A. Kisseljov

ALGEBRA

VIII—X KLASSILE

RK
Pedagoogiline Kirjandus
Tallinn

A-17881

A. KISSELJOV

ALGEBRA

ÕPIK
KESKKOOLI VIII—X KLASSILE

Koidula, Maidla
VIII klass
Tartu II keskkool.

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“
TALLINN 1949

Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud.

TARTU Ü...
RAAMATUKOGU

Esimene jagu.

Identsed teisendused astmete ja juurtega.

I. Astendamine.

1. Astendamine. Kursuse algul nägime, et astendamine on tehe, mille abil korrutatakse antud arv (astendatav) iseendaga, võttes teda teguriks niimitu korda, kui suur on teine antud arv (astendaja).

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32;$$

$$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^4 = 81.$$

Üldiselt:
$$a \cdot a \cdot a = a^3$$
$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ tegurit}} = a^n.$$

2. Negatiivse arvu aste. Relatiivsete arvude korrutamisel nägime, et korrutis on positiivne, kui negatiivsete tegurite arv on paarisarv. Vastasel korral on korrutis negatiivne. Rakendades seda omadust võrdsete negatiivsete tegurite korrutamisel, s. o. negatiivse arvu astendamisel, saame reegli (I osa, § 30):

Negatiivse arvu paarisaste on positiivne, paaritu aste — negatiivne.

Seega: $(-2)^2 = 4$; $(-2)^6 = 64$; $(-5)^4 = 625$;
$(-2)^5 = -32$; $(-2)^7 = -128$;
$(-5)^5 = -3125$, jne.

3. Üksliikmete astendamine. Õpiku esimesest osast on teada reegel üksliikme ruudu ja kuubi arvutamiseks. Nüüd näitame, et sama reegli järgi toimub üksliikme astendamine mistahes arvuga.

a) Astendame korrutise abc arvuga n. Kasutades korrutamise tuntud omadusi, saame:

$$(abc)^n = \underbrace{(abc) \cdot (abc) \cdot (abc) \ldots (abc)}_{n \text{ korda}} =$$

$$= abc \cdot abc \cdot abc \ldots abc =$$

$$= \underbrace{(aa \ldots a)}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{(bb \ldots b)}_{n \text{ tegurit}} \cdot \underbrace{(cc \ldots c)}_{n \text{ tegurit}} = a^n b^n c^n.$$

Et korrutist astendada mingi arvuga, tuleb selle arvuga astendada iga tegur üksikult ja tulemused korrutada.

b) Samal viisil leiame murru $\frac{a}{b}$ astme:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdots \frac{a}{b}}_{n \text{ korda}} = \frac{a \cdot a \ldots a}{b \cdot b \ldots b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Et murdu astendada mingi arvuga, tuleb selle arvuga astendada eraldi lugeja ja nimetaja ning esimene tulemus jagada teisega.

c) Olgu arv a^m vaja astendada arvuga n. Saame:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot a^m \ldots a^m}_{n \text{ korda}} = a^{m+m+m+\ldots+m} = a^{mn}.$$

Et astendada mingi arvu astet mingi teise arvuga, tuleb astendajad korrutada.

d) Võtame nüüd mingi üksliikme, näiteks $2a^2b^3$. Astendame ta mingi arvuga n. Kasutades tuletatud reegleid, saame:

$$(2a^2b^3)^n = 2^n a^{2n} b^{3n}.$$

Et astendada mingi arvuga üksliiget, tuleb astendada selle arvuga kordaja, tähtede astendajad aga korrutada selle arvuga.

Harjutused.

Teostada astendamine.

1. $(-3)^5$; $(-7)^3$; $(-4)^4$; $(-10)^6$; $(-0{,}1)^5$.
2. $(3a^2b)^3$; $(-2a^3b^2)^3$; $(-5a^4b^2c)^4$.
3. $\left(\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$; $\left(-\frac{3ab^3}{2c^2}\right)^3$; $\left(-\frac{0{,}2a^3bc}{d^2}\right)^6$.

II. Hulkliikme ruutimine.

4. Valemi tuletamine. Kasutades valemit $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ võime ruutida kolmliikme $a+b+c$, vaadeldes teda kui kaksliiget $(a+b)+c$:

$$[(a+b)+c]^2 = (a+b)^2+2(a+b)\cdot c+c^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2.$$

Seega kaksliikmele $a+b$ kolmanda liikme c juurdelisamisel lisandusid pärast summa ruutimist veel kaks liiget: 1) kahekordne esimese kahe liikme summa ja kolmanda liikme korrutis ning 2) kolmanda liikme ruut.

Nüüd pole raske ruutida neliliiget $a+b+c+d$, võttes temas summa $a+b+c$ üheks liikmeks:

$$[(a+b+c)+d]^2 = (a+b+c)^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

Asendades $(a+b+c)^2$ avaldisega, mille leidsime varem, saame:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2+2ab+b^2+2(a+b)\cdot c+c^2+2(a+b+c)\cdot d+d^2.$$

Me märkame taas, et uue liikme lisandamisega ruuditavale hulkliikmele lisandus ruudule kaks liiget: 1) kahekordne endiste liikmete summa ja uue liikme korrutis ning 2) uue liikme ruut. On ilmne, et selline kahe liikme lisandumine

ruudule kestab seni, kuni ruuditavale hulkliikmele lisandatakse uusi liikmeid. Tähendab:

Hulkliikme ruut võrdub esimese liikme ruuduga, pluss kahekordne esimese ja teise liikme korrutis, pluss teise liikme ruut, pluss kahekordne esimese kahe liikme summa ja kolmanda liikme korrutis, pluss kolmanda liikme ruut, pluss kahekordne esimese kolme liikme summa ja neljanda liikme korrutis, pluss neljanda liikme ruut jne.

Mõistagi võivad hulkliikme liikmed olla ka negatiivsed.

Kui viimase võrduse paremal poolel avame sulud, siis saame pärast liikmete ümberasetamist:

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + \\ + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

Seepärast võib eelmise reegli formuleerida nii:

Hulkliikme ruut võrdub tema kõigi liikmete ruutude summaga, pluss iga liikme ja kõigi temale järgnevate liikmete kahekordsed korrutised.

5. Märkus märkide kohta. Lõpptulemuses esinevad plussmärgiga esiteks hulkliikme kõigi liikmete ruudud ja teiseks need kahekordsed korrutised, mis saadi ühesuguste märkidega liikmete korrutamisel. Näiteks:

$$(3x^2 - 2x + 1)^2 = (3x^2)^2 + 2(3x^2)\ (-2x) + (-2x)^2 + \\ + 2(3x^2 - 2x) \cdot 1 + 1^2 = 9x^4 - 12x^3 + 4x^2 + 6x^2 - 4x + 1 = \\ = 9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1.$$

Harjutused.

4. $(2a^2 - \frac{1}{2}a + 1)^2$.
5. $(\frac{1}{2}x^2 - 4x - 3)^2$.
6. $(-5a^3x + 3a^2x^2 - ax^3 + 3x^4)^2$.
7. $(0{,}3x^3 - 0{,}1x^2 - \frac{3}{4}x + 0{,}5)^2$.

Kahe järgmise näite varal veenduda, et hulkliikme ruut ei muutu, kui me kõigi tema liikmete märgid muudame vastupidisteks.

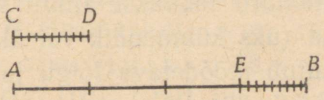
8. $(a - b + c)^2 = (-a + b - c)^2$.
9. $(2x^3 - x^2 - 3x + 1)^2 = (-2x^3 + x^2 + 3x - 1)^2$.
10. Kui võrdus $(a - b)^2 = (m - n)^2$ on õige, kas võib siis sellest järeldada, et $a - b = m - n$?

III. Irratsionaalarvu mõiste.

6. Ühismõõdulised ja ühismõõdutud lõigud. Nagu geomeetriast teada, nimetatakse kahe sirglõigu *ühiseks mõõduks* sellist lõiku, mis kummassegi sirglõiku mahub jäägita täisarv korda. Geomeetrias näidatakse, et võib esineda kaks seesugust lõiku, millel ei ole ühist mõõtu (näiteks ruudu külg ja tema diagonaal).

Kahte lõiku nimetatakse *ühismõõdulisteks* või *ühismõõdutuiks* olenevalt sellest, kas neil on ühine mõõt või mitte.

7. Mõõtmise mõiste. Olgu meil vaja mõõta lõigu AB (joon. 1) pikkus pikkusühikuga CD. Selleks leiame, mitu korda ühik CD mahub lõiku AB. Oletame, et ta mahub



Joon. 1.

AB-sse 3 korda mingi jäägiga EB (mis on väiksem kui CD). Siis arv 3 on *mõõtmise ligikaudne tulemus täpsusega kuni 1*, ja seejuures puudusega, sest AB on suurem kui $3CD$, kuid väiksem kui $4CD$ (ka arvu 4 võib nimetada selle mõõtmise ligikaudseks tulemuseks täpsusega kuni 1, kuid liiaga). Soovides saada täpsemat tulemust leiame, mitu korda mahub jääki EB $\frac{1}{10}$ ühikust CD. Oletame, et see osa mahub EB-sse üle 8 korra, kuid vähem kui 9 korda. Siis arvud 3,8 ja 3,9 on *lõigu AB mõõtmise ligikaudsed tulemused täpsusega kuni* $\frac{1}{10}$, esimene puudusega, teine liiaga. Soovides saada veelgi täpsemat mõõtmise tulemust leiame, mitu korda mahub viima-

sesse jääki $\frac{1}{100}$ ühikust *CD*. Mahtugu see osa jääki üle 5 korra, kuid vähem kui 6 korda. Siis arvud 3,85 ja 3,86 on lõigu *AB* mõõtmise ligikaudsed tulemused täpsusega kuni $\frac{1}{100}$ ühikut. Seesugust mõõtmist võib üha jätkata. Seejuures on võimalikud kaks juhtu:

Esiteks võib juhtuda, et üksteisele järgnevail mõõtmistel täpsusega 0,1, 0,01, 0,001, ... varem või hiljem ei jää järele mingit jääki.

Teiseks võib juhtuda, et millise täpsusega (kuni 0,1, 0,01, 0,001 ...) me ka mõõdaksime, alati jääb järele jääk.

Esimesel juhul saadakse mõõtmise tulemusena lõplik kümnendmurd. Teisel juhul saadakse mõõtmise tulemusena lõputu kümnendmurd.

Lõplik kümnendmurd saadakse ainult sel juhul, kui ühiku mingi kümnendosa (üks kümnendik või üks sajandik või üks tuhandik jne.) osutub mõõdetava lõigu ja pikkusühiku ühismõõduks.

Kui aga mõõdetav lõik on pikkusühikuga ühismõõduline, kuid ei $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ ega üldse ühiku mingi kümnendosa pole mõõdetavale lõigule ja pikkusühikule ühismõõduks, siis saadakse mõõtmise tulemusena perioodiline[1] lõputu kümnendmurd. Lõpuks, kui mõõdetav lõik on pikkusühikuga

[1] Tõepoolest, ühismõõtsuse korral võiksime alati saada täpse mõõtmistulemuse hariliku murruna. Teisendades selle hariliku murru kümnendmurruks, avaldaksime mõõtmise tulemuse kümnendmurruna. Kuid harilik murd teisendatult lõputuks kümnendmurruks annab alati perioodilise murru. Juhul aga, kui mõõdetav lõik on ühismõõdutu, ei saa murd osutuda perioodiliseks, sest kui ta oleks seesugune, siis võiks teda teisendada harilikuks murruks ja see harilik murd oleks täpseks mõõtmistulemuseks, ent seesugust tulemust ei saa ühismõõdutuse korral esineda. Järelikult peab kümnendmurd sel juhul olema mitteperioodiline.

ühismõõdutu, siis saadakse mõõtmise tulemusena lõputu mitteperioodiline kümnendmurd.

8. Irratsionaalarvud ja nende ligikaudsed väärtused. Täis- ja murdarvud kannavad ratsionaalarvude ühist nimetust. Iga ratsionaalarvu võib kirjutada lõpliku kümnendmurru kujul või perioodilise lõputu kümnendmurru kujul; mitteperioodilisi lõputuid kümnendmurde nimetatakse irratsionaalarvudeks. Ratsionaalarvud[1] on ühikuga ühismõõduliste suuruste mõõtarvud ja irratsionaalarvud on ühikuga ühismõõdutute suuruste mõõtarvud.

Irratsionaalarv on tuntud (ehk antud), kui on näidatud viis, mille abil on võimalik leida kuitahes palju tema kümnendkohti.

Katkestades lõputu kümnendmurru, mis väljendab antud (ratsionaalset või irratsionaalset) arvu mingi kümnendkoha juures, saame selle arvu ligikaudse väärtuse täpsusega kuni 0,1, 0,01, 0,001 jne. puudusega. Suurendades viimast säilitatavat kümnendkohta 1 võrra, saame antud arvu ligikaudse väärtuse sama täpsusega, kuid liiaga.

Näited.

1) Kirjutades murru $\frac{1}{3}$ perioodilise lõputu kümnendmurruna 0,33333... ja säilitades selle murru esimesed neli kohta, saame $\frac{1}{3}$ ligikaudse väärtuse täpsusega 0,0001 puudusega: 0,3333.

Ligikaudne väärtus täpsusega kuni 0,0001 liiaga on 0,3334.

---

[1] Ladinakeelne sõna *ratio* tähendab suhet. Ratsionaalarvud on need, mida võib esitada kahe täisarvu suhtena, irratsionaalarvud aga need, mida ei saa sel kujul esitada.

2) Irratsionaalarv π, mis väljendab ringjoone pikkuse ja diameetri suhet, kirjutatakse perioodilise lõputu kümnendmurruna, mille esimesed 25 kohta on

3,14159265358979323846264 33.

Arvu π ligikaudsed väärtused täpsusega 0,00001 on 3,14159 (puudusega) ja 3,14160 (liiaga).

3) Võtame irratsionaalarvu, mida väljendatakse järgmise mitteperioodilise lõputu kümnendmurruga: 123,10100100010000100000100000001 ... (kahe teineteisele järgneva ühe vahel on üks null, siis kaks nulli, siis kolm nulli jne.).

Selle irratsionaalarvu ligikaudsed väärtused täpsusega kuni 0,000000000001 $\left(\text{s. o. } \frac{1}{10^{12}}\right)$ on 123,101001000100 (puudusega) ja 123,101001000101 (liiaga).

9. Irratsionaalarvude võrdsus ja ebavõrdsus. Reaalarvud. Kaks irratsionaalarvu on võrdsed, kui nad on väljendatud kümnendmurdudega, millede vastavad numbrid on võrdsed [1].

Kahest positiivsest irratsionaalarvust on suurem see, mille arendises kümnendmurruks on enam täisühelisi, või täisüheliste võrdse arvu korral enam kümnendikke, või täisüheliste ja kümnendike võrdsete arvude korral enam sajandikke jne.

Näiteks arv 2,745037 ... on suurem kui arv 2,745029 ..., sest esimese arvu kuues number väljendab suuremat arvu kui teise arvu kuues number, sellal kui kõik eelnevad vastavad numbrid on samad.

See definitsioon on kohane ka irratsionaalarvu võrdlemiseks ratsionaalarvuga, kui ratsionaalarv on arendatud

[1] Kaht võrdset ratsionaalarvu võib mõnikord avaldada erinevate numbritega, nimelt siis, kui üks neist on perioodiline murd perioodiga 9. Nii 0,999 ... = 1 ja 2,3999 ... = 2,4.

kümnendmurruks. See kõlbab ka kahe ratsionaalarvu võrdlemiseks, mis on arendatud kümnendmurdudeks, kui kümnendmurrud perioodiga 9 asendada kümnendmurdudega, mis lõpevad nullidega: näiteks 2,39999... asemel on vaja võtta 2,400000...

Märgime, et sellest ebavõrdsuse definitsioonist järeldub:

Kui a on mingi irratsionaalarv, a — arvu a mingi ligikaudne väärtus puudusega, b — arvu a mingi ligikaudne väärtus liiaga, siis

$$a < a < b.$$

Irratsionaalarvud võivad olla positiivsed ja negatiivsed vastavalt mõõdetava suuruse mõttele. Nagu ratsionaalarvude korralgi, on kahest negatiivsest reaalarvust suurem see, mille absoluutväärtus [1] on väiksem; iga negatiivne arv on nullist väiksem, null aga on väiksem igast positiivsest arvust.

Ratsionaal- ja irratsionaalarve nimetatakse reaalarvudeks.

10. Tehete definitsioonid irratsionaalarvude korral. Olgu antud mingid positiivsed irratsionaalarvud α ja β (alljärgnevas näites $\alpha = \sqrt{3}$, $\beta = \sqrt{2}$). Olgu arvude α ja β ligikaudsed väärtused puudusega

	kuni 0,1	kuni 0,01	kuni 0,001	kuni 0,0001
α	1,7	1,73	1,732	1,7320
β	1,4	1,41	1,414	1,4142

Vastavad ligikaudsed väärtused liiaga saadakse neist arvudest viimase kümnendkoha suurendamise teel 1 võrra.

[1] Irratsionaalarvude absoluutväärtust defineeritakse samuti nagu ratsionaalarvude absoluutväärtust.

Siis: a) Liita α ja β tähendab leida arv, mis oleks

suurem igast järgmisest summast:	ja väiksem igast järgmisest summast:
$1{,}7 + 1{,}4 = 3{,}1$	$1{,}8 + 1{,}5 = 3{,}3$
$1{,}73 + 1{,}41 = 3{,}14$	$1{,}74 + 1{,}42 = 3{,}16$
$1{,}732 + 1{,}414 = 3{,}146$	$1{,}733 + 1{,}415 = 3{,}148$
$1{,}7320 + 1{,}4142 = 3{,}1462$ jne.	$1{,}7321 + 1{,}4143 = 3{,}1464$, s. o.:

Liita arvud α ja β tähendab leida kolmas arv γ, mis oleks suurem nende mistahes puudusega võetud ligikaudsete väärtuste summast, kuid väiksem nende mistahes liitaga võetud ligikaudsete väärtuste summast.

Me väidame tõestuseta, et mistahes kahe reaalarvu α ja β korral selline arv γ on olemas ja seejuures ainult üks.

b) Võttes arvude α ja β eespool antud ligikaudsed väärtused võime öelda, et α ja β korrutis on arv, mis on

suurem igast järgmisest korrutisest:	ja väiksem igast järgmisest korrutisest:
$1{,}7 \cdot 1{,}4 = 2{,}38$	$1{,}8 \cdot 1{,}5 = 2{,}70$
$1{,}73 \cdot 1{,}41 = 2{,}4393$	$1{,}74 \cdot 1{,}42 = 2{,}4708$
$1{,}732 \cdot 1{,}414 = 2{,}449048$	$1{,}733 \cdot 1{,}415 = 2{,}452195$
$1{,}7320 \cdot 1{,}4142 = 2{,}44939440$ jne.	$1{,}7321 \cdot 1{,}4143 = 2{,}44970903$, s. o.:

Korrutada positiivsed arvud α ja β tähendab leida selline kolmas arv, mis oleks suurem nende mistahes puudusega võetud ligikaudsete väärtuste korrutisest, kuid väiksem nende mistahes liiaga võetud ligikaudsete väärtuste korrutisest.

Me väidame tõestuseta, et selline arv on olemas ja seejuures ainult üks.

c) *Astendada irratsionaalarv α kahega, kolmega, neljaga jne. tähendab leida korrutis, mis koosneb kahest, kolmest, neljast jne. tegurist, mis on võrdsed α-ga.*

d) Pöördtehted irratsionaalarvudega defineeritakse samuti kui tehted ratsionaalarvudega; lahutada arvust α arv β tähendab leida selline arv x, et summa $\beta + x$ võrduks α-ga, jne.

Kui üks arvudest α või β on ratsionaalarv ja väljendub lõpliku kümnendmurruna, siis tuleb antud definitsioonides seesuguse arvu ligikaudsete väärtuste asemel võtta tema täpne väärtus.

Irratsionaalarvu ja arvu 0 korrutist loetakse samuti nagu ratsionaalarvude puhulgi võrdseks nulliga.

Tehted negatiivsete irratsionaalarvudega sooritatakse kooskõlas reeglitega, mis on antud negatiivsete ratsionaalarvude kohta.

Lähemal vaatlusel võib kindlaks teha, et tehteil irratsionaalarvudega on samad omadused, mis on tehteil ratsionaalarvudega, näiteks liitmis- ja korrutamistehtel on kommutatiivsuse- ja assotsiatiivsuse-omadused; korrutamis- ja jagamistehtel on peale selle veel distributiivsuse-omadus. Omadused, mida väljendavad võrratused, kehtivad ka irratsionaalarvude korral; näiteks kui $\alpha > \beta$, siis $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$, $\alpha\gamma > \beta\gamma$ (kui $\gamma > 0$) ja $\alpha\gamma < \beta\gamma$ (kui $\gamma < 0$) jne.

11. Juurimine. Definitsioon. Arvu a n-ndaks juureks nimetatakse sellist arvu, mille n-es aste võrdub arvuga a.

Arvu n-ndat juurt tähistatakse sümboliga $\sqrt[n]{a}$. Definitsioonist enesest järeldub, et $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Seda võrdust võib kasutada juurimistehte kontrollimiseks. Oletame, et me leidsime, et $\sqrt[11]{2048} = 2$. Kontrollimiseks astendame arvu 2 arvuga 11, saame $2^{11} = 2048$. Järelikult juur on leitud õieti. Samuti on $\sqrt[4]{39{,}0625} = 2{,}5$, sest $2{,}5^4 = 39{,}0625$.

12. Mistahes juure ligikaudne väärtus. Me juba rääkisime (vt. I osa, § 115—117), mis on ruutjuure ligikaudsed väärtused täpsusega kuni 1, kuni $\frac{1}{10}$ jne. Tol korral ruutjuure kohta öeldut võib rakendada ka iga muu juure kohta. Näiteks arvu $\sqrt[3]{2}$ ligikaudseks väärtuseks täpsusega kuni $\frac{1}{100}$ nimetatakse seesugust kümnendmurdu, mis koosneb täisühelistest, kümnendikest ja sajandikest, mille kuup pole suurem arvust 2; kui me aga seda arvu suurendame $\frac{1}{100}$ võrra ja tõstame kuupi, siis saame enam kui 2. Meie ei hakka tuletama reeglit kuup- ja muude juurte täpsete ning ligikaudsete väärtuste leidmiseks, piirdume ainult järgmise lihtsa võtte kättenäitamisega seesuguste juurte leidmiseks.

Olgu vaja leida $\sqrt[3]{2}$. Ligikaudsed juured täpsusega kuni 1 on ilmselt arvud 1 (puudusega) ja 2 (liiaga). Et leida otsitava juure kümnendike arvu, leiame jadast: 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9 kaks sellist kõrvuti seisvat arvu, et väiksema arvu kuup oleks väiksem kui 2, suurema arvu kuup aga suurem kui 2. Selleks võtame oma arvude jadast keskmise arvu 1,5 ja tõstame ta kuupi. Leiame: $1{,}5^3 = 3{,}375$, mis on suurem kui 2. Et 1,5-st suuremad arvud annavad kuupimisel veelgi suurema tulemuse, siis võime ära heita jada kogu parempoolse osa ja katsetada ainult arvudega 1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4.

Võtame neist 1,2 ja tõstame kuupi. Saame 1,728, mis on väiksem kui 2. Tähendab, katsetamisele kuuluvad veel ainult arvud 1,3 ja 1,4. Tõstes kuupi arvu 1,3, saame 2,197, mis on suurem kui 2. Sel teel saime kaks arvu 1,2 ja 1,3, mis erinevad teineteisest 0,1 võrra ja mille kuupide vahel asetseb arv 2. Need ongi arvu 2 ligikaudsed kuupjuured täpsusega kuni $\frac{1}{10}$ puudusega ja liiaga.

Kui soovime leida sajandike kohal seisvat numbrit, peame proovima järgmisi arve: 1,21; 1,22; 1,23; ...; 1,29. Võttes

sellest jadast keskmise arvu 1,25 ja tõstes selle kuupi, leiame $1{,}25^3 = 1{,}953125$, mis on väiksem kui 2. Tähendab, nüüd on vaja proovida veel arve: 1,26; 1,27; 1,28; 1,29. Et $1{,}25^3$ erineb arvust 2 väga vähe, siis on loomulik proovida, kas $1{,}26^3$ pole suurem kui 2. Ja tõepoolest, tõstes 1,26 kuupi, saame 2,000376. Tähendab, otsitav kuupjuur 2-st täpsusega kuni $\frac{1}{100}$ on 1,25 (puudusega) või 1,26 (liiaga). Kui me sooviksime edasi saada tuhandike kohal seisvat numbrit, siis peaksime samal viisil proovima arve jadast: 1,251; 1,252; 1,253; ...; 1,259.

Mõistagi, et see võte on väsitav (on olemas palju sobivamaid viise)[1], kuid sellest nähtub selgesti, et on võimalik leida mistahes juure ligikaudse väärtuse kuitahes palju kohti.

$\sqrt[3]{2}$ jaoks leidsime ligikaudsed väärtused puudusega: 1; 1,2; 1,25; 1,259; ...

Moodustame lõputu kümnendmurru 1,259... See lõputu kümnendmurd kujutab enesest teatavat irratsionaalarvu α, ja arvud 1; 1,2; 1,25; 1,259; ... kujutavad enesest irratsionaalarvu α puudusega võetud ligikaudseid väärtusi.

Irratsionaalarvu α kuup on 2. Et veenduda selles, meenutame, mida nimetatakse irratsionaalarvu α kuubiks; α^3 on arv, mis rahuldab kaht tingimust: ta on suurem arvu α mistahes puudusega võetud ligikaudse väärtuse kuubist ja väiksem arvu α mistahes liiaga võetud ligikaudse väärtuse kuubist. Kuid arvu $\sqrt[3]{2}$ ülalleitud ligikaudsed väärtused rahuldavad neid tingimusi, sest

$$1^3 < 2,\quad 1{,}2^3 < 2,\quad 1{,}25^3 < 2,\quad 1{,}259^3 < 2,\ \ldots$$
$$2^3 > 2,\quad 1{,}3^3 > 2,\quad 1{,}26^3 > 2,\quad 1{,}260^3 > 2,\ \ldots$$

Tähendab, irratsionaalarv 1,259... on kuupjuur 2-st.

---

[1] Mistahes juuri arvutatakse, nagu näeme hiljem, üsna lihtsalt logaritmide tabeli abil.

Järelikult pärast irratsionaalarvude tarvituselevõtmist on mistahes positiivse arvu mistahes juure aritmeetilise väärtuse leidmise ülesanne alati üheselt lahendatav, s. o. säärane juure väärtus on alati olemas ja seejuures ainult üks.

Märkus. Juurimistehe on elementaaralgebra kursuses käsiteldavate irratsionaalarvude arvukate näidete allikaks. Kuid oleks jäme viga mõelda, nagu oleksid kõik irratsionaalarvud ratsionaalarvude juured või väljenduksid nende juurte algebraliste avaldiste abil: on olemas lõpmata palju irratsionaalarve, mis ei ole ühegi ratsionaalarvu mingiks juureks ja mida üldse ei võigi saada algebraliste tehete abil (liitmised, lahutamised, korrutamised, jagamised, astendamised, juurimised) ratsionaalarvudest, millisel hulgal, mis järjekorras ja missuguste ratsionaalarvudega me neid tehteid ka sooritaksime. Seesuguse irratsionaalarvu näiteks on arv π.

IV. Irratsionaalsete avaldiste teisendamine.

13. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed algebralised avaldised. Algebralist avaldist nimetatakse ratsionaalseks mingi selles avaldises esineva tähe suhtes, kui see täht ei ole juuremärgi all; vastasel korral nimetatakse avaldist selle tähe suhtes irratsionaalseks. Näiteks avaldis $3a + 2\sqrt{x}$ on ratsionaalne tähe a suhtes ja irratsionaalne tähe x suhtes.

Kui öeldakse „ratsionaalne algebraline avaldis", lisamata juurde, milliste tähtede suhtes, siis eeldatakse, et ta on ratsionaalne kõikide tähtede suhtes, mis kuuluvad avaldisse.

14. Juure põhiomadus. Märgime, et selles peatükis kõneleme ainult juurte (radikaalide) aritmeetilistest väärtustest. Võtame mingi juure, näiteks $\sqrt[3]{a}$, ja astendame juuritavat mingi arvuga, näiteks 2-ga; koos sellega korrutame juurijat selle astendajaga, millega astendasime juuritavat, s. o. käesoleval juhul 2-ga. Siis saame uue juure:

$\sqrt[6]{a^2}$. Tõestame, et juure suurus nende kahe operatsiooni tagajärjel ei muutunud.

Oletame, et me arvutasime $\sqrt[3]{a}$ väärtuse ja saime mingi arvu x. Siis võime kirjutada võrduse: $x = \sqrt[3]{a}$ ja $x^3 = a$. Tõstame viimase võrduse mõlemad pooled ruutu: $(x^3)^2 = a^2$, s. o. $x^6 = a^2$.

Viimasest võrdusest nähtub, et $x = \sqrt[6]{a^2}$. Seega siis üks ja sama arv x on võrdne $\sqrt[3]{a}$ ja $\sqrt[6]{a^2}$; järelikult $\sqrt[3]{a} = \sqrt[6]{a^2}$.

Samuti võib veenduda, et

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{a^2} = \sqrt[6]{a^3} = \sqrt[8]{a^4} = \ldots;$$

$$\sqrt[3]{m^2} = \sqrt[6]{m^4} = \sqrt[9]{m^6} = \sqrt[12]{m^8} = \ldots;$$

$$\sqrt{1+x} = \sqrt[4]{(1+x)^2} = \sqrt[6]{(1+x)^3} = \ldots$$

Juure suurus ei muutu, kui astendame juuritavat mingi arvuga ja ühtlasi korrutame juurijat sama arvuga.

Seda reeglit avaldatakse lühidalt veel nii:

Juure suurus ei muutu, kui juurijat ja astendajat juuritavas korrutada ühe ja sama arvuga.

Järeldused: a) Erinevate juurijatega juuri võib tuua ühisele juurijale (samuti nagu erinevate nimetajatega murde võib teisendada ühenimelisteks). Selleks on küllalt, kui leida kõigi juurijate ühiskordne (parim väikseim ühiskordne) ja korrutada iga juurijat vastava laiendusteguriga, astendades ühtlasi iga juuritavat sama arvuga.

Näide. $\sqrt{ax}$; $\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[6]{x}$.

Juurijate väikseim ühiskordne on 6; laiendustegurid on: esimesel juurel 3, teisel 2 ja kolmandal 1. Siis:

$$\sqrt{ax} = \sqrt[6]{(ax)^3} = \sqrt[6]{a^3x^3};\quad \sqrt[3]{a^2} = \sqrt[6]{(a^2)^2} = \sqrt[6]{a^4};\quad \sqrt[6]{x}.$$

b) *Kui juuritavaks on aste, mille astendajal on ühine tegur juurijaga, siis võib astendajat ja juurijat jagada selle teguriga.*

Näited.

$$1)\ \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x};\quad 2)\ \sqrt[6]{(1+x)^3} = \sqrt{1+x}.$$

c) *Kui juuritavaks on mitme astme korrutis, millede astendajatel on ühine tegur juurijaga, siis võib kõiki astendajaid ja juurijat jagada selle teguriga.*

Näide. $\sqrt[6]{8a^6x^3} = \sqrt[6]{(2a^2x)^3} = \sqrt{2a^2x}.$

15. Juure aritmeetilise väärtuse leidmine korrutisest, astmest ja murrust. a) Olgu vaja leida n-es juur korrutisest abc. Kui oleks nõutud korrutise astendamist, siis, nagu nägime, tulnuks astendada iga tegur eraldi. Et juurimine on astendamise pöördtehe, siis peab arvama, et korrutise juurimisel tuleb juurida iga tegurit eraldi, s. o.

$$\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}.$$

Et veenduda selle võrduse õigsuses, astendame tema parema poole arvuga n:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n \cdot (\sqrt[n]{c})^n.$$

Kuid juure definitsiooni järgi $(\sqrt[n]{a})^n = a$; $(\sqrt[n]{b})^n = b$; $(\sqrt[n]{c})^n = c$. Järelikult $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c})^n = abc$.

Kui korrutise $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$ n-es aste on võrdne korrutisega abc, siis tähendab see, et korrutis on võrdne n-nda juurega korrutisest abc.

Tähendab:

Et juurida korrutist, tuleb juurida iga tegurit eraldi ja tulemused korrutada.

b) Kontrollimisega on kerge veenduda, et $\sqrt{a^4} = a^2$, sest et $(a^2)^2 = a^4$; $\sqrt[3]{x^{12}} = x^4$, sest $(x^4)^3 = x^{12}$, jne.

Üldiselt $\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m$, sest $(a^m)^n = a^{mn}$. Tähendab:

Et juurida astet, mille astendaja jagub juurijaga, tuleb astendaja jagada juurijaga.

c) Õiged on ka järgmised võrdused:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}, \text{ sest } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16};$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}, \quad \text{„} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

Üldiselt: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, sest $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n} = \frac{a}{b}$.

Et juurida murdu, tuleb juurida lugejat ja nimetajat eraldi ning esimene tulemus jagada teisega.

Näited.

1) $\sqrt{9a^4b^6} = \sqrt{9}\sqrt{a^4}\sqrt{b^6} = 3a^2b^3$;

2) $\sqrt[3]{125a^6x^9} = \sqrt[3]{125}\sqrt[3]{a^6}\sqrt[3]{x^9} = 5a^2x^3$;

3) $\sqrt{\frac{4a^2b^6}{9c^2d^4}} = \frac{2ab^3}{3cd^2}$.

16. Juurte kõige lihtsamaid teisendusi. a) Tegurite toomine juuremärgi ette. Kui juuritav avaldis lahutub selliseiks tegureiks, et mõnest saab leida täpse juure, siis võib seesugused tegurid pärast nende juurimist kirjutada juuremärgi ette (s. o. neid võib juuremärgi alt välja tuua); näiteks:

1) $\sqrt{a^3} = \sqrt{a^2a} = \sqrt{a^2}\sqrt{a} = a\sqrt{a}$;

2) $\sqrt[3]{16x^4} = \sqrt[3]{8x^3 \cdot 2x} = 2x\sqrt[3]{2x}$.

b) Tegurite viimine juuremärgi alla. Vastupidi, mõnikord on kasulik viia juuremärgi alla tegurid, mis seisavad juuremärgi ees; selleks on küllalt, kui seesugused tegurid astendada arvuga, mis on võrdne juurijaga, ja saadud astmed kirjutada juuremärgi alla; näiteks:

1) $a^2\sqrt{a} = \sqrt{(a^2)^2 a} = \sqrt{a^4 a} = \sqrt{a^5}$;

2) $2x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{(2x)^3 x} = \sqrt[3]{8x^3 x} = \sqrt[3]{8x^4}$.

c) Juuritava avaldise vabastamine nimetajaist. Selgitame seda järgmiste näidete varal:

1) $\sqrt{\frac{3x}{5}}$. Et nimetajast oleks võimalik leida täpset ruutjuurt, korrutame murru mõlemad liikmed 5-ga:

$$\sqrt{\frac{3x}{5}} = \sqrt{\frac{3x \cdot 5}{5^2}} = \frac{\sqrt{15x}}{\sqrt{5^2}} = \frac{\sqrt{15x}}{5} = \frac{1}{5}\sqrt{15x}.$$

2) $\sqrt{\frac{3}{2ax^3}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed 2-ga, a-ga ja x-ga, s. o. $2ax$-ga:

$$\sqrt{\frac{3}{2ax^3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 2ax}{4a^2x^4}} = \frac{\sqrt{6ax}}{\sqrt{4a^2x^4}} = \frac{\sqrt{6ax}}{2ax^2} = \frac{1}{2ax^2}\sqrt{6ax}.$$

Märkus. Kui on vaja juurida algebralist summat, siis ei tule juurida iga liidetavat eraldi. Nii: $\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$, kuna aga $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$; tähendab, juurimisel (samuti nagu astendamiselgi) ei ole liitmise suhtes (ega lahutamise suhtes) distributiivsuse-omadust.

Harjutused.

Tuua tegurid juuremärgi ette:

11. $\sqrt{4a^3}$; $\sqrt{8a^6b^7}$; $\sqrt{50a^5b^3x^3}$; $\sqrt[3]{16a^4}$.

12. $\sqrt{27}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{60}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{1728}$.

13. $\sqrt[3]{-81x^5y^2}$; $\sqrt{98(a+b)^3}$; $\sqrt[3]{250x^7y}$.

Viia juuremärgi ees seisvad tegurid juuremärgi alla:

14. $2\sqrt{2}$; $7\sqrt{10}$; $5\sqrt{5}$; $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a\sqrt{a}$.

15. $2ab\sqrt{\frac{1}{2}a}$; $\frac{1}{2}\sqrt{4x}$; $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54a}$.

16. $2a^2\sqrt[3]{3ab^2}$; $(a+b)\sqrt{a+b}$; $2(x-y)\sqrt{\frac{1}{2}a^3(x-y)}$.

Vabastada juuritav avaldis nimetajaist:

17. $\sqrt{\frac{1}{600}}$; $\sqrt{\frac{11}{540}}$. 18. $\sqrt{\frac{3x}{49ay^2}}$; $\sqrt{x-\frac{3}{2x}+\frac{5}{3ax}}$.

17. Sarnased juured. Sarnaseiks nimetatakse seesuguseid juuri, millel on ühesugused juuritavad avaldised ja võrdsed juurijad. Näiteks juured:

$$+3a\sqrt[3]{xy} \quad \text{ja} \quad -5b\sqrt[3]{xy}.$$

Et määratella, kas antud juured on omavahel sarnased, tuleb neid esialgu lihtsustada, s. o. kui võimalik:

1) tuua juuremärgi alt välja need tegurid, millest on võimalik leida täpne juur;

2) vabaneda juuremärgi all murru nimetajaist;

3) vähendada juurijat, jagades juurijat ja astendajat juuritavas nende ühise teguriga, kui see on olemas.

Nende tehete teostamisel omandab juuravaldis lihtsaima kuju.

Näited.

1) Juuravaldised $\sqrt[3]{8ax^3}$ ja $\sqrt[6]{64a^2y^{12}}$ osutuvad sarnasteks, kui me neid lihtsustame: $\sqrt[3]{8ax^3} = 2x\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{64a^2y^{12}} = 2y^2\sqrt[6]{a^2} = 2y^2\sqrt[3]{a}$.

2) Kolm juurt $\sqrt{\frac{2x}{3}}$, $\sqrt{\frac{6}{x}}$, $\sqrt{6x}$ osutuvad sarnasteks, kui vabastame juuritavad nimetajaist:

$$\sqrt{\frac{2x}{3}} = \sqrt{\frac{2x \cdot 3}{3 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{6x}{3^2}} = \frac{\sqrt{6x}}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{6x};$$

$$\sqrt{\frac{6}{x}} = \sqrt{\frac{6x}{x^2}} = \frac{\sqrt{6x}}{x} = \frac{1}{x}\sqrt{6x}.$$

Harjutused.

Tuua järgmised juured ühisele juurijale:

19. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$; $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$; $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[4]{x^3}$, $\sqrt[6]{y^5}$.

20. $\sqrt[3]{xy^2}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt[4]{xz^3}$; $\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{x}}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{a}-\frac{1}{x}}$.

Lihtsustada järgmised juured (taandada juurijad ja astendajad juuritavas):

21. $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[8]{10\,000}$, $\sqrt[6]{9a^4b^8}$, $\sqrt[8]{16a^8b^{12}}$.

22. $\sqrt[9]{8x^6}$; $\sqrt[6]{121a^4b^4}$; $\sqrt[15]{8a^3b^{12}c^{30}}$.

Lihtsustada järgmised juured eesmärgiga avastada nende sarnasus:

23. $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$; $\sqrt{1\frac{1}{3}}$, $\sqrt{5\frac{1}{3}}$, $\sqrt{16\frac{1}{3}}$.

24. $\sqrt{a^3x}$, $\sqrt{ax^3}$, $\sqrt{ax}$. 25. $\sqrt{\frac{bx^2}{a}}$, $\sqrt{\frac{bx^4}{a}}$, $\sqrt{\frac{x^2}{ab}}$.

18. Tehted irratsionaalsete üksliikmetega. a) Liitmine ja lahutamine. Et liita või lahutada irratsionaalseid üksliikmeid, ühendatakse need pluss- või miinusmärgiga ja taandatakse sarnased liikmed, kui neid on olemas.

Näited.

1) $\frac{2}{3}x\sqrt{9x} + 6x\sqrt{\frac{x}{4}} - x^2\sqrt{\frac{1}{x}} = 2x\sqrt{x} + 3x\sqrt{x} - x\sqrt{x} =$
$= 4x\sqrt{x};$

2) $15\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{32}-16\sqrt[3]{\frac{1}{16}}-\sqrt[3]{108}=$

$=15\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{4}-4\sqrt[3]{4}-3\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4}.$

b) K o r r u t a m i n e. Me nägime (§ 15), et juure leidmisel korrutisest on vaja leida juur igast tegurist eraldi; tähendab, ka vastupidi:

Et korrutada mitut ühe ja sama juurijaga juurt, selleks korrutatakse juuritavad ja korrutist juuritakse antud juurijaga.

Nii: $\sqrt{a}\ \sqrt{b}\ \sqrt{c}=\sqrt{abc}$; $\sqrt[3]{x}\ \sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{xy}$.

Et korrutada erinevate juurijatega juuri, selleks on vaja eelkõige tuua nad ühisele juurijale.

Kui juurte ees on koefitsiente, siis korrutatakse need omavahel.

Näited.

1) $a\sqrt{2x}\cdot\frac{a}{b}\sqrt{3x}=\frac{a^2}{b}\sqrt{6x^2}=\frac{a^2x}{b}\sqrt{6}$;

2) $\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt[6]{3^3}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot\sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=$

$=\sqrt[6]{3^3\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3^3}{3^2\cdot 2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{2^3}}=\sqrt[6]{\frac{3}{8}}$.

c) J a g a m i n e. Me teame, et juure leidmiseks murrust on vaja leida juur lugejast ja nimetajast eraldi; tähendab, ka vastupidi:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\quad \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\sqrt[3]{\frac{a}{b}},$$ jne. s. o.:

Et jagada ühesuguste juurijatega juuri, selleks jagatakse nende juuritavad ja jagatist juuritakse antud juurijaga.

Erinevate juurijatega juured on vaja eelkõige tuua ühisele juurijale. Kui on koefitsiente, siis need jagatakse.

Näited.

1) $-6\sqrt{\frac{2a-2b}{x^2}}:\frac{4}{5}\sqrt{\frac{a-b}{2bx^2}}=-\frac{6\cdot 5}{4}\sqrt{\frac{2(a-b)\,2bx^2}{x^2(a-b)}}=$
$=-15\sqrt{b}.$

2) $\frac{3a}{5b}\sqrt[3]{\frac{a^2}{a-x}}:\frac{2a}{5b}\sqrt{\frac{2a}{a-x}}=\frac{3}{2}\left(\sqrt[6]{\frac{a^4}{(a-x)^2}}:\sqrt[6]{\frac{8a^3}{(a-x)^3}}\right)=$
$=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{a(a-x)}{8}}.$

d) Astendamine. *Et astendada juurt, selleks astendatakse juuritavat avaldist antud astendajaga, jättes juurija muutumatuks.*

Nii: $(\sqrt[3]{a})^2=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^2};$

$(\sqrt[n]{x})^m=\underbrace{\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[n]{x}\ldots\sqrt[n]{x}}_{m\text{ korda}}=\sqrt[n]{x^m}.$

Näited.

1) $(\sqrt[4]{2ab^3x^2})^3=\sqrt[4]{(2ab^3x^2)^3}=\sqrt[4]{8a^3b^9x^6}=b^2x\sqrt[4]{8a^3bx^2};$

2) $\left(\sqrt[6]{\frac{2x}{1+x}}\right)^3=\sqrt[6]{\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3}=\sqrt{\frac{2x}{1+x}}.$

e) Juurimine. *Et juurida juurt, selleks korrutatakse juurijad.*

Nii: $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=\sqrt[6]{a}.$

Et selles veenduda, oletame, et $\sqrt{\sqrt[3]{a}}=x$. Tõstame selle võrduse mõlemad pooled algul ruutu, siis aga kuupi:

$$\sqrt[3]{a}=x^2;\quad a=(x^2)^3=x^6.$$

Siit nähtub, et $x = \sqrt[6]{a}$, ja järelikult $\sqrt{\sqrt[3]{a}} = \sqrt[6]{a}$.

Näide. $\sqrt{2x\sqrt[3]{x^2}}$.

Viime teguri $2x$ kuupjuuremärgi alla:

$$\sqrt{\sqrt[3]{(2x)^3 x^2}} = \sqrt[6]{8x^5}.$$

Täheldame, et selle näite puhul (ja teiste sellesarnaste näidete puhul) võib toimida teisiti: märganud, et avaldis, mis seisab ruutjuuremärgi all, on korrutis, võime kasutada korrutise juurimise teoreemi. Siis saame:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x}.$$

Tuues juured ühisele juurijale 6, saame:

$$\sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{x^3} \cdot \sqrt[6]{x^2} = \sqrt[6]{8x^5}.$$

Harjutused.

26. $2\sqrt{8} - 7\sqrt{18} + 5\sqrt{72} - \sqrt{50}$; $\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 3\sqrt{75} + 9\sqrt{48}$.

27. $\frac{2}{3}\sqrt{18a^5b^3} + \frac{1}{5}\sqrt{50a^3b^3} - b\sqrt{\frac{2a}{b}}$.

28. $\sqrt{18} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{8}$; $6\sqrt{8} \cdot 5\sqrt{2}$. 29. $2\sqrt{\frac{5}{3}} + \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}}$.

30. $\sqrt[3]{56} + \sqrt[3]{189} + \sqrt[3]{448}$. 31. $\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{2} - \sqrt{27}$.

32. $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{15}$; $\sqrt[3]{a} \cdot 2\sqrt[3]{a^4} \cdot 3\sqrt[3]{a^4}$.

33. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a}$; $\sqrt[6]{15} \cdot \sqrt[3]{2}$; $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[4]{4}$.

34. $2\sqrt{\frac{3a}{x^2}} \cdot 4\sqrt{\frac{4x^4}{3a^3}}$. 35. $\sqrt{120a^3b} : \sqrt{3ab}$; $18\sqrt{27a^3} : 3\sqrt{30a}$.

36. $\sqrt{x} : \sqrt[3]{x}$; $\sqrt{8} : \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{a^3} : \sqrt[3]{a}$.

37. $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2ab}\right)^3$; $\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{2}a^2x}\right)^2$; $(3a^2x\sqrt[3]{a+b})^2$.

38. $\sqrt[4]{(1+x^3)^3}^2$; $(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x})^{10}$; $(3ab^2\sqrt[3]{a^2b})^4$.

39. $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$; $\sqrt{a\sqrt{a}}$; $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$;

$$\sqrt{\frac{3}{4}\sqrt[3]{\frac{16}{3}}};\quad \sqrt{2a\sqrt{\frac{1}{4}a}}.$$

19. Tehted irratsionaalsete hulkliikmetega toimetatakse samade reeglite järgi, mis tuletati ratsionaalsete hulkliikmete kohta.

Näiteks:

$$\left(\frac{2}{5}\sqrt{5}-5\sqrt{0{,}3}\right)^2=\frac{4}{5}-4\sqrt{1{,}5}+7{,}5=8{,}3-4\sqrt{1{,}5}.$$

Harjutused.

40. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$; $(\sqrt[3]{a}+2)(\sqrt[3]{a}-2)$.

41. $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$.

42. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$.

43. Lihtsustada järgmine avaldis:

$$\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}-\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}.$$

Kontrollida, kas x väärtused rahuldavad järgmisi võrrandeid:

44. $x^2-4x+1=0$, kui $x=2+\sqrt{3}$.

45. $x^2-10x+13=0$, kui $x=5-2\sqrt{3}$.

20. Murru nimetaja vabastamine juurtest. Murruliste avaldiste arvutamisel, millede nimetajad sisaldavad juuri, on mõningatel juhtudel kasulik algul teisendada murd nii, et ta nimetaja ei sisaldaks juuri. Olgu näiteks vaja arvutada:

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}. \qquad (1)$$

Me võime arvutada kas otseselt selle valemi järgi või teha algul murru nimetaja ratsionaalseks; selleks korrutame antud murru mõlemad liikmed summaga $\sqrt{3}+\sqrt{2}$:

$$x=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}. \quad (2)$$

Valem (2) on arvutamiseks sobivam kui valem (1) esiteks sellepärast, et ta sisaldab eneses kõigest kolme tehet, mitte aga nelja nagu valem (1), teiseks aga ka sellepärast, et arvutamisel, mis paratamatult saab olla ainult ligikaudne, määratakse tulemuse viga võrdlemisi lihtsalt valemi (2) järgi. Näiteks leides $\sqrt{3}$ ja $\sqrt{2}$ poole tuhandiku täpsusega, saame:

$$x=1{,}732+1{,}414=3{,}146.$$

See tulemus on täpne kuni $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$ tuhandikku, s. o. kuni $\frac{1}{1000}$.

Näited.

1) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed arvuga $\sqrt{5}$:

$$\frac{3\sqrt{5}}{2(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{5}}{10}=0{,}3\sqrt{5}.$$

2) Kui ruutjuuremärgi all on kordarv, siis on mõnikord kasulik lahutada see algtegureiks, et kindlaks määrata, milliste tegurite lisandamisel ta muutub täisruuduks. Selleks piisab, kui korrutada murru mõlemad liikmed ruutjuurega puuduolevate tegurite korrutisest. Näiteks:

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3}{\sqrt{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}}=\frac{3\cdot\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{2^3\cdot 5}\cdot\sqrt{2\cdot 5}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{2^4\cdot 5^2}}=\frac{3\sqrt{10}}{2^2\cdot 5}=\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

3) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed arvuga $\sqrt[5]{3^3}$:

$$\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{3}.$$

Üldiselt: $$\frac{a}{\sqrt[n]{b^m}}=\frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{b}.$$

4) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed vahega $3-\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{6-2\sqrt{5}}{9-5}=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Üldiselt: $$\frac{a}{b+\sqrt{c}}=\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

5) $\frac{2}{3-\sqrt{5}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed summaga $3+\sqrt{5}$:

$$\frac{2(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}=\frac{2(3+\sqrt{5})}{3^2-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Üldiselt: $$\frac{a}{b-\sqrt{c}}=\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}.$$

6) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$. Korrutame murru mõlemad liikmed vahega $\sqrt{3}-\sqrt{2}$:

$$\frac{5(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{5\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{3-2}=5\sqrt{3}-5\sqrt{2}.$$

Üldiselt: $$\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}.$$

7) $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\dfrac{5\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{3-2}=$

$=5\sqrt{3}+5\sqrt{2}.$

Üldiselt: $\dfrac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\dfrac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}.$

8) Kui nimetaja on kuupjuuri sisaldav kaksliige, siis võib teda teha ratsionaalseks, tuginedes samasustele:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=x^3-y^3;$$
$$(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3.$$

Olgu näiteks nimetajaks $\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}$. Siis, korrutanud murru lugejat ja nimetajat kolmliikmega $(\sqrt[3]{3})^2+$ $+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{2}+(\sqrt[3]{2})^2$, saame nimetajas $(\sqrt[3]{3})^3-(\sqrt[3]{2})^3$, s. o. $3-2$ ehk 1. Samuti leiame

$$\frac{5}{3+\sqrt[3]{4}}=\frac{5[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2]}{(3+\sqrt[3]{4})[3^2-3\sqrt[3]{4}+(\sqrt[3]{4})^2]}=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{3^3+(\sqrt[3]{4})^3}=$$

$$=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{16}}{31}=\frac{45-15\sqrt[3]{4}+10\sqrt[3]{2}}{31}.$$

Harjutused.

46. $\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{2}{\sqrt{2}};\ \dfrac{5}{\sqrt{5}};\ \dfrac{10}{3\sqrt{5}};\ \dfrac{a}{\sqrt{a}}.$

47. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}};\ \dfrac{2}{3+\sqrt{2}};\ \dfrac{13}{7-\sqrt{6}}.$ 48. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}};\ \dfrac{x}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}.$

49. $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}};\ \dfrac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}};\ \dfrac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}};\ \dfrac{1}{\sqrt{x+2}-2}.$

50. $\frac{3+\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}+\frac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}; \quad \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$

51. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+5}; \quad \frac{10}{7-\sqrt[3]{3}}; \quad \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{5}}.$

V. Irratsionaalsed võrrandid.

21. Ülesanne. Täisnurkse kolmnurga ümbermõõt on 10 m, üks kaateteid on 2 m; leida selle kolmnurga kaks teist külge.

Tähistanud teise kaateti tähega x, leiame, et hüpotenuus peab võrduma arvuga $\sqrt{2^2+x^2}$, ja järelikult saame võrrandi:

$$2+x+\sqrt{4+x^2}=10.$$

Saime võrrandi, milles tundmatu on juuremärgi all. Seda liiki võrrandeid nimetatakse *irratsionaalseiks võrrandeiks*.

Et lahendada irratsionaalset võrrandit, tuleb see algul *vabastada juurtest*, millede juuritavad sisaldavad tundmatut. Kui võrrandis, nagu meiegi ülesandes, on ainult üks juur, siis võib sellest vabaneda järgmiselt: eelkõige eraldame juure, s. o. viime liikmed, mis ei sisalda juuri, võrrandi ühele poolele, jättes juure teisele poolele:

$$\sqrt{4+x^2}=8-x.$$

Nüüd tõstame võrrandi mõlemad pooled ruutu. On ilmne, et kui astendame võrdseid arve ühe ja sama astendajaga, siis saame ka võrdsed arvud; seepärast jääb võrdus kehtima ka pärast tema mõlema poole ruutimist.

$$4+x^2=(8-x)^2; \quad 4+x^2=64-16x+x^2.$$

Lahendades selle võrrandi leiame:

$$16x=64-4=60; \quad x=\frac{60}{16}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}.$$

Siis hüpotenuus on:

$$\sqrt{4+\left(\frac{15}{4}\right)^2}=\sqrt{4+\frac{225}{16}}=\sqrt{\frac{64+225}{16}}=\sqrt{\frac{289}{16}}=\frac{17}{4}=4\frac{1}{4}.$$

Olgu veel vaja lahendada võrrand $10-\sqrt[3]{3x+21}=7$.

Eraldame juure ja tõstame võrrandi mõlemad pooled kuupi:

$$3=\sqrt[3]{3x+21};\quad 27=3x+21;\quad x=2.$$

Kontroll. $10-\sqrt[3]{3\cdot 2+21}=10-\sqrt[3]{27}=$
$=10-3=7.$

22. Võõrlahendid. Võrrandi ruutimine võib sisse tuua niinimetatud võõrlahendid, s. o. seesugused lahendid, mis võrrandit ei rahulda. Toome selleks näite. Olgu meil antud kaks võrrandit:

$$x+1=\sqrt{x+7}\qquad (1);\qquad x+1=-\sqrt{x+7},\qquad (2)$$

mis erinevad teineteisest ainult juure ees oleva märgi poolest. Tõstnud kummagi võrrandi mõlemad pooled ruutu, saame ühe ja sellesama võrrandi:

$$x^2+2x+1=x+7,\qquad (3)$$

sest $(-\sqrt{x+7})^2$ ja $(\sqrt{x+7})^2$ võrduvad ühe ja sellesama arvuga $x+7$.

Võrrandil (3) on kaks lahendit: -3 ja 2. Arv -3 rahuldab võrrandit (2), kuid ei rahulda võrrandit (1); vastupidi, arv 2 rahuldab võrrandit (1), kuid ei rahulda võrrandit (2).

Võib juhtuda, et võrrandil (1) ei ole üldse lahendit; siis võrrand (3) sisaldab ainult võrrandi (2) lahendeid ja järelikult kõik need on võrrandi (1) võõrlahenditeks.

Võrrandi poolte ruutimine võib anda uue võrrandi, mis pole esialgsega samaväärne.

23. Võrrandi vabastamine kahest ruutjuurest. Olgu vaja lahendada võrrand, milles esineb kaks ruutjuurt, millede juuritavad sisaldavad tundmatut:

$$\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1.$$

Soovides vabaneda juurest $\sqrt{2x-4}$, eraldame ta:

$$\sqrt{2x-4}=1+\sqrt{x+5}.$$

Nüüd tõstame selle võrrandi mõlemad pooled ruutu:

$$2x-4=1+2\sqrt{x+5}+x+5,$$

mis annab:

$$x-10=2\sqrt{x+5}.$$

Lõpuks vabastame juurest teistkordse ruutimise teel ka viimase võrrandi:

$$x^2-20x+100=4x+20 \text{ ehk } x^2-24x+80=0.$$

Lahendame selle võrrandi:

$$x=12\pm\sqrt{144-80}=12\pm\sqrt{64}=12\pm 8;$$
$$x_1=12+8=20;\quad x_2=12-8=4.$$

Asendamise teel veendume, et antud võrrandit rahuldab ainult arv 20, arv 4 aga teda ei rahulda.

Harjutused.

52. $x-5=5=\sqrt{x}+1$; $3+2\sqrt{x}=5$; $\sqrt{3x-5}-4=5$.

53. $5\sqrt{x}-7=3\sqrt{x}-1$; $7\sqrt{3x}-1=5\sqrt{3x}+5$ (viimases kahes näites enne sarnased juured koondada).

54. $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$; $x-\sqrt{25-x^2}=7$.

Teine jagu.

Funktsioonid ja nende graafikud.

I. Funktsionaalne sõltuvus.

24. Jäävad ja muutuvad suurused. Maksku 1 kg mingisugust kaupa a rubla. Leiame selle kauba x kg maksumuse. Tähistades otsitava suuruse y-ga, saame:

$$y = ax.$$

See valem lubab meid arvutada rahasummat, mis on vaja maksta antud kauba mistahes koguse eest. Nii:

2 kg maksumus on $2a$ rubla,
5 „ „ „ $5a$ „
3,5 „ „ „ $3{,}5a$ „ jne.

Antud valemisse kuulub kolm suurust: x — kauba kogus, y — kauba maksumus ja a — kauba kilogrammi hind. Me näeme, et samal ajal kui esimesed kaks suurust x ja y omandavad mitmesuguseid numbrilisi väärtusi, me eeldame, et kolmas suurus a jääb muutumatuks.

Võtame valemi, mis väljendab ringjoone pikkust sõltuvuses raadiusest:

$$C = 2\pi R.$$

Siin π on arv, mis väljendab ringjoone pikkuse suhet diameetriga. Võttes π väärtuseks arvu 3,14 täpsusega kuni 0,01, saame ringjoone pikkuse ligikaudse väärtuse:

$$C = 6{,}28R.$$

Andes raadiusele mitmesuguseid numbrilisi väärtusi, võime selle valemi järgi arvutada ringjoone vastava pikkuse. Nii:

kui $R = 1$, siis ringjoone pikkus on $C = 6{,}28$,
„ $R = 3$, „ „ „ „ $C = 18{,}84$,
„ $R = 4{,}2$ „ „ „ „ $C = 26{,}376$, jne.

Siin, nagu esimeselgi juhul, suurused C ja R muutuvad (omandavad mitmesuguseid numbrilisi väärtusi), aga koefitsient 6,28 jääb muutumatuks.

Neid suurusi, mis säilitavad oma väärtuse muutumatuna, nimetatakse j ä ä v a i k s s u u r u s t e k s. Suurusi, mis võivad omandada mitmesuguseid väärtusi, nimetatakse m u u t u v a i k s s u u r u s t e k s.

Olgu tähendatud, et vaadeldava küsimuse piirides võib mõningaid arve pidada muutumatuiks ainult suhtelises mõttes. Tegelikus elus me ei saa näidata seesugust suurust, mis ei alluks muutustele. Ülaltoodud näites võib kauba hind teatava ajavahemiku möödudes muutuda ühele või teisele poole.

Harilikult tähistatakse valemisse kuuluvaid jäävaid suurusi tähestiku esimeste tähtedega: a, b, c, ..., m, muutuvaid suurusi aga viimaste tähtedega: x, y, z; mõistagi ei peeta sellest tingimusest alati kinni.

25. Argument ja funktsioon. Vaadeldes toodud näiteis muutuvaid suurusi märkame, et samal ajal kui me kahte suurust (kauba hulk, raadiuse pikkus) vabalt muutsime, andes neile suvalisi numbrilisi väärtusi, omandasid kaks teist suurust (kauba maksumus, ringjoone pikkus) neid või teisi numbrilisi väärtusi juba sõltuvalt sellest, missugused väärtused andsime esimestele.

Seda kahest teineteisega seotud muutuvast suurusest, millele võib anda suvalisi numbrilisi väärtusi, nimetatakse sõltumatuks muutujaks ehk argumendiks.

Seda muutuvat suurust, mille numbrilised väärtused muutuvad sõltuvalt teise suuruse numbrilistest väärtustest, nimetatakse sõltuvaks muutujaks ehk selle teise muutuva suuruse funktsiooniks.

Nii on ülaltoodud näiteis kauba maksumus kauba koguse funktsioon; ringjoone pikkus on ringi raadiuse funktsioon.

Mõnikord ei sõltu muutuv suurus mitte ühest, vaid kahest, kolmest ja enamast muutuvast suurusest. Siis nimetatakse teda kahe, kolme jne. muutuva suuruse funktsiooniks.

Näited.

1) Ühtlase liikumise teepikkuse valem kirjutatakse nii:

$$y = vx.$$

Siin on v (kiirus) — jääv suurus; x (aeg) — sõltumatu muutuja (argument) ja y (läbitud tee) — selle argumendi funktsioon.

2) Ringi pindala avaldatakse valemiga:

$$S = \pi R^2.$$

Siin on R (raadius) — argument; S (pindala) — funktsioon; π — jääv suurus.

3) Keha erikaalu väljendatakse valemiga:

$$d = \frac{P}{v}.$$

Siin on d (erikaal) kahe muutuva suuruse P (keha kaal) ja v (keha ruumala) funktsioon.

4) Joule-Lenz'i seadus avaldatakse valemiga:

$$Q = qI^2Rt.$$

Siin on Q (soojushulk) kolme muutuja I (voolu tugevus), R (juhtme takistus) ja t (aeg) funktsioon. Jääv suurus q, mis on võrdne 0,24 kaloriga, on niinimetatud elektrienergia soojus-ekvivalent, s. o. Q väärtus, kui $I = 1$ amper, $R = 1$ oom, $t = 1$ sek.

26. Funktsionaalse sõltuvuse kolm avaldamisviisi. a) Kahe muutuva suuruse vahel kehtiva funktsionaalse sõltuvuse tundmaõppimisel püüame eelkõige kindlaks teha, missugused numbrilised väärtused omandab üks neist olenevalt teise suuruse numbrilise väärtuse muutmisest.

Oletame näiteks, et me soovime tundma õppida sõltuvust, mis kehtib raudvarva pikkuse ja tema temperatuuri vahel. Hakkame soojendama 0°-lise temperatuuriga raudvarba, mille pikkus on 1 m, ja mõõdame tema pikkuse mitmesugustel temperatuuridel. Vaatluse tulemused võime esitada tabeli kujul. Antud juhul on tabelil näiteks järgmine kuju:

Temperatuur	0°	50°	80°	100°	350°	600°	1000°
Varva pikkus	1 m	1,0006 m	1,00096 m	1,0012 m	1,0042 m	1,0072 m	1,012 m jne. [1]

Sellest tabelist näeme, et varva pikkus suureneb koos temperatuuri tõusuga. Seesugust suurustevahelise funktsionaalse sõltuvuse avaldamisviisi nimetatakse sõltuvuse väljendamiseks t a b e l i a b i l.

b) Funktsionaalse sõltuvuse väljendamisel tabeli abil on see puudus, et ta annab meile sõltuvuse iseloomust ebatäielikku kujutluse. Nii saame eelmise näite tabelist teada varva pikkuse ainult temperatuuri teatavate väärtuste puhul. Selleks et saada varva pikkust mistahes temperatuuril, peame avaldama sõltuvuse varva pikkuse ja temperatuuri vahel üldkujul, valemi näol.

Arvutame, mille võrra suureneb varva pikkus temperatuuri tõusmisel 1° võrra. 50°-se temperatuuri puhul oli varva pikkus 1,0006 m. 80°-se temperatuuri puhul võrdus

[1] Olgu tähendatud, et mitmesugustest tingimustest olenevalt ühtib varva pikkus siin toodud väärtustega tegelikult ainult ligikaudu.

varva pikkus 1,00096 m. Tähendab, temperatuuri tõusmisel $80^0 - 50^0 = 30^0$ võrra võrdus varva pikenemine

$$1{,}00096 - 1{,}0006 = 0{,}00036 \text{ (m)}.$$

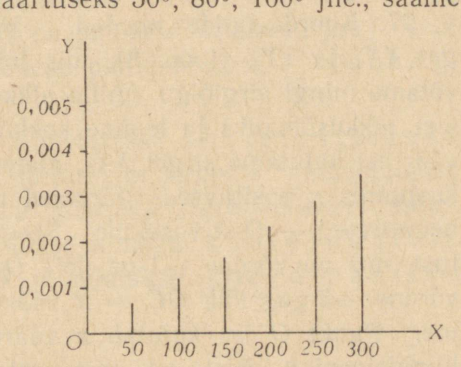
Järelikult 1^0-sele temperatuuri tõusule vastav pikenemine on $0{,}00036 : 30 = 0{,}000012$ (m).

Võttes varva pikkuse teistsuguste temperatuuride juures, näiteks 80^0 ja 350^0 puhul, ja sooritades vastavad arvutused, saame jällegi suuruse 0,000012. Niisiis, kui temperatuur tõuseb 1^0 võrra, siis pikeneb 1 m pikkune raudvarb 0,000012 m võrra. Seda teades koostame varva pikkuse ja tema temperatuuri vahelise sõltuvuse üldvalemi.

Temperatuuri tõustes 1^0 võrra pikeneb varb 0,000012 m. Tähendab, temperatuuri tõustes t^0 võrra on pikenemine $0{,}000012t$ m. Lisades selle pikenemise varva esialgsele pikkusele 0^0 juures (1 m) ja tähistades varva pikkuse t^0 puhul tähega l, saame valemi:

$$l = 1 + 0{,}000012t.$$

See valem võimaldab arvutada varva pikkust mistahes temperatuuril. Võttes t väärtuseks 50^0, 80^0, 100^0 jne., saame l jaoks need väärtused, mis olid juba tabelis antud.



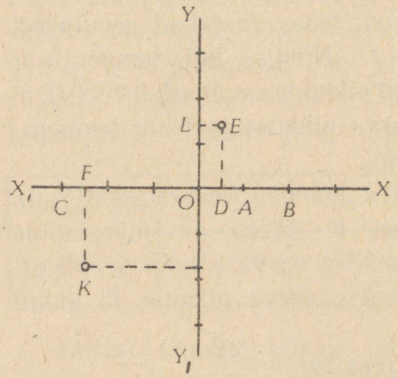
Joon. 2.

Funktsionaalse sõltuvuse seesugust väljendamisviisi valemi abil nimetatakse analüütiliseks.

c) Lõpuks me kujutame sageli näitlikkuse huvides sõltuvust kahe suuruse vahel graafiliselt — joonise, diagrammi (graafiku) abil. Meie näites me oleksime võinud toimida nii:

Tõmbame kaks ristuvat sirget OX ja OY. Paigutame sirgele OX alates punktist O lõigud, mis on võrdelised temperatuuriga, ning sirgele OY lõigud, mis on võrdelised varva pikenemisega, teatavas mõõtkavas (joonisel kujutab rõhtsirge üks jaotis 50^0 ja püstsirge üks jaotis 0,001 m).

Iga t väärtuse jaoks püstitame vastavast punktist lõigu, mis on paralleelne sirgega OY ja võrdne varva pikenemisega (kokkulepitud mõõtkavas). Nii saame joonisel 2 kujutatud graafiku.



Joon. 3.

Funktsionaalse sõltuvuse graafilist kujutamist kasutatakse matemaatikas laialdaselt. Seejuures rakendatakse erilist meetodit, niinimetatud koordinaatide meetodit, millega me nüüd tutvumegi.

27. Koordinaatide meetod. Võtame kaks ristuvat sirget XX_1 ja YY_1 (joon. 3), mis lõikuvad punktis O. Edasi võtame mingi sirglõigu (mille pikkus on näiteks 1 sentimeeter) pikkusühikuks ja lepime kokku, et sõltumatu muutuja x väärtusi kujutame sirgel XX_1, alates punktist O kui algusest, kusjuures x positiivsed väärtused asetame O-st paremale ja negatiivsed — O-st vasakule. Seega lõik OA kujutab x väärtust, mis on võrdne $+1$-ga, lõik OB — x väärtust, mis on võrdne $+2$-ga, lõik OC — x väärtust, mis võrdub -3-ga, jne. Punkt O ise kujutab x väärtust, mis võrdub nulliga. Funktsiooni y väärtused, mis vastavad neile x väärtustele, kujutame sirgeil, mis on tõmmatud punktidest A, B, C, ... paralleelselt sirgega YY_1 (teisiti öeldes sirge XX_1 ristsirgetel), kusjuures funktsiooni positiivsed väärtused asetame sir-

gest XX_1 ülespoole, negatiivsed väärtused aga temast allapoole, näiteks kui $x = +\frac{1}{2}$ ja y väärtus on $+1\frac{2}{5}$, siis sirgel XX_1 võtame lõigu OD, mis on võrdne $+\frac{1}{2}$-ga, ning tõmbame ristlõigu DE, mille pikkus on $+1\frac{2}{5}$; punkt E kujutab siis y väärtust, mis on võrdne $+1\frac{2}{5}$. Samuti kujutab punkt K y väärtust, mis on võrdne $-1\frac{3}{4}$-ga, kui $x = -2\frac{1}{2}$, jne.

Tähendame, et punkte E, K, ..., mis kujutavad funktsiooni y väärtusi, võime saada ka mõnevõrra teisiti, nimelt: selle asemel et ristsirgetele DE, FK, ... ehitada lõike, mis kujutavad y väärtusi, võime nad ehitada sirgele YY_1 alates punktist O ja siis tõmmata nende lõikude lõpust sirged, mis on paralleelsed sirgega XX_1, kuni lõikumiseni vastavate ristsirgetega. Olles nii ehitanud lõigu $OL = +1\frac{2}{5}$ ja tõmmanud $LE \parallel OX$, saame punkti E, s. o. sama punkti, mille saime varem, võttes $DE = +1\frac{2}{5}$.

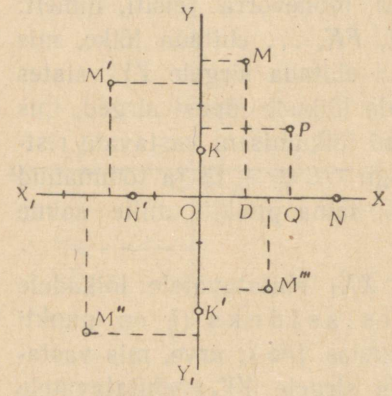
Arve, mis vastavad sirgele XX_1 ehitatavatele lõikudele OD, OF, ..., nimetatakse abstsissideks ($\frac{1}{2}$ on punkti E abstsiss, $-\frac{5}{2}$ on punkti K abstsiss, jne.); arve, mis vastavad sirge XX_1 ristsirgetele (või sirgele YY_1) ehitatavatele lõikudele DE, FK, ..., nimetatakse ordinaatideks ($1\frac{2}{5}$ on punkti E ordinaat, $-1\frac{3}{4}$ on punkti K ordinaat, jne.); neid ja teisi kutsutakse ühise nimega punktide E, K, ... koordinaatideks.

Piiramatut sirget XX_1 nimetatakse abstsisstelјeks ehk x-teljeks (iks-teljeks); piiramatut sirget YY_1 nimetatakse ordinaatteljeks ehk y-teljeks (igrek-teljeks); mõlemaid sirgeid nimetatakse ühise nimega koordinaatide telgedeks. Punkti O nimetatakse koordinaatide alguseks[1].

[1] Punkti asendi määramise tasapinnal kahe näidatud koordinaadi abil võttis tarvitusele prantsuse matemaatik René Descartes (1596—1650), mispärast neid koordinaate nimetatakse Descartes'i koordinaatideks.

