Die

Formenlehre der Geometrie

nebst

dem Satze des Pythagoras und seinen Stützsätzen,

ein Leitfaden

von

Cand. **W. Specht,**
Oberlehrer an den Parallelklassen des Dörptschen Gymnasiums.

Zweite Auflage.

Dorpat.
W. Gläsers Verlag.

1872.

Von der Censur gestattet. — Dorpat, den 26. October 1872.

Druck von W. Gläser in Dorpat 1872.

Vorwort.

Die vorliegende neue Auflage dieses Büchelchens hat zunächst denselben Zweck wie die erste. Wenn sie auch in mancher Beziehung umgeändert ist, so ist doch der Plan im allgemeinen derselbe geblieben. Um die Uebersicht zu erleichtern ist das Ganze in Paragraphe eingetheilt worden. Außerdem sind zu jedem Abschnitte mehrere dahin einschlagende Lehrsätze gefügt. Viele dieser Sätze können von dem Anfänger auch ohne Beweis erkannt werden, sei es durch Erfahrung, durch Messen mit dem Zirkel und dem Maßstabe, kurz auf irgend einem praktischen Wege; auch halte ich es für gut, daß der Anfänger, ehe er sich an die Wissenschaft selbst macht, außer den Formen und Begriffen auch eine Anzahl Sätze kennt: es kann ihm bei'm Fortschreiten in dieser Wissenschaft nur förderlich sein.

Der Verfasser.

Geometrie.

Einleitung.

Die Mathematik (τὰ μαθήματα, das Gelernte, Erfahrene, die Kenntniß), hat die Dinge zum Gegenstande ihrer Betrachtung erwählt, durch welche sich vorzüglich herausstellt, wie der Mensch an die Endlichkeit gebunden ist: Raum (Geometrie), Zeit (Chronologie, Astronomie), Zahl (Arithmetik).

Die Geometrie oder Raumlehre hat ihren Namen von einer einzelnen Anwendung dieser Wissenschaft, dem Feldmessen (γῆ und μετρεῖν), vielleicht, weil dieses die erste Veranlassung zu unserer Wissenschaft gab. Der Gegenstand ihrer Betrachtung ist der Raum, und da dieser unendlich ist, also nicht auf einmal erfaßt werden kann — die Theile des Raumes oder die Körper und ihre Begrenzungen und Formen.

Den Raum nehmen wir wahr an allen Dingen, insofern sie nämlich eine Gestalt haben, und die Natur Gottes wie die Werke der Menschen zeigen uns die mannigfaltigsten Gestalten und Formen an den Dingen. In dieser Beziehung sagen wir von den Dingen: sie nehmen einen Raum ein oder haben einen Körper. Der Körper ist somit ein Theil des einen unendlichen Raumes. Andererseits vermag auch die Wissenschaft Formen zu erzeugen, welche uns bis dahin in der Wirklichkeit noch nicht begegnet sind. — Die Geometrie handelt jedoch von dem Körper nur insofern, als er eine Gestalt oder Form und eine Größe hat (**mathematischer Körper**), alle übrigen Eigenschaften desselben, wie sein Stoff, Farbe, Dichtigkeit u. s. w. (**physischer Körper**) gehören nicht hierher. Könnte man sich einen Körper vorstellen, welcher nur eine Gestalt hätte, keine Farbe, Dichtigkeit, Elasticität u. s. w., aus keinen Stoffen bestände, wie Holz, Stein oder Metall u. s. w., dann hätte man einen mathematischen

Körper. Das ist aber nicht möglich. Der mathematische Körper ist also nicht vorstellbar, er ist nur denkbar (ein abstrakter Begriff); er ist nur an dem physischen Körper wahrnehmbar oder nur eine von den vielen Eigenschaften des physischen Körpers.

Vorzüglich aber sind es die Gesetze und Regeln, welche sich aus diesen Formen und Größen für die Dinge herleiten lassen, die diese Wissenschaft zu erforschen hat. Ehe wir aber hierauf eingehen können, müssen wir doch die verschiedenen Formen der Körper und ihre Begrenzungen — wenigstens die vorzüglichsten und wichtigsten, kennen lernen. Diesen Theil der Wissenschaft wollen wir nennen:

Die Formenlehre.

§ 1. Der **Raum** ist unendlich, stetig (continuirlich, lückenlos), theilbar bis in's Unendliche, nur einer der Zahl und dem Wesen nach, nach allen Richtungen ausgedehnt.

Vergleich mit der Zahl, besonders der Zahlenreihe, die eigentlich auch lückenlos ist und die man nur getheilt hat, um ihre Eigenschaften besser zu untersuchen und zu fassen.

Der leichteren Uebersicht wegen unterscheiden wir zunächst nur drei Ausdehnungen: Länge, Breite oder Dicke, Höhe oder Tiefe.

§ 2. Einen Theil des Raumes, sobald er begrenzt gedacht ist, nennen wir **Körper**.

Jeder Körper wird von einer oder mehreren Flächen begrenzt. Da, wo zwei Fläch'en aneinander stoßen oder sich schneiden, finden wir eine Kante oder Linie. Da, wo

1) zwei oder mehr Kanten (Linien) zusammentreffen oder sich schneiden;
2) oder wenigstens drei Flächen zusammentreffen oder sich schneiden;
3) oder — was dasselbe ist — eine Linie eine Fläche trifft oder schneidet;

finden wir eine Ecke oder einen Punkt.

Daher nennt man

Fläche die Grenze der Raumtheile oder Körper, oder den geometrischen Ort (nicht Punkt), der zweien Raumtheilen zugleich angehört;

Linie die Grenze der Fläche, oder den geometrischen Ort, welcher zweien Flächen gemeinsam ist;

Punkt die Grenze der Linie, oder den geometrischen Ort, der zweien Linien gemeinsam ist.

§ 3. Wir haben so die vier abstrakten Grundbegriffe: Körper, Fläche, Linie, Punkt erhalten, als etwas den Dingen Eigenthümliches, gleichsam

Eigenschaften der Dinge, insofern dieselben einen Raum einnehmen. — Schlagen wir den umgekehrten Weg von dem eben durchgemachten ein und gehen von dem einfachsten Begriffe, dem Punkte, aus, so können wir die complicirteren Begriffe aus den einfacheren durch Bewegung entstehen lassen.

Die Spur eines fortbewegt gedachten Punktes giebt uns die Linie;

wie z. B. die Spur der fortbewegten Federspitze auf dem Papier oder der Kreidespitze auf der Tafel.

Die Spur einer fortbewegt gedachten Linie giebt uns die Fläche;

z. B. die Schneide eines Meißels beim Drechseln.

Die Spur einer fortbewegt gedachten Fläche giebt uns den Körper.

Die Bewegung kann eine geregelte, z. B. eine drehende sein; sie kann aber auch eine ganz regellose oder beliebige sein.

Die Eigenschaften des abstrakten Begriffes Fläche finden aber schon ihre Anwendung auf Körper, bei denen die eine Ausdehnung (z. B. die Dicke) im Verhältniß zu den anderen Ausdehnungen (z. B. Länge und Höhe) verschwindend klein oder gleich Null ist. So ist z. B. ein Bogen Papier für uns so gut wie eine Fläche, da in den meisten Fällen hier die Dicke im Verhältniß zur Länge und Breite gar nicht in Betracht kommen kann.

Die Eigenschaften des abstrakten Begriffes Linie finden aber schon ihre Anwendung auf Körper, bei denen zwei Ausdehnungen (z. B. die Breite und Höhe) im Verhältniß zur dritten Ausdehnung (der Länge) verschwindend klein oder gleich Null sind oder sie finden ihre Anwendung auf Flächen, bei denen die Breite im Verhältniß zur Länge gleich Null ist; z. B. ein Faden, die Spur einer Flintenkugel u. s. w.

Die Eigenschaften des abstrakten Begriffes Punkt finden aber schon ihre Anwendung auf Körper, bei denen alle drei Ausdehnungen verschwindend klein oder gleich Null sind im Verhältniß zu den anderen Ausdehnungen; oder sie finden ihre Anwendung auf Linien, deren Länge gleich Null ist: z. B. ein Sandkörnchen im Sandhaufen; ein Stern im Verhältniß zu seiner Entfernung von uns; die Sterne im Weltall. — Aehnlich ist die Null, oft eine absolut genommen sehr große, oft eine sehr kleine Zahl.

Am bequemsten stellt man sich die Punkte, viele Linien und die ebenen Flächen durch Zeichnung auf einer Ebene (Wandtafel, Papierebene) dar. Auch die anderen Linien und Flächen können durch perspektives Zeichnen auf der Tafel dargestellt werden; doch um auf diese Weise die Eigenschaften und Gesetze zu finden, denen diese Raumgebilde unterworfen sind, dazu gehört schon größere Uebung.

Betrachten wir nun die vier Grundbegriffe näher:

A. § 4. Der Punkt

hat keine Ausdehnung. Er kann liegen am Ende (oder Anfang) einer Linie, **Endpunkt**, in, über, oder unter einer Linie; außerhalb oder innerhalb einer Fläche, eines Körpers, gerade in der Mitte einer Linie, einer Fläche, eines Körpers: **Mittelpunkt**, Centrum. Man unterscheidet noch: Treffpunkt, Schneidepunkt, Scheitelpunkt, Gipfel, Fußpunkt.

Der Schwerpunkt, Brennpunkt, Gefrierpunkt, Zenith, Nadir u. a.

B. § 5. Die Linie

hat eine Ausdehnung (Länge) und hat eine Richtung.

Die Richtung, d. h. der Weg, den das Licht von einem in's Auge gefaßten Punkte nach diesem Auge nimmt und umgekehrt, — kann sein:

1) stets dieselbe: **gerade** (Ausgangspunkt und Zielpunkt),
2) an bestimmten Stellen sich ändernd: **gebrochen** (Scheitelpunkt),
3) stetig gebrochen oder **gekrümmt** (gebogen): **Curve**, Bogen,
4) gemischt.

Zu 1) gehört auch die wagerechte und senkrechte Richtung. Wagerecht oder wasserrecht nennt man eine unbewegte Wasserfläche (Libelle oder Wasserwage), senkrecht oder lothrecht einen beschwerten, hängenden Faden (Pendel, Bleiloth). — Bei 3) unterscheidet man offene, geschlossene, doppelt gekrümmte Curven.

Der Länge nach kann die Linie sein: begrenzt (Endpunkte), man nennt sie alsdann auch eine Strecke, unbegrenzt oder unendlich. Gehen mehrere Linien von einem Punkte aus, so nennt man sie Strahlen.

Im Folgenden verstehen wir unter Linie, wenn das Wort ohne weiteren Zusatz gebraucht wird, die gerade Linie.

Zur Darstellung der geraden Linie bedient man sich des Lineals.

Constructionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Durch einen Punkt kann ich mir unendlich viele Linien gezogen denken.
2. Durch zwei Punkte kann ich mir auch unendlich viele Linien gezogen denken, aber nur eine gerade, oder: die gerade Linie ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten.
3. Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich; oder: alle denkbaren Linien zwischen zwei Punkten fallen in eine Linie zusammen. Die gerade Linie bestimmt die Entfernung zweier Punkte von einander.
4. Durch je drei beliebige Punkte kann ich mir auch unendlich viele Linien, aber keine gerade, gezogen denken.
5. Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden
6. Die Lage der geraden Linie im Raume wird durch zwei Punkte bestimmt.

§ 6. Aufgaben:

1) Eine Linie zu verlängern;
2) abzutragen;
3) an eine andere Linie anzutragen. (Da nach § 5, Satz 3 die gerade Linie in Bezug auf ihre Länge durch 2 Punkte vollständig bestimmt ist, so bedient man sich zur Lösung dieser und der folgenden Aufgaben des Zirkels, um durch die verschiebbaren Endpunkte der Schenkel desselben verschieden lange Linien zu übertragen.)
4) Linien zu addiren;
5) zu subtrahiren;

6) eine Linie zu multipliciren; hierbei kann der Multiplikator nur eine unbenannte Zahl sein;

7) eine Linie zu dividiren, und dieses kann sein: a) ein Theilen [Halbiren]; der Divisor kann hier nur eine unbenannte Zahl sein; b) ein Messen. (Maßeinheit und Maßzahl.)

Haben zwei Linien ein gemeinsames Maß, so nennt man sie kommensurabel, haben sie kein gemeinsames Maß, nennt man sie inkommensurabel. Je zwei Linienpaare, welche, mit einander gemessen, gleiche Quotienten geben, bilden eine geometrische Proportion oder man sagt: sie sind proportional. Der Quotient (die Maßzahl) kann hier nur eine unbenannte Zahl sein.

Hiernach gehören zu einer Proportion vier Linien, von denen je zwei ein Verhältniß bilden. Man unterscheidet dabei das erste, zweite, dritte, vierte Glied; äußere und innere (mittlere) Glieder; Vorder- und Hinterglieder, homologe Glieder.

Oder, wenn die beiden mittleren Glieder gleich groß (lang) sind, genügen auch drei Linien zu einer Proportion und man nennt sie dann eine stetige, und das mittlere Glied die mittlere Proportionale oder das geometrische Mittel.

§ 7. Zwei Linien, zunächst gerade, können haben:

1) gleiche Richtung und der Lage nach dabei: a) in eine Linie zusammenfallen; b) in zwei Linien und heißen dann **parallel** (παράλληλος).

