Tartu Ülikool
loodus- ja täppisteaduste valdkond
matemaatika ja statistika instituut
matemaatika eriala

Rihhard Nadel

Banachi ruumi karedus

Magistritöö (30 EAP)

Juhendajad: Rainis Haller
Johann Langemets

Tartu 2016

Banachi ruumi karedus

Magistritöö

Rihhard Nadel

Lühikokkuvõte. Magistritöö eesmärk on selgitada ekstreemsete Radon-Nikodými omaduse ning hiljuti intensiivselt uuritud diameeter-2 omaduste vahele jäävate omadustega Banachi ruumide geomeetrilist struktuuri. Lähtekohaks on sarnased uuringud diameeter-2 omaduste ja nendega duaalsete oktaeedrilisuse omaduste kohta. Töös kirjeldatakse absoluutse normiga korrutisruumide ja ultraastmete kareduse seost lähteruumide karedusega, karedusomaduste päranduvust separaablitele alamruumidele ning antakse tarvilikud ja piisavad tingimused pidevate lineaarsete operaatorite ruumi kareduseks.

Märksõnad: Funktsionaalanalüüs, Banachi ruumid, karedus, absoluutne norm, ultraaste.

CERCS kood: P140 Jadad, Fourier analüüs, funktsionaalanalüüs.

Roughness of Banach spaces

Master's thesis

Rihhard Nadel

Abstract. The objective of this Master's thesis is to study the geometric structure of Banach spaces which lie in between the Radon–Nikodým property and diameter-2 property. The starting point for the thesis are similar studies done for diameter-2 property and its dual property – octahedrality. The roughness of the direct product of Banach spaces with an absolute norm, of ultrapowers and of separable subspaces are characterized. Also necessary and sufficient conditions for the roughness of the space of continuous linear operators between Banach spaces are given.

Key words: Functional analysis, Banach spaces, roughness, absolute norm, ultrapower.

CERCS code: P140 Series, Fourier analysis, functional analysis.

Sisukord

Sissejuhatus

Käesolev magistritöö on Banachi ruumide geomeetria alane uurimus funktsionaalanalüüsi valdkonnast. Töö on osalt teoreetiline uurimus ning osalt referatiivne. Magistritöö põhiülesanne oli uurida kareduse omadusi.

Definitsioon. Olgu $\delta > 0$. Öeldakse, et Banachi ruum X on

- *δ-kare*, kui iga $x \in X$ korral

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{\|x+y\| + \|x-y\| - 2\|x\|}{\|y\|} \geq \delta;$$

- *keskmiselt δ-kare*, kui iga $x_1, \ldots, x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ korral

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i+y\| + \|x_i-y\| - 2\|x_i\|}{\|y\|} \geq \delta.$$

Definitsioonist on selge, et keskmiselt δ-kare Banachi ruum on δ-kare.

Kareda ruumi (inglise k. *rough*) mõiste tõid sisse E. B. Leach ja J. H. M. Whitfield [LW], et uurida olukorda, kus ruumil ei leidu Fréchet' mõttes diferentseeruvat ekvivalentset normi. Artiklis [JZ] anti kareda ruumi kaasruumi geomeetriline kirjeldus. Täpsemalt, Banachi ruum on δ-kare parajasti siis, kui kaasruumi ühikkera iga *-nõrga viilu diameeter on vähemalt δ.

Keskmiselt kareduse (inglise k. *average rough*) mõiste tõi sisse R. Deville [D]. Deville andis artikli [JZ] eeskujul keskmiselt δ-kareda ruumi kaasruumi geomeetrilise kirjelduse. Täpsemalt, Banachi ruum on keskmiselt δ-kare parajasti siis, kui tema kaasruumi ühikkera iga *-nõrkade viilude kumera kombinatsiooni diameeter on vähemalt δ.

Erijuhul $\delta = 2$ on need kaasruumi tingimused parajasti teatud diameeter-2 omadused. Diameeter-2 omadused on sellised Banachi ruumi omadused, kus ühikkera kõik kindlat liiki alamhulgad (viilud, mittetühjad suhteliselt nõrgalt lahtised hulgad, viilude kumerad kombinatsioonid) on diameetriga 2. Need omadused on äärmuslikud vastandid tuntud Radon–Nikodými omadusele, mille üheks tunnuseks on, et ühikkeras leidub kui tahes väikese diameetriga viile. Diameeter-2 omadusi on viimasel viieteistkümnel aastal intensiivselt uuritud ning lisaks on hakatud uurima nende nõrgemaid ja tugevamaid variante. Magistritöö on samuti selle suuna teadusuuringute osa, kus lähtuvalt diameeter-2 omadustest vaadeldakse arvu 2 asemel üldisemat ja tehniliselt nõudlikumat $\delta > 0$ juhtu.

Diameeter-2 omaduste duaalsete omadustena on seni uuritud erinevaid oktaeedrilisuse omadusi. Oktaeedrilisuse mõiste tõi sisse G. Godefroy [G], et kirjeldada Banachi ruume, mis sisaldavad isomorfselt jadaruumi ℓ_1. Nüüdseks on teada, et see oktaeedrilisus ja keskmiselt 2-karedus langevad kokku.

Magistritöö põhiosa koosneb neljast paragrahvist. Esimeses toome sisse põhimõisted, anname kareduse omaduste samaväärsed tingimused ning karedate ruumide kaasruumide kirjeldused diameetri-omaduste kaudu. Teises paragrahvis kirjeldame kareduse omaduste kandumist ruumide ja nende otsesummade vahel ning päranduvust separaablitele alamruumidele. Kolmandas paragrahvis anname ruumi ja tema ultraastme kareduse seose. Neljandas paragrahvis selgitame operaatorite ruumide kareduse omadusi. Valdav osa töö tulemustest on uued.

Kuigi töö põhirõhk on suunatud keskmiselt kareduse uurimisele, siis täielikkuse huvides esitame ka vastavad tulemused kareduse jaoks, kusjuures tihti ilma tõestuseta, sest need oleksid väga sarnased keskmise kareduse vastavate tõestustega.

Käesolevas töös vaatleme vaid mittetriviaalseid reaalseid Banachi ruume. Üldiselt eeldame, et vaadeldavad ruumid on lõpmatumõõtmelised. Magistritöös kasutatud tähistused on standardsed. Tähistame Banachi ruumi X kinnist ühikkera B_X, ühiksfääri S_X ning kaasruumi X^*. Ruumi X alamhulga A diameetrit tähistame $\operatorname{diam}(A)$ ja lineaarset katet tähistame $\operatorname{span}(A)$. Kõigi Banachi ruumist X Banachi ruumi Y pidevate lineaarsete operaatorite ruumi tähistame $\mathcal{L}(X, Y)$. Operaatori $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ kaasoperaatorit tähistame A^*. Kui $x^* \in X^*$ ja $y \in Y$, siis operaator $x^* \otimes y \in \mathcal{L}(X, Y)$ seab elemendile $x \in X$ vastavusse elemendi $x^*(x)y \in Y$, sel juhul $\|x^* \otimes y\| = \|x^*\| \, \|y\|$. Hulga $\mathcal{I}$ kõikide alamhulkade hulka tähistame $\mathcal{P}(\mathcal{I})$.

1 Põhimõisted ja eelteadmised

Käesolevas paragrahvis toome sisse magistritöö kesksed mõisted – Banachi ruumi kareduse ja keskmiselt kareduse. Töös kasutame sageli kareduse ja keskmiselt kareduse definitsiooni eri vorme ning nende erinevate kujude samaväärsust näitame esimeses alapunktis. Teises alapunktis anname kareda ruumi ja keskmiselt kareda ruumi kaasruumi kirjelduse.

Kõikjal selles paragrahvis olgu X ja Y Banachi ruumid.

1.1 Banachi ruumi kareduse ja keskmiselt kareduse mõiste

Banachi ruumi kareduse mõiste tõid sisse E. B. Leach ja J. H. M. Whitfield artiklis [LW].

Definitsioon 1.1 ([LW], vt. ka [DGZ, definitsioon I.1.10])**.** Olgu $\delta > 0$. Öeldakse, et Banachi ruum X on *δ-kare*, kui iga $x \in X$ korral

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{\|x+y\| + \|x-y\| - 2\|x\|}{\|y\|} \geq \delta.$$

Banachi ruumi δ-kareduse omadust on mõtet uurida vaid $\delta \in (0, 2]$ korral, sest iga $x, y \in X$ korral

$$\frac{\|x+y\| + \|x-y\| - 2\|x\|}{\|y\|} \leq \frac{2\|x\| + 2\|y\| - 2\|x\|}{\|y\|} = 2,$$

mistõttu üksi ruum ei ole δ-kare $\delta > 2$ korral.

Keskmiselt δ-karedust vaatles esimesena R. Deville artiklis [D].

Definitsioon 1.2 ([D, teoreem 1])**.** Olgu $\delta > 0$. Öeldakse, et Banachi ruum X on *keskmiselt δ-kare*, kui iga $x_1, \dots, x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ korral

$$\limsup_{\|y\|\to 0} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i+y\| + \|x_i-y\| - 2\|x_i\|}{\|y\|} \geq \delta.$$

On selge, et kui ruum on keskmiselt δ-kare, siis ta on δ-kare, kuid üldjuhul on need mõisted erinevad (vt. järeldus 2.19).

On teada, et keskmiselt 2-kareduse ja oktaeedrilisuse mõisted langevad kokku (vt. lause 1.9, vt. ka [G, lk. 12]). Oktaeedrilisuse mõiste tõi sisse G. Godefroy artiklis [G], et kirjeldada Banachi ruume, mis sisaldavad isomorfselt jadaruumi ℓ_1.

Definitsioon 1.3 ([G, lk. 12], vt. ka [HLP, lause 2.2])**.** Öeldakse, et Banachi ruum X on *oktaeedriline*, kui iga $x_1, \dots, x_n \in S_X$ $(n \in \mathbb{N})$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga indeksi i korral

$$\|x_i + y\| > 2 - \varepsilon.$$

Näide 1.4 (vt. nt. [L, näide 3.4 ja teoreem 3.6])**.** Klassikalised Banachi ruumid $\ell_1, L_1[0,1]$ ja $C[0,1]$ on oktaeedrilised.

Näide 1.5 ([G, lk. 12])**.** Lõplikumõõtmelised Banachi ruumid pole oktaeedrilised.

Näide 1.6. Jadaruum c_0 pole δ-kare ühegi $\delta > 0$ korral.

Põhjendus. Olgu $\delta > 0$. Oletame vastuväiteliselt, et c_0 on δ-kare. Olgu $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{1}{2}, \delta\})$. Vastuväitelise oletuse põhjal leidub $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in c_0$ nii, et $\|y\| = \varepsilon$ ja

$$\|e_1 + y\| + \|e_1 - y\| > (\delta - \varepsilon)\varepsilon + 2,$$

kus $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in S_{c_0}$. Kuna $\|y\| = \max_{k \in \mathbb{N}} |y_k| = \varepsilon$, siis $\|e_1 \pm y\| = \max\{|1 \pm y_1|, |y_2|, \dots\} = 1 \pm y_1$, mistõttu

$$\|e_1 + y\| + \|e_1 - y\| = 1 + y_1 + 1 - y_1 = 2.$$

Kokkuvõttes oleme saanud vastuolu, et $2 > (\delta - \varepsilon)\varepsilon + 2$. Järelikult jadaruum c_0 pole δ-kare. $\square$

Hiljem näeme, et näiteks $\ell_1 \oplus_2 \ell_1$ on 2-kare ja keskmiselt $\sqrt{2}$-kare, kui ei ole keskmiselt δ-kare ühegi $\delta > \sqrt{2}$ korral (vt. lause 2.10 ja järeldus 2.21). Veel näeme hiljem, et iga $\delta \in (1, 2]$ korral leidub keskmiselt δ-kare Banachi ruum, mis pole $\gamma > \delta$ korral keskmiselt γ-kare (vt. teoreem 2.11).

Järgnevas anname kareduse omaduste samaväärsed tingimused, mida kasutame edasises töös. Esmalt vajame järgmist elementaarset lemmat.

Lemma 1.7. *Olgu X Banachi ruum ja $x, y \in X$. Funktsioonid $f_+, f_- : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, mis on määratud seostega*

$$f_+(t) = \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t}$$

ja

$$f_-(t) = \frac{\|x - ty\| - \|x\|}{t},$$

on mittekahanevad.

