Tartu Ülikool
Loodus- ja täppisteaduste valdkond
Matemaatika ja statistika instituut

Pirje Õunpuu

Banachi ruumi $C(K)$ teatud ekvivalentne ümbernormeering perfektse K korral ja selle geomeetrilisest struktuurist

Matemaatika eriala
Bakalaureusetöö (9 EAP)

Juhendaja: Rainis Haller

Tartu 2024

Banachi ruumi $C(K)$ teatud ekvivalentne ümbernormeering perfektse K korral ja selle geomeetrilisest struktuurist

Bakalaureusetöö
Pirje Õunpuu

Lühikokkuvõte. Bakalaureusetöös tõestatakse üksikasjalikult artikli „*Banach Spaces with small weakly open subsets of the unit ball and massive sets of Daugavet and* Δ*-points*" põhitulemus, mille autorid on C. Cobollo, D. Isert, G. López-Pérez, M. Martín, Y. Perreau, A. Quero, A. Quilis, D. L. Rodríquez-Vidanes ja A. Rueda Zoca, ning mis avaldati septembris 2023 digihoidlas arXiv (arXiv: 2309.03610 [math.FA]). Lisaks selgitatakse, et selle artikli ühes osas on tehtud viga.

CERCS teaduseriala: P140 Jadad, Fourier' analüüs, funktsionaalanalüüs.
Märksõnad: funktsionaalanalüüs, Banachi ruumid, normeeritud ruumid.

Certain renorming of the Banach space $C(K)$ in the case of perfect K and about its geometric structure

Bachelor's thesis
Pirje Õunpuu

Abstract. In this Bachelor's thesis we prove in detail the main result of the article *Banach Spaces with small weakly open subsets of the unit ball and massive sets of Daugavet and* Δ*-points* by C. Cobollo, D. Isert, G. López-Pérez, M. Martín, Y. Perreau, A. Quero, A. Quilis, D. L. Rodríquez-Vidanes and A. Rueda Zoca, which was published in arXiv digital repository in September 2023 (arXiv: 2309.03610 [math.FA]). In addition we explain that one of the sections in the article does not hold.

CERCS research specialisation: P140 Series, Fourier' Analysis, functional analysis.
Keywords: functional analysis, Banach spaces, normed spaces.

Sisukord

Sissejuhatus ja kasutatud tähistused

Käesolev bakalaureusetöö on funktsionaalanalüüsi valdkonda kuuluv teaduslik uurimus. Töö eesmärgiks oli üksikasjalikult tõestada artikli [2] järgmine põhitulemus.

Teoreem (vt [2, teoreem 1.3]). *Olgu Ω perfektne kompaktne Hausdorffi ruum. Banachi ruumil $C(\Omega)$ leidub iga $\varepsilon \in (0,1)$ korral järgmiste omadustega ekvivalentne norm $|||\cdot|||_\varepsilon$:*

(1) *iga $f \in C(\Omega)$ korral $\|f\|_\infty \leqslant |||f|||_\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_\infty$;*

(2) *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ ühikkera sisaldab kuitahes väikese diameetriga mittetühja suhteliselt nõrgalt lahtist alamhulka;*

(3) *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ ühiksfääril leidub punkt, mis ei ole Δ-punkt;*

(4) *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ Daugaveti punktide hulk on nõrgalt tihe.*

Töö käigus panime tähele, et artiklis [2] esitatud omaduse (4) tõestus sisaldab viga, mida me ei suutnud parandada ning tänaseni ei ole selge, kas see väide üldse kehtib. Küll suutsid artikli autorid hiljuti sarnase teoreemi tõestada Banachi ruumi $L_\infty[0,1]$ jaoks (vt [3, teoreem 1.3]).

Bakalaureusetöö koosneb kahest peatükist. Esimeses peatükis antakse vajalikud spetsiifilised mõisted ja tulemused, mis on põhiosa mõistmiseks tarvilikud. Teises peatükis esitame põhiteoreemi väidete (1)–(3) tõestuse ning selgitame, kus on artiklis [2] väite (4) järeldamisel tehtud viga.

Töös kasutatud üldised funktsionaalanalüüsi- ja topoloogiaalased teadmised on tuttavad loengukursustest „Funktsionaalanalüüs I“ ja „Üldine topoloogia I“ ning leitavad õpikutest [4], [5], [6] ja [7].

Bakalaureusetöös vaatleme ainult reaalseid normeeritud ruume ja kasutame normeeritud ruumide teooria tavalisi tähistusi. Normeeritud ruumi X kinnist ühikkera, ühiksfääri ja kaasruumi tähistame vastavalt B_X, S_X ja X^*. Hulga A sulundit ja sisemust märgime vastavalt $\overline{A}$ ja A°.

1 Vajalikud eelteadmised

1.1 Kasutatavad mõisted ja abitulemused

Siin alapunktis toome välja bakalaureusetöös kasutatud mõisted ja abitulemused, mis matemaatika õppekava põhiainetega ehk kaetud ei ole ja valdkonnaga vast vähem seotud lugejat töö põhiosa mõistmisel aitavad. Funktsionaalanalüüsi ja topoloogia tavamõistetele ja -tulemustele ei ole konkreetset allikaviidet antud, sest need on lugejal endal üldkasutatavatest aineõpikutest, nt [4], [5], [6] ja [7], või Vikipeediast kergesti leitavad.

Definitsioon 1.1. Topoloogilist ruumi nimetatakse **Hausdorffi ruumiks**, kui iga tema kahe erineva elemendi x ja y korral leiduvad punkti x ümbrus U ja punkti y ümbrus V nii, et U ja V ei lõiku, s.t $U \cap V = \varnothing$ (ümbruse mõiste kohaselt saab sellised hulgad U ja V valida lahtised).

Hausdorffi ruumi üheelemendiline alamhulk on kinnine.

Definitsioon 1.2. Topoloogilist ruumi nimetatakse **kompaktseks**, kui igal tema lahtisel kattel leidub lõplik alamkate. Topoloogilise ruumi osahulk on kompaktne, kui ta on alamruumina kompaktne.

Hausdorffi ruumi kompaktne alamhulk on kinnine. Kompaktses Hausdorffi ruumis leidub igal punktil kompaktsetest hulkadest ümbruste baas ehk iga punkti ümbrus sisaldab selle punkti kompaktset ümbrust.

Definitsioon 1.3. Topoloogiline ruum on **normaalne**, kui tema mistahes kahe lõikumatu kinnise alamhulga A ja B korral leiduvad lõikumatud lahtised hulgad U ja V nii, et $A \subset U$ ja $B \subset V$.

On hästi teada, et kompaktne Hausdorffi ruum on normaalne.

Teoreem 1.4 (**Urõsoni lemma**). *Topoloogiline ruum X on normaalne parajasti siis, kui tema mistahes kahe lõikumatu mittetühja kinnise alamhulga A ja B korral leidub pidev kujutus $f\colon X \to [0,1]$ nii, et $f(x) = 0$ iga $x \in A$ korral ja $f(x) = 1$ iga $x \in B$ korral.*

Definitsioon 1.5. Topoloogilise ruumi element x on selle ruumi alamhulga A **kuhjumispunkt**, kui iga punkti x ümbrus sisaldab temast erinevat hulga A elementi. Alamhulga A kuhjumispunktide hulka märgitakse sümboliga A'.

Topoloogilise ruumi element x on **isoleeritud punkt**, kui $\{x\}$ on lahtine, s.t punktil x leidub ümbrus, kuhu ei kuulu ühtegi temast erinevat elementi.

Topoloogilise ruumi alamhulk on **perfektne**, kui ta on kinnine ja tal ei ole ühtegi isoleeritud punkti, s.t iga tema punkt on kuhjumispunkt. Topoloogiline ruum on perfektne, kui ta on iseenda alamhulgana perfektne.

Lihtne on näha, et kompaktse topoloogilise ruumi igal lõpmatul alamhulgal leidub kuhjumispunkt. Tõepoolest, olgu A kompaktse topoloogilise ruumi X alamhulk, millel ei ole ühtegi kuhjumispunkti. Seega leidub igal punktil x lahtine ümbrus U_x, mille lõige hulgaga A on lõplik (üheelemendiline või tühi). Saame ruumi X lahtise katte $\{U_x : x \in X\}$, millel ruumi kompaktsuse tõttu leidub lõplik alamkate $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Aga sel juhul on alamhulk A lõplik, sest

$$A = A \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} = \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap U_{x_i})$$

ja viimane hulkade ühend on lõplik.

