י. א. הורוויץ און ר. װ. גאנגנוס

סיסטעמאטישער קורס
פון
געאָמעטריע

לערנבוך
פאר דער מיטלשול

ערשטער טייל
פלאנימעטריע

פארלאג „עמעס", מאָסקווע 1934

יו. אָ. הורוויץ אונ ר. וו. גאנגנוס

סיסטעמאטישער קורס

פונ

געאָמעטריע

לערנבוכ

פאר דער מיטלשול

ערשטער טייל

פלאנימעטריע

6 — 8 לערניאָר

צווייטע אופלאגע

פונ רוסישנ סטאבילנ לערנבוכ, וואָס איז באַ־
שטעטיקט פונ דער קאָלעגיע פונעם פאָלקאָמבילד
רספסר., איבערגעזעצט ז. ווײַסמאנ

דער טעקסט פונ דער איבערזעצונג איז באשטעטיקט פונעם
פאָלקאָמבילד רספסר

פארלאג „עמעס“
מאָסקווע
1934

Редактор А. Фрумкин. Техн. ред. И. Тененбаум. Корректор М. Иткин. Сдано в производство 28/II—34. Подписано к печати 29/IV—34. Бумага $62 \times 94^{1}/_{16}$. 13 п. л. 42000 п. зн. в п. л. Уп. Главлита В—76323. Заказ № 214. Тираж 11000 экз.

Тип. изд-ва «Дер Эмес», Москва, Покровка, 9.

ארײַנפיר.

געאָמעטרישע גרונט-באגריפן.

1. א פיזישער און א געאָמעטרישער קערפער.

אלע געגנשטאנדן אָדער קערפערס, וואָס רינגלען אונדז ארום, פארמאָגן אן אלגעמיינע אייגנטימלעכקייט, נעמלעך — אלע פארנעמען זיי א באשטימטן טייל פון רוים. באגלײַך מיט דעם פארמאָגט יעדער קערפער א גאנצע ריי אייגנטימלעכע פיזישע אייגנשאפטן, וואָס אונטערשיידן אים פון אנדערע קערפערס. צו אזעלכע פיזישע אייגנשאפטן געהערן: די וואָג פון קערפער, זײַן מאסע, די אומדורכדרינגלעכקייט, די עלאסטישקייט, די באפארבונג און אנדערע, וועלכע זײַנען אָפהענגיק פונעם שטאָף פון קערפער. אויסער די פיזישע אייגנשאפטן פארמאָגט יעדער קערפער כאראקטעריסטישע אויסערלעכע אייגנשאפטן, נעמלעך — די פאָרם און די גרייס. אָט די אייגנשאפטן הייסן געאָמעטרישע אייגנשאפטן פון קערפער.

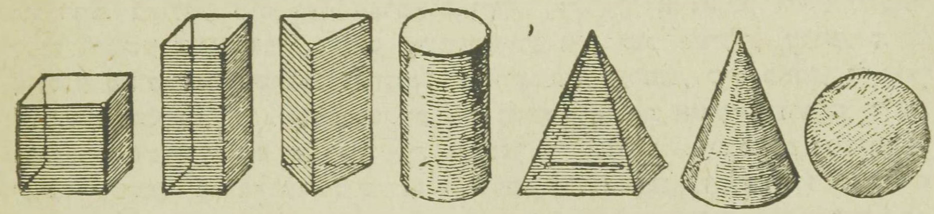
מיט דערלערנען די פיזישע אייגנשאפטן פון א קערפער פארנעמען זיך די נאטורוויסנשאפטן: פיזיק, כימיע אאוו. די געאָמעטרישע אייגנשאפטן פון א קערפער: זײַן פאָרם און די גרייס, וואָס זײַנען כאראקטעריסטיש פאר יעטווידן קערפער און וואָס גיבן די מעגלעכקייט אונטערצושיידן איין קערפער פונעם אנדערן, דערלערנט די געאָמעטריע, אבסטראהירנדיק זיך פון די פיזישע אייגנשאפטן פונעם קערפער, וואָס זײַנען אים אייגנטימלעך. דעריבער איז פאר דעם, וואָס דערלערנט געאָמעטריע, קיין אונטערשייד ניט, צי האָט ער אפ צו דערלערנען די געאָמעטרישע פאָרם פון א קערפער און זײַנע געאָמעטרישע אייגנשאפטן א קוב פון אײַזן, אָדער א גלאט אָפגעפאָלירטן קוב פון גראניט, א גומענע פילקע אָדער א קײַלעך אויסגעטאָקט פון ביין, א גלעזערנע אָדער א הילצערנע פריזמע אאוו.

קעדיי בעסער צו באנעמען די פאָרם פון די ארומיקע קערפערס, דארף דער, וואָס דערלערנט געאָמעטריע, קענען ניט נעמען אין אכט די פיזישע אייגנשאפטן פון די קערפערס און זיך אויסלערנען קאָנצענטרירן זײַן אויפמערקזאמקײַט אויסשליסלעך אפ איין אייגנשאפט פון די קערפערס — אפ זייער פאָרם.

מע דארף געדענקען, אז אין דער ווירקלעכקײַט איז די פאָרם ניט אָפצוטיילן פון די אייגנשאפטן, וואָס זײַנען אייגנטימלעך פארן קערפער, און אז ווען די געאָמעטריע דערלערנט די פאָרם פון א קערפער, שיידט זי אָפ די דאָזיקע פאָרם, זי אבסטראהירט זי פונעם ווירקלעכן קערפער פון דעם ארומיקן רוים. בלויז דורך דער דערפארונג און דורך איבונגען פון פיל הונדערטער יאָרן האָט

זיכ דער מענטש אויסגעלערנט דענקענ אינ אבסטראקטע פאָרמענ, האָט דערלערנט זייערע באזונדערקײַטנ אונ נוצט אויס די אייגנשאפטנ פונ די באזונדערע פאָרמענ אינ דער רעאלער ווירקלעכקײַט: אינ דער טעכניק, אינ דער פראָדוקציע.

אלזאָ, געאָמעטריע דערלערנט ניט קיינ פיזישנ קערפער מיט אלע פיזישע אייגנשאפטנ, וואָס זײַנענ אימ אייגנטימלעכ, נאָר א קערפער, בא וועלכנ ס'זײַנענ קלוימערשט אָפגענומענ אלע זײַנע פיזישע אייגנשאפטנ אונ וואָס בא אימ איז בלויז פארבליבנ די פאָרמ אונ די גרייס פונ יענעמ פיזישנ קערפער, פונ וועלכנ ס'זײַנענ מיטנ געדאנק אבסטראהירט, דערווײַטערט זײַנע פיזישע אייגנשאפטנ. אזעלכע קערפערס הייסנ געאָמעטרישע קערפערס. אזוווי יעטווידער פיזישער קערפער פארנעמט א באשטימטנ טייל פונ רוימ, דרינגט דערפונ, אז א געאָמעטרישער קערפער איז א טייל רוימ, וואָס עס פארנעמט א פיזישער קערפער, אנדערש גערעדט — א געאָמעטרישער קערפער איז א טייל רוימ, וואָס איז באגרענעצט פונ אלע זײַטנ.



צייכ. 1

אלס פיזישער קערפער האָט א געאָמעטרישער קערפער דרײַ אויסמעסטונגענ: א לענג, א ברייט, א הייכ אָדער גרעב. אויב מירנ אָפטיילנ פונ א קערפער וואָסער־ניט־איז טייל, וועט דער דאָזיקער טייל אויכ זײַנ א קערפער. דאָס, וואָס עס טיילט אָפ דעמ קערפער פונ דעמ ארומיקנ רוימ אונ פונ אנדערע קערפערס, הייסט זײַנ אויבערפלאכ; די גרענעצ פונ א קערפער איז די אויבערפלאכ.

אינ אונדזער ארומ באגעגענענ מיר ביז גאָר פארשיידנארטיקע אויבערפלאכנ, וואָס זייער פאָרמ איז באשטימט דורכ דער פאָרמ פונעמ קערפער. אשטייגער, די אויבערפלאכנ פונ א קלאסנ־טאָוול, פונ א טיש, פונ אנ עמער, פונ א פילקע, פונ א קײַלעכ, פונ א צילינדער, פונ א קאָנוס זײַנענ פארשיידנ אונ זײַנענ אָפהענגיק אויסשליסלעכ פונ דער פאָרמ פונעמ קערפער.

די אויבערפלאכ פונ א קערפער קאָנ זיכ טיילנ אפ כאלאָקימ אונ יעדער כיילעק אירער שטעלט מיט זיכ אויכ פאָר אנ אויבערפלאכ.

אפ דער צייכענונג 1 זײַנענ אָנגעצייכנט קערפערס פונ פארשיידענער פאָרמ: א קוב, א גראָדווינקלדיקער פאראלעלעפיפעד, א פריזמע, א צילינדער, א פיראמידע, א קאָנוס, א קײַלעכ. אייניקע פונ אָט די קערפערס — א קוב, א פאראלעלעפיפעד, א פריזמע, א פיראמידע — האָבנ א פלאכע אויבערפלאכ; די אנדערע, ווי צומ בײַשפיל, א קײַלעכ, האָבנ א קרומע אויבערפלאכ, אונ לעסאָף, די דריטע — א צילינדער אונ א קאָנוס — זײַנענ אָפגעגרענעצט מיט א פלאכער אונ מיט א קרומער אויבערפלאכ.

אנ אויבערפֿלאכ האָט צוויי אויסמעסטונגענ: א לענג אונ א ברייט. די גרענעצ פונ דער אויבערפלאכ, דה. דאָס אָרט, ווו איינ טייל אויבערפלאכ פונעמ קערפער שנײַדט זיכ איבער מיט דעמ צווייטנ, הייסט ליניע. די גרענעצ פונ אנ אויבערפלאכ איז א ליניע. א ליניע האָט בלויז איינ אויסמעסטונג — א לענגלאָמיר באטראכטנ דעמ קוב אפ דער צייכענונג 1: דער קאנט פונעמ קוב איז דאָס אָרט, ווו עס שנײַדנ זיכ איבער צוויי ווענטלעכ זײַנע, וואָס יעדעס פונ זיי איז א טייל פונ דער גאנצער אויבערפלאכ פונעמ קוב.

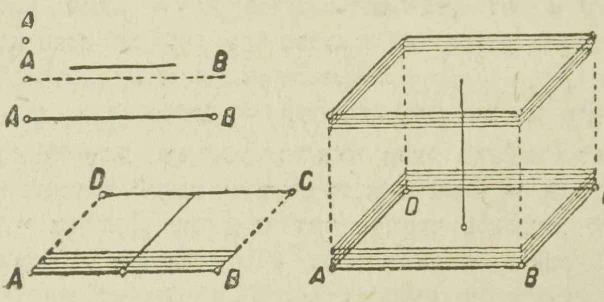
א ליניע קאָנ מענ טיילנ אפ כאלאָקימ, אונ דערבײַ איז יעדער כיילעק אויכ א ליניע.

די גרענעצ פונ א ליניע איז א פונקט. א פונקט האָט ניט קיינ אויסמעסטונגענ. דאָס איז דאָס אָרט, ווו עס שנײַדנ זיכ איבער צוויי אָדער עטלעכע ליניעס. אשטייגער, דער שפּיצ פונעמ קוב אפ דער צייכענונג 1 איז דאָס אָרט, ווו עס שנײַדנ זיכ איבער דרײַ ליניעס. אויבערפלאכנ, ליניעס אונ פונקטנ קאָנ מענ באאָבאכטנ בלויז אפ קערפערס. אליינ פאר זיכ עקזיסטירנ זיי ניט; אויב מיר ריידנ פונדעסטוועגנ אינ געאָמעטריע וועגנ אויבערפלאכנ, ליניעס אונ פונקטנ, ווי פונ עפּעס א זעלבשטענדיקער זאכ, איז עס נאָר דערפאר, וואָס מיר שטעלנ זיי זיכ פאָר אָפּגעשיידטע פונ די קערפערס, קלוימערשט אראָפּגענומענע פונ די קערפערס.

א קערפער, אנ אויבערפלאכ, א ליניע אונ א פונקט הייסנ געאָמעטרישע פאָרמענ.

2. וו׳אזוי בילדנ זיכ געאָמעטרישע פאָרמענ דורכ באוועגונג.

מיט א פונקט ווערט באצייכנט א באשטימט אָרט אינ רוימ, זאָל עס זײַנ אפ דער אויבערפלאכ גופע פונעמ קערפער אָדער אינוויינִיק אינעמ קערפער, אפ א ליניע, וואָס איז דורכגעפירט אפ דער אויבערפלאכ פונ א קערפער, אָדער אפ א ליניע, וואָס מע דענקט זי אָפּגעזונדערט פונ אימ.



צייכ. 2

ווענ א פונקט טראָגט זיכ איבער אינ רוימ פינ איינ אָרט אפנ צווייטנ (צייכ. 2), ענדערט ער אָנ אנ איבערײַס זײַנ לאגע אונ עס באקומט זיכ, ווי ער וואָלט אָנגעצייכנט א געוויסע ליניע. דעריבער זאָגט מענ: א ליניע שטעלט מיט זיכ פאָר א שפור פונ א זיכ באוועגנדיקנ פונקט. ווענ מיר גיבנ אפגיכ א פאָכע אינ דער פינצטער מיט א קליינ אָנגעגליט קײַלעכל, וואָס שטעלט מיט זיכ פאָר א ליכטנדיקנ פונקט, גיט עס אונדז א פאָרשטעלונג פונ א געוויסער ליניע, אלס שפור פונ אלע זײַנע לאגעס, וואָס דאָס קײַלעכל פארנעמט בא זײַנ דורכטראָגנ זיכ אינ רוימ.

אפן זעלבן אויפן קאָנען מיר זיך פאַרשטעלן, אז אן אויבערפלאך בילדעט זיך דורך דער באַוועגונג פון א ליניע אין רוים (צייך. 2), אויב נאָר די ליניע טראָגט זיך דערבײַ ניט אריבער אין דער ריכטונג פון איר אָנפאנג־לאגע. די זיך קלוימערשט צונויפגיסנדיקע שפיצעס פון א ראָד, וואָס דרייט זיך שנעל, גיבן א פאַרשטעלונג פון אן אויבערפלאך.

דורך דער באַוועגונג פון אן אויבערפלאך בילדעט זיך א קערפער, אויב נאָר די אויבערפלאך טראָגט זיך ניט אריבער אין דער ריכטונג פון איר אָנפאנג־לאגע (צייך. 2).

די דרייונג פון א קרײַז ארום זײַן דיאמעטער גיט די פאַרשטעלונג וועגן א קײַלעך.

3. מינים ליניעס און אויבערפלאכן.

1. אפ קערפערס אונטערשיידן מיר גראָדע און קרומע ליניעס.

אשטייגער, דאָס אָרט, ווו עס שנײַדן זיך איבער צוויי ווענטלעך פון א קוב, איז דער קאנט זײַנער — א גראָדע ליניע; דאָס אָרט, ווו עס שנײַדט זיך איבער די זײַטיקע אויבערפלאך פון א צילינדער מיט זײַן באזיס, איז א קרײַזליניע — א קרומע ליניע.

געבן א דעפיניציע פון א גראָדער קאָן מען ניט. דעם באגריפ פון א גראָדער דארף מען רעכענען פאר א גרונט־באגריפ; דעם דאָזיקן באגריפ באקומט דער מענטש דירעקט פון דער דערפארונג.

ספעציעלע פאלן פון דער ריכטונג פון א גראָדער שטעלן מיט זיך פאָר האָריזאָנטאלע און ווערטיקאלע גראָדע. די ריכטונג פון א האָריזאָנטאלער גראָדער באווײַזט א שטעקל, וואָס ליגט אפ א רויִקער וואסער-אויבערפלאך אין א קליינעם באסיין; די ריכטונג פון א ווערטיקאלער גראָדער ווערט באשטימט לויט דער לאגע פונעם אזויגערופענעם ריכט-שנור, דה. א שנור, וואָס צו זײַן עק איז צוגעבונדן א קליין געוויכטל; א ווערטיקאלע גראָדע איז א גראָדע, וואָס גייט אין דער ריכטונג צום ערד־צענטער.

2. אויבערפלאכן פון קערפערס טיילן זיך אפ פלאכע און קרומע.

פלאכע אויבערפלאך אָדער פּאָשעט *פלאכקײַט*, רופן מיר אָן א אויבערפלאך, וועלכע פארמאָגט די אייגנשאפט, אז א גראָדע, וואָס גייט דורך צוויי באליביקע פונקטן פון דער דאָזיקער פלאכקײַט, ליגט אפ דער פלאכקײַט מיט אלע אירע פונקטן. אלס א בײַשפּיל פון א פלאכקײַט קאָן דינען א גוט אָפּגע-פּאָלירטע דעק פון א טיש; דער קאנט פון א ווירע, צוגעלייגט צו איר אין א באליביקער ריכטונג, שטייט צו איר פעסט צו און לאָזט ניט קיין דורכשײַן צווישן דער ווירע און דער דעק פון טיש.

די וועגטלעך פון א קוב. די באזיסן פון א קאָנוס און פון א צילינדער שטעלן מיט זיך פאָר פלאכקײַטן. די אויבערפלאך פון א קײַלעך, די זײַטיקע אויבערפלאך פון א צילינדער און פון א קאָנוס שטעלן מיט זיך פאָר *קרומע אויבערפלאכן*. דער קאנט פון א ווירע, צוגעלייגט צו דער אויבערפלאך פון א קײַלעך, פאלט מיט איר ניט צונויף בא קיין שום לאגע פון דער ווירע: אויב מיר'ן צולייגן דעם קאנט פון א ווירע צו דער אויבערפלאך פון א צילינ־

דער אָדער פון א קאָנוס, פאַלט ער ניט שטענדיק צונויף מיט דער אויבערפלאַך פון די דאָזיקע קערפּערס.

פאַר א האָריזאָנטאַלער אויבערפלאַך רעכנט זיך די רויִקע אויבערפלאַך פון וואַסער אין ניט קיין גרויסער קיילע.

4. וואָס איז אַזוינס געאָמעטריע און ווי ווערט זי איינגעטיילט.

1. די געאָמעטרישע פאָרמען: א פונקט, א ליניע, אַן אויבערפלאַך, א קערפּער קאָנען באַטראַכט ווערן, אָדער יעדע באַזונדער, אָדער אין א באַשטימטער קאָמבינירונג פון איינע מיט די אַנדערע. אין ביידע פאַלן הייסן די געאָמעטרישע פאָרמען אויך געאָמעטרישע פיגורן, און יעדע געאָמעטרישע פאָרם, וואָס גייט אַריין אין באַשטאַנד פון א פיגור, הייסט אַן עלעמענט פון דער פיגור.

א דרייעק איז א געאָמעטרישע פיגור, זיינע זייטן און די ווינקלען זיינען די עלעמענטן פון דער פיגור, די עלעמענטן פונעם דרייעק; א קוב איז א געאָמעטרישער קערפּער, זיינע ווענטלעך, קאַנטן, ווינקלען זיינען די עלעמענטן פונעם קוב.

2. וואָס איז אַזוינס געאָמעטריע? געאָמעטריע איז די וויסנשאַפט, וואָס דערלערנט די סימאָנים און די אייגנשאַפטן פון געאָמעטרישע פיגורן — פון פלאַכע און פון רוימיקע.

פלאַכע פיגורן הייסן אַזעלכע פיגורן, וואָס ליגן מיט אַלע זייערע פונקטן בלויז אין איין פלאַכקייט. אַשטייגער, א דרייעק, צוויי גראָדע, וואָס שניידן זיך איבער, א קרייזליניע זיינען פלאַכע פיגורן.

רוימיקע פיגורן הייסן אַזעלכע פיגורן, וואָס קאָנען זיך ניט איינפּאַסן מיט אַלע זייערע טיילן אַף איין פלאַכקייט. אַלס ביישפּילן פון רוימיקע פיגורן, אָדער קערפּערס, קאָנען דינען צוויי פלאַכקייטן, וואָס שניידן זיך איבער, א קוב, א פּריזמע, א צילינדער, א קייַלעך אאַוו.

געאָמעטריע באַשטייט פון צוויי טיילן — פון פּלאַנימעטריע, וואָס דערלערנט די אייגנשאַפטן פון פלאַכע פיגורן, און פון סטערעאָמעטריע, וואָס דערלערנט די אייגנשאַפטן פון רוימיקע פיגורן אָדער קערפּערס. געאָמעטריע איז, ווי יעטווידע וויסנשאַפט, אויפגעקומען פון באַאָבאַכטונג און דערפאַרונג, און איר אַנטוויקלונג איז ענג פאַרבונדן מיט די ווירטשאַפטלעכע באַדערפענישן פונעם מענטשן. דאָס וואָרט געאָמעטריע איז א גריכיש וואָרט און דער טייַטש פון דעם איז — ערד-מעסטונג.

3. געאָמעטריע איז אויפגעקומען מיט פיל הונדערטער יאָרן פאַר אונדזער ערע. די קולטורעלע מיזרעך-פעלקער, די באַבילאָנער און די עגיפּטער, האָבן שוין פאַרמאָגט באַדייטנדיקע געאָמעטרישע ידיעות, וועלכע זיי האָבן באַקומען אין צוזאַמענהאַנג מיט דער באַדערפעניש אויסצומעסטן ערד-פּלעצער, בויען קאָלערליי געביידעס, דערלערנען די באַוועגונג פון די שטערנס און פּלאַנעטעס. איר ווייטערדיקע וויסנשאַפטלעכע אַנטוויקלונג האָט די געאָמעטריע באַקומען אין גריכנלאַנד. די ערשטע גריכישע מאַטעמאַטיקער, שילער פון די עגיפּטער, זיינען שוין מיט זעקס הונדערט יאָר פאַר אונדזער ערע געווען באַקאַנט מיט א גאַנצער ריי אייגנשאַפטן פון געאָמעטרישע פיגורן. אַפן גרונט פון די ידיעות וועגן די איינפאַכסטע געאָמעטרישע פאָרמען, וואָס זיי האָבן באַקומען דירעקט פון דער דער-

פארוג האָבן זיי ארויסגעפירט די אייגנשאפטן פון אנדערע, מער קאָמפּליצירטע געאָמעטרישע פאָרמען. צו דער צײַט פון עווקליד, וועלכער האָט געלעבט מיט דרײַ הונדערט יאָר פאר אונדזער ערע, האָט זיך אָנגעזאמלט א גרויסער סכום ידיעס וועגן געאָמעטרישע פאָרמען, און עווקלידס גרויסע פארדינסטן באשטייען אין דעם, וואָס ער האָט צוזאמענגעשטעלט א טיף-דורכגעטראכטן האנטבוך אַז געאָמעטריע „די פרינציפּן", ווו ער האָט געבראכט די יעסוידעס פון דער דאָזיקער וויסנשאפט אין א הארמאָנישער סיסטעם.

I. גראָדע ליניע.

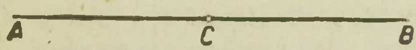
1. גראָדע. שטראל. אָפּשניט. געבראָכענע ליניע. קרומע ליניע.

א גראָדע ליניע, אָדער א גראָדע, איז די אייִנפאכסטע פון אלע ליניעס. א פאָרשטעלונג וועגן א גראָדער קאָן אונדז געבן א שטײַף אָנגעצויגענער פאָדעם, א קאנט פון אן אויסגעקאָנטראָלירטער ווירע; די שטראלן פון דער זון, וואָס רײַסן זיך ארײַן דורך א קליין לעכעלע אין א פינצטערן צימער, גייען לויט א גראָדער.

א גראָדע קאָן מען דענקען איז אומבאגרענעצט פאָרגעזעצט אין ביידע זײַטן.

א גראָדע באצייכנט מען געוויינלעך מיט צוויי לאטײַנישע גרויסהאנטיקע אויסיִעס; די דאָזיקע אויסיִעס שטעלט מען אוועק אָדער פון אויבן אפ דער גראָדער, אָדער אונטער איר אפ א געוויסן אָפּשטאנד איינס פונעם אנדערן. אפ דער צייכענונג 3 איז אָנגעצייכנט א גראָדע AB.

צייכ. 3



צייכ. 4

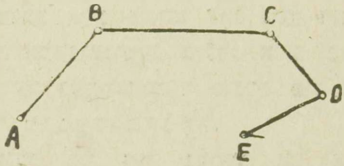
אויב מירן ערגעץ-ווו אפ דער גראָדער AB נעמענ א פונקט C, וועט דער דאָזיקער פונקט C צעטיילן די גראָדע AB אפ צוויי שטראלן — CA און CB (צייכ. 4).

דער פונקט C איז דער אָנפאנג־פונקט אָדער דער אויסגאנג-פונקט פונעם שטראל, און באם פארשרײַבן שטעלט מען אים אפן ערשטן אָרט. א שטראל קאָן זיך ציִען אָן א סאָף בלויז אין איין זײַט. לעמאָשל, דער שטראל CA גייט לינקס פונעם פונקט C, דער שטראל CB — רעכטס. אלזאָ:

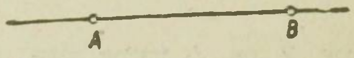
צוויי שטראלן CA און CB, וואָס גייען ארויס פון איין פונקט C און וואָס האָבן קעגנזועצלעכע ריכטונגען, שטעלן מיט זיך פאָר איין גראָדע.

ווען מע נעמט ערגעץ־ווו אפ א גראָדער צוויי פונקטן — A און B, הייסט דער טייל פון דער גראָדער, וואָס איז באגרענעצט מיט אָט די פונקטן, **אָפּשניט**. אן אָפּשניט פון א גראָדער ווערט באצייכנט מיט צוויי גרויסהאנטיקע אויסיִעס, וועלכע מע שטעלט אוועק בא זײַנע עקן: AB (צייכ. 5) איז אן אָפּשניט פון

א גראָדער. ניט זעלטן באצייכנט מען דעם אָפּשניט מיט איינ קליינהאנטיקן אָס, לעמאָשל a. וועלכן מע שטעלט אוועק אונטער דעם אָפּשניט אָדער אף אים, אומגעפער אינ דער מיט; אינעם דאָזיקן פאל באצייכנט a געוויינלעך אויך די לענג פונעם אָפּשניט אינ איינסן פונעם אָנגענומענעם מאסשטאב.

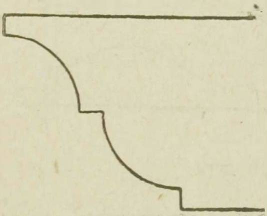


ייכ.

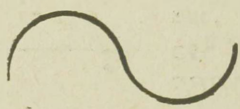


צייכ. 5

א ליניע, וואָס איז צונויפגעשטעלט פונ אָפּשניטן פונ א גראָדער, וועלכע ליגנ ניט אפ איינ גראָדער, הייסט געבראָכענע (צייכ. 6). די אָפּשניטן, פונ וועלכע ס'איז צונויפגעשטעלט די געבראָכענע, הייסן אירע זײַטן אָדער גלידער. א געבראָכענע ליניע ווערט באצייכנט מיט גרויסהאנטיקע אויסיִעס, וועלכע מע שטעלט אוועק בא די עקן פונ אירע זײַטן, אשטייגער, די געבראָכענע $ABCDE$.



צייכ. 8



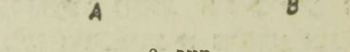
צייכ. 7

א קרומע ליניע הייסט אזא ליניע, וואָס אנטהאלט ניט קיינ איינ אָפּשניט פונ א גראָדער (צייכ. 7).

א געמישטע ליניע הייסט אזא ליניע, וואָס באשטייט פונ אָפּשניטן פונ א גראָדער אונ פונ טיילן פונ א קרומער (צייכ. 8).

2. אקסיִאָמעס וועגנ א גראָדער.

1. א גראָדע קאָנ אומבאגרענעצט פאָרגעזעצט ווערנ אינ ביידע זײַטנ. אויסער אָט דער אייגנשאפט פארמאָגט א גראָדע נאָך אנדערע אייגנשאפטן. מירנ באצייכענען אפ א פלאכקײַט די לאגע פונ צוויי פונקטן A אונ B (צייכ. 9). לאָמיר דורך די דאָזיקע צוויי פונקטן A אונ B דורכפירנ מיט א דורכגעקאָנטראָלירטער ווירע א גראָדע. אויב מירנ זיך פרווונ דורך די דאָזיקע צוויי פונקטן A אונ B דורכפירנ א צווייטע גראָדע, וועט זי צונויפאלנ מיט



צייכ. 9

דער ערשטער; דערפונ באשליסנ מיר, אז

2. דורך צוויי געגעבענע פונקטן קאָנ מען דורכפירנ א גראָדע אונ דערבײַ בלויז איינע. דאָס איז די צווייטע אייגנשאפט פונ א גראָדער; זי ווײַזט, אז די לאגע פונ יעטווידער גראָדער ווערט פולקום באשטימט דורך צוויי פונקטנ; דעריבער איז, אויב מיר וועלנ ארופלייגנ צוויי גראָדע איינע אפ דער אנדערער אזוי, אז צוויי פונקטנ פונ איינ גראָדער זאָלנ צונויפאלנ מיט צוויי פונקטנ פונ דער צווייטער, וועלנ ביידע גראָדע צונויפאלנ מיט אלע

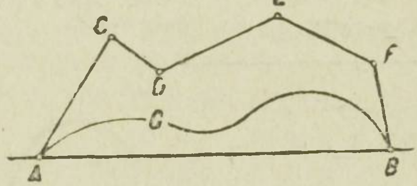
זייערע פונקטן. אויב צוויי גראָדע האָבן בלויז איין געמיינזאַמען פונקט, שנײַדן זיי זיך איבער.

דער געמיינזאַמער פונקט פון צוויי גראָדע AB און CD, וואָס שנײַדן זיך איבער, הייסט איבערשנײַד־פונקט.

דורך איין פונקט קאָן מען דורכפירן אָן א שיר גראָדע. אַלע אַזעלכע גראָדע צוזאַמענגענומענע בילדן א בינטל גראָדע.

דער געמיינזאַמער פונקט פון אַלע גראָדע פונעם בינטל הייסט דער צענטער פונעם בינטל.

ווען מע זאָל נעמען אַפּ א פלאַכקײַט צוויי פונקטן A און B און מע זאָל דורכפירן דורך זיי א גראָדע, א קרומע און א געבראָכענע ליניע, וועלן די פונקטן A און B באַגרענעצן גלײַכצײַטיק דעם אָפּשניט AB און א טייל פון דער קרומער AGB און וועלן אויך זײַן די עקן פון דער געבראָכענער $ACDEFB$ (צייכ. 10). ס'איז קלאָר, אַז דער אָפּשניט AB פון דער גראָדער MN איז קירצער, איידער דער טייל פון דער קרומער AGB און פון דער געבראָכענער $ACDEFB$. דערפון איז



צייכ. 10

3. אַן אָפּשניט פון א גראָדער איז דער קירצסטער אָפּשטאַנד צווישן צוויי פונקטן אירע.

אַפן גרונט פון אָט דער אייגנשאַפט פון א גראָדער מעסט מען שטענדיק אויס דעם אָפּשטאַנד צווישן צוויי פונקטן לויט דער גראָדער ליניע, וואָס גייט דורך די דאָזיקע פונקטן. די לענג פון אַן אָפּשניט באַשטימט דעם אָפּשטאַנד צווישן זײַנע עקסטע פונקטן.

4. א גראָדע, אַלס א געאָמעטרישע פיגור, פאַרמאָגט א רײ אייגנשאַפטן, וואָס זייער ריכטיקײַט איז פעסטגעשטעלט דורך דער דערפאַרונג, וועלכע די מענטשהײַט האָט אָנגעזאַמלט אין איר טאָגטעגלעכן באַאָבאַכטן די דערשײַנונגען פון דער אַרומיקער וועלט און באַם לייזן פּראַקטישע פּראַגעס.

אַזעלכע האַנאָכעס וועגן די אייגנשאַפטן פון א געאָמעטרישער פיגור, וואָס זײַנען אײַנגעשטעלט אַפן גרונט פון דער דערפאַרונג און וועלכע מיר נעמען אָן אָן א דערווײַז, הייסן אַקסיאָמעס. פאָלגנדיקע האַנאָכעס וועגן א גראָדער זײַנען אַקסיאָמעס:

1) א גראָדע קאָן אומבאַגרענעצט פאַרגעזעצט ווערן אין בײדע זײַטן;

2) דורך צוויי געגעבענע פונקטן קאָן מען דורכפירן א גראָדע און דערבײַ בלויז איינע;

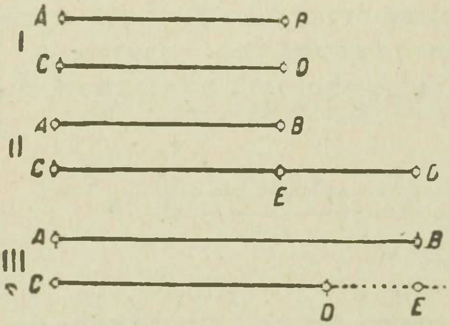
3) אַן אָפּשניט פון א גראָדער איז דער קירצסטער אָפּשטאַנד צווישן צוויי פונקטן.

3. וו׳אזוי פארגלײַכט מען אָפשניטן.

פארגלײַכן די לענג פון גראָדע קאָן מען ניט, מאכמעס מע קאָן זיי אומבאגרענעצט פאָרזעצן איןביידע זײַטן. פארגלײַכן צווישן זיך קאָן מען נאָר אָפשניטן.

פארגלײַכן צוויי אָפשניטן — הייסט דערוויסן זיך, צי זײַנען זיי גלײַך אָדער ניט גלײַך, און אויב זיי זײַנען ניט גלײַך, איז פעסטשטעלן, וועלכער פון זיי איז גרעסער. דאָס פארגלײַכן אָפשניטן ווערט געמאכט דורך ארופלייגן איין אָפשניט אפן צווייטן.

אופגאבע. פארגלײַכן צווישנאנאנד צוויי אָפשניטן AB און CD (צייכ. 11).



צייכ. 11

לייזונג. מירן ארופלייגן דעם אָפשניט AB אפן אָפשניט CD אזוי, אז דער פונקט A זאָל צונויפאלן מיטן פונקט C און דער אָפשניט AB זאָל גיין לויטן אָפשניט CD. אין פאל, ווען דער פונקט B פאלט צונויפ מיטן פונקט D — דעם עק פונעם אָפשניט CD, זײַנען די אָפשניטן AB און CD גלײַך. די דאָזיקע גלײַכקײַט פון די אָפשניטן פארשרײַבט מען אזוי:

$$AB = CD.$$

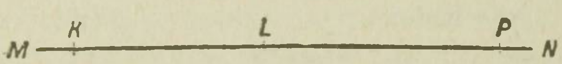
אויב דער פונקט B פאלט אפן אָפשניט CD אינעם פונקט E, וואָס ליגט צווישן די פונקטן C און D, איז דער אָפשניט AB קלענער פונעם אָפשניט CD. מע פארשרײַבט:

$$AB < CD.$$

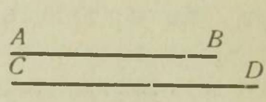
אויב דער פונקט B פאלט אף דער פאָרזעצונג פונעם אָפשניט CD אין א געוויסן פונקט E, איז דער אָפשניט AB גרעסער פונעם אָפשניט CD. מע פארשרײַבט: $AB > CD$.

4. אקטן איבער אָפשניטן.

1. אופגאבע. צונויפלייגן די אָפשניטן AB און CD; די גרייסן זייערע זײַנען געגעבן אף דער צייכענונג 12.



צייכ. 13

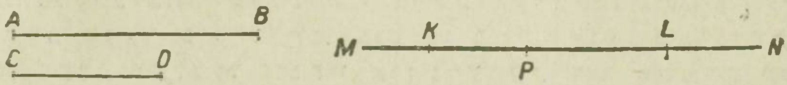


צייכ. 12

קאָנסטרויִרונג. מיר פירן דורכ א גראָדע MN (צייכ. 13). פונעם פונקט K אף דער דאָזיקער גראָדער לייגן מיר אָפ מיט דער הילפ פון א צירקל אן אָפשניט $KL = AB$, און דערנאָכ פונעם פונקט L אן אָפשניט $LP = CD$ אזוי, אז דער עקסטער פונקט פונעם ערשטן אָפשניט זאָל זײַן דער אָנהייב-פונקט פונעם

צווייטן אָפּשניט. דער אָפּשניט KP מאכט אויס די סומע פון די אָפּשניטן AB און CD. מע פארשרייבט: $AB + CD = KL + LP = KP$.

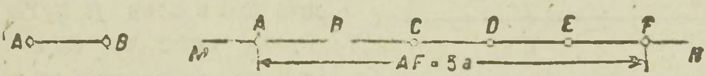
2. אופגאבע. אראָפּנעמען פונעם אָפּשניט AB דעם אָפּשניט CD; די גרייסן פון די אָפּשניטן זיינען געגעבן אפּ דער צייכענונג 14.



צייכ. 14

קאָנסטרוירונג. אפּ דער גראָדער MN לייגן מיר אָפּ אן אָפּשניט $KL = AB$ און דערנאָך לייגן מיר אָפּ פונעם פונקט L אין דער פארקערטער ריכטונג אן אָפּשניט $LP = CD$; דער אָפּשניט KP איז גלייך $AB - CD$.

3. אופגאבע. פארגרעסערן דעם אָפּשניט AB אין 5 מאָל, דה. אים נעמען אלס צונויפלייג-צאָל 5 מאָל.



צייכ. 15

קאָנסטרוירונג. אפּ דער גראָדער MN לייגן מיר אָפּ איינס נאָכן אנדערן 5 מאָל דעם געגעבענעם אָפּשניט AB. דער אָפּשניט AF איז גלייך $5AB$ (צייכ. 15).

4. אופגאבע. ס'זיינען געגעבן די אָפּשניטן a, b און c. קאָנסטרוירן אן אָפּשניט x, וואָס איז גלייך $3a + 2b - 4c$.

אפּ א באליביקער גראָדער קאָנסטרוירן מיר אפריער אן אָפּשניט, וואָס איז גלייך $3a$, דערנאָך גיבן מיר צו אים צו דעם אָפּשניט $b + b = 2b$ און צום סאָפּ נעמען מיר אראָפּ 4 מאָל דעם אָפּשניט c. די אופגאבע איז מעגלעך נאָר באם באדינג, ווען $3a + 2b > 4c$, אָדער ווען $3a + 2b = 4c$. אין צווייטן פאל איז $x = O$.

5. וויאזוי צעטיילן אן אָפּשניט אפּ אן אָפּשניט, ווי אויך צעטיילן אן אָפּשניט אפּ גלייכע און ניט-גלייכע כאלאָקים, וועלן מיר באטראכטן באזונדער.

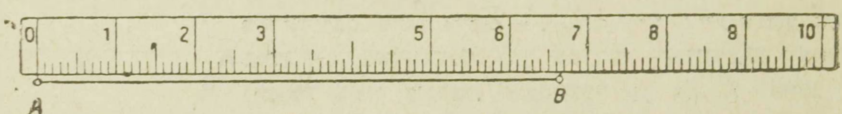
5. וויאזוי מעסט מען אויס אָפּשניטן.

אויסמעסטן אן אָפּשניט — הייסט דערוויסן זיך, וויפל מאָל אנטהאלט זיך אין אים א צווייטער אָפּשניט, וואָס איז אָנגענומען פאר אן איינס. פאר אן איינס אפּ אויסמעסטן אָפּשניטן קאָן דינען א באליביקער אָפּשניט. אָבער געוויינלעך מעסט מען אן אָפּשניט מיט סטאבילע לענג-מאָסן: מיט א מעטער, מיט א סאנטימעטער, מיט א מילימעטער.

קעדיי אויסצומעסטן דעם אָפּשניט AB, לייגט מען אפּ אים אָפּ דעם אויסגעקליבענעם לינעאלן איינס. אויב דער אויסגעקליבענער לינעאלער איינס לייגט זיך א יס אפּן אָפּשניט AB א גאנצע צאָל מאָל, ווייזט טאקע די דאָזיקע צאָל, וויפל

לינעאַלע איינסן אנטהאַלטן זיך אינעם אָפּשניט. אויב אָבער דער אויסגעקליבענער לינעאַלער איינס לייגט זיך ניט אויס אפן אָפּשניט AB א גאנצע צאָל מאָל און עס באַקומט זיך א געוויסע רעשט, דאַרף מען די דאָזיקע רעשט אויסמעסטן מיט א קלענערער לינעאַלער מאָס; באַקומט זיך א נײַע רעשט, מעסט מען זי אויס מיט נאָך א קלענערער לינעאַלער מאָס אאַוו.

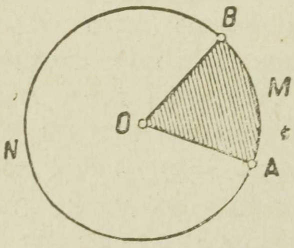
עס קאָן טרעפן, אז קיין איינע פון די אויסגעקליבענע לינעאַלע מאָסן, און אויך קיין איינע פון די טיילן, וואָס באַקומען זיך באַם טיילן די דאָזיקע מאָסן אפ גאַנצע צאָלן, לייגט זיך ניט אויס קיין גאנצע צאָל מאָל אינעם אָפּשניט, וועלכן מע דאַרף אויסמעסטן, דאַן באַשטימט מען די לענג פונעם אָפּשניט דערנעענטערט מיט א וואָס מעגלעך גרעסערן גראַד פּינקטלעכקײַט. דער אָפּשניט AB אפ דער צייכ. 16 איז גרעסער פון 6,5 סמ. און קלענער פון 7 סמ.; דערנעענטערט איז ער גלײַך 6,7 סמ. מע פאַרשרײַבט $AB \approx 6,7$ cm.



צייכ. 16

6. קרײַזליניע און קרײַז.

1. קרײַזליניע און קרײַז. אויב דער אָפּשניט OA וועט זיך דרייען אפ א פלאַכקײַט ארום איינעם פון זײַנע עקן, צום בײַשפּיל, ארום פּונקט O, איז ווען ער וועט מאַכן א פולן אומדריי און וועט ווידעראַמאָל פאַרנעמען זײַן אָנפאַנג-לאַגע, וועט דער צווייטער עק זײַנער, דער פּונקט A, ארומשרײַבן א קרומע ליניע, וועלכע הייסט קרײַזליניע. דער טייל פלאַכקײַט, וואָס איז באַגרענעצט מיט דער קרײַזליניע, הייסט קרײַז (צייכ. 17). דער פּונקט O, ארום וועלכן עס דרייט זיך דער אָפּשניט OA, הייסט צענטער סײַ פון דער קרײַזליניע סײַ פונעם קרײַז; דער אָפּשניט OA הייסט ראַדיוס און ווערט געוויינלעך באַצייכנט מיט די אויסיעס r אָדער R.



צייכ. 17

מע דאַרף באַמערקן, אז ניט בלויז דער עקסטער פּונקט A פונעם אָפּשניט OA שרײַבט ארום א קרײַזליניע; א קרײַזליניע שרײַבט אויך ארום באַם דרייען דעם אָפּשניט ארום דעם פּונקט O יעטווידער פּונקט זײַנער.

יעטווידער פּונקט פון דער קרײַזליניע שטייט אָפּ פון איר צענטער אפ איין און דעם זעלבן אָפּשטאַנד, וואָס איז גלײַך צו דער לענג פונעם ראַדיוס. מע פאַר-שרײַבט: $OA = OB = r$.

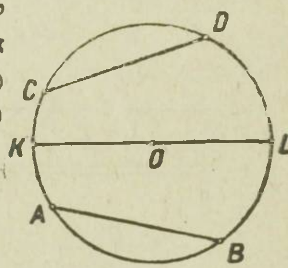
פונעם קאָנסטרוירן די קרײַזליניע דרינגט דירעקט ארויס, אז

א קרײַזליניע שטעלט מיט זיך פאָר אפ א פלאַכקײַט א געשלאָסענע קרומע ליניע, וואָס אלע אירע פּונקטן געפינען זיך אפ א געגעבענעם אָפּ-שטאַנד פון א געגעבענעם פּונקט -- פונעם צענטער.

א קרײַזליניע איז אינגאנצן פעסט באשטימט, אויב ס'זײַנען געגעבן איר ראדיוס און די לאגע פון איר צענטער.

קרײַזליניעס אונטערשיידן זיך איינע פון דער אנדערער מיט דער לענג פון זייער ראדיוס; וואָס גרעסער ס'איז דער ראדיוס פון דער קרײַזליניע, אלץ גרעסער איז די קרײַזליניע גופא. צוויי קרײַזליניעס, וואָס האָבן איין און דעם זעלבן ראדיוס, פאלן צונויף, ווען מע לייגט זיי ארויף איינע אף דער אנדערער, זיי זײַנען, הייסט עס, גלײַך. א קרײַזליניע צייכנט מען אָן מיט דער הילף פון א צירקל.

2. בויגן. ווען דער אָפּשניט OA וועט מאכן נאָר א טייל פון א פולן אומדריי ארום דעם פונקט O, וועט זײַן עק, דער פונקט A, ארומשרײַבן א טייל פון א קרײַזליניע; א טייל פון א קרײַזליניע הייסט בויגן; דער טייל אָבער פונעם גאנצן קרײַז, אשטייגער AOB, וואָס דער אָפּשניט OA וועט ארומשרײַבן, הייסט סעקטער. AOB איז א סעקטער (צייכ. 17). דאָס וואָרט „בויגן" פארבײַט מען באַם פארשרײַבן מיטן צייכן $\smile$. „$\smile AB$" לייענט מען: דער בויגן AB. באצייכענען מיר אף דער קרײַזליניע וואָסערע-ניט-איז צוויי פונקטן, אשטייגער A און B, טיילן מיר די קרײַזליניע אף צוויי כאלאָקים, אף צוויי בויגנס, מערסטנטייל ניט קיין גלײַכע צווישן זיך. קעדיי פינקטלעך אָנצוווײַזן וועגן וואָס פאר א בויגן עס רעדט זיך, באצייכנט מען אים געוויינלעך ניט מיט קיין צוויי אויסיעס, נאָר מיט דרײַ, פון וועלכע איינס אָס שטעלט מען אוועק צווישן די צוויי אויסיעס, וואָס באצייכענען ד' עקסטע פונקטן פונעם בויגן, און מע שרײַבט: $\smile AMB$ (צייכ. 17). אויב ס'איז ניט אָנגעוויזן, צי מע מיינט דעם גרעסערן אָדער דעם קלענערן בויגן AB פון דער קרײַזליניע, פארשרײַבט מען אים נאָר מיט צוויי אויסיעס: $\smile AB$, דערבײַ ווערט געמיינט דער קלענערער בויגן.



צייכ. 18

צוויי בויגנס פון איין און דער זעלבער קרײַזליניע אָדער פון צוויי גלײַכע קרײַזליניעס זײַנען גלײַך, אויב באַם ארופלייגן איינעם אף דעם אנדערן פאלן צונויף זייערע עקסטע פונקטן, ד. ה. אויב באַם ארופלייגן דעם בויגן AB אפן בויגן CD (צייכ. 18), וועט דער פונקט A פאלן אפן פונקט D, און דער פונקט B — אפן פונקט C, איז $\smile AB = \smile CD$.

3. כאָרדע. דער אָפּשניט CD, וואָס פארייניקט צוויי פונקטן פון דער קרײַזליניע, הייסט כאָרדע; א כאָרדע ציט צונויף א בויגן; יעדן בויגן פון דער קרײַזליניע אנטשפרעכט א באשטימטע כאָרדע און פארקערט. די כאָרדע טיילט די קרײַזליניע אף צוויי כאלאָקים (צייכ. 18). די כאָרדע, וואָס גייט דורכן צענטער, הייסט דיאמעטער. אין א קרײַזליניע קאָן מען דורכפירן אָן א שיר דיאמעטערס. די דיאמעטערס פון א קרײַזליניע זײַנען גלײַך צווישן זיך און יעדערער פון זיי איז גלײַך צו צוויי ראדיוסן. דער דיאמעטער טיילט די קרײַזליניע אף צוויי האלב-קרײַזליניעס, דעם קרײַז — אף צוויי האלבקרײַזן.

אין איין און דער זעלבער קרײַזליניע אָדער אין גלײַכע קרײַזליניעס ווערן גלײַכע בויגנס צונויפגעצויגן דורך גלײַכע כאָרדעס. אינדערעמעסן, אויב די בויגנס AB און CD פאלן צונויף באַם ארופלייגן (צייכ. 18), וועלן זייערע עקסטע פונקטן אויך צונויפפאלן, און דעריבער וועלן צונויפפאלן אויך די כאָרדעס

AB אונ CD, וואָס פאַרייניקנ די דאָזיקע פונקטנ. עס וועט אויכ זײַנ ריכטיק די אורטיילונג, אז די בויגנס זײַנען גלײַכ, אויב ס'זײַנען גלײַכ די כאָרדעס, וואָס אנטשפּרעכנ זיי.

4. בויגנ-גראַדוס. א קרײַזליניע טיילט מענ אפ 360 גלײַכע כאַלאָקים, אפ 360 גלײַכע בויגנס; יעדערער פונ די דאָזיקע בויגנס הייסט בויגנ-גראַדוס אונ ווערט באַצייכנט מיט א רינגעלע, וואָס מע שטעלט אוועק רעכטס פונ אויבנ בא דער צאָל, וועלכע ווײַזט די צאָל גראַדוסנ פונעם בויגנ, לעמאָשל $360°$, אָדער $180°$, אָדער $90°$. אינ א קרײַזליניע זײַנענ פאַראַנ $360°$, אינ א האַלב-קרײַזליניע — $180°$, אינ א פערטל קרײַזליניע — $90°$.

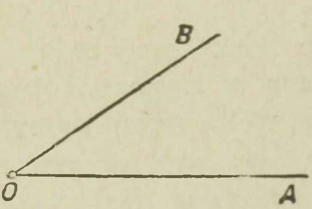
יעדנ בויגנ-גראַדוס טיילט מענ אפ 60 גלײַכע כאַלאָקים, אונ יעדערער פונ זיי הייסט בויגנ-מינוט; אפ צו באַצייכענענ דאָס וואָרט „מינוט" באַנוצט מענ זיכ מיטנ צייכנ ' — „30'" לייענט מענ: 30 מינוט.

יעדע בויגנ-מינוט טיילט זיכ אפ 60 גלײַכע כאַלאָקים, אונ יעטווידער פונ די דאָזיקע טיילנ הייסט בויגנ-סעקונדע; אפ צו באַצייכענענ א סעקונדע באַנוצט מענ זיכ מיטנ צייכנ ". „45''" לייענט מענ: 45 סעקונדעס. ווענ ס'איז פאַרשריבנ: $90°30'20''$, לייענט מענ: 90 גראַדוסנ 30 מינוט 20 סעקונדעס.

II. ווינקלענ.

1. א ווינקל אונ ווי אזוי מע באַצייכנט אים.

1. צוויי שטראַלנ OA אונ OB, וואָס גייענ ארויס פונ איינ אונ דעמ זעלבנ פונקט O, אונטערשיידנ זיכ איינער פונעם אנדערנ מיט זייער ריכטונג אונ בילדנ א פיגור, וועלכע הייסט ווינקל (צייכ. 19).


צייכ. 19

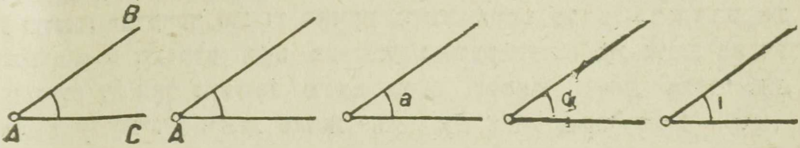
דער פונקט O הייסט שפּיצ פונ ווינקל, די שטראַלנ OA אונ OB הייסנ זײַנע זײַטנ.

א ווינקל באַצייכנט מענ געוויינלעכ מיט דרײַ גרויסהאַנטיקע אויסיעס, פונ וועלכע איינ אָס שטעלט מענ אוועק באַמ שפּיצ פונ ווינקל, די צוויי איבעריקע — אפ זײַנע זײַטנ. באַמ פאַרשרײַבנ פאַרבײַט מענ דאָס וואָרט „ווינקל" מיטנ צייכנ $\angle$; דאָס אָס באַמ שפּיצ ווינקל שרײַבט מענ אונ מע רעדט אויס צווישנ די צוויי איבעריקע אויסיעס.

דעמ ווינקל, וואָס די שטראַלנ OA אונ OB האָבנ געבילדעט, קאָנ מענ פאַרשרײַבנ אפ צווייערליי אויפנאַנימ: אָדער $\angle AOB$ אָדער $\angle BOA$. א ווינקל באַצייכנט מענ אָפט בלויז מיט איינ אָס, וועלכנ מע שטעלט אוועק באַמ שפּיצ ווינקל, אויב באַמ זעלבנ שפּיצ זײַנענ ניט פאַראַנ קיינ אנדערע ווינקלענ. א ווינקל באַצייכנט מענ אויכ מיט איינ קליינהאַנטיקנ אָס פונעם לאַטײַנישנ אָדער גריכישנ אלפעבייז אָדער מיט א ציפער; בא אזא באַצייכענונג שטעלט מענ אוועק דאָס אָס אָדער די ציפער אינעווייניק אינעם ווינקל (צייכ. 20).

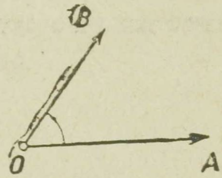
2. מירנ באַטראַכטנ דעמ שטראַל OA, וואָס דרייט זיכ ארומ זײַנ אָנהייב O

(צייכ. 21). ווען דער שטראל OA דרייט זיך, ענדערט ער אומאויפהערלעך זײַן לאגע. ער גייט איבער פון זײַן אָנפאנגלעכער אויסגאנג-לאגע אין א געוויסער נײַער לאגע OB און שרײַבט דערבײַ ארום א $\angle AOB$.



צייכ. 20

א ווינקל איז די מאָס פון דעם אומדריי פון דעם שטראל ארום זײַן אָנפאנג-פונקט



צייכ. 21

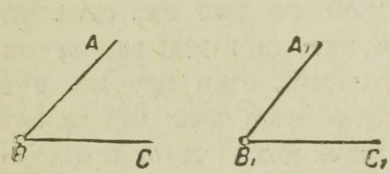
3. צוויי גראָדע AB און CD, וועלכע שנײַדן זיך איבער, זײַנען גענייגט איינע צו דער אנדערער און בילדן פיר ווינקלען; די גרייס פון יעדן ווינקל איז אָפּהענגיק פונעם גראד גענייגטקײַט פון איין גראָדער צו דער צווייטער.

ס'איז אָנגענומען זיך אויסצודריקן: א ווינקל באשטימט דעם גראד גענייגטקײַט פון איין גראָדער צו דער צווייטער.

די גרייס פונעם ווינקל איז ניט אָפּהענגיק פון דער אָפּגעמערקטער לענג פון זײַנע זײַטן.

2. וויאזוי פארגלײַכט מען ווינקלען. גלײַכקײַט און אומגלײַכקײַט פון ווינקלען.

1. עס זײַנען געגעבן צוויי ווינקלען: $\angle ABC$ און $\angle A_1B_1C_1$ (צייכ. 22). קעדיי צו פארגלײַכן זיי צווישן זיך און באשטימען, צי זײַנען זיי גלײַך אָדער ניט גלײַך און וועלכער פון זיי איז גרעסער, באנוצט מען זיך מיטן ארויפלייג-מעטאָד.



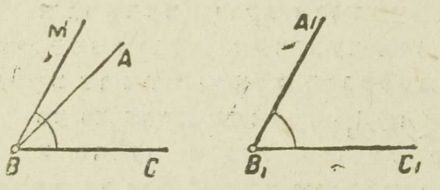
צייכ. 22

מירן ארויפלייגן דעם $\angle A_1B_1C_1$ אפן $\angle ABC$ אזוי, אז דער שפּיץ B_1 זאָל צונויפפאלן מיטן שפּיץ B, און די זײַט B_1C_1 זאָל גיין לויט דער זײַט BC פונעם צווייטן ווינקל; אויב דערבײַ וועט די זײַט B_1A_1 גיין לויט דער זײַט BA, וועט דער $\angle A_1B_1C_1$ צונויפפאלן מיטן $\angle ABC$ און די ווינקלען, הייסט עס, זײַנען גלײַך. מע פארשרײַבט עס: $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$.

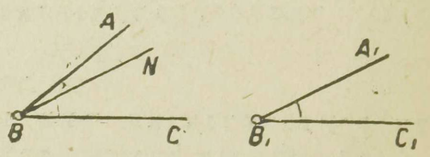
2. אויב נאָך דעם, ווי די שפּיצן B_1 און B און די זײַטן B_1C_1 און BC וועלן צונויפפאלן, וועט די זײַט B_1A_1 דורכגיין אינווייניק אינעם ווינקל און וועט פארנעמען די לאגע BN (צייכ. 23), וועט דער $\angle A_1B_1C_1$ ניט זײַן גלײַך צום $\angle ABC$, ער איז קלענער פון אים. מע פארשרײַבט עס:

$\angle A_1B_1C_1 < \angle ABC$.

לעסאָפּ, ווען באַם ארופלייגן דעם $\angle A_1B_1C_1$ אפן $\angle ABC$ וועט די זײַט B_1A_1 דורכגיין דרויסן דעם $\angle ABC$ און וועט פאַרנעמען די לאגע BM (צייכ. 24), וועט דער $\angle A_1B_1C_1$ זײַן גרעסער פונעם $\angle ABC$. מע פאַרשרײַבט עס:
$\angle A_1B_1C_1 > \angle ABC$.



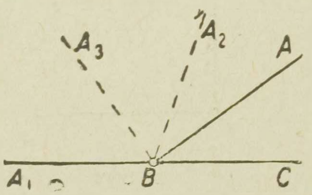
צייכ. 24



צייכ. 23

3. א פאַנאַנדערגעוויקלטער און א גראָדער ווינקל.

1. די גרייס פון $\angle ABC$ (צייכ. 25) איז אָפּהענגיק פונעם גראַד געעניינטקײַט פון זײַנע זײַטן. אויב מע זאָל דרייען איינע פון זײַנע זײַטן, לאָמיר זאָגן, די זײַט BA, ארום דעם שפּיץ B, איבערלאָזנדיק די צווייטע זײַט זײַנע BC אומבאַוועגלעך וועט די זײַט BA נאָכאַנאַנד פאַרנעמען פאַרשיידענע לאַגעס: BA_2, BA_3 אאוו. די זײַט BA קאָן אויך פאַרנעמען אזא לאגע BA_1, אז זי וועט זײַן די פאָרזעצונג פון דער זײַט BC; באַ אזא לאגע פון די זײַטן הייסט דער $\angle A_1BC$ **פאַנאַנדערגעוויקלטער ווינקל.**



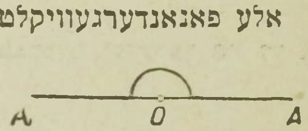
צייכ. 25

אלזאָ, א פאַנאַנדערגעוויקלטער ווינקל איז אזא ווינקל, וואָס זײַנע זײַטן בילדן איין גראָדע און זײַנען געווענדט פון זײַן שפּיץ אין קעגנזעצלעכע זײַטן.

אַלע פאַנאַנדערגעוויקלטע ווינקלען זײַנען גלײַך צווישנאַנאַנד.

די ריכטיקײַט פון דער דאָזיקער אורטיילונג ווערט געקאָנטראָלירט דורך ארופלייגן איין פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל אפן צווייטן.

א פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל קאָן מען באַטראַכטן אלס א ווינקל צווישן דער אָנפאַנגלעכער און צווישן דער עקסטער ריכטונג פונעם שטראַל OA, וועלכער האָט געמאַכט א האַלבן אומדריי ארום זײַן אָנפאַנג-פונקט O (צייכ. 26).



צייכ. 26

2. **א העלפט פון א פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל הייסט גראָדער ווינקל.**

א גראָדן ווינקל באַצייכנט מען מיט א קליינהאַנטיקן לאַטײַנישן אָס d (דאָס ערשטע אָס פונעם פראַנצויזישן וואָרט «droit», וואָס איז דער טײַטש „גראָדער”).

אַלע גראָדע ווינקלען זײַנען גלײַך צווישנאַנאַנד.

א גראָדער ווינקל איז די דיפערענץ צווישן דער אָנפאַנגלעכער און עקסטער

ריכטונג פונעם שטראל OA, וואָס האָט געמאַכט סאַכאַקל א פערטל אומדריי (צייכ. 27): $\angle AOB = d$.

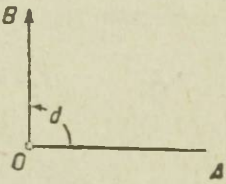
3. אויב דער שטראל OA וועט מאַכן א פולן אומדריי אַרום זײַן אָנפאַנג-פונקט O און וועט ווידעראַמאָל פאַרנעמען זײַן אָנפאַנגלעכע לאַגע, זאָגט מען, אַז דער שטראל OA האָט אַרומגעשריבן א פולן ווינקל (צייכ. 28).

א גראַדער ווינקל איז גלײַך צו א העלפט פון א פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל, דעריבער איז א פאַנאַנדערגעוויקלטער ווינקל גלײַך צו צוויי גראַדע ווינקלען.

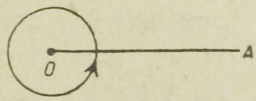
מע פאַרשרײַבט עס: $\angle AOA_1 = 2d$ (צייכ. 26).

א פולער ווינקל איז גלײַך צו צוויי פאַנאַנדערגעוויקלטע אָדער צו פיר גראַדע ווינקלען; א פולער ווינקל איז גלײַך $4d$.

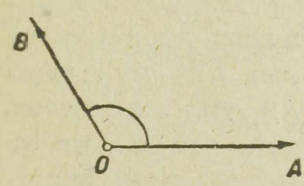
4. א ווינקל, וואָס בילדעט זיך דורך א שטראל, וועלכן מע האָט א דריי געטאָן אַרום זײַן אָנפאַנג-פונקט ווײַניקער ווי אַף א פערטל אומדריי (צייכ. 21), איז קלענער פאַר א גראַדן ווינקל און הייסט שאַרפער ווינקל; א ווינקל, וואָס איז גרעסער פון א גראַדן ווינקל, נאָר ער איז קלענער פון א פאַנאַנדערגעוויקלטן, הייסט טעמפּער ווינקל (צייכ. 29).



צייכ. 27



צייכ. 28



צייכ. 29

5. א גראַדער ווינקל איז אָנגענומען פאַר א מאָס-איינס פון ווינקלען.

די גרייס פון ווינקלען דריקט מען אויס אין טיילן פון א גראַדן ווינקל, לעמאָשל:

1) $0{,}3d$; $\frac{1}{2}d$; $\frac{2}{3}d$ — זײַנען שאַרפע ווינקלען, מאַכמעס יעדערער פון זיי איז קלענער פון א גראַדן.

2) $1{,}5d$; $\frac{5}{4}d$; $1\frac{1}{8}d$ — זײַנען טעמפּע ווינקלען, מאַכמעס יעדערער פון זיי איז גרעסער פון א גראַדן און איז קלענער פון א פאַנאַנדערגעוויקלטן.

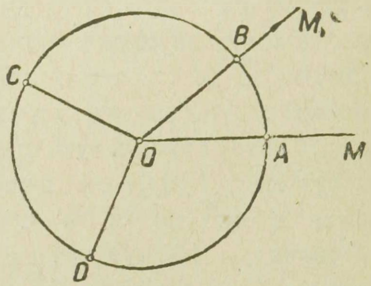
3) $2{,}3d$; $\frac{11}{4}d$; $\frac{23}{8}d$ — זײַנען ווינקלען גרעסערע פאַר א פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל.

4. צענטראַלער ווינקל און זײַנע אייגנשאַפטן.

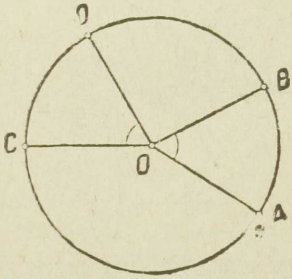
1. ווען דער שטראל OM דרייט זיך אַרום זײַן אָנפאַנג-פונקט O, שרײַבט ער אַרום א $\angle MOM_1$ (צייכ. 30); אָבער א געוויסער פונקט A, גענומען אַפן שטראל OM, וואָס באַוועגט זיך צוזאַמען מיטן שטראל, שרײַבט אַרום א בויגן AB פון א קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז גלײַך OA. לאָמיר באַטראַכטן דעם $\angle AOB$;

זײַן שפּיץ O ליגט אינעם צענטער פון דער קרײַזליניע, זײַנע זײַטן זײַנען די ראַ-דיוסן OA און OB, צווישן זײַנע זײַטן איז אײַנגעשלאָסן דער בויגן AB פון דער זעלבער קרײַזליניע.

א ווינקל, וואָס דער שפּיץ זײַנער איז דער צענטער פון א קרײַזליניע, הייסט צענטראַלער ווינקל. יעטווידן צענטראַלן ווינקל אנטשפּרעכט א באַשטימטער בויגן. פאַרשטייט זיך, אז יעדן בויגן אנט-שפּרעכט אויך א באַשטימטער צענטראַלער ווינקל, וועלכער באַקומט זיך, ווען מע פאַרייניקט די עקן פון דעם בויגן מיטן צענטער דורך ראַדיוסן.



צייכ. 30



צייכ. 31

2. צענטראַלע ווינקלען און זייערע אנטשפּרעכנדיקע בויגנס פאַרמאָגן פאָלגנ-דיקע אייגנשאַפטן:

אין איין און דער זעלבער קרײַזליניע אָדער אין גלײַכע קרײַזליניעס האָבן:

1) גלײַכע צענטראַלע ווינקלען — אנטשפּרעכיקע גלײַכע בויגנס;

2) גלײַכע בויגנס — אנטשפּרעכיקע גלײַכע צענטראַלע ווינקלען.

מיר האָבן א קרײַז מיטן צענטער אינעם פונקט O (צייכ. 31) און צוויי גלײַכע צענטראַלע ווינקלען $\angle AOB$ און $\angle COD$. לאָמיר א קער טאָן דעם סעקטער AOB ארום דעם צענטער O אזוי, אז דער ראַדיוס OA זאָל צונויפפאַלן מיטן ראַ-דיוס OD; דאַן וועט דער ראַדיוס OB אַפּן גרונט, וואָס די ווינקלען AOB און COD זײַנען גלײַך, צונויפפאַלן מיטן ראַדיוס OC, עס וועלן אויך צונויפפאַלן די עקסטע פונקטן A און D, B און C פון די בויגנס בא די סעקטערס AOB און COD, און ווײַבאַלד די עקסטע פונקטן פון די בויגנס זײַנען צונויפגעפאַלן, וועלן, הייסט עס, אויך צונויפפאַלן די בויגנס AB און CD.

מע פאַרשרײַבט עס: אויב $\angle AOB = \angle COD$, איז $\smile AB = \smile CD$.

די אייגנשאַפט פון גלײַכע בויגנס און פון זייערע אנטשפּרעכיקע ווינקלען פאַר-שרײַבט מען אזוי: אויב $\smile AB = \smile CD$, איז $\angle AOB = \angle COD$.

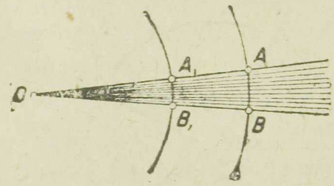
די ריכטיקייט פון דער דאָזיקער אייגנשאַפט קאָנטראָלירט מען מיט דעם זעלבן ארופלייג-מעטאָד. דער אויספיר איז אויך ריכטיק בנוגע בויגנס, וואָס האָבן אנט-שפּרעכיק גלײַכע צענטראַלע ווינקלען אין צוויי פאַרשיידענע קרײַזליניעס מיט אלצײנע ראַדיוסן.

3. ווען מיר צעטיילן א קרײַזליניע אף 360 גלײַכע כאַלאָקים און פאַרייניקן יעדן טייל-פּונקט מיטן צענטער, באַקומען מיר 360 צענטראַלע ווינקלען, וואָס זײַנען גלײַך

צווישנאנאנד, מאכמעס יעטווידנ ווינקל אנטשפרעכט א בויגנ, וואָס איז גלײַכ צו $\frac{1}{360}$ טייל פונ דער קרײַזליניע, אָדער צו איינ בויגנ-גראדוס.

א צענטראלער ווינקל, וואָס אימ אנטשפרעכט א בויגנ פונ איינ גראדוס, הייסט ווינקל-גראדוס. א ווינקל-גראדוס טיילט זיכ אפ 60 ווינקל-מינוט, אונ יעדע ווינקל-מינוט — אפ 60 ווינקל-סעקונדעס. די צייכנס אפ צו באצייכענענ פארקירצט ווינקל-גראדוסנ אונ זייערע טיילנ — מינוטנ אונ סעקונדעס — זײַנענ די זעלבע, וואָס זײַנענ אָנגענומענ אפ צו באצייכענענ דעמ בויגנ-גראדוס אונ זײַנע טיילנ.

אפ דער צייכ. 32 איז געגעבנ א $\angle AOB$, וועלכער איז צעטיילט אפ 10 ווינקל-גראדוסנ אונ איז איבערגעשניטנ מיט צוויי בויגנס פונ קרײַזליניעס, וואָס זייערע ראדיוסנ זײַנענ פארשיידענע אונ זייער צענטער O געפינט זיכ אינעמ שפּיץ פונ $\angle AOB$. פונ דער צייכענונג איז צו זענ, אז די בויגנ-גראדוסנ זײַנענ ניט גלײַכ אונ זײַנענ אָפּהענגיק פונ דער לענג פונ די ראדיוסנ.



צייכ. 32

אלזאָ, אויב א בויגנ פונ א קרײַזליניע, לעמאָשל דער $\smile AB$ אָדער דער $\smile A_1B_1$ (צייכ. 32), האלט 10° (בויגנדיקע), וועט דער אנטשפרעכיקער צענטראלער ווינקל האלטנ 10° (ווינקלדיקע).

אויספיר. די צאָל בויגנ-גראדוסנ פונ א בויגנ, וואָס אנטשפרעכט א צענטראלנ ווינקל, ווײַזט גלײַכצײַטיק אויכ די צאָל ווינקל-גראדוסנ פונעמ ווינקל.

א פולער ווינקל מיטנ שפּיצ O אינעמ צענטער צעטיילט זיכ אפ 360 צענטראלע ווינקלענ, אפ 360°. א צענטראלער ווינקל, וואָס איז גלײַכ צו א פאנאנדערגעוויקלטנ, האלט 180°. א צענטראלער ווינקל, וואָס איז גלײַכ צו א העלפט פונ א פאנאנדערגעוויקלטנ ווינקל, האלט 90°.

אלזאָ, א העלפט פונ א פאנאנדערגעוויקלטנ ווינקל איז גלײַכ 90°, אָבער א העלפט פונ א פאנאנדערגעוויקלטנ ווינקל איז דאָכ א גראָדער, הייסט עס, אז א גראָדער ווינקל האלט 90°.

א ווינקל-גראדוס מאכט אויס $\frac{1}{90}$ פונ א גראָדנ ווינקל.

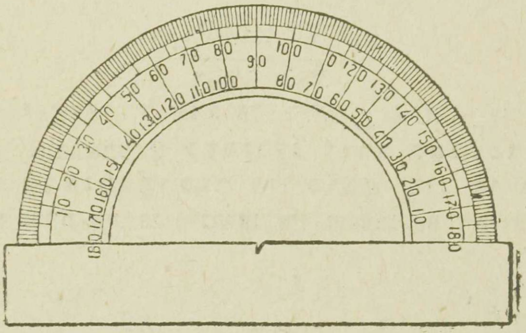
4. א טאבעלע אפ אריבערפירנ א ווינקל, וואָס איז געגעבנ אינ טיילנ פונ א גראָדנ ווינקל, אינ גראדוסנ-מאָס:

א ווינקל אינ טיילנ פונ א גראָדנ ווינקל	$\frac{1}{3}d$	$\frac{1}{2}d$	$\frac{2}{3}d$	$\frac{3}{4}d$	$\frac{4}{5}d$	d	$1\frac{1}{3}d$	$1{,}5d$	$1\frac{2}{3}d$	$2d$	$3d$	$4d$
דער זעלבער ווינקל אינ גראדוסנ-מאָס	30°	45°	60°	$67^\circ30'$	72°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°

5. טראנספאָרטיר.

1. אפ אויסמעסטן א ווינקל באנוצט מען זיך מיט א ספּעציעלן אינסטרומענט — מיט א טראנספאָרטיר. דאָס איז א האלבקרײַז, וואָס זײַן בויגן איז געטיילט אפ 180 בויגן-גראדוסן; דער צענטער פונעם האלבקרײַז איז באצייכנט מיט א קליין אײַנשניטל (צייכ. 33).

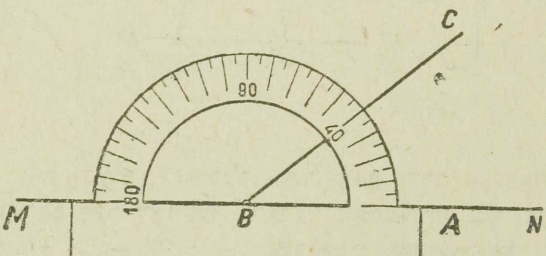
קעדיי אויסצומעסטן א געגעבענעם ווינקל, לייגט מען אפ אים ארופ דעם טראנס-פאָרטיר אזוי, אז זײַן צענטער זאָל צונויפפאלן מיטן שפּיץ פונעם ווינקל, און דער דיאמעטער זאָל צונויפפאלן מיט איינער פון די ווינקל-זײַטן, און מע גיט א קוק, דורך וואָס פאר א טיילונג אפן טראנספאָרטיר גייט דורך די צווייטע זײַט פונעם ווינקל; די צאָל, וואָס שטייט אפ דעם דאָזיקן טייל-פונקט, ווײַזט די צאָל גראדוסן, וואָס עס האלט דער ווינקל, וועלכן מע מעסט אויס.



צייכ. 33

דאָס באנוצן זיך מיטן טראנס-פאָרטיר באזירט זיך אפ דעם, וואָס יעדן צענטראלן ווינקל אנטשפּרעכט א בויגן, וועלכער האלט די זעלבע צאָל גאנצע גראדוסן און גראדוס-טיילן, ווי דער ווינקל.

2. מיט א טראנספאָרטיר באנוצט מען זיך אויך אפ קאָנסטרויִרן א ווינקל. צוליב דעם פירט מען דורך א גראָדע MN (צייכ. 34); אפ אָט דער גראָדער לייגט מען ארופ דעם טראנספאָרטיר אזוי, אז זײַן דיאמעטער זאָל מיט איר צונויפפאלן, און מע צייכנט אָן



צייכ. 34

דעם שפּיץ פונעם ווינקל אינעם פונקט, וואָס פאלט צונויף מיטן צענטער פונעם טראנס-פאָרטיר; דערנאָך פירט מען דורך א גראָדע דורך דעם צענטער און דורך דעם אנטשפּרעכיקן טייל-פונקט פונעם טראנספאָרטיר און מע באקומט דעם געפאָדערטן ווינקל.

3. די לענג פון א קרײַזליניע איז אָפּהענגיק פון דער לענג פונעם ראדיוס, און וואָס גרעסער ס'איז דער ראדיוס, אלץ גרעסער איז די ארומגעשריבענע קרײַזליניע; דערפון איז פארשטענדלעך, אז די לענג פון איין בויגן-גראדוס, ד. ה. $\frac{1}{360}$ טיילעך פון דער קרײַזליניע, איז אָפּהענגיק פונעם ראדיוס און זי ענדערט זיך, ווען עס ענדערט זיך דער ראדיוס. גאָר אנדערש איז עס, ווען מיר קאָנסטרויִרן א ווינקל-גראדוס. דער ווינקל-גראדוס איז ניט אָפּהענגיק פון דער לענג פונעם ראדיוס; דער ווינקל-גראדוס איז א גרייס, וועלכע ענדערט זיך ניט, זי איז א קאָנסטאנטע (באשטענדיקע גרייס) און איז גלײַך $\frac{1}{90}$ טיילעך פון א גראָדן ווינקל.

6. אקטן איבער ווינקלען. ביַיליגנדיקע ווינקלען.

1. אויב ס'איז באוווּסט די גראדוסן-מאָס פון ווינקלען, קאָן מען דעם אקט פון צונויפלייגן און אראָפּנעמען ווינקלען אויספילן אי דורך אויסרעכענען אי דורך קאָנסטרויִרן.

אופגאבע 1. געפינען די סומע און די דיפערענץ פון די ווינקלען:

$\angle ABC = 47°40'$ און $\angle DEF = 30° 23'45''$.

לייזונג. 1)

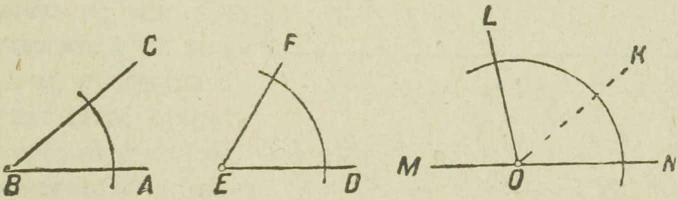
$$\begin{array}{r} 47° \; 40' \\ + \\ 30° \; 23'45'' \\ \hline 78° \; 3'45'' \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{r} 47° \; 40' \\ - \\ 30° \; 23'45'' \\ \hline 17° \; 16'15'' \end{array}$$

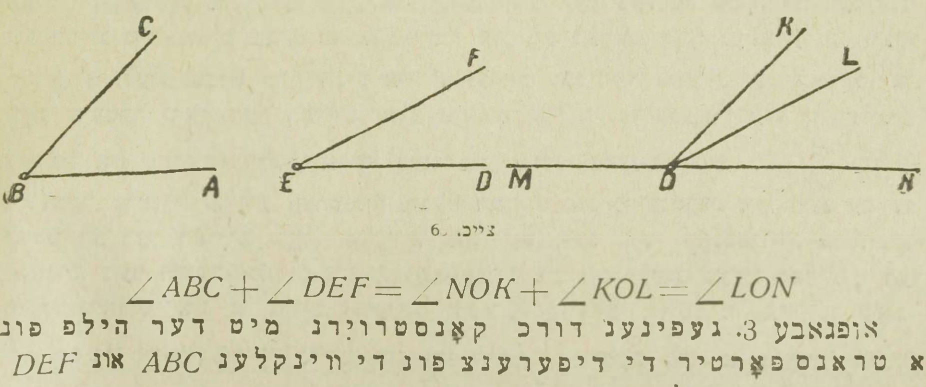
ענטפער: 1) $\angle ABC + \angle DEF = 78° 3'45''$; 2) $\angle ABC - \angle DEF = 17° 16'15''$.

אופגאבע 2. געפינען דורך קאָנסטרויִרן מיט דער הילף פון א טראנספּאָרטיר די סומע פון די ווינקלען ABC און DEF; די גרייס פון די ווינקלען איז געגעבן אף דער צייכ. 35.



צייכ. 35

קאָנסטרויִרונג. מיר פירן דורך א גראָדע MN און באַ א געוויסן פונקט O אף דער דאָזיקער גראָדער קאָנסטרויִרן מיר מיט דער הילף פון א טראנספּאָרטיר: $\angle NOK = \angle ABC$, דערנאָך נעמען מיר אָן, אז דער פונקט O איז דער שפּיץ און OK איז איינע פון די זיַיטן פונעם צווייטן ווינקל, און מיר קאָנסטרויִרן $\angle LOK = \angle DEF$, דאן וועט דער $\angle LON$ זיַין די געזוכטע סומע פון די צוויי געגעבענע ווינקלען:



צייכ. 6

$$\angle ABC + \angle DEF = \angle NOK + \angle KOL = \angle LON$$

אופגאבע 3. געפינען דורך קאָנסטרויִרן מיט דער הילף פון א טראנספּאָרטיר די דיפערענץ פון די ווינקלען ABC און DEF די גרייס פון די ווינקלען איז געגעבן אף דער צייכענונג 36.

קאָנסטרויִרונג. מיר פירנ דורכ א גראָדע MN אונ באַ א געוויסנ פּונקט O אפ דער דאָזיקער גראָדער קאָנסטרויִרנ מיר $\angle NOK = \angle ABC$ (צייכ. 36). דערנאָכ קאָנסטרויִרנ מיר באַם זעלבנ פּונקט O אונ באַ דער גראָדער MN א $\angle NOL = \angle DEF$, דאַנ וועט דער $\angle LOK$ זײַנ די געזוכטע דיפערענצ:

$\angle LOK = \angle ABC - \angle DEF$.

אופגאַבע 4. קײַפּלענ דעם $\angle ABC$ אפ דער צאָל 3.

לײזונג. די אופגאַבע באַשטײט דערינ, מע זאָל נאָכאַנאַנד צונויפּלײגנ דרײַ ווינקלענ, וואָס זײַנענ גלײַכ צום געגעבענעם ווינקל ABC.

2. צוויי ווינקלענ, וואָס האָבנ א געמײנזאַמענ שפּיצ אונ אײנ געמײנזאַמע זײַט אונ דעקנ ניט אײנער דעם אנדערנ, הײסנ בײַליגנדיקע ווינקלענ.

אפ דער צײכענונג 35 זײַנענ דער $\angle NOK$ אונ דער $\angle KOL$ בײַליגנדיקע ווינקלענ. דער $\angle NOK$ אונ דער $\angle NOL$ זײַנענ ניט קײנ בײַליגנדיקע ווינקלענ:

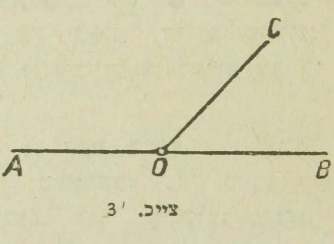
3. ווענ מע זאָל אינעווײניק אינ א ווינקל דורכפירנ א גראָדע, וואָס גײט דורכ דורכ זײַנ שפּיצ, וועט זי צעטײלנ דעם ווינקל אפ צוויי בײַליגנדיקע ווינקלענ, וועלכע קאָנענ זײַנ צווישנ זיכ גלײַכ אָדער ניט גלײַכ.

די גראָדע, וואָס טײלט א ווינקל אפּדערהעלפט, הײסט בי-סעקטריסע פונעמ ווינקל.

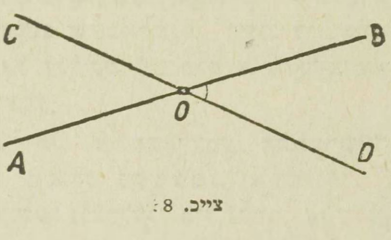
וויִאַזוי מע צעטײלט א ווינקל אפ גלײַכע אָדער ניט-גלײַכע כאַלאָקימ, וועלנ מיר באַטראַכטנ ספּעציִעל.

7. שכײנישע ווינקלענ אונ זײערע אײגנשאַפטנ. באַגריפ וועגנ טעאָרעמע.

1. צוויי בײַליגנדיקע ווינקלענ $\angle AOC$ אונ $\angle BOC$ (צייכ. 37), באַ וועלכע די זײַט OC איז א געמײנזאַמע אונ די איבעריקע צוויי זײַטנ, OA אונ OB, האָבנ א קעגנזײַטיק בילדנ אײנ גראָדע, הײסנ שכײנישע.



צייכ. 3'



צייכ. 8:

לאָמיר נעמענ צוויי גראָדע AB אונ CD, וועלכע שנײַדנ זיכ איבער (צייכ. 38); זײ בילדנ פיר ווינקלענ מיט א געמײנזאַמענ שפּיצ אינ זײער איבערשנײַד-פּונקט O. יעדע פּאָר בײַליגנדיקע ווינקלענ: $\angle AOC$ אונ $\angle COB$, $\angle COB$ אונ $\angle BOD$, אאַוו. זײַנענ שכײנישע ווינקלענ.

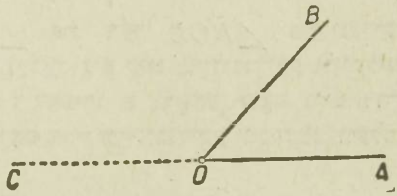
שכײנישע ווינקלענ קאָנ מענ אויכ באַקומענ דורכ פאָלגנדיקער קאָנסטרויִרונג: ס'איז געגעבנ א $\angle AOB$ (צייכ. 39); ווענ מע פאַרלענגערט אײנע פונ זײַנע

זײַטנ, לאָמיר זאָגנ OA, אריבער דעם שפּיצ O, וועט זיכ באַקומענ אַ נײַער $\angle BOC$ - אַ שכײַנישער מיטנ געגעבענעם, ווײַל ער האָט מיט אים אַ געמײנזאַמענ שפּיצ O, אײנ געמײנזאַמע זײַט OB אונ זײַנ זײַט OC איז די פאָרזעצונג פונ דער זײַט OA פונעם ערשטנ ווינקל. דער $\angle AOB$ אונ דער $\angle BOC$ זײַנענ שכײַנישע ווינקלענ.

2. צי איז פאַראַנ אַנ אָפּהענגיקײַט צווישנ צוויי שכײַנישע ווינקלענ? לאָמיר געפינענ די סומע פונ צוויי שכײַנישע ווינקלענ AOB אונ BOC.

$\angle AOB+\angle BOC=\angle AOC$ איז גלײַכ צו אַ פאַנאַנדערגעוויקלטנ ווינקל, וועלכער איז גלײַכ $2d$, דה. צוויי גראַדע. הײסט עס,

די סומע פונ צוויי שכײַנישע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$.



צײכ. 39

מיט אָט די ווערטער איז קורצ אויסגעדריקט אַ באַשטימטע אורטײלונג וועגנ דער אײגנשאַפט פונ שכײַנישע ווינקלענ.

3. צום אויספיר וועגנ דער אײגנשאַפט פונ שכײַנישע ווינקלענ זײַנענ מיר געקומענ נאָכ אַ רײ באַטראַכטונגענ, וואָס באַזירנ זיכ אַפ באַוווּסטע געאָמעטרישע פאַקטנ.

אַנ אורטײלונג, וואָס שטעלט פעסט די אײגנשאַפטנ פונ אַ געאָמעטרישער פיגור, הײסט טעאָרעמע, איר ריכטיקײַט ווערט קלאָר נאָכ אַ געוויסער באַגרינדונג — אַ דערווײַז, פאַררופנדיק זיכ אַפ באַוווּסטע געאָמעטרישע פאַקטנ.

די אורטײלונג „די סומע פונ צוויי שכײַנישע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$" איז אַ טעאָרעמע.

אַ טעאָרעמע איז אויכ די באַקאַנטע אורטײלונג „אויב די צענטראַלע ווינקלענ זײַנענ גלײַכ, זײַנענ אויכ גלײַכ זײערע אַנטשפּרעכיקע בויגנס".

מיט טעאָרעמעס האָבנ מיר זיכ שוינ אויכ באַגעגנט אינ דער אַריטמעטיק באַם אַרויסזאָגנ אורטײלונגענ וועגנ די אײגנשאַפטנ פונ צאָלנ. די אורטײלונג „אויב די צאָל ענדיקט זיכ מיט אַ גראַד-ציפער, טײלט זי זיכ אָנ אַ רעשט אַפ 2" איז אַ טעאָרעמע.

4. אינ אַ טעאָרעמע אונטערשײדט מענ: 1. דעם באַדינג, אָדער דאָס, וואָס ס'איז געגעבנ. אַשטײגער, אינ דער טעאָרעמע „די סומע פונ צוויי שכײַנישע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$" זײַנענ געגעבנ צוויי ווינקלענ $\angle AOB$ אונ $\angle BOC$; וועגנ זײ וויסנ מיר, אַז זײ זײַנענ שכײַנישע.

קורצ פאַרשרײַבט מענ דעם באַדינג אַזוי:

ס'איז געגעבנ: $\angle AOB$ אונ $\angle BOC$ זײַנענ שכײַנישע ווינקלענ.

2. דעם אויספיר, אָדער דאָס, וואָס עס פאָדערט זיכ צו דערווײַזנ. אַשטײגער, אינ דער טעאָרעמע „די סומע פונ צוויי שכײַנישע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$" דאַרפ מענ דערווײַזנ, אַז די סומע פונ צוויי שכײַנישע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$.

קורץ פאַרשרײַבט מען עס:

ס'פאָדערט זיך צו דערווייזן: $\angle AOB + \angle BOC = 2d$.

דעם באַדינג פון דער טעאָרעמע און דעם אויספיר פון איר פאַרשרײַבט מען איינס אונטערן אַנדערן, ווי דאָס איז ווײַטער באַוויזן, דערבײַ טיילט מען אָפּ דעם באַדינג פונעם אויספיר מיט אַ שטריך.

ס'איז געגעבן: $\angle AOB$ און $\angle BOC$ זײַנען שכייניש ווינקלען.

ס'פאָדערט זיך צו דערווייזן: $\angle AOB + \angle BOC = 2d$.

באַם דערווײַזן אַ טעאָרעמע, וועלכע שטעלט פעסט באַשטימטע אייגנשאַפטן פון אַ געאָמעטרישער פיגור, באַנוצן מיר זיך מיט פאַרשיידענע דערווײַז-מעטאָדן: 1) מיט דעם מעטאָד פון אַרופלייגן איין פיגור אָפּ דער צווייטער; 2) מיטן מעטאָד פון צוגלײַכן צוויי גרייסן צו אַ דריטער; 3) מיטן מעטאָד פון דערווײַזן פון דעם הייפעך; דער דאָזיקער מעטאָד באַשטייט אין דעם, וואָס מיר מאַכן אַ האַנאָכע, וועלכע איז קעגנזעצלעך צו דעם, וואָס עס פאָדערט זיך צו דער-ווײַזן, און דערנאָך קומען מיר דורך אָפּהאַנדלונגען צום באַשלוס, אַז די געמאַכטע האַנאָכע איז אומעגלעך.

די טעאָרעמע „די סומע פון צוויי שכייניש ווינקלען איז גלײַך $2d$" איז דער-ווייזן מיטן מעטאָד פון צוגלײַכן צוויי גרייסן צו אַ דריטער.

אינדערעמעסן: 1) $\angle AOB + \angle BOC$ איז גלײַך צו אַ פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל.

2) אַ פאַנאַנדערגעוויקלטער ווינקל איז גלײַך $2d$.

דאָ זײַנען צוויי גרייסן: 1) די סומע פון צוויי שכייניש ווינקלען און 2) $2d$ — צוגעגלײַכט צו דער דריטער גרייס — צו אַ פאַנאַנדערגעוויקלטן ווינקל.

לעסאָף, באַנוצנדיק זיך מיט דער אַקסיאָמע „צוויי גרייסן, וואָס יעדערע פון זיי באַזונדער איז גלײַך צו אַ דריטער, זײַנען גלײַך צווישן זיך", קומען מיר צום באַשלוס, אַז

$$\angle AOB + \angle BOC = 2a,$$

דה. די סומע פון צוויי שכייניש ווינקלען איז גלײַך $2d$.

5. אורטיילונגען, וואָס דרינגען דירעקט אַרויס פון אַקסיאָ-מעס און פון טעאָרעמעס, הייסן קאָנסעקווענצן.

לאָמיר באַטראַכטן די קאָנסעקווענצן פון דער טעאָרעמע „די סומע פון צוויי שכייניש ווינקלען איז גלײַך $2d$".

קאָנסעקווענצן. 1) אַ) אויב דער געגעבענער ווינקל איז אַ שאַרפער, איז זײַן שכיינישער ווינקל אַ טעמפּער, און פאַרקערט.

ב) אויב דער געגעבענער ווינקל איז אַ גראַדער, איז זײַן שכיינישער ווינקל אויך אַ גראַדער.

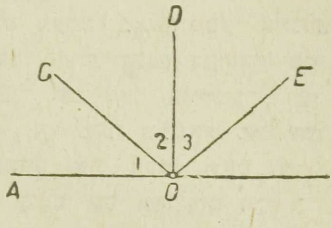
הייסט עס,

ג) אַ גראַדער ווינקל איז איינער פון צוויי גלײַכע שכייניש ווינקלען.

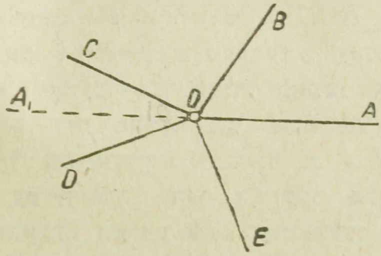
2) אויב עטלעכע בײַליגנדיקע ווינקלען זײַנען אויסגעשטעלט אַזוי, אַז די עקסטע זײַטן פונעם ערשטן און פונעם לעצטן זײַנען קעגנזײַטיק אַנט-קעגנדיקע, דה. זיי בילדן איין גראַדע, וועט די סומע פון אַזעלכע ווינק-לען זײַן גלײַך $2d$ (צייכ. 40).

ווירקלעך, אלע בײַליגנדיקע ווינקלען אף דער צייכ. 40 בילדן א פאנאנדערגע-וויקלטן ווינקל, און דעריבער איז זייער סומע $2d$.

3) אויב עטלעכע בײַליגנדיקע ווינקלען זײַנען אויסגעשטעלט אזוי, אַז די עקסטע זײַטן פונעם ערשטן און פונעם לעצטן פאלן צונויף, איז די סומע פון אזעלכע ווינקלען גלײַך $4d$ (צייכ. 41).



צייכ. 40



צייכ. 41

ווען מיר פארלענגערן איינע פון די זײַטן פון א וואָסער-ניט-איז ווינקל אריבער דעם פונקט O, לעמאָשל די זײַט OA, באקומען מיר א גראָדע AA_1, וואָס צע-טיילט דעם ווינקל COD אף 2 ווינקלען.

מיר האָבן:

$$\angle AOE + \angle EOD + \angle DOA_1 = 2d$$
$$\angle AOB + \angle BOC + \angle COA_1 = 2d$$

$= 4d$ (די סומע פון אלע ווינקלען).

6. א) צוויי ווינקלען, וואָס זייער סומע איז גלײַך $180°$, אָדער $2d$, הייסן פארגאנצ-ווינקלען; א בײַשפיל פון פארגאנצ-ווינקלען זײַנען שכיינישע ווינקלען.

מע דארף געדענקען, אז די אומגעקערטע אורטיילונג „פארגאנצ-ווינקלען זײַנען שכיינישע ווינקלען" איז ניט שטענדיק ריכטיק; די דאָזיקע אורטיילונג איז ריכ-טיק בלויז דאן, ווען די פארגאנצ-ווינקלען זײַנען גלײַכצײַטיק בײַליגנדיקע ווינקלען.

ווען די סומע פון צוויי בײַליגנדיקע ווינקלען איז גלײַך $2d$, זײַנען די דאָזיקע ווינקלען שכיינישע, דה. זייערע עקסטע זײַטן בילדן איין גראָדע.

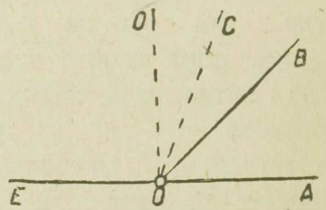
ב) צוויי ווינקלען, וואָס זייער סומע איז גלײַך $90°$ אָדער d, הייסן דערגאנצ-ווינקלען.

8. פערפענדיקוליאר און גענייגטע.

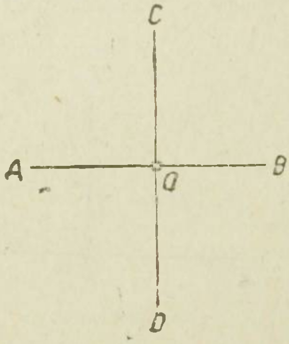
1. פון צוויי שכיינישע ווינקלען (צייכ. 42) איז $\angle AOB < \angle BOE$. ווען מע זאָל דרייען זייער געמיינזאמע זײַט OB ארום דעם שפיץ O, וועט זי פארנע-מען אויך אזא לאגע OD, ווען ביידע שכיינישע ווינקלען וועלן ווערן גלײַך איי-

נער צום אנדערנ, אונ, הייסט עס, יעדערער פונ זיי וועט זײַנ א גראָדער. בא אזא לאגע וועט די גראָדע OD הייסנ פערפענדיקוליאר צו דער גראָדער AE, אונ דער פונקט O וועט הייסנ באזיס פונעם פערפענדיקוליאר.

אלזאָ, א פערפענדיקוליאר צו א גראָדער הייסט א גראָדע, וואָס בילדעט מיט איר גראָ-
דע ווינקלענ.



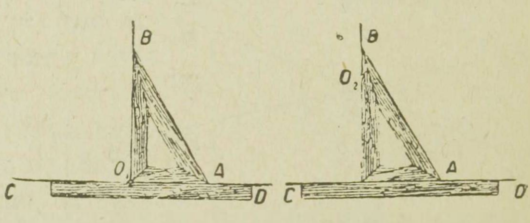
צייכ. 42



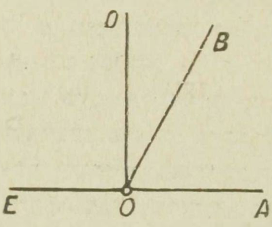
צייכ. 43

צוויי גראָדע AB אונ CD, וואָס שנײַדנ זיכ איבער אונטער א גראָדנ ווינקל (צייכ. 43), הייסנ קעגנזײַטיק פערפענדיקולערע גראָדע.

די פערפענדיקולערקײַט פונ צוויי גראָדע באצייכנט מענ מיטנ צייכנ $\perp$. „$AB \perp CD$" לייענט מענ: AB איז פערפענדיקולער צו CD.



צייכ. 44



צייכ. 45

2. אפ קאָנסטרוירנ א פערפענדיקוליאר באנוצט מענ זיכ מיט א רייסווינקל, בא וועלכנ איינ ווינקל איז א גראָדער, אונ מיט א ווירע. דער אויפנ וויאַזוי דורכ-צופירנ א פערפענדיקוליאר איז קלאָר פונ דער צייכענונג 44. $BO_1 \perp CD$.

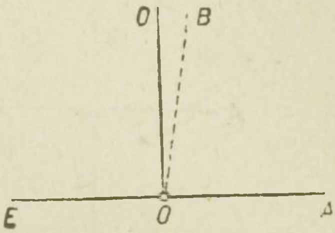
3. צום אונטערשייד פונ דער גראָדער OD, וואָס איז פערפענדיקולער צו דער גראָדער AE, $OD \perp AE$, איז יעטווידע אנדערע גראָדע, לעמאָשל OB (צייכ. 45), וועלכע בילדעט מיט דער גראָדער AE ניט קיינ גראָדנ ווינקל, נאָר א טעמפנ אָדער א שארפנ, הייסט גענייגטע; דער פונקט O, ווו עס שנײַדנ זיכ איבער די גענייגטע OB מיט דער גראָדער AE, הייסט באזיס פונ דער געניגטער.

4. **טעאָרעמע.** דורך א פונקט, וואָס איז גענומען אפ א גראַדער, קאָן מען דורכפירן צו איר בלויז איין פּערפּענדיקוליאַר.

ס'איז געגעבן: $OD \perp EA$ (צייכ. 46).

ס'פּאָדערט זיך דערוויַיזן: OD איז דער איינציקער פּערפּענדיקוליאַר צו EA איינעם פּינקט O.

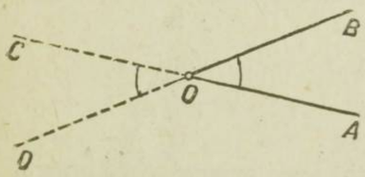
דערוויַיז. לאָמיר זאָגן, אז דורך דעם פונקט O איז, אויסער דעם פּערפּענדיקוליאַר OD, דורכגעפירט נאָך איין פּערפּענדיקוליאַר צו EA, נעמלעך OB; דאַן דאַרף דער פּערפּענדיקוליאַר OB בילדן מיט דער גראַדער OA א גראַדן ווינקל, און דאָס הייסט, אז דער $\angle BOA$ איז גליַיך צום $\angle DOA$, וויַיל אלע גראַדע ווינקלען זיַינען גליַיך; נאָר דער $\angle BOA$ איז בלויז א טייל פונעם $\angle DOA$, און א טייל קאָן ניט זיַין גליַיך צו א גאַנצן, דעריבער קאָן דער $\angle BOA$ ניט זיַין גליַיך צום $\angle DOA$, און, הייסט עס, די האַנאָכע, אז דורכן פונקט O קאָן מען אויסער דעם פּערפּענדיקוליאַר OD דורכפירן נאָך איין פּערפּענדיקוליאַר צו EA, איז ניט קיין ריכטיקע, און דעריבער איז OD די איינציקע גראַדע, וואָס בילדעט מיט EA א גראַדן ווינקל, און דאָס באַטיַיט, אז דורך א פונקט אפ א גראַדער קאָן מען דורכפירן צו דער גראַדער בלויז איין פּערפּענדיקוליאַר.



צייכ. 46

9. ווערטיקאַלע ווינקלען (שער-ווינקלען).

1. ווען מע זאָל פאַרלענגערן ביידע זיַיטן פונעם $\angle AOB$ (צייכ. 47) אין יענער זיַיט שפּיץ O, וועט זיך באַקומען א $\angle COD$, וואָס האָט מיטן געגעבענעם ווינקל א געמיינזאַמען שפּיץ O. צוויי ווינקלען, AOB און COD, הייסן ווערטיקאַלע ווינקלען, אויב די זיַיטן פון איינעם זיַינען די פאַרזעצונגען פון די זיַיטן פונעם צווייטן. ווערטיקאַלע ווינקלען באַקומען זיך, ווען עס שניַידן זיך איבער צוויי גראַדע. באַם פונקט O האָבן מיר צוויי פּאָר ווערטיקאַלע ווינקלען:



צייכ. 47

$\angle AOB$ און $\angle COD$, $\angle AOD$ און $\angle BOC$.

