

111 -  
A. 23

bb

X

23 bb.

Schriften

herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft  
bei der Universität Dorpat.

IV.

## Neue Untersuchungen

über die

# Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

**Dr. Karl Weihrauch,**

ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat.



Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1888.

In Commission bei

K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

X. 123 66

X 23<sup>bb</sup>  
Schriften

herausgegeben von der Naturforscher-Gesellschaft  
bei der Universität Dorpat.

IV.

---

## Neue Untersuchungen

über die

# Bessel'sche Formel und deren Verwendung in der Meteorologie

von

Dr. **Karl Wehrauch**, *acc. 61157.*

ord. Professor der physikalischen Geographie an der Universität Dorpat.



Dorpat.

Druck von C. Mattiesen.

1888.

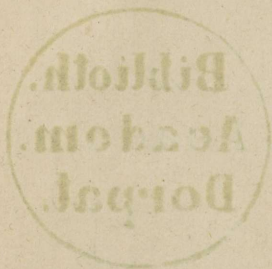
In Commission bei

K. F. Koehler in Leipzig, Th. Hoppe und E. J. Karow in Dorpat.

4-X B.

Tartu Riikliku Ülikooli  
Raamatukogu  
201

Доволено цензурою. — Дерптъ, 18. Марта 1888 г.



## Erster Theil.

### Ueber die bei der Bessel'schen Formel auftretenden Gleichungssysteme.

Periodische Erscheinungen, wie sie unter anderem in der Meteorologie vorkommen, können immer durch eine Reihe von folgender Gestalt dargestellt werden:

$$y = \Sigma u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 1)$$

Hier ist  $y$  die zur Phase  $x$  gehörende Amplitude, wo  $x$  in Theilen der Periode  $K$  auszudrücken ist, die  $u_m$  sind Konstanten von derselben Einheit, wie die Amplituden, die  $U_m$  dagegen Angularkonstanten, und für  $m$  sind ganz beliebige ganze Zahlen zu setzen.

Es wird nun im zweiten Theil gezeigt werden, dass bei allen meteorologischen Fragen, wenn  $n$  Beobachtungen zu Grunde gelegt werden, man gezwungen ist die Gleichung 1) in folgender Form aufzustellen

1) für  $n = 2\nu + 1$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 2)$$

2) für  $n = 2\nu$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) + u_\nu \sin \left( U_\nu + \frac{2\pi \nu}{K} x \right) \quad 3)$$

mit der Bedingung, dass  $U_\nu$  gleich der negativen halben Summe aller gegebener  $2\nu$ , auf Bogen reducirter Phasen gesetzt werde.

Führt man, wie gebräulich, die neuen Grössen ein

$$\left. \begin{aligned} p_m &= u_m \sin U_m \\ q_m &= u_m \cos U_m, \end{aligned} \right\} \quad 4)$$

so lautet die Formel

1) für  $n = 2\nu + 1$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right)$$

2) für  $n = 2\nu$

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u_\nu \sin \left( U_\nu + \frac{2\pi \nu}{K} x \right) \quad 5)$$

Es mögen die  $n$  gegebenen Amplituden durch  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , die dazu gehörenden Phasen durch  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  bezeichnet werden. Setzt man noch

$$\frac{2\pi}{K} \xi_h = x_h \quad 6)$$

so hat man folgende Gleichungssysteme:

1)  $n = 2\nu + 1$

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h) \quad 7)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu + 1)$$

d. h.  $2\nu + 1$  Gleichungen für die  $2\nu + 1$  Unbekannten  $u_0, p_1 \dots p_\nu, q_1 \dots q_\nu$ .

2)  $n = 2\nu$

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x_h) \quad 8)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu)$$

d. h.  $2\nu$  Gleichungen für die  $2\nu$  Unbekannten  $u_0, p_1, \dots, p_{\nu-1}, q_1, \dots, q_{\nu-1}, u_\nu$  und mit der obigen Bedingung

$$U_\nu = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2\nu} x_k \quad 9)$$

Für den Fall aequidistanter Phasen hat bekanntlich Bessel<sup>1)</sup> die Ermittlung der Konstanten in höchst einfacher und eleganter Weise gelehrt, weshalb die Ausdrücke 2) und 3) gewöhnlich als Bessel'sche Formel bezeichnet werden. Hier soll nun diese Ermittlung bei beliebig in der Periode vertheilten Phasen vorgenommen werden. Dabei ergibt sich, dass die Systeme 7) und 8) eine getrennte Behandlung fordern.

1) Astronom. Nachrichten Nr. 136, Bd. 6, S. 333.

$$I. \quad n = 2\nu + 1.$$

Die Auflösung des Systems 7)

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos mx_h + q_m \sin mx_h) \quad 9a)$$

$$h = 1, 2, \dots (2\nu + 1)$$

ist vollzogen, sobald die Determinante desselben und die ersten Unterdeterminanten allgemein bestimmt sind. Für die Determinante  $D_{2\nu+1}$  des Systems hat man

$$D_{2\nu+1} = \begin{vmatrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \cos 2x_m, \sin 2x_m, \dots, \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \\ m = 1, 2, \dots (2\nu + 1) \end{vmatrix} \quad 10)$$

Es werde für  $i = \sqrt{-1}$  gesetzt

$$e^{ix_m} = a_m \quad 11)$$

Zuerst addire man in  $D_{2\nu+1}$  die mit  $i$  multiplicirte 3<sup>te</sup>, 5<sup>te</sup>, ...  $(2\nu + 1)^{te}$  Kolonne entsprechend zur 2<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup>, ...  $2\nu^{ten}$ ; dann stehen in letzteren die Werthe  $a_m, a_m^2, \dots a_m^\nu$ . In der so transformirten Determinante multiplicire man die 3<sup>te</sup>, 5<sup>te</sup>, ...  $(2\nu + 1)^{te}$  Kolonne mit  $-2i$ , wodurch der Faktor  $(-2i)^\nu$  eingeführt wird, und addire dazu die Elemente der 2<sup>ten</sup>, 4<sup>ten</sup>, ...  $2\nu^{ten}$  Kolonne. Dadurch gehn die Elemente jener Kolonnen über in  $a_m^{-1}, a_m^{-2}, \dots a_m^{-\nu}$ , und man erhält

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu} \begin{vmatrix} 1, a_m, a_m^{-1}, a_m^2, a_m^{-2}, \dots, a_m^\nu, a_m^{-\nu} \\ m = 1, 2, \dots (2\nu + 1) \end{vmatrix} \quad 12)$$

Durch Multiplikation der einzelnen Zeilen mit  $a_m^\nu$  entsteht hieraus

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu (a_1 a_2 \dots a_{2\nu+1})^\nu} \begin{vmatrix} a_m^\nu, a_m^{\nu+1}, a_m^{\nu-1}, \dots, a_m^{2\nu}, a_m^0 \\ m = 1, 2, \dots (2\nu + 1) \end{vmatrix} \quad 13)$$

Man kann nun leicht zeigen, dass die Anzahl der Inversionen in der Permutation

$$\nu, \nu + 1, \nu - 1, \nu + 2, \nu - 2, \dots, 2\nu, 0$$

der Elemente  $0, 1, 2, \dots (2\nu)$  eine gerade, nämlich  $\nu(\nu + 1)$ , ist. Setzt man ferner

$$\sum_{m=1}^{m=2\nu+1} x_m = \sigma \quad 14)$$

so erhält man mit Rücksicht auf 11)

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma}} \begin{vmatrix} 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^{2\nu} \\ m=1, 2, \dots, (2\nu+1) \end{vmatrix} \quad (15)$$

Die hier auftretende Determinante ist bekanntlich das Produkt aller Differenzen von je zweien der Grössen  $a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}$ , wenn immer die Grösse mit dem kleineren Index als Subtrahend genommen wird, d. h.

$$D_{2\nu+1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma}} \cdot \Delta_{2\nu+1} \quad (16)$$

$$\text{wo} \quad \Delta_{2\nu+1} = \prod_{h=1}^{h=2\nu} \prod_{m=h+1}^{m=2\nu+1} (a_m - a_h) = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}) \quad (16a)$$

Aus 11) folgt

$$a_m - a_h = 2i \sin \frac{x_m - x_h}{2} \cdot e^{\frac{i}{2}(x_h + x_m)} \quad (17)$$

Es werde nun

$$\prod_{h=1}^{h=2\nu} \prod_{m=h+1}^{m=2\nu+1} \sin \frac{x_m - x_h}{2} = P_{2\nu+1} \quad (18)$$

gesetzt, d. h. es ist  $P_{2\nu+1}$  das Produkt der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zweien der Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu+1}$ , wenn die Grösse mit kleinerem Index immer als Subtrahend verwendet wird. Berücksichtigt man, dass  $\Delta_{2\nu+1}$  genau  $\nu(2\nu+1)$  Faktoren besitzt, so geht mit Zuziehung von 17) und 18) die Gleichung 16) nach einfachen Reduktionen über in

$$D_{2\nu+1} = \frac{4^{\nu^2}}{e^{i\nu\sigma}} \cdot P_{2\nu+1} \cdot e^{\frac{i}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \sum_{m=h+1}^{m=2\nu+1} (x_h + x_m)} \quad (19)$$

In der exponentiellen Doppelsumme kommt jedes Argument  $2\nu$  mal vor, d. h. der Exponent wird  $i\nu\sigma$ , und hiermit ergibt sich endlich

$$D_{2\nu+1} = 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \quad (20)$$

Unterdrückt man in  $D_{2\nu+1}$  die erste Kolonne und die  $l^{\text{te}}$  Zeile, so bleibt eine Determinante  $2\nu^{\text{ter}}$  Ordnung übrig, die durch  $c_{o,l}$  bezeichnet werden mag. Aus 9a) folgt sofort

$$u_o \cdot D_{2\nu+1} = \left| \begin{array}{c} \alpha_m, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \\ m = 1, 2, \dots, (2\nu+1) \end{array} \right| \quad (21)$$

oder

$$u_o \cdot D_{2\nu+1} = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} (-1)^{h-1} \alpha_h c_{o,h} \quad (22)$$

Ich werde nur  $c_{o,1}$  direkt ableiten, da die übrigen Werthe sich dann nach Analogie bilden lassen. Man hat

$$c_{o,1} = \left| \begin{array}{c} \cos x_m, \sin x_m, \cos 2x_m, \sin 2x_m, \dots, \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \\ m = 2, 3, \dots, (2\nu+1) \end{array} \right| \quad (23)$$

Transformirt man hier ebenso, wie es bei der Ueberführung von 10) in 13) geschah, so erhält man

$$c_{o,1} = \frac{(-1)^\nu}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma_1}} \left| \begin{array}{c} \nu+1, \nu-1, \nu+2, \nu-2, \dots, 2\nu, o \\ a_m, a_m, a_m, a_m, \dots, a_m, a_m \\ m = 2, 3, \dots, (2\nu+1) \end{array} \right| \quad (24)$$

wo

$$\sigma_1 = \sigma - x_1 \quad (25)$$

ist. Die Permutation  $\nu+1, \nu-1, \nu+2, \nu-2, \dots, 2\nu, o$  der Elemente

$$o, 1, \dots, (\nu-1), (\nu+1), \dots, 2\nu,$$

worin also  $\nu$  fehlt, enthält  $\nu^2$  Inversionen, d. h.

$$c_{o,1} = \frac{1}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma_1}} \left| \begin{array}{c} 2, \nu-1, \nu+1, \dots, 2\nu \\ 1, a_m, a_m, \dots, a_m, a_m, \dots, a_m \\ m = 2, 3, \dots, (2\nu+1) \end{array} \right| \quad (26)$$

Man erkennt in der hier auftretenden Determinante den mit  $(-1)^\nu$  multiplicirten Koeffizienten von  $a_1^\nu$  in der Determinante  $\Delta_{(2\nu+1)}$ . Nun ist

$$\Delta_{2\nu+1} = \Delta(a_1, a_2, \dots, a_{2\nu+1}) = \Delta(a_2, a_3, \dots, a_{2\nu+1}) \cdot \prod_{m=2}^{m=2\nu+1} (a_m - a_1) \quad (27)$$

Bezeichnet man durch  $\Sigma K_{p,1}$  die Summe aller als Produkte aufgefasster Kombinationen der Elemente  $a_2, a_3, \dots, a_{2\nu+1}$  zur  $p^{\text{ten}}$  Klasse, so liefert die Entwicklung des Produkts in 27)

$$\Delta_{2\nu+1} = \Delta(a_2, a_3, \dots, a_{2\nu+1}) \cdot \sum_{p=0}^{p=2\nu} (-1)^p a_1^{2\nu-p} \Sigma K_{p,1} \quad (28)$$

Da der Koeffizient von  $a_1^\nu$  gesucht wird, ist  $\rho = \nu$  zu setzen, und man erhält dann

$$c_{0,1} = \frac{\Delta(a_2, a_3, \dots, a_{2\nu+1}) \cdot \Sigma K_{\nu,1}}{(2i)^\nu e^{i\nu\sigma_1}} \quad (29)$$

Zufolge der Bedeutung von  $a_m$  lässt sich  $K_{\nu,1}$  ersetzen durch  $e^{i\gamma_{\nu,1}}$ , wo  $\gamma_{\nu,1}$  eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination der Grössen  $x_2, x_3, \dots, x_{2\nu+1}$  zur  $\nu^{\text{ten}}$  Klasse darstellt.

Wird das analog der Grösse  $P_{2\nu+1}$  gebildete Produkt der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zwei der Grössen  $x_2, x_3, \dots, x_{2\nu+1}$  durch  $P_{2\nu+1,1}$  bezeichnet, und berücksichtigt man, dass hierin  $\nu(2\nu-1)$  Faktoren stecken, und dass jede Grösse  $x_m$  in  $2\nu-1$  Faktoren vorkommt, so hat man entsprechend 17) und 18)

$$\Delta(a_2, a_3, \dots, a_{2\nu+1}) = (2i)^{\nu(2\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot e^{\frac{i}{2}(2\nu-1)\sigma_1} \quad (30)$$

Hierdurch geht 29) über in

$$c_{0,1} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot e^{-\frac{i\sigma_1}{2}} \cdot \Sigma e^{i\gamma_{\nu,1}} \quad (31)$$

Verwandelt man die exponentiellen Ausdrücke in goniometrische, so erhält man

$$c_{0,1} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot \left( \Sigma \cos(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1) - i \Sigma \sin(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1) \right) \quad (32)$$

Nun hat  $\gamma_{\nu,1}$  immer  $\nu$  Summanden, und wegen des Werthes von  $\sigma_1$  erkennt man leicht, wie jeder Kombination  $\gamma_{\nu,1}$  eine andere  $\gamma'_{\nu,1}$  zugeordnet werden kann, derart, dass

$$\sin\left(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) = -\sin\left(\gamma'_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) \quad (33)$$

wird. Der imaginäre Bestandtheil in 32) verschwindet also identisch, und es wird

$$c_{0,1} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,1} \cdot \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) \quad (34)$$

Allgemein ergibt sich daher folgendes. Es sei  $P_{2\nu+1,h}$  das Produkt der Sinus aller halben Differenzen der Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu+1}$  unter Ausschluss von  $x_h$ , wenn immer die Grösse mit kleinerem Index als Subtrahend genommen wird. Es sei ferner, immer mit Ausschluss von  $x_h$ , die Summe aller Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu+1}$  gleich  $\sigma_h$ , und  $\gamma_{\nu,h}$  eine als Summe ihrer Bestandtheile aufgefasste Kombination dieser Grössenreihe zur  $\nu^{\text{ten}}$  Klasse.

