Oskar Kool

Trigonomeetrilisi planimeetria ülesandeid

Arvulised vastused nelja- ja viiekohaliste logaritmide järele
Näiteid logaritmide tabelite tarvitamisest

Keskkooli kursus

Autori kirjastus, Tartus
1928

Oskar Kool

Trigonomeetrilisi planimeetria ülesandeid

Arvulised vastused nelja- ja viiekohaliste logaritmide järele
Näiteid logaritmide tabelite tarvitamisest

Keskkooli kursus

Autori kirjastus, Tartus
1928

Trükitud Ed. Bergmann'i trükikojas, Tartus.

Eessôna.

Täpsema termini puudusel olen tarvitanud käesolevas raamatus ja ka varem ilmunud «Analüütilise geomeetria põhijoonis ja ülesandeis» 90^{0}-lise nurga jaoks nimetust püstnurk, kuna täisnurk minu arvates tähendab 360^{0}-list nurka: täispöördele peaks vastama täisnurk. Mõned kutsuvad 90^{0}-list nurka õigeks nurgaks. See oleks kohane siis, kui sirge nurk ka tähendaks 90^{0}-list nurka, sest nagu õige joon ja sirge joon ei erine tähenduse poolest, nii ei tohiks erineda ka õige nurk ja sirge nurk. Vaevalt saab aga loobuda sirgest nurgast tema praeguses tähenduses ($=180^{0}$). Ennem tuleks loobuda õigest nurgast ($=90^{0}$).

Juhin tähelepanu veel sõnadele ristjoon ja ristsumma. Nagu võiks olla summa perpendikulaarne!

Allikatena selle raamatu koostamisel on olnud Rõbkin'i ja mõnede teiste autorite enam-vähem üldiselt tuntud ülesannete kogud.

O. K.

Tartus, 30. augustil 1928.

Sissejuhatus.

Logaritmidest üldse.

1. Ligikaudsed väärtused võetakse logaritmidel puudusega või liiaga vastavalt selle järele, kas ärajäetud osa esimene number on 0, 1, 2, 3, 4 või 5, 6, 7, 8, 9. Kui tegemist mitme logaritmiga, on vigade hävimiseks nii viisi kõige rohkem võimalusi, sest vähendamise ja suurendamise juhte on ühepalju. Neljakohaliste logaritmide puhul võib sekundid minutiteks ülendada. Minutite esimene kümnendkoht tuleb siis alal hoida. Selles raamatus on sekundid lihtsuse pärast ära visatud. On olnud neid sealjuures 30 või üle selle, on minutite arvu suurendatud 1 võrra, on olnud neid aga alla 30, ei ole minutite arvu muudetud. Viiekohalistel logaritmidel on arvutatud sekunditega.

2. Logaritmi karakteristik omab sama palju ühelisi kui arvu täisosa numbreid ilma üheta.

On **kümnendmurru** logaritmi mantiss positiivne, siis karakteristik omab sama palju negatiivseid ühelisi kui arv nulle alul, ka null tervet kaasa arvatud.

Mantiss oleneb arvu numbreist, aga mitte koma seisukohast.

Mantissi kasv loetakse võrdeliseks arvu kasvuga. Tabeli mantisside vahet nim. differentsiks.

Trigonomeetrilistest funktsioonidest omavad siinus ja tangens positiivsed, aga koosinus ja kootangens negatiivsed parandised.

3. Logaritmide täiendamine. Keerulistel avaldistel summitakse liidetavad ja lahutatavad logaritmid eraldi ning lahutatakse esimesest summast teine, sellejuures laenatakse tarviduse korral ka nullilt või negatiivselt arvult. Näiteks:

$$\begin{array}{r} \dot{0},8754 \\ -\;2,9520 \\ \hline \bar{3},9234 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \dot{\bar{1}},37615 \\ -\;\bar{4},64503 \\ \hline 2,73112 \end{array}$$

Kuid muutes lahutatavate logaritmide mantissid positiivseiks, liites neid +1-ga ja karakteristikuid —1-ga, võime summida kõik logaritmid korraga.

Reegel. Lahutatav logaritm muutub liidetavaks, kui tema karakteristikut suurendada 1 võrra ja saadus võtta vastasmärgiga, kuna mantissi viimane number tuleb täiendada 10-ni (ehk lahutada 10-st), teised aga 9-ni. On viimane number 0, täiendatakse eelviimast 10-ni. Järelikult:

$$-2,9520 = \bar{3},0480\,; \quad -\bar{4},64503 = 3,35497$$

ja

$$\begin{array}{r} 0,8754 \\ +\;\bar{3},0480 \\ \hline \bar{3},9234 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \bar{1},37615 \\ +\;3,35497 \\ \hline 2,73112 \end{array}$$

Jagamisel täiendatakse negatiivset karakteristikut nii, et ta jaguks jäägita:

$$\bar{2},8425 : 5 = \overset{-3\;+3}{\bar{2}\,,\,8425} : 5 = (\bar{5} + 3,8425) : 5 = \bar{1},7685\,; \quad \text{aga}$$

$$3,16984 : 2 = 1,58492.$$

4. Abinurk. Summat või vahet saab muundada abinurga võttel korrutiseks. Lahendades näiteks ülesannet nr. 74 leiame, et otsitav pind

$$Q = \frac{a^2 \operatorname{sn}^2 \alpha}{8 \operatorname{sn}^4 (45^0 - {}^1/_2\alpha)} \left(\operatorname{ctg} \alpha - \pi \cdot \frac{90^0 - \alpha}{180^0}\right).$$

Oletades, et $\operatorname{ctg} \varphi = \pi . \frac{90^0 - \alpha}{180^0}$, saame $Q = \frac{a^2 \operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} (\varphi - \alpha)}{8 \operatorname{sn} \varphi \operatorname{sn}^4 (45^0 - {}^1/_2\alpha)}$.

Kootangensi kaudu leiame kõige pealt nurga φ, siis pinna Q tema avaldisest.

Neljakohalised logaritmid.

5. Logaritmi otsimisel võime asetada arvu koma nii, et ilmuks kolmekohaline täisarv, mille mantiss on tabelis; koma asetamist võib teha ka ainult mõttes.

Näide 1. Leida arvu 5,234 logaritm.[1]

$$\begin{array}{lcr} \lg 523{,}0 = 2{,}7185 & (\text{Diff.} = 8) & 1 \ldots 8 \\ \quad 0{,}4 \ldots . \ 3{,}2 & & 0{,}4 \ldots x \\ \hline \lg 523{,}4 = 2{,}7188 & & x : 8 = 0{,}4 : 1 \\ \lg 5{,}234 = 0{,}7188 & & x = 0{,}4 . 8 = 3{,}2 \end{array}$$

Näide 2. Leida arvu 0,025749 logaritm.

$$\begin{array}{lcr} \lg 0{,}025700 = \bar{2}{,}4099 & (17) & 1 \ \ldots . \ 17 \\ \quad 0{,}4 \ \ldots . \ 6{,}8 & & 0{,}49 \ldots . \ x \\ \quad 0{,}09 \ \ldots . \ 1{,}53 & & \\ \hline \lg 0{,}02549 = \bar{2}{,}4107 & & x : 17 = 0{,}49 : 1 \\ & & x = 0{,}49 . 17 \approx 8 \end{array}$$

Näide 3. Leida arvu 78026 logaritm.

---

1) Tarvitada näiteks Viktor Pässi neljakohalisi logaritmide tabeleid.

$$\begin{array}{lcl}
\lg 78000 = 4{,}8921 & (6) & 1 \ldots . 6 \\
\quad 0{,}2 \ldots .. 1{,}2 & & 0{,}26 \ .. \ x \\
\quad 0{,}06 \ldots . 0{,}36 & & x : 6 = 0{,}26 : 1 \\
\hline
\lg 78026 = 4{,}8923 & & x = 0{,}26 . 6 = 1{,}56
\end{array}$$

Kõigis neis näiteis on saadud logaritmi parandis (x) proportsioonist ja proportsionaalsete osade tabelist. Selgub: L o g a r i t m i p a r a n d i s = a r v u k a s v $\times$ d i f f e r e n t s, kus differents on tabeli kahe järjestikuse mantissi vahe, mille vahel on otsitav mantiss. Selle korrutise leidmiseks kasutataksegi pr. osade tabelit. Vaatleme näidet 2. Differents on 17 ja arvu kasv 0,49. Horisontaalreast, milles esimesel kohal 17, omame kõige ülemise rea arvude 0,4 ja 0,9 kohalt korrutised 0,4 . 17 = 6,8; 0,9 . 17 = 15,3 ehk 0,09 . 17 = 1,53. Mis nende korrutistega on tehtud, näeme näitest enesest.

6. Logaritmile vastava arvu leidmine.

Näide 1. Leida arv N, kui lg N = 1,4594.

$$\begin{array}{r}
\lg N = 1{,}4594 \\
94 \ldots . 288 \\
\hline
N = 28{,}8
\end{array}$$

Näide 2. Leida arv N, kui lg N = 0,9752.

$$\begin{array}{rcl}
\lg N = 0{,}9752 & (4) & 4 \ldots 1 \\
50 \ldots 944 & & 2 \ldots x \\
\hline
2 & & x : 1 = 2 : 4 \\
2{,}0 \ldots 5 & & x = 2 : 4 = 0{,}5 \\
\hline
N = 9{,}445 & &
\end{array}$$

Näide 3. Leida arv N, kui lg N = $\overline{2}$,3827.

$$
\begin{array}{llll}
\lg N = \bar{2},3827 & (18) & & 18 \ldots\ldots 1 \\
\quad 20 \ldots 241 & & & 7 \ldots\ldots x \\
\quad 7 & & & x:1 = 7:18 \\
\quad 7,2 \ldots 4 & & & x = 7:18 \approx 0,4 \\
\quad N = 0,02414 & & &
\end{array}
$$

Näide 4. Leida arv N, kui $\lg N = 3,0947$.

$$
\begin{array}{llll}
\lg N = 3,0947 & (35) & & 35 \ldots\ldots 1 \\
\quad 34 \ldots 124 & & & 13 \ldots\ldots x \\
\quad 13 & & & x:1 = 13:35 \\
\quad 10,5 \ldots 3 & & & x = 13:35 \approx 0,37 \\
\quad 2,5 & & & \\
\quad 2,45 \ldots 7 & & & \\
\quad N = 1243,7 & & &
\end{array}
$$

Näiteist selgub: Kui arvu mantiss on tabelis, siis parandamist ei tehta. Vastasel korral parandatakse arvu. Arvu parandis = antud mantissi ja temale lähima vähema tabeli mantissi vahe ning differentsi jagatisega. Selle jagatise võime leida pr. osade tabelist. Vaatleme näidet 3. Differentsiga 18 algavast reast otsime vahele 7 lähima arvu, see on 7,2. Tema kohal kõige ülemises reas on parandis 0,4. Võtame parandises kaks kohta (näide 4), siis peame esimene kord vahele leidma lähima vähema arvu, teine kord aga lähima, kas suurema või vähema.

7. Trigonomeetriliste funktsioonide logaritmid leitakse nagu arvudegi logaritmid. Olulist vahet ei ole.

Näide 1. Leida $\lg \sin 54^0 37'$.

$$\begin{array}{ll} \lg\text{sn}\,54^0 30' = \bar{1},9107 \quad (9) & 10' \ldots\ldots 9 \\ \underline{\qquad 7' \ldots + 6,3} & 1' \ldots\ldots 0,9 \\ \lg\text{sn}\,54^0 37' = \bar{1},9113 & x = 0,9.7 = 6,3 \end{array}$$

S e l e t u s. Parandise 6,3 saame prop. osade tabelist differentsiga 9 algavast reast selle koha pealt, kus kõige ülemises reas seisab 0,7.