2) Sie können haben entgegengesetzte Richtung und der Lage nach dabei a) in eine Linie zusammenfallen, b) in zwei Linien und heißen dann **entgegengesetzt parallel**.

3) Sie können haben verschiedene Richtung und der Lage nach dabei a) sich nähern und heißen dann **convergent** oder b) sie können sich von einander entfernen, und heißen dann **divergent** oder c) sie können in verschiedenen Ebenen liegen (vergl. § 14), so daß sie, ohne parallel zu sein, sich doch nie schneiden, so weit man sie auch verlängert und heißen dann **sich kreuzende Linien** oder windschiefe Linien.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Parallele Linien sind überall gleich weit von einander entfernt; oder ihr senkrechter Abstand ist überall derselbe (vergl. § 9, 4).
2. Parallele Linien treffen, genugsam verlängert, nie zusammen.

§ 8. Gehen von einem Punkte aus zwei (zunächst gerade) Linien, oder treffen oder schneiden sich zwei Linien, so bilden sie einen Winkel. Der **Winkel** ist der Richtungsunterschied (Abweichung) zweier Linien und bestimmt sonach ihre Lage zu einander. Seine Größe ist abhängig von der größeren oder geringeren Divergenz oder Convergenz dieser Linien.

Eigentlich bilden die beiden Linien zwei Winkel, je nachdem man den Richtungsunterschied von der einen oder andern Seite betrachtet (in der Richtung des Uhrzeigers oder umgekehrt).

Stellt man sich in der Ebene eine gerade Linie um einen ihrer als fest gedachten Punkte gedreht vor, so bildet jede folgende Lage mit der ursprünglichen verschiedene Richtungsunterschiede oder verschieden große Winkel. Darnach unterscheidet man ganze, halbe, viertel Umdrehungen, und theilt die ganze Umdrehung in 360° (Grade), jeden Grad in 60′ (Minuten), jede Minute in 60″ (Sekunden). — Ist die sich drehende Gerade begrenzt, so wird die Spur des bewegten Endpunktes eine krumme Linie, die Kreislinie bilden. Verschieden große Theile dieser Kreislinie werden (bei derselben sich drehenden geraden Linie) eine größere oder kleinere Drehung bezeichnen und somit eine entsprechende Bezeichnung für die Größe der zugehörigen Winkel abgeben. Zur Darstellung dieser sich drehenden Bewegung, also auch der Kreislinie, bedient man sich des Zirkels. Und weil bei derselben sich drehenden Geraden die Endpunkte gleich großer Bogen auch immer gleiche Entfernung von einander haben, kann man durch Messung des Bogens auch Winkel messen und übertragen. (Vergl. über den Kreis § 23 und § 26.) —

Construktionen und Bezeichnungen.

§ 9. Schenkel und **Gipfel** (Scheitel) des Winkels. Der Größe nach unterscheidet man:

1) Winkel von 0°.

Die Schenkel haben gleiche Richtung und fallen in eine Linie zusammen (§ 7, 1. a).

2) **Completer** Winkel.

Die Schenkel haben gleiche Richtung und fallen in eine Linie zusammen (§ 7, 1. a), aber erst nachdem eine ganze Umdrehung stattgefunden hat; = 360°.

3) **Gestreckter** Winkel.

Die Schenkel fallen der Lage nach in eine Linie aber entgegengesetzte Richtung = halbe Umdrehung = halber completer Winkel = 180° = 2 R (§ 7. 2. a).

4) **Rechter** Winkel.

Die Hälfte eines gestreckten Winkels ist ein rechter Winkel = R = einer viertel Umdrehung = 90°. Von den Schenkeln des rechten Winkels sagt man: sie stehen auf einander senkrecht (lothrecht, perpendikulär); und umgekehrt. – Eine Normale. — Der rechte Winkel wird als Maß für die anderen benutzt. Alle anderen Winkel, die nicht rechte oder ein Vielfaches eines Rechten sind, nennt man **schiefe** Winkel; und im Gegensatz dazu nennt man den rechten Winkel auch „**gerade**".

5) **Spitzer** Winkel.

Der spitze Winkel ist $<$ R oder $<$ 90° (kleiner als ein Rechter).

6) **Stumpfer** Winkel.

Der stumpfe Winkel ist $>$ R oder $>$ 90° (größer als ein Rechter).

7) **Ueberstumpfer** Winkel.

Der überstumpfe Winkel ist $>$ 2 R oder $>$ 180°; er wird auch genannt erhabener Winkel oder einspringender Winkel (bei einer geschlossenen Figur); wogegen die Winkel, welche kleiner als 2 R (oder kleiner als ein gestreckter) sind, auch hohle Winkel genannt werden.

8) Complement- und Supplement-Winkel.

Ein Complement-Winkel ergänzt einen andern Winkel zu einem R; ein Supplementwinkel ergänzt einen anderen Winkel zu zwei R.

Construktionen und Bezeichnungen. — Sphärischer Winkel. Einfallswinkel, Ausfallswinkel. — Sehwinkel (Perspektive). Depressionswinkel, Elevationswinkel.

Sätze:

1. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.
2. Alle rechten Winkel sind einander gleich.
3. Haben die Schenkelpaare zweier Winkel gleiche Richtung, so sind die Winkel einander gleich (in der Ebene sowohl als auch im Raume.
4. Zieht man von einem Punkte auf eine Linie eine senkrechte und mehrere schiefe Linien, so ist die senkrechte Linie die kürzeste unter ihnen und je weiter vom Fußpunkt der Senkrechten, desto länger werden die Linien, und umgekehrt; und bei gleichem Abstande vom Fußpunkte der Senkrechten sind sie gleich, und umgekehrt. Darum wird durch eine Senkrechte der Abstand eines Punktes von einer Linie bestimmt.

§ 10. Aufgaben:

1) Eine gerade Linie senkrecht zu halbiren.
2) Auf eine Linie in einem bestimmten Punkte derselben eine Senkrechte (Normale) zu errichten.
3) Auf eine Linie, von einem Punkte außerhalb derselben, eine Senkrechte zu fällen.
4) Auf eine Linie, in ihrem Endpunkte, eine Senkrechte zu errichten;
5) Einen Winkel abzutragen;
6) An eine Linie in einem bestimmten Punkte derselben anzutragen.
7) Winkel zu addiren.
8) Winkel zu subtrahiren.
9) Einen Winkel zu multipliciren; hierbei kann der Multiplikator nur eine unbenannte Zahl sein (vergl. § 6, 6).
10) Einen Winkel zu dividiren, und dieses kann sein: a) ein Theilen [Halbiren], b) ein Messen (vergl. § 6, 7).
11) Einen rechten Winkel in drei gleiche Theile zu theilen.

§ 11. Betrachten wir die Winkel paarweise, je nach der Lage ihrer Scheitel und Schenkel, so erhalten wir:

1) **Anstoßende** Winkel; sie entstehen, wenn von einem Punkte drei oder mehrere Linien ausgehen.

Die Scheitel und je ein Schenkel fallen zusammen.

Bei zwei sich schneidenden (beziehungsweise sich treffenden) Linien entstehen:

2) **Nebenwinkel.**

Die Scheitel und je ein Schenkel fallen zusammen, das andere Schenkelpaar fällt der Lage nach in eine grade Linie, aber in eine entgegengesetzte Richtung.

3) **Scheitelwinkel.**

Die Scheitel fallen zusammen und je zwei Schenkel der Lage nach in eine grade Linie, aber in eine entgegengesetzte Richtung.

Werden zwei Linien von einer dritten geschnitten, so entstehen:

4) **Innenwinkel.**

Alle vier innerhalb der geschnittenen Linien.

5) **Außenwinkel.**

Alle vier außerhalb der geschnittenen Linien.

6) **Innere Gegenwinkel.**

Je zwei Winkel innerhalb der geschnittenen Linien und auf derselben Seite der schneidenden Linie.

7) **Aeußere Gegenwinkel.**

Je zwei Winkel außerhalb der geschnittenen Linien und auf derselben Seite der schneidenden Linie.

8) **Correspondirende Winkel.**

Vier Winkelpaare, von denen je ein Innenwinkel und ein Außenwinkel und beide auf derselben Seite der Schneidenden, ohne Nebenwinkel zu sein.

9) **Wechselwinkel** (äußere und innere).

Vier Winkelpaare, von denen beide Innenwinkel oder beide Außenwinkel auf verschiedenen Seiten der Schneidenden, ohne Nebenwinkel zu sein.

Construktionen und Bezeichnungen.

Aufgaben:

1) Einer Linie durch einen Punkt außerhalb derselben eine Parallele zu ziehen.
2) Zu dreien Linien die vierte Proportionale zu finden (vergl. § 6).
3) Eine Linie in eine beliebige Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Sätze:

1. Nebenwinkel sind zusammen = 2 R.
2. Scheitelwinkel sind einander gleich.
3. Werden zwei Parallelen von einer dritten Linie geschnitten, so sind a) die correspondirenden Winkel einander gleich; b) die Wechselwinkel einander gleich; c) die Summe der innern oder äußeren Gegenwinkel = 2 R. — Die Umkehrung des letzten Satzes? — Und wenn die geschnittenen Linien nicht parallel sind, wie sind dann die Winkel?
4. Zwei Linien, jede derselben dritten parallel, sind untereinander parallel, (sowohl in der Ebene, als auch im Raume).
5. Wenn von zwei convergenten Linien die eine in gleiche Theile getheilt ist und man legt durch die Theilpunkte einander parallele Linien, welche die andere von den beiden Convergenten schneiden, so wird auch diese in gleiche Theile getheilt.
6. Convergente Linien werden von parallelen Linien proportional geschnitten (vergl. § 6).

§ 12. Man unterscheidet noch Linien in oder außerhalb einer Fläche (Ebene), sie treffend, schneidend (Transversale), berührend (Tangente); Linien innerhalb oder außerhalb eines Körpers, ihn treffend, schneidend, berührend.

Legt man durch die Endpunkte einer begrenzten Linie[1]) zwei einander parallele Linien[2]) so, daß diese eine zweite Linie[3]) schneiden, so nennt man das von der letzten abgeschnittene Stück eine **Projektion** der begrenzten Linie.

([1]) nennt man die projicirte Linie, ([2]) die projicirenden Linien, ([3]) die Projektionslinie.

Rechtwinklig nennt man die Projektion, wenn die projicirenden Linien die Projektionslinie senkrecht schneiden, sonst schiefwinklig. Auch ist der Fall denkbar, daß die projicirte Linie schon mit einem Endpunkte die Projektionslinie berührt, so daß nur eine projicirende Linie zu ziehen ist,

z. B. der Schatten eines Stabes, der von den Sonnenstrahlen auf einer Wand gebildet wird, ist die Projektion dieses Stabes.

Construktionen und Bezeichnungen.

C. § 13. Die Fläche

hat zwei Ausdehnungen: Länge und Breite. Man unterscheidet sie auch nach ihrer Gestalt und ihrer Lage.

Der Gestalt nach kann die Fläche sein: gekrümmt und zwar: 1) concav [hohl], 2) convex [erhaben], 3) plan [eben] oder eine Ebene,

z. B. die Flächen der verschiedenen Glaslinsen bei Fernröhren und Brillen.

Eine Ebene nennt man eine Fläche, die so beschaffen ist, daß eine grade Linie die zwei beliebige Punkte in ihr verbindet, ganz, d. h. mit allen ihren Punkten, in die Fläche fällt, jede andere Fläche nennt man gekrümmt.

Flächen können entstanden sein durch Projiciren auf eine Ebene. Projektionsfläche, projicirte Fläche, Projektion, die projicirenden Linien — rechtwinklige und schiefwinklige Projektion (vgl. § 12). Rotationsflächen, entstanden durch Drehung einer graden oder krummen Linie um eine grade Linie als Achse. — Abwickelbare Flächen.

Zwei Flächen (Ebenen) können sein: 1) **congruent**, d. h. wenn man sie sich in einander gelegt denkt, müssen sie sich in allen ihren Theilen decken; 2) **ähnlich**, d h. die Winkel müssen, in derselben Reihenfolge genommen, einander gleich und die Seiten proportional sein (§ 6, 7, b); 3) **gleich**, d. h. mit derselben Maßeinheit (Flächeneinheit, Quadrat) gemessen, müssen sie dieselben oder gleiche Maßzahlen geben.

Bei 1) unterscheidet man homologe (ähnlich liegende) Winkel, Seiten, Transversalen (Höhen) u. s. w.

§ 14. Der Lage nach unterscheidet man Flächen (Ebenen) innerhalb oder außerhalb eines Körpers, denselben schneidend (Schnittflächen) oder treffend, berührend (Tangentialflächen). Umschriebene und eingeschriebene Flächen (Ebenen); umhüllende und umhüllte Flächen. Abwickelbare Flächen. Wagerechte und senkrechte Ebenen (vergl. § 5, Anmerk.).

Die Lage der Ebene im Raum wird bestimmt: 1) durch drei Punkte, 2) durch eine Linie und einen Punkt, 3) durch zwei sich schneidende Linien, 4) durch zwei parallele Linien.

Zwei congruente Flächen (Ebenen) können haben: 1) gleiche Lage, d. h. alle ihre Seiten sind einander parallel; 2) symmetrische Lage, d. h. alle Seiten und Winkel folgen bei derselben Richtung (z. B. in der Richtung des Uhrzeigers) in umgekehrter Reihenfolge aufeinander; 3) verschiedene Lage.