Lemma 1.6. *Lõpmatus Hausdorffi ruumis leidub lõpmatu hulk mittetühje lahtiseid alamhulki, mis on paarikaupa lõikumatud.*

Tõestus. Olgu X lõpmatu Hausdorffi ruum ja olgu Z tema isoleeritud punktide hulk. Kui Z on lõpmatu, siis sobiva hulga saab moodustada ruumi X isoleeritud punktidest moodustatud üheelemendilistest hulkadest. Kui Z on lõplik, siis vaatleme edasi ruumi X lõpmatut lahtist alamruumi $Y := X \setminus Z$, mis ei sisalda ühtegi isoleeritud punkti.

Olgu x ja y_1 alamruumi Y kaks erinevat elementi. Kuna Y on Hausdorffi ruum, leiduvad punkti x lahtine ümbrus U ja punkti y_1 lahtine ümbrus V_1 nii, et U ja V_1 ei lõiku. Kuna y_1 ei ole isoleeritud punkt, sisaldab V_1 punktist y_1 erinevat punkti y_2. Kuna Y on Hausdorffi ruum, leiduvad punkti y_1 lahtine ümbrus U_1 ja punkti y_2 lahtine ümbrus V_2 nii, et U_1 ja V_2 ei lõiku. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $U_1 \subset V_1$ ja $V_2 \subset V_1$. Jne. Üldiselt, kui mingi $k \in \mathbb{N}$ korral oleme leidnud punkti y_k ja tema lahtise ümbruse V_k, siis peab V_k sisaldama punktist y_k erinevat punkti y_{k+1}, sest y_k ei ole isoleeritud punkt. Kuna Y on Hausdorffi ruum, leiduvad punkti y_k lahtine ümbrus U_k ja punkti y_{k+1} lahtine ümbrus V_{k+1} nii, et U_k ja V_{k+1} ei lõiku. Üldisust kitsendamata võib eeldada, et $U_k \subset V_k$ ja

$V_{k+1} \subset V_k$. Nii saamegi tekitada ruumi X paarikaupa lõikumatute mittetühjade lahtiste hulkade jada $U, U_1, \dots, U_k, \dots$. $\square$

Järeldus 1.7. *Olgu Ω vähemalt kaheelemendiline perfektne kompaktne Hausdorffi ruum. Ruum Ω on mitteloenduv, mistõttu leidub sel lõpmatu hulk mittetühje lahtiseid alamhulki, mis on paarikaupa lõikumatud.*

Tõestus. Kompaktne Hausdorffi ruum on Baire'i ruum (vt nt [7, teoreem 25.3 või järeldus 25.4]), s.t kui kinniste alamhulkade ülimalt loenduva ühendi sisemus ei ole tühi, siis nende kinniste hulkade seas leidub vähemalt üks, mille sisemus ei ole tühi. Järelikult ei saa Ω olla ülimalt loenduv, sest $\Omega = \bigcup\limits_{x \in \Omega} \{x\}$ ja iga üheelemendilise Ω alamhulga sisemus on tühi. $\square$

Definitsioon 1.8. Olgu A normeeritud ruumi X alamhulk. Öeldakse, et A on **kumer**, kui iga $x, y \in A$ ja iga $\lambda \in [0, 1]$ korral $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$.

Hulga A **kumer kate** $\operatorname{conv} A$ on ruumi X vähim kumer alamhulk, mis sisaldab hulka A, s.t

$$\operatorname{conv} A = \Big\{ \sum_{n=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N},\ x_1, \dots, x_n \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1], \\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \Big\}.$$

Hulga A **kinnine kumer kate** $\overline{\operatorname{conv}} A$ on ruumi X vähim kinnine kumer alamhulk, mis sisaldab hulka A, s.t $\overline{\operatorname{conv}} A$ on hulga A kumera katte $\operatorname{conv} A$ sulund.

Olgu A ruumi X kumer alamhulk. Eeldame lisaks, et A on neelav ja tasakaalus, s.t iga $x \in X$ korral leidub $\lambda > 0$ nii, et $|\alpha| \leqslant \lambda$ korral $x \in \alpha A$ ning $|\beta| \leq 1$ korral $\beta A \subset A$. Sel juhul on hulga A **Minkowski funktsionaal** $p_A \colon X \to \mathbb{R}$,

$$p_A(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\},$$

poolnorm, kusjuures

$$A^\circ \subset \{x \in X : p_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X : p_A(x) \leqslant 1\} \subset \overline{A}, \tag{1}$$

kus A° ja $\overline{A}$ märgivad vastavalt A sisemust ja sulundit ruumi X esialgse normi suhtes.

Poolnorm p_A on (esialgse normi suhtes) pidev parajasti siis, kui $0 \in A^\circ$, kusjuures sel juhul on sisaldumistest (1) esimene ja viimane võrdused. Poolnorm p_A on norm parajasti siis, kui A ei sisalda ruumi X mittetriviaalset alamruumi.

Definitsioon 1.9. Normeeritud ruumi X **lahtine poolruum** on alamhulk kujul $\{x \in X : f(x) > c\}$ mingi $f \in X^* \setminus \{0\}$ ja $c \in \mathbb{R}$ korral. Olgu $A \subset X$. Hulga A **viil** on alamhulga A ja ruumi X lahtise poolruumi mittetühi ühisosa. Järelikult on hulga A viil mingi $f \in X^* \setminus \{0\}$ ja $c \in \mathbb{R}$ korral mittetühi hulk $\{x \in A : f(x) > c\}$.

Ruumi X **nõrk topoloogia** w on kujutuste hulga X^* poolt indutseeritud topoloogia, s.t w on vähim topoloogia, mille suhtes on iga $f \in X^*$ kui kujutus $(X, w) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$, pidev. Topoloogia w üheks eelbaasiks on parajasti kõik lahtised poolruumid, s.t hulgad kujul $\{x \in X \colon f(x) > c\}$, kus $f \in X^* \setminus \{0\}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Nõrga topoloogia suhtes lahtiseid hulki nimetatakse **nõrgalt lahtisteks alamhulkadeks**. (Iga nõrgalt lahtine hulk on lahtine. Nõrgalt lahtine tähendab nõrgas topoloogias lahtine, aga nõrk topoloogia (kõigi nõrgalt lahtiste alamhulkade kogum) koosneb teatud osast tavalises mõttes (normi topoloogias) lahtistest alamhulkadest.)

Öeldakse, et ruumi X elementide jada (x_n) **koondub nõrgalt** ruumi X elemendiks x, märgitakse $x_n \xrightarrow{w} x$, kui $x_n \to x$ topoloogilises ruumis (X, w), s.t iga $f \in X^*$ korral

$$f(x_n) \to f(x).$$

Definitsioon 1.10 (vt [1, lemmad 2.1 ja 2.2])**.** Olgu X Banachi ruum ja $x \in S_X$. Element x on **Daugaveti punkt**, kui iga B_X viilu S ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub selline $y \in S$, et $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$.

Element x on **Δ-punkt**, kui iga B_X viilu S korral, mille puhul $x \in S$, ja iga $\varepsilon > 0$ korral leidub $y \in S$ nii, et $\|x - y\| > 2 - \varepsilon$.

Ilmselt on iga Daugaveti punkt ka Δ-punkt, vastupidine üldiselt ei kehti.

1.2 Banachi ruum $c_0(\Gamma)$

Olgu Γ mingi mittetühi hulk. Banachi ruumi $\ell_\infty(\Gamma)$ elementideks on parajasti kõik tõkestatud funktsioonid $\Gamma \to \mathbb{R}$; elemendi $f \in \ell_\infty(\Gamma)$ norm on

$$\|f\| = \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}.$$

Tema kinnine alamruum $c_0(\Gamma)$ koosneb funktsioonidest f, mille puhul hulk

$$\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geqslant \varepsilon\}$$

on lõplik iga $\varepsilon > 0$ korral. Muidugi on $f \in c_0(\Gamma)$ korral

$$\|f\| = \max\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$$

ehk ülemine raja $\sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\}$ saavutatakse, sest kui $f \in c_0(\Gamma) \neq 0$, siis on hulk $\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geqslant \|f\|/2\}$ lõplik.

Märkus 1.11. Suvalise $f \in c_0(\Gamma)$ ja Γ suvalise hulga paarikaupa erinevate elementide jada (γ_n) korral $f(\gamma_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, sest iga $\varepsilon > 0$ korral on hulk $\{n \in \mathbb{N} : |f(\gamma_n)| \geqslant \varepsilon\}$ lõplik.

Banachi ruumi $c_0(\Gamma)$ alamruumi $c_{00}(\Gamma)$ kuuluvad parajasti need funktsioonid, mille puhul hulk $\{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ on lõplik. On hästi teada (vt nt [4]), et $c_{00}(\Gamma)$ on Banachi ruumis $c_0(\Gamma)$ kõikjal tihe.

