

TARTU ÜLIKOOL  
Loodus- ja täppisteaduste valdkond  
Füüsika instituut

Dmitri Kraiko

# Varase Universumi inflatsiooni dünaamika faasiruumis

Bakalaureusetöö (12 EAP)

Juhendaja:  
Laur Järv, PhD

Kaitsmisele lubatud:

Tartu 2025

# Varase Universumi inflatsiooni dünaamika faasiruumis

Käesolevas bakalaureusetöös uuritakse skalaar-tensorteooria inflatsioonimudelite käitumist dünaamiliste süsteemide meetodi abil. Töö teoreetilises osas tutvustatakse kaasaegse kosmoloogia ja inflatsiooniteooria põhimõisteid, skalaar-tensorteooria aluseid ning dünaamiliste süsteemide teooriat. Lisaks kirjeldatakse, kuidas dünaamiliste süsteemide meetodi abil kujutada inflatsiooni dünaamikat faasiruumis. Praktilises osas otsitakse dünaamilise süsteemi sobivat muutujate paari, mille abil saab kujutada matemaatiliselt lihtsa mitte-minimaalselt seotud Higgsi inflatsioonimudeli dünaamikat faasiruumis. Tulemusena leitakse, et hübriidsed muutujad on kõige sobivamad mudeli omaduste kujutamiseks. Järgnevalt kontrollitakse sama muutujate paari rakendatavust teiste skalaar-tensorteooriate inflatsioonimudelite (Starobinsky, poolustega ja mitte-minimaalselt seotud Palatini mudelid) korral, võrreldes nende omadusi teiste uurimustega. Kontrolli käigus selgub, et hübriidsete muutujate paar võimaldab kujutada suvaliste skalaar-tensorteooriate inflatsioonimudelite dünaamikat nii, et faasipildil on nähtavad kõik mudeli peamised omadused. Lisaks täpsustatakse töö raames tingimused, mille alusel saab tuvastada faasipildil esinevad mittefüüsikalised punktid.

**Märksõnad:** kosmoloogia, inflatsioon, dünaamilised süsteemid, skalaar-tensorteooriad.

**CRECS:** P190 Matemaatiline ja üldine teoreetiline füüsika, klassikaline mehaanika, kvantmehaanika, relatiivsus, gravitatsioon, statistiline füüsika, termodünaamika

## Dynamics of early Universe inflation in phase space

In this bachelor's thesis, the dynamics of scalar-tensor theory inflation models are studied using dynamical systems methods. In the theoretical part of the work, the fundamental concepts of modern cosmology and inflation theory, the foundations of scalar-tensor theory, and the theory of dynamical systems are introduced. Additionally, it is described how the dynamics of inflation can be represented in phase space using dynamical systems methods. In the practical part, a suitable pair of variables for the dynamical system is sought to represent the dynamics of a mathematically simple non-minimally coupled Higgs inflation model in a phase portrait. As a result, it is found that hybrid variables are the most suitable for illustrating the properties of the model. Subsequently, the applicability of the same pair of variables is tested for other scalar-tensor theory inflation models (Starobinsky, pole, and non-minimally coupled Palatini models), comparing their properties with other studies. During the verification process, it becomes clear that the pair of hybrid variables allows for the representation of the dynamics of arbitrary scalar-tensor theory inflation models in such a way that all the main properties of the model are visible in the phase portrait. Furthermore, the conditions for identifying non-physical points in the phase portrait are specified within the scope of this work.

**Keywords:** cosmology, inflation, dynamical systems, scalar-tensor theories.

**CRECS:** P190 Mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics.

# Sisukord

<b>Sissejuhatus</b>	<b>4</b>
<b>1 Kosmoloogia</b>	<b>7</b>
1.1 Üldrelatiivsusteooria . . . . .	7
1.2 Kosmoloogiline konstant . . . . .	9
1.3 Inflatsioon . . . . .	9
1.4 Skalaar-tensorteooriad . . . . .	10
1.5 Skalaar-tensorteooriad FLRW kosmoloogias . . . . .	12
<b>2 Dünaamiliste süsteemide meetod kosmoloogias</b>	<b>14</b>
2.1 Põhimõisted . . . . .	14
2.2 Lineaarse stabiilsuse teooria . . . . .	15
2.3 Poincaré teisendus . . . . .	15
2.4 Inflatsioonimudelite dünaamika kujutamine ja kirjeldamine . . . . .	16
2.4.1 Esimene meetod . . . . .	16
2.4.2 Teine meetod . . . . .	19
<b>3 Muutujate uurimine</b>	<b>20</b>
3.1 Kosmiline ja e-astme aeg; muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, \bar{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M^2}$ . . . . .	21
3.2 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, z = \frac{\dot{\Phi}}{HM}$ . . . . .	24
3.3 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, z = \frac{\dot{\Phi}}{H\Phi}$ . . . . .	26
3.4 Hübriidne aeg; muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, \tilde{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M(M+H)}$ . . . . .	27
3.5 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, z = \frac{\dot{\Phi}}{M\Phi}$ . . . . .	29
3.6 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, \bar{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M(M+\Phi)}$ . . . . .	31
3.7 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, z = \frac{\Phi\dot{\Phi}}{M^3}$ . . . . .	32
3.8 Sobiva muutujapaari valik: lühikokkuvõtte . . . . .	34
<b>4 Inflatsioonimudelite uurimine</b>	<b>35</b>
4.1 Reguleeriv parameeter $s$ muutujates . . . . .	35
4.2 Starobinsky inflatsioon meetrilises formalismis . . . . .	36
4.3 Pooluse inflatsioon, meetriline formalism . . . . .	38
4.4 Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudel, Palatini formalism . . . . .	40
<b>Kokkuvõte</b>	<b>42</b>
<b>Kirjandus</b>	<b>43</b>
<b>Lihtlitsents</b>	<b>44</b>

# Sissejuhatus

## Kosmoloogia

Kosmoloogia on füüsika haru, mis tegeleb Universumi suuremastaabiliste struktuuride ja ka Universumi kui terviku uurimisega. Kosmoloogia eesmärgiks on mõista Universumi teket ja kirjeldada selle tulevikku. Kesksel rollil kaasaegses kosmoloogias mängib nn **kosmoloogiline printsip**, mis väidab, et piisavalt suurte mastaabidel ( $\sim 10^8$  valgusaastat) on Universum **homogeenne** ja **isotroopne**. Kosmoloogia kontekstis homogeensus tähendab seda, et ruumi iga punkt omab samasuguseid omadusi. Isotroopsus tähendab, et ruum näib igas suunas ühesugusena. [1].

## Inflatsioon

Juba varakult täheldati Universumi paisumist, kusjuures selgus, et paisumiskiirus on võrdeline objektide vahelise kaugusega. Hiljem, selleks et lahendada seni kosmoloogias esinevaid probleeme, nagu näiteks horisondi probleem ja tasasuse probleem, esitati teooria, et varajases Universumis pidi toimuma ligikaudu eksponentsiaalne ehk **inflatsiooniline** paisumine. Tänapäeval on inflatsiooniteoorial oluline roll varase Universumi arengu kirjeldamisel. See on üsna detailselt välja töötatud teoreetiline raamistik, mis suudab hästi seletada vaadeldava Universumi isotroopsust ja homogeensust ning lahendada eespool nimetatud probleeme [1].

Üldrelatiivsusteooriast ja skalaarväljade omadustest on teada, et inflatsiooni režiimi tekkimiseks ja kirjeldamiseks sobib skalaarväli, mille potentsiaal peab olema hästi lauge. Seega eeldatakse, et inflatsiooni põhjustab üks või mitu skalaarvälja, kuid selle füüsikaline olemus pole siiani üheselt fikseeritud. Raskus inflatsiooni kirjeldamiseks tekib selle pärast, et inflatsiooni jaoks on vajalik väga suur energiatihedus, mis pole saavutatav tänapäevastes osakestefüüsika kiirendites ja muudes eksperimentides ning mida on seetõttu raske sõltumatult uurida. Viimastel aastatel on välja pakutud palju inflatsioonimudeleid, kuid paljud neist ei rahulda viimaste täppisvaatluste poolt seatud piiranguid. Seetõttu on inflatsiooniteooria lihtsamad kandidaadid välistatud, mis sunnib kaaluma keerukamaid alternatiive [2].

## Seosefunktsioonid

Üks tänapäeval levinud lähenemisviis inflatsiooniteooriale on seosefunktsioonide (*coupling functions*), gravitatsiooni ja skalaarvälja vahel, sissetoomine mõjufunktsionaali. Selline lähenemine tekitab laiema gravitatsioonimudelite klassi, mida nimetatakse skalaar-tensorteooriateks [3]. Minimaalse seose asendamine mitteminimaalse seosega toob kaasa uusi fenomenoloogilisi tunnuseid, näiteks ülikiirenenud paisumise faasid [4].

## Palatini formalism

Üldrelatiivsusteoorias kirjeldab vektorite muutumist kõveras ruumis, kui neid nihutada ühest punktist teise, vastav diferentsiaalgeomeetria suurus – **seostus**. Selgub, et nii defineeritud suurused määravad, kuidas peavad vektori komponendid muutuma, et vektor jääks iseendaga paralleelseks. Liikumisvõrrandite tuletamisel postuleeritakse tavaliselt, et seostus on meetriline, ehk seostuse poolt määratud paralleelnihkel skalaarkorrutis ei muutu. Meetrilisuse tõttu kehtib otsene vastavus meetrika ja seostuse komponentide vahel

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}), \quad (1)$$

mida tuntakse nn Levi-Civita seostusena. Tegelikult puudub otsene vajadus sellise seose jaoks; üldisel juhul seostus ja meetrika ei ole omavahel vastavuses, aga siiski on võimalik tuletada liikumisvõrrandeid. Lähenemisviisi, kus mõjufunktsionaalist liikumisvõrrandite tuletamisel kasutatakse Levi-Civita seostust, nimetatakse **meetriliseks** formalismiks, ja kui eeldatakse, et seostus ja meetrika on üksteisest sõltumatud, siis sellist lähenemist nimetatakse **Palatini** formalismiks. Minimaalse seose korral on meetriline ja Palatini formalism ekvivalentsed, aga erinevate formalismide kasutamine mitte-minimaalse seose korral annab üldjuhul füüsikaliselt erinevad mudelid[5].

## Dünaamilised süsteemid

Keerukamate inflatsioonimudelite omaduste uurimiseks sobib **dünaamiliste süsteemide meetod**. Selle meetodi abil on võimalik esitada mistahes inflatsioonimudelit esimest järku diferentsiaalvõrrandite süsteemina. Kui selline süsteem taandub kahele võrrandile, siis seda on võimalik esitada kahemõõtmelise diagrammina, mida nimetatakse **faasiportreeks**. Selline faasiportree lubab samaaegselt vaadelda süsteemi kõigi lahendite käitumist ning selliseid diagramme hakati juba varakult kasutama nii hilise Universumi kui ka inflatsiooni skalaarväljade uurimisel. Rakendades **Poincaré teisendust** sellisele süsteemile, on võimalik kujutada seda kompaktselt, mille tulemusena saadakse faasiportree, mis kujutab süsteemi globaalset käitumist, kaasa arvatud **asümptootikas** ehk lõpmata kaugel keskpunktist [6].

Globaalne faasiportree võimaldab uurida inflatsioonimudelite omadusi ja teha selgeks, kas uuritav mudel suudab kirjeldada vaadeldava Universumi paisumist. Mudeli omadusi kirjeldavad faasiruumis esinevad püsipunktid ja trajektooride kujud. Selge vahe tegemine erinevate asümptootiliste seisundite vahel ning samuti evolutsiooni trajektooride moonutamata kujutamise algusest kuni inflatsiooni lõpuni ja ka edasi sõltub suuresti sobivate dünaamiliste muutujate valikust. On võimalikud erinevad muutujate valikud, mis erinevad nii matemaatilise praktilisuse kui ka füüsikalise tõlgendamise lihtsuse poolest [6].

## Töö kirjeldus

Käesoleva bakalaureusetöö eesmärkideks on:

- Kasutades dünaamiliste süsteemide meetodit ja matemaatiliselt lihtsat Higgsi inflatsioonimudelit, leida sobiv muutujate paar inflatsiooni dünaamika kirjeldamiseks. Täpsemalt peaksid muutujate abil moodustatud globaalsel faasiportreel olema eraldi nähtavad kõik püsipunktid, kaasa arvatud asümptootikas, ja süsteem peaks olema regulaarne kogu oma määramispiirkonnas.
- Kirjutada kood, mis võimaldab sisestada leitud muutujate paari ja konkreetse skalaar-tensor teooria inflatsioonimudeli parameetrite funktsioone ning tulemusena kujundab antud dünaamilise süsteemi globaalse faasiportree koos püsipunktidega, singulaarsustega, aeglase vee-remise trajektooriga ja erinevate inflatsioonirežiimide piirkondadega.
- Kontrollida, kas leitud muutujate paar annab häid tulemusi ka teiste skalaar-tensorteooria inflatsioonimudelite faasiportreede kujundamisel: Starobinski inflatsioonimudel, poolustega inflatsioonimudel, mitte-minimaalselt seotud Palatini inflatsioonimudel.

Töö hüpoteesiks on see, et leidub dimensioonitute muutujate paar, mille valik ei muuda süsteemi füüsikalist käitumist ja mille abil saab moodustada globaalse faasiportree, mis detailselt kirjeldab inflatsiooni dünaamikat.

Bakalaureusetöö esimeses peatükis antakse ülevaade kaasaegsest kosmoloogiast ja üldrelatiivsusteooria elementidest, mis on otseselt seotud antud tööga, ning kirjeldatakse inflatsiooniteooria aluseid. Lisaks tehakse põgus sissejuhatus skalaar-tensorteooriatesse ja tuuakse FLRW kosmoloogia võrrandid skalaar-tensorteooriate esituses. Teises peatükis tutvustatakse dünaamiliste süsteemide meetodite teooriat ja kirjeldatakse Poincaré teisendust. Järgmisena selgitatakse, kuidas rakendada dünaamiliste süsteemide meetodit inflatsioonimudeli faasiportreede kujundamiseks ja nende omaduste uurimiseks. Kolmandas peatükis kirjeldatakse töös uuritud muutujate paare ning esitatakse nende abil saadud faasiportree joonised Higgsi inflatsioonimudeli korral. Samuti hinnatakse, milline muutujate paar sobib kõige paremini edasiseks tööks. Neljandas peatükis rakendatakse valitud muutujate paari faasiportreede koostamiseks teiste inflatsioonimudelite jaoks ning hinnatakse, kui hästi see muutujate paar suudab kirjeldada uuritavate mudelite kõiki olulisi omadusi. Need viimased kaks peatükki moodustavad töö originaalse osa.

Kõik arvutused olid tehtud Jupyter Notebooki programmeerimiskeskkonnas, kasutades Python programmeerimiskeelt ja moduleid: SymPy, NumPy, SciPy ja Matplotlib. Antud töö raames kasutame ühikuid kus  $c = 1$  ja  $\hbar = 1$ , seega aja- ja pikkuseühikud on võrdsed  $[T] = [L]$  ning pikkuse- ja massiühikud on pöördvõrdelised  $[M] = \frac{1}{[L]}$ .

# 1 Kosmoloogia

Käesolev peatükk põhineb allikal [6], kui pole viidatud teisiti.

## 1.1 Üldrelatiivsusteooria

Nagu öeldud sissejuhatuses, põhineb kaasaegne kosmoloogia kosmoloogilisel printsiibil, mis väidab, et piisavalt suurtel mastaapidel ( $\sim 10^8$  valgusaastat) on Universum **homogeenne** ja **isotroopne**. On teada, et aegruumi, mille ruumiosa allub kosmoloogilisele printsiibile, kirjeldab kõige paremini *Friedmanni–Lemaître'i–Robertsoni–Walker* (**FLRW**) meetrika  $g_{\mu\nu}$ . FLRW meetrika on sfääriliselt sümmeetriline. Sfäärilistes koordinaatides omandab FLRW meetrikaga määratud intervall järgmise kuju.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right), \quad (2)$$

kus  $k$  väljendab ruumi kõverust ja võib omandada väärtusi  $-1$ ,  $0$  või  $+1$ . Kui  $k = -1$ , tähendab see, et Universumi ruumidimensioonidel on hüperboolne geomeetria;  $k = 1$  näitab, et Universum on sfäärilise geomeetriaga, ja  $k = 0$  tähendab, et Universumi geomeetria on tasane. Funktsiooni  $a(t) > 0$ , mis sõltub ainult ajast  $t$ , nimetatakse mastaabikordajaks ning see väljendab kahe objekti vahelise kauguse suurenemist Universumi paisumisel. Koordinaadid  $(r, \theta, \varphi)$  on sellise vaatleja koordinaadid, kes, olles paigal ruumiliste koordinaatide suhtes, liigub Universumi paisumisega samas suunas ehk ainult mööda ajatelge  $t$ ; selliseid koordinaate nimetatakse kaasaliikiva vaatleja koordinaatideks.

Üldrelatiivsusteoorias meetrika  $g_{\mu\nu}$  dünaamikat kirjeldavad **Einsteini väljavõrrandid**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (3)$$

kus  $R_{\mu\nu}$  on Ricci kõverustensor,  $R$  on Ricci skalaar, mis kirjeldab ruumi kõverust, ning  $T_{\mu\nu}$  on energia-impulssitensor. Kordaja  $\kappa^2 = 8\pi G$ , kus  $G$  on Newtoni gravitatsioonikonstant.

Homogeenses ja isotroopses Universumis käitub aine suurte mastaapidel ligikaudselt nagu ideaalne voolis. Seetõttu väljendatakse energia-impulssitensorit tavaliselt ideaalse voolise energia-impulssitensori kujul

$$T_{\mu\nu} = p g_{\mu\nu} + (\rho + p) u_\mu u_\nu \quad (4)$$

ja sõltub ainult energiatihedusest  $\rho(t)$  ja rõhust  $p(t)$ . Siin  $u^\mu = (-1, 0, 0, 0)$  on voolisega kaasaliikiva vaatleja nelikiiruse vektori komponendid. Lisaks eeldatakse, et energiatiheduse ja rõhu vahel kehtib olekuvõrrand, mis ideaalse barotroopse voolise korral on lineaarne võrrand

$$p = w\rho, \quad (5)$$

kus  $w$  on **barotroopne indeks**.

Einsteini väljavõrranditest saab tuletada **kosmoloogilisi võrrandeid**. Kosmoloogilisi võrrandeid on kolm:

1. **Seosevõrrand** (Friedmanni võrrand) saadakse Einsteini väljavõrrandite (3) ajalise osa komponentidest,

$$\frac{k}{a^2} + H^2 = \frac{\kappa^2}{3}\rho, \quad (6)$$

kus  $H = \frac{\dot{a}}{a}$  on Hubble'i funktsioon ja  $\dot{a}$  on mastaabikordaja tuletis aja järgi.