Dann wird

$$c_{o,h} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu+1,h} \cdot \Sigma \cos \left( \gamma_{\nu,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right) \quad (35)$$

Das Summenzeichen bedeutet, dass man alle möglichen Kombinationen  $\gamma_{\nu,h}$  bilden solle.

Ich führe endlich das Produkt der Sinus der halben Differenzen ein, in welchen  $x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_{2\nu+1}$  als Minuenden und  $x_h$  immer als Subtrahend genommen wird, und bezeichne dies Produkt durch  $R_h^{(2\nu+1)}$ , so dass

$$R_h^{(2\nu+1)} = \prod_{m=1}^{m=h-1} \sin \frac{x_m - x_h}{2} \cdot \prod_{m=h+1}^{m=2\nu+1} \sin \frac{x_m - x_h}{2} \quad (36)$$

ist. Man ermittelt dann sehr leicht, dass

$$P_{2\nu+1} = (-1)^{h-1} \cdot P_{2\nu+1,h} \cdot R_h^{(2\nu+1)} \quad (37)$$

Aus der Zusammenstellung der Gleichungen 20), 22), 35) und 37) erhält man dann schliesslich

$$u_o = \frac{1}{4^\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{a_h \Sigma \cos \left( \gamma_{\nu,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right)}{R_h^{(2\nu+1)}} \quad (38)$$

Unterdrückt man in  $D_{2\nu+1}$  die  $(2k)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile, so bleibt eine Determinante  $(2\nu)^{\text{ter}}$  Ordnung übrig, die ich durch  $c_{k,h}$  bezeichnen will. Wird dagegen die  $(2k+1)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile gestrichen, so mag die restirende Determinante  $(2\nu)^{\text{ter}}$  Ordnung  $s_{k,h}$  heissen. Man hat dann bekanntlich aus 9a) sofort

$$\left. \begin{aligned} p_k \cdot D_{2\nu+1} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} (-1)^h \alpha_h c_{k,h} \\ q_k \cdot D_{2\nu+1} &= \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} (-1)^{h-1} \alpha_h s_{k,h} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$k = 1, 2, \dots, \nu$

Ich will nur die beiden Determinanten

$$c_{k,1} = \quad (40)$$

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 1, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, \sin kx_m, \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, \dots, \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \end{array} \right|$$

$$s_{k,1} = \quad (41)$$

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 1, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, \cos kx_m, \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, \dots, \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \end{array} \right|$$

$m = 2, 3, \dots, (2\nu+1)$

behandeln, da die übrigen sich nach Analogie bilden lassen. Man hat sofort

$$s_{k,1} + i c_{k,1} = \begin{vmatrix} 1, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos(k-1)x_m, \sin(k-1)x_m, a_m^k, \cos(k+1)x_m, \sin(k+1)x_m, \dots, \cos \nu x_m, \sin \nu x_m \\ m = 2, 3, \dots, (2\nu+1) \end{vmatrix} \quad (42)$$

Transformirt man diese Determinante in derselben Weise, wie  $D_{2\nu+1}$  und  $c_{0,1}$  behandelt wurden, wobei zu bemerken ist, dass die Zahl der Inversionen gleich  $\nu^2 - k$  wird, so entsteht

$$s_{k,1} + i c_{k,1} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2i)^{\nu-1} e^{i\nu\sigma_1}} \begin{vmatrix} 1, a_m, a_m^2, \dots, a_m^{\nu-k-1}, a_m^{\nu-k+1}, \dots, a_m^{2\nu} \\ m = 2, 3, \dots, (2\nu+1) \end{vmatrix} \quad (43)$$

In dieser Determinante erkennt man den mit  $(-1)^{\nu-k}$  multiplicirten Koeffizienten von  $a_1^{\nu-k}$  in  $\Delta_{2\nu+1}$ , der sich aus 28) für  $p = \nu + k$  bestimmen lässt. Man findet leicht

$$s_{k,1} + i c_{k,1} = \frac{(-1)^{k+1} \cdot \Delta(a_2, a_3, \dots, a_{2\nu+1}) \cdot \Sigma K_{\nu+k,1}}{(2i)^{\nu-1} \cdot e^{i\nu\sigma_1}} \quad (44)$$

Ersetzt man hier wieder  $K_{\nu+k,1}$  durch  $e^{i\gamma_{\nu+k,1}}$ , benützt 30) und verwandelt die exponentiellen Ausdrücke in goniometrische, so erscheint nach einfachen Reduktionen:

$$s_{k,1} + i c_{k,1} = (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 4 \cdot P_{2\nu+1,1}^{\nu(\nu-1)} \cdot \left( -\Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+k,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) + i \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+k,1} - \frac{1}{2}\sigma_1\right) \right) \quad (45)$$

Allgemein erhält man daher, wenn  $P_{2\nu+1,h}$  und  $\sigma_h$  die früher angegebene Bedeutung haben, und wenn unter  $\gamma_{\nu+h,h}$  eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination  $(\nu+k)$ ter Klasse aus der Reihe  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu+1}$  unter Ausschluss von  $x_h$  ist, während das Summenzeichen die Bildung aller möglichen derartigen Kombinationen verlangt,

$$s_{k,h} + i c_{k,h} = (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 4 \cdot P_{2\nu+1,h}^{\nu(\nu-1)} \cdot \left( -\Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+h,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) + i \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+h,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) \right) \quad (46)$$

und daraus folgt

$$\left. \begin{aligned} c_{k,h} &= (-1)^{k+1} \cdot 2 \cdot 4 \cdot P_{2\nu+1,h}^{\nu(\nu-1)} \cdot \Sigma \cos\left(\gamma_{\nu+h,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) \\ s_{k,h} &= (-1)^k \cdot 2 \cdot 4 \cdot P_{2\nu+1,h}^{\nu(\nu-1)} \cdot \Sigma \sin\left(\gamma_{\nu+h,h} - \frac{1}{2}\sigma_h\right) \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Die Gleichungen 39) liefern dann unter Zuziehung von 20) und 37) als Endresultat

$$\begin{aligned}
 p_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^\nu} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h \Sigma \cos \left( \gamma_{\nu+k,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right)}{R_h^{(2\nu+1)}} \\
 q_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^\nu} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \frac{\alpha_h \Sigma \sin \left( \gamma_{\nu+k,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right)}{R_h^{(2\nu+1)}}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} p_k \\ q_k \end{aligned}} \right\} 48)$$

$$k = 1, 2, \dots, \nu$$

Die Gleichungen 38) und 48) enthalten die vollständige Auflösung des Systems 7) oder 9a). Man erkennt sehr leicht die Analogie des Aufbaus dieser Formeln mit demjenigen, unter welchem die Unbekannten in der Bessel'schen Formel für aequidistante Phasen erscheinen. Von Wichtigkeit ist namentlich die Gleichung 38), weil sie die einzig streng begründete Methode liefert, nach der bei irgendwie über gegebene Perioden vertheilten Beobachtungsterminen die Grösse  $u_o$ , das Periodenmittel, abgeleitet werden muss.

## II. $n = 2\nu$ .

Das aufzulösende System lautet entsprechend 8)

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x_h) \quad 49)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu)$$

Die Anzahl der Bedingungen ist hier um eins kleiner, als die der Unbekannten. Es muss also entweder eine Unbekannte willkürlich gewählt werden, oder man muss eine weitere Bedingungsgleichung einführen. Ich habe schon früher erwähnt, dass aus gewissen, im zweiten Theil zu erörternden Gründen in der meteorologischen Praxis diese neue Bedingungsgleichung lauten muss

$$U_\nu = - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} x_h = - \frac{1}{2} \sigma \quad 50)$$

Die gegenwärtige Untersuchung soll indessen so durchgeführt werden, dass  $U_\nu$  zunächst ganz beliebig angenommen werden kann.

Für die Determinante  $D_{2\nu}$  des Systems 49) erhält man

$$D_{2\nu} = \left| \begin{array}{c} 1, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos (\nu-1) x_m, \sin (\nu-1) x_m, \sin (U_\nu + \nu x_m) \\ m = 1, 2, \dots, (2\nu) \end{array} \right| \quad 51)$$

Setzt man

$$\left. \begin{aligned} C_{2\nu} &= \left| \begin{array}{cccccc} 1, & \cos x_m, & \sin x_m, & \dots & \cos(\nu-1)x_m, & \sin(\nu-1)x_m, & \cos \nu x_m \end{array} \right| \\ S_{2\nu} &= \left| \begin{array}{cccccc} 1, & \cos x_m, & \sin x_m, & \dots & \cos(\nu-1)x_m, & \sin(\nu-1)x_m, & \sin \nu x_m \end{array} \right| \\ & \qquad \qquad \qquad m = 1, 2, \dots (2\nu) \end{aligned} \right\} 52)$$

so wird

$$D_{2\nu} = C_{2\nu} \cdot \sin U_\nu + S_{2\nu} \cdot \cos U_\nu \quad 53)$$

Bildet man die Determinante  $C_{2\nu} + i \cdot S_{2\nu}$ , so lässt sich dieselbe genau wie in I transformiren, und man erhält auf diesem Wege sehr leicht

$$\left. \begin{aligned} C_{2\nu} &= (-1)^\nu \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \sin \frac{1}{2} \sigma \\ S_{2\nu} &= (-1)^{\nu-1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \cos \frac{1}{2} \sigma \end{aligned} \right\} 54)$$

wo  $P_{2\nu}$  wieder, analog  $P_{2\nu+1}$ , das Produkt der Sinus aller halben Differenzen zwischen je zweien der Grössen  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu}$  ist mit der Bedingung, dass die Grösse mit kleinerem Index stets als Subtrahend verwendet wird, und wo  $\sigma$  die Summe aller  $x_m$  ist. Dadurch entsteht

$$D_{2\nu} = (-1)^{\nu-1} \cdot 2 \cdot 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \cdot \cos \left( U_\nu + \frac{\sigma}{2} \right) \quad 55)$$

Bezeichnet man die nach Unterdrückung der 1<sup>ten</sup> Kolonne und der  $h^{\text{ten}}$  Zeile in  $C_{2\nu}$  und  $S_{2\nu}$  übrigbleibenden Determinanten  $(2\nu-1)^{\text{ter}}$  Ordnung durch  $C_{o,h}^{(c)}$  und  $S_{o,h}^{(s)}$ , also

$$\left. \begin{aligned} C_{o,h}^{(c)} &= \left| \begin{array}{cccccc} \cos x_m, & \sin x_m, & \dots & \cos(\nu-1)x_m, & \sin(\nu-1)x_m, & \cos \nu x_m \end{array} \right| \\ S_{o,h}^{(s)} &= \left| \begin{array}{cccccc} \cos x_m, & \sin x_m, & \dots & \cos(\nu-1)x_m, & \sin(\nu-1)x_m, & \sin \nu x_m \end{array} \right| \\ & \qquad \qquad \qquad m = 1, 2, \dots (h-1), (h+1), \dots (2\nu) \end{aligned} \right\} 56)$$

so ist offenbar

$$D_{2\nu} \cdot u_o = \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h (C_{o,h}^{(c)} \cdot \sin U_\nu + S_{o,h}^{(s)} \cdot \cos U_\nu) \quad 57)$$

Bildet man nun wieder die Determinante  $C_{o,h}^{(c)} + i S_{o,h}^{(s)}$ , so lässt sich dieselbe ganz wie früher durch Transformation ermitteln, und man erhält

$$\left. \begin{aligned} C_{0,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu-1} \cdot 4^{\nu-1} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \Sigma \cos \gamma_{\nu,h} \\ S_{0,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu-1} \cdot 4^{\nu-1} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \Sigma \sin \gamma_{\nu,h} \end{aligned} \right\} 58)$$

Hier bedeutet  $P_{2\nu,h}$  das aus der Reihe  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu}$  mit Ausschluss von  $x_h$  analog  $P_{2\nu}$  gebildete Produkt der Sinus der halben Differenzen, und  $\gamma_{\nu,h}$  ist eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination  $\nu^{\text{ter}}$  Klasse aus der Reihe  $x_1, x_2, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_{2\nu}$ . Das Summationszeichen verlangt die Bildung aller möglichen Kombinationen.

In Analogie mit früheren Bezeichnungen sei  $R_h^{(2\nu)}$  das Produkt der Sinus aller halben Differenzen, in denen  $x_h$  als Subtrahend, alle übrigen Phasen als Minuenden auftreten, d. h.

$$R_h^{(2\nu)} = \prod_{m=1}^{m=h-1} \sin \frac{x_m - x_h}{2} \cdot \prod_{m=h+1}^{m=2\nu} \sin \frac{x_m - x_h}{2} \quad 59)$$

Es findet dann analog 37) die Gleichung statt

$$P_{2\nu} = (-1)^{h-1} \cdot P_{2\nu,h} \cdot R_h^{(2\nu)} \quad 60)$$

und mit Hülfe der Gleichungen 55) und 57) bis 60) kommt schliesslich zum Vorschein

$$u_0 = \frac{2}{4^\nu \cos \left( U_\nu + \frac{1}{2} \sigma \right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \Sigma \sin (U_\nu + \gamma_{\nu,h})}{R_h^{(2\nu)}} \quad 61)$$

Die Bestimmung der Grössen  $p_k$  und  $q_k$  kann folgendermassen vorgenommen werden.