Tõestus. Näitame ainult, et f_+ on mittekahanev. Funktsiooni f_- puhul on tõestus analoogiline. Olgu $t_1, t_2 \in (0, \infty)$ sellised, et $t_1 \leq t_2$. Piisab näidata, et

$$\frac{\|x + t_1 y\| - \|x\|}{t_1} \leq \frac{\|x + t_2 y\| - \|x\|}{t_2}.$$

Viimane võrratus on samaväärne tingimusega

$$\|t_2 x + t_1 t_2 y\| - t_2\|x\| \leq \|t_1 x + t_1 t_2 y\| - t_1\|x\|,$$

mis kehtib kolmnurga võrratuse põhjal:

$$\|t_2 x + t_1 t_2 y\| \leq \|t_1 x + t_1 t_2 y\| + (t_2 - t_1)\|x\|.$$

□

Lause 1.8. *Olgu X Banachi ruum ja $\delta > 0$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruum X on keskmiselt δ-kare;*

(ii) *iga $x_1, \ldots, x_n \in X$ ($n \in \mathbb{N}$) ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| \leq \varepsilon$ ja*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|;$$

(ii') *iga $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ($n \in \mathbb{N}$) ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| \leq \varepsilon$ ja*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2;$$

(iii) *iga* $x_1, \dots, x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ *ja* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y \in X$ *nii, et* $\|y\| = \varepsilon$ *ja*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|;$$

(iii') *iga* $x_1, \dots, x_n \in S_X$ $(n \in \mathbb{N})$ *ja* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $y \in X$ *nii, et* $\|y\| = \varepsilon$ *ja*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2.$$

Tõestus. (i)$\Leftrightarrow$(ii). Olgu $x_1, \dots, x_n \in X$. Tähistame $y \in X$ korral

$$f(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\|x_i + y\| + \|x_i - y\| - 2\|x_i\|}{\|y\|}.$$

Piisab näidata, et $\limsup_{\|y\|\to 0} f(y) \geq \delta$ parajasti siis, kui iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $y \in X$, et $\|y\| \leq \varepsilon$ ja $f(y) > \delta - \varepsilon$. Ülemise piirväärtuse mõiste kohaselt

$$\limsup_{\|y\|\to 0} f(y) = \inf_{\varepsilon > 0} \sup\{f(y) \mid \|y\| \leq \varepsilon\}.$$

Seega $\lim_{\|y\|\to 0} f(y) \geq \delta$ parajasti siis, kui $\inf_{\varepsilon>0} \sup\{f(y) \mid \|y\| \leq \varepsilon\} \geq \delta$. Viimane võrratus tähendab, et iga $\varepsilon > 0$ korral $\sup\{f(y) \mid \|y\| \leq \varepsilon\} \geq \delta$ ehk iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| \leq \varepsilon$ ja $f(y) > \delta - \varepsilon$.

Implikatsioonid (ii)$\Rightarrow$(ii') ja (iii)$\Rightarrow$ (iii') on ilmsed.

(ii')$\Rightarrow$(ii). Eeldame, et kehtib (ii'). Olgu $x_1, \dots, x_n \in X$ ja $\varepsilon > 0$. Otsime sellist $y \in X$, et $\|y\| \leq \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|.$$

Vaatleme esmalt juhtu, kus $x_1, \dots, x_n \in B_X$. Olgu $I \subset \{1, \dots, n\}$ selline, et $i \in I$ parajasti siis, kui $x_i \neq 0$. Kui $I = \emptyset$ ehk iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral $x_i = 0$, siis võime võtta suvalise $y \in X$, mille korral $\|y\| = \varepsilon$, sest sel juhul

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) &= 2\|y\| \\ &\geq (\delta - \varepsilon)\|y\| = (\delta - \varepsilon)\|y\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|.\end{aligned}$$

Eeldame, et $I \neq \emptyset$. Tingimuse (ii') põhjal leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| \leq \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \left(\left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} + y \right\| + \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - y \right\| \right) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2.$$

Seega

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\| \Big) \\
&\quad \geq \frac{1}{|I|} \sum_{i \in I} \left(\left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} + y \right\| + \left\| \frac{x_i}{\|x_i\|} - y \right\| - 2 \left\| x_i - \frac{x_i}{\|x_i\|} \right\| \right) \\
&\quad > \Big((\delta - \varepsilon)\|y\| + 2 \Big) - \frac{2}{|I|} \sum_{i \in I} \Big(1 - \|x_i\| \Big) \\
&\quad = (\delta - \varepsilon)\|y\| + \frac{2}{|I|} \sum_{i \in I} \|x_i\|.
\end{aligned}$$

Järelikult

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\| \Big) &= \frac{1}{n} \left(\sum_{i \in I} \Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\| \Big) + \sum_{i \notin I} 2\|y\| \right) \\
&> \frac{1}{n} \left(|I| \, (\delta - \varepsilon) \, \|y\| + 2 \sum_{i \in I} \|x_i\| + \sum_{i \notin I} \delta \|y\| \right) \\
&= \left(\delta - \frac{|I|}{n} \varepsilon \right) \|y\| + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \\
&\geq (\delta - \varepsilon) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.
\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $c = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\| > 1$. Kuna $x_1/c, \ldots, x_n/c \in B_X$, siis tõestuse esimese osa põhjal leidub $z \in X$ nii, et $\|x\| \leq \varepsilon/c$ ja

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(\left\| \frac{x_i}{c} + z \right\| + \left\| \frac{x_i}{c} - z \right\| \right) > \left(\delta - \frac{\varepsilon}{c} \right) \|z\| + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i\|}{c}.$$

Järelikult

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|x_i + cz\| + \|x_i - cz\| \Big) > \left(\delta - \frac{\varepsilon}{c} \right) \|cz\| + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Võtame $y = cz$. Siis $\|y\| \leq \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > \Big(\delta - \frac{\varepsilon}{c}\Big)\|cz\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|$$
$$\geq (\delta - \varepsilon)\|y\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|.$$

Kokkuvõttes oleme näidanud, et kehtib (ii).

(i)$\Leftrightarrow$(iii) tõestus on sama, mis (i)$\Leftrightarrow$(ii) tõestus, kui selles asendada iga võrratus $\|y\| \leq \varepsilon$ võrdusega $\|y\| = \varepsilon$. Seejuures paneme tähele, et

$$\sup\{f(y) \mid \|y\| \leq \varepsilon\} = \sup\{f(y) \mid \|y\| = \varepsilon\},$$

sest fikseeritud y korral on funktsioon $t \mapsto f(ty)$ lemma 1.7 põhjal mittekahanev, kui $t \in (0, \infty)$.

(iii')$\Rightarrow$(iii) tõestus on sõna-sõnalt (ii')$\Rightarrow$(ii) tõestus, võttes selles $\|y\| \leq \varepsilon$ asemel $\|y\| = \varepsilon$.

□

Lause 1.9 (vt. ka [G, lk. 12], vrd. [D, märkus (c)])**.** *Banachi ruum X on keskmiselt 2 kare parajasti siis, kui ta on oktaeedriline.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et X on keskmiselt 2-kare. Olgu $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Piisab leida $y \in S_X$ nii, et iga indeksi i korral $\|x_i + y\| > 2 - \varepsilon$. Kuna X on keskmiselt 2-kare, siis leidub $z \in X$ nii, et $\|z\| = \varepsilon/n$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\Big\|\frac{\varepsilon}{n}x_i + z\Big\| + \Big\|\frac{\varepsilon}{n}x_i - z\Big\|\Big) > \Big(2 - \frac{\varepsilon}{n}\Big)\|z\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big\|\frac{\varepsilon}{n}x_i\Big\|.$$

Jagades võrratuse mõlemad pooled arvuga ε/n ning tähistades $y = \frac{z}{\|z\|}$, saame, et

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > 4 - \frac{\varepsilon}{n}.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i+y\|+\|x_i-y\|\Big)\\
&\qquad\le \frac{1}{n}\left(\|x_1+y\|+\|x_1\|+\|y\|+2\sum_{i=2}^{n}\Big(\|x_i\|+\|y\|\Big)\right)\\
&\qquad\le \frac{1}{n}\Big(\|x_1+y\|+2+4(n-1)\Big)\\
&\qquad= \frac{1}{n}\|x_1+y\|+4-\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\|x_1+y\|>2-\varepsilon.$$

Sama mõttekäiku korrates teiste indeksite $i\in\{2,\dots,n\}$ korral saame sama võrratuse. Järelikult X on oktaeedriline.

Piisavus. Eeldame, et X on oktaeedriline. Olgu $x_1,\dots,x_n\in S_X$ ja $\varepsilon\in(0,1)$. Otsime $y\in X$ nii, et $\|y\|=\varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i+y\|+\|x_i-y\|\Big)>(2-\varepsilon)\|y\|+2.$$

Kuna X on oktaeedriline, siis leidub $z\in S_X$ nii, et iga indeksi i korral $\|x_i+x\|>2-\varepsilon^2/2$. Seega

$$\begin{aligned}
\|x_i+\varepsilon z\| &\ge \|x_i+z\|-\|(1-\varepsilon)z\|\\
&> 2-\frac{\varepsilon^2}{2}-(1-\varepsilon)\\
&= 1-\frac{\varepsilon^2}{2}+\varepsilon.
\end{aligned}$$

Olgu $y=\varepsilon z$. Nüüd näeme, et $\|y\|=\varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i+y\|+\|x_i-y\|\Big)>2-\varepsilon^2+2\varepsilon=(2-\varepsilon)\|y\|+2.$$

Järelikult X on keskmiselt 2-kare. $\square$

Anname nüüd ka δ-kareduse omadusele sarnased samaväärsed tingimused.

Lause 1.10. *Olgu X Banachi ruum ja $\delta > 0$. Järgmised väited on samaväärsed:*

(i) *ruum X on δ-kare;*

(ii) *iga $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| \le \varepsilon$ ja*

$$\|x+y\| + \|x-y\| > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2\|x\|;$$

(ii') *iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| \le \varepsilon$ ja*

$$\|x+y\| + \|x-y\| > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2;$$

(iii) *iga $x \in X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| = \varepsilon$ ja*

$$\|x+y\| + \|x-y\| > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2\|x\|;$$

(iii') *iga $x \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| = \varepsilon$ ja*

$$\|x+y\| + \|x-y\| > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2.$$

Tõestus on sõna-sõnalt lause 1.8 tõestus, võttes selles $n = 1$. □

1.2 Kareda ruumi kaasruumi kirjeldus

Kareda, täpsemalt δ-kareda Banachi ruumi kaasruumi kirjeldus anti artiklis [JZ]. Selle eeskujul saadi keskmiselt δ-kareda ruumi kaasruumi kirjeldus artiklis [D]. Käesoleva alapunkti eesmärk on esitada nimetatud kirjeldused koos tõestusega. Selleks vajame ühikkera viilu mõistet.

Definitsioon 1.11. Olgu X Banachi ruum.

(a) Ühikkera B_X *viiluks* nimetatakse hulka

$$S(x^*, \alpha) = \{x \in B_X \colon x^*(x) > 1 - \alpha\},$$

kus $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$;

(b) Kaasruumi X^* ühikkera B_{X^*} **-nõrgaks viiluks* nimetatakse hulka

$$S(x,\alpha) = \{x^* \in B_{X^*} : x^*(x) > 1-\alpha\},$$

kus $x \in S_X$ ja $\alpha > 0$;

(c) Viilude $S_1, \dots, S_n$ ($n \in \mathbb{N}$) *kumeraks kombinatsiooniks* nimetatakse hulka

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i,$$

kus $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ ja $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

Lemma 1.12. *Kui $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) on sellised, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, siis iga $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ nii, et*

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \lambda_i - \frac{k_i}{m} \right| < \varepsilon,$$

kus $m = k_1 + \dots + k_n$.

Tõestus. Olgu $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ sellised, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ ja olgu $\varepsilon > 0$. Valime $m \in \mathbb{N}$ sellise, et $m\varepsilon > 2n$ ja $l_1, \dots, l_n > 0$, kus $l_i = \lfloor m\lambda_i \rfloor$. Olgu iga indeksi i korral

$$k_i = \begin{cases} l_1 + m - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i, \text{ kui } i = 1, \\ l_i, \text{ kui } i \geq 2. \end{cases}$$

On selge, et $m = \sum_{i=1}^{n} k_i$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned} \left| \lambda_1 - \frac{k_1}{m} \right| &\leq \left| \lambda_1 - \frac{l_1}{m} \right| + \left| \frac{k_1}{m} - \frac{l_1}{m} \right| \\ &= \left| \lambda_1 - \frac{l_1}{m} \right| + \left| \frac{m - \sum_{i=1}^{n} l_i}{m} \right| \\ &= \left| \lambda_1 - \frac{l_1}{m} \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_i - \frac{l_i}{m} \right) \right|. \end{aligned}$$

Seega

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i-\frac{k_i}{m}\right| &\le \left|\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda_i-\frac{l_i}{m}\right)\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i-\frac{l_i}{m}\right| \\
&\le 2\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i-\frac{l_i}{m}\right| \\
&= \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{n}\big(m\lambda_i-l_i\big) \\
&\le \frac{2}{m}\sum_{i=1}^{n}1=\frac{2n}{m}<\varepsilon.
\end{aligned}$$

Sellega on lemma 1.12 tõestatud. □

Teoreem 1.13 ([D, teoreem 1])**.** *Olgu $\delta > 0$. Banachi ruum X on keskmiselt δ-kare parajasti siis, kui iga B_{X^*} *-nõrkade viilude kumera kombinatsiooni diameeter on vähemalt δ.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et X on keskmiselt δ-kare. Vaatleme B_{X^*} *-nõrku viile $S_1, \dots, S_n$, kus $S_i = S(x_i, \alpha_i)$. Olgu $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ sellised, et $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$. Näitame, et kumera kombinatsiooni $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i$ diameeter on vähemalt δ. Olgu $\varepsilon > 0$ selline, et

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\min\Big\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\Big\}.$$

Lemma 1.12 põhjal leiduvad $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ nii, et