2. **Kiirendusvõrrand** (Raychaudhuri võrrand) saadakse Einsteini väljavõrrandite (3) ruumilise osa komponentidest

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(\rho + 3p), \quad (7a)$$

või alternatiivsel kujul

$$\frac{k}{a^2} + 2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p. \quad (7b)$$

3. **Pidevuse võrrand** - Teades, et energia-impulsstensori (4) divergents on null, st  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , saab kirjutada energia jäävuse võrrandi

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (8)$$

mis ei ole tegelikult sõltumatu võrrand, sest seda võib saada ka võrrandite (6) ja (7a) kombineerimisel.

Nagu on näha, on esimesed kaks võrrandit sõltumatud ja kirjeldavad mastaabikordaja  $a(t)$  ajalist arengut, sõltuvalt konkreetsest olekuvõrrandi kujust rõhu ja energiatiheduse vahel. Kiirenduse võrrandist (7a) saame väljendada tingimused, mis kirjeldavad kvalitatiivselt Universumi paisumise kiirust. Kui  $\ddot{a} > 0$ , siis paisumine on kiirenev, ja kui  $\ddot{a} < 0$ , siis paisumine on aeglustuv. Seega kehtib tingimus, et kui  $\rho + 3p < 0$ , siis Universumi paisumine kiireneb, ja kui  $\rho + 3p > 0$ , siis paisumine aeglustub. Kasutades tuletatud võrratusi ja barotroopse voolise olekuvõrrandit (5), saame esitada samaväärsed tingimused barotroopse indeksi  $w$  jaoks. Kui  $w < -\frac{1}{3}$ , siis paisumine on kiirenev, ja kui  $w > -\frac{1}{3}$ , siis paisumine on aeglustuv.

On võimalik väljendada mastaabikordaja sõltuvust barotroopsest indeksist  $w$  kasutades pidevuse võrrandit (8). Kui asetada sellesse olekuvõrrand (5) ja lahendada see energiatiheduse  $\rho(a)$  suhtes, saame seose

$$\rho \propto a^{-3(w+1)}, \quad (9)$$

mis kehtib kui  $w \neq -1$ . Nüüd, eeldusel, et Universum on tasane ( $k = 0$ ), asetades seose (9) võrrandisse (6) saame uue võrrandi mis seob mastaabikordajat  $a$  ja aega  $t$ . Seos kahe suuruse vahel on järgmine

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(w+1)}}. \quad (10)$$

Sellest seosest on näha, et kui  $w > -\frac{1}{3}$ , siis ruum paisub astmefunktsiooni kujul.

## 1.2 Kosmoloogiline konstant

Kaasaegsete vaatluste järgi on meie Universum umbes 13,8 miljardit aastat vana ning paisub kiirenevalt. Kiireneva paisumise üheks võimalikuks põhjuseks nimetatakse **tumeenergiat**, mis moodustab umbes 70% kogu Universumis sisalduvast energiast ja mida iseloomustab negatiivne rõhk, nii et  $p_{de} < -\frac{\rho_{de}}{3}$ . Kuigi tänapäeval pole täpselt teada, mida endast kujutab tumeenergia, on üheks mudeliks, mis seda kirjeldab, **kosmoloogiline konstant**  $\Lambda$ , mille teoreetiline väärtus on  $\simeq 10^{-52} m^{-2}$  ja mida karakteriseerib olekuvõrrand:

$$p_{\Lambda} = -\rho_{\Lambda}, \quad w = -1. \quad (11)$$

Einsteini võrrandites (3) avaldub kosmoloogiline konstant lisaliikmena,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}. \quad (12)$$

Kui eeldada, et kosmoloogilise konstandi panus paisumise dünaamikasse ei ole tühine, siis tasase Universumi korral ( $k = 0$ ) on FLRW meetrikast tuletatavad kosmoloogilised võrrandid järgmise kujuga:

$$3H^2 = \kappa^2 \rho + \Lambda, \quad (13a)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -\kappa^2 p + \Lambda. \quad (13b)$$

Eeldusel, et kosmoloogiline konstant  $\Lambda$  domineerib võrrandites (13), ehk kui  $p = 0$  ja  $\rho = 0$ , järgneb sellest, et Hubble'i funktsioon on konstantne ja mastaabikordaja suurenemine on täpselt eksponentsiaalne

$$a(t) \propto e^{Ht}, \quad H = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (14)$$

Viimast tulemust tuntakse de Sitteri lahendina.

## 1.3 Inflatsioon

Inflatsiooniteooria kohaselt toimus Universumi arengu algetappidel ruumi eksponentsiaalne laienemine. Tänapäeval on see teooria üks tähtsamatest varajase Universumi kirjeldamiseks. Inflatsiooni teooria tähtsus seisneb selles, et selle abil on võimalik selgitada vaadeldava Universumi isotroopsust ja homogeensust ning lahendada mõned kosmoloogia probleemid, näiteks horisondi ja tasasuse probleemid [1].

- **Horisondi probleem** seisneb selles, et detekteeritav kosmiline mikrolaine-elektromagnetkiirgus, mis tekkis umbes 379 000 aastat pärast Suurt Pauku, on igas suunas ligikaudu homogeenne, kuigi selle kiirguse tekke ajahetkel ei olnud need piirkonnad põhjuslikult seotud kui eeldada, et Universum alati paisus ilma kiirenduseta.
- **Tasasuse probleem** seisneb selles, et tänapäeval on mõõdetud, et Universumi geometria on väga suure täpsusega tasane. Sellest järeldub, et Universumi algetappidel pidi Universum

olema veel suurema täpsusega tasane. Sellist teooria parameetrite kitsendust nimetatakse täppishäälestuseks, ning see viidab sellele, et teoorial on olemas olulised puudused.

Hea mudeli inflatsiooni kirjeldamiseks annab skalaarväli  $\Phi$ , mille potentsiaal  $V(\Phi)$  oli inflatsiooni ajal väga suure väärtusega ja hästi lauge. Selleks, et inflatsioon kulgeks sujuvalt, pidi skalaarvälja potentsiaali väärtus muutuma äärmiselt aeglaselt. Seda nähtust tuntakse kui **aeglane veeremine** (*slow-roll*) [1]. Aeglane veeremine toimub siis, kui on täidetud tingimused [7]:

$$\dot{\Phi} \ll V(\Phi), \quad (15a)$$

$$|\ddot{\Phi}| \ll |3H\dot{\Phi}|, \quad |\ddot{\Phi}| \ll \left| \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} \right|. \quad (15b)$$

Kui väli läbib mingit kindlat vahemikku  $\Delta\Phi$  ja jõuab väärtuseni  $\Phi_{end}$ , kus ülaltoodud tingimused enam ei kehti, siis aeglane veeremine lõppeb koos Universumi kiirenenud paisumisega. Inflatsiooni tulemusel algse Universumi kõverus, energiatihedus ja mittehomogeensused vähenevad nii, et tervikuna Universum muutub ligikaudu tasaseks, tühjaks, homogenseks ja isotroopseks [7].

Universumi paisumise kvantitatiivset aspekti inflatsiooni ajal mõõdetakse suurusega, mida nimetatakse  $e$ -astmete arvuks  $e$ -fold. See suurus näitab, mitu eksponentsiaalset paisumist on toimunud aja  $\Delta t$  jooksul. Matemaatilise avaldise selle suuruse leidmiseks saame tuletada Hubble'i funktsiooni definitsioonist

$$H = \frac{\dot{a}}{a}. \quad (16)$$

Kui meile on antud algtingimused  $a(t_i) = a_i$ , siis definitsiooni (16) võib käsitleda hariliku diferentsiaalvõrrandina funktsiooni  $a(t)$  jaoks. Selle võrrandi lahendiks on

$$a(t) = ae^{\int_{t_i}^t H(\tau) d\tau}, \quad (t > t_i). \quad (17)$$

Saadud võrrandist väljendame eksponentsiaalsete paisumiste, ehk  $e$ -fold arvu, inflatsiooni alghetkest  $t_i$  suvalise hetkeni  $t$ .

$$N_e(t) = \int_{t_i}^t H(\tau) d\tau, \quad H(t) = \frac{dN_e}{dt}, \quad (18)$$

ning  $e$ -fold arv  $N$  suvalisest hetkest  $t$  inflatsiooni lõpuni  $t_{end}$  [7]

$$N(t) = \int_t^{t_{end}} H(\tau) d\tau. \quad (19)$$

Selleks, et inflatsiooniteooria suudaks lahendada tasasuse ja horisoni probleeme ning olla kooskõlas vaatlusandmetega, peab  $N$  kuuluma mingisse vahemikku ( $N_1, N_2$ ). Tihti tehakse valik, et  $N \sim 60$ . Seega on võimalik hinnata suvalise inflatsioonimudeli õigsust sõltuvalt arvust  $N$ , mida uuritav mudel ennustab [1, 7].

## 1.4 Skalaar-tensorteooriad

Üheks lihtsamaks alternatiiviks üldrelatiivsusteooriale on nii nimetatud skalaar-tensorteooriad [8]. Selliste teooriate peamine erinevus üldrelatiivsusteooriast seisneb selles, et lisaks meetrilisele tensorile  $g_{\mu\nu}$  kirjeldab gravitatsiooni nähtusi ka skalaarväli  $\Phi$ . Lisaks eeldatakse skalaar-tensorteooriates,

et gravitatsioonikonstant ei ole universaalne konstant, vaid sõltub asukohast ruumis. Skalaarväli  $\Phi$  väljendab gravitatsioonikonstandi väärtust erinevates ruumipunktides [8, 9]. Sellised teooriad sobivad hästi inflatsiooni kirjeldamiseks skalaarväljaga, ning nende ennustused ühtivad väga hästi vaatlustega [8].

Skalaar-tensorteooriate mõjufunktsionaali kuju Jordani raamis on järgmine

$$S = \frac{1}{2} \int_{V_4} d^4x \sqrt{-g} \{ \mathcal{A}(\Phi) \mathcal{R} - \mathcal{B}(\Phi) g^{\mu\nu} \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - 2 \mathcal{V}(\Phi) \} + S_{(\text{mat})} \left[ e^{\sigma(\Phi)} g_{\mu\nu}, \chi_{(\text{mat})} \right], \quad (20)$$

siin  $g$  on meetrika  $g_{\mu\nu}$  determinant ja  $\mathcal{R}$  on Ricci skalaar. Funktsioonid  $\mathcal{A}(\Phi)$ ,  $\mathcal{B}(\Phi)$  ja  $\mathcal{V}(\Phi)$  on funktsioonid dimesioonidega 2, 0 ja  $4[M]$ . Funktsioon  $\mathcal{A}(\Phi)$  määrab kõveruse seose,  $\mathcal{B}(\Phi)$  kirjeldab skalaarvälja üldist kineetilist seost,  $\mathcal{V}(\Phi)$  on skalaarvälja eneseinteraktsiooni potentsiaal. Lisaks funktsioon  $\sigma(\Phi)$  kirjeldab seost aine ja skalaarvälja vahel. Funktsioonide  $\mathcal{A}(\Phi)$ ,  $\mathcal{B}(\Phi)$ ,  $\mathcal{V}(\Phi)$  ja  $\sigma(\Phi)$  täpne kuju sõltub konkreetsest inflatsioonimudelitest [10, 11]. Tuleb täpsustada, et tegelikult Jordani raamis kehtib  $\sigma = 0$  ning mudelifunktsioonid  $\mathcal{A}(\Phi)$ ,  $\mathcal{B}(\Phi)$  ja  $\mathcal{V}(\Phi)$  on nimetatud dimesioonidega, sest skalaarväli  $\Phi$  saavutab massi dimesiooni  $[M]$ . Täiendavalt edaspidi eeldame, et kehtivad võrratused

$$\mathcal{A}(\Phi) > 0, \quad \mathcal{V}(\Phi) \geq 0, \quad (21)$$

mis välistavad ebastabiilsuste ja antigravitatsiooni tekkimist [11].

Mõju (20) korral võib Ricci skalaar  $\mathcal{R}$  olla esitatud kas meetrilises formalismis, kus  $\mathcal{R} = R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ , ja Ricci tensor  $R_{\mu\nu}$  on arvatud seostusest  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \equiv \Gamma(g)$ , või Palatini formalismis, kus  $\mathcal{R} = \hat{R} \equiv g^{\mu\nu} \hat{R}_{\mu\nu}$ , ja Ricci tensor  $\hat{R}_{\mu\nu}$  on arvatud afiinsest seostusest  $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$ , mis ei sõltu meetrikast  $g_{\mu\nu}$ . Dünaamikat kirjeldavate võrrandite leidmiseks on vaja varieerida mõju (20). Kui meetrilises formalismis varieerime mõju (20) meetrika  $g_{\mu\nu}$  järgi, siis tulemuseks on tensorvälja võrrandid. Varieerimine skalaarvälja järgi annab skalaarvälja võrrandi. Palatini formalismis peame lisaks varieerima ka seostuse  $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$  järgi, kusjuures seostus jääb tensorvälja ja skalaarvälja võrranditesse [11].

Võib näidata, et afiinset seostust  $\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu}$  saab avaldada Levi-Civita seostuse  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$  kaudu

$$\hat{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \frac{\mathcal{A}'}{2\mathcal{A}} (\delta_\mu^\lambda \partial_\nu \Phi + \delta_\nu^\lambda \partial_\mu \Phi - g_{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} \partial_\sigma \Phi). \quad (22)$$

Viimane seos võimaldab ühendada meetrilise ja Palatini võrrandeid. Tulemuseks on ühised tensor- ja skalaarvälja võrrandid, mõlema formalismi jaoks

$$T_{\mu\nu}^{(\text{mat})} = \mathcal{A} G_{\mu\nu} + \left( \frac{1}{2} \mathcal{B} + \mathcal{A}'' - \delta_P \frac{3(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}} \right) g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi - \left( \mathcal{B} + \mathcal{A}'' - \delta_P \frac{3(\mathcal{A}')^2}{2\mathcal{A}} \right) \partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi + \mathcal{A}' (g_{\mu\nu} \square \Phi - \nabla_\mu \partial_\nu \Phi) + g_{\mu\nu} \mathcal{V}, \quad (23a)$$

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} T_{\mu\nu}^{(\text{mat})} = \frac{2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m (\mathcal{A}')^2}{\mathcal{A}} \square \Phi + \frac{(2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m (\mathcal{A}')^2)'}{\mathcal{A}} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \Phi \partial_\sigma \Phi - \frac{2(\mathcal{A}\mathcal{V}' - 2\mathcal{A}'\mathcal{V})}{\mathcal{A}}, \quad (23b)$$

siin  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  on Einsteini tensor,  $\nabla_\mu$  on kovariantne tuletis ja  $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$  on d'Alemberti operaator. Kõik need objektid on arvutatud kasutades Levi-Civita seostust  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ . Sümbolid  $\delta_m$  ja  $\delta_P$  näitavad erinevusi, mis tekkivad kahe formalismi vahel ja on defineeritud kui

$$\delta_m = \begin{cases} 1, & \text{meetriline} \\ 0, & \text{Palatini} \end{cases}, \quad \delta_P = \begin{cases} 0, & \text{meetriline} \\ 1, & \text{Palatini} \end{cases}. \quad (24)$$

Saadud tulemuste tähtsus seisneb selles, et algselt pole teada, kumb kahest formalismist – kas meetriline või Palatini – kirjeldab paremini tegelikku füüsikalist käitumist. Kombineerides nende formalismide võrrandeid, on võimalik igal ajahetkel hõlpsasti võrrelda nende formalismide ennustusi omavahel [11].

## 1.5 Skalaar-tensorteooriad FLRW kosmoloogias

Käesolev alapeatükk põhineb allikal [11], kui pole viidatud teisiti.

Nagu oli öeldud osas (1.1), kui eeldame, et tegemist on tasase aegruumiga ( $k = 0$ ), mis on homogeenne ja isotroopne, siis kõige paremini kirjeldab seda FLRW intervall:

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) = -dt^2 + a(t)^2 dx^2, \quad (25)$$

kus muutuja  $t$  tähistab kosmilist aega. Homogeensuse ja isotroopsuse eeldustest järeldub, et skalaarväli sõltub ainult kosmilisest ajast, st  $\Phi = \Phi(t)$ . Arvestades eelnevalt öeldut ja eeldades et ruumis ei esine ainet, saab tensor- ja skalaarvälja võrranditest (23a) ja (23b) tuletada kosmoloogilisi võrrandeid, mis on analoogsed võrranditega (6), (7a) ja (8)

$$H^2 = -\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} H\dot{\Phi} + \frac{2\mathcal{A}\mathcal{B} - 3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{12\mathcal{A}^2} \dot{\Phi}^2 + \frac{\mathcal{V}}{3\mathcal{A}}, \quad (26a)$$

$$2\dot{H} + 3H^2 = -2\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} H\dot{\Phi} - \frac{4\mathcal{A}\mathcal{A}'' + 2\mathcal{A}\mathcal{B} - 3\delta_P(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}^2} \dot{\Phi}^2 - \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} \ddot{\Phi} + \frac{\mathcal{V}}{\mathcal{A}}, \quad (26b)$$

$$\ddot{\Phi} = -3H\dot{\Phi} - \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}' + \mathcal{A}'\mathcal{B} + 3\delta_m\mathcal{A}'\mathcal{A}''}{2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m(\mathcal{A}')^2} \dot{\Phi}^2 - \frac{2\mathcal{A}\mathcal{V}' - 4\mathcal{V}\mathcal{A}'}{2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m(\mathcal{A}')^2}. \quad (26c)$$

Võrrand (26a) on seosevõrrand, (26b) on kiirendusvõrrand ja (26c) on pidevuse võrrand. Nendes võrrandites tähistab täpp  $[\dot{\quad}]$  tuletist aja  $t$  järgi ja prim  $[\prime]$  tuletist skalaarvälja  $\Phi$  järgi. Süsteem (26) on sisuliselt 2-mõõtmeline, kuna saame avaldada Hubble'i funktsiooni  $H$  võrrandist (26a). Selleks on vaja lahendada ruutvõrrand, mille tulemuseks on kaks lahendit.

$$H_{\pm} = -\frac{\dot{\Phi}\mathcal{A}'}{2\mathcal{A}} \pm \sqrt{\frac{\dot{\Phi}^2(\mathcal{A}')^2}{4\mathcal{A}^2} \left( 1 - \delta_P + \frac{2\mathcal{A}\mathcal{B}}{3(\mathcal{A}')^2} + \frac{4\mathcal{A}\mathcal{V}}{\dot{\Phi}^2(\mathcal{A}')^2} \right)}. \quad (27)$$

Kui nüüd asendada see võrrandisse (26c), saame teist järku diferentsiaalvõrrandi skalaarvälja  $\Phi$  jaoks. Võrrandi (26b) võib tuletada, kombineerides ülejäänud kaks võrrandit. Järelikult, kui on teada, kuidas muutuvad  $\Phi$  ja  $\dot{\Phi}$ , saab määrata ka funktsiooni  $H$  evolutsiooni võrrandist (27).