Unterdrückt man in  $C_{2\nu}$  und  $S_{2\nu}$  die  $(2k)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile, so mögen die übrigbleibenden Determinanten  $(2\nu - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung  $C_{k,h}^{(c)}$  und  $S_{k,h}^{(c)}$  heissen. Werden dagegen die  $(2k + 1)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile unterdrückt, so sollen die übrigbleibenden Determinanten durch  $C_{k,h}^{(s)}$  und  $S_{k,h}^{(s)}$  bezeichnet. Aus dem aufzulösenden Systeme folgt dann sofort

$$\left. \begin{aligned} D_{2\nu} \cdot p_k &= \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^h \alpha_h (C_{k,h}^{(c)} \cdot \sin U_\nu + S_{k,h}^{(c)} \cdot \cos U_\nu) \\ D_{2\nu} \cdot q_k &= \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h (C_{k,h}^{(s)} \cdot \sin U_\nu + S_{k,h}^{(s)} \cdot \cos U_\nu) \end{aligned} \right\} 62)$$

$$k = 1, 2, \dots, (\nu - 1)$$

Man bildet nun die neuen Determinanten  $C_{k,h}^{(s)} + i C_{k,h}^{(c)}$  und  $S_{k,h}^{(s)} + i S_{k,h}^{(c)}$ , ersetzt in jener  $\cos \nu x_m$  durch  $(\alpha_m^\nu + \alpha_m^{-\nu}) : 2$ , in dieser  $\sin \nu x_m$  durch  $(\alpha_m^\nu - \alpha_m^{-\nu}) : 2i$  und kann dann jede der Determinanten in zwei neue zerfallen, die sich in der oft erwähnten Weise behandeln lassen. Bei der direkten Verfolgung dieses Weges kommen in den Endresultaten auch goniometrische Argumente von der Gestalt  $\sigma_h - \gamma_{\nu+k-1,h}$  vor. Nun enthält  $\gamma_{\nu+k-1,h}$ , eine als Summe ihrer Bestandtheile aufzufassende Kombination der unter Ausschluss von  $x_h$  gebildeten Elementenreihe  $x_1, x_2, \dots, x_{2\nu}$  zur  $(\nu+k-1)$ ten Klasse, genau  $\nu+k-1$  Summanden, während  $\sigma_h = \sigma - x_h$  ist. Man erkennt daraus, dass  $\sigma_h - \gamma_{\nu+k-1,h}$  auch jederzeit als eine Kombination jener Elemente zur Klasse  $2\nu-1 - (\nu+k-1) = \nu-k$  aufgefasst werden kann. Mit Rücksicht auf diesen Umstand findet man dann

$$\left. \begin{aligned} C_{k,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot (\Sigma \cos \gamma_{\nu-k,h} + \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h}) \\ C_{k,h}^{(s)} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot (\Sigma \sin \gamma_{\nu-k,h} - \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h}) \\ S_{k,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot (\Sigma \sin \gamma_{\nu-k,h} + \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h}) \\ S_{k,h}^{(s)} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot (-\Sigma \cos \gamma_{\nu-k,h} + \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h}) \end{aligned} \right\} 63$$

Unter Berücksichtigung von 55) und 60) resultirt dann aus 62)

$$\left. \begin{aligned} p_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^\nu \cos \left( U_\nu + \frac{1}{2} \sigma \right)} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \left( \Sigma \sin (U_\nu + \gamma_{\nu-k,h}) + \Sigma \sin (U_\nu + \gamma_{\nu+k,h}) \right)}{R_h^{(2\nu)}} \\ q_k &= (-1)^k \cdot \frac{2}{4^\nu \cos \left( U_\nu + \frac{1}{2} \sigma \right)} \cdot \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \left( \Sigma \cos (U_\nu + \gamma_{\nu-k,h}) - \Sigma \cos (U_\nu + \gamma_{\nu+k,h}) \right)}{R_h^{(2\nu)}} \end{aligned} \right\} 64$$

$$k = 1, 2, \dots, (\nu-1)$$

Die nun allein noch fehlende Bestimmung von  $u_\nu$  ergibt sich in folgender Weise. Es ist

$$D_{2\nu} \cdot u_\nu = \left| \begin{array}{c} 1, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos (\nu-1) x_m, \sin (\nu-1) x_m, \alpha_m \\ m = 1, 2, \dots, (2\nu) \end{array} \right| \quad 65$$

Entwickelt man hier nach den Elementen der letzten Kolonne, so wird, abgesehen vom Vorzeichen, der Faktor von  $\alpha_h$  eine Determinante  $(2\nu - 1)^{\text{ter}}$  Ordnung, welche genau so aufgebaut ist, wie  $D_{2\nu+1}$  in 10). Der Werth dieses Faktors wird daher erhalten, wenn in 20)  $\nu$  durch  $\nu - 1$  und  $P_{2\nu+1}$  durch  $P_{2\nu,h}$  ersetzt wird, d. h. er ist  $4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h}$ . Man gewinnt mithin

$$D_{2\nu} \cdot u_\nu = \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^h \alpha_h \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \quad 66)$$

woraus durch Anwendung von 55) und 60) fiesst

$$u_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{2}{4^\nu \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma\right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)}} \quad 67)$$

Die Gleichungen 61), 64) und 67) liefern die vollständige Auflösung des Systems 7), resp. 49).

Da die in der Formel für  $u_\nu$  auftretende Summation unabhängig von  $U_\nu$  ist, so kommt die früher erwähnte Bedingung, wie die rechnende Meteorologie sie aufstellen muss,

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma \quad 68)$$

offenbar darauf hinaus,  $u_\nu$  absolut genommen zu einem Minimum zu machen.

Gauss hat in seiner berühmten Abhandlung 1): „Theoria interpolationis methodo nova tractata“ die Gleichungen 5) ebenfalls behandelt, doch so, dass er nicht die Bestimmung der Koeffizienten  $u_o$ ,  $p_m$ ,  $q_m$  vollzieht, sondern derart, dass er einen analytischen Ausdruck für  $y$  unmittelbar durch die gegebenen Amplituden  $\alpha_h$  und die zugehörigen auf Bogen reducirten Phasen  $x_h$  aufsucht. Wenn nämlich zunächst wieder  $n = 2\nu + 1$  gesetzt wird, so hat man nach Gauss (a. a. O. S. 281) in meiner Bezeichnungsweise als Darstellung für

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 69)$$

den Ausdruck (man vergleiche 36)

$$y = \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu+1)}}{R_h^{(2\nu+1)}} \quad 70)$$

1) Carl Friedrich Gauss Werke, Bd. III, S. 279 u. fgd.



so hat man wieder die Determinante

$$\begin{vmatrix} y, 1, \cos x', \sin x', \dots, \cos(\nu-1)x', \sin(\nu-1)x', \sin(U_\nu + \nu x') \\ \alpha_m, 1, \cos x_m, \sin x_m, \dots, \cos(\nu-1)x_m, \sin(\nu-1)x_m, \sin(U_\nu + \nu x_m) \\ m = 1, 2, \dots, (2\nu) \end{vmatrix} = 0 \quad (75)$$

Ist nun wieder

$$\sigma = \sum_{k=1}^{k=2\nu} x_k \quad (76)$$

so erhält man aus 75) bei Entwicklung nach den Elementen der ersten Kolonne unter Rücksicht auf 55) und 60) sehr leicht

$$y = \frac{1}{\cos(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu)}}{R_h^{(2\nu)}} \cdot \cos\left(U_\nu + \frac{1}{2}\sigma + \frac{x' - x_h}{2}\right) \quad (77)$$

wo

$$X_h^{(2\nu)} = (R_h^{(2\nu)})_{x_h = x'} \quad (78)$$

zu setzen ist.

Bei Anwendung dieser Formel in der Meteorologie hat man, wegen

$$U_\nu = -\frac{1}{2}\sigma \quad (79)$$

nach 68), einfach zu setzen

$$y = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu)}}{R_h^{(2\nu)}} \cdot \cos \frac{x' - x_h}{2} \quad (80)$$

Neben den in I und II behandelten Gleichungssystemen treten unter gewissen Umständen, wie sich im zweiten Theil dieser Untersuchungen zeigen wird, noch zwei andere auf, bei denen die in I und II vorkommenden Vielfachen der ganzen Winkel  $x$  durch die ungeraden Vielfachen der halben Winkel ersetzt sind. Diese neuen Systeme lauten

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x_h \right) \quad (81)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu) \quad (82)$$

und

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x_h \right) + u_{\nu+1} \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_h \right)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu+1)$$

Die Analogie dieser Systeme mit 7), resp. 8) ist unverkennbar; beim zweiten System ist  $U_{\nu+1}$  wieder als willkürliche Konstante zu betrachten. Die Auflösung vollzieht sich in genau derselben Weise, wie 7) und 8) behandelt worden sind. Ich beschränke mich daher auf die einfache Angabe der Resultate und verweise bezüglich der Bezeichnungen auf I und II.

## III.

Für das System

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x_h \right) \quad 82a)$$

$$h = 1, 2, \dots (2\nu)$$

sei die Determinante

83)

$$E_{2\nu} = \begin{vmatrix} \cos \frac{x_m}{2}, & \sin \frac{x_m}{2}, & \cos \frac{3x_m}{2}, & \sin \frac{3x_m}{2}, & \dots & \cos \frac{(2\nu-1)x_m}{2}, & \sin \frac{(2\nu-1)x_m}{2} \\ m = 1, 2, \dots (2\nu) \end{vmatrix}$$

Man erhält leicht den mit 20) zu vergleichenden Ausdruck

$$E_{2\nu} = 4^{\nu(\nu-1)} \cdot P_{2\nu} \quad 84)$$

Unterdrückt man in  $E_{2\nu}$  die  $(2k-1)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile, so mag die übrig bleibende Determinante  $(2\nu-1)^{\text{ter}}$  Ordnung durch  $d_{k,h}$  bezeichnet werden; analog heiße  $t_{k,h}$  die Determinante, welche man aus  $E_{2\nu}$  durch Unterdrückung der  $(2k)^{\text{ten}}$  Kolonne und  $h^{\text{ten}}$  Zeile erhält. Es ergibt sich dann in Analogie mit 47)

$$\left. \begin{aligned} d_{k,h} &= (-1)^{k-1} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \sum \sin \left( \gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right) \\ t_{k,h} &= (-1)^{k-1} \cdot 4^{(\nu-1)^2} \cdot P_{2\nu,h} \cdot \sum \cos \left( \gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right) \end{aligned} \right\} \quad 85)$$

und als Auflösung des Systems 82a) in Analogie mit 48):

$$\left. \begin{aligned} p_k &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{4^{\nu-1}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \cdot \sum \sin \left( \gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right)}{R_h^{(2\nu)}} \\ q_k &= (-1)^k \cdot \frac{1}{4^{\nu-1}} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h \cdot \sum \cos \left( \gamma_{\nu+k-1,h} - \frac{1}{2} \sigma_h \right)}{R_h^{(2\nu)}} \end{aligned} \right\} \quad 86)$$

Lautete die ursprüngliche Gleichung, deren Koeffizienten durch 82 a) bestimmt werden sollten

$$y = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2m-1}{2} x' + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x' \right) \quad (87)$$

so fände man analog 70) nach sehr einfachen Umformungen aus der Kombination von 87) und 82 a) unter Zuziehung von 84)

$$y = \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu)}}{R_h^{(2\nu)}} \quad (88)$$

eine Gleichung, die für gewisse praktische Anwendungen sehr bequem ist.

## IV.

Für das System (89)

$$\alpha_h = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2m-1}{2} x_h + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x_h \right) + u_{\nu+1} \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_h \right)$$

$$h = 1, 2, \dots (2\nu + 1)$$

sei die Determinante (90)

$$E_{2\nu+1} = \begin{vmatrix} \cos \frac{x_m}{2}, \sin \frac{x_m}{2}, \dots, \cos \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_m \right) \\ \vdots \\ m = 1, 2, \dots (2\nu + 1) \end{vmatrix}$$

Man denke sich nun hier  $E_{2\nu+1}$  in die Summe zerspalten

$$E_{2\nu+1} = C_{2\nu+1} \cdot \sin U_{\nu+1} + S_{2\nu+1} \cdot \cos U_{\nu+1}$$

wo 52) und 53) zu vergleichen sind, dann sind  $C_{2\nu+1}$  und  $S_{2\nu+1}$  Determinanten  $(2\nu+1)^{\text{ter}}$  Ordnung, für welche sich analog 54) ergibt

$$\left. \begin{aligned} C_{2\nu+1} &= (-1)^\nu \cdot 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \cdot \cos \frac{1}{2} \sigma \\ S_{2\nu+1} &= (-1)^\nu \cdot 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \cdot \sin \frac{1}{2} \sigma \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

woraus sofort fließt, analog 55)

$$E_{2\nu+1} = (-1)^\nu \cdot 4^{\nu^2} \cdot P_{2\nu+1} \cdot \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{1}{2} \sigma \right) \quad (93)$$

Unterdrückt man in  $C_{2\nu+1}$  und  $S_{2\nu+1}$  die  $(2k-1)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile, so mögen die übrigbleibenden Determinanten  $(2\nu)^{\text{ter}}$  Ordnung  $D_{k,h}^{(c)}$  und  $T_{k,h}^{(c)}$  heißen. Werden dagegen die  $(2k)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile unterdrückt, so sollen die übrigbleibenden Determinanten durch  $D_{k,h}^{(s)}$  und  $T_{k,h}^{(s)}$  bezeichnet werden. Dann resultirt analog 63)

$$\left. \begin{aligned} D_{k,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu+k+1} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} P_{2\nu+1,h} \left( \Sigma \cos \gamma_{\nu-k+1,h} - \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h} \right) \\ D_{k,h}^{(s)} &= (-1)^{\nu+k+1} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} P_{2\nu+1,h} \left( \Sigma \sin \gamma_{\nu-k+1,h} + \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h} \right) \\ T_{k,h}^{(c)} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} P_{2\nu+1,h} \left( -\Sigma \sin \gamma_{\nu-k+1,h} + \Sigma \sin \gamma_{\nu+k,h} \right) \\ T_{k,h}^{(s)} &= (-1)^{\nu+k} \cdot 4^{\nu(\nu-1)} P_{2\nu+1,h} \left( \Sigma \cos \gamma_{\nu-k+1,h} + \Sigma \cos \gamma_{\nu+k,h} \right) \end{aligned} \right\} 94)$$

Unterdrückt man in  $E_{2\nu+1}$  die  $(2\nu+1)^{\text{te}}$  Kolonne und die  $h^{\text{te}}$  Zeile, so erhält man eine Determinante  $F_h$ , welche ganz analog  $E_{2\nu}$  gebildet ist, man findet deshalb leicht

$$F_h = 4^{\nu(\nu-1)} P_{2\nu+1,h} \quad 95)$$

Mit Hülfe der Gleichungen 94) und 95) erhält man dann als Auflösung des Systems 89)

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \frac{(-1)^{k-1} \sum_{h=2\nu+1}^{\nu} \alpha_h \left( \Sigma \sin(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu-1+k,h}) - \Sigma \sin(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu+k,h}) \right)}{4^\nu \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2}\sigma\right) \sum_{h=1}^{\nu} R_h^{(2\nu+1)}} \\ q_k &= \frac{(-1)^{k-1} \sum_{h=2\nu+1}^{\nu} \alpha_h \left( \Sigma \cos(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu-1+k,h}) + \Sigma \cos(U_{\nu+1} + \gamma_{\nu+k,h}) \right)}{4^\nu \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2}\sigma\right) \sum_{h=1}^{\nu} R_h^{(2\nu+1)}} \end{aligned} \right\} 96)$$

$k = 1, 2, \dots (\nu)$

$$u_{\nu+1} = \frac{(-1)^\nu \sum_{h=2\nu+1}^{\nu} \alpha_h}{4^\nu \sin\left(U_{\nu+1} + \frac{1}{2}\sigma\right) \sum_{h=1}^{\nu} R_h^{(2\nu+1)}} \quad 97)$$

Man vergleiche hiermit 64) und 67).