Iga $\gamma \in \Gamma$ korral tähistame sümboliga e_γ ruumi $c_{00}(\Gamma)$ elementi, mis on määratud järgmiselt:

$$e_\gamma(\delta) = \begin{cases} 1, & \text{kui } \delta = \gamma, \\ 0, & \text{kui } \delta \neq \gamma. \end{cases}$$

On hästi teada ja vahetult kontrollitav, et $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ on vektorruumi $c_{00}(\Gamma)$ baas.

Banachi ruum $\ell_1(\Gamma)$ koosneb parajasti kõikidest funktsioonidest $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$, mille puhul

$$\sup\left\{\sum_{\gamma\in F} |f(\gamma)| : F \text{ on } \Gamma \text{ mittetühi lõplik alamhulk}\right\} < \infty.$$

Viimast ülemist raja märgitakse ka $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|$. Elemendi $f \in \ell_1(\Gamma)$ norm $\|f\|$ on $\sum\limits_{\gamma\in\Gamma} |f(\gamma)|$.

Märkus 1.12. Hulkadena $c_{00}(\Gamma) \subset \ell_1(\Gamma) \subset c_0(\Gamma)$, kusjuures esimene sisaldumine on ilmne ja teine kehtib, sest iga $f \in \ell_1(\Gamma)$ ja iga $\varepsilon > 0$ korral on hulk $\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geqslant \varepsilon\}$ lõplik – vastasel juhul saame viimasest hulgast valida kuitahes suure lõpliku alamhulga F ja jõuda vastuoluni tingimusega $\sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)| \leqslant \|f\|$, sest $\sum_{\gamma \in F} |f(\gamma)| \geqslant |F| \cdot \varepsilon$, kus $|F|$ on hulga F elementide arv.

On hästi teada (vt nt [4, ülesanne 2.30, lk 75], et $c_0(\Gamma)^* = \ell_1(\Gamma)$ ehk täpsemalt, Banachi ruumid $c_0(\Gamma)^*$ ja $\ell_1(\Gamma)$ on isomeetriliselt isomorfsed, kusjuures $f \in \ell_1(\Gamma)$ ja $x \in c_0(\Gamma)$ korral on

$$f(x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)x(\gamma).$$

Viimase „summa" tähendust selgitame järgnevalt. Hulk $\Gamma_f := \{\gamma \in \Gamma : f(\gamma) \neq 0\}$ on lõplik või loenduv, sest ilmselt

$$\Gamma_f = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geqslant 1/n\},$$

kusjuures iga hulk $\{\gamma \in \Gamma : |f(\gamma)| \geqslant 1/n\}$ on lõplik. Kirjutise $\sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma)x(\gamma)$ all mõistetakse järgmist arvu:

1) kui $\Gamma_f = \varnothing$, siis on see 0;

2) kui Γ_f on lõplik, aga ei ole tühihulk, siis on see lõplik summa $\sum_{\gamma \in \Gamma_f} f(\gamma)x(\gamma)$;

3) kui Γ_f ei ole lõplik, siis on Γ_f loenduv, fikseerime mingi bijektsiooni $\mathbb{N} \to \Gamma_f$, $n \mapsto \gamma_n$, ja loeme $\sum_{\gamma \in \Gamma_f} f(\gamma)x(\gamma)$ võrdseks rea summaga $\sum_{n \in \mathbb{N}} f(\gamma_n)x(\gamma_n)$, kusjuures paneme tähele, et viimane arvrida koondub absoluutselt (ehk selle rea mistahes ümberjärjestus koondub samaks summaks), mistõttu $\sum_{\gamma \in \Gamma_f} f(\gamma)x(\gamma)$ väärtus ei sõltu bijektsiooni $\mathbb{N} \to \Gamma_f$ valikust.

Sisaldumise $c_{00}(\Gamma) \subset \ell_1(\Gamma)$ põhjal on iga γ korral $e_\gamma \in \ell_1(\Gamma)$, seega iga $x \in c_0(\Gamma)$ korral $e_\gamma(x) = x(\gamma)$.

1.3 Hulk K

Olgu A kõikide naturaalarvude lõplike järjendite hulk. Seega $\alpha \in \mathrm{A}$ korral on α tühi järjend $\varnothing$ või leiduvad naturaalarvud n ja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nii, et α on n naturaalarvu järjend $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Järjendi α elementide arvu ehk pikkust märgime sümboliga $|\alpha|$, nt $|\varnothing| = 0$ ja $|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)| = n$.

Vaatleme hulgas A elementide tavalist järjestust $\preccurlyeq$, s.t $\alpha \preccurlyeq \beta$ parajasti siis, kui $\alpha = \varnothing$ või $0 < |\alpha| \leqslant |\beta|$ ja iga $i \in \{1, \ldots, |\alpha|\}$ korral on $\alpha_i = \beta_i$. Iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral on $\varnothing \preccurlyeq \alpha$, aga näiteks üheelemendilised järjendid (1) ja (2) ei ole omavahel järjestatud.

Sümboliga $\alpha \frown i$, kus $\alpha \in \mathrm{A}$ ja $i \in \mathbb{N}$, tähistame $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ korral järjendit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, i)$, ja $\alpha = \varnothing$ korral järjendit (i).

Banachi ruumis $c_0(\mathrm{A})$ tähistame $\alpha \in \mathrm{A}$ korral

$$x_\alpha := \sum_{\beta \preccurlyeq \alpha} e_\beta.$$

Viimase summa mõistmisega ei teki segadust, sest iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral on hulk $\{\beta \in \mathrm{A} : \beta \preccurlyeq \alpha\}$ mittetühi ja lõplik. Banachi ruumi $c_0(\mathrm{A})$ alamhulga $\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ kinnist kumerat katet tähistame sümboliga K, s.t

$$K = \overline{\mathrm{conv}}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Ilmselt kehtib $\mathrm{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \subset S_{c_0(A)}$, järelikult ka $K \subset S_{c_0(\mathrm{A})}$. Veel paneme tähele, et iga K element $x\colon \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ saab vaid mittenegatiivseid väärtusi. Tõepoolest, iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral on hulk $\{x \in c_0(\mathrm{A}) : e_\alpha(x)\}$ kinnine, järelikult on hulk $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} \{x \in c_0(\mathrm{A}) : e_\alpha(x)\}$ kinnine, kusjuures viimases hulgas on parajasti need $c_0(\mathrm{A})$ elemendid, mis saavad vaid mittenegatiivseid väärtusi. Kuna

$$\mathrm{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \subset \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} \{x \in c_0(\mathrm{A}) : e_\alpha(x)\},$$

siis ka

$$K \subset \bigcap_{\alpha \in \mathrm{A}} \{x \in c_0(\mathrm{A}) : e_\alpha(x)\}.$$

Märkus 1.13. 1) Suvalise $\alpha \in \mathrm{A}$ ja $f \in \ell_1(\mathrm{A}) = c_0(\mathrm{A})^*$ korral

$$f(x_\alpha) = \sum_{\gamma \in \mathrm{A}} f(\gamma) x_\alpha(\gamma) = \sum_{\gamma \in \mathrm{A}} \Big(f(\gamma) \cdot \sum_{\beta \preceq \alpha} e_\beta(\gamma) \Big) = \sum_{\beta \preceq \alpha} f(\beta).$$

2) Iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral $x_{\alpha \frown n} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_\alpha$ nõrgalt, s.t $x_{\alpha \frown n} = x_\alpha + e_{\alpha \frown n} \xrightarrow[n \to \infty]{w} x_\alpha$ ehk $e_{\alpha \frown n} \xrightarrow[n \to \infty]{w} 0$. Viimane kehtib, sest suvalise $f \in \ell_1(\mathrm{A}) = c_0(\mathrm{A})^*$ korral

saame esimese punkti põhjal

$$\begin{aligned} f(e_{\alpha\frown n}) &= f(x_{\alpha\frown n} - x_{\varnothing}) = f(x_{\alpha\frown n}) - f(x_{\varnothing}) \\ &= f(\alpha \frown n) - f(\varnothing) + f(\varnothing) = f(\alpha \frown n) \end{aligned}$$

ja märkuste 1.11 ja 1.12) põhjal $f(\alpha \frown n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Lemma 1.14 (vt [2, lemma 2.2]). *Iga $x \in K$ ja iga K viilu S korral* $\sup\limits_{y\in S}\|x-y\| = 1$.