2. **טעאָרעמע.** ווערטיקאַלע ווינקלען זיַינען גליַיך.

ס'איז געגעבן: $\angle AOB$ און $\angle COD$ זיַינען ווערטיקאַלע ווינקלען (צייכ. 47).

ס'פּאָדערט זיך דערוויַיזן: $\angle AOB = \angle COD$.

דערוויַיז. 1) $\angle AOB + \angle BOC = 2d$, אלס שכיינישע,

2) $\angle COD + \angle BOC = 2d$, אלס שכיינישע.

הייסט עס, $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$,

דעריבער איז $\angle AOB = \angle COD$.

קאָנסעקוועַנצ. אויב ס'איז געגעבנ די גרייס פונ איינעמ פונ די פיר ווינקלענ, וואָס בילדנ זיכ בא דער איבערשנײַדונג פונ צוויי גראָדע, ווערט די גרייס פונ די דרײַ איבעריקע באשטימט דורכ דעמ געגעבענעמ ווינקל.

פראגעס אונ איבונגענ.

1. צו וואָס איז גלײַכ יעדערער פונ אכט בײַליגנדיקע גלײַכע ווינקלענ, וואָס זײַנענ אויסגעשטעלט ארומ איינ פונקט?

2. צו וואָס איז גלײַכ יעדערער פונ די פיר ווינקלענ, וואָס האָבנ זיכ געבילדעט דורכ אנ איבערשנײַדונג פונ צוויי גראָדע, אויב איינער פונ זיי איז גלײַכ 40°? $\frac{4}{9}a$?

3. קאָנסטרויִרנ א ווינקל, א שכײנישנ צומ געגעבענעמ $\angle ABC$.

4. די פארהעלטעניש פונ צוויי שכײנישע ווינקלענ איז 5 : 4. באשטימענ יעדערנ פונ זיי.

5. באשטימענ דעמ ווינקל, וואָס איז קלענער פונ זײַנ שכײנישנ אפ 27°; אפ 90°.

6. פונ פיר בײַליגנדיקע ווינקלענ, וואָס זײַנענ אויסגעשטעלט ארומ איינ פונקט, זײַנענ דרײַ ווינקלענ אנטשפרעכיק גלײַכ $0{,}6d$, 20° אונ 45°. באשטימענ דעמ פערטנ ווינקל.

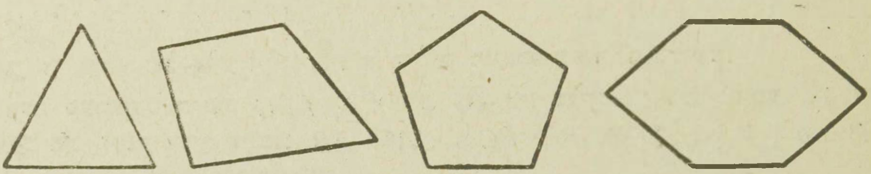
7. אויסרעכענענ, וויפל גראדוסנ האלט א ווינקל, וואָס איז גלײַכ: 1) $\frac{5}{6}d$; 2) $\frac{3}{8}d$: 3) $1\frac{1}{6}d$.

8. באשטימענ דעמ ווינקל צווישנ צוויי גראָדע, וואָס טיילנ אפדערהעלפט יעדערנ פונ צוויי שכײנישע ווינקלענ. אָנווײַזנ די קעגנזײַטיקע לאגע פונ די דאָזיקע גראָדע.

III. דרײַעקנ.

1. גראָדליניקע פיגורנ.

1. א טייל פלאכקײַט, וואָס איז באגרענעצט מיט א געשלאָסענער געבראָכענער ליניע, הייסט פילעק. די אָפּשניטנ פונ דער געבראָכענער הייסנ זײַנע זײַטנ. יעדע צוויי שכײנעסדיקע זײַטנ פונעמ פילעק בילדנ



צייכ. 48

א ווינקל. ס'איז אָנגענומענ אָנצורופנ דעמ פילעק ניט לויט דער צאָל פונ זײַנע זײַטנ, נאָר לויט דער צאָל פונ זײַנע ווינקלענ (עקנ), וואָס זי אנטשפרעכט דער צאָל פונ זײַנע זײַטנ.

א טייל פלאכקײַט, וואָס איז באגרענעצט מיט א געשלאָסענער געבראָכענער ליניע, וועלכע באשטייט פונ דרײַ אָפּשניטנ, הייסט דרײַעק.

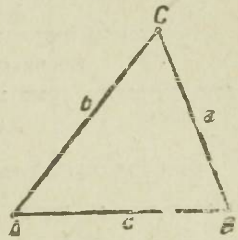
א טייל פלאכקײַט, וואָס איז באגרענעצט מיט א געשלאָסענער געבראָכענער ליניע, וועלכע באשטייט פונ פיר אָפּשניטנ, הייסט פירעק אאוו.

א טייל פלאכקײַט, וואָס איז באגרענעצט מיט א געשלאָסענער געבראָכענער ליניע, וועלכע באשטייט פונ n אָפּשניטנ, הייסט n-עק.

אפ דער צייכענונג 48 זײַנענ געגעבנ א דרײַעק, א פירעק, א פינפעק אונ א זעקסעק.

2. א פילעק באצייכנט מען מיט גרויסהאנטיקע אויסיִעס פון לאטײַנישן אלעפ־בייז, וועלכע מע שטעלט אוועק בא די שפיצן פון זײַנע ווינקלען; די שפיצן פון די ווינקלען בא א פילעק הייסן אויך שפיצן פונעם פילעק. דאָס וואָרט „דרײַעק“ פארבײַט מען באם פארשרײַבן מיטן צייכן $\triangle$. „$\triangle ABC$“ — לייענט מען: דרײַעק ABC.

די זײַטן פון א דרײַעק AB, BC און AC (צייכ. 49) באצייכנט מען אויך מיט איין קלײנהאנטיקן אָס פונעם לאטײַנישן אלעפבייז; דאָס דאָזיקע אָס אנטשפרעכט דער באצייכענונג פונעם ווינקל, אנטקעגן וועלכן עס ליגט די זײַט. אשטייגער, די זײַט AB, וואָס ליגט אנטקעגן $\angle C$, באצייכנט מען מיטן קלײנהאנטיקן אָס c, די זײַט AC באצייכנט מען מיטן קלײנהאנטיקן אָס b און די זײַט BC מיטן קלײנהאנטיקן אָס a.



צייכ. 49

מיטן קלײנהאנטיקן אָס באצייכנט מען געווײנלעך אויך די לענג פון דער זײַט, וואָס איז אויסגעמאָסטן אין באשטימטע אײנסן פון א לענג־מאָס. אזוי, לעמאָשל, איז

$BC = a$ cm, $AC = b$ cm, $AB = c$ cm

אין העסקעם מיט די דאָזיקע באצייכענונגען איז

1) דער $\angle A$ ליגט אנטקעגן דער זײַט a צווישן די זײַטן b און c
2) ″ $\angle B$ ″ ″ ″ ″ b ″ ″ ″ a ″ c
3) ″ $\angle C$ ″ ″ ″ ″ c ″ ″ ″ a ″ b

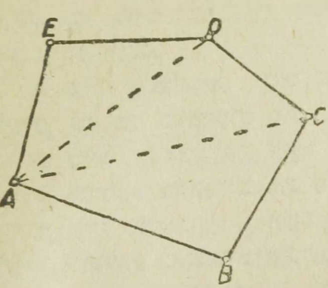
פונקט אזוי איז

1) בא דער זײַט a ליגן $\angle B$ און $\angle C$;
2) ″ ″ ″ b ″ $\angle A$ ″ $\angle C$;
3) ″ ″ ″ c ″ $\angle A$ ″ $\angle B$.

3. די סומע פון אלע זײַטן פון א פילעק הייסט **פערימעטער**.

דער פערימעטער פון $\triangle ABC$ (צייכ. 49) איז גלײַך צו דער סומע פון די לענגען פון זײַנע דרײַ זײַטן: $P = BC + CA + AB$, אָדער $P = a + b + c$, ווו P באצייכנט דעם פערימעטער.

4. דער אָפשניט, וואָס פארײניקט צוויי שפיצן אין א פילעק, וועלכע ליגן ניט בא איין זײַט זײַנער, הייסט **דיִאגאָנאל**. די דיִאגאָנאלן צעקלאפן א פילעק אף דרײַעקן. די דיִאגאָנאלן AC און AD (צייכ. 50) צעקלאפן דעם פינפעק $ABCDE$ אף דרײַ דרײַעקן: ABC, ACD און ADE.



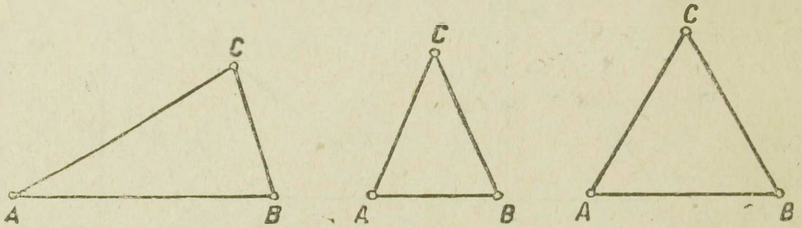
צייכ. 50

5. דאָס דערלערנען די אייגנשאפטן פון א פילעק באזירט זיך אפן דערלערנען די אייגנשאפטן פון א דרײַעק, און דעריבער באקומט דאָס דערלערנען א דרײַעק אן אויסשליסלעכע וויכטיקן באטײַט.

2. קלאסיפיקאציע פון דרײַעקן.

1. אָפהענגיק פון דער לענג פון די זײַטן אונטערשיידט מען דרײַעקן: 1) פארשיידנזײַטיקע, 2) גלײַכאקסלדיקע און 3) גלײַכזײַטיקע (צייכ. 51).

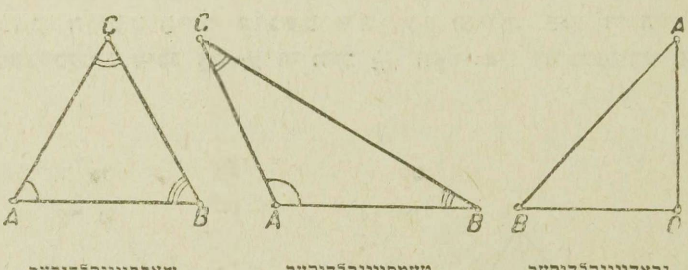
בא א פארשיידנזײַטיקן דרײַעק זײַנען אלע זײַטן פון פארשיידענער לענג: בא א גלײַכאקסלדיקן דרײַעק זײַנען צוויי זײַטן גלײַך; בא א גלײַכזײַטיקן דרײַעק זײַנען אלע דרײַ זײַטן גלײַך.



גלײַכזײַטיקער   גלײַכאקסלדיקער   פארשיידנזײַטיקער

צייכ. 51

2. אָפהענגיק פון דער גרייס פון די ווינקלען אונטערשיידט מען דרײַעקן (צייכ. 52):



גראָדווינקלדיקער   טעמפווינקלדיקער   שארפווינקלדיקער

צייכ. 52

1. שרעגווינקלדיקע:

א) שארפווינקלדיקע, בא וועלכע אלע ווינקלען זײַנען שארפע;

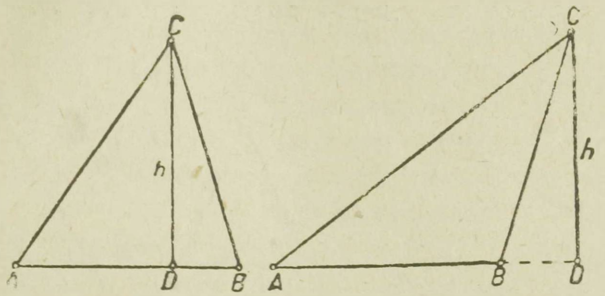
ב) טעמפווינקלדיקע, בא וועלכע איינער פון די ווינקלען איז א טעמפער.

2. גראָדווינקלדיקע, בא וועלכע איינער פון די ווינקלען איז א גראָדער.

3. די זײַטן פון א גראָדווינקלדיקן דרײַעק האָבן ספעציִעלע נעמען: די זײַטן, וואָס שליסן אײַן דעם גראָדן ווינקל, הייסן קאטעטן; די זײַט, וואָס ליגט קעגן דעם גראָדן ווינקל, הייסט היפאָטענוזע.

3. ליניעס אין א דרײַעק.

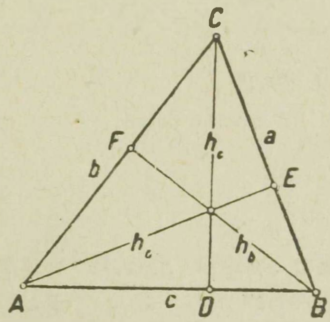
1. הייך. איינע פון די זײַטן בא א דרײַעק רעכנט מען געוויינלעך פאר זײַן באזיס. אלס באזיס פונעם דרײַעק קאָן דינען יעטווידע זײַט זײַנע. ווען מע רעדט וועגן שפּיץ פון א דרײַעק, האָט מען געוויינלעך אין אויג יענעם שפּיץ פון זײַנע דרײַ שפּיצן, וואָס ליגט אנטקעגן דעם באזיס.



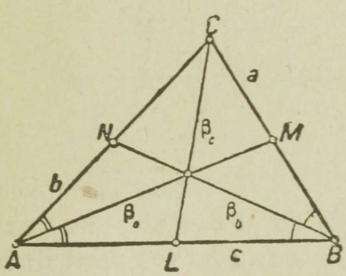
צייכ. 53

אין א גלײַכאקסלדיקן דרײַעק איז אָנגענומען צו רעכענען פארן באזיס די זײַט, וואָס איז ניט גלײַך צו די צוויי איבעריקע זײַטן, און פארן שפּיץ—דעם שפּיץ, וואָס ליגט אנטקעגן דער דאָזיקער זײַט און איז אײַנגעשלאָסן צווישן די צוויי גלײַכע זײַטן.

דער פּערפּענדיקוליאר, וואָס איז דורכגעפירט פונעם שפּיץ פונעם דרײַעק צו דער אנטקעגנליגנדיקער זײַט אָדער צו איר פאָרזעצונג, הייסט הייך פונעם דרײַעק (צייכ. 53). די הייך איז אָנגענומען צו באצייכענען מיטן אָס h. די הייך h, וואָס איז דורכגעפירט פונעם שפּיץ



צייכ. 54



צייכ. 55

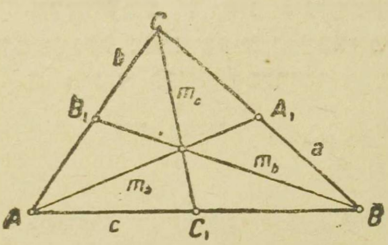
A פונעם דרײַעק אפּ דער זײַט a, באצייכנט מען דורך h מיטן צייכנדל $_a$; אשטייגער, $AE = h_a$ (צייכ. 54). די הייך, וואָס איז דורכגעפירט פונעם שפּיץ B אפּ דער זײַט b, באצייכנט מען דורך h_b; אשטייגער, $BF = h_b$. די דריטע הייך — $CD = h_c$

2. ביסעקטריסע. די גראָדע, וואָס טיילט א ווינקל פון א דרײַעק אפּ דערהעלפט, הייסט ביסעקטריסע און מע באצייכנט זי מיטן גריכישן אָס β (צייכ. 55).

די ביסעקטריסע, וואָס איז דורכגעפירט אינעם דרײַעק פונעם שפּיץ A, באַצייכנט מען דורכן אָס β מיטן צייכנדל $_A$; אשטייגער $AM=\beta_A$. די ביסעקטריסע, וואָס איז דורכגעפירט פונעם שפּיץ B, באַצייכנט מען דורכן β_B, אשטייגער $BN=\beta_B$. די דריטע ביסעקטריסע איז $CL=\beta_C$. די ביסעקטריסע AM טיילט דעם $\angle A$ אָפּדערהעלפט, הייסט עס:

$$\angle CAM=\angle MAB=\frac{1}{2}\angle A$$

3. מעדיאַנע. דער אָפּשניט AA_1 (צייכ. 56), וואָס פאַרייניקט דעם שפּיץ A פונעם דרײַעק מיט דעם מיטן A_1 פון דער אַנטקעגנליגנדיקער זײַט a, הייסט מעדיאַנע און מע באַצייכנט זי דורך m מיטן צייכנדל $_a$; אשטייגער, $AA_1=m_a$; די מעדיאַנע BB_1 איז גלײַך m_b; די דריטע מעדיאַנע CC_1 איז גלײַך m_c.



צייכ. 56

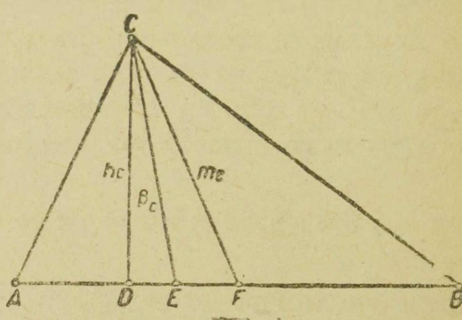
די מעדיאַנע AA_1 טיילט די זײַט $BC=a$ אָפּדערהעלפט, הייסט עס:

$$A_1B=A_1C=\frac{a}{2}$$

אפ דער צייכענונג 57 זײַנען דורכגעפירט די הייך CD, די ביסעקטריסע CE און די מעדיאַנע CF פונעם דרײַעק ABC. די הייך, די ביסעקטריסע און די מעדיאַנע זײַנען דרײַ פאַרשיידענע ליניעס אין א דרײַעק.

4. קעגנזײַטיקע פאַרהעלטעניש צווישן די זײַטן פון א דרײַעק.

אפ דער צייכענונג 57 איז געגעבן א $\triangle ABC$. די שפּיצן A און B זײַנען די עקן פונעם אָפּשניט AB און פון דער געבראָכענער ACB.



צייכ. 57

אפן גרונט פון דער אקסיאָמע וועגן א גראָדער איז דער אָפּשניט AB דער קירצסטער אָפּשטאַנד צווישן די פּונקטן A און B. הייסט עס,

$AB<AC+CB$, $BC<BA+AC$, און דעריבער: $CA<CB+BA$

אין יעטווידן דרײַעק איז די סומע פון צוויי באַליביקע זײַטן זײַנע גרעסער פון דער דריטער זײַט.

מע זאָל אראָפּנעמען פון ביידע טיילן פון דער אומגלײַכקייט $AB<AC+CB$ צו גלײַכע גרייסן AC, באַקומען מיר:

$AB-AC<CB$ אָדער

$CB>AB-AC$

$BC-BA<AC$

$CA-CB<BA$, דה.

195—3

יעטווידע זײַט פון א דרײַעק איז גרעסער פאר דער דיפערענצ פון זײַנע צוויי איבעריקע זײַטן.

דער באקומענער אויספיר באווײַזט, אז די זײַטן פון א דרײַעק קאָנען ניט זײַן קיין באליביקע דרײַ אָפשניטן; פון דרײַ אָפשניטן קאָן מען קאָנסטרויִרן א דרײַעק בלויז דאַן, ווען די סומע פון באליביקע צוויי אָפשניטן איז גרעסער פונעם דריטן.

5. גלײַכאקסלדיקער דרײַעק. זײַנע אייגנשאפטן.

טעאָרעמע. 1. אין א גלײַכאקסלדיקן דרײַעק איז די ביסעקטריסע פונעם ווינקל באַם שפּיץ גלײַכצײַטיק אויך די מעדיאַנע און די הייך.

2. אין א גלײַכאקסלדיקן דרײַעק זײַנען די ווינקלען באַם באַזיס גלײַך.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$; 1) $AC=CB$.

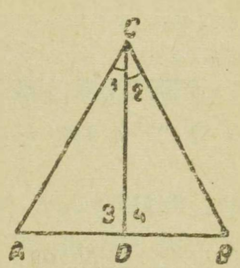
2) CD איז די ביסעקטריסע; $\angle 1=\angle 2=\frac{\angle C}{2}$ (צייכ. 58).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) CD איז די מעדיאַנע, דה. $DA=DB$,

2) CD איז די הייך, דה. $CD\perp AB$,

3) $\angle A=\angle B$.

דערווײַז. די ביסעקטריסע CD טיילט דעם $\angle C$ אף צוויי גלײַכע ווינקלען, 1 און 2, און צעקלאפּט דעם $\triangle ABC$ אף צוויי דרײַעקן: $\triangle ACD$ און $\triangle CBD$.



צייכ. 58

לאָמיר איבערבייגן די צייכענונג 58 לויט דער גראָדער CD און מיר וועלן זיך איבערצײַגן, אז די דרײַעקן ACD און CBD וועלן צונויפפאלן. אינדערעמעסן, וויבאלד די ווינקלען 1 און 2 זײַנען גלײַך, וועט די זײַט CA גיין לויט דער זײַט CB, און אזוי ווי AC איז גלײַך צו CB, וועט דער פּונקט A צונויפפאלן מיטן פּונקט B; דערבײַ וועלן אויך צונויפפאלן די זײַטן DA און DB, מאכמעס עס זײַנען צונויפגעפאלן זייערע עקסטע פּונקטן A און B און זייער געמיינזאמער פּונקט D איז געבליבן אפן אָרט. ס'זײַנען אויך צונויפגעפאלן דער $\angle 3$ מיטן $\angle 4$, דער $\angle A$ מיטן $\angle B$. דערפון, וואָס עס זײַנען צונויפגעפאלן אלע עלעמענטן פונעם $\triangle ACD$ און פונעם $\triangle CBD$, דרינגט ארויס, אז

1) $DA=DB$, און דאָס באטײַט, אז D איז דער מיטן פונעם באַזיס AB און דער אָפשניט CD איז די מעדיאַנע;

2) $\angle 3=\angle 4$, און אזוי ווי די דאָזיקע ווינקלען זײַנען שכייניש און גלײַכע צווישן זיך, זײַנען זיי גראָדע, דעריבער איז $CD\perp AB$ און דער אָפשניט CD איז די הייך;

3) $\angle A=\angle B$, דה. די ווינקלען באַם באַזיס אין א גלײַכאקסלדיקן דרײַעק זײַנען גלײַך. די טעאָרעמע איז דערוויזן.

קאָנסעקווענצן. 1. אין איין און דעם זעלבן דרײַעק איז קעגן גלײַכע זײַטן ליגן גלײַכע ווינקלען.

אינדערעמעסן, אויב אינעם $\triangle ABC$ זײַנען צוויי זײַטן זײַנע גלײַך, $AC=CB$,

איז ער א גלײַכאַקסלדיקער, און קעגן זײַנע גלײַכע זײַטן ליגן גלײַכע ווינקלען, דה. $\angle A=\angle B$.

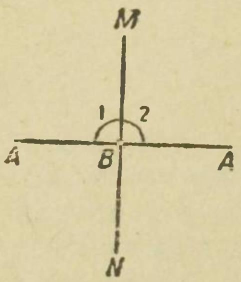
2. אין א גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק טיילט דער פּערפּענדיקוליאַר, וואָס איז דורכגעפירט פון שפּיץ צום באַזיס, אָפּדערהעלפט: 1) דעם באַזיס און 2) דעם ווינקל באַם שפּיץ.

3. אין א גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק איז דער אָפּשניט, וואָס פאַרייניקט דעם מיטן פונעם באַזיס און דעם שפּיץ פונעם דרײַעק, פּערפּענדיקולער צום באַזיס און טיילט דעם ווינקל באַם שפּיץ אָפּדערהעלפט.

4. אין א גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק גייט דורך דער פּערפּענדיקוליאַר, וואָס איז דורכגעפירט צום מיטן פונעם באַזיס, דורך דעם שפּיץ פונעם דרײַעק און טיילט דעם ווינקל באַם שפּיץ אָפּדערהעלפט.

6. אַקס-סימעטריע.

1. **סימעטרישע פונקטן.** אויב מיר וועלן אַף פּאַפּיר דורכפירן א גראָדע MN און מירן ערגעץ-ווו לינקס פון איר נעמען א פונקט A און דערנאָך וועלן מיר איבערבייגן דעם פּאַפּיר לויט דער גראָדער MN אזוי, אַז דער לינקער טייל פון פּאַפּיר זאָל צונויפפאַלן מיטן רעכטן טייל, וועט דער פונקט A טרעפן אינעם פונקט A_1 (צייכ. 59). וועגן אזעלכע צוויי פונקטן זאָגט מען, אַז זיי זײַנען **סימעטרישע** לעגאַבע דער גראָדער MN, וועלכע הייסט **סימעטריע-אַקס**.



צייכ. 59

קעדײַ קלאָר צו מאַכן, וואָסערע אייגנשאַפטן עס פאַרמאָגן די סימעטרישע פונקטן A און A_1, וועלן מיר זיי פאַרייניקן מיט דער גראָדער AA_1; די דאָזיקע גראָדע שנײַדט איבער די סימעטריע-אַקס MN אינעם פונקט B.

באַם איבערבייגן די צייכענונג (צייכ. 59) לויט דער אַקס MN וועט דער פונקט A צונויפפאַלן מיטן פונקט A_1, און דער $\angle 1$ מיטן $\angle 2$; הייסט עס:

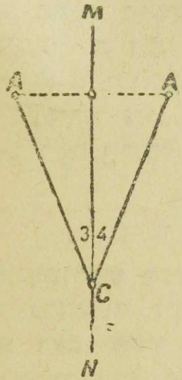
1) $\angle 1=\angle 2$; אָבער דאָס זײַנען דאָך שכייניש ווינקלען, און אזויווי זיי זײַנען צווישן זיך גלײַך, זײַנען $\angle 1$ און $\angle 2$ — גראָדע ווינקלען; הייסט עס, $MN\perp AA_1$, דה. די סימעטריע-אַקס MN איז פּערפּענדיקולער צום אָפּשניט AA_1, וואָס פאַרייניקט די סימעטרישע פונקטן A און A_1.

2) $BA=BA_1$; הייסט עס, אַז דער פונקט B איז דער מיטן פונעם אָפּשניט AA_1 און די פונקטן A און A_1 שטייען אָפּ פון דער סימעטריע-אַקס MN אַף א גלײַכן אָפּשטאַנד.

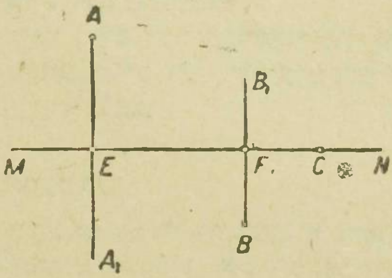
אַלזאָ: 1) פונקטן, סימעטרישע לעגאַבע אַן אַקס, ליגן אַפן פּערפּענדיקוליאַר צו דער סימעטריע-אַקס אַף א גלײַכן אָפּשטאַנד און אין די פאַרשיידענע זײַטן פון דער אַקס, אָדער 2) די סימעטריע-אַקס פון צוויי פונקטן איז פּערפּענדיקולער צום אָפּשניט, וואָס פאַרייניקט זיי, און זי גייט דורך זײַן מיטן.

אויפגאַבע. ס'זײַנען געגעבן פונקטן A, B און C און אַן אַקס MN; קאָנסטרויִרן פונקטן, סימעטרישע צו A, B און C לעגאַבע דער אַקס MN.

קאָנסטרויִרונג. פון די פונקטן A און B (צייכ. 60) פירן מיר דורך פּער־פּענדיקוליארן צו דער גראַדער MN, און אַף זייערע פּאָרזעצונגען לייגן מיר אָפּ אָפּשניטן $EA_1 = AE$ און $FB_1 = BF$; מירן באַקומען די פונקטן A_1 און B_1 סימעטרישע צו די פונקטן A און B. פאַרן פונקט C, וואָס ליגט אַף דער סימעט־ריע־אַקס, איז דער פונקט C גופע צו זיך סימעטריש.



צייכ. 61



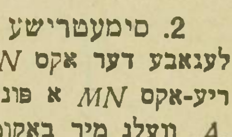
צייכ. 60

2. סימעטרישע גראַדע. די פונקטן A און A_1 זײַנען פונקטן, סימעטרישע לעגאַבע דער אַקס MN (צייכ. 61). ווען מע זאָל נעמען ערגעץ־ווו אַף דער סימעט־ריע־אַקס MN אַ פונקט C און אים פאַרייניקן מיט די סימעטרישע פונקטן A און A_1, וועלן מיר באַקומען די גראַדע CA און CA_1, וועלכע וועלן באַם איבערבייגן לויט דער אַקס MN צונויפפאַלן. אַזעלכע גראַדע הייסן **סימעטרישע גראַדע**. ווען מיר בייגן איבער די צייכענונג 61 לויט דער אַקס MN, איבערצײַגן מיר זיך, אַז עס פאַלן אויך צונויף די ווינקלען 3 און 4, וועלכע בילדן זיך דורך די סימעט־רישע גראַדע CA און CA_1 מיט דער אַקס; הייסט עס, דער $\angle 4 = \angle 3$, און דאָס הייסט, אַז די סימעטריע־אַקס MN פון צוויי סימעטרישע גראַדע CA און CA_1 טיילט אַפדערהעלפט דעם ווינקל, וואָס די סימעטרישע גראַדע בילדן מיט דער אַקס, און זי איז זײַן ביסעקטריסע. אלזאָ, **די ביסעקטריסע פונעם ווינקל, וועלכן עס בילדן צוויי סימעטרישע גראַדע, וואָס שנײַדן זיך איבער, איז זייער סימעטריע־אַקס.**

די דאָזיקע אייגנשאַפט פון דער סימעטריע־אַקס פון צוויי סימעטרישע גראַדע, וואָס שנײַדן זיך איבער, פאָרמולירט מען נאָך אַזוי:

די ביסעקטריסע איז די סימעטריע־אַקס פון די ווינקל־זײַטן.

אין אַ גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק איז די ביסעקטריסע פונעם ווינקל באַם שפּיץ די סימעטריע־אַקס פון זײַנע זײַטן.



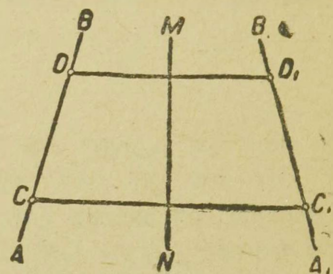
צייכ. 62

ווען מע זאָל דורכפירן דורך אַ באַליביקן פונקט אַף

דער ביסעקטריסע CD (צייכ. 62) פונעמ ווינקל C באַמ שפּיצ פונ א גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק ABC א גראָדע, וואָס איז פּערפּענדיקולער צו דער ביסעקטריסע, וועט די דאָזיקע גראָדע איבערשנײַדנ די זײַט-ליניעס CA אונ CB פונעמ דרײַעק אינ צוויי סימעטרישע פונקטנ K אונ L; די דאָזיקע פונקטנ שטייענ אָפּ פונעמ שפּיצ ווינקל אַפּ אַנ אַלצײַנעמ אָפּשטאַנד, ווײַל באַמ איבערבייגנ די צייכענונג 62 לויט דער אַקס וועלנ די פונקטנ K אונ L אונ די אָפּשניטנ CK אונ CL צונויפּפאַלנ.

אויפגאַבע. קאָנסטרויִרנ א גראָדע, א סימעטרישע צו דער געגעבענער גראָדער AB לעגאַבע דער געגעבענער סימעטריע-אַקס MN (צייכ. 63).

קאָנסטרויִרונג. פונ צוויי באַליביקע פונקטנ C אונ D אַפּ דער גראָדער AB פירנ מיר דורכ פּערפּענדיקוליאַרנ צו דער אַקס MN, מיר געפינענ די פונקטנ C_1 אונ D_1, וואָס זײַנענ צו זיי סימעטריש, אונ דערנאָכ פירנ מיר דורכ דורכ די דאָזיקע פונקטנ א גראָדע A_1B_1, אונ אָט די גראָדע וועט זײַנ סימעטריש צו דער געגעבענער גראָדער AB.



צייכ. 63

3. סימעטרישע פיגורנ. צוויי פיגורנ הייסנ סימעטרישע לעגאַבע אַנ אַקס, אויב יעטווידנ פונקט אַפּ איינ פיגור אַנטשפּרעכט א סימעטרישער פונקט אַפּ דער צווייטער.

א פיגור הייסט סימעטרישע, אויב מע קאָנ אינ איר דורכפירנ אַזא גראָדע, אַז באַמ איבערבייגנ לויט אָט דער גראָדער וועט איינ טייל פונ דער פיגור אינגאַנצנ צונויפּפאַלנ מיט דעמ צווייטנ. א גלײַכאַקסלדיקער דרײַעק איז א סימעטרישע פיגור (צייכ. 62); זײַנ הייכ, וואָס איז גלײַכצײַטיק אויכ די ביסעקטריסע פונעמ ווינקל באַמ שפּיצ, איז זײַנ סימעטריע-אַקס.

א קרײַזליניע איז א סימעטרישע פיגור; יעטווידער דיִאַמעטער אירער איז איר סימעטריע-אַקס.

פּראַגעס אונ איבונגענ.

1. פאַרוואָס איז אינ א גלײַכזײַטיקנ דרײַעק יעטווידע הייכ זײַנע גלײַכצײַטיק אויכ זײַנ ביסעקטריסע אונ זײַנ מעדיִאַנע?

2. וואָס פאַר א ליניע אינ א קרײַז וועט זײַנ די סימעטריע-אַקס פונעמ דיִאַמעטער?

3. די מעדיִאַנע, וואָס איז דורכגעפירט אינ א גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק צו זײַנ זײַט-ליניע, טיילט זײַנ פּערימעטער אַפּ כאַלאָקימ, וועלכע זײַנענ גלײַכ 7,5 סמ. אונ 6,5 סמ. אויסרעכענענ די זײַטנ.

4. קאָנסטרויִרנ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק, א סימעטרישנ צומ געגעבענעמ, אָנעמענדיק פאַר דער סימעטריע-אַקס א) איינעמ פונ די קאַטעטנ, ב) די היפּאָטענוזע. אָנווײַזנ, וואָס פאַר א פיגור וועט זיכ באַקומענ, ווענ פאַר דער סימעטריע-אַקס איז גענומענ א קאַטעט.

5. דערווײַזנ, אַז צוויי סימעטריע-אַקסנ פונ צוויי גראָדע, וואָס שנײַדנ זיכ איבער, זײַנענ קעגנזײַטיק פּערפּענדיקולער.

IV. גלײַכקײַט (קאָנגרוענץ) פון דרײַעקן.

1. דרײַ סימאָנים, ווען דרײַעקן זײַנען גלײַך (קאָנגרוענט).

צוויי פיגורן הייסן גלײַכע, אויב באַם ארופלייגן איינע אף דער אנדערער פאלן זיי צונויף מיט אלע זייערע עלעמענטן: מיט די זײַטן און מיט די ווינקלען.

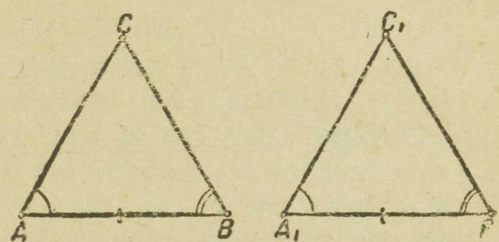
1. ערשטער סימען.

טעאָרעמע. צוויי דרײַעקן זײַנען גלײַך, אויב איין זײַט און אירע צוויי בײַליגנדיקע ווינקלען אין איין דרײַעק זײַנען אנטשפרעכיק גלײַך צו א זײַט און צו אירע צוויי בײַליגנדיקע ווינקלען אינעם צווייטן דרײַעק.

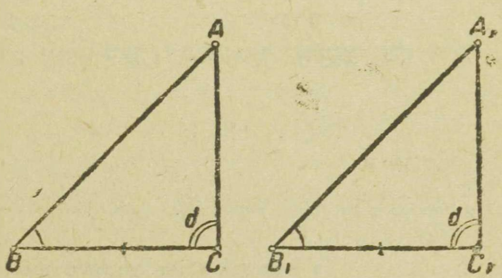
ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $\angle A_1 = \angle A$; 3) $\angle B_1 = \angle B$ (צייכ. 64).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

דערווײַז. מירן ארופלייגן דעם $\triangle A_1B_1C_1$ אפן $\triangle ABC$ אזוי, אז דער שפיץ A_1 זאָל צונויפאלן מיטן שפיץ A און די זײַט A_1B_1 זאָל גיין לויט דער זײַט AB; מאכמעס דער גלײַכקײַט פון די זײַטן A_1B_1 און AB, וועט דער פונקט B_1 פאלן אפן פונקט B, און אזוי־ווי $\angle A_1 = \angle A$ און $\angle B_1 = \angle B$, וועט די זײַט A_1C_1 זיך ציִען לויט דער זײַט AC און די זײַט B_1C_1 — לויט דער זײַט BC. דער דריטער שפיץ C_1 וועט אומבאדינגט פאלן אינעם פונקט C, וואָרעם די פונקטן C און C_1 ווערן באשטימט דורך דער איבערשנײַדונג פון איינע און די זעלבע גראָדע, וועלכע זײַנען צונויפגעפאלן. אלזאָ, דער $\triangle A_1B_1C_1$ און דער $\triangle ABC$ זײַנען צונויפגעפאלן. הייסט עס, זיי זײַנען גלײַך, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. פון דער גלײַכקײַט פון די דרײַעקן דרינגט ארויס די גלײַכקײַט פון זייערע אנטשפרעכיק אויסגעשטעלטע עלעמענטן, נעמלעך: $A_1C_1 = AC$; $B_1C_1 = BC$ און $\angle C_1 = \angle C$. די דאָזיקע טעאָרעמע איז דערוויזן מיט דער הילף פון דעם ארופלייג-מעטאָד.



צייכ. 64



צייכ. 65

קאָנסעקווענץ. צוויי גראָדווינקלדיקע דרײַעקן זײַנען גלײַך, אויב זיי האָבן צו איין אנטשפרעכיק גלײַכן קאטעט און צו א גלײַכן שארפן ווינקל, וואָס ליגט בא דעם דאָזיקן קאטעט.

אינדערעמעסן, צוויי גראָדווינקלדיקע דרײַעקן ABC און $A_1B_1C_1$ (צייכ. 65) זײַנען גלײַך, ווײַל זיי האָבן צו איין אנטשפרעכיק גלײַכן קאטעט, לאָמיר זאָגן

$B_1C_1 = BC$, און צו צוויי גלייַכע ווינקלען, וואָס ליגן בא דעם דאָזיקן קאַטעט, פון וועלכע $\angle B_1 = \angle B$ לויטן באַדינג און $\angle C_1 = \angle C$ אַלס גראָדע ווינקלען.

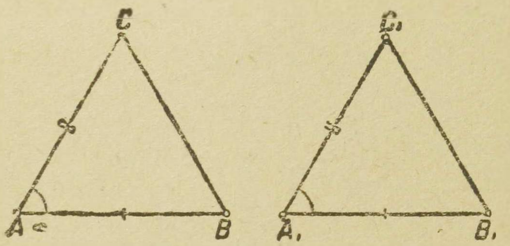
2. צווייטער סימען.

טעאָרעמע. צוויי דרייַעקן זייַנען גלייַך, אויב צוויי זייַטן און דער ווינקל, וואָס איז צווישן זיי איינגעשלאָסן, אין איין דרייַעק זייַנען אַנטשפּרעכיק גלייַך צו צוויי זייַטן און צום ווינקל צווישן זיי אין עם צווייטן דרייַעק.

ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $A_1C_1 = AC$ און 3) $\angle A_1 = \angle A$ (ציכ. 66).

ס׳פאָדערט זיך דערווייַזן: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

דערווייַז. מיר וועלן אַרופלייגן דעם $\triangle A_1B_1C_1$ אויפן $\triangle ABC$ אַזוי, אַז דער שפּיץ A_1 זאָל צונויפפאַלן מיטן שפּיץ A און די זייַט A_1B_1 זאָל זיך ציִען לויט דער זייַט AB; מאַכמעס דער גלייַכקייַט פון די זייַטן A_1B_1 און AB וועט דער פונקט B_1 דאַן פאַלן אויפן פונקט B, און מאַכמעס דער גלייַכקייַט פון די ווינקלען A און A_1 וועט די זייַט A_1C_1 זיך ציִען לויט דער זייַט AC, און אַזוי ווי $A_1C_1 = AC$, וועט דער פונקט C_1 צונויפפאַלן מיטן פונקט C; גלייַכצייַטיק וועלן אויך צונויפפאַלן די זייַטן C_1B_1 און CB, ווייַל ס׳זייַנען צונויפגעפאַלן זייערע עקסטע פונקטן C_1 און C, B_1 און B. אַלזאָ, די דרייַעקן $A_1B_1C_1$ און ABC זייַנען צונויפגעפאַלן, הייסט עס, זיי זייַנען גלייַך, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$. פון דער גלייַכקייַט פון די דרייַעקן דרינגט אַרויס, אַז ס׳זייַנען אויך גלייַך אַלע זייערע אַנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע זייַטן און ווינקלען, נעמלעך: 1) $C_1B_1 = CB$, 2) $\angle B_1 = \angle B$ און 3) $\angle C_1 = \angle C$.



ציכ. 66

די דאָזיקע טעאָרעמע איז אויך דערוויזן דורך דעם אַרופלייג-מעטאָד.

דער דאָזיקער מעטאָד באַשטייט דערין, וואָס אַפריִער לייגט מען אַרויף אַ פונקט — דעם שפּיץ פון איין דרייַעק — אויפן אַ פונקט — אויפן אַנטשפּרעכנדיקן שפּיץ פון עם צווייטן דרייַעק, דערנאָך אַן אָפּשניט — די זייַט פון איין דרייַעק, אויף אַן אָפּשניט — דער אַנטשפּרעכנדיקער זייַט פון עם צווייטן דרייַעק. לויט דער גלייַכקייַט פון איין ווינקל אָדער פון צוויי ווינקלען אין איין דרייַעק צו איין ווינקל אָדער צו צוויי ווינקלען אין עם צווייטן דרייַעק אורטיילט מען וועגן דער ריכטונג פון איין זייַט אָדער פון צוויי זייַטן פון די דרייַעקן, וואָס מע לייגט אַרויף איינעם אויפן אַנדערן. אויב דערבייַ ווייַזט זיך אַרויס, אַז אויך די דריטע שפּיצן פון די דרייַעקן פאַלן צונויף, דאַן פאַלן די דרייַעקן צונויף, הייסט עס, אַז זיי זייַנען גלייַך.

קאָנסעקווענץ. צוויי גראָדווינקלדיקע דרייַעקן זייַנען גלייַך, אויב זייערע קאַטעטן זייַנען אַנטשפּרעכיק גלייַך.

אינדערעמעסן, גראָדווינקלדיקע דרייַעקן זייַנען גלייַך אַלס דרייַעקן, וואָס האָבן

צו צוויי אנטשפּרעכיק גלײַכע קאַטעטן און צו גלײַכע גראָדע ווינקלען, וואָס זײַנען אײַנגעשלאָסן צווישן די קאַטעטן.

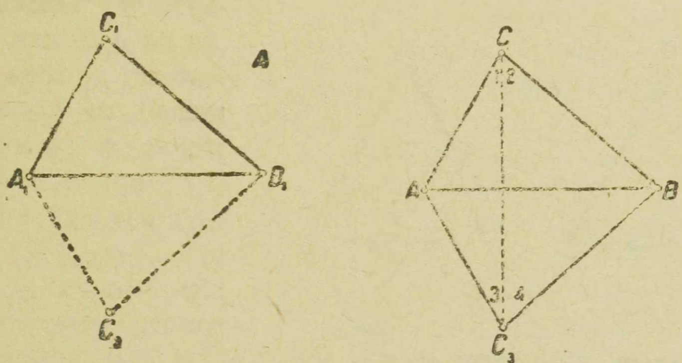
3. דריטער סימען.

טעאָרעמע. צוויי דרײַעקן זײַנען גלײַך, אויב דרײַ זײַטן פון איין דרײַ-עק זײַנען אנטשפּרעכיק גלײַך צו דרײַ זײַטן פונעם צווייטן דרײַעק.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; 1) $A_1B_1 = AB$; 2) $A_1C_1 = AC$ און 3) $B_1C_1 = BC$ (צייכ. 67).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

דערווײַז. לאָמיר אַ קער טאָן דעם $\triangle A_1B_1C_1$ אַף 180° אַרום דער זײַט A_1B_1, איבערלאָזנדיק די זײַט גופא אומבאַוועגלעך; דאַן וועט דער $\triangle A_1B_1C_1$ פאַרנעמען די לאַגע $A_1B_1C_2$. ס'איז קלאָר, אַז $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_1B_1C_2$. מירן צולייגן דערנאָך דעם $\triangle A_1B_1C_2$ צום $\triangle ABC$ אַזוי, אַז דער פּונקט A_1 זאָל צונויפפאַלן מיטן



צייכ. 67

פּונקט A און די זײַט A_1B_1 זאָל זיך ציִען לויט דער זײַט AB; די זײַטן A_1B_1 און AB זײַנען גלײַך, דעריבער וועט דער פּונקט B_1 דאַן צונויפפאַלן מיטן פּונקט B, און דער שפּיץ C_2 וועט פאַרנעמען די לאַגע C_3. מירן דערנאָך פאַרייניקן מיט אַ גראָדער CC_3 דעם שפּיץ C מיטן שפּיץ C_3; מירן באַצייכענען די ווינקלען, אַף וועלכע די גראָדע CC_3 האָט צעקלאַפּט די ווינקלען C און C_3, אַנטשפּרעכיק מיט די ציפערן 1, 2, 3 און 4 און מיר וועלן באַטראַכטן די באַקומענע צוויי גלײַכאַקסל-דיקע דרײַעקן ACC_3 און CBC_3, וועלכע האָבן אַ געמיינזאַמען באַזיס CC_3, $AC = AC_3$ און $BC = BC_3$.

אין גלײַכאַקסלדיקע דרײַעקן זײַנען די ווינקלען באַם באַזיס גלײַך, דעריבער:

1) אינעם $\triangle ACC_3$ איז דער $\angle 1$ גלײַך צום $\angle 3$

און 2) אינעם $\triangle CBC_3$ איז דער $\angle 2$ גלײַך צום $\angle 4$.

לייגנדיק מיר צונויף גלידערווײַז, באַקומען מיר:

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle 3 + \angle 4,$$

אָבער

$$\angle 1 + \angle 2 = \angle C \text{ און } \angle 3 + \angle 4 = \angle C_3,$$

דעריבער איז

$$\angle C = \angle C_3.$$

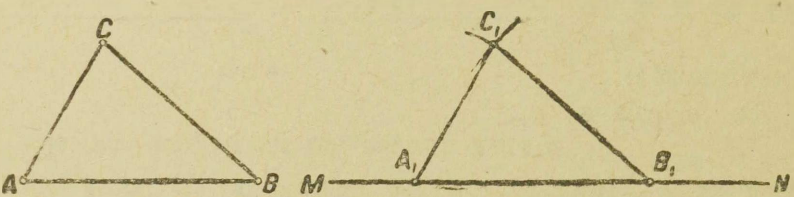
איצט לאָמיר באטראכטנ דעם $\triangle ABC$ אונ דעם $\triangle ABC_3$; בא זײ איז $AC=AC_3$ אונ $BC=BC_3$ אונ, ווי עס איז דערוויזנ געוואָרנ, $\angle C=\angle C_3$, הייסט עס, די דאָזיקע דרײַעקנ זײַנענ גלײַכ, $\triangle ABC=\triangle ABC_3$ לויט צוויי זײַטנ אונ לויטנ ווינקל צווישנ זײ, אָבער

$$\triangle A_1B_1C_1=\triangle A_1B_1C_2=\triangle ABC_3 \text{ אונ } \triangle ABC_3=\triangle ABC,$$

דעריבער איז $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$. די טעאָרעמע איז דערוויזנ.

2. גרונט־אופגאבעס אפ קאָנסטרויִרונג.

די גרונט-פאָרמענ אינ פלאנימעטריע זײַנענ א פונקט אונ א ליניע; די איינפאכסטע פונ אלע ליניעס, וואָס ווערנ באטראכט אינ פלאנימעטריע, זײַנענ א גראָדע אונ א קרײַזליניע. דער אינסטרומענט אפ צו קאָנסטרויִרנ א גראָדע איז א ווירע, אונ אפ צו קאָנסטרויִרנ א קרײַזליניע — א צירקל. די דאָזיקע צוויי אינסטרומענטנ, אינ פארגלײַכ מיט אנדערע, ווי לעמאָשל, מיט א טראנספאָרטיר אָדער מיט א רייסווינקל, זײַנענ זייער פינקטלעכע. דערצו נאָכ ווערנ אינ דער עלעמענטארער פלאנימעטריע ניט באטראכט קיינ שום ליניעס אויסער א גראָדער אונ א קרײַזליניע. דעריבער האָט זיכ אינ געאָמעטריע פונ אמאָליקע צײַטנ אײַנגעשטעלט אזא שטאנדפונקט, אז א פינקטלעכע געאָמעטרישע קאָנסטרויִרונג דארפ געמאכט ווערנ מיט א צירקל אונ מיט א ווירע, ד.ה. מיט דער הילפ פונ דורכגעפירטע גראָדע אונ קרײַזליניעס.



צייכ. 68

אינ העסקעם דערמיט רעכנט מענ אנ אופגאבע אפ קאָנסטרויִרנ פאר געלייזט בלויז אינ דעמ פאל, ווענ די קאָנסטרויִרונג איז געמאכט, ווי ס'איז געזאָגט, מיט א צירקל אונ מיט א ווירע. ווענ עס פאָדערט זיכ קאָנסטרויִרנ די אָדער יענע פיגור, ווערט דערבײַ שטענדיק געמיינט, אז די דאָזיקע קאָנסטרויִרונג דארפ געמאכט ווערנ מיט א צירקל אונ ווירע. אויב די קאָנסטרויִרונג קאָנ מיט די דאָזיקע מיטלענ ניט געמאכט ווערנ, ווי, לעמאָשל, צעטיילנ א ווינקל (ניט קיינ גראָדנ) אפ דרײַ גלײַכע כאלאָקים, דאנ זאָגט מענ, אז די געפאָדערטע קאָנסטרויִרונג (אויב מיר פארשטייענ די אופגאבע אזוי, ווי מיר האָבנ דאָ געזאָגט) איז ניט מעגלעכ.

די טעאָרעמעס וועגנ גלײַכקײַט פונ דרײַעקנ גיבנ די מעגלעכקײַט צו לייזנ א גאנצע ריי אופגאבעס אפ קאָנסטרויִרונג מיט דער הילפ פונ א ווירע אונ פונ א צירקל, אונ אויכ צו באגרינדנ די ריכטיקײַט פונ דער געמאכטער קאָנסטרויִרונג.

אופגאבע 1. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק, וואָס איז גלײַכ צום געגעבענעם דרײַעק ABC (צייכ. 68).

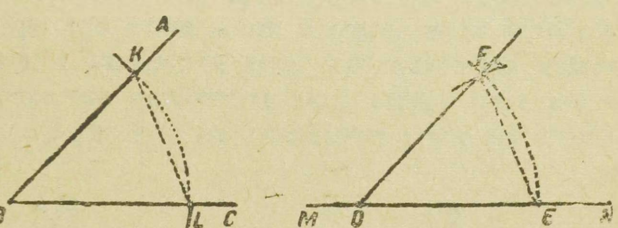
קאָנסטרויִרונג. אפ א באליביקער גראָדער MN לייגנ מיר אָפ אנ אָפשניט

A_1B_1, וואָס איז גלײַכ צו דער זײַט AB פונעם $\triangle ABC$; מיר נעמענ אָנ די פונקטנ A_1 אונ B_1 פאר צענטערס אונ פירנ דורכ בויגנס מיט די ראַדיוסנ, וואָס זײַנענ אַנט-שפרעכיק גלײַכ צו די אָפשניטנ AC אונ BC, דה. צו די זײַטנ פונעם $\triangle ABC$; ווענ מיר פאראייניקנ זייער איבערשנײַד-פונקט C_1 מיט די פונקטנ A_1 אונ B_1, באַ-קומענ מיר דעם געזוכטנ $\triangle A_1B_1C_1$.

אינדערעמעסנ, $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$, ווײַל בא זיי איז $A_1B_1 = AB$, $A_1C_1 = CA$ אונ $B_1C_1 = BC$.

אופגאבע 2. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק לויט זײַנע דרײַ זײַטנ a, b אונ c.

דעם דרייעק איז מעגלעכ צו קאָנסטרויִרנ, אויב יעטווידער אָפשניט, וואָס איז אונדז געגעבנ, איז קלענער פאר דער סומע פונ די צוויי איבעריקע, צום בײַשפיל, $a < b + c$. דעם דאָזיקנ באדינג איז גענוג צו קאָנטראָלירנ בענעגייע דעם גרעסערנ אָפשניט, ווײַל יעדערער פונ די קלענערע אָפשניטנ איז געוויס קלענער פאר דער סומע פונ די צוויי איבעריקע.



צייכ. 69

מיר קאָנטראָלירנ דורכ, צי ס'איז אָפגעהיט בא די אָנגעגעבענע אָפשניטנ דער אָנגעוויזענער באדינג; אויב ער איז אָפגעהיט, טרעטנ מיר צו צו דער קאָנסטרויִרונג.

די קאָנסטרויִרונג ווערט אויסגעפילט אפנ זעלבנ אויפנ, וואָס איז אָנגעוויזנ אינ דער פאָריקער אופגאבע.

לויט די אָנגאבנ פונ דער אופגאבע קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ א באליביקע צאָל דרײַעקנ, נאָר אלע וועלנ באמ ארופלייגנ צונויפאלנ; הייסט עס, אז לויט די אָנגאבנ פונ דער אופגאבע איז מעגלעכ צו קאָנסטרויִרנ בלויז איינ דרײַעק פונ דער געגעבע-נער פאָרמ אונ פונ דער געגעבענער גרייס.

אופגאבע 3. קאָנסטרויִרנ א ווינקל, וואָס איז גלייכ צום גע-געבענעמ.

קאָנסטרויִרונג. ס'איז געגעבנ א $\angle ABC$ (צייכ. 69). מיר פירנ דורכ א גראָ-דע MN אונ ערגעץ-ווּ מערקנ מיר אָפ אפ איר א פונקט D. דערנאָכ פירנ מיר דורכ מיט א באליביקנ, אָבער אלציינעמ ראַדיוס צוויי בויגנס, איינעמ מיטנ צענטער אינעמ שפיצ B; דער דאָזיקער בויגנ וועט איבערשנײַדנ די זײַטנ פונעם $\angle ABC$ אינ די פונקטנ K אונ L; דעם צווייטנ בויגנ — מיטנ צענטער אינעמ פונקט D; דער דאָזיקער בויגנ וועט איבערשנײַדנ די גראָדע MN אינעמ פונקט E. פונעם פונקט E פירנ מיר דורכ א בויגנ מיטנ ראַדיוס, וואָס איז גלײַכ צו דער כאָרדע LK; דער דאָזיקער בויגנ וועט איבערשנײַדנ דעם ערשטנ בויגנ אינעמ פונקט F; ווענ מיר פאראייניקנ דעם פונקט F מיטנ פונקט D, באקומענ מיר דעם געזוכטנ $\angle EDF$, וואָס איז גלײַכ צום $\angle ABC$.

קעדיי צו דערווײַזנ, אז דער $\angle EDF$, וואָס מיר האָבנ אפ אזא אויפנ קאָנ-

סטרויִרט, איז גלײַך צום $\angle ABC$, פאַרײניקן מיר מיט א גראָדער די פונקטן E און F און מיר באַטראַכטן די דרײַעקן DEF און BKL. $\triangle DEF = \triangle BKL$, ווײַל בא זיי איז $DE = BL$, $DF = BK$ און $EF = KL$ לויט דער קאָנסטרויִרונג, אלס ראַדיִוסן פון גלײַכע קרײַזליניעס.

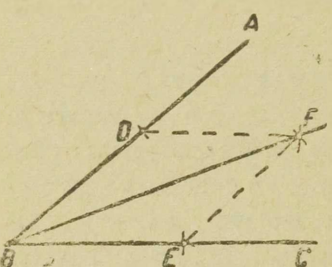
פון דער גלײַכקײַט פון די דרײַעקן דרינגט ארויס, אז $\angle EDF = \angle LBK$ אלס, ווינקלען, וואָס ליגן קעגן גלײַכע זײַטן FE און LK אין גלײַכע דרײַעקן. אלזאָ $\angle EDF = \angle LBK = \angle ABC$.

אופגאַבע 4. קאָנסטרויִרן א דרײַעק לויט צוויי זײַטן b און c און לויט דעם ווינקל A, וואָס איז אײַנגעשלאָסן צווישן זיי.

קאָנסטרויִרונג. אף א באַליביקער גראָדער MN לייגן מיר אָפּ פון א געוויסן פונקט A אן אָפּשניט AB, וואָס איז גלײַך c, און באַם פונקט A קאָנסטרויִרן מיר א ווינקל, וואָס איז גלײַך צום געגעבענעם ווינקל A אזוי, אז איין זײַט זײַנע זאָל זיך ציִען לויט דער גראָדער MN; אף דער צווייטער זײַט פונעם ווינקל לייגן מיר אָפּ אן אָפּשניט AC, וואָס איז גלײַך b; ווען מירן פאַרײניקן דעם פונקט C מיטן פונקט B, באַקומען מיר דעם געזוכטן $\triangle ABC$, וואָס באַפרידיקט די באַדינגונגען פון דער אופגאַבע.

אופגאַבע 5. קאָנסטרויִרן א דרײַעק לויט א זײַט און לויט אירע צוויי בײַליגנדיקע ווינקלען A און B.

קאָנסטרויִרונג. אף א באַליביקער גראָדער MN לייגן מיר אָפּ פון א געוויסן פונקט A אן אָפּשניט AB, וואָס איז גלײַך c, און קאָנסטרויִרן באַם פונקט A א ווינקל, וואָס איז גלײַך צום געגעבענעם ווינקל A, און באַם פונקט B — א ווינקל, וואָס איז גלײַך צום געגעבענעם ווינקל B אזוי, אז דער אָפּשניט AB זאָל זײַן א געמיינזאַמע זײַט פאַר ביידע ווינקלען; דאַן וועלן די איבעריקע צוויי זײַטן פון די ווינקלען A און B באַם איבערשנײַדן זיך אינעם פונקט C באַשטימען דעם דריטן שפּיץ פונעם געזוכטן דרײַעק ABC. צוויי גראָדע קאָנען זיך איבערשנײַדן בלויז אין איין פונקט, דעריבער איז לויט די באַדינגונגען פון דער אופגאַבע מעגלעך בלויז איין לייזונג, דה. די קאָנסטרויִרונג גיט א דרײַעק פון איין באַשטימטער פאָרם און פון איין באַשטימטער גרייס.



צייכ. 70

אופגאַבע 6. צעטיילן דעם געגעבענעם ווינקל אפערהעלפט.

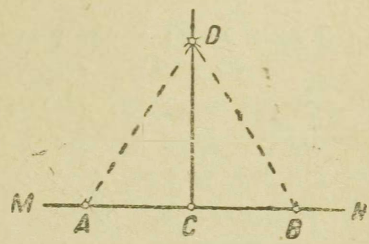
קאָנסטרויִרונג. ס'איז געגעבן א $\angle ABC$ (צייכ. 70). מיט א באַליביקן ראַדיִוס מיטן צענטער אינעם שפּיץ B פירן מיר דורכ א בויגן; דער בויגן וועט איבערשנײַדן די זײַטן פונעם ווינקל אין די פונקטן D און E.

מיר נעמען די פונקטן D און E פאַר צענטערס און פירן דורכ מיט גלײַכע ראַדיִוסן בויגנס אזוי, אז זיי זאָלן זיך איבערשנײַדן; מיר באַקומען דעם פונקט F. ווען מיר פאַרײניקן דערנאָכ מיט א גראָדער דעם פונקט F מיטן שפּיץ B, באַקומען מיר די ביסעקטריסע BF פונעם געגעבענעם ווינקל ABC.

דערווײַז. מיר פאַרײניקן דעם פונקט F מיט די פונקטן D און E און מיר באַקומען צוויי דרײַעקן: $\triangle BDF$ און $\triangle BEF$; די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען גלײַך,

ווײַל בײַ זײ איז 1) BF א געמײנזאמע זײַט, 2) $BE=BD$, אַלס ראדיִוסנ פונ אײנ אונ דעמ זעלבנ בויגנ, 3) $EF=FD$, אלס ראדיִוסנ פונ גלײַכע קרײַזליניעס, דעריבער איז $\angle FBE=\angle FBD$, אלס ווינקלענ, וואָס ליגנ קעגנ די גלײַכע זײַטנ EF אונ FD אינ גלײַכע דרײַעקנ.

אלזאָ, די גראָדע BF טײלט דעמ געגעבענעמ $\angle ABC$ אפדערהעלפט; BF איז די ביסעקטריסע פונעמ ווינקל.



ציכ. 71

ווענ מע זאָל צעטײלנ אפדערהעלפט יעדנ פונ די ווינקלענ FBE אונ FBD, וועט דער געגעבענער ווינקל זיכ צעטײלנ אפ 4 גלײַכע כאלאָקימ. אויב מירנ אפנ זעלבנ אופנ ווידער טײלנ יעדנ פונ די באקומענע ווינקלענ, קאָנ מענ דעמ ווינקל צעטײלנ אפ 8, 16 אאוו., ביכלאל אפ 2^n גלײַכע טײלנ.

אופגאבע 7. דורכפירנ א פערפענדיקוליאר צו א גראָדער אינעמ פונקט, וואָס איז אפ איר געגעבנ.

קאָנסטרויִרונג. אפ דער גראָדער MN אינ בײדע זײַטנ פונעמ געגעבענעמ פונקט C לײגנ מיר אָפ גלײַכע אָפשניטנ CA אונ CB פונ א באליביקער לענג (ציכ. 71); מיט א באליביקנ ראדיִוס, אָבער א גרעסערנ פאר AC, פירנ מיר דורכ בויגנס מיט די צענטערס אינ די פונקטנ A אונ B. דעמ איבערשנײַד-פונקט D פונ די בויגנס פארײניקנ מיר מיטנ פונקט C; די גראָדע CD איז דער געזוכטער פערפענדיקוליאר.

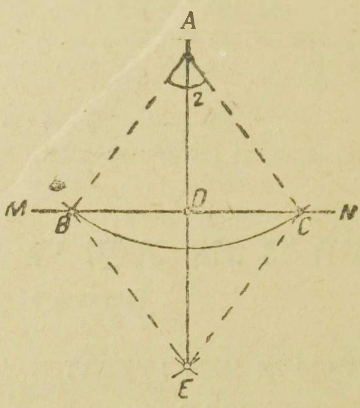
דערווײַז. מיר פארײניקנ דעמ פונקט D מיט די פונקטנ A אונ B אונ מיר באקומענ די דרײַעקנ DCA אונ DCB; זײ זײַנענ גלײַכ, ווײַל בײַ זײ איז 1) DC א געמײנזאמע זײַט, 2) $CA=CB$ — לויט דער קאָנסטרויִרונג, 3) $AD=BD$ — אלס ראדיִוסנ פונ גלײַכע קרײַזליניעס, אונ דעריבער איז $\angle DCA=\angle DCB$; די דאָזיקע ווינקלענ זײַנענ אָבער שכײנישע, הײסט עס; יעדערער פונ זײ איז גלײַכ צו א גראָדנ, אונ דעריבער איז $CD\perp AB$, אונ דאָס הײסט, אז $CD\perp MN$. אלזאָ, CD איז דער געזוכטער פערפענדיקוליאר.

אופגאבע 8. דורכפירנ א פערפענדיקוליאר צו דער געגעבענער גראָדער MN פונעמ פונקט A, וואָס איז געגעבנ דרויסנ דער גראָדער (ציכ. 72).

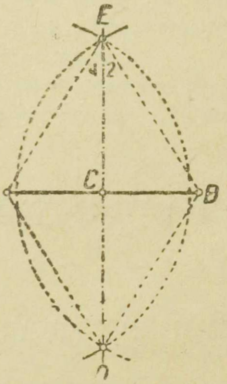
קאָנסטרויִרונג. מיטנ צענטער אינעמ געגעבענעמ פונקט A פירנ מיר דורכ א בויגנ אזוי, אז ער זאָל איבערשנײַדנ די געגעבענע גראָדע MN אינ די פונקטנ B אונ C. פונ די פונקטנ B אונ C פירנ מיר דורכ מיט גלײַכע ראדיִוסנ בויגנס, וועלכע וועלנ זיכ איבערשנײַדנ אינ א געוויסנ פונקט E אפ דער אנדערער זײַט פונ דער געגעבענער גראָדער MN. ווענ מיר פארײניקנ מיט א גראָדער די פונקטנ A אינ E, באקומענ מיר דעמ געזוכטנ פערפענדיקוליאר AE.

דערווײַז. מיר פארײניקנ די פונקטנ A אונ E מיט די פונקטנ B אונ C אונ מיר באקומענ, אז $\triangle ABE=\triangle ACE$, ווײַל בײַ זײ איז 1) AE א געמײנזאמע זײַט, 2) $AB=AC$ — אלס ראדיִוסנ פונ אײנ אונ דעמ זעלבנ בויגנ, 3) $BE=CE$ — אלס ראדיִוסנ פונ גלײַכע קרײַזליניעס.

פונ דער גלײַכקײַט פונ די דרײַעקנ דרינגט ארויס, אז $\angle 2 = \angle 1$.
מיר באטראכטנ דערנאָכ דעמ $\triangle ABC$; ער איז א גלײַכאקסלדיקער, ווײַל $AB = AC$, אונ AD איז די ביסעקטריסע פונעמ $\angle A$, ווײַל $\angle 2 = \angle 1$. די ביסעקטריסע פונעמ ווינקל באמ שפּיצ פונ א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק איז גלײַכצײַטיק אויכ זײַנ הייכ, אונ דעריבער איז $AD \perp BC$, אונ דאָס הייסט, אז $AD \perp MN$.



צייכ. 72



צייכ. 73

אויפגאבע 9. צעטײלנ א געגעבענעמ אָפּשניט אפּדער-העלפט.

קאָנסטרויִרונג. פונ די עקנ A אונ B פונעמ געגעבענעמ אָפּשניט AB (צייכ. 73) פירנ מיר דורכ בויגנס מיט א באליביקנ ראדיוס, וועלכער איז אָבער גרעסער פונ א האלבנ אָפּשניט AB, אזוי, אז זיי זאָלנ זיכ איבערשנײַדנ פונ ביידע זײַטנ אָפּשניט. די גראָדע ED, וואָס פארייניקט די פונקטנ E אונ D, וווּ עס שנײַדנ זיכ איבער די בויגנס, וועט איבערשנײַדנ דעמ אָפּשניט AB אינעמ פונקט C, וועלכער איז טאקע דער מיטנ פונעמ אָפּשניט AB.

דערווײַז. מיר פארייניקנ די פונקטנ D אונ E מיט די פונקטנ A אונ B, מיר באקומענ א ריי דרײַעקנ. פונ די גלײַכע דרײַעקנ ADE אונ DBE דרינגט ארויס, אז $\angle 2 = \angle 1$; פונעמ גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק ABE, בא וועלכנ $\angle 2 = \angle 1$, מאכנ מיר דעמ אויספיר, אז EC איז די ביסעקטריסע פונעמ ווינקל E באמ שפּיצ, אונ, הייסט עס, זי איז אויכ די מעדיִאנע פונ דער זײַט AB; דעריבער איז $CA = CB$, דה. דער פונקט C איז דער מיטנ פונעמ אָפּשניט AB.

פראגעס אונ איבונגענ.

1. דורכ וויפל אונ דורכ וואָסערע באדינגונגענ ווערט באשטימט די גלײַכקײַט פונ צוויי גלײַכזײַטיקע דרײַעקנ?

2. פארוואָס איז אפּ פעסטצושטעלנ די גלײַכקײַט פונ צוויי גלײַכאקסלדיקע דרײַעקנ גענוג צו וויסנ, צי זײַנענ בא זיי גלײַכ 1) דער ווינקל באמ שפּיצ אונ די זײַט-ליניע, 2) א ווינקל באמ באזיס אונ דער באזיס גופא 3) דער באזיס אונ די זײַט-ליניע?

3. אינ א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק ABC זײַנענ פונ די שפּיצנ A אונ B פונ די ווינקלענ באמ באזיס דורכגעפירט מעדיִאנעס AM אונ BN. דערווײַזנ, אז די מעדיִאנעס זײַנענ גלײַכ: $AM = BN$.

פארשרײַבנ: 1) וואָסערע אנטשפּרעכיקע גלײַכע עלעמענטנ זײַנענ באוווּסט פונ דעמ באדינג פונ דער אויפגאבע, 2) די גלײַכקײַט פונ וואָסערע דרײַעקנ דארפ מענ דערווײַזנ.

4. דערווײַזנ, אז אינ א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק זײַנענ די ביסעקטריסעס פונ די ווינקלענ באם באזיס גלײַכ.

5. צוויי דרײַעקנ ABC אונ $A_1B_1C_1$, וועלכע זײַנענ צווישנאַנאנד גלײַכ, זײַנענ צוגעלייגט איינער צום אנדערנ מיט זייערע זײַטנ: $AB=A_1B_1$, ווי דאָס איז באוויזנ אפ דער צייכ. 67. דערווײַזנ, אז די גראָדע CC_1, וואָס פארייניקט זייערע שפּיצנ C_1 אונ C, איז פּערפּענדיקולער צו זייער געמיינזאמער זײַט AB, דה. $CC_1 \perp AB$.

6. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק לויט צוויי זײַטנ a אונ b אונ לויט דער הייכ h_a.

7. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק לויט זײַנע צוויי זײַטנ b אונ c אונ לויט דער מעדיִאַנע m_b.

8. קאָנסטרויִרנ א גלײַכאקסלדיקנ גראָדווינקלדיקנ דרײַעק לויט דער הייכ h_c, וואָס איז דורכגעפירט פונעם שפּיצ גראָדנ ווינקל.

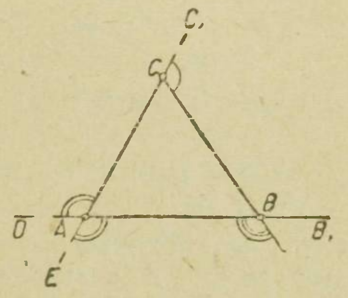
9. קאָנסטרויִרנ א גלײַכזײַטיקנ דרײַעק לויט זײַנ זײַט a.

10. קאָנסטרויִרנ מיט דער הילפ פונ א צירקל אונ א ווירע ווינקלענ: 1) 90°, 2) 45°, 3) 135°.

V. אָפּהענגיקײַט צווישנ די זײַטנ אונ די ווינקלענ פונ א דרײַעק.

1. דרויסנדיקער ווינקל אינ א דרײַעק; זײַנע אייגנשאפטנ.

1. דעפיניציע. דער $\angle CAD$ אָדער דער $\angle BAE$ (צייכ. 74), וואָס איז געבילדעט דורכ איינ זײַט פונעם דרײַעק אונ דורכ דער פאָרזעצונג פונ דער שכיינישער זײַט, הייסט דרויסנדיקער ווינקל, צום אונטערשייד פונעם אינווייניקסטנ ווינקל, וואָס איז געבילדעט דורכ די זעלבע צוויי שכיינישע זײַטנ.



צייכ. 74

בא יעדנ שפּיצ פונעם דרײַעק קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ צוויי דרויסנדיקע ווינקלענ, ווענ מע פארלענגערט די אָדער יענע זײַט פונעם דרײַעק. דרויסנדיקע ווינקלענ בא איינ אונ דעם זעלבנ שפּיצ זײַנענ גלײַכ אלס ווערטיקאלע ווינקלענ, $\angle CAD=\angle BAE$, דערבײַ ווערט געמיינט, אז פונ די צוויי גלײַכע דרויסנדיקע ווינקלענ, וואָס ליגנ בא יעדנ אינווייניקסטנ, ווערט גענומענ בלויז איינער.

ווענ מיר קאָנסטרויִרנ באם שפּיצ A פונעם דרײַעק ABC דרויסנדיקע ווינקלענ CAD אונ BAE, באקומענ מיר נאָכ א דריטנ ווינקל DAE, וועלכער איז ניט קיינ דרויסנדיקער ווינקל פונעם דרײַעק, ווײַל ער איז געבילדעט דורכ די פאָרזעצונגענ פונ צוויי זײַטנ פונעם דרײַעק; דער דאָזיקער דריטער ווינקל איז גלײַכ צו דעם אינווייניקסטנ ווינקל פונעם דרײַעק בא דעם זעלבנ שפּיצ A אלס א ווערטיקאלער.

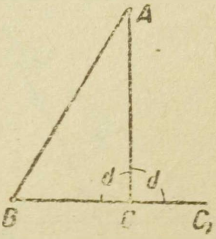
2. א דרויסנדיקער אונ אנ אינווייניקסטער ווינקל פונ א דרײַעק, וואָס האָבנ איינ אונ דעם זעלבנ שפּיצ, זײַנענ שכיינישע ווינקלענ אונ די סומע זייערע איז גלײַכ $2d$, דה. $\angle CAD+\angle CAB=2d$.

פונ דער דאָזיקער גלײַכקײַט דרינגט ארויס, אז 1) אויב איינער פונ די ווינקלענ איז א שארפער, איז דער צווייטער א טעמפּער; 2) אויבביידע ווינקלענ זײַנענ צווישנ זיכ גלײַכ, איז יעדערער פונ זיי א גראָדער.

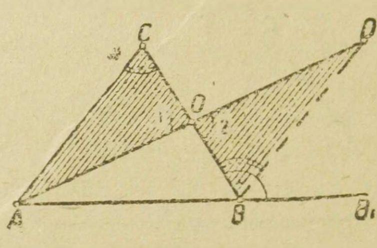
3. טעאָרעמע. א דרויסנדיקער ווינקל אין א דרייעק איז גרעסער פון יעטווידן אינווייניקסטן, וואָס איז מיט אים ניט קיין שכיינישער.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$, דער $\angle CBB_1$ איז א דרויסנדיקער ווינקל (צייכ. 75).

ס'פאָדערט זיך דערווייזן: 1) $\angle CBB_1 > \angle C$; 2) $\angle CBB_1 > \angle A$.



צייכ. 76



צייכ. 75

דערווייז. מיר פירן דורך א מעדיאַנע $AO = m_a$ און אף איר פאַרזעצונג לייגן מיר אָפּ אַן אָפּשניט OD, וואָס איז גלייך צו דער מעדיאַנע. מיר פאַרבינדן דערנאָך דעם פונקט D מיטן שפּיץ B און מיר באַקומען צוויי דרייעקן: $\triangle AOC$ און $\triangle BOD$; בא זיי איז 1) $CO = BO$; 2) $AO = OD$; 3) $\angle 1 = \angle 2$ אלס ווערטיקאַלע ווינקלען, הייסט עס, די דרייעקן זיינען גלייך: $\triangle AOC = \triangle BOD$.

פון דער גלייכקייט דרינגט ארויס, אז

$\angle ACO = \angle OBD$, אָבער דער $\angle OBD$, אלס א טייל פונעם דרויסנדיקן ווינקל CBB_1, איז קלענער פון אים, $\angle OBD < \angle OBB_1$, און דעריבער איז אויך דער ווינקל ACO, וואָס איז צו אים גלייך, קלענער פארן ווינקל OBB_1: $\angle ACO < \angle OBB_1$; און דאָס הייסט, אז $\angle CBB_1 > \angle ACB$. אפן זעלבן אויפן ווערט דערוויזן, אז $\angle CBB_1 > \angle A$; קעדיי דאָס צו דערווייזן, פירן מיר דורך די מעדיאַנע m_c.

4. קאָנסעקווענץ. אויב אין א דרייעק איז איין ווינקל א גראָדער אָדער א טעמפּער, זיינען די איבעריקע צוויי ווינקלען שאַרפע.

אינדערעמעסן: 1) אויב אינעם $\triangle ABC$ (צייכ. 76) איז דער $\angle C$ א גראָדער, איז זיין שכיינישער דרויסנדיקער ווינקל ACC_1 אויך א גראָדער, און דעריבער איז $\angle A < d$ און $\angle B < d$, דה. זיי זיינען שארפע; 2) אויב אינעם $\triangle ABC$ (צייכ. 77) איז דער $\angle C$ א טעמפּער, איז דאַן זיין שכיינישער דרויסנדיקער ווינקל ACC_1 א שארפער, און דעריבער זיינען $\angle A$ און $\angle B$ שארפע ווינקלען.

5. טעאָרעמע. אין יעטווידן דרייעק איז די סומע פון צוויי באליביקע אינווייניקסטע ווינקלען קלענער פון צוויי גראָדע ווינקלען.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\angle CBB_1$ זיין דרויסנדיקער ווינקל (צייכ. 78).

ס'פאָדערט זיך דערווייזן: $\angle A + \angle B < 2d$, אָדער $\angle A + \angle C < 2d$, אָדער $\angle B + \angle C < 2d$.

דערווייז. $\angle 2 + \angle 4 = 2d$, אלס שכיינישע ווינקלען, דערביי איז

$\angle 4 > \angle 1$ און $\angle 4 > \angle 3$.

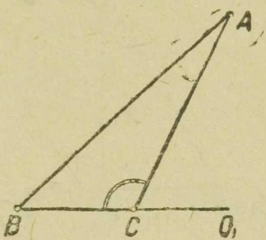
אויב מירן אינעם לינקן טייל פון דער גלייכקייט $\angle 4 + \angle 2 = 2d$ פארביטן דעם $\angle 4$ מיט א קלענערן ווינקל — מיטן ווינקל 1 אָדער מיטן ווינקל 3, וועט די

סומע זיכ פארקלענערנ, אונ עס וועט ווערנ אויס גלײַכקײַט, מירנ באקומענ אנ אומגלײַכקײַט:

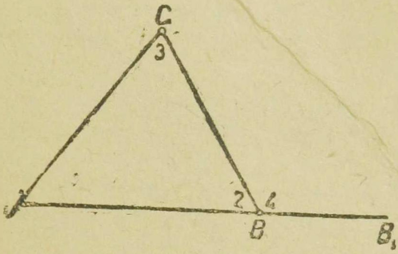
$$\angle 1 + \angle 2 < 2d, \text{ אָדער } \angle A + \angle B < 2d$$

אונ

$$\angle 3 + \angle 2 < 2d, \text{ אָדער } \angle C + \angle B < 2d.$$



צייכ. 77



צייכ. 78

די טעאָרעמע איז דערוויזנ.

אפנ זעלבנ אויפנ ווערט דערוויזנ, אז $\angle 1 + \angle 3 < 2d$.

2. אָפהענגיקײַט צווישנ די זײַטנ אונ די ווינקלענ פונ א דרײַעק.

1. מיר ווייסנ שוינ, אז קעגנ גלײַכע זײַטנ אינ איינ אונ דעמ זעלבנ דרײַעק ליגנ גלײַכע ווינקלענ.

אויב אינעמ דרײַעק ABC איז די זײַט $AC = AB = CB$, איז ער א גלײַכזײַטיקער, אינ אימ ליגנ קעגנ די גלײַכע זײַטנ גלײַכע ווינקלענ; אזויווי אלע זײַנע זײַטנ זײַנענ גלײַכ, זײַנענ אויכ אלע ווינקלענ גלײַכ. א גלײַכזײַטיקער דרײַעק איז אויכ א גלײַכווינקלדיקער.

2. טעאָרעמע. אינ יעטווידנ דרײַעק איז: 1) קעגנ גלײַכע זײַטנ ליגנ גלײַכע ווינקלענ, 2) קעגנ דער גרעסערער זײַט ליגט א גרעסערער ווינקל.

II. ס'איז געגעבנ: $\triangle ABC$ אונ $AC > CB$ (צייכ. 79).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\angle B > \angle A$.

דערווײַז. אפ דער גרעסערער זײַט AC וועלנ מיר אָפלייגנ אנ אָפשניט CD, וואָס איז גלײַכ צו CB, אונ דעמ פונקט D וועלנ מיר פאראייניקנ מיטנ שפיצ B; מירנ באקומענ א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק CBD, בא וועלכנ די ווינקלענ באמ באזיס זײַנענ גלײַכ, $\angle 2 = \angle 1$. אָבער דער $\angle 1$, אלס דרויסנדיקער ווינקל פונעמ דרײַעק ADB, איז גרעסער פונעמ ווינקל A, $\angle 1 > \angle A$; אָבער $\angle 2 = \angle 1$, אונ דעריבער איז אויכ $\angle 2 > \angle A$; דער $\angle 2$ איז אָבער בלויז א טייל פונעמ $\angle ABC$, הייסט עס, דער $\angle ABC$ איז אוודאי גרעסער פונעמ $\angle A$.

$\angle B > \angle A$.

3. לאָמיר באטראכטנ טעאָרעמעס, פארקערטע צו די געגעבענע טעאָרעמעס. א טעאָרעמע, א פארקערטע צו דער געגעבענער, רופט מענ אזא טעאָ-

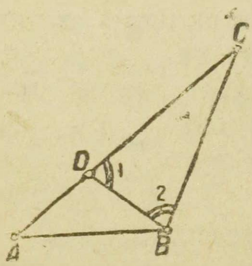
רעמע, וואָס איִנ איר איז פארנ באדינג גענומענ דער אויספיר אָדער א טייל פונעמ אויספיר פונ דער געגעבענער טעאָרעמע, אונ פארנ אויספיר — דער באדינג אָדער א טייל פונעמ באדינג פונ דער געגעבענער טעאָרעמע. לעמאָשל:

1) אינ יעטווידנ דרײַעק איז קעגנ גלײַכע זײַטנ ליגנ גלײַכע ווינקלענ.

ס'איז געגעבנ: $AC = CB$, ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\angle A = \angle B$.

2) אינ יעטווידנ דרײַעק איז קעגנ גלײַכע ווינקלענ ליגנ גלײַכע זײַטנ.

ס'איז געגעבנ: $\angle A = \angle B$, ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $AC = CB$.



צייכ. 79

אויב די צווייטע פונ די געגעבענע טעאָרעמעס רעכנט מענ פאר א פ א ר ק ע ר ט ע ר, הייסט די ערשטע טעאָרעמע בענעגייע צו איר ד י ר ע ק ט ע טעאָרעמע.

אינעמ געגעבענעמ בײַשפּיל זײַנענביידע טעאָרעמעס ריכטיק. נאָר ניט שטענדיק איז עס אזוי. אויב ס'איז דערווײַזנ א דירעקטע טעאָרעמע, קאָנ מענ נאָכ ניט מאכנ קיינ אויספיר וועגנ דער ריכטיקײַט פונ דער פארקערטער טעאָרעמע. צומ בײַשפּיל, די טעאָרעמע „צוויי ווערטיקאלע ווינקלענ זײַנענ גלײַכ" איז ריכטיק; אָבער די פארקערטע טעאָרעמע — „אויב צוויי ווינקלענ זײַנענ גלײַכ, זײַנענ זיי ווערטיקאלע ווינקלענ", איז ניט שטענדיק ריכטיק.

4. טעאָרעמע (פארקערטע). אינ יעטווידנ דרײַעק איז קעגנ גלײַכע ווינקלענ ליגנ גלײַכע זײַטנ.

ס'איז געגעבנ: $\triangle ABC$ אונ $\angle A = \angle B$.

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $AC = BC$.

ד ע ר ו ו ײַ ז (פונ דעמ היפּעכ). מע דארפ דערווײַזנ, אז $AC = BC$. לאָמיר זאָגנ, פארקערט, נעמלעכ, אז AC איז ניט גלײַכ צו BC, נאָר גרעסער פונ BC, $AC > BC$.

פונ דער האנאָכע, אז $AC > BC$, דרינגט ארויס, אז $\angle B > \angle A$, ווײַל אינ א דרײַעק ליגט קעגנ דער גרעסערער זײַט אויכ דער גרעסערער ווינקל. דער באַקומענער אויספיר ווידערשפּרעכט אָבער דעמ באדינג פונ דער טעאָרעמע, אז $\angle A = \angle B$, אונ דעריבער איז די האנאָכע, אז $AC > BC$, ניט מעגלעכ; צו דעמ זעלבנ אויספיר וועלנ מיר אויכ קומענ, ווענ מיר וועלנ זאָגנ, אז $AC < BC$.

אלזאָ, אויב $\angle A = \angle B$, איז ניט מעגלעכ, אז AC זאָל זײַנ גרעסער אָדער קלענער פאר BC. וויבאלד AC קאָנ ניט זײַנ גרעסער אָדער קלענער פאר BC, מוז AC זײַנ גלײַכ צו BC. אלזאָ, $AC = BC$.

באמ דערווײַזנ אָט די טעאָרעמע האָבנ מיר זיכ באנוצט מיטנ מעטאָד פונ דערווײַזנ פונ דעמ היפּעכ. דער דאָזיקער מעטאָד באשטייט דערינ, וואָס מיר מאכנ א האנאָכע, וועלכע איז דער היפּעכ דערפונ, וואָס עס פאָדערט זיכ דערווײַזנ, אונ דערנאָכ קומענ מיר דורכ אָפּהאנדלונגענ צומ באשלוס, אז די געמאכטע האנאָכע איז ניט מעגלעכ, ווײַל זי ווידערשפּרעכט די טעאָרעמעס, וועלכע זײַנענ פריִער פעסטגעשטעלט. ארויסגייענדיק דערפונ, ווערט די געמאכטע האנאָכע, אלס א ניט-ריכטיקע, אָפּגעוואָרפנ, אונ דורכ דעמ גופע ווערט פעסטגעשטעלט די ריכטיקײַט פונעמ אויספיר, וואָס איז געמאכט אינ דער טעאָרעמע.

5. טעאָרעמע (פארקערטע). אין יעטווידן דרײַעק איז קעגן א גרע-סערן ווינקל ליגט א גרעסערע זײַט.

ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\angle B > \angle A$ (צייכ. 79).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: $AC > CB$.

דערווײַז (פון דעם הייפּעכ). מע דארף דערווײַזן, אז $AC > CB$. לאָמיר זאָגן פארקערט, נעמלעכ, אז AC איז ניט גרעסער פון CB, און מירן באטראכטן מעג-לעכע צוויי פאלן: 1) $AC = CB$, אָדער 2) $AC < CB$.

פון דער האנאָכע, אז $AC = CB$, דרינגט ארויס, אז $\angle A = \angle B$, אָבער דער דאָזיקער אויספיר ווידערשפּרעכט דעם באדינג פון דער טעאָרעמע, לויט וועלכן $\angle A > \angle B$, און דעריבער איז די האנאָכע, אז $AC = CB$, ניט ריכטיק; פון דער צווייטער האנאָכע, אז $AC < CB$, דרינגט ארויס, אז דאן איז אויך $\angle B > \angle A$, דאָס ווידערשפּרעכט אויך דעם באדינג פון דער טעאָרעמע, ווײַל $\angle A > \angle B$. מיר קומען צום אויספיר, אז וויבאלד $\angle A > \angle B$, איז אויך $AC > CB$.

6. קאָנסעקווענצן. 1. אין א גראָדווינקלדיקן דרײַעק איז די היפּאָטע-נוזע גרעסער פאר יעטווידן קאטעט.

2. אין א טעמפּווינקלדיקן דרײַעק איז די זײַט, וואָס ליגט קעגן טעמפּן ווינקל, די גרעסטע.

פראגעס און איבונגען.

1. אין וואָס פאר א דרײַעק איז דער דרויסנדיקער ווינקל גלײַך צום אינווייניקסטן ווינקל, וואָס איז מיט אים א שכיינישער?

2. פארוואָס איז אין א גראָדווינקלדיקן דרײַעק יעטווידער פון די קאטעטן קלענער פון דער היפּאָ-טענוזע? פארוואָס איז די סומע פון צוויי קאטעטן גרעסער פאר דער היפּאָטענוזע? וואָסערע טעאָרעמעס דארף מען אויסנוצן צוליבן ענטפער?

3. אינעם דרײַעק ABC זײַנען די זײַטן $AB = 18\text{cm}$, $BC = 22\text{cm}$ און $AC = 20\text{cm}$. וועלכער פון די ווינקלען אינעם דרײַעק איז דער גרעסטער און וועלכער איז דער קלענסטער?

4. אינעם דרײַעק ABC זײַנען די ווינקלען $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$ און $\angle C = 40°$. אָנווײַזן די גרעסטע און די קלענסטע זײַט פונעם דרײַעק.

VI. פּערפּענדיקוליאר און געניײגטע.

1. פּראָיעקציע פון א פונקט אפ א גראָדער.

1. טעאָרעמע. פון א פונקט דרויסן א גראָדער קאָן מען דורכפירן צו איר בלויז איין פּערפּענדיקוליאר.

ס׳איז געגעבן: א גראָדע MN און דרויסן איר א פונקט A און $AB \perp MN$ (צייכ. 80).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: AB איז דער איינציקער פּערפּענדיקוליאר פונעם פונקט A צו דער גראָ-דער MN.

דערווײַז (פון דעם הייפּעכ). לאָמיר זאָגן, אז פונעם פונקט A איז דורכגע-פירט צו דער גראָדער MN, כוץ דעם פּערפּענדיקוליאר AB, נאָכ א צווייטער פּער-פּענדיקוליאר AC. מירן באקומען א $\triangle ABC$ מיט צוויי גראָדע ווינקלען, וואָס

דאָס איז אומעגלעכ, ווײַל די סומע פונ צוויי ווינקלענ אינ א דרײַעק איז שטענדיק קלענער פונ צוויי גראָדע. הייסט עס, די האַנאָכע, אז פונ פונקט A קאָנ מענ דורכ-פירנ צו דער גראָדער MN, כוץ דעם פערפענדיקוליאר AB, נאָכ א צווייטנ פער-פענדיקוליאר AC, איז ניט ריכטיק; הייסט עס, פונ א פונקט A דרויסנ דער גראָדער קאָנ מענ צו איר דורכפירנ בלויז איינ פערפענ-דיקוליאר.

2. דער באַזיס B פונעם פערפענדיקוליאר AB הייסט פראָיעקציע פונעם פונקט A אפ דער גראָדער MN. די פראָיעקציע פונ א פונקט אפ א גראָ-דער איז א פונקט.

פארשטייט זיכ, אז דער פונקט B, דער באַזיס פונעם פערפענדיקוליאר AB, איז די פראָיעקציע ניט בלויז פונעם איינציקנ פונקט A פונעם פערפענדיקו-ליאר AB, נאָר אויכ פונ א באַליביקנ פונקט, וואָס איז גענומענ אפנ פער-פענדיקוליאר, אײַנשליסנדיק אויכ דעם פונקט B, וואָס ליגט אי אפנ פערפענדי-קוליאר אי אפ דער גראָדער MN.

2. פערפענדיקוליאר אונ גענייגטע.

1. אויב $AB \perp MN$, זײַנענ די גראָדע AC, AD, AE גענייגטע (צייכ. 80).

2. טעאָרעמע. אויב פונ א דרויסנדיקנ פונקט זאָל מענ דורכפירנ צו דער געגעבענער גראָדער א פערפענדיקוליאר אונ א גענייגטע, איז דער פערפענ-דיקוליאר קירצער פונ דער גענייגטער.

ס'איז געגעבנ: $AB \perp MN$ אונ AC איז א גענייגטע (צייכ. 80).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $AB < AC$.

דערווײַז. דער פערפענדיקוליאר AB אונ די גענייגטע AC זײַנענ זײַטנ פונ דעם גראָדווינקלדיקנ דרײַעק ABC; דער פערפענדיקוליאר AB איז א קאַטעט, די גענייגטע AC איז די היפּאָטענוזע.

די היפּאָטענוזע AC איז גרעסער פונעם קאַטעט AB, אונ דעריבער איז $AB < AC$.

אויספיר. דער פערפענדיקוליאר איז דער קירצסטער אָפּשטאַנד פונ א פונקט ביז דער גראָדער.

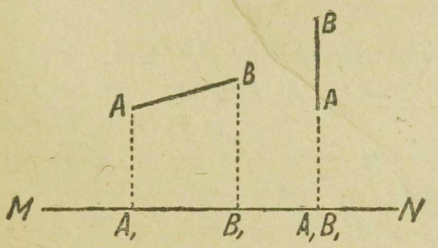
אָנווײַזונג. ווענ מע זאָגט: „דער אָפּשטאַנד פונ א פונקט ביז דער גראָדער", ווערט שטענ-דיק געמיינט דער קירצסטער אָפּשטאַנד, וועלכער ווערט אויסגעמאָסטנ מיט דער לענג פונ פערפענדי-קוליאר, וואָס איז דורכגעפירט פונעם געגעבענעם פונקט צו דער געגעבענער גראָדער, דה. דער אָפּשניט, וואָס זײַנע עקנ זײַנענ דער געגעבענער פונקט אונ זײַנ פראָיעקציע אפ דער געגעבענער גראָדער.

3. גענייגטע אונ זייערע פראָיעקציעס.

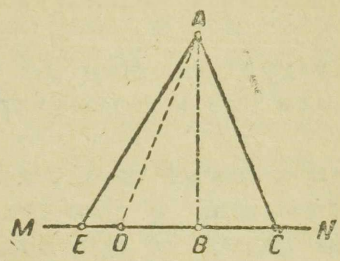
1. דער אָפּשניט BC פונ דער גראָדער MN (צייכ. 80), וואָס זײַנע עקנ זײַ-נענ די באַזיסנ B אונ C פונעם פערפענדיקוליאר AB אונ פונ דער גענייגטער AC, הייסט פראָיעקציע פונ דער גענייגטער AC.

אינעם פאַל, ווענ דער אָפּשניט AB שנײַדט ניט איבער די גראָדע MN (צייכ. 80a), איז זײַנ פראָיעקציע אפ דער גראָדער MN דער אָפּשניט A_1B_1, וואָס

זײַנע עקן זײַנען די פּראָיעקציעס פֿון די עקן A און B פֿונעם אָפּשניט AB אויב דער אָפּשניט AB איז פּערפּענדיקולער צו דער גראָדער MN, איז זײַן פּראָיעקציע אפֿ דער גראָדער MN דער פּונקט A_1, ווײַל די פּראָיעקציעס A_1 און B_1 פֿון די עקן A און B פֿונעם אָפּשניט AB גיסן זיך צונויף.



צײַכ. 80a



צײַכ. 80

2. טעאָרעמע. 1) געניגטע, וואָס זײַנען דורכגעפֿירט פֿון איין און דעם זעלבן פּונקט צו א גראָדער, זײַנען גלײַך, אויב ס'זײַנען גלײַך זייערע פּראָיעקציעס.

2) פֿון צוויי געניגטע, וואָס זײַנען דורכגעפֿירט צו א גראָדער פֿון איין און דעם זעלבן פּונקט, איז גרעסער יענע, וואָס איר פּראָיעקציע אפֿ דער געגעבענער גראָדער איז גרעסער.

1) ס'איז געגעבן: $AB \perp MN$ און $BC = BD$ (צײַכ. 80).

ס'פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $AC = AD$.

2) ס'איז געגעבן: $AB \perp MN$ און $BE > BC$.

ס'פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $AE > AC$.

דערווײַז. 1) די דרײַעקן ABC און ABD זײַנען גראָדווינקלדיקע, בא זיי איז AB א געמיינזאַמע זײַט און $BC = BD$ לויטן באַדינג, הייסט עס, זיי זײַנען גלײַך, און דעריבער איז $AC = AD$.

2) לויטן באַדינג איז $BE > BC$; מיר וועלן אָפּלייגן אפֿן אָפּשניט BE פֿונעם פּונקט B אן אָפּשניט $BD = BC$ און פֿאַרייניקן D מיט A, וועלן מיר באַקומען א געניגטע AD, וואָס איז גלײַך צו AC. לאָמיר באַטראַכטן דעם $\triangle AED$; זײַן $\angle ADE$ איז א טעמפּער, אַלס דרויסנדיקער ווינקל באַם גראָדווינקלדיקן דרײַעק ABD (ניט קיין שכיינישער מיטן גראָדן ווינקל), הייסט עס, $\angle ADE > \angle AED$, און דעריבער איז $AE > AD$, אָדער, דאָס הייסט, אז $AE > AC$, ווײַל $AC = AD$.

3. טעאָרעמע (פאַרקערטע). אויב די געניגטע, וואָס זײַנען דורכגעפֿירט פֿון איין און דעם זעלבן פּונקט צו א גראָדער, זײַנען גלײַך, זײַנען זייערע פּראָיעקציעס אפֿ דער זעלבער גראָדער אויך גלײַך.

ס'איז געגעבן: $AB \perp MN$ און $AC = AD$ (צײַכ. 80).

ס'פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $BC = BD$.

דערווײַז (פֿון דעם חיפּעך). לאָמיר זאָגן, אז $BC > BD$, דאַן איז אויך $AC > AD$, דאָס ווידערשפּרעכט דאָך אָבער דעם באַדינג, ווײַל $AC = AD$, און דעריבער איז אונדזער האַנאָכע ניט קיין ריכטיקע; לאָמיר זאָגן, אז $BC < BD$,

דאַן איז אויך $AC < AD$, אָבער דאָס ווידערשפּרעכט אויך דעם באַדינג, ווײַל $AC = AD$, און דעריבער איז אונדזער האַנאַכע ניט קיין ריכטיקע.

אַלזאָ, BC קאָן ניט זײַן ניט גרעסער און ניט קלענער פאַר BD, און דעריבער איז $BC = BD$.

4. טעאָרעמע (פּאַרקערטע). פון צוויי ניט גלײַכע גענייגטע, וואָס זײַנען דורכגעפירט צו א גראַדער פון איין און דעם זעלבן פונקט, האָט די גרעסערע גענייגטע א גרעסערע פּראָיעקציע.

ס'איז געגעבן: $AB \perp MN$ און $AE > AD$ (צייכ. 80).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $BE > BD$.

דערווײַז (פון דעם הייפּעכ). לאָמיר זאָגן, אז BE איז ניט גרעסער פאַר BD, דאַן זײַנען מעגלעכ צוויי פאַלן: $BE = BD$, אָדער $BE < BD$. אויב מע זאָל אָננעמען די ערשטע האַנאַכע, דאַרף זײַן $AE = AD$, אָבער דאָס ווידערשפּרעכט דאָכ דעם געגעבענעם באַדינג, אינ העסקעם מיט וועלכן $AE > AD$, און דעריבער איז אונדזער ערשטע האַנאַכע ניט ריכטיק. וועלן מיר זאָגן, אז $BE < BD$, דאַן איז $AE < AD$, וואָס דאָס ווידערשפּרעכט אויך דעם באַדינג; הייסט עס, די דאָזיקע האַנאַכע איז אויך ניט קיין ריכטיקע.

אַלזאָ, BE קאָן ניט זײַן גלײַכ צו BD און קאָן ניט זײַן קלענער פון BD, און דעריבער קאָן BE זײַן נאָר גרעסער פאַר BD; $BE > BD$, דאָס האָט מען טאַקע געדאַרפט דערווײַזן.

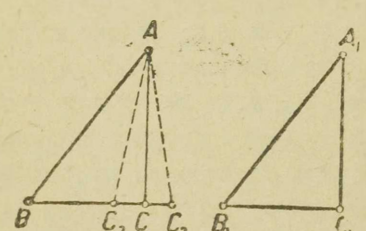
4. גלײַכקײַט פון גראַדווינקלדיקע דרײַעקן.

מיר וועלן באַטראַכטן נאָכ צוויי סימאָנים, ווען גראַדווינקלדיקע דרײַעקן זײַנען גלײַכ.

1. טעאָרעמע. גראַדווינקלדיקע דרײַעקן זײַנען גלײַכ, אויב די היפּאָטענוזע און א שאַרפער ווינקל פון איין דרײַעק זײַנען אַנטשפּרעכיק גלײַכ צו דער היפּאָטענוזע און צום שאַרפן ווינקל פונעם צווייטן.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; $A_1B_1 = AB$; $\angle B_1 = \angle B$ (צייכ. 81).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.



צייכ. 81

דערווײַז. מירן אַרופלייגן דעם $\triangle A_1B_1C_1$ אַפן $\triangle ABC$ אַזוי, אז די היפּאָטענוזעס A_1B_1 און AB זאָלן צונויפפאַלן; מאַכמעס דער גלײַכקײַט פון די ווינקלען B_1 און B, וועט די זײַט B_1C_1 זיך ציִען לויט דער זײַט BC. פרעגט זיך, אינ וואָס פאַר א פונקט אַף דער גראַדער BC וועט פאַלן דער פונקט C_1? ס'זײַנען מעגלעכ דרײַ האַנאַכעס: דער פונקט C_1 וועט פאַלן לינקס פונעם פונקט C אָדער רעכטס פון אים, אָדער ער וועט צונויפפאַלן מיט אים. לאָמיר זאָגן, אז דער פונקט C_1 איז געפאַלן לינקס פונעם פונקט C. דאַן וואָלט זיך דער קאַטעט A_1C_1 געצויגן לויט AC_2, און דאָס וואָלט באַטײַט, אז פונעם פונקט A צו דער גראַדער BC זײַנען דורכגעפירט צוויי פּערפּענדיקולאַרן — AC און AC_2, וואָס דאָס איז אומעגלעכ, ווײַל פון א פונקט

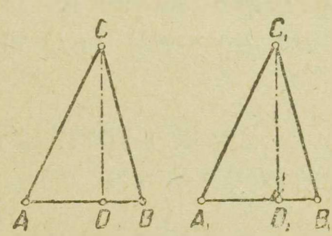
דרויסן דער גראָדער קאָן מען דורכפירן צו דער גראָדער בלויז איין פּער-פּענדיקולאַר. צו דעם זעלבן אויספיר וועלן מיר אויך קומען, אויב מיר וועלן זאָגן, אַז דער פּונקט C_1 וועט פאַלן רעכטס פונעם פּונקט C. דער פּונקט C_1, ווי מיר איבערצײַגן זיך, קאָן ניט פאַלן ניט לינקס און ניט רעכטס פונעם פּונקט C. הייסט עס, ער קאָן מיט אים נאָר צונויפפאַלן. אַלזאָ, באַם אַרופלייגן פאַלט דער $\triangle A_1B_1C_1$ צונויף מיטן $\triangle ABC$ און איז, הייסט עס, גלײַך צו אים.

