleks positiivne arv.

2. Selleks et võrrand $ax + b = 0$ oleks lahenduv, on tarvilik ja piisav, et a oleks erinev nullist.

Selleks et oleks ilus ilm, on tarvilik (kuigi mitte piisav), et ei sajaks vihma. Vastupidi, sellest, et täna on ilus ilm, piisab väiteks «täna ei saja vihma», kuigi ka kehva ilma puhul ei pruugi sadada.

Niisiis näeb ekvivalentsi definitsioon välja niimoodi (tähistame seda operatsiooni $a \sim b$: a on ekvivalentne b-ga):

a	b	$a \sim b$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

ehk

$\sim$	0	1
0	1	0
1	0	1

Nagu juba rõhutasime teiste loogikatehete puhul, pole ka ekvivalentsi $a \sim b$ tõesuseks oluline, et a ja b vahel oleks sisuline seos. Nii peetakse tõeseks lauset

«(Kõik elevandid on punased) siis ja ainult siis, kui $(4 + 2 \neq \neq 6)$»,

nagu ka lauset

«(Elevant on loom) siis ja ainult siis, kui (5, 7 ja 9 on naturaalarvud)».

Lauset «$(2+3=5)$ siis ja ainult siis, kui $(1+1=3)$» peetakse vastavalt definitsioonile vääraks.

Ekvivalentsi abil võib lühemal kujul lahendada eelmises punktis toodud ülesande kreeklasest loogikust. Nimelt ühtib seal konstrueeritud lause tõeväärtustabel ekvivalentsi eituse tabeliga. Seepärast oleks kreeklane võinud pöörduda sõduri poole ka küsimusega:

«Kas on õige, et esimene väljapääs viib vabadusse siis ja ainult siis, kui sina räägid tõtt?»

Positiivse vastuse korral oleks ta pidanud valima esimese, eitava korral aga teise väljapääsu.

Selle ülesande kolmandaks lahenduseks on järgmine küsimus:

«Kas on õige, et vabadusse viiva väljapääsu juures seisab see sõdur, kes räägib alati tõtt?»

Tõepoolest, kumb sõduritest ka ei seisaks vabadusse viiva väljapääsu ees, alati vastab ta sellele küsimusele «jah». Vastupidi, sõdur, kes seisab teise väljapääsu juures, vastab kindlasti «ei» jällegi olenemata sellest, kas ta räägib tõtt või valetab. Seepärast vastuse «jah» korral võib kreeklane julgelt vastajast mööda astuda. Vastuse «ei» puhul peab ta aga valima teise väljapääsu.

Järgmine loogikatehe antiekvivalents $a \underline{\vee} b$ on tõene, kui a ja b tõeväärtused on erinevad, ning väär, kui need on ühesugused.

a	b	$a \underline{\vee} b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

ehk

$\underline{\vee}$	0	1
0	0	1
1	1	0

See operatsioon on vastupidine ekvivalentsiga:
$a \underline{\vee} b = \neg(a \sim b)$.

Tähistusel $a \underline{\vee} b$, mis meenutab disjunktsiooni tähistust, on põhjuseks asjaolu, et antiekvivalentsi võib interpreteerida mittevälistava *või*'na: $a \underline{\vee} b$ on tõene siis ja ainult siis, kui on tõene kas a või b, kuid mitte mõlemad korraga.

Antiekvivalentsi jaoks kasutatakse ka teist tähistust, nimelt $a +_2 b$, mis viitab antiekvivalentsi ja tavalise arvude liitmise analoogiale:

$0+0=0$, $\quad 0+_2 0=0$,
$1+0=1$, $\quad 1+_2 0=1$,
$0+1=1$, $\quad 0+_2 1=1$,
$1+1=2$, $\quad 1+_2 1=0$.

See $+_2$-liitmine toimub järgmiste reeglite põhjal. Selleks et liita kaks või enam tõeväärtust (või arv 0 ja 1), tuleb neid liita nagu tavalisi arve ja vaadata seejärel, kas tulemus on kahest väiksem või mitte. Kui tulemus on kahest väiksem, siis jätame ta puutumata. Kui aga tulemus võrdub kahega või ületab selle, siis tuleb tulemusest nii mitu korda lahutada kaks, kuni ta saab kahest väiksemaks. Teiste sõnadega:

$$a +_2 b = \begin{cases} 0, \text{ kui } a + b \text{ on paarisarv;} \\ 1, \text{ kui } a + b \text{ on paarituarv.} \end{cases}$$

Näiteks:

$$1 +_2 0 +_2 1 +_2 1 = 1,$$
$$1 +_2 1 +_2 1 +_2 1 = 0,$$
$$0 +_2 0 +_2 0 +_2 1 +_2 0 = 1.$$

Sellist $+_2$-liitmist kasutatakse väga palju arvutite juures.

Shefferi tehe $a \mid b$ on viimane loogikaoperatsioon, millega tutvume. Kahe liitlause a ja b korral on $a \mid b$ väär ainult siis, kui mõlema lause tõeväärtus on 1. Seega näeb Shefferi tehte tõeväärtustabel välja järgmiselt:

a	b	$a \mid b$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

ehk

$\mid$	0	1
0	1	1
1	1	0

Tavalises keeles vastab lausele $a \mid b$ väljend «vähemalt üks lausetest a ja b on väär» ehk «a ja b pole mõlemad korraga tõesed».

Shefferi tehe on huvitav selle poolest, et kõiki ülejäänud loogikatehteid võib väljendada selle kaudu. Mida see tähendab, et üks loogikatehe väljendub teiste kaudu ning kuidas nimelt, sellega tutvume järgmises punktis.

Ülesandeid.

16. Olgu antud laused:
    a: Kõik sipelgad elavad meres.
    b: Üks kilomeeter koosneb 1000 meetrist.
    c: Ükski inimene pole surematu.
Leida järgmiste liitlausete tõeväärtused:

$a \to b$, $c \to a$, $(a \to b) \to c$, $(b \to c) \to (a \to c)$;
$a \sim b$, $c \sim a$, $(a \sim b) \sim c$, $(b \sim c) \sim (a \sim c)$;
$a \vee b$, $c \vee a$, $(a \vee b) \vee c$, $(b \vee c) \vee (a \vee c)$;
$a \mid b$, $c \mid a$, $(a \mid b) \mid c$, $(b \mid c) \mid (a \mid c)$;
$a \sim (b \mid c)$, $(b \vee a) \to (c \sim a)$, $[a \mid (b \sim a)] \to (c \vee a)$.

17. Leida lausete $[(a \sim b) \& (a \vee b)] \to (a \mid \neg b)$ ning $[(a \sim b) \vee c] \to [(a \mid b) \mid c]$ tõeväärtused lihtlausete a, b ja c tõeväärtuste kõikvõimalike kombinatsioonide puhul.

SEOS LOOGIKATEHETE VAHEL

Juhtub, et kujult erinevate lausete puhul on nende tõeväärtused üheaegselt kas tõesed või väärad. Näiteks nagu järeldub etteantud tõeväärtustabeliga lausete konstrueerimise meetodist, omab ekvivalents $a \sim b$ täpselt samasugust tõeväärtustabelit nagu lause $(a \& b) \vee (\neg a \& \neg b)$. Sel korral kirjutame

$$(a \sim b) \equiv (a \& b) \vee (\neg a \& \neg b)$$

ja ütleme, et need laused on loogiliselt samaväärsed.

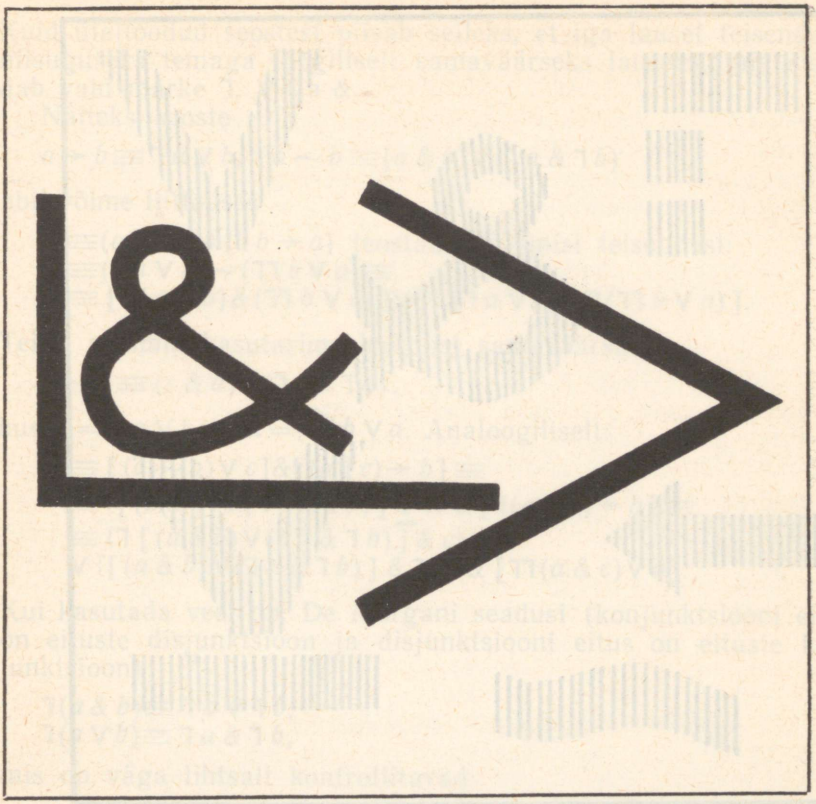
Liitlausete loogiline samaväärsus sarnaneb mõnevõrra algebraliste valemitega. Vaatleme näiteks algebralisi valemeid

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Ka siin on vasaku ja parema poole väärtused võrdsed, olenemata a ja b väärtustest. Vahe seisab selles, et antud juhul võivad a ja b omandada vaid lõpliku arvu väärtusi (tõeväärtusi 0 või 1), mitte aga lõpmatu hulga nagu algebralises valemis. See võimaldab meil liitlausete loogilise samaväärsuse tõestamiseks kasutada otsest tõeväärtustabelite abil teostatavat kontrolli.

Muidugi on niisugune kontroll praktiliselt võimalik ainult võrdlemisi tagasihoidliku lihtlausete arvu puhul. Kuid matemaatilise loogika praktiliste rakenduste korral on tihti tegemist sadadest lihtlausetest koostatud liitlausetega. Kuna n lihtlause puhul on olemas 2^n nende tõeväärtuste kombinatsiooni ($n = 2$ ja $n = 3$ puhul oli neid vastavalt neli ja kaheksa) ning $2^{10} = 1024$, siis saja lihtlause puhul on kombinatsioone juba üle $1000^{10} = 10^{30}$. Sel korral on kontroll muidugi praktiliselt teostamatu. Seepärast hakkame algebra eeskujul otsima väljapääsu sel viisil, et leiame kõige olulisemad samaväärsused, mis kehtivad lausearvutuses, ning hakkame nende abil antud liitlausetest tuletama nendega loogiliselt samaväärseid lauseid.

Et piirduda ainult konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse abil üleskirjutatavate loogiliste samaväärsustega (neid nimeta-



Joonis 93. Implikatsioon avaldub eituse, konjunktsiooni ja disjunktsiooni kaudu.

takse Boole'i seadusteks), näitame algul, kuidas kõiki loogikatehteid saab samaväärselt avaldada nende kolme tehte kaudu.

Me avaldasime juba ekvivalentsi $a \sim b$ konjunktsiooni, disjunktsiooni ja eituse kaudu. Analoogiliselt saame antiekvivalentsi jaoks:

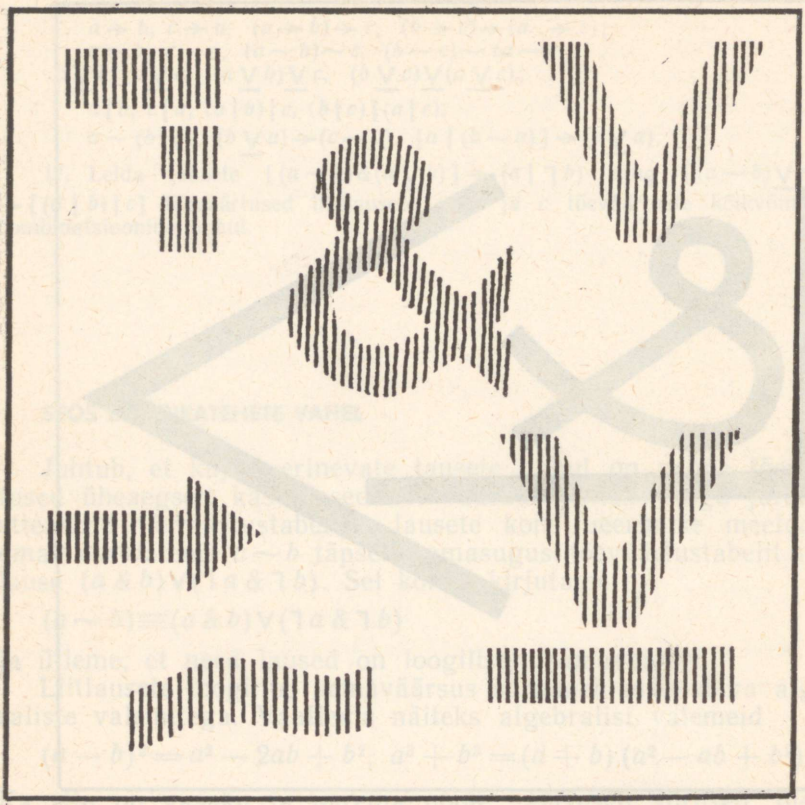
$$a \underline{\vee} b \equiv (\neg a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, \neg b).$$

Shefferi tehe on lihtsalt konjunktsiooni eitus:

$$a \mid b \equiv \neg(a \,\&\, b),$$

implikatsioon aga avaldub eituse ja disjunktsiooni kaudu järgmiselt:

$$a \rightarrow b \equiv \neg a \vee b.$$



Joonis 94. Kõik loogikatehted avalduvad Shefferi tehte kaudu.

Võib leida teisigi teid ühtede loogikatehete väljendamiseks teiste kaudu. Näiteks ekvivalentsi $a \sim b$ saab avaldada konjunktsiooni ja implikatsiooni kaudu veel järgmisel viisil:

$$a \sim b \equiv (a \to b) \& (b \to a),$$

nagu see järeldub tabelist

a	b	$(a \to b) \& (b \to a)$	$a \sim b$
1	1	1 1 1	1
1	0	0 0 1	0
0	1	1 0 0	0
0	0	1 1 1	1

Kuid ülaltoodud seostest piisab selleks, et iga lauset teisendada niisuguseks temaga loogiliselt samaväärseks lauseks, mis sisaldab vaid märke $\neg$, $\vee$ ja $\&$.

Näiteks seoste

$$a \to b \equiv \neg a \vee b, \quad a \sim b \equiv (a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, \neg b)$$

abil võime liitlauses

$A \equiv (a \to b) \sim (\neg b \to a)$ teostada järgmisi teisendusi:

$$A \equiv (\neg a \vee b) \sim (\neg\neg b \vee a) \equiv$$
$$\equiv [(\neg a \vee b) \,\&\, (\neg\neg b \vee a)] \vee [\neg (\neg a \vee b) \,\&\, \neg (\neg\neg b \vee a)].$$

Teisel sammul kasutasime loogilist samaväärsust

$$c \sim d \equiv (c \,\&\, d) \vee (\neg c \,\&\, \neg d),$$

kus $c = \neg a \vee b$ ja $d = \neg\neg b \vee a$. Analoogiliselt:

$$B \equiv [(a \sim b) \vee c] \,\&\, [(a \mid c) \to b] \equiv$$
$$\equiv \{[(a \,\&\, b) \overline{\vee} (\neg a \,\&\, \neg b)] \vee c\} \,\&\, [\neg (a \,\&\, c) \to b] \equiv$$
$$\equiv \{\neg [(a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, \neg b)] \,\&\, c\} \vee$$
$$\vee \{[(a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, \neg b)] \,\&\, \neg c\} \,\&\, [\neg\neg (a \,\&\, c) \vee b].$$

Kui kasutada veel nn. De Morgani seadusi (konjunktsiooni eitus on eituste disjunktsioon ja disjunktsiooni eitus on eituste konjunktsioon):

$$\neg (a \,\&\, b) \equiv \neg a \vee \neg b,$$
$$\neg (a \vee b) \equiv \neg a \,\&\, \neg b,$$

mis on väga lihtsalt kontrollitavad:

a	b	$a \,\&\, b$	$\neg (a \,\&\, b)$	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \vee \neg b$	$\neg a \,\&\, \neg b$	$a \vee b$	$\neg (a \vee b)$
1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	0	1

ning nn. eituse eitamise seadust (lause eituse eitus langeb kokku selle lause endaga ehk kahekordse eituse võib lihtsalt ära jätta):

$$\neg\neg x \equiv x,$$

siis võime esimese näite puhul kirjutada edasi:

$$A \equiv (a \to b) \sim (\neg b \to a) \equiv$$
$$\equiv [(\neg a \vee b) \,\&\, (b \vee a)] \vee [\neg (\neg a \vee b) \,\&\, \neg (b \vee a)] \equiv$$
$$\equiv [(\neg a \vee b) \,\&\, (b \vee a)] \vee [(a \,\&\, \neg b) \,\&\, (\neg b \,\&\, \neg a)].$$

De Morgani ja eituse eitamise seaduste abil on lihtne avaldada konjunktsioon disjunktsiooni ja eituse kaudu:

$$a \,\&\, b \equiv \neg [\neg (a \,\&\, b)] \equiv \neg (\neg a \vee \neg b)$$

ning disjunktsioon konjunktsiooni ja eituse kaudu:

$$a \vee b \equiv \neg [\neg (a \vee b)] \equiv \neg (\neg a \,\&\, \neg b).$$

Seega võib iga lause üles kirjutada kas ainult konjunktsiooni ja eituse või ainult disjunktsiooni ja eituse abil. Meie näite puhul saame pärast esimese võimaluse realiseerimist, s. o. pärast disjunktsiooni elimineerimist:

$$\begin{aligned} A &\equiv (a \to b) \sim (\neg b \to a) \equiv \\ &\equiv \neg \{\neg [(\neg a \vee b) \& (b \vee a)] \,\&\, \neg [(a \,\&\, \neg b) \& (\neg b \,\&\, \neg a)]\} \equiv \\ &\equiv \neg \{\neg [\neg (a \,\&\, \neg b) \& \neg (\neg b \,\&\, \neg a)] \,\&\, \neg [(a \,\&\, \neg b) \& (\neg b \,\&\, \neg a)]\}. \end{aligned}$$

Lõpuks märgime, et nii eitust kui ka konjunktsiooni, aga järelikult ka disjunktsiooni ning kõiki ülejäänud vaadeldud loogikatehteid saab asendada Shefferi tehtega, sest

$$\neg a \equiv (a \mid a), \quad a \,\&\, b \equiv (a \mid b) \mid (a \mid b).$$

Tõepoolest:

a	b	$(a \mid b) \mid (b \mid a)$	$a \mid a$
1	1	0 1 0	0
1	0	1 0 1	0
0	1	1 0 1	1
0	0	1 0 1	1

Kui teostada need asendused vaadeldavas liitlauses, siis saaksime liitlause, mille üleskirjutamiseks oleks vaja peaaegu terve lehekülg. See muide selgitab ka asjaolu, miks ei esitata kõiki liitlauseid üleskirjutatuna ainult Shefferi tehte abil. Võib ju ka aritmeetikas korrutise $6 \cdot 7$ asemel kirjutada $7+7+7+7+7+7$ ning 4^3 asemel isegi mitte $4 \cdot 4 \cdot 4$, vaid $4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4$. Kuigi üleskirjutamise võimalust ainult üksikute loogikatehete kaudu (näiteks eituse ning kas disjunktsiooni või konjunktsiooni kaudu) mõningates teoreetilistes aruteludes kasutatakse, ometi ei piirata praktiliste rakenduste puhul oluliselt tarvitatavate loogikatehete hulka. Kõige sagedamini kasutatakse tehteid $\neg$, $\vee$ ning $\&$, samuti ka $\sim$ ja $\to$, ning seda nendegi loogiliste süsteemide korral, mis erinevad praegu vaadeldavatest ja millega tutvume hiljem.

Ülesandeid.

18. Kontrollida, kas järgmised liitlaused on paarikaupa loogiliselt samaväärsed:

$(a \to b) \& (b \sim a)$ ja $\neg (b \to a)$;
$(a \sim b) \to (c \sim b)$ ja $(\neg a \vee \neg b \vee c) \sim (a \vee b \vee \neg c)$;

$[(a \sim c) \rightarrow b] \rightarrow (a \vee c)$ ja $(a \mid b) \mid (b \mid c)$;
$(a \vee \neg b) \& (a \vee b)$ ja a.

19. Avaldada $a \vee b$, $a \rightarrow b$, $a \sim b$ ja $a \underline{\vee} b$ Shefferi tehte kaudu.
20. Avaldada Shefferi tehte kaudu
$(a \& b) \& a$, $a \rightarrow \neg b$, $\neg(a \& \neg c) \vee b$.
21. Avaldada $\neg$ ja & kaudu lausedes:
$(a \sim b) \rightarrow (b \sim \neg a)$;
$(b \rightarrow \neg a) \vee [a \sim (c \rightarrow \neg a)]$.
22. Avaldada samad lausedes $\neg$ ja $\vee$ kaudu.

BOOLE'I ALGEBRA

Tihti juhtub, et mõni lause on samaselt tõene või samaselt väär, s. t. tõene või väär olenemata sellest, missuguseid väärtusi omandavad tema koosseisu kuuluvad lihtlaused. Näiteks lause $a \& \neg a$ on ilmselt samaselt väär, sest samaaegselt ei saa nii a kui ka $\neg a$ olla tõesed.

Kuna kõik samaselt väärad laused on omavahel loogiliselt samaväärsed, siis võime neid kõiki tähistada ühe sümboliga. Selleks kasutatakse sümbolit 0, nii et näiteks

$$a \& \neg a \equiv 0.$$

Analoogiliselt toome samaselt tõeste lausete jaoks, mis on samuti kõik omavahel loogiliselt samaväärsed, sisse tähistuse I. Näiteks lause

$$a \rightarrow a$$

on alati tõene ja me kirjutame

$$a \rightarrow a \equiv I.$$

Ekvivalentsist ja antiekvivalentsist märgime, et

$$a \sim a \equiv I, \qquad a \sim \neg a \equiv 0,$$
$$a \underline{\vee} a \equiv 0, \qquad a \underline{\vee} \neg a \equiv I.$$

Edaspidi piirdume loogiliste samaväärsustega, mis on ülleskirjutatavad ainult märkide $\neg$, $\vee$ ja & abil. Neid nimetatakse Boole'i algebra seadusteks või lihtsalt Boole'i seadusteks. Me juba tunneme De Morgani ja eituse eitamise seadusi, mis on samuti Boole'i seadusteks. Kasutades 0 ja I, võime märkida veel järgmisi Boole'i seadusi:

$$\neg I \equiv 0, \qquad \neg 0 \equiv I,$$
$$a \vee I \equiv I, \qquad a \& 0 \equiv 0,$$
$$a \vee 0 \equiv a, \qquad a \& I \equiv a,$$
$$a \vee \neg a \equiv I, \qquad a \& \neg a \equiv 0.$$

Kaks viimast kannavad vastavalt välistatud kolmanda seaduse (kas a või $\neg a$, kolmandat võimalust pole olemas) ja vasturääkivuse seaduse nime (a ja tema eitus ei saa olla üheaegselt tõesed).

Kehtivad veel järgmised Boole'i seadused:

$$\left.\begin{aligned} a \,\&\, b &\equiv b \,\&\, a \\ a \vee b &\equiv b \vee a \end{aligned}\right\}$$ kommutatiivsuse seadused;

$$\left.\begin{aligned} a \,\&\, a &\equiv a \\ a \vee a &\equiv a \end{aligned}\right\}$$ idempotentsuse seadused;

$$\left.\begin{aligned} (a \,\&\, b) \,\&\, c &\equiv a \,\&\, (b \,\&\, c) \\ (a \vee b) \vee c &\equiv a \vee (b \vee c) \end{aligned}\right\}$$ assotsiatiivsuse seadused;

$$\left.\begin{aligned} (a \,\&\, b) \vee c &\equiv (a \vee c) \,\&\, (b \vee c) \\ (a \vee b) \,\&\, c &\equiv (a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, c) \end{aligned}\right\}$$ distributiivsuse seadused;

$$\left.\begin{aligned} a \,\&\, (a \vee b) &\equiv a \\ a \vee (a \,\&\, b) &\equiv a \end{aligned}\right\}$$ neelamise seadused.

Lähtudes nendest seadustest näeme, et matemaatilises loogikas kehtib nn. duaalsuse printsiip: kõik seadused, mis kehtivad Boole'i algebras ega sisalda eituse märki, on paarikaupa analoogilised, s. o. erinevad teineteisest vaid selle poolest, et märgid $\vee$ ja & on omavahel ära vahetatud. Seepärast võime asendada mingis niisugust kuju omavas Boole'i seaduses kõik märgid $\vee$ märkidega & ning vastupidi, kõik märgid & märkidega $\vee$, ja saame uue Boole'i seaduse.

Näiteks seaduse

$$a \,\&\, b \equiv (a \,\&\, b) \,\&\, (a \vee b)$$

kehtimisest (selles veendub lugeja ise) järeldub otsekohe, et kehtib seadus $a \vee b \equiv (a \vee b) \vee (a \,\&\, b)$.

Üldisemal juhul, kui seaduse üleskirjutamisel esineb ka eituse märke, tuleb algul tuua need märgid otseselt tähtede ette, mis on De Morgani seaduste abil alati teostatav. Seejärel tuleb üheaegselt märkide & ja $\vee$ ümbervahetamisega asendada lihtlaused igal pool nende eitusega (tähed, mis algul olid eitusega, kaotavad selle: $\neg a$ tuleb asendada lausega $\neg\neg a$ ehk a).

Nii järeldame seaduse

$$(\neg a \vee b) \,\&\, (\neg a \,\&\, b) \equiv \neg a \,\&\, b$$

kehtivusest, et

$$(a \,\&\, \neg b) \vee (a \vee \neg b) \equiv a \vee \neg b.$$

Kasutades Boole'i algebra seadusi, võib liitlause viia lihtsale standardsele kujule. Juba eelmises punktis näitasime, et iga lause on üleskirjutatav sümbolite $\neg$, $\vee$ ja & abil, või isegi ainult märkide $\neg$ ja $\vee$ või siis $\neg$ ja & abil.

Viimase kuju saavutamiseks tuli kasutada De Morgani seadusi ning eituse eitamise seadust. Nende seaduste korduva rakendamise tulemusena $\neg$, $\vee$ ja $\&$ märkide abil üleskirjutatud suvalisele lausele võib tuua kõik eituse märgid otseselt tähtede ette. Näiteks leheküljel 158 vaadeldud lause

$$A \equiv \neg\{\neg[\neg(a \,\&\, \neg b) \,\&\, \neg(\neg b \,\&\, \neg a)] \,\&\, \neg[(a \,\&\, \neg b) \,\&\, (\neg b \,\&\, \neg a)]\}$$

puhul toimub see järgmiselt:

$$A \equiv [\neg(a \,\&\, \neg b) \,\&\, \neg(\neg b \,\&\, \neg a)] \vee [(a \,\&\, \neg b) \,\&\, (\neg b \,\&\, \neg a) \equiv$$
$$\equiv [(\neg a \vee b) \,\&\, (b \vee a)] \vee [(a \,\&\, \neg b) \,\&\, (\neg b \,\&\, \neg a).$$

Kasutades Boole'i algebra seadusi, võib mõnikord lauset oluliselt lihtsustada. Antud näite puhul saame kasutada konjunktsiooni assotsiatiivsust, kommutatiivsust ja idempotentsust.

$$A \equiv [(\neg a \vee b) \,\&\, (a \vee b)] \vee (a \,\&\, \neg a \,\&\, \neg b) \equiv (\neg a \vee b) \,\&\, (a \vee b).$$

Et siin esinesid sulud, milles sisalduvad korraga konjunktsiooni märgiga ühendatud lause a ja tema eitus, siis saime asendada selle konjunktsiooni sümboliga 0. Seepärast

$$a \,\&\, \neg a \,\&\, \neg b \equiv 0 \,\&\, b \equiv 0.$$

Kuid sümboli 0 võib disjunktsioonis ära jätta.

Lause A jaoks saadud kuju nimetatakse konjunktiivseks normaalkujuks. Konjunktiivne normaalkuju on selliste sulgavaldiste konjunktsioon, mis kujutavad endast erinevate tähtede või nende eituste disjunktsioone, kusjuures üheski sulgavaldises ei esine korraga täht ja selle eitus, sest kõik sulgavaldised, mis sisaldavad disjunktsioone $a \vee \neg a$, on ärajäetavad.

Osutub, et iga lause on teisendatav konjunktiivsele normaalkujule. Kui lause A ei oleks sellel kujul üles kirjutatud, oleksime pidanud distributiivsuse seadust korduvalt kasutades tooma kõik disjunktsiooni märgid sulgude sisse (meie näite puhul osutusid nad juba sulgude sees olevateks). Kuidas seda teha, saab selgeks, kui viime lause A teisele lihtsale standardsele kujule, mis on analoogiline konjunktiivse normaalkujuga. Seda nimetatakse disjunktiivseks normaalkujuks ning, nagu lugeja juba aimab, kujutab ta endast selliste sulgavaldiste disjunktsiooni, mis ise on tähtede ja nende eituste konjunktsiooniks, kusjuures jällegi ei esine ühes sulgavaldises mingit tähte koos selle eitusega.

Märgime veel, et nii konjunktiivse kui ka disjunktiivse normaalkuju puhul on kõik sulgavaldised erinevad, sest vastasel korral saaks kasutada idempotentsuse seadusi.

Kuidas jõuda disjunktiivse normaalkujuni, seda selgitame äsja vaadeldud näite varal. Algul toome konjunktsiooni märgi sulgude sisse. Selleks rakendame kaks korda järjest distributiivsuse seadust.

$$A \equiv [\neg a \,\&\, (a \vee b)] \vee [b \,\&\, (a \vee b)] \equiv$$
$$\equiv [(\neg a \,\&\, a) \vee (\neg a \,\&\, b)] \vee [(b \,\&\, a) \vee (b \,\&\, b)].$$

Assotsiatiivsuse seadus võimaldab jätta ära ülearused sulud, idempotentsuse seadus aga kirjutada viimane sulgavaldis lihtsamal kujul:

$$A \equiv (\neg a \,\&\, a) \vee (\neg a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, a) \vee b.$$

Nüüd võib ära jätta liikme $(\neg a \,\&\, a)$, sest $\neg a \,\&\, a \equiv 0$, aga $0 \vee c \equiv c$:

$$A \equiv (\neg a \,\&\, b) \vee (a \,\&\, b) \vee b.$$

See ongi lause A disjunktiivne normaalkuju. Täiesti analoogiliselt leitakse lausete konjunktiivne normaalkuju.

Ülesandeid.

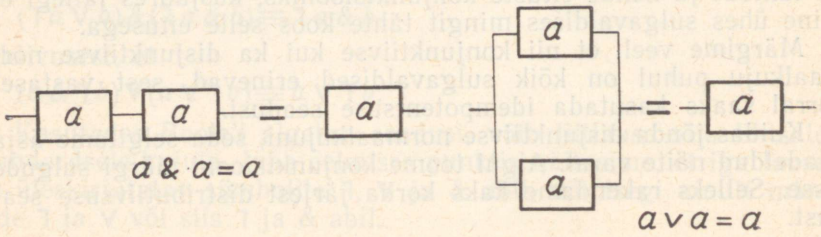
23. Teisendada konjunktiivsele normaalkujule järgmised laused:
$(a \to b) \sim \neg a$, $\neg[(a \,\&\, \neg b) \vee (c \,\&\, b)]$, $(a \mid b) \to a$.

24. Teisendada samad laused disjunktiivsele normaalkujule.

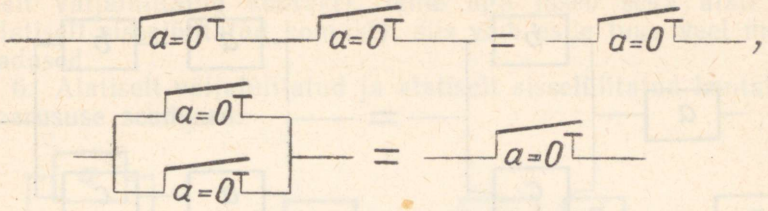
KONTAKTRELEE SKEEMIDE LIHTSUSTAMINE

Kõik eelmises punktis vaadeldud Boole'i seadused on interpreteeritavad ka kontaktrelee skeemide juhule. Kontaktrelee skeemide korral kehtivad järgmised seadused, mida võib kasutada keeruliste skeemide lihtsustamisel. Seejuures tuleb asendada lähteskeem temaga ekvivalentse lihtsama skeemiga, kusjuures ekvivalentsed on need skeemid, mis üheaegselt kas lasevad voolu läbi või mitte, kui ainult ühenimelised kontaktid on mõlemal skeemil samas asendis.

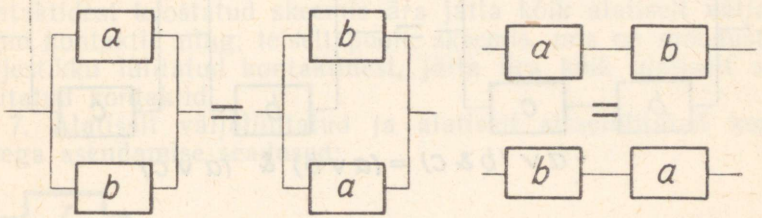
1. Idempotentsuse seadused:



Näiteks:

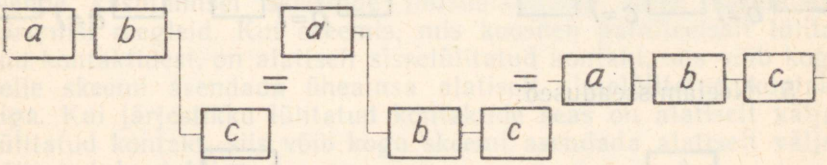


2. Kommutatiivsuse seadused:

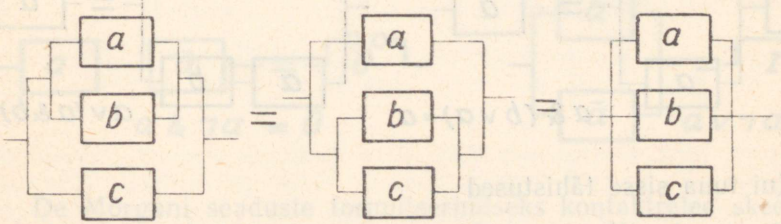


$a \vee b = b \vee a$ $\qquad$ $a \& b = b \& a$

3. Assotsiatiivsuse seadused:

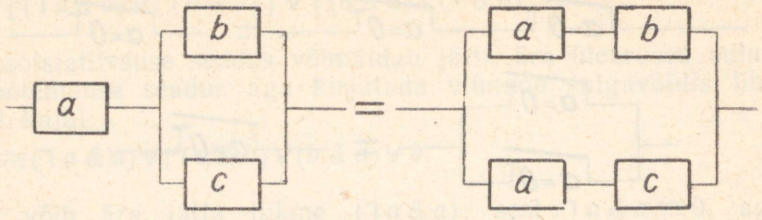


$(a \& b) \& c = a \& (b \& c) = a \& b \& c$

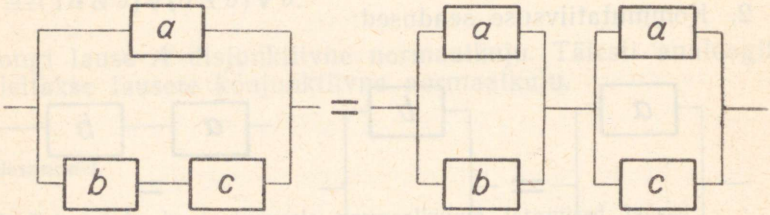


$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee b \vee c$

4. Distributiivsuse seadused:

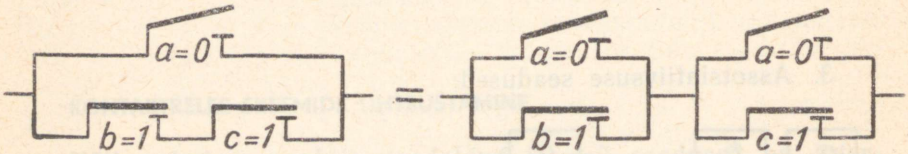


$a \& (b \vee c) = (a \& b) \vee (a \& c)$

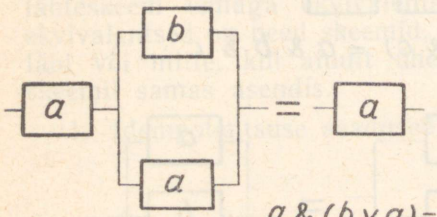


$a \vee (b \& c) = (a \vee b) \ \& \ (a \vee c)$

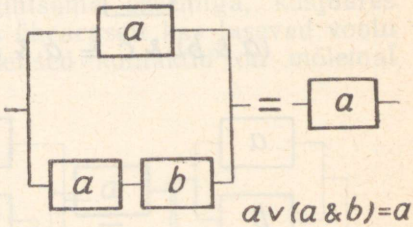
Näiteks:



5. Neelamisseadused:

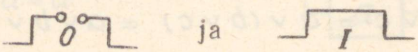


$a \& (b \vee a) = a$



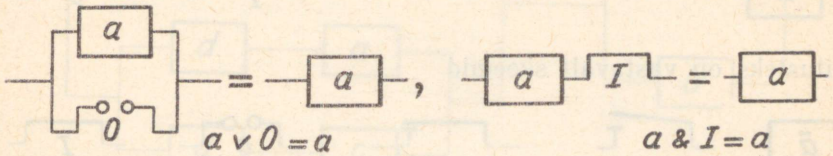
$a \vee (a \& b) = a$

Kui tuua sisse tähistused



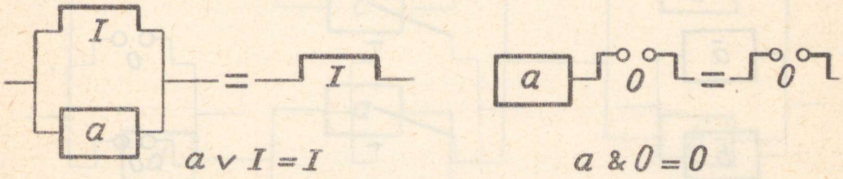
kontaktide jaoks, millest esimene ei lase kunagi voolu läbi (alatiselt väljalülitatud kontakt), teine aga laseb seda alati läbi (alatiselt sisselülitatud kontakt), siis võib esile tuua veel mõned seadused.

6. Alatiselt väljalülitatud ja alatiselt sisselülitatud kontaktide ülearususe seadused:



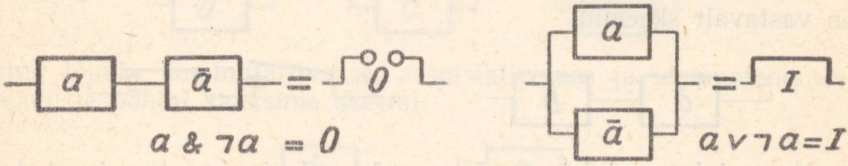
Need seadused lubavad, ühelt poolt, paralleelselt paigutatud kontaktidest koostatud skeemis ära jätta kõik alatiselt väljalülitatud kontaktid ning, teiselt poolt, skeemis, mis on moodustatud järjestikku lülitatud kontaktidest, jätta ära kõik alatiselt sisselülitatud kontaktid.

7. Alatiselt väljalülitatud ja alatiselt sisselülitatud kontaktidega asendamise seadused:



Nende kasutamisel skeemide lihtsustamiseks tuleb rakendada järgmisi reegleid. Kui skeemis, mis koosneb paralleelselt lülitatud kontaktidest, on alatiselt sisselülitatud kontakt, siis võib kogu selle skeemi asendada üheainsa alatiselt sisselülitatud kontaktiga. Kui järjestikku lülitatud kontaktide seas on alatiselt väljalülitatud kontakt, siis võib kogu skeemi asendada alatiselt väljalülitatud kontaktiga.

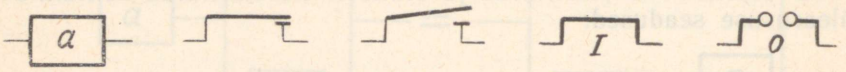
8. Vasturääkivuse ja välistatud kolmanda seadused:



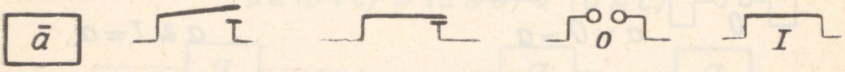
De Morgani seaduste formuleerimiseks kontaktrelee skeemide juhul tuleb selgitada, mida me mõistame väljenduse «skeemi eitus» all. Skeemi eitus on niisugune skeem, mis laseb voolu läbi

siis ja ainult siis, kui esialgne skeem seda läbi ei lase, ning järelikult ei lase voolu läbi siis ja ainult siis, kui esialgne skeem seda läbi laseb.

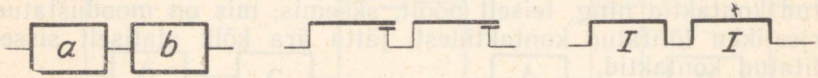
9. Eituse seadus: järgmiste skeemide



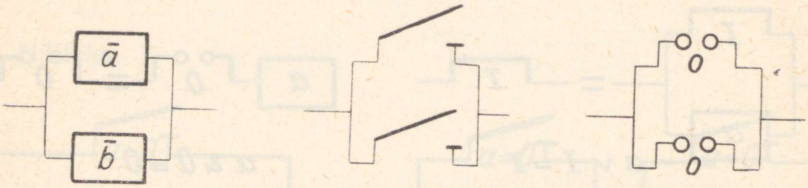
eitusteks on vastavalt skeemid



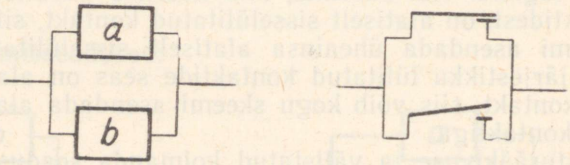
10. De Morgani seadused: skeemide



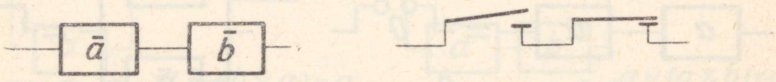
eitusteks on skeemid



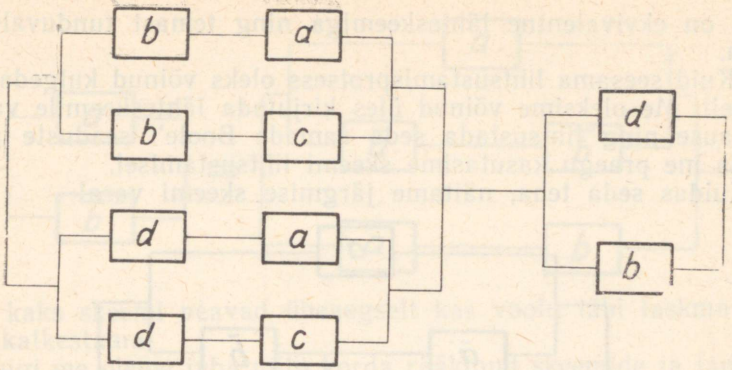
Aga järgmiste skeemide eitusteks



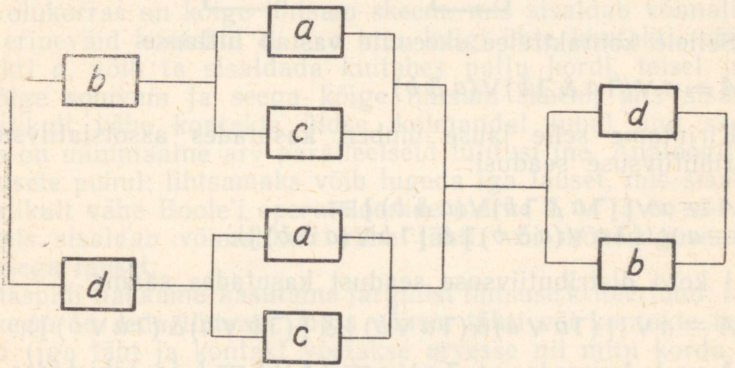
on vastavalt skeemid



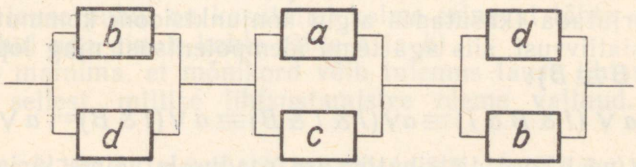
Nagu juba mainisime, võib neid seadusi otseselt rakendada kontaktrelee skeemide lihtsustamisel. Kuid praktiliselt (ja seda eriti keeruliste skeemide korral) tähendaks eespool märgitud seaduste kasutamine keerulise skeemi mitmekordset ümberjoonistamist, mis on ilmselt ebamugav. Näiteks niisuguse skeemi



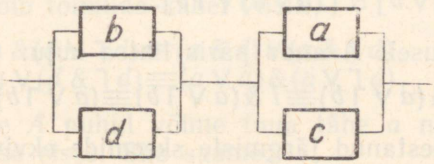
lihtsustamine toimuks järgmiselt. Algul leiaksime distributiivsuse seaduse alusel järgmise antud skeemiga ekvivalentse skeemi



siis veel kord distributiivsuse seadust rakendades asendatakse see skeem järgmisega:



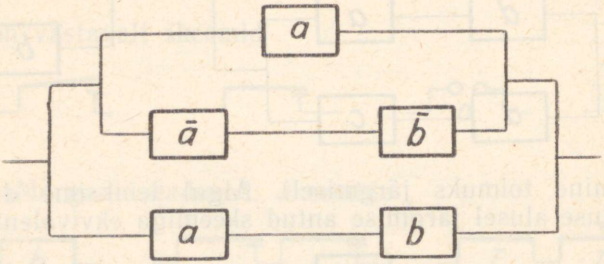
ning lõpuks kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja idempotentsuse seaduste põhjal saaksime skeemi



mis on ekvivalentne lähteskeemiga ning temast tunduvalt lihtsam.

Kuid seesama lihtsustamisprotsess oleks võinud kulgeda järgmiselt. Me oleksime võinud üles kirjutada lähteskeemile vastava liitlause ning lihtsustada seda samade Boole'i seaduste alusel, mida me praegu kasutasime skeemi lihtsustamisel.

Kuidas seda teha, näitame järgmise skeemi varal:



Sellele kontaktrelee skeemile vastab liitlause

$$A = a \vee (\neg a \,\&\, \neg b) \vee (a \,\&\, b).$$

Kirjutame selle lause ümber, kasutades assotsiatiivsuse ja distributiivsuse seadusi:

$$A \equiv a \vee [(\neg a \,\&\, \neg b) \vee (a \,\&\, b)] \equiv$$
$$\equiv a \vee \{[\neg a \vee (a \,\&\, b)] \,\&\, [\neg b \vee (a \,\&\, b)]\}.$$

Veel kord distributiivsuse seadust kasutades saame:

$$A = a \vee \{[(\neg a \vee a) \,\&\, (\neg a \vee b)] \,\&\, [(\neg b \vee a) \,\&\, (\neg b \vee b)]\}.$$

Arvestades seda, et $\neg a \vee a \equiv \neg b \vee b \equiv I$ ja tähistades

$$B = (\neg a \vee b) \,\&\, (a \vee \neg b),$$

võime kirjutada (kasutades algul konjunktsiooni kommutatiivsust ja assotsiatiivsust, siis aga tema idempotentsust ning lõpuks seadust $I \,\&\, B \equiv B$):

$$A \equiv a \vee (I \,\&\, B \,\&\, I) \equiv a \vee (I \,\&\, I \,\&\, B) \equiv a \vee (I \,\&\, B) = a \vee B.$$

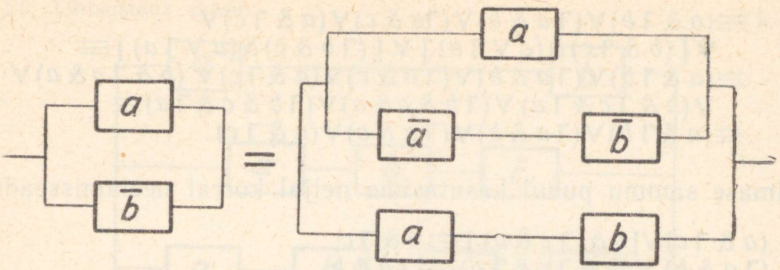
Toetudes veel kord distributiivsuse seadusele võime kirjutada:

$$A \equiv a \vee [(\neg a \vee b) \,\&\, (a \vee \neg b)] \equiv$$
$$\equiv (a \vee \neg a \vee b) \,\&\, (a \vee a \vee \neg b) \equiv$$
$$\equiv [(a \vee \neg a) \vee b] \,\&\, [(a \vee a) \vee \neg b].$$

Nüüd võime lausele A anda päris lihtsa kuju:

$$A \equiv (I \vee b) \,\&\, (a \vee \neg b) \equiv I \,\&\, (a \vee \neg b) \equiv (a \vee \neg b).$$

Seega oleme tõestanud järgmiste skeemide ekvivalentsuse:



Need kaks skeemi peavad üheaegselt kas voolu läbi laskma või selle katkestama.

Kuigi me oleme juba mitu korda rääkinud skeemide ja lausete lihtsustamisest, on seni veel täpsustamata, mida see tähendab, et üks lause või skeem on teisest lihtsam. Selleks oli meil küllalt kaaluv põhjus: universaalset lihtsuse kriteeriumi ei ole olemas. Ühes olukorras on kõige lihtsam skeem, mis sisaldab võimalikult vähe erinevaid kontakte *a*, *b*, *c* jne., kuigi ühte kontakti, näiteks kontakti *a*, võib ta sisaldada kuitahes palju kordi, teisel juhul on kõige sobivam ja seega kõige lihtsam skeem, mis sisaldab võimalikult vähe kontakte üldse, kolmandal juhul aga skeem, milles on minimaalne arv paralleelseid lülitusi jne. Analoogiliselt ka lausete puhul: lihtsamaks võib lugeda iga lauset, mis sisaldab võimalikult vähe Boole'i operatsioonide märke ¬, ∨ ja &, või lauset, mis sisaldab võimalikult vähe tähti, või mõnesuguse muu tunnusega lauset.

Edaspidi hakkame kasutama järgmist lihtsuse kriteeriumi: lause või skeem on seda lihtsam, mida vähem tähti või kontakte temas esineb (iga täht ja kontakt võetakse arvesse nii mitu korda, kui mitu korda ta lauses või skeemis esineb). Näiteks lausetest $[(a \& b) \vee c] \& \neg b$ ning $[(a \& b) \vee \neg a] \& [(b \& a) \vee b]$ on esimene lihtsam, sest ta koosneb neljast tähest (vaatamata sellele, et esimese lause puhul on kasutatud kolme erinevat tähte *a*, *b* ja *c*, teise puhul aga ainult kahte tähte *a* ja *b*).

Peab mainima, et mõnikord võib tulemus lause lihtsustamisel sõltuda sellest, millise lihtsustamistee oleme valinud. Näiteks lause

$$A = (a \& \neg b) \vee (\neg a \& b) \vee (\neg a \& c) \vee (a \& \neg c) \vee (b \& \neg c) \vee (\neg b \& c)$$

lihtsustamiseks võime tuua algul sulgude sisse mõned täiendavad tähed, siis aga neelamisseaduse abil lihtsustada lauset. Tähe juurdetoomine võib toimuda kahel viisil:

$$a \equiv a \& I \equiv a \& (d \vee \neg d) = (a \& d) \vee (a \& \neg d),$$
$$a \equiv a \vee 0 \equiv a \vee (d \& \neg d) \equiv (a \vee d) \& (a \vee \neg d).$$

Ülaltoodud lause *A* puhul võime tuua tähe *a* näiteks kahe viimase sulgavaldise sisse. Siis saame:

$$A \equiv (a \,\&\, \neg b) \vee (\neg a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, c) \vee (a \,\&\, \neg c) \vee$$
$$\vee [(b \,\&\, \neg c) \,\&\, (a \vee \neg a)] \vee [(\neg b \,\&\, c) \,\&\, (a \vee \neg a)] \equiv$$
$$\equiv (a \,\&\, \neg b) \vee (\neg a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, c) \vee (a \,\&\, \neg c) \vee (b \,\&\, \neg c \,\&\, a) \vee$$
$$\vee (b \,\&\, \neg c \,\&\, \neg a) \vee (\neg b \,\&\, c \,\&\, a) \vee (\neg b \,\&\, c \,\&\, \neg a) \equiv$$
$$\equiv (a \,\&\, \neg b) \vee (\neg a \,\&\, b) \vee (\neg a \,\&\, c) \vee (a \,\&\, \neg c).$$

Viimase sammu puhul kasutasime neljal korral neelamisseadust:

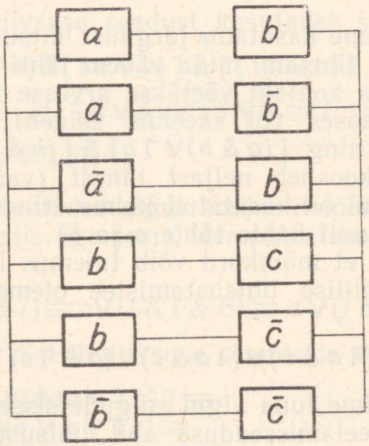
$$(a \,\&\, \neg c) \vee [b \,\&\, (\neg c \,\&\, a)] \equiv a \,\&\, \neg c;$$
$$(\neg a \,\&\, b) \vee (b \,\&\, \neg c \,\&\, \neg a) \equiv \neg a \,\&\, b;$$
$$(\neg b \,\&\, a) \vee (\neg b \,\&\, c \,\&\, a) \equiv \neg b \,\&\, a;$$
$$(\neg a \,\&\, c) \vee (\neg b \,\&\, c \,\&\, \neg a) \equiv \neg a \,\&\, c.$$

Kuigi lause A osutus lihtsustatuks, oleksime võinud saada veelgi lihtsama kuju, valides teistsuguse lihtsustamistee. Nimelt võiksime viia tähe a viimase sulgavaldise sisse ning viia samaaegselt teise sulgavaldise sisse tähe c ning neljandasse tähe b. Siis oleksime saanud järgmise kuju (kontrollida!):

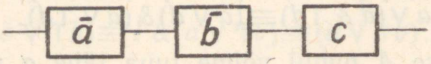
$$A \equiv (a \,\&\, \neg b) \vee (\neg a \,\&\, c) \vee (b \,\&\, \neg c).$$

Ülesandeid.

25. Näidata, et järgmine skeem

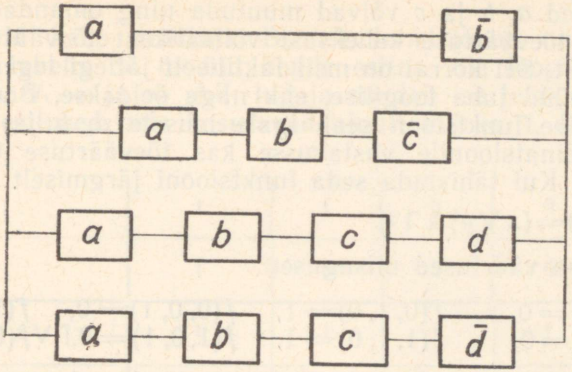


on ekvivalentne skeemi



eitusega.

26. Lihtsustada skeem



27. Lihtsustada laused:
1° $(a \vee b)\&(\neg a \vee \neg b)\&(\neg a \vee b)\&(a \vee \neg b)$;
2° $(a\&b\&c)\vee(\neg a\&b\&c)\vee(\neg a\&\neg b\&c)\vee(\neg a\&\neg b\&\neg c)\vee$
$\vee(a\&\neg b\&c)\vee(a\&b\&\neg c)\vee(a\&\neg b\&\neg c)\vee(\neg a\&b\&\neg c)$.

BOOLE'I FUNKTSIOONID

Kui me koolialgebras kirjutame $n^2 > 0$, siis võime selle all mõista, et mingi konkreetne tähega n tähistatud arv on nullist suurem, võime aga sellest aru saada ka nii, et sümboliga n on tähistatud suvaline naturaalarv, nii et väites $n^2 > 0$ sisalduvad väited

$$1^2 > 0, \quad 2^2 > 0, \quad 3^2 > 0, \ldots, \quad n^2 > 0, \ldots .$$

Kui lubame, et n muutuks, siis on tegemist juba funktsiooniga ja seda funktsiooni tähistame tavaliselt niimoodi:

$$f(x) = x^2.$$

Ka lausearvutuses võib liitlauseid $(a \vee b)\& \neg c$ vaadelda kahest seisukohast. Võib oletada, et a, b ja c tähistavad mingisuguseid konkreetseid lauseid, näiteks:

a: «Igal ruutvõrrandil on vähemalt üks lahend.»
b: «Ruutvõrrandi kõik lahendid on täisarvud.»
c: «7 on täisarv.»

Sel korral on a ja c tõeväärtus 1 ja b tõeväärtus 0 ning $(a \vee b)\& \neg c$ tähendab lauset:

«Igal ruutvõrrandil on vähemalt üks lahend või ruutvõrrandi kõik lahendid on täisarvud, ja seitse pole täisarv»,

mille tõeväärtus on konkreetne arv, nimelt

$$(1 \vee 0)\& \neg \overline{1} \equiv 1 \& 0 \equiv 0.$$

Teiselt poolt võib oletada, et $(a \vee b) \& \neg c$ on selline liitlause, milles lausedа a, b ja c võivad muutuda ning omandada ükskõik missuguse tõeväärtuse kaheksast võimalikust tõeväärtuste kombinatsioonist. Sel korral on meil faktiliselt jällegi tegemist funktsiooniga, nüüd juba loogilise, ehk nagu öeldakse, Boole'i funktsiooniga. See funktsioon seab igale lausete a, b ja c tõeväärtuste kombinatsioonile vastavusse kas tõeväärtuse 0 või tõeväärtuse 1. Kui tähistada seda funktsiooni järgmiselt:

$$f(x, y, z) = (x \vee y) \& \neg z,$$

siis on tema väärtused niisugused:

$f(0, 0, 0) = 0$, $f(0, 1, 0) = 1$, $f(0, 0, 1) = 0$, $f(1, 0, 0) = 1$,
$f(1, 1, 1) = 0$, $f(1, 1, 0) = 1$, $f(1, 0, 1) = 0$, $f(0, 1, 1) = 0$.

Kuid samasuguseid väärtusi omab ka lause $\neg z \& [x \vee \vee (y \& \neg x)]$, mis esitab seega sedasama Boole'i funktsiooni $f(x, y, z)$. Üldiselt esitavad kõik omavahel loogiliselt samaväärsed laused ühte ja sedasama Boole'i funktsiooni.

