E. ETVERK

Geomeetria

KESKKOOLI VIII KLASSILE

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1946

E. ETVERK

Geomeetria

KESKKOOLI VIII KLASSILE

4/05

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS"

TALLINN 1946

PLANIMEETRIA.

Peatükk I.

Sirgjoon.

§ 1. Sissejuhatus.

Oma ümbruses me näeme mitmesuguseid esemeid — laudu, toole, raamatuid jm. Iga ese asetseb r u u m i s, mis ümbritseb meid kõikjal, viibime me toas või väljas. Meie eluase, Maakera, asetseb maailmaruumis, samuti kui Päike, planeedid ja kõik muud taevakehad.

Igal esemel on mitmesuguseid o m a d u s i; nende kirjeldamiseks kasutame niisuguseid sõnu, nagu suur, raske, ümmargune. Teatavaid esemete omadusi nimetatakse g e o m e e t r i l i s t e k s omadusteks. Need on:

1. eseme k u j u iseloomustavad omadused, nagu sirge, kõver, ümmargune;

2. eseme s u u r u s t iseloomustavad omadused, nagu kõrge, lai, 100 meetrit pikk;

3. omadused, mis näitavad eseme a s e n d i t teiste esemete suhtes, nagu kummuli, rööbiti, nurgeti;

4. omadused, mis näitavad eseme a s u k o h t a teiste esemete suhtes, nagu peal, 5 meetri kaugusel, kõrval.

Kuju, suurust, asendit ja asukohta iseloomustavad omadused on geomeetrilised omadused.

Peale geomeetriliste omaduste on esemetel mitmeid muid omadusi. Viimastega geomeetria ei tegele. Vaadeldes geomeetriliselt seisukohalt näiteks raamatut, telliskivi või mõnda muud eset, jätame kõrvale aine, millest need esemed on valmistatud, nende kaalu, värvuse jm. ning pöörame tähelepanu ainult nende kujule ja suurusele. Nii vaadeldes kaovad erinevused paljude esemete vahel, näiteks nii raamat kui ka telliskivi muutuvad risttahukaks, liivahunnik ja kartulikuhi asenduvad koonusega, kummipallist ja piljardimunast saab kera. Niiviisi saame uued „esemed" — risttahuka, koonuse, ringi, rööpküliku jne., mida nimetatakse geomeetrilisteks kujunditeks.

Geomeetria on teadus, mis uurib geomeetrilisi kujundeid ja nende omadusi.

Geomeetrilised kujundid liigitatakse tasapinnalisteks ja ruumilisteks. Tasapinnalise kujundi kõik punktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal. Niisugused kujundid on näiteks ring, sirglõik, kolmnurk. Geomeetria osa, mis uurib tasapinnalisi kujundeid, nimetatakse tasapinna geomeetriaks ehk planimeetriaks.

Kujundid, mille kõikidest punktidest ei saa läbi panna üht ja sama tasapinda, on ruumilised. Nende uurimisega tegelev geomeetria osa on ruumi geomeetria ehk stereomeetria.

Sõnad geomeetria, planimeetria ja stereomeetria on võetud kreeka keelest ja tähendavad vastavalt maamõõtmist, tasapinnamõõtmist ja ruumimõõtmist.

Ülesanded.

1. Kirjeldada tikutoosi (oma pliiatsi, küünla) geomeetrilisi omadusi.

2. Nimetada kolm ruumilist kujundit.

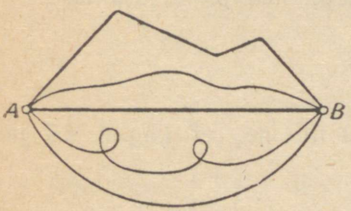
3. Kirjeldada mõnda kerapinna omadust.

4. Missuguseid geomeetrilisi omadusi kirjeldavad järgmised sõnad: kõrvuti; kumer; viltu; konarlik; madal?

§ 2. Sirglõik.

Kõige lihtsam geomeetriline kujund on p u n k t.* Geomeetriline punkt on suuruseta ja kujuta; tal on vaid üks geomeetriline omadus, nimelt asukoht. Punkti märgitakse väikese ringikesega, mille keskkoht ongi kujutatav punkt. Punkte tähistatakse suurte ladina tähtedega.

Märgime tasasel pinnal, näiteks klassitahvli pinnal, kaks punkti A ja B ning ühendame need punktid teineteisega mitmesuguste joonte abil (joonis 1). Leiame nende joonte hulgast kõige lühema. Selleks lähendame pinguletõmmatud niidi punktidele A ja B. Pinguletõmmatud niit nende punktide vahel kujutab s i r g l õ i k u. AB. Punktid A ja B on sirglõigu o t s p u n k t i d. Sageli nimetatakse sirglõiku lihtsalt l õ i g u k s.



Joonis 1.

Sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel.

Seega iga muu joon, mis ühendab punkte A ja B, on pikem kui sirglõik AB. Meie kujutluse järgi

kaht antud punkti ühendab ainult üks sirglõik.

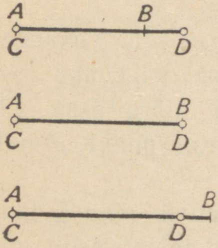
Nende kahe omaduse tõttu on sobiv kahe punkti vahelist kaugust mõõta sirglõiku mööda;

kahe punkti vaheliseks kauguseks on neid punkte ühendava sirglõigu pikkus.

---

* *punctum* (lad.) — torge, piste.

Joonestame nüüd kaks sirglõiku; olgu need AB ja CD. Võrdleme nende pikkusi. Selleks paigutame pinguletõmmatud niidi või sirkli abil ühe lõigu teise peale nii, et nende ühed otspunktid, näiteks A ja C, ühtivad, ja vaatame, kuidas asetsevad nende lõikude teised otspunktid B ja D. Seejuures esineb kolm võimalust (joonis 2): kas punkt B jääb punktide C ja D vahele või punktid B ja D ühtivad või punkt D jääb punktide A ja B vahele.



Joonis 2.

Kui punkt B on punktide C ja D vahel, siis ütleme, et lõik AB on l ü h e m kui lõik CD, ja kirjutame:

$$AB < CD;$$

kui punkt B ühtib punktiga D, siis ütleme, et lõigud AB ja CD on v õ r d s e d, ja kirjutame:

$$AB = CD;$$

kui punkt D on punktide A ja B vahel, siis ütleme, et lõik AB on p i k e m kui lõik CD, ja kirjutame:

$$AB > CD.$$

Sirglõike tähistame sageli ka ainult ühe väikese tähega, näiteks sirglõik a.

Joont, mis koosneb sirglõikudest, nimetatakse m u r d - j o o n e k s. Joonisel 1 kujutatud joontest kõige ülemine on murdjoon. Murdjoon on kas l a h t i n e või k i n n i n e; lahtisel murdjoonel on kaks otspunkti, kuna kinnisel otspunkte ei ole.

5. Olgu Kuressaare, Viljandi ja Tartu kaugus Tallinnast õhuteed mööda kilomeetrites vastavalt k, v ja t. Võrrelda neid kaugusi joonise 7 alusel ja järjestada need kahanevas järjekorras.

6. Võrrelda lõike a ja b, kui $a = c$ ja $b = c$.

Võrrelda lõike x ja z, kui $x > y$ ja $y > z$.

Võrrelda lõike s ja t, kui $s > u$ ja $t = u$.

7. Joonestada kinnine murdjoon, mis koosneb neljast lõigust. Võrrelda iga lõigu pikkust iga ülejäänud lõiguga.

§ 3. Sirglõikude summa ja vahe.

Olgu antud kaks sirglõiku a ja b. Joonestame sirglõigu, mis võrdub lõikude a ja b summaga ehk teisiti, l i i d a m e lõigud a ja b. Selleks joonestame esiteks lõigu KL nii, et

$$KL = a,$$

ja p i k e n d a m e seda siis üle punkti L punktini M nii, et

$$LM = b.$$

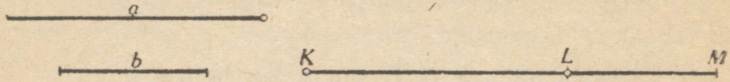
Nii saadud lõik KM on lõikude a ja b summa (joonis 3):

$$KM = a + b.$$

Kui lõigud a ja b on võrdsed, siis punkt L jaotab lõigu KM kaheks võrdseks lõiguks ehk teisiti, punkt L p o o l i t a b lõigu KM. Sel juhul punkt L on lõigu KM k e s k p u n k t. Seega

lõigu keskpunkt on punkt, mis jaotab lõigu kaheks võrdseks lõiguks.

Ühe ja sama lõigu korduval liitmisel saame joonestada lõigu, mis on antud lõigu kordne; et lõigu a järgi joonestada näiteks lõiku $3a$, selleks joonestame esiteks lõigu $a+a$ ja liidame sellega veel kord lõigu a.



Joonis 3.

Kahe lõigu vahe leidmiseks ehk teisiti, ühest lõigust teise *lahutamiseks* tuleb üht lõiku *lühendada* teise võrra. Et leida antud lõikude m ja n vahet (joonis 4), selleks joonestame esiteks lõigu

$$AB = m$$

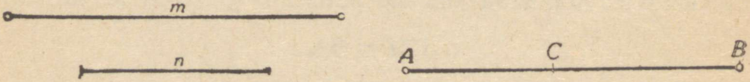
ja lühendame seda lõiku siis lõigu BC võrra, nii et

$$BC = n.$$

Nii saadud lõik

$$AC = m - n.$$

On selge, et ühest lõigust saab lahutada teise lõigu ainult sel juhul, kui teine lõik on esimesest lühem.



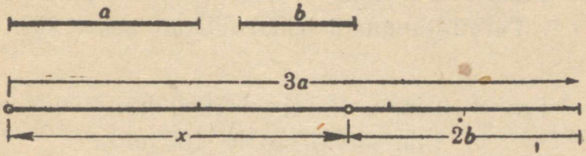
Joonis 4.

Osates sirglõike liita ja lahutada, saame mitmesuguseid algebralisi avaldisi kujutada sirglõikudena. Et kujutada lõiguna näiteks avaldist

$$3a - 2b,$$

võtame vabalt kaks lõiku a ja b, ehitame lõigu $3a$ ja lahutame sellest lõigu $2b$. Ülejääv lõik x kujutabki antud avaldist (joonis 5):

$$x = 3a - 2b.$$



Joonis 5.

Ülesanded.

8. Joonestada kahe vabalt võetud lõigu summa.

9. Joonestada kahe vabalt võetud lõigu vahe.

10. Joonestada kahe punkti vahele vabalt kaks murdjoont ja ehitada sirglõigud, mis on nende murdjoontega ühepikkused. Kumb murdjoon on pikem ja kui palju?

11. Ehitada sirglõik $4a$, kus a on vabalt võetud lõik.

12. Ehitada sirglõik $5a - 3b$, kus a ja b on vabalt võetud lõigud, kuid nii, et $a > b$.

13. Kujutada sirglõikudena avaldised $a + b$ ja $b + a$ ning võrrelda tulemusi.

14. Kujutada sirglõikudena avaldised $2a + 2b$ ja $2(a + b)$. Mis võib öelda tulemuste võrdlemisel?

§ 4. Sirglõigu mõõtmine.

Eespool võrdlesime sirglõikude pikkust nende üksteise peale paigutamise teel (§ 2). Sedasama on võimalik teha ka lõikude mõõtmise ja saadud mõõtarvude võrdlemise teel.

Mõõtmiseks vajame mõõtühikuid. Mõõtühikud määratakse riigivõimu poolt seadustega, et oleks tagatud ühtlaste ühikute tarvitamine. Riigivõimu kontrollile alluvad ka tarvitatavad mõõteriistad.

Nõukogude Liidus on seadusliku mõõtsüsteemina tarvitusel nn. meetermõõdustik, milles pikkuse põhiühikuks on m e e t e r *. Tarvitatavamad pikkusühikud selles süsteemis on järgmised:

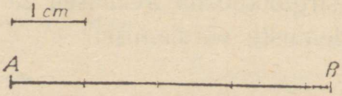
$$1\ \text{m} = 10\ \text{dm} = 100\ \text{cm} = 1000\ \text{mm};$$
$$1\ \text{dm} = 10\ \text{cm} = 100\ \text{mm};$$
$$1\ \text{cm} = 10\ \text{mm};$$
$$1\ \text{km} = 1000\ \text{m}.$$

Meetermõõdustikku mittekuuluva ühikuna kasutatakse meresõidu alal ühikut

$$1\ \text{meremiil} = 1{,}852\ \text{km}.$$

Mõõta sirglõik tähendab leida, mitu korda pikkusühik mahub antud sirglõigule või missugune osa pikkusühikust on see lõik.

Olgu vaja mõõta sirglõik *AB* (joonis 6.). Kasutades ühikuna sentimeetrit, mahutame selle mõõdetavale sirglõigule nii mitu korda kui ta mahub.



Joonis 6.

Joonisest näeme, et antud juhul 1 cm mahub mõõdetavale lõigule 4 korda ja jääb üle lõik, mis on väiksem kui 1 cm. Seega

$$4\ \text{cm} < AB < 5\ \text{cm}.$$

* *metreo* (kr.) — mõõtma.

Selle põhjal ütleme, et lõigu AB pikkus on ligikaudu 4 cm või 5 cm. Kumma neist mõõtarvudest loeme lõigu pikkuseks, see sõltub sellest, kas me lepime kokku mõõta puudusega või liiaga. Nii ühel kui teisel juhul tekib mõõtmisel viga. Et mõõtmisvead oleksid võimalikult väikesed, selleks on kokku lepitud

mõõta puudusega, kui ülejääv lõik on väiksem kui pool ühikut, ja liiaga, kui ülejääv lõik on võrdne või suurem kui pool ühikut.

Antud lõigu täpsemaks mõõtmiseks kasutame ülejääva lõigu mõõtmiseks sentimeetrist väiksemat ühikut, s. o. millimeetrit. Kui 1 mm mahub ülejäävale lõigule enam kui 3, kuid vähem kui 4 korda, siis

$$4\,\text{cm}\ 3\,\text{mm} < AB < 4\,\text{cm}\ 4\,\text{mm}$$

ehk

$$4{,}3\,\text{cm} < AB < 4{,}4\,\text{cm}.$$

Eespool-toodud kokkuleppe kohaselt loeme lõigu AB pikkuseks selle mõõtarvu, mis on väiksema veaga. Kui selleks on 4,3 cm, siis

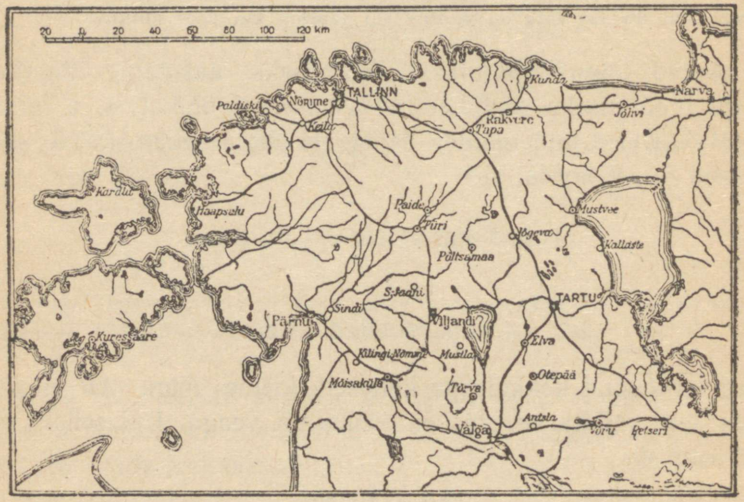
$$AB = 4{,}3\,\text{cm}.$$

Vaadeldud juhul sirglõigu mõõtmine oli ligikaudne, sest kasutatud pikkusühik ei mahtunud täisarv kordi mõõdetavale lõigule. Küsime, kas sirglõigu mõõtmine võib olla ka täpne. Palja silmaga vaadates võib mõnikord näida, et pikkusühik mahub mõõdetavale lõigule täpselt täisarv kordi, kuid kontrollides seda luubi või mikroskoobi abil võib osutuda, et see ei ole nii. Et meil kunagi ei ole teada, kas täpsena näiv mõõtmine ka suurema suurenduse kasutamisel osutub täpseks või mitte, siis ütleme, et

sirglõigu mõõtmine on ikka ligikaudne.

15. Joonestada kinnine murdjoon ja leida mõõtmise teel selle pikkus.

16. Leida alljärgneval kaardil antud mõõdu alusel, kui kaugel on teineteisest Rakvere ja Narva, Tapa ja Tartu, Türi ja Viljandi, Viljandi ja Tartu.



Joonis 7.

17. Avaldada 3,5 meremiili kilomeetrites.

18. Avaldada 20 km meremiilides.

19. Sirglõik on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Nende lõikude keskpunktid on teineteisest 5,3 cm kaugusel. Kui pikk on antud sirglõik?

20. 15 cm pikkune lõik on jaotatud kaheks mittevõrdseks lõiguks. Kui kaugel teineteisest asetsevad nende lõikude keskpunktid?

§ 5. Kiir ja sirge.

Sirglõikude liitmisel pikendasime sirglõiku üle ühe otspunkti. Mõttes võime seda teha piiramatult kaugele.

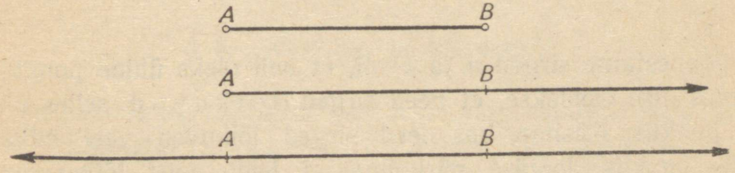
Sirglõiku üle ühe otspunkti piiramatult pikendades tekib kiir.

Kiirel on üks otspunkt (joonis 8). Kiirt tähistatakse kas ühe väikese tähega või kahe suure tähega, milledest üks on tema otspunkti ja teine tema ühe vabalt võetud punkti tähis.

Sirglõiku saame pikendada ka üle mõlema otspunkti. Mõttes võime seda teha piiramatult kaugele.

Sirglõiku üle mõlema otspunkti piiramatult pikendades tekib sirgjoon ehk sirge.

Eelnevast selgub, et kiire ja sirge joonestamine paberile või kujutamine mudeli abil ei ole võimalik. Kui ütleme, et joonestame sirge, siis joonestame sellest sirgest ainult lõigu.



Joonis 8.

Sirget tähistatakse kas selle sirge kahe punkti tähiste abil, näiteks sirge AB, või ühe väikese tähega tähestiku viimaste tähtede hulgast, näiteks sirge s.

Joonestame kaks punkti A ja B. Neid punkte ühendab ainult üks sirglõik. Selle lõigu pikendamisel üle mõlema otspunkti saame üheainsa sirge. Sellest selgub, et

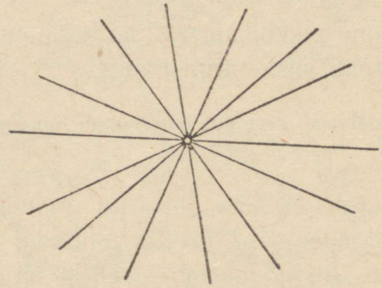
kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

Kui sirge s läbib punkte A ja B, siis öeldakse ka, et sirge s ühendab neid punkte või et punktid A ja B on sel sirgel. Neid punkte nimetatakse siis selle sirge punktideks.

Et kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon, siis

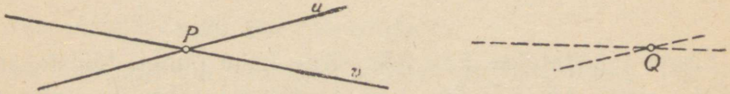
sirgjoon on määratud oma kahe punktiga.

Ühe punktiga ei ole sirge määratud, sest üht punkti läbib määratu hulk sirgeid (joonis 9).



Joonis 9.

Joonestame sirged u ja v nii, et neil oleks ühine punkt P (joonis 10). Öeldakse, et need sirged lõikuvad selles ühises punktis. Küsime, kas need sirged lõikuvad veel mõnes teises punktis. Joonise piirkonnas ei leidu teist lõikepunkti,



Joonis 10.

kuid võib-olla leidub see kuski väga kaugel. Järele mõeldes selgub, et teist lõikepunkti sirgetel u ja v ei saa olla. Tõepoolest, kui sirgetel u ja v leiduks veel teine ühine punkt, ütleme Q (joonis 10), siis läbiks ju punkte P ja Q kaks eri sirget, mida olla ei saa. Sellest järeldub, et

kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.

Ülesanded.

21. Kuidas nimetatakse sirge osasid, milleks selle jaotavad kaks sirgel võetud punkti?

22. Joonestada kõik sirged, mida määravad tasapinna viis punkti, kui nende hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel.

23. Mitu sirget on määratud 3, 4, 5 punktiga, millede hulgas ei leidu kolme punkti ühel sirgel?

24. Tasapinnal on antud n punkti nii, et nende hulgas ei leidu kolme punkti ühel ja samal sirgel. Mitu sirget saab, kui üks antud punktidest ühendada iga ülejäänud punktiga? Mitu sirget saab kõikide antud punktide ühendamisel?

25. Tasapinnal on antud punktid A, B ja C nii, et $AB + BC = AC$. Kus asetseb punkt B?

§ 6. Aksioom ja teoreem.

Geomeetriliste kujundite omadusi väljendatakse lausetes, mida nimetatakse aksioomideks ja teoreemideks*.

Aksioom ehk põhilause on niisugune lause, mis väljendab mingit lihtsat tõde, mida ei ole vaja või ei saagi põhjendada veel lihtsamate tõdede abil. Aksioom on näiteks järgmine lause:

kaht punkti ühendab ainult üks sirglõik.

Teoreem on niisugune lause, millega väljendatavat tõde saab ja tuleb põhjendada lihtsamate tõdede abil.

* *axioma* (kr.) — põhilause; *theorema* (kr.) — õppelause.

Teoreem on näiteks järgmine lause (§ 5):

kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis.

Seda tõde põhjendasime asjaoluga, et kui lõikepunkte oleks rohkem, näiteks kaks, siis neid punkte läbiks kaks sirget; see oleks aga vasturääkivuses eelnenud tõega, et kaht punkti läbib ainult üks sirgjoon.

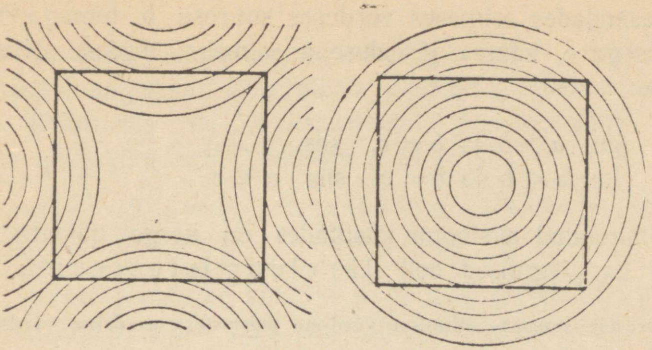
Teoreemiga väljendatava tõe põhjendamist teiste tõdede abil nimetatakse teoreemi t õ e s t a m i s e k s. Teoreemi tõestamine toimub sel teel, et tuntud tõdedest (aksioomidest ja teoreemidest) j ä r e l d a t a k s e järjest uusi tõdesid, kuni jõutakse selleni, mida soovitakse tõestada. Nõnda tõestatakse teoreem mõtlemise teel, mitte aga vaatluse või mõõtmise abil.

Geomeetriliste kujundite tundmaõppimisel rakendatakse siiski ka vaatlust ja mõõtmist. Sel teel leitud omadused ei tarvitse alati olla õiged ja vajavad seepärast tõestamist. Et vaatluse teel, s. t. silma kaudu saadud muljed võivad olla ekslikud, selles võib veenduda vaadeldes joonist 11. Sellel näeme spiraali, tõeliselt kujutab see aga ühise keskpunktiga ringjooni, nagu selgub sirkliga kontrollides.

Joonis 11.

Sellelaadilisi silmapetteid esineb palju. Kaks niisugust on toodud joonisel 12. Joonlauaga kontrollides on kerge veenduda, et nende kujundite küljed on sirged, aga ainult vaatluse põhjal otsustades võiksime pidada neid kõveraiks.

Teoreemi tõestamisel tuletame tuntud tõdedest uusi tõdesid. Uus tõde tuleneb harilikult kahest tuntud tõest. Neid tõdesid, milledest saab tuletada mingi uue tõe, nimetatakse selle uue tõe e e l d u s t e k s.



Joonis 12.

N ä i d e. Eeldame, et õpilase N kohta on teada järgmised asjaolud:

õpilane N sõitis laupäeval koju;
õpilase N kodu on Raplas.

Neist eeldustest saame järeldada, et

õpilane N sõitis laupäeval Raplasse.

Tuleb hoiduda ebaõigete järelduste tegemisest! Ülaltoodud eelduste puhul võib osutuda ebaõigeks näiteks järgmine järeldus:

õpilane N oli pühapäeval Raplas.

Antud tõdedest uue tõe tuletamine matemaatikas tugineb järgmisele j ä r e l d a m i s a k s i o o m i l e:

võrduses ja võrratuses võib iga suurust asendada temaga võrdse suurusega.

Seda aksioomi kasutades saame:

kui $a = b$ ja $b = c$, siis $a = c$,

sest asendades esimeses võrduses suuruse b temaga võrdse suurusega c, saame järeldusena viimase võrduse. Niisamuti saame:

1. kui $a > b$ ja $b = c$, siis $a > c$;
2. kui $a < b$ ja $b = c$, siis $a < c$.

Ülaltoodud aksioomi kasutades on kerge näidata, et on õiged ka järgmised neli *järeldamisteoreemi*:

võrdsete suuruste liitmisel võrdsete suurustega saadakse võrdsed suurused;

võrdsete suuruste lahutamisel võrdsetest suurustest saadakse võrdsed suurused;

võrdsete suuruste korrutamisel võrdsete suurustega saadakse võrdsed suurused;

võrdsete suuruste jagamisel võrdsete suurustega saadakse võrdsed suurused.

Neid teoreeme sümbolites avaldades saame:

Joonis 13.

kui $a = b$ ja $c = d$, siis

$$a + c = b + d,\ a - c = b - d,\ a \cdot c = b \cdot d,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Nende võrduste kehtivust näitame järgmiselt: iseenesest mõistetav on, et

$$a + c = a + c,\ a - c = a - c,\ a \cdot c = a \cdot c,\ \frac{a}{c} = \frac{a}{c};$$

asendades nende võrduste paremates pooltes suurused a ja c nendega võrdsete suurustega b ja d, saame võrdused

$$a + c = b + d,\ a - c = b - d,\ a \cdot c = b \cdot d,\ \frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

mida oligi vaja tõestada.

26. Otsustada silma järgi, kumb joonisel 13 kujutatud sirglõikudest on pikem. Kontrollida tulemust mõõtmise teel.

27. Kasutades järeldamisaksioomi ja -teoreeme teha järeldus igast järgnevast eelduste paarist:

1. $x = a$	2. $a = b$	3. $x = a + b$	4. $s = a + b$
$y = a$	$x < b$	$x = a + c$	$a = b$

28. Sirgel asetsevad punktid A, B ja C järjestikku nii, et $AB = 16{,}5$ cm ja $AC = 28{,}3$ cm. Kui pikk on lõik BC?

29. Sirgel asetsevad punktid A, B ja C nii, et $AB = 3{,}85$ m ja $BC = 1{,}68$ m. Kui pikk on lõik AC juhul, kui punkt B on punktide A ja C vahel ja juhul, kui punkt C on punktide A ja B vahel?

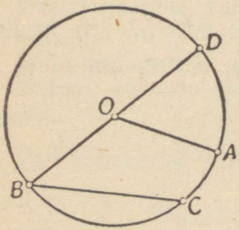
30. Linnast A linnani B on linna C kaudu 57 km ja linnast A linnani C on linna B kaudu 48 km. Kumb linnadest B ja C on lähemal linnale A ja kui palju?

Peatükk II.

Ringjoon ja nurk.

§ 7. Ringjoon ja ring.

On tasapinnalisi ja ruumilisi jooni. Kui lennuk pärast lennuvälja kohal tiirude tegemist viimaks seal maandub, siis ta on kujundanud ruumilise kõverjoone.



Joonis 14.

Üks lihtsamaid tasapinnalisi jooni peale sirgjoone on ringjoon. See joon tekib, kui punkt liigub tasapinnal nii, et liikuva punkti kaugus ühest kindlast punktist ei muutu: olgu *O* kindel punkt (joonis 14) ja liikugu punkt *A* selle ümber, jäädes sellest ikka ühele ja samale kaugusele; punkti *A* tee ongi ringjoon. Niisiis

ringjoon on kinnine tasapinnaline joon, mille kõik punktid asetsevad ühest kindlast punktist ühel ja samal kaugusel.

Seda kindlat punkti nimetatakse ringjoone k e s k p u n k t i k s, ja sirglõiku, mis ühendab keskpunkti ringjoone mingi punktiga, nimetatakse r a a d i u s e k s* (näiteks *OA* joonisel 14). Keskpunkti ja raadiusega on ringjoon tasapinnal määratud, s. t. nende andmete järgi saab joonestada ainult ühe ringjoone. Samuti on ringjoon määratud oma ühe punkti ja keskpunktiga.

---

* *radius* (lad.) — kepp; kiir.

Kui on teada tasapinna mingi punkti kaugus ringjoone keskpunktist ja ringjoone raadius, siis saab määrata punkti asukohta ringjoone suhtes:

punkt on ringjoone sees, ringjoonel või väljaspool ringjoont vastavalt sellele, kas tema kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui raadius, võrdne raadiusega või suurem kui raadius.

Sirglõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti, nimetatakse k õ õ l u k s (näiteks *BC* joonisel 14). Keskpunkti läbiv kõõl on d i a m e e t e r* ehk l ä b i m õ õ t (näiteks *BD* joonisel 14). Diameeter on kaks korda pikem kui raadius.

Tasapinna osa, mida piirab ringjoon, nimetatakse ringiks.

Kui kaks ringjoont on võrdsete raadiustega, siis saab neid teineteise peale paigutada nii, et nad ühtivad.

Ülesanded.

31. Kasutades joonist 7 leida sirkli abil, missugused linnad on Pärnust õhuteed mööda ligikaudu niisama kaugel kui Kuressaare. Missugusel joonel asetsevad need linnad?

32. Joonestada joon, mille kõik punktid on antud punktist 2,5 cm kaugusel.

33. Joonestada sirglõik pikkusega 4 cm ja leida kaks punkti nii, et nende kaugus selle lõigu kummastki otspunktist oleks 3 cm.

34. Antud punkt *A* on 12 cm kaugusel ringjoone keskpunktist. Kui kaugel punktist *A* asetseb ringjoone kõige lähem ja kui kaugel kõige kaugem punkt, kui raadius on 5 cm?

35. Leida ringjoonel punktid, millede kaugus vabalt võetud diameetri otspunktist võrdub raadiuse pikkusega.

---

* *dia* (kr.) — läbi; *metreo* (kr.) — mõõtma.

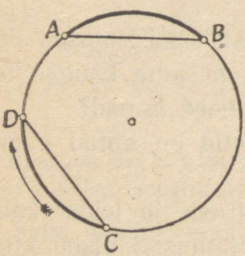
§ 8. Kaar ja selle mõõtmine.