28. Punkti asukoha määramine tasapinnal. Kasutades koordinaatide süsteemi võime lahendada järgmisi ülesandeid:

a) On antud punkt tasapinnal; leida tema koordinaadid antud koordinaatide süsteemis. Olgu tasapinnal antud punkt P (joon. 4). Laseme temast ristlõigu PQ x-teljele. Mõõtnud kokkulepitud ühikuga lõigu OQ, leiame punkti P abstsissi. Mõõtnud lõigu PQ, leiame punkti P ordinaadi. Meie joonisel on punkti P abstsiss $+2$ ja ordinaat $+1\frac{1}{2}$. Harilikult kirjutatakse punkti koordinaadid sulgudesse seda punkti tähistava tähe kõrvale, näiteks: $P(+2, +1\frac{1}{2})$ ehk lihtsalt $P(2, 1\frac{1}{2})$. Esimesele kohale kirjutatakse abstsiss, teisele kohale ordinaat.



Joon. 4.

Punkti koordinaatide leidmisel ei tohi unustada koordinaadi märki. Nii on punkti M''' koordinaadid $1\frac{1}{2}$ (abstsiss) ja -2 (ordinaat); punkti M'' koordinaadid on $-2\frac{1}{2}$ ja -3, jne.

Kui võtame punkti x-teljel, siis on tema ordinaat ilmselt null, abstsiss aga on positiivne või negatiivne arv, mis oma absoluutsuuruselt on võrdne antud punkti kaugusega punktist O. Seesugused on näiteks punktid $N(3, 0)$ ja $N'(-1\frac{1}{2}, 0)$.

Kui punkt on võetud y-teljel, siis on tema abstsiss võrdne nulliga, ordinaat aga on arv, mis absoluutsuuruselt on võrdne antud punkti kaugusega punktist O. Seesugused on näiteks punktid K $(0, 1)$ ja $K'(0, -2\frac{1}{2})$.

Koordinaatide alguse abstsiss ja ordinaat on ilmselt võrdsed nulliga.

b) Leida punkt tema antud koordinaatide järgi. Vaatleme järgmisi juhtusid.

1) Olgu punkti koordinaadid (1, 3). Asetame x-teljele punktist O paremale lõigu, mis on võrdne võetud ühikuga. Saadud punktist joonestame ristsirge ja asetame sellele ülespoole lõigu, mis on võrdne kolme ühikuga. Saadud punkt M ongi otsitav punkt.

Eespool-öeldust on selge, et me võiksime punkti M leida ka teisiti. Nimelt: asetame x-teljele ühikuga võrdse lõigu, y-teljele kolme ühikuga võrdse lõigu ja saadud punktidest joonestame telgedega paralleelsed sirged. Nende sirgete lõikepunkt on jällegi punkt M.

2) Olgu punkti koordinaadid $(-2, 2\frac{1}{2})$. On ilmne, et siin peab abstsissile -2 vastava lõigu asetama punktist O vasakule ja ordinaadile $2\frac{1}{2}$ vastava lõigu — ülespoole. Saadud punkt $M'(-2, 2\frac{1}{2})$ ongi otsitav punkt.

3) Kui punkti koordinaadid on $(-2\frac{1}{2}, -3)$, siis tuleb abstsissile vastav lõik asetada vasakule ja ordinaadile vastav lõik allapoole. Saame punkti $M''(-2\frac{1}{2}, -3)$.

4) Lõpuks koordinaatide $(1\frac{1}{2}, -2)$ järgi saame punkti $M'''(1\frac{1}{2}, -2)$.

Me näeme, et punkti koordinaatidel on pluss- või miinusmärk, s. o. nad on positiivsed või negatiivsed, olenevalt sellest, millises tasapinna veerandis on punkt. Me võime seda kujutada tabelis, lugedes järjekorras esimeseks parempoolset ülemist veerandit ning jätkates loetelu kellaosutile vastupidises suunas:

Veerand	Abstsiss x	Ordinaat y
1.	+	+
2.	−	+
3.	−	−
4.	+	−

Harjutused.

Näidata joonisel punktid järgmiste koordinaatide järgi:
55. (2, 3), (3, 2), (2, —3), (—3, 2), (—3, —2).
56. (0, $2\frac{1}{2}$), (0, $-2\frac{1}{2}$), ($3\frac{1}{2}$, 0), ($-3\frac{1}{2}$, 0), (0, 0).

II. Päri- ja pöördvõrdelisus.

29. Pärivõrdeline sõltuvus. Igaüks teab kogemuse järgi, et kui vee maht suureneb (või väheneb) mingi arv korda, siis sama arv korda suureneb (või väheneb) ka tema kaal. Näiteks 1 l vett kaalub 1 kg, 2 l vett kaalub 2 kg, $2\frac{1}{2}$ l vett kaalub $2\frac{1}{2}$ kg jne. (eeldatakse, mõistagi, et muud tingimused, mis mõjutavad vee kaalu, jäävad muutumatuks; näiteks vesi võetakse ühtemoodi puhas, ühe ja sama temperatuuri juures jne.). Seesugust sõltuvust vee ruumala ja kaalu vahel nimetatakse *võrdeliseks* sõltuvuseks. Aritmeetikas öeldakse, et kaks suurust on omavahel võrdelises sõltuvuses (ehk on teineteisega võrdelised), *kui ühe suuruse suurendamisel (või vähendamisel) mingi arv korda teine suurus suureneb (või väheneb) sama arv korda.* Nii on kaaluga müüdava kauba maksumus võrdeline kauba kaaluga; töölistele makstav töötasu on võrdeline tööliste arvuga (muude võrdsete tingimuste puhul); murru suurus on muutumatu nimetaja korral võrdeline tema lugejaga; täisnurkse kolmnurga pindala on võrdeline tema alusega, kui kõrgus on muutumatu, ja võrdeline kõrgusega, kui alus on muutumatu, jne.

Olgu meil kaks mingisugust võrdelist suurust (näiteks kauba kaal ja tema maksumus) ning oletame, et kui üks neist on võrdne ühe suuruse *ühikuga*, siis teine on võrdne teise suuruse k ühikuga (näiteks kui kauba kaal on võrdne 1 kg, siis tema maksumus on 1 rubla). Kui nüüd oletame, et esimene suurus muutub võrdseks x ühikuga, siis muutub ka teine suurus ja võrdub y ühikuga (näiteks kui

kaupa võetakse mitte 1 kg, vaid 3 kg, siis on ta maksumus mitte 1 rubla, vaid 3 rubla). Et meie poolt võetud suurused on võrdelised, siis peab arv y olema suurem või väiksem arvust k samas vahekorras, milles arv x on suurem või väiksem 1-st. Tähendab, me saame võrde:

$$y : k = x : 1,$$

millest leiame:

$$y = kx.$$

30. Võrdelise sõltuvuse üldine definitsioon. Anname võrdelise sõltuvuse järgmise üldise definitsiooni.

Kahte suurust nimetatakse võrdelisteks, kui sõltuvust nende vahel saab väljendada valemiga $y = kx$, milles x ja y on arvud, mis väljendavad võetud suuruste teineteisele vastavaid väärtusi, k aga on jääv arv (võrdne y väärtusega, mis vastab x väärtusele 1). Seda jäävat arvu nimetatakse antud suuruste võrdeteguriks.

Esitatud definitsioon erineb aritmeetika kursuses antud definitsioonist selle poolest, et võrdetegur k võib olla negatiivne arv. Viimasel juhul on argumendi ja funktsiooni väärtuste märgid erinevad. Nagu geomeetriast on teada, väljendatakse ringjoone pikkust valemiga $C = 2\pi R$, kus raadius R ja ringjoone pikkus C on muutuvad suurused, aga 2π on jääv arv. Seepärast võime öelda, et ringjoone pikkus on võrdeline tema raadiusega.

31. Pöördvõrdeline sõltuvus. Võib juhtuda, et kaks muutuvat suurust sõltuvad teineteisest nii, et ühe suuruse suurenedes teine väheneb absoluutsuuruselt ja seejuures samas vahekorras, milles esimene suureneb. Seesuguseid suurusi nimetatakse aritmeetikas pöördvõrdelisteks suurusteks (suurusi, mis on lihtsalt võrdelised, nimetatakse mõnikord pärivõrdelisteks suurusteks). Näiteks tundide arv,

mille jooksul raudteerong sõidab ära kogu tee Moskvast Leningradini, on pöördvõrdeline selle rongi liikumise keskmise kiirusega, sest kiiruse suurendamisega $1\frac{1}{2}$ korda, 2 korda, ..., üldse teatavas vahekorras, väheneb tundide arv, mille jooksul rong läbib vahemaa Moskvast Leningradini, $1\frac{1}{2}$ korda, 2 korda, ..., üldse samas vahekorras, milles kiirus suurenes. Samuti on antud rahasumma, näiteks 100 rubla eest osta võidava kauba kaal pöördvõrdeline selle kauba kilogrammi hinnaga; aeg, mille jooksul töölised täidavad neile antud ülesande, on pöördvõrdeline tööliste arvuga (mõistagi tingimusel, et kõik töölised töötavad ühtemoodi edukalt); murru suurus on pöördvõrdeline tema nimetajaga (muutumatu lugeja korral) jne.

Märkus. Selleks et kaks teineteisest sõltuvat suurust oleksid võrdelised (päri- või pöördvõrdelised), ei piisa ainult sellest, et ühe suuruse suurendamisega suureneks ka teine suurus (pärivõrdelisuse korral) või et ühe suuruse suurendamisega väheneks teine suurus (pöördvõrdelisuse korral). Näiteks kui suureneb mingi liidetav, siis suureneb ka summa; kuid oleks ekslik öelda, et summa on võrdeline selle liidetavaga, sest kui suurendame liidetavat näiteks kolm korda, siis kuigi summa suureneb, ei suurene ta mitte 3 korda. Samuti ei või näiteks öelda, et vahe on pöördvõrdeline lahutatavaga, sest kui lahutatav suureneb näiteks 2 korda, siis vahe väheneb, kuid mitte 2 korda. On vajalik, et mõlema suuruse suurenemine või vähenemine toimuks ühes ja samas vahekorras.

Võtame kaks mingisugust pöördvõrdelist suurust ja oletame, et kui üks neist on võrdne ühega, siis teine võrdub k-ga. Kui nüüd oletame, et need suurused muutusid, kusjuures esimene sai võrdseks x-ga, teine aga y-ga, siis arv y peab osutuma suuremaks või väiksemaks arvust k samas vahekorras, milles arv x on väiksem või suurem kui 1, s. o.

teiste sõnadega, samas vahekorras, milles 1 on suurem või väiksem kui x. Tähendab, me saame võrde:

$$y : k = 1 : x, \text{ kust } yx = k.$$

32. Pöördvõrdelise sõltuvuse üldine definitsioon.

Kahte suurust nimetatakse pöördvõrdelisteks, kui ühe suuruse numbrilise väärtuse korrutis teise suuruse vastava numbrilise väärtusega võrdub jääva arvuga.

Märgime, et käesolevas paragrahvis antud definitsioon erineb aritmeetika kursuses antud definitsioonist selle poolest, et jääv arv k võib olla nii positiivne kui ka negatiivne. Viimasel juhul on argumendi ja funktsiooni numbriliste väärtuste märgid erinevad.

Valem $yx = k$ on üheväärne valemiga $y = \frac{k}{x}$, mida sõnaliselt võib väljendada nii:

Kui kaks suurust on pöördvõrdelised, siis ühe suuruse numbriline väärtus võrdub mingi jääva suuruse ja teise suuruse vastava numbrilise väärtuse jagatisega.

Harjutused.

57. Millises sõltuvuses on ühtlasel liikumisel:

a) antud aja jooksul kulgetud tee ja liikumiskiirus?

b) aeg, mille jooksul kulgetakse antud tee, ja liikumiskiirus?

c) tee ja aeg, mille jooksul kulgetakse tee (antud kiirusega)?

Märkus. Need sõltuvused tulevad kergesti ilmsiks ühtlase liikumise valemite vaatlemisel: $s = vt$, kus s on tee, v — liikumiskiirus ja t — aeg, mille jooksul kulgeti tee.

58. Millises sõltuvuses on:

a) täisnurkse kolmnurga pindala ja alus (muutumatu kõrguse korral)?

b) pindala ja kõrgus (muutumatu aluse korral)?

c) alus ja kõrgus (muutumatu pindala korral)?

Märkus. Need sõltuvused võib leida valemist, mis väljendavad täisnurkse kolmnurga pindala, $P = bh$, kus P on pindala, b — alus ja h — kõrgus.

59. Kas järgmised paarid muutuvaid suurusi on teineteisega võrdelised:

a) ringjoone kaar ja sellele kaarele toetuv kesknurk?
b) kõõl ja sellele toetuv kesknurk?
c) ringjoone pikkus ja raadius?
d) ruudu pindala ja külg?
e) ringi pindala ja raadius?

33. Pärivõrdelise sõltuvuse graafik. Tõestame, et funktsiooni $y = kx$ graafik on sirgjoon. Lihtsuse pärast piirdume juhuga, kui k on positiivne.

$x = 0$ puhul on $y = k \cdot 0 = 0$; tähendab, punkt, mille mõlemad koordinaadid võrduvad nulliga, s. o. koordinaatide algus, asetseb otsitaval graafikul (joon. 5).

$x = 1$ puhul on $y = kx = k$. Punkti abstsissiga 1 ja ordinaadiga k tähistame tähega N. See punkt asetseb ka meie graafikul.

Tõestame, et sirge ON iga punkt asetseb meie graafikul. Teiste sõnadega, tõestame, et sirge ON mistahes punkti M abstsiss x ja ordinaat y on omavahel seotud võrrandiga $y = kx$.

Võtame sirgel ON suvalise punkti M. Tõmbame läbi M sirge MP, mis on paralleelne ordinaatteljega. Kolmnurkade OPM ja OQN sarnasusest järeldub, et

$$PM : OP = QN : OQ.$$

Kuid $OQ = 1$ ja $QN = k$,

seepärast

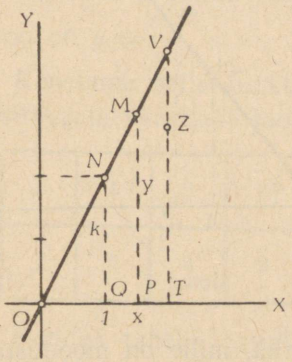
$$PM : OP = k, \quad PM = k \cdot OP.$$

Et PM on punkti M ordinaat ja OP — abstsiss, siis on meie väide tõestatud: sirge ON iga punkt asetseb funktsiooni $y = kx$ graafikul. Jääb tõestada, et pole ühtegi graafiku punkti, mis ei asetseks sirgel ON. Kui oleks olemas seesugune punkt Z, siis tõmmates läbi selle sirge TZ paralleelselt y-teljega ning võttes sirge TZ ja sirge ON lõikepunk-

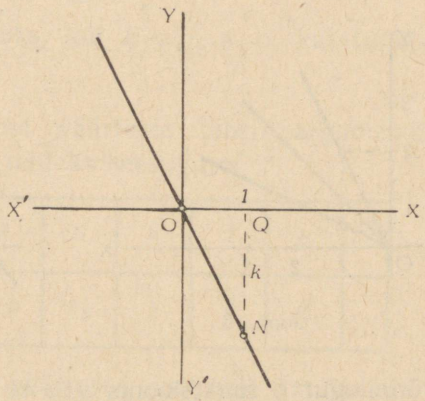
tiks V, saaksime vastuolu. Tõepoolest, et punkt V asetseb tõestuse järgi samuti meie graafikul, siis vastaksid ühele ja samale abstsissile OT kaks graafiku ordinaati, nimelt TZ ja TV, samal ajal kui abstsissile OT vastab tõeliselt ainus ordinaat TV, mis on võrdne suurusega $k \cdot OT$.

Seega:

Pärivõrdelise sõltuvuse ($y = kx$) graafik on sirge, mis läbib koordinaatide alguse ja punkti N, mille abstsiss



Joon. 5.



Joon. 5'.

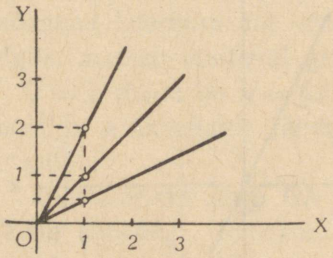
on 1, ordinaat aga on võrdne võrdeteguriga (meie joonis on tehtud juhuks, kui $k = 2$).

Märkus. Me vaatlesime funktsiooni $y = kx$ graafikut ainult juhul, kui k on positiivne. Kuid meie arutelud jäävad jõusse ka sel juhul, kui k on negatiivne. Sirge, mis on funktsiooni $y = kx$ graafikuks juhul, kui k on negatiivne, asetseb ainult nurkades $X'OY$ ja XOY' (s. o. teises ja neljandas veerandis); tõepoolest, juhul, kui k on negatiivne, asetseb punkt N koordinaatidega $(1, k)$ neljandas veerandis, otsitav graafik aga on sirge ON (joon. 5').

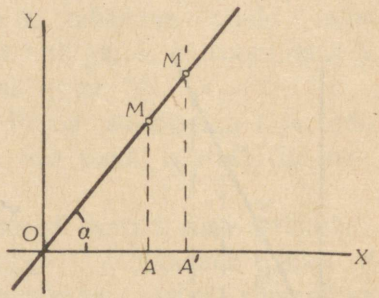
34. Sirge asetuse muutumine võrdeteguri muutumisel. Ehitame ühel ja samal joonisel sirged, mis kujutavad funktsioone:

$$y = \tfrac{1}{2}x; \quad y = x; \quad y = 2x,$$

milledel on positiivsed võrdetegurid, mis kasvavad funktsioonilt funktsioonile. Jooniselt näeme, et sedamööda, kuidas kasvab võrdetegur, kaldub sirge ikka rohkem ja rohkem x-teljest eemale, lähenedes y-teljele. Seega siis iseloomustab



Joon. 6.



Joon. 7.

võrdetegur k funktsioonis $y = kx$ nurka, mille on moodustanud sirge poolteljega OX; seepärast nimetatakse arvu k ka funktsiooni $y = kx$ graafiliselt kujutava sirge t õ u s u k s (ehk n u r g a k o e f i t s i e n d i k s). Kuna sellest võrrandist on näha, et $k = \frac{y}{x}$, siis võib öelda, et sirge tõus on võrdne funktsiooni (ordinaadi) mingi väärtuse ja argumendi (abstsissi) vastava väärtuse suhtega (joon. 7).

$$k = \frac{MA}{OA} = \frac{M'A'}{OA'} = \ldots = \operatorname{tan} \alpha.$$

Siit nähtub, et k on sirge poolt abstsisstelje positiivse suunaga moodustatud nurga tangens (nagu trigonomeetriast teada, võrdub ühe kaateti suhe teisega esimese kaateti vastasnurga tangensiga).

On tarvis märkida, et kui $k = 1$, s. o. kui funktsioon omab kuju $y = x$, siis teda kujutav sirge on täisnurga XOY poolitaja (kolmnurk OAM on siis võrdkülgne ja $\angle \alpha = 45^0$). Kui $k = 0$, s. o. kui funktsioon omab kuju $y = 0$, siis sirge ühtib teljega OX.

35. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik. Pöördvõrdeline sõltuvus avaldub, nagu nägime, valemiga:

$$xy = k \quad \text{ehk} \quad y = \frac{k}{x}.$$

Ehitame graafiku erijuhuks, kui $k = 6$, s. o. kui funktsioon on $y = \frac{6}{x}$.

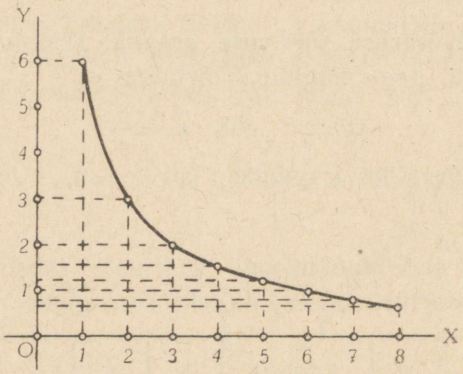
Koostame selle funktsiooni väärtuste tabeli argumendi positiivsete väärtuste jaoks, näiteks seesuguse:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	6	3	2	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{5}$	1	$\frac{6}{7}$	$\frac{3}{4}$	...

Kandes tabelis esitatud väärtused joonisele ja ühendades kõik graafikul saadud punktid kõvera abil (käsitsi või erilise joonestamis-joonlaua abil, mida nimetatakse l e k a a l i k s), saame pöördvõrdelise sõltuvuse $y = \frac{6}{x}$ graafiku (joon. 8).

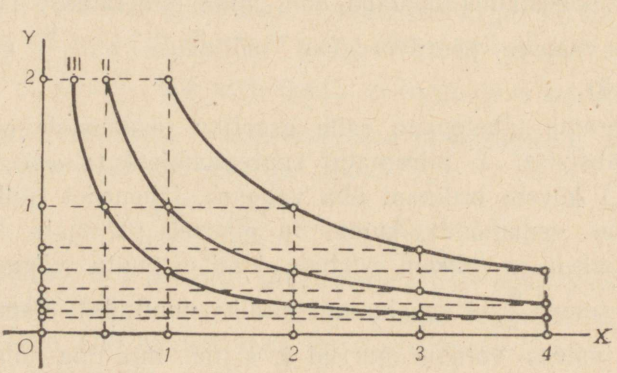
Pöörame tähelepanu selle graafiku järgmistele omadustele: abstsissi x piiramatul suurendamisel ($x = 9, 10, 11, 12, \ldots$) kõvera ordinaat üha väheneb, lähenedes nullile, nii et kõver, sedamööda, kuidas ta pikeneb paremale, läheneb ikka rohkem ja rohkem x-teljele, kuid ei puutu sellega iialgi kokku (murd $\frac{6}{x}$ ei saa kunagi nulliks muutuda). Samuti kui x väärtusteks võtame murrud $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ jne., mis üha lähenevad nullile, siis hakkab y ikka rohkem kasvama ($y = 12, 24,$

48, ...), nii et kõvera haru tõuseb pikenemisel vasakule piiramatult üles, lähenedes ikka rohkem ja rohkem y-teljele, kuid ei puutu sellega iialgi kokku (kui $x = 0$, lakkab murd $\frac{6}{x}$ olemast).



Joon. 8.

Joonis 9, mis on tehtud suuremas mõõtkavas kui eelmine, kujutab funktsiooni $y = \frac{k}{x}$ kolme graafikut: kui $k = 2$; 1; $\frac{1}{2}$. Neil graafikutel on samad omadused, mis eelmise joonise



Joon. 9.

graafikulgi; nad erinevad üksteisest ainult suurema või väiksema surutusega täisnurga tipu poole.

Funktsiooni $y = \frac{k}{x}$ graafikut nimetatakse hüperbooliks. Positiivse k ja x korral asetseb hüperbool esimeses veerandis; negatiivse k ja positiivse x korral on ta neljandas veerandis. Argumendi x negatiivsete väärtuste puhul saadakse hüperbooli teine haru. Kui $k > 0$, siis asetseb ta kolmandas veerandis; kui aga $k < 0$, siis asetseb ta teises veerandis.

Olgu tähendatud, et graafikute valmistamiseks on kõige sobivam võtta kanvaapaber (võrkpaber), mis võrdsel kaugusel seisvate rõht- ja püstsirgetega on jaotatud väikesteks ruudukesteks (näiteks ruutmillimeetriteks; siis nimetatakse paberit millimeeterpaberiks). Sirged OX ja OY tuleb sellel paberil võtta nii, et nad ühtiksid mingite sirgetega paberil. Pikkusühikuks võetakse siis üks või mitu paberi jaotist (näiteks millimeeterpaberil — millimeeter või sentimeeter).

Harjutused.

60. Eeldades, et ühtlase liikumise kiirus v on muutumatu, kujutada graafiliselt tee S aja t funktsioonina (nimelt: $S = vt$), võttes t muutuvaks abstsissiks ja S muutuvaks ordinaadiks.

61. Keha vaba langemise meeter-sekundeis väljendatud kiirust v võib avaldada valemiga $v = gt$, kus t tähendab langemise algusest möödunud sekundite arvu ja g — langemise kiirendust, mis võrdub 9,8 m ruutsekundis.

Avaldada v graafiliselt aja t funktsioonina (võttes abstsissi t ühikuks sentimeetri ja ordinaadi v ühikuks millimeetri).

62. Ehitada ühel ja samal joonisel funktsioonide $y = \frac{1}{3}x$; $y = x$ ja $y = 3x$ graafikud.

63. Ehitada funktsioonide $y = \frac{4}{x}$ ja $y = \frac{1}{3x}$ graafikud.

64. Ehitada funktsiooni $y = \frac{2{,}1}{x}$ graafik, andes x-le väärtused: 5;

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU

4; 3; 2; 1; 0,7; 0,5; 0,4 ja samasugused negatiivsed väärtused (ühikuks võtta sentimeeter).

Joonestatud graafikuist leida y suurus, kui: 1) $x = -2{,}2$ ja 2) $x = 3{,}4$.

III. Lineaarfunktsioon.

36. Esimese astme kaksliige. Ülesanne. Raudvarva pikkus 0^0 temperatuuril on 1 m; leida, missugune pikkus l on sellel varval, kui ta soojeneb kuni t^0 ja kui on teada, et 1^0 võrra soojenedes suureneb varva pikkus 0,000012 võrra sellest pikkusest, mis tal on 0^0 puhul.

Soojenemisel 1^0 võrra peab varva pikkus, mis 0^0 puhul on võrdne ühe meetriga (100 cm), suurenema $100 \times 0{,}000012$ cm, s. o. 0,0012 cm võrra. Pikenemine soojenemisel t^0 võrra peab olema t korda suurem kui soojenemisel 1^0 võrra, seepärast on kogu pikenemine $0{,}0012t$ cm. Liites selle pikenemise varva algpikkusega (0^0 puhul), s. o. 100 sentimeetriga, saame:

$$l = 0{,}0012t + 100.$$

Pole raske näha, et see on sama valem, mille saime juba varem (§ 26), ainult pikkus ei ole nüüd väljendatud mitte meetreis, vaid sentimeetreis.

Kui temperatuuri t, milleni varb on soojenenud, vaadelda kui sõltumatut muutujat, siis võime pikkust l vaadelda kui temperatuuri funktsiooni. Tähistades tava kohaselt sõltumatu muutuja tähega x ja funktsiooni tähega y, võime sõltuvust varva pikkuse ja tema temperatuuri vahel väljendada järgmise valemiga:

$$y = 0{,}0012x + 100$$

või üldisemal kujul:

$$y = kx + b,$$

kui tähtedega k ja b tähistame jäävaid arve, mis kuuluvad sellesse valemisse.

Algebralist avaldist $kx + b$, milles k ja b on mingisugused jäävad arvud ja x on sõltumatu muutuja, nimetatakse *esimese astme kaksliikmeks* (x suhtes). Seesugused funktsioonid esinevad paljude ülesannete ja küsimuste lahendamisel.

Kaksliikme *nullkohaks* nimetatakse argumendi x seda väärtust, mille puhul kaksliige muutub nulliks. Et seda väärtust leida, peab võrdsustama kaksliikme nulliga ja lahendama saadud võrrandi. Seega kaksliikme $1\frac{1}{2}x + 2$ nullkoht leitakse, kui lahendatakse võrrand

$$1\tfrac{1}{2}x + 2 = 0,$$

$$1\frac{1}{2}x = -2, \quad x = -2 : \frac{3}{2} = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

37. Esimese astme kaksliikme graafik. Võtame mingi kaksliikme erijuhu, näiteks sellise:

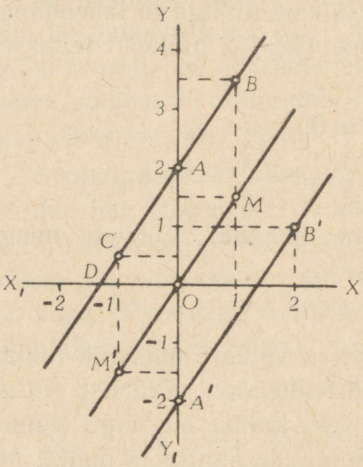
$$y = 1\tfrac{1}{2}x + 2.$$

Jätame arvu 2 esialgu kõrvale ja võtame lihtsama funktsiooni: $y = 1\frac{1}{2}x$. See funktsioon väljendab võrdelist sõltuvust y ja x vahel ja selle graafiliseks kujuks on, nagu teame, sirge (joon. 10), mis läbib koordinaatide alguse ja punkti M, mille abstsiss on 1 ja ordinaat $1\frac{1}{2}$.

Kui me argumendile x anname mitte üksnes positiivseid väärtusi, vaid ka negatiivseid, siis pikeneb see sirge allapoole, läbides punkti M', mille abstsiss on -1 ja ordinaat $-1\frac{1}{2}$. Kui me nüüd ennistame varem kõrvalejäetud arvu 2, s. o. võtame funktsiooni $y = 1\frac{1}{2}x + 2$, siis näeme, et kõik selle funktsiooni ordinaadid on funktsiooni $y = 1\frac{1}{2}x$ vastavatest ordinaatidest kahe ühiku võrra suuremad. Tähendab, funktsiooni $y = 1\frac{1}{2}x + 2$ graafiku saame funktsiooni $y = 1\frac{1}{2}x$ graafikust, kui sirge MM' kanname paralleelselt iseendaga 2 ühiku võrra ülespoole. Selleks asetame teljele OY lõigu $OA = 2$ ja joonestame läbi punkti A sirge, mis on paralleelne sirgega MM'. See sirge ongi funktsiooni

$y = 1\frac{1}{2}x + 2$ graafik. Selle sirge ja x-telje lõikepunkti abstsiss OD on võrdne kaksliikme nullkohaga, sest selle abstsissi puhul ordinaat y (s. o. kaksliikme enda väärtus) võrdub nulliga (meie joonisel $OD = -1\frac{1}{3}$).

Kui võtame funktsiooni $y = 1\frac{1}{2} - 2$, siis tuleb lõik OA asetada punktist O allapoole, sest siis tuleks funktsiooni $y = 1\frac{1}{2}x$ kõiki ordinaate vähendada 2 ühiku võrra. Me saame siis sirge $A'B'$, mis on paralleelne sirgega MM' ja mis lõikab y-teljelt lõigu $OA' = -2$. Selle kaksliikme nullkoht võrdub sirge $A'B'$ ja x-telje lõikepunkti abstsissiga (joonisel võrdub see abstsissiga $+1\frac{1}{3}$).



Joon. 10.

Kui funktsioonis $y = kx + b$ koefitsient k on negatiivne arv (näiteks $y = -1\frac{1}{2}x + 2$), siis abisirge, mis graafiliselt kujutab funktsiooni $y = kx$, läheb läbi nurkade X_1OY ja XOY_1; vastavalt sellele muutub ka sirge BC siht. Niisiis:

Kaksliikme $y = kx + b$ graafik on sirgjoon, mis on paralleelne funktsiooni $y = kx$ kujutava sirgega ja mis lõikab y-teljelt lõigu, mille suurus on b.

Selle tõttu, et funktsiooni $y = kb + b$ graafik on sirgjoon, nimetatakse seda funktsiooni ennast lineaarfunktsiooniks.

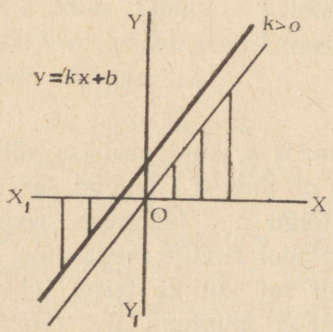
Kõne lühiduse mõttes edaspidisel käsitlusel selle asemel, et öelda: „Sirge, mis kujutab funktsiooni $y = kx + b$", ütleme lühidalt: „Sirge $y = kx + b$".

Sirge $y = kx + b$ poolt x-teljega moodustatud nurk on võrdne nurgaga, mille moodustab x-teljega sirge $y = kx$; järelikult see nurk oleneb koefitsiendi k suurusest ja seepärast nimetatakse seda koefitsienti üldkujulises kaksliikmes $kx + b$ tõusuks (ehk nurgakoefitsiendiks).

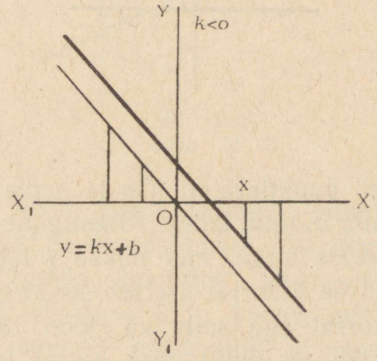
Arvu b kaksliikmes $kx + b$ nimetatakse algordinaadiks; see on ordinaat, mis vastab abstsissi algväärtusele $x = 0$; ta kujutab enesest y-telje lõiku, mille eraldab kaksliiget kujutav sirge.

Koefitsient k, nagu nägime (§ 34), on võrdne sirge $y = kx$ (ja järelikult temaga paralleelse sirge) ning x-telje positiivse suuna poolt moodustatud nurga tangensiga.

38. Kaksliikme $y = kx + b$ muutumine sõltuvalt x muutumisest. Sirge $y = kx$, mis on paralleelne sirgega



Joon. 11.



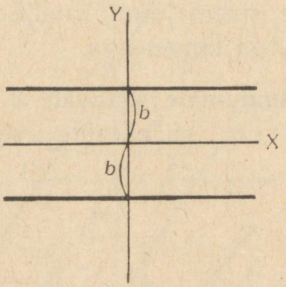
Joon. 12.

$y = kx + b$, läbib nurki XOY ja X_1OY_1, kui $k > 0$, ning nurki X_1OY ja XOY_1, kui $k < 0$.

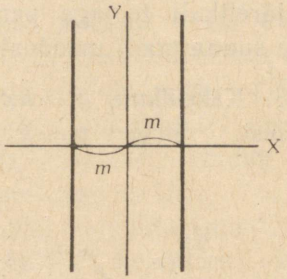
Järelikult esimesel juhul sirge $y = kx + b$ tõuseb üles (joon. 11), teisel juhul aga laskub alla (kui teda vaadelda suunas vasakult paremale, joon. 12).

Kui võtame arvesse, et negatiivsed arvud on seda suuremad, mida väiksemad on nende absoluutväärtused, siis võime öelda (joon. 12), et see kasvamine või kahanemine on piiramatu ja seejuures ühtlane, s. o. x suurendamisega ühe ja sama arvu võrra kasvab või kahaneb funktsioon samuti ühe ja sama arvu võrra.

39. Märkused. 1) Kui tõus k on võrdne nulliga, siis muutub kaksliige üksliikmeks ja $y = b$. See tähendab, et graafilisel kujutamisel peab tekkima selline sirge, mille kõi-



Joon. 13.



Joon. 14.

gil punktidel on üks ja sama ordinaat b, kuid abstsiss võib olla milline tahes. Seesugune joon on ilmselt x-teljega paralleelne sirge, mis lõikab y-teljelt lõigu b. Tähendab, positiivse b korral asetseb see sirge pealpool x-telge, negatiivse b korral aga selle all (joon. 13); nii sel kui ka teisel juhul jääb x-i muutumise korral funktsioon muutumatuks (võrdseks b-ga).

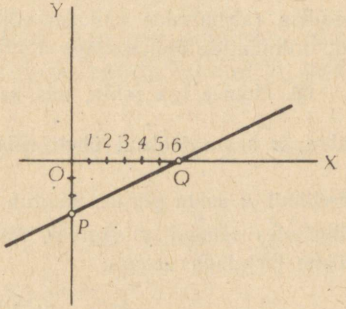
Eriti kui $k = 0$ puhul ka veel $b = 0$, s. o. kui lineaarfunktsioon on $y = 0$, siis on funktsiooni graafikuks x-telg (selle telje iga punkti ordinaat $y = 0$, abstsiss aga on suvaline).

2. Kui mingi sirge on paralleelne y-teljega, siis võivad selle sirge punkti ordinaadid omada mistahes väärtusi,

abstsiss aga on kõigil punktidel üks ja sama, nimelt: abstsiss on võrdne positiivse või negatiivse lõiguga, mille sirge lõikab x-teljelt. Järelikult seesugust sirget võib väljendada võrrandiga $x = m$ (ordinaat y, mis ei esine võrrandis, jääb suvaliseks). Eriti kui $m = 0$, siis saadakse võrrand $x = 0$, mis väljendab, et iga punkti abstsiss on 0 ja ordinaat on milline tahes. See sirge on y-telg.

40. Sirge $y = kx + b$ joonestamine kahe punkti järgi. Et joonestada sirget $y = kx + b$, võib algul joonestada abisirge, mis kujutab funktsiooni $y = kx$, ja siis joonestada sellega paralleelne sirge, mis lõikab y-teljelt lõigu b. Kuid lihtsam on joonestada sirge $y = kx + b$, leides enne selle sirge mingid kaks punkti. Oletame näiteks, et on vaja joonestada sirge:

$$y = \tfrac{1}{2}x - 3.$$



Joon. 15.

Selleks leiame mingi kahe sellel sirgel asetseva punkti koordinaadid, näiteks nende punktide koordinaadid, kus sirge lõikab koordinaatide telgi. Nende punktide leidmiseks anname abstsissile x võrrandis väärtuse 0 ja leiame ordinaadi y vastava väärtuse; siis anname ordinaadile y väärtuse 0 ja leiame abstsissi x vastava väärtuse; nii leiame, et

1) kui $x = 0$, siis $y = -3$;
2) kui $y = 0$, siis $1\tfrac{1}{2}x - 3 = 0$ ja $x = 6$.

Punkt abstsissiga 0 ja ordinaadiga -3 on punkt P (joon. 15); punkt abstsissiga 6 ja ordinaadiga 0 on punkt Q; tähendab, otsitav graafik on sirge PQ, mis läbib need kaks punkti.

Kui koordinaatide telgede lõikepunktid (või üks neist) ei asetse joonise piires, siis võib otsida teisi punkte, mis asetsevad joonisel [1].

Harjutused.

65. Kui x on kraadide arv, mida näitab Celsiuse termomeeter, ja y on kraadide arv, mida näitab sama temperatuuri puhul Fahrenheit'i termomeeter, siis võib sõltuvust nende arvude vahel avaldada valemiga:

$$y = \frac{9}{5}x + 32.$$

Joonestada selle funktsiooni graafik, võttes x abstsissiks ja y ordinaadiks (abstsisside ühikuks võib võtta sentimeetri või pool sentimeetrit, ordinaatide ühikuks aga 1 mm).

66. Hoiuse iga rubla, mis kannab $p\%$, annab aastas kasvikut $\frac{p}{100}$ rubla; x aasta jooksul ühelt rublalt saadud kasvik on $\frac{p}{100} \cdot x$ (rubla); järelikult x aasta pärast muutub iga rubla $1 + \frac{p}{100} \cdot x$ (rublaks). Seega, tähistades tähega y suurust, milleni kasvab 1 rubla x aasta jooksul, võime kirjutada valemi:

$$y = 1 + \frac{p}{100} \cdot x.$$

Joonestada selle funktsiooni graafik, võttes $p = 3$ (abstsisside ja ordinaatide ühikuks võib võtta 2 cm).

Joonestada sirged, mis kujutavad funktsioone:

67. $y = 1 + x$; $y = 2x - 3$; $y = \frac{1}{2}x + 3$.

68. $y = -\frac{1}{2}x + 3$; $y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$; $y = 0{,}7x + 2$.

69. Joonestada sirged, millede võrrandid on:

$$3y + x = 0; \quad x + y + 5 = 0; \quad 4x + 3y = 18.$$

70. Kontrollida graafiliselt, kas kolm sirget, millede võrrandid on $2x + 3y = 13$; $5x - y = 7$; $x - 4y + 10 = 0$, lõikuvad ühes punktis.

---

[1] Et vähendada sirge joonestamisel tekkivat viga, on soovitav, et need kaks punkti, millede järgi sirge joonestatakse, asetseksid teineteisest võimalikult kaugel; siis teatav ebatäpsus joonlaua asetamisel, mida vältida on väga raske, avaldab joonestatava sirge sihile vähem mõju.

Kolmas jagu.

Ruutfunktsioon.

I. Täiendavaid teatmeid ruutvõrrandeist.

41. Ruutvõrrandi lahendite valem. Kursuse esimeses osas tuletati täieliku ja mittetäieliku ruutvõrrandi lahendite leidmiseks järgmised valemid:

1) $ax^2 = 0$; võrrandi mõlemad lahendid võrduvad ilmselt nulliga.

2) $ax^2 + c = 0$; lahendite valem on: $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3) $ax^2 + bx = 0$; siis $x_1 = 0$; $x_2 = -\frac{b}{a}$.

4) $x^2 + px + q = 0$; lahendite valem on:

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{ehk} \quad x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

5) Lõpuks täieliku ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendite valem on $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Viimane valem on kõige üldisem; kõik ülejäänud saadakse temast kui erijuhud. Oletades, et selles valemis $a = 1$, saame valemi (4) (sel juhul $b = p$ ja $c = q$); oletades, et $c = 0$, saame juhu (3); kui $b = 0$, saame valemi (2) ja lõpuks saame esimese juhu, kui üldvalemis võtame $b = c = 0$.

42. Diskriminant. Vaatleme mitmesuguseid juhtusid, mis võivad esineda ruutvõrrandi lahendamisel olenevalt koefitsientide numbrilistest väärtustest.

1. $b^2 - 4ac > 0$. Sel juhul on juurealune avaldis positiivne. Tema ruutjuurel on kaks väärtust ja järelikult on võrrandil kaks erinevat reaalset lahendit:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

2. $b^2 - 4ac = 0$. Sel juhul võrdub lugeja teine liige nulliga ja võrrandil on kaks võrdset lahendit:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}.$$

3. $b^2 - 4ac < 0$. Mõlemad lahendid on kompleksed [1]. Nii näeme, et ruutvõrrandil on reaalsed (erinevad või võrdsed) või kompleksed lahendid olenevalt sellest, kas võrrandi koefitsientidest moodustatud juurealune avaldis $b^2 - 4ac$ on suurem, võrdne või väiksem kui null. Selle avaldise erilise tähenduse tõttu ta kannab võrrandi diskriminandi nimetust. (Diskriminant tähendab tõlkes eristaja.)

43. Ruutvõrrandi lahendite omadused (Viëta teoreem). Võtame taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$ lahendite valemi:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}; \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Kui me need võrdused liikmeti liidame, siis juured hävivad vastamisi ja me saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p.$$

Kui me samad võrdused liikmeti korrutame, siis saame:

$$x_1 x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$$

(sest kahe arvu summa ja vahe korrutis võrdub nende arvude ruutude vahega).

[1] Kompleksarvuks nimetatakse arvu, mis koosneb reaalsest ja imaginaarsest osast, nagu näiteks arv $3 + 2\sqrt{-1}$ (vt. § 138). — Toim.

Milline juurealune arv ka oleks, alati on

$$\left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q.$$

Järelikult

$$x_1 x_2 = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = q.$$

Seega:

Taandatud ruutvõrrandi lahendite summa võrdub teise liikme vastupidise märgiga võetud koefitsiendiga, nende lahendite korrutis aga võrdub vaba liikmega.

Võtame nüüd üldkujulise ruutvõrrandi: $ax^2 + bx + c = 0$. Jaganud kõik võrrandi liikmed a-ga, muudame selle võrrandi äsja eespool vaadeldud võrrandi kujuliseks:

$$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0;$$

järelikult taandamata täieliku võrrandi jaoks saame:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{ja} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Järeldused. 1) Kasutades neid omadusi võime kergesti koostada ruutvõrrandi, mille lahenditeks on antud arvud.

Olgu näiteks vaja koostada võrrand, mille lahenditeks on arvud 2 ja 3. Siis võrdustest $2 + 3 = -p$ ja $2 \cdot 3 = q$ leiame: $p = -5$ ja $q = 6$; järelikult saame võrrandi: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Samuti leiame, et 3 ja -7 on lahenditeks võrrandile

$x^2 - [3 + (-7)]\,x + 3(-7) = 0$, s. o. $x^2 + 4x - 21 = 0$;

arvud 3 ja 0 on võrrandi $x^2 - 3x = 0$ lahendid.

2) Samade omaduste abil võime ruutvõrrandit lahendamata leida tema lahendite märgid, kui lahendid on reaalsed. Olgu antud näiteks võrrand $x^2 + 8x + 12 = 0$. Et selles näites avaldis $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, s. o. $4^2 - 12$, on positiivne arv, siis on mõlemad lahendid reaalsed. Pannes tähele,

et võrrandi vabaliige on positiivne, järeldame, et ka lahendite korrutis peab olema positiivne arv, s. o. lahenditel peab olema üks ja seesama märk. Selleks märgiks peab olema miinusmärk, sest lahendite summa on negatiivne (-8). Võrrandil $x^2 + 8x - 12 = 0$ on erinevate märkidega lahendid (sest nende korrutis on negatiivne), kusjuures negatiivsel lahendil on suurem absoluutväärtus (sest lahendite summa on negatiivne), jne.

Harjutused.

Millega võrduvad iga järgneva võrrandi lahendite summa ja korrutis:

71. $x^2 - 8x - 9 = 0$; $x^2 - 1 = -x$; $x^2 + 2 = x$; $6 - 5x + 3x^2 = 0$.

72. $\frac{1}{2}x^2 = 2x + 1$; $x^2 - 7x = 0$.

Kontrollida Viëta teoreemi järgmiste võrrandite puhul:

73. $x^2 - 6x + 9 = 0$; $9x^2 - 30x + 25 = 0$.

74. $x^2 + 16 = 0$; $x^2 + 4x + 7 = 0$.

75. Üks ratsionaalsete koefitsientidega ruutvõrrandi lahend on $3 + \sqrt{2}$; milline on teine lahend?

Koostada ruutvõrrandid, millede lahenditeks on järgmised arvud:

76. 8 ja 2; 8 ja -2; -8 ja 2; -8 ja -2.

77. 5 ja 0; -5 ja 0; 4 ja 4; -4 ja -4.

44. Teise astme kolmliige. Avaldist $ax^2 + bx + c$, milles x tähistab sõltumatut muutujat ning a, b ja c mingisuguseid jäävaid arve, nimetatakse ruutfunktsiooniks ehk teise astme kolmliikmeks. Erinevus seesuguse kolmliikme ja võrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ vahel seisab selles, et võrrandis tähistab täht x ainult neid arve, mis rahuldavad võrrandit, sellal kui ta kolmliikmes tähistab mistahes arvu. x väärtusi, mis muudavad kolmliikme nulliks, nimetatakse tema nullkohtadeks; tähendab, kolmliikme $ax^2 + bx + c$ nullkohad on ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendid.

Erijuhul, kui $a = 1$, omandab kolmliige kuju $x^2 + px + q$; kui $b = 0$ või kui $c = 0$, muutub kolmliige kaksliikmeks $ax^2 + c$ või $ax^2 + bx$.

45. Teise astme kolmliikme lahutamine tegureiks. Võtame algul kolmliikme $x^2 + px + q$, milles x^2 koefitsient on 1. Lahendanud taandatud ruutvõrrandi $x^2 + px + q = 0$, leiame tema lahendid x_1 ja x_2. Nagu me äsja nägime, $x_1 + x_2 = -p$ ja $x_1 x_2 = q$.

Neist võrdustest leiame: $p = -(x_1 + x_2)$ ja $q = x_1 x_2$.

Asetame need avaldised kolmliikmesse p ja q asemele ning teisendame seejärel hulkliiget järgmiselt:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1 x_2 = x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2 = (x^2 - x_1 x) - (x_2 x - x_1 x_2) = x(x - x_1) - x_2\,(x - x_1) = (x - x_1)\,(x - x_2).$$

Seega:

Kolmliige $x^2 + px + q$ lahutub kaheks teguriks, milledest esimene võrdub arvu x ja kolmliikme ühe lahendi vahega ning teine võrdub arvu x ja kolmliikme teise lahendi vahega.

Näited.

1) $x^2 + 5x - 14 = 0$; $x = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 14} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$;

$$x_1 = -\frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 2;\ x_2 = -\frac{5}{2} - \frac{9}{2} = -7;$$

$$x^2 + 5x - 14 = (x - 2)\,[x - (-7)] = (x - 2)\,(x + 7).$$

2) $x^2 - 8x + 5 = 0$; $x = 4 \pm \sqrt{16 - 5} = 4 \pm \sqrt{11}$;

$$x_1 = 4 + \sqrt{11};\ x_2 = 4 - \sqrt{11};$$

$$x^2 - 8x + 5 = [x - (4 + \sqrt{11})]\,[x - (4 - \sqrt{11})] = (x - 4 - \sqrt{11})\,(x - 4 + \sqrt{11}).$$

3) $x^2 + px + q = 0$; $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$;

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};\quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q};$$

$$x^2 + px + q = \left[x - \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\right]\left[x - \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\right] =$$

$$= \left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right).$$

Nüüd võtame kolmliikme $ax^2 + bx + c$, milles x^2 koefitsient on mistahes arv. Seda kolmliiget võib kujutada nii:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right).$$

Sulgudes seisev avaldis on $x^2 + px + q$ kujuline kolmliige. Tema nullkohad x_1 ja x_2 on samad, mis kolmliikmel $ax^2 + bx + c$. Need leidnud, võime eelmises paragrahvis tõestatu põhjal selle kolmliikme lahutada tegureiks järgmiselt:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = (x - x_1)(x - x_2).$$

Järelikult $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Seega kolmliikme $ax^2 + bx + c$ tegurid erinevad kolmliikme $x^2 + px + q$ teguritest ainult täiendava teguri a poolest.

Näited.

1) Kolmliikme $2x^2 - 2x - 12$, mille nullkohad on 3 ja -2, võib lahutada tegureiks nii: $2(x - 3)(x + 2)$.

2) Kolmliige $3x^2 + x + 1$, mille nullkohad on

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-11}}{6};\quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-11}}{6},$$

lahutatakse tegureiks nii:

$$3\left(x - \frac{-1 + \sqrt{-11}}{6}\right)\left(x - \frac{-1 - \sqrt{-11}}{6}\right) =$$

$$= \frac{1}{12}(6x + 1 - \sqrt{-11})(6x + 1 + \sqrt{-11}).$$

3) $6abx^2 - (3b^3 + 2a^3)x + a^2b^2$.

Leides selle kolmliikme nullkohad saame:

$$x_1 = \frac{b^2}{2a}; \quad x_2 = \frac{a^2}{3b}.$$

Seepärast

$$6abx^2 - (3b^3 + 2a^3)x + a^2b^2 = 6ab\left(x - \frac{b^2}{2a}\right)\left(x - \frac{a^2}{3b}\right) =$$

$$= 6ab\left(\frac{2ax - b^2}{2a}\right)\left(\frac{3bx - a^2}{3b}\right) = (2ax - b^2)(3bx - a^2).$$

4) Taandada murd:

$$\frac{2a^2 - 2a - 12}{3a^2 + a - 10}.$$

Lahutame lugeja ja nimetaja tegureiks ning taandame siis murru, kui võimalik. Et lugeja nullkohad on 3 ja -2, nimetaja nullkohad aga $\frac{5}{3}$ ja -2, siis võib murru kujutada nii:

$$\frac{2(a-3)(a+2)}{3(a-\frac{5}{3})(a+2)} = \frac{2a-6}{3a-5}.$$

Järeldus. Antud lahendite järgi võib koostada ruutvõrrandi. Nii saame võrrandi, mille lahendid on 3 ja -2, järgmiselt:

$$(x-3)[x-(-2)] = 0, \text{ s. o. } (x-3)(x+2) = 0,$$

mis pärast sulgude avamist annab: $x^2 - x - 6 = 0$. Mõistagi võib selle võrrandi kõiki liikmeid korrutada mistahes arvuga, mis ei sõltu x-st (näiteks 2-ga), mille tõttu lahendid ei muutu.

Harjutused.

Lahutada tegureiks:

78. $x^2 - 17x + 70$; $x^2 + 3x - 88$; $3x^2 - 14x + 8$; $6x^2 + x - 1$.

79. $20x^2 + 17x - 24$; $x(x+8) - 20$.

Taandada järgmised murrud (lahutades algul iga murru lugeja ja nimetaja tegureiks):

80. $\frac{x^2+6x-91}{x^2+8x-105}$; $\frac{2x^2+8x-90}{3x^2-36x+105}$. 81. $\frac{x^2+3ax+2a^2+ab-b^2}{x^2+2ax+a^2-b^2}$.

Lahutades järgmised kolmliikmed tegureiks leida, missuguste x väärtuste puhul on nende kolmliikmete väärtused positiivsed ja missuguste puhul negatiivsed:

82. x^2-6x+9; $x^2-14x+45$. 83. x^2-4x-5; $12-x-6x^2$.

84. $-x^2+x-12$; $-x^2-5x-6$.

II. Ruutfunktsiooni graafik.

46. Funktsiooni $y=x^2$ graafik. Juhime tähelepanu funktsiooni $y=x^2$ järgmistele omadustele.

a) Argumendi x iga väärtusega on funktsioon määratletud ja omandab ainult ühe väärtuse. Näiteks kui $x=-10$, siis on funktsiooni väärtus $(-10)^2=100$; kui $x=1000$, siis on funktsiooni väärtus $1000^2=1\,000\,000$, jne.

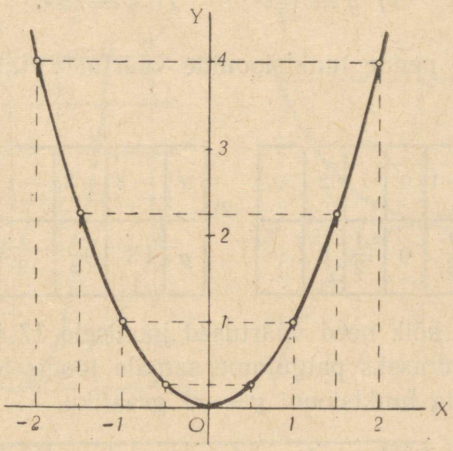
b) Et $(-x)^2=x^2$, siis x-i kahe väärtuse puhul, mis erinevad ainult märkide poolest, saadakse kaks võrdset positiivset y väärtust; näiteks kui $x=-2$ ja $x=+2$, siis y väärtus on üks ja seesama, nimelt 4. Negatiivseid y väärtusi ei saada mitte kunagi.

c) Kui x absoluutväärtus suureneb piiramatult, siis suureneb piiramatult ka y väärtus. Nii näiteks kui anname x-le jada piiramatult kasvavaid positiivseid väärtusi: 1, 2, 3, 4, ... või jada piiramatult kahanevaid negatiivseid väärtusi: -1, -2, -3, -4, ..., siis saame jada piiramatult kasvavaid y väärtusi: 1, 4, 9, 16, 25, ...

Pannes tähele neid omadusi, koostame funktsiooni $y=x^2$ väärtuste tabeli, näiteks järgmise:

x	...	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	0,5	1	1,5	2	...
y	...	4	2,25	1	0,25	0	0,25	1	2,25	4	...

Kujutame nüüd need väärtused joonisel 16 punktidena, mille abstsissideks on x väärtused, ordinaatideks aga y vastavad väärtused (pikkusühikuks võtsime joonisel lõigu $O1$); joonestame läbi saadud punktide kõvera. Seda kõverat nimetatakse paraboo l i k s. Vaatleme tema mõningaid omadusi.



Joon. 16.

a) Kogu kõver asetseb ühel pool x-telge, nimelt sealpool, kus ordinaatide väärtused on positiivsed.

b) y-telg jaotab parabooli kahte harru. Punkti O, kus need harud jooksevad kokku, nimetatakse parabooli t i p u k s. See punkt on parabooli ja x-telje ainuke ühine punkt.

c) Mõlemad harud on lõputud, sest x ja y võivad suureneda piiramatult. Harud tõusevad x-teljelt piiramatult kõrgele, kaugenedes samal ajal y-teljest paremale ja vasakule.

d) y-telg on paraboolile s ü m m e e t r i a t e l j e k s; kui murda joonis kokku seda telge mööda nii, et joonise vasak pool langeks paremale poolele, siis ühtivad mõlemad harud;

näiteks punkt abstsissiga -2 ja ordinaadiga 4 ühtib punktiga, mille abstsiss on $+2$ ja ordinaat on 4.

47. Funktsiooni $y = ax^2$ graafik. Oletame algul, et a on positiivne arv. Võtame näiteks kaks seesugust funktsiooni:

$$1)\ y = 1\tfrac{1}{2}x^2; \qquad 2)\ y = \tfrac{1}{3}x^2.$$

Koostame nende funktsioonide väärtuste tabelid, näiteks järgmised:

1)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	6	$1\frac{1}{2}$	0	$1\frac{1}{2}$	6	...

2)

x	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	3	$1\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	...

Kanname kõik need väärtused joonisele 17 ja joonestame kõverad. Võrdluseks paigutame samale joonisele (punktiiris) veel kolmanda funktsiooni $y = x^2$ graafiku.

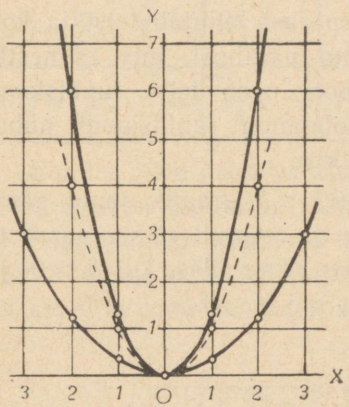
3)

x	-2	-1	0	1	2	...
y	4	1	0	1	4	...

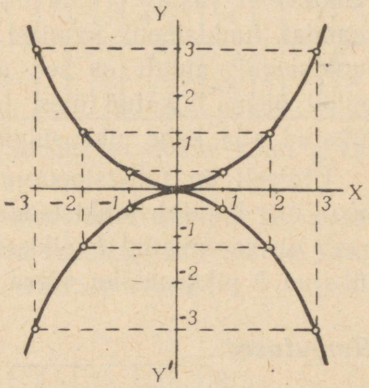
Jooniselt nähtub, et ühe ja sama abstsissi puhul on esimese kõvera ordinaat $1\frac{1}{2}$ korda suurem, teise kõvera ordinaat aga kolm korda väiksem kui kolmanda kõvera ordinaat. Neil kõverail on üldine iseloom: lõputud harud, sümmeetriatelg jm., ainult kui $a > 1$, siis on kõvera harud enam üles painutatud, kui $a < 1$, siis on nad rohkem alla painutatud kui kõveral $y = x^2$. Kõiki selliseid kõveraid nimetatakse samuti p a r a b o o l i d e k s.

Oletame nüüd, et koefitsient a on negatiivne arv. Olgu näiteks $y = -\frac{1}{3}x^2$. Võrreldes seda funktsiooni funktsiooniga

$y = +\frac{1}{3}x^2$, märkame, et x-i ühe ja sama väärtuse puhul on mõlemal funktsioonil üks ja sama absoluutväärtus, kuid nende märgid on vastupidised. Seepärast saadakse funktsiooni $y = -\frac{1}{3}x^2$ graafikuna joonisel 18 samasugune parabool nagu funktsioonil $y = +\frac{1}{3}x^2$, ainult selle erinevusega, et ta asetseb x-telje all ja on sümmeetriline parabooliga $y = \frac{1}{3}x^2$.



Joon. 17.



Joon. 18.

Sel juhul on funktsiooni kõik väärtused negatiivsed peale ühe, mis on võrdne nulliga, kui $x = 0$.

Märkus. Kui sõltuvus kahe muutuva suuruse x ja y vahel väljendub võrrandiga $y = ax^2$, kus a on mingi jääv arv, siis võib öelda, et suurus y on võrdeline suuruse x ruuduga, sest x väärtuse suurendamisel või vähendamisel 2 korda, 3 korda jne. suureneb või väheneb y väärtus 4 korda, 9 korda, 16 korda jne.

Näiteks ringi pindala võrdub πR^2, kus R on ringi raadius ja π jääv arv; seepärast võib öelda, et ringi pindala on võrdeline raadiuse ruuduga.

48. Funktsiooni $y = ax^2 + b$ graafik. Olgu meil kolm järgmist funktsiooni:

$$1)\ y = \frac{1}{3}x^2;\quad 2)\ y = \frac{1}{3}x^2 + 2;\quad 3)\ y = \frac{1}{3}x^2 - 2.$$

On ilmne, et argumendi x ühe ja sama väärtuse puhul on teise funktsiooni ordinaat 2 ühiku võrra suurem, kolmanda funktsiooni ordinaat aga 2 ühiku võrra väiksem kui esimese funktsiooni vastav ordinaat. Seepärast kujutab teist ja kolmandat funktsiooni joonisel sama parabool, mis esimestki funktsiooni, ainult et see parabool peab teise funktsiooni puhul olema lükatud üles ja kolmanda funktsiooni puhul lükatud alla kahe pikkusühiku võrra.

Üldiselt on funktsiooni $y = ax^2 + b$ graafik sama parabool, mis kujutab funktsiooni $y = ax^2$, ainult et see parabool peab olema lükatud b pikkusühiku võrra üles, kui $b > 0$, ja lükatud b pikkusühiku võrra alla, kui $b < 0$.

Harjutused.

85. Joonestada ühes ja samas teljestikus, kasutades üht ja sama pikkusühikut, järgmiste funktsioonide graafikud:

$$y = 0{,}25x^2;\quad y = 0{,}5x^2;\quad y = 2x^2;\quad y = 0{,}5x^2 + 1;\quad y = 0{,}5x^2 - 1.$$

86. Sama ülesanne funktsioonide $y = x^2$ ja $y = 0{,}5x + 1$ kohta; leida nende graafikute lõikepunkti koordinaadid ja joonise kontrollimise eesmärgil määrata, kas need rahuldavad antud võrrandeid.

49. Teise astme kolmliikme graafik. Algul vaatleme sellise kolmliikme graafikut, mida võib kujutada korrutise $a(x + m)^2$ kujul. Võtame näiteks kaks järgmist funktsiooni:

$$1)\ y = \frac{1}{4}(x + 2)^2 \quad \text{ja} \quad 2)\ y = \frac{1}{4}(x - 2)^2.$$

Samal joonisel joonestame võrdluseks veel parabooli:

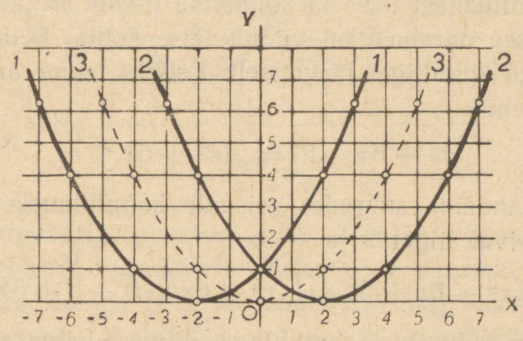
$$3)\ y = \frac{1}{4}x^2.$$

Esialgu koostame nende kolme funktsiooni väärtuste tabeli, näiteks järgmise:

$x=$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1) $y=\frac{1}{4}(x+2)^2=$	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9	$12\frac{1}{4}$	16
2) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2=$	$12\frac{1}{4}$	9	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4
3) $y=\frac{1}{4}x^2=$	$6\frac{1}{4}$	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	$6\frac{1}{4}$	9

Kandes kõik need väärtused joonisele, saame kolm graafikut, mis on kujutatud joonisel 19.

Seda joonist vaadeldes märkame, et kõver 1 on parabool 3, ainult kantud 2 ühiku võrra vasakule, kõver 2 on sama parabool 3, kuid kantud 2 ühiku võrra paremale.



Joon. 19.

Seda järeldust üldistades võime öelda, et funktsiooni $y=a(x+m)^2$ graafik on parabool, mis kujutab funktsiooni $y=ax^2$, ainult et see parabool on kantud vasakule, kui $m>0$, ja paremale, kui $m<0$, niimitme ühiku võrra, kui suur on arvu m absoluutväärtus. Selle parabooli harud on suu-

natud üles, kui $a > 0$, nagu meie näiteis, ja alla, kui $a < 0$, nagu näiteks paraboolil

$$y = -\frac{1}{4}(x+2)^2.$$

Nüüd võtame kolmliikme, mille kuju on $y = ax^2 + bx + c$. Vaatleme näiteks kolmliiget

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2}.$$

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	$2\frac{1}{2}$	0	$-1\frac{1}{2}$	-2	$-1\frac{1}{2}$	0	$2\frac{1}{2}$	6	...

Leides punktid, mis kujutavad tabelis antud väärtusi, ja pannes läbi nende punktide kõvera (kõver 3, joon. 20), saame otsitava graafiku. Näitame nüüd, et see graafik on sama parabool, mis kujutab funktsiooni $y = \frac{1}{2}x^2$ (mis on saadud antud kolmliikmest teise ja kolmanda liikme ärajätmise teel), ainult et see parabool on viidud teise kohta. Selleks teisendame antud kolmliiget järgmiselt. Esiteks toome sulgude ette x^2 koefitsiendi:

$$\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5),$$

teisèks lisandame sulgudes seisvale kolmliikmele kaks vastamisi hävivat liiget 9 ja -9:

$$\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 5) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9 + 5),$$

kolmandaks rühmitame hulkliikme liikmed kahte rühma. Siis saame:

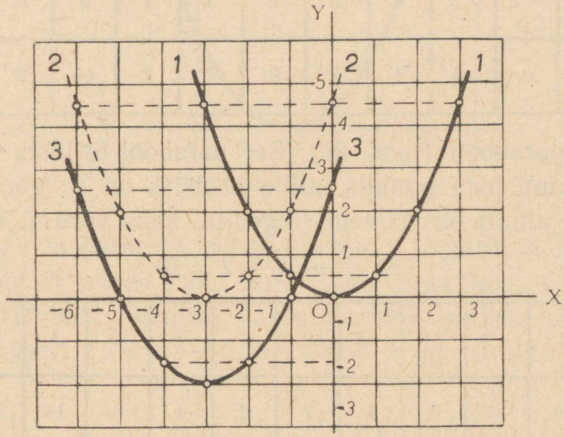
$$\frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9 - 9 + 5) = \frac{1}{2}[(x^2 + 6x + 9) - (9 - 5)] =$$

$$= \frac{1}{2}[(x+3)^2 - 4] = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 2.$$

Võtnud nüüd arvesse eespool läbiarutatud näited, võime toimida järgmiselt.

Joonestame parabooli, mis kujutab funktsiooni $y = \frac{1}{2}x^2$ (kõver 1, joon. 20); seejärel kanname ta 3 ühiku võrra vasakule, siis saame parabooli 2, mis kujutab funktsiooni $y = \frac{1}{2}(x + 3)^2$. Selle parabooli kanname nüüd 2 ühiku võrra allapoole, saame parabooli 3, mis kujutab antud funktsiooni.

50. Ruutvõrrandi graafiline lahendamine. Ruutvõrrandit võib graafiliselt lahendada järgmisel viisil: joonestanud



Joon. 20.

millimeeterpaberile parabooli, mis kujutab võrrandi vasakul poolel asetsevat kolmliiget, leiame selle parabooli ja x-telje lõikepunktid. Nende punktide abstsissid ongi võrrandi lahendid, sest nende abstsisside puhul on kolmliikme väärtusi kujutavad ordinaadid võrdsed nulliga.

Näited.

1) $\frac{1}{2}x^2 + 3x + 2\frac{1}{2} = 0.$

Selle võrrandi vasaku poole graafikut kujutab kõver 3 (joon. 20). Sellelt jooniselt näeme, et parabool lõikab x-telge

kahes punktis, mille abstsissid on -1 ja -5. Need ongi antud võrrandi lahendid.

Seda võib kontrollida, lahendades võrrandi üldvalemi abil või asendades leitud lahendi võrrandi vasakusse poolde.

2) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$.

Koostanud kolmliikme $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ väärtuste tabeli

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	...
y	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	...

ehitame parabooli (joon. 21). See parabool ei lõiku x-teljega, vaid puutub teda punktis, mille abstsiss on 2. Võrrandil on sel juhul ainult üks lahend (õigemini kaks võrdset lahendit).

3) $x^2 - x + 2 = 0$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	14	8	4	2	2	4	8	14	...

Parabool (joon. 22) ei lõiku x-teljega ega puutu teda; seega võrrandil ei ole reaalseid lahendeid.

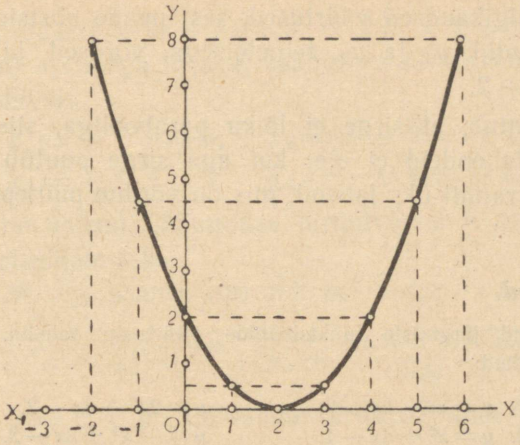
Näitame veel järgmist ruutvõrrandi graafilist lahendamisvõtet. Olgu vaja lahendada võrrand

$$x^2 - 1{,}5x - 2 = 0.$$

Teisendame teda nii:

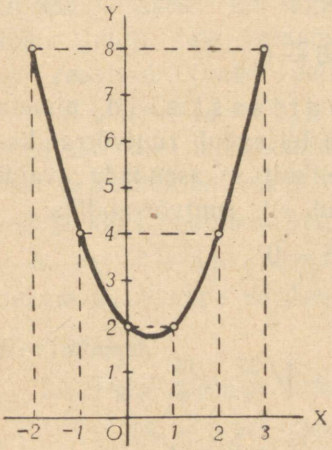
$$x^2 = 1{,}5x + 2.$$

Selle võrrandi kumbki pool on eraldi vaadelduna x-i teatav funktsioon. Tähistame funktsiooni, mida väljendab võrrandi vasak pool, tähega y_1 ja funktsiooni, mida väljendab võrrandi parem pool, tähega y_2. Esimest funktsiooni kuju-

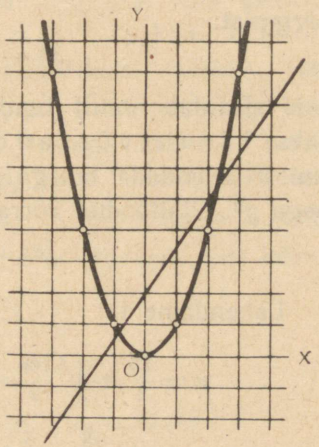


Joon. 21.

tab joonisel 23 parabool, teist — sirge. Joonestanud ühel ja samal joonisel nende kahe funktsiooni graafikud, leiame, et sirge ja parabool lõikuvad kahes punktis, millede abstsissid on ligikaudselt 2,35 ja — 0,85. Need ongi antud võrrandi



Joon. 22.



Joon. 23.

lahendite ligikaudsed väärtused, sest nende abstsisside puhul on ordinaadid y_1 ja y_2 teineteisega võrdsed ja järelikult $x^2 = 1{,}5x + 2$.

Kui juhtub, et sirge ei lõiku paraboliga, siis võrrandil reaalseid lahendeid ei ole; kui aga sirge puutub parabooli, siis on võrrandil üks lahend, mis on võrdne puutepunkti abstsissiga.

Harjutused.

Koostanud järgmiste funktsioonide väärtuste tabelid, joonestada nende graafikud:

87. $y = x^2 - 2x - 2$; $y = 2x^2 + 3x - 2$.
88. $y = x^2 + 4x - 1$; $y = -x^2 + 2x - 2$.
89. $x = -2y^2 - 4y - 2$; $y = x^2 - 3x - 5$.

Lahendada graafiliselt järgmised võrrandid:

90. $x^2 = x + 6$; $x^2 = 2x + 2$; $x^2 = 2 - 3x$.
91. $x^2 = 3x + 5$; $x^2 = 12x - 36$; $x^2 = \frac{3x+4}{2}$.

51. Biruutvõrrand. Neljanda astme võrrandit, näiteks järgmist:

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

mis sisaldab ainult tundmatu paarisastmeid, nimetatakse biruutvõrrandiks. Ta teisendub ruutvõrrandiks, kui x^2 asendada tähega y ja järelikult x^4 asendada avaldisega y^2. Ülaltoodud võrrand muutub siis ruutvõrrandiks:

$$y^2 - 13y + 36 = 0.$$

Lahendame ta:

$$y = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{169}{4} - 36} = \frac{13}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{13}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$y_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9; \quad y_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4.$$

Kuid võrdusest $x^2 = y$ nähtub, et $x = \pm \sqrt{y}$. Asendades siin y leitud arvudega 9 ja 4, saame antud võrrandi järgmised neli lahendit:

$$x_1 = +\sqrt{9} = 3; \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3;$$
$$x_3 = +\sqrt{4} = 2; \quad x_4 = -\sqrt{4} = -2.$$

Koostame valemi üldkujulise biruutvõrrandi $ax^4 + bx^2 + c = 0$ lahendamiseks.