Selles töös keskendume peamiselt inflatsioonile, seega huvitab meid üksnes paisuv Universum, millele vastab positiivne Hubble'i funktsiooni  $H$  väärtus. Võrrandist (27) näeme, et kui kehtivad võrratused (21) ja lisaks ka  $\mathcal{B} \geq 0$ , siis ruutjuure all olev avaldis on alati positiivne. Sellest järeldub, et meetrilises formalismis on miinusmärgiga lahend  $H_-$  alati negatiivne ning kirjeldab ainult kokkutõmbuvat Universumit. Samuti tuleb märkida, et plussmärgiga lahend  $H_+$  on alati nullist suurem või sellega võrdne, kuna ruutjuure all olev liige on alati vähemalt sama suur kui esimene liige. Seetõttu kasutame meetrilise formalismi korral edaspidi ainult lahendit  $H_+$ . Palatini formalismis ei ole valik nii lihtne, sest mõlemad lahendid  $H_+$  ja  $H_-$  võivad omada nii positiivseid kui ka negatiivseid väärtusi, mistõttu tuleb lähemalt uurida mõlemat lahendit.

Nagu oli näidatud alapeatüki (1.1) lõpus, saab Universumi paisumise kiirust karakteriseerida barotroopse indeksi väärtusega. Avaldise skalaar-tensorteooriate efektiivse barotroopse indeksi jaoks saame leida, kui jagame võrrandit (26b) võrrandiga (26a) tasase Universumi eeldusel. Tulemuseks saame

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2} = -1 - \frac{2 \left[ 2\mathcal{A}\mathcal{A}'\ddot{\Phi} - 2H\mathcal{A}\mathcal{A}'\dot{\Phi} + \left( 2\mathcal{A}\mathcal{B} + 2\mathcal{A}\mathcal{A}'' - 3\delta_P(\mathcal{A}')^2 \right) \dot{\Phi}^2 \right]}{12H\mathcal{A}\mathcal{A}'\dot{\Phi} - 4\mathcal{A}\mathcal{V} - \left( 2\mathcal{A}\mathcal{B} - 3\delta_P(\mathcal{A}')^2 \right) \dot{\Phi}^2}. \quad (28)$$

Saame integreerida avaldise (28) vasakut poolt ja saame võrrandid, mis kirjeldavad Universumi paisumist sõltuvalt  $w_{\text{eff}}$  väärtusest:

$$H = \frac{2}{3(1 + w_{\text{eff}})(t - t_0)}, \quad a = a_0(t - t_0)^{\frac{2}{3(1 + w_{\text{eff}})}}, \quad w_{\text{eff}} \neq -1, \quad (29a)$$

$$H = H_0, \quad a = a_0 e^{H_0 t}, \quad w_{\text{eff}} = -1. \quad (29b)$$

Kui  $w_{\text{eff}} < -1$  ja  $\dot{H} > 0$  siis paisumine on ülikiirenev,  $w_{\text{eff}} = -1$  ja  $\dot{H} = 0$  siis paisumine on eksponentsiaalne ehk de Sitter, nagu avaldises (14),  $-1 < w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$  ja  $\dot{H} < 0$  siis paisumine on kiirenev,  $-\frac{1}{3} < w_{\text{eff}} < 1$  ja  $\dot{H} < 0$  siis paisumine on aeglustuv ja kui  $w_{\text{eff}} > 1$  ja  $\dot{H} < 0$  siis paisumine on ülijäik (*superstiff*).

Selleks, et mudel oleks vastavuses vaatlustega ja suudaks lahendada kosmoloogilisi probleeme (nt horisondi ja tasasuse probleem), pidi skalaarväli inflatsiooni ajal olema ligikaudselt aeglase veeremise režiimis, kus kehtivad aeglase veeremise tingimused (15). Võttes  $\dot{\Phi}$  võrdseks nulliga võrrandis (26a) ning võttes  $\ddot{\Phi}$  ja  $\dot{\Phi}^2$  võrdseteks nulliga võrrandis (26c), saab tuletada aeglase veeremise võrrandid:

$$H^2 = \frac{\mathcal{V}}{3\mathcal{A}}; \quad (30a)$$

$$3H\dot{\Phi} = \frac{2\mathcal{A}\mathcal{V}' - 4\mathcal{V}\mathcal{A}'}{2\mathcal{A}\mathcal{B} + 3\delta_m(\mathcal{A}')^2}. \quad (30b)$$

Võrrandis (26c) tasub jätta  $\dot{\Phi} \neq 0$ , muidu vastasel korral saaksime lihtsalt püsipunkti tingimuse. Jättes  $\dot{\Phi}$  võrrandi sees, käsitleme seda kui väikest häiritust, mis viib süsteemi püsipunkti eemale ja annab alguse aeglase veeremise trajektoorige.

## 2 Dünaamiliste süsteemide meetod kosmoloogias

### 2.1 Põhimõisted

Käesolev alapeatükk põhineb allikal [6], kui pole viidatud teisiti.

Dünaamiliste süsteemide meetod on matemaatiline raamistik, mis võimaldab graafiliselt kujutada suvalise süsteemi kõigi lahendite ajalist arengut. See meetod sobib nii lihtsate süsteemide, näiteks tavalise pendli dünaamika uurimiseks, kui ka keerukate süsteemide, näiteks Universumi paisumise käitumise uurimiseks. Iga dünaamilise süsteemi põhikomponendid on: matemaatiline avaldis, mis kirjeldab süsteemi ajaliset arengut, ja faasiruum, milles seda arengut kujuteldakse.

Pidevuse järgi saab jagada dünaamilisi süsteeme kahte gruppi. **Pidevateks** nimetatakse selliseid dünaamilisi süsteeme, mille korral aja rollis olev parameeter, olekute järjestamise mõttes, on pidev ( $t \in \mathbb{R}$ ) ning arengut kirjeldab harilike diferentsiaalvõrrandite süsteem. **Diskreetseteks** nimetatakse selliseid dünaamilisi süsteeme, mille korral parameeter  $t$  on diskreetne ning areng on määratud erinevusvõrranditega (*difference equations*). Antud töös uurime isotroopset ja homogeenet ruumi, seega on selle dünaamika kirjeldatav harilike diferentsiaalvõrranditega, mistõttu meid huvitavad ainult pidevad dünaamilised süsteemid [12].

Dünaamilise süsteemi arengut kirjeldava avaldise üldine kuju on

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (31)$$

kus  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X$  on faasiruumi  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  elemendid. Siin avaldatud kujul  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$ , kus  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  on dünaamikat kirjeldav vektorväli  $\mathbb{R}^n$ -s ja  $f_n(\mathbf{x})$  on muutujatest  $\mathbf{x}$  sõltuvad funktsioonid. Täpp  $\dot{\mathbf{x}}$  tähistab tuletist ajaparameetri  $t$  järgi. Kokku on olemas  $n$  funktsiooni  $f_n(\mathbf{x})$ , mis kirjeldavad  $n$  muutujat  $x_n$ . Sellise süsteemi ühte kindlat lahendit  $\mathbf{x}(t)$  nimetatakse faasiruumi trajektooriks.

Ülioluline on ka püsipunkti mõiste. Püsipunktiks nimetatakse punkti  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$ , mille jaoks on täidetud tingimus  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = 0$ . See tähendab, et sellistes punktides süsteemi areng peatub. Täiendavalt võib lähemal uurimisel karakteriseerida süsteemi käitumist püsipunkti ümbruses ja selle järgi jagada püsipunkte erinevateks tüüpideks. Näiteks tuleb praktikas lähemalt uurida, kas süsteem on üldse võimeline sattuma püsipunkti, ja kas süsteem jääb sinna väikeste kõrvalekallete korral või liigub sellest eemale.

Viimases näites toodud omaduste alusel saab jagada püsipunkte kolmeks tüübiks. Püsipunkte, mis on süsteemi trajektooride lõpp-punktideks, nimetatakse **asümptootiliselt stabiilseteks püsipunktideks**. Kui trajektoorid lähenevad mingile püsipunktile, kuid ei jõua sellesse kunagi, nimetatakse seda punkti **stabiilseks püsipunktiks**. Lisaks on olemas ka **ebastabiilsed püsipunktid**, mille korral trajektoorid liiguvad sellistest punktidest eemale. Kokkuvõttes Dünaamilise süsteemi püsipunktide määramine ja nende ümbruses süsteemi käitumise kirjeldamine võimaldab kvalitatiivselt kirjeldada süsteemi ajalist evolutsiooni.

## 2.2 Lineaarse stabiilsuse teooria

Lineaarse stabiilsuse teooria võimaldab analüüsida püsipunktide stabiilsust, uurides süsteemi käitumist püsipunkti infinitesimaalses ümbruses. Otsuse püsipunkti stabiilsuse kohta saame teha, kui lineariseerime süsteemi uuritava püsipunkti ümbruses. Olgu meil olemas dünaamiline süsteem  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ , kus  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$  ja püsipunkt koordinaatidel  $\mathbf{x}_0$ . Lineariseeritud süsteemi saame, kui arendame dünaamilise süsteemi iga funktsiooni  $f_i(\mathbf{x})$  Tayloriga ritta punktis  $\mathbf{x}_0$ . Tulemuseks saame

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)y_j + \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0)y_j y_k + \dots, \quad (32)$$

kus  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

Lineaarses stabiilsuse teoorias vaadeldakse ainult esimest järku osatuletisi reas (32). Osatuletiste  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  kaudu saab defineerida püsipunkti stabiilsuse maatriksi

$$J = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Stabiilsuse maatriks on  $n \times n$  maatriks, millel on  $n$  omaväärtust, ning üldjuhul võivad need olla kompleksed. Leides selle maatriksi omaväärtused punktis  $\mathbf{x}_0$ , saab teha järeldusi püsipunkti stabiilsuse kohta. Kui püsipunktis  $\mathbf{x}_0$  ei ole maatriksil (33) ühelgi omaväärtusel nulliga võrdset reaalosa, nimetatakse seda punkti **hüperboolseks**. Vastasel juhul on tegemist **mittehüperboolse** püsipunktiga. Lineaarse stabiilsuse teooria ei suuda teha järeldusi mittehüperboolsete punktide stabiilsuse kohta, mistõttu tuleb kasutada teisi meetodeid. Antud töös piirdume ainult hüperboolsete püsipunktide kirjeldamisega, mittehüperboolsete punktide olemasolul ei hakka lähemalt uurima nende ümbruse käitumist.

Stabiilsuse järgi eristatakse kolme põhilist püsipunkti tüüpi:

1. **Stabiilne sõlm** ehk atraktor, mis tõmbab trajektoore enda poole. Sellele vastab maatriks, mille kõik omaväärtused on reaalsed ja negatiivsed.
2. **Ebastabiilne sõlm** ehk repeller, mis tõukab trajektoore endast eemale. Sellele vastab maatriks, mille kõik omaväärtused on reaalsed ja positiivsed.
3. **Sadulpunkt**, mis teatud suundades tõmbab trajektoore enda poole ning teistes suundades tõukab neid eemale. Sellele vastab maatriks, millel on vähemalt kaks omaväärtust vastamärgiliste reaalosadega.

## 2.3 Poincaré teisendus

Poincaré kompaktselt kujutamise teisendus võimaldab analüüsida 2-mõõtmelise dünaamilise süsteemi globaalset käitumist, sealhulgas punktides, kus  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ . Kompaktselt kujutamist teostatakse Poincaré sfääri abil, mis on ühiksfäär, mille ekvaatori punktid vastavad lõpmatult

kaugel asuvatele punktidele. Poincaré sfääri definitsioon on

$$S^2 = \{(X, Y, Z) \in \mathbb{R}^3 \mid X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\}. \quad (34)$$

Selle sfääri põhja- ja lõunapoolust ühendav joon on risti  $(x, y)$ -tasandiga. 2-mõõtmelise dünaamilise süsteemi punktid saab kaardistada Poincaré sfääri ülemisele poolkera pinnale, projitseerides need sfääri keskpunktist mööduvate joonte abil. Matemaatiliselt määratakse see kaardistus järgmise koordinaatide teisendusega:

$$X = \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}, \quad (35)$$

ja vastav pöördteisendus on

$$x = \frac{X}{\sqrt{1-X^2+Y^2}}, \quad y = \frac{Y}{\sqrt{1-X^2+Y^2}}. \quad (36)$$

Rakendades teisendust (36) dünaamilistes võrrandites (31), saame võrrandid, mis kirjeldavad süsteemi globaalset käitumist ning võimaldavad kujutada globaalset faasiportreed.

## 2.4 Inflatsioonimudelite dünaamika kujutamine ja kirjeldamine

Selles alapeatükis kirjeldame allikates [11, 13, 14] leitavaid meetodeid inflatsioonimudelite dünaamika kujutamiseks ja kirjeldamiseks skalaar-tensorteooria raames dünaamiliste süsteemide meetodil. Täpsemalt toome kaks võimalikku viisi, kuidas saab rakendada dünaamiliste süsteemide meetodit võrranditele (26), et kujutada ja uurida inflatsioonimudelite dünaamikat faasiportreel. Lisaks laiendame tingimust, mis otsustab, millised faasiportree punktid vastavad tegelikele füüsikalistele seisunditele.

### 2.4.1 Esimene meetod

Peatükis (1.5) näitasime juba, et süsteem (26) on kahemõõtmeline, mistõttu on ka sellele süsteemile vastav faasiruum kahemõõtmeline. Tänu sellele vajame dünaamika kirjeldamiseks ainult kahte sõltumatut muutujat. Üldjuhul on muutujate kuju järgmine:

$$\phi = \phi(\Phi), \quad z = z(\Phi, \dot{\Phi}, H). \quad (37)$$

Siin defineerime muutuja  $\phi$  ainult  $\Phi$ 'st sõltuva funktsioonina, kuna see tagab, et alati on võimalik esitada mudelifunktsioonid  $\mathcal{A}(\Phi)$ ,  $\mathcal{B}(\Phi)$  ja  $\mathcal{V}(\Phi)$  dünaamilise süsteemi muutujate funktsioonidena, sõltumata nende etteantud kujust.

Dünaamilise süsteemi analüüsi lihtsustamiseks valime muutujad nii, et need oleksid dimensioonitud. Selleks toome sisse konstandi  $M > 0$ , millel on massi dimensioon 1. Lõplikes dünaamilistes võrrandites konstant  $M$  taandub välja, ning tulemuseks on dimensioonitud dünaamilised võrrandid. Dimensioonitu dünaamilise süsteemi ajalise arengu kirjeldamiseks on vaja valida ka dimensioonitud aja ühikud. Antud töös katsetati mitmeid variante:

- **Areng kosmoloogilises ajas:** jagame konstandiga  $M$ , et see oleks dimensioonitu

$$\frac{d}{d\bar{t}} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} \quad (38)$$

- **Areng e-astme ajas:** aega mõõdetakse  $e$ -fold arvu abil (19), mis on juba definitsiooni järgi dimensioonitu

$$\frac{d}{dN} = \frac{1}{H} \frac{d}{dt} \quad (39)$$

- **Areng “hübriid” ajas**

$$\frac{d}{d\bar{t}} = \frac{1}{M + H} \frac{d}{dt} \quad (40)$$

Mõlemad, kosmiline aeg ja e-astme aeg, kulgevad samas suunas, kui eeldame, et Universum paisub, kuid nende kulg erineb sõltuvalt Universumi paisumise kiirusest ja seega ka Hubble'i funktsiooni  $H$  väärtusest. Täpsemini tähendab see, et inflatsiooni algfaasis, kui paisumiskiirus oli väga suur, möödub ühe kosmilise ajaühiku kohta mitu e-astme ajaühikut – ehk e-astme aeg kulgeb kiiremini. Vastupidiselt, kui Universum paisub väga aeglaselt, on  $H$  väärtus väike ning kiiremini kulgeb hoopis kosmiline aeg. Mida suurem on ühe ajaskaala kiirus võrreldes teisega, seda väiksem on skalaarvälja muutus ühe ajaühiku jooksul selles skaalas. See erinevus on eriti märgatav ekstreemsetes olukordades, kus  $H \rightarrow \infty$  või  $H \rightarrow 0$ . Seega võib ühe või teise aja valik mõjutada süsteemi käitumist, sealhulgas eemaldades või lisades sellele singulaarsust.

Kasutades muutujate (37) definitsioone ja kosmoloogilisi võrrandeid (26), saab kirjutada dimensioonitud dünaamilised võrrandid:

$$\dot{\phi} = f_1(\phi, z), \quad (41a)$$

$$\dot{z} = f_2(\phi, z), \quad (41b)$$

kus punkt  $[\dot{\quad}]$  tähistab dimensioonitud tuletist aja (38), (39) või (40) järgi ning  $f_1$  ja  $f_2$  on funktsioonid, mis kirjeldavad algsete võrrandite (26) dünaamikat. Kasutades muutujaid (37), saab avaldada võrrandid (28), (30a) ja (30b) muutujate  $\phi$  ja  $z$  kaudu, kuid esmalt tuleb leida avaldis funktsiooni  $H$  jaoks. Selleks, et leida  $H$  avaldis, mis sõltub ainult muutujatest  $\phi$  ja  $z$ , on vaja asendada võrrandisse (26a) muutuja  $\dot{\Phi}(z, \phi)$ , mida omakorda saab avaldada definitsioonist (37). Seejärel tuleb lahendada ruutvõrrand, mille tulemusena saame kaks lahendit:  $H_{\phi z+}$  ja  $H_{\phi z-}$ , sarnaselt tulemusega (27).

Võrreldes lahenditega (27), ei ole meetrilises formalismis enam nii lihtne valida ühte lahenditest, mis vastaks paisuvale Universumile, ja veelgi enam, ei pruugi kõik funktsioonide  $H_{\phi z\pm}$  väärtused vastata tegelikele füüsikalistele seisunditele. Viimane tähendab seda, et sõltuvalt valitud muutujatest võib faasiportree tekkida mittefüüsikaline piirkond. Mittefüüsikalise piirkonna leidmiseks on vaja uurida, kas faasiportree punktidele vastavad funktsioonide  $H_{\phi z\pm}$  väärtused on vastavuses  $H_+$  või  $H_-$  väärtustega. Sõltuvalt sellest, kumba avaldistest  $H_+$  või  $H_-$  peame füüsikaliseks, võime teha otsuseid faasiportree punktide füüsikalise kohta.

- Kui dünaamiline muutuja  $z$  sõltub ainult muutujatest  $\Phi$  ja  $\dot{\Phi}$ , siis mittefüüsikalise piirkonna leidmiseks piisab sellest, et kontrollime, kas faasiportree punktidele vastavad  $H_{\phi z \pm}$  väärtused on lubatud  $H_+$  poolt. Näiteks Higgsi inflatsioonimudeli korral, kus  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  ja  $\mathcal{V}$  on positiivsed, võib  $H_+$  olla ainult positiivne. Seega on mittefüüsikalised kõik punktid, kus  $H_{\phi z \pm}$  on negatiivsed või kompleksarvulised.
- Kui dünaamiline muutuja  $z$  sõltub ka Hubble'i funktsioonist  $H$ , siis mittefüüsikalise piirkonna leidmiseks on vaja kontrollida ka seda, et vähemalt üks  $H_{\phi z \pm}$  väärtustest langeks kokku kas  $H_+$  või  $H_-$  väärtusega, sõltuvalt sellest, kumba (27) peetakse füüsikaliseks. Kui väärtused ei lange kokku, tähendab see, et uuritav punkt on mittefüüsikaline. Põhjuseks, miks parameetri  $H$  olemasolu muutujas tekitab vajaduse üldisemaks piiranguks, on see, et muutuja  $z$  kaudu tuuakse sisse uus seos  $H$  ja  $\dot{\Phi}$  vahel, kuid varem olid need kaks suurust seotud ainult lahenditega (27). Uus seos toob juurde võõrlahendeid.