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i-\frac{k_i}{m}\right|<\varepsilon,$$

kus $m = k_1 + \dots + k_n$. Kuna X on keskmiselt δ-kare, siis leidub $y \in X$ nii, et $\|y\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\Big(k_i\big(\|x_i+y\|+\|x_i-y\|\big)\Big) > (\delta-\varepsilon)\,\|y\|+2.$$

Hahn–Banachi teoreemi põhjal leiduvad iga i korral $f_i, g_i \in S_{X^*}$ nii, et

$$f_i(x_i+y)=\|x_i+y\| \qquad \text{ja} \qquad g_i(x_i-y)=\|x_i-y\|.$$

Paneme tähele, et

$$
\begin{aligned}
f_i(x_i) &= f_i(x_i+y) - f_i(y) = \|x_i+y\| - f_i(y) \\
&\geq \|x_i\| - 2\|y\| = 1 - 2\varepsilon > 1 - \alpha_i.
\end{aligned}
$$

Järelikult $f_i \in S_i$. Analoogiliselt saab näidata, et $g_i \in S_i$. Olgu

$$
f = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \qquad \text{ja} \qquad g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i.
$$

Ilmselt $f, g \in S$. Paneme tähele, et

$$
\begin{aligned}
\left|(f-g)(y) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} k_i(f_i-g_i)(y)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i - \frac{k_i}{m}\right| |(f_i-g_i)(y)| \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\left|\lambda_i - \frac{k_i}{m}\right| 2\|y\| < 2\varepsilon\|y\|.
\end{aligned}
$$

Kuna

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\Big(k_i(f_i-g_i)(y)\Big) &\geq (\delta-\varepsilon)\,\|y\| + 2 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\Big(k_i\big(f_i(x_i)+g_i(x_i)\big)\Big) \\
&\geq (\delta-\varepsilon)\,\|y\|,
\end{aligned}
$$

siis

$$
\begin{aligned}
\|f-g\| &\geq (f-g)\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \\
&= \frac{1}{\|y\|}\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(f_i-g_i)(y) \\
&\geq \frac{1}{\|y\|}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}k_i\big(f_i-g_i\big)(y) - 2\varepsilon\|y\|\right) \\
&\geq \frac{1}{\|y\|}\Big((\delta-\varepsilon)\,\|y\| - 2\varepsilon\|y\|\Big) \\
&= \delta - 3\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Järelikult $\operatorname{diam}(S) \geq \delta$.

Piisavus. Eeldame, et iga B_{X^*} *-nõrkade viilude kumera kombinatsiooni diameeter on vähemalt δ. Olgu $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Vaatleme B_{X^*}

*-nõrke viile $S_1, \ldots, S_n$, kus $S_i = S(x_i, \varepsilon^2)$. Eelduse põhjal leiduvad $f, g \in \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S_i$ nii, et

$$\|f - g\| > \delta - \varepsilon.$$

Olgu $y \in X$ selline, et $\|y\| = \varepsilon$ ja

$$(f - g)(y) \geq (\delta - \varepsilon)\|y\|.$$

Olgu $f_i, g_i \in S_i$ sellised, et

$$f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_i \qquad \text{ja} \qquad g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_i.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(f_i(x_i + y) + g_i(x_i - y)\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(f_i(x_i) + g_i(x_i)\Big) + (f - g)(y) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (1 - \varepsilon^2 + 1 - \varepsilon^2) + (\delta - \varepsilon)\|y\| \\
&= 2 - 2\varepsilon^2 + (\delta - \varepsilon)\|y\| \\
&= (\delta - 3\varepsilon)\|y\| + 2.
\end{aligned}$$

Järelikult X on keskmiselt δ-kare. $\square$

Lause 1.14 ([JZ, lause 1])**.** *Olgu $\delta > 0$. Banachi ruum X on δ-kare parajasti siis, kui iga B_{X^*} *-nõrga viilu diameeter on vähemalt δ.*

Tõestus on sisuliselt teoreemi 1.13 tõestus, võttes selles $n = 1$. $\square$

2 Otsesumma ja alamruumi karedus

Käesoleva paragrahvi esimeses alapunktis selgitame Banachi ruumide ja nende otsesumma vastavate kareduse omaduste vahelist seost. Teises alapunktis uurime Banachi ruumi kareduse omaduste päranduvust separaablitele alamruumidele.

2.1 Absoluutse normiga otsesumma karedus

Üldiselt vaatleme otsesummasid absoluutse normaliseeritud normiga. Olgu X ja Y Banachi ruumid.

Definitsioon 2.1 ([ABGLP, definitsioon 2.3])**.** Öeldakse, et norm $\|\cdot\|$ otsesummal $X \oplus Y$ on *absoluutne*, kui leidub funktsioon $N\colon [0,\infty)\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ nii, et iga $x \in X$ ja $y \in Y$ korral

$$\|(x,y)\| = N(\|x\|,\|y\|).$$

Kui seejuures $N(0,1) = N(1,0) = 1$, siis öeldakse, et absoluutne norm $\|\cdot\|$ on *normaliseeritud*.

Absoluutset normi, millele vastab funktsioon N, tähistame $\|\cdot\|_N$. Otsesummat $X \oplus Y$ absoluutse normiga $\|\cdot\|_N$ tähistame $X \oplus_N Y$.

Näide 2.2. Iga p-norm

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}, & \text{kui} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\{\|x\|, \|y\|\}, & \text{kui} \quad p = \infty, \end{cases}$$

on absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$.

Näide 2.3. Olgu $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Otsesumma $X \oplus Y$ norm

$$\|(x,y)\| = \max\{\|(x,y)\|_\infty, \lambda\|(x,y)\|_1\}$$

on absoluutne normaliseeritud norm, kuid pole p-norm. Paneme tähele, et $\lambda = 1$ korral on vaadeldav norm võrdne 1-normiga ja $\lambda = 1/2$, korral on tegu ∞-normiga.

Järgmisesse lemmasse koondame absoluutse normi põhiomadused.

Lemma 2.4 ([Har, lemma 3.1 ja lk. 317]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$.*

(a) *$X \oplus_N Y$ on Banachi ruum, kusjuures*

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_N \leq \|\cdot\|_1.$$

(b) *Kui $x_1, x_2 \in X$ ja $y_1, y_2 \in Y$ on sellised, et $\|x_1\| \leq \|x_2\|$ ja $\|y_1\| \leq \|y_2\|$, siis*

$$\|(x_1, y_1)\|_N \leq \|(x_2, y_2)\|_N.$$

(c) *Leidub selline absoluutne normaliseeritud norm $\|\cdot\|_{N^*}$ otsesummal $X^* \oplus Y^*$, et $(X \oplus_N Y)^* = X^* \oplus_{N^*} Y^*$, kusjuures iga $(x^*, y^*) \in X^* \oplus_{N^*} Y^*$ korral*

$$\|(x^*, y^*)\|_{N^*} = \max_{N(|a|,|b|)\leq 1} \Big(|a|\|x^*\| + |b|\|y^*\| \Big)$$

ja iga $(x, y) \in X \oplus_N Y$ korral

$$(x^*, y^*)(x, y) = x^*(x) + y^*(y).$$

Üldjuhul ei kandu komponentruumide keskmiselt δ-karedus absoluutse normiga otsesummale.

Lause 2.5 ([HLP, lause 3.12]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid ja $1 < p < \infty$. Siis $X \oplus_p Y$ ei ole oktaeedriline.*

Uurime järgnevas, millistel tingimustel on otsesumma keskmiselt kare.

Lause 2.6. *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $\delta > 0$. Kui X on keskmiselt δ-kare, siis $X \oplus_1 Y$ on keskmiselt δ-kare.*

Tõestus. Olgu $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in S_{X \oplus_1 Y}$ ja $\varepsilon > 0$. Kui X on keskmiselt δ-kare, siis leidub $u \in X$ nii, et $\|u\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|x_i + u\| + \|x_i - u\| \Big) > (\delta - \varepsilon)\|u\| + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|.$$

Seega

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|(x_i,y_i)+(u,0)\|_1+\|(x_i,y_i)-(u,0)\|_1\Big)\\
&\qquad=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i+u\|+\|y_i\|+\|x_i-u\|+\|y_i\|\Big)\\
&\qquad>(\delta-\varepsilon)\|u\|+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|+\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|=(\delta-\varepsilon)\|(u,0)\|_1+2.
\end{aligned}$$

Järelikult $X\oplus_1 Y$ on keskmiselt δ-kare. □

Teoreem 2.7. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X\oplus Y$ ning $\delta>0$. Kui X ja Y on keskmiselt δ-karedad, siis $X\oplus_N Y$ on keskmiselt $K\delta$-kare, kus $K>0$ on selline, et $\|\cdot\|_{N^*}\geq K\|\cdot\|_1$.*

Tõestus. Kasutame artikli [HPP] põhitulemuse tõestusideed. Eeldame, et X ja Y on keskmiselt δ-karedad ning $K>0$ on selline, et $\|\cdot\|_{N^*}\geq K\|\cdot\|_1$. Näitame, et $Z=X\oplus_N Y$ on keskmiselt $K\delta$-kare. Vaatleme B_{Z^*} *-nõrku viile $S_1\dots,S_n$, kus $S_i=S((x_i,y_i),\alpha_i)$. Olgu $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$ sellised, et $\lambda_1+\dots+\lambda_n=1$. Näitame, et

$$\operatorname{diam}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i S_i\right)\geq K\delta.$$

Tähistame

$$\widehat{x}_i=\begin{cases}\dfrac{x_i}{\|x_i\|}, & \text{kui } x_i\neq 0,\\ 0, & \text{kui } x_i=0,\end{cases}\qquad \text{ja}\qquad \widehat{y}_i=\begin{cases}\dfrac{y_i}{\|y_i\|}, & \text{kui } y_i\neq 0,\\ 0, & \text{kui } y_i=0.\end{cases}$$

Vaatleme vastavalt B_{X^*} ja B_{Y^*} *-nõrku viile

$$S_i^{X^*}=S(\widehat{x}_i,\alpha_i)\qquad\text{ja}\qquad S_i^{Y^*}=S(\widehat{y}_i,\alpha_i),$$

juhul $x_i=0$ või $y_i=0$ olgu vastavalt $S_i^{X^*}=B_{X^*}$ või $S_i^{Y^*}=B_{Y^*}$. Hahn–Banachi teoreemi põhjal leiduvad iga indeksi i korral $c_i,d_i\geq 0$ nii, et

$$N^*(c_i,d_i)=1\qquad\text{ja}\qquad c_i\|x_i\|+d_i\|y_i\|=1.$$

Siis

$$c_i S_i^{X^*} \times d_i S_i^{Y^*} \subset S_i,$$

sest lemma 2.4 (b) põhjal iga $x^* \in S_i^{X^*}$ ja $y^* \in S_i^{Y^*}$ korral

$$N^*(c_i\|x^*\|, d_i\|y^*\|) \leq N^*(c_i, d_i) = 1$$

ning

$$\begin{aligned} c_i x^*(x_i) + d_i y^*(y_i) &= c_i\|x_i\|x^*(\widehat{x}_i) + d_i\|y_i\|y^*(\widehat{y}_i) \\ &> (c_i\|x_i\| + d_i\|y_i\|)(1-\alpha_i) \\ &= 1 - \alpha_i. \end{aligned}$$

Tähistame

$$\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i \qquad \text{ja} \qquad \nu = \sum_{i=1}^n \lambda_i d_i.$$

Ilmselt $\mu + \nu \geq 1$. Eeldame, et $\mu \neq 0$ ja $\nu \neq 0$. Tähistame iga indeksi i korral

$$\mu_i = \frac{\lambda_i c_i}{\mu} \qquad \text{ja} \qquad \nu_i = \frac{\lambda_i d_i}{\nu}.$$

Paneme tähele, et $\mu_1 + \cdots + \mu_n = \nu_1 + \cdots + \nu_n = 1$. Olgu $\varepsilon > 0$. Kuna eelduse kohaselt on *-nõrkade viilude $S_1^{X^*}, \ldots, S_n^{X^*}$ kumera kombinatsiooni $\sum_{i=1}^n \mu_i S_i^{X^*}$ diameeter vähemalt δ, siis saame leida $x^*, u^* \in \sum_{i=1}^n \mu_i S_i^{X^*}$ nii, et

$$\|x^* - u^*\| \geq \delta - \varepsilon.$$

Kuna eelduse kohaselt on *-nõrkade viilude $S_1^{Y^*}, \ldots, S_n^{Y^*}$ kumera kombinatsiooni $\sum_{i=1}^n \nu_i S_i^{Y^*}$ diameeter vähemalt δ, siis saame leida $y^*, v^* \in \sum_{i=1}^n \nu_i S_i^{Y^*}$ nii, et

$$\|y^* - v^*\| \geq \delta - \varepsilon.$$

Näitame, et $(\mu x^*, \nu y^*) \in \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$. Selleks piisab, kui

$$\mu x^* \in \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(c_i S_i^{X^*}\right) \qquad \text{ja} \qquad \nu y^* \in \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(d_i S_i^{Y^*}\right),$$

sest iga indeksi i korral $c_i S_i^{X^*} \times d_i S_i^{Y^*} \subset S_i$. Olgu $x_i^* \in S_i^{X^*}$ ja $y_i^* \in S_i^{Y^*}$ sellised, et

$$x^* = \sum_{i=1}^n \mu_i x_i^* \qquad \text{ja} \qquad y^* = \sum_{i=1}^n \nu_i y_i^*.$$

Siis

$$\mu x^* = \sum_{i=1}^{n} \mu\mu_i x_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i x_i^* \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(c_i S_i^{X^*}\right)$$

ja

$$\nu y^* = \sum_{i=1}^{n} \nu\nu_i y_i^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i d_i y_i^* \in \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(d_i S_i^{Y^*}\right).$$

Järelikult $(\mu x^*, \nu y^*) \in \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$. Analoogiliselt saab näidata, et $(\mu u^*, \nu v^*) \in \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$. Nüüd saame, et

$$\begin{aligned}
\|(\mu x^*, \nu y^*) - (\mu u^*, \nu v^*)\|_{N^*} &= N^*(\mu\|x^* - u^*\|, \nu\|y^* - v^*\|) \\
&\geq N^*(\mu, \nu)(\delta - \varepsilon) \\
&\geq K\|(\mu, \nu)\|_1(\delta - \varepsilon) \\
&= K(\delta - \varepsilon).
\end{aligned}$$

Seega sel juhul $\operatorname{diam}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i\right) \geq K\delta$.