Võttes $x^2 = y$, saame võrrandi $ay^2 + by + c = 0$, millest leiame:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Et aga $x = \pm \sqrt{y}$, siis saame biruutvõrrandi jaoks järgmised neli lahendit:

$$x_1 = +\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$
$$x_3 = +\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Siit nähtub, et kui $b^2 - 4ac < 0$, siis kõik neli lahendit on kompleksed; kui aga $b^2 - 4ac > 0$, siis võib esineda kolm juhtu (me eeldame, et $a > 0$): 1) kõik lahendid on reaalsed (nagu eeltoodud numbrilises näites), kui $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ ja $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$; 2) kõik lahendid on imaginaarsed, kui nende mõlema avaldise väärtused on negatiivsed, ja 3) kaks lahendit on reaalsed ja kaks imaginaarsed, kui $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$, kuid $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$. Lõpuks, kui $b^2 - 4ac = 0$, siis lahendid on paarikaupa võrdsed.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandid:

92. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.
93. $x^4 - 2x^2 - 3 = 0$; $2x^4 - 7x^2 = 4$.
94. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$; $x^4 - 2x^2 = 63$.

52. Võrrandid, mille vasak pool lahutub tegureiks ja parem pool on null. Selliste võrrandite lahendamine taandub madalama-astmeliste võrrandite lahendamiseks. Nii nägime, et mittetäieliku ruutvõrrandi $ax^2 + bx = 0$ lahendamiseks piisab, kui võrrandi vasak pool lahutada kaheks teguriks: $x(ax + b) = 0$, ja seejärel, võttes arvesse, et korrutis on võrdne nulliga ainult siis, kui üks või teine tegur võrdub nulliga, taandada selle võrrandi lahendamine kahe esimese astme võrrandi $x = 0$ ja $ax + b = 0$ lahendamiseks.

Samal viisil võib lahendada mittetäielikku kuupvõrrandit, mis ei sisalda vabaliiget, näiteks võrrandit

$$x^3 + 3x^2 - 10x = 0.$$

Tuues tähe x sulgude ette, me kirjutame võrrandi kujul:

$$x(x^2 + 3x - 10) = 0$$

ja järelikult ta jaguneb kaheks võrrandiks:

$$x = 0 \quad \text{ja} \quad x^2 + 3x - 10 = 0,$$

milledest leiame kolm lahendit:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = 2;$$

$$x_3 = -\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{9}{4} + 10} = -5.$$

Olgu mingi võrrand teisendatud selliseks:

$$x(x + 4)(x^2 - 5x + 6) = 0.$$

Siis ta laguneb kolmeks võrrandiks:

$$x = 0; \quad x + 4 = 0; \quad x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Need võrrandid annavad:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = 2; \quad x_4 = 3.$$

53. Kaheliikmeline võrrand. Kaheliikmeliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit $ax^m + b = 0$ ehk võrrandit $x^m + \frac{b}{a} = 0$*.

* Kui kaheliikmelise võrrandi kuju on $ax^m + bx^n = 0$, kus $m > n$, siis võib teda kujutada nii: $x^n(ax^{m-n} + b) = 0$ ja järelikult ta laguneb kaheks võrrandiks: $x^n = 0$ ja $ax^{m-n} + b = 0$.

Tähistades arvu $\frac{b}{a}$ absoluutväärtuse tähega q, võime kaheliikmelise võrrandi kirjutada kas kujul $x^m + q = 0$ või kujul $x^m - q = 0$. Abitundmatu abil on neid võrrandeid alati võimalik lihtsustada nii, et esimese vabaliige muutub $+1$-ks, teisel aga -1-ks. Tõepoolest, oletame, et $x = y\sqrt[m]{q}$, kus $\sqrt[m]{q}$ on arvu q m-nda juure aritmeetiline väärtus; siis $x^m = qy^m$ ja võrrandid omandavad kuju:

$$qy^m + q = 0, \text{ s. o. } q(y^m + 1) = 0, \text{ kust } y^m + 1 = 0,$$

või

$$qy^m - q = 0, \text{ s. o. } q(y^m - 1) = 0, \text{ kust } y^m - 1 = 0.$$

Seega siis kaheliikmeliste võrrandite lahendamine viib võrrandite $y^m \pm 1 = 0$ lahendamisele. Selliste võrrandite lahendamine elementaarsete meetoditega on võimalik üksnes astendaja m mõningate eriväärtuste puhul. Üldine võte, mida seejuures kasutatakse, seisab võrrandi vasaku poole tegureiks lahutamises, mille tagajärjel võrrand omandab kuju, mida vaatlesime varemalt.

54. Kaheliikmeliste kolmanda astme võrrandite lahendamine. Need võrrandid on järgmised: $x^3 - 1 = 0$ ja $x^3 + 1 = 0$.

Pannud tähele, et

$$x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$$

ja

$$x^3 + 1 = x^3 + 1^3 = (x + 1)(x^2 - x + 1),$$

võime esitatud võrrandid kirjutada nii:

$$(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \quad \text{ja} \quad (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

Tähendab, esimese võrrandi lahenditeks on võrrandite $x - 1 = 0$ ja $x^2 + x + 1 = 0$ lahendid, teise võrrandi lahenditeks on aga võrrandite $x + 1 = 0$ ja $x^2 - x + 1 = 0$ lahendid.

Lahendanud need võrrandid, näeme, et võrrandil $x^3 - 1 = 0$ on järgmised kolm lahendit:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

milledest üks on reaalne ja kaks on kompleksed; võrrandil $x^3 + 1 = 0$ on kolm lahendit:

$$x_1 = -1; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad x_3 = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2},$$

milledest üks on samuti reaalne ja kaks on kompleksed.

55. Juure mitmesugused väärtused. Kaheliikmeliste võrrandite lahendamine on tihedalt seotud antud arvu juure kõigi väärtuste leidmisega. Tõesti, leida $\sqrt[m]{A}$ on ilmselt sama, mis lahendada võrrand $x^m = A$, s. o. $x^m - A = 0$, ja seepärast kuimitu erinevat lahendit sel võrrandil on, niimitu erinevat väärtust on juurel $\sqrt[m]{A}$.

Toetudes sellele märkusele näitame, et *iga (nulliga mittevõrdse) reaalarvu kuupjuurel on kolm erinevat väärtust.*

Vaatleme algul juhtu, kui A on positiivne arv. Olgu vaja leida $\sqrt[3]{A}$, s. o., teiste sõnadega, olgu vaja lahendada võrrand $x^3 - A = 0$. Tähistades $\sqrt[3]{A}$ aritmeetilise väärtuse tähega q, oletame, et $x = qy$. Siis võib võrrandi $x^3 - A = 0$ kujutada järgmiselt: $q^3y^3 - A = 0$. Kuid $q^3 = A$, seepärast $q^3y^3 - A = A(y^3 - 1)$ ja võrrand omandab kuju: $y^3 - 1 = 0$.

Eelmises paragrahvis nägime, et sel võrrandil on kolm lahendit:

$$y_1 = 1; \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad y_3 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Igaüks neist väärtustest, rahuldades võrrandit $y^3 = 1$, kujutab enesest arvu 1 kuupjuurt. Et $x = qy$, siis

$$x_1 = q \cdot 1 = q; \quad x_2 = q \cdot \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad x_3 = q \cdot \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Need ongi juure $\sqrt[3]{A}$ kolm väärtust; üks neist on reaalne (aritmeetiline), kaks aga on kompleksed. Kõik nad saadakse, kui juure $\sqrt[3]{A}$ aritmeetiline väärtus korrutatakse juure $\sqrt[3]{1}$ kõigi kolme väärtusega.

Näiteks kuupjuurel 8-st on kolm järgmist väärtust:

$$2;\quad 2\cdot\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=-1+\sqrt{-3};$$

$$2\cdot\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=-1-\sqrt{-3}.$$

Kui $A<0$, siis jääb eelmine arutelu jõusse, ainult et q-ga tuleb tähistada juure $\sqrt[3]{-A}$ reaalne väärtus ja oletada, et $x=-qy$.

56. Kolmeliikmeline võrrand. Nii nimetatakse võrrandit $ax^{2n}+bx^n+c=0$ (selle kuju erijuhtum, kui $n=2$, on biruutvõrrand). Ta muutub ruutvõrrandiks, kui võtame tarvitusele abitundmatu $y=x^n$. Siis võrrand omandab kuju:

$$ay^2+by+c=0,$$

kust saame, et

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Järelikult

$$x^n=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Lahendades, kui võimalik, selle kaheliikmelise võrrandi, leiame kõik x väärtused.

Näide. $x^6-9x^3+8=0.$

$$x^3=y;\quad y^2-9y+8=0;\quad y=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-8}=\frac{9\pm7}{2};$$

$$y_1=8;\quad y_2=1;$$

järelikult

$$x^3 = 8 \quad \text{ja} \quad x^3 = 1.$$

Lahendanud need kaheliikmelised kolmanda astme võrrandid, saame x-le kuus väärtust:

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -1 + \sqrt{-3}; \quad x_3 = -1 - \sqrt{-3};$$

$$x_4 = 1; \quad x_5 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}; \quad x_6 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Harjutused.

Lahendada võrrandid:

95. $x^3 = m^3$; $x^3 + 729 = 0$; $x^6 = 64$.

96. $8x^6 + 7x^3 - 1 = 0$; $x^{2m} + 2ax^m = 8a^2$.

III. Ruutvõrrandite süsteemid.

57. Mitme tundmatuga võrrandi aste. Et määrata mitme tundmatuga võrrandi astet, on esialgu vaja seda võrrandit lihtsustada (avada sulud, vabastada teda juurtest ja nimetajatest, mis sisaldavad tundmatuid, ning koondada sarnased liikmed). *Siis võrrandi astmeks nimetatakse võrrandi selle liikme tundmatutele kuuluvate astendajate summat, millel see summa on suurim.*

Näiteks võrrandid $x^2 + 2xy - x + 2 = 0$, $3xy = 4$, $2x + y^2 - y = 0$ on teise astme võrrandid; võrrand $3x^2y - y^2 + x + 10 = 0$ on kolmanda astme võrrand (kahe tundmatuga) jne.

Tähendame, et võrrandi mingi liikme tundmatutele kuuluvate astendajate summat nimetatakse selle liikme m õ õ t e k s. Seega liikmed $2xy$, $5x^2$, $3y^2$ on k a h e m õ õ t e l i s e d, liikmed $0{,}2x^2y$, $10xy^2$, $\frac{1}{2}xyz$ on k o l m e m õ õ t e l i s e d. Liiget, mis tundmatuid ei sisalda, nimetatakse n u l l m õ õ t e l i s e k s.

Tähendame veel, et võrrandit nimetatakse h o m o g e e n s e k s, kui kõik tema liikmed on ühe ja sama mõõtelised.

Seega võrrand $3x^2 + xy - 2y^2 = 0$ on homogeenne kahe tundmatuga teise astme võrrand.

Nüüd vaatleme, kuidas lahendatakse mõningaid lihtsamaid kahe tundmatuga teise astme võrrandisüsteeme.

58. Kahe tundmatuga teise astme täieliku võrrandi üldkuju on järgmine:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Temas esimesed kolm liiget on kahemõõtelised, järgmised kaks liiget on ühemõõtelised ja viimane (vaba-) liige on nullmõõteline. Koefitsiendid a, b, c, ... võivad olla positiivsed või negatiivsed arvud või võrdsed nulliga (mõistagi ei eeldata, et kolm koefitsienti a, b ja c on üheaegselt nullid, sest vastasel korral ei oleks võrrand mitte teise, vaid esimese astme võrrand).

Nüüd vaatleme, kuidas lahendatakse kaht kahe tundmatuga teise astme võrrandit sisaldavaid lihtsamaid võrrandisüsteeme.

59. Kahe võrrandi süsteem, milledest üks on esimese ja teine teise astme võrrand. Olgu antud süsteem:

$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 + x + 3y = 1 & \ldots \text{ teise astme võrrand;} \\ 2x - y = 1 & \ldots \text{ esimese astme võrrand.} \end{cases}$$

Seesugust süsteemi on kõige sobivam lahendada asendamismeetodi abil järgmiselt. Esimese astme võrrandist avaldame ühe tundmatu teise tundmatu funktsioonina, näiteks avaldame y kui x funktsiooni:

$$y = 2x - 1.$$

Siis teise astme võrrand pärast asendamist muutub võrrandiks ühe tundmatuga x.

$$x^2 - 4(2x - 1)^2 + x + 3(2x - 1) = 1;$$
$$x^2 - 4(4x^2 - 4x + 1) + x + 6x - 3 = 1;$$
$$x^2 - 16x^2 + 16x - 4 + x + 6x - 3 - 1 = 0;$$
$$-15x^2 + 23x - 8 = 0; \quad 15x^2 - 23x + 8 = 0;$$

$$x=\frac{23\pm\sqrt{23^2-4\cdot 15\cdot 8}}{2\cdot 15}=\frac{23\pm\sqrt{529-480}}{30}=\frac{23\pm\sqrt{49}}{30};$$

$$x_1=\frac{23+7}{30}=1;\quad x_2=\frac{23-7}{30}=\frac{8}{15}.$$

Pärast seda leiame võrrandi $y=2x-1$ abil, et

$$y_1=2\cdot 1-1=1;\quad y_2=2\cdot\frac{8}{15}-1=\frac{1}{15}.$$

Seega on antud võrrandisüsteemil 2 lahendit:

$$1)\ x_1=1,\quad y_1=1;\quad 2)\ x_2=\frac{8}{15},\ y_2=\frac{1}{15}.$$

60. Kunstlikud võtted. Näidatud võte on kasutatav neil juhtudel, kui üks võrrandeist on esimese astme võrrand; mõningatel juhtudel võib rakendada kunstlikke võtteid, mille kohta ei saa anda üldreeglit. Toome näiteid.

Näide 1.

$$\begin{cases}x+y=a\\xy=b\end{cases}$$

Esimene meetod. Et on antud tundmatute summa ja nende korrutis, siis x ja y peavad olema ruutvõrrandi

$$z^2-az+b=0$$

lahenditeks (§ 43).

Järelikult

$$x=z_1=\frac{a}{2}+\sqrt{\frac{a^2}{4}-b};\quad y=z_2=\frac{a}{2}-\sqrt{\frac{a^2}{4}-b}.$$

Teine meetod. Ruudime esimese võrrandi ja lahutame sellest neljakordse teise võrrandi [1].

$$\begin{aligned}x^2+2xy+y^2&=a^2\\-4xy&=-4b\\\hline x^2-2xy+y^2&=a^2-4b,\end{aligned}$$

[1] Seesuguseid väljendeid kasutatakse lühiduse mõttes sageli selle asemel, et öelda: „Ruudime võrrandi mõlemad pooled", „Korrutame võrrandi mõlemad pooled neljaga" jne.

$(x-y)^2 = a^2 - 4b$, kust: $x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b}$.

Nüüd on meil süsteem:

$$\begin{cases} x + y = a \\ x - y = \pm\sqrt{a^2 - 4b} \end{cases}$$

Liites ja lahutades need võrrandid, saame:

$$2x = a \pm \sqrt{a^2 - 4b};\quad 2y = a \mp \sqrt{a^2 - 4b};$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2};\quad y = \frac{a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Et me ühe võrrandi ruutisime, siis kontrollime asendamise teel, kas leitud lahendite hulgas pole võõrlahendeid.

Sel viisil leiame, et antud süsteemil on 2 lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_1 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x_2 = \dfrac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \\ y_2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases}$$

Teine lahend erineb esimesest ainult selle poolest, et x väärtus esimeses lahendis on y väärtuseks teises lahendis, ja vastupidi. Seda oli võimalik ette näha, sest võrrand ei muutu x asendamisel y-ga ja y asendamisel x-ga. Märgime, et selliseid võrrandeid nimetatakse sümmeetrilisteks võrranditeks.

Näide 2. $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$

Esimene meetod. Esitades võrrandid kujul

$$x + (-y) = a,\quad x(-y) = -b,$$

märkame, et x ja $-y$ on ruutvõrrandi

$$z^2 - az - b = 0$$

lahendid.

Järelikult

$$x = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b};\ y = -z_2 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right).$$

Teine meetod. Ruutinud esimese võrrandi ja liitnud selle neljakordse teise võrrandiga, saame:

$$(x + y)^2 = a^2 + 4b, \text{ kust } x + y = \pm\sqrt{a^2 + 4b}.$$

Nüüd on meil süsteem:

$$\begin{cases} x + y = \pm\sqrt{a^2 + 4b} \\ x - y = a \end{cases}$$

Liites ja lahutades need võrrandid leiame, et

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2};\quad y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4b}}{2}.$$

Näide 3.

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{cases}$$

Ruutides esimese võrrandi ja lahutades sellest teise võrrandi, saame:

$$2xy = a^2 - b^2, \text{ kust } xy = \frac{a^2 - b}{2}.$$

Nüüd seisab küsimus süsteemi

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = \frac{a^2 - b}{2} \end{cases}$$

lahendamises, mida käsitlesime juba esimeses näites.

61. Kahe võrrandi süsteem, kus mõlemad on teise astme võrrandid. Seesugune süsteem ei lahendu üldkujul elementaarselt, sest ta taandub täielikuks neljanda astme võrrandiks.

Vaatleme võrrandite mõningaid e r i j u h t u s i d, mida võib lahendada elementaarselt.

Näide 1.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

Esimene meetod (asendamismeetod). Teisest võrrandist avaldame ühe tundmatu teise tundmatu funktsioonina; näiteks $x = \frac{b}{y}$. Asetame selle avaldise esimesse võrrandisse ja vabastame võrrandi murrust; siis saame biruutvõrrandi:

$$y^4 - ay^2 + b^2 = 0.$$

Lahendanud selle, leiame y neli väärtust. Asetanud need järgemööda varem tuletatud x valemisse, leiame vastavad neli x väärtust.

Teine meetod. Liites esimese võrrandi kahekordse teise võrrandiga, saame:

$$x^2 + y^2 + 2xy = a + 2b, \text{ s. o. } (x + y)^2 = a + 2b,$$

kust

$$x + y = \pm \sqrt{a + 2b}.$$

Lahutades esimesest võrrandist kahekordse teise võrrandi, leiame:

$$x^2 + y^2 - 2xy = a - 2b, \text{ s. o. } (x - y)^2 = a - 2b,$$

kust

$$x - y = \pm \sqrt{a - 2b}.$$

Seega siis seisab küsimus järgmise nelja esimese astme süsteemi lahendamises:

1) $\begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b} \\ x - y = \sqrt{a - 2b} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = \sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = \sqrt{a - 2b} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = -\sqrt{a + 2b} \\ x - y = -\sqrt{a - 2b} \end{cases}$

Igaüks neist lahendub üsna lihtsalt võrrandite algebralise liitmise teel.

Kolmas meetod. Ruutides teise võrrandi, saame järgmise süsteemi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 y^2 = b^2 \end{cases}$$

Siit nähtub, et x^2 ja y^2 on ruutvõrrandi $z^2 - az + b^2 = 0$ lahendid.

Järelikult

$$x^2 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}, \quad y^2 = z_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b^2}.$$

Näide 2.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ xy = b \end{cases}$$

Asendamismeetodi abil taandame selle süsteemi kergesti biruutvõrrandiks. Anname siin veel ühe kunstliku lahendusvõtte.

Ruutides teise võrrandi, saame:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2y^2 = b^2 \end{cases}$$

ehk

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) = a \\ x^2(-y^2) = -b^2. \end{cases}$$

Siit nähtub, et x^2 ja $-y^2$ on võrrandi $z^2 - az - b^2 = 0$ lahendid. Järelikult

$$x^2 = z_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}, \quad y^2 = -z_2 = -\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}\right).$$

Siit leiame x ja y.

Märkus. Kõigil juhtudel, kui tuleb võrrandit astendada, on vaja lahendeid kontrollida.

62. Teise astme võrrandisüsteemide graafiline lahendamine. Joonestanud iga antud võrrandi graafiku, leiame nende graafikute lõikepunktide koordinaadid. Need ongi võrrandite lahendid.

Näide. Lahendada graafiliselt süsteem:

$$\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ x = 2y^2 - 3 \end{cases}$$

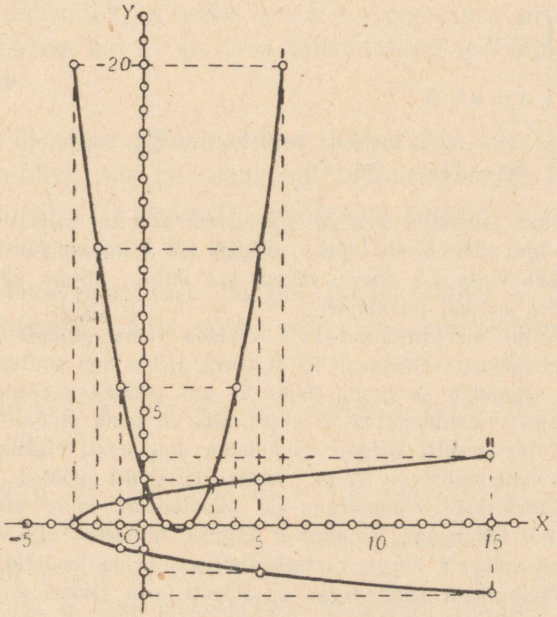
Koostame x ja y väärtuste tabeli esimese võrrandi alusel:

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	20	12	6	2	0	0	2	6	12	...

ning x ja y väärtuste tabeli teise võrrandi alusel:

y	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
x	...	15	5	-1	-3	-1	5	15	29	...

Nende väärtuste järgi ehitame graafikud (need graafikud on paraboolid, joon. 24).



Joon. 24.

Graafikud lõikuvad kahes punktis, millede koordinaadid on ligikaudselt: $x = 0{,}3$; $y = 1{,}3$ ja $x = 2{,}8$; $y = 1{,}6$.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid:

97. $\begin{cases} x + y = 11 \\ xy = 24 \end{cases}$ $\begin{cases} x - y = 3 \\ xy = 40 \end{cases}$ $\begin{cases} xy = a \\ \frac{x}{y} = b \end{cases}$

98. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 96 \\ x - y = 8 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - y^2 = 156 \\ x - y = 6 \end{cases}$

99. $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4} \end{cases}$

100. $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$

101. $\begin{cases} 9x^2 - xy + 2y^2 + 4x = 20 \\ 5x^2 - 11xy + 2y^2 = 0 \end{cases}$

102. Kaks jalakäijat peavad ära käima 270 km pikkuse tee. Üks neist käib iga päev 6 km võrra rohkem kui teine, mistõttu ta vajab kogu tee käimiseks 1,5 päeva vähem kui teine. Mitme päevaga käib ära kogu tee kumbki jalakäija?

103. Põllul on ristküliku kuju. Leida tema pindala, teades et: 1) kui tema pikkust vähendada 12 m võrra, laiust aga suurendada 12 m võrra, siis omandab ta ruudu kuju; 2) kui pikkust suurendada 12 m võrra ja laiust vähendada 12 m võrra, siis on tema pindala 15 049 m².

104. Kolme meetri kõrguse risttahuka diagonaali pikkus on 13 m; tema aluse ümbermõõt on 32 m. Leida risttahuka mõõted.

105. Täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuus, mille pikkus on c, temale lastud kõrgusega jaotatud 2 lõiguks, milledest üks võrdub selle lõigu juures asetseva nurga vastaskaatetiga. Leida kaatetid.

106. Täisnurkses kolmnurgas on hüpotenuusi pikkus c ja kaatetite summa s. Leida kaatetid.

Neljas jagu.

Võrratused.

I. Esimese astme võrratused.

63. Eelmärkus. Me juba kõnelesime, mis mõttes tuleb mõista väljendusi „suurem" ja „väiksem" relatiivsete arvude vallas (vt. § 24, I osa), nimelt: ütlus „a on suurem kui b" ($a > b$) tähendab, et vahe $a - b$ on positiivne arv, ja ütlus „a on väiksem kui b" ($a < b$) tähendab, et see vahe on negatiivne arv.

64. Võrratuse põhiomadused. Kaks arvu või kaks algebralist avaldist, mis on omavahel seotud märgiga $>$ või $<$, moodustavad võrratuse. Võrratus koosneb kahest osast: vasakust poolest ja paremast poolest.

Tähistame võrratuse vasaku poole tähega a ja parema poole tähega b. Siis võime võrratuse põhiomadusi väljendada nii:

1) Kui $a > b$, siis $b < a$; näiteks: kui $-2 > -3$, siis $-3 < -2$.

2) Kui $a > b$ ja $b > c$, siis $a > c$; näiteks: kui $-2 > -3$ ja $-3 > -4$, siis $-2 > -4$.

3) Kui $a > b$ ja $c = d$, siis $a + c > b + d$ ja $a - c > b - d$, s. o. kui ebavõrdsete arvudega liidame või lahutame neist võrdsed arvud, siis võrratuse märk ei muutu (s. o.

võrratuse suurem pool jääb suuremaks). Näiteks: $2 > -3$; liidame või lahutame kummastki poolest -10:

$$2 + (-10) > -3 + (-10), \text{ s. o. } -8 > -13;$$
$$2 - (-10) > -3 - (-10), \text{ s. o. } 12 > 7.$$

4) Kui $a > b$ ja $c > d$, siis $a + c > b + d$; samuti, kui $a < b$ ja $c < d$, siis $a + c < b + d$.

Näiteks kui kahe võrratuse $-7 > -10$ ja $-3 > -4$ pooled liikmeti liita, siis saame $-10 > -14$.

Samuti, kui liikmeti liidame kahe võrratuse $2 < 8$ ja $-4 < -2$ pooled, siis saame: $-2 < 6$.

5) Kui $a > b$, aga $c < d$, siis $a - c > b - d$; või kui $a < b$, aga $c > d$, siis $a - c < b - d$.

Näiteks:

$$-\begin{cases} -8 > -10 \\ 2 < 3 \end{cases} \quad \text{ehk} \quad -\begin{cases} 7 < 12 \\ 8 > -2 \end{cases}$$
$$-10 > -13 \qquad -1 < 14$$

Lepime kokku kõnelda kahe võrratuse kohta, et nad on s a m a p i d i s e d, kui kummalgi on üks ja seesama märk $>$ või $<$, ja et nad on v a s t u p i d i s e d, kui ühel võrratusel on märk $>$, teisel aga märk $<$. Siis võib neljandat ja viiendat omadust väljendada nii:

Kaht samapidist võrratust võib liikmeti liita; kaht vastupidist võrratust võib liikmeti lahutada, jättes tulemuses selle võrratuse märgi, millest lahutati teine võrratus.

6) Kui $a > b$ ja m on positiivne arv, siis $am > bm$ ja $a : m > b : m$.

Kui võrratuse mõlemad pooled korrutame või jagame ühe ja sama positiivse arvuga, siis võrratuse märk ei muutu.

Näiteks korrutades võrratuse $-5 > -7$ pooled $+4$-ga, saame: $-20 > -28$.

7) Kui $a > b$ ja m on negatiivne arv, siis $am < bm$ ja $a : m < b : m$.

Kui võrratuse mõlemad pooled korrutame või jagame ühe ja sama negatiivse arvuga, siis võrratuse märk muutub vastupidiseks.

Näiteks korrutades võrratuse $-5 > -7$ pooled -1-ga, saame: $5 < 7$.

65. Võrratuste suhtes (nagu võrdustegi suhtes), mis sisaldavad tähti, on võimalikud kahte liiki küsimused:

1) lahendada tundmatuid sisaldav võrratus, s. o. leida, missuguste tundmatute väärtuste puhul on antud võrratus kehtiv;

2) tõestada võrratuse samane kehtivus, s. o. näidata, et ta on kehtiv tähtede mistahes väärtuste puhul või vähemalt väärtuste puhul, mis on piiriteldud etteantud tingimustega.

Mõlema küsimuse lahendamine põhineb võrratuste mõningail omadustel, mis on sarnased võrrandite lahendamise aluseks olevate omadustega.

66. Samaväärsed võrratused. Võrratusi, mis sisaldavad ühtesid ja samu tundmatuid, nimetatakse s a m a v ä ä r s e i k s, kui neid rahuldavad nende tundmatute ühed ja samad väärtused; nii on kaks võrratust $3x + 2 < x + 10$ ja $3x < x + 8$ samaväärsed, sest mõlemaid rahuldavad x väärtused, mis on väiksemad kui 4, ja ainult need väärtused.

Võrratuste samaväärsuse kohta tõestame teoreeme, mis on üsna sarnased taoliste teoreemidega võrrandite samaväärsuse kohta.

67. ***Teoreem 1.*** *Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlema poolega liidame (või lahutame) ühe ja sama arvu, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.*

Tähistame tundmatuid sisaldava võrratuse vasaku poole tähega A ja parema poole tähega B; m olgu mistahes arv. Tõestame, et kaks võrratust

$$A > B \qquad (1)$$

ja

$$A + m > B + m \qquad (2)$$

on samaväärsed. Oletame, et esimest võrratust rahuldavad tähtede mõned kindlad väärtused. See tähendab, et nende väärtuste puhul on A numbriline väärtus suurem kui B numbriline väärtus; kuid siis on § 64 kolmanda omaduse põhjal tähtede samade väärtuste korral ka summa $A + m$ numbriline väärtus suurem kui summa $B + m$ numbriline väärtus, sest kui võrratuse mõlema poolega liidame ühe ja sama arvu, siis võrratuse märk ei muutu. Tähendab, võrratuse (1) iga lahend on ka võrratuse (2) lahendiks.

Vastupidi, kui tähtede teatavate väärtuste korral summa $A + m$ numbriline väärtus on suurem kui summa $B + m$ numbriline väärtus, siis tähtede samade väärtuste korral on ka A numbriline väärtus suurem kui B numbriline väärtus (võrratus jääb kehtivaks, kui võrratuse mõlema poolega liidame $-m$); järelikult kõik võrratuse (2) lahendid rahuldavad ka võrratust (1); tähendab, need võrratused on samaväärsed.

Kuna lahutamine on samaväärne vastupidise arvu liitmisega, siis järeldub sellest, et võrratuse mõlemast poolest võib lahutada ühe ja sama arvu.

Järeldus. **Võrratuse mistahes liiget võib ühelt poolelt viia teisele poolele vastupidise märgiga.**

Kui meil on näiteks võrratus $A > B + C$, siis liites kummagi poolega arvu $-C$, saame $A - C > B$.

68. ***Teoreem 2.*** *Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlemad pooled korrutame (või jagame) ühe ja sama posttiivse arvuga, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.*

Tõestame, et kaks võrratust

$$A > B \tag{1}$$

ja

$$Am > Bm \tag{2}$$

on samaväärsed, kui ainult m on positiivne arv.

Olgu tundmatute teatavate väärtuste puhul A numbriline väärtus suurem kui B numbriline väärtus; siis on tundmatute samade väärtuste puhul ka korrutise Am numbriline väärtus suurem kui korrutise Bm numbriline väärtus, sest võrratuse mõlemate poolte korrutamisel positiivse arvuga võrratuse märk ei muutu. Tähendab, kõik võrratuse (1) lahendid rahuldavad ka võrratust (2).

Vastupidi, kui tähtede teatavate väärtuste puhul Am numbriline väärtus on suurem kui Bm numbriline väärtus, siis on tähtede samade väärtuste puhul ka A numbriline väärtus suurem kui B numbriline väärtus, sest võrratuse mõlema poole jagamisel positiivse arvuga võrratuse märk ei muutu.

M ä r k u s. Positiivset arvu, millega meil tõestuse kohaselt on õigus korrutada või jagada võrratuse mõlemaid pooli (muutmata võrratuse märki), võib anda ka tähtavaldise kujul, kusjuures see avaldis võib sisaldada ka tundmatuid, mis esinevad võrratuses. Kuid säärasel korral on vaja eraldi uurida, kas selle avaldise väärtused, millega me korrutame või jagame võrratuse mõlemaid pooli, on positiivsed temas sisalduvate tähtede kõigi väärtuste puhul.

Näiteks korrutame võrratuse $A > B$ mõlemad pooled avaldisega $(x-5)^2$;

$$A > B; \tag{1}$$

$$A(x-5)^2 > B(x-5)^2. \tag{2}$$

Korrutaja $(x-5)^2$ jääb positiivseks arvuks x-i kõigi väärtuste puhul peale ühe: $x=5$. Tähendab, võrratused (1) ja (2) on samaväärsed sel juhul, kui väärtus $x=5$ ei rahulda esimest võrratust; vastupidisel juhul võrratusel (1), mida rahuldavad võrratuse (2) kõik lahendid, on veel lahend $x=5$ [see lahend ei rahulda võrratust (2), sest võrratus (2) muutub võrduseks].

Järeldus. **Kui võrratuse mõlemad pooled sisaldavad ühist positiivset tegurit, siis võib sellega jagada võrratuse mõlemaid pooli.**

Näiteks võrratuse $(x-5)^2(x-1) > (x-5)^2(3-x)$ mõlemal poolel on ühine tegur $(x-5)^2$. Juhul, kui $x=5$, muutub see tegur nulliks, kuid x-i kõigi muude väärtuste puhul on see positiivne arv. Lahend $x=5$ ei rahulda antud võrratust. Soovides jõuda otsusele, kas x-i muud väärtused rahuldavad võrratust, võime jagada võrratuse mõlemad pooled avaldisega $(x-5)^2$ kui positiivse arvuga; pärast jagamist saame $x-1>3-x$. Kõik x väärtused, mis rahuldavad seda võrratust, välja arvatud väärtus $x=5$, rahuldavad ka antud võrratust.

69. ***Teoreem 3.*** *Kui tundmatuid sisaldava võrratuse mõlemad pooled korrutame või jagame ühe ja sama negatiivse arvuga ning muudame seejuures võrratuse märgi vastupidiseks, siis saame uue võrratuse, mis on samaväärne esimesega.*

See teoreem tõestatakse samuti nagu teoreem 2; on vaid tarvis arvesse võtta, et võrratuse mõlemate poolte korrutamisel või jagamisel negatiivse arvuga võrratuse märk muutub vastupidiseks.

Selle teoreemi kohta võib teha samasuguse märkuse, nagu seda tegime teoreemi 2 kohta.

Järeldused. a) Muutes võrratuse kõigi liikmete märgid vastupidisteks (s. o. korrutades tema mõlemaid pooli arvuga -1), peame vastupidiseks muutma ka võrratuse märgi.

b) Võrratuse mõlemaid pooli ei tohi korrutada tähelise kordajaga, mille märk on teadmata.

c) Murruliste liikmetega võrratuse võib vabastada murdudest. Võtame näiteks võrratuse:

$$\frac{A}{B} > \frac{C}{D}. \qquad (1)$$

Viime kõik liikmed vasakule poolele ja toome murrud ühisele nimetajale:

$$\frac{AD - BC}{BD} > 0. \qquad (2)$$

Kui BD on positiivne arv, siis võime ta ära jätta võrratuse märki muutmata, sest BD ärajätmine on sama, mis võrratuse mõlemate poolte korrutamine selle arvuga. Jätnud BD ära, saame võrratuse, mis ei sisalda murde:

$$AD - BC > 0.$$

Kui BD on negatiivne arv, siis võime ta ära jätta, muutes seejuures võrratuse märgi vastupidiseks; siis saame võrratuse, mis ei sisalda murdavaldisi:

$$AD - BC < 0.$$

Kui BD märk on teadmata (mis esineb üldiselt siis, kui B ja D sisaldavad tundmatuid), siis ei tohi me võrratuse mõlemaid pooli BD-ga korrutada. Sel juhul arutleme nii: et murd oleks positiivne, selleks on tarvilik ja piisav, et murru lugeja ja nimetaja oleksid üheaegselt kas positiivsed või negatiivsed. Järelikult võrratust (2) rahuldavad tähtede sellised väärtused, millede puhul

$$\begin{cases} AD - BC > 0 \\ BD > 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} AD - BC < 0 \\ BD < 0 \end{cases}$$

Seega siis taandub võrratuse (1) lahendamine kahest murruvabast võrratusest koosneva süsteemi lahendamiseks.

70. Võrratuse samase kehtivuse tõestus. Antud võrratuse kehtivuse tuvastamiseks ei saa püstitada mingisuguseid kindlaid reegleid. Märgime ainult, et üks võtetest seisab selles, et antud võrratus teisendatakse võrratuseks, mille kehtivus on ilmne, ja siis, lähtudes sellest ilmselt kehtivast võrratusest, jõutakse loogilise arutelu kaudu kuni esitatud võrratuseni. Toome näite:

Tõestada, et *kui arvude x ja y summa on jääv arv, siis nende korrutis omandab suurima väärtuse juhul, kui* $x = y$.

Olgu $x + y = a$, kus a on jääv arv. Kui $x = y$, siis on kumbki neist arvudest $\frac{a}{2}$, ja xy on siis võrdne arvuga $\frac{a^2}{4}$.

On vaja tõestada, et kui $x \neq y$, siis $xy < \frac{a^2}{4}$.

Teisendame seda tõestamist vajavat võrratust nii:

$$xy < \frac{a^2}{4};\ 4xy < a^2;\ 4xy < (x+y)^2;\ 4xy < x^2 + 2xy + y^2;$$
$$0 < x^2 - 2xy + y^2;\ 0 < (x-y)^2.$$

Viimane võrratus on õige, kui x ja y ei ole võrdsed. Siirdudes järk-järgult viimaselt võrratuselt eelmiste võrratuste juurde märkame, et kõik nad on samaväärsed. Tähendab, ka esimene võrratus on õige.

Kui näiteks $x + y = 10$, siis korrutise suurim väärtus on $5 \cdot 5 = 25$.

71. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse üldkuju pärast sulgude avamist ja vabastamist murrulistest liikmetest on järgmine:

$$ax + b > a_1x + b_1.$$

Kandes tundmatud liikmed vasakule poolele ja tuntud liikmed paremale poolele, saame:

$$(a - a_1)x > b_1 - b.$$

Kui $a - a_1 > 0$, siis jagades võrratuse mõlemad pooled avaldisega $a - a_1$, leiame:

$$x > \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

Kui aga $a - a_1 < 0$, siis saame:

$$x < \frac{b_1 - b}{a - a_1}.$$

Seega üks esimese astme võrratus annab tundmatu ühe tõkke, s. o. arvu, mis tõkestab tundmatu väärtust ülaltpoolt ($x < m$) või altpoolt ($x > m$).

Näide. Lahendada võrratus $2x(2x - 5) - 27 < (2x + 1)^2$.

Avame sulud:

$$4x^2 - 10x - 27 < 4x^2 + 4x + 1.$$

Kanname liikmed üle ja koondame sarnased liikmed:

$$-14x < 28.$$

Jagame võrratuse mõlemad pooled arvuga -14:

$$x > -2.$$

72. Kaks ühe tundmatuga esimese astme võrratust. Vaatleme kahe võrratuse süsteemi:

$$\begin{cases} ax + b > a'x + b' \\ cx + b > c'x + d' \end{cases}$$

Kumbki võrratus annab tundmatu ühe tõkke.

Seejuures võib esineda kolm juhtu:

1) Samapidised tõkked. Sel juhul on küllalt, kui võtta neist üks. Kui näiteks $x > 7$ ja $x > 12$, siis on küllalt, kui võtta ainult $x > 12$, sellepärast, et kui $x > 12$, siis on ammugi $x > 7$; või kui näiteks $x < 5$ ja $x < 8$, siis on küllalt, kui võtta $x < 5$, sest siis on ammugi $x < 8$.

2) Vastupidised tõkked, näiteks $x > 10$ ja $x < 15$.

Sel juhul võib tundmatu jaoks valida ainult selliseid väärtusi, mis asetsevad leitud tõkete vahel.

3) Vasturääkivad tõkked, näiteks $x < 5$ ja $x > 7$. Sel juhul süsteemil lahendeid pole.

Näide. Lahendada kaks võrratust: $0{,}3x + 5 < 0{,}5x$ ja $5x < 60 + 2x$. Esimene võrratus annab $x > 25$, teine $x < 20$. Tähendab, kui need võrratused on tuletatud ühe ja sama ülesande tingimustest, siis sellel ülesandel lahendust pole.

Harjutused:

Lahendada järgmised võrratused:

107. $x-7<2x+5$; $9x-8+3(x-2)<2(x+3)$.

108. $\frac{2x}{5}+4>x-\frac{1}{2}$; $x+2b<16-3(x-2b)$.

109. $\frac{x}{a}+\frac{x}{b}>\frac{a+b}{ab}$; $10-\frac{5x}{2}>0$.

110. Kui $a>b$ ja $c=d$, kas on siis alati $ac>bd$?

111. Kui $a>b$, kas on siis alati $a^m>b^m$?

112. Mis võib öelda arvude a ja b kohta, kui on teada, et $ab>0$? kui $ab<0$?

113. Millisel tingimusel suureneb murd $\frac{a}{b}$, kui lugeja ja nimetajaga liita üks ja sama positiivne arv (a ja b on positiivsed arvud)?

Viies jagu.

Progressioonid.

I. Aritmeetiline progressioon.

73. Ülesanne. Töölisele tehti ülesandeks kaevata kaev ja lepiti kokku maksta talle sügavuse esimese meetri eest 3 rubla, teise eest 5 rubla jne., suurendades töötasu iga järgneva meetri eest 2 rubla võrra. Kui palju maksti töölisele, kui tema poolt kaevatud kaevu sügavus on 10 m?

Ülesande lahendamiseks on vaja leida järgmiste arvude summa:

$$3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21.$$

Selle summa võime leida lihtsamalt kui hariliku liitmise teel. Märkides summa tähega s kirjutame kaks järgmist rida:

$$s = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21.$$
$$s = 21 + 19 + 17 + 15 + 13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3.$$

Teise summa kirjutasime, asetades esimese rea liidetavad vastupidisesse järjekorda, mistõttu summa muidugi ei muutunud. Liidame nüüd kõik arvud, mis asetsevad teineteise all.

$$2s = 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24,$$

s. o.

$$2s = 24 \cdot 10 = 240$$

ja järelikult $s = \frac{240}{2} = 120.$

Niisiis kogu töö eest tuli maksta 120 rubla.

Selles ülesandes oli meil tegemist järk-järgult, ühe ja sama arvu võrra kasvavate arvude jadaga. Sääraseid jadasid nimetatakse aritmeetilisteks progressioonideks.

74. Definitsioon. *Aritmeetiliseks progressiooniks nimetatakse seesugust arvude jada, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama, antud jada jaoks jääva (positiivse või negatiivse) arvu summaga.*

Nii on arvude jadad: 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 46 ja 6, 4, 2, 0, -2, -4 aritmeetilised progressioonid, sest esimeses jadas on iga arv, alates teisest, võrdne eelneva arvu ja positiivse arvu 4 summaga, teises jadas aga eelneva arvu ja negatiivse arvu -2 summaga.

Arve, mis moodustavad progressiooni, nimetatakse progressiooni liikmeiks. Positiivset või negatiivset arvu, mis on vaja liita eelneva liikmega, et saada järgnevat liiget, nimetatakse progressiooni vaheks.

Progressiooni nimetatakse kasvavaks või kahanevaks olenevalt sellest, kas ta liikmed jada algusest kaugenedes suurenevad või vähenevad. Kasvava progressiooni vahe on positiivne arv, kahaneva progressiooni vahe aga negatiivne arv.

Selle tähistamiseks, et arvude jada kujutab enesest aritmeetilist progressiooni, asetatakse mõnikord jada ette märk $\div$.

Harilikult on kombeks tähistada esimest liiget tähega a, viimast liiget tähega l, vahet tähega d, kõikide liikmete arvu tähega n, nende summat tähega s [1].

[1] Mõnedes raamatutes tähistatakse progressiooni liikmeid ka nii: a_1, a_2, a_3, ..., a_n. Progressiooni vahet tähistatakse mõnikord tähega r.

75. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem.

Olgu antud progressioon $\div 10, 14, 18, \ldots$ (vahe on 4). Siis 2. liige $= 10 + 4 = 14$;

3. „ $= 10 + 4 + 4 = 18$;
4. „ $= 10 + 4 + 4 + 4 = 22$, jne.

Tähendab:

10. liige $= 10 + 4 \cdot 9 = 46$;
20. „ $= 10 + 4 \cdot 19 = 86$, jne.

Samuti, kui on antud progressioon $\div 6, 4, 2 \ldots$ (vahe on -2), siis

2. liige $= 6 + (-2) = 4$;
3. „ $= 6 + (-2) + (-2) =$
$= 6 + (-2) \cdot 2 = 2$, jne.

Näiteks:

10. liige $= 6 + (-2) \cdot 9 = -12$.

Üldiselt, kui on antud progressioon $\div a, b, c, \ldots$ (vahe on d), siis

2. liige $= a + d$;
3. „ $= a + d + d = a + 2d$;
4. „ $= a + 2d + d = a + 3d$, jne.

Tähendab, 10. liige on $a + 9d$; 15. liige on $a + 14d$, üldiselt m-es liige on $a + d(m - 1)$. Seega siis:

Aritmeetilise progressiooni iga liige võrdub esimese liikmega pluss progressiooni vahe ja sellele liikmele eelnevate liikmete arvu korrutis.

Viimane liige võrdub esimese liikmega pluss vahe ja liikmete ühe võrra vähendatud arvu korrutis, s. o.

$$l = a + d(n - 1). \qquad (1)$$

Näited.

1) Leida progressiooni $\div 60, 75, 90, \ldots$ 10. liige.

Et selle progressiooni vahe on 15, siis 10. liige on

$$60 + 15 \cdot 9 = 195.$$

2) Leida progressiooni $\div 40, 37, 34, \ldots$ 12. liige.
Et vahe on -3, siis 12. liige on

$$40 + (-3) \cdot 11 = 40 - 33 = 7.$$

3) Kui suur on n-es arv järjestikuste paaritute arvude jadas 1, 3, 5, ...?
See arv on

$$1 + 2(n - 1) = 1 + 2n - 2 = 2n - 1.$$

Järeldus. Aritmeetilist progressiooni, mille esimene liige on a, vahe on d ja liikmete arv on n, võib esitada järgmiselt:

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ a + 3d, \ldots,\ a + d\,(n - 1).$$

76. Aritmeetilise progressiooni liikmete summa valem. Algul veendume aritmeetilise progressiooni järgmises omaduses:

Aritmeetilise progressiooni algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisva kahe liikme summa võrdub äärmiste liikmete summaga.

Näiteks progressioonis $\div 3, 7, 11, 15, 19, 23$ leiame:

$$3 + 23 = 26;\ 7 + 19 = 26;\ 11 + 15 = 26.$$

On arusaadav, miks see nii on: nende summade esimesed liidetavad (s. o. 3, 7, 11) järjest suurenevad 4 võrra, teised liidetavad aga järjest vähenevad 4 võrra; seepärast jääb iga liikmepaari summa üheks ja samaks.

Võtame veel näite kahanevast progressioonist $\div 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4$. Selles progressioonis on

$$8 + (-4) = 4,\ 6 + (-2) = 4,\ 4 + 0 = 4.$$

Liige 2, mis seisab võrdsel kaugusel algusest ja lõpust, tuleb liita iseendaga: $2 + 2 = 4$. Ka siin on seletus sama: liidetavad 8, 6, 4, 2 järjest vähenevad 2 võrra, aga liidetavad

— 4, — 2, 0 ja 2 järjest suurenevad 2 võrra. Seepärast jääb iga liikmepaari summa muutumatuks.

Nüüd tuletame mistahes aritmeetilise progressiooni liikmete summa valemi. Selleks kasutame sama viisi, mille abil leidsime aritmeetilise progressiooni liikmete summa § 73 ülesandes, nimelt liidame liikmeti kaks progressiooni:

$$s = a + b + c + \ldots + i + k + l;$$
$$s = l + k + i + \ldots + c + b + a.$$

$$2s = (a + l) + (b + k) + (c + i) + \ldots + (i + c) + (k + b) + (l + a).$$

Kuid

$$a + l = b + k = c + i = \ldots = l + a;$$

järelikult

$$2s = (a + l)n, \text{ kust } s = \frac{(a + l)n}{2}. \qquad (2)$$

Aritmeetilise progressiooni kõigi liikmete summa võrdub liikmete arvu ja äärmiste liikmete summa poole korrutisega.

Nii leiame ülesandes § 73 summa s jaoks selle valemi järgi sama arvu, mille varem leidsime teisel teel:

$$s = [(3 + 21) \cdot 10] : 2 = 120.$$

Näide 1. Leida loomulike arvude 1 kuni n summa (viimane arv kaasa arvatud).

Jada 1, 2, 3, ..., n on aritmeetiline progressioon, mille esimene liige on 1, vahe on 1, liikmete arv on n ja viimane liige on samuti n; seepärast

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

Nii:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{6(6 + 1)}{2} = 21.$$

Näide 2. Leida esimese n paaritu arvu summa.

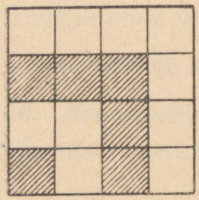
Nagu eelmises paragrahvis nägime, n-es paaritu arv on $2n-1$; seepärast

$$s=\frac{[1+(2n-1)]\cdot n}{2}=n^2.$$

Nii on:

$$1+3=4=2^2;\quad 1+3+5=9=3^2;$$
$$1+3+5+7=16=4^2,\text{ jne.}$$

Seda paaritute arvude summa omadust kujutab näitlikult joonis 25, mis on koostatud järgmiselt: ruudule (all vasakul) on lisatud kolm samasugust ruutu (1 üles, 1 kõrvale ja 1 ülemisse paremasse nurka); nendele ruutudele on lisatud veel 5 ruutu (kaks üles, kaks kõrvale, 1 ülemisse paremasse nurka). Neile on jällegi lisatud 7 ruutu, siis 9 ruutu jne. Siit on ilmne, et



Joon. 25.

$$1+3=2^2,\quad 1+3+5=3^2,$$
$$1+3+5+7=4^2,\text{ jne.}$$

Näide 3. Leida progressiooni $-3,\ 2\frac{1}{2},\ 2,\ldots$ kümne liikme summa.

Siin $a=3$, $d=2\frac{1}{2}-3=-\frac{1}{2}$; seepärast on progressiooni 10. liige $3-\frac{1}{2}\cdot 9=-1\frac{1}{2}$ ja otsitav summa on:

$$\frac{[3+(-1\frac{1}{2})]\cdot 10}{2}=1\tfrac{1}{2}\cdot 5=7\tfrac{1}{2}.$$

Kontroll:

$$3+2\tfrac{1}{2}+2+1\tfrac{1}{2}+1+\tfrac{1}{2}+0-\tfrac{1}{2}-1-1\tfrac{1}{2}=7\tfrac{1}{2}.$$

77. Märkus. Et viie arvu a, l, d, n ja s jaoks on meil kaks võrrandit:

$$1)\ \ l=a+d(n-1)\ \text{ ja }\ 2)\ \ s=\frac{(a+l)n}{2},$$

siis võime antud kolme arvu järgi leida ülejäänud kaks. Lahendame näitena järgmise ülesande:

Leida progressiooni liikmete arv, kui progressiooni esimene liige on 7, vahe on -2 ja kõigi liikmete summa on 12.

Selles ülesandes on antud: $a=7$, $d=-2$ ja $s=12$. Tundmatud on l ja n. Asetades valemeisse (1) ja (2) antud arvud, leiame:

$$l=7-2(n-1)=9-2n; \quad 12=\frac{(7+l)n}{2},$$

kust

$$12=\frac{(7+9-2n)n}{2}=(8-n)n;$$

$$n^2-8n+12=0; \quad n=4\pm\sqrt{16-12}=4\pm 2;$$

$$n_1=6; \qquad n_2=2.$$

Saadakse kaks vastust: liikmete arv on kas 6 või 2. Ja tõepoolest, kahel progressioonil 7, 5, 3, 1, -1, -3 ja 7, 5 on üks ja sama summa 12.

78. Loomulikkude arvude jada liikmete ruutude summa valem. Tuletame valemi, mis võimaldab arvutada loomulikkude arvude jada esimese n liikme ruutude summat. Valemi tuletamiseks vaatleme järgmisi samasusi:

$$2^3=(1+1)^3=1^3+3\cdot 1^2\cdot 1+3\cdot 1\cdot 1^2+1^3;$$
$$3^3=(2+1)^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot 1+3\cdot 2\cdot 1^2+1^3;$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2\cdot 1+3\cdot n\cdot 1^2+1^3.$$

Liites need samasused ja koondades sarnased liikmed saadud samasuse paremal ja vasakul poolel, saame:

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)+3(1+2+$$
$$+3+\ldots+n)+n.$$

Kuid

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

järelikult

$$3(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}$$

Lihtsustame selle võrduse parema poole:

$$(n+1)^3-(n+1)-\frac{3n(n+1)}{2}=$$

$$=(n+1)\left[(n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right]=$$

$$=\tfrac{1}{2}(n+1)(2n^2+n)=\tfrac{1}{2}n(n+1)(2n+1).$$

Seega

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Harjutused.

114. Leida aritmeetilise progressiooni 3, 7,... 30. liige.

115. Leida 15. liige aritmeetilises progressioonis, milles esimene liige on 130 ja vahe on -3.

116. Mitu liiget peab olema progressioonil $\div 4$, 8, ..., et liikmete summa oleks 112?

117. Leida 103 liikme summa progressioonis 103, 101, ...

118. Aritmeetilise progressiooni 3. liige on 7 ja 9. liige on 18. Leida 1. ja 6. liige.

119. Näidata, et kui a, b ja c on aritmeetilise progressiooni kolm üksteisele järgnevat liiget, siis b on a ja c aritmeetiline keskmine.

120. Aritmeetilise progressiooni 2. liige on $+1$ ja 5. liige on $+7$. Leida aritmeetilise progressiooni 1000 liikme summa.

121. Leida aritmeetilise progressiooni liikmete arv, kui vahe on -12, viimane liige on 15 ja kõigi liikmete summa on 456.

122. Mille võrra on kõigi täisarvude summa 51-st kuni 100-ni (viimane kaasa arvatud) suurem kui kõigi täisarvude summa 1-st kuni 50-ni (viimane kaasa arvatud)?

123. Mitu lööki lööb ööpäeva jooksul kell, mis lööb täistunde ja pooltunde?

124. Kas täisnurkse kolmnurga küljed võivad moodustada aritmeetilise progressiooni?

125. Keha, langedes teatavast kõrgusest, läbib esimese sekundi jooksul 4,9 m, igal järgmisel sekundil aga 9,8 m rohkem. Milliselt kõrguselt langes keha, kui langemine kestis 10 sekundit?

126. Aritmeetilise progressiooni kuue liikme summa on 17. Leida see progressioon, teades, et 4. liige on 3.

127. Võrrandeist $l = a + d(n-1)$ ja $s = \frac{(a+l)n}{2}$ kõrvaldada l, teiste sõnadega: avaldada s sõltuvana ainult a-st, b-st ja n-st.

128. Leida kolm seesugust arvu, mis moodustaksid aritmeetilise progressiooni vahega d ja millede summa võrduks nende korrutisega.

II. Geomeetriline progressioon.

79. Ülesanne. Muistendi järgi tegi India prints Siram malemängu leiutajale ettepaneku küsida temalt tasu, millist ta tahab. See palus, et temale antaks malelaua esimese ruudu eest 1 nisutera, teise eest 2 tera, kolmanda eest 4 tera jne., suurendades terade arvu kaks korda iga järgneva ruudu eest. Prints oli nõus. Kui aga arvutati nisu hulk, mis tuli välja anda malelaua 64 ruudu eest, siis ilmnes, et seesugust tasu pole võimalik välja anda, kuna selleks ei jätku nisu. Kui palju teri oleks tulnud leiutajale anda?

Terade hulk, mis oleks tulnud 64 ruudu eest välja anda, on võrdne järgmise jada summaga:

$$s = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Me võime leida selle summa tema üksikuid liidetavaid arvutamata. Selleks korrutame võrduse mõlemad pooled 2-ga:

$$2s = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{63} + 2^{64}.$$

Lahutame nüüd sellest võrdusest eelmise võrduse; siis saame vasakul poolel s, paremal poolel aga $2^{64} - 1$ (arvud $2, 2^2, 2^3, \ldots 2^{63}$ hävivad):

$$s = 2^{64} - 1.$$

Tähendab, tuleb arvutada arvu 2 64. aste, mida võib teha kas järjestikusel korrutamisel kahega valemi järgi:

$$2^{64} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots \text{ (64 tegurit)}$$

või valemi järgi:

$$2^{64} = [(2^{16})^2] = (65\,536^2)^2.$$

Nii leiame lõpuks, et terade arv on:

$$s = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Võib arvutada, et kui selline arv teri külvata ühtlaselt kogu maakera maismaale, siis tekiks 9 mm paksune nisukiht.

Selles ülesandes oli meil tegemist arvude jadaga, milles iga arv, alates teisest, võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama arvu korrutisega. Seesuguseid arvude jadasid nimetatakse geomeetrilisteks progressioonideks.

80. Definitsioon. *Geomeetriliseks progressiooniks nimetatakse seesugust arvude jada, milles iga arv võrdub eelneva arvu ning ühe ja sama, antud jada jaoks jääva arvu korrutisega.* Seega järgmised kolm jada:

2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...;
8, — 16, 32, — 64, 128, — 256, 512, ...;

$$20,\ 10,\ 5,\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{8},\ \frac{5}{16},\ \frac{5}{32},\ \ldots$$

on geomeetrilised progressioonid, sest nendes jadades iga arv, alates teisest, saadakse eelnevast arvust, korrutades seda esimeses jadas arvuga 2, teises jadas arvuga — 2 ja kolmandas arvuga $\frac{1}{2}$.

Selle tähistamiseks, et antud jada on geomeetriline progressioon, kirjutatakse mõnikord jada ette märk $\div$.

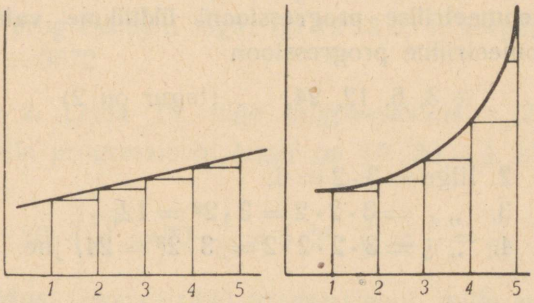
Nagu aritmeetilises progressioonis, nii nimetatakse ka geomeetrilist progressiooni moodustavaid arve tema liikmeiks; arvu, millega tuleb eelnevat liiget korrutada, et saada järgnevat, nimetatakse progressiooni teguriks.

Progressiooni nimetatakse kasvavaks või kahanevaks olenevalt sellest, kas progressiooni liikmed jada algusest kaugenedes absoluutväärtuselt suurenevad või vähenevad; nii on kolmest eespool toodud progressioonist esimene ja teine kasvavad, kolmas aga kahanev progressioon.

Kasvavas progressioonis on teguri absoluutväärtus suurem kui 1, kahanevas progressioonis on see aga väiksem kui 1.

Harilikult tähistatakse progressiooni tegurit tähega q ning liikmeid, nende arvu ja summat samuti nagu aritmeetilises progressiooniski, s. o. a, b, c, ..., l (viimane liige), n (liikmete arv) ja s (summa).

81. Geomeetrilise progressiooni võrdlemine aritmeetilise progressiooniga. Aritmeetilise progressiooni kahe kõrvuti



Joon. 26.

oleva liikme vahe jääb üheks ja samaks, mistõttu tema liikmed kasvavad (või kahanevad) ühtlaselt (joon. 26, vasakpoolne). Vaatleme, milline on geomeetrilise progressiooni a, b, c, ... (tegur on q) kahe kõrvuti oleva liikme vahe.

Progressiooni definitsioonist järeldub, et $b = aq$, $c = bq$, $d = cq$ jne., järelikult

$$b - a = aq - a = a(q - 1);$$
$$c - b = bq - b = b(q - 1), \text{ jne.}$$

Kui progressioon on kasvav ja tema liikmed on positiivsed, siis $a < b < c < \ldots$ jne.; seepärast ka

$$a(q - 1) < b(q - 1) < c(q - 1) < \ldots,$$

s. o.

$$b - a < c - b < d - c < \ldots \text{ jne.}$$

Tähendab, positiivsete liikmetega geomeetrilises progressioonis *kahe kõrvuti oleva liikme vahe suureneb sedamööda, kuidas suureneb nende kaugus jada algusest*; seetõttu sellise progressiooni liikmed kasvavad seda kiiremini, mida kaugemal nad asetsevad jada algusest, mis on näitlikult kujutatud joonisel 26 (parempoolne).

Näiteks:

$$\div\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12,\ \ldots$$
$$\div\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \ldots$$

82. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem. Olgu antud geomeetriline progressioon

$$\div\ 3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots \text{ (tegur on 2)}.$$

Siis

2. liige $= 3 \cdot 2 = 6$;
3. „ $= 3 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 = 12$;
4. „ $= 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 3 \cdot 2^3 = 24$, jne.

Näiteks 10. liige $= 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536$.

Samuti, kui meil on progressioon

$$\div\ 10,\ 5,\ 2\tfrac{1}{2},\ 1\tfrac{1}{4},\ \ldots \text{ (tegur on } \tfrac{1}{2}),$$

siis

2. liige $= 10 \cdot \frac{1}{2} = 5$;
3. „ $= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot (\frac{1}{2})^2 = \frac{10}{4} = 2\frac{1}{2}$;
4. „ $= 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 10 \cdot (\frac{1}{2})^3 = \frac{10}{8} = 1\frac{1}{4}$, jne.

Üldiselt, kui meil on progressioon

$$a,\ b,\ c,\ \ldots \text{ (tegur on } q),$$

siis on temas

2. liige $= aq = aq^1$;
3. „ $= aq \cdot q = aq^2$;
4. „ $= aq^2 \cdot q = aq^3$, jne.

Seega 10. liige $= aq^9$, üldiselt m-es liige $= aq^{m-1}$. Tähendab:

Geomeetrilise progressiooni iga liige, alates teisest, võrdub esimese liikme ja progressiooni teguri astme korrutisega, milles astendajaks on kõigi eelnevate liikmete arv.

Viimane liige l, millele eelneb $n-1$ liiget, avaldatakse valemiga:

$$l = aq^{n-1}.$$

Näide 1. Leida 6. liige progressioonis ∴ 3, 12, ...

Selle progressiooni tegur on $12 : 3 = 4$; seepärast 6. liige on $3 \cdot 4^5 = 3072$.

Näide 2. Leida 10. liige progressioonis ∴ 20, 10, ...

Et selle progressiooni tegur on $10 : 20 = \frac{1}{2}$, siis 10. liige on

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 20 \cdot \frac{1}{2^9} = 5 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2^9} = \frac{5}{2^7} = \frac{5}{128}.$$

Järeldus. Geomeetrilist progressiooni, mille esimene liige on a, tegur on q ja liikmete arv on n, võib kirjutada nii:

$$\therefore\ a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots,\ aq^{n-1}.$$

83. Geomeetrilise progressiooni liikmete summa valem. Kasutame seda võtet, mille abil leidsime varem (§ 79) summa $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{63}$. Korrutame võrduse

$$s = a + b + c + \ldots + k + l \qquad (1)$$

mõlemad pooled teguriga q, siis saame:

$$sq = aq + bq + cq + \ldots + kq + lq.$$

Kuid $aq = b,\ bq = c,\ cq = d,\ \ldots,\ kq = l,$

järelikult $$sq = b + c + d + \ldots + l + lq. \qquad (2)$$

Lahutades liikmeti võrdusest (2) võrduse (1), leiame:

$$sq - s = lq - a, \text{ s. o. } (q-1)s = lq - a,$$

kust

$$s = \frac{lq - a}{q - 1}.$$

Geomeetrilise progressiooni liikmete summa võrdub murruga, mille lugejaks on viimase liikme ja progressiooni teguri korrutis miinus esimene liige, nimetajaks aga progressiooni tegur miinus 1.

Märkused. 1. Et kahaneva progressiooni puhul $-1 < q < 1$, siis on parem anda sellise progressiooni summa valemile teistsugune kuju, korrutades murru lugejat ja nimetajat arvuga -1:

$$s = \frac{a - lq}{1 - q}.$$

2. Kui tähe l asendame tema avaldisega aq^{n-1}, siis summa valem saab järgmise kuju:

$$s = \frac{aq^n - a}{q - 1} = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} \text{ ehk } s = \frac{a - aq^n}{1 - q} = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}.$$

Näide. Leida progressiooni kaheksa liikme summa, kui $a = 1$ ja $q = \frac{1}{3}$. Siis

$$l = 1 \cdot (\tfrac{1}{3})^7 = (\tfrac{1}{3})^7$$

ja

$$s = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^8}{\frac{2}{3}} = \frac{3 - 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}{2} = \frac{3280}{2187}.$$

84. Geomeetrilise progressiooni näide. Leida geomeetrilise progressiooni esimene liige a ja viimane liige l, kui $q = 3$, $n = 5$ ja $s = 242$.

Algul leiame l valemi järgi $l = aq^{n-1} = a \cdot 3^4$ ja asetame siis selle avaldise ning antud arvud summa valemisse:

$$242 = \frac{a \cdot 3^4 \cdot 3 - a}{3 - 1} = \frac{a(3^5 - 1)}{2} = 121a,$$

kust leiame, et

$$a = 242 : 121 = 2.$$

Nüüd saame, et

$$l = 2 \cdot 3^4 = 162.$$

Kontroll: $2 + 6 + 18 + 54 + 162 = 242$.

Harjutused.

129. Leida esimene liige geomeetrilises progressioonis, mille tegur on 5 ja 7. liige on 62 500.

130. Leida geomeetrilise progressiooni 5, $\frac{5}{3}$, ... esimese kaheksa liikme summa.

131. Leida neli arvu, teades, et nad moodustavad geomeetrilise progressiooni, et nende summa on 360 ja et viimane arv on teisest 9 korda suurem.

132. Leida geomeetrilise progressiooni 1, $\sqrt{2}$, ... kaheteistkümne liikme summa.

133. Moodustada neljast arvust selline geomeetriline progressioon, mille esimese ja kolmanda liikme summa oleks 5, teise ja neljanda liikme summa oleks 10.

134. On tähele pandud, et ühe linna elanikkond suureneb igal aastal ühes ja samas vahekorras. Kui suur on see vahekord, kui elanikkond suurenes kolme aasta jooksul 10 000 inimeselt 14 641 inimesele?

135. Näidata, et jada, mis on moodustatud geomeetrilise progressiooni liikmete pöördarvudest, on samuti geomeetriline progressioon. Kas see omadus on ka aritmeetilisel progressioonil?

136. Geomeetrilise progressiooni 5. liige on 61, 11. liige on 1647. Leida 7. liige.

137. Tõestada, et igas geomeetrilises progressioonis 4., 5. ja 6. liikme summa on 1., 2. ja 3. liikme summa ning 7., 8. ja 9. liikme summa geomeetriline keskmine.

138. Geomeetrilise progressiooni 1. ja 2. liikme vahe on 8, 2. ja 3. liikme summa on 12. Leida see progressioon.

139. Kas täisnurkse kolmnurga küljed võivad moodustada geomeetrilise progressiooni?

III. Lõpmatud progressioonid.

85. Lõpmatute progressioonide mõningaid omadusi. Kui arvude jada, mis moodustab progressiooni, jätkub piiramatult, siis nimetatakse progressiooni l õ p m a t u k s. Vaatleme selliste progressioonide mõningaid omadusi.

a) Võtame lõpmatult kasvava aritmeetilise progressiooni, mille vahe on väga väike, näiteks järgmise:

$$\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ 1{,}04;\ \ldots$$

Vaatamata sellele, et selle progressiooni liikmed kasvavad väga aeglaselt, ületavad nad küllaldases kauguses progressiooni algusest mistahes antud arvu, kui suur see ka oleks, näiteks nad muutuvad suuremaks kui 1 000 000. Tõepoolest, selleks et selle progressiooni $(n+1)$-ne liige $1 + 0{,}01n$ muutuks suuremaks kui 1 000 000, on küllalt, kui võtta n väärtuseks nii suur arv, mis rahuldaks võrratust $1 + 0{,}01n > 1\,000\,000$.

Sellest leiame: $n > \frac{999\,999}{0{,}01} = 99\,999\,900$.

Et lõpmatus progressioonis liikmete arv n võib olla kuitahes suur, siis võib selle võtta suurema kui 99 999 900; järelikult $1 + 0{,}01n$ saab suuremaks kui 1 000 000.

Sellist arutlust võib korrata iga kasvava lõpmatu aritmeetilise progressiooni kohta; seepärast võime teha järgmise üldise järelduse:

Lõpmatult kasvava aritmeetilise progressiooni algusest küllaldases kauguses asetsevad liikmed ületavad iga kuitahes suure antud arvu.

Võtame lõpmatult kahaneva aritmeetilise progressiooni, näiteks $\div 1000,\ 998,\ 996,\ \ldots$ (vahe on -2). Kui suur esimene liige ka oleks, progressiooni liikmed saavad teatavast kohast alates negatiivseks, ja küllaldases kauguses progressiooni algusest nende absoluutväärtused ületavad kuitahes suure antud arvu.

b) Võtame nüüd positiivsete liikmetega lõpmatult kasvava geomeetrilise progressiooni, näiteks järgmise:

$$\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}01^2 = 1{,}0201;\ 1{,}01^3 = 1{,}030301;\ \ldots$$

(tegur on 1,01),

ja võrdleme teda lõpmatu aritmeetilise progressiooniga

$$\div 1;\ 1{,}01;\ 1{,}02;\ 1{,}03;\ \ldots \text{ (vahe on } 0{,}01),$$

mille esimesed kaks liiget on võrdsed meie poolt võetud geomeetrilise progressiooni esimese kahe liikmega.

Nagu varem nägime, kasvavad geomeetrilise progressiooni liikmed kiiremini kui aritmeetilise progressiooni liikmed.

Kuid kasvava aritmeetilise progressiooni liikmed ületavad küllaldases kauguses progressiooni algusest mistahes arvu; tähendab, meie geomeetrilise progressiooni liikmed võivad ammugi ületada iga antud arvu.

Niisiis:

Positiivsete liikmetega lõpmatult kasvava geomeetrilise progressiooni liikmed ületavad küllaldases kauguses progressiooni algusest iga kuitahes suure antud arvu.

See omadus on ka sellisel kasvaval geomeetrilisel progressioonil, mille kõik või mõned liikmed on negatiivsed (näiteks: —5, —10, —20, ... või 5, —10, 20, —40, ...), ainult et sel korral ei tule rääkida liikmeist, vaid nende absoluutväärtustest.

c) Võtame nüüd positiivsete liikmetega lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni näite:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots\ \frac{1}{2^n},\ \ldots \text{ (tegur on } \frac{1}{2}).$$

Sellise progressiooni liikmed nende kaugenemisel progressiooni algusest muidugi vähenevad, kuid kas nad võivad saada väiksemaks igast antud positiivsest arvust, näiteks väiksemaks kui 0,000001, seda pole algul näha. Et seda avastada, võtame abiprogressiooni, mille liikmed on meie poolt võetud progressiooni liikmete pöördarvud:

$$1,\ 2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots\ 2^n,\ \ldots \text{ (tegur on } 2).$$

See progressioon on kasvav ja seepärast, nagu praegu nägime, ületavad tema liikmed küllaldases kauguses prog-

ressiooni algusest iga antud arvu; tähendab, nad ületavad ka 1 000 000. Kui aga ilmneb, et

$$2^n > 1\,000\,000,$$

siis on ilmselt

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1\,000\,000}.$$

Rakendame seda arutlust mistahes positiivsete liikmetega lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni

$$\div\!\div a,\ b,\ c,\ \ldots \text{ (tegur } q < 1)$$

kohta.