Praegu vaadeldud Boole'i funktsioon olenes kolmest argumendist x, y ja z — see on kolme muutuja loogiline funktsioon. Võib vaadelda ka ühe muutuja loogilisi funktsioone:

$$f(x) = x \& [\neg x \vee (x \to \neg x), \quad g(x) = \neg(x \& x) \sim (x \to x),$$

kahe muutuja Boole'i funktsioone:

$$f(x, y) = [x \& \neg(x \vee \neg y)] \sim [(x \vee y) \to (y \vee \neg x)] \quad \text{jne.}$$

Tähtis erinevus, võrreldes koolialgebras vaadeldud funktsioonidega, on selles, et nii ühe kui ka kahe, kolme jne. muutuja erinevaid Boole'i funktsioone on lõplik arv. Algebras seevastu on juba ühe muutuja funktsioone lõpmata palju.

Seepärast võib väikese muutujate arvu puhul leida keeruliselt etteantud Boole'i funktsioonile lihtsa esituse järgmisel viisil. Algul tuleb koostada kõikide antud muutujate arvule vastavate Boole'i funktsioonide tabel ning leida iga selles tabelis esineva funktsiooni jaoks võimalikult lihtne esitus. Seejärel tuleb suvalise Boole'i funktsiooni jaoks arvutada tema tõeväärtused ning leida tabelist temale vastav lihtne esitus.

Näiteks erinevaid ühe muutuja Boole'i funktsioone on vaid neli:

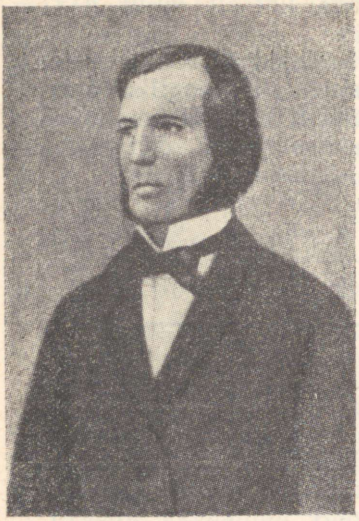
x	$f_1(x) = x \& \neg x$	$f_2(x) = \neg x$	$f_3(x) = x$	$f_4(x) = x \vee \neg x$
1	0	0	1	1
0	0	1	0	1

Seepärast Boole'i funktsiooni $g(x) = \neg(x \& \neg x) \sim (x \to x)$, mille tõeväärtused on kõik võrdsed ühega ($x \& \neg x \equiv 0$, $x \to x \equiv 1$,

seega $\neg 0 \sim 1 = 1 \sim 1 = 1$), võib esitada lihtsalt kujul $g(x) = x \vee \neg x$.

Erinevaid kahe muutuja Boole'i funktsioone on kuusteist. Järgnevas tabelis on toodud nende esitus viie loogilise operatsiooni $\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\sim$ abil; lugeja suudab ise leida neile kõige lihtsamad esitused, mis kasutavad ainult märke $\neg$, & ja $\vee$.

x	1	1	0	0
y	1	0	1	0
$f_1(x, y) = x \vee \neg x$	1	1	1	1
$f_2(x, y) = x \vee y$	1	1	1	0
$f_3(x, y) = y \rightarrow x$	1	1	0	1
$f_4(x, y) = x \rightarrow y$	1	0	1	1
$f_5(x, y) = \neg(x \& y)$	0	1	1	1
$f_6(x, y) = x$	1	1	0	0
$f_7(x, y) = y$	1	0	1	0
$f_8(x, y) = x \sim y$	1	0	0	1
$f_9(x, y) = \neg y$	0	1	0	1
$f_{10}(x, y) = \neg x$	0	0	1	1
$f_{11}(x, y) = \neg(x \sim y)$	0	1	1	0
$f_{12}(x, y) = \neg(x \vee y)$	0	0	0	1
$f_{13}(x, y) = \neg(y \rightarrow x)$	0	0	1	0
$f_{14}(x, y) = \neg(x \rightarrow y)$	0	1	0	0
$f_{15}(x, y) = x \& y$	1	0	0	0
$f_{16}(x, y) = x \& \neg x$	0	0	0	0



Joonis 95. Matemaatilise loogika looja, tuntud inglise matemaatik Georges Boole (1815—1864).

Konstantsete Boole'i funktsioonide $f_1(x)$, $f_4(x)$, $f_1(x, y)$, $f_{16}(x, y)$ jne. jaoks võib kasutada ka tähistusi 0 ja 1:

$$f_1(x) = 0,\ f_{16}(x, y) = 0,$$
$$f_4(x) = 1,\ f_1(x, y) = 1.$$

Toodud tabelist järeldub, et lauset

$$f(x, y) = [x \,\&\, \neg(x \vee \neg y)] \sim$$
$$\sim [(x \vee y) \rightarrow (y \vee \neg x)],$$

mille tõeväärtused on järgmises tabelis ümbritsetud raamiga:

x	y	$[x \,\&\, \neg(x \vee \neg y)] \sim [(x \vee y) \rightarrow (y \vee \neg x)]$					
1	1	00	10	0	1	1	10
1	0	00	11	1	1	0	00
0	1	01	00	0	1	1	11
0	0	00	11	0	0	1	11

võib esitada kujul $f(x, y) = \neg(x \rightarrow y)$.

Muidugi on suure muutujate arvu puhul kõikide Boole'i funktsioonide tabuleerimine praktiliselt võimatu ning siis tuleb funktsioonide lihtsustamiseks kasutada Boole'i algebra seadusi ja igasuguseid kunstlikke võtteid. Näiteks võib teisendada Boole'i funktsiooni normaalkujule (konjunktiivsele või disjunktiivsele). Kahjuks pole ka normaalkuju üheselt määratud ja kõige lihtsama normaalkuju leidmine jääb tähtsaks ja väga keeruliseks lausearvutuse probleemiks. Kuigi siin puudub üldine lahendusmeetod, on üksikute küllalt kitsaste Boole'i funktsioonide klasside jaoks see nn. minimiseerimise probleem siiski piisava täpsusega lahendatud.

28. Leida kõikide kahe muutuja Boole'i funktsioonide jaoks disjunktiivne normaalkuju.
29. Mitu erinevat n muutuja Boole'i funktsiooni on võimalik moodustada?
30. Leida konjunktiivne normaalkuju selliste kolme muutuja Boole'i funktsioonide jaoks, mis omavad kahel korral tõeväärtust 1 ja kuuel korral tõeväärtust 0.

MITMEVALENTSED LOOGILISED SÜSTEEMID

Lause mõistele pühendatud punktis leppisime kokku, et vaatleme edaspidi ainult niisuguseid väljendeid, mis tänu oma seosele tegelikkusega lubavad otsustada, kas on tegemist tõese või väära lausega. Kuid samas tõime näiteid väljenditest, mida otsustasime mitte nimetada lauseteks ja mis ei olnud ei tõesed ega väärad. Nendeks võisid olla igasugused veel tõestamata hüpoteesid, väited, mille tõesust on võimatu kindlaks teha («52 371 aastat 5 kuud ja 12 päeva tagasi oli selles kohas, kus praegu asub Tartu linn, tore päikesepaisteline ilm») või ütlused, mis ei kujuta endast väidet, vaid väljendavad mingi asjaolu võimalikkust, tõepärasust jms. («Homme sõidan ma nähtavasti koju.») See, et kõik niisugused väga sageli esinevad väljendid jäävad välja matemaatilise loogika uurimisväljast, kutsus esile paljude matemaatikute ja filoloogide põhjendatud pahameele ning matemaatilise loogika kriitika.

Püüdes neid raskusi ületada, lõi tuntud poola matemaatik ja loogik J. Łukasiewicz 1920. aastal formaalse loogilise süsteemi, milles peale kahe tavalise tõeväärtuse «tõene» (1) ja «väär» (0) esineb veel kolmas tõeväärtus «võimalik» ($^1/_2$). Niisugust loogilist süsteemi nimetatakse kolmevalentseks loogikaks. Põhiliste loogiliste tehete tõeväärtustabelid näevad J. Łukasiewiczil välja järgmiselt: konjunktsiooni ja disjunktsiooni jaoks

&	0	$^1/_2$	1
0	0	0	0
$^1/_2$	0	$^1/_2$	$^1/_2$
1	0	$^1/_2$	1

∨	0	$^1/_2$	1
0	0	$^1/_2$	1
$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	1
1	1	1	1

(nagu näha, on $a \& b$ tõeväärtus võrdne väikseimaga a ja b tõeväärtustest ning $a \vee b$ tõeväärtus on võrdne suurimaga a ja b tõeväärtustest). Lõpuks eituse ja implikatsiooni jaoks:

a	$\neg a$
1	0
$1/2$	$1/2$
0	1

$\rightarrow$	0	$1/2$	1
0	1	1	1
$1/2$	$1/2$	1	1
1	0	$1/2$	1

(Implikatsiooni $a \rightarrow b$ tõeväärtus võrdub vähimaga arvudest 1 ja $1 - a + b$; näiteks $a = \frac{1}{2}$ ja $b = 1$ korral $1 - \frac{1}{2} + 1 > 1$, nii et $a \rightarrow b = 1$, aga $a = \frac{1}{2}$ ja $b = 0$ korral on $1 - \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2} < 1$ ja $a \rightarrow b = \frac{1}{2}$.)

Selles loogilises süsteemis jäävad kehtima mõned meile hästi tuntud loogilised samaväärsused, näiteks De Morgani ja eituse eitamise seadused, kuid näiteks seadus $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ enam ei kehti: $a = b = \frac{1}{2}$ korral on $\neg \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, aga $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = 1$.

Teise kolmevalentse loogilise süsteemi konstrueeris 1938. aastal nõukogude matemaatik Botšvar. Ta valis kolmandaks tõeväärtuseks «mõttetu» ning kasutas enda konstrueeritud loogikat matemaatilise loogika ja hulgateooria paradokside ümberlükkamiseks, nimelt tõestas ta nende mõttetuse tema poolt konstrueeritud loogilises süsteemis.

On loodud mitmeid teisigi loogilisi süsteeme, milles kolmanda tõeväärtusena kasutatakse tõeväärtusi «määramatu», «otsustamatu» jne. Peale selle on matemaatikute uurimisobjektideks muutunud ka neljavalentsed, viievalentsed ja üldse n-valentsed loogikad ning isegi lõpmatuvalentsed loogikad. Mitmevalentsed loogikad haaravad peale lausearvutuse veel predikaatarvutuse. Predikaat kolmevalentses loogikas on funktsioon, mille argumendid võivad omandada kolm erinevat väärtust ja mis ise võib samuti omada kolme erinevat väärtust (vt. lk. 178).

Lõpmatuvalentse loogika konstrueerimiseks võib näiteks vaadelda tõeväärtuste osas kõiki reaalarve nulli ja ühe vahel (need ise kaasa arvatud) ning üldistada sellele juhule loogiliste operatsioonide definitsioonid, mida kasutatakse Łukasiewiczi loogilises süsteemis:

$\neg a = 1 - a$, $a \& b = \min(a, b)$, $a \vee b = \max(a, b)$, $a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b)$.

Kui me tahame, et tõeväärtuste hulk oleks loenduv, võime piirduda nulli ja ühe vahel asetsevate ratsionaalarvudega.

Ameerika matemaatiku E. L. Posti poolt 1921. aastal välja töötatud mitmevalentsed loogilised süsteemid on konstrueeritavad järgmisel viisil. Tõeväärtusteks on arvud:

$$0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \frac{3}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1,$$

kusjuures arvud 0 ja 1 vastavad tõeväärtustele «tõene» ja «väär». Kui lause tõeväärtus on $\frac{k}{n-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, siis selle lause eituse tõeväärtus on $\frac{k-1}{n-1}$; peale selle $\neg 0 = 1$. Lause $a \vee b$ tõeväärtus, kui a tõeväärtus on $\frac{k}{n-1}$ ja b tõeväärtus on $\frac{l}{n-1}$, on $\frac{\max(k, l)}{n-1}$, s. o. suurim arvudest $\frac{k}{n-1}$ ja $\frac{l}{n-1}$. Ülejäänud loogilised operatsioonid määratakse $\vee$ ja $\neg$ kaudu.

Mitmevalentsed loogikad leidsid rakenduse mõningate elektrotehniliste seadmete uurimisel. Kui kontaktrelee skeemide uurimiseks piisas kahevalentsest loogikast (kuigi ka seal rakendatakse näiteks kolmevalentset loogikat), siis keerulisemate elektrotehniliste seadmete uurimine nõuab üldiselt n-valentse matemaatilise loogika aparatuuri rakendamist. Viimasel ajal on hakatud kasutama mitmevalentset loogikat ka küberneetikas loogilis-informatsiooniliste arvutite konstrueerimiseks.

Teine mitmevalentsete loogikate tähtis rakendus on seotud matemaatilise loogika endaga. Nimelt on hakatud tavalise kahevalentse matemaatilise loogika aksiomaatilisel ülesehitamisel kontrollima üksikute aksioomide sõltumatust ülejäänud aksioomidest järgmisel viisil. Konstrueeritakse selline loogiline süsteem, milles on täidetud kõik aksioomid peale ühe — just selle, mille sõltumatust teistest tahame tõestada. Järelikult ei saa aksioom olla teiste aksioomide loogiliseks järelduseks, sest siis peaks ka selle väide antud loogilises süsteemis olema täidetud. Kuna tavalises kahevalentses loogikas on kõik need aksioomid täidetud, siis ei saa selliseks loogiliseks süsteemiks olla kahevalentne loogika, seepärast konstrueeritakse vajalike omadustega mitmevalentne loogika.

Näiteks järgmises aksioomide süsteemis P_H

$$\neg(a \to \neg b) \to (b \to a); \quad a \to (b \to a);$$
$$\{[(c \to (a \to b)] \to (c \to a)\} \to (c \to b);$$
$$a \,\&\, b \to a; \quad a \,\&\, b \to b;$$
$$a \to [b \to (a \,\&\, b);$$
$$a \to (a \vee b);$$
$$b \to (a \vee b);$$
$$[(a \to d) \to (b \to d)] \to [(a \vee b) \to d];$$
$$(a \sim b) \to (a \to b);$$
$$(a \sim b) \to (b \to a);$$
$$[(a \to b) \to (b \to a)] \to (c \sim d),$$

millele vastavat loogilist süsteemi nimetatakse Hilberti loogikaks, vaadeldakse teise aksioomi sõltumatuse tõestamiseks viievalentset loogikat, milles tõeväärtusteks on 0, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ ja 1. Et mitte tegelda murdudega, korrutame iga tõeväärtuse neljaga ning oletame edaspidi, et tõeväärtusteks selles viievalentses loogikas on arvud 0, 1, 2, 3 ja 4. Siis näevad eituse, konjunktsiooni ja disjunktsiooni definitsioonid välja järgmiselt:

a	$\neg a$
4	1
3	2
2	1
1	1
0	4

&	4	3	2	1	0
4	3	3	0	0	0
3	3	3	0	0	0
2	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0

$\vee$	4	3	2	1	0
4	3	3	3	3	3
3	3	3	3	3	3
2	3	3	0	0	0
1	3	3	0	0	0
0	3	3	0	0	0

Ülejäänud loogilised operatsioonid — implikatsioon ja ekvivalents — on ette antud järgmiste tõeväärtustabelitega:

$\rightarrow$	4	3	2	1	0
4	4	3	2	2	0
3	4	3	2	2	0
2	4	3	4	4	3
1	2	3	2	2	3
0	4	3	4	4	3

$\sim$	4	3	2	1	0
4	3	3	0	0	0
3	3	3	0	0	0
2	0	0	3	0	3
1	0	0	0	0	3
0	0	0	3	3	3

Selles viievalentses loogikas loetakse, et mingi aksioom on täidetud, kui lihtlausete tõeväärtuste kõikide kombinatsioonide puhul omandab see aksioom ainult väärtusi 4 või 3. Kui ta vähemalt ühe tõeväärtuse kombinatsiooni korral omab tõeväärtust 0, 1 või 2, siis pole see aksioom täidetud. Niisiis, aksioomi $a \rightarrow (b \rightarrow a)$ sõltumatuse tõestamiseks on vaja

1) näidata, et see aksioom ei kehti vaadeldavas loogikas;

2) näidata, et kõik ülejäänud aksioomid kehtivad selles loogikas.

Seda, et aksioom $a \to (b \to a)$ ei kehti Hilberti loogikas, võime järeldada järgmistest näidetest:

$1 \to (3 \to 1) = 1 \to 2 = 2;$
$4 \to (1 \to 4) = 4 \to 2 = 2.$

Ülejäänud aksioomide kehtivuses võib muidugi veenduda otseste arvutuste teel, kuid niisugune tee viib väga aeglaselt sihile. Parem on kombineerida arvutusi üldist laadi aruteludega, mis põhinevad loogiliste operatsioonide definitsioonide seaduspärasustel vaadeldavas viievalentses loogikas.

Näiteks aksioomi $a \to (a \vee b)$ kontrollimisel paneme tähele, et $a \vee b$ on alati kas 0 või 3, nii et tuleb arvutada implikatsioonid $a \to 0$ ja $a \to 3$. Et $a \to 3 = 3$ olenemata a-st, siis jääb järele vaid $a \to 0$. See implikatsioon võib omandada väärtusi 3 ja 0, kusjuures aga $a \to 0 = 0$ ainult siis, kui $a = 3$ või $a = 4$. Kuid nendel juhtudel $a \vee b = 3$ ja tegemist ei ole mitte implikatsiooniga $a \to 0$, vaid meile sobivat tõeväärtust 3 omava implikatsiooniga $a \to 3$.

Ülesandeid.

31. Kontrollida, kas Łukasiewicz'i loogikas kehtivad need Boole'i algebra seadused, mis on käesolevas raamatus tõestatud tavalise kahevalentse loogika korral.

32. Kontrollida, kas kõik P_H aksioomid peale teise kehtivad lk. 176 toodud viievalentses loogikas.

PREDIKAADID JA KVANTORID

Lausearvutuses, mille põhimõistetega oleme eespool tutvunud, vaadeldakse iga lihtlauset kui tervikut ega uurita selle ehitust. Predikaatarvutuses vaadeldakse lauseid ka nende struktuuri seisukohalt ja selgitatakse niihästi lause tõesus või väärus kui ka see, mille kohta väide käib. Sealjuures selgub kohe, et üks ja seesama väide võib käia mitme objekti kohta. Näiteks väide

«Peeter on koolipoiss»

muutub pärast sõna «Peeter» asendamist sõnadega «Jüri» või «Aarne» lauseteks

«Jüri on koolipoiss», «Aarne on koolipoiss».

Kui Peeter, Jüri ja Aarne käivad tõepoolest koolis, siis kõik need laused on tõesed. Ent võib juhtuda, et niisugune nimisõna asendus muudab lause vääraks. Nii näiteks lause

«Juhan Smuul on koolipoiss»,

samuti nagu lause

«Kalevipoeg on koolipoiss»

on ilmselt väärad.

Seepärast, vaadeldes kõiki lauseid kujuga

«*X* on koolipoiss»,

peame iga inimese *X* korral ette määrama, kas tema asendamine vaadeldavasse lausesse muudab selle lause tõeseks või vääraks, teiste sõnadega, meil peab olema antud tabel:

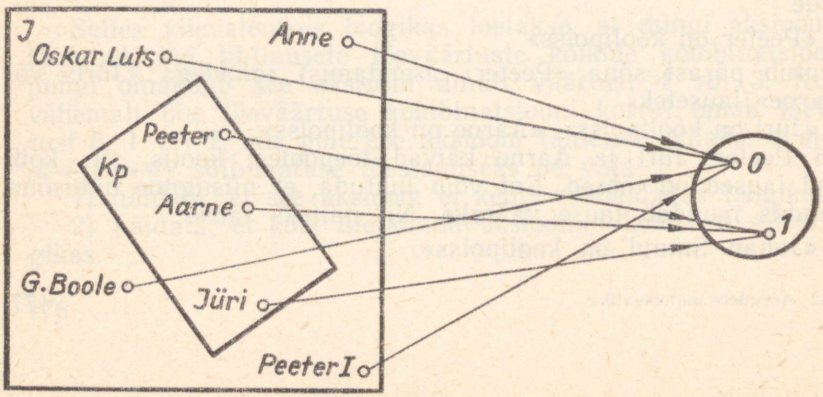
X	Peeter	Jüri	Kalevi-poeg	Aarne	Juhan Smuul	G. Boole	Peeter I
lause «*X* on koolipoiss» tõeväärtus	1	1	0	1	0	0	0

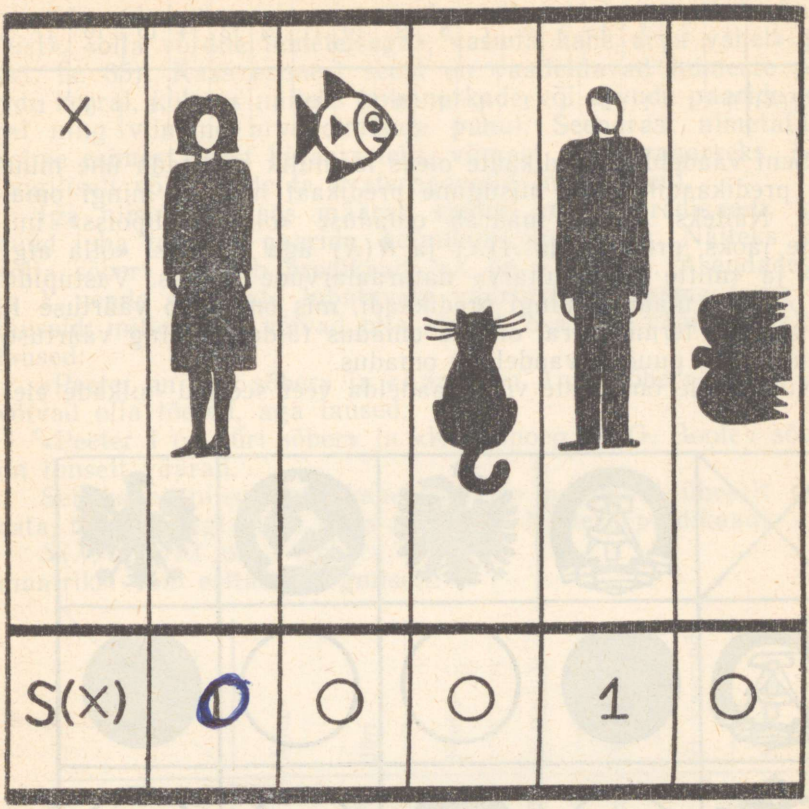
Seega väljend «*X* on koolipoiss» ei kujuta endast mitte lauset, vaid n.-ö. pooltoodet lausete konstrueerimiseks. Muutujat *X* võib vaadelda tühja kohana, mis on jäetud erinevate nimisõnade sissekirjutamise jaoks.

Lauset «*X* on koolipoiss», mille korral on antud ülalnäidatud tüüpi tabel, nimetatakse predikaadiks, tabelit ennast aga predikaadi tõeväärtustabeliks või lihtsalt predikaadi maatriksiks. Objekte, mida võib asetada predikaati muutuja *X* kohale, nimetatakse termideks (nii et Peeter, Jüri, Boole ja teised on predikaadi «*X* on koolipoiss» termid).

Predikaati võib mõista ka sellise kõigi vaadeldavate objektide — termide hulgal defineeritud funktsioonina, mille väärtusteks võivad olla ainult sümbolid 0 (väär) ja 1 (tõene). Niisugune funktsioon on ilmselt määratud, kui kõikide termide hulgas on määratud see alamhulk, mille elemendid muudavad antud predikaadi tõeseks.

Tähistame predikaadi «*X* on koolipoiss» sümboliga $Kp(X)$ (üldse kasutatakse predikaatide jaoks tähistusi $P(X)$, $Q(X)$ jne.). Siis võime kõikide inimeste hulga *I* ehk, nagu öeldakse, universumi alamhulga, mis koosneb kõikidest koolipoistest, tähistada sümboliga *Kp* ja kogu predikaadi $Kp(X)$ esitada skemaatiliselt järgmiselt (skeemil on rõhutatud predikaadi funktsionaalne iseloom):





Joonis 96. Predikaadi $S(X)$ = «X on inimene» tõeväärtustabel.

Kahte predikaati loeme võrdseks ainult siis, kui neil on võrdsed termide hulgad ning nende tõeväärtustabelid on täpselt ühesugused. Näiteks predikaadid $A(X)$ = «X on algarv» ja $R(X)$ = «X ei ole ruutarv» pole võrdsed, ehkki võib lugeda, et kumbki termide hulk (universum) koosneb kõikidest naturaalarvudest. Tõepoolest, esimese predikaadi maatriks näeb välja niiviisi:

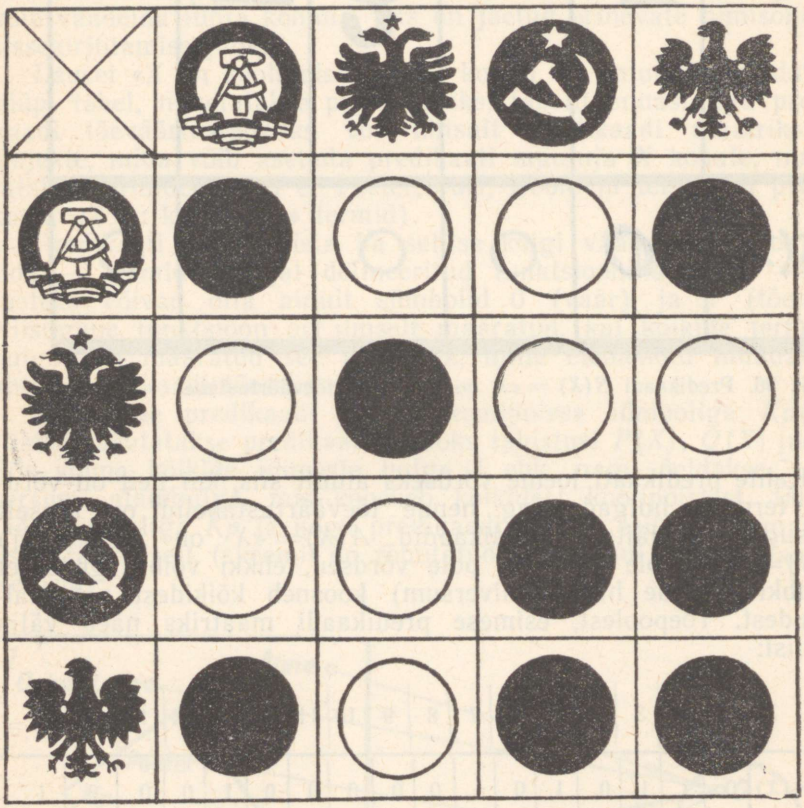
X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17 ...
$A(X)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1 ...

samal ajal aga $R(X)$ tõeväärtustabel on hoopis niisugune:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17 ...
$R(X)$	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1 ...

Seni vaadeldud predikaate oleks loomulik nimetada ühe muutuja predikaadiks. Iga niisugune predikaat määrab mingi omaduse. Näiteks $Kp(X)$ määrab omaduse «olla koolipoiss» inimeste jaoks, predikaadid $A(X)$ ja $R(X)$ aga omadusi «olla algarv» ja «mitte olla ruutarv» naturaalarvude hulgas. Vastupidi, iga omadus määrab mingi predikaadi, mis omandab väärtuse 1, kui vastava termi korral on see omadus täidetud, ning väärtuse 0, kui termil puudub vaadeldav omadus.

Kuid peale omaduste võib vaadelda veel seoseid hulkade ele-



Joonis 97. Kahekohalise predikaadi «X ja Y on naaberriikide embleemid» väärtustabel. Tabelis on märgitud SDV, Albaania, NSVL ja Poola RV embleemid. Siinjuures loetakse, et iga riik on iseenda naaber.

mentide vahel. Seosteks on näiteks «olla abielus», «tunda teineteist», «olla võrdne teineteisega», «asuda kahe arvu vahel» jne. (vt. lk. 35). Kaks esimest seost on vaadeldavad inimeste paaride korral, kolmas näiteks kolmnurkade või arvude paaride korral ning viimane arvukolmikute puhul. Seepärast nimetatakse kolme esimest seost binaarseteks, viimast aga ternaarseks. Analoogiliselt võib vaadelda kvaternaarseid jne. seoseid.

Iga niisugune seos määrab samuti mingi predikaadi, kuid nüüd juba termide paaride, kolmikute jne. jaoks. Näiteks seos «olla sõber» määrab predikaadi «X on Y sõber». Asendades X ja Y nende erinevate lubatavate väärtustega, saame terve rea lauseid, millest osa võivad olla tõesed, osa aga väärad. Näiteks laused:

«Peeter on Jüri sõber» ja «Aarne on Anne sõber»

võivad olla tõesed, aga laused:

«Peeter I on Jüri sõber» ja «Kalevipoeg on G. Boole'i sõber»

on ilmselt väärad.

Selleks et niisugune «kahekohaline» predikaat üheselt määrata, tuleb jällegi anda tema maatriks. Näiteks predikaadi

$S(X, Y) =$ «X on Y sõber»

maatriksi võib esitada järgmiselt:

X \ Y	Anne	Jüri	Peeter	J. Smuul	A. Hint	D. Vaarandi	M. Traat	...
Anne	1	0	0	0	0	1	0	...
Jüri	0	1	1	0	0	0	1	...
Peeter	0	1	1	0	0	0	0	...
Juhan Smuul	0	0	0	1	1	1	0	...
Aadu Hint	0	0	0	1	1	1	0	...
D. Vaarandi	1	0	0	1	1	1	1	...
Mats Traat	0	1	0	0	0	1	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Mitmekohalised predikaadid ja nendega seotud mitmekohalised seosed esinevad matemaatikas väga laialt.

Toome näiteks predikaatide

$P(X, Y) = «|X - Y| = 2»$

ja

$S(X, Y) = «X^2 - Y^2 > 2X»$

maatriksite kuju suuruse poolest esimeste naturaalarvude jaoks.

Predikaadi $P(X, Y)$ maatriks näeb välja järgmiselt:

X \ Y	1	2	3	4	5	6	...
1	1	1	1	0	0	0	...
2	1	1	1	1	0	0	...
3	1	1	1	1	1	0	...
4	0	1	1	1	1	1	...
5	0	0	1	1	1	1	...
6	0	0	0	1	1	1	...
...	...	...	...	...	...	...	...

Predikaadi $S(x, y)$ maatriks on niisugune:

X \ Y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	...
4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	...
5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	...

6	1	1	1	1	0	0	0	0	0	...
7	1	1	1	1	1	0	0	0	0	...
8	1	1	1	1	1	1	0	0	0	...
9	1	1	1	1	1	1	1	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Predikaadi mõiste abil on võimalik käsitleda matemaatilise loogika piirides nii Aristotelese süllogismide teooriat kui ka matemaatiliste arutluste teooriat ja palju teisi keerulisi loogiliste järelduste tegemise meetodeid. Kuid selleks tuleb tuua ka predikaatarvutusse loogikatehted, mis lubavad lihtsamatest predikaatidest koostada keerulisemaid ja seepärast huvitavamaid predikaate.

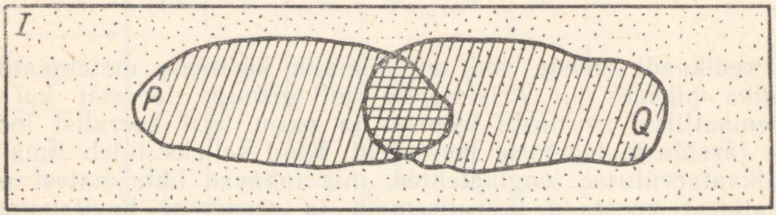
Predikaatarvutuse tehted võib jagada kahte rühma. Esimese rühma tehted kujutavad endast lausearvutuse ehk Boole'i operatsioonide loomulikku ülekandmist predikaatarvutusse. See toimub niimoodi: kui $\square$ on mingi lausearvutuse tehe ($\neg$, &, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ jne.) ning $P(X)$ ja $Q(X)$ on predikaadid (lihtsuse pärast vaatleme siin ühekohalisi predikaate, kuid sama mõttekäik on kehtiv ka üldjuhul), siis predikaat $P(X) \square Q(X)$ on tõene termi A korral ainult siis, kui lause $P(A) \square Q(A)$ on tõene.

Näiteks predikaatide $A(X)$ ja $R(X)$ korral, mida me eespool vaatlesime, on predikaatide $\neg A(X)$, $A(X) \& R(X)$, $A(X) \vee R(X)$ ja $A(X) \sim R(X)$ tõeväärtustabelid järgmised:

term / predikaat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$A(X)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	...
$R(X)$	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	...
$\neg A(X)$	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	...
$A(X) \& R(X)$	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	...

$A(X) \vee R(X)$	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	...
$A(X) \sim R(X)$	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	...

Boole'i tehted predikaatide jaoks on hästi tuletatavad hulgateoorias kasutatavate operatsioonide abil. Näiteks kui predikaat $P(x)$ on tõene hulgal P ning $Q(x)$ hulgal Q, siis predikaat $P(X) \& Q(X)$ on tõene hulkade P ja Q lõikel $P \cap Q$, predikaat $P(X) \vee Q(X)$ samade hulkade ühendil $P \cup Q$ ning predikaat $\neg P(X)$ hulga P täiendil universumi I suhtes.



//// $P(X) \vee Q(X)$ on tõene

≣ $P(X) \& Q(X)$ on tõene

⁝⁝⁝ $\neg P(X)$ on tõene

Ka ülejäänud loogikatehete jaoks võib leida samasuguse hulgateoreetilise interpretatsiooni.

Teise rühma moodustavad just predikaatarvutusele iseloomulikud loogikatehted, mida nimetatakse kvantoriteks. Kvantoreid on kaks: eksisteerimise ehk olemasolu kvantor, mida märgitakse sümboliga $\exists$, ja universaalsuse ehk üldsuse kvantor, mille sümbol näeb välja järgmiselt: $\forall$. Need sümbolid kujutavad endast saksakeelsete sõnade «existieren» ja «alle» ümberpööratud esitähti.

Kvantoreid rakendatakse ühele predikaadile ning saadakse uus predikaat, milles muutujate arv on ühe võrra väiksem kui esialgses predikaadis (ühekohalise predikaadi puhul saame pärast kvantori rakendamist lihtsalt lause, seepärast loetakse lauseid tavaliselt nullkohalisteks predikaatideks).

Kuidas siis toimub uute predikaatide moodustamine kvantorite abil? Eksisteerimise kvantori rakendamisel näiteks kahekohalisele predikaadile $Q(X, Y)$ saame ühekohalise predikaadi

$\exists X\, Q(X, Y) =$ «Leidub X, nii et $Q(X, Y)$»,

mis on tõene, kui vähemalt ühe termi X korral $Q(X, Y)$ on tõene, ja väär vaid siis, kui iga termi X korral $Q(X, Y)$ on väär. Kvantori $\exists$ kohta predikaadis $\exists X Q(X, Y)$ öeldakse, et ta seob muu-

tujat X. Et eraldada seotud muutujat X muutujast Y, nimetatakse viimast vabaks muutujaks. Muidugi võiks siduda kvantoriga ka muutujat Y või isegi mõlemaid muutujaid X ja Y. Viimasel juhul saaksime lause

$\exists X \exists Y Q(X, Y) =$ «Leidub X ja leidub Y, nii et $Q(X, Y)$».

Näiteks ülalvaadeldud predikaadi $S(X, Y)$ korral tähendab $\exists X \exists Y S(X, Y)$ lauset: «Leiduvad sellised arvud X ja Y, et $X^2 - Y^2 > 2X$».

Universaalsuse kvantori rakendamisel predikaadile $R(X, Y)$ saame ühekohalise predikaadi

$\forall X R(X, Y) =$ «Iga X korral $R(X, Y)$»,

mis on tõene vaid siis, kui ei leidu termi X, mille korral $R(X, Y)$ on väär. Ka selle kvantori kohta räägitakse, et ta seob muutujat (antud korral muutujat X).

Selleks et paremini ette kujutada muutujate sidumist kvantorite abil ja muutujate arvu vähenemist pärast iga kvantori rakendamist, toome järgmise näite. Olgu predikaat $R(X, Y)$ defineeritud lõplikul kuueelemendilisel hulgal {2, 3, 4, 6, 8, 12,} ja tähendagu seda, et «Arvudel X ja Y leidub ühine ühest erinev tegur». Siis näeb predikaadi $R(X, Y)$ maatriks välja järgmiselt:

X \ Y	2	3	4	6	8	12
2	1	0	1	1	1	1
3	0	1	0	1	0	1
4	1	0	1	1	1	1
6	1	1	1	1	1	1
8	1	0	1	1	1	1
12	1	1	1	1	1	1

Toome nüüd nelja ühekohalise predikaadi maatriksid, mis on saadud lähtepredikaadi muutujate sidumisel kvantoritega:

Y	2	3	4	6	8	12
$\exists X R(X, Y)$	1	1	1	1	1	1
$\forall X R(X, Y)$	0	0	0	1	0	1

X	2	3	4	6	8	12
$\exists Y R(X, Y)$	1	1	1	1	1	1
$\forall Y R(X, Y)$	0	0	0	1	0	1

Kui seotud on mõlemad muutujad, siis saame järgmised laused:

$\exists X \exists Y R(X, Y) = \exists Y \exists X R(X, Y) = 1;$
$\forall X \forall Y R(X, Y) = \forall Y \forall X R(X, Y) = 0;$
$\exists X \forall Y R(X, Y) = 1;\ \exists X \forall X R(X, Y) = 1;$
$\forall X \exists Y R(X, Y) = 1;\ \forall Y \exists X R(X, Y) = 1.$

Predikaatide $\exists XR(X, Y)$ ja $\exists YR(X, Y)$ ning teiselt poolt predikaatide $\forall X R(X, Y)$ ja $\forall Y R(X, Y)$ maatriksid osutusid võrdseteks tänu sellele, et lähtepredikaadi maatriks on sümmeetriline peadiagonaali suhtes. Üldiselt see ei tarvitse sugugi nii olla. Näiteks maatriksiga

X \ Y	1	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	0
4	0	0	1	0	0	0
5	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	1	0

määratud predikaadi $R(X, Y)$ korral on

Y	1	2	3	4	5	6
$\exists XR(X, Y)$	1	1	1	1	1	0
$\forall XR(X, Y)$	0	0	0	0	0	0

X	1	2	3	4	5	6
$\exists YR(X, Y)$	0	1	1	1	1	1
$\forall YR(R, Y)$	1	0	0	0	0	0

Antud korral on peale selle veel

$$\exists X \forall Y R(X, Y) = 1, \text{ kuid } \exists Y \forall X R(X, Y) = 0.$$

Erinevate kvantorite rakendamise järjekorra muutumine muudab üldiselt ka saadavat predikaati.

Peatumata kvantorite abil üleskirjutatud predikaatide teisendamisseadustel ja sellel, kuidas predikaatarvutuse abil erinevaid järelduste tegemise teooriaid esitatakse, toome vaid ühe näite predikaatide kasutamisest matemaatilise keele osas.

Teatavasti nimetatakse hulka A järjestatud hulgaks, kui temas on defineeritud seos «$\geqslant$», kusjuures

1° iga X korral on $X \geqslant X$;
2° kui $X \geqslant Y$ ja $Y \geqslant X$, siis $X = Y$;
3° kui $X \geqslant Y$ ja $Y \geqslant Z$, siis $X \geqslant Z$;
4° iga kahe elemendi X ja Y korral, kas $X \geqslant Y$ või $Y \geqslant X$.

Toome sisse kaks kahekohalist predikaati:
$O(X, Y) =$«$X \geqslant Y$», $V(X, Y) =$«X ja Y on võrdsed».
Siis võib järjestatud hulga definitsiooni üles kirjutada ühe lause abil:

$$\forall X \forall Y \forall Z \{O(X, X) \& [(O(X, Y) \& O(Y, X)) \rightarrow V(X, Y)] \& \\ \& [(O(X, Y) \& O(Y, Z)) \rightarrow O(X, Z)] \& [O(X, Y) \vee O(Y, X)]\}.$$

Niisuguse keele järjekindlal kasutamisel kogu matemaatilise distsipliini ulatuses on terve rida eeliseid.

Ülesandeid.

33. Konstrueerige predikaatide «X on suurem kui Y» ja «X on Y jagaja» maatriksid.
34. Konstrueerige predikaadi «X on suurem kui Y ruut» maatriks esimese kahekümne naturaalarvu jaoks.
35. Näidata, et predikaadid $P(X) \sim Q(x)$ ja $P(x) \rightarrow Q(x)$ on tõesed vastavalt hulkadel $(P \cap Q) \cup (P \cup Q)'$ ja $P' \cup Q$, kus A' tähendab hulga A täiendit universumi suhtes.
36. Konstrueerida kõik predikaadid, mis tekivad pärast ühe või kahe muutuja sidumist harjutuses 34 konstrueeritud predikaadis.

ALGORITMID

Algoritmideks nimetatakse täpseid eeskirju, mis on rakendatavad teatud muutuvatele lähtesuurustele ning töötavad neid ümber mingisugusteks teisteks suurusteks. Niisuguseks täpseks eeskirjaks on näiteks arvude liitmise eeskiri ehk liitmise algoritm, mille me kõik juba algkoolis selgeks saime. Hiljem tutvutakse koolis ka lahutamise, korrutamise, jagamise algoritmidega,

ruutjuure leidmise ja kahe arvu suurima ühisteguri leidmise algoritmiga.

Kõik need eeskirjad kujutavad endast kõige lihtsamaid näiteid matemaatikas kasutatavatest algoritmidest, kuid algoritmi iseloom on ka väga paljudel eeskirjadel, mida kasutatakse igapäevases elus, majandustegevuses ning administratiivorganite töös. Näiteks võib rääkida tulumaksumäära leidmise algoritmist, tegevteenistusse kutsumise algoritmist või NSV Liidu Ülemnõukogu saadikute valimise algoritmist.

Seoses vajadusega kirjeldada täpselt tehnoloogilisi ja tootmise juhtimise protsesse, omandavad algoritmid tänapäeval üha suurema tähtsuse. Neile kirjeldustele katsutakse anda algoritmiline kuju ning püütakse rakendada neid (tihti elektronarvutite abil) tootmise juhtimises ja tehnoloogia täiustamiseks ning automatiseerimiseks.

Algoritme võib esitada sõnaliselt. Just niisugust kirjeldust kujutabki kindlasti igaüks ette, kui talle räägitakse täpsest eeskirjast. Kahjuks aga juba kõige lihtsamate algoritmide puhul on nende sõnaline kirjeldus küllaltki kohmakas ning ebaülevaatlik.

Toome näiteks arvude liitmise algoritmi umbes sellisel kujul, nagu seda esitatakse koolis. «Selleks et liita kaks arvu, kirjuta algul üles esimene arv ning tema alla teine arv nii, et teise arvu viimane number asetseks esimese arvu viimase numbri all, teise arvu eelviimane number asetseks esimese arvu eelviimase numbri all jne. Seejärel liida mõlema arvu viimased numbrid ning selle summa üheliste arv kirjuta nende numbrite alla. Kui kümneliste arv on null, siis liida omavahel eelviimasel kohal seisvad arvud, kui aga see kümneliste arv on üks, siis liida eelviimasel kohal seisvad arvud omavahel ning lisa sellele summale üks. Seejärel kirjuta saadud summa üheliste arv eelviimaste numbrite alla ja nii edasi.»

Nagu näha, on isegi niisuguse lihtsa algoritmi kirjeldus küllalt keeruline ning pealegi tuleb lõpus kasutada sõnu «ja nii edasi», mille sisust igaüks ei tarvitse kohe täpselt aru saada. Seepärast kasutatakse konkreetsete algoritmide etteandmisel nn. blokkskeeme. Nende konstrueerimiseks tuleb eraldada kõik elementaaroperatsioonid, millega antud algoritmi rakendamise käigus tegemist tuleb teha. Näiteks arvude liitmisel on elementaaroperatsioonideks numbrite liitmine, numbrite kirjutamine ning arvude võrdlemine kümnega (arvu kümnendosa määramine).

Algoritmi blokkskeem koosneb elementaaroperatsioonidele vastavatest blokkidest, mis on omavahel ühendatud noolekestega. Viimased näitavad, millises järjekorras tuleb neid elementaaroperatsioone sooritada.

Mõned elementaaroperatsioonid (nimelt need, mis kõige enam vastavad meie ettekujutusele operatsioonist) annavad korralduse teostada mingi lihtne protseduur, näiteks liita arvule juurde arv

1, muuta arvu märk, valida suvaline arv teatud arvude hulgast, nihutada koma ühe koha võrra paremale või vasakule jne. Nendele operatsioonidele vastavaid blokke nimetatakse täidesaatvateks ning kuna nende teostamise järel tuleb tingimata asuda järgmise elementaaroperatsiooni juurde, siis väljub igast täidesaatvast blokist üksainus nool.

Teist liiki elementaaroperatsioonid selgitavad tavaliselt vastuse mingile meid huvitavale küsimusele. Olenevalt sellest, kas vastus on positiivne või negatiivne, sooritatakse edaspidi üks või teine elementaaroperatsioon. Kuna alati võib piirduda ainult küsimustega, millele tuleb vastata kas «jah» või «ei», siis väljub igast niisugusele elementaaroperatsioonile vastavast blokist täpselt kaks noolt. See nool, mis näitab, millise elementaaroperatsiooni täitmise juurde tuleb asuda, kui vastus küsimusele oli jaatav, märgitakse märgiga «+», teine aga märgiga «–».

Elementaaroperatsioonide hulka võib arvata ka käsud «algus» ja «lõpp». Algoritmi töö algab elementaaroperatsioonist «algus» ning lõpeb resultatiivselt, kui oleme jõudnud blokini, mis vastab elementaaroperatsioonile «lõpp». Algoritmi töö võib lõppeda ka mitteresultatiivselt ja seda nimelt siis, kui ta hakkab lõpmatult mingit operatsioonide tsüklit kordama. Niisugust olukorda püütakse algoritmide konstrueerimisel vältida.

Vaatleme näiteks algoritmi, mis leiab iga naturaalarvu N korral (N on esitatud tavalises kümnendsüsteemis) tema esituse kahendsüsteemis, ent enne kui asuda selle algoritmi kirjeldamisele, teeme mõningad selgitavad märkused.

Kahendsüsteemis kasutatakse ainult kahte numbrit: 0 ja 1. Arvude sümboliteks on sel korral näiteks 1001, 11101, 1100 jne. Kümnendsüsteemis tähendab võrdus $N = 463$ seda, et $N = 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 3$. Täpselt samuti on kahendsüsteemis võrdusel $N = 11010$ tähendus, et $N = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 0$. Seega on kümnendsüsteemis $N = 16 + 8 + 2 = 26$. Toome veel näiteid. Arvud 7, 12, 19, 31 ja 33 näevad kahendsüsteemis välja järgmiselt: 111, 1100, 10011, 11111, 100001. Konstrueeritava algoritmi töö käigus teostatavate arvutuste tulemusi fikseerime kolmel eri lehel (leht nr. 1, leht nr. 2 ja leht nr. 3). Selles algoritmis kasutatakse järgmisi elementaaroperatsioone (n on lehel nr. 2 märgitud naturaalarv):

$n - 1$ — lahutada lehel nr. 2 olevast viimasest arvust arv 1 ning kirjutada tulemus lehele nr. 2 viimase seal oleva arvu alla,

$n + 1$ — liita lehel nr. 2 olevale viimasele arvule 1 ning kirjutada tulemus viimase seal oleva arvu alla,

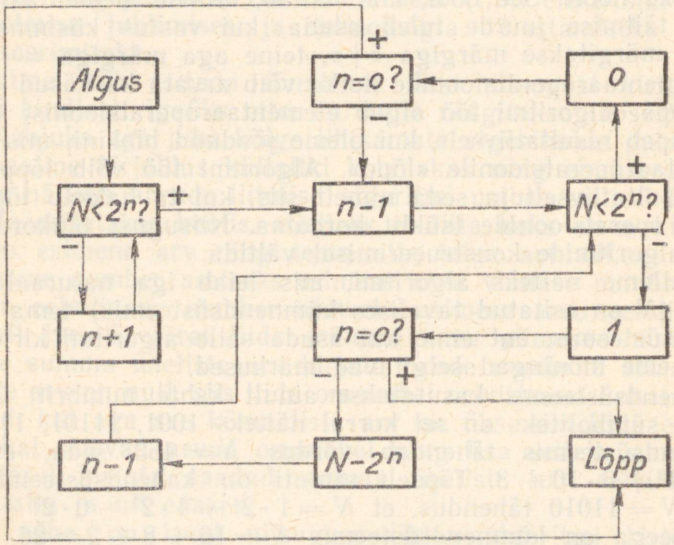
0 — kirjutada lehel nr. 3 olevale arvule paremalt juurde number 0,

1 — kirjutada lehel nr. 3 olevale arvule paremalt juurde number 1,

$N - 2^n$ — lahutada viimasest esimesele lehele kirjutatud arvust arv 2^n, kus n on viimane lehele nr. 2 kirjutatud arv.

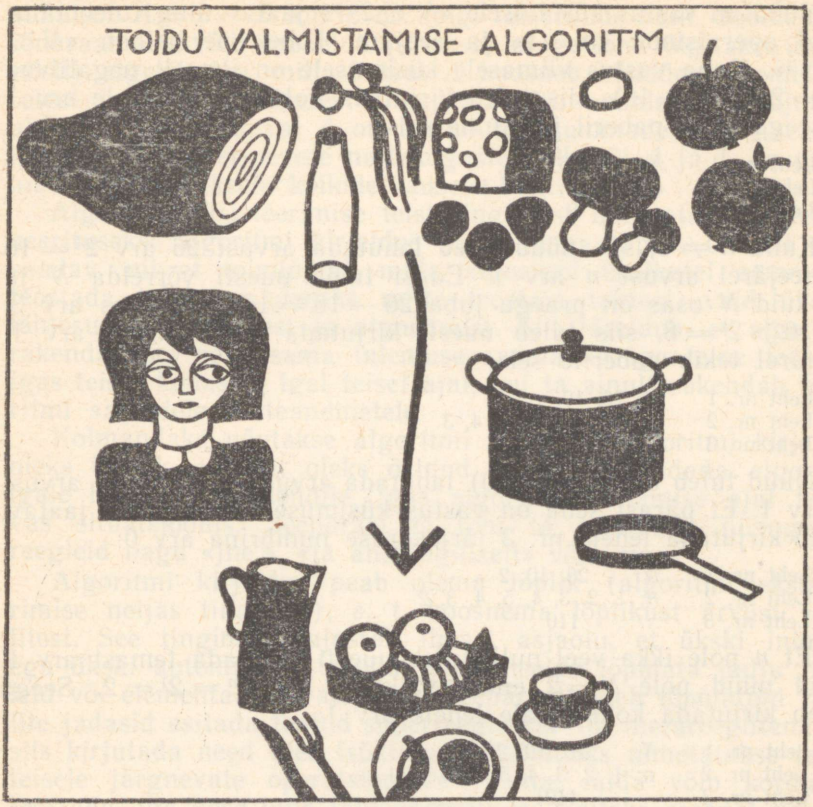
Peale nende täidesaatvate elementaaroperatsioonide kasutame veel operatsioone «$n = 0$?», «$N < 2^n$?» ja «$N > 2^n$?», mille sisu on otseselt arusaadav nende tähistuse järgi. Tuletame veel kord meelde, et kõik vahepealsed tulemused fikseerime kolmel lehel, kusjuures esimesel märgitud arve tähistatakse tähega N, teisel — tähega n ning kolmandale lehele peame lõpuks saama otsitava tulemuse.

Otsitava algoritmi blokkskeem näeb välja järgmiselt:



Algoritm alustab tööd, kui esimesele lehele on kirjutatud antud arv, mille jaoks me otsimegi esitust kahendsüsteemis, ja teisele lehele arv 1. Kuna blokkskeemis on täpselt kirjeldatud elementaaroperatsioonide järjekord, siis võib seda rakendada igaüks, kes suudab neid operatsioone teostada. See «keegi» võib olla näiteks mingi masin või aritmeetika hästi omandanud neljanda klassi õpilane, kusjuures see «keegi» ei tarvitse sugugi teada, mida ta teeb ja mida üldse tähendab kahendsüsteem. Ta peab vaid blokkskeemi poolt ettekirjutatud järjekorras teostama elementaaroperatsioone, kuni jõuab operatsioonini «Lõpp».

Et paremini aru saada blokkskeemiga etteantud algoritmi rakendamisest, arvutame näiteks arvu 26 esituse kahendsüsteemis. Algseisus tuleb vastata küsimusele: «Kas 26 on väiksem



Joonis 98. Iga perenaine peab tundma maitsva toidu valmistamise algoritmi.

kui $2^1 = 2$?» Kuna vastus on eitav, siis tuleb liita arvule 1, mis on märgitud lehele nr. 2, veel arv 1. Saadud seisus

Leht nr. 1	Leht nr. 2	Leht nr. 3
N: 26	n: 1, 2	

tuleb juba vastata küsimusele: «Kas 26 on väiksem kui $2^2 = 4$?» ja seejärel liita uuesti 1. Niisugust kahest operatsioonist «$N < 2^n$?» ja «$n + 1$» koosnevat tsüklit tuleb täita seni, kuni paberilehtedele tekib järgmine seis (ruumi kokkuhoiu mõttes kujutame paberilehti edaspidi veidi teisiti):

Leht nr. 1	N: 26
Leht nr. 2	n: 1, 2, 3, 4, 5
Leht nr. 3	

Nüüd on vastus küsimusele «$N < 2^n$?» jaatav ning tuleb täita algul operatsioon «$n - 1$» ja seejärel kohe operatsioon «$N < 2^n$?». Kuna vastus viimasele küsimusele on ilmselt negatiivne ($N = 26 > 2^4 = 16$), siis tuleb kirjutada kolmandale lehele arv 1 ja seega tekib paberil järgmine seis:

Leht nr. 1 N: 26
Leht nr. 2 n: 1, 2, 3, 4, 5, 4
Leht nr. 3 1

Kuna $n \neq 0$, siis nüüd tuleb lahutada arvust 26 arv $2^4 = 16$ ja seejärel arvust n arv 1. Edasi tuleb uuesti võrrelda N ja 2^n, kuid N osas on praegu juba $26 - 16 = 10$ ja n osas arv 3. Et $10 > 2^3 = 8$, siis tuleb uuesti kirjutada lehele nr. 3 arv 1. Seejärel tekib paberile seis:

Leht nr. 1 N: 26, 10
Leht nr. 2 n: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3
Leht nr. 3 11

Nüüd tuleb uuesti ($n \neq 0$) lahutada arvust 10 arv 8 ja arvust 3 arv 1. Et pärast seda on vastus küsimusele «$N < 2^n$?» jaatav, tuleb kirjutada lehele nr. 3 järjekordse numbrina arv 0:

Leht nr. 1 N: 26, 10, 2
Leht nr. 2 n: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2
Leht nr. 3 110

Et n pole ikka veel null, tuleb uuesti lahutada temast arv 1. Kuid nüüd pole $N = 2$ enam väiksem kui $2^n = 2^1 = 2$. Seega tuleb kirjutada kolmandale lehele arv 1:

Leht nr. 1 N: 26, 10, 2
Leht nr. 2 n: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1
Leht nr. 3 1101

Ka praegu pole veel $n = 0$, seega lahutame arvust $N = 2$ arvu 2 ja arvust $n = 1$ arvu 1. Nüüd on vastus küsimusele «$N < 2^n$?» positiivne ja lehele nr. 3 tuleb kirjutada arv 0:

Leht nr. 1 N: 26, 10, 2, 0
Leht nr. 2 n: 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0
Leht nr. 3 11010

Et aga nüüd on $n = 0$, siis suunab algoritmi blokkskeem meid elementaaroperatsiooni «Lõpp» juurde. Seega on arvu 26 esitus kahendsüsteemis järgmine: 11010 (võrdle näitega lk. 189).

Peatume nüüd kõige üldisematel nõuetel, mida peab rahuldama iga algoritm ja mille täitmiseta ei saa rääkida algoritmi eksisteerimisest.

Algoritmi olemasolu esimene tingimus on selles, et peavad olema määratud suurused, millele algoritm on rakendatav (lähteobjektide hulk A), ja suurused, milleks algoritm töötleb hulga A elemente (lõpptulemuste hulk L). Seega peab algoritm kujutama endast teatud hulga A teisendust hulka L.

Täisarvude liitmise, lahutamise ja korrutamise algoritmide

puhul on $A = L = Z$, kus Z on kõigi täisarvude hulk. Soome-eesti sõnaraamatut võib vaadelda (oletusel, et iga sõna tõlgitakse ühesel viisil) algoritmina, mille korral A koosneb kõikidest soomekeelsetest ja L eestikeelsetest sõnadest. Võib endale ette kujutada algoritmi, mille korral A on teatud rahasummade hulk naelsterlingites, L aga erinevate naftakoguste hulk või A ja L on mõlemad rumeenia keele kõikide lausete hulk jne.

Algoritmi eksisteerimise teist tingimust nimetatakse determineerituseks: algoritmi kirjeldus peab olema täpne, üheselt arusaadav, nii et toimingud, mida algoritmi üksikutel sammudel teostada tuleb, ei oleneks mitte teostaja tahtest, vaid üksnes lähtesuuruste valikust ja algoritmist. Siit järeldub, et algoritmi rakendamisel peab sama tulemuse saama ka iga teine teostaja igas teises kohas ja igal teisel ajal, kui ta ainult rakendab algoritmi samadele lähteandmetele.

Kolmandaks nõutakse algoritmi puhul, et algoritmi kirjeldus oleks täielik, s. t. et oleks öeldud, kuidas rakendada algoritmi igale hulga A elemendile, igas algoritmi töötamise ajal tekkivas situatsioonis. Seepärast ei tohi ta sisaldada niisuguseid reegleid nagu «jne.», «ja analoogiliselt» või «ms.».

Algoritmi kirjeldus peab olema lõplik (algoritmi eksisteerimise neljas tingimus), s. t. koosnema lõplikust arvust reeglitest. See tingimus kajastab ilmset asjaolu, et ükski inimene ega ükski automaat ei suuda jätta meelde lõpmata palju reegleid või elementaaroperatsioone. Seepärast tuleb lõpmatuid reeglite jadasid esitada teatud superreeglitena või metareeglitena või siis kirjutada need üles tsüklitena. Tsükliteks nimetatakse teineteisele järgnevate operatsioonide rühma, mida võib korduvalt teostada, iga kord uute lähteandmetega. Näiteks eespool vaadeldud algoritmis moodustasid tsükleid operatsioonid $n = 0$?; $n - 1$; $N < 2^n$? ja 0, operatsioonid 1; $n = 0$?; $N - 2^n$; $n - 1$ ja $N < 2^n$?, operatsioonid $n + 1$ ja $N < 2^n$? ning terve rida teisi operatsioonide rühmi.

Juba esimene tingimus viitab algoritmi nn. massilisusele. Algoritmide abil ei lahendata mitte üksikuid ülesandeid, vaid terveid analoogiliste ülesannete klasse. Eeskirja ühe ülesande lahendamise jaoks ei nimetata algoritmiks. Näiteks eksisteerib eeskiri nurga 90° jaotamiseks sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks, kuid ei eksisteeri algoritmi suvalise nurga jaotamiseks kolmeks võrdseks osaks ainult nende vahendite abil.

Viiendat algoritmi olemasolu tingimust nimetatakse algoritmi resultatiivsuse nõudeks. Selle kohaselt peab algoritmi rakendamine alati andma teatud tulemuse ning peab seejärel automaatselt katkema. Selle tingimuse tõttu eraldab algoritm hulga A elemente kõikide objektide hulgast, millele ta on formaalselt rakendatav (näiteks arvude liitmise algoritm on formaalselt rakendatav nn. lõpmatutele arvudele ... 54321, ... 97531 jne.).