קאָנסעקווענץ. גלײַכע דרײַעקן האָבן אויך אַנטשפּרעכיק גלײַכע הייכן.

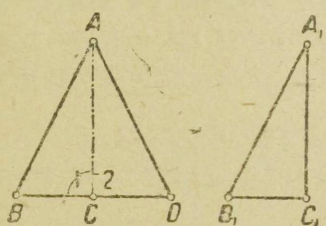
ס'איז געגעבן: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$; C_1D_1 און CD זײַנען זייערע הייכן (צייכ. 82).

ס'פּאָדערט זיך דערווײַזן: $C_1D_1 = CD$.

דערווײַז. מירן באַטראַכטן דעם $\triangle A_1C_1D_1$ און דעם $\triangle ACD$; די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען גראָדווינקלדיקע, זיי זײַנען צווישן זיך גלײַך, ווײַל בא זיי איז $A_1C_1 = AC$ און $\angle A_1 = \angle A$; דערפון, וואָס די דרײַעקן $A_1C_1D_1$ און ACD זײַנען גלײַך, דורינגט, אַז $C_1D_1 = CD$, דה. די הייכן פון די דרײַעקן $A_1B_1C_1$ און ABC זײַנען גלײַך.



צייכ. 82



צייכ. 83

2. טעאָרעמע. גראָדווינקלדיקע דרײַעקן זײַנען גלײַך, אויב די היפּאָ-טענוזע און אַ קאַטעט פון איין דרײַעק זײַנען אַנטשפּרעכיק גלײַך צו דער היפּאָטענוזע און צו אַ קאַטעט פונעם צווייטן דרײַעק.

ס'איז געגעבן: $\triangle A_1B_1C_1$ און $\triangle ABC$; $A_1B_1 = AB$; $A_1C_1 = AC$ (צייכ. 83).

ס'פּאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

דערווײַז. מירן צולייגן דעם דרײַעק $A_1B_1C_1$ צום דרײַעק ABC אַזוי, אַז די גלײַכע קאַטעטן A_1C_1 און AC זאָלן צונויפפאַלן. מירן באַקומען אַ געוויסע פיגור $ABCD$. לאָמיר באַטראַכטן די ווינקלען 1 און 2 באַם פּונקט C. $\angle 1 + \angle 2 = 2d$, ווײַל יעדערער פון זיי איז אַ גראָדער, און, הייסט עס, דער ווינקל BCD איז אַ פאַנאַנדערגעוויקלטער, דעריבער בילדן BC און CD איין גראָדע; מאַכן מיר דעם אויספיר, אַז די באַקומענע פיגור איז אַ דרײַעק; אָבער אינעם דאָזיקן דרײַעק איז $AB = AD$, דעריבער איז ער אַ גלײַכאַקסלדיקער, זײַן הייך AC צעטיילט אים אָפּ צוויי גלײַכע דרײַעקן: $\triangle ABC = \triangle ACD$, הייסט עס, אַז אויך $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$.

1. דער באזיס פון א גלײַכאקסלדיקן דרײַעק איז גלײַך a סמ. צו וואָס איז גלײַך די פּראָיעקציע פון זײַן זײַט־ליניע אפן באזיס?

2. די קאטעטן פון א גראָדווינקלדיקן דרײַעק זײַנען אנטשפּרעכיק גלײַך a סמ. און b סמ. צו וואָס זײַנען גלײַך די פּראָיעקציעס פון דער היפּאָטענוזע אף יעטווידן פון די קאטעטן?

3. דורכפירן אין א טעמפּווינקלדיקן דרײַעק א הייך צו איינער פון די זײַטן, וואָס בילדן דעם טעמפּן ווינקל.

4. אין א דרײַעק ABC איז דורכגעפירט א ביסעקטריסע AD. דערווײַזן, אז די פּראָיעקציעס פון דער ביסעקטריסע AD אף די זײַטן AB און AC זײַנען גלײַך.

5. AD איז די ביסעקטריסע פון עם $\angle BAC$. דערווײַזן, אז א באליביקער פונקט, וואָס איז גענומען אף דער ביסעקטריסע, שטייט אָפּ אף א גלײַכן אָפּשטאנד פון די ווינקל־זײַטן.

6. ס'איז געגעבן א גראָדע MN און דרויסן איר צוויי פונקטן A און B. געפינען אף דער גראָדער MN א פונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון די פונקטן A און B.

VII. פּאראלעלע גראָדע.

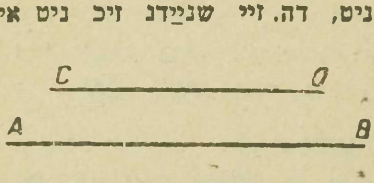
1. פּאראלעלע גראָדע.

1. צוויי גראָדע AB און CD, וואָס ליגן אף א פלאכקײַט, קאָנען פארנעמען פארשיידענע לאגעס איינע לעגאבע דער אנדערער; זיי קאָנען אָדער זיך איבערשנײַדן, אָדער צונויפאלן, אָדער זיך ניט איבערשנײַדן.

1) אינעם פאל, ווען צוויי גראָדע AB און CD שנײַדן זיך איבער, האָבן זיי איין געמיינזאמען פונקט P — דעם איבערשנײַד־פונקט; ער געהערט ביידע גראָדע, דה. ער געפינט זיך אף יעטווידער פון זיי.

2) אינעם פאל, ווען צוויי גראָדע האָבן ניט איין נאָר צוויי געמיינזאמע פונקטן, פאלן זיי צונויף, ווײַל דורך צוויי פונקטן קאָן מען דורכפירן בלויז איין גראָדע, און דעריבער וועט יעטווידער פונקט פון איין גראָדער זײַן איינער פון די פונקטן פון דער צווייטער.

3) לעסאָף, ווען צוויי גראָדע AB און CD (צייכ. 84), וואָס ליגן אף איין פלאכקײַט, האָבן קיין איין געמיינזאמען פונקט ניט, דה. זיי שנײַדן זיך ניט איבער, וויפל מיר זאָלן זיי ניט פאָרזעצן אין דער אָדער יענער זײַט, און פאלן ניט צונויף, הייסן אזוינע גראָדע פּאראלעלע.



צייכ. 84

דעפיניציע. גראָדע, וואָס ליגן אף איין פלאכקײַט און וואָס שנײַדן זיך ניט איבער, וויפל מע זאָל זיי ניט פאָרזעצן אין ביידע זײַטן, הייסן פּאראלעלע.

אף צו באצייכענען די פּאראלעלקײַט פון גראָדע באנוצט מען דעם צייכן $\parallel$; $AB \parallel CD$ לייענט מען: די גראָדע AB איז פּאראלעל צו דער גראָדער CD.

2. אז עס עקזיסטירן פּאראלעלע גראָדע, איבערצײַגן מיר זיך פונעם טאָגטעגלעכן באָבאכטן די געגנשטאנדן, וואָס רינגלען אונדז ארום, ס'איז אָבער אויך מעגלעך טעאָרעטיש צו דערווײַזן, אז פּאראלעלע גראָדע עקזיסטירן.

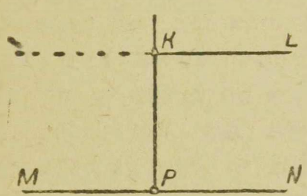
טעאָרעמע. צוויי גראָדע, פּערפּענדיקולערע צו איין און דער זעלבער דריטער גראָדער, שנײַדן זיך ניט איבער — זיי זײַנען פּאראלעל.

ס'איז געגעבנ: $AB \perp MN$, $CD \perp MN$ (צייכ. 85).

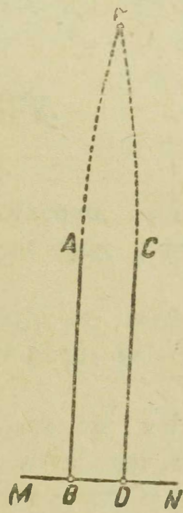
ס'פאָדערט זיך דערווייַזנ: $AB \parallel CD$.

דערווייַז (פונ דעמ הייפּעכ). לאָמיר זאָגנ, אז די גראָדע AB אונ CD, די פּערפּענדיקולערע צו דער גראָדער MN, זאָלנ זייַנ פאָרגעזעצט אונ זאָלנ זיך איבערשנייַדנ אינ עפּעס א פּונקט P; דאַנ איז פונעמ פּונקט P דורכגעפירט צו דער גראָדער MN צוויי פּערפּענדיקוליארנ AB אונ CD, אזוינס איז דאָכ אָבער ניט מעגלעכ, ווייַל פונ איינ פּונקט קאָנ מענ דורכפירנ צו א גראָדער בלויז איינ פּערפּענדיקוליאר; הייסט עס, די האנאָכע, וואָס מיר האָבנ געמאכט, אז AB אונ CD וועלנ זיך איבערשנייַדנ, איז ניט ריכטיק; די גראָדע AB אונ CD, די פּערפּענדיקולערע צו MN, קאָנענ זיך ניט איבערשנייַדנ, הייסט עס, זיי זייַנענ פּאראלעל; אלזאָ, $AB \parallel CD$.

אופגאבע. ס'איז געגעבנ א גראָדע MN אונ דרויסנ איר א פּונקט K (צייכ. 86). דורכפירנ דורכנ פּונקט K א גראָדע פּאראלעל צו דער גראָדער MN.



צייכ. 86



צייכ. 85

קאָנסטרויִרונג. מיר פירנ דורכ דורכנ געגעבענעמ פּונקט K צו דער גראָדער MN א פּערפּענדיקוליאר KP, אונ דערנאָכ — א פּערפּענדיקוליאר KL פונעמ פּונקט K צו דער גראָדער KP. KL איז די געזוכטע גראָדע. אינדערעמעסנ, $KL \parallel MN$, ווייַל KL אונ MN זייַנענ צוויי גראָדע, פּערפּענדיקולערע צו דער גראָדער KP.

2. אקסיִאָמע וועגנ פּאראלעלע.

מיר האָבנ זיך איבערצייַגט, אז דורכ א געגעבענעמ פּונקט K דרויסנ דער גראָדער MN קאָנ מענ דורכפירנ א גראָדע, א פּאראלעלע צו MN; מע וואָלט נאָכ באדארפט דערווייַזנ, אז די דורכגעפירטע אפּ אזא אופנ גראָדע KL וועט זייַנ די איינציקע גראָדע, וואָס גייט דורכ דורכנ פּונקט K אונ וואָס איז פּאראלעל צו דער גראָדער MN. דערווייַזנ אָבער דעמ דאָזיקנ טעזיס איז ניט מעגלעכ, מע דארפ אימ אָננעמענ פאר אנ אקסיִאָמע; אזוי טאקע האָבנ געטאָנ די אמאָליקע גריכישע געאָמעטערס מיט פיל יאָרנ צוריק פאר אונדזער ערע. דערווייַזנ דעמ דאָזיקנ טעזיס האָבנ זיך דאָכ געפּרווט די בעסטע געאָמעטערס פונ אלע צייַטנ אונ פונ אלע פעלקער, אָבער די דאָזיקע פּרווונ האָבנ זיך אויסגעלאָזנ מיט גאָרנישט. ערשט אינ פאָריקנ XIX יאָרהונדערט האָט זיך אייַנגעגעבנ צו דערווייַזנ, אז די דאָזיקע האנאָכע

קאָן מען ניט אַרויספירן אַלס אַ לאָגישן אויספיר פון די איבעריקע אַקסיאָמעס, וועלכע ווערן געוויינלעך געלייגט אין גרונט פון געאָמעטריע, דה. מע קאָן זי ניט דערווייזן. מיטן געדאַנק פון אַזאַ באַווײַז איז שוין גוט געווען באַקאַנט דער גרויסער דײַטשישער מאַטעמאַטיקער גאַוס (1777—1855); אָבער אַ געאָמעטרישע קאָנסטרוי־רונג, וואָס שעפּט קימאַט אויס די דאָזיקע פראַגע, האָט געגעבן אין 1829 יאָר דער רוסישער געאָמעטער נ. אי. לאָבאַטשעווסקי (1793 — 1856) און גלײַך נאָך אים, אין 1832 י., דער אונגאַרישער מאַטעמאַטיקער אי. באָלײַ (1802 — 1860). נאָך זיי האָבן אַ ריי געאָמעטערס דערפירט דעם דערווײַז ביזן סאָף, געבנדיק אים אַן אויסשעפּנדיקע דערקלערונג. די דאָזיקע האַנאָכע איז אַזוי־אַרום אָנגענומען אַלס אַקסיאָמע, די ריכטיקייט אירע איז פעסטגעשטעלט דורך דירעקטע באַאָבאַכטונגען, דורך דער דוירעסדיקער דערפאַרונג, וואָס די מענטשהייט האָט אָנגעזאַמלט.

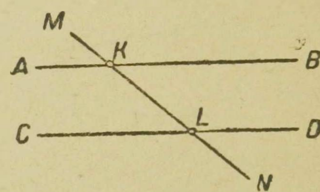
אַקסיאָמע. דורך אַ געגעבענעם פּונקט דרויסן אַ גראָדער אָפּ אַ פלאַכ־קייט קאָן מען דורכפירן בלויז איין גראָדע, אַ פּאַראַלעלע צו דער געגעבע־נער גראָדער.

קאָנסעקווענצן. 1. אויב אַ גראָדע שנײַדט איבער איינע פון צוויי פּאַ־ראַלעלע גראָדע, וועט זי איבערשנײַדן אויך די צווייטע.

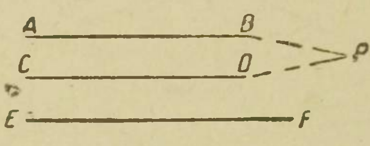
ס'איז געגעבן: $AB \| CD$; MN שנײַדט איבער AB אינעם פּונקט K (צייכ. 87).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: MN שנײַדט איבער CD.

דערווײַז (פון דעם היפּעכ). לאָמיר זאָגן, אַז די גראָדע MN, וואָס שנײַדט איבער AB אינעם פּונקט K, שנײַדט זיך ניט איבער מיט דער גראָדע CD. אויב



צייכ. 87



צייכ. 88

דאָס איז אַזוי, דאַרף MN זײַן פּאַראַלעל צו CD, און דאַן גייען דורכן פּונקט K צוויי גראָדע AB און MN, פּאַראַלעלע צו CD; דאָס ווידערשפּרעכט אָבער דער אַקסיאָמע וועגן פּאַראַלעלע, הייסט עס, אַז די האַנאָכע, וואָס מיר האָבן געמאַכט, אַז כוץ דער גראָדער AB גייט דורכן פּונקט K נאָך אַ גראָדע MN, וואָס שנײַדט ניט איבער די גראָדע CD, איז ניט ריכטיק. אַלזאָ, די גראָדע MN, איז ניט פּאַראַלעל צו CD, און אויב אַזוי, מוז MN איבערשנײַדן די גראָדע CD.

2. אויב צוויי גראָדע זײַנען באַזונדערווײַז פּאַראַלעל צו אַ דריטער גראָ־דער, זײַנען זיי צווישן זיך פּאַראַלעל.

ס'איז געגעבן: $AB \| EF$ און $CD \| EF$ (צייכ. 88).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $AB \| CD$.

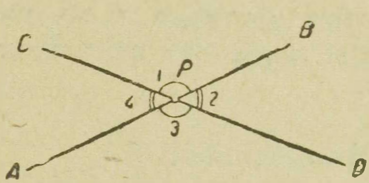
דערווײַז (פון דעם היפּעכ). מירן זאָגן, אַז די גראָדע AB און CD זײַנען ניט פּאַראַלעל און זיי שנײַדן זיך איבער אין עפּעס אַ פּונקט P. ווען מיר נעמען אָן די דאָזיקע האַנאָכע, קומען מיר צום אויספיר, אַז דורכן פּונקט P גייען דורך

צוויי פארשיידענע פאראלעלע AB אונ CD, וואָס זײַנענ פאראלעל צו דער דריטער גראָדער EF; דאָס ווידערשפרעכט אָבער דער אקסיאָמע וועגנ פאראלעלע, הייסט עס, די געמאכטע האנאָכע איז ניט קיינ ריכטיקע. אלזאָ, די גראָדע AB אונ CD, וואָס זײַנענ פאראלעל צו דער גראָדער EF, קאָנענ זיכ נימ איבערשנײַדנ, זיי זײַנענ פאראלעל: $AB \parallel CD$.

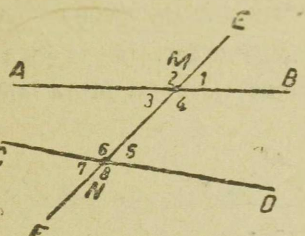
3. ווינקלענ, וואָס זײַנענ געבילדעט דורכ צוויי פאראלעלע אונ א סעקאנטע.

1. אויב די גראָדע AB (צייכ. 89) שנײַדט איבער וואָסער-ניט-איז גראָדע, צומ בײַשפיל CD, בילדעט זי מיט איר 4 ווינקלענ, פונ וועלכע צוויי זײַנענ שארפע אונ צוויי זײַנענ טעמפע; ביידע שארפע אונ ביידע טעמפע ווינקלענ זײַנענ צווישנ זיכ גלײַכ אלס ווערטיקאלע: $\angle 1=\angle 3$, $\angle 2=\angle 4$.

כוצ דעמ איז יעטווידער פונ די שארפע ווינקלענ צוזאמענ מיט יעטווידנ פונ די טעמפע ווינקלענ גיבנ א סומע פונ $2d$ אלס שכײניסשע ווינקלענ: $\angle 1+\angle 2=2d$; $\angle 2+\angle 3=2d$; $\angle 3+\angle 4=2d$; $\angle 1+\angle 4=2d$.



צייכ. 89



צייכ. 90

אויב די גראָדע AB אונ CD, וואָס שנײַדנ זיכ איבער, זײַנענ קעגנזײַטיק פערפענדיקולער, זײַנענ דאנ אלע ווינקלענ, וואָס אָט די גראָדע בילדנ, גלײַכ צווישנ זיכ, אונ יעדערער פונ זיי איז א גראָדער.

2. אויב די גראָדע EF (צייכ. 90) שנײַדט איבער ניט איינ גראָדע, נאָר צוויי גראָדע, AB אונ CD, באקומענ זיכ בא די איבערשנײַד-פונקטנ פונ EF מיט די גראָדע AB אונ CD א כ ט ווינקלענ: פיר מיט א געמיינזאמענ שפיצ באמ איבערשנײַד-פונקט M מיט דער גראָדער AB אונ פיר מיט א געמיינזאמענ שפיצ באמ איבערשנײַד-פונקט N מיט דער גראָדער CD. די גראָדע EF, וואָס שנײַדט איבער די גראָדע AB אונ CD, הייסט ס ע ק א נ ט ע (שנײַדנדיקע). מע זאָל קאָנענ אונטערשיידנ די באזונדערע ווינקלענ-פאָרנ, וואָס איינ ווינקל פונ דער פאָר ליגט באמ פונקט M, אונ דער צווייטער — באמ פונקט N, האָבנ די ווינקלענ ספּעציעלע נעמענ, אָפּהענגיק פונ זייער לאגע לעגאבע דער סעקאנטע.

1) די ווינקלענ, וואָס ליגנ צווישנ די גראָדע AB אונ CD פונ איינ זײַט סעקאנטע EF, הייסנ א י נ ע ו ו י נ י ק ס ט ע א י י נ ז ײַ ט י ק ע ווינקלענ. דאָס זײַנענ דער $\angle 3$ אונ $\angle 6$; $\angle 4$ אונ $\angle 5$.

2) די ווינקלען, וואָס ליגן דרויסן די גראָדע AB און CD פון איין זײַט סעקאַנטע EF, הייסן **דרויסנדיקע איינזײַטיקע** ווינקלען. דאָס זײַנען $\angle 1$ און $\angle 8$; $\angle 2$ און $\angle 7$.

3) די ווינקלען, וואָס ליגן אינווייניק צווישן די גראָדע AB און CD אין פאַרשיידענע זײַטן פון דער סעקאַנטע EF, הייסן **אינווייניקסטע געקרייצטע** ווינקלען. דאָס זײַנען $\angle 3$ און $\angle 5$; $\angle 4$ און $\angle 6$.

4) די ווינקלען, וואָס ליגן דרויסן די גראָדע AB און CD אין פאַרשיידענע זײַטן פון דער סעקאַנטע EF, הייסן **דרויסנדיקע געקרייצטע** ווינקלען. דאָס זײַנען $\angle 1$ און $\angle 7$, $\angle 2$ און $\angle 8$.

5) די ווינקלען, וואָס ליגן פון איין זײַט סעקאַנטע, דערבײַ איז איינער פון זיי אַן אינווייניקסטער און דער אנדערער א דרויסנדיקער, הייסן **שטאַפּלדיקע** ווינקלען. דאָס זײַנען $\angle 1$ און $\angle 5$, $\angle 2$ און $\angle 6$, $\angle 3$ און $\angle 7$, $\angle 4$ און $\angle 8$.

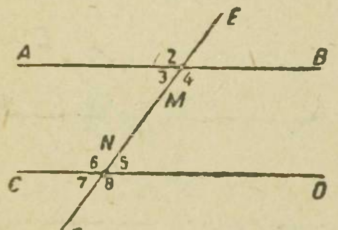
3. א באַשטימטע אָפּהענגיקײַט צווישן די ווינקלען פון א וואָסער-ניט-איז פּאָר פון די אָנגעוויזענע ווינקלען ברענגט מיט א באַשטימטע אָפּהענגיקײַט צווישן די ווינקלען פון יעטווידער אנדער פּאָר.

טעאָרעמע. ווען באַם איבערשנײַדן צוויי גראָדע מיט א דריטער זײַנען די שטאַפּלדיקע ווינקלען גלײַך, זײַנען: 1) צווישן זיך גלײַך די אינווייניקסטע געקרייצטע ווינקלען; 2) די דרויסנדיקע געקרייצטע ווינקלען; 3) די סומע פון די אינווייניקסטע איינזײַטיקע ווינקלען איז גלײַך $2d$ און 4) די סומע פון די דרויסנדיקע איינזײַטיקע ווינקלען איז גלײַך $2d$.

ס'איז געגעבן: די גראָדע AB און CD און די סעקאַנטע EF; $\angle 1 = \angle 5$ (צייכ. 91).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) א) $\angle 5 = \angle 3$ און $\angle 7 = \angle 1$;
ב) $\angle 6 = \angle 4$ און $\angle 8 = \angle 2$.
2) א) $\angle 4 + \angle 5 = 2d$ און $\angle 3 + \angle 6 = 2d$;
ב) $\angle 1 + \angle 8 = 2d$ און $\angle 2 + \angle 7 = 2d$.

דערווײַז. 1) $\angle 5 = \angle 1$ לויטן באַדינג, $\angle 1 = \angle 3$ אלס ווערטיקאַלע; הייסט עס, $\angle 5 = \angle 3$, ווײַל צוויי גרייסן $\angle 3$ און $\angle 5$, וואָס באַזונדערווײַז זײַנען זיי גלײַך צו א דריטער, ד.ה. צום $\angle 1$, זײַנען צווישן זיך גלײַך.



צייכ. 91

אלזאָ, אויב ס'זײַנען גלײַך די שטאַפּלדיקע ווינקלען, $\angle 1$ און $\angle 5$, זײַנען אויך גלײַך די געקרייצטע ווינקלען, $\angle 5 = \angle 3$. אפֿן זעלבן אופן ווערט דערוויזן, אז $\angle 7 = \angle 1$, אויב $\angle 5 = \angle 1$.

2) לויטן באַדינג איז $\angle 5 = \angle 1$; אויב מיר וועלן צוגעבן צום $\angle 1$ דעם $\angle 4$ און צום $\angle 5$ דעם $\angle 6$, דאַן זײַנען $\angle 1 + \angle 4 = 2d$ און $\angle 5 + \angle 6 = 2d$ אלס שכייניש ווינקלען. אלזאָ, ווען מע האָט צוגעגעבן צו יעדערן פון די גלײַכע ווינקלען, צום $\angle 1$ און צום $\angle 5$, צו ווינקלען, האָבן מיר באַקומען איין און די זעלבע סומע, נעמלעך — $2d$, אָבער דאָס איז מעגלעך בלויז אין דעם פאַל, ווען $\angle 6 = \angle 4$, און דאָס באַווײַזט, אז די אינווייניקסטע געקרייצטע ווינקלען זײַנען גלײַך. אפֿן זעלבן אופן ווערט דערוויזן, אז $\angle 8 = \angle 2$, אויב $\angle 5 = \angle 1$.

3) לויטן באדינג איז $\angle 1=\angle 5$; $\angle 1+\angle 4=2d$ אלס שכײניש. פארבײַטן מיר אין דער לעצטער גלײַכקײַט דעם $\angle 1$ מיט א גלײַכן צו אים $\angle 5$, באקומען מיר, אז $\angle 5+\angle 4=2d$, דה. די סומע פון די אינווייניקסטע איינזײַטיקע ווינקלען איז גלײַך $2d$. אפן זעלבן אופן ווערט דערוויזן, אז $\angle 3+\angle 6=2d$, אויב $\angle 1=\angle 5$.

4) לויטן באדינג איז $\angle 1=\angle 5$; $\angle 5+\angle 8=2d$ אלס שכײניש. פארבײַטן מיר אין דער לעצטער גלײַכקײַט דעם $\angle 5$ מיט א גלײַכן צו אים $\angle 1$, באקומען מיר, אז $\angle 1+\angle 8=2d$, דה. די סומע פון די דרויסנדיקע איינזײַטיקע ווינקלען איז גלײַך $2d$. אפן זעלבן אופן ווערט דערוויזן, אז $\angle 2+\angle 7=2d$, אויב $\angle 1=\angle 5$.

4. סימאָנים פון פאראלעלקײַט פון גראָדע.

1. איינער פון די סימאָנים פון פאראלעלקײַט פון צוויי גראָדע באשטייט דערין, וואָס צוויי *פארשיידענע גראָדע, פערפענדיקולערע צו איין און דער זעלבער גראָדער, זײַנען פאראלעל*. לאָמיר באטראכטן אנדערע סימאָנים, וואָס באזירן זיך אף די אייגנשאפטן פון ווינקלען, וועלכע בילדן זיך אויס, ווען צוויי גראָדע שנײַדן זיך איבער מיט א דריטער.

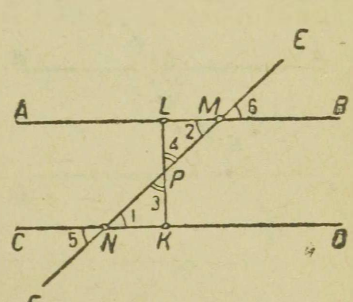
טעאָרעמע. צוויי גראָדע, איבערגעשניטן מיט א דריטער, זײַנען פאראלעל: 1) אויב די אינווייניקסטע געקרייצטע ווינקלען זײַנען גלײַך, 2) אויב די דרויסנדיקע געקרייצטע ווינקלען זײַנען גלײַך, 3) אויב די שטאפלדיקע ווינקלען זײַנען גלײַך, 4) אויב די אינווייניקסטע איינזײַטיקע ווינקלען גיבן א סומע פון $2d$ און 5) אויב די דרויסנדיקע איינזײַטיקע ווינקלען גיבן א סומע פון $2d$.

לאָמיר דערווײַזן דעם ערשטן טייל פון דער דאָזיקער טעאָרעמע.

ס'איז געגעבן: גראָדע AB און CD און א סעקאנטע EF; $\angle 1=\angle 2$ (צייכ. 92).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $AB \parallel CD$.

דערווײַז. די סעקאנטע EF שנײַדט איבער די גראָדע AB און CD אין די פונקטן M און N. מירן צעטיילן דעם אָפשניט MN אפדערהעלפט און מירן דורכפירן דורכן זײַן מיטן P צו דער גראָדער CD א פערפענדיקוליאר PK, דעם דאָזיקן פערפענדיקוליאר וועלן מיר פארלענגערן, ביז ער וועט זיך איבערשנײַדן מיט דער גראָדער AB אינעם פונקט L; מירן באקומען צוויי דרײַעקן: $\triangle PLM$ און $\triangle PKN$. אין די דאָזיקע דרײַעקן איז 1) $PM=PN$ לויט דער קאָנסטרויִרונג, 2) $\angle 1=\angle 2$ לויטן באדינג, 3) $\angle 3=\angle 4$ אלס ווערטיקאלע ווינקלען; הייסט עס, $\triangle PLM=\triangle PKN$. פון זייער גלײַכקײַט דרינגט, אז $\angle K=\angle L$; לויטן באדינג איז $\angle K=d$, ווײַל $PK \perp CD$, הייסט עס, אז אויך $\angle L=d$, און דאָס באטײַט, אז $PL \perp AB$. אלזאָ, די גראָדע AB און CD זײַנען פערפענדיקולער צו איין און דער זעלבער גראָדער KL, הייסט עס, זיי זײַנען פאראלעל, $AB \parallel CD$.



צייכ. 92

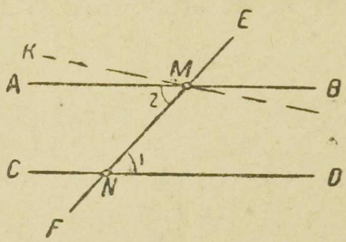
דער דערווײַז פונ דער טעאָרעמע פאר יענעמ פאל, ווענ די דרויסנדיקע גע-קרייצטע ווינקלענ זײַנענ גלײַכ, לעמאָשל $\angle 5=\angle 6$, באַזירט זיכ אפנ באַ-טראכטנ פאל.

ס'איז נעגעבנ, אז $\angle 5=\angle 6$. אזויווי $\angle 5=\angle 1$ אונ $\angle 6=\angle 2$ אלס ווער-טיקאלע ווינקלענ, איז $\angle 1=\angle 2$; אָבער די דאָזיקע ווינקלענ זײַנענ אינווייניקסטע געקרייצטע אונ זײַנענ גלײַכ צווישנ זיכ, דעריבער איז $AB \parallel CD$.

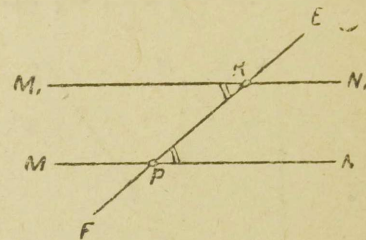
אנאלאָגיש איז דער דערווײַז פונ דער טעאָרעמע, ווענ ס'איז געגעבנ, אז ס'זײַנענ גלײַכ די שטאפלדיקע ווינקלענ, אָדער ס'איז געגעבנ, אז איינזײַטיקע ווינקלענ—אינווייניקסטע אָדער דרויסנדיקע, גיבנ צוזאמענ א סומע פונ $2d$.

אופגאבע. דורכפירנ א גראָדע, וואָס גײט דורכ דורכנ פונקט K אונ וואָס איז פאראלעל צו א געגעבענער גראָדער MN (צייכ. 93).

קאָנסטרויִרונג. ס'איז געגעבנ א גראָדע MN אונ דרויסנ איר א פונקט K. מיר פירנ דורכ דורכנ פונקט K צו MN א סעקאנטע EF אונטער א באַליִ-



צייכ. 94



צייכ. 93

ביקנ ווינקל; די סעקאנטע בילדעט מיט דער גראָדער MN א $\angle KPN$. מיר קאָנסטרויִרנ דערנאָכ באַמ פונקט K פונ דער אנדערער זײַט סעקאנטע EF א $\angle M_1KP$, וואָס איז גלײַכ צומ $\angle KPN$, דעמלט וועט די זײַט M_1K פונעמ דאָזיקנ ווינקל זײַנ די געזוכטע גראָדע, וואָס איז פאראלעל צו MN, $M_1K \parallel MN$. אינדערעמעסנ, אינ הערסקעמ מיט דער קאָנסטרויִרונג איז $\angle M_1KP=\angle KPN$, אונ דאָס זײַנענ דאָכ אינווייניקסטע געקרייצטע ווינקלענ, הייסט עס, $M_1N_1 \parallel MN$.

2. טעאָרעמע (פארקערטע). ווענ צוויי פאראלעלע גראָדע זײַנענ אי-בערגעשניטנ מיט א דריטער, זײַנענ גלײַכ: 1) די אינווייניקסטע געקרייצ-טע ווינקלענ, 2) די דרויסנדיקע געקרייצטע ווינקלענ, 3) די שטאפלדיקע ווינקלענ אונ 4) די סומע פונ די איינזײַטיקע אינווייניקסטע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$ אונ 5) די סומע פונ די איינזײַטיקע דרויסנדיקע ווינקלענ איז גלײַכ $2d$.

לאָמיר דערווײַזנ דעמ ערשטנ טייל פונ דער טעאָרעמע.

ס'איז געגעבנ: $AB \parallel CD$; EF איז א סעקאנטע (צייכ. 94).

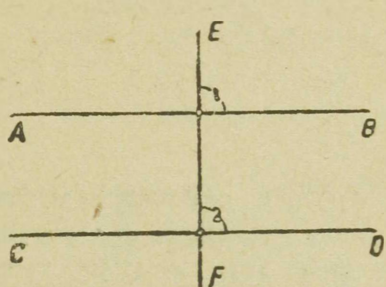
ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\angle 1=\angle 2$.

דערווײַז (פונ דעמ הייפעכ). לאָמיר זאָגנ, אז דער $\angle 1$ איז ניט גלײַכ צומ $\angle 2$ אונ איז גרעסער פונ אימ, $\angle 1 > \angle 2$. באַמ פונקט M אונ באַ דער סעקאנטע EF קאָנסטרויִרנ מיר א $\angle KMN$, וואָס איז גלײַכ צומ $\angle 1$. אויב $\angle KMN=\angle MND$,

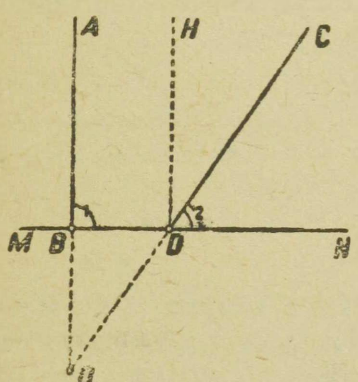
איז $KM \parallel CD$, און דורכן פונקט M גייען אזויארום דורך צוויי גראָדע, KM און AB, פאראלעלע צו CD; אָבער דאָס ווידערשפרעכט דאָך דער אקסיִאָמע וועגן פא-ראלעלע, דעריבער איז די האנאָכע, אז $\angle 2 > \angle 1$, ניט קיין ריכטיקע.

אויב מירן זאָגן, אז $\angle 2 < \angle 1$, איז ווען מיר קאָנסטרויִרן באם פונקט M און בא דער סעקאנטע EF א ווינקל, וואָס איז גלײַך צום $\angle 1$, וועלן מיר ווידעראמאָל קומען צום באשלוס, אז דורכן פונקט M גייען דורך צוויי גראָדע, פאראלעלע צו CD, אָבער דאָס איז ניט מעגלעך, ווײַל דאָס ווידערשפרעכט דער אקסיִאָמע וועגן פא-ראלעלע. אלזאָ, וויבאלד דער $\angle 1$ קאָן ניט זײַן ניט גרעסער און ניט קלענער פונעם $\angle 2$, איז $\angle 2 = \angle 1$, און דאָס הייסט, אז די אינוויינִיקסטע געקרייצטע ווינקלען, וואָס בילדן זיך באם איבערשנײַדן צוויי פאראלעלע גראָדע מיט א דריטער גראָדער, זײַנען גלײַך.

די ריכטיקײַט פון די איבעריקע טיילן פון דער טעאָרעמע דרינגט ארויס פון דעם, וואָס איז שוין דערוויזן געוואָרן. און וויבאלד ס'זײַנען גלײַך די אינוויינִיקסטע געקרייצטע ווינקלען, זײַנען שוין בעמיילע גלײַך די דרויסנדיקע געקרייצטע ווינקלען, די שטאפלדיקע ווינקלען, און די סומע פון די איינזײַטיקע ווינקלען סײַ פון די אינוויינִיקסטע סײַ פון די דרויסנדיקע איז גלײַך $2d$.



צייכ. 95



צייכ. $95a$

3. **קאָנסעקווענץ.** אויב א גראָדע איז פערפענדיקולער צו איינער פון צוויי פאראלעלע גראָדע, איז זי פערפענדיקולער אויך צו דער אנדערער.

ס'איז געגעבן: $AB \parallel CD$; $EF \perp AB$ (צייכ. 95).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $EF \perp CD$.

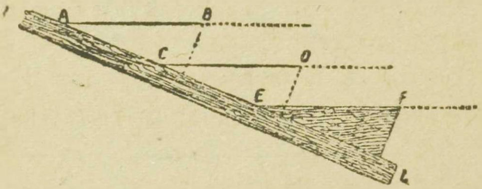
דערווײַז. אויב $AB \parallel CD$, איז $\angle 2 = \angle 1$ אלס שטאפלדיקע ווינקלען; אָבער דער $\angle 1 = d$, הייסט עס, אז אויך דער $\angle 2 = d$, און דאָס באטײַט, אז $EF \perp CD$.

4. א פערפענדיקוליאר AB און א גענייגטע CD, וואָס זײַנען דורכגעפירט צו איין און דער זעלבער גראָדער MN, שנײַדן זיך איבער (צייכ. $95a$).

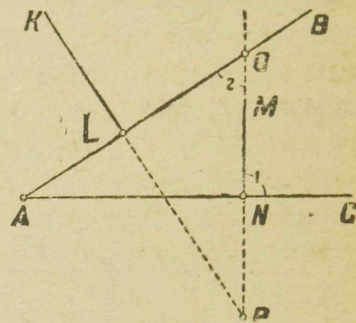
פונעם פונקט D (צייכ. $95a$) וועלן מיר דורכפירן צו דער גראָדער MN א פער-פענדיקוליאר DN, ער איז פאראלעל צו AB (אין העסקעם מיט דער טעאָרעמע וועגן פאראלעלקײַט פון צוויי גראָדע, וואָס זײַנען פערפענדיקולער צו איין און דער זעלבער דריטער גראָדער), און אזויווי דורך דעם פונקט D קאָן מען דורכפירן ניט מער ווי איין גראָדע, א פאראלעלע צו AB, איז די גראָדע DC ניט פאראלעל צו AB, דה. די גראָדע DC שנײַדט איבער די גראָדע AB.

5. די פּערפּענדיקוליאַרנ KL אונ MN צו צוויי גראָדע AB אונ AC, וועלכע שנײַדנ זיכ איבער, שנײַדנ זיכ אויכ איבער (צייכ. 95b).

לאָמיר באַטראַכטנ דעם פאַל, ווענ די גראָדע AB אונ AC זײַנענ ניט פּער-פּענדיקולער. אינדערעמעסנ, MN אונ AB, אַלס אַ פּערפּענדיקוליאַר אונ אַ גענייג-טע, וואָס זײַנענ דורכגעפירט צו AC, שנײַדנ זיכ איבער. מיר זאָגנ, אַז דער פּונקט O איז זייער איבערשנײַד-פּונקט. לאָמיר באַטראַכטנ דעם דרײַעק AON. אינ דעם



צייכ. 96



צייכ. 95b

דאָזיקנ דרײַעק איז $\angle 1$ אַ דרויסנדיקער אונ אַ גראָדער, $\angle 2$ איז אַנ אינווייניקסטער אונ אַ שאַרפער, הייסט עס, $\angle 1 > \angle 2$, דערפונ דערינגט, אַז MN איז אַ גענייגטע לעגאַבע AB. באַטראַכטנ מיר דערנאָכ די גענייגטע MN אונ דעם פּערפּענדיקוליאַר KL, וואָס זײַנענ דורכגעפירט צו דער גראָדער AB, באַשליסנ מיר, אַז KL אונ MN, אַלס אַ פּערפּענדיקוליאַר אונ אַ גענייגטע צו איינ אונ דער זעלבער גראָדער AB, שנײַדנ זיכ איבער.

באַטראַכטנ באַזונדערוויִיז די פאַלנ, ווענ די גראָדע AB אונ AC בילדנ אַ טעמפּנ אָדער אַ גראָדנ ווינקל.

5. קאָנסטרויִרנ פּאַראַלעלע גראָדע מיט דער הילפ פונ אַ ווירע אונ אַ רייסווינקל.

קענענ דורכפירנ פּאַראַלעלע גראָדע אַפנ פּאַשעטסטנ אופנ איז זייער וויכטיק באַם אויספילנ צייכענונג-אַרבעטנ. אַפנ איינפאַכסטנ אופנ ווערט אַזאַ קאָנסטרויִרונג געמאַכט מיט דער הילפ פונ אַ ווירע אונ פונ אַ רייסווינקל אונ ווערט באַגרינדעט מיט דער גלײַכקײַט פונ די שטאַפּלדיקע ווינקלענ, וואָס בילדנ זיכ באַם איבערשנײַדנ צוויי פּאַראַלעלע גראָדע מיט אַ דריטער (צייכ. 96).

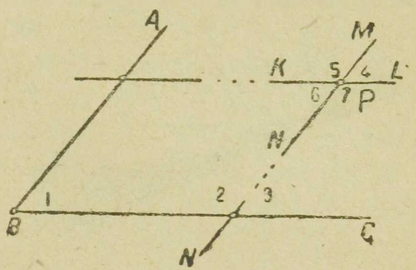
6. די אייגנשאַפט פונ ווינקלענ מיט אַנטשפּרעכיק פּאַראַלעלע זײַטנ.

טעאָרעמע. ווינקלענ מיט פּאַראַלעלע זײַטנ זײַנענ גלײַכ, אויב די דאָ-זיקע ווינקלענ זײַנענ ביידע שאַרפע אָדער ביידע טעמפּע, אָדער זיי גיבנ צוזאַמענ אַ סומע פונ $2d$, ווענ איינער פונ זיי איז אַ שאַרפער אונ דער צווייטער אַ טעמפּער.

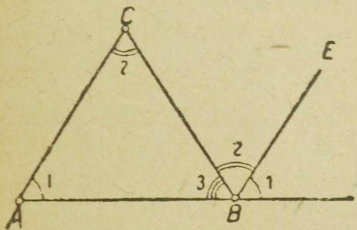
ס'איז געגעבנ: דער $\angle B$ איז אַ שאַרפער; $MN \parallel AB$ אונ $KL \parallel BC$ (צייכ. 97).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: 1) $\angle 4 = \angle 6 = \angle B$.
2) $\angle B + \angle 7 = 2d$; $\angle B + \angle 5 = 2d$.

דערווײַז. 1) מיר פֿאַרלענגערן איינע פֿון די ווינקל-זײַטן באַם פּונקט P, לאָ-
מיר זאָגן — די זײַט MN, ביז דער איבערשנײַדונג מיט דער זײַט BC; דאַן איז $\angle B = \angle 3$, אַלס שטאַפּלדיקע ווינקלען בײַ די פּאַראַלעלע AB און MN און בײַ דער סעקאַנטע BC; אָבער אויך $\angle 3 = \angle 4$ אַלס שטאַפּלדיקע ווינקלען בײַ די פּאַראַלעלע BC און KL און בײַ דער סעקאַנטע MN. אַלזאָ, דער $\angle B$ און דער $\angle 4$ זײַנען באַזונדערווײַז גלײַך צום $\angle 3$, הייסט עס, זיי זײַנען גלײַך צווישן זיך: $\angle B = \angle 4$; אָבער $\angle 4 = \angle 6$ אַלס ווערטיקאַלע, הייסט עס, אַז אויך $\angle B = \angle 6$. אַלזאָ: $\angle B = \angle 4 = \angle 6$.



צייכ. 97



צייכ. 98

2) $\angle 4 + \angle 7 = 2d$ אַלס שכייניש, און $\angle B = \angle 4$ אַלס שאַרפֿע ווינקלען מיט פּאַראַלעלע זײַטן. ווען מיר פֿאַרבײַטן אין דער ערשטער גלײַכקײַט דעם $\angle 4$ מיטן $\angle B$, וואָס איז צו אים גלײַך, באַקומען מיר $\angle B + \angle 7 = 2d$. ווען מיר פֿאַרבײַטן דערנאָך אין דער צווייטער גלײַכקײַט דעם $\angle 7$ מיטן $\angle 5$, וואָס איז צו אים גלײַך, באַקומען מיר $\angle B + \angle 5 = 2d$.

7. אייגנשאַפֿטן פֿון ווינקלען אין אַ דרײַעק.

טעאָרעמע. די סומע פֿון די אינווייניקסטע ווינקלען אין אַ באַליביקן דרײַעק איז גלײַך $2d$.

ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$ (צייכ. 98).

ס׳פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$.

דערווײַז. מירן פֿאַרלענגערן די זײַט AB פֿונעם דרײַעק ABC און פֿונעם שפּיץ B וועלן מיר דורכפֿירן אַ גראָדע BE פּאַראַלעל צו AC.

די סומע פֿון די ווינקלען באַם פּונקט B איז גלײַך $2d$, דה.

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$$

אין דער זעלבער צײַט איז אין העסקעם מיט דער קאָנסטרויִרונג: 1) $\angle 1 = \angle A$ אַלס שטאַפּלדיקע ווינקלען, 2) $\angle 2 = \angle C$ אַלס געקרייצטע ווינקלען, 3) $\angle 3 = \angle B$.

אָבער $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 2d$, הייסט עס, אַז $\angle A + \angle B + \angle C = 2a$.

קאָנסעקווענצן. 1. אין אַ דרײַעק קאָן ניט זײַן מער פֿון איין גראָדן אָדער איין טעמפּן ווינקל.

אינדערעמעסן, די סומע פֿון אַלע דרײַ ווינקלען אין אַ דרײַעק איז גלײַך $2d$, איז וויבאַלד איינער פֿון זיי איז גלײַך d אָדער גרעסער פֿאַר d, וועט די סומע פֿון די צוויי איבעריקע ווינקלען זײַן גלײַך d אָדער קלענער פֿאַר d, און דאָס הייסט, אַז יעדערער פֿון די איבעריקע 2 ווינקלען וועט זײַן קלענער פֿאַר d.

2. די סומע פון די שארפע ווינקלען אין א גראַדווינקלדיקן דרײַעק איז גלײַך d.

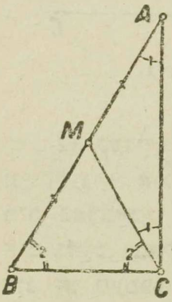
3. אויב צוויי ווינקלען פון איין דרײַעק זײַנען גלײַך צו צוויי ווינקלען פון א צווייטן דרײַעק, זײַנען אויך די דריטע ווינקלען פון די דאָזיקע דרײַעקן גלײַך צווישן זיך.

4. א דרויסנדיקער ווינקל פון א דרײַעק איז גלײַך צו דער סומע פון די אינווייניקסטע, וואָס זײַנען מיט אים ניט קיין שכײנישע (צייכ. 98) און דעריבער איז ער גרעסער פון יעדן אינווייניקסטן, וואָס איז מיט אים ניט קיין שכײנישער.

5. די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען פון א דרײַעק איז גלײַך $4d$. אינדערעמעסן, די סומע פון א דרויסנדיקן און פון אן אינווייניקסטן ווינקל בא יעדן שפּיץ פון דרײַעק איז גלײַך $2d$; הייסט עס, די סומע פון אלע דרויסנדיקע און אינווייניקסטע ווינקלען פון א דרײַעק איז גלײַך $6d$, אָבער אזוי ווי די סומע פון די אינווייניקסטע ווינקלען אליין איז גלײַך $2d$, וועט די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען זײַן גלײַך $6d - 2d = 4d$.

6. יעדער ווינקל אין א גלײַכזײַטיקן דרײַעק איז גלײַך $60°$ אָדער $\frac{2}{3}d$.

7. אין א גראַדווינקלדיקן דרײַעק איז דער קאטעט, וואָס ליגט קעגן א ווינקל פון $30°$, גלײַך צו א העלפט פון דער היפּאָ־טענוזע.



צייכ. 98a

אינדערעמעסן, אינעם גראַדווינקלדיקן דרײַעק ABC (צייכ. 98a) איז דער ווינקל A גלײַך $30°$ און דערי־בער איז דער ווינקל B גלײַך $60°$. לאָמיר אָפּלייגן אפּ דער היפּאָטענוזע BA אן אָפּשניט $BM = BC$ און פארביי־ניקן C מיט M. דאן איז דער $\triangle MBC$ א גלײַכאקסל־דיקער און $\angle BMC = \angle BCM = 60°$; הייסט עס, ער איז א גלײַכזײַטיקער און $BC = BM = MC$.

$\angle ACM = 90° - 60° = 30°$, דעריבער איז דער $\triangle CMA$ א גלײַכאקסלדיקער, ווײַל $\angle ACM = \angle MAC$, הייסט עס, $MC = MA$. דאָס באַטײַט, אז $BC=BM=MC=MA$ און $BC = \frac{1}{2} AB$.

8. אייגנשאפט פון ווינקלען מיט אנטשפּרעכיק פּערפּענדיקו־לערע זײַטן.

טעאָרעמע. ווינקלען מיט אנטשפּרעכיק פּערפּענדיקולערע זײַטן זײַנען אָדער גלײַך, ווען זיי זײַנען ביידע שארפע אָדער ביידע טעמפּע, אָדער די סומע זייערע איז $2d$, ווען איינער פון זיי איז א שארפער און דער אנדע־רער—א טעמפּער.

ס׳איז געגעבן: דער $\angle B$ איז א שארפער; $MN \perp AB$ און $KL \perp BC$ (צייכ. 99).

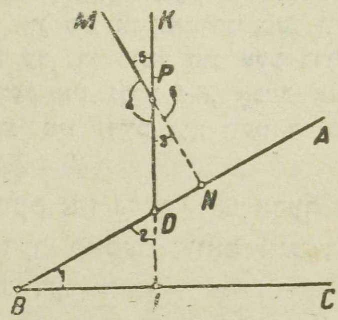
ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) $\angle B = \angle 3 = \angle 5$,

2) $\angle B + \angle 4 = 2d$ און $\angle B + \angle 1 = 2d$.

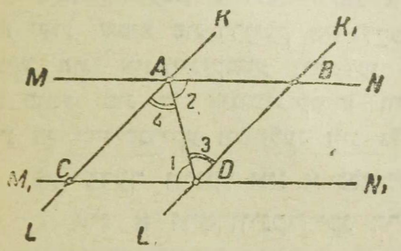
195—5

דערווײַז. 1) לאָמיר באַטראַכטן די גראָדווינקלדיקע דרײַעקן BDL און PDN; בײַ זיי איז $\angle B + \angle 2 = d$ און $\angle 3 + \angle 2 = d$; ווען מיר פאַרגלײַכן די דאָזיקע צוויי גלײַכקײַטן, קומען מיר צום באַשלוס, אַז דער $\angle B$ איז גלײַך צום $\angle 3$ בײַם פּונקט P; אַלזאָ, די דאָזיקע ווינקלען זײַנען שאַרפע און גלײַכע.

באַטראַכטן זעלבשטענדיק די פאַלן, ווען 1) דער שפּיץ פונעם ווינקל P ליגט אינווייניק אינעם געגעבענעם ווינקל B, 2) ווען ער ליגט דרויסן דעם ווינקל B אַזוי, אַז זײַנע זײַטן שנײַדן איבער די פאַרזעצונג פון די זײַטן פונעם געגעבענעם ווינקל.



צייכ. 99



צייכ. 100

2) קעדיי צו דערווײַזן, אַז $\angle B + \angle 4 = 2d$, וועלן מיר באַטראַכטן די ווינקלען 3 און 4 בײַם פּונקט P. $\angle 3 + \angle 4 = 2d$, אָבער $\angle 3 = \angle B$; ווען מיר פאַרבײַטן אין דער ערשטער גלײַכקײַט דעם $\angle 3$ מיטן $\angle B$, וואָס איז צו אים גלײַך, באַקומען מיר, אַז $\angle B + \angle 4 = \angle 2d$ דה. דער געגעבענער $\angle B$ און א טעמפּער ווינקל בײַם פּונקט P, וואָס זײַנע זײַטן זײַנען פּערפּענדיקולער צו די זײַטן פונעם $\angle B$, גיבן צוזאַמען א סומע פון $2d$.

9. אייגנשאַפט פון אָפּשניטן בײַ פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס זײַנען איבערגעשניטן מיט פּאַראַלעלע גראָדע.

1. טעאָרעמע. אָפּשניטן פון צוויי פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס זײַנען איבערגעשניטן מיט פּאַראַלעלע גראָדע, זײַנען גלײַך.

ס'איז געגעבן: $MN \parallel M_1N_1$ און $KL \parallel K_1L_1$ (צייכ. 100).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $AB = CD$ און $AC = BD$.

דערווײַז. מירן פאַרייניקן מיט א גראָדער די פּונקטן A און D און מירן באַטראַכטן די דרײַעקן ABD און ACD. די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען גלײַך, ווײַל בײַ זיי איז 1) AD א געמיינזאַמע זײַט, 2) $\angle 2 = \angle 1$ אַלס געקרייצטע ווינקלען, 3) $\angle 4 = \angle 3$ אַלס געקרייצטע ווינקלען.

פון דער גלײַכקײַט פון די דרײַעקן דרינגט אַרויס די גלײַכקײַט פון די אַנטקעגנשפּרעכיקע זײַטן, און דעריבער איז 1) $AB = CD$ אַלס זײַטן, וואָס ליגן קעגן

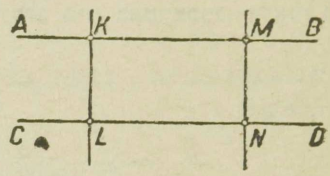
גלײַכע װינקלען 3 און 4, און 2) $AC = BD$ אלס זײַטן, װאָס ליגן קעגן גלײַכע װינקלען 1 און 2.

2. די לענג פונעם פערפענדיקולאר, װאָס איז דורכגעפירט פון א װאָסער-ניט-איז פונקט פון אײנער פון די פאראלעלע גראָדע אף דער צװײטער, באשטימט מיט זיך דעם אָפּשטאנד צװישן צװײ פאראלעלע גראָדע.

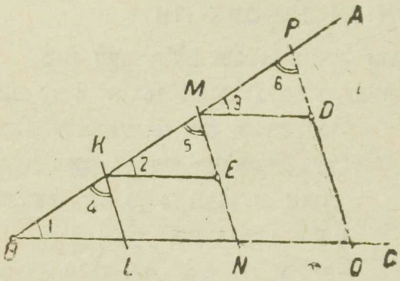
קאָנסעקװענצן. 1) פאראלעלע גראָדע שטײען אָפּ אף זײער גאנצער שטרעקע אײנע פון דער אנדערער אף אן אלצײַנעם אָפּשטאנד.

ס'איז געגעבן: $AB \parallel CD$ (צײך. 101).

ס'פאָדערט זיך דערװײַזן: $KL = MN$.



צײך. 101



צײך. 102

דערװײַז. די פערפענדיקולארן KL און MN, װאָס זײַנען דורכגעפירט צו דער גראָדער CD פון צװײ באליביקע פונקטן K און M פון דער גראָדער AB, זײַנען פאראלעל, $KL \parallel MN$. נאָר װיבאלד $KL \parallel MN$, זײַנען זײ פאראלעלע אָפּשניטן צװישן די פאראלעלע גראָדע AB און CD און, הײסט עס, זײ זײַנען גלײַך: $KL = MN$.

2) אױב אן אָפּשניט איז פאראלעל צו א גראָדער, איז די פּראָיעקציע פונעם אָפּשניט אף דער דאָזיקער גראָדער גלײַך צום אָפּשניט גופא.

אינדערעמעסן, אױב דער אָפּשניט $KM \parallel CD$ (צײך. 101), זײַנען דער אָפּשניט KM און זײַן פּראָיעקציע LN גלײַך אלס אָפּשניטן פון פאראלעלע גראָדע, איבערגעשניטענע מיט פאראלעלע גראָדע.

3. טעאָרעמע. אױב מע זאָל אף אײן זײַט פון א װינקל, אָנהײבנדיק פון זײַן שפּיץ, אָפּלײגן גלײַכע אָפּשניטן און דורך זײערע עקן דורכפירן פאראלעלע גראָדע ביזן איבערשנײַדן זיך מיט דער צװײטער זײַט פון װינקל, װעלן אף דער דאָזיקער זײַט זיך באקומען אָפּשניטן, װאָס זײַנען גלײַך צװישנאנאנד.

מירן אָפּלײגן אף דער זײַט BA פונעם װינקל ABC גלײַכע אָפּשניטן $BK = KM = MP$ (צײך. 102) און מירן דורכפירן דורך די פונקטן K, M און P פאראלעלע גראָדע: $KL \parallel MN \parallel PQ$.

ס'איז געגעבן: $BK = KM = MP$; $KL \parallel MN \parallel PQ$.

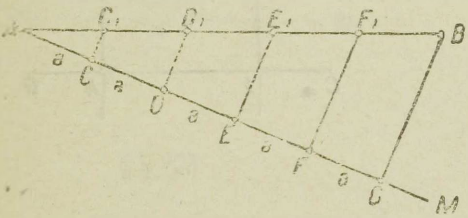
ס'פאָדערט זיך דערװײַזן: $BL = LN = NQ$.

דערווייז. מירנ דורכפירנ דורכ די פונקטנ K אונ M גראָדע $BC \parallel KE$ אונ $BC \parallel MD$ אונ מירנ באטראכטנ די באקומענע דרייעקנ BKL, KME אונ MPD. זיי זיינענ גלייכ לויט א זייט אונ צוויי ביילּיגנדיקע ווינקלענ, ווייל $BK = KM = MP$ לויט דער קאָנסטרויִרונג, $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ אונ $\angle 4 = \angle 5 = \angle 6$ אַלס שטאפּלדיקע ווינקלענ.

פונ דער גלייכקייט פונ די דרייעקנ דרינגט די גלייכקייט פונ די זייטנ, וואָס ליגנ קעגנ די גלייכע ווינקלענ — 4, 5 אונ 6, אונ דעריבער איז $BL = KE = MD$. נאָר אזויווי 1) $KE = LN$ אונ $MD = NQ$ אַלס אָפּשניטנ פונ פּאראלעלע צווישנ פּאראלעלע אונ 2) לויט דעמ, וואָס מיר האָבנ דערוויזנ, איז $KE = MD = BL$, דעריבער איז $LN = NQ = BL$.

10. צעטיילנ אנ אָפּשניט אפ גלייכע כאלאָקימ.

מיט דער הילפ פונ א צירקל אונ פונ א ווירע קאָנענ מיר צעטיילנ אנ אָפּשניט אפ 2, 4, 8, 16 אאזוו. גלייכע כאלאָקימ. איצט וועלנ מיר באטראכטנ, וויאזוי טיילט מענ אנ אָפּשניט אפ א באליביקער צאָל גלייכע כאלאָקימ, לעמאָשל אפ 3, 4, 5 ,6, 7 אאזוו.



צייכ. 103

אויפגאבע. צעטיילנ דעמ אָפּשניט AB אפ 5 גלייכע כאלאָקימ (צייכ. 103).

קאָנסטרויִרונג. לאָמיר דורכפירנ דורכנ עק A פונעמ אָפּשניט AB אונטער א באליביקנ ווינקל צו אימ א באהילפיקע גראָדע AM אונ פונעמ שפּיצ A לאָמיר אָפּלייגנ אפ איר 5 מאָל אנ אָפּשניט פונ א באליביקער גרייס $AC = a$: $AC = CD = DE = EF = FG = a$. דעמ עק G פונעמ לעצטנ אָפּשניט וועלנ מיר פאראייניקנ מיטנ עק B פונעמ געגעבענעמ אָפּשניט AB אונ דורכ די טייל-פּונקטנ C, D, E אונ F וועלנ מיר דורכפירנ גראָדע, פּאראלעלע צו BG, וועלכע צעטיילנ דעמ אָפּשניט AB אפ 5 גלייכע צווישנ זיכ טיילנ:

$$AC_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1F_1 = F_1B.$$

דערווייז, אז די קאָנסטרויִרונג איז א ריכטיקע, באזירט זיכ אפ דער פאָריקער טעאָרעמע.

פראגעס אונ איבונגענ.

1. וואָס פאר אנ אויספיר קאָנ מענ מאכנ אפנ גרונט פונ דער פאָרנאָטירונג: אפ א פלאכקייט איז געגעבנ: $AB \perp MN$ אונ $CD \perp MN$? מאכנ א צייכענונג.

2. ס'איז געגעבנ: $AB \perp KL$ אונ $AB \parallel CD$. וואָס פאר אנ אויספיר קאָנ מענ מאכנ בנוגע דער קעגנזייטיקער לאגע פונ די אָנגעוויזענע גראָדע, וואָס ליגנ אפ איינ פלאכקייט? אילוסטרירנ דעמ ענטפער מיט א צייכענונג.

3. אויסרעכענענ די גרייס פונ אלע ווינקלענ, וואָס בילדנ זיכ אויס דורכנ איבערשניידנ צוויי פּאראלעלע גראָדע מיט א סעקאנטע, אויב 1) איינער פונ די ווינקלענ איז אינ דריי מאָל גרעסער פונ זיינ שכייניש; 2) איינער פונ די ווינקלענ איז אפ $22°30'$ קלענער פונ צווייטנ; 3) איינער פונ די ווינקלענ איז 0,8 פונעמ צווייטנ; 4) די דיפערענצ פונ צוויי שכיינישע ווינקלענ מאכט אויס $37°$.

4. ס'איז געגעבנ: $AB \| CD$ אונ EF איז א סעקאנטע. ירעווייזנ, אז די ביסעקטריסעס 1) פונ צוויי גלייכע ווינקלענ בא AB אונ CD זיינענ פאראלעל; 2) פונ צוויי ניט גלייכע ווינקלענ — זיינענ פערפענדיקולער.

5. דערווייזנ, אז אינ א גראָדווינקלדיקנ דרייעק איז די זייט, וואָס ליגט קעגנ א ווינקל פונ $30°$, גלייכ צו א העלפט פונ דער היפּאָטענוזע.

6. דורכפירנ אינ א גראָדווינקלדיקנ דרייעק די ביסעקטריסעס פונ זיינע שארפע ווינקלענ אונ דערווייזנ, אז דער ווינקל צווישנ די ביסעקטריסעס איז גלייכ $135°$.

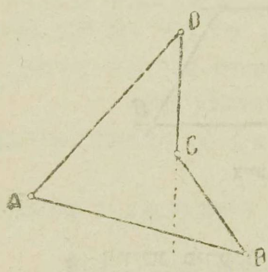
7. באשטימענ אינ א דרייעק די גרייס פונ א דרויסנדיקנ אונ פונ זיינ שכייניש אינווייניקסט ווינקל, אויב ס'איז באוווסט, אז זיי פארהאלטנ זיכ ווי $2:3$; $5:4$; $7:11$; $13:5$ אונ פארשרייבנ צו וואָס איז גלייכ די סומע פונ די צוויי איבעריקע אינווייניקסטע ווינקלענ.

8. אויסרעכענענ די גרייס פונ די ווינקלענ אינ א דרייעק, אויב ס'איז באוווסט, אז זיי פארהאלטנ זיכ ווי $3:2:1$. אָנווייזנ, צי קאָנענ די זייטנ פונ א דרייעק זיכ פארהאלטנ ווי $3:2:1$.

VIII. פירעקנ אונ פילעקנ.

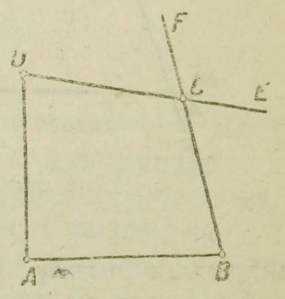
1. פירעקנ.

1. א פירעק איז א טייל פלאכקייט, וואָס איז באגרענעצט מיט א געשלאָסענער געבראָכענער ליניע, וועלכע באשטייט פונ פיר אָפּשניטנ.



צייכ. 105

די סומע פונ די לענגענ פונ אלע זייטנ פונעם פירעק הייסט פערימעטער פונעם פירעק. מע אונטערשיידט פירעקנ: דרויסנעקיקע (צייכ. 104 אונ 106) אונ ניט קיינ דרויסנעקיקע (צייכ. 105).

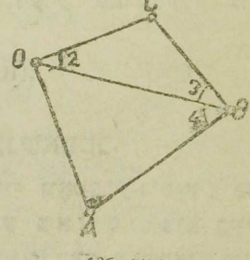


צייכ. 104

דאָ וועלנ מיר באטראכטנ בלויז דרויסנעקיקע פילעקנ.

א דרויסנעקיקער פירעק הייסט אזא פירעק, בא וועלכנ יעדערער פונ די אינווייניקסטע ווינקלענ איז קלענער פונ א פאנאנדערגעוויקלטנ, דה. קלענער פונ $2d$. א דרויסנעקיקער פילעק איז שטענדיק געבויט פונ איינ זייט צו יעטווידער זייט פונעמ פילעק.

בא יעטווידנ שפיצ פונ א פירעק קאָנ מענ, פונקט ווי בא א דרייעק, קאָנסטרוירנ צו צוויי דרויסנדיקע ווינקלענ, $\angle 1$ אונ $\angle 2$ (צייכ. 104) וועלכע זיינענ גלייכ; אָבער פונ זיי ווערט גענומענ אינ אכט, פונקט ווי בא א דרייעק, בלויז איינער. ארויסגייענדיק דערפונ, רעכנט מענ, אז א פירעק האָט נאָר פיר דרויסנדיקע ווינקלענ; דאָס אנטשפרעכט דער צאָל שפיצנ, זייטנ אונ ווינקלענ פונעמ פירעק.



צייכ. 106

2. טעאָרעמע. די סומע פונ די אינווייניקסטע ווינקלענ פונ א פירעק איז גלייכ $360°$ אָדער $4d$.

סיאיז געגעבן: א פירעק $ABCD$ (צייכ. 106).

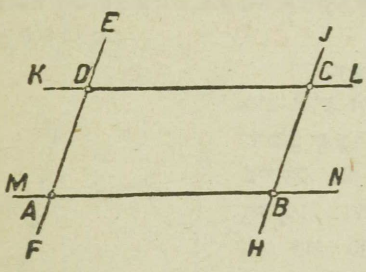
סיפאָדערט זיך דערוויַיזן: $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=4d$.

דערוויַיז. לאָמיר דורכפירן א דיאַגאָנאַל BD; זי וועט צעקלאַפּן דעם פירעק אַף צוויי דריַיעקן. אין יעדן דריַיעק איז די סומע פון די אינוויַיניקסטע ווינקלען גליַיך $2d$, הייסט עס, אין ביידע דריַיעקן, אָדער אינעם פירעק $ABCD$ איז די סומע פון די אינוויַיניקסטע ווינקלען גליַיך $2d.2=4d$.

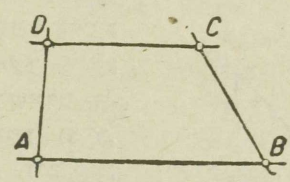
3. טעאָרעמע. די סומע פון אלע פיר דרויסנדיקע ווינקלען פון א פירעק איז גליַיך $360°$ אָדער $4d$.

אינדערעמעסן, די סומע פון א דרויסנדיקן און אן אינוויַיניקסטן ווינקל בא יעדן שפּיץ פונעם פירעק איז גליַיך $2d$; הייסט עס, די סומע פון אלע דרויסנדיקע און אינוויַיניקסטע ווינקלען בא א פירעק מאכט אויס $8d$; די סומע אָבער פון די אינוויַיניקסטע ווינקלען פון א פירעק איז גליַיך $4d$, דעריבער איז די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען גליַיך $8d-4d=4d$.

די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען בא א באַליביקן פירעק איז, באגליַיך מיט דער סומע פון זיַינע אינוויַיניקסטע ווינקלען, גליַיך $4d$.



צייכ. 108



צייכ. 107

4. צווישן פירעקן טיילן זיך אויס מיט זייער פאָרם, אָפּהענגיק פון דער לאגע פון די אנטקעגנליגנדיקע זיַיטן, צוויי מינים: די טראַפּעציע און דער פאראלעלאָגראַם.

א טראַפּעציע איז א פירעק, בא וועלכן צוויי אנטקעגנליגנדיקע זיַיטן זיַינען פאראלעל.

דער פירעק $ABCD$ איז א טראַפּעציע (צייכ. 107).

א פאראלעלאָגראַם איז א פירעק, בא וועלכן די אנטקעגנליגנדיקע זיַיטן זיַינען פּאָרוויַיז פאראלעל. ער באקומט זיך, ווען מ'רנ צוויי וואָסערע-ניט-איז פאראלעלע גראָדע KL און MN איבערשניַידן מיט צוויי אנדערע פאראלעלע גראָדע EF און JH.

דער פירעק $ABCD$ איז א פאראלעלאָגראַם (צייכ. 108).

2. פאראלעלאָגראַם און זיַינע אייגנשאפטן.

1. באזיס און הייך פון א פאראלעלאָגראַם. צוויי וואָסערע-ניט-איז פאראלעלע זיַיטן פונעם פאראלעלאָגראַם רעכנט מען פאר זיַינע באזיסן, צום ביַישפּיל AB און DC אינעם פאראלעלאָגראַם $ABCD$ (צייכ. 109); דער אָפּשטאנד צווישן

זײ, וואָס ווערט אויסגעמאָסטנ מיט א פערפענדיקוליאר, הײסט די הײכ פונעמ פאַראַלעלאָגראַמ; די הײכ פירט מענ געװײנלעכ דורכ אײנעמ פונ די שפּיצנ פונעמ פאַראַלעלאָגראַמ; DE אונ DF זײַנענ צװײ פאַרשײדענע הײכנ פונעמ פאַראַלעלאָגראַמ $ABCD$.

2. אײגנשאַפט פונ די זײַטנ פונ א פאַראַלעלאָגראַמ.

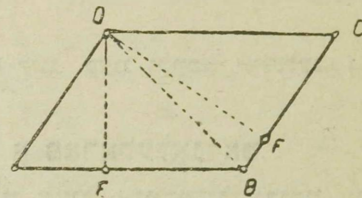
טעאָרעמע. די אנטקעגנליגנדיקע זײַטנ אינ א פאַראַלעלאָגראַמ זײַנענ פאָרװײַז גלײַכ.

ס'איז געגעבנ: $AB=DC$, $AD=BC$.

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $AB=DC$, $AD=BC$.

די ריכטיקײַט פונ דער דאָזיקער טעאָרעמע דרינגט דירעקט ארויס פונ דער טעאָרעמע: אָפשניטנ פונ פאַראַלעלע צווישנ פאַראַלעלע זײַנענ גלײַכ.

3. אײגנשאַפט פונ די ווינקלענ פונ א פאַראַלעלאָגראַמ.



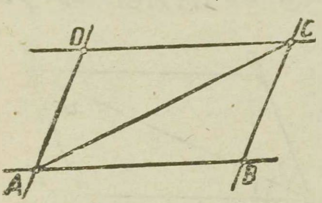
צײכ. 109

טעאָרעמע. די אנטקעגנליגנדיקע ווינקלענ אינ א פאַראַלעלאָגראַמ זײַנענ גלײַכ, אונ די ווינקלענ, וואָס ליגנ בא אײנ זײַט, גיבנ צוזאַמענ א סומע פונ $2d$, דה. זײ זײַנענ פאַרגאַנצ-ווינקלענ.

די ריכטיקײַט פונ דער דאָזיקער טעאָרעמע דרינגט ארויס פונ דער טעאָרעמע וועגנ די אײגנשאַפטנ פונ ווינקלענ מיט אנטשפרעכיק פאַראַלעלע זײַטנ.

קאָנסעקווענצ. אויב אײנער פונ די ווינקלענ אינ א פאַראַלעלאָגראַמ איז א גראַדער, זײַנענ אַלע זײַנע ווינקלענ גראַדע.

אפנ גרונט פונ די אויסגערעכנטע אײגנשאַפטנ פונ די ווינקלענ אינ א פאַראַלעלאָגראַמ, איז גענוג צו וויסנ די גרײס פונ אײנ ווינקל, קעדײ מע זאָל קאָנענ באַשטימענ די גרײס פונ יעדנ ווינקל באַזונדער.



צײכ. 110

4. אײגנשאַפט פונ די דיאַגאָנאַלנ אינ א פאַראַלעלאָגראַמ.

טעאָרעמע. א דיאַגאָנאַל טײלט דעמ פאַראַלעלאָגראַמ אפ צוויי גלײַכע דרײַעקנ.

ס'איז געגעבנ: $ABCD$ איז א פאַראַלעלאָגראַמ; AC איז זײַנ דיאַגאָנאַל (צײכ. 110).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\triangle ABC = \triangle ACD$.

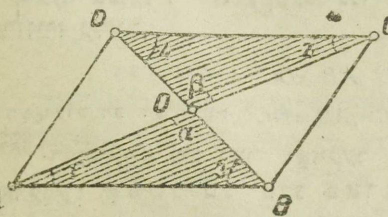
דערווײַז. די דרײַעקנ ABC אונ ACD פאַרמאָגנ צו דרײַ אנטשפרעכיק גלײַכע זײַטנ: $AB=DC$ אונ $AD=BC$ אלס אנטקעגנליגנדיקע זײַטנ פונ א פאַראַלעלאָגראַמ, אונ די דיאַגאָנאַל AC איז זײער געמײנזאַמע זײַט, דעריבער איז דער $\triangle ABC$ גלײַכ צומ $\triangle ACD$.

טעאָרעמע. אינ א פאַראַלעלאָגראַמ טײלנ זיכ די דיאַגאָנאַלנ אינעמ פונקט, וו זײ שנײַדנ זיכ קעגנזײַטיק איבער, אפדערהעלפט.

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז א פאראלעלאָגראם; AC און BD זײַנען דיאַגאָנאַלן (צייכ. 111).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $AO=OC$ און $BO=OD$.

דערווײַז. לאָמיר באַטראַכטן די דרײַעקן AOB און DOC; $AB=DC$ אלס אנטקעגנליגנדיקע זײַטן פון א פאראלעלאָגראם, $\angle 1=\angle 2$ און $\angle 4=\angle 3$ אלס אינווייניקסטע געקרייצטע ווינקלען, הייסט עס, די דרײַעקן זײַנען גלײַך לויט א זײַט און לויט צוויי אנטשפרעכיק גלײַכע ווינקלען, וואָס ליגן בא דער דאָזיקער זײַט: $\triangle AOB=\triangle DOC$; וויבאלד די דרײַעקן זײַנען גלײַך, דרינגט דערפון, אז ס'זײַנען אויך גלײַך די אנטשפרעכיק אויסגעשטעלטע עלעמענטן, און דעריבער איז $AO=OC$ אלס זײַטן, וואָס ליגן אין גלײַכע דרײַעקן קעגן גלײַכע ווינקלען, $\angle 3$ און $\angle 4$; $OD=BO$ אלס זײַטן, וואָס ליגן קעגן גלײַכע ווינקלען, $\angle 1$ און $\angle 2$.



צייכ. 111

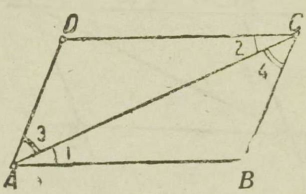
3. סימאָנים, וואָס באַשטימען א פאראלעלאָגראם.

1. **טעאָרעמע.** אויב אין א פירעק זײַנען צוויי אנטקעגנליגנדיקע זײַטן גלײַך און פאראלעל, איז אזא פירעק א פאראלעלאָגראם, דה. די איבעריקע צוויי זײַטן זײַנען אויך פאראלעל.

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז א פירעק; $AB=DC$ און $AB \parallel DC$ (צייכ. 112).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $AD \parallel BC$.

דערווײַז. לאָמיר דורכפירן א דיאַגאָנאַל AC און באַטראַכטן דעם $\triangle ABC$ און דעם $\triangle ACD$. אין די דאָזיקע דרײַעקן איז 1) AC א געמיינזאמע זײַט; 2) $AB=DC$ לויטן באַדינג; 3) $\angle 1=\angle 2$, און דעריבער איז $\triangle ABC=\triangle ACD$; פון דער גלײַכקייט פון די דרײַעקן דרינגט, אז $\angle 4=\angle 3$; דאָס זײַנען אינווייניקסטע געקרייצטע ווינקלען בא די גראָדע AD און BC און בא דער סעקאַנטע AC, דעריבער איז $AD \parallel BC$.



צייכ. 112

2. **טעאָרעמע.** אויב אין א פירעק זײַנען די אנטקעגנליגנדיקע זײַטן פאָרווײַז גלײַך, שטעלט דער פירעק מיט זיך פאָר א פאראלעלאָגראם, דה. זײַנע זײַטן זײַנען פאָרווײַז פאראלעל.

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז א פירעק; $AB=DC$ און $AD=BC$ (צייכ. 112).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $AB \parallel DC$ און $AD \parallel BC$.

דערווײַז. לאָמיר דורכפירן א דיאַגאָנאַל AC און באַטראַכטן דעם $\triangle ABC$ און דעם $\triangle ACD$; זיי זײַנען גלײַך: בא זיי איז AC א געמיינזאמע זײַט, $AB=CD$ און $AD=BC$. וויבאלד די דרײַעקן זײַנען גלײַך, דרינגט דערפון

די גלײַכקײַט פון זײערע אנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע ווינקלען, נעמלעך: $\angle 1 = \angle 2$; די דאָזיקע ווינקלען זײַנען אינווייניקסטע געקרייצטע, דעריבער איז $AB \parallel DC$; אויסער דעם איז $\angle 3 = \angle 4$ און דעריבער איז $AD \parallel BC$.

אלזאָ, $AD \parallel BC$ און $AB \parallel CD$, דה. די אנטקעגנליגנדיקע זייטן פונעם פירעק $ABCD$ זײַנען פּאָרווײַז פּאראלעל; הייסט עס, אז אזא פירעק איז א פּאראלעלאָ-גראם.

3. טעאָרעמע. אויב אין א פירעק טיילן זיך די דיאגאָנאלן קעגנזײַטיק אפּדערהעלפט, איז אזא פירעק א פּאראלעלאָגראם, דה. די אנטקעגנליגנ-דיקע זײַטן זײַנען פּאָרווײַז פּאראלעל (צייכ. 111).

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז א פירעק; AC און BD זײַנען דיאגאָנאלן; $AO = OC$ און $BO = OD$.

ס'פּאָדערט זיך דערווײַזן: $AD \parallel BC$ און $AB \parallel CD$, דה. $ABCD$ איז א פּאראלעלאָגראם.

דערווײַז. מירן באטראכטן די דרײַעקן AOB און DOC, אין וועלכע עס גייען ארײַן די אָפּשניטן פון די דיאגאָנאלן AO און OC, BO און OD און די זײַטן AB און DC. אין די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען: $AO = OC$ און $BO = OD$ לויטן באדינג און $\angle \alpha = \angle \beta$ אלס ווערטיקאלע ווינקלען; הייסט עס, $\triangle AOB = \triangle DOC$; פון דער גלײַכקײַט פון די דרײַעקן דרינגט ארויס די גלײַכקײַט פון די ווינקלען, וואָס ליגן קעגן גלײַכע זײַטן, נעמלעך: $\angle 1 = \angle 2$ און $\angle 3 = \angle 4$; די דאָזיקע ווינקלען זײַנען געקרייצטע, און דעריבער איז $AB \parallel DC$. באטראכטן מיר די דרײַעקן AOD און COB, זעען מיר, אז זיי זײַנען גלײַך און $AD \parallel CB$.

אלזאָ, $AD \parallel BC$ און $AB \parallel CD$ — די אנטקעגנליגנדיקע זײַטן פונעם פירעק $ABCD$ זײַנען פּאָרווײַז פּאראלעל, $ABCD$ איז א פּאראלעלאָגראם.

דער אָנגעוויזענער סימען ווערט אויסגענוצט באַם קאָנסטרויִרן א פּאראלעלאָ-גראם, ווען ס'זײַנען געגעבן זײַנע צוויי דיאגאָנאלן m און n און דער $\angle \alpha$, וואָס איז צווישן זיי אײַנגעשלאָסן. באנוצנדיק זיך מיט אָט דער אייגנשאפט, קאָנסטרויִרט מען א פּאראלעלאָגראם מיט דער הילף פון א צירקל און א ווירע, און מע דארף ניט אָנקומען צום קאָנסטרויִרן פּאראלעלע.

4. וויאזוי קאָנסטרויִרט מען א פּאראלעלאָגראם.

1. אויפגאבע: 1. קאָנסטרויִרן א פּאראלעלאָגראם לויט זײַן דיאגאָנאל m, וואָס איז גלײַך 10 סמ., און זײַנע זײַטן $a = 6$ cm און $b = 7$ cm.

קאָנסטרויִרונג. קאָנסטרויִרן א דרײַעק לויט זײַנע דרײַ זײַטן — a, b און m, דערנאָך דערגאנצן אים ביז א פּאראלעלאָגראם.

אויפגאבע 2. קאָנסטרויִרן א פּאראלעלאָגראם לויט זײַנע זײַטן: $a = 5$ cm, $b = 4$ cm און דעם $\angle C = 40°$.

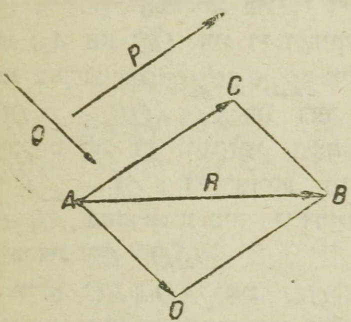
קאָנסטרויִרונג. אפריִער קאָנסטרויִרן א דרײַעק לויט זײַנע צוויי זײַטן a און b און לויטן ווינקל C, וואָס איז אײַנגעשלאָסן צווישן די געגעבענע זײַטן, און דערנאָך דערגאנצן דעם דרײַעק ביז א פּאראלעלאָגראם.

אויפגאבע 3. קאָנסטרויִרן א פאראלעלאָגראם לויט זײַנע צוויי דיִאַגאָנאלן: $m=6$ cm און $n=10$ cm און לויטן ווינקל צווישן זיי $\alpha=50°$.

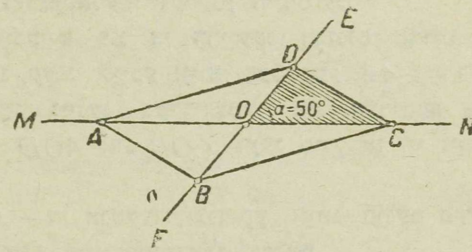
קאָנסטרויִרונג. מיר וועלן דורכפירן (צייכ. 113) צוויי גראָדע MN און EF, וואָס שנײַדן זיך איבער אונטער א ווינקל פון 50°, און אפ יעדער גראָדער וועלן מיר אָפּלייגן פון ביידע זײַטן פונעם איבערשנײַד-פונקט O אָפּשניטן, אנט-שפרעכיק גלײַכע צו די העלפטן פון די געגעבענע דיִאַגאָנאלן, דערנאָך וועלן מיר פארייניקן די עקן פון די באקומענע אָפּשניטן: דער באקומענער פירעק $ABCD$ איז א פאראלעלאָגראם.

אויפגאבע 4. קאָנסטרויִרן א פאראלעלאָגראם לויט זײַנע דיִ-אַגאָנאלן m און n און דער זײַט a.

קאָנסטרויִרונג. די לייזונג פון דער אופגאבע באשטייט אין קאָנסטרויִרן א דרײַעק לויט דרײַ זײַטן: a, $\frac{m}{2}$ און $\frac{n}{2}$.



צייכ. 114



צייכ. 113

לייזן די דאָזיקע אופגאבע איז מעגלעך, ווען $\frac{m}{2}-\frac{n}{2}<a<\frac{m}{2}+\frac{n}{2}$.

אופגאבע 5. קאָנסטרויִרן א פאראלעלאָגראם לויט זײַן דיִא-גאָנאל R, וואָס איר לענג און איר ריכטונג זײַנען געגעבן, און לויט די געגעבענע ריכטונגען P און Q פון זײַנע זײַטן. (צייכ. 114).

קאָנסטרויִרונג. באם עק A פון דער דיִאַגאָנאל $AB=R$, וואָס איר לענג און איר ריכטונג זײַנען געגעבן, פירן מיר דורך גראָדע, פאראלעלע צו די געגעבענע ריכטונגען פון די זײַטן. נאָכדעם פירן מיר דורכן צווייטן עק פון דער דיִאַגאָנאל, דורכן פונקט B, גראָדע, פאראלעלע צו די זעלבע צוויי ריכטונגען. די איבערשנײַד-פונקטן פון די קאָנסטרויִרטע גראָדע וועלן באשטימען די צוויי איבעריקע שפיצן פונעם פאראלעלאָגראם.

2. דאָס זײַנען די גרונט-פאלן פון קאָנסטרויִרן פאראלעלאָגראמען. מיטן קאָנ-סטרויִרן איינעם פון די דרײַעקן, אפ וועלכע דער פאראלעלאָגראם ווערט צע-קלאָפּט דורך איין דיִאַגאָנאל אָדער דורך ביידע דיִאַגאָנאלן, ווערט באשטימט דער גאנצער פאראלעלאָגראם.

דערפון דרינגען ארויס פאָלגנדיקע סימאָנים פון גלײַכקײַט פון פּאַראַלעלאָ־
גראַמען.

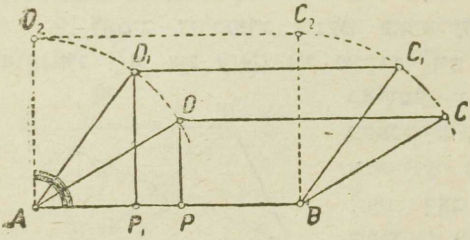
פּאַראַלעלאָגראַמען זײַנען גלײַך, אויב ס׳זײַנען גלײַך זייערע עלעמענטן:

1) צוויי שכײנישע זײַטן און דער ווינקל צווישן זיי,

2) ביידע דיאַגאָנאַלן און דער ווינקל צווישן זיי,

3) צוויי שכײנישע זײַטן און א דיאַגאָנאַל,

4) ביידע דיאַגאָנאַלן און א זײַט.



צייכ. 115

מע מוז געדענקען, אז אפּ צו באַשטימען די ווינקלען פון א פּאַראַלעלאָגראַם איז גענוג צו וויסן די רייס נאָר פון איינעם פון זיי.

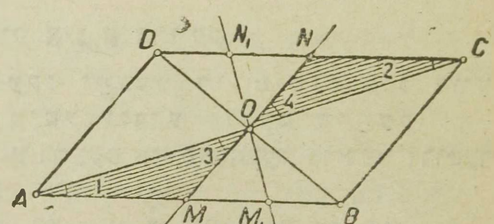
3. אויפגאַבע. אויספאָרשן מיט דער הילף פון א שאַרניר־פּאַראַלעלאָגראַם $ABCD$ (צייכ. 115), ווי ענדערט זיך די הייך DP און דער פּערימעטער פונעם פּאַראַלעלאָגראַם, ווען עס ענדערט זיך זײַנער א ווינקל, אשטייגער דער $\angle A$.

אויספאָרשונג. ווען עס ענדערט זיך דער ווינקל A פונעם פּאַראַלעלאָגראַם, ענדערט זיך אויך זײַן הייך DP; זי פאַרגרעסערט זיך, אויב דער ווינקל A שטײַגט ביז $90°$, און פאַרקלענערט זיך, ווען דער $\angle A$ פאַלט ביז $0°$; ווען דער ווינקל A איז גלײַך $0°$, איז שוין קיין פּאַראַלעלאָגראַם ניט פאַראַן, די זײַטן זײַנע פאַלן צונויף און דער פּאַראַלעלאָגראַם ווערט פאַרוואַנדלט אין אן אָפּשניט, וואָס זײַן לענג איז גלײַך צו דער סומע פון צוויי שכײנישע זײַטן פונעם פּאַראַלעלאָגראַם.

ווען דער ווינקל A איז גלײַך $90°$, וועלן אַלע ווינקלען פונעם פּאַראַלעלאָגראַם זײַן גראָדע, און די הייך DP וועט זײַן די גרעסטע. דער פּערימעטער אָבער פונעם פּאַראַלעלאָגראַם ענדערט זיך ניט בא די אַלע פאַלן, דה. ער בלײַבט א באַשטענדיקער.

5. צענטראַלע סימעטריע.

1. דורך דעם איבערשנײַד־פּונקט O פון זײַנע דיאַגאָנאַלן איז אינעם פּאַראַלעלאָגראַם $ABCD$ (צייכ. 116) דורכגעפירט א וואָסער־ניט־איז גראָדע, וועלכע שנײַדט איבער צוויי פּאַראַלעלע זײַטן אין די פּונקטן M און N. דערווײַזן, אז דער אָפּשניט MN טיילט זיך אינעם פּונקט O אָפּדערהעלפט.



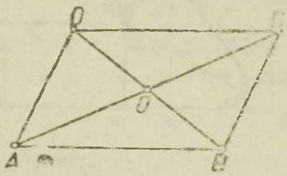
צייכ. 116

אינדערעמעסן, די דרײַעקן AOM און ONC זײַנען גלײַך, ווײַל $AO = OC$,

$\angle 2 = \angle 1$ אלס געקרייצטע און $\angle 4 = \angle 3$ אלס ווערטיקאלע; פונ דער גלײַכ־קײַט פונ די דרײַעקנ דרינגט, אז $OM = ON$.

אלזאָ, דער אָפּשניט פונ א באליביקער סעקאנטע, וואָס איז אײַנגעשלאָסנ צווישנ די זײַטנ פונ א פּאראלעלאָגראמ אונ גייט דורכ דורכנ איבערשנײַד־פּונקט O פונ די דיאגאָנאלנ פונעמ פּאראלעלאָגראמ, טיילט זיכ אינעמ דאָזיקנ פּונקט אפּ־גלײַכ.

2. לאָמיר דורכפירנ אינעמ פּאראלעלאָגראמ $ABCD$ (צייכ. 117) זײַנע די־אגאָנאלנ AC אונ BD; זיי שנײַדנ זיכ איבער אינעמ פּונקט O; מיר וועלנ באקומענ 4 דרײַעקנ. לאָמיר א דריי טאָנ אפּ דער פלאכקײַט פונ דער צייכענונג אײנעמ פונ זיי, אשטייגער דעמ $\triangle AOB$, ארומ דעמ פּונקט O אפּ 180°, דאנ וועט דער שפּיצ B צונויפפאלנ מיטנ שפּיצ D $(OB = OD)$ אונ דער שפּיצ A וועט צו־נויפפאלנ מיטנ שפּיצ C $(OA = OC)$; אלע דרײַ שפּיצנ פונ די דרײַעקנ AOB אונ COD זײַנענ צונויפגעפאלנ; הייסט עס, די דרײַעקנ גופא זײַנענ



צייכ. 117

אויכ צונויפגעפאלנ. דאָס איז אויכ גילטיק פאר די דרײַעקנ BOC אונ DOA אונ פאר די דרײַעק ABC אונ CDA, אונ אויכ פאר די פירעקנ $MBCN$ אונ $NDAM$ (צייכ. 116).

3. צוויי פּונקטנ A אונ C, B אונ D, צוויי אָפּשניטנ AB אונ CD, BC אונ DA, AO אונ OC, OB אונ OD אונ צוויי פיגורנ $\triangle AOB$ אונ $\triangle COD$, $\triangle ABC$ אונ $\triangle CDA$ הייסנ צענטראל־סימעטרישע לעגאבע דעמ פּונקט O, אויב באַמ קערנ זיי ארומ דעמ דאָזיקנ פּונקט אפּ 180° וועט אײנער פונ זיי צונויפפאלנ מיט דעמ אנדערנ.

א פיגור הייסט א צענטראל־סימעטרישע, ווענ, אז מע וועט זי א קער טאָנ ארומ דעמ געגעבענעמ פּונקט O אפּ 180°, וועט יעדער טייל אירער פארנעמענ דאָס אָרט, וואָס עס האָט פריִער פארנומענ דער צווייטער טייל. דער פּונקט O, ארומ וועלכנ די פיגור גיט זיכ א קער אפּ 180°, הייסט סימעטריע־צענטער.

4. א פּאראלעלאָגראמ איז א צענטראל־סימעטרישע פיגור מיטנ סימעטריע־צענטער אינעמ פּונקט, ווו עס שנײַדנ זיכ איבער זײַנע דיאגאָנאלנ.

5. א פּאראלעלאָגראמ האָט ניט קײנ סימעטריע־אקסנ.

6. מיטל־ליניע אינ א דרײַעק.

אנ אָפּשניט, וואָס זײַנע עקנ זײַנענ די מיטנס פונ צוויי זײַטנ אינ א דרײַעק, הייסט מיטל־ליניע פונעמ דרײַעק.

טעאָרעמע. די מיטל־ליניע אינ א דרײַעק איז פּאראלעל צו דער דריטער זײַט אונ איז גלײַכ צו א העלפט פונ איר.

ס׳איז געגעבנ: ABC איז א דרײַעק; $AE = EC$ אונ $BD = DC$ (צייכ. 118).

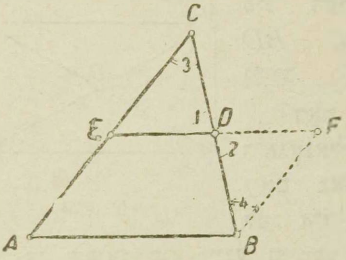
ס׳פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $ED \parallel AB$ אונ $ED = \frac{1}{2} AB$.

דערווײַז. אַפּ דער פּאָרזעצונג פון ED לייגן מיר אָפּ אַן אָפּשניט DF, וואָס איז גלײַך צו ED, און דעם פונקט F פֿאַרייניקן מיר מיטן פונקט B. מיר באַקומען אַ $\triangle BDF$, וואָס איז גלײַך צום $\triangle CED$, ווײַל $CD=BD$, $ED=DF$ און $\angle 1=\angle 2$. פון דער גלײַכקײַט פון די דרײַעקן דרינגט, אַז $\angle 3=\angle 4$, און דעריבער איז $EC \parallel BF$, דה. $AC \parallel BF$, כוץ דעם איז $AE=EC=BF$, הייסט עס, דער פירעק $ABFE$ איז אַ פּאַראַלעלאָגראַם, ווײַל זײַנע אַנטקעגנליגנדיקע זײַטן BF און AE זײַנען גלײַך און פּאַראַלעל. הייסט עס:

$AB \parallel EF$ און $EF=AB$,

אָבער $EF=ED+DF=2ED=AB$,

און דעריבער איז $ED=\frac{1}{2}AB$.

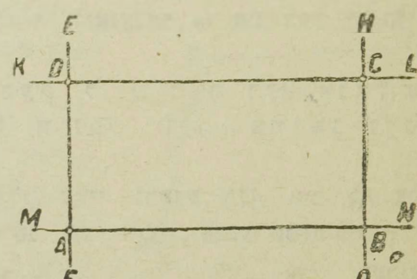


צייכ. 118

7. גראָדעק. זײַנע אייגנשאַפטן.

1. ווען מע זאָל דורכפירן צוויי פּאַראַלעלע גראָדע KL און MN און מע זאָל זיי איבערשנײַדן אונטער אַ גראָדן ווינקל מיט צוויי פּאַראַלעלע גראָדע EF און HQ (צייכ. 119), וועלן די אָפּשניטן צווישן די פּאַראַלעלע גראָדע בילדן אַ פּאַראַלעלאָגראַם $ABCD$ מיט גראָדע ווינקלען; אַזאַ פּאַראַלעלאָגראַם הייסט גראָדעק. אַלזאָ,

אַ גראָדעק איז אַ גראָדווינקלדיקער פּאַראַלעלאָגראַם.



צייכ. 119

אַ גראָדעק, וואָס ער איז גלײַכצײַטיק אויך אַ פּאַראַלעלאָגראַם, פּאַרמאָגט דעריבער אַלע אייגנשאַפטן פון אַ פּאַראַלעלאָגראַם.

אין אַ גראָדעק: 1) זײַנען די אַנטקעגנליגנדיקע זײַטן גלײַך; 2) די אַנטקעגנליגנדיקע ווינקלען זײַנען גלײַך און יעדערער פון זיי איז אַ גראָדער ווינקל; 3) די דיאַגאָנאַל צעקלאַפּט אים אויף צוויי גלײַכע גראָדווינקלדיקע דרײַעקן; 4) די דיאַגאָנאַלן טיילן זיך קעגנזײַטיק אַפּדערהעלפט; 5) דער איבערשנײַד-פונקט פון זײַנע דיאַגאָנאַלן איז זײַן סימעטריע-צענטער.

איינע פון די זײַטן אין אַ גראָדעק הייסט זײַן באַזיס; די זײַט, וואָס איז אַ שכײַנישע מיטן באַזיס פונעם גראָדעק, הייסט די הייך פונעם גראָדעק.

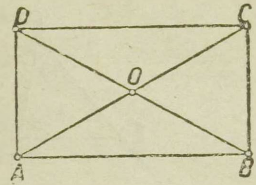
2. טעאָרעמע. די דיאַגאָנאַלן פון אַ גראָדעק זײַנען גלײַך צווישנאַנאַנד.

ס׳איז געגעבן: $ABCD$ איז אַ גראָדעק; AC און BD זײַנען דיאַגאָנאַלן (צייכ. 120).

ס׳פּאָדערט זיך דערווײַזן: $AC=BD$.

דערווײַז. דער $\triangle ABD$ אונ דער $\triangle ACD$ זײַנענ גראָדווינקלדיקע אונ זײַנענ גלײַכ לויט צוויי אנטשפּרעכיק גלײַכע קאַטעטנ: בא זיי איז דער קאַטעט AD א געמיינזאמער אונ $AB = CD$ אַלס אנטקעגנליגנדיקע זײַטנ פונ א גראָדעק.

פונ דער גלײַכקײַט פונ די דרײַעקנ דרינגט, אַז $AC = BD$, דה. די דיִאגאָנאַלנ פינעמ גראָדעק זײַנענ גלײַכ.



צייכ. 120

דאָס איז פאַר א פּאַראַלעלאָגראַמ ניט גילטיק: די דיִאגאָנאַלנ זײַנע זײַנענ ניט גלײַכ, אונ די דיִאגאָנאַל, וואָס פאַרייניקט די שפּיצנ פונ זײַנע שאַרפע ווינקלענ איז גרעסער פאַר דער דיִאגאָנאַל, וואָס פאַרייניקט די שפּיצנ פונ זײַנע טעמפּע ווינקלענ.

8. וויאַזוי קאָנסטרויִרט מענ א גראָדעק.

אפ צו קאָנסטרויִרנ א פּאַראַלעלאָגראַמ דאַרפ מענ וויסנ דרײַ עלעמענטנ זײַנע.

אפ צו קאָנסטרויִרנ אָבער א גראָדעק, וואָס ער איז א פּאַראַלעלאָגראַמ מיט גראָדע ווינקלענ, דאַרפ מענ בלויז וויסנ זײַנע צוויי לינעאַלע עלעמענטנ; אָנווײַזנ פאַר א גראָדעק זײַנ דריטנ עלעמענט — דעמ ווינקל צווישנ זײַנע שכייניש‑ע זײַטנ — איז איבעריק, ווײַל אינ א גראָדעק זײַנענ אַלע ווינקלענ גראָדע.

א גראָדעק קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ, אויב ס'זײַנענ געגעבנ:

1) צוויי שכיינישע זײַטנ a אונ b, 2) די דיִאגאָנאַל m אונ איינע פונ די זײַטנ, 3) איינע פונ די זײַטנ, a אָדער b, אונ דער ווינקל, וועלכנ עס בילדעט די דיִאגאָנאַל מיט דער געגעבענער זײַט, 4) די דיִאגאָנאַל m אונ דער ווינקל α צווישנ די דיִאגאָנאַלנ.

אויפגאַבע. קאָנסטרויִרנ א גראָדעק לויט דער דיִאגאָנאַל m, וואָס איז גלײַכ 8 סמ., אונ דעמ ווינקל $\alpha = 30°$ צווישנ זײַנע דיִאגאָנאַלנ.

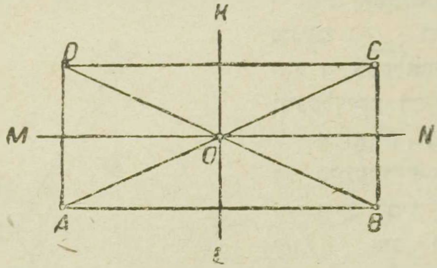
קאָנסטרויִרונג. מירנ איבערשנײַדנ צוויי גראָדע MN אונ KL אונטערנ ווינקל $\alpha = 30°$ אונ פונ ביידע זײַטנ פונ זייער איבערשנײַד‑פונקט O וועלנ מיר אָפּלייגנ אָפּשניטנ, וואָס זײַנענ גלײַכ $\frac{m}{2} = \frac{8}{2} = 4$ cm, אונ דערנאָכ וועלנ מיר פאַרייניקנ צווישנ זיכ מיט גראָדע די עקנ פונ די אָפּשניטנ.