Veel täiustuseks, kui ühel faasiportreel, mis näiteks kujutab lahendi  $H_+$  dünaamikat, on piirkondi, kus füüsikalised on kas  $H_{\phi z+}$  või  $H_{\phi z-}$  väärtused, siis nendes piirkondades tuleb trajektoride ja inflatsiooni režiimide kujutamiseks kasutada vastava  $H_{\phi z}$  lahendiga tuletatud avaldise (37), (28), (30a) ja (30b). Lõpetuseks, füüsikalise piirkonna tingimusega tuleb silmas pidada, et kui ühele punktile vastavad  $H_{\phi z+}$  ja  $H_{\phi z-}$  väärtused on füüsikalised, ehk nad kattuvad, siis on vaja joonistada kaks eraldi faasiportreed: üks  $H_{\phi z+}$  ja teine  $H_{\phi z-}$  jaoks.

Süsteemi globaalseid omadusi saab kujutada Poincaré kompaktsesse piirkonda kujutamise teisenduste (35) ja (36) abil:

$$\phi_p = \frac{\phi}{\sqrt{1 + \phi^2 + z^2}}, \quad z_p = \frac{z}{\sqrt{1 + \phi^2 + z^2}}, \quad (42a)$$

$$\phi = \frac{\phi_p}{\sqrt{1 - \phi_p^2 - z_p^2}}, \quad z = \frac{z_p}{\sqrt{1 - \phi_p^2 - z_p^2}}. \quad (42b)$$

Samuti kasutame avaldist (42b), et avaldada kõik meid huvitavad suurused muutujate  $\phi_p$  ja  $z_p$  kaudu. Teisenduse tulemusena saab dünaamiline süsteem kuju

$$\dot{\phi}_p = \frac{\partial \phi_p}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial \phi_p}{\partial z} \dot{z} = f_{p1}(\phi_p, z_p) \quad (43a)$$

$$\dot{z}_p = \frac{\partial z_p}{\partial \phi} \dot{\phi} + \frac{\partial z_p}{\partial z} \dot{z} = f_{p2}(\phi_p, z_p) \quad (43b)$$

Süsteemi püsipunktid on määratud tingimusega

$$\lim_{\phi_p \rightarrow \phi_p^*} \lim_{z_p \rightarrow z_p^*} \dot{\phi}_p = 0, \quad \lim_{\phi_p \rightarrow \phi_p^*} \lim_{z_p \rightarrow z_p^*} \dot{z}_p = 0, \quad (44)$$

siin  $(\phi_p^*, z_p^*)$  on püsipunkti koordinaadid ja see tingimus peab olema täidetud ka siis, kui vahetame kohtadega piirväärtusi. Informatsiooni püsipunkti stabiilsuse kohta saame, kui lineariseerime süsteemi uuritava punkti ümbruses ning leiame karakteristliku (stabiilsuse) maatriksi  $L$  omaväärtused

ja omavektorid, nagu oli kirjeldatud alapeatükis (2.2).

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{p1}}{\partial \phi_p} & \frac{\partial f_{p1}}{\partial z_p} \\ \frac{\partial f_{p2}}{\partial \phi_p} & \frac{\partial f_{p2}}{\partial z_p} \end{bmatrix}_{(\phi_p^*, z_p^*)} \quad (45)$$

Veel üks võimalus faasiportree püsipunktide leidmiseks on uurida füüsikalise ja mittefüüsikalise piirkonna piiri asümptootikas, kus  $1 - \phi_p^2 - z_p^2 \rightarrow 0$ . Üldiselt liiguvad kõik trajektoorid mööda asümptootika piiri ega saa sellest kaugemale minna, kuna see tähendaks lõpmatuse ületamist. Kuna süsteemi trajektoorid ei saa läbida füüsikalise piirkonna äärt, ehk asuda mittefüüsikalistes seisunditesse, peavad leiduma püsipunktid asümptootika punktides, kus asub kahe piirkonna piirjoon.

Kui kõik on defineeritud õigesti, asub faasiportree füüsikalise piirkonna äärel trajektoor, mis toimib piirina. See trajektoor takistab teistel trajektooridel liikumast ühest piirkonnast teise, kuna dünaamilise süsteemi trajektoorid ei löiku.

#### 2.4.2 Teine meetod

Veel üks viis, kuidas oleks võimalik konstrueerida dünaamiline süsteem, on leida avaldis  $\dot{\Phi}$  jaoks. Idee seisneb selles, et muutujas  $z$  saab asendada Hubble'i funktsiooni  $H$  ühega lahenditest (27) ja avaldada  $\dot{\Phi}$ , lahendades ruutvõrrandi. Kui muutuja  $z$  ei sisalda funktsiooni  $H$ , siis esimene ja teine meetod ei erine üksteisest. Sellise meetodiga saadud faasiportreel on mittefüüsikalised kõik punktid, millele vastavad kompleksed muutujad  $\Phi$  ja  $\bar{\Phi}$ .

Teise meetodi probleem seisneb selles, et kui näiteks Palatini formalismi korral võivad mõlemad  $H_+$  ja  $H_-$  olla füüsikalised, siis arvutustes on vaja kasutada mõlemat funktsiooni. Funktsioonidest  $H_+$  ja  $H_-$  saab leida neli erinevat avaldist  $\dot{\Phi}$  jaoks:  $\dot{\Phi}_{++}$ ,  $\dot{\Phi}_{+-}$ ,  $\dot{\Phi}_{-+}$ ,  $\dot{\Phi}_{--}$ . Võrreldes lõplikke faasiportreesid eelmise meetodi tulemusega, selgus, et õiget tulemust  $H_+$  korral annab  $\dot{\Phi}_{++}$ , kuid siiski osutus mittefüüsikaline piirkond väiksemaks kui esimese meetodi korral. Selles töös ei õnnestunud leida sobivat tingimust, mis muudaks mittefüüsikalise piirkonna piisavalt suureks, et see langeks kokku varasema töö [11] ja esimese meetodi tulemustega. Seega toome tulemusi, mis olid saadud ainult esimese meetodiga.

### 3 Muutujate uurimine

Käesoleva töö antud osa eesmärgiks oli leida sobivad dünaamilised muutujad suvalise skalaar-tensorteooria inflatsioonimudeli dünaamika faasiportree kujutamiseks. Vajalik oli leida selline muutujate paar, mille korral dünaamiline süsteem oleks regulaarne kogu faasiruumi ulatuses, kõik püsipunktid oleksid selgelt eristatavad ja nende täpne asukoht oleks leitav. Samuti pidi faasiportree dünaamika kirjeldama tegelikku füüsikalist olukorda ja olema lihtsasti arusaadav.

Selles peatükis kirjeldame tööd, mis tehti erinevate dünaamiliste muutujate uurimisel, näitame tulemusi, mida saadi iga muutuja paariga, ning teeme lühikokkuvõtte iga muutuja töökõlblikkuse kohta. Selle töö raames kasutame matemaatiliselt lihtsat mitteminimaalse seosega Higgsi inflatsioonimudelit meetrilises formalismis faasiportreede kujutamiseks. Seda mudelit kirjeldavad järgmised mudelfunktsioonid [15]:

$$\mathcal{A} = M^2 + \Phi^2 \xi, \quad \mathcal{B} = 1, \quad \mathcal{V} = \frac{\lambda}{4}(\Phi^2 - v^2)^2. \quad (46)$$

Nendes funktsioonides tähistab sümbol  $\xi$  seost kõveruse ja skalaarvälja vahel ning sümbol  $\lambda$  tähistab elementaarosakeste Standardmudeli parameetrit. Mõlemad parameetrid on dimensioonitud. Sümbol  $v$  määrab eneseinteraktsiooni potentsiaali  $\mathcal{V}$  miinimumi asukoha ning sellel on massi dimensioon  $[M]$ .

Selleks, et antud mudel annaks ennustusi, mis langevad kokku vaatlustega, peavad esimese kahe parameetri väärtused olema liigikaudu  $\xi = 17\,000$  ja  $\lambda = 0.129$ . Selles osas võtame lihtsuse huvides esimese parameetri väärtuseks kas  $\xi = 1$  või  $\xi = 0$ , sest suure väärtuse korral oleks dünaamika jälgimine joonistel moonutuste tõttu keeruline. Lisaks võtame kolmanda parameetri väärtuseks  $v = 0$ , et lihtsustada lõplikku joonist. Seda võime teha, kuna see ei muuda mudeli dünaamika globaalset käitumist põhimõtteliselt. Kuivõrd inflatsioon leiab aset väärtustel  $\Phi \gg v$ , siis on see lihtsustus kirjanduses tavaline. Kui kasutame kõikide muutujate puhul samu parameetrite väärtusi, siis saame omavahel võrrelda nende tulemusi ning ka tulemusi, mis on saadud allikas [11].

#### Faasiportreede legend

1. Faasiportreedel erinevalt värvitud piirkonnad näitavad inflatsiooni tempot:

- **Tumeroheline** – ülikiirenenud paisumine ( $w_{\text{eff}} < -1$ ),
- **Roheline** – kiirenenud paisumine ( $-1 \leq w_{\text{eff}} < -\frac{1}{3}$ ),
- **Valge** – aeglustuv paisumine ( $-\frac{1}{3} \leq w_{\text{eff}} < 1$ ),
- **Kollane** – ülijäik paisumine ( $w_{\text{eff}} > 1$ ).

Hall värv tähistab mittefüüsikalist piirkonda.

2. Faasiportreel kasutatud jooned:

- **Must punktiirjoon** tähistab aeglase veeremise trajektoori,
- **Punane punktiirjoon** näitab singulaarsuse asukohta,
- **Sinised jooned** on dünaamilise süsteemi trajektoolid,
- **Punane joon** on ühe kindla lahendi trajektoor.

3. Faasiportree püsipunktid:

- **Punkt A** tähistab atraktorina toimivat mittehüperboolset püsipunkti,
- **Punkt C** on asümptootiline mittehüperboolne püsipunkt, mis toimib sadulana,
- **Punkt D** on ebastabiilne sõlm asümptootikas,
- **Punkt E** on sadulpunkt asümptootikas.

### 3.1 Kosmiline ja e-astme aeg; muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}$ , $\bar{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M^2}$

Selles alapeatükis kasutame lihtsaimat võimalikku muutujate paari

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M^2}, \quad (47)$$

ja näitena toome iga sammu detailselt välja, mida on vaja teha, et kujutada inflatsioonimudeli dünaamika globaalset faasiportreed. Toodud näite alusel saab analoogselt lähtuda suvalise inflatsioonimudeli ja suvalise muutujate paari korral. Kasutades muutujate (47) näidet, seletame täiendavalt erinevust kosmilise ja e-astme aegade vahel ning tagajärgi, mida toob kaasa kummagi aja valik.

Alguses kujutame inflatsiooni dünaamikat, kasutades kosmilist aega, selleks esimese sammuna võtame tulelise (38) muutujatest (47), mille tulemuseks saame dünaamilise süsteemi

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{\Phi}}{M^2}, \quad \dot{\bar{z}} = \frac{\ddot{\Phi}}{M^3}. \quad (48)$$

Nüüd on vaja leida avaldised suuruste  $\Phi$ ,  $\dot{\Phi}$ ,  $\ddot{\Phi}$ ,  $H_{\phi z+}$  ja  $\dot{H}$  jaoks ning asetada need võrranditesse (48). Esimesed kaks tundmatut,  $\Phi$  ja  $\dot{\Phi}$ , on lihtsasti avaldatavad muutujate (47) definitsioonist

$$\Phi = \phi M, \quad \dot{\Phi} = \bar{z} M^2. \quad (49)$$

Avaldised  $\ddot{\Phi}$ ,  $H_{\phi z+}$  ja  $\dot{H}$  jaoks saame vastavalt võrranditest (26c), (26a) ja (26b), asendades sisse avaldised (49). See tagab, et kõik suurused sõltuvad ainult muutujatest  $\phi$  ja  $\bar{z}$  ning mudelifunkt-

sioonidest. Funktsioonide lõplikud kujud on toodud allpool:

$$\ddot{\phi} = - \frac{3M^2 \delta_m \mathcal{A}' \bar{z} (3H \mathcal{A}' + M^2 \mathcal{A}'' \bar{z})}{3\delta_m (\mathcal{A}')^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B}} - \frac{6HM^2 \mathcal{A}\mathcal{B} \bar{z} + M^4 \mathcal{A}\mathcal{B}' \bar{z}^2 + M^4 \mathcal{A}' \mathcal{B} \bar{z}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{V}' - 4\mathcal{A}'\mathcal{V}}{3\delta_m (\mathcal{A}')^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B}}, \quad (50a)$$

$$\begin{aligned} \dot{H} = & \frac{3M^4 \delta_P (\mathcal{A}')^2 \mathcal{B} \bar{z}^2}{4\mathcal{A} (3\delta_m (\mathcal{A}')^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B})} - \frac{3\delta_m (\mathcal{A}')^2 \cdot (6H^2 \mathcal{A} - 2HM^2 \mathcal{A}' \bar{z} + M^4 \mathcal{B} \bar{z}^2 - 2\mathcal{V})}{4\mathcal{A} (3\delta_m (\mathcal{A}')^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B})} + \\ & + \frac{-6H^2 \mathcal{A}^2 \mathcal{B} - 2HM^2 \mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{B} \bar{z} + 2M^4 \mathcal{A} \mathcal{A}'' \mathcal{B} \bar{z}^2 - M^4 \mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{B}' \bar{z}^2 + M^4 \mathcal{A} \mathcal{B}^2 \bar{z}^2}{2\mathcal{A} (3\delta_m (\mathcal{A}')^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B})} + \\ & + \frac{-M^4 (\mathcal{A}')^2 \mathcal{B} \bar{z}^2 - 2\mathcal{A} \mathcal{A}' \mathcal{V}' - 2\mathcal{A} \mathcal{B} \mathcal{V} + 4(\mathcal{A}')^2 \mathcal{V}}{2\mathcal{A} (3\delta_m (\mathcal{A}')^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B})}, \end{aligned} \quad (50b)$$

$$H = - \frac{3M^2 \mathcal{A}' \bar{z} - \sqrt{3} \sqrt{-3M^4 \delta_P (\mathcal{A}')^2 \bar{z}^2 + 2M^4 \mathcal{A}\mathcal{B} \bar{z}^2 + 3M^4 (\mathcal{A}')^2 \bar{z}^2 + 4\mathcal{A}\mathcal{V}}}{6\mathcal{A}}. \quad (50c)$$

Järgmise sammuna asendame leitud avaldised dünaamilisse süsteemi (48) ja asendame sisse mudelifunktsioonid (46). Täiendavalt tasub pidada meeles, et kuna tegutseme meetrilises formalismis, siis  $\delta_m = 1$  ja  $\delta_P = 0$ . Tulemuseks on mitteminimaalselt seotud Higgsi inflatsioonimudeli dünaamikat kirjeldav dünaamiline süsteem muutujates  $\phi$  ja  $\bar{z}$

$$\frac{d\phi}{d\bar{t}} = \bar{z}, \quad (51a)$$

$$\frac{d\bar{z}}{d\bar{t}} = - \frac{3H\bar{z}}{M} - \frac{\phi (6\bar{z}^2 \xi^2 + \bar{z}^2 \xi + \lambda \phi^2)}{6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1}, \quad (51b)$$

kus

$$H = \frac{M \left( -6\bar{z}\phi\xi + \sqrt{36\bar{z}^2\phi^2\xi^2 + 6\bar{z}^2 + 3\lambda\phi^4 + 3\phi^2\xi(2\bar{z}^2 + \lambda\phi^4)} \right)}{6(\phi^2\xi + 1)}. \quad (52)$$

Edasi on vaja rakendada Poincaré kompaktsesse piirkonda kujutamise teisendust (42), et saada dünaamilisi võrrandeid, mis kirjeldavad süsteemi globaalset käitumist. Teisenduse teostamiseks kasutame võrrandeid (43) ning asendame sisse olemasoleva süsteemi (51) ja teisendusvõrrandite (42a) osatuletised muutujate  $\phi$  ja  $z$  järgi. Tulemuseks saame globaalse dünaamilise süsteemi.

$$\frac{d\phi_p}{d\bar{t}} = \frac{3H_p \bar{z}_p^2 \phi_p}{M} + \frac{\bar{z}_p (12\bar{z}_p^2 \phi_p^2 \xi^2 + 2\bar{z}_p^2 \phi_p^2 \xi + \bar{z}_p^2 q^2 + \lambda \phi_p^4 + 6\phi_p^2 \xi^2 q^2 + \phi_p^2 \xi q^2 + q^4)}{6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2}, \quad (53a)$$

$$\frac{d\bar{z}_p}{d\bar{t}} = - \frac{3H_p \bar{z}_p (\phi_p^2 + q^2)}{M} - \frac{\phi_p (12\bar{z}_p^2 \phi_p^2 \xi^2 + 2\bar{z}_p^2 \phi_p^2 \xi + 6\bar{z}_p^2 \xi^2 q^2 + \bar{z}_p^2 \xi q^2 + \bar{z}_p^2 q^2 + \lambda \phi_p^4 + \lambda \phi_p^2 q^2)}{6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2}, \quad (53b)$$

kus

$$H_p = \frac{M \left( -6\bar{z}_p \phi_p \xi q + \sqrt{6\bar{z}_p^2 q^4 + 3\lambda \phi_p^6 \xi + 3\phi_p^2 q^2 (12\bar{z}_p^2 \xi^2 + 2\bar{z}_p^2 \xi + \lambda \phi_p^2)} \right)}{6q (\phi_p^2 \xi + q^2)}, \quad (54)$$

ning suurus  $q = 1 - \phi_p^2 - \bar{z}_p^2$  väljendab punkti koordinaatidega  $(\phi_p, \bar{z}_p)$  kaugust faasiruumi keskpunktist. Paneme tähele, et suurus  $M$  taandub välja nii süsteemist (51) kui süsteemist (53), seega

selle arvuline väärtus ei mängi dünaamika kirjeldamise juures mingit rolli. Samal põhimõttel on võimalik leida avaldised efektiivse barotroopse indeksi ja aeglase veeremise trajektoori jaoks. Dünaamilistest võrranditest (53) saab leida ühe püsipunkti faasiruumi keskpunktis. Leitud püsipunkt  $A$  on kujutatud joonisel (1a). Selle punkti karakteristiklik maatriks on

$$L_A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (55)$$

Selle maatriksi mõlemad omaväärtused on nullid, mistõttu punkt  $A$  on mittehüperboolne. Jooniselt on selgelt näha, et asümptootikas peavad leiduma veel püsipunktid, kuid nende täpne asukoht jääb teadmata, kuna dünaamilised võrrandid hajuvad faasiruumi äärtel. Kokkuvõttes võime öelda, et muutujad (47) kosmilises ajas ei rahulda meie poolt seatud nõudeid, kuna faasiportreel puuduvad mõned püsipunktid ning asümptootikas on süsteem singulaarne.