War die Gleichung, welche das System 89) veranlasste,

$$y = \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2m-1}{2} x' + q_m \sin \frac{2m-1}{2} x' \right) + u_{\nu+1} \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x' \right) \quad 98)$$

so kann man wie früher einen Ausdruck ableiten, der, ohne dass die Koeffizienten  $p_m$ ,  $q_m$ ,  $u_{\nu+1}$  direkt berechnet sind, eine Ermittlung der zu irgend einer in Bogen ausgedrückten Phase  $x'$  gehörenden Amplitude  $y$  gestattet. Aus der Kombination von 89) und 98) folgt nämlich

$$\left. \begin{array}{l} y, \cos \frac{x'}{2}, \sin \frac{x'}{2}, \dots \cos \frac{2\nu-1}{2} x', \sin \frac{2\nu-1}{2} x', \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x' \right) \\ \alpha_m, \cos \frac{x_m}{2}, \sin \frac{x_m}{2}, \dots \cos \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \frac{2\nu-1}{2} x_m, \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{2\nu+1}{2} x_m \right) \\ m = 1, 2, \dots (2\nu+1) \end{array} \right| = 0 \quad 99)$$

und daraus erhält man unter Benutzung von 93) nach einfachen Reduktionen

$$y = \frac{1}{\sin \left( U_{\nu+1} + \frac{1}{2} \sigma \right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cdot \frac{X_h^{(2\nu+1)}}{R_h^{(2\nu+1)}} \cdot \sin \left( U_{\nu+1} + \frac{1}{2} \sigma + \frac{x' - x_h}{2} \right) \quad 100)$$

eine Gleichung, deren Analogie mit 77) in die Augen springt.

## Zweiter Theil.

---

### Ueber die Gestalt und über die Verwendung der Bessel'schen Formel in der Meteorologie.

Auf den grösseren meteorologischen Stationen tritt meistens der Fall ein, dass neben der Hauptreihe von  $n$  täglichen Beobachtungen, die ich aequidistant voraussetzen will, noch  $r$  andere Beobachtungen vorliegen, welche gleichfalls an feste Zeiten des Tages gebunden sind. So wird hier in Dorpat auf dem Observatorium neben den dreistündigen Terminen (1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22<sup>h</sup>) auch noch im Termin 13<sup>h</sup> 47<sup>m</sup> für die bekannten Simultanbeobachtungen und um 21<sup>h</sup> für Dorpat als Glied des russischen Stationsnetzes beobachtet. Die Frage, in welcher Weise solche „überzählige“ Beobachtungen zur schärferen Bestimmung der Tageskurve für die einzelnen meteorologischen Elemente neben den „regelmässigen“ (aequidistanten) Beobachtungen verwerthet werden könnten, hat überhaupt die vorliegenden Untersuchungen veranlasst. Es ist hierbei klar vorgezeichnet, in welcher Richtung sich die theoretische Behandlung zu bewegen habe. Da es sich um den periodischen Gang irgend eines meteorologischen Elementes handelt, so wird man mit Hilfe periodischer Funktionen die Kurve in dem einen Fall für  $n$  aequidistante, in dem anderen Fall für  $n$  aequidistante und  $r$  weitere, nicht besonders charakterisirte Phasen aus den zugehörigen Amplituden, d. h. aus den Beobachtungsergebnissen abzuleiten haben. Es kommt indessen hierbei eine Reihe von Umständen ins Spiel, die bisher nicht berücksichtigt worden sind. Ich sah mich hierdurch zu einer eingehenden Untersuchung über die Art und Weise, in welcher die Bessel'sche Formel in der Meteorologie aufzustellen ist, veranlasst und gebe die Resultate dieser Untersuchung in dem ersten Abschnitt dieses zweiten Theils. Darauf gestützt erfolgt dann im zweiten Abschnitt die Beantwortung obiger Frage, wobei sich eine Reihe von interessanten Sätzen ergibt.

---

## Erster Abschnitt.

### 1.

Die Meteorologen haben meines Wissens bisher die Konstanten der Bessel'schen Formel immer nach der Methode der kleinsten Quadrate abgeleitet. Das neueste mir bekannte Beispiel für diese Behandlungsweise gibt W. Ferrel in seinem ausgezeichneten Buche „Recent Advances in Meteorology“, Washington 1886, chapter VI, woselbst sich S. 345 in den Formeln 27), 28) und 29) sogar die „wahrscheinlichen Fehler“ für die Konstanten der Bessel'schen Formel finden. Ist aber die Anwendung der Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Darstellung einer Tages- oder Jahreskurve durch periodische Funktionen überhaupt berechtigt? Meiner Ansicht nach lautet das Problem einfach folgendermassen. An Stelle der in Wirklichkeit unbekanntes Tages- oder Jahreskurve  $A$  wird eine andere  $B$  von gleichfalls periodischem Charakter gesetzt, welche mit  $A$  eine Anzahl von  $n$  Punkten gemeinsam hat; der mathematische Ausdruck für  $B$  muss  $n$  Konstanten umfassen, zu deren Bestimmung  $n$  Gleichungen, entsprechend den  $n$  gegebenen Beobachtungen, vorhanden sind. Statt also mit einer überschüssigen Anzahl von Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu rechnen, muss man in der periodischen Funktion genau so viele unbekanntes Koeffizienten ermitteln, als Amplituden gegeben sind, oder es muss statt eines überbestimmten Systems von Gleichungen ein vollkommen bestimmtes zu Grunde gelegt werden. Was soll aber die Verwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung bei einer Aufgabe bedeuten, die sich nicht als überbestimmt, sondern als vollkommen bestimmt kennzeichnet? Die Wahrscheinlichkeitsrechnung darf nur angewandt werden, wenn es sich um zufällige Fehler handelt; im vorliegenden Fall kann aber überhaupt von „Fehlern“ in den Koeffizienten gar keine Rede sein, da letztere nicht die wahrscheinlichsten, sondern ganz bestimmte, eindeutige Werthe erhalten. Als Beispiel führe ich an, dass, wie später genauer gezeigt wird, die Werthe, welche man bei  $n$  aequidistanten Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate als die angeblich nur wahrscheinlichsten Werthe für die Unbekannten gewinnt, genau dieselben sind, wie die unbedingt gewissen Werthe, welche die Auflösung des betreffenden definiten Gleichungssystems liefert. Begnügt man sich, was in der Praxis ja fast unter allen Umständen gerechtfertigt sein mag, mit einer geringeren Zahl von Reihengliedern, als überhaupt bestimmbar sind, so fehlt etwas an der Vollständigkeit, und daher kommt es, dass die Ugleichungen nicht mehr vollkommen identisch erfüllt werden. Man hat es mit einem „Fehlenden“, nicht mit einem „Fehler“ zu thun. In ähnlicher Weise liefert die abgekürzte Multiplikation ein Produkt, das Niemand als „fehlerhaft“ bezeichnen wird, weil demselben

zum vollständigen Produkt ein dem Ganzen gegenüber verschwindender Bruchtheil „fehlt“. Wird hier wohl Jemand von den „wahrscheinlichen Fehlern“ der einzelnen Dezimalstellen sprechen? Der einzige praktische Vortheil, den die Ableitung der Resultate nach der Methode der kleinsten Quadrate bei der Bessel'schen Formel gewährt, dass man nämlich jederzeit durch die bekannte Formel für die Summe der „Fehlerquadrate“ erfahren kann, ob es zweckmässig ist behufs genauerer Darstellung noch einige Koeffizienten weiter zu berechnen, oder ob man die Reihe als schon genügend abbrechen kann, — dieser Vortheil haftet nur scheinbar an jener Methode, da die betreffende Formel sich auch für das definite System ohne Schwierigkeit ableiten lässt, wobei die Summe der „Fehlerquadrate“ in Null übergehen muss. Bei dieser Auffassung der Bessel'schen Formel ist selbstverständlich der öfters ausgesprochenen Ansicht aller Boden entzogen, als ob der mathematische Ausdruck für die Tages- oder Jahreskurve eine Art Ausgleichung und Verbesserung der direkten Beobachtungsergebnisse herbeizuführen im Stande sei. Aus den angeführten Gründen sehe ich im folgenden von einer Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung ganz ab und werde immer nur definite Gleichungssysteme behandeln.

## 2.

Versteht man unter  $y$  die zur Phase  $x$  gehörende Amplitude, wobei die Phase in Theilen der Periode  $K$  ausgedrückt ist, unter  $m$  eine ganze Zahl  $\geq 0$ , unter  $u_m$  Konstanten, welche auf dieselbe Einheit wie die Amplituden bezogen sind, unter  $U_m$  Winkelkonstanten, — so ist der allgemeine Ausdruck für eine an die Periode  $K$  geknüpfte Erscheinung

$$y = \sum u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad (101)$$

Die Summanden können als Sinuslinien  $m^{\text{ter}}$  Ordnung bezeichnet werden, deren Interferenz die gesuchte Kurve erzeugt. Im allgemeinen kann man der Grösse  $m$  ganz beliebige Werthe  $m_1, m_2, \dots$  beilegen und muss die Anzahl der Summanden als unendlich gross betrachten (Fourier'sche Reihe). Die durch 101) dargestellte Kurve werde wegen der unendlich grossen Anzahl der Konstanten durch  $C_\infty$  bezeichnet. In der meteorologischen Praxis spezialisirt sich die Aufgabe dahin, dass die Kurve durch  $n$  bestimmte Punkte gehen soll, welche  $n$  zusammengehörenden Phasen und Amplituden entsprechen. Es können nun offenbar unendlich viele periodische Kurven durch die  $n$  gegebenen Punkte gehn; um daher das Problem nicht ein unbestimmtes werden zu lassen, wobei z. B. Schlüsse auf die Phasen und Amplituden der Extreme in der wahren Tages- oder Jahreskurve u. dgl. in praxi unmöglich würden, muss zunächst die Anzahl der Summanden in  $C_\infty$  soweit beschränkt werden, dass die Zahl der zu bestimmenden Konstanten  $u_m$  und  $U_m$  gleich der Anzahl  $n$  der gegebenen Bedingungen ist.

Es mag zuerst angenommen werden, dass  $n$  eine ungerade Zahl,  $2\nu + 1$ , sei. Für  $m = 0$  reducirt sich der Summand in  $C_\infty$  auf eine einzige Konstante  $u_0 \sin U_0$ , eine Sinuslinie nullter Ordnung, so dass man  $U_0$  willkürlich nehmen darf, natürlich mit Ausschluss der Werthe, für welche  $\sin U_0$  verschwindet. Es ist zweckmässig,  $U_0 = \frac{\pi}{2}$  zu setzen, wie ich dies im folgenden immer thun werde, so dass jener Summand sich für  $m = 0$  einfach in  $u_0$  verwandelt. Die nach Verbrauch einer Bedingung noch übrigen  $2\nu$  Bedingungen sind zur Bestimmung von  $\nu$  Grössenpaaren  $u_m$  und  $U_m$ , wo  $m > 0$ , gerade ausreichend; man wird also für  $m$  die  $\nu$  Werthe  $m_1, m_2, \dots, m_\nu$  setzen müssen. Aber auch bei dieser nothwendigen Beschränkung auf  $u_0$  und  $\nu$  verschiedene Sinuslinien, d. h. auf  $n$  Konstanten, sind immer noch unendlich viele Kurven  $C_n$  möglich, welche durch die  $n$  gegebenen Punkte gehen, wenn es nicht gelingt über die Grössen  $m_1, m_2, \dots, m_\nu$  etwas bestimmtes in Erfahrung zu bringen. Hierzu dürfte man in folgender Weise gelangen. Das ganze Verfahren hat interpolatorischen Charakter, indem man aus  $n$  gegebenen Punkten der im allgemeinen unbekanntes wahren Tages- oder Jahreskurve auf die übrigen unendlich vielen Punkten derselben Schlüsse zu ziehen sucht. Die einfachste Interpolation wäre die geradlinige zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Punkten der gegebenen Reihe, so dass diesmal die Kurve sich als eine mehrfach gebrochene Gerade darstellt. Die gesuchte Interpolationskurve  $C_n$  wird sich dieser gebrochenen Geraden insofern anzuschliessen haben, als gewisse Momente der letzteren auch in jener hervortreten müssen. Diese Momente sind die extremen Werthe der Amplituden. Man hat beispielsweise im allgemeinen keinen Grund zwischen zwei aufeinanderfolgenden Amplituden mehr als ein Extrem, sei es ein Maximum oder ein Minimum, in der Interpolationskurve anzunehmen. Die Anzahl der Extreme in der Interpolationskurve  $C_n$  darf daher nicht grösser werden, als die Anzahl der in der gebrochenen Geraden überhaupt möglichen Extreme, womit nicht gesagt ist, dass jene Anzahl diese erreichen muss. Die Anzahl der bei einer gebrochenen Geraden möglichen Extreme ist leicht festzustellen; sie ist vorhanden, sobald je zwei aufeinanderfolgende Punkte ein Maximum und ein Minimum darstellen. Im günstigsten Falle macht, da die Anzahl der Extreme eine gerade sein muss, ein Punkt des Linienzugs eine Ausnahme, d. h. die grösstmögliche Anzahl der Extreme bei einem gebrochenen Linienzug von  $2\nu + 1$  Ecken, der am Ende der Periode wieder in seinen Anfangswerth zurückkehrt, ist  $2\nu$ . Die Interpolationskurve  $C_n$  darf also höchstens  $2\nu$  Extreme liefern können, womit nicht gesagt ist, dass sie schliesslich auch wirklich so viele liefern muss. Eine Sinuslinie  $m^{\text{ter}}$  Ordnung

$$z = u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 102)$$

besitzt, wie man sich leicht überzeugt, innerhalb des Intervalles von  $x = 0$  bis  $x = K$  (eventuell unter Ausschluss dieses letzten Werthes) genau  $m$  Maxima und  $m$  Minima, d. h.  $2m$  Extreme. Daraus folgt nothwendigerweise, dass der grösste Werth, den

$m$  in dem Ausdruck für  $C_n$  annehmen kann,  $m = \nu$  ist. Höhere Werthe von  $m$  als  $\nu$  würden im allgemeinen die unzulässige Existenz von mehr als  $2\nu$  Extremen in  $C_n$  ermöglichen. Nun verbraucht aber die Sinuslinie  $\nu^{\text{ter}}$  Ordnung zwei Konstanten  $u_\nu$  und  $U_\nu$ , d. h. zwei der noch vorhandenen  $2\nu$  Bedingungen; es bleiben also noch  $2\nu - 2$  Konstanten bestimmbar. Da nun für  $m$  die obere Grenze  $\nu$  festgestellt worden ist, so sieht man sofort, dass unbedingt  $m = 1, 2, \dots, \nu$  gesetzt werden muss, wodurch genau  $2\nu$  Konstanten eingeführt werden, für welche die  $2\nu$  Bedingungen ausreichen. Die Reihe  $m_1, m_2, \dots, m_\nu$ , welche oben ganz allgemein aufgestellt wurde, muss daher mit der Reihe  $1, 2, \dots, \nu$  in irgend welcher Ordnung zusammenfallen. Für die meteorologische Praxis muss also, wenn  $n = 2\nu + 1$  ist, die Darstellung der periodischen Interpolationskurve  $C_n$  lauten:

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad (103)$$

Eine andere Darstellung ist unmöglich, und das Problem erscheint vollkommen bestimmt. In der Meteorologie ist in der That bisher immer diese Form der Interpolationskurve benutzt worden, ohne dass man, soviel ich weiss, eine eingehende Begründung derselben versucht hätte.