דער פירעק, וואָס האָט זיכ באַקומענ דורכ אזא קאָנסטרויִרונג, איז א גראָדעק.

9. סימעטריע‑אַקסנ פונ א גראָדעק.

ווענ מע זאָל דורכפירנ דורכנ איבערשנײַד‑פונקט O פונ די דיִאגאָנאַלנ AC אונ BD אינעמ גראָדעק $ABCD$ גראָדע KL אונ MN (צייכ. 121), וואָס זײַנענ אַנטשפּרעכיק פּערפּענדיקולער צו זײַנע זײַטנ, אונ דערנאָכ איבערבייגנ די צייכענונג לויט איינער פונ די גראָדע — KL אָדער MN, וועט איינ טייל פונ דער צייכענונג אײַנאַנצנ צונויפאַלנ מיטנ צווייטנ טייל פונ דער צייכענונג, הייסט עס,

1) די גראָדע KL און MN, וואָס זײַנען פּערפּענדיקולער צו די זײַטן פֿונעם גראָדעק און וואָס גייען דורכן איבער־שנײַד־פּונקט פֿון די דיאַגאָנאַלן, זײַנען זײַנע סימעטריע־אַקסן;



צייכ. 121

2) א גראָדעק האָט צוויי סימעטריע־אַקסן.

פון דער אייגנשאפט, וואָס די סימעטריע־אקס אין א גראָדעק פארמאָגט, דרינגט, אז זי טיילט זײַנע אנטקעגנליגנדיקע זײַטן אפדערהעלפט; דער אָפשניט, וואָס פאראייניקט די מיטנס פון די אנטקעגנליגנדיקע זײַטן אין א גראָדעק, הייסט זײַן מיטל־ליניע; די מיטל־ליניע איז גלײַך צו דער זײַט פונעם גראָדעק, וואָס איז צו איר פאראלעל.

10. ראָמב און זײַנע אייגנשאפטן.

1. א פאראלעלאָגראם, וואָס אלע זײַנע זײַטן זײַנען גלײַך, הייסט ראָמב.

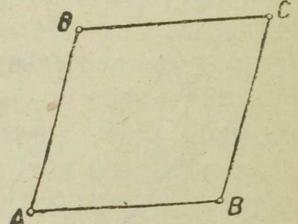
א ראָמב איז א גלײַכזײַטיקער פאראלעלאָגראם.

פון דער דעפיניציע פון א ראָמב (צייכ. 122) דרינגט:

1) $AB \parallel CD$ און $AD \parallel BC$;

2) $AB = BC = CD = AD$.

2. אייגנשאפטן פון א ראָמב. א ראָמב איז א גלײַכזײַטיקער פאראלעלאָגראם און ער פארמאָגט אלע אייגנשאפטן פון א פאראלעלאָגראם.



צייכ. 122

אין א ראָמב: 1) זײַנען די אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען גלײַך, דערבײַ זײַנען זיי אָדער ביידע שארפע אָדער ביידע טעמפע; 2) די ווינקלען, וואָס ליגן בײַ יעדער איינער פון זײַנע זײַטן, זײַנען פארגאנצנדיקע, ד. ה. זייער סומע איז $2d$; 3) די דיאַגאָנאַל טיילט אים אפ צוויי גלײַכע און דערבײַ גלײַכאקסלדיקע דרײַעקן; 4) די דיאַגאָנאַלן טיילן זיך קעגנזײַטיק אפדערהעלפט; 5) דער איבערשנײַד־פונקט פון זײַנע דיאַגאָנאַלן איז זײַן סימעטריע־צענטער.

3. טעאָרעמע. די דיאַגאָנאַלן פון א ראָמב: 1) שנײַדן זיך איבער אונטער א גראָדן ווינקל, ד. ה. זיי זײַנען קעגנזײַטיק פערפענדיקולער; 2) זיי טיילן זײַנע ווינקלען אפדערהעלפט; 3) זיי זײַנען זײַנע סימעטריע־אַקסן; 4) זיי צעקלאפן אים אפ 4 גלײַכע גראָדווינקלדיקע דרײַעקן.

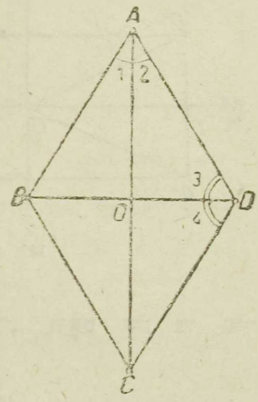
ס׳איז געגעבן: $ABCD$ איז א ראָמב. AC און BD זײַנען זײַנע דיאַגאָנאַלן (צייכ. 123).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) $AC \perp BD$; 2) $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$;

3) AC און BD זײַנען די סימעטריע־אַקסן;

4) $\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COD = \triangle DOA$.

דערווײַז. לאָמיר באַטראַכטן דעם $\triangle ABD$; ער איז א גלײַכאַקסלדיקער: לויטן באַדינג איז $AB = AD$. דערפֿון דרינגט, אַז די דיִאַגאָנאַל AC פֿונעם ראָמב וואָס גייט דורך אין דעם דאָזיקן דרײַעק דורך דעם מיטן פֿון דער זײַט BD, איז די מעדיִאַנע פֿון דעם דרײַעק ADB, די ביסעקטריסע פֿונעם $\angle A$, די הייך פֿונעם דרײַעק, זײַן סימעטריע-אַקס און זי צעקלאַפּט דעם $\triangle ABD$ אַף צוויי גלײַכע גראָד-ווינקלדיקע דרײַעקן — AOB און AOD.



צייכ. 123

אַלזאָ, 1) $AC \perp BD$; 2) $\angle 1 = \angle 2$; 3) AC איז די סימעטריע-אַקס פֿון ראָמב; 4) $\triangle AOB = \triangle AOD$.

ווען מיר באַטראַכטן דעם גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק ADC, אין וועלכן $AD = DC$ און DO גייט דורך דורכן מיטן פֿון דער זײַט AC, קומען מיר צום באַשלוס, אַז 1) $OD \perp AC$; 2) $\angle 3 = \angle 4$; 3) DB איז די סי-מעטריע-אַקס פֿונעם ראָמב; 4) $\triangle AOD = \triangle DOC$.

פֿון דער גלײַכקײַט פֿון די דרײַעקן AOB און AOD, AOD און DOC, DOC און COB דרינגט, אַז

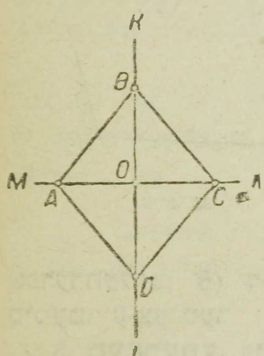
$$\triangle AOB = \triangle AOD = \triangle DOC = \triangle COB$$

4. באַם קאָנסטרויִרן א ראָמב באַנוצט מען זיך מיט דער אייגנשאַפֿט פֿון זײַנע דיִאַגאָנאַלן; די דיִאַגאָנאַלן פֿון א ראָמב טיילן זיך קעגנזײַטיק אַפּדערהעלפֿט און זײַנען קעגנזײַטיק פּערפּענדיקולער.

11. וויאַזוי קאָנסטרויִרט מען א ראָמב.

1. אויפֿגאַבע 1. קאָנסטרויִרן א ראָמב לויט זײַן זײַט a און $\angle A$.

קאָנסטרויִרונג. מיר וועלן קאָנסטרויִרן א ווינקל A און פֿונעם שפּיץ וועלן מיר אָפּלייגן אַף זײַנע זײַטן גלײַכע אָפּשניטן $AB = AD = a$. פֿאַרייניקנדיק די עקן B און D, דערגאַנצן מיר דעם באַקומענעם $\triangle ABD$ ביז א ראָמב.



צייכ. 124

אויפֿגאַבע 2. קאָנסטרויִרן א ראָמב לויט זײַנע דיִאַגאָנאַלן m און n, וואָס זײַנען אַנטשפּרעכיק גלײַך 6 סמ. און 4 סמ. ($m > n$).

קאָנסטרויִרונג. מיר פֿירן דורך צוויי קעגנזײַטיק פּערפּענדיקולערע גראָדע MN און KL (צייכ. 124) און, אָננעמענדיק זייער איבערשנײַד-פּונקט O פֿאַרן איבערשנײַד-פּונקט פֿון די דיִאַגאָנאַלן פֿונעם ראָמב, וועלן מיר אָפּלייגן אַף די גראָדע פֿון ביידע זײַטן פֿונעם פּונקט O פּאָרווײַז גלײַכע צווישנאַנאַנד אָפּשניטן, וואָס זײַנען אַנטשפּרעכיק גלײַך צו א העלפֿט פֿון יעטווידער דיִאַגאָנאַל:

$$OB = OD = \frac{n}{2} \quad \text{און} \quad OA = OC = \frac{m}{2}$$

דערנאָך פאַרייניקן מיר צווישן זיך די עקן פון די אָפּשניטן; דער קאָנסטרויִרטער פירעק $ABCD$ איז א ראָמב.

2. אפ צו קאָנסטרויִרן א ראָמב איז גענוג צו וויסן צוויי עלעמענטן זײַנע: 1) די זײַט און א ווינקל, 2) ביידע דיִאגאָנאַלן, 3) א דיִאגאָנאַל און די זײַט, 4) א דיִאגאָנאַל און א ווינקל.

12. קוואדראט און זײַנע אייגנשאפטן.

א גראָדעק, בא וועלכנ צוויי שכייניש זײַטן זײַנען גלײַך, הייסט קוואַדראַט (צייכ. 125).

באַם גראָדעק זײַנען די אנטקעגנליגנדיקע זײַטן גלײַך; בא א קוואדראט זײַנען אי די אנטקעגנליגנדיקע אי די שכיינישע זײַטן גלײַך:

$$AB=BC=CD=AD$$

הייסט עס, א קוואדראט איז א גראָדעק מיט גלײַכע זײַטן, דה. א גלײַכזײַטיקער גראָדעק.

א ראָמב, בא וועלכנ איינער פון די ווינקלען איז א גראָדער, הייסט קוואַדראַט (צייכ. 125).

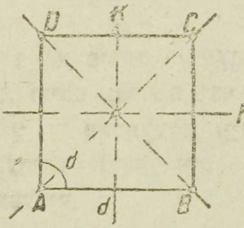
בא א ראָמב זײַנען די אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען גלײַך; בא א קוואַדראט זײַנען די אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען גלײַך און דערצו נאָך גראָדע:

$$\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=d$$

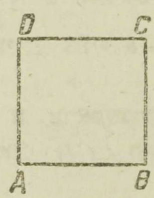
הייסט עס, א קוואדראט איז א ראָמב מיט גלײַכע ווינקלען, דה. א גלײַכווינקלדיקער ראָמב.

א קוואדראט פאַרמאָגט אלע אייגנשאַפטן פון א גראָדעק און פון א ראָמב.

אינ א קוואדראט (צייכ. 126): 1) טיילן די דיִאגאָנאַלן איינע די אנדערע אפדערהעלפט, 2) די דיִאגאָנאַלן זײַנען גלײַך צווישנאנאנד, 3) די מיטל-ליניע איז די סימעטריע-אקס, 4) די דיִאגאָנאַלן זײַנען קעגנזײַטיק פערפּענדיקולער, 5) די דיִאגאָנאַלן צעטיילן זײַנע ווינקלען אפ דערהעלפט, 6) די דיִאגאָנאַלן זײַנען די סימעטריע-אקסן, 7) ס'זײַנען פאַראַנ פיר סימעטריע-אקסן; AC, BD, MN און KL.



צייכ. 126



צייכ. 125

13. וויאַזוי קאָנסטרויִרט מענ א קוואדראט.

אופגאַבע 1. קאָנסטרויִרן א קוואדראט מיט א זײַט $a=5\,\text{cm}$ (צייכ. 127).

קאָנסטרויִרונג. מיר קאָנסטרויִרן א גראָדן ווינקל און פון זײַן שפּיץ לייגנ מיר אָפּ אפ זײַנע זײַטן אָפּשניטנ $a=5\,\text{cm}$; פון די עקן פון ביידע אָפּשניטן פירנ מיר דורכ בויגנס מיט א ראַדיוס, וואָס איז אויכ גלײַך $a=5\,\text{cm}$, און דעם איבער-

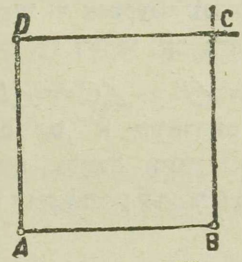
שנײַד-פונקט פון די בויגנס פאראייניקן מיר מיט די עקן פון די אָפשניטן. דער קאָנ-סטרויִרטער פירעק איז א קוואדראט.

אויספיר. אפ צו קאָנסטרויִרן א קוואדראט איז גענוג צו וויסן בלויז די לענג פון זײַן זײַט.

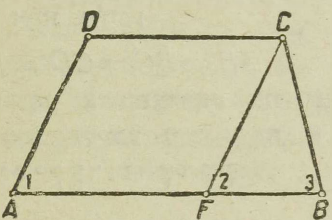
אופגאבע 2. קאָנסטרויִרן א קוואדראט לויט זײַן דיִאגאָנאל $m = 6$ cm.

קאָנסטרויִרונג. מיר פירן דורך צוויי גראָדע MN און KL, וואָס שנײַדן זיך איבער אונטער א גראָדן ווינקל, און פון זייער איבערשנײַד-פונקט O לייגן מיר אָפ פון ביידע זײַטן גלײַכע אָפשניטן, נעמלעך: $\frac{m}{2} = 3$ cm, און מיר פאראייניקן צווישן זיך די עקן פון די אָפשניטן. דער באקומענער פירעק איז א קוואדראט.

אויספיר. אפ צו קאָנסטרויִרן א קוואדראט איז גענוג צו וויסן די לענג פון זײַן דיִאגאָנאל.



צייכ. 127



צייכ. 128

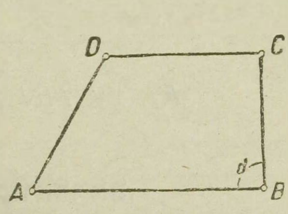
14. טראפעציע.

1. א פירעק $ABCD$, וואָס זײַנע צוויי אנטקעגנליגנדיקע זײַטן זײַנען פארא-לעל, הייסט טראפעציע.

2. די פאראלעלע זײַטן פון א טראפעציע הייסן אירע באזיסן, און די איבעריקע צוויי זײַטן, AD און CB, הייסן די זײַט-ליניעס פון דער טראפעציע.

3. א טראפעציע, בא וועלכער די זײַט-ליניעס זײַנען גלײַך, הייסט גלײַכאקסלדיקע (צייכ. 128): $AB \parallel DC$ און $AD = BC$.

4. א טראפעציע, בא וועלכער איינער פון די ווינקלען איז א גראָדער, הייסט גראָדווינקלדיקע (צייכ. 129); בא דער דאָזיקער טראפעציע איז $AB \parallel DC$ און $CB \perp AB$.



צייכ. 129

5. דער קירצסטער אָפשטאנד צווישן די באזיסן פון א טראפעציע ווערט באשטימט דורך דער לענג פונעם פערפענדיקוליאר, וואָס איז דורכגעפירט פון א וואָסער-ניט-איז פונקט אפ איין באזיס פון דער טראפעציע צו דעם אנדערן. דער דאָזיקער פערפענדיקוליאר איז גלײַכצײַטיק אויך די הייך פון דער טראפעציע (צייכ. 130). די הייכן AA_1, DD_1,

KK_1, CC_1 זײַנען גלײַך אַלס אָפּשניטן פֿון פּאַראַלעלע צווישן פּאַראַלעלע:
$AA_1 = DD_1 = KK_1 = CC_1$.

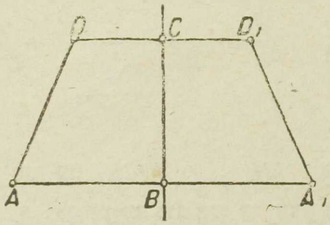
15. אייגנשאַפֿטן פֿון אַ גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע.

1. טעאָרעמע. אין אַ גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע זײַנען די ווינקלען, וואָס ליגן בײַ איינעם פֿון אירע באַזיסן, גלײַך.

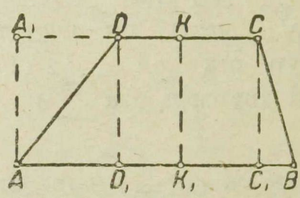
ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז אַ טראַפּעציע; $AD = BC$ (צייכ. 128).

ס'פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $\angle B = \angle A$ און $\angle D = \angle C$.

דערווײַז. מיר פֿירן דורך $AD \parallel CF$; מיר באַקומען אַ $\triangle CFB$; ער איז אַ גלײַכאַקסלדיקער, ווײַל $AD = CF = CB$, הייסט עס, $\angle 3 = \angle 2$ אַלס ווינקלען בײַם באַזיס פֿון אַ גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק. נאָר $\angle 1 = \angle 2$ אַלס שטאַפּלדיקע בײַ די פּאַראַלעלע AD און CF, דעריבער איז $\angle 3 = \angle 1$.



צייכ. 131



צייכ. 130

2. ווען אין דער גראָדווינקלדיקער טראַפּעציע $ABCD$ (צייכ. 131), בײַ וועלכער $AB \perp CB$, וועלן מיר אָנעמען CB פֿאַר דער סימעטריע־אַקס און מיר וועלן קאָנסטרויִרן אַ סימעטרישע צו איר טראַפּעציע CBA_1D_1, וועט די פֿיגור AA_1D_1D, וואָס וועט זיך באַקומען דורך אַזאַ קאָנסטרויִרונג, זײַן אַ גלײַכאַקסלדיקע טראַפּעציע. אין דער דאָזיקער טראַפּעציע ליגן די פּונקטן B און C אין די מיטנס פֿון די באַזיסן AA_1 און DD_1; די גראָדע CB, וואָס פֿאַרבינדט די דאָזיקע פּונקטן, איז די סימעטריע־אַקס פֿון דער גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע AA_1D_1D.

אויספֿיר. אַ גלײַכאַקסלדיקע טראַפּעציע האָט איין סימעטריע־אַקס, זי גייט דורך די מיטנס פֿון אירע באַזיסן און איז פּערפּענדיקולער צו זיי, אַנדערש געזאָגט, די מיטל־ליניע פֿון די פּאַראַלעלע זײַטן אין אַ גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע איז איר סימעטריע־אַקס.

16. מיטל-ליניע פֿון די זײַט-ליניעס אין אַ טראַפּעציע.

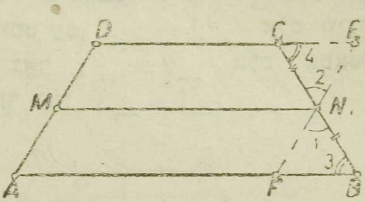
1. די מיטל־ליניע פֿון אַ טראַפּעציע איז דער אָפּשניט, וואָס זײַנע עקן זײַנען די מיטנס פֿון די זײַט-ליניעס פֿון דער טראַפּעציע.

אינ דער טראַפעציע $ABCD$ (צייכ. 132) איז דער פונקט M דער מיטנ פונ דער זײַט AD, דער פונקט N איז דער מיטנ פונ דער זײַט BC; $AM = MD$ אונ $BN = NC$; MN איז די מיטל-ליניע פונ דער טראַפעציע.

2. טעאָרעמע. די מיטל-ליניע פונ א טראַפעציע איז פאַראַלעל צו אירע באַזיסנ אונ איז גלײַכ צו א העלפט פונ זייער סומע.

ס׳איז געגעבנ: $ABCD$ איז א טראַפעציע; MN איז די מיטל-ליניע (צייכ. 132).

ס׳פאָדערט זיכ דערווײַזנ: 1) $DC \parallel AB \parallel MN$; 2) $MN = \frac{AB + DC}{2}$.



צייכ. 132

דערווײַז. 1) לאָמיר פאַרלענגערנ די זײַט DC אונ דורכפירנ דורכנ פונקט N, וואָס איז דער מיטנ פונ CB, א גראָדע $EF \parallel AD$; מיר וועלנ באַקומענ צוויי דרײַעקנ, $\triangle CNE$ אונ $\triangle FNB$, בא די דאָזיקע דרײַעקנ איז 1) $CN = NB$ לויטנ באַדינג, 2) $\angle 1 = \angle 2$ אלס ווערטיקאַלע, 3) $\angle 3 = \angle 4$ אלס געקרייצטע בא פאַראַלעלע, הייסט עס, $\triangle CNE = \triangle FNB$.

פונ דער גלײַכקײַט פונ אָט די דרײַעקנ דרינגט, אז $CE = FB$ אונ $EN = NF$ אָדער $EN = \frac{EF}{2}$; אָבער דער אָפשניט EF איז גלײַכ אונ איז פאַראַלעל צו AD, אונ דעריבער איז $EN = \frac{AD}{2} = MD$, אלזאָ, $EN = MD$ אונ $EN \parallel MD$, הייסט עס, דער פירעק $MDEN$ איז א פאַראַלעלאָגראַם, דערפונ דרינגט, אז $MN \parallel DE$.

אינ דער טראַפעציע איז $AB \parallel DC$ אונ, ווי מיר האָבנ דערוויזנ, איז $MN \parallel DC$, דעריבער איז $AB \parallel MN$. אלזאָ, $DC \parallel AB \parallel MN$. דער ערשטער טייל פונ דער טעאָרעמע איז דערוויזנ.

2) לאָמיר באַטראַכטנ די פאַראַלעלאָגראַמענ $AMNF$ אונ $DMNE$; בא זיי איז

$$\begin{array}{l} MN = AF = AB - FB \\ MN = DE = DC + CE \\ \hline 2MN = AF + DE = AB + DC - FB + CE \end{array}$$

אָבער $FB = CE$, אונ דעריבער איז $2MN = AB + DC$, אָדער

$$MN = \frac{AB + DC}{2}.$$

באַמערקונג. די מיטל-ליניע אינ א טראַפעציע איז גלײַכ צום מיטל-אַריפמעטישנ פונ ביידע באַזיסנ. אשטייגער, אויב די באַזיסנ פונ דער טראַפעציע זײַנענ אַנטשפּרעכיק גלײַכ $a = 14$ cm אונ $b = 8$ cm, וועט די מיטל-ליניע פונ דער טראַפעציע זײַנ

$$m = \frac{a + b}{2} = \frac{14 + 8}{2} = 11 \text{ cm}$$

17. וויאזוי קאָנסטרויִרט מענ א טראפעציע.

1. א טראפעציע באשטימענ 4 עלעמענטנ, וואָס אינ זייער צאָל קאָנענ אריַנגיי- יינער אָדער צוויי ווינקלענ פונ דער טראפעציע, וועלכע ליגנ בא א באזיס:

1) אירע פיר זיַיטנ,

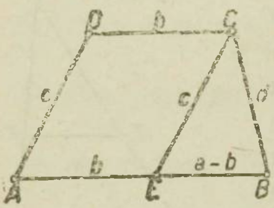
2)ביידע באזיסנ, איינ זיַיט-ליניע אונ איינער א ווינקל,

3) ביידע באזיסנ, איינ זיַיט-ליניע אונ א דיִאגאָנאל,

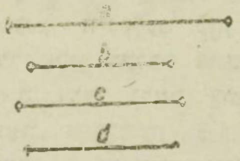
4) ביידע באזיסנ, איינ זיַיט-ליניע אונ די הייכ,

5) איינ באזיס, צוויי ביַיליגנדיקע צו אים ווינקלענ אונ די הייכ.

2. אפ צו קאָנסטרויִרנ א גליַיכאקסלדיקע אָדער א גראָדווינקלדיקע טראפעציע דארפ מענ בלויז דריַי עלעמענטנ פונ די אויסגערעכנטע, וואָס אינ זייער צאָל קאָנ אריַינגיינ אויכ איינ ווינקל, וויַיל אינ א גליַיכאקסלדיקער טראפעציע זיַינענ גליַיכ אירע ביידע זיַיט-ליניעס אונ די ווינקלענ באַם באזיס, אונ אינ א גראָדווינקלדיקער טראפעציע זיַינענ צוויי ווינקלענ אירע גראָדע.



צייכ. 134



צייכ. 133

3. אופגאבע. קאָנסטרויִרנ א טראפעציע לויט אירע פיר זיַיטנ a, b, c אונ d; a אונ b זיַינענ די באזיסנ, c אונ d זיַינענ די זיַיט-ליניעס (צייכ. 133 אונ 134).

קאָנסטרויִרונג. לאָמיר זאָגנ, אז די טראפעציע $ABCD$ (צייכ. 134) איז קאָנסטרויִרט. לאָמיר איבערטראָגנ די זיַיט AD פאראלעל צו איר גופע אינ דער לאגע CE; דאנ וועט די טראפעציע זיכ צעקלאפנ אפ א פאראלעלאָגראם $ADCE$ אונ אפ א דריַיעק BCE, וועלכע מיר קענענ קאָנסטרויִרנ, וויַיל אפ צו קאָנסטרויִרנ זיי זיַינענ פאראנ אלע נייטיקע אָנגאבנ: פארנ דריַיעק — אלע זיַינע זיַיטנ, $CE=c$, $CB=d$, $BE=a-b$; פארנ פאראלעלאָגראם — $AD=c$, $AE=b$ אונ דער $\angle AEC$.

נאָכ אָט דער אויספאָרשונג מאכנ מיר די קאָנסטרויִרונג. לויט די אָנגאבנ פונ דער אופגאבע קאָנסטרויִרנ מיר דעם $\triangle BCE$; מיר פארלענגערנ BE אונ לייגנ אָפ דעם אָפשניט BA, וואָס איז גליַיכ a; אָנעמענדיק די פונקטנ A אונ C פאר צענטערס, פירנ מיר דורכ בויגנס מיט די ראדיִוסנ, וואָס זיַינענ אנטשפרעכיק גליַיכ c אונ b. ווענ מיר פארייניקנ דערנאָכ דעם איבערשניַיד-פונקט D פינ די בויגנס מיט A אונ C, באקומענ מיר די געזוכטע טראפעציע $ABCD$.

די אופגאבע איז מעגלעכ, ווענ $c-d<a-b<c+d$.

18. די צאָל עלעמענטנ, וואָס באשטימענ א פירעק.

1. אויב לויט דריַי געגעבענע עלעמענטנ קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ אָנ א שיר דריַיעקנ, וואָס זיַינענ צווישנ זיכ גליַיכ אונ אונטערשיידנ זיכ איינער פונעם אנדערנ בלויז מיט זייער לאגע, אָבער זיי אונטערשיידנ זיכ ניט ניט מיט זייער פאָרם אונ ניט מיט זייער גרייס, זיַינענ זיי אלע קאָפיעס פונ איינ אונ דעם זעלבנ דריַיעק. בא

אזא פאל זאָגט מען, אז מע קאָנ קאָנסטרויִרנ בלויז איינציקנ דרײַעק־קלאָר, אז פונ אזא דרײַעק קאָנ מענ אראָפּנעמענ אָנ א שיר קאָפּיעס.

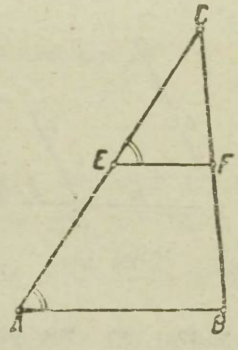
ס'איז באוווּסט, אז א דרײַעק קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ, ווענ ס'זײַנענ געגעבנ זײַנע פאָלגנדיקע דרײַ גרונט־עלעמענטנ:

1) איינ זײַט אונ צוויי ווינקלענ, וואָס ליגנ בא דער דאָזיקער זײַט (די סומע פונ אָט די ווינקלענ איז קלענער פונ $2d$);

2) צוויי זײַטנ אונ דער ווינקל, וואָס איז צווישנ זיי אײַנגעשלאָסנ (דער ווינקל איז קלענער פונ $180°$);

3) דרײַ זײַטנ (די גרעסטע פונ זיי איז קלענער פאר דער סומע פונ די צוויי איבעריקע).

לויט צוויי גרונט־עלעמענטנ קאָנ מענ ניט קאָנסטרויִרנ קיינ דרײַעק פונ א באשטימטער גרייס. אשטייגער, לויט צוויי געגעבענע זײַטנ, לויט א זײַט אונ א ווינקל קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ אָנ א שיר דרײַעקנ, וועלכע אונטערשיידנ זיכ איינער פונעמ אנדערנ סײַ מיט זייער פאָרמ אונ סײַ מיט זייער גרייס; אונ לויט צוויי געגעבענע ווינקלענ קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ אָנ א שיר דרײַעקנ, וועלכע אונטערשיידנ זיכ איינער פונעמ אנדערנ מיט זייער גרייס. צומ בײַשפּיל, ס'איז געגעבנ, לאָמיר זאָגנ, א דרײַעק ABC (צייכ. 135). אויב מירנ דורכפירנ דורכ א וואָסער־ניט־איז פונקט E אפ דער זײַט AC א גראָדע EF, א פאראלעלע צומ באזיס AB, וועלנ מיר באקומענ א $\triangle CEF$, וואָס זײַנע ווינקלענ זײַנענ אנטשפּרעכיק גלײַכ צו די ווינקלענ פונעמ $\triangle ABC$: דער ווינקל C איז א געמיינזאמער, $\angle E = \angle A$ אונ $\angle F = \angle B$ אלס שטאפלדיקע; ס'איז קלאָר, אז די דאָזיקע דרײַעקנ זײַנענ ניט גלײַכ, זיי אונטערשיידנ זיכ איינער פונעמ אנדערנ מיט זייער גרייס, כאָטש זיי האָבנ אנטשפּרעכיק גלײַכע ווינקלענ. אלזאָ, לויט דרײַ ווינקלענ קאָנ מענ ניט קאָנסטרויִרנ קיינ דרײַעק פונ א באשטימטער גרייס. די ווינקלענ פונ א דרײַעק זײַנענ צווישנ זיכ פארבונדנ מיט א באשטימטער קעגנזײַטיקער פארהעלטעניש: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, דעריבער איז אפ צו באשטימענ די ווינקלענ פונ א דרײַעק גענוג צו וויסנ בלויז צוויי פונ זיי, ווײַל דער דריטער ווערט שוינ באשטימט דורכ אָט די צוויי, צומ בײַשפּיל $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. דערפונ דרינגט, אז אויב ס'זײַנענ געגעבנ דרײַ ווינקלענ, וואָס זייער סומע איז גלײַכ $180°$, איז אינ טאָכ אנטהאלט דער דאָזיקער באדינג בלויז צוויי אומאָפּהענגיקע עלעמענטנ — צוויי ווינקלענ, ווײַל דער דריטער ווינקל ווערט באשטימט דורכ אָט די צוויי.


צייכ. 135

א דרײַעק קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ לויט דרײַ אומאָפּהענגיקע עלעמענטנ.

דאָכ קאָנ זיכ טרעפנ, ווי מירנ שפּעטער זענ, אז אפילע לויט דרײַ אומאָפּהענגיקע עלעמענטנ קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ ניט בלויז איינ דרײַעק, נאָר צוויי דרײַעקנ פונ פארשיידענער פאָרמ אונ גרייס. אשטייגער, לויט צוויי געגעבענע זײַטנ אונ לויטנ ווינקל, וואָס ליגט קעגנ דער קלענערער זײַט, קאָנ מענ קאָנ־

סטרויִרן צוויי פארשיידענע דרײַעקן. און אויב אין די דרײַ עלעמענטן, וואָס זײַנען געגעבן פאר דער קאָנסטרויִרונג, גייען אויך אַרײַן אָפּהענגיקע עלעמענטן, קאָן זיך באַקומען אָן א שיר פארשיידענע דרײַעקן.

ס'איז דעריבער נייטיק, נאָך דעם, אז דער דרײַעק איז שוין קאָנסטרויִרט, אויסצופאָרשן, וויפל לייזונגען קאָנען געמאָלט זײַן בא אָט די עלעמענטן, וואָס זײַנען געגעבן אין באַדינג פון דער אופגאַבע — איינע אָדער עטלעכע, און בא וואָסערע אָנגאַבן איז די אופגאַבע ביכלאַל ניט מעגלעך צו לייזן, דה. די קאָנסטרויִרונג איז ניט מעגלעך.

2. דאָס קאָנסטרויִרן א פאראלעלאָגראַם באַשטייט סאָפּקאָלסאָפּ, ווי ס'איז באַוווסט, אין קאָנסטרויִרן דרײַעקן, דעריבער איז אפּ קאָנסטרויִרן א *פאראלעלאָגראַם* גענוג צו וויסן דרײַ אומאָפּהענגיקע עלעמענטן זײַנע.

3. אפּ צו קאָנסטרויִרן א *גראָדעק* איז גענוג צו וויסן בלויז זײַנע צוויי לינעאַלע עלעמענטן. געבן דעם דריטן עלעמענט — זײַן ווינקל — איז ניט נייטיק, ווײַל אין א גראָדעק זײַנען אַלע ווינקלען גראָדע.

4. אפּ צו קאָנסטרויִרן א *ראָמב* דאַרף מען אויך וויסן בלויז זײַנע צוויי אומאָפּהענגיקע עלעמענטן.

5. אפּ צו קאָנסטרויִרן א *קוואַדראַט* איז גענוג צו וויסן בלויז *איין לינעאַלן* עלעמענט זײַנעם: די זײַט אָדער די דיִאַגאָנאַל.

6. אפּ צו קאָנסטרויִרן א *טראַפּעציע* פאָדערט זיך, אָפּהענגיק פון איר פאָרם, א פארשיידענע צאָל עלעמענטן.

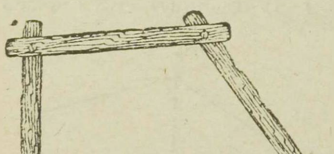
1) פאר א גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע — 3 עלעמענטן,

2) פאר א גראָדווינקלדיקער טראַפּעציע — 3 עלעמענטן,

3) פאר א טראַפּעציע ביכלאַל (ניט קיין גלײַכאַקסלדיקער און ניט קיין גראָדווינקלדיקער) — 4 עלעמענטן.

7. אפּ צו קאָנסטרויִרן א *פירעק* פאָדערט זיך 5 אומאָפּהענגיקע עלעמענטן.

אינדערעמעסן, ווען מע זאָל נעמען א פירעק אפּ שאַרנירן (צייכ. 136) איז ווען די לענג פון אַלע זײַנע זײַטן זאָל בלײַבן ניט געענדערט, קאָן מען ענדערנדיק די ווינקלען צווישן זײַנע זײַטן, באַקומען אָן א שיר פארשיידענע פירעקן; דערפון דרינגט, אז פיר זײַטן באַשטימען ניט מיט זיך קיין באַשטימטן פירעק; קעדיי דער פירעק זאָל זײַן א באַשטימטער, דאַרף מען נאָך געבן זײַן פינפטן עלעמענט — אָדער איינעם פון די ווינקלען אָדער איינע פון זײַנע דיִאַגאָנאַלן.



צייכ. 136

אינדערעמעסן, ווען מע זאָל דורכפירן אינעם פירעק איינע פון זײַנע דיִאַגאָנאַלן, וועלכע וועט פאַרפעסטיקן צווישנאַנאַנד צוויי שפּיצן זײַנע, וועלן מיר באַקומען א באַשטימטן פירעק, ווײַל ער בילדעט זיך אויס דורך דער קאָנסטרויִרונג פון צוויי דרײַעקן, וועלכע ווערן באַשטימט לויט דער דיִאַגאָנאַל און לויט די זײַטן פונעם פירעק.

אַזויאַרום גיט צו די דיִאַגאָנאַל דעם פירעק א שטאַנדהאַפטיקע אָדער, ווי מע זאָגט, א *פעסטע* פאָרם.

א פירעק קאָן קאָנסטרויִרט ווערן, אויב ס'זײַנען געגעבן, אַשטייגער, זײַנע

פֿאָלגנדיקע פֿינף עלעמענטן: 1) 4 זײַטן און א דיאַגאָנאַל, 2) 4 זײַטן און א ווינקל, 3) 3 זײַטן און 2 דיאַגאָנאַלן, 4) 3 זײַטן און 2 ווינקלען, 5) 2 זײַטן און 3 ווינקלען אאַוו.

8. א פֿירעק ענדערט זײַן פֿאָרם, אויב, אײַנהיטנדיק די לענג פֿון זײַנע זײַטן, זאָל מען ענדערן די גרייס פֿון זײַנע ווינקלען. אנדערש איז מיט א דרײַעק. די פֿאָרם פֿון א דרײַעק קאָן זיך ניט ענדערן, אויב ס'איז אײַנגעהיט די גרייס פֿון זײַנע זײַטן. מאכמעס אָט דער וויכטיקער אייגנשאַפֿט — דאָס ניט ענדערן זײַן פֿאָרם — רופֿט מען דעם דרײַעק **שטאַנדהאַפֿטיקע** אָדער **פֿעסטע פֿיגור**.

די אָנגעוויזענע אייגנשאַפֿט פֿון א דרײַעק האָט אַ אויסשליסלעך וויכטיקן באַטײַט אין דער טעכניק און אין דער בוי-אַרבעט.

די פֿאָרם פֿון א דרײַעק נוצט מען אויס בא מאַכן קראָקוועס, בריק-פֿערמעס, הייב-קראַנען, בא א גאַנצער ריי סאַמע פֿאַרשיידענע געגנשטאַנדן און דעטאַלן פֿון מאַשינעס. א פֿירעק אונטערשיידט זיך פֿון א דרײַעק דערמיט, וואָס א פֿירעק איז ניט קיין פֿעסטע פֿיגור.

קעדיי א פֿירעק זאָל באַקומען א פֿעסטע (שטאַנדהאַפֿטיקע) פֿאָרם, פֿאַרייניקט מען פֿעסט צוויי ניט שכיינישע שפּיצן זײַנע מיט א דיאַגאָנאַל, דורך דעם פֿאַרוואַנדלט מען דעם פֿירעק אין צוויי דרײַעקן, פֿון וועלכע יעדערער איז שוין א פֿעסטע שטאַנדהאַפֿטיקע פֿיגור.

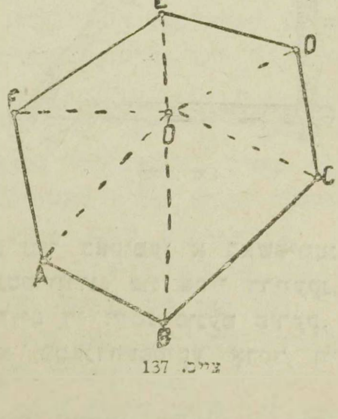
א פֿירעק באַקומט א פֿעסטע פֿאָרם אויך אין דעם פֿאַל, ווען בא א ניט-געענדערטער לענג פֿון זײַנע זײַטן פֿאַרפֿעסטיקט מען צווישן צוויי שכיינישע זײַטן זײַנע א ווינקלשטיק.

19. פֿילעק. די אייגנשאַפֿט פֿון זײַנע ווינקלען.

1. **א טייל פֿלאַכקײַט, וואָס איז באַגרענעצט מיט א געשלאָסענער געבראָכענער, וועלכע באַשטייט פֿון** n **זײַטן, הייסט** n**-עק**; n קאָן זײַן א באַליביקע גאַנצע צאָל, א גרעסערע פֿון דרײַ אָדער גלײַך 3.

2. **טעאָרעמע.** די סומע פֿון די אינווייניקסטע ווינקלען אין אַ n-עק איז גלײַך $2d(n-2)$ אָדער $(n-2)\,180^\circ$.

דערווײַז. לאָמיר נעמען ערגעץ-ווו אינווייניק אינעם פֿילעק א פּונקט O און אים פֿאַרייניקן דורך גראָדע מיט אַלע זײַנע שפּיצן; מירן באַקומען n דרײַעקן, אַזויפֿיל דרײַעקן, וויפֿל זײַטן ס'האָט דער פֿילעק. די סומע פֿון די אינווייניקסטע ווינקלען פֿון אַלע n דרײַעקן איז גלײַך $2d\cdot n$, אײַנשליסנדיק אויך אַלע ווינקלען מיטן געמיינזאַמען שפּיץ באַם פּונקט O, וואָס זי'ער סומע איז גלײַך $4d$; די סומע אָבער פֿון די אינווייניקסטע ווינקלען פֿונעם n-עק איז גלײַך צו דער סומע פֿון די אינווייניקסטע ווינקלען פֿון n דרײַעקן אָן דער סומע פֿון די ווינקלען, וואָס ליגן אַרום דעם פּונקט O, נעמלעך:



צייכ. 137

$2dn - 4d = 2d(n-2)$ אָדער $(n-2)$ $180°$.

אַלזאָ,

די סומע פון די אינוויינִיקסטע ווינקלען אין אן n — עק איז גלײַך $2d$, געקייפּלט אפ דער צאָל פון זײַנע זײַטן אָן צוויי.

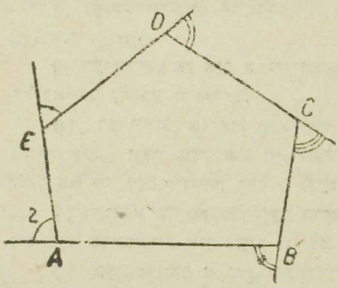
3. אויב מירן באַם פילעק $ABCDE$ (צייכ. 138) פּאַרלענגערן איינע פון זײַנע זײַטן, לאָמיר זאָגן AB, וועט די פּאַרזעצונג פון דער דאָזיקער זײַט צוזאַמען מיט דער שכייניש‏ער זײַט BC בילדן א ווינקל, וועלכער הייסט דרויסנדיקער ווינקל פונעם פילעק.

ווען מיר פּאַרלענגערן אַלע זײַטן פונעם פילעק $ABCDE$, ווי דאָס איז אָנגעוויזן אפ דער צייכ. 138, באַקומען מיר אַזויפיל דרויסנדיקע ווינקלען, וויפל זײַטן אָדער ווינקלען ס'האָט דער פילעק.

4. טעאָרעמע. די סומע פון אַלע דרויסנדיקע ווינקלען פון א באַליביקן פילעק איז גלײַך $4d$ אָדער $360°$.

ס'איז געגעבן: אן n-עק (צייכ. 138).

ס'פּאָדערט זיך דערווײַזן: די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען אינעם n-עק איז גלײַך $4d$.



צייכ. 138

דערווײַז. די סומע פון אן אינוויינִיקסטן און פון א דרויסנדיקן ווינקל באַ יעדן שפּיץ פונעם פילעק מאַכט אויס $2d$; באַ n שפּיצן האָבן מיר $2d \cdot n$, נאָר די סומע פון אַלע אינוויינִיקסטע ווינקלען אין א פילעק איז גלײַך $2dn - 4d$; הייסט עס, קעדיי צו געפינען די סומע פון אַלע דרויסנדיקע ווינקלען פונעם n-עק, דאַרף מען פון $2dn$ אַראָפּנעמען $2dn - 4d$, האָבן מיר:

$$2dn - (2dn - 4d) = 2dn - 2dn + 4d = 4d$$

אָדער $360°$.

אַלזאָ, די סומע פון אַלע דרויסנדיקע ווינקלען פון א באַליביקן פילעק איז גלײַך $4d$. זי איז ניט אָפּהענגיק פון דער צאָל פון זײַנע זײַטן.

פראגעס און איבונגען.

1. פאַרוואָס קאָן די סומע פון די אינוויינִיקסטע ווינקלען אין א פילעק ניט זײַן גלײַך $7d$ אָדער $11d$, בכלל — קיין אומיקע צאָל d?

2. די דיאַגאָנאַל פון א פירעק $ABCD$ איז $AC = n = 6{,}4$ cm; זי צעקלאַפּט דעם פירעק אפ צוויי דרײַעקן, וואָס זייערע פּערימעטערס זײַנען אַנטשפּרעכיק גלײַך 16,8 סמ. און 20,2 סמ. באַשטימען דעם פּערימעטער P פונעם פירעק $ABCD$.

3. באַשטימען דורך א קאָנסטרויִרונג די גרייס און די ריכטונג פון דער רעזולטאַנטע R פון צוויי קרעפטן P און Q, אויב ס'איז באַוווּסט, אז 1) $P = 8kg$, $Q = 6\ kg$, $\angle(P, Q) = 60°$.

4. באַשטימען דורך א קאָנסטרויִרונג די ריכטונג און די גרייס פון די קאָמפּאָנענטע קרעפטן P און Q, אויב ס'איז באַוווּסט, אז די רעזולטאַנטע R איז גלײַך 20 קג. און זי בילדעט מיט די א כסדרדיקע קרעפטן אַנטשפּרעכיק $\angle(P, R) = 30°$ און $\angle(Q, R) = 90°$.

5. קאָנסטרויִרן א פּאַראַלעלאָגראַם לויט פאָלגנדיקע אָנגאַבן: a און b זײַנען זײַנע זײַטן, m און n זײַנען זײַנע דיאַגאָנאַלן:

1) $a=4{,}5$ cm, $b=3{,}2$ cm, $\angle A=40°$;

2) $a=7$ cm, $b=5{,}3$ cm, $\angle B=110°$;

3) $a=6{,}3$ cm, $b=4{,}7$ cm, $m=8$ cm;

4) $m=8$ cm, $n=6{,}4$ cm, דער ווינקל צווישן זיי איז $\beta=45°$;

5) $a=7$ cm, $\angle A=130°$ און דער ווינקל α, וואָס בילדעט זיך דורך איינער פון די דיאַגאָנאַלן און דורך דער זײַט a פונעם פּאַראַלעלאָגראַם, איז גלײַך $40°$;

6) $a=8$ cm, $b=6$ cm, די הייך איז $h=4$ cm.

6. קאָנסטרויִרן א גראָדעק, אויב ס'זײַנען געגעבן:

1) צוויי זײַטן זײַנען $a=6{,}4$ cm און $b=4{,}3$ cm;

2) די זײַט $a=5{,}7$ cm און די דיאַגאָנאַל $m=7{,}5$ cm;

3) די דיאַגאָנאַל $m=8{,}4$ cm און דער ווינקל $\alpha=40°$ (צווישן דער דיאַגאָנאַל און דער זײַט);

4) די דיאַגאָנאַל $m=8$ cm און דער $\angle\beta=60°$ (צווישן די דיאַגאָנאַלן);

5) די זײַט $b=5$ cm און דער $\angle\beta=110°$ (צווישן די דיאַגאָנאַלן).

7. קאָנסטרויִרן א ראָמב:

1) לויט דער זײַט $a=4$ cm און לויטן ווינקל $\alpha=40°$;

2) לויט דער־ זײַט $a=5$ cm און לויט דער דיאַגאָנאַל $m=5$ cm, און באַשטימען זײַנע ווינקלען;

3) לויט דער דיאַגאָנאַל $m=6$ cm און לויטן ווינקל $\alpha=120°$;

4) לויט זײַנע צוויי דיאַגאָנאַלן $m=5$ cm און $n=8$ cm;

5) לויט דער זײַט $a=5$ cm און לויט דער הייך $h=3$ cm.

8. קאָנסטרויִרן א קוואַדראַט: 1) לויט דער זײַט $a=3{,}5$ cm; 2) לויט דער דיאַגאָנאַל $m=4{,}5$ cm.

9. דערווײַזן, אַז אין א גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע זײַנען די דיאַגאָנאַלן גלײַך און בילדן מיט די באַזיסן גלײַכע ווינקלען.

10. דערווײַזן, אַז אין א גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע צעקלאַפּן די דיאַגאָנאַלן די טראַפּעציע אָף 4 דרײַעקן, וואָס צוויי פון זיי, וועלכע ליגן בא די באַזיסן, זײַנען גלײַכאַקסלדיקע, און די צוויי, וואָס ליגן בא די זײַט־ליניעס, זײַנען גלײַך צווישן זיך.

11. אין א גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע זײַנען די דיאַגאָנאַלן קעגנזײַטיק פּערפּענדיקולער. די הייך פון דער טראַפּעציע איז גלײַך 10 סמ. אויסרעכענען די לענג פון דער מיטל־ליניע.

12. קאָנסטרויִרן א גראָדווינקלדיקע טראַפּעציע $ABCD$ לויטן באַזיס $AD=5{,}5$ cm, לויט דער זײַט־ליניע AB, וואָס איז פּערפּענדיקולער צו AD און איז גלײַך 3 סמ., און לויט דער צווייטער זײַט־ליניע $CD=4$ cm.

13. פאַרשרײַבן, צו וואָס איז גלײַך די סומע פון די אינווייניקסטע ווינקלען אין א 10־עק, 15־עק, 17־עק. צו וואָס איז גלײַך די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען פון יעטווידן פון זיי?

XI. שעטעכן פון גראָדליניקע פיגורן.

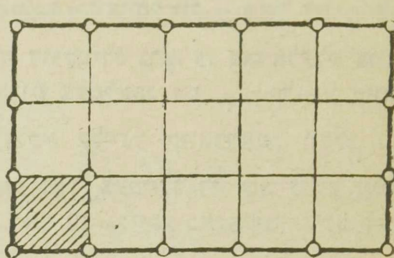
1. ווי אַזוי מעסט מען אויס שעטעכן.

1. אויסמעסטן א שעטעך — הייסט געפינען די פאַרהעלטעניש פון דעם געגעבענעם שעטעך צו א צווייטן שעטעך, וועלכער איז אָנגענומען פאַר אן איינס. פאַר אן איינס פון א שעטעך־מאָס נעמט מען אָן דעם שעטעך פון א קוואַדראַט, וואָס זײַן זײַט איז גלײַך צו א וואָסער־ניט־איז לינעאַלן איינס, לעמאָשל — צו א מילימעטער, סאַנטימעטער, מעטער אאַוו.; אַזא מאָס־איינס רופט מען קוואַדראַט־איינס.

2. קוואַדראַט־איינסן באַצייכנט מען אַזוי: 1 קוו. ממ. אָדער 1 mm^2; 1 קוו. סמ. אָדער 1 cm^2; 1 קוו. מ. אָדער 1 m^2 אאַוו. איז דער איינס פון דער שעטעך־מאָס אויסגעקליבן, מעסט מען מיט אים אויס דעם שעטעך פון דער פיגור, דהײַ.

מע דערוויסט זיכ וויפל קוואדראט־איינסנ אנטהאלט דער שעטעכ, וואָס מע מעסט אויס.

3. דער שעטעכ פונ א פיגור ווערט געוויינלעכ ניט באשטימט דורכ א דירעקטנ אויסמעסטנ מיט דעמ אויסגעקליבענעמ איינס פונ דער שעטעכ-מאָס, דה. דורכ פארפילנ די פיגור מיט קוואד־ראטנ, וואָס זײַנענ אָנגענומענ פאר אנ איינס, ווי דאָס איז אָנגעוויזנ אפ דער צייכענונג 139. די גרייס פונעמ שעטעכ פונ דער פי־גור ווערט באשטימט דורכ אומדירעק־טער אויסמעסטונג: מע מעסט אויס די זײַטנ פונ דער פיגור אונ באזונדערע בא־הילפיקע ליניעס, וואָס מע פירט דורכ אינ דער פיגור, אונ לויט די באקומענע צאָלנ רעכנט מענ אויס דעמ שעטעכ.



צייכ. 139

2. שעטעכ פונ א גראָדעק אונ פונ א קוואדראט.

טעאָרעמע. דער שעטעכ פונ א גראָדעק איז גלײַכ צומ פראָדוקט פונ זײַנ באזיס אפ דער הייכ.

ס'איז געגעבנ: $ABCD$ איז א גראָדעק (צייכ. 140).

$AB=a$ איז דער באזיס; $CB=h$ איז די הייכ.

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $S=a.h$.

לאָמיר באטראכטנ באזונדער די פאלנ, ווענ דער באזיס אונ די הייכ, אויס־געמאָסטנ מיט איינ אונ דעמ זעלבנ איינס, דריקנ זיכ אויס 1) אינ גאנצע צאָלנ אונ 2) אינ ברוכצאָלנ.

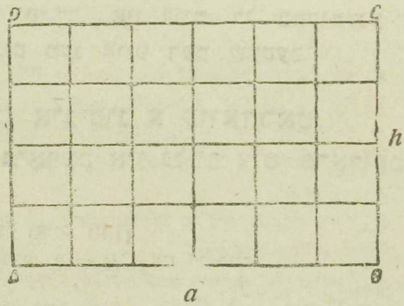
דערווײַז. ערשטער פאל. לאָמיר זאָגנ, אז דער באזיס AB איז גלײַכ a סמ. אונ די הייכ BC איז גלײַכ h סמ., ווו a אונ h זײַנענ גאנצע צאָלנ. מירנ צעטיילנ דעמ באזיס AB אפ a גלײַכע טיילנ, צו 1 סמ. יעדערער, אונ די הייכ CB וועלנ מיר צעטיילנ אפ h אזעלכע טיילנ אונ מירנ דורכפירנ דורכ די טייל־פונקטנ גראָדע פאראלעל צו די זײַטנ פונעמ גראָדעק; דער גראָדעק וועט זיכ צעקלאַפנ אפ קוואדראטנ, וואָס דער שעטעכ פונ יעטווידנ וועט זײַנ 1 קוו. סמ. די צאָל פונ אָט די קוואדראטנ איז גלײַכ $a \cdot h$, ווײַל די גראָדע, וואָס זײַ־נענ פאראלעל צומ באזיס AB, צעקלאַפנ דעמ גראָדעק אפ h פאסנ, אונ די גראָדע, וואָס זײַנענ פאראלעל צו דער הייכ CB, צעקלאַפנ יעדנ פאס אפ a קוואדראטנ, וואָס דער שעטעכ פונ יעטווידנ איז גלײַכ 1 קוו. סמ.

אלזאָ, דער שעטעכ פונעמ גראָדעק $ABCD$ ווערט צעקלאַפט אפ $a \cdot h$ קוואַ־דראטנ, וואָס יעדערער פונ זיי האלט 1 קוו. סמ.; דורכ א פאָרמולע פארשרײַבט מענ עס אזוי:

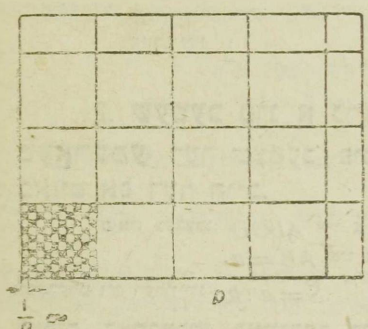
$S = a \cdot h \text{ cm}^2$, דה.

דער שעטעכ פונ א גראָדעק איז גלײַכ צו אזא צאָל קוואַ־דראט-איינסנ, וועלכע וועט זיכ באקומענ פונ קייפלענ די צאָלנ, וואָס דריקנ אויס זײַנ באזיס אונ זײַנ הייכ אינ איינ-נאָמענדיקע לינעאַלע איינסנ.

צווייטער פאל. דער באזיס איז $AB = a$ cm, די הייך $CB = h$ cm און a און h זײַנען ברוכצאָלן. לאָמיר זאָגן, אז די דאָזיקע ברוכצאָלן, נאָכ דעם, ווי זיי זײַנען שוינ געבראכט צו איינ טיילווײַזער, זײַנען גלײַכ: $a=\frac{p}{n}$ און $h=\frac{q}{n}$. לאָמיר אָנעמענ פאר א געמיינזאמער מאָס פונ די אָפשניטנ a און h אנ אָפשניט, וואָס איז גלײַכ $\frac{1}{n}$ סמ., דאנ וועט די דאָזיקע געמיינזאמע מאָס זיכ אויסלייגנ p מאָל אפ a, און q מאָל אפ h; דורכ די טייל-פּונקטנ וועלנ מיר דורכפירנ גראָדע, פּאראלעלע צו די זײַטנ פונעם גראָדעק, וועלכער וועט זיכ אזויארום צעקלאפּנ אפ $p\cdot q$ קליינע קוואדראטנ מיט א זײַט פונ $\frac{1}{n}$ סמ. (צייכ. 141). אזעלכע קליינע קוואדראטנ וועלנ זיכ אינ 1 קוו. סמ. אנטהאלטנ $n\cdot n = n^2$. אויב מע זאָל צעטיילנ די שכײַנישע זײַטנ פונ א קוואדראט, וואָס האלטנ די לענג 1 סמ., אפ 10 גלײַכע כאלאָקים, וועט דער



צייכ. 140



צייכ. 141

קוואדראט זיכ צעקלאפּנ אפ $10\cdot 10 = 10^2 = 100$ קליינע קוואדראטנ, וואָס יעדערער פונ זיי וועט אויסמאכנ $\frac{1}{100}$ כיילעק פונ א קוואדראט, וואָס זײַנ שעטעכ איז 1 קוו. סמ.

אלזאָ, אויב אינ 1 קוו. סמ. אנטהאלט זיכ n^2 קליינע קוואדראטנ, וועט יעדערער פונ זיי אויסמאכנ $\frac{1}{n^2}$ כיילעק פונ איינ קוואדראט-סאנטימעטער. אינעם געגעבענעם גראָדעק האָט זיכ אויסגעלייגט $p.q$ קליינע קוואדראטנ; דאָס מאכט אזויארום אויס $\frac{p\cdot q}{n^2}$ קוו. סמ. אָדער $\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}$ קוו. סמ.; אָבער $\frac{p}{n}=a$ און $\frac{q}{n}=h$, דעריבער קאָנענ מיר פארשרײַבנ, אז $\frac{p}{n}\cdot\frac{q}{n}=a.h\,\text{cm}^2$; דאָס באַטײַט, אז דער שעטעכ פונעם גראָדעק איז גלײַכ צום פּראָדוקט פונ זײַנ באזיס אפ דער הייך.

די טעאָרעמע פארבלײַבט ריכטיק אויכ אינ דעם פאל, ווענ איינע פונ די שכײַנישע זײַטנ פונעם גראָדעק אָדער ביידע זײַנע שכײַנישע זײַטנ זײַנענ אויסגעדריקט דורכ איראַציאָנעלע צאָלנ.

קאָנסעקווענצנ. 1. דער שעטעכ פונ א קוואדראט איז גלײַכ צום קוואדראט פונ זײַנ זײַט.

א קוואדראט איז א גראָדעק, וואָס אלע זײַנע זײַטנ זײַנענ גלײַכ. לאָמיר

באצייכענענ די זײַט פונ קוואדראט דורכ a, דאנ וועט אויכ די הייכ זײַנ $h=a$, און דעריבער איז

$$S=a\cdot a=a^2$$

2. די פארהעלטעניש צווישנ די שעטעכנ פונ צוויי גראָדעקנ מיט פאר־שיידענע באזיסנ און הייכנ איז גלײַכ צום פּראָדוקט פונ די פארהעלטענישנ צווישנ זייערע באזיסנ און צווישנ זייערע הייכנ.

אשטייגער: $S_1=a_1h_1$ און $S_2=a_2h_2$, דערפונ איז

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h_1}{a_2h_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}$$

3. די שעטעכנ פונ צוויי גראָדעקנ, וואָס האָבנ גלײַכע באזיסנ, פאר־האלטנ זיכ ווי זייערע הייכנ; אויב אָבער די הייכנ זײַנענ גלײַכ, פארהאלטנ זיי זיכ ווי זייערע באזיסנ.

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h}{a_2h}=\frac{a_1}{a_2} \quad \text{און} \quad \frac{S_1}{S_2}=\frac{ah_1}{ah_2}=\frac{h_1}{h_2}$$

4. די שעטעכנ פונ צוויי קוואדראטנ פארהאלטנ זיכ ווי די קוואדראטנ פונ זייערע זײַטנ.

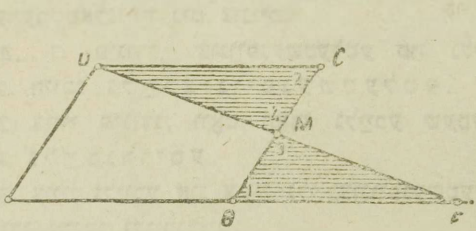
$S_1=a^2$ און $S_2=b^2$,

דערפונ איז

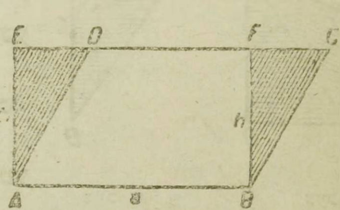
$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a^2}{b^2}$$

3. גלײַכע, גלײַכצונויפגעשטעלטע און גלײַכגרויסע פיגורנ.

1. אינעם פאראלעלאָגראם $ABCD$ (צייכ. 142) וועלנ מיר פונ זײַנע שפּיצנ A און B דורכפירנ די הייכנ AE און BF; מיר וועלנ באקומענ צוויי גלײַכע גראָדווינקל־דיקע דרײַעקנ ADE און BCF: די היפּאָטענוזע $AD=BC$ און דער קאטעט $ED=FC$.



צייכ. 143



צייכ. 142

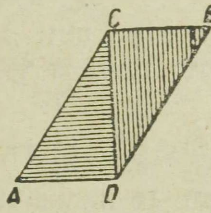
ווענ מע זאָל דערנאָכ אָפּשנײַדנ פונעם פאראלעלאָגראם $ABCD$ דעם דרײַעק BFC און אים צולייגנ צו דער זײַט AD פונעם פאראלעלאָגראם אזוי, אז די זײַטנ AD און BC זאָלנ זונויפאלנ, וועלנ מיר באקומענ דעם גראָדעק $ABFE$, וועלכער איז צונויפגעשטעלט פונ די זעלבע טיילנ, וואָס דער פאראלעלאָגראם $ABCD$: פונ דער גראָדווינקלדיקער טראפּעציע $ABFD$ און פונ א דרײַעק.

2. לאָמיר נעמענ דעם פאראלעלאָגראם $ABCD$ (צייכ. 143). לאָמיר דורכפירנ פונ זײַנ שפּיצ D דורכ דעם מיטנ M פונ דער זײַט BC א גראָדע און פאָרזעצנ זי ביז איבערשנײַדנ זיכ אינעם פּונקט F מיט דער פאָרזעצונג פונ דער זײַט AB;

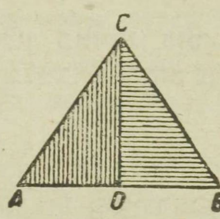
מירנ באקומענ צוויי גלײַכע דרײַעקנ: $\triangle DMC$ אונ $\triangle BMF$; בא זיי איז $MB = MC$, די ווינקלענ באמ פונקט M זײַנענ גלײַכ אלס ווערטיקאלע, דער $\angle B$ אונ דער $\angle C$ — אלס געקרייצטע.

באטראכטנ מיר דעמ פאראלעלאָגראמ $ABCD$ אונ דעמ דרײַעק ADF, קומענ מיר צומ באשלוס, אז זיי זײַנענ צונויפגעשטעלט פונ צוויי גלײַכע טיילנ: פונ דער טראפעציע $ABMD$ אונ פונ א דרייעק.

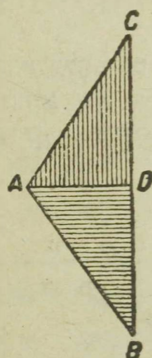
3. לאָמיר נאָכ באטראכטנ א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק ABC (צייכ. 144); די הייכ CD צעקלאפט אימ אפ צוויי גלײַכע דרײַעקנ; באמ ארופלייגנ פאלנ די דאָזיקע דרײַעקנ צונויפ אונ, הייסט עס, זיי האָבנ אנ אלציינעמ שעטעכ, פונ די דאָזיקע צוויי דרײַעקנ קאָנ מענ צונויפשטעלנ, צולייגנדיק איינעמ צומ אנדערנ מיט די גלײַכע זײַטנ, פארשיידענע פיגורנ, וועלכע וועלנ האָבנ לויט דער ברייס איינ אונ דעמ זעלבנ שעטעכ, כאָטש זיי וועלנ זיכ אונטערשיידנ איינער פונ דער אנדערער מיט זייער פאָרמ. צ.ב., דעמ $\triangle CBD$ קאָנ מענ צולייגנ צומ $\triangle ACD$ אזוי, אז זיי זאָלנ בילדנ אָדער א פאראלעלאָגראמ $ADBC$ (צייכ. 145), אָדער א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק ABC (צייכ. 146), אָדער א פירעק $ADCB$ (צייכ. 147).



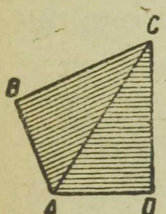
צייכ. 145



צייכ. 144



צייכ. 146



צייכ. 147

די דאָזיקע אלע פיגורנ, וואָס זײַנענ צונויפגעשטעלט פונ גלײַכע טיילנ, האָבנ איינ אונ דעמ זעלבנ שעטעכ; דערבײַ זײַנענ די פיגורנ גופע צווישנ זיכ ניט גלײַכ, ווײַל באמ ארופלייגנ איינע אפ דער אנדערער פאלנ זיי ניט צונויפ.

4. 1) פיגורנ, צונויפגעשטעלטע פונ גלײַכע טיילנ, הייסנ גלײַכצונויפגעשטעלטע.

2) צוויי פיגורנ, וואָס האָבנ גלײַכע שעטעכנ, הייסנ גלײַכגרויסע.

3) צוויי גלײַכע אונ צוויי גלײַכצונויפגעשטעלטע פיגורנ זײַנענ גלײַכגרויס.

4. שעטעכ פונ א פאראלעלאָגראמ.

טעאָרעמע. דער שעטעכ פונ א פאראלעלאָגראמ איז גלײַכ צו דעמ פראָדוקט פונ זײַנ באזיס אפ דער הייכ.

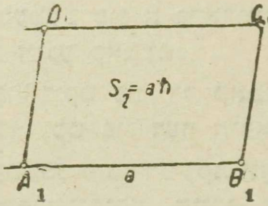
דערווײַז. פירנ מיר דורכ אינ פאראלעלאָגראמ (צייכ. 142, ז. 93) זײַנע הייכנ, באקומענ מיר צוויי גלײַכע גראָדווינקלדיקע דרײַעקנ ADE אונ BCF. דער געגעבענער פאראלעלאָגראמ $ABCD$ אונ דער גראָדעק $ABFE$ זײַנענ גלײַכגרויס אלס גלײַכצונויפגעשטעלטע פיגורנ. דער שעטעכ פונעמ גראָדעק $ABFE$ איז גלײַכ $a \cdot h$, הייסט עס, אז אויכ דער שעטעכ פונעמ פאראלעלאָגראמ $ABCD$ איז גלײַכ $a \cdot h$;

$$S = a \cdot h.$$

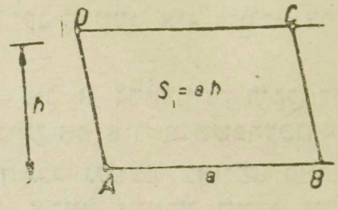
קאָנסעקווענצן. 1. פּאַראַלעלאָגראַמען, וואָס האָבן גלײַכע באַזיסן און גלײַכע הייכן, זײַנען גלײַכגרויס.

די פּאַראַלעלאָגראַמען $ABCD$ און $A_1B_1C_1D_1$ (צייכ. 148 און 149) האָבן גלײַכע הייכן און גלײַכע באַזיסן: $AB = A_1B_1 = a$, די הייכן בײַ ביידע איז h. זייערע שטעטכן זײַנען:

$S_1 = a \cdot h$, און $S_2 = a \cdot h$, הייסט עס, $S_1 = S_2 = a \cdot h$; די פּאַראַלעלאָגראַמען זײַנען גלײַכגרויס



צייכ. 149



צייכ. 148

די פּאַראַלעלאָגראַמען $ABCD$ און $A_1B_1C_1D_1$ זײַנען ניט גלײַך, באַם אַרופלייגן וועלן זיי ניט צונויפפאַלן, ווײַל זיי האָבן פאַרשיידענע לויט דער גרייס ווינקלען.

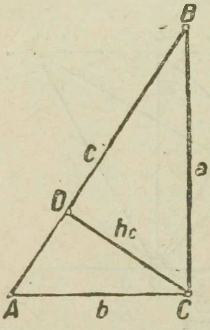
2. די שטעטכן פון פּאַראַלעלאָגראַמען מיט גלײַכע באַזיסן פאַרהאַלטן זיך ווי די אַנטשפּרעכנדיקע הייכן; אויב אָבער זיי האָבן גלײַכע הייכן, פאַרהאַלטן זיך זייערע שטעטכן ווי די אַנטשפּרעכנדיקע באַזיסן פון די פּאַראַלעלאָגראַמען.

5. שטעטכ פון א דרײַעק.

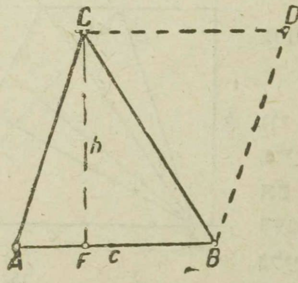
1. טעאָרעמע. דער שטעטכ פון א דרײַעק איז גלײַך צו א האַלבן פּראָדוקט פון זײַן באַזיס אַפ דער הייך.

כ'איז געגעבן: $\triangle ABC$; C איז דער באַזיס, h איז די הייך (צייכ. 150).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: דער שטעטכ פונעם $\triangle ABC$ איז $S = \frac{1}{2} c \cdot h$.



צייכ. 151



צייכ. 150

דערווײַז. ווען מיר וועלן דורכפירן $BD \parallel AC$ און $CD \parallel AB$, וועלן מיר דערגאַנצן דעם געגעבענעם $\triangle ABC$ ביז דעם פּאַראַלעלאָגראַם $ABDC$. דער שטעטכ פונעם פּאַראַלעלאָגראַם $ABDC$ איז גלײַך $c \cdot h$; דער שטעטכ פונעם $\triangle ABC$ מאַכט אויס א העלפט פונעם שטעטכ פונעם פּאַראַלעלאָגראַם $ABDC$; הייסט עס, דער שטעטכ פונעם $\triangle ABC$ איז גלײַך $\frac{1}{2} c \cdot h$, אַלזאָ, (קוו. איינסן) $S \frac{1}{2} c \cdot h$.

קאָנסעקוועגצן. אויב מע זאָל באַצייכענען די קאַטעטן פונעם גראַדווינקלדיקן דרײַעק ABC (צייכ. 151) דורך a און b, די היפּאָטענוזע — דורך c און די הייכ, וואָס איז דורכגעפירט צו דער היפּאָטענוזע, דורך h_c, קאָן מען דעם שעטעכ פונעם גראַדווינקלדיקן דרײַעק אויסדריקן אַף צווייערליי אויפאַנים:

$$S=\frac{1}{2}a\cdot b \quad (1 \qquad \text{און} \qquad S=\frac{1}{2}c\cdot h_c \quad (2$$

הייסט עס, $S=\frac{1}{2}a\cdot b=\frac{1}{2}c\cdot h_c$, אָדער $a\cdot b=c\cdot h_c$. אַלזאָ:

1) דער שעטעכ פון אַ גראַדווינקלדיקן דרײַעק איז גלײַכ צו אַ האַלבן פּראָדוקט פון זײַנע קאַטעטן.

2) דער פּראָדוקט פון די קאַטעטן פון אַ גראַדווינקלדיקן דרײַעק איז גלײַכ צום פּראָדוקט פון דער היפּאָטענוזע אַף איר אַנטשפּרעכנדיקער הייכ.

3) די שעטעכן פון דרײַעקן, וואָס האָבן גלײַכע באַזיסן, פאַרהאַלטן זיכ ווי די אַנטשפּרעכנדיקע הייכן; ווען אָבער זייערע הייכן זײַנען גלײַכ, פאַרהאַלטן זיי זיכ ווי די אַנטשפּרעכנדיקע באַזיסן.

4) די פאַרהעלטעניש צווישן די שעטעכן פון דרײַעקן, וואָס האָבן פאַרשיידענע באַזיסן און פאַרשיידענע הייכן, איז גלײַכ צום פּראָדוקט פון די פאַרהעלטענישן צווישן זייערע באַזיסן און זייערע הייכן.

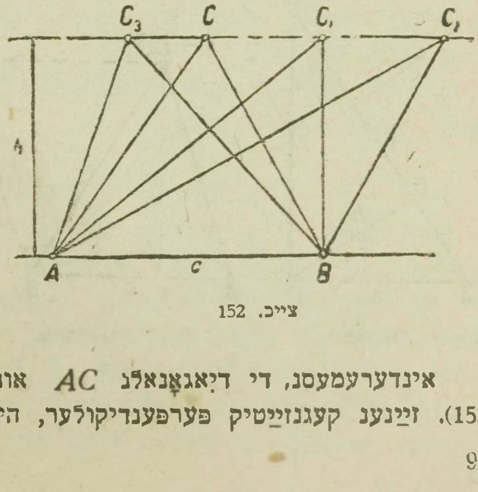
$$S=\frac{1}{2}a_1\cdot h_1 \quad \text{און} \quad S_2=\frac{1}{2}a_2\cdot h_2,$$

דערפון איז

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{a_1h_1}{a_2h_2}=\frac{a_1}{a_2}\cdot\frac{h_1}{h_2}$$

5) דרײַעקן, וואָס האָבן גלײַכע באַזיסן און גלײַכע הייכן, זײַנען גלײַכ-גרויס.

ס'איז געגעבן אַ $\triangle ABC$. ווען מע זאָל אַריבערטראָגן זײַן שפּיץ C לויט אַ גראָדער, וואָס איז פּאַראַלעל צום באַזיס AB (צייכ. 152), איבערלאָזנדיק דעם באַזיס ניט געענדערט, וועלן מיר באַקומען אַ ריי דרײַעקן ABC_1, ABC_2 אאַוו.; דער שעטעכ פון יעטווידן פון זיי איז גלײַכ $\frac{1}{2}c\cdot h$, הייסט עס, זיי זײַנען גלײַכ גרויס.



צייכ. 152

6) דער שעטעכ פון אַ ראָמב, ווי פון יעדן פּאַראַלעלאָגראַם, איז גלײַכ צום פּראָדוקט פון זײַן באַזיס אַף דער הייכ, דה. $S=a.h$. כוץ דעם איז דער שעטעכ פון אַ ראָמב גלײַכ צו אַ האַלבן פּראָדוקט פון זײַנע דיאַגאָנאַלן.

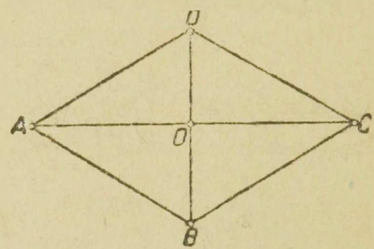
אינדערעמעסן, די דיאַגאָנאַלן AC און BD פונעם ראָמב $ABCD$ (צייכ. 153), זײַנען קעגנזײַטיק פּערפּענדיקולער, הייסט עס:

$$S_{\triangle ADC}=\frac{1}{2}AC\cdot DO$$

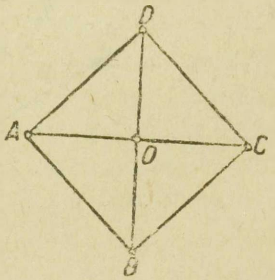
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot OB$$

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\,(DO+OB)=\frac{1}{2}AC\cdot BD$$

7) דער שעטעך פון א קוואדראט איז גלײַך צו א האלבן קוואדראט פון זײַן דיאגאָנאל.



צײכ. 153



צײכ. 154

אין א קוואדראט זײַנען די דיאגאָנאלן קעגנזײַטיק פּערפּענדיקולער און גלײַך (צײכ. 154), הײסט עס, דער שעטעך פונעם קוואדראט $ABCD$ איז גלײַך

$$\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}AC^2$$

2. דעם שעטעך פון א דרײַעק קאָן מען אויסדריקן דורך א באליביקער זײַט זײַנער און דורך דער הײך, וואָס איז צו א[illegible] [illegible]פרעכיק:

$$S\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$$

דערפון דרינגט ארויס:

1) $a=\frac{2S}{h_a}$; $b=\frac{2S}{h_b}$; $c=\frac{2S}{h_c}$;

2) $h_a=\frac{2S}{a}$; $h_b=\frac{2S}{b}$; $h_c=\frac{2S}{c}$.

נעמען מיר 1) די פארהעלטעניש פון די זײַטן און 2) די פארהעלטעניש פון די הײכן פון א דרײַעק, באקומען מיר:

1) $a:b:c=\frac{2S}{h_a}:\frac{2S}{h_b}:\frac{2S}{h_c}$ אָדער $a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$.

פונקט אזוי האָבן מיר:

2) $h_a:h_b:h_c=\frac{2S}{a}:\frac{2S}{b}:\frac{2S}{c}$ אָדער $h_a:h_b:h_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$

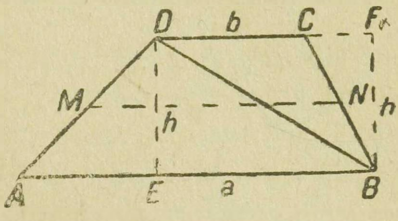
דה. די זײַטן פון א דרײַעק זײַנען אומגעקערט פּראָפּאָר-ציִאָנעל צו די אנטשפּרעכנדיקע הײכן.

3. אָט אזא קעגנזײַטיקע פארהעלטעניש צווישן די זײַטן און די הײכן האָבן מיר אויך אין א פּאראלעלאָגראם. אין א ראָמב אָבער, בא וועלכן די זײַטן זײַנען גלײַך, זײַנען די הײכן אויך גלײַך, ווײַל די פארהעלטעניש פון זײַנע זײַטן איז גלײַך 1.

6. שעטעכ פונ א טראַפּעציע.

טעאָרעמע. דער שעטעכ פונ א טראַפּעציע איז גלײַכ צום פּראָדוקט פונ א האַלבער סומע פונ די באַזיסנ אפ דער הייכ פונ דער טראַפּעציע אָדער צום פּראָדוקט פונ דער מיטל-ליניע אפ דער הייכ.

דערווײַז. די דיאַגאָנאַל DB (צייכ. 155) טיילט די טראַפּעציע $ABCD$ אפ צוויי דרײַעקנ: $\triangle ABD$ אונ $\triangle DBC$; דער שעטעכ פונ דער טראַפּעציע איז גלײַכ צו דער סומע פונ די שעטעכנ פונ די באַקומענע דרײַעקנ:



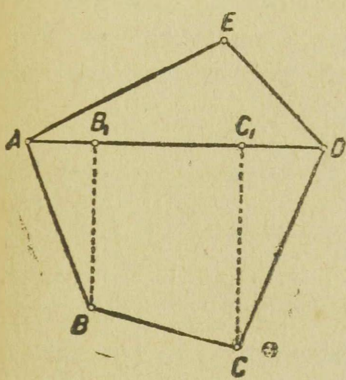
צייכ. 155

$$S_{\mathrm{ABCD}} = S_{\mathrm{ABD}} + S_{\mathrm{BDC}} =$$
$$= \frac{1}{2}\,a \cdot h + \frac{1}{2}\,b \cdot h = \frac{a+b}{2} \cdot h$$
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h = m \cdot h,$$

ווו $MN = \frac{a+b}{2} = m$; MN איז די מיטל־ליניע פונ דער טראַפּעציע.

7. שעטעכ פונ א פילעק.

דעם שעטעכ פונ א פילעק באַשטימט מענ געוויינלעכ דורכ צעקלאַפּנ אים אפ דרײַעקנ אונ אפ טראַפּעציעס. אינעם ערשטנ פאַל פירט מענ דורכ פונ איינ שפּיצ אַלע זײַנע דיאַגאָנאַלנ אונ מע רעכנט אויס דעם שעטעכ פונ יעדנ באַקומענעם דרײַעק באַזונדער; די סומע פונ די שעטעכנ פונ אַלע דרײַעקנ גיט דעם שעטעכ פונעם פילעק.



צייכ. 156

אינעם צווייטנ פאַל פירט מענ דורכ בלויז איינ דיאַגאָנאַל, אונ מיט פּערפּענדיקולאַרנ, דורכגעפירט פונ די שפּיצנ פונעם פילעק אפ דער דיאַגאָנאַל, צעטיילט מענ דעם פילעק אפ גראַדווינקלדיקע דרײַעקנ אונ אפ טראַפּעציעס (צייכ. 156). די סומע פונ די שעטעכנ פונ די באַקומענע דרײַעקנ אונ פונ די טראַפּעציעס גיט דעם שעטעכ פונעם פילעק.

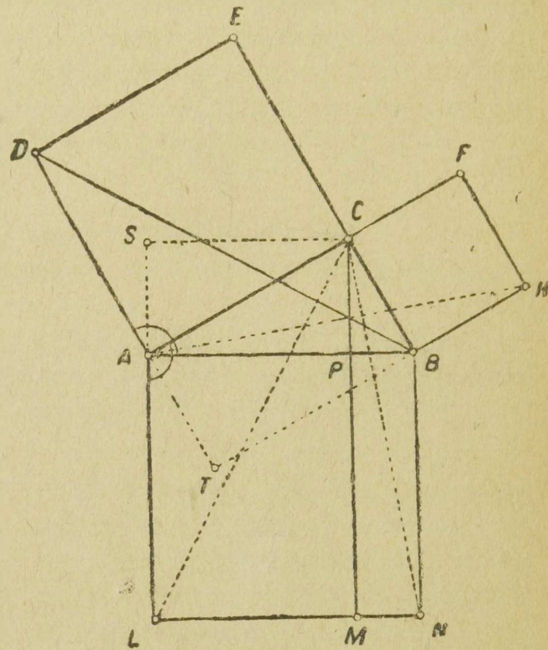
8. פּיטאַגאָרס טעאָרעמע.

טעאָרעמע. דער שעטעכ פונ א קוואַדראַט, וואָס איז קאָנסטרויִרט אפ דער היפּאָטענוזע פונ א גראַדווינקלדיקנ דרײַעק, איז גלײַכ צו דער סומע פונ די שעטעכנ פונ די קוואַדראַטנ, וואָס זײַנענ קאָנסטרויִרט אפ זײַנע קאַטעטנ.

ס'איז געגעבנ: $\triangle ABC$; $\angle C = d$; די קוואַדראַטנ $ABNL$, $ACED$, $BCFK$ (צייכ. 157).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $S_{\mathrm{ABNL}} = S_{\mathrm{ACED}} + S_{\mathrm{BCFK}}$.

ערשטער דערווייַז, וואָס עוקליד האָט געגעבן אין זייַנע „פּרינציפּן״
מיר פירן דורך $CM \perp LN$; CM צעקפּאָפּט דעם קוואדראט $ABNL$ אפ צוויי
גראָדעקן: $APML$ און $PBNM$. מירן דערווייַזן, אז יעדערער פון זיי איז אנט־
שפּרעכיק גלייַכגרויס מיט איי־
נעם פון די קוואדראטן, וואָס
זייַנען קאָנסטרויִרט אפ די קאַ־
טעטן. אשטייגער, דער גראָדעק
$APML$ איז גלייַכגרויס מיטן
קוואדראט $ACED$. אינדערע־
מעסן: ווען מיר וועלן פאַר־
ייניקן D מיט B און C מיט
L, וועלן מיר באקומען צוויי
דרייַעקן: $\triangle ADB$ און $\triangle ACL$,
וועלכע זייַנען גלייַך, ווייַל
$AD=AC$, $AB=AL$ און
$\angle DAB=\angle CAL$ אלס ווינ־
קלען, וואָס באשטייען פון א
גראָדן ווינקל און פון דעם
$\angle A$ פונעם דרייַעק ABC.
אָבער דער שטעכ פונעם
$\triangle ABD$ איז גלייַך צו א האלבן
שטעכ פון $ACED$, ווייַל ער
האָט מיטן קוואדראט א גע־
מיינזאמען באזיס AD, און זייַן
הייך BT איז גלייַך צו דער
הייך DE פונעם קוואדראט. פּונקט אזוי איז דער שטעכ פונעם $\triangle ACL$
גלייַך צו א האלבן שטעכ פון $APML$, ווייַל ער האָט מיטן גראָדעק א גע־
מיינזאמען באזיס AL, און די הייך זייַנע CS איז גלייַך צו דער הייך ML
פונעם גראָדעק. $\triangle ABD=\triangle ACL$,



צייכ. 157

און דעריבער איז $\frac{1}{2} S_{APML}=\frac{1}{2} S_{ACED}$ אָדער $S_{APML}=S_{ACED}$,

דה. דער שטעכ פונעם גראָדעק $APML$ איז גלייַך צום שטעכ פונעם קוואד־
ראט $ACED$. ווען מיר פאַרייניקן דערנאָך A מיט K און C מיט N, דער־
ווייַזן מיר אויך, אז דער שטעכ פונעם גראָדעק $BNMP$ איז גלייַך צום שע־
טעכ פון קוואדראט $BCFK$. אלזאָ,

$$S_{APML}=S_{ACED}$$ און
$$S_{BNMP}=S_{BCFK},$$

הייסט עס, $$S_{APML}+S_{BNMP}=S_{ACED}+S_{BCFK},$$

דערפון איז $$S_{ABNL}=S_{ACED}+S_{BCFK}$$

די טעאָרעמע איז דערוויזן.

צווייטער דערווײַז. ס'איז געגעבנ א גראָדווינקלדיקער דרײַעק ABC. מיר וועלנ מאכנ א קאָנסטרויִרונג, ווי דאָס איז אָנגעוויזנ אפ דער צייכענונג 158, אונ מיר וועלנ פאראייניקנ דעמ פונקט B מיטנ פונקט M. מירנ באקומענ א גראָד־ווינקלדיקע טראפעציע $CDMB$ מיט די באזיסנ a אונ b אונ מיט דער הייכ $CD=a+b$. אָט די טראפעציע איז צונויפגעשטעלט פונ דרײַ גראָדווינקלדיקע דרײַעקנ: 1, 2 אונ 3.

$$S\triangle 1+S\triangle 2+S\triangle 3=S_{\mathrm{CDMB}},$$

דה.

$$\frac{ab}{2}+\frac{ab}{2}+\frac{c^2}{2}=\frac{(a+b)\ (a+b)}{2}$$

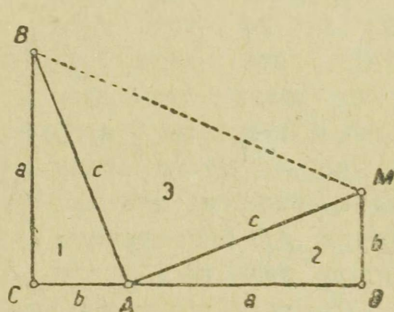
אָדער

$2ab+c^2=a^2+2ab+b^2$ אָדער $c^2=a^2+b^2$, דה.

דער קוואדראט פונ דער היפאָטענוזע איז גלײַכ צו דער סומע פונ די קוואדראטנ פונ די קאטעטנ.

אופגאבע 1. קאָנסטרויִרנ א קוואדראט, וואָס זײַנ שעטעכ זאָל זײַנ גלײַכ צו דער סומע פונ די שעטעכנ פונ צוויי קוואדראטנ מיט די זײַטנ a אונ b.

לייזונג. מיר קאָנסטרויִרנ א גראָד־ווינקלדיקנ דרײַעק, וואָס אלס קאטעטנ זײַ־נענ בא אימ די אָפשניטנ a אונ b. דאנ איז לויט פיטאגאָרס טעאָרעמע $c^2=a^2+b^2$, דה. דער קוואדראט, וואָס איז קאָנסטרויִרט אפ דער היפאָטענוזע c פונעמ דרײַעק, איז גלײַכגרויס מיט דער סומע פונ די געגעבע־נע קוואדראטנ, וואָס זייערע זײַטנ זײַנענ a אונ b.


צייכ. 158

אופגאבע 2. קאָנסטרויִרנ א קוואדראט, וואָס זײַנ שעטעכ זאָל זײַנ גלײַכ צו דער דיפערענצ פונ די שעטעכנ פונ צוויי געגעבענע קוואדראטנ.

לייזונג. לאָמיר זאָגנ, אז די זײַט פונעמ גרעסערנ פונ די געגעבענע קוואדראטנ איז c, אונ פונעמ קלענערנ איז a; מיר קאָנסטרויִרנ א גראָדווינקל־דיקנ דרײַעק, נעמענדיק c פאר דער היפאָטענוזע אונ a פאר איינעמ פונ די קאטעטנ, דאנ וועט דער צווייטער קאטעט b זײַנ די זײַט פונעמ געזוכטנ קוואד־ראט. דער קוואדראט, וואָס איז קאָנסטרויִרט אפנ אָפשניט b, איז דער געזוכ־טער קוואדראט.

9. ווי אזוי פארוואנדלט מענ גראָדליניקע פיגורנ אינ אנדערע פיגורנ, וואָס זײַנענ גלײַכגרויס מיט זיי.

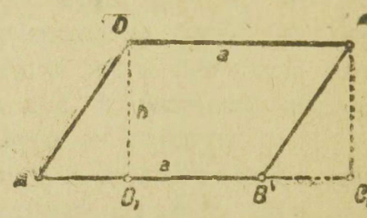
פארוואנדלענ א וואָסער־ניט־איז פיגור אינ א צווייטער פיגור, וואָס איז גלײַכ־גרויס מיט איר, איז אנ אופגאבע אפ קאָנסטרויִרונג; באמ לייזנ אזא אופגאבע נוצט מענ אויס די טעאָרעמעס וועגנ שעטעכנ פונ פיגורנ.

אופגאבע 1. פארוואנדלענ א פאראלעלאָגראמ $ABCD$ אינ א גלײַכגרויסנ גראָדעק, וואָס האָט דעמ זעלבנ באזיס (צייכ. 159).

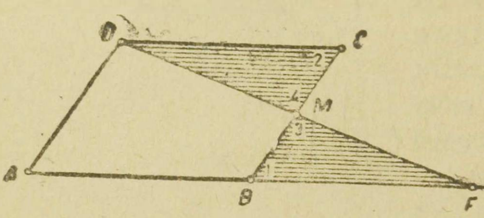
קאָנסטרוירונג. a און h זײַנענ דער באזיס און די הייכ פונעמ פאראלעלאָגראמ $ABCD$; זײַנ שעטעכ איז $S=ah$; דעמ זעלבנ שעטעכ דארפ האָבנ דער גראָדעק, וואָס איז גלײַכגרויס מיט אימ.

מיר קאָנסטרוירנ אפנ געגעבענעמ באזיס a פונעמ פאראלעלאָגראמ א גראָדעק מיט דער זעלבער הייכ, מיר באקומענ דעמ געזוכטנ גראָדעק DD_1C_1C; ער באפרידיקט די באדינגונגענ פונ דער אופגאבע, ווײַל $S=ah$.

אופגאבע 2. פארוואנדלענ א פאראלעלאָגראמ $ABCD$ אינ א גלײַכגרויסנ דרײַעק.



צייכ. 159



צייכ. 160

קאָנסטרוירונג. מירנ טײלנ אײנע פונ די זײַטנ פונעמ געגעבענעמ פאראלעלאָגראמ $ABCD$ (צייכ. 160), לאָמיר זאָגנ BC, אפדערהעלפט און פונעמ שפיצ D דורכנ מיטנ M פונ דער זײַט BC פירנ מיר דורכ א גראָדע DF ביז דער איבערשנײַדונג מיט דער פאָרזעצונג פונ דער זײַט AB אינעמ פונקט F. מירנ באקומענ א $\triangle ADF$, א גלײַכגרויסנ מיטנ געגעבענעמ פאראלעלאָגראמ $ABCD$.

אינדערעמעסנ:

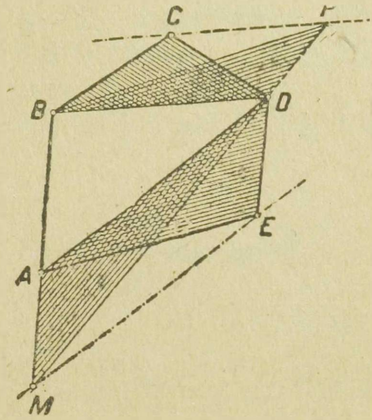
$S_{ADF}=S_{ABMD}+S_{BMF}$; $S_{ABCD}=S_{ABMD}+S_{DCM}$, אָבער $\triangle DCM=\triangle BMF$, ווײַל $CM=BM$, $\angle 1=\angle 2$ און $\angle 3=\angle 4$, און דעריבער איז $S_{ABCD}=S_{ADF}$, און דאָס באטײַט, אז דער $\triangle ADF$ איז גלײַכגרויס מיטנ פאראלעלאָגראמ $ABCD$.

אופגאבע 3. פארוואנדלענ א פילעק $ABCDE$ אינ א גלײַכגרויסנ דרײַעק (צייכ. 161).

קאָנסטרוירונג. מיר פירנ דורכ די דיאגאָנאל AD; זי וועט אָפשנײַדנ פונעמ געגעבענעמ פילעק $ABCDE$ א $\triangle ADE$; דורכנ שפיצ E פירנ מיר דורכ א גראָדע ME, וואָס איז פאראלעל צו AD און וועלכע וועט איבערשנײַדנ די פאָרזעצונג פונ דער זײַט BA אינעמ פונקט M. פאראײניקנ מיר דעמ פונקט M מיטנ שפיצ D, באקומענ מיר א $\triangle DMA$, א גלײַכגרויסנ מיטנ דרײַעק DEA, ווײַל זיי האָבנ אײנ און דעמ זעלבנ באזיס AD און זייערע שפיצנ E און M ליגנ אפ דער גראָדער, וואָס איז פאראלעל צומ באזיס. ווענ מיר פארבײַטנ דעמ $\triangle DEA$ מיטנ דרײַעק DMA, וואָס איז מיט אימ גלײַכגרויס, באקומענ מיר א פילעק $MDCB$, וואָס איז גלײַכגרויס מיטנ פילעק $ABCDE$, נאָר די צאָל זײַטנ איז בא אימ אפ אײנער ווייניקער ווי בא דעמ געגעבענעמ. אָט דעמ מינ קאָנסטרו־

ירונג דארף מען פּאָרזעצן ביזוואנען דער געגעבענער פילעק וועט זיך ניט פאר-
וואנדלען אין א גלײַכגרויסן דרײַעק. אף דער צייכענונג זײַנען דורכגעפירט די
דיאַגאָנאַלן AD און BD פונעם פילעק $ABCDE$; דורך אנטשפּרעכנדיקע
קאָנסטרוירונגען איז ער פארוואנדלט געוואָרן אין א גלײַכגרויסן דרײַעק MBP.

אופגאבע 4. א געגעבענעם דרײַעק צעטײלן מיט גראָדע, וואָס גייען דורך זײַן שפּיץ, אף n גלײַכגרויסע כאלאָקים.

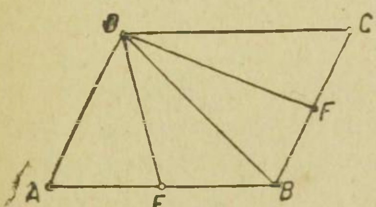


צייכ. 161

קאָנסטרוירונג. דעם באזיס פונעם דרײַעק טײלן מיר אף n גלײַכע כאלאָקים און די טײל-פונקטן פארייניקן מיר מיטן שפּיץ; מיר באקומען n דרײַעקן, וואָס האָבן אלציינע באזיסן און א געמיינזאמען שפּיץ, הייסט עס, אויך א געמיינזאמע הייך, און דעריבער זײַנען זיי גלײַכגרויס.

אופגאבע 5. א געגעבענעם פּאַראלעלאָגראם צעטײלן מיט גראָדע, וואָס גייען ארויס פון איין שפּיץ, אף 4 גלײַכגרויסע טײלן.

קאָנסטרוירונג. די דיאַגאָנאַל DB צעטײלט דעם פּאראלעלאָגראם $ABCD$ אף צוויי גלײַכע טײלן: $\triangle ABD = \triangle BDC$ (צייכ. 162). ווען מיר פארייניקן די מיטנס E און F פון די זײַטן AB און BC פונעם פּאראלעלאָגראם מיטן שפּיץ D, באקומען מיר פיר גלײַכגרויסע דרײַעקן.



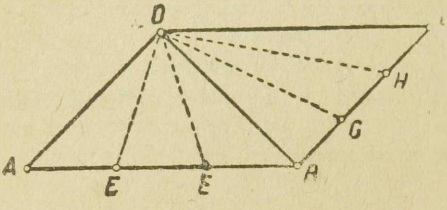
צייכ. 162

אופגאבע 6. א געגעבענעם פּאַראלעלאָגראם צעטײלן מיט גראָדע, וואָס גייען ארויס פון איין שפּיץ, אף דרײַ גלײַכגרויסע טײלן.

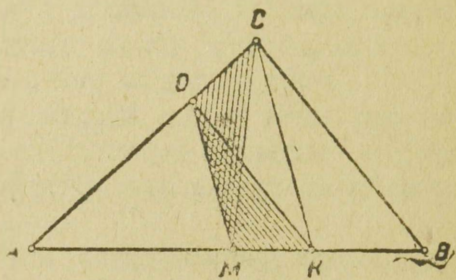
קאָנסטרוירונג. די דיאַגאָנאַל DB צעקלאַפּט דעם פּאראלעלאָגראם $ABCD$ אף צוויי גלײַכע דרײַעקן (צייכ. 163). די זײַטן AB און BC צעטײלן מיר אף דרײַ גלײַכע כאלאָקים און מיר פארייניקן די טײל-פונקטן E, F, G און H מיטן שפּיץ D; מירן באקומען זעקס גלײַכגרויסע דרײַעקן. דער שטעטעך פון יעדן דרײַעק איז גלײַך $\frac{1}{6}$ שטעטעך פונעם פּאראלעלאָגראם, הייסט עס, יעדערער פון די שטעטעכן — פונעם $\triangle ADF$, פונעם פירעק $BFDG$ און פונעם $\triangle CDG$ — מאכט אויס $\frac{1}{3}$ שטעטעך פונעם פּאראלעלאָגראם.

אופגאבע 7. דורך א באליביקן פונקט אף א זײַט פון א דרײַעק דורכפירן א גראָדע, וואָס טײלט דעם דרײַעק אף צוויי גלײַכגרויסע טײלן.

קאָנסטרויִרונג. לאָמיר נעמענ א באַליביקנ פונקט K אפ דער זײַט AB פונ-נעמ דרײַעק ABC (צייכ. 164). מיר וועלנ פאַרייניקנ דעמ פונקט K מיטנ שפּיצ C אונ פונ C וועלנ מיר דורכפירנ א מעדיִאַנע CM. די מעדיִאַנע CM טיילט דעמ דרײַעק אפ צוויי גלײַכגרויסע דרײַ-עקנ — CMA אונ CMB. מיר וועלנ דורכפירנ $MD \parallel CK$ אונ וועלנ פאַריי-ניקנ דעמ פונקט D מיטנ פונקט K, מיר וועלנ באַקומענ צוויי גלײַכגרויסע דרײַעקנ: $\triangle CDM$ אונ דרײַעק $\triangle DMK$, ווײַל בא זיי איז DM א געמיינזאַמער באַזיס אונ זייערע שפּיצנ C אונ K ליגנ אפ א גראָדער, וואָס איז פּאַראַלעל צו DM; הייסט עס, דעמ דרײַעק CDM קאָנ מענ פאַרבײַטנ מיטנ $\triangle DKM$, וועלכער איז לויטנ שעטעכ גלײַכ צומ $\triangle CDM$. אַזויאַרומ איז דער שעטעכ פונעמ דרײַ-עק ACM, וואָס איז גלײַכ צו א האַלבנ שעטעכ פונעמ געגעבענעמ דרײַעק, פאַרביטנ מיט א גלײַכנ שעטעכ פונעמ דרײַעק ADK.



צייכ. 163



צייכ. 164

אַלזאָ, די גראָדע DK טיילט דעמ געגעבענעמ דרײַעק ABC אפ צוויי גלײַכגרויסע כאַלאַקימ: $\triangle ADK$ אונ פירעק $BCDK$.

פראַגעס אונ איבונגענ.

1. ווי וועט זיכ ענדערנ דער שעטעכ פונ א גראָדעק, אויב מע זאָל דעמ באַזיס a לאָזנ ניט געענ-דערט אונ די הייכ h אָבער זאָל מענ 1) פאַרגרעסערנ אינ 3 מאָל, 2) פאַרקלענערנ אינ 2 מאָל?
2. אינ וויפל מאָל וועט זיכ פאַרגרעסערנ דער שעטעכ פונ א קוואַדראַט, אויב מע זאָל יעדע זײַט זײַנע פאַרגרעסערנ אינ 3 מאָל?
3. צי קאָנענ זײַנ גלײַכגרויס גראָדעקנ מיט פאַרשיידענע באַזיסנ אונ מיט פאַרשיידענע הייכנ?
4. וואָס פאַר א לענג דאַרפ האָבנ א גראָדעקיקער ערד-פּלאַצ בא א ברייט פונ 160 מ., אויב מע זאָל מיט אימ פאַרבײַטנ אנ ערד-פּלאַצ פונ א קוואַדראַטער פאָרמ מיט א זײַט פונ 200 מ.?
5. א גראָדעק אונ א קוואַדראַט האָבנ אַלצייַנע פּערימעטערס. איינע פונ די זײַטנ פונעמ גראָדעק האַלט 90 סמ., די זײַט פונעמ קוואַדראַט האַלט 60 סמ. דער שעטעכ פונ וועלכער פיגור איז גרעסער אונ אפ וויפל?
6. א גראָדעק אונ א קוואַדראַט זײַנענ גלײַכגרויס; איינע פונ די זײַטנ באַמ גראָדעק האַלט 120 סמ. די זײַט פונעמ קוואַדראַט האַלט 60 סמ. בא וועלכער פיגור איז דער פּערימעטער קלענער אונ אפ וויפל?
7. דערווײַזנ, אַז די פיר דרײַעקנ, וואָס בילדנ זיכ אויס דורכ די דיִאַגאָנאַלנ פונ א פּאַראַלעלאָגראַמ, זײַנענ גלײַכגרויס.
8. אינ א פּאַראַלעלאָגראַמ איז די קלענערע דיִאַגאָנאַל $n = 5\text{cm}$ פּערפּענדיקולער צו איינער פונ זײַנע זײַטנ אונ איז גלײַכ צו איר. אויסרעכענענ דעמ שעטעכ פונעמ פּאַראַלעלאָגראַמ.
9. דער שעטעכ פונ א פירעק, וואָס די מיטנס פונ די זײַטנ פונ א געגעבענעמ פּאַראַלעלאָגראַמ זײַנענ זײַנע שפּיצנ, איז גלײַכ צו א האַלבנ שעטעכ פונעמ פּאַראַלעלאָגראַמ. דערווײַזנ.