Zwei Ebenen können sein: parallel, convergent, divergent, sich treffend oder sich schneidend, auf einander senkrecht (normal). Flächenwinkel.

Sätze:

1. Zwei Flächen schneiden sich in einer Linie.
2. Zwei Ebenen schneiden sich in einer geraden Linie, oder: durch eine gerade Linie kann ich mir unendlich viele Ebenen gelegt denken.
3. Eine Linie ist auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen Linien senkrecht steht, die durch ihren Fußpunkt gehen und die zugleich in dieser Ebene liegen.
4. Eine Linie ist einer Ebene parallel, wenn sie einer Linie in der Ebene parallel ist.
5. Zwei Winkel im Raume sind gleich, wenn ihre Schenkel nach derselben Seite parallel sind.
6. Zwei Ebenen sind parallel, wenn sie auf der nämlichen Geraden senkrecht stehen.
7. Eine Ebene steht auf einer zweiten Ebene senkrecht, wenn sie durch eine Linie gelegt ist, welche auf dieser zweiten senkrecht steht.
8. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene auf diese eine Senkrechte und mehrere schiefe Linien, so ist die Senkrechte die kürzeste von allen und alle Linien, deren Fußpunkte vom Fußpunkte der Senkrechten gleich weit entfernt sind, sind gleich, und umgekehrt; und die Linie, von je zweien, deren Fußpunkt vom Fußpunkte der Senkrechten weiter entfernt ist, ist die längere, und umgekehrt. Daher wird durch eine Senkrechte die Entfernung eines Punktes von einer Ebene bestimmt.

Der Flächenwinkel ist die Neigung zweier Ebenen zu einander. Kante und Seiten des Flächenwinkels. Gestreckter, rechter, spitzer, stumpfer Flächenwinkel. Nebenflächenwinkel. Scheitelflächenwinkel. Correspondirende-, Wechsel-Flächenwinkel u. s. w. Zieht man in jeder Seite des Flächenwinkels in einem Punkte der Kante desselben senkrechte Linien auf die Kante, so erhält man den Neigungswinkel des Flächenwinkels.

Durch den Neigungswinkel wird die Größe des Flächenwinkels gemessen und seine beiden Schenkel bilden die Neigungsebene.

§ 15. Der Ausdehnung nach kann die Fläche sein: begrenzt, unbegrenzt (unendlich), zum Theil begrenzt.

Die Flächen, zunächst die Ebenen, können von drei, vier, fünf u. s. w. Linien (Seiten) begrenzt sein und heißen dann: Dreiseit, Vierseit, Fünfseit u. s. w., Vielseit; oder nach der Anzahl der Winkel (Ecken): **Dreieck** (Triangel), **Viereck** (Tetragon), **Fünfeck** (Pentagon), **Sechseck** (Hexagon) u. s. w. **Vieleck** (Polygon).

Construktionen und Bezeichnungen.

Im Folgenden wollen wir zunächst nur die ebenen Flächen oder die Ebenen betrachten.

a. § 16. Das Dreieck oder Dreiseit

enthält sechs Stücke: drei Seiten und drei Winkel. Ein jeder Winkel wird von zwei Seiten eingeschlossen und die dritte Seite liegt ihm gegenüber; einer jeden Seite liegen zwei Winkel an und der dritte liegt ihr gegenüber; daher unterscheidet man die einen Winkel einschließenden Seiten und die einem Winkel gegenüberliegende Seite; ferner die einer Seite anliegenden Winkel und den einer Seite gegenüberliegenden Winkel.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. In jedem Dreiecke sind alle drei Winkel zusammen so groß als 2 R (durch Drehung einer Linie anschaulich zu machen — eine halbe Umdrehung).
2. In einem Dreiecke kann nur ein Winkel = 1 R sein; und dieses heißt dann ein rechtwinkliges (**Catheten**, die den rechten Winkel einschließenden, **Hypotenuse** die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite).
3. In einem Dreiecke kann nur ein Winkel > R (ein stumpfer) sein; und dieses heißt dann ein stumpfwinkliges. Ist jeder von allen drei Winkeln < R (spitz), nennt man das Dreieck ein spitzwinkliges.
4. Die der Hypotenuse anliegenden Winkel sind zusammen = 1 R.
5. Ein überstumpfer Winkel kann in einem Dreiecke nicht vorkommen.

§ 17. Sind in einem Dreieck
alle drei Seiten gleich, so heißt es: gleichseitig,
nur zwei Seiten gleich, so heißt es: gleichschenklig,
alle drei Seiten ungleich, so heißt es: ungleichseitig.

Darnach unterscheidet man folgende verschiedene Dreiecke:

ein gleichseitig spitzwinkliges Dreieck;

ein gleichschenklig { rechtwinkliges Dreieck, spitzwinkliges Dreieck, stumpfwinkliges Dreieck;

ein ungleichseitig { rechtwinkliges Dreieck, spitzwinkliges Dreieck, stumpfwinkliges Dreieck.

Constructionen und Bezeichnungen.

Aufgaben:

1) Ein einem gegebenen Dreieck congruentes (identisches) Dreieck zu construiren oder ein gegebenes Dreieck abzutragen.
2) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn beide Catheten gegeben sind.
3) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren, wenn die Hypotenuse und eine Cathete gegeben sind.
4) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren aus der einen Cathete und dem anliegenden spitzen Winkel.
5) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren aus der einen Cathete und dem gegenüberliegenden spitzen Winkel.
6) Ein rechtwinkliges Dreieck zu construiren aus der Hypotenuse und einem anliegenden Winkel.
7) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Grundlinie und einem der gleichen Schenkel.
8) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus einem der gleichen Schenkel und dem Winkel am Gipfel.
9) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus einem der gleichen Schenkel und einem Winkel an der Grundlinie.
10) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Grundlinie und einem der anliegenden Winkel.
11) Ein gleichschenkliges Dreieck zu construiren aus der Grundlinie und dem gegenüberliegenden Winkel (am Gipfel).
12) Ein Dreieck zu construiren aus zweien Seiten und dem zwischenliegenden Winkel.
13) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln.
14) Ein Dreieck zu construiren aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem gegenüberliegenden Winkel.

15) Ein Dreieck zu construiren aus drei Seiten.

16) Ein Dreieck zu construiren aus zwei Seiten und einem Winkel, der einer der gegebenen Seiten gegenüberliegt.

17) Ein Dreieck zu construiren, welches einem andern gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

18) Ein, einem gegebenen Dreiecke, ähnliches Dreieck zu construiren wenn von diesem eine Seite gegeben ist.

Sätze:

1. Aus zwei begrenzten Linien (Seiten) und dem zwischenliegenden Winkel kann man immer nur ein und dasselbe Dreieck construiren, oder: Dreiecke sind identisch (congruent), wenn in ihnen je zwei Seiten und der zwischenliegende Winkel gleich sind.
2. Aus einer begrenzten Linie (Seite) und den anliegenden Winkeln kann man immer nur ein und dasselbe Dreieck construiren, oder: Dreiecke sind identisch (congruent), wenn in ihnen je eine Seite und die anliegenden Winkel einander gleich sind.
3. Aus denselben drei Linien (Seiten) kann man immer nur ein und dasselbe Dreieck construiren; oder: Dreiecke sind identisch (congruent), wenn in ihnen alle drei Seiten gegenseitig gleich sind.
4. Im gleichschenkligen Dreieck sind die der dritten Seite anliegenden Winkel einander gleich, und umgekehrt.
5. Im gleichseitigen Dreieck sind alle drei Winkel einander gleich, (also jeder gleich 60^{0}) und umgekehrt.
6. Im ungleichseitigen Dreiecke liegt der größeren Seite (von je zweien) auch der größere Winkel gegenüber und umgekehrt.
7. Aus zwei begrenzten Linien (Seiten) und dem der kleineren von ihnen gegenüberliegenden Winkel kann man zwei verschiedene Dreiecke construiren.
8. Aus zwei begrenzten Linien (Seiten) und dem der größeren von ihnen gegenüberliegenden Winkel kann man immer nur ein und dasselbe Dreieck construiren; oder: Dreiecke sind identisch (congruent) wenn in ihnen je zwei Seiten und die der größeren Seite gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.
9. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten immer größer, ihr Unterschied aber immer kleiner als die dritte Seite.
10. Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Winkel je einander gleich sind.
11. Dreiecke sind ähnlich, wenn je ein Winkel gleich und die diesen Winkel einschließenden Seiten proportional sind.
12. Dreiecke sind ähnlich, wenn alle drei Seiten des einen Dreiecks den drei Seiten des anderen proportional sind.
13. Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen Dreiecks zweien Seiten des andern Dreiecks proportional und die beiden den größeren Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.
14. Dreiecke sind ähnlich, wenn die Seiten des einen Dreiecks den entsprechenden Seiten des andern Dreiecks parallel sind, oder mit ihnen, oder deren Verlängerung, gleiche Winkel bilden.
15. Die Höhe auf der Hypotenuse theilt das rechtwinklige Dreieck in zwei einander und dem ganzen ähnliche Dreiecke.

§ 18. Bei jedem Dreieck unterscheidet man eine **Grundlinie** oder die Seite des Dreiecks, auf welcher man sich das Dreieck errichtet denkt, einen **Gipfel** oder den der Grundlinie gegenüberliegenden Eckpunkt, und eine **Höhe** oder die Senkrechte (Normale) vom Gipfel auf die Grundlinie oder deren Verlängerung. Der Fußpunkt der Höhe.

Aufgabe: Zu zwei Linien die mittlere Proportionale zu finden.

1) Die Höhe fällt in das Dreieck, wenn der Grundlinie nur spitze Winkel anliegen.

2) Die Höhe fällt mit der einen Seite des Dreiecks zusammen, wenn der Grundlinie ein rechter Winkel anliegt und man kann beide Catheten abwechselnd als Grundlinie und Höhe ansehen.

3) Die Höhe fällt außerhalb des Dreiecks, wenn der Grundlinie ein stumpfer Winkel anliegt.

Construktionen und Bezeichnungen.

Mißt man die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks mit derselben Maßeinheit und nimmt das halbe Produkt der so gefundenen Maßzahlen, so erhält man die Anzahl der Quadrateinheiten oder den Inhalt des Dreiecks (vergl. § 6, 7 b. und § 13).

Oder man sagt auch: der Inhalt des Dreiecks ist gleich Grundlinie mal Höhe, dividirt durch zwei. [$= \frac{g\ h}{2}$] (Vergl. § 21, Anmerk.)

Sätze:

1. Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe (oder zwischen denselben Parallelen) sind einander gleich
2. Dreiecke sind gleich, wenn die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen einander gleich sind.
3. Im rechtwinkligen Dreieck ist die Höhe auf der Hypotenuse die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse (vergl. § 6, 17, 15 1.)
4. Im rechtwinkligen Dreieck ist jede Cathete die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Hypotenuse und ihrer Projektion auf dieselbe (vergl. § 16 und § 17, Satz 15).

§ 19. Verlängert man eine Seite eines Dreiecks, erhält man einen **Außenwinkel des Dreiecks**; einen Nebenwinkel des Außenwinkels und zwei dem Außenwinkel innere gegenüberliegende Winkel.

Eine Linie, welche das Dreieck schneidet, nennt man **Transversale**, geht sie zugleich durch eine Ecke: Ecktransversale.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Der Außenwinkel ist gleich der Summe der inneren gegenüberliegenden Winkel, also größer als jeder einzelne derselben.
2. Die drei Ecktransversalen, welche die Winkel halbiren, treffen in einem Punkte zusammen, welcher von allen Seiten des Dreiecks gleich weit entfernt ist. Der Mittelpunkt des dem Dreiecke eingeschriebenen Kreises.

3. Die auf den Mittelpunkten der Seiten senkrechten Transversalen treffen in einem Punkte zusammen, welcher von allen Ecken des Dreiecks gleich weit entfernt ist: der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises.
4. Die drei Ecktransversalen aller Höhen des Dreiecks treffen in einem Punkte zusammen.
5. Die drei Ecktransversalen, welche die gegenüberliegenden Seiten halbiren, treffen in einem Punkte zusammen.

Alle übrigen geradlinigen Figuren lassen sich durch Linien zwischen je zwei nicht an derselben Seite liegende Scheitelpunkte, **Diagonalen** (oder Ecktransversalen, welche durch zwei Eckpunkte gehen) in Dreiecke zerlegen; oder auch durch Strahlen, d. h. Linien, welche von einem Punkte innerhalb des Polygons (gewöhnlich dem Mittelpunkt) zu den Eckpunkten gezogen werden (vergl. § 5).

b. § 20. Das Viereck

enthält zwei Paar gegenüberliegende Seiten und zwei Paar gegenüberliegende Winkel. Man unterscheidet:

beide Seitenpaare parallel:	ein Seitenpaar parallel:	kein Seitenpaar parallel:
Parallelogramm.	**Paralleltrapez** (symmetrisches).	**Trapezoid.**

Bei jedem Parallelogramm (auch Paralleltrapez) unterscheidet man zwei Grundlinien (untere und obere), auf welcher man sich die Figur errichtet denkt und eine Höhe, oder den senkrechten Abstand zwischen den beiden parallelen Grundlinien.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Die Summe der Winkel eines Vierecks ist gleich 4 R.
2. Jedes Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwei congruente Dreiecke getheilt.
3. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und die gegenüberliegenden Winkel einander gleich, und umgekehrt.
4. Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.
5. Die Diagonalen im Parallelogramm halbiren einander.
6. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe (oder zwischen denselben Parallelen) sind einander gleich.
7. Jedes Dreieck ist die Hälfte von einem Parallelogramm, das mit ihm eine gleiche Grundlinie und eine gleiche Höhe hat.