Et näidata, et selle progressiooni liikmed küllaldases kauguses progressiooni algusest muutuvad väiksemaks igast kuitahes väikesest antud positiivsest arvust a, võtame geomeetrilise abiprogressiooni

$$\div\!\div \frac{1}{a},\ \frac{1}{aq},\ \frac{1}{aq^2},\ \frac{1}{aq^3},\ \ldots,\ \frac{1}{aq^n},\ \ldots \text{ (tegur } \frac{1}{q} > 1).$$

See on kasvav progressioon, sest tema tegur on suurem kui 1. Kuid kasvava geomeetrilise progressiooni liikmed võivad ületada iga antud arvu; järelikult ületavad nad ka arvu $\frac{1}{\alpha}$. Seepärast arvu n küllaldase suuruse korral on rahuldatud võrratus:

$$\frac{1}{aq^n} > \frac{1}{\alpha} \text{ ja siis } aq^n < \alpha.$$

Seega:

Positiivsete liikmetega lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni algusest küllalt kaugel asetsevad liikmed on väiksemad kui kuitahes väike antud positiivne arv.

See omadus on ka lõpmatult kahaneval geomeetrilisel progressioonil, mille kõik või mõned liikmed on negatiivsed, kuid sel korral ei räägita progressiooni liikmeist, vaid nende absoluutväärtustest.

86. Piiri mõiste. Oletame, et me lõpmatult kahanevas geomeetrilises progressioonis

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \ldots$$

võtsime algusest 10 liiget; siis viimane (10.) on liige $(\frac{1}{2})^9$, kümne liikme summa (mida tähistame sümboliga s_{10}) on:

$$s_{10} = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 2 - \frac{1}{2^9}.$$

Samuti leiame:

$$s_{11} = 2 - \frac{1}{2^{10}};\quad s_{12} = 2 - \frac{1}{2^{11}};\quad \ldots\quad s_{n+1} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Me näeme, et liikmete arvu kasvades läheneb nende summa ikka enam ja enam arvule 2. Nii on summa s_{n+1} murru $(\frac{1}{2})^n$ võrra väiksem kui 2, aga see murd, nagu nägime, muutub küllalt suure n korral väiksemaks igast antud positiivsest arvust.

Kui mingi muutuva suuruse (meie näites — progressiooni liikmete summa) väärtus läheneb ikka enam ja enam teatavale jäävale arvule (meie näites — arvule 2) nii, et jääva arvu ja muutuva arvu vahe absoluutväärtus saab ja jääb väiksemaks igast kuitahes väikesest antud positiivsest arvust, siis nimetatakse seda jäävat arvu muutuva arvu p i i r i k s.

Seda märgates võime öelda, et muutuv summa

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

pürib arvu n lõpmatul kasvamisel piirile 2, mida kirjutatakse nii:

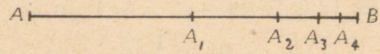
$$\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) \to 2, \text{ kui } n \to \infty$$

($n \to \infty$ loetakse: „n pürib lõpmatusele"), või kirjutatakse nii:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Siin sümbol „lim" on ladinakeelse sõna *limes* (piir) lühendus. Selle sümboli juurde asetatud kirjutis $n \to \infty$ asendab lauset: „Kui n piiramatult kasvab" (kui n pürib ∞-le).

Võib piltlikult näidata (joon. 27), et vaadeldav summa piiramatult läheneb arvule 2. Oletame, et lõik $AA_1 = 1$ ja $AB = 2$. Siis $1 + \frac{1}{2} = AA_2$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = AA_3$, $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = AA_4$, jne.; on selge, et progressiooni liikmete arvu



Joon. 27.

suurenedes me piiramatult läheneme punktile B ja, tähendab, summa $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots$ läheneb piiramatult lõigule $AB = 2$.

87. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valem. Kui lõpmatult kahanevas geomeetrilises progressioonis

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ \ldots\ (-1 < q < 1)$$

võtame algusest n liiget, siis n-es liige on aq^{n-1} ja n liikme summa on

$$s_n = \frac{a - lq}{1 - q} = \frac{a - aq^n}{1 - q}.$$

Seda valemit võib esitada ka nii (kirjutades nimetaja lugeja kummagi liikme alla):

$$s_n = \frac{a}{1 - q} - \frac{aq^n}{1 - q}.$$

Oletame, et n kasvab piiramatult. Siis arv $\frac{a}{1 - q}$ jääb muutumatuks, kuid murd $\frac{aq^n}{1 - q}$ väheneb oma absoluutväärtuselt ja seejuures lõpmatult, kuna tema lugeja muutub abso-

luutväärtuselt väiksemaks igast antud positiivsest arvust, nimetaja aga jääb muutumatuks. Tähendab:

$$s_n \to \frac{a}{1-q}, \quad \text{kui } n \to \infty.$$

Seda piiri $\frac{a}{1-q}$ *nimetataksegi lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summaks,*

s. o. lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmete summa võrdub progressiooni esimese liikme ning arvu 1 ja progressiooni teguri vahe jagatisega.

Näiteks. Liikmete summa geomeetrilises progressioonis

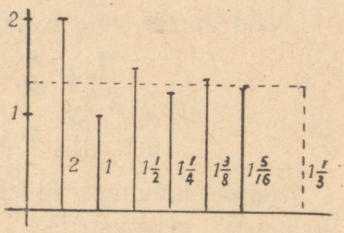
$$\therefore\ 2, -1, +\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{4}, +\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{16}, \ldots,$$

milles $q = -\frac{1}{2}$ ja $a = 2$, võrdub

$$\frac{2}{1-(-\frac{1}{2})} = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}.$$

Juurdelisatud joonisel on kujutatud rida ordinaate, mis näitlikult kujutavad antud progressiooni ühe, kahe, kolme, nelja jne. liikme summa suurust.

Need ordinaadid muutuvad kord suuremaks kui $1\frac{1}{8}$, kord väiksemaks kui $1\frac{1}{8}$, lähenedes sellele arvule ikka enam ja enam (joon. 28).



Joon. 28.

88. Geomeetrilise progressiooni summa valemi rakendamine perioodilistele kümnendmurdudele. Võtame järgmised kaks perioodiliste (puht-perioodiliste, s. o. selliste, milledel periood algab kohe pärast koma) kümnendmurdude näidet:

1) 0,999 ... ja 2) 0,232323 ...

Need murrud kujutavad endist summasid:

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\frac{9}{10\,000}+\ldots \text{ ja } \frac{23}{100}+\frac{23}{10\,000}+\frac{23}{100\,000}+\ldots$$

Nende summade liidetavad on lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmed, kusjuures progressiooni teguriteks on esimesel progressioonil $\frac{1}{10}$ ja teisel $\frac{1}{100}$. Need summad võrduvad

$$\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{9}{10-1}=\frac{9}{9}=1 \text{ ja } \frac{\frac{23}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{23}{100-1}=\frac{23}{99}.$$

Neist näiteist nähtub, et:

Puht-perioodiline murd võrdub harilikku murruga, mille lugejaks on periood ja nimetajaks on arv, mis on kirjutatud niimitme 9-ga, kuimitu numbrit on perioodis.

Võtame nüüd kaks segaperioodiliste (s. o. seesuguste, milledel periood ei alga kohe pärast koma) kümnendmurdude näidet:

3) 0,2888 ... ja 4) 0,3545454 ...

Neid murde võib esitada summadena:

$$\frac{2}{10}+\frac{8}{100}+\frac{8}{1000}+\frac{8}{10\,000}+\ldots$$

ja

$$\frac{3}{10}+\frac{54}{1000}+\frac{54}{100\,000}+\frac{54}{10\,000\,000}+\ldots$$

Nende summade liidetavad, alates teisest, on lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni liikmed; kolmandas summas on teguriks $\frac{1}{10}$, neljandas summas $\frac{1}{100}$. Seepärast need summad võrduvad:

$$\frac{2}{10}+\frac{\frac{8}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{2}{10}+\frac{8}{100-10}=\frac{2}{10}+\frac{8}{90}=\frac{2\cdot 9+8}{90}=\frac{2\cdot 10-2+8}{90}=$$

$$=\frac{28-2}{90}=\frac{26}{90}=\frac{13}{45}$$

ja

$$\frac{3}{10}+\frac{\frac{54}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{54}{1000-10}=\frac{3}{10}+\frac{54}{990}=\frac{3\cdot 99+54}{990}=$$

$$=\frac{3\cdot 100-3+54}{990}=\frac{354-3}{990}=\frac{351}{990}=\frac{39}{110}.$$

Neist näiteist selgub, et:

Segaperioodiline murd võrdub sellise hariliku murruga, mille lugejaks on teise perioodi ees seisva arvu ja esimese perioodi ees seisva arvu vahe ning nimetajaks on arv, mis on kirjutatud niimitme 9-ga, kuimitu numbrit on perioodis, ja niimitme nulliga, kuimitu numbrit on koma ja esimese perioodi vahel.

Harjutused.

Leida lõpmatult kahanevate progressioonide summad:

140. $3+1+\frac{1}{3}+\ldots$; $8-4+2-\ldots$

141. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$; $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\ldots$

142. $1+\frac{1}{1{,}05}+\frac{1}{1{,}05^2}+\ldots$; $1-\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}-\frac{b^3}{a^3}+\ldots (b<a)$.

143. $1+x+x^2+x^3+\ldots\ (0<x<1)$.

144. $1-x+x^2-x^3+\ldots\ (0<x<1)$.

145. Lõpmatu geomeetrilise progressiooni summa on $7\frac{1}{2}$, esimese kahe liikme summa on $6\frac{2}{3}$. Leida progressiooni 6. liige.

146. Väljendada järgmiste perioodiliste murdude täpsed väärtused harilikes murdudes: 0,777 ...; 2,7171, ...; 0,(142857); 0,3(8); 1,41(26); 0,17(21).

147. Ruutu, mille külg on a, on kujundatud teine ruut, mille tipud asetsevad antud ruudu külgede keskel. Sellesse ruutu on kujundatud samal viisil kolmas ruut, kolmandasse neljas jne. kuni lõpmatuseni. Leida kõigi ruutude pindalade summa ja ümbermõõtude summa.

Kuues jagu.

Astendaja mõiste üldistus.

I. Täisarvulised astendajad.

89. Täisarvuliste positiivsete astendajate omadusi. Seni eeldasime, et astendajad on täisarvulised ja positiivsed arvud, kusjuures me andsime neile mõtte, mis on väljendatud järgmises definitsioonis:

Astendada arvu a mingi täisarvulise positiivse astendajaga n tähendab leida n võrdse teguri korrutis aaa . . . a.

Loetleme nende astendajate omadusi, mis on meile tuntud algebra kursuse eelmistest peatükkidest:

1) ühe ja sama arvu astmete korrutamisel liidetakse nende astendajad;

2) ühe ja sama arvu astmete jagamisel lahutatakse jagatava astendajast jagaja astendaja, kui jagaja astendaja on väiksem jagatava astendajast;

3) negatiivse arvu astendamisel paarisarvulise astendajaga saadakse positiivne arv, paarituarvulise astendajaga astendamisel aga negatiivne arv;

4) et astendada korrutist, tuleb sama astendajaga astendada iga tegurit eraldi;

5) et astendada astet, tuleb astendajad korrutada;

6) et astendada murdu, tuleb sama astendajaga astendada lugejat ja nimetajat eraldi;

7) et astendada juurt, tuleb sama astendajaga astendada juuritavat;

8) et juurida astet, tuleb astendaja jagada juurijaga, kui selline jagamine on teostatav jäägita.

Nüüd laiendame astendaja mõistet negatiivsetele ja murrulistele astendajatele, mida me seni pole kasutanud.

Seejuures näeme, et *kõik täisarvuliste positiivsete astendajate omadused on kehtivad ka negatiivsete ja murruliste astendajate kohta.*

90. Astendaja null. Ühe ja sama arvu astmete jagamisel võib jagatava astendaja osutuda võrdseks jagaja astendajaga.

Olgu arv a^n vaja jagada arvuga a^n. Kasutades paragrahvis 89 antud reeglit (2), saame:

$$a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Kuid nullil pole astendajana seda tähendust, mis antakse täisarvulistele positiivsetele astendajatele, sest arvu ei saa null korda võtta tegurina. Et avaldisele a^0 anda mõtet, läheneme küsimusele arvu a^n jagamisest arvuga a^n teisest küljest. Me teame, et mistahes nullist erineva arvu ja temaga võrdse arvu jagatis on 1.

Seepärast on kokku lepitud lugeda $a^0 = 1$.

Seega võime defineerida, et:

Iga arv (välja arvatud null) astmes null võrdub ühega.

Et eespool loeteldud täisarvuliste positiivsete astendajate omadused on rakendatavad ka nullilise astendaja kohta, selles on kerge veenduda. Nii:

$$a^m \cdot a^0 = a^{m+0} = a^m; \quad (a^m)^0 = a^{m \cdot 0} = a^0 = 1, \text{ jne.}$$

91. Negatiivsed täisarvulised astendajad. Teeme kokkuleppe, et ühe ja sama arvu astmete jagamisel lahutame jagaja astendaja jagatava astendajast ka sel juhul, kui jagaja astendaja on suurem kui jagatava astendaja. Siis saame jagatisena

tähe negatiivse astendajaga astme, näiteks: $a^2 : a^5 = a^{-3}$. Seega siis lepime kokku kasutada arvu negatiivse astendajaga astet selle arvu astmete jagatise tähistamiseks juhul, kui jagaja astendaja ületab jagatava astendaja niimitme ühe võrra, kui suur on negatiivse astendaja absoluutväärtus. Nii tähendab a^{-2} arvude $a : a^3$ või $a^2 : a^4$ või $a^3 : a^5$ jagatist, üldiselt $a^m : a^{m+2}$ jagatist.

Selles mõttes mõistetava arvu negatiivse astendajaga aste võrdub murruga, mille lugejaks on 1, nimetajaks aga on sama arv, kuid positiivse astendajaga, mis on võrdne negatiivse astendaja absoluutväärtusega.

Tõesti, vastavalt meie kokkuleppele peab olema:

$$a^{-1} = \frac{a^m}{a^{m+1}}\,;\ a^{-2} = \frac{a^m}{a^{m+2}}\,;\ x^{-3} = \frac{x^m}{x^{m+3}}\,,\ \text{jne.}$$

Taandades esimest kaht murdu arvuga a^m ja kolmandat murdu arvuga x^m (s. o. taandades murde mõlemal juhul lugejaga), saame:

$$a^{-1} = \frac{1}{a}\,;\ a^{-2} = \frac{1}{a^2}\,;\ x^{-3} = \frac{1}{x^3}\,,\ \text{jne.}$$

Üldiselt

$$a^{-n} = \frac{a^m}{a^{m+n}} = \frac{1}{a^n}\,.$$

Näeme, et negatiivsed astendajad annavad võimaluse esitada iga murrulist algebralist avaldist murruvabal kujul; selleks tarvitseb ainult kõik nimetaja tegurid viia tegureina lugejaisse, võttes need negatiivsete astendajatega. Näiteks:

$$\frac{3a}{b^2c^3} = 3a \cdot \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{c^3} = 3ab^{-2}c^{-3}.$$

92. Tehted negatiivsete astendajatega astmetega. Veendume nüüd, et kõik tehted negatiivsete astendajatega astmetega võib sooritada samade reeglite järgi, mis varem tuletati positiivsete astendajate jaoks. On küllalt, kui selgitada seda ainult korrutamise ja astendamise kohta, sest pöörd-

tehete reeglid, s. o. jagamise ja juurimise reeglid, on otseste tehete järeldused.

Korrutamine. Tuleb näidata, et astmete korrutamisel liidetakse ühe ja sama tähe astendajad ka sel juhul, kui need astendajad on negatiivsed. Veendume, et $a^{-n} \cdot a^{-m} = a^{-n+(-m)} = a^{-(n+m)}$, kus m ja n on positiivsed täisarvud.

Tõepoolest, muutes negatiivsete astendajatega astmed murdudeks ja sooritades korrutamistehte reeglite järgi, mis kehtivad murdude kohta, saame:

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^n \cdot a^m} = \frac{1}{a^{(n+m)}} = a^{-(n+m)}.$$

Samuti:

$x^{-n} \cdot x^m = x^{-n+m}$, sest $x^{-n} \cdot x^m = \frac{1}{x^n} \cdot x^m = \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = x^{-n+m}$.

Astendamine. On vaja näidata, et astme astendamisel korrutatakse astendajaid ka sel juhul, kui nad on negatiivsed. Veendume, et $a^{(-n)-m} = a^{(-n)\cdot(-m)} = a^{nm}$.

Tõepoolest:

$$(a^{-n})^{-m} = \frac{1}{(a^{-n})^m} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^n}\right)^m} = \frac{1}{\frac{1}{a^{nm}}} = a^{nm}.$$

Samuti:

$(x^n)^{-m} = x^{-nm}$, sest $(x^n)^{-m} = \frac{1}{(x^n)^m} = \frac{1}{x^{nm}} = x^{-nm}$.

Näited.

1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})\,(0{,}8ab^{-3}c^4) = 2{,}4a^{-1}b^{-1}c$.
2) $(x^{-1}y^3z^2) : (5x^2y^{-2}z^3) = \frac{1}{5}x^{-3}y^5z^{-1}$.
3) $(2ax^{-3})^{-2} = 2^{-2}a^{-2}x^6$.
4) $(x^{-2} - y^{-1})^2 = (x^{-2})^2 - 2x^{-2}y^{-1} + (y^{-1})^2 =$
$= x^{-4} - 2x^{-2}y^{-1} + y^{-2}$.

5) $(a^{-2} + b^{-3})(a^{-2} - b^{-3}) = a^{-4} - b^{-6}$.

6) $\sqrt[3]{27p^{-9}q^{-3}} = 3p^{-3}q^{-1}$.

Harjutused.

148. Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

5^{-2}; 10^{-1}; 2^{-4}; $(-1)^{-1}$; $(-2)^{-2}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $0{,}1^{-3}$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $0{,}3^{-4}$.

Kirjutada järgmised avaldised murruvabal kujul:

149. $\frac{1}{a^2b}$; $\frac{2}{a^3b^4}$; $\frac{3a}{x}$; $\frac{x}{3ay^2z^3}$.

150. $\frac{a}{a+x}$; $\frac{2}{a-x}$; $\frac{3ab}{(1+x)^2(1-x)}$.

Sooritada järgmised tehted:

151. $7a^3b^{-1} \cdot 2ab^3$; $4\frac{1}{2}a^4x^{-3}y^{-2} \cdot 2a^{-4}x^3y^5$.

152. $a^8 : a^{-1}$; $x^{-2} : x$; $x^2 : x^2$; $x^{-2} : x^2$.

153. $10a^3b^{-2} : 5ab^{-5}$; $25a^{-3}b^{-2}x^2 : 5a^{-4}b^2x^3$.

154. $(a^{-2})^4$; $(a^2)^{-4}$; $(a^{-2})^{-4}$.

155. $(2a^2b^{-3})^2$; $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}$.

156. $\left[\left(\frac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y}\right)^2\right]^{-3}$; $\sqrt{3a^{-2}\sqrt{27x^{-12}y^6}}$.

157. $(2a^{-1} - 1)(2a^{-1} + 1)$; $(a^{-2} - a^{-1})^2$.

II. Murrulised astendajad.

93. Mis mõttes kasutatakse murrulisi astendajaid. Me teame (§ 15), et astme juurimisel jagatakse astendaja juurijaga, kui see jagamine on teostatav jäägita; näiteks $\sqrt{a^4} = a^2$; $\sqrt[3]{x^9} = a^3$ jne. Võtame nüüd ülesandeks laiendada seda reeglit ka nendele juhtudele, kui astendaja ei jagu juurijaga jäägita. Näiteks me lepime kokku selles, et

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \quad \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}; \quad \sqrt[3]{z^5} = z^{\frac{5}{3}}.$$

Üldse lepime kokku, et:

Avaldis $a^{\frac{m}{n}}$ *tähendab juurt, mille juurija võrdub astendaja* m *nimetajaga ja astendaja juuritavas võrdub lugejaga (s. o. juurt* $\sqrt[n]{a^m}$*).*

Lepime kokku kasutada negatiivseid murrulisi astendajaid samas mõttes, nagu kasutasime negatiivseid täisarvulisi astendajaid; näiteks ütleme, et:

$$a^{-\frac{3}{4}} = \frac{a^m}{a^{m+\frac{3}{4}}} = \frac{1}{a^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}\ *.$$

94. Murrulise astendaja põhiomadus. Murrulise astendajaga astme suurus ei muutu, kui me korrutame või jagame murrulise astendaja lugejat ning nimetajat ühe ja sama arvuga (mis erineb nullist).

Seega:

$$a^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{9}{6}} = \ldots;\quad x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}.$$

Üldiselt:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mp}{np}}.$$

Tõepoolest, murrulise astendaja nimetaja tähendab juurijat, tema lugeja aga tähendab astendajat juuritavas, ja sellist juurijat ja astendajat võib, nagu nägime (§ 14), korrutada ning jagada ühe ja sama arvuga.

Toetudes sellele omadusele, *võime murrulist astendajat teisendada samuti nagu tavalist murdu*; me võime näiteks

---

* Murrulised astendajad toodi algebrasse peamiselt hollandi inseneri Simon Stevin'i poolt XVII sajandi algul. Hiljem, XVII sajandi lõpul, võttis Oxfordi professor John Wallis tarvitusele negatiivsed astendajad.

murrulist astendajat taandada või teisendada mitu murrulist astendajat samanimeliseks.

95. Tehted murruliste astendajatega astmetega. Tuleb tõestada, et murrulistele astendajatele on rakendatavad samad reeglid, mis tuletati varem täisarvuliste astendajate jaoks. Selleks on küllalt, kui seda selgitada ainult korrutamise ja astendamise kohta, sest jagamise ja juurimise reeglid on korrutamise ja astendamise reeglite järeldused.

Korrutamine. Tõestame, et korrutamisel liidetakse ühe ja sama tähe astendajad ka siis, kui need astendajad on murrulised. Näiteks veendume, et:

$$a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{5}} = a^{\frac{10+12}{15}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

Selleks kirjutame murruliste astendajatega astmed juurtena ja teostame korrutamise juurte korrutamise reeglite järgi (§ 18):

$$\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[5]{a^4} = \sqrt[15]{a^{10}} \cdot \sqrt[15]{a^{12}} = a^{\frac{22}{15}}.$$

Tulemus on sama, mille saime pärast astendajate liitmist; järelikult astendajate liitmise reeglit (korrutamise puhul) võib rakendada ka murruliste astendajate kohta.

Seega:

$$a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = a^{\frac{5}{6}}; \quad a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}.$$

Astendamine. Tõestame, et astme astendamisel võib astendajaid korrutada ka siis, kui need astendajad on murrud. Näiteks veendume, et:

$$\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{4}{5}} = a^{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}} = a^{\frac{8}{15}}.$$

Tõepoolest, asendades murruliste astendajatega astmed juurtega ja sooritades tehted juurtega, saame:

$$\sqrt[5]{\left(\sqrt[3]{a^2}\right)^4} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^8}} = \sqrt[15]{a^8} = a^{\frac{8}{15}}.$$

Ka siis, kui astendajad pole üksnes murdarvud, vaid ka negatiivsed, võib nende kohta rakendada reeglit, mis tõestati varem positiivsete astendajate kohta. Näiteks:

$$a^{-\frac{m}{n}} \cdot a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{1}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} =$$

$$= a^{-\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{m}{n}+\left(-\frac{p}{q}\right)}.$$

96. Näiteid tehete kohta murruliste ja negatiivsete astendajatega.

1) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{2}}\right) =$

$$= \left[a^{\frac{1}{2}} + \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\right]\left[a^{\frac{1}{2}} - \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)\right] = a - \left(b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}}\right)^2 =$$

$$= a - b - c + 2b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = a - b - c + 2\sqrt{bc}.$$

2) $\sqrt{12a^{-4}b^3} : \left[\left(\frac{a^5}{3b^{-4}}\right)^{-2}\right]^{\frac{1}{4}} = \left(2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} a^{-2} b^{\frac{3}{2}}\right) : \frac{a^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{1}{2}} b^2} =$

$$= 2a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{7}{2}} = 2b^3\sqrt{ab}.$$

Harjutused.

Teostada nõutud tehted:

158. $2a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} \cdot 5a^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{2}}$. 159. $20a^{-2} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{2}{3}} : 4a^{-3} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{4}}$; $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}}$.

160. $\sqrt[3]{3a^2b} : 4ab^3$; $\sqrt[12]{x^3} : x^{\frac{1}{4}}$. 161. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^3 : \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{-2} : \left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

162. $\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} : \left(x^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}} : 4\left(a^2 b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$. 163. $\left(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

164. $\sqrt{a^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{3}}}$; $\sqrt{(1-x)^{\frac{2}{3}}}$.

165. $\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)^2$; $\left(2a + \frac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}\right)^2$. 166. $\left(x^{-\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{2}}\right)^2$.

167. Teades, et (ligikaudu) $10^{0,30103} = 2$ ja $10^{0,47712} = 3$, kujutada arvud 4, 8, 16, 9, 24, 6, 12, 18 arvu 10 astmetena.

III. Irratsionaalse astendaja mõiste.

97. Irratsionaalse astendajaga astme mõte. Vaatleme astet a^α, kus a on mingi irratsionaalarv ja astendatav α on mingi positiivne arv, mis pole võrdne 1-ga. Seejuures võib esineda kolm järgmist juhtu:

a) $a > 1$, näiteks $a = 10$, ja α on mingi positiivne irratsionaalarv, näiteks $\sqrt{2}$.

Tähistame tähega α_1 arvu α mistahes ratsionaalse ligikaudse väärtuse puudusega ja tähega α_2 arvu α mistahes ratsionaalse ligikaudse väärtuse liiaga. Siis tähendab aste a^α sellist arvu, mis on suurem igast astmest a^{α_1}, kuid väiksem igast astmest a^{α_2}. Võib tõestada, et selline arv on olemas ja seejuures ainult üks. Nii näiteks tähendab $10^{\sqrt{2}}$ sellist arvu, mis on suurem igast järgmisest arvust:

$$10^{1,4},\ 10^{1,41},\ 10^{1,414},\ 10^{1,4142},\ \ldots,$$

kus astendajad on arvu $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused puudusega, ja väiksem igast järgmisest arvust:

$$10^{1,5},\ 10^{1,42},\ 10^{1,415},\ 10^{1,4143},\ \ldots,$$

kus astendajad on arvu $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused liiaga.

b) $a < 1$, näiteks 0,5, ja α on endiselt positiivne irratsionaalarv, näiteks $\sqrt{2}$.

Sel korral mõistetakse astme a^α all sellist arvu, mis on väiksem igast astmest a^{α_1} ja suurem igast astmest a^{α_2}. Nii on $0{,}5^{\sqrt{2}}$ arv, mis on väiksem igast järgmisest arvust:

$$0{,}5^{1{,}4},\ 0{,}5^{1{,}41},\ 0{,}5^{1{,}414},\ 0{,}5^{1{,}4142},\ \ldots,$$

kuid suurem igast järgmisest arvust:

$$0{,}5^{1{,}5},\ 0{,}5^{1{,}42},\ 0{,}5^{1{,}415},\ 0{,}5^{1{,}4143},\ \ldots$$

Seega, kui irratsionaalarv α asetseb kahe ratsionaalarvu a_1 ja a_2 vahel, siis aste a^α asetseb astmete a^{α_1} ja a^{α_2} vahel niihästi siis, kui $a > 1$, kui ka siis, kui $a < 1$.

c) $a \gtrless 1$ ja α on negatiivne irratsionaalarv; näiteks:

$$10^{-\sqrt{2}} \text{ või } \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}}.$$

Avaldisele a^α omistatakse siis sama mõte, mis on ratsionaalsete negatiivsete astendajatega astmeil.

Nii on:

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{2}} \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}}}.$$

Irratsionaalsete astendajate teooria lähemal käsitlemisel ilmneb, et kõik ratsionaalsete astendajate omadused on rakendatavad ka irratsionaalsete astendajate kohta; nii:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta};\quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

IV. Eksponentfunktsioon.

98. Definitsioon. Eksponentfunktsiooniks nimetatakse funktsiooni $y = a^x$, mis kujutab endast mingi jääva positiivse arvu $a \neq 1$ astet, mille astendajaks on sõltumatu

muutuja x, mis võib saada kõikvõimalikke väärtusi, positiivseid ja negatiivseid, täisarvulisi ja murrulisi, ratsionaalseid ja irratsionaalseid. Seejuures eeldatakse, et juhul, kui astendaja x on murruline ja järelikult kui a^x tähendab mingit juurt, siis võetakse kõigist juure väärtustest ainult tema aritmeetiline, s. o. positiivne väärtus [1].

Sellest, mis teame astendajate kohta, järeldub, et x igale väärtusele vastab ainult üks funktsiooni $y = a^x$ väärtus (kokkuleppe tõttu kasutada ainult juurte aritmeetilisi väärtusi).

99. Eksponentfunktsiooni omadused. Vaatleme eksponentfunktsiooni omadusi, pidades meeles, et a on positiivne arv.

1. Iga positiivse astendatava puhul on funktsiooni a^x väärtus positiivne, s. o. $a^x > 0$.

Kui x on positiivne täisarv, siis $a^x > 0$, milline ka oleks positiivne arv a; järelikult on meie väide õige.

Võrdugu nüüd x mingi positiivse murruga, näiteks $x = \frac{m}{n}$. Siis

$$a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Kuid $a^m > 0$, järelikult ka $\sqrt[n]{a^m} > 0$, sest leppisime kokku võtta ainult juure aritmeetiline väärtus.

Olgu x positiivne irratsionaalarv. Tähistame tähtedega a_1 ja a_2 x-i ligikaudsed ratsionaalsed väärtused liiaga ja puudusega. Need ligikaudsed väärtused võib valida positiiv-

[1] Siin eeldatakse, et astendatav a pole võrdne 1-ga, sest kui $a = 1$, siis aste a^x x-i mistahes väärtuse puhul võrduks 1-ga ega sõltuks x-st. Eeldatakse ka veel, et astendatav a on positiivne arv, sest kui $a < 0$, siis astmel a^x poleks x-i paljude väärtuste puhul mingisugust reaalset väärtust. Näiteks kui $a = -4$ ja $x = \frac{1}{2}$, siis aste a^x saaks imaginaarse väärtuse $(-4)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-4}$.

setena. Siis funktsiooni a^x väärtus, asetsedes kahe positiivse arvu a^{α_1} ja a^{α_2} vahel, on positiivne arv.

Võrdugu x lõpuks mingi negatiivse arvuga, näiteks $x = -p$. Siis

$$a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Milline positiivne arv p ka oleks, vastavalt ülalöeldule on $a^p > 0$, kuid siis on ka $\frac{1}{a^p} > 0$.

Seega on meie väide õige x-i mistahes väärtuse puhul.

2. Kui $a > 1$, siis on funktsioon $a^x > 1$, kui $x > 0$, ja $a^x < 1$, kui $x < 0$ (kui $a < 1$, siis a^x kohta kehtivad vastupidised võrratused).

Olgu x positiivne täisarv. Siis

$$a > 1; \quad a^x > 1^x; \quad a^x > 1.$$

Olgu x positiivne murd, näiteks $\frac{m}{n}$. Siis

$$a > 1; \; a^m > 1; \; \sqrt[n]{a^m} > \sqrt[n]{1}; \; \sqrt[n]{a^m} > 1; \; a^{\frac{m}{n}} > 1.$$

Kui x on positiivne irratsionaalarv, siis $a^{\alpha_1} > 1$, kus α_1 on x-i ligikaudne ratsionaalne väärtus puudusega, seepärast on ka $a^x > 1$. Seega x-i iga positiivse väärtuse puhul on

$$a^x > 1.$$

Olgu nüüd x mistahes negatiivne arv, näiteks $x = -p$. Siis

$$a^x = a^{-p} = \frac{1}{a^p}.$$

Kuid vastavalt eelmisele $a^p > 1$. Järelikult:

$$\frac{1}{a^p} < 1, \text{ s. o. } a^x < 1.$$

3. Kui $a > 1$, siis funktsioon a^x kasvab x-i kasvades.

Kui x_1 ja x_2 on kaks positiivset täisarvu ning $x_2 > x_1$, siis on ilmne, et kui $a > 1$, siis

$$a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Olgu nüüd x_1 ja x_2 positiivsed murrud, näiteks $x_1 = \frac{m}{n}$ ja $x_2 = \frac{p}{q}$. Samuti olgu $x_2 > x_1$. Siis

$$\frac{p}{q} > \frac{m}{n}.$$

Pärast murdude samanimeliseks teisendamist saame:

$$\frac{pn}{qn} > \frac{mq}{qn}.$$

Kahest võrdsete nimetajatega ebavõrdsest murrust on see suurem, mille lugeja on suurem. Järelikult:

$$pn > mq.$$

Et pn ja mq on täisarvud, siis võib nende kohta rakendada eelmisi arutlusi ja me saame:

$$a^{pn} > a^{mq}.$$

Võtame arvudest a^{pn} ja a^{mq} qn-nda juure. Me teame, et kahest ühe ja sama juurijaga juurest on see suurem, mille juuritav on suurem. Järelikult:

$$\sqrt[qn]{a^{pn}} > \sqrt[qn]{a^{mq}} \text{ ehk } a^{\frac{pn}{qn}} > a^{\frac{mq}{qn}}.$$

Taandades astendajad saame:

$$a^{\frac{p}{q}} > a^{\frac{m}{n}}, \text{ s. o. } a^{x_2} > a^{x_1}.$$

Olgu x_1 ja x_2 kaks reaalarvu, milledest üks või mõlemad on irratsionaalsed.

Märgime tähega β arvu x_1 ligikaudse ratsionaalse väärtuse liiaga ja tähega α arvu x_2 ligikaudse väärtuse puudusega. Kui $x_1 < x_2$, siis võib valida α ja β nii, et $\beta < \alpha$. Siis on $a^{x_1} < a^{\beta}$ ja $a^{\alpha} < a^{x_2}$. Et aga $a^{\beta} < a^{\alpha}$, siis $a^{x_1} < a^{x_2}$.

100. Eksponentfunktsiooni graafik. Joonestame järgmise kolme eksponentfunktsiooni graafikud:

$$1)\ y=2^x;\quad 2)\ y=\left(\frac{1}{2}\right)^x;\quad 3)\ y=10^x.$$

Esimese kahe funktsiooni graafiku valmistamiseks anname muutujale x rea täisarvulisi väärtusi:

$$-3;\ -2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3.$$

Kui $x=-3$, siis saame:

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}=1:\left(\frac{1}{2}\right)^3=1:\frac{1}{8}=8.$$

Samuti arvutame y väärtused ka x-i kõigi ülejäänud väärtuste jaoks.

Funktsiooni $y=10^x$ jaoks pole sobiv võtta arvu x näidatud väärtusi, sest siis saaksime y jaoks nii suured arvud, millede kujutised ei mahu joonisele 29 (näiteks kui $x=3$, saaksime $y=10^3=1000$). Selle funktsiooni puhul anname x-le järgmised murrulised väärtused (mis asetsevad -1 ja $+1$ vahel):

$$x=-1;\ -\frac{3}{4};\ -\frac{2}{4};\ -\frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{4};\ 1.$$

Vastavad y väärtused arvutame sellises järjekorras:

$$10^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{10}=\sqrt{\sqrt{10}}=\sqrt{3{,}162}=1{,}778;$$

$$10^{\frac{2}{4}}=10^{\frac{1}{2}}=\sqrt{10}=3{,}162.$$

Edasi leiame lihtsa korrutamise ja jagamise teel:

$$10^{\frac{3}{4}}=10^{\frac{2}{4}}\cdot 10^{\frac{1}{4}}=3{,}162\cdot 1{,}778=5{,}62\ldots$$

$$10^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{1{,}778}=\frac{1000}{1778}=0{,}56\ldots$$

$$10^{-\frac{2}{4}} = \frac{1}{3{,}162} = \frac{1000}{3162} = 0{,}32\ldots$$

$$10^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{5{,}62} = \frac{100}{562} = 0{,}17\ldots$$

Kirjutame kõik leitud väärtused järgmisse kolme tabelisse:

1) $y = 2^x$.

$x =$	kasvab	-3	-2	-1	0	1	2	3	kasvab
$y =$	kasvab	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	kasvab

2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$x =$	kasvab	-3	-2	-1	0	1	2	3	kasvab
$y =$	kahaneb	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	kahaneb

3) $y = 10^x$.

$x =$	kasvab	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	kasvab
$y =$	kasvab	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10	kasvab

(Viimases tabelis on arvud ümardatud.)

Kandes need väärtused joonisele ja ühendades saadud punktid kõveratega, saame (joon. 29) kolm võetud funktsiooni graafikut (joonis on soovitav teha millimeeterpaberile, võttes pikkusühikuks sentimeetri).

Vaadeldes eksponentfunktsioonide graafikuid näeme näitlikus kujutuses nende järgmisi omadusi:

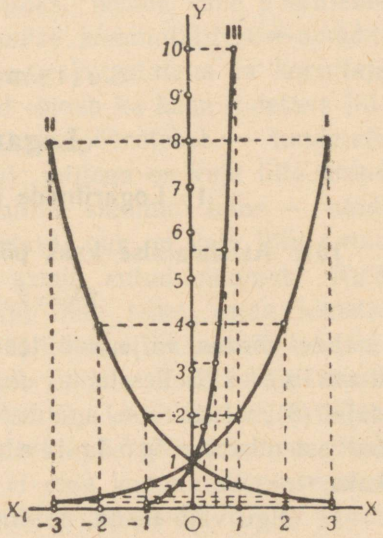
1. Iga positiivse astendatava korral on funktsioon a^x positiivne (kõik kõverad asetsevad ülalpool x-telge).

2. Juhul, kui $a > 1$, on funktsioon $a^x > 1$, kui $x > 0$, ja $a^x < 1$, kui $x < 0$ (juhul, kui $a < 1$, kehtivad a^x kohta vastupidised võrratused).

3. x-i kasvades funktsioon a^x kasvab, kui $a > 1$ (ja kahaneb, kui $a < 1$).

4. Kui $x = 0$, siis $a^x = 1$ tähe a igasuguste väärtuste korral (kõik kõverad läbivad üht ja sama punkti, mis asetseb y-teljel punktist O kaugusel $+1$).

5. Kui $a > 1$, siis x-i kasvades funktsioon a kasvab seda kiiremini, mida suurem on a (kui $a = 10$, siis tõuseb kõver tunduvalt kõrgemale kui juhul, mil $a = 2$).



Joon. 29.

Harjutused.

168. Joonestada funktsiooni $y = 3^x$ graafik vahemikus $x = 0$ kuni $x = 3$, andes astendajale väärtused: 0; $\frac{1}{2}$; 1; $\frac{3}{2}$; 2; $2\frac{1}{2}$; 3.

169. Joonestada funktsiooni $y = 2^x$ graafik vahemikus $x = -3$ kuni $x = +2$ (ühikuks võtta 1 cm). Kasutades graafikut leida x-i ligikaudsed väärtused, mis rahuldavad võrrandit $2^x = 5$.

170. Joonestada funktsiooni $y = \frac{2^x - 1}{x - 3}$ graafik vahemikus -1 kuni $+4$ (võttes pikkusühikuks 2 cm). Kasutades graafikut leida y, kui $x = 1{,}5$ ja kui $x = -0{,}5$.

Seitsmes jagu.

Logaritmid.

1. Logaritmide üldised omadused.

101. Astendamise kaks pöördtehet. Võtame võrduse:

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8.$$

See võrdus väljendab tehet, mida nimetatakse *astendamiseks*. Selles tehtes on antud astendatav (2) ja astendaja (3), otsitav on aga aste ise (8). Vaatleme, millised on astendamise *pöördtehted*. Seesuguseid tehteid on kaks:

1. Olgu vaja teada, milline arv tuleb astendada arvuga 3, et saada arv 12. Tähistades otsitava arvu tähega x, võime kirjutada võrrandi $x^3 = 12$. Tehet, mille abil antud astme ja antud astendaja järgi leitakse astendatav x, nimetatakse *juurimiseks*; seda tehet tähistatakse, nagu teame, nii:

$$x = \sqrt[3]{12}.$$

2. Oletame, et on vaja teada, milline peab olema astendaja, millega on vaja astendada arvu 4, et saada 16. Tähistades otsitava astendaja tähega x, võime kirjutada võrrandi: $4^x = 16$. Tehet, mille abil antud astme ja antud astendatava järgi leitakse astendaja, nimetatakse antud arvu (16) *logaritmimiseks* antud alusel (4).

Seega on astendamisel kaks pöördtehet. Esitame küsimuse: kas need tehted on erinevad? Ka korrutamise puhul

võib ju vaadelda kahte pöördtehet: esimene — korrutatava leidmine antud korrutise ja kordaja järgi, teine — kordaja leidmine antud korrutise ja korrutatava järgi. Kuid neid tehteid ei vaadelda kui erinevaid tehteid, vaid kui ühte ja sama tehet, mida nimetatakse jagamiseks. Nende kahe pöördtehte ühtimise põhjus seisab korrutamise kommutatiivsuse-omaduses, mille järgi korrutis ei muutu korrutatava ja korrutaja koha vahetusest. Sama olukord esineb ka kahe liidetava liitmisel. Sellel tehtel on samuti kaks pöördtehet — tundmatu arvu leidmine (esimene liidetav), millega on vaja liita antud arv (teine liidetav), et saada antud summat; teine — tundmatu arvu leidmine (teine liidetav), mis on vaja liita antud arvuga (esimene liidetav), et saada antud summat. Kuid neid kahte tehet vaadeldakse kui ühte tehet, mida nimetatakse lahutamiseks, selle tõttu, et liitmisel on samuti kommutatiivsuse-omadus, mille kohaselt summa ei sõltu liidetavate järjekorrast. Kui see omadus kehtiks ka astendamise kohta, siis moodustaksid eespool näidatud kaks pöördtehet sisuliselt ühe tehte. Kuid astendamine ei oma kommutatiivsuse-omadust, näiteks arv 2^3 pole võrdne arvuga 3^2, 10^2 ei võrdu arvuga 2^{10}, jne. Seetõttu erineb astendatava leidmine antud astendaja ja astme järgi (juurimine) oluliselt astendaja leidmisest antud astendatava ja astme järgi (logaritmimine).

102. Definitsioon. *Antud arvu logaritmiks antud alusel nimetatakse astendajat, millega on vaja astendada seda alust, et saada antud arvu.*

Näiteks kui aluseks on 4, siis:

arvu 16 logaritm on 2, sest $4^2 = 16$;
„ 64 „ „ 3, „ $4^3 = 64$;
„ 4 „ „ 1, „ $4^1 = 4$;
„ 2 „ „ $\frac{1}{2}$, „ $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$;

arvu $\frac{1}{4}$ logaritm on -1, sest $4^{-1} = \frac{1}{4}$;

„ $\frac{1}{2}$ „ „ $-\frac{1}{2}$, „ $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$.

Kui võtame aluseks 10, siis

arvu 10 logaritm on 1, sest $10^1 = 10$;

„ 100 „ „ 2, „ $10^2 = 100$;

„ 1000 „ „ 3, „ $10^3 = 1000$;

„ 0,1 „ „ -1, „ $10^{-1} = \frac{1}{10}$;

„ 0,01 „ „ -2, „ $10^{-2} = \frac{1}{100}$.

Selle asemel et kirjutada: „arvu 16 logaritm alusel 4", kirjutatakse lühidalt: $\log_4 16$, märkides logaritmi märgist veidi allapoole arvu, mis on võetud aluseks. Muide, kui on varem teada, milline arv on võetud aluseks, siis on tavaks seda mitte kirjutada.

Enne kui kõnelda logaritmide rakendamisest, vaatleme mõningaid niinimetatud logaritmfunktsiooni omadusi.

103. Logaritmfunktsioon ja selle graafik. Kui me võrduses $y = a^x$ vaatleme x-i kui sõltumatut muutujat, siis y on x-i eksponentfunktsioon. Kui me aga võtame selles võrduses sõltumatuks muutujaks y, siis x on y teatav funktsioon, ja nimelt: x on arvu y logaritm alusel a, mida võime tähendada nii:

$$x = \log_a y.$$

Tähistades, nagu meil on kombeks, sõltumatut muutujat tähega x, selle muutuja funktsiooni aga tähega y (s. o. vahetades x-i y-ga ja vastupidi), võime sama funktsiooni väljendada nii:

$$y = \log_a x.$$

Sellist funktsiooni nimetatakse logaritmfunktsiooniks (ta on eksponentfunktsiooni pöördfunktsioon).

Valmistame järgmise kolme logaritmfunktsiooni graafikud:

1) $y = \log_2 x$; 2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$; 3) $y = \log_{10} x$.

Selleks koostame nende funktsioonide väärtuste tabelid. Kõige lihtsamini võib neid koostada vastavate eksponentfunktsioonide tabelite järgi (§ 100):

1) $y = 2^x$; 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; 3) $y = 10^x$,

vahetades neis tabeleis abstsissi x väärtused ordinaadi y väärtuste vastu ja ümberpöördult. Seda tehes saame kolm järgmist tabelit:

1) $y = \log_2 x$.

$x =$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y =$	-3	-2	-1	0	1	2	3

2) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

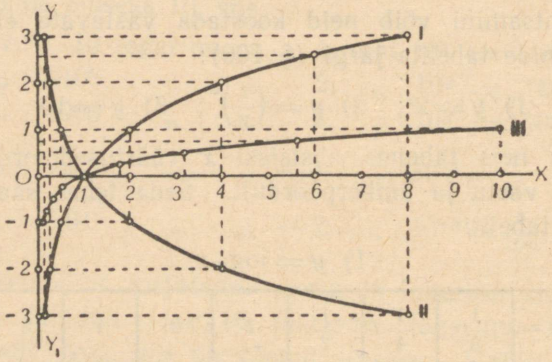
$x =$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$y =$	-3	-2	-1	0	1	2	3

3) $y = \log_{10} x$.

$x =$	0,1	0,17	0,32	0,56	1	1,78	3,16	5,62	10
$y =$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{2}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

Kandes kõik need väärtused joonisele ja ühendades punktid kõverjoontega, saame võetud funktsioonide kolm graafikut (joon. 30).

Omades logaritmfunktsiooni graafikut, võime selle abil leida antud arvu logaritmi ligikaudse väärtuse. Võtame näiteks funktsiooni $y = \log_2 x$ graafiku ja leiame selle abil $\log_2 6$. Selleks võtame joonisel abstsissi, mis on võrdne 6-ga, ja



Joon. 30.

joonestame temale vastava ordinaadi. Mõõtnud selle ordinaadi, saame ligikaudselt 2,6; see ongi $\log_2 6$.

104. Logaritmide põhiomadused. Võtame logaritmfunktsiooni

$$y = \log_a x.$$

Vastavalt logaritmi definitsioonile saame:

$$x = a^y.$$

Tuletame mõningad logaritmide omadused.

1) *Positiivse aluse puhul negatiivsetel arvudel ei ole logaritme.*

Eksponentfunktsiooni vaatlemisel nägime, et kui $a > 0$, siis on funktsiooni $a^y > 0$ y-i iga väärtuse puhul. See tähendab, et millised ka oleksid positiivne alus a ja astendaja (logaritm) y, funktsioon a^y, s. o. x, on alati positiivne arv.

2) *Igasuguse aluse puhul (mis pole võrdne ühega) arvu 1 logaritm on null.*

Tõepoolest, me teame, et mistahes a puhul (mis pole võrdne nulliga) on

$$a^0 = 1.$$

Kuid vastavalt logaritmi definitsioonile tähendab see, et

$$\log_a 1 = 0.$$

3) *Arvust 1 suurema aluse puhul on ühest suuremate arvude logaritmid positiivsed ja ühest väiksemate arvude logaritmid negatiivsed.*

Eksponentfunktsiooni a^y kohta, milles $a > 1$, teame, et kui $y > 0$, siis $a^y = x > 1$, ja kui $y < 0$, siis $a^y = x < 1$.

Kuid vastavalt definitsioonile on y arvu x logaritm. Tähendab, kui arv $x > 1$, siis on tema logaritm $y > 0$, s. o. tema logaritm on positiivne. Kui aga arv $x < 1$, siis on tema logaritm $y < 0$, s. o. tema logaritm on negatiivne.

Kui $a < 1$, siis arvu x väärtustele $x > 1$ vastavad negatiivsed logaritmid ($y < 0$) ja arvu x väärtustele $x < 1$ vastavad positiivsed logaritmid ($y > 0$).

4) *Aluse enda logaritm on üks.*

Tõepoolest:

$$a^1 = a, \text{ kust: } \log_a a = 1.$$

5) *Arvust 1 suurema aluse puhul vastab suuremale arvule ka suurem logaritm.*

Me nägime, et kui $a > 1$, siis y kasvades kasvab ka funktsioon a^y. Kui tähistame y kaks erinevat väärtust tähtedega y_1 ja y_2, a^y vastavad väärtused tähtedega x_1 ja x_2, siis saame:

$$a^{y_2} > a^{y_1}, \text{ kui } y_2 > y_1,$$

ehk

$$x_2 > x_1, \text{ kui } y_2 > y_1.$$

Kuid y_1 ja y_2 on vastavalt arvude x_1 ja x_2 logaritmid. Tähendab,

$$x_2 > x_1, \text{ kui } \log_a x_2 > \log_a x_1.$$

Kõiki nimetatud logaritmide omadusi võib illustreerida logaritmfunktsiooni graafiku abil. Nii tähendab esimene omadus, et funktsiooni $y = \log_a x$ graafik asetseb tervenisti paremal pool y-telge. Teine omadus kõneleb sellest, et funktsiooni $y = \log_a x$ graafik läbib punkti $(1, 0)$. Kolmas omadus tähendab, et kui $a > 1$, siis juhul, kui $x > 1$, on kõvera ordinaadid positiivsed, juhul aga, kui $x < 1$, on ordinaadid negatiivsed, jne.

Harjutused.

171. Millised on arvude

$$2;\ 4;\ 8;\ 16;\ \sqrt{2};\ \sqrt[3]{2};\ 1;\ \tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{4};\ \tfrac{1}{8};\ \tfrac{1}{16}$$

logaritmid, kui logaritmide alus on 2?

172. Kirjutada järgmised võrdused logaritmi märgi abil:

$10^0 = 1;\ 10^1 = 10;\ 10^2 = 100;\ 10^{-2} = 0{,}01;\ a^x = N.$

173. Kirjutada järgmised võrdused ilma logaritmi märgita:

$\log_{10} 1000 = 3;\ \log_{10} 0{,}001 = -3;\ \log_{16} 4 = \tfrac{1}{2};\ \log_a P = y.$

174. Millised on järgmiste arvude logaritmid, kui alus on 16:

$$16;\ 256;\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{256};\ 4;\ \frac{1}{4};\ 2;\ \frac{1}{2}?$$

175. Missugused on järgmiste arvude logaritmid, kui alus on 10:

10; 100; 1000; 10 000; 0,1; 0,001; 0,0001?

176. Kirjutada järgmised võrdused logaritmi märgi abil:

$5^2 = 25;\ 7^3 = 343;\ 3^7 = 2187;\ 8^3 = 512.$

177. Leida: $\log_2 2;\ \log_3 9;\ \log_3 729;\ \log_3 1;\ \log_3 \tfrac{1}{3};\ \log_3 \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

178. Millega võrduvad järgmised avaldised, kui a on 1-st erinev positiivne arv:

$$\log_a a^2;\ \log_a a^n;\ \log_a \frac{1}{a};\ \log_a \sqrt{a};\ \log_a \frac{1}{\sqrt{a}}\ ?$$

179. Millega võrdub arv x, kui

1) $\log_2 x = 3$; 2) $\log_5 x = 2$; 3) $\log_4 x = -5$; 4) $\log_x 4 = 2$;

5) $\log_x 2 = -\frac{1}{2}$?

180. Joonestada funktsiooni $y = \log_3 x$ graafik, kasutades funktsiooni $y = 3^x$ väärtusi (vt. ülesanne 168).

105. Logaritmide tabeli praktiline tähtsus. Mitmesuguseid arve võib väljendada ühe ja sama arvu astmetena, näiteks arvu 10 astmetena. Seesugused arvud, nagu 10; 100; 1000 või 0,1; 0,01; 0,001 jne., väljenduvad arvu 10 astmetena väga lihtsalt: $10 = 10^1$; $100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; ..., $0{,}1 = 10^{-1}$; $0{,}01 = 10^{-2}$; $0{,}001 = 10^{-3}$ jne.[1]. Muid arve on arvu 10 astmetena raskem avaldada. Kui on tarvis leida astendaja, millega on vaja astendada arvu 10, et saada 5, siis võime ainult öelda, et otsitav astendaja on suurem kui 0, kuid väiksem kui 1, sest $10^0 = 1$ on väiksem kui 5, kuid $10^1 = 10$ on suurem kui 5; tähendab, astendajaks, millega on vaja astendada arvu 10, et saada 5, peab olema mingi positiivne arv, mis on väiksem kui 1. Me võime isegi öelda, et see arv on suurem kui $\frac{1}{2}$ ja väiksem kui $\frac{3}{4}$, sest $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3{,}162$ on väiksem kui 5, aga $10^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{10^3} = \sqrt[4]{1000} = \sqrt{\sqrt{1000}} = \sqrt{31{,}62} = 5{,}62$ on suurem kui 5. Matemaatikas on osi, milles näidatakse viise, kuidas iga antud arvu N jaoks leida selline astendaja x, mille puhul aste 10^x võrdub täpselt arvuga N või erineb sellest arvust kuitahes vähe. Neid viise kasutades on koostatud logaritmide tabelid, milledes on toodud mitmesugused arvud ja iga arvu juures on näidatud astendaja (logaritm), millega on vaja astendada arvu 10, et saada seda arvu. Selgitame, mis otstarbeks need tabelid on vajalikud.

[1] Arve, mis on kirjutatud number 1 ja sellele järgnevate või eelnevate nullidega, nagu 10, 100, 1000, ... ning 0,1, 0,01, 0,001, ..., nimetame edaspidi järkühikuteks. — Toim.

Olgu vaja leida arv x valemi järgi $x = \sqrt[5]{40}$.

Meie ei oska leida viiendat juurt. Seesugustel juhtudel võivad abiks olla logaritmide tabelid. Leiame neist tabeleist arvu 40 ja selle juurest vastava logaritmi.

Olgu see 1,6 ... See tähendab, et

$$40 = 10^{1,6\cdots},$$

ja järelikult $\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6\cdots}}$.

Et astme juurimisel astendaja (milline see ka oleks) juuritavas jagatakse juurijaga, siis

$$\sqrt[5]{40} = \sqrt[5]{10^{1,6\cdots}} = 10^{\frac{1,6\cdots}{5}} = 10^{0,32\cdots}.$$

Nüüd leiame logaritmide veerust 0,32 ja selle juurest vastava arvu. Oletame, et see arv on 2,09 ... See ongi avaldise $\sqrt[5]{40}$ ligikaudne väärtus.

Varsti näeme, et logaritmide tabelid lubavad paljudel juhtudel sooritada arvudega selliseid tehteid, mis tabeliteta oleksid äärmiselt tülikad (nagu äsja esitatud näiteski) või mille teostamiseks kuluks väga palju aega.

Nüüd tutvume sellega, kuidas mingi tehte sooritamiseks antud arvudega esiteks antud arvude logaritmide järgi (mis on leitud tabelist) arvutada nõutava tehte tulemuse logaritm ja teiseks kuidas, arvutanud selle logaritmi, selle järgi leida tabelist otsitav arv.

106. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm.

a) Olgu vaja arvutada korrutis

$$378 \cdot 45{,}2.$$

Proovime seda tehet sooritada logaritmide abil. Leiame tabeleist arvude 378 ja 45,2 logaritmid. Olgu need 2,5775 ja 1,6551 (alusel 10). See tähendab, et

$$378 = 10^{2,5775} \text{ ja } 45{,}2 = 10^{1,6551},$$

ja järelikult

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2{,}5775} \cdot 10^{1{,}6551}.$$

Et ühe ja sama arvu astmete korrutamisel nende astendajad liidetakse (millised need astendajad ka oleksid), siis on:

$$378 \cdot 45{,}2 = 10^{2{,}5775 + 1{,}6551} = 10^{4{,}2326}.$$

Tähendab, korrutise $378 \cdot 45{,}2$ logaritm on arv 4,2326, mis saadi antud tegurite logaritmide liitmisel. (Selle logaritmi järgi leiame tabelist ka korrutise enda.)

Oletame üldiselt, et N_1 ja N_2 on kaks arvu, mille korrutis on vaja leida. Olgu tabelist leitud nende arvude logaritmid x_1 ja x_2. Logaritmide aluseks võib olla arv 10 või ka mingi muu positiivne arv, mida tähistame tähega a. Siis saame võrdused:

$$N_1 = a^{x_1},\ N_2 = a^{x_2},\ \text{järelikult}\ N_1 N_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}.$$

Siit nähtub, et $\log (N_1 N_2) = x_1 + x_2$. Kuid x_1 on $\log N_1$ ja x_2 on $\log N_2$; tähendab,

$$\log (N_1 N_2) = \log N_1 + \log N_2.$$

Korrutise logaritm (mistahes alusel) võrdub tegurite logaritmide summaga (samal alusel).

See järeldus jääb kehtivaks ka siis, kui tegureid on rohkem kui kaks, sest ühe ja sama arvu astmete korrutamisel liidetakse astendajad olenemata tegurite arvust.

b) Oletame, et on vaja teostada jagamine:

$$5637 : 26{,}3.$$

Leiame tabeleist nende arvude logaritmid (näiteks alusel 10). Olgu $\log 5637 = 3{,}751$ ja $\log 26{,}3 = 1{,}42$. Siis

$$5637 = 10^{3{,}751} \text{ ja } 26{,}3 = 10^{1{,}42}.$$

Järelikult

$$5637 : 26{,}3 = 10^{3{,}751} : 10^{1{,}42} = 10^{3{,}751 - 1{,}42} = 10^{2{,}331}.$$

Siit nähtub, et jagatise 5637 : 26,3 logaritm on arv 2,331, mis saadi jagaja logaritmi lahutamisel jagatava logaritmist. Üldiselt, kui

$N_1 = a^{x_1}$ ja $N_2 = a^{x_2}$, siis $N_1 : N_2 = a^{x_1} : a^{x_2} = a^{x_1 - x_2}$.

Järelikult

$$\log (N_1 : N_2) = x_1 - x_2 = \log N_1 - \log N_2.$$

Jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega.

Et iga murd on lugeja ja nimetaja jagatis, siis:

Murru logaritm võrdub lugeja ja nimetaja logaritmide vahega.

Näiteks:

$$\log \frac{2}{3} = \log 2 - \log 3; \quad \log 2\frac{3}{4} = \log \frac{11}{4} = \log 11 - \log 4;$$

$$\log 0{,}6 = \log 6 - \log 10.$$

c) Kui $N = a^x$, siis $N^n = (a^x)^n = a^{nx}$;
järelikult

$$\log (N^n) = nx = n \log N.$$

Astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega.

Näiteks $\log (15{,}3)^2 = 2 \log 15{,}3$; $\log 3^{-2} = -2 \log 3$.

d) Et $\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}}$, siis rakendades astme logaritmi juhist saame:

$$\log \sqrt[n]{N} = \log N^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log N = \frac{\log N}{n}.$$

Juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

107. Algebralise avaldise logaritmimine. Logaritmida algebralist avaldist tähendab avaldada tema logaritm aval-

disse kuuluvate üksikute arvude logaritmide abil. Eelmise paragrahvi järeldused lubavad seda teha korrutise, jagatise, astme ja murru suhtes.

Näiteks:

$$1)\ \log \frac{2{,}5 \cdot 7^3}{0{,}28} = \log (2{,}5 \cdot 7^3) - \log 0{,}28 =$$
$$= \log 2{,}5 + \log 7^3 - \log 0{,}28 =$$
$$= \log 2{,}5 + 3 \log 7 - \log 0{,}28.$$

$$2)\ \log \frac{5ax}{\sqrt{3}} = \log (5ax) - \log \sqrt{3} = \log 5 + \log a +$$
$$+ \log x - \tfrac{1}{2} \log 3.$$

$$3)\ \log (a^3 \sqrt{5x}) = 3 \log a + \tfrac{1}{2}(\log 5 + \log x) =$$
$$= 3 \log a + \tfrac{1}{2} \log 5 + \tfrac{1}{2} \log x.$$

108. Märkused. a) Kui avaldises, mille väärtust on vaja arvutada, esineb arvude s u m m a või v a h e, siis tuleb need leida tabelite abita hariliku liitmise või lahutamise teel [1].

Näiteks:

$$\log (35 + 7{,}24)^5 = 5 \log (35 + 7{,}24) = 5 \log 42{,}24.$$

b) Osates logaritmida avaldisi võime ka, vastupidi, logaritmimise antud tulemuse järgi leida selle avaldise, millest see tulemus saadi; näiteks kui

$$\log x = \log a + \log b - 3 \log c,$$

siis on kerge järeldada, et

$$x = \frac{ab}{c^3}.$$

Seda operatsiooni nimetatakse p o t e n t s e e r i m i s e k s.

c) Enne kui asuda logaritmide tabeli ehituse vaatlemisele, osutame mõningaile kümnendlogaritmide, s. o. arvu 10 alusena omavate logaritmide omadustele.

[1] Sest meil ei ole valemeid, mis väljendavad summa või vahe logaritme antud arvude logaritmide kaudu.

Harjutused.

Logaritmida järgmised avaldised:

181. $\log (a^2b^3)$; $\log (5a^3x^2)$; $\log (mn)^3$.

182. $\log \frac{2a^2}{3b^8}$; $\log \frac{4a^3b^{-8}}{5mn^4x^{\frac{1}{2}}}$; $\log \sqrt{ab}$.

183. $\log \sqrt[3]{7a^3b}$; $\log (4\sqrt[5]{2ab^3})$; $\log (7a^8b\sqrt[8]{c})$.

184. $\log \frac{a^3\sqrt{2b}}{8x^3y^2}$; $\log (a^2-b^2)$; $\log (ab-b^2)$.

185. $\log \sqrt{10a\sqrt[3]{b^2}}$; $\log \sqrt{a\sqrt[3]{b}\sqrt{c}}$.

Leida avaldis x tema logaritmi järgi:

186. $\log x = \log a + \log b$; $\log x = \log a - \log b$.

187. $\log x = 2\log a$; $\log x = 2\log a + 3\log b$.

188. $\log x = \frac{1}{2}\log a$; $\log x = \frac{1}{3}(\log a + \log b)$.

II. Kümnendlogaritmide omadused.

109. Kümnendlogaritmide omadused. a) Et $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10\,000$ jne., siis $\log 10 = 1$; $\log 100 = 2$; $\log 1000 = 3$; $\log 10\,000 = 4$ jne.

Ühe ja sellele järgnevate nullidega kirjutatud täisarvu logaritm võrdub nullide arvuga selles arvus.

Seega $\log 100\,000 = 5$, $\log 1\,000\,000 = 6$ jne.

b) Et

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1;\quad 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01;$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = 0{,}001;\quad 10^{-4} = 0{,}0001 \text{ jne., siis}$$

$\log 0{,}1 = -1$; $\log 0{,}01 = -2$; $\log 0{,}001 = -3$ jne.

Ühe ja sellele eelnevate nullidega kirjutatud kümnendmurru logaritm on negatiivne arv, mille absoluutväärtus võr-

dub nullide arvuga kümnendmurrus, kaasa arvatud ka null tervet.

Seega log 0,00001 = — 5; log 0,000001 = — 6 jne.

c) Võtame täisarvu, mis pole mingi järkühik, näiteks täisarvu 35 või segaarvu 10,7. Sellise arvu logaritm ei saa olla täisarv, sest astendades arvu 10 mingi positiivse või negatiivse täisarvuga, saame järkühiku.

Oletame nüüd, et sellise arvu logaritm on mingi murd $\frac{a}{b}$. Siis saame:

arvu 35 korral, et $10^{\frac{a}{b}} = 35$; $\sqrt[b]{10^a} = 35$; $10^a = 35^b$;

arvu 10,7 korral, et $10^{\frac{a}{b}} = 10{,}7$; $\sqrt[b]{10^a} = 10{,}7$; $10^a = 10{,}7^b$.

Kuid need võrdused pole võimalikud, sest 10^a on järkühik, samal ajal kui astmed 35^b ja $10{,}7^b$ ei saa võrduda ühegi järkühikuga, milline ka oleks astendaja b.

Mittejärkühiku logaritm on irratsionaalarv, seda logaritmi ei saa täpselt väljendada ühegi ratsionaalarvuga. Harilikult väljendatakse irratsionaalsed logaritmid ligikaudselt mitmekohaliste kümnendmurdude kujul. Selle murru täisosa nimetatakse logaritmi karakteristikuks ja murdosa logaritmi mantissiks. Kui näiteks logaritm on 1,5441, siis tema karakteristik on 1 ja mantiss on 0,5441.

d) Võtame mingi täis- või segaarvu, näiteks 623 või 623,57. Seesuguse arvu logaritm koosneb täisosast ja murdosast. Ilmneb, et kümnendlogaritmidel on see paremus, et me võime alati leida nende täisosa üksnes juba antud arvu kirjutuse järgi. Selleks loendame, mitu numbrit on antud täisarvus või segaarvu täisosas. Meie näiteis on neid numbreid kolm. Seepärast on kumbki arv 623 ja 623,57 suurem kui 100 ja väiksem kui 1000; tähendab, ka kummagi arvu logaritm on suurem kui log 100,

s. o. suurem kui 2, kuid väiksem kui log 1000, s. o. väiksem kui 3 (meenutame, et suuremal arvul on ka suurem logaritm). Järelikult $\log 623 = 2, \ldots$ ja $\log 623{,}57 = 2, \ldots$ (punktid asendavad tundmatuid murdosi).

Samuti leiame:

$$10 < 56{,}7 < 100; \quad 1000 < 8634 < 10\,000;$$
$$1 < \log 56{,}7 < 2; \quad 3 < \log 8634 < 4.$$

Järelikult

$$\log 56{,}7 = 1, \ldots; \quad \log 8634 = 3, \ldots$$

Olgu antud täisarvus N või segaarvu N täisosas üldse m numbrit. Et väikseim m numbriga kirjutatud täisarv on järkühik $\overbrace{10\ldots0}^{m-1}$, siis võime kirjutada võrratuse:

$$\overbrace{10\ldots0}^{m-1\text{ nulli}} < N < \overbrace{10\ldots00}^{m\text{ nulli}}$$

ja järelikult

$$m - 1 < \log N < m,$$

ning seepärast

$$\log N = (m - 1) + 0, \ldots$$

Tähendab, $\log N$ täisosa võrdub arvuga $m - 1$.
Seega siis näeme, et:

Täis- või segaarvu logaritmi täisosa on 1 võrra väiksem kui selle arvu täisosa numbrite arv.

Täheldanud seda, võime otsekohe kirjutada: $\log 7{,}205 = 0, \ldots$; $\log 83 = 1, \ldots$; $\log 720{,}4 = 2, \ldots$ jne.

e) Võtame mõned kümnendmurrud, mis on väiksemad kui 1 (s. o. milledes on 0 tervet): 0,35; 0,07; 0,0056; 0,0008.

On ilmne, et:	Järelikult:
$0{,}1 < 0{,}35 < 1;$	$-1 < \log 0{,}35 < 0;$
$0{,}01 < 0{,}07 < 0{,}1;$	$-2 < \log 0{,}07 < -1;$
$0{,}001 < 0{,}0056 < 0{,}01;$	$-3 < \log 0{,}0056 < -2;$
$0{,}0001 < 0{,}0008 < 0{,}001;$	$-4 < \log 0{,}0008 < -3.$

Seega asetseb iga antud logaritm kahe negatiivse täisarvu vahel, mis erinevad teineteisest ühe ühelise võrra; seepärast igaüks neist võrdub väiksema negatiivse arvuga, mida suurendatakse teatava ühest väiksema positiivse arvu võrra. Näiteks $\log 0{,}0056 = -3 + 0, \ldots$ Oletame, et see arv $0, \ldots$ on 0,7482. Siis

$$\log 0{,}0056 = -3 + 0{,}7482 = -2{,}2518.$$

Seesuguseid summasid, nagu $-3 + 0{,}7482$, mis koosnevad negatiivsest täisarvust ja positiivsest kümnendmurrust, on kombeks logaritmiliste arvutuste puhul kirjutada lühidalt nii: $\bar{3}{,}7482$ *, s. o. asetada miinusmärk täisosa kohale eesmärgiga näidata, et see kuulub ainult täisosale, mitte aga murdosale, mis jääb positiivseks. Seega nähtub eespool toodud tabelist, et:

$$\log 0{,}35 = \bar{1}, \ldots; \quad \log 0{,}07 = \bar{2}, \ldots; \quad \log 0{,}008 = \bar{4}, \ldots$$

Olgu $A = \overbrace{0{,}0\ldots0}^{m \text{ nulli}}\alpha\beta\ldots$ üldiselt mingi kümnendmurd, mille esimese tüvenumbri ** ees on m nulli, kaasa arvatud 0 tervet. Siis on ilmne, et

$$\overbrace{0{,}000\ldots01}^{m \text{ nulli}} < A < \overbrace{0{,}000\ldots01}^{m-1 \text{ nulli}}.$$

Järelikult

$$\log \overbrace{0{,}000\ldots01}^{m \text{ nulli}} < \log A < \log \overbrace{0{,}000\ldots01}^{m-1 \text{ nulli}},$$

s. o.

$$-m < \log A < -(m-1).$$

---

* Sellist arvu loetakse nii: kolm miinusega koma 7482.

** Arvu t ü v e n u m b r i t e k s nimetame kõiki numbreid selle arvu kirjutuses peale nullide, milledega algab või lõpeb arvu kirjutus. Näiteks arvu 0,005704 tüvenumbrid on 5, 7, 0 ja 4 ning arvu 203 000 tüvenumbrid on 2, 0 ja 3.

Antud arvu tüvenumbritega kirjutatud arvu nimetame antud arvu t ü v e k s. Nii on arvu 0,005704 tüvi 5704 ja arvu 203 000 tüvi 203. — Toim.

Et kahest arvust $-m$ ja $-(m-1)$ väiksem on $-m$, siis

$$\log A = -m + 0, \ldots$$

ja seepärast $\log A$ täisosa $= -m$ (positiivse murdosa korral).

Arvust 1 väiksema kümnendmurru logaritmi täisosa on negatiivne arv, mille absoluutväärtus võrdub selle kümnendmurru esimesele tüvenumbrile eelnevate nullide arvuga, kaasa arvatud ka 0 tervet; sellise logaritmi murdosa on positiivne.

f) Korrutame mingi täis- või murdarvu N järkühikutega 10, 100, 1000 jne. Vaatleme, kuidas muutub seejuures $\log N$. Et korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga, siis

$$\log (N \cdot 10) = \log N + \log 10 = \log N + 1;$$
$$\log (N \cdot 100) = \log N + \log 100 = \log N + 2;$$
$$\log (N \cdot 1000) = \log N + \log 1000 = \log N + 3, \text{ jne.}$$

Kui me arvuga $\log N$ liidame mingi täisarvu, siis suurendame ainult logaritmi täisosa, mitte aga selle murdosa. Näiteks kui $\log N = 2{,}7804$, siis $2{,}7804 + 1 = 3{,}7804$; $2{,}7804 + 2 = 4{,}7804$ jne., või kui $\log N = \bar{3}{,}5649$, siis $\bar{3}{,}5649 + 1 = \bar{2}{,}5649$; $\bar{3}{,}5649 + 2 = \bar{1}{,}5649$ jne. Seepärast:

Mingi arvu korrutamisel järkühikuga logaritmi murdosa ei muutu, täisosa aga suureneb niimitme ühelise võrra, kuimitu nulli on kordajas.

Samuti võttes arvesse, et jagatise logaritm võrdub jagatava ja jagaja logaritmide vahega, saame:

$$\log \frac{N}{10} = \log N - \log 10 = \log N - 1;$$
$$\log \frac{N}{100} = \log N - \log 100 = \log N - 2;$$
$$\log \frac{N}{1000} = \log N - \log 1000 = \log N - 3, \text{ jne.}$$

Kui lepime kokku, et täisarvu lahutamisel logaritmist lahutame selle täisarvu alati täisosast, jättes murdosa muutmata, siis võime öelda, et:

Arvu jagamisel järkühikuga logaritmi murdosa ei muutu, kuid täisosa väheneb niimitme ühelise võrra, kuimitu nulli on jagajas.