10. אין אַ גלײַכאַקסלדיקער טראַפּעציע שנײַדן זיך איבער די דיִאַגאָנאַלן אונטער אַ גראָדן ווינקל. די הייך פונ דער טראַפעציע איז h. דערווײַזן, אַז דער שטעטך פונ דער טראַפעציע איז $S = h^2$.

11. פאַרוואַנדלען אַ טראַפעציע אין אַ גלײַכגרויסן: 1) פּאַראַלעלאָגראַם און 2) גראָדעק.

12. פאַרוואַנדלען אַ שאַרפווינקלדיקן דרײַעק, וואָס זײַן באַזיס איז $a = 5\text{cm}$ און די הייך $h = 8\text{cm}$, אין אַ גלײַכגרויסן גראָדעק מיט דעם זעלבן באַזיס.

13. ס'איז געגעבן אַ טראַפעציע $ABCD$. דערווײַזן, אַז די גראָדע, וואָס פאַרייניקט די מיטנס K און L פונ אירע פּאַראַלעלע זײַטן, צעקלאַפּט די טראַפּעציע אף צוויי גלײַכגרויסע טראַפעציעס.

14. קאָנסטרויִרן אַ קוואַדראַט, וואָס זײַן שטעטך איז אין צוויי מאָל גרעסער, איידער דער שטעטך פונעם געגעבענעם קוואַדראַט.

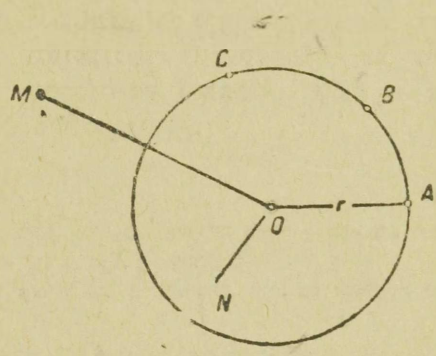
אָנווײַזונג. אויסנוצן די דיִאַגאָנאַל פונעם געגעבענעם קוואַדראַט.

X. געאָמעטרישע ערטער.

1. די ליניע אַלס געאָמעטריש אָרט פונ פונקטן.

די פונקטן פונ אַ קרײַזליניע פאַרמאָגן איינע אַ באַשטימטע אייגנשאַפט, נעמלעך זיי שטייען אָפּ פונ איין פונקט, פונ דעם צענטער פונ דער קרײַזליניע, אף איין און דעם זעלבן אָפּשטאַנד, וואָס איז גלײַך צום ראַדיִוס פונ דער קרײַזליניע.

די דאָזיקע אייגנשאַפט פאַרמאָגן אף אַ פלאַכקײַט בלויז די פונקטן, וואָס ליגן אף דער געגעבענער קרײַזליניע; די פונקטן, וועלכע ליגן אף דער זעלבער פלאַכקײַט וואָס די קרײַזליניע, אָבער ניט אף דער קרײַזליניע גופע, פאַרמאָגן ניט די דאָזיקע אייגנשאַפט.



צייכ. 165

אינדערעמעסן, ווען ס'איז געגעבן אַ קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיִוס איז $r = 3\text{cm}$, מיטן צענטער אינעם פונקט O (צייכ. 165), וועט אַ באַליביקער פונקט A, B אָדער C, וואָס שטייט אָפּ פונעם צענטער אף אַן אָפּשטאַנד פונ 3 סמ., ליגן אף דער געגעבענער קרײַזליניע.

יעטווידער פונקט M, וואָס שטייט אָפּ פונעם צענטער O אף אַן אָפּשטאַנד OM, וועלכער איז גרעסער פאַרן ראַדיִוס, $OM > r$, ליגט דרויסן דער קרײַזליניע; דער פונקט N, וואָס שטייט אָפּ פונעם צענטער O אף אַן אָפּשטאַנד ON, וועלכער איז קלענער פאַרן ראַדיִוס, $ON < r$, ליגט אינווייניק אין דער קרײַזליניע. אַלזאָ, 1) די פונקטן, וואָס ליגן אף דער געגעבענער קרײַזליניע, פאַרמאָגן אַ באַשטימטע אייגנשאַפט: אַלע שטייען זיי אָפּ אף איין און דעם זעלבן אָפּשטאַנד פונ איין פונקט, פונעם צענטער; 2) די פונקטן, וואָס ליגן ניט אף דער געגעבענער קרײַזליניע, פאַרמאָגן ניט די דאָזיקע אייגנשאַפט.

ליניעס, ווי למשל די קרײַזליניע, וואָס אַלע זייערע פונקטן פאַרמאָגן אַ געוויסע באַשטימטע אייגנשאַפט, דאַן ווען די פונקטן, וואָס ליגן ניט אף אָט די ליניעס, פאַרמאָגן ניט די דאָזיקע אייגנשאַפט, הייסן **דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ פונקטן**, וועלכע פאַרמאָגן די געגעבענע אייגנשאַפט.

2. געאָמעטרישע ערטער.

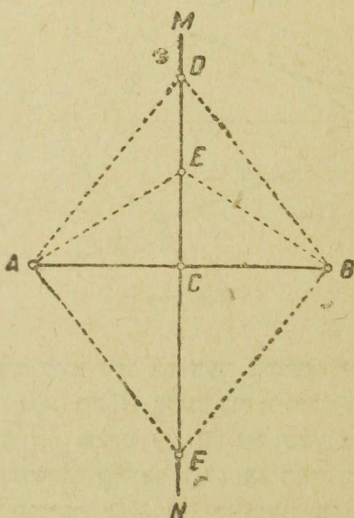
1. א קרײַזליניע איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די פונקטן אפ א פלאכקײַט, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון איין פונקט—פונעם צענטער פון דער קרײַזליניע—אפ א געגעבענעם אָפּשטאנד.

2. טעאָרעמע. דער פערפענדיקוליאר צו אן אָפּשניט, וואָס איז דורכגע-פירט דורך דעם מיטן פונעם אָפּשניט, איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די פונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון די עקן פונעם אָפּשניט.

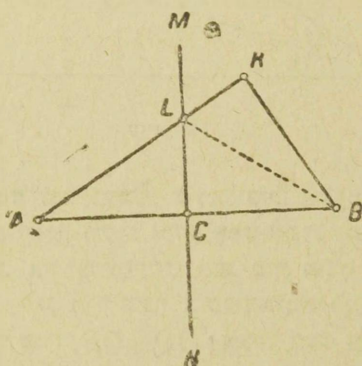
ס'איז געגעבן: $AC=CB$; $MN \perp AB$ און די פונקטן D, E, F... אפן פערפענדיקוליאר MN (צייכ. 166).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $DA=DB$, $EA=EB$, $FA=FB$.

דערווײַז. מיר פאַרבינדן די פונקטן D, E, F אאוו. מיט די פונקטן A און B, וואָס זיי זײַנען די עקן פונעם אָפּשניט; מיר באקומען אָפּשניטן DA און DB, EA און EB, FA און FB; די דאָזיקע אָפּשניטן זײַנען פאָרווײַז גלײַך אלס גע-נייגטע, וואָס גייען ארויס פון איין פונקט און וואָס האָבן גלײַכע פּראָיעק-ציעס AC און CB, הייסט עס: $DA=DB$; $EA=EB$; $FA=FB$ אאוו. אזויארום איז—יעטווידער פונקט



צייכ. 166



צייכ. 167

אפן פערפענדיקוליאר, וואָס גייט דורך דעם מיטן פונעם אָפּשניט AB, שטייט אָפּ פון די עקן A און B פונעם אָפּשניט אפ איין און דעם זעלבן אָפּשטאנד.

לאָמיר נעמען א באַליביקן פונקט K, וואָס ליגט ניט אפן געגעבענעם פערפענ-דיקוליאר MN (צייכ. 167), דאן איז KA ניט גלײַך צו KB. אינדערעמעסן, ווען מיר פאַרבינדן דעם פונקט L, דעם איבערשנײַד-פונקט פון KA מיט MN, מיטן פונקט B, האָבן מיר פונעם $\triangle KLB$, אז $KB < KL+LB$. ווען מיר פאַרבײַטן LB מיט א גלײַכן צו אים אָפּשניט AL, באקומען מיר: $KB<KL+LA$, אָדער $KB<KA$. דאָס הייסט, אז א באַליביקער פונקט, וואָס ליגט אפן פערפענדיקוליאר MN, איז אלצײַנס דערווײַטערט פון די עקן פונעם אָפּשניט; א באַליביקער פונקט אָבער, וואָס

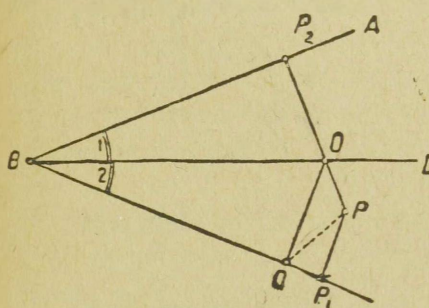
ליגט ניט אויפן פערפענדיקוליאר MN, פאַרמאָגט ניט אָט די אייגנשאַפט. אלזאָ, דער פערפענדיקוליאר MN, וואָס איז דורכגעפירט צום אָפּשניט AB דורך זײַן מיטן C, איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די פונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון די עקן פונעם אָפּשניט.

3. טעאָרעמע. די ביסעקטריסע פון א ווינקל איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די פונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון זײַנע זײַטן.

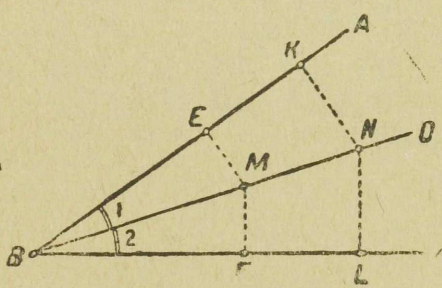
ס'איז געגעבן: BD איז די ביסעקטריסע; $\angle 1 = \angle 2$ (צייכ. 168); $ME \perp AB$ און $MF \perp BC$; $NK \perp AB$ און $NL \perp BC$ אאַז״וו.

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $ME = MF$, $NK = NL$ אאַז״וו.

דערווײַז. $\triangle MBF = \triangle MBE$, ווײַל בײַ זיי איז BM א געמיינזאַמע היפּאָטענוזע און $\angle 1 = \angle 2$. הייסט עס: $ME = MF$. אויף דעם זעלבן אופן ווערט דערווײַזן, אַז $NK = NL$.



צייכ. 169



צייכ. 168

מע זאָל נעמען א באַליביקן פונקט P, וואָס ליגט ניט אויף דער ביסעקטריסע BD (צייכ. 169), וועלן זײַנע אָפּשטאַנדן PP_1 און PP_2 ביז די זײַטן פון ווינקל B ניט זײַן גלײַך. אינדערעמעסן, ווען מיר פירן דורך פונעם פונקט O, ווו עס שנײַדן זיך איבער PP_2 מיט דער ביסעקטריסע BD, א פערפענדיקוליאר OQ צו דער זײַט BC, האָבן מיר $OQ=OP_2$; אָבער דער פערפענדיקוליאר PP_1 איז קלענער פון דער געניגטער PQ, $PP_1 < PQ$; ווידער האָבן מיר פונעם $\triangle OPQ$, אַז $PQ < PO+OQ$, הייסט עס, אַז PP_1 איז אווודאי קלענער פון $PO+OQ$ ($PP_1 < PO+OQ$). פאַרבײַטן מיר אין אָט דער אומגלײַכקײַט OQ מיטן גלײַכן צו אים אָפּשניט OP_2, באַקומען מיר: $PP_1 < PO+OP_2$, אָדער $PP_1 < PP_2$.

הייסט עס, א באַליביקער פונקט, וואָס ליגט אויף דער ביסעקטריסע BD, איז אַלציינס דערווײַטערט פון די זײַטן פונעם ווינקל B; א באַליביקער פונקט אָבער, וואָס ליגט ניט אויף דער ביסעקטריסע BD, פאַרמאָגט ניט אָט די אייגנשאַפט.

די ביסעקטריסע פון א ווינקל איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די פונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון זײַנע זײַטן.

4. פאַרן געאָמעטרישן אָרט פון די פונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון דער געגעבענער גראָדער, דינען צוויי גראָדע, וואָס זײַנען פאַראַלעל צו דער געגעבענער גראָדער און וואָס ליגן פון בײדע זײַטן אירע אויף איין און דעם זעלבן אָפּשטאַנד.

5. פאַרן געאָמעטרישן אָרט פון די שפּיצן בא דרײַעקן, וואָס האָבן איין און דעם זעלבן באַזיס און גלײַכע הייכן, דינען צוויי גראָדע, וואָס זײַנען פּאַראַלעל צום גע-געבענעם באַזיס און וואָס ליגן פון ביידע זײַטן פון באַזיס אויף אַן אָפּשטאַנד, וועלכער איז גלײַך צו דער הייך פון די דרײַעקן.

פּראַגעס.

1. וואָס איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון פּונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון צוויי גראָדע, וועלכע שנײַדן זיך איבער?

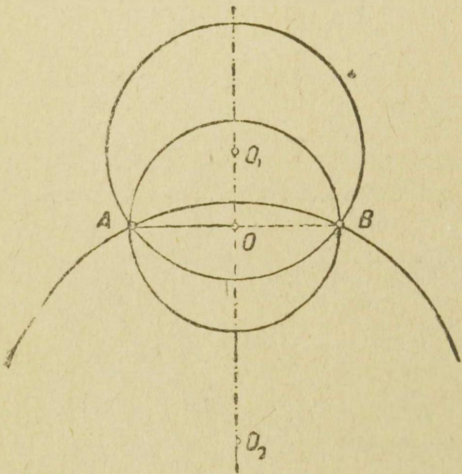
2. וואָס איז דאָס געאָמעטרישע אָרט פון פּונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון צוויי פּאַראַלעלע גראָדע?

XI. קרײַזליניע און קרײַז.

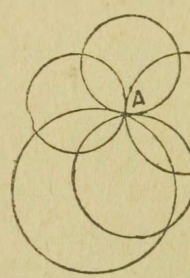
1. קרײַזליניע.

א קרײַזליניע איז פולקום באַשטימט, אויב ס'איז געגעבן איר צענטער און דער ראַדיוס; דער ראַדיוס באַשטימט די גרייס פון דער קרײַזליניע, דער צענטער — איר לאַגע.

1. דורך איין פּונקט A, וועלכער איז ניט קיין צענטער, קאָן מען דורכפירן אויף א פלאַכקײַט אַן אַ שיר קרײַזליניעס (צייכ. 170); דאָס אָרט פאַרן צענטער פון יעדערער פון זיי קאָן מען אויף א פלאַכקײַט נעמען ווו נאָר מע וויל.



צייכ. 171



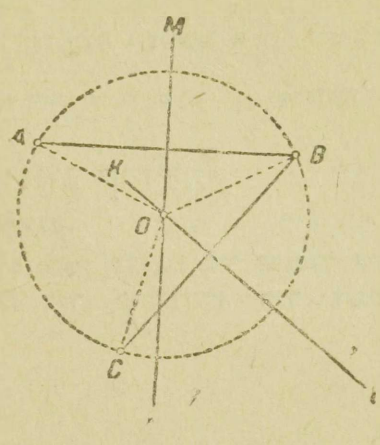
צייכ. 170

2. דורך צוויי פּונקטן A און B קאָן מען אויך דורכפירן אויף א פלאַכקײַט אַן אַ שיר קרײַזליניעס (צייכ. 171), וואָס זייערע צענטערס אָבער אויף דער פלאַכקײַט וועלן ליגן ניט ווו מע וויל, ווי דאָס איז געמאָלט אינעם ערשטן פאַל; די צענטערס וועלן ליגן אויפן פּערפּענדיקוליאַר, וועלכער גייט דורכן מיטן O פונעם אָפּשניט AB, וואָס זײַנע עקן זײַנען די פּונקטן A און B.

אינדערעמעסן, לויטן באַדינג דאַרפן די פּונקטן A און B, די עקן פונעם אָפּ-שניט AB, ליגן אויף דער קרײַזליניע, הייסט עס, דער צענטער פון דער קרײַזליניע שטייט אָפּ פון זיי אויף א גלײַכן אָפּשטאַנד; דאָס געאָמעטרישע אָרט אָבער פון די פּונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון די עקן פונעם אָפּשניט, איז דער פּערפּענדיקו-ליאַר, וועלכער גייט דורכן מיטן פונעם אָפּשניט.

3. דורך דרײַ פונקטן A, B און C (צײכ. 172), וואָס ליגן ניט אַף אײן גראָדער, קאָן מען דורכפירן אַ קרײַזליניע און בלויז אײנע. איר צענטער, ווי אַ פונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון דרײַ געגעבענע פונקטן, ליגט אַף דער איבערשנײַדונג פון די צוויי פּערפּענדיקוליאַרן MN און KL, וועלכע גייען דורך די מיטנס פון די אָפּשניטן, וואָס פאַרײניקן פּאָרווײַז יעטווידע צוויי געגעבענע פונקטן:

$MN \perp AB$ און $KL \perp BC$.


צײכ. 172

די גראָדע AB און BC שנײַדן זיך איבער, דעריבער שנײַדן זיך אויך איבער MN און KL אַלס פּערפּענדיקוליאַרן צו אָט די גראָדע.

דער פונקט O, דער איבערשנײַדפונקט פון די דאָזיקע פּערפּענדיקוליאַרן, איז דער צענטער פון דער קרײַזליניע, ווײַל ער געפינט זיך אַף אַ גלײַכן אָפּשטאַנד פון די פונקטן A, B און C.

$$AO=OB=OC=r$$

(r איז דער ראַדיוס פון דער קרײַזליניע). צוויי גראָדע MN און KL שנײַדן זיך איבער בלויז אין אײן פונקט. הייסט עס, דורך דרײַ פונקטן A, B און C קאָן מען דורכפירן בלויז אײן קרײַזליניע.

אויספיר. דרײַ פונקטן, וואָס ליגן ניט אַף אײן גראָדער, באַשטימען פולקום די לאַגע און די גרייס פון אַ קרײַזליניע.

4. אויב דרײַ פונקטן A, B און C ליגן אַף אײן גראָדער, וועלן די פּערפּענדיקוליאַרן MN און KL, וואָס זײַנען דורכגעפירט דורך די מיטנס פון AB און BC, זײַן פּאַראַלעלע, אַלס צוויי פּערפּענדיקוליאַרן צו אײן און דער זעלבער גראָדער, דה. זיי האָבן ניט קײן געמײנזאַמען פונקט. דערפון דרינגט, אַז דורך דרײַ פונקטן A, B און C, וואָס ליגן אַף אײן גראָדער, קאָן מען קײן קרײַזליניע ניט דורכפירן, הייסט עס, אַ גראָדע קאָן מיט קײן קרײַזליניע ניט האָבן דרײַ געמײנזאַמע פונקטן. אַ גראָדע שנײַדט איבער אַ קרײַזליניע בלויז אין צוויי פונקטן.

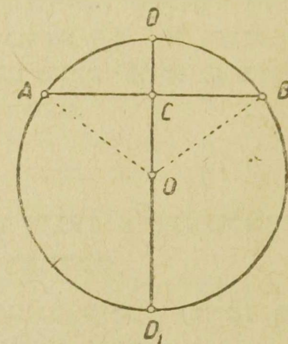
2. אײַנשאַפט פון אַ דיאַמעטער, וואָס איז פּערפּענדיקולער צו אַ כאָרדע. סימעטריע אין אַ קרײַז.

1. טעאָרעמע. אַ דיאַמעטער, וואָס איז פּערפּענדיקולער צו אַ כאָרדע, טיילט די כאָרדע און דעם בויגן, וואָס אָט די כאָרדע ציט צונויף, אָפּדערהעלפט.

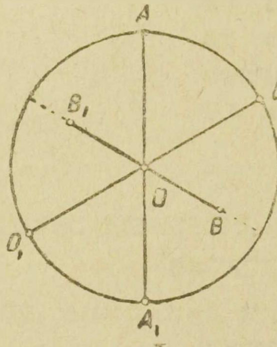
ס'איז געגעבן: DD_1 איז אַ דיאַמעטער; AB איז אַ כאָרדע; $DD_1 \perp AB$ (צײכ. 173).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) $AC = CB$; 2) $\smile AD = \smile BD$ 3) $\smile AD_1 = \smile BD_1$.

דערווײַז. די עקן A און B פון דער כאָרדע AB, אלס פונקטן, וואָס ליגן אפ דער קרײַזליניע, זײַנען אלציינס ווײַט פונעם צענטער O. דער צענטער O ליגט אפן דיִאמעטער DD_1, וועלכער איז פערפענדיקולער צו דער כאָרדע AB. דער דרײַעק AOB איז א גלײַכאקסלדיקער, און OC, דער פערפענדיקוליאר צו AB, איז זײַן סימעטריע-אקס. דערפון דרינגט, אז $CA = CB$, דה. דער דיִאמעטער, וואָס איז פערפענדיקולער צו דער כאָרדע AB, טיילט אָט די כאָרדע אפ-



צייכ. 173



צייכ. 174

דערהעלפט. מיר בייגן איבער דעם קרײַז לויטן דיִאמעטער DD_1, די קרײַזליניע וועט זיך דאַן צעטיילן אפדערהעלפט, ווײַל די פונקטן פונעם בויגן DAD_1 וועלן צונויפפאלן מיט די פונקטן פונעם בויגן DBD_1, דה. דער דיִאמעטער איז די סימעטריע-אקס פונעם קרײַז און פון דער קרײַזליניע. כוץ דעם פאלט צונויף דער $\smile AD$ מיטן $\smile BD$, און דער $\smile AD_1$ פאלט צונויף מיטן $\smile BD_1$, דה. די בויגנס, וועלכע די כאָרדע ציט צונויף, טיילן זיך אפדערהעלפט דורכן דיִאמעטער, וואָס איז פערפענדיקולער צו דער כאָרדע.

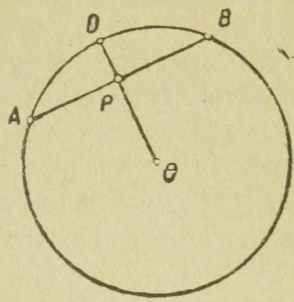
2. אין א קרײַז קאָן מען דורכפירן אָן א שיר דיִאמעטערס; הייסט עס, א קרײַז פארמאָגט אָן א שיר סימעטריע-אקסן.

אויסער דער אקס-סימעטריע פארמאָגט נאָך א קרײַז אָדער א קרײַזליניע א צענטראלע סימעטריע, וועלכע באשטייט אין דעם, וואָס אין א קרײַז און אפ א קרײַזליניע זײַנען פאראן אָן א שיר פּאָרן פונקטן, וועלכע געפינען זיך אין א סימעטרישער לאגע לעגאבע דעם צענטער. אזעלכע פונקטן ליגן אפ דער גראָדער, וואָס גייט דורכן צענטער, און זיי געפינען זיך אפ אן אלציינעם אָפשטאנד פון אים.

די עקן פון א באליביקן דיִאמעטער, די פונקטן A און A_1, D און D_1 (צייכ. 174), זײַנען סימעטריש לעגאבע דעם צענטער O; די פונקטן B און B_1, וואָס ליגן אינווייניק אינעם קרײַז, זײַנען סימעטריש לעגאבע דעם צענטער O; זיי ליגן אפ א גלײַכן אָפשטאנד פונעם צענטער, אפ דער גראָדער, וואָס גייט דורכן צענטער: $OB = OB_1$.

3. אופגאבע. צעטײלן דעם געגעבענעם בויגן AB אפדערהעלפט (צײכ. 175).

קאָנסטרויִרונג. מיר פירן דורכן פונעם צענטער א פערפענדיקוליאר צו דער כאָרדע AB און מיר פארלענגערן אים ביז זײַן איבערשנײַדן זיך מיטן בויגן AB אינעם פונקט D, דאן וועט $\smile AD = \smile BD$. אויב די לאגע פונעם צענטער איז ניט אָנגעוויזן, פירן מיר דורכן מיטן פון דער כאָרדע AB א פערפענדיקוליאר OP, וועלכער וועט אינעם פונקט D צעטײלן דעם בויגן AB אפדערהעלפט.



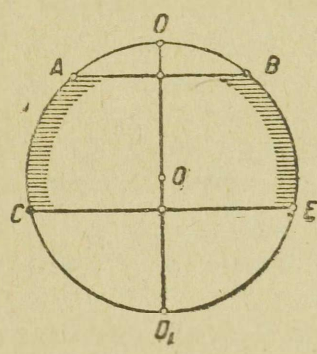
צײכ. 175

3. אײַגנשאפט פון בויגנס, וואָס זײַנען אײַנגעשלאָסן צווישן פאראלעלע כאָרדעס.

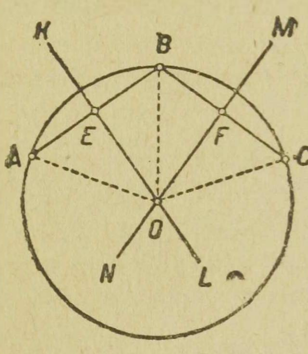
טעאָרעמע. בויגנס, וואָס זײַנען אײַנגעשלאָסן צווישן פאראלעלע כאָרדעס, זײַנען גלײַך.

ס׳איז געגעבן: AB און CE זײַנען כאָרדעס, $AB \parallel CE$ (צײכ. 176).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: $\smile AC = \smile BE$.



צײכ. 176



צײכ. 177

דערווײַז. מיר פירן דורכן א דיִאמעטער D_1D פערפענדיקולער צו די פאראלעלע כאָרדעס AB און CE. ווען מע זאָל איבערבײגן דעם קרײַז לויטן דיִאמעטער D_1D, וועלן צונויפפאלן: דער פונקט A מיטן פונקט B, דער פונקט C מיטן פונקט E און דער בויגן AC מיטן בויגן BE, הייסט עס, $\smile AC = \smile BE$.

4. וויִאזוי געפינט מען דעם צענטער פון א קרײַזליניע און פון א בויגן.

אופגאבע 1. ס׳איז געגעבן א קרײַזליניע, בא וועלכער דער צענטער איז ניט באצייכנט. געפינען איר צענטער.

קאָנסטרויִרונג. לאָמיר נעמען אַף דער געגעבענער קרײַזליניע דרײַ באַליִקע פונקטן A, B און C און דורכפירן די כאָרדעס AB און BC (צייכ. 177) און צו זיי, דורכ זייערע מיטנס E און F וועלן מיר דורכפירן די פערפענדיקולארן MN און KL.

ביידע פערפענדיקולארן וועלן דורכגיין דורכן צענטער פון דער קרײַזליניע; דער געזוכטער צענטער וועט גלײַכצײַטיק ליגן אי אַפן פערפענדיקוליאר MN אי אַפן פערפענדיקוליאר KL, נעמלעכ, אינ זייער איבערשנײַד-פונקט O. ווען מיר פאַרייניקן דעם פונקט O מיט די פונקטן A, B און C, באַקומען מיר: $AO=OB=OC$, הייסט עס, די פונקטן A, B און C שטייען אָפּ פונעם פונקט O אַף א גלײַכן אָפּשטאנד, און אַזויווי לויטן באַדינג ליגן זיי אַף דער קרײַזליניע, איז דער פונקט O דער צענטער פון דער קרײַזליניע.

אופגאַבע 2. ס׳איז געגעבן א בויגן. געפינען זײַן צענטער. קאָנסטרויִרונג. אַף צו געפינען דעם צענטער פון א בויגן מאַכט מען דורכ די זעלבע קאָנסטרויִרונג, ווי אַף צו געפינען דעם צענטער פון א קרײַזליניע.

5. אָפּהענגיקײַט צווישן כאָרדעס און בויגנס.

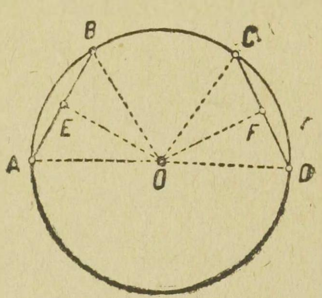
טעאָרעמע. אינ איין קרײַז (אָדער אינ גלײַכע קרײַזן) איז גלײַכע כאָרדעס ציִען צונויפּ גלײַכע בויגנס און, פאַרקערט, גלײַכע בויגנס ציִען זיכ צונויפּ מיט גלײַכע כאָרדעס.

1) ס׳איז געגעבן: די כאָרדע $AB=CD$ (צייכ. 178).

ס׳פּאָדערט זיכ דערווײַזן: $\smile AB = \smile CD$.

2) ס׳איז געגעבן: $\smile AB = \smile CD$.

ס׳פּאָדערט זיכ דערווײַזן: $AB=CD$.



צייכ. 178

דערווײַז. 1. מיר פאַרייניקן די עקן פון די כאָרדעס AB און CD מיטן צענטער O און מיר באַקומען צוויי גלײַכע דרײַעקן AOB און COD; בא זיי איז $AB=CD$ לויטן באַדינג, $AO=OC$ און $BO=OD$ אַלס ראַדיִוסן פון איין און דער זעלבער קרײַזליניע.

פון דעם, וואָס די דרײַעקן זײַנען גלײַכ, דרינגט, אז $\angle AOB=\angle COD$; און גלײַכע צענטראַלע ווינקלען שפּאַרן זיכ דאָכ אָן אַף אַנטשפּרעכיקע גלײַכע בויגנס, דעריבער איז $\smile AB=\smile CD$.

2. $\smile AB=\smile CD$, דעריבער זײַנען אויכ גלײַכ זייערע אַנטשפּרעכיקע צענטראַלע ווינקלען, דה. $\angle AOB=\angle COD$. אינ די דרײַעקן AOB און COD זײַנען די זײַטן AO און OC, BO און OD גלײַכ אַלס ראַדיִוסן פון איין און דער זעלבער קרײַזליניע; ס׳זײַנען אויכ גלײַכ די ווינקלען צווישן זיי, הייסט עס $\triangle AOB=\triangle COD$, און דערפון דרינגט, אז די כאָרדעס AB און CD זײַנען גלײַכ: $AB=CD$.

6. אָפּהענגיקייַט צווישן כאָרדעס מיט זייער אָפּשטאַנד פונעם צענטער.

1. טעאָרעמע. אין איין קרייַז אָדער אין גלייַכע קרייַזן זייַנען גלייַכע כאָרדעס גלייַכווייַט פונעם צענטער און, פאַרקערט, כאָרדעס, וואָס זייַנען גלייַכווייַט פונעם צענטער, זייַנען גלייַך.

ס'איז געגעבן: $AB=CD$; $OE \perp AB$ און $OF \perp CD$ (צייכ. 178).

ס'פאָדערט זיך דערווייַזן: $OE=OF$.

דערווייַז: פון דער גלייַכקייַט פון די דרייַעקן AOB און COD דרינגט, אַז זייערע הייכן זייַנען גלייַך, דה. $OE=OF$.

ס'איז געגעבן: $OE \perp AB$ און $OF \perp CD$; $OE=OF$.

ס'פאָדערט זיך דערווייַזן: $AB=CD$.

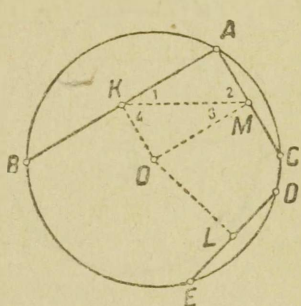
דערווייַז. אין די גראָדווינקלדיקע דרייַעקן AOE און COF איז $AO=CO$ אַלס ראַדיוסן און $OE=OF$ לויטן באַדינג; דעריבער איז $\triangle AOE=\triangle COF$ און דערפון דרינגט, אַז $AE=CF$; נאָר ווייבאַלד $AE=CF$, דה. ס'זייַנען גלייַך די העלפטן פון די כאָרדעס AB און CD, זייַנען אויך גלייַך די כאָרדעס גופא; אַלזאָ, $AB=CD$.

2. טעאָרעמע. פון צוויי כאָרדעס אין אַ קרייַזליניע איז די קלענערע ווייַטער פונעם צענטער און, פאַרקערט, די גרעסערע כאָרדע איז נעענטער צום צענטער.

ס'איז געגעבן: די קרייַזליניע O און די כאָרדעס AB און DE, $AB>DE$ (צייכ. 179).

ס'פאָדערט זיך דערווייַזן: $OK<OL$.

דערווייַז. פונעם עק A פון דער כאָרדע AB וועלן מיר דורכפירן אַ כאָרדע AC, וואָס איז גלייַך צו DE, די אָפּשטאַנדן זייערע פונעם צענטער וועלן דאַן זייַן גלייַך: $OM=OL$. לאָמיר פאַרייניקן K און M מיט אַ גראָדער KM און באַטראַכטן דעם דרייַעק KAM. בא אים איז $AK>AM$ אַלס העלפטן פון ניט קיין גלייַכע כאָרדעס AB און AC, פון וועלכע AB איז גרעסער פאַר AC, און דעריבער איז $\angle 2>\angle 1$ (אין אַ דרייַעק ליגט קעגן דער גרעסערער זייַט אויך אַ גרעסערער ווינקל). אינעם דרייַעק KOM האָבן מיר: $\angle 3=90°-\angle 2$ און $\angle 4=90°-\angle 1$. פאַרגלייַכן מיר די רעכטע טיילן פון אָט די גלייַכקייַטן, דה. די דיפערענצן $90°-\angle 2$ און $90°-\angle 1$, באַמערקן מיר, אַז דער פאַרמינערער $\angle 2$ איז גרעסער, איידער דער פאַרמינערער $\angle 1$, הייסט עס, $90°-\angle 2<90°-\angle 1$, און דעריבער איז אויך $\angle 3<\angle 4$; אָבער קעגן קלענערן ווינקל אין אַ דרייַעק ליגט אויך אַ קלענערע זייַט, דעריבער איז $OK<OM$; פאַרבייַטן מיר OM מיט אַ גלייַכן צו אים אָפּשניט OL, האָבן מיר: $OK<OL$, דאָס טאַקע האָט מען געדאַרפט דערווייַזן.

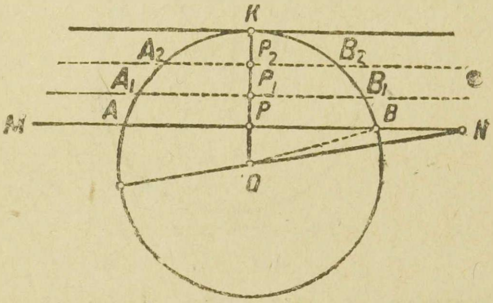


צייכ. 179

7. פאַרשיידענע לאַגעס פון א גראַדער לעגאַבע א קרײַזליניע. סעקאַנטע (שנײַדנדיקע) און טאַנגענטע (באַרירנדיקע).

1. א גראַדע, אָפּהענגיק פון איר לאַגע לעגאַבע א קרײַזליניע, קאָן האָבן מיט איר: 1) צוויי געמײנזאַמע פּונקטן, 2) בלויז איין געמײנזאַמען פּונקט און 3) קיין איין געמײנזאַמען פּונקט ניט.

מער פון צוויי געמײנזאַמע פּונקטן קאָן א גראַדע מיט קיין קרײַזליניע ניט האָבן, ווײַל דורך דרײַ פּונקטן, וואָס ליגן אַף איין גראַדער, קאָן מען ניט דורכפירן קיין קרײַזליניע.



צייכ. 180

2. די גראַדע MN (צייכ. 180), וואָס שנײַדט איבער די קרײַזליניע, האָט מיט איר צוויי געמײנזאַמע פּונקטן A און B און הייסט סעקאַנטע (שנײַדנדיקע); דער אָפּשניט פון דער סעקאַנטע MN, וואָס זײַנע עקן A און B ליגן אַף דער קרײַזליניע, איז די כאָרדע AB. די סעקאַנטע MN שטייט אָפּ פונעם צענטער אַף אן אָפּשטאַנד OP, דערבײַ איז OP פּערפּענדי-קולער צו MN און OP איז קלענער פון r.

די סעקאַנטע, וואָס גייט דורכן צענטער, הייסט צענטראַלע סע-קאַנטע און איז די סימעטריע־אַקס פון דער קרײַזליניע.

3. אויב מע זאָל אַריבערטראָגן די סעקאַנטע MN פּאַראַלעל צו זיך גופא דערווײַטערנדיק זי די גאַנצע צײַט פונעם צענטער, איז 1) דער אינעווייניקסטער טייל אירער, די כאָרדע AB, וועט די גאַנצע צײַט זיך האַלטן אין פאַרקלענערן, $AB > A_1B_1 > A_2B_2...$; 2) דער אָפּשטאַנד אירער פונעם צענטער וועט שטײַגן, $OP < OP_1 < OP_2...$; 3) אירע איבערשנײַד־פּונקטן A און B מיט דער קרײַז-ליניע וועלן זיך דערנענטערן איינער צום אַנדערן.

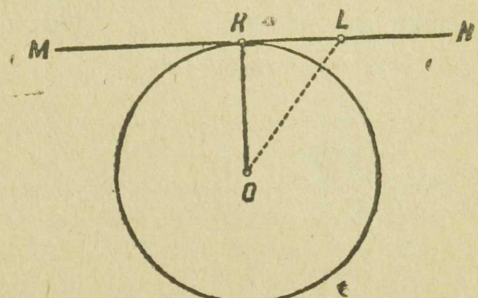
בײַטנדיק אַף אזא אופן איר אָרט, קאָן די סעקאַנטע MN פאַרנעמען אויך אזא לאַגע, ווען אירע ביידע איבערשנײַד-פּונקטן A און B מיט דער קרײַזליניע זאָלן זיך צונויפגיסן אין איין פּונקט K, און דער אינעווייניקסטער טייל פון דער סעקאַנ-טע — די כאָרדע AB — זאָל פאַרוואַנדלט ווערן אין א פּונקט.

בא אזא לאַגע רופט מען די סעקאַנטע MN (צייכ. 181) טאַנגענטע (באַ-רירנדיקע), איר געמײנזאַמער פּונקט K מיט דער קרײַזליניע הייסט באַריר-פּונקט. דער אָפּשטאַנד פון דער טאַנגענטע ביזן צענטער, וואָס איז גלײַך OK, איז דער ראַדיוס פון דער קרײַזליניע: $OK = r$. אלזאָ, א גראַדע, וואָס האָט מיט דער קרײַז-ליניע בלויז איין געמײנזאַמען פּונקט, הייסט טאַנגענטע און שטייט אָפּ פונעם צענטער אַף אן אָפּשטאַנד, וואָס איז גלײַך צום ראַדיוס פון דער קרײַזליניע.

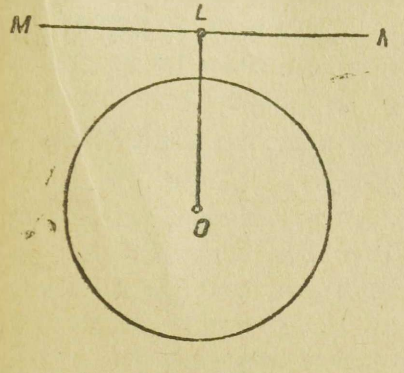
4. די גראַדע MN (צייכ. 182), וועלכע איז דערווײַטערט פונעם צענטער פון דער קרײַזליניע אַף אן אָפּשטאַנד OL, וואָס איז גרעסער פאַרן ראַדיוס, $OL > r$,

האָט ניט קיין געמיינזאַמע פּונקטן מיט דער קרײַזליניע און ליגט דרויסן דער קרײַזליניע.

אלזאָ, די לאגע פון דער גראָדער MN לעגאבע דעם צענטער פון דער קרײַז-ליניע ווערט באַשטימט דורך איר אָפּשטאנד d פונעם צענטער:



צייכ. 181



צייכ. 182

1) $d<r$, איז MN א סעקאנטע; 2) $d=r$, איז זי א טאנגענטע; 3) $d>r$, ליגט MN דרויסן דער קרײַזליניע.

5. טעאָרעמע. א טאנגענטע איז פּערפּענדיקולער צום ראַדיוס, וואָס איז דורכגעפירט צום באַריר-פונקט.

ס'איז געגעבן: MN איז א טאנגענטע, K איז דער באַריר-פונקט (צייכ. 181).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $OK \perp MN$.

דערווײַז. לאָמיר נעמען ערגעץ-ווּ אף דער טאנגענטע MN א פונקט L און אים פאַרייניקן מיטן צענטער O. דער פונקט L ליגט דרויסן דער קרײַזליניע, דעריבער איז דער אָפּשטאנד פון אָט דעם פונקט ביזן צענטער פון דער קרײַזליניע גרעסער פאַרן ראַדיוס: $OL>OK$. אזויארום איז OK דער קירצסטער אָפּשטאנד פון דעם פונקט O ביז דער טאנגענטע, און דער קירצסטער אָפּשטאנד פון א פונקט ביז א גראָדער איז דאָך א פּערפּענדיקוליאר; אלזאָ, $OK \perp MN$.

6. טעאָרעמע (פאַרקערטע). יעטווידע גראָדע, וואָס איז פּערפּענדיקו-לער צום ראַדיוס בא זײַן עק, וועלכער ליגט אף דער קרײַזליניע, איז א טאנגענטע.

ס'איז געגעבן: $MN \perp OK$ (צייכ. 181).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: MN איז א טאנגענטע.

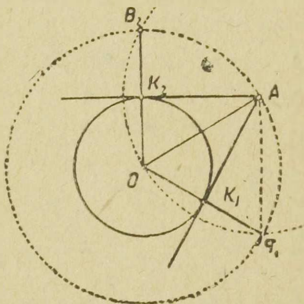
דערווײַז. דער פּערפּענדיקוליאר OK איז קירצער פון יעטווידער אנדערער גראָדער OL, וואָס איז דורכגעפירט פונעם פונקט O צו דער גראָדער MN, דעריבער איז $OL>OK$ און דער פונקט L ליגט דרויסן דער קרײַזליניע; דער פונקט K איז דער איינציקער פונקט אף דער גראָדער MN, וואָס ליגט גלײַכצײַטיק אויך אף דער קרײַזליניע; די גראָדע MN, וואָס האָט מיט דער קרײַזליניע בלויז איין גע-מיינזאַמען פונקט K, איז א טאנגענטע.

8. ווי אַזוי פירט מענ דורכ טאַנגענטע.

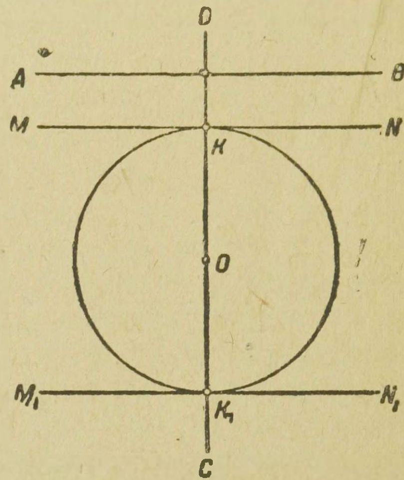
אויפגאַבע 1. דורכפירנ א טאַנגענטע דורכ דעמ געגעבענעמ פּונקט K צו דער געגעבענער קרײַזליניע (צייכ. 181).

לייזונג. מיר פירנ דורכ דעמ געגעבענעמ פּונקט K א ראַדיוס OK אונ א גראָדע MN, וואָס איז פּערפּענדיקולער צו OK. דער דאָזיקער פּערפּענדיקוליאַר MN וועט זײַנ די געזוכטע טאַנגענטע.

אויפגאַבע 2. דורכפירנ א טאַנגענטע צו דער געגעבענער קרײַזליניע פּאַראַלעל צו דער געגעבענער גראָדער AB (צייכ. 183).



צייכ. 184



צייכ. 183

לייזונג. דורכנ צענטער O פירנ מיר דורכ א גראָדע CD פּערפּענדיקולער צו AB; די דאָזיקע גראָדע וועט איבערשנײַדנ די קרײַזליניע אינ צוויי פּונקטנ — K אונ K_1. דורכ די פּונקטנ K אונ K_1 פירנ מיר דערנאָכ דורכ די גראָדע MN אונ M_1N_1 פּערפּענדיקולער צומ דיאַמעטער KK_1. די דאָזיקע ביידע גראָדע וועלנ זײַנ די געזוכטע טאַנגענטע.

אויפגאַבע 3. דורכפירנ טאַנגענטע פונ א דרויסנדיקנ פּונקט A צו דער געגעבענער קרײַזליניע (צייכ. 184).

1) לאָמיר זאָגנ, אז די אויפגאַבע איז געלייזט אונ אז פונ דעמ געגעבענעמ פּונקט A צו דער געגעבענער קרײַזליניע מיטנ צענטער O איז די טאַנגענטע AK_1 דורכגעפירט. ווענ מיר פאַראייניקנ דעמ פּונקט O מיט K_1, באַקומענ מיר א גראָד-ווינקלדיקנ דרײַעק AOK_1. אפ דער פאָרזעצונג פונעמ ראַדיוס OK_1 וועלנ מיר אָפּ-לייגנ אנ אָפּשניט $K_1B_1 = OK_1 = r$. ווענ מיר פאַראייניקנ B_1 מיט A, באַקומענ מיר א גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק AOB_1, בא וועלכנ AK_1 איז די הייכ אונ, הייסט עס, זײַנ מעדיאַנע. אלזאָ, די אויפגאַבע באַשטייט אינ דעמ, וואָס מע דאַרפ געפינענ דעמ דריטנ שפּיצ B פונ דעמ גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק AOB_1, וואָס צוויי שפּיצנ זײַנע: A — דער געגעבענער פּונקט—אונ O — דער צענטער פונ דער געגעבענער קרײַזלי-ניע, זײַנענ געגעבנ. דער פּונקט B_1 ליגט: 1) אפ דער קרײַזליניע, וואָס איר צענ-טער איז דער פּונקט A אונ איר ראַדיוס AO איז גלײַכ צומ אָפּשטאַנד פונעמ פּונקט A ביזנ צענטער O, אונ 2) אפ דער קרײַזליניע מיטנ צענטער אינעמ פּונקט O, וואָס

איר ראַדיוס OB_1 איז גלײַכ צום דיאַמעטער פונ דער געגעבענער קרײַזליניע; דער פונקט B_1 איז דעריבער דער איבערשנײַד-פונקט פונ בײדע קרײַזליניעס.

2) קאָנסטרוירונג. מיר פירנ דורכ מיטנ ראַדיוס, וואָס איז גלײַכ צום דיאַמעטער פונ דער געגעבענער קרײַזליניע, אײנ באַהילפיקע קרײַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט O, דערנאָכ פירנ מיר דורכ א צווייטע באַהילפיקע קרײַזליניע, נעמענדיק דעם פונקט A פאַרנ צענטער, מיטנ ראַדיוס OA, וואָס איז גלײַכ צום אָפּשטאַנד פונעם פונקט A ביזנ צענטער O פונ דער געגעבענער קרײַזליניע. די פונקטנ B_1 אונ B_2, אינ וועלכע די צווייטע באַהילפיקע קרײַזליניע שנײַדט זיכ איבער מיט דער ערשטער, פאַראײניקנ מיר מיטנ צענטער O. די גראָדע OB_1 אונ OB_2 שנײַדנ איבער די געגעבענע קרײַזליניע אינ די פונקטנ K_1 אונ K_2, וועלכע זײַנענ די באַריר-פונקטנ פונ צוויי טאַנגענטע AK_1 אונ AK_2, וואָס קאָנענ דורכגעפירט ווערנ פונ דעם דרויסנדיקנ פונקט A צו דער געגעבענער קרײַזליניע.

3) דערווײַז. ווענ מיר פאַראײניקנ דעם פונקט B_1 מיטנ פונקט A, באַקומענ מיר א גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק AB_1O, בא וועלכנ AO איז גלײַכ צו AB_1 אלס ראַדיוסנ פונ דער קרײַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט A; כוץ דעם איז דער פונקט K_1 דער מיטנ פונ OB_1, ווײַל לויט דער קאָנסטרוירונג איז $OB_1 = 2OK_1$; דערפונ דרינגט, אז די גראָדע AK_1 איז אינעם גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק AOB_1 אי די מעדיאַנע אי די הייכ. דה. זי איז פּערפּענדיקולער צו OB_1 אינעם פונקט K_1. אלזאָ, $AK_1 \perp OK$, דה. די גראָדע AK_1 איז פּערפּענדיקולער צום ראַדיוס OK_1 אינ זײַנ עק K_1, וואָס ליגט אפ דער קרײַזליניע, הייסט עס, זי איז א טאַנגענטע צו דער געגעבענער קרײַזליניע. אפנ זעלבנ אויפנ קאָנ מענ אויכ דערווײַזנ, אז די AK_2 איז די צווייטע טאַנגענטע, וואָס איז דורכגעפירט פונעם דרויסנדיקנ פונקט A צו דער געגעבענער קרײַזליניע.

4) צוויי קרײַזליניעס שנײַדנ זיכ איבער אינ צוויי פונקטנ K_1 אונ K_2, הייסט עס, ס'זײַנענ מעגלעכ צוויי לייזונגענ פונ דער דאָזיקער אופגאַבע, דה. פונ דעם געגעבענעם פונקט A, וואָס ליגט דרויסנ דער קרײַזליניע, קאָנ מענ דורכפירנ צוויי טאַנגענטע AK_1 אונ AK_2 צו דער געגעבענער קרײַזליניע.

אלס לענג פונ דער טאַנגענטע רעכנט זיכ דער אָפּשניט, וואָס זײַנע עקנ זײַנענ דער געגעבענער פונקט A אונ דער באַריר-פונקט K_1 אָדער K_2.

9. אייגנשאַפט פונ טאַנגענטע, וואָס זײַנענ דורכגעפירט פונ אײנ אונ דעם זעלבנ פונקט.

1. טעאָרעמע. טאַנגענטע, וואָס זײַנענ דורכגעפירט צו א קרײַזליניע פונ א פונקט, וועלכער ליגט דרויסנ דער קרײַזליניע, זײַנענ גלײַכ.

ס'זײַנענ געגעבנ: AK_1 אונ AK_2 זײַנענ טאַנגענטע, K_1 אונ K_2 זײַנענ די באַריר-פונקטנ (צייכ. 184).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $AK_1 = AK_2$.

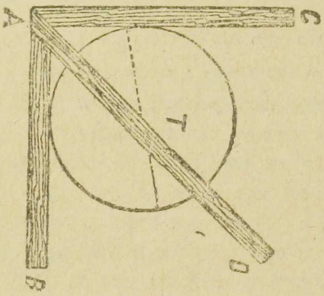
דערווײַז. די גראָדווינקלדיקע דרײַעקנ AOK_1 אונ AOK_2 זײַנענ גלײַכ; בא זיי איז די זײַט OA א געמיינזאַמע היפּאָטענוזע אונ OK_1 איז גלײַכ OK_2 אלס ראַדיוסנ. דערפונ, וואָס די דרײַעקנ זײַנענ גלײַכ, דרינגט, אז $AK_1 = AK_2$.

2. פונ דער גלײַכקײַט פונ אָט די דרײַעקנ דרינגט אויכ, אז $\angle OAK_1 = \angle OAK_2$,

דה. OA איז די ביסעקטריסע פונעם ווינקל A, וועלכנ עס בילדנ צוויי טאנגענטע, וואָס גייענ ארויס פונ איינ פונקט.

אויספיר. די צענטראלע סעקאנטע AO איז די סימעטריע-אקס פונעם ווינקל A, וועלכנ עס בילדנ די טאנגענטע, וואָס זײַנענ דורכגעפירט פונ א דרויסנדיקנ פונקט A צו דער געגעבענער קרײַזליניע.

3. צענטער־זוכער. אפ צו באשטימענ דעם צענטער פונ א קרײַז באנוצט מענ זיכ אנ אנדערש מאָל מיט אנ אינסטרומענט, וואָס מע רופט צענטער־זוכער. זײַנ קאָנסטרוקציע איז אָנגעוויזנ אפ דער צייכענונג 185. דער דאָזיקער אינסטרומענט באַשטייט פונ צוויי לײַסטלעכ AB אונ AC, צונויפגעפעסטיקט אונטער א גראָדנ ווינקל, אונ פונ א דריטנ לײַסטל AD, וואָס איינ ראנד זײַנער פאַלט צונויפ מיט דער ביסעקטריסע פונעם גראָדנ ווינקל. די ארבעט פונ דעם דאָזיקנ אינסטרומענט באזירט זיכ אפ דעם, וואָס די ביסעקטריסע פונעם ווינקל, וועלכנ עס בילדנ צוויי טאנגענטע, גייט דורכ דורכנ צענטער פונעם קרײַז.



צייכ. 185

ווענ מיר לייגנ צו דעם צענטער־זוכער צוויי מאָל צום קרײַז, וואָס מע דארפ געפינענ זײַנ צענטער, אונ פירנ דורכ יעדעס מאָל לענגויס דעם קאנט T פונעם לײַסטל AD א גראָדע, געפינענ מיר זײַנ צענטער O אינ דעם פונקט, ווו עס שנײַדנ זיכ איבער די גראָדע, וואָס זײַנענ דורכגעפירט אינ קרײַז.

דער אָפשטאנד צווישנ שפיצ פונעם צענטער־זוכער אונ דעם באריר־פונקט איז גלײַכ צום ראדיוס פונעם קרײַז, מאכמעס די ראדיוסנ, וואָס זײַנענ דורכגעפירט צו די באריר-פונקטנ פונ די זײַטנ פונעם צענטער־זוכער מיטנ קרײַז, בילדנ מיט זײַנע זײַטנ א קוואדראט.

פראגעס אונ איבונגענ.

1. וויאזוי געפינט מענ פארנ פונקט A, וואָס ליגט אפ דער קרײַזליניע, זײַנ צענטראל-סימעטרישנ פונקט?

2. מיט וואָס אונטערשיידט זיכ א טאנגענטע פונ א סעקאנטע?

3. צו וואָס איז גלײַכ דער אָפשטאנד צווישנ צוויי פאראלעלע טאנגענטע?

4. דערווײַזנ, אז א טאנגענטע, וואָס איז פאראלעל צו א כאָרדע, טיילט אינעם באריר־פונקט אפדערהעלפט דעם בויגנ, וואָס די כאָרדע ציט צונויפ.

5. וואָס איז אזוינס דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ די צענטערס פונ קרײַזליניעס, וואָס זייער ראדיוס איז 3 סמ., ווענ זיי גייענ דורכ דורכנ געגעבענעם פונקט A? מאכנ א צייכענונג.

6. אינ א קרײַזליניע, וואָס איר ראדיוס איז 4 סמ., קאָנסטרוירנ א כאָרדע, וועלכע האלט אויכ 4 סמ. אונ גייט דורכ דורכנ פונקט A, וואָס איז געגעבנ אפ דער קרײַזליניע. וויפל אזעלכע כאָרדעס קאָנ מענ קאָנסטרוירנ?

7. דורכנ פונקט A אינווייניק אינ א קרײַז מיטנ צענטער O דורכפירנ א כאָרדע MN, וואָס טיילט זיכ אינעם פונקט A אפדערהעלפט.

8. פונעם פונקט A אפ דער קרײַזליניע זײַנענ דורכגעפירט צוויי קעגנזײַטיק פערפענדיקולערע אונ גלײַכע כאָרדעס, וואָס זײַנענ דערווײַטערט פונעם צענטער אפ 3 סמ. באשטימענ זייער לענג.

9. דורכפירנ א קרײַזליניע, וואָס זאָל באַרירנ די געגעבענע גראָדע MN אינעם פונקט P. אויספאָרשנ, וויפל קרײַזליניעס קאָנ מענ דורכפירנ, אונ אָנווײַזנ, ווו וועלנ ליגנ זײערע צענטערס.

10. ס'איז געגעבנ א קוואדראט $ABCD$ מיט א זײַט $a = 5$ cm. דורכפירנ צוויי קרײַזליניעס אזוי, אז די זײַטנ פונעם קוואַדראט זאָלנ גלײַכצײַטיק זײַנ כאָרדעס פונ אײנער אונ טאנגענטע צו דער צווייטער.

11. דורכפירנ צוויי קאָנצענטרישע קרײַזליניעס, וואָס זײערע ראַדיוסנ זאָלנ זײַנ 3 סמ. אונ 5 סמ. קאָנסטרויִרנ דערנאָכ אינ דער גרעסערער קרײַזליניע צוויי פאראלעלע כאָרדעס, וואָס זאָלנ זײַנ טאנגענטע צו דער קלענערער קרײַזליניע, אונ דערווײַזנ, אז די דאָזיקע כאָרדעס זײַנענ גלײַכ.

12. דער פונקט A ליגט דרויסנ דער קרײַזליניע. 1) געפינענ דורכ א קאָנסטרויִרונג זײַנ קירצסטנ אונ זײַנ גרעסטנ אָפּשטאנד ביז דער קרײַזליניע.

אָנווײַזונג. דער קירצסטער אָפּשטאנד פונ א פונקט ביז א קרײַזליניע הײסט דער אָפּשניט פונ דער צענטראלער סעקאנטע, וואָס זײַנע עקנ זײַנענ דער געגעבענער פונקט אונ דער נאָענטסטער איבערשנײַד־פונקט פונ דער סעקאנטע מיט דער קרײַזליניע.

2) אפ וויפל איז דער גרעסטער אָפּשטאנד פונעם פונקט A ביז דער קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז r, גרעסער פונעם קירצסטנ אָפּשטאנד?

3) קאָנסטרויִרנ דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ פונקטנ, וועלכע זײַנענ דערווײַטערט אפ 2 סמ. פונ דע געגעבענער קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז $r = 5$ cm.

13. וואָס איז אזוינס דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ די צענטערס פונ קרײַזליניעס, וואָס באַרירנ צוויי געגעבענע גראָדע AB אונ CD: 1) פאראלעלע אונ 2) וואָס שנײַדנ זיכ איבער.

14. אינ א קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז $r = 5$ cm, דורכפירנ א טאנגענטע, א פּערפּענדיקולערע צו דער געגעבענער גראָדער MN. אויספאָרשנ, וויפל טאנגענטע קאָנ מענ דורכפירנ אונ ווי גרויס איז דער אָפּשטאנד צווישנ זײ.

15. צו דער קרײַזליניע O איז דורכגעפירט א טאנגענטע MN. דערווײַזנ, אז אויב מיר וועלנ אראָפּלאָזנ פונ די עקנ A אונ B פונעם באַליביקנ דיאַמעטער AB אפ דער טאנגענטע פּערפּענדיקולײַארנ $AC = a$ אונ $BD = b$, וועט די סומע פונ אָט די פּערפּענדיקולײַארנ זײַנ גלײַכ צום דיאַמעטער, ד. ה. $a + b = 2r$.

16. וואָס איז אזוינס דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ די מיטנס פונ גלײַכע כאָרדעס אינ א געגעבענער קרײַזליניע?

VII. וויִאזוי מעסט מענ אויס ווינקלענ.

1. א ווינקל מיטנ שפּיץ אפ דער קרײַזליניע אונ וויִאזוי מעסט מענ אימ אויס.

1. א ווינקל מיטנ שפּיץ אינ צענטער פונ א קרײַזליניע איז א צענטראלער ווינקל אונ ווערט אויסגעמאָסטנ דורכנ בויגנ, וואָס איז אײַנגעשלאָסנ צווישנ זײַנע זײַטנ.

מיר וועלנ באַטראַכטנ ווינקלענ, וואָס זײערע שפּיצנ ליגנ ניט אינעם צענטער פונ דער קרײַזליניע, נאָר אפ דער קרײַזליניע גופא, דרויסנ איר אָדער אינווייניק אינעם קרײַז.

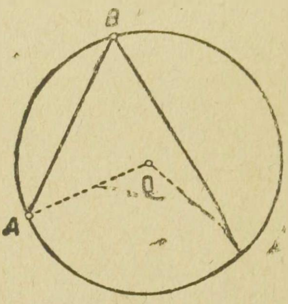
2. *א ווינקל, וואָס זײַנ שפּיץ ליגט אפ דער קרײַזליניע אונ זײַנע זײַטנ זײַנענ כאָרדעס, הײסט אַרײַנגעשריבענער ווינקל.*

$\angle ABC$ איז אנ אַרײַנגעשריבענער ווינקל (צייכ. 186), ער שפּאַרט זיכ אָנ אפנ בויגנ AC פונ דער קרײַזליניע; דעמ בויגנ AC אנטשפּרעכט דער צענטראלער ווינקל AOC.

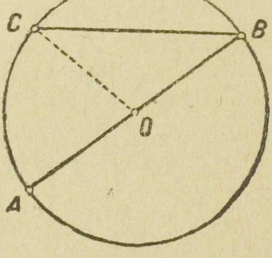
3. טעאָרעמע. אנ ארײַנגעשריבענער ווינקל איז גלײַכ צו א העלפט פונעם צענטראלנ ווינקל, וואָס שפּארט זיכ אָנ אפנ זעלבנ בויגנ, ער ווערט אויסגעמאָסטנ מיט א העלפט פונ דעם דאָזיקנ בויגנ.

ס׳איז געגעבנ: $\angle ABC$ איז אנ ארײַנגעשריבענער ווינקל, AB אונ BC זײַנענ כאָרדעס (צײכ. 186).

ס׳פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\angle ABC=\frac{\angle AOC}{2}$.



צײכ. 186



צײכ. 187

דערווײַז. מירנ באטראכטנ באזונדער דרײַ מעגלעכע פאלנ.

1) די זײַטנ פונ דעם ארײַנגעשריבענעם ווינקל זײַנענ דער דיאמעטער BA אונ די כאָרדע BC (צײכ. 187). ווענ מיר פארבינדנ דעם פונקט C מיטנ צענטער O, באקומענ מיר א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק BCO, ווײַל $OB=OC=r$; דער צענטראלער ווינקל AOC איז א דרויסנדיקער ווינקל פונעם דרײַעק BOC; דעריבער איז $\angle AOC=\angle B+\angle C$, נאָר $\angle B=\angle C$, הײסט עס: $\angle AOC=2\angle B$, אונ דעריבער איז $\angle B$ אָדער $\angle ABC$ גלײַכ צו $\frac{\angle AOC}{2}$.

דער צענטראלער ווינקל AOC ווערט אויסגעמאָסטנ מיטנ בויגנ AC, אָבער דער ארײַנגעשריבענער ווינקל איז גלײַכ צו א העלפט פונעם צענטראלנ ווינקל, הײסט עס, ער ווערט אויסגעמאָסטנ מיט א העלפט פונעם בויגנ, אפ וועלכנ ער שפּארט זיכ אָנ:

$\angle ABC$ ווערט אויסגעמאָסטנ מיטנ $\frac{\smile AC}{2}$.

2) די זײַטנ פונעם ארײַנגעשריבענעם ווינקל ABC זײַנענ די כאָרדעס BA אונ BC, צווישנ וועלכע עס ליגט דער צענטער O פונ דער קרײַז-ליניע (צײכ. 188).

מיר פירנ דורכ דעם דיאמעטער BD, וועלכער צעקלאפּט דעם ארײַנגעשריבענעם ווינקל אפ $\angle x$ אונ $\angle y$ אונ דעם צענטראלנ ווינקל — אפ $\angle\alpha$ אונ $\angle\beta$.

$$x=\frac{\angle\alpha}{2} \text{ אונ } \angle y=\frac{\angle\beta}{2};$$

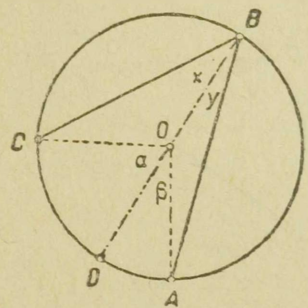
הײסט עס,

$$\angle x+\angle y=\frac{\angle\alpha}{2}+\frac{\angle\beta}{2}=\frac{\angle\alpha+\angle\beta}{2}$$

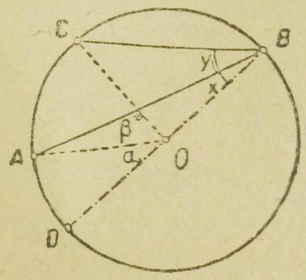
אלזאָ,

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}; \quad \angle ABC \text{ ווערט אויסגעמאָסטנ מיטנ } \frac{\smile AC}{2}.$$

3) די זײַטנ פונעמ אַרײַנגעשריבענעמ ווינקל ABC זײַנענ די כאָרדעס BA אונ BC, וואָס ליגנ פונ איינ זײַט צענטער O (צייכ. 189).



צייכ. 188



צייכ. 189

$$\angle ABC = \angle CBD - \angle ABD \text{ אונ } \angle AOC = \angle COD - \angle AOD,$$

אָבער

$$\angle CBD = \frac{\angle COD}{2} \text{ אונ } \angle ABD = \frac{\angle AOD}{2}$$

אונ דעריבער איז

$$\angle CBD - \angle ABD = \frac{\angle COD}{2} - \frac{\angle AOD}{2} = \frac{\angle COD - \angle AOD}{2}$$

אלזאָ,

$$\angle ABC = \frac{\angle AOC}{2}; \quad \angle ABC \text{ ווערט אויסגעמאָסטנ מיטנ } \frac{\smile AC}{2}.$$

אויפֿפיר. די גרייס פונעמ אַרײַנגעשריבענעמ ווינקל איז ניט אָפּהענגיק דערפֿונ, וויאַזוי עס זײַנענ אויסגעשטעלט זײַנע זײַטנ לעגאַבע דעמ צענטער פונ דער קרײַזליניע, אונ איז שטענדיק גלײַכ צו א העלפֿט פונעמ צענטראַלנ ווינקל, וואָס אפּ זײַנ בויגנ שפּאַרט זיכ אָנ דער אַרײַנגעשריבענער ווינקל.

קאָנסעקווענצנ. 1. אַרײַנגעשריבענע ווינקלענ, וואָס שפּאַרנ זיכ אָנ אפּ איינ אונ דעמ זעלבנ בויגנ, זײַנענ גלײַכ (צייכ. 190).

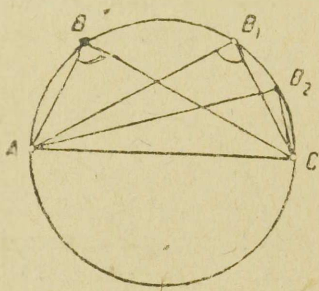
$\angle B$, $\angle B_1$, $\angle B_2$ אאזו. שפּאַרנ זיכ אָנ אפּ איינ אונ דעמ זעלבנ בויגנ; יעדערער פונ זיי ווערט אויסגעמאָסטנ מיט א העלפֿט פונ אים, הייסט עס, זיי זײַנענ צווישנ זיכ גלײַכ: $\angle B = \angle B_1 = \angle B_2$ אאזו.

מירנ פֿאַרייניקנ די פּונקטנ A אונ C דורכ דער כאָרדע AC; די דאָזיקע

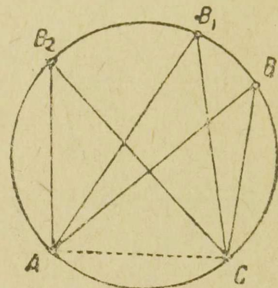
כאָרדע זעט מען, ווי מע זאָגט, פון א באַליביקן פונקט B אפן בויגן ABC אונטער איין און דעם זעלבן ווינקל B.

2. אן אַרײַנגעשריבענער ווינקל, וואָס שפּאַרט זיך אָן אפן דיאַמעטער, איז א גראַדער.

$\angle B=\angle B_1=\angle B_2=d$ (צייכ. 191), ווײַל יעדערער פון זיי שפּאַרט זיך אָן אפּ א בויגן פון 180° און ווערט אויסגעמאָסטן מיט א העלפט פון אים און איז דעריבער גלײַך 90°.



צייכ. 191



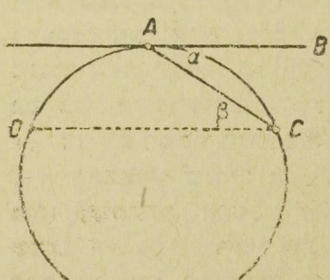
צייכ. 190

4. **טעאָרעמע.** א ווינקל, וועלכער איז צונויפגעשטעלט פון א טאַנגענטע און פון א כאָרדע, וואָס איז דורכגעפירט פונעם באַריר-פונקט, ווערט אויסגעמאָסטן מיט א העלפט פונעם בויגן, וואָס איז צווישן זיי אײַנגעשלאָסן.

ס'איז געגעבן: AB איז א טאַנגענטע, AC איז א כאָרדע (צייכ. 192).

ס'פּאָדערט זיך דערווײַזן: $\angle BAC$ ווערט אויסגעמאָסטן מיטן $\frac{\smile AC}{2}$.

דערווײַז. מיר פירן דורך א באַהילפיקע גראָדע $CD \parallel AB$. דאן איז $\angle\alpha=\angle\beta$ אלס געקרייצטע און $\smile AD=\smile AC$ אלס בויגנס צווישן פאַראַלעלע גראָדע — צווישן דער טאַנגענטע AB און דער כאָרדע CD.



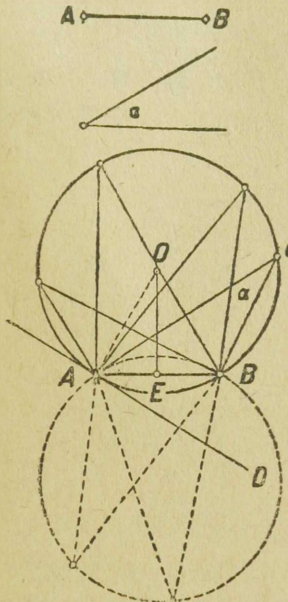
צייכ. 192

אלזאָ, דער $\angle\beta$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AD}{2}$, אָבער $\angle\beta=\angle\alpha$ און $\smile AD=\smile AC$, דעריבער ווערט דער ווינקל α אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AC}{2}$.

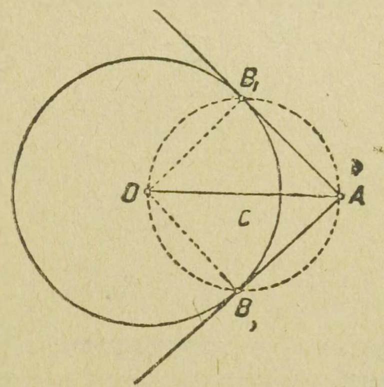
5. אויפגאַבע. דורכפירן טאַנגענטע פון א דרויסנדיקן פונקט A צו דער געגעבענער קרײַזליניע (צווייטער אויפן) (צייכ. 193).

קאָנסטרוירונג. מיר פאַרייניקן דעם פונקט A מיטן צענטער O און פירן דורך א באַהילפיקע קרײַזליניע, אָנעמענדיק OA פאר א דיאַמעטער; זי

וועט איבערשנײַדנ די געגעבענע קרײַזליניע אינ די פונקטנ B אונ B_1; פירנ מיר דורכ גראָדע דורכ די פונקטנ A אונ B אונ A אונ B_1, באקומענ מיר די געזוכטע טאנגענטע AB אונ AB_1. אינדערעמעסנ, $AB \perp OB$ אונ $AB_1 \perp OB_1$, דה. צו די ראדיוסנ פונ דער געגעבענער קרײַזליניע, ווײַל די ווינקלענ B אונ B_1 זײַנענ גראָדע ווינקלענ, אלס ארײַנגעשריבענע ווינקלענ, וועלכע שפארנ זיכ אָנ אפנ דיאמעטער OA פונ דער קרײַזליניע, וואָס איר צענטער געפינט זיכ אינעם פונקט C.



צייכ. 194



צייכ. 193

6. אופגאבע. אפנ געגעבענעם אָפשניט AB קאָנסטרויִרנ א סעגמענט, וואָס נעמט אינ זיכ ארײַנ דעם געגעבענעם ווינקל α (צייכ. 194).

1) לײזונג. לאָמיר זאָגנ, אז די אופגאבע איז געלײזט אונ אפנ געגעבענעם אָפשניט AB איז ווי אפ א כאָרדע קאָנסטרויִרט א סעגמענט ACB, וואָס נעמט אינ זיכ ארײַנ דעם געגעבענעם $\angle\alpha$. ווענ מירנ דורכפירנ אינעם פונקט A א טאנגענטע AD, וועלנ מיר באקומענ $\angle BAD = \angle ACB = \angle\alpha$, ווײַל זיי מעסטנ זיכ אויס מיט א העלפט פונ אײנ אונ דעם זעלבנ בויגנ AB. דער צענטער פונ קרײַז, צו וועלכנ עס געהערט דער סעגמענט ACB, געפינט זיכ אפ דער איבערשנײַדונג פונ די פערפענדיקולארנ AO אונ OE.

2) קאָנסטרויִרונג. באם עק A פונעם געגעבענעם אָפשניט AB (צייכ. 194) קאָנסטרויִרנ מיר $\angle DAB = \alpha$; מיר פירנ דורכ $AO \perp AD$ אונ דורכ דעם מיטנ E פונעם אָפשניט AB פירנ מיר דורכ $EO \perp AB$. דער פונקט, אינ וועלכנ די פערפענדיקולארנ AO אונ EO שנײַדנ זיכ איבער, איז דער צענטער פונ דער געזוכטער קרײַזליניע. ווענ מיר פירנ דערנאָכ דורכ א קרײַזליניע מיטנ ראדיוס OA, באקומענ מיר דעם געזוכטנ סעגמענט ACB. א באליביקער פונקט אפנ $\smile ACB$ קאָנ זײַנ דער שפיצ פונעם ווינקל, וואָס איז גלײַכ צום געגעבענעם.

3) יעטווידער פונ די ווינקלענ מיטנ שפיצ אפנ בויגנ ACB ווערט אויסגע-

מאָסטן מיט א העלפט $\breve{AB}$, און דעריבער איז ער גלײַך צום געגעבענעם ווינקל α.

4) אויב מע זאָל קאָנסטרויִרן דעם געגעבענעם $\angle\alpha$ אינעם עק פונעם אָפּשניט AB אפּ דער אנדערער זײַט פון אים, וועט די קאָנסטרויִרונג געבן א סעגמענט, וואָס ליגט לעבאבע דעם געגעבענעם אָפּשניט AB סימעטריש צו דעם פריִער קאָנסטרויִרטן.

5) די לייזונג פון אָט דער אופגאבע דערלויבט צו מאכן פאָלגנדיקן אויספיר:

דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די פונקטן, פון וועלכע מע זעט דעם געגעבענעם אָפּשניט AB אונטער דעם געגעבענעם ווינקל α, זײַנען די בויגנס פון צוויי סימעטרישע סעגמענטן, וואָס זײַנען קאָנסטרויִרט אפן אָפּשניט AB ווי אף א כאָרדע און וואָס נעמען אין זיך ארײַן דעם געגעבענעם ווינקל.

6) דער סעגמענט, וואָס נעמט ארײַן דעם געזוכטן שארפן ווינקל, איז דער גרעסערער פון די צוויי סעגמענטן פונעם קרײַז, אפּ וועלכע עס טיילט אים די געגעבענע כאָרדע AB.

אויב דער געגעבענער ווינקל β איז א טעמפּער, וועט זײַן געזוכטער סעגמענט זײַן דער קלענערער פון די צוויי סעגמענטן, אפּ וועלכע די כאָרדע AB טיילט דעם קרײַז.

אינעם פאל, ווען דער ווינקל איז א גראָדער, וועט דער געגעבענער אָפּשניט AB זײַן דער דיאַמעטער, און ביידע סעגמענטן זײַנען גלײַך, דה. דאָס געאָמעטרישע אָרט וועט, אזויארום, זײַן א קרײַזליניע, וואָס איר דיאַמעטער איז AB.

2. וויאַזוי מעסט מען אויס א ווינקל, וואָס זײַן שפּיץ איז אינווייניק אינעם קרײַז.

1. טעאָרעמע. א ווינקל, וואָס זײַן שפּיץ איז אינווייניק אינעם קרײַז ווערט אויסגעמאָסטן מיט א האלבער סומע פון די בויגנס, וואָס זײַנען אײַנגעשלאָסן צווישן זײַנע זײַטן און צווישן זייערע פאָרזעצונגען.

ס'איז געגעבן: AMC איז א ווינקל, וואָס זײַן שפּיץ איז אינווייניק אינעם קרײַז (צײַכ. 195).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: דער ווינקל AMC ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\breve{AC}+\breve{BD}}{2}$.

דערווײַז. מיר וועלן פארלענגערן די זײַטן פונעם $\angle AMC$ ביז זיי וועלן זיך איבערשנײַדן מיט דער קרײַזליניע אין די פונקטן B און D און מיר וועלן דורכפירן די כאָרדע AD; מיר וועלן באקומען א דרײַעק ADM, בענעגייע צו וועלכן דער $\angle AMC$ איז א דרויסנדיקער.

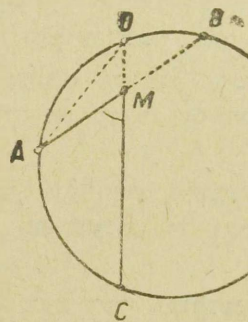
דער דרויסנדיקער ווינקל AMC איז גלײַך צו $\angle A+\angle D$, נאָר דער

$\angle A$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\frown BD}{2}$, דער $\angle D$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AC}{2}$, הייסט עס,

$$\angle AMC=\angle A+\angle D$$

ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AC+\smile BD}{2}$.

2. יעטווידן ווינקל מיט א שפּיץ אינעווייניק אינעם קרײַז קאָן מען באטראכטן ווי איינעם פון די ווינקלען, וואָס עס בילדן צוויי כאָרדעס, ווען זיי שנײַדן זיך איבער.



צייכ. 195

אין דעם פאַל, ווען דער איבערשנײַד-פונקט פון די כאָרדעס פאַלט צונויף מיטן צענטער, איז דער ווינקל גלײַכצײַטיק אויך א צענטראַלער, הייסט עס, מע קאָן זאָגן, אז אויך א צענטראַלער ווינקל מעסט זיך אויס מיט א האַלבער סומע פון די בויגנס, וואָס זײַנען אײַנגעשלאָסן צווישן זײַנע זײַטן און זייערע פאַרזעצונגען.

אויב דער איבערשנײַד-פונקט פון די כאָרדעס בײַט זײַן אָרט אזוי, אז ער דערנעענטערט זיך צו דער קרײַזליניע, פאַרקלענערט זיך איינער פון זײַנע בויגנס, וואָס איז אײַנגעשלאָסן צווישן די כאָרדעס, און ווען דער איבערשנײַד-פונקט דערגרייכט די קרײַזליניע, ווערט די כאָרדע פאַרוואַנדלט אין נול, דערי־בער בלײַבט די טעאָרעמע וועגן א ווינקל, וואָס איז געבילדעט דורך כאָרדעס, אויך ריכטיק פאַרן געגעבענעם פאַל.

3. וויאזוי מעסט מען אויס א ווינקל, וואָס זײַן שפּיץ איז דרויסן דעם קרײַז.

1. טעאָרעמע. א ווינקל, וואָס זײַן שפּיץ איז דרויסן דעם קרײַז, ווערט אויסגעמאָסטן מיט א האַלבער דיפערענץ פון די בויגנס, וואָס זײַנען אײַנגעשלאָסן צווישן זײַנע זײַטן.

ס׳איז געגעבן: דער $\angle M$ מיטן שפּיץ דרויסן דעם קרײַז; MA און MD זײַנען סעקאַנטעס (צייכ. 196).

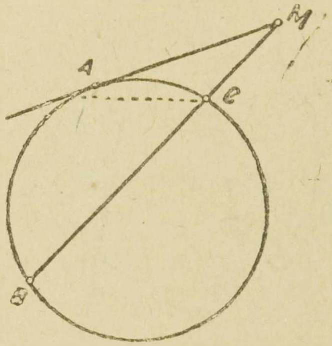
ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: דער $\angle M$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AD-\smile BC}{2}$.

דערווײַז. מיר וועלן באטראכטן דרײַ פאַלן: 1) דעם $\angle M$ בילדן צוויי סעקאַנטעס — MA און MD. לאָמיר דורכפירן א באהילפיקע כאָרדע AC, מיר באַקומען א דרײַעק AMC, בא וועלכן דער $\angle ACD$ איז א דרויסנדיקער; דערפון דרינגט, אז $\angle M=\angle ACD-\angle A$; אָבער $\angle ACD$ ווערט אויסגע-

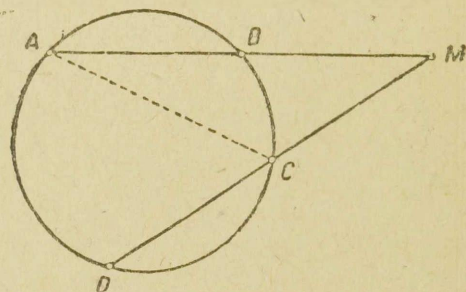
מאָסטן מיטן $\frac{\smile AD}{2}$, און $\angle A$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile BC}{2}$, הייסט עס, דער $\angle M$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AD - \smile BC}{2}$.

2) דעם $\angle M$ בילדן די טאַנגענטע MA און די סעקאַנטע MD (צייכ. 197).

מיר באַטראַכטן די טאַנגענטע MA אַלס אַ סעקאַנטע, וואָס אירע צוויי געמיינזאַמע פּונקטן מיט דער קרײַזליניע האָבן זיך צונויפגעגאָסן אין איין פּונקט A,



צייכ. 197



צייכ. 196

און דעריבער בלײַבט ריכטיק דער אויספיר, וואָס מיר האָבן פריִער געמאַכט וועגן אויסמעסטן אַ ווינקל, וועלכן עס בילדן צוויי סעקאַנטע, און דער $\angle M$ ווערט אויסגעמאָסטן מיט $\frac{\smile AB - \smile AC}{2}$.

דעם דאָזיקן פאַל קאָן מען דערווײַזן אויך זעלבשטענדיק, ווען מע זאָל דורכפירן אַ כאָרדע AC (צייכ. 197) און מע זאָל באַטראַכטן דעם $\triangle ACM$:

$$\angle M = \angle ACB - \angle CAM$$

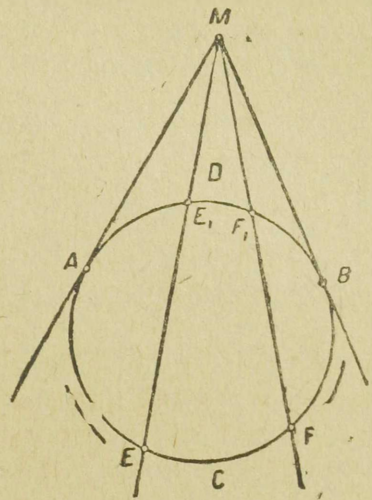
3) דעם $\angle M$ בילדן צוויי טאַנגענטע MA און MB (צייכ. 198).

לאָמיר זאָגן, אַז די סעקאַנטע ME און MF וועלן, דרייענדיק זיך אַרום דעם פּונקט M, פאַרנעמען די לאַגע פון די טאַנגענטע MA און MB; אַזוי־אַרום וועט דער בויגן EF שטײַגן ביזן בויגן ACB, און דער בויגן E_1F_1—ביזן בויגן ADB, און דעמלט וועט דער $\angle M$, וועלכן עס בילדן די טאַנגענטע, זיך אויסמעסטן מיט $\frac{\smile ACB - \smile ADB}{2}$.

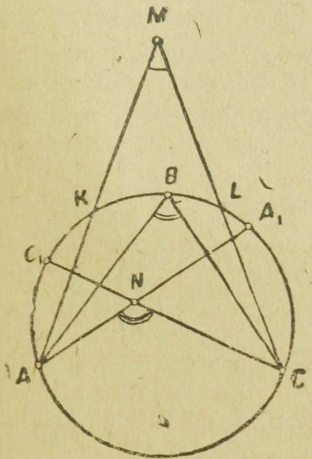
דעפיניציע. אַ ווינקל, וועלכן עס בילדן צוויי טאַנגענטע, הייסט אַרומגעשריבענער ווינקל.

2. דער $\angle AMC$, וואָס זײַן שפּיץ M איז דרויסן דעם קרײַז, איז קלע־

נער, אונ דער $\angle ANC$, וואָס זײַנ שפּיצ N איז אינווייניק אינעם קרײַז, איז גרעסער פונעם ארײַנגעשריבענעם ווינקל ABC, וואָס שפּארט זיכ אָנ אפנ בויגנ AC (צייכ. 199).



צייכ. 198



צייכ. 199

1) דער $\angle M$ ווערט אויסגעמאָסטנ מיט $\dfrac{\smile AC - \smile KL}{2}$.

2) דער $\angle B$ ווערט אויסגעמאָסטנ מיטנ $\dfrac{\smile AC}{2}$.

3) דער $\angle N$ ווערט אויסגעמאָסטנ מיטנ $\dfrac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$.

4) $\dfrac{\smile AC - \smile KL}{2} < \dfrac{\smile AC}{2} < \dfrac{\smile AC + \smile A_1C_1}{2}$, אונ דעריבער איז

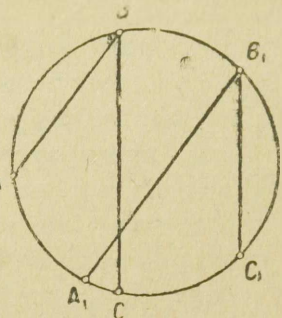
$$\angle M < \angle B < \angle N$$

פראגעס אונ איבונגענ.

1. די שפּיצנ פונעם דרײַעק ABC ליגנ אפ א קרײַזליניע. באשטימענ זײַנע ווינקלענ, אויב ס׳איז באוויזנ, אז $\smile AB = 70^\circ$ אונ $\smile BC = 60^\circ$. וואָס פאר א פאָרמ האָט דער דרײַעק ABC?

2. א קרײַזליניע איז צעטיילט אינ דער פארהעלטעניש $11:8:5$. באשטימענ די ווינקלענ פונעם דרײַעק, וואָס זײַנע שפּיצנ זײַנענ די טייל-פונקטנ פונ דער קרײַזליניע.

3. ס'איז געגעבנ: $\angle ABC=\alpha$. מיט דער הילפ פונ א קרײַזליניע קאָנסטרויִרנ א ווינקל, וואָס איז גלײַכ: 1) צו א העלפט פונ דעמ געגעבענעמ ווינקל, 2) צומ געטאָפּלטנ געגעבענעמ ווינקל.



צייכ. 200

4. די זײַטנ פונ צוויי ארײַנגעשריבענע ווינקלענ B אונ B_1 זײַנענ פאראלעל (צייכ. 200). דערווײַזנ, אז $\smile AC=\smile A_1C_1$.

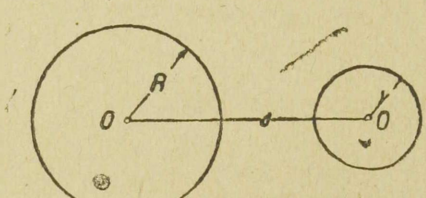
5. אויסרעכענענ, אונטער וואָס פאר א שארפנ ווינקל שנײַדנ זיכ איבער אינ א קרײַז די כאָרדעס AB אונ CD, אויב די פונקטנ A, B, C אונ D טיילנ די קרײַזליניע אינ דער פארהעלטעניש $7:6:3:2$.

6. דער ווינקל צווישנ צוויי ראדיוסנ איז גלײַכ $110°$. באשטימענ דעמ ווינקל, וואָס עס בילדנ די טאנגענטע, וועלכע זײַנענ דורכגעפירט דורכ די עקנ פונ די דאָזיקע ראדיוסנ.

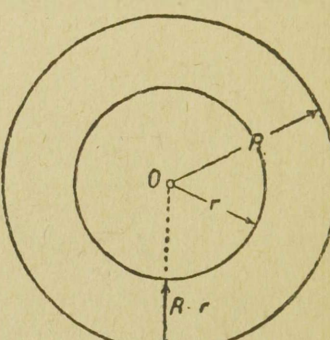
XIII. רעלאטיווע לאגע פונ צוויי קרײַזליניעס.

1. קאָנצענטרישע אונ עקסצענטרישע קרײַזליניעס.

1. צוויי קרײַזליניעס קאָנענ האָבנ א געמיינזאמענ צענטער אָדער פארשיידענע צענטערס. קרײַזליניעס, וואָס האָבנ א געמיינזאמענ צענטער, הייסנ קאָנצענטרישע אונ אונטערשיידנ זיכ איינע פונ דער צווייטער מיט דער לענג פונ זייערע ראדיוסנ R אונ r (צייכ. 201).



צייכ. 202



צייכ. 201

דער טייל פלאכקײַט, וואָס איז אײַנגעשלאָסנ צווישנ צוויי קאָנצענטרישע קרײַזליניעס, הייסט קרײַז-רינג, די דיפערענצ פונ זייערע ראדיוסנ $R-r$ באשטימט די ברייט פונעמ קרײַז-רינג.

צוויי קרײַזליניעס, וואָס האָבנ פארשיידענע צענטערס, הייסנ עקסצענטרישע.

2. די גראָדע OO_1 (צייכ. 202), וואָס גייט דורכ די צענטערס פונ צוויי קרײַזליניעס, הייסט ליניע פונ די צענטערס.

די ליניע פונ די צענטערס פונ צוויי קרײַזליניעס איז זייער סימעטריע-אקס.

דער אָפּשניט $OO_1=d$ איז דער אָפּשטאַנד צווישן די צענטערס O און O_1 און צוליב קורצקייט רופט מען אים געוויינלעך אויך די ליניע פון די צענ־טערס.

אין קאָנצענטרישע קרײַזן איז די ליניע פון די צענטערס גלײַך נול.

3. קרײַזליניעס, וואָס האָבן בלויז איין געמיינזאַמען פונקט, הייסן טאַנגענטע-קרײַזליניעס, און זייער געמיינזאַמער פונקט הייסט באַריר-פונקט. ווען צוויי קרײַזליניעס באַרירן זיך און איינע ליגט דרויסן דער צווייטער, קומט דאָ פאָר א דרויסנדיקער באַריר; אויב אָבער איין קרײַזליניע באַרירט די צווייטע און דערבײַ ליגט זי אינווייניק אין דער צווייטער, קומט דאַן פאָר אן אינווייניקסטער באַריר.

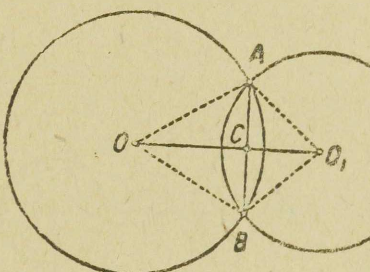
קרײַזליניעס, וואָס האָבן בלויז צוויי געמיינזאַמע פונקטן, שנײַדן זיך איבער; די גראָדע, וואָס פאַרייניקט די איבערשנײַד־פונקטן, איז זייער געמיינזאַמע כאָרדע.

קרײַזליניעס, וואָס האָבן דרײַ געמיינזאַמע פונקטן, פאַלן צונויף.

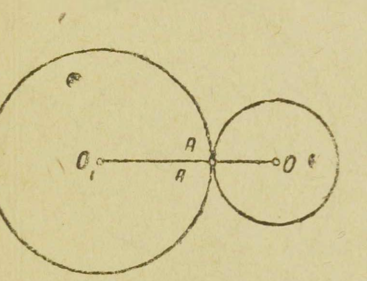
אין דער טעכניק ווערן טאַנגענטע־קרײַזן אויסגענוצט אַפּ איבערצוגעבן באַ־וועגונגען מיט דער הילף פון רײַב-רעדער און צאָנרעדער. בא א דרויסנדיקן באַריר דרייען זיך די רײַב־רעדער און צאָנרעדער אין א פאַרקערטער ריכטונג, בא אן אינווייניקסטן באַריר — אין איין און דער זעלבער ריכטונג.

2. קעגנזײַטיקע לאַגע פון צוויי קרײַזליניעס.

1. טעאָרעמע. אויב צוויי פאַרשיידענע קרײַזליניעס האָבן א געמיינ־זאַמען פונקט, וואָס ליגט פון איין זײַט ליניע פון זייערע צענטערס, האָבן



צייכ. 203



צייכ. 204

זיי נאָך א צווייטן געמיינזאַמען פונקט, וואָס ליגט פון דער צווייטער זײַט ליניע פון זייערע צענטערס, דה. די דאָזיקע קרײַזליניעס שנײַדן זיך איבער (צייכ. 203).

אינדערעמעסן, די ליניע פון די צענטערס איז די סימעטריע־אַקס פון ביידע קרײַזליניעס. לאָמיר קאָנסטרויִרן א פונקט B א סימעטרישן צום פונקט A און אים פאַרייניקן מיט די צענטערס O און O_1 פון די קרײַזליניעס; דאַן איז $OA=OB$ און $O_1A=O_1B$ אַפּן גרונט פון סימעטריע, דעריבער געהערט B צו ביידע קרײַזליניעס; די קרײַזליניעס שנײַדן זיך איבער און AB איז זייער געמיינזאַמע כאָרדע.

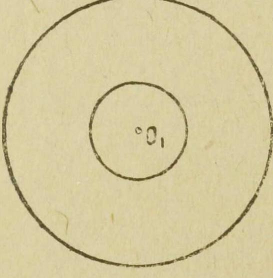
קאָנסעקווענצ. אויב דער געמיינזאַמער פונקט פונ צוויי פאַרשיי־דענע קרײַזליניעס ליגט אפ דער ליניע פונ די צענטערס, באַרירנ זיכ די קרײַזליניעס, דה. זיי האָבנ בלויז איינ געמיינזאַמענ פונקט, וואָס ליגט אפ דער ליניע פונ די צענטערס.

אינדערעמעסנ, אויב מיר זאָלנ זאָגנ אַז פאַרקערט, נעמלעכ, אַז די דאָזיקע צוויי קרײַזליניעס האָבנ נאָכ א צווייטנ געמיינזאַמענ פונקט, וואָס ליגט ניט אפ דער ליניע פונ די צענטערס, דאַנ דאַרפנ זיי האָבנ, אפנ גרונט פונ דער דער־וויזענער טעאָרעמע, נאָכ א דריטנ געמיינזאַמענ פונקט א סימעטרישנ צומ צווייטנ לעגאַבע דער ליניע פונ די צענטערס. אַזויאַרומ וועלנ די קרײַזליניעס האָבנ דרײַ געמיינזאַמע פונקטנ, דאָס איז אָבער ניט מעגלעכ, ווײַל קרײַזליניעס, וואָס האָבנ דרײַ געמיינזאַמע פונקטנ, פאַלנ צונויפ, אונ דאָס ווידערשפּרעכט דעמ באַדינג.

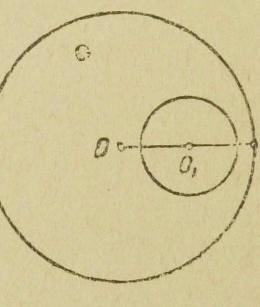
אַלזאָ, צוויי קרײַזליניעס, וואָס האָבנ איינ געמיינזאַמענ פונקט, וועלכער ליגט אפ דער ליניע פונ זייערע צענטערס, באַרירנ זיכ (צייכ. 204 אונ 205).

2. סיזײַנענ געגעבנ צוויי קרײַזליניעס מיט פאַרשיידענע ראַדיוסנ R אונ r; די דאָזיקע קרײַזליניעס באַרירנ זיכ ניט אונ ליגנ איינע דרויסנ דער צווייטער. אויב מע זאָל איבערלאָזנ די קרײַזליניע מיטנ ראַדיוס R אומבאַוועגלעכ אונ איבערוקנ דעמ צענטער פונ דער קרײַזליניע מיטנ ראַדיוס r לויט דער ליניע פונ די צענטערס, קאָנענ די קרײַזלינעס פאַרנעמענ פאַרשיידענע לאַגעס איינע לעגאַבע דער צווייטער.

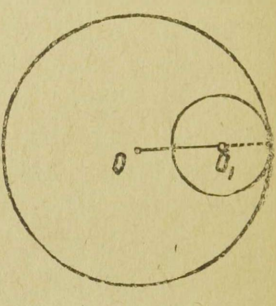
1) די קרײַזליניעס שנײַדנ זיכ ניט איבער, באַרירנ זיכ ניט, אונ איינע ליגט דרויסנ דער צווייטער (צייכ. 202). דער אָפּשטאַנד צווישנ זייערע צענטערס $OO_1=d$ איז גרעסער פונ דער סומע פונ זייערע ראַדיוסנ: $d>R+r$.



צייכ. 207



צייכ. 206



צייכ. 205

2) די קרײַזליניעס **שנײַדנ זיכ איבער** אונ האָבנ צוויי געמיינזאַמע פונקטנ A אונ B (צייכ. 203). קעדיי צו געפינענ די אָפּהענגיקײַט צווישנ $OO_1=d$ מיט די ראַדיוסנ R אונ r, וועלנ מיר באַטראַכטנ דעמ דרײַעק AOO_1, באַ וועלכנ $OO_1=d$, $AO=R$ אונ $AO_1=r$. אינ א דרײַעק איז א באַליביקע זײַט 1) קלענער פונ דער סומע פונ די צוויי איבעריקע זײַטנ אונ 2) גרעסער פונ דער דיפערענצ פונ די צוויי איבעריקע זײַטנ, דעריבער איז דער אָפּשטאַנד צווישנ די צענטערס קלענער פאַר דער סומע פונ די ראַדיוסנ פונ ביידע קרײַזליניעס אונ גרעסער פאַר זייער דיפערענצ: $d<R+r$ אונ $d>R-r$.

3) די קרײַזליניעס האָבנ א דרויסנדיקנ באריר אינעם פונקט A (צייכ. 204). דער אָפשטאנד $OO_1=d$ איז גלײַכ צו דער סומע פונ זייערע ראדיוסנ: $d=R+r$.

4) די קרײַזליניעס האָבנ אנ אינווייניקסטנ באריר (צייכ. 205). דער אָפ-שטאנד צווישנ זייערע צענטערס $OO_1=d$ איז גלײַכ צו דער דיפערענצ פונ די ראדיוסנ: $d=R-r$.

5) איינ קרײַזליניע ליגט אינווייניק אינ דער צווייטער, אונ זייערע צענטערס פאלנ ניט צונויפ (צייכ. 206). דער אָפשטאנד $OO_1=d$ איז קלענער פאר דער דיפערענצ פונ די ראדיוסנ: $d<R-r$.

6) איינ קרײַזליניע ליגט אינווייניק אינ דער צווייטער, אונ זייערע צענטערס פאלנ צונויפ (צייכ. 207). דער אָפשטאנד צווישנ די צענטערס איז גלײַכ נול: $d=0$.

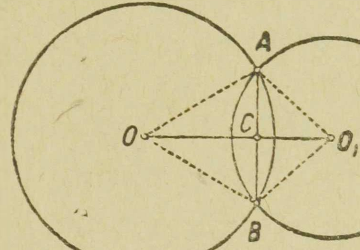
3. אייגנשאפט פונ דער געמיינזאמער כאָרדע בא צוויי קרײַזליניעס, וואָס שנײַדנ זיכ איבער.

טעאָרעמע. די געמיינזאמע כאָרדע פונ צוויי קרײַזליניעס, וואָס שנײַדנ זיכ איבער, איז פערפענדיקולער צו זייער ליניע פונ די צענטערס אונ טיילט זיכ דורכ איר אפ אפדערהעלפט.

ס'איז געגעבנ: די קרײַזליניע O אונ די קרײַזליניע O_1 (צייכ. 203 אָדער 208); AB איז די געמיינזאמע כאָרדע, OO_1 איז די ליניע פונ די צענטערס.

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: 1) $AB \perp OO_1$ אונ 2) $AC=CB$.

דערווײַז. מיר וועלנ פארייניקנ די איבערשנײַד-פונקטנ A אונ B פונ די קרײַזליניעס מיט די צענטערס O אונ O_1; מיר וועלנ באקומענ צוויי גלײַכאקסלדיקע דרײַעקנ AOB אונ AO_1B אונ, אכוצ דעמ, צוויי גלײַכע דרײַעקנ AOO_1 אונ BOO_1, בא וועלכע OO_1 איז א געמיינזאמע זײַט, $OA=OB=R$ אונ $O_1A=O_1B=r$.