Die Ergänzungen des Parallelogramms.

§ 21. Die Parallelogramme theilt man ein, je nach dem die Winkel recht oder schief und die Seitenpaare untereinander gleich oder ungleich sind:

	Winkel recht:	Winkel schief:
die Seitenpaare gleich:	**Quadrat.**	**Rhombus.**
die Seitenpaare ungleich:	**Rektangel.**	**Rhomboid.**

Mißt man die Grundlinie und Höhe eines Parallelogramms mit derselben Maßeinheit und nimmt das Produkt der so gefundenen Maßzahlen, so erhält man die Anzahl der Quadrateinheiten oder den Inhalt des Parallelogramms (vergl. § 6, 7, b und § 13). Oder man sagt auch: der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkt aus seiner Grundlinie und Höhe ($= g.\ h.$). (Vergl. § 18. Anmerk.)

Sätze:

1. Die Diagonalen im Quadrat und Rhombus stehen auf einander senkrecht und halbiren die Winkel.
2. Das Quadrat über der Hypotenuse (eines rechtwinkeligen Dreiecks) ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Catheten.
3. Die Ergänzungen des Parallelogramms sind einander gleich.

c. § 22. Das regelmäßige (reguläre) Polygon

hat lauter untereinander gleiche Winkel und untereinander gleiche Seiten. Alle regulären Polygone haben einen Mittelpunkt (Centrum), der von allen Eckpunkten und auch von allen Seiten gleich weit entfernt ist; man kann also sowohl um dieselben als auch in dieselben einen Kreis schreiben. — Man kann die regulären Polygone in Dreiecke zerlegen durch Diagonalen und Strahlen (vgl. § 19) Linien von dem Mittelpunkte zu den Eckpunkten. Eingeschriebene und umschriebene Polygone (sowohl dem Kreise als auch untereinander). Der Perimeter oder der Umfang eines Polygons ist gleich der Summe aller seiner Seiten.

Bezeichnungen; die Construktion der regulären Polygone ist leichter mittelst des Kreises (§ 28.). — Die irregulären Polygone werden wir nicht betrachten.

1. Jedes reguläre Polygon wird durch Strahlen vom Mittelpunkte aus in so viele einander congruente Dreiecke getheilt, als das Polygon Seiten hat. — Die Höhe dieser Dreiecke (§ 18) ist der Radius (§ 23) des dem Polygon eingeschriebenen Kreises.
2. Jedes n Eck kann durch Diagonalen, die sich nicht schneiden, in (n-2) Dreiecke zerlegt werden.
3. Der Inhalt eines irregulären Polygons ist gleich dem halben Produkt aus seinem Perimeter incl. dem Radius des eingeschriebenen Kreises $\left(= \frac{p \cdot \rho}{2}\right)$.
4. die Summe aller Winkel eines n Ecks ist $= (2n - 4)$ R.
5. Jeder Winkel eines regulären Polygons ist $= \left(\frac{2n - 4}{n}\right)$ R.

d. § 23. Der Kreis

ist ein reguläres Polygon von unendlich vielen Ecken und Seiten.

Denke ich mir in einer Ebene eine begrenzte Gerade um den einen feststehenden Endpunkt so lange gedreht, bis sie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so bildet die Spur des beweglichen Endpunktes eine geschlossene Curve: die **Kreislinie** oder Kreis (Peripherie). — Der feststehende Endpunkt ist der **Mittelpunkt** (Centrum), die sich bewegende Grade der **Halbmesser** oder **Radius** (r oder ρ), die von der Kreislinie eingeschlossene Fläche die **Kreisfläche** oder der **Kreis.**

Constructionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Die Peripherie ist vom Mittelpunkt überall gleich weit entfernt.
2. Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt größer ist als ein Radius, liegt außerhalb der Peripherie.
3. Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt kleiner ist als ein Radius, liegt innerhalb der Peripherie.
4. Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt gleich ist dem Radius, liegt in der Peripherie.
5. Alle Radien eines und desselben und gleicher Kreise sind einander gleich.
6. Kreise von gleichen Radien sind einander gleich (identisch).
7. Die Größe eines Kreises ist von seinem Radius allein abhängig.

§ 24. Eine Gerade, welche zwei Punkte der Peripherie mit einander verbindet, nennt man **Sehne** (der zugehörige Bogen). Eine verlängerte Sehne nennt man eine **Sekante** (secans). Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, nennt man **Durchmesser** (Diameter). Eine Gerade, welche, bei genugsamer Verlängerung, nur einen Punkt mit der Kreislinie gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb des Kreises fällt, nennt man **Tangente** (tangens), Berührungspunkt.

Constructionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Die Tangente steht senkrecht auf dem zum Berührungspunkte gezogenen Radius.
2. Jede Linie, welche eine Sehne senkrecht halbirt oder senkrecht auf der Tangente, in ihrem Berührungspunkte steht, geht durch den Mittelpunkt.
3. Durch einen Punkt und auch durch zwei beliebige Punkte kann man unendlich viele Kreise durchlegen.
4. Durch drei Punkte, welche nicht in einer graden Linie liegen wird nur ein Kreis bestimmt; oder: haben Kreislinien drei Punkte gemeinsam, so fallen sie zusammen.
5. Der Durchmesser ist immer gleich dem doppelten Radius.
6. Der Durchmesser ist die größte aller Sehnen.
7. Der Kreisumfang ist $= d\pi = 2r\pi$ Linieneinheiten. — Rektifikation der Kreislinie.

Die Zahl $\pi = 3{,}1414920\ldots$*) (annähernd auch $= \frac{3}{2}$ oder $\frac{22}{7}$) (Archimedisches Verhältniß) zeigt die Zahl an, mit der man die Länge des Dnrchmessers multipliciren muß, um die Länge der Peripherie eines Kreises zu erhalten. (Die Maßzahl für die Peripherie, wenn der Durchmesser die Maßeinheit ist.)

8. Der Inhalt der Kreisfläche ist $= r^2\pi$ Quadrateinheiten. — Quadratur des Kreises.
9. Gleiche Sehnen haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt.
10. Von ungleichen Sehnen hat die kleinere den größeren Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt.
11. Die Seite des dem Kreise eingeschriebenen Sechseck ist gleich dem Radius.

§ 25. 1) Der **Centriwinkel** hat zu Schenkeln Radien und sein Schenkel liegt im Mittelpunct. Seine Größe ist abhängig von dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Theil der Peripherie des Kreises oder von dem Bogen, auf dem er steht (§ 8 Anm.)

2) Der **Peripheriewinkel** hat zu Schenkeln Sehnen und sein Scheitel liegt i n der Peripherie. — Der zugehörige Bogen.

3) Der **Sehnenwinkel** hat auch zu Schenkeln Sehnen oder Theile von Sehnen und sein Scheitel liegt i n n e r h a l b der Peripherie. — Die zwischen seinen Schenkeln (und deren Verlängerung) liegenden Bogen.

4) Der **Sekantenwinkel** hat zu Schenkeln Sekanten und sein Scheitel liegt a u ß e r h a l b der Peripherie. — Die zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen.

5) Der **Tangentenwinkel** hat zu Schenkeln Tangenten und sein Scheitel liegt außerhalb der Peripherie. — Der zugehörige Bogen.

6) Noch ist ein Winkel zu merken, welcher zu Schenkeln eine Sehne und eine Tangente hat und dessen Scheitel in der Peripherie liegt, gleichsam ein Peripheriewinkel, bei dem die eine Sehne zu einer Tangente geworden ist.

Construktionen und Bezeichnungen.

S ä t z e:

1. In demselben Kreise oder in gleichen Kreisen gehören zu gleichen Centriwinkeln gleiche Bogen und gleiche Sehnen und umgekehrt.
2. Der Radius, welcher einen Centriwinkel h a l b i r t, halbirt auch den zugehörigen Bogen und steht auf der zugehörigen Sehne senkrecht und umgekehrt.
3. Die Centriwinkel verhalten sich wie die zugehörigen Bogen; oder Centriwinkel enthalten ebensoviele Winkelgrade als die zugehörigen Bogen Bogengrade enthalten. — Transporteur (vgl. § 8 Anm. und 26).
4. Der Centriwinkel ist doppelt so groß als der Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf demselben oder gleichen Bogen steht (bei demselben oder gleichen Kreisen).
5. Alle Peripheriewinkel auf demselben Bogen (in demselben oder in gleichen Kreisen) oder auf gleichen Bogen sind einander gleich.

*) oder Ludolphsche Zahl.

6. Der Peripheriewinkel, welcher auf dem Halbkreise steht, ist gleich einem Rechten.
7. Der Peripheriewinkel, welcher auf einem Bogen steht, der kleiner ist als ein Halbkreis, ist spitz.
8. Der Peripheriewinkel, welcher auf einem Bogen steht, der größer ist als ein Halbkreis, ist stumpf.
9. Die Größe eines Sehnenwinkels wird bestimmt durch die halbe Summe der Bogen, welche zwischen seinen Schenkeln sind.
10. Der Sekantenwinkel wird bestimmt durch die halbe Differenz der Bogen, welche zwischen seinen Schenkeln sind.
11. Der Tangentenwinkel ist ein Supplementwinkel zum Centriwinkel, welcher auf demselben Bogen steht.
12. Bei gleichen Kreisen oder demselben Kreise sind alle Tangentenwinkel auf gleichen Bogen einander gleich.
13. Der Tangentenwinkel wird durch die Sekante, welche durch den Mittelpunkt geht, halbirt.
14. Der Winkel, welcher von einer Sehne und Tangente gebildet wird, ist gleich dem Peripheriewinkel über dem der Sehne zugehörigen Bogen.
15. Beim Viereck im Kreise sind die gegenüberliegenden Peripheriewinkel Supplementwinkel oder zusammen gleich zwei Rechten.

§ 26. Jede Sehne theilt den Kreis (sowohl Kreisfläche als Kreislinie) in zwei **Kreisabschnitte** (Segmente) und der Durchmesser theilt den Kreis in zwei gleich große Segmente oder Halbkreise. — Zwei Radien schneiden aus dem Kreise einen **Kreisausschnitt** (Sektor) heraus.

Der Halbkreis kann demnach sowohl ein Segment als ein Sektor sein.

Die ganze Kreislinie wird eingetheilt in 360 gleiche Theile oder Grade, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden. Der Halbkreis ist also $= 180^0$, der Viertelkreis oder Quadrant $= 90^0$. In Bezug auf die entsprechenden Centriwinkel (vgl. § 25 Satz 3) sagt man auch, der Kreisumfang sei $= 4$ R (ganze Umdrehung), der Halbkreis $= 2$ R (halbe Umdrehung), der Quadrant $= 1$ R (viertel Umdrehung). — Transporteur. — (vgl. § 8 Anm.)

Sextant, Oktant. — Construktionen und Bezeichnungen.

§ 27. Aufgaben:

1) Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden (vgl. § 24 S. 2).
2) Durch drei beliebige Punkte, die nicht in einer graden Linie liegen, einen Kreis zu ziehen.
3) Durch einen in der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkt eine Tangente an diesem Kreis zu ziehen.
4) Von einem außerhalb eines Kreises gegebenen Punkte zwei Tangenten an den Kreis zu ziehen.
5) An zwei verschiedene Kreise eine gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

Sätze:

1. Zwei Tangenten, von einem Punkt an einen Kreis gezogen, sind einander gleich.
2. Bei jedem Viereck um den Kreis sind die Summen aus den gegenüberliegenden Seiten einander gleich.
3. Schneiden sich in einem Kreise zwei Sehnen, so bilden die Abschnitte der einen Sehne die mittleren und die Abschnitte der andern Sehne die äußeren Glieder einer Proportion.
4. Gehen von einem Pnnkte außerhalb eines Kreises zwei Sekanten an diesen, so verhalten sich die ganzen Sekanten umgekehrt wie ihre äußeren Abschnitte.
5. Gehen von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Sekante und eine Tangente an diesen Kreis, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante nnd ihrem äußeren Abschnitte.

§ 28. Die Polygone im Kreise haben zu Seiten lauter Sehnen und zu Winkeln: Peripheriewinkel.

Die Polygone um den Kreis haben zu Seiten: lauter Tangenten und zu Winkeln: Tangentenwinkel. — Die regulären Polygone sind am leichtesten in oder um den Kreis zu zeichnen. (§ 22 Anm.)

Aufgaben:

1) Ein beliebiges Polygon in oder um den Kreis zu zeichnen.
2) Einen Kreis um ein beliebiges Dreieck zu construiren (vgl. § 19 Satz 3).
3) Einen Kreis in ein beliebiges Dreieck zu construiren (vgl. § 19 Satz 2).
4) Ein reguläres Dreieck in und um einen Kreis zu beschreiben.
5) Wenn ein reguläres Polygon im Kreise gegeben ist, ein reguläres Polygon von derselben Seitenzahl um den Kreis zu beschreiben.
6) Wenn ein reguläres Polygon im Kreise gegeben ist, ein reguläres Polygon von doppelter Seitenzahl in dem Kreise zu construiren.
7) Ein reguläres Viereck (Quadrat) in und um einen Kreis zu beschreiben.
8) Ein reguläres Sechseck in und um den Kreis zu beschreiben. (vgl. § 24 Satz 11.)
9) Ein reguläres Fünfeck in und um den Kreis zu beschreiben.
10) Ein reguläres Zehneck in und um den Kreis zu beschreiben.