Tõestus. Olgu $x \in K$ ja $S = \{y \in K : f(y) > c\}$ hulga K viil, kus $f \in \ell_1(\mathrm{A}) = c_0(\mathrm{A})^*$, $f \neq 0$ ja $c > 0$. Sel juhul on ilmselt $c < \sup\limits_{y\in K} f(y)$.

Ühelt poolt on selge, et kahe K elemendi vahe norm ei ole kunagi suurem kui 1, sest mistahes $y, z \in K$ ja $\alpha \in \mathrm{A}$ korral $y(\alpha), z(\alpha) \in [0, 1]$, seega $\|y - z\| = \max\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} |y(\alpha) - z(\alpha)| \leqslant 1$. Järelikult kehtib ka võrratus $\sup\limits_{y\in S}\|x - y\| \leqslant 1$.

Teistpidi võrratuse tõestuseks näitame esmalt, et S sisaldab mingi $\alpha \in \mathrm{A}$ korral elementi x_α. Selleks paneme tähele, et

$$\sup_{y\in K} f(y) = \sup_{y\in\overline{\mathrm{conv}\{x_\alpha:\alpha\in\mathrm{A}\}}} f(y) = \sup_{y\in\mathrm{conv}\{x_\alpha:\alpha\in\mathrm{A}\}} f(y) = \sup_{y\in\{x_\alpha:\alpha\in\mathrm{A}\}} f(y),$$

kus viimase võrduse põhjenduseks märgime, et ühelt poolt on

$$\mathrm{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \supset \{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$$

tõttu

$$\sup\{f(y) : y \in \mathrm{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}\} \geqslant \sup\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\},$$

ja teiselt poolt on iga $y \in \mathrm{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$ korral

$$f(y) \leqslant \sup\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Järelikult

$$\sup\Big\{f(y) : y \in \mathrm{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}\Big\} \leqslant \sup\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\},$$

sest $n \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ja $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{A}$ korral

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_{\alpha_i}) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\} = \sup\{f(x_\alpha) : \alpha \in \mathrm{A}\}.$$

Järelikult

$$\sup_{y\in K} f(y) = \sup_{y\in\{x_\alpha:\alpha\in A\}} f(y)$$

ja kuna

$$S = \{x \in K : f(x) > c\},$$

kus $c < \sup\limits_{y\in K} f(y)$, saame, et $c < \sup\limits_{y\in\{x_\alpha:\alpha\in A\}} f(y)$ ja seega mingi $\alpha \in A$ korral $f(x_\alpha) > c$ ehk $x_\alpha \in S$. Fikseerime sellise α.

Kuna $x_{\alpha\frown n} \xrightarrow[n\to\infty]{w} x_\alpha$, saame $f(x_{\alpha\frown n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_\alpha)$. Järelikult iga piisavalt suure n korral $x_{\alpha\frown n} \in S$. Lõpetuseks paneme tähele, et

$$\|x - x_{\alpha\frown n}\| \geqslant |x(\alpha\frown n) - x_{\alpha\frown n}(\alpha\frown n)| = 1 - x(\alpha\frown n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

sest märkuse 1.11 põhjal $x(\alpha\frown n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Kokkuvõttes saame $\sup\limits_{y\in S}\|x-y\| = 1$, mida oligi tarvis näidata. □

Lemma 1.15 (vt [2, lemma 2.3]). *Olgu $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in (0, 1/n)$ ja*

$$V_{n,\rho} = \bigcap_{i=1}^{n} \Big\{ z \in K : e_{(i)}(z) > \frac{1}{n} - \rho \Big\}.$$

Siis on $V_{n,\rho}$ hulga K mittetühi suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk, mille diameeter ei ole suurem kui $2/n + 2n\rho$.

Tõestus. Paneme esmalt tähele, et $V_{n,\rho}$ ei ole tühihulk; näitame, et

$$x := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} \in V_{n,\rho}.$$

Selleks fikseerime $i \in \{1, \dots, n\}$ ja näitame, et $x \in \{z \in K : e_{(i)}(z) > 1/n - \rho\}$. Ilmselt $x \in K$, sest x on elementide $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ kumer kombinatsioon,

$$x = \frac{1}{n}x_{(1)} + \dots + \frac{1}{n}x_{(n)}.$$

Teisalt saame

$$e_{(i)}(x) = x\big((i)\big) = \frac{1}{n} > \frac{1}{n} - \rho.$$

Seega, tõepoolest $x \in V_{n,\rho}$ ja hulk $V_{n,\rho}$ ei ole tühi.

Järelikult on $V_{n,\rho}$ hulga K viilude ühisosa, mistõttu suhteliselt nõrgalt lahtine alamhulk.

Piisab näidata, et iga $y \in \operatorname{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \cap V_{n,\rho}$ korral $\|x-y\| \leqslant 1/n + n\rho$. Kui viimane kehtib, siis

$$\sup_{u,v \in V_{n,\rho}} \|u-v\| \leqslant 2/n + 2n\rho,$$

sest $u, v \in V_{n,\rho}$ korral saame esmalt leida hulga $\operatorname{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \cap V_{n,\rho}$ elementide jadad (y_k) ja (z_k) nii, et $y_k \to u$ ja $z_k \to v$, ning seejärel hinnata

$$\begin{aligned}
\|u-v\| &= \|\lim_k y_k - \lim_k z_k\| = \|\lim_k (y_k - z_k)\| = \lim_k \|y_k - z_k\| \\
&\leqslant \lim_k \big(\|y_k - x\| + \|x - z_k\|\big) \leqslant \lim_k \Big(\frac{1}{n} + n\rho + \frac{1}{n} + n\rho\Big) \\
&= \frac{1}{n} + n\rho + \frac{1}{n} + n\rho = \frac{2}{n} + 2n\rho.
\end{aligned}$$

Fikseerime vabalt $y \in \operatorname{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} \cap V_{n,\rho}$. Seega $y = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l x_{\alpha_l}$, kus $L \in \mathbb{N}$, $\lambda_l > 0$, $\sum_{l=1}^{L} \lambda_l = 1$ ja $\alpha_l \in \mathrm{A}$. Iga $j \in \mathbb{N}$ korral tähistame

$$A_j := \big\{ l \in \{1, \dots, L\} : \ (j) \preccurlyeq \alpha_l \big\}.$$

Järgnevas loeme nagu tavaliselt $\sum_{l \in A_j} \lambda_l = 0$, kui $A_j = \varnothing$.

Kuna $y \in V_{n,\rho}$, saame suvalise $i \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\frac{1}{n} - \rho < e_{(i)}(y) = e_{(i)}\Big(\sum_{l=1}^{L} \lambda_l x_{\alpha_l}\Big) = \sum_{l=1}^{L} \lambda_l x_{\alpha_l}\big((i)\big) = \sum_{l \in A_i} \lambda_l. \tag{2}$$

Seega saame iga $j \in \{1, \dots, n\}$ korral

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in A_j} \lambda_l &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{l \in A_i} \lambda_l - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \sum_{l \in A_i} \lambda_l \\
&\leqslant 1 - (n-1)\Big(\frac{1}{n} - \rho\Big) = \frac{1}{n} + (n-1)\rho.
\end{aligned} \tag{3}$$

Samal viisil saame

$$\begin{aligned}\sum_{j>n}\sum_{l\in A_j}\lambda_l &\leqslant \sum_{j\in\mathbb{N}}\sum_{l\in A_j}\lambda_l - \sum_{j=1}^{n}\sum_{l\in A_j}\lambda_l \\ &\leqslant 1 - n\Big(\frac{1}{n} - \rho\Big) = n\rho.\end{aligned} \tag{4}$$

Tähistame

$$v := x - y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)} - \sum_{l=1}^{L}\lambda_l x_{\alpha_l}$$

ning fikseerime vabalt $\beta \in \mathrm{A}$. Soovime saada hinnangut $|v(\beta)| \leqslant 1/n + n\rho$. Selleks vaatleme järgnevas eraldi kolme juhtu: $\beta = \varnothing$, $|\beta| = 1$ ja $|\beta| > 1$.

1) Kuna $x(\varnothing) = 1$ ja $y(\varnothing) = 1$, saame $\beta = \varnothing$ korral $v(\beta) = 0$, mistõttu sel juhul soovitud hinnang kehtib.