צייכ. 208

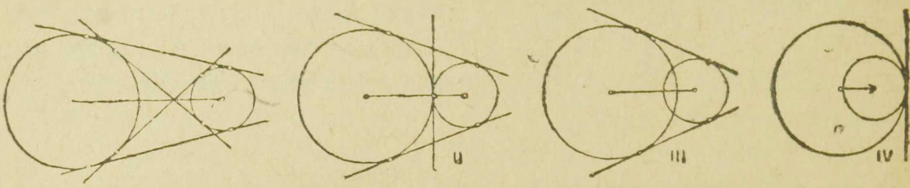
פונ דער גלײַכקײַט פונ אָט די דרײַעקנ דרינגט ארויס די גלײַכקײַט פונ די ווינקלענ: 1) $\angle AOO_1=\angle BOO_1$ אונ 2) $\angle AO_1O=\angle BO_1O$; הייסט עס, OO_1 איז די ביסעקטריסע פונעמ $\angle O$ אונ $\angle O_1$.

אינ די גלײַכאקסלדיקע דרײַעקנ AOB אונ AO_1B איז די ליניע פונ די צענטערס OO_1 זייער ביסעקטריסע, אונ דעריבער איז: 1) $AB \perp OO_1$ אונ 2) $AC=CB$.

4. געמיינזאמע טאנגענטע צו צוויי קרײַזליניעס אונ וויאזוי מע קאָנסטרויִרט זיי.

1. די צאָל טאנגענטע, וואָס מע קאָנ דורכפירנ צו צוויי קרײַזליניעס, איז אָפ-הענגיק פונ זייער קעגנזײַטיקער לאגע, אפ דער צייכענונג $I-IV$ (צייכ. 209) זײַנענ

עבראַכט אַלע מעגלעכע פאַלן, וויַאַזוי עס קאָנען דורכגעפירט ווערן טאַנגענטע צו צוויי קרײַזליניעס.



צייכ. 209

אין דער טאַבעלע, וואָס מיר גיבן דאָ, איז אָנגעוויזן די אָפּהענגיקייַט פון דעם אָפּשטאַנד צווישן די צענטערס פון צוויי קרײַזליניעס און דער צאָל טאַנגענטע זייערע בײַ פאַרשיידענע קעגנזײַטיקע לאַגעס פון צוויי קרײַזליניעס.

נומער לויטן סיידער	d איז דער אָפּשטאַנד צווישן די צענטערס פון צוויי קרײַזליניעס	די קעגנזײַטיקע לאַגע פון צוויי קרײַזליניעס	די צאָל טאַנגענטע
1	$d > r + r_1$	די קרײַזליניעס שנײַדן זיך ניט איבער, באַרירן זיך ניט און איינע ליגט דרויסן דער צווייטער	4
2	$d = r + r_1$	די קרײַזליניעס האָבן אַ דרויסנדיקן באַריר	3
3	$\begin{cases} d < r + r_1 \\ d > r - r_1 \end{cases}$	די קרײַזליניעס שנײַדן זיך איבער	2
4	$a = r - r_1$	די קרײַזליניעס האָבן אַן אינעווייניקסטן באַריר	1
5	$d < r_1$	איין קרײַזליניע ליגט אינעווייניק אין דער צווייטער; זייערע צענטערס פאַלן ניט צונויף	0
6	$d = O$	איין קרײַזליניע ליגט אינעווייניק אין דער צווייטער; זייערע צענטערס פאַלן צונויף	0

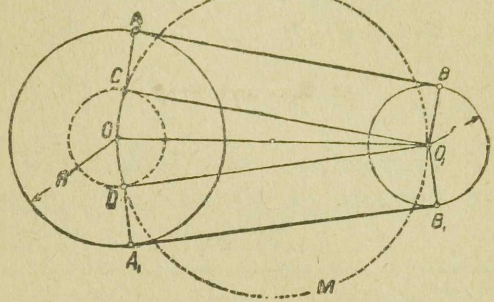
2. אויפגאַבע. קאָנסטרויִרן געמיינזאַמע טאַנגענטע צו צוויי קרײַזליניעס, וואָס האָבן פאַרשיידענע ראַדיוסן R און r, ווען $d > R + r$.

מיר וועלן באַטראַכטן צוויי מעגלעכע פאַלן פון דער לאַגע פון טאַנגענטע לעגאַבע צוויי געגעבענע קרײַזליניעס.

1) קאָנסטרויִרונג. מיר וועלן דורכפירן אַ באַהילפיקע קרײַזליניע, אַ קאָנצענטרישע מיט דער גרעסערער פון די געגעבענע קרײַזליניעס, מיט אַ ראַדיוס, וואָס איז גלײַך $R - r$ (צייכ. 210), און פונעם צענטער O_1 וועלן מיר צו איר דורכפירן אַ טאַנגענטע O_1C. דורכן באַריר-פונקט C פירן מיר דורך אַ ראַדיוס OC און פאַרלענגערן אים ביז זײַן איבערשנײַדן זיך מיטן פונקט A מיט דער געגעבענער קרײַזליניע; פונעם צענטער O_1 פירן מיר דורך $O_1B \parallel OA$; ווען מיר פאַרייניקן מיט אַ גראָדער די פונקטן A און B, באַקומען מיר די געזוכטע טאַנגענטע AB; דורך אַזאַ מין קאָנסטרויִרונג באַקומט זיך די טאַנגענטע A_1B_1.

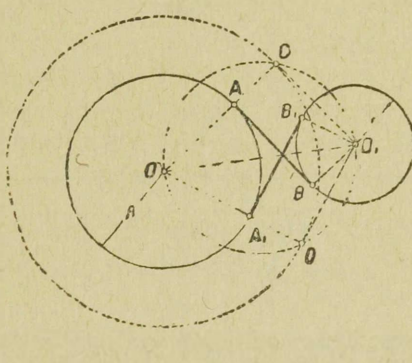
דערווײַז. לויט דער קאָנסטרויִרונג איז $CA = O_1B$ אונ $CA \parallel O_1B$; כוץ דעם איז $\angle C = d$; הייסט עס, דער פירעק ABO_1C איז א גראַדעק, אונ דעריבער זײַנען די ווינקלענ A אונ B גראַדע; אלזאָ, די ראַדיִוסנ OA אונ O_1B, וואָס זײַנען דורכגעפירט צו די באַריר-פונקטנ, בילדנ מיט דער גראַדער AB גראַדע ווינקלענ; הייסט עס, AB איז די געמיינזאַמע טאַנגענטע צו ביידע קרײַזליניעס.

2) קאָנסטרויִרונג. מיר וועלנ דורכפירנ מיטנ ראַדיִוס $R+r$ א באַהילפיקע קרײַזליניע, א קאָנצענטרישע מיט דער גרעסערער פונ די געגעבענע קרײַזליניעס (צײכ. 211); צו דער דאָזיקער קרײַזליניע פירנ מיר דורכ א טאַנגענטע O_1C; דורכנ באַריר-פונקט C פירנ מיר דורכ א ראַדיִוס OC, וועלכער וועט איבערשנײַדנ די געגעבענע קרײַזליניע אינעם פונקט A; דערנאָכ פירנ מיר דורכ פונעם צענטער O_1 א ראַדיִוס $O_1B \parallel OC$; ווענ מיר פאַרייניקנ די באַריר-פונקטנ A אונ B, באַקומענ מיר די געזוכטע טאַנגענטע AB.

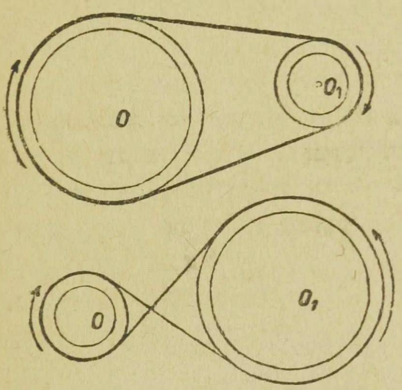


צײכ. 210

דורכ אזא מינ קאָנסטרויִרונג געפינענ מיר די צווייטע געמיינזאַמע טאַנגענטע A_1B_1.



צײכ. 211



צײכ. 212

דערווײַז. לויט דער קאָנסטרויִרונג איז $CA = O_1B$ אונ $CA \parallel O_1B$, כוץ דעם איז $\angle C = d$; הייסט עס, דער פירעק $CABO_1$ איז א גראַדעק, דער $\angle A$ אונ דער $\angle B$ זײַנען גראַדע ווינקלענ, אונ דאָס באַטײַט, אז די ראַדיִוסנ O_1B אונ OA, וואָס זײַנען דורכגעפירט אינ די פונקטנ A אונ B, זײַנען פערפענדיקולער צו דער גראַדער AB, דערפונ דרינגט, אז AB איז א געמיינזאַמע טאַנגענטע צו ביידע קרײַזליניעס.

אינעם ערשטן פאל הייסן די טאנגענטע דרויסנדיקע, אינעם צווייטן — אינ־וויניקסטע.

3. אינווייניקסטע און דרויסנדיקע טאנגענטע באגעגענען זיך בא א רימען-געטריב פון שקיוון (צייכ. 212). ווען דער טרײַב-רימען גייט לויט די דרויסנדיקע טאנגענטע, דרייען זיך די שקיוון אין איין ריכטונג; ווען אָבער דער טרײַב-רימען גייט לויט די אינווייניקסטע טאנגענטע, דרייען זיך די שקיוון אין דער קעגנזעצלעכער ריכטונג.

פראגעס און איבונגען.

1. וויאזוי קאָנסטרויִרט מען געמיינזאמע טאנגענטע צו צוויי קרײַזליניעס, וואָס האָבן אן אלצייִנעם ראדיוס?

2. ס'איז געגעבן א קרײַזליניע, וואָס איר ראדיוס איז $R = 6$ cm. וואָס שטעלט מיט זיך פאָר דאָס געאָמעטרישע אָרט פון די צענטערס פון די קרײַזליניעס מיט די ראדיוסן $r = 2$ cm, אויב זיי באריִרן די געגעבענע קרײַזליניע? וואָסערע פאלן זײַנען מעגלעך?

3. אָנצייכענען צוויי קאָנצענטרישע קרײַזליניעס מיט די ראדיוסן 8 סמ. און 5 סמ. און דערנאָך קאָנסטרויִרן עטלעכע קרײַזליניעס, וואָס זאָלן באריִרן ביידע געגעבענע קרײַזליניעס. ווי גרויס זײַנען די ראדיוסן פון די נײַ קאָנסטרויִרטע קרײַזליניעס? צו וואָס איז גלײַך די ברייט פונעם קרײַז-רינג?

4. דערווײַזן, אז די געמיינזאמע אינווייניקסטע (אָדער דרויסנדיקע) טאנגענטע צו צוויי ניט-גלײַכע קרײַזליניעס זײַנען גלײַך און שנײַדן זיך איבער אף דער ליניע פון די צענטערס.

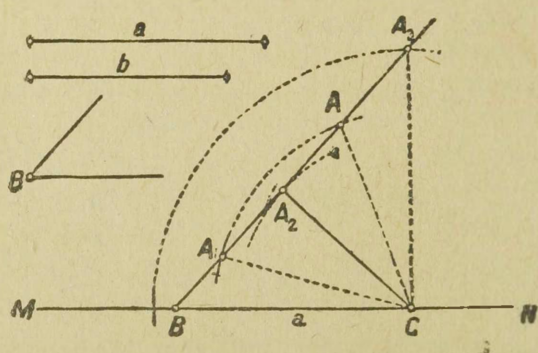
5. דערווײַזן, אז בא א דרויסנדיקן באריר פון צוויי קרײַזליניעס זײַנען גלײַך די געמיינזאמע דרויסנדיקע טאנגענטע און דער אָפשניט פון דער געמיינזאמער אינווייניקסטער טאנגענטע, וואָס איז אײַנגעשלאָסן צווישן די דרויסנדיקע טאנגענטע.

XIV. אופגאבעס אף קאָנסטרויִרן לויטן מעטאָד פון די געאָמעטרישע ערטער.

1. אנאליז פון אופגאבעס אף קאָנסטרויִרונג.

1. אן אופגאבע אף קאָנסטרויִרן איז א פאָדערונג צו קאָנסטרויִרן מיט דער הילף פון א צירקל און א ווירע א געאָמעטרישע פיגור, וואָס פארמאָגט באשטימטע אייגנשאפטן, וועלכע זײַנען אָנגעוויזן אינעם באדינג פון דער אופגאבע.

א פולע לייזונג פון דער אופגאבע אף קאָנסטרויִרן באשטייט פון פאָלגנדיקע פיר טיילן: 1) פון אנאליזירן די אופגאבע און, הייסט עס, פון צונויפשטעלן א פלאן פון דער לייזונג; 2) פון אויספילן די קאָנסטרויִרונג גופא; 3) פונעם דערווײַז, אז די קאָנסטרויִרטע פיגור באפרידיקט אלע באדינגונגען פון דער אופגאבע; 4) פון אויספאָרשן די באדינגונגען, בא וועלכע די לייזונג פון דער אופגאבע איז מעגלעך, און אויך באשטימען די צאָל מעגלעכע לייזונגען פון דער אופגאבע.



צייכ. 213

2. אופגאבע 1. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק לויט דער געגעבענער זײַט a, לויטנ ווינקל B, וואָס ליגט בא דער דאָזיקער זײַט, אונ לויט דער זײַט b, וואָס ליגט קעגנ דעם דאָזיקנ ווינקל (צייכ. 213).

ליי זונג. 1) אנאליז פונ דער אופגאבע. מיר ווייסנ וויִאַזוי צו קאָנסטרויִרנ א ווינקל B באַם עק פונעם אָפּשניט BC, וואָס איז גלײַכ צו דער זײַט פונעם דרײַעק, דה. אונדז זײַנענ באַווּוּסט צוויי שפּיצנ פונעם דרײַעק B אונ C אונ דער $\angle B$. דער דריטער שפּיצ A דאַרפ ליגנ אַפּ דער זײַט BA פונעם ווינקל B אונ אַפּ דער קרײַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט C, וואָס זײַנ ראַדיוס איז גלײַכ צו דער זײַט $AC=b$.

2) קאָנסטרויִרונג. אַפּ א באַליביקער גראָדער MN לייגנ מיר אָפּ אַנ אָפּשניט BC, וואָס איז גלײַכ a, אונ אַפּנ עק זײַנעם B קאָנסטרויִרנ מיר א ווינקל B. מיר וועלנ דערנאָכ דורכפירנ מיט א ראַדיוס, וואָס איז גלײַכ b, א קרײַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט C. די קרײַזליניע וועט איבערשנײַדנ די זײַט BA פונעם ווינקל B אינ די פונקטנ A אונ A_1. מיר האָבנ אזוי־אַרום צוויי לאַגעס פונעם שפּיצ A, נעמלעכ A אונ A_1, אונ צוויי דרײַעקנ—ABC אונ A_1BC.

3) דערווײַז. ביידע דרײַעקנ באַפרידיקנ די באַדינגונגענ, וואָס זײַנענ געשטעלט אינ דער אופגאבע.

4) אויספאָרשונג. פונעם פונקט C וועלנ מיר דורכפירנ א פּערפּענדיקוליאַר CA_2 אַפּ דער זײַט BA פונעם ווינקל B. די קרײַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט C וועט באַרירנ די זײַט BA, אויב איר ראַדיוס איז גלײַכ CA_2, אונ דאַנ האָבנ מיר בלויז איינ לייזונג; דערבײַ איז $b<a$. די קרײַזליניע קאָנ איבערשנײַדנ די זײַט BA אינ צוויי פונקטנ: A אונ A_1 (אויב $b<a$), אונ דאַנ האָבנ מיר צוויי לייזונגענ:

1) $\triangle ABC$ מיט די זײַטנ a, b אונ $AB=c$ אונ מיט די ווינקלענ B, BAC אונ ACB;

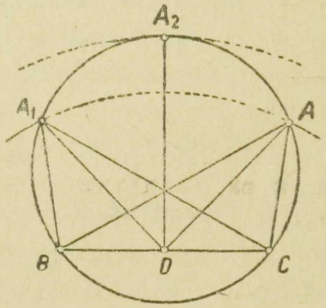
2) $\triangle A_1BC$ מיט די זײַטנ a, b אונ $A_1B=c_1$ אונ מיט די ווינקלענ B, $BA_1C=180°-A$; ווײַל $\angle A=\angle AA_1C$ (ווינקלענ באַם באַזיס פונ דעם גלײַכ-אַקסלדיקנ דרײַעק A_1CA); דער ווינקל A_1CB פונ דעם דאָזיקנ דרײַעק איז גלײַכ $\angle A-\angle B$. אויב $b=a$, האָבנ מיר בלויז איינ לייזונג אונ דאַנ איז דער געזוכטער דרײַעק א גלײַכאַקסלדיקער; אויב $b>a$, וועט די קרײַזליניע איבערשנײַדנ די זײַט BA אינ איינ פונקט A_3, אונ דער דרײַעק A_3BC וועט זײַנ דער געזוכטער.

צולעצט, אויב b איז קלענער פונ CA_2 דה. פונעם אָפּשטאַנד פונ פונקט C ביז דער זײַט BA פונעם ווינקל B, וועט די קרײַזליניע ניט באַרירנ די זײַט BA אונ וועט זי ניט איבערשנײַדנ אונ דעריבער האָט די אופגאַבע אינ דעם פאַל אפילע קיינ איינ לייזונג ניט.

אופגאבע 2. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק לויטנ געגעבענעם באַזיס a, לויטנ אנטקעגנליגנדיקנ ווינקל $\angle A=\alpha$ אונ לויט דער מעדיִאַנע (m_a (צייכ. 214).

לייזונג. אנאליז פונ דער אופגאבע. לאָמיר זאָגנ, אז די אופגאבע איז געלייזט אונ דער געזוכטער דרײַעק ABC איז קאָנסטרויִרט. AD איז זײַנ מעדיִאַנע, BC איז זײַנ באַזיס. דער געגעבענער באַזיס BC, וואָס איז גלײַכ a, באַשטימט צוויי שפּיצנ B אונ C פונעם דרײַעק ABC. פונעם דריטנ שפּיצ A זעט מענ דעם געגע-

בענעם באזיס $BC = a$ אונטער דעם געגעבענעם $\angle \alpha$. דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ די פונקטנ, פונ וועלכע מע זעט דעם געגעבענעם אָפשניט BC אונטער דעם געגע-בענעם $\angle \alpha$, איז דער בויגנ פונעם סעגמענט BAC, וועלכער איז קאָנסטרויִרט אפנ אָפשניט $BC = a$ אונ וואָס נעמט אינ זיכ אריַינ דעם געגעבענעם $\angle \alpha$. הייסט עס, דער פונקט A דארפ ליגנ אפנ בויגנ פונעם סעגמענט BAC. דער אָפשטאנד צווישנ דעם שפיצ A אונ דעם מיטנ D פינ דעם באזיס BC איז גלייַכ $AD = m_a$; דאָס געאָמעטרישע אָרט פונ די פונקטנ, וואָס זייַנענ גלייַכווייַט פונעם פונקט D, איז די קרייַזליניע, וואָס איז דורכגעפירט מיטנ ראדיִוס $AD = m_a$, מיטנ צענטער אינעם פונקט D. הייסט עס, דער פונקט A דארפ ליגנ אפ אָט דער קרייַזליניע. אלזאָ, דער פונקט A, דער דריטער שפיצ פונעם $\triangle ABC$, דארפ געהערנ צו ביידע געאָמעטרישע ערטער: צום בויגנ פונעם סעגמענט BAC אונ צו דער קרייַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט D; דער שפיצ A איז דער איבערשנייַד-פונקט פונ די דאָזיקע געאָמעטרישע ערטער.



צייכ. 214

קאָנסטרויִרונג. אפנ געגעבענעם אָפשניט $BC = a$, ווי אפ א כאָרדע, קאָנ-סטרויִרנ מיר א סעגמענט BAC, וואָס נעמט אינ זיכ אריַינ דעם געגעבענעם $\angle A = \alpha$ דערנאָכ פירנ מיר דורכ א קרייַזליניע מיט דעם צענטער אינעם פונקט D, דעם מיטנ פונעם אָפשניט BC, מיט א ראדיִוס, וואָס איז גלייַכ צו דער געגעבענער מעדיִאנע m_a. דער איבערשנייַד-פונקט פונעם סעגמענט-בויגנ BAC מיט דער קרייַזליניע, וואָס איר ראדיִוס איז m_a, איז דער דריטער שפיצ A פונעם דרייַעק. פארייניקנ מיר דעם פונקט A מיט B אונ C, באקומענ מיר דעם געזוכטנ דרייַעק ABC.

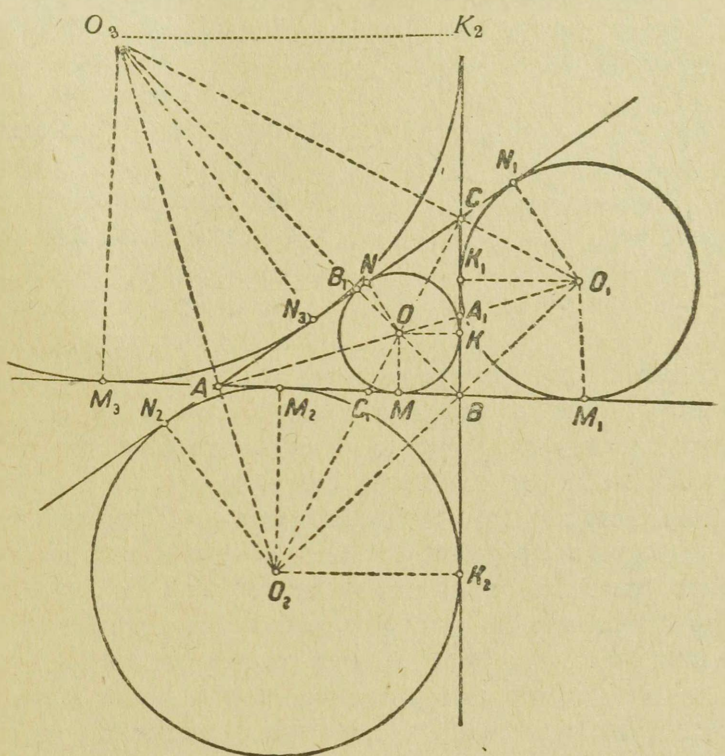
דערווייַז. דער קאָנסטרויִרטער $\triangle ABC$ באפרידיקט די באדינגונגענ פונ דער אופגאבע: $BC = a$ איז זייַנ באזיס, $\angle BAC = \alpha$ אונ $AD = m_a$.

אויספאָרשונג. A איז דער איבערשנייַד-פונקט פונ צוויי קרייַזליניעס, דע-ריבער איז נייטיק אויספאָרשנ, צי וועלנ שטענדיק די קרייַזליניעס בא די אָנגעגעבענע באדינגונגענ זיכ איבערשנייַדנ.

נאָכ דעם, אז דער סעגמענט-בויגנ BAC איז קאָנסטרויִרט, פירנ מיר דורכ א קרייַזליניע מיטנ צענטער אינעם פונקט D מיט א ראדיִוס, וואָס איז גלייַכ $DA = m_a$ (צייכ. 214); דערבייַ זייַנענ מעגלעכ פאָלגנדיקע 3 פאלנ: 1) די קרייַזליניעס באַרירנ זיכ אינעם פונקט A_2, דה. די קרייַזליניעס האָבנ בלויז איינ געמיינזאמענ פונקט; הייסט עס, מע קאָנ קאָנסטרויִרנ בלויז איינ דרייַעק A_2BC; דער דאָזיקער דרייַעק איז א גלייַכאקסלדיקער, אונ די מעדיִאנע A_2D איז אויכ די הייכ פונעם דרייַעק; 2) אויב די געגעבענע מעדיִאנע m_a איז קלענער פאר A_2D, וועלנ די קרייַזליניעס זיכ איבערשנייַדנ אינ צוויי פונקטנ A אונ A_1, אונ מיר וועלנ באקומענ צוויי גלייַכע דרייַעקנ: ABC אונ A_1BC; 3) אויב די געגעבענע מעדיִאנע m_a איז גרעסער פאר A_2D, וועלנ די קרייַזליניעס זיכ ניט איבערשנייַדנ, קאָנסטרויִרנ אזא דרייַעק קאָנ מענ ניט, אונ דעריבער איז לייזנ די אופגאבע ניט מעגלעכ.

מע דארף באמערקן, אז אויך פון דער צווייטער זײַט BC קאָן מען קאָנסטרויִרן א סעגמענט, וואָס שליסט אײַן דעם ווינקל α, און א דרײַעק א סימעטרישן צום גע-געבענעם.

אויפגאבע 3. געפינען א פונקט, וועלכער איז גלײַכווײַט פון די זײַטן AB, AC און CB פונעם דרײַעק ABC (צייכ. 215).



צייכ. 215

לייזונג. די גראָדע AB און AC בילדן באם פונקט A צוויי פּאָר ווערטיקאלע ווינקלען. דער פונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון די זײַטן פונעם דרײַעק, ליגט אָדער אף דער געמיינזאמער ביסעקטריסע פון איין פּאָר ווינקלען אָדער אף דער ביסעקטריסע פון דער צווייטער פּאָר ווינקלען. אפריִער וועלן מיר זיך אָפּשטעלן אף דער ביסעקטריסע פונעם אינווייניקסטן ווינקל A פונעם געגעבענעם דרײַעק. מיר פירן דורך די ביסעקטריסע AA_1, אף וועלכער עס דארף ליגן דער געזוכטער פונקט; דערנאָך פירן מיר דורך די ביסעקטריסע BB_1 פונעם ווינקל B, אף וועלכער עס דארף ליגן דער געזוכטער פונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון די זײַטן BA און BC. דער געזוכטער פונקט דארף גלײַכצײַטיק ליגן אף ביידע ביסעקטריסעס, דה. ער איז זייער א־בער־שנײַד־פונקט O.

אינדערעמעסן, לויט דער אייגנשאפט פון א ביסעקטריסע איז $OM=ON$ און $ON=OK$; פארגלײַכן מיר אָט די גלײַכקײַטן, זעען מיר, אז $OM=OK$.

דער פונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון די זײַטן פון א דרײַעק, ליגט אינווייניק

אינעם דרייַעק און פאַלט צונויף מיטן איבערשנייַד-פונקט פון באַליביקע צוויי בי-סעקטריסעס.

ווען מיר פאַרייניקן דעם פונקט C מיטן פונקט O, זעען מיר, אַז די גראַדווינקל-דיקע דרייַעקן CON און COK זייַנען גלייַך, ווייַל זיי האָבן אַ געמיינזאַמע היפּאָ-טענוזע OC און, ווי מיר האָבן דערוויזן, איז $ON = OK$. וויבאַלד די דרייַעקן זייַ-נען גלייַך, דרינגט דערפון, אַז $\angle OCN = \angle OCK$, און דאָס באַטייַט, אַז די גראַדע OC טיילט דעם $\angle C$ אַפּדערהעלפט, דה. CO איז די ביסעקטריסע. אַלזאָ, די דריטע ביסעקטריסע CO גייט אויך דורכן פונקט O.

אויספיר. די ביסעקטריסעס פון אַ דרייַעק שניידן זיך איבער אין איין פונקט.

אויסער דעם פונקט O, וואָס איז גלייַכווייַט פון די זייַטן פונעם דרייַעק ABC, זייַנען פאַראַן נאָך דריי פונקטן, וואָס פאַרמאָגן די זעלבע אייגנשאַפט. אינדערעמעסן, אויב, אַשטייגער, מע זאָל פאַרלענגערן די זייַטן פון די ווינקלען B און C און מע זאָל דורכפירן די ביסעקטריסעס פון די באַקומענע צוויי פּאָר דרויסנדיקע ווינקלען פונעם דרייַעק, וועט זייער איבערשנייַד-פונקט, דער פונקט O_1, זייַן גלייַכווייַט פון דער זייַט BC און פון די פאַרזעצונגען פון די זייַטן AB און AC. מיט דער הילף פון אַן אַנאַלאָגישער קאָנסטרוירונג, ווי דאָס איז צו זען פון דער צייכענונג 215, געפינט מען נאָך צוויי פונקטן O_2 און O_3.

2. אויפגאַבעס.

1. ס'זייַנען געגעבן צוויי פונקטן A און B. געפינען דעם דריטן פונקט C, וועלכער זאָל זיך געפינען אויף אַן אָפּשטאַנד a פונעם פונקט A און אויף אַן אָפּשטאַנד b פונעם פונקט B.

2. דורכפירן אַ קרייַזליניע, וואָס גייט דורך אַ געגעבענעם פונקט A און וואָס באַרירט אין אַ געגעבענעם פונקט B אַ געגעבענע גראָדע MN.

3. קאָנסטרויִרן אַ דרייַעק לויט דער זייַט a און לויט די הייכן h_b און h_c.

4. קאָנסטרויִרן אַ דרייַעק לויטן באַזיס a און לויט דער הייך h_a און $\angle A$.

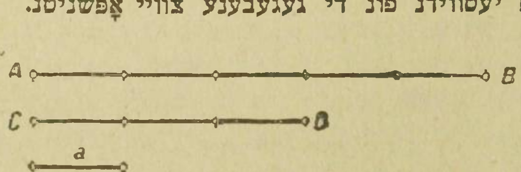
5. געפינען דאָס געאָמעטרישע אָרט: 1) פון די מיטנס פון אַלע כאָרדעס, וואָס גייען אַרויס פון איין און דעם זעלבן פונקט אויף דער געגעבענער קרייַזליניע; 2) פון די מיטנס פון אַלע כאָרדעס, וואָס גייען דורך איין און דעם זעלבן פונקט אינווייניק אין דער קרייַזליניע.

XV. פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּשניטן.

1. געמיינזאַמע מאָס פון צוויי אָפּשניטן.

געמיינזאַמע מאָס פון צוויי געגעבענע אָפּשניטן הייסט אַזאַ אָפּשניט, וואָס לייגט זיך אויס אַ גאַנצע צאָל מאָל אויף יעטווידן פון די געגעבענע צוויי אָפּשניטן.

ס'זייַנען געגעבן צוויי אָפּשניטן AB און CD (צייכ. 216); דער אָפּשניט a לייגט זיך אויס אויפן אָפּשניט AB 5 מאָל און אויפן אָפּשניט CD 3 מאָל:



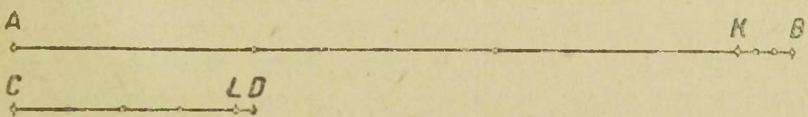
צייכ. 216

$$AB = 5a \text{ אונ } CD = 3a$$

a איז די געמײנזאמע מאָס פונ די אָפשניטנ AB אונ CD. יעטווידער טײל פונ דער געמײנזאמער מאָס פונ צוויי אָפשניטנ, לעמאָשל: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10} \ldots$ פונ איר, איז אויכ זײערע א געמײנזאמע מאָס, ווײַל זי לײגט זיכ אויס א גאנצע צאָל מאָל אפ יעטווידנ פונ די אָפשניטנ; דערפונ דרינגט, אז צוויי אָפשניטנ קאָנענ האָבנ א מענגע געמײנזאמע מאָסנ, וואָס אײנע פונ זײ איז די גרעסטע.

צוויי אָפשניטנ, וואָס האָבנ א געמײנזאמע מאָס, וועלכע מע קאָנ אויסלײגנ אפ יעדנ אָפשניט א גאנצע צאָל מאָל, הײסנ דורכמעסטלעכע אָפשניטנ.

אופגאבע. געפינענ די געמײנזאמע מאָס פונ צוויי דורכמעסטלעכע אָפשניטנ. ס'זײַנענ געגעבנ צוויי אָפשניטנ AB אונ CD, דערבײַ איז $AB > CD$ (צײכ. 217).



צײכ. 217

לײזונג. מיר לײגנ אָפ עטלעכע מאָל דעמ קלענערנ אָפשניט CD אפנ גרעסערנ אָפשניט AB. לאָמיר זאָגנ, אז ער לײגט זיכ אפ אימ אויס דרײַ מאָל אונ עס בלײַבט נאָכ אנ אָפשניט $KB < CD$, דה.

$$AB = 3CD + KB \tag{1}$$

ווענ דער אָפשניט CD וואָלט זיכ אויסגעלײגט אפנ אָפשניט AB פונקט דרײַ מאָל, וואָלט דער אָפשניט CD געווענ די געמײנזאמע מאָס פונ בײדע אָפשניטנ אונ וואָלט זיכ אנטהאלטנ אינ AB דרײַ מאָל אונ אינ CD אײנ מאָל.

ווײַטער לאָמיר זאָגנ, אז דער אָפשניט KB, דער ערשטער רעשט, לײגט זיכ אויס אפנ אָפשניט CD פיר מאָל אונ כוצ דעמ באקומט זיכ נאָכ א רעשט $LD < KB$, דאנ איז

$$CD = 4KB + LD \tag{2}$$

מיר לײגנ ווײַטער אָפ דעמ אָפשניט LD, דעמ צווײטנ רעשט, אפנ אָפשניט KB; לאָמיר זאָגנ, אז דער אָפשניט LD האָט זיכ אויסגעלײגט אפנ אָפשניט KB דרײַ מאָל, דאנ איז

$$KB = 3LD \tag{3}$$

אונ LD איז די געמײנזאמע מאָס פונ בײדע אָפשניטנ.

ווענ מיר שטעלנ אונטער דעמ באטרעפ פונ KB, פונ דער גלײַכקײַט (3) אינ דער גלײַכקײַט (2) אונ דערנאָכ שטעלנ מיר אונטער דעמ באטרעפ פונ CD אינ דער גלײַכקײַט (1), באקומענ מיר:

$$CD = 4 . 3LD + LD = 13LD$$
$$AB = 3 . 13LD + 3LD = 42LD$$

אלזאָ, $AB=42LD$ אונ $CD=13LD$, הייסט עס, LD איז די געמיינזאמע מאָס פונ די אָפשניטנ AB אונ CD.

ווענ דער אָפשניט LD וואָלט זיכ ניט אויסגעלייגט א גאנצע צאָל מאָל אינ־געמ אָפשניט KB, וואָלט מענ באדארפט די אָפעראציע פונ געפינענ די געמיינזאמע מאָס פאָרזעצנ, ביזוואנענ דער לעצטער באקומענער רעשט וואָלט זיכ אויסגעלייגט אינעמ פאָריקנ רעשט א גאנצע צאָל מאָל. דאָס מוז סאָפקאָלסאָפ געשענ, ווײַל לויטנ באדינג זײַנענ די אָפשניטנ AB אונ CD דורכמעסטלעכע.

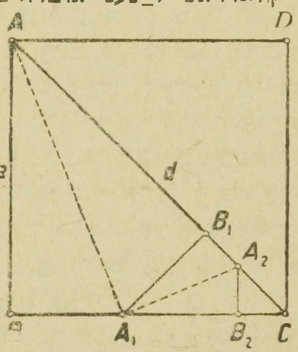
באמ געפינענ די געמיינזאמע מאָס פונ צוויי אָפשניטנ איבערצײַגנ מיר זיכ דערינ, אז זייער געמיינזאמע מאָס אנטהאלט זיכ א גאנצע צאָל מאָל אי אינ די אָפשניטנ גופע אי אינ יעטווידנ פונ די רעשטנ, וואָס באקומענ זיכ באמ געפינענ די געמיינזאמע מאָס; די געמיינזאמע מאָס קאָנ ניט זײַנ גרעסער איידער יעדע־רע פונ די רעשטנ.

דאָכ קאָנענ זיכ טרעפנ אזעלכע צוויי אָפשניטנ, וואָס האָבנ ניט קיינ געמיינ־זאמע מאָס; אָפשניטנ, וואָס האָבנ ניט קיינ געמיינזאמע מאָס, הייסנ *אומדורכ־מעסטלעכע*.

מע דארפ באמערקנ, אז צוויי סטאמ גענומענע אָפשניטנ זײַנענ געוויינלעכ אומדורכמעסטלעכע; בלויז אלס אויסנאמ טרעפט, אז זיי זײַנענ דורכמעסטלעכע.

מאכמעס דעמ, וואָס די אויסמעסט-אפאראטנ אונ אונדזער אויג זײַנענ ניט גענוג פולקומ, קאָנענ מיר באמ געפינענ די געמיינזאמע מאָס ניט באמערקנ די גאָר קליינינקע רעשטנ, אונ דערפאר ווײַזט זיכ ארויס, אז אינ דער פראקטיק קאָנ מענ שטענדיק געפינענ די געמיינזאמע מאָס פונ צוויי אָפשניטנ מיט א גע־נויער פינקטלעכקײַט; דורכ אָפהאנדלונגענ אָבער קאָנ מענ דערווײַזנ, אז אומ־דורכמעסטלעכע אָפשניטנ עקזיסטירנ.

בײַשפּיל. די זײַט אונ די דיִאַגאָנאל פונ א קוואדראט זײַנענ אומדורכ־מעסטלעכ. ס'איז געגעבנ א קוואדראט $ABCD$, וואָס זײַנ זײַט האלט a אונ די דיִאַגאָנאל — d (צייכ. 218).



צייכ. 218

פונעמ גלײַכאקסלדיקנ גראַדווינקלדיקנ דרײַעק ABC דרינגט, אז

$$a<d<2a$$

$AB=a$ אנטהאלט זיכ אינ $AC=d$ איינ מאָל אונ גיט א רעשט $B_1C=a_1$. דה.

$$d=a+a_1$$

ווענ מיר פירנ דורכ $B_1A_1 \perp AC$ אונ פאַרייניקנ די פונקטנ A אונ A_1, באקומענ מיר, אז $A_1B_1=A_1B$ אונ אז דער דרײַעק A_1B_1C איז א גלײַכאקסלדיקער אונ א גראַדווינקלדיקער, ווײַל $\angle C=45°$. פונעמ דרײַעק A_1B_1C דרינגט, אז $B_1C=a_1=B_1A_1=BA_1$.

דער רעשט $B_1C=a_1$ וועט זיכ אנטהאלטנ אינ $BC=a$ צוויי מאָל, ווײַל $BA_1=a_1$ אונ $a_1<A_1C<2a_1$, אונ כוצ דעמ וועט זיכ נאָכ באקומענ א רעשט $B_2C=a_2$. אלזאָ

$$a=2a_1+a_2$$

דער דרײַעק A_2B_2C, הייסט עס, איז אויך א גראַדווינקלדיקער און א גלײַכ־אקסלדיקער, און דעריבער, ווען מיר ווענדן צו אים אָן די זעלבע אָפּהאנדלונגען, באַקומען מיר

$$a_1 = 2a_2 + a_3$$

אאוו.

אזויארום ווײַזט זיך ארויס, אז קיין איינער פון די ווײַטערדיקע רעשטן לייגט זיך ניט אויס אינעם פּאַריקן רעשט א גאנצע צאָל מאָל, און דעריבער זײַנען די אָפּשניטן a און d אומדורכמעסטלעך.

2. פארהעלטעניש פון אָפּשניטן.

1. אויסמעסטן אן אָפּשניט — הייסט געפינען זײַן פאר־העלטעניש צו א צווייטן אָפּשניט, וואָס איז אָנגענומען פאר א מאָס־איינס; דער רעזולטאט פון אויסמעסטן אן אָפּשניט איז די צאָל, וואָס ווײַזט, וויפל מאָל האָט זיך אויסגעלייגט דער אָפּשניט, וועלכן מיר האָבן גענומען פאר א מאָס־איינס, אפן אָפּשניט, וואָס מיר מעסטן אויס.

אשטייגער, אויב דער אָפּשניט a איז גענומען פאר א מאָס־איינס (צייכ. 216), איז די צאָל, וואָס מעסט אויס דעם אָפּשניט AB, גלײַך 5; די צאָל, וואָס מעסט אויס דעם אָפּשניט CD, איז גלײַך 3; ס'איז קלאָר, אז די צאָל, וואָס מעסט אויס דעם אָפּשניט a, איז גלײַך 1.

2. צוויי אָפּשניטן קאָן מען, פונקט ווי צוויי צאָלן, פארגלײַכן אפ צווייער־ליי אופאנים. מע קאָן זיך דערוויסן, אפ וויפל איין אָפּשניט איז גרעסער אָדער קלענער פארן צווייטן, אָדער דערוויסן זיך, אין וויפל מאָל איין אָפּשניט איז גרעסער אָדער קלענער פארן צווייטן, און דורך דעם טאקע דער־וויסן זיך, וויפל מאָל וועט איין אָפּשניט זיך אנטהאלטן אינעם צווייטן.

באַם פארגלײַכן אָפּשניטן לויטן צווייטן אופן געפינען מיר די טייל־פארהעל־טעניש אָדער פּאַשעט די פארהעלטעניש צווישן צוויי אָפּשניטן.

די פארהעלטעניש פון איין אָפּשניט צום צווייטן רופט מען די פארהעלטעניש פון דער צאָל, וואָס מעסט אויס איין אָפּשניט אין וואָסער־ניט־איז מאָס־איינסן, צו דער צאָל, וואָס מעסט אויס א צווייטן אָפּשניט אין די זעלבע מאָס־איינסן.

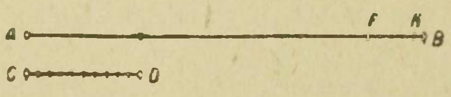
3. באַם געפינען די פארהעלטעניש צווישן צוויי אָפּשניטן זײַנען מעגלעך צוויי פאלן.

I. די פארהעלטעניש פון דורכמעסטלעכע אָפּשניטן איז א גאנצע צאָל אָדער א ברוכצאָל. ס'זײַנען געגעבן צוויי אָפּשניטן $AB = 5a$ און $CD = 3a$ (צייכ. 215); זייער געמיינזאמע מאָס איז דער אָפּשניט a. קעדיי צו געפינען די פארהעלטעניש צווישן די אָפּשניטן AB און CD, טיילן מיר די צאָל, וואָס מעסט אויס דעם אָפּשניט AB מיט דעם אָפּשניט a, אפ דער צאָל, וואָס מעסט אויס דעם אָפּשניט CD מיט דעם זעלבן אָפּשניט a, מיר באַקומען:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{3} \quad \text{אָדער} \quad AB : CD = 5 : 3$$

די פארשריבענע פארהעלטעניש פונ צוויי אָפשניטן לייענט מענ אזוי: דער אָפשניט AB פארהאלט זיכ אזוי צומ אָפשניט CD, ווי 5 פארהאלט זיכ צו 3, אָדער: די פארהעלטעניש פונעמ אָפשניט AB צומ אָפשניט CD איז גלייַכ $\frac{5}{3}$.

II. די פארהעלטעניש פונ אומדורכמעסטלעכע אָפשניטנ איז א דערנעענטערטע צאָל. ס'זייַנענ געגעבנ די אָפשניטנ AB און CD (צייכ. 219). מיר וועלנ אָנעמענ דעמ קלענערנ אָפשניט CD פארנ מאָס־איינס. מיר לייגנ אָפּ דעמ אָפשניט CD אפ AB. זאָל זייַנ, אז ער האָט זיכ אויסגעלייגט אפנ אָפשניט AB 3 מאָל, און דערבייַ האָט זיכ נאָכ באקומענ א רעשט FB, וואָס איז קלענער פונ CD; ווענ מיר פארשרייַבנ $\frac{AB}{CD}\approx 3$, וועלנ מיר באקומענ ניט קיינ פינקטלעכע פארהעלטעניש פונ די אָפשניטנ AB און CD, נאָר זייער דערנעענטערטע פארהעלטעניש און דערבייַ מיט א מאנגל, ווייַל אפ צו פארקייַלעכיקנ דעמ רעזולטאט האָבנ מיר אָפּגעוואָרפנ די רעשט FB.



צייכ. 219

קעדיי צו באקומענ א מער פינקטלעכע פארהעלטעניש פונ די אָפשניטנ AB און CD, טיילנ מיר דעמ אָפשניט CD אפ 10 גלייַכע כאלאָקימ און נעמענ אָנ $0{,}1CD$ פאר א נייַעמ מאָס-איינס פונ די אָפשניטנ. לאָמיר זאָגנ, אז דער דאָזיקער נייַער מאָס-איינס לייגט זיכ אויס אפ AB 34 מאָל און גיט כוצ דעמ א רעשט KB, וואָס איז קלענער פאר $0{,}1CD$.

מיר פארשרייַבנ: $3{,}4\,CD < AB < 3{,}5\,CD$, אָדער $\frac{AB}{CD}\approx 3{,}4$ מיט א מאנגל און $\frac{AB}{CD}\approx 3{,}5$ מיט אנ איבערפלוס. די פארהעלטענישנ 3,4 אָדער 3,5 זייַנענ אויסגערעכנט מיט א פינקטלעכקייַט ביז 0,1 איינס פונ דער גענומענער מאָס. ווי באמ צעטיילנ צאָלנ, אזוי אויכ באמ אויסרעכענענ די פארהעלטעניש צווישנ אָפשניטנ ווערט די פארהעלטעניש גענומענ מיט א מאנגל, ווענ די רעשט איז קלענער פאר א האלבנ גענומענעמ מאָס-איינס, און מיט אנ איבערפלוס, ווענ דער רעשט איז גרעסער פאר א האלבנ גענומענעמ מאָס-איינס.

קעדיי צו באקומענ א נאָכ מער פינקטלעכע פארהעלטעניש פונ די אָפשניטנ AB און CD, צעטיילנ מיר דעמ אָפשניט CD אפ 100 גלייַכע כאלאָקימ. לאָמיר זאָגנ, אז $0{,}01\,CD$ האָט זיכ אויסגעלייגט אפ דער רעשט KB 3 מאָל און עס האָט זיכ נאָכ באקומענ א רעשט, א קלענערע פונ $0{,}01\,CD$.

מיר פארשרייַבנ: $3{,}43\,CD < AB < 3{,}44\,CD$ אָדער $\frac{AB}{CD}\approx 3{,}43$ מיט א מאנגל אָדער $\frac{AB}{CD}\approx 3{,}44$ מיט אנ איבערפלוס.

די צאָלנ 3,43 און 3,44 זייַנענ די פארהעלטענישנ צווישנ די אָפשניטנ AB און CD, אויסגערעכנט מיט א פינקטלעכקייַט ביז 0,01, איינע — מיט א מאנגל, די צווייטע — מיט אנ איבערפלוס.

ווענ מע זאָל צעטיילנ דעמ אויסגעוויילטנ מאָס-איינס אפ נאָכ דריבנערע

דעצימאַלע כאַלאָקים, לעמאָשל אפּ 1 000 אָדער אפּ 10 000 כאַלאָקים אאַוו., וועלנ מיר באַקומענ אַ פאַרהעלטעניש פונ די אָפּשניטנ אנ אַלצ מער פּינקטלעכע, וואָס איז אויסגעדריקט דורכ אנ אומענדלעכער, ניט פּעריִאָדישער דעצימאַלער ברוכ־צאָל.

4. די פאַרהעלטעניש פונ צוויי אומדורכמעסטלעכע אָפּשניטנ איז אַזוי־אַרום אנ איראַציִאָנעלע צאָל.

צוויי פאַרהעלטענישנ פונ אומדורכמעסטלעכע אָפּשניטנ רעכענענ זיכ פאַר גלײַכע, אויב ס'זײַנענ גלײַכ די דערנעענטערטע צאָליקע באַטרעפנ פונ די דאָזיקע פאַר־העלטענישנ, וואָס זײַנענ אויסגערעכנט מיט אַ באַליביקנ אַלציינעמ גראַד פּינקט־לעכקײַט, אונ ווענ ביידע זײַנענ גענומענ אָדער מיט אַ מאַנגל אָדער מיט אנ איבערפלוס. אַשטייגער, ווענ

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}5 \quad \text{און} \quad \frac{c}{d} \approx 7{,}5,$$

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}52 \quad \text{און} \quad \frac{c}{d} \approx 7{,}52,$$

$$\frac{a}{b} \approx 7{,}524 \quad \text{און} \quad \frac{c}{d} \approx 7{,}524,$$

אאַוו., דאַנ איז

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

אַלזאָ, די פאַרהעלטעניש פונ צוויי אָפּשניטנ איז אַ ראַציִאָנעלע אָדער איראַ־ציִאָנעלע צאָל, אפּ וועלכער מע דאַרפ קייפלענ דעמ צווייטנ אָפּשניט, קעדיי צו באַקומענ דעמ ערשטנ.

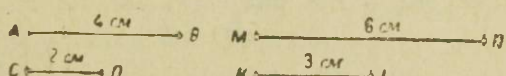
3. פּראָפּאָרציִאָנעלע אָפּשניטנ. געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע.

ס'זײַנענ געגעבנ פיר אָפּשניטנ: $AB = a = 4$, $CD = b = 2$, $MN = c = 6$ אונ $KL = d = 3$ (צייכ. 219a). אויב מע זאָל נעמענ די פאַרהעלטעניש פונ צוויי אָפּשניטנ AB אונ CD אונ די פאַרהעלטעניש פונ די איבעריקע צוויי, MN אונ KL, וועט

$$\frac{AB}{CD} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{און} \quad \frac{MN}{KL} = \frac{6}{3} = 2$$

יעטווידע פונ די פאַרהעל־טענישנ איז גלײַכ 2, הייסט עס, די פאַרהעלטענישנ זײַנענ גלײַכ, אונ דעריבער איז

$$\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{KL}$$



צייכ. 219

צוויי גלײַכע פאַרהעלטענישנ, וואָס זײַנענ פאַרייניקט מיט אַ גלײַכ־צייכנ, הייסנ געאָמעטרישע (טיילונג־) פּראָפּאָרציע.

די גלײַכקײַט $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{KL}$ איז אַ געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע.

די גלײַכקײַט $\frac{AB}{CD}=\frac{MN}{KL}$ לייענט מענ אזוי: דער אָפּשניט AB, אָדער פּאָ־שעט AB, פּאַרהאַלט זיכ צו CD, ווי MN פּאַרהאַלט זיכ צו KL.

א געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע באַשטייט פונ 4 גלידער. ניט יעטווידע פיר אָפּשניטנ בילדנ א געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע; לעמאָשל, אָפּשניטנ, וואָס זײַנענ גלײַכ 4, 5, 8, 10 סמ., בילדנ א געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע, ווײַל $\frac{8}{4}=\frac{10}{5}$; די אָפּשניטנ אָבער, וואָס זײַנענ גלײַכ 4, 5, 6 אונ 7 סמ., בילדנ ניט קיינ געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע, ווײַל פונ זיי קאָנ מענ ניט צונויפשטעלנ קיינ צוויי גלײַכע פּאַר־העלטענישנ.

אויב צאָלנ, וואָס מעסטנ אויס פיר אָפּשניטנ, בילדנ א געאָמעטרישע פּראָ־פּאָרציע, זאָגט מענ וועגנ אזעלכע פיר אָפּשניטנ, אז זיי זײַנענ *פּראָפּאָר־ציִאָנעל*.

דעפיניציע. *פיר אָפּשניטנ הייסנ פּראָפּאָרציִאָנעלע, ווענ די צאָלנ, וואָס מעסטנ זיי אויס, בילדנ א געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע.*

אלזאָ, אויב 4 אָפּשניטנ a, b, c אונ d זײַנענ פּראָפּאָרציִאָנעל, איז ריכ־טיק די גלײַכקײַט: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ אָדער $a:b=c:d$.

4. אייגנשאַפטנ פונ א געאָמעטרישער פּראָפּאָרציע. מינימ פּראָפּאָרציעס.

1. *די גרונט־אייגנשאַפט פונ א געאָמעטרישער פּראָפּאָרציע באַ־שטייט דערינ, וואָס דער פּראָדוקט פונ אירע עקסטע גלידער איז גלײַכ צומ פּראָדוקט פונ אירע מיטלסטע גלידער.*

2. *אינ א געאָמעטרישער פּראָפּאָרציע קאָנ מענ איבער־שטעלנ 1) די עקסטע גלידער, 1) די מיטלסטע גלידער, 3) איינצײַטיק אי די עקסטע אי די מיטלסטע גלידער.*

3. *אינ א געאָמעטרישער פּראָפּאָרציע קאָנ מענ די מיטל־סטע גלידער אוועקשטעלנ אפנ אָרט פונ די עקסטע אונ די עקסטע אפנ אָרט פונ די מיטלסטע.*

4. געקייטלטע פּראָפּאָרציע. א געאָמעטרישע פּראָפּאָרציע, בא וועלכער די עקסטע אָדער די מיטלסטע גלידער זײַנענ אלציינע, הייסט *געקייטלטע*. דער אלציינער גליד פונ א געקייטלטער געאָמעטרישער פּראָפּאָרציע הייסט *דער מיטל־געאָמעטרישער גליד אָדער מיטל־פּראָפּאָרציִאָנעלער פונ די צוויי אנדערע גלידער.*

$a:b=b:c$ אָדער $b:a=c:b$ זײַנענ געקייטלטע פּראָפּאָרציעס.

אינ העסקעמ מיט דער גרונט־אייגנשאַפט פונ א פּראָפּאָרציע האָבנ מיר: $b^2=ac$, דערפונ איז $b=\sqrt{ac}$.

די מיטל־געאָמעטרישע פונ צוויי צאָלנ איז גלײַכ צומ קוואַדראַט־וואָרצל פונ זייער פּראָדוקט.

5. געדרונגענע פּראָפּאָרציעס. אויב מע זאָל צו ביידע טיילן פון דער פּראָפּאָרציע $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ צוגעבן אָדער פון ביידע טיילן פון דער פּראָפּאָרציע אראָפּ־נעמען צו 1, וועט דערפון די גלײַכקײַט ניט צעשטערט ווערן:

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$$ אָדער $$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$$, דה.

(I) $$\frac{a+b}{d}=\frac{c+d}{d}$$, (II) $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

ווען מיר צעטיילן גלידערווײַז די געדרונגענע פּראָפּאָרציע (I) אף (II), וועט זיך באקומען נאָך א געדרונגענע פּראָפּאָרציע:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

די סומע פון די גלידער פון דער ערשטער פארהעלטעניש פארהאלט זיך צו זייער דיפערענץ אזוי, ווי די סומע פון די גלידער פון דער צווייטער פארהעלטעניש פארהאלט זיך צו זייער דיפערענץ.

6. אייגנשאפטן פון א ריי גלײַכע פארהעלטענישן.

טעאָרעמע. אויב ס'איז געגעבן א ריי גלײַכע פארהעלטענישן, פארהאלט זיך די סומע פון די פאָרגלידער פון דער פארהעלטעניש צו דער סומע פון די נאָכגלידער אזוי, ווי יעטווידער פון די פאָרגלידער פארהאלט זיך צו זײַן נאָכגליד.

ס'איז געגעבן: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$.

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

דערווײַז. לאָמיר זאָגן, אז $\frac{a}{b}=k$, דאן איז אויך $\frac{c}{d}=k$, $\frac{m}{n}=k$ און $\frac{p}{q}=k$ און $a=bk$, $c=dk$, $m=nk$ און $p=qk$. ווען מיר לייגן צונויפ גלידערווײַז די רעכטע און די לינקע טיילן פון די דאָזיקע גלײַכקײַטן און מיר טראָגן ארויס אין דעם רעכטן טייל דעם געמיינזאמען קייפלער k אויסער די קלאמערן, האָבן מיר: $a+c+m+p=k(b+d+n+q)$; דערפון איז

$$k=\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q},$$ אָבער $$k=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{p}{q};$$

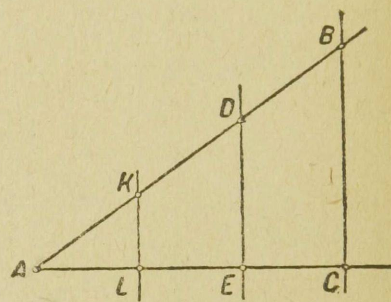
און דעריבער איז

$$\frac{a+c+m+p}{b+d+n+q}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ldots$$

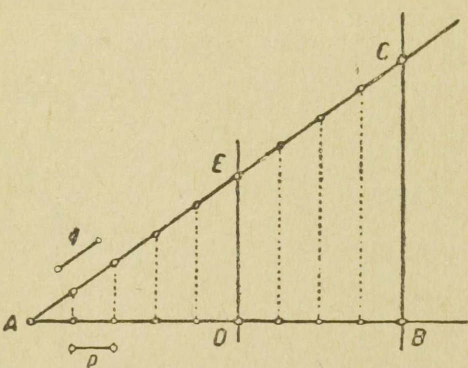
5. אײגנשאַפט פונ פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס שנײַדנ איבער די זײַטנ פונ א ווינקל.

לאָמיר איבערשנײַדנ די זײַטנ פונעמ ווינקל BAC מיט פּאַראַלעלע גראָדע BC, DE, KL אאַזוו. (צייכ. 220); די אָפּשניטנ, וואָס זײַנענ אלצײַנס אויסגע-שטעלט אפ די זײַטנ פונ ווינקל לעגאַבע אײנ אונ די זעלבע פּאַראַלעלע, הייסנ אנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע.

די אָפּשניטנ AK אונ AL, KD אונ LE, AB אונ AC, KB אונ LC זײַנענ אנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע אָפּשניטנ; די אָפּשניטנ AK אונ EC אָדער KB אונ DB אָדער KL אונ AL זײַנענ ניט קײנ אנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע אָפּשניטנ.



צייכ. 220



צייכ. 221

טעאָרעמע. ווענ מע זאָל איבערשנײַדנ די זײַטנ פונ א ווינקל מיט צוויי פּאַראַלעלע גראָדע, איז די פאַרהעלטעניש פונ באַליביקע צוויי אָפּשניטנ אפ אײנ זײַט פונעמ ווינקל גלײַך צו דער פאַרהעלטעניש פונ צוויי אנטשפּרע-כיק אויסגעשטעלטע אָפּשניטנ אפ דער צווייטער זײַט אונ, הייסט עס, די פיר אָפּשניטנ, וואָס האָבנ זיך באַקומענ אפ די זײַטנ פונ ווינקל, זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל.

ס'איז געגעבנ: $\angle BAC$, $DE \parallel BC$ (צייכ. 221).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזנ: 1) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$; 2) $\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$; 3) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

דערווײַז. לאָמיר זאָגנ, אז א געוויסער אָפּשניט q איז א געמײנזאַמע מאָס פונ די אָפּשניטנ AE אונ EC אפ דער זײַט AC, דעמלט איז $AE=mq$, $EC=nq$ אונ $AC=(m+n)q$. דורכ די טייל-פונקטנ אפ דער זײַט AC פירנ מיר דורכ גראָדע, פּאַראַלעלע צו BC, הייסט עס, אויכ צו DE; די אָפּ-שניטנ AD אונ DB אפ דער זײַט AB וועלנ זיך אנטשפּרעכיק צעקלאַפּנ אפ m אונ n גלײַכע צווישנ זיך אָפּשניטנ; די לענג פונ יעדנ אָפּשניט וועלנ מיר באַצייכענענ מיט p; דאַנ איז $AD=mp$; $DB=np$ אונ $AB=(m+n)p$. הייסט עס:

I. $\frac{AE}{EC}=\frac{mq}{nq}=\frac{m}{n}$; $\frac{AD}{DB}=\frac{mp}{np}=\frac{m}{n}$ און $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$.

II. $\frac{AC}{EC}=\frac{(m+n)q}{nq}=\frac{m+n}{n}$; $\frac{AB}{DB}=\frac{(m+n)p}{np}=\frac{m+n}{n}$ און $\frac{AC}{EC}=\frac{AB}{DB}$.

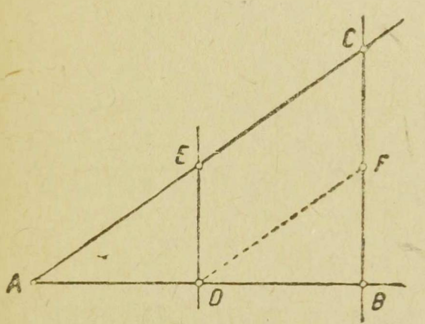
III. $\frac{AC}{AE}=\frac{(m+n)q}{mq}=\frac{m+n}{m}$; $\frac{AB}{DB}=\frac{(m+n)p}{mp}=\frac{m+n}{m}$ און $\frac{AC}{AE}=\frac{AB}{AD}$.

די טעאָרעמע איז ריכטיק אויך פאר אומדורכמעסטלעכע אָפשניטן.

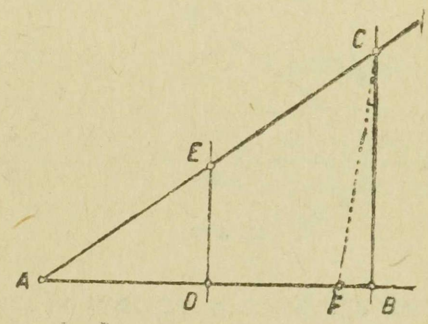
טעאָרעמע (פאַרקערטע). אויב באַם איבערשנײַדן מיט צוויי גראַדע די זײַטן פון א ווינקל איז די פארהעלטעניש פון צוויי באַליביקע אָפּשניטן אף איין זײַט גלײַך צו דער פארהעלטעניש פון צוויי אנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע אָפשניטן אף דער צווייטער זײַט, זײַנען אזעלכע גראַדע פּאראלעל.

ס'איז געגעבן: BC און DE שנײַדן איבער די זײַטן פון $\angle BAC$; $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ (צייכ. 222).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $BC \parallel DE$.



צייכ. 223



צייכ. 222

דערווײַז. לאָמיר זאָגן, אז די גראָדע BC איז ניט פאראלעל צו דער גראָדער DE און אז א געוויסע אנדערע גראָדע CF, וואָס גייט דורכן פונקט C, איז פאראלעל DE און שנײַדט איבער די זײַט AB אינעם פונקט F. דאן וועלן אינ העסקעם מיט דער דירעקטער טעאָרעמע זיך באקומען אף די זײַטן פונעם ווינקל BAC פּראָפּאָרציאָנעלע אָפשניטן, אזוי אז $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DF}$. ווען מיר פארגלײַכן די באקומענע פּראָפּאָרציע מיט דער געגעבענער פּראָפּאָרציע $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$, קומען מיר צום באשלוס, אז אין צוויי פּראָפּאָרציעס, בא וועלכע דרײַ גלידער זײַנען גלײַך, מוזן אויך די פערטע גלידער זײַן גלײַך, דה. $DF=DB$, דאָס איז מעגלעך בלויז דאן, ווען דער פונקט F פאלט צונויפ מיטן פונקט B.

אלזאָ, דער פונקט F מוז צונויפפאלן מיטן פונקט B, און דאָס באטײַט, אז די האנאָכע, וואָס מיר האָבן געמאכט, אז BC איז ניט פאראלעל צו DE, איז ניט קיין ריכטיקע, דה. $BC \parallel DE$.

טעאָרעמע. אויב פּאַראַלעלע גראָדע שנײַדנ איבער די זײַטנ פונ א ווינקל, איז די פאַרהעלטעניש פונ די אָפּשניטנ פונ די פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס זײַנענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ די זײַטנ פונעמ ווינקל, גלײַכ צו דער פאַרהעלטעניש פונ די אָפּשניטנ אַפ יעטווידער ווינקל-זײַט, רעכענענדיק פונעמ שפּיצ ווינקל ביז די איבערשנײַד-פּונקטנ פונ די פּאַראַלעלע גראָדע מיט די זײַטנ פונ ווינקל.

ס׳איז געגעבנ: $\angle BAC$; $BC \parallel DE$ (צײכ. 223).

ס׳פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$.

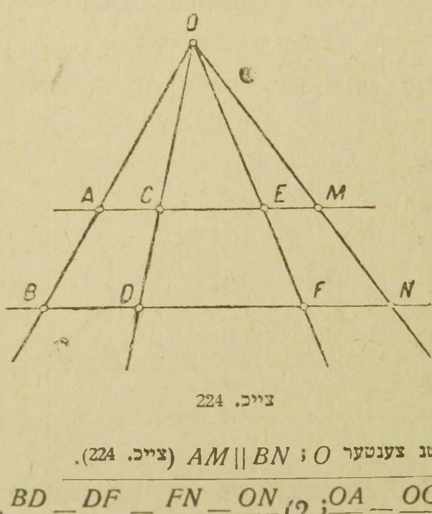
דערווײַז. מיר פירנ דורכ א באַהילפיקע גראָדע $DF \parallel AC$, דאַנ איז $DE=FC$. לאָמיר באַטראַכטנ דעמ ווינקל ABC; ער איז איבערגעשניטנ מיט פּאַראַלעלע גראָדע AC אונ DF, הייסט עס, $\frac{BC}{FC}=\frac{BA}{DA}$. פאַרבײַטנ מיר FC מיט אַנ אָפּשניט DE, וואָס איז צו אימ גלײַכ, באַקומענ מיר $\frac{BC}{DE}=\frac{BA}{DA}$, אָבער $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$, אונ דעריבער איז $\frac{BC}{DE}=\frac{AC}{AE}$. אַלזאָ,

$$\frac{BC}{DE}=\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$$

די טעאָרעמע איז ריכטיק אויכ אינ דעמ פאַל, ווענ די אָפּשניטנ זײַנענ אומ-דורכמעסטלעכע.

6. אײגנשאַפטנ פונ פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס שנײַדנ איבער די שטראַלנ פונ א בינטל.

טעאָרעמע. ווענ מע שנײַדט איבער א בינטל שטראַלנ מיט פּאַראַלעלע גראָדע, באַקומט זיכ: 1) די פאַרהעלטעניש פונ באַליביקע צוויי אָפּשניטנ אַפ איינ שטראַל איז גלײַכ צו דער פאַרהעלטעניש פונ די אַנטשפּרעכיק אויסגעשטעלטע אָפּשניטנ אַפ א צווייטנ שטראַל אונ 2) די אָפּשניטנ פונ די פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס זײַנענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ באַזונדערע שטראַלנ, פאַרהאַלטנ זיכ איינס צומ אַנדערנ אַזוי, ווי די אָפּשניטנ פונ א באַליביקנ שטראַל, וואָס זײַנענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ צענטער פונעמ בינטל אונ דער אַנטשפּרעכיקער פּאַראַלעל.



צײכ. 224

ס׳איז געגעבנ: א בינטל שטראַלנ מיטנ צענטער O; $AM \parallel BN$ (צײכ. 224).

ס׳פאָדערט זיכ דערווײַזנ: 1) $\frac{OM}{MN}=\frac{OE}{EF}=\frac{OC}{CD}=\frac{OA}{AB}$; 2) $\frac{ON}{OM}=\frac{FN}{EM}=\frac{DF}{CE}=\frac{BD}{AC}$.

דערווײַז. יעדערע צוויי שטראַלן פונעם בינטל בילדן ווינקלען BOD און DOF; די דאָזיקע ווינקלען זײַנען איבערגעשניטן מיט צוויי פּאַראַלעלע גראָדע BN און AM, וועלכע שנײַדן אָפּ אָף די זײַטן פון די ווינקלען פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּשניטן, און דעריבער איז

$$\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN};\ \frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF};\ \frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}.$$

ווען מיר פאַרגלײַכן צווישן זיך אָט די פּראָפּאָרציעס, באַקומען מיר:

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}=\frac{OE}{EF}=\frac{OM}{MN}$$

ס'איז דערוויזן דער ערשטער טייל פון דער טעאָרעמע; קעדיי צו דערווײַזן דעם צווייטן טייל פון דער טעאָרעמע, וועלן מיר צונויפשטעלן פּראָפּאָרציעס, אין וועלכע עס וועלן אַרײַנגיין די אָפּשניטן פון די פּאַראַלעלע גראָדע, וואָס שנײַדן איבער די זײַטן פון די ווינקלען BOD, DOF און FON, מיר וועלן באַקומען:

$$\frac{FN}{EM}=\frac{OF}{OE}=\frac{ON}{OM};\ \frac{DF}{CE}=\frac{OD}{OC}=\frac{OF}{OE};\ \frac{BD}{AC}=\frac{OB}{OA}=\frac{OD}{OC}$$

פאַרגלײַכן מיר די דאָזיקע פּראָפּאָרציעס, געפינען מיר אײַן, אַז

$$\frac{BD}{AC}=\frac{DF}{CE}=\frac{FN}{EM}=\frac{ON}{OM}$$

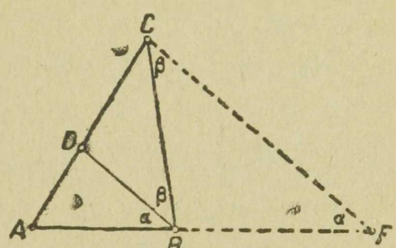
ס'איז אויך דערוויזן דער צווייטער טייל פון דער טעאָרעמע.

7. אײגנשאַפט פון דער ביסעקטריסע פון אַן אינעווייניקסטן ווינקל אין אַ דרײַעק.

טעאָרעמע. די ביסעקטריסע פון אַן אינעווייניקסטן ווינקל אין אַ דרײַעק צעטיילט די אַנטקעגנליגנדיקע זײַט אויף כאַלאַקים, פּראָפּאָרציאָנעלע צו די צוויי איבעריקע זײַטן.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$; BD איז די ביסעקטריסע; $\angle\alpha=\angle\beta$ (צייכ. 225).

ס'פּאָדערט זיך דערווײַזן: $AD:DC=AB:BC$.



צייכ. 225

דערווײַז. דורכן שפּיץ C פירן מיר דורך אַ גראָדע CF פּאַראַלעל צו BD ביז איר איבערשנײַדן זיך אינעם פּונקט F מיט דער פאַרזעצונג פון דער זײַט AB.

די פּאַראַלעלע גראָדע BD און CF שנײַדן איבער די זײַטן פונעם $\angle A$ און צעשנײַדן זיי אָף פּראָפּאָרציאָנעלע אָפּשניטן, און דעריבער איז $AD:DC=AB:BF$. אינעם דרײַעק BCF האָבן מיר: $\angle F=\angle\alpha$ אַלס שטאָפּלדיקע ווינקלען בײַ די פּאַראַלעלע BD און FC און דער סעקאַנטע AF, און $\angle\beta=BCF$ אַלס אינעווייניקסטע געקרייצטע ווינקלען בײַ די זעלבע פּאַ-

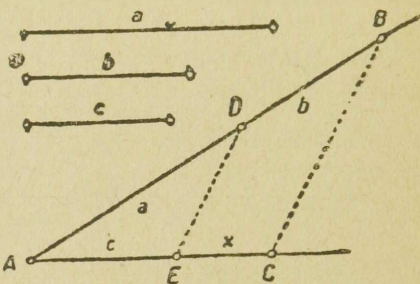
ראַלעלע אונ דער סעקאַנטע BC. אָבער $\angle\alpha=\angle\beta$, הייסט עס, $\angle F=\angle C$; די דאָזיקע ווינקלענ געפינענ זיכ באַם באַזיס פונעם דרײַעק BCF, זיי זײַנענ גלײַכ, הייסט עס, דער דרײַעק BCF איז אַ גלײַכאַקסלדיקער אונ $BF=BC$.

ווענ מיר פאַרבײַטנ אינ דער באַקומענער פּראָפּאָרציע דעם אָפּשניט BF מיטנ אָפּשניט BC, וואָס איז צו אים גלײַכ (BC איז די זײַט פונעם דרײַעק ABC), באַקומענ מיר:

$$AD:DC=AB:BC$$

8. ווי׳אַזוי קאָנסטרויִרט מענ אַ פערטנ פּראָפּאָרציאָנעלנ אָפּשניט.

אופגאַבע. ס׳זײַנענ געגעבנ דרײַ אָפּשניטנ — a, b אונ c (צייכ. 226). קאָנסטרויִרנ אַ פערטנ אָפּשניט, וואָס זאָל זײַנ פּראָפּאָרציאָנעל צו זיי.



צייכ. 226

קאָנסטרויִרונג. מע דאַרפ קאָנסטרויִרנ אַזאַ אָפּשניט x, וואָס זאָל באַפרידיקנ די פּראָפּאָרציע $a:b=c:x$. לאָמיר נעמענ אַ וואָסער־ניט־איז ווינקל BAC אונ אפ איינער פונ זײַנע זײַטנ וועלנ מיר פונעם שפּיצ A נאָכאַנאַנד אָפּלייגנ אָפּשניטנ: $AD=a$, $DB=b$, אונ אפ דער צווייטער זײַט — אַנ אָפּשניט $AE=c$; מיר פאַרייניקנ דורכ דער גראָדער DE די פונקטנ D אונ E אונ פירנ דורכ $DE \parallel BC$, דאַנ וועט $EC=x$ זײַנ דער געזוכטער פערטער פּראָפּאָרציאָנעלער אָפּשניט.

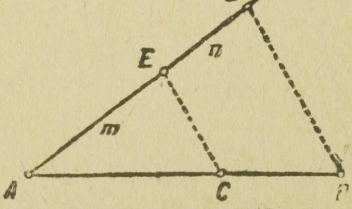
אינדערעמעסנ, $ED \parallel BC$, דעריבער איז $a:b=c:x$.

9. ווי׳אַזוי צעטיילט מענ אַנ אָפּשניט אינ דער געגעבענער פאַרהעלטעניש.

אופגאַבע. דעם אָפּשניט AB, וואָס איז גלײַכ a (צייכ. 227), צעטיילנ אפ אַזעלכע צוויי אָפּשניטנ AC אונ CB, וואָס זייער פאַרהעלטעניש זאָל זײַנ גלײַכ צו דער פאַרהעלטעניש פונ צוויי געגעבענע צאָלנ m אונ n.

קאָנסטרויִרונג. לויטנ באַדינג פונ דער אופגאַבע איז $AC:CB=m:n$.

לאָמיר זאָגנ, אַז m איז גלײַכ 4 אונ n איז גלײַכ 3 לענג-איינסנ. מיר קאָנסטרויִרנ אַ $\angle BAD$ פונ אַ באַליביקער גרייס; אפ איינ זײַט זײַנער לייגנ מיר אָפּ פונעם שפּיצ אַנ אָפּשניט $AB=a$, אונ אפ דער צווייטער לייגנ מיר אָפּ נאָכאַנאַנד אָפּשניטנ $AE=m$ אונ $ED=n$. מיר פאַרייניקנ מיט אַ גראָ-



צייכ. 227

דער די פונקטנ B אונ D דורכ דעמ טייל-פונקט E פירנ מיר דורכ א גראָדע EC פאראַלעל צו BD; די גראָדע EC וועט איבערשנײַדנ AB אינעמ פונקט C. דער דאָזיקער פונקט C וועט צעטיילנ AB אינ דער פארהעלטעניש $m:n$.

אינדערעמעסנ, $EC \parallel BD$, אונ דעריבער איז $\frac{AC}{CB}=\frac{AE}{ED}=\frac{m}{n}$.

פ ר א ג ע ס א ו נ א י ב ו נ ג ע נ.

1. צי וועלנ זײַנ פּראָפּאָרציאָנעל פיר אָפּשניטנ, ווענ די פארהעלטעניש פונ צוויי אָפּשניטנ איז גלײַכ $18:62{,}1$ אונ די פארהעלטעניש פונ די אנדערע צוויי איז גלײַכ $12:41{,}4$?

2. געפינענ אפ איינער א זײַט פונעמ $\triangle ABC$ א פונקט M, אינ וועלכנ די זײַט זאָל זיכ טיילנ אפ כאלאָקימ, פּראָפּאָרציאָנעלע צו די צוויי איבעריקע זײַטנ.

3. די זײַטנ פונ א גלײַכאקסלדיקנ דרײַעק ABC פארהאלטנ זיכ ווי $4:1$. דער פּערימעטער זײַנער P איז גלײַכ $4{,}5$ סמ. געפינענ די זײַטנ.

4. צונויפשטעלנ אלע מעגלעכע פּראָפּאָרציעס פונ דער גלײַכקײַט פונ די פּראָדוקטנ:

1) $x \cdot y = m \cdot n$, 2) $6 \cdot 16 = 8 \cdot 12$.

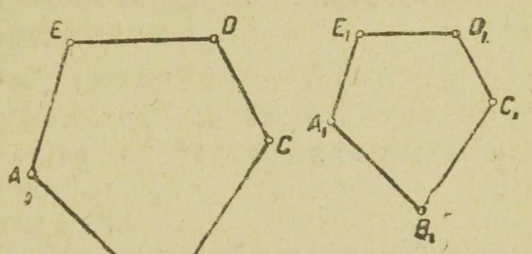
5. ס'איז געגעבנ א גראָדעק, וואָס זײַנע זײַטנ האלטנ $a = 5$ cm אונ $b = 8$ cm. קאָנסטרויִרנ א גראָדעק, וואָס זאָל זײַנ גלײַכגרויס מיטנ געגעבענעמ גראָדעק: איינ זײַט זײַנע זאָל זײַנ גלײַכ $c = 6$ cm, אונ די לענג פונ דער צווייטער זײַט געפינענ דורכ א קאָנסטרויִרונג.

6. ס'איז געגעבנ א דרײַעק מיט א באזיס $a = 16$ cm. זײַנ זײַט-ליניע, רעכענענדיק פונעמ באזיס, איז צעטיילט אפ דרײַ כאלאָקימ אינ דער פארהעלטעניש $5:3:2$, אונ דורכ די טייל-פונקטנ זײַנענ דורכגעפירט גראָדע, פאראַלעלע צומ באזיס. אויסרעכענענ די לענג פונ די אָפּשניטנ פונ די דאָזיקע גראָדע, וואָס זײַנענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ די זײַט-ליניעס.

XVI. ענלעכקײַט פונ פיגורנ.

1. ענלעכע פילעקנ.

1. באמ צייכענענ א פלאַנ פונ אַנ ערד־פלאַצ, אָדער ווענ עס קומט אויס צו מאכנ א טעכנישע צייכענונג פונ מאַשינ־דעטאלנ, גיט מענ אפ דער צייכענונג בלויז א קאָנטור פונעמ פלאַצ אָדער פונ דער מאַשינ־דעטאל אינ א פארקלענערטער פאָרמ, דערבײַ בלײַבט ניט געענדערט אונ אײַנגעהיט אינ אלע פּראָטימ די פאָרמ פונ דער פאָרגעשטעלטער פיגור.



צײַכ. 228

פארקלענערנדיק אינ איינ אונ דער זעלבער צאָל מאָל אלע לינעאַלע אויסמעסטונגענ פונ דער פיגור אונ איבערלאָזנדיק ניט געענדערט די גרייסנ פונ אלע אירע ווינקלענ, היטנ מיר אײַנ די פאָרמ פונ דער פיגור אונ מיר באקומענ אנ אָפּבילד פונ דער פיגור אינ א פארקלענערטער פאָרמ, וואָס אונטערשיידט זיכ פונ דער פיגור גופא בלויז מיט איר גרייס.

2· אפ דער צייכענונג 228 זײַנען געגעבן צוויי פילעקן $ABCDE$ און $A_1B_1C_1D_1E_1$ מיט איין און דער זעלבער צאָל זײַטן; די ווינקלען בא זיי זײַנען לויטן סיידער גלײַך: $\angle A=\angle A_1$; $\angle B=\angle B_1$; $\angle C=\angle C_1$; $\angle D=\angle D_1$; $\angle E=\angle E_1$, כוץ דעם זײַנען גלײַך די פארהעלטענישן פון די אנטשפרעכיק אויסגעשטעלטע זײַטן:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=k$$

אזעלכע צוויי פילעקן הייסן ענלעכע.

צוויי פילעקן הייסן ענלעכע, אויב זיי האָבן איין און די זעלבע צאָל זײַטן, זייערע ווינקלען זײַנען אנטשפרעכיק גלײַך און די אנאלאָגישע זײַטן זייערע זײַנען פראָפאָרציאָנעל.

אנאלאָגישע זײַטן פון א פילעק הייסן די זײַטן, בא וועלכע עס ליגן אנטשפרעכיק גלײַכע ווינקלען. ענלעכקײַט באצייכנט מען מיטן צייכן $\backsim$.

"$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$" לייענט מען אזוי: דער פילעק $A_1B_1C_1D_1E_1$ איז ענלעך צום פילעק $ABCDE$.

די פארהעלטעניש פון אנאלאָגישע זײַטן פון צוויי ענלעכע פילעקן הייסט ענלעכקײַט-קאָעפיציענט.

אויב דער ענלעכקײַט-קאָעפיציענט פון פילעקן איז $\frac{A_1B_1}{AB}=k=1$, זײַנען די פילעקן גלײַך. דערפון מאכן מיר דעם אויספיר, אז גלײַכקײַט איז א פראטספאל פון ענלעכקײַט.

2. ענלעכקײַט פון דרײַעקן.

דרײַעקן הייסן ענלעכע, ווען בא זיי זײַנען אנטשפרעכיק גלײַך די ווינקלען און די אנאלאָגישע זײַטן זײַנען פראָפאָרציאָנעל.

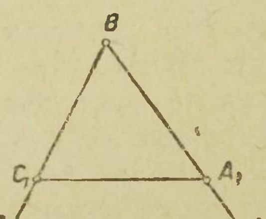
אנאלאָגישע זײַטן פון דרײַעקן ליגן קעגן גלײַכע ווינקלען.

טעאָרעמע. א גראַדע, א פאראלעלע צו איינער פון די זײַטן אין א דרײַעק, שנײַדט פון אים אָפּ א דרײַעק, וואָס איז ענלעך צום געגעבענעם.

ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$; $C_1A_1 \parallel CA$ (צייכ. 229).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$ דה. 1) $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$;

2) $\frac{BA_1}{BA}=\frac{BC_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$.



צייכ. 229

דערווײַז. באם דרײַעק A_1BC_1 זײַנען די ווינקלען גלײַך צו די ווינקלען באם דרײַעק ABC: דער ווינקל B איז א געמיינזאמער, $\angle A_1=\angle A$ און $\angle C_1=\angle C$ אלס שטאפל-דיקע ווינקלען. אפן גרונט פון דער טעאָרעמע וועגן א בינטל שטראַלן האָבן מיר:

$$\frac{BA_1}{BA}=\frac{BC_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

הייסט עס, די דרײַעקן זײַנען ענלעך, $\triangle A_1BC_1 \backsim \triangle ABC$

3. דרײַ סימאָנימ פונ ענלעכקײַט פונ דרײַעקנ.

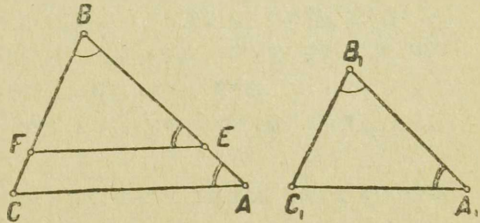
1. ערשטער סימענ פונ ענלעכקײַט פונ דרײַעקנ.

טעאָרעמע. אויב צוויי ווינקלענ פונ אײנ דרײַעק זײַנענ אנטשפּרעכיק גלײַכ צו צוויי ווינקלענ פונ א צווייטנ דרײַעק, זײַנענ אזעלכע דרײַעקנ ענלעכ.

סיאיז געגעבנ: $\triangle ABC$ אונ $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$ (צייכ. 230).

סיפאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

דערווײַז. לויטנ באַדינג איז $\angle A=\angle A_1$ אונ $\angle B=\angle B_1$, הייסט עס, אז אויכ $\angle C=\angle C_1$ אלס סומע־דערגאנצונג פונ די געגעבענע ווינקלענ ביז $2d$. לאָמיר אָפּלייגנ פונ שפּיצ B אפ דער זײַט BA אנ אָפּשניט BE, וואָס איז גלײַכ צו B_1A_1, אונ דורכפירנ $FE \parallel AC$, וועלנ מיר באַקומענ $\triangle ABC \sim \triangle EBF$; ווײַל בא זיי איז $\triangle EBF=\triangle A_1B_1C_1$, ווײַל בא זיי איז $BE=B_1A_1$, $\angle B=\angle B_1$ לויטנ באַדינג אונ $\angle E=\angle A=\angle A_1$; אָבער $\triangle ABC \sim \triangle EBF$, הייסט עס, אז אויכ דער דרײַעק $A_1B_1C_1$, וואָס איז צו אימ גלײַכ, איז ענלעכ צומ דרײַעק ABC.



צייכ. 230

קאָנסעקווענצנ. 1. גראַדווינקלדיקע דרײַעקנ, וואָס האָבנ צו א גלײַכנ שארפנ ווינקל, זײַנענ ענלעכ.

2. גלײַכאקסלדיקע דרײַעקנ, וואָס האָבנ צו א גלײַכנ ווינקל באַמ שפּיצ אָדער באַמ באַזיס, זײַנענ ענלעכ.

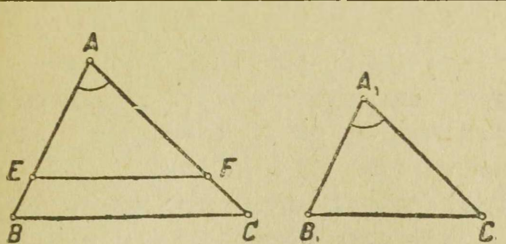
3. גלײַכזײַטיקע דרײַעקנ זײַנענ ענלעכ.

2. צווייטער סימענ פונ ענלעכקײַט פונ דרײַעקנ.

טעאָרעמע. אויב צוויי זײַטנ פונ אײנ דרײַעק זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל צו צוויי זײַטנ פונ א צווייטנ דרײַעק אונ די ווינקלענ, וואָס זײַנענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ די דאָזיקע זײַטנ, זײַנענ גלײַכ, זײַנענ די דרײַעקנ ענלעכ.

סיאיז געגעבנ: $\triangle ABC$ אונ $\triangle A_1B_1C_1$; $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{A_1C_1}{AC}$ אונ $\angle A_1=\angle A$ (צייכ. 231).

סיפאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



צייכ. 231

דערווײַז. לאָמיר אָפּלייגנ פונעמ שפּיצ A אפ דער זײַט AB אנ אָפּשניט $AE=A_1B_1$ אונ דורכפירנ $EF \parallel BC$, וועלנ מיר באַקומענ $\triangle ABC \sim \triangle AEF$. פונ דער ענלעכקײַט פונ די דרײַעקנ פאַרדינגט: (1) $\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}$;

בײַטנ מיר אינ דער פּראָפּאָרציע (1) AE מיט A_1B_1, האָבנ מיר (2) $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{AF}{AC}$.

ווען מיר פארגלײַכן די פּראָפּאָרציע (2) מיט דער פּראָפּאָרציע, וואָס איז געגעבן אינעם באַדינג, באמערקן מיר, אז בא זיי זײַנען דרײַ גלידער אַלצײנע, און דעריבער מוזן אויכ די פערטע גלידער זײַן גלײַכ, דה. $AF = A_1C_1$; $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle AEF$, ווײַל בא זיי איז $\angle A_1 = \angle A$ לויטן באַדינג, $AE = A_1B_1$ לויט דער קאָנסטרויִרונג און $AF = A_1C_1$, ווי מיר האָבן עס שוינ דערוויזן; $\triangle ABC \backsim \triangle AEF$, הייסט עס, דער דרײַעק $A_1B_1C_1$, וואָס איז גלײַכ צום $\triangle AEF$, איז ענלעכ צום $\triangle ABC$.

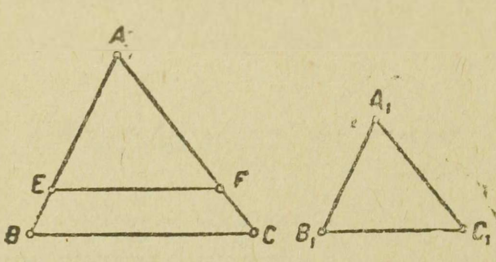
קאָנסעקווענצ. גראַדווינקלדיקע דרײַעקן זײַנען ענלעכ, אויב עס זײַנען גלײַכ די פארהעלטענישן פונ זייערע קאטעטן.

3. דריטער סימען פונ ענלעכקײַט פונ דרײַעקן.

טעאָרעמע. אויב דרײַ זײַטן פונ איינ דרײַעק זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל צו דרײַ זײַטן פונ א צווייטן דרײַעק, זײַנען אזעלכע דרײַעקן ענלעכ.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; $\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{C_1A_1}{CA}$ (צייכ. 232).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.



צייכ. 232

דערווײַז. לאָמיר אָפּלייגנ פונעם שפּיצ A אפ דער זײַט AB אַן אָפּשניט $AE = A_1B_1$ און דורכפירנ $EF \parallel BC$, דאנ איז $\triangle ABC \backsim \triangle AEF$. פונ דער ענלעכקײַט פונ די דרײַעקן דרינגט, אז

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad (1)$$

ווען מיר פארבײַטן אינ דער ערשטער פארהעלטעניש AE מיט A_1B_1, באקומען מיר:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{AF}{AC} = \frac{EF}{BC} \quad (2)$$

ווען מיר פארגלײַכן די פּראָפּאָרציע (2) מיט דער פּראָפּאָרציע, וואָס איז געגעבן אינעם באַדינג, קומען מיר צום אויספיר, אז $\dfrac{AF}{AC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$, דערפונ איז, $AF = A_1C_1$ און $\dfrac{EF}{BC} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$; און דערפונ איז $EF = B_1C_1$.

אלזאָ, די דרײַ זײַטן פונעם דרײַעק AEF זײַנען גלײַכ צו די דרײַ זײַטן פונעם דרײַעק $A_1B_1C_1$, דאָס באטײַט, אז $\triangle AEF = \triangle A_1B_1C_1$, אָבער $\triangle ABC \backsim \triangle AEF$, הייסט עס, אז אויכ דער דרײַעק $A_1B_1C_1$, וואָס איז צו אים גלײַכ, איז ענלעכ צום דרײַעק ABC.

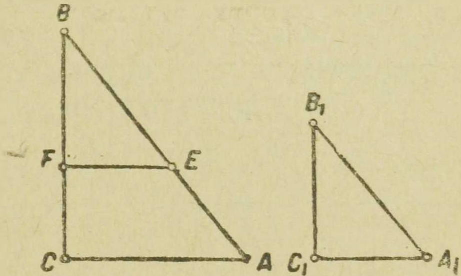
קאָנסעקווענצ. גלײַכאקסלדיקע דרײַעקן זײַנען ענלעכ, אויב דער באזיס און די זײַט-ליניע פונ איינ דרײַעק זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל צום באזיס און צו דער זײַט-ליניע פונעם צווייטן.

4. טעאָרעמע. צוויי גראַדווינקלדיקע דרײַעקן זײַנען ענלעך, אויב די היפּאָטענוזע און א קאַטעט פון איין דרײַעק זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל צו דער היפּאָטענוזע און צו א קאַטעט פונעם צווייטן.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}$ (צייכ. 233).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

דערווײַז. לאָמיר אָפּלייגן פונעם שפּיץ B אפ דער היפּאָטענוזע BA אן אָפּשניט $BE=B_1A_1$ און דורכפירן $EF \parallel AC$. הייסט עס, $\triangle BEF \backsim \triangle ABC$, $\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BC}$; פאַרגלײַכן מיר די באַקומענע פּראָפּאָרציע מיט דער געגעבענער, קומען מיר צום אויספיר, אז $BF=B_1C_1$, הייסט עס, $\triangle EBF=\triangle A_1B_1C_1$ לויט דער היפּאָטענוזע און א קאַטעט. אָבער $\triangle EBF \backsim \triangle ABC$, הייסט עס, אויך דער דרײַעק $A_1B_1C_1$, וואָס איז צו אים גלײַך, איז ענלעך צום דרײַעק ABC.



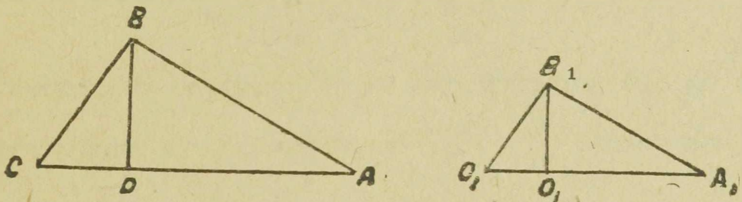
צייכ. 233

4. פּראָפּאָרציאָנעלקייט פון די הייכן און פון די זײַטן אין ענלעכע דרײַעקן.

1. טעאָרעמע. די הייכן פון ענלעכע דרײַעקן זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל צו די אַנאַלאָגישע זײַטן.

ס'איז געגעבן: $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$; BD און B_1D_1 זײַנען די הייכן (צייכ. 234).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{AC}$.



צייכ. 234

דערווײַז. די גראַדווינקלדיקע דרײַעקן ABD און $A_1B_1D_1$ זײַנען ענלעכע, ווײַל זיי האָבן צו א גלײַכן שאַרפן ווינקל: $\angle A=\angle A_1$. פון זייער ענלעכקייט דרינגט, אז $\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}$, אָבער $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$, און דעריבער איז אויך

$$\frac{B_1D_1}{BD}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}$$

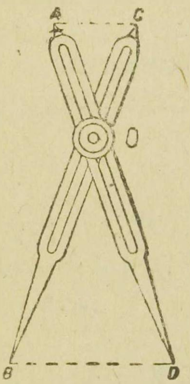
ז׳ה. די הייכן פון ענלעכע דרײַעקן זײַנען פּראָפּאָרציִאָנעל צו יעטווידער פּאָר אנאלאָגישע זײַטן.

2. אין ענלעכע דרײַעקן זײַנען די אנאלאָגישע ביסעקטריסעס און מעדיִאנעס פּראָפּאָרציִאָנעל צו די אנאלאָגישע זײַטן.

3. ווען עס קומט אונדז אויס באַם לייזן א געאָמעטרישע אויפגאבע צו באַנוצן זיך מיט דער ענלעכקײַט פון דרײַעקן, איז צוועקמעסיק די פּראָפּאָרציע צונויפשטעלן אזוי, אז די גלידער פון איין פאַרהעלטעניש זאָלן זײַן די לינעאַלע עלעמענטן פון איין דרײַעק, און די גלידער פון דער צווייטער פאַרהעלטעניש אָבער זאָלן זײַן די אנאלאָגישע עלעמענטן פונעם צווייטן דרײַעק.

5. אינסטרומענטן, וואָס זײַנען באַזירט אַף די אייגנשאַפטן פון ענלעכע דרײַעקן.

1. **טײַלצירקל.** בײַ צייכענונג-ארבעטן באַנוצט מען זיך מיט א טײַלצירקל (צייכ. 235). מע באַנוצט אים צום צעטיילן אָפּשניטן אַף גלײַכע כאַלאָקים; זײַן קאָנסטרוקציע איז באַזירט אַף דער ענלעכקײַט פון דרײַעקן.



צייכ. 235

דער טײַלצירקל באַשטייט פון צוויי פּיסלעך AD און CB, פון ביידע זײַטן האָבן די פּיסלעך שאַרפע שפּיצן; לענגוויס די פּיסלעך זײַנען געמאַכט דורכשניטן, און די פּיסלעך זײַנען פאַרייניקט מיט א באַוועגלעכן שאַרניר O. קעדיי צו געפינען מיט דער הילף פון א טײַלצירקל, לאָמיר זאָגן, א דריטל פונעם אָפּשניט MN, פאַרפעסטיקט מען דעם שאַרניר O אזוי, אז BO זאָל זײַן דרײַ מאָל גרעסער פאַר OC; קעדיי עס זאָל זײַן באַקוועם אָפּצוטיילן, זײַנען אַף די פּיסלעך AD און CB אָנגעקריצט טיילונגען. מע פאַרפעסטיקט דעם שאַרניר O און מע שטעלט אוועק די עקן פון די פּיסלעך, B און D, אין די פּונקטן M און N פונעם אָפּשניט, דאַן וועט דער אָפּשטאַנד צווישן די עקן C און A זײַן גלײַך $\frac{1}{3}MN$.

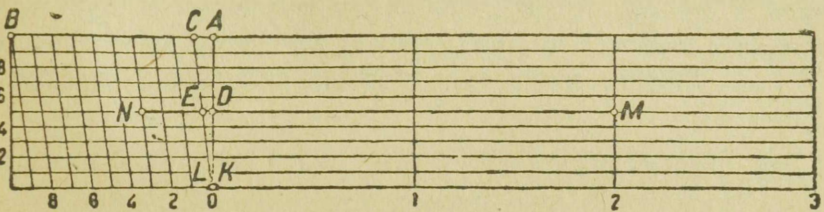
אינדערעמעסן, $\triangle COA \backsim \triangle BOD$, דערפון איז $\frac{CA}{BD}=\frac{OC}{OB}$; אָבער $CO=\frac{1}{3}OB$, הייסט עס, $\frac{CA}{BD}=\frac{1}{3}$; און דעריבער איז $CA=\frac{1}{3}BD$ אָדער $CA=\frac{1}{3}MN$, ווײַל $BD=MN$.

2. **קווער-מאַסשטאַב.** א לינעאַלער מאַסשטאַב גיט ניט די מעגלעכקײַט אָפּצולייגן דריבנע כאַלאָקים פונעם מאַסשטאַב-איינס; אָט די אומבאַקוועמלעכקײַט ווערט באַזײַטיקט מיט דער הילף פונעם קווער-מאַסשטאַב, מיט וועלכן מע קאָן אָפּלייגן צענטלעך און הונדערטלעך פון אן איינס. די קאָנסטרוקציע פון א קווער-מאַסשטאַב איז געגעבן אַף דער צייכענונג 236.

דער מאָס-איינס אַפן קווערשניט איז BA; $CA=0,1\ BA$. פונעם דרײַעק

AOC, אינ וועלכנ עס זײַנען דורכגעפירט גראָדע, פּאַראַלעלע צו AC, האָבנ מיר: $KL = 0{,}1\ CA$ אָדער $0{,}01\ BA$; די איבעריקע פּאַראַלעלע אָפּשניטנ פונעם דרײַעק AOC זײַנען אַנטשפּרעכיק גלײַכ $0{,}02,\ 0{,}03 \dots 0{,}10$ פונ דעם מאָס־איינס BA.

וו׳אַזוי מע באַנוצט זיכ מיטנ קווער־מאַסשטאַב. עס פאָדערט זיכ, אַשטייגער, אָפּלייגנ אַנ אָפּשניט $AB = x = 2{,}35$. איינ שפּיצ פונעם צירקל



צייכ. 236

שטעלנ מיר אָנ אַפנ פונקט M, און דעם צווייטנ — אינעם פונקט N, דאַנ איז $NM = x = 2{,}35$.

אינדערעמעסנ, $NM = DM + ED + NE$, ווו $DM = 2BA$, $NE = 0{,}3BA$, $ED = 0{,}05\ BA$, ווײַל $\triangle ODE \backsim \triangle OAC$, דערפונ איז

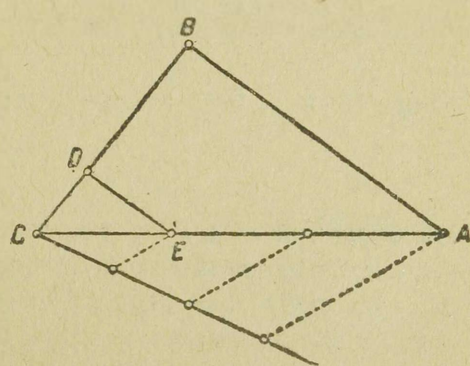
$$\frac{OD}{OA} = \frac{ED}{CA} = \frac{5}{10}$$

הייסט עס, $ED = \frac{5}{10} CA$, אָבער $CA = 0{,}1\ BA$, און דעריבער איז $ED = 0{,}05\ BA$.

אַלזאָ, $NM = 2 + 0{,}3 + 0{,}05 = 2{,}35$.

6. וו׳אַזוי מע קאָנסטרו׳ירט ענלעכע גראָדליניקע פיגורנ.

אופגאַבע 1. קאָנסטרו׳ירנ אַ דרײַעק, אַנ ענלעכנ צום דרײַעק ABC (צייכ. 237), וואָס זײַנע זײַטנ זאָלנ זײַנ אינ 3 מאָל קלענער פאַר די זײַטנ פונעם געגעבענעם דרײַעק ABC.



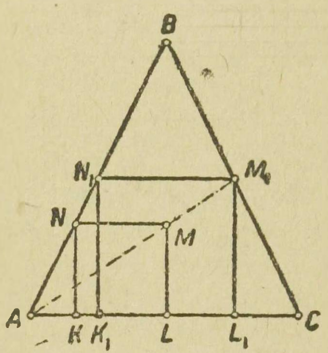
צייכ. 237

קאָנסטרו׳ירונג. איינע פונ די זײַטנ, אַשטייגער AC, פונעם דרײַעק ABC טיילנ מיר אָפּ אויף דרײַ גלײַכע כאַלאָקימ און דורכנ טייל־פונקט E פירנ מיר דורכ אַ גראָדע ED, אַ פּאַראַלעלע צו דער זײַט AB פונעם דרײַעק ABC; מיר באַקומענ אַ $\triangle EDC$, אַנ ענלעכנ צום געגעבענעם. $\triangle EDC \backsim \triangle ABC$, אַלס גלײַכווינקלדיקע דרײַעקנ.

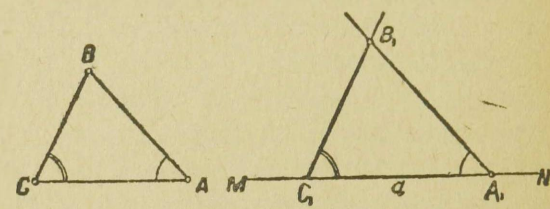
אופגאבע 2. אפן געגעבענעם אָפשניט a קאָנסטרויִרן א דרײַעק, אַן ענלעכן צום געגעבענעם דרײַעק ABC (צייכ. 238).