Kaks ringjoonel võetud punkti A ja B jaotavad selle joone kaheks k a a r e k s. Kui võetud punktid ei ole ühe ja sama diameetri otspunktid, siis on üks kaartest väiksem kui pool ringjoonest. Kaare AB all mõistetakse harilikult väiksemat kaart, mille otspunktid on A ja B. Seda kaart tähistatakse sümboliga* $\overset{\frown}{AB}$.

Ühe ja sama ringjoone kaari saab võrrelda nende suuruse poolest. Selleks pöörame üht kaart mööda ringjoont seni, kuni ta satub teise kaare peale nii, et nende ühed otspunktid ühtivad (joonis 15). Kui seejuures ühtivad ka nende teised otspunktid, siis ütleme, et võrreldavad kaared on võrdsed. Kahe kaare AB ja CD võrdsust märgitakse kirjas kujul

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}.$$

Ringjoone kaare otspunkte ühendab üks selle ringjoone k õ õ l, kuid iga kõõlu otspunkte ühendavad kaks kaart; kõõlu ja selle otspunkte ühendava v ä i k s e m a kaare kohta öeldakse, et nad t o e t u v a d teineteisele: kõõlule AB joonisel 15 toetub kaar AB, mitte aga kaar ACB.



Joonis 15.

Olgu AB ja CD joonisel 15 kaks võrdset kaart. Pöörame kaart CD mööda ringjoont seni, kuni tema otspunktid ühtivad kaare AB otspunktidega. Siis ühtivad ka neile kaartele toetuvad kõõlud. Sellest järeldame, et

võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed kõõlud.

Edaspidi näeme, et ka ümberpöördult

võrdsetele kõõludele toetuvad võrdsed kaared.

---

* *symbolon* (kr.) — tunnusmärk.

Kaare mõõtmisel tarvitatakse ühikuna kaarekraadi, kaareminutit ja kaaresekundit*.

Üks kaarekraad (1^0) on $\frac{1}{360}$ ringjoonest;
üks kaareminut ($1'$) on $\frac{1}{60}$ kaarekraadist;
üks kaaresekund ($1''$) on $\frac{1}{60}$ kaareminutist **.

Seega

$$1^0 = 60' = 3600'';$$
$$1' = 60''.$$

Ülesanded.

36. Ringjoone pikkus on 12 km. Mitu meetrit on selle ringjoone 1-minutise kaare pikkus?

37. Ringjoone 1^0-se kaare pikkus on 7,5 cm. Kui pikk on see ringjoon?

38. Maa ekvaatori pikkus on 40 070 km. Arvutada ekvaatori 1^0-se, $1'$-se ja $1''$-se kaare pikkus. Võrrelda ekvaatori $1'$-se kaare pikkust meremiiliga.

39. Mitu kraadi sisaldab kaar, mis on $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{7}{8}$ ringjoonest?

40. Missugune osa ringjoonest on 10^0-, 20^0-, 18^0-, 54^0-, 210^0-ne kaar?

41. Jaotada ringjoon kaarteks, mis toetuvad raadiuse pikkusele kõõlule. Kui suur on iga niisugune kaar?

---

* *gradus* (lad.) — samm, aste; nimetused minut ja sekund on tuletatud ladinakeelsetest väljendustest *partes minutae primae* (esimesed väikesed osad) ja *partes minutae secundae* (teised väikesed osad).

** Ringjoone jaotamine 6 · 60 ehk 360 kraadiks, kraadi jaotamine 60 minutiks ja minuti jaotamine 60 sekundiks on pärit babüloonlastelt; niisugune jaotamine näitab, et babüloonlaste arvusüsteemiks oli kuuekümne- ehk seksagesimaalsüsteem.

§ 9. Nurk.

Joonestame kaks kiirt AB ja AC, mis väljuvad ühest ja samast punktist A (joonis 16). Saadud kujundit nimetatakse n u r g a k s; seega

nurk on kujund, mille moodustavad kaks ühest ja samast punktist väljuvat kiirt.

Nurka moodustavaid kiiri nimetatakse nurga h a a r a d e k s ja nende ühist otspunkti nurga t i p u k s.

Nurka võib tähistada väga mitmeti, nimelt:

1. kolme punkti tähise kaudu, kusjuures tipu tähis peab jääma keskele;
2. kahe haara tähise kaudu, kui haarad on tähistatud ladina väikeste tähtedega;
3. ainult tipu tähise kaudu;
4. ühe kreeka väikese tähega.

Nii saab joonisel 16 esinevat nurka tähistada neljal erineval viisil:

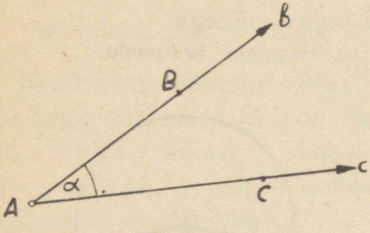
$$BAC,\ bc,\ A,\ \alpha.$$

Sõna nurk asendatakse kirjutamisel mõnikord ka sümboliga $\angle$, mis paigutatakse nurga nimetuse ette; näiteks $\angle bc$.

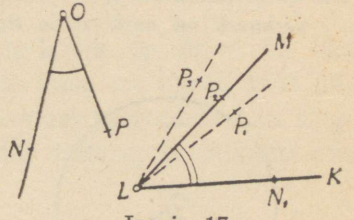
Nurga haarad jaotavad tasapinna, millel see nurk asetseb, kaheks eraldatud piirkonnaks nii, et ühest piirkonnast ei ole võimalik mööda tasapinda teise piirkonda minna ilma nurga üht haara ületamata.

Tasapinna ühe piirkonna kohta öeldakse, et ta on nurga sees, ja teise piirkonna kohta, et ta on nurgast v ä l j a s p o o l. Kumma piirkonna loeme nurga sees olevaks, see on kokkuleppe küsimus. Harilikult märgitakse nurga sees olev piirkond kaarekesega (joonis 16).

Kahe nurga suuruse võrdlemiseks paigutatakse üks nurk teise peale nii, et nende tipud ja ühed haarad ühtivad. Võrdleme näiteks nurki NOP ja KLM (joonis 17). Paigutame



Joonis 16.



Joonis 17.

nurga NOP nurga KLM peale nii, et tipp O ühtiks tipuga L ja et haar ON ühtiks haaraga LK. Haar OP võib seejuures sattuda kas nurga KLM sisse või selle nurga haarale LM või väljapoole nurka KLM. Esimesel juhul ütleme, et NOP on väiksem kui KLM, ja kirjutame:

$$NOP < KLM;$$

teisel juhul nurgad on võrdsed:

$$NOP = KLM;$$

kolmandal juhul NOP on suurem kui KLM:

$$NOP > KLM.$$

Seega

kaks nurka on võrdsed, kui nad saavad teineteise peale paigutamisel ühtida.

Ülesanded.

42. Nimetada nurki kiirte OK, OL ja OM vahel.

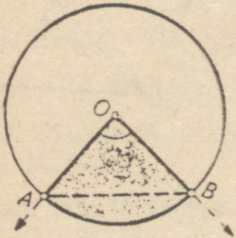
43. Mitu nurka tekib kahe sirge lõikumisel?

44. Lõigata paberist või kartongist kaks nurka ja võrrelda nende suurust.

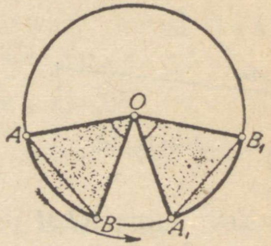
§ 10. Kesknurk.

Joonestame ringjoone ja selle kaks raadiust OA ja OB (joonis 18). Pikendades neid raadiusi väljapoole ringjoont, saame kaks kiirt OA ja OB ja nende vahel nurga AOB. Seda nurka nimetatakse k e s k n u r g a k s. Seega

kesknurk on nurk, mille tipuks on ringjoone keskpunkt.



Joonis 18.



Joonis 19.

Kesknurga AOB kohta öeldakse, et ta t o e t u b kaarele AB või kõõlule AB.

Kesknurga sees asetsevat ringi osa nimetatakse s e k t o r i k s *. Sektor on piiratud kahe raadiusega ja ühe kaarega.

Vaatleme ühes ja samas ringis kaht v õ r d s e t kesknurka AOB ja A_1OB_1 (joonis 19). Näitame, et

võrdsed kesknurgad toetuvad võrdsetele kaartele ja võrdsetele kõõludele.

Selle tõestamiseks pöörame sektorit AOB tasapinnal ümber punkti O, kuni punkt A ühtib punktiga A_1. Et kesknurgad AOB ja A_1OB_1 on võrdsed, siis ühtib sellel pööramisel sektor AOB sektoriga A_1OB_1, kaar AB kaarega A_1B_1 ja kõõl AB kõõluga A_1B_1. Järelikult need kaared on võrdsed, samuti ka kõõlud.

---

* *secare* (lad.) — lõikama; välja lõikama.

Eeldame nüüd, et joonisel 19 kaared AB ja A_1B_1 või kõõlud AB ja A_1B_1 on võrdsed. Pöörates sektorit AOB ümber punkti O endisel viisil, jõuame otsusele, et ka kesknurgad AOB ja A_1OB_1 on võrdsed. Niisiis

võrdsetele kaartele või kõõludele toetuvad võrdsed kesknurgad.

Need kaks teoreemi kesknurkade kohta on õiged ka siis, kui neist nurkadest üks on ühes ja teine on teises, kuid niisama suure raadiusega ringis. Sel juhul paigutame ühe ringi teise peale nii, et nende keskpunktid ühtivad, ja jätkame siis tõestamist endisel viisil.

Ülesanded.

45. Ringjoones raadiusega 3,5 cm joonestada kesknurk, mis toetub 5 cm pikkusele kõõlule.

46. Joonestada raadiusepikkusele kõõlule toetuv kesknurk.

47. Mitmeks sektoriks jaotavad ringi 1, 2, 3, ..., n diameetrit?

§ 11. Konstruktsioonülesandeid.

Ülesannet, mida peab lahendama ainult joonestamise teel, nimetatakse k o n s t r u k t s i o o n ü l e s a n d e k s*. Joonist ja ühtlasi ka mõttekäiku, mille kaudu ülesande lahend leitakse, nimetatakse selle lahendi konstruktsiooniks. Kus see teisiti pole öeldud, seal tohib konstruktsioonülesande lahendamisel joonestamisriistadena kasutada ainult j o o n l a u d a ja s i r k l i t**.

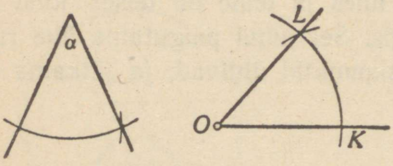
---

* *construere* (lad.) — kokku panema; üles ehitama.

** *circulus* (lad.) — ring.

Konstruktsioonülesande lahendamisel ei ole lubatud a r v u t a m i n e ega p r o o v i m i n e: otsitav punkt või joon leitakse ainult nende toimingutega, mida võimaldavad joonlaud ja sirkel, s. o. sirgete ja ringjoonte joonestamisega.

Ü l e s a n n e 1. Joonestada nurk, mis võrdub antud nurgaga α, kui tipp O ja üks haar on antud.



Joonis 20.

L a h e n d u s (joonisel 20). Et võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kõõludele toetuvad võrdsed kaared ja võrdsed kesknurgad, toimime järgmiselt:

1. Antud nurga α tipu ja ehitatava nurga tipu O ümber joonestame võrdsete raadiustega kaared ja tähistame punkti O ümber joonestatud kaare ning antud kiire lõikepunkti näiteks tähega K;

2. punkti K ümber joonestame kaare, mille raadius võrdub antud nurgale kui kesknurgale toetuva kõõluga, ja tähistame selle ning endise kaare lõikepunkti näiteks tähega L;

3. joonestame kiire OL.

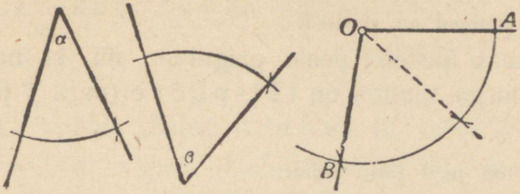
Nurk KOL on võrdne antud nurgaga α, sest neile nurkadele kui kesknurkadele toetuvad kõõlud on võrdsed.

Ü l e s a n n e 2. Liita antud nurgad α ja β.

L a h e n d u s (joonisel 21). Joonestame vabalt võetud punkti O juurde nurga, mis võrdub antud nurgaga α, ja s u u r e n d a m e seda nurga β võrra. Saadud nurk AOB kujutab nurkade α ja β s u m m a t:

$$\angle AOB = \alpha + \beta.$$

Kui nurgad α ja β joonisel 21 on võrdsed, siis kumbki neist on pool nurgast AOB. Nende nurkade ühine haar on nurga AOB poolitaja. Seega



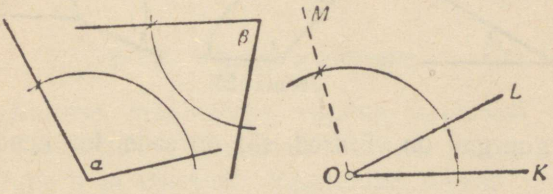
Joonis 21.

nurgapoolitaja on kiir, mis jaotab nurga kaheks võrdseks nurgaks.

Ülesanne 3. Lahutada antud nurgast α antud väiksem nurk β.

Lahendus (joonisel 22). Ehitame vabalt võetud punkti O juurde esiteks nurga KOM, mis võrdub antud nurgaga α, ja vähendame seda nurga β võrra. Ülejääv nurk KOL on nurkade α ja β vahe:

$$\angle KOL = \alpha - \beta$$



Joonis 22.

Ülesanded.

48. Joonestada kahe vabalt võetud nurga summa.

49. Joonestada nurk, mis on antud nurgast kolm korda suurem.

50. Joonestada vabalt kolmnurk ja ehitada sirkli ning joonlaua abil tema nurkade summa.

51. Joonestada vabalt kaks nurka ja lahutada suuremast väiksem.

§ 12. Nurkade liigitelu.

Nurka, mille haarad moodustavad sirgjoone, nimetatakse s i r g n u r g a k s (nurk α joonisel 23).

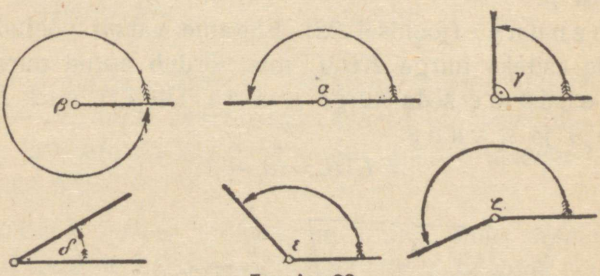
Kõik sirgnurgad on võrdsed,

sest neid saab üksteise peale paigutada nii, et nad ühtivad. Kahe sirgnurga summa on t ä i s p ö ö r e (nurk β joonisel 23). Järelikult

sirgnurk on pool täispöördest.

Nurka, mis on pool sirgnurgast, nimetatakse t ä i s n u r g a k s (γ joonisel 23); seega

täisnurk on veerand täispöördest.



Joonis 23.

Et sirgnurgad on võrdsed, siis on seda ka nende pooled, tähendab

kõik täisnurgad on võrdsed.

Täisnurga haarade kohta öeldakse, et nad on t e i n e t e i s e g a r i s t i ehk nad r i s t u v a d ehk nad on p e r p e n d i k u l a a r s e d*; kaks sirget ristuvad, kui nende lõikumisel tekib täisnurk. Joonisel märgitakse kahe sirge ristumist ja seega ka täisnurka kaarekese ja punktiga nurga sees, kuna kirjas tarvitatakse selleks tähist $\perp$.

---

* *perpendiculum* (lad.) — lood.

Täisnurgast väiksem nurk on *teravnurk* (δ joonisel 23) ja täisnurgast suurem, kuid sirgnurgast väiksem on *nürinurk* (ε joonisel 23). Sirgnurgast suuremat nurka nimetatakse *kumernurgaks* (ς joonisel 23).

Ülesanded.

52. Leida vabalt võetud nürinurga ja teravnurga vahe.

53. Joonestada vabalt kumernurk ja teravnurk. Leida, mitu korda viimane neist mahub esimesse.

54. Missuguse nurga võrra pöördub kella suur osuti 60, 30, 15 minutiga?

55. Joonestada vabalt kaks teravnurka ja ehitada kolmas nurk nii, et nende kolme nurga summa oleks sirgnurk.

56. Olgu nurga tipp ringi keskpunktis. Missugusele kaarele toetub siis täisnurk, sirgnurk, teravnurk, kumernurk?

57. Mis liiki on kesknurk, kui ta toetub kaarele 180^0, 75^0, 100^0, 238^0?

§ 13. Nurga mõõtmine.

Nurga suuruse mõõtmiseks vajame vastavaid mõõtühikuid ja mõõteriistu. Suuremad ühikud nurga mõõtmiseks on sirgnurk ja täisnurk. Väiksemad ühikud on nurgakraad, nurgaminut ja nurgasekund.

Nurgakraad (1^0) on $\frac{1}{90}$ täisnurgast ehk $\frac{1}{360}$ täispöördest;
nurgaminut ($1'$) on $\frac{1}{60}$ nurgakraadist;
nurgasekund ($1''$) on $\frac{1}{60}$ nurgaminutist.

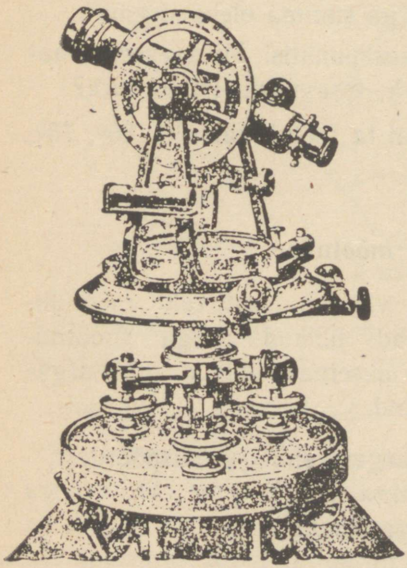
Seetõttu

$$\begin{aligned} 1 \text{ täisnurk} &= 90^0 = 5400' = 324\,000''; \\ 1^0 &= 60' = 3\,600''; \\ 1' &= 60''. \end{aligned}$$

Et nurgaminut ja eriti nurgasekund on väga väikesed ühikud, siis tarvitatakse neid seal, kus on vajalikud väga täpsed mõõtmised, nagu maamõõtmisel ja astronoomias. Nende ühikute võrdlemiseks võiks näiteks öelda, et 10 meetri kaugusel vaadatuna paistab

inimese nägu (17,5 cm) ühekraadises nurgas,
õlekõrre läbimõõt (3 mm) üheminutises nurgas,
juuksekarva läbimõõt (0,05 mm) ühesekundises nurgas.

Maamõõtmistöödel vajalik suur täpsus nurkade mõõtmisel saavutatakse selleks eriti ehitatud nurgamõõtmise riistaga, nn. teodoliidiga (joonis 24). Teodoliidi olulisteks osadeks on pikksilm ja kaks väga peene jaotusega ringskaalat, üks horisontaalne, teine vertikaalne; neist esimene võimaldab mõõta nurki horisontaaltasapinnas ja teine vertikaaltasapinnas.



Joonis 24.

Paberile joonestatud nurkade mõõtmisel ja antud suurusega nurkade joonestamisel kasutatakse mõõtmisriistana malli. Malli poolringi kaar on jaotatud kaarekraadideks ja nurga mõõtmisel leitakse, mitu kraadi sisaldab nurgale kui kesknurgale vastav kaar. Et ringjoon on jaotatud 360-ks kaarekraadiks ja täispööre samuti 360-ks nurgakraadiks, siis sisaldab iga kaar niisama palju kaarekraade, kui palju vastav kesknurk sisaldab nurgakraade.

58. Mitu kraadi ja minutit on $12{,}5^0$, $7{,}3^0$, $24\frac{1}{3}^0$, $87\frac{3}{5}^0$?

59. Mitu kraadi on $82^012'$, $15^054'$, $32^020'$, $30^030'30''$?

60. Arvutada nurkade $\alpha = 81^045'$ ja $\beta = 28^038'$ summa ja vahe.

61. Arvutada nurkade $\alpha = 17^038'15''$, $\beta = 43^025'44''$ ja $\gamma = 46^054'05''$ summa.

62. Kui suure nurga võrra pöördub kella minutiosuti 42 min. vältel?

63. Missuguse aja vältel pöördub kella tunniosuti 25^0-se nurga võrra?

64. Ringjoone pikkus on 75 cm. Kui pikale kaarele toetub 150^0-ne kesknurk?

65. Kui suur kesknurk toetub kaarele, mis on $\frac{5}{8}$ ringjoonest?

66. Mis saab järeldada eeldustest $\alpha = \beta$ ja $\alpha + \beta = 180^0$?

67. Kas A on terav- või nürinurk, kui $A = 180^0 - B$ ja $B < 90^0$?

68. Joonestada malli abil nurgad 35^0, 60^0, 127^0, 240^0.

69. Jaotada vabalt võetud nurk malli abil 2-ks, 4-ks võrdseks nurgaks.

70. Joonestada kolm k o n t s e n t r i l i s t, s. o. ühise keskpunktiga ringjoont ja neis malli abil ühine kesknurk 45^0. Mitu kraadi sisaldab iga kaar, mis on kesknurga sees?

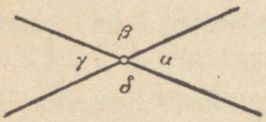
71. Malli kasutades joonestada sektor, mille nurk on 60^0 ja raadius on 5 cm.

72. Malli kasutades joonestada sektor, mille kaar on $\frac{2}{5}$ ringjoonest ja raadius on 4 cm.

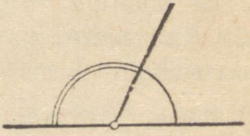
§ 14. Kõrvunurgad ja tippnurgad.

Kahe sirge lõikumisel tekib neli nurka (joonis 25). Nurki, mis asetsevad teineteise suhtes nagu α ja β või α ja δ, nimetatakse k õ r v u n u r k a d e k s. Joonisel 26 on üks kõrvunurkade paar eraldi joonestatud. Sellest näeme, et

kõrvunurkadeks nimetatakse kaht nurka, millel on ühine tipp, üks ühine haar, teised haarad aga moodustavad sirgjoone.



Joonis 25.



Joonis 26.

Sellest järeldame et

kõrvunurkade summa võrdub sirgnurgaga ehk kahe täisnurgaga.

Tõestuseks liidame kõrvunurgad, kõrvaldades nende ühise haara. Et ülejäänud haarad moodustavad sirgjoone, siis kõrvunurkade summa võrdubki sirgnurgaga.

Selle teoreemi põhjal võime arvutada antud nurga kõrvunurga. Olgu $\alpha = 48^0 17'$; selle kõrvunurk

$$\beta = 180^0 - 48^0 17'.$$

ehk

$$\beta = 131^0 43'.$$

J ä r e l d u s e d:

1. kui üks kõrvunurkadest on teravnurk, siis teine on nürinurk;

2. kui üks kõrvunurkadest on täisnurk, siis teine on ka täisnurk;

3. kui kõrvunurgad on võrdsed, siis on nad mõlemad täisnurgad.

Antud nurga kõrvunurga joonestamiseks tuleb pikendada selle nurga üht haara üle tipu. Et pikendada võib ükskõik kumba haara, siis on igal nurgal õieti kaks kõrvunurka.

Pikendades nurga α mõlemat haara üle tipu (joonis 27), saame nurga α kõrvunurgad β ja γ. Näitame, et need kaks nurka on võrdsed.

Et kõrvunurkade summa on sirgnurk, siis

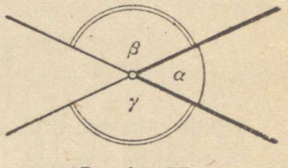
$$\alpha+\beta=180^0$$

ja ka

$$\alpha+\gamma=180^0;$$

seega

$$\alpha+\beta=\alpha+\gamma.$$



Joonis 27.

Lahutades viimase võrduse mõlemast poolest nurga α saame

$$\beta=\gamma,$$

mida oligi tarvis tõestada. Nii võime öelda, et ühe ja sama nurga kõrvunurgad on võrdsed.

Ühe ja sama nurga kõrvunurki nimetatakse tippnurkadeks.

Selle uue nimetuse abil saab tõestatule anda järgmise lühikese sõnastuse:

tippnurgad on võrdsed.

Kahe sirge lõikumisel tekib alati kaks tippnurkade paari.

Ülesanded.

73. Kui suur on nurga $141^0 57'$ kõrvunurk?

74. Kui suur on nurk, mis on oma kõrvunurgast 18^0 võrra suurem?

75. Kui suur on nurk, mis on $\frac{7}{8}$ oma kõrvunurgast?

76. Näidata, et kahe võrdse nurga kõrvunurgad on võrdsed.

77. Kahe tippnurga summa on $105^0 38'$. Kui suur kõrvunurk on neil tippnurkadel?

78. Ühel pool sirget CD on võetud punkt A ja teisel pool punkt B. Leida sirgel CD punkt P nii, et $\angle APC = \angle BPD$. Kas see ülesanne on alati lahenduv?

79. Nurk kahe diameetri vahel on $35^{0}20'$. Kui suured on kaared, milleks need diameetrid jaotavad ringjoone?

§ 15. Definitsioon.

Peale aksioomide ja teoreemide on veel üks eriline liik matemaatilisi lauseid, mida nimetatakse definitsioonideks*.

Definitsioon on lause, millega antakse sisu mingile uuele mõistele ja võetakse tarvitusele tema nimetus. Näiteks lause „kõõl on lõik, mis ühendab ringjoone kaht punkti" on definitsioon, sest selle lausega antakse sisu mõistele „kõõl". Võiks öelda ka nii: uue mõiste definitsioon on täpne vastus selle mõiste kohta esitatud küsimusele: mis see on? Nii osutuvad definitsioonideks ka järgmised laused:

diameeter on kõõl, mis läbib keskpunkti;

tasapinnaline kujund on kujund, mille kõik punktid asetsevad ühel ja samal tasapinnal.

On iseloomustav, et definitsioonides saab sõna „on" asendada sõnaga „nimetatakse", mida aksioomides ja teoreemides teha ei saa. Näiteks, kõõlu definitsiooni saame anda ka sõnastuses: „kõõluks nimetatakse lõiku, mis ühendab ringjoone kaht punkti."

Geomeetrias püütakse võimalikult kõigile mõistetele, mida seal tarvitatakse, anda definitsioonid. Mõistet, mida kasutatakse ilma definitsioonita, nimetatakse algmõisteks ehk põhimõisteks. Need on mõisted, mis on arusaadavad

---

* *definitio* (lad.) — piiramine, määramine.

ilma definitsioonita ja mis on niivõrd lihtsad, et neid ei saagi defineerida; algmõistena tarvitatakse näiteks mõisteid „punkt", „pikkus", „suurus", „ruum".

Ülesanded.

80. Missuguste mõistete abil defineeritakse nurga mõistet?

81. Anda järgmiste mõistete definitsioonid: sirgnurk, teravnurk, kaarekraad, ring, sirglõigu keskpunkt.

82. Leida eespool jämedalt trükitud lausete hulgast definitsioone, aksioome ja teoreeme.

§ 16. Teoreemi eeldus ja väide.

Igas geomeetrilise sisuga teoreemis saab eristada kaht osa: ühes neist öeldakse, missugustest kujunditest on jutt, ja teises väidetakse mingit tõsiasja nendest kujunditest. Esimest osa nimetatakse teoreemi e e l d u s e k s ja teist osa v ä i t e k s. Näiteks teoreemis (§ 14)

tippnurgad on võrdsed

võetakse eeldusena, et nurgad on t i p p n u r g a d, ja väidetakse, et need nurgad on v õ r d s e d.

Eelduse ja väite selgemaks eraldamiseks antakse teoreem sageli niisuguses sõnastuses, et eeldus algab sõnaga k u i ja väide sõnaga s i i s. Nii sõnastatult võiks teoreem kesknurkade ja kaarte kohta (§ 10) esineda järgmiselt:

kui ühes ja samas ringis kaks kesknurka on võrdsed, siis on võrdsed ka kaared, milledele need kesknurgad toetuvad.

Kui teoreemis vahetada eeldus ja väide, s. t. eeldus teha väiteks ja väide eelduseks, siis saame uue teoreemi, mida nimetatakse endise p ö ö r d t e o r e e m i k s. Eelmise teoreemi pöördteoreem on järgmine:

kui ühe ja sama ringi kaared on võrdsed, siis on võrdsed ka kesknurgad, mis neile kaartele toetuvad.

Ka see teoreem on õige. Kuid mitte iga teoreemi pöördteoreem pole õige; näiteks tippnurkade teoreemi pöördteoreem kõlaks järgmiselt: võrdsed nurgad on tippnurgad. Kuid see pole üldiselt õige, sest mistahes kaks võrdset nurka ei tarvitse veel esineda tippnurkadena. Sellest selgub, et iga teoreemi pöördteoreemi tuleb uurida omaette ja vajaduse korral ka tõestada.

Ülesanded.

83. Sõnastada teoreem kahe sirge lõikumisest nii, et selles esineksid sõnad „kui" ja „siis".

84. Koostada järgmise teoreemi pöördteoreem ja otsustada, kas see on õige: „Kui kaks nurka on eraldi võrdsed kolmandaga, siis need kaks nurka on võrdsed."

85. Sõnastada kõrvunurkade kohta §-s 14 tehtud järeldused ilma sõnadeta „kui" ja „siis"

86. Tõestada, et kõrvunurkade poolitajad on risti.

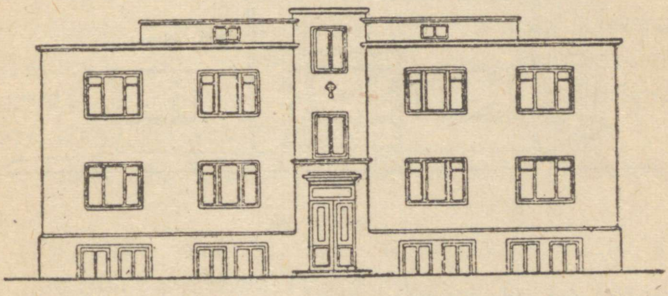
87. Olgu α ja β kõrvunurgad ning γ ja δ kõrvunurgad. Tõestada, et kui $\alpha > \gamma$, siis $\beta < \delta$, ja sõnastada vastav teoreem.

Peatükk III.

Kujundite teljeline sümmeetria.

§ 17. Sümmeetria mõiste.

Paljude tarbeesemete ja loodusvormide iseloomustavaks omaduseks on nende s ü m m e e t r i a*. Selle mõistega tutvumiseks vaatleme joonisel 28 kujutatud maja: selle üksikosad, näiteks aknad, on paigutatud ühteviisi maja esikülge poolitava püstsirge suhtes. Kui maja joonis seda sirget mööda kahekorra murda, siis ühtib joonise üks pool teisega.



Joonis 28.

Kujundi niisugust omadust nimetataksegi sümmeetriaks ja kujundit ennast sümmeetriliseks. Seega:

tasapinnaline kujund on sümmeetriline, kui on olemas sirge, mida mööda tasapinda kahekorra murdes kujundi üks pool teisega ühtib.

---

* *symmetria* (kr.) — tasamõõdulisus; ühtlus.

