

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

O. SILDE, H. RELVIK

VEKTORANALÜÜSI ALGMED

TALLINN 1961

A-24260

A.

TALLINNA POLÜTEHNILINE INSTITUUT

Teoreetilise mehaanika kateeder

O. Silde, H. Relvik

VEKTORANALÜÜSI ALGMED

(konspekt)

Tallinn 1961

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

VEKTOR SKALAARI FUNKTSIOONINA

§ 1. Vektoranalüüsi aine

Vektoranalüüs käsitleb muutuvaid vektoreid, ta uurib funktsioone, mille väärtusteks on vektorid (vektorfunktsioone), või mille argumentide hulgas esineb vektoreid.

Näiteid:

- 1) vektor skalaari funktsioonina: tuule kiirus (vektor) ühes kindlas kohas on aja (skalaar) funktsioon, sümbolites $\vec{v} = \vec{v}(t)$;
- 2) skalaar vektori funktsioonina: ühel ja samal hetkel õhurõhumine (skalaar) on koha (kohavektori) funktsioon, sümbolites $p = p(\vec{r})$;
- 3) vektor vektori funktsioonina: ühel ja samal hetkel tuule kiirus (vektor) on koha (kohavektori) funktsioon sümbolites $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r})$;
- 4) vektor vektori ja skalaari funktsioonina: tuulekiirus (vektor) on koha (kohavektori) ja aja funktsioon, sümbolites $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$.

§ 2. Vektor ühe skalaarse argumendi funktsioonina

Olgu vektor \vec{a} skalaarse suuruse t funktsioon. See tähendab, et teatavas muutumisvahemikus igale skalaari t väärtusele vastab kindel vektori \vec{a} väärtus. Sümbolites kirjutatakse seda nii

$$\vec{a} = \vec{a}(t).$$

Vektorit \vec{a} võib alati avaldada kolme teineteisega paarikaupa ortogonaalse ühikvektori $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ kaudu:

$$\vec{a} = a_x \vec{u}_1 + a_y \vec{u}_2 + a_z \vec{u}_3,$$

kus a_x, a_y, a_z on skalaarid, vektori \vec{a} koordinaadid, ehk vektori \vec{a} projektsioonid telgedele. Suurused $a_x \vec{u}_1, a_y \vec{u}_2$ ja $a_z \vec{u}_3$ on vektori \vec{a} telgedesihhilised komponendid. Kui \vec{a} on t funktsioon, siis ka tema koordinaadid on t funktsi-

oonid, s.o.

$$a_x = a_x(t),$$

$$a_y = a_y(t),$$

$$a_z = a_z(t).$$

Seega

$$\bar{a}(t) = a_x(t)\bar{u}_1 + a_y(t)\bar{u}_2 + a_z(t)\bar{u}_3.$$

Kindel vektor \bar{a}_0 on muutuva vektori $\bar{a}(t)$ piirväärtuseks argumendi t lähenemisel kindlale väärtusele t_0 , sümbolites

$$\bar{a}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t),$$

kui
$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\bar{a}(t) - \bar{a}_0| = 0.$$

Olgu
$$\bar{a}_0 = a_{ox}\bar{u}_1 + a_{oy}\bar{u}_2 + a_{oz}\bar{u}_3.$$

Siis

$$|\bar{a}(t) - \bar{a}_0| = \sqrt{(a_x(t) - a_{ox})^2 + (a_y(t) - a_{oy})^2 + (a_z(t) - a_{oz})^2}.$$

Selle ruutjuure piirväärtus on null siis ja ainult siis, kui

$$a_{ox} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_x(t),$$

$$a_{oy} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_y(t),$$

$$a_{oz} = \lim_{t \rightarrow t_0} a_z(t).$$

Sellest järeldub, et kui $\bar{a}_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t)$, siis ka $a_0 = \lim_{t \rightarrow t_0} a(t)$

ja

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (\widehat{\bar{a}(t), \bar{a}_0}) = 0, \text{ kus } a_0 = |\bar{a}_0| \text{ ja } a(t) = |\bar{a}(t)|.$$

Lähtudes eeltoodud tõsiasiadest, vektoritega sooritavate tehete definitsioonidest ja vastavatest teoreemidest matemaatilises analüüsis, võib näidata, et

- 1) $\lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{a}(t) + \bar{b}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{b}(t),$
- 2) $\lim_{t \rightarrow t_0} [m(t) \bar{a}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} m(t) \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t),$
- 3) $\lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{a}(t) \cdot \bar{b}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{b}(t),$
- 4) $\lim_{t \rightarrow t_0} [\bar{a}(t) \times \bar{b}(t)] = \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} \bar{b}(t),$

kui kõik piirväärtused on olemas. $\bar{a}(t)$, $\bar{b}(t)$, $m(t)$ on argumenti t funktsioonid. Vektor $\bar{a}(t)$ on pidev argumenti väärtusel t_0 (punktist t_0), kui

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}(t_0).$$

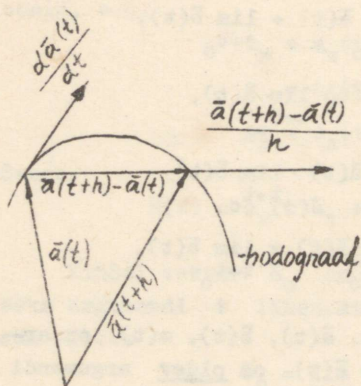
Vektor $\bar{a}(t)$ on pidev mingis vahemikus, kui ta on pidev selle vahemiku igas punktis.

Eelpool saadud seostest järeldub, et kui vektor $\bar{a}(t)$ on pidev argumenti t funktsioon, siis on ka tema koordinaadid $a_x(t)$, $a_y(t)$ ja $a_z(t)$ pidevad argumenti t funktsioonid ning ümberpöörduvalt, kui koordinaadid on pidevad argumenti funktsioonid, siis on seda ka $\bar{a}(t)$.

Edaspidi eeldame, et $\bar{a}(t)$ on pidev argumenti t funktsioon. Kui kanda kõik vektorid $\bar{a}(t)$, mis saadakse argumenti t igasugustel väärtustel, ühisesse alguspunkti, siis kujutavad vektorite lõpp-punktid pideva joone, mida nimetatakse vektori $\bar{a}(t)$ hodograafiks.

§ 3. Tuletis

Olgu t ja $t+h$ kaks argumenti väärtust; neile vastavad vektorfunktsiooni väärtused on siis $\bar{a}(t)$ ja $\bar{a}(t+h)$. Moodustame funktsiooni väärtuste vahe ja argumenti vastavate väärtuste vahe jagatise:



$$\frac{\bar{a}(t+h) - \bar{a}(t)}{h}$$

h

See jagatis on vektor. Ta on hodograafi vastava kõõlu sihiline.

Püüame leida

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t+h) - \bar{a}(t)}{h}$$

Kui see piirväärtus on olemas, siis nimetatakse seda vektori $\bar{a}(t)$ tuletiseks (argumendi t järgi) ja

tähistatakse nii

$$\bar{a}'(t) \text{ ehk } \frac{d\bar{a}(t)}{dt}$$

$$\text{Seega } \bar{a}'(t) = \frac{d\bar{a}(t)}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t+h) - \bar{a}(t)}{h}$$

Vektori $\bar{a}(t)$ tuletis on tema hodograafi puutuja sihiline vektor punktis t. Mehaanikas on sageli argumendiks t aeg. Vektori $\bar{a}(t)$ tuletist aja suhtes tähistatakse ka sümbooliga $\dot{\bar{a}}(t)$. Seega

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = \dot{\bar{a}}(t), \text{ kui } t \text{ tähendab aega.}$$

$\frac{d\bar{a}(t)}{dt}$ asemel võib lühendatult kirjutada $\frac{d\bar{a}}{dt}$ (ja $\bar{a}'(t)$) ning $\dot{\bar{a}}(t)$ asemel vastavalt \bar{a}' ning $\dot{\bar{a}}$, kui ei teki kahtlust, missuguse argumendi järgi tuletis on võetud.

Sümbooliga $d\bar{a}$ tähistatakse vektori $\bar{a}(t)$ diferentsiaali. Võrduse $\frac{d\bar{a}}{dt} = \bar{a}'(t)$ asemel võib tarvitada seost $d\bar{a} = \bar{a}'(t) dt$

(dt on argumendi t diferentsiaal). Sümbooliga $d\bar{a}$ võib teatud eeldustel mõelda puutujasihilist vektorit, mille pikkus võrdub vektori $\bar{a}'(t)$ ja diferentsiaali dt korrutise absoluut-

väärtusega (dt all võib mõelda argumendi meelevaldset juurdekasvu punktis t).

Vahet $\bar{a}(t+h) - \bar{a}(t)$ nimetatakse ka funktsiooni juurdekasvuks (diferentsiks) punktist t punkti t + h, ja teda tähistatakse sümboliga $\Delta \bar{a}(t)$ (või ka $\Delta \bar{a}$). Argumendi juurdekasv h tähistatakse vastavalt Δt . Järelikult võib kirjutada:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t}.$$

Väikeste Δt väärtuste puhul võib kirjutada

$$\bar{a}(t) \approx \bar{a}'(t) \Delta t.$$

Vektori tuletise arvutamiseks arutleme järgmiselt. Võrdust $\bar{a}(t) = a_x(t)\bar{u}_1 + a_y(t)\bar{u}_2 + a_z(t)\bar{u}_3$ kasutades saame

$$\frac{\bar{a}(t+h) - \bar{a}(t)}{h} = \frac{a_x(t+h) - a_x(t)}{h} \bar{u}_1 + \frac{a_y(t+h) - a_y(t)}{h} \bar{u}_2 + \frac{a_z(t+h) - a_z(t)}{h} \bar{u}_3.$$

Võttes mõlemal poolel piirväärtuse, saame

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \bar{u}_1 + \frac{da_y}{dt} \bar{u}_2 + \frac{da_z}{dt} \bar{u}_3,$$

või ka

$$\bar{a}'(t) = a'_x(t)\bar{u}_1 + a'_y(t)\bar{u}_2 + a'_z(t)\bar{u}_3.$$

s.o. tuletisvektori koordinaadid ehk vektori tuletise koordinaadid võrduvad vektori koordinaatide tuletistega.

Märkus: Vektori tuletise pikkus (absoluutväärtus) üldiselt ei võrdu vektori pikkuse (absoluutväärtuse) tuletisega:

$$\left| \frac{d\bar{a}}{dt} \right| \neq \frac{da}{dt}, \text{ kus } a = |\bar{a}|.$$

Et vektori $\bar{a}(t)$ tuletis on jällegi vektor ja üldiselt argumendi t funktsioon, siis võime arvutada tema tuletise analoogiliselt eelmisele. See on antud vektori teine tule-

tis:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\bar{a}}{dt} \right) = \frac{d\bar{a}'}{dt} = \frac{d^2\bar{a}}{dt^2} = \bar{a}''(t) \quad \text{või} \quad \ddot{\bar{a}} \quad (\text{kui } t \text{ tähendab aega})$$

Analoogiliselt võime edasi minna ja arvutada n -nda (või n -ndat järku) tuletise temale eelnevast $(n-1)$ -st tuletisest:

$$\bar{a}^{(n)}(t) = \frac{d^n \bar{a}}{dt^n} = \frac{d}{dt} \frac{d^{n-1} \bar{a}}{dt^{n-1}} = \frac{d\bar{a}^{(n-1)}}{dt}$$

Samuti diferentsiaalid:

$$d^2\bar{a} = d(d\bar{a}) = \bar{a}''(t) dt^2$$

ja

$$d^n \bar{a} = d(d^{n-1} \bar{a}) = \bar{a}^{(n)} dt^n$$

Sõnades: teine diferentsiaal ja n -s või n -ndat järku diferentsiaal. Need diferentsiaalide avaldised on õiged, kui t on sõltumatu muutuja.

§ 4. Tuletise (diferentsiaali) omadusi

1. Summa tuletis võrdub liidetavate tuletiste summaga.

$$\begin{aligned} \frac{d[\bar{a}(t) + \bar{b}(t)]}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a} + \Delta \bar{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{b}}{\Delta t} = \\ &= \frac{d\bar{a}}{dt} + \frac{d\bar{b}}{dt} \end{aligned}$$

2. Skalaarse funktsiooni ja vektorfunktsiooni korrutise tuletis:

$$\frac{d m(t)\bar{a}(t)}{dt} = \frac{dm}{dt} \bar{a} + m \frac{d\bar{a}}{dt}$$

Tõestame:

$$\begin{aligned} \frac{d(m\bar{a})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(m + \Delta m)(\bar{a} + \Delta \bar{a}) - m\bar{a}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \bar{a} + m \Delta \bar{a} + \Delta m \Delta \bar{a}}{\Delta t} = \frac{dm}{dt} \bar{a} + m \frac{d\bar{a}}{dt} \end{aligned}$$

sest

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m \Delta \bar{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \bar{a} = \frac{dm}{dt} \cdot 0 = 0.$$

(Kui $\Delta t \rightarrow 0$, siis ka vektori juurdekasv $\Delta \bar{a} \rightarrow 0$).

Järeldus: kui $m = \text{const}$, siis

$$\frac{d(m\bar{a}(t))}{dt} = m \frac{d\bar{a}}{dt},$$

sest $\frac{dm}{dt} = 0$.

3. Vektorite skalaarkorrutise tuletis:

$$\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}.$$

Töestus:

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{a} \cdot \bar{b})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\bar{a} + \Delta \bar{a})(\bar{b} + \Delta \bar{b}) - \bar{a} \cdot \bar{b}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \Delta \bar{b} + \Delta \bar{a} \cdot \Delta \bar{b}}{\Delta t} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{b}}{dt}, \end{aligned}$$

sest $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a} \cdot \Delta \bar{b}}{\Delta t} = 0$ (kuna $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \bar{b} = 0$).

4. Vektorite vektorkorrutise tuletis:

$$\frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}.$$

Töestus:

$$\begin{aligned} \frac{d(\bar{a} \times \bar{b})}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\bar{a} + \Delta \bar{a}) \times (\bar{b} + \Delta \bar{b}) - \bar{a} \times \bar{b}}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \Delta \bar{b} + \Delta \bar{a} \times \Delta \bar{b}}{\Delta t} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt}, \end{aligned}$$

sest $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a} \times \Delta \bar{b}}{\Delta t} = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \bar{b} = 0$ (kuna $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta \bar{b} = 0$)

Märkus: Vektorkorrutise tuletise valemis ei või muuta tegurite järjekorda.

5. Kui $\bar{a} = \bar{a}(t)$ ja $t = t(u)$, siis $\frac{d\bar{a}}{du} = \frac{d\bar{a}}{dt} \frac{dt}{du}$.

Töestus:

$$\frac{\Delta \bar{a}}{\Delta u} = \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta u},$$

$$\frac{d\bar{a}}{du} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{a}}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta u} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \frac{dt}{du}.$$

Märkus: Kõik eelpoolantud töestused võib anda ka nii, et avaldada vektorid ortogonaalsete ühikvektorite abil ning siis leida vastavad seosed koordinaatide vahel, kust siis jällegi võib tagasi minna vektorite juurde. Kuid konspekti ruum on liiga piiratud selliste pikkade arvutuste jaoks. Pealegi on töestused nii lihtsad, et igauks võib neid sooritada harjutusülesannetena.

Et iga vektorit võib vaadelda tema komponentide summana, siis võib 1.põhjal öelda, et vektori tuletis on tema komponentide tuletiste summa, millest muuseas järeldub ka varem toodud vektori tuletise leidmine, kui vektor on antud ortogonaalsete ühikvektorite abil.

Eespoolantud teoreemidest saab seosed diferentsiaali-
de vahel:

1. $d(\bar{a} + \bar{b}) = d\bar{a} + d\bar{b}$,
2. $d(m\bar{a}) = \bar{a}dm + m d\bar{a}$,
3. $d(\bar{a} \cdot \bar{b}) = d\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot d\bar{b}$,
4. $d(\bar{a} \times \bar{b}) = d\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times d\bar{b}$,
5. $d\bar{a} = \frac{d\bar{a}}{dt} \frac{dt}{du} du$.

§ 5. Vektor ja temasihiline ühikvektor

Olgu $\bar{a} = \bar{a}(t)$, $a = a(t) = |\bar{a}|$ ja vektori \bar{a} sihiline ühikvektor $\bar{u}_a(t)$. \bar{u}_a on ka t funktsioon, tema pikkus on alati 1, tema suund aga ühtib kas vektori \bar{a} suunaga või on sellega vastupidine. Seega

$$\bar{a}(t) = a(t) \bar{u}_a(t).$$

Vaatleme kahte juhtumit.

1. Olgu vektori \bar{a} pikkus muutuv, tema siht aga muutu-
matu; siis $\bar{u}_a = \text{const}$, $\frac{d\bar{u}_a}{dt} = 0$ ja

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \bar{u}_a + \frac{d\bar{u}_a}{dt} a = \frac{da}{dt} \bar{u}_a.$$

Seega sel juhul vektori tuletis on vektoriga samasihiline.

2. Vektori \bar{a} pikkus on konstantne, tema suund aga muutuv.

Siin

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = a^2 = \text{const},$$

$$\frac{d(\bar{a} \cdot \bar{a})}{dt} = \frac{d\bar{a}}{dt} \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = 2\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = 0,$$

ehk

$$\bar{a} \cdot \frac{d\bar{a}}{dt} = 0.$$

Kahe vektori skalaarkorrutis võib üldiselt siis võruda nulliga, kui vektorid on teineteisega risti. Järelikult

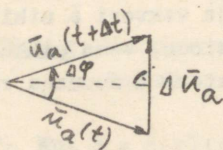
$$\frac{d\bar{a}}{dt} \perp \bar{a}.$$

Edasi $\frac{d\bar{a}}{dt} = a \frac{d\bar{u}_a}{dt}$, sest $\frac{da}{dt} = 0$ (kuna a on konstantne).

Eelviimasest võrdusest järeldub, et ka

$$\frac{d\bar{u}_a}{dt} \perp \bar{a} \quad \text{ehk} \quad \frac{d\bar{u}_a}{dt} \perp \bar{u}_a$$

(sest \bar{a} ja \bar{u}_a on samasihilised).



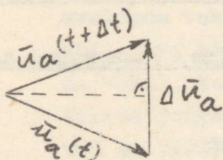
$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_a}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta \varphi} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} \right) = \\ &= \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta \varphi} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} . \end{aligned}$$

$\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta \varphi}$ on $\frac{d\bar{u}_a}{dt}$ sihiline vektor. Arvutame pikkuse.

$$\left| \frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta \varphi} \right| = \frac{|\Delta \bar{u}_a|}{|\Delta \varphi|} = \frac{|2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}|}{|\Delta \varphi|} ,$$

sest $|\Delta \bar{u}_a| = |2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}|$, nagu näha joonisest.