Vaatleme nüüd juhtu, kus $\mu = 0$ või $\nu = 0$. Konkreetsuse mõttes olgu $\mu = 0$. Kuna

$$\{0\} \times S_i^{Y^*} \subset S_i,$$

siis

$$\{0\} \times \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i^{Y^*} \subset \sum_{i=1}^{n} \lambda_i S_i.$$

Kuna eelduse kohaselt on *-nõrkade viilude $S_1^{Y^*}, \ldots, S_n^{Y^*}$ kumera kombinatsiooni $\sum_{i=1}^n \nu_i S_i^{Y^*}$ diameeter vähemalt δ, siis saame leida $y^*, v^* \in \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i^{Y^*}$ nii, et

$$\|y^* - v^*\| \geq \delta - \varepsilon.$$

Seega $(0, y^*), (0, v^*) \in \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i$. Nüüd saame, et

$$\begin{aligned}
\|(0, y^*) - (0, v^*)\|_{N^*} &\geq N^*(0, \|y^* - v^*\|) \\
&= \|y^* - v^*\| \\
&\geq \delta - \varepsilon.
\end{aligned}$$

Järelikult $\operatorname{diam}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i\right) \geq K\delta$.

Teoreemi 1.13 põhjal $X \oplus_N Y$ on keskmiselt $K\delta$-kare. $\square$

Kuna p-normid on absoluutsed normaliseeritud normid, siis saame teoreemist 2.7 vahetult järgmised järeldused.

Järeldus 2.8. *Kui Banachi ruumid X ja Y on keskmiselt δ-karedad, siis*

(a) $X \oplus_\infty Y$ *on keskmiselt δ-kare;*

(b) $X \oplus_p Y$*, kus $1 < p < \infty$, on keskmiselt $2^{-1/p}\delta$-kare.*

Järeldus 2.9. *Kui Banachi ruumid X ja Y on oktaeedrilised, siis $X \oplus_p Y$, kus $1 < p < \infty$, on keskmiselt $2^{1/q}$-kare.*

Järgmine lause näitab, et järelduses 2.9 on $2^{1/q}$ üldiselt suurim δ, mille puhul oktaeedriliste ruumide p-summa on keskmiselt δ-kare.

Lause 2.10. *Olgu $p \in (1,\infty)$ ja $q \in (1,\infty)$ sellised, et $1/p + 1/q = 1$. Banachi ruum $\ell_1 \oplus_p \ell_1$ ei ole keskmiselt δ-kare ühegi $\delta > 2^{1/q}$ korral.*

Tõestus. Näitame, et $\ell_1 \oplus_p \ell_1$ ei ole keskmiselt δ-kare ühegi $\delta > 2^{1/q}$ korral. Vaatleme ruumi $\ell_1 \oplus_p \ell_1$ elemente $z_1 = (e_1, 0)$ ja $z_2 = (0, e_1)$. Piisab näidata, et leidub selline $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, et $f(\varepsilon) \to 0$, kui $\varepsilon \to 0$ ning iga $\varepsilon > 0$ ja $z \in \ell_1 \oplus_p \ell_1$, kus $\|z\| = \varepsilon$, korral

$$\frac{1}{2}\Big(\|z_1 + z\|_p + \|z_1 - z\|_p + \|z_2 + z\|_p + \|z_2 - z\|_p\Big) \le \Big(2^{1/q} + f(\varepsilon)\Big)\|z\|_p + 2.$$

Olgu $\varepsilon \in (0,1)$. Olgu $z = (x, y) \in \ell_1 \oplus_p \ell_1$ selline, et $\|z\|_p = \varepsilon$. Maclaurini valemit kasutades saame, et

$$(1 + \|x\|)^p = 1 + p\|x\| + \frac{p(p-1)}{2}(1+\xi)^{p-2}\|x\|^2,$$

kus $\xi \in (0, \|x\|)$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}\|z_1 \pm z\|_p^p = \|e_1 \pm x\|^p + \|y\|^p &\le (1 + \|x\|)^p + \|y\|^p \\ &\le 1 + p\|x\| + \frac{p(p-1)(1+\xi)^{p-2}}{2}\|x\|^2 + \|y\|^p.\end{aligned}$$

Edasi täpsustame seda hinnangut vaadeldes eraldi juhte $1 < p \le 2$ ja $p > 2$. Seejärel kasutame üldistatud Bernoulli võrratust (vt. nt. [M, , lk 34]), mis ütleb, et $t \geq 0$ korral $(1+t)^{1/p} \leq 1 + t/p$. Vaatleme kahte juhtu, esiteks, kus $p \in (1, 2]$ ja teiseks, kus $p > 2$.

Vaatleme esmalt juhtu, kus $1 < p \leq 2$. Kuna $\xi \in (0, \|x\|)$, siis

$$(1+\xi)^{p-2} \leq (1+0)^{p-2} = 1.$$

Järelikult koos varasema hinnanguga saame Bernoulli võrratuse abil

$$\begin{aligned}\|z_1 \pm z\|_p &\leq \Big(1 + p\|x\| + \frac{p(p-1)}{2}\|x\|^2 + \|y\|^p\Big)^{1/p} \\ &\leq 1 + \|x\| + \frac{p-1}{2}\|x\|^2 + \frac{\|y\|^p}{p}.\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame, et

$$\|z_2 \pm z\|_p \leq 1 + \frac{\|x\|^p}{p} + \frac{p-1}{2}\|y\|^2 + \|y\|.$$

Kuna $\|x\| + \|y\| \leq 2^{1/q}\|(x,y)\|_p$, siis kokkuvõttes

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big(\|z_1+z\|_p + \|z_1-z\|_p + \|z_2+z\|_p + \|z_2-z\|_p\Big) \\ &\quad\leq \left(1 + \|x\| + \frac{p-1}{2}\|x\|^2 + \frac{\|y\|^p}{p}\right) + \left(1 + \frac{\|x\|^p}{p} + \frac{p-1}{2}\|y\|^2 + \|y\|\right) \\ &\quad= 2 + (\|x\| + \|y\|) + \frac{p-1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2) + \frac{1}{p}(\|x\|^p + \|y\|^p) \\ &\quad\leq 2 + 2^{1/q}\|(x,y)\|_p + \frac{p-1}{2}\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^p}{p} \\ &\quad= \left(2^{1/q} + \frac{p-1}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p}\right)\|z\| + 2.\end{aligned}$$

Seega sobib juhul $1 < p \leq 2$ võtta

$$f(\varepsilon) = \frac{p-1}{2}\varepsilon + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p}.$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $p > 2$. Kuna $\xi \in (0, \|x\|)$ ja $\|x\| \leq \varepsilon < 1$, siis

$$(1+\xi)^{p-2} \leq (1+\|x\|)^{p-2} \leq (1+\varepsilon)^{p-2} < 2^{p-2}.$$

Järelikult koos varasema hinnanguga saame Bernoulli võrratuse abil

$$\begin{aligned}\|z_1 \pm z\|_p &\leq \big(1 + p\|x\| + p(p-1)2^{p-3}\|x\|^2 + \|y\|^p\big)^{1/p} \\ &\leq 1 + \|x\| + (p-1)2^{p-3}\|x\|^2 + \frac{\|y\|^p}{p}.\end{aligned}$$

Analoogiliselt saame, et

$$\begin{aligned}\|z_2 \pm z\|_p &\le (\|x\|^p + 1 + p\|y\| + p(p-1)2^{p-3}\varepsilon^2)^{1/p} \\ &\le 1 + \frac{\|x\|^p}{p} + (p-1)2^{p-3}\|y\|^2 + \|y\|.\end{aligned}$$

Kuna $\|x\| + \|y\| \le 2^{1/q}\|(x,y)\|_p$, siis

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Big(\|z_1 + z\|_p + \|z_1 - z\|_p + \|z_2 + z\|_p + \|z_2 - z\|_p\Big) \\ &\quad \le \left(1 + \|x\| + (p-1)2^{p-3}\varepsilon^2 + \frac{\|y\|^p}{p}\right) + \left(1 + \frac{\|x\|^p}{p} + (p-1)2^{p-3}\varepsilon^2 + \|y\|\right) \\ &\quad = 2 + (\|x\| + \|y\|) + (p-1)2^{p-3}(\|x\|^2 + \|y\|^2) + \frac{1}{p}(\|x\|^p + \|y\|^p) \\ &\quad \le 2 + 2^{1/q}\|(x,y)\|_p + (p-1)2^{p-3}\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^p}{p} \\ &\quad = \left(2^{1/q} + (p-1)2^{p-3}\varepsilon + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p}\right)\|z\| + 2.\end{aligned}$$

Seega sobib juhul $p > 2$ võtta

$$f(\varepsilon) = (p-1)2^{p-3}\varepsilon + \frac{\varepsilon^{p-1}}{p}.$$

Järelikult $\ell_1 \oplus_p \ell_1$ ei ole keskmiselt δ-kare ühegi $\delta > 2^{1/q}$ korral. □

Teoreem 2.11. *Iga $\delta \in (1,2]$ korral leidub Banachi ruum, mis on keskmiselt δ-kare ning pole keskmiselt γ-kare ühegi $\gamma > \delta$ korral.*

Tõestus. Kui $\delta = 2$, siis otsitavaks oktaeedriliseks ruumiks sobib jadaruum ℓ_1. Kui $\delta \in (1,2)$, siis leidub $q \in (1,\infty)$ nii, et $\delta = 2^{1/q}$. Olgu $p \in (1,\infty)$ selline, et $1/p + 1/q = 1$. Kuna ℓ_1 on oktaeedriline, siis teoreemi 2.7 ja lause 2.10 põhjal $\ell_1 \oplus_p \ell_1$ on keskmiselt δ-kare ning pole keskmiselt γ-kare ühegi $\gamma > \delta$ korral. □

Järgnevalt uurime keskmiselt kareduse kandumist otsesummalt komponentruumidele. Selleks vajame järgmisi mõisteid.

Definitsioon 2.12 ([FHHMZ, definitsioonid 3.59 ja 7.10])**.** Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et

(a) element $x \in B_X$ on ühikkera B_X *ekstreemumpunkt*, kui elementide $y, z \in B_X$ korral võrdusest $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ järeldub, et $x = y = z$;

(b) element $x \in B_X$ on ühikkera B_X *eksponeeritud punkt*, kui leidub $x^* \in X^*$ nii, et $x^*(x) = \|x^*\|$ ja $\{y \in B_X \mid x^*(x) = x^*(y)\} = \{x\}$; sel juhul öeldakse ka, et x^* on elementi x *eksponeeriv funktsionaal*;

(c) element $x \in B_X$ on ühikkera B_X *tugevalt eksponeeritud punkt*, kui leidub $x^* \in S_{X^*}$ nii, et $\operatorname{diam} S(x^*, \alpha) \to 0$, kui $\alpha \to 0$; sel juhul öeldakse ka, et x^* on elementi x *tugevalt eksponeeriv funktsionaal.*

Lemma 2.13. *Olgu* $\|\cdot\|_N$ *selline absoluutne normaliseeritud norm ruumil* $\mathbb{R}^2$*, et element* $(1,0)$ *on ühikkera* $B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}$ *ekstreemumpunkt. Siis*

(a) *element* $(1,0)$ *on ühikkera* $B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}$ *tugevalt eksponeeritud punkt, seejuures elementi* $(1,0)$ *tugevalt eksponeeriv funktsionaal on* $(1,0) \in B_{\mathbb{R}\oplus_{N^*}\mathbb{R}}$*;*

(b) *iga* $\varepsilon > 0$ *korral leidub* $\gamma > 0$ *nii, et kui* $(a,b) \in B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}$ *ja* $a > 1-\gamma$*, siis* $|b| < \varepsilon$*.*

Tõestus. (a). Kuna lõplikumõõtmelises Banachi ruumis $\mathbb{R}^2$ ühikkera eksponeeritud ja tugevalt eksponeeritud punkti mõisted ühtivad (vt. nt. [AB, lemma 7.84]), siis piisab näidata, et $(1,0)$ on eksponeeritud punkt, mida eksponeerib funktsionaal $(1,0)$. On selge, et

$$(1,0)\big((1,0)\big) = 1 = \|(1,0)\|_{N^*}.$$

Vaatleme hulka

$$E = \{(a,b) \in B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}} \mid (1,0)\big((a,b)\big) = 1\}.$$

On ilmne, et $E = \{(1,b) \in B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}\}$. Näitame, et $E = \{(1,0)\}$. Oletame vastuväiteliselt, et leidub $(1,b) \in E$ nii, et $b \neq 0$. Kuna N on absoluutne norm, siis ka $(1,-b) \in E$. Nüüd saame, et

$$(1,0) = \frac{1}{2}(1,b) + \frac{1}{2}(1,-b),$$

mis on vastuolus eeldusega, et $(1,0)$ on $B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}$ ekstreemumpunkt. Järelikult $(1,0)$ on eksponeeritud punkt.