Nüüd uurime samade muutujate käitumist e-astme ajas (39). Edaspidi ei hakka tooma välja kõiki arvutusi, vaid ainult kõige olulisemad. E-astme ajas on muutujate (47) dünaamilised võrrandid muutujates  $\phi$  ja  $\bar{z}$  järgmised:

$$\frac{d\phi}{dN} = \frac{M\bar{z}}{H}, \quad (56a)$$

$$\frac{d\bar{z}}{dN} = -3\bar{z} - \frac{M\phi(6\bar{z}^2\xi^2 + \bar{z}^2\xi + \lambda\phi^2)}{H(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)}, \quad (56b)$$

siin funktsioon  $H$  on sama nagu (52). Globaalsed dünaamilised võrrandid on

$$\frac{d\phi_p}{dN} = 3\bar{z}_p^2\phi_p + \frac{M\bar{z}_p(12\bar{z}_p^2\phi_p^2\xi^2 + 2\bar{z}_p^2\phi_p^2\xi + \bar{z}_p^2q^2 + \lambda\phi_p^4 + 6\phi_p^2\xi^2q^2 + \phi_p^2\xi q^2 + q^4)}{H_p(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)}, \quad (57a)$$

$$\frac{d\bar{z}_p}{dN} = -3\bar{z}_p(\phi_p^2 + q^2) - \frac{M\phi_p(12\bar{z}_p^2\phi_p^2\xi^2 + 2\bar{z}_p^2\phi_p^2\xi + 6\bar{z}_p^2\xi^2q^2 + \bar{z}_p^2\xi q^2 + \bar{z}_p^2q^2 + \lambda\phi_p^4 + \lambda\phi_p^2q^2)}{H_p(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)}, \quad (57b)$$

siin funktsioon  $H_p$  on sama nagu (54). E-astme aja võrrandid enam ei haju asümptootikas  $q \rightarrow 0$ , mistõttu on võimalik leida neli asümptootilist püsipunkti. Joonisel (1b) on kujutatud neli leitud püsipunkti, mille koordinaadid on  $C_{\pm} = (\pm 1, 0)$  ja  $D_{\mp}E_{\pm} = (0, \pm 1)$ . Püsipunktide lähemal uurimisel ja järgnevate muutujate tulemustega võrreldes saab märgata, et püsipunktid  $D_{\mp}E_{\pm}$  koosnevad tegelikult kahest kokku sulanud punktist  $D$  ja  $E$ . Põhjuseks, miks võib arvata, et kaks punkti on omavahel sulandunud, on see, et lähenedes punktile erinevatest suundadest, saame erinevad väärtused efektiivse barotroopse indeksi  $w_{\text{eff}}$  jaoks

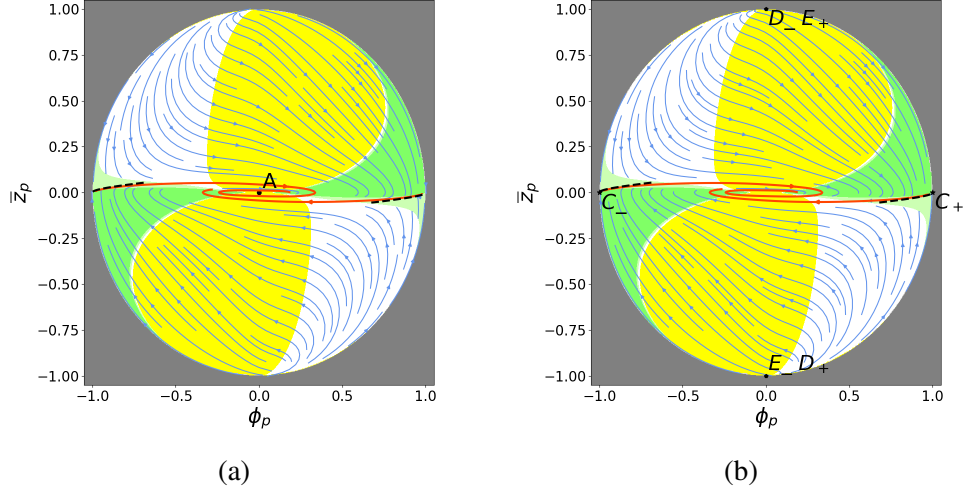
$$\lim_{\phi_p \rightarrow 0^{\mp}} \lim_{\bar{z}_p \rightarrow \mp 1} w_{\text{eff}} = w_{\text{eff}}(D_{\pm}), \quad (58a)$$

$$\lim_{\phi_p \rightarrow 0^{\pm}} \lim_{\bar{z}_p \rightarrow \pm 1} w_{\text{eff}} = w_{\text{eff}}(E_{\pm}). \quad (58b)$$

Muutujate (47) puuduseks e-astme ajas jääb asjaolu, et faasiruumi keskpunktis  $(0, 0)$  ei ole tuletis  $\frac{d\phi_p}{dN}$  määratud. Nimelt, lähenedes sellele punktile erinevatest suundadest, saame erinevaid tulemusi,

mistõttu, võrreldes joonisega (1a), püsipunkti seal enam ei ole. Seega võib kokkuvõtteks öelda, et need muutujad ei anna rahuldavat tulemust ka e-astme ajas.

Täiendavalt, joonistelt (1a) ja (1b), nägime, kui olulist rolli mängib dünaamilise süsteemi aja valik lõpliku faasiportree kujundamisel. Ühe aja valik kaotab singulaarsuse inflatsiooni algfaasis, kuid toob kaasa uue määramatuse inflatsiooni lõppfaasis.



Joonis 1: Muutujate (47) faasiportreed: **a)** Kosmilises ajas ja  $\xi = 1$ . Süsteemil on määratud ainult üks püsipunkt faasiruumi keskel, kuid faasiruumi asümptootikas dünaamilise süsteemi võrrandid hajuvad. **b)** E-astme ajas ja  $\xi = 1$ . Tekkis eelmise pildiga (a) vastupidine olukord: nüüd on püsipunktid määratud faasiruumi asümptootikas, kuid keskpunktis ei ole tuletis  $\frac{d\phi_p}{dN}$  määratud.

### 3.2 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}$ , $z = \frac{\dot{\Phi}}{HM}$

Järgmisena uurime muutujaid

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad z = \frac{\dot{\Phi}}{HM}. \quad (59)$$

e-astme ajas. Antud muutujad olid kasutatud ka allikas [13], kus selgus, et e-astme aja korral tekib nendes muutujates singulaarsus punktides, kus  $\phi = 0$ . Kuigi teame ette, et need muutujad ei rahulda meie nõudeid, uurime neid siiski, et olla kindlad, et meie töö meetod töötab õigesti. Lisaks vajame antud muutujate tulemusi, et põhjendada tulevasi otsuseid. Muutujate (59) dünaamiline süsteem muutujates  $\phi$  ja  $z$  on järgmised:

$$\frac{d\phi}{dN} = z, \quad (60a)$$

$$\frac{dz}{dN} = \frac{-36\phi^3\xi^2z - 6\phi^3\xi z - 60\phi^2\xi^2z^2 - 10\phi^2\xi z^2}{2\phi(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)} + \frac{-24\phi^2\xi + 6\phi\xi z^3 - 72\phi\xi z + \phi z^3 - 6\phi z + 4z^2 - 24}{2\phi(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)} \quad (60b)$$

ning

$$H_{\phi z+} = \frac{M\phi^2}{2} \sqrt{\frac{2\lambda}{6\phi^2\xi + 12\phi\xi z - z^2 + 6}}. \quad (61)$$

Kuigi on näha, et leitud dünaamiline süsteem ei sisalda ruutjuuri, ei taga see siiski, et kõik funktsiooni  $H_{\phi_{z+}}$  väärtused oleksid reaalsed. Tulemuseks tekib mittefüüsikaline piirkond. Teisalt on ilmselge, et kui funktsiooni  $H_{\phi_{z+}}$  väärtus on reaalne, siis on ta alati ka positiivne. Arvutustest selgub, et kõik reaalsed  $H_{\phi_{z+}}$  väärtused langevad kokku  $H_+$  väärtustega samades punktides. Lisaks, nagu oli oodatud, on näha, et  $\frac{dz}{dN}$  muutub singulaarseks, kui  $\phi = 0$ , mistõttu muutub võimatuks püsipunkti leidmine faasiruumi keskpunktis.

Allikates [13, 14] lahendatakse singulaarsuse probleem, tuues sisse väikese kosmoloogilise konstandi  $\Lambda$  liidetava liikmena funktsiooni  $\mathcal{V}$ . Selle mõte seisneb selles, et alguses tehakse kõik arvutused eeldusel  $\Lambda > 0$ , ning lõpus leitakse piirväärtus  $\Lambda \rightarrow 0$ . Põhjuseks, miks antud muutujate paari on peetud kasulikuks, on see, et selle abil on võimalik edukalt kirjeldada inflatsiooni kuni kiirenenud paisumise lõpuni. Edasine kirjeldamine kaugemale ei ole mõttekas, kuna Higgsi mudel ise ei anna selles faasis enam usaldusväärseid ennustusi kuna peale inflatsioonilise paisumise lõpu tuleb arvestada täiendavaid füüsikalisi protsesse (tavalise aine tekkimine) ja võrranditesse tuleb nagunii lisada täiendavaid liikmeid.

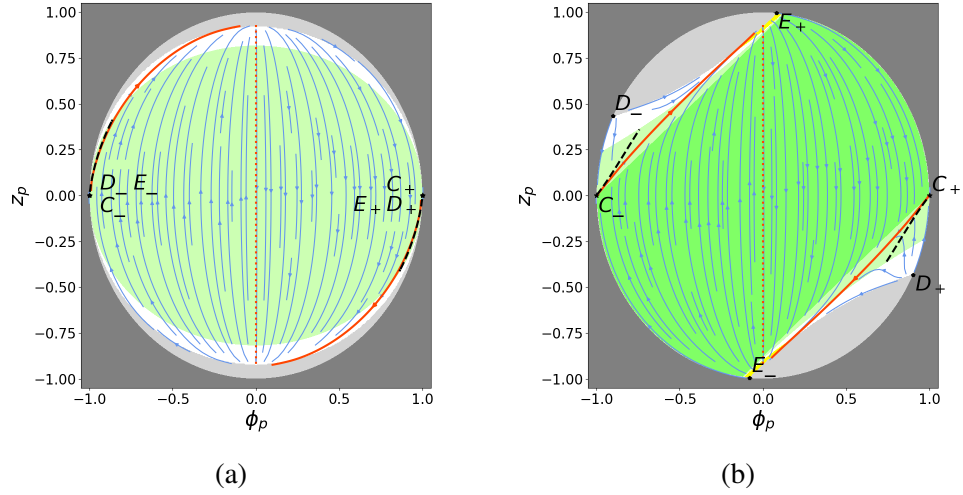
Antud muutujate korral ei hakka välja kirjutama globaalseid dünaamilisi võrrandeid, kuna need on liiga pikad ega anna koheselt kasulikku informatsiooni. Selle asemel uurime globaalseid dünaamilisi võrrandeid faasiruumi asümptootikas, kus  $q \rightarrow 0$  ja  $\phi_p \rightarrow \pm\sqrt{1-z_p^2}$ . Teostades ülalmainitud teisendusi, saame asümptootika jaoks järgmised võrrandid:

$$\frac{d\phi_p}{dN} = \frac{z_p^2 \left( 12\xi z_p \sqrt{1-z_p^2} + 6\xi (1-z_p^2) - z_p^2 \right)}{2\xi \sqrt{1-z_p^2}}, \quad (62a)$$

$$\frac{dz_p}{dN} = - \frac{z_p \left( 12\xi z_p \sqrt{1-z_p^2} + 6\xi (1-z_p^2) - z_p^2 \right)}{2\xi}. \quad (62b)$$

Asümptootika võrrandid ei ole sõltumatud ja kirjeldavad ühemõõtmelist süsteemi, mis kujutab endast ringjoont faasiportree äärel. Nende võrrandite abil saab leida asümptootika püsipunkte, rakendades tingimust (44). Tulemusena leiame kuus püsipunkti:  $C_{\pm}$ ,  $D_{\pm}$  ja  $E_{\pm}$ . Võrreldes eelmise muutujate paariga (47) näeme, et Higgsi inflatsioonimudelil on  $D$  ja  $E$  kaks erinevat püsipunkti.

Kokkuvõttes ei rahulda ka need muutujad meie poolt seatud tingimusi, kuna faasiportree punktides, kus  $\phi_p = 0$ , muutuvad dünaamilised võrrandid singulaarseteks. Kuigi singulaarsust on võimalik eemaldada, tuues sisse reguleeritava parameetri  $\Lambda$ , ei võimalda see vaadelda trajektooride tiirlemist faasiruumi keskpunktis asuva püsipunkti ümber.



Joonis 2: Muutujate (59) faasiportreed e-astme ajas. **a)**  $\xi = 0$ , süsteem on singulaarne kui  $\phi_p = 0$  ja püsipunktid on kokku sulanud. **b)**  $\xi = 1$ , süsteem on singulaarne kui  $\phi_p = 0$ .

### 3.3 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}$ , $z = \frac{\dot{\Phi}}{H\Phi}$

Edasi uurime muutujaid

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad z = \frac{\dot{\Phi}}{H\Phi}, \quad (63)$$

e-astme ajas, et paremini mõista, kuidas parameetrite  $H$ ,  $M$  ja  $\Phi$  lisamine või eemaldamine mõjutab lõpliku faasiportree kuju. Alguses leiame dünaamilise süsteemi võrrandid, mis sõltuvad muutujatest  $\phi$  ja  $z$ ,

$$\frac{d\phi}{dN} = \phi z, \quad (64a)$$

$$\frac{dz}{dN} = \frac{18\phi^2\xi^2z(2z+1)}{6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1} + \frac{3\xi(\phi^2z^3 - 2\phi^2z^2 - \phi^2z - 12z - 4)}{6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1} + \frac{\phi^4z^3 + 2\phi^2z^2 - 6\phi^2z - 24}{2\phi^2 \cdot (6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)}. \quad (64b)$$

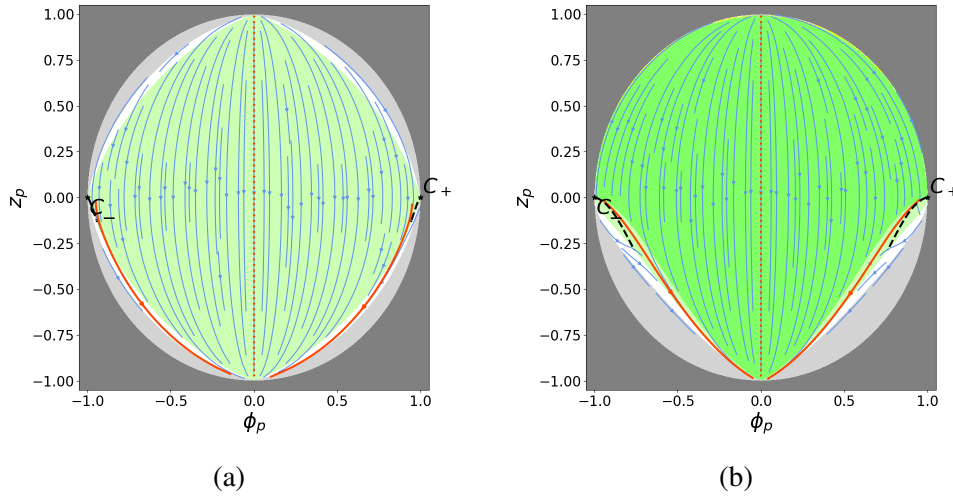
Võrrandi  $\frac{dz}{dN}$  viimasest liikmest on kohe näha, et kui  $\phi = 0$ , siis süsteem on singulaarne. Globaalsed dünaamilised võrrandid on järgmised:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_p}{dN} = & \frac{z_p(12\phi_p^4\xi^2q(q^2 + 3qz_p + 7z_p^2) - \phi_p^4z_p^3 + 2\phi_p^2q^5 + 6\phi_p^2q^4z_p + 24q^7)}{2\phi_pq^2(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)} \\ & + \frac{2\phi_p^2\xi(\phi_p^2q^3 + 3\phi_p^2q^2z_p + 7\phi_p^2qz_p^2 - 3\phi_p^2z_p^3 + 12q^5 + 36q^4z_p)}{2\phi_pq^2(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)}, \end{aligned} \quad (65a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_p}{dN} = & - \frac{-\phi_p^6z_p^3 + 12\phi_p^4\xi^2qz_p(3\phi_p^2q + 7\phi_p^2z_p + 3q^3 + 6q^2z_p) + 6\phi_p^4q^4z_p - \phi_p^4q^2z_p^3 + 24\phi_p^2q^7 + 6\phi_p^2q^6z_p}{2\phi_p^2q^2(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)} \\ & + \frac{2\phi_p^2\xi(3\phi_p^4q^2z_p + 7\phi_p^4qz_p^2 - 3\phi_p^4z_p^3 + 12\phi_p^2q^5 + 39\phi_p^2q^4z_p + 6\phi_p^2q^3z_p^2 - 3\phi_p^2q^2z_p^3 + 12q^7 + 36q^6z_p)}{2\phi_p^2q^2(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)} \\ & - \frac{2\phi_p^2q^5z_p^2 + 24q^9}{2\phi_p^2q^2(6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)}, \end{aligned} \quad (65b)$$

Antud dünaamilisel süsteemil on määratud kaks mitte-hüperboolset püsipunkti  $C_{\pm}$  koordinaatidel  $(\pm 1, 0)$ . Jooniselt (3b) on näha, et punkt  $A$  ei pruugi enam asuda faasiruumi keskpunktis, vaid võib olla surutud faasiportree alumisse punkti, aga täpset asukohta pole võimalik leida, kuna dünaamiline süsteem on singulaarne, kui  $\phi_p = 0$ . Lisaks on näha et asümptootikas puuduvad punktid, mis näeksid välja nagu sadulad, mida nägime varem muutujatel (59).

Kokkuvõttes ei rahulda antud muutujad meie nõudeid, kuna dünaamiline süsteem on singulaarne, kui  $\phi_p = 0$ , ning puuduvad sadulat meenutavad punktid. Kuigi antud muutujad meile ei sobi, võime pakkuda, et funktsiooni  $H$  olek muutujas  $z$  põhjustas singulaarsuse tekkimise sarnaselt muutujatega (59). Suuruse  $\Phi$  lisamine muutujasse  $z$  ei mõjutanud punktide  $C_{\pm}$  asukohta, kuid muutis faasiportree kuju. Nüüd ei ole see peegelpilt punkti  $(0, 0)$  suhtes, vaid peegelpilt telje  $z_p$  suhtes. On näha, et nüüd võiks püsipunkt  $D$  asuda faasiportree ülemises punktis  $(0, 1)$ .



Joonis 3: Muutujate (63) faasiportreed e-astme ajas. **a)**  $\xi = 0$ . **b)**  $\xi = 1$ . Mõlema  $\xi$  väärtuse korral süsteem on singulaarne kui  $\phi_p = 0$  ja on määratud ainult 2 püsipunkti.