Järelikult



$$\begin{aligned} \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta \varphi} \right| &= \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{|\sin \frac{\Delta \varphi}{2}|}{\left| \frac{\Delta \varphi}{2} \right|} = \\ &= \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\frac{\Delta \varphi}{2}} = 1, \end{aligned}$$

sest $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Tähistame: $\lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{u}_a}{\Delta \varphi} = \bar{u}_\varphi$ (\bar{u}_φ on $\frac{d\bar{u}_a}{dt}$ sihiline ühik-vektor)

ja $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \omega$, siis

$$\frac{d\bar{u}_a}{dt} = \omega \bar{u}_\varphi \quad \text{ja} \quad \frac{d\bar{a}}{dt} = a \omega \bar{u}_\varphi .$$

Kui t tähistab aega, siis ω on vektori \bar{a} pöörlemise nurkkiirus. Konstantse pikkusega vektori hodograaf jääb alati kerapinnale, mille keskpunkt on O ja raadius on $|\bar{a}|$.

Selle hodograafi puutuja on alati risti puutepunkti viiva raadiusega.

3. Juhtum

$$\bar{a}(t) = a(t) \bar{u}_a(t),$$

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \bar{u}_a + a \frac{d\bar{u}_a}{dt},$$

kus $\frac{d\bar{u}_a}{dt} = \omega \bar{u}_\varphi$ (p.2 antud tähistus).

Järelikult:

$$\frac{d\bar{a}}{dt} = \frac{da}{dt} \bar{u}_a + a \omega \bar{u}_\varphi.$$

Vektori \bar{a} tuletis on lahutatud kaheks komponendiks:

1) vektori \bar{a} sihiliseks, mille pikkus on $\left| \frac{da}{dt} \right|$,

2) risti vektori \bar{a} sihiga, mille pikkus on $|a\omega|$,
 milles $\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, kus $\Delta\varphi$ tähistab nurka

vektori \bar{a} suunade vahel argumendi väärtustel

t ja $t + \Delta t$.

§ 6. Vektorfunktsiooni integreerimine.

Vektorfunktsiooni $\bar{a}(t)$ võib vaadelda kui mingi teise vektorfunktsiooni tuletist. Olgu $\bar{p}(t)$ niisugune funktsioon, mille tuletis on $\bar{a}(t)$. Järelikult

$$\bar{a}(t) = \frac{d\bar{p}(t)}{dt} \quad \text{ehk} \quad \bar{a}(t) dt = d\bar{p}(t).$$

Siis on

$$\int \bar{a}(t) dt = \bar{p}(t) + \bar{c}$$

vektorfunktsiooni $\bar{a}(t)$ määramata ehk üldintegraal, milles \bar{c} on meelevaldne konstantne vektor.

Olgu t_1 ja t_2 argumendi t väärtused. Siis

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{a}(t) dt = \bar{p}(t_2) - \bar{p}(t_1)$$

on funktsiooni $\bar{a}(t)$ määratud integraal rajast t_1 rajani t_2 .

Kui ülemine raja jätta meelevaldseks ja tähistada seda t -ga siis

$$\int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt = \bar{p}(t) - \bar{p}(t_1)$$

ja liidintegraal

$$\int \bar{a}(t) dt = \int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt + \bar{c}.$$

Siit järeldub, et

$$\frac{d}{dt} \int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt = \bar{a}(t).$$

Järeldus:

$$\int_{t_1}^t [\bar{a}(t) + \bar{b}(t)] dt = \int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt + \int_{t_1}^t \bar{b}(t) dt.$$

Tõestus: Tuletised mõlemal poolel on võrdsed, järelikult funktsioonid võivad erineda ainult konstandi võrra. Kui võtame $t=t_1$, siis näeme, et konstant peab olema 0.

Märkus: Avaldises $\int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt$ esineb tähis t kahes tähenduses t_1 (integreerimismuutujana ja ülemise rajana). Õigem oleks integreerimismuutuja tähistada teisiti, aga et kirjanduses niisugune kahesus esineb, siis autori lei pida-nud seda vajalikuks.

$\int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt$ avaldub integraalsumma piirväärtusena järgmiselt:

$$\int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{a}(t_i) \Delta t_i,$$

kus t_i on rida üksteisele järgnevaid argumenti väärtusi vahemikus $t_1 \leq t_i \leq t_{n+1} = t$ ja $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i > 0$.

Tõestus: $\int_{t_1}^t \bar{a}(t) dt = \bar{p}(t) - \bar{p}(t_1).$

Olgu $\Delta \bar{p}_i = \bar{p}(t_{i+1}) - \bar{p}(t_i)$. Järelikult

$$\bar{p}(t) - \bar{p}(t_1) = \sum_{i=1}^n \Delta \bar{p}_i, \text{ kus } t_{n+1} = t.$$

Edasi

$$\sum_{i=1}^n \Delta \bar{p}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \bar{p}_i}{\Delta t_i} \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \bar{a}(t_i) \Delta t_i + \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \Delta t_i,$$

kus $\frac{\Delta \bar{p}_i}{\Delta t_i} = \bar{a}(t_i) + \bar{\epsilon}_i$.

Et $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{p}_i}{\Delta t_i} = \bar{a}(t_i)$, siis $\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \bar{\epsilon}_i = 0$.

Järelikult

$$\begin{aligned} \bar{p}(t) - \bar{p}(t_1) &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta \bar{p}_i = \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{a}(t_i) \Delta t_i + \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \Delta t_i. \end{aligned}$$

Et lõpliku arvu liidetavatega summa puhul

$$\left| \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \Delta t_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |\bar{\epsilon}_i| \cdot |\Delta t_i| \leq |\bar{\epsilon}_i|_{\max} \cdot |t - t_1|$$

ja

$$\lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \left[|\bar{\epsilon}_i|_{\max} \cdot |t - t_1| \right] = |t - t_1| \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} |\bar{\epsilon}_i|_{\max} = 0,$$

kui funktsioon $\bar{a}(t)$ on pidev, siis järeljub võrratusest

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \left| \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \Delta t_i \right| \leq \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} |\bar{\epsilon}_i|_{\max} \cdot |t - t_1| = 0,$$

et

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \Delta t_i = 0, \text{ millega tõestus lõpebki.}$$

Kui $\bar{a}(t) = a_x \bar{u}_1 + a_y \bar{u}_2 + a_z \bar{u}_3$, siis

$$\int \bar{a}(t) dt = \bar{u}_1 \int a_x dt + \bar{u}_2 \int a_y dt + \bar{u}_3 \int a_z dt$$

ja

$$\int_{t_1}^{t_2} \bar{a}(t) dt = \bar{u}_1 \int_{t_1}^{t_2} a_x dt + \bar{u}_2 \int_{t_1}^{t_2} a_y dt + \bar{u}_3 \int_{t_1}^{t_2} a_z dt$$

§ 7. Ruumijoone kaare pikkus

Olgu ruumijoon antud parameetrilise võrrandikolmikuga:

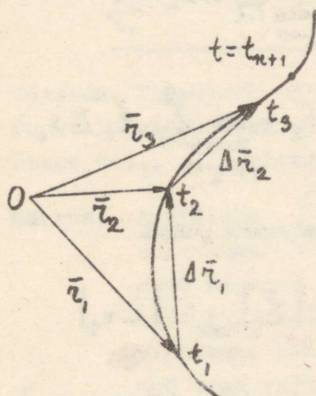
$$x = f(t),$$

$$y = g(t),$$

$$z = h(t),$$

siis joone punktini t viiv kohavektor

$$\bar{r}(t) = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3 = f(t)\bar{u}_1 + g(t)\bar{u}_2 + h(t)\bar{u}_3.$$



Leiame valemi joone punktist t_1 punktini t mineva kaare pikkuse arvutamiseks.

Olgu $\Delta \bar{r}_i = \bar{r}(t_{i+1}) - \bar{r}(t_i)$. Siis on punktist t_1 punktini t viiva joone kaare pikkus s defineeritud järgmiselt:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |\Delta \bar{r}_i| \Delta t_i \rightarrow 0$$

$$\sum_{i=1}^n |\Delta \bar{r}_i| = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i} \right| \Delta t_i = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \left| \frac{\Delta \bar{r}_i}{\Delta t_i} \right|$$

(kus + märk, kui $t > t_1$, ja - märk, kui $t < t_1$).

Viimases avaldises võib märgi - ära jätta, kui lugeda s negatiivseks juhtumel, kus $t < t_1$. Integraali definitsiooni põhjal saame, et

$$s = \int_{t_1}^t \left| \frac{d\bar{r}}{dt} \right| dt,$$

kui $\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|$ on pidev t funktsioon.

Avaldame ruumijoone kaare pikkuse s seda joont määravate funktsioonide $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ kaudu. Selleks

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t) = f'(t)\vec{u}_1 + g'(t)\vec{u}_2 + h'(t)\vec{u}_3,$$

millest

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}.$$

Järelikult:

$$s = \int_{t_1}^t \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} dt$$

ja

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2} \quad \text{ehk}$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}.$$

Uurime nüüd vektorit $\frac{d\vec{r}}{ds}$. Eelneva põhjal

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt} \quad \text{ehk} \quad [\vec{r}'(t)]^2 = [s'(t)]^2.$$

Edasi

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \text{ehk} \quad \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| \cdot \frac{ds}{dt},$$

millest

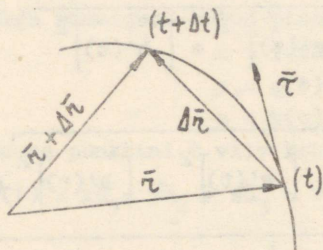
$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| : \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} : \frac{ds}{dt} = 1$$

ehk

$$\left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ on puutujasihiline vektor, sest $\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ ja $\Delta\vec{r}$

on kõõl, mis viib punktist t punktini $t + \Delta t$, $\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ - selle kõõlu sihiline (lõikajasihiline) vektor. Puutuja on piirasend, millele läheneb lõikaja, kui $\Delta t \rightarrow 0$ (puutuja definitsioon).



Vektori $\frac{d\vec{r}}{dt}$ pikkus oleneb parametri t valikust. $\frac{d\vec{r}}{ds}$ on järelikult puutujasihiline ühikvektor, teda tähistame $\vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt} : \frac{ds}{dt}$$

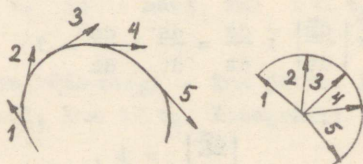
Ekh koordinaatides (arvestades, et $f'(t) = x'$, jne.)

$$\vec{\tau} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \vec{u}_1 + \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \vec{u}_2 + \frac{z'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \vec{u}_3,$$

ekh ka

$$\vec{\tau} = \frac{dx}{ds} \vec{u}_1 + \frac{dy}{ds} \vec{u}_2 + \frac{dz}{ds} \vec{u}_3,$$

kus $\frac{dx}{ds} = \tau_x(t)$, $\frac{dy}{ds} = \tau_y(t)$ ja $\frac{dz}{ds} = \tau_z(t)$ on puutuja suunakoosinused.



Vektori $\vec{r} = \vec{r}(t)$ hodograaf on mingi joon ühikkera pinnal. Sirgjoone puhul on hodograafiks punkt, tasapinnalise kõverjoone puhul - suurringi kaar jne.

§ 8. Peanormaal ja kõverus

Vektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ on vektori $\vec{r}(t)$ hodograafi puutuja sihiline vektor. $\frac{d\vec{r}}{dt} \perp \vec{r}$, sest \vec{r} on konstantse pikkusega vektor. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ asemel võib vaadelda ka temaga samasihilist vektorit $\frac{d\vec{r}}{ds}$, sest $\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$ (kus s on kõvera kindlast punktist t_1 loetud kaarepikkus).

Et $\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{ds}$, siis

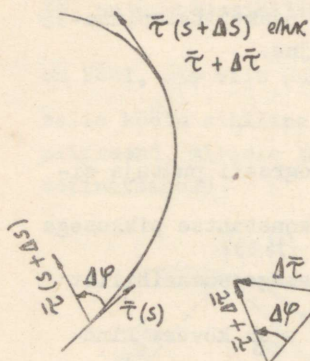
$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.$$

Joone normaalideks punktis t nimetatakse sirgeid, mis läbivad seda punkti ja mis on risti joone puutujaga selles punktis, s.t. asetsevad joone normaaltasapinnal. Eelneva põhjal on vektor $\frac{d\vec{r}}{ds}$ joone ühe normaali sihiline. Seda normaali nimetatakse peanormaaliks. Peanormaalihilist ühikvektorit tähistatakse \vec{v} , seega

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} : \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|.$$

Kui läbi ^{joone} punkti panna tasapind risti peanormaaliga, siis \vec{v} on suunatud tasapinna samale poolele, kus asetseb joon antud punkti naabruses, nagu selles võib veenduda joonise ning tuletise definitsiooni abil.

Teisiti: $\vec{v} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\varphi} = \frac{d\vec{r}}{d\varphi}$ (lüh. 12)



Edasi, § 5, punkt 2 põhjal $\frac{d\vec{r}}{ds} =$

$$= k\vec{v}, \text{ kus } k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{d\varphi}{ds}$$

Üldiselt loetakse $\Delta\varphi$ ja Δs märgid samadeks. Kui kõver asetseb $x y$ - tasapinnal, siis on $\Delta\varphi$ märk määratud; sel juhul

$$k = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \right|$$

Suurust k nimetatakse joone kõveruseks punktist t ja suurust $\rho = \frac{1}{k}$ joone kõverusraadiuseks. Kui jooneks on ringjoon, siis $\frac{\Delta s}{\Delta\varphi} = R$, kus R on ringi raadius, ja $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R}$. Mida väiksem on R , seda suurem on $\frac{1}{R}$, tähendab kõverus. Kõveruse jaoks saame:

$$k = |k\vec{v}| = \left| \frac{d\varphi}{ds} \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| : \frac{ds}{dt}$$

Tasapinda läbi puutuja ja peanormaali nimetatakse kooldumistasapinnaks. Seda võib vaadelda kui piirasendit, millele läheneb läbi joone antud ja kahe tema naabruses oleva punkti minev tasapind, kui naaberpunktid lähenevad antud punktile. Läbi kolme nimetatud punkti mineva ringjoone piirkujundiks on kõverusringjoon. See asetseb kooldumistasapinnas, keskpunkt on peanormaali kaugusel $\frac{1}{k}$ kõvera antud punktist. Kooldumistasapinna võrrand on

$$(\vec{r} \times \vec{v}) \cdot (\vec{R} - \vec{r}) = 0,$$

kus \vec{R} on tasapinna jooksva punkti kohavektor.

Kõverusringjoone võrrandid saame, kui eelmisele lisame järgmise võrrandi:

$$(\vec{R} - \vec{r} - \frac{1}{k} \vec{v})^2 = \frac{1}{k^2},$$

kus $\vec{r} + \frac{1}{k} \vec{v}$ on kõveruskeskpunkti viiv kohavektor.

Avaldame nüüd kõveruse vektorite koordinaatide kaudu.

Et

$$\begin{aligned} k\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\tau}{ds} x \bar{u}_1 + \frac{d\tau}{ds} y \bar{u}_2 + \frac{d\tau}{ds} z \bar{u}_3 = \\ &= \frac{d^2x}{ds^2} \bar{u}_1 + \frac{d^2y}{ds^2} \bar{u}_2 + \frac{d^2z}{ds^2} \bar{u}_3, \end{aligned}$$

siis

$$k = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2},$$

kus $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} : \frac{ds}{dt}$, jne., (avaldused t funktsioonina) ja

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{ds} \right) : \frac{ds}{dt}, \text{ jne.}, \text{ ning } \frac{d^2x}{ds^2} : k, \frac{d^2y}{ds^2} : k \text{ ja } \frac{d^2z}{ds^2} : k$$

on peanormaali suunakoosinused (vektori \vec{v} koordinaadid v_x, v_y, v_z).

§ 9. Binormaal ja vääne

Binormaal on joone see normaal, mis on risti peanormaaliga. Tema ühikvektor on $\vec{\beta} = \vec{r} \times \vec{v}$ (orienteeritud puutuja ja peanormaali ühikvektori suhtes, nagu z-telg x- ja y-telgede suhtes).

Tasapinnalistel joontel $\vec{\beta} = \text{konst.}$ Üldiselt aga $\vec{\beta} = \vec{\beta}(t)$ ehk

$$\vec{\beta}(t) = \beta_x \bar{u}_1 + \beta_y \bar{u}_2 + \beta_z \bar{u}_3,$$

milles

$$\beta_x = \frac{1}{k} \left(\frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} \right),$$

$$\beta_y = \frac{1}{k} \left(\frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2z}{ds^2} \right),$$

$$\beta_z = \frac{1}{k} \left(\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2x}{ds^2} \right).$$

Suurust $\left| \frac{d\vec{\beta}}{ds} \right| = \kappa$ (kapa) nimetatakse joone väändeks (vääne) antud punktis. Vektorkorrutise $\vec{\tau} \times \vec{v}$ differentseerimisel (vt. § 4) saame

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \times \vec{v} + \vec{\tau} \times \frac{d\vec{v}}{ds}.$$

Esimene liidetav on 0, sest $\frac{d\vec{\tau}}{ds} \parallel \vec{v}$, järelikult

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \vec{\tau} \times \frac{d\vec{v}}{ds},$$

millest järeldub, et

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\tau};$$

samuti $\frac{d\vec{\beta}}{ds} \perp \vec{\beta}$, sest $\vec{\beta}$ on konstantse pikkusega. Järelikult

$\frac{d\vec{\beta}}{ds}$ on \vec{v} sihiline vektor. Seega

$$\frac{d\vec{\beta}}{ds} = \pm \kappa \vec{v}.$$

§ 10. Köveruse valemi teisendamine

Et vabaneda köveruse arvutamisel tuletiste leidmisest kaarepikkuse s suhtes, kasutame järgmist vötet:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \frac{ds}{dt},$$

järelikult

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{\tau},$$

millest

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \frac{ds}{dt} \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Et

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \kappa \vec{v},$$

siis

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} \vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \kappa \vec{v}$$

ja

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 k (\vec{\tau} \times \vec{\nu})$$

(sest esimene liidetav on 0, kuna $\vec{\tau} \times \vec{\tau} = 0$).

Saime

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = k \left(\frac{ds}{dt}\right)^3 \vec{\beta}$$

Avaldame siit ühikvektori

$$\vec{\beta} = \frac{1}{k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right),$$

saame

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right| = k\left(\frac{ds}{dt}\right)^3.$$

Järelikult

$$k = \frac{\left|\frac{d\vec{r}}{dt} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3}$$

ehk koordinaatides

$$k = \frac{\sqrt{(y'z'' - y''z')^2 + (z'x'' - z''x')^2 + (x'y'' - x''y')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

kus tuletised on kõik t suhtes.

Kasutades tuntud seost $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$, saame

$$k = \frac{\sqrt{(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

§ 11. Punkti kinemaatika põhiküsimusi

Olgu punkti liikumisvõrrandid Cartesiusse koordinaadis-
tikus:

$$x = f(t)$$

$$y = g(t)$$

$$- 23 -$$

$$z = h(t)$$

t tähistab siin aega.