Mõningate algoritmide korral, eriti mõne konkreetse masinate klassi jaoks mõeldud algoritmide puhul on väga tähtis veel nõue, mille kohaselt peab olema määratud nende operatsioonide hulk, mida võib algoritmi koostamisel tarvitada (näiteks elektronarvutil ei saa teostada operatsiooni: värvida x punase värviga). Kuna tavaline eesti, vene, saksa või inglise keel ei ole algoritmi kirjeldamise seisukohalt piisavalt täpne, siis nõutakse tihti algoritmi koostamisel, et oleks määratud ka mõni täpne kunstlik ehk algoritmiline keel, milles antud algoritm üles kirjutatakse. Üheks niisuguseks keeleks, mida viimasel ajal väga palju kasutatakse, on nn. ALGOL.

Kuigi esitatud nõuded iseloomustavad algoritmi mõistet vägagi ilmekalt, ei kujuta nende nõuete kompleks algoritmi mõiste ranget matemaatilist definitsiooni. Niisuguste definitsioonidega tutvume kahes järgnevas punktis.

Ülesandeid.

37. Koostada arvude lahutamise algoritmi blokkskeem.
38. Leida algoritm trips-traps-trulli mängu jaoks, mis tagaks esimesele mängijale alati kas võidu või vähemalt viigi.
39. Koostada selle algoritmi blokkskeem.
40. Kuidas otsustada, missugust ülikonda osta? Koostage vastava algoritmi blokkskeem.
41. Vaatleme järgmisi elementaaroperatsioone:

    1 — kirjutada arv a lehele nr. 1 ja arv b lehele nr. 2; $\overline{1} \geqslant \overline{2}$? — kontrollida, kas lehele nr. 1 kirjutatud arv on suurem kui lehel nr. 2 kirjutatud arv,

    2 — vahetada omavahel lehtedel nr. 1 ja nr. 2 olevad viimased arvud,

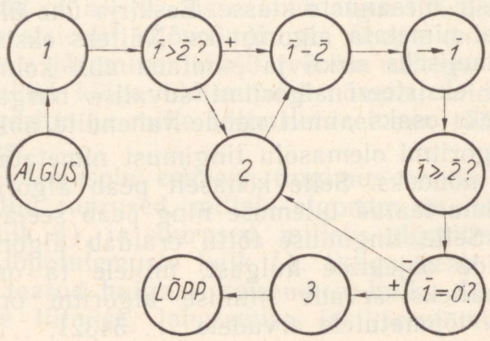
    $\overline{1} - \overline{2}$ — lahutada lehel nr. 1 olevast viimasest arvust viimane lehele nr. 2 kirjutatud arv,

    $\rightarrow \overline{1}$ — kirjutada tulemus lehele nr. 1,

    $\overline{1} = 0$? — kontrollida, kas lehel nr. 1 on viimane arv võrdne nulliga,

    3 — kirjutada välja viimane lehel nr. 2 olev arv.

Nendest elementaaroperatsioonidest on koostatud Eukleidese algoritm, mille blokkskeem on toodud järgmisel skeemil. Kahe arvu suurima ühisteguri leidmiseks rakendada Eukleidese algoritmi arvupaaridele 544 ja 391, 736 ja 529 ning 2331 ja 1692.



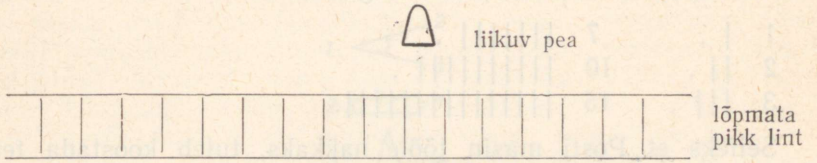
Nagu juba eespool mainisime, on algoritmide rakendamine tihedalt seotud elektronarvutitega. Kui tutvuda lähemalt, milles see seos väljendub, siis selgub, et iga arvuti on suuteline teostama arvutusi teatud kindlate algoritmide järgi ning vastupidi — iga (mitte eriti keerulise) algoritmi jaoks võib konstrueerida masina, mis suudab seda algoritmi realiseerida.

Tänapäeval on levinud kahte tüüpi elektronarvutid. Ühed neist on konstrueeritud niimoodi, et neil on kõige sobivam teha arvutusi kas üheainsa või mitme sarnase algoritmi järgi. Selliseid arvuteid nimetatakse spetsialiseeritud arvutiteks ja neid võib kasutada näiteks raamatupidamises või rakettide trajektooride arvutamiseks.

Palju laiemalt on levinud nn. universaalsed arvutid, millel on põhimõtteliselt võimalik teostada arvutusi ükskõik millise algoritmi järgi. Kui meil õnnestuks anda niisuguse masina matemaatiliselt range definitsioon, siis võiksime defineerida algoritmi sellise eeskirja või programmina, mida sellel masinal realiseerida saab.

Käesolevas punktis tutvumegi niisuguse masina definitsiooniga. Esitame selle äärmiselt lihtsustatult, ideaalsel kujul, jättes kõrvale reaalsete elektronarvutite omadused ning nende võimete piiratuse, mis üldiste arutelude korral ei ole olulised. Niisugust ideaalset, abstraktset masinat nimetatakse matemaatikas Posti masinaks.

Posti masin on nii lihtne, et konkreetseid algoritme saab temal realiseerida isegi eelkooliealine laps. Ta koosneb kahest osast: lõpmata pikast paberiribast, mis on jaotatud üksikuteks pesadeks, ja liikuvast peast, mis teostabki kõik operatsioonid:



Neid operatsioone on kokku viis: pea võib liikuda ühe pesa võrra vasakule, liikuda niisama palju paremale, kirjutada pesa sisse kriipsu, kustutada pesas oleva kriipsu ning lõpuks kontrollida pesa sisu, s. t. ära tunda, kas pessa on kirjutatud kriips või mitte. Edaspidi tähistame neid operatsioone järgmiselt:

⇦ pea liigub ühe pesa võrra vasakule;

⇨ pea liigub ühe pesa võrra paremale;

| pea joonistab tühja pesa sisse ühe kriipsu;

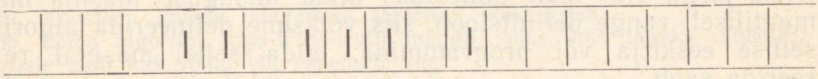
 pea kustutab pesas oleva kriipsu;

 pea selgitab, kas pesasse on kirjutatud kriips või mitte.

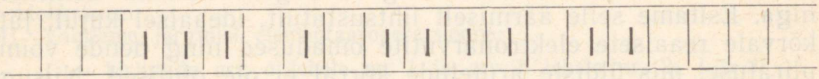
Masina lindile võib kriipsude abil üles kirjutada palju erinevaid sümboleid. Näiteks võib kokku leppida, et järgmised kriipsude kombinatsioonid tähistavad selliseid tähti ja arve:

a | ,
e || , 1 ||||| ,
m ||| , 2 |||||| .
l |||| ,

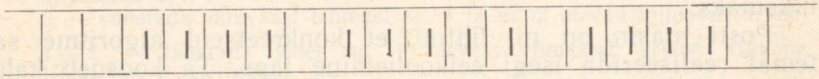
Siis võib Posti masina lindile kirjutada sõna «ema»:



või sõna «male»:



või arvu 121:

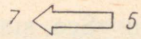


Edaspidi hakkame kasutama ainult naturaalarvude sümboleid ning tähistame arvu *K* lihtsalt *k* kriipsukese abil, nii et järgmised sümbolid tähendavad niisuguseid arve:

1 | , 7 ||||||| ,
2 || , 10 |||||||||| ,
3 ||| , 15 ||||||||||||||| .

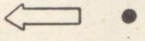
Selleks et Posti masin tööle hakkaks, tuleb koostada tema jaoks tegevusprogramm. Programm koosneb üksikutest käskudest, mis võivad olla kolme erinevat liiki. Enne kui selgitada iga liiki käskude struktuuri, jätame meelde, et kõik käsud algavad antud käsu järjekorranumbriga.

Esimest liiki käskudes järgneb käsu järjekorranumbrile üks operatsioonidest  , , | ,  ja kolmandal kohal on mingi teise käsu järjekorranumber. Näiteks võib käsk välja näha järgmiselt:



Niisuguse käsu täitmisel tuleb minna algul ühe sammu võrra vasakule ning seejärel asuda viienda käsu täitmisele.

Teist liiki käsk võib erineda esimest liiki käsust ainult selle poolest, et operatsiooni märgi järel seisab punkt:



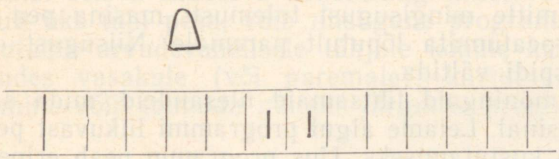
See tähendab, et pärast antud käsu täitmist tuleb töö lõpetada ning masin peatada. Teist liiki käsk võib koosneda ka ainult numbrist ja punktist — sel korral peatub masin otsekohe.

Kolmandat liiki käsk näeb välja järgmiselt:

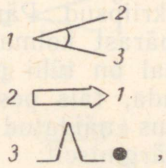


Selle täitmisel tuleb kontrollida, kas masina liikuva pea vastas asuv pesa on tühi või on temasse kirjutatud kriips. Esimesel juhul tuleb asuda ülemise numbriga (antud puhul viienda), teisel aga alumise numbriga määratud käsu (antud korral teise) teostamisele.

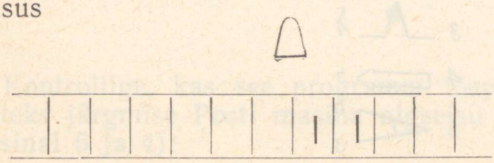
Näiteks kui Posti masina algseis on järgmine:



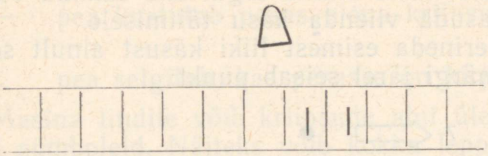
ning ta peab töötama allpool toodud lihtsa programmi järgi:



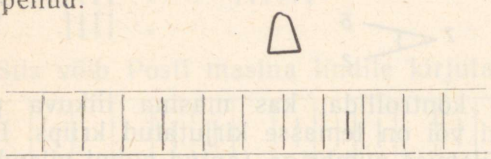
siis toimub selle programmi täitmine niimoodi. Algul tuleb täita esimene käsk. Et liikuva pea vastas asuv masina lindi pesa on tühi, tuleb asuda teise käsu täitmisele. Selleks liigub masina pea ühe pesa võrra paremale ning hakkab tekkinud seisus



uuesti täitma esimest käsku. See suunab masina uuesti teise käsu juurde, nii et masina seis muutub järgmiseks:

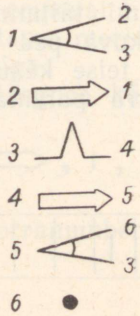


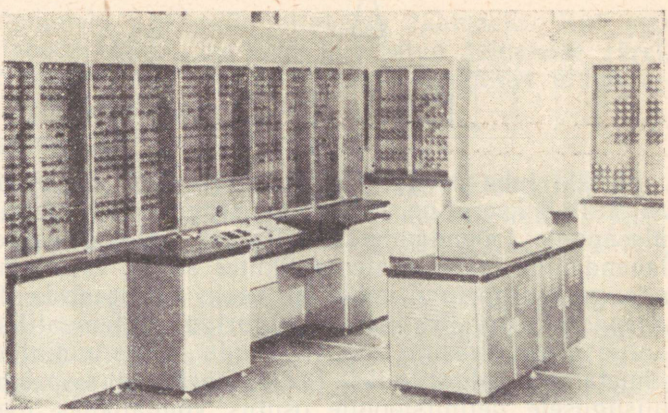
Selles seisus tuleb uuesti täita esimene käsk. Antud korral aga (pessa on kirjutatud kriips) suunab see käsk kolmanda käsu juurde. Viimase täitmine nõuab pesas oleva kriipsu kustutamist ning seejärel masina peatamist. Sellega on programmi täitmine lõppenud:



Järelikult liigub Posti masina pea niisuguse programmi korral paremale, kuni leiab seal lindile kirjutatud arvu, ning lahutab sellest ühe. Kui lindil poleks olnud ühtegi arvu või kui see arv oleks asunud liikuvast peast vasakul, ei annaks niisugune programm mitte mingisugust tulemust: masina pea liiguks ilma kusagil peatumata lõputult paremale. Niisugust olukorda püüame edaspidi vältida.

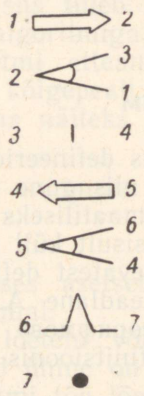
Vaatleme nüüd mõningaid lihtsamaid ülesandeid, mida saab lahendada Posti masinal. Leiame algul programmi liikuvast peast paremal asuva arvu kustutamiseks. Uus programm peab erinema äsja vaadeldud programmist selle poolest, et, leides lindile kirjutatud arvu, ei kustuta masin mitte üheainsa kriipsu, vaid kõik seda arvu moodustavad kriipsud. Pärast seda peab masin peatuma. Seepärast tuleb pärast kolmanda käsu täitmist liikuda edasi ja vaadata, kas seal on tühi pesa või mitte. Tühja pesa korral võib masin peatuda, täis pesa puhul aga tuleb uuesti teostada kolmandas käsus näidatud operatsioon. Seega näeb otsitav programm välja järgmiselt:



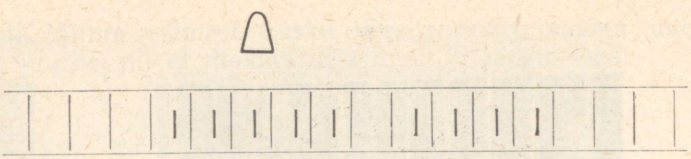


Joonis 99. TRÜ arvutuskeskuses töötav kaasaegne universaalne arvuti «Ural 4» on palju soliidsem kui Posti masin, kuid viimane on see-eest tunduvalt võimsam.

Arvude liitmist teostavad programmid võib üles ehitada erinevatel printsiipidel. Kõige lihtsamal juhul, kui liikuv pea asub vasakul seisva liidetava kohal ning liidetavate arvude vahel on ainult üks tühi pesa, võib niisugune programm sundida masinat kirjutama arvudevahelisele tühjale kohale kriipsu ning seejärel, liikudes vasakule (või paremale), kustutada äärmise kriipsu. Liitmine võib toimuda näiteks järgmise programmi põhjal:



Kontrollige, kas see programm töepoolest liidab kaks arvu näiteks järgmise Posti masina algseisu korral (s. t. liitke Posti masinal 5 ja 4):



Ehkki juba arvude korrutamise eeskiri on Posti masina korral küllalt keeruline, võib leida programmid veelgi keerulisemate ülesannete lahendamiseks. Pärast paljude raskete ülesannete lahendamist tekkis matemaatikutes sügav veendumus, et ei leidu niisugust algoritmi, mida ei saaks realiseerida Posti masinas. Seepärast ongi üks esimesi algoritmi matemaatilisi definitsioone antud Posti masina mõiste kaudu. Selle definitsiooni kohaselt nimetatakse algoritmiks Posti masina iga programmi. Tänu niisugusele definitsioonile osutus võimalikuks tõestada algoritmide mitteeksisteerimise teoreeme, millest rääkisime sissejuhatuses.

Ülesandeid.

41. Koostage programm, mille teostamisel Posti masin liidaks kaks arvu, kui masina pea asub paremal oleva arvu kohal.
42. Koostage liitmisprogramm Posti masina jaoks juhul, kui arvude vahel on suvaline hulk tühje pesasid ning masina pea asub vasaku arvu esimese kriipsu kohal.
43. Koostada samasugune programm juhul, kui masina pea asub mingi vahepealse tühja pesa kohal.
44. Koostada arvude lahutamise programm Posti masina jaoks, kui suurem arv asub lindil vasakul ning masina pea on selle arvu viimase numbri kohal.

MARKOVI NORMAALALGORITM

Kuigi osutub võimalikuks defineerida täpselt algoritmi mõiste Posti masina abil ja kuigi niisugune definitsioon oli ajalooliselt esimeseks algoritmi matemaatiliseks definitsiooniks, arendati algoritmiteooriat, lähtudes sisult küll selle definitsiooniga samaväärsetest, kuid kujult erinevatest definitsioonidest. Ühe nendest esitas tuntud nõukogude teadlane A. Markov oma ulatuslikus monograafias «Теория алгорифмов» (Algoritmiteooria), seepärast nimetatakse selles definitsioonis esitatud mõistet Markovi normaalalgoritmiks.

Markovi algoritmide üleskirjutamisel võib kasutada suvalist lõplikku sümbolite hulka. See võib koosneda näiteks sümbolitest $\{a, b, c\}$ või sümbolitest $\{I, =, a, \mathfrak{B}, :, \Gamma, \mathrm{R}, +, \Sigma\}$. Iga niisugust etteantud sümbolite süsteemi on loomulik nimetada

alfabeediks, sümboleid aga selle alfabeedi tähtedeks. Kui aga teatud ühe alfabeedi tähed on üles kirjutatud teineteise järel, siis on meil tegemist juba sõnaga. Näiteks esimeses ülalnimetatud alfabeedis on sõnadeks

aba, *cccc*, *abcabcabc*,

kuid mitte $a = ä$, sest võrdusmärk «=» ja täht *ä* ei kuulu vaadeldavasse alfabeeti. Teises alfabeedis on sõnadeks näiteks järgmised tähtede kombinatsioonid: $a + \Gamma = \Sigma$, $a \mathfrak{B} a \Gamma a$, $R : \Gamma + I$, $\Sigma = + =$.

Markovi normaalalgoritm sarnaneb mõnevõrra mänguga, milles opereeritakse tavaliste eestikeelsete sõnadega ning milles teisendatakse antud sõna eesmärgina ülesseatud sõnaks. Näiteks võib olla mängu eesmärgiks sõna «hiir» teisendamine sõnaks «kass».

Ülesande lahendamise võimalikkus ja kiirus olenevad sellest, milliste reeglite järgi tohib sõnu teisendada. Näiteks kui on lubatud kasutada ainult tähendust omavaid neljatähelisi sõnu ning kui igal sammul tohib kas muuta ainult tähtede järjekorda või asendada üks täht mingi teise tähega, siis võib mäng kulgeda järgmiselt:

hiir, *piir*, *piim*, *piin*, *pirn*, *virn*, *viin*, *vain*, *vaip*, *laip*, *lapp*, *kapp*, *karp*, *park*, *pakk*, *paks*, *pass*, *kass*.

Muidugi võib leida teisigi võimalusi lähtesõna nõutava teisendamise realiseerimiseks. Kui aga konstrueerida algoritm niisuguste teisenduste läbiviimiseks (see võib näiteks teatud järjekorras kontrollida läbi kõik võimalikud asendused), kirjutades eelnevalt välja kõik tähendust omavate sõnade paarid, mis on teineteisega asendatavad, siis tuleb see algoritm väliselt väga sarnane Markovi normaalalgoritmiga.

Markovi normaalalgoritmi etteandmiseks teatud alfabeedis $\mathfrak{A} = \{a, b, c, d \ldots\}$ tuleb kõigepealt tuua lubatavate asenduste loetelu, mis võib välja näha näiteks niiviisi:

$abc \rightarrow bb$,
$abb \rightarrow ab$,
$a \rightarrow c$,
$d \rightarrow a$.

Igas lubatavas asenduses asetseb asendatav sõna vasakul ja teda asendav sõna paremal.

Lubatavate asenduste loetelu võib muidugi igal normaalalgoritmil olla erinev, kuid ühine on nende kõikide jaoks asenduste teostamise ja algoritmi töö lõpetamise eeskiri. Tutvumegi nüüd selle eeskirjaga.

Selleks et rakendada Markovi normaalalgoritmi mingile sõnale alfabeedist $\mathfrak{A}$, näiteks sõnale *aaabcb*, tuleb asendusreeglite nimekirjas leida esimese reegel, mille vasakul pool asuv

sõna kuulub tervikuna vaadeldavasse sõnasse, ning asendada vastav sõna osa asendusreegli paremal pool seisva sõnaga. Et sõna *aaabcb* korral on esimesena rakendatav asendusreegel

$$abc \to bb,$$

siis töötab algoritm vaadeldava sõna ümber sõnaks *aabbb*. Seejärel tuleb uuesti vaadata kõik asendusreeglid alates esimesest läbi ning leida esimene niisugune reegel, mille vasak pool kuulub äsja saadud sõna sisse. Antud korral on niisuguseks reegliks

$$abb \to ab$$

ja seepärast töötab meie algoritm sõna *aabbb* ümber sõnaks *aabb*. Seejärel tuleb rakendada algoritm sellele uuele sõnale jne., kuni tekib sõna, millele pole enam võimalik rakendada ühtegi asendusreeglit. Siis toimub peatus ja sellega on algoritmi töö lõppenud. Muidugi võib peatus toimuda juba pärast esimest katset algoritmi rakendada. Niisugune on näiteks olukord antud algoritmi rakendamisega sõnale *cbcbc*. Peatus toimub ka siis, kui oleme sunnitud rakendama viimast asendusreeglit.

Meie näite korral kulgeb sõna *aaabcb* töötlemine järgmiselt:

aabb, *aab*, *cab*, *ccb* — lõpp.

Juhul kui algoritmi rakendamine mingile sõnale annab lõpmatu sõnade jada nagu seda sõna *abab* ja algoritmi

$$c \to cc,$$
$$a \to c,$$
$$b \to a$$

korral (siin tekib sõnade jada *abab*, *cbab*, *ccbab*, *cccbab*, ...), siis öeldakse, et algoritm pole sellele sõnale rakendatav.

Vaatleme näiteks alfabeeti $\{+, 1\}$ ja temas algoritmi

$$1+ \to +1,$$
$$++ \to +,$$
$$+ \to \Lambda,$$

kus Λ tähendab jälle n.-ö. kustutamist, s. t. reegel

$$+ \to \Lambda$$

nõuab lihtsalt tähe $+$ ärajätmist.

Vaatleme, milleks töötleb see algoritm sõna $111+11+1111$. Algoritmi töö kulgeb järgmiselt:

$111 + 11 + 1111,$
$11 + 111 + 1111$
$1 + 1111 + 1111,$
$+11111 + 1111,$
$+1111 + 11111,$
$+ 111 + 111\ 111,$
$+11 + 1111111,$
$+1 + 11111111,$
$+ + 111111111,$
$+111111111,$
$111111111.$

Algoritmi töö lõppes, sest rakendasime viimast asendusreeglit. On selge, et vaadeldav algoritm teostab naturaalarvude liitmist, kusjuures arvuks n loeme sõna, mis koosneb n tähest 1.

Markovi normaalalgoritmi mõiste on väga lai ning matemaatikud on veendunud, et iga algoritmi jaoks saab leida niisuguse alfabeedi, mille puhul antud algoritm oleks samaväärne mingi normaalalgoritmiga selles alfabeedis. Siinjuures loetakse kahte algoritmi samaväärseks, kui nad on rakendatavad samadele sõnadele ning töötavad neid ümber samuti samadeks sõnadeks. Samaväärsed on näiteks järgmised normaalalgoritmid alfabeedis {1, 0, &}:

$0\,\&\,1 \to 0,$ $\quad$ $0\,\&\,1 \to 1\,\&\,0,$
$1\,\&\,0 \to 0,$ $\quad$ $1\,\&\,0 \to 0,$
$0\,\&\,0 \to 0,$ $\quad$ $0\,\&\,0 \to 0,$
$1\,\&\,1 \to 1,$ $\quad$ $1\,\&\,1 \to 1,$
$1 \to 1,$ $\quad$ $1 \to 1,$

mis määravad kumbki lihtlausete konjunktsiooni tõeväärtuse. Ülaltoodud liitmise algoritm on samaväärne näiteks järgmiste algoritmidega:

$+ \to$ 
$1 \to 1$

või

$1 + \to +1,$
$+1 \to 1,$
$1 \to 1.$

Markovi normaalalgoritmi samaväärsust suvalise algoritmiga mingis alfabeedis pole võimalik tõestada, sest suvalise algoritmi mõiste pole defineeritud. Kuid matemaatikute oletust pole veel keegi suutnud ümber lükata, teiste sõnadega, kellelgi pole õnnestunud konstrueerida niisugust algoritmi suvalises alfabeedis, mille jaoks ei leiduks temaga samaväärset Markovi normaalalgoritmi.

Ülesandeid.

45. Milleks teisendab alfabeedis {1, 0, α} esitatud Markovi normaalalgoritm

$$1011 \to 11,$$
$$1101 \to 1,$$
$$11 \to 0,$$
$$0 \to 1$$

sõnu 11011011, 1010101, 11111, 000000 ja 0011000?

46. Koostada Markovi normaalalgoritm alfabeedis {α, 7, +}, mis teisendab sõna $77+\alpha 7\alpha+$ sõnaks $++7$ ja sõna $\alpha+77\alpha\alpha$ sõnaks α.

47. Koostada Markovi normaalalgoritm, mis teostab arvude lahutamist.

KONSTRUKTIIVNE MATEMAATIKA

Matemaatilist loogikat sellisel kujul, nagu me teda ülalpool esitasime, kasutatakse väga laialt paljudes matemaatikaharudes, filosoofias, elektrotehnikas ja küberneetikas. Kuid matemaatikute seas leidub teadlasi, kes ei pea niisugust matemaatilise loogika kuju õigeks, tegelikkusele vastavaks, ja arendavad seepärast iseseisvat loogilist süsteemi, mis nii mõneski mõttes erineb tunduvalt tavalisest matemaatilisest loogikast. Selle matemaatilise suuna esindajad nimetavad ennast konstruktivistideks, arendatavat matemaatikat aga konstruktiivseks matemaatikaks, nimetades tavalist matemaatikat vahetegemiseks klassikaliseks. Vastavalt sellele nimetatakse matemaatilist loogikat, mida kasutatakse konstruktiivses matemaatikas, konstruktiivseks loogikaks. Tutvumegi konstruktiivse matemaatika ja konstruktiivse loogika põhijoontega, mis on väga selgelt formuleeritud konstruktiivse matemaatika ühe looja, tuntud nõukogude matemaatiku A. Markovi artiklis «О конструктивной математике» («Konstruktiivsest matemaatikast»).

Konstruktiivse matemaatika põhimõisteks on konstruktiivse objekti mõiste. Selle all mõistetakse iga objekti, mis on teatud viisil kokku pandud, koostatud ehk valmis tehtud teatud lihtsamatest, nn. elementaarsetest objektidest. Konstruktiivsete objektide näideteks on kontaktrelee skeemid, sõnad antud alfabeedis ja laste «konstruktori» abil valmistatud mänguasjad. Ka naturaalarvud kujutavad endast konstruktiivseid objekte, sest neid võib vaadelda sõnadena alfabeedis, mis koosneb ühestainsast tähest I.

Konstruktiivse matemaatika esindajad väidavad, et klassikalises matemaatikas, mis on teatavasti väga abstraktne teadus, kasutatakse ilma igasuguse kriitikata mõningaid liiga kaugele ulatuvaid abstraktsioone. Seepärast püüavad nad selgitada, missuguseid abstraktsioone matemaatikas üldse kasutatakse, ja otsustada, mida neist võib kasutada, mida (nende arvates) mitte.

Konstruktiivse matemaatika esindajad tunnistavad kahte väga olulist abstraktsiooni: samastamise ja potentsiaalse teostatavuse (ehk potentsiaalse lõpmatuse) abstraktsioone, kuid nad ei tunnista (ja see on üheks kõige olulisemaks konstruktiivse matemaatika erinevuseks klassikalisest) nn. aktuaalse lõpmatuse abstraktsiooni.

Samastamise abstraktsioon on väga laialt levinud ning seisab selles, et vaatamata väikestele erinevustele, mis paratamatult tekivad mingi kujundi või sümboli joonistamisel, kirjutamisel või trükkimisel käekirja, pliiatsite ja sulgede kvaliteedi või kuju, tindi ja trükivärvi erinevuste tõttu, loetakse näiteks kõiki sümboleid *t*, *t*, *t*, *t*, *t*, *t*, *t*, *t*, ... või 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, ... samasteks, teineteisega võrdseteks.

Potentsiaalse lõpmatuse abstraktsioon seisab selles, et me jätame kõrvale oma võimete piiratuse, mis ei luba meil tegelda teatud küsimusega lõpmata kaua lõpmata suures ruumis ja lõpmata suure vajaliku materjali kogusega. Me oletame näiteks, et võime tegelda arvude liitmisega kui tahes kaua, et on võimalik kirjutada paberilehele kui tahes pikki sõnu antud alfabeedis, et võime kasutada kui tahes suuri alfabeete.

Ent vaatamata kõigele sellele pole konstruktiivses matemaatikas tegemist lõpmatute hulkadega. Kõikide naturaalarvude hulka kui mingit uut omaette objekti ei vaadelda, sest ta ei kujuta endast konstruktiivset objekti. Siin vaadeldakse ainult kui tahes suuri lõplikke hulki.

Lõpmatute hulkade vaatlemine omaette objektidena tähendab juba aktuaalse lõpmatuse abstraktsiooni tunnistamist. Ilma selle abstraktsioonita pole võimalik ette kujutada hulgateooriat, klassikalist matemaatilist analüüsi ja üldse suuremat osa tänapäeva matemaatikast. Ilma selle abstraktsioonita ei oska me ette kujutada niisuguseid mõtlemise seisukohalt olulisi objekte, nagu ratsionaalarvude või reaalarvude hulk. Ent konstruktiivse matemaatika esindajad väidavad, et polegi vaja ette kujutada tervet reaalarvude hulka, sest seda pole keegi suutnud konstrueerida, n.-ö. käega katsuda, ja tavaline reaalarvude definitsioon ei kõlba üldse mitte kusagile, nii et tuleb defineerida uued, konstruktiivsed reaalarvud. Muidugi ei püstitata konstruktiivses matemaatikas küsimust niisuguste arvude hulga võimsusest, kuid klassikalise matemaatika seisukohalt on konstruktiivsete reaalarvude hulk loenduv (mitte aga kontinuaalne). Väärib märkimist asjaolu, et konstruktiivses matemaatikas on antud isegi mitu erinevat reaalarvude definitsiooni.

Aktuaalse lõpmatuse abstraktsiooni eitamise seisukohalt kritiseerivad konstruktivistid ka väga laialt kasutatavat nn. valiku aksioomi, mille kohaselt igast vaadeldavast hulgast, kui palju neid poleks ja milline nende võimsus ka ei oleks, võib välja valida ühe elemendi — selle hulga esindaja. Konstruktivistid ei

tunnista seda aksioomi ja seega ühtlasi väga suurt hulka tänapäeva matemaatika teoreeme, mis on tõestatud valiku aksioomi abil.

Antiikajast on tuntud valem eeslist, kes suri kahe heinakuhja vahel nälga, sest ta ei suutnud otsustada, kumb neist tuleb ära süüa esimeses järjekorras. Traditsioon nimetab valmi autoriks Buridani, kuigi selle väite tõestuseks puuduvad igasugused andmed. Et osa matemaatikuid (mitte ainult konstruktivistid) peab matemaatilise ranguse kriteeriumiks asjaolu, kas valiku aksioomi kasutatakse lõpmatute hulkade korral või mitte, siis, nagu märkis üks teravmeelne inimene, tuleb tunnistada kõige rangemaks matemaatikuks Buridani eeslit, kes ei julgenud kasutada valiku aksioomi isegi lõpliku kaheelemendilise hulga korral.

Konstruktivistide poolt väga rõhutatud erinevuseks on teistsugune arusaamine nn. olemasolu teoreemidest. Niisugused teoreemid esinevad väga sageli matemaatika paljudes osades. Peale mingi ülesande püstitamise, teda kirjeldava võrrandi, võrratuse või mingi muu seose üleskirjutamise ja otsitavale lahendile seatavate kitsenduste väljaselgitamise tõestatakse selliste teoreemide puhul puhtloogiliste vahenditega, et nende kitsenduste korral ülesande lahendus eksisteerib. Seejuures ei seata endale ülesannet leida algoritm niisuguse lahendi konstrueerimiseks igal konkreetsel juhul. Konstruktivistid aga väidavad, et pole mingit mõtet rääkida olemasolust, kui pole leitud algoritmi olemasoleva asja konstrueerimiseks.

Siit ilmneb algoritmi mõiste äärmiselt oluline koht konstruktiivses matemaatikas. Konstruktiivne matemaatika ei saanudki tekkida enne, kui oli välja arenenud algoritmide matemaatiline teooria, kõik tema edusammud on oluliselt seotud Markovi normaalalgoritmide teooria arenguga.

Algul juba mainisime, et konstruktiivses matemaatikas kasutatakse erilist, tavalisest matemaatilisest loogikast erinevat, nn. konstruktiivset loogikat. Konstruktiivse matemaatika iga lause peab olema tõestatud just selle loogika abil. Milles siis seisab konstruktiivse loogika peamine erinevus tavalisest matemaatilisest loogikast?

Esiteks nõutakse konstruktiivses loogikas, et lihtlausete tõesuse või vääruse määramiseks eksisteeriksid konkreetsed konstruktsioonid. Ka eitust tuleb mõista konstruktiivselt, kusjuures mõõdupuuks on see, kas väide viib vasturääkivusele või mitte. Näiteks lause a eitust mõistavad konstruktivistid selliselt, et on olemas konstruktsioon, mis viib vasturääkivusele oletuse lause a tõesust näitava konstruktsiooni olemasolust. Vasturääkivuse olemust konstruktivistid ei seleta, sest peavad seda mõistet algmõisteks.

Konstruktiivse loogika kõige olulisemaks erinevuseks on välistatud kolmanda seaduse $a \vee \neg a \equiv I$ mittetunnistamine. Peaks

ju konstruktivistide seisukohalt tähendama lause tõesus iga a korral seda, et on konstrueeritud algoritm, mis iga lause korral tõestaks kas lause enda või tema eituse tõesuse. Et aga niisugust algoritmi pole seni leitud, ei loe konstruktivistid lauset $a \vee \neg a$ alati tõeseks.

Ka ülejäänud loogika seadused, eriti aga selles osas, mis on seotud eitusega, näevad konstruktiivses loogikas üsna omapärased välja. Näiteks ei kehti siin eituse eitamise seadus kujul $\neg\neg a \to a$, kuigi ta kehtib kujul $a \to \neg\neg a$. See-eest klassikalise loogika valemid $\neg a \to \neg\neg\neg a \equiv I$ ja $\neg\neg\neg a \to \neg a \equiv I$ on tõestatavad ka konstruktiivses loogikas.

Konstruktiivne suund tänapäeva matemaatikas on üks paljudest matemaatilistest suundadest, mis püüab matemaatikat maksimaalse rangusega üles ehitada. Milline nendest elujõulisemaks osutub, seda näitab tulevik. Ilmne on aga, et paljude paralleelselt arenevate matemaatikasuundade olemasolu kajastab meie mõtlemise mitmekülgsust ja rikastab kogu matemaatikat.

3. JUTUSTUS TÄNAPÄEVA ALGEBRAST

Hulgateooria ja matemaatiline loogika on väga noored matemaatilised distsipliinid, algebra aga üks vanemaid matemaatika osi. Kuid viimase 100—150 aasta jooksul on algebras toimunud nii tõsised muutused, et tänapäeva algebra ehk, nagu teda veel nimetatakse, üldine algebra, on faktiliselt muutunud täiesti iseseisvaks, uueks matemaatikaharuks.

Tänapäeva algebra erineb klassikalisest eelkõige uurimisobjekti poolest. Kui klassikalise algebra põhiliseks uurimisobjektiks oli algul tehete sooritamine arvudega ja hiljem võrrandite lahendamine arvude vallas, siis tänapäeva algebra uurimisobjektiks on erinevate tehete üldised omadused. Siinjuures ei tarvitse need tehted olla defineeritud just arvude jaoks, nad võivad olla teheteks vektorite, funktsioonide, majade või sõnade hulkade elementide jaoks või isegi lihtsalt suvalisel hulgal defineeritud teheteks. Sel korral antakse tehe ette vaid tema teatud omaduste süsteemi abil, mida nimetatakse aksioomide süsteemiks.

Niisuguse erinevuse klassikalise ja tänapäeva algebra vahel fikseeris väga lühidalt W. W. Sawyer ajakirjas «Scientific American» («Ameerika teadus») ilmunud artiklis «Algebra»: «Elementaaralgebra tegeleb ainult arvude üldiste omadustega. Kõrgem algebra võib väga hästi tegelda ükskõik millega ja vajaduse korral saab teda rakendada ilma midagi konkreetselt mainimata.»

Üldalgebra areng algas umbes möödunud sajandi hakul. Kuid juba ammu enne seda toimusid klassikalises algebras niisugused järkjärgulised muudatused, mis tegidki võimalikuks üldalgebra tekkimise. Põhiliselt olid need muudatused seotud arvu mõiste laienemisega.

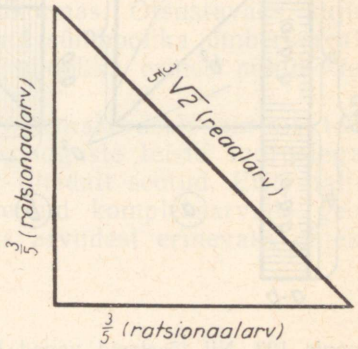
Laienemine toimus algul puhtformaalselt, kui niisuguseid operatsioone, nagu lahutamine, jagamine või juurimine hakati rakendama arvudele, millele neid vanade definitsioonide kohaselt rakendada ei tohtinud. Seepärast kahtlesid matemaatikud algul uute arvude reaalses olemasolus ning ristisid neid niisuguste

omadussõnade abil moodustatud nimedega, nagu «valed», «imaginaarsed», «absurdsed» või «fiktiivsed».

Naturaalarve tundsid inimesed juba mitu tuhat aastat tagasi. Kuid arv null, mille juurdetoomine oli vana-india matemaatika üheks suursaavutuseks, võeti kasutusele alles meie ajastu algul. Vana-india matemaatikud kasutasid juba ka negatiivseid arve, kuid eriti ulatuslikult ja julgelt hakkasid neid tarvitama araablased.

Ratsionaalarvud ehk murrud, mida tunti Egiptuseski, olid põhjalikult läbi uuritud vana-kreeka matemaatikute poolt. Nendele kuulus ka esimeste reaalarvude avastamise au. Õigemini tõestasid nad, et mõningate lõikude pikkused ei avaldu ratsionaalarvude kaudu (vt. joonis 100), ning arendasid seejärel suuruste teooriat, mis kujutab endast faktiliselt primitiivset reaalarvude teooriat. Huvitav on märkida, et reaalarvude ranged definitsioonid anti alles möödunud sajandil.

Otsustavaks sammuks teel tänapäeva algebra poole oli kompleksarvude sissetoomine Euroopa matemaatikute poolt. Muuseas osutus nende arvude abil võimalikuks leida valemid kolmanda ja neljanda astme võrrandite üldlahendi jaoks.



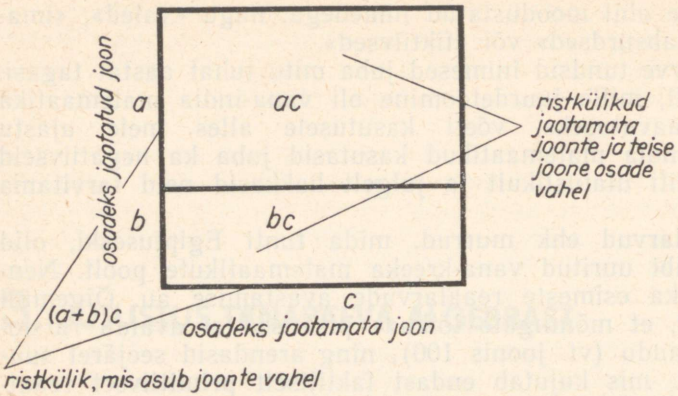
Joonis 100. Ratsionaalarvudest ei piisa kõikide lõikude pikkuste määramiseks.

Teiseks, üldalgebra tekkimise seisukohalt väga tähtsaks klassikalise algebra arengusuunaks oli lihtsa ja mugava algebralise sümboolika väljatöötamine, sest ilma selleta poleks saanud areneda niisugune üldine idee, nagu seda on algebralise operatsiooni idee suvalise hulga elementide jaoks.

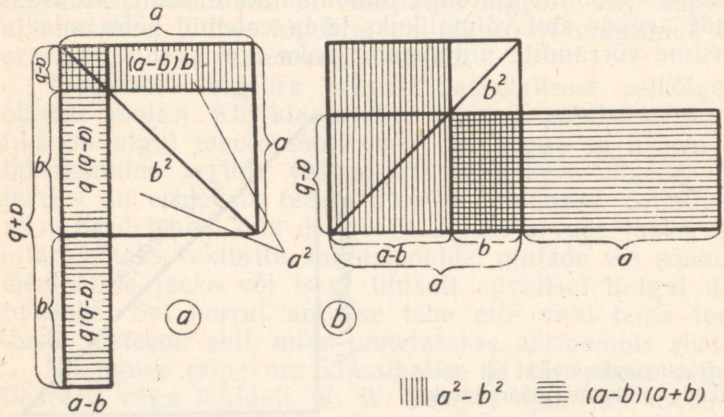
Vanas matemaatikas tähistused kas puudusid üldse või siis olid väga primitiivsed. Näiteks vana-kreeka matemaatikas on olnud väga ulatuslik periood (seda tuntakse geomeetrilise algebra perioodi nime all), mille jooksul püüti kõiki algebralisi seoseid tõestada geomeetriliselt.

Geomeetrilises algebras lihtsa valemi

$$(a+b)c = ac + bc$$



Joonis 101. Distributiivsuse seaduse sõnastamine ja tõestamine geomeetrilises algebras.



Joonis 102. Nii tõestasid vanad kreeklased valemit $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

asemel kirjutati pikalt: «Kui üks joontest on jaotatud kaheks osaks, siis nende joonte vahel asuv ristkülik võrdub kokkupandud ristkülikutega, mis asuvad osadeks jaotamata joone ja teise joone üksikute osade vahel» ning tõestati see joonisel 101 näidatud visandi abil. Meile hästi tuntud valemit

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

sõnastasid ja tõestasid kreeklased kas vastavalt joonisele 102, *a* või joonisele 102, *b*.

Näitame veel, kuidas vana-Kreekas tõestati Pythagorase tuntud teoreemi, mida tänapäeval kirjutatakse lühidalt üles kujul

$a^2 + b^2 = c^2$, kus a ja b on täisnurkse kolmnurga kaatetid ja c hüpotenuus. Vaatleme nimelt tõestust, mille esitas juba Eukleides ja mis põhineb sellel, et sarnaste hulknurkade pindalad suhtuvad nagu nende vastavate külgede ruudud.

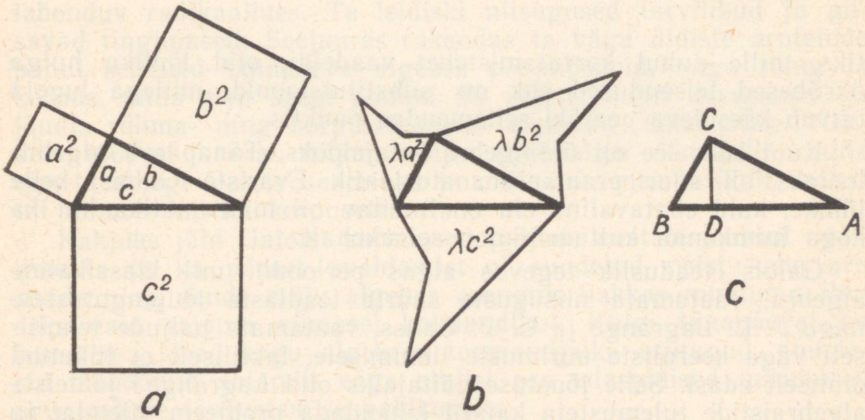
On tarvis tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusile ehitatud ruudu pindala võrdub kaatetitele ehitatud ruutude pindalade summaga (vt. joonis 103, *a*). See on õige siis ja ainult siis, kui sama vahekord kehtib ka kolmnurga külgedele ehitatud igasuguste teiste sarnaste hulknurkade korral. Tõepoolest, on ju võrdused (vt. joonis 103, *b*) $a^2 + b^2 = c^2$ ja $\lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda c^2$, siis aga ka võrdused $\lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda c^2$ ja $\mu a^2 + \mu b^2 = \mu c^2$ üheaegselt täidetud (siin on $\lambda \neq 0 \neq \mu$). Kuid jooniselt 103, *c* nähtub, et vähemalt sel lihtsal erijuhul, kui nendeks sarnasteks kolmnurkadeks on täisnurksed kolmnurgad *BCD*, *ACD* ja *ABC*, see valem ilmselt kehtib:

$$S_{BCD} + S_{ACD} = S_{ABC}.$$

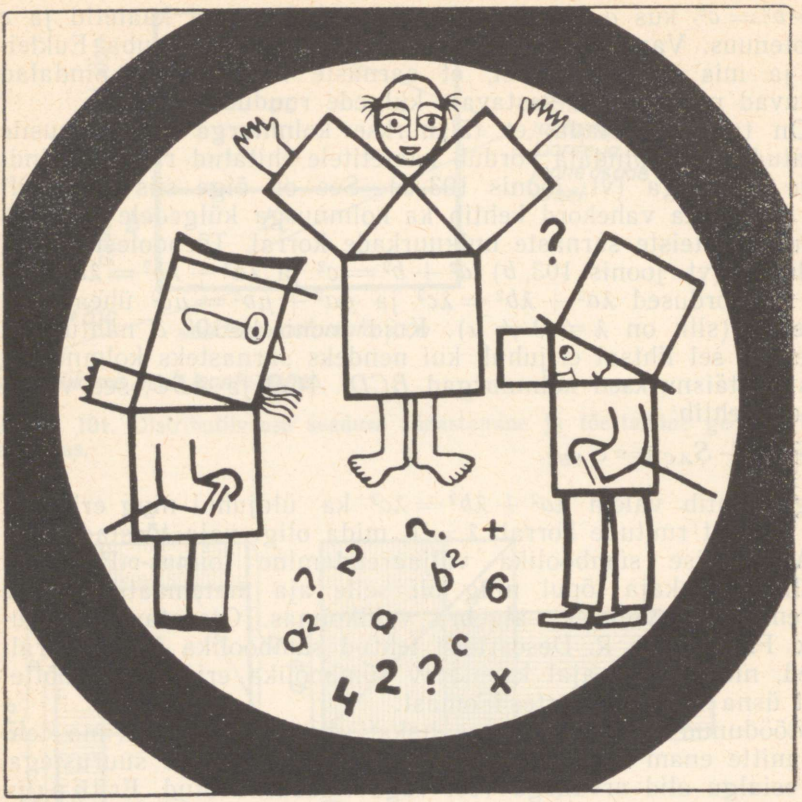
Seega kehtib valem $\lambda a^2 + \lambda b^2 = \lambda c^2$ ka üldjuhul ning erijuhul, s. t. lihtsalt ruutude korral, $\lambda = 1$, mida oligi vaja tõestada.

Algebralise sümboolika väljaarendamine toimus Euroopas põhiliselt keskaja lõpul ning oli selle aja matemaatika kõige suuremaks saavutuseks algebra valdkonnas. Otsustavaks kujunesid F. Vieta ja R. Descartes'i tehtud sümboolika ümberkorraldused, nii et meie ajal kasutatav sümboolika erineb põhimõtteliselt üsna vähe Descartes'i omast.

Möödunud sajandi alguses hakati esmakordselt uurima tehteid mitte enam arvudega, vaid mingisuguste teiste suurustega, mis esialgu olid arvudega veel väga tihedalt seotud. Eriti palju andis vektorite uurimine, mis oli seotud kompleksarvude geomeetrilise interpreteerimisega. Teiseks arvudest erinevaks objek-



Joonis 103. Pythagorase teoreemi tõestamine Eukleidese järgi.



Joonis 104. Pythagorase teoreem inspireerib mitte üksnes matemaatikuid, vaid ka kunstnikke.

tiks, mille puhul korrutamistehet vaadeldi, olid lõpliku hulga üksühesed teisendused ehk nn. substitutsioonid, millega lugeja tutvub käesoleva peatüki seitsmendas punktis.

Kuid kõik see oli üldalgebra eelajalooks. Tänapäeva algebra loojaks oli suur prantsuse matemaatik Evariste Galois, kelle lühike, kuid ebatavaline elu on huvitav nii matemaatika kui ka kogu inimkonna kultuuriajaloo seisukohalt.

Galois' teaduslik tegevus algas perioodil, mil klassikaline algebra, vaatamata niisuguste suurte teadlaste jõupingutustele nagu J. L. Lagrange ja C. F. Gauss, vaatamata paljude tehniliselt väga keeruliste uurimuste ilmumisele, faktiliselt ei liikunud oluliselt edasi. Selle jõuetuse näitajaiks olid Lagrange'i ja teiste algebraistide tulemusteta katsed lahendada probleem viiendat ja kõrgemat järku võrrandite lahenduvusest radikaalides.

Selleks ajaks oli nimelt teada, et suvalise ruutvõrrandi, kolmandat ja neljandat järku võrrandite lahendid võib leida teatud valemite järgi, kusjuures nendes valemites kasutati peale nelja aritmeetikatehte veel ainult radikaale. Kuid analoogiliste valemite otsimine viiendat ja kõrgemat järku võrrandite jaoks ei kandnud vilja, nii et matemaatikutes tekkis veendumus niisuguste valemite mitteeksisteerimises. Väite tõestamine aga osutus väga raskeks.

Esimese olulise sammu nimetatud teoreemi tõestamise suunas tegi prantsuse matemaatik P. Ruffini, kes esitas mitu üksteist täiendavat ja täpsustavat tõestust selle kohta, et viiendat järku võrrand pole radikaalides lahenduv. Kahjuks aga osutusid kõik tõestused ebatäielikeks.

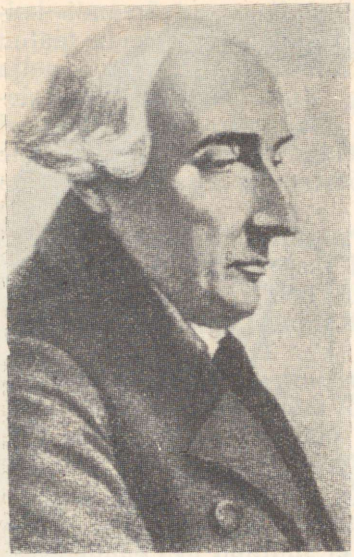
Vaadeldava teoreemi tõestas suur norra matemaatik Niels Henrik Abel. Tema saatus meenutab mõnevõrra Galois' oma. Ta elas väga rasketes tingimustes, pühendas kogu oma elu teadusele, haigestus tuberkuloosi ja suri 27-aastasena, leidmata elu jooksul väärilist tunnustust. Nagu Galois' puhulgi jäi osa Abeli töid avaldamata seetõttu, et kuulsad matemaatikud, kellele need tööd olid saadetud retsenseerida, ei suutnud aru saada tema tööde sisust ja lihtsalt viskasid need paberikorvi.

Abel hakkas huvi tundma viienda astme võrrandite lahendamise vastu juba lapsepõlves ning arvas algul, et tal on õnnestunud leida valem selliste võrrandite lahendamiseks. Avastanud aga vea, jätkas ta jõupingutusi nüüd juba teises suunas ja tõestas lõpuks, et niisugust valemit ei eksisteeri. Vaatamata sellele suurele saavutusele uuris ta seda probleemi edasi ning, nagu näitavad tema paberites leitud märkused, oli juba võrdlemisi kaugele jõudnud suunas, mille viis hiljem lõpule Evariste Galois.

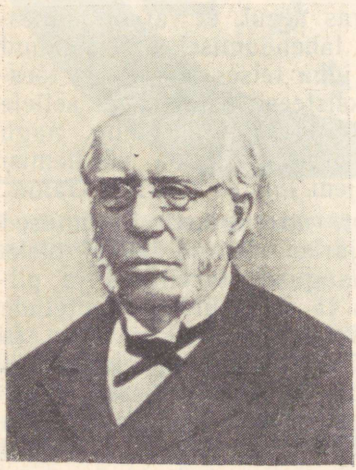
Viimane püstitas küsimuse sellest, missugused tingimused peavad olema täidetud, et kõrgemat järku võrrand ikkagi oleks lahenduv radikaalides. Ta leidiski niisugused tarvilikud ja piisavad tingimused. Seejuures rakendas ta väga üldiste arutelude puhul selliseid tänapäeva algebra põhimõisteid, nagu rühm ja korpus, mida seni keegi polnud nii üldisel kujul kasutanud, ja jõudis rühma- ning korpuseteoorias olulistele tulemustele. Nendest töödest kasvas hiljem välja algebraline distsipliin, mida nimetataksegi Galois' teooriaks ja milles on meisterlikult seotud nii rühma- kui ka korpuseteooria.

Kahjuks jäid Galois' uurimused paljude aastate jooksul avaldamata ja ka pärast avaldamist ei suudetud neist kohe aru saada ning nende mõju algebra arengule hakkas muutuma ilmseks vaid sajandi viimasel kolmandikul. Kuigi tänapäeval on just tema ideed kogu algebras tooniandjaiks osutunud, etendasid möödunud sajandil väga olulist osa edaspidised uurimused arvu mõiste täpsustamise valdkonnas.

Eriti suured teened on siinkohal inglise algebraistide kool-







Joonis 105 (*ülal vasakul*). Tuntud prantsuse matemaatik Joseph-Louis Lagrange (1736—1813). Tema uurimused olid pühendatud matemaatilisele analüüsile, mehhaanikale ja algebrale.

Joonis 106 (*ülal paremal*). Tuntud norra matemaatik Niels Henrik Abel (1802—1829), avaldas väga suurt mõju tänapäeva matemaatika arengule.

Joonis 107. Tuntud saksa matemaatik Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815—1897), kuulsa vene naismatemaatiku Sofia Kovalevskaja ja paljude teiste väljapaistvate matemaatikute õpetaja, andis reaalarvu mõiste definitsiooni, tegi ära väga tõsise töö kogu matemaatika rangemaks muutmiseks.

konnal ning muuseas matemaatilise loogika rajajal G. Boole'il, kelle poolt loodud nn. Boole'i algebra kujunes üheks esimeseks arvude algebrast erinevaks algebraks. Ka algebralise operatsiooni mõiste, mis on kaasajal kogu algebra nurgakiviks, tõid esmakordselt sisse inglise matemaatikud.

Inglise algebraistide koolkonna kõige märkimisväärsemateks esindajateks olid A. Hamilton (1805—1865) ja A. Cayley (1821—

1895). Peale vektorite algebra tõi Hamilton sisse veel nn. kvaternioonide algebra, mis hõlmab ka kompleksarvude algebra. Ta uuris esimesena kõige üldisemal kujul niisuguseid algebralisi süsteeme (neid nimetati sel ajal hüperkomplekssüsteemideks), mis omaduste poolest sarnanevad reaal- ja kompleksarvude ning kvaternioonide algebratega. Cayley sai kuulsaks tänu maatriksite algebra uurimisele. Ta konstrueeris esimese näite algebrast, mis on veelgi üldisem kui kompleksarvude ja kvaternioonide algebrad ning milles ei ole täidetud assotsiatiivsuse seadus.

Edaspidine algebra areng toimus Galois' ja inglise koolkonna ideede edasiarendamise ning tehnilise realiseerimise tähe all. Siinjuures arenesid paljud üksikud teooria suunad sügavuti ja laiuti, nii et isegi lühikese ülevaate andmine kõikidest uurimissuundadest vajaks liiga palju ruumi ja aega. Mis puutub aga kaasaegse algebra ühe kesksema distsipliini — rühmateooria arenemise ajaloosse, siis see on lühidalt toodud käesolevas peatükis rühmadele pühendatud punktis.

Mainime vaid, et Galois' ideid hakati täielikult ellu rakendama alles käesoleva sajandi algul seoses D. Hilberti ja G. Peano töödega geomeetria ning aritmeetika aksiomatiseerimise alal, hiljem aga tänu silmapaistva saksa naismatemaatiku E. Noetheri koolkonna poolt alustatud algebra ja kogu matemaatika üleviimisele hulgateoreetilisele baasile. Nende ideede elluviimine on kõige järjekindlamalt kajastunud meie aja silmapaistvama matemaatiku N. Bourbaki teostes.

Tänapäeval on algebra muutunud hulgateoreetilisel baasil ülesehitatud aksiomaatiliseks distsipliiniks. Peale rühmateooria, korpuseteooria, assotsiatiivsete ringide ja hüperkomplekssüsteemide, ehk nagu neid kaasajal nimetatakse, algebrate teooria on tähtsateks algebra osadeks muutunud võrdlemisi hiljuti tekkinud, kuid laia kasutamist leidnud mitteassotsiatiivsete ja Lie ringide teooria, struktuuriteooria, poolrühmateooria ning universaalsete algebrate teooria, mille põhimõistetega tutvub lugeja käesolevas peatükis.

Algebra areng toimus eriti kiiresti pärast uute ja sügavate seoste avastamist algebra ja teiste matemaatiliste distsipliinide vahel. Viimastest on tähtsaimad topoloogia, matemaatiline loogika, osaliselt järjestatud hulkade teooria ning funktsionaalanalüüs. Käesoleval sajandil tekkisid ja arenesid kiiresti ka algebra piirdealad: topoloogiline algebra, normeeritud ringide teooria, järjestatud algebraliste piirkondade teooria, homoloogiline algebra, diferentsiaalalgebra ja mudelite teooria.

Algebra kiire arengu üheks põhjuseks oli tema osatähtsuse suurenemine kaasaegses matemaatikas. Algebra meetodite ja tulemuste universaalsus ning algebra äärmiselt suur loogiline järjekindlus ja rangus, mille poolest ta ületab isegi matemaatilise loogika, teevad selle hädavajalikuks igale matemaatikule.

Tänapäeval on kõige tuntumad USA, NSV Liidu ja Jaapani algerbralised koolkonnad. Tartus, kus omal ajal elas tuntud algebraist Molin, tegutseb praegu väike algebraistide rühm, kes tegeleb ka järjestatud algebraliste süsteemide teooriaga.

Kaasaegse algebra nõukogude koolkonna rajaja, väljapaistev nõukogude matemaatik Otto Schmidt oli peale selle veel niisama silmapaistev geofüüsik ja astronoom, kes on loonud üldtunnustatud teooria päikesesüsteemi tekkimise kohta — Schmidti kosmogoonilise teooria. O. Schmidt oli laialdaselt tuntud ka kui geograaf ja reisija, Pamiiri ja Arktise uurija, väsimatu organiseerija ja propagandist, kirjanik ja riigitegelane.

O. Schmidt sündis 18. (30.) septembril 1891. a. Mogiljovis. 1900. aastal astus ta Mogiljovi gümnaasiumi ning järgmisel aastal, pärast perekonna kolimist Odessasse, Odessa II gümnaasiumi. 1907. aastal asus Schmidtide perekond elama Kiievisse. Algas kümneaastane Kiievi periood, mille jooksul kujunes ja sai kuulsaks Schmidt kui matemaatik. Selle perioodi esimese kahe aasta jooksul õppis ta Kiievi II klassikalises gümnaasiumis, mille lõpetas 1909. aastal kuldmedaliga. Samal aastal astus ta Kiievi ülikooli füüsika-matemaatikateaduskonda.