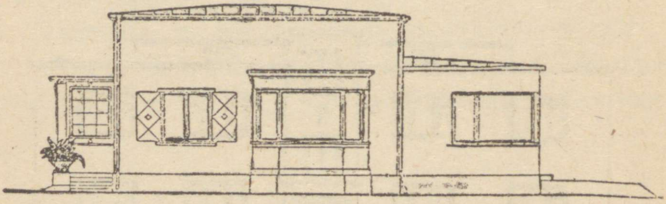
Joonisel 29 kujutatud majal puudub sümmeetria — ta on mittesümmeetriline. Siiski leidub tal mõni sümmeetriline üksikosa, näiteks vasakpoolne aken.

Vaatleme sümmeetrilise kujundi pooli kui kaht iseseisvat kujundit. Nende poolte kohta, mis teatavasti tasapinna kahekorra murdmisel ühtivad, öeldakse, et nad on teineteisega sümmeetrilised ehk — nad asetsevad sümmeetriliselt.

Kui sirge kohale, mille suhtes kujund on sümmeetriline, paigutada peegel risti kujundi tasapinnaga, siis peegeldub selles kujundi üks pool niisugusena, nagu on teine pool. Sellest nähtub et

pilt ja peegelpilt on teineteisega sümmeetrilised.

Kui paberile teha tindiga mingi joonis ja paberileht kokku murda, enne kui tint on kuivanud, siis lehe uuesti avamisel



Joonis 29.

võib näha tehtud joonise kõrval uut joonist, mis on endisega sümmeetriline.

Eeltoodu eeskujul ütleme üldiselt, et

kaks tasapinnalist kujundit asetsevad sümmeetriliselt ehk on teineteisega sümmeetrilised, kui on olemas sirge, mida mööda saab tasapinda kahekorra murda nii, et üks kujund teisega ühtib.

Sirget, mida mööda tasapind kokku murtakse, nimetatakse kujundite (või kujundi) sümmeetriateljeks. Need punktid, sirglõigud või nurgad, mis sel kokkumurdmisel ühtivad, on teineteisega sümmeetrilised.

Sümmeetriliselt paigutatud sirglõigud ühtivad joonise kokkumurdmisel selle sümmeetriatelge mööda; samuti ühtivad sümmeetriliselt asetatud nurgad, kolmnurgad ja muud kujundid.

Tasapinnalisi kujundeid, mida saab paigutada teineteise peale nii, et nad ühtivad, nimetatakse kongruentseiks *.

Kasutades seda nimetust, võime öelda, et

kaks teineteisega sümmeetrilist kujundit on kongruentsed.

Ülesanded.

88. Tuua loodusest või tarbeesemete alalt näiteid sümmeetria kohta ja leida iga näite puhul sümmeetriatelg.

89. Murda paberileht kahekorra ja lõigata sellest välja mingi ü k s kujund. Missugune kujund saadakse väljalõigatud leheosa uuesti avamisel?

90. Lõigata kahekorra murtud paberist kaks kongruentset mittesümmeetrilist nelinurka. Mitu erinevat sümmeetrilist kuusnurka saab koostada neist nelinurkadest, kui nad igakord ühendada mõnd võrdset külge mööda?

91. Valmistada tindilaikude abil mõned sümmeetrilised pildid.

92. Kirjutada püst-nöörkirjas mõned sümmeetrilised ja mõned mittesümmeetrilised kirjatähed.

93. Katsuda lugeda suuremat trükikirja selle peegelpildi järgi.

94. Katsuda kirjutada, jälgides kirjutust ainult peeglist.

95. Missugune punkt asetseb sümmeetriatelje punktiga sümmeetriliselt?

---

* *congruere* (lad.) — kokku sobima; kooskõlas olema.

§ 18. Sümmeetriliselt asetsevad punktid.

Tasapinna kahekorra murdmisel mingit sirget mööda tasapinna iga punkt meie kujutluse järgi ühtib sama tasapinna ühe ja ainult ühe punktiga. Teisiti:

iga punkt on antud telje suhtes sümmeetriline ainult ühe punktiga.

Kui vaadeldav punkt on sümmeetriateljel, siis temaga sümmeetriline on seesama punkt ise. Igal muul juhul punkt ja temaga sümmeetriline punkt moodustavad punktipaari.

Eeltoodust järeldub, et üldiselt

iga kujund on antud telje suhtes sümmeetriline ainult ühe kujundiga.

Tõepoolest, kui mingi kujund, näiteks sirglõik, oleks antud telje suhtes sümmeetriline enam kui ühe lõiguga, siis esimese lõigu mõni punkt peaks olema sümmeetriline enam kui ühe punktiga. Seda aga olla ei saa, seepärast lõik on antud telje suhtes sümmeetriline ainult ühe lõiguga.

Et antud kujundi järgi ehitada temaga sümmeetrilist kujundit, selleks võtame antud kujundil punktid, millega ta on määratud, ja leiame nendega sümmeetriliselt asetsevad punktid. Viimastega määratud kujund on antud kujundiga sümmeetriline.

Näide. Et ehitada antud lõiguga sümmeetrilist lõiku, ehitame antud lõigu otspunktide sümmeetrilised punktid ja ühendame need.

Sellest nähtub, et mingi kujundi järgi temaga sümmeetrilise kujundi ehitamiseks on vaja osata leida punktiga sümmeetriliselt asetsevat punkti. Kuidas seda teha, see selgub järgnevast.

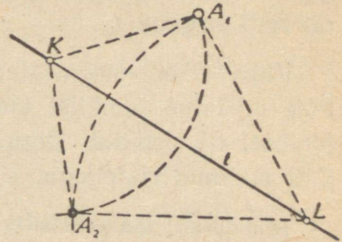
Olgu A_1 ja A_2 sirge t suhtes sümmeetriline punktipaar (joonis 30). Võtame sirgel t mingi punkti K ning joonestame sirglõigud A_1K ja A_2K. Need lõigud on teineteisega sirge t suhtes sümmeetrilised, mistõttu

$$A_1K = A_2K.$$

Seega

kaks sümmeetriliselt asetsevat punkti on sümmeetriatelje mistahes punktist võrdsetel kaugustel.

Kõik ühest ja samast punktist võrdsetel kaugustel olevad punktid asetsevad ühel ja samal ringjoonel; seetõttu sümmeetriatelje mingi punkti, näiteks punkti K ümber joonestatud ringjoon, mis läbib punkti A_1, läbib ka punkti A_2 (joonis 30).

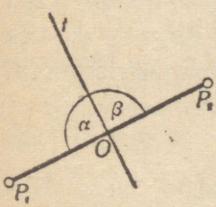


Joonis 30.

Seda teades võime ainuüksi sirkli abil ehitada antud punktiga A_1 antud telje t suhtes sümmeetrilise punkti. Selleks joonestame kaks ringjoont läbi antud punkti A_1, võttes nende ringjoonte keskpunktideks sümmeetriatelje kaks punkti, näiteks K ja L (joonis 30). Punktiga A_1 sümmeetriline punkt peab asetsema nii esimesel kui ka teisel ringjoonel, järelikult ta on nende lõikepunkt. Nagu joonisest näha, lõikuvad need ringjooned peale punkti A_1 veel ühes teises punktis A_2; see on siis punktiga A_1 sirge t suhtes sümmeetriline punkt.

Teine punktipaari tähtis omadus on järgmine:

punktipaari läbiv sirge on risti selle punktipaari sümmeetriateljega.



Joonis 31.

Eeldame, et punktid P_1 ja P_2 on teineteisega sümmeetrilised sirge t suhtes (joonis 31). Joonestame sirge P_1P_2 ja näitame, et P_1P_2 on risti sirgega t. Selleks vaatleme nurki α ja β sirge P_1 P_2 ja sümmeetriatelje vahel (joonis 31).

Et nurga α haar OP_1 on sümmeetriline nurga β haaraga OP_2, siis need nurgad asetsevad sümmeetriliselt ja seetõttu

$$\alpha = \beta.$$

Lisaks sellele on need nurgad kõrvunurgad, sest nende haarad OP_1 ja OP_2 moodustavad sirgjoone. Niisiis α ja β on võrdsed kõrvunurgad. Varem leidsime, et võrdsed kõrvunurgad on täisnurgad. Seega ka α ja β on täisnurgad ning P_1P_2 on risti sirgega t.

Kaks teineteisega sümmeetrilist punkti on sümmeetriatelje mistahes punktist võrdsetel kaugustel. Seetõttu punkt O joonisel 31 poolitab lõigu P_1P_2. Et lõik P_1P_2 on seejuures risti sümmeetriateljega, siis

punktipaari sümmeetriatelg poolitab nende punktide ühenduslõigu ja on sellega risti.

Tõestame, et ka viimase teoreemi pöördteoreem on õige, s. t.:

sirge, mis poolitab punktipaari ühenduslõigu ja on sellega risti, on selle punktipaari sümmeetriatelg.

Eeldame, et sirge t joonisel 31 poolitab lõigu P_1P_2 ja on risti selle lõiguga:

$$OP_1 = OP_2 \text{ ja } t \perp P_1P_2.$$

Kui joonis 31 mööda sirget t kahekorra murda, siis kiir OP_1 satub kiirele OP_2, sest nurgad, mis need kiired moodustavad sirgega t, on võrdsed. Et lõigud OP_1 ja OP_2 on eelduse järgi võrdsed, siis nende teised otspunktid P_1 ja P_2 ühtivad. Seega punktid P_1 ja P_2 asetsevad sümmeetriliselt sirge t suhtes ehk, teisiti, sirge t on punktide P_1 ja P_2 sümmeetriateljeks, mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

96. On antud sümmeetriatelg ja väljaspool seda üks punkt. Leida antud punktiga sümmeetriline punkt.

97. On antud sümmeetriatelg ja väljaspool seda sirglõik. Joonestada antud lõiguga sümmeetriline lõik.

98. On antud sümmeetriatelg ja teda lõikav sirge. Joonestada antud sirgega sümmeetriline sirge. Kus asetseb nende sirgete lõikepunkt?

99. Näidata, et kahe teineteisega sümmeetrilise lõigu pikendused lõikuvad sümmeetriateljel, kui nad üldse lõikuvad.

100. Joonestada antud kolmnurgaga antud telje suhtes sümmeetriline kolmnurk.

101. Joonestada antud murdjoonega antud telje suhtes sümmeetriline murdjoon.

102. On antud ringjoon, mille keskpunkt asetseb väljaspool antud sümmeetriatelge. Joonestada sellega sümmeetriline ringjoon.

§ 19. Ristsirge läbi punkti väljaspool sirget.

Lahendame järgmise ülesande:

joonestada antud sirgega ristuv sirge läbi punkti, mis on väljaspool antud sirget.

Lahendus. Leiame punkti, mis on antud punktiga antud sirge suhtes sümmeetriline ja joonestame sirge läbi nende kahe punkti. See sirge on risti antud sirgega, sest punktipaari läbiv sirge on risti nende punktide sümmeetriateljega.

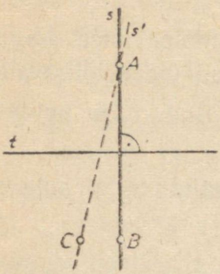
Et peale selle ristsirge joonestamise võtte on veel teisi võtteid, siis tekib küsimus, kas nii ehitatud sirge on ainus, mis läbib antud punkti ja on risti antud sirgega. Tõestame, et

läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks sirge, mis on risti antud sirgega.

Eeldus: sirge s läbib punkti A ja on risti sirgega t.

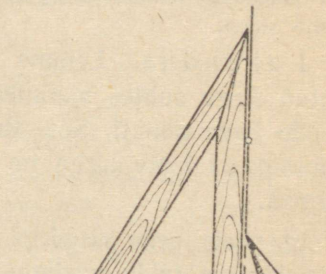
Väide: ükski teine punkti A läbiv sirge ei ole risti sirgega t.

Tõestus. Oletame, et peale sirge s läheb läbi punkti A veel mingi sirge s', mis on samuti risti sirgega t. Võtame sirgel s punkti B ja sirgel s' punkti C nii, et sirge t poolitab lõigud AB ja AC (joonis 32). Siis sirge t on risti nii punktide A ja B kui ka punktide A ja C ühenduslõiguga ja poolitab need ühenduslõigud. Järelikult on ta sümmeetriateljeks mõlemale nimetatud punktipaarile. Kuid siis punkt A peab olema telje t suhtes sümmeetriline kahe punktiga, nimelt B ja C-ga. Aga teatavasti saab iga punkt olla antud telje suhtes sümmeetriline ainult ühe punktiga; seepärast meie oletus sirge s' olemasolust ei olnud õige. Nii jääb üle, et on olemas ainult üks sirge, mis läbib punkti A ja on risti sirgega t.



Joonis 32.

Et niisuguseid sirgeid on ainult üks, siis on ükskõik, missugust võtet kasutame ristsirge ehitamisel. Kõige lihtsam on ristsirget ehitada joonestamiskolmnurga ja joonlaua abil (joonis 33).



Joonis 33.

Ülesanded.

103. Joonestada antud sirgega ristuv sirge läbi punkti, mis on väljaspool antud sirget.

104. Kasutades joonestamiskolmnurka ja sirklit, ehitada antud kolmnurgaga antud telje suhtes sümmeetriline kolmnurk.

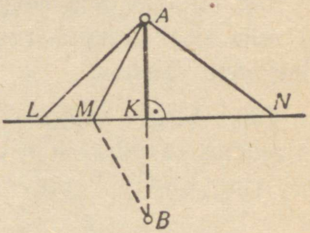
105. Antud on sirglõik ja selle ühe otspunktiga antud telje suhtes sümmeetriline punkt. Ehitada ainult joonestamiskolmnurka kasutades (ilma mõõtmiseta) selle lõigu sümmeetriline lõik.

§ 20. Ristlõik ja kaldlõik.

Olgu antud sirge t ja väljaspool seda punkt A. Joonestame punkti A läbiva ristsirge lõigu sellest punktist kuni antud sirgeni, s. o. lõigu AK joonisel 34. Selle lõigu pikkust nimetatakse punkti A k a u g u s e k s sirgest t.

Punkti kaugus sirgest on punktist sirgeni tõmmatud ristlõigu pikkus.

Kõiki teisi sirglõike, näiteks lõike AL, AM, AN joonisel 34, mis ka ühendavad antud punkti sirgega, nimetatakse selle sirge suhtes k a l d l õ i k u d e k s. Tõestame, et



Joonis 34.

antud punktist antud sirgeni tõmmatud ristlõik on igast kaldlõigust lühem.

Selle tõestamiseks leiame punktile A sümmeetrilise punkti B ja ühendame selle punktidega K ja M. Et AKB on sirglõik,, siis on ta kõige lühem joonlõik punktide A ja B vahel.

Seepärast

$$AK + BK < AM + BM.$$

Sümmeetria tõttu

$$BK = AK \text{ ja } BM = AM.$$

Asendades saame, et

$$AK + AK < AM + AM$$

ehk

$$2 \cdot AK < 2 \cdot AM$$

ja seega

$$AK < AM.$$

106. Joonestada vabalt punkt ja sirge ning mõõta nende vaheline kaugus.

107. Joonestada vabalt kolmnurk ja mõõta selle iga tipu kaugus ülejäänud kahe tipuga määratud sirgest.

108. Joonestada ringjoon ja seda lõikav sirge. Tõestada, et selle sirge kaugus ringjoone keskpunktist on väiksem kui ringjoone raadius.

109. Sirge kaugus ringjoone keskpunktist on s cm ja ringjoone raadius on r cm. Kuidas otsustada, kas sirge lõikab ringjoont või mitte? Teha küsimust selgitav joonis.

§. 21. Punktipaari sümmeetriatelg.

Eespool nägime, kuidas leida mingile punktile sümmeetrilist punkti, kui sümmeetriatelg on antud. Lahendame nüüd ümberpöördud ülesande:

leida antud punktipaari sümmeetriatelg.

Et sirge on määratud oma kahe punktiga, siis sümmeetriatelje joonestamiseks on vaja leida selle kaks punkti. Nende leidmist võimaldab tõsiasi, et sümmeetriatelje iga punkt on kahest sümmeetriliselt asetsevast punktist võrdsetel kaugustel. Sellepärast toimime järgmiselt (joonis 35):

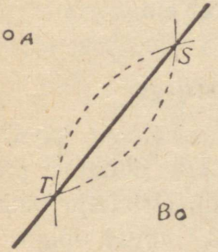
joonestame vaba raadiusega kaare, mille keskpunktiks on punkt A;

joonestame niisama suure raadiusega teise kaare, mille keskpunktiks on punkt B;

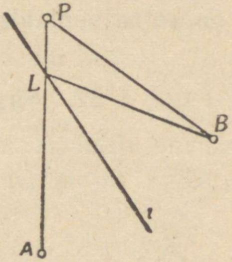
kui need kaks kaart lõikuvad, siis lõikuvad nad kahes punktis; neid punkte läbiv sirge ongi otsitav sümmeetriatelg.

Kui need kaared ei peaks lõikuma, siis joonestame uued kaared suurema raadiusega.

Põhjendus. Niiviisi leitud punktid S ja T (joonis 35) on kahest sümmeetriliselt asetsevast punktist A ja B võrdsetel kaugustel. Seetõttu nad on sümmeetriatelje punktid, sest iga punkti kohta, mis ei ole sümmeetriateljel, saame näidata, et ta ei ole võrdsetel kaugustel sümmeetriliselt asetsevaist punktidest. Selleks võtame mingi punkti P väljaspool punktide A ja B sümmeetriatelge t (joonis 36). Ühendame punkti P



Joonis 35.



Joonis 36.

punktidega A ja B; siis üks neist ühenduslõikudest (joonisel PA) lõikab telge, ütleme punktis L, nii, et

$$AL = BL.$$

Seega

$$AP = AL + LP$$

ehk asendades AL temaga võrdse lõiguga BL, saame

$$AP = BL + LP.$$

Et BP kui sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel, siis

$$BL + LP > BP$$

ja järelikult ka

$$AP > BP.$$

Niisiis ükski punkt väljaspool sümmeetriatelge ei ole sümmeetriliselt asetsevaist punktidest võrdsetel kaugustel.

Järelikult punktid S ja T joonisel 35 on punktide A ja B sümmeetriateljel.

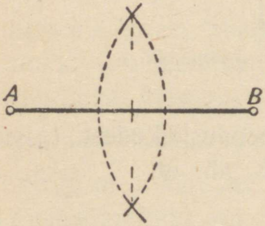
Ülesanded.

110. Antud on punktid A ja B. Leida kuus punkti nii, et igaüks neist on võrdsetel kaugustel punktidest A ja B. Kontrollida, kas leitud punktid on ühel ja samal sirgel.

111. Kahe punkti vaheline kaugus on 5 cm. Leida punktid, mis on antud punktidest kaugusel 3,5 cm.

§ 22. Sirglõigu keskristsirge.

Lahendame sirkli ja joonlaua abil sirglõigu poolitamise ülesande. Olgu tarvis poolitada lõik AB. Ehitame punktide A ja B sümmeetriatelje ning leiame selle ja antud lõigu ühise punkti (joonis 37). See punkt poolitabki lõigu, sest punktipaari sümmeetriatelg poolitab nende punktide ühenduslõigu. Et sümmeetriatelg ühtlasi on risti selle lõiguga, siis nimetatakse teda lõigu k e s k r i s t s i r g e k s. Seega



Joonis 37.

lõigu keskristsirge on sirge, mis poolitab lõigu ja on temaga risti.

Et lõigu keskristsirge on lõigu otspunktide sümmeetriatelg, siis

lõigu keskristsirge iga punkt on võrdsetel kaugustel selle lõigu otspunktidest.

Joonestame nüüd ringjoone ja selle mingile kõõlule keskristsirge (joonis 38). Et ainult selle sirge punktid on kõõlu otspunktidest võrdsetel kaugustel ja et ka keskpunkt on kõõlu otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis

kõõlu keskristsirge läbib ringjoone keskpunkti.

112. Poolitada vabalt võetud sirglõik.

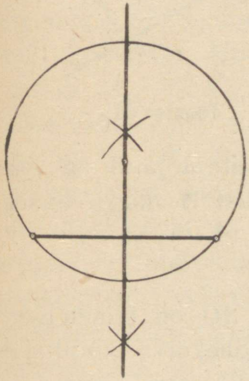
113. Antud on lõik pikkusega 6 cm. Leida punkt, mis asetseb lõigu otspunktidest kaugusel 5 cm, ja mõõta selle kaugus antud lõigust.

114. Joonestada ringjoon, milles 4 cm pikkune kõõl on 3 cm kaugusel keskpunktist.

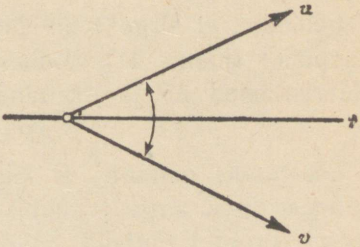
115. Joonestada ringjoon ja selle kahe vabalt võetud kõõlu keskristsirged. Kus lõikuvad need sirged?

§ 23. Nurgapoolitaja.

Olgu sümmeetriatelje *t* mingist punktist joonestatud kaks teineteisega sümmeetrilist kiirt *u* ja *v* (joonis 39). Nurgad



Joonis 38.



Joonis 39.

nende kiirte ja sümmeetriatelje vahel on teineteisega sümmeetrilised ja seega võrdsed. Seetõttu sümmeetriatelg *t* on kiirte *u* ja *v* vahelise n u r g a p o o l i t a j a.

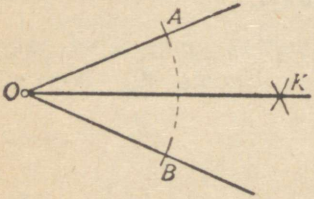
Kasutame seda sümmeetriatelje omadust selleks, et sirkli ja joonlaua abil poolitada nurk *O* (joonis 40). Ülesande lahendamiseks märgime nurga haaradel kaks nurga tipust ühekaugusel olevat punkti A ja B ning leiame nende punktide sümmeetriatelje OK (joonis 40). Et nurga haarad OA ja OB asetsevad sirge OK suhtes sümmeetriliselt, siis

$$\angle AOK = \angle BOK.$$

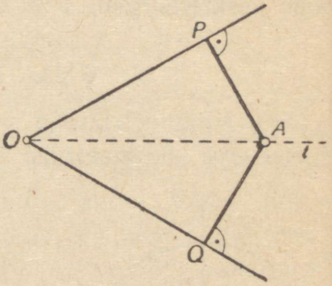
Seega OK on nurga AOB poolitaja.

Tõestame, et

nurgapoolitaja iga punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.



Joonis 40.



Joonis 41.

Eeldame, et sirge t on nurga O poolitaja ja A on selle üks punkt (joonis 41). Joonestame punktist A nurga haaradele ristlõigud AP ja AQ ning tõestame, et

$$AP = AQ.$$

Tõestuseks näitame, et lõigud AP ja AQ on teineteisega sümmeetrilised sirge t suhtes. Nurga kahekorra murdmisel mööda sirget t ühtivad haarad OQ ja OP, sest sirge t on nurgapoolitaja. Seejuures punkt A jääb endisele kohale ja ristlõik AQ läheb mööda ristlõiku AP, sest vastasel juhul oleks punktist A joonestatud sirgele OP kaks ristsirget, mis on võimatu. Et punkt Q nurga kahekorra murdmisel peab sattuma nii sirgele OP kui ka sirgele AP, siis ta võib sattuda ainult nende sirgete lõikepunkti, s. o. punkti P. Sellest järeldub aga, et lõigud AP ja AQ on võrdsed.

Edaspidi saame tõestada, et ainult nurgapoolitaja punkt on võrdsetel kaugustel nurga haaradest.

Ülesanded.

116. Poolitada vabalt võetud nürinurk.

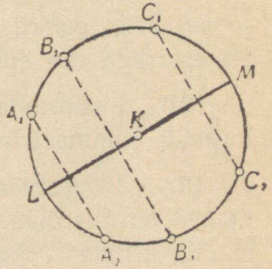
117. Joonestada sirgega ristuv sirge läbi esimesel sirgel antud punkti. Näpunäide: rakendada nurga poolitamise võtet.

118. Joonestada kõrvunurkade poolitajad. Kui suur on nurk nende nurgapoolitajate vahel?

119. Joonestada sirkli ja joonlaua abil nurk 45^0.

§ 24. Ringjoone sümmeetria.

Joonestame ringjoone ja selle mingi läbimõõdu, näiteks läbimõõdu LM (joonis 42). Läbimõõt jaotab ringjoone kaheks poolringjooneks. Võtame ühel poolringjoonel mõned punktid, näiteks A_1, B_1, C_1, ja leiame nendega läbimõõdu LM suhtes sümmeetrilised punktid A_2, B_2, C_2. Kaks teineteisega sümmeetrilist punkti on teatavasti telje mistahes punktist võrdsetel kaugustel, seega võrdsetel kaugustel ka ringi keskpunktist K; järelikult punktid A_2, B_2, C_2 asetsevad algul joonestatud ringjoonel; poolringjoon LB_1M on sümmeetriline poolringjoonega LB_2M. Nii jaotab iga läbimõõt ringjoone kaheks teineteisega sümmeetriliseks kaareks, s. t.

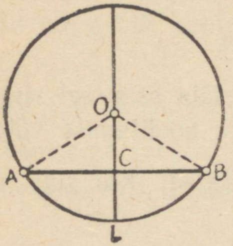


Joonis 42.

ringjoone sümmeetriateljeks on tema läbimõõt.

Läbimõõdu LM suhtes sümmeetriliselt asetsevate punktide leidmiseks joonestame kõõlu, mis on risti läbimõõduga LM. Niisuguse kõõlu otspunktid on teineteisega sümmeetrilised.

Võtame nüüd ringjoone ja selle ühe kõõlu, näiteks AB (joonis 43). Leiame selle kujundi sümmeetriatelje. Selleks peab olema üks läbimõõt ja nimelt see, mis antud kõõluga on risti, sest ainult selle läbimõõdu suhtes on punktid A ja B teineteisega sümmeetrilised. Niisamuti asetsevad selle läbimõõdu suhtes sümmeetriliselt ka raadiused AO ja BO, samuti kaared AL ja BL. Sümmeetria tõttu



Joonis 43.

$$AC = BC, \angle AOL = \angle BOL \text{ ja}$$

$$\overset{\frown}{AL} = \overset{\frown}{BL}.$$

Niisiis

kõõluga ristuv läbimõõt poolitab kõõlu, sellele toetuva kesknurga ja kaare.

Ülesanded.

120. Antud on ringjoon ja selle üks läbimõõt. Võtta ringjoonel kaks punkti A ja B ning leida antud läbimõõdu suhtes kaarega AB sümmeetriliselt asetsev kaar.

121. Joonestada kaks lõikuvat ringjoont ja leida selle kujundi sümmeetriatelg.

122. Joonestada ringjoon ja selles kaks võrdset kõõlu nii, et neil on üks ühine otspunkt. Näidata, et saadud kujund on sümmeetriline.

123. Joonestada ringjoon, millele antud sirglõik on kõõluks ja mille raadiuse pikkus on antud.

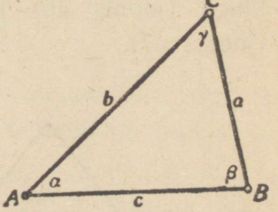
Peatükk IV.

Kolmnurk.

§ 25. Kolmnurga elemendid ja nende tähistamine.

Kolmnurk on kujund, mis tekib kolme mitte ühel sirgel asetseva punkti ühendamisel sirglõikudega.

Need punktid on kolmnurga t i p u d ja neid ühendavad sirglõigud on kolmnurga k ü l j e d. Iga kahe külje vahel on kolmnurga üks n u r k. Kolmnurga nurki ja külgi nimetatakse kolmnurga e l e m e n t i d e k s*.



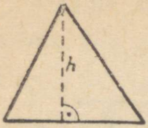
Joonis 44.

Harilikult tähistatakse kolmnurga tippe ladina suurte tähtedega, nurki vastavate väikeste kreeka tähtedega ja külgi vastavate väikeste ladina tähtedega. Kui kolmnurga tippude tähised on A, B ja C, siis tipu A vastas on külg a, tipu B vastas külg b ja tipu C vastas külg c (joonis 44). Selle tähistusviisi juures saab kolmnurga nurka nimetada kolmel viisil, näiteks nurk α või A või CAB (ehk BAC).

Kolmnurga tipust vastasküljele või selle pikendusele joonestatud ristlõiku nimetatakse kolmnurga k õ r g u s e k s.

---

* *elementum* (lad.) — alge, algosis.



Joonis 45.

Kõrgust tähistatakse harilikult tähega h (joonised 45 ja 49). Kolmnurga külge, millele on joonestatud kõrgus, nimetatakse aluseks ja kõrguse otspunkti alusel — kõrguse aluspunktiks.

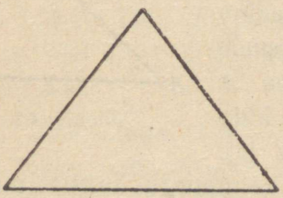
Kolmnurga külgede summa on tema ümbermõõt.

Sõna „kolmnurk" asendatakse kirjutamisel sageli sümboliga $\triangle$.

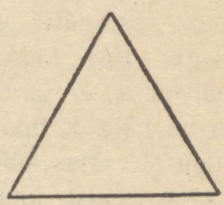
§ 26. Kolmnurkade liigitelu.

Kolmnurki liigitatakse külgede ja nurkade järgi.

Külgede järgi on kolmnurk kas isekülgne, võrdhaarne või võrdkülgne. Isekülgsel kolmnurgal ei ole võrdseid külgi (joonis 44), võrdhaarsel on kaks võrdset külge (joonis 46) ja võrdkülgsel on kolm võrdset külge (joonis 47).



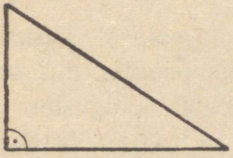
Joonis 46.



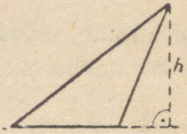
Joonis 47.

Võrdhaarse kolmnurga kaht võrdset külge nimetatakse haaradeks ja kolmandat külge aluseks. Selle kolmnurga aluse vastasnurka nimetatakse tipunurgaks ja aluse lähisnurki alusnurkadeks. Aluse vastastipust alusele tõmmatud ristlõik on võrdhaarse kolmnurga kõrgus.

Edaspidi näeme, et kolmnurga nurkadest ainult üks saab olla täisnurk või nürinurk. Sellest sõltuvalt on kolmnurk nurkade järgi kas teravnurkne, täisnurkne või nürinurkne. Teravnurksel kolmnurgal on kõik ta nurgad teravnurgad (joonis 44), täisnurksel on üks nurk täisnurk (joonis 48) ja nürinurksel on üks nurk nürinurk (joonis 49).



Joonis 48.



Joonis 49.

Täisnurkse kolmnurga külge täisnurga vastas nimetatakse hüpotenuusiks*; küljed, mis moodustavad täisnurga on kaatetid**.

Ülesanded.

124. Joonestada kolmnurk, mille külgede pikkused on 5,8 cm, 3,9 cm ja 6,7 cm. Mõõta selle kolmnurga nurgad.

125. Joonestada kolmnurk, mille külgede pikkused on 3 cm, 4 cm ja 6 cm. Võttes aluseks kõige lühema külje, joonestada kolmnurga kõrgus.

126. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille alus on 5 cm ja haar 4 cm. Mõõta selle kolmnurga kõrgus.