Olgu punktini viiv kohavektor

$$\vec{r} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3 .$$

Siis punkti liikumine võib olla antud vektoriaalsel kujul:

$$\vec{r} = \vec{r}(t),$$

kusjuures

$$\vec{r}(t) = f(t)\vec{u}_1 + g(t)\vec{u}_2 + h(t)\vec{u}_3 .$$

Vektori \vec{r} lõpppunkt kujutab trajektoori.

$$\text{Kiirusvektor } \underline{\vec{v}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

on trajektoori puutuja sihiline ja kiirendusvektor

$$\underline{\vec{w}} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

on kiirusvektori hodograafi puutuja sihiline.

$$\vec{v}(t) = f'(t)\vec{u}_1 + g'(t)\vec{u}_2 + h'(t)\vec{u}_3$$

ja

$$\vec{w}(t) = f''(t)\vec{u}_1 + g''(t)\vec{u}_2 + h''(t)\vec{u}_3$$

ehk

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_1 + \dot{y}\vec{u}_2 + \dot{z}\vec{u}_3$$

ja

$$\vec{w} = \ddot{x}\vec{u}_1 + \ddot{y}\vec{u}_2 + \ddot{z}\vec{u}_3 .$$

$$|\underline{\vec{v}}| = v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

ja

$$\underline{\vec{w}} = w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} .$$

\vec{v} ja \vec{w} suunakoosinused on vastavalt:

$$\frac{\dot{x}}{v}, \frac{\dot{y}}{v}, \frac{\dot{z}}{v}$$

ja

$$\frac{\ddot{x}}{w}, \frac{\ddot{y}}{w}, \frac{\ddot{z}}{w} .$$

Kui punkt liigub teadaoleval trajektoorigil, siis võib tema asukohta määrata kaarepikkuse s abil, mida mõdetakse trajektoori teatud punktist (alguspunktist) ja loetakse ühes suunas positiivseks, teises negatiivseks (köverjooneline koordinaat s). Liikumisseadus oleks siis

$$s = f(t).$$

Siis kiirus $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$. Et

$$|ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \text{ siis}$$

$$|v| = \left| \frac{ds}{dt} \right| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = |\bar{v}|.$$

Kiirendus $w_{\tau} = \dot{v} = \ddot{s} = f''(t)$ ei ole $|\bar{w}|$, vaid on nn. puutekiirendus (teekiirendus).

Punkti liikumise probleem võib olla antud ka nii, et teada oleva trajektoori puhul antakse kiirus või kiirendus (teekiirendus) aja funktsioonina:

$$v = v(t)$$

või $w = w(t)$

Üldisemal juhul võib olla antud kiirusvektor või kiirendusvektor aja funktsioonina:

$$\bar{v} = \bar{v}(t)$$

või $\bar{w} = \bar{w}(t)$.

Neil juhtumel liikumisseadus leitakse integreerimise teel, kusjuures integreerimisel tekkivatest meelevaldsetest konstantidest vabanetakse algtingimuste abil.

Konkreetselt vaatleme siin vaid üht juhtumit, nimelt punkti liikumist, kui on teada, et tema kiirendusvektor on konstantne. Olgu algtingimused antud järgmiselt: hetkel $t = 0$ olgu punktini viiv kohavektor $\bar{r} = \bar{r}_0$ ja punkti kiirusvektor $\bar{v} = \bar{v}_0$.

Tähistame konstantse kiirendusvektori sümboliga \bar{a} .

Siis

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{a}$$

ehk $d\bar{v} = \bar{a}dt$.

Integreerime ja asetame rajad vastavalt algtingimustele:

$$\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}} d\vec{v} = \int_0^t \vec{a} dt$$

Saame, et

$$\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

Siit nähtub, et kiirendusvektori hodograaf on sirgjoon.

Kuna $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, siis

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

ehk $d\vec{r} = \vec{a}t dt + \vec{v}_0 dt$.

Ehk

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t \vec{a}t dt + \int_0^t \vec{v}_0 dt;$$

millest

$$\vec{r} = \frac{\vec{a}}{2} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0,$$

mis esitabki liikumise seadust vektoriaalsel kujul.

Saadud võrrandist järeneb, et trajektoor on tasapinnaline (tasapind läbi p. \vec{r}_0 , paralleelne vektoritega \vec{a} ja \vec{v}_0). Sellel tasapinnal võtame läbi punkti \vec{r}_0 teljed x ja y nii, et y -telg oleks suunatud vektoriga \vec{a} vastupidiselt ja x -telg risti y -teljega. \vec{v}_0 moodustagu x teljega nurga α .

Siis $\vec{a} = -a\vec{u}_2$ ($a = |\vec{a}|$)

ja

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_1 + v_0 \sin \alpha \vec{u}_2$$

$$(v_0 = |\vec{v}_0|).$$

$$\vec{r} = v_0 (\cos \alpha) t \vec{u}_1 + \left(-\frac{at^2}{2} + v_0 (\sin \alpha) t \right) \vec{u}_2 + \vec{r}_0$$

ja liikumisvõrrandid koordinaatides oleksid:

$$x = v_0 (\cos \alpha) t$$

$$y = -\frac{at^2}{2} + v_0 (\sin \alpha)t.$$

Trajektooriks on parabool, mille telg on paralleelne y-teljega.

Konstantse kiirendusega $a = g$ ($g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$

raskuskiirendus) liigub Maa pinna lähedal raskusjõu toimel (tühjuses) visatud keha. Seega eelpool antud liikumisevõrrandid annavad kaldviske võrrandid, kui a asendada g-ga, y-telg suunata vertikaalselt üles ja x-telg valida nii, et kiirusvektor \vec{v}_0 jääks xy-tasapinda.

§ 12. Kiirus ja kiirendus polaarkoordinaatides

Punkti liikumisel tasapinnal võib tema asukohta määrata polaarkoordinaatides: r - polaarkaugus, φ - polaarnurk. Liikumisevõrrandid oleksid siis:

$$\begin{aligned} r &= r(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned}$$

Vektoriaalse käsitluse puhul tuleb võtta tarvitusele raadiusvektori sihiline ühikvektor \vec{u}_r ,

siis

$$\vec{r} = r\vec{u}_r,$$

kus

$$r = r(t)$$

ja $\vec{u}_r = \vec{u}_r(t)$.

$$\vec{u}_r = \cos \varphi \vec{u}_1 + \sin \varphi \vec{u}_2,$$

$$\dot{\vec{u}}_r = -\sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \vec{u}_1 + \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \vec{u}_2 =$$

$$= \dot{\varphi} \left[\cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_1 + \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \vec{u}_2 \right] =$$

$$= \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi = \omega \vec{u}_\varphi, \text{ milles } \omega = \dot{\varphi} \text{ (nurkkiirus) ja}$$

\vec{u}_φ on ühikvektor, mis saadakse vektorist \vec{u}_r tema pööramisel tasapinnal positiivses suunas täisnurga võrra.

$$\dot{\vec{u}}_\varphi = -\omega \vec{u}_r, \text{ nagu annab lihtne arvutus.}$$

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}} = \frac{d}{dt} (r\bar{u}_r) = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\bar{u}}_r =$$

$$= \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\phi}\bar{u}_\phi = \dot{r}\bar{u}_r + r\omega\bar{u}_\phi$$

$$\bar{v} = \dot{r}\bar{u}_r + r\dot{\phi}\bar{u}_\phi ,$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2}$$

$\dot{r}\bar{u}_r$ on kiiruse radiaalne, $r\dot{\phi}\bar{u}_\phi$ transversaalne komponent

$$\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \ddot{r}\bar{u}_r + \dot{r}\dot{\bar{u}}_r + \dot{r}\dot{\phi}\bar{u}_\phi + r\ddot{\phi}\bar{u}_\phi + r\dot{\phi}\dot{\bar{u}}_\phi = \ddot{r}\bar{u}_r + \dot{r}\dot{\phi}\bar{u}_\phi +$$

$$+ r\dot{\phi}\dot{\bar{u}}_\phi + r\ddot{\phi}\bar{u}_\phi - r\dot{\phi}^2\bar{u}_r = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{u}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{u}_\phi =$$

$$= (\ddot{r} - r\omega^2)\bar{u}_r + (r\varepsilon + 2\dot{r}\omega)\bar{u}_\phi , \text{ milles } \varepsilon = \dot{\omega} = \dot{\phi}$$

(nurkkiirendus).

$$\bar{w} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{u}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{u}_\phi ,$$

$$w = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)^2 + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})^2}$$

Kiirendusvektor \bar{w} koosneb kahest komponendist:

$$\bar{w}_r = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\bar{u}_r \dots \text{radiaalne kiirendus}$$

(kiirenduse radiaalne komponent),

$$\bar{w}_\phi = (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\bar{u}_\phi \dots \text{transversaalne kiirendus}$$

(kiirenduse transversaalne komponent).

$$\bar{w} = \bar{w}_r + \bar{w}_\phi .$$

Kumbki komponent koosneb veel kahest osast ja nii saame neli komponenti:

$\ddot{r}\bar{u}_r$ kiirendus liikumisel raadius-vektorit mööda
(polaarkauguse kiirendus),

$-r\dot{\phi}^2\bar{u}_r$ tsentripetaalkiirendus (suunatud pooluse
poole),

$r\dot{\varphi}\bar{u}_\varphi$ pöörlemiskiirendus,
 $2r\dot{\varphi}\bar{u}_\varphi$ Coriolise kiirendus.

Liikumisel mööda ringjoont $r = R = \text{const}$ ja valemid lihtsustuvad:

$$\bar{v} = R\omega\bar{u}_\varphi \text{ (ringjoone puutuja sihiline),}$$

$$v = R\omega \text{ (v ja } \omega \text{ on sama märgiga).}$$

$$\bar{w} = -R\omega^2\bar{u}_r + R\xi\bar{u}_\varphi$$

$\bar{w}_n = -R\omega^2\bar{u}_r$ nimetatakse normaalkiirenduseks ehk radiaalkiirenduseks ehk tsentripetaalkiirenduseks (suunatud ringjoone tsentri poole),

$\bar{w}_\tau = R\xi\bar{u}_\varphi$ nimetatakse puute- ehk tangentsiaalkiirenduseks (on ringjoone puutuja sihiline)

$$w_n = R\omega^2$$

$$w_\tau = R\xi \text{ (} w_\tau \text{ ja } \xi \text{ on sama märgiga).}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_n + \bar{w}_\tau.$$

$$w = R\sqrt{\xi^2 + \omega^4}$$

Nurk kiirendusvektori ja raadiuse vahel α saadakse valemist:

$$\tan \alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\xi}{\omega^2}$$

Tuleks mainida veel sektorkiirust (pindala kiirust) δ (S on pindala kahe raadiusvektori ja trajektoori vahel):

$$\delta = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{v}| = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}$$

§ 13. Puute- ja normaalkiirendus

Kiirusvektori võib üles kirjutada trajektoori puute-

ja sihilise ühikvektori \vec{e} abil:

$$\vec{v} = v \vec{e}.$$

Järelikult

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \dot{v} \vec{e} + v \dot{\vec{e}}$$

$$\dot{\vec{e}} = \frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\vec{e}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = v \frac{d\vec{e}}{ds}$$

§ 8. järgi $\frac{d\vec{e}}{ds} = k\vec{y} = \frac{1}{\rho} \vec{y}$,

järelikult $\dot{\vec{e}} = \frac{v}{\rho} \vec{y}$ ja

$$\vec{w} = \dot{v} \vec{e} + \frac{v^2}{\rho} \vec{y}$$

$\vec{w}_\tau = \dot{v} \vec{e}$ on puute- ehk tangentsiaalkiirendus (trajektoori puutuja sihiline),

$\vec{w}_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{y}$ on normaalkiirendus (trajektoori peanormaali sihiline).

$$w_\tau = \dot{v},$$

$$w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

$$\vec{w} = \vec{w}_\tau + \vec{w}_n,$$

$$w = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{\rho^2}}$$

Nurk kiirendusvektori ja peanormaali vahel α leitakse valemist:

$$\tan \alpha = \frac{w_\tau}{w_n} = \frac{\dot{v} \rho}{v^2}.$$

Valemist nähtub, et punkti kiirendusvektor asetseb trajektoori kooldumistasapinnas, tema projektsioon binormaali

sihile $w_{\beta} = 0$.

§ 14. Liikuv ühikvektorite kolmik

Olgu antud kolm teineteisega paarikaupa ortogonaalset ühikvektorit \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} , mille algused on liikumatult koordinaatide alguspunktis, vektorid aga liiguvad jäädes üksteisega ortogonaalseteks (vektorid \bar{b} , \bar{c} , \bar{d} võivad olla jäigalt seotud abs. kõva kehaga, mis liigub nii, et tema üks punkt, asukohaga alguspunktis, jääb paigale). Siis kehtivad seosed:

$$(1) \quad \bar{b} \cdot \bar{b} = \bar{c} \cdot \bar{c} = \bar{d} \cdot \bar{d} = 1 \text{ (ühikvektorid) ja} \\ \bar{b} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot \bar{d} = \bar{d} \cdot \bar{b} = 0 \text{ (ortogonaalsus).}$$

Diferentseerides aja järgi saame:

$$(2) \quad \bar{b} \cdot \dot{\bar{b}} = \bar{c} \cdot \dot{\bar{c}} = \bar{d} \cdot \dot{\bar{d}} = 0 \text{ ja} \\ \bar{b} \cdot \dot{\bar{c}} + \dot{\bar{b}} \cdot \bar{c} = \bar{c} \cdot \dot{\bar{d}} + \dot{\bar{c}} \cdot \bar{d} = \bar{d} \cdot \dot{\bar{b}} + \dot{\bar{d}} \cdot \bar{b} = 0.$$

Näitame, et sel juhtumil igal ajahetkel leidub üks ja ainult üks vektor $\bar{\omega}$, niisugune, et

$$(3) \quad \dot{\bar{b}} = \bar{\omega} \times \bar{b}, \\ \dot{\bar{c}} = \bar{\omega} \times \bar{c}, \\ \dot{\bar{d}} = \bar{\omega} \times \bar{d}.$$

Vektor $\bar{\omega}$ nimetatakse hetkeliseks nurkkiirusvektoriks.

Ei ole raske näha, et seosed (2) jäävad kehtima, olgu $\bar{\omega}$ milline tahes. Tõepoolest:

$$\bar{b} \cdot \dot{\bar{b}} = \bar{b} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{b}) = 0, \text{ jne. ja} \\ \bar{b} \cdot \dot{\bar{c}} + \dot{\bar{b}} \cdot \bar{c} = \bar{b} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{c}) + (\bar{\omega} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \\ = \bar{b} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{c}) + (\bar{c} \times \bar{\omega}) \cdot \bar{b} = \\ = \bar{b} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{c}) - \bar{b} \cdot (\bar{\omega} \times \bar{c}) = 0, \text{ jne.}$$

Valemitest (3) saame:

$$(\bar{b} \times \dot{\bar{b}}) + (\bar{c} \times \dot{\bar{c}}) + (\bar{d} \times \dot{\bar{d}}) = \bar{b} \times (\bar{\omega} \times \bar{b}) + \bar{c} \times (\bar{\omega} \times \bar{c}) + \\ + \bar{d} \times (\bar{\omega} \times \bar{d}) = \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{b})\bar{b} + \bar{\omega} - (\bar{\omega} \cdot \bar{c})\bar{c} + \bar{\omega} - \\ - (\bar{\omega} \cdot \bar{d})\bar{d} = 3\bar{\omega} - \bar{\omega} = 2\bar{\omega}, \text{ millest}$$

$$\bar{\omega} = \frac{(\bar{b} \times \dot{\bar{b}}) + (\bar{c} \times \dot{\bar{c}}) + (\bar{d} \times \dot{\bar{d}})}{2} \quad \text{enk}$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{2} [(\bar{b} \times \dot{\bar{b}}) + (\bar{c} \times \dot{\bar{c}}) + (\bar{d} \times \dot{\bar{d}})]$$

Saadud $\bar{\omega}$ avaldis ranuldab samaselt iga valemiga (3).

Tõepoolest:

$$\dot{\bar{b}} = \frac{(\bar{b} \times \dot{\bar{b}}) + (\bar{c} \times \dot{\bar{c}}) + (\bar{d} \times \dot{\bar{d}})}{2} \times \bar{b} = \frac{1}{2} \dot{\bar{b}} - \frac{1}{2} (\dot{\bar{c}} \cdot \bar{b}) \bar{c} -$$

$$- \frac{1}{2} (\dot{\bar{d}} \cdot \bar{b}) \bar{d} = \frac{1}{2} \dot{\bar{b}} + \frac{1}{2} (\dot{\bar{b}} \cdot \bar{c}) \bar{c} + \frac{1}{2} (\dot{\bar{b}} \cdot \bar{d}) \bar{d} + \frac{1}{2} (\dot{\bar{b}} \cdot \bar{b}) \bar{b} =$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\bar{b}} + \frac{1}{2} \dot{\bar{b}} = \dot{\bar{b}},$$

jne. (on võetud arvesse, et kehtivad seosed (2), s.o. et

$$\dot{\bar{c}} \cdot \bar{b} = -\dot{\bar{b}} \cdot \bar{c} \quad \text{ja} \quad \dot{\bar{d}} \cdot \bar{b} = -\dot{\bar{b}} \cdot \bar{d}.)$$

Valem

$$\bar{\omega} = \frac{(\bar{b} \times \dot{\bar{b}}) + (\bar{c} \times \dot{\bar{c}}) + (\bar{d} \times \dot{\bar{d}})}{2} \quad \text{näitab, et}$$

$\bar{\omega}$ on alati olemas, kui on olemas ühikvektorite tuletised. Tema ühesust saab näidata järgmiselt: oletame, et on olemas vektor $\bar{\omega}_1 \neq \bar{\omega}$ nii, et

$$\dot{\bar{b}} = \bar{\omega}_1 \times \bar{b}, \quad \dot{\bar{c}} = \bar{\omega}_1 \times \bar{c} \quad \text{ja} \quad \dot{\bar{d}} = \bar{\omega}_1 \times \bar{d}.$$

Siis valemite (3) põhjal:

$$\dot{\bar{b}} - \dot{\bar{b}} = \bar{\omega} \times \bar{b} - \bar{\omega}_1 \times \bar{b} = (\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) \times \bar{b} = \bar{0},$$

$$\dot{\bar{c}} - \dot{\bar{c}} = \bar{\omega} \times \bar{c} - \bar{\omega}_1 \times \bar{c} = (\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) \times \bar{c} = \bar{0},$$

$$\dot{\bar{d}} - \dot{\bar{d}} = \bar{\omega} \times \bar{d} - \bar{\omega}_1 \times \bar{d} = (\bar{\omega} - \bar{\omega}_1) \times \bar{d} = \bar{0}.$$

Vektor $\vec{\omega} - \vec{\omega}_1$ võiks olla nullist erinev ainult siis, kui ta üheaegselt oleks paralleelne ühikvektoritega \vec{b} , \vec{c} ja \vec{d} , mis on võimatu. Tähendab $\vec{\omega} - \vec{\omega}_1 = \vec{0}$ ja $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}$.

$\vec{\omega} = \vec{0}$, siis ja ainult siis, kui $\dot{a} = \dot{b} = \dot{c} = \dot{d}$, s.o. kui ühikvektorite kolmik seisab paigal.

§ 15. Kiiruste jaotus abs. kõva keha liikumisel (pöörlemisel) kinnispunkti ümber.

Abs. kõva keha kinnispunktis võtame kolm paarikaupa teineteisega ortogonaalset ühikvektorit \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} , mis liiguvad ^{koos} selle kehaga. Siis kinnispunktist abs. kõva keha mingisse punkti viiv kohavektor \vec{r} on avaldatav järgmiselt: $\vec{r} = B\vec{b} + C\vec{c} + D\vec{d}$, milles B, C ja D on selle punkti koordinaadid kehaga kaasaminevas teljestikus. Seega B, C ja D on konstandid.