Ist zweitens  $n$  eine gerade Zahl,  $n = 2\nu$ , so erkennt man leicht, wie vorher, als Maximalwerth der Anzahl von Extremen wieder  $2\nu$ , d. h. es kann höchstens  $m = \nu$  vorkommen, so dass man auch für  $n = 2\nu$  auf die allgemeine Gestalt (103) geführt würde

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad (104)$$

wenn nicht die Zahl der Konstanten in dieser Gleichung  $2\nu + 1$ , statt  $2\nu$ , wäre. Da nun in (103) für  $n = 2\nu - 1$  die Summationsgrenzen von  $m = 1$  bis  $m = \nu - 1$ , für  $n = 2\nu + 1$  aber von  $m = 1$  bis  $m = \nu$  gehn, so sieht man, dass in der That die Gleichung (104) der allgemeine Ausdruck für den Fall  $n = 2\nu$  ist, sobald eine der für  $m = \nu$  hinzutretenden Konstanten,  $u_\nu$  oder  $U_\nu$ , willkürlich gewählt wird. Da  $U_\nu$  als Argument einer Sinusfunktion auftritt, so könnte bei willkürlicher Wahl von  $u_\nu$  der Fall eintreten, dass bei Auflösung des zur Bestimmung der  $2\nu$  Konstanten dienenden Systems von Gleichungen  $\sin U_\nu > 1$  oder  $< -1$  erhalten würde, d. h. dass für  $U_\nu$  ein imaginärer Werth resultirte. Man schliesst hieraus, dass nur  $U_\nu$  als willkürliche Konstante angesehen werden darf, wodurch aber immer noch die Zahl der Interpolationskurven  $C_n$  für  $n = 2\nu$  unendlich gross würde. Es muss also für  $n = 2\nu$  noch eine weitere Bedingung aufgestellt werden, damit nur eine einzige Interpolationskurve möglich sei, und das Problem wieder vollkommen bestimmt erscheine. Diese  $(2\nu + 1)^{\text{te}}$  Bedingung muss nothwendigerweise eine eindeutige Bestimmung des Winkels  $U_\nu$  ermöglichen; im nächsten Kapitel wird diese Bedingung in sehr einfacher Weise gewonnen werden.

## 3.

Für die weitere Behandlung des Gegenstandes ist es zweckmässig, wie es auch im ersten Theil geschehen, an Stelle der Konstanten  $u_m$  und  $U_m$  zwei neue vermittelst der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} p_m &= u_m \sin U_m \\ q_m &= u_m \cos U_m \end{aligned} \right\} 105)$$

einzuführen. Man hat dann

für  $n = 2\nu + 1$

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) 106)$$

und für  $n = 2\nu$

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u_\nu \sin \left( U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K} x \right) 107)$$

wo  $U_\nu$  durch eine demnächst anzugebende Gleichung bestimmt wird.

Es mögen nun die  $n$  gegebenen Amplituden durch  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , die zugehörigen Phasen durch  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  bezeichnet werden; ausserdem sei der Kürze wegen

$$\frac{2\pi}{K} \xi_h = x_h. 108)$$

Soll nun die Bessel'sche Formel für den Fall  $n = 2\nu + 1$  bestimmt werden, so hat man nach 106) das Gleichungssystem aufzulösen

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) 109)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu + 1)$$

Die Auflösung dieses Systems ist durch die Gleichungen 38), 48) und 70) vollständig gegeben.

Für  $n = 2\nu$  lautet das System

$$\alpha_h = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} (p_m \cos m x_h + q_m \sin m x_h) + u_\nu \sin (U_\nu + \nu x_h) 110)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu)$$

welches durch die Gleichungen 61), 64), 67) und 77) resp. 80) vollständig aufgelöst wird. Eine besondere Untersuchung erfordert nur noch die Gleichung 67)

$$u_\nu = (-1)^\nu \cdot \frac{2}{4^\nu \cos \left( U_\nu + \frac{1}{2} \sigma \right)} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \frac{\alpha_h}{R_h^{(2\nu)}} 111)$$

Da die Summation bei  $u_\nu$  von  $U_\nu$  unabhängig ist, so erkennt man sofort, dass absolut genommen  $u_\nu$  zwischen dem Werth unendlich (für  $U_\nu + \frac{1}{2} \sigma = \frac{\pi}{2}$ ) und einem Minimalwerth (für  $U_\nu + \frac{1}{2} \sigma = 0$ ) liegt. Bedenkt man, dass  $u_\nu$  der halbe Abstand zwischen den Maximis und Minimis der  $\nu^{\text{ten}}$  Sinuslinie ist, und dass diese letzte Sinuslinie auf die durch Interferenz aller vorhergehenden  $(\nu - 1)$  Sinuslinien erzeugte Kurve um so mehr deformirend wirkt, je grösser  $u_\nu$  ist, so wird man zu dem Schlusse genöthigt, es müsse die Bedingung, welche noch fehlte, lauten, dass  $u_\nu$  absolut genommen ein Minimum werde. Dadurch erhält  $u_\nu$  zugleich den einzigen ausgezeichneten Werth, den es unter allen für dasselbe möglichen Werthen besitzt. Es muss daher für  $n = 2\nu$  zu den Gleichungen 20) bis 23) noch die weitere treten

$$U_\nu = -\frac{1}{2} \sigma \quad 112)$$

oder es muss die letzte Winkelkonstante gleich der negativen halben Summe aller gegebenen mit  $2\pi : K$  multiplizirten Phasen gesetzt werden. Man überzeugt sich leicht, dass, wenn man etwa  $U_\nu + \frac{1}{2} \sigma = \pi$  setzte, was absolut genommen den nämlichen Minimalwerth für  $u_\nu$  liefert, sich in 107) die Zeichen von  $u_\nu$  und von  $\sin(U_\nu + \frac{2\pi\nu}{K} x)$  gleichzeitig ändern. Man erhält also in der That durch die Forderung, es solle  $u_\nu$  ein Minimum werden, immer nur eine einzige Interpolationskurve, oder das Problem ist dann auch für  $n = 2\nu$  eindeutig bestimmt.

## 4.

Die Gleichungen 38) und 48) einerseits, 61), 64) und 67) andererseits liefern die Mittel zur sofortigen Aufstellung der Bessel'schen Formel für  $n$  irgendwie über die Periode des Tages oder des Jahres vertheilte Phasen und Amplituden. Am wichtigsten sind hierbei die Gleichungen 38) und 61), welche  $u_0$  geben. Da nämlich ganz allgemein

$$\int_{x=0}^{x=K} \sin\left(U_m + \frac{2\pi m}{K} x\right) dx = 0 \quad 113)$$

so hat man, wie bekannt

$$u_0 = \int_{x=0}^{x=K} y dx : K \quad 114)$$

oder es ist  $u_0$  unter allen Umständen der Mittelwerth für die Gesammtheit der unendlich vielen Amplituden in der Interpolationskurve, d. h. das Tages- resp. Jahresmittel, wie es aus der Bessel'schen Formel folgt. Die Formeln 38) und 61) zeigen nun, wie diese Mittel aus den innerhalb der betreffenden

Periode gegebenen Beobachtungen in streng wissenschaftlicher Weise abzuleiten sind, im Gegensatz zu den empirischen Methoden, die namentlich bei nichtaequidistanten Beobachtungen vielfach gebräuchlich. Der Wichtigkeit des Gegenstandes wegen will ich eine grössere Anzahl von Beispielen geben. Die numerischen Rechnungen sollen alle auf den täglichen Gang der Lufttemperatur im Juli für St. Petersburg bezogen werden. Ich entnehme dafür dem grossen Werke von H. Wild „Die Temperaturverhältnisse des russischen Reiches“, Tabellenband, S. III folgende Werthe (in Graden Celsius):

1 <sup>h</sup>	15·16	7 <sup>h</sup>	16·31	13 <sup>h</sup>	20·36	19 <sup>h</sup>	19·72
2	14·66	8	17·26	14	20·57	20	18·89
3	14·26	9	18·19	15	20·68	21	17·92
4	14·08	10	18·97	16	20·71	22	17·05
5	14·42	11	19·54	17	20·50	23	16·30
6	15·29	12	20·02	18	20·21	24	15·67

Als wahres Tagesmittel  $M$  der Lufttemperatur für den Juli in St. Petersburg folgt hieraus als einfaches arithmetisches Mittel

$$M = 17.78^{\circ} \text{ C.}$$

1) Am häufigsten werden drei Beobachtungen täglich angestellt; man hätte also  $n = 3$ ,  $\nu = 1$ . Aus der Formel 38) erhält man

$$u_o = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_1 \cos \frac{x_2 - x_3}{2}}{\sin \frac{x_2 - x_1}{2} \sin \frac{x_3 - x_1}{2}} + \frac{\alpha_2 \cos \frac{x_3 - x_1}{2}}{\sin \frac{x_1 - x_2}{2} \sin \frac{x_3 - x_2}{2}} + \frac{\alpha_3 \cos \frac{x_1 - x_2}{2}}{\sin \frac{x_1 - x_3}{2} \sin \frac{x_2 - x_3}{2}} \right) \quad 115)$$

Ich will diese Formel auf die gebräuchlichsten Kombinationen anwenden.

a) Kombination des russischen Stationsnetzes. Die Termine sind 7, 13, 21<sup>h</sup>. Da man die Periode bei einer beliebigen Phase beginnen lassen kann, so ist es am zweckmässigsten, dem ersten Beobachtungstermin immer die Phase 0 zu geben. Man hat dann

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

Statt der Grössen  $\alpha$  wähle ich jetzt die Bezeichnung  $b$  mit angehängtem Stundenindex, also

$$\alpha_1 = b_7, \quad \alpha_2 = b_{13}, \quad \alpha_3 = b_{21}$$

Die Formel 115) gibt dann

$$u_o = 0.3660 b_7 + 0.2113 (b_{13} + 2 b_{21}) = M_1$$

Im numerischen Beispiel ist

$$b_7 = 16.31 \quad b_{13} = 20.36 \quad b_{21} = 17.92$$

und daraus ergibt sich  $M_1 = 17.85$

Vergleicht man mit  $M$ , so findet man als Korrektur für  $M_1$

$$\delta_1 = -0.07$$

Auf den russischen Stationen wird zunächst einfach das arithmetische Mittel  $M_2$  aus den drei täglichen Beobachtungen als Tagesmittel angesehen. Man hat in obigem Beispiel

$$M_2 = 18.20$$

also Korrektur  $\delta_2 = -0.42$

b) Kombination der Mannheimer Stunden 7, 14, 21<sup>h</sup>. Man hat

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7\pi}{12}, \quad x_3 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\alpha_1 = b_7, \quad \alpha_2 = b_{14}, \quad \alpha_3 = b_{21}$$

Die Formel 115) liefert

$$u_o = 0.3972 (b_7 + b_{21}) + 0.2056 b_{14} = M_3$$

wofür man füglich auch nehmen könnte

$$u_o = \frac{2(b_7 + b_{21}) + b_{14}}{5}$$

Das numerische Beispiel ergibt

$$M_3 = 17.82$$

und daraus die Korrektur  $\delta_3 = -0.04$

Für die Mannheimer Kombination ist sehr häufig die empirische Formel in Anwendung gebracht worden

$$M_4 = \frac{b_7 + b_{14} + 2 \cdot b_{21}}{4}$$

Das Beispiel liefert  $M_4 = 18.18$

mit der Korrektur  $\delta_4 = -0.40$

Auf andere sehr gebräuchliche Kombinationen werde ich im zweiten Abschnitt zurückkommen.

2) Als Beispiel für 4 tägliche Termine wähle ich die Beobachtungen, wie sie während der Jahre 1856 bis 1863 in Lissabon auf dem „Observatorio do Infante D. Luiz“ angestellt wurden (vgl. Annaes do Observatorio, Lisboa 1863, S. CXIV). Die Termine waren 9, 12, 15, 21<sup>h</sup>, also

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \pi$$

Mit  $n = 4$ , also  $\nu = 2$  gibt die Formel 61), da

$$U_2 = -\frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) = -\frac{7\pi}{8}$$

wird,

$$u_0 = \frac{2b_9 + b_{15} + b_{21}}{4} + \frac{(b_9 - 2b_{12} + b_{21})}{8 \cos \frac{\pi}{4}} = M_5$$

Die numerische Rechnung für Petersburg ergibt

$$M_5 = 18.04$$

mithin als Korrektion

$$\delta_5 = -0.26$$

3) In Dorpat werden Wind und Bewölkung täglich nur in den sechs Terminen 7, 10, 13, 16, 19, 22<sup>h</sup> beobachtet. Es fragt sich, wie bei diesen Terminen das Tagesmittel abzuleiten sei?

Man hat  $n = 6$ ,  $\nu = 3$  und

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{\pi}{2}, \quad x_4 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_5 = \pi, \quad x_6 = \frac{5\pi}{4}$$

Daraus ergibt sich

$$U_3 = -\frac{15\pi}{8}$$

und die Formel 61) liefert

$$u_0 = \frac{b_7 + b_{13} + b_{16} + b_{22}}{4} + \frac{(b_7 - b_{10} - b_{19} + b_{22}) \cos \frac{\pi}{4}}{4} = M_6$$

Im numerischen Beispiel erhält man hiernach

$$M_6 = 17.67$$

und als Korrektion

$$\delta_6 = +0.11$$

4) Als letztes Beispiel nehme ich einen Fall von 8 täglichen Beobachtungen, und zwar in den Terminen 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22<sup>h</sup>, wie er für die russischen Stationen Bogoslawsk, Slatoust und Lugan während der Jahre 1839 bis 1851 vorliegt (vgl. Annalen des St. Petersburger Centralobservatoriums).