Näide 2. Leida lgcs $29^0 46'$.

$$\begin{array}{ll} \lg\text{cs}\,29^0 40' = \bar{1},9390 \quad (7) & 10' \ldots\ldots 7 \\ \underline{\qquad 6' \ldots - 4,2} & 1' \ldots\ldots 0,7 \\ \lg\text{cs}\,29^0 46' = \bar{1},9386 & x = 0,7 . 6 = 4,2 \end{array}$$

Näide 3. Leida lgtg $17^0 54'$.

$$\begin{array}{ll} \lg\text{tg}\,17^0 50' = \bar{1},5075 \quad (43) & 10' \ldots\ldots 43 \\ \underline{\qquad 4' \quad + 17,2} & 1' \ldots\ldots 4,3 \\ \lg\text{tg}\,17^0 54' = \bar{1},5092 & x = 4,3 . 4 = 17,2 \end{array}$$

Näide 4. Leida lgctg $44^0 8'$.

$$\begin{array}{ll} \lg\text{ctg}\,44^0 0' = 0,0152 \quad (26) & 10' \ldots\ldots 26 \\ \underline{\qquad 8' \ldots - 20,8} & 1' \ldots\ldots 2,6 \\ \lg\text{ctg}\,44^0 8' = 0,0131 & x = 2,6.8 = 20,8 \end{array}$$

8. Nurga leidmine trigonomeetrilise funktsiooni logaritmi järele.

Näide 1. $\lg \text{sn}\,\alpha = \bar{1},3217$. Leida nurk α.

$$\begin{array}{ll} \lg\text{sn}\,\alpha = \bar{1},3217 \quad (59) & 10' \ldots 59 \\ \underline{\qquad 179} \ldots\ldots 12^0 0' & 1' \ldots 5,9 \\ \qquad 38 & x = 38 : 5,9 \approx 6 \\ \underline{\qquad 35,4 \ldots\ldots + 6'} & \\ \qquad\qquad \alpha = 12^0 6' & \end{array}$$

Seletus. Parandise 6′ saame pr. osade tabelist kõige ülemisest reast, kui vahele 38 leiame differetsiga 59 algavast horisontaalreast lähima arvu 35,4. Suurendus 10 korda.

Näide 2. $\lg \operatorname{cs} \alpha = \bar{1},4156$. Leida nurk α.

$$
\begin{array}{lll}
\lg \operatorname{cs} \alpha = \bar{1},4156 & (47) & 10' \ldots 47 \\
\quad 130 \ldots 74^0 60' & & 1' \ldots 4,7 \\
\quad 26 & & x = 26 : 4,7 \approx 6 \\
\quad 28,2 \ldots -6' & & \\
\quad \alpha = 74^0 54' & &
\end{array}
$$

Näide 3. $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0,2974$. Leida nurk α.

$$
\begin{array}{lll}
\lg \operatorname{tg} \alpha = 0,2974 & (31) & 10' \ldots 31 \\
\quad 60 \ldots 63^0 10' & & 1' \ldots 3,1 \\
\quad 14 & & x = 14 : 3,1 \approx 5 \\
\quad 15,5 \ldots +5' & & \\
\quad \alpha = 63^0 15' & &
\end{array}
$$

Näide 4. $\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1},2297$. Leida nurk α.

$$
\begin{array}{lll}
\lg \operatorname{ctg} \alpha = \bar{1},2297 & (77) & 10' \ldots 77 \\
\quad 36 \ldots 80^0 30' & & 1' \ldots 7,7 \\
\quad 61 & & x = 61 : 7,7 \approx 8 \\
\quad 61,6 \ldots -8' & & \\
\quad \alpha = 80^0 22' & &
\end{array}
$$

9. Arvutusnäide. Leida avaldise

$$Q = \frac{a^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}(\varphi - \alpha)}{8 \operatorname{sn}\varphi \operatorname{sn}^4(45^0 - {}^1/_2\alpha)}$$ arvsuurus, kui $\operatorname{ctg}\varphi = \pi . \frac{90^0 - \alpha}{180^0}$, $a = 146$ ja $\alpha = 36^0$ (vt. ü. nr. 74).

$$\begin{array}{rl} \lg \pi &= 0{,}4971 \\ + \quad \lg(90^0-\alpha) &= 1{,}7324 \\ - \lg(180^0) &= \bar{3}{,}7447 \\ \hline \lg \operatorname{ctg} \varphi &= \bar{1}{,}9742 \\ \varphi &= 46^0\,42' \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2\lg a &= 4{,}3288 \\ \lg\operatorname{sn} \alpha &= \bar{1}{,}7692 \\ + \quad \lg\operatorname{sn}(\varphi-\alpha) &= \bar{1}{,}2687 \\ -\lg 8 &= \bar{1}{,}0969 \\ -\lg\operatorname{sn}\varphi &= 0{,}1380 \\ -4\lg\operatorname{sn}(45^0-\frac{1}{2}\alpha) &= 1{,}3716 \\ \hline \lg Q &= 3{,}9732 \\ Q &= 9402 \end{array}$$

Viiekohalised logaritmid.

10. Arvule logaritmi leidmine ei erine siin oluliselt neljak. log. vastavast tehtest. Differentsi korrutised arvudega 0,1 ; 0,2 ; . . . . ; 0,9 (tabelis: 1 ; 2 ; . . . . ; 9) seisavad pr. osade tabelis sambakeses differentsi all, kuna mantissid on paigutatud mitmele leheküljele.

Näide 1. Leida arvu 753,64 logaritm.

$$\begin{array}{ll} \lg 753{,}60 = 2{,}87714 \quad (6) & \\ \quad 0{,}4 \; . \; . \; . \; . \; . \; 2{,}4 & \\ \hline \lg 753{,}64 = 2{,}87716 & \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; 6 \\ 0{,}4 \; . \; . \; . \; . \; . \; x \\ \hline x : 6 = 0{,}4 : 1 \\ x = 0{,}4 \, . \, 6 = 2{,}4 \end{array}$$

S e l e t u s. Sambakesest, mille kohal 6, leiame pahemal äärel arvu 4, temaga ühes reas on parandis 2,4.

Näide 2. Leida arvu 0,120928 logaritm.

$$\begin{array}{l} \lg 0{,}120900 = \bar{1}{,}08243 \quad (36) \\ \quad 0{,}2 \; . \; . \; . \; . \; . \; 7{,}2 \\ \quad 0{,}08 \; . \; . \; . \; 2{,}88 \\ \hline \lg 0{,}120928 = \bar{1}{,}08253 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 36 \\ 0{,}28 \; . \; . \; . \; x \\ \hline x : 36 = 0{,}28 : 1 \\ x = 0{,}28 \, . \, 36 \approx 10 \end{array}$$

11. Logaritmile vastava arvu leidmine.

Näide 1. Leida arv N, kui $\lg N = 2{,}93432$.

$$
\begin{array}{lll}
\lg N = 2{,}93432 & (5) & \\
\quad 30 \ldots\ldots 8596 & & 5 \ldots\ldots 1 \\
\quad \overline{2} & & 2 \ldots\ldots x \\
\quad 2 \ldots\ldots\ldots 4 & & x:1 = 2:5 \\
\quad N = 859{,}64 & & x = 2:5 = 0{,}4
\end{array}
$$

S e l e t u s. Otsime differentsi 5 alt vahele 2 lähimat arvu. Leiame täpselt 2; vastav parandis $= 0{,}4$.

Näide 2. Leida arv N, kui $\lg N = \overline{1},15127$.

$$
\begin{array}{lll}
\lg N = \overline{1},15127 & (31) & 31 \ldots\ldots 1 \\
\quad 106 \ldots\ldots 1416 & & 21 \ldots\ldots x \\
\quad \overline{21} & & x:1 = 21:31 \\
\quad 18{,}6 \ldots\ldots\ldots 6 & & x = 21:31 \approx 0{,}68 \\
\quad \overline{2{,}4} & & \\
\quad 2{,}48 \ldots\ldots\ldots 8 & & \\
\quad N = 0{,}141668 & &
\end{array}
$$

12. Trigonomeetrilise funktsiooni logaritmi leidmine.

Näide 1. Leida $\lg \mathrm{sn}\, 25^0\, 34'\, 35''$.

$$
\begin{array}{lll}
\lg \mathrm{sn}\, 25^0\, 34' = \overline{1},63504 & (27) & 60'' \ldots\ldots 27 \\
\quad 30'' \ldots\ldots 13{,}5 & & 1'' \ldots\ldots \frac{27}{60} \\
\quad 5'' \ldots\ldots 2{,}25 & & 35'' \ldots\ldots \frac{27}{60} \cdot 35 \approx 16 \\
\lg \mathrm{sn}\, 25^0\, 34'\, 35'' = \overline{1},63520 & &
\end{array}
$$

S e l e t u s. 1) Prževalski järele. Proportsionaalsete osade tabelist leiame differentsi 27 alt 1 sekundile vastava parandise 0,45 korrutised arvudega 1, 2, ...,

9. Kümnete sekundite puhul suurendame parandist 10 korda.

2) Schlömilchi järele on parandis $0{,}44 . 35 = 15{,}4$. Samuti leiame ka tangensi logaritmi.

Näide 2. Leida $\lg \operatorname{cs} 63^0\,21'\,58''$.

$$
\begin{array}{lrl}
\lg \operatorname{cs} 63^0\,21' & = & \overline{1}{,}65180 \\
 & 58'' \ldots & -24 \\
\hline
\lg \operatorname{cs} 63^0\,21'\,58'' & = & \overline{1}{,}65156
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
50'' \ldots\ldots & 20{,}8 \\
8'' \ldots\ldots & 3{,}3 \\
\hline
58'' \ldots\ldots & 24{,}1
\end{array}
$$

Samuti leidub ka kootangensi logaritm.

13. Nurga leidmine trigonomeetrilise f. logaritmi järele.

Näide 1. $\lg \operatorname{sn} \alpha = \overline{1}{,}73451$. Leida nurk α.

$$
\begin{array}{ll}
\lg \operatorname{sn} \alpha = \overline{1}{,}73451 \quad (20) & \\
\quad 35 \ldots\ldots 32^0\,51' & \\
\hline
\quad 16 \ldots\ldots & \\
\quad 13{,}3 \ldots\ldots\ldots 40'' & \\
\hline
\quad 2{,}7 & \\
\quad 2{,}67 \ldots\ldots\ldots 8'' & \\
\hline
\alpha = 32^0\,51'\,48'' &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
60'' \ldots\ldots 20 \\
1' \ldots\ldots \frac{20}{60} \\
x = 16 : \frac{20}{60} = 48
\end{array}
$$

Seletus. 1) Prževalski järele. Suurendame differentsi 20 all olevat arvu 1,33 kümme korda, saame vahele 16 lähima vähema arvu 13,3, millele vastab 40″ jne.

2) Schlömilchi järele on parandis $16 : 0{,}33 \approx 48$.