Huvi teaduslike uurimuste vastu äratas Schmidtis Kiievi ülikooli professor, väljapaistev matemaatik ja suurepärane pedagoog D. Grave. Tollal suunas Grave oma õpilasi tegelema rühmateooriaga — algebra uue ja sel ajal kiiresti areneva haruga. Aastatel 1911—1912 pidaski Schmidt rea ettekandeid Grave rühmateooria seminaris ning avaldas juba 1912. aastal esimese teadusliku artikli «Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren» («Lõplike rühmade esitamisest lahutamatute tegurite otsekorrutisena»). Järgmisel aastal avaldas Schmidt koguni kaks artiklit, teise neist Pariisi Teaduste Akadeemia toimetistes. Üliõpilasaastail alustas Schmidt ka rühmateooriale pühendatud monograafia «Abstraktne rühmateooria» kirjutamist. Veel enne viimase trükis ilmumist 1916. aastal autasustati autorit endise Kiievi ülikooli prof. Rahmaninovi nimelise suure kuldmedaliga. Hiljem avaldas see O. Schmidti monograafia suurt mõju algebra arengule NSV Liidus. 1933. aastal ilmus selle raamatu teine trükk, kolmandat korda avaldati ta 1959. aastal O. Schmidti valitud teoste esimeses köites. Oma ilmumise ajal oli ta kahtlemata parim rühmateooriale pühendatud raamatute seas terves maailmas.

O. Schmidti järgnevat eluteed mõjutasid oluliselt Suure Oktoobrirevolutsiooni murrangulised aastad. Juba Veebruarirevolutsiooni päevil algas noore O. Schmidti ühiskondlik tegevus, mis tõi teda mõne aasta pärast Moskvasse, kus ta 1921. aastast peale oli õppejõuks Moskva I ülikoolis (praeguses Moskva Riiklikus Ülikoolis). 1929. aastast alates töötas ta Moskva Riikliku Ülikooli professorina ja algebra kateedri juhatajana.

Jätkus ka O. Schmidti matemaatika-alane teaduslik tegevus. 1920. aastal pidas ta oma esimese ettekande Moskva Matemaatikaseltsis, 1927. aastal aga valiti ta selle ühingu tegevliikmeks. 1927. a. viibis O. Schmidt kaks kuud teaduslikul komandeeringul Saksamaal, mille jooksul tegeles rühmateooriaga ja kohtus paljude tuntud saksa matemaatikutega. Eriti suurt mõju avaldasid Schmidtile kohtumised sajandivahetuse suurima matemaatiku D. Hilbertiga, silmapaistva spetsialistiga rühmateooria alal I. Schuriga ja tuntud saksa naismatemaatiku E. Noetheriga.

O. Schmidt võttis osa paljudest NSV Liidu matemaatikaalastest kongressidest. 1927. a. esines O. Schmidt ettekandega ülevenemaalisel matemaatikute kongressil.

1930. a. toimus Harkovis I üleliiduline matemaatikute kongress. Schmidt esines seal ettekandega «Matemaatika osatähtsus sotsialismi ülesehitamisel». Teisel üleliidulisel matemaatikute kongressil, mis toimus 1934. a., valiti ta Üleliidulise Matemaatika Assotsiatsiooni esimeheks. Alates 1930. aastast oli ta NSV Liidu tähtsaima matemaatilise ajakirja «Математический сборник» peatoimetaja.

Samal aastal alustas Moskva Riikliku Ülikooli juures tegevust O. Schmidti poolt organiseeritud algebra seminar, mis aitas välja kujuneda hilisematel tuntud nõukogude algebraistidel A. Kurošil, A. Kulakovil, A. Ditsmanil, V. Turkinil, S. Tšunihhinil jt. Algul Schmidti korteris toimunud väikesest seminarist, kus tegeldi peaaegu eranditult rühmateooriaga, sai hiljem Moskva ülikooli algebra seminar, mis pani aluse nõukogude koolkonnale tänapäeva algebras.

O. Schmidti rühmateooriale pühendatud artiklid, mis iga kord hämmastasid filigraanse tehnika, leidlikkuse ja teravmeelsusega ning avaldasid suurt mõju rühmateooria arengule, ilmusid aastatel 1924, 1926, 1929, 1932, 1938, 1940 (kaks artiklit) ja 1945. Mitmed neist olid kirjutatud Schmidti arvukate polaarreiside ajal. Viimane teaduslik uurimus algebra alal, mis lõpetati 1947. a., avaldati esmakordselt alles pärast Schmidti surma 1959. aastal tema valitud teoste esimeses, matemaatikale pühendatud köites. Peale nende tööde kirjutas Schmidt veel rea artikleid «Suure nõukogude entsüklopeedia» esimese väljaande jaoks, mille loomise initsiaatoriks ja peatoimetajaks aastail 1924—1948 ta oli, muu seas artiklid «Algebra» ja «Rühm».

Matemaatika kõrval kuulusid O. Schmidti huvialade hulka veel geograafia ja kosmogoonia, kuid eelkõige jäi ta siiski matemaatikuks. Ta jäi seotuks matemaatikaga terveks oma eluks, tegi väga palju matemaatika arengu heaks NSV Liidus nii teadusliku kui ka organisatsioonilise ja propagandistliku tööga. Ükskõik missuguse teadusega ta ka ei tegelnud, ikkagi jäi ta matemaatikuks, kes rakendas matemaatilisi meetodeid selle teaduse probleemide lahendamisel.

Tänapäeva matemaatikas kasutatakse mitmeid operatsioone, mis võivad olla defineeritud mitmesugustel hulkadel. Mainime näiteks arvude liitmist, lahutamist, korrutamist ja jagamist, lihtlausete konjunktsiooni, disjunktsiooni, implikatsiooni ja ekvivalentsi, vektorite skalaar- ning vektorkorrutist, hulkade ühendi ja ühisosa leidmise operatsioone jms. Edaspidi vaatleme kõikide operatsioonide hulgast ainult neid, mis on defineeritud kogu vaadeldaval hulgal ja mille suhtes see hulk on kinnine, s. t. mille rakendamisel antud hulga elementidele saame alati sama hulga elemente. Selliseid operatsioone nimetame algebralisteks operatsioonideks ehk teheteks.

Tehte täpne definitsioon kõlab järgmiselt: kui hulga A igale kindlas järjekorras võetud elementide paarile (a, b) on seatud vastavusse hulga A üks kindel element c, siis öeldakse, et hulgas A on defineeritud tehe ehk algebraline operatsioon.

Sõltuvalt sellest, kas tehte sümboliks kasutatakse märki $+$; $\&$; $\cdot$; $\times$; $\rightarrow$; $*$; $\circ$; $f(\ ,\ )$; $\cap$; $\cup$; $\triangle$; $\vee$ või midagi muud, kirjutatakse tehtega määratud vastavus kujul $c = a + b$; $c = a \,\&\, b$; $c = a \cdot b$; $c = a \times b$; $c = a \rightarrow b$; $c = a * b$; $c = a \circ b$; $c = f(a, b)$; $c = a \cap b$; $c = a \cup b$; $c = a \triangle b$; $c = a \vee b$ jne. Kõige tarvitatavamad on märgid «+» ja «·». Esimese puhul räägitakse aditiivsest, teise puhul aga multiplikatiivsest tähistusviisist.

Nagu hiljem veendume, pole tehte korral oluline tema tähistamisviis, vaid üksnes see, millised omadused on sellel tehtel.

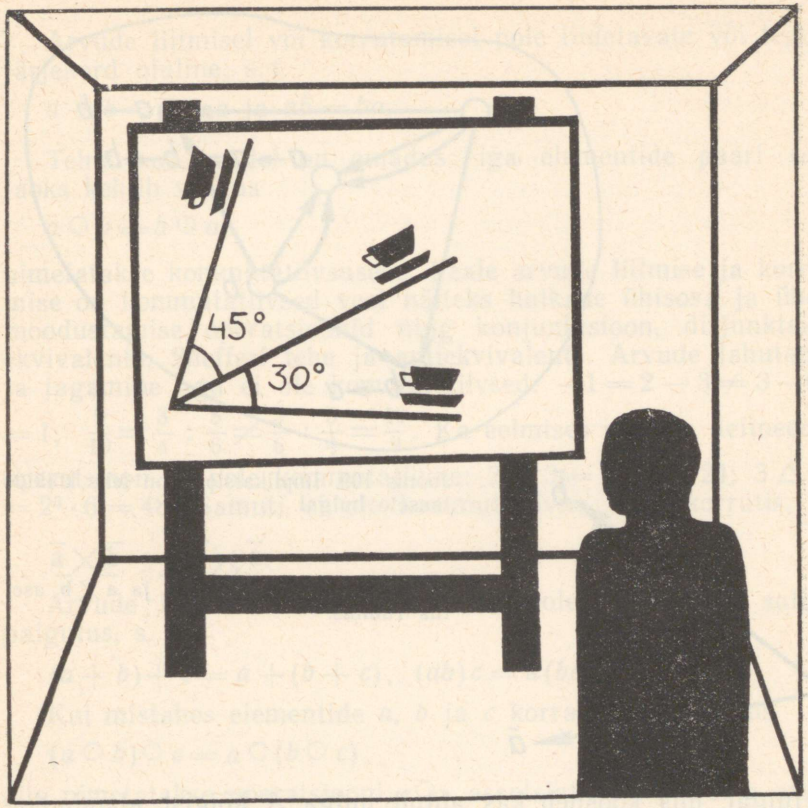
Missugustel hulkadel on ülal näiteina mainitud operatsioonid tehted ja millistel mitte? Liitmine on tehe kõigi täisarvude hulgal, kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulgal, arvust 5 suuremate täisarvude hulgal ning ainult arvust 0 koosneval hulgal $\{0\}$, kuid mitte hulkadel $\{-1, 0, 1\}$ ja $\{0, 1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$. Tõepoolest, viimased hulgad pole liitmise suhtes kinnised, s. t. liitmise rakendamisel antud hulga arvudele võime saada arve, mis vastavasse hulka ei kuulu: $(-1)+(-1)=-2$, $1+2=3$ jne.

Lahutamine on tehe näiteks kõigi täisarvude hulgal ning hulgal $\{0\}$, kuid mitte kõigi positiivsete täisarvude hulgal, sest ta viib sellest hulgast välja: $1-2=-1$.

Jagamine on tehe näiteks kõigi positiivsete ratsionaalarvude hulgal, kuid pole seda ei kõigi ratsionaalarvude ega ka kõigi positiivsete täisarvude hulgal. Tõepoolest, ratsionaalarvude hulga kõigi elementide korral pole jagamine defineeritud (nulliga jagada ei saa!), positiivsete täisarvude hulgast viib aga jagamine välja ($1 : 2$ ei ole täisarv).

Kõikide lausete hulgal on kõik eelmises peatükis vaadeldud loogilised operatsioonid tehted.

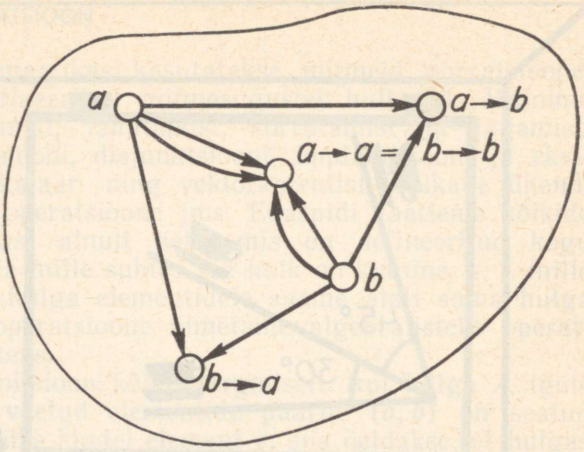
Vektoriteks nimetatakse suunatud lõike, mis väljuvad kõik fikseeritud punktist.



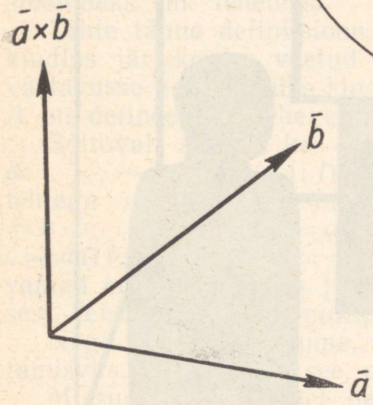
Joonis 108. Algebraline operatsioon võib olla defineeritud isegi kohvitasside nihutuste hulgal.

Geomeetrias kasutatakse laialt kaht vektorite jaoks defineeritud operatsiooni: skalaarkorrutist ja vektorkorrutist. Vektorite $\overline{\mathbf{a}}$ ja $\overline{\mathbf{b}}$ skalaarkorrutiseks nimetatakse arvu $ab\cos\gamma$, kus a ja b on vektorite $\overline{\mathbf{a}}$ ja $\overline{\mathbf{b}}$ pikkused, γ aga nurk nende vektorite vahel. Vektorkorrutiseks nimetatakse aga vektorit $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$ pikkusega $ab\sin\gamma$, mis asetseb ruumis risti vektoreid $\overline{\mathbf{a}}$ ja $\overline{\mathbf{b}}$ läbiva tasapinnaga, nii et vektorid $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ ja $\overline{\mathbf{a}} \times \overline{\mathbf{b}}$ moodustavad nn. parema käe kolmiku (vt. joonis 110).

Vektorite skalaarkorrutis ei ole tehe, sest kahe vektori skalaarkorrutis on arv, mitte vektor. Tasandil pole ka vektorite vektorkorrutis tehe, sest ta viib tasandist välja, ruumi vektorite hulk on aga vektorkorrutise suhtes kinnine ja sellel hulgal on vektorkorrutis tehe.



Joonis 109. Implikatsioon on tehe kõikide lausete hulgal.



Joonis 110. Vektorite $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{a} \times \bar{b}$ asetus ruumis.

Hulgal, mis koosneb kas antud hulga A kõigist alamhulkadest (kaasa arvatud tühi hulk ja A ise) või hulgast A ja ühest tema pärisalamhulgast, on nii ühendi kui ka ühisosa moodustamise operatsioonid tehted. Kahest teineteisesse mittekuuluvast hulgast koosneval hulgal pole aga kumbki neist operatsioonidest tehe.

Positiivsete täisarvude hulgal on tehe ka näiteks operatsioon $m \triangle n = 2^m mn$, kuid mitte operatsioon $m \ast n = \log_n m$ (miks?).

Ülesandeid.

1. Nimetada täisarvude hulki, millel korrutamine on tehe, ja hulki, millel korrutamine ei ole tehe.
2. Kahe lõigul $[0, 1]$ defineeritud funktsiooni $f(x)$ ja $g(x)$ summaks nimetatakse funktsiooni $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Kas see operatsioon on tehe
   a) kõigi lõigul $[0, 1]$ defineeritud funktsioonide hulgal?
   b) lõigul $[0, 1]$ pidevate funktsioonide hulgal?
   c) nullist erinevate funktsioonide hulgal?
   d) ainult nullist erinevaid väärtusi omavate funktsioonide hulgal?
   e) ainult negatiivsete väärtustega funktsioonide hulgal?
   f) punktis $x = \frac{1}{2}$ nulliga võrduvate funktsioonide hulgal?

Arvude liitmisel või korrutamisel pole liidetavate või tegurite järjekord oluline, s. t.

$a + b = b + a$ ja $ab = ba$.

Tehet «o», millel on omadus: iga elementide paari (a, b) jaoks kehtib võrdus

$a \circ b = b \circ a$,

nimetatakse kommutatiivsuseks. Peale arvude liitmise ja korrutamise on kommutatiivsed veel näiteks hulkade ühisosa ja ühendi moodustamise operatsioonid ning konjunktsioon, disjunktsioon, ekvivalents, Shefferi tehe ja antiekvivalents. Arvude lahutamine ja jagamine aga ei ole kommutatiivsed: $-1 = 2 - 3 \neq 3 - 2 = 1$; $\frac{9}{10} = \frac{3}{4} : \frac{5}{6} \neq \frac{5}{6} : \frac{3}{4} = \frac{10}{9}$. Ka eelmises punktis defineeritud operatsioon $\triangle$ pole kommutatiivne: $2 \triangle 3 = 2^2 \cdot 6 = 24$; $3 \triangle 2 = 2^3 \cdot 6 = 48$. Samuti ei ole kommutatiivne vektorkorrutis, sest

$\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$.

Arvude liitmisel või korrutamisel pole oluline ka sulgude paigutus, s. t.

$(a + b) + c = a + (b + c)$, $(ab)c = a(bc)$.

Kui mistahes elementide a, b ja c korral kehtib võrdus

$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$,

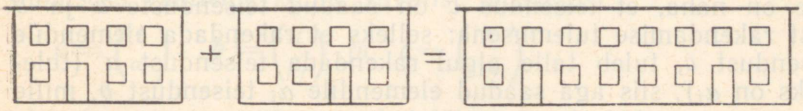
siis nimetatakse operatsiooni «$\circ$» assotsiatiivseks. Peale arvude liitmise ja korrutamise on assotsiatiivsed veel hulkade ühisosa ja ühendi moodustamise operatsioonid. Mitteassotsiatiivseteks operatsioonideks on arvude lahutamine

$(2 - 3) - 4 = (-1) - 4 = -5$, $\quad 2 - (3 - 4) = 2 - (-1) = 3$

ja jagamine

$\left(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}\right) : \frac{1}{2} = \frac{4}{5} : \frac{1}{2} = \frac{8}{5}$, $\quad \frac{2}{3} : \left(\frac{5}{6} : \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} : \frac{5}{3} = \frac{2}{5}$.

Assotsiatiivsuse omaduse täitumisel ei pea me kolme erineva elemendi a, b ja c korral vaatlema eraldi korrutisi $(ab)c$ ja $a(bc)$, vaid võime rääkida lihtsalt kolme elemendi korrutisest



Joonis 111. Majade liitmine.

abc. Analoogiliselt ka nelja elemendi a, b, c ja d puhul ei tarvitse me vaadelda eraldi korrutisi $((ab)c)d$, $(ab)(cd)$, $(a(bc))d$, $a((bc)d)$ ja $a(b(cd))$, vaid võime rääkida lihtsalt nelja elemendi korrutisest $abcd$.

Toome ühe näite assotsiatiivsest, kuid mittekommutatiivsest tehtest hulgal, mille elemendiks on mingi lõpliku hulga teisendused. Lõpliku hulga A elemente tähistame numbritega $1, 2, \ldots, \ldots, n$. Hulga A teisenduseks nimetame eeskirja, mis seab hulga A igale elemendile vastavusse mingi elemendi samast hulgast. Näiteks eeskiri, mis seab arvule 1 vastavusse arvu 3, arvudele 2 ja 3 aga arvu 1, on hulga $\{1, 2, 3\}$ teisendus. Seda teisendust tähistatakse sümboliga

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Üldiselt tähistatakse teisendust, mis seab elemendile 1 vastavusse elemendi α_1, elemendile 2 elemendi α_2 jne., sümboliga

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

või lihtsalt

$$\begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix}.$$

Näiteks kaheelemendilise hulga $\{1, 2\}$ kõik võimalikud teisendused on järgmised:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

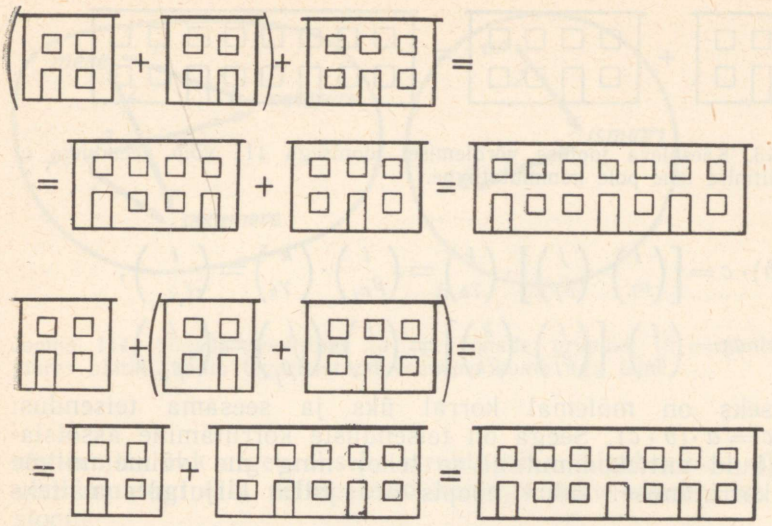
Defineerime antud hulga A kõigi teisenduste hulgal operatsiooni, mille nimetame korrutamiseks: kahe teisenduse

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix} \text{ ja } b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \ldots & \beta_n \end{pmatrix}$$

korrutiseks loeme teisendust

$$c = a \cdot b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta_{\alpha_1} & \beta_{\alpha_2} & \ldots & \beta_{\alpha_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \\ \beta_{\alpha_i} \end{pmatrix}.$$

Kerge on näha, et teisendus c on saadud teisenduste a ja b järjest rakendamise tulemusena: selleks et rakendada elemendile i teisendust c, tuleb talle algul rakendada teisendust a (tulemuseks on α_i), siis aga saadud elemendile α_i teisendust b, mille tulemusena saamegi β_{α_i}. Korrutame näiteks omavahel hulga $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ kaks teisendust:



Joonis 112. Majade liitmine on assotsiatiivne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Äsja defineeritud tehe ei ole kommutatiivne. Selles veendumiseks piisab, kui näitame kaks konkreetset teisendust a ja b, mille korral korrutised $a \cdot b$ ja $b \cdot a$ on erinevad. Viieelemendise hulga korral võivad sellisteks teisendusteks olla kas või viimases näites toodud teisendused. Tõepoolest,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

seega tegurite vahetamine muutis korrutist. Suvalise hulga $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ puhul võivad sellisteks teisendusteks olla näiteks

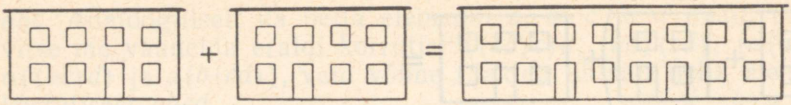
$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \text{ ja } a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 2 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix},$$

sest $a_1 a_2 = a_2$, kuid $a_2 a_1 = a_1$.

Teisenduste korrutis osutub aga assotsiatiivseks. Selles veendumiseks vaatleme kolme suvalist teisendust

$$a = \begin{pmatrix} i \\ \alpha_i \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} j \\ \beta_j \end{pmatrix} \text{ ja } \quad c = \begin{pmatrix} k \\ \gamma_k \end{pmatrix}$$

ning korrutame need omavahel läbi sulgude kahe erineva paigutuse korral:



Joonis 113. Käesoleva joonise võrdlemisel joonisega 111 võib veenduda, et majade liitmise tehe pole kommutatiivne.

$$(a \cdot b) \cdot c = \left[\binom{i}{\alpha_i} \cdot \binom{j}{\beta_j}\right] \cdot \binom{k}{\gamma_k} = \binom{i}{\beta\alpha_i} \cdot \binom{k}{\gamma_k} = \binom{i}{\gamma_{\beta\alpha_i}},$$

$$a \cdot (b \cdot c) = \binom{i}{\alpha_i} \cdot \left[\binom{j}{\beta_j} \cdot \binom{k}{\gamma_k}\right] = \binom{i}{\alpha_i} \cdot \binom{j}{\gamma_{\beta_j}} = \binom{i}{\gamma_{\beta\alpha_i}}.$$

Tulemuseks on mõlemal korral üks ja seesama teisendus: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Seega on teisenduste korrutamine assotsiatiivne (kuid mittekommutatiivne tehe) ning me võime mitme teguri korrutamisel sulud hoopis ära jätta, kirjutades näiteks $a \cdot b \cdot c$.

Ülesandeid.

3. Kas operatsioon $a \circ b = a + b - a \cdot b$ on ratsionaalarvude vallas tehe? Kas ta on kommutatiivne ja assotsiatiivne?

4. Olgu teatava õpperühma kõik üliõpilased erinevat kasvu. Kahe üliõpilase korrutiseks nimetame lühemat nende hulgast. Kas see korrutamise operatsioon on tehe? Kas ta on kommutatiivne või assotsiatiivne?

5. Leida järgmised teisenduste korrutised:

a)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&1&3&1&4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\3&4&4&5&2&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\2&4&3&3&1&1\end{pmatrix};$$

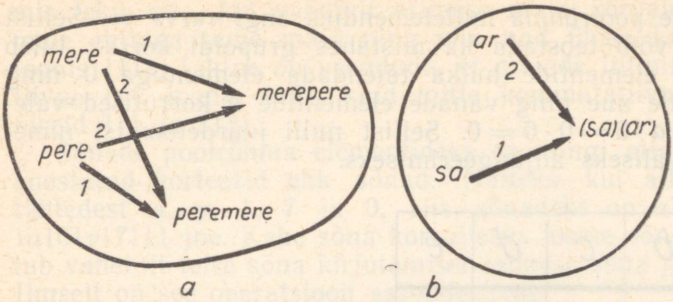
b)

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&7&7&3&3&4&2\end{pmatrix}^7.$$

6. Näidata mõne ülaltoodust erineva näite abil, et iga $n \geqslant 2$ korral hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ teisenduste korrutamise tehe ei ole kommutatiivne.

GRUPOIDID JA POOLRÜHMAD

Hulka, millel on defineeritud üks algebraline operatsioon, nimetatakse grupoidiks. Kui see operatsioon on assotsiatiivne, siis räägitakse assotsiatiivsest grupoidist ehk poolrühmast. Kui aga operatsioon on kommutatiivne, siis kõneleme vastavalt kommutatiivsest grupoidist või kommutatiivsest poolrühmast. Hulka, kus on defineeritud vähemalt üks tehe, nimetatakse algebraliseks



Joonis 114. Sõnade poolrühm (a) ja sõnade grupoid (b); number noole juures näitab, kumb teguritest on esimene, kumb aga teine.

süsteemiks ehk algebraliseks struktuuriks. Algebralises süsteemis võib muidugi olla defineeritud korraga mitu algebralist operatsiooni.

Eelmistes punktides näidetena toodud algebralised süsteemid olid enamasti grupoidid ja poolrühmad. Neid kordamata toome järgnevas veel mõningad uued näited. Kõigepealt kolm eriti lihtsat näidet.

Iga hulk muutub grupoidiks, kui tema iga kahe elemendi a ja b korral nimetada nende korrutiseks ükskõik missugune (suvaliselt valitud) selle hulga element.

Iga hulk muutub poolrühmaks, kui defineerida temas korrutamise operatsioon järgmiselt: $a \cdot b = a$, s. t. korrutis võrdub vasakpoolse teguriga. See operatsioon on ilmselt assotsiatiivne: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot c = a$, $a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b = a$. Muidugi pole nii saadud poolrühm kommutatiivne, sest $a \cdot b = a$, aga $b \cdot a = b$.

Kui hulgas on fikseeritud mingi element f ning operatsioon on defineeritud nii, et iga kahe elemendi a ja b korral $a \cdot b = f$, siis hulk muutub poolrühmaks ning isegi kommutatiivseks:

$$a \cdot b = b \cdot a = f.$$

Grupoidi elementi 0, millel on omadus, et grupoidi iga elemendi a korral (a võib olla ka 0) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, nimetatakse selle grupoidi nullelemendiks. Eelmises lõigus defineeritud poolrühma nullelemendiks on element f.

Sellises arvude poolrühmas, kus tehteks on korrutamine, osutub nullelemendiks arv 0. Nullelementi pole aga kaugeltki mitte igas ühe tehtega algebralises süsteemis: näiteks puudub nullelement täisarvude poolrühmas, kus tehteks on liitmine. Tõsi küll, sellisele poolrühmale võib lisada «arvu» ∞, defineerides iga täisarvu m jaoks

$$m + \infty = \infty + m = \infty.$$

Nii saadud uue poolrühma nullelemendiks ongi «arv» ∞. Sellist nulli lisamist võib teostada ka mistahes grupoidi korral: tuleb vaid grupoidi elementide hulka täiendada elemendiga 0 ning defineerida selle uue ning vanade elementide a korrutised valemitega $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0 \cdot 0 = 0$. Sellist nulli juurdetoomist nimetatakse nulli väliseks adjungeerimiseks.

	a	b	c	d	e
a	b	c	c	d	c
b	c	a	d	b	e
c	d	c	d	a	a
d	a	e	e	e	b
e	e	e	e	c	a

Joonis 115. Selleks et antud hulk grupoidiks muuta, võib täiesti suvaliselt moodustada Cayley tabeli selle hulga elementidest.

Grupoidi elementi e, millel on omadus, et grupoidi iga elemendi a puhul $a \cdot e = e \cdot a = a$, nimetatakse grupoidi ühikelemendiks. Sellise omadusega on arv 1 korrutamise ja arv 0 liitmise suhtes. Hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ teisenduste seas on ühikelemendiks nn. samasusteisendus.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Lõigul $[0, 1]$ valemiga $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ defineeritud funktsioonide poolrühma ühikelemendiks on konstantne funktsioon $f(x) = 1$, aga paarisarvude poolrühmas, kus tehteks on korrutamine, ühikelement puudub.

Positiivsete täisarvude hulk moodustab astendamise tehte $a \circ b = a^b$ suhtes grupoidi, kuid mitte poolrühma. Et assotsiatiivsuse seadus tõepoolest alati ei kehti, on näha sellest, et ühelt poolt $(2 \circ 3) \circ 2 = 2^3 \circ 2 = 8 \circ 2 = 8^2 = 64$, teiselt poolt aga $2 \circ (3 \circ 2) = 2 \circ 3^2 = 2 \circ 9 = 2^9 = 512$. See grupoid ei ole ka kommutatiivne, sest näiteks $2^3 \neq 3^2$.

Huvitava poolrühma näite (majade poolrühma) võib konstrueerida järgmiselt. Poolrühma elementideks on kahekorruselised majad, mis võivad olla piiramatu pikkusega, kuid on kõik ühelaiused ning ühekõrgused. Kahe maja summaks loeme maja,

mis tekib siis, kui vahetult esimese maja kõrvale temast paremale ehitada teine maja ning viia nad ühise katuse alla (vt. joonis 111). Lihtne on veenduda, et majade liitmine on assotsiatiivne (vt. joonis 112), kuid mitte kommutatiivne (võrdle jooniseid 111 ja 113).

Sõnade poolrühma elementideks on mingi alfabeedi tähtedest koostatud korteežid ehk sõnad. Näiteks kui alfabeet koosneb tähtedest α, γ, 1, 7 ja 0, siis sõnadeks on $\alpha 70$, γ, $00\gamma 0$, $7\alpha 1\alpha 101\gamma 17111$ jne. Kahe sõna korrutiseks loeme sõna, mis moodustub vahetult teise sõna kirjutamisel esimese sõna järel (liitsõna!). Ilmselt on see operatsioon assotsiatiivne.

Sõnade grupoid koosneb sõnadest, mis konstrueeritakse tähtedest ja sulgudest. Eelmises näites kasutatud alfabeedi korral on sõnadeks näiteks $(\alpha 1)$, $(((\gamma(1\alpha))7)(\gamma(01)))$ ja $((\gamma\alpha)(00))$. Samadest tähtedest samas järjekorras koosnevad sõnad loetakse erinevateks, kui nad erinevad sulgude paigutuse poolest. Seepärast näiteks $(a(bc)) \neq ((ab)c)$ ja meil on tegemist grupoidiga, mitte poolrühmaga.

Tehte (seega ka grupoidi või poolrühma) defineerimiseks kasutatakse nn. Cayley tabelit, mida nimetatakse lihtsalt korrutustabeliks, kui tegemist on multiplikatiivse kirjutusviisiga, ning liitmistabeliks aditiivse kirjutusviisi korral. Korrutustabelisse märgitakse kõigi võimalike teguripaaride korrutised. Muidugi on sellise tabeli tegelik väljakirjutamine põhimõtteliselt võimalik ainult lõplike hulkade korral.

Tabel ise koostatakse järgmiselt. Tema esimesse ritta kirjutatakse hulga kõik elemendid mingis järjekorras. Samad elemendid samas järjekorras moodustavad ka tabeli esimese veeru. Esimene rida ja veerg eraldatakse tabeli ülejäänud osast joontega (kusjuures ülemisse vasakusse nurka kantakse tavaliselt tehte märk). Tabeli täitmisel kirjutatakse korrutis $x \cdot y$ esimese veeru elemendist x paremale, esimese rea elemendi y alla.

Järgnevalt on toodud viis Cayley tabeli näidet, mis on ühtlasi vastavate grupoidide definitsioonideks:

·	e
e	e

×	a	b
a	a	a
b	b	a

·	e	a
e	e	a
a	a	a

○	a	b	c
a	a	a	a
b	b	c	a
c	a	c	b

✳	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	b	e
b	b	b	b	e
c	c	e	e	e

Selleks et otsustada, kas tehe on assotsiatiivne, tuleb teostada täiendav analüüs, mis suurte tabelite korral võib üsna komplitseeritud olla. Toodud viie tabeli puhul ei valmista see analüüs küll erilisi raskusi. Osutub, et esimese ja kolmanda tabeliga defineeritud tehted on assotsiatiivsed ja vastavad hulgad seega poolrühmad (kui tegureiks on ainult e, siis olenemata sulgude paigutusest on ka korrutis e; kui aga vähemalt ühe tegurina figureerib a, siis on korrutis a). Kolm ülejäänud tehet ei ole assotsiatiivsed. See ilmneb järgmistest näidetest:

$$b \times (a \times b) = b \times a = b, \qquad (b \times a) \times b = b \times b = a;$$
$$(b \circ b) \circ a = c \circ a = a, \qquad b \circ (b \circ a) = b \circ b = c;$$
$$(a * c) * b = e * b = b, \qquad a * (c * b) = a * e = a.$$

Eriti lihtsalt saab Cayley tabeli järgi otsustada, kas tegemist on kommutatiivse või mittekommutatiivse tehtega. Vajalik reegel järeldub vahetult tabeli ehitusest: tehe on kommutatiivne parajasti siis, kui tabel on sümmeetriline peadiagonaali (s. o. ülemisest vasakust nurgast väljuva diagonaali) suhtes. Seega on ülaltoodud näidetest esimese, kolmanda ja viienda tabeliga defineeritud tehted kommutatiivsed.

Ülesandeid.

7. Kuidas muutub poolrühma Cayley tabel, kui poolrühmale adjungeerida väliselt nullelement? ühikelement?
8. Kuidas näeb välja Cayley tabelis ühikelemendile (nullelemendile) vastav rida ja veerg?
9. Milline on hulga $\{1, 2\}$ teisenduste poolrühma Cayley tabel?
10. Konstrueerida poolrühma $A = \{a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ jaoks korrutustabel, kui $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ning on teada, et $a^9 = a^6 = a^3$, $a^{10} = a^7 = a^4$ ja $a^8 = a^5$.

ISOMORFISM

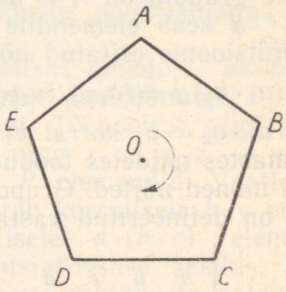
Vaatleme positiivsete täisarvude hulka $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ poolrühmana liitmise suhtes. Selle poolrühma elementideks on araabia numbritega 1, 2, 3, ..., 9, 0 kirjutatud täisarvud. Kuid täisarvude hulga elemente võib esitada ka teises sümboolikas, näiteks $\{I, II, III, IV, \ldots\}$. Käsitledes seda hulka poolrühmana liitmise suhtes, saame ilmselt (sõna kõige loomulikumas mõttes) sellesama poolrühma mis varemgi. Kuid formaalselt on need poolrühmad erinevad, sest nende elementide hulgad on erinevad.

Võrdleme omavahel veel kaht järgmist poolrühma. Koosnegu esimene poolrühm arvudest 0, 1, 2, 3 ja 4 ning olgu operatsioon $\oplus$ temas defineeritud järgmiselt: kahe arvu m ja n «summa»

$m \oplus n$ võrdub arvuga $m + n$, kui see ei ületa nelja, ning arvuga $m + n - 5$, kui $m + n \geqslant 5$. Seega on selle poolrühma Cayley tabel järgmine:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Teiseks vaatleme poolrühma, mille elementideks on korrapärase viisnurga pöörded a_0, a_1, a_2, a_3 ja a_4 ümber selle viisnurga sümmeetriakeskpunkti (joonisel 116 noolega näidatud suunas)



Joonis 116. Poolrühma elementideks võivad olla korrapärase viisnurga pöörded.

vastavalt nurkade 0°, 72°, 144°, 216° ja 288° võrra (vt. joon. 118). Kahe pöörde a_m ja a_n «summaks» $a_m \boxplus a_n$ nimetame sellist pööret $a_i (i = 0, 1, 2, 3, 4)$, mille rakendamise tulemus langeb ühte pöörete a_m ja a_n järjestikuse rakendamise tulemusega. Näiteks $a_3 \boxplus a_4$ tähendab, et viisnurka tuleb algul pöörata 216° võrra, siis aga veel 288° võrra; seega on viisnurka algasendiga võrreldes pööratud 144° võrra, niisiis $a_3 \boxplus a_4 = a_2$. Kokkuvõttes, selle poolrühma Cayley tabel tuleb niisugune (vrd. joonisega 119):

$\boxplus$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_0	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_0
a_2	a_2	a_3	a_4	a_0	a_1
a_3	a_3	a_4	a_0	a_1	a_2
a_4	a_4	a_0	a_1	a_2	a_3

Esimesel pilgul tundub, et need kaks poolrühma on täiesti erinevad: nad koosnevad erinevatest elementidest (arvud ja pöörded), nende tehted on nii tähistuse kui ka defineerimisviisi

poolest erinevad. Kuid tarvitseb vaid asendada esimese poolrühma Cayley tabeli iga element i sümboliga a_i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) ja me saame teise poolrühma Cayley tabeli. Seega need poolrühmad ei erine teatud mõttes teineteisest.

Algebra seisukohalt ebaoluliselt erinevad üksteisest need grupoidid või poolrühmad, mis koosnevad võib-olla küll erinevatest elementidest, kuid sisaldavad elemente n.-ö. ühepalju ning on sama algebralise ehitusega. Selliseid ebaoluliselt erinevaid poolrühmi või grupoide nimetatakse isomorfseteks (otsene tõlge kreeka keelest tähendab samakujuline, ühesuguse ehitusega).

Anname nüüd täpse definitsiooni. Kaht grupoidi või poolrühma nimetatakse isomorfseteks, kui nende elementide vahel on korraldatud selline üksühene vastavus, et esimese grupoidi või poolrühma kahe elemendi korrutisele vastab teises grupoidis või poolrühmas teguritele vastavate elementide korrutis. Kui esimene grupoid on $A = \{a_\alpha\}$, teine $B = \{b_\beta\}$ ning üksühene vastavus * φ seab elemendile a_α vastavusse elemendi $b_\alpha = a_\alpha\varphi$, siis definitsioonis esitatud nõue tähendab seda, et

$$(a_1 \cdot a_2)\varphi = (a_1\varphi)\cdot(a_2\varphi)$$

ehk $a_1 \cdot a_2 = a_3$ korral $b_1 \cdot b_2 = b_3$.

Viimastes näidetes toodud kaks poolrühma on isomorfsed. Toome veel mõned näited. Grupoidid $P = \{a, b, c, d\}$ ja $Q = \{e, f, g, h\}$, mis on defineeritud vastavalt Cayley tabelitega

·	a	b	c	d
a	b	a	a	c
b	c	a	d	b
c	b	b	b	a
d	a	b	a	d

ja

✳	e	f	g	h
e	f	f	h	f
f	g	h	f	e
g	h	f	g	h
h	h	h	e	f

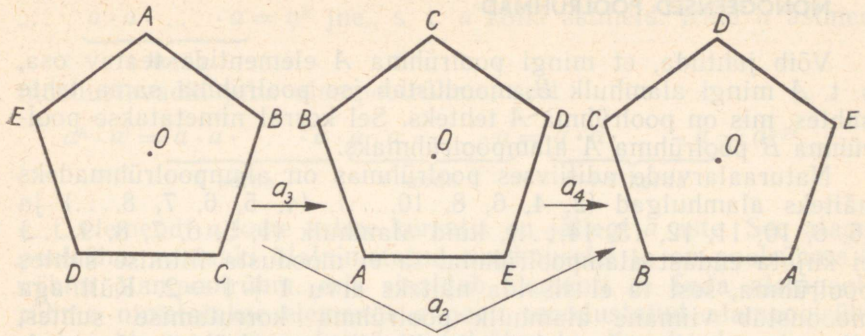
on isomorfsed. See saab ilmseks, kui korraldada P ja Q elementide vahel järgmine üksühene vastavus φ:

$$a\varphi = h,\ b\varphi = f,\ c\varphi = e,\ d\varphi = g.$$

Poolrühm $A = \{a, b, c, d\}$, mis on defineeritud Cayley tabeliga

×	a	b	c	d
a	a	a	d	d
b	a	b	c	d
c	a	c	b	d
d	a	d	a	d

* Hulgateoorias kasutatakse üksühese vastavuse tähistamiseks tavaliselt sümbolit «↔». Algebras osutub aga sobivamaks siintoodud tähistus.



Joonis 117. Korrapärase viisnurga pöörete liitmine.

on isomorfne hulga $\{1, 2\}$ kõigi teisenduste poolrühmaga (vt. lk. 222).

Toome siin veel isomorfismi kaks lihtsat omadust. Esimene neist väidab, et kui grupoid A on isomorfne poolrühmaga P, siis on A ise poolrühm (s. t. on assotsiatiivne). Tõepoolest, olgu a, b ja c grupoidi A kolm suvalist elementi ning x, y ja z — neile isomorfismi puhul vastavad poolrühma P elementid. Vaatleme korrutist $a \cdot (b \cdot c)$. Isomorfismi tõttu vastab korrutisele $b \cdot c$ poolrühma P element $y \cdot z$ ning korrutisele $a \cdot (b \cdot c)$ element $x \cdot (y \cdot z)$. Et poolrühmas P kehtib assotsiatiivsuse seadus, siis $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Element $(x \cdot y) \cdot z$ aga vastab vaadeldavas isomorfismis grupoidi A elemendile $(a \cdot b) \cdot c$. Seega vastab element $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ grupoidi A kahele elemendile $a \cdot (b \cdot c)$ ja $(a \cdot b) \cdot c$. Vastavuse üksühesuse tõttu ei saa üks element vastata kahele erinevale elemendile, seega $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ja A on assotsiatiivne grupoid ehk poolrühm.

Analoogiliseslt saab tõestada ka teise omaduse: kui grupoid on isomorfne kommutatiivse grupoidiga, siis on ta ise kommutatiivne.

Ülesandeid.

11. Näidata, et kõigi paarisarvude ja kõigi täisarvude poolrühmad liitmise suhtes on isomorfsed.
12. Näidata, et kolmega jaguvate ja seitsmega jaguvate positiivsete täisarvude poolrühmad liitmise suhtes on isomorfsed.
13. Näidata (kasutades korrutise logaritmi valemit), et positiivsete reaalarvude poolrühm korrutamise suhtes ja kõikide reaalarvude poolrühm liitmise suhtes on isomorfsed.
14. Majade poolrühma iga maja on ehitatud kolme liiki tüüpmajadest. Milline peab olema selle majade poolrühmaga isomorfse sõnade poolrühma alfabeet?

Võib juhtuda, et mingi poolrühma A elementide teatav osa, s. t. A mingi alamhulk B, moodustab ise poolrühma sama tehte suhtes, mis on poolrühma A tehteks. Sel korral nimetatakse poolrühma B poolrühma A alampoolrühmaks.

Naturaalarvude aditiivses poolrühmas on alampoolrühmadeks näiteks alamhulgad $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$, $\{4, 5, 6, 7, 8, \ldots\}$ ja $\{5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots\}$, kuid alamhulk $\{1, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots\}$ ei kujuta endast alampoolrühma: ta ei moodusta liitmise suhtes poolrühma, sest ta ei sisalda näiteks arvu $1 + 1 = 2$. Küll aga moodustab viimane alamhulk poolrühma korrutamise suhtes, olles seega naturaalarvude multiplikatiivse poolrühma alampoolrühmaks.

Poolrühmas L korrutamisreegliga $a \cdot b = a$ (vt. lk. 225) osutub iga alamhulk alampoolrühmaks (miks?), nn. nullkorrutamisega poolrühmas F korrutamisreegliga $a \cdot b = f$, kus f on mingi fikseeritud element (vt. lk. 225), moodustab alampoolrühma iga alamhulk, mis sisaldab elementi f (miks?).

Kui poolrühmas on olemas null- või ühikelement, siis moodustab kumbki neist omaette alampoolrühma. Et iga hulk on iseenda alamhulgaks, siis ka kogu poolrühm ise on enda alampoolrühmaks.

Analoogiliselt alampoolrühmaga võib sisse tuua ka alamgrupoidi mõiste. Näiteks tabeliga

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	b	e
b	b	b	b	e
c	c	e	e	e

määratud grupoidis on alamhulgad $\{e\}$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, $\{e, a\}$, $\{e, b\}$, $\{e, c\}$, $\{e, a, b\}$, $\{e, a, c\}$ ja $\{e, b, c\}$ alamgrupoididekseks (kontrollida!), alamhulk $\{a, c\}$ aga mitte, sest $a * c = e \notin \{a, c\}$.

Kuna poolrühma iga alamgrupoid on tema alampoolrühmaks (miks?), siis selleks, et kontrollida, kas antud poolrühma mingi alamhulk moodustab alampoolrühma, tarvitseb vaid veenduda, et vaadeldava alamhulga jaoks on poolrühma operatsioon tehteks, s. t. et alamhulk on selle operatsiooni suhtes kinnine.

Milline on poolrühmas A kõige väiksem alampoolrühm, mis sisaldab A mingit elementi a? Ilmselt peab see alampoolrühm sisaldama peale elemendi a enda veel korrutisi (kui poolrühma tehet nimetada korrutamiseks) $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, ...,

$\ldots, \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ korda}} = a^k$ jne., s. t. a kõiki astmeid. Kuid a astmed moodustavadki juba alampoolrühma, sest

$$a^k \cdot a^l = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ korda}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{l \text{ korda}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k+l \text{ korda}} = a^{k+l},$$

s. t. elemendi a kahe astme korrutis on jällegi a aste. See alampoolrühm vastabki ülalnimetatud tingimusele: ta on poolrühma A vähim alampoolrühm, mis sisaldab elementi a. Seda alampoolrühma nimetatakse elemendi a poolt moodustatud alampoolrühmaks ehk monogeenseks alampoolrühmaks (kreeka k. $\mu\acute{o}\nu o\varsigma$ — üksainus, $\gamma\acute{\varepsilon}\nu o\varsigma$ — päritolu).

Kui poolrühm ühtib tema mingi elemendi poolt moodustatud monogeense alampoolrühmaga, siis nimetatakse seda poolrühma ennast monogeenseks. Nii on näiteks naturaalarvude aditiivne poolrühm monogeenne moodustava elemendiga 1:

$$k = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{k \text{ korda}}.$$

Monogeenne poolrühm on alati kommutatiivne (miks?).

Ülalmainitud poolrühmas L korrutamisreegliga $a \cdot b = a$ on monogeensed alampoolrühmad üheelemendilised: iga a korral $a^2 = a^3 = \ldots = a^k = \ldots = a$; nullkorrutamisega poolrühmas F koosnevad monogeensed alampoolrühmad kas ühest elemendist f või kahest elemendist a ja f, sest $f^2 = f^3 = \ldots = f^k = \ldots = f$, aga ka $a \neq f$ korral $a^2 = a^3 = \ldots = a^k = \ldots = f$.

Poolrühmas $H = \{a, b, c, d, f, g, h, 0\}$, mis on antud Cayley tabeliga

	a	b	c	d	f	g	h	0
a	b	c	d	f	c	g	h	0
b	c	d	f	c	d	g	h	0
c	d	f	c	d	f	g	h	0
d	f	c	d	f	c	g	h	0
f	c	d	f	c	d	g	h	0
g	g	g	g	g	g	h	0	0
h	h	h	h	h	h	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0

koosneb elemendi g poolt moodustatud monogeenne alampoolrühm elementidest g, h ja 0, aga elemendi a poolt moodustatud monogeenne alampoolrühm elementidest a, b, c, d ja f (kontrollida!).

Üldiselt võib monogeenne poolrühm olla kas lõplik või lõpmatu. Nagu me selles kohe veendume, on ta lõpmatu vaid siis,

kui moodustava elemendi a astmete seas pole võrdseid, s. t. kui kahe erineva naturaalarvu k ja l korral ei saa olla $a^k = a^l$.

Iga lõpmatu monogeenne poolrühm koosneb kõikidest astmetest $a, a^2, a^3, \ldots, a^n, \ldots$, mis korrutatakse tavalise astmete korrutamise reegli järgi, ning seega kõik lõpmatud monogeensed poolrühmad on omavahel isomorfsed.

Lõpliku monogeense poolrühma juhuga on tegemist siis, kui moodustava elemendi astmete seas on vähemalt kaks võrdset. Tõepoolest, olgu a^k esimene a astmete seas, mis on võrdne mingi teise astmega, ning a^{k+l} — esimene a^k-ga võrdne aste: $a^k = a^{k+l}$. Siis ka kõik teised a astmed a^n, kus $n > k + l$, võrduvad ühega astmetest $a^k, a^{k+1}, a^{k+2}, \ldots, a^{k+l-1}$. Nimelt $a^{k+l+1} = a^{k+1}$, $a^{k+l+2} = a^{k+2}$, $\ldots$, $a^{k+2l-1} = a^{k+l-1}$, $a^{k+2l} = a^k$ jne. Üldse võib suvalise naturaalarvu $n > k + l$ esitada kujul $n = k + jl + i$, kus j on mingi naturaalarv ja i on l-st väiksem naturaalarv. Seepärast võrdub iga aste a^n mingi ülalmainitud astmega a^{k+i} ($i = 0,1, \ldots, l-1$).

Vaadeldaval juhul leidub seega vaid $k + l - 1$ erinevat astet ja poolrühm on tõepoolest lõplik. Korrutamisreegel näeb välja järgmiselt:

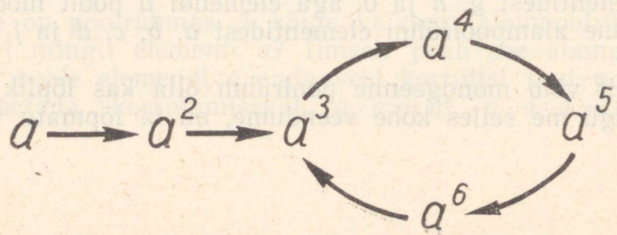
$$a^m \cdot a^n = \begin{cases} a^{m+n}, & \text{kui } m + n < k + l, \\ a^{k+i}, & \text{kui } m + n \geqslant k + l \\ & \text{ja } m + n = k + jl + i. \end{cases}$$

Nagu veendusime, on lõplik monogeenne poolrühm määratud kahe arvuga k ja l. Seda arvudepaari (k, l) nimetatakse moodustava elemendi ning monogeense poolrühma järguks. Ilmselt on kõik antud järku monogeensed poolrühmad omavahel isomorfsed.

Vaatleme näiteks monogeenset poolrühma, mille järk on $(3, 4)$. Ta koosneb kuuest elemendist a, a^2, a^3, a^4, a^5 ja a^6 ning tema Cayley tabel näeb välja nii:

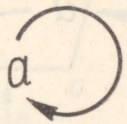
	a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6
a	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3
a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3	a^4
a^3	a^4	a^5	a^6	a^3	a^4	a^5
a^4	a^5	a^6	a^3	a^4	a^5	a^6
a^5	a^6	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3
a^6	a^3	a^4	a^5	a^6	a^3	a^4

Järgmisel diagrammil on nooltega näidatud, millise elemendi me saame, kui korrutame a mingi astme veel kord a-ga:

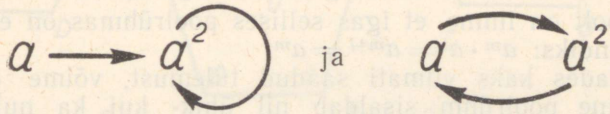


Diagrammi abil korrutise $a^m \cdot a^n$ leidmiseks tuleb lähtuda elemendist a^m ning käia nooltega näidatud suunas n sammu.

Sellist diagrammi on võimalik joonistada iga lõpliku monogeense poolrühma jaoks. Näiteks üheelemendilise poolrühma korral näeb see välja nii:



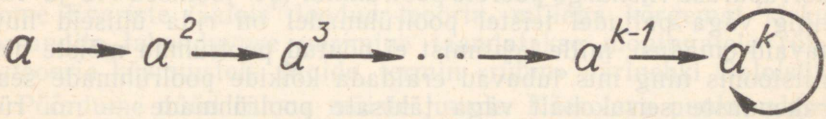
Kaheelemendiliste monogeensete poolrühmade jaoks on võimalikud diagrammid:



Teatud analoogia selliste diagrammide ja komeetide kujude vahel viib mõttele kasutada nimetust «saba» nende elementide hulga jaoks, mis ei ühti ühegi teise astmega, nimelt elementide $a, a^2, \ldots, a^{k-1}$ jaoks, ning nimetust «tuum» ülejäänud elementide hulga jaoks. Muidugi võib juhtuda, et monogeense poolrühma «tuum» või «saba» või isegi mõlemad on kõdunud, nagu see nähtub kolmest viimasest diagrammist.

Diagrammide kasutamine lihtsustab tunduvalt lõplike monogeensete poolrühmade uurimist, muutes selle näitlikumaks. Selgitame näiteks, millal on monogeensel poolrühmal olemas nullelement, millal ühikelement ja millal need mõlemad.

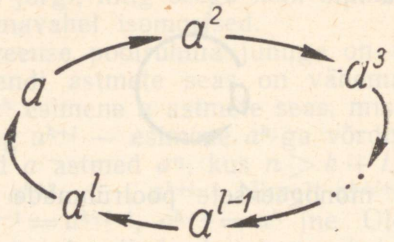
Ilmselt peab nullelement kuuluma monogeense poolrühma «tuuma», sest võrdusest $0 = a^n$ järeldub, et $0 = 0 \cdot a = a^n \cdot a = a^{n+1}$, s. t. 0 on a selline aste, mis võrdub a mingi teise astmega. Võrdusest $a^n = a^{n+1}$ järeldub otsekohe, et kõik «tuuma» elemendid on omavahel võrdsed (tuum on kõdunud). Nullelemendiga monogeense poolrühma järguks on seega $(k, 1)$ ning poolrühma diagramm on järgmine:



Teiselt poolt on a^k nullelemendiks igas $(k, 1)$-järku monogeenses poolrühmas: $a^m \cdot a^k = a^k$.

Ühikelemendiga monogeenses poolrühmas on samuti tegemist kõdumisega. Seekord on kõdunud «saba». Tõepoolest, peab ju ühikelement e rahuldama poolrühma iga elemendi x korral seost

$x \cdot e = x$. Kuna aga siin e ja x on a astmed, siis «saba» elemendi a^m jaoks peaks kehtima võrdus $a^m \cdot a^n = a^m$, mis on võimatu (miks?). Seega ühikelemendiga monogeense poolrühma järguks on $(1, l)$ ja tema diagramm näeb välja nii:



Teiselt poolt on ilmne, et igas sellises poolrühmas on element a^l ühikelemendiks: $a^m \cdot a^l = a^{m+l} = a^m$.

Ühendades kaks viimati saadud tulemust, võime öelda, et monogeenne poolrühm sisaldab nii ühik- kui ka nullelementi vaid siis, kui ta koosneb ühestainsast elemendist.

Ülesandeid.

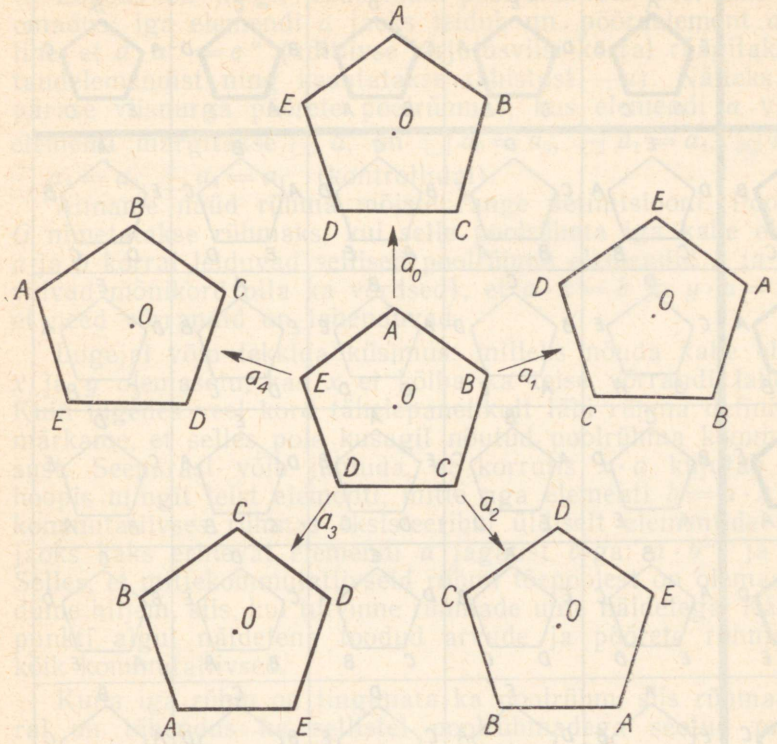
15. Kas leheküljel 217 korrutamistabeliga esitatud grupoidi kõik alamgrupoidid on tekstis loetletud?

16. Leida leheküljel 218 defineeritud poolrühma H iga elemendi poolt moodustatud monogeensed poolrühmad, määrata nende järgud ning joonistada diagrammid.

17. Millised on lõpliku monogeense poolrühma alampoolrühmad?

RÜHMAD

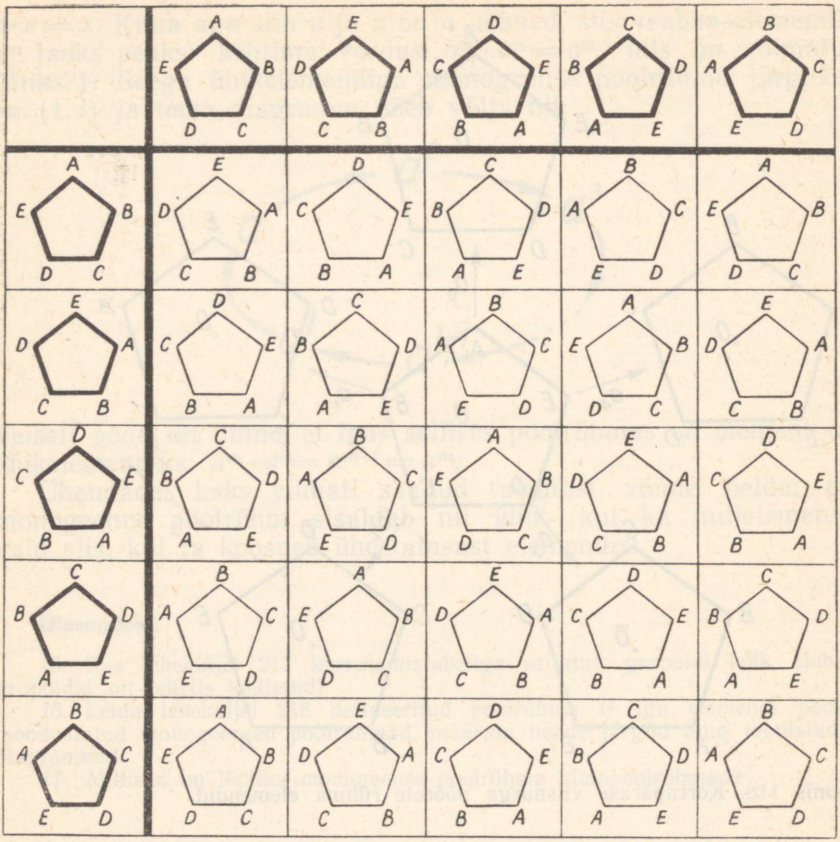
Kõikide täisarvude, kõikide ratsionaalarvude ja kõikide reaalarvude aditiivsetel poolrühmadel, kõikide positiivsete ratsionaalarvude ja kõikide reaalarvude multiplikatiivsetel poolrühmadel, korrapärase viisnurga pöörete poolrühmal (vt. joonised 118 ja 119) ning väga paljudel teistel poolrühmadel on rida ühiseid huvitavaid omadusi, mille kehtimist ei nõutud poolrühma mõiste definitsioonis ning mis lubavad eraldada kõikide poolrühmade seast rakenduste seisukohalt väga tähtsate poolrühmade — nn. rühmade klassi. Et rühmateooria on tekkinud palju varem kui poolrühmateooria, kinnitavad ka terminid ise: sõna poolrühm on tuletatud sõnast rühm. Tänu sellele ning mõiste enda rikkamale sisule on rühmateooria arenenud palju kaugemale kui poolrühmateooria.