110. ***Järeldused.*** a) Koma ümberpaigutamisel arvu kirjutuses arvu logaritmi murdosa ei muutu, sest koma ümberpaigutamine on samaväärne arvu korrutamisega või jagamisega järkühikuga. Seega erinevad arvude 0,00423; 0,0423; 4,23; 423 logaritmid üksteisest ainult täisosadelt, mitte aga murdosadelt (tingimusel, et kõik murdosad on positiivsed).

b) *Ühe ja sama tüvega arvude logaritmide murdosad on võrdsed*; nii erinevad arvude 23, 230, 2300, 23 000 logaritmid üksteisest ainult täisosadelt.

Märkus. Nendest kümnendlogaritmide omadustest nähtub, et me võime leida mistahes arvu logaritmi täisosa ilma tabelita (selles seisab kümnendlogaritmide suur paremus); seepärast on logaritmide tabelites antud ainult logaritmide murdosad; peale selle, kuna murru logaritmi leidmine redutseerub täisarvude logaritmide leidmiseks (murru logaritm võrdub lugeja logaritmi ja nimetaja logaritmi vahega), siis paigutatakse tabeleisse ainult täisarvude logaritmide murdosad.

Harjutused.

189. Leida järgmiste arvude kümnendlogaritmide täisosad: 3; 38; 382; 3824; 3,12; 37,2; 56 315; 726; $57\frac{1}{2}$; $3485\frac{2}{7}$.

190. Millega võrduvad järgmiste murdude kümnendlogaritmid: 0,1; 0,01; 0,001; 0,00001; 0,0000001?

191. Leida järgmiste murdude kümnendlogaritmide täisosad: 0,36; 0,183; 0,02; 0,0036; 0,00056; 0,00000378.

192. Teades, et $\log 2 = 0{,}301$; $\log 3 = 0{,}477$; $\log 7 = 0{,}845$, arvutada esimese kümne loomuliku arvu kümnendlogaritmid.

193. Teades, et $\log 2 = 0{,}30103$ ja $\log 3 = 0{,}47712$, arvutada $\log 0{,}0015$ ja $\log 750$.

194. Mitu numbrit on arvus 2^{100}, kui $\log_{10} 2 = 0{,}30103$?

III. Tabelite ehitus ja kasutamine.

111. Logaritmide süsteem. Logaritmide süsteemiks nimetatakse järjestikuste täisarvude logaritmide kogumit, mis on arvutatud ühel ja samal alusel. Kasutatakse kaht logaritmide süsteemi: harilike ehk kümnendlogaritmide süsteemi, mille aluseks on arv 10, ja niinimetatud naturaallogaritmide süsteemi, mille aluseks on irratsionaalarv 2,7182818... (põhjusel, mis selgitatakse kõrgemas matemaatikas). Tegelikul arvutamisel kasutatakse kümnendlogaritme nende eeliste tõttu, milledele oli osutatud §-des 109 ja 110.

Naturaallogaritme nimetatakse ka logaritmide leiutaja šoti matemaatiku Neper'i (ka Napier, elas 1550—1617) nime järgi Neperi logaritmideks ja kümnendlogaritme Briggsi logaritmideks professor Briggs'i (Neperi kaasaeglase ja sõbra) nime järgi, kes esimesena koostas kümnendlogaritmide tabeli [1].

112. Negatiivse logaritmi teisendamine. Me nägime, et arvust 1 väiksemate arvude logaritmid on negatiivsed. Tähendab, neid võib väljendada negatiivsete kümnendmurdude abil. Selliseid logaritme võib alati nii teisendada, et nende murdosa saab positiivseks, täisosa aga jääb negatiivseks. Selleks piisab, kui lisada murdosale positiivne üheline, täisosale aga negatiivne üheline (mistõttu logaritmi väärtus mui-

---

[1] Ühtlasi peab aga ütlema, et Neperi logaritmid pole samased naturaallogaritmidega, vaid on nendega teatavas seoses. Naturaallogaritmid võeti tarvitusele esmakordselt pärast Neperi surma 1619. a. Londoni matemaatikaõpetaja John Spidel'i poolt. Järgmisel, 1620. a. andis šveitslane Bürgi välja oma tabelid, mis ta oli koostanud sõltumatult Neperist.

Tähendame, et 1914. aastal täitus 300 aastat logaritmide leiutamisest, sest Neper andis oma tabelid välja 1614. a. („*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*" nime all).

dugi ei muutu). Kui meil näiteks on logaritm — 2,0873, siis võib seda teisendada nii:

$$-2{,}0873 = -2 - 1 + 1 - 0{,}0873 =$$
$$= -(2 + 1) + (1 - 0{,}0873) = -3 + 0{,}9127$$

ehk lühidalt:

$$-2{,}0873 = \overset{-1+1}{-2{,}0873} = \bar{3}{,}9127.$$

Vastupidi, igat negatiivse täisosaga ja positiivse murdosaga logaritmi võib esitada negatiivse kümnendmurruna. Selleks piisab, kui lisada positiivsele murdosale —1 ja negatiivsele täisosale +1 *.

Nii võib kirjutada:

$$\bar{7}{,}8302 = \overset{+1-1}{7{,}8302} = -6{,}1698.$$

113. Neljakohaliste tabelite kirjeldus ja kasutamine. Enamiku praktiliste ülesannete lahendamiseks piisab neljakohalistest tabelitest, mille käsitamine on üsna lihtne **. Väike väljavõte neist tabeleist (nende ehituse selgitamiseks) on trükitud järgmisel leheküljel. Neis sisalduvad kõikide täisarvude 1 kuni 9999 (viimane kaasa arvatud) logaritmide murdosad, mis on arvutatud neljakohaliste kümnendmurdudena, kusjuures viimane koht on suurendatud 1 võrra kõigil

* Nende teisenduste teostamiseks tuleb liita +1 ja —1: üks neist liidetakse täisosaga, teine murdosaga. Et mitte eksida, kummale liita +1 ja kummale —1, on soovitav alati lähtuda antud logaritmi murdosast ja arutella nii: olgu antud logaritmis murdosa negatiivne, kuid see on vaja teha positiivseks; siis tuleb sellega liita +1 ja seepärast tuleb ka täisosaga liita —1; olgu antud logaritmis murdosa positiivne, kuid see on vaja teha negatiivseks (kogu logaritm peab olema negatiivne); siis tuleb sellele lisada —1 ja järelikult täisosale lisada +1.

** Suurt täpsust nõudvail juhtudel kasutatakse viiekohalisi tabeleid ja mõnikord isegi seitsmekohalisi (näiteks Georg Vega „Logaritmilis-trigonomeetriline käsiraamat"). Selliste tabelite kasutamist juhendatakse nende sissejuhatustes.

neil juhtudel, kui viies number oleks olnud 5 või üle 5; neljakohalised tabelid annavad järelikult ligikaudsed murdosad täpsusega kuni ½ kümnetuhandikku (puudusega või liiaga).

Logaritmide murdosad.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	123	345	678
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	123	345	678
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	122	345	677
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	122	345	667
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	122	345	667
55	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Et me täisarvu või kümnendmurru logaritmi täisosa võime kümnendlogaritmide omaduste põhjal leida vahetult, siis on tabelis antud ainult logaritmide murdosad; seejuures on vaja meeles pidada, et kümnendmurrus ei ole koma asetusel, samuti nullide arvul arvu kirjutuse alguses ja lõpus mingit mõju logaritmi murdosa suurusele. Seepärast jätame antud arvu logaritmi murdosa leidmisel arvu kirjutuses koma tähele panemata, samuti nullid tema alguses ja lõpus, kui neid on, ja leiame seejärel tekkinud täisarvu (s. o. arvu tüve) logaritmi murdosa. Seejuures võib esineda kolm juhtu:

1) *Täisarv on kirjutatud kolme numbriga.* Olgu näiteks vaja leida arvu 536 logaritmi murdosa. Otsime üles selle arvu esimesed kaks kohta, s. o. 53, tabeli esimeses veerus (vt. sellel leheküljel trükitud tabelit). Leidnud arvu 53, liigume samas reas sellest arvust paremale kuni selle rea lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on antud arvu kolmas number, s. o. meie näites number 6. Lõikekohas leiame arvu 536 logaritmi murdosa 7292 (s. o. 0,7292). Samuti

leiame, et arvu 508 logaritmi murdosa on 0,7059 ja arvu 500 logaritmi murdosa on 0,6990 jne.

2) *Täisarv on kirjutatud kahe või ühe numbriga.* Sel juhul lisame mõttes arvu kirjutusele ühe või kaks nulli ja leiame sel teel tekkinud kolmekohalise arvu logaritmi murdosa. Näiteks arvule 51 lisame juurde ühe nulli, mille tõttu saame arvu 510, ja leiame, et logaritmi murdosa on 7076; arvule 5 lisame juurde kaks nulli ja leiame, et logaritmi murdosa on 6990, jne.

3) *Täisarv on kirjutatud nelja numbriga.* Näiteks on vaja leida log 5436 murdosa. Sel juhul leiame algul tabelist, nagu äsja näitasime, antud arvu esimese kolme numbriga kirjutatud arvu, s. o. arvu 543 logaritmi murdosa (see murdosa on 7348); seejärel liigume leitud murdosa juurest samas reas paremale (tabeli paremasse ossa, mis asetseb teispool kahekordset püstjoont) kuni lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on antud arvu neljas number, s. o. meie näites number 6. Lõikekohas leiame paranduse (arv 5), mis tuleb peast liita murdosaga 7348, et saada arvu 5436 logaritmi murdosa; sel viisil leiame, et logaritmi murdosa on 0,7353.

4) *Täisarv on kirjutatud viie või enama numbriga.* Heidame ära kõik numbrid, peale esimese nelja, s. o. võtame antud arvu tüve neljakohalise ligikaudse väärtuse, kusjuures suurendame selle arvu viimast numbrit ühe võrra juhul, kui äraheidetud viies number on 5 või üle 5. Nii võtame 57 842 asemel 5784, 30 257 asemel 3026, 583 263 asemel 5833 jne. Selle ümardatud neljakohalise arvu logaritmi murdosa leiame nii, nagu äsja selgitasime.

Juhendudes neist osundustest leiame järgmiste arvude logaritmid:

36,5; 804,7; 0,26; 0,00345; 7,2634; 3456,86.

Kasutamata tabeleid kirjutame välja eelkõige logaritmide

täisosad, jättes ruumi murdosade jaoks, mis kirjutame juurde hiljem:

$$\log 36{,}5 = 1, \ldots; \quad \log 0{,}00345 = \bar{3}, \ldots;$$
$$\log 804{,}7 = 2, \ldots; \quad \log 7{,}2634 = 0, \ldots;$$
$$\log 0{,}26 = \bar{1}, \ldots; \quad \log 3456{,}86 = 3, \ldots.$$

Edasi lisandame tabelist leitud murdosad:

$$\log 36{,}5 = 1{,}5623; \quad \log 0{,}00345 = \bar{3}{,}5378;$$
$$\log 804{,}7 = 2{,}9056; \quad \log 7{,}2634 = 0{,}8611;$$
$$\log 0{,}26 = \bar{1}{,}4150; \quad \log 3456{,}86 = 3{,}5387.$$

114. Interpoleerimine. Mõnedes neljakohalistes tabelites ei ole antud arvu neljandale numbrile vastavaid parandusi. Kui on tegemist selliste tabelitega, siis tuleb need parandused leida lihtsa arvutamise teel, mida võib teostada järgmise teoreemi alusel: kui arvud ületavad 100 ja nende vahed on alla ühe, siis võib ilma tunduva veata väita, et:

Logaritmide juurdekasvud on võrdelised vastavate arvude juurdekasvudega [1].

Olgu näiteks vaja leida arvu 5367 logaritmi murdosa. See murdosa on mõistagi sama, mis arvu 536,7 logaritmilgi. Tabelist leiame arvu 536 logaritmi murdosa 7292. Võrreldes

[1] Vaadeldes logaritmfunktsiooni $y = \log_{10} x$ graafikut (§ 103) märkame, et isegi väikeste arvude puhul (näiteks arvude puhul 3 kuni 10) graafik väga vähe erineb sirgjoonest. Kui seda graafikut pikendada paremale vastavalt abstsissi väärtustele 10-st kuni 100-ni (s. o. 90 pikkusühiku võrra piki x-telge), siis kasvaksid ordinaadid ainult 1-st kuni 2-ni, sest $\log 10 = 1$ ja $\log 100 = 2$; graafiku edasisel pikendamisel vastavalt abstsissi väärtustele 100-st kuni 1000-ni (s. o. 900 pikkusühiku võrra) suureneksid ordinaadid jälle ainult ühe ühiku võrra. Tähendab, sajast suuremate arvude puhul võib tunduva veata eeldada, et funktsiooni $y = \log_{10} x$ graafik langeb ühte sirgega. Kuid see tähendab eeldada, et selliste arvude puhul on ordinaatide juurdekasvud võrdelised abstsisside juurdekasvudega, s. o. teiste sõnadega, et logaritmide vahed on võrdelised arvude vahedega.

seda murdosa paremal oleva naabermurdosaga 7300, mis vastab arvule 537, märkame, et kui arv 536 suureneb 1 võrra, siis logaritmi murdosa suureneb 8 kümnetuhandiku võrra (8 on niinimetatud tabelivahe kahe naabruses oleva murdosa vahel); kui aga arv 536 suureneb 0,7 võrra, siis logaritmi murdosa suureneb mitte 8 kümnetuhandiku võrra, vaid teatava väiksema arvu võrra: x kümnetuhandiku võrra, mis vastavalt eeldatud võrdelisusele peab rahuldama võrret $x : 8 = 0{,}7 : 1$, kust saame, et $x = 8 \cdot 0{,}7 = 5{,}6$, mis pärast ümardamist annab 6 kümnetuhandikku. Tähendab, arvu 536,7 (ja järelikult ka arvu 5367) logaritmi murdosa on $7292 + 6 = 7298$, s. o. 0,7298.

Tähendame, et kahe tabelis kõrvuti seisva arvu järgi vahepealse arvu leidmist nimetatakse interpoleerimiseks. Siin kirjeldatud interpoleerimist nimetatakse võrdeliseks interpoleerimiseks, sest see põhineb oletusel, et logaritmi juurdekasv on võrdeline arvu juurdekasvuga. Seda nimetatakse ka lineaarseks interpoleerimiseks, kuna see eeldab, et logaritmfunktsiooni muutumist kujutab sirgjoon.

115. Antilogaritmide tabelid. Arvu leidmiseks antud logaritmi järgi võib kasutada samu tabeleid, mille järgi leitakse antud arvude logaritmide murdosad, kuid on soovitav kasutada teisi tabeleid, milledes on antud niinimetatud antilogaritmid, s. o. arvud, mis vastavad antud logaritmide murdosadele. Selgituseks on väike väljavõte neist paigutatud leheküljele 164.

Olgu antud neljakohaline logaritmi murdosa 2863 (täisosa jätame tähele panemata) ja olgu vaja leida sellele vastav täisarv. Omades antilogaritmide tabeleid, tuleb neid kasutada samuti, nagu varem seletatud antud arvu logaritmi murdosa leidmisel, ja nimelt: tuleb leida logaritmi murdosa esimesed kaks numbrit esimesest veerust (arvude ees olev punkt asendab koma, mis eraldab logaritmi täisosa murdosast). Seejärel liigume nende numbrite juurest samas reas

paremale kuni lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on logaritmi murdosa kolmas number. Lõikekohas leiame neljakohalise arvu 1932, mille logaritmi murdosa on 286. Seejärel liigume selle arvu juurest edasi samas reas kuni lõikumiseni veeruga, mille pealkirjaks on logaritmi murdosa neljas number. Lõikekohas leiame paranduse 1, mis on vaja peast liita varem leitud arvuga 1932, et saada arv, mille logaritmi murdosa on 2863.

Antilogaritmid.

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	123	456	789
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	011	222	334
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	011	223	334
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	011	223	334
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	011	223	344
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	011	223	344
.30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Seega otsitav arv on 1933. Pärast seda, pöörates tähelepanu antud logaritmi täisosale, tuleb arvus 1933 asetada vastavale kohale koma.

Toome mõningad näited:

kui $\log x = 3{,}2863$, siis $x = 1933$;
„ $\log x = 1{,}2863$, „ $x = 19{,}33$;
„ $\log x = 0{,}2863$, „ $x = 1{,}933$;
„ $\log x = \bar{2}{,}2863$, „ $x = 0{,}0193$;
„ $\log x = 0{,}2287$, „ $x = 1{,}693$;
„ $\log x = \bar{1}{,}7635$, „ $x = 0{,}5801$;
„ $\log x = 3{,}5029$, „ $x = 3184$;
„ $\log x = \bar{2}{,}0436$, „ $x = 0{,}01106$, jne.

Kui logaritmi murdosas on antud viis või enam numbrit, siis võtame ainult esimesed neli numbrit, heites ära ülejää-

nud (ja suurendades neljandat numbrit 1 võrra, kui viies number on 5 või enam). Näiteks murdosa 35478 asemel võtame 3548, 47562 asemel 4756.

116. Märkus interpoleerimise kohta. Logaritmi murdosa neljandale ja järgmistele numbritele vastava paranduse võib leida ka interpoleerimise teel. Kui näiteks logaritmi murdosa on 84357, siis leidnud arvu 6966, mis vastab murdosale 843, võime edasi arutella nii: kui logaritmi murdosa suureneb (1 tuhandiku võrra), s. o. kui ta saab 844-ks, siis arv, nagu nähtub tabelist, suureneb 16 ühelise võrra; kui aga logaritmi murdosa suureneb mitte ühe tuhandiku võrra, vaid 0,57 tuhandiku võrra, siis arv suureneb x ühelise võrra, kusjuures x peab rahuldama võrret:

$$x : 16 = 0{,}57 : 1, \quad \text{kust} \quad x = 16 \cdot 0{,}57 = 9{,}12.$$

Tähendab, otsitav arv on $6966 + 9{,}12 = 6975{,}12$ ehk (piirdudes ainult nelja numbriga) 6975.

117. Tehted logaritmidega, millede täisosad on negatiivsed. Logaritmide liitmine ja lahutamine ei valmista mingit raskust, nagu nähtub järgmistest näidetest:

$\bar{2},9734$	$\bar{3},8384$	$\bar{1},0384$	$0,0052$
$+\ 1,8302$	$+\ \bar{5},8804$	$-\ 5,9630$	$-\ \bar{4},5736$
$0,8036$	$\bar{7},7188$	$\bar{7},0754$	$3,4316$

Samuti ei tekita mingisugust raskust logaritmi korrutamine positiivse arvuga, näiteks:

$\bar{3},5837$	$\bar{2},4735$
$\times 9$	$\times 34$
$\bar{22},2533$	18940
	14205
	$16,0990$
	$-\ 68$
	$\bar{52},0990$

Viimases näites on korrutatud 34-ga esmalt positiivne murdosa ja seejärel negatiivne täisosa ning tulemused liidetud.

Kui negatiivse täisosaga ja positiivse murdosaga logaritm korrutatakse negatiivse arvuga, siis võib toimida kahte viisi: kas muudetakse antud logaritm algul negatiivseks või korrutatakse eraldi tema murdosa ja täisosa ning tulemused liidetakse, näiteks:

$$\bar{3},5632 \cdot (-4) = -2,4368 \cdot (-4) = 9,7472;$$
$$\bar{3},5632 \cdot (-4) = +12 - 2,2528 = 9,7472.$$

Jagamisel võib esineda kaks juhtu: esiteks negatiivne täisosa jagub jagajaga; teiseks negatiivne täisosa ei jagu jagajaga. Esimesel juhul jagatakse täisosa ja murdosa eraldi:

$$\overline{10},3784 : 5 = \bar{2},0757.$$

Teisel juhul lisatakse täisosale niimitu negatiivset ühte, kuni tekkinud arv jagub jagajaga, murdosale aga lisatakse niisama palju positiivseid ühtesid:

$$\bar{3},7608 : 8 = (-8 + 5,7608) : 8 = \bar{1},7201.$$

See teisendamine tuleb teha peast ja tehe sooritatakse järgmiselt:

$$\bar{3},7608 : 8 = \bar{1},7201 \text{ ehk } \begin{array}{r|l} \bar{3},7608 & 8 \\ \hline & \bar{1},7201 \end{array}$$

118. Lahutatavate logaritmide teisendamine liidetavaiks. Mingi keeruka avaldise väärtuse arvutamisel logaritmide abil tuleb mõningaid logaritme liita, teisi lahutada; sel juhul harilikult arvutatakse eraldi liidetavate logaritmide summa ja lahutatavate logaritmide summa ning lahutatakse esimesest summast teine summa. Näiteks kui meil on

$$\log x = 2,7305 - \bar{2},0740 + \bar{3},5464 - 8,3589,$$

siis sooritatakse tehted harilikult nii:

$$\begin{array}{rrr} 2{,}7305 & \bar{2}{,}0740 & 0{,}2769 \\ +\ \bar{3}{,}5464 & +\ 8{,}3589 & -\ 6{,}4329 \\ \hline 0{,}2769 & 6{,}4329 & \bar{7}{,}8440 = \log x \end{array}$$

Kuid logaritmide lahutamist on võimalik asendada liitmisega. Näiteks:

$$-\bar{2}{,}0740 = 2 - 0{,}0740 = 1{,}9260,$$
$$-8{,}3589 = \overset{-1+1}{-} 8{,}3589 = \bar{9}{,}6411.$$

Nüüd võib korraldada arvutamise nii:

$$\begin{array}{r} 2{,}7305 \\ 1{,}9260 \\ +\ \bar{3}{,}5464 \\ \bar{9}{,}6411 \\ \hline \bar{7}{,}8440 = \log x \end{array}$$

119. Logaritmidega arvutamise näiteid.

Näide 1. Arvutada avaldise

$$x = \frac{\sqrt[3]{A} \cdot B^4}{C^3 \cdot \sqrt[3]{D}}$$

väärtus, kui $A = 0{,}8216$, $B = 0{,}04826$, $C = 0{,}005127$ ja $D = 7{,}246$.

Logaritmime antud avaldise:

$$\log x = \frac{1}{3}\log A + 4 \log B - 3 \log C - \frac{1}{3}\log D.$$

Et vältida liigset ajakaotust ja vähendada vigade võima-

lusi, koostame eelkõige arvutuste skeemi, jättes arvutused algul teostamata ning tabelid kasutamata:

$\log A = \log 0{,}8216 = \bar{1}, \ldots\ldots$	$\frac{1}{3}\log A =$
$\log B = \log 0{,}04826 = \bar{2}, \ldots\ldots$	$4 \log B =$
$\log C = \log 0{,}005127 = \bar{3}, \ldots\ldots$	$-3 \log C =$
$3 \log C \ldots\ldots\ldots =$	$-\frac{1}{3}\log D =$
$\log D = \log 7{,}246 = 0, \ldots\ldots$	$\log x =$
$\frac{1}{3}\log D \ldots\ldots\ldots =$	$x =$

Pärast seda võtame tabelid ja kirjutame vabaksjäetud kohtadele logaritmid:

$\log A = \log 0{,}8216 = \bar{1},9146$	$\frac{1}{3}\log A = \bar{1},9715$
$\log B = \log 0{,}04826 = \bar{2},6835$	$4 \log B = \bar{6},7340$
$\log C = \log 0{,}005127 = \bar{3},7099$	$-3 \log C = 6{,}8703$
$3 \log C \ldots\ldots\ldots = \bar{7},1297$	$-\frac{1}{3}\log D = \bar{1},7133$
$\log D = \log 7{,}246 = 0{,}8601$	$\log x = 1{,}2891$
$\frac{1}{3}\log D \ldots\ldots\ldots = 0{,}2867$	$x = 19{,}45$

Näide 2. Arvutada $x = (-2{,}31)^3 \sqrt[5]{72} = -2{,}31^3 \sqrt[5]{72}$.

Et negatiivseil arvudel ei ole logaritme, siis leiame esialgu: $x' = 2{,}31^3 \sqrt[5]{72}$.

$$\log x' = 3 \log 2{,}31 + \frac{1}{5}\log 72.$$

Pärast arvutamist ilmneb, et $x' = 28{,}99$, järelikult $x = -28{,}99$.

Näide 3. Arvutada: $x = \sqrt[3]{\sqrt[5]{8} + \sqrt[4]{3}}$.

Siin ei ole võimalik kogu arvutamist teostada logaritmide abil, sest juuremärgi all on summa. Säärastel juhtudel arvutatakse avaldise väärtus osade kaupa. Algul leiame $N = \sqrt[5]{8}$, siis $N_1 = \sqrt[4]{3}$; edasi tavalise liitmise teel leiame $N + N_1$ ja lõpuks arvutame $\sqrt[3]{N + N_1}$; ilmneb, et

$$N = 1{,}516;\ N_1 = 1{,}316;\ N + N_1 = 2{,}832;$$

$$\log x = \log \sqrt[3]{2{,}832} = \frac{1}{3} \log 2{,}832 = 0{,}1507;\ x = 1{,}415.$$

Harjutused.

195. Muuta järgmiste negatiivsete logaritmide murdosad positiivseks: $-2{,}3789$; $-1{,}0760$; $-0{,}0058$; $-5{,}6700$.

196. Teisendada järgmised logaritmid negatiivseks: $\bar{2}{,}7359$; $\bar{1}{,}0803$; $\bar{4}{,}0760$; $\bar{1}{,}0023$.

Leida tabelist järgmiste arvude logaritmid:

197. 9; 26; 573; 55,78; 7,414; 0,7557.

198. 5,634; 10,083; 0,20738; 0,00534.

Leida arvud järgmiste logaritmide järgi:

199. 2,8676; 1,3496; 0,0111; 3,1412.

200. 1,6628; 2,3114; 0,5100; 1,5806.

201. 3,7467; $-1{,}0834$; $-0{,}6347$; $-3{,}9134$.

(Viimases kolmes näites on algul vaja logaritmid teisendada.)

Teostada logaritmide abil järgmised tehted:

202. $+\begin{cases}\bar{2}{,}7308\\ \bar{3}{,}9683\end{cases}$; $+\begin{cases}1{,}5734\\ \bar{2}{,}8430\end{cases}$; $+\begin{cases}\bar{2}{,}0387\\ \bar{1}{,}7857\end{cases}$.

203. $-\begin{cases}0{,}3756\\ \bar{2}{,}7489\end{cases}$; $\bar{2}{,}7403 \times 7$.

204. $\bar{1}{,}4018 \times 9$; $\bar{3}{,}5612 \times 36$.

205. $\bar{3}{,}5603 \times (-23)$; $\overline{12}{,}6310 : 4$.

206. $\bar{3}{,}0274 : 5$; $\bar{2}{,}5074 : 7$.

Järgmistes näidetes asendada lahutamine liitmisega:

207. $-3{,}2603$; $-7{,}5920$; $-0{,}4168$.

208. $-\bar{1}{,}5609$; $-\bar{2}{,}3754$; $-3{,}0406$.

Arvutada logaritmide abil järgmiste avaldiste väärtused:

209. $0{,}03714^3$; $\sqrt[3]{0{,}3571}$; $\sqrt[6]{235{,}8}$.

210. $\sqrt[3]{\frac{13}{17}}$; $\sqrt[3]{17705}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{85 \cdot 77}}$. 211. $\left(2\frac{5}{6}\right)^9$; $\frac{0{,}7361 \cdot 0{,}03715}{2{,}165 \cdot 0{,}8717}$.

212. $\sqrt[3]{\frac{0{,}07624}{3{,}142 \cdot 27{,}05}}$; $\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$. 213. $\sqrt[3]{\frac{716{,}5}{\sqrt[4]{2}}}$; $2{,}718^{-8{,}142}$.

214. Mitu numbrit on arvus 3^{20}?

215. Läbides klaasplaadi kaotab valguskiir oma intensiivsusest $\frac{1}{10}$ osa. Milline osa valguskiire alg-intensiivsusest jääb järele, kui kiir on läbinud 10 seesugust plaati?

216. Arvutada kera ruumala valemi järgi $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, kui $R = 5{,}875$ ja $\pi = 3{,}142$.

217. Kolmnurga küljed on a, b ja c. Arvutada kolmnurga pindala S valemi järgi:

$$S = \sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)},$$

milles p on kolmnurga poolümbermõõt, s. o. $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, kui küljed on: 1) 6 cm; 8 cm; 9 cm; 2) 0,927 m; 1,135 m; 0,575 m.

218. Õõnessilindri ruumala V avaldatakse valemiga:

$$V = \pi(R^2 - r^2)h,$$

milles h on kõrgus, R — põhja välimine raadius ja r — põhja sisemine raadius.

Arvutada V, kui $R = 74{,}35$ m, $r = 42{,}63$ m, $h = 132{,}8$ m ja $\pi = 3{,}142$.

219. Pendli ühe poolvõngu kestus (s. o. aeg, mille jooksul pendel liigub paremast äärmisest asendist vasakusse äärmisse asendisse) avaldatakse valemiga (kui nurk pendli ja püstsihi vahel ei ületa 3^0):

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

kus t on poolvõngu kestus (sekundeis), l — pendli pikkus (sentimeetreis), g — raskustungi kiirendus (sentimeeter ruutsekundis) ja π — ringjoone pikkuse suhe diameetriga. Leida aeg t, kui $l = 100$ cm, $g = 981{,}5\,\frac{\text{cm}}{\text{sek}^2}$ ja $\pi = 3{,}142$.

120. Viiekohaliste tabelite kasutamine. Täpsemateks arvutusteks kasutatakse viiekohaliste logaritmide tabeleid. Neis

tabeleis on arvude logaritmid arvutatud täpsusega 0,00001 (õigemini täpsusega 0,000005). Enim kasutatavad on E. Prževalski koostatud tabelid. Anname nende kasutamiseks lühikesi näpunäiteid.

1. Tabelite esimene lehekülg sisaldab arvude 1 kuni 100 logaritmide murdosi. Kuid seda lehekülge võib ka mitte kasutada, otsides neid murdosi kolmekohaliste arvude logaritmide hulgast. Et leida arvude 67; 6,7; 0,0067 jne. logaritmid, kirjutatakse vastav täisosa ja otsitakse arvu 670 logaritmi murdosa.

2. Olgu arvul kolm tüvenumbrit. (Peame meeles, et null kahe tüvenumbri vahel on ka tüvenumber.) See arv otsitakse üles vastava lehekülje esimeses veerus (pealkirjaga *N*). Samast reast ja veerust pealkirjaga 0 leitakse vastav murdosa.

3. Olgu arvul neli tüvenumbrit. Veerust pealkirjaga *N* otsitakse üles arv, mis on kirjutatud antud arvu esimese kolme numbriga.

Samast reast ja veerust, mille pealkirjaks on antud arvu neljas number, leiame otsitava murdosa.

Näide. Leida log 84,37. Täisosa on 1.

Otsime üles veerust *N* arvu 843. Läheme samas reas sellest arvust paremale. Veerust pealkirjaga 7 leiame vastava murdosa 92619. Seega log 84,87 = 1,92619.

4. Arvul on rohkem kui neli tüvenumbrit. Võtame arvu, mis on kirjutatud antud arvu esimese kolme numbriga, ja leiame selle arvu logaritmi murdosa. Edasi toimime samuti nagu neljakohaliste tabelite kasutamisel, s. o. kas koostame võrde või kasutame tabelikest, mis asetseb parempoolses äärmises veerus pealkirja P. P. (*partes proportionales*) all.

Näide. log 187,367.

Otsime üles arvu 187 ning selles reas ja veerus 3 leiame murdosa 27254. Arvutame järgneva murdosa ja leitud murd-

osa vahe (tabelivahe). See on 23. Parempoolses äärmises veerus arvu 23 all leiame numbrile 6 vastava paranduse 13,8 (sajatuhandikku) ja numbrile 7 vastava paranduse 16,1. Arvutuse korraldame nii:

1873	27254
6	138
7	161
187367	2726941

Seega $\log 187{,}367 = 2{,}27269$.

IV. Eksponent- ja logaritmvõrrandid.

121. Võrrandite näiteid. Eksponentvõrrandeiks nimetame selliseid võrrandeid, kus tundmatu esineb astendajas, logaritmvõrrandeiks aga selliseid, kus tundmatu esineb logaritmitavas. Sääraseid võrrandeid saab lahendada elementaarsete võtetega ainult erijuhtudel, kusjuures tuleb toetuda logaritmide omadustele ning asjaolule, et võrdsete arvude logaritmid on võrdsed, ja ümberpöördult — võrdsetele logaritmidele vastavad võrdsed arvud.

Näide 1. Lahendada võrrand $2^x = 1024$.

Logaritmime võrrandi mõlemad pooled:

$$x \log 2 = \log 1024;\ x = \frac{\log 1024}{\log 2} = \frac{3{,}01030}{0{,}30103} = 10.$$

Näide 2. Lahendada võrrand $a^{2x} - a^x = 1$.

Oletades, et $a^x = y$, saame ruutvõrrandi $y^2 - y - 1 = 0$, kust leiame:

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Järelikult

$$a^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ja } a^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Et $1 - \sqrt{5} < 0$, siis viimasel võrrandil lahendeid ei ole (kui a on positiivne arv), esimene aga annab

$$x = \frac{\log(1 + \sqrt{5}) - \log 2}{\log a}.$$

Näide 3. Lahendada võrrand $\log(a + x) + \log(b + x) = \log(c + x)$.

Võrrandi võib kirjutada nii:

$$\log[(a + x)(b + x] = \log(c + x).$$

Et ühe ja sama aluse puhul võrdsetele logaritmidele vastavad võrdsed arvud, siis

$$(a + x)(b + x) = c + x;$$

see on ruutvõrrand, mis on kergesti lahendatav.

122. Liitkasviku valem. Ülesanne. Milliseks summaks muutub t aasta jooksul a rubla suurune hoius, kui ta kannab igal aastal $p\%$ liitkasvikut?

Öeldakse, et hoius kannab liitkasvikut, kui võetakse arvesse niinimetatud „kasviku kasvik", s. o. kui hoiusele arvatakse juurde iga aasta lõpul kasvik, et see järgneval aastal samuti kannaks kasvikut.

Hoiuse iga rubla, mis on antud hoiule p protsendiga, annab aasta jooksul kasvikut $\frac{p}{100}$ rubla ja järelikult hoiuse iga rubla muutub aasta pärast $1 + \frac{p}{100}$ rublaks (näiteks kui hoius on 5%-line, siis muutub iga rubla aasta pärast 1,05 rublaks). Tähistades murru $\frac{p}{100}$ lühiduse pärast tähega r, võime öelda, et hoiuse iga rubla muutub aasta pärast $1 + r$ rublaks, järelikult a rubla muutub aasta jooksul $a(1 + r)$ rublaks. Veel aasta pärast, s. o. kahe aasta pärast arvates hoiule andmise algusest, muutub iga $a(1 + r)$ rubla

uuesti $1+r$ rublaks; tähendab, kogu hoius muutub $a(1+r)^2$ rublaks. Samal viisil leiame, et kolme aasta pärast on hoius $a(1+r)^3$, nelja aasta pärast $a(1+r)^4, \ldots$, üldiselt t aasta pärast, kui t on täisarv, muutub hoius $a(1+r)^t$ rublaks. Seega tähistades tähega A rahasumma, milleks hoius muutub t aasta pärast, saame järgmise liitkasviku valemi:

$$A = a(1+r)^t, \text{ kus } r = \frac{1}{100}.$$

Selle valemi järgi on kerge leida ühte neljast arvust A, a, r (või p) ja t, kui on antud ülejäänud kolm.

Näide. Olgu $a = 2300$ rubla, $p = 4$, $t = 20$ aastat;

$$r = \frac{4}{100} = 0{,}04; \quad A = 2300 \cdot 1{,}04^{20}.$$

$$\log A = \log 2300 + 20 \log 1{,}04 = 3{,}3617 +$$
$$+ 20 \cdot 0{,}0170 = 3{,}3617 + 0{,}3400 = 3{,}7017.$$

$$A = 5031 \text{ rubla}.$$

Märkused. 1) Selles näites tuli meil korrutada log 1,04 arvuga 20. Et arv 0,0170 on log 1,04 ligikaudne väärtus täpsusega kuni $\frac{1}{2}$ kümnetuhandikku, siis on selle arvu ja arvu 20 korrutis täpne ainult kuni $\frac{1}{2} \cdot 20$, s. o. kuni 10 kümnetuhandikuni ehk ühe tuhandikuni. Seepärast ei saa me summas 3,7017 vastutada mitte üksnes kümnetuhandikuliste numbri eest, vaid isegi mitte tuhandikuliste numbri eest. Et sellistel juhtudel saada suuremat täpsust, on parem kasutada mitte arvu $1+r$ neljakohalisi logaritme, vaid suurema numbrite arvuga logaritme, näiteks seitsmekohalisi. Sel eesmärgil toome lk. 175 väikese tabelikese, milles on antud arvu p mõnedele väärtustele vastavad arvu $1+r$ seitsmekohalised logaritmid.

2) Liitkasviku valemit kasutatakse mitte ainult rahandusküsimustes, vaid mõnikord ka looduslikke protsesse käsitlevate ülesannete lahendamisel, näiteks mingi maa elanike arvu määramisel, metsa puude juurdekasvu arvutamisel jms.

p	$1+r$	$\log(1+r)$
3	1,03	0,0128372
$3\frac{1}{4}$	1,0325	0,0138901
$3\frac{1}{2}$	1,035	0,0149403
$3\frac{3}{4}$	1,0375	0,0159881
4	1,04	0,0170333
$4\frac{1}{4}$	1,0425	0,0180761
$4\frac{1}{2}$	1,045	0,0191163
$4\frac{3}{4}$	1,0475	0,0201540
5	1,05	0,0211893

Harjutused.

Lahendada võrrandid:

220. $3^x = 243$; $2^{2x} = 512$; $5^{x+2} = 3125$.

221. $10^x = 3$; $5^x = 10$; $10^{4x} = 5{,}754$.

222. $4{,}097^x = 3652$; $\left(\frac{5}{6}\right)^x = 2{,}48$.

223. $3^{\sqrt{x}} = 243$; $0{,}55^x = 2{,}718$; $\sqrt[x]{16} = \sqrt{4^x}$.

224. $2^x + 4^x = 72$; $9^{x+1} - 3^{x+3} = 486$.

225. $\log(x-1) + \log(x+1) = \log 2$.

226. $\frac{1}{3}\log x^3 = 5 \log x$.

227. $\log x^2 + \log 8x = 2 \log x + \log x^2$.

228. Reservuaarist, mille sisemine ruumala on 6 dm^3, pumbatakse õhku välja õhupumbaga, mille imemissilindri ruumala on 2 dm^3. Mitu pumba kolvi tõmmet on vaja teha, et viia õhu hõrendus reservuaaris kuni $\frac{1}{200}$-ni algrõhust (kahjuliku ruumala mõju hüljata)?

229. Mitme aastaga kahekordistub kapital, mis kannab hoiul 5% liitkasvikut?

Juhend. Algkapital on x, lõppkapital on $2x$; võrrandit saab taandada x-ga.

230. Sama ülesanne, kui kapital on hoiul, kandes 4% liitkasvikut.

231. Kiirgamise tõttu väheneb raadium kaalult ja nimelt: 1600 aasta jooksul kaotab iga gramm raadiumi poole oma kaalust. Arvutada raadiumi kaalu aastane kadu protsentides.

232. Teatava maa elanike arv kasvab igal aastal 1,2% võrra. Mitme protsendi võrra kasvab elanike arv 25 aasta jooksul?

Kaheksas jagu.

Võrrandite uurimine.

I. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite uurimine.

123. Mis tähendab võrrandit uurida. Võrrandit uurida tähendab vaadelda kõiki erijuhtusid, mis võivad esineda võrrandi lahendamisel, ja selgitada nende juhtude tähendust ülesande seisukohalt, mille tingimuste kohaselt võrrand koostati.

124. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi üldkuju. Varemalt nägime (I osa, § 88), et ühe tundmatuga esimese astme võrrand pärast vajalikke teisendusi (sulgude avamine, nimetajaist vabastamine, tundmatute viimine võrrandi ühele poolele ja tuntud arvude viimine teisele poolele, sarnaste liikmete koondamine) omandab lihtsaima kuju:

$$ax = b,$$

kus a ja b võivad olla positiivsed, negatiivsed või nulliga võrdsed arvud.

Vaatleme, mis liiki lahendid on sel võrrandil arvude a ja b mitmesuguste numbriliste väärtuste puhul.

125. Positiivne lahend. Selline lahend saadakse siis, kui arvud a ja b on mõlemad positiivsed või mõlemad negatiivsed. Olgu näiteks $3x = 6$ või $-3x = -6$. Siis saame:

$$x = \frac{6}{3} = 2 \text{ või } x = \frac{-6}{-3} = 2.$$

Positiivne lahend, rahuldades võrrandit, rahuldab koos sellega ka ülesannet, mille tingimuste kohaselt võrrand on koostatud. Mõnikord juhtub, et mitte kõik ülesande tingimused pole võrrandiga väljendatud; siis võib positiivne lahend võrrandit ka mitte rahuldada. Toome selle kohta näite.

Ülesanne. 20 inimesest (täiskasvanuist ja noorukeist) koosnev töölisring korraldas korjanduse raamatukogule raamatute ostmiseks, kusjuures iga täiskasvanu annetas 3 rubla ja iga nooruk 1 rubla. Kui palju oli selles ringis täiskasvanuid ja kui palju noorukeid, kui kogu korjandus andis 35 rubla?

Tähistame täiskasvanute arvu tähega x; siis noorukite arv on $20 - x$ ning täiskasvanute poolt kokkupandud rahasumma on $3x$ rubla ja noorukite poolt kokkupandud rahasumma on $(20 - x)$ rubla. Järelikult saame võrrandi

$$3x + (20 - x) = 35, \text{ kust } x = 7\tfrac{1}{2}.$$

See positiivne lahend rahuldab küll võrrandit, kuid ei rahulda ülesannet, sest ülesande mõtte kohaselt peab otsitav arv olema täisarv. Erinevus ülesande ja võrrandi vahel tuleneb siin sellest, et võrrand ei sisalda eneses ülesandes eeldatavat nõuet, et otsitav arv oleks täisarv. Esitatud ülesandel ei ole lahendeid.

126. Negatiivne lahend. Selline lahend saadakse võrrandile $ax = b$ siis, kui arvudel a ja b on vastupidised märgid. Olgu näiteks

$$5x = -15 \quad \text{või} \quad -5x = 15;$$

siis

$$x = \frac{-15}{5} = -3 \text{ või } x = \frac{15}{-5} = -3.$$

Et näidata, mis mõttes tuleb mõista negatiivset lahendit $x = -m$, osutame tähelepanu sellele, et kui arv $-m$ rahuldab antud võrrandit $ax = b$, siis võrdus $-am = b$ peab

olema samasus; tähendab, positiivne arv m rahuldab siis teist võrrandit $-ax=b$, mis saadakse antud võrrandist, kui x asendame selles avaldisega $-x$. Toetudes sellele märkusele ja saanud negatiivse lahendi $x=-m$, võime toimida nii: asendame võrrandis x $-x$-ga; saame uue võrrandi, millel peab olema positiivne lahend $x=m$. Uus võrrand muidugi ei vasta esitatud ülesandele; vaadeldes seda lähemalt, leiame kergesti, kuidas tuleb ülesannet muuta, et tal oleks positiivne lahend $x=m$.

Näitena toome sellise lihtsa ülesande.

Isa on 40 aastane, poeg aga 10 aastane. Mitme aasta pärast on isa pojast 7 korda vanem?

Tähistame otsitava arvu tähega x.

On ilmne, et x aasta pärast on isa vanus $40+x$ ja poja vanus $10+x$. Tingimuse kohaselt on

$$40+x=7(10+x), \text{ kust } x=-5.$$

Asendades võrrandis x $-x$-ga, saame uue võrrandi $40-x=7(10-x)$, mis vastab samale ülesandele, kuid muudetud küsimusega ja nimelt: mitme aasta eest oli isa pojast 7 korda vanem?

Samalaadsetest näidetest märkame, et negatiivset lahendit tuleb mõista vastupidises mõttes sellele, milles mõistetakse positiivset lahendit; kui positiivne lahend tähendab aega pärast teatavat sündmust, siis negatiivne lahend tähendab aega enne seda sündmust; kui esimene tähendab sissetulekut, siis teine tähendab väljaminekut jne. Kui aga juhtub, et ülesande mõtte kohaselt ei saa tundmatut arvu x mõista kahes vastupidises mõttes, siis negatiivne lahend tähendab, et ülesandel lahendeid pole.

127. Lahend null. Oletame, et võrrandis $ax=b$ arv b on null, koefitsient a aga mingi nullist erinev arv. Olgu antud näiteks võrrand $4x=0$. Tähendab, korrutis $4x$ peab võrduma nulliga. Kuid korrutis võrdub nulliga ainult siis,

kui üks tegureist võrdub nulliga; järelikult tegur x peab võrduma nulliga. Ka valemist $x = \frac{0}{4}$ nähtub, et $x = 0$.

Ülesanne. Missugune arv on vaja liita murru $\frac{13}{26}$ lugejaga ja nimetajaga, et saada $\frac{1}{2}$?

Tähistades otsitava arvu tähega x, saame võrrandi:

$$\frac{13 + x}{26 + x} = \frac{1}{2},$$

kust $$26 + 2x = 26 + x; \quad x = 0.$$

See tähendab, et see murd ise võrdubki poolega.

128. Juhtum, mil võrrandil pole lahendit. Olgu võrrandis $ax = b$ arv a null, b aga nullist erinev arv, näiteks $0 \cdot x = 10$. Selline võrdus on võimatu, sest missuguse väärtuse me x-le ka annaksime, korrutis $0 \cdot x$ on võrdne nulliga, mitte aga 10-ga.

Olgu näiteks selline võrrand:

$$\frac{x}{2} - 4 + \frac{x}{3} = 7 + \frac{5x}{6}.$$

Lahendame ta, nagu harilikult (ühine nimetaja on 6):

$$3x - 24 + 2x = 42 + 5x,$$

s. o.

$$5x = 66 + 5x \text{ ehk } 5x - 5x = 66.$$

Missuguse väärtuse me x-le ka annaksime, vahe $5x - 5x$ on alati null ja mitte 66. Tähendab, esitatud ülesandel pole lahendit. Kui me oleksime märkamata, et koefitsient a on null, jaganud võrrandi $ax = b$ mõlemad pooled arvuga a, siis oleksime saanud x jaoks valemi $x = \frac{b}{a}$. Märgates siis, et $a = 0$, me leiaksime sellest valemist, et $x = \frac{b}{0}$. Et jagamine nulliga on võimatu, siis tuleksime viimase valemi põh-

jal järeldusele, et kui $a = 0$, siis võrrandil $ax = b$ pole lahendit (tähendab, ka ülesandel pole lahendeid).

Kuid pole piisav piirduda ainult selle järeldusega. On otstarbekohane osutada veel ühele tähtsale asjaolule, mille selgitamiseks peame esialgu vaatlema, kuidas muutub murd, kui ta nimetaja piiramatult väheneb, lugeja aga jääb muutumatuks.

129. Kuidas tuleb mõista võrdust $\frac{m}{0} = \pm \infty$. Vähenegu murru $\frac{m}{n}$ nimetaja absoluutväärtuselt ikka rohkem ja rohkem, lähenedes piiramatult nullile, lugeja aga jäägu muutumatuks.

Oletame näiteks, et nimetaja n saab järgmised järjest vähenevad väärtused:

$$n = 0{,}1;\ n = 0{,}01;\ n = 0{,}001;\ n = 0{,}0001 \text{ jne.}$$

Siis murd saab järgmised järjest kasvavad väärtused:

$$\frac{m}{0{,}1} = 10m;\quad \frac{m}{0{,}01} = 100m;\quad \frac{m}{0{,}001} = 1000m;$$

$$\frac{m}{0{,}0001} = 10\,000m \text{ jne.}$$

Siit nähtub, et kui lugeja jääb muutumatuks ja nimetaja läheneb piiramatult nullile, siis murru $\frac{m}{n}$ (mille liikmed võivad olla negatiivsed arvud) absoluutväärtus väheneb piiramatult. Seda asjaolu väljendatakse lühidalt kirjas nii:

$$\frac{m}{0} = \pm \infty,$$

kus märk ∞ tähendab „lõpmatust". Seda üleskirjutust ei tohi mõista sõnasõnaliselt, sest jagamine nulliga on võimatu; see ainult märgib lühidalt, et murru absoluutväärtus suureneb piiramatult (või nagu mõnikord öeldakse, *pürib lõpmatusele*), kui nimetaja läheneb piiramatult nullile ja lugeja jääb muutumatuks, kusjuures murd ise jääb kas

positiivseks või negatiivseks (olenevalt sellest, kas nullile pürgival nimetajal on lugejaga ühesugune või vastupidine märk).

130. Nüüd võime eelmise paragrahvi uurimist täiendada järgmiselt:

Kui $a = 0$, siis ei ole võrrandil $ax = b$ lahendit; kui aga a ei võrdu nulliga, vaid ainult läheneb nullile ikka lähemale ja lähemale, siis lahendi absoluutväärtus kasvab piiramatult.

131. Määramatu lahend. Kui võrrandis $ax = b$ mõlemad arvud a ja b osutuvad nulliks, siis võrrand muutub samasuseks $0 \cdot x = 0$, mis on kehtiv x-i iga väärtuse puhul. Tähendab, sel juhul osutub võrrand määramatuks, s. o. ta võimaldab lugematut arvu suvalisi lahendeid.

Kui me jagaksime võrrandi mõlemad pooled märkamata, et $a = 0$, arvuga a, siis saaksime x väärtuseks murru $\frac{b}{a}$, mis juhul, kui $b = 0$ ja $a = 0$, muutuks avaldiseks $\frac{0}{0}$. Sellel avaldisel ei ole numbrilist väärtust.

Võtame näite.

Ülesanne. Missugune arv tuleb liita murru $\frac{a}{b}$ lugejaga ja nimetajaga, et see murd võrduks arvuga m?

Tähistades otsitava arvu tähega x, saame võrrandi:

$$\frac{a+x}{b+x} = m,$$

kust

$$a + x = bm + mx; \quad x - mx = bm - a; \quad (1 - m)x = bm - a.$$

Kui $m \neq 1$, siis $x = \frac{bm - a}{1 - m}$.

Oletame, et $m = 1$ ja vahe $b - a$ on mingi nullist erinev arv (positiivne või negatiivne). Siis saame x jaoks võrrandi:

$$0 \cdot x = b - a.$$

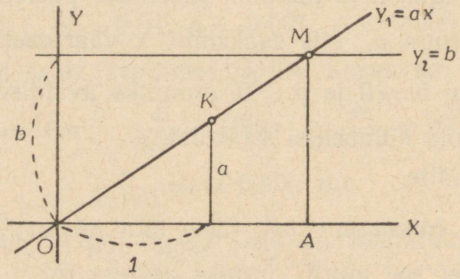
Siit võime järeldada, et kui $m = 1$ ja $b \neq a$, siis pole olemas mingit arvu x, mis rahuldaks ülesande nõuet; kui aga m pole võrdne 1-ga, vaid ainult läheneb 1-le, siis suureneb arvu x numbriline väärtus piiramatult.

Kui $m = 1$ puhul ka veel $b = a$, siis saadakse x jaoks võrrand

$$0 \cdot x = 0,$$

millest võib järeldada, et x iga väärtus rahuldab ülesande nõuet (ja tõesti: murd $\frac{a+x}{b+x}$ võrdub x iga väärtuse puhul arvuga 1, kui $a = b$).

132. Võrrandi $ax = b$ lahendi graafiline tõlgendamine. Tähistame võrrandi vasaku poole tähega y_1 ja parema



Joon. 31.

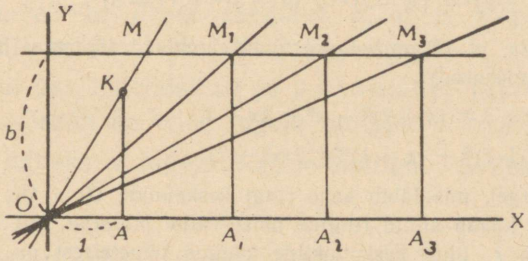
poole tähega y_2 ning joonestame ühel ja samal joonisel kahe funktsiooni $y_1 = ax$ ja $y_2 = b$ graafikud.

Esimese funktsiooni graafik on sirge, mis läbib koordinaatide alguse ja punkti $(1, a)$; teise funktsiooni graafik on x-teljega paralleelne sirge, mis lõikab y-teljelt lõigu b (joonisel 31 kujutasime juhtu, mil $a > 0$ ja $b > 0$; jätame lugejale võimaluse teha joonis juhtudeks, kui: 1) $a > 0$, $b < 0$; 2) $a < 0$, $b > 0$ ja 3) $a < 0$ ja $b < 0$). Need kaks sirget lõikuvad punktis M, mille abstsiss OA ongi võrrandi

$ax = b$ lahend, sest selle abstsissi puhul sirge $y_1 = ax$ ordinaat on võrdne sirge $y_2 = b$ ordinaadiga ja järelikult $ax = b$.

Kasutades seesugust graafilist kujutust, võime näitlikult tõlgendada võrrandi $ax = b$ lahendamise kõiki juhtusid. Piirdume kahe juhu vaatlemisega: 1) võrrandil pole lahendit ja 2) võrrandil on määramatu lahend.

1) *Võrrandil ei ole lahendit* (joon. 32). Vähendades koefitsiendi a numbrilist väärtust, sunnime sirget $y = ax$



Joon. 32.

üha rohkem x-teljele lähenema. Siis eemaldub punkt M, kus sirge $y = b$ lõikub sirgega $y = ax$, üha rohkem paremale, läbides asendeid M_1, M_2, M_3 jne., kusjuures lõikepunkti abstsiss OA suureneb piiramatult, läbides väärtusi OA_1, OA_2, OA_3 jne. Tähendab, kui a piiramatult väheneb, lähenedes nullile, siis võrrandi $ax = b$ lahend kasvab piiramatult (mida võib väljendada nii: $x = \frac{b}{0} = \infty$).

2) *Määramatu lahend* tekib, nagu nägime (§ 131), juhul, kui $a = b = 0$. Et seda juhtu tõlgendada graafiliselt, kujutleme, et joonisel 32 suurus b väheneb, lähenedes nullile; siis hakkab sirge $y_2 = b$, jäädes paralleelseks x-teljega, sellele teljele üha lähenema ja ühtib sellega, kui $b = 0$. Teiselt poolt muutub sirge $y_1 = ax$, kui $a = 0$, samuti x-teljeks. Siis

ühtivad x-teljega kaks sirget $y_2 = b$ ja $y_1 = ax$ ning järelikult võib selle telje iga punkti pidada lõikepunktiks; tähendab, lahendi väärtus jääb määramatuks.

Harjutused.

Veenduda, et järgmistel võrranditel ei ole lahendeid (redutseeruvad võimatuteks võrdusteks):

233. $\frac{5x+1}{6} + \frac{x+3}{4} = x + 1 + \frac{x-3}{12}$.

234. $(x+2)^2 + (x-2)^2 = (x+3)^2 + (x-3)^2$.

Veenduda, et järgmised võrrandid annavad lõpmata hulga lahendeid (on samasused):

235. $8x + 3 = (x+2)^2 - x^2 + 4x - 1$.

236. $(x+1)^2 + (x-1)^2 = 2(x^2+1)$.

237. Sirgel, mis läbib kahe ringi keskpunkte O ja O_1, leida punkt, milles sirge lõikab antud ringide ühist välist puutujat, kui ringi raadiused on r ja r_1 ning keskpunktide kaugus teineteisest on d.

238. Leida sama ühise seesmise puutuja jaoks.

II. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi uurimine.

133. Üldvalemid. Selle õpiku esimeses osas (§ 97) nägime, et kahe võrrandi süsteem

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

annab tundmatute jaoks järgmised valemid:

$$(ab' - a'b)x = (b'c - bc'); \quad (ab' - a'b)y = (ac' - a'c). \qquad (1)$$

Kui $ab' - a'b \neq 0$, siis

$$x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}; \quad y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}. \qquad (2)$$

134. Uurimine. Nende valemite uurimisel vaatleme kahte juhtu:

1) Ühine nimetaja $ab' - a'b$ ei võrdu nulliga.

Sel juhul on süsteemil üks lahend. Selle lahendi tähenduse kohta ülesande seisukohalt, mille tingimuste kohaselt on vaadeldav süsteem koostatud, võib öelda sama, mis oli öeldud varem ühe ühe tundmatuga võrrandi uurimisel.

2) Ühine nimetaja $ab' - a'b = 0$. Sel juhul võivad lugejad valemites (2) nullist erineda kui ka nulliga võrduda. Tõestame, et kui ükski arvudest a, a', b, b' pole nulliga võrdne, siis kehtivad järgmised kaks lauset:

a) Kui üks lugejaist x-i ja y-i valemites (2) võrdub nulliga, siis võrdub ka teine lugeja nulliga.

Olgu näiteks x lugeja võrdne nulliga. Selleks on vajalik, et:

$$cb' = c'b;$$

peale selle on antud, et $ab' = a'b$.

Korrutades esimese võrduse vasaku poole teise võrduse parema poolega ja esimese võrduse parema poole teise võrduse vasaku poolega, saame:

$$cb'a'b = c'bab', \text{ kust } cb'a'b - c'bab' = 0,$$

ja järelikult $$bb'(a'c - ac') = 0.$$

Et arvud b ja b' pole võrdsed nulliga, siis on viimane võrrand võimalik üksnes siis, kui $a'c - ac' = 0$, s. o. kui y lugeja on võrdne nulliga.

Samuti, kui oletame, et y lugeja valemites (2) on võrdne nulliga (s. o. $ac' = a'c$ ja $ab' = a'b$), siis saame:

$$ac'a'b = a'cab'; \; aa'(c'b - cb') = 0; \; c'b = cb' = 0.$$

b) Kui valemites (2) ühe tundmatu lugeja pole võrdne nulliga, siis pole ka teise tundmatu lugeja võrdne nulliga.

Tõepoolest, kui lugeja ühe tundmatu valemis oleks võrdne

nulliga, siis oleks lause a kohaselt ka lugeja teise tundmatu valemis võrdne nulliga.

Kui kummagi tundmatu lugeja valemites (2) on null, siis tähendab see, et ülesanne on määramatu. Tõepoolest, korrutades esimese võrrandi liikmeid arvuga b' ja teise võrrandi liikmeid arvuga b (mida võib teha, sest eelduse kohaselt pole arvud b ja b' nulliga võrdsed), saame:

$$ab'x + bb'y = cb' \text{ ja } a'bx + b'by = c'b. \qquad [A]$$

Kuid $ab' = a'b$ ja $cb' = c'b$; järelikult mõlemad võrrandid [A] kujutavad enesest tegelikult ühte kahe tundmatuga võrrandit, ja sel juhul, nagu teame, võib tundmatuil olla lugematu hulk väärtusi.

Kui valemites (2) lugejad pole võrdsed nulliga ja $ab' - a'b = 0$, siis tähendab see, et võrrandid on teineteisega sobimatud. Tõesti, kui $ab' = a'b$ ja $cb' \neq c'b$, siis on süsteemi [A] vasakutel pooltel võrdsed numbrilised väärtused, paremal pooltel aga erinevad väärtused; tähendab, võrrandid on teineteisega sobimatud ja ülesandel lahendit pole.

On kasulik märkida, et juhul, kui võrrandid (1) omandavad kuju $0x = 0$, $0y = 0$, siis ei tähenda see veel, et mõlemale tundmatule võib anda suvalisi väärtusi. Valides ühe tundmatu väärtused suvaliselt, määrame sellega kindlaks teise tundmatu väärtused, leides nad ühest antud kahest võrrandist.

Seega, kui $ab' - a'b \neq 0$, siis leitakse süsteemi

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

lahendid üldvalemite järgi; kui aga $ab' - a'b = 0$, kuid ükski arvudest a, b, a', b' ei muutu nulliks, siis on võrrandil kas arvutu hulk lahendeid või pole ühtegi lahendit. Juhtu, mil $ab' - a'b = 0$ ja peale selle üks arvudest a, b, a', b' võrdub nulliga, meie ei vaatle.

III. Ruutvõrrandi uurimine.

135. Valemite uurimine. Täieliku ruutvõrrandi $ax^2 + bx + c = 0$ lahendite valemid on, nagu teame,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Arvu a võtame positiivsena (kui ta oleks negatiivne, siis võiksime me võrrandi kõigi liikmete märgid muuta vastupidiseks; arvu a väärtus ei saa olla null, sest vastasel korral poleks võrrand ruutvõrrand, vaid ta muutuks esimese astme võrrandiks).

Varem kõnelesime (§ 42), et ruutvõrrandi lahendid on mõlemad reaalsed või mõlemad komplekssed olenevalt sellest, kas diskriminandi $b^2 - 4ac$ väärtus on positiivne või negatiivne.

Vaatleme seda küsimust lähemalt: 1) Kui $b^2 - 4ac > 0$, siis $\sqrt{b^2 - 4ac}$ on mingi positiivne arv (meenutame, et märk $\sqrt{\ }$ tähistab siin juure aritmeetilist väärtust); lahendid x_1 ja x_2 on järelikult reaalsed ja ebavõrdsed. Seejuures võib esineda kolm juhtu:

a) Mõlemad lahendid on positiivsed, kui $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$ ja $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$; selleks on tarvis, et arv b oleks negatiivne (positiivse b puhul oleks lahend x_2 negatiivne) ja et b absoluutväärtus oleks suurem kui $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

b) Mõlemad lahendid on negatiivsed, kui $-b + \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$ ja $-b - \sqrt{b^2 - 4ac} < 0$; selleks on tarvis, et b oleks positiivne arv (negatiivse b puhul oleks lahend x_1 ilmselt positiivne), ja peale selle, et oleks rahuldatud võrratus $b > \sqrt{b^2 - 4ac}$.

c) Üks lahend on positiivne ja teine negatiivne, kui

arv b, olles positiivne või negatiivne, on absoluutväärtuselt väiksem kui $\sqrt{b^2 - 4ac}$.

2) Kui $b^2 - 4ac = 0$, siis on lahendid reaalsed ja võrdsed: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$, positiivsed või negatiivsed (või võrdsed nulliga, kui $b = 0$).

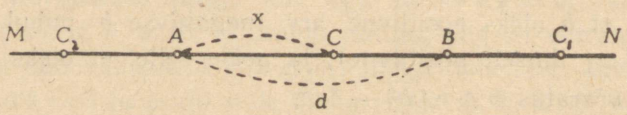
3) Kui $b^2 - 4ac < 0$, siis on mõlemad lahendid kompleksed (see juhtum on võimatu, kui $c < 0$).

4) Null-lahendid esinevad ainult sel juhul, kui lahendite valemeis üks lugejaist või mõlemad lugejad võrduvad nulliga. Esimene juhtum esineb siis, kui $c = 0$ ja järelikult võrrandil on kuju: $ax^2 + bx = 0$; teine esineb siis, kui $c = 0$ ja $b = 0$, s. o. kui võrrand on $ax^2 = 0$.

5) Kui $a = 0$, siis ei ole võrrand ruutvõrrand, vaid esimese astme võrrand $bx + c = 0$. Kuid asetanud küsimuse, kuidas muutuvad x_1 ja x_2, kui a piiramatult läheneb nullile, tuleme analoogilisele järeldusele, mille tegime esimese astme võrrandite kohta. Nimelt: kui a piiramatult läheneb nullile, siis üks ruutvõrrandi lahendeid kasvab piiramatult, teine aga läheneb piiramatult väärtusele $-\frac{c}{b}$.

136. Ülesanne kahest valgusallikast. Et näite varal selgitada ruutvõrrandite lahendamisel esinevate mitmesuguste juhtude tähendust, toome ülesande kahest valgusallikast.

Sirgel MN asetsevates punktides A ja B on kaks valgusallikat. Esimese allika valgustugevus võrdub a küünlaga ja teise oma b küünlaga. Kaugus A ja B vahel on d meetrit. Leida sirgel MN selline punkt, kus mõlemalt valgusallikalt saadavad pinnavalgustused oleksid võrdsed (joon. 33).



Joon. 33.

Otsitav punkt võib asetseda kas A ja B vahel või punktist B paremal või punktist A vasakul.

Oletame, et ta asetseb A ja B vahel, näiteks punktis C, mis on punktist A x meetri kaugusel. Füüsikast on teada, et pinnavalgustus on muudel võrdsetel tingimustel pöördvõrdeline valgusallika kauguse ruuduga. Arvestades seda seadust, arutleme nii: kui punkt C asetseks punktist A 1 meetri kaugusel, siis valgustaks see valgusallikas punkti C a küünla tugevuselt; et aga punkt C asetseb punktist A mitte 1 meetri, vaid x meetri kaugusel, siis on tema pinnavalgustus $\frac{a}{x^2}$ luksi.

Samuti leiame, et punktis C, mis asetseb valgusallikast B $(d-x)$ meetri kaugusel, on punktist B saadav pinnavalgustus $\frac{b}{(d-x)^2}$ luksi. Ülesanne nõuab, et

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d-x)^2}, \tag{1}$$

kust

$$a(d-x)^2 = bx^2, \text{ s. o. } ad^2 - 2adx + ax^2 - bx^2 = 0,$$
$$(a-b)x^2 - 2adx + ad^2 = 0.$$

Et x koefitsient jagub arvuga 2, siis (§ 125, 1):

$$x = \frac{ad \pm \sqrt{a^2d^2 - (a-b)ad^2}}{a-b} = \frac{ad \pm d\sqrt{ab}}{a-b} = \frac{d\sqrt{a}(\sqrt{a} \pm \sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}.$$

Järelikult

$$x_1 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}, \quad x_2 = \frac{d\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

Uurime neid valemeid. Et a ja b on positiivsed arvud, siis pole sellel ülesandel komplekssеid lahendeid.

1) Kui $a > b$, siis on mõlemad lahendid positiivsed, ning kuna

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} < \sqrt{a} < \sqrt{a}+\sqrt{b}, \text{ siis } x_1 > d \text{ ja } x_2 < d.$$

Teine lahend vastab meie oletusele, et otsitav punkt asetseb A ja B vahel; esimene lahend aga räägib selle vastu. Et otsustada, kas seda lahendit pidada õigeks või mitte, peame vaatlema, missuguse võrrandi saame, kui oletame, et otsitav punkt on punktist B paremal (näiteks punktis C_1) x meetri kaugusel punktist A. Siis tema valgusallikalt A saadav pinnavalgustus on endiselt $\frac{a}{x^2}$; valgusallikast B asetseb punkt C_1 $x - d$ meetri kaugusel; seepärast punkti C valgusallikalt B saadav pinnavalgustus on $\frac{b}{(x-d)^2}$ ja võrrand on siis:

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(x-d)^2}. \tag{2}$$

Võrreldes seda võrrandit võrrandiga (1), leiame, et nad on identsed, sest

$$(d - x)^2 = (x - d)^2.$$

Märganud seda, võime kinnitada, et võrrandi (1) mõlemad positiivsed lahendid rahuldavad ülesannet.

2) Kui $a < b$, siis x_1 on negatiivne arv ja x_2 on positiivne arv, kusjuures $x_2 < d$. Positiivne lahend vastab oletusele, et otsitav punkt asetseb A ja B vahel. Et selgitada negatiivse lahendi mõtet, asendame x-i võrrandis (1) $-x$-ga;

$$\frac{a}{(-x)^2} = \frac{b}{(d+x^2)}$$

ehk

$$\frac{a}{x^2} = \frac{b}{(d+x)^2}. \tag{3}$$

Võrrandil (3) on samad lahendid, mis võrrandil (1), ainult et need on vastupidiste märkidega. Tähendab, võrrandi (1) negatiivse lahendi absoluutväärtus võrdub võrrandi (3) positiivse lahendiga. Kuid see viimane vastab samale ülesandele, ainult teistsugusel oletusel ja nimelt, et

otsitav punkt asetseb vasakul valgusallikast A. Tõepoolest, kui oletame, et otsitav punkt on C_2, mis asetseb x meetri kaugusel valgusallikast A, siis leiame, et tema valgusallikalt A saadav pinnavalgustus on $\frac{a}{x^2}$ ja valgusallikalt B saadav pinnavalgustus on $\frac{b}{(d+x)^2}$; järelikult võrrand (3) rahuldab seda oletust.

Võrrandi (1) negatiivne lahend tähendab seega, et kaugus x_1 tuleb võtta vastupidises suunas sellele, millises loetakse positiivset lahendit.

3) Kui $a=b$, siis kaotab x_1 avaldis mõtte, teise lahendi valem aga annab $x_2=\frac{d}{2}$.

Arutelles samuti nagu §-s 129, järeldame: sedamööda, kuidas suurused a ja b lähenevad võrdsusele, x_1 kasvab piiramatult, s. o. mõlemast valgusallikast võrdselt valgustatud punkt eemaldub valgusallikaist piiramatult.

Teine lahend $x_2=\frac{d}{2}$ näitab, et kui $a=b$, siis teine võrdselt valgustatud punkt asetseb võrdsetel kaugustel võrdsete tugevustega valgusallikatest nende vahel.

4) Kui $a=b$ ja $d=0$, siis muutub võrrand (2) samasuseks,

$$0\cdot x^2-0\cdot x+0=0,$$

mis on kehtiv x-i iga väärtuse puhul. Tähendab, ülesanne jääb määramatuks.

Tõepoolest, kui ühesuguse tugevusega valgusallikad asetsevad ühes kohas ($d=0$), siis on iga vabalt võetud punkt valgustatud nende poolt ühe ja sellesama tugevusega.

5) Kui a ei võrdu b-ga, kuid $d=0$, siis $x_1=x_2=0$. Seda tuleb mõista selles mõttes, et kui kaugus kahe ebavõrdse valgusallika vahel väheneb, lähenedes ikka rohkem ja rohkem nullile, siis lähenevad mõlemad võrdselt valgustatud punktid piiramatult valgusallikale A.

Üheksas jagu.

Imaginaar- ja kompleksarvud.

137. Imaginaararvud. Me kõnelesime juba varem (I osa, § 108), et imaginaararvud tekivad negatiivse arvu juurimisel paarisarvuga.

Edaspidi kõneleme ainult negatiivse arvu ruutjuurest.

Imaginaararvu $\sqrt{-1}$ tähistatakse tavaliselt ühe tähega i (algustäht prantsuskeelsest sõnast *imaginaire*, mis tähendab „kujuteldav") ja nimetatakse imaginaarseks ühikuks. On loomulik järeldada, et $i^2 = -1$ ja $(\sqrt{-a})^2 = -a$. Iga imaginaararvu võib väljendada i ja mingi reaalarvu korrutisena. Näiteks

$$\sqrt{-16} = \sqrt{16(-1)} = 4\sqrt{-1} = 4i.$$

Üldiselt

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2(-1)} = b\sqrt{-1} = bi.$$

138. Kompleksarvud. Arvu, mille kuju on $a + bi$, kus a ja b on reaalarvud, nimetatakse kompleksarvuks[1]; arvu a nimetatakse selle arvu reaalosaks ja arvu bi tema imaginaarosaks. Kui $a = 0$, siis muutub ta

[1] Sõna „kompleksne" tähendab eesti keeles „liitne"; selle nimetuse andis arvudele $a + bi$ esmakordselt saksa matemaatik Gauss (1777—1855). Nimetuse imaginaarne (*imaginaire*) võttis tarvitusele prantsuse matemaatik Descartes 1637. a.

imaginaararvuks bi; kui $b = 0$, siis saame arvu $a + 0 \cdot i$, mida vaadeldakse kui reaalarvu a.

Kompleksarve $a + bi$ ja $a - bi$ nimetatakse kaaskompleksarvudeks. Kompleksarve $a + bi$ ja $-a - bi$ nimetatakse vastupidisteks kompleksarvudeks.

Definitsioon. *Kaks kompleksarvu $a + bi$ ja $a' + b'i$ loetakse võrdseteks siis ja ainult siis, kui*

$$a = a' \text{ ja } b = b'.$$

Sellest definitsioonist järeldub, et kompleksarv $a + bi$ võrdub nulliga siis ja ainult siis, kui $a = 0$ ja $b = 0$.

Tõepoolest, reaalarvu 0 võib kujutada kompleksarvuna nii: $0 + i0$. Eelmise definitsiooni põhjal leiab võrdus $a + bi = 0 + i0$ aset ainult sel tingimusel, kui $a = 0$ ja $b = 0$.

Märkus. Kompleksarvude suhtes pole tehtud mingit kokkulepet, millist arvu pidada suuremaks.