Punkti kiirusvektor

$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = B\dot{\vec{b}} + C\dot{\vec{c}} + D\dot{\vec{d}}$ (sest B, C ja D on konstandid). Asendades $\dot{\vec{b}}$, $\dot{\vec{c}}$ ja $\dot{\vec{d}}$ § 14. saadud avaldistega (3) saame:

$$\vec{v} = B(\vec{\omega} \times \vec{b}) + C(\vec{\omega} \times \vec{c}) + D(\vec{\omega} \times \vec{d}) = \vec{\omega} \times (B\vec{b} + C\vec{c} + D\vec{d})$$

ehk

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

See valem (mis teatavasti tuleb ette ka kõva keha pöörlemisel kinnistelje ümber) võimaldab arvutada kõva keha mistahes punkti kiirusvektorit niipea, kui on teada hetkeline nurkkiirusvektor $\vec{\omega}$ ja punkti kohavektor \vec{r} .

Valemist nähtub, et kui $\vec{\omega} \parallel \vec{r}$, siis $\vec{v} = \vec{0}$. Seega kõva keha punktidel, mis asetsevad nurkkiirusvektoriga paralleelsel, läbi kinnispunkti mineval sirgel (hetkelisel pöörlemisteljel), on kiirused nullid. Kiirused jaotuvad nii, kui toimuks vaadeldaval hetkel keha pöörlemine ümber hetkelise pöörlemistelje nurkkiirusega $\omega = |\vec{\omega}|$.

§ 16. Kiiruste jaotus kõva keha üldisel liikumisel

Olgu punkt O liikumatu koordinaadistiku alguspunkt.

Liikuvale kõvale kehale võtame vabalt punkti A (poolus, liiku-

va koordinaatistiku alguspunkt). Sellesse punkti A asetame kolm paarikaupa üksteisega risti olevat ühikvektorit \vec{b} , \vec{c} ja \vec{d} , mis on järgalt seotud liikuva kenaga. Valime veel kõval kehal meelevaldse punkti P ja leiame avaldise tema kiirusvektori \vec{v}_P jaoks.

$$\text{Olgu } \vec{r}_P = \vec{OP}; \vec{r}_A = \vec{OA} \quad \text{ja} \quad \vec{r}_{AP} = \vec{AP}.$$

Siis

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{AP},$$

$\vec{r}_{AP} = B\vec{b} + C\vec{c} + D\vec{d}$, milles A , B ja C on konstandid (punkti P koordinaadid liikuva kenaga kaacaminevas teljestikus).

Diferentseerides saame:

$$\dot{\vec{r}}_P = \dot{\vec{r}}_A + \dot{\vec{r}}_{AP},$$

$$\dot{\vec{r}}_P = \vec{v}_P \quad (\text{p. } P \text{ kiirusvektor}),$$

$$\dot{\vec{r}}_A = \vec{v}_A \quad (\text{p. } A \text{ kiirusvektor}),$$

$$\dot{\vec{r}}_{AP} = B\dot{\vec{b}} + C\dot{\vec{c}} + D\dot{\vec{d}} = \vec{v}_{AP} \quad (\text{p. } P \text{ kiirusvektor p. } A$$

suhtes, ehk p. P pöörlemiskiirus umoor p. A).

$$\text{Seega } \vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{v}_{AP}.$$

Ühikvektorite \vec{b} , \vec{c} , \vec{d} kohta kehtivad § 14 valemid jarellikult ka valemid (2). Siit järgneb, et leidub niisugune vektor $\vec{\omega}$ (nurkkiirusvektor), et

$$\dot{\vec{b}} = \vec{\omega} \times \vec{b}, \quad \dot{\vec{c}} = \vec{\omega} \times \vec{c} \quad \text{ja} \quad \dot{\vec{d}} = \vec{\omega} \times \vec{d}.$$

Asetades need $\dot{\vec{r}}_{AP}$ enk \vec{v}_{AP} avaldise, saame, et

$$\vec{v}_{AP} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}$$

ja

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AP}.$$

Seega keha liikumist igal aja hetkel võib vaadelda koosnevana kahest liikumisest: 1) translatoorsest liikumisest kiirusega \vec{v}_A ja 2) pöörlemisest nurkkiirusega $\vec{\omega}$ ümber

telje. mis läbib punkti A ja on paralleelne vektoriga $\bar{\omega}$ (relatiivne pöörlemine).

Näitame, et $\bar{\omega}$ ei sõltu pooluse A valikust, vaid on antud hetkel üks ja sama, olgu pooluseks valitud kõva keha mis tahes punkt.

Töestuseks valime kaks poolust A ja A'. Olgu neile vastavad nurkkiirusvektorid $\bar{\omega}$ ja $\bar{\omega}'$. Siis

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AP} \quad (\text{pooluseks p. A})$$

ja teiselt poolt $\bar{v}_P = \bar{v}_{A'} + \bar{\omega}' \times \bar{r}_{A'P}$ (pooluseks p.A').

Arvestame, et

$$\bar{v}_{A'} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AA'}, \quad \text{ja}$$

$$\bar{r}_{AP} = \bar{r}_{AA'} + \bar{r}_{A'P}$$

Asetades need avaldused \bar{v}_P valemitesse saame, et

$$\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AA'} + \bar{\omega} \times \bar{r}_{A'P} \quad (\text{pooluseks p.A})$$

ja teiselt poolt $\bar{v}_P = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{r}_{AA'} + \bar{\omega}' \times \bar{r}_{A'P}$
(pooluseks p. A')

Mõlema valemi võrdlemisest leiame, et

$$\bar{\omega} \times \bar{r}_{A'P} = \bar{\omega}' \times \bar{r}_{A'P} \quad \text{ehk}$$

$$(\bar{\omega} - \bar{\omega}') \times \bar{r}_{A'P} = 0.$$

Et p. P oli meelevaldne, siis ka $\bar{r}_{A'P}$ on meelevaldne vektor ja viimane võrdus kehtib siis ja ainult siis kui $\bar{\omega} - \bar{\omega}' = 0$ ehk $\bar{\omega}' = \bar{\omega}$, m.o.t.t.

Kokkuvõttes võib öelda:

Olgu M ja N liikuva kõva keha kaks meelevaldset punkti, \bar{v}_M ja \bar{v}_N vastavalt nende punktide kiirusvektorid, siis sõltumata punktide M ja N valikust leidub igal hetkel üks ja ainult üks vektor $\bar{\omega}$, niisugune, et

$$\bar{v}_N = \bar{v}_M + \bar{\omega} \times \bar{r}_{MN}$$

milles \bar{r}_{MN} on punktist M punktini N viiv vektor.

Kui $\vec{\omega} = \vec{0}$, siis $\vec{v}_N = \vec{v}_M$ - kõik kõva keha punktid omavad üht ja sama kiirust.

Kui $\vec{r}_{MN} \parallel \vec{\omega}$, siis $\vec{\omega} \times \vec{r}_{MN} = \vec{0}$

ja $\vec{v}_N = \vec{v}_M$ nurkkiirusvektoriga $\vec{\omega}$ paralleelsel sirgel asetsevad punktid omavad võrdseid kiirusi.

Tõestame veel teoreemi: kõva keha kahe mistahes punkti kiirusvektorite projektsioonid neid punkte läbivale sirgele on võrdsed.

Olgu \vec{u}_{MN} sirge MN sihiline ühikvektor. Korrutame eelmise valemi mõlemad pooled skalaarselt vektoriga \vec{u}_{MN} , saame

$$\vec{v}_N \cdot \vec{u}_{MN} = \vec{v}_M \cdot \vec{u}_{MN}, \text{ sest}$$

$(\vec{\omega} \times \vec{r}_{MN}) \cdot \vec{u}_{MN} = 0$ vektorite \vec{r}_{MN} ja \vec{u}_{MN} kolineaarsuse tõttu.

Kuid $\vec{v}_N \cdot \vec{u}_{MN}$ ja $\vec{v}_M \cdot \vec{u}_{MN}$ on vektorite \vec{v}_N ja \vec{v}_M projektsioonid sirgele MN.

Korrutades eelmise valemi mõlemad pooli nurkkiirusvektori suunalise ühikvektoriga \vec{u}_ω , saame

$$\vec{v}_N \cdot \vec{u}_\omega = \vec{v}_M \cdot \vec{u}_\omega, \text{ sest}$$

$(\vec{\omega} \times \vec{r}_{MN}) \cdot \vec{u}_\omega = 0$ vektorite $\vec{\omega}$ ja \vec{u}_ω kolineaarsuse tõttu. Tähendab, et kõva keha punktide kiirusvektorite projektsioonid nurkkiirusvektori suunale on võrdsed.

Leiame kõva keha punkti C, milles $\vec{v}_C \parallel \vec{\omega}$.

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC},$$

korrutame mõlemad pooled vektoriaalselt vektoriga $\vec{\omega}$:

$$(4) \quad \vec{v}_C \times \vec{\omega} = \vec{v}_A \times \vec{\omega} + (\vec{\omega} \times \vec{r}_{AC}) \times \vec{\omega} = \vec{0}$$

(sest $\vec{v}_C \parallel \vec{\omega}$ ja $\vec{v}_C \times \vec{\omega} = \vec{0}$). Siit

$$\vec{v}_A \times \vec{\omega} + \omega^2 \vec{r}_{AC} - (\vec{r}_{AC} \cdot \vec{\omega}) \vec{\omega} = \vec{0}.$$

Oletame, et $\vec{r}_{AC} \perp \vec{\omega}$, siis $\vec{r}_{AC} \cdot \vec{\omega} = 0$,

$$\text{ja } \vec{r}_{AC} = -\frac{\vec{v}_A \times \vec{\omega}}{\omega^2} \quad \text{ehk}$$

$$\vec{r}_{AC} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_A}{\omega^2}$$

\vec{r}_{AC} võib alati leida, kui $\vec{\omega} \neq \vec{0}$. \vec{r}_{AC} on punktist A punktini C viiv kohavektor. Võrrandit (4) rahuldab ka $\vec{r}_{AC} + s \vec{\omega}$, milles s on meelevaldne arv. Järelikult, kui $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, leidub alati $\vec{\omega}$ sihiline sirge, mille punktide kiirusvektorid on selle sirge sihilised. Seda sirget nimetatakse hetkeliseks kruviteljeks.

Mistahes punkti P kiirusvektori võib avaldada ka järgmiselt:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{CP}, \quad v_C = \frac{\vec{v}_A \cdot \vec{\omega}}{\omega}$$

Sellest nähtub, et köva keha punktide kiirused igal hetkel jaotavad nii, nagu liiguks see keha piki hetkelist kruvitelge kiirusega

$$\frac{\vec{v}_A \cdot \vec{\omega}}{\omega} \quad \text{ja samaaegselt pöörleks}$$

ümber kruvitelje nurkkiirusega ω (üldine kruviliikumine).

Eelmistest arutlustest nähtub, et on võimalik leida köva keha mistahes punkti kiirusvektorit, kui on teada antud hetkel tema ühe punkti A kiirusvektor \vec{v}_A ja hetkeline nurkkiirusvektor $\vec{\omega}$. Vektor $\vec{\omega}$ on arvutatav, kui on teada kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti kiirusvektorid. Vastavad valemid on kergesti tuletatavad.

Näiteks, olgu punktide A, B ja C kiirusvektorid \vec{v}_A , \vec{v}_B ja \vec{v}_C . Siis

$$\vec{v}_B - \vec{v}_A = \vec{v}_{AB}, \quad \vec{v}_C - \vec{v}_A = \vec{v}_{AC}$$

ja

$$\vec{v}_{AB} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AB},$$

$$\vec{v}_{AC} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{AC}$$

Vektorid \vec{r}_{AB} , \vec{r}_{AC} ja $\vec{r}_{AB} \times \vec{r}_{AC}$ ei ole nullid ega komplanaarsed. Järelikult võib kirjutada:

$$\vec{\omega} = a(\vec{r}_{AB} \times \vec{r}_{AC}) + b\vec{r}_{AB} + c\vec{r}_{AC},$$

milles a , b , c tulevad avaldada andmete kaudu. Asetame selle $\vec{\omega}$ avaldise \vec{v}_{AB} ja \vec{v}_{AC} valemitesse, ning korrutame

esimese skalaarselt vektoriga $\bar{r}_{AC} \times \bar{r}_{AB}$, teise - $\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC}$, saame

$$c = \frac{\bar{v}_{AB} \cdot (\bar{r}_{AC} \times \bar{r}_{AB})}{(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})^2}, \quad b = \frac{\bar{v}_{AC} \cdot (\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})}{(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})^2}.$$

a leidmiseks korrutame esimese skalaarselt vektoriga \bar{r}_{AC} , saame

$$a = \frac{\bar{v}_{AB} \cdot \bar{r}_{AC}}{(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})^2}$$

Seega

$$\bar{\omega} = \frac{(\bar{v}_{AB} \cdot \bar{r}_{AC})(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC}) + [\bar{v}_{AC} \cdot (\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})] \bar{r}_{AB}}{(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})^2} + \frac{[\bar{v}_{AB} \cdot (\bar{r}_{AC} \times \bar{r}_{AB})] \bar{r}_{AC}}{(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC})^2}$$

Sellest valemist nähtub, et kiiruste probleem on täielikult lahendatud, kui on teada:

- 1) \bar{v}_A ,
- 2) \bar{v}_{AB} ja \bar{v}_{AC} projektsioonid vektori $\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC}$ suunale (mis on risti tasapinnaga ABC),
- 3) \bar{v}_{AB} projektsioon vektori \bar{r}_{AC} suunale. (Need suurused võib vabalt ette anda, kuna aga \bar{v}_A , \bar{v}_B ja \bar{v}_C vahel on kehtivad teatavad seosed).

Muidugi võib $\bar{\omega}$ jaoks tuletada ka teisi valemeid, mis mõnel juhtumil on märksa lihtsamad, näit.:

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{v}_{AC} \times \bar{v}_{AB}}{\bar{v}_{AC} \cdot \bar{r}_{AB}} \quad (\text{kui lugeja ei ole null}),$$

$$\bar{\omega} = \frac{v_{AC}^2}{(\bar{r}_{AB} \times \bar{r}_{AC}) \cdot \bar{v}_{AC}} \bar{r}_{AB} \quad (\text{kui } \bar{v}_{AB} = \bar{0}, \bar{v}_{AC} \neq \bar{0}), \text{ jne.}$$

§ 17. Vektor mitme skalaarse suuruse (skalaari) funktsioonina

Vektor võib olla ka mitme skalaari funktsioon. Näiteks tuule kiirus antud kohal võib olla aja ja koha kõrguse funktsioon. Olgu vektor tähistatud \bar{a} -ga ja argumendid $t, u, \dots w$, siis

$$\bar{a} = \bar{a}(t, u, \dots w);$$

ortogonaalsete ühikvektorite kaudu avaldub \bar{a} järgmiselt:

$$\bar{a}(t, u, \dots w) = a_x(t, u, \dots w) \bar{u}_1 + a_y(t, u, \dots w) \bar{u}_2 + a_z(t, u, \dots w) \bar{u}_3.$$

\bar{a} on pidev funktsioon siis, kui seda on a_x, a_y ja a_z .

Siin võib moodustada osatuletisi:

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \frac{\partial a_x}{\partial t} \bar{u}_1 + \frac{\partial a_y}{\partial t} \bar{u}_2 + \frac{\partial a_z}{\partial t} \bar{u}_3, \text{ jne.},$$

kus

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{a}(t + \Delta t, u, \dots w) - \bar{a}(t, u, \dots w)}{\Delta t};$$

skalaare $u, \dots w$ tuleb vaadelda kui konstante.

Võime moodustada ka kõrgemat järku osatuletisi, kusjuures jäävad kehtima matemaatilisest analüüsist tuntud seostega analoogilised seosed:

$$\frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial t \partial u} = \frac{\partial^2 \bar{a}}{\partial u \partial t}, \text{ jne.}$$

Samuti jäävad osatuletiste suhtes kehtima kõik eespool toodud seosed vektorite summa, korrutise, jne. tuletiste kohta.

Vektorit

$$d\bar{a} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} dt + \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} du + \dots + \frac{\partial \bar{a}}{\partial w} dw$$

nimetatakse vektori \bar{a} täisdiferentsiaaliks. Seda võib ühikvektorite abil avaldada ka nii:

$$d\bar{a} = da_x \bar{u}_1 + da_y \bar{u}_2 + da_z \bar{u}_3$$

Eeltoodud avaldiste samasust on kerge näidata. $d\bar{a}$ avaldisest võib omakorda moodustada kõrgemat järku täisdiferentsiaale.

Täisdiferentsiaalide kohta jäävad kehtima kõik § 4 p. 5 antud seosed (5-ndat seost tuleb võtta üldisemalt).

Olgu $\Delta t, \Delta u, \dots, \Delta w$ argumentide juurdekasvudeks kohal t, u, \dots, w ,
 siis $\Delta \bar{a} = \bar{a}(t + \Delta t, u + \Delta u, \dots, w + \Delta w) - \bar{a}(t, u, \dots, w)$
 on funktsiooni \bar{a} juurdekasv samal kohal.

Kui argumentide juurdekasvud on küllalt väikesed, siis võib kirjutada

$$\Delta \bar{a} \approx \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} \Delta u + \dots + \frac{\partial \bar{a}}{\partial w} \Delta w .$$

Funktsiooni juurdekasv võrdub tema täisdiferentsiaaliga seda täpsemalt, mida väiksemad on $\Delta t, \Delta u, \dots, \Delta w$.

Kui t, u, \dots, w on mingi skalaari s funktsioonid; siis

$$\bar{a} = \bar{a}(t(s), u(s), \dots, w(s))$$

ja

$$\frac{d\bar{a}}{ds} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial \bar{a}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \dots + \frac{\partial \bar{a}}{\partial w} \frac{dw}{ds} .$$

Kohafunktsiooni tuletis. Muutuva välja tuletis.

§ 18. Skalaar vektori (kohavektori) funktsioonina.

Skalaarväli.

Olgu tegemist mingi skalaarse suurusega f (näit. temperatuur, õhu-rõhumine, kõvadus, tihedus, elektrostaatiline potentsiaal, jne.), mille väärtused mingisuguse ruumi-osa (keha) igas punktis on teada. Siis f väärtusi igas punktis võib vaadelda mingist kindlast punktist sellesse punkti viiva kohavektori \vec{r} f -na (funktsioonina).

Defineerime:

Skalaar f on kohavektori \vec{r} f -n, kui igale \vec{r} väärtusele mingis ruumiosas vastab kindel f väärtus, sümbolites:

$$f = f(\vec{r}).$$

Sellega on skalaari f väärtused paigutatud punktidesse teatavas ruumiosas. Seda ruumiosa nimetatakse skalaari f väljaks.

Et $\vec{r} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$, siis võib f vaadelda, kui punkti koordinaatide x , y ja z funktsiooni:

$$f = f(x, y, z).$$

Loeme edaspidi $f(\vec{r})$ pidevaks \vec{r} -i funktsiooniks, s.o. $f(x, y, z)$ on pidev x , y ja z -i funktsioon.