Man hat  $n = 8$ ,  $\nu = 4$  und

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & x_2 &= \frac{\pi}{6}, & x_3 &= \frac{\pi}{3}, & x_4 &= \frac{\pi}{2} \\ x_5 &= \frac{2\pi}{3}, & x_6 &= \frac{5\pi}{6}, & x_7 &= \pi, & x_8 &= \frac{7\pi}{6} \end{aligned}$$

Man findet daraus

$$U_4 = -\frac{7\pi}{3}$$

und die Formel 61) liefert

$$u_0 = \frac{b_{10} + b_{14} + b_{18} + b_{20}}{4} + (b_8 - b_{14} - b_{18} + b_{22} + 2(-b_{10} + b_{12} + b_{18} - b_{20})) \cos \frac{2\pi}{12} = M_7$$

Das numerische Beispiel gibt

$$M_7 = 17.70$$

und als Korrektion

$$\delta_7 = +0.08$$

## 5.

Für den Fall aequidistanter Beobachtungen liessen sich die Konstanten der Bessel'schen Formel aus den Gleichungen 38) und 48), resp. 61), 64) und 67) selbstverständlich ebenfalls ableiten, indessen gewinnt man die bekannten einfachen Resultate erst nach ziemlich verwickelten Untersuchungen. Ich will daher einen direkten Weg zur Auflösung der Systeme 109) und 110) unter Voraussetzung aequidistanter Beobachtungen einschlagen, werde aber dabei annehmen, dass die Phase der ersten Amplitude nicht, wie gewöhnlich vorausgesetzt wird, den Werth Null habe, sondern dass ihr ganz allgemein der Werth  $a$  zukomme. Die Reihe der  $n$  aequidistanten Phasen lässt sich dann allgemein vorstellen durch  $a + \frac{K}{n}(h-1)$  für  $h = 1, 2, \dots, n$ , wozu die Amplituden  $\alpha_h$  für  $h = 1, 2, \dots, n$  gehören mögen. Ich führe noch die Bezeichnungen ein

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{2\pi}{n} \\ a_1 &= \frac{2\pi}{K} a \end{aligned} \right\} \quad 116)$$

Zum Unterschiede von dem Falle, wo die Phasen ganz beliebig über die Periode vertheilt sind, sollen bei aequidistanten Werthen die Konstanten der Besselschen Formel immer durch  $u'_o$ ,  $u'_m$ ,  $U'_m$ ,  $p'_m$ ,  $q'_m$  bezeichnet werden.

Man hat nun erstens für  $n = 2\nu + 1$  als zu konstruirende Formel entsprechend 106)

$$y = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 117)$$

Daraus entspringt durch Einsetzen der aequidistanten Phasen und Amplituden als aufzulösendes System von Gleichungen:

$$\alpha_h = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p'_m \cos m (a_1 + v (h - 1)) + q'_m \sin m (a_1 + v (h - 1)) \right) \quad 118)$$

$$h = 1, 2, \dots (2\nu + 1)$$

Multipliziert man die einzelnen Gleichungen dieses Systems entsprechend mit 1, oder mit  $\cos k (a_1 + v (h - 1))$ , oder mit  $\sin k (a_1 + v (h - 1))$ , wo  $k$  eine der Zahlen  $1, 2, \dots \nu$  ist, und addirt jedesmal alle so transformirten Gleichungen, so verschwinden zufolge bekannter goniometrischer Summenformeln immer alle Unbekannten mit Ausnahme von  $u'_o$ , oder  $p'_k$ , oder  $q'_k$ , und es erscheint  $u'_o$  mit dem Faktor  $2\nu + 1$ , die andern Grössen aber mit dem Faktor  $(2\nu + 1) \cdot 2$  behaftet. Man erhält demnach die Auflösung des Systems 30) in folgender Form:

$$\left. \begin{aligned} u'_o &= \frac{1}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \\ p'_k &= \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cos k (a_1 + v (h - 1)) \\ q'_k &= \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \sin k (a_1 + v (h - 1)) \end{aligned} \right\} \quad 119)$$

Man übersieht sofort, dass die algebraische Behandlung des Gleichungssystems 118) genau dieselbe ist wie die, auf welche man durch die Methode der kleinsten Quadrate geführt wird; die Resultate müssen also in beiden Fällen identisch sein.

Es sei zweitens  $n = 2\nu$ . Die Gleichung 112) liefert zunächst, da an Stelle des Werthes  $x_h$  diesmal tritt  $a_1 + v (h - 1)$ ,

$$U'_\nu = - \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \left( a_1 + v (h - 1) \right) = - \left( a_1 \nu + \frac{v \nu (2\nu - 1)}{2} \right) \quad 120)$$

oder wegen  $\nu \nu = \pi$  zufolge 116)

$$U'_\nu = - \left( a_1 \nu + \frac{\pi}{2} (2\nu - 1) \right) \quad 121)$$

Für irgend eine der aequidistanten Phasen  $a + \frac{\kappa}{2\nu} (h - 1)$  wird dann der Faktor von  $u'_\nu$  gleich

$$\sin \left( U'_\nu + \nu (a_1 + \nu (h - 1)) \right) = (-1)^{\nu+h+1} \quad 122)$$

Man erhält daher entsprechend 107) als aufzulösendes System 123)

$$\alpha_h = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( p'_m \cos m (a_1 + (h-1)\nu) + q'_m \sin m (a_1 + (h-1)\nu) \right) + (-1)^{\nu+h+1} u'_\nu$$

$$h = 1, 2, \dots (2\nu)$$

Durch den nämlichen Prozess, wie bei  $n = 2\nu + 1$ , wozu nur noch kommt, dass alle Gleichungen 123) auch entsprechend mit  $(-1)^{h-1}$  multipliziert und dann addirt werden müssen, was alle Unbekannten mit Ausnahme von  $u'_\nu$  zum Verschwinden bringt, erhält man die Resultate

$$\left. \begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \\ p'_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cos k (a_1 + \nu (h - 1)) \\ q'_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \sin k (a_1 + \nu (h - 1)) \\ k &= 1, 2, \dots (\nu - 1) \\ u'_\nu &= \frac{(-1)^\nu}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h \end{aligned} \right\} \quad 124)$$

Hierdurch sind alle Konstanten der für  $n = 2\nu$  zu konstruirenden Besselschen Formel

$$y = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u'_\nu \sin \left( -\nu a_1 - \frac{\pi}{2} (2\nu - 1) + \frac{2\pi \nu}{K} x \right) \quad 125)$$

(man vergleiche 121)) bestimmt.

Für  $a_1 = 0$ , d. h. wenn die erste Amplitude auf den Anfang der Periode fällt, reduzieren sich die Gleichungen 119) und 124) auf die gewöhnlich zur Bestimmung der Konstanten der Bessel'schen Formel benutzten Ausdrücke. Nur bei  $u'_v$  in 124) pflegt man den Faktor  $(-1)^v$  wegzulassen, was insofern zulässig ist, als der Faktor, den  $u'_v$  für  $a_1 = 0$  in 125) erhält, nämlich  $(-1)^v \cos \frac{2\pi v}{K} x$ , dann einfach als  $\cos \frac{2\pi v}{K} x$  angesetzt wird. Ich werde dies bei späteren Gelegenheiten ebenfalls thun.

## Zweiter Abschnitt.

### 1.

Die eingangs erwähnte Frage kommt auf die Aufstellung der Bessel'schen Formel für  $n$  aequidistante und  $r$  überzählige Beobachtungen zurück. Dazu ist die Auflösung eines Systems von  $n + r$  linearen Gleichungen für die  $n + r$  Unbekannten  $u_o, p_m, q_m$  erforderlich, welche sich mittelst der im ersten Theile gegebenen Formeln unter allen Umständen bewerkstelligen lässt. Die folgende Ueberlegung führt indessen diese Auflösung auf wesentlich einfachere Verhältnisse zurück.

Man denke sich die Tages- oder Jahreskurve  $C_n$  zunächst für die  $n$  aequidistanten Beobachtungen aufgestellt; die betreffenden Koeffizienten mögen  $u'_o, p'_m, q'_m$  heißen. Die Zahl der Sinuslinien, durch deren Interferenz  $C_n$  erzeugt wird, ist 1 vermehrt um die Anzahl der Ganzen in  $\frac{n}{2}$ , wenn  $u'_o$  wie früher als eine Sinuslinie nullter Ordnung aufgefasst wird. Es sei ferner  $C_{n+r}$  die Tages- oder Jahreskurve für die  $n + r$  Beobachtungen, wobei die Koeffizienten  $u_o, p_m, q_m$  sein mögen. Man kann sich dann vorstellen, es sei  $C_{n+r}$  durch eine Interferenz von soviel Sinuslinien entstanden, als Ganze in  $\frac{n+r}{2} + 1$  enthalten sind.

Die  $n$  aequidistanten Beobachtungen können in der meteorologischen Praxis durch Sinuslinien nur auf eine einzige Art dargestellt werden, und diese Darstellung ist eben in der Kurve  $C_n$  gegeben, weil zur Bestimmung der letzteren  $n$  lineare, also eindeutige Gleichungen für die Unbekannten  $u'_o, p'_m, q'_m$  aufzulösen sind.

Die Kurve  $C_{n+r}$  stellt neben den  $r$  überzähligen Beobachtungen auch die  $n$  aequidistanten dar, muss also, da für letztere nach dem eben gesagten nur eine Darstellung möglich ist, immer mit  $C_n$  identisch werden, sobald für  $x$  eine der aequidistanten Phasen eingesetzt wird. Lässt man die Periode mit der ersten der aequidistanten Phasen beginnen, so sind letztere überhaupt darstellbar durch

$$x = \frac{K}{n} (h - 1) \tag{126}$$

$$h = 1, 2, \dots, n$$

Soll nun für jeden dieser Werthe der Komplex  $C_{n+r}$  mit dem Komplex  $C_n$  identisch werden, so kann dies nur geschehen, indem immer eine gewisse Anzahl von Sinusfunktionen des Komplexes  $C_{n+r}$  für eine jener Phasen zu einer einzigen Sinusfunktion des Komplexes  $C_n$  verschmelzen. Es ist nun leicht zu übersehen, dass zwei Sinusfunktionen überhaupt nur in den beiden Fällen zu einer einzigen neuen Sinusfunktion verschmelzen können, wenn die veränderlichen Theile ihrer Argumente sich entweder zu einem Vielfachen von  $2\pi$  ergänzen, oder um ein Vielfaches von  $2\pi$  verschieden sind. Es sei ein solches Vielfaches etwa  $2\pi s (h-1)$ , dann hat man beispielsweise für die Phase  $x = \frac{\kappa}{n} (h-1)$  als verschmelzbare Sinusfunktionen

$$u_m \sin \left( U_m + \frac{2\pi m}{n} (h-1) \right) = p_m \cdot \cos \frac{2\pi m}{n} (h-1) + q_m \cdot \sin \frac{2\pi m}{n} (h-1) \quad 127)$$

und

$$u_{ns \pm m} \cdot \sin \left( U_{ns \pm m} + \frac{2\pi (ns \pm m)}{n} (h-1) \right) = p_{ns \pm m} \cdot \cos \frac{2\pi m}{n} (h-1) \pm q_{ns \pm m} \cdot \sin \frac{2\pi m}{n} (h-1) \quad 128)$$

Die Konstanten der durch Verschmelzung entstehenden Sinusfunktion sind  $p_m + p_{ns \pm m}$  und  $q_m \pm q_{ns \pm m}$ , während der veränderliche Theil des Arguments  $\frac{2\pi m}{n} (h-1)$  bleibt.

Ganz allgemein entsteht also durch Verschmelzung der Sinusfunktionen mit den Indices  $k$  und  $ns \pm k$  aus dem Komplex  $C_{n+r}$  die Sinusfunktion mit dem Index  $k$  aus dem Komplex  $C_n$ , d. h. es muss sein

$$\left. \begin{aligned} p_k + \sum_{s=1} (p_{ns-k} + p_{ns+k}) &= p'_k \\ q_k + \sum_{s=1} (-q_{ns-k} + q_{ns+k}) &= q'_k \end{aligned} \right\} \quad 129)$$

wo die Summationen soweit fortzusetzen sind, als es die Grösse der Zahl  $n+r$  erlaubt.

In den Gleichungen 129) ist  $k = 1, 2, 3, \dots$  zu setzen, doch wird man  $k$  nur bis zu den in  $\frac{n}{2}$  enthaltenen Ganzen gehen lassen, da sonst Gleichungen auftreten, die vorher schon für ein kleineres  $k$  vorgekommen sind. Wenn  $n$  eine gerade Zahl  $2\nu$  ist, so hat man für  $k = \nu$ , da dann je zwei der Indices  $ns+k$  und  $ns-k$  identisch werden, einfach zu setzen

$$p_\nu + \sum_{s=1} p_{2\nu s + \nu} = p'_\nu \quad 130)$$

Aus der zweiten Gleichung 129) verschwindet dann für  $k = \nu$  die Grösse  $q_\nu$ , und man braucht deshalb diese Gleichung nicht weiter zu berücksichtigen. Auch

für  $k = 0$  sind die Gleichungen 129) anwendbar, und man erhält wegen  $p_0 = u_0$ , und weil die Indices  $ns + k$  und  $ns - k$  identisch werden

$$u_0 + \sum_{s=1} p_{ns} = u'_0 \quad 131)$$

Das ganze Resultat lässt sich folgendermassen auffassen. Vermittelst der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u_0 + \sum_{s=1} p_{ns} &= u'_0 \\ p_k + \sum_{s=1} (p_{ns-k} + p_{ns+k}) &= p'_k \\ q_k + \sum_{s=1} (-q_{ns-k} + q_{ns+k}) &= q'_k \\ k &= 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} 132)$$

werden die  $n$  ersten Unbekannten  $u_0, p_m, q_m$  durch die übrigen  $r$  Unbekannten in der einfachsten Weise ausgedrückt, nachdem die Koeffizienten  $u'_0, p'_m, q'_m$  der Bessel'schen Formel für die  $n$  aequidistanten Beobachtungen bestimmt worden sind. Dann bleibt nur noch die Auflösung eines Systems von  $r$  linearen Gleichungen für jene  $r$  Unbekannten auszuführen, um die gestellte Aufgabe vollständig zu erledigen. Es ist klar, dass der hier vorgezeichnete Weg ausserordentlich viel einfacher ist, als wenn man nach den im ersten Theile entwickelten Ausdrücken die Bessel'sche Formel für  $n + r$  Beobachtungen, die keine aequidistante Reihe bilden, direkt ableiten wollte.

## 2.

Wohl weitaus am häufigsten ist in der meteorologischen Praxis der Spezialfall, in dem die Zahl der überzähligen Beobachtungen geringer ist, als die der aequidistanten, also  $r < n$ . Ich will denselben seiner hervorragenden Wichtigkeit wegen im Anschluss an das vorhergehende ausführlicher behandeln.

Die Tages- resp. Jahreskurve  $C_{n+r}$  hat die Gestalt

$$y = u_0 + \sum_{m=1} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 133)$$

Da nach der Voraussetzung  $n + r < 2n$ , so sind mindestens alle diejenigen  $p_m$  und  $q_m$  gleich Null zu setzen, bei denen der Index  $m$  den Werth  $n - 1$  übersteigt, also

$$0 = p_n = q_n = p_{n+1} = q_{n+1} = \dots \text{ u. s. f.} \quad 134)$$

Die Tageskurve  $C_n$  für die aequidistanten Beobachtungen allein werde wie früher durch

$$y = u'_0 + \sum_{m=1} \left( p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad (135)$$

dargestellt.