§ 29. Zwei Kreise können den Mittelpunkt gemeinsam haben und heißen dann: **concentrische** Kreise; oder sie können den Mittelpunkt nicht gemeinsam haben und heißen dann: **excentrische** Kreise. Die Centrale ist alsdann die Linie, welche beide Mittelpunkte verbindet

Die Peripherien excentrischer Kreise haben entweder:

1) keinen Punkt gemeinsam und der Mittelpunkt des einen Kreises kann dabei innerhalb des anderen Kreises fallen oder außerhalb desselben; oder
2) einen Punkt gemeinsam und die Kreise berühren sich alsdann (Berührungspunkt) von innen oder außen; oder
3) zwei Punkte gemeinsam und die Kreise schneiden sich alsdann (Schneidepunkte). Auch hier kann der Mittelpunkt des einen Kreises dabei innerhalb des andern Kreises fallen oder außerhalb desselben. Gemeinschaftliche Sehne.

Constructionen und Bezeichnungen.

Sätze.

1. Zwei excentrische Kreise haben keinen Punkt gemeinsam, wenn ihre Centrale größer als die Summe oder kleiner als die Differenz ihrer Radien ist.
2. Zwei excentrische Kreise berühren sich, wenn ihre Centrale gleich ist der Summe oder Differenz ihrer Radien.
3. Zwei excentrische Kreise schneiden sich, wenn ihre Centrale kleiner ist als die Summe oder größer als die Differenz ihrer Radien.
4. Berühren sich zwei Kreise, so geht die Centrale durch den Berührungspunkt.
5. Die gemeinschaftliche Sehne zweier sich schneidender Kreise wird von der Centrale senkrecht halbirt.

Außer dem Kreise hat man noch viele andere Curven wie: die Ellipse, Parabel, Hyperbel (vgl. § 43), die Spirale. Die Radlinie oder Cykloide, welche z. B. von der Mondbahn gebildet wird, ist die Spur eines bestimmten Punktes auf einer Kreislinie, welche als auf einer anderen Linie rollend gedacht wird.

D. § 30. Der Körper

hat drei Ausdehnungen. Man unterscheidet an ihm Flächen, Kanten und Ecken.

Zur Bildung einer Ecke gehören wenigstens drei Flächen (vgl. § 2) und man nennt sie alsdann eine dreiseitige Raumecke oder einen dreiseitigen körperlichen Winkel. Die Ecke kann aber nach der Anzahl der Flächen (Ebenen), welche sie bilden, eine 4, 5 . . . n seitige sein.

Die dreiseitige Raumecke, auch körperliches Dreieck genannt, besteht aus drei **Kantenwinkeln** — (je zwei Kanten der Ecke oder Ecken bilden einen Kantenwinkel), und aus drei **Flächenwinkeln** — (je zwei Flächen der Ecke oder Ecken bilden eiuen Flächenwinkel vgl. § 14 Anm.) — und aus einem **Scheitel** oder einer Spitze. Ebenso wird die vierseitige Ecke vier Kantenwinkel und vier Flächenwinkel haben und durch eine **Diagonalebene** (eine Ebene, welche durch zwei gegenüberliegende Kanten geht) sich in zwei dreiseitige Raumecken zerlegen lassen; Aehnliches findet statt bei der fünf-, sechs- u. s. w. n-seitigen Ecke.

§ 31. Verlängert man die Kanten einer Raumecke über den Gipfel hinaus, entsteht eine **Scheitelecke**.

Errichtet man von einem Punkte innerhalb einer dreiseitigen Raumecke drei senkrechte Linien auf die drei Flächen der Ecke, oder drei senkrechte Ebenen auf die drei Kanten der Ecke, so entsteht eine **Polarecke** oder Supplementarecke.

Dieser letztere Name stammt wohl daher, weil die Flächenwinkel der Raumecke und die entsprechenden Kantenwinkel der Polarecke, und ebenso: die Kantenwinkel der Raumecke und die entsprechenden Flächenwinkel der Polarecke, sich gegenseitig zu zwei Rechten ergänzen, also gleichsam Supplementwinkel sind. Daher ist denn auch die Raumecke wieder die Polarecke der Polarecke. — Die drei senkrechten Linien oder Ebenen, durch deren Construction die Polarecke entsteht, können auch im Scheitelpunkt selbst der Raumecke errichtet werden.

Zwei Raumecken — und im allgemeinen alle Körper — heißen congruent, wenn alle Bestandtheile derselben, einzeln genommen, vollkommen gleich und bei gleicher Lage der Raumecken in gleicher Richtung und in derselben Ordnung aufeinander folgen; also wenn man sie so in einander gelegt denken kann, daß sie in allen ihren Theilen zusammenfallen.

Zwei Raumecken — und im allgemeinen alle Körper — heißen symmetrisch, wenn alle Bestandtheile derselben, einzeln genommen, zwar vollkommen gleich sind, jedoch bei gleicher Lage der Raumecken wol in derselben Ordnung, aber in entgegengesetzter Richtung auf einander folgen; oder bei gleicher Richtung in umgekehrter Ordnung auf einander folgen.

Obgleich solche symmetrische Körper sonst vollkommen gleich sind (z. B. ein Paar Stiefel, ein Paar Hände oder Scheitelecken), so können sie doch wegen der entgegengesetzten Lage ihrer gleichen Theile nicht in einander gesteckt oder gelegt gedacht werden.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. In jeder dreiseitigen Raumecke ist die Summe zweier Kantenwinkel größer als der dritte Kantenwinkel.
2. Die Summe aller Kantenwinkel einer Raumecke (ohne einspringende Flächenwinkel) ist immer kleiner als vier Rechte.
3. Aus denselben drei Winkeln (Kantenwinkeln) kann man, wenn sie bei gleicher Richtung und derselben Ordnung auf einander folgen, immer nur ein und dieselbe dreiseitige Raumecke construiren; oder: dreiseitige Raumecken sind identisch (congruent), wenn die drei Kantenwinkel in ihnen einzeln gleich sind und bei gleicher Richtung in derselben Ordnung aufeinander folgen.
4. Aus denselben drei Flächenwinkeln kann man, wenn sie bei gleicher Richtung in derselben Ordnung aufeinanderfolgen, immer nur ein und dieselbe dreiseitige Raumecke construiren; oder: dreiseitige Raumecken sind identisch (congruent), wenn die drei Flächenwinkel in ihnen einzeln gleich sind und bei gleicher Richtung in derselben Ordnung auf einander folgen.

5. Aus denselben zwei Kantenwinkeln und dem zwischenliegenden Flächenwinkel kann man, wenn sie bei gleicher Richtung in derselben Ordnung aufeinander folgen, immer nur ein und dieselbe dreiseitige Raumecke construiren; oder: dreiseitige Raumecken sind identisch (congruent), wenn je zwei Kantenwinkel und der zwischenliegende Flächenwinkel in ihnen gleich sind und bei gleicher Richtung in derselben Ordnung auf einander folgen.
6. Aus denselben zwei Flächenwinkeln und dem zwischenliegenden Kantenwinkel kann man, wenn sie bei gleicher Richtung in derselben Ordnung aufeinander folgen, immer nur ein und dieselbe dreiseitige Raumecke konstruiren; oder: dreiseitige Raumecken sind identisch (congruent), wenn je zwei Flächenwinkel und der zwischenliegende Kantenwinkel in ihnen gleich sind und bei gleicher Richtung in derselben Ordnung aufeinander folgen.
7. Folgen in Satz 3, 4, 5, 6, die gegebenen Stücke bei gleicher Richtung in umgekehrter Ordnung aufeinander, so sind die dreiseitigen Raumecken symmetrisch.
8. Zu congrnenten Ecken gehören auch einander congruente Scheitelecken.
9. Zu congruenten Ecken gehören auch einander congruente Polarecken.

Wir werden im folgenden aus der großen Anzahl aller möglichen Körperformen nur die wichtigsten Körper (Polyëder) hervorheben.

a. § 32. Regelmäßige Körper

sind solche, welche von lauter regelmäßigen Ebenen (dem gleichseitigen Dreieck, Quadrat, dem regelmäßigen Fünfeck) eingeschlossen sind: reguläre Polyëder.

Jeder Winkel im gleichseitigen Dreieck ist = 60°, im Quadrat = 90°, im Fünfeck = 108°, im Sechseck = 120°, also kann man höchstens 3, 4 oder 5 Dreiecke, 3 Quadrate, 3 Fünfecke zu einer Ecke verbinden; denn 6 Dreiecke oder 4 Quadrate oder 3 Sechsecke gäben schon 360° und fielen daher in eine Ebene; 4 Fünfecke gäben 432° uud fielen daher schon zum Theil ineinander; man könnte also auf diese Weise zunächst keine Ecke — also auch keine Körper bilden, wenn wir von Körpern mit einspringenden Flächenwinkeln absehn und nur die convexen Körperformen betrachten. So erhalten wir folgende Körper:

An jeder Ecke	gleichseitige Dreiecke	Quadrate	reguläre Fünfecke
3	**Tetraëder** (4)	**Cubus** (6) oder	**Dodekaëder** (12)
4	**Oktaëder** (8)	Würfel o. Hexaëder	
5	**Ikosaëder** (20)		

Constructionen und Bezeichnungen.

Jeder dieser regulären Polyeder hat einen Mittelpunkt, welcher von allen Eckpunkten und auch von allen Flächen gleich weit entfernt ist, so daß man also sowohl um jedes derselben als auch in dasselbe hinein eine Kugel schreiben kann (vgl. § 36).

Zieht man von diesem Mittelpunkte aus zu allen Eckpunkten Linien, so wird jedes dieser Polyëder in lauter einander congruente Pyramiden (vgl. § 41) zerlegt. Auf diese Weise findet man auch den Inhalt dieser Körper

c. § 33. Die Kugel

wäre ein von unendlich vielen, regelmäßigen Flächen eingeschlossener Körper. — Dreht sich ein Kreis (Halbkreis) um seinen als feststehend gedachten Durchmesser, so bildet die Spur der Kreislinie die **Kugelfläche** (Rotationsfläche) und der von dieser eingeschlossene Raum ist die **Kugel**. Der drehend gedachte Kreis heißt: Erzeugungskreis. Sein Mittelpunkt, Halbmesser (Radius), Durchmesser sind auch zugleich **Mittelpunkt, Halbmesser** und **Durchmesser** der Kugel.

Der Durchmesser des Erzeugungskreises, um welchen man sich denselben gedreht denkt, heißt auch: Kugelachse und seine Endpunkte: Pole. Die Endpunkte eines jeden beliebigen Durchmessers nennt mon Gegenpunkte.

Die Kugel ist also ein Körper, welcher von einer einzigen Fläche derartig umgrenzt wird, daß alle Punkte dieser Fläche von einem Punkte innerhalb des umschlossenen Raumes (dem Mittelpunkte) gleich weit entfernt sind.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Die Kugelfläche ist vom Mittelpunkt überall gleich weit entfernt.
2. Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt größer ist als ein Radius, liegt außerhalb der Kugelfläche.
3. Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt kleiner ist als ein Radius, liegt innerhalb der Kugelfläche.
4. Jeder Punkt, dessen Entfernung vom Mittelpunkt gleich ist dem Radius, liegt in der Kugelfläche.
5. Alle Radien ein und derselben Kugel, wie auch gleicher Kugeln sind einander gleich.
6. Kugeln von gleichen Radien sind einander gleich (identisch).
7. Die Größe einer Kugel ist von ihrem Radius allein abhängig.

§ 34. Eine Gerade, welche zwei Punkte der Kugelfläche mit einander verbindet, nennt man Kugelsehne. Eine verlängerte Sehne nennt man Kugelsekante. Eine Gerade, welche, bei genugsamer Verlängerung, nur einen Punkt (Berührungspunkt) mit der Kugelfläche gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb der Kugel fällt, nennt man Kugeltangente.

Eine Ebene, welche die Kugel schneidet, bildet als Schnittfläche einen Kreis, **Kugelkreis** genannt und geht sie durch den Mittelpunkt (**Diametralebene**): einen **größten Kreis** oder Hauptkreis. Im Gegensatz dazu nennt man die andern Kugelkreise auch Nebenkreise. — Eine Ebene, welche bei genugsamer Verlängerung nur einen Punkt (Berührungspunkt) mit der Kugelfläche gemeinsam hat und sonst ganz außerhalb derselben fällt, nennt man **Tangentialebene.** — Zwei sich schneidende größte Kreise bilden auf der Kugelfläche vier **Kugelzweiecke,** drei sich schneidende größte Kreise: acht **sphärische Dreiecke.** — Parallelkreise, Aequator.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Die Tangentialebene ist senkrecht auf dem zum Berührungspunkt gezogenen Radius und umgekehrt.
2. Der Radius, welcher durch den Mittelpunkt eines Kugelkreises geht. steht auf diesem senkrecht und umgekehrt.
3. Durch vier Punkte, welche nicht in einer Ebene liegen, wird nur eine Kugelfläche bestimmt: oder: haben zwei Kugelflächen vier Punkte gemeinsam, welche nicht in einer Ebene liegen, so fallen sie zusammen.
4. Der Hauptkreis ist der größte aller Kugelkreise und alle Hauptkreise sind einander gleich.
5. Die Hauptkreise der Kugel halbiren einander.
6. Gleiche Kugelkreise haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt.
7. Von ungleichen Kugelkreisen hat der kleinere den größeren Abstand vom Mittelpunkt und umgekehrt.
8. Die Kugeloberfläche ist $= 4 r^2 \pi$ Quadrateinheiten.
9. Der Inhalt der Kugel ist $= \frac{4}{3} r^3 \pi$ Cubikeinheiten.