קאָנסטרויִרונג. a איז אַן אָפשניט, אַן אַנאַלאָגישער מיט דער זײַט CA פונעם דרײַעק ABC.

אפ דער גראָדער MN לייגן מיר אָפ אַן אָפשניט $C_1A_1=a$ און באַם פונקט A_1 קאָנסטרויִרן מיר א ווינקל A_1, וואָס איז גלײַך צום ווינקל A, און באַם פונקט C_1 — א ווינקל C_1, וואָס איז גלײַך צום ווינקל C; מיר באַקומען $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$.



צייכ. 239



צייכ. 238

אינדערעמעסן, די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען ענלעכע אַלס דרײַעקן, וואָס האָבן צו צוויי אַנטשפּרעכיק גלײַכע ווינקלען.

אופגאבע 3. אינעם געגעבענעם $\triangle ABC$ (צייכ. 239) אַרײַנשרײַבן א קוואַדראַט אַזוי, אַז צוויי שפּיצן זײַנע זאָלן ליגן אַפן באַזיס, און די איבעריקע צוויי שפּיצן — אַפ די זײַט-ליניעס פונעם דרײַעק.

לייזונג. לאָמיר פון א באַליביקן פונקט N אַפ דער זײַט AB פונעם דרײַעק דורכפירן א פּערפּענדיקוליאַר NK צו AC און קאָנסטרויִרן א קוואַדראַט $KLMN$, וואָס זײַן זײַט איז גלײַך צו NK. פונעם שפּיץ A פונעם דרײַעק דורכן שפּיץ M פונעם קוואַדראַט פירן מיר דורך א גראָדע AM_1 ביז איר אי־בערשנײַדן זיך מיט דער זײַט BC אינעם פונקט M_1; דערנאָך פירן מיר דורך $M_1L_1 \perp AC$, $M_1N_1 \parallel AC$ און $N_1K_1 \perp AC$; מיר באַקומען דעם געזוכטן קוואַדראַט.

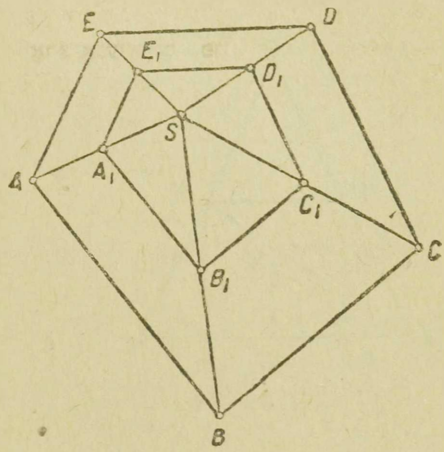
דערווײַז. אינדערעמעסן, $K_1L_1M_1N_1$ איז א גראָדעק. דערפון, וואָס די דרײַעקן AL_1M_1 און ALM זײַנען ענלעכע, האָבן מיר: $\frac{M_1L_1}{ML}=\frac{M_1A}{MA}$; דער־פון, וואָס די דרײַעקן AM_1N_1 און AMN זײַנען ענלעכע, האָבן מיר: $\frac{M_1N_1}{MN}=\frac{M_1A}{MA}$; הייסט עס, $\frac{M_1L_1}{ML}=\frac{M_1N_1}{MN}$; אין העסקעם מיט דער קאָנסטרויִ־רונג איז $ML=MN$ אַלס זײַטן פון א קוואַדראַט, און דעריבער איז אויך $M_1L_1=M_1N_1$, דה. דער גראָדעק $K_1L_1M_1N_1$ איז א קוואַדראַט.

7. פילעקנ, ענלעכ אויסגעשטעלטע. צענטער פונ ענלעכקײט.

אויפגאבע. קאָנסטרויִרנ א פילעק, אנ ענלעכנ צומ געגעבענעמ.

קאָנסטרויִרונג. לאָמיר נעמענ ערגעצ-וווּ אינווייניק אינעמ געגעבענעמ פילעק $ABCDE$ א פונקט S אונ פונ אימ וועלנ מיר דורכפירנ שטראַלנ דורכ זײַנע שפּיצנ (צייכ. 240).

אפ איינעמ פונ די שטראַלנ, אשטייגער אפ SA, וועלנ מיר נעמענ א פונקט A_1 (דעמ דאָזיקנ פונקט קאָנ מענ נעמענ אינווייניק אָדער דרויסנ דעמ געגעבענעמ פילעק) אונ וועלנ דורכפירנ א גראָדע A_1B_1 פאראַלעל צו AB ביז איר באגעגענענ אינעמ פונקט B_1 דעמ שטראַל SB; דורכנ פונקט B_1 פירנ מיר דורכ א גראָדע B_1C_1 פאראַלעל צו BC ביז איר באַגעגענענ דעמ שטראַל SC אינעמ פונקט C_1; דערנאָכ פירנ מיר דורכ $C_1D_1 \| CD$, $D_1E_1 \| DE$ אונ דעמ פונקט E_1 פאראייניקנ מיר מיט A_1; מיר באקומענ א פילעק $A_1B_1C_1D_1E_1$, אנ ענלעכנ צומ געגעבענעמ פילעק $ABCDE$.



צייכ. 240

אינדערעמסנ, אפנ סמאכ פונ דער טעאָרעמע וועגנ א בינטל שטראַלנ האָבנ מיר:

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{SC_1}{SC}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{SE_1}{SE}$$

דאָס באטײַט, אז $E_1A_1 \| EA$, ווײַל $\frac{SA_1}{SA}=\frac{SE_1}{SE}$.

$A_1B_1 \| AB$, $B_1C_1 \| BC$ אאזוו. הייסט עס, $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=\angle C$ אאזוו. אלס ווינקלענ מיט פאראַלעלע זײַטנ, אונ

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{SB_1}{SB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{SC_1}{SC}=$$
$$=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{SD_1}{SD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{SE_1}{SE}=\frac{E_1A_1}{EA}$$

פונ דער גלײַכקײט פונ אָט די פארהעלטענישנ דרינגט, אז

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{A_1E_1}{AE}$$

די פילעקנ $A_1B_1C_1D_1E_1$ אונ $ABCDE$ האָבנ אנטשפּרעכיק גלײַכע ווינקלענ אונ זייערע אנאלאָגישע זײַטנ זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל; הייסט עס,

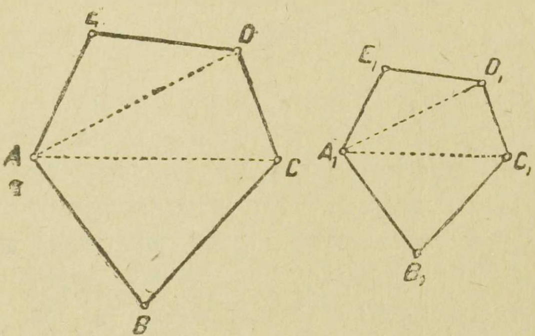
$A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ דער פונקט S הייסט צענטער פון ענלעכ־קייט, און די פילעקן גופא הייסן ענלעכ אויסגעשטעלטע.

ווען מע זאָל רירן פונעם אָרט איין פילעק לעגאבע דעם אנדערן, אשטייגער א קער טאָן איינעם פון זיי, וועט די ענלעכקייט פון די פילעקן דערפון ניט לײַדן; זיי ווערן נאָר אָן זייער ענלעכע אויסשטעלונג, נעמלעך, זייערע אנאלאָגישע זײַטן וועלן ניט זײַן פאראלעל, און די שטראַלן, וואָס פארייניקן די שפיצן פון די אנטשפרעכיק גלײַכע ווינקלען, וועלן ניט דורכגיין דורכ איין און דעם זעלבן פונקט; די פילעקן פארלירן זייער ענלעכקייט-צענטער.

א נויטוועגדיקער באדינג פאר ענלעכקייט פון פילעקן איז: 1) גלײַכקייט פון זייערע אנטשפרעכיקע ווינקלען, 2) פראָפּאָרציאָנעלקייט פון זייערע אנאלאָגישע זײַטן. ענלעכ אויסגעשטעלטע פילעקן דארפן נאָכ כוץ דעם האָבן אַן ענלעכקייט־צענטער.

8. אייגנשאפט פון ענלעכע פילעקן.

באַם איבערצייכענען א פלאן אין פארשיידענע מאסשטאבן איז בעסער דעם געגעבענעם פלאן צעקלאפן אף באזונדערע טיילן און דערנאָכ זיי איבערצייכענען איינס נאָכן אנדערן. דעם פלאן צעקלאפט מען געווײנלעך אף דרײַעקן. אין גרונט פון אזא מין איבערצייכענען ליגן פאָלגנדיקע צוויי טעאָרעמעס.



צייכ. 241

1. טעאָרעמע. די דיאַגאנאלן, וואָס זײַנען דורכגעפירט פון די שפיצן פון די אנטשפרעכיק גלײַכע ווינקלען אין צוויי ענלעכע און ענלעכ אויסגעשטעלטע פילעקן, צעקלאפן די פילעקן אף איין און דער זעלבער צאָל ענלעכע און ענלעכ אויסגעשטעלטע דרײַעקן.

ס'איז געגעבן: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (צייכ. 241), דה.

1) $\angle A_1 = \angle A$, $\angle B_1 = \angle B$ אאזוו.

2) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ אאזוו.

3) A_1D_1 און AD, A_1C_1 און AC זײַנען אנאלאָגישע דיאַגאנאלן.

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$;

2) $\triangle A_1C_1D_1 \backsim \triangle ACD$;

3) $\triangle A_1D_1E_1 \backsim \triangle ADE$.

דערווײַז. $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$, ווײַל לויטן באדינג איז $\angle B_1 = \angle B$ און $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC}$; פון זייער ענלעכקייט דרינגט, אז $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$, אָבער $\angle C_1 = \angle C$, איז דעריבער $\angle A_1C_1D_1 = \angle ACD$, כוץ דעם איז $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$, און אזוי ווי $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$, איז $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$.

וויבאלד $\angle A_1C_1D_1 = \angle ACD$ אונ $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$, איז $\triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle ACD$.

אפנ זעלבנ אויפנ ווערט דערוויזנ, אז $\triangle A_1D_1E_1 \sim \triangle ADE$.

קאָנסעקווענצ. אנאלאָגישע דיאגאָנאלנ פונ ענלעכע פילעקנ זײַנענ פראָפּאָרציאָנעל צו די אנאלאָגישע זײַטנ:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD} = \frac{A_1D_1}{AD} \text{ אאוו.}$$

2. טעאָרעמע (פארקערטע). אויב צוויי פילעקנ צעקלאפּנ זיכ דורכ די אנאלאָגישע דיאגאָנאלנ אפּ אנ אלציינער צאָל ענלעכע אונ ענלעכ אויס-געשטעלטע דרײַעקנ, זײַנענ אזעלכע פילעקנ ענלעכ.

ס׳איז געגעבנ:

$$\left|\begin{array}{l} \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC \\ \triangle A_1C_1D_1 \sim \triangle ACD \\ \triangle A_1D_1E_1 \sim \triangle ADE \end{array}\right.$$

אונ ענלעכ אויסגעשטעלטע (צייכ. 241).

ס׳פּאָדערט זיכ דערווײַזנ: $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$, דה.

1) $\angle A = \angle A_1$; $\angle B = \angle B_1$ אאוו.

2) $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}$ אאוו.

דערווײַז. דערפונ, וואָס די דרײַעקנ $A_1B_1C_1$ אונ ABC זײַנענ ענלעכע דרינגט, אז $\angle B_1 = \angle B$ אונ (1) $\angle A_1C_1B_1 = \angle ACB$. פונ דער ענלעכקײַט פונ די דרײַעקנ $A_1C_1D_1$ אונ ACD דרינגט, אז (2) $\angle A_1C_1D_1 = \angle ACD$; ווענ מיר לייגנ צונויפ גלידערווײַז די גלײַכקײַטנ (1) אונ (2), האָבנ מיר, אז $\angle C_1 = \angle C$; אפנ זעלבנ אויפנ ווערט דערוויזנ די גלײַכקײַט פונ די איבעריקע ווינקלענ פונ די פילעקנ.

פונ דער ענלעכקײַט פונ די דרײַעקנ $A_1B_1C_1$ אונ ABC דרינגט ארויס די פראָפּאָרציאָנעלקײַט פונ זייערע זײַטנ, נעמלעכ:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC}$$

פונ דער ענלעכקײַט פונ די דרײַעקנ $A_1C_1D_1$ אונ ACD, האָבנ מיר:

$$\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{C_1D_1}{CD}$$

פארגלײַכנ מיר די לעצטע צוויי גלײַכקײַטנ, באקומענ מיר:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1D_1}{CD}.$$

אפנ זעלבנ אויפנ ווערט דערוויזנ די פראָפּאָרציאָנעלקײַט פונ די איבעריקע זײַטנ פונ די ביידע פילעקנ.

אלזאָ, $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim ABCDE$.

9. פאַרהעלטעניש צווישן די פּערימעטערס פון ענלעכע פיגורן.

טעאָרעמע. די פּערימעטערס פון ענלעכע פילעקן פאַרהאַלטן זיך ווי די אַנאַלאָגישע זײַטן פון די פילעקן.

ס'איז געגעבן: $A_1B_1C_1D_1E_1 \backsim ABCDE$ (צייכ. 241).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}\ldots$.

דערווײַז. פון דער ענלעכקייט פון די פילעקן $ABCDE$ און $A_1B_1C_1D_1E_1$ האָבן מיר:

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1D_1}{CD}=\frac{D_1E_1}{DE}=\frac{E_1A_1}{EA}=k$$

אפן גרונט פון דער אייגנשאַפט פון אַ ריי גלײַכע פאַרהעלטענישן האָבן מיר:

$$\frac{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1A_1}{AB+BC+CD+DE+EA}=k=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\ldots$$

אָדער $\frac{P_1}{P}=\frac{A_1B_1}{AB}$, ווו P_1 און P זײַנען די פּערימעטערס פון די געגעבענע פילעקן.

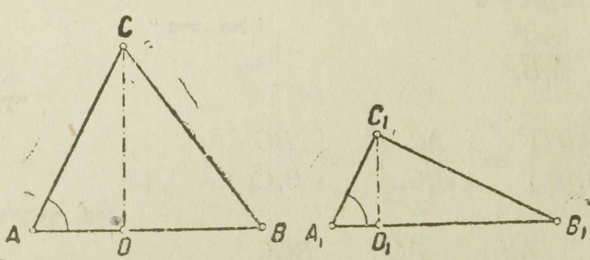
די טעאָרעמע איז ריכטיק פאַר ענלעכע פילעקן מיט אַ באַליביקער צאָל n זײַטן; זי איז אויך ריכטיק אין דעם פאַל, ווען n איז גלײַך 3, דה. פאַר ענלעכע דרײַעקן.

10. פאַרהעלטעניש צווישן די שטעכן פון ענלעכע דרײַעקן און פילעקן.

1. **טעאָרעמע.** די שטעכן פון צוויי דרײַעקן, וואָס האָבן צו אַ גלײַכן ווינקל, פאַרהאַלטן זיך צווישנאַנאַנד ווי די פּראָדוקטן פון די זײַטן, וואָס שליסן אײַן די דאָזיקע ווינקלען.

ס'איז געגעבן: $\triangle ABC$ און $\triangle A_1B_1C_1$; $\angle A=\angle A_1$ (צייכ. 242).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}$.



צייכ. 242

דערווײַז. ווען מיר פירן דורך אין די געגעבענע דרײַעקן די הייכן CD און C_1D_1 און מיר באַצייכענען דעם שטעכ פונעם דרײַעק ABC דורך S און פון דעם דרײַעק $A_1B_1C_1$ דורך S_1, האָבן מיר:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot CD}{A_1B_1\cdot C_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{CD}{C_1D_1} \qquad (1)$$

$\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$, ווײַל זיי זײַנענ גראָדווינקלדיקע און האָבנ צו אנ אַנטשפּרעכיק גלײַכנ שאַרפנ ווינקל, $\angle A=\angle A_1$; פֿונ זייער ענלעכקײַט דרינגט, אַז $\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ (2); ווענ מיר פֿאַרבײַטנ אינ דער גלײַכקײַט (1) די פֿאַר־העלטעניש $\frac{CD}{C_1D_1}$ מיט דער פֿאַרהעלטעניש $\frac{AC}{A_1C_1}$, וואָס איז צו איר גלײַכ, באַקומענ מיר:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1} \quad \text{אָדער} \quad \frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1}$$

מיט דער צווייטער פֿאָרמולע באַנוצט מענ זיכ דעמלט, ווענ די זײַטנ זײַנענ אויסגעדריקט דורכ צאָלנ.

די טעאָרעמע בלײַבט אויכ ריכטיק אינ דעם פֿאַל, ווענ $\angle A+\angle A_1=2d$.

2. טעאָרעמע. די שטעטכנ פֿונ ענלעכע דרײַעקנ פֿאַרהאַלטנ זיכ ווי די קוואַדראַטנ פֿונ די אַנאַלאָגישע זײַטנ.

ס'איז געגעבנ: $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ (צייכ. 243).

ס'פֿאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}$.

דערווײַז. $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, הייסט עס, $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, און דעריבער איז

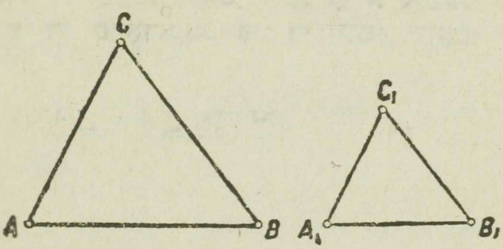
$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB\cdot AC}{A_1B_1\cdot A_1C_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AC}{A_1C_1} \qquad (1)$$

פֿונ דער ענלעכקײַט פֿונ די דרײַ־עקנ דרינגט, אַז

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1} \qquad (2)$$

פֿאַרבײַטנ מיר אינ דער גלײַכקײַט (1) איינע פֿונ די פֿאַרהעלטענישנ מיט אַ באַליביקער פֿאַרהעלטעניש פֿונ דער גלײַכקײַט (2), באַקומענ מיר:

$$\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\cdot\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2},$$



צייכ. 243

אָבער

$$\left[\frac{AB}{A_1B_1}\right]^2=\left[\frac{AC}{A_1C_1}\right]^2=\left[\frac{BC}{B_1C_1}\right]^2,$$

דעריבער איז

$$\frac{S}{S_2}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC^2}{A_1C_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}$$

3. טעאָרעמע. די שעטעכנ פונ ענלעכע פילעקנ פאַרהאַלטנ זיכ ווי די קוואַדראַטנ פונ די אַנאַלאָגישע זײַטנ.

ס'איז געגעבנ: $\overline{ABCDE \backsim A_1B_1C_1D_1E_1}$ (צייכ. 241).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\overline{\frac{S}{S_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\dots}$.

דערווײַז. דורכ די דיִאַגאָנאַלנ, וואָס זײַנענ דורכגעפירט פונ די אַנטשפּרעכיקע שפּיצנ A אונ A_1, צעקלאַפּנ זיכ די געגעבענע פילעקנ אפּ אײנ אונ דער זעלבער צאָל אַנטשפּרעכיקע ענלעכע דרײַעקנ: ABC אונ $A_1B_1C_1$, ACD אונ $A_1C_1D_1$, ADE אונ $A_1D_1E_1$. פונ דער ענלעכקײַט פונ די דרײַעקנ דרינגט, אז

$$\left.\begin{aligned}&\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2};\quad \frac{S_{ACD}}{S_{A_1C_1D_1}}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2};\\&\frac{S_{AED}}{S_{A_1E_1D_1}}=\frac{ED^2}{E_1D_1^2}=\frac{AE^2}{A_1E_1^2}\end{aligned}\right| \tag{1}$$

פונ דער ענלעכקײַט פונ די פילעקנ האָבנ מיר:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}$$

אָדער

$$\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2}=\frac{EA^2}{E_1A_1^2} \tag{2}$$

פאַרגלײַכנ מיר די פאַרהעלטענישנ פונ די רייענ (1) אונ (2), האָבנ מיר:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{S_{ACD}}{S_{A_1C_1D_1}}=\frac{S_{AED}}{S_{A_1E_1D_1}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\dots$$

אפנ גרונט פונ דער אייגנשאַפט פונ א רײ גלײַכע פאַרהעלטענישנ באַקומענ מיר:

$$\frac{S_{ABC}+S_{ACD}+S_{AED}}{S_{A_1B_1C_1}+S_{A_1C_1D_1}+S_{A_1E_1D_1}}=\frac{S_{ABCDE}}{S_{A_1B_1C_1D_1E_1}}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2}=\dots$$

פראַגעס אונ איבונגענ.

1. פאַרוואָס זײַנענ ענלעכ דרײַעקנ מיט אַנטשפּרעכיקע פּערפּענדיקולערע אָדער פּאַראַלעלע זײַטנ?

2. פאַרוואָס קאָנ מענ ניט רעכענענ פאַר ענלעכע פיגורנ א גראָדעק אונ א קוואַדראַט, כאָטש די ווינקלענ זײַנענ בא זיי גלײַכ אַלס גראָדע?

3. פאַרוואָס זײַנענ א קוואַדראַט מיט א זײַט $2a$ אונ א ראָמב מיט א זײַט a ניט קײנ ענלעכע פיגורנ, כאָטש די זײַטנ זייערע זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל?

4. קעדײ צוויי דרײַעקנ זאָלנ זײַנ ענלעכ, איז גענוג, אז זייערע ווינקלענ זאָלנ זײַנ גלײַכ אָדער די זײַטנ זאָלנ זײַנ פּראָפּאָרציאָנעל. צי איז גענוג אײנע פונ די דאָזיקע באַדינגונגענ, אז צוויי פילעקנ מיט אײנ אונ דער זעלבער צאָל זײַטנ זאָלנ זײַנ ענלעכ?

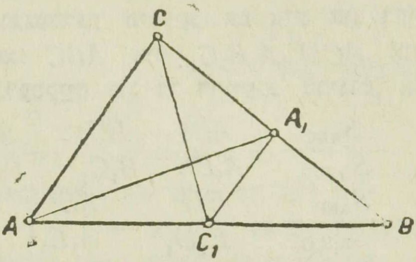
5. קאָנסטרויִרנ א דרײַעק ABC פונ א באַליביקער פאָרמ אונ מיט דער הילפ פונ א ביגטל שטראַלנ קאָנסטרויִרנ אנ ענלעכנ צו זײַמ דרײַעק; דער ענלעכקײַט-קאָעפיציענט k איז גלײַכ 1,5.

6. אינעמ דרײַעק ABC זײַנענ די זײַטנ: $AB=6$ cm, $BC=8$ cm אונ $AC=9$ cm. אויסרעכענענ די זײַטנ פונ אנ ענלעכנ צו אימ דרײַעק, ווענ $k=2{,}5$.

7. די דיִאַגאָנאַלנ פונ א טראַפּעציע טײלנ זיכ קעגנזײַטיק אפּ כאַלאָקים, וואָס זײַנענ פּראָפּאָרציאָנעל צו די באַזיסנ. דערווײַזנ.

8. אינעם דרײַעק ABC זײַנען דורכגעפירט פֿון די שפּיצן פֿון די ווינקלען A און C מעדיאַנעס AA_1 און CC_1 (ציכ. 244). דערווײַזן, אַז די גראָדע C_1A_1 שנײַדט אָפּ פֿונעם געגעבענעם דרײַעק אַן ענלעכן דרײַעק, און אַז די מעדיאַנעס AA_1 און CC_1 טיילן זיך אין דער פּראָפּאָרציע 1 : 2.

9. ס'זײַנען געגעבן דרײַ דרײַעקן, וואָס זייערע זײַטן זײַנען גלײַך: 1) 10, 8 און 12; 2) 5,7; 6 און 7,2; 3) 25; 20 און 24. באַשטימען, וועלכע פֿון אָט די דרײַעקן זײַנען ענלעך.



ציכ. 244

10. אין אַ דרײַעק, וואָס זײַן באַזיס a איז גלײַך 10 סמ. און די הייך h איז גלײַך 15 סמ., איז אַרײַנגעשריבן אַ קוואַדראַט; צוויי שפּיצן פֿונעם קוואַדראַט ליגן אויף: באַזיס פֿונעם דרײַעק און די צוויי אַנדערע שפּיצן — אויף די זײַטן פֿונעם דרײַעק. געפֿינען די לענג פֿון דער קוואַדראַט-זײַט.

11. אין אַ ווינקל זײַנען אַרײַנגעשריבן צוויי קרײַזליניעס, וואָס האָבן אַ דרויסנדיקן באַריר; די צענטערס פֿון די קרײַזליניעס שטייען אָפּ פֿונעם שפּיץ ווינקל אויף 9 סמ. און 3 סמ. באַשטימען די ראַדיוסן פֿון די דאָזיקע קרײַזליניעס.

12. אינעווייניק אינעם גראָדעק $ABCD$ געפֿינט זיך אַ צווייטער גראָדעק $A_1B_1C_1D_1$, וואָס זײַנע זײַטן זײַנען פּאַראַלעל צו די זײַטן פֿונעם ערשטן און געפֿינען זיך אויף איין און דעם זעלבן אָפּשטאַנד פֿון זיי. צי זײַנען די דאָזיקע גראָדעקן ענלעך?

XVII. מעטרישע קעגנזײַטיקע פּאַראַלעלטענישן צווישן די עלעמענטן פֿון אַ דרײַעק.

1. אָפּהענגיקײַט צווישן די עלעמענטן פֿון אַ דרײַעק.

1. די אָפּהענגיקײַט צווישן די ווינקלען פֿון אַ באַליביקן דרײַעק ווערט באַשטימט דורך דער גלײַכקײַט:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 2d$$

2. צווישן די זײַטן פֿון אַ דרײַעק עקזיסטירט פֿאָלגנדיקע אָפּהענגיקײַט: אַ באַליביקע זײַט פֿון אַ דרײַעק איז קלענער פֿאַר דער סומע און גרעסער פֿאַר דער דיפֿערענץ פֿון די איבעריקע צוויי זײַטן זײַנע.

$$a < b + c \text{ און } a > b - c.$$

3. צווישן די זײַטן און צווישן די ווינקלען פֿון אַ דרײַעק עקזיסטירט פֿאָלגנדיקע אָפּהענגיקײַט:

קעגן דער גרעסערער זײַט אין אַ דרײַעק ליגט אַ גרעסערער ווינקל און, פֿאַרקערט, קעגן דעם גרעסערן ווינקל אין אַ דרײַעק ליגט אַ גרעסערע זײַט: אויב

$$AC > BC, \text{ איז } \angle A > \angle B; \text{ אויב } \angle A > \angle B, \text{ איז } AC > BC.$$

די פֿריִער אויסגערעכנטע טעאָרעמעס שטעלן ניט אײַן קיין באַשטימטע צאָליקע אָפּהענגיקײַט צווישן די זײַטן פֿון אַ דרײַעק און די עלעמענטן, מיט וועלכע זיי זײַנען פֿאַרבונדן — מיט דער הייך, מיט דער פּראָיעקציע פֿון די

זײַטן, מיט דער מעדיִאַנע אאוו., און אויך צווישן די זײַטן פֿון אַ דרײַעק און זײַנע ווינקלען.

די טעאָרעמעס, וואָס מיר גיבן דאָ ווײַטער, פֿאַרפֿילן דעם דאָזיקן בלויז און שטעלן אײַן די צאָליקע אָפּהענגיקייט צווישן באַזונדערע ליניאַלע עלעמענטן פֿון אַ דרײַעק; וואָס איז שײַעך דער צאָליקער אָפּהענגיקייט צווישן די זײַטן און די ווינקלען פֿון אַ דרײַעק, ווערט די דאָזיקע אָפּהענגיקייט דערלערנט אין אַ ספּעציִעלן אָפּטייל פֿון מאַטעמאַטיק — אין טריגאָנאָמעטריע.

2. מעטרישע קעגנזײַטיקע פֿאַרהעלטענישן צווישן די עלעמענטן פֿון אַ גראָדווינקלדיקן דרײַעק.

1. טעאָרעמע. די הייך, וואָס איז דורכגעפֿירט פֿונעם שפּיץ גראַדן ווינקל אין אַ דרײַעק צו דער היפּאָטענוזע, צעטיילט אים אויף צוויי דרײַעקן, וואָס זײַנען ענלעך צווישן זיך און זײַנען ענלעך צום געגעבענעם דרײַעק.

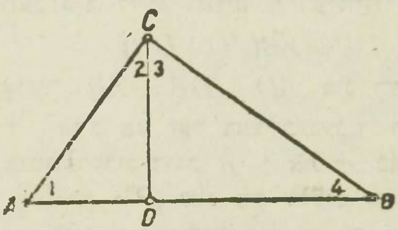
ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$; $\angle ACB = d$; $CD \perp AB$ (צייכ. 245).

ס׳פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $\triangle ABC \sim \triangle BDC \sim \triangle ADC$.

דערווײַז. לאָמיר באַטראַכטן די גראָדווינקלדיקע דרײַעקן:

1) $\triangle ACD$ און $\triangle ABC$. בײַ זיי איז דער $\angle 1$ אַ געמיינזאַמער, הייסט עס, זיי זײַנען גלײַכווינקלדיקע, און דעריבער זײַנען זיי ענלעך: $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.

2) $\triangle BCD$ און $\triangle ABC$. בײַ זיי איז דער $\angle 4$ אַ געמיינזאַמער, זיי זײַנען, הייסט עס, גלײַכווינקלדיקע, און דעריבער זײַנען זיי ענלעך: $\triangle BCD \sim \triangle ABC$.



צייכ. 245

3) $\triangle ACD$ און $\triangle CBD$. יעדערער פֿון די דאָזיקע דרײַעקן איז ענלעך צום געגעבענעם דרײַעק ABC, און דעריבער זײַנען זיי ענלעך איינער צום אַנדערן.

$\triangle ACD \sim \triangle ABC$ און $\triangle CBD \sim \triangle ABC$, הייסט עס, $\triangle ACD \sim \triangle CBD$.

2. טעאָרעמע. די הייך, וואָס איז דורכגעפֿירט פֿונעם שפּיץ גראַדן ווינקל אויף דער היפּאָטענוזע, איז די מיטל-פּראָפּאָרציאָנעלע צווישן די פּראָיעקציעס פֿון די קאַטעטן אויף דער היפּאָטענוזע.

ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$; $\angle ACB = d$ $CD \perp AB$ (צייכ. 245).

ס׳פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $AD : CD = CD : DB$.

דערווײַז. פֿון דער ענלעכקייט פֿון די דרײַעקן ACD און CBD דרינגט אַרויס די פּראָפּאָרציאָנעלקייט פֿון זייערע אַנאַלאָגישע זײַטן, ד. ה. $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{DB}$ אָדער $CD^2 = AD \cdot DB$, דערפֿון איז $CD = \sqrt{AD \cdot DB}$, דערבײַ ווערט גענומען סײַ דאָ סײַ ווײַטער בלויז דער אַריטמעטישער באַטרעף פֿונעם וואָרצל, ווײַל עס ווערט גענומען אין אַכט בלויז די לענג פֿונעם אָפּשניט און ניט זײַן ריכטונג.

3. טעאָרעמע. יעדער קאַטעט איז די מיטל-פּראָפּאָרציאָנעלע צווישן דער היפּאָטענוזע און זײַן פּראָיעקציע אַפ דער היפּאָטענוזע.

דערווײַז. 1) פון דער ענלעכקייט פון די דרײַעקן ACD און ABC (צייכ. 245) דרינגט, אז $AB:AC=AC:AD$ אָדער $AC^2=AB\cdot AD$, דערפון איז

$$AC=\sqrt{AB\cdot AD}.$$

2) פון דער ענלעכקייט פון די דרײַעקן CBD און ABC דרינגט, אז $AB:CB=CB:DB$ אָדער $CB^2=AB.DB$, דערפון איז $CB=\sqrt{AB\cdot DB}$.

קאָנסעקווענץ. די קוואַדראַטן פון די קאַטעטן פאַרהאַלטן זיך צווישנאַנאַנד ווי זייערע פּראָיעקציעס אַפ דער היפּאָטענוזע.

אינדערעמעסן: $AC^2=AB\cdot AD$ און $CB^2=AB\cdot DB$.

צעטיילנדיק מיר גלידערווײַז איינע גלײַכקייט אַפ דער צווייטער, האָבן מיר:

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AB\cdot AD}{AB\cdot DB}=\frac{AD}{DB}.$$

4. טעאָרעמע (פּיטאַגאָרס). דער קוואַדראַט פון דער היפּאָטענוזע איז גלײַך צו דער סומע פון די קוואַדראַטן פון די קאַטעטן.

ס׳איז געגעבן: $\angle C=d$; $\triangle ABC$ (צייכ. 245).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: $AC^2+CB^2=AB^2$.

דערווײַז (דריסער). 1) $AC^2=AB.AD$ און 2) $CB^2=AB\cdot DB$.

ווען מיר לייגן צונויף גלידערווײַז די דאָזיקע צוויי גלײַכקייטן, האָבן מיר:

$$AC^2+CB^2=AB\cdot AD+AB\cdot DB=AB(AD+DB),$$

אָבער $AD+DB=AB$, און דעריבער איז $AC^2+CB^2=AB\cdot AB=AB^2$.

אויב מע זאָל באַצייכענען די לענג פון די זײַטן פונעם גראַדווינקלדיקן דרײַעק אַנטשפּרעכיק דורך a, b און c, פאַרשרײַבט מען קורץ די דאָזיקע טעאָרעמע אַזוי: $a^2+b^2=c^2$ און מע לייענט עס אַזוי:

אין א גראַדווינקלדיקן דרײַעק איז די סומע פון די קוואַדראַטן פון די צאָלן, וואָס דריקן אויס די לענג פון די קאַטעטן, גלײַך צום קוואַדראַט פון דער צאָל, וואָס דריקט אויס די לענג פון דער היפּאָטענוזע.

קאָנסעקווענץ. דער קוואַדראַט פון איין קאַטעט איז גלײַך צו דער דיפערענץ פון די קוואַדראַטן פון דער היפּאָטענוזע און פונעם צווייטן קאַטעט.

$a^2+b^2=c^2$, דערפון איז $a^2=c^2-b^2$ אָדער $a=\sqrt{c^2-b^2}$

און $b^2=c^2-a^2$ אָדער $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

5. טעאָרעמע (פאַרקערטע). אויב צווישן די זײַטן פון א דרײַעק a, b און c עקזיסטירט די אָפּהענגיקייט $a^2+b^2=c^2$, איז דער דרײַעק א גראַדווינקלדיקער.

ס׳איז געגעבן: a, b און c זײַנען די זײַטן פון א דרײַעק און $a^2+b^2=c^2$.

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: דער דרײַעק איז א גראַדווינקלדיקער.

דערווײַז. לאָמיר קאָנסטרויִרן א גראַדווינקלדיקן דרײַעק, וואָס זײַנע קאַטעטן זײַנען a און b, און די היפּאָטענוזע זײַנע וועלן מיר באַצייכענען דורך m.

דאנ וועט לויט פיטאגאָרס טעאָרעמע זייַנ $a^2+b^2=m^2$. פארגלייַכנ מיר אָט די גלייַכקייַט מיט דער געגעבענער גלייַכקייַט $a^2+b^2=c^2$, קומענ מיר צומ אויספיר, אז $c^2=m^2$ אָדער $c=m$. הייסט עס, דער געגעבענער דרייַעק אונ דער גראָדווינקלדיקער דרייַעק זייַנענ גלייַכ לויט דריי זייַטנ, אונ דעריבער איז דער געגעבענער דרייַעק א גראָדווינקלדיקער.

6. די באטראכטע טעאָרעמע (אונ די פארקערטע צו איר) איז איינע פונ די וויכטיקסטע טעאָרעמעס אינ דער געאָמעטריע; מע האלט, אז די דאָזיקע טעאָרעמע האָט אנטדעקט דער גריכישער פילאָסאָפ פיטאגאָר, אונ דערפאר רופט מענ זי „פיטאגאָרס טעאָרעמע”. עס איז פעסטגעשטעלט, אז די צאָליקע אָפּהענגיקייַט צווישנ די זייַטנ פונ א גראָדווינקלדיקנ דרייַעק, וועלכע ווערט באשטימט דורכ דער געגעבענער טעאָרעמע, האָבנ שוינ געוווּסט די עגיפּטער, פיטאגאָרס לערער. א גראָדווינקלדיקער דרייַעק מיט זייַטנ פונ 3, 4 אונ 5 הייסט **עגיפּטישער** דרייַעק. די אוראלטע ערד־אויסמעסטער פלעגנ אפ קאָנסטרויִרנ א גראָדנ ווינקל אָנווענדנ פאָלגנדיקנ מעטאָד: א שטריקל פלעגנ זיי מיט קנופּנ צעטיילנ אפ 12 גלייַכע כאלאָקימ, די עקנ פונעמ שטריקל פלעגנ זיי צונויפבינדנ אונ מיט פלעקלעכ אָנציִענ דאָס שטריקל אפ דער ערד אינ דער פאָרמ פונ א דרייַעק, וואָס זייַנע זייַטנ זאָלנ האלטנ 3, 4 אונ 5 טיילונגענ; דעמאָלט פלעגט זיכ צווישנ די זייַטנ, וואָס האלטנ 3 אונ 4 טיילונגענ, באקומענ א גראָדער ווינקל.

גראָדווינקלדיקע דרייַעקנ, וואָס זייערע זייַטנ ווערנ אויסגעמאָסטנ מיט גאנצע צאָלנ, הייסנ **פיטאגאָרישע דרייַעקנ**, אונ די צאָלנ גופא — פיטאגאָרישע צאָלנ, למשל, 3, 4 אונ 5; 5, 12 אונ 13; 6, 8 אונ 10; 7, 24 אונ 25; 8, 15 אונ 17; 9, 12 אונ 15; 10, 24 אונ 26 אאוו. זייַנענ פיטאגאָרישע צאָלנ.

3. מעטרישע אָפּהענגיקייַט צווישנ די עלעמענטנ פונ א שרעגווינקלדיקנ דרייַעק.

1. טעאָרעמע. דער קוואדראט פונ דער זייַט, וואָס ליגט קעגנ א שארפנ ווינקל, איז קלענער פאר דער סומע פונ די קוואדראטנ פונ די צוויי איבעריקע זייַטנ אפ דעמ פארטאָפּלטנ פּראָדוקט פונ קייפלענג איינע פונ אָט די זייַטנ אפ דער פּראָיעקציע פונ דער צווייטער זייַט, וואָס באקומט זיכ פונ איר, אפ דער ערשטער זייַט.

ס׳איז געגעבנ: $\triangle ABC$; דער $\angle A$ איז א שארפער; m איז די פּראָיעקציע פונ c אפ b (צייכ. 246).

ס׳פאָדערט זיכ דערווייַזנ: $a^2=b^2+c^2-2bm$.

דערווייַז. לאָמיר דורכפירנ פונעמ שפּיץ פונ ווינקל B די הייכ $BD=h$; מיר באקומענ צוויי גראָדווינקלדיקע דרייַעקנ ABD אונ BDC; $AD=m$ איז די פּראָיעקציע פונ דער זייַט AB אפ דער זייַט AC.

פונעמ $\triangle BDC$ האָבנ מיר:

$$a^2=h^2+(b-m)^2 \qquad (1)$$

פונעמ $\triangle ABD$ האָבנ מיר:

$$h^2=c^2-m^2 \qquad (2)$$

מיר לייגן צונויפ גלידערווײַז די גלײַכקײַטן (1) און (2) און מאכן די נייטיקע איבערבילדונגען; מיר באקומען נאָכאנאנד:

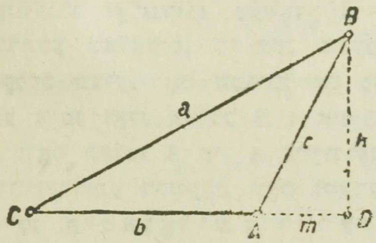
$$a^2 + h^2 = h^2 + (b - m)^2 + c^2 - m^2; \quad a^2 = (b - m)^2 + c^2 - m^2$$

$$a^2 = b^2 - 2bm + m^2 + c^2 - m^2 \text{ אָדער } a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$

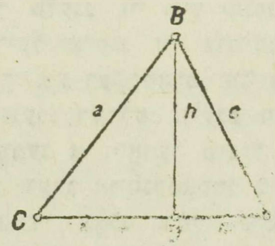
2. טעאָרעמע. דער קוואדראט פון דער זײַט, וואָס ליגט קעגן דעם טעמפּן ווינקל פון א דרײַעק, איז גרעסער פאר דער סומע פון די קוואדראטן פון די איבעריקע צוויי זײַטן אפן פארטאָפּלטן פּראָדוקט פון קייפלען איינע פון אָט די זײַטן אפ דער פּראָיעקציע פון דער צווייטער זײַט, וואָס באקומט זיך פון איר אפ דער פּאָרזעצונג פון דער ערשטער זײַט.

ס׳איז געגעבן: $\triangle ABC$; דער $\angle A$ איז א טעמפּער (צייכ. 247).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: $a^2=b^2+c^2+2bm$.



צייכ. 247



צייכ. 246

ד ע ר ו ו ײַ ז. פונעם שפּיץ B פירן מיר דורכ אפ דער פּאָרזעצונג פון דעם באזיס AC די הייך $BD = h$, מיר באקומען צוויי גראָדווינקלדיקע דרײַעקן: BCD און ADB; $AD = m$ איז די פּראָיעקציע פון דער זײַט AB אפ דער פּאָרזעצונג פון דער זײַט AC; $CD = b + m$.

פונעם $\triangle BCD$ האָבן מיר:

$$a^2 = h^2 + (b + m)^2 \qquad (1)$$

פונעם $\triangle ADB$ האָבן מיר:

$$h^2 = c^2 - m^2 \qquad (2)$$

מיר לייגן צונויפ גלידערווײַז די גלײַכקײַטן (1) און (2) און מאכן די נייטיקע איבערבילדונגען; מיר באקומען נאָכאנאנד:

$$a^2 + h^2 = h^2 + (b + m)^2 + c^2 - m^2$$
$$a^2 = (b + m)^2 + c^2 - m^2$$
$$a^2 = b^2 + 2bm + m^2 + c^2 - m^2$$

אָדער

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$$

3. ווען מיר פארגלײַכן די פאָרמולע פונעם קוואדראט פון דער זײַט, וואָס ליגט קעגן א שארפן ווינקל, מיט דער פאָרמולע פונעם קוואדראט פון דער זײַט, וואָס ליגט קעגן א טעמפּן ווינקל, באמערקן מיר, אז זיי אונטערשיידן זיך בלויז

מיטנ לעצטנ גליד. ביידע פאָרמולעס קאָנ מענ פאַרייניקנ אינ איינער, מיר וועלנ דאַנ באַקומענ:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2bm$$

וווּ m איז די פּראָיעקציע פונ דער זײַט c אַפּ דער זײַט b אָדער אַפּ איר פאָרזעצונג; דעמ צייכנ מינוס נעמט מענ, ווענ די זײַט, וועלכע מע דאַרפ באַשטימענ, ליגט קעגנ א שאַרפנ ווינקל, אונ דעמ צייכנ פּליוס — ווענ זי ליגט קעגנ א טעמפּנ ווינקל.

4. אויב מירנ אינעמ שאַרפווינקלדיקנ דרײַעק ABC (צייכ. 246) אָנהייבנ דרייענ די זײַט AB אַרומ פּונקט B לויט דער זעלבער ריכטונג ווי ס׳באַוועגט זיכ דער ווײַזער פונ א זייגער, וועט דער $\angle A$ זיכ אַלצ פאַרגרעסערנ אונ די פּראָיעקציע m פונ דער זײַט $AB = c$ אַפּ דער זײַט $AC = b$ וועט זיכ אַלצ פאַרקלענערנ; ווענ דער $\angle A$ וועט, לעסאָפּ, פאַרוואַנדלט ווערנ אינ א גראָדנ ווינקל, וועט די פּראָיעקציע זײַנ גלײַכ נול, אונ מיר וועלנ באַקומענ פּיטאַגאָרס טעאָרעמע.

אינדערעמעסנ, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bm$; באַ $m = O$ האָבנ מיר: $a^2 = b^2 + c^2$.

ווענ אָבער אינעמ טעמפּווינקלדיקנ דרײַעק ABC (צייכ. 247) וועלנ מיר דרייענ די זײַט AB אַרומ דעמ פּונקט B קעגנ דער ריכטונג, אינ וועלכער עס באַוועגט זיכ דער ווײַזער פונ א זייגער, דאַנ וועט אי דער $\angle A$ אי די פּראָיעקציע m פונ דער זײַט $AB = c$ זיכ אַלצ פאַרקלענערנ, אונ ווענ דער $\angle A$ וועט, לעסאָפּ, פאַרוואַנדלט ווערנ אינ א גראָדנ ווינקל, וועט די פּראָיעקציע m זײַנ גלײַכ נול, אונ מיר וועלנ באַקומענ פּיטאַגאָרס טעאָרעמע: $a^2 = b^2 + c^2$. אַלזאָ, פּיטאַגאָרס טעאָרעמע איז א פּראַט־פאַל פונ די צוויי טעאָרעמעס, וואָס מיר האָבנ נאָרוואָס באַטראַכט.

5. פּיטאַגאָרס טעאָרעמע אונ די צוויי עקאָרשט באַטראַכטע טעאָרעמעס גיבנ די מעגלעכקייט צו באַשטימענ לויט די געגעבענע זײַטנ פונעמ דרײַעק זײַנ פאָרמ בענעגייע צו זײַנע ווינקלענ.

אויב אינעמ דרײַעק ABC איז:

1) $a^2 < b^2 + c^2$, איז דער דרײַעק א שאַרפווינקלדיקער;

2) $a^2 = b^2 + c^2$, איז דער דרײַעק א גראָדווינקלדיקער;

3) $a^2 > b^2 + c^2$, איז דער דרײַעק א טעמפּווינקלדיקער.

אינ יעטווידנ באַזונדערנ פאַל איז גענוג צו פאַרגלײַכנ דעמ קוואַדראַט פונ דער גרעסערער זײַט מיט דער סומע פונ די קוואַדראַטנ פונ די צוויי איבעריקע זײַטנ.

6. אויפגאַבע. באַשטימענ דעמ אַרט דרײַעק, וואָס זײַנע זײַטנ זײַנענ גלײַכ 13 סמ., 9 סמ. אונ 4 סמ.

לייזונג. $13^2 > 9^2 + 4^2$, הייסט עס, מע דאַרפ רעכענענ, אַז דער געגעבענער דרײַעק איז א טעמפּווינקלדיקער.

לויט די אָנגאַבנ פונ דער אויפגאַבע קאָנ מענ אָבער קיינ דרײַעק ניט קאָנסטרוירנ, ווײַל דאָ איז ניט אָפּגעהיט דער באַדינג, וואָס איז נייטיק אַפּ צו קאָנסטרוירנ א דרײַעק; דער דאָזיקער באַדינג פאָדערט, אַז די גרעסערע זײַט זאָל זײַנ קלענער, איידער די סומע פונ די צוויי איבעריקע זײַטנ זײַנענ; אינ דער

געגעבענער אופגאבע איז $4+9=13$, דה. די גרעסערע זייַט איז גלייַכ צו דער סומע פונ די צוויי איבעריקע זייַטנ, דאָס איז אָבער ניט מעגלעכ.

דער אנאליז פונ אָט דער אופגאבע באווייַזט, אז פריִער, איידער מע נעמט זיכ אורטיילנ וועגנ דעמ ארט דרייַעק לויט זייַנע זייַטנ, מוז מענ. זיכ איבערצייַגנ, צי איז ביכלאל מעגלעכ צו קאָנסטרויִרנ א דרייַעק לויט די אָנגאבנ פונ דער אופגאבע.

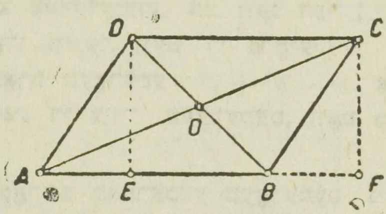
אלזאָ, דער באדינג $13^2>9^2+4^2$ איז א באדינג א נויטווענדיקער פאר דער עקזיסטענצ פונ א סעמפּווינקלדיקנ דרייַעק, אָבער ניט קיינ גענוגנדיקער. ביידע באדינגונגענ צוזאמענ זייַנענ גענוג, מע זאָל קאָנענ זאָגנ, אז דער דרייַעק איז א טעמפּווינקלדיקער.

4. אָפּהענגיקייַט צווישנ די דיִאגאָנאלנ אונ די זייַטנ פונ א פאראלעלאָגראמ.

טעאָרעמע. די סומע פונ די קוואדראטנ פונ די דיִאגאָנאלנ אינ א פאראלעלאָגראמ איז גלייַכ צו דער סומע פונ די קוואדראטנ פונ זייַנע זייַטנ.

ס'איז געגעבנ: $ABCD$ איז א פאראלעלאָגראמ; $AB \parallel CD$ אונ $AD \parallel BC$ (צייכ. 248).

ס'פאָדערט זיכ דערווייַזנ: $AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.



צייכ. 248

דערווייַז. פונ די שפּיצנ D אונ C פונעמ פאראלעלאָגראמ $ABCD$ לאָמיר דורכפירנ הייכנ DE אונ CF; מיר באקומענ גראָדווינקלדיקע דרייַעקנ DAE אונ CBF; די דאָזיקע דרייַעקנ זייַנענ גלייַכ, ווייַל $DA=CB$ אונ $\angle A=\angle CBF$, אונ דעריבער איז $AE=BF$.

פונעמ $\triangle ABC$ האָבנ מיר:

$$AC^2=AB^2+BC^2+2AB\,.\,BF \qquad (1)$$

פונעמ $\triangle ABD$ האָבנ מיר:

$$BD^2=DA^2+AB^2-2AB\,.\,AE \qquad (2)$$

פארבייַטנ מיר אינ דער גלייַכקייַט (2) AB^2 מיט CD^2 אונ AE מיט BF אונ לייגנ צונויפ גלידערווייַז ביידע גלייַכקייַטנ, באקומענ מיר:

$$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$$

5. וויִאזוי רעכנט מענ אויס די מעדיִאנע אונ די הייכ פונ א דרייַעק.

אופגאבע 1. אויסרעכענענ די מעדיִאנע m_a פונ א דרייַעק לויט זייַנע דריי זייַטנ a, b אונ c (צייכ. 249).

לייזונג. אינעמ דרייַעק ABC פירנ מיר דורכ א מעדיִאנע $AD=m_a$ אונ לייגנ אָפּ אויפ איר פאָרזעצונג אנ אָפּשניט DE, וואָס איז גלייַכ צו AD; דעמ פונקט E פאראייניקנ מיר מיט די פונקטנ B אונ C, מיר באקומענ א פאראלעלאָגראמ $ABEC$, וואָס זייַנע זייַטנ זייַנענ גלייַכ b אונ c, אונ די דיִאגאָנאלנ — a אונ $2m_a$.

אפנ גרונט פונ דער אייגנשאפט פונ די דיאגאנאלנ אונ די זײַטנ אינ א פאראלעלאגראמ האבנ מיר:

$$(2m_a)^2+a^2=b^2+b^2+c^2+c^2$$

אדער

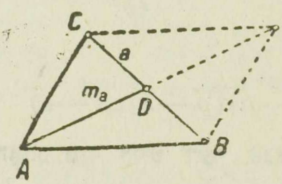
$4m_a^2+a^2=2b^2+2c^2$, אדער $4m_a^2=2b^2+2c^2-a^2$,

דערפונ איז $m_a^2=\dfrac{2b^2+2c^2-a^2}{4}$ אדער $m_a=\dfrac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$.

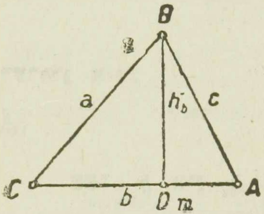
לויט דער אנאלאגיע איז

$m_b=\dfrac{1}{2}\sqrt{2c^2+2a^2-b^2}$ אונ $m_c=\dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2b^2-c^2}$.

אויפגאבע 2. אויסרעכענענ די הייכ h_b פונ א דרײַעק לויט זײַנע דרײַ זײַטנ a, b אונ c (צײכ. 250).



צײכ. 249



צײכ. 250

לייזונג. פונעמ שפיצ B וועלנ מיר דורכפירנ די הייכ פונעמ דרײַעק $BD=h_b$ אונ וועלנ באצייכענענ AD מיט m.

פונעמ $\triangle ABD$ האבנ מיר:

(1) $$h_b^2=c^2-m^2.$$

m דארפ מענ פארבײַטנ מיט אנ אויסדרוק, וואס אנטהאלט a, b אונ c — די זײַטנ פונעמ דרײַעק. פונעמ $\triangle ABC$ האבנ מיר:

$$a^2=b^2+c^2-2bm.$$

דערפונ געפינענ מיר:

(2) $$m=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}.$$

דעמ געפונענעמ באטרעפ (2) פאר m שטעלנ מיר אונטער אינ דער גלײַכקײַט (1) אונ מיר באקומענ:

$$h_b^2=c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}$$ אדער

(3) $$h_b^2=\frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{(2b)^2}$$

ווענ מיר צעגלידערנ דעמ צײלער פונ דער ברוכצאל (3) אפ קײפלערס, באקומענ מיר:

$$h_b^2=\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)\cdot(2bc-b^2-c^2+a^2)}{(2b)^2}$$

אדער

$$h_b^2=\frac{[(b+c)^2-a^2]\cdot[a^2-(b-c)^2]}{(2b)^2}$$

ווען מיר צעגלידערן דערנאָך אָפּ קייפלערס יעטווידן אויסדרוק, וואָס איז איַנגעשלאָסן אין די קוואַדראַטע קלאַמערן, באַקומען מיר:

$$h_b^2 = \frac{(b+c+a).(b+c-a).(a+b-c).(a+c-b)}{(2b)^2} \qquad (4)$$

דעם פּערימעטער פונעם דריַיעק באַצייכענען מיר דורך $2p$, דה.

$a+b+c=2p$, דאַן איז

$$\left.\begin{aligned} b+c&=2p-a, & b+c-a&=2p-2a=2(p-a);\\ a+b&=2p-c, & a+b-c&=2p-2c=2(p-c);\\ a+c&=2p-b, & a+c-b&=2p-2b=2(p-b);\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

פאַרבײַטן מיר די קייפלערס אין דער גלײַכקײַט (4) מיט די באַקומענע אויס־דרוקן (5), האָבן מיר:

$$h^2_b = \frac{2p.2(p-a).2(p-b).2(p-c)}{4b^2},$$

דערפון איז:

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad (6)$$

פאַר h_c און h_a האָבן מיר לויט דער אַנאַלאָגיע:

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a))p-b)(p-c)};$$

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

עס בלײַבט נאָך איבער צו דערווײַזן, אַז קיין איינער פון די קייפלערס $p-a$, $p-b$, $p-c^2$ איז ניט קיין נעגאַטיווער, אַנדערש וואָלט h געווען אַ פיקטיווע צאָל.

אין אַ באַליביקן דרײַעק איז איין זײַט זײַנע קלענער, איידער די סומע פון די צוויי איבעריקע, און דעריבער איז $a<b+c$. גיבן מיר צו צו ביידע טיילן פון דער אומגלײַכקײַט צו a, האָבן מיר $2a<a+b+c$ אָדער $2a<2p$, דערפון איז $a<p$, און דעריבער איז $p-a$ אַ פּאָזיטיווע צאָל; פּונקט אַזוי זײַנען אויך די צאָלן $p-b$ און $p-c$ פּאָזיטיווע צאָלן; דאָס באַטײַט, אַז דער אויסדרוק אונטערן וואָרצל איז אַ פּאָזיטיווע צאָל.

6. ווי אַזוי מע באַשטימט דעם שעטעך פון אַ דרײַעק לויט זײַנע דרײַ זײַטן. העראָנס פאָרמולע.

אויפגאַבע. באַשטימען דעם שעטעך פון אַ דרײַעק ABC לויט זײַנע דרײַ זײַטן a, b און c.

לייזונג. $S_\triangle = \frac{1}{2} a.h_a$, אָבער

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ווו p איז אַ האַלבער פּערימעטער פונעם דרײַעק, הייסט עס:

$$S\triangle = \frac{1}{2} a\cdot\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

נאָך דער פאַרקירצונג באַקומען מיר:

$$\boxed{S_{\triangle}=\sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}}$$ קוו. איינסן.

די דאָזיקע פאָרמולע הייסט הערא̇נס פאָרמולע, אפּן נאָמען פונעם גריכישן מאטעמאטיקער הערא̇ן פון אלעקסאנדריע.

פראגעס און איבונגען.

1. צי קאָן מען קאָנסטרויִרן א גראַדווינקלדיקן דרײַעק פון א באַשטימטער פאָרם, אויב מע זאָל וויסן: א) די לענג נאָר פון זײַן היפּאָטענוזע, ב) די אָפּשניטן, אף וועלכע עס ווערט צעקלאפּט די היפּאָטענוזע דורך דער הייך, וואָס איז דורכגעפירט פונעם שפּיץ גראָדן ווינקל?

2. וואָס פאַר א דרײַעק לויט דער ארט פון זײַנע ווינקלען וועט זיך באַקומען, אויב זײַנע זײַטן האלטן 4 סמ., 5 סמ., 6 סמ.? 10 סמ., 6 כמ., 4 סמ.?

3. אין א גראַדווינקלדיקן דרײַעק איז די הייך h_c גלײַך 8 סמ. און די פּראָיעקציע פון איין קאַטעט אף דער היפּאָטענוזע איז גלײַך 6 סמ. באַשטימען די זײַטן פונעם דרײַעק.

4. צוויי קרעפטן פון 3,2 קג. און 2,4 קג. זײַנען אָנגעווענדט צו איין פונקט און זײַנען געריכטעט אונטער א גראָדן ווינקל איינע צו דער אנדערער. געפינען די גרייס פון זייער רעזולטאנטע.

5. די זײַטן פון א דרײַעק זײַנען גלײַך 8 סמ., 10 סמ. און 11 סמ. אויסרעכענען די מעדיִאנעס און די הייכן.

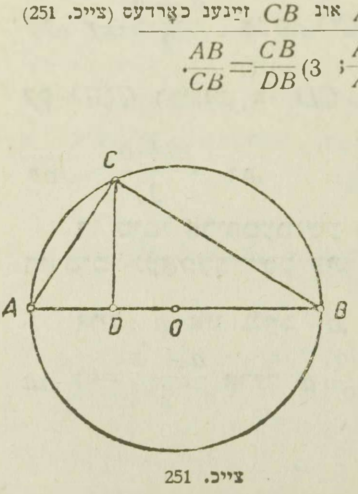
XVIII. פּראָפּאָרציִאָנעלע אָפּשניטן אין א קרײַז.

1. אייגנשאפט פון א פּערפּענדיקוליאַר, וואָס איז דורכגעפירט פון א פונקט אף דער קרײַזליניע צום דיִאמעטער.

1. טעאָרעמע. א פּערפּענדיקוליאַר, וואָס איז דורכגעפירט פון א וואָסער-ניט-איז פונקט אף דער קרײַזליניע צום דיִאמעטער, איז די מיטל-פּראָפּאָרציִאָנעלע צווישן די אָפּשניטן פונעם דיִאמעטער, און יעדערע פון די צוויי כאָרדעס, וואָס פאַרייניקן דעם דאָזיקן פונקט מיט די עקן פונעם דיִאמעטער, איז די מיטל-פּראָפּאָרציִאָנעלע צווישן דעם דיִאמעטער און דער פּראָיעקציע פון דער כאָרדע אפן דיִאמעטער.

ס'איז געגעבן: AB איז א דיִאמעטער; $CD\perp AB$; AC און CB זײַנען כאָרדעס (צייכ. 251)

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: 1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}$.



צייכ. 251

דערווײַז. דער דרײַעק ABC איז א גראָד-ווינקלדיקער, ווײַל דער $\angle C$ שפּאַרט זיך אָן אפן דיִאמעטער; CD איז זײַן הייך, AD און DB זײַנען די פּראָיעקציעס פון די כאָרדעס (פון די קאַטעטן) אפן דיִאמעטער (אף דער היפּאָטענוזע), דעריבער איז:

1) $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$; 2) $\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$; 3) $\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{BD}$.

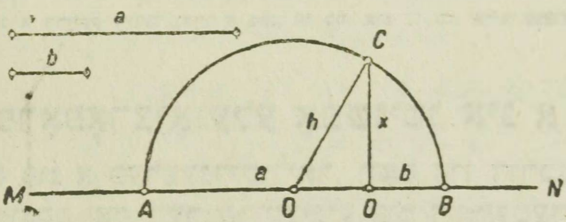
2. אויפגאַבע 1. קאָנסטרויִרן אן אָפּשניט x, א מיטל-פּראָפּאָרציִאָנעלן צווישן צוויי געגעבענע אָפּשניטן a און b (צייכ. 252).

קאָנסטרויִרונג. אפּ א גראָדער MN לייגן מיר אָפּ אין א נאָכאַנאַנדיקן סיידער פון א געוויסן פונקט A אן אָפּשניט AD, וואָס איז גלייַך a, און אן אָפּשניט DB, וואָס איז גלייַך b. אָנעמענדיק AB פאַר א דיאַמעטער, פירן מיר דורך א האַלב-קרייַזליניע און אינעם פונקט D פירן מיר דורך א פּערפּענדיקו־ליאַר צו AB ביז זייַן איבערשנייַדן זיך אינעם פונקט C מיט דער קרייַזליניע, דאַן וועט $CD=x$ זייַן דער געזוכטער אָפּשניט.

ווייַל $a:x=x:b$ אָדער $x^2=ab$ און $x=\sqrt{ab}$.

אויפגאַבע 2. דערווייַזן, אַז די מיטל־אַריפמעטישע פון צוויי ניט־גלייַכע צאָלן a און b איז גרעסער איידער די מיטל-געאָמעטרישע פון די זעלבע צאָלן.

לייזונג. לאָמיר זאָגן, אַז צוויי ניט קיין גלייַכע אָפּשניטן אַנטשפּרעכן די צאָלן a און b (צייכ. 252). לאָמיר קאָנסטרויִרן די מיטל־פּראָפּאָרציאָנעלע פון די צאָלן a און b; $CD=\sqrt{ab}$.



צייכ. 252

די מיטל-אַריפמעטישע אָבער פון די צאָלן a און b, דה. $\frac{a+b}{2}$, איז גלייַך, ווי דאָס איז צו זען פון דער צייכענונג, $r=AO=\frac{AD+DB}{2}$. הייסט עס, $r=\frac{a+b}{2}$. אָבער CO איז דאָך אויך גלייַך r. פונעם גראָדווינקלדיקן דרייַעק COD דרינגט, אַז $CO>CD$, את $CO=\frac{a+b}{2}$ און $CD=\sqrt{ab}$, דעריבער איז $\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$, דה.

די מיטל-אַריפמעטישע פון צוויי נים-גלייַכע צאָלן איז גרעסער, איידער די מיטל-געאָמעטרישע פון די זעלבע צאָלן.

אויב b איז גלייַך a, איז אויך CD גלייַך צו CO, חייַף דאַן איז $\frac{a+a}{2}=\sqrt{aa}$ אָדער $a=a$.

2. אײַגנשאַפט פון אָפּשניטן פון כאָרדעס, וועלכע שנײַדן זיך איבער.

טעאָרעמע. אויב אין דער געגעבענער קרײַזליניע זײַנען געגעבן צוויי אָדער עטלעכע כאָרדעס, וואָס שנײַדן זיך איבער אין איין פונקט, איז דער פּראָדוקט פון די אָפּשניטן פון א באליביקער כאָרדע א קאָנסטאַנטע (באַשטענדיקע גרייס), וועלכע איז גלײַך צום פּראָדוקט פון די אָפּשניטן פונעם דיִאַמעטער, וואָס גייט דורך אין דער געגעבענער קרײַזליניע דורך דעם זעלביקן פונקט.

ס׳איז געגעבן: AB און CD זײַנען כאָרדעס; EF איז דער דיִאַמעטער; P איז זייער איבערשנײַד־פונקט (צייכ. 253).

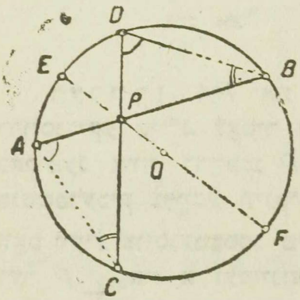
ס׳פּאָדערט זיך דערווײַזן: $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD = PE \,.\, PF$.

דערווײַז. לאָמיר דורכפירן באַהילפיקע כאָרדעס AC און BD, מיר באַקומען צוויי דרײַעקן APC און BPD. די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען גלײַכווינקלדיקע: $\angle A = \angle D$ און $\angle C = \angle B$ אלס אַרײַנגעשריבענע ווינקלען, וואָס ווערן אויסגעמאָסטן מיט איין און די זעלבע בויגנס; הייסט עס, די דרײַעקן זײַנען ענלעך; פון זייער ענלעכקײַט דרינגט, אז

$PA : PC = PD : PB$ אָדער $PA \,.\, PB = PC \,.\, PD$.

ווען מיר באַטראַכטן די כאָרדע AB און דעם דיִאַמעטער EF אלס צוויי כאָרדעס, וועלכע שנײַדן זיך איבער, באַקומען מיר אויפן גרונט פון דעם, וואָס מיר האָבן נאָרוואָס דערוויזן:

$$PA \,.\, PB = PE \,.\, PF$$



צייכ. 253

דאָס זעלבע איז גילטיק בנוגע צו יעטווידער כאָרדע, וואָס גייט דורכן פונקט P, און דעריבער איז ווען מע פירט דורך אין א געגעבענעם קרײַז כאָרדעס, וועלכע שנײַדן זיך איבער אין איין און דעם זעלבן פונקט, וועט דער פּראָדוקט פון די אָפּשניטן פון יעטווידער כאָרדע זײַן א קאָנסטאַנטע; זי איז גלײַך צום פּראָדוקט פון די אָפּשניטן פונעם דיִאַמעטער, וועלכער גייט דורך אין דער געגעבענער קרײַזליניע דורך דעם זעלבן פונקט.

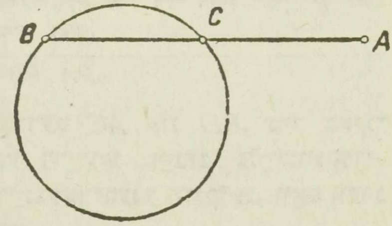
3. אייגנשאַפט פון סעקאַנטע, וואָס שנײַדן זיך איבער דרויסן דעם קרײַז.

1. פון א דרויסנדיקן פונקט A איז דורכגעפירט א סעקאַנטע AB (צייכ. 254). דער טייל פון דער סעקאַנטע, וואָס ליגט אינווייניק אין דער קרײַזליניע, איז די כאָרדע BC; איר פאָרזעצונג CA אף יענער זײַט קרײַזליניע ביזן געגעבענעם דרויסנדיקן פונקט A הייסט דרויסנדיקער טייל פון דער סעקאַנטע. די סומע פוןביידע אָפּשניטן $BC + CA = AB$ נעמט מען אָן פאַר דער לענג פון דער סעקאַנטע.

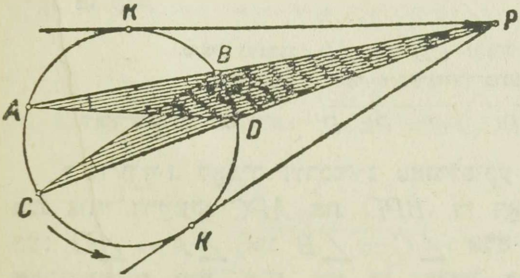
2. טעאָרעמע. אויב פונ איינ אונ דעם זעלבנ פונקט דרויסנ דעם קרײַז זײַנענ דורכגעפירט סעקאנטע אונ א טאנגענטע, איז דער פּראָדוקט פונ יעטווידער סעקאנטע אפ איר דרויסנדיקנ טייל א קאָנסטאנטע אונ איז גלײַכ צומ קוואדראט פונ דער טאנגענטע.

ס'איז געגעבנ: PA אונ PC זײַנענ סעקאנטע; PK איז א טאנגענטע; P איז זייער איבערשנײַד-פונקט (צײכ. 255).

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $PA \cdot PB = PC \cdot PD = PK^2$.



צײכ. 254



צײכ. 255

דערווײַז. PA אונ PC זײַנענ סעקאנטע, PB אונ PD זײַנענ זייערע דרויסנדיקע טיילנ. לאָמיר דורכפירנ באהילפיקע כאָרדעס AD אונ BC, מיר וועלנ באקומענ צוויי דרײַעקנ ADP אונ BCP. די דאָזיקע דרײַעקנ האָבנ צו צוויי אנטשפרעכיק גלײַכע ווינקלענ, $\angle A$ אונ $\angle C$ זײַנענ ארײַנגעשריבענע ווינקלענ, וואָס ווערנ אויסגעמאָסטנ מיט א העלפט פונ איינ אונ דעם זעלבנ בויגנ BD, אונ דער $\angle P$ איז א געמיינזאמער, הייסט עס, זיי זײַנענ גלײַכווינקלדיקע, אונ דעריבער ענלעכע. פונ זייער ענלעכקײַט דרינגט, אז

$$\frac{PA}{PD}=\frac{PC}{PB} \text{ אָדער } PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

אויב מע זאָל די סעקאנטע PC דרייענ ארומ דעמ פונקט P אזוי, אז זי זאָל פארנעמענ די לאגע פונ דער טאנגענטע PK, וועלנ די איבערשנײַד-פונקטנ פונ דער סעקאנטע מיט דער קרײַזליניע, C אונ D, זיכ דערנענטערנ; די סעקאנטע PC וועט ווערנ קלענער אונ דער דרויסנדיקער טייל אירער PD וועט ווערנ גרעסער; אינעמ באריר-פונקט K וועט אי די סעקאנטע אי איר דרויסנדיקער טייל זײַנ גלײַכ צו דער טאנגענטע PK, אונ דעריבער, ווענ מיר פארבײַטנ אינ דער גלײַכקײַט $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ יעטווידנ פונ די אָפּשניטנ PC אונ PD מיטנ אָפּשניט PK, באקומענ מיר: $PA \cdot PB = PK \cdot PK$ אָדער $PA \cdot PB = PK^2$.

אלזאָ:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = PK^2$$

דאָס זעלבע איז גילטיק פאר יעטווידער סעקאנטע, וואָס איז דורכגעפירט פונעמ פונקט P, דעריבער איז דער פּראָדוקט פונ א סעקאנטע אפ איר דרויסנדיקנ טייל א קאָנסטאנטע פאר אלע סעקאנטעס, וואָס זײַנענ דורכגעפירט פונ איינ

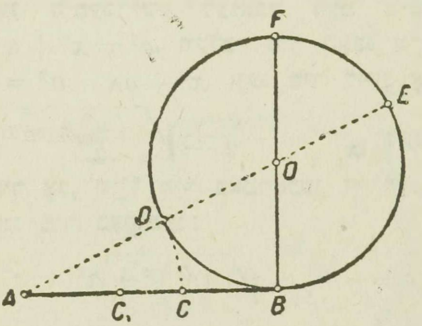
און דעם זעלבן פונקט דרויסן דעם געגעבענעם קרײַז; די דאָזיקע קאָנסטאַנטע איז גלײַך צום קוואַדראַט פון דער טאַנגענטע, וואָס איז דורכגעפירט פון דעם זעלבן פונקט.

3. קאָנסעקווענץ. אויב פון איין און דעם זעלבן פונקט דרויסן א קרײַז זײַנען דורכגעפירט א טאַנגענטע און א סעקאַנטע, איז די טאַנגענטע די מיטל-פּראָפּאָרציאָנעלע צווישן דער גאַנצער סעקאַנטע און איר דרויסנדיקן טייל.

ווירקלעך, $PA \cdot PB = PK^2$, הייסט עס, $PA : PK = PK : PB$.

4. וויאַזוי צעטיילט מען אַן אָפּשניט אין דער עקסטער און מיטלסטער פאַרהעלטעניש.

1. צעטיילן אַן אָפּשניט אין דער עקסטער און מיטלסטער פאַרהעלטעניש — הייסט געפינען א פונקט אויפן אָפּשניט, אין וועלכן דער אָפּשניט זאָל זיך צעטיילן אויף צוויי כאַלאָקים אַזוי, אַז דער גרעסערער טייל זאָל זײַן די מיטל-פּראָפּאָרציאָנעלע צווישן גאַנצן אָפּשניט און זײַן קלענערן טייל.



צײכ. 256

2. אויפגאַבע. צעטיילן דעם געגעבענעם אָפּשניט אין דער עקסטער און מיטלסטער פאַרהעלטעניש.

לייזונג. איז $AB = a$ דער געגעבענער אָפּשניט. לאָמיר זאָגן, אַז C איז דער געזוכטער פונקט (צײכ. 256). מירן באַצייכענען דעם גרעסערן טייל פון AC מיט x, דאַן וועט דער קלענערער טייל זײַן $CB = a - x$. אין העסקעם מיטן באַדינג פון דער אויפגאַבע איז $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$ אָדער $x^2 = a(a-x)$ אָדער $x^2 = a^2 - ax$.

לאָמיר איבערשרײַבן אָט די גלײַכקײַט אַזאַ אויפן: $a^2 = x^2 + ax$, דערפון איז $a^2 = x(a+x)$.

לאָמיר אָננעמען, אַז $AB = a$ איז א טאַנגענטע צו א געוויסער קרײַזליניע, $a + x$ איז א סעקאַנטע און x איז איר דרויסנדיקער טייל; כוץ דעם וועלן מיר נאָך אָננעמען, אַז די סעקאַנטע גייט דורכן צענטער, דאַן וועט a זײַן דער דיאַמעטער פון דער קרײַזליניע.

קאָנסטרוירונג. אָננעמענדיק, אַז $AB = a$ איז א טאַנגענטע און דער פונקט B איז דער באַריר-פונקט, פירן מיר דורך אינעם פונקט B א פּערפּענדיקוליאַר צו AB און לייגן אַף אים אָפּ אַן אָפּשניט BF, וואָס איז גלײַך צו a — צום דיאַמעטער פון דער קרײַזליניע. ווען מיר צעטיילן BF אָפּדערהעלפט,

געפינענ מיר דעם צענטער O און פירנ דורכ א קרײַזליניע מיטנ ראַדיוס, וואָס איז גלײַכ OB, דערנאָכ פירנ מיר דורכ דורכנ צענטער O א סעקאַנטע AE; דאַנ איז דער דרויסנדיקער טייל AD פונ דער סעקאַנטע גלײַכ x, $AD = x$. לייגנ מיר אָפּ אפ AB אנ אָפּשניט AC, וואָס איז גלײַכ AD, באַקומענ מיר אפנ אָפּשניט AB דעם געזוכטנ פונקט C, וועלכער טיילט דעם אָפּשניט אינ דער עקסטער און מיטלסטער פאַרהעלטעניש.

ווירקלעכ, $AE \cdot AD = AB^2$. אָבער $AE = a + x$, $AD = x$ און $AB = a$, און דעריבער איז $(a + x)\, x = a^2$ אָדער $ax + x^2 = a^2$, דערפונ איז $x^2 = a^2 - ax = a\,(a - x)$, דה. $a : x = x : (a - x)$.

ווענ מע זאָל קאָנסטרויִרנ א באַהילפיקע קרײַזליניע, וואָס באַרירט דעם אָפּשניט AB אינעם צווייטנ עק זײַנעם A, וועט אפנ אָפּשניט AB זיכ באַקומענ נאָכ איינ פונקט C_1, וועלכער וועט צעטיילנ דעם געגעבענעם אָפּשניט AB אינ דער עקסטער און מיטלסטער פאַרהעלטעניש.

אַלזאָ, אפנ אָפּשניט AB זײַנענ פאַראַנ צוויי פונקטנ, וואָס טיילנ אים אינ דער עקסטער און מיטלסטער פאַרהעלטעניש. די דאָזיקע פונקטנ C און C_1 זײַנענ סימעטרישע לעגאַבע דעם מיטנ פונעם אָפּשניט AB. די גלײַכקײַט $a^2 = x^2 + ax$, וועלכע מיר האָבנ פריִער באַקומענ, קאָנ מענ איבערשרײַבנ אַזוי: $x^2 + ax - a^2 = 0$. ווענ מיר לייזנ אָט די גלײַכונג בענוגע x, באַקומענ מיר: $x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$. דעם נעגאַטיווג וואָרצל פונ דער גלײַכונג וואַרפנ מיר אָפּ, ווײַל מיר באַטראַכטנ די לענג פונעם אָפּשניט x און ניט זײַנ ריכטונג, און מיר באַקומענ:

$$x = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} - \frac{a}{2} \quad \text{אָדער} \quad x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2}$$

הייסט עס, דער אָפּשניט x איז די דיפערענצ צווישנ דער היפּאָטענוזע פונ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק, וואָס זײַנע קאַטעטנ זײַנענ $\frac{a}{2}$ און a (דער דרײַעק ABO), און א העלפט פונעם אָפּשניט a (דער אָפּשניט OD), דה.

$x = AO - OD = AD = AC$ (צייכ. 256).

ביידנ מיר איבער דעם אויסדרוק, וואָס מיר האָבנ געפונענ פאַר x, באַקומענ מיר:

$$x = \frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = a \cdot \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

אָדער $x \approx 0{,}62\, a$, הייסט עס, $AC : CB \approx 5 : 3$.

פראַגעס און איבונגענ.

1. דער דיִאַמעטער פונ א קרײַזליניע טיילט זיכ אינעם פונקט P אפ כאַלאָקימ, וואָס זײַנענ גלײַכ 4 סמ. און 6 סמ. פאַרוואָס קאָנ מענ ניט דורכפירנ דורכנ זעלבנ פונקט א כאָרדע, וואָס איינ טייל אירער זאָל זײַנ גלײַכ 3 סמ.?

2. צוויי כאָרדעס שנײַדנ זיכ איבער. די אָפּשניטנ פונ איינער זײַנענ גלײַכ 6 סמ. און 25 סמ. די אָפּשניטנ פונ דער צווייטער כאָרדע פאַרהאַלטנ זיכ ווי 2 : 1. געפינענ די לענג פונ דער צווייטער כאָרדע.

3. א כאָרדע האַלט 5 סמ. אַף וויפֿל דאַרף מען זי פֿאַרלענגערן, אַז די טאַנגענטע, וואָס איז דורכגעפֿירט פֿונעם עק פֿאַרלענגערטן אָפּשניט, זאָל האַלטן 6 סמ.?

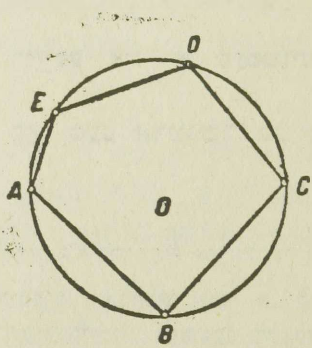
4. אין א קרײַז, וואָס זײַן ראַדיוס איז R, איז דורכגעפֿירט א כאָרדע פּערפּענדיקולער צום ראַדיוס אין זײַן מיטן. געפֿינען די לענג פֿון דער כאָרדע און באַשטימען, וואָס פֿאַר א טייל פֿון דער קרײַזליניע מאַכט אויס דער בויגן, וואָס די כאָרדע ציט צונויף.

XIX. אַרײַנגעשריבענע און אַרומגעשריבענע פֿילעקן.

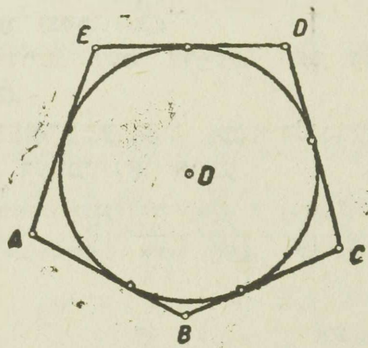
1. אַרײַנגעשריבענער און אַרומגעשריבענער דרײַעקן.

1. א פֿילעק, וואָס אַלע זײַנע שפּיצן ליגן אַף א קרײַזליניע, הייסט אַרײַנגעשריבענער פֿילעק, די קרײַזליניע גופֿא הייסט אַרומגעשריבענע. $ABCDE$ איז אַן אַרײַנגעשריבענער פֿינפֿעק (צייכ. 257). זײַנע זײַטן — AB, BC, CD... זײַנען כאָרדעס פֿון דער געגעבענער קרײַזליניע.

א פֿילעק, וואָס אַלע זײַנע זײַטן באַרירן די קרײַזליניע, הייסט אַרומגעשריבענער פֿילעק, די קרײַזליניע אַליין הייסט אַרײַנגעשריבענע. $ABCDE$ (צייכ. 258) איז אַן אַרומגעשריבענער פֿינפֿעק. זײַנע זײַטן — AB, BC, CD... — זײַנען טאַנגענטע צו דער קרײַזליניע.



צייכ. 257



צייכ. 258

2. **טעאָרעמע.** דורך די דרײַ שפּיצן פֿון יעטווידן דרײַעק קאָן מען דורכפֿירן א קרײַזליניע און דערבײַ נאָר איינע.

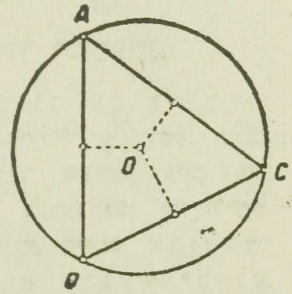
דורך דרײַ פּונקטן A, B און C, די שפּיצן פֿונעם דרײַעק ABC, וואָס ליגן ניט אַף איין גראָדער, קאָן מען דורכפֿירן א קרײַזליניע און דערבײַ נאָר איינע.

דער צענטער פֿון דער אַרומגעשריבענער קרײַזליניע ליגט אַף דער איבערשנײַדונג פֿון די פּערפּענדיקולאַרן, וואָס זײַנען דורכגעפֿירט דורך די מיטנס פֿון צוויי באַליביקע זײַטן פֿונעם דרײַעק. דער פּערפּענדיקולאַר, וואָס איז דורכגעפֿירט צו דער דריטער זײַט דורך איר מיטן, גייט אויך דורכן צענטער פֿון דער אַרומגעשריבענער קרײַזליניע.

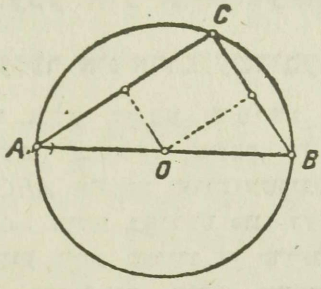
קאָנסעקווענץ. די פּערפּענדיקולארן, וואָס זײַנען דורכגעפירט צו די זײַטן פון א דרײַעק דורך זייערע מיטנס, שנײַדן זיך איבער אין איין פּונקט — אינעם צענטער פון דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע.

דער צענטער פון אן ארומגעשריבענער קרײַזליניע ליגט:

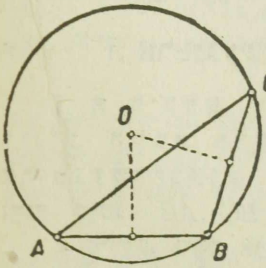
1) אינווייניק אינעם דרײַעק, ווען דער דרײַעק איז א שארפווינקלדיקער (צייכ. 259);



צייכ. 259



צייכ. 260



צייכ. 261

2) אפ דער היפּאָטענוזע, אין איר מיטן, ווען דער דרײַעק איז א גראַד-ווינקלדיקער (צייכ. 260);

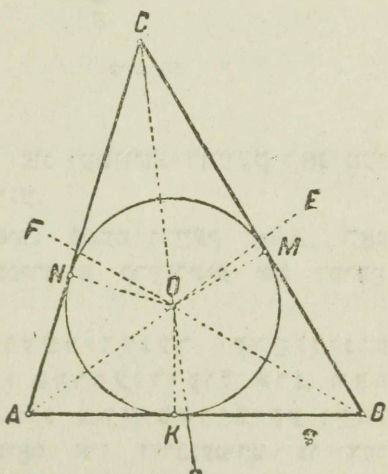
3) דרויסן דעם דרײַעק, ווען דער דרײַעק איז א טעמפּווינקלדיקער (צייכ. 261).

3. טעאָרעמע. אין יעטווידן דרײַעק קאָן מען ארײַנשרײַבן א קרײַז-ליניע און דערבײַ נאָר איינע.

ס׳איז געגעבן: דער $\triangle ABC$ (צייכ. 262).

ס׳פאָדערט זיך דערווײַזן: אינעם $\triangle ABC$ קאָן מען ארײַנשרײַבן א קרײַזליניע און דערבײַ נאָר איינע.

דערווײַז. ארײַנשרײַבן א קרײַזליניע אין א דרײַעק הייסט געפינען די לאגע פון איר צענטער און די לענג פון איר ראדיוס. די זײַטן פונעם דרײַעק ABC זײַנען טאנ-גענטע צו דער געזוכטער קרײַזליניע, טאנ-גענטע אָבער צו איין און דער זעלבער קרײַזליניע שטייען אָפּ פון איר צענטער אפּ אן אָפּשטאנד, וואָס איז גלײַך צום ראדיוס; דעריבער איז, קעדיי צו געפינען דעם צענ-טער פון אן ארײַנגעשריבענער קרײַזליניע, דארף מען געפינען א פּונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון די זײַטן פונעם דרײַעק.



צייכ. 262

דער פּונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פון די זײַטן פונעם דרײַעק, איז דער פּונקט O, ווו עס שנײַדן זיך איבער צווײ באַליביקע ביסעקטריסעס פונעם דרײַעק.

דער פונקט O איז דער צענטער פון דער קרײַזליניע, וואָס איז אַרײַנגעשריבן אינעם דרײַעק; דער ראַדיוס פון דער דאָזיקער קרײַזליניע איז יעטווידער פון די פּערפּענדיקולאַרן — OK, OM אָדער ON, וואָס זײַנען דורכגעפירט פונעם צענטער צו די זײַטן פונעם דרײַעק. די זײַטן פונעם דרײַעק, וואָס זײַנען פּערפּענדיקולער צו די ראַדיוסן OK, OM און ON און וואָס גייען דורך דורך זייערע עקן K, M און N, וועלכע ליגן אָפּ דער קרײַזליניע, זײַנען טאַנגענטע צו דער קרײַזליניע.

אַ צווייטע קרײַזליניע, אַן אַרײַנגעשריבענע אין דעם זעלבן דרײַעק, קאָן ניט געמאָלט זײַן, ווײַל די ביסעקטריסעס פון צוויי ווינקלען זײַנע שנײַדן זיך איבער בלויז אין איין פונקט.

דער פונקט O, וועלכער איז גלײַכווײַט פון די זײַטן BC און AC, ליגט אויך אָפּ דער ביסעקטריסע פונעם $\angle C$.

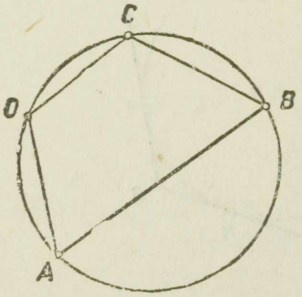
4. ס'איז באַוווסט, אַז אַכוץ דעם פונקט O זײַנען פאַראַן נאָך דרײַ פונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פון די זײַטן פונעם דרײַעק; זיי ליגן דרויסן דעם דרײַעק. די דאָזיקע פונקטן זײַנען די צענטערס פון דרײַ קרײַזליניעס, וואָס יעדערע באַרירט איין זײַט פונעם דרײַעק אין די פאַרזעצונגען פון די צוויי איבעריקע זײַטן. אַזעלכע קרײַזליניעס הייסן דרויסן־אַרײַנגעשריבענע (צייכ. 215). אַלזאָ, בנוגע צו אַ דרײַעק האָבן מיר: 1) איין אַרומגעשריבענע קרײַזליניע, וואָס גייט דורך דורך אַלע דרײַ שפּיצן פונעם דרײַעק, 2) איין אַרײַנגעשריבענע קרײַזליניע, וואָס באַרירט אַלע דרײַ זײַטן פונעם דרײַעק, און 3) דרײַ דרויסן-אַרײַנגעשריבענע קרײַזליניעס.

2. אײַגנשאַפטן פון די ווינקלען באַ אַן אַרײַנגעשריבענעם פירעק.

1. טעאָרעמע. אין יעטווידן אַרײַנגעשריבענעם פירעק איז די סומע פון די אַנטקעגנליגנדיקע ווינקלען גלײַך צו צוויי גראַדע ווינקלען, דאָס הייסט, צו $2d$.

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז אַן אַרײַנגעשריבענער פירעק (צייכ. 263).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $\angle A+\angle C=2d$ און $\angle B+\angle D=2d$.



צייכ. 263

דערווײַז. דער $\angle A$, אַלס אַן אַרײַנגעשריבענער, ווערט אויסגעמאָסטן מיטן $\frac{\smile DCB}{2}$ און דער $\angle C$ ווערט אויסגעמאָסטן מיטן $\frac{\smile BAD}{2}$, הייסט עס, די סומע פון די ווינקלען A און C ווערט אויסגעמאָסטן מיט דער סומע

$$\frac{\smile DCB}{2}+\frac{\smile BAD}{2}$$

אָדער $\frac{\smile DCB+\smile BAD}{2}$, דה. מיט אַ האַלבער קרײַזליניע, און דעריבער איז $\angle A+\angle C=180^\circ$ אָדער $2d$.

אַפּן זעלבן אופן ווערט דערוויזן, אַז $\angle B+\angle D=2d$.

2. טעאָרעמע (פאַרקערטע). אויב אין א פירעק איז די סומע פון די אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען גלייַך $2d$, קאָן מען דורך זייַנע שפּיצן דורכפירן א קרייַזליניע.

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז א פירעק (צייכ. 263);
$\angle A + \angle C = 2d$ און $\angle B + \angle D = 2d$.

ס'פאָדערט זיך דערווייַזן: דורך די שפּיצן A, B, C און D פונעם פירעק $ABCD$ קאָן מען דורכפירן א קרייַזליניע.

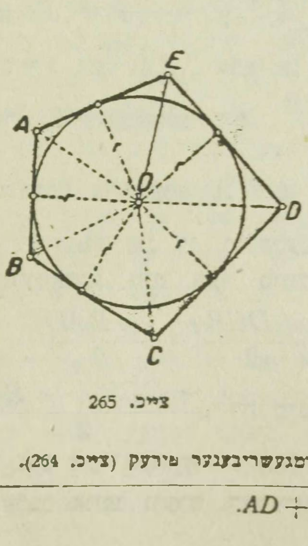
דערווייַז. דורך דרייַ שפּיצן A, B און C פונעם פירעק $ABCD$ פירן מיר דורך א קרייַזליניע. מיר וועלן דערווייַזן, אז די דאָזיקע קרייַזליניע וועט אויך דורכגיין דורכן שפּיץ D. אינדערעמעסן, ווען מיר זאָלן זאָגן, אז דער פונקט D ליגט ניט אפ דער קרייַזליניע, נאָר אינווייניק אָדער דרויסן דער קרייַזליניע, ווערט דער ווינקל D ניט אויסגעמאָסטן מיט א העלפט פונעם בויגן ABC און, דאָס הייסט, אז די סומע פון די ווינקלען B און D וואָלט ניט געווען גלייַך $180°$ אָדער $2d$, אָבער דאָס ווידערשפּרעכט דעם באַדינג, און דעריבער מוז דער פונקט D ליגן אפ דער קרייַזליניע, און דאָס באַטייַט, אז די קרייַזליניע, וואָס גייט דורך די פונקטן A, B און C, גייט אויך דורך דורכן פונקט D. דער פירעק $ABCD$ איז אן ארייַנגעשריבענער פירעק.

3. קאָנסעקווענץ. ארייַנגעשריבענע קאָנען זייַן: א גראַדעק, א קוואַדראַט און א גלייַכזייַטיקע טראַפּעציע, ווייַל די סומע פון זייערע אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען איז גלייַך $2d$.

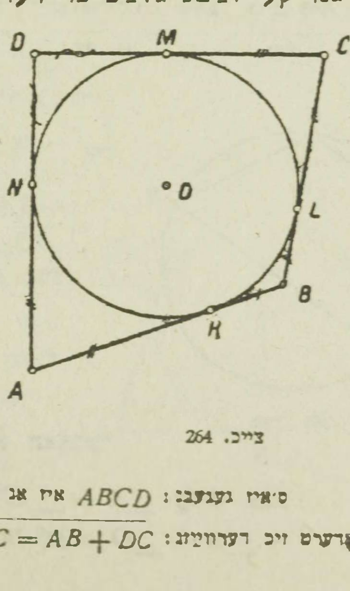
א פּאַראַלעלאָגראַם און א ראָמב קאָנען ניט זייַן קיין ארייַנגעשריבענע, מאַכמעס די סומע פון זייערע אנטקעגנליגנדיקע ווינקלען איז ניט גלייַך $2d$.

3. אייגנשאַפטן פון די זייַטן בא אן ארומגעשריבענעם פירעק.

1. טעאָרעמע. בא אן ארומגעשריבענעם פירעק איז די סומע פון צוויי אנטקעגנליגנדיקע זייַטן גלייַך צו דער סומע פון די צוויי איבעריקע זייַטן.



צייכ. 265



צייכ. 264

ס'איז געגעבן: $ABCD$ איז אן ארומגעשריבענער פירעק (צייכ. 264).

ס'פאָדערט זיך דערווייַזן: $AD + BC = AB + DC$.

דערווײַז. די זײַטן פֿון אַן אַרומגעשריבענעם פֿירעק זײַנען טאַנגענטע צו דער קרײַזליניע. צוויי טאַנגענטע, דורכגעפֿירטע פֿון איין און דעם זעלבן פּונקט צו אַ קרײַזליניע, זײַנען גלײַך, דעריבער איז

$$AN=AK,\ BL=BK,\ CL=CM,\ DN=DM$$

ווען מיר לייגן צונויף גלידערווײַז די דאָזיקע גלײַכקייטן, באַקומען מיר:

$$AN+DN+BL+CL=AK+BK+CM+DM$$

אָדער

$$AD+BC=AB+DC$$

2. אַרײַנשרײַבן אַ קרײַזליניע קאָן מען אין אַ פֿירעק, וואָס די סומע פֿון זײַנע אַנטקעגנליגנדיקע זײַטן איז גלײַך צו דער סומע פֿון זײַנע צוויי איבעריקע זײַטן.

פֿון אַלע פּאַראַלעלאָגראַמען קאָן מען אַרײַנשרײַבן אַ קרײַזליניע בלויז אין אַ ראָמב און אין אַ קוואַדראַט.

4. שעטעך פֿון אַן אַרומגעשריבענעם פֿילעק און פֿון אַ דרײַעק.

1. **טעאָרעמע.** דער שעטעך פֿון אַן אַרומגעשריבענעם פֿילעק איז גלײַך צו אַ האַלבן פּראָדוקט פֿון זײַן פּערימעטער אויפֿן ראַדיוס פֿון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

ס'איז געגעבן: $ABCDE$ איז אַן אַרומגעשריבענער n-עק;
r איז דער ראַדיוס פֿון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע;
P_n איז דער פּערימעטער פֿונעם n-עק (צייכ. 265).

ס'פֿאָדערט זיך דערווײַזן: דער שעטעך זײַנער איז $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot r$.

דערווײַז. ווען מיר פֿאַרבינדן דעם צענטער O פֿון דער קרײַזליניע מיט די שפּיצן פֿונעם פֿילעק $ABCDE$, צעקלאַפּן מיר דעם פֿילעק אויף n דרײַעקן.

$$S_{AOB}=\frac{1}{2}AB\cdot r\ ;\ S_{BOC}=\frac{1}{2}BC\cdot r$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+\dots=\frac{1}{2}r\,(AB+BC+\dots)$$

הייסט עס, $S_n=\frac{1}{2}r\cdot P_n$ אָדער $S_n=\frac{1}{2}P_n\cdot r$.

2. **קאָנסעקווענץ.** דער שעטעך פֿון אַן אַרומגעשריבענעם דרײַעק איז $S_\triangle=p\cdot r$, וווּ p איז אַ האַלבער פּערימעטער פֿונעם דרײַעק.

3. אויפֿגאַבע. די זײַטן פֿון אַ דרײַעק זײַנען a, b און c. באַשטימען דעם ראַדיוס r פֿון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

לייזונג. $S_\triangle=p\cdot r$, הייסט עס, $r=\frac{S\triangle}{p}$, אָבער לויט העראָנס פֿאָרמולע איז $S\triangle=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$,

און דעריבער איז

$$r=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

פראגעס און איבונגען.

1. פאַרוואָס קאָן מען ניט דורכפירן קיין קרײַזליניע דורך אַלע שפּיצן פון א פירעק, וואָס זײַנע ווינקלען פאַרהאַלטן זיך לויטן סיידער ווי $5:4:3:2$?

2. פאַרוואָס קאָן מען ניט אַרײַנשרײַבן קיין קרײַזליניע אין א פירעק, בא וועלכן די זײַטן פאַרהאַלטן זיך לויטן סיידער ווי $4:3:2:1$?

3. קאָנסטרויִרן א דרײַעק ABC, ווען ס׳זײַנען געגעבן: די זײַטן b און c און R — דער ראַדיוס פון דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע.

4. קאָנסטרויִרן א דרײַעק ABC, ווען ס׳זײַנען געגעבן: די זײַט a, דער $\angle B$ און R — דער ראַדיוס פון דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע.

5. קאָנסטרויִרן א דרײַעק ABC, ווען ס׳זײַנען געגעבן: די זײַט c, דער $\angle A$ און r — דער ראַדיוס פון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

6. קאָנסטרויִרן א דרײַעק ABC, ווען ס׳זײַנען געגעבן: $\angle A$ און $\angle B$ און r — דער ראַדיוס פון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

7. קאָנסטרויִרן א גלײַכאַקסלדיקן דרײַעק לויט זײַן באַזיס a און דעם ראַדיוס R פון דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע.

8. קאָנסטרויִרן א ראָמב לויט דער זײַט a און דעם ראַדיוס r פון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

9. דרײַ זײַטן פון אַן ארומגעשריבענעם פירעק, גענומענע אין נאָכאַנאַנדיקן סיידער, זײַנען גלײַך 6 סמ., 4 סמ., 5 סמ. באַשטימען די פערטע זײַט זײַנע.

10. אין א באַליביקן דרײַעק איז $a\cdot b=2Rh_c$, ווו R איז דער ראַדיוס פון דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע. דערווײַזן עס.

11. באַנוצן זיך מיט דער פאָרמולע $ab=2Rh_c$ און באַווײַזן, אַז

$R=\frac{abc}{4S}$ אָדער $S=\frac{abc}{4R}$, ווו S איז דער שעטעך פונעם דרײַעק.

XX. רעגולמעסיקע פילעקן.

1. רעגולמעסיקע פילעקן.

1. א פילעק, בא וועלכן: 1) אַלע זײַטן זײַנען גלײַך און 2) אַלע ווינקלען זײַנען גלײַך, הייסט רעגולמעסיקער.

א גלײַכזײַטיקער דרײַעק און א קוואַדראַט זײַנען מוסטערן פון רעגולמעסיקע פילעקן. א גראָדעק אָדער א ראָמב קאָן מען ניט אָנרופן רעגולמעסיקער פילעק; בא א גראָדעק זײַנען אַלע ווינקלען גלײַך, די זײַטן אָבער זײַנען ניט גלײַך, בא א ראָמב זײַנען אַלע זײַטן גלײַך, אָבער די ווינקלען זײַנען ניט גלײַך.

2. די סומע פון די אינווייניקסטע ווינקלען בא אַן n-עק איז גלײַך $2d(n-2)$, הייסט עס, יעדער אינווייניקסטער ווינקל פון א רעגולמעסיקן n-עק איז גלײַך $\frac{2d(n-2)}{n}$. די סומע פון די דרויסנדיקע ווינקלען בא א באַליביקן פילעק איז גלײַך $4d$, און דעריבער איז יעדער דרויסנדיקער ווינקל בא א רעגולמעסיקן n-עק גלײַך $\frac{4d}{n}$.

דעם אינווייניקסטן ווינקל בא א רעגלמעסיקן n-עק קאָן מען אויסרעכענען לויט זײַן שכײַנישן דרויסנדיקן ווינקל: דער אינווייניקסטער ווינקל איז גלײַך

$$2d - \frac{4d}{n} = 2d\left[1 - \frac{2}{n}\right].$$

3. אויב די זײַט פון א רעגלמעסיקן n-עק איז גלײַך a, איז זײַן פּערימע-טער P גלײַך an, $P = an$.

פּילעקן מיט איין און דער זעלבער צאָל זײַטן הייסן **איינאָמענדיקע**. רעגלמעסיקע איינאָמענדיקע פּילעקן זײַנען גלײַך, אויב עס זײַנען גלײַך זייערע זײַטן.

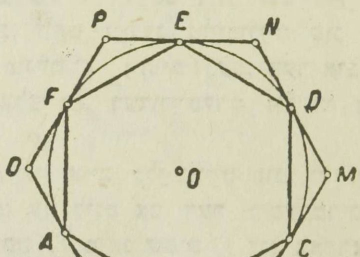
2. וויאַזוי קאָנסטרויִרט מען רעגלמעסיקע אַרײַנגעשריבענע און אַרומגעשריבענע פּילעקן.