139. Tehted kompleksarvudega. Lepime kokku teostada algebralisi tehteid ja teisendusi kompleksarvudega samade reeglite järgi, millede järgi teostatakse tehteid reaalarvudega, eeldades alati, et $(\sqrt{-a})^2 = -a$.

See juhis on aluseks kompleksarvudega arvutamisel. Et sooritada mingit tehet kompleksarvudega $a + bi$, tuleb sellekujuliste kaksliikmetega teostada tehted samade reeglite järgi, mis tuletati reaalsete liikmetega kaksliikmete jaoks, ja lõpptulemuses kõikjal avaldis i^2 asendada arvuga -1.

Liitmine.

$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) = (a + a_1) + (b + b_1)i;$$
$$(a + bi) + (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) =$$
$$= (a + a_1 + a_2) + (b + b_1 + b_2)i.$$

Siit on kerge näha, et kompleksarvude summal on samad omadused, mis reaalarvude summal, s. o. tal on kommutatiivsuse- ja assotsiatiivsuse-omadus.

Lahutamine.

$$(a + bi) - (a_1 + b_1 i) = (a - a_1) + (b - b_1) i.$$

Tähendame, et kahe kompleksarvu summa või vahe võib osutuda reaalarvuks; näiteks kaaskompleksarvude summa $(a + bi) + (a - bi) = 2a$ on reaalarv.

Korrutamine.

$$(a + bi)(a_1 + b_1 i) = aa_1 + a_1 bi + ab_1 i + bb_1 i^2 = \\ = (aa_1 - bb_1) + (a_1 b + ab_1) i.$$

Samal viisil võib arvutada kolme või enama kompleksarvu korrutise.

Tähendame, et kahe nullist erineva kaaskompleksarvu korrutis $(a + bi)(a - bi)$ on võrdne positiivse reaalarvuga $a^2 + b^2$. Tõepoolest

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2,$$

kuid $i^2 = -1$; järelikult

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Jagamine.

$$\frac{a + bi}{a_1 + b_1 i} = \frac{(a + bi)(a_1 - b_1 i)}{(a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)} = \\ = \frac{(aa_1 + bb_1) + (a_1 b - ab_1) i}{a_1^2 - (b_1 i)^2} = \frac{aa_1 + bb_1}{a_1^2 + b_1^2} + \frac{a_1 b - ab_1}{a_1^2 + a_1^2} i.$$

Astendamine. Esmalt leiame imaginaararvu i astmed, teades, et vastavalt kokkuleppele on i^2 võrdne arvuga -1:

$i^1 = i;$
$i^2 = -1;$
$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;$
$i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = +1;$

$i^5 = i^4 \cdot i = (+1) \cdot i = i;$
$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1;$
$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i;$
$i^8 = i^4 \cdot i^4 = +1$

jne.

Me saame seega neli vahelduvat väärtust:

$$i;\ \ -1;\ \ -i;\ \ +1.$$

Tähendame veel, et i^0 loetakse võrdseks arvuga 1.

Nüüd leiame kergesti avaldise $a + bi$ positiivse täisarvuga astendamise tulemused; nii:

$$(a + bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2i^2 = (a^2 - b^2) + 2abi.$$
$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2(bi) + 3a(bi)^2 + (bi)^3 =$$
$$= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i.$$

Ruutjuure leidmine. Oletame, et

$$\sqrt{a + bi} = x + yi.$$

Siis

$$a + bi = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Järelikult

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a; \\ 2xy = b. \end{cases} \qquad (1)$$

Ruutjuure leidmine redutseerub selle võrrandisüsteemi reaalsete lahendite leidmiseks. Ruutides mõlemad võrrandid ja seejärel liites need, saame:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2 \quad \text{ja} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(Miinusmärk juure ees on ära jäetud, sest arvude x ja y reaalsete väärtuste puhul ei saa avaldise $x^2 + y^2$ väärtus olla negatiivne.) Võtame viimase võrrandi koos võrrandisüsteemi (1) esimese võrrandiga; liites ja lahutades need, saame:

$$x^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2} \quad \text{ja} \quad x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}},$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2} \quad \text{ja} \quad y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Süsteemi (1) teisest võrrandist näeme, et x ja y märgid

peavad olema ühesugused, kui $b > 0$, ja erinevad, kui $b < 0$. Seepärast:

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], \text{ kui } b>0,$$

$$\sqrt{a+bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], \text{ kui } b<0.$$

Näited:

1) $\sqrt{5+12\sqrt{-1}} = \sqrt{5+12i} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}+5}{2}} + \right.$

$$\left. + i\sqrt{\frac{\sqrt{25+144}-5}{2}}\right] = \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} + i\sqrt{\frac{8}{2}}\right) =$$

$$= \pm(\sqrt{9} + i\sqrt{4}) = \pm(3+2i).$$

2) $\sqrt{\sqrt{-1}} = \sqrt{i} = \sqrt{0+1\cdot i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}} + \right.$

$$\left. + i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} + i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}\right).$$

3) $\sqrt{-\sqrt{-1}} = \sqrt{-i} = \sqrt{0-1\cdot i} =$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}+0}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{0+1^2}-0}{2}}\right) =$$

$$= \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}} - i\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{2}\right).$$

Märkus. Suuremate juurijatega juurimist meie ei käsitle.

Harjutused.

239. Kontrollida võrduse $i^7 + i^{18} + i^{25} + i^{35} + i^{97} + i^{100} = 0$ kehtivust.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

240. $(x + i\sqrt{6})(x - i\sqrt{6})$.

241. $\sqrt{4+2\sqrt{-6}}\cdot\sqrt{4-2\sqrt{-6}}$.

242. $(1+i)^4$; $(-2\sqrt{-2})^6$.

Kontrollida ruutimise või kuupimise teel järgmiste võrduste kehtivust:

243. $\sqrt{2i}+\sqrt{-2i}=2$.

244. $\sqrt[3]{i}=-i$.

Sooritada nõutavad tehted:

245. $(\sqrt{9+40i}+\sqrt{9-40i})^2$.

246. $\frac{(a+ib)^2}{a-ib}-\frac{(a-ib)^2}{a+ib}$.

Lihtsustada avaldised:

247. 1) $\frac{1}{-1+i\sqrt{3}}$. 2) $\frac{1}{1+i}+\frac{1}{1-i}$.

248. Tähistanud lühiduse pärast

$$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\alpha_1;\quad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\alpha_2 \text{ ja } 1=\alpha_3,$$

kontrollida järgmiste võrduste kehtivust:

1) $\alpha_1^3=\alpha_2^3=\alpha_3^3=1$; 2) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$; 3) $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3=1$;
4) $\alpha_1^2=\alpha_2$; 5) $\alpha_2^2=\alpha_1$; 6) $1+\alpha_1+\alpha_1^2=0$.

140. Kompleksarvu geomeetriline kujutamine. Iga kompleksarvu $a+bi$ võib kujutada geomeetriliselt.

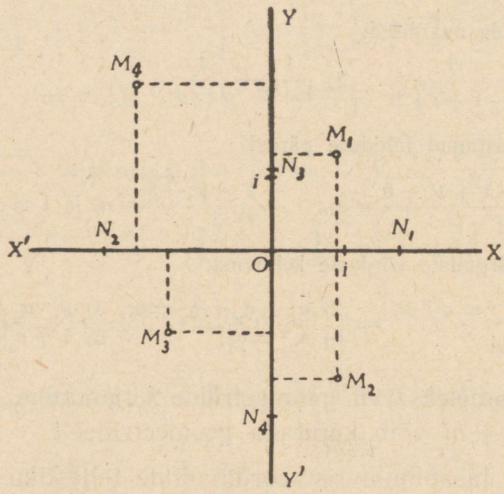
Võtame tasapinnal ristkoordinaatide teljestiku ja, valinud pikkusühiku (näiteks sentimeetri), kujutame reaalarvu x-teljel, imaginaararve aga y-teljel. Vastavalt sellele nimetatakse x-telge reaalteljeks ja y-telge imaginaarteljeks. Näiteks (joon. 34)

punkt N_1 kujutab arvu $+1{,}75$
„ N_2 „ „ $-2{,}25$
„ N_3 „ „ $+1{,}1i$
„ N_4 „ „ $-2{,}25i$

Arvu $a + bi$ kujutame tasapinna punktina, mille abstsiss on a ja ordinaat on b. Nii näiteks

punkt	M_1	kujutab	arvu	$0{,}9 + 1{,}3i$
„	M_2	„	„	$0{,}9 - 1{,}75i$
„	M_3	„	„	$-1{,}4 - 1{,}1i$
„	M_4	„	„	$-1{,}8 + 2{,}25i$
	0	„	„	$0 + 0i$

On ilmne, et antud koordinaatide teljestiku ja antud pikkusühiku puhul vastab tasapinna punktile üks ja ainult üks



Joon. 34.

kompleksarv (erijuhul reaal- või imaginaararv), ja vastupidi — igale kompleksarvule vastab üks ja ainult üks tasapinna punkt. Seega siis samuti, nagu iga reaalarvu (nii positiivset kui ka negatiivset ja nulli) võib geomeetriliselt kujutada s i r g e (arvtelje) punktina, nii võib iga kompleksarvu geomeetriliselt kujutada t a s a p i n n a punktina. Paneme

tähele, et lõik koordinaatide algusest kuni antud kompleksarvu $a + bi$ kujutava punktini on täisnurkse kolmnurga hüpotenuus, mille üks kaatet on a ja teine kaatet on b. Tähendab, selle lõigu pikkus on $\sqrt{a^2 + b^2}$; seda suurust nimetatakse kompleksarvu $a + bi$ **mooduliks**. Nullist erineva arvu moodul on alati positiivne.

Kompleksarvude geomeetriline kujutamine etendab mõnes kõrgema matemaatika harus tähtsat osa.

140a. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju. Kompleksarvude kujutamine tasapinna punktide abil võimaldab meil esitada arvu $a + bi$ veel teiselgi kujul, nimelt nn. trigonomeetrilisel kujul. Kujutagu punkt M (joon. 35) kompleksarvu $a + bi$. Siis

$$OA = a; \quad AM = b. \tag{1}$$

Tähistame punkti M kauguse OM koordinaatide algusest tähega r ja nurga AOM, mille moodustavad lõik OM ja x-telg, tähega φ. Siis saame kolmnurgast OAM:

$$a = r \cos \varphi; \quad b = r \sin \varphi. \tag{2}$$

Asendades kompleksarvus $a + bi$ tähed a ja b leitud avaldistega, saame:

$$a + bi = r \cos \varphi + ir \sin \varphi$$

ehk

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi). \tag{3}$$

See ongi kompleksarvu trigonomeetriline kuju. Suurust $OM = r$ nimetatakse kompleksarvu **mooduliks** ja nurka $AOM = \varphi$ tema **argumendiks**.

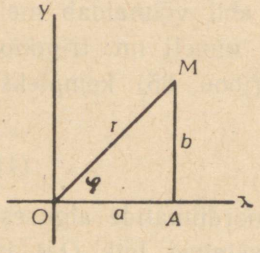
Täheldame, et moodul r, mis väljendab punkti M kaugust koordinaatide algusest, on alati positiivne arv (ainult nulli moodul on null).

Näitame, kuidas kompleksarvu, mis on antud tavalisel algebralisel kujul [1] $a + bi$, esitada trigonomeetrilisel kujul. Selleks peame leidma r ja φ väärtused, kui meil on teada a ja b väärtused. Kolmnurgast OAM (joon. 35) leiame:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \tan\varphi = \frac{b}{a}. \tag{4}$$

Seega teades a ja b väärtusi võime alati valemite (4) järgi leida r ja φ väärtused.

Näide 1. Väljendada arv $5 + 12i$ trigonomeetrilisel kujul.



Joon. 35.

Valemite (4) järgi leiame:

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13;$$

$$\tan\varphi = \frac{12}{5}.$$

Jääb veel antud tangensi järgi leida nurk φ. Väikseimaks nurgaks, mille tangens on $\frac{12}{5} = 2{,}4$, on $\varphi = 67^0 23'$. Kuid me teame, et samasugune tangensi väärtus on ka nurgal $180^0 + \varphi = 247^0 23'$. Milline nurk tuleb võtta antud juhul? Et seda kindlaks teha, vaatame, millised märgid on suurustel $\sin\varphi$ ja $\cos\varphi$. Valemist (2) leiame:

$$\sin\varphi = \frac{b}{r}; \quad \cos\varphi = \frac{a}{r}. \tag{5}$$

Pannes siia väärtused $a = 5$; $b = 12$; $r = 13$, saame:

$$\sin\varphi = \frac{12}{13}, \quad \cos\varphi = \frac{5}{13},$$

s. o. siinus ja koosinus on positiivsed. See tähendab, et nurk

---

[1] Et a ja b on arvu $a + bi$ kujutava punkti abstsissiks ja ordinaadiks, siis öeldakse seesuguse kompleksarvu kuju kohta, et kompleksarv on antud oma koordinaatidega.

asetseb esimeses veerandis ja järelikult $\varphi = 67^{\circ}23'$. Nüüd võime kirjutada:

$$5 + 12i = 13(\cos 67^{\circ}23' + i \sin 67^{\circ}23').$$

Trigonomeetriast on teada, et siinus ja koosinus ei muutu, kui argumendiga liita või sellest lahutada 360° täisarv korda. Seepärast võime kirjutada saadud avaldise üldisemal kujul:

$$5 + 12i = 13[\cos(67^{\circ}23' + 360^{\circ} k) + i \sin(67^{\circ}23' + 360^{\circ} k)],$$

kus k on mistahes täisarv (sealhulgas ka null).

Märkus. Et nimetaja r on avaldistes (5) alati positiivne arv, siis sõltuvad siinuse ja koosinuse märgid üksnes arvude a ja b märkidest. Seepärast näinud, et antud juhul on a ja b mõlemad positiivsed arvud, oleksime võinud kohe järeldada, et ka siinus ja koosinus on positiivsed.

Näide 2. Kirjutada trigonomeetrilisel kujul arv $-3 + 2i$.

Valemi (4) järgi leiame:

$$r = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13}; \quad \tan\varphi = \frac{2}{3} = -0{,}666\ldots$$

Tangens on negatiivne, järelikult tuleb nurga φ väärtust otsida teisest või neljandast veerandist. Pöördudes valemite (5) juurde, märkame, et kuna $a = -3$ ja $b = 2$, siis on siinus positiivne ja koosinus negatiivne, milline juhtum leiab aset teises veerandis. Tabelite abil leiame, et $\varphi = 146^{\circ}18'$, tähendab:

$$-3 + 2i = \sqrt{13}(\cos 146^{\circ}18' + i \sin 146^{\circ}18').$$

Näide 3. Kujutada trigonomeetriliselt arv $1 - i$.

Saame: $r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}; \quad \tan\varphi = -1.$

Et siin on $a = 1 > 0$ ja $b = -1 < 0$, siis on koosinus positiivne ja siinus negatiivne, milline juhtum leiab aset nel-

jandas veerandis. Siit leiame, et $\varphi = 315^0$, ja me võime kirjutada:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 315^0 + i \sin 315^0).$$

Märkus 1. Et $315^0 = 360^0 - 45^0$ ja

$$\cos 315^0 = \cos(-45^0) = \cos 45^0,$$
$$\sin 315^0 = \sin(-45^0) = -\sin 45^0,$$

siis võiksime antud arvu üles kirjutada sellisel kujul:

$$1 - i = \sqrt{2}(\cos 45^0 - i \sin 45^0).$$

Märkus 2. Muidugi võiksime me kõigis näiteis argumendi kraadide asemel väljendada radiaanides. Nii võiksime 3. näites saadud avaldise üles kirjutada järgmiselt:

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + \sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Soovitame õpilastel joonestada punktid, mis kujutavad ülesandeis 1—3 antud arve koordinaatide a ja b järgi, ja veenduda, et kõigil juhtudel r ja φ väärtused ühtivad nende valemi (4) järgi arvutatud väärtustega.

Näide 4. Kujutada trigonomeetriliselt reaalarv $m > 0$.

Et $$m = m + 0 \cdot i,$$

siis $a = m$, $b = 0$ ja me saame:

$$r = \sqrt{m^2 + 0^2} = m; \quad \tan\varphi = \frac{0}{m} = 0; \quad \cos\varphi = \frac{m}{m} = 1.$$

Järelikult $\varphi = 0^0$ ja me võime kirjutada

$$m = m(\cos 0^0 + i \sin 0^0)$$

või üldisel kujul:

$$m = m(\cos 360^0 k + i \sin 360^0 k).$$

Siit järeldame, et positiivse arvu mooduliks on see arv ise ja argumendiks on 0^0 (ehk $360^0 k$).

Näide 5. Kujutada trigonomeetriliselt negatiivne arv $-m$ $(m > 0)$.

Et $$-m = -m + 0 \cdot i,$$

siis siin $a = -m$, $b = 0$ ja me saame, et

$$r = \sqrt{(-m)^2 + 0^2} = m; \tan\varphi = \frac{0}{-m} = 0;$$

$$\cos\varphi = \frac{-m}{m} = -1.$$

Järelikult $\varphi = 180^0$ ja me saame:

$$-m = m[\cos 180^0 + i \sin 180^0]$$

või üldisemalt:

$$-m = m[\cos(180^0 + 360^0 k) + i \sin(180^0 + 360^0 k)].$$

Siit järeldame, et negatiivse arvu mooduliks on tema absoluutväärtus ja argumendiks on 180^0 (ehk üldisemalt $180^0 + 360^0 k$).

Esitame nüüd ümberpöördud ülesande: väljendada trigonomeetrilisel kujul antud arv algebralisel kujul.

Kui arv on antud trigonomeetrilisel kujul, siis on antud r ja φ väärtused. Sel juhul võime valemi (2) järgi arvutada a ja b väärtused.

Näide 6. Kujutada algebraliselt arv $6(\cos 40^0 + i \sin 40^0)$.

Siin on: $a = r\cos\varphi = 6\cos 40^0 = 6 \cdot 0{,}766 = 4{,}596$,

$b = r\sin\varphi = 6\sin 40^0 = 6 \cdot 0{,}643 = 3{,}858$

ja seega antud arv on

$$4{,}596 + 3{,}858\,i.$$

Täheldame, et φ väärtused esimeses kolmes näites ning a ja b väärtused viimases näites on ligikaudsed, sest me kasutasime nende arvutamisel trigonomeetriliste funktsioonide tabeleid.

Näide 7. Väljendada algebralisel kujul arv $4(\cos 30^0 + i \sin 30^0)$.

Et $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, siis leiame, et

$$4(\cos 30^0 + i \sin 30^0) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Näide 8. Väljendada algebralisel kujul arv

$$5(\cos 0^0 + i \sin 0^0).$$

Et

$$\cos 0^0 = 1, \quad \sin 0^0 = 0,$$

siis

$$5(\cos 0^0 + i \sin 0^0) = 5,$$

s. o. saame reaalarvu.

Harjutused.

249. 1) Kujutada trigonomeetriliselt arvud:
a) $4 + 3i$; b) $4 - 3i$; c) $-4 + 3i$; d) $-4 - 3i$.

2) Kujutada trigonomeetriliselt arvud:
a) $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$; b) $-\sqrt{3} + i$; c) $1 - \sqrt{3}i$.

3) Kujutada trigonomeetriliselt arvud:
a) $5 - 4i$; b) $1 + 2i$; c) 3; d) $5i$.

4) Tõestada, et kõigi positiivsete reaalarvude argument on 0^0 (ehk, mis on sama, $360^0 k$).

5) Tõestada, et kõigi imaginaararvude argument on 90^0 või -90^0 (ehk üldisel kujul: $360^0 k + 90^0$ või $360^0 k - 90^0$).

6) Leida, kuidas asetsevad punktid, mis kujutavad arve, mille moodul on 2; 5.

7) Leida, kuidas asetsevad punktid, mis kujutavad arve, mille argument on: 30^0; -45^0; 180^0.

8) Esitada algebralisel kujul arvud:
a) $\cos 25^0 + i \sin 25^0$; b) $2(\cos 45^0 + i \sin 45^0)$;
c) $6(\cos 60^0 + i \sin 60^0)$.

140b. Tehted trigonomeetriliselt avaldatud kompleksarvudega. Kõik algebralised tehted kompleksarvudega, mis on avaldatud trigonomeetriliselt, sooritatakse samade reeglite järgi, nagu tehted algebraliselt väljendatud arvudega (vt. § 139). See tähendab, et tehted sooritatakse hulkliikmetega sooritatavate tehete reeglite järgi, kusjuures eeldatakse alati, et $(\sqrt{-a})^2 = -a$, eriti $(\sqrt{-1})^2 = i^2 = -1$.

Kompleksarvude liitmist ja lahutamist on kergem ja mugavam teostada, kui nad on avaldatud algebralisel kujul. Hoopis teisiti on lugu ülejäänud nelja algebralise tehtega.

Korrutamine. Olgu tarvis korrutada arvud:

$$m = R(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$n = r(\cos\beta + i\sin\beta).$$

Saame:

$$mn = Rr(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta). \qquad (1)$$

Kuid

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha\cos\beta + i\cos\alpha\sin\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

ja võrdus (1) saab kuju:

$$mn = Rr[\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)]. \qquad (1)$$

Seega ilmneb, et:

Kahe kompleksarvu korrutise moodul võrdub tegurite moodulite korrutisega ja korrutise argument on võrdne tegurite argumentide summaga.

Näide 1. Olgu

$$m = 3(\cos 20^0 + i\sin 20^0),$$
$$n = 2(\cos 35^0 + i\sin 35^0).$$

Siis:

$$mn = 6(\cos 55^0 + i\sin 55^0).$$

Näide 2. Olgu

$$m = 5(\cos 200^0 + i\sin 200^0),$$
$$n = \cos 240^0 + i\sin 240^0.$$

Siis:

$$mn = 5(\cos 440^0 + i\sin 440^0) = 5(\cos 80^0 + i\sin 80^0).$$

Näide 3. Olgu

$$m = 4\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$
$$n = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Siis:

$$mn = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right).$$

Olgu vaja korrutada arvud:

$$m = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha),$$
$$n = r_2(\cos\beta + i\sin\beta),$$
$$p = r_3(\cos\gamma + i\sin\gamma).$$

Korrutades esimesed kaks arvu, saame vastavalt valemile (1):

$$mn = r_1 r_2[\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)].$$

Korrutades nüüd arvud mn ja p, saame sama valemi järgi:

$$mnp = r_1 r_2 r_3[\cos(\alpha + \beta + \gamma) + i \sin(\alpha + \beta + \gamma)].$$

Näide 4. On antud:

$$m_1 = 2(\cos 150^0 + i \sin 150^0),$$
$$m_2 = 3(\cos 200^0 + i \sin 200^0),$$
$$m_3 = 5(\cos 10^0 + i \sin 10^0).$$

Siis:

$$m_1 m_2 m_3 = 30(\cos 360^0 + i \sin 360^0) = 30.$$

On täiesti selge, et nende arvude korrutamine algebraliselt oleks nõudnud märksa rohkem arvutusi ja aega.

Üldjuhul, kui on antud n arvu m_1, m_2, m_3, ..., m_n, millede moodulid on r_1, r_2, r_3, ..., r_n ja argumendid on $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, siis saame:

$$m_1 m_2 \ldots m_n = r_1 r_2 \ldots r_n[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)]. \quad \text{(II)}$$

Jagamine. Olgu vaja arv

$$m = R(\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

jagada arvuga

$$n = r(\cos\beta + i \sin\beta).$$

Saame:

$$\frac{m}{n} = \frac{R(\cos\alpha + i \sin\alpha)}{r(\cos\beta + i \sin\beta)} = \frac{R}{r} \cdot \frac{\cos\alpha + i \sin\alpha}{\cos\beta + i \sin\beta}. \quad \text{(1)}$$

Laiendame teist murdu (korrutame tema lugejat ja nimetajat) tema nimetaja kaaskompleksarvuga $\cos\beta - i \sin\beta$. Saame:

$$\frac{(\cos\alpha + i \sin\alpha)(\cos\beta - i \sin\beta)}{\cos^2\beta - i^2 \sin^2\beta}.$$

Et $i^2 = -1$, siis nimetaja on $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$. Lugeja võime kirjutada nii:

$$(\cos\alpha + i \sin\alpha)[\cos(-\beta) + i \sin(-\beta)]$$

ning kasutades kompleksarvude korrutamise reeglit, saame:

$$\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta).$$

Asetades saadud avaldise valemisse (1), saame:

$$\frac{m}{n} = \frac{R}{r}[\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)]. \quad \text{(III)}$$

Järelikult võime öelda:

Kahe kompleksarvu jagatise moodul võrdub jagatava ja jagaja moodulite jagatisega ning argument võrdub nende argumentide vahega.

Näide 5. Olgu

$$m = 12(\cos 55^0 + i \sin 55^0),$$
$$n = 3(\cos 35^0 + i \sin 35^0).$$

Siis:

$$\frac{m}{n} = 4(\cos 20^0 + i \sin 20^0).$$

Näide 6. Olgu

$$m = \sqrt{3}(\cos 200^0 + i \sin 200^0),$$
$$n = 2\,[\cos(-160^0) + i \sin(-160^0)].$$

Siis:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 360^0 + i \sin 360^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Astendamine. Olgu vaja ruutida arv

$$m = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Rakendades eespool korrutise jaoks tuletatud valemit (1), saame:

$$m^2 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^2$$

ehk

$$m^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Samuti saame:

$$m^3 = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi).$$

Üldiselt, kui meil on n võrdset tegurit

$$m = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

siis rakendades valemit II, saame:

$$m^n = [r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \qquad \text{(IV)}$$

Kompleksarvu astme moodul on võrdne astendatava mooduli sama astmega ning argument on võrdne astendatava argumendi ja astendaja korrutisega.

Erijuhul, kui $r = 1$, omandab valem (IV) kuju:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

See valem kannab prantsuse matemaatiku Moivre'i (1667—1754) nime järgi Moivre'i lause nimetust.

Näide 7. Kuupida arv

$$a = 2(\cos 20^0 + i \sin 20^0).$$

Saame:

$$a^3 = 8(\cos 60^0 + i \sin 60^0) = 4 + 4\sqrt{3}i$$

$$\left(\text{sest } \cos 60^0 = \frac{1}{2},\ \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Näide 8. Astendada arv

$$m = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

arvuga 20.

Esitame arvu m algul trigonomeetrilisel kujul. Saame:

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\tan \varphi = \sqrt{3},\ \varphi = 60^0$$

(et siinus ja koosinus on positiivsed, siis võtame nurga esimeses veerandis).

Seega $$m = 1(\cos 60^0 + i \sin 60^0).$$

Siit $$m^{20} = 1^{20}(\cos 1200^0 + i \sin 1200^0) =$$

$$= \cos (360^0 \cdot 3 + 120^0) + i \sin (360^0 \cdot 3 + 120^0) =$$

$$= \cos 120^0 + i \sin 120^0 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Juurimine. a) Olgu vaja leida ruutjuur arvust

$$m = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Tähistame otsitava juure mooduli ja argumendi tähtedega x ja y. Siis:

$$\sqrt{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y). \qquad (1)$$

Siit leiame ruutimise reegli põhjal:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x^2(\cos 2y + i \sin 2y). \qquad (2)$$

Sel juhul kahe kompleksarvu võrduse definitsiooni järgi peab

$$x^2 = r, \quad \text{kust } x = \sqrt{r},$$

ja

$$2y = \varphi + 360^0 k, \text{ kust } y = \frac{\varphi}{2} + 180^0 k.$$

Seega ruutjuur antud arvust on

$$n = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0 k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0 k\right)\right].$$

Vaatleme nüüd, mitu väärtust saame juurele, kui tähele k anname väärtused 0, ± 1, ± 2 jne.

Kui $k = 0$, siis saame:

$$n_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Kui $k = 1$, siis saame:

$$n_2 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right)\right].$$

Kuid

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right) = -\cos\frac{\varphi}{2} \text{ ja } \sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right) = -\sin\frac{\varphi}{2}$$

ning me võime juure n_2 kirjutada järgmisel kujul:

$$n_2 = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Siit järeldame, et

$$n_2 = -n_1.$$

Kui $k = 2$, siis saame:

$$n_3 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 360^0\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 360^0\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right) = n_1.$$

Kui $k = 3$, siis saame:

$$n_4 = \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 540^0\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 540^0\right)\right] =$$

$$= \sqrt{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + 180^0\right)\right] = n_2.$$

On ilmne, et andes tähele k väärtused 4, 5, 6, ..., saame ikka väärtused, mis on vaheldumisi võrdsed suurustega n_1 ja n_2. Sama saame, kui anname suurusele k negatiivsed väärtused.

Seega *kompleksarvu ruutjuurel on kaks erinevat väärtust, mis on teineteise suhtes vastupidised kompleksarvud.*

Näide 9. Olgu

$$m = 16(\cos 60^0 + i\sin 60^0).$$

Siis:

$$\sqrt{m} = 4[\cos(30^0 + 180^0 k) + i\sin(30^0 + 180^0 k)].$$

Kui $k = 0$, siis saame:

$$\sqrt{m} = n_1 = 4(\cos 30^0 + i \sin 30^0) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2i.$$

Kui $k = 1$, siis saame:

$$\sqrt{m} = n_2 = 4(\cos 210^0 + i \sin 210^0) =$$
$$= 4(-\cos 30^0 - i \sin 30^0) = -2\sqrt{3} - 2i.$$

Näide 10. Leida $\sqrt{25}$.

Vastavalt tulemusele, mis saadi näites 4, § 140a, võime kirjutada:

$$25 = 25(\cos 360^0 k + i \sin 360^0 k).$$

Siis:

$$\sqrt{25} = 5(\cos 180^0 k + i \sin 180^0 k).$$

Kui $k = 0$, siis:

$$\sqrt{25} = 5(\cos 0^0 + i \sin 0^0) = 5(1 + i \cdot 0) = 5.$$

Kui $k = 1$, siis:

$$\sqrt{25} = 5(\cos 180^0 + i \sin 180^0) = 5(-1 + i \cdot 0) = -5.$$

b) Olgu vaja leida kuupjuur arvust

$$m = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Siis võime kirjutada:

$$\sqrt[3]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y).$$

Siit:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x^3(\cos 3y + i \sin 3y).$$

Järelikult:

$$x^3 = r; \quad 3y = \varphi + 360^0 k.$$

Siit:

$$x = \sqrt[3]{r}; \quad y = \frac{\varphi}{3} + 120^0 k.$$

Saame:

$$\sqrt[3]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = n =$$
$$= \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0 k\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0 k\right)\right].$$

Kui $k = 0$, siis saame:

$$n_1 = \sqrt[3]{r}\left(\cos \frac{\varphi}{3} + i \sin \frac{\varphi}{3}\right).$$

Kui $k = 1$, siis:

$$n_2 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 120^0\right)\right].$$

Kui $k = 2$, siis:

$$n_3 = \sqrt[3]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{3} + 240^0\right)\right].$$

Pole raske veenduda, et kui $k = 3, 4, 5, 6, \ldots$, siis saame $n_4 = n_1$; $n_5 = n_2$ jne., s. o. uusi juure väärtusi me enam ei leia. Samad väärtused saame tähe k negatiivsete väärtuste puhul.

Seega *kompleksarvu kuupjuurel on kolm erinevat väärtust.*

Näide 11. Leida kuupjuur arvust 1.

Saame:

$$1 = 1(\cos 360^0 k + i \sin 360^0 k).$$

Siis:

$$\sqrt[3]{1} = n = 1(\cos 120^0 k + i \sin 120^0 k).$$

Kui $k = 0, 1, 2$, siis saame vastavalt:

$$n_1 = 1(\cos 0^0 + i \sin 0^0) = 1;$$

$$n_2 = 1(\cos 120^0 + i \sin 120^0) = 1\left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2};$$

$$n_3 = 1(\cos 240^0 + i \sin 240^0) = 1\left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}.$$

Kuupides vastavaid arve veendume, et kõik nad annavad tulemuses arvu 1.

Näide 12. Lahendada võrrand $x^3 + 8 = 0$.

Leiame:

$$x^3 = -8; \quad x = \sqrt[3]{-8}.$$

Vastavalt näitele 5, § 140a, võime kirjutada:

$$-8 = 8[\cos(180^0 + 360^0 k) + i \sin(180^0 + 360^0 k)].$$

Siit:

$$\sqrt[3]{-8} = n = 2[\cos(60^0 + 120^0 k) + i \sin(60^0 + 120^0 k)].$$

Kui $k = 0, 1, 2$, siis saame:

$$n_1 = 2(\cos 60^0 + i \sin 60^0) = 2\left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i;$$

$$n_2 = 2(\cos 180^0 + i \sin 180^0) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2;$$

$$n_3 = 2(\cos 300^0 + i \sin 300^0) = 2\left(\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$$

Kontrollimise teel võib veenduda, et kõikide saadud arvude kuup on -8.

b) Asume nüüd juurimise üldjuhu käsitlemisele. Olgu vaja leida n-es juur arvust

$$m = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Tähistades juure mooduli ja argumendi tähtedega x ja y, saame:

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = x(\cos y + i \sin y).$$

Siit:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = x^n(\cos ny + i \sin ny).$$

Järelikult:

$$x^n = r; \quad ny = \varphi + 360^0 k,$$

kust

$$x = \sqrt[n]{r}; \quad y = \frac{\varphi}{n} + \frac{360^0 k}{n},$$

ja tähendab,

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0 k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0 k}{n}\right)\right].$$

Viimase võrduse võib kirjutada ka kujul:

$$\sqrt[n]{r[\cos(\varphi + 360^0 k) + i \sin(\varphi + 360^0 k)]} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0 k}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0 k}{n}\right)\right]. \qquad (V)$$

Järelikult me võime öelda:

Kompleksarvu juure moodul võrdub juuritava mooduli sama järku juurega ning argument võrdub juuritava argumendi ja juurija jagatisega.

Mitu erinevat juure väärtust me saame? Pole raske veenduda, et kuni me asetame valemisse (5) väärtuse $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$, siis saame erinevad juure väärtused (sest nende argumendid on erinevad). Kui aga $k = n$, siis saame:

$$\frac{\varphi}{n} + \frac{360^0 n}{n} = \frac{\varphi}{n} + 360^0,$$

ja juur võrdub

$$\sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 360^0\right) + i \sin\left(\frac{\varphi}{n} + 360^0\right)\right] = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i \sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

s. o. saame juure sama väärtuse, mis juhul, kui $k = 0$. Täpselt samuti, kui $k = n + 1$, $n + 2, \ldots$ saame juurele samad väärtused, mis juhtudel, kui $k = 1, 2, \ldots$

Seega järeldame, et *kompleksarvu n-ndal juurel on n erinevat väärtust.*

Näide 13. Lahendada võrrand $x^5 - 243 = 0$.

Saame:

$$x^5 = 243, \quad \text{kust} \quad x = \sqrt[5]{243}.$$

Kuid

$$243 = 243(\cos 360^0 k + i \sin 360^0 k).$$

Järelikult

$$\sqrt[5]{243} = 3(\cos 72^0 k + i \sin 72^0 k).$$

Kui $k = 0, 1, 2, 3, 4$, siis saame:

$$n_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0) = 3(1 + i \cdot 0) = 3,$$
$$n_2 = 3(\cos 72^0 + i \sin 72^0),$$
$$n_3 = 3(\cos 144^0 + i \sin 144^0),$$
$$n_4 = 3(\cos 216^0 + i \sin 216^0),$$
$$n_5 = 3(\cos 288^0 + i \sin 288^0).$$

Leides saadud argumentide siinused ja koosinused, väljendame kõik juured algebraliselt.

Kümnes jagu.

Mõningaid teatmeid algebralistest võrranditest.

I. Hulkliikme jaguvus.

141. x suhtes täisratsionaalse [1] hulkliikme jaguvus vahega $x - a$.

Bézout'* [2] *teoreem. *x suhtes täisratsionaalne hulkliige*

$$M = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

annab jagamisel vahega $x - a$ (kus a on suvaline positiivne või negatiivne liige) jäägi

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

mis on võrdne jagatava selle väärtusega, mis ta saab, kui $x = a$.

Tõestus. Tähe x alanevate astmete järgi korraldatud hulkliikme jagamisest on näha, et selle hulkliikme jagamist avaldisega $x - a$ võib jätkata seni, kuni jäägi kõrgeim liige R ei sisalda tähte x. Olgu jagatis seejuures mingi hulkliige Q. Siis võime kirjutada võrduse:

$$M = (x - a)Q + R.$$

---

[1] Hulkliiget nimetatakse x suhtes täisratsionaalseks, kui temas x ei esine jagajas.

[2] Bézout — XVIII sajandi prantsuse matemaatik.

See võrdus on samasus, s. o. ta on kehtiv x kõikvõimalike väärtuste puhul, ja seepärast peab ta olema kehtiv ka juhul, kui $x = a$. Kui aga $x = a$, siis annab ta

$$M' = (a - a)Q' + R,$$

kui tähtedega M' ja Q' tähistame hulkliikmete M ja Q neid väärtusi, mis nad saavad, kui $x = a$ (jääk R kui x-i mittesisaldav avaldis ei muutu x-i asendamisest tähega a). Et $a - a = 0$, siis on ka korrutis $(a - a)Q'$ võrdne nulliga; tähendab, viimasest võrdusest saame, et $M' = R$, s. o.

$$R = Aa^m + Ba^{m-1} + Ca^{m-2} + \ldots + K,$$

mida oligi vaja tõestada.

Järeldus 1. Et $x + a = x - (-a)$, siis rakendades tõestatud teoreemi ka summa $x + a$ kohta leiame, et *hulkliige*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

annab jagamisel summaga $x + a$ *jäägi*

$$A(-a)^m + B(-a)^{m-1} + \ldots + K,$$

mis on võrdne jagatava selle väärtusega, mis ta saab juhul, kui $x = -a$.

Näited.

1) Hulkliige $x^5 - 3x^2 + 5x - 1$ annab jagamisel vahega $x - 2$ jäägi

$$2^5 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 1 = 29.$$

2) Hulkliige $x^5 - 3x^2 + 5x - 1$ annab jagamisel summaga $x + 2$ jäägi

$$(-2)^5 - 3(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -55.$$

Järeldus 2. *Selleks, et hulkliige*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

jaguks vahega $x - a$, *on tarvilik ja piisav, et ta juhul, kui* $x = a$, *muutuks nulliks.*

See on tarvilik, sest kui antud hulkliige jagub vahega $x - a$, siis jääk on 0, kuid see jääk on eespool tõestatu kohaselt jagatava see väärtus, mille ta saab juhul, kui $x = a$. See on ka piisav, sest kui hulkliige muutub nulliks juhul, kui $x = a$, siis tähendab see, et hulkliikme jagamisel vahega $x - a$ saadud jääk on null.

Järeldus 3. *Selleks, et hulkliige*

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + K$$

jaguks summaga $x + a$, *on tarvilik ja piisav, et ta juhul, kui* $x = -a$, *muutuks nulliks, sest summa* $x + a$ *on sama, mis vahe* $x - (-a)$.

Näited.

1) Hulkliige $x^3 - 4x^2 + 9$ jagub vahega $x - 3$, sest

$$3^3 - 4 \cdot 3^2 + 9 = 0.$$

2) Hulkliige $2x^2 + x - 45$ jagub summaga $x + 5$, sest

$$2(-5)^2 + (-5) - 45 = 0.$$

142. Kaksliikme $x^m \mp a^m$ jaguvus kaksliikmega $x \mp a$.

1) *Kahe arvu ühe ja sama astendajaga astmete vahe jagub samade arvude vahega,* sest $x^m - a^m$ annab jagamisel vahega $x - a$ jäägi $a^m - a^m$, s. o. nulli.

2) *Kahe arvu ühe ja sama astendajaga astmete summa ei jagu nende arvude vahega,* sest $x^m + a^m$ annab jagamisel vahega $x - a$ jäägi $a^m + a^m = 2a^m$, mitte aga nulli.

3) *Kahe arvu ühe ja sama paarisarvulise astendajaga astmete vahe jagub ning ühe ja sama paarituarvulise astendajaga astmete vahe ei jagu nende arvude summaga,* sest vahe $x^m - a^m$ jagamisel summaga $x + a$ saame jäägi $(-a)^m - a^m$, mis paarisarvulise m puhul on 0 ja paarituarvulise m puhul on $-2a^m$.

4) *Kahe arvu ühe ja sama paarituarvulise astendajaga astmete summa jagub ning ühe ja sama paarisarvulise astendajaga astmete summa ei jagu nende arvude summaga*, sest summa $x^m + a^m$ jagamisel summaga $x + a$ on jääk $(-a)^m + a^m$, mis on võrdne nulliga, kui m on paaritu arv, ja on $2a^m$, kui m on paarisarv.

Näited.

1) $x^1 + a^1$ jagub summaga $x + a$, kuid ei jagu vahega $x - a$.

2) $x^2 - a^2$ jagub vahega $x - a$ ja summaga $x + a$.

3) $x^2 + a^2$ ei jagu ei vahega $x - a$ ega summaga $x + a$.

4) $x^3 - a^3$ jagub vahega $x - a$, kuid ei jagu summaga $x + a$.

5) $x^3 + a^3$ jagub summaga $x + a$, kuid ei jagu vahega $x - a$.

143. Kaksliikme $x^m \mp a^m$ ja kaksliikme $x \mp a$ jagatised. Kui jagame kaksliikme $x^m - a^m$ kaksliikmega $x - a$, siis saame jagatises hulkliikme:

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \ldots + a^{m-1}$$

(jäägid selle jagamise puhul on järgmised: esimene jääk on $ax^{m-1} - a^m$, teine jääk on $a^2x^{m-2} - a^m$, kolmas jääk on $a^3x^{m-3} - a^m$, ..., m-es jääk on $a^mx^{m-m} - a^m = a^m - a^m = 0$).

On ilmne, et jagatises saadud hulkliige sisaldab m liiget; tähtede a ja x astendajate summa on igas liikmes üks ja sama, nimelt $m - 1$. Tähe x astendajad vähenevad 1 võrra liikmelt liikmele alates $m - 1$ kuni 0-ni ja tähe a astendajad suurenevad 1 võrra liikmelt liikmele alates nullist kuni $m - 1$; kõikide liikmete kordajad on võrdsed ühega; kõigil liikmeil on plussmärk.

Märganud seda, võime otsekohe kirjutada:

$$x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x - a)(x^3 + ax^2 + a^2x + a^3);$$
$$x^5 - a^5 = (x - a)(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) \text{ jne.}$$

Et saada kaksliikme $x^m - a^m$ jagatist kaksliikmega $x + a$ juhul, kui m on paarisarv, ja kaksliikme $x^m + a^m$ jagatist kaksliikmega $x + a$ juhul, kui m on paaritu arv, selleks piisab, kui eespool saadud jagatises täht a asendada avaldisega $-a$. Seega:

$$x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2);$$
$$x^4 - a^4 = (x + a)(x^3 - ax^2 + a^2x - a^3);$$
$$x^5 + a^5 = (x + a)(x^4 - ax^3 + a^2x^2 - a^3x + a^4) \text{ jne.}$$

Harjutused.

250. Leida jäägid, mis tekivad hulkliikme $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 20x - 8$ jagamisel avaldistega: $x - 1$; $x + 1$; $x - 2$; $x + 2$; $x - 3$; $x + 3$.

251. Leida arvu a numbriline väärtus, mille puhul hulkliige $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + ax + 11$ jagub jäägita avaldisega $x + 1$.

144. Algebralise võrrandi üldkuju. Varemalt nägime, et võrrandit, mis sisaldab tundmatut nimetajais, võib vabastada murdudest. Edasi teame, et võrrandile, mis sisaldab tundmatut juuremärgi all, võib anda ratsionaalse kuju. Seetõttu võime öelda, et igale võrrandile, milles tundmatu on seotud antud arvudega lõplik arv korda rakendatud kuue algebralise tehte (liitmise, lahutamise, korrutamise, jagamise, astendamise ja juurimise [1]) abil, võib anda järgmise täisratsionaalse kuju:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0,$$

kus koefitsiendid A, B, C, ..., K ja L on jäävad reaal- või kompleksarvud ja m on võrrandi astme näitaja. Mõned koefitsiendid võivad erijuhtudel võrduda nulliga. Sellekuju-

[1] Eeldusel, et tundmatu ei esine astendajas ega juurijas.

list võrrandit nimetatakse algebraliseks võrrandiks. Algebralisi võrrandeid, millede astme näitajad on suuremad kui 2, nimetatakse kõrgema astme võrrandeiks.

145. Algebralise võrrandi mõningaid omadusi. Kõrgema astme võrrandid on kõrgema algebra aineks. Elementaaralgebra aga vaatleb ainult nende võrrandite erijuhtusid.

Kõrgem algebra püstitab järgmise tähtsa teoreemi:

Igal algebralisel võrrandil on reaalne või kompleksne lahend (Gauss'i [1] teoreem 1799. aastast).

Eeldades seda tõsiasja (mille tõestus elementaaralgebra vahenditega on raskevõitu) pole raske näidata, et:

Algebralise võrrandi kõigi reaalsete ja komplekssete lahendite arv võrdub võrrandi astme näitajaga.

Tõesti, Gauss'i teoreemi järgi on võrrandil

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots + Kx + L = 0 \qquad (1)$$

reaalne või kompleksne lahend; olgu see lahend α. Siis peab võrrandi (1) vasakul poolel olev hulkliige jaguma kaksliikmega $x - \alpha$ (§ 141). Kui teostame jagamise, siis saame jagatisena $(m-1)$-se astme hulkliikme, mille esimene koefitsient on A. Tähistades hulkliikme teised koefitsiendid vastavalt tähtedega B_1, C_1, ..., K_1 ja võttes arvesse, et jagatav võrdub jagaja ja jagatise korrutisega, võime võrrandi (1) esitada kujul:

$$(x - \alpha)(Ax^{m-1} + B_1x^{m-2} + C_1x^{m-3} + \ldots + K_1) = 0. \qquad (2)$$

Võttes teistes sulgudes seisva hulkliikme võrdseks nulliga, saame uue võrrandi, millel peab sama teoreemi põhjal olema mingi lahend β; seetõttu võib tema vasaku poole lahutada kaheks teguriks: $x - \beta$ ja $(m-2)$-se astme hulkliige, mille

[1] Karl Friedrich Gauss, saksa matemaatik (1777—1855).

esimene koefitsient on endiselt A. Selle tõttu võib võrrandi (1) kirjutada järgmiselt:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(Ax^{m-2}+B_2x^{m-3}+\ldots+K_2)=0. \qquad (3)$$

Jätkates neid arutlusi jõuame lõpuks selleni, et viimastes sulgudes saame teise astme hulkliikme, kusjuures hulkliikme esimene koefitsient on A. Lahutades selle kolmliikme tegureiks (§ 45) anname võrrandile (1) kuju:

$$A(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots(x-\lambda)=0, \qquad (4)$$

kus kaksliikmete arv on m. On ilmne, et võrrand (4) muutub samasuseks x-i iga järgmise väärtuse puhul: $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, ..., $x=\lambda$ ja teda ei rahulda ükski muu x väärtus (kui $A\neq 0$); tähendab, võrrandil (1) on m lahendit α, β, γ, ..., λ. Mõned lahendid võivad erijuhtudel olla võrdsed.

On otstarbekohane märkida veel järgmisi kõrgemas algebras tõestatavaid tõsiasju.

Iga algebralise võrrandi

$$Ax^m+Bx^{m-1}+\ldots+Kx+L=0$$

lahendite summa võrdub arvuga $-\frac{B}{A}$ ja lahendite korrutis võrdub arvuga $(-1)^m\cdot\frac{L}{A}$ (näiteks võib olla ruutvõrrand).

Kui reaalsete koefitsientidega algebralisel võrrandil on komplekssеid lahendeid, siis nende arv on paarisarv (näiteks võib olla biruutvõrrand).

Kui reaalsete koefitsientidega algebralisel võrrandil on n lahendit $p+qi$, siis on tal veel n lahendit $p-qi$ (näiteks võib olla biruutvõrrand, mille komplekssed lahendid on alati kaaskompleksarvud), ja et

$$[x-(p+qi)][x-(p-qi)]=[(x-p)-qi][(x-p)+qi]=$$
$$=(x-p)^2-q^2i^2=(x-p)^2+q^2=x^2-2px+(p^2+q^2),$$

siis sisaldab võrrandi vasak pool sel juhul n reaalset tegurit $ax^2 + bx + c$.

Paarituarvulise astme algebralisel võrrandil, millel on reaalsed koefitsiendid, on vähemalt üks reaalne lahend.

Suvaliste täheliste koefitsientidega algebralised võrrandid, mille aste ei ületa nelja, on lahendatavad algebraliselt, s. o. nende võrrandite lahendite jaoks on leitud üldvalemid, mis on koostatud võrrandi koefitsientidest algebraliste tehete abil.

Selles mõttes suvaliste koefitsientidega võrrandid, mille aste on kõrgem kui neli, pole algebraliselt lahendatavad (Abel'i [1] teoreem); kui aga mistahes astme võrrandi koefitsiendid on antud numbriliselt, siis on alati võimalik arvutada soovitud täpsusega kõik tema lahendid — nii reaalsed kui ka kompleksed. Seesuguseid arvutusviise käsitellakse kõrgemas algebras.

[1] XIX sajandi norra matemaatik (1802—1829).

Üheteistkümnes jagu.

Määramatud võrrandid.

146. Sissejuhatavad märkused. Esimese astme võrrandite tundmaõppimisel nägime, et kui võrrandite arv on väiksem kui tundmatute arv, siis on sel süsteemil lõpmata palju lahendeid. Selliseid võrrandeid nimetatakse määramatuiks võrrandeiks.

Sagedamini esineb praktikas ühe kahe tundmatuga võrrandi juhtum. Sellise võrrandi üldkuju on:

$$ax + by = c,$$

kus x ja y on tundmatud ning a, b ja c on antud koefitsiendid.

Sageli on ülesande tingimused sellised, et ülesandes seatud küsimusele annavad õige vastuse ainult lahendite täisarvulised väärtused ja mõnikord ainult täisarvulised positiivsed väärtused.

Ülesanne 1. Lahutada arv 118 kaheks seesuguseks arvuks, milledest üks jaguks 11-ga, teine aga 17-ga.

Tähistades ühe arvu avaldisega $11x$ ja teise avaldisega $17y$, saame võrrandi:

$$11x + 17y = 118.$$

Et ülesandes pole midagi öeldud arvude märkide kohta, siis võime käesoleval juhul pidada ülesande vastusteks ka negatiivseid lahendeid. Nii rahuldavad ülesande tingimusi

arvud 33 ja 85 (kui $x = 3$ ja $y = 5$), kuid samuti rahuldavad neid ka arvud 220 ja -102 (kui $x = 20$ ja $y = -6$).

Ülesanne 2. Teemasinad pakitakse kastidesse, milledest ühtedesse mahub 4 teemasinat ja teistesse 7 teemasinat. Kui palju on vaja võtta kumbagi liiki kaste, et pakkida neisse 41 teemasinat?

Tähistades väikeste kastide arvu tähega x ja suurte kastide arvu tähega y, saame võrrandi:

$$4x + 7y = 41.$$

On ilmne, et ülesande tingimuste kohaselt on sobivad ainult täisarvulised ja seejuures positiivsed lahendid. Antud võrrand võimaldab ainult ühe sellise lahendi ja nimelt: $x = 5$, $y = 3$.

Seega on tarvis osata lahendada määramatut võrrandit täisarvudes või ainult positiivsetes täisarvudes (loomulikes arvudes).

147. Võrrandi täisarvudes lahendamatuse tunnus. Olgu antud võrrand:

$$ax + by = c.$$

Kui koefitsientide a, b ja c hulgas on mõni murruline koefitsient, siis võime kõik koefitsiendid tuua ühisele nimetajale ja jätta selle seejärel arvestamata. Siis on kõik koefitsiendid täisarvulised.

Edasi, kui koefitsientidel a, b ja c on mingi ühistegur, siis võib sellega võrrandit taandada.

Seega edaspidi eeldame, et koefitsiendid a, b ja c on ühistegurita täisarvud.

Oletame nüüd, et koefitsientidel a ja b on ühisteguriks mingi täisarv, mis erineb arvust 1. Olgu näiteks

$$a = ma_1; \quad b = mb_1.$$

Võrrand omandab nüüd kuju:

$$ma_1x + mb_1y = c.$$

Jagades kõik võrrandi liikmed arvuga m, saame:

$$a_1x + b_1y = \frac{c}{m}.$$

Kui x ja y on täisarvud, siis kujutab võrrandi vasak pool enesest täisarvu, parem pool aga murdu, sest oletuse kohaselt arv c ei jagu arvuga m. Selline võrdus on võimatu. Järelikult:

Kui määramatus võrrandis tundmatute ees olevail koefitsientidel on ühistegur, mida ei ole vabaliikmel, siis ei saa võrrandil olla täisarvulisi lahendeid.

Seepärast eeldame edaspidisel arutlusel, et a ja b on ühistegurita arvud.

148. Võrrandi positiivsetes arvudes lahendamatuse tunnus. Olgu võrrandis $ax + by = c$ koefitsiendid a ja b positiivsed arvud, vabaliige aga negatiivne arv. Siis võrrandi vasaku poole väärtus on positiivne tundmatute x ja y kõigi positiivsete väärtuste puhul, parema poole väärtus aga jääb negatiivseks. Seesugune võrdus on võimatu.

Kui koefitsiendid a ja b on negatiivsed ning c on positiivne, siis korrutades võrrandi mõlemaid pooli arvuga -1, redutseerime selle juhu eelmisele. Seega:

Kui määramatus võrrandis tundmatute ees olevate koefitsientide märgid on vastupidised vabaliikme märgile, siis pole võrrandil positiivseid lahendeid.

149. Määramatu võrrandi lahendite üldvalem. Oletame, et me mingil viisil (näiteks vahetu proovimise teel) leidsime määramatu võrrandi $ax + by = c$ ühe täisarvulise lahendi.

Olgu see lahend $x = \alpha$ ja $y = \beta$. Asetades x ja y väärtused võrrandisse, saame samasuse:

$$a\alpha + b\beta = c.$$

Lahutades liikmeti selle samasuse antud võrrandist, saame:

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0,$$

kust

$$ax = a\alpha - b(y - \beta) \quad \text{ehk} \quad x = \alpha - \frac{b(y-\beta)}{a}.$$

Selleks, et x oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et avaldis $\frac{b(y-\beta)}{a}$ oleks täisarv (sest α on täisarv). Teiste sõnadega, on tarvilik ja piisav, et arv $b(y-\beta)$ jaguks jäägitult arvuga a. Kuid eelduse kohaselt pole arvudel b ja a ühiseid tegureid, järelikult on tarvilik (ja piisav), et arv $y-\beta$ jaguks jäägitult arvuga a. Tähistades arvude $y-\beta$ ja a täisarvulise jagatise tähega t (see võib olla nii positiivne kui ka negatiivne), saame:

$$\frac{y-\beta}{a} = t, \text{ kust } y = \beta + at.$$

Asendades x valemis murru $\frac{y-\beta}{a}$ tähega t, saame:

$$x = \alpha - bt.$$

Seega määramatu võrrandi lahendite valemid on:

$$x = \alpha - bt, \quad y = \beta + at.$$

Andes neis valemeis arvule t suvalisi täisarvulisi positiivseid ja negatiivseid väärtusi, saame antud määramatule võrrandile arvutu hulga täisarvulisi lahendeid. Eriti, kui $t = 0$, saame lahendid $x = \alpha$; $y = \beta$, mis leidsime juba varemalt.

Leitud valemeid silmitsedes märkame kohe, et nad on koostatud järgmise reegli järgi:

1. Lahendi esimeseks liikmeks on antud tundmatu eriväärtus.

2. Lahendi teiseks liikmeks on suvalise täisarvu t ja antud võrrandi ühe koefitsiendi korrutis, kusjuures x valemisse võetakse y koefitsient ja y valemisse võetakse x koefitsient.

3. Üks koefitsientidest võetakse vastupidise märgiga.

Pole raske näha, et on täiesti ükskõik, millise koefitsiendi võtame sama märgiga, mis tal on võrrandis, ja millise võtame vastupidise märgiga. Tõesti, valemid

$$x = \alpha - bt,\ y = \beta + at \quad \text{ja} \quad x = \alpha + bt,\ y = \beta - at$$

annavad ühed ja samad lahendid; ainult lahendid, mis ühed valemid annavad positiivse t korral, annavad teised absoluutväärtuselt võrdse negatiivse t korral.

Näide. On antud võrrand $3x + 5y = 26$.

Vahetu asetamise teel veendume, et võrrandit rahuldavad väärtused $x = 2$ ja $y = 4$. Teised lahendid leitakse siis valemeist:

$$x = 2 + 5t,\ y = 4 - 3t \quad \text{või} \quad x = 2 - 5t,\ y = 4 + 3t.$$

Andes nendes valemites arvule t suvalisi täisarvulisi väärtusi, saame antud võrrandile mitmesuguseid täisarvulisi lahendeid. Näiteks kasutades esimesi valemeid, saame:

t	0	1	2	3	-1	-2	...
x	2	7	12	17	-3	-8	...
y	4	1	-2	-5	7	10	...

Kui oleksime võtnud teised valemid, oleksime saanud samad lahendid, andes arvule t järgemööda väärtused: 0; -1; -2; -3; 1; 2 jne.

Seega redutseerub määramatu võrrandi täisarvudes lahendamise ülesanne mingi ühe lahendi leidmiseks.

150. Asendamismeetod. Et leida määramatu võrrandi üht lahendit, võib kasutada järgmist meetodit. Olgu antud võrrand

$$ax + by = c.$$

Avaldame sellest ühe tundmatu (parem selle, mille koefitsient on väiksem) teise funktsioonina. Olgu näiteks $a < b$. Siis:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Anname tundmatule y järgemööda väärtused 0; 1; 2; 3; ... niikaua, kuni leiame sellise y väärtuse, mille puhul avaldis $c - by$ jäägita jagub arvuga a. Oletame, et kui $y = n$, siis avaldis $c - bn$ jagub jäägita arvuga a, andes jagatisena arvu m. Siis:

$$x = m \quad \text{ja} \quad y = n,$$

mis on antud võrrandi üheks lahendiks. Tõesti, siis on

$$\frac{c - bn}{a} = m \quad \text{ehk} \quad c - bn = am, \quad am + bn = c.$$

Viimane võrdus näitab, et arvud m ja n rahuldavad antud võrrandit.

Näide. On antud võrrand $7x - 4y = 2$.

Avaldame sellest võrrandist y-i:

$$4y = 7x - 2, \quad y = \frac{7x - 2}{4}.$$

Andes x-le järgemööda väärtused 0; 1; 2; ..., veendume, et kui $x = 2$, siis avaldis $7x - 2$ jagub jäägita arvuga 4, andes jagatisena 3. Järelikult üks lahend on

$$x = 2; \quad y = 3.$$

Teised lahendid leitakse üldvalemi järgi:

$$x = 2 + 4t, \quad y = 3 + 7t \quad \text{või} \quad x = 2 - 4t, \quad y = 3 - 7t.$$

Märkus. Arvuteoorias tõestatakse, et kui a ja b on ühistegurita arvud, siis arvude 0; 1; 2; ...; $(a - 1)$ hulgas leidub alati üks arv y, mille puhul avaldis $c - by$ jagub jäägita arvuga a. Seepärast soovitataksegi suure katsetuste arvu vältimiseks võtta jagajaks väiksem koefitsient.

151. Määramatu võrrandi erikuju. Määramatu võrrand lahendub üldkujul kergesti, kui üks tundmatute ees seisvaid koefitsiente on 1. Olgu näiteks x koefitsient võrdne 1-ga. Siis saame:

$$x + by = c.$$

Avaldame x-i:

$$x = c - by.$$

On ilmne, et y-i igale täisarvulisele väärtusele vastab ka x-i täisarvuline väärtus.

Näide. On antud võrrand $5x + y = 18$.

Leiame:

$$y = 18 - 5x.$$

Andes x-le suvalisi täisarvulisi väärtusi, saame y-i vastavad täisarvulised väärtused:

x	0	1	2	3	4	-1	-2	...
y	18	13	8	3	-2	23	28	...

152. Määramatu võrrandi üldlahend. Toome mistahes koefitsientidega määramatu võrrandi lahendamise näidise. Olgu antud võrrand:

$$23x + 53y = 109.$$

Avaldame sellest võrrandist selle tundmatu, mille koefitsient on väiksem, antud juhul x-i:

$$x = \frac{109 - 53y}{23}$$

ehk pärast täisosa eraldamist:

$$x = 4 - 2y + \frac{17 - 7y}{23}.$$

Selleks, et täisarvulise y puhul ka x oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et avaldis $\frac{17-7y}{23}$ oleks täisarv. Tähistanud viimase tähega t, saame:

$$\frac{17-7y}{23}=t \text{ ehk } 17-7y=23t,\ 23t+7y=17.$$

Kui me leiame tähtedele y ja t sellised täisarvulised väärtused, mis rahuldavad võrrandit $\frac{17-7y}{23}=t$ ehk võrrandit

$$23t+7y=17,$$

siis leiame ühes sellega vastavad täisarvulised väärtused tähele x ja meie ülesanne ongi lahendatud. Seega redutseerub antud võrrandi lahendamine teise, hoopis lihtsama võrrandi lahendamiseks, mille koefitsiendid on väiksemad kui antud võrrandil.

Uue võrrandiga toimime samuti. Avaldame algul sellest y-i:

$$y=\frac{17-23t}{7}=2-3t+\frac{3-2t}{7}.$$

Selleks, et y oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et avaldis $\frac{3-2t}{7}$ oleks täisarv. Tähistades selle avaldise tähega t_1, saame:

$$\frac{3-2t}{7}=t_1 \text{ ehk } 7t_1+2t=3.$$

Kui t ja t_1 on viimast võrrandit rahuldavad täisarvud, saame vastavalt ka x ja y täisarvulised väärtused, mis rahuldavad antud võrrandit. Järelikult redutseerus meie ülesanne viimase võrrandi lahendamiseks. Toimime sellega samuti, nagu varemalt:

$$t=\frac{3-7t_1}{2}=1-3t_1+\frac{1-t_1}{2}.$$

Võttes avaldise $\frac{1-t_1}{2}$ võrdseks täisarvuga t_2, saame:

$$\frac{1-t_1}{2} = t_2 \quad \text{ehk} \quad 2t_2 + t_1 = 1.$$

Saime võrrandi, milles ühe tundmatu koefitsient on 1, ja selliseid võrrandeid me juba oskame lahendada. Lahendanud selle, saame:

$$t_1 = 1 - 2t_2.$$

Andes selles võrrandis tähele t_2 suvalisi täisarvulisi väärtusi, saame täisarvulised väärtused tähele t_1.

Asetades tähtede t_1 ja t_2 leitud täisarvulised väärtused tähe t avaldisse

$$t = 1 - 3t_1 + \frac{1-t_1}{2} = 1 - 3t_1 + t_2,$$

saame tähele t vastavad täisarvulised väärtused. Asetades t ja t_1 vastavad väärtuste paarid y avaldisse

$$y = 2 - 3t + \frac{3-2t}{7} = 2 - 3t + t_1,$$

saame y vastavad täisarvulised väärtused. Lõpuks asetades y ja t leitud väärtused x avaldisse

$$x = 4 - 2y + \frac{17-7y}{23} = 4 - 2y + t,$$

saame tähele x vastavad täisarvulised väärtused.

Kuid tundmatuid x ja y võib ka otseselt väljendada sõltuvuses tähest t_2. Selleks asetame tähe t avaldisse t_1 asemele tema avaldise t_2 kaudu:

$$t = 1 - 3t_1 + t_2 = 1 - 3(1 - 2t_2) + t_2$$

ehk

$$t = -2 + 7t_2.$$

Asetame nüüd y avaldisse t ja t_1 asemele nende avaldised t_2 kaudu:

$$y = 2 - 3t + t_1 = 2 - 3(-2 + 7t_2) + (1 - 2t_2)$$

ehk $$y = 9 - 23t_2.$$

Lõpuks asetades x avaldisse leitud t ja y avaldised, saame:

$$x = 4 - 2y + t = 4 - 2(9 - 23t_2) + (-2 + 7t_2)$$

ehk

$$x = -16 + 53t_2.$$

Seega saame x ja y jaoks valemid:

$$x = -16 + 53t_2, \quad y = 9 - 23t_2.$$

Andes neis tähele t_2 suvalisi täisarvulisi väärtusi, nii positiivseid kui ka negatiivseid, saame antud võrrandile arvutu hulga lahendeid; mõned neist on paigutatud järgnevasse tabelisse:

t_2	0	1	2	-1	-2
x	-16	37	90	-69	-122
y	9	-14	-37	32	55

Vaadeldes operatsioone, mis sooritati antud ja järgnevate võrrandite koefitsientidega, võib täheldada järgmist järjestust:

1. Antud võrrandi suurem koefitsient 53 jagati väiksema koefitsiendiga 23; saadi jagatis 2 ja jääk 7.

2. Antud võrrandi väiksem koefitsient 23 jagati jäägiga 7; saadi jagatis 3 ja jääk 2.

3. Esimene jääk 7 jagati teise jäägiga 2; saadi jagatis 3 ja jääk 1.

Teiste sõnadega, me toimisime täpselt samuti, nagu oleksime arvutanud antud võrrandi koefitsientide suurimat ühistegurit.

Me teame, et kahe ühistegurita arvu suurimaks ühistegu-riks on 1. Kuna me määramatuis võrrandeis alati eeldame, et tundmatute ees olevad koefitsiendid on ühistegurita arvud, siis, sooritanud võrrandiga eespool näidatud operatsi-oonid, saame alati seesuguse võrrandi, milles ühe tund-matu koefitsient on 1. Koos sellega leiame ka antud võrrandi lahendid. Siit järeldub:

Kui määramatu võrrandi tundmatute koefitsiendid on ühistegurita arvud, siis on võrrandil alati täisarvulisi lahen-deid.

153. Võrrandi lahendamise lihtsustamine. Mõnikord võib määramatu võrrandi lahendamisel teostada mõningaid liht-sustamisi, mis lubavad kiiremini jõuda lahenditeni.

1. Juhul, kui ühe tundmatu ees seisval koefitsiendil ja vabaliikmel on ühistegur, siis, toonud sisse uue sobiva tund-matu, võib võrrandit taandada selle ühisteguriga.

Näide 1. On antud võrrand $6x - 5y = 21$.

Koefitsiendil 6 ja vabaliikmel on ühistegur 3. Järelikult ka liige $5y$ peab jaguma arvuga 3; kuna aga 5 ei jagu 3-ga, siis peab y olema arvu 3 kordne. Võtnud $y = 3t$, kus t on täisarv, saame:

$$6x - 15t = 21$$

ehk pärast taandamist 3-ga:

$$2x - 5t = 7.$$

Lahendame viimase võrrandi:

$$x = \frac{7+5t}{2} = 3 + 2t + \frac{1+t}{2} = 3 + 2t + t_1;$$

$$\frac{1+t}{2} = t_1; \quad 2t_1 - t = 1; \quad t = -1 + 2t_1.$$

Asetades leitud väärtused tundmatute x ja y avaldis-tesse, saame:

$$x = 3 + 2(-1 + 2t_1) + t_1 = 1 + 5t_1;$$
$$y = 3(-1 + 2t_1) = -3 + 6t_1.$$

Näide 2. On antud võrrand $9x + 14y = 105$.

Võttes $y = 3t$ ja taandades võrrandi arvuga 3, saame:

$$3x + 14t = 35.$$

Võttes selles võrrandis $x = 7t_1$ ja taandades võrrandi, saame:

$$3t_1 + 2t = 5.$$

Lahendame viimase võrrandi:

$$t = \frac{5 - 3t_1}{2} = 2 - t_1 + \frac{1 - t_1}{2} = 2 - t_1 + t_2;$$

$$\frac{1 - t_1}{2} = t_2; \quad 1 - t_1 = 2t_2; \quad t_1 = 1 - 2t_2.$$

Sooritades järjestikused asendamised, saame:

$$t = 2 - (1 - 2t_2) + t_2 = 1 + 3t_2;$$
$$x = 7t_1 = 7(1 - 2t_2) = 7 - 14t_2;$$
$$y = 3t = 3(1 + 3t_2) = 3 + 9t_2.$$

2. Kui täisarvuga võrdse avaldise lugejas olevatel liikmetel on ühistegur, siis võib võrrandi lahendamist lihtsustada.

Näide 3. On antud võrrand $12x + 17y = 41$.

Lahendame ta x suhtes:

$$x = \frac{41 - 17y}{12} = 3 - y + \frac{5 - 5y}{12} = 3 - y + 5\frac{1 - y}{12}.$$

Selleks, et avaldis $5\frac{1 - y}{12}$ oleks täisarv, on tarvilik ja piisav, et $\frac{1 - y}{12}$ oleks täisarv.

Võrdsustades selle avaldise täisarvuga t, saame:

$$\frac{1 - y}{12} = t; \quad 1 - y = 12t; \quad y = 1 - 12t.$$

Vastavalt sellele saame x jaoks:

$$x = 3 - (1 - 12t) + 5t = 2 + 17t.$$

3. Kui täisosa eraldamisel tekkiv jääk on suurem kui pool jagajat, siis on sobivam sisse tuua negatiivne jääk.

Näide 4. On antud võrrand $11x - 20y = 49$.

Lahendame ta x suhtes:

$$x = \frac{49 + 20y}{11} = 4 + 2y + \frac{5 - 2y}{11} = 4 + 2y + t;$$

$$\frac{5 - 2y}{11} = t; \quad 5 - 2y = 11t; \quad 11t + 2y = 5;$$

$$y = \frac{5 - 11t}{2} = 2 - 5t + \frac{1 - t}{2} = 2 - 5t + t_1;$$

$$\frac{1 - t}{2} = t_1; \quad 1 - t = 2t_1; \quad t = 1 - 2t_1.$$

Tehes asendused, saame:

$$y = 2 - 5(1 - 2t_1) + t_1 = -3 + 11t_1;$$
$$x = 4 + 2(-3 + 11t_1) + (1 - 2t_1) = -1 + 20t_1.$$

Kui lahendaksime võrrandi harilikul viisil, siis saaksime x avaldiseks:

$$x = 4 + y + \frac{5 + 9y}{11}$$

ja järgmine võrrand oleks:

$$\frac{5 + 9y}{11} = t; \quad 11t - 9y = 5.$$

See võrrand ei ole nii lihtne kui eespool negatiivse jäägi sissetoomise tagajärjel saadud võrrand

$$11t + 2y = 5.$$

Näide 5. On antud võrrand $15x + 28y = 59$.

Lahendame võrrandi x suhtes, tuues sisse negatiivsed jäägid:

$$x = \frac{59 - 28y}{15} = 4 - 2y + \frac{-1 + 2y}{15} = 4 - 2y + t;$$

$$\frac{-1 + 2y}{15} = t; \quad -1 + 2y = 15t; \quad 2y - 15t = 1;$$

$$y = \frac{1+15t}{2} = 7t + \frac{1+t}{2} = 7t + t_1;$$

$$\frac{1+t}{2} = t_1; \quad 1 + t = 2t_1; \quad t = -1 + 2t_1.$$

Tehes asendused, saame:

$$y = 7(-1 + 2t_1) + t_1 = -7 + 15t_1;$$
$$x = 4 - 2(-7 + 15t_1) + (-1 + 2t_1) = 17 - 28t_1.$$

Katsudes käesoleva paragrahvi näites toodud võrrandeid lahendada harilikul viisil, veendume kohe, et ilma lihtsustusteta oleksid need nõudnud lahendamiseks enam operatsioone.

154. Positiivsed lahendid. Nagu varem öeldud, tuleb kõigist määramatu võrrandi lahendeist sageli võtta ainult need, mis annavad tundmatuile x ja y üheaegselt positiivsed väärtused. Leides tundmatute x ja y üldvalemid, võib kohe määrata, milliste suvalise teguri väärtuste puhul saadakse tundmatutele x ja y täisarvulised ning positiivsed väärtused.

Tõesti, võtame valemid:

$$x = \alpha + bt; \quad y = \beta - at.$$

Selleks, et x ja y oleksid positiivsed, on vaja võtta t väärtuseks ainult sellised väärtused, millede puhul

$$\alpha + bt > 0; \quad \beta - at > 0.$$

Oletame, et a on positiivne arv. (Seda võime alati eeldada, sest vastasel korral võiksime korrutada võrrandi mõlemad pooled arvuga -1.) Siis võib esineda kolm juhtu.