Näide 2. $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}18833$. Leida nurk α.

$$
\begin{array}{ll}
\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}18833 \quad (28) & \\
\quad 31 \ldots\ldots 57^0\,3' & \\
\hline
\quad 2 & \\
\quad 1{,}87 \ldots\ldots 4'' & \\
\hline
\alpha = 57^0\,3'\,4'' &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
60'' \ldots\ldots 28 \\
1'' \ldots\ldots \frac{28}{60} \\
x = 2 : \frac{28}{60} \approx 4
\end{array}
$$

Näide 3. $\lg \operatorname{cs} \alpha = \overline{1}, 54859$. Leida nurk α.

$$\begin{array}{ll}
\lg \operatorname{cs} \alpha = 1,\ 54859\ (33) & 60'' \ldots\ 33 \\
\underline{36} \ \ldots\ 69^0\,18' & 1'' \ldots\ \tfrac{33}{60} \\
23 & x = 23 : \tfrac{33}{60} \approx 42 \\
\underline{22} \ \ldots\ldots\ 40'' & \\
1 & \\
\underline{1{,}1 \ \ldots\ldots\ 2''} & \\
\alpha = 69^0\,18' - 42'' = 69^0\,17'\,18'' &
\end{array}$$

Samuti leitakse ka nurk kootangensi logaritmi järele.

Mõned valemid ja laused.

14. I. On kolmnurga küljed a, b ja c, pind Q, ümberjoonestatud ringi raadius R ning külje a vastasnurk α, siis: 1) $Q = \frac{1}{2} bc \operatorname{sn} \alpha$; 2) $R = \frac{abc}{4Q}$; 3) $a = 2R \operatorname{sn} \alpha$.

II. Külgede ja vastavate kõrguste korrutised on kolmnurgal võrdsed, sest arvuliselt kujutavad nad tema kahekordset pinda.

III. 1) Parallelogrammi pind võrdub diagonaalide ja nende vahelnurga siinuse poole korrutisega: $Q = \frac{1}{2} dd_1 \operatorname{sn} \varphi$.

2) Parallelogrammi pind võrdub kahe külje ja nende vahelnurga siinuse korrutisega: $Q = ab \operatorname{sn} \alpha$.

IV. 1) $\operatorname{sn}(45^0 - \alpha) = \operatorname{cs}(45^0 + \alpha)$;

2) $\operatorname{cs}(45^0 - \alpha) = \operatorname{sn}(45^0 + \alpha)$;

3) $1 \pm \operatorname{sn} \alpha = \operatorname{sn} 90^0 \pm \operatorname{sn} \alpha = 2 \operatorname{sn}^2 (45^0 \pm \frac{\alpha}{2}) = 2 \operatorname{cs}^2 (45^0 \mp \frac{\alpha}{2})$;

4) $1 + \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{cs} 0^0 + \operatorname{cs} \alpha = 2 \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2}$;

5) $1 \pm \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 45^0 \pm \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sn}(45^0 \pm \alpha)}{\operatorname{cs} 45^0 \operatorname{cs} \alpha}$;

6) $\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{cs} \alpha = \operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn}(90^0 - \alpha) =$
$= \sqrt{2} \operatorname{sn}(\alpha + 45^0)$.

V. On α, β ja γ kolmnurga nurgad ($\alpha + \beta + \gamma = 180^0$), siis:

1) $\operatorname{sn} \alpha + \operatorname{sn} \beta + \operatorname{sn} \gamma = 4 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\gamma}{2}$.

Tõendamine. $\operatorname{sn} \alpha + (\operatorname{sn} \beta + \operatorname{sn} \gamma) = 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{cs} \frac{\beta - \gamma}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cs} \frac{\beta - \gamma}{2} \right) = 2 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \left(\operatorname{cs} \frac{\beta + \gamma}{2} + \operatorname{cs} \frac{\beta - \gamma}{2} \right) = 4 \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs} \frac{\beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\gamma}{2}$.

2) $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$.

Juhatus. $\left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right) + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{sn} \frac{1}{2} (\beta + \alpha)}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sn} \frac{1}{2} \beta} + \frac{\operatorname{cs} \frac{1}{2} \gamma}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\operatorname{cs} \frac{1}{2} \gamma}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} \alpha \operatorname{sn} \frac{1}{2} \beta} + \frac{\operatorname{cs} \frac{1}{2} \gamma}{\operatorname{sn} \frac{1}{2} \gamma}$ jne.

3) $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$.

Juhatus. $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cs} \alpha}{2}}$ ja $\operatorname{cs} \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Ülesanded.

Kui ülesannetes just teisiti ei ole näidatud, siis on kolmnurgas ABC nurgad: BAC $= \alpha$, ABC $= \beta$, ACB $= \gamma$; nende vastasküljed: BC $=$ a, AC $=$ b, AB $=$ c (püstkolmnurgas on c hüpotenuus, võrdhaarses aga alus); ümber- ja sissejoonestatud ringide raadiused: R ja r; pind: Q ehk S; perimeeter ehk ümbermõõt: $a + b + c = 2p$; tippudest A, B ja C tõmmatud kõrgused:

h_a, h_b, h_c; mediaanid ehk küljepoolitajad: m_a, m_b, m_c; bissektorid ehk nurgapoolitajad: p_α, p_β, p_γ.

1. Kolmnurga tipud jagavad ringjoone suhtes 5:6:7. Suurima külje pikkus on 9,96 cm. Leida kolmnurga teised küljed, pind ja ringi pind.

2. Poolringjoon on jagatud suhtes 3:5. Saadud täpist on tõmmatud perpendikulaar diameetrile. Diameetri pikkus on 10 cm, leida tema lõigud.

3. Võrrandi $3x - \frac{2}{x} = 5$ positiivses juures on sama palju ühelisi kui püstkolmnurga kaatetis. Selle kaateti vastasnurk rahuldab nõrrandit $sn\alpha - cs^2\alpha = 0,44$. Leida (ilma log. tabelita) teine kaatet, hüpotenuus ja pind.

4. Segmendi kõõl $= 1$ m, kõrgus $= 23$ cm. Leida kaare pikkus.

5. Kahe lõikuva kõõlu osad suhtuvad nagu 4:5 ja 5:16. Missugusteks osadeks jagavad need kõõlud ringjoone, kui nurk nende vahel $= 90^0$?

6. Välistäpist on tõmmatud ringile kaks lõikajat. Leida nurk nende vahel, kui üks läheb läbi sentri ja jagub ringjoonel suhtes 4:21 (4 vastab välisosale), aga teine jagub ringjoonel suhtes 1:3.

7. Kaarele α vastab kõõl a. Milline kõõl vastab kaarele 4α? Näide: $\alpha = 72^0$.

8. Leida nelinurga pind, kui diagonaalid on d ja d_1 ning nurk nende vahel φ.

9. Avaldada ringi raadiuse r kaudu korrapäraste sisse- ja ümberjoonestatud hulknurkade küljed: a_n, a_{2n}, b_n, b_{2n}.

10. Ringi raadius on R. Määrata sissejonnestatud korrapärase n-nurga apoteem ja pind.

11. Korrapärase n-nurga külg on a. Leida sisse- ja ümberjoonestatud ringide raadiused ning n-nurga pind.

12. Üks ring puutub teist seestpoolt. Leida nurk puutujate vahel, mis suurema ringi keskpunktist vähemale tõmmatud, kui raadiuste suhe $n = 3$.

13. Punktist, mille kaugus ringi sentrist d, on tõmmatud ringile kaks puutujat vahelnurgaga φ. Leida selle ringi sissejoonestatud korrapärase kolmnurga pind. ($d = 42{,}732$; $\varphi = 78^0 20'$).

14. Hüpotenuusi keskristjoon jagab kaateti osadeks m ja n, arvates teravnurga tipust. Leida kolmnurga nurgad ja pind. ($m = 10$ cm; $n = 5$ cm).

15. Kõõl jagab ringjoone, mille pikkus c, suhtes $m : n$. Kui kaugel on see kõõl ringi sentrist? ($m : n = 4 : 5$; $c = 218{,}547$).

16. Leida parallelogrammi kõrgused, kui diagonaalid on D ja d ning nurk nende vahel φ ($> 90^0$). ($D = 7$; $d = 5$; $\varphi = 123^0$).

17. Kolm ringjoont, millede raadiused r, 2r ja 3r, puutuvad täppides A, B, C. Leida kolmnurga ABC pind.

18. Kolm ringi, millede raadiused 1 m, 2 m, 3 m, puutuvad üksteist. Leida pind, mis suletud nende ringide vahele.

19. Võrdhaarse kolmnurga kõrgus on h ja tipunurk α. Tema alusele kui diameetrile on kujundatud poolring. Leida kaare pikkus, mis kolmnurga sees. ($h = 834{,}57$ m; $\alpha = 52^0 39'$).

20. Määrata rombi teravnurk, kui külg on keskmine võrdeline diagonaalidele.

21. Leida kolmnurga perimeeter, kui külgejoonestatud ringi raadius on r ja puutekülje vastasnurk α. ($r = 25$ cm; $\alpha = 47^0$).

22. Leida rombi pind, kui teravnurk on α ja sissejoonestatud ringi pind $= K$. ($\alpha = 75^0 30'$; $K = 586{,}796$).

23. Võrdhaarse kolmnurga kõrgusel asetsevast täpist on tõmmatud kaar, mis puutub kolmnuga alust ja mille suurus α. Leida kaare raadius, kui kolmnurga haar on a ja tipnurk β.

24. Püstkolmnurga tipust tõmmatud kaar puutub hüpotenuusi ja jagab kolmnurga pinna pooleks. Leida kolmnurga nurgad.

25. Leida võrdhaarse trapetsi pind, kui tema teravnurk α ja sirglõigu pikkus, mis ühendab sissejoonestatud ringi puutepunktid haaral ja suuremal alusel, on a. ($a = 17$; $\alpha = 31^0 22'$).

26. Nelinurgas ABCD on nurgad B ja D püstid,[1] $\angle BAC = \alpha$ ja $\angle DAC = \beta$; diagonaal $AC = a$. Leida selle nelinurga pind ja teine diagonaal. ($a = 14$; $\alpha = 59^0 33' 48''$; $\beta = 78^0 16' 12''$).

27. Kolmnurga külje a lähisnurgad rahuldavad võrrandit $\operatorname{sn}(\alpha + x) = \operatorname{cs}\alpha + \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cs} x$, kusjuures nurk α on teada. Leida kolmnurga pind.

28. Kolmnurga ümber on raam, mille laius kõikjal ühesuurune, pind aga võrdne kolmnurga pinnaga.

---

1) See on 90^0.

Leida raami laius, kui kolmnurga külje a lähisnurgad on β ja γ. ($a = 48{,}5$; $\beta = 67^0\,24'$; $\gamma = 45^0\,12'$).

29. Üks kahest ühtuvast rombist on asetatud teise peale nii, et ta katab teda. Siis on pööratud üht teise suhtes 90^0 võrra. Leida saadud tähekujulise 4-nurga pind, kui rombi teravnurk on α ja suurem diagonaal a.

30. Korrapärase n-nurga küljed on pikendatud kuni lõikumiseni ja saadud täpid ühendatud isekeskis. Leida tekkinud n-nurga pind, kui antud hulknurga külg $= a$. ($n = 11$; $a = 0{,}2635$).

31. Ringi ümber ja tema sisse on kujundatud korrapärased n-nurgad, millede perimeetrite vahe on a. Leida ringjoone pikkus. ($n = 8$; $a = 9{,}064$).

32. Kaks ringi, mille raadiused R ja r, puutuvad väljaspoolt täpis B. Teades, et C ja D on ringide ühispuutuja puutetäpid, määrata nurk sentrite ühendusjoone ja puutuja vahel ning kolmnurga CBD pind.