2) Vaatleme juhtu, kus $|\beta| > 1$. Sel juhul $x(\beta) = 0$. Olgu $j \in \mathbb{N}$ selline, et $(j) \preccurlyeq \beta$. Edasi on kaks võimalust: $A_j = \varnothing$ või $A_j \neq \varnothing$. Esimesel juhul on $v(\beta) = 0$, sest ka $y(\beta) = 0$, järelikult sel juhul soovitud hinnang kehtib. Teisel juhul leidub $l \in \{1, \dots, L\}$ nii, et $(j) \preccurlyeq \alpha_l$, mistõttu

   $$|v(\beta)| = y(\beta) = \sum_{l=1}^{L}\lambda_l x_{\alpha_l}(\beta) \leqslant \sum_{l\in A_j}\lambda_l.$$

   Hinnangute (3) ja (4) põhjal

   $$\sum_{l\in A_j}\lambda_l \leqslant \max\Big\{\frac{1}{n} + (n-1)\rho, n\rho\Big\} \leqslant \frac{1}{n} + n\rho,$$

   järelikult kehtib soovitud hinnang $|v(\beta)| \leqslant 1/n + n\rho$.

3) Kui $\beta = (j)$ mingi $j \in \mathbb{N}$ korral, siis on meil kaks võimalust: $j > n$ või $j \in \{1, \dots, n\}$. Esimesel juhul $x(\beta) = 0$ ja hinnangu (4) põhjal saame

   $$|v(\beta)| = y(\beta) = \sum_{l=1}^{L}\lambda_l x_{\alpha_l}(\beta) \leqslant \sum_{l\in A_j}\lambda_l \leqslant n\rho < \frac{1}{n} + n\rho.$$

Teisel juhul, kui $j \in \{1, \ldots, n\}$, on $x(\beta) = 1/n$ ja seega

$$|v(\beta)| = |x(\beta) - y(\beta)| = \left|1/n - \sum_{l=1}^{L} \lambda_l x_{\alpha_l}(\beta)\right| = \left|1/n - \sum_{l\in A_j} \lambda_l\right|.$$

Hinnangute (2) ja (3) põhjal

$$\frac{1}{n} - \rho < \sum_{l\in A_j} \lambda_l \leqslant \frac{1}{n} + (n-1)\rho,$$

mistõttu $\left|1/n - \sum_{l\in A_j} \lambda_l\right| < n\rho$, järelikult $|v(\beta)| < n\rho < \dfrac{1}{n} + n\rho$.

Järelikult $\|x - y\| = \|v\| = \max\{|v(\beta)| : \beta \in \mathrm{A}\} \leqslant 1/n + n\rho$, mida oligi vaja näidata. $\square$

2 Põhitulemus

Artikli [2] põhitulemus on järgmine.

Teoreem 2.1 (vt [2, teoreem 1.3])**.** *Olgu Ω perfektne kompaktne Hausdorffi ruum. Banachi ruumil $C(\Omega)$ leidub iga $\varepsilon \in (0,1)$ korral järgmiste omadustega ekvivalentne norm $|||\cdot|||_\varepsilon$:*

(1) *iga $f \in C(\Omega)$ korral $\|f\|_\infty \leqslant |||f|||_\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon}\|f\|_\infty$;*

(2) *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ ühikkera sisaldab kuitahes väikese diameetriga mittetühja suhteliselt nõrgalt lahtist alamhulka;*

(3) *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ ühiksfääril leidub punkt, mis ei ole Δ-punkt;*

(4) *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ Daugaveti punktide hulk on nõrgalt tihe.*

Kahjuks sisaldab artiklis esitatud väite (4) tõestus viga ning tänaseni ei ole selge, kas see väide üldse kehtib. Küll suutsid artikli autorid hiljuti sarnase teoreemi tõestada Banachi ruumi $L_\infty[0,1]$ jaoks (vt [3, teoreem 1.3]). Käesolevas peatükis esitame artikli [2] eeskujul väidete (1)–(3) tõestused, kusjuures väite (3) jaoks peame piirama ε valikut tingimusega $\varepsilon < 2-\sqrt{2}$, ja selgitame, kus on artiklis väite (4) järeldamisel viga (vt lk 19, laused 2.3 ja 2.5 ja arutelu lk 24 –26).

Olgu Ω perfektne kompaktne Hausdorffi ruum. Järelduse 1.7 põhjal leiduvad Ω paarikaupa lõikumatud mittetühjad lahtised alamhulgad W_0 ja W_α, $\alpha \in A$. Fikseerime vabalt $t_0 \in W_0$ ja iga $\alpha \in A$ korral $t_\alpha \in W_\alpha$.

Kuna Ω on kompaktne Hausdorffi ruum, saame leida punkti t_0 lahtised ümbrused U_0 ja V_0 nii, et

$$\overline{U_0} \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset W_0$$

ning iga $\alpha \in A$ korral puntki t_α lahtised ümbrused U_α ja V_α nii, et

$$\overline{U_\alpha} \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset W_\alpha.$$

Urõsoni lemma (vt teoreem 1.4) kohaselt saame iga $\alpha \in A$ korral leida pidevad funktsioonid $f_\alpha \colon \Omega \to \mathbb{R}$ nii, et $f_\alpha(\Omega) \subset [0,1]$ ja

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in \overline{U_\alpha}, \\ 0, & \text{kui } t \notin V_\alpha. \end{cases}$$

Iga $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \in c_{00}(\mathrm{A})$ jaoks defineerime

$$\Phi y := \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} y_\alpha f_\alpha.$$

Kujutus $c_{00}(\mathrm{A}) \to C(\Omega)$, $y \mapsto \Phi y$, on ilmselt lineaarne. Lisaks paneme tähele, et see kujutus on ka isomeetriline. Selleks fikseerime $y = (y_\alpha) \in c_{00}$ ja $t \in \Omega$. Kui $t \in V_\alpha$ mingi $\alpha \in \mathrm{A}$ korral, siis

$$|(\Phi y)(t)| = |y_\alpha f_\alpha(t)| \leqslant |y_\alpha| \leqslant \|y\|.$$

Kui $t \notin V_\alpha$, siis iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral $|(\Phi y)(t)| = 0 \leqslant \|y\|$. Seega $\|\Phi y\| \leqslant \|y\|$. Mingi $\alpha \in \mathrm{A}$ korral on $|y_\alpha| = \|y\|$. Siis

$$|(\Phi y)(t_\alpha)| = |y_\alpha f_\alpha(t_\alpha)| = |y_\alpha| = \|y\|.$$

Järelikult $\|\Phi y\| = \|y\|$.

Kuna alamruum $c_{00}(\mathrm{A})$ on kõikjal tihe Banachi ruumis $c_0(\mathrm{A})$, leidub sel kujutusel täpselt üks pidev jätk $\Phi\colon c_0(\mathrm{A}) \to C(\Omega)$, kusjuures Φ on lineaarne ja isomeetriline.

Märkus 2.2. 1) Iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral $\Phi(e_\alpha) = f_\alpha$ ja seega $\Phi(x_\alpha) = \sum_{\beta \preceq \alpha} f_\beta$.

2) Iga $y = (y_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}} \in c_0(\mathrm{A})$ ja iga $\beta \in \mathrm{A}$ korral $(\Phi y)(t_\beta) = y_\beta$.

3) Iga $y \in K$ ja $t \in \Omega$ korral $(\Phi y)(t) \in [0, 1]$, kusjuures $(\Phi y)(t_0) = 0$. Seega $2\Phi(K) - \mathbb{1} \subset B_{C(\Omega)}$.

Olgu $\varepsilon \in (0, 1)$ ning tähistame $K_0 := \Phi(K)$ ja

$$B_\varepsilon := \overline{\operatorname{conv}} \big((2K_0 - \mathbb{1}) \cup (-2K_0 + \mathbb{1}) \cup \big((1 - \varepsilon) B_{C(\Omega)} + \varepsilon B_{\ker \delta_0} \big) \big),$$

kus $\delta_0 \in C(\Omega)^*$ on funktsionaal $f \mapsto f(t_0)$ ning seega on

$$\ker \delta_0 = \big\{ f \in C(\Omega) : f(t_0) = 0 \big\}.$$

Paneme tähele, et

$$(1 - \varepsilon) B_{C(\Omega)} \subset B_\varepsilon \subset B_{C(\Omega)}. \tag{5}$$

Esimene sisaldumine on ilmne, sest

$$(1 - \varepsilon) B_{C(\Omega)} \subset (1 - \varepsilon) B_{C(\Omega)} + \varepsilon B_{\ker \delta_0} \subset B_\varepsilon,$$

ning teise sisaldumise jaoks märgime, et

$$2K_0 - \mathbb{1} = 2\Phi(K) - \mathbb{1} \subset B_{C(\Omega)},$$

mistõttu ka

$$-2K_0 + \mathbb{1} = -(2K_0 - \mathbb{1}) \subset B_{C(\Omega)},$$

ning hulk $(1-\varepsilon)B_{C(\Omega)} + \varepsilon B_{\ker \delta_0}$ koosneb ühikkera $B_{C(\Omega)}$ elementide teatud kumeratest kombinatsioonidest kujul $(1-\varepsilon)x + \varepsilon y$, mis järelikult asuvad ühikkeras, seega

$$(1-\varepsilon)B_{C(\Omega)} + \varepsilon B_{\ker \delta_0} \subset B_{C(\Omega)}.$$