Skalaarvälja iseloomustamiseks on tähtsad nn. nivoopin-
nad, mille võrranditeks on

$$f(x, y, z) = \text{const.}$$

Andes konstandile rea ekvidistantseid väärtusi, saame rea pindu, millede kaugus üksteisest iseloomustab f käiku teatavas ümbruskonnas (näiteks, tihedamalt asetsevate pindade puhul on f muutumine kiirem). Tasapinnalises geometrias vastavad nivoopindadele jooned (isobaarid, isoterimid, jne.) Funktsiooni f muutumise täpsemaks iseloomustamiseks on aga vajalik tuletise mõiste.

§ 19. Kohafunktsiooni tuletis antud suunas

Kohavektori \vec{r} funktsiooni f nimetatakse lühidalt koha-

funktsiooniks.

Kui tahaksime mingis punktis \bar{r} funktsiooni tuletist leida jagatise moodustamise teel, nagu skalaarse argumendi puhul, nimelt võttes

$$\lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - f(\bar{r})}{\Delta \bar{r}},$$

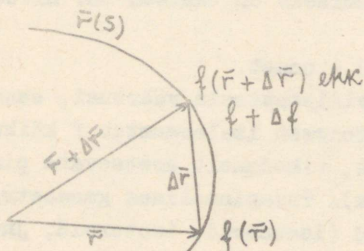
siis see ei õnnestuks, kuna jagamine vektoriga pole defineeritud.

Samuti ei viiks meid eesmärgile

$$\lim_{|\Delta \bar{r}| \rightarrow 0} \frac{f(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - f(\bar{r})}{|\Delta \bar{r}|},$$

kui jätame $\Delta \bar{r}$ täiesti meelevaldseks, sest $\Delta \bar{r}$ on antud punktist ükskõik mis suunas väljuv vektor. $\Delta \bar{r}$ lähenemine 0-le võib toimuda väga keerulisi teid pidi. Pole seepärast lootust, et antud jagatis omaks mingit kindlat piirväärtust.

Tuletise juurde jõuame järgmiselt: meie ei lase lõpmata vähenevat vektorit $\Delta \bar{r}$ meelevaldselt muutuda vaid vaatleme kohavektorit \bar{r} antud punkti ümbruses, kui mingi skalaari s funktsiooni $\bar{r} = \bar{r}(s)$, mis kujutab ühte siledat joont, millel igas punktis on puutuja, funktsioon $\bar{r}(s)$ peab olema valitud nii, et joon läbiks punkti, milles tahame leida tuletist.



Lihtsuse mõttes valime argumendiks s joone kaarepikkuse.

Avaldises

$$\lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - f(\bar{r})}{|\Delta \bar{r}|}$$

\bar{r} lähenemine nullile ei toimu enam meelevaldselt,

vaid tema lõpppunkt jääb sellejuures püsivalt joonele $\bar{r}(s)$.

$$\lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \frac{f(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - f(\bar{r})}{|\Delta \bar{r}|} \quad \text{ehk} \quad \lim_{\Delta \bar{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{|\Delta \bar{r}|} \quad \text{arvutamine.}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{\Delta f}{|\Delta \vec{r}|} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$$

$$\lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = \lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{f}{|\Delta \vec{r}|} \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s}$$

Kuid $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1$ (kui joonel on puutuja vaadeldavas punktis, mida oletame, ja kui lugeda Δs positiivseks, mis on siin nõutav) sest

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right|. \text{ See avaldis I peatükis}$$

antud tähistes on võrdne (lhk. 17)

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| : \frac{ds}{dt}, \text{ millest järgneb, et } \left| \frac{d\vec{r}}{ds} \right| = 1.$$

Järelikult:

$$\lim_{\Delta \vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{|\Delta \vec{r}|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s}$$

Viimast piirväärtust tähistame sümboliga $\frac{\partial f}{\partial s}$ ja

nimetame funktsiooni f tuletiseks antud suunas \vec{t} punktis \vec{r} , kus \vec{t} tähistab puutuja sibilist ühikvektorit. $\frac{\partial f}{\partial s}$ väärtus oleneb muidugi sellest, milline kõver $\vec{r}(s)$ oli valitud tema arvutamiseks.

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z) \text{ ja } \vec{r} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3,$$

kui $\vec{r} = \vec{r}(s)$, siis x, y ja z on samuti s -i f -d.

$$\text{Järelikult } \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Sellest valemist nähtub, et $\frac{\partial f}{\partial s}$ on võrdne täistuletisega $\frac{df}{ds}$, kuna kõverjoonel on $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$.

Suurused $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ ja $\frac{dz}{ds}$, millised tähistame vastavalt

ℓ , m ja n , on joone $\vec{r}(s)$ puutuja suunakoosinused antud punktis. Eriti, kui joon $\vec{r}(s)$ oli sirgjoon, on ℓ, m, n selle sirge suunakoosinused. Valitud kõvera juures on oluline tema puutuja suund antud punktis, sest sellest oleneb $\frac{\partial f}{\partial s}$ väärtus;

kuidas kõver edasi kulgeb, ei ole tähtis.

Sellega on väljendus "tuletis antud suunas" põhjendatud.

Kui $\vec{\tau}$ on puutuja suunaline ühikvektor, siis

$$\vec{\tau} = l\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 + n\vec{u}_3 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} l + \frac{\partial f}{\partial y} m + \frac{\partial f}{\partial z} n \quad \text{on}$$

funktsiooni $f(\vec{r})$ tuletis $\vec{\tau}$ suunas.

$\frac{\partial f}{\partial s}$ väärtus antud punktis on sõltuv suurustest l , m ja n . Sümboli $\frac{\partial f}{\partial s}$ defineerimisel ei kasutatud ühikvektoreid \vec{u}_1 , \vec{u}_2 ja \vec{u}_3 . Sellepärast on $\frac{\partial f}{\partial s}$ väärtus täiesti sõltumatu sellest, kuidas need ühikvektorid ruumis on orienteeritud.

Kuid suuruste $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, l , m ja n väärtused ole-nevad sellest, kuidas \vec{u}_1 , \vec{u}_2 ja \vec{u}_3 on valitud.

Kuna l , m ja n on vektori koordinaadid, siis tekib mõte vaadelda $\frac{\partial f}{\partial s}$ kui kahe vektori, nimelt

$$\vec{\tau} = l\vec{u}_1 + m\vec{u}_2 + n\vec{u}_3 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_3$$

skalaarkorrutist. Tarvis vaid jõuda selgusele, kas viimane nimetatud vektorist on sõltumatu \vec{u}_1 , \vec{u}_2 ja \vec{u}_3 valikust.

Valime kõvera $\vec{r}(s)$ antud punkti läbival nivoopinnal.

Siis $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$, sest nivoopinnal $f = \text{konst}$.

Tähendab, nivoopinnal tõmmatud joonte puutujad antud punktis on kõik risti vektoriga

$$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_3$$

Järelikult need puutujad asetsevad ühel tasapinnal, ni-melt nivoopinna puutuja tasapinnal antud punktis, ja see vek-tor on selle tasapinna normaalvektor. Puutuja tasapind aga ei sõltu ühikvektorite valikust, sellepärast ka vektori

$$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_3$$

suund ei sõltu nende valikust. Järelikult ka selle vektori pikkus on sõltumatu ühikvektorite orientatsioonist, sest mui-du ei saaks seda olla $\frac{\partial f}{\partial s}$.

Sellel vektor $\frac{\partial f}{\partial x} \bar{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{u}_3$ on skalaari f välja igas punktis üks kindel, seda välja iseloomustav vektor. Teda nimetatakse skalaari f gradiendiks (gradient), sümbolites

$$\frac{\partial f}{\partial x} \bar{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{u}_3 = \text{grad } f \quad \text{ja} \quad \frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial s} = \vec{r} \cdot \text{grad } f.$$

Gradiendi suunas omab $\frac{\partial f}{\partial s}$ võrreldes teiste suundadega suurima väärtuse (funktsioon f kasvab selles suunas kõige kiiremini). Tema väärtus on $|\text{grad } f|$.

Teistes suundades $\frac{\partial f}{\partial s} = |\text{grad } f| \cdot \cos(\vec{r}, \text{grad } f)$.

Võib ka kirjutada $\frac{\partial f}{\partial s} = \text{proj}_s \text{grad } f$.

Funktsiooni f täisdiferentsiaal on:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

kohavektori \bar{r} diferentsiaal on: $d\bar{r} = dx\bar{u}_1 + dy\bar{u}_2 + dz\bar{u}_3$. Järelikult $df = \text{grad } f \cdot d\bar{r}$ on funktsiooni f diferentsiaal suunas $d\bar{r}$. Kuna $d\bar{r} = \vec{r} ds$, siis $df = (\vec{r} ds) \cdot \text{grad } f = (\vec{r} \cdot \text{grad } f) ds = \frac{\partial f}{\partial s} ds$, kus ds on kõvera $\bar{r}(s)$ kaare diferentsiaal.

$$\Delta f = f(\bar{r} + \Delta \bar{r}) - f(\bar{r}) \approx \text{grad } f \cdot \Delta \bar{r} = \frac{\partial f}{\partial s} |\Delta \bar{r}|,$$

kus tuletis on võetud suunas $\Delta \bar{r}$.

§ 20. "N a b l a" operaator (ka Hamiltoni operaator)

Operaator on sümbol, mis nõuab teatud tehte sooritamist suurustega, näiteks +, - jne. Temale kirjutatakse veel juurde need suurused, millega tehet tuleb sooritada.

Nii on meil antud suunas tuletise arvutamise operaatoriks $\frac{\partial}{\partial s}$, milles f -n, mille tuletist vaja leida, kirjutatakse ülemise ∂ juurde (või ka murru kriipsu otsa). See sümbol pole aga kuigi otstarbekohane, sest teda võib ära segada osatuletise sümboliga üldises mõttes.

Kuna aga tuletise leidmine antud suunas on vektoranalüüsis väga tähtis operatsioon (niivõrd tähtis, et temale tuleks leida sobivam nimi), on võetud tema tähistamiseks tarvitusele erisümbol nimelt ∇_s (loetakse nabla indeksiga s; nabla on piiblist tuntud ∇ kujuline mänguriist).

Seega $\nabla_s f = \frac{\partial f}{\partial s}$
on funktsiooni f tuletis suunas $\vec{\tau}$ ehk \vec{u}_τ suunas

$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \nabla_y f = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \nabla_z f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Varemkäsiteldu põhjal võime kirjutada

$$\nabla_s f = l \nabla_x f + m \nabla_y f + n \nabla_z f \quad \text{ja}$$

$$\text{grad } f = \vec{u}_1 \nabla_x f + \vec{u}_2 \nabla_y f + \vec{u}_3 \nabla_z f.$$

Viimast suurust tähistatakse ∇f (nabla f - ilma indeksita).

$$\text{Seega} \quad \nabla f = \text{grad } f \quad \nabla_s f = \vec{\tau} \cdot \nabla f.$$

Aja ja ruumi kokkuhoidmiseks on viisiks eelpooltoodud ja neile analoogilistes seostes funktsiooni f tähis ärajätta, kuna ta esineb igal pool täiesti ühel viisil (pealegi on mõeldav, et seal f asemel seisab mõni teine funktsiooni tähis).

Seega võime kirjutada

$$\nabla_s = \frac{\partial}{\partial s}; \quad \nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \text{jne. .}$$

$$\nabla_s = l \nabla_x + m \nabla_y + n \nabla_z$$

(viimases avaldises ei või tegureid l, m ja n kirjutada tahapoole ∇_x , jne., kuna siis võiks mõelda, et operatsioon on rakendatud neile),

$$\text{grad} = \vec{u}_1 \nabla_x + \vec{u}_2 \nabla_y + \vec{u}_3 \nabla_z,$$

$$\nabla = \vec{u}_1 \nabla_x + \vec{u}_2 \nabla_y + \vec{u}_3 \nabla_z,$$

$$\nabla_s = \vec{\tau} \cdot \nabla, \quad \nabla_s = \text{proj}_s \nabla, \quad \text{jne.}$$

(mõte on analoogiline, kui näiteks $\frac{a}{b} = a:b$ asemel kirjutada $- = :$, mis tähendab nende sümbolite samasust, kuna a ja

b asemele võib panna ka teised arvutähised).

Sellega võib operaatorit ∇ vaadelda kui sümboolset vektorit, mille komponentide suurused ($\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ ja \bar{c} on vastavalt $\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z$ ja ∇_s .

Näiteks

$$\bar{c} \cdot \nabla = c_x \nabla_x + c_y \nabla_y + c_z \nabla_z \quad \text{ja}$$

$$\bar{c} \times \nabla = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ c_x & c_y & c_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \end{vmatrix} = \bar{u}_1(c_y \nabla_z - c_z \nabla_y) + \bar{u}_2(c_z \nabla_x - c_x \nabla_z) + \bar{u}_3(c_x \nabla_y - c_y \nabla_x)$$

(sulgudes esimene tegur tuleb alati võtta pealmisest reast), kus c_x, c_y ja c_z on vektori \bar{c} koordinaadid.

Nagu selgub, tähendab

$$\bar{c} \cdot (\nabla f) \quad \text{ja} \quad (\bar{c} \cdot \nabla) f$$

üht ja sama, mille tõttu võib kirjutades mõlemil juhtumil sulud ära jätta. Samuti

$$\bar{c} \times (\nabla f) = (\bar{c} \times \nabla) f \quad \text{ja} \quad \text{sulud võib ka ära jätta.}$$

Nii, et $\bar{c} \cdot \nabla f$ on kas $\bar{c} \cdot (\nabla f)$ või $(\bar{c} \cdot \nabla) f$ ja

$$\bar{c} \times \nabla f \quad \text{on kas} \quad (\bar{c} \times \nabla) f \quad \text{või} \quad \bar{c} \times (\nabla f).$$

Et $\nabla_s f, \nabla_x f$, jne. on f -i f tuletised antud punktis, siis on loomulik, et ka $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \bar{u}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \bar{u}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \bar{u}_3$ saaks nimetuse tuletis.

Et ta on vektor, mis iseloomustab f -i f käitumist antud punkti \bar{r} ümbritsevas ruumis, siis nimetatakse teda f -i ruumtuletiseks punktis \bar{r} . Sümbol ∇ - nabla - on seega ruumtuletise tähis.

Olgu s_1 ja s_2 kaks mingit antud suunda. $\nabla_{s_1} f$ on võimalik arvutada igal \bar{r} väärtusel. $\nabla_{s_1} f$ on seega \bar{r} -i mingisugune f -n. Tema tuletist suunas s_2 on võimalik arvutada:

$$\nabla_{s_2} (\nabla_{s_1} f) = \nabla_{s_2} \nabla_{s_1} f = \nabla_{s_1} \nabla_{s_2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2}$$

on juba f suhtes teistjärku tuletis.

Samuti $\nabla_{s_1} (\nabla_{s_2} f) = \nabla_{s_2} \nabla_{s_1} f$

Üldiselt $\nabla_{s_1 s_2} f = \nabla_{s_2 s_1} f$ ehk $\nabla_{s_1 s_2} = \nabla_{s_2 s_1}$

Aga $\nabla_x \nabla_y f = \nabla_{xy} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \nabla_{yx} f = \nabla_y \nabla_x f$,

jne.

Esialgsetes sümbolites seega

$$\frac{\partial^2 f}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s_2 \partial s_1} \quad \text{ja}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} .$$

Defineerime veel teistjärku operaatorid:

$$1. \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \nabla_x \nabla_x + \nabla_y \nabla_y + \nabla_z \nabla_z = \nabla_{xx} + \nabla_{yy} + \nabla_{zz} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta .$$

Seda operaatorit nimetatakse Laplace'i operaatoriks:

$$\nabla \cdot \nabla f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

Sümbolit Δ (vördkõlgnne kolmnurk) ei tule ära segada muutuja kasvutähisega Δ (delta).

$$2. \nabla_x \nabla = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \end{vmatrix} = \bar{u}_1 (\nabla_y \nabla_z - \nabla_z \nabla_y) + \dots$$

Järelikult $\nabla_x \nabla f = 0$, mis vastab tõsiasi jale, et sama vektoriga vektorialkorrutis on 0.

Olgu $f = f(\bar{r})$ ja $g = g(\bar{r})$. Siis

$$1. \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

Töestus:

$$\begin{aligned}\nabla(f+g) &= \bar{u}_1 \frac{\partial(f+g)}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial(f+g)}{\partial y} + \bar{u}_3 \frac{\partial(f+g)}{\partial z} = \\ &= (\bar{u}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \bar{u}_3 \frac{\partial f}{\partial z}) + (\bar{u}_1 \frac{\partial g}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial g}{\partial y} + \bar{u}_3 \frac{\partial g}{\partial z}) = \\ &= \nabla f + \nabla g.\end{aligned}$$

2. $\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g.$

Töestus analoogiline:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}, \text{ jne.}$$

Märkus:

Sümboolit ∇f (ka $\nabla_s f$, $\nabla_x f$, jne.) vaadeldakse ka kui operaatori ("vektori") ∇ (või "skalaari" ∇_s , ∇_x , jne.) ja skalaari f sümboolset "korrutist".

$$\begin{aligned}\nabla f &= (\bar{u}_1 \nabla_x + \bar{u}_2 \nabla_y + \bar{u}_3 \nabla_z)f = \bar{u}_1 \nabla_x f + \bar{u}_2 \nabla_y f + \\ &\quad + \bar{u}_3 \nabla_z f.\end{aligned}$$

Kehtib distributiivsus.

Samuti $\nabla_{s_2} \nabla_{s_1}$ vaadeldakse kui kahe "skalaarse" operaatori "korrutist". Sümboolse "korrutamise" puhul kehtib distributiivsus, ei kehti aga alati kommutatiivsus.

§ 21. Vektor kohavektori funktsioonina

Vektorväli

Kui mingi vektoriaalne suurus (vektor) \bar{a} on jaotatud üle teatava ruumiosa nii, et igale punktile selles ruumiosas vastab kindel selle vektori väärtus (ruumipunkt ise on selle vektori rakenduspunktis), siis see ruumiosa moodustab vektorvälja. Näiteks: magnetväli, elektriväli, graviatsiooniväli, tuule kiiruste väli. Eelmises peatükis käsitatud grad f moodustab ka vektorvälja.

Sel juhtumil võib vektorit \bar{a} vaadelda kohavektori \bar{r} funktsioonina $\bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$.

Et $\vec{r} = x\bar{u}_1 + y\bar{u}_2 + z\bar{u}_3$, siis on \bar{a} ka koordinaatide x, y, z f-n, see tähendab, et vektori \bar{a} koordinaadid a_x, a_y, a_z on x, y , ja z funktsioonid.

$$\bar{a}(\vec{r}) = \bar{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z) \bar{u}_1 + a_y(x, y, z) \bar{u}_2 + a_z(x, y, z) \bar{u}_3 .$$

Tähendab vektorvälja määramiseks on vaja kolme skalaarset kohafunktsiooni a_x, a_y ja a_z .

Nivoopindade asemele vektorväljas tulevad väljajooned, need on jooned, mille puutuja suund ühtib vektori \bar{a} suunaga antud punktis \vec{r} .