33. Kaks kõõlu AB ja CD lõikuvad ringi sees punktis O. Kolmnurkade AOC ja BOD pindade suhe on 2 : 3. Leida kaared AC ja BD, kui $\angle AOC = \angle BOD = 30^0$.

34. Ringi ümber ja tema sisse on joonestatud korrapärased n-nurgad, millede pindade vahe S. Leida ringi pind. ($n = 17$; $S = 6$).

35. Ringi sissejoonestatud korrapärase n-nurga külg on a. Leida sama ringi sissejoonestatud korrapärase m-nurga perimeeter ja pind.

36. Leida parallelogrammi nurgad, kui külgede suhe ja diagonaalide suhe on 1 : 2.

37. Trapetsi aluse a lähisnurgad on α ja β. Leida teine alus, kui kõrgus $= h$. ($a = 0{,}97$; $h = 0{,}0584$; $\alpha = 34^0$; $\beta = 42^0\,15'\,39''$).

38. Võrdhaarses kolmurgas on tõmmatud kaks sirget, mis lõikavad alust ja jagavad tipunurga α kolmeks võrdseks osaks. Kuidas suhtub aluse keskmine osa äärmisse?

39. Püstkolmnurga teravnurk on α ja pind S. Leida ümber- ja sissejoonestatud ringide raadiused.

40. Poolringjoon on jagatud osadeks, millede vastavad kõõlud suhtuvad nagu $1:2:1$. Leida poolringjoone osad.

41. Leida kolmnurga nurgad, teades, et üks on teisest kolm korda vähem ja et kolmanda bissektor jagab pinna suhtes $7:3$.

42. Kolmnurgal on antud külg c ja tema lähisnurgad α ja β. Leida antud küljel täpp, mille kaugused teistest külgedest on võrdsed. ($c = 10$ km; $\alpha = 83^0\,25'$; $\beta = 46^0\,37'$).

43. Leida trapetsi diagonaal ja pind, kui tema ümberjoonestatud ringi raadius on R, aga nurgad diagonaali ja haarade vahel α ja 2α.

44. Sektori AOB kaar on α, aga sissejoonestatud ringi raadius r. Leida kolmnurga AOB pind. ($r = 0{,}052$; $\alpha = 36^0 44' 28''$).

45. Sektorisse, mille kõõluks korrapärase sissejoonestatud kuusnurga külg a, on kujundatud ruut. Leida selle ruudu külg. ($a = 75{,}6348$).

46. Segmendi kaare suurus $= \alpha$, pikkus aga on l. Leida selle segmendi sisse kujundatud ringjoone pikkus. ($\alpha = 120^0$; 180^0; 240^0).

47. Kolmnurgal on külg a ja nurgad teada. Leida bissektorid.

48. Kolmnurgal on pind Q ja nurgad teada. Leida küljed. ($Q = 0{,}24$; $\alpha = 42^0 35'$; $\beta = 79^0 12'$).

49. Võrdhaarse trapetsi nürinurk on α. Perpendikulaar a, mis tõmmatud aluse keskkohast haarale, jagab haara pooleks. Leida trapetsi pind. ($a = 10{,}2$ cm; $\alpha = 115^0 20'$).

50. Ringi sissejoonestatud trapetsi diagonaal d moodustab alusega nurga α. Leida trapetsi pind.

51. Trapetsi ühe haara lähisnurgad on 90^0. Tema sissejoonestatud ringi raadius on r. Leida trapetsi pind, kui tema teravnurk on α. ($r = 31{,}865$; $\alpha = 27^0 35' 46''$).

52. Rombi sisse on joonestatud ring ja puutepunktid ühendatud isekeskis. Leida saadud nelinurga pind, kui rombi külg on a ja teravnurk α.

53. Trapetsi mõlemad haarad on võrdsed ühe alusega a, kuna nürinurk $= \alpha$. Määrata selle trapetsi pind.

54. Parallelogrammi teravnurk on 2α ja pikem külg a. Õige joon, mis tõmmatud teravnurga tipust, kohtab pikemat vastasküIge nurgi α ja jagab parallelogrammi pinna osadeks suhtes $m : n$ $(m < n)$. Leida õige joone osa, mis parallelogrammi sees, ja parallelogrammi pind.

55. Kolmnurka ABC on kujundatud ring O ja puutepunktid L, N, M ühendatud isekeskis. Leida kolmnurga LNM pinna suhe antud kolmnurga pinnasse, kui viimase nurgad või küljed on teada.

56. Kolmnurga välisnurgad moodustavad aritmeetilise progressiooni (rea), mille vahe φ. Vähim külg on c. Leida teised küljed. ($c = 0{,}54$ m; $\varphi = 25^0 36'$).

57. Püstnurga tipust hüpotenuusile tõmmatud ristjoone alus on kaatetitest m ja n kaugusel. Leida kolmnurga nurgad ja pind.

58. Kolmnurgas ABC on antud külg $BC = a$ ja nurgad $B = 2\alpha$ ning $C = \alpha$. Leida küljel AC täpp nii, et temast BC-le tõmmatud perpendikulaar jagaks kolmnurga pinna pooleks. ($a = 6666$; $\alpha = 23^0 14'$).

59. Punktist A, mis asetseb teravnurga MNP haaral NM, on tõmmatud perpendikulaar AB haarale NP, punktist B perpendikulaar BC haarale NM, punktist C perpendikulaar CD haarale NP jne. kuni lõpmatuseni. Leida nende perpendikulaaride summa piir, kui nurk $MNP = \alpha$ ja $NA = a$.

60. Võrdhaarsesse kolmnurka on joonestatud rida ringe, milledest esimene puutub haaru ja alust, teine esimest ringi ning haaru ja nii edasi ilma otsata. Leida ringide pindade summa piir, teades, et kolmnurga haar on a ja tipunurk α.

61. Avaldada nelinurga pind, mis moodustub nurgapoolitajate lõikumisel parallelogrammis, mille küljed a ja b ($b > a$), aga teravnurk α.

62. Kaks ringi, millede raadiused $= r$, asetsevad püstnelinurgas (püstkülikus) ABCD nii, et nad puutuvad teine teist ja püstnelinurga külgi: üks AB-d ja BC-d, teine CD-d ja AD-d. Leida püstnelinurga küljed, kui üks neist moodustab ringide sentrite ühendusjoonega nurga α.

63. Trapetsi alused on d ja b ($d > b$). Leida haarad ja pind, kui suurema aluse lähisnurgad on α ja δ.

64. Segmendi kaar on α ja kõõl a. Leida selle segmendi sisse kujundatud ruudu külg. ($a = 20$ cm; $\alpha = 136^0$).

65. Antud ring raadiusega r. Tema ümber asetseb rõngana n võrdset ringi, mis puutuvad üksteist ja ka keskmist ringi. Leida nende ringide raadius, millest moodustatud rõngas. ($n = 6$).

66. Võrdhaarsel kolmnurgal on antud haar a ja aluse lähisnurk α. Leida selle kolmnurga ümber- ja sissejoonestatud ringide sentrite kaugus.

67. Antud kaare otstest on tõmmatud puutujad kuni lõikumiseni ja saadud kujundisse on joonestatud ring. Leida selle ringi raadius, kui kaare suurus on α, aga temale vastava kõõlu pikkus a. ($\alpha = 128^0 35' 48''$; $a = 1590$).

68. Ringi raadius on r. Leida vähema segmendi pind, kui kaare suurus on α. ($r = 754{,}82$; $\alpha = 63^0 28'$).

69. Ringis, mille raadius r, on tõmmatud kaks paralleelset kõõlu. Leida ringi pinnast see osa, mis asetseb kõõlude vahel, kui neile vastavad kesknurgad $=$ $= \alpha$. ($\alpha = 43^0 52' 12''$; $r = 0{,}02$).

70. Kaks ringjoont lõikuvad täppides A ja B. Leida nende ühisosa pind, kui kõõl $AB = a$ ja raadiused on R ning r. ($R = 25$; $r = 18$; $a = 18$).

71. Trapetsi ABCD alused: $a = 48$ cm, $c = 20$ cm; haarad: $b = 25$ cm; $d = 17$ cm. Leida tema pind, nurgad ja diagonaalid.

72. Kolmnurga nurgad on teada. Leida tema pinna suhe ümberjoonestatud ringi pinnasse.

73. Ringi ümber, mille raądius r, on joonestatud trapets nii, et sirglõikude vahe, milledeks jagab puutepunkt ühe haara, on d. Leida trapetsi pind, kui teine haar moodustab suurema alusega nurga α. ($r = 13$; $d = 6$; $\alpha = 53^0 41' 58''$).

74. Välistäpist A on tõmmatud ringile lõikaja ACD, mis läheb läbi sentri, ja puutuja AB, kusjuures $\sphericalangle CAB = \alpha$. Leida kujundi ABC pind, mis piiratud lõikaja välisosast a, puutujast ja kaarest BC. ($a = 146$; $\alpha = 36^0$).

75. Püstkolmnurga küljed moodustavad pideva geomeetrilise võrde. Leida teravnurgad.

76. Võrdhaarse kolmnurga haar on jagatud keskmises ja äärmises suhtes. Aluse pool võrdub haara vähema lõiguga. Leida nurgad.

77. Tõendada, et on olemas kolmnurk, mille poolnurkade kootangensid avalduvad kolme järjestikuse täisarvuga, ja leida niisuguse kolmnurga külgede suhe.

78. Tõendada, et kui kolmnurga nurkade siinused moodustavad aritmeetilise rea, siis poolnurkade kootangensid moodustavad ka aritmeetilise rea.

79. Nurk ringi kahe diameetri vahel $= \alpha$. Kõõlude vahe, mis ühendavad nende diameetrite otsad, on d. Leida diameeter ja kõõlud.

80. Millise nurgi lõikuvad kaks ringjoont,[1]) kui nende raadiused on R ja r, aga ühine kõõl $= a$? ($R = 13$; $r = 7$; $a = 5$).

---

1) Nurka puutujate vahel, mis ringjoonte lõiketäppi tõmmatud, nim. ringjoonte vaheliseks nurgaks.

81. Püstküliku pind on Q ja külg a. Leida nurk diagonaali ja külje vahel. ($Q = 2730\ m^2$; $a = 89\ m$).

82. Parallelogrammi diagonaalid on 370 m ja 258 m, nurk nende vahel $= 64^0$. Leida nurgad, küljed ja pind.

83. Parallelogrammi diagonaal d moodustab ühe tipu juures külgedega nurgad α ja β. Leida küljed ja pind. ($d = 10{,}94$; $\alpha = 36^0 25'$; $\beta = 40^0 12' 9''$).

84. Nelinurgal ABCD on antud küljed $BC = 11$ cm ja $AD = 8$ cm; diagonaal $AC = 15$ cm; nurgad $ACB = 24^0 46'$, $DAC = 52^0 14'$. Leida nurgad, küljed AB ja CD, diagonaal BD ning pind.

85. Rombi pind on Q ja perimeeter 4p. Leida rombi teravnurk. ($Q = 500$; $4p = 160$).

86. Rombi teravnurk on α, aga diagonaalide summa $= b$. Leida pind. ($b = 9{,}5664$; $\alpha = 45^0 26' 14''$).

87. Parallelogrammil ABCD on antud diagonaalid $AC = 66$ ja $BD = 52$ ning külg $BC = 43$. Leida külg AB, nurgad ja pind.