Die Gleichung 131) reduziert sich zufolge der über die  $p$  und  $q$  mit höheren Indices in 134) gemachten Angaben sofort auf das bemerkenswerthe Resultat:

$$u_0 = u'_0 \quad (136)$$

Sobald also die Anzahl der überzähligen Beobachtungen kleiner ist als die der aequidistanten, ist der Mittelwerth (das Tages- oder Jahresmittel) für die auf  $n + r$  Werthe gegründete Tages- oder Jahreskurve genau derselbe, wie der aus den  $n$  aequidistanten Beobachtungen allein abgeleitete. Die Hinzunahme von überzähligen Beobachtungen vermag daher, so lange  $r < n$ , unter keinen Umständen einen genaueren Werth für das Tages- oder Jahresmittel zu verschaffen. Die gewichtige Bedeutung der Aequidistanz tritt hierdurch auf das schärfste hervor.

Versteht man unter Kurvenfläche das von der Kurve selbst, von den zu den Phasen  $x = 0$  und  $x = K$  gehörenden Ordinaten und von der Abscissenaxe begrenzte Stück der Koordinatenebene, so ist das Produkt  $K u_0$  gleich der Kurvenfläche, wenn die einzelnen Flächenelemente mit dem Zeichen der Ordinate behaftet werden. Das oben gewonnene Resultat kann dann auch folgendermassen ausgesprochen werden.

Zieht man zu einer Schaar von  $n$  aequidistanten Beobachtungen, denen eine Kurve  $C_n$  entspreche, der Reihe nach 1, 2, . . .  $r$  überzählige Beobachtungen hinzu, wodurch die Kurven  $C_{n+1}$ ,  $C_{n+2}$ , . . .  $C_{n+r}$  entstehen, so sind alle diese Kurven  $C_n$  bis  $C_{n+r}$  insofern wesentlich verschieden von einander, als z. B. die Phasen der Media und der Extreme, sowie die Amplituden der letzteren von Kurve zu Kurve wechseln; die Kurvenfläche aber ist bei allen dieselbe, so lange  $r < n$  ist.

Die Gleichungen 129) reduzieren sich nun auf

$$\left. \begin{aligned} p_k + p_{n-k} &= p'_k \\ q_k - q_{n-k} &= q'_k \end{aligned} \right\} \quad (137)$$

und die Gleichung 130) auf

$$p_\nu = p'_\nu \quad (138)$$

falls  $n = 2\nu$  ist; für  $p'_\nu$  kann direkt  $u'_\nu$  gesetzt werden, mit Rücksicht auf 125) und die daran geknüpfte Bemerkung.

Solange  $r$  seine obere Grenze  $n - 1$  nicht erreicht, werden für die kleineren Werthe von  $k$ , etwa  $k = 1, 2, \dots$ , die Koeffizienten  $p_{n-k}$  und  $q_{n-k}$  verschwinden, d. h. es wird in diesen Fällen

$$p_k = p' \qquad q_k = q' \qquad (139)$$

Dann hat die Kurve  $C_{n+r}$  mit der Kurve  $C_n$  eine Anzahl von Sinuslinien, und zwar die ersten, gemeinsam. Dies sind aber in der Regel die Sinuslinien mit den grössten Werthen des Koeffizienten  $u_m$ , welche demzufolge am meisten bestimmend auf den allgemeinen Verlauf der Kurve einwirken, und so sieht man auch hier, wie die Bedeutung der Aequidistanz gegenüber dem Vorkommen von in der Periode irgendwie zerstreuten Beobachtungen hervorleuchtet. Erst für  $r = n - 1$  werden alle Sinuslinien der Kurve  $C_n$  transformirt, nur  $u'_0$ , die Sinuslinie nullter Ordnung, bleibt noch unberührt, bis für  $r = n$  auch dieser Werth eine Aenderung erleidet. Der neue Werth  $u_0$  ist indessen im allgemeinen für das Intervall von  $r = n$  bis  $r = 2n - 1$  keineswegs konstant, wie es der alte Werth  $u'_0$  für  $r = 0$  bis  $r = n - 1$  war; vielmehr ändert sich derselbe nun mit jeder neu hinzutretenden überzähligen Beobachtung, wie man leicht aus (132) ersieht.

Eine Verschärfung der aus aequidistanten Beobachtungen gewonnenen Mittelwerthe ist mittelst überzähliger Beobachtungen nur zu erlangen, wenn deren Anzahl die der aequidistanten erreicht oder übertrifft.

Ich knüpfe an die vorstehenden Erörterungen ein paar Beispiele.

1) An sehr vielen meteorologischen Stationen, wo nur dreimal täglich beobachtet wird, sind zwei der Termine um 12 Stunden von einander entfernt. Die Beobachtungsergebnisse mögen durch  $b_h, b_{h+z}, b_{h+12}$  bezeichnet werden, wo  $h, h+z, h+12$  die Beobachtungsstunden vorstellen. Nach dem obigen ist dann als einziges streng wissenschaftlich begründetes Tagesmittel anzusehen das arithmetische Mittel  $\frac{1}{2}(b_h + b_{h+12})$ , so dass die Beobachtung  $b_{h+z}$  auf den Mittelwerth in keiner Weise Einfluss hat. Dass unter diesen Umständen je nach der Natur des betreffenden Elementes (man denke nur an den Luftdruck!) sehr schlechte Mittelwerthe zum Vorschein kommen können, ist klar, allein die Schuld liegt dann nicht an der doch ganz streng begründeten Methode, sondern an der allzugeringen Anzahl der täglichen Beobachtungen. Wenn man aber, wie dies, um nur einige wenige Beispiele anzuführen, auf den bayerischen Stationen (Termine 8, 14, 20<sup>h</sup>) und auf den meisten italienischen Stationen (Termine 9, 15, 21<sup>h</sup>) geschieht, als Tagesmittel für absolute und relative Feuchtigkeit und Bewölkung einfach das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen aller drei Termine in Rechnung bringt, so lässt sich dies wissenschaftlich nicht rechtfertigen. Die arithmetischen Mittel aus den Beobachtungen der beiden aequidistanten Termine verdienen für jene Elemente wenigstens jedenfalls grösseres Zutrauen.

2) Auf dem Observatorium in Madrid, dessen Publikationen in der Bibliothek des hiesigen Observatoriums leider nur bis zum Jahrgang 1875 vorhanden sind, wurde täglich siebenmal, in den Terminen 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24<sup>h</sup> beobachtet. Im Jahrgang 1875, S. VIII der Einleitung ist angegeben, dass die Werthe für den Termin 3<sup>h</sup> interpolirt wurden, indem man die Bessel'sche Formel für obige sieben Termine aufstellte und darnach die Werthe für die Phase 3<sup>h</sup> berechnete. Die betreffenden Bessel'schen Formeln finden sich beispielsweise für die Temperatur der Luft nach Monat, Jahreszeit und Jahr auf S. 159, jedoch nur mit 5 Konstanten, statt der 7, welche hätten gewonnen werden können. Die Folge ist, dass die ausserordentlich einfache Weise, in welcher die Werthe für 3<sup>h</sup> aus der vollständigen Bessel'schen Formel im vorliegenden Falle zu gewinnen sind, vollkommen übersehen wurde, und dass ausserdem für jenen Termin durchweg Werthe abgeleitet wurden, die man durch theoretisch zweifellos schärfere ersetzen muss. Nach dem oben abgeleiteten Satz ist nämlich der Mittelwerth für die sieben genannten Termine identisch mit dem Mittelwerth aus den vier aequidistanten Terminen 6, 12, 18, 24<sup>h</sup>. Da nun der Aequidistanz wegen schliesslich als Tagesmittel auch das arithmetische Mittel aus den sieben beobachteten und dem einen interpolirten Terminresultat anzusehen ist, so folgt sofort:

$$\text{Wahres Tagesmittel} = \frac{1}{4} (b_6 + b_{12} + b_{18} + b_{24}).$$

Interpolirter Werth für  $b_3$  nach der vollständigen Bessel'schen Formel

$$b_3 = b_6 + b_{12} + b_{18} + b_{24} - (b_9 + b_{15} + b_{21})$$

In der That gibt die strenge Rechnung nach den Gleichungen 38) und 70) genau obige Werthe für das Tagesmittel  $u_0$  und für  $b_3$ .

### 3.

Es sollen nun die für  $r < n$  aufzulösenden Gleichungssysteme in eine für die praktische Rechnung geeignetere Form gebracht werden. Die Reihe der mit  $x = 0$  beginnenden aequidistanten Phasen sei durch  $\frac{\kappa}{n} (h - 1)$  mit der zugehörigen Amplitude  $\alpha_h$  für  $h = 1, 2, \dots n$  dargestellt. Die überzähligen Phasen seien  $\xi_l$ , ihre Amplituden  $\beta_l$  für  $l = 1, 2, \dots r$ . Es werde noch, wie früher

$$\frac{2\pi}{n} = v \tag{140}$$

$$\frac{2\pi}{K} \cdot \xi_l = x_l \tag{141}$$

gesetzt. Die Resultate gestalten sich etwas verschieden, je nachdem  $n$  und  $r$  gerade oder ungerade sind. Von den 4 möglichen Fällen werde ich indessen nur einen

ausführlicher behandeln; für die übrigen, bei denen man ganz analog vorzugehen hat, beschränke ich mich bei der Entwicklung auf die Hauptpunkte.

$$a) \quad n = 2\nu, \quad r = 2\rho + 1$$

Die Bedingung  $r < n$  kann hier offenbar durch die andere  $\rho < \nu$  ersetzt werden. Die Formel für  $C_{n+r}$  lautet

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 142)$$

Man hat zunächst für die  $2\nu$  aequidistanten Beobachtungen nach 124) und 125) mit der dort gemachten Bemerkung für  $\alpha_1 = 0$

$$y = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u'_\nu \cos \frac{2\pi \nu}{K} x \quad 143)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \\ p'_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \cos kv(h-1) \\ q'_k &= \frac{1}{\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} \alpha_h \sin kv(h-1) \\ u'_\nu &= \frac{1}{2\nu} \sum_{h=1}^{h=2\nu} (-1)^{h-1} \alpha_h \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, (\nu-1) \\ 144) \end{array}$$

Die  $2\nu$  aequidistanten Beobachtungen liefern das Gleichungssystem  $S_1$ :

$$\alpha_h = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos mv(h-1) + q_m \sin mv(h-1) \right) \quad 145)$$

$$h = 1, 2, \dots, (2\nu)$$

während die  $2\rho + 1$  überzähligen Beobachtungen das System  $S_2$  geben:

$$\beta_l = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos mx_l + q_m \sin mx_l \right) \quad 146)$$

$$l = 1, 2, \dots, (2\rho + 1)$$

Das System  $S_1$  lässt sich nun vollkommen durch die Gleichungen 136), 137) und 138) ersetzen, d. h. man hat die  $2\nu$  Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} u_o &= u'_o \\ p_k &= p'_k - p_{2\nu-k} \\ q_k &= q'_k + q_{2\nu-k} \\ p_\nu &= p'_\nu = u'_\nu \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots (\nu - 1) \quad 147)$$

Beiläufig mag hier folgendes bemerkt werden. Die Koeffizienten mit den höchsten Indices sind  $p_{\nu+\rho}$  und  $q_{\nu+\rho}$ ; so lange also  $2\nu - k > \nu + \rho$ , d. h.  $k < \nu - \rho$ , sind die Koeffizienten  $p_{2\nu-k}$  und  $q_{2\nu-k}$  gleich Null zu setzen, oder es wird

$$\left. \begin{aligned} p_k &= p'_k \\ q_k &= q'_k \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots (\nu - \rho - 1) \quad 148)$$

Die gesuchte Kurve  $C_{2\nu+2\rho+1}$  hat daher mit der auf die Aequidistanz allein gegründeten Kurve  $C_{2\nu}$  die  $\nu - \rho - 1$  ersten Sinuslinien und  $u_o$  gemeinsam.

Substituiert man die Werthe aus 147) in das System 146), nachdem die Summation in passende Theile zerlegt ist, so entsteht

$$\left. \begin{aligned} \beta_l &= u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( (p'_m - p_{2\nu-m}) \cos mx_l + (q'_m + q_{2\nu-m}) \sin mx_l \right) \\ &\quad + u'_\nu \cos \nu x_l + q_\nu \sin \nu x_l \\ &\quad + \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos mx_l + q_m \sin mx_l \right) \\ &\quad l = 1, 2, \dots (2\rho + 1) \end{aligned} \right\} 149)$$

Aus der für die aequidistanten Werthe berechneten Kurve  $C_{2\nu}$  in 143) lässt sich die der Phase  $\xi_l$  zukommende Amplitude, welche ich durch  $\beta'_l$  bezeichnen will, bestimmen; man hat nämlich

$$\beta'_l = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( p'_m \cos mx_l + q'_m \sin mx_l \right) + u'_\nu \cos \nu x_l \quad 150)$$

und hiermit geht 149) über in

$$\left. \begin{aligned} \beta_l - \beta'_l &= q_\nu \sin \nu x_l + \sum_{m=1}^{m=\nu-1} \left( -p_{2\nu-m} \cos mx_l + q_{2\nu-m} \sin mx_l \right) \\ &+ \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos mx_l + q_m \sin mx_l \right) \end{aligned} \right\} 151)$$

$$l = 1, 2, \dots (2\rho + 1)$$

Hier ist die linke Seite die Abweichung der wahren Kurve von  $C_{2\nu}$  an der Stelle mit der Phase  $\xi_l$ . Die erste Summation rechts kann auf  $m = \nu - \rho$  bis  $m = \nu - 1$  beschränkt werden, da alle  $p$  und  $q$  mit höherem Index als  $\nu + \rho$  verschwinden. Durch einfache Transformationen entsteht dann

$$\left. \begin{aligned} \beta_l - \beta'_l &= q_\nu \sin \nu x_l + \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left( -p_m \cos (2\nu - m) x_l + q_m \sin (2\nu - m) x_l \right) \\ &+ \sum_{m=\nu+1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos mx_l + q_m \sin mx_l \right) \end{aligned} \right\} 152)$$

Vereinigt man hier die entsprechenden Theilsätze, so erhält man schliesslich als einfachste Gestalt des Systems der finalen Gleichungen für die noch übrigen  $2\rho + 1$  Unbekannten  $p_{\nu+1}, \dots, p_{\nu+\rho}, q_\nu, q_{\nu+1}, \dots, q_{\nu+\rho}$

$$\frac{\beta_l - \beta'_l}{2 \sin \nu x_l} = \frac{1}{2} q_\nu + \sum_{m=1}^{m=\rho} \left( -p_{\nu+m} \sin mx_l + q_{\nu+m} \cos mx_l \right) \quad 153)$$

$$l = 1, 2, \dots (2\rho + 1)$$

Ist nur eine überzählige Beobachtung vorhanden, also  $\rho = 0$ , so reduziert sich hier die rechte Seite auf den ersten Theilsatz.