Vaatleme Banachi ruumil $C(\Omega)$ uut normi $|||\cdot|||_\varepsilon$, mille ühikkeraks on B_ε, s.t $|||\cdot|||_\varepsilon$ on hulga B_ε Minkowski funktsionaal. Sisaldumiste (5) põhjal saame

$$(1-\varepsilon)|||\cdot|||_\varepsilon \leqslant \|\cdot\|_\infty \leqslant |||\cdot|||_\varepsilon. \tag{6}$$

Tähistame $D := 2K_0 - \mathbb{1}$, $B := (1-\varepsilon)B_{C(\Omega)} + \varepsilon B_{\ker \delta_0}$ ning $D_\varepsilon := D \cup (-D) \cup B$. Siis $B_\varepsilon = \overline{\operatorname{conv}}\, D_\varepsilon$. Iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral tähistame $h_\alpha := \sum_{\beta \preceq \alpha} f_\beta$, seega $h_\alpha = \Phi(x_\alpha)$, ja $u_\alpha := 2h_\alpha - \mathbb{1}$. Paneme tähele, et $D = \overline{\operatorname{conv}}\{u_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}$, sest

$$\begin{aligned}\overline{\operatorname{conv}}\{u_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} &= \overline{\operatorname{conv}}\{2h_\alpha - \mathbb{1}\} = \overline{\operatorname{conv}\{2\Phi(x_\alpha) - \mathbb{1} : \alpha \in \mathrm{A}\}} \\ &= \overline{2\Phi \operatorname{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\} - \mathbb{1}} = 2\Phi\overline{\operatorname{conv}\{x_\alpha : \alpha \in \mathrm{A}\}} - \mathbb{1} \\ &= 2\Phi(K) - \mathbb{1} = D.\end{aligned}$$

Lause 2.3 (vt [2, lause 3.2]). *Ühikkera B_ε sisaldab kuitahes väikese diameetriga mittetühje suhteliselt nõrgalt lahtiseid alamhulki.*

Tõestus. Olgu $n \in \mathbb{N}$ ja $\rho > 0$ ning vaatleme suhteliselt nõrgalt lahtist hulka

$$\widetilde{V}_{n,\rho} := \left\{ f \in B_\varepsilon : f(t_0) < -1 + \rho,\ f(t_{(i)}) > 2\left(\frac{1}{n} - \rho\right) - 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \right\}.$$

Paneme tähele, et $f_0 := 2\Phi x - \mathbb{1} \in \widetilde{V}_{n,\rho}$, kus $x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{(i)}$ ja seega $\Phi x = f_\varnothing + \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{(i)}$. Tõepoolest,

$$f_0(t_0) = (2\Phi x - \mathbb{1})(t_0) = 2(\Phi x)(t_0) - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 < -1 + \rho$$

ning suvalise $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral

$$f_0(t_{(i)}) = (2\Phi x - \mathbb{1})(t_{(i)}) = 2 \cdot \frac{1}{n} - 1 > 2\Big(\frac{1}{n} - \rho\Big) - 1.$$

Olgu $f \in \widetilde{V}_{n,\rho} \cap \operatorname{conv} D_\varepsilon$. Seega

$$f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3,$$

kus $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $f_1 \in D$, $f_2 \in -D$ ja $f_3 \in B$. Kuna $f_1(t_0) = -1$, $f_2(t_0) = 1$ ja $|f_3(t_0)| \leqslant 1 - \varepsilon$, saame

$$\begin{aligned} -1 + \rho > f(t_0) &= \lambda_1 f_1(t_0) + \lambda_2 f_2(t_0) + \lambda_3 f_3(t_0) \\ &\geqslant -\lambda_1 + \lambda_2 - (1 - \varepsilon)\lambda_3 \\ &\geqslant -\lambda_1 - (1 - \varepsilon)\lambda_3, \end{aligned}$$

seega

$$1 - \rho < \lambda_1 + (1 - \varepsilon)\lambda_3.$$

Järelikult

$$1 - \rho < \lambda_1 + \lambda_3 = 1 - \lambda_2,$$

mistõttu, $\lambda_2 < \rho$. Veelgi enam, kuna

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 \leqslant 1 - \lambda_3,$$

saame

$$1 - \rho < 1 - \lambda_3 + (1 - \varepsilon)\lambda_3 = 1 - \varepsilon\lambda_3,$$

mistõttu $\lambda_3 < \rho/\varepsilon$. Kokkuvõttes

$$\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3 > 1 - (1 + 1/\varepsilon)\rho.$$

Sellest järeldub, et

$$\begin{aligned} \|f - f_1\|_\infty &\leqslant |||f - f_1|||_\varepsilon \\ &\leqslant (1 - \lambda_1)|||f_1|||_\varepsilon + \lambda_2|||f_2|||_\varepsilon + \lambda_3|||f_3|||_\varepsilon \\ &< (1 + 1/\varepsilon)\rho + \rho + \rho/\varepsilon = 2(1 + 1/\varepsilon)\rho. \end{aligned} \tag{7}$$

Kuna $f_1 \in D = 2\Phi(K) - \mathbb{1}$, on $f_1 = 2\Phi y - \mathbb{1}$ mingi $y \in K$ korral. Iga $i \in \{1, \ldots, n\}$ korral saame

$$\begin{aligned}
2(1/n - \rho) - 1 < f(t_{(i)}) &< f_1(t_{(i)}) + 2(1 + 1/\varepsilon)\rho \\
&= 2(\Phi y)(t_{(i)}) - 1 + 2(1 + 1/\varepsilon)\rho \\
&= 2y_{(i)} - 1 + 2(1 + 1/\varepsilon)\rho,
\end{aligned}$$

seega

$$y_{(i)} = (\Phi y)(t_{(i)}) = \frac{f_1(t_i) + 1}{2} > 1/n - (2 + 1/\varepsilon)\rho.$$

Tähistame $\widetilde{\rho} = (2 + 1/\varepsilon)\rho$. Rakendame lemmat 1.15 sama n ja $\rho := \widetilde{\rho}$ korral ning saame, et $\|x - y\| \leqslant 2/n + 2n\widetilde{\rho}$, sest $x, y \in V_{n,\widetilde{\rho}}$. Järelikult hinnangut (6) kasutades, saame

$$\begin{aligned}
|||f_0 - f_1|||_\varepsilon &= |||(2\Phi x - \mathbb{1}) - (2\Phi y - \mathbb{1})|||_\varepsilon \\
&= 2|||\Phi x - \Phi y|||_\varepsilon \\
&\leqslant \frac{2}{1 - \varepsilon}\|\Phi x - \Phi y\|_\infty \\
&= \frac{2}{1 - \varepsilon}\|x - y\| \leqslant \frac{2}{1 - \varepsilon} \cdot (2/n + 2n\widetilde{\rho}),
\end{aligned} \tag{8}$$

sest Φ on isomeetria. Kuna

$$|||f - f_0|||_\varepsilon \leqslant |||f - f_1|||_\varepsilon + |||f_1 - f_0|||_\varepsilon,$$

saame hinnangute (7) ja (8) põhjal piisavalt suure n ja piisavalt väikese ρ korral $|||f - f_0|||_\varepsilon$ saada kuitahes väikeseks. Järelikult on piisavalt suure $n \in \mathbb{N}$ ja piisavalt väikese ρ korral suhteliselt nõrgalt lahtise hulga $\widetilde{V}_{n,\rho}$ diameeter kuitahes väike. $\square$

Lemma 2.4 (vt [2, lemma 3.13]). *Olgu $f \in C(\Omega)$. Siis $f \in B$ parajasti siis, kui*

$$\max\left\{\frac{|f(t_0)|}{1 - \varepsilon}, \|f\|_\infty\right\} \leqslant 1.$$

Tõestus. Eeldame, et $f \in B$ ehk $f \in (1-\varepsilon)B_{C(\Omega)} + \varepsilon B_{\ker \delta_0}$ ehk $f = (1-\varepsilon)g + \varepsilon h$, kus $g, h \in C(\Omega)$ ja $\|g\|_\infty, \|h\|_\infty \leqslant 1$ ning $h(t_0) = 0$. Siis

$$\begin{aligned}
|f(t_0)| &= |(1 - \varepsilon)g(t_0) + \varepsilon h(t_0)| \\
&= |(1 - \varepsilon)g(t_0)| \\
&\leqslant (1 - \varepsilon)\|g\|_\infty \leqslant 1 - \varepsilon
\end{aligned}$$

ja

$$\|f\|_\infty \leqslant (1-\varepsilon)\|g\|_\infty + \varepsilon\|h\|_\infty \leqslant 1-\varepsilon+\varepsilon = 1.$$