88. Korrapärase 9-nurga külg on a. Leida ühest tipust tõmmatud diagonaalid.

89. Korrapärase 15-nurga külje ja apoteemi summa on b. Leida pind. ($b = 7$).

90. Leida piirdenurk, mis moodustatud kõõludest 51,2 cm ja 34,3 cm, kui ringi raadius on 72,9 cm.

91. Antud on nurk $BAC = \alpha$. Leida haaral AC täpp M nii, et temast teisele haarale tõmmatud sirglõik MN eraldaks nurgast kolmnurga MAN, mille pind S ja $\angle AMN = \beta$. ($S = 5231{,}7\ m^2$; $\alpha = 54^0 38'$; $\beta = 71^0 26'$).

92. Avaldada kolmnurga pind tema nurkade ja ümberjoonestatud ringi raadiuse R kaudu.

93. Ringi ümber ja tema sisse joonestatud korrapärste n-nurkade pinnad on vastavalt Q ja q. Leida külgede arv. ($Q = 12$; 25; $q = 9$; $22{,}076$).

94. Kolmnurgas ABC on tõmmatud sirglõik $DE \parallel BC$ nii, et $DE = BD + CE$. Leida DE pikkus, kui antud on külg $BC = a$ ja tema lähisnurgad β ja γ.

95. Leida segmendi pind, kui vastav kaar võrdub raadiusega, aga sektori pind on S.

96. Nelinurga ABCD diagonaalid AC ja BD moodustavad küljega AB võrdsed nurgad α ja on vastavalt perpendikulaarsed külgedega BC ja AD. Leida nelinurga pind ja külg CD, kui $AB = a$.

97. Kaar läheb läbi püstküliku ühe külje otsade, sealjuures langevad vastasküljé otsad ühte kaare otsadega. Kaare suurus on α ja püstküliku pind Q. Leida kaare raadius. ($Q = 101$; $\alpha = 243^0\,58'$).

98. Punktist A on ringjoon näha nurgi α[1]. Kaugenedes aga a meetri võrra, näeme sama ringjoont punktist B nurgi β. Leida ringi raadius. ($a = 10{,}09$; $\alpha = 51^0\,44'$; $\beta = 17^0\,20'$).

99. Kahe ringi sentrite kaugus on d. Nurgad sisemiste ja väliniiste puutujate vahel on vastavalt α ja β. Leida ringide raadiused.

100. Trapetsi kõrgus $= h$, vähema aluse lähisnurgad on α ja β, diagonaalide lõikepunkti kaugused alustest suhtuvad nagu $m : n$ ($m < n$). Leida pind.

---

1) Nurk puutujate vahel $= \alpha$.

101. Parallelogrammi küljed on a ja b, nurk diagonaalide vahel $= \alpha$. Leida pind ja nurgad. ($a = 35{,}864$; $b = 29{,}157$; $\alpha = 73^0\,45'\,10''$).

102. Parallelogrammi diagonaalid on d ja d_1, aga teravnurk α. Leida pind ja nurk diagonaalide vahel.

103. Kahe kontsentrilise ringi raadiused on R ja r. Vähemale neist on tõmmatud kaks puutujat vahelnurgaga α. Leida nelinurga pind, mille tippudeks puutujate lõikepunktid suurema ringjoonega.

104. Tõendada, et kolmnurga küljed a, b ja c, perimeeter 2p, sissejoonestatud ringi raadius r, pind S, nurgad α, β ja γ on seotud valemitega:

$$S^2 = p\,abc \operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}\operatorname{sn}\frac{\beta}{2}\operatorname{sn}\frac{\gamma}{2}; \quad S = \frac{abc}{p}\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}\operatorname{cs}\frac{\beta}{2}\operatorname{cs}\frac{\gamma}{2};$$

$$S = p^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}; \quad S = r^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}.$$

105. Lahendada püstkolmnurk, kui on antud: 1) $a + b = m$; α. 2) $c + a = m$; α. 3) $a - b = d$; β. 4) $c - a = d$; α. 5) R; $a + b = m$. 6) 2p; h_c. 7) $a + b - c = d$; α. 8) c; h_c. 9) c; r. 10) α; r.

106. Lahendada võrdhaarne kolmnurk, kui on antud: 1) $c + a = m$; γ. 2) $c + h_c = m$; α. 3) $h_a + h_c = m$; γ. 4) h_a; h_c.

107. Lahendada kolmnurk, kui on antud: 1) a; S; α. 2) h_a; h_b; h_c. 3) m_a; m_b; m_c. 4) $a - b$; $\alpha - \beta$; c. 5) $a + b$; R; γ. 6) $a + c$; $h_a + h_c$; α. 7) $\alpha - \beta$; $\frac{a}{b}$; c. 8) $a^2 + b^2$; S; γ. 9) $b^2 - c^2 = d^2$; a; α. 10) a; b; p_γ; 11) r_a[1]; β; γ. 12) r; $b + c$; α. 13) a; m_a; m_b. 14) 2p; h_c; α.

---

1) Külje a külgejoonestatud ringi raadius.

108. Õige joon AB $=$ b on paralleelne jõe kaldaga ja temast a meetri kaugusel. Teisel kaldal on punkt C. $\angle CAB = \alpha$, $\angle CBA = \beta$. Leida jõe laius. (a $= 0{,}2$ km; b $= 1$ km; $\alpha = 46^0\,35'$; $\beta = 65^0\,23'$).

109. Kaks maa-ala puutuvad kokku mööda murdjoont ABC (joon. 3). Leida sirgel DC punkt F, millest tõmmatud sirgjoon FA õgvendaks piiri nii, et maa-alade suurused jääksid muutmata. Kuidas lahendub see ülesanne graafiliselt? Antud: AB $=$ c $=$ $= 0{,}8$ km; BC $=$ a $= 0{,}6$ km; $\angle ABC = \beta = 110^0$; $\angle BCD = \varphi = 65^0\,30'$.

110. Keegi, vaadeldes aknast üle tänava vastasmaja, leidis, et katuse äär on nurga α võrra ülalpool, aga maapind alusmüüri juures nurga β võrra allpool vaatluskoha horisonti. Leida katuse ääre kõrgus, kui tänava laius on a. ($\alpha = 25^0\,44'$; $\beta = 20^0\,39'$; a $= 20{,}8$ m).

111. Pilve äärel ja päikesel, mis asetsevad ühel vertikaaltasapinnal, on vastavalt nurkkõrgused α ja β; pilve varju kaugus vaatlejast horisontaaltasapinnal on a. Kui kõrgel on pilv? ($\alpha = 37^0\,12'$; $\beta = 56^0\,28'$; a $=$ $= 650$ m).

112. Keegi asetus h meetri kõrgusele veepinnast ja leidis, et pilv on nurga α võrra ülalpool, aga pilve kujutis järves nurga β võrra allpool vaatluskoha horisonti. Leida pilve kõrgus.

113. Vaatleja nägi punktist, mis torni alusega ühel horisontaaltasapinnal, torni nurgi β. Minnes a meetri võrra lähemale, nägi ta teda nurgi α. Leida torni kõrgus. Kui kaugel oli vaatleja esialgu tornist?

114. Torni tipp paistab maja esimese ja teise kordade akendest, mis üksteise kohal ja millede kõrgused maapinnast a ja b, vastavalt nurgi α ja β ülalpool vaatluskohtade horisonte. Leida torni kõrgus ja tema kaugus majast.

115. Masina rataste sentrite kaugus on d, aga raadiused R ja r. Leida rihma pikkus, kui rataste tiirlemine sünnib 1) ühtepidi ja 2) vastupidi (rihmad ristuvad).

Mõned ülesanded, mis on olnud teemideks küpsuseksamitel. **116.** Nelinurga küljed suhtuvad nagu $2:3:5:4$, aga nende ruutude summa $=$ $= 486$; peale selle on teada, et esimene külg lõikab teist nurgi 105^0. Leida nelinurga küljed, nurgad ja pind. (Austrias).

117. Korrapärase kolmnurga külg on a. Ehitada ruut, mis pindvõrdne selle kolmnurgaga. (Eestis).

118. Kaks jõudu $P = 72$ kg ja $Q = 58$ kg on rakendatud keha ühte punkti, nurk nende vahel $\alpha = 72^0 30' 44''$. Leida jõudude resultant. (Venemaal).

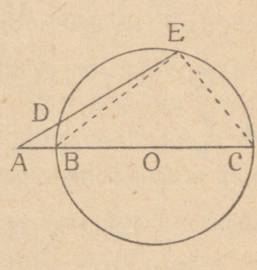
119. Lahendada võrrandite süsteem: $\operatorname{tg} x . \operatorname{tg} z = 2$; $\operatorname{tg} y . \operatorname{tg} z = 18$; $x + y + z = 180^0$. (Saksamaal).

120. Lahendada võrrand $\frac{1 + \operatorname{sn} x}{1 + \operatorname{cs} x} = \frac{1}{2}$. (Eestis).

Vastused.

Märkus. Sulgudes olevad arvud on leitud viiekohaliste logaritmide abil.

1. $\frac{9{,}96 \operatorname{sn} 60^0}{\operatorname{sn} 70^0} = 9{,}18$ cm; $\frac{9{,}96 \operatorname{sn} 50^0}{\operatorname{sn} 70^0} = 8{,}12$ cm; $\frac{1}{2} \cdot 9{,}96 \cdot 9{,}18 \cdot \operatorname{sn} 50^0 = 35{,}025$ cm^2; $\frac{9{,}96^2 \pi}{4 \operatorname{sn}^2 70^0} = 88{,}22$ cm^2; (9,179 cm; 8,1193 cm; 35,017 cm^2; 88,232 cm^2). **2.** $x = 10 \operatorname{sn}^2 33^0 45' = 3{,}087$ cm; $y = 6{,}913$ cm; (3,0866 cm; 6,9134 cm). **3.** 1,5; 2,5; 1,5. **4.** $\frac{100 \pi a}{360^0 \operatorname{sn} \frac{a}{2}} = 113{,}55$ cm; (113,558 cm); siinjuures $\operatorname{tg} \frac{a}{4} = \frac{23}{50}$. **5.** $53^0 8'$; $126^0 52'$; 116^0; 64^0; ($53^0 7' 48''$; $126^0 52' 12''$; $115^0 59' 22''$; $64^0 0' 22''$). Juhatus. Ringi sees lõikuvate kõõlude osade korrutised on võrdsed. **6.** Lahendamine. Tähendagu α otsitava nurga CAE suurust (joon. 1). Kui $AB : BC = 4 : 21$ ja $AD : DE = 1 : 3$, siis võib olla: $AB = 4x$, $BC = 21x$, $AC = 25x$; $AD = y$, $DE = 3y$ ja $AE = 4y$. Lõikajate korrutised nende välisosadega on võrdsed: $4y \cdot y = 25x \cdot 4x$, s. o. $y = 5x$. Püstkolmnurgast CEB omame: $BC^2 = CE^2 + BE^2$ (1). Aga $CE^2 = (25x)^2 + (4y)^2 - 2 \cdot 25x \cdot 4y \cdot \operatorname{cs} \alpha$ ja $BE^2 = (4y)^2 + (4x)^2 - 2 \cdot 4y \cdot 4x \cdot \operatorname{cs} \alpha$. Pannes võrdusse (1) vastavad väärtused asemele ja lihtsustades, leiame:



Joon. 1.