Man erkennt sofort, dass das System 153) nach sehr einfachen Modifikationen vermittelt der im ersten Theile durch die Gleichungen 38) und 48) gegebenen Formeln direkt aufgelöst werden kann. Man hat nur in 7) die Grössen  $u_o, p_m$  und  $q_m$  durch  $\frac{1}{2} q_\nu, q_{\nu+m}$  und  $-p_{\nu+m}$  zu ersetzen, während  $\nu$  in  $\rho$  und  $\alpha_h$  in die linke Seite von 153) übergeht.

$$b) \quad n = 2\nu, \quad r = 2\rho.$$

Die Bedingung lautet  $\rho < \nu$ . Die zu bestimmende Formel ist

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho-1} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u_{\nu+\rho} \sin \left( U_{\nu+\rho} + \frac{2\pi(\nu+\rho)}{K} x \right) \quad 154)$$

wo nach 112) sein muss

$$U_{\nu+\rho} = -\frac{\pi}{2} (2\nu - 1) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2\rho} x_k \quad (155)$$

Die Gleichungen 143), 144), 147), 150) bleiben die nämlichen. Setzt man anfänglich

$$\left. \begin{aligned} u_{\nu+\rho} \sin U_{\nu+\rho} &= p_{\nu+\rho} \\ u_{\nu+\rho} \cos U_{\nu+\rho} &= q_{\nu+\rho} \end{aligned} \right\} \quad (156)$$

so kann die übrige Entwicklung wie bei a) vorgenommen werden. Man muss schliesslich nur in 153) den Theilsatz für  $m = \rho$  für sich nehmen und die eben angeführten Werthe für  $p_{\nu+\rho}$  und  $q_{\nu+\rho}$  wieder einsetzen. Das finale Gleichungssystem für die  $2\rho$  Unbekannten  $p_{\nu+1}, \dots, p_{\nu+\rho-1}, q_{\nu}, q_{\nu+1}, \dots, q_{\nu+\rho-1}, u_{\nu+\rho}$  lautet dann

$$\frac{\beta_l - \beta'_l}{2 \sin \nu x_l} = \frac{1}{2} q_{\nu} + \sum_{m=1}^{m=\rho-1} (-p_{\nu+m} \sin mx_l + q_{\nu+m} \cos mx_l) + u_{\nu+\rho} \cos (U_{\nu+\rho} + \rho x_l) \quad (157)$$

$$l = 1, 2, \dots, (2\rho)$$

Dasselbe kann wiederum nach den im ersten Theile gegebenen Formeln aufgelöst werden, und zwar durch Reduktion auf das System 8) oder 49).

$$c) \quad n = 2\nu + 1, \quad r = 2\rho + 1.$$

Es muss hier  $\rho < \nu$  sein. Die zu ermittelnde Formel hat die Gestalt

$$y = u_o + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) + u_{\nu+\rho+1} \sin \left( U_{\nu+\rho+1} + \frac{2\pi(\nu+\rho+1)}{K} x \right) \quad (158)$$

mit der Bedingung nach 112)

$$U_{\nu+\rho+1} = -\nu\pi - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2\rho+1} x_k \quad (159)$$

Man hat zunächst für die  $2\nu + 1$  aequidistanten Beobachtungen

$$y = u'_o + \sum_{m=1}^{m=\nu} \left( p'_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q'_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad (160)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_0 &= \frac{1}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \\ p'_k &= \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \cos kv(h-1) \\ q'_k &= \frac{2}{2\nu + 1} \sum_{h=1}^{h=2\nu+1} \alpha_h \sin kv(h-1) \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, \nu \quad 161)$$

Aus 136) und 137) folgt dann

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= u'_0 \\ p_k &= p'_k - p_{2\nu+1-k} \\ q_k &= q'_k + q_{2\nu+1-k} \end{aligned} \right\} k = 1, 2, \dots, \nu \quad 162)$$

wodurch die  $2\nu + 1$  ersten Unbekannten ausgedrückt werden. Man berechnet ferner  $\beta'_l$  aus der Gleichung

$$\beta'_l = u'_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu} (p'_m \cos mx_l + q'_m \sin mx_l) \quad 163)$$

Führt man dann anfänglich, wie bei b)

$$\left. \begin{aligned} u_{\nu+\rho+1} \sin U_{\nu+\rho+1} &= p_{\nu+\rho+1} \\ u_{\nu+\rho+1} \cos U_{\nu+\rho+1} &= q_{\nu+\rho+1} \end{aligned} \right\} 164)$$

ein, um erst schliesslich diese rechten Seiten wieder durch die linken zu ersetzen, so kommt nach Transformationen, welche den in a) angewandten vollkommen analog sind, als finales System für die  $2\rho + 1$  Unbekannten  $p_{\nu+1}, \dots, p_{\nu+\rho}, q_{\nu+1}, \dots, q_{\nu+\rho}, u_{\nu+\rho+1}$  zum Vorschein

$$\frac{\beta_l - \beta'_l}{2 \sin \frac{2\nu+1}{2} x_l} = \sum_{m=1}^{m=\rho} \left( -p_{\nu+m} \sin \frac{2m-1}{2} x_l + q_{\nu+m} \cos \frac{2m-1}{2} x_l \right) + u_{\nu+\rho+1} \cos \left( U_{\nu+\rho+1} + \frac{2\rho+1}{2} x_l \right) \quad 165)$$

$$l = 1, 2, \dots, (2\rho + 1)$$

$$d) \quad n = 2\nu + 1, \quad r = 2\rho.$$

Man hat hier die Bedingung  $\rho < \nu + 1$ , und die Besselsche Formel lautet

$$y = u_0 + \sum_{m=1}^{m=\nu+\rho} \left( p_m \cos \frac{2\pi m}{K} x + q_m \sin \frac{2\pi m}{K} x \right) \quad 166)$$

Die Gleichungen 160) bis 163) bleiben die nämlichen, und das System der Endgleichungen für die  $2\rho$  Unbekannten  $p_{\nu+1}, \dots, p_{\nu+\rho}, q_{\nu+1}, \dots, q_{\nu+\rho}$  wird

$$\frac{\beta_l - \beta'_l}{2 \sin \frac{2\nu+1}{2} x_l} = \sum_{m=1}^{m=\rho} \left( -p_{\nu+m} \sin \frac{2m-1}{2} x_l + q_{\nu+m} \cos \frac{2m-1}{2} x_l \right) \quad 167)$$

$$l = 1, 2, \dots (2\rho)$$

Für Gleichungen von der Form 165) oder 167) ist die allgemeine Auflösung im ersten Theile ebenfalls gegeben worden; es lassen sich nämlich 165) und 167) auf die Systeme 82) und 82 a) reduzieren.

### Zusammenfassung der Ergebnisse.

1. Die Bessel'sche Formel darf nicht auf Wahrscheinlichkeitsrechnung gegründet werden.
2. Die Bessel'sche Formel muss immer als ein Aggregat von Sinuslinien aufgefasst werden, welche sowohl für  $n = 2\nu + 1$ , als auch für  $n = 2\nu$  vom 0 fachen bis zum  $\nu$  fachen Winkel gehn.
3. Die Berechnung der Konstanten kommt immer auf die Auflösung eines definiten Systems von Gleichungen zurück; für ein ungerades  $n$  reichen die gegebenen Bedingungen dazu vollkommen aus, während für ein gerades  $n$  die Bedingung hinzugezogen werden muss, dass die Winkelkonstante der  $\nu^{\text{ten}}$  Sinuslinie gleich der negativen halben Summe aller gegebenen, in Bogen ausgedrückten Phasen ist.
4. Beim Auftreten von  $r$  überzähligen Beobachtungen neben  $n$  aequidistanten reduziert sich die Aufstellung der Bessel'schen Formel auf folgende Aufgaben:
  - a) Bestimmung der Bessel'schen Formel  $C_n$  für die  $n$  aequidistanten Beobachtungen.
  - b) Ersetzung der  $n$  ersten Unbekannten durch die  $r$  letzten.
  - c) Ermittlung der den überzähligen Phasen in  $C_n$  entsprechenden Amplituden.
  - d) Auflösung eines Systems von  $r$  linearen Gleichungen für die  $r$  letzten Unbekannten.
5. Der aus aequidistanten Beobachtungen abgeleitete Mittelwerth bleibt bei Zuziehung überzähliger Beobachtungen vollkommen unverändert, so lange die Anzahl der letzteren die der aequidistanten Beobachtungen nicht erreicht.

Dorpat, Oktober 1887.

## Nachwort.

Der zweite Theil der vorliegenden Abhandlung wurde am Ende des vorigen Jahres an die Redaktion der meteorologischen Zeitschrift nach Hamburg gesandt. Die Redaktion hat aus Gründen verschiedener Art den Abdruck für nicht opportun befunden. Ich muss es den Fachgenossen überlassen die angezweifelte Richtigkeit meiner Resultate zu prüfen. Bei dem hier erfolgten Abdrucke sind nur diejenigen Kürzungen vorgenommen worden, welche durch den Abdruck des ersten Theils, der ursprünglich in einer mathematischen Zeitschrift veröffentlicht werden sollte, geboten erschienen. In Bezug auf die Ueberlegungen, mit denen der zweite Abschnitt beginnt, und wodurch die in der Zusammenfassung unter 4. und 5. angeführten Ergebnisse gewonnen wurden, habe ich noch folgendes zu bemerken. Ursprünglich waren die im zweiten Abschnitt 1 (S. 35) mitgetheilten Resultate alle nur mit Hilfe sehr weitläufiger Rechnungsoperationen ermittelt worden. Das Bestreben, im Interesse eines leichteren Verständnisses rein mathematische Entwicklungen möglichst zurückzudrängen, führte endlich zu der Darstellung, welche a. a. O. gegeben ist. Dieselbe mag noch durch folgendes einfache Beispiel illustriert werden, welches den Einblick in den Gang des allgemeinen Verfahrens erleichtert.

Es sei  $n = 5$ , und  $r$  beliebig gross. Dann hat man etwa für  $h = 2$

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & u_0 + u_1 \sin \left( U_1 + \frac{2\pi}{5} \right) + u_2 \sin \left( U_2 + \frac{4\pi}{5} \right) + u_3 \sin \left( U_3 + \frac{6\pi}{5} \right) \\ & + u_4 \sin \left( U_4 + \frac{8\pi}{5} \right) + u_5 \sin \left( U_5 + \frac{10\pi}{5} \right) + u_6 \sin \left( U_6 + \frac{12\pi}{5} \right) \\ & + u_7 \sin \left( U_7 + \frac{14\pi}{5} \right) + u_8 \sin \left( U_8 + \frac{16\pi}{5} \right) + u_9 \sin \left( U_9 + \frac{18\pi}{5} \right) \\ & + u_{10} \sin \left( U_{10} + \frac{20\pi}{5} \right) + \dots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \alpha_2 = & u_0 + p_1 \cos \frac{2\pi}{5} + q_1 \sin \frac{2\pi}{5} + p_2 \cos \frac{4\pi}{5} + q_2 \sin \frac{4\pi}{5} + p_3 \cos \frac{6\pi}{5} + q_3 \sin \frac{6\pi}{5} \\ & + p_4 \cos \frac{8\pi}{5} + q_4 \sin \frac{8\pi}{5} + p_5 \cos \frac{10\pi}{5} + q_5 \sin \frac{10\pi}{5} + p_6 \cos \frac{12\pi}{5} + q_6 \sin \frac{12\pi}{5} \\ & + p_7 \cos \frac{14\pi}{5} + q_7 \sin \frac{14\pi}{5} + p_8 \cos \frac{16\pi}{5} + q_8 \sin \frac{16\pi}{5} + p_9 \cos \frac{18\pi}{5} + q_9 \sin \frac{18\pi}{5} \\ & + p_{10} \cos \frac{20\pi}{5} + q_{10} \sin \frac{20\pi}{5} + \dots \end{aligned}$$

aber auch noch

$$\alpha_2 = u'_0 + p'_1 \cos \frac{2\pi}{5} + q'_1 \sin \frac{2\pi}{5} + p'_2 \cos \frac{4\pi}{5} + q'_2 \sin \frac{4\pi}{5}$$

Nun ist

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{12\pi}{5} = \cos \frac{18\pi}{5}; \quad \sin \frac{2\pi}{5} = -\sin \frac{8\pi}{5} = \sin \frac{12\pi}{5} = -\sin \frac{18\pi}{5}$$

$$\cos \frac{4\pi}{5} = \cos \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{14\pi}{5} = \cos \frac{16\pi}{5}; \quad \sin \frac{4\pi}{5} = -\sin \frac{6\pi}{5} = \sin \frac{14\pi}{5} = -\sin \frac{16\pi}{5}$$

$$1 = \cos \frac{10\pi}{5} = \cos \frac{20\pi}{5}; \quad 0 = \sin \frac{10\pi}{5} = \sin \frac{20\pi}{5}$$

Der obige zweite Ausdruck für  $\alpha_2$  reduzirt sich hierdurch auf

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= u_0 + p_5 + p_{10} + \dots \\ &+ \cos \frac{2\pi}{5} \cdot (p_1 + p_4 + p_6 + p_9 + \dots) \\ &+ \sin \frac{2\pi}{5} \cdot (q_1 - q_4 + q_6 - q_9 + \dots) \\ &+ \cos \frac{4\pi}{5} \cdot (p_2 + p_3 + p_7 + p_8 + \dots) \\ &+ \sin \frac{4\pi}{5} \cdot (q_2 - q_3 + q_7 - q_8 + \dots) \end{aligned}$$

d. h. es ergibt sich beim Vergleich mit der dritten Gleichung für  $\alpha_2$

$$u'_0 = u_0 + p_5 + p_{10} + \dots = u_0 + \sum_{s=1} p_{5s}$$

$$p'_1 = p_1 + p_4 + p_6 + p_9 + \dots = p_1 + \sum_{s=1} (p_{5s-1} + p_{5s+1})$$

$$q'_1 = q_1 - q_4 + q_6 - q_9 + \dots = q_1 + \sum_{s=1} (-q_{5s-1} + q_{5s+1})$$

$$p'_2 = p_2 + p_3 + p_7 + p_8 + \dots = p_2 + \sum_{s=1} (p_{5s-2} + p_{5s+2})$$

$$q'_2 = q_2 - q_3 + q_7 - q_8 + \dots = q_2 + \sum_{s=1} (-q_{5s-2} + q_{5s+2})$$

Diese Formeln entsprechen genau den Gleichungen 132).

Dorpat, Februar 1888.

W.



o

x

23<sup>66</sup>

iv