Joonis 118. Korrapärase viisnurga pöörete rühma elemendid.

Andmata esialgu täpset definitsiooni, mainime, et rühma mõistet ning rühmateooria tulemusi kasutatakse tänapäeval väga laialdaselt teoreetilises füüsikas ja kristallograafias. Ka matemaatikas endas vajavad rühmateooriat geomeetria ja topoloogia, funktsionaalanalüüs ja arvuteooria. Samuti ei saa kaasaegse algebra paljud harud läbi ilma rühmateooriata — kaasaegse algebra vanima ja kõige sügavamale arendatud haruta. Näitena toome Evariste Galois' loodud teooria, millega kõrgemat järku võrrandite lahenduvuse uurimine taandatakse mõningatele rühmateooria küsimustele. Muide, termin «rühm» pärinebki Galois'lt.

Pöördume nüüd rühma mõiste juurde. Käesoleva punkti algul rühmade näidetena mainitud poolrühmad olid kõik ühikelemendiga, milleks kolmes esimeses näites oli arv null, kahes järgmises arv üks ning viimases näites pööre 0° võrra (tuletame meelde, et e on ühikelement, kui iga elemendi a korral antud poolrühmast $a \cdot e = e \cdot a = a$).



Joonis 119. Korrapärase viisnurga pöörete rühma Cayley tabel.

Kuid näidetena toodud poolrühmadel on veel teine ühine omadus. Kõigis neis on lahenduv võrrand $a \cdot x = b$ (või võrrand $a + x = b$, kui kasutada aditiivset kirjutusviisi). Tõepoolest, selle võrrandi lahendiks on viie esimese poolrühma korral kas vahe $b - a$ või jagatis $\frac{b}{a}$. Viimases poolrühmas (vt. lk. 229) on võrrandi $a \boxplus x = b$ lahendiks pööre, mis täiendab pööret a pöördeni b (või pöördeni $b + 360°$, mis meie poolrühma seisukohalt kujutab endast samuti elementi b). Näiteks a_1 ja a_4 jaoks, mis tähistasid vastavalt pöördeid 72° ja 288° võrra (vt. joon. 118), on võrrandi $a_4 \boxplus x = a_1$ lahendiks $x = a_2$, s. o. pööre 144° võrra.

Lõpuks on kõigil vaadeldud poolrühmadel veel üks eriline omadus; iga elemendi a jaoks leidub nn. pöördelement a^{-1}, selline, et $a \cdot a^{-1} = e$* (aditiivse kirjutusviisi korral räägitakse vastandelemendist ning kasutatakse tähistust $-a$). Näiteks korrapärase viisnurga pöörete poolrühmas, kus elemendi a vastandelementi märgitakse $\boxminus a$, on $\boxminus a_0 = a_0$, $\boxminus a_1 = a_4$, $\boxminus a_2 = a_3$, $\boxminus a_3 = a_2$, $\boxminus a_4 = a_1$ (kontrollida!).

Anname nüüd rühma mõiste range definitsiooni. Poolrühma G nimetatakse rühmaks, kui selle poolrühma iga kahe elemendi a ja b korral leiduvad sellised poolrühma elemendid x ja y (mis võivad mõnikord olla ka võrdsed), et $a \cdot x = b$ ja $y \cdot a = b$, s. t. et need võrrandid on lahenduvad.

Lugejal võib tekkida küsimus: milleks nõuda kahe elemendi x ja y olemasolu, kas x ei kõlba ka teise võrrandi lahendiks? Kuid lugedes veel kord tähelepanelikult läbi rühma definitsiooni, märkame, et selles pole kusagil nõutud poolrühma kommutatiivsust. Seepärast võib juhtuda, et korrutis $x \cdot a$ kujutab endast hoopis mingit teist elementi, mitte aga elementi $b = a \cdot x$. Mittekommutatiivses rühmas eksisteeribki üldiselt elementide a ja b jaoks kaks erinevat elemendi a jagatist b-ga: $a \cdot b^{-1}$ ja $b^{-1} \cdot a$. Selles, et mittekommutatiivseid rühmi tõepoolest on olemas, veendume hiljem, siis, kui tutvume rühmade uute näidetega. Käesoleva punkti algul näidetena toodud arvude ja pöörete rühmad olid kõik kommutatiivsed.

Kuna iga rühm on tingimata ka poolrühm, siis rühmade korral on tähendus ka sellistel poolrühmadega seotud mõistetel nagu isomorfism ning alampoolrühm. Viimase loomulikuks üldistuseks on alamrühma mõiste: rühma alamhulk moodustab alamrühma, kui ta on ise rühm sama tehte suhtes. Näiteks täisarvude aditiivses rühmas moodustab alamrühma kõigi paarisarvude hulk, kuid seevastu arvudest 1 ja -1 koosnev hulk pole temas alamrühmaks, kuigi moodustab ise rühma korrutamise suhtes.

Rühma mõiste võib defineerida ka järgmiselt. Poolrühma G nimetatakse rühmaks, kui ta sisaldab ühikelemendi e ning kui selle poolrühma iga elemendi a jaoks leidub pöördelement a^{-1}.

Viimase definitsiooni abil on sageli mõnevõrra mugavam kontrollida, kas antud poolrühm on rühm või mitte.

---

* Nii defineeritud pöördelementi a^{-1} tuleks täpsemalt nimetada elemendi a parempoolseks pöördelemendiks. Osutub aga, et kui poolrühma igal elemendil on olemas parempoolne pöördelement, siis on see samaaegselt ka vasakpoolseks pöördelemendiks, s. t. rahuldab tingimust $a^{-1} \cdot a = e$ (see asjaolu õieti õigustabki tema nimetamist lihtsalt pöördelemendiks). Tõepoolest, olgu a^{-1} elemendi a parempoolne pöördelement, s. t. $a \cdot a^{-1} = e$. Korrutades viimast võrdust vasakult elemendiga a^{-1} ja paremalt tema parempoolse pöördelemendiga, saamegi $a^{-1} \cdot a = e$.

Mõlemad toodud definitsioonid on samaväärsed, s. t. esimesest definitsioonist järeldub teine ja teisest esimene. Et see tõepoolest nii on, selles veendub lugeja ehk ise.

Rühma definitsioonis esitatud nõuded on küllaltki ranged, mis nähtub juba tõsiasjast, et enamik käesolevas artiklis näidetena toodud poolrühmadest neid ei rahulda. Poolrühmad L ja F (vt. lk. 225) ei kujuta endast rühmi, sest neil pole ühikelementi. Samal põhjusel ei moodusta rühma ka paarisarvude multiplikatiivne poolrühm.

Poolrühmades, mis koosnevad antud hulga A kõikidest alamhulkadest ning mille tehteks on kas ühisosa või ühendi võtmise operatsioon, on ühikelemendiks vastavalt kas kogu hulk A või tühi hulk $\varnothing$. Kui B on selline alamhulk, et $B \neq A$ ja $B \neq \varnothing$, siis iga teise alamhulga C korral $B \cap C \neq A$, $B \cup C \neq \varnothing$, s. t. element B ei ole pööratav kummagi tehte suhtes. Seega kumbki nendest poolrühmadest pole rühm.

Majade poolrühmale (vt. lk. 226) võib lisada n.-ö. kõdunud maja, mille laius on kaduvväike. See maja etendabki majade poolrühmas ühikelemendi osa, kuid vastandelementi ühelgi majal ei ole: liites majale a veel mingi maja b, saame alati mõlemast liidetavast pikema maja, mis muidugi ei ole kõdunud ja seega ei võrdu ühikelemendiga.

Lõpliku hulga kõigi teisenduste poolrühmas (vt. lk. 222) on ühikelement olemas, kuid kaugeltki mitte igal teisendusel ei ole pöördelementi. Näiteks seostest

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

järeldub, et teisendusel, mis viib kogu hulga {1, 2, 3} üle arvuks 1, pole olemas pöördelementi.

Toome veel mõningad näited rühmade kohta, jättes rühma aksioomide kehtivuse kontrollimise enamasti lugeja hooleks.

Huvitava näite võib konstrueerida, kui vaadelda korrutamistehet hulgal, mis koosneb nullist erinevatest irratsionaalarvudest kujul $a + b\sqrt{2}$, kus a ja b on ratsionaalarvud. Et $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$, siis arv 1 kuulub (ühikelemendina) vaadeldavate arvude hulka. Elemendi $a + b\sqrt{2}$ pöördelemendiks osutub $\frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2}$, mis on kirjutatav nõutaval kujul:

$$\frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}.$$

Muidugi on siin $a^2 - 2b^2 \neq 0$ (miks?).

Rühmadest, mille elementideks on arvud, operatsiooniks aga arvude tavaline liitmine või korrutamine, nimetame veel

kõikide kompleksarvude ja nn. Gaussi täis- ja ratsionaalarvude aditiivseid rühmi (Gaussi täis- ja ratsionaalarvud on sellised kompleksarvud $a+bi$, kus a ja b on vastavalt täis- ja ratsionaalarvud), kõikide nullist erinevate ratsionaal-, reaal- ja kompleksarvude multiplikatiivseid rühmi ning arvudest 1 ja —1 koosnevat multiplikatiivset rühma.

Mittekommutatiivse rühma näitena toome järgmise Cayley tabeliga defineeritud grupoidi:

$\cdot$	e	s_1	s_2	s_3	a	b
e	e	s_1	s_2	s_3	a	b
s_1	s_1	e	a	b	s_2	s_3
s_2	s_2	b	e	a	s_3	s_1
s_3	s_3	a	b	e	s_1	s_2
a	a	s_3	s_1	s_2	b	e
b	b	s_2	s_3	s_1	e	a

Selle grupoidi assotsiatiivsuses veendumiseks tuleks viia läbi küllalt komplitseeritud analüüs. Niisuguse analüüsi vältimiseks näitame hiljem, et see grupoid on isomorfne teatud teisenduste rühmaga, millest järeldubki tema assotsiatiivsus. Lähtudes oletusest, et vaadeldav grupoid kujutab endast poolrühma, on väga lihtne näidata, et tegemist on isegi rühmaga. Tõepoolest, ühikelement on selles poolrühmas olemas ning pöördelemendid näevad välja järgmiselt: $a^{-1}=b$, $b^{-1}=a$, $s_i^{-1}=s_i$ $(i=1, 2, 3)$ ning $e^{-1}=e$ (nagu see on alati ühikelemendi korral: $e\cdot e=e$).

Toodud rühm on mittekommutatiivne, nagu see nähtub Cayley tabeli ebasümmeetrilisusest. Ta on isegi teatud mõttes maksimaalselt mittekommutatiivne: peale korrutiste kujuga $x\cdot x=x\cdot x$, $x\cdot e=e\cdot x$ ja $x^{-1}\cdot x=x\cdot x^{-1}$, mis kunagi ei olene tegurite järjekorrast, on siin alati $x\cdot y\neq y\cdot x$. Ühtlasi leiab selle näite puhul kinnitust ülalmainitud fakt erinevate jagatiste olemasolust: $s_1\cdot a^{-1}=s_1\cdot b=s_3$ ja $a^{-1}\cdot s_1=b\cdot s_1=s_2$.

Mittekommutatiivse rühma moodustavad ratsionaalfunktsioonid

$$e=x,\quad f_1=\frac{1}{x},\quad f_2=1-x,\quad f_3=\frac{x}{x-1},\quad c=\frac{x-1}{x},\quad d=\frac{1}{1-x},$$

kui tehtena «$\circ$» vaadelda liitfunktsiooni moodustamist. Siis on näiteks

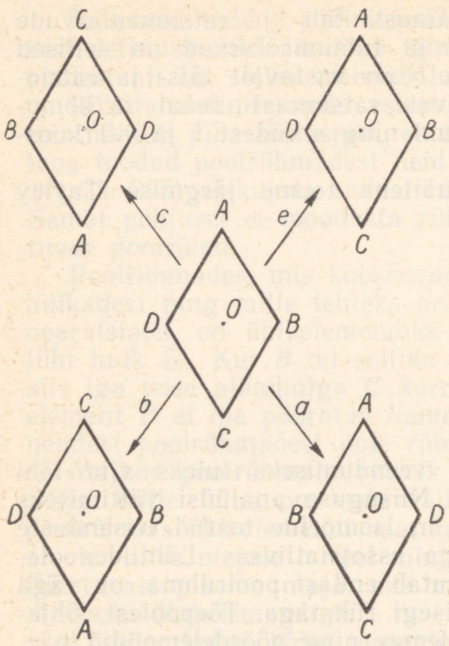
$$f_2\circ c=1-\frac{x-1}{x}=\frac{x-x+1}{x}=\frac{1}{x}=f_1,$$

$$c\circ f_2=\frac{(1-x)-1}{1-x}=\frac{-x}{1-x}=\frac{x}{x-1}=f_3$$

ja $f_3^{-1}=f_3$, sest

$$f_3\circ f_3=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=\frac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x-x+1}{x-1}}=x=e,$$

aga e on selle rühma ühikelement (miks?).



Joonis 120. Rombi sümmeetriateisendused.

Rühma moodustavad ka rombi sümmeetriateisendused. Neid on neli (vt. joonis 120): samasusteisendus e, peegeldused a ja b diagonaalide suhtes ning tsentraalsümmeetria c. Selle rühma Cayley tabel on järgmine:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Uurides tähelepanelikult seda ja eelmist Cayley tabelit, paneme tähele, et tabeli igas reas ja igas veerus esineb iga element üks ja ainult üks kord (poolrühmade korral, mis ei kujutanud endast rühmi, oli olukord teistsugune: leheküljel 233 on esitatud poolrühma H Cayley tabel, mille neljandas reas näiteks elemendid a ja b ei ole üldse esindatud, elemendid c ja f aga esinevad kumbki kaks korda).

Rühmade Cayley tabelite selline omadus on seotud võrrandite* $u \cdot x = v$ ja $y \cdot u = v$ lahenduvuse tingimusega rühma defi-

* Segaduste vältimiseks on rühma mistahes elemente siin tähistatud tähtedega u ja v.

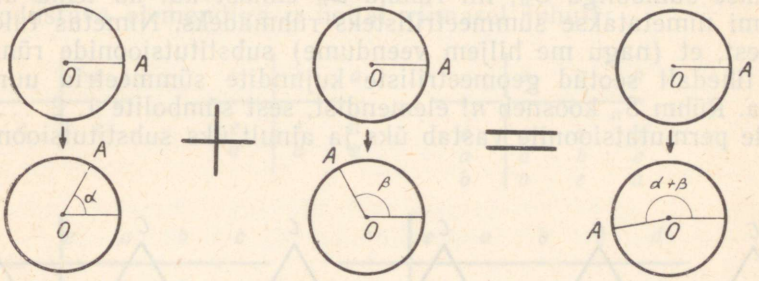
nitsioonis. Nimelt selleks, et võrrand $u \cdot x = v$ oleks iga v korral lahenduv, peavad tabelis u-le vastavas reas eksisteerima kõik v-d, s. t. rühma kõik elemendid. Lõpliku rühma korral järeldub siit, et iga v peab selles reas esinema ainult üks kord. Aga ka lõpmatu rühma korral ei saa neid üheski reas olla kaks, sest siis oleks kahe erineva elemendi x_1 ja x_2 korral $u \cdot x_1 = v$ ja $u \cdot x_2 = v$; korrutades mõlemad võrdused vasakult u^{-1}-ga saame: $x_1 = u^{-1} \cdot v$ ja $x_2 = u^{-1} \cdot v$, mis on vastuolus eeldusega, et $x_1 \neq x_2$. Analoogiline arutelu näitab, et rühma Cayley tabeli veergudel on samasugune omadus.

Vastupidi, kui poolrühma Cayley tabeli igas reas ja veerus on esindatud poolrühma iga element, siis selles poolrühmas on võrrandid $u \cdot x = v$ ja $y \cdot u = v$ lahenduvad. Kui see poolrühm on ühikelemendiga, siis on ta rühm.

Ülesandeid.

18. Tõestada, et korrapärase kolmnurga pöörded, mis viivad tipud tippudeks, moodustavad monogeense rühma.

19. Tõestada, et ringjoone pöörded ümber keskpunkti (vt. joonis 121) moodustavad rühma, mis on isomorfne kõikide reaalarvude aditiivse rühmaga.



Joonis 121. Ringjoone pöörete liitmine.

20. Kas kõik nullist erinevad arvud kujuga $a + b\sqrt{13}$ moodustavad korrutamise suhtes rühma, kui a ja b on: 1) täisarvud; 2) ratsionaalarvud?

21. Tõestada, et funktsioonid e, f_1, f_2, f_3, c ja d (vt. lk. 241) moodustavad rühma, mis on isomorfne samal leheküljel Cayley tabeli abil defineeritud kuueelemendilise mittekommutatiivse rühmaga.

Nagu eelmises punktis mainisime, ei moodusta lõpliku hulga kõik teisendused rühma, sest mõningatel teisendustel ei leidu pöördelementi ehk pöördteisendust. Muidugi leidub ka selliseid teisendusi, milledel pöördteisendus on olemas. Näiteks võrdusest

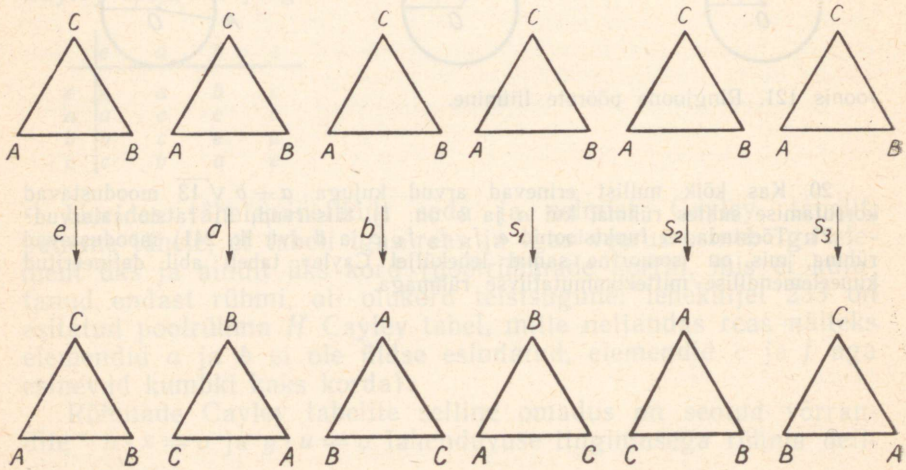
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$$

nähtub, et

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

Üldiselt leidub lõpliku hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ teisendusel $i \to a_i$ pöördteisendus siis ja ainult siis, kui elementide a_i seas pole võrdseid, ehk teiste sõnadega, kui teisendus on üksühene.

Kuna kahe üksühese teisenduse korrutis on jällegi üksühene teisendus, siis antud lõpliku hulga kõik üksühesed teisendused ehk substitutsioonid, nagu neid teisiti nimetatakse, moodustavad rühma. Hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ kõigi substitutsioonide rühma tähistatakse sümboliga S_n; nii rühma S_n ennast kui ka tema alamrühmi nimetatakse sümmeetrilisteks rühmadeks. Nimetus tuleneb sellest, et (nagu me hiljem veendume) substitutsioonide rühmad on tihedalt seotud geomeetriliste kujundite sümmeetria uurimisega. Rühm S_n koosneb $n!$ elemendist, sest sümbolite $1, 2, \ldots, n$ igale permutatsioonile vastab üks ja ainult üks substitutsioon.



Joonis 122. Substitutsioonide rühmaga S_3 on isomorfne kolmnurga sümmeetria-teisenduste rühm.

Ainsaks kommutatiivseks substitutsioonide rühmaks S_n on kaheelemendiline rühm S_2. Rühm S_3 koosneb kuuest elemendist ning pole kommutatiivne, nagu nähtub järgmisest näitest:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

Rühm S_3 on isomorfne eelmises punktis Cayley tabeli abil defineeritud mittekommutatiivse kuueelemendilise rühmaga. Selles veendumiseks tarvitseb vaid tuua S_3 elementide jaoks sisse järgmised tähistused:

$$e=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ s_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ s_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},$$

$$s_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ a=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

ning koostada rühma S_3 Cayley tabel.

Lihtne on veenduda, et kõik rühmad, mis koosnevad vähem kui kuuest elemendist, on kommutatiivsed. Nendeks rühmadeks on järgmiste Cayley tabelitega määratud monogeensed rühmad (moodustava elemendiga a neljal viimasel juhul):

	e
e	e

	e	a
e	e	a
a	a	e

	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

ning rombi sümmeetriarühm (vt. lk. 242), mida nimetatakse veel Cayley nelirühmaks. Seega S_3 on minimaalse elementide arvuga mittekommutatiivne rühm.

Kuna monogeenne rühm sisaldab ühikelemendi, siis on ta alati $(1, l)$-järku ning koosneb l elemendist. Rühma järguks nimetatakse rühmateoorias rühma elementide arvu. Seega monogeense rühma järguks nimetatakse edaspidi mitte paari $(1, l)$, vaid lihtsalt arvu l.

Lõplike rühmade teoorias on üheks tähtsamaks küsimuseks kõigi antud järku (n-järku) rühmade kirjeldamine. Kuigi see ülesanne pole teoreetiliselt lahendumatu, muutub selline kirjelda-

mine suurte n väärtuste korral praktiliselt teostamatuks. Küll aga võib seda ülesannet lahendada väikeste n väärtuste korral. On näiteks teada, kui palju on omavahel mitteisomorfseid rühmi $n \leqslant 31$ jaoks. Need andmed on koondatud järgmisse tabelisse:

Rühma järk	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Rühmade arv	1	1	1	2	1	2	1	5	2	2	1	5	1	2	1	14

Rühma järk	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
Rühmade arv	1	5	1	5	2	2	1	15	2	2	5	4	1	4	1

On kirjeldatud kõik rühmade tüübid juhul, kui nende järk avaldub kujul p, p^2, p^3, p^4, p^5, pq, pq^2 või pqr, kus p, q ja r on algarvud. On näiteks selgitatud, et eksisteerib ainult kaks mitteisomorfset rühma järguga p^2, mõlemad nad on kommutatiivsed. Järku pq võib olla kaks oluliselt erinevat rühma: kommutatiivne ja mittekommutatiivne, kusjuures mittekommutatiivne eksisteerib vaid siis, kui $p > q$ korral saame p jagamisel q-ga jäägiks 1. Viieteistkümnendat järku rühmi näiteks on ainult üks. See on kooskõlas eelnevaga: $15 = 5 \cdot 3$ ja viie jagamisel kolmega saame ühest erineva jäägi 2.

Rühmas S_n võib ära märkida $\frac{n!}{2}$ elemendist koosneva alamrühma A_n, mida nimetatakse vahelduvaks rühmaks. Tema elementideks on nn. paarissubstitutsioonid. Substitutsiooni

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 1 & 8 & 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

alumises reas on mitu sellist arvudepaari, mis moodustavad nn. inversiooni: suurem arv seisab väiksemast vasakul. Kokku on neid inversioone 12: arv 5 moodustab inversiooni arvudega 1, 2, 3 ja 4, arv 8 arvudega 2, 3, 4, 6 ja 7, arv 4 arvuga 3 ning arv 7 arvudega 3 ja 6. Seda substitutsiooni ja ka iga teist, mille alumises reas on paarisarv inversioone, nimetatakse paarissubstitutsiooniks. Võib tõestada, et paarissubstitutsioonide korrutis on paarissubstitutsioon, paarissubstitutsiooni korrutis paaritu substitutsiooniga aga paaritu substitutsioon. Et ühiksubstitutsioon on ka paarissubstitutsioon (null inversiooni!), siis järeldub siit, et paarissubstitutsiooni pöördsubstitutsioon on samuti paarissubstitutsioon ja seega moodustavad paarissubstitutsioonid tõepoolest rühma. Näiteks A_3 koosneb elementidest e, a ja b.

Rühmad S_n pole huvitavad mitte ainult selle poolest, et kuju-



Joonis 123. Augustin Louis Cauchy (1789—1857), tuntud prantsuse matemaatik.

tavad endast mittekommutatiivseid rühmi. Nad on teatud mõttes universaalsed rühmad: saab näidata, et rühmas S_n leidub iga n-järku rühmaga isomorfne alamrühm (vt. lk. 248—250).

Substitutsioonide rühmade teooria on ajalooliselt esimeseks kaasaegse algebra haruks, mida hakkas arendama juba tuntud prantsuse matemaatik A. Cauchy. Esimeste sügavamate tulemusteni selles teoorias jõudis Evariste Galois, kes taandas algebraliste võrrandite radikaalides lahenduvuse uurimise nendele vastavate substitutsioonide rühmade uurimisele. Galois' geniaalsed tööd said üldtuntuks aga alles aastakümneid pärast autori surma, eriti seoses Camille Jordani (1838—1922) «Traktaadi substitutsioonidest» ilmumisega 1870. a. Viimases monograafias olid kokku võetud lõplike rühmade teooria tulemused koos nende rakendustega arvu- ja funktsiooniteoorias ning algebralises geomeetrias.

Järk-järgult selgus, et enamik tulemustest ei põhine asjaolul, et rühma elementideks on substitutsioonid, vaid tulenevad teatud omadustega operatsiooni olemasolust lõpliku hulga elementide seas. Nii tekkis lõplike rühmade aksiomaatiline teooria, mille arenguperioodiks sai möödunud sajandi lõpp ning käesoleva sajandi algus ning mille edusammud on seotud G. Frobeniuse, O. Hölderi, W. Burnside'i, I. Schuri, G. A. Milleri jt. nimedega.

Kuid lõplikkuse nõue, olles liiga rangeks kitsenduseks, ei saanud alatiseks rahuldada matemaatikuid. Esimesed uurimused lõpmatute rühmade teooria ja rakenduste alal kuuluvad C. Jordanile ning tema õpilastele S. Liele ja F. Kleinile. Teetähiseks rühmateooria arengus on aga Kiievi ülikooli noore õppejõu Otto Juljevitš Schmidti 1916. a. ilmunud monograafia «Abstraktne rühmateooria», milles esmakordselt käsitleti süstemaatiliselt rühmateooriat ilma lõplikkuse nõudeta.

Tänu O. Schmidti ja tema õpilaste entusiasmile on abstraktse ehk üldise rühmateooria edasine areng väga suurel määral toimunud nõukogude matemaatika raamides. Mainime siin

A. N. Maltsevit, B. I. Plotkinit ning O. J. Schmidti õpilasi A. G. Kurošit, S. A. Tšunihhinit, A. A. Kulakovi, V. K. Turkinit ja A. P. Ditsmanit. Ka tänapäeval jätkub rühmateooria kiire areng. Huvitav on märkida, et kõrvuti üldise rühmateooria edasiarendamisega hakati viimastel aastatel jälle suurt tähelepanu pöörama lõplikele rühmadele. Muuseas, kasutades abstraktse rühmateooria väga sügavaid tulemusi, lahendati aastakümneid lahendamata seisnud probleeme, millest mõned esitas juba Burnside.

Ülesandeid.

22. Tõestada, et kahe substitutsiooni korrutis on substitutsioon.

23. Tõestada, et a) S_∞ — lõpmatu hulga kõigi üksüheste teisenduste hulk — moodustab rühma korrutamise operatsiooni suhtes; b) alamrühma rühmas S_∞ moodustavad sellised teisendused, mis jätavad paigale kõik elemendid, välja arvatud mingi lõplik hulk neist; c) rühmas S_∞ leiduvad iga n korral alamrühmad, mis on isomorfsed rühmaga S_n.

24. Leida vahelduva rühma A_4 kõik alamrühmad.

CAYLEY TEOREEM

Kuigi me vaatlesime seni vaid lõplike hulkade teisendusi, ei peaks vist lugejale tekitama raskust saadud tulemuste ülekandmine lõpmatute hulkade teisendustele, mis loenduva hulga $\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ korral näevad välja nii:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & \ldots \end{pmatrix},$$

üldiselt aga hulga $A = \{a, b, c, \ldots, s, t, \ldots\}$ korral niimoodi:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & s & t & \ldots \\ a' & b' & c' & \ldots & s' & t' & \ldots \end{pmatrix},$$

kus $a', b', c', \ldots, s', t', \ldots$ on mingisugused hulga A elemendid, kas teineteisest erinevad või osaliselt kokkulangevad. Näiteks teisendus

$$\begin{pmatrix} \ldots -1 \ldots & \frac{-\sqrt{2}}{2} \ldots & \frac{1}{8} \ldots & 0 \ldots & \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots & 0{,}92 \ldots & 1 \ldots & \frac{\pi}{3} \ldots & \sqrt{2} \ldots \\ \ldots -1 \ldots & -1 \ldots & -1 \ldots & 0 \ldots & 0 \ldots & 0 \ldots & 1 \ldots & 1 \ldots & 1 \ldots \end{pmatrix}$$

seab igale reaalarvule a vastavusse tema nn. täisosa $[a]$ — suurima täisarvu, mis ei ületa suuruselt arvu a.

Lõpmatute hulkade teisenduste jaoks võib samuti sisse tuua nende korrutamise tehte, mille assotsiatiivsuse tõestamine toimub analoogiliselt vastava tõestusega lõplike hulkade teisen-

duste korrutamise assotsiatiivsuse kohta. Ka lõplike hulkade teisendused ise on vaid erijuht lõpmatute hulkade teisendustest, nagu see nähtub järgmisest samastamise võimalusest:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & a & b & c & \dots & s & t & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & a & b & c & \dots & s & t & \dots \end{pmatrix}.$$

Teisenduste poolrühmade universaalsus väljendub järgmises väga olulises Cayley teoreemis: iga poolrühm on isomorfne selle poolrühma kõiki elemente sisaldava hulga teisenduste poolrühmaga.

Olgu $A = \{a, b, c, \dots, r, s, t, \dots\}$ suvaline poolrühm. Tähistame sümboliga P_A hulga, mis koosneb kõikidest poolrühma A elementidest ning veel ühest elemendist $\bar{e}$:

$$P_A = \{\bar{e}, a, b, c, \dots, r, s, t, \dots\}.$$

Igale elemendile $s \in A$ seame vastavusse hulga P_A teisenduse φ_s, mis teisendab elemendi $\bar{e}$ elemendiks s, elemente

$$a, b, c, \dots, r, s, t, \dots$$

aga vastavalt elementideks

$$a \cdot s, b \cdot s, c \cdot s, \dots, r \cdot s, s \cdot s, t \cdot s \text{ jne.}$$

Seda teisendust φ_s nimetatakse elemendile s vastavaks hulga P_A parempoolseks nihkeks. Seda võib üles kirjutada kujul:

$$\varphi_s = \begin{pmatrix} \bar{e} & a & b & c & \dots & r & s & t & \dots \\ s & a \cdot s & b \cdot s & c \cdot s & \dots & r \cdot s & s \cdot s & t \cdot s & \dots \end{pmatrix}.$$

Erinevate elementide poolt määratud parempoolsed nihked kujutavad endast erinevaid hulga P_A teisendusi. Tõepoolest, kui $r \neq s$, siis φ_r teisendab $\bar{e}$ elemendiks r, φ_s aga elemendiks s, nii et $\varphi_r \neq \varphi_s$ (teisendused on võrdsed, kui nad teisendavad ühtemoodi kõiki antud hulga elemente). Seega vastavus $s \to \varphi_s$ on üksühene.

Näitame, et hulk $\{\varphi_s\}$, mis koosneb kõikidest teisendustest φ_s, moodustab poolrühma teisenduste korrutamise tehte suhtes. Kuna teisenduste korrutamine tähendab nende järjest rakendamist, siis korrutades φ_s teisendusega φ_t, saame teisenduse

$$\begin{pmatrix} \bar{e} & a & b & c & \dots & r & s & t & \dots \\ st & a \cdot st & b \cdot st & c \cdot st & \dots & r \cdot st & s \cdot st & t \cdot st & \dots \end{pmatrix},$$

mis kujutab endast hulka P_A kuuluvat teisendust φ_{st}:

$$\varphi_s \cdot \varphi_r = \varphi_{st}.$$

Viimane võrdus näitab ka seda, et üksühene vastavus A ja P_A vahel on isomorfism: vastab ju A elementide s ja t korrutisele st vastavate P_A elementide φ_s ja φ_t korrutis φ_{st}.

Kui poolrühm A sisaldab ühikelementi, siis võib Cayley teoreemi tõestuskäiku veidi muuta, vaadeldes otseselt hulga A teisendusi. Järelikult iga ühikuga poolrühm (muuseas ka iga



Joonis 124. Emmy Noether (1882—1935), tuntud saksa naismatemaatik.

rühm) on isomorfne selle poolrühma elementide hulga mingi teisenduste poolrühmaga.

Kuna rühmaga isomorfne poolrühm on ise rühm, teisenduste seas aga omavad pöördelementi ainult üksühesed teisendused, siis järeldub siit otsekohe, et iga rühm on isomorfne selle rühma elementide hulga mingi üksüheste teisenduste rühmaga. Lõplike rühmade jaoks saame siit ülalmainitud tulemuse, mille kohaselt iga lõplik rühm on isomorfne mingi substitutsioonide rühmaga.

Kui poolrühm A ei sisalda ühikelementi, siis, täiendamata teda elemendiga $\bar{e}$, ei saa me üldiselt A-ga isomorfset poolrühma. Näiteks elementidest a, b, c, d koosneva poolrühma A korral, mille Cayley tabel näeb välja järgmiselt

	a	b	c	d
a	b	b	d	d
b	b	b	d	d
c	d	d	d	d
d	d	d	d	d

,

vastaks mõlemale elemendile a ja b teisendus

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & b & d & d \end{pmatrix},$$

elementidele c ja d aga teisendus

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & d & d & d \end{pmatrix},$$

nii et vastavus $s \to \varphi_s$ poleks siin üksühene. Kui aga võtta appi täiendav element $\bar{e}$, siis vastavus näeb välja järgmiselt:

$$a \to \begin{pmatrix} \bar{e} & a & b & c & d \\ a & b & b & d & d \end{pmatrix}, \quad c \to \begin{pmatrix} \bar{e} & a & b & c & d \\ c & d & d & d & d \end{pmatrix},$$

$$b \to \begin{pmatrix} \bar{e} & a & b & c & d \\ b & b & b & d & d \end{pmatrix}, \quad d \to \begin{pmatrix} \bar{e} & a & b & c & d \\ d & d & d & d & d \end{pmatrix},$$

ning nüüd see on juba üksühene.

Ülesandeid.

25. Leida teisenduste poolrühm, mis on isomorfne järku (3, 3) monogeense poolrühmaga.

26. Leida rühma S_6 alamrühm, mis on isomorfne rühmaga S_3.

SCHMIDTI ALGEBRA-ALANE LOOMING

Perioodil, mil O. Schmidt hakkas uurima rühmateooria probleeme, ei piirdunud matemaatikute uurimused enam konkreetsete rühmadega (substitutsioonide rühmadega), kuid nende uurimisobjektiks olid ikka veel ainult lõplikud rühmad. Ka Schmidti esimesed tööd olid pühendatud lõplikele rühmadele.

Rühmateooria ja kogu üldalgebra üheks tähtsamaks mõisteks, ilma milleta pole võimalik aru saada ka O. Schmidti paljudest teaduslikest tulemustest, on otsekorrutise mõiste. Esitame siin selle mõiste ainult rühmade jaoks, kuigi analoogilised definitsioonid on tuntud ka paljude teiste algebraliste süsteemide korral.

Rühmade A ja B otsekorrutiseks $A \times B$ nimetatakse kõikide paaride (a, b) hulka (kus $a \in A$ ja $b \in B$), milles korrutamine on defineeritud eeskirjaga

$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2)$.

Veendume selles, et niisugune hulk moodustab rühma. Tõepoolest, kui $a_1, a_2 \in A$, siis ka $a_1a_2 \in A$, analoogiliselt $b_1b_2 \in B$, seega paar (a_1a_2, b_1b_2) kuulub vaadeldavasse paaride hulka — see hulk on kinnine niimoodi defineeritud korrutamise suhtes. Ühikelemendiks on siin paar (e, f), kus e on rühma A ning f rühma B ühik; elemendi (a, b) pöördelemendiks on paar (a^{-1}, b^{-1}). Kehtib ka assotsiatiivsuse seadus:

$$(a, b)[(a_1, b_1)(a_2, b_2)] = (a, b)(a_1a_2, b_1b_2) =$$
$$= (a(a_1a_2), b(b_1b_2)) = ((aa_1)a_2, (bb_1)b_2) =$$
$$= (aa_1, bb_1)(a_2, b_2) = [(a, b)(a_1, b_1)](a_2, b_2).$$

Esitatud otsekorrutise definitsiooni saab üldistada kolme, nelja jne. rühma juhule (tuleb vaadelda kõiki kolmikuid, nelikuid jne.). Sel korral kasutatakse tähistusi $A \times B \times C$, $A \times B \times C \times D$ jne.

Öeldakse, et rühm G on esitatav oma alamrühmade A ja B otsekorrutisena, kui G on isomorfne rühmaga $A \times B$. Alamrühmi A ja B nimetatakse sel puhul rühma G otseteguriteks.

1911. aastal tõestas saksa matemaatik R. Remak, et kui lõplik rühm G on kahel viisil esitatud alamrühmade otsekorrutisena nii, et need alamrühmad ise pole enam esitatavad otsekorrutisena (niisuguseid alamrühmi nimetatakse lahutamatuteks



Joonis 125. Otto Juljevitš Schmidt (1891—1956).

otseteguriteks), siis mõlema lahutuse tegurite vahel saab korraldada üksühese vastavuse selliselt, et teineteisele vastavad tegurid on isomorfsed. Selle rühmateooria väga tähtsa teoreemi tõestus oli Remakil üpris keeruline ja vähe ülevaatlik.

Oma esimeses teaduslikus töös, mis oli avaldatud Kiievi ülikooli väljaandes, esitab O. Schmidt Remaki teoreemi uue, lühema ja ülevaatlikuma tõestuse. Eriti õnnestunuks tuleb lugeda veelgi lühemat tõestust, mille ta esitas 1913. aastal Pariisis ilmunud artiklis «Sur le produits directs» («Otsekorrutistest»). See teravmeelne tõestus on tänapäevani jäänud kõige lühemaks (3 lehekülge) Remaki teoreemi arvukatest tõestustest ning just selle leiame tavaliselt rühmateooriale pühendatud monograafiates.

1913. aastal avaldas Schmidt ka veel teise ulatusliku teadusliku uurimuse «Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа» («Radikaalides lahenduvatest võrranditest, mille järk on algarvu aste»), mille eest anti talle Kiievi ülikooli füüsika-matemaatika teaduskonna kuldmedal. Selles töös jätkab ta uute meetoditega rühmateooria klassiku C. Jordani uurimusi substitutsioonide rühmade kohta.

Ta vaatleb siin lahenduvaid (s. t. mittekommutatiivseid, kuid teatavat elementide ümberpaigutust lubavaid) substitutsioonide rühmi, mis on üheaegselt primitiivsed. Seejuures substitutsioonide rühma nimetatakse transitiivseks, kui iga kahe numbri korral 1-st kuni n-ni leidub rühma element, mis teisendab ühe numbri teiseks. Transitiivset rühma nimetatakse primitiivseks, kui numbrite 1, 2, ... , n hulka pole võimalik jaotada alamhulkadeks, mida oleks rohkem kui üks ja millest ükski ei koosneks ühest elemendist nii, et rühma iga element (substitutsioon)

säilitaks selle alamhulkadeks jaotuse, s. t. teisendaks iga alamhulga kas iseendaks või mõneks teiseks alamhulgaks.

Ülalnimetatud töös arendas Schmidt täiesti uutel alustel niisuguste primitiivsete lahenduvate rühmade teooriat, mille järk on algarvu aste. Taoliste rühmade ehitus on tihedalt seotud töö pealkirjas nimetatud võrranditega. Oma teooriat rakendab Schmidt muuseas niisuguste rühmade määramisel, mis omavad p^2 elementi. Sellega ta tõestas uuesti ja lihtsalt Jordani tulemusi.

O. Schmidti silmapaistva monograafia «Abstraktne rühmateooria» puhul on eriti märkimisväärne see, et kuigi tollal tegeldi eranditult alles lõplike rühmadega, arendab Schmjdt monograafia esimestes peatükkides ka juba lõpmatute rühmade teooriat, ennustades sellega rühmateooria tulevase arengu suunda.

Esimene nõukogude võimu aastail ilmunud Schmidti algebra-alastest artiklitest «Группы, все подгруппы которых специальны» («Rühmad, mille kõik alarühmad on spetsiaalsed») oli pühendatud lõplikele mittenilpotentsetele rühmadele, milledes kõik alamrühmad on nilpotentsed (tolle aja terminoloogia järgi — spetsiaalsed). Nilpotentsed rühmad moodustavad väga tähtsa rühmade klassi, mis hõlmab kõikide kommutatiivsete rühmade klassi ja sisaldub ise lahenduvate rühmade klassis. Nagu näitas Schmidt, osutuvad kõik ülalmainitud rühmad lahenduvateks ja elementide arv niisuguses rühmas võib jaguda ainult kahe erineva arvuga. See töö üldistas ameerika matemaatikute Milleri ja Moreno tulemusi lõplikest rühmadest, mille kõik alamrühmad on kommutatiivsed, ning inspireeris paljude uute algebraliste uurimuste tekkimist.

Lahenduvate ja nilpotentsete rühmade uurimisele ning nende üldistamisele, nüüd aga juba lõpmatute rühmade puhul, pühendas Schmidt ka oma viimased algebra-alased tööd: 1940. aastal ilmunud artikli «О бесконечных специальных группах» («Lõpmatutest spetsiaalsetest rühmadest») ja 1945. aastal valminud uurimuse «Бесконечные разрешимые группы» («Lõpmatud lahenduvad rühmad»). Sellesuunaliste uurimuste jätkamine paljude tuntud nõukogude algebraistide töödes muutis üldistatud nilpotentsete ja lahenduvate rühmade teooria kauaks ajaks rühmateooria põhiliseks uurimisvaldkonnaks.

Suurt mõju algebra arengule avaldas ka Schmidti töö «Über unendliche Gruppen mit endlicher Kette» (1928) («Lõpmatutest rühmadest lõplike ahelatega»), mis valmis 1927. a. Göttingenis, kus Schmidt viibis teaduslikul komandeeringul.

See periood oli saksa tuntud naismatemaatiku E. Noetheri koolkonna õitsengu aastateks. Olles haaratud selle koolkonna üldistest ideedest, andis Schmidt hiilgava üldistuse saksa matemaatiku W. Krulli ühele teoreemile — Remaki teoreemi analoogile lõpmatute kommutatiivsete rühmade puhul. See teoreem oli tõestatud esialgu väga kohmakalt ja ainult võrdlemisi kitsa

rühmade klassi jaoks. Schmidtil õnnestus anda väga elegantne tõestus teoreemile, mis üldistas nii Remaki kui ka Krulli teoreeme väga laia rühmade klassi juhule. Tänapäeval on seda klassikalist teoreemi, mida tuntakse Remak-Schmidti, Krull-Schmidti või lihtsalt Schmidti teoreemi nime all, üldistanud mitmed matemaatikud paljudele teistele algebralistele süsteemidele, seda on kasutatud paljudes töödes kõige erinevamates algebra osades. Tuntud nõukogude algebraisti prof. A. Kuroši arvates tähistab just see Schmidti töö uue, tänapäeva rühmateooria arengu algust.

Ülesandeid.

27. Leida rühma S_2 ja kolmandat järku tsüklilise, s. t. monogeense rühma otsekorrutise Cayley tabel.

28. Tõestada, et rühm S_3 ei avaldu mitte mingisuguste enda pärisalamrühmade otsekorrutisena.

29. Kas kommutatiivsete rühmade otsekorrutis on alati kommutatiivne?

MAATRIKSITE RÜHMAD

Kui eespool vaadeldud sümmeetrilised rühmad etendasid erilist osa rühmateoorias selle tekkimise perioodil, siis tänapäeval on üheks tähtsamaks rühmade klassiks maatriksite rühmad.

Maatriksiks (n-järku maatriksiks) nimetatakse ruudukujulist tabelit

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

milles a_{ij} — maatriksi elemendid — on suvalised reaalarvud. Selliste tabelite jaoks võib defineerida nende võrdsuse ning liitmise ja korrutamise operatsioonid.

Maatrikseid loetakse võrdseteks, kui kõik nende samadel kohtadel olevad elemendid on võrdsed: $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ on võrdsed (ehk $A = B$), kui $a_{ij} = b_{ij}$ iga i ja j korral.

Maatriksite $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ summaks nimetatakse maatriksit $A + B$, mille elemendid on saadud lähtemaatriksite vastavate elementide liitmise teel: $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$. Näiteks

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Märksa keerukamalt defineeritakse maatriksite korrutamise operatsioon: selleks et leida korrutismaatriksi $A \cdot B$ i-nda rea ja j-nda veeru element, tuleb A i-nda rea esimene element korrutada B j-nda veeru esimese elemendiga, siis A i-nda rea teine element B j-nda veeru teise elemendiga jne. ning lõpuks kõik need korrutised omavahel liita:

$$A \cdot B = [a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + \dots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1n} + \dots + a_{1n}b_{nn} \\ a_{21}b_{11} + \dots + a_{2n}b_{n1} & \dots & a_{21}b_{1n} + \dots + a_{2n}b_{nn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}b_{11} + \dots + a_{nn}b_{n1} & \dots & a_{n1}b_{1n} + \dots + a_{nn}b_{nn} \end{bmatrix}.$$

Maatriksite

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

korrutis võrdub maatriksiga

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 - 5 \cdot 2 & 0 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -10 & -15 \end{bmatrix},$$

järgmine korrutis aga

$$\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

maatriksiga

$$\begin{bmatrix} -2 + 5 + 0 & 1 - 10 + 0 & -2 + 5 + 4 \\ 0 + 1 + 0 & 0 - 2 + 0 & 0 + 1 + 0 \\ 6 - 4 + 0 & -3 + 8 + 0 & 6 - 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -9 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Maatriksite liitmine on kommutatiivne ja assotsiatiivne tehe, sest ta taandub arvude liitmisele, mis on nii kommutatiivne kui ka assotsiatiivne.

Maatriksite korrutamine ei ole üldiselt kommutatiivne. Selle näitamiseks korrutame ülal esinenud kolmandat järku maatriksid teises järjekorras:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 + 6 & 10 - 1 - 8 & 4 + 2 \\ -1 + 3 & 5 - 2 - 4 & 2 + 1 \\ 6 & -8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 6 & -8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Tulemus erineb varem saadud maatriksist, see aga tõestabki, et maatriksite korrutis sõltub tegurite järjekorrast ning korrutamine pole seega kommutatiivne.

Maatriksite korrutamise assotsiatiivsuse tõestamiseks esitame nende korrutamise reegli kompaktsemal kujul, kasutades summa märki * $\sum$:

$$[a_{ij}] \cdot [b_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}].$$

Nüüd võime kirjutada (tänu arvude liitmise assotsiatiivsusele)

$$([a_{ij}] \cdot [b_{ij}]) \cdot [c_{ij}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}] \cdot [c_{ij}] = [\sum_{l=1}^{n} (\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}) c_{lj}] =$$

$$= [\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl} c_{lj}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj})] = [a_{ij}] \cdot [\sum_{l=1}^{n} b_{kl} c_{lj})] =$$

$$= [a_{ij}] \cdot ([b_{ij}] \cdot [c_{ij}]),$$

ja maatriksite korrutamise assotsiatiivsus ongi tõestatud.

Kõik n-järku maatriksid moodustavad liitmise suhtes kommutatiivse rühma, milles nullelemendiks on maatriks $0 = [0]$ (kõik $a_{ij} = 0$) ja maatriksi $A = [a_{ij}]$ vastandmaatriksiks on maatriks $-A = [-a_{ij}]$ (kontrollida!). Liitmise suhtes moodustavad rühma ka nn. kolmnurksed maatriksid, mille peadiagonaali a_{ii} (s. o. vasakust ülemisest nurgast lähtuva diagonaali) all asuvad elemendid on nullid: $a_{ij} = 0$ kui $i > j$. Näiteks maatriks

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on kolmnurkne.

Üldse moodustavad liitmise suhtes rühma kõik sellised maatriksid, milles teatud fikseeritud kohtadel asuvad ainult nullid (miks?).

Huvitavaid rühmade näiteid võib konstrueerida nn. maagilistest ruutudest, s. o. ratsionaalarvuliste elementidega maatriksitest, mille iga rea, iga veeru ja iga diagonaali elementide summad on omavahel võrdsed. Maagilisteks ruutudeks on näiteks maatriksid:

$$\begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 11 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix}.$$

---

* Sümbol $\sum_{i=1}^{n} x_i$ tähendab summat $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$.

Järgmises summas on maagilisteks ruutudeks peale viimase maatriksi ka mõlemad liidetavad:

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & -6 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \\ -4 & 7 & 6 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 14 & 3 & 13 \\ 11 & 5 & 8 & 6 \\ 12 & 2 & 15 & 1 \\ 7 & 9 & 4 & 10 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 9 & -3 & 18 \\ 8 & 7 & 11 & 6 \\ 13 & 0 & 14 & 5 \\ 3 & 16 & 10 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ka maatriksid

$$\begin{bmatrix} -1 & 12 & -5 & 8 & -9 \\ 5 & -7 & 1 & 9 & -3 \\ 11 & -6 & 7 & -10 & 5 \\ -8 & 0 & 13 & -4 & 4 \\ -2 & 6 & -11 & 2 & 10 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 17 & 4 & 3 & 14 & 5 \\ 5 & 6 & 11 & 12 & 9 & 5 \\ 5 & 10 & 7 & 8 & 13 & 5 \\ 5 & 5 & 16 & 15 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

kujutavad endast maagilisi ruute.

Ilmselt moodustavad kõik antud järku täisarvuliste elementidega maagilised ruudud ja samuti kõik antud järku maagilised ruudud rühma maatriksite liitmise suhtes (tõestada!).

Rühmateooria seisukohalt on eriti tähtsad maatriksite multiplikatiivsed rühmad. Esimese näitena sellisest rühmast toome nn. *P*-maatriksite rühma. Nõnda nimetatakse niisuguseid maatrikseid, mille igas reas ja igas veerus on üks ja ainult üks nullist erinev element — arv üks. Näiteks maatriksid

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

on *P*-maatriksid.

Kolmandat järku üksteisest erinevaid *P*-maatrikseid on kuus:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S(2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$S(3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nad moodustavad korrutamise suhtes rühma, mis on isomorfne rühmaga S_3 (vt. lk. 245).

Üldiselt moodustavad kõik n-järku *P*-maatriksid rühmaga S_n isomorfse rühma. Seega on substitutsioonide rühmade ja ühtlasi ka kõigi lõplike rühmade teooria teatud erijuht maatriksirühmade teooriast.

Lihtne on veenduda selles, et ühikelemendiks maatriksite

multiplikatiivsetes rühmades on nn. ühikmaatriks E, mille peadiagonaalil asuvad ühed, mujal aga nullid (kontrollida!).

Ühikmaatriksi E olemasolu võimaldab tõsta üles pöördmaatriksi leidmise küsimuse, mis aga ei osutu kaugeltki mitte lihtsaks ülesandeks. Pealegi pole ta alati lahendatav, nagu näiteks maatriksi

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

korral. Tõepoolest, korrutades seda maatriksit ükskõik millise maatriksiga $[a_{ij}]$, saame

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix}.$$

Viimane maatriks aga ei võrdu kunagi ühikmaatriksiga, sest selleks peaksid olema a_{31} ja a_{32} ühelt poolt võrdsed ühega (kui peadiagonaali elemendid), aga teiselt poolt võrdsed nulliga, mis on ilmselt võimatu. Küll aga leidub pöördmaatriks peaaegu alati nn. diagonaalmaatriksil, s. o. maatriksil, mille kõik väljaspool peadiagonaali asuvad elemendid $a_{ij} = 0$ $(i = j)$. Kui diagonaalmaatriksi kõik peadiagonaali elemendid a_{ii} erinevad nullist, siis leidub temal pöördmaatriks $[a'_{ij}]$, mis osutub samuti diagonaalmaatriksiks, kusjuures $a'_{ij} = 0$ ja $a'_{ii} = 1 : a_{ii}$ (kontrollida!). Näiteks

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Et kahe diagonaalmaatriksi korrutis on alati diagonaalmaatriks (tõestada!), siis moodustavad kõik antud järku diagonaalmaatriksid, mis rahuldavad tingimust: iga i korral $a_{ii} \neq 0$, multiplikatiivse rühma. Ratsionaalarvuliste elementidega diagonaalmaatriksid moodustavad selles alamrühma.

Ka kolmnurksel maatriksil on pöördmaatriks olemas parajasti siis, kui $a_{ii} \neq 0$. Selle asjaolu tõestamine ning kolmnurkse maatriksi pöördmaatriksi leidmine on aga märksa raskem kui eelmisel juhul. Märgime vaid esialgu, et teist järku kolmnurkse maatriksi pöördmaatriks on:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} \end{bmatrix},$$

aga kolmandat järku kolmnurkse maatriksi pöördmaatriks avaldub järgmiselt (kontrollida!):

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22}} & \frac{a_{12} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{22}}{a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}} \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & -\frac{a_{23}}{a_{22} \cdot a_{33}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{33}} \end{bmatrix}.$$

Et kahe kolmnurkse maatriksi korrutis on kolmnurkne maatriks (tõestada!), siis kõik tingimust $a_{ii} \neq 0$ rahuldavad antud järku kolmnurksed maatriksid moodustavad korrutamise suhtes rühma (teist ja kolmandat järku maatriksite korral me seda juba tõestasime). Ka siin moodustavad ratsionaalarvuliste elementidega maatriksid alamrühma (miks?).

Maatriksi pöördmaatriksi olemasolu võib kindlaks teha maatriksiga seotud erilise arvu — maatriksi nn. determinandi abil.

Maatriksi $A = [a_{ij}]$ determinandiks nimetatakse $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n$ korrutise $a_{1i_1}a_{2i_2} \ldots a_{ni_n}$ algebralist summat, kus $i_1, i_2, \ldots, i_n$ on arvude $1, 2, \ldots, n$ mistahes ümberjärjestus. Seejuures võetakse liidetav märgiga $+$, kui

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$$

on paarissubstitutsioon ning märgiga $-$, kui viimane substitutsioon on paaritu (vt. lk. 240).

Maatriksi $A = [a_{ij}]$ determinanti tähistatakse sümboliga

$$|A| = |a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Kehtib järgmine lause: maatriksil A on pöördmaatriks olemas parajasti siis, kui tema determinant $|A|$ erineb nullist.

Näiteks

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

ja

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 18 \neq 0$$

ning vastavatel maatriksitel leiduvad pöördmaatriksid:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ja $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & \frac{7}{18} \\ \frac{7}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} \end{bmatrix}$.

Eespool oli meil näide maatriksist, millel pole pöördmaatriksit. Selle maatriksi determinant on tõepoolest võrdne nulliga:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \cdot 1 -$$
$$- 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Maatriksi determinandi definitsioonist järeldub, et kolmnurkse maatriksi determinant võrdub peadiagonaali elementide korrutisega, s. o. arvuga $a_{11}a_{22} \ldots a_{nn}$ (miks?). Seepärast on kolmnurksel maatriksil tõepoolest pöördmaatriks olemas siis ja ainult siis, kui kõik $a_{ii} \neq 0$.

Võib tõestada, et kahe maatriksi korrutise determinant võrdub korrutatavate maatriksite determinantide korrutisega:

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

Sellest järeldub, et kõik nullist erineva determinandiga n-järku maatriksid (neid nimetatakse regulaarseteks) moodustavad korrutamise suhtes rühma. Tõepoolest, kahe regulaarse maatriksi A ja B korrutis ei saa olla mitteregulaarne (ehk singulaarne) ning et üksikmaatriksi E determinant on 1 (miks?), siis regulaarse maatriksi pöördmaatriks on samuti regulaarne, s. o. $|A| \neq 0$ korral ei saa olla $|A^{-1}| = 0$ (muidu seosest $A \cdot A^{-1} = E$ järelduks, et $0 = |A| \cdot |A| = |AA^{-1}| = |E| = 1$).

Kõigi regulaarsete maatriksite rühma nimetatakse täielikuks lineaarseks rühmaks ning märgitakse sümboliga L_n, kus n on maatriksite järk. Kolmnurksete ja diagonaalmaatriksite rühmad ning P-maatriksite rühmad on rühma L_n alamrühmadeks. L_n alamrühma moodustavad veel näiteks maatriksid, mille determinant on 1, ning sellised maatriksid, mille determinant on kas 1 või —1 (miks?).

Ülesandeid.

30. Kas kõik antud järku maagilised ruudud, mille esimese rea elementide summa on paarisarv, moodustavad rühma liitmise suhtes?

31. Tõestada, et P-maatriksite korrutis on P-maatriks.

32. Tõestada, et P-maatriksi pöördmaatriks on P-maatriks. Kuidas näeb välja see pöördmaatriks?

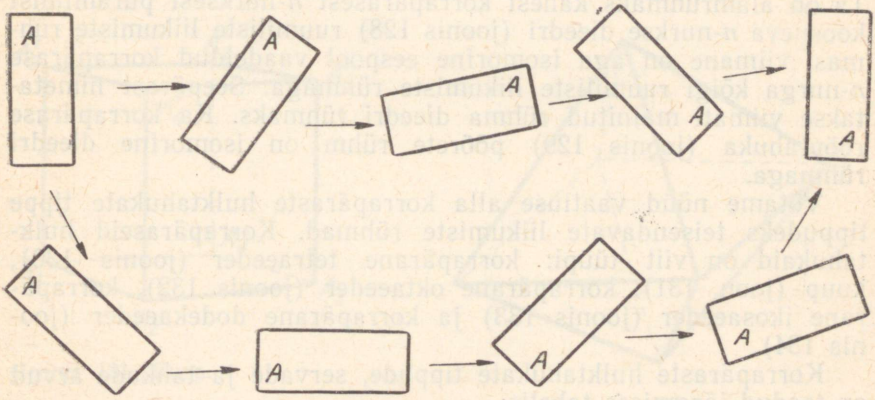
33. Tõestada, et n-järku P-maatriksid moodustavad korrutamise suhtes rühma, mis on isomorfne rühmaga S_n.