127. Võrdhaarse kolmnurga alus on 4,5 m ja haar on alusest 0,75 m võrra pikem. Arvutada kolmnurga ümbermõõt.

---

* *hypoteinusa* (kr.) — millegi üle pingutav.

** *kathetos* (kr.) — (tina-) lood.

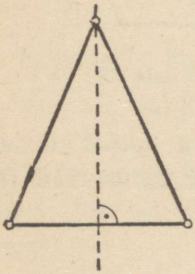
128. Joonestada võrdkülgne kolmnurk küljega 4,2 cm.

129. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille kaatetid on 2,9 cm ja 4,3 cm.

130. Joonestada täisnurkne kolmnurk, mille hüpotenuus on 6 cm ja üks kaatet on 4,8 cm.

§ 27. Võrdhaarse kolmnurga omadusi.

Joonestame võrdhaarse kolmnurga aluse keskristsirge (joonis 50). Sellel sirgel asetsevad kõik punktid, mis on aluse otspunktidest võrdsetel kaugustel. Et ka kolmnurga tipp on aluse otspunktidest võrdsetel kaugustel, siis aluse keskristsirge peab läbima tippu. Seetõttu



Joonis 50.

võrdhaarse kolmnurga aluse keskristsirge on selle kolmnurga sümmeetriateljeks.

Sellest järeldame, et

võrdhaarse kolmnurga alusnurgad on võrdsed,

sest nad on aluse keskristsirge suhtes sümmeetriliselt asetsevad nurgad. Et tipust saab alusele joonestada ainult ühe ristlõigu, milleks on aluse keskristsirge lõik, siis võrdhaarse kolmnurga kõrgus asetseb aluse keskristsirgel, s. o. kolmnurga sümmeetriateljel. Sellest järeldame, et

võrdhaarse kolmnurga kõrgus poolitab aluse ja tipunurga.

Võrdkülgset kolmnurka võime vaadelda kui võrdhaarset, mille alus on haaraga võrdne. Et sel juhul aluseks võib võtta ükskõik missuguse külje, siis

võrdkülgse kolmnurga iga külje keskristsirge on selle kolmnurga sümmeetriateljeks.

Vaatleme nüüd kolmnurka, mille kaks nurka on võrdsed. Saab tõestada, et nende nurkade vastasküljed on võrdsed, nii et

kahe võrdse nurgaga kolmnurk on võrdhaarne.

Eeldus: $\alpha = \beta$ (joonis 51).

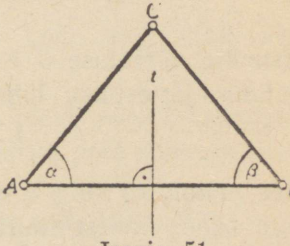
Väide: $AC = BC$.

Tõestus. Ehitame külje AB keskristsirge t ja kujutleme, et joonis on seda sirget mööda kahekorra murtud. Siis ühtivad

punktid A ja B kui sümmeetriliselt asetsevad punktid ning nurgad α ja β kui võrdsed nurgad.

Seega nurkade α ja β haarad AC ja BC on sümmeetrilises asendis sirge t suhtes, mistõttu nende lõikepunkt C asetseb sirgel t. Kuid siis lõigud AC ja BC on teineteisega sümmeetrilised sirge t suhtes ja

$$AC = BC.$$



Joonis 51.

Ühendades selle teoreemi teoreemiga võrdhaarse kolmnurga nurkade kohta, saame järgmise teoreemi:

kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed ja võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad.

Ülesanded.

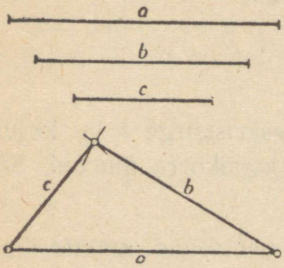
131. Joonestada kolmnurk, mille üks külg on 5,5 cm ja selle külje lähisnurgad on 40^{0}.

132. Joonestada võrdhaarne täisnurkne kolmnurk.

133. Joonestada võrdhaarne kolmnurk, mille alus ja kõrgus on võrdsed.

§ 28. Kolmnurga kahe külje summa ja vahe.

Kui võtta vabalt kolm sirglõiku ja hakata neist ehitama kolmnurka, siis võib juhtuda, et see osutub võimatuks. Vaatleme, missugustel tingimustel saab kolmest lõigust a, b ja c ehitada kolmnurga (joonis 52).



Joonis 52.

Et sirglõik on kõige lühem joonlõik kahe punkti vahel, siis peab kolmnurga kahe külje summa olema suurem kui kolmas külg. Seega

$$b + c > a, \quad a + c > b, \text{ ja}$$
$$a + b > c.$$

Kui teise võrratuse mõlemast poolest lahutame c, siis saame, et

$$a > b - c.$$

Esimese võrratuse $b + c > a$ ja viimatisaadud võrratuse kirjutame järjestikku lühidalt järgmiselt:

$$b + c > a > b - c.$$

See näitab, et külg a on teiste külgede summast väiksem, aga nende vahest suurem.

Samal viisil leiame, et

$$a + c > b > a - c \quad \text{ja} \quad a + b > c > a - b.$$

Seega oleme tõestanud, et

kolmnurga kahe külje summa on suurem ja vahe on väiksem kui kolmas külg.

N ä i d e. Kui kolmnurga külg a on 9 cm ja külg b on 7 cm, siis külg c peab olema lühem kui $9 + 7$ ehk 16 cm ja pikem kui $9 - 7$ ehk 2 cm:

$$16 > c > 2.$$

134. Kas on olemas kolmnurk külgedega 1) 4 m, 8 m, 10 m; 2) 1,2 dm, 1 dm, 2,2 dm; 3) 7,9 cm, 4,3 cm, 3,1 cm?

135. Kolmnurga kahe lühema külje pikkused on 23 cm ja 18 cm. Missuguses vahemikus on kolmanda külje pikkus?

136. Kolmnurga külg $c = 8{,}5$ cm ja külg $a = 11{,}5$ cm. Missuguses vahemikus on külje b pikkus?

137. Võrdhaarse kolmnurga üks külg on 14 cm ja teine külg 30 cm. Kumb neist külgedest on aluseks?

138. Kolmnurga kahe külje summa on 27,8 m ja ümbermõõt on 36,5 m. Kui pikk on kolmas külg?

139. Kui suur peab olema lõikude AB ja BC summa, et punkt B oleks a) sirgel AC, b) väljaspool sirget AC?

140. Tõestada, et kolmnurga iga külg on väiksem kui kolmnurga pool ümbermõõtu.

141. Tõestada, et kolmnurga sees oleva punkti kauguste summa tippudest on suurem kui kolmnurga pool ümbermõõtu.

§ 29. Kolmnurga suurem nurk ja selle vastaskülg.

Kolmnurgas on võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed (§ 27). Vaatleme nüüd kahe mittevõrdse nurga vastaskülgi. Tõestame, et

kolmnurgas on suurema nurga vastas suurem külg.

Eeldus: $\alpha > \beta$ (joonis 53).

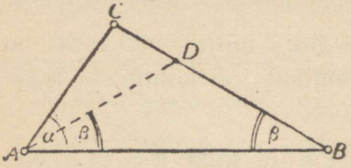
Väide: $BC > AC$.

Tõestus. Ehitame punkti A juurde nurga β, nagu näidatud joonisel 53. Siis on kolmnurgas ABD kaks võrdset nurka ja seetõttu

$$AD = BD.$$

Kuna kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg, siis kolmnurgas ADC

$$AD + DC > AC.$$



Joonis 53.

Asendades selle võrratuse vasakpoolses avaldises AD temaga võrdse suurusega BD, saame

$$BD + DC > AC.$$

Et BD ja DC summa on BC, siis

$$BC > AC,$$

mida oligi vaja tõestada.

Tõestame, et on õige ka eelmise pöördteoreem, nimelt:

kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk.

Eeldus: $BC > AC$ (joonis 53).

Väide: $\alpha > \beta$.

Tõestus. Mistahes nurkade α ja β kohta on alati õige üks kolmest väitest:

$$\alpha = \beta \quad \text{või} \quad \alpha < \beta \quad \text{või} \quad \alpha > \beta.$$

Antud kolmnurga nurkade α ja β kohta esimene väide ei ole õige, sest siis peaksid olema võrdsed nende nurkade vastasküljed BC ja AC, kuid eelduse järgi $BC > AC$. Ka teine väide ei saa olla õige, sest siis peaks BC olema väiksem kui AC, mis on vastuolus eeldusega. Ainsa võimalusena jääb püsima väide

$$\alpha > \beta.$$

Ülesanded.

142. Kolmnurgas on $a < c$ ja $\beta > \gamma$. Järjestada kolmnurga nurgad nende suuruse järgi.

143. Missugune on täisnurkse kolmnurga kõige pikem külg?

144. Missugune on nürinurkse kolmnurga kõige pikem külg?

145. Mis võib öelda võrdkülgse kolmnurga nurkade kohta?

§ 30. Kongruentsed kolmnurgad.

Kaht tasapinnalist kujundit, näiteks kaht kolmnurka, nimetatakse kongruentseiks, kui neid saab paigutada teineteise peale nii, et nad teineteist täpselt katavad, s. o. ühtivad (§ 17). Seevastu kaht niisugust kujundit, mis ei saa ühtida, nimetatakse mittekongruentseiks.

Kui ühe kolmnurga teise peale paigutamisel ühe kolmnurga tipud ühtivad teise kolmnurga tippudega, siis ühtivad ka küljed, sest nad on tippude vahelised sirglõigud ja kaht tippu ühendab ainult üks sirglõik. Seepärast on kahe kolmnurga kongruentsuse kindlakstegemiseks küllalt, kui saab näidata, et nende tipud pealepaigutamisel ühtivad.

Kongruentsete kujundite neid elemente, mis pealepaigutamisel ühtivad, nimetatakse vastavateks elementideks. On selge, et kongruentsete kujundite vastavad küljed on võrdsed ja samuti vastavad nurgad on võrdsed.

Kongruentsete kolmnurkade vastavaid tippe tähistame ühe ja sama tähega, lisades märgi ′ teise kolmnurga vastava tipu tähise juurde. Niiviisi tähistades on vastavad tipud A ja A' (loe „A prim"), B ja B' jne.

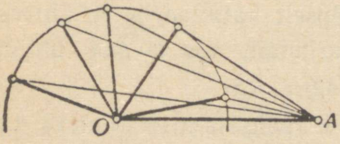
Kujundite kongruentsuse märkimiseks kasutatakse sümbolit $\cong$.

Nagu järgnevad teoreemid näitavad, on kolmnurkade kongruentsust võimalik kindlaks teha juba mõne elemendi võrdlemisega, ilma et tarvitseks kolmnurki teineteise peale paigutada. Elementide kohta, mis võimaldavad kolmnurkade kongruentsust kindlaks teha, öeldakse, et nendega on kolmnurk määratud.

Leiame, mitme elemendiga võiks kolmnurk olla määratud. Et on palju erinevaid kolmnurki, millede ühed küljed või ühed nurgad on võrdsed, siis

ühe elemendiga ei ole kolmnurk määratud.

Samuti on olukord k a h e elemendiga: joonisel 54 on mitu kolmnurka, milledel on ühine külg OA ja milledel teiseks küljeks on ühe ja sama ringi raadiused, seega ka teised küljed on võrdsed; nii on neil kahed võrdsed elemendid, kuid kolmnurgad ei ole kongruentsed:



Joonis 54.

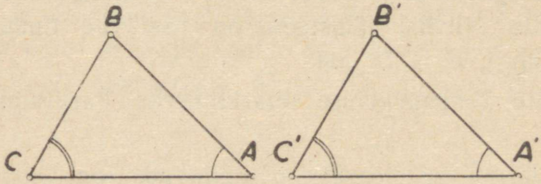
kahe küljega ei ole kolmnurk määratud.

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuste uurimisel jõuame varsti otsusele, et ainult

kolme sobivalt valitud elemendiga on kolmnurk määratud.

§ 31. Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga külg ja selle lähisnurgad on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.



Joonis 55.

E e l d u s: $AC = A'C'$; $\angle A = \angle A'$; $\angle C = \angle C'$ (joonis 55).

V ä i d e: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ peale, et tipp A ühtiks tipuga A' ja külg AC satuks küljele $A'C'$. Siis

1. tipp C ühtib tipuga C', sest eelduse järgi $AC = A'C'$;
2. külg AB satub küljele $A'B'$, sest $\angle A = \angle A'$;
3. külg CB satub küljele $C'B'$, sest $\angle C = \angle C'$.

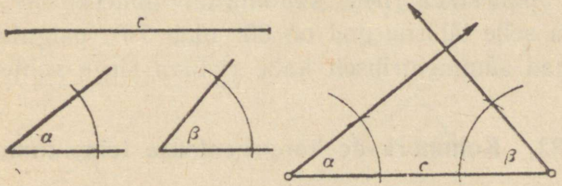
Küsime: kuhu satub tipp B? Et kaks sirget võivad lõikuda ainult ühes punktis, siis tipp B peab ühtima tipuga B'. Nõnda on selgunud, et antud kolmnurki on võimalik niiviisi teineteise peale paigutada, et nende tipud vastavalt ühtivad. Järelikult

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus (ehk tunnus nkn) näitab, et

kolmnurk on määratud ühe külje ja selle kahe lähisnurgaga.

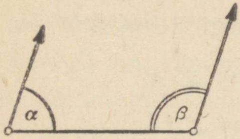
Kolmnurga joonestamiseks antud külje ja selle lähisnurkade järgi joonestame esmalt antud külje ja siis selle ots-



Joonis 56.

punktide juurde antud nurgad (joonis 56). Nende nurkade teiste haarade lõikepunkt on kolmnurga kolmandaks tipuks.

Võib juhtuda, et need haarad pikendamisel üldse ei lõiku (joonis 57). Antud nurgad sel juhul ei või olla kolmnurga nurkadeks. Edaspidi (§ 41) näeme, missugust tingimust peavad täitma kaks nurka, et nad võiksid olla kolmnurga nurkadeks.



Joonis 57.

Antud külje ja selle kahe lähisnurga järgi kolmnurka joonestades (joon. 56) võime antud nurgad paigutada kas küljest ülespoole või allapoole, võime nurga α paigutada kas külje vasakpoolse tipu juurde või parempoolse tipu juurde. Nii võime saada neli eri kolmnurka. Käsiteldud tunnuse järgi on kõik need kolmnurgad kongruentsed.

Ülesanded.

146. Näidata, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaatet ja selle juures olev teravnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

147. Tõestada, et sirge, mis on risti nurgapoolitajaga, lõikab nurga haarasid punktides, mis on nurga tipust võrdsetel kaugustel.

148. Joonestada neli kolmnurka, millede üks külg on 3,5 cm ja selle lähisnurgad on 30^0 ning 70^0, paigutades need kolmnurgad sümmeetriliselt kahe ristuva sirge suhtes.

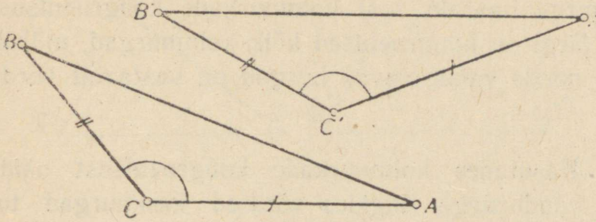
§ 32. Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AC = A'C'$; $BC = B'C'$; $\angle C = \angle C'$ (joon. 58).

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

T õ e s t u s. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ peale, et tipp C ühtib tipuga C' ja külg AC satub küljele $A'C'$.



Joonis 58.

Siis

1. külg CB satub küljele $C'B'$, sest eelduse järgi $\angle C = \angle C'$;
2. tipp A ühtib tipuga A', sest samuti $AC = A'C'$;
3. tipp B ühtib tipuga B', sest $BC = B'C'$.

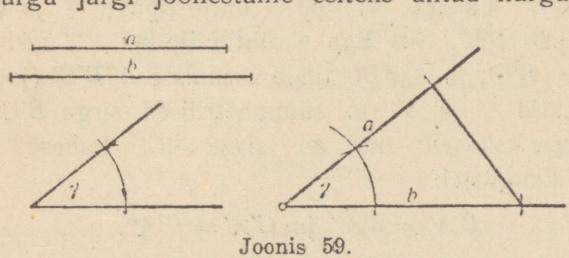
Sellest selgub, et neid kolmnurki on võimalik niiviisi teineteise peale paigutada, et nende tipud ühtivad; järelikult

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus (ehk tunnus knk) näitab, et

kolmnurk on määratud kahe külje ja nende vahel oleva nurgaga.

Kolmnurga joonestamiseks kahe külje ja nende vahel oleva nurga järgi joonestame esiteks antud nurga ja kan-



Joonis 59.

name siis selle haaradele, alates nurga tipust, antud küljed (joonis 59).

Nende lõpp-punktide ühendamisel saame antud elementidega kolmnurga.

On ükskõik, kumma antud külgedest paigutame ühele või teisele nurga haarale, sest kolmnurkade kongruentsuse teise tunnuse järgi on kongruentsed kõik kolmnurgad, millede kaks külge ja nende vahel olevad nurgad on vastavalt võrdsed.

Ülesanded.

149. Kasutades kolmnurkade kongruentsust näidata, et võrdsete raadiustega ringides võrdsed kesknurgad toetuvad võrdsetele kõõludele.

150. Joonestada kaks kolmnurka nii, et neil on ühine nurk 35^0 ning selle lähisküljed on 3 cm ja 6 cm. Leida selle kujundi sümmeetriatelg.

§ 33. Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus: $AB = A'B'$; $BC = B'C'$; $CA = C'A'$ (joonis 60).

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Tõestus: Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ külge, et tipp B ühtib tipuga B' ja külg BC satub küljele $B'C'$. Siis tipp C ühtib tipuga C', sest eelduse järgi $BC = B'C'$, ja $\triangle ABC$ tuleb asendisse $A''B'C'$ (joonis 60). Nüüd punktid A' ja A'' on sümmeetrilised sirge $B'C'$ suhtes, sest eelduse kohaselt nad on sirge $B'C'$ kahest punktist võrdsetel kaugustel:

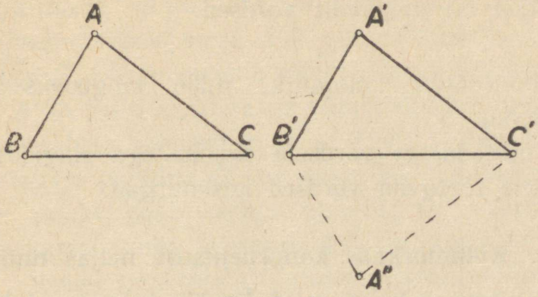
$$B'A' = B'A'' \text{ ja } C'A' = C'A''.$$

Kuid siis $\triangle A''B'C'$ ja $\triangle A'B'C'$ asetsevad sümmeetriliselt ning seega

$$\triangle A''B'C' \cong \triangle A'B'C',$$

millest järeldub, et ka

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

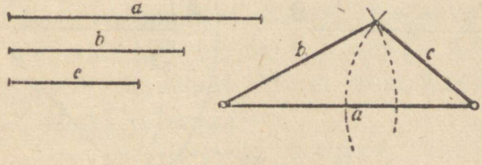


Joonis 60.

Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus (ehk tunnus kkk) näitab, et

kolmnurk on määratud kolme küljega.

Kolmnurga joonestamiseks kolme külje järgi joonestame esmalt ühe külje ja siis selle ühe otspunkti ümber kaare, mille raadiuseks on teine antud külg, ning teise otspunkti ümber kaare, mille raadiuseks on kolmas antud külg (joonis 61). Kui antud küljed täidavad nõudeid, mis on kehti-



Joonis 61.

vad kolmnurga külgede kohta (§ 28), siis lõikuvad need kaared kahes punktis. Kui ühe neist lõikepunktidest ühendame esimese külje otspunktidega, siis saame antud elementidega kolmnurga.

On ükskõik, missuguses järjekorras antud külgi kasutame kolmnurga ehitamiseks, sest kolmnurkade kongruentsuse kolmanda tunnuse järgi on kongruentsed kõik kolmnurgad, millede küljed on vastavalt võrdsed.

Ülesanded.

151. Joonestada kolmnurk, mille külgedeks on kolm antud sirglõiku.

152. Tõestada, et võrdsete raadiustega ringides võrdsetele kõõludele toetuvad võrdsed kesknurgad.

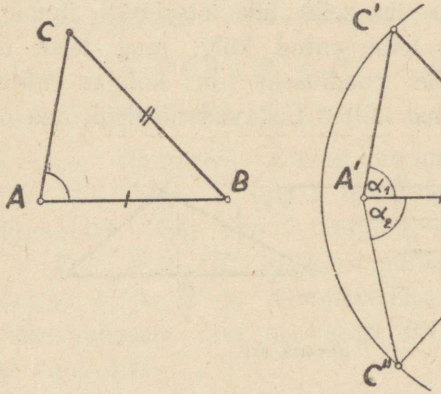
§ 35. Kolmnurkade kongruentsuse neljas tunnus.

Kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga kaks külge ja suurema külje vastasnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Eeldus. $AB = A'B'$; $BC = B'C'$;

$BC > AB$; $\angle A = \angle A'$ (joonis 62).

Väide. $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

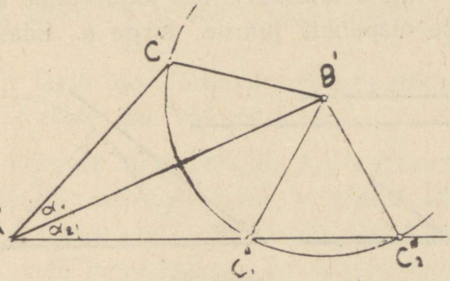


Joonis 62.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga ABC nii kolmnurga $A'B'C'$ külge, et võrdsete nurkade tipud A ja A'

ühtivad ja külg AB satub küljele $A'B'$. Siis tipp B ühtib tipuga B', sest eelduse järgi $AB = A'B'$, ja $\triangle ABC$ tuleb asendisse $A'B'C''$ (joonis 62).

Näitame nüüd, et kolmnurgad $A'B'C'$ ja $A'B'C''$ on teineteisega sümmeetrilised sirge $A'B'$ suhtes. Selleks küsime, kus on punktiga C' sümmeetriline punkt. Punkt C' asetseb nurga α_1 haaral $A'C'$. Selle haaraga on sümmeetriline nurga α_2 haar $A'C''$, sest eelduse kohaselt $\alpha_1 = \alpha_2$. Teiseks, punkt C' asetseb sümmeetriatelje punktist B' kaugusel $B'C'$; punktiga C' sümmeetriline punkt peab olema punktist B' niisama kaugel, seega ringjoonel, mille keskpunktiks on punkt B' ja raadiuseks $B'C'$. Seega punktiga C' sümmeetriline punkt on seal, kus lõikuvad kiir $A'C''$ ja ülalnimetatud ringjoon. Et eelduse



Joonis 63.

järgi $A'B' < B'C'$, siis punkt A' asetseb ringjoone s e e s, mistõttu kiir $A'C''$ lõikab ringjoont a i n u l t ü h e s punktis, nimelt punktis C''. Järelikult C'' on sümmeetriline punktiga C' sirge $A'B'$ suhtes ja seega

$$\triangle A'B'C'' \cong \triangle A'B'C'.$$

Et aga $A'B'C''$ on lihtsalt kolmnurk ABC, nagu teda mõttes paigutasime, siis järeldub, et

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'.$$

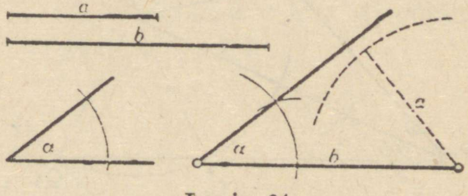
Seega on tõestatud kolmnurkade kongruentsuse neljas tunnus (ehk tunnus KkN).

M ä r k u s. Kui nurgad A ja A' ei oleks suuremate vaid väiksemate külgede vastasnurgad, s. t. kui $AB > BC$ ja sellega ühenduses $A'B' > B'C'$, siis punkt A' asetseks v ä l j a s p o o l ringjoont ja haar $A'C''$ lõikaks ringjoont k a h e s punktis (joonis 63). Sel juhul ülalantud tõestus ei kõlba, sest teoreemi eeldusest ei selgu, kumb neist punktidest on C''.

See, et kaks külge ja v ä i k s e m a külje vastasnurk ei olegi sobivad elemendid kolmnurga määramiseks, selgub järgneva ülesande lahendamisel.

Ü l e s a n n e. Joonestada kolmnurk, millest on antud kaks külge ja ühe külje vastasnurk.

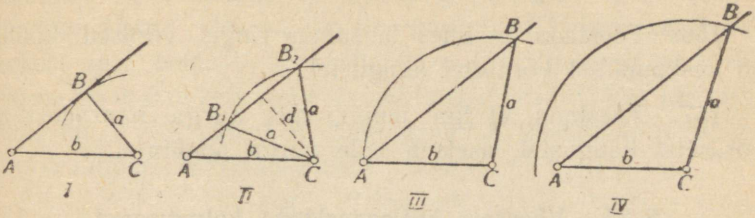
L a h e n d u s. Olgu antud elemendid a, b ja α (joonis 64). Et nurk α on külje b lähisnurk, siis joonestame külje b ja ehitame selle ühe otspunkti juurde nurga α. Edasi joonestame



Joonis 64.

külje b teise otspunkti ümber kaare raadiusega a ja vaatame, kus kaar lõikab ehitatud nurga teist haara. Kui selle lõikepunkti ühendame külje b teise otspunktiga, siis tekib kolmnurk, milles nurga α vastasküljeks on a.

Joonisel 64 antud elementidega ülesannet lahendades selgub, et kaar raadiusega a ei lõikagi nurga teist haara; tähendab, siin a n t u d k a k s k ü l g e j a ü h e k ü l j e v a s t a s n u r k e i v õ i m a l d a g i k o l m n u r k a s a a d a. Põhjus, miks need andmed kolmnurka ei anna, peitub selles, et külg a on liiga lühike: a on väiksem kui külje b otspunkti kaugus vastasküljest. Hakkame pikendama külge a ja jälgime tekkivaid olukordi (joonis 65):



Joonis 65.

I juhul $a = d$, kus d on punkti C kaugus nurga α teisest haarast; tekib täisnurkne kolmnurk;

II juhul $a > d$, kuid $a < b$; tekib kaks kolmnurka: $\triangle AB_1C$ ja $\triangle AB_2C$;

III juhul $a = b$; tekib üks võrdhaarne kolmnurk;

IV juhul $a > b$; tekib üks kolmnurk.

Kui jätta kõrvale need juhud, mis annavad erikujulisi kolmnurki (I ja III), siis võib öelda, et ainult neljandal juhul, s. o. kahe külje ja suurema külje vastasnurga järgi saab joonestada ühe kolmnurga. Kahe külje ja väiksema külje vastasnurgaga on määratud kaks ühtimatut kolmnurka või üks täisnurkne kolmnurk või ei saa tullagi kolmnurka.

Ülesanded.

153. Joonestada kolmnurk, milles

$$a = 3,5 \text{ cm}, \ b = 5,5 \text{ cm ja } \alpha = 30^{0}.$$

Mitu kolmnurka on määratud nende andmetega? Mõõta tehtud joonisel külg c ja nurgad β ning γ.

154. Joonestada kolmnurk, milles

$$a = 4,2 \text{ cm}, \ b = 6,5 \text{ cm ja } \beta = 75^{0}.$$

155. Näidata, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks kaatet on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

156. Tõestada, et ühes ja samas ringis võrdsed kõõlud on keskpunktist võrdsetel kaugustel.

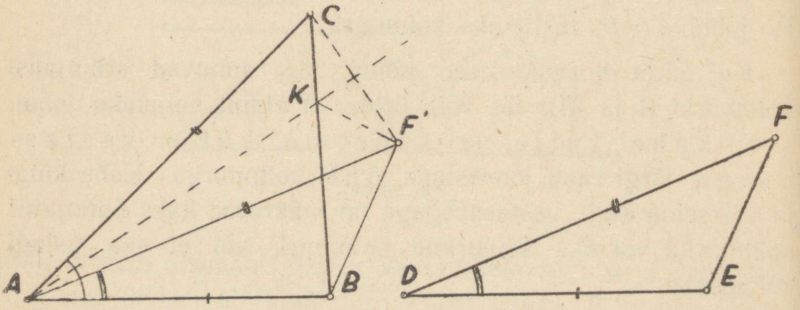
157. Tõestada, et iga punkt, mis nurga haaradest on võrdsetel kaugustel, asetseb selle nurga poolitajal.

§ 35. Võrdsete küljepaaridega kolmnurgad.

Kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega, aga nende külgede vahelised nurgad ei ole võrdsed, siis suurema nurga vastas on pikem külg.

Eeldus: $AB = DE$; $AC = DF$; $\angle A > \angle D$ (joonis 66).

Väide: $BC > EF$.



Joonis 66.

Tõestus. Paigutame mõttes kolmnurga DEF nii kolmnurga ABC peale, et tipp D ühtiks tipuga A ja külg DE satuks küljele AB. Siis tipp E ühtib tipuga B, sest $AB = DE$, ja külg DF satub nurga A sisse, sest eelduse järgi $\angle A > \angle D$ (joonis 66). Tipp F võib sattuda kas kolmnurga ABC sisse või selle küljele BC või väljapoole kolmnurka ABC. Kui ta satub küljele BC, siis ta jääb punktide B ja C vahele ja seega $BC > EF$. Kui punkt F satub kas kolmnurga ABC sisse või väljapoole seda kolmnurka, ütleme punkti F', siis ühendame selle punktiga C. Nii saame kolmnurga ACF', mis on võrdhaarne, sest eelduse kohaselt $AC = AF'$. Joonestame selle kolmnurga sümmeetriatelje ja tähistame punkti, kus see telg lõikab külge BC, tähega K. Selle punkti K ühendame punktiga F' ja vaatleme kolmnurka BKF'. Selles

$$BK + KF' > BF',$$

sest kolmnurga kahe külje summa on suurem kui kolmas külg.

Sümmeetria tõttu

$$KF' = KC.$$

Asendamisel saame, et

$$BK + KC > BF'$$

ehk

$$BC > BF'$$

ja seega ka

$$BC > EF.$$

Vahetades tõestatud teoreemis nurkade A ja D kohta tehtud eelduse väitega, saame järgmise teoreemi:

kui ühe kolmnurga kaks külge on vastavalt võrdsed teise kolmnurga kahe küljega, aga nende kolmnurkade kolmandad küljed ei ole võrdsed, siis pikema külje vastas on suurem nurk.

Eeldus: $AB = DE$; $AC = DF$; $BC > EF$.

Väide: $\angle A > \angle D$.

Tõestus: Mistahes nurkade A ja D kohta peab õige olema üks järgnevast kolmest väitest: kas

$$\angle A = \angle D \text{ või } \angle A < \angle D \text{ või } \angle A > \angle D.$$

Siinsete nurkade kohta aga esimene väide ei ole õige, sest kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi peaksid siis kolmnurgad ABC ja DEF olema kongruentsed, seega nende küljed BC ja EF peaksid olema võrdsed; kuid seda ei saa olla, sest eelduse järgi $BC > EF$. Ka teine väide ei saa olla õige, sest kui ta seda oleks, siis väiksema nurga A vastas asetsev külg BC peaks olema väiksem kui külg EF, mis on vastuolus eeldusega. Õige on seega viimane väide, nimelt

$$\angle A > \angle D.$$

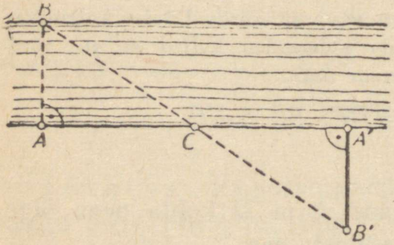
§ 36. Pikkuse kaudne mõõtmine kongruentsete kolmnurkade abil.