### 3.4 Hübriidne aeg; muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}$ , $\tilde{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M(M+H)}$

Selleks, et lahendada muutujates (47) ja (59) tekkivaid probleeme – kus tuleks ei ole määratud faasiportree keskpunktis või kus süsteemis tekkivad singulaarsused, mis takistavad püsipunktide asukohtide leidmist ja trajektooride tiirlemise vaatlemist faasiruumi keskpunkti ümber – pakume uurida hübriidseid muutujaid

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad \tilde{z} = \frac{\dot{\Phi}}{(H+M)M}. \quad (66)$$

Antud muutujate eeldatav eelis, võrreldes varem uuritutega, seisneb selles, et hilise Universumi korral on  $H$  väike, mistõttu peavad nad kujutama ligikaudselt süsteemi (47) käitumist. Vastupidiselt, varases Universumis on  $H$  väärtus väga suur, seega seal kujutavad pakutud muutujad ligikaudselt süsteemi (59) käitumist. Tulemusena peab süsteem olema regulaarne kogu faasiportree ulatuses. Tuleb aga pöörata tähelepanu sellele, et süsteemi (47) meile vajalik omadus kehtib ainult

kosmilises ajas, kuid süsteem (59) oli konstrueeritud e-astme ajas. Tekkinud vastuolu lahendamiseks toome sisse hübriidse aja (40) ja saame dünaamilise süsteemi

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}} = \tilde{z}, \quad (67a)$$

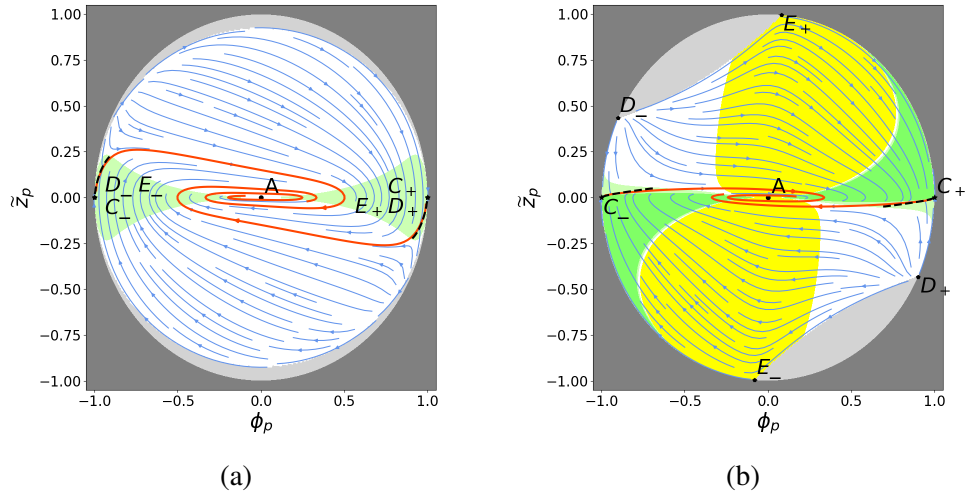
$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{z}}{d\tilde{t}} = & - \frac{H^2 \tilde{z} (36\phi^4 \xi^3 + 6\phi^4 \xi^2 + 48\phi^3 \tilde{z} \xi^3 + 8\phi^3 \tilde{z} \xi^2 - 6\phi^2 \tilde{z}^2 \xi^2 - \phi^2 \tilde{z}^2 \xi)}{4(H+M)(H+Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{H^2 \tilde{z} (36\phi^2 \xi^2 + 12\phi^2 \xi + 24\phi \tilde{z} \xi^2 + 8\phi \tilde{z} \xi - 4\tilde{z}^2 \xi - \tilde{z}^2 + 6)}{4(H+M)(H+Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{HM \tilde{z} (36\phi^4 \xi^3 + 6\phi^4 \xi^2 + 36\phi^3 \tilde{z} \xi^3 + 6\phi^3 \tilde{z} \xi^2 - 6\phi^2 \tilde{z}^2 \xi^2 - \phi^2 \tilde{z}^2 \xi)}{2(H+M)(H+Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{HM \tilde{z} (36\phi^2 \xi^2 + 12\phi^2 \xi + 24\phi \tilde{z} \xi^2 + 6\phi \tilde{z} \xi - 4\tilde{z}^2 \xi - \tilde{z}^2 + 6)}{2(H+M)(H+Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{M^2 (6\lambda\phi^6 \tilde{z} \xi^2 + \lambda\phi^6 \tilde{z} \xi + 8\lambda\phi^5 \xi + 8\lambda\phi^4 \tilde{z} \xi + \lambda\phi^4 \tilde{z} + 8\lambda\phi^3)}{8(H+M)(H+Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{M^2 (48\phi^3 \tilde{z}^2 \xi^3 + 8\phi^3 \tilde{z}^2 \xi^2 - 12\phi^2 \tilde{z}^3 \xi^2 - 2\phi^2 \tilde{z}^3 \xi + 48\phi \tilde{z}^2 \xi^2 + 8\phi \tilde{z}^2 \xi - 8\tilde{z}^3 \xi - 2\tilde{z}^3)}{8(H+M)(H+Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)}, \quad (67b) \end{aligned}$$

kus

$$H = \frac{M \left( -12\phi \tilde{z} \xi + 2\tilde{z}^2 + \sqrt{12\lambda\phi^6 \xi + 24\lambda\phi^5 \tilde{z} \xi - 2\lambda\phi^4 \tilde{z}^2 + 12\lambda\phi^4 + 144\phi^2 \tilde{z}^2 \xi^2 + 24\phi^2 \tilde{z}^2 \xi + 24\tilde{z}^2} \right)}{2(6\phi^2 \xi + 12\phi \tilde{z} \xi - \tilde{z}^2 + 6)}. \quad (68)$$

Ei hakka tooma välja globaalseid dünaamilisi võrrandeid, kuna need on liiga pikad. Lõpptulemusena saame dünaamilise süsteemi, mis on lõplik kogu faasiruumis, kaasa arvatud asümptootikas, mis vastab meie eeldustele. Tänu sellele saame määrata süsteemi kõik püsipunktid:  $A$ ,  $C_{\pm}$ ,  $D_{\pm}$  ja  $E_{\pm}$ . Ükski neist ei ole kokku sulanud, ega esine joonisel singulaarsusi. Tuleb mainida, et viimane tulemus kehtib, kui  $\xi \neq 0$ , sest sarnaselt süsteemiga (59) sulavad asümptootilised püsipunktid kokku, kui  $\xi = 0$ . See kokku sulamine aga ei tekita suurt probleemi, kuna  $\xi = 0$  tähendab seda et Higgsi mudel on seotud minimaalselt, ning tänapäeval sellised mudelid ei paku suurt huvi võrreldes mitte minimaalselt seotutega.

Kokkuvõttes antud muutujad rahuldavad kõiki meie poolt seatud nõudeid kui  $\xi \neq 0$ , kuna siis süsteem on regulaarne igas punktis ja saab leida kõiki püsipunkte ning on võimalik vaadelda trajektooride tiirlemist faasiruumi keskpunkti ümber.



Joonis 4: Muutujate (66) faasiportreed hübriidses ajas. **a)**  $\xi = 0$ , süsteemil on määratud püsipunktid nii faasiruumi keskel kui ka asümptootikas kuid punktid on sulanud kokku. **b)**  $\xi = 1$ , süsteemil on määratud püsipunktid nii faasiruumi keskel kui ka asümptootikas.

### 3.5 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}, z = \frac{\dot{\Phi}}{M\Phi}$

Uurime täpsemalt, kuidas parameetri  $\Phi$  lisamine muutuja  $z$  nimetajas mõjutab faasiportree lõplikku kuju. Selleks defineerime järgmise muutujate paari hübriidses ajas:

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad z = \frac{\dot{\Phi}}{M\Phi}. \quad (69)$$

Nende muutujate dünaamilised võrrandid on järgmise kujuga

$$\frac{d\phi}{dN} = \frac{M\phi z}{H + M}, \quad (70a)$$

$$\frac{dz}{dN} = -\frac{6\phi^2\xi^2z(3H + 2Mz)}{(H + M)(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)} - \frac{\phi^2\xi z(3H + 2Mz)}{(H + M)(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)} - \frac{3Hz + M\lambda\phi^2 + Mz^2}{(H + M)(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)}, \quad (70b)$$

kus

$$H = -\frac{M \left( 6\phi^2\xi z - \sqrt{3}\sqrt{\lambda\phi^4\xi + \lambda\phi^2 + 12\phi^2\xi^2z^2 + 2\phi^2\xi z^2 + 2z^2|\phi|} \right)}{6(\phi^2\xi + 1)}. \quad (71)$$

Dünaamilise süsteemi võrranditest on näha, et süsteem singulaarsustest vaba, ning punktis  $(0, 0)$  peab asuma püsipunkt  $A$ , mida polnud võimalik leida muutujate (63) korral. Nüüd leiame globaalsed dünaamilised võrrandid:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_p}{dN} = & \frac{\phi_p z_p (6\phi_p^2 \xi^2 \cdot (3Hqz_p + Mq^2 + 3Mz_p^2) + \phi_p^2 \xi (3Hqz_p + Mq^2 + 3Mz_p^2))}{q(H+M)(6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2)} + \\ & + \frac{\phi_p z_p q^2 \cdot (3Hqz_p + M\lambda\phi_p^2 + Mq^2 + 2Mz_p^2)}{q(H+M)(6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2)}, \end{aligned} \quad (72a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_p}{dN} = & - \frac{6\phi_p^2 \xi^2 z_p (3H\phi_p^2 q + 3Hq^3 + 3M\phi_p^2 z_p + 2Mq^2 z_p)}{q(H+M)(6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2)} + \\ & + \frac{\phi_p^2 \xi z_p (3H\phi_p^2 q + 3Hq^3 + 3M\phi_p^2 z_p + 2Mq^2 z_p)}{q(H+M)(6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2)} + \\ & + \frac{q^2 \cdot (3H\phi_p^2 q z_p + 3Hq^3 z_p + M\lambda\phi_p^4 + M\lambda\phi_p^2 q^2 + 2M\phi_p^2 z_p^2 + Mq^2 z_p^2)}{q(H+M)(6\phi_p^2 \xi^2 + \phi_p^2 \xi + q^2)}, \end{aligned} \quad (72b)$$

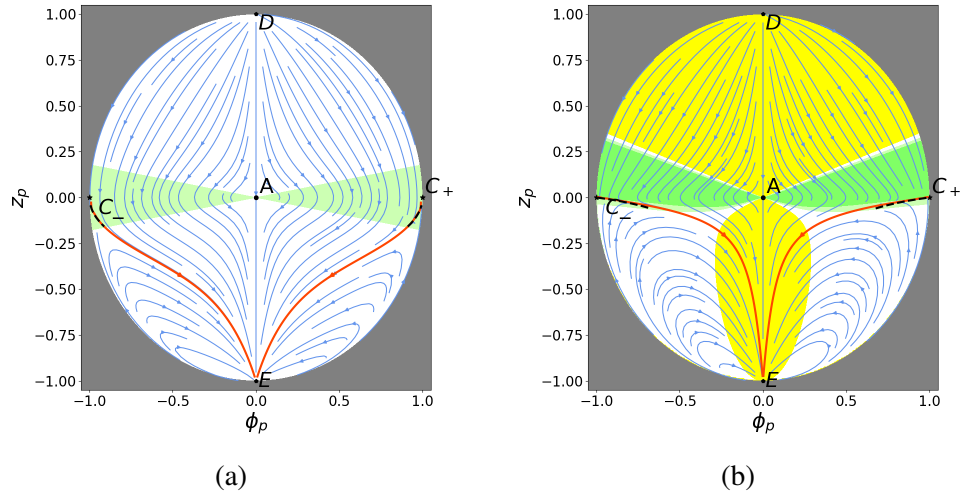
kus

$$H_p = \frac{M \left( -6\phi_p^2 \xi z_p + \sqrt{3} \sqrt{\lambda\phi_p^4 \xi + \lambda\phi_p^2 q^2 + 12\phi_p^2 \xi^2 z_p^2 + 2\phi_p^2 \xi z_p^2 + 2q^2 z_p^2} |\phi_p| \right)}{6q(\phi_p^2 \xi + q^2)}. \quad (73)$$

Avaldisest (73) näeme, et selle väärtused on alati mittenegatiivsed. Kuna muutujad (69) ei sisalda funktsiooni  $H$ , langevad funktsioonide  $H_p$  ja  $H_+$  väärtused kokku samades punktides. Globaalsest dünaamilistest võrranditest saab leida neli asümptootilist püsipunkti:  $C_{\pm}$ ,  $D$  ja  $E$ . Näeme, et joonis (5) on sarnane joonisega (3), mis on loogiline, kuna muutujad (63) on antud muutujate (69) modifikatsioon, kuhu on lisatud funktsioon  $H$ . Osas (3.3) oli pakutud, et faasiportree punktis  $(0, 1)$  peab asuma püsipunkt  $D$ . Joonistelt (5), näeme, et see oletus osutus õigeks. Täiendavalt näeme, et võrreldes varasema olukorraga, on punktis  $(0, 1)$  tekkinud sadulpunkt  $E$ , mis muutujate (63) korral nägi välja nagu stabiilne sõlm.

Esile tõstetud sarnasuse põhjal muutujate (63) ja (69) vahel võib teha järelduse singulaarsuste olulise rolli kohta. Jooniste (3) põhjal oleks võinud pakkuda, et punkt  $A$  paikneb faasiportree alumises punktis  $(0, 1)$ , kuna trajektoorid näivad sinna suunduvat, ja ükski neist ei liigu sellest punktist eemale. Siiski, süsteemi (70) analüüsidest selgus, et punkt  $A$  asub tegelikult faasiruumi keskpunktis.

Kokkuvõttes, kuigi süsteemil puuduvad singulaarsused ja on leitavad kõik püsipunktid, ei võimalda need muutujad vaadelda trajektooride tiirlemist punkti  $A$  ümbruses. Seetõttu on faasiportree mõistmine ja tõlgendamine pikka analüüsi nõudev, mistõttu on nende muutujate kasutamine vähem eelistatud võrreldes muutujatega (66).



Joonis 5: Muutujate (69) faasiportreed e-astme ajas. **a)**  $\xi = 0$ . **b)**  $\xi = 1$ . Mõlema  $\xi$  väärtuse korral süsteemil on määratud 5 püsipunkti.

### 3.6 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}$ , $\bar{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M(M+\Phi)}$

Nüüd, tuginedes tulemustele, mis saadi muutujate (66) uurimisel, proovime rakendada sarnast loogikat muutujatele (47) ja (69), selle jaoks et faasiruumi keskel tekkiks trajektooride tiirlemine ja äärtel oleks võimalik leida püsipunkte. Selleks moodustame esmalt uue hübriidsete muutujate paari:

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M(M+\Phi)}, \quad (74)$$

ning uurime seda hübriidsetes ajas (40). Kasutades varasemalt saadud teadmisi, valitud muutujate korral võib teha eelduse, et süsteem on lõplik faasiruumi keskpunktis, kuna (69) on lõplik kogu faasiruumis ja (47) on lõplik faasiruumi keskpunktis. Kasutame tuletist (40) ja leiame dünaamilised võrrandid

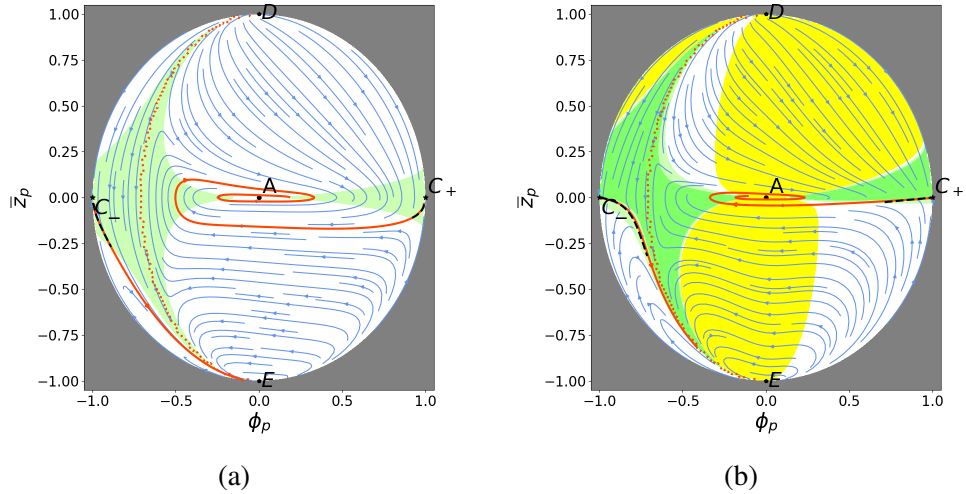
$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}} = \frac{M\bar{z}(\phi+1)}{H+M}, \quad (75a)$$

$$\frac{dz}{d\tilde{t}} = -\frac{18H\phi^3\xi^2\bar{z} + 3H\phi^3\xi\bar{z} + 18H\phi^2\xi^2\bar{z} + 3H\phi^2\xi\bar{z} + 3H\phi\bar{z} + 3H\bar{z} + M(\lambda\phi^3)}{(H+M)(\phi+1)(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)} - \frac{M(12\phi^3\xi^2\bar{z}^2 + 2\phi^3\xi\bar{z}^2 + 18\phi^2\xi^2\bar{z}^2 + 3\phi^2\xi\bar{z}^2 + 6\phi\xi^2\bar{z}^2 + \phi\xi\bar{z}^2 + \phi\bar{z}^2 + \bar{z}^2)}{(H+M)(\phi+1)(6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)}, \quad (75b)$$

kus

$$H = -\frac{M(6\phi^2\xi\bar{z} + 6\phi\xi\bar{z} - \sqrt{3T})}{6(\phi^2\xi + 1)}, \quad (76a)$$

$$T = \sqrt{\lambda\phi^6\xi + \lambda\phi^4 + 12\phi^4\xi^2\bar{z}^2 + 2\phi^4\xi\bar{z}^2 + 24\phi^3\xi^2\bar{z}^2 + \sqrt{4\phi^3\xi\bar{z}^2 + 12\phi^2\xi^2\bar{z}^2 + 2\phi^2\xi\bar{z}^2 + 2\phi^2\bar{z}^2 + 4\phi\bar{z}^2 + 2\bar{z}^2}}. \quad (76b)$$



Joonis 6: Muutujate (74) faasiportreed hübriidses ajas. **a)**  $\xi = 0$ . **b)**  $\xi = 1$ . Mõlema  $\xi$  väärtuse korral süsteemil on määratud 5 püsipunkti, faasiruumi vasakul pool tekib singulaarsus.

Dünaamilisest võrrandist  $\frac{dz}{dt}$  on näha, et joonisel punktides, kus  $\phi = -1$ , peavad ilmuma singulaarsused. Järgmisena on vaja leida globaalsed dünaamilised võrrandid, et oleks võimalik kujutada globaalset faasiportreed. Kuna need võrrandid on väga pikad, ei too me neid siinkohal välja.