§ 35. Jede Schnittfläche der Kugel theilt diese in zwei **Kugelsegmente** oder **Kugelabschnitte**, eine Diametralebene in zwei **Halbkugeln** (Humisphären). Den zu einem Kugelabschnitt zugehörigen Theil der Kugelfläche nennt man **Kalotte** oder **Kugelhaube**.

Zwei parallele Schnittflächen schließen eine **Kugelschicht** oder **körperliche Zone** ein und bilden auf der Kugelfläche eine **Kugelzone.** — Zwei größte Kreise schneiden aus der Kugel einen **Kugelkeil** heraus und bilden auf der Kugelfläche ein Kugelzweieck. — Drei oder mehr größte Kreise schneiden aus der Kugel einen **Kugelsektor** oder **Kugelausschnitt** heraus, welcher auf der Kugelfläche ein sphärisches Dreieck, Viereck .... n-Eck, Kreis bildet.

Gewöhnlich versteht man unter Kugelsektor nur den Fall, in welchem auf der Kugeloberfläche ein Kreis gebildet wird. Denkt man sich an die Achse des Erzeugungskreises (§ 33) in einem beliebigen Winkel einen Radius angelegt, so schneidet dieser bei der Drehung des Erzeugungskreises oder der Entstehung der Kugel als Rotationskörper, einen Kugelsektor aus der Kugel heraus. Demnach besteht der Kugelsektor aus einem Kugelsegment und einem Kegel (vgl. § 42), welcher seinen Gipfel im Mittelpunkte der Kugel hat. — Kalte Zone, heiße Zone, gemäßigte Zone. — Die Halbkugel kann sowohl als Kugelsegment, als auch als Kugelsektor oder auch als Kugelkeil angesehen werden.

Constructionen und Bezeichnungen.

§ 36. Der Kugel eingeschriebene Körper sind solche, deren sämmtliche Eckpunkte die Kugel von innen berühren; die Kugel umschreibende Körper solche, deren sämmtliche Begränzungsebenen Tangentialebenen sind, wie z. B. in beiden Fällen die regulären Polyëder.

Haben zwei Kugeln (vgl. § 29) den Mittelpunkt gemeinsam, so nennt man sie **concentrische** Kugeln; haben sie den Mittelpunkt nicht gemeinsam, so nennt man sie: **excentrische** Kugeln und die Linie, welche beide Mittelpunkte verbindet, nennt man die **Centrale**.

Die Kugelflächen excentrischer Kugeln haben entweder:

1) keinen Punkt gemeinsam und die eine Kugel kann dabei innerhalb der andern sich befinden oder außerhalb derselben; oder

2) einen Punkt gemeinsam und die Kugeln berühren sich (oskuliren) alsdann (Berührungspunkt) von innen oder außen.

3) einen Kugelkreis gemeinsam und sie schneiden sich alsdann (die gemeinsame Schnittfläche). Auch hier kann der Mittelpunkt der einen Kugel dabei innerhalb der andern fallen oder außerhalb derselben.

Sätze:

1. Die Centrale oskulirender Kugeln geht durch den Berührungspunkt.
2. Die Centrale sich schneidender Kugeln steht auf dem gemeinsamen Kugelkreise senkrecht und geht durch dessen Mittelpunkt.

§ 37. Projicirt man eine Kugelfläche, besonders die Erdoberfläche, auf eine Ebene, so unterscheidet man verschiedene Projectionsarten, je nach der Lage der Projektionsebene (oder die zu zeichnende Karte), der Stellung des Auges, der Projektionsachse, das ist die Linie vom Auge zum Berührungspunkt der Projektionsebene, welche man sich als Tangentialebene an einen beliebigen Punkt der Kugelfläche angelegt denkt, und je nach den projicirenden Linien, welche man sich vom Auge zu den beliebigen Punkten der zu projicirenden Kugelfläche gezogen denkt:

1) Die Aequatorialprojektion.

Die Projektionsebene wird als Tangentialebene den Aequator in einem beliebigen Punkte berührend gedacht; der Aequator bildet in der Zeichnung eine grade Linie, die Längen- und Breitegrade bilden Curven.

2) Die Polarprojektion.

Die Projektionsebene ist eine Tangentialebene an einem der Pole. Die Parallelkreise stellen sich als concentrische Kreise dar und die Meridiane als grade Linien, welche strahlenförmig vom Berührungspunkte ausgehen.

In beiden Fällen unterscheidet man wieder:

a) Eine Central-Projektion.

Das Auge denkt man sich im Centrum der Kugel (Erde). Die Projektion (Zeichnung) wird nach den Randgegenden hin verhältnißmäßig zu groß. Eine Halbkugel (Planiglobus) läßt sich auf diese Weise nicht projiciren.

b) Eine stereographische Projektion.

Das Auge denkt man sich im Antipoden-Punkte des Berührungspunktes. Die Projektion (Zeichnung) wird nach den Randgegenden hin gleichfalls verhältnißmäßig zu groß. Eine Halbkugel (Planiglobus) läßt sich aber auf diese Weise wol projiciren und man könnte sogar noch über die Halbkugel hinausgehen.

c) Eine Orthographische Projektion.

Das Auge denkt man sich in unendlicher Entfernung; die projicirenden Linien fallen daher alle einander parallel und zwar senkrecht auf die Projektionsebene. — Die Randgegenden der Projektion (Zeichnung) werden verhältnißmäßig zu klein. Mehr als eine Halbkugel (Planiglobus) läßt sich auf diese Weise nicht projiciren.

Außerdem kommen noch vor: Merkator's Projektion mit wachsenden Breiten, besonders für Seekarten geeignet, um die sonst krummen Linien des Schiffs-Laufes in grade Linien zu verwandeln; und die Kegelprojektion für Sternkarten.

Construktionen und Bezeichnungen.

c. § 38. Das Prisma.

Bewegt eine Gerade sich selbst parallel in der Peripherie eines Polygons, so schließt ihre Spur einen prismatischen Raum ein, welcher an den offenen Seiten durch zwei einander parallele **Grundflächen** (obere und untere) begrenzt, zum **Prisma** wird. Dieses ist je nach der Seitenzahl seiner Grundflächen ein drei-, vier-, fünf-, ... n-seitiges. Die **Seitenflächen** sind immer lauter Parallelogramme. — Grundkanten, Seitenkanten.

Sind die Grundflächen reguläre Polygone, nennt man das Prisma ein regelmäßiges und die Gerade, welche die Mittelpunkte beider Grundflächen verbindet: Achse. Steht diese, oder auch die Seitenkanten auf den Grundflächen senkrecht, nennt man das Prisma ein gerades, sonst ein schiefes. — Die **Höhe** ist der senkrechte Abstand beider Grundflächen. — Eine Diagonalebene verbindet zwei einander gegenüberliegende Seitenkanten und eine Diagonale zwei einander gegenüberliegende Ecken. — Ein schief abgeschnittenes Prisma.

Glasprisma (Farbenspektrum). — Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Die Seitenkanten sind alle untereinander parallel und gleich.
2. Beim graden Prisma sind die Seitenflächen lauter Rektangel und die Höhe ist gleich lang mit den Seitenkanten (auch mit der Achse).
3. Die Grundflächen eines jeden Prismas sind einander congruente Polygone.
4. Jedes vielseitige Prisma läßt sich durch Diagonalebenen in lanter dreiseitige zerlegen.
5. Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei einander gleich große Pyramiden (vgl. § 41) zerlegen, oder in drei Pyramiden, von denen je zwei gleiche Grundflächen und gleiche Höhe haben.

§ 39. Sind die Grundflächen eines Prismas Parallelogramme, nennt man es **Parallelepipedum** und zwar ein gerades, wenn die Seitenkanten senkrecht zu den Grundflächen stehen, sonst ein schiefes. Sind aber bei'm geraden Parallelepipedum die Grundflächen rechtwinklige Parallelogramme, so nennt man das Parallelepipedum ein senkrechtes oder rechtwinkliges.

Sind die Grundflächen und Seitenflächen lauter Quadrate, erhält man den Kubus oder Würfel.

Construktionen und Bezeichnungen.

Sätze:

1. Jedes Parallelepipedum läßt sich durch eine Diagonalebene in zwei einander gleichgroße dreiseitige Prismen zerlegen.
2. Zwei Parallelepipeda von congruenten oder auch von gleichen Grundflächen und von gleicher Höhe (oder zwischen denselben parallelen Ebenen) sind einander gleich.
3. Der köperliche Inhalt eines senkrechten Parallelepipedums wird gefunden, indem man die drei Kanten, welche an einer Ecke zusammenstoßen, mißt und das Produkt der so gefundenen Maßzahlen mit der Kubikeinheit multiplicirt. Oder der Inhalt eines Parallelepipedums ist gleich seiner Grundfläche multiplicirt mit seiner Höhe.
4. Der körperliche Inhalt eines jeden Prismas ist gleich seiner Grundfläche multiplicirt mit seiner Höhe.

d. § 40. Der Cylinder

ist ein Prisma von unendlich vielen Seitenflächen, bei dem also die Grundflächen von Curven begrenzte Ebenen sind. Die Spur einer sich selbst parallel fortbewegten Geraden — in der Richtung einer Curve — giebt die **Cylinderfläche** oder den Cylinder-Mantel, welcher von zwei einander parallelen Ebenen geschnitten, den **Cylinder** als Körper einschließt. Diese parallelen Ebenen nennt man **Grundflächen,** die sich selbst parallel, fortbewegte Gerade: die erzeugende Gerade.

In der Elementar-Geometrie kommt nur der Fall vor, daß die Grundflächen Kreise sind und man nennt sie alsdann: Grundkreise und den Cylinder selbst: einen Kreiscylinder.

Die die Mittelpunkte der beiden Grundkreise verbindende Gerade heißt: **Cylinder-Achse.** Steht diese auf den Grundflächen senkrecht, so ist der Cylinder ein gerader, sonst ein schiefer. Zieht man im Mantel eine Linie parallel der Achse, erhält man eine **Seite** des Cylinders. Der senkrechte Abstand beider Grundflächen heißt die **Höhe**. Ein schief abgeschnittener Cylinder.

Den Geraden Cylinder kann man sich auch entstonden denken durch Drehung eines Rektangels um eine seiner — als feststehend gedachten — Seiten.

Constructionen und Bezeichnungen.

Sätze.

1. Im Kreiscylinder ist jede Schnittfläche, parallel der Grundfläche, wieder ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Cylinderachse liegt.
2. Im Kreiscylinder hat jeder schiefe Schnitt (nicht parallel der Grundfläche) eine elliptische Form (vgl. § 43).
3. Jeder Schnitt parallel der Achse oder durch die Achse selbst (Achsenschnitt) bildet ein Parallelogramm, und im geraden Cylinder einen Rektangel.
4. Wickelt man den Mantel des graden Cylinders ab, erhält man einen Rektangel.
5. Der Flächeninhalt des Mantels eines graden Cylinders ist gleich der Peripherie eines Grundkreises multiplicirt mit der Höhe des Cylinders $= 2r\pi . h$.
6. Der körperliche Inhalt eines Cylinders ist (wie bei den Prismen) gleich seiner Grundfläche multiplicirt mit seiner Höhe $= r^2 \pi . h$.

e. § 41. Die Peripherie

Denken wir uns die Eckpunkte eines beliebigen Polygons (**Grundfläche**) mit einem Punkte (**Gipfel**) über demselben durch gerade Linien verbunden, so erhalten wir eine **Pyramide**, welche je nach der Seitenzahl der Grundflächen eine drei-, vier-, fünf-, . . . nseitige genannt wird. Die die Pyramide zwischen dem Gipfel und der Grundfläche umgränzenden Dreiecke nennt man die **Seiten** (Seitenflächen) der Pyramide. Seitenkanten, Grundkanten.

Man kann sich die Pyramide auch entstanden denken durch Bewegung einer Geraden, von der ein Punkt (der Gipfel) feststehend gedacht wird, während sonst die Gerade der Peripherie eines beliebigen Polygons (der Grundfläche) folgt.

Sind die Grundflächen und die Seitenflächen gleichseitige Dreiecke, erhalten wir das Tetraäder (§ 32).

Ist die Grundfläche eine regelmäßige und eine vom Gipfel auf die Grundfläche gefällte Senkrechte (**Höhe**) trifft gerade deren Mittelpunkt, so wird die Pyramide eine gerade genannt, sonst eine schiefe, und fällt der Fußpunkt der Höhe außerhalb der Grundfläche (in deren Erweiterung), eine überhängende.

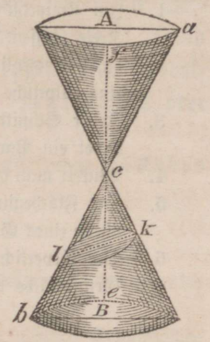
Eine der Grundfläche parallele, ebene Schnittfläche theilt die Pyramide in einen **Pyramidenstumpf** (oder abgestumpfte Pyramide) und in eine **Ergänzungspyramide**; ersterer ist nicht zu verwechseln mit dem Obelisk. Eine Schnittfläche durch zwei Seitenkanten giebt eine Diagonalebene.