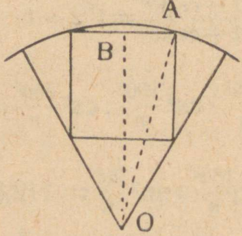
$\operatorname{cs}\alpha = \frac{25}{29}$; $\alpha = 30^0\,27'$; $(30^0\,27')$. **7.** $\frac{\mathrm{a}\operatorname{sn}2\alpha}{\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2}} = 4\mathrm{a}\operatorname{cs}\alpha\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$.

Näide: $x = \mathrm{a}$. **8.** $\frac{1}{2}\mathrm{dd}_1\operatorname{sn}\varphi$. Juhatus. Kahest vastastipust tõmmata ristjooned diagonaalile. **9.** $\mathrm{a}_\mathrm{n} = 2\mathrm{r}\operatorname{sn}\frac{180^0}{\mathrm{n}}$; $\mathrm{a}_{2\mathrm{n}} = 2\mathrm{r}\operatorname{sn}\frac{90^0}{\mathrm{n}}$; $\mathrm{b}_\mathrm{n} = 2\mathrm{r}\operatorname{tg}\frac{180^0}{\mathrm{n}}$; $\mathrm{b}_{2\mathrm{n}} = 2\mathrm{r}\operatorname{tg}\frac{90^0}{\mathrm{n}}$. **10.** $\mathrm{R}\operatorname{cs}\frac{180^0}{\mathrm{n}}$; $\frac{\mathrm{n}\,\mathrm{R}^2}{2}\operatorname{sn}\frac{360^0}{\mathrm{n}}$. **11.** $\frac{\mathrm{a}}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^0}{\mathrm{n}}$; $\frac{\mathrm{a}}{2} : \operatorname{sn}\frac{180^0}{\mathrm{n}}$; $\frac{\mathrm{na}^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^0}{\mathrm{n}}$. **12.** $\operatorname{sn}\frac{\mathrm{x}}{2} = \frac{1}{\mathrm{n}-1}$; $\mathrm{x} = 60^0$. **13.** $0{,}75\mathrm{d}^2\sqrt{3}\operatorname{sn}^2\frac{\varphi}{2} = 946$; $(946{,}2)$. **14.** $\operatorname{tg}\mathrm{x} = \sqrt{\frac{\mathrm{m}-\mathrm{n}}{\mathrm{m}+\mathrm{n}}}$; $\mathrm{x} = 30^0$; pind $= \frac{\mathrm{m}+\mathrm{n}}{2}\sqrt{\mathrm{m}^2-\mathrm{n}^2} = 64{,}97\ \mathrm{cm}^2$; $(64{,}9514\ \mathrm{cm}^2)$. **15.** $\frac{\mathrm{c}}{2\pi}\operatorname{cs}\frac{\mathrm{m}\cdot 180^0}{\mathrm{m}+\mathrm{n}} = 6{,}041$; $(6{,}0399)$. **16.** $\mathrm{Dd}\operatorname{sn}\varphi : \sqrt{\mathrm{D}^2+\mathrm{d}^2\pm 2\mathrm{Dd}\operatorname{cs}\varphi} = 4{,}901$ ehk $2{,}772$; $(4{,}90075$; $2{,}7721)$. **17.** $1{,}2\mathrm{r}^2$. Juhatus. Püthagorase teoreem: $(5\mathrm{r})^2 = (4\mathrm{r})^2 + (3\mathrm{r})^2$. Kolmn. nurkade siinused saame teada. **18.** $6 - \pi\cdot\frac{90^0+\alpha}{72^0} = 0{,}464\ \mathrm{m}^2$; $(0{,}46425\ \mathrm{m}^2)$; siinjuures on α puutetäppide vahel asetsev suurima ringi kaar. **19.** $\frac{90^0-\alpha}{90^0}\cdot\pi\mathrm{h}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 538{,}6\ \mathrm{m}$; $(538{,}56\ \mathrm{m})$. **20.** 30^0. Juhatus. Avaldada rombi pind kahel viisil. **21.** $2\mathrm{r}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 114{,}97\ \mathrm{cm}$; $(114{,}99\ \mathrm{cm})$. **22.** $\frac{4\mathrm{K}}{\pi\sin\mathrm{a}} = 772$; $(771{,}7)$. **23.** $\frac{\mathrm{a}}{4}\operatorname{sn}\beta : \left(\operatorname{sn}\frac{\alpha}{4}\operatorname{cs}\frac{\alpha-2\beta}{4}\right)$. Juhatus. Tõmmata raadius haara ja kaare lõiketäppi. Saadud kolmnurgas võtta kahe külje summa suhe ühesse neist. **24.** $\operatorname{sn}2\alpha = \frac{2}{\pi}$; $\alpha = 19^0\,46'$; $\beta = 70^0\,14'$; $(19^0\,46'\,12''$; $70^0\,13'\,48'')$. **25.** $\mathrm{a}^2 : \operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2} =$

$= 598{,}7$; (599). **26.** $\frac{a^2}{2} \operatorname{sn}(\alpha + \beta) \operatorname{cs}(\alpha - \beta) = 62{,}3$; diagonaal $= a \operatorname{sn}(\alpha + \beta) = 9{,}398$; $(62{,}3114;\ 9{,}398)$. **27.** $\frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} \alpha$. **28.** $a(\sqrt{2} - 1) \operatorname{sn} \frac{\beta}{2} \operatorname{sn} \frac{\gamma}{2} : \operatorname{sn} \frac{\beta + \gamma}{2} = 5{,}1487$; $(5{,}14875)$. Juhatus. Sarnaste hulknurkade pinnad suhtuvad nagu külgede ruudud. $\operatorname{tg} 22^0 30' = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{cs} 45^0}{1 + \operatorname{cs} 45^0}} = \sqrt{2} - 1$.

29. $\frac{a^2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cs}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$. **30.** $\frac{na^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n} \cdot \operatorname{cs}^2 \frac{180^0}{n} : \operatorname{cs}^2 \frac{360^0}{n} =$ $= 0{,}8458$; $(0{,}84594)$. **31.** $\frac{\pi}{2n} a \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n} : \operatorname{sn}^2 \frac{90^0}{n} = 112{,}8$; $(112{,}89)$. **32.** $\operatorname{sn} x = \frac{R - r}{R + r}$; $\frac{2Rr}{R + r} \sqrt{Rr}$. **33.** $\operatorname{ctg} \frac{y}{2} =$ $= \sqrt{3} (\sqrt{2} + 1) = \operatorname{ctg} 30^0 \operatorname{ctg} 22^0 30'$; $y = 26^0 54'$; $x = 33^0 6'$; $(26^0 53' 56''$; $33^0 6' 4'')$. Juhatus. $\operatorname{sn} \frac{x}{2} : \operatorname{sn} \frac{y}{2} = \sqrt{3} : \sqrt{2}$; $\operatorname{ctg} 22^0 30' = \sqrt{2} + 1$. **34.** $\frac{\pi S}{n} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n} : \operatorname{sn}^2 \frac{180^0}{n} = 175{,}96$; $(175{,}672)$. **35.** $ma \operatorname{sn} \frac{180^0}{m} : \operatorname{sn} \frac{180^0}{n}$; $ma^2 \operatorname{sn} \frac{360^0}{m} : 8 \operatorname{sn}^2 \frac{180^0}{n}$. **36.** $\operatorname{cs} x = \frac{3}{4}$; $x = 41^0 25'$; $(41^0 24' 35'')$. **37.** $a - h \cdot$ $\cdot \frac{\operatorname{sn}(\alpha + \beta)}{\operatorname{sn} \alpha \operatorname{sn} \beta} = 0{,}8192$; $(0{,}819186)$. **38.** $\operatorname{cs} \frac{\alpha}{2} : \operatorname{cs} \frac{\alpha}{6}$. **39.** $\sqrt{\frac{S}{\operatorname{sn} 2\alpha}}$; $\sqrt{S \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$. **40.** $\operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} =$ $= 2 \operatorname{sn} 15^0 \operatorname{cs} 45^0$; $\alpha = 42^0 56'$; $(42^0 56' 34'')$. Juhatus. Avaldada kõõlud nurkade ja raadiuse kaudu. Peale selle $2\alpha + \beta =$ $= 180^0$. **41.** $\operatorname{cs} \alpha = \sqrt{\frac{5}{6}}$; $\alpha = 24^0 6'$; $(24^0 5' 40'')$. Juhatus. Aluse osad suhtuvad nagu vastavad pinnad. On p bissektor, võime kirjutada: $\frac{p}{\operatorname{sn} \alpha} = \frac{7x}{\operatorname{sn}(90^0 - 2\alpha)}$ ja $\frac{p}{\operatorname{sn} 3\alpha} =$ $= \frac{3x}{\operatorname{sn}(90^0 - 2\alpha)}$, s. o. $\frac{\operatorname{sn} 3\alpha}{\operatorname{sn} \alpha} = \frac{7}{3}$, $\frac{\operatorname{sn} 3\alpha + \operatorname{sn} \alpha}{\operatorname{sn} \alpha} = \frac{7 + 3}{3}$ jne.

42. Otsitava täpi kaugus tipust B $= a \operatorname{sn} \alpha : 2 \operatorname{sn} \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{cs} \frac{\alpha-\beta}{2} = 5{,}776$ km; (5,7751 km). **43.** $2R \operatorname{cs} \frac{\alpha}{2}$; $2R^2 \operatorname{sn} 3\alpha \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2}$. **44.** $4r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{cs}^4 \left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right) = 0{,}01409$; (0,0140829). **45.** $2a \operatorname{sn} 15^0 = 39{,}15$; (39,152). Juhatus. Määrata nurk AOB (joon. 2). $2 + \sqrt{3} = \operatorname{ctg} 15^0$. **46.** $\frac{360^0}{\alpha} \cdot l \cdot \operatorname{sn} \frac{2\alpha}{4}$. Näiteis: $\frac{3}{5} l$; l; $\frac{9}{8} l$. **47.** $p_\alpha = \frac{a \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$; $p_\beta = \frac{a \operatorname{sn}\gamma}{\operatorname{sn}\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}$; $p_\gamma = \frac{a \operatorname{sn}\beta}{\operatorname{sn}\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$.



Joon. 2.

Juhatus. $\frac{1}{2} p_\alpha b \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} p_\alpha c \operatorname{sn} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} b c \operatorname{sn} \alpha$.