Globaalsetest dünaamilistest võrranditest on võimalik leida viis püsipunkti:  $A$ ,  $C_{\pm}$ ,  $D$  ja  $E$ . Jooniselt on näha, et ootuspäraselt saavutasime trajektoorte tiirlemise keskpunkti ümber, kuid samas on faasiruumi vasakul poolel tekkinud singulaarsus. Kuigi vastavalt eeldustele on antud muutujate korral võimalik faasiruumis määrata kõigi püsipunktide asukohad ja vaadelda trajektoorte tiirlemist, ei rahulda valitud muutujate paar meie poolt seatud nõudeid, kuna faasiportreel tekib singulaarsus.

### 3.7 Muutujad $\phi = \frac{\Phi}{M}$ , $z = \frac{\Phi\dot{\Phi}}{M^3}$

Viimasena uurime, kuidas muutuja  $\Phi$  lisamine lugejasse mõjutab faasiportreed. Selleks defineerime muutujad:

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad z = \frac{\Phi\dot{\Phi}}{M^3}, \quad (77)$$

ja moodustame nende abil dünaamilise süsteemi e-astme ajas. Tulemuseks on järgmised dünaamilised võrrandid:

$$\frac{d\phi}{dN} = \frac{Mz}{H\phi}, \quad (78a)$$

$$\frac{dz}{dN} = -\frac{18\phi^2\xi^2z}{6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1} - \frac{3\phi^2\xi z}{6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1} + \frac{-3H\phi^2z - M\lambda\phi^6 + Mz^2}{H\phi^2 \cdot (6\phi^2\xi^2 + \phi^2\xi + 1)}, \quad (78b)$$

kus

$$H = -\frac{M \left( 6\phi\xi z - \sqrt{3}\sqrt{\lambda\phi^8\xi + \lambda\phi^6 + 12\phi^2\xi^2z^2 + 2\phi^2\xi z^2 + 2z^2} \right)}{6\phi(\phi^2\xi + 1)}. \quad (79)$$

Järgmisena leiame globaalsed dünaamilised võrrandid:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_p}{dN} = & \frac{z_p (3H_p\phi_p^2q^3z_p + M\lambda\phi_p^6 + Mq^6 + 6\phi_p^2\xi^2q (3H_p\phi_p^2z_p + Mq^3 + Mqz_p^2))}{H_p\phi_pq (6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)} + \\ & + \frac{z_p\phi_p^2\xi q (3H_p\phi_p^2z_p + Mq^3 + Mqz_p^2)}{H_p\phi_pq (6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)}, \end{aligned} \quad (80a)$$

$$\begin{aligned} \frac{dz_p}{dN} = & \frac{-3H_p\phi_p^4q^3z_p - 3H_p\phi_p^2q^5z_p - M\lambda\phi_p^8 - M\lambda\phi_p^6q^2 + Mq^6z_p^2}{H_p\phi_p^2q (6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)} + \\ & + \frac{-6\phi_p^4\xi^2qz_p (3H_p\phi_p^2 + 3H_pq^2 + Mqz_p) - \phi_p^4\xi qz_p (3H_p\phi_p^2 + 3H_pq^2 + Mqz_p)}{H_p\phi_p^2q (6\phi_p^2\xi^2 + \phi_p^2\xi + q^2)}, \end{aligned} \quad (80b)$$

kus

$$H_p = -\frac{M \left( 6\phi_p\xi q^2 z_p - \sqrt{3} \sqrt{\lambda\phi_p^8\xi + \lambda\phi_p^6q^2 + 12\phi_p^2\xi^2q^4z_p^2 + 2\phi_p^2\xi q^4z_p^2 + 2q^6z_p^2} \right)}{6\phi_pq (\phi_p^2\xi + q^2)}. \quad (81)$$

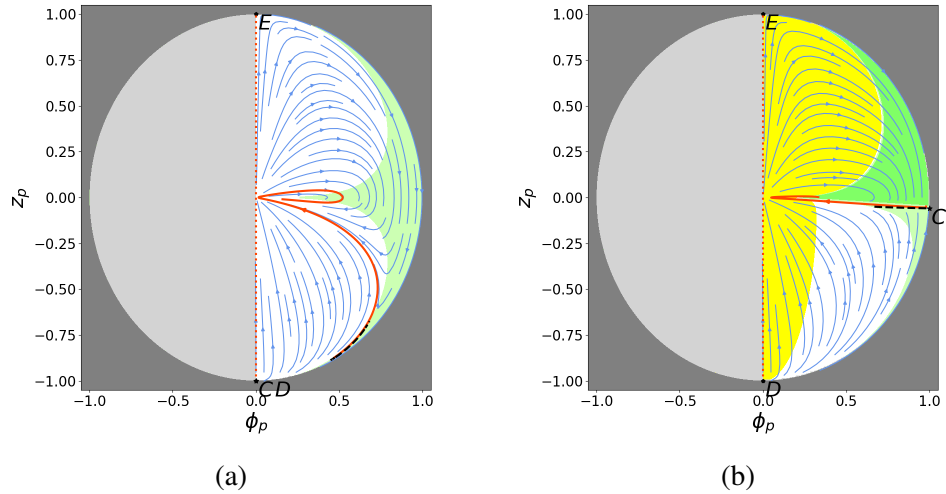
Joonistel (11) on näha, et punktid, mille korral  $\phi_p < 0$ , on mittefüüsikalised. Põhjuseks on see, et  $\phi_p < 0$  korral on võrrand (81) negatiivne. Dünaamilistest võrranditest saame leida kolm asümptootilist püsipunkti:  $C$ ,  $D$  ja  $E$ . Püsipunktide koordinaadid on järgmised:

$$E = (0, 1), \quad D = (0, -1), \quad C = (\phi_{pC}, \sqrt{1 - \phi_{pC}^2}), \quad (82a)$$

kus

$$\phi_{pC} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{\xi} (6\xi + 1)}{\sqrt{4\lambda + 108\xi^3 + 36\xi^2 + 3\xi}}. \quad (82b)$$

Tulemustest võib järeldada, et valitud muutujad ei rahulda meie poolt seatud nõudeid. Kuigi singulaarsus ei takista püsipunktide leidmist, on trajektooride käitumine punkti  $(0, 0)$  juures raskesti mõistetav. Lisaks on pool faasiruumist mittefüüsikaline, mis võib tekitada raskusi teiste inflatsioonimudelite uurimisel.



Joonis 7: Muutujate (77) faasiportreed e-astme ajas. **a)**  $\xi = 0$ , süsteemil on määratud 2 püsipunkti, C ja D on kokku sulanud. **b)**  $\xi = 1$ , süsteemil on määratud 3 püsipunkti.

### 3.8 Sobiva muutujapaari valik: lühikokkuvõtte

Uurisime erinevate muutujate võimekust kujutada mitteminimaalselt seotud Higgsi inflatsioonimudeli dünaamikat faasiruumis meetrilises formalismis. Otsisime sellist muutujate paari, mille korral kogu faasiruum oleks regulaarne, oleks võimalik määrata kõikide püsipunktide koordinaadid ning trajektooride käitumine oleks lihtsasti tõlgendatav ja vastaks tegelikele füüsikalistele seisunditele.

Kõige paremini täidavad ülalmainitud nõudeid muutujad  $\phi = \frac{\Phi}{M}$  ja  $z = \frac{\dot{\Phi}}{M(H+M)}$ . Nende muutujate korral ei teki faasiruumis singulaarsusi, püsipunktide asukohad on määratud ning on võimalik vaadelda trajektooride tiirlemist faasiruumi keskpunkti ümber. Valitud muutujate ainukeseks puuduseks jääb asjaolu, et kui  $\xi = 0$ , siis asümptootilised püsipunktid sulavad kokku. See ei ole siiski kriitiline, kuna meid huvitavad mitteminimaalselt seotud inflatsioonimudelid.

## 4 Inflatsioonimudelite uurimine

### 4.1 Reguleeriv parameeter $s$ muutujates

Eelmises peatükis pakutud muutujad (66) suutsid lahendada probleemi, kus dünaamilise süsteemi võrrandid muutusid singulaarseteks kas faasiruumi keskpunktis või asümptootikas. Lisaks olid faasiportreel kõik püsipunktid eristatavad ja nende asukohad määratud.

Joonisel (4b) nägime, et süsteemi trajektoorid hakkavad püsipunkti  $A$  ümber tiirlema, kusjuures see tiirlemine on kokku surutud mööda  $\tilde{z}_p$ -telge. Suuremate  $\xi$  väärtuste korral surutakse tiirlemine veelgi rohkem kokku, mistõttu muutub faasiportree dünaamika mõistmine keerulisemaks.

Selle käitumise põhjuseks on asjaolu, et inflatsiooni lõpus, st püsipunkti  $A$  läheduses, muutub muutuja  $\tilde{z}_p$  märkimisväärselt väiksemaks kui  $\phi_p$ . Selleks, et oleks võimalik muuta tiirlemist nähtavamaks sõltumata mudeli parameetritest, lisame muutujatesse (66) dimensioonitu positiivse reguleerimisparameetri  $s$

$$\phi = \frac{\Phi}{M}, \quad \hat{z} = \frac{\dot{\Phi}}{M(Ms + H)}. \quad (83)$$

Inflatsiooni alguses on parameetri  $H$  väärtus suur, mistõttu parameeter  $s$  mõjutab joonist vaid vähesel määral. Kui liigume faasiportree keskosa suunas, muutub  $H$  väikseks ning  $s$  hakkab avaldama olulist mõju joonisele. Kui  $s < 1$ , suureneb  $\tilde{z}$  esialgse väärtusega võrreldes ning tiirlemine venitatakse laiali. Kui  $s > 1$ , muutub  $\tilde{z}$  väiksemaks ning tiirlemine surutakse kokku. Kuna  $s$  on positiivne reaalarvuline konstant, ei mõjuta see faasiportree olemust, välja arvatud juhul, kui  $s = 0$ . Sel juhul taanduvad muutujad (83) muutujateks (59). Nüüd leiame modifitseeritud muutujate (83) dünaamilise süsteemi

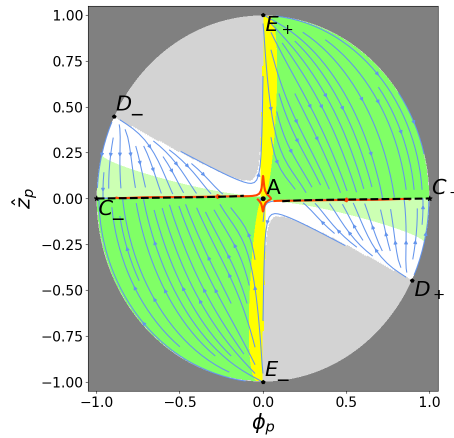
$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\hat{z}(H + Ms)}{H + M}, \quad (84a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{z}}{dt} = & - \frac{H^2 \hat{z} (36\phi^4 \xi^3 + 6\phi^4 \xi^2 + 48\phi^3 \hat{z} \xi^3 + 8\phi^3 \hat{z} \xi^2 - 6\phi^2 \hat{z}^2 \xi^2 - \phi^2 \hat{z}^2 \xi)}{4(H + M)(H + Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} + \\ & + \frac{H^2 \hat{z} (36\phi^2 \xi^2 + 12\phi^2 \xi + 24\phi \hat{z} \xi^2 + 8\phi \hat{z} \xi - 4\hat{z}^2 \xi - \hat{z}^2 + 6)}{4(H + M)(H + Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{HM \hat{z} s (36\phi^4 \xi^3 + 6\phi^4 \xi^2 + 36\phi^3 \hat{z} \xi^3 + 6\phi^3 \hat{z} \xi^2 - 6\phi^2 \hat{z}^2 \xi^2 - \phi^2 \hat{z}^2 \xi)}{2(H + M)(H + Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} + \\ & + \frac{(36\phi^2 \xi^2 + 12\phi^2 \xi + 24\phi \hat{z} \xi^2 + 6\phi \hat{z} \xi - 4\hat{z}^2 \xi - \hat{z}^2 + 6)}{2(H + M)(H + Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{M^2 (6\lambda \phi^6 \hat{z} \xi^2 + \lambda \phi^6 \hat{z} \xi + 8\lambda \phi^5 \xi + 8\lambda \phi^4 \hat{z} \xi + \lambda \phi^4 \hat{z} + 8\lambda \phi^3)}{8(H + M)(H + Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)} - \\ & - \frac{M^2 s^2 (48\phi^3 \hat{z}^2 \xi^3 + 8\phi^3 \hat{z}^2 \xi^2 - 12\phi^2 \hat{z}^3 \xi^2 - 2\phi^2 \hat{z}^3 \xi + 48\phi \hat{z}^2 \xi^2 + 8\phi \hat{z}^2 \xi - 8\hat{z}^3 \xi - 2\hat{z}^3)}{8(H + M)(H + Ms)(\phi^2 \xi + 1)(6\phi^2 \xi^2 + \phi^2 \xi + 1)}, \quad (84b) \end{aligned}$$

kus

$$H = \frac{M \left( 12\phi\xi sz - 2sz^2 - \sqrt{2}\sqrt{6\lambda\phi^6\xi + 12\lambda\phi^5\xi z - \lambda\phi^4 z^2 + 6\lambda\phi^4 + 72\phi^2\xi^2 s^2 z^2 + 12\phi^2\xi s^2 z^2 + 12s^2 z^2} \right)}{2(-6\phi^2\xi - 12\phi\xi z + z^2 - 6)} . \quad (85)$$

Globaalsed dünaamilised võrrandid on jällegi liiga pikad, et neid siin kirja panna. Sellegipoolest ei erine nad kvalitatiivselt varasematest võrranditest muutujates (66), ning seda saab järeldada piltide (8) ja (4) kvalitatiivselt sarnasest kujust. Saame teha järelduse, et reguleerimisparameeter  $s$  töötab ootuspäraselt, ning seetõttu saame kasutada modifitseeritud muutujaid (83) teiste inflatsioonimudelite uurimiseks.



Joonis 8: Higgsi inflatsioonimudeli dünaamilise süsteemi globaalne faadiportree muutujates (83) kui  $s = 0.005$ ,  $\lambda = 0.129$ ,  $v = 0$  ja  $\xi = 100$ .

## 4.2 Starobinsky inflatsioon meetrilises formalismis

Nüüd, kui sobiv muutujate paar on leitud, saame kontrollida, kas need muutujad suudavad edukalt kujutada ka teiste inflatsioonimudelite dünaamikat koos kõikide oluliste eripäradega. Esimesena uurime Starobinsky inflatsioonimudelit meetrilises formalismis. Starobinsky mudel on määratud järgmiste funktsioonidega [11]:

$$\mathcal{A} = M\Phi, \quad \mathcal{B} = 0, \quad \mathcal{V} = \frac{M^2}{8\beta} (\Phi - M)^2 . \quad (86)$$

Lisaks eeldame antud mudeli korral, et  $\Phi$  on positiivne, vastavalt tingimusele (21), sest vastasel juhul tähendaks see, et tegemist on antigravitatsiooniga. Parameeter  $\beta$  on positiivne dimensioonitu suurus, mille väärtuseks võtame  $\beta = 40\,000$  [11]. Leiame dünaamilised võrrandid ja seejärel

asendame sisse mudelfunktsioonid (86), tulemuseks saame dünaamilise süsteemi

$$\frac{d\phi}{d\tilde{t}} = \frac{z(H + Ms)}{H + M}, \quad (87a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{z}}{d\tilde{t}} = & - \frac{72H^2\beta\phi z + 24H^2\beta z^2 + 144HM\beta\phi s z + 24HM\beta s z^2 +}{48\beta\phi(H + M)(H + Ms)} \\ & + \frac{3M^2\phi^2 z + 8M^2\phi^2 - 2M^2\phi z - 8M^2\phi - M^2 z}{48\beta\phi(H + M)(H + Ms)}, \end{aligned} \quad (87b)$$

kus

$$H = - \frac{M \left( 6\sqrt{\beta} s z - \sqrt{6\sqrt{6\beta} s^2 z^2 + \phi^3 + \phi^2 z - 2\phi^2 - 2\phi z + \phi + z} \right)}{12\sqrt{\beta}(\phi + z)}. \quad (88)$$

Seejärel leiame globaalsed dünaamilised võrrandid, mis on jällegi liiga pikad, et tuua neid siin välja. Sellegipoolest tuletatud dünaamiline süsteem on lõplik nii asümptootikas kui ka faasiportree keskpunktis, ning füüsikalise ruumi sees singulaarsusi ei esine. Dünaamilistest võrranditest saab määrata 5 püsipunkti:  $A$ ,  $B$ ,  $C_+$ ,  $D_+$  ja  $E_+$ . Siin on  $A$  mitte-hüperboolne punkt mis asub koordinaatidel  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ . Punkt  $B$  asub koordinaatidel  $(0, 0)$  ja tema karakteristik maatriks ja selle omaväärtused on

$$L_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad (89a)$$

$$k_{B1} = 4, \quad k_{B2} = -1. \quad (89b)$$

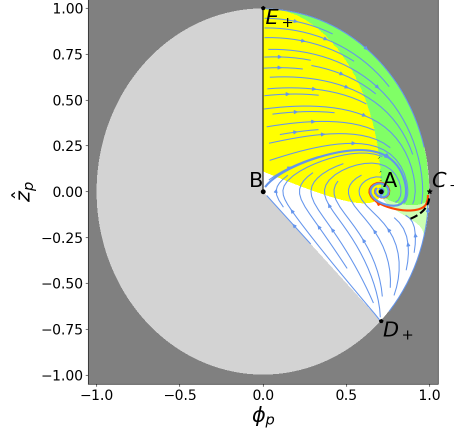
Kuna üks omaväärtustest on positiivne ja teine negatiivne tähendab see et punkt  $B$  on sadulpunkt.

Punktid  $C_+$ ,  $D_+$  ja  $E_+$  on sama tüüpi püsipunktid nagu oli defineeritud Higgsi mudeli korral. Punkt  $C_+$  on asümptootiline, de Sitteri efektiivse barotroopse indeksiga püsipunkt. Joonisel (9) näeme, et sarnaselt Higgsi inflatsioonimudeliga, punktist  $C_+$  algab peamine heterokliinne, ehk kaht kriitilist punkti ühendav, trajektoor, millele lähenevad kõik ülejäänud trajektoorid ja mille ligikaudseks lahendiks inflatsiooni algaasis on aeglase veeremise trajektoor. Üheks silmapaistvaks erinevuseks võrreldes Higgsi inflatsioonimudeliga on see, et veel üks sarnane heterokliinne trajektoor väljub punktist  $B$ , kuid see ei saa olla inflatsiooni allikaks, sest siis peaks inflatsioon algama juba aeglustavas režiimis, mille tõttu punktist  $B$  ei välju aeglase veeremise trajektoori. See tähendab, et punkt  $B$  ei saa olla inflatsiooni allikaks.

Antud mudeli veel üheks eripäraks on see, et joonel punktide  $B$  ja  $E_+$  vahel puudub trajektoor, mis peaks minema mööda füüsikalise piirkonna äärt. Selle asemel liiguvad trajektoorid selle äärega risti, mis tähendab, et punktide  $B$  ja  $E_+$  vahel asub trajektooride väljavenitatud allikas. Märgistame seda allikat musta joonega. Võrreldes allikaga [11] saime sarnase joonise, kuid meie korral on eeliseks see, et sellel ei esine muutujate valikust tingitud singulaarsust, mis võimaldab lihtsasti uurida mudeli dünaamikat punkti  $A$  ümbruses. Eriti võimaldab see teha otsuseid selle kohta, millised trajektoorid võivad tegelikkuses jõuda aeglase veeremise trajektoori. Allikas [11] ei võimaldanud selliseid otsuseid teha, kuna oli raske aru saada, millised trajektoorid, mis näiteks

väljuvad punktist  $E$ , on võimelised läbima singulaarsust.