(b). Osa (a) põhjal teame, et ühikkera $B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}$ viilu $S\big((1,0),\alpha\big)$ korral $\operatorname{diam} S\big((1,0),\alpha\big) \to 0$, kui $\alpha \to 0$. Seega iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $\gamma > 0$ nii, et $\operatorname{diam} S\big((1,0),\gamma\big) < \varepsilon$. Järelikult $(a,b) \in B_{\mathbb{R}\oplus_N\mathbb{R}}$ ja $a > 1-\gamma$ ehk $(a,b) \in S\big((1,0),\gamma\big)$ korral

$$\|(a,b)-(a,0)\|_N = |b| < \varepsilon.$$

□

Teoreem 2.14. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\|\cdot\|_N$ selline absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$, et element $(1,0)$ on $B_{\mathbb{R}\oplus_{N^*}\mathbb{R}}$ ekstreemumpunkt ja $\delta > 0$. Kui $X \oplus_N Y$ on keskmiselt δ-kare, siis X on keskmiselt δ-kare.*

Tõestus. Eeldame, et $Z = X \oplus_N Y$ on keskmiselt δ-kare. Näitame, et X on keskmiselt δ-kare. Olgu $\lambda_1,\dots,\lambda_n > 0$, sellised, et $\lambda_1+\dots+\lambda_n = 1$. Vaatleme B_X *-nõrku viile $S_1,\dots,S_n$, kus $S_i = S(x_i,\alpha_i)$, ja nende kumerat kombinatsiooni

$$S = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i.$$

Näitame, et $\operatorname{diam}(S) \geq \delta$. Olgu $\varepsilon > 0$. Lemma 2.13 (b) põhjal leidub selline $\gamma \in \big(0,\min\{\alpha_i\}\big)$, et kui $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on sellised, et $N^*(a,b) \leq 1$ ja $a > 1-\gamma$, siis $|b| < \varepsilon$. Paneme tähele, et

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i S(x_i,\gamma) \subset \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i.$$

Eelduse kasutamiseks vaatleme B_{Z^*} *-nõrku viile $\tilde S_1,\dots,\tilde S_n$, kus $\tilde S_i = S\big((x_i,0),\gamma\big)$ ning nende kumerat kombinatsiooni $\tilde S = \sum_{i=1}^n \lambda_i \tilde S_i$. Eelduse põhjal leiduvad $z_1^* = (x_1^*,y_1^*) \in \tilde S$ ja $z_2^* = (x_2^*,y_2^*) \in \tilde S$ nii, et $\|z_1^*-z_2^*\|_{N^*} \geq \delta-\varepsilon$ ehk

$$N^*(\|x_1^*-x_2^*\|,\|y_1^*-y_2^*\|) \geq \delta-\varepsilon.$$

Olgu $j \in \{1,2\}$ korral

$$(x_j^*, y_j^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_{j,i}^*, y_{j,i}^*),$$

kus $(x_{j,i}^*, y_{j,i}^*) \in \tilde{S}_i$. Paneme tähele, et kuna iga $j \in \{1,2\}$ ja $i \in \{1,\ldots,n\}$ korral $N^*(\|x_{j,i}^*\|, \|y_{j,i}^*\|) \leq 1$ ja $x_{j,i}^*(x) > 1-\gamma$, siis $\|y_{j,i}^*\| < \varepsilon$. Seega

$$\|y_j^*\| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \|y_{j,i}^*\| < \varepsilon.$$

Järelikult

$$\|y_1^* - y_2^*\| \leq \|y_1^*\| + \|y_2^*\| < 2\varepsilon,$$

mistõttu

$$\begin{aligned} N^*(\|x_1^* - x_2^*\|, \|y_1^* - y_2^*\|) &\leq \|x_1^* - x_2^*\| + \|y_1^* - y_2^*\| \\ &\leq \|x_1^* - x_2^*\| + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et

$$\|x_1^* - x_2^*\| > \delta - 3\varepsilon.$$

Seega iga B_{X^*} *-nõrkade viilude kumera kombinatsiooni diameeter on vähemalt δ. Järelikult teoreemi 1.13 põhjal X on keskmiselt δ-kare. $\square$

Järeldus 2.15. *Olgu $\delta > 0$ ja $1 < p \leq \infty$. Kui $X \oplus_p Y$ on keskmiselt δ-kare, siis X on keskmiselt δ-kare.*

Järgnevalt selgitame Banachi ruumide ja nende otsesumma kareduse seost.

Lause 2.16 (vrd. lausega 2.6)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid ning $\delta > 0$. Kui X on δ-kare, siis $X \oplus_1 Y$ on δ-kare.*

Tõestus on sisuliselt lause 2.6 tõestus, võttes selles $n = 1$. $\square$

Lause 2.17 (vrd. teoreemiga 2.7)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta > 0$ ja $\|\cdot\|_N$ absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$ ja $\delta > 0$. Kui X ja Y on δ-karedad, siis $X \oplus_N Y$ on δ-kare.*

Tõestus. Eeldame, et X ja Y on δ-karedad. Näitame, et $X \oplus_N Y$. Olgu $(x,y) \in S_{X\oplus_N Y}$ ja $\varepsilon > 0$. Eeldame esmalt, et $x \neq 0$ ja $y \neq 0$. Kuna X on δ-kare, siis leidub $x_0 \in X$ nii, et $\|x_0\| = \varepsilon$ ja

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} + x_0 \right\| + \left\| \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| > (\delta - \varepsilon)\|x_0\| + 2.$$

Kuna Y on δ-kare, siis leidub $y_0 \in Y$ nii, et $\|y_0\| = \varepsilon$

$$\left\| \frac{y}{\|y\|} + y_0 \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} - y_0 \right\| > (\delta - \varepsilon)\|y_0\| + 2.$$

Olgu $(u,v) = (\|x\|x_0, \|y\|y_0)$. Ilmselt $\|(u,v)\|_N = \varepsilon$. Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
&\|(x,y) + (u,v)\|_N + \|(x,y) - (u,v)\|_N \\
&\quad = N(\|x+u\|, \|y+v\|) + N(\|x-u\|, \|y-v\|) \\
&\quad \geq N(\|x+u\| + \|x-u\|, \|y+v\| + \|y-v\|) \\
&\quad = N\Bigg(\|x\| \Big(\left\| \frac{x}{\|x\|} + x_0 \right\| + \left\| \frac{x}{\|x\|} - x_0 \right\| \Big), \\
&\qquad\qquad \|y\| \Big(\left\| \frac{y}{\|y\|} + y_0 \right\| + \left\| \frac{y}{\|y\|} - y_0 \right\| \Big) \Bigg) \\
&\quad > N\Big(\|x\|\big((\delta-\varepsilon)\varepsilon + 2\big), \|y\|\big((\delta-\varepsilon)\varepsilon + 2\big) \Big) \\
&\quad \geq \big((\delta-\varepsilon)\varepsilon + 2\big) N(\|x\|, \|y\|) \\
&\quad = (\delta - \varepsilon)\|(u,v)\|_N + 2.
\end{aligned}$$

Vaatleme nüüd juhtu, kus $x = 0$ või $y = 0$. Konkreetsuse mõttes olgu $x = 0$. Siis $\|y\| = 1$. Kuna Y on δ-kare, siis leidub $v \in Y$ nii, et $\|v\| = \varepsilon$ ja

$$\|y + v\| + \|y - v\| > (\delta - \varepsilon)\|v\| + 2.$$

Paneme tähele, et

$$\begin{aligned}
&\|(x,y) + (0,v)\|_N + \|(x,y) - (0,v)\|_N \\
&\quad = N(0, \|y+v\|) + N(0, \|y-v\|) \\
&\quad = \|y+v\| + \|y-v\| \\
&\quad > (\delta - \varepsilon)\|v\| + 2 \\
&\quad = (\delta - \varepsilon)\|(0,v)\|_N + 2.
\end{aligned}$$

Kokkuvõttes oleme saanud, et $X \oplus_N Y$ on δ-kare. $\square$

Järeldus 2.18 (vrd. järeldusega 2.8)**.** *Kui Banachi ruumid X ja Y on δ-karedad ja $1 \leq p \leq \infty$, siis $X \oplus_p Y$ on δ-kare.*

Nüüd saame kergesti järeldada, et keskmine karedus ja karedus on erinevad mõisted.

Näide 2.19. Banachi ruum $\ell_1 \oplus_2 \ell_1$ on 2-kare ja keskmiselt $\sqrt{2}$-kare, aga pole keskmiselt δ-kare ühegi $\delta > \sqrt{2}$ korral.

Põhjendus. Teoreemi 2.7 põhjal on $\ell_1 \oplus_2 \ell_1$ keskmiselt $\sqrt{2}$-kare ja lause 2.10 põhjal pole keskmiselt δ-kare ühegi $\delta > \sqrt{2}$ korral. Lause 2.17 põhjal on $\ell_1 \oplus_2 \ell_1$ 2-kare. $\square$

Teoreem 2.20 (vrd. teoreemiga 2.14)**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\|\cdot\|_N$ selline absoluutne normaliseeritud norm otsesummal $X \oplus Y$, et element $(1, 0)$ on $B_{\mathbb{R}\oplus_{N^*}\mathbb{R}}$ ekstreemumpunkt ja $\delta > 0$. Kui $X \oplus_N Y$ on δ-kare, siis X on δ-kare.*

Tõestus on sisuliselt teoreemi 2.14 tõestus, võttes selles $n = 1$. $\square$

Järeldus 2.21 (vrd. järeldusega 2.15)**.** *Olgu $\delta > 0$ ja $1 < p \leq \infty$. Kui $X \oplus_p Y$ on δ-kare, siis X on δ-kare.*

2.2 Separaabli alamruumi karedus

Uurime kareduse omaduste pärandumist separaablitele alamruumidele. Lauses 2.22 sõnastame mõnevõrra tugevama tulemuse, kui see, mis esitati artiklis [D, lause 5] ning üldistame doktoritöös [L, lause 3.36] saadud tulemust oktaeedriliste ruumide kohta, kasutades sama tõestusideed.

Lause 2.22 (vrd. [D, lause 5] ja [L, lause 3.36])**.** *Olgu X Banachi ruum ja $\delta > 0$. Ruum X on keskmiselt δ-kare parajasti siis, kui iga ruumi X separaabli alamruumi Y korral leidub ruumi X separaabel alamruum Z nii, et $Y \subset Z$ ja Z on keskmiselt δ-kare.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et X on keskmiselt δ-kare. Olgu Y ruumi X separaabel alamruum. Olgu $\{y_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ kõikjal tihe hulk alamruumis Y ja jada (ε_k) selline, et iga $k \in \mathbb{N}$ korral $\varepsilon_k > 0$ ja $\varepsilon_k \to 0$, kui $k \to \infty$. Defineerime induktiivselt ruumi X üksteisesse sisestatud separaablite alamruumide jada (Y_k). Olgu $Y_1 = \operatorname{span}\{y_1\}$. Kui $Y_1, \ldots, Y_k$ on defineeritud, siis defineerime Y_{k+1} järgmiselt. Olgu $E_k \subset S_{Y_k}$ lõplik ε_k-võrk hulgale S_{Y_k}. Hulga E_k iga mittetühja alamhulga F korral fikseerime eelduse abil ühe $u_F^k \in X$ nii, et $\|u_F^k\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{|F|}\sum_{x\in F}\Big(\|x+u_F^k\| + \|x-u_F^k\|\Big) > (\delta-\varepsilon_k)\|u_F^k\| + 2.$$

Olgu $Y_{k+1} = \operatorname{span}\{Y_k \cup U_k \cup \{y_{k+1}\}\}$, kus $U_k = \{u_F^k \mid \emptyset \neq F \subset E_k\}$.