Kui $\vec{r} = \vec{r}(t)$ on väljajoone võrrand, siis $\frac{d\vec{r}}{dt}$ on puutujasihiline vektor. Tema suhtes peab olema rahuldatud tingimus $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \bar{a} = 0$.

$$\text{Siit} \quad d\vec{r} \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ dx & dy & dz \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = 0,$$

ehk koordinaatides

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} ,$$

on väljajoonte diferentsiaalvõrrandid. Kus väljajooned on üksteisele lähemal, seal on $|\bar{a}|$ väärtused suuremad (väli on tugevam). Võiks veel märkida, et skalaarväljas on gradiendi väljajooned risti nivoopindadega, ehk väljajooned on nivoopindade ortogonaalsed trajektoolid.

§ 22. Tuletis

Analoogiliselt skalaari tuletisele võime leida vektori tuletise antud suunas:

$$\lim_{\Delta\vec{r} \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{a}}{|\Delta\vec{r}|} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta s} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial s} = \nabla_s \bar{a} ,$$

milles s on kõvera $\vec{r}(s)$ kaarepikkus ja $\Delta\vec{r}$ läheneb 0-le nii, et tema otspunkt jääb kõverale $\vec{r}(s)$.

$$\frac{\partial\bar{a}}{\partial s} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\bar{a}}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\bar{a}}{\partial z} \frac{dz}{ds} = \frac{\partial\bar{a}}{\partial x} l + \frac{\partial\bar{a}}{\partial y} m + \frac{\partial\bar{a}}{\partial z} n = \frac{d\bar{a}}{ds}$$

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x} \bar{u}_1 + \frac{\partial a_y}{\partial x} \bar{u}_2 + \frac{\partial a_z}{\partial x} \bar{u}_3 = \nabla_x \bar{a}, \quad \text{analoogi-}$$

liselt saame

$$\frac{\partial \bar{a}}{\partial y} \quad \text{ja} \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial z}.$$

$$\begin{aligned} \text{Sellega} \quad \frac{\partial \bar{a}}{\partial s} &= \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} l + \frac{\partial a_x}{\partial y} m + \frac{\partial a_x}{\partial z} n \right) \bar{u}_1 + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} l + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial a_y}{\partial y} m + \frac{\partial a_y}{\partial z} n \right) \bar{u}_2 + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} l + \frac{\partial a_z}{\partial y} m + \frac{\partial a_z}{\partial z} n \right) \bar{u}_3. \end{aligned}$$

Lühidalt:

$$\nabla_s \bar{a} = l \nabla_x \bar{a} + m \nabla_y \bar{a} + n \nabla_z \bar{a} = (\vec{r} \cdot \nabla) \bar{a},$$

kuna

$$l \nabla_x + m \nabla_y + n \nabla_z = \vec{r} \cdot \nabla.$$

On loomulik, et kõik seosed, mis saime eelmises peatükis nabla operaatori kasutamisel, jäävad kehtima, kui igalpool suurusena, millele operatsioon on rakendatud, võtame f asemele \bar{a} .

Vektori \bar{a} täisdiferentsiaal on

$$d\bar{a} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} dx + \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} dy + \frac{\partial \bar{a}}{\partial z} dz \quad \text{ehk}$$

$$d\bar{a} = dx \nabla_x \bar{a} + dy \nabla_y \bar{a} + dz \nabla_z \bar{a}.$$

$$\text{Et} \quad dx \nabla_x + dy \nabla_y + dz \nabla_z = d\vec{r} \cdot \nabla$$

$$(d\vec{r} = dx \bar{u}_1 + dy \bar{u}_2 + dz \bar{u}_3), \quad \text{siis võime}$$

lühidalt kirjutada:

$$d\bar{a} = (d\vec{r} \cdot \nabla) \bar{a} \quad \text{ja} \quad \Delta \bar{a} \approx (\Delta \vec{r} \cdot \nabla) \bar{a}.$$

Analoogiliselt eelmisele peatükile võib kõikides

$(\vec{c} \cdot \nabla) \bar{a}$ - kujulistest avaldistes sulud ära jätta ja kirjutada $\vec{c} \cdot \nabla \bar{a}$, seega $\nabla_s \bar{a} = \vec{r} \cdot \nabla \bar{a}$, $d\bar{a} = d\vec{r} \cdot \nabla \bar{a}$, jne.

Neid avaldise esialgu mõistame aga nii nagu oleksid sulud pandud.

Olgu \bar{v} mingi vektorsuurus.

$$\bar{v} \cdot \nabla \bar{a} = v_x \nabla_x \bar{a} + v_y \nabla_y \bar{a} + v_z \nabla_z \bar{a} = v_x \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{a}}{\partial z}$$

ehk, et $\bar{v} = v \bar{e}$, siis $\bar{v} \cdot \nabla \bar{a} = v \bar{e} \cdot \nabla \bar{a} = v \frac{\partial \bar{a}}{\partial s}$, mis kannab nimetust vektori \bar{a} gradient vektori \bar{v} suhtes.
 $(\frac{\partial \bar{a}}{\partial s})$ on \bar{a} tuletis kiirusvektori \bar{v} suunas).

Tema koordinaadid saame, kui avaldise \bar{a} asemele kirjutame vastavalt, kas a_x , a_y või a_z .

Märkus: Sümboli $\bar{v} \cdot \nabla$ asemel tarvitatakse ka sümbolit $\text{grad}_{\bar{v}}$, seega $\bar{v} \cdot \nabla = v_x \nabla_x + v_y \nabla_y + v_z \nabla_z =$

$$= v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} = v \nabla_s = \text{grad}_{\bar{v}},$$

suurus, millega operatsioon teostatakse, võib olla nii skalaar kui vektor.

§ 23. Ruumtuletis

$$\nabla \bar{a} = \bar{u}_1 \nabla_x \bar{a} + \bar{u}_2 \nabla_y \bar{a} + \bar{u}_3 \nabla_z \bar{a} = \bar{u}_1 \frac{\partial \bar{a}}{\partial x} + \bar{u}_2 \frac{\partial \bar{a}}{\partial y} + \bar{u}_3 \frac{\partial \bar{a}}{\partial z}$$

Siin aga tekib arusaamatus kuna on tegemist moodustisega, mille "koordinaadid" on vektorid, aga mitte skalaarid, nagu seda on vektori koordinaadid. Meil pole defineeritud kahe vektori "korrutis" $\bar{a} \bar{b}$. See on kõrgema järgu moodustis ja nimetatakse tensoriks.

Vektori ruumtuletis on seega tensor. Tensorid aga meie ei kasuta ja seepärast peame ruumtuletise oma käsitlusest kõrvale jätma. Selle asemel piirdume tema "koordinaatidega" $\frac{\partial \bar{a}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{a}}{\partial y}$, $\frac{\partial \bar{a}}{\partial z}$ ja "koordinaatidega" suunal s , $\frac{\partial \bar{a}}{\partial s}$. Märgime vaid ühe tõsiasi: nimelt vektori ja tensori "skalaarkorrutis"

$$\bar{c} \cdot (\bar{a} \bar{b}) = (\bar{c} \cdot \bar{a}) \bar{b} \quad \text{ja} \quad (\bar{a} \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} (\bar{b} \cdot \bar{c})$$

on vektor. Neid avaldiseid võib kirjutada ka ilma sulgudeta $\bar{c} \cdot \bar{a} \bar{b}$ ja $\bar{a} \bar{b} \cdot \bar{c}$. See tõsiasi võimaldas meile $(\bar{c} \cdot \nabla) \bar{a}$

kirjutada sulgudeta. $\nabla \bar{a}$ asemel võib kirjutada grad \bar{a}
(nimetus: vektorgradient)

§ 24. Divergents ja rootor

∇f võis vaadelda kui "vektori" ∇ ja skalaari f sümboolset "korrutist", samuti võime vaadelda sümboolit $\nabla \bar{a}$ kui kahe vektori sümboolset "korrutist", mis on tensor.

Kuid vektorite korrutisena tunneme skalaarkorrutist ja vektoriaalkorrutist. Kas ei saaks mõtestada ka sümboolseid "korrutisi" $\nabla \cdot \bar{a}$ ja $\nabla \times \bar{a}$?

$$\nabla \cdot \bar{a} = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \bar{u}_1 (\nabla_y a_z - \nabla_z a_y) +$$

$$+ \bar{u}_2 (\nabla_z a_x - \nabla_x a_z) +$$

$$+ \bar{u}_3 (\nabla_x a_y - \nabla_y a_x) = \bar{u}_1 \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) +$$

$$+ \bar{u}_2 \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) + \bar{u}_3 \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)$$

(∇ -de ja a -de "korrutamisel" peame ikka esimese "tegu-ri" võtma ülemisest reast, kuna kommutatiivsus ei kehti).

Saadud suuruste väärtused on ortogonaalse ühikvektorite kolmiku \bar{u}_1 , \bar{u}_2 ja \bar{u}_3 orientatsioonist sõltumatud, sest ∇ on neist sõltumatu operaator ja \bar{a} samuti neist sõltumatu vektor. Nende "korrutised" on ka siis loomulikult sõltumatud \bar{u}_1 , \bar{u}_2 ja \bar{u}_3 orientatsioonist, kui teljestik ei muutu parem-
käelisest vasakukäeliseks. Üldse iga avaldis, mis sisaldab vektoreid, skalaare ja operaatorit ∇ on ühikvektorite orientatsioonist sõltumatu (selles on sümboli ∇ kasutamise peamine

möte).

Järelikult $\nabla \cdot \vec{a}$ ja $\nabla \times \vec{a}$ on suurused, mis iseloomustavad vektorvälja. Esimene on skalaar - tema nimi on "divergents" (sümbol "div"); teine on vektor, tema nimi on "rootor" ehk "rotatsioon" (sümbol "rot")

$$\nabla \cdot \vec{a} = \text{div } \vec{a}$$

$$\nabla \times \vec{a} = \text{rot } \vec{a}$$

$\nabla \cdot \vec{a}$ ja $\nabla \times \vec{a}$ nimetatakse ka vektori ruumtuletiseks, esimest skalaarseks, teist vektoriaalseks.

Märkus: Ei tule ära vahetada sümboleid $\nabla \cdot \vec{a}$ ja $\vec{a} \cdot \nabla$. Esimene on skalaar, teine on skalaarne operaator ja tähendab gradienti vektori \vec{a} suhtes. Samuti $\nabla \times \vec{a}$ ja $\vec{a} \times \nabla$ juures esimene on vektor, teine vektoriaalne operaator.

Divergents ja rootor on vektorivälja iseloomustamiseks väga tähtsad. Rohkem süveneme neisse integraalarvutuse osas. Punkti, kus $\text{div } \vec{a} \neq 0$, nimetatakse lätteks. Välja, kus $\text{div } \vec{a} = 0$ igalpool, nimetatakse lättetuks (solenoidväli), tema väljajooned on kas kinnised jooned, või lähevad lõpmatuse (näiteks magnetväli, kõva keha ja mitte kokkusurutava vedeliku kiiruste väli, elektri ja gravitatsiooniväli väljaspool længuid ja masse, jne.

Välju, mille rootor on igalpool 0, nimet. potentsiaalväljadeks (elektrostaatiline, gravitatiivne väli jne.); välju, kus $\text{rot } \vec{a} \neq 0$, nimetatakse pöörisväljadeks (elektromagnetiline väli, pöörleva kõva keha kiiruste väli jne.)

Kui potentsiaalväljas lähtuda väljajoone mingist punktist ja liikuda suunas, mis on risti väljajoontega (nivoopinnal), ei tule meie kunagi sama väljajoone mõnda teise punkti (kui välja suund väljajoonel nende kahe punkti vahel vahepeal ei muutu vastupidiseks) pöörisväljas aga võime tulla.

Teatava kujutluse rootorist saame, kui arvutame pöörleva kõva keha kiirustevälja rootori

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

kus $\vec{\omega} = \text{const}$ on rotatsioonivektor.

$$\nabla \times \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ \nabla_x & \nabla_y & \nabla_z \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} =$$

$$= (\omega_x + \omega_x) \bar{u}_1 + (\omega_y + \omega_y) \bar{u}_2 + (\omega_z + \omega_z) \bar{u}_3 = 2 \bar{\omega}$$

rot $\bar{v} = 2 \bar{\omega}$ on $\bar{\omega}$ -suunaline vektor ja temast kaks korda suurem (siit ka nimetus rotatsioon - pöörlemine).

grad, div, rot, $\bar{v} \cdot \nabla$ on esimest järku diferentsiaaloperaatorid. Järgnevad teist järku diferentsiaaloperaatorid.

$$\text{div grad} = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} ;$$

$$\text{rot grad} = \nabla \times \nabla \text{ on teatavasti } 0.$$

Neid kahte sümbolit võib rakendada nii skalaarile kui vektorile (kõige vasempoolsemad sümboleid vektori juhul ei tarvitata, kuna grad \bar{a} on tensor).

$$\text{grad div } \bar{a} = \nabla \nabla \cdot \bar{a}$$

$$\text{div rot } \bar{a} = \nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}) = 0, \text{ nagu selgub edaspidi;}$$

$$\text{rot rot } \bar{a} = \nabla \times (\nabla \times \bar{a}).$$

$$\text{div rot } \bar{a} = 0$$

Töestus:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \bar{a}) = \nabla_x (\nabla_y a_z - \nabla_z a_y) +$$

$$\nabla_y (\nabla_z a_x - \nabla_x a_z) + \nabla_z (\nabla_x a_y - \nabla_y a_x).$$

Kui avame sulud ja arvestame, et

$$\nabla_y \nabla_x = \nabla_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} = \nabla_{yx} = \nabla_x \nabla_y, \text{ jne.,}$$

siis näeme, et avaldis võrdub 0-ga.

Mõned teoreemid diferentsiaaloperaatorite kohta.

$$1. \nabla \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \nabla \cdot \bar{a} + \nabla \cdot \bar{b}$$

$$2. \nabla_x (\bar{a} + \bar{b}) = \nabla_x \bar{a} + \nabla_x \bar{b}$$

$$3. \nabla (\bar{a} + \bar{b}) = \nabla \bar{a} + \nabla \bar{b}$$

4. Konstantse skalaarse teguri võib viia operatoori ette ja ümberpöördukt.

Järgmistes valemities (teoreemid 5-8) tegur $\bar{c} = \text{const}$, teine tegur on muutuja:

$$5. \nabla \cdot \bar{c}f = \bar{c} \cdot \nabla f$$

$$\begin{aligned} \text{Töestus: } \nabla \cdot \bar{c}f &= \nabla_x c_x f + \nabla_y c_y f + \nabla_z c_z f = c_x \nabla_x f + \\ &+ c_y \nabla_y f + c_z \nabla_z f = \bar{c} \cdot \nabla f \end{aligned}$$

$$6. \nabla_x (\bar{c}f) = -\bar{c}_x \nabla f$$

Töestus: x $\bar{c}f$ koordinaadid on:

$$\nabla_y c_z f - \nabla_z c_y f$$

$$\nabla_z c_x f - \nabla_x c_z f$$

$$\nabla_x c_y f - \nabla_y c_x f$$

$-\bar{c}_x \nabla f$ koordinaadid on

$$-c_y \nabla_z f + c_z \nabla_y f$$

$$-c_z \nabla_x f + c_x \nabla_z f$$

$$-c_x \nabla_y f + c_y \nabla_x f$$

Järelikult mõlema vektori koordinaadid on võrdsed.

$$7. \nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = \bar{c} \cdot (\nabla \times \bar{a}) \text{ või } \nabla \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = -\bar{c} \cdot (\nabla \times \bar{a})$$

Töestus:

$$\nabla \cdot (\bar{a} \times \bar{c}) = \nabla_x (a_y c_z - a_z c_y) + \nabla_y (a_z c_x - a_x c_z) +$$

$$+ \nabla_z (a_x c_y - a_y c_x) = c_x (\nabla_y a_z - \nabla_z a_y) + c_y (\nabla_z a_x - \nabla_x a_z) +$$

$$+ c_z (\nabla_x a_y - \nabla_y a_x) = \bar{c} \cdot (\nabla \times \bar{a})$$

$$8. \nabla \times (\bar{a} \times \bar{c}) = \bar{c} \cdot \nabla \bar{a} - \bar{c} \nabla \cdot \bar{a} \text{ või } \nabla \times (\bar{c} \times \bar{a}) = \\ = \bar{c} \nabla \cdot \bar{a} - \bar{c} \cdot \nabla \bar{a}$$

Töestus:

Vektoralgebrast teame, et

$$\bar{p} \times (\bar{a} \times \bar{c}) = (\bar{c} \cdot \bar{p}) \bar{a} - \bar{c} (\bar{p} \cdot \bar{a})$$

Viimast seost võib töestada arvutades välja tema mõlema-poolse avaldise koordinaadid, mis peavad olema võrdsed. Ülemistes seostes võib koordinaadid välja arvutada täitsa samal viisil (tegurite järjekorda ei tule ajada segi) võttes \bar{p} asemel ∇ ja arvestades, et tegurite c_x , jne ja ∇_x jne järjekorda võib muuta. Eelmise eeskujul tulevad nad siis ka võrdsed välja.

$$9. \nabla (\bar{a} \cdot \bar{c}) = \bar{c} \cdot \nabla \bar{a} + \bar{c} \times (\nabla \times \bar{a})$$

Töestus:

$\bar{p}(\bar{a} \cdot \bar{c}) = (\bar{c} \cdot \bar{p}) \bar{a} + \bar{c} \times (\bar{p} \times \bar{a})$ on seos, mis järeldub 8. teoreemis antud seosest. Siin annab koordinaatide arvutamine sama tulemuse (\bar{p} asemel võtta ∇).

10. Kui valemities 5 - 9 võrdusmärgist vasakul avaldistes kõik tegurid \bar{a} , \bar{c} ja f lugeda muutujateks, siis toimub nende avaldiste arendamine järgmiselt: oletame esiteks, et üks tegureist on konstant ja viime tema ∇ märgi ette teoreemis antud juhise järgi, siis oletame, et teine tegur on konstant ja viime tema samuti ∇ märgi ette. Esialgse avaldise väärtus võrdub siis mõlema saadud avaldise summaga.

Näiteks: $\nabla \cdot f \bar{a} = f \nabla \cdot \bar{a} + \bar{a} \cdot \nabla f$, ehk teistes sümbolites

$$\text{div}(f\bar{a}) = f \text{div} \bar{a} + \bar{a} \cdot \text{grad} f,$$

$$\nabla \times (f\bar{a}) = f \nabla \times \bar{a} - \bar{a} \times \nabla f \text{ ehk}$$

$$\text{rot}(f \bar{a}) = f \text{rot} \bar{a} - \bar{a} \times \text{grad} f, \text{ jne.}$$

$$11. \nabla \times (\nabla \times \bar{a}) = \nabla \nabla \cdot \bar{a} - \Delta \bar{a}$$

Töestus: $\bar{p} \times (\bar{p} \times \bar{a}) = \bar{p}(\bar{p} \cdot \bar{a}) - (\bar{p} \cdot \bar{p}) \bar{a}$

olemist seost võib kirjutada ka järgmiselt:

$$\text{rot rot } \bar{a} = \text{grad div } \bar{a} - \Delta \bar{a}$$

Kokkuvõte: Avaldisi, milles esineb nablaoperaator, võib teisendada nii, nagu oleks " ∇ " harilik vektor. Ainult muutujat (funktsiooni) ja " ∇ " ei või ümbervahetada.