Järelikult on

$$\max\left\{\frac{|f(t_0)|}{1-\varepsilon}, \|f\|_\infty\right\} \leqslant 1.$$

Eeldame nüüd, et

$$\max\left\{\frac{|f(t_0)|}{1-\varepsilon}, \|f\|_\infty\right\} \leqslant 1$$

ja näitame, et $f \in B$. Olgu

$$g = \frac{\Big(f \wedge \big((1-\varepsilon)\mathbb{1}\big)\Big) \vee \Big((-1+\varepsilon)\mathbb{1}\Big)}{1-\varepsilon}$$

ning

$$h = \frac{f-(1-\varepsilon)g}{\varepsilon}.$$

Ilmselt $\|g\|_\infty \leqslant 1$ ja eelduse põhjal $(1-\varepsilon)g(t_0) = f(t_0)$. Järelikult $h(t_0) = 0$. Üldisemalt, kui $t \in \Omega$ on selline, et $|f(t)| \leqslant 1-\varepsilon$, siis $(1-\varepsilon)g(t) = f(t)$, mistõttu $h(t) = 0$. Vastasel juhul, kui t on selline, et $|f(t)| > 1-\varepsilon$, siis $g(t) = \operatorname{sign}(f(t))$ ja kasutades seda, et $\|f\|_\infty \leqslant 1$, saame

$$\begin{aligned}|h(t)| &= \frac{|f(t)-(1-\varepsilon)g(t)|}{\varepsilon}\\ &= \frac{\big|f(t)-(1-\varepsilon)\operatorname{sign}(f(t))\big|}{\varepsilon}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1,\end{aligned}$$

sest $f(t) > 0$ korral $f(t) \in (1-\varepsilon, 1]$ ja $\operatorname{sign}(f(t)) = 1$, mistõttu

$$f(t)-(1-\varepsilon)\operatorname{sign}(f(t)) = f(t)-(1-\varepsilon) \in (0,\varepsilon],$$

ja $f(t) < 0$ korral $f(t) \in [-1,-1+\varepsilon)$ ja $\operatorname{sign}(f(t)) = -1$, mistõttu

$$f(t)-(1-\varepsilon)\operatorname{sign}(f(t)) = f(t)+1-\varepsilon \in [-\varepsilon, 0).$$

Järelikult on $|h(t)| \leqslant 1$ ja $h(t_0) = 0$, seega $h \in B_{\ker\delta_0}$ ning $f = (1-\varepsilon)g+\varepsilon h \in B$, mis lõpetab tõestuse. $\square$

Lause 2.5 (vt [2, lause 3.14]). *Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ ühiksfääril leidub element, mis ei ole Δ-punkt.*

Tõestus. Olgu $s \in U_0$ ja $s \neq t_0$. Selline s leidub, sest U_0 on punkti t_0 ümbrus ja t_0 ei ole isoleeritud punkt. Urõsoni lemma (vt teoreem 1.4) põhjal leidub $f \in (1-\varepsilon)B_{C(\Omega)}$ nii, et $f(t_0) = 1-\varepsilon$ ja $f(s) = -1+\varepsilon$. Näitame, et $\widetilde{f} := \dfrac{f}{|||f|||_\varepsilon}$ ei ole Δ-punkt. Selleks nõuame, et $\varepsilon < 2-\sqrt{2}$. Fikseerime vabalt ka arvu η nii, et $0 < \eta < (2-\varepsilon)^2 - 2$ ja vaatleme hulka

$$S := \{\varphi \in B_\varepsilon : \varphi(t_0) - \varphi(s) > 2 - 2\varepsilon - \eta\}.$$

Paneme tähele, et $\widetilde{f} \in S$, sest

$$\widetilde{f}(t_0) - \widetilde{f}(s) = \frac{f(t_0) - f(s)}{|||f|||_\varepsilon} \geqslant 2 - 2\varepsilon.$$

Järelikult on S ühikkera B_ε viil. Olgu $\delta_s \in C(\Omega)^*$ funktsionaal $f \mapsto f(s)$. Siis

$$|||\delta_0 - \delta_s|||_\varepsilon = \sup\{|\varphi(t_0) - \varphi(s)| : \varphi \in D_\varepsilon\} \leqslant 2 - \varepsilon,$$

sest $\varphi \in D_\varepsilon$ korral $|\varphi(t_0)| \leqslant 1-\varepsilon$.

Olgu $\varphi \in S \cap D_\varepsilon$. Siis $\varphi \in B$, sest $\varphi \notin D \cup (-D)$. Tõepoolest, kui $\varphi \in D \cup (-D)$, siis $\varphi(s) = \varphi(t_0) = -1$ või $\varphi(s) = \varphi(t_0) = 1$, aga

$$\varphi(t_0) > 1 - 2\varepsilon - \eta > -1 - \varepsilon^2 > -1$$

ja

$$\varphi(s) < -1 + 2\varepsilon + \eta \leqslant 1 - \varepsilon^2 < 1,$$

seega $S \cap D = \varnothing$ ning $S \cap (-D) = \varnothing$. Järelikult $\varphi \in S \cap B$.

Ühelt poolt saame, et

$$1 \geqslant |||f|||_\varepsilon \geqslant \frac{(\delta_0 - \delta_s)(f)}{2-\varepsilon} = \frac{f(t_0) - f(s)}{2-\varepsilon} = \frac{(1-\varepsilon) - (-1+\varepsilon)}{2-\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}.$$

Teisalt kehtib

$$\max\left\{\frac{|f(t_0) - \varphi(t_0)|}{1-\varepsilon}, \|f - \varphi\|_\infty\right\} \leqslant 2 - \varepsilon,$$

sest

$$\begin{aligned}|f(t_0)-\varphi(t_0)| = 1-\varepsilon-\varphi(t_0) < |1-\varepsilon-1+2\varepsilon+\eta| = \ &\varepsilon+\eta\\ &< 2(1-\varepsilon)+\varepsilon(1+\varepsilon) = (2-\varepsilon)(1-\varepsilon)\end{aligned}$$

ja

$$\|f-\varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \leqslant 1-\varepsilon+1 = 2-\varepsilon.$$

Lemma 2.4 abil saame, et $\dfrac{f-\varphi}{2-\varepsilon}$ kuulub hulka B, mistõttu

$$|||f-\varphi|||_\varepsilon \leqslant 2-\varepsilon.$$

Seega

$$\begin{aligned}|||\widetilde{f}-\varphi|||_\varepsilon &\leqslant |||\widetilde{f}-f|||_\varepsilon + |||f-\varphi|||_\varepsilon \leqslant \big|1-|||f|||_\varepsilon\big| + 2-\varepsilon\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}+2-\varepsilon = 2+\frac{-\varepsilon+\varepsilon^2}{2-\varepsilon} = 2-\frac{\varepsilon(1-\varepsilon)}{2-\varepsilon}.\end{aligned}$$

Järelikult $\sup\limits_{\varphi\in S\cap D_\varepsilon} |||\widetilde{f}-\varphi|||_\varepsilon < 2$. Kuna

$$\sup_{\varphi\in S}|||\widetilde{f}-\varphi|||_\varepsilon = \sup_{\varphi\in S\cap \operatorname{conv} D_\varepsilon}|||\widetilde{f}-\varphi|||_\varepsilon = \sup_{\varphi\in S\cap D_\varepsilon}|||\widetilde{f}-\varphi|||_\varepsilon < 2,$$

saame, et $\widetilde{f}$ ei ole Δ-punkt. □

Teoreemi 2.1 väide (4) järeldatakse artiklis [2] järgmisest tulemusest.

Lause 2.6 (vt [2, lause 3.5]). *Olgu E ühikkera B_ε alamhulk, mis koosneb parajasti elementidest kujul $u = \theta\lambda\psi + (1-\lambda)\phi$, kus θ, λ, ψ ja ϕ rahuldavad järgmisi tingimusi:*

(1) *$\theta \in \{-1, 1\}$ ja $\lambda \in [0, 1]$;*

(2) *$\psi = 2h - \mathbb{1}$, kus $h \in \Phi(K \cap c_{00}(A)$;*

(3) *$\phi \in B$ ja iga $\alpha \in \mathrm{A}$ korral $\phi(U_\alpha) \subset \{1\}$ või $\phi(U_\alpha) \subset \{-1\}$.*

Siis on E ühikkeras B_ε nõrgalt tihe, kusjuures iga u on Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ Daugaveti punkt.