Korrapärase n-nurga pöörded nurkade $\frac{360°}{n}$ võrra, mis teisendavad selle n-nurga iseendaks, moodustavad monogeense rühma, mille järk on n (vt. ülesanne 18). Üldiselt, kui liikumiste korrutamise all mõista liikumiste järjest rakendamist, siis kõik liikumised, mis teisendavad antud geomeetrilise kujundi iseendaks, moodustavad rühma. Siinjuures loeme kahte liikumist võrdseks, kui langevad kokku nende rakendamise tulemused, vaatamata sellele, et nende puhul kujundite liikumise trajektoorid võivad olla erinevad.

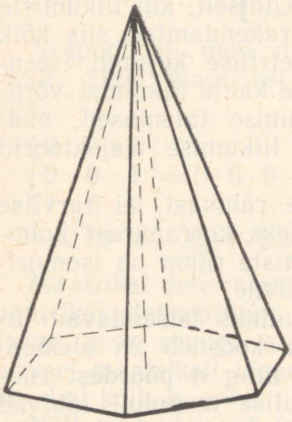
Erinevalt korrapärase n-nurga pöörete rühmast, ei tarvitse iga selline rühm olla kommutatiivne. Näiteks korrapärast kolmnurka ruumis iseendaks teisendavate liikumiste rühm on isomorfne rühmaga S_3 ning seega mittekommutatiivne.

Üldiselt kõik korrapärast n-nurka iseendaks teisendavad liikumised moodustavad ruumis rühma, mis koosneb $2n$ elemendist — n pöördest selle n-nurga tasandis ning n pöördest ruumis n sümmeetriatelje ümber (paarisarvulise n puhul läbivad need teljed vastastikku asetsevaid tippe või külgede keskpunkte, paaritu n korral aga tippe ja nende vastaskülgede keskpunkte). See rühm on isomorfne rühma S_n teatud alamrühmaga — nimelt sellisega, mille elementideks on vaadeldavatele liikumistele vastavad n-nurga tippude substitutsioonid (vt. näit. joonis 122). Kõik need rühmad on mittekommutatiivsed, sest pöördele tasandil nurga $360° : n$ võrra ja pöördele ruumis tippu läbiva sümmeetriatelje suhtes vastavad substitutsioonid

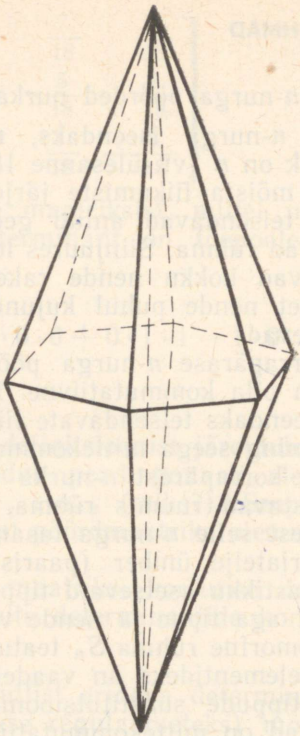
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \dots & n & 1 \end{pmatrix} \text{ ja } \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & n & \dots & 2 \end{pmatrix}$$



Joonis 126. Liikumine ei olene keha trajektoorist.



Joonis 127.
Korrapärane püramiid.



Joonis 128 (*paremal*).
Korrapärane dieeder.

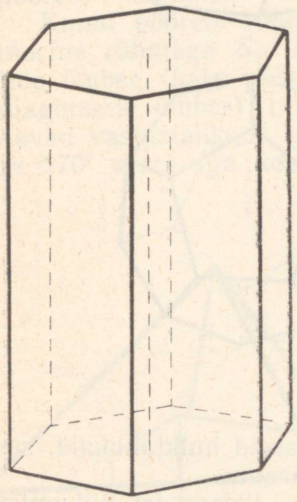
ning nende liikumiste korrutised erinevas järjekorras viivad esimese tipu kord teiseks, kord n-daks ja on seega erinevad liikumised.

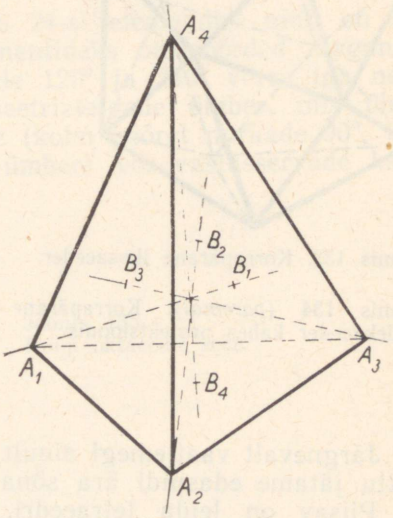
Korrapärase n-nurkse püramiidi (joonis 127) liikumiste rühm on isomorfne korrapärase n-nurga tasandiliste pöörete rühmaga. Ta on alamrühmaks kahest korrapärasest n-nurksest püramiidist koosneva n-nurkse dieedri (joonis 128) ruumiliste liikumiste rühmas, viimane on aga isomorfne eespool vaadeldud korrapärase n-nurga kõigi ruumiliste liikumiste rühmaga. Seepärast nimetatakse viimati mainitud rühma dieedri rühmaks. Ka korrapärase rööptahuka (joonis 129) pöörete rühm on isomorfne dieedri rühmaga.

Võtame nüüd vaatluse alla korrapäraste hulktahukate tippe tippudeks teisendavate liikumiste rühmad. Korrapäraseid hulktahukaid on viit tüüpi: korrapärane tetraeeder (joonis 130), kuup (joon. 131), korrapärane oktaeeder (joonis 132), korrapärane ikosaeeder (joonis 133) ja korrapärane dodekaeeder (joonis 134).

Korrapäraste hulktahukate tippude, servade ja tahkude arvud on toodud järgmises tabelis:

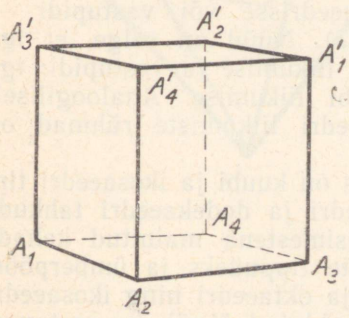
	Tetraeeder	Kuup	Oktaeeder	Ikosaeeder	Dodekaeeder
Tippude arv	4	8	6	12	20
Servade arv	6	12	12	30	30
Tahkude arv	4	6	8	20	12

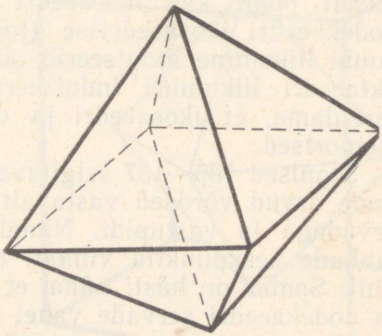




Joonis 129. Korrapärane rööptahukas.

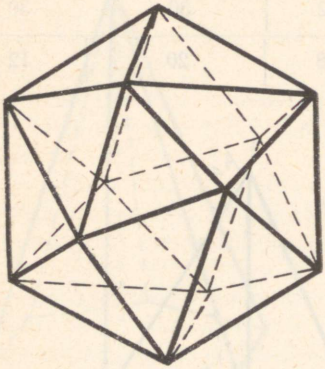
Joonis 130 (*paremal*). Korrapärane tetraeeder ja tema sümmeetriateljed.



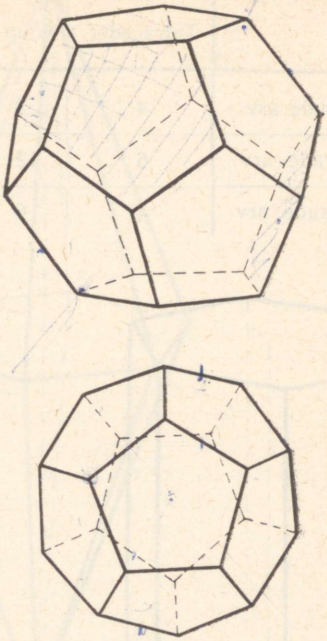


Joonis 131. Kuup.

Joonis 132 (*paremal*). Korrapärane oktaeeder.



Joonis 133. Korrapärane ikosaeeder.



Joonis 134 (*paremal*). Korrapärane dodekaeeder kahes projektsioonis.

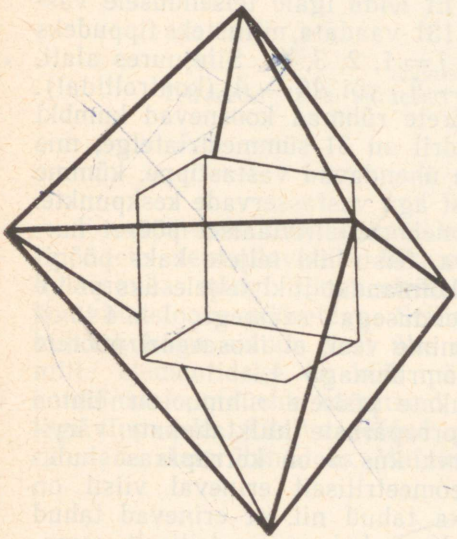
Järgnevalt vaatlemegi ainult korrapäraseid hulktahukaid, seetõttu jätame edaspidi ära sõna «korrapärane».

Piisav on leida tetraeedri, kuubi ja ikosaeedri liikumiste rühmad, sest oktaeedri ja dodekaeedri liikumiste rühmad osutuvad isomorfseteks vastavalt kuubi ja ikosaeedri liikumiste rühmadele. Et selles veenduda, joonistame ühelt poolt kas kuubi oktaeedrisse (joonis 135) või oktaeedri kuubisse (joonis 136) ja teiselt poolt kas ikosaeedri dodekaeedrisse või vastupidi — dodekaeedri ikosaeedrisse (joonis 137). Nüüd on selge, et iga kuubi liikumine indutseerib oktaeedri liikumise ja vastupidi: iga oktaeedri liikumine indutseerib kuubi liikumise. Analoogiliselt järeldame, et ikosaeedri ja dodekaeedri liikumiste rühmad on isomorfsed.

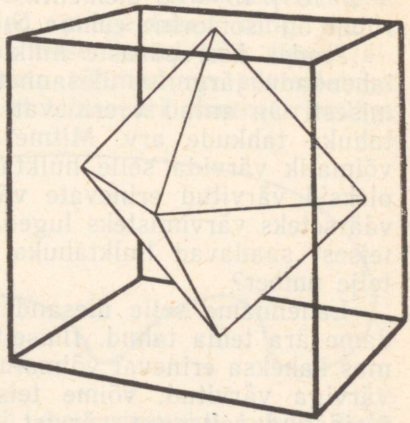
Joonised 135—137 selgitavad, miks on kuubi ja ikosaeedri tippude arvud võrdsed vastavalt oktaeedri ja dodekaeedri tahkude arvudega ja vastupidi. Nimelt on esimestena mainitud kehade tahkude keskpunktid viimati mainitute tippudeks ja ümberpöördult. Samas on hästi näha, et kuubi ja oktaeedri ning ikosaeedri ja dodekaeedri servade vahel on korraldatud üksühene vastavus, mistõttu servade arv on neil võrdne. Selline duaalsus esineb ka tetraeedri puhul, kuid see on duaalsus iseendaga (joonis 138). Seetõttu on tetraeedril tippude ja tahkude arvud võrdsed.

Tetraeedri liikumiste rühm koosneb kaheteistkümnest elemendist: ühikelemendist, kaheksast liikumisest, mis jätavad paigale ühe tippudest ja teostavad pöörde seda tippu ning tema vastastahu keskpunkti läbiva sümmeetriatelje ümber (vt. joonis 130), ning kolmest pöördest vastasservade keskpunkte ühendava kolme sümmeetriatelje ümber (vt. joonis 130). Lihtne on veenduda, et kõikidele nendele liikumistele vastavad tippude paarissubstitutsioonid. Seega on tetraeedri liikumiste rühm isomorfne vahelduva rühmaga A_4. Üldse koosnevad korrapäraste hulktahukate liikumiste rühmad ainult pööretest, mistõttu neid nimetatakse pöörete rühmadeks.

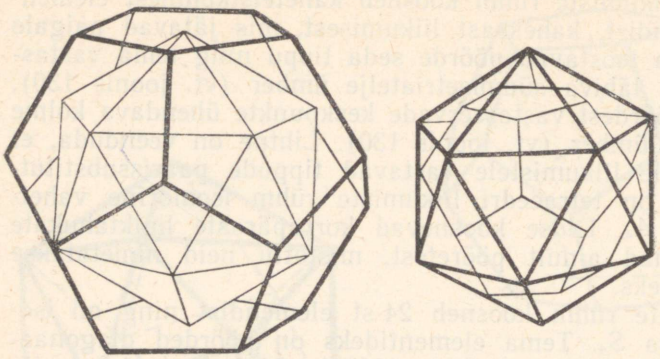
Kuubi pöörete rühm koosneb 24-st elemendist ning on isomorfne rühmaga S_4. Tema elementideks on pöörded diagonaalide ümber (kaks pööret nurkade 120° ja 240° võrra iga nelja diagonaali ümber) ning sümmeetriatelgede ümber, mis ühendavad vastastahkude keskpunkte (kolm pööret nurkade 90°, 180° ja 270° võrra iga kolme telje ümber) või vastasservade kesk-



Joonis 135.
Kuup oktaeedri sees.



Joonis 136. Oktaeeder kuubi sees.



Joonis 137. Ikosaeeder ja dodekaeeder teineteise sees.

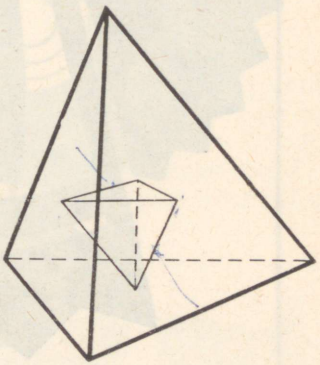
punkte (üks pööre 180° võrra iga kuue sellise telje ümber). Kokku saame $2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 6 = 23$ pööret, mis koos ühikelemendiga annavadki 24 elementi. Et leida igale teisendusele vastav substitutsioon, tuleb joonisel 131 vaadata, millisteks tippudeks A_j või A'_j teisenevad tipud A_i ($i, j = 1, 2, 3, 4$). Siinjuures alati, kui $A_i \to A_j$ või $A_i \to A'_j$, siis $A'_i \to A'_j$ või $A'_i \to A_j$ (kontrollida!).

Ikosaeedri ja dodekaeedri pöörete rühmad koosnevad kumbki 60-st elemendist. Näiteks ikosaeedril on 31 sümmeetriatelge, mis jagunevad kolme liiki: kuus telge ühendavad vastastippe, kümme vastastahkude keskpunkte, viisteist aga vastasservade keskpunkte. Igale esimest liiki teljele vastab neli mittetriviaalset pööret nurkade 72°, 144°, 216° ja 288° võrra, teist liiki teljele kaks pööret nurkade 120° ja 240° võrra ning kolmandat liiki teljele üks pööre 180° võrra. Koos samasusteisendusega saamegi $1 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 10 + 15 = 60$ elementi. Mainime veel, et ikosaeedri pöörete rühm on isomorfne rühma S_5 alamrühmaga A_5.

Teades korrapäraste hulktahukate pöörete rühmi, on lihtne lahendada järgmist ülesannet korrapäraste hulktahukate värvimisest. On antud n erinevat värvi, kus n on korrapärase hulktahuka tahkude arv. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil on võimalik värvida selle hulktahuka tahud nii, et erinevad tahud oleksid värvitud erinevate värvidega, kui geomeetriliselt samaväärseteks värvimisteks lugeda sellised värvimised, mis on teineteisest saadavad hulktahuka pööramise teel mõne sümmeetriatelje ümber?

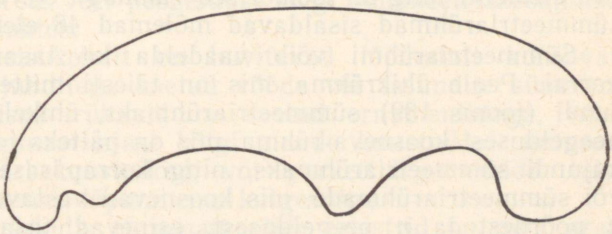
Lahendame selle ülesande näiteks oktaeedri jaoks. Nummerdame ära tema tahud. Ilmselt on esimese tahu värvimiseks olemas kaheksa erinevat võimalust. Kui esimene tahk on juba mingi värviga värvitud, võime teise tahu värvida ükskõik millisega ülejäänud seitsmest värvist. Seega on kahe tahu värvimiseks

kokku $8 \cdot 7 = 56$ võimalust. Analoogiliselt leiame, et kolme tahu värvimiseks on $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ võimalust jne., ja lõpuks kõigi kaheksa tahu värvimiseks $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 8!$ võimalust. Et aga oktaeedri pöörete rühm koosneb 24-st elemendist, siis geomeetriliselt erinevaid värvimisi on 24 korda vähem, s. o. $\frac{8!}{24} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{24} = 1680$ erinevat värvimist. Tetraeedri jaoks on see arv võrdne ainult kahega: $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{12} = 2$.

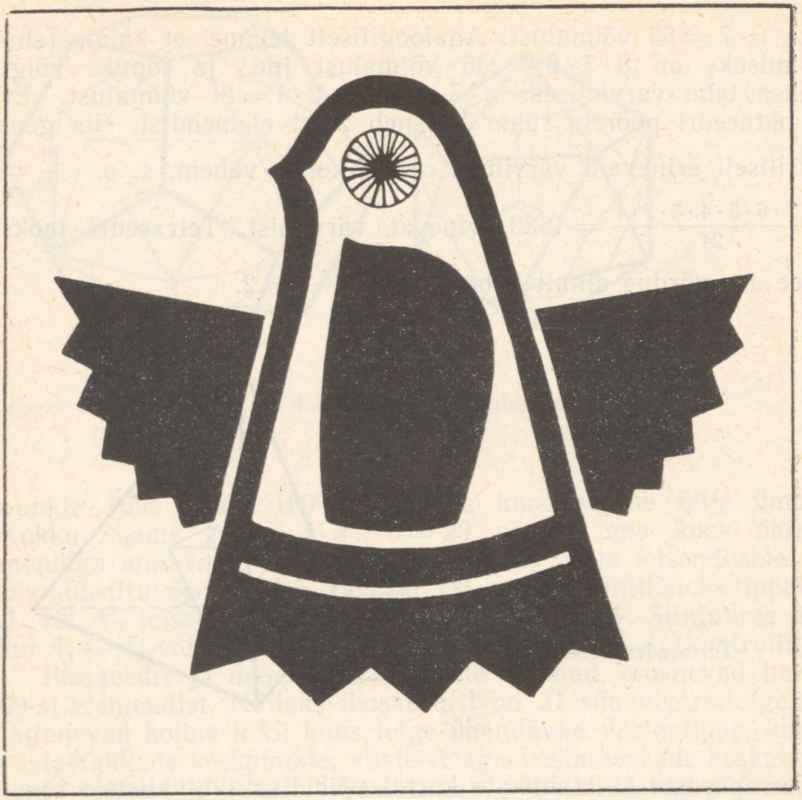


Joonis 138.
Tetraeeder teise tetraeedri sees.

Korrapäraste hulktahukate korral võib lisaks tavalistele tippe tippudeks teisendavatele liikumistele vaadelda veel peegeldusi hulktahuka mingi sümmeetriatasandi suhtes ning peegelduste kombinatsioone pööretega. Sellisel juhul saame iga korrapärase hulktahukaga siduda veel ühe rühma — nn. sümmeetriarühma, mille elementideks on kõik pöörded, peegeldused ning nende kombinatsioonid ehk korrutised, mis teisendavad kõik tipud jällegi tippudeks. Ülalvaadeldud pöörete rühmad on sümmeetriarühmade alamrühmadeks. Mainime, et tetraeedri sümmeetriarühm



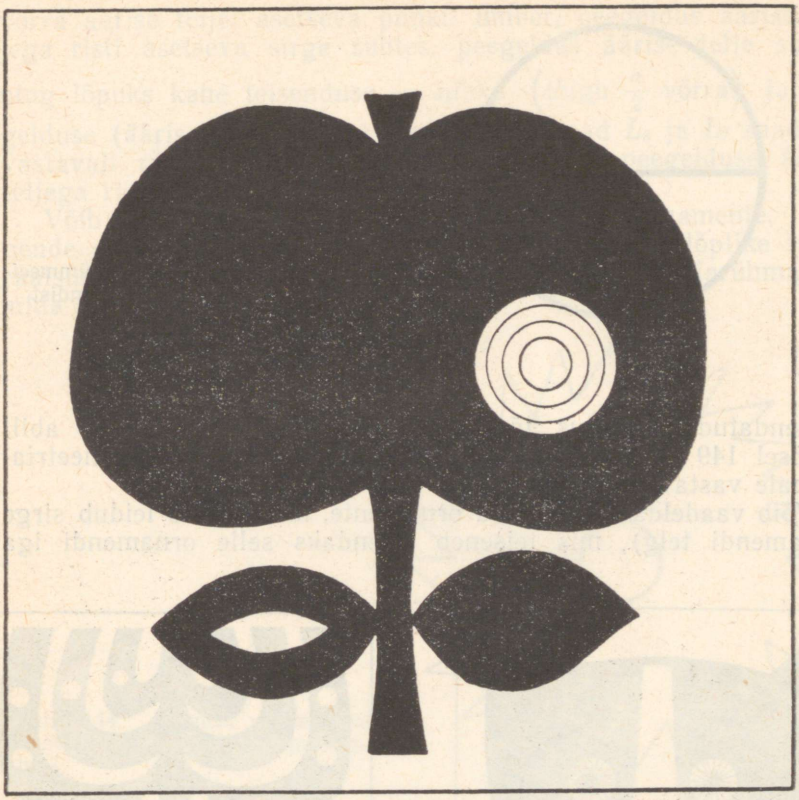
Joonis 139. Täielikult ebasümmeetriline kujund; tema sümmeetriarühm koosneb ainult ühikteisendustest.



Joonis 140. «Peaaegu» sümmeetriline kujund.

koosneb 24-st elemendist ning on isomorfne rühmaga S_4, aga ikosaeedri ja dodekaeedri sümmeetriarühmad sisaldavad kumbki 120 elementi ning on isomorfsed rühmaga S_5. Kuubi ja oktaeedri sümmeetriarühmad sisaldavad mõlemad 48 elementi.

Sümmeetriarühmi võib vaadelda ka tasandiliste kujundite korral. Peale ühikrühma, mis on täiesti mittesümmeetrilise kujundi (joonis 139) sümmeetriarühmaks, ühikelemendist ja ühest peegeldusest koosneva rühma, mis on näiteks joonisel 142 toodud kujundi sümmeetriarühmaks, ning korrapärase n-nurga pöörete või sümmeetriarühmade, mis koosnevad vastavalt n pöördest või n pöördest ja n peegeldusest, esinevad tasandiliste kujundite korral veel kaks lõpmatut sümmeetriarühma. Üks neist on suunaga varustatud ringjoone (joonis 145) sümmeetriarühm, mis koosneb

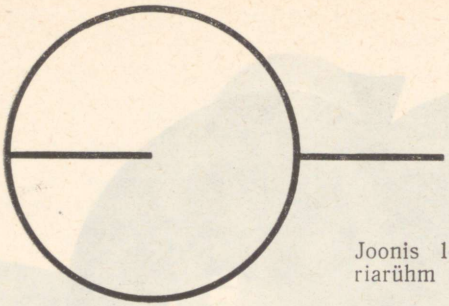


Joonis 141. Tarbekunstnikud ühendavad tihti sümmeetria ja ebasümmeetria elemente.

pööretest suvaliste nurkade võrra, teine on täielikult ringsümmeetrilise kujundi (joonis 146) sümmeetriarühm, mis sisaldab peale kõikide pöörete veel peegeldusi kõigi sümmeetriakeskpunkti läbivate sirgete suhtes.

Rakenduste seisukohalt on huvitavad lõpmatult korduvate geomeetriliste kujunditega kaetud vööde või tasandite sümmeetriarühmad. Sellised rühmad on seotud ornamentidega, mida kasutavad juba vanast ajast kõigi maade kunstnikud, muuseas ka tänapäeva tarbekunstnikud, või parkettidega, mida tuleb kujutleda igas suunas lõpmatusse kulgevaina.

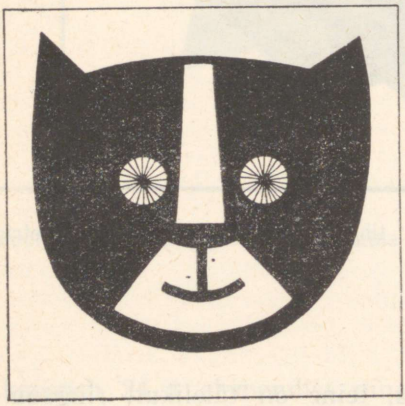
Huvitav on märkida, et ornamentide meistrid on oma praktikas leidnud kõikvõimalikud ornamentide tüübid (kokku 17 tüüpi). Seda, et nendega on tõepoolest kõik ornamentide tüübid

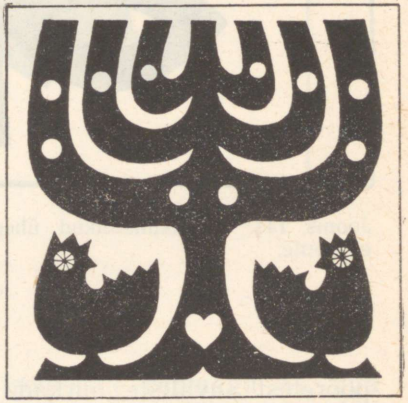


Joonis 142. Kujund, mille sümmeetriarühm koosneb kahest elemendist.

ammendatud, õnnestus tõestada aga alles rühmateooria abil. Joonisel 149 on toodud kõigile seitsmeteistkümnele sümmeetriarühmale vastavad ornamendid.

Võib vaadelda ka selliseid ornamente, mille jaoks leidub sirge (ornamendi telg), mis teiseneb iseendaks selle ornamendi iga



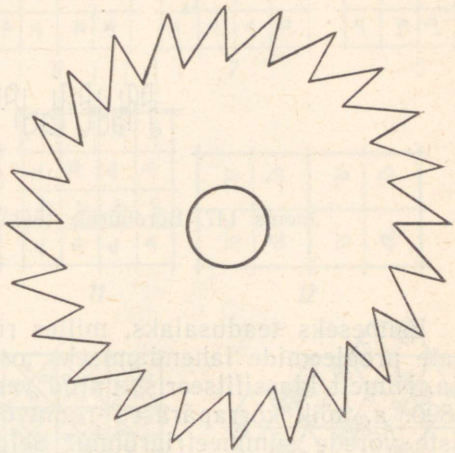


Joonis 143. Sümmeetria motiivid tarbekunstis.

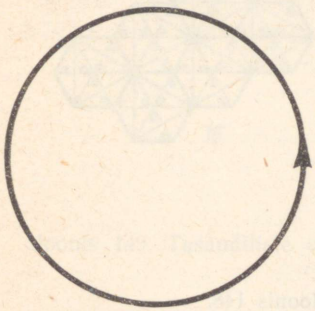
sümmeetriateisenduse puhul. Niisuguseid ornamente nimetatakse bordüürideks ehk ääristeks. Selgub, et on olemas vaid seitse erinevat ääriste tüüpi, mis on kõik toodud joonisel 147. Neile vastavad sümmeetriarühmad on järgmised. Rühm L_1 koosneb nihetest teatud lõigu a ja tema kordsete võrra. L_1 on isomorfne täisarvude aditiivse rühmaga. Rühmad L_2, L_3, L_4 ja L_5 saab rühmast L_1 vastavalt järgmiste teisenduste lisamisel: pööre 180°

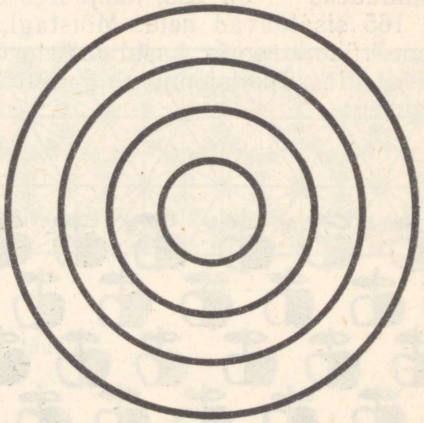
võrra äärise teljel asetseva punkti ümber, peegeldus äärise teljega risti asetseva sirge suhtes, peegeldus äärise telje suhtes ning lõpuks kahe teisenduse — nihke $\left(\text{lõigu } \frac{a}{2} \text{ võrra}\right)$ ja peegelduse (äärise telje suhtes) korrutis. Rühmad L_6 ja L_7 saadakse vastavalt rühmadest L_4 ja L_5, lisades neile peegelduse äärise teljega ristuva sirge suhtes.

Võib vaadelda ka tsentraalsümmeetrilisi ornamente, kuid nende sümmeetriarühmad ei erine millegi poolest lõplike tsentraalsümmeetriliste geomeetriliste kujundite sümmeetriarühmadest, mida on juba kirjeldatud.



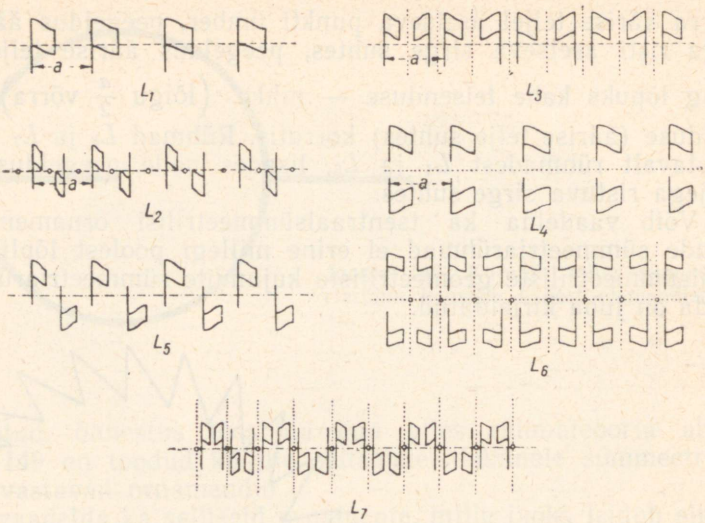
Joonis 144. Mitmest elemendist koosneb selle kujundi sümmeetriarühm?





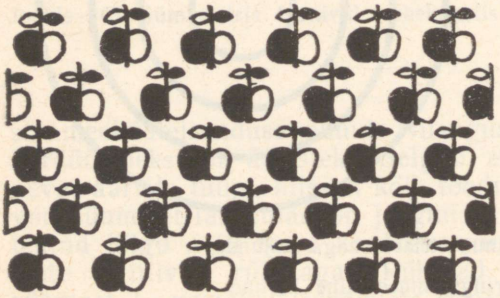
Joonis 145 (*vasakul*). Lõpmatu sümmeetriarühmaga kujund.

Joonis 146 (*paremal*). Täielikult ringsümmeetriline kujund.

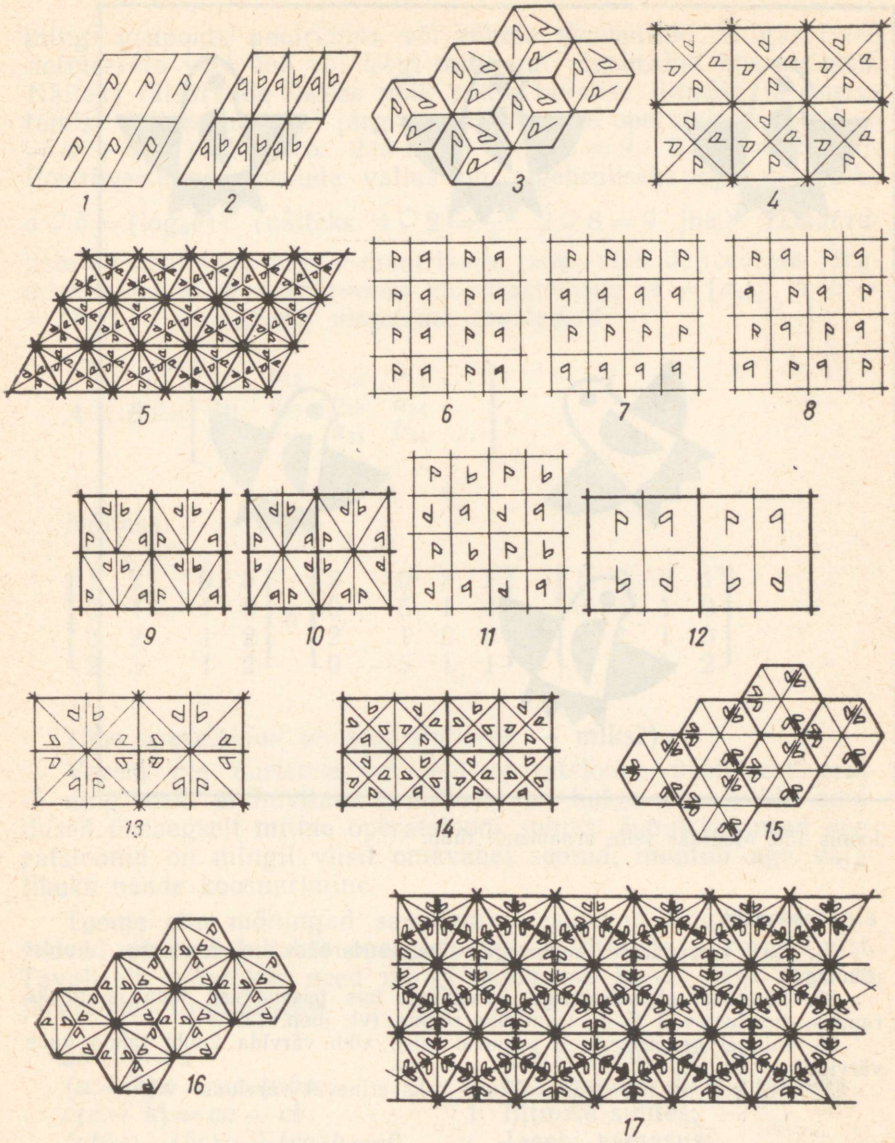


Joonis 147. Bordüüride tüübid.

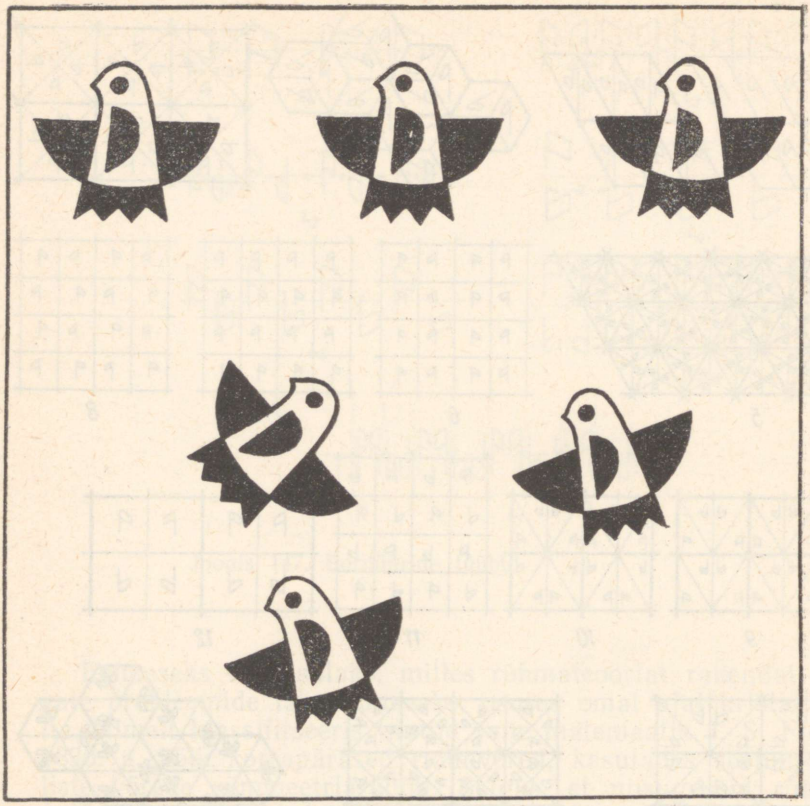
Esimeseks teadusalaks, milles rühmateooriat rakendati sügavate probleemide lahendamiseks, osutus omal ajal kristallograafia. Nimelt klassifitseeris tuntud vene matemaatik J. S. Fjodorov 1890. a. kõik korrapärased ruumvõred, kasutades seejuures selliste võrede sümmeetriarühmi. Selgus, et niisuguseid rühmi — neid nimetatakse kristallograafilisteks rühmadeks ehk Fjodorovi rühmadeks — on 230, kusjuures 65 rühma ei sisalda peegeldusi ja 165 sisaldavad neid. Mõistagi, et kristallograafid ei suutnud enne rühmateooria kasutamiselevõtmist ise anda sellist ammendavat klassifikatsiooni ning pidid piirduma palju jämedama liigitusega.



Joonis 148.
Tasandiline ornament.



Joonis 149. Tasandiliste ornamentide tüübid.



Joonis 150. Määrake selle ornamendi tüüp.

Ülesandeid.

34. Kas korrapärase hulknurga sümmeetriarühm on isomorfne dieedri rühmaga?

35. Tõestada, et kolmnurga liikumised, mis teisendavad teda iseendaks ruumis, moodustavad S_3-ga isomorfse rühma (vt. joon. 122).

36. Mitmel geomeetriliselt erineval viisil võib värvida kuubi tahud kuue värviga?

37. Millised on tetraeedri tahkude kaks erinevat värvimise viisi?

KAHE OPERATSIOONIGA ALGEBRALISED SÜSTEEMID

Kõikides seni vaadeldud algebralistes süsteemides (grupoidid, poolrühmad ja rühmad) on korraga defineeritud vaid üksainus algebraline operatsioon. Tõsi küll, tihti nägime, et

mingi grupoidi, poolrühma või rühma elementide hulgas võib defineerida veel ühe või isegi mitu uut algebralist operatsiooni. Näiteks täisarvude vallas võib peale tavalise liitmise ja korrutamise defineerida veel järgmise algebralise operatsiooni $a * b = a^2 + 4b$ ($1 * 1 = 5$, $2 * 1 = 8$, $1 * 2 = 9$, $2 * 2 = 12$, ...). Positiivsete reaalarvude vallas on algebraliseks operatsiooniks $a \circ b = (\log_a b)^2$ (näiteks $4 \circ 2 = \frac{1}{4}$, $2 \circ 8 = 9$ jne.) Täisarvuliste elementidega $n \times m$-maatriksite jaoks võib defineerida järgmise algebralise operatsiooni $\#$: maatriksite $A = [a_{ij}]$ ja $B = [b_{ij}]$ $\#$-korrutiseks nimetame maatriksit

$$A \# B = \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} & b_{14} & \dots \\ b_{21} & a_{22} & b_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} & b_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Näiteks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \# \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(See operatsioon on assotsiatiivne — miks?)

Varem me uurisime selliseid operatsioone üksteisest eraldi ning meid ei huvitanud, millised on hulga elementide omadused üheaegselt mitme operatsiooni suhtes. Juhul kui need operatsioonid on mingil viisil omavahel seotud, muutub aga vajalikuks nende koosuurimine.

Toome siin mõningad sagedamini esinevad tingimused, mis seovad omavahel kahte operatsiooni — liitmist ja korrutamist. Tavaliselt esitatakse need mingi samasuse kujul, nagu näiteks järgmistes tingimustes:

$ab = -ba$	antikommutatiivsus;
$(a+b)c = ac + bc$	korrutamise distributiivsus liitmise suhtes;
$c(a+b) = ca + cb$	
$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$	Jacobi samasus;
$a(ab + c) = ab + ac$	modulaarsus;
$ab + c = (a + c)(b + c)$	liitmise distributiivsus korrutamise suhtes;
$c + ab = (c + a)(c + b)$	
$a^n = 0$	nilpotentsus;
$a_1 a_2 \dots a_n = 0$	
$a(a + b) = a$	neelamisseadused.
$a + ab = a$	

Kuigi me nilpotentsuse tingimuste kirjutamisel ei ole siin kasutanud liitmise märki, seovad need tingimused ometi korrutamise ja liitmise tehteid, sest neis esineb element 0, mis on määratud tema omapärase käitumisega liitmise suhtes. Analoogiliselt seob antikommutatiivsuse tingimus korrutamist liitmisega, sest seda tingimust võib esitada ka kujul $ab + ba = 0$.

Kahe operatsiooni vahelise seose võib määrata ka nn. tinglike samasustega näiteks järgmiselt:

I kui $x \neq y$, siis $xy = 0$;
II kui $x \neq y$, siis $xy = x + y$;
III kui $x \neq 0$, siis iga b korral leidub x, nii et $ax = b$.

Kahe algebralise operatsiooniga algebralistest süsteemidest vaatleme siin lähemalt nelja kõige olulisemat: ringi, korpust, Lie ringi ja struktuuri. Igaüks neist on hulk, mis on korrutamise suhtes grupoid ning liitmise suhtes kommutatiivne poolrühm, kusjuures korrutamine on liitmise suhtes distributiivne.

Ringi puhul osutub poolrühm liitmise suhtes kommutatiivseks rühmaks. Kui ringi elemendid, mis erinevad selle rühma nullist, moodustavad rühma ka korrutamise suhtes, siis on tegemist korpusega või kaldkorpusega, olenevalt sellest, kas korrutamine on kommutatiivne või ei tarvitse seda olla. Kui aga selle asemel ringi elemendid rahuldavad Jacobi samasust ja samasust $a^2 = 0$, siis nimetatakse ringi Lie ringiks.

Struktuuride korral on liitmine ja korrutamine n.-ö. võrdõiguslikud, mis väljendub neid siduvate tingimuste sümmeetrias: siin on mitte ainult liitmine, vaid ka korrutamine kommutatiivne ja assotsiatiivne ning kehtib samuti liitmise distributiivsus korrutamise suhtes. Peale selle kehtivad struktuurides ka mõlemad neelamisseadused.

Ülesandeid.

38. Millised selles punktis vaadeldud samasustest kehtivad täisarvude hulgas, kui vaadelda liitmisena tavalist täisarvude liitmist, korrutamisena aga operatsiooni:

a) $a * b = a + b + ab$;
b) $a * b = ab - ba$;
c) $a * b = a + b$;
d) $a * b = b - a$;
e) $a * b = a$;
f) $a * b = b^2$.

39. Selgitada sama täisarvuliste elementidega maatriksite tavalise liitmise ja korrutamise suhtes, kui neil maatriksitel on järgmine kuju:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

40. Antud hulga A kõigi alamhulkade hulgas vaatleme liitmisena alamhulkade ühendi leidmist ning korrutamisena ühisosa võtmist. Millised ülalmainitud samasustest kehtivad sel juhul?

41. Näidata, et $(m \times n)$-maatriksite $\#$-korrutamine rahuldab tingimusi:

$$A \# A = A, \quad B \# A \# B = B, \quad A \# B \# C = A \# C = A \# C$$

ning on seotud maatriksite liitmisega järgmiste distributiivsust ja modulaarsust üldistavate tingimustega:

$$(A + B) \# 2C = (A \# C) + (B \# C),$$
$$(A \# B) + C = (A + C) \# (B + C),$$
$$[2A \# (A \# B) + C] = (A \# B) + (A \# C).$$

42. Milliste ülalmainitud operatsioonide suhtes tekivad ringid, korpused, struktuurid või Lie ringid?

KLEINI ERLANGENI PROGRAMM

Tuntud saksa matemaatik Felix Klein, valmistudes astumiseks Erlangeni ülikooli professori ametisse, pidas selles linnas 1872. aastal loengu, milles sõnastas erinevate geomeetriate konstrueerimise üldise printsiibi. Seda kuulsat loengut nimetatakse gi Kleini Erlangeni programmiks. Üldine geomeetriliste teooriate eraldamise printsiip, mis oli selles formuleeritud ja mille käsitlemise juurde kohe asume, on tihedalt seotud ruumi üksüheste teisenduste rühma alamrühmadega.

Nimelt vastavad igale sellisele alamrühmale teatud geomeetriliste kujundite omadused, mis säilivad kõigi sellesse rühma kuuluvate teisenduste puhul. Teooriat, mis uurib just neid omadusi, on loomulik pidada antud üksüheste teisenduste rühmale vastavaks geomeetriaks. Näiteks tavaline, eukleidiline geomeetria huvitub omadustest, mis kaugust säilitavate ruumi üksüheste teisenduste korral ei muutu (ilmselt moodustavad sellised teisendused rühma).

Erlangeni programmi seisukohalt moodustab ka hulgateooria teatud kõige üldisema geomeetria. Selles uuritakse neid ruumi omadusi, mis säilivad kõigi üksüheste teisenduste korral. Ei ole õige arvata, et selliseid omadusi pole üldse olemas — hulga võimsus, kahe hulga lõikumine või mittelõikumine, ühe hulga olemine teise hulga alamhulgaks — kõik need omadused säilivad iga üksühese teisenduse korral. Vaatamata sellele on niisugune geomeetria siiski liiga üldine ja sisu poolest üsna vaene.

Et kõikide üksüheste teisenduste puhul säilivad omadused jäävad muutumatuks ka nende üksüheste teisenduste puhul, mis säilitavad veel mõningaid teisi omadusi ja seega määravad mõne teise geomeetria, siis hulgateoreetilised omadused kuuluvad igasse geomeetriasse, moodustades selle geomeetria n.-ö. hulgateoreetilise baasi.

Selge, et suvalised üksühesed teisendused ei säilita üldiselt geomeetriliste objektide kuju. Näiteks sirge võib üksüheselt tei-

sendada ringjooneks, millest on eraldatud üks punkt, paraboo-liks, sinusoidiks või lõpmatust arvust poolvahemikest $[n, n+1)$ koosnevaks hulgaks.

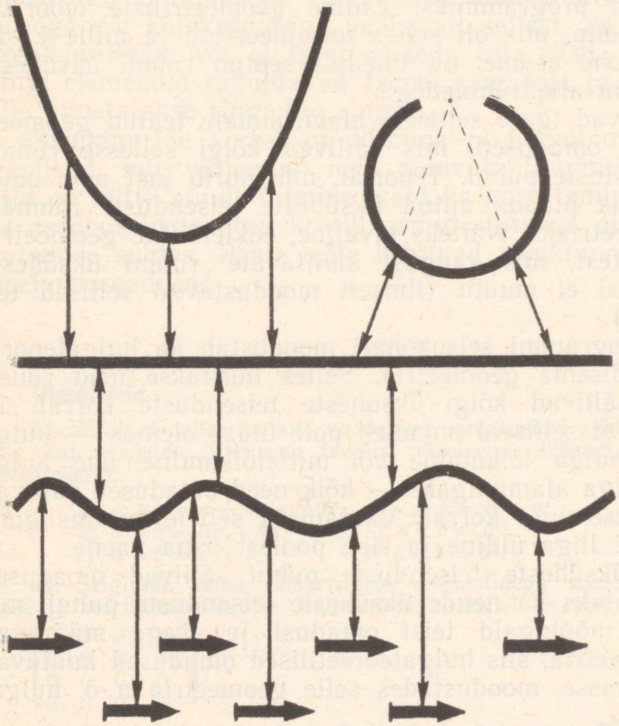
Sirge võib üksüheselt teisendada isegi hulgaks, mis ei moodusta mingit geomeetrilist kujundit selle sõna kõige tavalisemas mõttes, näiteks funktsiooni

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ kui } x \text{ on ratsionaalarv,} \\ -1, \text{ kui } x \text{ on irratsionaalarv} \end{cases}$$

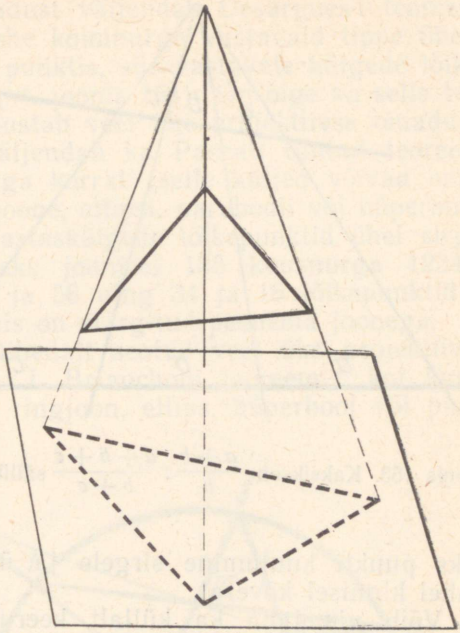
abil.

Üksühest kujutust, mille puhul ei toimu geomeetriliste kujundite katkirebenemist ega kokkukleepumist, nimetatakse teatavasti (vt. lk. 92) topoloogiliseks kujutuseks. Need kujutused moodustavad alamrühma kõigi antud hulga üksüheste teisenduste rühmas.

Geomeetriliste kujundite omadusi, mis säilivad kõigi topoloogiliste kujutuste puhul, nimetatakse nagu me juba teame, topoloo-



Joonis 151. Suvalised üksühesed teisendused ei säilita geomeetriliste objektide kuju.



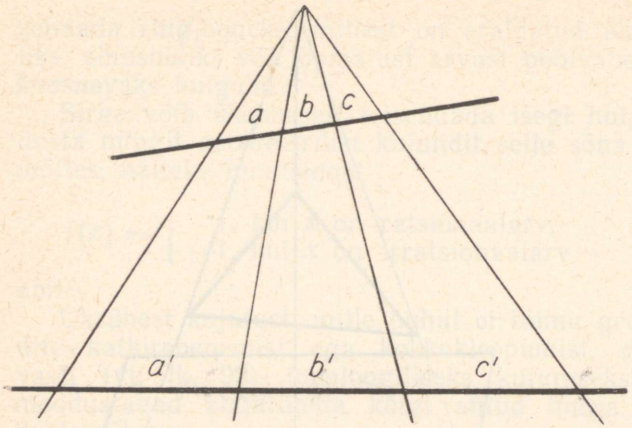
Joonis 152. Tsentraalprojektsioon.

gilisteks omadusteks ning seega neid uuriv teooria — topoloogia — moodustab F. Kleini teooria mõttes veel ühe geomeetria.

Teatavasti nimetatakse sirgeid rööpsirgeteks, kui nad ei lõiku, ükskõik kui palju me neid ka ei pikendaks. Kuid inimese seisukohalt, kes seisab raudteerööbaste vahel ning vaatab piki rööpaid, lõikuvad rööpsirged mingisuguses väga kaugel asuvas punktis. Selle ja paljude teiste perspektiivi omaduste uurimine viis matemaatikud mõttele, et oleks kasulik täiendada tasandit punktidega nii, et igasugused kaks sirget lõikuksid omavahel sellisel täiendatud, nn. projektiivsel tasandil.

Projektiivne tasand konstrueeritakse, lähtudes tavalisest eukleidilisest tasandist, lisades sellele kõigi ühe sirgega paralleelsete sirgete jaoks nende «lõikepunkti», mida võib nimetada lõpmata kaugeks punktiks või nende sirgete ebapunktiks. Kui lugeda, et kõik lõpmata kauged punktid asuvad ühel, nn. lõpmata kaugel sirgel, siis jõuamegi projektiivse tasandi mõisteni. Analoogiliselt võib sisse tuua ka projektiivse ruumi mõiste.

Kui vaadelda ainult selliseid projektiivse tasandi või projektiivse ruumi teisendusi, mis teisendavad sirge sirgeks, siis jõuame nn. projektiivsete teisenduste rühmani, mille poolt määratud geomeetriat nimetatakse projektiivseks geomeetriaks. Projektiivse teisenduse kõige lihtsama näitena võib vaadelda tsentraalprojektsiooni (joonis 152). Projektiivseteks omadusteks on näi-



Joonis 153. Kaksiksuhe $\frac{a+b}{b} : \frac{a+b+c}{b+c}$ säilib projektiivsete teisenduste korral.

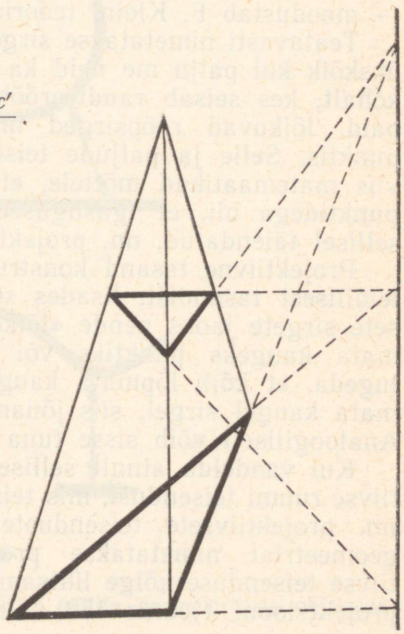
teks punkti kuulumine sirgele ja ühise puutepunkti olemasolu kahel kinnisel kõveral.

Võib nimetada ka küllalt keerulisi projektiivseid omadusi. Näiteks sirge nelja punkti projekteerimisel teisele sirgele (vt. joonis 153) nende punktide vaheliste lõikude kaksiksuhe

$$\frac{a+b}{b} : \frac{a+b+c}{b+c}$$

ei muutu:

$$\frac{a+b}{b} : \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a'+b'}{b'} : \frac{a'+b'+c'}{b'+c'}.$$

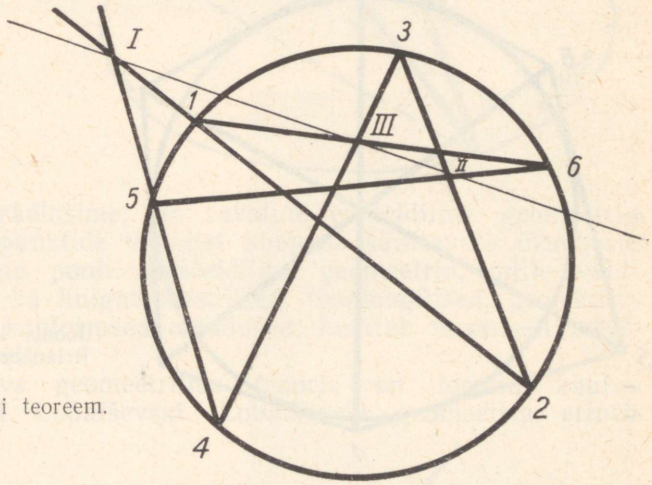


Joonis 154. Desargues'i teoreem väljendab projektiivset omadust.

Tuntud projektiivset omadust väljendab Desargues'i teoreem, mis väidab järgmist: kui kahe kolmnurga vastavaid tippe ühendavad sirged lõikuvad ühes punktis, siis vastavate külgede lõikepunktid asuvad ühel sirgel (vt. joonis 154). On õige ka selle teoreemi pöördväide, see moodustab veel ühe projektiivse omaduse.

Projektiivset omadust väljendab ka Pascali tuntud teoreem, mis väidab, et iga kuusnurga korral (selle küljed võivad omavahel lõikuda), mis on ringjoone, ellipsi, parabooli või hüperbooli sisse joonestatud, asuvad vastaskülgede lõikepunktid ühel sirgel (nn. Pascali sirgel). Näiteks joonisel 155 kuusnurga 123456 vastasservade 12 ja 45, 23 ja 56 ning 34 ja 16 lõikepunktid I, II ning III asuvad sirgel, mis on märgitud peenema joonega.

Pascali teoreemiga on tihedalt seotud veel üks projektiivne omadus, mis väljendub Ch. I. Brianchoni teoreemis: kui kuusnurga sisse on joonestatud ringjoon, ellips, hüperbool või para-



Joonis 155. Pascali teoreem.

bool, siis kuusnurga vastastippe ühendavad diagonaalid lõikuvad ühes punktis (vt. joonis 156).

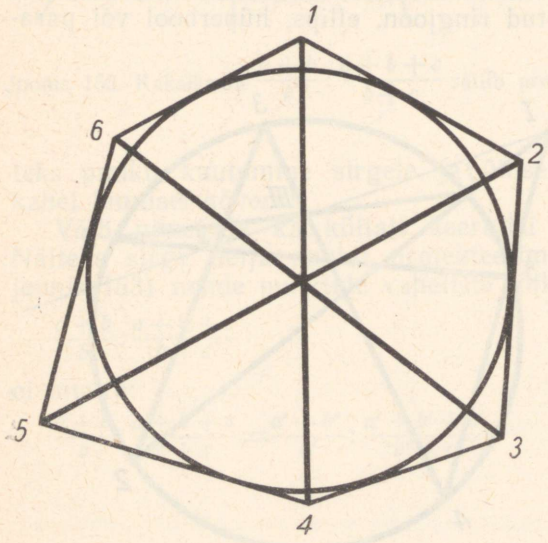
Kui vaadelda sirgeid sirgeteks kujutavaid üksüheseid teisendusi tavalisel tasandil või tavalises ruumis, siis jõuame afiinseteisendusteni. Tasandi või ruumi kõik afiinsed teisendused moodustavad rühma, mille poolt määratud geomeetriat nimetatakse afiinseks geomeetriaks. Osutub, et iga afiinne teisendus ruumis on esitatav kolme liiki lihtsate afiinsete teisenduste korrutisena. Nendeks on ruumi nihe teatud suunas, peegeldus mingi tasandi suhtes ning ruumi kokkusurumine.

Tavaline ruum ja tasand moodustavad vaid teatava osa vastavast projektiivsest ruumist ja tasandist. Seepärast iga afiinne

teisendus, teisendades tavalised sirged tavalisteks sirgeteks, teisendab ka projektiivsed sirged projektiivseteks sirgeteks ning kujutab seega endast ka projektiivset teisendust. Et aga projektiivsed omadused säilivad kõigi projektiivsete teisenduste puhul, seega ka afiinsete puhul, siis iga projektiivne omadus on samuti afiinseks omaduseks.

Afiinsete omaduste hulka kuuluvad peale kõigi projektiivsete omaduste veel sirgete paralleelsus, ruumalade suhe, ühes tasandis asuvate kolmnurkade pindalade suhe, ellipsiks, hüperbooliks või parabooliks olemine, kolmnurga mediaanide lõikumine ühes punktis jms.

Huvitav on märkida, et ellipsiks, parabooliks või hüperbooliks olemine ei kujuta endast projektiivseid omadusi. Tõepoolest, need

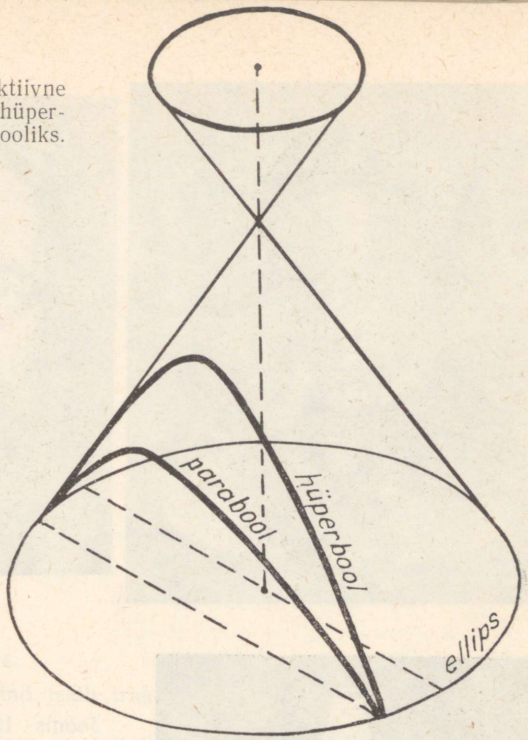


Joonis 156.
Brianchoni teoreem.

jooned tekivad siis, kui joonisel 157 esitatud kahe haruga koonust lõigata erinevate tasanditega. Kuid see just tähendabki, et igaühte nendest joontest võib projekteerida koonuse tipust ükskõik milliseks teiseks jooneks nende joonte seast.