48. $\operatorname{sn}\alpha \sqrt{\frac{2Q}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma}} = 0{,}6237$; $\operatorname{sn}\beta \sqrt{\frac{2Q}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma}} = 0{,}9054$; $\operatorname{sn}\gamma \sqrt{\frac{2Q}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma}} = 0{,}7834$; (0,62369; 0,9054; 0,7835). Juhatus. Arvutamisel leida ühise osa $\sqrt{\frac{2Q}{\operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}\beta \operatorname{sn}\gamma}}$ logaritm eraldi. **49.** $-2a^2 \operatorname{sn} 2\alpha = 160{,}9$ cm²; (160,94 cm²). **50.** $\frac{1}{2} d^2 \operatorname{sn} 2\alpha$. **51.** $\frac{4r^2}{\operatorname{sn}\alpha} \cdot \operatorname{sn}^2 \left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right) = 6413$; (6414,7). **52.** $\frac{1}{2} \alpha^2 \operatorname{sn}^3 \alpha$. **53.** $2a^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{sn}^2 \frac{\alpha}{2}$ ehk $2a^2 \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cs}^2 \frac{\alpha}{2}$. **54.** $\frac{4am}{m+n} \operatorname{cs}\alpha$; $\frac{2ma^2}{m+n} \operatorname{sn} 2\alpha$. **55.** Juhatus. Kolmnurga ABC pind: $S = rp = r(AL + BN + CM) = r^2 \left(\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}\right) = r^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$ (vt. Sissejuhatus, V). Kolmnurga LNM pind: $S_1 = \frac{r^2}{2} \operatorname{sn}(180^0 - \alpha) + \frac{r^2}{2} \operatorname{sn}(180^0 - \beta) + + \frac{r^2}{2} \operatorname{sn}(180^0 - \gamma) = \frac{r^2}{2} (\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn}\beta + \operatorname{sn}\gamma) = 2r^2 \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2} \operatorname{cs}\frac{\beta}{2} \operatorname{cs}\frac{\gamma}{2}$. Järelikult $\frac{S_1}{S} = 2\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} \operatorname{sn}\frac{\beta}{2} \operatorname{sn}\frac{\gamma}{2}$. Et aga $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ jne., siis ka $\frac{S_1}{S} = \frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$, millele võib anda veel kuju $\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \cdot \frac{r}{R}$. **56.** $\frac{c \cdot \operatorname{sn}(60^0 + \varphi)}{\operatorname{sn}(60^0 - \varphi)} = 0{,}95325$ m; $\frac{c \cdot \operatorname{sn} 60^0}{\operatorname{sn}(60^0 - \varphi)} = = 0{,}8278$ m; (0,953 m; 0,82775 m). **57.** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{n}{m}$; $\frac{(m^2 + n^2)^2}{2mn}$. **58.** Otsitava täpi kaugus tipust $C = a\sqrt{\frac{\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}3\alpha}} = = 4323$; (4323,2). **59.** $a \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **60.** $\frac{\pi a^2}{8} \operatorname{sn}\alpha \operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$. **61.** $\frac{1}{2}(b-a)^2 \operatorname{sn}\alpha$. **62.** $4r\operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{2}$; $4r\operatorname{cs}^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$. **63.** $\frac{(d-b)\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{sn}(\alpha+\delta)}$; $\frac{(d-b)\operatorname{sn}\delta}{\operatorname{sn}(\alpha+\delta)}$; $\frac{(d^2-b^2)\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn}\delta}{2\operatorname{sn}(\alpha+\delta)}$. **64.** $\frac{0{,}8a}{\operatorname{cs}\varphi} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{sn}^2\frac{\varphi}{2} = 6{,}277$ cm; (6,2783 cm); siinjuures $\operatorname{tg}^2\varphi = = \frac{5}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. Juhatus. Ringi sees lõikuvate kõõlude osade korrutised on võrdsed. **65.** $x = \frac{r}{2} \operatorname{sn}\frac{180^0}{n} : \operatorname{sn}^2\left(45^0 - \frac{90^0}{n}\right)$. Näide: $x = r$. **66.** $a\operatorname{cs}\frac{3\alpha}{2} : 2\operatorname{sn}\alpha\operatorname{cs}\frac{\alpha}{2}$. **67.** $\frac{a}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4} : \operatorname{cs}^2\frac{\alpha}{4} = = 348{,}5$; (348,52). **68.** $\frac{\pi r^2\alpha}{360^0} - \frac{r^2}{2}\operatorname{sn}\alpha = 60620$; (60680). **69.** $\frac{r^2\operatorname{sn}\alpha}{\operatorname{cs}^2\varphi} = 0{,}001227$; (0,0012276); siinjuures $\operatorname{tg}^2\varphi = = \pi\frac{180^0 - \alpha}{180^0\operatorname{sn}\alpha}$. **70.** 49,6 ehk 1008,7; (49,60; 1008,76). Juhatus. Vt. ü. nr. 68. α on suurema ringi kesknurk: $\operatorname{sn}\frac{\alpha}{2} = \frac{9}{25}$. **71.** Pind $= 510\ cm^2$; $\operatorname{cs}\alpha = \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2(a-c)d}$; $\alpha = 61^0 55'$;

$\mathrm{cs}\beta = \frac{(a-c)^2 + b^2 - d^2}{2(a-c)b}$; $\beta = 36^0\,52'$; diagonaalid: $AC = \sqrt{\frac{(d^2-c^2)a + (a^2-b^2)c}{a-c}} = 31{,}76$ cm; $BD = \sqrt{\frac{(b^2-c^2)a + (a^2-d^2)c}{a-c}} = 42{,}72$ cm; (510 cm^2; $61^0\,55'\,40''$; $36^0\,52'\,12''$; 31,764 cm; 42,72 cm). **72.** $2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma : \pi$. **73.** $\frac{4r^2}{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\varphi} \cdot \mathrm{sn}\frac{\alpha+\varphi}{2}\,\mathrm{cs}\frac{\alpha-\varphi}{2} = 766{,}2$; (766,25); siinjuures $\mathrm{sn}\,\varphi = \frac{2r}{\sqrt{d^2+4r^2}}$.

74. $\frac{a^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,(\varphi-\alpha)}{8\,\mathrm{sn}\,\varphi\,\mathrm{sn}^4\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)} = 9402$; (9402,2); siinjuures $\mathrm{ctg}\,\varphi = \pi \cdot \frac{90^0-\alpha}{180^0}$. — Kui abinurka mitte tarvitada ja leida pinna arvsuurus avaldisest $\frac{a^2\,\mathrm{sn}\,2\alpha}{16\,\mathrm{sn}^4\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(1-\pi\frac{90^0-\alpha}{180^0}\cdot\mathrm{tg}\,\alpha\right)$, kas saame eelnevaga ühesuguse vastuse? Kui ei saa, siis kust see tuleb? **75.** $\mathrm{cs}\,\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{5}-1) = 2\,\mathrm{sn}\,18^0$; $\alpha = 51^0\,50'$; $\beta = 38^0\,10'$; ($51^0\,49'\,38''$; $38^0\,10'\,22''$). **76.** Tipunurk x: $\mathrm{sn}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) = 4\,\mathrm{sn}\,6^0\,\mathrm{cs}\,24^0$; $x = 44^0 54'$; ($44^0 54' 38''$).

77. Juhatus. Olgu $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha = n+1$, $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\beta = n$ ja $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\gamma = n-1$, siis (vt. Sissejuhatus, V): $3n = n(n^2-1)$ ja $n = 0$; -2; 2. Kolmas juur annab: $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha = 3$; $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\beta = 2$; $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\gamma = 1$. Järelikult $\mathrm{sn}\,\alpha = \frac{3}{5}$, $\mathrm{sn}\,\beta = \frac{4}{5}$, $\mathrm{sn}\,\gamma = 1$ ja külgede suhe $\frac{3}{5} : \frac{4}{5} : 1 = 3:4:5$. **78.** Juhatus. Võrdusest $\mathrm{sn}\,\alpha - \mathrm{sn}\,\beta = \mathrm{sn}\,\beta - \mathrm{sn}\,\gamma$ saame proportsiooni $\mathrm{sn}\frac{1}{2}(\alpha-\beta) : \mathrm{sn}\frac{1}{2}\alpha = \mathrm{sn}\frac{1}{2}(\beta-\gamma) : \mathrm{sn}\frac{1}{2}\gamma$. Jagame avaldisega $\mathrm{sn}\frac{1}{2}\beta$ ja lihtsustame. Leiame: $\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\beta -$

$-\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\alpha=\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\gamma-\mathrm{ctg}\frac{1}{2}\beta$. **79.** Diameeter $=\frac{d}{\sqrt{2}\,\mathrm{sn}\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}$;

kõõlud: $\frac{d\,\mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\,\mathrm{sn}\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}$ ja $\frac{d\,\mathrm{cs}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2}\,\mathrm{sn}\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}$. **80.** $147^0\,59'$; $(147^0\,59'\,16'')$. **81.** $\mathrm{tg}\,x=\frac{Q}{a^2}$; $x=19^0\,1'$; $(19^0\,1')$. **82.** $112^0 18'$; $67^0 42'$; 173,08 m; 267,9 m; 42900 m^2; $(112^0 17' 17''$; $67^0 42' 43''$; 173,036 m; 267,93 m; 42899 m^2). **83.** $\frac{d\,\mathrm{sn}\alpha}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}=$ $=6{,}677$; $\frac{d\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,(\alpha+\beta)}=7{,}26$; $\frac{d^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}\,(\alpha+\beta)}=47{,}16$; (6,6759; 7,2588; 47,143). **84.** $\angle A=94^0 50'$; $\angle B=112^0 38'$; $\angle C=56^0 49'$; $\angle D=95^0 43'$; $AB=6{,}808$; $CD=11{,}92$; $BD=10{,}93$; $Q=82{,}00$; $(94^0 49' 51''$; $112^0 38' 9''$; $56^0 49' 4''$; $95^0 42' 56''$; 6,8083; 11,917; 10,933; 81,992). **85.** $\mathrm{sn}\alpha=\frac{Q}{p^2}$; $\alpha=18^0 13'$; $(18^0 12' 36'')$. **86.** $\frac{b^2\,\mathrm{sn}\,\alpha}{8\,\mathrm{sn}^2\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)}=$ $=9{,}52$; (9,51875). **87.** $AB=41$; $\angle A=76^0 28'$; pind $=1714$; (41; $76^0 27' 10''$; 1713,96). **88.** $d_1=d_6=$ $=2\,a\,\mathrm{cs}\,20^0$; $d_2=d_5=\frac{a\,\mathrm{sn}\,60^0}{\mathrm{sn}\,20^0}$; $d_3=d_4=\frac{a}{2\,\mathrm{sn}\,10^0}$. **89.** $\frac{1{,}5\,b^2\,\mathrm{sn}\,24^0}{\mathrm{sn}^2(\varphi+12^0)}=76{,}92$; (76,923); siinjuures $\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{2}$.

90. $145^0\,50'$; $(145^0\,50'\,6'')$. **91.** $AM=\sqrt{\frac{2\,S\,\mathrm{sn}\,(\alpha+\beta)}{\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}}=$ $=104{,}6$ m; (104,6 m). **92.** $Q=2\,R^2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\gamma$. Juhatus. Korrutada avaldised $Q=\frac{1}{2}ab\,\mathrm{sn}\,\gamma$, $Q=\frac{1}{2}ac\,\mathrm{sn}\beta$, $Q=\frac{1}{2}bc\,\mathrm{sn}\,\alpha$. Peale selle on teada, et $abc=4\,R\,Q$. **93.** $\mathrm{cs}\frac{180^0}{n}=$ $=\sqrt{\frac{q}{Q}}$. Näiteis: $n=6$; 9; (6; 9). **94.** $a\,\mathrm{cs}\frac{\beta-\gamma}{2}$:

$:2\,cs\frac{\beta}{2}\,cs\frac{\gamma}{2}$. **95.** $2\,S\,sn^2\left[45^0\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\right]$. **96.** $a^2 sn\,\alpha\,cs^3\alpha$; $acs\,2\alpha$. **97.** $\sqrt{-\frac{Q}{2\,sn\,\alpha}}=7{,}4967$; $(7{,}4968)$.

98. $\dfrac{a\,sn\frac{\alpha}{2}\,sn\frac{\beta}{2}}{2\,sn\frac{\alpha-\beta}{4}\,cs\frac{\alpha+\beta}{4}}=2{,}3226$; $(2{,}32263)$.

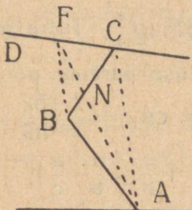
99. $d\,sn\frac{\alpha+\beta}{4}\,cs\frac{\alpha-\beta}{4}$; $d\,cs\frac{\alpha+\beta}{4}\,sn\frac{\alpha-\beta}{4}$.