Kui kauguste ja kõrguste mõõtmine otseselt pole vahelolevate takistuste tõttu või mõnel muul põhjusel hästi teostatav, tuleb mõõta kaudselt. Paljudel juhtudel on see kergesti teostatav kongruentsete kolmnurkade abil. Mõnda niisugust võimalust selgitavad järgmised ülesanded.

Ülesanne 1. Mõõta kanali laius, kui ainult kanali ühele kaldale on võimalik juurde pääseda.

Lahendus. Tähistame kanali kaldal punkti A, mille vastas risti üle kanali on mingi hästi nähtav punkt B. Edasi tähistame kaldal kaks punkti C ja A' nii, et

$$AC = A'C.$$



Joonis 67.

Nüüd läheme punktist A' risti kanaliga nii kaugele kaldast, et meie asukoht B' oleks punktidega B ja C ühel sirgel, ja mõõdame punkti B' kauguse kaldast. See kaugus võrdub kanali laiusega (joonis 67).

Põhjendus. Kolmnurkadel ABC ja $A'B'C$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$AC = A'C,$$

$$\angle A = \angle A' = 90^0$$

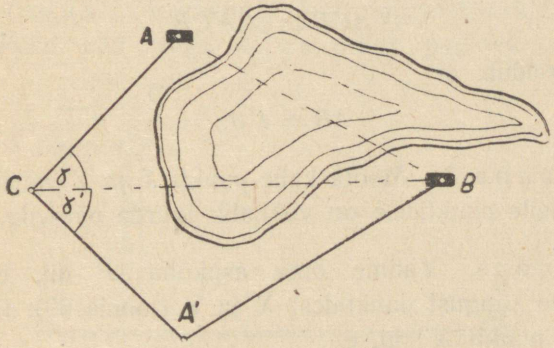
ja

$$\angle ACB = \angle A'CB'.$$

Seega tunnuse nkn järgi

$$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C.$$

Järelikult on võrdsed nende kolmnurkade vastavad küljed AB ja $A'B'$.



Joonis 68.

Ülesanne 2. Mõõta järve kaldal asetsevate talude A ja B vaheline kaugus.

Lahendus. Valime oma asukohaks niisuguse punkti C, millest mõlemad talud on nähtavad ja mille kaugust vähemalt ühest talust saab mõõta (joonis 68). Ehitame nüüd punkti C juurde nurga γ' nii, et

$$\gamma' = \gamma,$$

ja märgime selle haaral punkti A' nii, et

$$CA' = CA.$$

Otsitava kauguse saame, kui mõõdame punkti A' kauguse talust B.

P õ h j e n d u s. Kolmnurkadel ACB ja $A'CB$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$AC = A'C$$
$$\gamma = \gamma'$$

ja CB on nende kolmnurkade ühine külg.
Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi siis

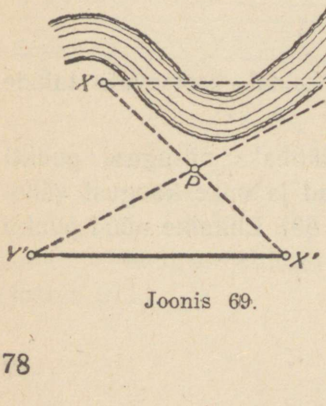
$$\triangle ACB \cong \triangle A'CB,$$

millest järeldub, et

$$AB = A'B.$$

Ü l e s a n n e 3. *Mõõta kahe punkti X ja Y vaheline kaugus, kui neile punktidele on võimalik juurde pääseda.*

L a h e n d u s. Valime oma asukoha P nii, et saaks mõõta selle kaugust punktidest X ja Y (joonis 69); tähistame sirgel PX punkti X' nii, et



Joonis 69.

$$PX' = PX,$$

ja sirgel PY punkti Y' nii, et

$$PY' = PY.$$

Nüüd mõõdame lõigu $X'Y'$, millega leiamegi otsitava kauguse.

P õ h j e n d u s. Kolmnurkadel $PXY = PX'Y'$ on järgmised elemendid võrdsed:

$$PX = PX',$$
$$PY = PY'$$

ja

$$\angle XPY = \angle X'PY'.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi siis

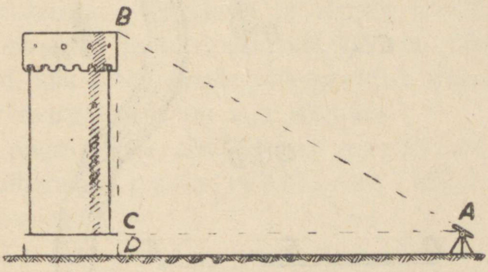
$$\triangle PXY \cong \triangle PX'Y',$$

millest järeldub, et

$$XY = X'Y'.$$

Ü l e s a n n e 4. *Mõõta torni kõrgus, kui tornile on võimalik juurde pääseda.*

L a h e n d u s. *Mõõdame mingi nurgamõõtmisriista, näiteks teodoliidi abil nurga A, mis sellest punktist torni tippu*



Joonis 70.

suunatud vaatekiir moodustab rõhtsirgega AC (joonis 70). Siis mõõdame punkti A kauguse tornist ja punkti C kauguse maapinnast. Nurk C kolmnurgas ABC on täisnurk. Nüüd ehitame maapinnal külje AC ja nurkade A ning C järgi kolmnurgaga ABC kongruentse kolmnurga ja mõõdame selle külje BC. Torni kõrgus on

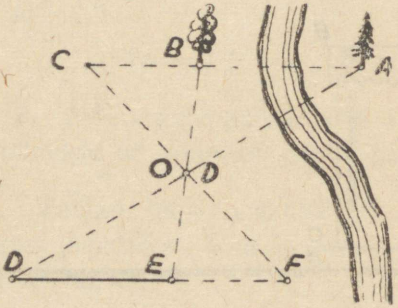
$$BC + CD.$$

158. Maapinnal on märgitud kaks punkti kahe püstilöödud kepi abil. Kuidas leida uusi punkte, mis asetsevad antud punktidega ühel sirgel? Kuidas saab maapinnal ehitada täisnurka?

159. Torni kõrgus paistab 50 m kauguselt nurgas 62^{0}. Leida vähendatud joonise abil torni kõrgus.

160. Mererannal asetsevate vaatluspunktide A ja B vaheline kaugus ehk baas * on 7,5 km. Merel olev laev paistab punktist A suunas, mille nurk baasiga on 34^{0}, ja punktist B suunas, mis moodustab baasiga nurga 71^{0}. Leida vähendatud joonise abil laeva kaugus kummastki vaatluspunktist.

161. Tõestada, et joonisel 71 $AB = DE$, kui $OB = OE$



Joonis 71.

ja $OC = OF$. Kuidas saab selle joonise eeskujul mõõta A ja B vahelist kaugust, kui punkt A on juurdepääsematu?

---

* *basis* (lad.) — alus.

Peatükk V.

Paralleelsed sirged.

§ 37. Paralleelide aksioom.

Kaks sirget võivad olla tasapinnal nii, et nad lõikuvad. Näitame, et kaks sirget võivad ka mitte lõikuda, kuigi nad on ühel ja samal tasapinnal. Selleks võtame vabalt sirge v ja väljaspool seda ühe punkti P (joonis 72). Kui läbi punkti P joonestada ristsirge s sirgele v ja sirgele s ristsirge u, siis saame kaks sirget u ja v, mis ei või lõikuda. Tõepoolest, kui nad lõikuksid, siis oleks nende lõikepunktist sirgele s joonestatud kaks ristsirget, mis on aga võimatu.

Sirgeid, nagu u ja v, nimetatakse paralleelseteks* sirgeteks, lühemalt paralleelideks ehk rööbikuteks. Niisiis

paralleelsed sirged on ühel ja samal tasapinnal asetsevad sirged, mis ei lõiku.

Sirgete paralleelsust märgitakse sümboliga $\|$. Paralleelsete sirgjoonte lõike nimetatakse paralleelseteks lõikudeks.

Et sirged, mis on risti ühe ja sama sirgega, ei lõiku, siis

tasapinnal ühe ja sama sirge ristsirged on paralleelsed.

See teoreem võimaldab antud sirgele v ehitada rööpsirget läbi antud punkti P.

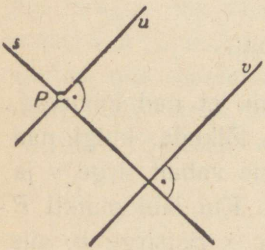
---

* *parallelos* (kr.) — teineteise kõrval, kõrvuti.

Küsime nüüd, kas läbi antud punkti P võiks minna peale sirge u veel mõni teine sirge, mis oleks paralleelne sirgega v. Meie kujutluse järgi teist niisugust sirget ei saa olla, see tähendab,

läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega.

Seda väidet on püütud tõestada umbes 2000 aasta väitel, kuid need tõestamiskatsed ei ole õnnestunud. Veel enam: selle väite tõestamisvõimaluste uurimisel on selgunud, et seda väidet ei saagi tõestada ilma mõne uue selle väitega samaväärse aksioomi tarvitamiseta. Seetõttu kasutame seda aksioomina ja nimetame p a r a l l e e l i d e a k s i o o m i k s.



Joonis 72.

Sellest aksioomist järeldub, et peale ühe kõik sirged, mis läbivad punkti P, lõikuvad sirgega v (joonis 72).

Paralleelide aksioomi tõestamiskatsete nurjumine viis XIX sajandi esimesel poolel vene matemaatiku Nikolai Lobatševski, ungari matemaatiku Johann Bolyai ja saksa matemaatiku Karl Friedrich Gauss'i mõttele, et on võimalik niisugune geomeetria, milles puudub paralleelide aksioom. See geomeetria erineb tunduvalt „harilikust" geomeetriast.

§ 38. Paralleelide ühine ristsirge.

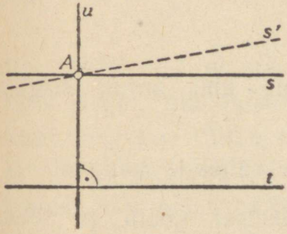
Paralleelide aksioom võimaldab tõestada järgmist teoreemi:

kui sirge on risti ühega kahest paralleelsest sirgest, siis on ta risti ka teisega.

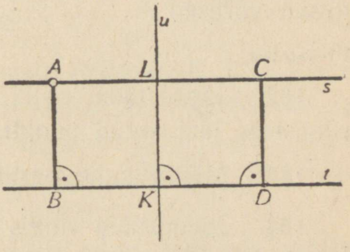
Eeldus: $s \parallel t$; $u \perp t$ (joonis 73).

Väide: $u \perp s$.

Tõestus. Kui sirged u ja s ei ristuks punktis A, siis saaksime läbi punkti A ehitada sirge s', mis oleks risti sirgega u; see uus sirge s' peaks olema paralleelne sirgega t, sest nad mõlemad ristuvad sirgega u. Kuid siis läbiksid punkti A kaks sirget, mis on paralleelsed sirgega t; et see paralleelide aksioomi järgi ei saa nii olla, siis peavad sirged u ja s ristuma.



Joonis 73.



Joonis 74.

Seega paralleelidel on ristsirge ühine. Selle ühise ristsirge lõiku paralleelide vahel nimetatakse paralleelide vaheliseks ristlõiguks. Tõestame, et

kahe paralleeli vahelised ristlõigud on võrdsed.

Eeldus: $s \parallel t$, $AB \perp t$, $CD \perp t$ (joonis 74).

Väide: $AB = CD$.

Tõestus. Joonestame lõigu BD keskristsirge u. Et paralleelidel ristsirged on ühised, siis sirge u on risti ka sirgega s, millest järeldub, et kogu joonis on sümmeetriline sirge u suhtes. Tõepoolest, kiired LA ja KB on sümmeetrilised vastavalt kiirtega LC ja KD, sest sirge u on risti nii sirgega s kui ka sirgega t; punkt B on sümmeetriline punktiga D, sest sirge u on lõigu BD keskristsirge; sirge BA on sümmeetriline sirgega DC, sest nurgad B ja D on võrdsed; ja lõpuks punkt

A on sümmeetriline punktiga C, sest sirgete BA ja LA lõikepunktiga A sümmeetriline punkt peab olema nende sirgetega sümmeetriliselt asetsevate sirgete DC ja LC ühine punkt, s. o. punkt C. Kuid siis

$$AB = CD$$

kui teineteisega sümmeetrilised lõigud.

Kahe paralleeli vahelise ristlõigu pikkust nimetatakse **paralleelide vaheliseks kauguseks.** Viimati tõestatud teoreemi järgi on kõik kahe paralleeli vahelised kaugused võrdsed.

Ülesanded.

162. Joonestada sirkli ja joonlaua abil antud sirgele rööpsirge läbi antud punkti.

163. Mõõta kahe paralleelse sirge vaheline kaugus.

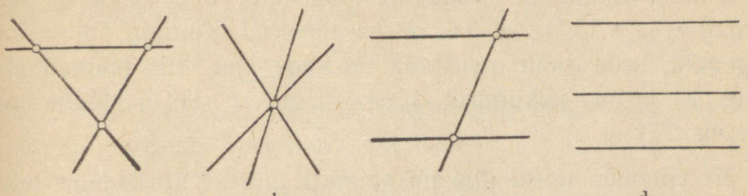
164. Joonestada ringis kaks paralleelset kõõlu ja tõestada, et nende vahelised kaared on võrdsed. Näpunäide: leida kujundi sümmeetriatelg.

§ 39. Tasapinna kolm sirgjoont.

Kaks sirget tasapinnal kas lõikuvad või on paralleelsed. Paralleelsus on aga hoopis haruldasem kui lõikumine: läbi punkti väljaspool sirget läheb ainult üks selle sirge paralleel, kuid väga palju lõikavaid sirgeid.

Olgu antud kaks lõikuvat sirget. Kui joonestame lisaks neile veel kolmanda sirge, siis esineb üks järgnevast kolmest asendi-võimalusest: kas kolmas sirge lõikab antud sirgeid kahes eri punktis, nii et tekib kolmnurk (joonis 75 a), või kolmas sirge läbib antud sirgete lõikepunkti (joonis 75 b) või kolmas sirge on paralleelne ühega antud sirgetest (joonis 75 c). Esimesel juhul sirgetel on kolm lõikepunkti, teisel — üks lõikepunkt ja kolmandal — kaks lõikepunkti.

Kui on antud kaks paralleelset sirget, siis mingi kolmas sirge kas lõikab mõlemat antud sirget (joonis 75 c) või ei lõika kumbagi neist (joonis 75 d). Kolmandat võimalust — kus kolmas sirge lõikuks ühega kahest paralleelist, teisega



Joonis 75.

aga mitte — ei saa olla, sest seda lõikepunkti läbiks siis kaks sirget, mis mõlemad peaksid olema paralleelsed ühe ja sama sirgega. Viimasel juhul, kui sirge ei lõika antud kaht paralleeli, on meil kolm paralleelset sirget. Viimase juhu tekkimise võimalust näitab järgmine teoreem:

kui kahest sirgest kumbki on paralleelne mingi kolmanda sirgega, siis on need kaks sirget paralleelsed.

E e l d u s: $x \parallel z$; $y \parallel z$ (joonis 76).

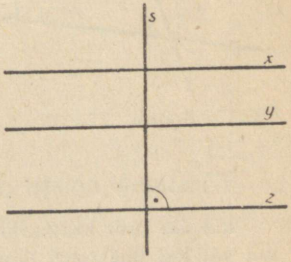
V ä i d e: $x \parallel y$.

T õ e s t u s. Joonestame sirge s risti sirgega z. Et sirge, mis on risti ühega kahest paralleelist, on risti ka teisega, siis

$$s \perp x;$$

samal põhjusel ka

$$s \perp y.$$



Joonis 76.

Seega on sirged x ja y ühe ja sama sirge s ristsirged ja järelikult

$$x \parallel y.$$

Kolme sirge x, y ja z paralleelsust märgime kujul

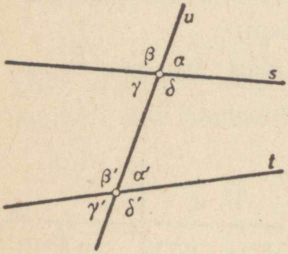
$$x \parallel y \parallel z.$$

§ 40. Kahe sirge lõikumine kolmanda sirgega.

Kui kaht juhuslikku sirget s ja t, millede lõikepunktist me midagi ei tea, lõikame mingi kolmanda sirgega u, siis esineb meil kaks võimalust (vastavalt joonistele 75 a ja 75 c): kas sirged s ja t lõikuvad või on paralleelsed. Kumma juhuga on tegemist, seda saab otsustada nurkade abil, mis tekivad sirgete s ja u lõikumisel ning sirgte t ja u lõikumisel (joonis 77).

Et võrrelda nurki ühe lõikepunkti juurest nurkadega teise lõikepunkti juurest, selleks anname järgmistele nurgapaaridele nimetused:

1. nimetame k a a s n u r k a d e k s kaht nurka ühel pool sirget u, millede haarad sirgel u suunduvad ühtepidi, nagu nurgad α ja α' või γ ja γ';



Joonis 77.

2. nimetame p õ i k n u r k a d e k s kaht nurka, mis asetsevad üks ühel ja teine teisel pool sirget u ja millede haarad sirgel u suunduvad vastamisi, nagu nurgad δ ja β';

3. nimetame l ä h i s n u r k a d e k s kaht nurka ühel pool sirget u, millede haarad sirgel u suunduvad vastamisi, nagu nurgad δ ja α'.

Tõestame nende nurkade kohta järgmise teoreemi:

kui üks paar kaasnurki on võrdsed või kui üks paar põiknurki on võrdsed või kui ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk, siis on kõik kaasnurgad võrdsed, kõik põiknurgad võrdsed ja kõikide lähisnurkade summa sirgnurk.

E e l d u s: $\alpha = \alpha'$ või $\gamma = \alpha'$ või $\delta + \alpha' = 180^0$ (joonis 77).

V ä i d e: kaasnurgad on võrdsed;
põiknurgad on võrdsed;
lähisnurkade summa on sirgnurk.

T õ e s t u s. Eeldame, et üks paar kaasnurki on võrdsed näiteks $\alpha = \alpha'$; siis

$$\beta = \beta' \quad \text{ja} \quad \delta = \delta'$$

kui võrdsete nurkade α ja α' kõrvunurgad ja

$$\gamma = \gamma'$$

kui võrdsete nurkade α ja α' tippnurgad; seega kõik kaasnurgad on võrdsed. Asendades võrdustes

$$\alpha = \alpha' \quad \text{ja} \quad \beta = \beta'$$

nurgad α ja β nendega võrdsete nurkadega γ ja δ saame, et

$$\gamma = \alpha' \quad \text{ja} \quad \delta = \beta';$$

seega põiknurgad on võrdsed. Et α ja δ, samuti ka β ja γ moodustavad kõrvunurkade paari, siis

$$\alpha + \delta = 180^0 \quad \text{ja} \quad \beta + \gamma = 180^0.$$

Asendades α ja β nendega võrdsete nurkadega α' ja β' saame, et

$$\alpha' + \delta = 180^0 \quad \text{ja} \quad \beta' + \gamma = 180^0.$$

Seega lähisnurkade summa on sirgnurk.

Eeldame nüüd, et üks paar põiknurki on võrdsed, näiteks $\gamma = \alpha'$. Et α ja γ on tippnurgad, seega võrdsed, siis ka $\alpha = \alpha'$. Kuid sel juhul, nagu eespool tõestasime, on kõik kaasnurgad võrdsed, põiknurgad võrdsed ja lähisnurkade summa sirgnurk.

Eeldame lõpuks, et ühe paari lähisnurkade summa on sirgnurk, näiteks

$$\delta + \alpha' = 180^0.$$

Et δ ja α on kõrvunurgad, siis

$$\delta + \alpha = 180^0.$$

Neist võrdustest saame, et

$$\delta + \alpha = \delta + \alpha'$$

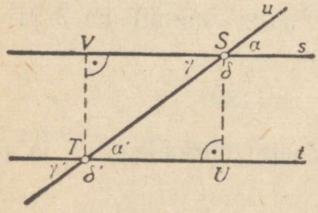
ehk lahutades võrduse mõlemast poolest δ

$$\alpha = \alpha'.$$

Kuid sellest järeldub endisel viisil, et kõik kaasnurgad on võrdsed, põiknurgad on võrdsed ja lähisnurkade summa on sirgnurk, m. o. t. t.

Juhul, kui lõigatavad sirged s ja t on paralleelsed, on ülalmainitud nurkade kohta kehtiv järgmine teoreem:

kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed kaasnurgad, võrdsed põiknurgad ja niisugused lähisnurgad, millede summa on sirgnurk.



Joonis 78.

Eeldus: $s \parallel t$ (joonis 78).

Väide: $\alpha = \alpha'$; $\gamma = \alpha'$;

$\delta + \alpha' = 180^0$.

Tõestus. Joonestame paralleelide s ja t vahelised ristlõigud SU ja TV. Nii saadud täisnurksetes kolmnurkades SUT ja TVS on peale ühise külje ST veel järgmised elemendid võrdsed:

$$SU = TV \text{ ja } \angle U = \angle V.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse KkN järgi

$$\triangle SUT \cong \triangle TVS.$$

Et kongruentsete kolmnurkade vastavad elemendid on võrdsed, siis

$$\alpha' = \gamma,$$

millega on tõestatud, et punktide S ja T juures on üks paar võrdseid põiknurki. Sellest järeldub eespool tõestatud teoreemi alusel, et kaasnurgad on võrdsed, põiknurgad on võrdsed ja lähisnurkade summa on sirgnurk.

165. Kaks paralleelset sirget on lõigatud kolmanda sirgega nii, et üks tekkinud kaheksast nurgast on 63^0. Kui suured on teised nurgad?

166. Arvutada nurgad, mis tekivad kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega, kui, kasutades joonisel 77 leiduvaid tähiseid, nurk $\delta' = 127^0$ ja $\beta' + \gamma = 234^0$.

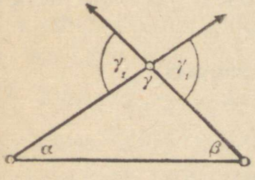
167. Kõrvunurkade ja tippnurkade omadusi rakendades tõestada, et joonisel 77 kasutatud tähistuses $\alpha = \gamma'$, kui $\beta = \beta'$.

168. Tõestada samal viisil kui eelmises ülesandes, et $\delta + \alpha' = 180^0$, kui $\beta = \beta'$.

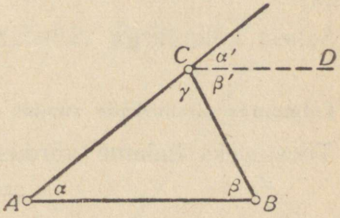
169. Tõestada, et alusega paralleelne sirge, mis lõikab võrdhaarset kolmnurka, eraldab sellest kolmnurga, mis on võrdhaarne.

§ 41. Kolmnurga nurkade omadused.

Pikendame kolmnurga mingit külge üle ühe tipu. Nurka selle pikenduse ja kolmnurga teise külje vahel nimetatakse kolmnurga **välisnurgaks**. See nurk on kolmnurga nurga (ehk **sisenurga**) kõrvunurk. Mõlema külje pikendamisel üle ühe ja sama tipu saaksime tippnurkade paarina kaks



Joonis 79.



Joonis 80.

võrdset välisnurka (joonis 79). Seepärast edaspidi kõneldes kolmnurga välisnurkadest, arvestame iga tipu juures leiduvast välisnurkade paarist ainult **üht** neist kahest, ükskõik kumba. Selle kokkuleppe järgi on kolmnurgal kolm välisnurka, iga tipu juures üks. Kolmnurga välisnurka tähistame sümboliga α_1 või β_1 või γ_1, vastavalt sellele, missuguse sisenurga kõrvunurk ta on.

Tõestame et,

kolmnurga välisnurk võrdub temaga mitte kõrvuti olevate sisenurkade summaga.

Tõestuseks joonestame läbi ühe tipu, näiteks läbi C, paralleeli CD vastasküljele AB. See sirge jaotab välisnurga γ_1 kaheks nurgaks α' ja β' (joonis 80). Et kahe paralleelse sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdseed kaasnurgad ja võrdsed põiknurgad, siis

$$\alpha = \alpha'$$

ja

$$\beta = \beta'.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel saame, et

$$\alpha + \beta = \alpha' + \beta'$$

ehk

$$\alpha + \beta = \gamma_1.$$

Samal viisil tõestub see teoreem ülejäänud kahe välisnurga kohta.

Sellest kolmnurga välisnurga omadusest järeldub kergesti, et

kolmnurga sisenurkade summa võrdub sirgnurgaga.

Tõestuseks liidame võrduse

$$\alpha + \beta = \gamma_1$$

mõlema poolega nurga γ. Siis saame, et

$$\alpha + \beta + \gamma = \gamma_1 + \gamma;$$

γ_1 ja γ kui kõrvunurkade summa on 180°; seega

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ.$$

Sellest teoreemist järeldub, et

1) kolmnurga kahe nurga summa on väiksem kui 180° ja
2) kolmnurgas ei või olla enam kui üks nurk täisnurk või nürinurk,

sest vastasel juhul sisenurkade summa peaks olema suurem kui 180°.

Edasi järeldub sellest teoreemist, et kui ühe kolmnurga kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate nurkadega, siis ka nende kolmandad nurgad on võrdsed. Seetõttu võime kolmnurkade kongruentsuse I tunnuse nüüd järgmiselt üldistada:

kaks kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga üks külg ja kaks nurka on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

Viimase teoreemina kolmnurga nurkade kohta tõestame, et

kolmnurga välisnurkade summa on täispööre.

T õ e s t u s. Kolmnurga iga tipu juures oleva sisenurga ja välisnurga summa on 180° (joonis 81). Seega

$$\alpha + \alpha_1 = 180^\circ,$$
$$\beta + \beta_1 = 180^\circ$$

ja

$$\gamma + \gamma_1 = 180^\circ.$$

Nende võrduste vastavate poolte liitmisel leiame, et

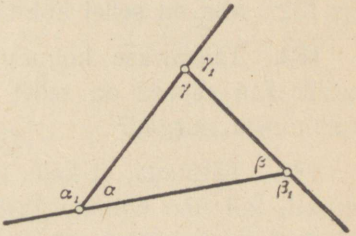
$$\alpha + \beta + \gamma + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 3 \cdot 180^\circ.$$

Et esimese kolme liidetava summa on 180°, siis

$$180^\circ + \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 540^\circ.$$

Lahutades selle võrduse mõlemast poolest 180°, jääb

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 360^\circ.$$



Joonis 81.

Ülesanded.

170. Kui suur on täisnurkse kolmnurga teravnurkade summa?

171. Täisnurkse kolmnurga üks teravnurk on $37^0 48'$. Kui suur on teine teravnurk?

172. Võrdhaarse kolmnurga tipunurk on $72^0 54'$. Kui suured on alusnurgad?

173. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on tipunurgast 14^0 suurem. Arvutada nurkade suurused.

174. Võrdhaarse kolmnurga alusnurk on $52^0 10'$. Kui suured on selle kolmnurga välisnurgad?

175. Kui suur on võrdkülgse kolmnurga nurk?

176. Võrdhaarse kolmnurga tipunurga kõrvunurk on 148^0. Kui suur on alusnurk?

177. Kui suured on kolmnurga nurgad, kui nad suhtuvad nagu $1 : 2 : 3$?

178. Kolmnurga välisnurk $\alpha_1 = 81^0$ ja $\gamma_1 = 117^0 40'$. Kui suured on selle kolmnurga sisenurgad?

179. Mis liiki on kolmnurk, mille üks nurk on $34^0 15'$ ja teine nurk on $55^0 45'$?

180. Kolmnurga nurkadest $\alpha = 66^0 40'$ ja $\beta = 48^0 30'$. Järjestada selle kolmnurga küljed nende pikkuse järgi.

181. Võrdhaarse kolmnurga aluse juures olev välisnurk on 132^0. Mis on sellel kolmnurgal pikem, kas alus või haar?

182. Täisnurkse kolmnurga teravnurk $\alpha = 38^0$ on poolitatud. Kui suured on sellel poolitamisel tekkiva nürinurkse kolmnurga nurgad?

183. Tõestada, et kaks täisnurkset kolmnurka on kongruentsed, kui ühe kolmnurga hüpotenuus ja üks teravnurk on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega.

184. Tõestada, et võrdhaarse kolmnurga haaradele tõmmatud kõrgused on võrdsed.

185. Tõestada, et täisnurkses kolmnurgas 30^0-se teravnurga vastaskaatet on pool hüpotenuusi.

186. Jaotada sirkli ja joonlaua abil täisnurk kolmeks võrdseks nurgaks.

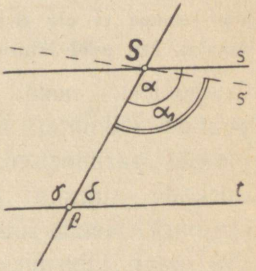
§ 42. Sirgete paralleelsuse tunnused.

Kui kahest sirgest kumbki on risti mingi kolmanda sirgega või kumbki on rööbiti mingi kolmanda sirgega, siis need kaks sirget on paralleelsed (§ 37 ja § 39). Näitame nüüd, et kahe sirge paralleelsust saab kindlaks teha kolmanda sirge abil ka sel juhul, kui kolmas sirge ei ole risti ega ka rööbiti antud sirgega. Selleks tõestame järgmise teoreemi:

kaks sirget on paralleelsed, kui nende lõikamisel kolmanda sirgega tekivad võrdsed kaasnurgad või võrdsed põiknurgad või niisugused lähisnurgad, millede summa on sirgnurk.

Eeldus: $\alpha = \beta$ või $\alpha = \gamma$ või $\alpha + \delta = 180^0$ (joonis 82).
Väide: $s \parallel t$.

Tõestus. Läbi sirge s ja lõikaja ühise punkti S läheb paralleelide aksioomi järgi kindlasti üks sirge, mis on paralleelne sirgega t. Et me esialgu ei tea, kas sirge s on see paralleel või mitte, siis tähistame selle paralleeli tähega s' ja näitame, et s' ja s on üks ja sama sirge. Sirgete s' ja t paralleelsuse tõttu (joonis 82):



Joonis 82.

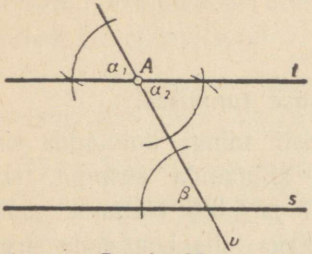
$$\alpha_1 = \beta,\ \alpha_1 = \gamma \text{ ja } \alpha_1 + \delta = 180^0.$$

Kuid eelduse järgi

$$\alpha = \beta \text{ või } \alpha = \gamma \text{ või } \alpha + \delta = 180^0.$$

Kõigil kolmel juhul järeldub neist võrdusepaaridest, et $\alpha_1 = \alpha$. Kuna neil nurkadel üks haar on ühine, siis peab ka teine haar olema ühine, seega sirge s' ühtib sirgega s, ja $s \parallel t$.