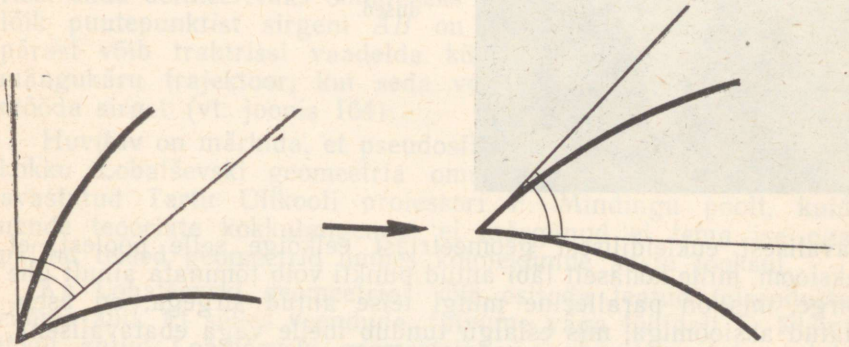
Võib vaadelda ka nn. konformsete teisenduste rühma. Selle elementideks on üksühesed kujutused, mis säilitavad nurki kõverjoonte vahel (vt. joonis 158). Sellele rühmale vastav konformne geomeetria leiab rakendamist kartograafias niisuguste kaartide koostamisel, mille puhul vastavad jooned kaardil ja maakeral lõikuvad sama nurga all. Konformsete omaduste hulka kuuluvad näiteks ringjooneks, tasandiks või sfääriks olemine, s. t. ringjoon, tasand ja sfäär kujutuvad konformsete teisenduste puhul vastavalt ringjooneks, tasandiks ja sfääriks.

Joonis 157. Leidub projektiivne teisendus, mis viib ellipsi hüperbooliks või paraboliks.



Nagu juba rääkisime, on tavaline eukleidiline geomeetria määratud ruumipunktide vahelist kaugust säilitavate üksüheste teisenduste rühma poolt. Eukleidiline geomeetria, mille valdkonda kuuluvad ka hulgateoreetilised, topoloogilised, projektiivsed, afiinsed ja konformsed omadused, huvitub peamiselt meetrilistest omadustest.

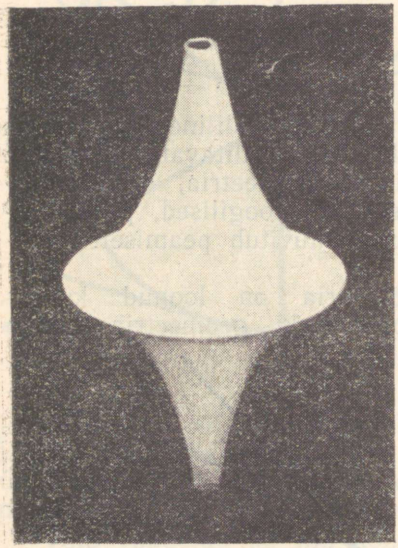
Väga huvitava geomeetrilise teooria on loonud kuulus matemaatik N. I. Lobatševski. Lobatševski geomeetria erineb



Joonis 158. Konformse teisenduse puhul säilivad kõveratevahelised nurgad.





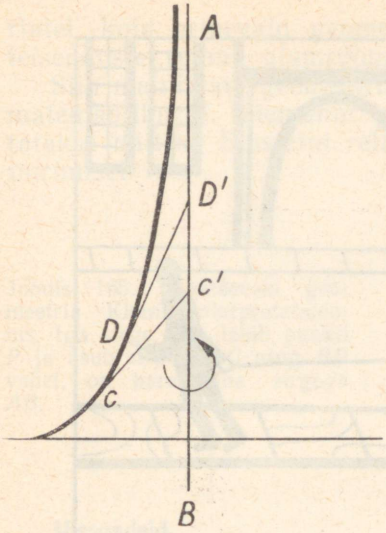


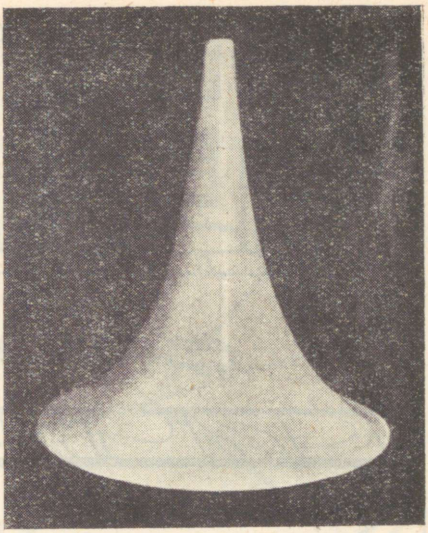
Joonis 159 (*ülal vasakul*). Nikolai Ivanovitš Lobatševski (1792—1856), suur vene geomeeter, üks kaasaegse geomeetria rajajaid.

Joonis 160 (*ülal paremal*). Feliks Klein (1849—1925), tuntud saksa geomeeter, pani aluse rühmateoreetilisele lähenemisele geomeetriale.

Joonis 161. Pseudosfäär. Sellel pinnal kehtivad Lobatševski geomeetria seadused.

tavalisest eukleidilisest geomeetriast eelkõige selle poolest, et aksioom, mille kohaselt läbi antud punkti võib tõmmata ainult ühe sirge, mis on paralleelne mingi teise antud sirgega, on asendatud aksioomiga, mis esialgu tundub meile väga ebatavalisena, kuid mille kasutamine ei vii mingile vastuolule teiste geomeetriliste tulemustega, nimelt: läbi iga punkti võib tõmmata vähemalt kaks sirget, mis on paralleelsed antud sirgega.





Joonis 162 (*vasakul*). Traktriss.

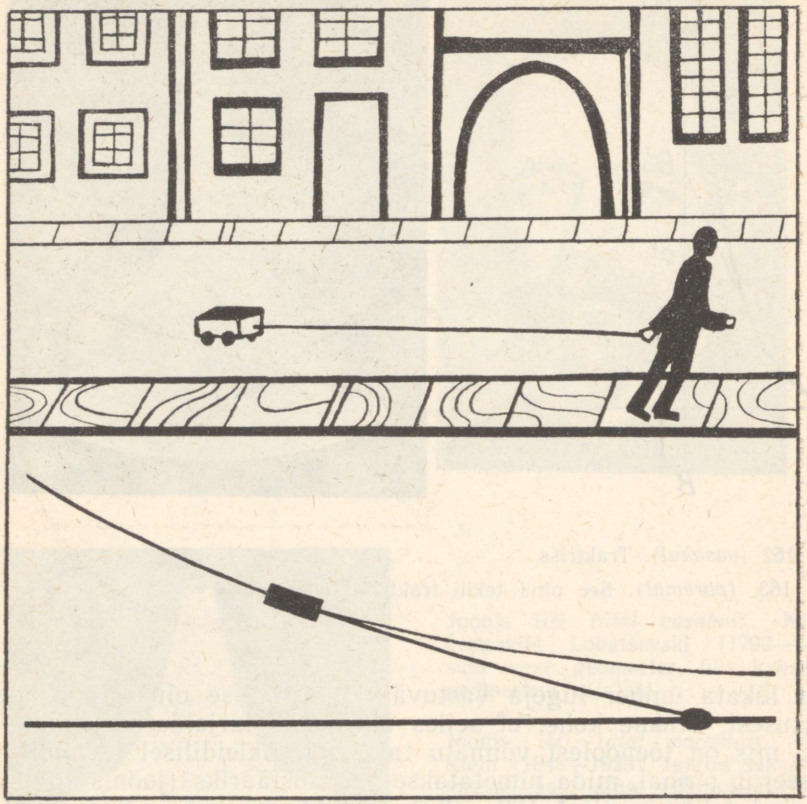
Joonis 163. (*paremal*). See pind tekib traktrissi pöörlemisel.

Et lükata ümber lugeja vastuväited niisuguse olukorra ebareaalsusest, ütleme kohe, et selles aksioomis kirjeldatud situatsioon, mis on tõepoolest võimatu tavalisel eukleidilisel tasandil, realiseerub pinnal, mida nimetatakse pseudosfääriks (joonis 161). See pind tekib joonisel 162 esitatud traktrissi nime all tuntud kõvera pöörlemisel sirge AB ümber ja saadud pinna (vt. joonis 163) kahe eksemplari kokkukleepimisel mööda alusserva. Traktrissi enda defineerivaks omaduseks on see, et iga tema puutuja lõik puutepunktist sirgeni AB on konstantse pikkusega. Seepärast võib traktrissi vaadelda kõverana, mille määrab laste mängukäru trajektoor, kui seda vedav poiss liigub kogu aeg mööda sirget (vt. joonis 164).

Huvitav on märkida, et pseudosfääri omadused, mis langevad kokku Lobatševski geomeetria omadustega, olid esmakordselt avastatud Tartu Ülikooli professori F. Mindingu poolt, kuid nende teooriate kokkulangemist ei märganud ei tema ise ega paljud teised geomeetrid umbes kolmekümne aasta jooksul.

Ka Lobatševski geomeetriat võib esitada teatud teisenduste rühma abil. Et selles veenduda, tutvume väga lühidalt F. Kleini poolt antud Lobatševski geomeetria väga huvitava interpretatsiooniga tavalisel tasandil.

Kleini interpretatsioonis etendab Lobatševski tasandi osa



Joonis 164. Vanker liigub mööda traktrissi.

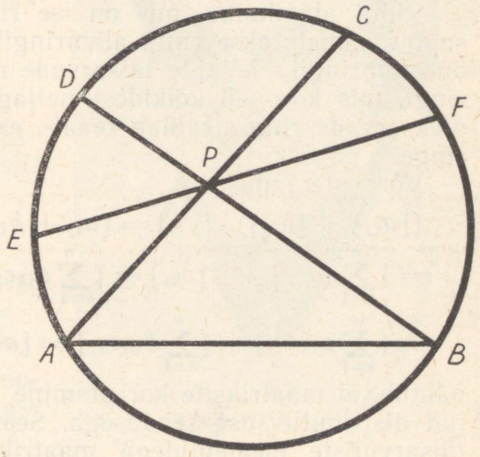
mingi ringi sisepiirkond (ringjoon ise välja arvatud). Sirgete osas on sellisel Lobatševski tasandil ringi kõõlud (otspunktideta!). Selles interpretatsioonis muutub ilmseks ka Lobatševski aksioom paralleelsetest sirgetest. Tõepoolest (vt. joonis 165), ükski sirge EF, mis läbib punkti P ja asub sirgete AC ja BD vahel, ei lõiku antud sirgega AB ja on seega temaga paralleelne.

Lobatševski geomeetria on selles interpretatsioonis määratav niisuguste tasandi teisenduste poolt, mis viivad ringi sisepunktid uuesti ringi sisepunktideks ning ringi kõõlud uuesti ringi kõõludeks. Need Lobatševski teisendused moodustavad rühma, mis määrab Lobatševski geomeetria.

Me peatusime siin vaid kõige lihtsamatel geomeetrilistel teoo-

riatel, kuid erinevaid geomeetriaid on lõpmata palju, sest iga teisenduste rühma alamrühm määrab mingi geomeetria.

Siin mainimata geomeetriatest on ehk kõige tähtsamaks saksa matemaatiku B. Riemanni poolt avastatud teooria, mida kasutatakse näiteks Einsteini relatiivsusteoorias gravitatsiooniväljade uurimisel.



Joonis 165. Lobatševski geomeetria Kleini interpretatsioonis. Iga sirge, mis läbib punkti P ja asub sirgete AC ning BD vahel, on paralleelne sirgega AB.

Ülesandeid.

43. Tõestada, et
    a) meetrilised,
    b) afiinsed,
    c) konformsed,
    d) projektiivsed ja
    e) Lobatševski

teisendused moodustavad rühmi.

44. Näidata, et projekteerimisel
    a) võib muutuda lõikude suhe sirgel,
    b) punkt, mis asetseb punktide A ja B vahel, võib teiseneda punktiks, mis ei asu A ja B kujutuste vahel.

45. Missugused on sisaldumisvahekorrad käesolevas punktis vaadeldud erinevaid geomeetriaid määravate teisenduste rühmade vahel?

RINGID

Eespool juba mainisime ringi mõistet. Üksikasjalik definitsioon on järgmine. Ringiks nimetatakse hulka, milles on defineeritud kaks distributiivsuse seadustega

$$(a+b)c = ac + bc, \quad c(a+b) = ca + cb$$

seotud tehet — liitmine ja korrutamine, kusjuures liitmise suhtes moodustab see hulk kommutatiivse rühma (nimetatakse antud ringi aditiivseks rühmaks), korrutamise suhtes aga grupoidi (nimetatakse ringi multiplikatiivseks grupoidiks).

Kui ringi multiplikatiivne grupoid osutub assotsiatiivseks või kommutatiivseks, siis nimetatakse ka ringi ennast vastavalt assotsiatiivseks või kommutatiivseks. Kui multiplikatiivsel gru-

poidil on ühikelement, siis nimetatakse seda ringi ühikelemendiks, ringi enda kohta aga öeldakse, et ta on ühikuga ring.

Toome nüüd ringide näiteid. Kõik täisarvud moodustavad ühikuga kommutatiivse ja assotsiatiivse ringi tavalise liitmise ning korrutamise suhtes. Samasuguse ringi moodustavad ka kõik ratsionaal-, reaal- ja kompleksarvud, samuti Gaussi täis- ja ratsionaalarvud.*

Ringi alamhulka, mis on ise ring selle ringi operatsioonide suhtes, nimetatakse ringi alamringiks. Näiteks paarisarvude ring on alamringiks kõikide täisarvude ringis, ise aga sisaldab alamringi, mis koosneb kõikidest neljaga jaguvatest arvudest. Kompleksarvude ring sisaldab reaal-, ratsionaal- ja täisarvude alamringe.

Võrduste jadast

$$([a_{ij}] + [b_{ij}]) \cdot [c_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \cdot [c_{ij}] =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik}) c_{kj}] = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}] =$$

$$= [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}] + [\sum_{k=1}^{n} b_{ik}c_{kj}] = [a_{ij}] \cdot [c_{ij}] + [b_{ij}] \cdot [c_{ij}]$$

nähtub, et maatriksite korrutamine on maatriksite liitmisega seotud distributiivsuse seadusega. Seetõttu moodustavad ringi kõik täisarvuliste elementidega maatriksid, kõik ratsionaalsete elementidega maatriksid jne. Kõik need ringid on assotsiatiivsed, kuid mittekommutatiivsed ühikuga ringid.

Iga kommutatiivne rühm muutub ringiks, kui temas defineerida nn. nullkorrutamine: iga kahe elemendi korrutis on null. See ring on kommutatiivne ja assotsiatiivne, kuid tal puudub ühikelement.

Antud hulga kõik alamhulgad ei moodusta ringi ühendi ja ühisosa võtmise operatsioonide suhtes, sest kuigi need operatsioonid on omavahel seotud distributiivsuse seadusega (isegi kahe distributiivsuse seadusega):

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

ja

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C))$$

ning kuigi kõik alamhulgad moodustavad mõlema operatsiooni suhtes ühikuga kommutatiivse poolrühma, ei osutu kumbki neist poolrühmadest rühmaks (vt. lk. 240).

Ringidest, mille elementideks on arvud, nimetame peale täisarvude ringi veel näiteks hulki $\{a + b\sqrt{5}\}$, $\{a + b\sqrt[3]{3} + c\sqrt[3]{9}\}$ jne., kus a, b ja c on täisarvud.

* S. t.. kompleksarvud $a + bi$, kus a ja b on vastavalt kas täis- või ratsionaalarvud.



Joonis 166. Evariste Galois (1811—1832), tuntud prantsuse matemaatika, kaasaegse algebra rajaja.

Muutuja x täisarvuliste kordajatega polünoomide

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

jaoks võib korrutamise ja liitmise defineerida tavalisel viisil. Näiteks

$$(5x^3 + 7x^2 - 1) + (-x^4 + x^3 - 2x) = -x^4 + 6x^3 + 7x^2 - 2x - 1;$$

$$(x^2 - 1)(3x^5 + 2x^3 + 1) = 3x^7 - x^5 - 2x^3 + x^2 - 1.$$

Osutub, et ka polünoomid moodustavad kommutatiivse ja assotsiatiivse ühikuga ringi.

Funktsionaalanalüüsi seisukohalt on väga tähtsad funktsioonide ringid. Liitmisena vaadeldakse niisugustes ringides alati tavalist funktsioonide liitmist

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Korrutamise operatsiooni võib aga defineerida mitmel erineval viisil. Kõige tavalisem definitsioon näeb välja järgmiselt:

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Tihti aga vaadeldakse korrutamisena nn. funktsioonide superpositsiooni

$$(f \circ g)(x) = g[f(x)].$$

Peale selle pakub huvi ka järgmine funktsioonide «korrutamine» *:

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-t)\,g(t)\,dt.$$

Esimene ja kolmas neist korrutamistest on distributiivsed funktsioonide liitmise suhtes, mistõttu iga liitmise ja sellise korrutamise suhtes kinnine funktsioonide hulk moodustab ringi. Näiteks esimese korrutamise puhul on selliseks kõigi lõigul $[a, b]$ defineeritud funktsioonide hulk, korrutamise $*$ puhul näiteks poollõigul $[0, \infty)$ pidevate funktsioonide hulk

* Kui lugeja ei tunne integraali mõistet, võib ta selle näite vahele jätta.

○-korrutamine on liitmise suhtes vaid n.-ö. vasakult distributiivne. Tõepoolest, iga x korral on

$$[h \circ (f+g)](x) = (f+g)[h(x)] = f[h(x)] + g[h(x)] = (h \circ f)(x) + (h \circ g)(x).$$

Teine distributiivsuse seadus ei tarvitse siin alati kehtida. Kuid näiteks nn. lineaarsete funktsioonide jaoks, mis rahuldavad tingimust

$$f(x+g) = f(x) + f(g)$$

suvaliste arvude x ja g korral, on täidetud ka see seadus. Tõepoolest, suvalise arvu x korral on

$$[(f+g) \circ h](x) = h[(f+g)(x)] = h[f(x) + g(x)] = h[f(x)] + h[g(x)] = (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x).$$

Et lineaarsete funktsioonide summa ja superpositsioon on jällegi lineaarsed funktsioonid, siis moodustavad kõik sellised funktsioonid ringi liitmise ja ○-korrutamise suhtes.

Ülesandeid.

46. Millised funktsioonide korrutamise operatsioonid on kommutatiivsed ja millised assotsiatiivsed?

47. Vaatleme hulki $A_1 - A_8$, mis koosnevad vastavalt kõikidest ruutmaatriksitest kujuga (a, b ja c — suvalised reaalarvud):

1. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$; 5. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$; 6. $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$;
7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}$; 8. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Kumb hulkadest $A_1 - A_8$ kujutab endast ringi? kommutatiivset ringi? ühikuga ringi? korpust?

48. Kas moodustavad ringi polünoomid kujuga

$$a_0X^{10} + a_2X^6 + a_4X^2?$$

aga kujuga

$$a_0X^{2n} + a_1X^{2(n-1)} + \ldots + a_{n-2}X^4 + a_{n-1}X^2 + a_n?$$

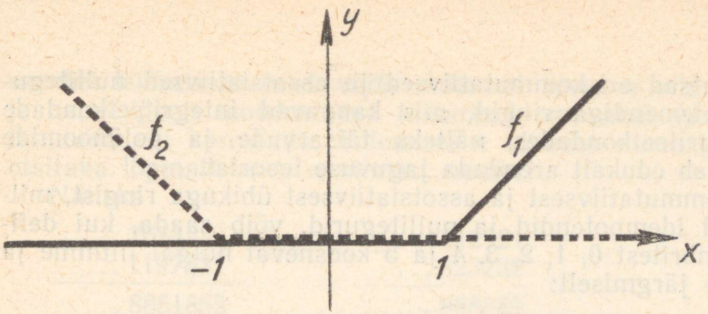
Siin a_0, a_1, ..., a_n on suvalised reaalarvud, n aga mistahes naturaalarv.

49. Kas kõik funktsioonid $f(x)$, mille korral on $f(0) = a$ moodustavad ringi tavalise korrutamise või ○-korrutamise suhtes, kui $a = 0$? $a = 1$? $a = 2$?

IDEMPOTENDID JA NULLITEGURID

Täisarvude ringis leidub vaid kaks elementi, mis võrduvad oma ruuduga — need on arvud 1 ja 0. Maatriksite ringides leidub neid juba rohkem. Näiteks maatriksite

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ja } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Joonis 167. Funktsioonid f_1 ja f_2 erinevad nullist, nende korrutis on aga null.

ruudud võrduvad nende endiga. Selliseid ringi elemente e, mille jaoks $e^2 = e$, nimetatakse ringi idempotentideks. Idempotentsetel elementidel on tähtis koht ringiteoorias.

Polünoomide ringis pole muid idempotente peale arvude 0 ja 1. Samasugune on olukord pidevate funktsioonide ringis tavalise korrutamise suhtes. Kuid lineaarfunktsioonide ringis, kus korrutamise osas esineb superpositsioon, osutub idempotendiks iga konstantne funktsioon $f(x) = c$, samuti ka funktsioon $f(x) = x$ (kontrollida!).

Täisarvude ringis on kahe elemendi korrutis null siis ja ainult siis, kui vähemalt üks teguritest on null. Samasugune on olukord ka polünoomide ringis. Kuid maatriksite ringides leidub nullist erinevaid elemente, mis korrutamisel annavad nullmaatriksi. Näiteks

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ka funktsioonide ringides leiduvad analoogilise omadusega elemendid. Näiteks tavalise funktsioonide korrutamise puhul on funktsioonide

$$f_1(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{kui } x \geqslant 1 \\ 0, & \text{kui } x < 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x \geqslant -1 \\ x + 1, & \text{kui } x < -1 \end{cases}$$

korrutis nullfunktsioon, kuigi need funktsioonid ise erinevad nullfunktsioonist (funktsioonide f_1 ja f_2 graafikud on toodud joonisel 167).

Nullist erinevaid ringi elemente, mille korrutis on null, nimetatakse nulliteguriteks. Ringe, milles ei leidu selliseid elemente, nimetatakse nulliteguriteta ringideks.

Nulliteguriteta ringi moodustavad kõik poolsirgel $0 \leqslant x < \infty$ defineeritud pidevad reaalmuutuja funktsioonid eespool defineeritud korrutamise $*$ suhtes. Nimelt väidab funktsionaalanalüüsis tuntud Titchmarshi teoreem, et kui funktsioonid $f(x)$ ja $g(x)$ ei võrdu samaselt nulliga, siis ka funktsioon

$\int_0^x f(x-t)g(t)\,dt$ ei võrdu samaselt nulliga.

Eriti tähtsad on kommutatiivsed ja assotsiatiivsed nullitegurideta ühikelemendiga ringid, mis kannavad integriteetkondade nime. Integriteetkondades, näiteks täisarvude ja polünoomide ringides, saab edukalt arendada jaguvuse teooriat.

Näite kommutatiivsest ja assotsiatiivsest ühikuga ringist, millel leiduvad idempotendid ja nullitegurid, võib saada, kui defineerida numbritest 0, 1, 2, 3, 4 ja 5 koosneval hulgal liitmine ja korrutamine järgmiselt:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

$\odot$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Nimelt on siin tekkivas ringis kaks idempotenti, mis erinevad ühik- ja nullelemendist (nendeks on elemendid 3 ja 4) ning kaks paari nullitegureid (2 ja 3 ning 3 ja 4).

Praegu vaadeldud ring on erijuht laiemast ringide klassist — jäägiklassiringide klassist. Jäägiklassiring mooduli n järgi koosneb nimelt n elemendist — arvudest 0, 1, 2, ..., $n-1$, millede liitmine $\oplus$ ja korrutamine $\odot$ erinevad tavalisest arvude liitmisest ja korrutamisest selle poolest, et tavaline summa ning korrutis jagatakse arvuga n ning operatsioonide $\oplus$ ja $\odot$ tulemuseks loetakse tekkinud jääk. Niisiis:

$$k \oplus l = \begin{cases} k+l, & \text{kui } k+l < n, \\ k+l-n, & \text{kui } k+l \geqslant n, \end{cases}$$

$$k \odot l = \begin{cases} k \cdot l, & \text{kui } kl < n, \\ k \cdot l - n, & \text{kui } n \leqslant kl < 2n, \\ k \cdot l - 2n, & \text{kui } 2n \leqslant kl < 3n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Võib näidata, et juhul kui $n = p$ on algarv, ei ole jäägiklassiringil mooduli p järgi nullitegureid. Kui aga n on esitatav kahe arvu k ja l korrutisena, siis on alati $k \cdot l = 0$ ja seega moodustavad k ja l nullitegurite paari.

Huvitava ringi näite võib konstrueerida «arvudest», mis on esitatud vasakule lõpmatuseni ulatuva täisarvude jadade abil. Sellisteks «arvudeks» on näiteks

$$\ldots 0000127, \ldots 55554321, \ldots 12312312345678910, \ldots 2951413$$

jne. Nimetame neid siin lihtsalt lõpmatuteks arvudeks.

Kahte lõpmatut arvu loeme võrdseteks, kui neil on omavahel võrdsed paremalt poolt lugedes võrdsel kaugusel asuvad numbrid. Kahe lõpmatu arvu summa, vahe või korrutise n viimase

numbri leidmiseks tuleb võtta mõlemal arvul n viimast numbrit ja nende poolt moodustatud täisarvud omavahel vastavalt liita, lahutada või korrutada. Tulemuse n viimast numbrit annavadki otsitava lõpmatu arvu n viimast numbrit.

Näiteks

$$\begin{array}{r} \ldots 7654321 \\ +\ \ldots 1197531 \\ \hline \ldots 8851852 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots 212121 \\ -\ \ldots 323232 \\ \hline \ldots 888889 \end{array}$$

aga niimoodi toimub lõpmatute arvude korrutamine

$$\begin{array}{r} \ldots 579323 \\ \times\ \ldots 131231 \\ \hline \ldots 579323 \\ \ldots 737969 \\ \ldots 158646 \\ \ldots 579323 \\ \ldots 737969 \\ \ldots 579323 \\ \hline \ldots\ldots\ldots 136613 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \ldots 9376 \\ \times\ \ldots 9376 \\ \hline \ldots 6256 \\ \ldots 5632 \\ \ldots 8128 \\ \ldots 4384 \\ \hline \ldots\ldots 9376 \end{array}$$

Ilmselt moodustavad lõpmatud arvud kommutatiivse rühma liitmise suhtes ja assotsiatiivse ning kommutatiivse ühikuga poolrühma korrutamise suhtes (ühik- ja nullelementideks on vastavalt arvud $\ldots 0001$ ja $\ldots 0000$). See, et liitmine ja korrutamine on assotsiatiivsed ja rahuldavad distributiivsuse seadust, järeldub asjaolust, et kõiki arvutusi lõpmatute arvudega võib kuitahes täpselt lähendada vastavate arvutustega lõplike arvudega, mille jaoks need omadused kehtivad.

Lõpmatute arvude ring sisaldab tavaliste täisarvude ringi, sest iga täisarvu (näiteks arve 273 ja 10073) võib esitada lõpmatu arvuna, kirjutades arvu ette lõpmatul hulgal nulle (meie näite puhul on nendeks lõpmatuteks arvudeks $\ldots 0000273$ ja $\ldots 000010073$).

Peale ühik- ja nullelemendi leidub antud ringis veel kaks idempotenti. Kolmandaks idempotendiks on lõpmatu arv d, mis on ümbritsetud raamiga järgmises tabelis, kus iga järgmine arv on eelmise ruut.

$$\begin{array}{r} \boxed{5} \\ \boxed{25} \\ \boxed{625} \\ 390625 \\ 152587\boxed{9}0625 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Neljandaks idempotendiks lõpmatute arvude ringis on arv $e = 1 - d = \ldots 09376$. Tõepoolest, $e^2 = (1-d)^2 = 1 - 2d + d^2 = 1 - 2d + d = 1 - d = e$.

Vaadeldavas ringis leidub ka nullitegureid. Need on idempotendid e ja d. Tõepoolest,

$$e \cdot d = (1-d)d = d - d^2 = d - d = 0.$$

Lihtne on märgata, et nii võib arutleda suvalise ringi puhul: kui ringis leidub idempotent d, siis on ka $1 - d$ idempotent ning $d(1-d) = 0$.

Ülesandeid.

50. Millised idempotendid ja nullitegurid esinevad jäägiklassiringis mooduli 30 järgi?

51. Tõestada, et ruutmaatriksite ringis on peale null- ja ühikelemendi vaid järgmised idempotendid:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

kus a on suvaline reaalarv.

52. Leida lõpmatu arvu $\ldots 0101010101^2$ viisteist viimast numbrit.

53. Näidata, et jäägiklassiringis mooduli 7 järgi pole nullitegureid.

MITTEASSOTSIATIIVSED RINGID

Kõik senivaadeldud ringid olid assotsiatiivsed. Leidub ka mitteassotsiatiivseid ringe; üks selliseid on kolmedimensiooniliste vektorite hulk liitmise ning vektorkorrutamise operatsioonide suhtes. Tuletame meelde, et vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vektorkorrutis $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ on vektor pikkusega $ab \sin \gamma$ (kus a ja b on vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ pikkused, γ aga nurk vektorite $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vahel), mis asetseb ruumis risti vektoreid $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ läbiva tasandiga, kusjuures selliselt, et vektorid $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ moodustavad nn. parema käe kolmiku. Kollineaarsete, s. o. ühe sirge vektorite korral $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Selleks et veenduda vektorkorrutamise mitteassotsiatiivsuses, valime nullist erinevad vektorid $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ nii, et $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ oleksid kollineaarsed, $\mathbf{c}$ aga nendega risti. Siis

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \text{ ja ka } (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Samal ajal $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ on risti vektoriga $\mathbf{b}$ ja ühtlasi ka vektoriga $\mathbf{a}$ ning erineb nullist; seega $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ on nullist erinev, sest mittekollineaarsete vektorite vektorkorrutis on null vaid siis, kui üks teguritest on null.

On võimalik näidata, et vektorite ringis, milles korrutamiseks on vektorkorrutamine, kehtib Jacobi samasus:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Et iga vektor $\mathbf{a}$ on iseendaga kollineaarne, siis

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$



Joonis 168. Sophus Lie (1842—1899), tuntud norra algebraist, nn. pidevate ehk Lie rühmade teooria looja. Koos F. Kleiniga aitas kaasa geomeetria ümberkorraldamisele rühmateoreetiliste põhimõtete järgi.

Ringi, milles on täidetud Jacobi samasus ja samasus $a^2 = 0$, nimetatakse Lie ringiks. Järelikult kolmemõõtmelise ruumi vektorid moodustavad Lie ringi vektorite liitmise ja vektorkorrutamise operatsioonide suhtes.

Lie ringide ja assotsiatiivsete ringide vahel on tihe side. Nimelt võib igast assotsiatiivsest ringist R tuletada Lie ringi L, kui asendada ringis korrutamise tehe operatsiooniga

$$a \circ b = ab - ba.$$

Viimast nimetatakse kommuteerimise operatsiooniks.

Tõepoolest, kommuteerimise operatsioon on liitmise suhtes distributiivne nii vasakult:

$$a \circ (b + c) = a(b + c) - (b + c)a = ab + ac - ba - ca =$$
$$= (ab - ba) + (ac - ca) = a \circ b + a \circ c,$$

kui ka paremalt

$$(a + b) \circ c = (a + b)c - c(a + b) = ac + bc - ca - cb =$$
$$= (ac - ca) + (bc - cb) = a \circ c + b \circ c,$$

seega on meil tegemist ringiga L.

Ilmselt võrdub ringi L iga elemendi ruut nulliga:

$$a \circ a = aa - aa = 0.$$

Jääb vaid veenduda Jacobi samasuse kehtivuses. Ka see on kontrollitav vahetu arvutamisega:

$$(a \circ b) \circ c + (b \circ c) \circ a + (c \circ a) \circ b =$$
$$= (ab - ba) \circ c + (bc - cb) \circ a + (ca - ac) \circ b =$$
$$= (ab - ba)c - c(ab - ba) + (bc - cb)a -$$
$$- a(bc - cb) + (ca - ac)b - b(ca - ac) = 0.$$

Seega on L tõesti Lie ring.

Kuigi igast assotsiatiivsest ringist on lihtne saada Lie ringi, on vastupidine ülesanne — leida antud Lie ringi L jaoks assotsiatiivne ring, millest L on saadav ülalkirjeldatud teel — väga keerukas ning ei tarvitse isegi olla alati lahenduv.

Huvitav on märkida, et Lie ringid on (väheste eranditega)

mittekommutatiivsed, sest igas sellises ringis on täidetud antikommutatiivsuse seadus. Tõepoolest, Lie ringi iga elemendi ruut on võrdne nulliga, olgu see element a, b või $a+b$:

$$a^2 = b^2 = (a+b)^2 = 0.$$

Kuna me ei tea, kas ringis on täidetud kommutatiivsuse seadus, siis ei või me $(a+b)^2$ arvutamisel kasutada valemit

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

millega oleme harjunud, vaid peame korrutama $(a+b)$ liikmeti $(a+b)$-ga, muutmata seejuures tegurite järjekorda. Saame

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = 0.$$

Seose $a^2 = b^2 = 0$ tõttu järeldub siit

$$ab + ba = 0 \text{ ehk } ab = -ba.$$

Kui assotsiatiivne ring on kommutatiivne, siis temast ülalkirjeldatud viisil saadav Lie ring on nullkorrutamisega ring:

$$ab = ba \text{ korral } a \circ b = ab - ba = 0.$$

Üldiselt võib öelda, et elemendid, mis kommuteeruvad assotsiatiivses ringis, osutuvad vastavas Lie ringis nulliteguriteks.

Kommutatiivset ringi, milles on rahuldatud järgmine assotsiatiivsuse seadust üldistav samasus:

$$[(a \cdot a) \cdot b] \cdot a = (a \cdot a) \cdot (b \cdot a),$$

nimetatakse Jordani ringiks. Ka kõik assotsiatiivsed ringid on ühtlasi Jordani ringid.

Ka Jordani ringe võib saada assotsiatiivsetest ringidest, kui tuua neis sisse uus korrutamine — nüüd juba valemi

$$a * b = ab + ba$$

järgi. See tehe on ilmselt kommutatiivne:

$$a * b = ab + ba = ba + ab = b * a$$

ning on liitmise suhtes distributiivne. Selles võib veenduda samuti, nagu me seda tegime Lie ringide puhul, s. t. otsese arvutamisega. Kehtib ka samasus

$$[(a * a) * b] * a = (a * a) * (b * a).$$

Tõepoolest:

$$a * a = a \cdot a + a \cdot a = 2a^2$$

ja

$$\begin{aligned}
&[(a * a) * b] * a = (2a^2 * b) * a = (2a^2 \cdot b + b \cdot 2a^2) * a = \\
&= (2a^2 \cdot b + b \cdot 2a^2) \cdot a + a \cdot (2a^2 \cdot b + b \cdot 2a^2) = \\
&= 2a^2 ba + 2ba^3 + 2a^3 b + 2aba^2 = \\
&= 2a^2 (ba + ab) + 2(ba + ab) a^2 = \\
&= 2a^2 * (ba + ab) = (a * a) * (b * a).
\end{aligned}$$

Tavalise korrutamise asendamine $*$-korrutamisega võib anda mitteassotsiatiivse Jordani ringi vaid siis, kui lähtering ei ole kommutatiivne. Assotsiatiivse ja kommutatiivse ringi korral tekib jälle assotsiatiivne ring:

$$(a*b)*c=(ab+ba)*c=(ab+ba)c+c(ab+ba)=$$
$$=abc+bac+cab+cba=a(bc+cb)+(bc+cb)\cdot a=$$
$$=a(b*c)+(b*c)a=a*(b*c).$$

Veel ühe üldiselt mitteassotsiatiivsete, kuid assotsiatiivsetele ringidele küllalt lähedaste ringide klassi moodustavad nn. alternatiivsed ringid, mille iga kahe elemendi a ja b korral

$$(aa)b=a(ab) \text{ ja } (ba)a=b(aa),$$

s. t. assotsieeruvad sellised elementide järjestatud kolmikud, milles on kaks kõrvuti seisvat võrdset elementi. Kui sümboliga $[abc]$ tähistada elementide a, b ja c nn. assotsiaatorit

$$(ab)c-a(bc),$$

siis võib alternatiivsuse tingimuse esitada kujul

$$[aab]=[baa]=0,$$

samal ajal kui tavaline assotsiatiivsus on esitatav kujul

$$[abc]=0.$$

Huvitav on märkida, et alternatiivseteks osutuvad need ja ainult need ringid, milles iga kahe elemendi korral neid elemente sisaldav vähim alamring on assotsiatiivne. Võrdluseks märgime, et assotsiatiivsetes ringides on iga alamring assotsiatiivne. Peale selle vaadeldakse veel nn. assotsiatiivsete astmetega ringe, s. o. selliseid ringe, mis ei tarvitse olla alternatiivsed, kuid milles iga elemendi korral vähim seda elementi sisaldav alamring on assotsiatiivne.

Vaatleme nüüd näitena ringi, mille moodustavad järgmised maatriksid üle jäägiklassiringi mooduli 3 järgi (s. t. maatriksi elemendid on selle jäägiklassiringi elemendid) tavalise maatriksite liitmise ja korrutamise suhtes, kusjuures maatriksite summa ja korrutise elementide arvutamisel arvestatakse selle jäägiklassi iseärasusi:

$$0=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ a=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\ d=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},$$

$$e=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\ f=\begin{bmatrix}2&0\\0&0\end{bmatrix},\ g=\begin{bmatrix}2&1\\0&0\end{bmatrix},\ h=\begin{bmatrix}2&2\\0&0\end{bmatrix}.$$

Jäägiklassiringis mooduli 3 järgi võib lugeda, et

$$3=0,\ 4=1=-2 \text{ ja } 2=-1.$$

Seetõttu

$$-a=b,\ -c=f,\ -d=h \text{ ja } -e=g,$$

nii et vaadeldava ringi korrutamistabel näeb välja nii, nagu märgitud tabelis:

	0	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	a	b	c	d	e	f	g	h
d	0	a	b	c	d	e	f	g	h
e	0	a	b	c	d	e	f	g	h
f	0	b	a	f	h	g	c	e	d
g	0	b	a	f	h	g	c	e	d
h	0	b	a	f	h	g	c	e	d

Moodustame sellele ringile vastavad Lie ja Jordani ringid. Nende korrutamistabelid on esitatud vastavalt tabelites:

$\circ$	0	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	b	b	b	a	a	a
b	0	0	0	a	a	a	b	b	b
c	0	a	b	0	a	b	0	a	b
d	0	a	b	b	0	a	a	b	0
e	0	a	b	a	b	0	b	0	a
f	0	b	a	0	b	a	0	b	a
g	0	b	a	b	a	0	a	0	b
h	0	b	a	a	0	b	b	a	0

$*$	0	a	b	c	d	e	f	g	h
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	0	0	a	a	a	b	b	b
b	0	0	0	b	b	b	a	a	a
c	0	a	b	f	g	h	c	d	e
d	0	a	b	g	h	c	e	c	d
e	0	a	b	h	c	g	d	e	c
f	0	b	a	c	e	d	f	h	g
g	0	b	a	d	c	e	h	g	c
h	0	b	a	e	d	c	g	c	h

Viimasest kahest korrutamistabelist on selgesti näha esimese ringi antikommutatiivsus ning teise ringi kommutatiivsus. Et mõlemad ringid on mitteassotsiatiivsed, seda näitavad järgmised arvutused:

$$(e \circ h) \circ a = a \circ a = 0. \qquad e \circ (h \circ a) = e \circ b = b.$$
$$(c * d) * g = g * g = g. \qquad c * (d * b) = c * c = f.$$

Kumbki nendest ringidest pole isegi alternatiivne. Tõepoolest, elementide a ja c korduval liitmisel saame kõik ringi elemendid:

$0 = a - a$, $b = a + a$, $d = a + c$, $e = c + 2a$,
$f = 2c$, $g = 2c + a$, $h = 2a + 2c$.

Järelikult langeb vähim alamring, mis neid sisaldab, kokku terve ringiga ning on seega mitteassotsiatiivne. Alternatiivse ringi korral peab aga iga vähim kaht elementi sisaldav alamring olema assotsiatiivne.

Ülesandeid.

54. Näidata, et kolme üksteisega ristuva ühikvektori korral kehtib Jacobi samasus.

55. Kui lugeda, et $1 + 1 = 0$ ja $-1 = 1$, siis maatriksid

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ja } 0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

moodustavad assotsiatiivse ringi. Leida sellele ringile vastavad Lie ja Jordani ringid. Kas nad on assotsiatiivsed?

56. Tuua näiteid kommutatiivsetest Lie ringidest.

VEEL KORD STRUKTUURIDEST

Esimeses peatükis tutvusime osaliselt järjestatud hulkade teooria seisukohalt väga tähtsa struktuuri mõistega. Nagu me mööda minnes mainisime ja nagu kohe näitame, on võimalik struktuuriteooriat arendada puhtalgebraliste meetoditega, kusjuures ilmneb struktuuride tihe seos teiste algebraliste süsteemidega.

Tuletame meelde, et struktuuri mõiste defineerimisel nõudsime ühendi ja lõike olemasolu iga kahe elemendi puhul. Kuid lõiget ja ühendit võib vaadelda algebraliste tehetena. Nende tehete definitsioonist osaliselt järjestatud hulgas järeldub otsekohe, et kumbki neist on idempotentne, kommutatiivne ja assotsiatiivne ning rahuldab neelamisseadust. Seepärast võimegi defineerida struktuuri lihtsalt hulgana, kus on defineeritud kaks binaarset tehet, millest kumbki rahuldab idempotentsuse, kommutatiivsuse, assotsiatiivsuse ja neelamisseadusi.

Vastupidi, lähtudes sellest algebralisest definitsioonist, võime defineerida struktuuris osalise järjestuse järgmisel viisil:

$a \leqslant b$ siis ja ainult siis, kui $a \cap b = a$ või $a \cup b = b$.

Selles, et tegemist on tõepoolest osaliselt järjestatud hulgaga, samuti nagu selles, et $a \cap b$ ja $a \cup b$ etendavad selles hulgas lõike ja ühendi osa, veendub kergesti lugeja ise.

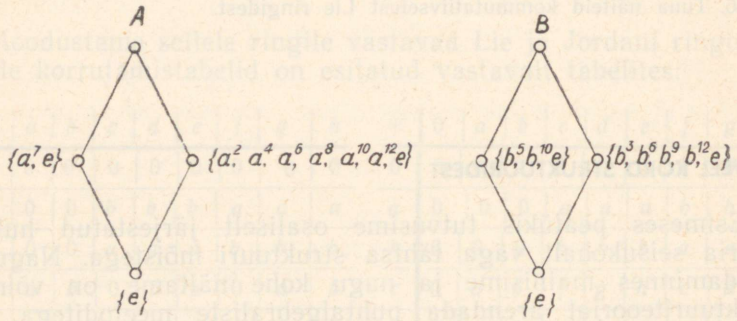
Tänapäeva algebras on struktuurid eriti tähtsal kohal selle-

pärast, et näiteks antud rühma kõik alamrühmad või antud ringi kõik alamringid, samuti nagu antud hulga kõik alamhulgad moodustavad struktuuri.

Siinjuures vaadeldakse näiteks rühmade korral lõike osas alamrühmade hulgateoreetilist ühisosa võtmist, $A \cup B$ aga tähendab vähimat alamrühma, mis sisaldab alamrühmi A ja B.

Märgime, et kui kaks rühma on omavahel isomorfsed, siis ka nende alamrühmade struktuurid on samuti isomorfsed, kusjuures struktuuride isomorfismi mõiste defineeritakse tavalisel viisil, nõudes mõlema tehte säilimist üksühese vastavuse puhul. Vastupidine väide üldiselt ei kehti: isomorfsete alamrühmade struktuuridega rühmad ei tarvitse ise olla isomorfsed.

Näiteks tsüklilised rühmad A ja B, mis koosnevad üks 14-st ja teine 15-st elemendist ning on seega ilmselt mitteisomorfsed, omavad isomorfseid alamrühmade struktuure:



Milliseid lisatingimusi peavad rahuldama kaks rühma, et nende alamrühmade struktuuride isomorfismist järelduks rühmade isomorfism — see on tänapäeva algebra üks huvitavamaid ja raskemaid probleeme, mis seni pole veel üldjuhul lahendatud.

Igas lõplikus struktuuris on olemas ühik- ja nullelement, mis suvalise struktuuri elemendi a korral rahuldavad seoseid:

$$a \cup I = I,\ a \cap I = a,\ a \cup 0 = a,\ a \cap 0 = 0.$$

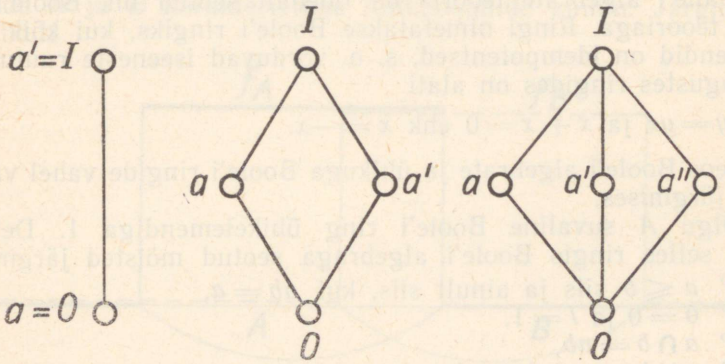
Esimeses peatükis antud struktuuri definitsiooni kohaselt on need elemendid vaadeldavad kui struktuuri kõigi elementide ühend ja lõige. Ka mõningates lõpmatutes struktuurides võib esineda kas ühik- või nullelement või ka mõlemad korraga. Näiteks eespool vaadeldud täisarvude lõpmatus struktuuris, milles järjestus on defineeritud ruutude võrdlemise kaudu, on olemas nullelement — arv null, kuid puudub ühikelement. Lõigul $[-1, 2]$ asuvate reaalarvude lõpmatus struktuuris on arv -1 nullelemendiks ja arv 2 ühikelemendiks.

Ühik- ja nullelementi omavatest struktuuridest tuleb mai-

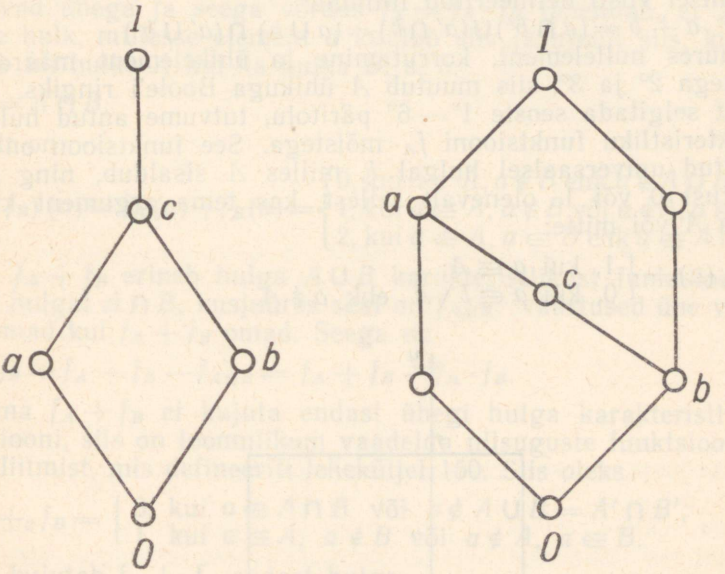
nida tähtsat täienditega struktuuride klassi: struktuuri, mis sisaldab elemente 0 ja I, nimetatakse täienditega struktuuriks, kui iga selle struktuuri elemendi a jaoks leidub struktuuris nn. täiend a', s. o. niisugune element, et

$a \cup a' = I$ ja $a \cap a' = 0$.

Täienditega struktuurideks on näiteks järgmised struktuurid:



kusjuures viimases neist on igaühel kolmest elemendist a, a' ja a'' isegi kaks täiendit (näiteks a' täiendiks on a ja a''). Järgmised struktuurid aga ei ole täienditega struktuurideks:



sest siin puuduvad täiendid elementidel a, b ja c.

Eriti tähtsaks struktuuride klassiks on distributiivsete täiendidega struktuuride ehk Boole'i algebrate klass. Kahe väga olulise Boole'i algebraga kohtusime raamatu kahes esimeses peatükis: need olid hulkade algebra ja lausete algebra. Väga tähtis on ka kõigi kahel hulgal A ja B defineeritud seoste Boole'i algebra, mis on, nagu järeldub seose definitsioonist, isomorfne hulga $A \times B$ alamhulkade Boole'i algebraga.

Boole'i algebrate teooria on tihedalt seotud nn. Boole'i ringide teooriaga. Ringi nimetatakse Boole'i ringiks, kui kõik tema elemendid on idempotentsed, s. o. võrduvad iseeneste ruutudega. Niisugustes ringides on alati

$$xy = yx \text{ ja } x + x = 0 \text{ ehk } x = -x.$$

Seos Boole'i algebrate ja ühikuga Boole'i ringide vahel väljendub järgmises.

Olgu A suvaline Boole'i ring ühikelemendiga 1. Defineerime selles ringis Boole'i algebraga seotud mõisted järgmiselt:

1° $a \leqslant b$ siis ja ainult siis, kui $ab = a$,
2° $0 = 0$ ja $1 = 1$,
3° $a \cap b = ab$,
4° $a \cup b = a + b - ab$,
5° $a' = 1 - a$,

siis A muutub Boole'i algebraks.

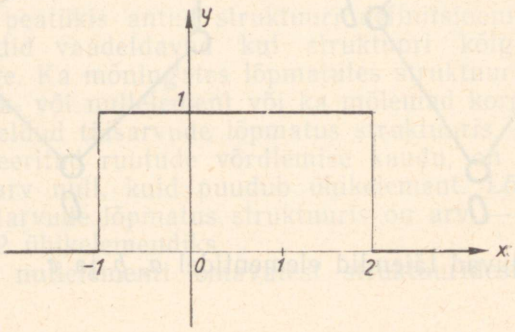
Vastupidi, kui A on suvaline Boole'i algebra ja temas on järgmisel viisil defineeritud liitmine:

6° $a + b = (a \cap b') \cup (a' \cap b) = (a \cup b) \cap (a' \cup b')$,

kusjuures nullelement, korrutamine ja ühikelement määratakse seostega 2° ja 3°, siis muutub A ühikuga Boole'i ringiks.

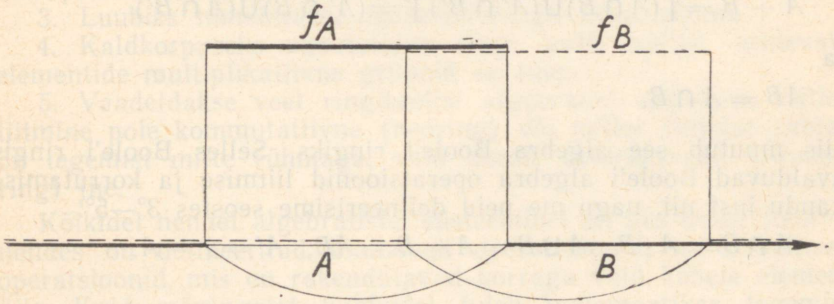
Et selgitada seoste 1° — 6° päritolu, tutvume antud hulga A karakteristliku funktsiooni f_A mõistega. See funktsioon on defineeritud universaalsel hulgal I, milles A sisaldub, ning omab väärtust 0 või 1 olenevalt sellest, kas tema argument kuulub hulka A või mitte:

$$f_A(a) = \begin{cases} 1, \text{ kui } a \in A; \\ 0, \text{ kui } a \in I \setminus A \text{ ehk } a \notin A. \end{cases}$$



Näiteks kui vaadelda universaalse hulgana reaalarvude hulka, siis lõigu $[-1, 2]$ karakteristlik funktsioon näeb välja järgmiselt: Hulk A on oma karakteristliku funktsiooniga täiesti määratud: element $a \in A$, kui $f_A(a) = 1$ ja $a \notin A$ kui $f_A(a) = 0$.

Vaadeldes universaalse hulga osas näiteks jälle reaalarvude hulka, selgitame, kuidas näevad välja hulkade $A \cap B$, $A \cup B$ ja $A' = I \setminus A$ karakteristlikud funktsioonid, kuidas nad avalduvad hulkade A ja B karakteristlike funktsioonide kaudu. Järgmiselt graafikult



võib järeldada, et

$$f_{A \cap B} = f_A f_B \text{ ja } f_{I \setminus A} = 1 - f_A,$$

sest näiteks $f_A \cdot f_B = 1$ siis ja ainult siis, kui mõlemad tegurid võrduvad ühega ja seega võrdus $f_X = f_A \cdot f_B$ tähendab, et X on selline hulk, millesse element a kuulub siis ja ainult siis, kui ta kuulub nii hulka A kui ka hulka B, s. o.

$$X = A \cap B.$$

Ilmselt on

$$(f_A + f_B)(a) = f_A(a) + f_B(a) = \begin{cases} 0, \text{ kui } a \notin A, a \notin B \text{ ehk } a \notin A \cup B, \\ 1, \text{ kui } a \in A, a \notin B \text{ või } a \notin A, a \in B, \\ 2, \text{ kui } a \in A, a \in B \text{ ehk } a \in A \cap B. \end{cases}$$

Seega $f_A + f_B$ erineb hulga $A \cup B$ karakteristlikust funktsioonist ainult hulgal $A \cap B$, kusjuures seal on $f_{A \cup B}$ väärtused ühe võrra väiksemad kui $f_A + f_B$ omad. Seega on

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B} = f_A + f_B - f_A \cdot f_B.$$

Kuna $f_A + f_B$ ei kujuta endast ühegi hulga karakteristlikku funktsiooni, siis on loomulikum vaadelda niisuguste funktsioonide jaoks liitmist, mis defineeriti leheküljel 150. Siis oleks

$$f_A +_2 f_B = \begin{cases} 0, \text{ kui } a \in A \cap B \text{ või } a \notin A \cup B = A' \cap B', \\ 1, \text{ kui } a \in A, a \notin B \text{ või } a \notin A, a \in B. \end{cases}$$

Seega kujutab $f_A +_2 f_B$ endast hulga

$$(A \cap B) \cup (A' \cap B')$$

täiendi ehk hulga

$$(A \cap B') \cup (A' \cap B)$$

karakteristlikku funktsiooni.

Tuletame nüüd meelde, et universaalse hulga kõik alamhulgad moodustavad Boole'i algebra. Kui selle algebra elementide — hulkade jaoks defineerida liitmise ja korrutamise operatsioonid niimoodi, et $A + B$ ja $A \cdot B$ tähendaksid hulki karakteristlike funktsioonidega $f_A +_2 f_B$ ja $f_A \cdot f_B$, s. o. järgmiselt:

$$A + B = [(A \cap B) \cup (A' \cap B')]' = (A' \cap B) \cup (A \cap B')$$

ja

$$AB = A \cap B,$$

siis muutub see algebra Boole'i ringiks. Selles Boole'i ringis avalduvad Boole'i algebra operatsioonid liitmise ja korrutamise kaudu just nii, nagu me neid defineerisime seostes 3°—5°:

$$A \cap B = A \cdot B, \quad A \cup B = A + B - AB, \quad A' = I - A.$$

Ülesandeid.

57. Hulgal A olgu defineeritud kaks idempotentset, kommutatiivset ja assotsiatiivset tehet $\cap$ ja $\cup$, mis rahuldavad kumbki neelamisseadust. Peale selle olgu hulgal A defineeritud seos $a \leqslant b$ järgmiselt: $a \leqslant b$, kui $a \cap b = a$. Näidata, et

1° seose $\leqslant$ suhtes on A osaliselt järjestatud hulk,

2° A on isegi struktuur esimese peatüki mõttes, kusjuures $a \cap b$ ja $a \cup b$ on vastavalt elementide a ja b lõikeks ning ühendiks.

58. Näidata, et igas idempotentide ringis on $xy = yx$ ja $x + x = 0$.

59. Olgu A ühikuga Boole'i ring. Näidata, et A muutub Boole'i algebraks, kui Boole'i algebra tehted ja järjestus defineerida seostega 1° — 5°.

60. Olgu A suvaline Boole'i algebra. Seoste 2°, 3° ja 6° abil defineerime A-s korrutamise ja liitmise. Näidata, et A muutub ühikuga ringiks ja et see ring kujutab endast Boole'i ringi.

61. Kas poolrühma kõik alampoolrühmad moodustavad struktuuri (ühend ja lõige on defineeritud analoogiliselt sellega, kuidas neid defineeritakse rühma alamrühmade struktuuris).

ALGEBRALISE OPERATSIOONI MOISTE LAIENDAMINE

Me oleme tutvunud juba paljude algebraliste süsteemidega. Nende seas olid ühe operatsiooniga süsteemid, nagu rühm, grupoid ja poolrühm, ning terve rida kahe operatsiooniga süsteeme: ringid, struktuurid, korpused, Lie ja Jordani ringid jne. Paljudes

üldalgebra osades ja tema rakendustes esineb ka terve rida teisi algebralisi süsteeme. Tutvustame siin mõningaid nendest.

1. Kvaasirühm on grupoid, milles võrrandid

$$ax = b \text{ ja } ya = b$$

on iga a ja b korral lahenduvad (kuigi mitte tingimata üheselt). Kvaasirühma nimetatakse tihti veel jagamisega grupoidiks.

2. Kvaasikorpus on ring, mille nullist erinevate elementide multiplikatiivne grupoid on kvaasirühm.

3. Luubiks nimetatakse ühikelemendiga kvaasirühma.

4. Kaldkorpuseks nimetatakse ringi, mille nullist erinevate elementide multiplikatiivne grupoid on luup.

5. Vaadeldakse veel ringitaolisi algebralisi süsteeme, milles liitmine pole kommutatiivne (neoring) või milles liitmise suhtes on tegemist mitte rühmaga, vaid ainult poolrühmaga (kvaasiring) jne.

Kõikidel nendel algebralistel süsteemidel on üks ühine joon — nendes on defineeritud binaarsed operatsioonid, s. o. sellised operatsioonid, mis on rakendatavad korraga vaid kahele elemendile. Kuid mõningatel puhkudel tuleb matemaatikas tegemist ka nn. ternaarsete operatsioonidega, s. o. operatsioonidega, mis pole rakendatavad vähem kui kolmele elemendile, seevastu aga antud hulga igale kolmele elemendile a, b, c, mis on võetud kindlas järjekorras, seavad vastavusse mingi elemendi $[abc]$ samast hulgast. Seda elementi nimetatakse elementide a, b ja c ternaarseks korrutiseks.