§ 25. Skalaar või vektor kohavektori ja aja funktsioonina

$$f = f(\bar{r}, t) = f(x, y, z, t)$$

$$\bar{a} = \bar{a}(\bar{r}, t) = (x, y, z, t)$$

Kui anname nüüd ajale t kindla väärtuse, s.o. vaatleme välja ühel kindlal ajamomendil, siis on niisuguse välja uurimises rakendatavad kõik eelmise peatüki operaatorid, milles t mängib konstantse parameetri osa. Vastupidi, kui vaatame välja muutumist ühes kindlas punktis, siis on $\bar{r} = \text{const.}$ ja välja muutumist antud kohas iseloomustab operaator $\frac{\partial}{\partial t}$ (osatuletis t suhtes, x, y ja z on konstandid). Funktsiooni tähise jätame kirjutamata, kuna see võib olla nii f kui ka \bar{a} .

Nüüd võtame käsitlusele üldisema probleemi, mis juba leidis käsitlemist varjatud kujul eelmises peatükis. Oletame, et mingi kehake liigub väljas seaduse järgi $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Tema kiirusvektor on siis

$$\bar{v} = \dot{\bar{r}}(t) = v_x \bar{u}_1 + v_y \bar{u}_2 + v_z \bar{u}_3 = \frac{dx}{dt} \bar{u}_1 + \frac{dy}{dt} \bar{u}_2 + \frac{dz}{dt} \bar{u}_3$$

ja kiirendusvektor: $\bar{w} = \dot{\bar{v}} = \frac{d\bar{v}}{dt}$

Kuidas iseloomustada nüüd välja muutumist selle kehakese suhtes? Selleks tuleb väljafunktsioonis \bar{r} vaadelda kui t f-i.

$$f = f(\bar{r}(t), t) = f(x(t), y(t), z(t), t) \text{ ja}$$

$$\bar{a} = \bar{a}(\bar{r}(t), t) = \bar{a}(x(t), y(t), z(t), t)$$

Välja muutmist liikuva kehakese suhtes antud punktis, antud hetkel iseloomustab siis väljafunktsiooni täistuletis aja suhtes.

$$\frac{d}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Eelmise peatüki põhjal võib esimest kolme liiget asendada sümboliga $\bar{v} \cdot \nabla$ või $\text{grad}_{\bar{v}}$, järelikult

$$\frac{d}{dt} = \bar{v} \cdot \nabla + \frac{\partial}{\partial t} = \text{grad}_{\bar{v}} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Liiget \bar{v} nimetatakse konvektiivseks.

$$\text{Täisdiferentsiaal } d = dt \bar{v} \cdot \nabla + dt \frac{\partial}{\partial t} = d\bar{r} \cdot \nabla + dt \frac{\partial}{\partial t}$$

Olgu nüüd tegemist mingi vedeliku (ka gaasi või kindla keha) kiiruste väljaga \bar{v} . Siis $\bar{v} = \bar{v}(\bar{r}, t)$. Igal vedeliku osakesel on punktis \bar{r} hetkel t kiirus $\bar{v}(\bar{r}, t)$.

Väljajooned ehk voolujooned on vedeliku osakeste liikumise trajektoorid.

Olgu nüüd väljas liikuvaks massi osakeseks selle voolava vedeliku osake. Siis tema kiirus on \bar{v} . Eelneva põhjal selle osakese kiirendus (üldises valemis \bar{a} asemele panna \bar{v})

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \quad \text{ehk täielikult väljakirjutatuna}$$

(muutes liikmete järjekorda):

$$\bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

Tema koordinaadid saame, kui valemis \bar{w} ja \bar{v} asemele kirjutame vastavalt w_x ja v_x , w_y ja v_y , w_z ja v_z .

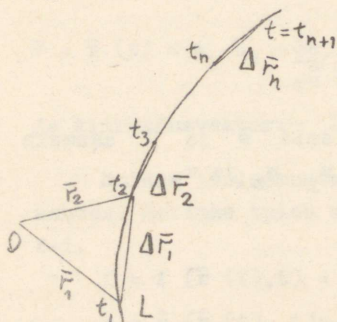
I n t e g r a a l a r v u t u s

§ 26. Joonintegraal

Olgu antud vektorväli $\bar{a} = \bar{a}(r)$ ja selles mingi joon $\bar{r} = \bar{r}(t)$. Joonel võtame kaks punkti argumendi väärtustega t_1 ja $t = t_{n+1}$. Nende punktide vahel alates punktist t_1 võtame järjekorras rea punkte $t_2, t_3 \dots t_n$. Ühendame saadud punktid järjekorras sirglõikudega ja punktist t_i punktini t_{i+1} viiva lõigule vastava vektori tähistame sümboliga $\Delta \bar{r}_i$. Olgu \bar{a}_i vektorvälja vektori väärtus t_{i+1} ja t_i vahelise lõigu mingis punktis. Moodustame summa

$$\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \cdot \Delta \bar{r}_i$$

Kui \bar{a}_i on pidev \bar{r} funktsioon (kui \bar{a}_i joone $\bar{r}(t)$ üksikutes punktides ei ole pidev, saame ikkagi käesolevat arutlust rakendada, kui need üksikud punktid, milles $\bar{a}(\bar{r})$ ei ole pidev, kuid on siiski lõplik, võtame jaotuspunktide s.o. t_i -de hulka), siis tingimusel, et uute jaotuspunktide juurdevõtmisega n piirita kasvab ja kõik $\Delta \bar{r}_i$ -d sellejuures piirita lähenevad 0-le, on sellel summal olemas kindel piirväärtus, mida nimetatakse vektori $\bar{a}(r)$ joonintegraaliks mööda joont $\bar{r} = \bar{r}(t)$, punktist t_1 kuni punktini t .



Sümbolites

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \bar{r}_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \cdot \Delta \bar{r}_i = \int_L \bar{a} \cdot d\bar{r}$$

Siin sümbol L integraali märgi all tähistab seda joone osa, mida mööda integraal on võetud (L on integreerimispiirkond).

Olgu

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{u}_1 + y(t)\vec{u}_2 + z(t)\vec{u}_3 \quad \text{ja}$$

$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x,y,z)\vec{u}_1 + a_y(x,y,z)\vec{u}_2 + a_z(x,y,z)\vec{u}_3,$$

siis joone $\vec{r}(t)$ igas punktis t

$$\vec{a}(\vec{r}(t)) = a_x(t)\vec{u}_1 + a_y(t)\vec{u}_2 + a_z(t)\vec{u}_3$$

ja $\vec{a} \cdot d\vec{r} = (a_x(t)x'(t) + a_y(t)y'(t) + a_z(t)z'(t)) dt$ ja

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^t (a_x x' + a_y y' + a_z z') dt,$$

milles tuletised on võetud argumendi t suhtes. Võib kirjutada ka nii:

$$\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz),$$

sest

$$d\vec{r} = dx \vec{u}_1 + dy \vec{u}_2 + dz \vec{u}_3.$$

Märkus: Kui $\vec{a}(\vec{r})$ tähendab mingit jõuvälja s.o. vektor $\vec{a}(\vec{r})$ näitab punktis \vec{r} masspunktile K rakendatud jõu suurtust ja suunda, siis $\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$ tähendab välja tööd masspunkti K viimisel mööda joont L tema punktist t_1 punktini t .

Kui väljudes punktist t_1 ja liikudes mööda kõverat jõuame niisuguse parameetri t ($t \neq t_1$) väärtuseni, ~~st~~ $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t)$, s.o. kui kõvera L algus ja lõpppunkt ühtivad, siis saame joonintegraali mööda kinnist kõverjoont L ja seda tähistame nii:

$$\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \text{ehk} \quad \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz,$$

mis on võrdne

$$\int_{t_1}^t (a_x x' + a_y y' + a_z z') dt.$$

Märkus: integraali $\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$ nimetatakse ka ääreintegraaliks, kuna kõver L võib olla mingi pinnatüki äärejooneks. Seda integraali nimetatakse ka vektori $\vec{a}(\vec{r})$ tsirkulatsiooniks mööda kõverat L .

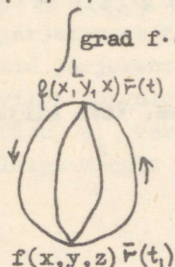
Integraali $\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$ väärtus ei olene sellest, missugusest kõvera punktist integreerimist alata. Kui ääreintegraali integreerimispiirkond on meelevaldne, siis sümbol L integraali

märgi all jäetakse kirjutamata. Kui nüüd $\bar{a}(\bar{r})$ on mingi skalaarvälja $f(\bar{r})$ gradient:

$$\bar{a}(\bar{r}) = \text{grad } f(\bar{r}), \text{ siis}$$

$$\bar{a}(\bar{r}) \cdot d\bar{r} = df(\bar{r})$$

$(df(\bar{r}))$ on täisdiferentsiaal ja $\int_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int_L df = f(\bar{r}(t)) - f(\bar{r}(t_1))$ ehk, kui integreerimispiirkonna alguspunkt on $(x_1/y_1/z_1)$ ja lõpppunkt on $(x/y/z)$, siis



Sellela gradiendi joonintegraal võrdub skalaarvälja väärtuste vahelise integreerimispiirkonna alg- ja lõpppunktis, sõltumatult sellest, missugust joont mööda integraal on võetud. Sellest nähtub ka, et gradiendi tsirkulatsioon on alavi 0.

$$\text{Olgu } \text{grad } f = X(x, y, z)\bar{u}_1 + Y(x, y, z)\bar{u}_2 + Z(x, y, z)\bar{u}_3,$$

$$\text{siis } \int_L \text{grad } f \cdot d\bar{r} = \int_L X dx + Y dy + Z dz$$

ja kuna selle integraali väärtus ei olene sellest, mis joont mööda integreerimine toimub, vaid ainult alg- ja lõpppunkti asukohast, siis on lihtsam viis selle integraali leidmiseks järgmine: integreerimiskövera esimeseks osaks olgu sirglõik punktist $(x_1/y_1/z_1)$ punktini $(x/y_1/z_1)$ (parall. x-teljega), edasi sirglõik punktist $(x/y_1/z_1)$ kuni punktini $(x/y/z_1)$ (parall. y-teljega) ja lõpuks punktist $(x/y/z_1)$ kuni $(x/y/z)$ (parall. z-teljega). Esimesel sirglõigul on $y = y_1$ ja $z = z_1$, ning $dy = dz = 0$, teisel on $x = x = \text{const}$. ja $dx = dz = 0$ ning kolmandal $x = x(\text{const})$, $y = y(\text{const})$ ja $dx = dy = 0$.

Seega

$$\begin{aligned} \int_L \text{grad } f \cdot d\bar{r} &= f(x, y, z) - f(x_1, y_1, z_1) = \\ &= \int_{x_1}^x X(x, y_1, z_1) dx + \int_{y_1}^y Y(x, y, z_1) dy + \int_{z_1}^z Z(x, y, z) dz \end{aligned}$$

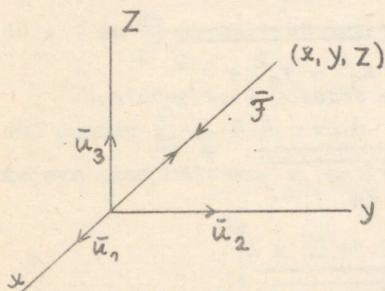
ehk

$$f(x, y, z) = f(x_1, y_1, z_1) + \int_{x_1}^x X(x, y_1, z_1) dx + \int_{y_1}^y Y(x, y, z_1) dy + \int_{z_1}^z Z(x, y, z) dz.$$

Järelikult, kui skalaarvälja väärtus ühes punktis on teada ja on teada tema gradiendi väärtus kõikides punktides, siis eeltoodud valemi järgi on skalaarvälja väärtus igas punktis arvutatav.

Üldiselt nimetatakse vektorvälju, mille tsirkulatsioon kõikjal on 0, potentsiaalväljadeks, ja neid võib vaadelda skalaarväljade gradientväljadena (täpsem tunnus on antud peatüki lõpus).

Näide. Newtoni gravitatsiooniväljas on jõud suunatud gravitatsioonitsentri poole ja tema tugevus on pöördvõrdeline kauguse ruuduga tsentrist. Olgu tsenter punktis O.



Siis

$$\vec{F} = -\frac{km}{r^2} \vec{u}_r,$$

kus m on masspunkti mass,

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

k võrdetegur (mis sõltub tsentraalse keha massist) ja

$$\vec{u}_r = \frac{1}{r} (x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3).$$

Seega
$$\vec{F} = -\frac{kmx}{r^3} \vec{u}_1 - \frac{kmy}{r^3} \vec{u}_2 - \frac{kmz}{r^3} \vec{u}_3$$
 ja

$$X = -\frac{kmx}{r^3}, \quad Y = -\frac{kmy}{r^3}, \quad Z = -\frac{kmz}{r^3}.$$

Ei ole raske näha, et $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ ja seega $\vec{F} = \text{grad } U =$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_1 + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_2 + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_3.$$

$$U(x, y, z) = U(x_1, y_1, z_1) + \int_{x_1}^x X(x, y_1, z_1) dx + \int_{y_1}^y Y(x, y, z_1) dy + \int_{z_1}^z Z(x, y, z) dz = U(x_1, y_1, z_1) -$$

$$\begin{aligned}
& - km \left[\int_{x_1}^x \frac{x \, dx}{(\sqrt{x^2 + y_1^2 + z_1^2})^3} + \int_{y_1}^y \frac{y \, dy}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2})^3} + \right. \\
& + \left. \int_{z_1}^z \frac{z \, dz}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \right] = U(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2} km \cdot \\
& \cdot \left[\int_{x_1}^x \frac{d(x^2 + y_1^2 + z_1^2)}{(x^2 + y_1^2 + z_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \int_{y_1}^y \frac{d(x^2 + y^2 + z_1^2)}{(x^2 + y^2 + z_1^2)^{\frac{3}{2}}} + \right. \\
& + \left. \int_{z_1}^z \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = U(x_1, y_1, z_1) + \\
& + km \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y_1^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \right. \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y_1^2 + z_1^2}} + \\
& + \left. \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}} \right] .
\end{aligned}$$

Oletame, et $U(x_1, y_1, z_1) = \frac{km}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} - C$

(C meelevaldne konstant), siis

$$U(x, y, z) = \frac{km}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - C = \frac{km}{r} - C .$$

Funktsiooni

$U(x, y, z) = \frac{km}{r} - C$ nimetatakse jõufunktsiooniks, tema vastandaru aga masspunkti potentsiaaliks (ehk potentsiaal-seks energiaks):

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z) = -\frac{km}{r} + C$$

(meelevaldse konstandi lisamine tähendab, et potentsiaali väärtus punktis (x_1, y_1, z_1) on vabalt etteantav).

Lihtsam on jõufunktsiooni avaldist tuletada järgmiselt:

$$dU = -\frac{km}{r^2} (xdx + ydy + zdz).$$

Et $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, siis $2rdr = 2(xdx + ydy + zdz)$ ja asendades saame:

$$dU = -km \frac{dr}{r^2}, \text{ millest integreerides saadakse } U = \frac{km}{r} + C.$$

Joonintegraali mõistet võib laiendada, kuna eelpooltoodud summas $\sum_{i=1}^n \bar{a}_i \cdot \Delta \bar{r}_i$ võib $\bar{a}_i \cdot \Delta \bar{r}_i$ asemele võtta mõne teise avaldise, näiteks $\bar{a}_i \times \Delta \bar{r}_i$, $f \Delta \bar{r}_i$ jne. Nii saame

$$\int_L \bar{a} \times d\bar{r} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \bar{r}_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \times \Delta \bar{r}_i$$

$$\int_L f d\bar{r} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta \bar{r}_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f_i \Delta \bar{r}_i \text{ jne.}$$

ja vastavad ääreintegraalid

$$\oint_L \bar{a} \times d\bar{r}, \oint_L f d\bar{r}, \text{ jne.}$$

Vastavate integraalide olemasolu puhul kehtivad joonintegraalide kohta järgmised teoreemid.

1. Kui integraali märgi all esinev avaldis on summa, siis võib integreerida tema üksikud liidetavad ja tulemused

liita (tingimusel, et kõik integraalid on olemas).

Näide:

$$\int_L (\vec{a} + \vec{b}) \cdot d\vec{r} = \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_L \vec{b} \cdot d\vec{r}.$$

2. Konstantse teguri (skalaari või vektori) võib tuua integraali märgi ette.

Näide:

$$\int_L \bar{c}(\vec{a} \cdot d\vec{r}) = \bar{c} \int_L \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

3. Integraali märgi all olevat avaldist võib teisendada vektor-arvutuse üldiste reeglite järgi, kusjuures vektordiferentsiaali $d\vec{r}$ võib käsitada nagu harilikku vektorit.

Näide:

$$\int_L \vec{a} \times (\vec{b} \times d\vec{r}) = \int_L (\vec{b}(\vec{a} \cdot d\vec{r}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) d\vec{r})$$

4. $\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} = - \int_{-L} \vec{a} \cdot d\vec{r}$, milles $\int_{-L} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ tähendab integraali mööda kõverjoont L vastavate punktide vahel, ainult vastupidises suunas ($t_1 = t_i - t_{i+1} < 0$).

5. $\int_L \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_K \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_{L+K} \vec{a} \cdot d\vec{r}$, milles $L + K$ on integreerimispiirkond, mis saadakse piirkondade L ja K liitmisel.

Neid ja vastavaid teoreeme teiste joonintegraalide (ka ääreintegraalide) kohta on kerge tõestada, lähtudes joonintegraali definitsioonist summa piirväärtusena.

6. Mingi pinnatüki ääreintegraal võrdub kõikide ääreintegraalide summaga, mis saadakse pinnatüki tükeldamisel osadeks, kui integreerimissuund kõikide pinnatükkide suhtes on sama.



Tõestuseks jaotame pinnatüki kolmeks osaks, nagu näha joonisel ja moodustame vastavad ääreintegraalid.
1. pinnatüki ääreintegraal:

$$I_I = \int_{L_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{K_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{K_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \int_{K_3} \vec{a} \cdot d\vec{r},$$

II pinnatüki ääreintegraal

$$I_{II} = \int_{L_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} - \int_{K_3} \vec{a} \cdot d\vec{r} - \int_{K_4} \vec{a} \cdot d\vec{r} - \int_{K_1} \vec{a} \cdot d\vec{r}$$

III pinnatüki ääreintegraal

$$I_{III} = \int_{K_4} \bar{a} \cdot d\bar{r} - \int_{K_2} \bar{a} \cdot d\bar{r}.$$

Liites ja koondades saame

$$I_I + I_{II} + I_{III} = \int_{L_1} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \int_{L_2} \bar{a} \cdot d\bar{r},$$

mis on terve pinnatüki ääreintegraal.

Pinnatükk ei pea tingimata olema tasapinnaline.

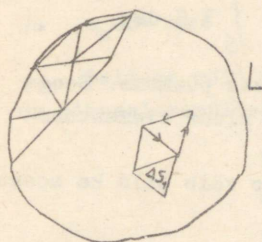
7. $\oint d\bar{r} = \bar{r}(t) - \bar{r}(t_1) = 0$, sest $\bar{r}(t) = \bar{r}(t_1)$.