1. *Mõlemad võrratused on samapidised.* See juhtub, kui b on negatiivne arv. Tõepoolest, kasutades võrratuste omadusi, saame:

$$bt > -\alpha; \quad at < \beta;$$

$$t < -\frac{\alpha}{b}; \quad t < \frac{\beta}{a}.$$

Sel juhul võimaldab võrratus arvutu hulga positiivseid täisarvulisi lahendeid.

Tõesti, oletame, et me oleme saanud:

$$t < \frac{7}{2} \quad \text{ja} \quad t < -1\frac{3}{5}.$$

On ilmne, et iga arv, mis on väiksem kui $-1\frac{3}{5}$, rahuldab mõlemat võrratust. Järelikult võib t väärtuseks võtta mistahes täisarvu, mis on väiksem kui -1.

Võtame teise juhu:

$$t > \frac{7}{15}; \quad t > 3\frac{1}{3}.$$

On ilmne, et võttes t väärtuseks mistahes täisarvu, mis on suurem kui $3\frac{1}{3}$, saame x ja y väärtuseks täisarvulised positiivsed arvud.

Näide 1. $3x - 5y = 11$.

Lahendame selle võrrandi:

$$x = \frac{11+5y}{3} = 4 + 2y - \frac{1+y}{3} = 4 + 2y - t; \quad \frac{1+y}{3} = t;$$

$$1 + y = 3t; \; y = -1 + 3t; \; x = 4 + 2(-1 + 3t) - t = 2 + 5t.$$

Otsime positiivseid lahendeid:

$$-1 + 3t > 0; \quad 2 + 5t > 0$$

ehk

$$t > \frac{1}{3}; \quad t > -\frac{2}{5}.$$

Võttes t väärtuseks mistahes täisarvu — suurema kui $\frac{1}{3}$ (ehk, mis on sama, suurema kui 0), saame x ja y jaoks arvutu hulga positiivseid väärtuste paare, mis rahuldavad antud võrrandit.

Näide 2. $8x - 3y = -13$.

Lahendame võrrandi:

$$y = \frac{13+8x}{3} = 4 + 3x + \frac{1-x}{3} = 4 + 3x + t;$$

$$\frac{1-x}{3} = t; \quad 1 - x = 3t; \quad x = 1 - 3t; \quad y = 7 - 8t.$$

Otsime positiivsed lahendid:

$$1 - 3t > 0; \quad 7 - 8t > 0$$

ehk

$$t < \frac{1}{3}; \quad t < \frac{7}{8}.$$

Tähe t mistahes väärtus, mis on väiksem kui $\frac{1}{3}$ (s. o. 0, -1, $-2, \ldots$), annab tundmatuile x ja y täisarvulised ja positiivsed väärtused.

2. *Vastupidised võrratused, kusjuures nad on teineteisele vasturääkivad.* Oletame, et me saame järgmised võrratused:

$$t < \frac{7}{8}; \quad t > 1\frac{1}{3}.$$

On ilmne, et pole olemas t selliseid väärtusi, mis rahuldaksid üheaegselt mõlemat võrratust. Sel juhul ei saa võrrandil olla positiivseid lahendeid.

Näide 3. $4x + 5y = -7$.

Lahendades selle võrratuse, saame:

$$x = -3 + 5t; \quad y = 1 - 4t.$$

Siit

$$-3 + 5t > 0; \quad 1 - 4t > 0$$

ehk

$$t > \frac{3}{5}; \quad t < \frac{1}{4}.$$

Võrratused on vasturääkivad; võrrandil ei ole positiivseid lahendeid.

3. *Vastupidised võrratused, kusjuures nad ei ole teineteisele vasturääkivad.* Oletame, et me saime võrratused:

$$t > 4\frac{1}{7}; \quad t < 7\frac{3}{4}.$$

Kõik tähe t täisarvulised väärtused, mis on $4\frac{1}{7}$ ja $7\frac{3}{4}$ vahel, s. o. 5, 6 ja 7, annavad arvudele x ja y positiivsed väärtused. Seega:

Võrrandil on niimitu täisarvulist positiivset lahendit, kuimitu täisarvu on arvu t leitud tõkete vahel.

Täheldame, et võrrandil ei tarvitse ka sel juhul olla positiivseid lahendeid. See on siis, kui arvu t leitud tõkete vahel pole ühtegi täisarvu. Näiteks olgu meil võrratused:

$$t > 1\frac{1}{4}; \quad t < 1\frac{7}{8}.$$

Võrratused ei ole vasturääkivad, kuid $1\frac{1}{4}$ ja $1\frac{7}{8}$ vahel pole ühtegi täisarvu. Võrrandil ei ole täisarvulisi positiivseid lahendeid.

Näide 4. $3x + 7y = 55$.

Lahendame võrrandi:

$$x = \frac{55 - 7y}{3} = 18 - 2y + \frac{1 - y}{3} = 18 - 2y + t;$$

$$y = 1 - 3t; \quad x = 16 + 7t.$$

Siit

$$1 - 3t > 0; \quad 16 + 7t > 0$$

ehk

$$t < \frac{1}{3}; \quad t > -2\frac{2}{7}.$$

On ilmne, et arvule t võime anda ainult väärtused 0, —1 ja —2. Saame võrrandi kolm lahendit:

t	0	—1	—2
x	16	9	2
y	1	4	7

Näide 5. $5x + 4y = 3$.

Lahendades võrrandi, saame:

$$x = -1 + 4t; \quad y = 2 - 5t.$$

Siit

$$t > \frac{1}{4}; \quad t < \frac{2}{5}.$$

Võrratused ei ole vasturääkivad; kuid $\frac{1}{4}$ ja $\frac{2}{5}$ vahel pole täisarve. Võrrandil ei ole täisarvulisi positiivseid lahendeid.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrrandid positiivseis täisarvudes:

252. $3x + 2y = 10$; $7x + 5y = 157$; $5x - 11y = 17$; $8x + 11y = 13$.

253. $7x + 9y = 35$; $15x + 28y = 185$.

254. Lahutada arv 100 kaheks positiivseks arvuks nii, et üks neist jaguks arvuga 7 ja teine arvuga 11.

255. Kolm meetrit laia põranda katmiseks on laudu laiusega 11 cm ja 13 cm. Mitu lauda tuleb võtta kummastki laiusest?

256. Rukki säilitamiseks on kahesuguse mahuga kotte: ühed mahutavad 60 kg, teised 80 kg. Kui palju tuleb võtta kumbagi liiki kotte, et mahutada neisse 440 kg rukist nii, et poleks poolikuid kotte?

257. Leida üldkuju arvudele, mis jagamisel 7-ga annavad jäägis 3 ja jagamisel 11-ga annavad jäägis 4.

Kaheteistkümnes jagu.

Ühendid ja Newtoni binoomvalem.

I. Ühendid.

155. Definitsioon. Mitmesuguseid rühmi, mis on koostatud mingeist esemeist ja mis erinevad üksteisest kas nende esemete järjestuse või esemete endi poolest, nimetatakse üldiselt ühenditeks.

Kui näiteks kümnest erinevast numbrist 0, 1, 2, 3, ..., 9 koostame mitmest numbrist koosnevaid rühmi, näiteks selliseid: 123, 312, 8056, 5630, 42 jne., siis saame nende numbrite mitmesugused ühendid. Mõned neist, näiteks 123 ja 312, erinevad ainult numbrite järjestuse poolest, teised aga, näiteks 8056 ja 312, erinevad neisse kuuluvate numbrite poolest (ka numbrite arvu poolest).

Esemeid, millest ühendeid koostatakse, nimetatakse elementideks. Elemente tähistame tähtedega a, b, c, ...

Ühendeid on kolme liiki: variatsioonid, permutatsioonid ja kombinatsioonid. Vaatleme neid eraldi.

156. Variatsioonid. Olgu esemete arv, millest koostame ühendid, kolm (näiteks kolm kaarti); tähistame need esemed tähtedega a, b ja c. Neist võib moodustada ühendeid

ühekaupa: a, b, c;

kahekaupa: ab, ac, bc, ba, ca, cb;

kolmekaupa:

$abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Võtame neist ühendeist ühendid kahekaupa. Need erinevad üksteisest kas esemete poolest, näiteks *ab* ja *ac*, või esemete järjestuse poolest, näiteks *ab* ja *ba*, kuid esemete arv neis on üks ja sama. Seesuguseid ühendeid nimetatakse variatsioonideks kolmest elemendist kahekaupa.

Variatsioonideks m elemendist n-kaupa nimetatakse selliseid ühendeid, milledest igaüks sisaldab n elementi, mis on võetud antud m elemendist ja mis erinevad üksteisest kas elementide endi või elementide järjestuse poolest (tähendab, eeldatakse, et $n \leqq m$). Nii on eespool toodud kolmekaupa moodustatud ühendid variatsioonid kolmest elemendist kolmekaupa (erinevad ainult järjestuse poolest); kahekaupa moodustatud ühendid on variatsioonid kolmest elemendist kahekaupa (erinevad kas elementide või järjestuse poolest).

Variatsioonid *m* elemendist võivad olla moodustatud ühe-, kahe-, kolme- ja lõpuks *m*-kaupa.

Leiame nüüd variatsioone endid moodustamata kõigi variatsioonide arvu, mis on võimalik moodustada *m* elemendist *n* elemendi kaupa. Seda arvu tähistatakse tavaliselt nii: A_m^n (siin on *A* algustäht prantsuskeelsest sõnast „*arrangement*", mis tähendab „korraldus", „paigutus"). Et seda arvu leida, vaatleme võtet, mille abil on võimalik moodustada mitmesuguseid variatsioone.

Olgu meil antud *m* elementi: *a*, *b*, *c*, ..., *k*, *l*. Algul koostame neist kõik variatsioonid ühekaupa. Neid on ilmselt *m*. Tähendab, $A_m^1 = m$. Nüüd moodustame kõik variatsioonid kahekaupa. Selleks ühendame kõigi varem ühekaupa moodustatud variatsioonidega järgemööda kõik ülejäänud $m - 1$ elementi ühekaupa. Nii ühendame elemendiga *a* järjestikku ülejäänud elemendid *b*, *c*, ..., *k*, *l*; elemendiga *b*

ühendame järjestikku ülejäänud elemendid a, c, ..., k, l jne. Siis saame järgmised variatsioonid kahekaupa:

m rida
$$\begin{cases} ab,\ ac,\ ad,\ \ldots,\ ak,\ al; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \\ ba,\ bc,\ bd,\ \ldots,\ bk,\ bl; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \\ ca,\ cb,\ cd,\ \ldots,\ ck,\ cl; & (m-1 \text{ variatsiooni}) \\ \ldots\ldots\ldots\

Selline on variatsioonide arvu valem. Sõnades võib seda väljendada nii:

Kõigi võimalike variatsioonide arv m elemendist n-kaupa võrdub n järjestikuse täisarvu korrutisega, milledest suurim on m.

Seega:

$$A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12; \quad A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24;$$
$$A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680, \text{ jne.}$$

157. Ülesanded. 1) Klassil on 10 õppeainet ja 5 erinevat tundi päevas. Mitut viisi võib päevas tunde jaotada?

Kõik võimalikud tundide jaotused päevas kujutavad enesest ilmselt kõiki võimalikke variatsioone kümnest elemendist viiekaupa. Seepärast peab kõiki jaotusviise olema:

$$A_{10}^5 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30\,240.$$

2) Kui palju võib moodustada täisarve, milledest igaüks koosneks kolmest e r i n e v a s t numbrist 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9?

Otsitav arv on üheksast numbrist kolmekaupa moodustatud variatsioonide arv; järelikult on ta $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

3) Kui palju võib moodustada täisarve, milledest igaüks koosneks kolmest e r i n e v a s t numbrist 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ja 9?

10-st numbrist 0, 1, 2, 3, ..., 9 võib moodustada $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ variatsiooni kolmekaupa; kuid sellest arvust on vaja välja jätta need variatsioonid kolmekaupa, mis algavad numbriga 0. Selliseid variatsioone on niipalju, kuipalju võib moodustada variatsioone üheksast numbrist 1, 2, 3, ..., 9 kahekaupa, s. o. $9 \cdot 8 = 72$; järelikult otsitav arv on $720 - 72 = 648$.

158. Permutatsioonid. Kui variatsioonid m elemendist on võetud m-kaupa (s. o. nad erinevad ainult elementide järjestuselt), siis nimetatakse selliseid variatsioone permutatsioonideks. Näiteks permutatsioonid kahest elemendist a ja b on variatsioonid kahest elemendist kahekaupa, s. o. ab ja ba, permutatsioonid kolmest elemendist on variatsioonid kolmest elemendist kolmekaupa, s. o. abc, acb, bac, bca, cab, cba jne.

Kõigi võimalike permutatsioonide arvu m elemendist tähistatakse sümboliga P_m (siin on P algustäht prantsuskeelsest sõnast „*permutation*", mis tähendab „ümberpaigutus", „vahetlus").

Et permutatsioonid m elemendist on variatsioonid m elemendist m-kaupa, siis on permutatsioonide arvu valem järgmine:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1 = \\ = 1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)m.$$

Kõigi võimalike permutatsioonide arv m elemendist võrdub loomulike arvude korrutisega alates 1-st kuni m-ni.

159. Ülesanded. 1) Mitu üheksakohalist arvu võib kirjutada üheksa erineva numbriga 1, 2, 3, ..., 9?

Otsitav arv on:

$$P_9 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362\,880.$$

2) Mitut viisi võib paigutada 12 inimest laua taha, millele on pandud 12 sööginõu?

Paigutuste arv on:

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots 12 = 479\,001\,600.$$

Märkus. Loomulikkude arvude korrutis 1-st kuni m-ni (seda korrutist tähistatakse lühendatult nii: $m!$) kasvab väga kiiresti arvu m kasvades; kui $m = 12$, siis see korrutis on 479 001 600; kui $m = 100$, siis see korrutis on arv, mille kirjutuses on 158 numbrit.

160. Kombinatsioonid. Kui kõigist variatsioonidest, mis on võimalik moodustada m elemendist n-kaupa, võtame ainult need, mis erinevad üksteisest vähemalt ühe elemendi poolest, siis saame ühendid, mida nimetatakse kombinatsioonideks.

Näiteks nelja elemendi a, b, c ja d kolmekaupa moodustatud kombinatsioonid on

$$abc,\ abd,\ acd,\ bcd.$$

Kui teeme kõigis neis kombinatsioonides kõik võimalikud ümberpaigutused (permutatsioonid), siis saame kõik võimalikud variatsioonid neljast elemendist kolmekaupa.

abc	*abd*	*acd*	*bcd*
acb	*adb*	*adc*	*bdc*
bac	*bad*	*cad*	*cbd*
bca	*bda*	*cda*	*cdb*
cab	*dab*	*dac*	*dbc*
cba	*dba*	*dca*	*dcb*

Selliste variatsioonide arv on ilmselt $6 \cdot 4 = 24$.

Seega võrdub kõigi variatsioonide arv m elemendist n-kaupa kõigi m elemendist n-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu ja kõigi n elemendist moodustatud permutatsioonide arvu korrutisega, s. o.

$$A_m^n = C_m^n P_n,$$

kus C_m^n tähistab kõigi kombinatsioonide arvu m elemendist n-kaupa (C on algustäht prantsuskeelsest sõnast „*combinatson*", mis tähendab „kombinatsioon").

Siit tuletame järgmise kombinatsioonide arvu valemi:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n} = \frac{m(m-1)(m-2)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Näiteks:

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6, \quad C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4, \text{ jne.}$$

Näited.

1) Ühele ja samale ametikohale on 10-st kandidaadist vaja valida kolm. Kui palju on valiku võimalusi?

Otsitav arv moodustab ilmselt kõigi võimalike kombinatsioonide arvu kümnest elemendist kolmekaupa, s. o.

$$C_{10}^{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

2) Mitmel viisil võib valida 13 kaarti kaardipakist, milles on 52 kaarti?

Otsitav arv kujutab enesest kombinatsioonide arvu 52 kaardist kolmeteistkümne-kaupa, s. o.

$$C_{12}^{13} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \ldots 40}{1 \cdot 2 \ldots 13} = 635\,013\,559\,600.$$

161. Kombinatsioonide arvu valemi teine kuju. Kombinatsioonide arvu valemile võib anda teise kuju, kui korrutame tema lugejat ja nimetajat korrutisega $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)$; siis saame lugejas korrutise

$$m(m-1) \ldots [m-(n-1)] \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n),$$

mida võib kirjutada, paigutades tegurid ümber:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)[m-(n-1)] \ldots m.$$

Järelikult:

$$C_{m}^{n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n)} = \frac{P_m}{P_n \cdot P_{m-n}}.$$

162. Kombinatsioonide omadus. Asendades selles valemis tähe n vahega $m-n$, saame:

$$C_{m}^{m-n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)\,m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-n) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} = \frac{P_m}{P_{m-n} \cdot P_n}.$$

Võrreldes seda valemit eelmisega, leiame:

$$C_{m}^{n} = C_{m}^{m-n}.$$

Selle järelduseni viib ka lihtne arutelu: kui võtame m elemendist n elementi, et neist moodustada üht kombinatsiooni, siis moodustab järelejäänud elementide kogum ühe

kombinatsiooni, mis koosneb $m - n$ elemendist. Seega vastab igale n elemendist koosnevale kombinatsioonile üks $n - m$ elemendist koosnev kombinatsioon, ja vastupidi; tähendab:

$$C_m^n = C_m^{m-n}.$$

See vastastikune suhe võimaldab lihtsustada m elemendi n-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvu leidmist, kui n on suurem kui $\frac{1}{2}m$. Näiteks:

$$C_{100}^{97} = C_{100}^{3} = \frac{100 \cdot 99 \cdot 98}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 161\,700.$$

Harjutused.

258. 5 õpilast peavad istuma ühes pingis. Mitmel viisil võivad nad seal aset võtta?

259. Mitu neljakohalist arvu võib moodustada numbritest 0, 1, 2, 3?

Juhis. Kõigi võimalike neljanumbriliste permutatsioonide arvust tuleb lahutada nulliga algavate permutatsioonide arv.

260. Tasapinna asend ruumis on määratud kolme punktiga, mis ei asetse ühel sirgel. Mitu tasapinda võib panna läbi nelja, seitsme, kümne, n punkti, kui ükski 3 punkti ei asetse ühel sirgel ja ükski 4 punkti ei asetse ühel tasapinnal?

261. Keegi tõmbab 32 kaarti sisaldavast pakist 4 kaarti. Mitu erijuhtu võib seejuures esineda?

262. Mitu permutatsiooni võib moodustada numbritest 1, 2, 3, 4, 5, 6, mis algavad numbriga 4? numbritega 45? numbritega 456?

263. Rühmas on 32 õpilast; neist on vaja 6 õpilast paigutada esimesse pinki. Mitu erijuhtu võib esineda, kui pole tähtis, millises järjestuses õpilased istuvad pingis?

II. Newtoni binoomvalem.

163. Teise liikme poolest erinevate binoomide korrutis. Hariliku korrutamise teel leiame:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$(x+a)(x+b)(x+c) = [x^2 + (a+b)x + ab](x+c) =$$
$$= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (ac+bc)x + abc =$$
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc.$$

Samuti leiame:

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 + (a+b+c+d)x^3 + \\ + (ab+ac+ad+bc+bd+cd)x^2 + \\ + (abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$$

Vaadeldes neid korrutisi märkame, et kõik nad on koostatud ühe ja sama seaduse järgi ja nimelt:

Korrutis on hulkliige, mis on korraldatud tähe x alanevate astmete järgi.

Esimese liikme astendaja võrdub korrutatavate binoomide arvuga; järgmiste liikmete tähe x astendajad kahanevad 1 võrra; viimane liige ei sisalda tähte x (sisaldab seda null astmes).

Esimese liikme koefitsient on 1; teise liikme koefitsient võrdub korrutatavate binoomide kõigi teiste liikmete summaga; kolmanda liikme koefitsient on kõigi kahekaupa võetud teiste liikmete korrutiste summa; neljanda liikme koefitsient on kõigi kolmekaupa võetud teiste liikmete korrutiste summa. Viimane liige on kõigi teiste liikmete korrutis.

Tõestame, et see seadus on rakendatav kuitahes paljude binoomide korrutise kohta. Selleks veendume algul, et kui see seadus on õige m binoomi korrutise kohta:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k),$$

siis on ta õige ka $(m+1)$ binoomi korrutise kohta:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k)(x+l).$$

Oletame, et on õige järgmine võrdus:

$$(x+a)(x+b)(x+c)\dots(x+k) = \\ = x^m + S_1x^{m-1} + S_2x^{m-2} + \dots + S_m,$$

kus lühiduse mõttes on kasutatud järgmisi tähiseid:

$$S_1 = a+b+c+\dots+i+k;$$
$$S_2 = ab+ac+\dots+ik;$$
$$S_3 = abc+abd+\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$S_m = abc\dots ik.$$

Korrutame oletatava võrduse mõlemad pooled binoomiga $x + l$:

$$(x + a)(x + b) \ldots (x + k)(x + l) =$$
$$= (x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + S_m)(x + l) =$$
$$= x^{m+1} + S_1 x^m + S_2 x^{m-1} + \ldots + S_m x +$$
$$+ l x^m + l S_1 x^{m-1} + \ldots + l S_m =$$
$$= x^{m+1} + (S_1 + l) x^m + (S_2 + l S_1) x^{m-1} +$$
$$+ \ldots + (S_m + l S_{m-1}) x + l S_m.$$

Vaadeldes seda uut korrutist veendume, et ta allub samale seadusele, mille eeldasime olevat õige m binoomi korral. Tõepoolest, esiteks järgivad seda seadust tähe x astendajad; teiseks järgivad seda ka koefitsiendid, sest teise arvu koefitsient $S_1 + l$ on kõigi korrutatavate binoomide teiste liikmete summa, kaasa arvatud ka l; kolmanda liikme summa $S_2 + l S$ on kõigi teiste paarikaupa võetud liikmete korrutis, kaasa arvatud ka l, jne.; lõpuks $l S_m$ on kõigi teiste liikmete a, b, c, ..., k, l korrutis.

Me nägime, et see seadus on õige kahe, kolme ja nelja binoomi korrutise kohta; järelikult peab ta nüüd tõestatu kohaselt olema õige ka $4 + 1$ binoomi korrutise kohta, s. o. viie binoomi korrutise kohta; kui ta aga on õige viie binoomi korrutise kohta, siis on ta õige ka $5 + 1$ binoomi korrutise kohta, s. o. kuue binoomi korrutise kohta, jne.

Esitatud arutelu kujutab enesest niinimetatud „tõestust m-lt $(m + 1)$-le". Seda nimetatakse ka „matemaatiliseks induktsiooniks" (ehk „täielikuks induktsiooniks"). Tähendame, et selle raamatu eelmistes peatükkides oli korduvalt võimalusi rakendada tõestust m-lt $(m + 1)$-le (näiteks progressiooni üldliikme valemi tuletamisel, § 75, 82, jne.). Me ei teinud seda ainult sellepärast, et taotlesime käsitelu lihtsust.

164. Newtoni binoomvalem. Oletame, et meie poolt tõestatud võrduses

$$(x+a)(x+b)\ldots(x+k) = \\ = x^m + S_1 x^{m-1} + S_2 x^{m-2} + \ldots + S_m$$

on kõik teised liikmed võrdsed, s. o. $a=b=c=\ldots=k$. Siis võrduse vasak pool on binoomi aste $(x+a)^m$. Vaatleme, milleks seejuures muutuvad koefitsiendid $S_1, S_2, \ldots, S_m$.

Koefitsient S_1, mis on võrdne summaga $a+b+c+\ldots+k$, muutub korrutiseks ma. Koefitsient S_2, mis võrdub summaga $ab+ac+ad+\ldots$, muutub arvu a^2 niimitmekordseks, kuimitu kombinatsiooni saab moodustada m elemendist kahekaupa, s. o. muutub avaldiseks $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2$. Koefitsient S_3, mis on võrdne summaga $abc+abd\ldots$, muutub arvu a^3 niimitme-kordseks, kuimitu kombinatsiooni saab koostada m elemendist kolmekaupa, s. o. muutub avaldiseks $\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3$, jne. Lõpuks koefitsient S_m, mis on võrdne $abc\ldots k$, muutub avaldiseks a^m. Seega saame:

$$(x+a)^m = x^m + max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} + \\ + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3x^{m-3} + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}a^n x^{m-n} + \ldots + a^m.$$

See võrdus on tuntud Newtoni binoomvalemina[1], kusjuures hulkliiget, mis asetseb valemi parempoolses osas, nimetatakse binoomreaks. Vaatleme selle hulkliikme omadusi.

[1] Isaac Newton — kuulus inglise matemaatik (1642—1727). Ta osutas umb. 1665. a. binoomvalemi kehtivusele mitte üksnes täisarvulise ja positiivse astendaja m puhul, vaid ka negatiivse ja murrulise m puhul. Selle ranget tõestust ta aga ei andnud. Esmakordselt tõestas kombinatsioonide teooria abil valemi täisarvuliste positiivsete astendajate kohta Jakob Bernoulli (1654—1705).

165. Newtoni binoomvalemi omadused. Neist omadustest osutame tähelepanu järgmisele kümnele:

1) Tähe x astendajad vähenevad 1 võrra alates esimesest liikmest kuni viimase liikmeni, kusjuures esimeses liikmes tähe x astendaja võrdub binoomi astendajaga ja viimases liikmes on ta 0; vastupidi, tähe a astendajad suurenevad 1 võrra alates esimesest liikmest viimase liikme poole, kusjuures esimeses liikmes on tähe a astendaja 0, viimases liikmes ta aga on võrdne binoomi astendajaga. Seetõttu on a ja x astendajate summa kõigis liikmeis üks ja sama, nimelt: ta on võrdne binoomi astendajaga.

2) Binoomrea kõigi liikmete arv on $m + 1$, sest binoomrida sisaldab kõiki arvu a astmeid astendajatega 0 kuni m.

3) Koefitsiendid võrduvad: esimesel liikmel ühega, teisel liikmel binoomi astendajaga, kolmandal liikmel m elemendist kahekaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga, neljandal liikmel m elemendist kolmekaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga; üldiselt $(n + 1)$-se liikme koefitsient on m elemendist n-kaupa moodustatud kombinatsioonide arv. Lõpuks viimase liikme koefitsient võrdub m elemendist m-kaupa moodustatud kombinatsioonide arvuga, s. o. ühega.

Tähendame, et neid koefitsiente nimetatakse binoomikoefitsientideks.

4) Tähistades binoomrea iga liiget tähega t ühes alloleva numbriga, mis näitab ära selle liikme koha binoomreas, s. o. esimene liige T_1, teine liige T_2 jne., võime kirjutada:

$$T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} a^n x^{m-n}.$$

See on binoomrea üldliikme valem, sest selle järgi võime leida iga liikme (peale esimese), asendades arvu n arvudega 1, 2, 3, ..., m.

5) Binoomrea algusest esimese liikme koefitsient võrdub ühega, binoomrea lõpust esimese liikme koefitsient võrdub

samuti ühega. Algusest teise liikme koefitsient on m, s. o. C_m^1; lõpust teise liikme koefitsient on C_m^{m-1}; et aga $C_m^1 = C_m^{m-1}$ (§ 162), siis on need koefitsiendid võrdsed. Algusest kolmanda liikme koefitsient on C_m^2, lõpust kolmanda liikme koefitsient aga on C_m^{m-2}; kuid $C_m^2 = C_m^{m-2}$, seepärast on ka need koefitsiendid võrdsed jne. Tähendab:

Binoomrea algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete koefitsiendid on võrdsed.

6) Vaadeldes binoomikoefitsiente:

$$1,\ m,\ \frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots,$$

märkame, et üleminekul ühe koefitsiendi juurest järgmise juurde korrutatakse lugejaid järjest vähenevate arvudega (arvudega $m-1$, $m-2$, $m-3$ jne.), kuna nimetajaid korrutatakse järjest suurenevate arvudega (arvudega 2, 3, 4 jne.). Seetõttu koefitsiendid algul kasvavad (kuni kordajad lugejas on suuremad vastavaist kordajaist nimetajas) ja pärast kahanevad. Et binoomrea algusest ja lõpust võrdsetel kaugustel seisvate liikmete koefitsiendid on võrdsed, siis peab suurim koefitsient olema binoomrea keskel. Kui binoomrea kõigi liikmete arv on paaritu arv (mis esineb binoomi paarisarvulise astendaja puhul), siis on keskel üks suurima koefitsiendiga liige; kui aga liikmete arv on paarisarv (mis esineb binoomi paarituarvulise astendaja puhul), siis peab keskel olema kaks võrdsete suurimate koefitsientidega liiget.

Näiteks:

$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4;$$

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

7) Kahe kõrvuti oleva liikme:

$$T_{n+1} = \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\,a^n x^{m-n}$$

ja

$$T_{n+2} = \frac{m(m-1)\dots[m-(n-1)](m-n)}{1\cdot 2\cdot 3\dots n(n+1)}\, a^{n+1}x^{m-n-1}$$

võrdlusest järeldame, et:

Järgneva liikme koefitsiendi leidmiseks tuleb eelneva liikme koefitsient korrutada tähe x astendajaga eelnevas liikmes ja jagada kõigi eelnevate liikmete arvuga.

Kasutades seda omadust võib kohe kirjutada näiteks

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 \dots$$

Võtame nüüd arvu 7, korrutame teda 6-ga ja jagame 2-ga, saame 21:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 \dots$$

Nüüd võtame 21, korrutame 5-ga ja jagame 3-ga, saame 35:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 \dots$$

Nüüd on liikmed välja kirjutatud kuni rea keskkohani, ülejäänud liikmed saame, toetudes viiendale omadusele:

$$(x+a)^7 = x^7 + 7ax^6 + 21a^2x^5 + 35a^3x^4 + \\ + 35a^4x^3 + 21a^5x^2 + 7a^6x + a^7.$$

8) *Kõigi binoomikoefitsientide summa on* 2^m. Tõepoolest, võttes binoomvalemis $x = a = 1$, saame:

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots + 1.$$

Näiteks koefitsientide summa $(x+a)^7$ binoomreas võrdub

$$1+7+21+35+35+21+7+1 = 128 = 2^7.$$

9) Asendades binoomvalemis tähe a tähega $-a$, saame:

$$(x-a)^m = x^m + m(-a)x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}(-a)^2x^{m-2} + \dots + \\ + (-a)^m,$$

$$(x-a)^m = x^m - max^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}a^2x^{m-2} - \ldots + (-1)^m a^m,$$

järelikult pluss- ja miinusmärgid vahelduvad.

10) Kui viimases võrduses võtame $x = a = 1$, siis leiame:

$$0 = 1 - m + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + (-1)^m.$$

Paaritunumbrilistel kohtadel seisvate binoomikoefitsientide summa võrdub paarisnumbrilistel kohtadel seisvate binoomikoefitsientide summaga.

166. Binoomvalemi rakendamine hulkliikmele. Newtoni binoomvalemi abil saab astendada ka hulkliiget. Nii on

$$(a+b+c)^4 = [(a+b)+c]^4 = (a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + \\ + 6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4.$$

Arendades $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$, saame lõpuks:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + \\ + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2 + \\ + 12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4.$$

Harjutused.

Leida Newtoni binoomvalemi abil:

264. $(1+x)^6$; $(x+3)^5$; $(x-1)^7$.

265. $(2-a)^8$; $(3x+4y)^6$; $(1+x)^m$.

266. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$; $(x^2+2y^2)^4$; $(3a^2-2b^2)^6$.

267. Leida $(5x^2-6a^2)^{10}$ binoomrea 6. liige.

268. Leida $(3a-2)^{12}$ binoomrea 8. liige.

Arvutada järgmiste avaldiste väärtused:

269. $2{,}1^6 = \left(2+\frac{1}{10}\right)^6 = \ldots$

270. $1{,}03^5 = \left(1 + \frac{3}{100}\right)^5 = \ldots$

271. $0{,}97^4 = \left(1 - \frac{3}{100}\right)^4 = \ldots$

272. $29^5 = (30 - 1)^5 = \ldots$

273. $99^3 = (100 - 1)^3 = \ldots$

274. $(4 + \sqrt{3})^6$; $(6 - 5\sqrt{2})^5$.

275. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^4$; $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3$.

276. $(1 + \sqrt{3})^8$; $(2\sqrt{2} + \sqrt{6})^6$.

277. Leida $\left(x^2 - \frac{3}{x^3}\right)^{15}$ binoomrea liige, mis ei sisalda x-i.

278. Teha sama $\left(2x^2 - \frac{a}{2x^3}\right)^{10}$ binoomreas.

Täiendused.

I. Ahelmurrud.

167. Ahelmurru definitsioon. A h e l m u r r u k s nimetatakse murdu kujul:

$$a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\dots+\cfrac{1}{a_n}}}},$$

kus täisarv a liidetakse murruga, mille lugeja on 1 ja nimetaja on täisarv a_1, mis omakorda on liidetud murruga, mille lugeja on 1 ja nimetaja on täisarv a_2, mis on liidetud murruga, ... jne. (eeldatakse, et kõik täisarvud on positiivsed).

Murde $\frac{a}{1}, \frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}$ jne. nimetatakse ahelmurru l ü l i d e k s.

Ülalkirjeldatud murdu tähistatakse lühidalt nii:

$$(a, a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Näiteks murde

$$3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}} \qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{17}}}$$

kirjutatakse lühidalt: (3, 2, 1, 3) ja (0, 2, 1, 17).

168. Ahelmurru teisendamine harilikuks murruks. Iga ahelmurdu võib teisendada harilikuks murruks; selleks tuleb aritmeetika reeglite kohaselt sooritada kõik tehted, mis on näidatud ahelmurru kirjutuses.

Olgu meil näiteks selline murd:

$$(2, 3, 1, 4) = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}.$$

Teostame näidatud tehted:

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}; \quad 1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}; \quad 3 + \frac{4}{5} = \frac{19}{5}; \quad 1 : \frac{19}{5} = \frac{5}{19};$$

$$2 + \frac{5}{19} = \frac{43}{19}.$$

See ongi harilik murd, mis kujutab enesest ahelmurru täpset väärtust.

169. Hariliku murru teisendamine ahelmurruks. Iga harilikku murdu saab teisendada ahelmurruks. Olgu näiteks antud murd $\frac{A}{B}$. Eraldades selles täisosa, saame:

$$\frac{A}{B} = a + \frac{r}{B},$$

kus a on jagatise täisosa ja r on jääk, mis tekkis A jagamisest B-ga. (Kui $\frac{A}{B}$ on lihtmurd, siis $a = 0$ ja $r = A$.)

Jagades murru $\frac{r}{B}$ mõlemad liikmed arvuga r, saame:

$$\frac{r}{B} = \frac{1}{B : r} = \frac{1}{a_1 + \frac{r_1}{r}},$$

kus a_1 on jagatise täisosa ja r_1 on jääk, mis tekkis arvu B jagamisel arvuga r.

Jagades murru $\frac{r_1}{r}$ mõlemad liikmed arvuga r_1, saame:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{1}{r : r_1} = \frac{1}{a_2 + \frac{r_2}{r_1}},$$

kus a_2 on jagatise täisosa ja r_2 on jääk, mis tekkis arvu r jagamisel arvuga r_1. Jätkates sama võtet, saame järk-järgult:

$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{1}{r_1:r_2}=\frac{1}{a_3+\frac{r_3}{r_2}};\quad \frac{r_3}{r_2}=\frac{1}{r_2:r_3}=\frac{1}{a_4+\frac{r_4}{r_3}}\ \text{jne.}$$

Et $B>r>r_1>r_2>r_3, \ldots,$ siis jõuame seda võtet jätkates jäägini, mis on võrdne nulliga. Olgu $r_n=0$, s. o.

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}}=\frac{1}{a_n}.$$

Siis saame asendamise teel:

$$\frac{A}{B}=a+\frac{r}{B}=a+\frac{1}{a_1+\frac{r_1}{r}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{r_2}{r_1}}}=a+\frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\ldots}}+\frac{1}{a_n}.$$

Märkus. Selle võtte analüüsist ilmneb, et a, a_1, $a_2, \ldots, a_n$ on jagatiste täisosad, mis tekivad järjestikusel jagamisel, kui A jagatakse B-ga, B jagatakse esimese jäägiga, esimene jääk teise jäägiga jne., teisiti öeldes, need on jagatiste täisosad, mis saadakse arvude A ja B suurima ühisteguri leidmisel järjestikuse jagamise teel.

Seetõttu nimetatakse arve a, a_1, a_2, $\ldots$, a_n ahelmurru jagatisteks.

Näited.

1) Teisendada arv $\frac{40}{17}$ ahelmurruks.

Et

$$\begin{array}{r|l} 40 & 17 \\ \hline 17 & 6 \quad 2 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 5 & 1 \quad 1 \\ \hline 0 & 5 \end{array},\quad \text{siis}\quad \frac{40}{17}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{5}}}.$$

2) Teisendada arv $\frac{7}{120}$ ahelmurruks.

Et

$$\begin{array}{r|l} & 7 \mid 120 \\ \hline 120 & 7 \quad 0 \\ \hline 7 & 1 \quad 17 \\ \hline 0 & 7 \end{array}, \quad \text{siis} \quad \frac{7}{120} = \frac{1}{17 + \frac{1}{7}}.$$

170. Lähendmurrud. Kui võtame ahelmurru algusest mõned lülid, heites ära kõik ülejäänud lülid, ja teisendame nendest moodustatud ahelmurru harilikuks murruks, siis saame ahelmurru l ä h e n d m u r r u. Esimese lähendmurru saame, kui võtame ainult esimese lüli; teise saame, kui võtame esimesed kaks lüli jne. Seega on ahelmurru

$$3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}$$

esimene lähendmurd $\frac{3}{1}$;

teine „ $3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$;

kolmas „ $3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}} = \frac{10}{3}$.

Neljas lähendmurd $\frac{27}{8}$ kujutab enesest ahelmurru täpset väärtust.

Kui ahelmurd ei sisalda täisarvu, siis on esimene lähendmurd 0.

171. Lähendmurdude moodustamise reegel. Koostame ahelmurru $(a, a_1, a_2, \ldots, a_n)$ esimesed kolm lähendmurdu:

$$1)\ \frac{a}{1};\quad 2)\ a + \frac{1}{a_1} = \frac{aa_1 + 1}{a_1};$$

$$3)\ a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} = a + \cfrac{1}{\cfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = a + \frac{a_2}{a_1 a_2 + 1} =$$

$$= \frac{aa_1 a_2 + a + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \frac{(aa_1 + 1)\, a_2 + a}{a_1 a_2 + 1}.$$

Võrreldes kolmandat lähendmurdu esimese kahega märkame, et kolmanda lähendmurru lugeja saadakse, kui teise lähendmurru lugeja korrutatakse vastava jagatisega (s. o. arvuga a_2) ja saadud korrutisega liidetakse esimese lähendmurru lugeja; kolmanda lähendmurru nimetaja saadakse samal viisil esimese kahe lähendmurru nimetajaist.

Tõestame, et see seadus on rakendatav iga lähendmurru kohta, mis järgneb kolmandale lähendmurrule, s. o. meie tõestame, et $(n+1)$-se lähendmurru lugeja saame, kui korrutame n-nda lähendmurru lugeja vastava jagatisega (s. o. arvuga a_n) ja liidame saadud korrutisega $(n-1)$-se lähendmurru lugeja, ning et $(n+1)$-se lähendmurru nimetaja saadakse samal viisil n-nda ja $(n-1)$-se lähendmurdude nimetajaist. Kasutame tõestust n-lt $(n+1)$-le, s. o. tõestame, et kui see reegel on rakendatav n-nda lähendmurru kohta, siis on ta rakendatav ka $(n+1)$-se lähendmurru kohta.

Tähistame esimese, teise, kolmanda jne. lähendmurru järjestikku sümbolitega

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \frac{P_3}{Q_3}, \ldots, \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \frac{P_n}{Q_n}, \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$$

ja paneme tähele, et nendele vastavad jagatised on:

$$a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Oletame, et on õiged võrdused

$$P_n = P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}; \quad Q_n = Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}, \tag{1}$$

ja järelikult

$$\frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2}}{Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2}}. \tag{2}$$

On vaja tõestada, et sel juhul ka

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}. \tag{3}$$

Kahe lähendmurru

$$\frac{P_n}{Q_n} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1}}}}$$

ja

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

võrdlusest selgub, et $(n+1)$-ne lähendmurd saadakse n-ndast lähendmurrust, kui viimases arvu a_{n-1} asendame summaga $a_{n-1} + \frac{1}{a_n}$.

Seepärast võrdusest (2) saame, et

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) + P_{n-2}}{Q_{n-1}\left(a_{n-1} + \frac{1}{a_n}\right) + Q_{n-2}}.$$

Avanud sulud ja korrutanud murru mõlemad liikmed arvuga a_n, saame:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_{n-1}a_{n-1}a_n + P_{n-1} + P_{n-2}a_n}{Q_{n-1}a_{n-1}a_n + Q_{n-1} + Q_{n-2}a_n} = \frac{(P_{n-1}a_{n-1} + P_{n-2})a_n + P_{n-1}}{(Q_{n-1}a_{n-1} + Q_{n-2})a_n + Q_{n-1}}.$$

Võtnud arvesse võrduse (1), võime lõpuks kirjutada:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

See ongi võrdus (3), mida oli vaja tõestada.

Seega, kui tõestatav reegel on kehtiv n-nda lähendmurru kohta, siis on ta kehtiv ka $(n+1)$-se lähendmurru kohta. Kuid me nägime vahetult, et ta on kehtiv kolmanda lähendmurru kohta, järelikult on ta tõestatu kohaselt kehtiv neljanda lähendmurru kohta; kui ta aga on kehtiv neljanda kohta, siis on ta kehtiv ka viienda kohta jne.

Kasutades seda reeglit koostame kõik järgmise ahelmurru lähendmurrud:

$$x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}}}}} = (2, 1, 3, 2, 3, 1, 5).$$

Arvutust on kõige sobivam korraldada nii:

		3	2	3	1	5
2	3	11	25	86	111	641
1	1	4	9	31	40	231

Esimesed kaks lähendmurdu leiame vahetult, need on $\frac{2}{1}$ ja $\frac{3}{1}$. Ülejäänud lähendmurrud leiame toetudes tõestatud reeglile. Meelespidamise eesmärgil asetame ülemisse ritta ahelmurru jagatised kolmandast kuni viimaseni.

172. ***Teoreem 1.*** *Ahelmurru täpne väärtus on kahe teineteisele järgneva lähendmurru vahel, kusjuures ta on lähem järgnevale kui eelnevale lähendmurrule.*

Tõestus. Olgu antud ahelmurd:

$(a, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s) = A$, mille täpse väärtuse tähistame tähega A. Võtame kolm mingisugust lähendmurdu:

$$\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}, \quad \frac{P_n}{Q_n}, \quad \frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}.$$

Eelmises paragrahvis tõestatu kohaselt saame:

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{P_n a_n + P_{n-1}}{Q_n a_n + Q_{n-1}}.$$

Kui me selle võrduse paremale poolele asetame a_n asemele $y = (a_n, a_{n+1}, \ldots, a_s)$, siis saame vasakul poolel ahelmurru täpse suuruse A, tähendab:

$$A = \frac{P_n y + P_{n-1}}{Q_n y + Q_{n-1}},$$

kust $$AQ_n y + AQ_{n-1} = P_n y + P_{n-1}$$

ehk $$AQ_n y - P_n y = P_{n-1} - AQ_{n-1},$$

ja järelikult

$$yQ_n\left(A - \frac{P_n}{Q_n}\right) = Q_{n-1}\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right).$$

Viimasest võrdusest võime tuletada kaks järeldust:

1) Et arvud y, Q_n ja Q_{n-1} on positiivsed, siis peavad sulgudes olevad vahed olema kas üheaegselt positiivsed või üheaegselt negatiivsed; tähendab:

$$\begin{cases} \text{kui } A - \dfrac{P_n}{Q_n} > 0, \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A > 0 \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \text{kui } A - \dfrac{P_n}{Q_n} < 0, \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A < 0, \end{cases}$$

s. o. $$\begin{cases} \text{kui } A > \dfrac{P_n}{Q_n}, \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} > A \end{cases} \quad \text{või} \quad \begin{cases} \text{kui } A < \dfrac{P_n}{Q_n}, \\ \text{siis ka } \dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} < A. \end{cases}$$

Järelikult asetseb A iga kahe järjestikuse lähendmurru vahel.

2) Et $y > 1$ ja $Q_n > Q_{n-1}$, kusjuures Q_n ja Q_{n-1} on positiivsed, siis järeldame samast võrdusest, et $(A - \frac{P_n}{Q_n})$

absoluutväärtus on väiksem kui $\left(\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} - A\right)$ absoluutväärtus.

Siit järeldub, et $\frac{P_n}{Q_n}$ on suurusele A lähem kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, mida oligi vaja tõestada.

Märkus. Et ilmselt $A > a$, s. o. $A > \frac{P_1}{Q_1}$, siis

$$A < \frac{P_2}{Q_2};\ A > \frac{P_3}{Q_3};\ A < \frac{P_4}{Q_4} \text{ jne.}$$

Ahelmurru täpne väärtus on igast paarisnumbrilisest lähendmurrust suurem ja igast paaritunumbrilisest lähendmurrust väiksem.

173. ***Teoreem 2.*** Kahe kõrvuti seisva lähendmurru vahe võrdub murruga, mille lugejaks on ± 1 ja nimetajaks on nende lähendmurdude nimetajate korrutis.

Tõestus. Et

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n} = \frac{P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}},$$

siis on ilmne, et selle vahe nimetaja vastab teoreemi väitele. Jääb tõestada, et selle murru lugeja on ± 1.

Et:

$$P_{n+1} = P_na_n + P_{n-1} \text{ ja } Q_{n+1} = Q_na_n + Q_{n-1},$$

siis

$$\begin{aligned} P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} &= (P_na_n + P_{n-1})\,Q_n - P_n(Q_na_n + Q_{n-1}) = \\ &= P_nQ_na_n + P_{n-1}Q_n - P_nQ_na_n - P_nQ_{n-1} = \\ &= -(P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n). \end{aligned}$$

Sulgudes seisev avaldis kujutab enesest murru lugejat, mis tekib murru $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ lahutamisel murrust $\frac{P_n}{Q_n}$.

Järelikult me tõestasime, et murru lugeja absoluutväärtus, mis tekkis murru $\frac{P_n}{Q_n}$ lahutamisel murrust $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}$, on võrdne murru absoluutväärtusega, mis saadi murru $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ lahutamisel murrust $\frac{P_n}{Q_n}$; teiste sõnadega, murru lugeja absoluutväärtus, mis saadakse kõrvuti asetsevate lähendmurdude lahutamisel, on jääv suurus kõigi lähendmurdude puhul. Kuid esimese ja teise lähendmurru vahe on

$$(a + \frac{1}{a_1}) - a = \frac{1}{a_1}.$$

Järelikult iga kahe kõrvuti asetseva lähendmurru vahe lugeja absoluutväärtus on 1.

Kui võtame § 171 toodud näite, siis leiame:

$$\frac{3}{1} - \frac{2}{1} = \frac{1}{1}; \quad \frac{11}{4} - \frac{3}{1} = -\frac{1}{4}; \quad \frac{25}{9} - \frac{11}{4} = \frac{1}{36};$$

$$\frac{86}{31} - \frac{25}{9} = -\frac{1}{279} \text{ jne.}$$

Järeldused. 1. Iga lähendmurd on taandamatu murd, sest kui $\frac{P_n}{Q_n}$ oleks taandatav mingi teguriga $m > 1$, siis $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n$ jaguks arvuga m, mis aga on võimatu, kuna see vahe on ± 1.

2. Kui ahelmurru täpse väärtuse asemel võtame lähendmurru $\frac{P_n}{Q_n}$, siis teeme vea, mis on väiksem kolmest järgmisest arvust:

$$\frac{1}{Q_nQ_{n+1}}; \quad \frac{1}{Q_n(Q_n + Q_{n-1})}; \quad \frac{1}{Q_n^2}.$$

Tõepoolest, kui A on ahelmurru täpne väärtus, siis vahe $A - \frac{P_n}{Q_n}$ on väiksem kui vahe $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} - \frac{P_n}{Q_n}$, mille absoluutväärtus

on vastavalt tõestusele $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$. Teiselt poolt, et $Q_{n+1} = Q_n a_n + Q_{n-1}$, kus $a \geqslant 1$, siis $Q_{n+1} \geqslant Q_n + Q_{n-1}$, ning järelikult:

$$Q_n Q_{n+1} \geqslant Q_n (Q_n + Q_{n-1}) \quad \text{ja} \quad \frac{1}{Q_n Q_{n+1}} \leqslant \frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})},$$

ja seepärast on vahe $A - \frac{P_n}{Q_n}$ väiksem kui $\frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$.

Lõpuks, et $Q_{n+1} > Q_n$, siis $Q_{n+1} Q_n > Q_n^2$ ja seepärast

$$\frac{1}{Q_n Q_{n+1}} < \frac{1}{Q_n^2}.$$

Järelikult vahe $A - \frac{P_n}{Q_n}$ absoluutväärtus on väiksem kui $\frac{1}{Q^2}$.

Vea kolmest mainitud ülemmäärast on kõige väiksem $\frac{1}{Q_n Q_{n+1}}$, kuid selle ülemmäära arvutamiseks on vaja teada ahelmurru ligikaudseks väärtuseks võetud lähendmurrule järgneva lähendmurru nimetajat. Vea ülemmäära $\frac{1}{Q_n (Q_n + Q_{n-1})}$ on võimalik arvutada ainult siis, kui on teada eelneva lähendmurru nimetaja. Kui aga on teada ainult lähendmurd $\frac{P_n}{Q_n}$, siis on võimalik vea ülemmäärana arvutada ainult $\frac{1}{Q_n^2}$.

Kui me näiteks teame, et antud ahelmurru mingi lähendmurd on $\frac{45}{17}$, siis võime öelda, et võttes ahelmurru ligikaudseks väärtuseks selle lähendmurru, teeme vea, mis on väiksem kui $\frac{1}{17^2} = \frac{1}{289}$. Kui me peale selle teame, et eelneva lähendmurru nimetaja on näiteks 8, siis võime öelda, et ligikaudse väärtuse $\frac{45}{17}$ viga on väiksem kui $\frac{1}{17(17+8)} = \frac{1}{425}$. Lõpuks, kui me teame, et järgneva lähendmurru nimetaja on

näiteks 37, siis võime kindlasti öelda, et $\frac{45}{17}$ erineb ahelmurru täpsest väärtusest vähem kui $\frac{1}{17 \cdot 37} = \frac{1}{629}$ võrra.

174. ***Teoreem 3.*** *Lähendmurd on ahelmurru täpsele väärtusele lähem kui iga muu väiksema nimetajaga murd.* Oletame, et on olemas murd $\frac{a}{b}$, mis erineb ahelmurru A täpsest väärtusest vähem kui lähendmurd $\frac{P_n}{Q_n}$, ja olgu $b < Q_n$. Tõestame, et see oletus viib vasturääkivusele. Et $\frac{P_n}{Q_n}$ on arvule A lähem kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ja $\frac{a}{b}$ on arvule A lähem kui $\frac{P_n}{Q_n}$, siis on $\frac{a}{b}$ arvule A ammugi lähem kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$; et A asetseb peale selle $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ ja $\frac{P_n}{Q_n}$ vahel, siis vahe $\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ absoluutväärtus on suurem kui vahe $\frac{a}{b} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ absoluutväärtus; tähendab, võime kirjutada:

$$\frac{1}{Q_n Q_{n-1}} > \left| \frac{aQ_{n-1} - bP_{n-1}}{bQ_{n-1}} \right|; \quad Q_n Q_{n-1} > bQ_{n-1}.$$

Korrutades need võrratused liikmeti, saame:

$$1 > |\, aQ_{n-1} - bP_{n-1} \,|\,.$$

Et aQ_{n-1} ja bP_{n-1} on täisarvud, siis on see võrratus võimalik üksnes tingimusel, et

$$aQ_{n-1} - bP_{n-1} = 0, \text{ kust } \frac{a}{b} = \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}.$$

See võrdus pole võimalik, sest $\frac{a}{b}$ on eelduse kohaselt arvule A lähem kui $\frac{P_n}{Q_n}$, samal ajal kui $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ erineb tõestuse

kohaselt arvust A rohkem kui $\frac{P_n}{Q_n}$. Tekkinud vasturääkivus tõestab teoreemi 3 õigsust.

175. Antud aritmeetilise murru ligikaudsed väärtused. Kui antud taandamatu aritmeetilise murru lugeja ja nimetaja on väljendatud suurte arvudega, siis on sageli vaja leida selle murru võimalikult lihtsal kujul väljendatud ligikaudne väärtus. Selleks teisendatakse antud harilik murd ahelmurruks ja leitakse selle mingi lähendmurd olenevalt sellest, millist täpsust soovitakse.

Näide.

Teades, et arv π, mis kujutab enesest ringjoone suhet diameetriga, asetseb kahe murru: 3,141 592 653 ja 3,141 592 654 vahel, leida π lihtsaim lähend.

Teisendades mõlemad murrud ahelmurdudeks ja võttes ainult nende murdude ühised jagatised, leiame, et

$$\pi = (3,\ 7,\ 15,\ 1, \ldots).$$

Lähendmurrud on:

		15	1
3	22	333	355
1	7	106	113

Lähendi $\frac{22}{7}$ leidis Archimedes; selle viga on väiksem kui $\frac{1}{7 \cdot 106} = \frac{1}{742}$ ja, tähendab, ammugi väiksem kui $\frac{1}{100}$. Arvule $\frac{355}{113}$ osutas Adrian Metius; võttes selle arvu konstandi π lähendiks, teeme vea väiksema kui $\frac{1}{113 \cdot 33102} = \frac{1}{3740526}$, s. o.

igal juhul väiksema kui üks miljondik. Archimedese ja Metiuse lähendid kui paarisnumbrilised lähendmurrud on suuremad kui π.

176. Ruutjuure leidmine. Olgu vaja leida $\sqrt{41}$ ahelmurdude abil. Arutleme nii: suurim täisarv, mis sisaldub $\sqrt{41}$, on 6; seepärast võime kirjutada, et

$$\sqrt{41} = 6 + \frac{1}{x},$$

kust

$$\frac{1}{x} = \sqrt{41} - 6; \quad x = \frac{1}{\sqrt{41} - 6} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5}. \tag{1}$$

Et $\sqrt{41} + 6$ võrdub 12-ga pluss mingi lihtmurd, siis suurim arv, mis sisaldub avaldises $\frac{\sqrt{41} + 6}{5}$, on 2; seepärast võime kirjutada, et

$$x = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} = 2 + \frac{1}{y},$$

kust

$$\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{41} + 6}{5} - 2 = \frac{\sqrt{41} - 4}{5}; \tag{2}$$

$$y = \frac{5}{\sqrt{41} - 4} = \frac{5(\sqrt{41} + 4)}{25} = \frac{\sqrt{41} + 4}{5}.$$

Et $\sqrt{41} + 4$ võrdub arvuga 10 pluss mingi lihtmurd, siis suurim täisarv, mis sisaldub avaldises $\frac{\sqrt{41} + 4}{5}$, on 2; seepärast võime kirjutada, et

$$y = \frac{\sqrt{41} + 4}{5} = 2 + \frac{1}{z}, \tag{3}$$

kust

$$\frac{1}{z} = \frac{\sqrt{41} - 6}{5}; \quad z = \frac{5}{\sqrt{41} - 6} = \frac{5(\sqrt{41} + 6)}{6} = \sqrt{41} + 6.$$

Suurim täisarv, mis sisaldub avaldises $\sqrt{41}+6$, on 12; seepärast võime kirjutada, et

$$z=\sqrt{41}+6=12+\frac{1}{v}, \tag{4}$$

kust

$$\frac{1}{v}=\sqrt{41}-6; \quad v=\frac{1}{\sqrt{41}-6}.$$

Võrreldes v avaldist x avaldisega leiame, et $v=x$. Kasutades võrdusi (1), (2), (3) ja (4), saame:

$$\sqrt{41}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{x}}}}=6+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{12+\ldots}}}}}}$$

Seega avaldus $\sqrt{41}$ perioodilise ahelmurruna. Arvutades selle ahelmurru lähendmurrud, leiame arvu $\sqrt{41}$ ligikaudsed väärtused:

		2	12	2	2	...
6	13	32	397	826	2049	...
1	2	5	62	129	320	...

Samal teel leiame, et

$$\sqrt{13}=(3;\ 1;\ 1;\ 1;\ 1;\ 6;\ 1;\ 1;\ldots);$$
$$\sqrt{29}=(5;\ 2;\ 1;\ 1;\ 2;\ 10;\ldots).$$

177. Määramatu võrrandi lahendi leidmine. Ahelmurrud annavad vahendi määramatu võrrandi $ax+by=c$ ühe

lahendi leidmiseks. Toome selleks näiteid. Olgu meil võrrand:

$$43x + 15y = 8.$$

Võtame murru $\frac{43}{15}$ ja teisendame ta ahelmurruks:

$$\frac{43}{15} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \frac{1}{2}}}.$$

Arvutame nüüd eelviimase lähendmurru; see on $\frac{20}{7}$. Et viimane lähendmurd on ahelmurru täpne väärtus, s. o. $\frac{43}{15}$, ja $\frac{20}{7}$ on selle murru paaritunumbriline lähendmurd, siis § 172 teoreemi (märkus) põhjal võime kirjutada, et

$$\frac{43}{15} - \frac{20}{7} = \frac{1}{15 \cdot 7},$$

kust

$$43 \cdot 7 - 15 \cdot 20 = 1.$$

Et viimast samasust kohandada antud võrrandiga, korrutame kõik tema liikmed arvuga 8 ja kirjutame ta nii:

$$43 \cdot 56 + 15(-160) = 8.$$

Võrreldes seda samasust meie võrrandiga, leiame, et viimases võib x väärtuseks võtta arvu 56 ja y väärtuseks arvu -160. Siis avalduvad kõik võimalikud lahendid valemitega (§ 149):

$$x = 56 - 15t; \quad y = -160 + 43t.$$

Neid valemeid võib lihtsustada, asendades tähe t avaldisega $t + 3$ (seda võib teha, sest arv t on täiesti suvaline):

$$x = 56 - 15(t + 3) = 11 - 15t;$$

$$y = -160 + 43(t + 3) = -31 + 43t.$$

Võtame veel näite: $7x - 19y = 5$.

Teisendades murru $\frac{7}{19}$ ahelmurruks, leiame:

$$\frac{7}{19}=0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}.$$

Eelviimane lähendmurd on $\frac{3}{8}$. Et see on paarisnumbriline lähendmurd, siis

$$\frac{7}{19}-\frac{3}{8}=\frac{-1}{19\cdot 8},$$

kust

$$7\cdot 8-19\cdot 3=-1.$$

Korrutades selle võrduse kõik liikmed arvuga 5, saame:

$$7\cdot 40-19\cdot 15=-5$$

ehk

$$7\cdot(-40)-19\cdot(-15)=5.$$

Võrreldes viimast samasust antud võrrandiga, leiame, et viimases võib x-i asendada arvuga -40 ja y-i arvuga -15. Siis

$$x=-40+19t;\quad y=-15+7t.$$

Neid valemeid võib lihtsustada, asendades t avaldisega $t+2$:

$$x=40+19(t+2)=-2+19t;$$
$$y=15+7(t+2)=-1+7t.$$

178. Logaritmi arvutamine. Olgu vaja arvutada $\log 2$ alusel 10; teiste sõnadega, on vaja lahendada võrrand $10^x=2$. Algul leiame x-le lähima täisarvu. Et $10^0=1$ ja $10^1=10$, siis x on 0 ja 1 vahel; järelikult võib kirjutada, et $x=\frac{1}{z}$; siis $10^{\frac{1}{z}}=2$ ehk $10=2^z$. Pole raske näha, et z on

3 ja 4 vahel; järelikult võib kirjutada, et $z = 3 + \frac{1}{z_1}$. Siis

$$10 = 2^{3+\frac{1}{z_1}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{z_1}} = 8 \cdot 2^{\frac{1}{z_1}},$$

kust

$$2^{\frac{1}{z_1}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \text{ s. o. } 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z_1}.$$

Proovimise teel leiame, et z_1 asetseb 3 ja 4 vahel, seepärast võime kirjutada, et

$$z_1 = 3 + \frac{1}{z_2};\ 2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3+\frac{1}{z_2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}},$$

kust

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z_2}} = 2 : \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{128}{125} \text{ ehk } \left(\frac{128}{125}\right)^{z_2} = \frac{5}{4}.$$

Proovimise teel leiame jälle, et z_2 asetseb 9 ja 10 vahel. Seda võtet võib jätkata kaugemalegi. Rahuldudes z_2 väärtusega võime oletada, et $z_2 = 9$; järelikult

$$z_1 = 3 + \frac{1}{9};\ z = 3 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{9}} \text{ ja } x = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{9}}}.$$

Teisendades selle ahelmurru harilikuks murruks, saame:

$$x = \frac{28}{93} = 0{,}30107;$$

see tulemus on õige kuni murdosa neljanda kohani; täpsemad uurimised annavad: $x = 0{,}3010300$.

II. Piiridest.

179. Definitsioonid. Võtame lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \text{ (tegur on } \frac{1}{2})$$

esimese n liikme summa.

Progressiooni liikmete arvu lõpmatult kasvades kasvab see summa, lähenedes (§ 87) jäävale arvule 2, nii, et vahe

$$2-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

liidetavate arvu küllaldaselt kasvades muutub väiksemaks mistahes antud positiivsest arvust (näiteks väiksemaks kui 0,000001) ja liidetavate arvu edasisel kasvamisel jääb sellest arvust alati väiksemaks.

Nendel tingimustel kõneleme, et arv 2 on summa $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$ piir, kui liidetavate arv lõpmatult kasvab.

Selles näites jääb muutuv suurus (progressiooni liikmete summa), lähenedes oma piirile, sellest väiksemaks. Kuid võib esineda juhtumeid, millal muutuv suurus, lähenedes oma piirile, jääb sellest suuremaks. Näiteks kui oletame, et summas $1+\frac{1}{x}$ on x väärtus positiivne ja kasvab lõpmatult, siis läheneb see summa piirile 1, jäädes alati suuremaks kui 1.

Võib ka juhtuda, et muutuv suurus muutub nii, et ta on oma piirist kord suurem, kord väiksem. Sellist juhtu nägime juba, kui kõnelesime lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni 2; -1; $+\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4}$; $+\frac{1}{8}$; ... (tegur on $-\frac{1}{2}$) n liikme summa piirist (§ 87).

See piir on $1\frac{1}{3}$, ja progressiooni kahe, kolme, nelja jne. liikme summa on vaheldumisi oma piirist kord suurem, kord väiksem:

$$2-1=1<1\frac{1}{3};\ 2-1+\frac{1}{2}=1\frac{1}{2}>1\frac{1}{3};$$

$$2-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}<1\frac{1}{3}\ldots$$

Pärast neid näiteid on arusaadav järgmine piiri mõiste definitsioon:

Kui muutuv suurus x oma muutumisel läheneb jäävale suurusele a nii, et vahe $a - x$ (või $x - a$) saab ja jääb ka edaspidi igast positiivsest arvust väiksemaks, siis nimetatakse seda jäävat suurust a muutuja x piiriks.

Selle asemel et öelda: „suuruse x piir on a", öeldakse sageli: „x pürib suurusele a" ja kirjas väljendatakse seda nii: $x \to a$ ehk $\lim x = a$.

Kui muutuv suurus kasvab piiramatult, siis kõneldakse tinglikult, et ta pürib $+\infty$-le; kui aga muutuv suurus jääb negatiivseks ja tema absoluutväärtus kasvab piiramatult, siis kõneldakse, et ta pürib $-\infty$-le.

Lõpmatusele pürgivat suurust nimetatakse lõpmatult kasvavaks suuruseks ja nullile pürgivat suurust nimetatakse lõpmatult kahanevaks suuruseks. Tuleb ühtlasi meenutada, et need nimetused ei tähenda ei väga suurt ega väga väikest suurust, nad iseloomustavad suuruse muutumise protsessi: suurus, mida nimetatakse „lõpmatult kasvavaks", muutub nii, et ta saab ja jääb (absoluutväärtuselt) igast antud arvust suuremaks; suurus, mida nimetatakse „lõpmatult kahanevaks", muutub nii, et ta saab ja jääb (absoluutväärtuselt) igast antud positiivsest arvust väiksemaks.

Kui kasutada selles mõttes nimetust „lõpmatult kahanev suurus", siis võib piiri definitsiooni lühidalt väljendada nii:

Jäävat suurust a nimetatakse muutuja x piiriks, kui vahe $x - a$ on lõpmatult kahanev suurus.

180. Lõpmatult kahanevate suuruste mõningad omadused.

1) *Lõpmatult kahanevate suuruste summa on lõpmatult kahanev suurus* (kui liidetavate arv ei suurene piiramatult).

Võtame näitena kolm lõpmatult kahanevat suurust α, β ja γ (nad võivad olla nii positiivsed kui ka negatiivsed). Sel-

leks et näidata, et nende summa $\alpha + \beta + \gamma$ on lõpmatult kahanev suurus, on vaja veenduda, et selle summa absoluutväärtus saab ja jääb igast antud arvust väiksemaks, näiteks väiksemaks kui üks miljondik. Tõepoolest, et suurused α, β ja γ on lõpmatult kahanevad, siis nende muutudes igaühe absoluutväärtus saab ja jääb igast antud arvust väiksemaks, sealhulgas väiksemaks ka kui $\frac{1}{3}$ miljondikku; tähendab, summa $\alpha + \beta + \gamma$ absoluutväärtus saab ja jääb väiksemaks kui $(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3})$ miljondikku, s. o. väiksemaks kui 1 miljondik.

Tähendame, et kui üheaegselt liidetavate absoluutväärtuste vähenemisega liidetavate arv piiramatult kasvab, siis võib nende summa ka mitte osutuda lõpmatult kahanevaks suuruseks. Võtame näiteks sellise summa:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (n \text{ liidetavat})$$

ja oletame, et arv n kasvab piiramatult; siis vaatamata sellele, et nimetaja n suurenedes liidetavad vähenevad piiramatult, jääb nende summa muutumatuks (ta on 1).

2) *Lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu korrutis on lõpmatult kahanev suurus.*

Näiteks korrutis 100α, kus α on mingi lõpmatult kahanev arv, saab ja jääb (absoluutväärtuselt) igast antud positiivsest arvust väiksemaks, näiteks väiksemaks kui 1 miljondik, sest α saab ja jääb igast antud positiivsest arvust väiksemaks, sealhulgas väiksemaks ka kui 1 sajamiljondik.

3) *Kahe lõpmatult kahaneva suuruse korrutis on lõpmatult kahanev suurus.* Kui lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu korrutis saab ja jääb kuitahes väikeseks, siis on kahe lõpmatult kahaneva suuruse korrutisel ammugi see omadus.

4) *Lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu jagatis on lõpmatult kahanev suurus.*

Näiteks jagatis $\alpha : \frac{1}{10}$ on lõpmatult kahanev suurus, kuna

ta võrdub korrutisega $\alpha \cdot 10$, s. o. võrdub lõpmatult kahaneva suuruse ja jääva arvu korrutisega.

Märkus. Lõpmatult kahaneva suuruse jagatis teise lõpmatult kahaneva suurusega võib mõnikord võrduda jääva arvuga, mõnikord lõpmatult kahaneva suurusega ja mõnikord lõpmatult kasvava suurusega; kõik see sõltub sellest, millise seaduse järgi kahaneb jagatav ja millise seaduse järgi kahaneb jagaja. Võtame näitena kolm jagatist:

$$\frac{2\alpha}{\alpha} = 2; \quad \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha; \quad \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Oletame, et α on lõpmatult kahanev suurus. Siis esimene jagatis, mis on alati 2, on jääv arv; teine jagatis, mis on võrdne α-ga, on lõpmatult kahanev suurus, ja kolmas jagatis, mis on võrdne murruga $\frac{1}{\alpha}$, on lõpmatult kasvav suurus, sest murd, mille lugeja on jääv arv ja nimetaja kahaneb piiramatult, kasvab piiramatult.

181. Piiride omadused. 1) *Muutuval suurusel ei saa olla enam kui üks piir.*

Oletame vastupidist ja nimelt, et muutuv suurus x pürib kahele erinevale piirile, näiteks arvudele 5 ja 5,1. Siis peavad vastavalt piiri definitsioonile olema vahed $x - 5$ ja $x - 5{,}1$ lõpmatult kahanevad suurused (positiivsed või negatiivsed).

Olgu $x - 5 = \alpha$ ja $x - 5{,}1 = \beta$; siis

$$x = 5 + \alpha \quad \text{ja} \quad x = 5{,}1 + \beta,$$

ja järelikult

$$5 + \alpha = 5{,}1 + \beta, \text{ kust } \alpha - \beta = 0{,}1.$$

Kuid see võrdus on võimatu, sest vahe $\alpha - \beta$, mis kujutab enesest lõpmatult kahanevate suuruste algebralist summat, on lõpmatult kahanev suurus ja järelikult ei saa ta võr-

duda nullist erineva jääva arvuga. Järelikult ei saa oletada, et tundmatul x on kaks piiri.

2) Kui kahe muutuva suuruse (x ja y) vahe on lõpmatult kahanev suurus (või võrdne nulliga) ja ühel neist on piir, siis on teisel suurusel sama piir.

Oletame näiteks, et suuruse x piir on 2. Siis võib öelda, et $x = 2 + \alpha$, kus α on lõpmatult kahanev arv. Peale selle oletame, et vahe $x - y$ on võrdne lõpmatult kahaneva arvuga β (või nulliga). Siis

$$(2 + \alpha) - y = \beta, \quad \text{kust } 2 - y = \beta - \alpha.$$

Et vahe $\beta - \alpha$ on lõpmata kahanev arv, siis nähtub viimasest võrdusest, et arv 2 on muutuva suuruse y piir.

3) *Pöördteoreem. Kui kahel muutuval suurusel on üks ja sama piir, siis nende vahe on lõpmatult kahanev suurus (või võrdub nulliga).*

Oletame näiteks, et suurustel x ja y on üks ja sama piir 10. Siis $x = 10 + \alpha$ ja $y = 10 + \beta$, kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused. Järelikult:

$$x - y = (10 + \alpha) - (10 + \beta) = \alpha - \beta.$$

Et vahe $\alpha - \beta$ on lõpmatult kahanev arv või võrdub nulliga, siis on ka võrduse vasak pool, s. o. vahe $x - y$, lõpmatult kahanev arv või võrdne nulliga.

4) *Muutuvate suuruste algebralise summa piir võrdub nende suuruste piiride algebralise summaga* (kui liidetavate arv pole lõpmatult suur).

Oletame, et meil on kolme muutuva suuruse $x + y + z$ summa ning et $x \to 3$, $y \to 2$ ja $z \to -5$. Siis võime kirjutada võrduse:

$$x = 3 + \alpha; \quad y = 2 + \beta; \quad z = -5 + \gamma,$$

kus α, β ja γ on lõpmatult kahanevad suurused.

Järelikult

$$x+y+z=(3+\alpha)+(2+\beta)+(-5+\gamma)=$$
$$=(3+2-5)+(\alpha+\beta+\gamma),$$

kust

$$(x+y+z)-(3+2-5)=\alpha+\beta+\gamma.$$

Selle võrduse parempoolne osa on lõpliku arvu lõpmatult kahanevate liidetavate summa ja seepärast on ta ise lõpmatult kahanev; sellest aga järeldub, et muutuv summa $x+y+z$ pürib piirile $3+2-5$, s. o. pürib piiride algebralisele summale.

Seda arutelu võib korrata nelja, viie ja enama liidetava kohta, kui ainult liidetavate arv ei kasva piiramatult (vastasel korral võib ilmneda, et summa $\alpha+\beta+\gamma+\ldots$ polegi lõpmatult kahanev suurus).