100. $-\frac{h^2(n+m)}{2(n-m)}\cdot\frac{sn(\alpha+\beta)}{sn\,\alpha\;sn\,\beta}$. **101.** $\frac{(a+b)(a-b)}{2}\,tg\,\alpha=$ $=748{,}2$; $snx=\frac{(a+b)(a-b)}{2\,ab}\,tg\,\alpha$; $x=45^0\,40'$; $(748{,}23$; $45^0\,41'\,14'')$. Juhatus. $S=\frac{1}{2}\,dd_1\,sn\,\alpha$; $a^2=\left(\frac{1}{2}d\right)^2+\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2+$ $+\frac{1}{2}\,dd_1\,cs\,\alpha$, $b^2=\left(\frac{1}{2}d\right)^2+\left(\frac{1}{2}d_1\right)^2-\frac{1}{2}\,dd_1\,cs\,\alpha$; järelikult $dd_1=$ $=\frac{a^2-b^2}{cs\,\alpha}$. Nurga leidmisel kasutame veel parallelogrammi pinna teist valemit $S=ab\,sn\,x$, kus x otsitav nurk. **102.** Pind $=$ $=\frac{(d+d_1)(d-d_1)}{4}\,tg\,\alpha$; $snx=\frac{(d+d_1)(d-d_1)}{2\,dd_1}\,tg\,\alpha$.

103. $4\,r\sqrt{R^2-r^2}\;cs^2\frac{\alpha}{2}$. **104.** Juhatus. $tg\frac{\alpha}{2}=$ $=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$; $sn\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$; $cs\frac{\alpha}{2}=$ $=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$; $S=rp$. **105.** 1) $c=\frac{m}{\sqrt{2}\,sn(45^0+\alpha)}$. 2) $c=\frac{m}{2\,sn^2\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 3) $c=\frac{d}{\sqrt{2}\,sn(45^0-\beta)}$. 4) $c=$ $=\frac{d}{2\,sn^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 5) $cs\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{m}{2\,R\sqrt{2}}$. 6) $cs\frac{\alpha-\beta}{2}=$ $=\frac{h_c+p}{p\sqrt{2}}$. Juhatus. $h_c(1+sn\,\alpha+sn\,\beta)=2\,p\,sn\,\alpha\,sn\,\beta$;

$2\,h_c\sqrt{2}\,cs\frac{\alpha}{2}\,cs\frac{\beta}{2}=2p\,sn\,\alpha\,sn\,\beta$ ehk $h_c\sqrt{2}=2p\,sn\frac{\alpha}{2}\,sn\frac{\beta}{2}=$ $=2p\left(cs\frac{\alpha-\beta}{2}-cs\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$; järelikult $h_c\sqrt{2}=2p\left(cs\frac{\alpha-\beta}{2}-\right.$ $\left.-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ jne. 7) $2c\sqrt{2}\,sn\frac{\alpha}{2}sn\left(45-\frac{\alpha}{2}\right)=d$. 8) $sn\,2\alpha=$ $=\frac{2h_c}{c}$. 9) $cs\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{c+2r}{c\sqrt{2}}$. 10) $c\sqrt{2}\,sn\frac{\alpha}{2}sn\left(45^0\frac{\alpha}{2}\right)=$ $=r$. **106.** 1) $2c\,sn\left(15^0+\frac{\gamma}{4}\right)cs\left(15^0-\frac{\gamma}{4}\right)=m\,sn\frac{\gamma}{2}$. 2) $c=\frac{m\,cs\,\alpha\,cs\,\varphi}{cs\,(\alpha-\varphi)}$, kus $tg\,\varphi=\frac{1}{2}$. 3) $2c\,sn\left(15^0+\frac{\gamma}{4}\right)\cdot$ $\cdot cs\left(15^0-\frac{\gamma}{4}\right)=m\,tg\frac{\gamma}{2}$. 4) $cs\,\alpha=h_a:2h_c$; $c=\frac{h_a}{sn\,\alpha}=2h_a h_c:$ $:\sqrt{4h_c^2-h_a^2}$. Juhatus. $c=\frac{h_a}{sn\,\alpha}$; $\frac{c}{2}=h_c\,ctg\,\alpha$. **107.** 1) $(b+$ $+c)^2=a^2+4S\,ctg\frac{\alpha}{2}$; $(b-c)^2=a^2-4S\,tg\frac{\alpha}{2}$. Juhatus. $a^2=b^2+c^2-2bc\,cs\,\alpha$; liidame selle võrduse parema poole avaldisega $2bc-2bc$; $bc=2S:sn\,\alpha$. 2) $cs\,\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{h_c}{h_b}+\right.$ $\left.+\frac{h_b}{h_c}-\frac{h_b h_c}{h_a^2}\right)$. Juhatus. $cs\,\alpha=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{c}\right)$; $\frac{a}{b}=\frac{h_b}{h_a}$ jne. 3) $a=\frac{2}{3}\sqrt{2m_b^2+2m_c^2-m_a^2}$ jne. Juhatus. Kasutada mediaane ja külgi siduvaid geom. valemeid. 4) $cs\frac{\gamma}{2}=$ $=\frac{c\,sn\frac{\alpha-\beta}{2}}{a-b}$. 5) $c=2R\,sn\,\gamma$; $cs\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{a+b}{4R}:cs\frac{\gamma}{2}$. 6) $sn\,\beta=\frac{h_a+h_c}{a+c}$; $b=(a+c)\,sn\frac{\beta}{2}:cs\frac{\alpha-\gamma}{2}$. 7) $tg\frac{\alpha+\beta}{2}=$ $=\frac{a+b}{a-b}tg\frac{\alpha-\beta}{2}$. Juhatus. $\frac{a}{b}\pm1$. 8) $(a+b)^2=a^2+b^2+$ $+4S:sn\,\gamma$; $(a-b)^2=a^2+b^2-4S:sn\,\gamma$. 9) $sn\,(\beta-\gamma)=$ $=\frac{d^2\,sn\,\alpha}{a^2}$. Juhatus. $\frac{b+c}{a}\cdot\frac{b-c}{a}=\left(\frac{d}{a}\right)^2$. 10) $cs\frac{\gamma}{2}=p_\gamma$.

$\cdot\frac{a+b}{2ab}$. 11) $a = r_a \,\mathrm{cs}\frac{\alpha}{2} : \mathrm{cs}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{cs}\frac{\gamma}{2}$; $b = r_a \,\mathrm{sn}\frac{\beta}{2} : \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cs}\frac{\gamma}{2}$; $c = r_a \,\mathrm{sn}\frac{\gamma}{2} : \mathrm{sn}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cs}\frac{\beta}{2}$. 12) $a = b + c - 2r\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Juhatus. $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b+c-a}{2r}$. 13) $b^2 = a^2 + \frac{4}{3}(m_a^2 - m_b^2)$; $c^2 = \frac{2}{3}(m_a^2 + 2m_b^2) - \frac{a^2}{2}$. Juhatus. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\mathrm{cs}\,\alpha$; $m_b^2 = \frac{b^2}{4} + c^2 - bc\,\mathrm{cs}\,\alpha$ jne. 14) $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = \left(2p - h_c\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right) : h_c$ ehk $\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} = \left(2p - h_c\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\right) : h_c$. Juhatus. $b^2 = (a+c)^2 - 4ac\,\mathrm{cs}^2\frac{\beta}{2}$; $b = \frac{h_c}{\mathrm{sn}\,\alpha}$; $a + c = 2p - \frac{h_c}{\mathrm{sn}\,\alpha}$; $a = \frac{h_c}{\mathrm{sn}\,\beta}$; $c = 2p - (a+b)$. **108.** $\frac{b\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}(\alpha+\beta)} - a = 512$ m; (512,05 m).



Joon. 3.

109. $CF = \frac{a\,\mathrm{sn}\,\gamma}{\mathrm{sn}(\varphi+\gamma)} = 407{,}6$ m; (407,56 m); siinjuures $\gamma = \angle ACB$ (joon. 3). Juhatus. Kolmnurgad NFC ja NAB peavad olema pindvõrdsed, järelikult ka kolmnurgad ABC ja AFC on pindvõrdsed. — Graafilisel lahendamisel tuleb tõmmata BF || AC. Kolmnurkade ABC ja AFC tipud on siis joonel BF, mis paralleelne ühise alusega AC. **110.** $\frac{a\,\mathrm{sn}(\alpha+\beta)}{\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta} = 17{,}87$ m; (17,864 m). **111.** $\frac{a\,\mathrm{sn}\,\beta\,\mathrm{sn}\,\alpha}{\mathrm{sn}(\beta-\alpha)} = 992{,}5$ m; (992,77 m). Juhatus. Väikesele maa-alale langevad päikese kiired on paralleelsed. **112.** $h.\frac{\mathrm{sn}(\beta+\alpha)}{\mathrm{sn}(\beta-\alpha)}$ m. Juhatus. Pilv ja tema kujutis on veepinnast ühekaugel. **113.** $\frac{a\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}(\alpha-\beta)}$; $\frac{a\,\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}(\alpha-\beta)} + a$. **114.** $\frac{(b-a)\,\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,\beta}{\mathrm{sn}(\alpha-\beta)} + b$; $\frac{(b-a)\,\mathrm{cs}\,\alpha\,\mathrm{cs}\,\beta}{\mathrm{sn}(\alpha-\beta)}$.

115. 1) $2\sqrt{d^2 - (R-r)^2} + \frac{\alpha}{90^0}.\pi r + \frac{180^0 - \alpha}{90^0}.\pi R$, kus

$\cos \alpha = \frac{R-r}{d}$; 2) $2\sqrt{d^2-(R+r)^2} + \frac{180^0 - \beta}{90^0} . \pi(R+r)$, kus $\cos \beta = \frac{R+r}{d}$. **116.** Küljed on: 6; 9; 15; 12; üks nurk $= 123^0 26'$; pind $= 96{,}51$; ($123^0 26' 24''$; pind $=$ $= 96{,}526$). **117.** *Juhatus.* Kolmnurga pind $= \frac{1}{2} a^2 \sin 60^0 =$ $= \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3}$. Tingimuse järele: $x^2 = \frac{1}{4} a^2 \sqrt{3} = \frac{1}{2} a . \frac{1}{2} a \sqrt{3}$, kus x on ruudu külg. Järelikult $x : \frac{1}{2} a \doteq \frac{1}{2} a \sqrt{3} : x$. Siit näeme, et x on keskmine võrdeline kolmnurga aluse poole $\frac{1}{2} a$ ja kõrguse $\frac{1}{2} a \sqrt{3}$ suhtes. — Ehitada kõige pealt kolmnurk, pikendada tema kõrgust poole külje võrra. Saadud sirglõik võtta ringi diameetriks. Pikendada aluse poolt kuni ringjooneni; nii leiame ruudu külje. **118.** 105,15 kg; (105,16 kg). **119.** $x = 26^0 34'$; $y = 77^0 28'$; $z = 75^0 58'$; ($26^0 33' 54''$; $77^0 28' 16''$; $75^0 57' 50''$). **120.** $x_1 = 360^0 . n$; $x_2 = -126^0 52' +$ $+ 360^0 . n$; ($360^0 . n$; $-126^0 52' 12'' + 360^0 . n$).

Pealadu «Postimehe» raamatukaupluses,
Tartus, Suurturg nr. 16.