8. Kui $\bar{a} = \text{const.}$, siis $\int_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = \bar{a} \cdot \int_L d\bar{r}$ ja $\oint \bar{a} \cdot d\bar{r} = 0$, samuti

$$\int_L \bar{a} \times d\bar{r} = \bar{a} \times \int_L d\bar{r} \quad \text{ja} \quad \oint \bar{a} \times d\bar{r} = 0.$$

§ 27. Pindintegraal

Olgu antud mingi vektorväli $\bar{a}(\bar{r})$ ja selles mingi pinnatükk S , mis on piiratud äärejoonega L . Sellel pinnatükil ja tema äärejoonel võtame rea punkte ja ühendame need sirglõikudega nii, et saame hulga kolmnurke, mis katavad terve pinnatüki ja tema äärejoone asendavad kinnise murdjoonega, mille tipud on äärejoonel. Nummerdame need kolmnurgad; i -nda kolmnurga pindala tähistame ΔS_i ja temale vastav vektor olgu $\Delta \bar{S}_i$.



histame ΔS_i ja temale vastav vektor olgu $\Delta \bar{S}_i$.

$\Delta \bar{S}_i$ on vektor, mille pikkus on võrdne kolmnurga pindalaga: $|\Delta \bar{S}_i| = \Delta S_i$ (pindala ühikuks on vastava pikkusühikulise servaga ruut) ja mis on risti kolmnurga ΔS_i tasapinnaga ning orienteeritud kolmnurga tasapinna suhtes nii, et vaadates kolmnurgale sellelt poolelt, kuhu vektor $\Delta \bar{S}_i$ on suunatud, paistaks ringliikumine kolmnurga äärejoont mööda pöörlemisena vastupidi kellaosutite liikumisele.

Ringliikumine kõikidel kolmnurkadel olgu üks ja sama, s.o. iga kahe kokkupuutuva kolmnurga ühisel küljel on kumma-ki kolmnurga ringliikumise suund vastupidine. Sel juhtumil on äärejoonel L määratud üks kindel liikumissuund. Olgu \vec{n}_i kolmnurga ΔS_i risti olev, vastavalt orienteeritud ühikvektor, siis $\Delta \vec{S}_i = \vec{n}_i \Delta S_i$.

Moodustame summa üle kõikide kolmnurkade $\sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{S}_i$, milles \vec{a}_i on kolmnurga ΔS_i mingis punktis võetud väljavektori $\vec{a}(\vec{r})$ väärtus.

Kui nüüd uute punktide piiramatu juurdevõtmisega suurendada kolmnurkade hulka nii, et nende kõikide külgede pikkused teatud tingimusi täites piiramata läheneksid nullile, ja iga kolmnurga asend läheneks puutuvtasapinna asendile pinnapunktis, millesse kolmnurk kokku tõmbub, siis sellel summal on kindel piirväärtus (lihtsuse mõttes oletame, et $\vec{a}(\vec{r})$ on pidev funktsioon) ja seda piirväärtust nimetatakse vektori $\vec{a}(\vec{r})$ pindintegraaliks mööda pinnatükki S (mis on integreerimispiirkond) ja kirjutakse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \vec{a}_i \cdot \Delta \vec{S}_i = \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} \quad \text{ehk ka} \quad \int_S \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS,$$

milles \vec{n} on pinnanormaalivektor vastavas punktis. Seega $d\vec{S} = \vec{n} \, dS$, kus dS on pinnaelement ja $d\vec{S}$ pinna elementaarvektor.

Märkus: analoogiliselt joonintegraalile võib siis ka moodustada pindintegraale

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S}, \quad \int_S \vec{a} \times d\vec{S}, \quad \int_S f \, d\vec{S}, \quad \text{jne.}$$

Kui integreerimispiirkond S on kinnine pind, s.o. kui ta piirab ühte lõplikku ruumitükki, siis kirjutatakse vastavalt

$$\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S}, \quad \oint_S \vec{a} \times d\vec{S}, \quad \oint_S f \, d\vec{S}, \quad \text{jne.}$$

Niisuguseid integraale nimetatakse ka katteintegraalideks. Katteintegraalide puhul korraldatakse ringliikumine alati nii, et \vec{n} (või $d\vec{S}$) on suunatud väljapoole.

Pindintegraali kohta kehtivad joonintegraali teoreemidele 1-8 vastavad teoreemid ($d\vec{r}$ asemele tuleb panna $d\vec{S}$ ja integreerimispiirkondi mõista vastavalt, s.o. L asemele panna S; S ja -S tähendavad samu pinnatükke ainult vastupidise ringliikumisega).

Teoreem 6 kõlaks järgmiselt: Mingi ruumitüki katteintegraal võrdub kõigi katteintegraalide summaga, mis saadakse selle ruumitüki tükeldamisel osadeks.

§ 28. Pindintegraalide arvutamine kahekordsete integraalide abil

Olgu $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ ja $\vec{n} = n_x \vec{u}_1 + n_y \vec{u}_2 + n_z \vec{u}_3$, siis

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_S (a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z) dS$$

$n_x dS$ on pinnaelemendi dS projektsioon yz- tasapinnale ja samuti

$n_y dS$ on pinnaelemendi dS projektsioon xz- tasapinnale

ja $n_z dS$ on " " ja " xy- "

Sellega võib neid suurusi asendada vastavate tasapindade pinnaelementidega Cartesiusse koordinaatides, pannes

$$\begin{aligned} n_x dS & \text{ asemele } dy \cdot dz, \\ n_y dS & \text{ " } dz \cdot dx \text{ ja} \\ n_z dS & \text{ " } dx \cdot dy. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned} \int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} &= \int_S (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy) = \\ &= \iint_S (a_x dydz + a_y dzdx + a_z dxdy) = \\ &= \iint_{S_{yz}} a_x dydz + \iint_{S_{zx}} a_y dzdx + \iint_{S_{xy}} a_z dxdy. \end{aligned}$$

Siin integreerimispiirkondade S_{yz} , S_{zx} , S_{xy} all tuleb

mõista piirkonna S projektsioone koordinaatide tasapindadele. Need piirkonnad tulevad tükeldada osadeks, mida piiravad vastavalt kõverad $n_x = 0$; $n_y = 0$; $n_z = 0$ ja äärejoone vastavad projektsioonid. Igakord tuleb elimineerida see muutuja, mis vastavas pinna diferentsiaalis ei esine. Igale osa/piirkonnale vastav kahekordne integraal tuleb võtta kas märgiga + või - vastavalt sellele, kas pinnanormaali ühikvektori projektsioon kolmandale teljele on positiivne või negatiivne. Seega oleks õigem kirjutada:

$$\int_S \bar{a} \cdot d\bar{S} = \iint_{S_{yz}} Sg(n_x) a_x dydz + \iint_{S_{zx}} Sg(n_y) a_y dzdx + \iint_{S_{xy}} Sg(n_z) a_z dx dy,$$

milles $Sg(n_x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } n_x > 0 \\ -1, & \text{kui } n_x < 0, \text{ jne.} \end{cases}$

§ 29. Ruumintegraal

Analoogiliselt joon- ja pindintegraalile võib jõuda ruumintegraali mõisteni. Olgu antud vektorväli $\bar{a}(\bar{r})$ ja selles mingi pinnaga piiratud ruumitükk (V). Tükeldame ruumitüki osadeks, mille ühe osa ruumala olgu ΔV_i ; \bar{a}_i olgu vektori $\bar{a}(\bar{r})$ väärtus selle osa sees asuvas mingis punktis. Siis

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta V_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \bar{a}_i \Delta V_i = \int_V \bar{a} \, dV$$

on vektori $\bar{a}(\bar{r})$ ruumintegraal üle ruumitüki V , dV on ruumielement. Piirväärtuse arvutamisel on tingimuseks, et ruumiosa ΔV_i kõik mõõted läheneksid piiramatult nullile, s.t. kui ruumiosa ümber kujundada kera, millesse see ruumiosa täielikult mahub, siis selle kera raadius peab $\rightarrow 0$.

Cartesiuse koordinaatides võib dV asemele kirjutada $dx dy dz$ ja ruumintegraali avaldada kolmekordse integraalina.

$$\int_V \bar{a} dV = \bar{u}_1 \iiint_V a_x dx dy dz + \bar{u}_2 \iiint_V a_y dx dy dz + \bar{u}_3 \iiint_V a_z dx dy dz.$$

Sellega on probleem muutunud tavalise integraalarvutuse probleemiks.

§ 30. Ruumtuletiste avaldamine integraalide abil

Ruumtuletised gradient, divergents, rootor jne. ehk "nablaoperaatori" abil väljendatuna ∇f , $\nabla \cdot \bar{a}$, $\nabla \times \bar{a}$, $\bar{u}_2 \cdot \nabla f$ jne. osutusid tähtsateks vahenditeks väljade omaduste tundmaõppimisel. Sügavamalt tungida nende ruumtuletiste tähendusse võimaldab tõsiasi, et need ruumtuletised on avaldatavad katteintegraalide abil ja nimelt järgmiselt:

$$\nabla f = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} \bar{s} f}{V}$$

$$\nabla \cdot \bar{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} \bar{s} \cdot \bar{a}}{V}$$

$$\nabla \times \bar{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{a} \bar{s} \times \bar{a}}{V}, \quad \bar{u}_2 \cdot \nabla f = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{u}_2 \cdot \bar{d}\bar{s} f}{V},$$

jne.

Neid valemeid tuleb mõista nõnda:

Olgu vaja arvutada mõni ruumtuletis välja mingis punktis \bar{r} . Selleks piirame mingi kinnise pinnaga ruumitüki, milles asetseb nimetatud punkt \bar{r} . Arvutame nüüd välja vastava katteintegraali mööda nimetatud kinnist pinda ja jagame saadud väärtuse piiratud ruumitüki ruumala suurusega V . Kui nüüd ruumitükki punkti \bar{r} ümber kokku tõmmata nii, et punkti \bar{r} kaugused kattepinna mis tahes punktini piiramatult lähenevad nullile, siis vaatamata sellele, milline on kattepinna kuju, läheneb eelnimetatud jagatis kindlale piirväärtusele (kui on täidetud teatud vajalikud tingimused) ja see piirväärtus ongi võrdne vastava ruumtuletisega. Lihtsuse mõttes võib kattepin-

naks valida kerapinna, mille keskpunkt on \bar{r} , aga see pole tingimata vajalik. Tulemus jääb õigeks ka siis, kui \bar{r} on valitud kattepinna mingiks punktiks.

Vastavalt nende valemite tähtsusele on ka tähtis tunda nende tõestust, kuid arvestades konspekti kitsaid raame, tulevad need siin ära jätta.

Belnimetatud valemite rühma kõrval esineb teine rühm valemite ääreintegraalidega, millest ainult ühe esile tõstame, nimelt

$$(\bar{n} \times \nabla) \cdot \bar{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{d}\bar{r} \cdot \bar{a}}{S}$$

Siin ääreintegraal tuleb võtta mööda tasapinnalist kõverjoont, mis piirab antud punkti \bar{r} (milles tuleb leida vastav ruumtuletis) ja on temaga samal tasapinnal. \bar{n} on selle tasapinnaga risti olev ühikvektor, mis on orienteeritud kooskõlas ringliikumise mööda äärejoont. S on äärejoone poolt piiratud pinnatüki suurus. Piirväärtuse leidmise tingimused on analoogilised eelmisele juhtumile. Kuna

$$(\bar{n} \times \nabla) \cdot \bar{a} = \bar{n} \cdot (\nabla \times \bar{a}) = \bar{n} \cdot \text{rot } \bar{a},$$

siis võime eelmise valemi kirjutada järgmiselt

$$\bar{n} \cdot \text{rot } \bar{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{d}\bar{r} \cdot \bar{a}}{S}$$

§ 31. Gaussi ja Stokes'i teoreemid

Gaussi teoreem

Olgu antud pidev diferentseeritav ja ühene vektorväli $\bar{a} = \bar{a}(\bar{r})$. Selles väljas võtame mingi lõpliku ruumitüki V , mis on piiratud kinnise pinnaga S . dV olgu nimetatud ruumitüki element ja $d\bar{S}$ teda piirava pinna vektorelement ($d\bar{S} = \bar{n} dS$, milles \bar{n} on pinna antud punktis väljaspoole suunatud normaal ühikvektor). Siis eeldusel, et vektorvälja divergents on ruumitüki igas punktis pidev, saame Gaussi teoreemi kirjutada järgmiselt:

$$\int_V \text{div } \bar{a} dV = \oint_S \bar{d}\bar{S} \cdot \bar{a} \quad \text{ehk}$$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{a} \, dV = \oint_S d\bar{S} \cdot \bar{a} \quad \text{ehk ka}$$

$$\int_V \nabla \cdot \bar{a} \, dV = \oint_S \bar{n} \cdot \bar{a} \, dS$$

Sõnades: Vektorvälja divergentsi ruumintegraal võrdub selle välja katteintegraaliga ruumitükki ümbritsevat pinda mööda.

Cartesiusse koordinaatides oleks Gaussi teoreemil järgmine kuju:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{S_{yz}} a_x dy dz + \iint_{S_{yx}} a_y dz dx + \iint_{S_{xy}} a_z dx dy$$

Õigem oleks kirjutada:

$$\iint_{S_{yz}} \text{Sg}(n_x) a_x dy dz + \iint_{S_{zx}} \text{Sg}(n_y) a_y dz dx + \iint_{S_{xy}} \text{Sg}(n_z) a_z dx dy$$

Töestus. Lhk. 7) antud valemist

$$\nabla \cdot \bar{a} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint d\bar{S} \cdot \bar{a}}{V} \quad \text{saab valemi}$$

$$\nabla \cdot \bar{a} = \frac{\oint d\bar{S} \cdot \bar{a}}{V} + \varepsilon, \quad \text{milles } \lim_{V \rightarrow 0} \varepsilon = 0. \quad \text{Siit}$$

$$\nabla \cdot \bar{a} V = \oint d\bar{S} \cdot \bar{a} + \varepsilon V$$

Tükeldame antud ruumitüki väikesteks osadeks $V_1, V_2, \dots, V_1, \dots, V_n$ ja võtame iga osa mingis punktis väljavektori väärtuse \bar{a}_1 . Moodustame eelsaadud avaldise iga ruumitüki osa kohta ja võtame nende summa

$$\sum_{i=1}^n \nabla \cdot \bar{a}_i V_i = \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} d\bar{S} \cdot \bar{a}_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i. \quad \text{Suurendades}$$

osade arvu piiramatult, saame piirväärtused

$$\int_V \nabla \cdot \bar{a} \, dV = \oint_S d\bar{S} \cdot \bar{a}, \quad \text{kuna}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i V_i = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \oint_{S_i} d\vec{S} \cdot \vec{a} = \oint d\vec{S} \cdot \vec{a}, \quad \text{sest pind-}$$

integraalid üle nende pinnatükkide, mis tükeldamisel juurde tulid, annavad summas 0, sest samas punktis esineb $d\vec{S}$ ja $-d\vec{S}$.

Stokes'i teoreem

Olgu, nagu eelmiseski artiklis $\vec{a}(\vec{r})$ mingi vektorväli. S olgu mingi pinnatükk selles väljas (\vec{n} - tema normaalisihi-line ühikvektor ja $d\vec{S} = \vec{n}dS$), mis on piiratud äärejoonega L (mis võib koosneda ka mitmest lahusolevast kinnisest joonest), mille kaare elementaarvektor olgu $d\vec{r} \cdot \vec{n}$ ja $d\vec{r}$ suunad peavad olema kooskõlastatud nii, et mingis äärejoone punktis vektor $d\vec{r} \times \vec{n}$ (mis asetseb pinnatüki selles punktis võetud putuval tasapinnal) oleks suunatud pinnatükist väljapoole. Siis on lhk. 72 antud valemist

$$\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\oint d\vec{r} \cdot \vec{a}}{S}$$

kerge tuletada valemist

$$\int_S \vec{n} \cdot \text{rot } \vec{a} \, dS = \oint_L d\vec{r} \cdot \vec{a} \quad \text{ehk}$$

$$\int_S \text{rot } \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \text{ehk ka}$$

$$\int_S (\nabla \times \vec{a}) \cdot d\vec{S} = \oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r}, \quad \text{mis on Stokes'i teoreemi esitav valem.}$$

Cartesiuse koordinaatides:

$$\iint_{S_{yz}} S_g(n_x) \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) dydz + \iint_{S_{zx}} S_g(n_y) \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) dzdx +$$

$$+ \iint_{S_{xy}} S_g(n_z) \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

Sõnades: Vektorvälja ^{rootõri} pindintegraal võrdub selle välja ääreintegraaliga (tsirkulatsiooniga) pinnatükki piiravat joont mööda.

Stokes'i teoreemist nähtub, et kui $\oint_L \bar{a} \cdot d\bar{r} = 0$ mööda
iga kõverjoont, s.o. kui $\bar{a} = \text{grad } f$, siis ka $\text{rot } \bar{a} = \bar{0}$ ja
ümbepöördult, kui $\text{rot } \bar{a} = 0$, siis $\bar{a} = \text{grad } f$.

Sisukord

lhk.

Esimene peatükk	
Vektor skalaari funktsioonina	3
§ 1. Vektoremalüüsi aine	3
§ 2. Vektor ühe skalaarse argumendi funktsioonina	3
§ 3. Tuletis	5
§ 4. Tuletise (diferentsiaali) omadusi	8
§ 5. Vektor ja temasihiline ühikvektor	11
§ 6. Vektorfunktsiooni integreerimine	13
§ 7. Ruumijeone kaare pikkus	16
§ 8. Peanormaal ja kõverus	19
§ 9. Binormaal ja vääne	21
§ 10. Kõveruse valemi teisendamine	22
§ 11. Punkti kinemaatika põhiküsimusi	23
§ 12. Kiirus ja kiirendus polaarkoordinaatides	27
§ 13. Puute- ja normaalkiirendus	30
§ 14. Liikuv ühikvektorite kolmik	31
§ 15. Kiiruste jaotus abs. kõva keha liikumisel (pöörlemisel) kinnispunkti ümber	33
§ 16. Kiiruste jaotus kõva keha üldisel liikumisel	33
§ 17. Vektor mitme skalaarse suuruse (skalaari) funktsioonina	39
Teine peatükk	
Kohafunktsiooni tuletis. Muutuva välja tuletis	41
§ 18. Skalaar vektori (kohavektori) funktsioonina. Skalaarväli	41
§ 19. Kohafunktsiooni tuletis antud suunas	41
§ 20. "Nabla" operaator (ka Hamiltoni operaator)	45
§ 21. Vektor kohavektori funktsioonina. Vektorväli	49
§ 22. Tuletis	50
§ 23. Ruumtuletis	52
§ 24. Divergents ja rootor	53
§ 25. Skalaar või vektor kohavektori ja aja funktsi- oonina	58

	lhk.
Kolmas peatükk	
Integraalarvutus	50
§ 26. Joonintegraal	60
§ 27. Pindintegraal	67
§ 28. Pindintegraalide arvutamine kahekordsete integraalide abil	69
§ 29. Ruumintegraal	70
§ 30. Ruumtuletiste avaldamine integraalide abil	71
§ 31. Gaussi ja Stokes'i teoreemid	72

Галлинский политехнический институт

Сильде Ю.М., Рельвик Х.А.

ОСНОВЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

На эстонском языке

ТРИ rotaprint, 1961. Trükipoognaid 5.

Tiraaž 500 eks. MB-00245. Tell. nr. 72.

Hind rbl. -.15

-Hind rub.-. 15.

A

24260

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 01016707 2