Constructionen und Bezeichnungen.

Sätze:

Jede Pyramide ist ihrem körperlichen Inhalte nach gleich dem dritten Theile eines Prismas, welches mit ihm dieselbe Grundfläche und dieselbe Höhe hat (vgl. § 38 Satz 5).

f. § 42. Der Kegel



ist eine Pyramide von unendlich vielen Seiten. — Dreht sich eine gerade ab (erzeugende Gerade) um eine ihrer als feststehend gedachten Punkte c (**Kegelmittelpunkt**, Gipfel, Spitze), während jeder andere Punkt eine Curve beschreibt, so bildet ihre Spur eine **Kegelfläche** (**Kegelmantel**). — Schneide ich diese Fläche durch zwei parallele Ebenen A und B (**Grundflächen**), so entsteht der **Kegel** (als Körper), während die erzeugende Gerade in jeder ihrer Lagen z. B. ef eine **Kegelseite** heißt.

Im Folgenden werden wir nur einen solchen Kegel betrachten, dessen Grundflächen Kreise sind; oder den Kreiskegel.

Die Linie, welche den Kegelgipfel mit den Mittelpunkten der Grundflächen verbindet, nennt man **Kegelachse**. Steht diese senkrecht auf den Grundflächen, oder geht die Senkrechte vom Gipfel auf die Grundflächen (**die Höhe**) durch deren Mittelpunkt, so ist der Kegel ein gerader, sonst ein schiefer, oder fällt die Höhe mit ihrem Fußpunkte außerhalb der Grundflächen: ein überhängender.

Die Hälfte eines geraden Kegels kann man sich auch entstanden denken durch Drehung eines rechtwinkligen Dreiecks um eine seiner — als feststehend gedachten — Katheten.

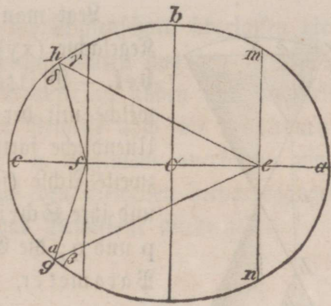
Wird von einem Kegel ein Theil mit dem Gipfel abgeschnitten, so bleibt ein **abgestumpfter Kegel** (**Kegelstumpf**) nach. Den abgeschnittenen Theil nennt man: **Ergänzungskegel**. Einen Schnitt durch die Achse nennt man Achsenschnitt.

Sätze:

1. Der Achsenschnitt ist immer ein Dreieck und bei dem geraden Kreiskegel ein gleichschenkliges Dreieck. — Die übrigen Kegelschnitte folgen in den folgenden Paragraphen.
2. Wickelt man den Mantel eines graden Kegels ab, erhält man einen Kreisausschnitt, dessen Radius die Kegelseite ist.
3. Der körperliche Inhalt eines Kegels ist (wie bei der Pyramide) gleich dem dritten Theil eines Cylinders von derselben Grundfläche und derselben Höhe $= \frac{1}{3} r^2 \pi h$.

§ 43. Die Kegelschnitte.

Legt man durch einen Kreiskegel eine Ebene parallel der Grundfläche, so ist die Schnittfläche ein **Kreis**, dessen Mittelpunkt in der Kegelachse liegt.



Legt man durch einen Kegel eine Ebene **nicht parallel** der Grundfläche, doch so, daß zwei einander gegenüberstehende Seiten des Kegels geschnitten werden, so ist die Schnittfläche eine **Ellipse** (lk). **Peripherie**, **Brennpunkt** e u. f (Fig. II). **Leitstrahlen** (radii vectores) eg u. fg. eh u. fh. **Große Achse** ac; **kleine Achse** bd. **Mittelpunkt** o; **Excentrität** of = oe; **Parameter** mn; **Scheitelpunkte der großen Achse** a u. e; **Scheitelpunkte der kleinen Achse** b u. d.

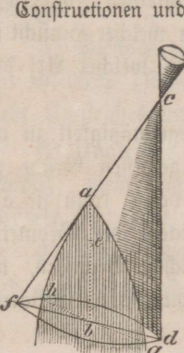
Satz:

Die Summe je zweier beliebiger Leitstrahlen nach **einem** Punkt der Peripherie ist immer gleich groß und immer gleich der großen Achse. Das giebt uns ein Mittel zur **Construction** der Ellipse.

Die **Erdbahn** (Ekliptik) ist eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht, die Scheitelpunkte der großen Achse sind die Orte der **Solstitien** (Sonnenwende) und die Scheitelpunkte der kleinen Achse sind (ungefähr) die Orte der **Aequinoctien** (Tag- und Nachtgleichen) $\angle \alpha = \angle \beta$ und $\angle \gamma = \angle \delta$, wichtig für Licht- und Schallwellen.

Dreht man die Ellipse um ihre kleine Achse, so entsteht als Rotationsfläche ein **abgeplattetes Ellipsoid** (Sphäroid, Apfelsine, Erdkugel); dreht man sie um die große Achse, erhält man ein **gestrecktes Ellipsoid** (Citrone).

Constructionen und Bezeichnungen.

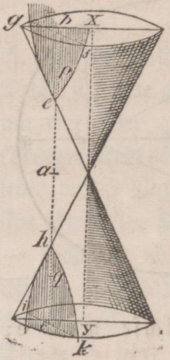


§ 44. Legt man durch einen Kegel eine Ebene parrallel einer Seite cd, erhält man als Schnittfläche die **Parabel**. **Zwei Arme** ag und ah, welche mit der Erweiterung der Kegelfläche sich bis ins Unendliche fortsetzen lassen. **Achse** ab **unendlich lang**. **Brennpunkt** e, der andere in unendlicher Entfernung. Die **Peripherie** und ihr **Scheitelpunkt** a; **Leitstrahlen**, **Leitlinie**, **Parameter**.

Satz:

Die Entfernung jedes Punktes der Peripherie vom Brennpunkte ist gleich der Entfernung desselben von der Leitlinie. — Dieses giebt uns ein Mittel zur Construction der Parabel.

Parabolische Kometenbahnen. Die Bahn aller Wurfgeschosse wie überhaupt aller geworfenen und geschleuderten Gegenstände.



Legt man durch einen Kegel eine Ebene parallel der Kegelachse (xy), so ist die Schnittfläche eine **Hyperbel.** — Mittelpunkt a; vier Arme (ef, eg; hi, hk), welche mit der Erweiterung der Kegelfläche sich bis ins Unendliche fortsetzen lassen. Die Hauptachse eh. die zweite Achse (senkrecht auf eh in a). Die Peripherie und ihre Scheitelpunkte e und h; die Brennpunkte p und q; die Excentricität aq = ap; Leitstrahlen, Parameter, Assymptoten.

Satz:

Die Differenz zweier Leitstrahlen (nach demselben Punkte der Peripherie) ist immer gleich der Hauptachse. — Dieses giebt uns ein Mittel zur Construction der Hyperbel.

Der Kreis und die Ellipse sind geschlossene Curven; die Parabel und die Hyperbel sind offene Curven (vgl. § 5).

Hyperbolische Kometenbahnen.

Constructionen und Bezeichnungen.

---

§ 45. Die Geometrie der Ebene nennt man **Planimetrie,** die Geometrie des Raumes (Körpers) **Stereometrie,** während man unter **Trigonometrie** (ebene und sphärische) zunächst die Ausmessung und Berechnung der Dreiecke versteht.

Das wesentliche Geschäft der Geometrie ist aber nicht, diese Raumgestalten aufzuzählen und sie nach ihren Theilen zu beschreiben; sondern sie hat zu untersuchen und anzugeben, in wie weit und in welcher Hinsicht sich Gesetzmäßigkeit an den Raumgestalten findet und von welcher Art diese Gesetzmäßigkeit ist.

Die Gesetzmäßigkeit — welche hier nicht mit Regelmäßigkeit zu verwechseln ist — kommt allen Raumgestalten in einem gewissen Grade zu, und kann ein Mal in der Erfahrung begründet sein, dann kann sie aber auch bewiesen sein. Dieses Letztere ist vorzüglich Sache der Geometrie, während jene — die Erfahrung — nicht zum eigentlichen Beweisen, wol aber — und das nicht ohne Nutzen — zur Verdeutlichung und Erklärung des Bewiesenen angewendet werden kann.

Zu jedem **Beweise** gehören **gegebene** Bestimmungen, aus denen andere — die zu **beweisenden** — mit Nothwendigkeit gefolgert werden. Dieses geschieht einerseits mit Hülfe der **Definitionen,** welche, an einzelne wesentliche Eigenschaften der Raumgestalten anknüpfend, dieselben von allen übrigen Raumgestalten vollkommen und zweifellos unterscheiden lehren;

ren; während es dem weiteren Gange der Wissenschaft überlassen bleibt, alle übrigen Eigenschaften derselben Raumgestalten aus den in den Definitionen gegebenen Eigenschaften durch Beweise zu finden und herzuleiten. Andererseits dienen zur Durchführung der Beweise noch die mathematischen **Grundsätze** oder Axiome, d h. allgemein anerkannte mathematische Wahrheiten, und endlich die aus den Beweisen hervorgegangenen **Lehrsätze**, welche in kurzen Worten das Bewiesene wiedergeben.

Der Satz des Pythagoras und seine Stützsätze.

Ehe wir an die Beweise selbst gehen, zunächst die dazu nöthigen Grundsätze und Definitionen.

Grundsätze.

1) Jede Größe ist sich selbst gleich.

2) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich, also größer als jeder Theil desselben.

3) Gleiches läßt sich für einander setzen.

4) Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches, ebenso Gleiches von Gleichem subtrahirt, Gleiches mit Gleichem multiplicirt, Gleiches durch Gleiches dividirt.

5) Gleiches zu Ungleichem addirt, Gleiches von Ungleichem subtrahirt, mit Gleichem Ungleiches multiplicirt, durch Gleiches Ungleiches dividirt, giebt Ungleiches und zwar das Größere, wo zuvor das Größere war.

6) Ungleiches von Ungleichem subtrahirt, durch Ungleiches Gleiches dividirt, giebt Ungleiches und da das Kleinere, wo im ersten Falle das Größere subtrahirt, im zweiten durch das Größere dividirt ist.

7) Zwei Größen, von denen jede derselben dritten Größe gleich ist, sind einander gleich. (Man denkt drei gleiche Größen.)

Definitionen.

1) Die gerade Linie ist die Spur eines in derselben Richtung fortbewegt gedachten Punktes. Dazu gehören zwei Punkte, Ausgangspunkt und Zielpunkt. Also die gerade Linie wird bestimmt a) durch zwei Punkte b) durch einen Punkt und die Richtung.

2) Der Winkel (der geradlinige) ist der Richtungsunterschied (d. Abweichung) zweier gerader Linien.

3) Der gestreckte Winkel ist ein Winkel, bei dem die Schenkel der Lage nach in eine Gerade aber in entgegengesetzte Richtung fallen.

4) Raumgebilde sind identisch (congruent oder $\cong$), wenn sie auf einander gelegt sich in allen ihren Theilen decken, und gleich, wenn sie gleichen Inhalt haben, das heißt, wenn sie mit derselben Maßeinheit gemessen, gleiche Maßzahlen geben.

5) Der rechte Winkel ist die Hälfte des gestreckten Winkels.

6) Nebenwinkel sind solche Winkel, welche den Scheitel und einen Schenkel gemeinsam haben und deren beide anderen Schenkel der Lage nach in eine gerade Linie aber in entgegengesetzte Richtung fallen.

7) Scheitelwinkel sind solche Winkel, die den Scheitelpunkt gemeinsam haben, und deren je zwei Schenkel der Lage nach in eine gerade Linie aber in entgegengesetzte Richtung fallen; die also von zwei sich schneidenden Geraden gebildet werden.

8) Innere Gegenwinkel sind solche Winkel, welche auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, und innerhalb der beiden Parallelen. Aeußere Gegenwinkel sind solche Winkel, die auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen und außerhalb der beiden Parallelen. Correspondirende Winkel sind solche Winkel, die auf derselben Seite der schneidenden Linie liegen, von denen der eine ein Außenwinkel, der andere ein Innenwinkel ist und die nicht Nebenwinkel sind. Wechselwinkel sind solche Winkel, die auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen und beide Außen- oder beide Innenwinkel aber nicht Nebenwinkel sind.

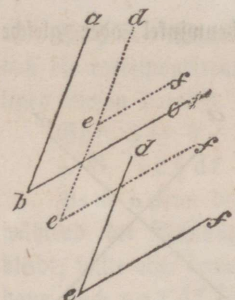
9) Zwei gerade Linien, welche den Winkel Null bilden, fallen in dieselbe Gerade zusammen.

10) Ein Parallelogramm ist eine vierseitige Figur, in der die gegenüberliegenden Seiten einander parallel sind.

11) Parallel nennt man zwei Linien, wenn sie gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben und nicht in eine Linie zusammenfallen.

12) Ein Complementwinkel ist ein solcher Winkel, welcher einen andern zu einem Rechten oder 90° ergänzt; ein Supplementwinkel ist ein solcher Winkel, welcher einen andern zu zwei Rechten (einem gestreckten Winkel) oder 180° ergänzt.

Lehrsätze.



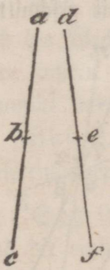
Satz 1. Haben die Schenkelpaare zweier Winkel gleiche Richtung, so sind die Winkel gleich.