Kokkuvõttes näeme, et hübriidsed muutujad (66) suutsid lahendada probleemi, mis esines allikas [11], ning faasiportree füüsikaline piirkond on regulaarne ning kõikide püsipunktide asukohad on määratud.



Joonis 9: Starobinski inflatsioonimudeli hübriidsete muutujate abil esitatud faasiportree, parameetritega:  $s = 0.005$  ja  $\beta = 40\,000$ .

### 4.3 Pooluse inflatsioon, meetriline formalism

Järgmisena uurime poolustega (*pole*) inflatsioonimudelit meetrilises formalismis. Selle mudeli korral tuuakse sisse poolused kineetilise seose funktsioonis  $\mathcal{B}$ . Valitud mudeli korral on mudelfunktsioonid järgmise kujuga [11]:

$$\mathcal{A} = M^2, \quad \mathcal{B} = \frac{6\alpha M^2 \Phi^2}{(6\alpha M^2 - \Phi^2)^2}, \quad \mathcal{V} = \frac{\lambda}{4} \Phi^4. \quad (90)$$

Parameetrid  $\alpha$  ja  $\lambda$  on siin dimensioonitud suurused, mille väärtusteks võtame  $\alpha = 1$  ja  $\lambda = 10^{-4}$ . Selle mudeli poolused paiknevad punktides, kus  $\Phi = \pm\sqrt{6\alpha}M$ . Märkame, et mudeli dünaamika on samasugune nii meetrilises kui ka Palatini formalismis, sest funktsioon  $\mathcal{A}$  on konstantne ja seega  $\mathcal{A}' = 0$ , mille tõttu võrranditest (26) kaovad kõik liikmed, mis sisaldavad sümboleid  $\delta_m$  ja  $\delta_P$ . Lisaks tähendab konstantne  $\mathcal{A}$  seda, et skalaarväli ja kõverus on seotud minimaalselt.

Kasutades modifitseeritud hübriidseid muutujaid (83) ja hübriidset aega, leiame mudeli dünaamilised võrrandid. Seejärel leiame globaalsed dünaamilised võrrandid. Ei hakka aga kirjutama välja dünaamilisi võrrandeid, kuna need on liiga pikad. Leitud dünaamilistest võrranditest saab leida kaheksa püsipunkti:  $B_{\pm}$ ,  $C_{\pm}$ ,  $D_{\pm}$  ja  $E_{\pm}$ . Sama mudeli faasiportree keskpunktis esines Allikas [11] punkt  $A$ , mida me ei näita oma joonisel, kuna võrrandis

$$\lim_{z \rightarrow 0} \lim_{\phi \rightarrow 0} \left( \frac{dz}{dt} \right) = 0, \quad (91)$$

annab vastupidine piirväärtuste järjekord tulemuseks lõpmatuse, mille tõttu ei saa kindlusega öelda, kus täpselt asub punkt  $A$ .

On näha, et ühelt pooluselt, milleks on püsipunkt  $B$  ja kus kehtib  $\Phi = \pm\sqrt{6\alpha}M$ , väljub peamine heterokliinne trajektoor koos aeglase veeremise trajektooriga. Mõlemad trajektooriga alustavad oma teed kiirenenud paisumise režiimis ja liiguvad aeglustunud paisumise režiimi. See vastab käitumisele, mis on kvalitatiivselt sarnane Starobinsky ja Higgsi mudelitega, ning on kooskõlas allika [11] tulemustega. Poolustega mudeli üks peamine erinevus ülejäänud kahest mudelist seisneb selles, et veel on olemas mittehüperboolne punkt  $C$ , kust algab peatrajektoor ja liigub punkti  $B$  juurde. Sellest hoolimata algab selle trajektoori korral liikumine aeglustunud režiimis ning hiljem sattub kiirenenud režiimi, kust trajektoor ei välju, kuni jõuab punktini  $B$ . Samas ei saa see trajektoor liikuda välimisest füüsilisest piirkonnast sisse, kuna punktis  $B$  lõpeb tema areng. Mõlema püsipunkti  $B\pm$  karakteristiklik maatriks on

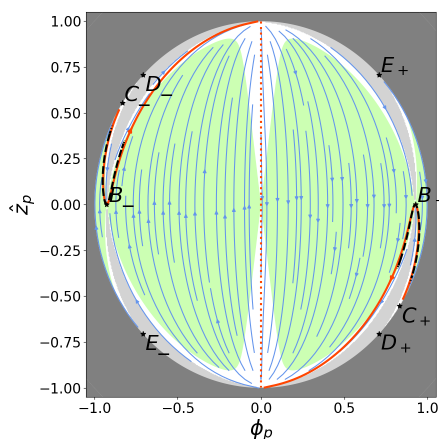
$$L_B \approx \begin{bmatrix} 0 & 0.008 \\ 0 & -0.156 \end{bmatrix}, \quad (92)$$

eeldusel, et  $\alpha = 1$ ,  $\lambda = 10^{-4}$  ja  $s = 0.005$ , ning selle maatriksi omaväärtused on

$$k_{B1} = 0, \quad k_{B2} \approx -0,156. \quad (93)$$

Tuginedes karakteristikliku maatriksi omaväärtusele, saab öelda, et punkt  $B$  on mittehüperboolne punkt.

Lisaks on näha, et faasiruumi keskel tekib singulaarsus, sarnaselt tulemusega allikas [11]. Selles töös aga selgus, et see singulaarsus ei ole põhjustatud meie muutujate valikust, vaid on antud mudeli omaduseks. Põhjus, mille pärast tekib see singulaarsus, seisneb selles, et kui  $\Phi \rightarrow 0$ , siis ka kineetilise seose liige  $\mathcal{B} \rightarrow 0$ , ning kuna  $\mathcal{A} = \text{const}$  tõttu  $\mathcal{A}' = 0$ , siis selle tulemusena kosmoloogilise võrrandi (26c) teine ja kolmas liige muutuvad singulaarseteks sõltumata muutujate valikust. Viimast väidet arvesse võttes võib öelda, et muutujad (83) demonstreerisid ka antud mudeli korral enda võimekust kujutada dünaamikat kõigi oluliste omadustega, ilma et nad põhjustaksid singulaarsuste teket.



Joonis 10: Poolustega inflatsioonimudeli hübriidsete muutujate abil esitatud faasiportree, meetrilises formalismis, parameetritega:  $s = 0.005$   $\alpha = 1$  ja  $\lambda = 10^{-4}$

#### 4.4 Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudel, Palatini formalism

Viimasena uurime mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudelit Palatini formalismis. Mudeli funktsioonide kuju on järgmine [11]:

$$\mathcal{A} = M^2 + \xi\Phi^2, \quad \mathcal{B} = 1, \quad \mathcal{V} = \lambda (M^2 + \xi\Phi^2)^2 \left[ 1 - \left( \frac{M}{\sqrt{M^2 + \xi\Phi^2} + \sqrt{\xi}|\Phi|} \right)^{\frac{\alpha}{\sqrt{\xi}}} \right]. \quad (94)$$

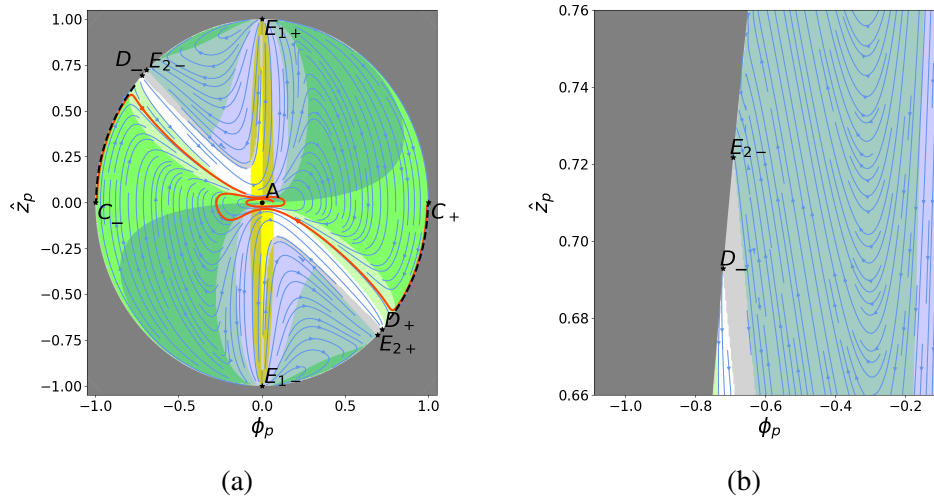
kus  $\lambda$ ,  $\xi$  ja  $\alpha$  on positiivsed dimensionitud parameetrid, mille väärtusteks võtame  $\lambda = 10^{-5}$ ,  $\xi = 100$  ja  $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Ei hakka siin tooma välja dünaamilisi võrrandeid, kuna need on liiga pikad ja ei võimalda kohest järelduste tegemist mudeli käitumise kohta. Kuna funktsioon  $\mathcal{A}$  ei ole konstant, tekivad olulised erinevused mudeli dünaamikas Palatini ja meetrilise formalismi vahel. Lisaks seisneb antud mudeli suurim erinevus teistest seni uuritud mudelitest selles, et faasiportreel (11a) on korruga kujutatud piirkonnad, mille dünaamikad vastavad funktsioonide  $H_{\phi z+}$  ja  $H_{\phi z-}$  väärtustele. Funktsioonile  $H_{\phi z-}$  vastavad taskud punktide  $E_{2\pm}$  ja  $E_{1\pm}$  vahel ja ülejäänud piirkond vastab funktsioonile  $H_{\phi z+}$ . Oleme kujutanud kahele erinevale funktsioonile vastavad piirkonnad, sest mõlemate funktsioonide  $H_{\phi z\pm}$  väärtused vastavad algele funktsiooni (27) -  $H_+$  väärtusele samade  $\Phi$  ja  $\dot{\Phi}$  väärtuste korral. Teisisõnu füüsikalised on punktid, kus funktsioonide  $H_{\phi z\pm}$  ja  $H_+$  väärtused langevad kokku.

Kaks füüsikalist piirkonda on eraldatud mittefüüsikalise piirkonnaga, kus ükski funktsioonide  $H_{\phi z\pm}$  väärtustest ei vasta ühelegi funktsiooni  $H_+$  väärtusele samas punktis. Kui uurime ainult  $H_+$  väärtusi, siis funktsiooni  $H_{\phi z\pm}$  piirkonnad ei kattu, mis võimaldab neid kujutada ühel faasiportreel. Funktsioonile  $H_-$  vastavat joonist ei too selles töös välja, kuid selle korral hakkavad kaks füüsikalist piirkonda kattuma, mistõttu neid tuleb kujutada eraldi faasiportreedena.

Sinine piirkond tähistab punkte, kus parameetri  $H$  väärtus on negatiivne, mis tähendab, et selles piirkonnas toimub Universumi kokkutõmbumine. Peame negatiivseid väärtusi parameetril  $H$  füüsikalisteks, sest Palatini formalismis, mudeli funktsioonide (94) korral, võib avaldise (27) positiivne haru võtta ka negatiivseid väärtusi, sest ruutjuure all olev liige ei ole alati võrdne või suurem esimesest liikmest.

Üheks probleemiks, mida ei suudetud lahendada ega selgitada selle töö käigus, on see, et  $H_{\phi z-}$  piirkonnas tekib joon, joonisel (11b), kuhu liiguvad selle piirkonna trajektorid ning jäävad selle peal seisma. Teisisõnu, tekkis joon, mis käitub nagu püsipunkt, kuid selle joone täpset avaldist ei suudetud leida. Kokkuvõttes näitasid antud mudeli korral muutujad (66) head tulemust. Võrreldes allika tulemusega [11], ei esine enam faasiportreel singulaarsust, ja on märgitud piirkond, kus toimub Universumi kokkutõmbumine. Lisaks leiti, et Palatini formalismis võivad parameetritele  $H_+$  vastata osad  $H_{\phi z+}$  ja  $H_{\phi z-}$  väärtused.



Joonis 11: Mitte-minimaalselt seotud inflatsioonimudel, hübriidsete muutujate abil esitatud faasiportree, Palatini formalismis, paraametriritega:  $s = 0.05$  ja  $\lambda = 10^{-5}$ ,  $\xi = 100$  ja  $\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$ .

# Varase Universumi inflatsiooni dünaamika faasiruumis

Dmitri Kraiko

## Kokkuvõte

Käesoleva bakalaureusetöö teoreetilises osas tutvusime kaasaegse kosmoloogia ja inflatsiooniteooria põhimõistetega ning olulisemate võrranditega. Seejärel tegime sissejuhatuse skalaar-tensorteooriasse ja näitasime, millisel kujul avalduvad kosmoloogilised võrrandid skalaar-tensor teooriate raames. Lisaks andsime lühikese ülevaate dünaamiliste süsteemide meetodite teooriast, kus selgitasime põhimõisteid, defineerisime peamisi püsipunktide tüüpe ja kirjeldasime, kuidas toimub Poincaré teisendus. Viimasena kirjeldasime kogu selle praktilise töö protsessi, mille eesmärgiks on kujutada inflatsioonimudeli dünaamikat faasiportreel.

Töö esimeses praktilises osas demonstreerisime tulemusi erinevate dünaamiliste muutujate uurimisest mitte-minimaalselt seotud Higgsi inflatsioonimudeli jaoks. Kõige suuremat huvi muutujate uurimisel pakkus lõplik globaalne faasiportree. Iga muutujate paari korral kontrollisime, kas kõik püsipunktid on võimalik määrata, kas süsteemis tekivad singulaarsused, ja seda, kui lihtne on interpreteerida faasiportreel kujutatud dünaamikat. Selle töö osa tulemusena leidsime, et kõige paremini täidavad nimetatud nõudeid hübriidsed muutujad (66).

Töö teises praktilises osas kontrollisime, kas eelmises osas sobivaks valitud muutujate paar suudab täita dünaamika kujutamise nõudeid ka teiste skalaar-tensorteooriate inflatsioonimudelite korral. Täpsemalt uurisime selles osas Starobinsky, poolustega ja mitte-minimaalselt seotud Palatini inflatsioonimudeleid. Lisaks muutujate kontrollimisele uurisime lähemalt mudelite omadusi ja võrdlesime neid teiste tööde tulemustega.

Lõpetuseks, leidsime antud töö raames sobiva muutujate paari, mille abil saab kujutada suvaliste skalaar-tensorteooriate inflatsioonimudelite dünaamikat nii, et faasipildil oleksid nähtavad kõik mudeli peamised omadused. Leitud muutujate paar sai edukalt hakkama valitud inflatsioonimudelite kujutamisega. Lisaks täpsustati antud töö käigus tingimused, mille järgi saab otsustada, millised faasipildi punktid on mittefüüsikalised. Seega võime öelda, et antud töö eesmärgid on täidetud ja hüpotees osutus õigeks. Märkimisväärseks jääb püsipunkti omadustega joon, mis tekib pildil (11a) ja mille päritolu ei õnnestunud täielikult mõista. See võib olla lähtepunktiks töö ühele võimalikule edasiarendusele. Lisaks on võimalik jätkata inflatsiooni dünaamika kujutamise teise meetodi mittefüüsikalise piirkonna tingimuste uurimist, mida kirjeldasime alapeatükis (2.4.2).

## Kirjandus

- [1] S. Weinberg. *Cosmology*. Oxford University Press, 2008. ISBN: 9780198526827.
- [2] M. Jèrôme, C. Ringeval ja V. Vennin. “Encyclopædia Inflationaris”. *Phys.Dark Univ* 5-6 (2014), lk. 75–235.
- [3] S. Capozziello ja M. De Laurentis. “Extended Theories of Gravity”. *Physics Reports* 509 (2011), lk. 167–321.
- [4] L. Jarv, P. Kuusk ja M. Saal. “Remarks on (super-)accelerating cosmological models in general scalar-tensor gravity”. *Proc. Est. Acad. Sci. Phys. Math.* 59 (2010), lk. 306–312. DOI: 10.3176/proc.2010.4.09.
- [5] T. Tenkanen. “Tracing the high energy theory of gravity: an introduction to Palatini inflation”. *General Relativity and Gravitation* 52:33 (2020).
- [6] S. Bahamonde ja teised. “Dynamical systems applied to cosmology: dark energy and modified gravity”. *Physics Reports* 775-777 (2018), lk. 1–122.
- [7] A. Di Marco, E. Orazi ja G. Pradisi. “Introduction to the Number of e-Folds in Slow-Roll Inflation”. *Universe* 10.7 (2024), lk. 284. ISSN: 2218-1997. DOI: 10.3390/universe10070284.
- [8] V. Faraoni. *Cosmology in Scalar-Tensor Gravity*. Springer Dordrecht, 2004.
- [9] C. Brans ja R. H. Dicke. “Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation”. *Phys. Rev* 124 (1961), lk. 925–935.
- [10] L. Järv ja teised. “Invariant quantities in the scalar-tensor theories of gravitation”. *Phys. Rev. D* 91 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevD.91.024041.
- [11] L. Järv, S. Karamitsos ja M. Saal. “Global Portraits of Nonminimal Inflation: Metric and Palatini”. *Phys. Rev. D* 109 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevD.109.084073.
- [12] C. G. Böhm ja N. Chan. “Dynamical Systems in Cosmology”. Teoses: *Dynamical and Complex Systems*. WORLD SCIENTIFIC (EUROPE), 2016, lk. 121–156. ISBN: 9781786341044.
- [13] L. Järv ja A. Toporensky. “Global portraits of nonminimal inflation”. *The European Physical Journal C* 82.2 (2022). DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10124-3.
- [14] L. Järv ja J. Lember. “Global Portraits of Nonminimal Teleparallel Inflation”. *Universe* 7.6 (2021), lk. 179. DOI: 10.3390/universe7060179.
- [15] F. Bezrukov ja M. Shaposhnikov. “The Standard Model Higgs boson as the inflaton”. *Physics Letters B* 659.3 (2008), lk. 703–706. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/j.physletb.2007.11.072. URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2007.11.072>.

# Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja lõputöö üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Dmitri Kraiko,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) enda loodud teose **Varase Universumi inflatsiooni dünaamika faasiruumis**, mille juhendaja on PhD Laur Järv,
  - (a) reprodutseerimiseks säilitamise ja üldsusele kättesaadavaks tegemise eesmärgil, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace-is lisamise eesmärgil kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni;
  - (b) üldsusele kättesaadavaks tegemiseks Tartu Ülikooli veebikeskkonna kaudu, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace'i kaudu kuni autoriõiguse kehtivuse tähtaja lõppemiseni.
2. olen teadlik, et punktis 1 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.
3. kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei rikuta teiste isikute intellektuaalomandi ega isikuandmete kaitse seadusest tulenevaid õigusi.

Tartu, 4. juuni 2025. a.