5) *Muutuvate suuruste korrutise piir võrdub nende suuruste piiride korrutisega.*

Olgu meil kahe muutuva suuruse korrutis xy, milledest üks suurus pürib piirile 2 ja teine piirile 3. Siis

$$x=2+\alpha \quad \text{ja} \quad y=3+\beta.$$

Järelikult

$$xy=(2+\alpha)(3+\beta)=2\cdot 3+3\alpha+2\beta+\alpha\beta,$$

kust

$$xy-2\cdot 3=3\alpha+2\beta+\alpha\beta.$$

Korrutised 3α, 2β ja $\alpha\beta$ on lõpmatult kahanevad suurused ja seepärast on ka nende summa lõpmatult kahanev suurus, mis tähendab, et $xy \to 2\cdot 3$, s. o. $\lim xy=(\lim x)\cdot(\lim y)$.

Seda järeldust võib üldistada kolme, nelja ja enama teguri korrutise kohta. Vaadeldes korrutist xyz kui kahe teguri xy ja z korrutist, võime kirjutada:

$$\lim(xyz)=(\lim xy)\cdot(\lim z)=(\lim x)\cdot(\lim y)\cdot(\lim z).$$

6) *Muutuvate suuruste jagatise piir võrdub jagatava piiri ja jagaja piiri jagatisega, kui jagaja piir pole võrdne nulliga.*

Olgu $x \to 2$, $y \to 3$; siis $x = 2 + \alpha$ ja $y = 3 + \beta$, kus α ja β on lõpmatult kahanevad suurused. Järelikult:

$$\frac{x}{y} - \frac{2}{3} = \frac{2+\alpha}{3+\beta} - \frac{2}{3} = \frac{(2+\alpha)3 - (3+\beta)2}{(3+\beta)\cdot 3} = \frac{3\alpha - 2\beta}{(3+\beta)\cdot 3}.$$

Selle võrduse parempoolses osas oleva murru lugeja on lõpmatult kahanev suurus, sest ta on kahe lõpmatult kahaneva suuruse summa; nimetaja aga, mille piir on 3^2, ei saa pürgida nullile. Kui aga murru lugeja on lõpmatult kahanev suurus ja nimetaja pole lõpmatult kahanev, siis murd on lõpmatult kahanev suurus.

Tähendab, eeltoodud võrdusest järeldame, et

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{2}{3} = \frac{\lim x}{\lim y}.$$

7) *Muutuva astendatava ja jääva astendajaga astme piir võrdub astendatava piiri sama astmega.*

Piirdume juhuga, mil astendaja on positiivne täisarv. Sel juhul on teoreem korrutise piiri teoreemi lihtne järeldus. Nii:

$$\lim (x^3) = \lim (xxx) = (\lim x)(\lim x)(\lim x) = (\lim x)^3.$$

Lisandame piiride kohta veel kaks järgmist teoreemi:

8) *Kui muutuv suurus kasvab, jäädes seejuures väiksemaks mingist jäävast suurusest, siis on tal piir.* Võtame näiteks arvu $\sqrt{2}$ ligikaudsed väärtused puudusega, mis on algul arvutatud täpsusega kuni 1, siis kuni $\frac{1}{10}$, seejärel kuni $\frac{1}{100}$ jne. Me saame siis arvude lõpmatu jada:

1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; 1,41421 jne.

Need arvud suurenevad sedamööda, kuidas jada kasvab, kuid jäävad alati väiksemaks teatavast jäävast arvust, näiteks väiksemaks kui 1,5; neil tingimustel peame järeldama, et arvud eespool toodud jadas pürivad mingile kindlale piirile (see piir on irratsionaalarv $\sqrt{2}$).

9) *Kui muutuv suurus kahaneb, jäädes seejuures suuremaks mingist jäävast arvust, siis on tal piir.*

Võtame näitena rea arvu $\sqrt{2}$ ligikaudseid väärtusi liiaga täpsusega kuni 1, kuni $\frac{1}{10}$, kuni $\frac{1}{100}$ jne.

2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143; 1,41422 jne.

Sedamööda, kuidas jada kasvab, vähenevad need arvud, kuid jäävad alati suuremaks kui 1,4; neil tingimustel peame järeldama, et antud jada arvud pürivad piirile (piir on võrdne irratsionaalarvuga $\sqrt{2}$).

Harjutused.

279. Leida piir, millele pürib murd $\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-5x+2}$, kui $x \to 1$.

Lahendus. Kui $x \to 1$, siis pürivad antud murru lugeja ja nimetaja nullile. Et aga $\frac{0}{0}$ on määramatu avaldis, siis jääb meile teadmatuks, millisele piirile pürib antud murd (ja kas ta üldse mingile piirile pürib), kui $x \to 1$.

Seepärast toimime teisiti: oletame, et x pole võrdne 1-ga, vaid on võrdne mingi muutuva suurusega, mis pürib 1-le. Olgu näiteks $x = 1 + h$, kus h on mingi positiivne suurus, mis pürib nullile. Siis on antud murru väärtus:

$$\frac{2(1+h)^2-(1+h)-1}{3(1+h)^2-5(1+h)+2} = \frac{2+4h+2h^2-1-h-1}{3+6h+3h^2-5-5h+2} =$$

$$= \frac{2h^2+3h}{3h^2+h} = \frac{2h+3}{3h+1}$$

(taandada murdu arvuga h on meil õigus, sest $h \neq 0$).

Oletame nüüd, et $h \to 0$, ja järelikult $x \to 1$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{2h+3}{3h+1} = \frac{\lim\limits_{h \to 0}(2h+3)}{\lim\limits_{h \to 0}(3h+1)} = \frac{3}{1} = 3.$$

Sama piiri leiame, kui oletame, et $x = 1 - h$, kus h on mingi nullile pürgiv positiivne suurus. Seega, kas x läheneb ühele, jäädes ühest suuremaks või väiksemaks, antud murru piir on üks ja sama arv, nimelt 3.

280. Leida piir, millele pürib murd $\frac{x^2-4x+3}{x^2+7x-8}$, kui $x \to 1$.

281. Teha sama, kui $x \to 0$.

282. Leida $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^3-5x^2-4x+12}{x^3-12x+16}$.

283. Leida $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$.

284. Leida $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$.

Lahendus. Et

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}},$$

siis

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$$

285. Leida $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2}$.

286. Leida $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+\sqrt{x^2+1}}$.

287. Leida piir, millele pürib murd, kui liidame lugeja ja nimetajaga ühe ning sama lõpmatult kasvava suuruse; teiste sõnadega, leida $\lim\limits_{m \to \infty} \frac{a+m}{b+m}$.

Lahendus.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{a+m}{b+m} = \lim_{m \to \infty} \frac{\frac{a}{m}+1}{\frac{b}{m}+1} = \frac{\lim\limits_{m \to \infty}\left(\frac{a}{m}+1\right)}{\lim\limits_{m \to \infty}\left(\frac{b}{m}+1\right)} = \frac{\lim\limits_{m \to \infty}\left(\frac{a}{m}\right)+1}{\lim\limits_{m \to \infty}\left(\frac{b}{m}\right)+1} =$$

$$= \frac{0+1}{0+1} = 1.$$

Seega siis, olgu $\frac{a}{b}$ liht- $(a < b)$ või liigmurd $(a > b)$, selle murru piir, kui $m \to \infty$, on üks ja sama arv, nimelt 1. Siit järeldub, et lihtmurd 1-le lähenedes suureneb, liigmurd aga väheneb.

III. Ruutkolmliikme uurimine.

Teise astme võrratused.

182. Ülesanne. 1000 m kõrgusel olevalt aerostaadilt visati alla koormus kiirusega 20 m sekundis. Kui kõrgel maapinnast on see koormus 15 sek. pärast? (Õhu takistust arvesse ei võeta.)

Langeva keha poolt kulgetud tee arvutatakse valemi järgi:

$$s = v_0 t + \frac{gt^2}{2}, \qquad (1)$$

kus v_0 on algkiirus, $g = 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{sek}^2}$ on raskustungi kiirendus. Antud juhul $v_0 = 20\ \frac{\text{min}}{\text{sek}}$ ja valemil on seega kuju:

$$s = 20t + 4{,}9t^2. \qquad (2)$$

Selle tee kulgeb langev koormus t sekundi jooksul. Tähendab, t sekundi möödudes on koormus

$$x = 1000 - 20t - 4{,}9t^2 \qquad (3)$$

meetri kõrgusel maapinnast. Et leida x — koormuse kõrgus maapinnast 15 sekundi pärast, selleks tuleb asetada valemisse (3) t asemele arv 15. Saame

$$x = 1000 - 20 \cdot 15 - 4{,}9 \cdot 15^2 = -402{,}5.$$

x negatiivsel väärtusel ei ole siin mõtet ja järelikult meie ülesandel lahendit pole. Miks on see nii? Et sellele küsimusele vastata, selleks leiame algul, mitme sekundi jooksul langeb allavisatud koormus maapinnale. On ilmne, et see toimub sel momendil, kui koormus kulgeb tee, mis on võrdne kõrgusega, millelt ta alla visati, s. o. 1000 m. Tähendab, me saame:

$$20t + 4{,}9t^2 = 1000$$

ehk

$$4{,}9t^2 + 20t - 1000 = 0. \qquad (4)$$

Lahendades selle võrrandi leiame, et $t = 12{,}4$ sek. (täpsusega kuni $\frac{1}{10}$. Võtame ainult positiivse lahendi). Tähendab, koormus langes alla juba 12,4 sekundi pärast, seepärast polnud ülesande küsimusel mõtet.

Missuguste t väärtuste puhul võimaldab ülesanne täiesti kindlaid lahendeid? Ilmselt ainult nende väärtuste puhul, millede juures koormuse poolt kulgetud tee on väiksem kui 1000 m, s. o. tingimusel, et

$$4{,}9t^2 + 20t < 1000$$

ehk
$$4{,}9t^2 + 20t - 1000 < 0. \qquad (5)$$

Tähendab, ülesandel on lahend ainult seesuguste t (positiivsete) väärtuste korral, millede puhul kolmliige $4{,}9t^2 + 20t - 1000$ väärtus on negatiivne. See on siis, kui $t < 12{,}4$.

Paljudes ülesannetes, nagu eeltooduski, on vaja antud kolmliikme kohta selgusele jõuda, missuguste temasse kuuluva tähe väärtuste puhul on ta väärtus positiivne ja missuguste puhul negatiivne. Selles seisabki ruutkolmliikme uurimine, mida käsitellakse järgnevates paragrahvides.

183. Erinevate reaalsete nullkohtadega ruutkolmliige.

Näide 1. Olgu antud kolmliige

$$y = 2x^2 - 7x + 3. \qquad (1)$$

On vaja leida, missuguste x väärtuste puhul on sel kolmliikmel positiivsed ja missuguste väärtuste puhul negatiivsed väärtused.

Me teame (§ 44 ja 45), et iga kolmliiget võib kujutada x^2 ees seisva koefitsiendi ning kolmliikme muutuja ja nullkohtade vahede korrutisena.

Leiame antud kolmliikme nullkohad. Selleks lahendame võrrandi:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0. \qquad (2)$$

Saame $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 3$ (edaspidi märgime tähega x_1 kolmliikme väiksemat reaalset nullkohta). Siis võib antud kolmliikme esitada järgmisel kujul:

$$y = 2(x - \tfrac{1}{2})(x - 3). \qquad (3)$$

Nüüd uurime, milliste x väärtuste puhul on see korrutis positiivne arv ja milliste väärtuste puhul negatiivne. Vaatleme kolme juhtu.

1. Olgu $x < \frac{1}{2}$. Siis võib ammugi öelda, et $x < 3$. Kandes kõik liikmed võrratuse vasakule poolele, saame siit:

$$x - \tfrac{1}{2} < 0 \quad \text{ja} \quad x - 3 < 0.$$

Järelikult on avaldise $(x - \frac{1}{2})(x - 3)$ väärtus kui kahe negatiivse arvu korrutis positiivne. Pärast selle korrutamist 2-ga saame jälle positiivse arvu. Siit järeldub, et kui $x < \frac{1}{2}$, siis avaldise (3) väärtus ja järelikult ka antud kolmliikme väärtus on positiivne.

2. Olgu $x > \frac{1}{2}$, kuid $x < 3$,

s. o. x väärtused asetsevad antud kolmliikme nullkohtade vahel. Kandes neis võrratustes kõik liikmed vasakule poolele, saame:

$$x - \frac{1}{2} > 0 \quad \text{ja} \quad x - 3 < 0.$$

Järelikult on korrutises $(x - \frac{1}{2})(x - 3)$ üks tegureist positiivne, teine negatiivne. Tähendab, korrutis on negatiivne ja pärast selle korrutamist arvuga 2 saame negatiivse arvu. Seega, kui

$$\frac{1}{2} < x < 3,$$

siis avaldise (3) ja järelikult ka antud kolmliikme väärtus on negatiivne.

3. Olgu $x > 3$, siis on ammugi $x > \frac{1}{2}$. Siit saame:

$$x - 3 > 0 \quad \text{ja} \quad x - \frac{1}{2} > 0.$$

Korrutis $(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ja järelikult ka korrutis $2(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ on positiivsed arvud. Tähendab, kui $x>3$, siis on antud kolmliikme väärtus positiivne. Seega tulime järgmisele järeldusele. Kolmliikme $2x^2-7x+3$ väärtused on positiivsed x-i kõigi väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $\frac{1}{2}$, ja x-i kõigi väärtuste puhul, mis on suuremad kui 3; kolmliikme väärtused on negatiivsed x-i kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad $\frac{1}{2}$ ja 3 vahel.

Tehtud järelduse kontroll x-i mõningate numbriliste väärtuste kohta on esitatud järgmises tabelis, mille ülemises reas on antud x väärtused, alumises aga vastavad kolmliikme väärtused:

x	-5	-3	-1	0	1	2	4	7	10
$2x^2-7x+3$	88	42	12	3	-2	-3	7	52	133

Samale järeldusele tuleme, kui vaatleme kolmliikme $2x^2-7x+3$ graafikut. Me teame (vt. § 50), et selle graafikuks on parabool, mis lõikab x-telge punktides, millede abstsissid on $\frac{1}{2}$ ja 3. Graafiku vaatlemisest nähtub vahetult, et parabooli punktid, mille abstsissid on väiksemad kui $\frac{1}{2}$ või suuremad kui 3, asetsevad ülalpool x-telge ja järelikult nende ordinaadid, s. o. $y=2x^2-7x+3$ väärtused on positiivsed.

Parabooli punktid aga, mille abstsissid on $\frac{1}{2}$ ja 3 vahel, asetsevad allpool x-telge ja järelikult nende ordinaadid on negatiivsed.

Näide 2. Uurime samal viisil kolmliiget

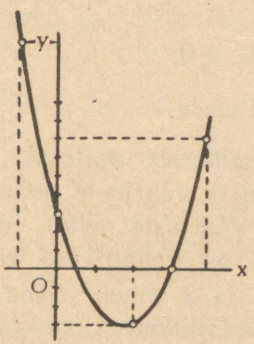
$$y=3x^2-x-10.$$

Lahendades ruutvõrrandi $3x^2 - x - 10 = 0$, leiame antud kolmliikme nullkohad. Need on: $x_1 = -\frac{5}{3}$ ja $x_2 = 2$. Siis võib kolmliikme esitada järgmisel kujul:

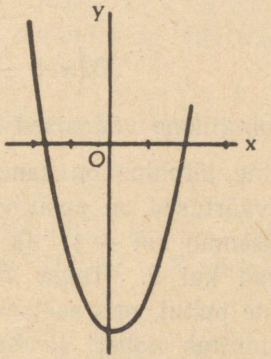
$$y = 3\left[x - \left(-\frac{5}{3}\right)\right](x - 2)$$

ehk

$$y = 3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2).$$



Joon. 36.



Joon. 37.

Arutelles samuti nagu esimeseski näites, leiame:

1) Kui $x < -\frac{5}{3}$, siis ka $x < 2$.

Siit

$$x + \frac{5}{3} < 0 \quad \text{ja} \quad x - 2 < 0.$$

Järelikult on nende x väärtuste puhul korrutis

$$3\left(x + \frac{5}{3}\right)(x - 2) > 0,$$

s. o. antud kolmliikme väärtused on positiivsed.

2) Kui $x > -\frac{5}{3}$ ja $x < 2$, siis saame

$$x + \frac{5}{3} > 0 \text{ ja } x - 2 < 0.$$

Järelikult

$$3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-2)<0,$$

s. o. kolmliikme väärtused on negatiivsed.

3) Juhul, kui $x>2$, siis on samuti $x>-\frac{1}{2}$. Siis saame:

$$x+\frac{5}{3}>0 \quad \text{ja} \quad x-2>0.$$

Siit

$$3\left(x+\frac{5}{3}\right)(x-2)>0,$$

s. o. kolmliikme väärtused on positiivsed.

Üldine järeldus on sama, mis esimeses näiteski: kolmliikme väärtused on positiivsed kõigi x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $-\frac{5}{3}$, ja kõigi x väärtuste puhul, mis on suuremad kui 2. Tema väärtused on negatiivsed kõigi x väärtuste puhul, mis asetsevad $-\frac{5}{3}$ ja 2 vahel. Seda järeldust kinnitab tabel ja samuti kolmliikme $3x^2-x-10$ (joon. 37) graafik.

x	-5	-2	-1	0	1	2	3	5
$3x^2-x-10$	70	4	-6	-10	-8	0	14	60

Näide 3. Vaatleme nüüd seesugust kolmliiget, mille esimene koefitsient (s. o. x^2 koefitsient) on negatiivne. Olgu näiteks antud kolmliige

$$y=-2x^2+4x+16.$$

Leidnud selle kolmliikme nullkohad: $x_1=-2$ ja $x_2=4$, võime kolmliikme kirjutada nii:

$$y=-2(x+2)(x-4).$$

Uurides korrutise märki, samuti nagu eelmistes näideteski, leiame:

1. Kui $x < -2$, siis ka $x < 4$.

Siit

$$x + 2 < 0 \quad \text{ja} \quad x - 4 < 0.$$

Nende tegurite korrutis $(x + 2)(x - 4)$ on positiivne. Kuid selle positiivse arvu korrutamisel arvuga -2 saame negatiivse arvu ja, tähendab, antud kolmliikme väärtused on negatiivsed, kui $x < -2$.

2. Kui $x > -2$ ja $x < 4$, siis saame:

$$x + 2 > 0 \quad \text{ja} \quad x - 4 < 0.$$

Korrutis $(x + 2)(x - 4)$ on negatiivne arv ja järelikult pärast selle korrutamist negatiivse arvuga -2 saame positiivse arvu.

Järelikult kolmliikme nullkohtade -2 ja 4 vahel asetsevate x väärtuste puhul on antud kolmliikme väärtused positiivsed.

3. Lõpuks, kui $x > 4$, saame:

$$x + 2 > 0 \quad \text{ja} \quad x - 4 > 0.$$

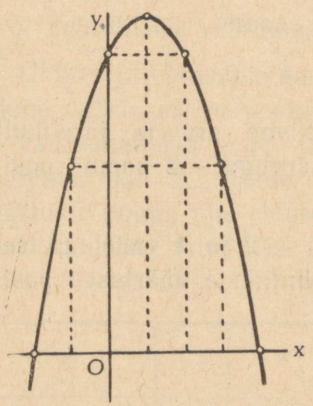
Korrutis $(x + 2)(x - 4)$ on positiivne. Pärast selle korrutamist arvuga -2 saame negatiivse arvu ja järelikult kolmliikme väärtused on negatiivsed, kui $x > 4$.

Me näeme, et käesoleval juhul on tegemist olukorraga, mis on vastupidine sellele, mida panime tähele kahes esimeses näites: x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui -2, ja x väärtuste puhul, mis on suuremad kui 4, on kolmliikme väärtused negatiivsed; kolmliikme nullkohtade vahel asetsevate x väärtuste puhul on tema väärtused aga positiivsed.

Seda järeldust kinnitab ka x-i üksikutele numbrilistele väärtustele vastavate kolmliikme väärtuste tabel.

x	-5	-3	-2	-1	0	1	3	4	5	8
$-2x^2+4x+16$	-56	-14	0	10	16	18	10	0	-14	-80

Samale tulemusele jõuame, kui vaatleme kolmliikme $-2x^2+4x+16$ graafikut. Me teame juba (§ 47, 49), et kui $a<0$, siis kolmliikme ax^2+bx+c graafik on pööratud tipuga üles ja lõikab x-telge punktides, mille abstsissid on võrdsed kolmliikme nullkohtadega. Antud juhul on graafikul joon. 38 näidatud kuju. Me näeme, kui $x<-2$ ja kui $x>4$, siis on kõvera punktide ordinaadid, s. o. $y=-2x^2+4x+16$ väärtused, negatiivsed ja juhul, kui $-2<x<4$, positiivsed.



Joon. 38.

Kõrvutades kolmanda näite esimese ja teisega märkame, et kõigil kolmel juhul x väärtuste puhul, mis on väiksemast nullkohast väiksemad, ja samuti väärtuste puhul, mis on suuremast nullkohast suuremad, on kolmliikme väärtusel sama märk, mis x^2 koefitsiendilgi; kolmliikme nullkohtade vahel asetsevate x väärtuste puhul on kolmliikme väärtuse märk vastupidine x^2 koefitsiendi märgile.

Veendume, et see järeldus on õige koefitsientide a, b ja c mistahes väärtuste puhul, kui nullkohad on reaalsed ja erinevad. Selleks uurime ruutkolmliiget üldkujul.

Üldjuhtum. Olgu antud kolmliige

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kus a, b ja c on mistahes reaalarvud, mis rahuldavad ainult tingimust, et kolmliikme nullkohad on reaalsed ja erinevad (ja $a \neq 0$). Tähistame need nullkohad tähtedega

$$x_1 \text{ ja } x_2 \quad (x_1 < x_2).$$

Siis võib kolmliiget esitada selliselt:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Uurime, millised on selle kolmliikme väärtused x-i mitmesuguste väärtuste puhul.

1. Olgu $x < x_1$ ja järelikult ka $x < x_2$ (sest $x_1 < x_2$). Siit saame: $x - x_1 < 0$ ja $x - x_2 < 0$.

Järelikult sel juhul korrutis $(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne arv. Siit järeldub, et $a(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne, kui a on positiivne, ja negatiivne, kui a on negatiivne arv. Teiste sõnadega, kui $x < x_1$, siis on kolmliikme $ax^2 + bx + c$ väärtusel sama märk, mis koefitsiendil a.

2. Olgu $x > x_1$ ja $x < x_2$.

Siis

$$x - x_1 > 0 \quad \text{ja} \quad x - x_2 < 0.$$

Korrutis $(x - x_1)(x - x_2)$ kui erinevate märkidega arvude korrutis on negatiivne. Siit järeldub, et korrutis $a(x - x_1)(x - x_2)$ on negatiivne, kui a on positiivne, ja positiivne, kui a on negatiivne.

Tähendab, kolmliikme väärtustel on sel juhul koefitsiendi a märgile vastupidine märk.

3. Olgu $x > x_2$ ja järelikult ka $x > x_1$ (sest $x_2 > x_1$). Siis

$$x - x_2 > 0 \quad \text{ja} \quad x - x_1 > 0.$$

Korrutis $(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne ja järelikult ka korrutis $a(x - x_1)(x - x_2)$ on positiivne, kui a on positiivne, ja ta on negatiivne, kui a on negatiivne. Tähendab, kolmliikme numbrilisel väärtusel on sama märk, mis koefitsiendil a.

Ühendades kõik kolm juhtu, võime nüüd teha järgmise üldise järelduse.

Kui ruutkolmliikme $ax^2 + bx + c$ nullkohad on erinevad reaalarvud, siis x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui kolmliikme väiksem nullkoht, ja x väärtuste puhul, mis on suuremad kui kolmliikme suurem nullkoht, on kolmliikme väärtusel sama märk, mis x^2 koefitsiendil. Kolmliikme nullkohtade vahel asetsevate x väärtuste puhul on tema väärtuse märk vastupidine x^2 koefitsiendi märgile.

Märkus. Kui nimetada väärtusi $x < x_1$ ja $x > x_2$ x väärtusteks, mis on väljaspool lahendite vahemikku, ja väärtusi $x_1 < x < x_2$ x väärtusteks, mis on lahendite vahemikus, siis võib seda järeldust formuleerida ka veel nii:

Kui kolmliikmel $ax^2 + bx + c$ on erinevad reaalsed nullkohad x_1 ja x_2, siis x väärtuste puhul, mis on väljaspool lahendite vahemikku, on kolmliikmel sama märk, mis x^2 koefitsiendilgi, ning x väärtuste puhul, mis asetsevad lahendite vahemikus, on kolmliikmel x^2 koefitsiendi märgile vastupidine märk.

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

288. $y = x^2 - 8x + 12$.
289. $y = x^2 - 2x - 15$.
290. $y = -3x^2 + 8x + 3$.
291. $y = -x^2 + 9x - 14$.
292. $y = 6x^2 - x - 12$.

184. Võrdsete nullkohtadega ruutkolmliige. Olgu vaja uurida kolmliiget

$$y = 2x^2 - 8x + 8.$$

Leiame selle kolmliikme nullkohad. Selleks võrdsustame kolmliikme nulliga ja lahendame võrrandi

$$2x^2 - 8x + 8 = 0.$$

Saame $x_1 = x_2 = 2$. Tähendab, antud kolmliiget võib kujutada järgmiselt (§ 45):

$$y = 2(x - 2)(x - 2)$$

ehk

$$y = 2(x - 2)^2.$$

On ilmne, et x-i mistahes reaalsete väärtuste[1] puhul, peale arvu 2, on avaldise $(x - 2)^2$ väärtus positiivne. Ka pärast selle avaldise korrutamist positiivse arvuga 2 saame positiivse arvu. Järelikult kolmliikme $2x^2 - 8x + 8$ väärtused on positiivsed x-i kõigi väärtuste puhul, peale väärtuse, mis on võrdne kolmliikme nullkohaga, s. o. peale väärtuse $x = 2$.

(Kui $x = 2$, siis kolmliikme väärtus on null.)

Joonestanud kolmliikme $2x^2 - 8x + 8$ graafiku, märkame (joon. 39), et x-i kõigi väärtuste puhul kõvera punktid asetsevad ülalpool x-telge, s. o. $y > 0$, ja ainult sel juhul, kui $x = 2$, on $y = 0$. Selles punktis kõver puudutab abstsisstelge.

Näide 2. Uurime kolmliiget

$$y = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\tfrac{1}{2}.$$

---

[1] Et mitte alati teha selgitavat märkust, lepime edaspidiseks kokku, et igal pool, kus kõneldakse tähtede numbrilistest väärtustest, mõeldakse ainult nende reaalseid väärtusi.

Leiame selle kolmliikme nullkohad; selleks lahendame võrrandi

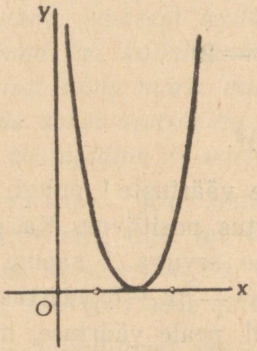
$$-\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\tfrac{1}{2} = 0.$$

Saame $x_1 = x_2 = 3$. Antud kolmliiget võime järelikult kujutada selliselt:

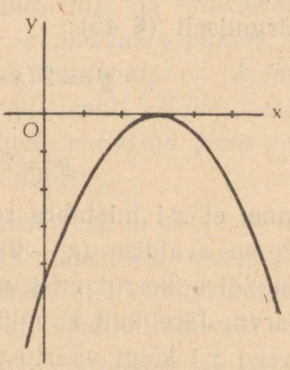
$$y = -\tfrac{1}{2}(x-3)(x-3)$$

ehk

$$y = -\tfrac{1}{2}(x-3)^2.$$



Joon. 39.



Joon. 40.

Samuti nagu eelmises näiteski järeldame, et x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud väärtus $x = 3$, on avaldise $(x-3)^2$ väärtus positiivne. Pärast selle korrutamist arvuga $-\tfrac{1}{2}$ saame negatiivse arvu.

Seega selle kolmliikme väärtused on negatiivsed x-i kõigi väärtuste puhul, peale väärtuse $x = 3$.

Joonestanud kolmliikme $-\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\tfrac{1}{2}$ graafiku, näeme (joon. 40), et kõik parabooli punktid, välja arvatud punkt (3; 0), asetsevad allpool x-telge. Tähendab, kõigi nende punktide ordinaadid, s. o. $y = -\tfrac{1}{2}x^2 + 3x - 4\tfrac{1}{2}$ väärtused, on negatiivsed.

Kõrvutanud mõlemad näited, märkame, et kolmliikme numbrilise väärtuse märk ühtib mõlemal juhul x^2 koefitsiendi märgiga. Et veenduda, et see tõik leiab aset mistahes koefitsientide puhul (juhul, kui nullkohad on võrdsed), vaatleme üldkujulist kolmliiget.

Üldjuhtum. Olgu antud kolmliige

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kusjuures on teada, et tal on võrdsed nullkohad. Tähistades nullkoha tähega x_1, esitame kolmliikme kujul:

$$y = a(x - x_1)(x - x_1)$$

ehk

$$y = a(x - x_1)^2.$$

Siit järeldame: milline ka oleks vahe $x - x_1$, kui ta ainult pole null, tema ruut on alati positiivne arv. Tähendab, positiivse a puhul on korrutis $a(x - x_1)^2$ ja järelikult ka y positiivsed arvud ning negatiivse a puhul — negatiivsed arvud. Seega võime teha järelduse:

Kui kolmliikmel on võrdsed nullkohad, siis on x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme nullkohaga võrdne väärtus, kolmliikme väärtustel sama märk, mis x^2 koefitsiendil.

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

293. $y = x^2 - 2x + 1$.
294. $y = 16x^2 - 8x + 1$.
295. $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 3$.
296. $y = (2x - 3)^2 - 3x^2 + 4x + 7$.

185. Kompleksete nullkohtadega ruutkolmliige.

Näide 1. Uurime kolmliiget:

$$y = 2x^2 - 3x + 3.$$

Lahendades võrrandi $2x^2 - 3x + 3 = 0$, saame:

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{4}.$$

Kolmliikme nullkohad osutusid kompleksseiks. Sel juhul on ka vahed $x - x_1$ ja $x - x_2$ kompleksarvud. Et kompleksarvude märkide küsimusel pole mõtet, siis uurime antud juhtu teisel viisil. Toome algul sulgude ette esimese koefitsiendi. Saame:

$$y = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\right).$$

Vaadeldes nüüd teist liiget $\frac{3}{2}x$ kui x-i ja $\frac{3}{4}$ kahekordset korrutist $2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x$, täiendame avaldist

$$x^2 - \frac{3}{2}x = x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot x$$

kuni täisruuduni, liites ja hiljem lahutades arvu $(\frac{3}{4})^2$. Saame:

$$y = 2\left[\left(x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{3^2}{4^2}\right) + \frac{3}{2} - \frac{3^2}{4^2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{9}{16}\right] = 2\left[\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}\right].$$

Uurime nüüd saadud avaldist. On ilmne, et x-i mistahes väärtuste puhul on avaldise $(x - \frac{3}{4})^2$ väärtus positiivne arv ja võrdub nulliga ainult siis, kui $x = \frac{3}{4}$. Nurksulgudes olev teine liidetav $\frac{15}{16}$ on samuti positiivne arv. Tähendab, kogu nurksulgudes olev summa on positiivne. Selle korrutamisel positiivse arvuga 2 saame jällegi positiivse arvu. Seega antud juhul kolmliikme väärtused on positiivsed x-i kõigi väärtuste puhul.

Kolmliikme $y = 2x^2 - 3x + 3$ graafik (joon. 41) näitab, et parabooli kõik punktid asetsevad tõepoolest ülalpool x-telge, s. o. nende ordinaadid on positiivsed.

Näide 2. Uurime kolmliiget

$$y = -3x^2 + 2x - 1.$$

Lahendades võrrandi $-3x^2 + 2x - 1 = 0$, leiame kolmliikme nullkohad. Saame:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{-2}}{3}.$$

Kolmliikme nullkohad osutusid kompleksseiks. Seepärast kasutame uurimiseks sama meetodit, mida kasutasime esimeses näites. Toome sulgude ette esimese koefitsiendi ja eraldame sulgudes kaksliikme ruudu:

$$y = -3x^2 + 2x - 1 = -3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= -3\left(x^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}x + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}\right) = -3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{2}{9}\right].$$

Avaldis $(x - \frac{1}{3})^2$ on võrdne nulliga, kui $x = \frac{1}{3}$, ja on positiivne x-i kõigi muude väärtuste puhul. Tähendab, summa $(x - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{9}$ on alati positiivne.

Selle korrutamisel arvuga -3 saame alati negatiivse arvu. Siit järeldame, et kolmliikme $-3x^2 + 2x - 1$ väärtused on negatiivsed x-i kõigi väärtuste puhul. Kolmliikme graafik (joon. 42) näitab, et kõik parabooli punktid asetsevad allpool x-telge, s. o. nende ordinaadid on negatiivsed.

Kõrvutanud esimese ja teise näite, märkame, et kolmliikme numbrilise väärtuse märk ühtis mõlemal juhul x^2 koefitsiendi märgiga eranditult muutuja x kõigi väärtuste puhul. Näitame, et see tõik leiab aset kõigi kompleksete nullkohtadega kolmliikmete juures.

Üldjuhtum. Olgu antud kolmliige

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kusjuures on teada, et kolmliikme nullkohad on komplekssed. Me teame (§ 45 ja 135), et sel juhul on

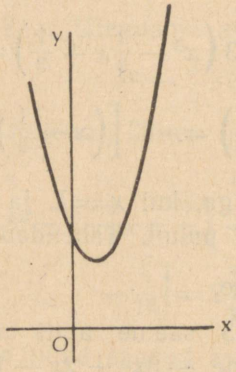
$$b^2 - 4ac < 0.$$

Teisendame kolmliiget samuti, nagu tegime seda 1. ja 2. näites:

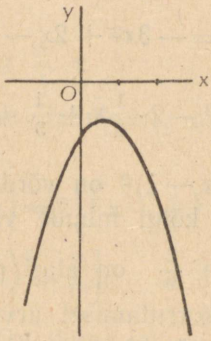
$$y = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a})$$

ehk

$$y = a(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{c}{a}).$$



Joon. 41.



Joon. 42.

Liidame ja lahutame $\frac{b^2}{4a^2}$, saame:

$$y = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right);$$

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

x-i kõigi väärtuste puhul on avaldise $(x + \frac{b}{2a})^2$ väärtus positiivne või võrdne nulliga (kui $x = -\frac{b}{2a}$). Vaatleme,

milline märk on teisel liidetaval $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$. Me teame juba, et avaldis $b^2 - 4ac$ on kompleksete nullkohtade puhul negatiivne. See tähendab, et temale vastupidine arv $-(b^2 - 4ac)$, s. o. $4ac - b^2$, on positiivne. Nimetaja $4a^2$ on samuti positiivne arv. Järelikult on kogu avaldis $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ positiivne arv. Seega x-i kõigi (reaalsete) väärtuste puhul kogu nurksulgudes olev summa on positiivne arv.

Siit järeldub, et kolmliikme numbrilise väärtuse märk sõltub ainult koefitsiendi a märgist; kui a on positiivne, on ka kolmliikme väärtused positiivsed, ja vastupidi.

Seega võime järeldada: *kui kolmliikme nullkohad on komplekssed, siis x-i kõigi väärtuste puhul tema numbrilisel väärtusel on sama märk, mis x^2 koefitsiendilgi.*

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

297. $y = x^2 - 5x + 8$.

298. $y = 3x^2 + 2x + 1$.

299. $y = -2x^2 + 4x - 7$.

186. Üldine järeldus. Me võime nüüd ruutkolmliikme teostatud uurimise kohta teha üldkokkuvõtte. Kuid enne teeme järgmised märkused.

1. Me jaotasime kolmliikme uurimise kolmeks juhuks olenevalt sellest, millised on kolmliikme nullkohad. Kuid me teame (§ 42), et ruutvõrrandi lahendite ja tema diskriminandi $b^2 - 4ac$ vahel kehtib järgmine sõltuvus:

1) Kui $b^2 - 4ac > 0$, siis on võrrandi lahendid reaalsed ja erinevad.

2) Kui $b^2 - 4ac = 0$, siis on lahendid reaalsed ja võrdsed.

3) Kui $b^2 - 4ac < 0$, siis on lahendid komplekssed.

Järelikult selle asemel, et näiteks öelda: „kui kolmliikme nullkohad on reaalsed ja erinevad", võime öelda lühemalt:

„kui diskriminant on suurem kui null"; analoogiliselt muudame formuleeringut ka ülejäänud kahel juhul.

2. Me uurisime, milline märk on kolmliikme numbrilisel väärtusel muutuja mitmesuguste väärtuste puhul. Selle asemel, et öelda: „kolmliikme numbrilise väärtuse märk", ütleme edaspidi lühidalt: „kolmliikme märk", pidades meeles, et jutt on arvu märgist, mis saadakse, kui kolmliikmes muutuja asendada tema numbrilise väärtusega. Samuti sõnade asemel: „kolmliikme väärtused on positiivsed (negatiivsed)" ütleme lühemalt: „kolmliige on positiivne (negatiivne)". Nüüd võime üldise järelduse formuleerida nii:

1. Kui kolmliikme $ax^2 + bx + c$ diskriminant on positiivne, siis x-i kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad nullkohtadest piiratud vahemikus, tema märk on vastupidine koefitsiendi a märgile; x-i kõigi väärtuste puhul väljaspool seda vahemikku on kolmliikmel sama märk, mis koefitsiendil a.

2. Kui kolmliikme diskriminant võrdub nulliga, siis x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme nullkohtadega võrdsed x väärtused, on kolmliikmel sama märk, mis koefitsiendil a.

3. Kui diskriminant on negatiivne, siis x-i kõigi väärtuste puhul on kolmliikmel sama märk, mis koefitsiendil a.

Selle järelduse võib esitada järgmise tabeli kujul:

Diskriminant	x väärtus	Avaldise $y = ax^2 + bx + c$ märk	
		$a > 0$	$a < 0$
$b^2 - 4ac > 0$	1) $x_1 < x < x_2$ 2) $x < x_1$; $x > x_2$	$-$ $+$	$+$ $-$
$b^2 - 4ac = 0$	milline tahes, peale $x = x_1 = x_2$	$+$	$-$
$b^2 - 4ac < 0$	milline tahes	$+$	$-$

Näited.

1. $y = x^2 - 7x + 10$. Diskriminant $b^2 - 4ac = 49 - 40 = 9 > 0$; $a = 1 > 0$. Kolmliikme nullkohad on: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$. Järelikult, kui $x < 2$ ja kui $x > 5$, siis on kolmliige positiivne, kui aga $2 < x < 5$, siis negatiivne.

2. $y = -2x^2 + 6x + 80$. Diskriminant on $36 + 640 = 676 > 0$; $a = -2 < 0$. Kolmliikme nullkohad on: $x_1 = -5$; $x_2 = 8$. Järelikult, kui $-5 < x < 8$, siis on kolmliige positiivne; kui $x < -5$ ja kui $x > 8$, siis negatiivne.

3. $y = -x^2 + 4x - 15$. Diskriminant on $16 - 4 \cdot 15 = -44 < 0$. Järelikult kolmliige on negatiivne x-i kõigi väärtuste puhul.

4. $y = 5x^2 - 10x + 5$. Diskriminant on $10^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 0$. Kolmliikme nullkohad on $x_1 = x_2 = 1$; $a = 5 > 0$. Järelikult kolmliige on positiivne x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud, kui $x = 1$.

5. Leida, milliste tähe m väärtuste puhul on kolmliikme $2x^2 - 6x + m$ väärtused positiivsed, kui x on mistahes arv. Et siin $a = 2 > 0$, siis mistahes x puhul kolmliikme väärtused on positiivsed sel juhul, kui $b^2 - 4ac < 0$. Asetades siia väärtused $a = b$, $b = -6$; $c = m$, saame: $36 - 4 \cdot 2 \cdot m = 36 - 8m$. Tähendab, $36 - 8m < 0$. Siit leiame, et $m > 4\frac{1}{2}$. Seega, kui m on suurem kui $4\frac{1}{2}$, siis on antud kolmliikme väärtused positiivsed x-i mistahes väärtuste puhul.

6. Leida, missuguste p väärtuste puhul on kolmliikme $x^2 + (p-2)x + 2p + 1$ väärtused positiivsed x-i mistahes väärtuste puhul.

Kolmliikme diskriminant on $(p-2)^2 - 4(2p+1) = p^2 - 12p = p(p-12)$. Järelikult selleks, et kolmliikme väärtused oleksid mistahes x puhul positiivsed, peab olema:

$$p(p-12) < 0.$$

Lahendades võrrandi

$$p(p-12) = 0$$

leiame: $p_1 = 0; \quad p_2 = 12.$

Lahendame võrratuse: $p(p - 12) < 0$. See on õige tingimustel:

$$\text{I. } p < 0 \text{ ja } p - 12 > 0$$

või

$$\text{II. } p > 0 \text{ ja } p - 12 < 0.$$

Esimene võrratuste süsteem on vasturääkiv (kui $p < 0$, siis on ilmne, et ka $p - 12 < 0$). Teine süsteem aga annab lahendi:

$$0 < p < 12.$$

Seega p kõigi väärtuste puhul 0-st kuni 12-ni, s. o. tingimusel, et $0 < p < 12$, on antud kolmliikme väärtused x-i mistahes väärtuste puhul positiivsed.

Harjutused.

Uurida järgmisi kolmliikmeid:

300. $y = 3x^2 + 4x - 7.$
301. $y = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 5.$
302. $y = -5x^2 + 20x - 20.$
303. $y = 3x^2 + 2x + 2.$
304. $y = -x^2 + 3x - 4.$

Ülesandeis 305 kuni 309 leida, missuguste m väärtuste puhul on kolmliikme väärtused positiivsed, kui x saab mistahes väärtusi.

305. $x^2 - 8x + m + 10.$
306. $x^2 - 2x + m - 6.$
307. $x^2 - 10x - m.$
308. $x^2 + (m + 2)x + 3m + 1.$
309. $3x^2 + (2m + 6)x + m + 3.$

187. Teise astme võrratused. Ühe tundmatuga teise astme võrratusteks nimetatakse võrratusi kujul

$$ax^2 + bx + c > 0 \qquad (1)$$

ja

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad (2)$$

kus a, b ja c on mistahes reaalarvud, kusjuures $a \neq 0$.

Et võrratusele (2) on alati võimalus anda kuju (1), korrutades teda arvuga -1, siis võime edaspidi piirduda võrratuste vaatlemisega kujul (1).

Lahendada võrratus tähendab leida, milliste x väärtuste puhul on see võrratus kehtiv. Võrratuse (1) suhtes tähendab see, et me peame leidma x-i need väärtused, mille juures kolmliikme vasak pool osutub positiivseks arvuks.

Pärast seda, mis oli eelmistes paragrahvides öeldud ruutkolmliikme märgi kohta, ei tekita vastamine sellele küsimusele raskusi.

Lahendame mõned näited.

Näide 1. Olgu vaja lahendada võrratus

$$2x^2 - 13x + 15 > 0. \qquad (1)$$

See tähendab, et meil on vaja leida, milliste x väärtuste puhul on kolmliige $2x^2 - 13x + 15$ positiivne arv. Lahenduse teostame järgmiselt:

a) Konstateerime, et esimene koefitsient on positiivne $(a = 2 > 0)$.

b) Konstateerime, et kolmliikme diskriminant on $13^2 - -4 \cdot 2 \cdot 15 > 0$.

Siit järeldame (vt. tabel §-s 186), et võrratus (1) on kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul, mis on kolmliikme väiksemast nullkohast väiksemad, ja x-i kõigi väärtuste puhul, mis on suuremast nullkohast suuremad.

c) Et leida need nullkohad, lahendame võrrandi

$$2x^2 - 13x + 15 = 0.$$

Leiame: $x_1 = 1\frac{1}{2}$; $x_2 = 5$.

Antud võrratus on järelikult kehtiv x väärtuste puhul, mis on väiksemad kui $1\frac{1}{2}$, ja x väärtuste puhul, mis on suuremad kui 5.

Näide 2. Lahendada võrratus

$$-4x^2+4x-1<0. \qquad (1)$$

Korrutades võrratuse mõlemad pooled arvuga -1, saame samaväärse võrratuse:

$$4x^2-4x+1>0. \qquad (2)$$

a) Koefitsient $a=4>0$.

b) Diskriminant on $4^2-4\cdot 4=0$.

Järelikult kolmliikmel on võrdsed nullkohad. Sel juhul, nagu teame (§ 186), on kolmliikme (2) väärtused positiivsed x_1 kõigi väärtuste puhul, välja arvatud kolmliikme nullkohaga võrdsed väärtused. Leiame selle nullkoha, lahendades võrrandi:

$$4x^2-4x+1=0.$$

Saame $x=\frac{1}{2}$. Seega antud võrratus (1) on kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud $x=\frac{1}{2}$.

Näide 3. Lahendada võrratus

$$3x^2-5x+4>0.$$

a) Koefitsient $a=3>0$.

b) Diskriminant on $5^2-4\cdot 3\cdot 4=-23<0$.

Siit järeldame kohe, et võrratus on kehtiv x-i mistahes väärtuste puhul.

Näide 4. Lahendada võrratus

$$(2x-1)(x+3)-(x+7)(x-1)-4x<0.$$

Avanud sulud ja sooritanud lihtsustused, saame:

$$x^2-5x+4<0 \qquad (1)$$

ehk pärast korrutamist arvuga -1

$$-x^2+5x-4>0. \qquad (2)$$

a) Koefitsient $a = -1 < 0$.

b) Diskriminant on $5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) = 9 > 0$.

Järelikult on võrratus (2) ja koos sellega ka võrratus (1) kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad kolmliikme nullkohtade vahel. Leiame need nullkohad.

$$x^2 - 5x + 4 = 0,$$

siit $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Seega võrratus (1) on kehtiv, kui

$$1 < x < 4.$$

Näide 5. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2}{6} - x + 1\frac{1}{2} < 0. \qquad (1)$$

Korrutades võrratuse mõlemad pooled arvuga -6, saame:

$$-x^2 + 6x - 9 > 0. \qquad (2)$$

a) Koefitsient $a = -1 < 0$.

b) Diskriminant on $6^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-9) = 0$.

Siit järeldame kohe, et võrratusel (1) pole lahendeid [kui $x = 3$, siis kolmliige (2) võrdub nulliga; x-i kõigi ülejäänud väärtuste puhul on ta negatiivne].

Näide 6. Lahendada võrratus

$$-3x^2 + 4x - 10 > 0.$$

Et $a = -3 < 0$ ja diskriminant on $4^2 - 120 < 0$, siis järeldame vahetult, et võrratusel lahendeid pole.

Lahendatud näited, samuti §-s 186 toodud tabeli vaatlemine viivad meid võrratuse

$$ax^2 + bx + c > 0$$

suhtes järgmisele üldisele järeldusele.

I. Kui $b^2 - 4ac < 0$, siis:

a) võrratus on kehtiv x-i mistahes väärtuste puhul, kui $a > 0$;

b) võrratusel pole lahendeid, kui $a < 0$.

II. Kui $b^2 - 4ac = 0$, siis:

a) võrratus on kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul, välja arvatud vasakul poolel oleva kolmliikme nullkohaga võrdne väärtus, kui $a > 0$;

b) võrratusel pole lahendeid, kui $a < 0$.

III. Kui $b^2 - 4ac > 0$, siis:

a) kui $a > 0$, siis võrratus on kehtiv x väärtuste puhul, mis on suuremad vasakul poolel oleva kolmliikme suuremast nullkohast, ja x väärtuste puhul, mis on väiksemad selle kolmliikme väiksemast nullkohast (ehk, nagu leppisime kokku öelda lühemalt: „x väärtuste puhul, mis asetsevad väljaspool kolmliikme nullkohtade vahel olevat vahemikku");

b) kui $a < 0$, siis võrratus on kehtiv x väärtuste puhul, mis asetsevad vasakul poolel oleva kolmliikme nullkohtade vahel.

Märkus. Kõigis toodud näiteis lahendasime küsimuse, toetudes ruutkolmliikme uurimise tulemustele, mida käsitlesime §-s 186. Kuid igal juhul on muidugi võimalik ka täiesti iseseisev uurimine. Näiteks lahendanud näites 1 antud võrrandi $2x^2 - 13x + 15 = 0$ ja leidnud, et $x_1 = 1\frac{1}{2}$, $x_2 = 5$, oleksime võinud võrrandi esitada ka sel kujul:

$$2\left(x - 1\frac{1}{2}\right)(x - 5) > 0.$$

Nüüd taandub antud võrratuse lahendamine järgmise kahe esimese astme võrratuse süsteemi lahendamiseks:

$$\text{I} \begin{cases} x - 1\frac{1}{2} > 0 \\ x - 5 > 0 \end{cases}$$

ja

$$\text{II} \begin{cases} x - 1\frac{1}{2} < 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$$

Esimene süsteem annab $x > 5$, teine $x < 1\frac{1}{2}$. Tähendab, antud võrratus on kehtiv x väärtuste puhul $x > 5$ ja $x < 1\frac{1}{2}$. Saime sama tulemuse, mis varemgi, kuid märksa pikemat teed kaudu.

Lahendame nüüd mõned keerukamad võrratused.

Näide 7. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x - 3} > 0.$$

Selle võrratuse lahendamine taandub kahe süsteemi lahendamiseks:

$$\text{I} \begin{cases} x^2 - 8x + 7 > 0 & (1) \\ x - 3 > 0 & (2) \end{cases}$$

ja

$$\text{II} \begin{cases} x^2 - 8x + 7 < 0 & (3) \\ x - 3 < 0 & (4) \end{cases}$$

Lahendame esimese võrratuste süsteemi. Et $8^2 - 4 \cdot 7 = 36 > 0$, siis on kolmliikmel $x^2 - 8x + 7$ reaalsed ja erinevad nullkohad. Lahendanud võrrandi $x^2 - 8x + 7 = 0$, leiame $x_1 = 1$; $x_2 = 7$. Sel juhul, nagu teame (§ 183), võrratus (1) on kehtiv, kui $x < 1$ ja kui $x > 7$.

Lahendanud teise võrratuse, leiame $x > 3$. Tähendab, mõlemat võrratust rahuldavad ainult x väärtused $x > 7$.

Lahendame teise süsteemi. Võrratus (3) on kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul, mis asetsevad 1 ja 7 vahel, s. o. kui $1 < x < 7$. Kuid võrratus (4) annab $x < 3$. Tähendab, mõlemat võrratust rahuldavad ainult x väärtused, mis asetsevad 1 ja 3 vahel, s. o. kui $1 < x < 3$.

Nüüd võime teha kokkuvõtliku järelduse: antud võrratus on kehtiv,

$$\text{kui } 1 < x < 3 \text{ ja kui } x > 7.$$

Kontrollige lahenduse õigsust, asetades võrratusse väärtused: $x = -1$; 0; 1; 2; 4; 6; 8; 10.

Näide 8. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2-9x+14}{x^2-5x+4}>0.$$

Selle võrratuse lahendamine taandub järgmiste süsteemide lahendamiseks:

$$\text{I}\begin{cases} x^2-9x+14>0 & (1)\\ x^2-5x+4>0 & (2)\end{cases}$$

ja

$$\text{II}\begin{cases} x^2-9x+14<0 & (3)\\ x^2-5x+4<0 & (4)\end{cases}$$

Et $9^2-56=25>0$ ja $5^2-16=9>0$, siis on kummalgi kolmliikmel reaalsed ja erinevad nullpunktid. Lahendades vastavad võrrandid, leiame esimese kolmliikme jaoks, et $x_1=2$; $x_2=7$, ja teise kolmliikme jaoks $x_1=1$; $x_2=4$. Siit järeldame:

1) Võrratus (1) on kehtiv, kui $x<2$ ja kui $x>7$, kuid võrratus (2) on kehtiv, kui $x<1$ ja kui $x>4$. Järelikult mõlemad võrratused üheskoos on kehtivad, kui $x<1$ ja $x>7$.

2) Võrratus (3) on kehtiv, kui $2<x<7$, võrratus (4) aga juhul, kui $1<x<4$. Järelikult mõlemad võrratused on üheaegselt kehtivad, kui $2<x<4$. Seega on antud võrratuse lahendeiks järgmised x väärtused: 1) $x<1$; 2) $2<x<4$; 3) $x>7$.

Märkus. Leidnud mõlema kolmliikme nullkohad, oleksime võinud antud võrratuse esitada ka järgmisel kujul:

$$\frac{(x-2)(x-7)}{(x-1)(x-4)}>0.$$

Siis oleks selle võrratuse lahendamine taandunud järgmise kahe süsteemi lahendamiseks:

$$\text{I}\begin{cases}(x-2)(x-7)>0\\(x-1)(x-4)>0\end{cases}$$

ja

$$\text{II} \begin{cases} (x-2)(x-7) < 0 \\ (x-1)(x-4) < 0 \end{cases}$$

Me võime iga võrratuse lahendada samuti, nagu tegime seda käesoleva paragrahvi esimeses näites. On ilmne, et oleksime tulnud samale tulemusele nagu eespoolgi, kuid lahenduse käik oleks olnud tunduvalt pikem.

Näide 9. Lahendada võrratus

$$\frac{x^2-3x-10}{x^2-3x+10} < 0.$$

Võrratuse lahendus taandub järgmiste süsteemide lahendamiseks:

$$\text{I} \begin{cases} x^2-3x-10 > 0 & (1) \\ x^2-3x+10 < 0 & (2) \end{cases}$$

ja

$$\text{II} \begin{cases} x^2-3x-10 < 0 & (3) \\ x^2-3x+10 > 0 & (4) \end{cases}$$

Kolmliikme diskriminandid on: $3^2+4\cdot 10=49>0$ ja $3^2-4\cdot 10=-31<0$. Siit järeldame kohe, et süsteemil I pole lahendeid. Tõepoolest, kui kolmliikme (2) diskriminant on väiksem kui null, siis on kolmliige positiivne x-i mistahes väärtuste puhul ja järelikult võrratus (2) on võimatu.

Lahendame süsteemi II. Me teame juba, et võrratus (4) on kehtiv x-i kõigi väärtuste puhul. Tähendab, meil jääb veel lahendada võrratus (3). Leides kolmliikme $x^2-3x-10$ nullkohad, saame $x_1=-2$; $x_2=5$. Järelikult võrratuse (3) ja ühes sellega ka süsteemi II lahenditeks on ainult need x väärtused, mis asetsevad -2 ja 5 vahel.

Seega on antud võrratus kehtiv, kui $-2<x<5$.

Harjutused.

Lahendada järgmised võrratused:

310. $x^2 - 10x + 25 < 0$.

311. $(x - 3)(x - 1) - 15 > 0$.

312. $x(2x + 3) + 1 < 0$.

313. $-3x^2 + 8x - 6 > 0$.

314. $x^2 - 5x + 7 > 0$.

315. $9x^2 - 12x + 4 > 0$.

316. $\dfrac{x^2 - 9x + 18}{x - 4} > 0$.

317. $\dfrac{x^2 + 2x - 15}{x + 1} < 0$.

318. $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 2x + 5} > 0$.

319. $\dfrac{x^2 + 4x + 7}{x^2 - 6x + 9} < 0$.

320. $\dfrac{x^2 - 5x + 8}{x^2 - 8x + 15} > 0$.

321. $\dfrac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 8x + 12} < 0$.

Vastused harjutustele.

1. -243; -343; 256; $1\,000\,000$; $-0{,}00001$.

3. $\frac{x^8y^4}{z^{12}}$; $-\frac{27a^3b^9}{8c^6}$; $\frac{0{,}000064a^{18}b^6c^6}{d^{12}}$.

11. $2a\sqrt{a}$; $2a^3b^3\sqrt{2b}$; $5a^2bx\sqrt{2abx}$; $2a\sqrt[3]{2a}$.

14. $\sqrt{8}$; $\sqrt{490}$; $\sqrt{125}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{a^3}$. **17.** $\frac{1}{60}\sqrt{6}$; $\frac{1}{90}\sqrt{165}$.

19. $\sqrt[6]{8}$; $\sqrt[6]{25}$; $\sqrt[6]{x^3}$; $\sqrt[6]{x^4}$; $\sqrt[12]{16}$; $\sqrt[12]{27}$; $\sqrt[12]{x^9}$; $\sqrt[12]{y^{10}}$.

20. $\sqrt[12]{x^4y^8}$; $\sqrt[12]{y^6z^6}$; $\sqrt[12]{x^3z^9}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)^3}$; $\sqrt[6]{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)^2}$.

21. $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt[3]{3a^2b^4}$; $\sqrt{2a^2b^3}$.

23. $2\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{2}$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; $\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

24. $a\sqrt{ax}$; $x\sqrt{ax}$; $\sqrt{ax}$. **26.** $8\sqrt{2}$; $29\sqrt{3}$.

27. $(2a^2b+ab-1)\sqrt{2ab}$. **28.** $12\sqrt{6}$; 120. **32.** 15; $6a^3$.

33. $\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt[6]{60}$; $2\sqrt[3]{3}$. **34.** $\frac{16x}{a}$. **35.** $2a\sqrt{10}$; $1{,}8a\sqrt{10}$.

36. $\sqrt[6]{x}$; $\sqrt[6]{128}$; $\sqrt[12]{a^5}$. **39.** $\sqrt[12]{12}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[12]{a^7}$.

47. $-1-\sqrt{2}$; $\frac{6-2\sqrt{2}}{7}$; $\frac{91+13\sqrt{6}}{43}$.

52. $x=9$; $x=1$; $x=28\frac{2}{3}$. **78.** $(x-7)(x-10)$; $(x+11)(x-8)$.

79. $(5x+8)(4x-3)$; $(x+10)(x-2)$.

80. $\frac{x+13}{x+15}$; $\frac{2(x+9)}{3(x-7)}$. **81.** $\frac{x+2a-b}{x+a-b}$. **92.** ±1, ±2; ±1, ±3.

93. $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{-1}$; ± 2; $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

94. ± 4, ± 3; ± 3, $\pm\sqrt{-7}$.

97. 1) 3; 8; 2) $x=-5$; $y=-8$ või $x=8$; $y=5$;

3) $x=\pm\sqrt{ab}$; $y=\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$.

98. 1) $x=\pm 3$; $y=\pm 4$; 2) $x=4\pm 4\sqrt{2}$; $y=-4\pm 4\sqrt{2}$;

3) $x=16$; $y=10$.

99. $x=\frac{24}{13}$; $y=\frac{24}{5}$. **102.** 9; 7,5. **103.** $137\cdot 113=15\,481$.

104. 12; 4. **109.** $x>1$, kui $\frac{a+b}{ab}>0$, ja $x<1$, kui $\frac{a+b}{ab}<0$ $x<4$.

113. $a<b$. **114.** 119. **116.** $n=7$. **121.** $n=8$.

124. Kolmnurga küljed on: $3a$; $4a$, $5a$, kus a on suvaline arv.

131. 9; 27; 81; 243 või -18; 54; -162; 486. **136.** 183.

145. $a_6=\frac{5}{243}$ või $a_6=-\frac{10}{243}$. **147.** $2a^2$; $4a(2+\sqrt{2})$.

150. $a(a+x)^{-1}$; $2(a-x)^{-1}$; $3ab(1+x)^{-2}(1-x)^{-1}$.

153. $2a^2b^3$; $5ab^{-4}x^{-1}$. **155.** $4a^4b^{-6}$; $4x^6y^4$. **158.** $10a^{\frac{5}{6}}x$.

159. $5ac^{-\frac{1}{12}}$; $a^{\frac{1}{2}}$. **163.** $3a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{6}}$. **164.** $a^{\frac{1}{4}}$; $a^{-\frac{1}{9}}$; $(1-x)^{\frac{1}{3}}$.

178. 2; n; -1; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **179.** 8; 25; $\frac{1}{1024}$; 2; $\frac{1}{4}$.

188. $x=\sqrt{a}$; $x=\sqrt[3]{ab}$. **251.** $a=13$.

Sisukord.

Esimene jagu.

Identsed teisendused astmete ja juurtega.

Lk.

I. Astendamine 3

1. Astendamine. 2. Negatiivse arvu aste. 3. Üksliikmete astendamine. Harjutused.

II. Hulkliikme ruutimine 5

4. Valemi tuletamine. 5. Märkus märkide kohta. Harjutused.

III. Irratsionaalsete arvude mõiste 7

6. Ühismõõdulised ja ühismõõdutud lõigud. 7. Mõõtmise mõiste. 8. Irratsionaalarvud ja nende ligikaudsed väärtused. 9. Irratsionaalarvude võrdsus ja ebavõrdsus. Reaalarvud. 10. Tehete definitsioonid irratsionaalarvude korral. 11. Juurimine. Definitsioon. 12. Mistahes juure ligikaudne väärtus. Harjutused.

IV. Irratsionaalsete avaldiste teisendamine . 16

13. Ratsionaalsed ja irratsionaalsed algebralised avaldised. 14. Juure põhiomadus. 15. Juure aritmeetilise väärtuse leidmine korrutisest, astmest ja murrust. 16. Juurte kõige lihtsamaid teisendusi. Harjutused. 17. Sarnased juured. Harjutused. 18. Tehted irratsionaalsete üksliikmetega. Harjutused. 19. Tehted irratsionaalsete hulkliikmetega. 20. Murru nimetaja vabastamine juurtest. Harjutused.

V. Irratsionaalsed võrrandid 30

21. Ülesanne. 22. Võõrlahendid. 23. Võrrandi vabastamine kahest ruutjuurest. Harjutused.

Teine jagu.

Funktsioonid ja nende graafikud.

Lk.

I. Funktsionaalne sõltuvus 33
24. Jäävad ja muutuvad suurused. 25. Argument ja funktsioon. 26. Funktsionaalse sõltuvuse kolm avaldamisviisi. 27. Koordinaatide meetod. 28. Punkti asukoha määramine tasapinnal. Harjutused.

II. Päri- ja pöördvõrdelisus 42
29. Pärivõrdeline sõltuvus. 30. Võrdelise sõltuvuse üldine definitsioon. 31. Pöördvõrdeline sõltuvus. 32. Pöördvõrdelise sõltuvuse üldine definitsioon. Harjutused. 33. Pärivõrdelise sõltuvuse graafik. 34. Sirge asetuse muutumine võrdeteguri muutumisel. 35. Pöördvõrdelise sõltuvuse graafik. Harjutused.

III. Lineaarfunktsioon 52
36. Esimese astme kaksliige. Ülesanne. 37. Esimese astme kaksliikme graafik. 38. Kaksliikme $y = kx + b$ muutumine sõltuvalt x muutumisest. 39. Märkused. 40. Sirge $y = kx + b$ joonestamine kahe punkti järgi. Harjutused.

Kolmas jagu.

Ruutfunktsioon.

I. Täiendavaid teatmeid ruutvõrrandeist . . 59
41. Ruutvõrrandi lahendite valem. 42. Diskriminant. 43. Ruutvõrrandi lahendite omadused (Viëta teoreem). Harjutused. 44. Teise astme kolmliige. 45. Teise astme kolmliikme lahutamine tegureiks. Harjutused.

II. Ruutfunktsiooni graafik 66
46. Funktsiooni $y = x^2$ graafik. 47. Funktsiooni $y = ax^2$ graafik. 48. Funktsiooni $y = ax^2 + b$ graafik. Harjutused. 49. Teise astme kolmliikme graafik. 50. Ruutvõrrandi graafiline lahendamine. Harjutused. 51. Biruutvõrrand. Harjutused. 52. Võrrandid, mille vasak pool lahutub tegureiks ja parem pool on null. 53. Kaheliikmeline võrrand. 54. Kaheliikmeliste kolmanda astme võrrandite lahendamine. 55. Juure mitmesugused väärtused. 56. Kolmeliikmeline võrrand. Harjutused.

Lk.

III. Ruutvõrrandite süsteemid 82
57. Mitme tundmatuga võrrandi aste. 58. Kahe tundmatuga teise astme täieliku võrrandi üldkuju. 59. Kahe võrrandi süsteem, milledest üks on esimese ja teine teise astme võrrand. 60. Kunstlikud võtted. 61. Kahe võrrandi süsteem, kus mõlemad on teise astme võrrandid. 62. Teise astme võrrandisüsteemide graafiline lahendamine. Harjutused.

Neljas jagu.

Võrratused.

I. Esimese astme võrratused 91
63. Eelmärkus. 64. Võrratuste põhiomadused. 66. Samaväärsed võrratused. 67. Teoreem 1. 68. Teoreem 2. 69. Teoreem 3. 70. Võrratuse samase kehtivuse tõestus. 71. Ühe tundmatuga esimese astme võrratuse lahendamine. 72. Kaks ühe tundmatuga esimese astme võrratust. Harjutused.

Viies jagu.

Progressioonid.

I. Aritmeetiline progressioon 101
73. Ülesanne. 74. Definitsioon. 75. Aritmeetilise progressiooni üldliikme valem. 76. Aritmeetilise progressiooni liikmete summa valem. 77. Märkus. 78. Loomulikkude arvude jada liikmete ruutude summa valem. Harjutused.

II. Geomeetriline progressioon 109
79. Ülesanne. 80. Definitsioon. 81. Geomeetrilise progressiooni võrdlemine aritmeetilise progressiooniga. 82. Geomeetrilise progressiooni üldliikme valem. 83. Geomeetrilise progressiooni liikmete summa valem. 84. Geomeetrilise progressiooni näide. Harjutused.

III. Lõpmatud progressioonid 115
85. Lõpmatute progressioonide mõningaid omadusi. 86. Piiri mõiste. 87. Lõpmatult kahaneva geomeetrilise progressiooni summa valem. 88. Geomeetrilise progressiooni summa valemi rakendamine perioodilistele kümnendmurdudele. Harjutused.

Kuues jagu.

Astendaja mõiste üldistus.

Lk.

I. Täisarvulised astendajad 124
89. Täisarvuliste positiivsete astendajate omadusi. 90. Astendaja null. 91. Negatiivsed täisarvulised astendajad. 92. Tehted negatiivsete astendajatega astmetega. Harjutused.

II. Murrulised astendajad 128
93. Mis mõttes kasutatakse murrulisi astendajaid. 94. Murrulise astendaja põhiomadus. 95. Tehted murruliste astendajatega astmetega. 96. Näiteid tehete kohta murruliste ja negatiivsete astendajatega. Harjutused.

III. Irratsionaalse astendaja mõiste 132
97. Irratsionaalse astendajaga astme mõte.

IV. Eksponentfunktsioon 133
98. Definitsioon. 99. Eksponentfunktsiooni omadused. 100. Eksponentfunktsiooni graafik. Harjutused.

Seitsmes jagu.

Logaritmid.

I. Logaritmide üldised omadused 140
101. Astendamise kaks pöördtehet. 102. Definitsioon. 103. Logaritmfunktsioon ja selle graafik. 104. Logaritmide põhiomadused. Harjutused. 105. Logaritmide tabeli praktiline tähtsus. 106. Korrutise, jagatise, astme ja juure logaritm. 107. Algebralise avaldise logaritmimine. 108. Märkused. Harjutused.

II. Kümnendlogaritmide omadused 152
109. Kümnendlogaritmide omadused. 110. Järeldused. Harjutused.

III. Tabelite ehitus ja kasutamine 158
111. Logaritmide süsteem. 112. Negatiivse logaritmi teisendamine. 113. Neljakohaliste tabelite kirjeldus ja kasutamine. 114. Interpoleerimine. 115. Antilogaritmide tabelid. 116. Märkus interpoleerimise kohta. 117. Tehted logaritmidega, millede täisosad on negatiivsed. 118. Lahutatavate logaritmide teisendamine liidetavaiks. 119. Loga-

Lk.

ritmidega arvutamise näiteid. Harjutused. 120. Viiekohaliste tabelite kasutamine.

IV. Eksponent- ja logaritmvõrrandid 172
121. Võrrandite näiteid. 122. Liitkasviku valem. Harjutused.

Kaheksas jagu.

Võrrandite uurimine.

I. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandite uurimine 176
123. Mis tähendab võrrandit uurida. 124. Ühe tundmatuga esimese astme võrrandi üldkuju. 125. Positiivne lahend. 126. Negatiivne lahend. 127. Lahend null. 128. Juhtum, mil võrrandil pole lahendit. 129. Kuidas tuleb mõista võrdust $\frac{m}{0} = \pm \infty$. 131. Määramatu lahend. 132. Võrrandi $ax = b$ lahendi graafiline tõlgendamine. Harjutused.

II. Kahe tundmatuga esimese astme võrrandisüsteemi uurimine. 184
133. Üldvalemid. 134. Uurimine.

III. Ruutvõrrandi uurimine 187
135. Valemite uurimine. 136. Ülesanne kahest valgusallikast.

Üheksas jagu.

Imaginaar- ja kompleksarvud 192

137. Imaginaararvud. 138. Kompleksarvud. 139. Tehted kompleksarvudega. Harjutused. 140. Kompleksarvu geomeetriline kujutamine. 140a. Kompleksarvu trigonomeetriline kuju. 140b. Tehted trigonomeetriliselt avaldatud kompleksarvudega.

Kümnes jagu.

Mõningaid teatmeid algebralistest võrranditest.

I. Hulkliikme jaguvus 214
141. x suhtes täisratsionaalse hulkliikme jaguvus vahega

$x - a$. Bézout' teoreem. 142. Kaksliikme $x^m \mp a^m$ jagu-vus kaksliikmega $x \mp a$. 143. Kaksliikme $x^m \mp a^m$ ja kaksliikme $x \mp a$ jagatised. Harjutused. 144. Algebralise võrrandi üldkuju. 145. Algebralise võrrandi mõningaid omadusi.

Üheteistkümnes jagu.

Määramatud võrrandid 222

146. Sissejuhatavad märkused. 147. Võrrandi täisarvudes lahendamatuse tunnus. 148. Võrrandi positiivsetes arvudes lahendamatuse tunnus. 149. Määramatu võrrandi lahendite üldvalem. 150.. Asendamismeetod. 151. Määramatu võrrandi erikuju. 152. Määramatu võrrandi üldlahend. 153. Võrrandi lahendamise lihtsustamine. 154. Positiivsed lahendid. Harjutused.

Kaheteistkümnes jagu.

Ühendid ja Newtoni binoomvalem.

I. Ühendid 240
155. Definitsioon. 156. Variatsioonid. 157. Ülesanded. 158. Permutatsioonid. 159. Ülesanded. 160. Kombinatsioonid. 161. Kombinatsioonide arvu valemi teine kuju. 162. Kombinatsioonide omadus. Harjutused.

II. Newtoni binoomvalem 247
163. Teise liikme poolest erinevate binoomide korrutis. 164. Newtoni binoomvalem. 165. Newtoni binoomvalemi omadused. 166. Binoomvalemi rakendamine hulkliikmele. Harjutused.

Täiendused.

I. Ahelmurrud 256
167. Ahelmurru definitsioon. 168. Ahelmurru teisendamine harilikuks murruks. 169. Hariliku murru teisendamine ahelmurruks. 170. Lähendmurrud. 171. Lähendmurdude moodustamise reegel. 172. Teoreem 1. 173. Teoreem 2. 174. Teoreem 3. 175. Antud aritmeetilise murru ligikaudsed väärtused. 176. Ruutjuure leidmine. 177. Mää-

Lk.

ramatu võrrandi lahendi leidmine. 178. Logaritmi arvutamine.

II. Piiridest 273
179. Definitsioonid. 180. Lõpmatult kahanevate suuruste mõningad omadused. 181. Piiride omadused. Harjutused.

III. Ruutkolmliikme uurimine. Teise astme võrratused 283
182. Ülesanne. 183. Erinevate reaalsete nullkohtadega ruutkolmliige. 184. Võrdsete nullkohtadega ruutkolmliige. 185. Kompleksete nullkohtadega ruutkolmliige. 186. Üldine järeldus. 187. Teise astme võrratused.

Vastused harjutustele 311

Tõlkinud A. Ilves.
Vastutav toimetaja K. Ratassepp.
Keeleline toimetaja E. Kindlam.

Ladumisele antud 22. III 1949. Trükkimisele antud 1. VI 1949. Trükiarv 21 000. Paber 56 × 79, $^1/_{16}$. Trükipoognaid 20. Trükitähti trükipoognas 34 560. Arvutuspoognaid 17,3. MB-03691. Tellimise nr. 835. Trükikoda „Hans Heidemann", Tartu, Vallikraavi 4.

На эстонском языке.

А. П. Киселёв. Алгебра. Учебник для VIII—X классов.

Rbl. 7.—

A
17881

7148606

TÜ RAAMATUKOGU
1 0300 00714860 6