Viimane teoreem annab uusi võimalusi sirgele rööpsirge ehitamiseks läbi antud punkti.



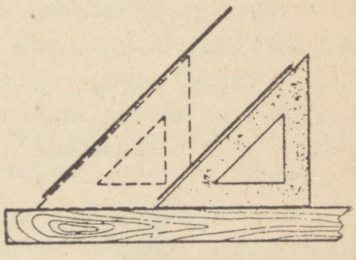
Joonis 83.

Kui joonestada läbi punkti A (joonis 83) mingi antud sirget s lõikav sirge u ja ehitada selle juurde kas nurgaga β võrdne kaasnurk α_1 või nurgaga β võrdne põiknurk α_2, siis ehitatava nurga teine haar t on paralleelne antud sirgega s. Esimest võtet rakendatakse väga sagedasti rööpsirgete joonestamisel joonlaua ja joonestamiskolmnurga abil: kolmnurga nihutamisel piki paigalolevat joonlauda jääb kolmnurga külg ikka paralleelseks oma endise asendiga. Niisugust nihutamist nimetatakse r ö ö p l ü k k e k s (joonis 84).

Eelnenud teoreemidest järeldub järgmine kahe sirge lõikumise tunnus:

kui kahe sirge lõikamisel kolmanda sirgega tekivad lähisnurgad, millede summa ei ole sirgnurk, siis need kaks sirget lõikuvad seal pool lõikajat, kus pool lähisnurkade summa on väiksem kui sirgnurk.

Tõepoolest: need kaks sirget peavad lõikuma, sest kui nad oleksid paralleelsed, siis lähisnurkade summa peaks olema sirgnurk. Nende lõikumise puhul üks paar lähisnurki on kolmnurga ühe külje lähisnurkadeks. Et kolmnurga kahe nurga summa on ikka väiksem kui sirgnurk, siis toimub sirgete lõikumine sealpool, kuspool lähisnurkade summa on väiksem kui sirgnurk.


Joonis 84.

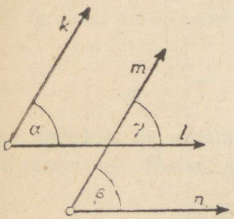
187. Joonestada võrdhaarse kolmnurga tipu juures oleva välisnurga poolitaja ja tõestada, et see on alusega paralleelne.

188. Punktis O lõikuvad kaks sirget. Ühel sirgel on võetud punktid A ja C nii, et $AO = CO$, ja teisel sirgel punktid B ja D nii, et $BO = DO$. Teha joonis ja tõestada, et $AB \parallel DC$.

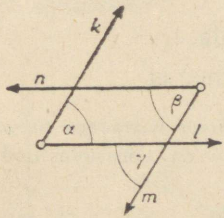
§ 43. Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad.

Vaatleme kaht nurka, milledest ühe haarad on vastavalt paralleelsed teise haaradega.

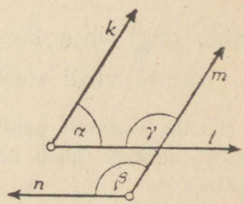
Kaks paralleelset kiirt on kas s a m a s u u n a l i s e d, nagu kiired k ja m joonisel 85, või v a s t a s s u u n a l i s e d,



Joonis 85.



Joonis 86.



Joonis 87.

nagu kiired k ja m joonisel 86. Vastavalt paralleelsete haaradega nurkade juures võivad seepärast esineda järgnevad võimalused:

1. Nurkade haarad on samasuunalised (joonis 85).
2. Nurkade haarad on vastassuunalised (joonis 86).
3. Nurkade ühed haarad on samasuunalised, teised vastassuunalised (joonis 87).

Tõestame, et

vastavalt paralleelsete ja samasuunaliste või vastassuunaliste haaradega nurgad on võrdsed.

E e l d u s: $k \parallel m$, $l \parallel n$, kiired k ja l on mõlemad samasuunalised või mõlemad vastassuunalised kiirtega m ja n.

V ä i d e: $\alpha = \beta$ (joonised 85 ja 86).

T õ e s t u s. Kui nurga β kumbki haar ei lõika nurga α üht haara, siis pikendame üht neist nii, et see lõikumine tekiks. Siis on β ja γ (joonised 85 ja 86) kaasnurgad paralleelsete sirgete n ja l juures ja seega

$$\beta = \gamma.$$

Et nurgad α ja γ on kaasnurgad (joonis 85) või põiknurgad (joonis 86) paralleelsete sirgete k ja m juures, siis

$$\alpha = \gamma.$$

Neist võrdusist järeldub, et

$$\alpha = \beta,$$

mida oligi vaja tõestada.

Samal viisil tõestame, et

kahe vastavalt paralleelsete haaradega nurga summa on sirgnurk, kui nende nurkade ühed haarad on samasuunalised ja teised — vastassuunalised.

Sel juhul (joonis 87) α ja γ on lähisnurgad, mis tekivad paralleelsete sirgete k ja m lõikumisel sirgega l; seetõttu

$$\alpha + \gamma = 180^0.$$

Et γ ja β on kaasnurgad paralleelsete sirgete l ja n juures, siis

$$\gamma = \beta.$$

Asendades saame, et

$$\alpha + \beta = 180^0,$$

mida oligi vaja tõestada.

Ülesanded.

189. Kahest vastavalt paralleelsete haaradega nurgast üks on $\frac{4}{11}$ teisest. Kui suur on kumbki nurk?

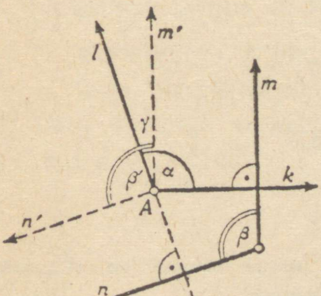
190. Kahest vastavalt paralleelsete haaradega nurgast üks on teisest 76⁰ võrra suurem. Kui suur on kumbki nurk?

191. Joonestada kaks vastavalt paralleelsete ja vastassuunaliste haaradega nurka nii, et nende nurgapoolitajad on ühel ja samal sirgel. Uurida selle kujundi sümmeetriat.

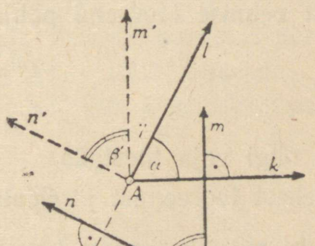
§ 44. Vastavalt ristuvate haaradega nurgad.

Joonestame kaks nurka nii, et ühe nurga haarad on vastavalt risti teise nurga haaradega. Vaatleme juhtu, kui mõlemad nurgad on teravnurgad (joonis 88), ja juhtu, kui mõlemad nurgad on nürinurgad (joonis 89), ning tõestame järgmise teoreemi:

vastavalt ristiseisvate haaradega nurgad on võrdsed, kui nad mõlemad on kas teravnurgad või nürinurgad



Joonis 88.



Joonis 89.

E e l d u s: $m \perp k$; $n \perp l$; α ja β on mõlemad teravnurgad või mõlemad nürinurgad (joonised 88 ja 89).

V ä i d e: $\alpha = \beta$.

T õ e s t u s. Joonestame läbi punkti A kaks kiirt m' ja n' paralleelselt ja samasuunaliselt nurga β haaradega:

$$m' \parallel m \text{ ja } n' \parallel n.$$

Nende kiirte vaheline nurk

$$\beta' = \beta.$$

Et eelduse järgi $m \perp k$ ja $n \perp l$, siis ka $m' \perp k$ ja $n' \perp l$. Seetõttu

	joonisel 88	joonisel 89
	$\alpha + \gamma = 90^0$	$\alpha - \gamma = 90^0$
ja		
	$\beta' + \gamma = 90^0$	$\beta' - \gamma = 90^0$.

Järelikult

$$\alpha + \gamma = \beta' + \gamma \qquad \alpha - \gamma = \beta' - \gamma.$$

Lahutades vasakul käsiteldud juhul võrduse mõlemast poolest γ ja liites paremal käsiteldud juhul γ võrduse mõlema poolega, saame nii ühel kui ka teisel juhul, et

$$\alpha = \beta'.$$

Et eelmise teoreemi põhjal

$$\beta = \beta',$$

siis

$$\alpha = \beta,$$

mida oligi vaja tõestada.

Sellest teoreemist järeldub, et

kahe vastavalt ristuvate haaradega nurga summa on sirgnurk, kui üks nurk on teravnurk ja teine on nürinurk.

Olgu α ja β kaks niisugust nurka ja olgu α teravnurk, β aga nürinurk. Siis α kõrvunurk γ on nürinurk ja tema haarad, samuti kui nurgad α haarad on vastavalt risti nurga β haaradega. Vast-tõestatud teoreemi järgi

$$\gamma = \beta.$$

Et α ja γ on kõrvunurgad, siis

$$\alpha + \gamma = 180^0.$$

Asendades γ temaga võrdse nurgaga β, saame

$$\alpha + \beta = 180^0.$$

192. Joonestada võrdhaarse kolmnurga aluse ühest otspunktist ristsirge vastasolevale haarale. Tõestada, et nurk selle ristsirge ja aluse vahel on pool tipunurgast.

193. Kahe vastavalt ristuvate haaradega nurga vahe on 34^0. Kui suur on kumbki nurk?

194. Nürinurga tipust on joonestatud selle nurga haaradega ristuvad sirged. Nende sirgete vaheline nurk on 42^0. Kui suur on nürinurk?

195. Kahest vastavalt ristuvate haaradega nurgast üks on teisest kolm korda suurem. Kui suur on kumbki nurk?

196. Nurga α haarad k ja l lõikuvad nurga β haaradega m ja n nii, et $k \perp m$, $l \perp n$ ja nurk haarade k ja n vahel on 35^0. Kui suured nurgad on haarade l ja m lõikepunkti juures?

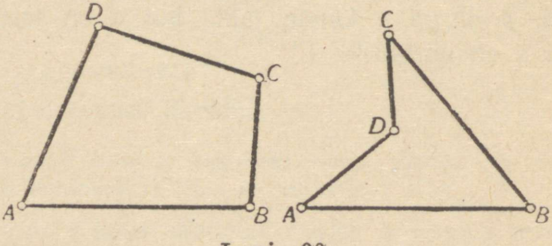
197. Teravnurga β üks haar on risti nurga α ühe haaraga ja teine on paralleelne nurga α teise haaraga. Avaldada nurk β nurga α kaudu juhul, kui α on teravnurk, ja juhul, kui α on nürinurk.

Peatükk VI.

Hulknurk.

§ 45. Hulknurkade liigitelu.

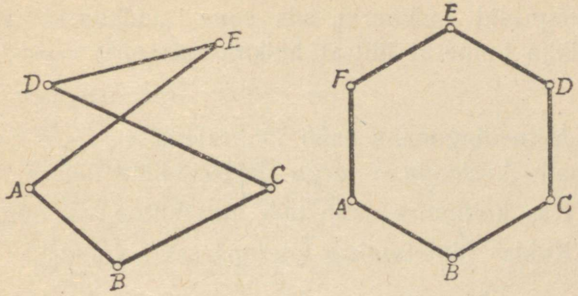
Kui tasapinna neli punkti A, B, C ja D, millede hulgas ei leidu kolme ühel sirgel asetsevat punkti, järjestikku ühendada sirglõikudega, siis tekib kujund, mida nimetatakse n e l i n u r g a k s (joonis 90). Samal viisil tekib viie punkti ühendamisel



Joonis 90.

v i i s n u r k, kuue punkti ühendamisel k u u s n u r k jne. (joonis 91). Kolmnurki, nelinurki, viisnurki jne. nimetatakse üldiselt h u l k n u r k a d e k s.

Antud punkte A, B, C,... nimetatakse h u l k n u r g a t i p p u d e k s ja neid ühendavaid sirglõike h u l k n u r g a k ü l g e d e k s. Hulknurga külgede summa on tema ü m b e r m õ õ t. Kõiki teisi sirglõike, mis ühendavad hulknurga mistahes kaht tippu, nimetatakse hulknurga diagonaalideks*. Hulknurga iga tipu juures on hulknurga üks sisenurk.



Joonis 91.

Hulknurga küljed, nurgad ja diagonaalid on tema elemendid.

Hulknurgad liigitatakse

a) lihtsateks ja mittelihtsateks,

b) kumerateks ja mittekumerateks (ehk nõgusateks),

c) korrapärasteks ja mittekorrapärasteks (ehk korrapäratuteks).

Hulknurka nimetatakse lihtsaks, kui tema külgedel ei ole ühiseid punkte peale tippude.

Joonisel 91 kujutatud hulknurkadest esimene on mittelihtne viisnurk.

Hulknurka nimetatakse kumeraks, kui tema iga sisenurk on väiksem kui sirgnurk.

Joonisel 90 kujutatud nelinurkadest teine on nõgus nelinurk.

Hulknurka nimetatakse korrapäraseks, kui tema kõik küljed on võrdsed ja kõik sisenurgad on võrdsed.

---

* *dia* (kr.) — läbi; *gonia* (kr.) — nurk.

Joonisel 91 kujutatud hulknurkadest teine on korrapärane kuusnurk.

Et käesolevas õpikus edaspidi ei käsitelda mittelihtsaid ega ka nõgusaid hulknurki, siis sõna „hulknurk" tähendab edaspidi ikka kumerat lihtsat hulknurka.

Ülesanded.

198. Mitu diagonaali saab joonestada 4-, 5-, 6-, n-nurga igast tipust? Avaldada n-nurga diagonaalide üldarv.

199. Kas kolmnurk saab olla mittelihtne või nõgus?

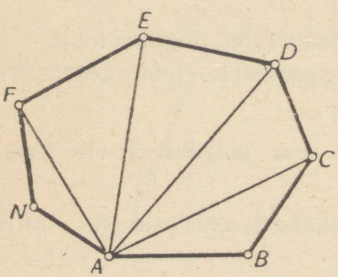
200. Kuidas nimetatakse korrapärast kolmnurka?

§ 46. Hulknurga nurkade summa.

Tõestame, et

n-nurga sisenurkade summa on $(n-2) \cdot 180^0$.

T õ e s t u s. Joonestame diagonaalid hulknurga ühest tipust. Kui hulknurgal on n tippu, siis need diagonaalid tükeldavad hulknurga $n-2$ kolmnurgaks (joonis 92). Nende kolmnurkade sisenurkade summa võrdub hulknurga sisenurkade summaga, sest nende kolmnurkade kõik nurgad on kas hulknurga nurgad või nende osad. Et iga kolmnurga sisenurkade summa on 180^0, siis $n-2$ kolmnurga sisenurkade summa ja seega ka hulknurga sisenurkade summa on



Joonis 92.

$$(n-2) \cdot 180^0,$$

m. o. t. t.

N ä i d e. Nelinurga sisenurkade summa on

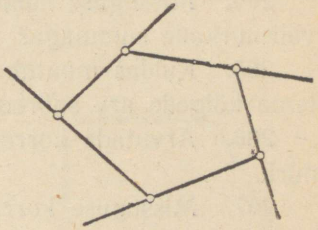
$$(4-2) \cdot 180^0 = 360^0.$$

Kui pikendame hulknurga mingit külge, siis saame selle hulknurga ühe v ä l i s n u r g a. Iga välisnurk on ühe sisenurga kõrvunurk (joonis 93).

Tõestame, et

iga hulknurga välisnurkade summa on 360^0.

Hulknurga iga tipu juures on üks sisenurk ja üks välisnurk; nende summa on 180^0, sest nad on kõrvunurgad. Olgu hulknurk n-nurk; tema n tipu juures olevate sise- ja välisnurkade summa on siis



Joonis 93.

$$n \cdot 180^0;$$

et sisenurkade summa on

$$(n-2) \cdot 180^0,$$

siis välisnurkade summa on

$$n \cdot 180^0 - (n-2) \cdot 180^0$$

ehk

$$n \cdot 180^0 - n \cdot 180^0 + 360^0$$

ehk

$$360^0.$$

J ä r e l d u s. Et korrapärase hulknurga sisenurgad on võrdsed, siis on võrdsed ka välisnurgad; seepärast on korrapärase n-nurga iga välisnurk

$$\frac{360^0}{n}$$

ja iga sisenurk

$$180^0 - \frac{360^0}{n}.$$

N ä i d e. Korrapärase 9-nurga välisnurk on

$$\frac{360^0}{9} \text{ ehk } 40^0$$

ja sisenurk

$$180^0 - 40^0 \text{ ehk } 140^0.$$

201. Kui suur on 12-nurga sisenurkade summa?

202. Kui suur on 18-nurga sisenurkade summa?

203. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on 12 täisnurka; 7 täispööret; 2340°?

204. Missuguse hulknurga sisenurkade summa on võrdne välisnurkade summaga?

205. Kuidas muutub hulknurga sisenurkade summa, kui tema külgede arv suureneb 3 võrra?

206. Arvutada korrapärase 16-nurga sisenurk ja välisnurk.

207. Missuguse korrapärase hulknurga välisnurk on 15°?

208. Missuguse korrapärase hulknurga sisenurk on 135°?

§ 47. Trapets.

Trapets on nelinurk, mille üks paar vastasküligi on paralleelsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 94 kujutatud nelinurk on trapets *, kui $AB \parallel DC$. Trapetsi paralleelseid külgi nimetatakse a l u s t e k s ja teisi külgi h a a r a d e k s. Aluste vaheline ristlõik on trapetsi k õ r g u s. Trapetsi elementide tähistamist juhatab joonis 94.

Trapetsi aluste paralleelsusest järeldame, et

trapetsi haara lähisnurkade summa on 180°.

Selleks paneme tähele, et nurgad A ja D on lähisnurgad paralleelsete sirgete AB ja DC lõikamisel sirgega AD; seetõttu

$$\angle A + \angle D = 180^\circ.$$

Samade paralleelide lõikamisel sirgega BC saame, et

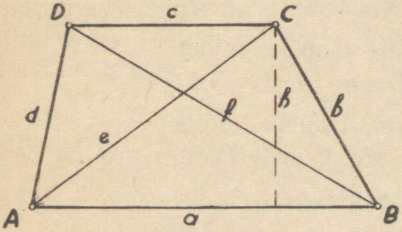
$$\angle B + \angle C = 180^\circ.$$

* *trapeza* (kr.) — laud; nelijalg.

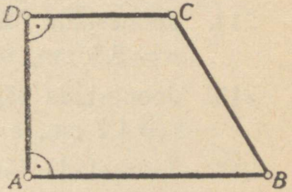
Kui trapetsi üks nurk on täisnurk, siis on selle teoreemi põhjal teine sama haara juures olev nurk samuti täisnurk; kui näiteks

$$\angle A = 90^0, \text{ siis ka } \angle D = 90^0$$

(nagu joonisel 95). Niisugust trapetsit nimetatakse täisnurkseks.



Joonis 94.



Joonis 95.

Diagonaal tükeldab nelinurga kaheks kolmnurgaks, milledel on üks külg ühine. Seetõttu nelinurk üldiselt on määratud oma viie elemendiga. Et trapetsi haara ühe lähisnurgaga teine lähisnurk on määratud, siis trapetsi määramiseks on küllalt neljast elemendist. Nende hulgas muidugi ei või esineda niisuguseid elemente, mis üksteisest olenevad, nagu näiteks kolm nurka, sest trapetsi kolmest nurgast on paratamatult kaks niisugust, millede summa on 180°. Seetõttu trapetsi sisenurkadeks ei saagi anda kolme mistahes nurka. On aga näiteks antud kaks alust, üks haar ja selle üks lähisnurk, siis nende kui olenematute andmetega on trapets määratud ja tema joonestamine on võimalik.

Ülesanded.

209. Joonestada trapets, millel

$$a = 7 \text{ cm}, \; c = 3{,}2 \text{ cm}, \; d = 3{,}5 \text{ cm ja } \alpha = 70^0.$$

210. Joonestada trapets, millel
$a = 6{,}1$ cm, $b = 3{,}2$ cm, $e = 4{,}8$ cm ja $f = 5{,}4$ cm.

211. Joonestada trapets, millel
$a = 5{,}3$ cm, $\alpha = 55^0$, $h = 2{,}4$ cm ja $c = 3{,}1$ cm.

212. Trapetsi ühe aluse lähisnurgad on $74^0 10'$ ja $62^0 30'$. Arvutada teised nurgad.

213. Trapetsi $ABCD$ kohta on teada, et $AC \perp CB$, $AD = DC$ ja $\angle CAB = 32^0$. Kui suured on trapetsi nurgad?

214. Joonestada täisnurkne trapets, millel
$a = 5{,}5$ cm, $b = 3{,}9$ cm ja $d = 3{,}3$ cm.

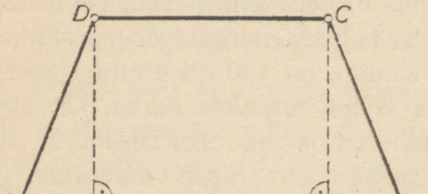
215. Joonestada täisnurkne trapets, millel
$a = 4{,}2$ cm, $c = 2{,}3$ cm ja $h = 2{,}6$ cm.

216. Joonestada täisnurkne trapets, millel
$a = 6{,}4$ cm, $e = 5{,}4$ cm ja $f = 7{,}5$ cm.

§ 48. Võrdhaarne trapets.

Kui trapetsi haarad on võrdsed, siis nimetatakse teda v õ r d h a a r s e k s trapetsiks (joonis 96). Tõestame, et

võrdhaarse trapetsi aluse lähisnurgad on võrdsed.



Joonis 96.

E e l d u s: $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$ (joonis 96).

V ä i d e: $\angle A = \angle B$ ja $\angle D = \angle C$.

T õ e s t u s. Joonestame ühe aluse otspunktidest, näiteks punktidest D ja C, ristlõigud DK ja CL teise aluseni. Et paralleelide vahelised ristlõigud on võrdsed, siis

$$DK = CL.$$

Eelduse järgi

$$AD = BC$$

ja joonise järgi

$$\angle K = \angle L.$$

Rakendades kolmnurkade kongruentsuse tunnust KkN saame, et

$$\triangle ADK \cong \triangle BCL.$$

Kuid siis on võrdsed nende kolmnurkade kõik vastavad elemendid, seega ka

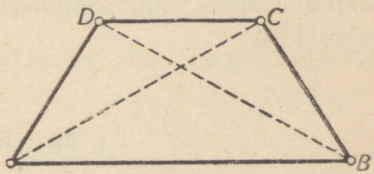
$$\angle A = \angle B.$$

Sellest on kerge järeldada, et ka

$$\angle D = \angle C.$$

Järgmise teoreemina tõestame, et

võrdhaarse trapetsi diagonaalid on võrdsed.



Joonis 97.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD = BC$ (joonis 97).

Väide: $BD = AC$.

Tõestus. Kolmnurkades ABD ja ABC eelduse järgi

$$AD = BC$$

eelmise teoreemi järgi

$$\angle A = \angle B$$

ja ühise küljena neis kolmnurkades esineb AB.

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ABD \cong \triangle BAC;$$

sellest järeldubki, et

$$BD = AC.$$

217. Joonestada võrdhaarne trapets, millel $a = 6$ cm, $\alpha = 60^\circ$ ja $b = 3$ cm.

218. Joonestada võrdhaarne trapets, millel $a = 3{,}9$ cm, $e = 5{,}2$ cm ja $b = 2{,}5$ cm.

219. Võrdhaarse trapetsi vastasnurkade vahe on $48^\circ 34'$. Kui suured on trapetsi nurgad?

220. Võrdhaarse trapetsi haar on võrdne lühema alusega ja risti diagonaaliga. Kui suured on trapetsi nurgad?

221. Võrdhaarse trapetsi ümbermõõt on 54 cm ja pikem alus 18 cm. Leida lühem alus teades, et diagonaal poolitab pikema aluse lähisnurga.

222. Tõestada, et võrdhaarne trapets on sümmeetriline kujund.

223. Tõestada, et võrdhaarsest kolmnurgast eraldub võrdhaarne trapets, kui kolmnurgas joonestada alusega paralleelne lõik.

§ 49. Rööpkülik.

Rööpkülik on nelinurk, millel kaks paari vastaskülgi on paralleelsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 98 kujutatud nelinurk on rööpkülik, kui

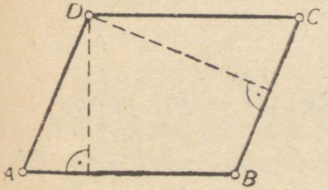
$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC.$$

Rööpkülikut nimetatakse ka p a r a l l e l o g r a m m i k s*. Rööpküliku kahe vastaskülje vahelist ristlõiku nimetatakse rööpküliku kõrguseks. Et vastaskülgi on rööpkülikul kaks paari, siis on tal ka kaks kõrgust.

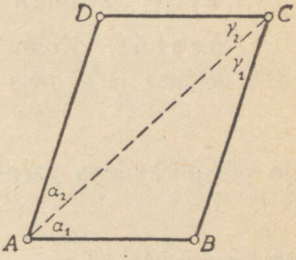
* *parallelogrammon* (kr.) — kõrvutiminev joonis.

Peale eespool-antud definitsiooni on rööpkülikul veel mitmeid tunnuseid, millede alusel saab otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik või mitte. Üheks niisuguseks tunnuseks on järgmine teoreem:

võrdsete vastaskülgedega nelinurk on rööpkülik.



Joonis 98.



Joonis 99.

E e l d u s: $AB = DC$ ja $AD = BC$ (joonis 99).

V ä i d e: nelinurk $ABCD$ on rööpkülik.

T õ e s t u s. Joonestame nelinurga ühe diagonaali, näiteks diagonaali AC. Siis

$$\triangle ABC \cong \triangle CDA,$$

sest ühe kolmnurga kolm külge on võrdsed teise kolmnurga vastavate elementidega. Kuid siis

$$\alpha_1 = \gamma_2 \text{ ja } \gamma_1 = \alpha_2$$

kui vastavad nurgad neis kolmnurkades. Nende nurkade võrdsusest järeldub, et

$$AB \parallel DC \text{ ja } AD \parallel BC,$$

kuna nimetatud sirgete lõikamisel sirgega AC on tekkinud võrdsed põiknurgad. Et nelinurga $ABCD$ vastasküljed on paralleelsed, siis ta ongi rööpkülik.

Teine teoreem, mis võimaldab otsustada, kas antud nelinurk on rööpkülik, on järgmine:

nelinurk, mille ühed vastasküljed on võrdsed ja paralleelsed, on rööpkülik.

E e l d u s: $AD = BC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 99).

V ä i d e: nelinurk $ABCD$ on rööpkülik.

T õ e s t u s. Kolmnurkadel ADC ja CBA on ühine külg AC, eelduse järgi neis kolmnurkades

$$AD = BC$$

ja põiknurkadena paralleelsete sirgete AD ja BC juures

$$\alpha_2 = \gamma_1.$$

Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ADC \cong \triangle CBA.$$

Kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et

$$\alpha_1 = \gamma_2$$

ja seega nelinurga $ABCD$ vastasküljed AB ja DC on paralleelsed. Et eelduse järgi nelinurgal $ABCD$ ka teine paar vastasküלgi on paralleelsed, siis on ta rööpkülik.

Rööpküliku kaht lähisküلge tähistame tähtedega a ja b, külje a lähisnurki tähtedega α ja β, diagonaale tähtedega e ja f.

Ülesanded.

224. Joonestada rööpkülik, millel $a = 3{,}9$ cm, $b = 2{,}9$ cm ja $e = 5{,}8$ cm.

225. Joonestada rööpkülik, millel $a = 4{,}5$ cm, $\alpha = 48^0$ ja $f = 4{,}2$ cm.

226. Joonestada rööpkülik, millel $a = 5{,}5$ cm, $\beta = 130^0$ ja $b = 4{,}1$ cm.

227. Tõestada, et nelinurk, mille diagonaalid poolitavad teineteist, on rööpkülik.

228. Eelmises ülesandes tõestatud lauset kasutades joonestada rööpkülik, millel $a = 5{,}7$ cm, $e = 7{,}2$ cm ja $f = 5{,}2$ cm.

§ 50. Rööpküliku omadused.

Tõestame kõigepealt, et

diagonaal tükeldab rööpküliku kaheks kongruentseks kolmnurgaks.

Eeldus: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 100).

Väide: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

Tõestus. Kolmnurkadel ABD ja CDB on ühine külg BD; selle külje lähisnurkadest

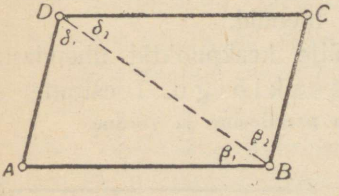
$$\beta_1 = \delta_2$$

kui põiknurgad paralleelide AB ja DC juures ning

$$\delta_1 = \beta_2$$

kui põiknurgad paralleelide AD ja BC juures. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn põhjal järeldame eeltoodust, et

$$\triangle ABD \cong \triangle CDB.$$



Joonis 100.

Järeldus. Et kolmnurkade ABD ja CDB vastavad küljed on võrdsed, siis

$$AB = DC \text{ ja } AD = BC.$$

Tähendab

rööpküliku vastasküljed on võrdsed.

Samuti ka

$$\angle A = \angle C \quad \text{ja} \quad \angle B = \angle D,$$

sest nad on vastavateks nurkadeks kolmnurkades, milledeks rööpküliku jaotab diagonaal BD või diagonaal AC. Seega

rööpküliku vastasnurgad on võrdsed.

Tõestame veel, et

rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist.

E e l d u s: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$ (joonis 101).

V ä i d e: $AO = CO$ ja $BO = DO$.

T õ e s t u s. Kolmnurkade AOD ja COB külgedest

$$AD = BC,$$

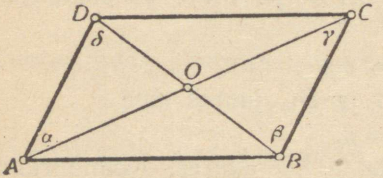
sest nad on rööpküliku vastasküljed, aga

$$\alpha = \gamma$$

kui põiknurgad rööpsirgete AD ja BC lõikaja AC juures ja

$$\delta = \beta$$

kui põiknurgad samade rööpsirgete lõikaja BD juures. Kuid siis kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn järgi



Joonis 101.

$$\triangle AOD \cong \triangle COB.$$

Sellest järeldub, et

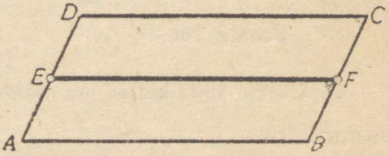
$$AO = CO \text{ ja } BO = DO,$$

sest nad on kongruentsete kolmnurkade vastavad elemendid.

Kui rööpküliku kahe vastaskülje keskpunktid ühendame sirglõigu abil, saame rööpküliku k e s k l õ i g u. Tõestame, et **rööpküliku kesklõik on kahe küljega paralleelne ja võrdne.**

E e l d u s: $AB \parallel DC$ ja $AD \parallel BC$;

$AE = DE$ ja $BF = CF$ (joonis 102).



Joonis 102.

V ä i d e: $EF \parallel AB$ ja $EF = AB$.

T õ e s t u s. Et rööpküliku vastasküljed on paralleelsed ja võrdsed, siis on seda ka nende poolitamisel saadud lõigud; seetõttu

$$AE \parallel BF \text{ ja } AE = BF.$$

Nelinurk $ABFE$ on seega rööpkülik. Sellest järeldub, et

$$EF \parallel AB \text{ ja } EF = AB,$$

mida oligi vaja tõestada. Rööpküliku omaduste tõttu on siis kesklõik EF muidugi ka küljega DC paralleelne ja võrdne.