Olgu $Z = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} Y_k}$. Ruum Z on ilmselt separaabel ja $Y \subset Z$. Näitame, et Z on keskmiselt δ-kare. Olgu $z_1, \ldots, z_n \in S_Z$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Valime $k \in \mathbb{N}$ sellise, et $\varepsilon_k < \varepsilon^2/5$ ja iga indeksi i korral leidub $v_i \in S_{Y_k}$ nii, et $\|z_i - v_i\| < \varepsilon_k$. Kuna E_k on lõplik ε_k-võrk hulgale S_{Y_k}, siis iga v_i jaoks leidub $x_i \in E_k$ nii, et $\|v_i - x_i\| < \varepsilon_k$. Nii saame E_k alamhulga $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Paneme tähele, et $u \in Y_{k+1} \subset Z$, $\|u_F^k\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i+u_F^k\| + \|x_i-u_F^k\|\Big) > (\delta-\varepsilon_k)\|u_F^k\| + 2.$$

Nüüd saame, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|z_i+u_F^k\| + \|z_i-u_F^k\|\Big) &\geq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\|v_i+u_F^k\| + \|v_i-u_F^k\| - 2\|z_i-v_i\|\Big)\\
&> \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|v_i+u_F^k\| + \|v_i-u_F^k\|\Big) - 2\varepsilon_k\\
&\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i+u_F^k\| + \|x_i-u_F^k\| - 2\|v_i-x_i\|\Big) - 2\varepsilon_k\\
&> (\delta-\varepsilon_k)\|u_F^k\| + 2 - 4\varepsilon_k\\
&> \Big(\delta-\frac{\varepsilon}{5}\Big)\|u_F^k\| + 2 - \frac{4\varepsilon^2}{5}\\
&= (\delta-\varepsilon)\|u_F^k\| + 2.
\end{aligned}$$

Järelikult alamruum Z on keskmiselt δ-kare.

Piisavus. Eeldame, et ruumi X iga separaabli alamruumi Y korral leidub ruumi X separaabel alamruum Z nii, et $Y \subset Z$ ja Z on keskmiselt δ-kare. Olgu $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu $Y = \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Kuna Y on separaabel, siis eelduse põhjal leidub ruumi X separaabel alaruum Z, mis on keskmiselt δ-kare. Seega leidub $u \in Z \subset X$ nii, et $\|u\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + u\| + \|x_i - u\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|u\| + 2.$$

Järelikult X on keskmiselt δ-kare. □

Lause 2.23. *Olgu $\delta > 0$. Banachi ruum X on δ-kare parajasti siis, kui ruumi X iga separaabli alamruumi Y korral leidub ruumi X separaabel alamruum Z nii, et $Y \subset Z$ ja Z on δ-kare.*

Tõestus on sisuliselt lause 2.22 tõestus, võttes selles $n = 1$. □

3 Banachi ruumi ultraastme karedus

Käesolevas paragrahvis uurime Banachi ruumi ja ta ultraastme kareduste vahelist seost. Esimeses alapunktis tutvume ultrapiirväärtuse ja Banachi ruumi ultraastme mõistega. Varasemast on teada (J.-D. Hardtke ja J. Langemetsa vaheline eravestlus), et Banachi ruum on oktaeedriline parajasti siis, kui tema ultraaste on oktaeedriline. Teises alapunktis näitame paragrahvi põhitulemusena, et kehtib ka üldisem tulemus: Banachi ruum on keskmiselt kare parajasti siis, kui tema ultraaste on keskmiselt kare.

3.1 Banachi ruumi ultraastme mõiste

Käesolevas alapunktis tugineme artiklile [Hei]. Olgu $\mathcal{I}$ mittetühi hulk.

Definitsioon 3.1. Öeldakse, et $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathcal{I})$ on *ultrafilter* hulgal $\mathcal{I}$, kui on täidetud järgmised tingimused:

(i) $\emptyset \notin \mathcal{U}$ ja $\mathcal{I} \in \mathcal{U}$;

(ii) iga $A, B \in \mathcal{U}$ korral $A \cap B \in \mathcal{U}$;

(iii) iga $A \in \mathcal{U}$ ja $A \subset B \subset \mathcal{U}$ korral $B \in \mathcal{U}$;

(iv) iga $A \subset \mathcal{I}$ korral $A \in \mathcal{U}$ või $\mathcal{I} \setminus A \in \mathcal{U}$.

Edaspidi olgu $\mathcal{U}$ ultrafilter hulgal $\mathcal{I}$.

Definitsioon 3.2. Olgu iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral $x_\alpha \in \mathbb{R}$. Öeldakse, et $x \in \mathbb{R}$ on $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{I}}$ *ultrapiirväärtus*, kui iga $\varepsilon > 0$ korral $\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |x_\alpha - x| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Tähistame seda ultrapiirväärtust $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_\alpha$ või $\lim\limits_{\alpha,\mathcal{U}} x_\alpha$.

Kui iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral $x_\alpha \in \mathbb{R}$ ja $\sup_{\alpha\in I} |x_\alpha| < \infty$, siis ultrapiirväärtus $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_\alpha$ leidub ja on ühene.

Järgmisesse lemmasse koondame vajalikud ultrapiirväärtuse omadused.

Lemma 3.3. *Olgu iga* $\alpha \in \mathcal{I}$ *korral* $x_\alpha, y_\alpha \in \mathbb{R}$ *sellised, et* $\sup_{\alpha\in\mathcal{I}} |x_\alpha| < \infty$ *ja* $\sup_{\alpha\in\mathcal{I}} |y_\alpha| < \infty$. *Siis*

(a) $\lim\limits_{\mathcal{U}}(x_\alpha + y_\alpha) = \lim\limits_{\mathcal{U}} x_\alpha + \lim\limits_{\mathcal{U}} y_\alpha$;

(b) $\lim\limits_{\mathcal{U}} x_\alpha \geq \lim\limits_{\mathcal{U}} y_\alpha$, *kui iga* $\alpha \in \mathcal{I}$ *korral* $x_\alpha \geq y_\alpha$;

(c) *iga* $c \in \mathbb{R}$ *korral* $\lim\limits_{\mathcal{U}} cx_\alpha = c \lim\limits_{\mathcal{U}} x_\alpha$.

Tõestus. Olgu $x = \lim\limits_{\mathcal{U}} x_\alpha$ ja $y = \lim\limits_{\mathcal{U}} y_\alpha$. (a). Olgu $\varepsilon > 0$. Näitame, et

$$\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |(x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Paneme tähele, et iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral

$$|(x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)| \leq |x_\alpha - x| + |y_\alpha - y|.$$

Seega

$$\left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \cap \left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |y_\alpha - y| < \frac{\varepsilon}{2}\right\} \\ \subset \{\alpha \in \mathcal{I} \mid |(x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)| < \varepsilon\}.$$

Kuna $\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$ ja $\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |y_\alpha - y| < \frac{\varepsilon}{2}\} \in \mathcal{U}$, siis

$$\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |(x_\alpha + y_\alpha) - (x + y)| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Järelikult $\lim_{\mathcal{U}} x_\alpha + \lim_{\mathcal{U}} y_\alpha = \lim_{\mathcal{U}}(x_\alpha + y_\alpha)$.

(b). Eeldame, et iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral $x_\alpha \geq y_\alpha$. Oletame vastuväiteliselt, et $\lim_{\mathcal{U}} x_\alpha < \lim_{\mathcal{U}} y_\alpha$ ehk $x < y$. Paneme tähele, et

$$\left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |x_\alpha - x| < \frac{y - x}{2}\right\} \in \mathcal{U}$$

ja

$$\left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |y_\alpha - y| < \frac{y - x}{2}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Seega

$$\left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |x_\alpha - x| < \frac{y - x}{2}\right\} \cap \left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |y_\alpha - y| < \frac{y - x}{2}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Kuna $\emptyset \notin \mathcal{U}$, siis leidub selline $\beta \in \mathcal{I}$, mille korral

$$\frac{x - y}{2} < x_\beta - x < \frac{y - x}{2}$$

ja

$$\frac{x-y}{2} < y_\beta - y < \frac{y-x}{2}.$$

Siit saame, et

$$x_\beta < \frac{x+y}{2} < y_\beta,$$

mis on vastuolu eeldusega, et $x_\alpha \geq y_\alpha$ iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral.

(c). Olgu $c \in \mathbb{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Näitame, et

$$\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |cx_\alpha - cx| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Kui $c = 0$, siis

$$\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |cx_\alpha - cx| < \varepsilon\} = \mathcal{I} \in \mathcal{U}.$$

Kui $c \neq 0$, siis

$$\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |cx_\alpha - cx| < \varepsilon\} = \left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid |x_\alpha - x| < \frac{\varepsilon}{|c|}\right\} \in \mathcal{U}.$$

□

Olgu iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral X_α Banachi ruum. Vaatleme hulka

$$\ell_\infty(\mathcal{I}, X_\alpha) = \left\{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \mathcal{I}} X_\alpha \mid \sup_{\alpha \in \mathcal{I}} \|x_\alpha\|_{X_\alpha} < \infty\right\}.$$

Hulk $\ell_\infty(\mathcal{I}, X_\alpha)$ on Banachi ruum komponenthaaval defineeritud vektorruumi tehete ja supreemum-normi suhtes. Tema alamhulk

$$N_\mathcal{U} = \{(x_\alpha) \in \ell_\infty(\mathcal{I}, X_\alpha) \mid \lim_\mathcal{U} \|x_\alpha\|_{X_\alpha} = 0\}$$

on kinnine alamruum. Järelikult faktorruum $\ell_\infty(\mathcal{I}, X_\alpha) / N_\mathcal{U}$ on Banachi ruum.

Definitsioon 3.4. Banachi ruumide X_α, $\alpha \in \mathcal{I}$, *ultrakorrutiseks* nimetatakse faktorruumi $\ell_\infty(\mathcal{I}, X_\alpha) / N_\mathcal{U}$ ja seda tähistatakse sümboliga $\prod_\mathcal{U} X_\alpha$. Ultrakorrutise normi tähistame $\|\cdot\|_\mathcal{U}$. Kui seejuures iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral X_α on üks ja sama Banachi ruum X, siis ultrakorrutise asemel räägitakse Banachi ruumi X *ultraastmest*, mida tähistatakse sümboliga $X^\mathcal{U}$.

On teada, et iga $x = [(x_\alpha)] \in \prod_{\mathcal{U}} X_\alpha$ korral

$$\|(x)\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_\alpha\|.$$

Iga Banachi ruum X on sisestatav oma ultraastmesse kanoonilise sisestusega $J : X \to X^{\mathcal{U}}$,

$$J(x) = [(x)].$$

Edaspidi kirjutame $x \in X$ korral $J(x)$ asemel x.

3.2 Banachi ruumi ultraastme karedus

Esitame nüüd käesoleva paragrahvi põhitulemuse. Olgu $\mathcal{I}$ mittetühi hulk ja $\mathcal{U}$ ultrafilter hulgal $\mathcal{I}$.

Teoreem 3.5. *Olgu X Banachi ruum ja $\delta > 0$. Ruum X on keskmiselt δ-kare parajasti siis, kui ultraaste $X^{\mathcal{U}}$ on keskmiselt δ-kare.*

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et X on keskmiselt δ-kare. Olgu $z_1, \ldots, z_n \in S_{X^{\mathcal{U}}}$. Olgu iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral $z_i = [(x_i^\alpha)]$. Kuna X on keskmiselt δ-kare, siis iga $\alpha \in \mathcal{I}$ korral leidub $x_\alpha \in X$ nii, et $\|x_\alpha\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|x_i^\alpha + x_\alpha\| + \|x_i^\alpha - x_\alpha\| \Big) > (\delta - \varepsilon)\|x_\alpha\| + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i^\alpha\|.$$

Olgu $z = [(x_\alpha)]$. Paneme tähele, et $\|z\|_{\mathcal{U}} = \lim_{\mathcal{U}} \|x_\alpha\| = \varepsilon$. Kuna lisaks $\lim_{\alpha,\mathcal{U}} \|x_i^\alpha\| = \|z_i\|_{\mathcal{U}} = 1$, siis saame, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|z_i + z\|_{\mathcal{U}} + \|z_i - z\|_{\mathcal{U}} \Big) &= \lim_{\alpha,\mathcal{U}} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|x_i^\alpha + x_\alpha\| + \|x_i^\alpha - x_\alpha\| \Big) \right) \\
&\geq \lim_{\alpha,\mathcal{U}} \left((\delta - \varepsilon)\|x_\alpha\| + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_i^\alpha\| \right) \\
&= (\delta - \varepsilon)\|z\|_{\mathcal{U}} + 2.
\end{aligned}$$

Järelikult ultraaste $X^{\mathcal{U}}$ on keskmiselt δ-kare.