Lause 2.6 annaks, et teatud hulga $C \subset B$ korral on hulk

$$\operatorname{conv}\Big(\big(2\Phi(K \cap c_{00}(\mathrm{A})) - \mathbb{1}\big) \cup C\Big) \cup \operatorname{conv}\Big(\big(-2\Phi(K \cap c_{00}(\mathrm{A})) + \mathbb{1}\big) \cup C\Big)$$

ühikkeras B_ε suhteliselt nõrgalt tihe Daugaveti punktide hulk. Sellest järelduks ka (vt [2, järeldus 3.6]), et iga $u \in 2K_0 - \mathbb{1}$ on Banachi ruumi $(C(\Omega), |||\cdot|||_\varepsilon)$ Daugaveti punkt.

Artiklis [2]on lause 2.6 tõestamisel oluliseks töövahendiks järgmine abitulemus.

Lemma 2.7 (vt [2, lemma 3.4]). *Olgu $\varphi \in B$, olgu $W_i, i \in I$, lõpmatu kogum paarikaupa mittelõikuvaid mittetühje lahtiseid $\Omega \setminus V_0$ alamhulki ja olgu iga $i \in I$ korral (p_i^n) ja (q_i^n) hulga W_i erinevate punktide jadad. Siis leidub B elementide jada (φ_n) nii, et $\varphi_n \to \varphi$ nõrgalt ja $\varphi_n(p_i^n) = -\varphi_n(q_i^n) = 1$ iga i ja n korral.*

Osutub, et lemma 2.7 artiklis [2] esitatud tõestuses on viga, järelikult ei ole ka lause 2.6 kehtimine kindel.

Lemma 2.7 tõestuse algne idee. Olgu $\varphi = (1-\varepsilon)f + \varepsilon g$, kus $f \in B_{C(\Omega)}$ ja $g \in B_{\ker \delta_0}$. Olgu iga $i \in I$ korral hulga W_i lahtiste alamhulkade jadad $(\widetilde{U_i^n})$, (U_i^n), $(\widetilde{V_i^n})$ ja (V_i^n) ning elementide jadad (p_i^n) ja (q_i^n) sellised, et

1) hulgad $\overline{U}_i^n$ ja $\overline{V}_i^n$, $n \in \mathbb{N}$, on paarikaupa lõikumatud;

2) $p_i^n \in \widetilde{U_i^n} \subset \overline{\widetilde{U_i^n}} \subset U_i^n \subset \overline{U_i^n} \subset W_i$;

3) $q_i^n \in \widetilde{V_i^n} \subset \overline{\widetilde{V_i^n}} \subset V_i^n \subset \overline{V_i^n} \subset W_i$.

Iga $i \in I$ ja $n \in \mathbb{N}$ korral leiame Urõsoni lemma (teoreem 1.4) põhjal pidevad funktsioonid $b_i^n : \Omega \to \mathbb{R}$ ja $c_i^n : \Omega \to \mathbb{R}$ nii, et $b_i^n(\Omega) \subset [0,1]$, $c_i^n(\Omega) \subset [0,1]$ ja

$$b_i^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in \overline{\widetilde{U_i^n}}, \\ 0, & \text{kui } t \notin U_i^n, \end{cases} \qquad \text{ja} \qquad c_i^n(t) = \begin{cases} 1, & \text{kui } t \in \overline{\widetilde{V_i^n}}, \\ 0, & \text{kui } t \notin V_i^n. \end{cases}$$

Olgu

$$f_n = f \cdot \Big(\mathbb{1} - \sum_{i \in I}(b_i^n + c_i^n)\Big) + \sum_{i \in I}(b_i^n - c_i^n)$$

ja

$$g_n = g \cdot \Big(\mathbb{1} - \sum_{i \in I}(b_i^n + c_i^n)\Big) + \sum_{i \in I}(b_i^n - c_i^n).$$

Siinkohal väidetakse artiklis [2], et funktsioonid f_n ja g_n on pidevad, kusjuures $f_n \in B_{C(\Omega)}$ ja $g_n \in B_{\ker \delta_0}$ ning $f_n \xrightarrow{w} f$ ja $g_n \xrightarrow{w} g$; seega sobiks tõestuse lõpetamiseks võtta $\varphi_n = (1-\varepsilon)f_n + \varepsilon g_n$. Kahjuks aga ei ole defineeritud kujutused f_n ja g_n üldiselt pidevad. Tõepoolest, hulgal $\{p_i^n : i \in I\}$ leidub kuhjumispunkt p. Selline p ei saa olla mitte üheski hulgas U_i^n! Siis $f_n(p) = f(p)$. Samas leidub punkti p suvalises ümbruses mingi p_i^n. Sellise p_i^n korral $f_n(p_i^n) = f(p_i^n) \cdot (1-1) + 1 = 1$. Kui $f(p) \neq 1$, siis f_n ei saa olla pidev (punktis p). $\square$

Kasutatud kirjandus

[1] T. A. Abrahamsen, R. Haller, V. Lima ja K. Pirk. „Delta- and Daugavet points in Banach spaces". *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* 63.2 (2020), lk. 475–496. ISSN: 0013-0915,1464-3839. DOI: 10.1017/s0013091519000567. URL: https://doi.org/10.1017/s0013091519000567.

[2] C. Cobollo, D. Isert, G. López-Pérez, M. Martín, Y. Perreau, A. Quero, A. Quilis, D. L. Rodríguez-Vidanes ja A. Rueda Zoca. „Banach spaces with small weakly open subsets of the unit ball and massive sets of Daugavet and Δ-points". *ArXiv e-prints*, ArXiv:2309.03610v1 (september 2023), ArXiv:2309.03610v1. DOI: 10.48550/arXiv.2309.03610. arXiv: 2309.03610v1 [math.FA].

[3] C. Cobollo, D. Isert, G. López-Pérez, M. Martín, Y. Perreau, A. Quero, A. Quilis, D. L. Rodríguez-Vidanes ja A. Rueda Zoca. „Banach spaces with small weakly open subsets of the unit ball and massive sets of Daugavet and Δ-points". *Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM* 118.3 (2024), Paper No. 96. ISSN: 1578-7303,1579-1505. DOI: 10.1007/s13398-024-01596-x. URL: https://doi.org/10.1007/s13398-024-01596-x.

[4] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos ja V. Zizler. *Banach space theory*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. The basis for linear and nonlinear analysis. Springer, New York, 2011. ISBN: 978-1-4419-7514-0. DOI: 10.1007/978-1-4419-7515-7. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-7515-7.

[5] R. E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*. Köide 183. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998. ISBN: 0-387-98431-3. DOI: 10.1007/978-1-4612-0603-3. URL: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0603-3.

[6] E. Oja ja P. Oja. *Funktsionaalanalüüs*. Tartu Ülikool, Tartu, 1991.

[7] S. Willard. *General topology*. Reprint of the 1970 original [Addison-Wesley, Reading, MA; MR0264581]. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2004. ISBN: 0-486-43479-6.

Lihtlitsents lõputöö reprodutseerimiseks ja üldsusele kättesaadavaks tegemiseks

Mina, Pirje Õunpuu,

1. annan Tartu Ülikoolile tasuta loa (lihtlitsentsi) minu loodud teose „Banachi ruumi $C(K)$ teatud ekvivalentne ümbernormeering perfektse K korral ja selle geomeetrilisest struktuurist“,
   mille juhendaja on Rainis Haller, reprodutseerimiseks eesmärgiga seda säilitada, sealhulgas lisada digitaalarhiivi DSpace kuni autoriõiguste kehtivuse lõppemiseni.

2. Annan Tartu Ülikoolile loa teha punktis 1 nimetatud teos üldsusele kättesaadavaks Tartu Ülikooli veebikeskkonna, sealhulgas digitaalarhiivi DSpace kaudu Creative Commonsi litsentsiga CC BY NC ND 4.0, mis lubab autorile viidates teost reprodutseerida, levitada ja üldsusele suunata ning keelab luua tuletatud teost ja kasutada teost ärieesmärgil, kuni autoriõiguse kehtivuse lõppemiseni

3. Olen teadlik, et punktides 1 ja 2 nimetatud õigused jäävad alles ka autorile.

4. Kinnitan, et lihtlitsentsi andmisega ei riku ma teiste isikute intellektuaal-omandi ega isikuandmete kaitse õigusaktidest tulenevaid õigusi.

Pirje Õunpuu

15.05.2024