Gegeben: $\angle$ abc und def
L. ba hat gleiche Richtung mit ed
L. bc hat gleiche Richtung mit ef
zu beweisen: $\angle abc = \angle def$

Beweis. Die Richtung von ba = der Richtung von ed
Die Richtung von bc = der Richtung von ef

Der Richtungsunterschied von ba und bc = dem Richtungsunterschied von ed und ef (Grds. 4).

$\angle abc = \angle def$ (Def. 2.)



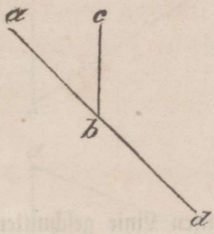
Satz 2. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.
Ggb. $\angle$ abc und def als gestreckter Winkel
z. b. $\angle abc = \angle def$
Beweis. Lege $\angle$ abc auf $\angle$ def so daß
P. b auf P. e
L. bc entl. L. ef fällt

L. ba entl. L. ed (Def. 3.)

$\angle abc = \angle def$ (Def. 4.)

Zus. 1. Alle rechte Winkel sind einander gleich. (Def. 5.)

Zus. 2. Gleiche Winkel haben gleiche Complementwinkel. (Def. 11.)



Satz 3. Nebenwinkel sind zusammen gleich 2 R.
Ggb. $\angle$ abc und cbd als Nebenwinkel
z. b. $\angle abc + cbd = 2\ R.$
Bew. $\angle abc + cbd = \angle abd$ (Grds. 2.)
$\angle abc = 1$ gestr. $\angle$ (Def. 3 u. 6)

$\angle abc + cbd = 1$ gestr. $\angle$ (Grds. 7)
$2\ R = 1$ gestr. $\angle$ (Def. 5)

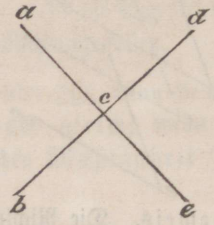
$\angle abc + cbd = 2\ R.$ (Grds. 5)

Zus. 1. Der Nebenwinkel eines spitzen Winkels ist ein stumpfer Winkel; der Nebenwinkel eines stumpfen Winkels ist ein spitzer Winkel.

Zus. 2. Der Nebenwinkel eines rechten Winkels ist auch ein rechter Winkel, oder sind Nebenwinkel einander gleich, ist jeder von ihnen ein rechter Winkel.

Zus. 3. Gleiche Winkel haben gleiche Nebenwinkel oder gleiche Supplementwinkel.

Satz 4. Scheitelwinkel sind einander gleich.



Ggb. $\angle$ acb u. dce als Scheitelwinkel

z. B. $\angle acb = \angle dce$

Bew. $\left.\begin{array}{l}\angle acb + acd = 2\,R.\\ \angle dce + acd = 2\,R.\end{array}\right\}$ S. 3.

$\angle acb + acd = \angle dce + acd$ (Grds. 7.)

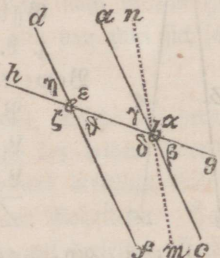
$acd = acd$ (Grds. 1.)

$\angle acb = \angle dce$ (Grds. 4.)

Oder: $\left.\begin{array}{l}\angle acb = \text{Supplementwinkel von } acd\\ \angle ecd = \text{Supplementwinkel von } acd\end{array}\right\}$ Satz 3 Zus. 3 u. Def. 12.

$\angle acb = ecd$ (Grds. 7.)

Satz 5. Werden zwei Parallelen von einer dritten Linie geschnitten, so sind die correspondirenden Winkel gleich.



Ggb. L. ac ‖ L df

z. B. $\beta = \vartheta$

Beweis. L. bg u. eb haben dieselbe Richtung (gegeben).

bc u. ef haben dieselbe Richtung (Def. 11.)

$\beta = \vartheta$ (Satz 1.)

Satz 6. Werden zwei Parallelen von einer dritten Linie geschnitten, so sind die Wechselwinkel einander gleich.

Ggb. L. ac ‖ df

z. B. $\delta = \varepsilon$ u. $\alpha = \zeta$

Beweis. $\delta = \zeta$; $\delta = \zeta$ (S. 5)

$\varepsilon = \zeta$; $\delta = \alpha$ (S. 4)

$\delta = \varepsilon$; $\alpha = \zeta$ (Grds. 7.)

Satz 7. Werden zwei Parallele von einer dritten Linie geschnitten, so ist die Summe je zweier inneren oder je zweier äußeren Gegenwinkel $= 2$ R.

Gegeben: ac ‖ df

z. B. $\delta + \vartheta = 2$ R; u. $\alpha + \eta = 2$ R.

Bew. $\delta + \beta = 2$ R; $\alpha + \gamma = 2$ R. (S. 3.)

$\beta = \vartheta$; $\gamma = \eta$ (S. 5)

$\delta + \vartheta = 2$ R. $\alpha + \eta = 2$ R. (Grds. 3)

Satz 8. Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die correspondirenden Winkel einander gleich sind, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Ggb. $\beta = \vartheta$

z. B. $ac \parallel df$

Bew. Man denke sich durch den P. b eine Linie $mn \parallel df$ gelegt, während der Richtungsunterschied von ac u. mn vorläufig unentschieden bleibt; sollte aber bewiesen werden, daß ac mit mn zusammenfällt, so müßte dann auch $ac \parallel df$ sein.

$\angle \vartheta = \angle mbg$ (S. 5)

$\angle \vartheta = \angle cbg = \beta$ (gegeben)

$\angle mbg = \angle cbg$ (Grds. 7)

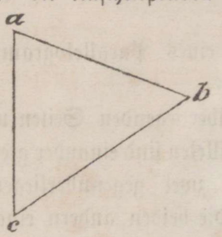
$\angle mbc = 0$ oder bc und bm fallen zusammen (Defin. 9).

L. bc oder $ac \parallel df$

Zus. 1. Wenn zwei Linien von einer dritten so geschnitten werden, daß die Wechselwinkel einander gleich sind, oder die Summe der innern oder äußern Gegenwinkel gleich 2 R ist; so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Zus. 2. Zwei Linien, die jede derselben dritten parallel sind, sind untereinander parallel.

Satz 9. Dreiecke sind congruent (identisch), wenn je ein Winkel und die einschließenden Seiten einander gleich sind.



Ggb. $\angle cab = \angle fde$

S. $ac =$ S. df u. S. $ab = de$

z. B. $\triangle abc \cong \triangle def$

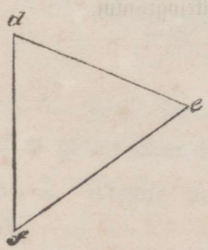
Bew. Lege $\triangle abc$ auf $\triangle def$, so daß P. a auf P. d und L. ab entlang L. de fällt

fällt P. b auf P. e (weil die L. gleich lang sind nach dem Gegebenen) und ac entlang df (weil d. $\angle$ gleich sind u. Def. 2)

fällt P. c auf P. f (weil nach dem Gegebenen die L. gleich lang sind)

L. bc auf L ef (weil zwischen 2 P. nur eine Gerade möglich ist. Def. 1)

$\triangle abc \cong def$ (Def. 4).



Zus. 1. In congruenten Dreiecken sind die homologen (ähnlich liegenden) Winkel und die homologen Seiten einander gleich.

Satz 10. Dreiecke sind congruent (identisch), wenn je eine Seite und die anliegenden Winkel einander gleich sind.

Ggb. S. ab = de

$\angle$ cab = $\angle$ fde und $\angle$ cba = $\angle$ fed

z. b. $\triangle$ abc $\cong$ dfe

Beweis. Ich denke mir $\triangle$ abc auf $\triangle$ def gelegt, so daß

P. a auf P. d und

S. ab entl. S. de . . . fällt

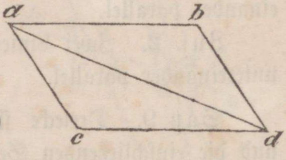
fällt P. b auf P. e (Gegeben)

u. S. ac entl. S. df

u. S. bc entl. S. ef (Weil die $\angle$ gleich sind n. Def. 2)

fällt P. c auf P. f, weil zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden könnnen; denn würden sie sich in mehr als in einem Punkte z. B. in 2 P. schneiden, müßten sie eine grade Linie bilden; da durch 2 Punkte eine grade Linie bestimmt wird. (Def. 1).

Satz 11. Die Diagonale theilt das Parallelogramm in zwei congruente Dreiecke.



Ggb. Prllgr. cb u. Diagonale ad

z. b. $\triangle$ abd $\cong$ adc

Beweis. ad = ad (Grds. 1.)

$\angle$ bad = $\angle$ adc

$\angle$ adb = $\angle$ cad (S. 6 Def. 10)

$\triangle$ abd $\cong$ adc. S. 10.

Zus. 1. Jedes Dreieck kann als die Hälfte eines Parallelogramms angesehen werden.

Zus. 2. Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich; oder Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Satz 12. Sind in einer vierseitigen Figur zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel und gleich; so sind auch die beiden andern einander parallel und gleich oder die Figur ist ein Parallelogramm.

Ggb. ab $\parallel$ u. = cd

z. b. ac $\parallel$ u. = bd; Construktion ad

Bew. ab = cd (gegeben)

ad = ad (Grds. 1.)

$\angle$ bad = $\angle$ adc (S. 6.)

$\triangle$ abd $\cong$ $\triangle$ dac (S. 9.)

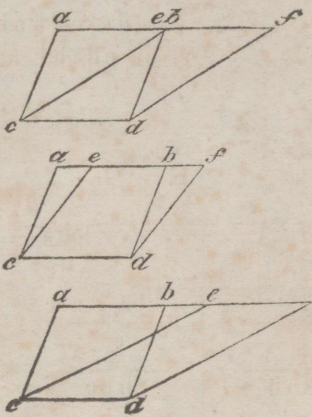
bd = ac

u. $\angle$ adb = $\angle$ dac (S. 9., Zus. 1.)

bd $\parallel$ ac (S. 8., Zus. 1.)

Satz 13. Parallelogramme von derselben oder gleicher Grundlinie und von gleicher Höhe (oder zwischen denselben Parallelen) sind einander gleich.

Drei Fälle nach der Figur.



Ggb.: Die Parallelogramme ad und ef auf derselben Grundlinie cd uud zwi. schen denselben Parallelen af und cd.

z. b. ad = cf

$$\text{Bw. L. } \left.\begin{array}{r} ac = bd \\ ec = fd \end{array}\right\} \text{ S. 11., Zus. 2.}$$

$$\angle\, ace = \angle\, bdf \text{ S. 1.}$$

$$\overline{\triangle\, ace \cong bdf \text{ S. 9.}}$$

$$afdc = afdc \text{ Grds. 1.}$$

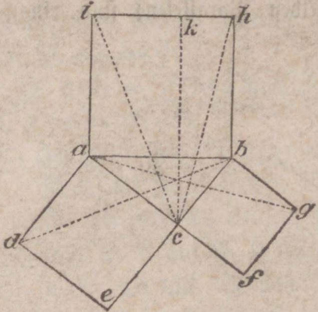
$$afdc - \triangle\, ace = afdc - \triangle\, bdf \text{ (Grds. 4.)}$$

$$\overline{ad = cf \text{ Grds. 3.}}$$

Zus. 1. Jedes Dreieck ist die Hälfte von einem Parallelogramm, mit dem es gleiche Grundlinie und gleiche Höhe hat. (S. 11, Zus. 1.)

Zus. 2. Dreiecke von gleicher Grundlinie uud Höhe sind einander gleich.

Satz 14. Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten. (Pythagoras.)



Ggb.: $\triangle$ acb u. $\angle$ acb = 1 R.
ah, ae u. cg Quadrate.

z. b. ah = ae + cg

Constr. ck ∥ ai u. bh

L. ci, ch, bd, ag.

Beweis:

$\angle iab = \angle cad$	$\angle hba = \angle gbc$ S. 2, Zus. 1.
$\angle bac = \angle bac$	$\angle abc = \angle abc$ Grds. 1
$\angle \underbrace{iab + bac}_{\angle iac} = \angle \underbrace{cad + bac}_{dab}$	$\angle \underbrace{hba + abc}_{\angle hbc} = \angle \underbrace{gbc + abc}_{\angle abg}$ Grds. 4.
$\angle iac = dab$	$\angle hbc = \angle abg$ Grds. 2 u. 3.
S. $ia = ab$	S. $hb = ba$ ⎫ Seiten der
S. $ac = ad$	S. $bc = bg$ ⎭ Quadrate.
$\triangle iac \cong \triangle dab$	$\triangle hbc \cong \triangle abg$ S. 9.
$\triangle iac = \frac{1}{2}\, ka$	$\triangle hbc = \frac{1}{2}\, kb$ ⎫ S. 13,
$\triangle dab = \frac{1}{2}\, ae$	$\triangle abg = \frac{1}{2}\, cg$ ⎭ Zus. 1.
$\frac{1}{2}\, ka = \frac{1}{2}\, ae$	$\frac{1}{2}\, kb = \frac{1}{2}\, cg$ Grds. 3.
$ka = ae$	$kb = cg$ Grds. 4.
$kb = cg$	

$\underbrace{ka + kb}_{ha} = ae + cg$ Grds. 4.

$ha = ae + cg$ Grds. 2 u. 3.