Piisavus. Eeldame, et $X^{\mathcal{U}}$ on keskmiselt δ-kare. Olgu $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Piisab leida $y \in X$ nii, et $\|y\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) > (\delta - 4\varepsilon)\|y\| + 2.$$

Kanoonilise sisestuse abil vaatleme ruumi X ultraastme $X^{\mathcal{U}}$ alamruumina. Paneme tähele, et $x_1, \dots, x_n \in S_{X^{\mathcal{U}}}$. Kuna $X^{\mathcal{U}}$ on keskmiselt δ-kare, siis leidub $y = [(y_\alpha)] \in X^{\mathcal{U}}$ nii, et $\|y\|_{\mathcal{U}} = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\|_{\mathcal{U}} + \|x_i - y\|_{\mathcal{U}}\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2.$$

Ultrapiirväärtuste omaduste abil saame, et

$$\lim_{\alpha,\mathcal{U}}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y_\alpha\| + \|x_i - y_\alpha\|\Big)\right) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2.$$

Seega

$$K := \left\{\alpha \in \mathcal{I} \mid \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y_\alpha\| + \|x_i - y_\alpha\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|y\| + 2 - \varepsilon^2\right\} \in \mathcal{U}.$$

Kuna $\lim_{\alpha,\mathcal{U}} \|y_\alpha\| = \|y\|_{\mathcal{U}} = \varepsilon$, siis

$$L := \{\alpha \in \mathcal{I} \mid \big|\|y_\alpha\| - \varepsilon\big| < \varepsilon^2\} \in \mathcal{U}.$$

Olgu $\beta \in K \cap L$. Siis $\big|\|y_\beta\| - \varepsilon\big| < \varepsilon^2$ ja

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y_\beta\| + \|x_i - y_\beta\|\Big) &> (\delta - \varepsilon)\varepsilon + 2 - \varepsilon^2 \\ &= (\delta - 2\varepsilon)\varepsilon + 2.\end{aligned}$$

Olgu $y = \varepsilon\frac{y_\beta}{\|y_\beta\|}$. On ilmne, et $\|y\| = \varepsilon$. Kuna $\beta \in L$, siis

$$\|y - y_\beta\| = \left|\frac{\varepsilon}{\|y_\beta\|} - 1\right|\|y_\beta\| = \big|\|y_\beta\| - \varepsilon\big| < \varepsilon^2.$$

Seega

$$\|x_i + y\| \geq \|x_i + y_\beta\| - \|y - y_\beta\| > \|x_i + y_\beta\| - \varepsilon^2.$$

Analoogiliselt saame

$$\|x_i - y\| > \|x_i - y_\beta\| - \varepsilon^2.$$

Nüüd on lihtne näha, et

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y\| + \|x_i - y\|\Big) &> \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|x_i + y_\beta\| + \|x_i - y_\beta\| - 2\varepsilon^2\Big)\\ &> (\delta - 2\varepsilon)\varepsilon + 2 - 2\varepsilon^2 = (\delta - 4\varepsilon)\|y\| + 2.\end{aligned}$$

Järelikult X on keskmiselt δ-kare. □

Sarnane tulemus kehtib ka δ-kareduse korral.

Teoreem 3.6. *Banachi ruum X on δ-kare parajasti siis, kui ultraaste $X^{\mathcal{U}}$ on δ-kare.*

Tõestus on sisuliselt teoreemi 3.5 tõestus, võttes selles $n = 1$. □

4 Pidevate lineaarsete operaatorite ruumi karedus

Käesolevas paragrahvis uurime Banachi ruumide X ja Y kareduse ning pidevate lineaarsete operaatorite ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ kareduse seost. Esimeses alapunktis tutvume alternatiivse oktaeedrilisuse mõistega ning anname artiklis [HLP2] esitatud piisavad tingimused, et pidevate lineaarsete operaatorite ruum oleks kare või keskmiselt kare. Teises alapunktis anname tarvilikud tingimused, et pidevate lineaarsete operaatorite ruum oleks kare või keskmiselt kare.

4.1 Piisavad tingimused

Esmalt toome sisse mõiste, mida kasutame pidevate lineaarsete operaatorite ruumi keskmiselt δ-kareduse piisava tingimuse andmiseks.

Definitsioon 4.1 ([HLP2, definitsioon 2.1])**.** Öeldakse, et Banachi ruum X on *alternatiivselt oktaeedriline*, kui iga $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S_X$ nii, et iga indeksi i korral

$$\max\{\|x_i + y\|, \|x_i - y\|\} > 2 - \varepsilon.$$

Definitsioonidest on selge, et iga oktaeedriline ruum on alternatiivselt oktaeedriline. Anname näited ruumidest, mis on alternatiivselt oktaeedrilised, aga pole oktaeedrilised.

Näide 4.2. Jadaruum c_0 ning lõplikumõõtmelised ruumid ℓ_1^n ja ℓ_∞^n $(n \in \mathbb{N})$ on alternatiivselt oktaeedrilised.

Põhjendus. Näitame ainult, et jadaruum c_0 on alternatiivselt oktaeedriline. Olgu $x_1, \dots, x_n \in S_{c_0}$, kus $x_i = (x_k^i)_{k\in\mathbb{N}}$. Olgu $K \in \mathbb{N}$ selline, et iga indeksi i korral $|x_k^i| < 1$ niipea, kui $k > K$. Defineerime

$$y_k = \begin{cases} 1, & \text{kui} \quad 1 \le k \le K, \\ 0, & \text{kui} \quad k > K. \end{cases}$$

Siis $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in S_{c_0}$ ja iga $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\max\{\|x_i + y\|, \|x_i - y\|\} = 2.$$

$\square$

Näites 1.6 veendusime, et jadaruum c_0 pole δ-kare ühegi $\delta > 0$ korral. Järelikult c_0 pole oktaeedriline. Seega oktaeedrilisus ja alternatiivne oktaeedrilisus on erinevad mõisted. Järgmisest näitest näeme, et mitte kõik Banachi ruumid pole alternatiivselt oktaeedrilised.

Näide 4.3. Lõplikumõõtmeline ruum ℓ_2^2 ei ole alternatiivselt oktaeedriline.

Põhjendus. Olgu $x_1 = (1, 0)$ ja $x_2 = (0, 1)$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $y = (a, b) \in S_{\ell_2^2}$ on selline, et $i = 1$ ja $i = 2$ korral

$$\max\{\|x_i + y\|_2, \|x_i - y\|_2\} > 2 - \varepsilon,$$

siis

$$|a| > 1 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2} \qquad \text{ja} \qquad |b| > 1 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Seega

$$\|y\| > \sqrt{2}\left(1 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{2}\right),$$

mis on piisavalt väikese $\varepsilon > 0$ korral vastuolus sellega, et $\|y\| = 1$. $\square$

Lemma 4.4. *Banachi ruum X on alternatiivselt oktaeedriline parajasti siis, kui iga $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$ korral leiduvad $y \in S_X$ ja $x_1^*, \dots, x_n^* \in S_{X^*}$ nii, et iga indeksi i korral*

$$|x_i^*(x_i)| > 1 - \varepsilon \qquad \text{ja} \qquad x_i^*(y) > 1 - \varepsilon.$$

Tõestus. Tarvilikkus. Eeldame, et X on alternatiivselt oktaeedriline. Olgu $x_1, \dots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna X on alternatiivselt oktaeedriline, siis leidub $y \in S_X$ nii, et iga indeksi i korral

$$\max\{\|x_i + y\|, \|x_i - y\|\} > 2 - \varepsilon.$$

Olgu $\theta_i \in \{-1, 1\}$ selline, et

$$\|\theta_i x_i + y\| = \max\{\|x_i + y\|, \|x_i - y\|\}.$$

Hahn–Banachi teoreemi põhjal leidub $x_i^* \in S_{X^*}$ nii, et

$$x_i^*(\theta_i x_i + y) = \|\theta_i x_i + y\| > 2 - \varepsilon.$$

Kuna $\theta_i x_i, y \in S_X$, siis järelikult

$$|x_i^*(x_i)| \geq x_i^*(\theta_i x_i) > 2 - \varepsilon - x_i^*(y) \geq 1 - \varepsilon$$

ja

$$x_i^*(y) > 2 - \varepsilon - x_i^*(\theta_i x_i) \geq 1 - \varepsilon.$$

Piisavus. Olgu $x_1, \ldots, x_n \in S_X$ ja $\varepsilon > 0$. Kui $y \in S_X$ ja $x_1^*, \ldots, x_n^* \in S_{X^*}$ on sellised, et

$$|x_i^*(x_i)| > 1 - \varepsilon \qquad \text{ja} \qquad x_i^*(y) > 1 - \varepsilon,$$

siis

$$\begin{aligned} \max\{\|x_i + y\|, \|x_i - y\|\} &\geq |x_i^*(x_i)| + x_i^*(y) \\ &> (1 - \varepsilon) + (1 - \varepsilon) \\ &= 2 - 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Järelikult X on alternatiivselt oktaeedriline. □

Artiklis [HLP2] on antud piisavad tingimused selleks, et operaatorite ruum oleks keskmiselt kare või kare. Esitame need tulemused täielikkuse huvides.

Teoreem 4.5 ([HLP2, teoreem 2.1])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta > 0$ ja H ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ selline alamruum, mis sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid.*

(a) *Kui X^* on keskmiselt δ-kare ja Y on alternatiivselt oktaeedriline, siis H on keskmiselt δ-kare.*

(b) *Kui Y on keskmiselt δ-kare ja X^* on alternatiivselt oktaeedriline, siis H on keskmiselt δ-kare.*

Tõestus. (a). Eeldame, et X^* on keskmiselt δ-kare ja Y on alternatiivselt oktaeedriline. Olgu $S_1, \dots, S_n \in S_H$ ja $\varepsilon > 0$. Olgu iga indeksi i korral $x_i \in S_X$ selline, et $\|S_i x_i\| > 1 - \varepsilon^2$. Kuna Y on alternatiivselt oktaeedriline, siis leiduvad $y \in S_Y$ ja $y_1^*, \dots, y_n^* \in S_{Y^*}$ nii, et iga indeksi i korral

$$|y_i^*(S_i x_i)| > 1 - \varepsilon^2 \qquad \text{ja} \qquad y_i^*(y) > 1 - \varepsilon.$$

Kuna X^* on keskmiselt δ-kare, siis leidub $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|S_i^* y_i^* + x^*\| + \|S_i^* y_i^* - x^*\|\Big) > (\delta - \varepsilon)\|x^*\| + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|S_i^* y_i^*\|.$$

Kuna iga indeksi i korral

$$\|S_i^* y_i^*\| \geq |(S_i^* y_i^*)(x_i)| = |y_i^*(S_i x_i)| > 1 - \varepsilon^2,$$

siis

$$\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\|S_i^* y_i^*\| > 2(1 - \varepsilon^2).$$

Järelikult

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|S_i^* y_i^* + x^*\| + \|S_i^* y_i^* - x^*\|\Big) &> (\delta - \varepsilon)\varepsilon + 2(1 - \varepsilon^2)\\ &= (\delta - 3\varepsilon)\varepsilon + 2.\end{aligned}$$

Olgu $T = x^* \otimes y$. Siis $\|T\| = \|x^*\| = \varepsilon$. Paneme tähele, et iga indeksi i korral

$$\|x^* - T^* y_i^*\| = \|x_i^* - y_i^*(y)x^*\| = \big(1 - y_i^*(y)\big)\|x^*\| < \varepsilon\|x^*\|,$$

järelikult

$$\begin{aligned}\|S_i + T\| + \|S_i - T\| &= \|S_i^* + T^*\| + \|S_i^* - T^*\|\\ &\geq \|S_i^* y_i^* + T^* y_i^*\| + \|S_i^* y_i^* - T^* y_i^*\|\\ &\geq \|S_i^* y_i^* + x^*\| + \|S_i^* y_i^* - x^*\| - 2\|x^* - T^* y_i^*\|\\ &= \|S_i^* y_i^* + x^*\| + \|S_i^* y_i^* - x^*\| - 2\varepsilon\|x^*\|.\end{aligned}$$

Kokkuvõttes saame nüüd, et

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|S_i+T\|+\|S_i-T\|\Big)\\
&\qquad > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\|S_i^*y_i^*+x^*\|+\|S_i^*y_i^*-x^*\|-2\varepsilon\|x^*\|\Big)\\
&\qquad > (\delta-3\varepsilon)\|x^*\|+2-2\varepsilon\|x^*\|\\
&\qquad = (\delta-5\varepsilon)\|T\|+2.
\end{aligned}$$

Järelikult H on keskmiselt δ-kare.

(b) tõestus on sümmeetriline (a) tõestusega. □

Teoreem 4.6 ([HLP2, teoreem 2.2]). *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta > 0$ ja H ruumi $\mathcal{L}(X,Y)$ alamruum, mis sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid.*

(a) *Kui X^* on δ-kare, siis H on δ-kare.*

(b) *Kui Y on δ-kare, siis H on δ-kare.*

Tõestus. (a). Eeldame, et X^* on δ-kare. Olgu $S \in S_H$ ja $\varepsilon \in (0,1)$. Olgu $y^* \in S_{Y^*}$ ja $y \in S_Y$ sellised, et $\|S^*y^*\| > 1-\varepsilon^2$ ja $y^*(y) > 1-\varepsilon$. Kuna X^* on δ-kare, siis leidub $x^* \in X^*$ nii, et $\|x^*\| = \varepsilon$ ja

$$\|S^*y^*+x^*\|+\|S^*y^*-x^*\| > (\delta-\varepsilon)\|x^*\|+2\|S^*y^*\|.$$

Olgu $T = x^*\otimes y$. Siis $\|T\| = \|x^*\| = \varepsilon$ ja

$$\|x^*-Ty^*\| = \|x^*-y^*(y)x^*\| = (1-y^*(y))\|x^*\| < \varepsilon\|x^*\|.$$

Seega

$$\begin{aligned}
&\|S+T\|+\|S-T\|\\
&\qquad = \|S^*+T^*\|+\|S^*-T^*\|\\
&\qquad \geq \|S^*y^*+T^*y^*\|+\|S^*y^*-T^*y^*\|\\
&\qquad \geq \|S^*y^*+x^*\|+\|S^*y^*-x^*\|-2\|x^*-Ty^*\|\\
&\qquad > (\delta-\varepsilon)\|x^*\|+2\|S^*y^*\|-2\varepsilon\|x^*\|\\
&\qquad > (\delta-\varepsilon)\|x^*\|+2(1-\varepsilon^2)-2\varepsilon\|x^*\|\\
&\qquad = (\delta-5\varepsilon)\|T\|+2.
\end{aligned}$$

Järelikult H on δ-kare.