Vaatleme näiteks hulga $M = \{1, 2, 3, 4\}$ üksüheseid kujutusi hulgaks $N = \{6, 7, 8, 9\}$. Kahte sellist kujutust, näiteks kujutusi

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \text{ ja } \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix},$$

pole võimalik omavahel läbi korrutada, sest esimese kujutuse φ rakendamise tulemusena saame hulga N elemendid, millele teine kujutus ψ pole rakendatav. Me võiksime küll saadud elementidele rakendada teise kujutuse ψ pöördkujutust

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

s. o. defineerida korrutamine järgmiselt:

$$\varphi \circ \psi = \varphi\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

kuid siis saaksime kahe kujutuse järjest rakendamise tulemusena hulga M kujutuse iseendaks ning seega poleks vaadeldav üksüheste kujutuste hulk sellise korrutamise suhtes kin-

nine. Nimelt oleksid φ ja ψ üksühesed kujutused hulgast M hulka N, nende korrutis $\varphi \circ \psi$ aga hulga M üksühene teisendus iseendaks, s. o. hulga M substitutsioon.

Olukord muutub, kui vaadelda korraga hulga M kolme üksühest kujutust φ, ψ ja χ hulka N, ning moodustada nende ternaarne «korrutis» $[\varphi\psi\chi]$ järgmise reegli järgi:

$$[\varphi\,\psi\,\chi] = \varphi \cdot \psi^{-1} \cdot \chi.$$

Näiteks kui

$$\chi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

ning φ ja ψ säilitavad endise tähenduse, siis saame

$$[\varphi\,\psi\,\chi] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Sellise ternaarse tehtega on tegemist näiteks diferentsiaalgeomeetrias (üldiselt lõpmatute hulkade alamhulkade vaheliste üksüheste kujutuste korral). Sellel tehtel on terve rida samasuste abil üleskirjutatavaid omadusi, mis lubavad abstraktselt defineerida ühe ternaarse operatsiooniga algebralise süsteemi. Tuntud nõukogude matemaatik, Saraatovi Ülikooli professor V. V. Vagner, kes esimesena hakkas uurima selliseid süsteeme, andis neile nime «gruuda».

Mõningates teistes matemaatika osades on mugav opereerida ka selliste tehetega, mis on korraga rakendatavad neljale, viiele või isegi n elemendile (kus n on mistahes suurus). Näiteks on mõnikord kasulik defineerida ringis A n-kohalised tehted valemitega

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_n$$

või

$$[a_1 a_2 \ldots a_n] = a_1 a_2 \ldots a_{n-1} + a_n$$

(a_1, a_2, ..., a_n on suvalised A elemendid).

Teiselt poolt on matemaatikas hästi tuntud sellised tehted, nagu vektori või maatriksi korrutamine arvuga, mis toimub väga lihtsa reegli järgi: vektori iga komponent või maatriksi iga element tuleb korrutada selle arvuga. Taolisi tehteid nimetatakse unaarseteks teheteks (uno = üks), sest nad on rakendatavad hulga igale üksikule elemendile.

Ka pöördelemendi võtmine rühmas on vaadeldav unaarse algebralise tehtena. Unaarsete tehete teisi näiteid saame, kui vaatleme eituse operatsiooni matemaatilises loogikas või täiendi võtmise operatsiooni hulgateoorias.

Unaarsed tehted kujutavad endast faktiliselt teisendusi vastavates hulkades. Seepärast ei peaks lugejat imestama fakt, et käsitluse ühtlustamiseks räägitakse ka ühe elemendi (nullelement, ühikelement) eraldamisest algebralises süsteemis kui operatsioonist, seekord nullaarsest. Niisiis, nullaarne operatsioon seab igale elemendile vastavusse ühe kindla fikseeritud elemendi, millega eraldabki selle elemendi teiste hulga elementide seast.

Nüüd peaks selge olema, kuidas on jõutud järgmise definitsioonini: kõneldakse, et hulgas A on defineeritud n-aarne ($n \geqslant 1$) tehe ω, kui igale kindlas järjekorras võetud n elemendile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ hulgast A on seatud vastavusse mingi kindel element hulgast A. Seda elementi tähistatakse sümboliga

$$a_1 a_2 \ldots a_n \omega$$

ning nimetatakse vastavate elementide ω-korrutiseks.

Muidugi pole selline kirjutusviis alati mugav, eriti binaarsete operatsioonide korral, kus oleme harjunud kirjutama $a+b$, mitte aga $ab\omega$, kuid unaarsete operatsioonide puhul on selline üleskirjutus peaaegu kõige mugavam. Näiteks kui ω asemel kirjutada $\bar{a}$ ja $a\omega_1$ asemel a', siis võivad esineda sellised kirjutised nagu

$$\overline{\overline{\overline{a'}}}',$$

mis meie tähistusviisi korral tähendab lihtsalt elementi $a\omega_1\omega^4\omega_1{}^2\omega$. Pealegi on selline kirjutusviis universaalne ja rakendatav iga n korral.

Ülesandeid.

62. Näidata, et käesolevas punktis vaadeldud kujutuste gruudas kehtib järgmine assotsiatiivsusetaoline seadus

$$[[\varphi_1\varphi_2\varphi_3]\,\varphi_4\varphi_5] = [\varphi_1\ \varphi_2[\varphi_3\varphi_4\ \varphi_5]]$$

ning seadus

$$[\psi\psi\varphi] = [\varphi\psi\psi] = \varphi.$$

63. Tähistame $[\varphi\psi\chi] = \varphi\psi\chi\omega$. Kuidas kirjutada sümboli ω abil korrutisi

$$[[\varphi[[\varphi\psi\chi]\chi\varphi]\,\varphi]\varphi[\varphi\ \varphi\psi]] \text{ ja } [\varphi\psi[[\chi\varphi[\ \varphi[\psi\varphi\varphi]\varphi]]\chi\psi]?$$

Lihtsustada need korrutised.

64. Missuguse algebralise süsteemi moodustavad kõik paarid (a, λ), kus λ on suvaline paarisarv ja a mingi täisarv, kui

$$(a, \lambda)+(b, \mu) = (a+b,\ \lambda+\mu),$$

$$(a, \lambda)\,(b, \mu) = (ab,\ a\mu+b\lambda+\mu\lambda)?$$

On see algebraline süsteem korpus, integriteetkond või ring? (Kontrollige järjest kõik korpuse aksioomid.)

Olles üldistanud algebralise operatsiooni mõiste, võime nüüd tutvuda tänapäeva algebra kõige üldisema ja seepärast väga tähtsa mõistega — universaalse algebra mõistega.

Universaalseks algebraks nimetatakse hulka G, milles on defineeritud teatav hulk Ω n-aarseid tehteid (n võib tehete puhul omandada erinevaid väärtusi, muuhulgas ka väärtust 0, s. t. mõned hulga G elemendid on fikseeritud ja hulka Ω kuuluvad ka nullaarsed operatsioonid). Universaalses algebras võib olla näiteks kaks binaarset ja üks nullaarne tehe (nii on see kvaasiringi puhul) või kaks binaarset ja kaks nullaarset (Boole'i algebra) või üks unaarne (graaf) või üks ternaarne (gruuda) või üks n-aarne ja seitsekümmend viis $(2n+1)$-aarset tehet jne.

Universaalseid algebraid kujutavad endast peaaegu kõik ülal vaadeldud algebralised süsteemid — grupoidid, poolrühmad, rühmad ja ringid. Kuid korpus ei ole universaalseks algebraks, sest temas üks unaarne operatsioon, nimelt pöördelemendi leidmine, pole alati teostatav: nullelemendil ei ole pöördelementi. Niisuguseid algebralisi süsteeme, kus mõned tehted pole rakendatavad kõikidele elementidele, nimetatakse osalisteks universaalseteks algebrateks.

Vajadus sellise üldise mõiste järele nagu universaalne algebra on tingitud sellest, et, nagu matemaatikud juba küllalt ammu märkasid, erinevate algebraliste süsteemide teooriate (näiteks rühma- ja ringiteooria, rühma- ja Lie algebrate teooria) mõningate osade vahel on olemas suur analoogia. Niisugune analoogia haarab suuremal või väiksemal määral faktiliselt kõiki teadaolevaid algebralisi süsteeme. See ühine, mis on olemas erinevatel algebralistel süsteemidel, moodustabki universaalsete algebrate teooria uurimisvälja. Muidugi ei saa üldine teooria viia nii sügavate tulemusteni kui märksa kitsamad ning aksiomaatika poolest palju rikkamad üksikute algebraliste süsteemide teooriad, kuid ta võimaldab väga üldisel kujul uurida paljusid laialt kasutatavaid põhimõisteid ning saavutada selgust järgmises küsimuses: missugused antud algebralise süsteemi omadused sõltuvad ainult algebraliste tehete olemasolust, missugused aga antud konkreetsest aksiomaatikast.

Antud algebralist süsteemi võib mõnikord vaadelda universaalse algebrana mitmel viisil, erinevalt defineerides operatsioonide süsteemi Ω. Näiteks rühma tehete hulk Ω võib koosneda kahest (kommutatiivse rühma korral) või isegi kolmest binaarsest tehtest (mittekommutatiivse rühma korral): korrutamisest ning vasak- ja parempoolsest jagamisest; võib aga koosneda ainult ühest binaarsest ja ühest nullaarsest tehtest: korrutamine ja ühikelemendi võtmine. Veel enam, nagu näitasid G. Higman ja B. Neumann, võib rühma defineerida ka üheainsa binaarse

tehte ω abil, mis rahuldab seost

$$x[(((xx\omega)y\omega)z\omega)(((xx\omega)x\omega)z\omega)\omega]\omega = y.$$

Tavalise korrutamistehte abil defineeritud rühmas võib selleks tehteks olla näiteks ühepoolne jagamine $ab\,\omega = ab^{-1}$. Siis on

$$e = aa\omega;\ a^{-1} = (aa\omega)a\omega \text{ ja } ab = a[(bb\omega)b\omega]\omega,$$

sest

$$aa\omega = aa^{-1} = e;\ (aa\omega)a\omega = (aa^{-1})a\omega = ea\omega = ea^{-1} = a^{-1}$$

ja

$$a[(bb\omega)b\omega]\omega = a(eb\omega)\omega = ab^{-1}\omega = ab.$$

Ka ringi võib vaadelda universaalse algebrana, milles peale aditiivse rühma tehete on veel üks binaarne tehe (korrutamine). Teda võib aga (nagu 1951. a. näitas nõukogude matemaatik J. I. Sorkin) vaadelda ka ühe ternaarse tehtega universaalse algebrana. See tehe ω tuleb tavalisel viisil antud ringi puhul defineerida järgmiselt:

$$abc\omega = ac - bc + a - b.$$

Ühe ja sellesama tehete süsteemiga universaalseid algebraid nimetatakse ühetüübilisteks. Ühetüübilised on näiteks grupoidid ja poolrühmad, tehte ω suhtes vaadeldud ringid ja gruudad jne. Ühetüübilisuse mõiste on ühelt poolt liiga lai (näiteks poolrühmaga ühetüübiline universaalne algebra ei tarvitse olla poolrühm), teiselt poolt aga veidi ebamäärane (nagu nägime, ei pea isegi kõik rühmad või kõik ringid alati olema ühetüübilisteks universaalseteks algebrateks).

Muidugi võib lugeda, et kõiki rühmi vaadeldakse alati ühe ja sellesama tehete süsteemi Ω suhtes, kõiki ringe samuti ühe ja sellesama tehete süsteemi Ω_1 suhtes jne. Sel juhul on kõik rühmad ühetüübilised universaalsed algebrad, kõik ringid ühetüübilised universaalsed algebrad jne.

Palju tähtsam on aga universaalsete algebrate primitiivse klassi mõiste. Selle defineerimiseks vaatleme kõiki ühetüübilisi universaalseid algebraid (näiteks tehete süsteemiga Ω) ja ühte või mitut samasust. Nendeks võivad olla näiteks samasused

$$(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0 \text{ ja } a^2 = 0$$

või samasus

$$[[aab]aa] = a.$$

Neile samasustele vastavaks primitiivseks klassiks nimetatakse kõigi ühetüübiliste universaalsete algebrate hulka, milles on rahuldatud kõik nimetatud samasused.

Kui näiteks Ω koosneb ainult korrutamise tehtest, siis kõigi

ühetüübiliste universaalsete algebrate klass koosneb kõigist grupoididest. Samasus

$$(ab)c = a(bc)$$

määrab kõigi poolrühmade primitiivse klassi. Samasused

$$(ab)c = a(bc) \text{ ja } ab = ba$$

määravad kommutatiivsete poolrühmade primitiivse klassi jne.

Omaette primitiivsed klassid moodustavad ka rühmad, ringid, struktuurid, Boole'i algebrad, Lie ringid jne.

Meile juba hästi tuttav isomorfismi mõiste on üldistatav ka universaalsete algebrate juhule. Nimelt kahte ühetüübilist universaalset algebrat G ja H tehete süsteemiga Ω nimetatakse isomorfseteks, kui G ja H vahel on korraldatav niisugune üksühene vastavus φ:

$$g_i \to h_i = g_i\varphi,$$

et suvaliste G elementide $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ja suvalise n-aarse tehte $\omega \in \Omega$ puhul on

$$(g_1 g_2 \ldots g_n\omega)\varphi = (g_1\varphi)(g_2\varphi) \ldots (g_n\varphi)\omega = h_1 h_2 \ldots h_n\omega$$

ning peale selle

$$0_\nu\varphi = e_\nu,$$

kus 0_ν ja e_ν on nullaarse operatsiooni ν poolt märgitavad elemendid vastavalt algebrates G ja H. Isomorfsed universaalsed algebrad kuuluvad ühte primitiivsesse klassi.

Universaalsete algebrate teoorias, samuti nagu üksikute algebraliste süsteemide teoorias, on alati põhiülesandeks anda kõigi uuritavate universaalsete algebrate klassi kirjeldus isomorfismi täpsusega. See kirjeldus antakse tavaliselt invariantide abil, millest igaüks mingil määral iseloomustab antud algebraid. Invariantide süsteem koosneb alati suurustest, mida on võimalik omavahel võrrelda. Muidugi pole niisugune invariantide abil kirjeldamine alati teostatav, igatahes on ta «peaaegu alati» väga komplitseeritud. Selleks et saada ettekujutust sellise kirjelduse iseloomust, tutvume mõningate triviaalsete näidetega.

Vaatleme näiteks ühe nullaarse tehtega universaalseid algebraid (neid nimetatakse punkteeritud hulkadeks ja kasutatakse topoloogias). Sellised universaalsed algebrad on isomorfsed parajasti siis, kui nende võimsused on samad.

Nimelt kui Ω koosneb ainult tehtest ν, mis märgib algebrates G ja H ära vastaval elemendil 0_ν ja e_ν, ja kui G ja H elementide hulkade võimsused on võrdsed ($|G| = |H|$), siis isomorfismi φ algebrate G ja H vahel korraldame järgmiselt. Loeme, et $0_\nu\varphi = e_\nu$ ja korraldame mistahes viisil üksühese vastavuse hulkade G ja H ülejäänud osade vahel, s. o. hulkade $G \setminus \{0_\nu\}$ ja $H \setminus \{e_\nu\}$ vahel.

Teiselt poolt $|G| \neq |H|$ korral universaalsed algebrad G ja H ei saa olla isomorfsed, sest siis ei saa nende vahel korraldada mingit üksühest vastavust.

Seega ongi antud klassi kirjeldus, milles invariandina esineb hulga võimsus.

Kui nüüd vaadelda universaalseid algebraid G suvalise nullaarsete tehete hulgaga Ω ning lihtsuse mõttes nõuda, et erinevatele tehetele vastaksid alati erinevad elemendid, siis üldiselt ei piisa sellise algebra etteandmiseks (isomorfismi täpsusega) ainult hulga G võimsusest $|G|$.

Muidugi, kui $|G|$ on lõplik ja nullaarseid tehteid on niisama palju kui elemente hulgas G, siis on $|G|$ ainsaks G invariandiks. Ka juhul kui G on lõpmatu ja nullaarsete tehete hulga võimsus on väiksem kui $|G|$, osutub G ainsaks invariandiks $|G|$. Kui aga G ja tehete hulga Ω võimsused on võrdsed ja lõpmatud, siis ühe ning sama võimsuse $|G|$ korral võib seda tüüpi universaalseid algebraid olla mitu. Näiteks loenduva $|G|$ korral võib olla kaks või mistahes teine lõplik arv nullaarsete tehete poolt märkimata jäetud elemente, võib aga olla, et selliseid elemente pole üldse või et nad moodustavad ise loenduva hulga. Selgituseks vaatleme hulgana G naturaalarvude hulka. Järgmises tabelis ongi näidatud mõned ülalmainitud juhud:

	Nullaarsete operatsioonide poolt	
	märgitud elemendid	märkimata elemendid
G_1	1, 2, 3, 4, 5, ...	pole
G_2	3, 4, 5, 6, 7, ...	1, 2
G_3	1, 3, 5, 6, 7, ...	2, 4
G_4	1, 3, 5, 7, 9, ...	2, 4, 6, 8, 10, ...
G_5	1, 2, 4, 5, 7, ...	3, 6, 9, 12, 15, ...
G_6	5, 10, 15, 20, 25, ...	1, 2, 3, 4, 6, ...

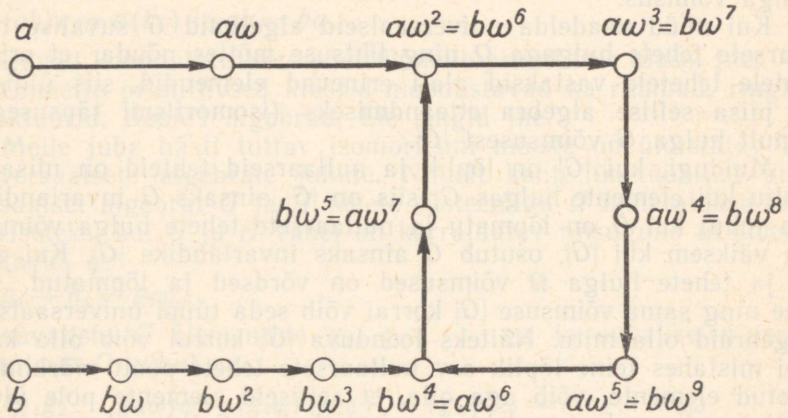
Siin algebrad G_2 ja G_3, samuti G_4, G_5 ja G_6 on omavahel isomorfsed. See on tingitud asjaolust, et neil juhtudel on ka märkimata jäetud elementide hulkade võimsused võrdsed. Seega on universaalsel algebral G antud juhul kaks invarianti: hulga G enda võimsus $|G|$ ning märgitud elementide hulga täiendi võimsus $|G \setminus \Omega|$.

Ülesandeid.

65. Olgu G lõplik universaalne algebra nullaarsete tehete hulgaga Ω. Millised on G invariandid, kui erinevad tehted hulgast Ω võivad märkida ühesuguseid elemente?

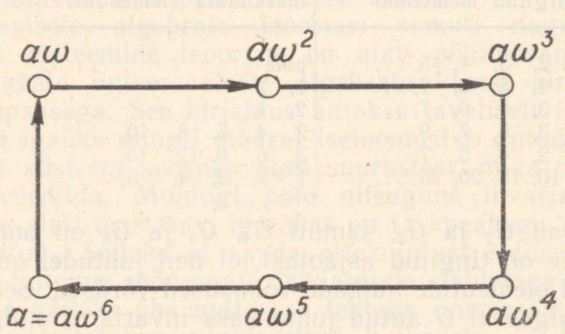
66. Olgu G lõplik universaalne algebra ühe unaarse tehtega ω. Teda nimetatakse sidusaks, kui iga kahe elemendi a ja b korral leiduvad naturaal-

arvud k ja l nii, et tehte k-kordsel rakendamisel elemendile a ja l-kordsel rakendamisel elemendile b saame ühe ja sellesama elemendi. Sidus on näiteks järgmise skeemiga defineeritud algebra (nool näitab, milleks ω teisendab mingi elemendi; $a\omega^n$ tähendab, et tehet ω on elemendile a rakendatud n korda).



Vähimateks seatud nõudeid rahuldavateks naturaalarvudeks on $k = 2$ ja $l = 6$.

Algebrat G nimetatakse perioodiliseks, kui iga a korral leidub n nii, et rakendades a-le n korda tehet ω, saame tulemuseks jälle a. Viimase näite korral oli tegemist mitteperioodilise algebraga, järgmine algebra aga on perioodiline (siin $n = 6$):



Millised on kõik kahe- ja kõik kolmeelemendilised vaadeldavat tüüpi universaalsed algebrad? Millised on sidusa ja perioodilise algebra invariandid? Millised on perioodilise, kuid mitte tingimata sidusa algebra invariandid?

67. Tõestada, et igas rühmas on täidetud seos

$$x[(((xx\omega)y\omega)z\omega)\,(((xx\omega)x\omega)z\omega)\omega]\omega = y,$$

kui lugeda $ab\,\omega = ab^{-1}$.

68. Näidata, et sellest seosest järelduvad kõik rühma aksioomid.

69. Avaldada ringi elemendid $a - b$ ja ab ternaarse tehte ω

$$abc\omega = ac - bc + a - b$$

kaudu. Elemendi ab avaldise leidmiseks kasutada seost

$$(a + c)cb\omega - a = (a + c)b - cb + a + c - c - a = ab.$$

LÕPPSÕNA

Jutustus tänapäeva matemaatikast on lõpule jõudnud. Me oleme tutvunud paljude huvitavate mõistete ja teoreemidega, saime teada ka mõned lahendamata probleemid, aga kui meilt küsitaks: «Mida siis ometi kujutab endast see «tänapäeva matemaatika»?», vaevalt küll oskame anda õige vastuse. Ühelt poolt moodustab see tänapäeva matemaatika osa, millest siin jutustasime, vaid sissejuhatuse tänapäeva matemaatikasse, teiselt poolt aga on sellele küsimusele vastamine üldse väga raske ülesanne. Seepärast on loomulik pöörduda mõne üldtunnustatud autoriteedi poole ning lihtsalt refereerida tema seisukohti antud küsimuses. Nii me teemegi. Jutustame sellest, kuidas kujutab endale tänapäeva matemaatika arhitektuuri ette käesoleva sajandi silmapaistvam matemaatik N. Bourbaki.

N. Bourbaki — seda nime oleme juba kohanud. Kes ta on? Ta on Nancago Ülikooli professor ja Poldaavia Kuningliku Akadeemia (Royal Poldavian Academy) liige, tal on kreeka perekonnanimi ja ta on rahvuselt prantslane. Ta on ainulaadse ulatusliku traktaadi «Éléments de Mathématique» ja paljude teaduslike artiklite autor.

Kuid kõige põnevam on see, et sellenimelist inimest polegi olemas, samuti nagu pole olemas ei Nancago Ülikooli ega Poldaavia Kuninglikku Akadeemiat. Sellele vaatamata eksisteerivad N. Bourbaki matemaatilised teosed ja eeskätt «Éléments de Mathématique» kakskümmend seitse köidet (enam kui 3000 lehekülge). Ja kuigi teose esimesed vihikud ilmusid aastal 1939, pole veel põhjust arvata, et ta varsti lõpule jõuab.

N. Bourbaki traktaadi eesmärgiks on esitada üldiste hulgateoreetiliste ja matemaatilis-loogiliste printsiipide alusel aksiomaatiliselt ühtsest seisukohast kogu tänapäeva matemaatika, kusjuures teha seda maksimaalselt üldiselt. Traktaadi esimene osa, mis hakkab pikkamööda lõpule jõudma, kannab nimetust «Analüüsi põhistruktuurid». See koosneb kuuest raamatust, mille pealkirjad on järgmised: «Üldine topoloogia», «Ühe reaalmuutuja funktsioonid», «Algebra», «Hulgateooria», «Topoloogilised vektorruumid» ja «Integreerimine».

Traktaadi teisest osast on esialgu ilmunud vaid mõned üksikud vihikud, nii et tema struktuurist ega ka sellest, kas ta kujuneb traktaadi viimaseks osaks või mitte, pole mingeid andmeid. Kuna matemaatika areneb hoogsasti edasi, N. Bourbaki aga püüab oma traktaadil mitte lasta vananeda (üksikud vihikud on ilmunud juba kaks-kolm korda ning alati täiendatult, parandustega), siis vaevalt küll õnnestub meil kunagi võtta kätte «Éléments de Mathématique» viimast köidet.

Seda enam, et N. Bourbaki, kes juba üle 25 aasta teeb viljakat tööd, ei kavatse ka ise vananeda. Sest selle salapärase matemaatiku nime taga peitub ... terve prantsuse matemaatikute korporatsioon, mille liikmed kuuluvad sinna ainult seni, kuni nende eluiga ei ole ületanud viitkümmend aastat. Seejärel astuvad nad korporatsioonist välja, vabastades tee noorematele kolleegidele.

Bourbaki hoiab oma korporatsiooni koosseisu saladuses ja pole võimalik teada saada, milline on tema erinevate liikmete osa üksikute teoste loomisel. Kaua aega ei tunnistanud nad sedagi, et Bourbaki kujutab endast korporatsiooni, mitte aga üht matemaatikut, ning tihti maksid küllalt teravmeelselt kätte neile, kes avaldasid neist mingeid andmeid. Nii levitasid nad kord kuulujutte selle kohta, et Ralph P. Boas, üle maailma tuntud referatiivajakirja «Mathematical Reviews» tolleaegne peatoimetaja, kes oli avaldanud Briti Entsüklopeedia aastaraamatus väikese artikli Bourbaki rühmast — ei kujuta endast üht isikut, vaid noorte ameerika matemaatikute korporatsiooni, kes koos annavad välja ajakirja «Mathematical Reviews».

Tänapäeval on teada paljude Bourbaki loojate ja praeguste liikmete nimed. Nende seas on küll tavalisele inimesele vähe tuntud, spetsialistile aga palju ütlevad nimed: André Weil, Jean Dieudonnée, Samuel Eilenberg, Claude Chevalley, Henri Cartan, Laurent Schwartz ja mitmed teised.

Varjunime «Bourbaki» tekkimise kohta on levinud mitmed versioonid. Ühe legendi kohaselt on selle valik seotud juhtumiga, mis leidis aset Kõrgemas Normaalkoolis, kus tavaliselt õpib enamik prantsuse matemaatikuid. Nimelt esines kord selle kooli kuulajate ees ettekandega tuntud välismaa matemaatik, kelle nimi oli Nicolas Bourbaki ja kelleks osutus näitlejaasjaarmastaja, kes meisterlikult imiteeris matemaatilist žargooni.

Teise versiooni kohaselt on varjunimi seotud Nancy linna tuntud mälestussambaga. Kolmekümnendatel aastatel elasid ja töötasid Nancys paljud andekad noored prantsuse matemaatikud, kellest hiljem said Bourbaki korporatsiooni liikmed. Mainitud mälestussammas on püstitatud kindral Charles Denis Sauter Bourbaki auks, kes 1862. a. oleks võinud saada Kreeka kuningaks, kuid teadmata põhjustel keeldus tiitlist. Nüüd on selge ka Nan-

cago Ülikooli tekkimise saladus. Elavad ju praegu paljud bourbakistid Chicagos (Nancago = Nancy + Chicago).

Mis puudutab Bourbaki matemaatilisi vaateid ja ettekujutust traktaadi eesmärkidest, siis need on kõige selgemini avaldatud artiklis «Matemaatika arhitektuurist» ning sissejuhatuses «Éléments de Mathematique» esimesele raamatule. Toome siin mõned väljavõtted.

«Traktaadi eesmärgiks on kogu matemaatika või peaaegu kogu matemaatika ülesehitamine hulgateooria baasil. Matemaatilisi objekte vaadeldakse antud hulkadena, mis on varustatud mingi «struktuuriga».»

«Traktaadis vaadeldakse matemaatikat päris algusest peale ning antakse täielikud tõestused. Seepärast pole selle lugemiseks vaja mingeid spetsiaalseid matemaatilisi teadmisi, vaid teatud harjumust matemaatiliste aruteludega ja mõningat abstraheerimisvõimet.»

«Traktaadil ei ole mingil määral eesmärk olla tänapäeva matemaatiliste teadmiste entsüklopeediaks; me tegime süstemaatilist valikut, püüdes eriti arendada tänapäeva matemaatika enamiku ülesannete lahendamisel tarvitatavaid fundamentaalseid mõisteid.»

Märgime veel, et traktaadi kirjutamisel toimub ka uue matemaatilise terminoloogia loomine, mis küll, alati kui võimalik, ühtib juba traditsiooniliseks saanud terminoloogiaga, ent läheb sellest lahku, kui seda nõuab terminite maksimaalse üldsuse ja terminoloogilise süsteemi loomise printsiip, millest peab kinni Bourbaki.

Juhul kui traktaadi hooletul lugemisel on oht rängalt eksida, siis tähistatakse vastav koht tekstis märgiga ∠ («ohtlik kurv»), mis asetatakse lehekülje äärele.

Bourbaki üle veerand sajandi kestnud edukas koostöö näitab, kui palju võib tänapäeva teaduses saavutada andekate teadlaste kollektiiv.

Kuidas kujutab N. Bourbaki endale ette tänapäeva matemaatika ehitust? Huvitav on märkida, et artiklit «Matemaatika arhitektuurist» alustab ta märkusega: «Püüda käesoleval ajal anda üldine ettekujutus matemaatilisest teadusest — tähendab tegelda niisuguse asjaga, mis tänu vaadeldava materjali avarusele ja mitmekülgsusele tundub algusest peale põrkavat kokku peaaegu ületamatute raskustega.»

Vaatamata sellele annab N. Bourbaki ikkagi üldise pildi tänapäeva matemaatikast, kuigi ei pretendeeri seejuures ei absoluutsele universaalsusele ega sellele, et matemaatika arhitektuur jääks igaveseks niisuguseks, nagu ta tundub praegu olevat. N. Bourbaki ise märgib, et tema kontseptsioon on skemaatiline ja idealiseeritud.

Kokkuvõtlikult võib N. Bourbaki seisukohta väljendada ühe

lausega: «Tänapäeva matemaatika kujutab endast struktuuride hierarhiat.» Siinjuures ei mõelda struktuuri all käesolevas raamatus vaadeldud osaliselt järjestatud hulka, milles on defineeritud ühendi ja lõike operatsioonid, vaid hoopis väga üldist mõistet, mille alla kuuluvad kõik eespool vaadeldud mõisted.

«Et määrata struktuur, antakse ette üks või mitu seost, mis valitsevad hulga elementide vahel ..., seejärel postuleeritakse, et antud seos või antud seosed rahuldavad mõningaid tingimusi (millised loetletakse ja mis kujutavadki endast vaadeldava struktuuri aksioome).» («Matemaatika arhitektuur».)

Kõikide struktuuride seast eraldatakse nn. põhistruktuurid, mis moodustavad kolm suurt rühma. Esimesse rühma kuuluvad järjestusega seotud struktuurid, teise topoloogilised struktuurid ning kolmandasse algebralised struktuurid.

Hierarhia teisel astmel on nn. genereerivad struktuurid, mis määravad mingi teooria seisukohalt kõige väiksemale aksioomide süsteemile tuginevad ja seega kõige üldisemad mõisted. Näiteks rühmateooria genereerivaks struktuuriks on rühm, kuid samal ajal vaadeldakse selles teoorias kommutatiivseid, nilpotentseid, lahenduvaid ja muid rühmi. Et niisugune jaotus on küllaltki tinglik, näitab kas või see, et poolrühmateooria seisukohalt pole rühm enam genereerivaks struktuuriks, sest siin etendab seda osa poolrühma struktuur. Genereerivate struktuuridena võivad esineda ka näiteks lineaarselt järjestatud hulga, struktuuri (osalise järjestuse mõttes), ringi või universaalse algebra struktuurid.

Peale üksikute vähem üldiste struktuuride, mis kujutavad endast genereerivate struktuuride erijuhte ja on esimestest saadavad täiendavate aksioomide abil, esinevad veel n.-ö. kombineeritud struktuurid, milles on ühendatud mingisuguste erinevate rühmade struktuurid. Niisugused struktuurid tekivad paljudel piirdealadel: topoloogilises algebras ja algebralises topoloogias, osaliselt järjestatud algebraliste süsteemide teoorias. Niisuguse iseloomuga on ka paljud konkreetsemad struktuurid. Seejuures ei toimu siin erinevate struktuuride puhtmehhaaniline ühendamine, vaid alati tuuakse juurde uued aksioomid, milles kajastuvad erinevate struktuuride vahelised seosed.

Toome siin lihtsa näite ühest niisugusest kombineeritud struktuurist. Järjestatud poolrühmaks nimetatakse hulka P, mis on esiteks lineaarselt järjestatud hulk (järjestuse struktuur), teiseks — poolrühm (algebraline struktuur) ning milles on täidetud aksioom:

kui $x, y, z \in P$ ja $x < y$,
siis $xz \leqslant yz$ ja $zx \leqslant zy$,

mis seobki omavahel erinevaid struktuure. Kui niisugust siduvat aksioomi poleks, oleks mõistlikum uurida eraldi poolrühma

struktuuri ja eraldi lineaarset järjestust. See täiendav aksioom aga toob kaasa uusi omadusi, seda enam, et kombineeritud struktuuride klass on tavaliselt kitsam kui mõlemate ühendamata struktuuride klassid. Näiteks järjestatud poolrühmade klassi ei kuulu kunagi neljaelemendiline hulk $\{a, b, c, d\}$, milles on järgmisel viisil sisse toodud poolrühma struktuur:

	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d.

Kuigi see hulk on väga paljudel viisidel lineaarselt järjestatav, ei rahulda ükski nendest järjestustest ülaltoodud täiendavat aksioomi (kontrollige!).

Ülalöeldust selgub, kuivõrd tähtsal kohal on tänapäeva matemaatikas aksiomaatiline meetod, millele tugineb kogu matemaatika esitamine teatud struktuuride hierarhiana.

ISIKUNIMEDE REGISTER

Abel 213, 214
Aiserman (Айзерман) 9
Aleksandrov (Александров) 9
Aristoteles 122, 123, 124, 183

Berge (Берж) 9
Bernays 125
Birkhoff (Биркгоф) 9, 78
Boas 314
Boltjanski (Болтянский) 8
Bolzano 85
Boole 6, 124, 170, 214
Botšvar 174
Bourbaki (Бурбаки) 9, 12, 215, 313—315
Brianchon 281
Brower 90, 125
Burnside 247, 248

Cantor 6, 11—13, 33, 34, 87, 88, 90
Cartan 314
Cauchy 247
Cayley 103, 214, 215
Chevalley 314
Cohen 35
Courant (Курант) 8

Darwin 7
Dedekind 12
Descartes 211
Dieudonnée 314
Ditsman 217, 248
Dõnkin (Дынкин) 8

Eilenberg 314
Einstein 287
Eukleides 7
Euler 57, 96

Fermat 128
Fjodorov 272
Frege 125
Frobenius 247

Galois 6, 212, 213, 215, 237, 247, 289
Gauss 60, 212
Golovina (Головина) 8
Grave 216
Gussev (Гусев) 9
Guthrie 103
Gödel 90, 125, 126

Hamilton 214, 215
Haupt 8
Hausdorf (Хаусдорф) 10
Heiting 90
Higman 308
Hilbert 88, 90, 125, 215, 217
Hölder 247

Jaakson 104, 105
Jacobson (Джекобсон) 9
Jaglom (Яглом) 8
Jefremovitš (Ефремович) 8
Jevons 125
Jordan 247, 252
Jürimäe 8

Kaasik 8
Kalužnin (Калужнин) 8
Kangro 10
Kemeny (Кемени) 9
Kempe 103
Kleene 9, 127
Klein 247, 277, 284, 285
Kovalevskaja 214
Kronecker 12, 13
Krull 253, 254
Kulakov 217, 248
Kull 8, 10
Kuroš (Курош) 9, 217, 248, 254

Lagrange 212, 214
Leibniz 122, 123
Lie 247, 295
Ljapin (Ляпин) 9
Lobatševski 6, 283, 284
Łukasiewicz 173

Maltsev (Мальцев) 10
Markov 200, 204
Miller 247, 253
Minding 283
Moreno 253
De Morgan 103, 125
Möbius 103

Neumann 308
Noether 215, 250
Novikov (Новиков) 10
Nuut 104, 105

Ore (Ope) 8

Pascal 281
Pavlov 7
Peano 125, 215
Peter 8
Piers 125
Platon 122
Plotkin 248
Post 175
Postnikov (Постников) 10
Pythagoras 210

Rademacher (Радемахер) 8
Remak 251, 252, 254
Riemann 287
Ringel 10, 104, 110
Robbins (Роббинс) 8
Rozonoer (Розоноэр) 9
Ruffini 213
Russell 90, 123, 125

Sarv 103, 104
Sawyer 208
Schmidt 216, 217, 247, 248, 251—253
Schwartz 314
Schwarz 12
Schur 247
Serpinski (Серпинский) 8
Smirnova (Смирнова) 9
Snell (Снелл) 9
Sorkin 309
Stoll (Столл) 8

Šihhanovitš (Шиханович) 10

Tait 106
Tal (Таль) 9
Tauts 8
Tombak 8
Tomson (Томсон) 9
Tšunihhin 218, 248
Turkin 217, 248
Töpliz (Тёплиц) 8

Uspenski (Успенский) 8

Vieta 211
Vilenkin 9

Wang Hao 123, 126
Weierstrass 12, 214
Weil (Вейль) 8
Whitehead 123, 125

Zenon 122
Zermelo 12

AINEREGISTER

n-aarne tehe 307
Aatom 54, 56, 62
Abstraktsioonid matemaatikas 204, 205
Aditiivne tähistusviis 218, 238
Afiinne geomeetria 281
Afiinsed omadused 282
Afiinsed teisendused 281
Afiinsete teisenduste rühm 281
Aksiomaatiline meetod 87, 88, 125, 126, 175, 208, 215, 247, 317
Aksioomi sõltumatus 175, 176
Aktuaalse lõpmatuse abstraktsioon 205
Alatiselt sisselülitatud kontakti asendamise seadus 163
Alatiselt sisselülitatud kontaktide ülearususe seadus 163
Alatiselt väljalülitatud kontakti asendamise seadus 163
Alatiselt väljalülitatud kontaktide ülearususe seadus 163
Alamgrupoid 232
Alamhulk 15, 16, 33
Alampoolrühm 233
Alamring 288
Alamrühm 239
Alamstruktuur 67
Alef 79
Alfabeet 201
Algebraline operatsioon 218
Algebraline struktuur 224, 316
Algebraline süsteem 124, 224, 225
Algoritm 9, 126, 187—195, 200—204, 206
Algoritmi blokkskeem 188—190, 194

Algoritmi determineeritus 193
Algoritmi esitusviisid 188—190
Algoritmi lõplikkus 193
Algoritmi massilisus 193
Algoritmi peatamine 189, 202, 203
Algoritmi resultatiivsus 193
Algoritmi täielikkus 193
Algoritmide samaväärsus 203
Alternatiivne ring 297
Alumine poolstruktuur 66
Antiekvivalents 148, 151, 153, 157
Antikommutatiivsus 275, 276, 296
Antirefleksiivsus 43
Antisümmeetria 37, 38, 42, 47
Arvu mõiste laienemine 208, 209
Asendusreeglid 201
Assotsiaator 297
Assotsiatiivne ring 287
Assotsiatiivsete astmetega ring 297
Assotsiatiivsus 18, 19, 71, 75, 81, 85, 158, 159, 160, 161, 165, 166, 215, 221—224, 228, 241, 255, 256, 275, 294
«Attila ratsu» ülesanne 58

Binaarne operatsioon 305
Binaarne seos 36
Boole'i algebra 157, 302
Boole'i funktsioon 170—173,
—, konstantne 172
Boole'i ring 302
Boole'i seadused 153, 155—160, 166, 177
Botšvari loogika 174
Brianchoni teoreem 281, 282

Cantori paradoks 87, 88
Cayley nelirühm 245
Cayley tabel 226—228
Cayley teoreem 243

Dedekindi struktuur 69
Desargues'i teoreem 280, 281
Determinant 259, 260
Diagonaalmaatriks 258
Diagramm 48—56
Dieeder 262
Dieedri rühm 262, 274
Disjunktiivne normaalkuju 159, 160, 172, 173
Disjunktsioon 133, 138, 152, 153, 156, 173
Distributiivne struktuur 67—70
Distributiivsus 19, 22, 27, 70, 75, 87, 158, 159, 162, 165, 166, 209, 210, 275, 287, 290, 295
Dodekaeeder 262—264, 266
Dodekaedri pöörete rühm 263, 266
Dodekaedri sümmeetriarühm 268
Duaalsuse printsiip 158

Ebapunkt 279
Eitus 131, 137, 152, 153, 156, 174, 206
Eituse eitamise seadus 155, 158, 159, 174, 207
Eituse seadus 164
Eksisteerimise kvantor 184
Ekvivalents 148, 149, 150, 152, 154, 157
Ekvivalentsed hulgad 29, 30, 35
Ekvivalentsusseos 38, 42, 62, 79
Elemendi astmed 233
Elemendi täiend struktuuris 301
Element 14, 15
Elementaaroperatsioonid 188, 189
Elementaarsed objektid 204
Elementide paarid 35
Ellips 282, 283
Eukleidese algoritm 194
Eukleidiline geomeetria 277, 283
Euleri karakteristik 97, 114, 115, 121
Euleri teoreem 97
Euleri ülesanne 57

Fermat' suur teoreem 128
Fjodorovi rühmad 272
Formaliseerimine 87, 88
Formalism 125
Funktsioon 37, 39, 40, 46, 76, 178
Funktsioonide korrutamine 289
Funktsioonide ringid 289, 290
Funktsioonide summa 220, 289

Galois' teooria 213
Gaussi ratsionaalarvud 241, 288
Gaussi täisarvud 241, 288
Gaussi ülesanne 58—60
Genereerivad struktuurid 316
Geomeetria 277
Geomeetriline algebra 209, 210
Graaf 56, 62, 95
Grupoid 224, 225
Gruuda 306, 307

Habemeajaja paradoks 88
Hilberti loogika 176, 177
Hulga aste 42
Hulga element 14
Hulga ruudu diagonaal 37
Hulga ruut 35, 36
Hulga skeem 16
Hulgateooria 13—43, 79—83, 87—91, 277
Hulga täiend 21, 23
Hulk 13, 218

Hulkade korrutis 35, 42
Hulkade lõige 17
Hulkade võrdlemine 27—35
Hulkade võrdsus 16
Hulkade ühend 17—19—21
Hulkade ühisosa 17, 18—21
Hulktahuka värvimise ülesanne 266, 267, 274
Hüperbool 282, 283
Hüperkomplekssüsteemid 215
Hüpotees 125, 126, 128

Idempotent 290
Idempotentsus 17, 20, 158, 159, 160, 165, 166
Ikosaeeder 262—264, 266
Ikosaeedri pöörete rühm 263, 266
Ikosaeedri sümmeetria rühm 268
Implikatsioon 148, 153, 154, 174
Integriteetkond 292
Intuitsionism 125
Invariant 94, 310, 311
Invariantide süsteem 310
Inversioon 246
Isomorfism 52, 53, 54, 83, 84, 230, 239, 301, 310
Isomorfismi omadused 231
Isomorfsed grupoidid 230
Isomorfsed struktuurid 301

Jacobi samasus 275, 295
Jordani ring 296
Järjestatud hulgad 43—56, 62—79, 187
Järjestatud poolrühm 316, 317
Järjestuse seos 43
Jäägiklassiring 292

Kahe värvi probleem 106
Kaldkorpus 305, 276
Karakteristlik funktsioon 302, 303
Kardinaalarv 79, 80, 84
Kardinaalarvu aste 82
Kardinaalarvude korrutis 82
Kardinaalarvude summa 81
Kardinaalaste 75
Kardinaalkorrutis 72—75
Kardinaalsumma 70—72
Katmine 48, 49
Klassid 88
Klassikaline matemaatika 6, 204, 208
Kleini Erlangeni programm 277
n-kohaline tehe 306
Kollineaarsed vektorid 294
Kolmevalentne loogika 173, 174
Kolme värvi probleem 106
Kolmnurkne maatriks 256
Kolmnurksete maatriksite rühmad 258, 259
Kombineeritud struktuur 316
Kommunikatsioonide pommitamise ülesanne 57—59
Kommutatiivne ring 287
Kommutatiivsus 17, 21, 70, 81, 86, 158, 159, 161, 165, 166, 221, 228, 233, 239, 255
Kommuteerimise operatsioon 295
Komponendid 95
Konformne geomeetria 282
Konformne omadus 282
Konformsete teisenduste rühm 282, 283
Konjunktiivne normaalkuju 159, 160, 172, 173
Konjunktsioon 132, 138, 152, 153, 154, 156, 173, 203, 218, 219
Konstruktiivne loogika 204, 206, 207
Konstruktiivne matemaatika 204—207
Konstruktiivne objekt 204
Konstruktiivsed reaalarvud 205
Kontaktrelee skeemid 136—140, 144—147, 160—169, 175,
—, ekvivalentsed 160, 165, 166, 168
Kontaktrelee skeemide lihtsustamine 160, 164—169
Kontiinuumi hüpotees 13, 34, 35
Kontinuaalne võimsus 33, 79, 81—83, 86
Korpus 213, 276, 277, 308
Korrapärase hulknurga liikumiste rühm 261
Korrapärase kolmnurga pöörete rühm 243
Korrapärased hulktahukad 96, 262—267
ω-korrutis 307
Korrutustabel 227, 228
Korteež 227
Kristallograafilised rühmad 272
Kujutus 39
Kuubi pöörete rühm 263, 265
Kuubi sümmeetriarühm 268
Kuuluvus 11, 15, 37
Kuup 262—265
Kvaasijärjestuse seos 56, 62
Kvaasikorpus 305
Kvaasiring 305
Kvaasirühm 305
Kvantorid 184—187
Kvaternioonide algebra 215
Kõrgemat järku võrrandite lahenduvus radikaalides 212, 213
«Käepidemed» 113, 115, 116
Kümnendsüsteemi arvu kahendsüsteemi üleviimise algoritm 189—192

Lahenduvad rühmad 252
Lahutamatud otsetegurid 252
Lause 124, 127—131, 140—142, 173, 177, 178
Lausearvutus 127, 129, 174, 183
Lause lihtsustamise kriteerium 167
Leksikograafiline järjestus 77
Lie ring 276, 277, 295
Lihtlause 128—130
Liikumiste korrutis 261
$+_2$ — liitmine 150, 151
Lineaarsed funktsioonid 291
Lineaarselt järjestatud hulk 45, 48, 62, 83
Liitfunktsioon 241
Liitlause 124, 129, 130, 131
Liitlause lihtsustamine 167, 169
Liitlause lihtsustamise kriteerium 167
Liitmistabel 227
Lobatševski geomeetria 283—287
Lobatševski geomeetria Kleini interpretatsioon 285—287
Lobatševski teisendused 287
Loenduv hulk 30, 32, 33, 35, 79, 81—84
Loogiline samaväärsus 152—160, 174
Loogilised võrrandid 125
Loogilised tehted (operatsioonid) 131—134, 137, 138, 152—160, 173—176
Lucase ülesanne 57
Łukasiewiczi loogika 173—175, 177
Luup 305
Lõige 63, 64
Lõplik monogeenne poolrühm 234—236
Lõplikud rühmad 246, 247
Lõpliku hulga teisendus 222
Lõpmata kauge sirge 279
Lõpmatud arvud 292
Lõpmatu monogeenne poolrühm 234
Lõpmatuvalentne loogika 174
Lähedus 91

Maagilised ruudud 256, 260
Maatriks 254
P-maatriks 257
Maatriksite aditiivsed rühmad 256, 257
Maatriksite korrutamise assotsiatiivsus 256
Maatriksite korrutis 254, 255
Maatriksite multiplikatiivsed rühmad 257—259
Maatriksite ringid 288
P-maatriksite rühm 257, 260
Maatriksite summa 254
Majade liitmine 221, 223, 224, 226, 227
Majade poolrühm 226, 227
Maksimaalne element 54, 56, 62, 84
Markovi normaalalgoritm 200—204
«Matemaatika ja kaasaeg» 8, 9
Matemaatiline loogika 122—127, 173, 174, 175, 215
Minimaalne element 54, 62, 84
Minimiseerimise probleem 172
Mitme auguga kringlid 112—117
Mitmene funktsioon 40, 41
Mitmevalentne loogika 173—177
Modulaarne struktuur 67—68
Modulaarsus 70, 275
Monogeenne poolrühm 233
Monogeense poolrühma diagramm 234—236
Monogeense poolrühma järk 234
Monogeensed rühmad 245
Monogeense rühma järk 245
Monotoonne funktsioon 75
De Morgani seadused 22, 25, 27, 155, 158, 159, 164, 174
Multiplikatiivne tähistusviis 218
Möbiuse pind 117—121

Naiivne hulgateooria 87, 88
Naturaalarvud 30—31
Neelamisseadused 27, 158, 162, 167, 168, 275
Nelja värvi probleem 97, 103
Neoring 305
Nilpotentsed rühmad 253
Nilpotentsus 275, 276
Normaalkaart 105
Nullaarne operatsioon 307
Nullelement 225, 226, 228, 232
Nullitegurid 291
Nulli adjungeerimine 226, 228
Nullkorrutamisega poolrühm 225, 232, 233
Nullkorrutamisega ring 288, 296

Oktaeeder 262—265
Oktaeedri pöörete rühm 263, 267
Oktaeedri sümmeetriarühm 268
Olemasolu kvantor 184
Olemasolu teoreemid 206
Omadus 180
Operatsiooni suhtes kinnine hulk 218
Ordinaalarvud 83—87
Ordinaalarvude korrutis 85
Ordinaalarvude summa 85
Ordinaalaste 77
Ordinaalkorrutis 72—75
Ordinaalsumma 70—72
Ornamentide sümmeetriarühmad 269, 270, 273

Osaline universaalne algebra 308
Osalise järjestuse seos 48, 62
Osaliselt järjestatud hulk 45, 46, 47, 214
Osaliselt järjestatud hulkade tüübid 49—52
Otsetegurid 251

Paarissubstitutsioonid 246
Parabool 282, 283
Paradoks 87—91
Paradoksid hulgateoorias 174
Parema käe kolmik 219, 220
Parempoolne nihe 249
Parempoolne pöördelement 239
Pascali teoreem 281
Perioodiline universaalne algebra 312
Permutatsioon 244
Pidev teisendus 91—93, 94
Polünoomide ring 289
Poolrühm 224—236
Poolrühma elemendi järk 234
Poolstruktuur 66, 68
Posti masin 195—200
Posti masina liikuv pea 195
Posti masina lint 195
Posti masina operatsioonid 195
Potentsiaalse lõpmatuse abstraktsioon 205
Predikaadi maatriks 178, 179, 181
Predikaadi tõeväärtustabel 178—186
Predikaat 178
Predikaatarvutus 174, 177—187
Predikaatarvutuse Boole'i tehete hulgateoreetiline interpretatsioon 184
Predikaatarvutuse tehted 183—187
Primitiivne klass 309
Primitiivne substitutsioonide rühm 252, 253
Projektiivne geomeetria 279
Projektiivne omadus 279, 280
Projektiivne ruum 279
Projektiivne tasand 279
Projektiivsete teisenduste rühm 279
Pseudosfäär 284, 285
Punkteeritud hulk 310
Punkti indeks 95
Põhikonjunktsioon 141, 142
Põhistruktuurid 316
Pöördelement 239
Pöördmaatriks 258, 259
Pöördseos 37, 42
Pöörete liitmine 229, 231
Püramiid 96, 262
Pythagorase teoreem 210—212

Ratsionaalarvud 11, 12, 30, 31, 32, 208
Reaalarvud 12, 209, 214
Reaalarvu täisosa 248
Refleksiivsus 37, 38, 42, 47
Regulaarne maatriks 260
Relee 136
Riemanni geomeetria 287
Ring 276, 277, 287
Ringi aditiivne rühm 287
Ringi multiplikatiivne grupoid 287
Ringjoone pöörete rühm 244
Rombi sümmeetriateisendused 242
Russelli paradoks 88
Ruumi vektorite Lie ring 294, 295
Rööptahukas 96, 262, 263
Rühm 213, 239, 240
Rühma alamrühmade struktuur 300
Rühma järk 245
Rühmade otsekorrutis 251
Rühmateooria 215—217, 236, 237, 247, 248, 251—254, 272

Samaselt tõene lause 157
Samaselt väär lause 157
Samastamise abstraktsioon 205
Samasusteisendus 226
Sarnased hulgad 83, 84
Seos 36, 40, 42, 48, 56, 62, 181
Seotud muutuja 184, 187
Shefferi tehe 148, 151, 153, 154, 156
Sidesõna 124, 132, 133, 150
Silindriline pind 115
Singulaarne maatriks 261
Sisalduvus 11, 15, 16
Skalaarkorrutis 218, 219
Spetsialiseeritud arvutid 195
Struktuur 62—70, 79, 276, 299
Struktuur (Bourbaki mõttes) 315—317
Struktuuri nullelement 300
Struktuuri ühikelement 300
Substitutsioon 212, 244
Superpositsioon 241, 289, 290
Suurim element 54, 56
Sõnad alfabeedis 201, 227
Sõnade grupoid 227
Sõnade poolrühm 227
Sümmeetria 37, 38, 42
Sümmeetrilised rühmad 244—251

Tasandiliste kujundite sümmeetriarühmad 268
Tehe 17, 208, 218
Tehte sümbol 218
Teisendus 192
Teisenduste korrutamine 222
Term 178
Ternaarne operatsioon 305, 306, 309
Ternaarne seos 42

Tetraeeder 262—265, 267
Tetraeedri liikumiste rühm 263, 265
Tetraeedri sümmeetriarühm 267, 268
Titchmarshi teoreem 291
Toor 113, 114, 116—118
Topoloogia 43, 91—121, 215, 279
Topoloogiline ekvivalentsus 93
Topoloogiline kaart 97—100
Topoloogiline omadus 94, 278, 279
Topoloogiline samaväärsus 93—97, 112
Topoloogiline teisendus 91—93, 94
Topoloogilise kaardi sõlmpunkt 105
Topoloogilised invariandid 94—97
Topoloogilised kujutused 278
Topoloogiliste kaartide värvimine 97—121
Traktriss 285, 286
Transitiivne substitutsioonide rühm 252
Transitiivsus 37, 42, 43, 47, 78
Triviaalne järjestus 47, 78
Tsükliid 113
Tsükliline rühm 254
Tõesus 127, 128, 129, 131, 173
Tõeväärtus 129, 130—136, 173, 174, 175
Tõeväärtusmaatriks 131—133
Tõeväärtustabel 131—134, 135, 139, 142, 144, 145, 148—151, 171—174, 176, 178—186
Tõeväärtuste arvutamine 134—136, 139
Täidesaatvad blokid 189
Täielik invariantide süsteem 94, 95
Täielik lineaarne rühm 260
Täiend 21, 23, 37
Täienditega distributiivne struktuur 302
Täienditega struktuur 301
Täisarvud 11, 12, 15, 17, 19, 21, 30, 78, 228
Tänapäeva algebra 208
Tänapäeva matemaatika 6, 9, 313, 315—317
Tühi hulk 14, 16

Unaarne tehe 306
Universaalne algebra 308
Universaalne hulk 21, 24, 184, 187
Universaalsed arvutid 195
Universaalsete algebrate isomorfism 310
Universaalsuse kvantor 184
Ühend 63, 64
Ühene kujutus 39
Ühetüübilised osaliselt järjestatud hulgad 52
Ühetüübilised universaalsed algebrad 309
Ühikelemendi adjungeerimine 228
Ühikelement 226, 228, 232, 237, 240, 241, 257, 258
Ühikmaatriks 258, 288
Ühikuga ring 288
Ühisosa 17, 18—21, 37, 63
Üksühene teisendus 244, 277, 278
Üksühene vastavus 29—34, 230, 244
Üldine algebra 208
Üldsuse kvantor 184
Ülemine poolstruktuur 66
Ülemhulk 15, 16

Ääriste sümmeetriarühmad 270—272

Vaba muutuja 185
Vahelduv rühm 246
Valetaja paradoks 88
Valiku aksioom 205, 206
Vasakpoolne pöördelement 239
Vasakpoolse korrutamisega poolrühm 225, 232, 233
Vastandelement 239
Vastuvääkivuse seadus 157, 158, 163
Vastuväiteline tõestus 206
Vektor 218
Vektorkorrutis 218, 219, 294, 295
Viisnurga pöörete rühm 229, 237—239
Võimsus 29, 79, 84
Võrdsed maatriksid 254
Võrdsed liikumised 261
Võrdsed predikaadid 179
Võrdsed teisendused 249
Võrreldamatud elemendid 44, 46, 49
Vähim element 54, 56
Välistatud kolmanda seadus 157, 158, 163, 206, 207
Väärus 127, 128, 129, 131, 173

SISUKORD

Sissejuhatus 5

1. **Jutustus hulgateooriast** 11
Mis on hulk? 13
Opereerimine hulkadega 17
Hulkade võrdlemine 27
Seosed ja funktsioonid 35
Järjestatud hulgad 43
Diagrammid ja graafid 48
Struktuurid 62
Kardinaalsed ja ordinaalsed tehted 70
Lõpmatud arvud 79
Veel üks lõpmatute arvude aritmeetika 83
Paradoksid hulgateoorias 87
Tutvume topoloogiaga 91
Nelja värvi probleem 97
Veel kord kaartide värvimisest 106

2. **Jutustus matemaatilisest loogikast** 122
Laused, liitlaused, tõeväärtused 127
Eitus, konjunktsioon ja disjunktsioon 131
Loogikatehete interpreteerimine kontaktrelee skeemide abil 136
Etteantud tõeväärtusega laused ja skeemid 140
Veel mõned loogikatehted 148
Seos loogikatehete vahel 152
Boole'i algebra 157
Kontaktrelee skeemide lihtsustamine 160
Boole'i funktsioonid 169
Mitmevalentsed loogilised süsteemid 173
Predikaadid ja kvantorid 177
Algoritmid 187
Posti masin 195
Markovi normaalalgoritm 200
Konstruktiivne matemaatika 204

3. Jutustus tänapäeva algebrast 208
Algebraline operatsioon 218
Kommutatiivsus ja assotsiatiivsus 221
Grupoidid ja poolrühmad 224
Isomorfism 228
Monogeensed poolrühmad 232
Rühmad 236
Substitutsioonide rühmad 244
Cayley teoreem 248
Schmidti algebra-alane looming 251
Maatriksite rühmad 254
Sümmeetriarühmad 261
Kahe operatsiooniga algebralised süsteemid 274
Kleini Erlangeni programm 277
Ringid 287
Idempotendid ja nullitegurid 290
Mitteassotsiatiivsed ringid 294
Veel kord struktuuridest 299
Algebralise operatsiooni mõiste laiendamine 304
Universaalsed algebrad 308
Lõppsõna 313
Isikunimede register 319
Aineregister 320

Евгений Габович. МАТЕМАТИКА БЕЗ ЧИСЕЛ. На эстонском языке. Оформление и иллюстрации Т. Винт. Чертежи М. Нийн. Издательство «Валгус». Таллин, Пярнуское шоссе, 10.

Toimetaja H. Heinoja. Kunstiline toimetaja A. Säde. Tehniline toimetaja O. Mullari. Korrektor J. Nurme.

Laduda antud 1. IV 1967. Trükkida antud 28. XI 1968. Paber 60×90/16. Trükipaber nr. 1 — Staicele Paberivabrik, Läti NSV. Trükipoognaid 20,5. Arvestuspoognaid 19,76. Trükiarv 8000. MB-10521. Tell. nr. 2297. H. Heidemanni nim. trükikoda, Tartu, Ülikooli 17/19. II.

Hind 83 kop.

A
29 618
M3698

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00337524 5