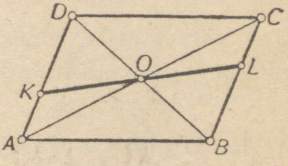
Ülesanded.

229. Rööpküliku ümbermõõt on 18,6 dm. Üks külg on teisest 1,8 dm pikem. Kui pikad on küljed?

230. Rööpküliku ümbermõõt on 5,5 m ja üks külg on $\frac{5}{6}$ teisest. Kui pikad on küljed?

231. Rööpküliku üks nurk on $57^{0}\,15'$. Kui suured on teised nurgad?

232. Rööpküliku üks nurk on $52^{0}20'$ suurem kui teine. Leida nurkade suurused.



Joonis 103.

233. Rööpküliku pikema külje lähisnurkade poolitajad jaotavad vastaskülje kolmeks lõiguks. Leida nende lõikude pikkused, kui rööpküliku küljed on 7 cm ja 3 cm.

234. Võrdhaarse kolmnurga alusel vabalt võetud punktist on joonestatud sirged rööbiti haaradega. Leida saadud rööpküliku ümbermõõt, kui selle kolmnurga haar on 12 cm.

235. Tõestada, et rööpküliku ühe külje lähisnurkade poolitajad on risti.

236. Tõestada, et rööpküliku vastasnurkade poolitajad on paralleelsed.

237. Tõestada, et lõigud KO ja LO joonisel 103 on võrdsed, kui $ABCD$ on rööpkülik.

238. Leida, kui pikad on lõigud AD ja BC joonisel 103, kui $ABCD$ on rööpkülik ja $AK = 1{,}7$ m ning $BL = 2{,}4$ m.

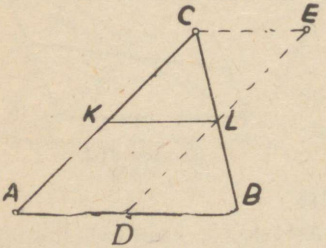
§ 51. Kolmnurga kesklõik.

Leiame kolmnurga kahe külje keskpunktid ja ühendame need sirglõiguga. Seda lõiku nimetatakse k o l m n u r g a k e s k l õ i g u k s. Tõestame, et

kolmnurga kahe külje keskpunkte ühendav lõik on paralleelne kolmanda küljega ja võrdub poolega sellest küljest.

E e l d u s: $AK = CK;\ BL = CL$ (joonis 104).

V ä i d e: $KL \parallel AB$ ja $KL = \frac{AB}{2}$.



Joonis 104.

T õ e s t u s. Läbi punkti L joonestame abisirge paralleelselt küljega AC ja läbi punkti C teise abisirge paralleelselt küljega AB. Lõigaku esimene abisirge külge AB punktis D ja teist abisirget punktis E. Saadud nelinurk $ADEC$ on rööpkülik, sest tema vastasküljed on paralleelsed. Näitame, et lõik KL on selle rööpküliku kesklõik. Selleks on vaja näidata, et punktid K ja L on vastavalt külgede AC ja DE keskpunktid. Punkti K kohta on see teada eeldusest ja punkti L kohta selgub see kolmnurkadest BDL ja CEL. Neis kolmnurkades eelduse järgi

$$BL = CL,$$

nurgad BLD ja CLE on võrdsed kui tippnurgad ning nurgad DBL ja ECL on võrdsed kui põiknurgad paralleelide AB ja CE lõikaja BC juures. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn järgi seega

$$\triangle BDL \cong \triangle CEL,$$

millest järeldub, et

$$DL = EL.$$

Punkt L on järelikult külje DE keskpunkt ja seega KL on rööpküliku $ADEC$ kesklõik. Rööpküliku kesklõigu omaduste tõttu

$$KL \parallel AD \text{ ja } KL = AD.$$

Et $AD = CE$ kui rööpküliku vastasküljed ja $DB = CE$ kui kongruentsete kolmnurkade BDL ja CEL vastavad küljed, siis $AD = DB$; järelikult

$$AD = \frac{AB}{2}.$$

Avaldades lõigu KL omadused nüüd AB abil, saame

$$KL \parallel AB \text{ ja } KL = \frac{AB}{2}.$$

Ülesanded.

239. Kolmnurga küljed on 22 m, 28 m ja 34 m. Tema külgede keskpunktide ühendamisel saadakse uus kolmnurk. Kui pikad on viimase küljed?

240. Kolmnurga ümbermõõt on $2p$. Kui suur ümbermõõt on kolmnurgal, mis saadakse esimese kolmnurga külgede keskpunktide ühendamisel.

241. Tõestada, et sirge, mis läbib kolmnurga ühe külje keskpunkti ja on rööbiti teise küljega, poolitab kolmanda külje.

242. Nurga sees on võetud punkt P. Joonestada läbi punkti P sirge, mille lõik nurga haarade vahel poolitub punktis P.

§ 52. Trapetsi kesklõik.

Leiame trapetsi haarade keskpunktid ja ühendame need sirglõiguga. See lõik on t r a p e t s i k e s k l õ i k. Rakendades kolmnurga kesklõigu omadusi tõestame, et

trapetsi kesklõik on alustega paralleelne ja tema pikkus on aluste pikkuste poolsumma.

E e l d u s: $AB \parallel DC$; $AK = DK$; $BL = CL$ (joonis 105).

V ä i d e: $KL \parallel AB$ ja $KL = \frac{AB + DC}{2}$.

T õ e s t u s. Joonestame sirge läbi punktide D ja L. See sirge ei ole paralleelne sirgega AB, järelikult lõikab teda mingis punktis E. Näitame, et lõik KL on kolmnurga AED kesklõik. Kuna punkt K on eelduse järgi külje AD keskpunkt, siis on vaja veel näidata, et punkt L on külje ED keskpunkt. Et ta seda on, see järeldub kolmnurkade BLE ja CLD kongruentsusest. Neis kolmnurkades eelduse järgi

$$BL = CL,$$

nurgad BLE ja CLD on võrdsed kui tippnurgad ning nurgad LBE ja LCD on võrdsed kui põiknurgad rööpsirgete AB ja DC juures. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse nkn järgi

$$\triangle BLE \cong \triangle CLD,$$

millest järeldubki, et

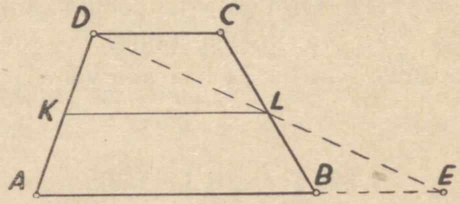
$$EL = DL.$$

Punkt L on seega külje ED keskpunkt ja lõik KL on kolmnurga AED kesklõik. Kesklõigu omaduste tõttu

$$KL \parallel AE \text{ ja } KL = \frac{AE}{2}.$$

Kuid AE on seesama sirge, mis AB; järelikult ka

$$KL \parallel AB.$$



Joonis 105.

Et $AE = AB + BE$ ja kolmnurkade BLE ja CLD kongruentsuse tõttu $BE = DC$, siis

$$AE = AB + DC;$$

sellepärast võime ülalsaadud võrdust KL pikkuse kohta kirjutada järgmiselt:

$$KL = \frac{AB + DC}{2}.$$

243. Trapetsi alused on 8,7 cm ja 5,9 cm. Kui pikk on kesklõik?

244. Trapetsi üks alus on 16 cm ja kesklõik 12 cm. Kui pikk on teine alus?

245. Trapetsi üks alus on 4,8 cm ja kesklõik 6,4 cm. Kui pikk on teine alus?

246. Tõestada, et trapetsi kesklõik poolitab trapetsi kõrguse.

247. Trapetsi kesklõik on 21,5 cm ja üks alus on teisest 7 cm pikem. Kui pikad on alused?

248. Trapetsi kesklõik on 12 cm. Diagonaal tükeldab selle lõikudeks, milledest üks on teisest 3 cm pikem. Kui pikad on trapetsi alused?

§ 53. Romb.

Romb on nelinurk, mille küljed on võrdsed *

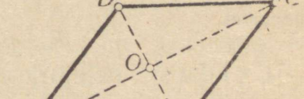
Selle definitsiooni järgi joonisel 106 kujutatud nelinurk on romb, kui

$$AB = BC = CD = AD.$$

Et rööpküliku vastasküljed on võrdsed, siis saame rombi defineerida ka järgmiselt:

romb on rööpkülik, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed.

Sellest definitsioonist järeldub siis juba kõikide külgede võrdsus.



Joonis 106.

Et romb on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused. Lisaks neile on rombil veel eriomadusi. Tähtsaim neist on see, et

rombi diagonaalid ristuvad.

---

* *rhombus* (kr.) — varem kaksikkoonus, hiljem võrdkülgne nelinurk.

E e l d u s: $AB = BC = CD = AD$ (joonis 106).

V ä i d e: $AC \perp BD$.

T õ e s t u s. Vaatleme kolmnurka ACD. Eelduse järgi

$$AD = CD,$$

nii et kolmnurk ACD on võrdhaarne. Et rombi kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist, siis punkt O on kolmnurga aluse AC keskpunkt. Võrdhaarse kolmnurga aluse keskpunkti ja tipu ühenduslõik on ühtlasi kolmnurga kõrgus. Seetõttu

$$DO \perp AC$$

ehk, teisiti,

$$AC \perp BD,$$

mis tõestada oligi.

Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on ühtlasi tipunurga poolitaja. Nii poolitab DO nurga ADC; see tähendab aga, et

rombi diagonaal poolitab rombi nurga.

Rombi diagonaali nende kahe omaduse tõttu

rombi diagonaal on rombi sümmeetriateljeks.

Et rombil on kaks diagonaali, siis on tal ka kaks sümmeetriatelge. Tõestame, et

rombi diagonaalide lõikepunkt asetseb rombi külgedest võrdsetel kaugustel.

E e l d u s: nelinurk $ABCD$ on romb ja O tema diagonaalide lõikepunkt; $OK \perp AD$; $OL \perp AB$; $OM \perp BC$; $ON \perp CD$ (joonis 107).

V ä i d e: $OK = OL = OM = ON$.

T õ e s t u s. Eestpoolt teame, et nurgapoolitaja iga punkt asetseb võrdsetel kaugustel nurga haaradest. Et diagonaal

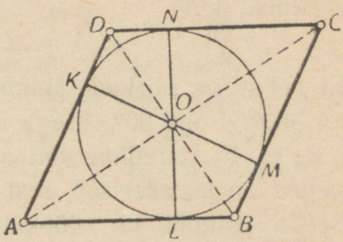
AC on rombi nurkade A ja C poolitaja, siis on punkt O võrdsetel kaugustel nurga A haaradest ja nurga C haaradest, seega

$$OK = OL \text{ ja } OM = ON.$$

Seesama punkt O kui diagonaali BD punkt on võrdsetel kaugustel nurga B haaradest ja

$$OL = OM.$$

Ühendades need kolm võrdust saame



Joonis 107.

$$OK = OL = OM = ON,$$

mis tõestada oligi.

Ringjoon, mille keskpunktiks on punkt O ja raadiuseks on lõik OK, läbib punkte K, L, M ja N. Seda ringjoont nimetatakse rombi siseringjooneks. Siseringjoone kohta öeldakse, et ta on joonestatud rombi sisse.

Ülesanded.

249. Joonestada romb, mille külg on 5 cm ja diagonaal on 8 cm.

250. Joonestada romb, mille külg on 6,5 cm ja üks nurk on 45^0.

251. Joonestada romb, mille diagonaalide pikkused on antud.

252. Tõestada, et rombi kõrgused on võrdsed.

253. Tõestada, et ristuvate diagonaalidega rööpkülik on romb.

254. Joonestada romb, mille külg võrdub ühe diagonaaliga, ja konstrueerida selle siseringjoon.

§ 54. Ristkülik.

Ristkülik on nelinurk, mille nurgad on võrdsed.

Selle definitsiooni järgi joonisel 108 kujutatud nelinurk on ristkülik, kui

$$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D.$$

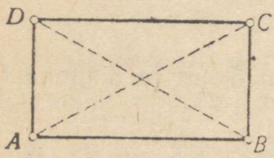
Et nelinurga nurkade summa on 360°, siis ristküliku iga nurk on 360°: 4 ehk 90°. Seega ristkülik on täisnurkne nelinurk. Et ristküliku iga nurk on täisnurk, siis tema vastasküljed on paralleelsed, sest nad on risti ühe ja sama sirgega. Seega ristkülik on rööpkülik ja teda saab defineerida veel järgmiselt:

ristkülik on rööpkülik, mille üks nurk on täisnurk.

Sellest definitsioonist järeldub rööpküliku omaduste põhjal otsekohe, et ristküliku kõik nurgad on täisnurgad.

Et ristkülik on rööpkülik, siis on tal kõik rööpküliku omadused. Ristküliku ühe eriomadusena tõestame, et

ristküliku diagonaalid on võrdsed.



Joonis 108.

Eeldus: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$ (joonis 108).

Väide: $AC = BD$.

Tõestus. Vaatleme kolmnurki ABC ja BAD. Neil on ühiseks küljeks AB, eelduse järgi nurgad B ja A võrdsed ning ristküliku vastaskülgedena ka küljed BC ja AD võrdsed. Kolmnurkade kongruentsuse tunnuse knk järgi

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD.$$

Kuid siis on võrdsed ka nende kolmnurkade kolmandad küljed, nimelt

$$AC = BD.$$

Sellest ristküliku omadusest järeldub, et

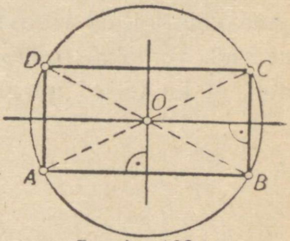
ristküliku diagonaalide lõikepunkt on ristküliku tippudest võrdsetel kaugustel.

Tõepoolest, kuna ristküliku kui rööpküliku diagonaalid poolitavad teineteist ja seejuures diagonaalid on võrdsed, siis on võrdsed ka nende pooled; seega (joonis 109)

$$AO = BO = CO = DO.$$

Ringjoon, mille keskpunktiks on O ja raadiuseks on OA, läbib ristküliku tippe A, B, C ja D. Seda ringjoont nimetatakse ristküliku ümberringjooneks. Selle ringjoone kohta öeldakse, et ta on joonestatud ristküliku ümber.

Kui ristküliku diagonaalide lõikepunktist O (joonis 109) joonestada ristsirge ühele küljele, siis see sirge on risti ka vastasküljega, sest paralleelidel on ristsirged ühised. Ühtlasi poolitab see ristküliku kaks külge, sest punktist O näiteks küljele AB joonestatud ristsirge kui võrdhaarse kolmnurga ABO kõrgus poolitab aluse AB. Nii selgub, et



Joonis 109.

diagonaalide lõikepunktist ristküliku küljele joonestatud ristsirge on ristküliku sümmeetriatelg.

Neid telgi on ristkülikul kaks.

Ülesanded.

255. Joonestada ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on 4,8 cm ja 7,5 cm.

256. Joonestada ristkülik, mille üks külg ja diagonaal on antud.

257. Joonestada ristkülik, mille ümberringjoone raadius on 3,5 cm ja nurk diagonaalide vahel on 35^0.

258. Tõestada, et ristküliku külgede keskpunktid on ühe rombi tippudeks.

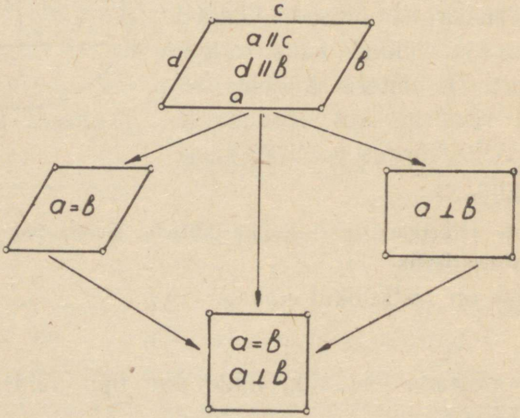
259. Tõestada, et rombi külgede keskpunktid on ühe ristküliku tippudeks.

260. Tõestada, et võrdsete diagonaalidega rööpkülik on ristkülik.

§ 55. Ruut.

Ruut on ristkülik, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed.

Sellest definitsioonist järeldub, et ruudu k õ i k küljed on võrdsed; tõepoolest: ristkülikul on vastasküljed ikka võrdsed; kui lisaks sellele ka ühe tipu lähisküljed on võrdsed, siis on juba kõik küljed võrdsed. Selle omaduse tõttu võib ruutu defineerida rombina, mille üks nurk on täisnurk. Sellest järeldub, et ka teised nurgad on täisnurgad.

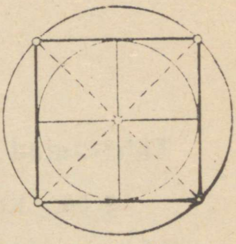


Joonis 110.

Rombi ja ristkülikut on võimalik defineerida rööpküliku abil. Ka ruutu võime vaadelda rööpkülikuna, nimelt niisuguse rööpkülikuna, mille ühe tipu lähisküljed on võrdsed ja risti. Seega on romb, ristkülik ja ruut erikujulised rööpkülikud (joonis 110).

Et ruut on nii ristkülik kui ka romb, siis on ruudul kõik rombi ja ühtlasi ka kõik ristküliku omadused. Ruudul kui ristkülikul on kõik nurgad võrdsed ja kui rombil — kõik küljed võrdsed: ruut on k o r r a p ä r a n e n e l i n u r k. Sümmeetriatelgedeks on ruudul nii rombi kui ka ristküliku sümmeetriateljed, nii et ruudul on n e l i sümmeetriatelge. Punkti, milles lõikuvad need neli sümmeetriatelge, nimetatakse r u u d u k e s k p u n k t i k s (joonis 111).

Ruudu keskpunkt on võrdsetel kaugustel ruudu külgedest ja võrdsetel kaugustel ruudu tippudest.



Joonis 111.

Seepärast saab ruudule nii sisse kui ka ümber joonestada ringjoont (joonis 111).

Ülesanded.

261. Joonestada ruut, mille küljeks jääb antud sirglõik.

262. Joonestada ruut, mille diagonaal on 6,5 cm.

263. Joonestada ruut antud ringjoone sisse.

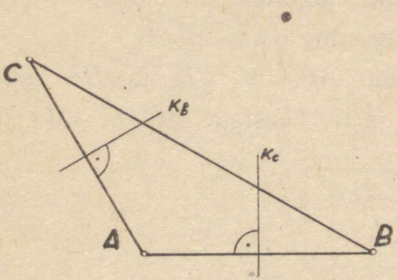
264. Ruudu $ABCD$ külgede AB, BC, CD ja DA keskpunktid on vastavalt K, L, M ja N. Tõestada, et AL, AM, CK ja CN lõikumisel tekib romb.

Peatükk VII.

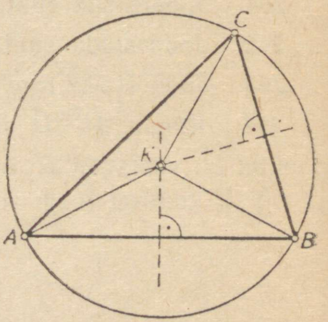
Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas.

§ 56. Kolmnurga külgede keskristsirged.

Tähistame kolmnurga külgede a, b ja c keskristsirgeid vastavalt sümbolitega k_a, k ja k_c. Küsime, kuidas asetsevad teineteise suhtes mingi paar keskristsirgeid, näiteks k_b ja k_c. On kerge näha, et nad ei või olla paralleelsed. Tõepoolest, kui k_b oleks paralleelne sirgega k_c, siis peaks külg b olema risti ka sirgega k_c, sest paralleelidel on ristsirged ühised



Joonis 112.



Joonis 113.

(joonis 112). Kuid siis oleks külgede b ja c ühisest punktist A sirgele k_c joonestatud kaks ristsirget, mida olla ei saa. Järelikult

kolmnurga kahe külje keskristsirged lõikuvad.

Joonestame kolmnurga ABC külgede AB ja BC keskristsirged ja tähistame nende lõikepunkti tähega K (joonis 113).

Et keskristsirge iga punkt on võrdsetel kaugustel lõigu otspunktidest ja et punkt K on nii esimese kui ka teise keskristsirge punkt, siis

$$AK = BK$$

ja

$$CK = BK,$$

seega

$$AK = CK.$$

Viimasest võrdusest on näha, et punkt K on ka külje AC keskristsirgel, sest ainult lõigu keskristsirge punktid on võrdsetel kaugustel selle lõigu otspunktidest. Niisiis

kolmnurga külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga tippudest võrdsetel kaugustel.

Joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt ja raadiuseks on selle punkti kaugus tippudest. See ringjoon läbib kolmnurga kõiki tippe. Ringjoont, mis läbib kolmnurga iga tippu, nimetatakse kolmnurga ümberringjooneks. Öeldakse ka, et see ringjoon on joonestatud kolmnurga ümber ehk — kolmnurk on joonestatud ringjoone sisse.

Seega:

kolmnurga ümberringjoone keskpunktiks on külgede keskristsirgete lõikepunkt.

Et kolmnurga külgede keskristsirged ikka lõikuvad ja ainult ühes punktis, siis

iga kolmnurga tippe läbib üksainus ringjoon.

Sellest järeldub, et

läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel, läheb ainult üks ringjoon,

sest kolm niisugust punkti võib võtta kolmnurga tippudeks. Kui kolm punkti asetseb ühel ja samal sirgel, siis ei leidu ringjoont, mis läbiks kõiki neid punkte, sest nendega määratud lõikude keskristsirged ei lõiku vaid on paralleelsed kui ühe ja sama sirge ristsirged.

Ülesanded.

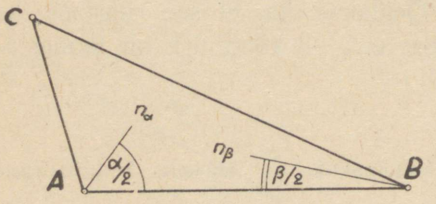
265. Otsustada, kus on ümberringjoone keskpunkt teravnurksel, kus täisnurksel ja kus nürinurksel kolmnurgal.

266. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on 10 cm. Kui pikk on kolmnurga ümberringjoone raadius?

267. Joonestada ringjoon läbi kolme punkti, mis ei asetse ühel ja samal sirgel.

§ 57. Kolmnurga nurkade poolitajad.

Tähistame kolmnurga nurkade α, β ja γ poolitajaid vastavalt n_α, n_β ja n_γ. Mingi nurgapaari poolitajad, näiteks r_α ja n_β ikka lõikuvad, sest kui nad ei lõikuks, oleksid nad paralleelsed, ja siis nende lõikamisel sirgega AB peaksid tekkima lähisnurgad $\frac{\alpha}{2}$ ja $\frac{\beta}{2}$, millede summa peaks olema 180° (joonis 114). Et teatavasti



Joonis 114.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0,$$

siis

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} < 180^0;$$

järelikult n_α ja n_β lõikuvad ja nimelt kolmnurga sees. Tähistame nende lõikepunkti tähega N (joonis 115). Et nurgapoolitaja punkt on nurga haaradest võrdsetel kaugustel ja punkt N asetseb nii nurga A kui ka nurga B poolitajal, siis

$$NP = NQ$$

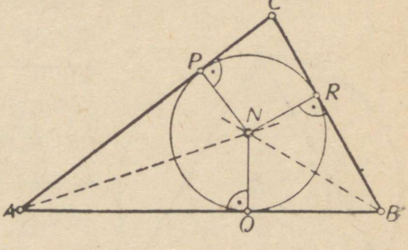
ja

$$NR = NQ,$$

seega

$$NP = NR.$$

Viimasest võrdusest on näha, et punkt N asetseb ka nurga C poolitajal, sest ainult nurgapoolitaja punktid on nurga haaradest võrdsetel kaugustel.



Joonis 115.

Niisiis

kolmnurga nurkade poolitajad lõikuvad kõik ühes punktis, mis on selle kolmnurga külgedest võrdsetel kaugustel.

Joonestame ringjoone, mille keskpunktiks on nurgapoolitajate lõikepunkt ja raadiuseks on selle punkti kaugus kolmnurga külgedest. Sellel ringjoonel on kolmnurga iga küljega üks ühine punkt. Seda ringjoont nimetatakse kolmnurga siseringjooneks. Öeldakse ka, et see ringjoon on joonestatud kolmnurga sisse ehk — kolmnurk on joonestatud ringjoone ümber.

Seega

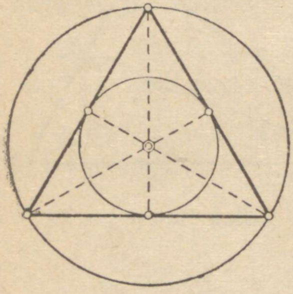
kolmnurga siseringjoone keskpunktiks on kolmnurga nurgapoolitajate lõikepunkt.

Et nurgapoolitajad ikka lõikuvad ja ainult ühes punktis, siis

iga kolmnurga sisse saab joonestada ainult ühe ringjoone.

Kui kolmnurk pole võrdkülgne, siis tema ümberringjoone keskpunkt ja siseringjoone keskpunkt ei ühti. Võrdkülgse kolmnurga külgede keskristsirged on ühtlasi ka nurkade poolitajad ja seepärast

võrdkülgse kolmnurga ümberringjoone keskpunkt on ühtlasi ka tema siseringjoone keskpunktiks.



Joonis 116.

Seda punkti nimetatakse võrdkülgse kolmnurga k e s k p u n k t i k s (joonis 116). See punkt on võrdsetel kaugustel tippudest ja võrdsetel kaugustel külgedest.

Ülesanded.

268. Joonestada nürinurkne kolmnurk ja selle sise- ja ümberringjoon.

269. Joonestada võrdkülgne kolmnurk küljega 5 cm ja leida selle keskpunkt.

270. Leida kolmnurga küljel punkt, mis on võrdsetel kaugustel kahest ülejäänud küljest.

271. Leida kolmnurga ühe nurga poolitajal punkt, mis on kolmnurga kahest ülejäänud tipust võrdsetel kaugustel.

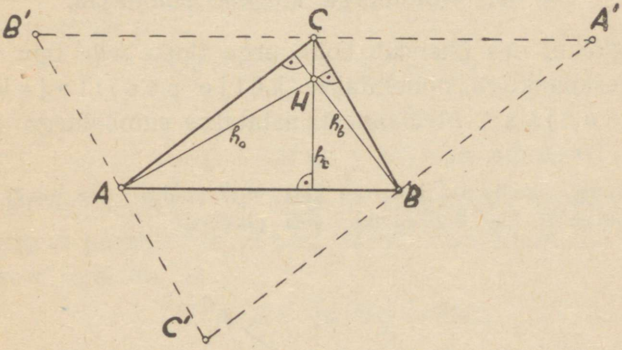
§ 58. Kolmnurga kõrgused.

Kolmnurga tipust selle vastasküljele või viimase pikendusele joonestatud ristlõiku nimetatakse kolmnurga kõrguseks. Et tippe on kolmnurgal kolm, siis on tal ka kolm kõrgust. Neid tähistatakse sümbolitega h_a, h_b ja h_c. Tõestame, et

kolmnurga kõrgused või nende pikendused lõikuvad kõik ühes punktis.

Tõestuseks joonestame läbi kolmnurga ABC iga tipu sirge rööbiti selle tipu vastasküljega (joonis 117). Nii saame uue kolmnurga $A'B'C'$, mille külgedega kolmnurga ABC kõrgused on vastavalt risti:

$$h_a \perp B'C', \quad h_b \perp A'C' \quad \text{ja} \quad h_c \perp A'B'.$$



Joonis 117.

Ühtlasi need kõrgused poolitavad kolmnurga $A'B'C'$ küljed. Tõepoolest, punkt A on külje $B'C'$ keskpunkt, sest

$$AB' = BC = C'A$$

kui rööpkülikute $ABCB'$ ja $C'BCA$ vastasküljed. Samal viisil võib veenduda, et punkt B on külje $A'C'$ keskpunkt ja punkt C on külje $A'B'$ keskpunkt. Niisiis kolmnurga ABC kõrgused on risti kolmnurga $A'B'C'$ külgedega ja poolitavad neid külgi ehk, teisiti, nad on kolmnurga $A'B'C'$ külgede keskristsirgete lõigud. Et kolmnurga $A'B'C'$ külgede keskristsirged lõikuvad kõik ühes punktis, siis lõikuvad samas punktis ka kolmnurga ABC kõrgused või nende pikendused.

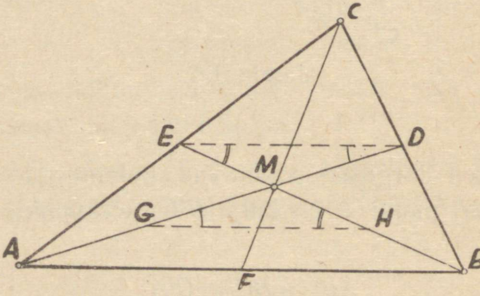
272. Joonestada nürinurkse kolmnurga kolm kõrgust ja leida nende lõikepunkt.

273. Kus lõikuvad teravnurkse, kus täisnurkse ja kus nürinurkse kolmnurga kõrgused?

§ 59. Kolmnurga külgede poolitajad.

Sirglõiku, mis ühendab kolmnurga tippu selle tipu vastasküije keskpunktiga, nimetatakse külje poolitajaks ehk mediaaniks*. Mediaane tähistatakse sümbolitega m_a, m_b ja m_c Tõestame, et

kolmnurga mediaanid lõikuvad kõik ühes punktis; see punkt eraldab igast mediaanist ühe kolmandiku tema pikkusest.



Joonis 118.

Eeldus: $AE = CE$; $AF = BF$; $BD = CD$ (joonis 118).

Väide: AD, BE ja CF lõikuvad ühes ja samas punktis M ning seejuures $MD = \frac{1}{3}\ AD$; $ME = \frac{1}{3}\ BE$ ja $MF = \frac{1}{3}\ CF$.

Tõestus. Joonestame kolmnurga ABC mingid kaks mediaani, näiteks AD ja BE, ja tähistame nende lõikepunkti

* *medius* (lad.) — keskmine.

tähega M. Leiame lõikude AM ja BM keskpunktid G ja H; joonestame kolmnurga ABM kesklõigu GH ja kolmnurga ABC kesklõigu ED. Kolmnurga ABC kesklõik

$$ED \parallel AB \text{ ja } ED = \frac{AB}{2};$$

kolmnurga AMB kesklõik

$$GH \parallel AB \text{ ja } GH = \frac{AB}{2}.$$

Sellest järeldub, et

$$ED \parallel GH \text{ ja } ED = GH.$$

Kuid siis

$$\triangle EDM \cong \triangle HGM,$$

sest neil on võrdsed üks külg ja selle kaks lähisnurka kui põiknurgad paralleelide juures. Nende kolmnurkade kongruentsusest järeldub, et

$$MD = MG \text{ ja } ME = MH.$$

Aga et GH on kolmnurga ABM kesklõik, siis $MG = GA$ ja $MH = HB$; järelikult $MD = MG = GA$ ja $ME = MH = HB$, millest

$$MD = \tfrac{1}{3}\, AD \text{ ja } ME = \tfrac{1}{3}\, BE.$$

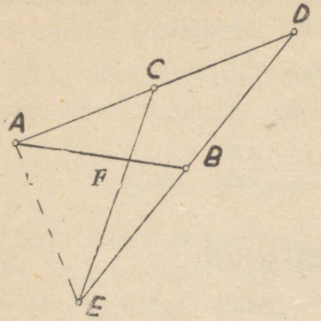
Joonestame nüüd kolmanda mediaani CF. See peab lõikuma nii mediaaniga AD kui ka mediaaniga BE punktis, mis eraldab neist ühe kolmandiku; seega kõik kolm mediaani lõikuvad ühes ja samas punktis M.