(b) tõestus on sümmeetriline (a) tõestusega. $\square$

4.2 Tarvilikud tingimused

Esitame nüüd tarvilikud tingimused selleks, et pidevate lineaarsete operaatorite ruum oleks kareduse omadustega.

Teoreem 4.7. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta_1, \delta_2 > 0$ ja H ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ selline alamruum, mis sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Olgu H keskmiselt δ_1-kare.*

(a) *Kui X^* ei ole δ_2-kare, siis Y on keskmiselt $(\delta_1 - 2\delta_2)$-kare.*

(b) *Kui Y ei ole δ_2-kare, siis X^* on keskmiselt $(\delta_1 - 2\delta_2)$-kare.*

Tõestus. (a). Eeldame, et X^* ei ole δ_2-kare. Olgu $y_1, \ldots, y_n \in S_Y$ ja $\varepsilon \in (0, 1/3)$. Piisab leida $h \in Y$ nii, et $\|h\| \le \varepsilon$ ja

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|y_i + h\| + \|y_i - h\| \Big) > (\delta_1 - 2\delta_2 - 3\varepsilon)\|h\| + 2.$$

Eelduse põhjal leidub selline $B_{X^{**}}$ *-nõrk viil $S(x^*, \alpha)$, et diam $\big(S(x^*, \alpha)\big) \le \delta_2$. Olgu iga indeksi i korral $S_i = x^* \otimes y_i$. Paneme tähele, et $\|S_i\| = 1$. Kuna H on keskmiselt δ_1-kare, siis leidub selline $T \in H$, et $\|T\| < \min\{\varepsilon, \alpha/3\}$ ja

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\|S_i + T\| + \|S_i - T\| \Big) > (\delta_1 - \varepsilon)\|T\| + 2.$$

Olgu $j \in \{1, 2\}$ korral $y^*_{j,i} \in S_{Y^*}$ ja $x_{j,i} \in S_X$ sellised, et

$$y^*_{j,i}\big((S_i + (-1)^{j+1}T)x_{j,i}\big) \ge \|S_i + (-1)^{j+1}T\| - \varepsilon\|T\|$$

ehk

$$x^*(x_{j,i})y^*_i(y_i) + (-1)^{j+1}y^*_{j,i}(Tx_{j,i}) \ge \|S_i + (-1)^{j+1}T\| - \varepsilon\|T\|.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x^*(x_{j,i}), y^*_{j,i}(y) > 0$, sest juhul kui $x^*(x_{j,i}), y^*_{j,i}(y_i) < 0$, siis asendame $y^*_{j,i} \in S_{Y^*}$ ja $x_{j,i} \in S_X$ nende vastandelementidega. Siis saame, et

$$\begin{aligned} x^*(x_{j,i}) &\geq x^*(x_{j,i})y^*_{j,i}(y_i) \geq \|S_i + (-1)^{j+1}T\| - \varepsilon\|T\| - |y^*_{j,i}(Tx_{j,i})| \\ &\geq \|S_i\| - (2+\varepsilon)\|T\| > 1 - 3\|T\| \geq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Seega $x_{1,i}, x_{2,i} \in S(x^*, \alpha)$. Olgu $v = Tx_{1,1}$. Siis $\|v\| \leq \|T\| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\|y_i + v\| + \|y_i - v\|\Big) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\|y_i + Tx_{1,1}\| + \|y_i - Tx_{1,1}\|\Big) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\|y_i + Tx_{1,i}\| + \|y_i - Tx_{2,i}\| \\ &\qquad - \|Tx_{1,i} - Tx_{1,1}\| - \|Tx_{2,i} - Tx_{1,1}\|\Big) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(y^*_1(y_i + Tx_1) + y^*_2(y_i - Tx_2) \\ &\qquad - \|T\|\left(\|x_{1,i} - x_{1,1}\| + \|x_{2,i} - x_{1,1}\|\right)\Big) \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(x^*(x_{1,i})y^*_{1,i}(y_i) + y^*_{1,i}(Tx_{1,i}) \\ &\qquad + x^*(x_{2,i})y^*_{2,i}(y_i) - y^*_{2,i}(Tx_{2,i})\Big) - 2\delta_2\|T\| \\ &\geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \Big(\|S_i + T\| + \|S_i - T\|\Big) - 2\varepsilon\|T\| - 2\delta_2\|T\| \\ &> (\delta_1 - \varepsilon)\|T\| + 2 - (2\delta_2 + 2\varepsilon)\|T\| \\ &\geq (\delta_1 - 2\delta_2 - 3\varepsilon)\|v\| + 2. \end{aligned}$$

Järelikult Y on keskmiselt $\delta_1 - 2\delta_2$-kare.

(b) tõestus on sümmeetriline (a) tõestusega. □

Definitsioon 4.8. Olgu X Banachi ruum. Öeldakse, et ruum X on *mittekare*, kui ta pole δ-kare ühegi $\delta > 0$ korral.

Näites 1.6 veendusime, et jadaruum c_0 pole δ-kare ühegi $\delta > 0$ korral ehk ta on mittekare. Lause 1.14 põhjal on ilmne, et Banachi ruum X on mittekare parajasti siis, kui tema kaasruumi ühikkeras B_{X^*} leidub kui tahes väikese diameetriga *-nõrku viile.

Järeldus 4.9 ([HLP2, teoreem 3.1])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta > 0$ ja H ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ selline alamruum, mis sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Olgu H keskmiselt δ-kare.*

(a) *Kui X^* on mittekare, siis Y on keskmiselt δ-kare.*

(b) *Kui Y on mittekare, siis X^* on keskmiselt δ-kare.*

Tõestus. (a). Eeldame, et H on keskmiselt δ-kare ja X^* on mittekare. Kuna X^* on mittekare, siis iga $\varepsilon \in (0, \delta)$ korral X^* ei ole ε-kare. Teoreemi 4.7 põhjal Y on keskmiselt $(\delta - 2\varepsilon)$-kare. Fikseerime $y_1, \ldots, y_n \in S_Y$ ja $\varepsilon > 0$. Kuna Y on keskmiselt $(\delta - 2\varepsilon)$-kare, siis leidub $v \in Y$ nii, et $\|v\| = \varepsilon$ ja

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\|y_i + v\| + \|y_i - v\| \Big) > \big((\delta - 2\varepsilon) - \varepsilon\big)\|v\| + 2 = (\delta - 3\varepsilon)\|v\| + 2.$$

Järelikult Y on keskmiselt δ-kare.

(b) tõestus on sümmeetriline (a) tõestusega. □

Teoreem 4.10. *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta_1, \delta_2 > 0$ ja H ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ selline alamruum, mis sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Kui H on δ_1-kare ja*

(a) *kui X^* ei ole δ_2-kare, siis Y on $(\delta_1 - \delta_2)$-kare;*

(b) *kui Y ei ole δ_2-kare, siis X^* on $(\delta_1 - \delta_2)$-kare.*

Tõestus. (a). Eeldame, et X^* on δ_2-kare. Olgu $y \in S_Y$ ja $\varepsilon \in (0, 1/3)$. Piisab leida $v \in Y$ nii, et

$$\|y + v\| + \|y - v\| > (\delta_1 - \delta_2 - 3\varepsilon)\|v\| + 2.$$

Olgu $x^* \in S_{X^*}$ ja $\alpha > 0$. Vaatleme $B_{X^{**}}$ *-nõrka viilu $S(x^*, \alpha)$. Eelduse põhjal $\operatorname{diam}\big(S(x^*, \alpha)\big) \leq \delta_2$. Olgu $S = x^* \otimes y$. Paneme tähele, et $\|S\| = 1$. Kuna H on δ_1-kare, siis leidub $T \in H$ nii, et $\|T\| < \min\{\varepsilon, \alpha/3\}$ ja

$$\|S + T\| + \|S - T\| > (\delta_1 - \varepsilon)\|T\| + 2.$$

Olgu $i = 1, 2$ korral $y_i^* \in S_{Y^*}$ ja $x_i \in S_X$ sellised, et

$$y_i^*\big((S + (-1)^{i+1}T)x_i\big) \geq \|S + (-1)^{i+1}T\| - \varepsilon\|T\|$$

ehk

$$x^*(x_i)y_i^*(y) + (-1)^{j+1}y_i^*(Tx_i) \geq \|S + (-1)^{i+1}T\| - \varepsilon\|T\|.$$

Üldisust kitsendamata võime eeldada, et $x^*(x_i), y_i^*(y) > 0$. Kui $x^*(x_i), y_i^*(y) < 0$, siis asendame $y_i^* \in S_{Y^*}$ ja $x_i \in S_X$ nende vastandelementidega. Siis saame, et

$$\begin{aligned} x^*(x_i) \geq x^*(x_i)y_i^*(y) &\geq \|S + (-1)^{i+1}T\| - \varepsilon\|T\| - |y_i^*(Tx_i)| \\ &\geq \|S\| - (2+\varepsilon)\|T\| > 1 - 3\|T\| \geq 1 - \alpha. \end{aligned}$$

Seega $x_1, x_2 \in S(x^*, \alpha)$. Kuna diam $\big(S(x^*, \alpha)\big) \leq \delta_2$, siis $\|x_1 - x_2\| \leq \delta_2$. Olgu $v = Tx_1$. Siis $\|v\| \leq \|T\| \leq \varepsilon$ ja

$$\begin{aligned} \|y + v\| + \|y - v\| &= \|y + Tx_1\| + \|y - Tx_1\| \\ &\geq \|y + Tx_1\| + \|y - Tx_2\| - \|Tx_1 - Tx_2\| \\ &\geq y_1^*(y + Tx_1) + y_2^*(y - Tx_2) - \|T\|\|x_1 - x_2\| \\ &\geq x^*(x_1)y_1^*(y) + y_1^*(Tx_1) + x^*(x_2)y_2^*(y) - y_2^*(Tx_2) - \delta_2\|T\| \\ &\geq \|S + T\| + \|S - T\| - 2\varepsilon\|T\| - \delta_2\|T\| \\ &> (\delta_1 - \varepsilon)\|T\| + 2 - (\delta_2 + 2\varepsilon)\|T\| \\ &= (\delta_1 - \delta_2 - 3\varepsilon)\|v\| + 2. \end{aligned}$$

Järelikult Y on δ-kare.

(b) tõestus on sümmeetriline (a) tõestusega. □

Järeldus 4.11 ([HLP2, teoreem 3.1])**.** *Olgu X ja Y Banachi ruumid, $\delta > 0$ ja H ruumi $\mathcal{L}(X, Y)$ selline alamruum, mis sisaldab kõiki lõplikumõõtmelisi operaatoreid. Olgu H δ-kare.*

(a) *Kui X^* on mittekare, siis Y on δ-kare.*

(b) *Kui Y mittekare, siis X^* on δ-kare.*

Tõestus on sisuliselt järelduse 4.9 tõestus, võttes selles $n = 1$. □

Viited

[ABGLP] M. D. Acosta, J. Becerra-Guerrero ja G. López-Pérez, *Stability results of diameter two properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 1–17.

[AB] C. D. Aliprantis ja K. C. Border, *Infinite dimensional analysis, A hitchhiker's guide*, Springer, Berlin, 2006.

[D] R. Deville, *A dual characterisation of the existence of small combination of slices*, Bull. Aust. Math. Soc. **37** (1988), 113–120.

[DGZ] R. Deville, G. Godefroy ja V. Zizler, *Smoothness and renormings in Banach spaces*, Pitman Monographs Surveys Pure Applied Math. vol. 64, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[FHHMZ] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos ja V. Zizler, *Banach space theory. The basis for linear and nonlinear analysis,* Springer, New York, 2011.

[G] G. Godefroy, *Metric characterization of first Baire class linear forms and octahedral norms*, Studia Math. **95** (1989), 1–15.

[HLP] R. Haller, J. Langemets ja M. Põldvere, *On duality of diameter 2 properties*, J. Conv. Anal. **22** (2015), 465–483.

[HLP2] R. Haller, J. Langemets ja M. Põldvere, *Rough norms in spaces of operators*, preprint.

[HPP] R. Haller, K. Pirk ja M. Põldvere, *Diametral strong diameter two property of Banach spaces is stable under direct sums with 1-norm*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math. **20** (2016), ilmumas.

[Har] J.-D. Hardtke, *Absolute sums of Banach spaces and some geometric properties related to rotundity and smoothness*, Banach J. Math. Anal. **8** (2014), 295–334.

[Hei] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach space theory*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 72–104.

[JZ] K. John ja V. Zizler, *On rough norms on Banach spaces*, Commentat. Math. Univ. Carol. **19** (1978), 335–349.

[L] J. Langemets, *Geometrical structure in diameter 2 Banach spaces*, doktoritöö, Tartu Ülikool, 2015.

[LW] E. B. Leach ja J. H. M. Whitfield, *Differentiable functions and rough norms on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **33** (1972), 120–126.

[M] D. S. Mitrinović, *Analytic inequalities*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 165, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1970.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Rihhard Nadel,

(*autori nimi*)

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose Banachi ruumi karedus,

(*lõputöö pealkiri*)

mille juhendajad on Rainis Haller ja Johann Langemets,

(*juhendaja nimi*)

1.1. reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;

1.2. üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace´i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.

2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartus, **19.05.2016.**