1. **טעאָרעמע.** אויב א קרײַזליניע איז צעטיילט אפּ א וואָסער-ניט-איז צאָל גלײַכע כאַלאַקים, איז: 1) די כאָרדעס, וואָס פאַרייניקן נאָכאַנאַנד די טייל-פּונקטן, בילדן אַן אַרײַנגעשריבענעם רעגלמעסיקן פּילעק; 2) די טאַנ-גענטע, וואָס זײַנען דורכגעפירט אין די טייל-פּונקטן, בילדן א רעגלמעסיקן אַרומגעשריבענעם פּילעק.

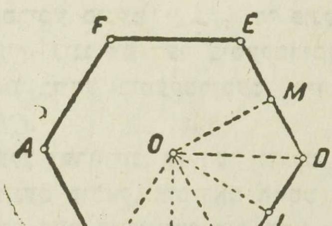
ס'איז געגעבן: אין די פּונקטן A, B, C . . . איז די קרײַזליניע צעטיילט אפּ n גלײַכע כאַלאַקים (צייכ. 266).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: די כאָרדעס AB, BC, CD . . . בילדן א רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם און 2) די טאַנגענטעס KL, LM, MN . . . — א רעגלמעסיקן אַרומגעשריבענעם פּילעק.

דערווײַז. 1) ווען מיר פאַרייניקן אין א נאָכאַנאַנדיקן סיידער די טייל-פּונקטן פון דער קרײַזליניע מיט כאָרדעס, באַקומען מיר אַן אַרײַנגעשריבענעם פּילעק



צייכ. 266



צייכ. 267

$ABCDEF$. די בויגנס AB, BC, CD... זײַנען גלײַך, און דעריבער זײַנען אויך די כאָרדעס, וואָס ציִען צונויף גלײַכע בויגנס, צווישן זיך גלײַך: ... $AB = BC = CD$. וצ דעם איז: ... $\angle A = \angle B = \angle C$ אלס אַרײַנגעשריבענע ווינקלען, וועלכע ווערן אויסגעמאָסטן מיט גלײַכע בויגנס. און דעריבער איז דער אַרײַנגעשריבענער פּילעק $ABCDEF$, בא וועלכן די זײַטן און די ווינקלען זײַנען גלײַך, א רעגלמעסיקער.

2) ווען מיר פֿירן דורך די טײל-פּונקטן A, B, C, D... פֿון דער קרײַז-ליניע טאַנגענטע, באַקומען מיר אַן אַרומגעשריבענעם פֿילעק $KLMNPQ$. די דרײַעקן AKB, BLC, CMD... האָבן גלײַכע באַזיסן AB, BC, DC...; זײערע ווינקלען $\angle KAB$, $\angle KBA$, $\angle LBC$, $\angle LCB$ ..., די בײַליגנדיקע צו די באַזיסן, זײַנען אויך גלײַך, מאַכמעס זײ ווערן אויסגעמאָסטן מיט גלײַכע בױגנס; הײסט עס, די דרײַעקן זײַנען 1) גלײַכאַקסלדיקע און 2) צווישן זיך גלײַך.

פֿון דער גלײַכקײַט פֿון די דרײַעקן דרינגט, אַז

$AK=KB=BL=LC=CM=MD=...$ אָדער $KL=LM=MN=...$, און אויך, אַז $\angle K=\angle L=\angle M=...$.

אַלזאָ, די זײַטן און די ווינקלען פֿונעם אַרומגעשריבענעם פֿילעק $KLMNPQ$ זײַנען גלײַך, הײסט עס. דער פֿילעק איז אַ ר ע ג ל מ ע ס י ק ע ר.

2. דאָס קאָנסטרויִרן אַ רעגלמעסיקן פֿילעק, אַן אַרײַנגעשריבענעם אָדער אַן אַרומגעשריבענעם, באַשטײט סאָפּקאָלסאָפּ אין טײלן אַ קרײַזליניע אף גלײַכע כאַלאָקים.

3. טעאָרעמעס. 1) אין יעטווידן רעגלמעסיקן פֿילעק קאָן מען אַרײַנשרײַבן אַ קרײַזליניע און 2) דורך זײַנע שפּיצן קאָן מען דורכפֿירן אַן אַרומגעשריבענע קרײַזליניע.

ס'איז געגעבן: $ABCDEF$ איז אַ רעגלמעסיקער פֿילעק (צײכ. 267).

$AB=BC=CD=...$ און $\angle A=\angle B=\angle C=...$.

ס'פֿאָדערט זיך דערווײַזן: 1) אין אַ רעגלמעסיקן פֿילעק קאָן מען אַרײַנשרײַבן אַ קרײַזליניע, 2) דורך זײַנע שפּיצן קאָן מען דורכפֿירן אַן אַרומגעשריבענע קרײַזליניע.

ד ע ר ו ו ײַ ז נ. 1) קעדײ אַרײַנצושרײַבן אין אַ פֿילעק אַ קרײַזליניע, דאַרף מען וויסן די לאַגע פֿון איר צענטער און די לענג פֿון איר ראַדיוס. דער צענטער פֿון אַן אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע איז אַ פּונקט, וואָס איז גלײַכווײַט פֿון אַלע זײַטן פֿונעם פֿילעק. די פּונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פֿון די זײַטן AB און BC, ליגן אף דער ביסעקטריסע פֿונעם $\angle B$; די פּונקטן, וואָס זײַנען גלײַכווײַט פֿון די זײַטן BC און CD, ליגן אף דער ביסעקטריסע פֿונעם $\angle C$; הײסט עס, דער איבערשנײַד-פּונקט O פֿון בײדע ביסעקטריסעס איז אַלצײנס דערווײַטערט פֿון די זײַטן AB, BC און CD.

מיר וועלן דערווײַזן, אַז דער פּונקט O איז אויך גלײַכווײַט פֿון די זײַטן CD און DE פֿונעם פֿילעק, און דאָס הײסט, אַז ער ליגט אף דער ביסעקטריסע פֿונעם $\angle D$. צוליב דעם פֿאַרבינדן מיר דעם פּונקט O מיטן שפּיץ D און באַטראַכטן דעם $\triangle COD$ און דעם $\triangle BOC$. די דאָזיקע דרײַעקן זײַנען גלײַך, ווײַל בא זײ איז די זײַט OC אַ געמײנזאַמע, $BC=CD$ און $\angle OCB=\angle OCD$. פֿון דער גלײַכקײַט פֿון אָט די דרײַעקן דרינגט, אַז $\angle OBC=\angle ODC$, אָבער $\angle OBC=\frac{\angle B}{2}$, הײסט עס, אַז אויך $\angle ODC=\frac{\angle D}{2}$, ווײַל $\angle D=\angle B$, אַלס ווינקלען פֿון אַ רעגלמעסיקן פֿילעק; וויבאַלד $\angle ODC=\frac{\angle D}{2}$, איז OD די ביסעקטריסע פֿונעם $\angle D$.

אפֿן זעלבן אופֿן ווערט דערוויזן, אַז OE, OF און OA זײַנען אויך ביסעק-

טריסעס פֿון די ווינקלען פֿונעם פּילעק, און דאָס באַטײַט, אַז דער פּונקט O, דער איבערשנײַד-פּונקט פֿון די ביסעקטריסעס פֿון אַלע ווינקלען פֿונעם פּילעק, איז גלײַכ-ווײַט פֿון אַלע זײַנע זײַטן; הייסט עס, ער איז דער צענטער פֿון דער אַרײַנגע-שריבענער קרײַזליניע. $OK = OL = OM = ... = r$, צום ראַדיוס פֿון דער גע-זוכטער קרײַזליניע.

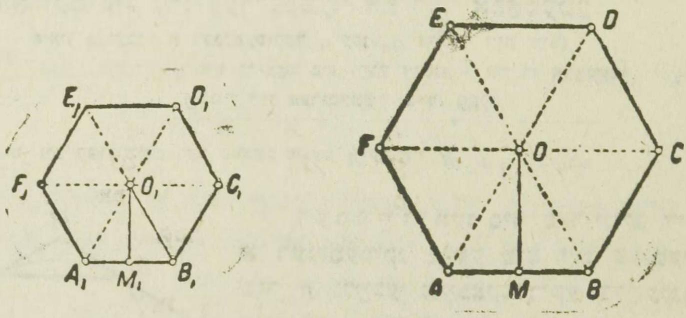
2) פֿון דער גלײַכקייט פֿון די דרײַעקן AOB, BOC, COD... דרינגט, אַז $OA = OB = OC = ...$; דאָס באַטײַט, אַז דער פּונקט O איז גלײַכווײַט פֿון אַלע שפּיצן פֿונעם פּילעק און איז דער צענטער פֿון דער אַרומגעשריבענער קרײַזליניע, וואָס זײַן ראַדיוס איז R.

$$R = OA = OB ...$$

אויספֿיר. די צענטערס פֿון די קרײַזליניעס, וואָס זײַנען אַרומגעשריבן און אַרײַנגעשריבן אין אַ רעגלמעסיקן פּילעק, פֿאַלן צונויף. דער פּונקט O הייסט **צענטער פֿון אַ רעגלמעסיקן פּילעק**. דער אָפּשטאַנד OK, OL... פֿונעם פּונקט O ביז די זײַטן פֿונעם רעגלמעסיקן פּילעק הייסט זײַן **אַפּאָטעמע**. די אַפּאָטעמע פֿון אַ פּילעק איז גלײַכצײַטיק דער ראַדיוס פֿון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

3. אייגנשאַפֿטן פֿון רעגלמעסיקע איינאָמענדיקע פּילעקן.

1. **רעגלמעסיקע איינאָמענדיקע פּילעקן זײַנען ענלעך**, ווײַל זייערע ווינקלען זײַנען גלײַך און זייערע זײַטן זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל.



ציי. 268

2. **טעאָרעמע. די זײַטן פֿון רעגלמעסיקע איינאָמענדיקע פּילעקן פֿאַר-האַלטן זיך ווי די ראַדיוסן פֿון די אַרומגעשריבענע אָדער אַרײַנגעשריבענע קרײַזליניעס.**

ס׳איז געגעבן: n איז די צאָל זײַטן פֿון די פּילעקן (ציי. 268);
AB און A_1B_1 זײַנען די זײַטן פֿון די פּילעקן;
OA און OB..., O_1A_1 און O_1B_1... זײַנען די ראַדיוסן פֿון די אַרומ-געשריבענע קרײַזליניעס; OM און O_1M_1 זײַנען די ראַדיוסן פֿון די אַרײַנגעשריבענע קרײַזליניעס אָדער די אַפּאָטעמעס.

ס׳פֿאָדערט זיך דערווײַזן: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{O_1A_1} = \frac{OM}{O_1M_1}$.

דערווײַז. אין די גלײַכאַקסלדיקע דרײַעקן $A_1O_1B_1$ און AOB איז $\angle O = \angle O_1$, ווײַל יעדערער פון זיי איז גלײַך $\frac{4d}{n}$, הייסט עס, די דרײַעקן זײַנען ענלעך, $\triangle A_1O_1B_1 \backsim \triangle AOB$; פון דער ענלעכקייט פון די דרײַעקן דרינגט:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$$

דה. די זײַטן פון רעגלמעסיקע איינגאָמענדיקע פילעקן זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל צו די ראַדיוסן פון די ארומגעשריבענע קרײַזליניעס און צו די אַפּאָטעמעס.

3. קאָנסעקווענץ. די פּערימעטערס פון רעגלמעסיקע איינגאָמענדיקע פילעקן פאַרהאַלטן זיך ווי די ראַדיוסן פון די ארומגעשריבענע קרײַזליניעס אָדער ווי די אַפּאָטעמעס.

רעגלמעסיקע איינגאָמענדיקע פילעקן $ABCDEF$ און $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ זײַנען ענלעך, און דאָס הייסט, אַז זייערע אַנאַלאָגישע זײַטן זײַנען פּראָפּאָרציאָנעל:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\cdots$$ אָבער $$\frac{AB+BC+CD+\cdots}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+\cdots}=\frac{AB}{A_1B_1}$$ אָבער $\frac{P}{P_1}=\frac{AB}{A_1B_1}$, און אַזוי ווי $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AO}{A_1O_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$, איז $\frac{P}{P_1}=\frac{AO}{A_1O_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$.

4. שעטעך פון א רעגלמעסיקן פילעק.

טעאָרעמע. דער שעטעך פון א רעגלמעסיקן פילעק איז גלײַך צו א האַלבן פּראָדוקט פון זײַן פּערימעטער אויף דער אַפּאָטעמע.

ס'איז געגעבן: א רעגלמעסיקער n־עק; a_n איז די זײַט זײַנע,
n איז די צאָל פון זײַנע זײַטן; h איז די אַפּאָטעמע;
p_n איז זײַן פּערימעטער (צייכ. 269).

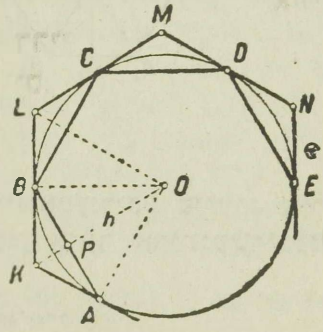
ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: דער שעטעך פונעם n־עק איז $S_n=\frac{1}{2}p_n\cdot h$.

דערווײַז. ווען מיר פאַרבינדן די שפּיצן פון א רעגלמעסיקן n־עק מיט זײַן צענטער, באַקומען מיר n גלײַכע גלײַכאַקסלדיקע דרײַעקן; דער שעטעך פון יעטווידן פון זיי איז

$$S=\frac{1}{2}a_n h$$

ווו h איז די הייך פונעם דרײַעק און גלײַכצײַטיק די אַפּאָטעמע פונעם פילעק; דערפון באַקומט זיך, אַז דער שעטעך פונעם גאַנצן פילעק איז

$$S_n=n\cdot S_\triangle=\frac{1}{2}na_nh$$



צייכ. 269

אָבער $a_n\cdot n=p_n$ צום פּערימעטער פונעם פילעק, און דעריבער איז

$$S_n=\frac{1}{2}p_n\cdot h$$

קאָנסעקווענצנ. 1. דער שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ אריַנגעשריבענעמ פילעק איז גליַכ צו א האלבנ פראָדוקט פונ זיַנ פערימעטער אפ דער אפאָ-טעמע:

$$S_n = \frac{1}{2} p_n \, h$$

2. דער שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעמ פילעק איז גליַכ צו א האלבנ פראָדוקט פונ זיַנ פערימעטער אפנ ראדיוס פונ דער קריַז-ליניע.

$$S_n = \frac{1}{2} \; p_n h = \frac{1}{2} p_n . r$$

3. די שעטעכנ פונ רעגלמעסיקע איינגאָמענדיקע פילעקנ פארהאלטנ זיכ ווי די קוואדראטנ פונ זייערע זיַטנ, אָדער ווי די קוואדראטנ פונ די ראדיוסנ פונ די ארומגעשריבענע אָדער אריַנגעשריבענע קריַזליניעס (צייכ. 268).

$ABCDEF$ און $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ זיַנענ איינגאָמענדיקע רעגלמעסיקע פילעקנ; AO און A_1O_1 זיַנענ זייערע ראדיוסנ, OM און O_1M_1 — זייערע אפאָטעמעס, S און S_1 — זייערע שעטעכנ.

רעגלמעסיקע איינגאָמענדיקע פילעקנ זיַנענ ענלעכ, און דעריבער פארהאלטנ זיכ זייערע שעטעכנ ווי די קוואדראטנ פונ זייערע זיַטנ:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} \tag{1}$$

די זיַטנ אָבער פונ רעגלמעסיקע איינגאָמענדיקע פילעקנ פארהאלטנ זיכ ווי די ראדיוסנ פונ די אריַנגעשריבענע אָדער ארומגעשריבענע קריַזליניעס:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{O_1A_1}{OA} = \frac{O_1M_1}{OM} \tag{2}$$

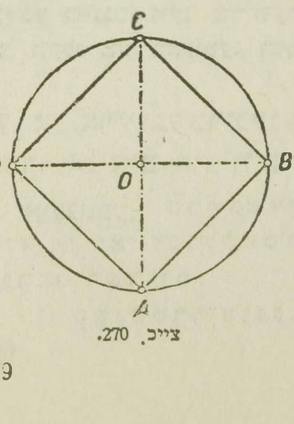
ווענ מיר פארגליַכנ די גליַכקיַטנ (1) און (2), קומענ מיר צומ אויספיר, אז

$$\frac{S_1}{S} = \frac{A_1B_1^2}{AB^2} = \frac{O_1A_1^2}{OA^2} = \frac{O_1M_1^2}{OM_1^2}$$

5. א קוואדראט, אנ אריַנגעשריבענער אינ א קריַזליניע. וויאזוי קאָנסטרויִרט מענ אימ און וויאזוי דריקט מענ אויס זיַנ זיַט דורכנ ראדיוס.

אופגאבע. אריַנשריַבנ אינ א קריַזליניע, וואָס איר ראדיוס איז R, א קוואדראט און אויסדריקנ זיַנ זיַט a_4 דורכנ ראדיוס.

1) קאָנסטרויִרונג. מיר פירנ דורכ (צייכ. 270) אינ דער קריַזליניע צוויי פערפענדיקולערע דיאמעטערס AC און BD; די קריַזליניע צעטיילט זיכ אפ פיר גליַכע כאלאָקימ. ווענ מיר פארייניקנ נאָכאנאנד די עקנ פונ די דיאמעטערס, באקומענ מיר אנ אריַנגעשריבענעמ רעגלמעסיקנ פירעק, דה. א קוואדראט, וויַל די זיַטנ זיַנע זיַנענ גליַכ אלס כאָרדעס, וואָס ציִענ צונויפ גליַכע בויגנס, און יעדערער פונ זיַנע ווינקלענ איז א גראָדער, וויַל ער שפארט זיכ אָנ אפנ דיאמעטער.



צייכ. 270.

2) דאָס אויסרעכענענ די זײַט. פונעם גראָדווינקלדיקנ דרײַעק AOB געפינענ מיר:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 \text{ אָדער } AB^2 = 2R^2,$$

דערפונ איז $AB = R\sqrt{2}$.

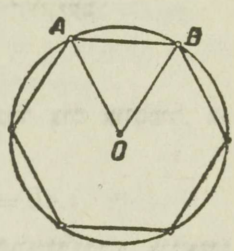
די זײַט פונ אנ ארײַנגעשריבענעם רעגלמעסיקנ פירעק איז

$$\boxed{a_4 = R\sqrt{2}}$$

6. אנ ארײַנגעשריבענער רעגלמעסיקער זעקסעק. וויאזוי מע קאָנסטרויִרט אימ אונ וויאזוי דריקט מענ אויס זײַנ זײַט דורכ דעם ראדיִוס.

אופגאבע. ארײַנשרײַבנ אינ א קרײַזליניע, וואָס איר ראדיִוס איז R, א רעגלמעסיקנ זעקסעק אונ אויסדריקנ זײַנ זײַט a_6 דורכנ ראדיִוס.

לייזונג. אנאליז. לאָמיר זאָגנ, אז AB (צייכ. 271) איז די זײַט פונ אנ ארײַנגעשריבענעם רעגלמעסיקנ זעקסעק, דאנ איז $\angle AOB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.



צייכ. 271

דער $\triangle AOB$ איז א גלײַכאקסלדיקער: $OA = OB = R$, $\angle A = \angle B$ אונ יעדערער פונ זיי האלט 60°.

דער $\triangle AOB$ איז א גלײַכווינקלדיקער, הייסט עס, אויכ א גלײַכזײַטיקער, אונ דעריבער איז

$$AB = AO = BO = R$$

די זײַט פונ אנ ארײַנגעשריבענעם רעגלמעסיקנ זעקסעק איז

$$\boxed{a_6 = R}$$

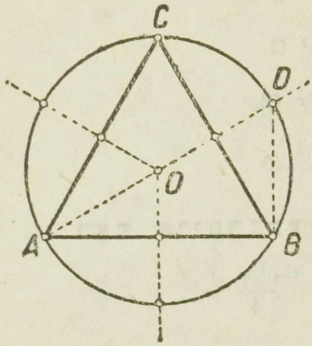
קאָנסטרויִרונג. מיסנ צענעמ פונ ציִרקל, וואָס איז גלײַכ צומ ראדיִוס פונ דער קרײַזליניע, לייגנ מיר אָפּ אפ דער געגעבענער קרײַזליניע נאָכאנאנד זעקס גלײַכע בויגנס. ווענ מיר וועלנ פארייניקנ די עקנ פונ יעטווידנ בויגנ מיט א כאָרדע, וועלנ מיר באקומענ דעמ געזוכטנ רעגלמעסיקנ זעקסעק.

7. אנ ארײַנגעשריבענער רעגלמעסיקער דרײַעק. וויאזוי מע קאָנסטרויִרט אימ אונ וויאזוי מע דריקט אויס זײַנ זײַט דורכנ ראדיִוס.

אופגאבע. ארײַנשרײַבנ אינ א קרײַזליניע, וואָס איר ראדיִוס איז R, א רעגלמעסיקנ דרײַעק אונ אויסדריקנ זײַנ זײַט a_3 דורכנ ראדיִוס.

1) קאָנסטרויִרונג. די קרײַזליניע צעטיילנ מיר אפ זעקס גלײַכע באלאָ-

קים. ווען מיר פאַרייניקן איבער איינעם די טייל־פונקטן מיט כאָרדעס, באַקומען מיר דעם געזוכטן רעגלמעסיקן דרײַעק ABC (צייכ. 272), בײַ וועלכן $AB=BC=CA$ אַלס כאָרדעס, וואָס ציִען צונויף גלײַכע בויגנס.



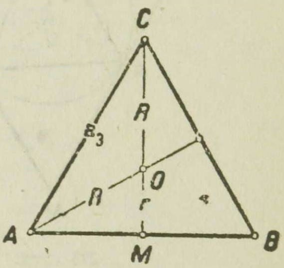
צייכ. 272

2) דאָס אויסרעכענען די זײַט. ווען מיר פירן דורך דעם דיאַמעטער AD און פאַרייניקן דעם פונקט D מיט B, באַקומען מיר א גראַד־ווינקלדיקן דרײַעק ABD מיט א גראַדן ווינקל באַם שפּיץ B. פונעם גראַדווינקלדיקן דרײַעק ABD האָבן מיר: $AB^2=AD^2-DB^2$; $AD=2R$ און $DB=R$, און דעריבער איז $AB^2=a_3^2=4R^2-R^2=3R^2$.

דערפון איז $\boxed{a_3=R\sqrt{3}}$

8. וויאַזוי דריקט מען אויס די ראַדיוסן פון אן ארומגעשריבענער און אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע, די הייך און דעם שעטעך פון א רעגלמעסיקן דרײַעק דורך זײַן זײַט.

ס'איז געגעבן א רעגלמעסיקער דרײַעק ABC (צייכ. 273). די זײַט זײַנע AB איז גלײַך a_3; $OM=r$ איז דער ראַדיוס פון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע; $OA=OC=R$ איז דער ראַדיוס פון דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע; $CM=h$ איז די הייך; S איז זײַן שעטעך.



צייכ. 273

1) דאָס אויסרעכענען R. די זײַט פונעם דרײַעק $AB=a_3=R\sqrt{3}$; דערפון דרינגט, אז

$$=\frac{a_3}{\sqrt{3}}=\frac{a_3\sqrt{3}}{3}$$

2) דאָס אויסרעכענען r. אינעם גראַד־ווינקלדיקן דרײַעק AOM איז די היפּאָטענוז $AO=R$ די ביסעקטריסע פונעם $\angle A$ אינעם דרײַעק ABC, הייסט עס, $\angle OAM=30^\circ$, און דעריבער איז דער קאַטעט $OM=r$, וואָס ליגט קעגן א ווינקל פון 30°, גלײַך צו א האַלבער היפּאָטענוז, ד. ה. $r=\frac{R}{2}$.

1) $$r=\frac{R}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_3\sqrt{3}}{3}=\frac{a_3\sqrt{3}}{6}$$

2) $$R=2r$$

3) דאָס אויסרעכענען h. די הייך איז $h=CM=CO+OM$,
אָבער $CO=R=2r$ און $OM=r=\frac{R}{2}$, דעריבער איז

$$1)\quad h=R+\frac{R}{2}=1{,}5\ R$$

$$2)\quad h=2r+r=3r$$

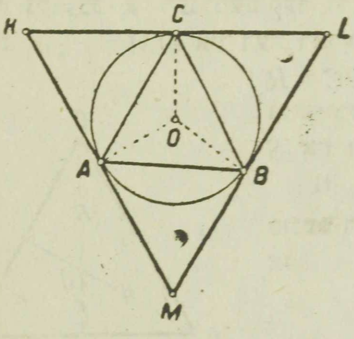
$$3)\quad h=3r=3\cdot\frac{a_3\sqrt{3}}{6}=\frac{a_3\sqrt{3}}{2}$$

4) דאָס אויסרעכענען S. דער שעטעך S אינ קוו.-איינסן איז

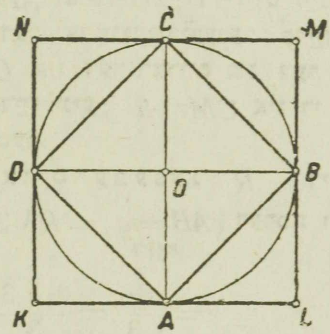
$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a\,\frac{a_3\sqrt{3}}{2}=\frac{a_3{}^2\sqrt{3}}{4}$$

9. וויאַזוי קאָנסטרויִרט מען אַן ארומגעשריבענעם קוואַדראַט און אַ רעגלמעסיקן ארומגעשריבענעם דרײַעק און וויאַזוי מע דריקט אויס זייערע זײַטן דורכן ראַדיוס.

אופגאַבע 1. קאָנסטרויִרן אַן ארומגעשריבענעם קוואַדראַט און אויסדריקן זײַן זײַט b_4 דורכן ראַדיוס r פון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.



צייכ. 275



צייכ. 274

לייזונג. אינ אַ קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז r, שרײַבן מיר אַרײַן אַ קוואַדראַט (צייכ. 274). דורך זײַנע שפּיצן פירן מיר דורכ טאַנגענטע ביז זייער קעגנזײַטיקער איבערשנײַדונג; מיר באַקומען אַן ארומגעשריבענעם קוואַדראַט $KLMN$. די זײַט זײַנע $KL=b_4$ איז גלײַך צו DB — צום דיאַמעטער פונ דער קרײַזליניע, און דעריבער איז

$$\boxed{b_4=2r}$$

אופגאַבע 2. קאָנסטרויִרן אַ רעגלמעסיקן ארומגעשריבענעם דרײַעק און אויסדריקן זײַן זײַט b_3 דורכן ראַדיוס r פון דער אַרײַנגעשריבענער קרײַזליניע.

לייזונג. אין דער קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז r, שרײַבן מיר אַרײַן אַ רעגלמעסיקן דרײַעק (צייכ. 275). דורך זײַנע שפּיצן פירן מיר דורך טאַנגענסע ביז זייער קעגנזײַטיקער איבערשנײַדונג, מיר באַקומען אַ רעגלמעסיקן אַרומ-געשריבענעם דרײַעק KLM. אינעם דרײַעק KLM זײַנען די באַריר־פּונקטן A און B די מיטנס פון די זײַטן KM און LM, ווײַל $KA = AM$ און $LB = BM$; דערפון דרינגט, אַז $AB = a_3$ איז די מיטל-ליניע פונעם דרײַעק KLM. אָבער $AB = \frac{KL}{2}$ אָדער $a_3 = \frac{b_3}{2}$, דערפון איז $b_3 = 2a_3$.

די זײַט פון אַ רעגלמעסיקן אַרומגעשריבענעם דרײַעק איז אין צוויי מאָל גרעסער פון דער זײַט פון אַ דרײַעק, וואָס איז אַרײַנגעשריבן אין דער זעלבער קרײַזליניע.

$$\boxed{b_3 = 2r\sqrt{3}}$$

10. וויאַזוי רעכנט מען אויס די זײַט פון אַ רעגלמעסיקן אַרומגע-שריבענעם פילעק לויט דער זײַט פון אַן אייננאָמענדיקן אַרײַנגע־שריבענעם פילעק און לויט דעם ראַדיוס.

1. אויפגאַבע. לויט דער זײַט פון אַן אַרײַנגעשריבענעם רע-גלמעסיקן פילעק און לויטן ראַדיוס אויסרעכענען די זײַט פון אַן אייננאָמענדיקן אַרומגעשריבענעם רעגלמעסיקן פילעק.

לייזונג. די פילעקן $ABCD\ldots$ און $KLMN\ldots$ (צייכ. 269) זײַנען רעגלמעסיקע און אייננאָמענדיקע, הייסט עס, זיי זײַנען ענלעכע. די זײַט KL איז גלײַך b_n; די זײַט AB איז גלײַך a_n. פון דער ענלעכקײַט פון די געגעבענע פילעקן דרינגט, אַז $\frac{b_n}{a_n} = \frac{R}{h}$, דערפון איז

$$b_n = \frac{a_n R}{h} \quad (1).$$

פונעם גראַדווינקלדיקן דרײַעק OPB, וואָס זײַן קאַטעט PB איז גלײַך $\frac{a_n}{2}$, באַשטימען מיר h: $h^2 = R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2$; דערפון איז

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}} \quad (2).$$

שטעלן מיר אונטער דעם געפונענעם אויסדרוק פאַר h (2) אין דער גלײַכקײַט (1), באַקומען מיר:

$$\boxed{b_n = \frac{a_n \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}}$$

2. די דאָזיקע פאָרמולע גיט די מעגלעכקײַט לויט דער געגעבענער זײַט a_n פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק און לויטן ראַדיוס R באַשטימען די זײַט b_n פון אַן אייננאָמענדיקן אַרומגעשריבענעם רעגלמעסיקן פילעק.

195—13

3. אויב מע זאָל ביידע טיילן פון דער באַקומענער פאָרמולע דערהייבן אין קוואדראט און באַשטימען a_n, וועלן מיר באַקומען:

$$\boxed{a_n = \frac{b_n R}{\sqrt{R^2 + \frac{b_n^2}{4}}}}$$

די דאָזיקע פאָרמולע דערלויבט לויט דער געגעבענער זייט b_n פון א רע־גלמעסיקן ארומגעשריבענעם פילעק און לויטן ראַדיוס R באַשטימען די זייט a_n פון אן אייננאָמענדיקן אריינגעשריבענעם רעגלמעסיקן פילעק.

4. אויפגאַבע. אויסדריקן די זייט b_6 פון א רעגלמעסיקן ארום־געשריבענעם זעקסעק דורך דעם ראַדיוס R פון אן אריינגע־שריבענער קרייזליניע.

לייזונג. קעדיי צו לייזן די אויפגאַבע, וועלן מיר זיך באַנוצן מיט דער פאָרמולע:

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

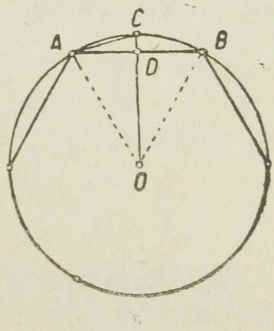
די צאָל זייטן n פונעם פילעק איז לויטן באַדינג פון דער אויפגאַבע גלייך 6, הייסט עס, $a_n = a_6 = R$, און דעריבער איז

$$b_6 = \frac{a_6 R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}} = \frac{R \cdot R}{\sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}} = \frac{R^2}{\sqrt{\frac{3R^2}{4}}} = \frac{2R^2}{R\sqrt{3}} = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

11. וויאזוי פאַרטאָפּלט מען די צאָל זייטן פון א רעגלמעסיקן אריינגעשריבענעם פילעק.

1. אויפגאַבע. פאַרטאָפּלען די צאָל זייטן פון א רעגלמעסיקן אריינגעשריבענעם פילעק און אויסדריקן זיין זייט a_{2n} דורך a_n און R.

לייזונג. 1) לאָמיר זאָגן, אז $AB = a_n$ איז די זייט פון א רעגלמעסיקן אריינגעשריבענעם n-עק (צייכ. 276). קעדיי צו קאָנסטרויִרן אן אריינגעשריבענעם פילעק, וואָס די צאָל זייטן זאָל בא אים זיין אין צוויי מאָל גרעסער, איידער באַם געגעבענעם, ד. ה. $2n$ זייטן, באַדאַרף מען צעטיילן די קרייזליניע אף $2n$ גלייכע כאַלאָקים. מיר צעטיילן דעם בויגן, אַשטייגער AB, וואָס אַנטשפּרעכט דער זייט AB, אפּדערהעלפט, דאַן איז $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CB}$ און די כאָרדע AC איז די זייט פון אן אריינגעשריבענעם פילעק, וואָס פאַרמאָגט $2n$ זייטן.



צייכ. 276

2) קעדיי אויסצורעכענען $AC = a_{2n}$, באטראכטן מיר דעם שארפווינקלדיקן $\triangle AOC$ און מיר פארשרײַבן, צו וואָס איז גלײַך דער קוואדראט פון אָט דער זײַט:

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 - 2OC \cdot OD$$

אָדער

$$a_{2n}^2 = R^2 + R^2 - 2R \cdot OD = 2R^2 - 2R \cdot OD.$$

פונעם גראָדווינקלדיקן דרײַעק AOD געפינען מיר:

$$OD = \sqrt{AO^2 - AD^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

ווען מיר פארבײַטן אין דער פאָריקער גלײַכקײַט OD מיט דעם אויסדרוק, וואָס מיר האָבן נאָרוואָס געפונען פאר OD, באקומען מיר:

$$a_{2n}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}$$

אָדער

$$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

אָט די פאָרמולע, די פאָרמולע פון פארטאָפּלען די צאָל זײַטן פון א רעגולמעסיקן ארײַנגעשריבענעם n-עק, דערלויבט לויט דער געגעבענער זײַט a_n פון א רעגולמעסיקן ארײַנגעשריבענעם n־עק און לויטן ראַדיוס R באשטימען די זײַט a_{2n} פון א רעגולמעסיקן ארײַנגעשריבענעם פילעק, וואָס די צאָל זײַטן זײַנע $2n$ איז אין צוויי מאָל גרעסער איידער די צאָל זײַטן פונעם n־עק.

2. בײַשפּיל. אויסדריקן די זײַט פון א רעגולמעסיקן ארײַנגעשריבענעם צוועלפעק דורך R.

לייזונג.

$$a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_6^2}{4}}$$

$$a_{12}^2 = 2R^2 - 2R\sqrt{\frac{3R^2}{4}}, \text{ ווײַל } a_6 = R;$$

$$a_{12} = \sqrt{2R^2 - R^2\sqrt{3}} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

אָדער $a_{12} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)$, ווײַל $2 - \sqrt{3} = \left[\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right]^2$.

טראגעס און איבונגען.

1. ארײַנשרײַבן אין א קרײַז, וואָס זײַן ראַדיוס איז R, א רעגולמעסיקן אכטעק און אויסדריקן זײַן זײַט דורכן ראַדיוס.

2. לויט דער געגעבענער זײַט a פון א רעגולמעסיקן ארײַנגעשריבענעם דרײַעק, פירעק, אכטעק באשטימען דעם ראַדיוס פונעם קרײַז.

3. אין א קרייז, וואָס זיין ראַדיוס איז R, איז ארייַנגעשריבן א רעגלמעסיקער אכטעק, צוועלפעק, באַשטימען זייערע דיאַגאָנאַלן.

4. די זייַט פון א רעגלמעסיקן ארומגעשריבענעם זעקסעק איז גלייַך b. באַשטימען דעם ראַדיוס פון דעם קרייַז.

5. לויט דער געגעבענער זייַט a קאָנסטרויִרן א רעגלמעסיקן אכטעק.

6. דער ראַדיוס פון א קרייַז איז גלייַך R. באַשטימען די זייַט פון א רעגלמעסיקן ארייַנגעשריבענעם צענעק, אויב ס'איז באַוווּסט, אַז $a_{10} = R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

7. לויט דער אַפּאָטעמע h קאָנסטרויִרן: 1) א רעגלמעסיקן דרייַעק, 2) א קוואַדראַט, 3) א רעגלמעסיקן זעקסעק.

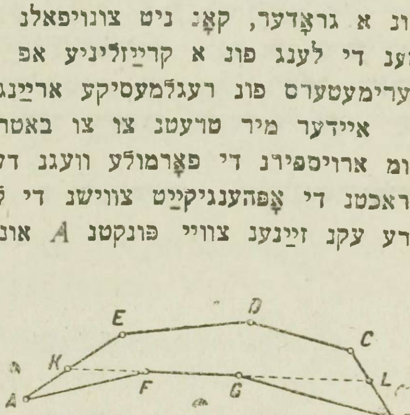
XXI. די לענג פון א קרייַזליניע און דער שעטעך פון א קרייַז.

1. וויאַזוי פאַרגלייַכט מען די לענג פון א קרייַזליניע מיט די פּערימעטערס פון רעגלמעסיקע ארייַנגעשריבענע און ארומגעשריבענע פּילעקן.

1. דירעקט אויסמעסטן די לענג פון א קרייַזליניע דורך ארופלייגן אַף איר א לינעאַלע מאָס קאָן מען ניט, ווייַל א לינעאַלע מאָס, אַלס אַן אָפּשניט פון א גראָדער, קאָן ניט צונויפאַלן מיט א קרומער ליניע; דעריבער באַשטימט מען די לענג פון א קרייַזליניע אַף אַן אומדירעקטן אויפן, אויסמעסטנדיק די פּערימעטערס פון רעגלמעסיקע ארייַנגעשריבענע און ארומגעשריבענע פּילעקן.

איידער מיר טרעטן צו צו באַטראַכטן די טעאָרעמעס, וואָס האָבן א שייַכעס צום ארויספירן די פאָרמולע וועגן דער לענג פון א קרייַזליניע, וועלן מיר באַטראַכטן די אָפּהענגיקייַט צווישן די לענגען פון פאַרשיידענע ליניעס, וואָס זייערע עקן זייַנען צוויי פונקטן A און B.

לאָמיר זאָגן, אַז ס'זייַנען געגעבן צוויי געבראָכענע ליניעס $AEDCB$ און $AFGB$, פון וועלכע $AEDCB$ איז אַן ארומנעמענדיקע און $AFGB$ איז אַן ארומגענומענע געבראָכענע; זייערע עקן זייַנען די פונקטן A און B.



צייכ. 277

מיר וועלן באַווייַזן, אַז די ארומגענומענע געבראָכענע $AFGB$ איז קירצער פון א באַליביקער ארומנעמענדיקער געבראָכענער $AEDCB$, וואָס זייערע עקן A און B פאַלן צונויף.

אינדערעמעסן, ווען מיר פאַרלענגערן די זייַט FG פון דער געבראָכענער $AFGB$ איןביידע זייַטן ביזן איבערשנייַדן זיך מיט דער געבראָכענער $AEDCB$ (צייכ. 277), האָבן מיר:

$$AF < AK + KF$$

$$KF + FG + GL < KE + ED + DC + CL$$

$$GB < GL + LB$$

ווען מיר לייגן צונויף גלידערווײַז די געגעבענע אומגלײַכקײַטן, באקו-מען מיר:

$$AF+KF+FG+GL+GB<AK+KF+KE+ED+DC+CL+ +GL+LB$$

אָדער, ווען מיר נעמען אראָפּ פון ביידע טיילן פון דער אומגלײַכקײַט KF און GL און נעמען דערבײַ אין אכט, אז $AK+KE=AE$ און $CL+LB=CB$, האָבן מיר:

$$AF+FG+GB<AE+ED+DC+CB$$

דה. א דרויסנדיקע ארומנעמענדיקע געבראָכענע איז קירצער פאר יעטווידער ארומנעמענדיקער געבראָכענער, וואָס איר עקן פאלן צונויף מיט די עקן פון דער ארומגענומענער.

דאָס, וואָס מיר האָבן געזאָגט, פארבלײַבט אויך ריכטיק אין דעם פאל, ווען די ארומנעמענדיקע אָדער די ארומגענומענע זײַנען קרײַזליניעס, מאכמעס א בויגן פון א קרײַזליניע קאָן מען באטראכטן אלס א געבראָכענע מיט א גרויסער צאָל גלידער, וואָס האָבן גאָר א קליינע לענג.

אשטייגער, דער בויגן DC_1F (צייכ. 278) איז קירצער פון דער געבראָכע-נער DCF, וועלכע איז צונויפגעשטעלט פון צוויי טאנגענטע CD — און CF; פונקט אזוי איז דער בויגן DC_1F קירצער פון דער געבראָכענער $DQPF$, דה.

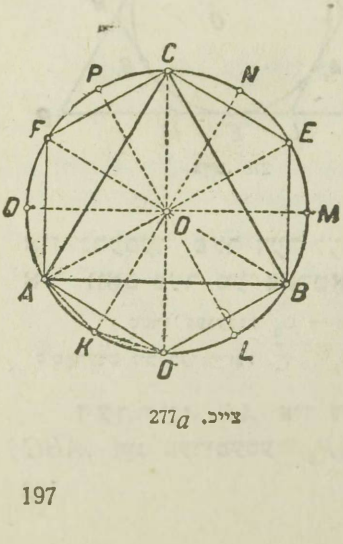
$$\smile DC_1+\smile C_1F<DQ+QP+PF.$$

2. טעאָרעמע. דער פערימעטער פון א רעגלמעסיקן ארײַנגעשריבענעם פילעק איז קלענער פאר דער לענג פון דער קרײַזליניע און דערנעענטערט זיך צו איר וואָס מער מע פארטאָפּלט די צאָל זײַטן פונעם פילעק.

ס'איז געגעבן: P_n איז דער פערימעטער פון אן n-עק, C איז די לענג פון דער קרײַזליניע (צייכ. 277a).

ס'פאָדערט זיך דערווײַזן: $P_n<C$ און דערנעענטערט זיך צו C באַם פארטאָפּלען די צאָל זײַטן n.

דערווײַז. AB איז די זײַט פון א רעגלמעסיקן ארײַנגעשריבענעם דרײַעק ABC, זײַן פערימעטער p_3 איז גלײַך $3AB$. ווען מיר צעטיילן אפדערהעלפט די בויגנס AB, BC, CA און פארייניקן די טייל-פונקטן D, E און F מיט די עקן פון די דאָזיקע בויגנס, באקומען מיר א רעגלמעסיקן ארײַנגעשריבענעם זעקסעק, וואָס זײַן פערימעטער $p_6=6AD$ איז גרעסער פארן פערימעטער פונעם רעגלמעסיקן ארײַנגעשריבענעם דרײַעק. ווירקלעך, פונעם דרײַעק ADB האָבן מיר: $AD+DB>AB$, אָבער $AD=DB$, און דערי-בער איז $2AD>AB$; קייפלען מיר ביידע טיילן פון דער אומגלײַכקײַט אפ 3, באקומען מיר: $6AD>3AB$ אָדער $p_6>p_3$. ווען מיר צעטיילן ווײַ-טער אפדערהעלפט די בויגנס AD, DB, BE, EC...



צייכ. 277a

און פאַרײניקן די טײל־פּונקטן K, L, M, N... מיט די עקן פון די דאָזיקע בויגנס, באַקומען מיר אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם צװעלפעק, װאָס זײַן פּערימעטער p_{12} איז גרעסער פאַרן פּערימעטער p_6, $p_{12} > p_6$. אינדערעמעסן, פונעם דרײַעק ADK האָבן מיר: $AK + KD > AD$, אָבער $KD = AK$, און דעריבער איז $2AK > AD$; קײפּלען מיר בײדע טײלן פון דער אומגלײַכקײט אויף 6, באַקומען מיר, אַז $12AK > 6AD$, אָדער $p_{12} > p_6$.

װען מיר זאָלן װײַטער פאַרטאָפּלען די צאָל זײַטן פון יעטװידן נײַ־באַקומענעם פילעק, װעלן מיר זיך איבערצײַגן, אַז דער פּערימעטער פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק איז אַלץ גרעסער, װאָס גרעסער עס איז די צאָל פון זײַנע זײַטן.

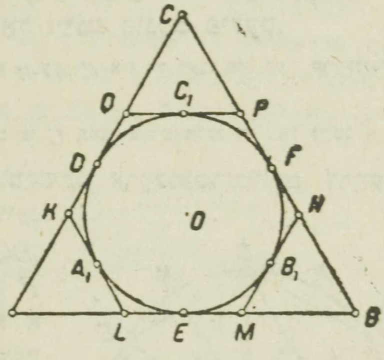
מיר האָבן: $p_6 > p_3$; $p_{12} > p_6$... בכלל איז $p_{2n} > p_n$, װוּ p_n איז דער פּערימעטער פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק מיט n זײַטן, און p_{2n} איז דער פּערימעטער פון אַ פילעק מיט $2n$ זײַטן.

אַלזאָ, װאָס מער מיר פאַרטאָפּלען די צאָל זײַטן פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק, אַלץ גרעסער װערט זײַן פּערימעטער און דערנענטערט זיך אַלץ מער צו דער לענג פון דער קרײַזליניע, אָבער דאָך פאַרבלײַבט ער קלענער פון איר.

אינדערעמעסן, די זײַטן פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק, אַלס כאָרדעס, זײַנען קלענער פאַר די בויגנס, װעלכע זײ ציִען צונויף, און דעריבער איז די סומע פון אַלע זײַטן פונעם פילעק קלענער פאַר דער סומע פון אַלע בויגנס פון דער קרײַזליניע; דערפון דרינגט, אַז דער פּערימעטער פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק איז קלענער פאַר דער לענג פון דער קרײַזליניע.

אויב מיר באַצײכענען די לענג פון דער קרײַזליניע דורך C, װעט מען דעם באַקומענעם אויספיר פאַרשרײַבן אַזױ: $p_n < C$.

בײַ אַן אומבאַגרענעצטן פאַרטאָפּלען די צאָל זײַטן פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם פילעק, דערנענטערט זיך זײַן פּערימעטער אויף אַזױפיל צו דער לענג פון דער קרײַזליניע, אַז די דיפערענץ $C - p_n$ צװישן דער לענג פון דער קרײַזליניע און דעם פּערימעטער װערט קלײן װי װײַט איר װילט נאָר.



צײכ. 278

3. **טעאָרעמע.** דער פּערימעטער פון אַ רעגלמעסיקן אַרומגעשריבענעם פילעק איז גרעסער פאַר דער לענג פון דער קרײַזליניע און דערנענטערט זיך צו איר װאָס מער מע פאַרטאָפּלט די צאָל פון זײַנע זײַטן.

ס'איז געגעבן: P_n — פּערימעטער פון n-עק; C — די לענג פון דער קרײַזליניע (צ. 278).

ס'פאָדערט זיך דערװײַזן: $P_n > C$ און דערנענטערט זיך צו C באַם פאַרטאָפּלען די צאָל זײַטן n.

דערװײַז. AB איז די זײַט פון אַ רעגלמעסיקן אַרומגעשריבענעם דרײַעק ABC, זײַן פּערימעטער P_3 איז גלײַך $3AB$. מיר טײלן אָפּ דערהעלפט די בויגנס,

וואָס זײַנענ אײַנגעשלאָסנ צווישנ די באַריר־פונקטנ D, E אונ F פונ די זײַטנ פונעם ארומגעשריבענעם דרײַעק ABC מיט דער קרײַזליניע, אונ פירנ דורכ די טייל-פונקטנ A_1, B_1 אונ C_1 טאַנגענטע; מיר באַקומענ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעם זעקסעק $KLMNPQ$, וואָס זײַנ פערימעטער $P_6=6KL$ איז קלענער פונ P_3; $P_6<P_3$. אינדערעמעסנ: פונ די דרײַעקנ AKL, BMN, CQP האָבנ מיר: $KL<AK+AL$; $MN<BM+BN$; $PQ<CQ+CP$, אונ דאָס באַטײַט, אז די סומעס פונ די אָפשניטנ AK אונ AL, BM אונ BN, CQ אונ CP, וואָס מיר שנײַדנ אָפ פונ די זײַטנ פונעם דרײַעק ABC, פאַרבײַט מענ מיט קלענערע אָפשניטנ KL, MN אונ PQ, אונ דעריבער איז $P_6<P_3$. פאַרטאָפלענ מיר אפנ זעלבנ אויפנ די צאָל זײַטנ פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעם זעקסעק, באַקומענ מיר א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעם צוועלפעק, וואָס זײַנ פערימעטער איז קלענער פארנ פערימעטער פונעמ ארומגעשריבענעם זעקסעק, דה. $P_{12}<P_6$ אאוו.; ביכלאַל $P_{2n}<P_n$.

אלזאָ, וואָס מער מיר פאַרטאָפלענ די צאָל זײַטנ פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעם פילעק, אלצ מער פ א ר ק ל ע נ ע ר ט זיכ זײַנ פערימעטער אונ דערנעענטערט זיכ אלצ צו דער לענג פונ דער קרײַזליניע, נאָר דאָכ פאַרבלײַבט ער ג ר ע ס ע ר פונ דער קרײַזליניע.

דעם דאָזיקנ אויספיר פאַרשרײַבט מענ אזוי: $P_n>C$.

בא אנ אומבאַגרענעצטנ פאַרטאָפלענ די צאָל זײַטנ פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעם פילעק, וועט זײַנ פערימעטער אפ אזויפיל זיכ דערנעענטערנ צו דער לענג פונ דער קרײַזליניע, אז די דיפערענצ P_n-C צווישנ פערימעטער פונ דעמ ארומגעשריבענעם פילעק אונ דער לענג פונ דער קרײַזליניע ווערט נישטיק קליינ.

4. ווענ מיר סומירנ אלצ, וואָס מיר האָבנ דאָ געזאָגט, באַהויפטנ מיר, אז $p_n<C<P_n$, דה. די לענג פונ דער קרײַזליניע איז גרעסער פארנ פערימעטער פונ א רעגלמעסיקנ ארײַנגעשריבענעם פילעק אונ איז קלענער פארנ פערימעטער פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעמ פילעק; דערבײַ ענדערנ זיכ די פערימעטערס פונ די דאָזיקע פילעקנ אזוי, אז וואָס מער מיר פאַרטאָפלענ די צאָל זײַטנ זייערע, אלצ מער דערנעענטערנ זיי זיכ צו דער לענג פונ דער קרײַזליניע, די לענג אָבער פונ דער קרײַזליניע בלײַבט די גאַנצע צײַט ניט געענדערט.

2. באַגריפ ווענג א קאָנסטאַנטע (באַשטענדיקע גרייס) אונ ווענג א פאַרענדערלעכער גרייס.

1. די פערימעטערס p_n אונ P_n פונ א רעגלמעסיקנ ארײַנגעשריבענעם אונ ארומגעשריבענעם פילעק בא אנ אומבאַגרענעצטנ פאַרטאָפלענ די צאָל זײַטנ זייערע ענדערנ זיכ אונ דערנעענטערנ זיכ אלצ מער אונ מער צו דער לענג פונ דער קרײַזליניע, ווי זיי וואָלטנ געשטרעבט ווערנ גלײַכ מיט דער קרײַזליניע; די לענג אָבער פונ דער קרײַזליניע ענדערט זיכ ניט, אונ אינ מעשעכ פונ גאַנצנ פראָצעס פונ פאַרטאָפלענ די צאָל זײַטנ פונ די פילעקנ, סײַ פונעם ארײַנגעשריבענעם סײַ פונעם ארומגעשריבענעם, פאַרבלײַבט זי ניט געענדערט.

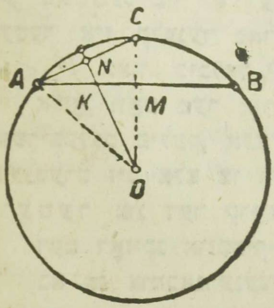
2. א גרייס, וואָס אינ די באַדינגונגענ פונ דער געגעבענער אויפגאַבע נעמט זי די גאַנצע צײַט אָנ פאַרשיידענע באַטרעפנ, הייסט פ א ר ע נ ד ע ר ל ע כ ע גרייס;

די גרייס אָבער, וואָס באַ די זעלביקע באַדינגונגען פון דער אויפגאַבע היסט זי די גאַנצע צײַט איין און איר באַטרעף, הייסט **באַשטענדיקע** גרייס אָדער **קאָנסטאַנטע**.

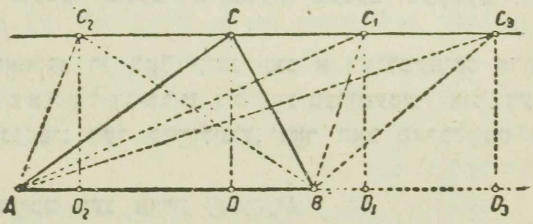
די פּערימעטערס P_n און p_n פון אַן אַרײַנגעשריבענעם און פון אַן אַרומגעשריבענעם פּילעק באַ אַן אומבאַגרענעצטן פאַרטאָפּלען די צאָל פון זייערע זײַטן זײַנען אַ בײַשפּיל פון **פאַרענדערלעכע גרייסן**, און די לענג פון דער קרײַזליניע C איז אַ **באַשטענדיקע גרייס**, אַ **קאָנסטאַנטע**.

3. בײַשפּילן פון קאָנסטאַנטע און פון פאַרענדערלעכע גרייסן אין די באַדינגונגען פון איין און דער זעלבער אויפגאַבע.

1) ס'איז געגעבן אַ דרײַעק ABC (צייכ. 279). ווען מע זאָל אַריבערטראָגן



צייכ. 280



צייכ. 279

זײַן שפּיץ C לויט אַ גראָדער, וואָס איז פּאַראַלעל צו זײַן באַזיס AB, איבערלאָזנדיק דעם באַזיס אומבאַוועגלעך, וועלן דאָ זײַן פאַרענדערלעכע גרייסן: די לענג פון זײַנע זײַט־ליניעס, דער פּערימעטער פונעם דרײַעק, די גרייס פון יעטווידן ווינקל; קאָנסטאַנטע וועלן אָבער זײַן: זײַן באַזיס, די סומע פון אַלע זײַנע ווינקלען, וועלכע איז גלײַך $2d$, די הייך און זײַן שטח.

2) ס'איז געגעבן אַ קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז R (צייכ. 280); $AB = a_n$ איז די זײַט פון אַ רעגלמעסיקן אַרײַנגעשריבענעם n־עק, דער אָפּשניט $OM \perp AB$ איז די אַפּאָטעמע; מיר וועלן זי באַצייכענען דורך h_n.

ווען מיר פאַרטאָפּלען די צאָל זײַטן פונעם n־עק, באַקומען מיר $AC=a_{2n}$ און אַן אָפּשניט $ON \perp AC$ — די אַפּאָטעמע, וועלכע מיר וועלן באַצייכענען דורך h_{2n}.

פונעם גראָדווינקלדיקן דרײַעק OMK האָבן מיר, אַז $OK > OM$, אָבער OK איז בלויז אַ טייל פון ON, און דעריבער איז ON אַוודאי גרעסער פאַר OM. אַלזאָ, $ON > OM$, אָדער $h_{2n} > h_n$, ד. ה. וואָס מער מע פאַרטאָפּלט די צאָל זײַטן פונעם פּילעק, שטײַגט אַלץ די אַפּאָטעמע, זי ווערט אַלץ גרעסער און גרעסער און דערנעענטערט זיך לויט איר לענג צו דער לענג פונעם ראַדיוס R פון דער קרײַזליניע, פאַרבלײַבנדיק דאָך קלענער פון אים.

אַזוי־אַרום איז די אַפּאָטעמע h_n באַם אומבאַגרענעצטן פאַרטאָפּלען די צאָל זײַטן פונעם פּילעק אַ פאַרענדערלעכע גרייס, דער ראַדיוס פון דער קרײַזליניע אָבער איז אַ קאָנסטאַנטע, און די דיפערענץ $R - h_n$ צווישן דער לענג פונעם ראַדיוס און דער

לענג פון דער אפאטעמע ווערט אלץ קלענער און בא א גאר גרויסער צאל זײַטן ווערט זי נישטיק קליין.

3. באגריף וועגן לימיט. קרײַזליניע אלס לימיט פון די פערימעטערס פון ארײַנגעשריבענע און ארומגעשריבענע פילעקן.

1. דער פערימעטער פון א רעגלמעסיקן ארײַנגעשריבענעם פילעק שטײַגט באם אומבאגרענעצטן פארטאפלען די צאל פון זײַנע זײַטן און ער דערנעענטערט זיך צו דער לענג פון דער קרײַזליניע; דערבײַ ווערט די דיפערענץ צווישן דער לענג פון דער געגעבענער קרײַזליניע און דעם פערימעטער פון א רעגלמעסיקן ארײַנגעשריבענעם פילעק אלץ קלענער, וואס גרעסער עס ווערט די צאל זײַטן פון דעם ארײַנגעשריבענעם פילעק, און בא אן אומבאגרענעצטן פארגרעסערן די צאל זײַטן שטרעבט די דיפערענץ צו נול.

2. דער פערימעטער פון א רעגלמעסיקן ארומגעשריבענעם פילעק באם אומבאגרענעצטן פארטאפלען די צאל פון זײַנע זײַטן דערנעענטערט זיך אויך צו דער לענג פון דער קרײַזליניע, דערבײַ ווערט ער אבער אלץ קלענער; די דיפערענץ צווישן זײַן פערימעטער און דער לענג פון דער קרײַזליניע ווערט אלץ קלענער, וואס גרעסער עס ווערט די צאל זײַטן פונעם ארומגעשריבענעם פילעק, און בא אן אומבאגרענעצטן פארגרעסערן די צאל זײַטן שטרעבט די דיפערענץ צו נול.

3. באם אומבאגרענעצטן פארטאפלען די צאל זײַטן פון א פילעק איז ניט דער פערימעטער פון אן ארײַנגעשריבענעם פילעק, וועלכער האלט קעסיידער אין פארגרעסערן זיך, ניט דער פערימעטער פון אן ארומגעשריבענעם פילעק, וועלכער האלט קעסיידער אין פארקלענערן זיך, קאנען ניט ווערן גלײַך צו דער לענג פון דער קרײַזליניע. די קרײַזליניע איז זייער לימיט.

4. די קאנסטאנטע, צו וועלכער א פארענדערלעכע גרייס דערנעענטערט זיך אזוי, אז די דיפערענץ צווישן דער קאנסטאנטע און דער פארענדערלעכער גרייס קאן לויט איר אבסאליוטער גרייס ווערן קלענער פון א וואסער ס'זאל ניט זײַן פאראויס פארגעגעבענער גרייס און דערנאך פארבלײַבן קלענער פון איר, רופט מען לימיט פון דער פארענדערלעכער גרייס.

א קרײַזליניע איז אזויארום דער לימיט פון די פערימעטערס פון די ארײַנגעשריבענע און ארומגעשריבענע רעגלמעסיקע פילעקן באם אומבאגרענעצטן פארטאפלען די צאל פון זייערע זײַטן.

די דאזיקע האנאכע פארשרײַבט מען אזוי: $\lim p_n = C$, $\lim P_n = C$, ווו *lim* איז א פארקירצטע פארצײַכענונג פונעם לאטײַנישן ווארט *limes* (דער טײַטש דערפון איז — גרענעץ).

בא אן אומבאגרענעצטן פארטאפלען די צאל זײַטן פון א פילעק ווערט די דיפערענץ צווישן C און p_n און די דיפערענץ P_n און C אלץ קלענער און קלענער — ביז נישטיק קליין. אט דערפאר איז אנגענומען, אז דער פערימעטער פון אן ארײַנגעשריבענעם אדער פון אן ארומגעשריבענעם פילעק מיט גאר א גרויסער צאל זײַטן איז די דערנעענטערטע לענג פון דער קרײַזליניע.

5. א פאַרענדערלעכע גרייס, וואָס האַלט אין פאַרקלענערנ זיכ און קאָנ ווערנ און פאַרבלײַבנ קלענער, איידער א וואָסער ס'זאָל ניט זײַנ פאָרויס פאַרגעבענע גרייס, הייסט אומענדלעכ קליינע.

עס איז אָנגענומענ זיכ אויסדריקנ, אז ענדערנדיק זיכ, שטרעבט אַנ אומענדלעכ קליינע גרייס צו נול, אז נול איז איר לימיט. בײַשפּילנ פונ אומענדלעכ קליינע גרייסנ זײַנענ: די דיפערענצ צווישנ ראַדיוס פונ אַנ ארומגעשריבענער קרײַזליניע און דער אפּאָטעמע פונ דעם רעגולמעסיקנ פילעק, וואָס איז ארײַנגעשריבנ אינ דער קרײַזליניע, באַם אומבאַגרענעצטנ פאַרטאָפּלענ די צאָל זײַטנ; די דיפערענצ צווישנ דער לענג פונ דער קרײַזליניע און דעם פערימעטער פונעם ארײַנגעשריבענעם פילעק, די דיפערענצ צווישנ פערימעטער פונעם ארומגעשריבענעם פילעק און דער לענג פונ דער קרײַזליניע באַ די זעלביקע באַדינגונגענ. מע פאַרשרײַבט עס:

$R - h_n$ איז אַנ אומענדלעכ קליינע גרייס

$C - p_n$ איז אַנ אומענדלעכ קליינע גרייס

$P_n - C$ איז אַנ אומענדלעכ קליינע גרייס

באַ אַנ אומבאַגרענעצטנ פאַרטאָפּלענ די צאָל זײַטנ פונ א רעגולמעסיקנ פילעק.

4. וויאַזוי רעכנט מענ אויס די לענג פונ א קרײַזליניע. די צאָל π.

1. דירעקט אויסמעסטנ די לענג פונ א קרײַזליניע מיט א לינעאַלער מאָס קאָנ מענ ניט. די לענג פונ א קרײַזליניע ווערט באַשטימט אַלס לימיט, צו וועלכנ עס שטרעבט דער פערימעטער פונ א רעגולמעסיקנ ארײַנגעשריבענעם אָדער ארומגעשריבענעם פילעק באַם אומבאַגרענעצטנ פאַרטאָפּלענ די צאָל זײַטנ פונעם פילעק.

2. ארויסגייענדיק דערפונ, רעכנט מענ אויס דעם פערימעטער פונ א רעגולמעסיקנ ארײַנגעשריבענעם אָדער ארומגעשריבענעם פילעק מיט גאָר א גרויסער צאָל זײַטנ און דעם באַקומענעם רעזולטאַט נעמט מענ אָנ פאַר דער לענג פונ דער קרײַזליניע. באַם אויסרעכענענ די לענג פונ די זײַטנ פונ א רעגולמעסיקנ ארײַנגעשריבענעם אָדער ארומגעשריבענעם פילעק לויטנ געגעבענעם ראַדיוס פונ דער קרײַזליניע באַנוצט מענ זיכ מיט די פאָרמולעס:

$$b_n = \frac{a_n R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$ און $$a_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R\sqrt{R^2 - \frac{a_n^2}{4}}}$$

דער רעזולטאַט פונ אויסרעכענענ לויטנ געגעבענעם ראַדיוס פונ דער קרײַזליניע די לענג פונ די זײַטנ און אויכ די פערימעטערס פונ די רעגולמעסיקע ארײַנגעשריבענע און ארומגעשריבענע פילעקנ, וואָס די צאָל זײַטנ זייערע ווערט קעסיידער פאַרטאָפּלט, איז געגעבנ אינ דער טאַבעלע. די דיפערענצ פונ די פערימעטערס פונ אַנ ארומגעשריבענעם און אַנ ארײַנגעשריבענעם איינצאָמענדיקע רעגולמעסיקע פילעקנ איז געגעבנ מיט א פינקטלעכקײַט ביז 0,00001.

n — די צאָל זײַטן	a_n — די זײַט פונעם אַרײַנגעשריבענעם פּילעק	p_n — דער פּערימעטער פונעם אַרײַנגע־שריבענעם פּילעק	b_n — די זײַט פונעם ארומגעשריבענעם פּילעק	P_n — דער פּערימעטער פונעם ארומגע־שריבענעם פּילעק	$P_n - p_n$ — די דיפערענץ צווישן די פּע־רימעטערס
6	1,0000000 R	6,00000 R	1,1547006 R	6,92820 R	0,92820 R
12	0,5176381 R	6,21166 R	0,5358984 R	6,43078 R	0,21912 R
24	0,2610524 R	6,26526 R	0,2633050 R	6,31932 R	0,05406 R
48	0,1308063 R	6,27870 R	0,1310869 R	6,29217 R	0,01347 R
96	0,0654382 R	6,28206 R	0,0654732 R	6,28543 R	0,00337 R
192	0,0327235 R	6,28290 R	0,0327278 R	6,28375 R	0,00085 R
384	0,0163623 R	6,28311 R	0,0163628 R	6,28333 R	0,00022 R
768	0,0081812 R	6,28317 R	0,0081813 R	6,28322 R	0,00005 R
1536	0,0040906 R	6,28318 R	0,0040906 R	6,28319 R	0,00001 R

דער אַנאַליז פון דער טאַבעלע באַווײַזט, אַז וואָס מער עס ווערט פאַרטאָפּלט די צאָל זײַטן פונעם פּילעק איז: 1) a_n ווערט קלענער און p_n ווערט גרעסער; 2) b_n ווערט קלענער און P_n ווערט קלענער; 3) די צאָליקע באַטרעפן פון a_n און b_n, p_n און P_n דערנענטערן זיך ביסלעכווײַז איינס צום אַנ־דערן; 4) די דיפערענץ צווישן די פּערימעטערס פונעם ארומגעשריבענעם און אַרײַנגעשריבענעם פּילעקן ווערט אַלץ קלענער און קלענער.

אַזוי דאַרף טאַקע זײַן; ביידע פּערימעטערס גייען צו ביסלעכווײַז צו איין און דעם זעלבן לימיט — צו דער לענג פון דער קרײַזליניע, זיי שטרעבן צונויפ־צוגיסן זיך מיט איר, ווערן גלײַך מיט דער לענג פון דער קרײַזליניע.

ס'איז גאַנץ פאַרשטענדלעך, אַז אויב די דיפערענץ צווישן די פּערימעטערס פון איינאָמענדיקע ארומגעשריבענעם און אַרײַנגעשריבענעם פּילעקן בײַ 768 זײַטן איז גלײַך בײַ $0,00005R$, איז די דיפערענץ צווישן דער לענג פון דער געגע־בענער קרײַזליניע און דעם פּערימעטער פון דעם אַרײַנגעשריבענעם פּילעק אָדער די דיפערענץ צווישן דעם פּערימעטער פונעם ארומגעשריבענעם פּילעק און דער לענג פון דער געגעבענער קרײַזליניע קלענער פון $0,00005R$, און דעריבער קאָן מען דערנענטערס אָננעמען פאַר דער לענג פון דער קרײַזליניע דעם פּערימעטער פון אַן אַרײַנגעשריבענעם אָדער פון אַן ארומגעשריבענעם פּילעק, וואָס די צאָל פון זײַנע זײַטן איז גאָר אַ גרויסע; וואָס גרעסער ס'וועט זײַן די צאָל זײַטן, אַלץ פּינקטלעכער וועט זײַן די דערנענטערונג.

אויב ס'איז, אַשטייגער, גענומען אַ קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז 1 מעטער, וועט די דיפערענץ $P_n - p_n$ בײַ $n = 768$ אויסמאַכן אַרום 0,05 מם.

$$0,00005\text{m} = 0,005\text{cm} = 0,05\ \text{mm}$$

דה. סאכאקל $\frac{1}{20}$ מילימעטער. ס'איז קלאָר, אז די לענג פון דער קרײַזליניע, וואָס איר ראַדיוס איז 1 מעטער, וועט זיך אונטערשיידן פונעם פּערימעטער פון אן אַרײַנגעשריבענעם אָדער אַרומגעשריבענעם פילעק נאָך אַפ אַ קלענערער גרייס.

אַלזאָ, מיט אַ פּינקטלעכקײַט ביז 0,0001 וועט די לענג C פון דער קרײַז־ליניע, וואָס איר ראַדיוס איז R, זײַן אומגעפער גלײַך $6{,}2832R$, דה. $C \approx 6{,}2832R$.

אויב אינעם געגעבענעם אויסדרוק וועלן מיר פאַרבײַטן דעם ראַדיוס R פון דער קרײַזליניע מיט אַ העלפט פון איר דיאַמעטער D, דה. אַנשטאָט R וועלן מיר נעמען $\frac{D}{2}$, וועלן מיר באַקומען:

$$C = 6{,}2832R = 6{,}2832 \cdot \frac{D}{2} = 3{,}1416\,D$$

די לעצטע פאָרמולע באַווײַזט, אז די לענג C פון אַ קרײַזליניע באַ־קומט זיך דורך קייפלען איר דיאַמעטער אַפ דער צאָל 3,1416.

3. די פאָרמולע $C \approx 3{,}1416D$ בלײַבט אויך ריכטיק פאַר אויסצורעכענען די לענג פון אַ קרײַזליניע מיט אַ באַליביקן דיאַמעטער. פון דער פאָרמולע האָבן מיר: $\frac{C}{D} \approx 3{,}1416$. די דאָזיקע פאַרהעלטעניש באַווײַזט, אז די לענג פון דער קרײַזליניע איז גרעסער פון איר דיאַמעטער אומגעפער אין 3,1416 מאָל.

די פאַרהעלטעניש צווישן דער לענג C פון דער קרײַזליניע און איר דיאַמעטער D איז אַ קאָנסטאַנטע, וואָס איז אומגעפער גלײַך 3,1416.

די דאָזיקע קאָנסטאַנטע איז אָנגענומען צו באַצייכענען מיטן גריכישן אָס π (לייענט זיך „פּי"), הייסט עס, $\pi \approx 3{,}1416$. ווען מיר פירן אַרײַן די דאָזיקע באַצייכענונג, גיבן מיר דער פאָרמולע, וואָס דריקט אויס די לענג C פון דער קרײַזליניע, פאָלגנדיקן אויסזען: $\frac{C}{D} = \pi$, אָדער $C = \pi D$, אָדער $C = 2\pi R$, דה.

די לענג פון דער קרײַזליניע איז אין π מאָל גרעסער פון איר דיאַמע־טער אָדער אין 2π מאָל גרעסער פון איר ראַדיוס.

4. די צאָל π איז אן איראַציאָנעלע צאָל און, הייסט עס, זי קאָן ניט אויסגעדריקט ווערן פּינקטלעך מיט קיין שום ראַציאָנעלער ברוכצאָל. אויב מיר האָבן אָנגענומען פאַר דער לענג C פון דער קרײַזליניע דעם פּערימעטער פון אַ רעגולמעסיקן אַרומגעשריבענעם פילעק, וואָס די צאָל פון זײַנע זײַטן איז 768, וועלן מיר באַקומען פאַר π די דערנעענטערטע צאָל 3,1416 מיט אן איבערפלוס און מיט אַ פּינקטלעכקײַט ביז 0,0001.

פאַר פּראַקטישע צוועקן איז גענוג אָנצונעמען בײַם אויסצורעכענען די לענג פון דער קרײַזליניע: $\pi \approx 3{,}14$ מיט דער פּינקטלעכקײַט ביז 0,01.

בײַם לייזן אויפגאַבעס קומט אויס צו באַנוצן זיך מיט אַ צאָל, אַ פאַרקער־טער צו π דה. מיט דער ברוכצאָל $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi} = 0{,}318$ מיט דער פּינקטלעכ־

קײַמ ביז 0,001; $\frac{1}{\pi}$ רעכנמ מענ איז גלײַכ 0,32 מימ דער פינקטלעכקײַמ ביז 0,01.

5. די פראגע וועגנ אויסרעכענענ די לענג פונ א קרײַזליניע האָמ אינטערעסירט די מאטעמאטיקער אינ משך פונ עטלעכע טויזנט יאָר. די אמאָליקע באבילאָנער אונ יידנ פלעגנ רעכענענ, אז די לענג פונ א קרײַזליניע איז גלײַכ צו דרײַ אירע דיאמעטערס. איינער פונ די גרעסטע מאטעמאטיקער פונ דער אלטער צײַמ א ר כ י מ ע ד האָמ געפינענ פאר π די צאָל $3\frac{1}{7}$. באַם אויסרעכענענ די לענג פונ דער קרײַזליניע האָט ער זיכ באנוצט מיטנ זעלבנ מעטאָד, וואָס איז אָנגעוויזנ אינ דעמ דאָזיקנ בוכ. בא ט אָ ל אָ מ ײ ע נ, בא די אינדוסנ אונ שפעטער בא די אראבער טרעפ: מיר פאר π די צאָל 3,1416. א ד ר י א נ מ ע צ י האָט געפונענ: $\pi = \frac{355}{113}$ די דאָזיקע צאָל איז זייער לײַכט צו פארגעדענקענ; מע פארשרײַבט נאָכאנאנד צוויי מאָל די ערשטע דרײַ אומיקע צאָלנ 113355 אונ מע טיילט די לעצטע דרײַ ציפערנ אפ די ערשטע דרײַ.

שוינ אינ מיטלאלטער איז די צאָל π געווענ אויסגערעכנט מיט א גרויסער פינקטלעכקײַט. דער פראנצויזישער מאטעמאטיקער וויעט (1540 — 1603) האָט אויסגערעכנט π מיט א פינקטלעכקײַט ביזנ צענטנ דעצימאלנ צייכנ. דער דײַטשישער מאטעמאטיקער לודאָלפ (1649 — 1711) האָט אויסגערעכנט π מיט 35 דעצימאלע צייכנס. נאָכ דעמ האָט מענ די צאָל π גופא אָנגעהויבנ רופנ לודאָלפ-צאָל. שפעטער האָט מענ געגעבנ ניט צומ פארגלײַכנ מער פינקטלעכע באטראַכנ פונ π. אשטיינער, דער ענגלישער מאטעמאטיקער שאנקס (1812 — 1882) האָט אויסגערעכנט 707 צייכנס. דאָכ מוז מענ זאָגנ, אז די דאָזיקע מינימ אויסרעכענונגענ ברענגענ וויייניק נוצנ אונ באַרעכטיקנ ניט די קאָלאָסאלע מי, וואָס מע האָט דערופ געפאטערט; קיינער, פארשטייט זיכ, באנוצט זיכ ניט מיט שאנקס צאָל.

א סאכ אינטערעסאנטער אונ וויכטיקער זײַנענ די טעאָרעטישע פראגנ, וואָס זײַנענ דערמיט פארבונדנ. שוינ גאָר אמאָל נאָכ האָבנ זיכ צוגעצויגנ די אויפמערקזאמקײַט פאַלגנדיקע אויפגאבעס: וועגנ א ו י ס ג ל ײַ כ נ א ק ר ײַ ז ל י נ י ע, דה. קאָנסטרויִרנ א גראָדליניקנ אָפשניט, וואָס זײַנ לענג זאָל זײַנ גלײַכ צו דער לענג פונ דער געגעבענער קרײַזליניע, אונ וועגנ דער ק ו א ד ר א ט ו ר פ ו נ א ק ר ײַ ז, דה. קאָנסטרויִרנ א קווארדראט, וואָס זײַנ שטעכ זאָל זײַנ גלײַכ צומ שטעכ פונעמ געגעבענעמ קרײַז. פארשטייט זיכ, אז דערבײַ פאָדערט זיכ, אינ ביידע פאלנ זאָל די קאָנסטרויִרונג געמאכט ווערנ בלויז מיט צוויי אינסטרומענטנ — מיט א ווירע אונ מיט א צירקל, דה. מע דארפ אויסקומענ בלויז מיט דורכפירנ גראָדע אונ קרײַזליניעס. די דאָזיקע ביידע אויפגאבעס זײַנענ צווישנ זיכ ענג פארבונדנ. ווענ מיר זאָלנ קאָנענ קאָנסטרויִרנ אנ אָפשניט, וואָס זײַנ לענג זאָל זײַנ גלײַכ צו דער לענג פונ א קרײַזליניע, איז ווענ מיר נעמענ דעמ דאָזיקנ אָפשניט אלס באזיס פונ א גראָדעק אונ א העלפט פונעמ ראדיוס אלס זײַנ הייכ, וואָלטנ מיר באקומענ א גראָדעק, וואָס איז גלײַכגרויס מיטנ געגעבענעמ קרײַז; פארוואנדלענ דעמ גראָדעק אינ א גלײַכגרויסנ קווארדראט איז שוינ ניט שווער: דאָס האָט עווקליד שוינ געקענט מאכנ.

די אויפגאבע וועגנ דער קווארדראטור פונ א קרײַז אונ וועגנ אויסגלײַכנ א קרײַזליניע האָט שטארק אינטערעסירט פיל געאָמעטערס, דערונטער אויכ די באזונדערס בארימטע. ווענ מיר נעמענ אָנ דעמ ראדיוס פונ דער קרײַזליניע פאר א מאָס-איינס, וועט די לענג פונ א האלב-קרײַזליניע זיכ אויסדריקנ דורכ דער צאָל π. די זאכ באשטייט דעריבער אינ דעמ, אז מע זאָל קאָנסטרויִרנ מיט דער הילפ פונ א צירקל אונ ווירע אנ אָפשניט, וואָס זײַנ לענג זאָל זיכ אויסדריקנ דורכ דער צאָל π. די מעגלעכקײַט פונ קאָנסטרויִרנ אזא אָפשניט איז דעריבער אָפהענגיק פונ כאראקטער פונ דער צאָל π. שוינ אינ יאָר 1768 האָט דער דײַטשישער מאטעמאטיקער לאמבערט באוויזנ, אז π איז אנ איראציאָנעלע צאָל. א סאכ איראציאָנעלע צאָלנ אָבער קאָנ מענ קאָנסטרויִרנ מיט א צירקל אונ א ווירע. אשטייגער, ווענ מיר קאָנסטרויִרנ א קווארדראט, וואָס זײַנ זײַט איז גלײַכ 1 (א לענג-איינס) אונ פירנ דורכ זײַנ דיאגאָנאל, באקומענ מיר אנ אָפשניט, וואָס זײַנ לענג דריקט זיכ אויס דורכ דער צאָל $\sqrt{2}$. די זײַט פונ א רעגולמעסיקנ אכטעק, וועלכער איז ארײַנגעשריבנ אינ א קרײַז, וואָס זײַנ ראדיוס איז גלײַכ איינס, דריקט זיכ אויס דורכ דער צאָל $\sqrt{2-\sqrt{2}}$; דעמ דאָזיקנ אָפשניט קאָנ מענ אויכ קאָנסטרויִרנ מיט א צירקל אונ א ווירע. די צאָל π

אָבער האָט, אזוי צו זאָגנ, א מער קאָמפּליצירטע קאָנסטרויִרונג. אינ דער צווייטער העלפט פונ־עריקנ יאָרהונדערט האָט זיכ דעמ פראנצויזישנ מאטעמאטיקער ערמיטנ (1873) אײַנגעגעבנ פעסטשטעלנ פּראָפּאָזיציעס, וואָס אפ זייער גרונט האָט דער דײַטשישער מאטעמאטיקער לינדעמאנ (1882) אופגעדעקט, אז אנ אָפּשניט, וואָס איז אויסגעדריקט דורכ דער צאָל π, קאָנ מענ מיט א צירקל אונ ווירע ניט קאָנסטרויִרנ. שפּעטער האָבנ א סאכ מאטעמאטיקער פארייִנפאכט אונ פארפולקומט דעמ דאָזיקנ דערווײַז. איצט איז אזויארומ אב־סאָליוט פעסטגעשטעלט, אז די קוואדראטור פונ א קרײַז מיט א צירקל אונ א ווירע קאָנ מענ ניט קאָנסטרויִרנ.

מיר באמערקנ, אז מיט דער הילפ פונ מער קאָמפּליצירטע אינסטרומענטנ, דה. מיט דער הילפ פונ מער קאָמפּליצירטע קרומע, קאָנ מענ יאָ מאכנ די דאָזיקע קאָנסטרויִרונג, נאָר דאָס האָט מענ נאָכ געוווסט אינ די אלטע צײַטנ.

6. טעאָרעמע. צוויי קרײַזליניעס פארהאלטנ זיכ ווי זייערע ראדיוסנ אדער דיאמעטערס.

ס׳איז געגעבנ: C_1 אונ C_2 — די לענגענ פונ קרײַזליניעס, R_1 אונ D_1, R_2 אונ D_2 — זייערע ראדיוסנ אונ דיאמעטערס.

פ׳פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $\frac{C_1}{C_2}=\frac{R_1}{R_2}=\frac{D_1}{D_2}$.

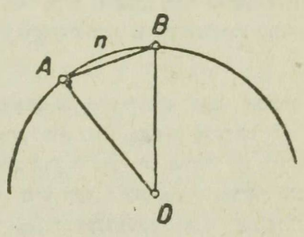
דערווײַז. $C_1=2\pi R_1=\pi D_1$; $C_2=2\pi R_2=\pi D_2$.

טײַלנ מיר גלידערווײַז די ערשטע גלײַכקײַט אפ דער צווייטער, האָבנ מיר:

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{\pi D_1}{\pi D_2}=\frac{D_1}{D_2},\quad \frac{C_1}{C_2}=\frac{2\pi R_1}{2\pi R_2}=\frac{R_1}{R_2}$$

5. די לענג פונ א בויגנ.

אופגאבע 1. באשטימענ די לענג פונ א בויגנ פונ n°, וואָס זײַנ ראדיוס איז R (צייכ. 281).



צייכ. 281

לייזונג. דעמ בויגנ AB, וואָס האלט n בויגנ־גראדוסנ ($\smile AB=n^\circ$), אנטשפּרעכט א צענט־ראלער ווינקל, וואָס האלט n ווינקל־גראדוסנ ($\angle AOB=n^\circ$). די לענג פונ איינ בויגנ־גראדוס איז גלײַכ $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$, אָבער דער בויגנ AB האלט n°; הייסט עס, זײַנ לענג a איז גלײַכ

$$a=\frac{\pi R\cdot n}{180}.$$

די צאָלנ n אונ 360 דארפנ זײַנ אייננאָמענדיקע; דאָס באטײַט, אז אויב n איז געגעבנ אינ מינוטנ, דארפ מענ 360° אויכ פארוואנדלענ אינ מינוטנ.

אופגאבע 2. באשטימענ די גרייס פונעמ צענטראלנ ווינקל, וואָס ער אנטשפּרעכט א בויגנ, וועלכער איז גלײַכ צומ ראדיוס פונ דער קרײַזליניע.

לײזונג. פון דער פאָרמולע $a=\frac{\pi Rn}{180}$ האָבן מיר: $n^\circ=\frac{180^\circ\cdot a}{\pi R}$; לויטנ באדינג פונ דער אופגאבע איז $a=R$, הײסט עס:

$$n^\circ=\frac{180^\circ\cdot R}{\pi R}=\frac{180^\circ}{\pi}\approx 57^\circ 18'$$

א צענטראלער װינקל, װאָס די לענג פונ זײַנ בויגנ איז גלײַכ צומ ראדיוס, הײסט ראדיאַנ. דער ראדיאַנ איז דערנעענטערט גלײַכ $57^\circ 18'$; מער פינקטלעכ איז דער ראדיאַנ גלײַכ $57^\circ 17'44'',8$.

6. שעטעכ פונ א קרײַז, פונ א סעקטער, פונ א סעגמענט.

1. די שעטעכנ פונ רעגלמעסיקע ארײַנגעשריבענע אונ ארומגעשריבענע פילעקנ באמ אומבאגרענעצטנ פארטאָפּלענ די צאָל זײַטנ זײערע זײַנענ פארענדערלעכע גרײסנ. באמ אומבאגרענעצטנ פארטאָפּלענ די צאָל זײַטנ װעס דער שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ ארײַנגעשריבענעמ פילעק זיכ פארגרעסערנ, דער שעטעכ אָבער פונ אנ ארומגעשריבענעמ פילעק װעס זיכ פארקלענערנ. די דאָזיקע בײדע פאר־ענדערלעכע גרײסנ דערנעענטערנ זיכ בעהאדראָגע אײנער צו דער אנדערער, שטרעבנדיק צו אײנ אונ דעמ זעלבנ לימיט. דער לימיט, צו װעלכנ זײ שטרעבנ, איז דער שעטעכ פונ קרײַז. אלזאָ, דער שעטעכ פונ א קרײַז איז דער לימיט פונ די שעטעכנ פונ רעגלמעסיקע ארײַנגעשריבענע אונ ארומגעשריבענע פילעקנ, װענ די צאָל פונ זײערע זײַטנ װערט אומבאגרענעצט פארגרעסערט.

אויב מע זאָל באצײכענענ דעמ שעטעכ פונעמ קרײַז דורכ K, דעמ שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעמ פילעק דורכ $S_{\text{ארומג}}$ אונ דעמ שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ ארײַנגעשריבענעמ פילעק דורכ $S_{\text{ארײַנג}}$, איז $S_{\text{ארומג}}>K>S_{\text{ארײַנג}}$.

װאָס מער מע פארטאָפּלט די צאָל זײַטנ פונ די פילעקנ, װערט די דיפערענצ צװישנ די שעטעכנ פונ דעמ ארומגעשריבענעמ אונ ארײַנגעשריבענעמ פילעק, $S_{\text{ארומג}}-S_{\text{ארײַנג}}$, בעהאדראָגע אלצ קלענער אונ קלענער. פארשטײט זיכ, אז בא די דאָזיקע באדינגונגענ איז די דיפערענצ $K-S_{\text{ארײַנג}}$ אונ $S_{\text{ארומג}}-K$ קלענער פונ דער דיפערענצ $S_{\text{ארומג}}-S_{\text{ארײַנג}}$.

דעריבער נעמט מענ אָנ פארנ שעטעכ פונ א קרײַז דעמ שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ ארײַנגעשריבענעמ אָדער ארומגעשריבענעמ פילעק מיט גאָר א גרויסער צאָל זײַטנ.

דער שעטעכ פונ א רעגלמעסיקנ ארומגעשריבענעמ פילעק איז $S_{\text{ארומג}}=\frac{1}{2}P_{\text{ארומג}}R$. װענ די צאָל זײַטנ פונעמ פילעק װערט אומבאגרענעצט פארטאָפּלט, שטרעבט דער פערימעטער $P_{\text{ארומג}}$ פונעמ פילעק צו זײַנ לימיט C — צו דער לענג פונ דער קרײַזליניע, גלײַכצײַטיק שטרעבט אויכ זײַנ שעטעכ $S_{\text{ארומג}}$ צו זײַנ לימיט K, צומ שעטעכ פונעמ קרײַז.

די גלײַכקײַט $S_{\text{ארומג}} = \frac{1}{2} P_{\text{ארומג}} R$ איז ריכטיק פאַר א פּילעק מיט א באַ־ליביקער צאָל זײַטן; זי איז ריכטיק אויך דאַן, ווען n איז גאָר א גרויסע צאָל, אָבער דעמלט שיידט זיך אונטער $P_{\text{ארומג}}$ פון C, און $S_{\text{ארומג}}$ פון K אף אזא קלייער גרייס, וואָס מע מעג אף איר קיין אכט ניט לייגן; דעריבער איז די גלײַכ־קײַט ריכטיק אויך דאַן, ווען מיר וועלן $P_{\text{ארומג}}$ פאַרבײַטן מיט זײַן לימיט C און $S_{\text{ארומג}}$ מיט זײַן לימיט K. אלזאָ,

$$K = \frac{1}{2} C \cdot R \tag{1}$$

דה.

דער שטעטעך פון א קרײַז איז גלײַך צו א האַלבן פּראָדוקט פון דער לענג פון זײַן קרײַזליניע אפן ראַדיוס.

פאַרבײַטן מיר אין דער פאָרמולע (1) C מיט $2\pi R$, באַקומען מיר:

$$K = \frac{1}{2} CR = \frac{1}{2} 2\pi R \cdot R = \pi R^2$$

אויב אין דער צום לעצט געבראַכטער גלײַכקײַט וועלן מיר פאַרבײַטן R מיט $\frac{D}{2}$, וועלן מיר באַקומען פאַרן שטעטעך פון א קרײַז די פאָרמולע:

$$K = \pi R^2 = \pi \left[\frac{D}{2}\right]^2 = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{1}{4} \pi D^2$$

אלזאָ,

$$\boxed{K = \frac{1}{4} \pi D^2 \text{ אָדער } K = \pi R^2}$$

1) דער שטעטעך פון א קרײַז איז גלײַך צום קוואַדראַט פון זײַן ראַדיוס געקייפּלט אף דער צאָל π.

2) דער שטעטעך פון א קרײַז איז גלײַך צו א פערטל קוואַדראַט פון זײַן דיאַמעטער, געקייפּלט אף דער צאָל π.

קאָנסעקווענץ. די שטעטעכן פון צוויי קרײַזן פאַרהאַלטן זיך ווי די קוואַדראַטן פון זייערע ראַדיוסן אָדער ווי די קוואַדראַטן פון זייערע דיאַמעטערס.

אינדערעמעסן, K_1 און K_2 זײַנען די שטעטעכן פון צוויי קרייזן, R_1 און R_2 זײַנען זייערע ראַדיוסן, D_1 און D_2 זײַנען זייערע דיאַמעטערס, הייסט עס:

$$K_1 = \pi R_1^2 = \frac{1}{4} \pi D_1^2; \quad K_2 = \pi R_2^2 = \frac{1}{4} \pi D_2^2.$$

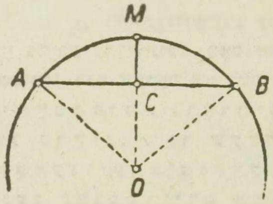
צעטיילן מיר גלידערווײַז אָט די גלײַכקײַטן, האָבן מיר:

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{D_1^2}{D_2^2}$$

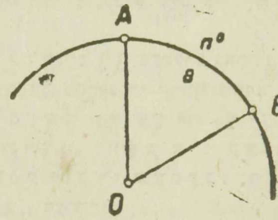
2. טעאָרעמע. דער שעטעכ פונ א סעקטער איז גלײַכ צו א האלבנ ראָדוקט פונ דער לענג פונ זײַנ בויגנ אפנ ראַדיוס.

ס'איז בעגעבנ: א קרײַז, וואָס זײַנ ראַדיוס איז R (צייכ. 282).
די לענג פונ בויגנ $AB=a$, דער סעקטער AOB האלט n°.

ס'פאָדערט זיכ דערווײַזנ: $S_{\text{סעקט}}=\frac{1}{2}aR$.



צייכ. 283



צייכ. 282

דערווײַז. דער שעטעכ K פונ א קרײַז, וואָס זײַנ ראַדיוס איז R, איז גלײַכ πR^2; דער שעטעכ פונ א סעקטער, וואָס זײַנ בויגנ איז גלײַכ 1°, מאַכט אויס $\frac{1}{360}$ שעטעכ פונעמ קרײַז אונ דאָס הייסט, אז ער איז גלײַכ $\frac{\pi R^2}{360}$. דער שעטעכ פונעמ סעקטער AOB, וואָס זײַנ בויגנ AB האלט n°, איז גלײַכ

$$S_{\text{סעקט}}=\frac{\pi R^2 n}{360}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi RnR}{180},\quad \text{אָבער}\quad \breve{AB}=a=\frac{\pi Rn}{180},$$

אונ דעריבער איז

$$\boxed{S_{\text{סעקט}}=\frac{1}{2}aR}$$

3. שעטעכ פונ א סעגמענט. דער שעטעכ פונעמ סעגמענט AMB (צייכ. 283), וואָס איז באַגרענעצט מיטנ בויגנ $AMB=a$ אונ מיט דער כאָרדע AB, ווערט אויסגערעכנט ווי א דיפערענצ צווישנ שעטעכ פונעמ סעקטער AOB מיט דעמ זעלבנ בויגנ a אונ דעמ שעטעכ פונעמ גלײַכאַקסלדיקנ דרײַעק AOB, וואָס בילדעט זיכ דורכ דער כאָרדע AB אונ דורכ די צוויי ראַדיוסנ.

דער שעטעכ פונעמ סעגמענט AMB איז גלײַכ צומ שעטעכ פונ סעקטער AOB אָנ דעמ שעטעכ פונעמ דרײַעק AOB; דער שעטעכ פונ סעקטער איז גלײַכ $\frac{1}{2}aR$ אונ דער שעטעכ פונעמ דרײַעק איז גלײַכ $\frac{1}{2}a_nh_n$, אונ דעריבער איז דער שעטעכ פונעמ סעגמענט גלײַכ $\frac{1}{2}aR-\frac{1}{2}a_nh_n$.

אינעמ סעגמענט AMB (צייכ. 283) הייסט די כאָרדע AB זײַנ באַזיס, דער פּערפּענדיקוליאַר $CM=h$, וואָס גייט דורכנ מיטנ באַזיס פונ סעגמענט, הייסט הייכ אָדער פײַל פונ סעגמענט.

ראַנגעס און איבונגען.

1. אפ וויפל וועט זיכ פארגרעסערנ די לענג פונ א קרײַזליניע, אויב מע זאל דעמ ראַדיוס אינ פארגרעסערנ אפ 1 מ.?

2. אינ וויפל מאָל איז די לענג פונ דער קרײַזליניע, וואָס איז אַרײַנגעשריבנ אינ א רעגלמעסיקנ דרײַעק, קלענער פאר דער לענג פונ דער ארומגעשריבענער קרײַזליניע?

3. אינ וויפל מאָל איז דער שעטעכ פונ א קרײַז, אינ וועלכנ ס'איז אַרײַנגעשריבנ א רעגלמעסיקער דרײַעק, גרעסער פארנ שעטעכ פונ קרײַז, וואָס איז אַרײַנגעשריבנ אינ דעמ דאָזיקנ דרײַעק?

4. אויסרעכענענ, אפ וויפל איז דער געגעבענער בויגנ, וואָס זײַנ ראַדיוס איז גלײַכ 1 מעטער אינ וואָס האלט $120°$, גרעסער פונ דער כאָרדע, וואָס ציט צונויפ דעמ בויגנ.

5. די לענג פונ א האלב-קרײַזליניע, אויסגערעכנט מיט דער פינקטלעכקײַט ביז 0,01, איז דערנענטערט גלײַכ $a_3 + a_4$. דורכקאָנטראָלירנ עס.

6. דרײַ גלײַכע קרײַזליניעס, וואָס זייער ראַדיוס R איז גלײַכ 3,0 מעטער, באַרירנ זיכ פאָרוויַז פונ דרויסנ. באַשטימענ דעמ שעטעכ פונ דעמ „קרומליניקנ" דרײַעק צווישנ די קרײַזליניעס.

7. די זײַטנ פונ א גראָדווינקלדיקנ דרײַעק $2a$, $2b$ אונ $2c$ זײַנענ דיאַמעטערס פונ קרײַזנ. דער שעטעכ פונעמ קרײַז, וואָס איז קאָנסטרוירט אפ דער היפּאָטענוזע, איז גלײַכ צו דער סומע פונ די שעטעכנ פונ די קרײַזנ, וואָס זײַנענ קאָנסטרוירט אפ די קאַטעטנ. דערווײַזנ.

8. צוויי גלײַכע קרײַזליניעס, וואָס זייער ראַדיוס R איז גלײַכ 1,0 מעטער, באַרירנ זיכ פונ דרויסנ. דורכפירנ א דריטע קרײַזליניע, וואָס צעטיילט די געגעבענע קרײַזליניעס אפדערהעלפט, אונ אויסרעכענענ דעמ שעטעכ פונ דעמ געמיינזאַמענ טייל פונ אלע דרײַ קרײַזליניעס.

9. א קרײַז, וואָס זײַנ ראַדיוס R איז גלײַכ 2 מעטער, איז צעטיילט מיט א קאָנצענטרישער קרײַזליניע אפדערהעלפט. באַשטימענ דעמ ראַדיוס פונ דער קאָנצענטרישער קרײַזליניע.

10. דערווײַזנ, אז דער שעטעכ פונ א רינג איז גלײַכ $\pi(R+r)(R-r)$, וו R אונ r זײַנענ דער דרויסנדיקער אונ דער אינעווייניקסטער ראַדיוס.

ווײַכטיקסטע טערמינען

Доказательство	דערווײַז
Доказательство от противного	דערווײַז פונ דעמ הייפעכ
Выпуклый многоугольник	דרויסנעקיקער פילעק
Полукруг	האלבקרײַז
Полуокружность	האלב-קרײַזליניע
Противоположные углы	ווערטיקאלע ווינקלענ
Боковая сторона	זײַט-ליניע
Касательная	טאנגענטע
Тупоугольный	טעמפווינקלדיקער
Тупой угол	טעמפער ווינקל
Предел	לימיט
Недостаток (вычисление с ...)	מאנגל (אויסרעכענענ מיט א...)
Средняя линия	מיטל-ליניע
Последующий член	נאָכגליד
Секущая	סעקאנטע
Подобие	ענלעכקײַט
Пополнительный угол	פארגאנצ-ווינקל
Переменная величина	פארענדערלעכע גרייס
Предыдущий член	פאָרגליד
Многоугольник	פילעק
Мнимое число	פיקטיווע צאָל
Плоскость	פלאכקײַט
Равенство (фигур)	קאָנגרוענצ (גלײַכקײַט פונ פיגורנ)
Постоянная	קאָנסטאנטע (באשטענדיקע גרייס)
Построение (фигур)	קאָנסטרויִרונג (פונ פיגורנ)
Следствие	קאָנסעקווענצ
Круг	קרײַז
Окружность	קרײַזליניע
Центроискатель	צענטער-זוכער
Чертежный треугольник	רייסווינקל
Правильные фигуры	רעגלמעסיקע פיגורנ
Равнодействующая	רעזולטאנטע
Относительные - ое	רעלאטיווע (צאָלנ, לאגע)
Остроугольный треугольник	שארפווינקלדיקער דרײַעק
Острый угол	שארפער ווינקל
Соответственные углы	שטאפלדיקע ווינקלענ
Смежные углы	שכײַנישע ווינקלענ
Вершина	שפיצ
Косоугольный треугольник	שרעגווינקלדיקער דרײַעק
Избыток (вычисление с ...)	איבערפלוס (אויכדערכענענ מיט אנ ...)
Сходственные стороны	אנאלאָגישע זײַטנ
Противолежащая- ий (сторона, угол)	אנטקעגנליגנדיקע — ר (זײַט, ווינקל)
Противоположная- ый (сторона, угол)	אנטקעגנדיקע — ר (זײַט, ווינקל)
Описанная фигура	ארומגעשריבענע פיגור
Метод наложения	ארופלייג-מעטאָד
Вписанная фигура	ארײַנגעשריבענע פיגור
Расстояние	אָפשטאנד
Отрезок	אָפשניט
Провешивать (линию)	אָפקלאפנ (א ליניע)
Неравенство	אומגלײַכקײַט
Несоизмеримо	אומדורכמעסטלעכ
Измерение (размер)	אויסמעסטונג (א גראָדע ליניע האָט איינ אויסמעסטונג, א פלאכקײַט — צוויי אויסמעסטונגענ, א קערפער — דרײַ אויסמעסטונגענ)
Основание	באזיס
Точка касания	באריר-פונקט
Дуга	בויגנ
Прилежащие	בײַליגנדיקע
Звено ломаной	גליד פונ א געבראָכענער
Член пропорции	גליד פונ א פראָפאָרציע
Равнобедренный треугольник	גלײַכאקסלדיקער דרײַעק
Равновелико	גלײַכגרויס
Равноудаленно	גלײַכווײַט
Равносторонний треугольник	גלײַכזײַטיקער דרײַעק
Равносоставленные	גלײַכצונויפגעשטעלטע
Геометрические образы	געאָמעטרישע פאָרמענ
Производная пропорция	געדרונגענע פראָפאָרציע
Наклонная	גענייגטע
Непрерывная пропорция	געקייטלטע פראָפאָרציע
Накрестлежащие углы	געקרייצטע ווינקלענ
Прямая- ой (линия, угол)	גראָדע — ר (ליניע, ווינקל)
Соизмеримо	דורכמעסטלעכ
Дополнительный угол	דערגאנצ-ווינקל

אינהאלט

3

XXI. די לענג פונ א קרײַזליניע אונ דער שעטעכ פונ א קרײַז.

1. וויאזוי פארגלײַכט מענ די לענג פונ א קרײַזליניע מיט די פערימעטערס פונ רעגלמעסיקע ארײַנ־געשריבענע אונ ארומגעשריבענע פילעקנ (ז. 196). 2. באגריפ וועגנ א קאָנסטאנטע (באשטענדיקע גרייס) אונ וועגנ א פארענדערלעכער גרייס (ז. 199). 3. באגריפ וועגנ לימיט. קרײַזליניע אלס לימיט פונ די פערימעטערס פונ ארײַנגעשריבענע אונ ארומגעשריבענע פילעקנ (ז. 201). 4. וויאזוי רעכנט מענ אויס די לענג פונ א קרײַזליניע. די צאָל π (ז. 202). 5. די לענג פונ א בויגנ (ז. 205). 6. שעטעכ פונ א קרײַז פונ א סעקטער, פונ א סעגמענט (ז. 207).

וויכטיקסטע טערמינענ.

Редактор А. Фрумкин. Техред. И. Тененбаум. Корректор Иткин.
Сдано в производство 28/II-34 г. Подписано к печати 20/V-34 г. Бумага $62 \times 94^{1}/_{16}$. $13^{1}/_{2}$ п. л. 42000 зн. в п. л. Уп. Главлита В—76323. Тираж 11000.

Тип. «Дер Эмес», Москва, Покровка, 9. Зак. 195.

1 руб. 75 коп.
Переплет 75 коп.

1 רוב. 75 קאָפּ.
אײַנבונד 75 קאָפּ.
У—2

Ю. О. ГУРВИЦ и Р. В. ГАНГНУС

СИСТЕМАТИЧЕСКИЙ КУРС

ГЕОМЕТРИИ

УЧЕБНИК ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ

Изд-во «Эмес», Москва, Старопанский пер., 1.