Kolmnurga mediaanide lõikepunkti nimetatakse tema r a s k u s p u n k t i k s. Toetades selles punktis näiteks ühtlase paksusega papist väljalõigatud kolmnurka, jääb see igas asendis tasakaalu.

Teoreem kolmnurga mediaanide lõikumisest annab võimaluse lõigu jaotamiseks kolmeks võrdseks osaks, nagu selgub järgnevast ülesandest.

Ü l e s a n n e. Leida antud lõigu AB kolmandik.

L a h e n d u s. Tõmbame läbi punkti A vabalt kiire ja märgime sellel punktid C ja D nii, et $AC = CD$; sirgel DB märgime punkti E nii, et $EB = DB$. Siis sirge EC eraldab lõigust AB tema ühe kolmandiku (joonis 119).



Joonis 119.

P õ h j e n d u s. Sirgete AB ja EC lõikepunkt F on kolmnurga ADE mediaanide lõikepunkt ja teatavasti see eraldab igast mediaanist ühe kolmandiku. Seega $FB = \frac{1}{3} AB$.

Ülesanded.

274. Missugusel kolmnurgal ühtivad ü h e külje poolitaja, sellele küljele tõmmatud kõrgus ja vastasnurga poolitaja?

275. Missugusel kolmnurgal ühtivad i g a külje poolitaja, sellele küljele tõmmatud kõrgus ja vastasnurga poolitaja?

276. Tõestada, et täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja võrdub poole hüpotenuusiga.

277. Toetudes eelmise ülesande tulemusele leida, kui suur on nurk täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja ja täisnurga poolitaja vahel, kui kolmnurga üks nurk on 65^0.

278. Täisnurkse kolmnurga hüpotenuusi poolitaja on risti ühe teravnurga poolitajaga. Leida kolmnurga teravnurkade suurused, kasutades ülesande 276 tulemust.

279. Leida täisnurkse kolmnurga siseringjoone keskpunkt, ümberringjoone keskpunkt, kõrguste lõikepunkt ja mediaanide lõikepunkt.

280. Jaotada vabalt võetud lõik sirkli ja joonlaua abil kolmeks võrdseks osaks.

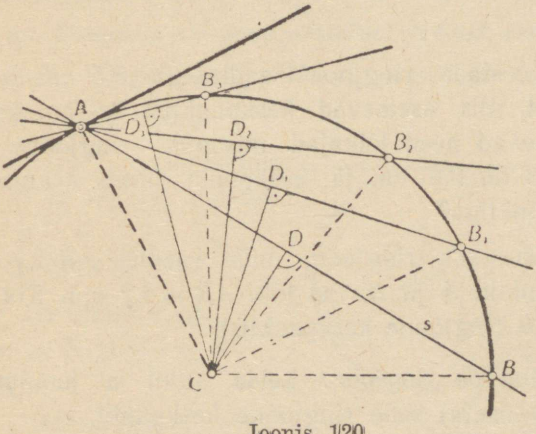
Peatükk VIII.

Ringjoon.

§ 60. Ringjoone puutuja.

Võtame ringjoonel kaks punkti A ja B. Sirge s, mis läbib neid punkte, on ringjoone l õ i k a j a (joonis 120).

Pöörame lõikajat s ümber lõikepunkti A nii, et teine lõikepunkt B läheneb esimesele. Siis punkt B asendatakse punk-



Joonis 120.

tidega B_1, B_2, B_3, $\ldots$, kuni ta viimaks ühtib punktiga A. Kui punkt B on ühtinud punktiga A, siis lõikaja s on jõudnud asendisse, kus tal on ringjoonega ainult üks ühine punkt (joonis 120).

Sirget, millel on ringjoonega ainult üks ühine punkt, nimetatakse selle ringjoone puutujaks.

Seda ainsat ühist punkti nimetatakse nende joonte *puutepunktiks*.

Ehitame ringjoone keskpunktist C lõikajale s ristsirge CD. Lõikaja pöördumisel ümber ühe lõikepunkti pöördub ka lõikajale ehitatud ristsirge, omandades asendid CD_1, CD_2 jne.; kuid see ristilõik jääb ikka raadiuste CA ja CB vahele. Kui punkt B ühtib punktiga A, siis raadius CB ja ristlõik CD ühtivad raadiusega CA. Seega on raadius CA risti puutujaga punktis A ehk üldiselt:

ringjoone puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Sellest järeldub, et

puutuja kaugus ringi keskpunktist võrdub ringi raadiusega.

Ülesanded.

281. Joonestada ringjoon raadiusega 3,5 cm ja selles kolm lõikajat, mis asetsevad keskpunktist 2,5 cm kaugusel. Kuidas asetsevad need lõikajad niisuguse ringjoone suhtes, mille raadius on 2,5 cm ja keskpunkt ühtib eelmise ringjoone keskpunktiga?

282. Joonestada ringjoon, mille raadius on 2,7 cm ja mis läbib punktid A ja B, kui lõik $AB = 4{,}2$ cm. Kui kaugel on lõikaja AB ringjoone keskpunktist?

283. Antud on ringjoon. Leida sirkli ja joonlaua abil (ilma katsetamiseta) selle ringjoone keskpunkt.

284. Antud on sirge ja väljaspool seda kaks punkti. Joonestada ringjoon, mis läbib antud punktid ja mille keskpunkt asetseb antud sirgel. Missugusel andmete valikul see ülesanne ei ole lahenduv?

§ 61. Puutuja läbi antud punkti.

Vaatleme esiteks puutuja ehitamist juhul, kui puutepunkt on antud. Selle ehitamist võimaldab järgmine teoreem:

raadiuse ristsirge, mis läbib tema otspunkti ringjoonel, on ringjoone puutuja.

T õ e s t u s. Raadiusele saab tõmmata tema otspunktist ringjoonel ainult ühe ristsirge. See ainus ristsirge peabki siis olema puutuja, sest eespool tõestasime, et puutuja on risti puutepunkti tõmmatud raadiusega.

Puutuja saamiseks antud puutepunkti korral tuleb ehitada ristsirge raadiusele, mille otspunktiks on see punkt.

Ehitame ringjoonele puutujad läbi antud puutepunktide A ja B (joonis 121). Need kaks puutujat kas lõikuvad kuskil punktis D või on paralleelsed. Eeldame, et nad lõikuvad, ja tõestame sel puhul järgmise teoreemi:

puutujate lõikepunkt on puutepunktidest võrdsetel kaugustel.

E e l d u s: sirged AD ja BD on puutujad (joonis 121).

V ä i d e: $AD = BD$.

T õ e s t u s. Ühendame punktid C ja D; siis tunnuse KkN järgi

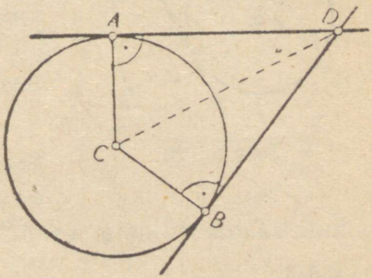
$$\triangle ADC \cong \triangle BDC,$$

sest CD on ühine külg, $\angle A = \angle B$ ja $AC = BC$.

Järelikult

$$AD = BD$$

kui kongruentsete kolmnurkade vastavad küljed.



Joonis 121.

Kui antud puutepunktid A ja B on ühe ja sama diameetri otspunktid, siis neid läbivad puutujad on paralleelsed, sest nad on risti ühe ja sama sirgega ACB.

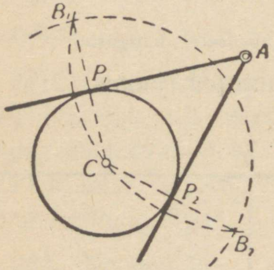
Vaatleme nüüd puutuja ehitamist juhul, kui puutepunkt ei ole antud.

Ü l e s a n n e. Konstrueerida ringjoonele puutuja läbi punkti väljaspool ringjoont.

L a h e n d u s (joonisel 122). Joonestame antud ringjoone keskpunkti C ümber uue ringjoone raadiusega, mis võrdub antud ringjoone diameetriga, ja antud punkti A ümber ringjoone, mis läbib keskpunkti C. Lõikugu need kaks uut ringjoont punktides B_1 ja B_2. Joonestame sirglõigud B_1C ja B_2C; lõigaku need antud ringjoont punktides P_1 ja P_2. Nii sirge AP_1 kui ka sirge AP_2 on siis antud ringjoone puutujad läbi punkti A.

P õ h j e n d u s. Punkti A ühendamisel punktidega B_1 ja C tekiks võrdhaarne kolmnurk AB_1C, sest

$$AC = AB_1$$



Joonis 122.

kui ühe ja sama ringjoone raadiused. Konstruktsiooni järgi on punkt P_1 selle kolmnurga aluse keskpunkt; et võrdhaarse kolmnurga tipu ja aluse keskpunkti ühenduslõik on kolmnurga kõrgus, siis

$$AP_1 \perp B_1C.$$

Seega sirge AP_1 on risti raadiusega P_1C, järelikult AP_1 on puutuja. Samuti saame näidata, et AP_2 on puutuja.

Ülesanded.

285. Joonestada puutuja, kui on antud ringjoone keskpunkt ja puutepunkt.

286. Joonestada ringjoonele, mille raadius on 3 cm, puutujad läbi punkti, mille kaugus ringjoone keskpunktist on 5 cm.

287. Joonestada kaks ristuvat puutujat ringjoonele, mille raadius on 2,5 cm.

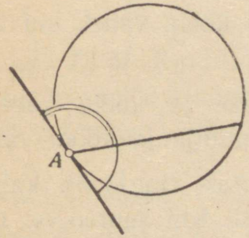
288. Ringjoone kaks paralleelset puutujat lõikuvad kolmanda puutujaga punktides A ja B. Tõestada, et $\triangle ABO$ on täisnurkne, kui punkt O on ringjoone keskpunkt.

§ 62. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk.

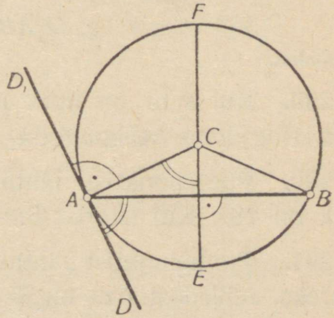
Joonestame ringjoonele tema punktis A puutuja ja kõõlu (joonis 123). Nii saame ühe paari kõrvunurki; kummagi nurga sisse jääb kaarena üks osa ringjoonest. Tõestame nende nurkade kohta järgmise teoreemi:

puutuja ja kõõlu vaheline nurk on niisama suur kui pool kesknurgast, mis toetub nurga sees olevale kaarele.

Eeldus: DAB ja D_1AB on puutuja ja kõõlu vahelised nurgad; diameeter EF poolitab kesknurga ACB (joonis 124).



Joonis 123.



Joonis 124.

Väide: $\angle DAB = \angle ACE$; $\angle D_1AB = \angle ACF$.

Tõestus. Kui diameeter EF poolitab kesknurga ACB, siis EF on risti kõõluga AB, sest ainult kõõlu ristdiameeter poolitab kõõlu ja sellele toetuva kesknurga. Nüüd selgub, et nurgad DAB ja ACE on vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, sest

$$DA \perp AC$$

kui puutuja ja puutepunktist lähtuv raadius ning

$$AB \perp CE,$$

nagu selgus eespool; ühtlasi aga

$$\angle ACE < 90^0$$

kui täisnurkse kolmnurga teravnurk ja ka

$$\angle DAB < 90^0,$$

sest ta on osa täisnurgast DAC.

Nii ongi vaadeldavad nurgad vastavalt ristuvate haaradega teravnurgad, seega

$$\angle DAB = \angle ACE.$$

Nurgad D_1AB ja ACF on siis aga vastavalt ristuvate haaradega nürinurgad, järelikult

$$\angle D_1AB = \angle ACF.$$

Ülesanded.

289. Kui suur on nurk puutuja ja kõõlu vahel, kui kõõl läbib ringjoone keskpunkti?

290. Puutepunktist lähtuva raadiuse ja kõõlu vaheline nurk on 18^0. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

291. Puutepunktist lähtuv kõõl jaotab ringjoone kaheks kaareks, milledest üks on $\frac{2}{5}$ ringjoonest. Kui suured on nurgad puutuja ja kõõlu vahel?

292. Puutuja ja kõõlu vahelise nurga sees olev kaar on $79^0 16'$. Kui suured nurgad on puutuja ja kõõlu vahel?

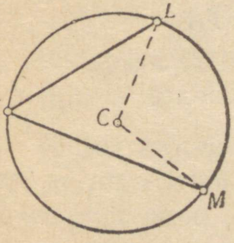
293. Kahe raadiuse otspunktidest on joonestatud puutujad. Kui suur on nurk puutujate vahel, kui raadiuste vaheline nurk on 140^0?

§ 63. Piirdenurk.

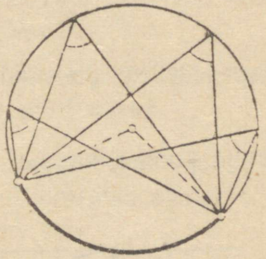
Joonestame ringjoones kaks ühise otspunktiga kõõlu KL ja KM (joonis 125). Need kõõlud moodustavad nurga LKM, mille tipp on ringjoonel; niisugust nurka nimetatakse p i i r d e n u r g a k s.

Piirdenurk on nurk kahe kõõlu vahel, milledel on ühine otspunkt.

Iga piirdenurk toetub kaarele, millele toetub ka üks kesknurk: piirdenurk LKM toetub kaarele LM, millele toetub ka



Joonis 125.



Joonis 126.

kesknurk LCM. Kuid ühele ja samale kaarele toetub määratu palju piirdenurki (joonis 126), sest piirdenurga tipuks võime valida mistahes punkti selle ringjoone ülejäänud kaarel.

Saab tõestada, et kõik piirdenurgad, mis toetuvad ühele ja samale kaarele, on võrdsed. Selleks tõestame enne, et

piirdenurga suurus on pool samale kaarele toetuva kesknurga suurusest.

E e l d u s: α on piirdenurk ja α_1 on kesknurk, mis toetuvad ühele ja samale kaarele.

V ä i d e: $\alpha = \frac{1}{2}\alpha_1$.

T õ e s t u s. Joonestame puutuja läbi piirdenurga α tipu (joonis 127). Eelmise teoreemi järgi puutuja ja kõõlu vaheline nurk

$$\beta = \tfrac{1}{2}\beta_1,$$

sest kesknurk β_1 toetub kaarele, mis on nurga β sees. Samuti puutuja ja kõõlu vaheline nurk

$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \beta_1),$$

sest kesknurk $\alpha_1 + \beta_1$ toetub kaarele, mis on nurga $\alpha + \beta$ sees. Avades sulud teise võrduse paremal poolel saame

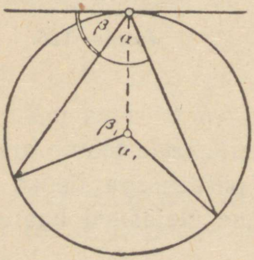
$$\alpha + \beta = \tfrac{1}{2}\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\beta_1;$$

lahutades sellest ülalsaadud võrduse

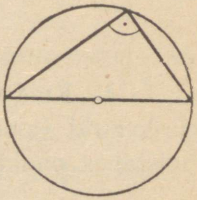
$$\beta = \tfrac{1}{2}\beta_1$$

vastavad pooled, saame

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\alpha_1.$$



Joonis 127.



Joonis 128.

J ä r e l d u s e d.

1. Ühele ja samale kaarele toetuvad piirdenurgad on võrdsed,

sest igaüks neist võrdub poolega ühest ja samast kesknurgast.

2. Diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk,

sest vastav kesknurk on kaks täisnurka.

Viimast järeldust, mida nimetatakse Thales'e * teoreemiks, saab kasutada täisnurkse kolmnurga ehitamiseks hüpotenuusi ja kaateti järgi. Selleks joonestame (joonis 128) ringjoone, mille diameetriks on hüpotenuus, ja mõõdame diameetri ühest otspunktist kõõlu, mis võrdub antud kaatetiga. Selle kõõlu otspunkti ühendamisel diameetri teise otspunktiga saame täisnurkse kolmnurga, sest diameetrile toetuv piirdenurk on täisnurk.

Ülesanded.

294. Kui suur piirdenurk toetub kaarele 40^0, 75^0, $118^0 20'$, $131^0 48'$?

295. Piirdenurk toetub kaarele, mis on 76^0 väiksem ülejäänud ringjoone osast. Kui suur on piirdenurk?

296. Ümber kolmnurga, milles $\angle A = 58^0 40'$ ja $\angle B = 72^0 30'$, on joonestatud ringjoon. Kui suurteks kaarteks jaotavad kolmnurga tipud selle ringjoone?

297. Ringjoonel asetsevad järjestikku punktid A, B, C ja D nii, et $\overset{\frown}{AB}$ on $\frac{1}{8}$ ringjoonest, $\overset{\frown}{BC}$ on $\frac{1}{6}$ ringjoonest ja $\overset{\frown}{CD}$ on $\frac{3}{10}$ ringjoonest. Kui suured nurgad on nelinurgal $ABCD$?

298. Kaks ringjoont lõikuvad punktides A ja B. Punktist A on joonestatud mõlema ringjoone diameetrid AC ja AD. Tõestada, et punktid B, C ja D asetsevad ühel ja samal sirgel.

299. Tõestada, et võrdsetele kaartele toetuvad võrdsed piirdenurgad.

300. Ringjoonel on tähistatud võrdsed kaared AB ja CD. Tõestada, et AC ja BD on kas võrdsed või paralleelsed lõigud.

---

* *Thales*, kreeka filosoof, elas VI saj. 1. poolel e. m. a.

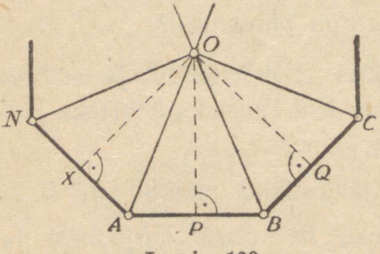
301. Antud sirglõik $AB = 3{,}5$ cm. Joonestada ringjoon, milles kõõlule AB toetuv piirdenurk on 60^0.

302. Antud sirglõik $AB = 4$ cm. Leida punktid, milledest lõik AB paistab täisnurgas.

303. Antud on sirge s ja väljaspool seda lõik AB. Leida, kas sirgel s on punkte, millest lõik AB oleks näha nurgas 60^0.

§ 64. Ringjoon ja korrapärane hulknurk.

Olgu $ABC \ldots N$ mingi korrapärane hulknurk (joonis 129). Poolitame selle nurgad A ja B ning tähistame nende nurgapoolitajate lõikepunkti tähega O. Nii saadud $\triangle ABO$ on võrdhaarne, sest tema nurgad OAB ja OBA on võrdsed kui korrapärase hulknurga nurkade A ja B pooled. Ühendame nüüd punkti O punktiga C. Saadud uus kolmnurk BCO on kongruentne kolmnurgaga ABO, sest



Joonis 129.

$$AB = BC, \ \angle ABO = \angle CBO \text{ ja } BO \text{ on ühine külg.}$$

Seetõttu ka $\triangle BCO$ on võrdhaarne ning selles

$$\angle OCB = \angle OBC.$$

Kuid siis OCB on pool korrapärase hulknurga nurgast ja OC on nurga C poolitaja. Ühendades punkti O hulknurga ülejäänud tippudega, saame samal viisil tõestada, et need ühenduslõigud poolitavad ka hulknurga ülejäänud nurgad. Seega kõik hulknurga $ABC \ldots N$ nurgapoolitajad lõikuvad punktis O. Seejuures

$$OA = OB = OC = \ldots = ON,$$

sest nad on kongruentsete võrdhaarsete kolmnurkade haarad, ja

$$OP = OQ = \ldots = OX,$$

sest nad samade kolmnurkade kõrgused. Seega:

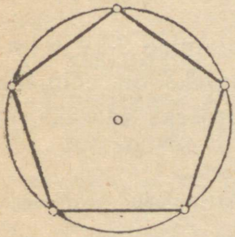
korrapärase hulknurga nurgapoolitajad lõikuvad kõik ühes ja samas punktis; see punkt on võrdsetel kaugustel hulknurga tippudest ja võrdsetel kaugustel hulknurga külgedest.

Sellest järeldub, et

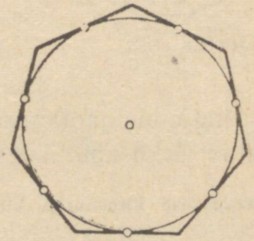
iga korrapärase hulknurga ümber ja sisse saab joonestada ringjoone.

Nende ringjoonte ühist keskpunkti nimetatakse korrapärase hulknurga keskpunktiks.

Korrapärase hulknurga saamiseks joonestame ringjoone ja



Joonis 130.

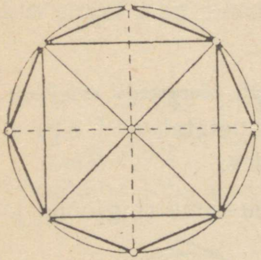


Joonis 131.

jaotame selle nii mitmeks võrdseks kaareks, kui mitu külge peab olema hulknurgal. Kui ühendame jaotuspunktid järjestikku sirglõikudega, siis tekib hulknurk, mille küljed on võrdsed, sest neile kui kõõludele toetuvad kaared on võrdsed. Ka on võrdsed selle hulknurga nurgad, sest nad on piirdenurgad, mis toetuvad võrdsetele kaartele (joonis 130). Järelikult on see hulknurk korrapärane. Seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks kõõlhulknurgaks.

Korrapärase hulknurga saame ka siis, kui ringjoonele jaotuspunktides joonestame puutujad (joonis 131). Seda hulknurka nimetatakse korrapäraseks puutujahulknurgaks.

Ringjoone võib jaotada võrdseteks kaarteks kas sirkli ja joonlaua või malli abil. Ringjoone jaotamine sirkli ja joonlaua abil ilma katsetamiseta ei ole teostatav igasuguse kaarte arvu juures; näiteks pole võimalik ringjoont sirkli ja joonlaua abil ilma katsetamiseta jaotada seitsmeks võrdseks kaareks.



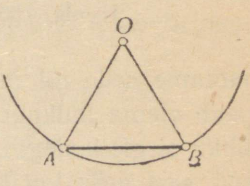
Joonis 132.

Kõige lihtsamad ringjoone jaotamise juhud on jaotamine 4-ks, 8-ks, 16-ks, 32-ks jne. võrdseks kaareks. Nende jaotamiste teostamiseks joonestame kaks ristuvat diameetrit, millega on ringjoon jaotatud 4-ks võrdseks kaareks; saadud täisnurkade poolitamisega jaotame ringjoone 8-ks võrdseks kaareks jne. (joonis 132).

Ringjoone jaotamine 3-ks, 6-ks, 12-ks jne. võrdseks kaareks on võimalik lähtudes ringjoone jaotamisest kuueks võrdseks kaareks, mis on teostatav sirkli abil. Tõestame, et

korrapärase kuusnurga külg võrdub ümberringjoone raadiusega.

Eeldus: AB on korrapärase kuusnurga külg ja punkt O on ümberringjoone keskpunkt.



Joonis 133.

Väide: $AB = AO$ (joonis 133).

Tõestus. $\triangle AOB$ on võrdhaarne, sest $AO = BO$; järelikult

$$\angle A = \angle B.$$

Selle kolmnurga tipunurk O võrdub $360^0 : 6$ ehk 60^0. Sama kolmnurga alusnurgad A ja B on seega

$$(180^0 - 60^0) : 2$$

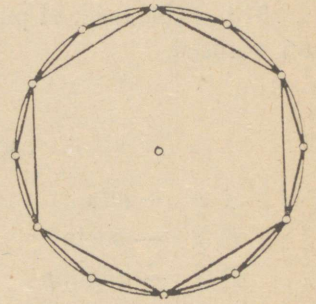
ehk

$$60^0.$$

Seega kolmnurga *AOB* nurgad on võrdsed; kuid siis on võrdsed ka tema küljed ja seega

$$AB = AO = BO.$$

Niisiis raadiusepikkuste kõõlude abil saame ringjoone jaotada 6-ks võrdseks kaareks. Nende kaarte poolitamisega jaotub ringjoon 12-ks võrdseks kaareks, viimaste poolitamisega 24-ks võrdseks kaareks jne. Nende kaarte otspunkte järjestikku ühendades saame korrapärase 6-nurga, 12-nurga, 24-nurga jne. (joonis 134).



Joonis 134.

Ülesanded.

304. Joonestada korrapärane kuusnurk küljega 2 cm.

305. Joonestada korrapärane kaksteistnurk, mille ümberringjoone raadius on 2,5 cm.

306. Joonestada korrapärane kolmnurk, mille ümberringjoone raadius on 3 cm.

307. Joonestada korrapärane seitsenurk, mille ümberringjoone raadius on 3 cm. Ringjoone jaotamist toimetada sirkli abil katsetades.

308. Joonestada korrapärane kuusnurk, mille siseringjoone raadius on 3 cm.

309. Joonestada korrapärane kolmnurk, mille siseringjoone raadius on 2,5 cm.

310. Korrapärase kaheksanurga ühest tipust on tõmmatud diagonaalid teistesse tippudesse. Arvutada diagonaalide vahelised nurgad.

311. Korrapärase kümmenurga ühest tipust on tõmmatud diagonaalid teistesse tippudesse. Arvutada diagonaalide vahelised nurgad.

312. Tõestada, et kõõlnelinurga vastasnurkade summa on 180^o.

313. Tõestada, et puutujanelinurga vastasküIgede summad on võrdsed.

Kreeka tähestik.

$A\ \alpha$	— alfa	$N\ \nu$	— nüü
$B\ \beta$	— beeta	$\Xi\ \xi$	— ksii
$\Gamma\ \gamma$	— gamma	$O\ o$	— omikron
$\Delta\ \delta$	— delta	$\Pi\ \pi$	— pii
$E\ \varepsilon$	— epsilon	$P\ \varrho$	— roo
$Z\ \zeta$	— dseeta	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	— sigma
$H\ \eta$	— eeta	$T\ \tau$	— tau
$\Theta\ \vartheta$	— teeta	$Y\ \upsilon$	— üpsilon
$I\ \iota$	— ioota	$\Phi\ \varphi$	— fii
$K\ \varkappa$	— kappa	$X\ \chi$	— hii
$\Lambda\ \lambda$	— lambda	$\Psi\ \psi$	— psii
$M\ \mu$	— müü	$\Omega\ \omega$	— omega.

SISUKORD.

Peatükk I.

Sirgjoon.

Lk.

§ 1. Sissejuhatus 3
§ 2. Sirglõik 5
§ 3. Sirglõikude summa ja vahe 7
§ 4. Sirglõigu mõõtmine 9
§ 5. Kiir ja sirge 13
§ 6. Aksioom ja teoreem 15

Peatükk II.

Ringjoon ja nurk.

§ 7. Ringjoon ja ring 20
§ 8. Kaar ja selle mõõtmine 22
§ 9. Nurk 24
§ 10. Kesknurk 26
§ 11. Konstruktsioonülesandeid 27
§ 12. Nurkade liigitelu 30
§ 13. Nurga mõõtmine 31
§ 14. Kõrvunurgad ja tippnurgad 34
§ 15. Definitsioon 36
§ 16. Teoreemi eeldus ja väide 37

Peatükk III.

Kujundite teljeline sümmeetria.

§ 17. Sümmeetria mõiste 39
§ 18. Sümmeetriliselt asetsevad punktid 42
§ 19. Ristsirge läbi punkti väljaspool sirget . . . 45
§ 20. Ristlõik ja kaldlõik 47
§ 21. Punktipaari sümmeetriatelg 48
§ 22. Sirglõigu keskristsirge 50
§ 23. Nurgapoolitaja 51
§ 24. Ringjoone sümmeetria 53

Peatükk IV.

Kolmnurk.

		Lk.
§ 25.	Kolmnurga elemendid ja nende tähistamine	55
§ 26.	Kolmnurkade liigitelu	56
§ 27.	Võrdhaarse kolmnurga omadusi	58
§ 28.	Kolmnurga kahe külje summa ja vahe	60
§ 29.	Kolmnurga suurem nurk ja selle vastaskülg	61
§ 30.	Kongruentsed kolmnurgad	63
§ 31.	Kolmnurkade kongruentsuse esimene tunnus	64
§ 32.	Kolmnurkade kongruentsuse teine tunnus	66
§ 33.	Kolmnurkade kongruentsuse kolmas tunnus	68
§ 34.	Kolmnurkade kongruentsuse neljas tunnus	70
§ 35.	Võrdsete küljepaaridega kolmnurgad	74
§ 36.	Pikkuse kaudne mõõtmine kongruentsete kolmnurkade abil	76

Peatükk V.

Paralleelsed sirged.

§ 37.	Paralleelide aksioom	81
§ 38.	Paralleelide ühine ristsirge	82
§ 39.	Tasapinna kolm sirgjoont	84
§ 40.	Kahe sirge lõikumine kolmanda sirgega	86
§ 41.	Kolmnurga nurkade omadused	89
§ 42.	Sirgete paralleelsuse tunnused	83
§ 43.	Vastavalt paralleelsete haaradega nurgad	95
§ 44.	Vastavalt ristuvate haaradega nurgad	97

Peatükk VI.

Hulknurk.

§ 45.	Hulknurkade liigitelu	100
§ 46.	Hulknurga nurkade summa	102
§ 47.	Trapets	104
§ 48.	Võrdhaarne trapets	106
§ 49.	Rööpkülik	108
§ 50.	Rööpküliku omadused	111
§ 51.	Kolmnurga kesklõik	114
§ 52.	Trapetsi kesklõik	115
§ 53.	Romb	117
§ 54.	Ristkülik	120
§ 55.	Ruut	122

Peatükk VII.

Lk.

Tähtsamad jooned ja punktid kolmnurgas.

§ 56. Kolmnurga külgede keskristsirged 124
§ 57. Kolmnurga nurkade poolitajad 126
§ 58. Kolmnurga kõrgused 128
§ 59. Kolmnurga külgede poolitajad 130

Peatükk VIII.

Ringjoon.

§ 60. Ringjoone puutuja 133
§ 61. Puutuja läbi antud punkti 135
§ 62. Puutuja ja kõõlu vaheline nurk 137
§ 63. Piirdenurk 139
§ 64. Ringjoon ja korrapärane hulknurk 142

2. trükk.

Vastutav toimetaja prof. dr. A. Humal.

Ladumisele antud 31. VII 1946. Trükkimisele antud 11. IX 1946. Trükiarv 12 300 eks. Paber 56 : 79, $^{1}/_{16}$. Trükipoognaid 9,5. Trükitähti trükipoognas 34 560. Arvutuspoognaid 8. MB-05076. Tellimise nr. 1221. Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4.

На эстонском языке.
Э. Этверк, Геометрия для VIII класса.

Rbl. 4.50