

*N. Šanošnikov  
ja  
N. Valtsov*

**ALGEBRA**  
**ÜLESANNETE KOGU**  
**VIII-X KLASSILE**

*DK*  
*Pedagoogiline Kirjandus.*  
*Tallinn*

N. ŠAPOŠNIKOV JA N. VALTSOV

# ALGEBRA

ÜLESANNETE KOGU

KESKKOOLI VIII—X KLASSILE

Kohustuslik kontrolleksemplar

RK

„PEDAGOOGILINE KIRJANDUS“

TALLINN 1949

Eesti NSV Haridusministeeriumi poolt kinnitatud.



15014  
A-17924

ARHIIVKÕBU

## Peatükk IX.

### Juuravaldised.

#### § 1. Juurimise teoreeme. Üksliikme juurimine.

**Definitsioon.** Arvu  $a$   $n$ -endaks juureks nimetatakse nit-sugust arvu  $x$ , mille  $n$ -es aste on võrdne arvuga  $a$ .

Seda arvu  $x$  väljendatakse tähisega  $\sqrt[n]{a}$ .  
Võrduses

$$\sqrt[n]{a} = x$$

esinevat arvu  $a$  nimetatakse juuritavaks, arvu  $n$  nimetatakse juurijaks ja arvu  $x$  või temaga võrdset arvu  $\sqrt[n]{a}$  —  $n$ -endaks juureks arvust  $a$  ehk arvu  $a$  juureks juurijaga  $n$ .

Tehet arvu  $x$  leidmiseks antud  $a$  ja  $n$  järgi nimetatakse juurimiseks.

**Märkide juh.** Positiivse arvu juur juurijaga  $n$  on positiivne arv.

On olemas kaks arvu, mille paarisarvulise astendajaga aste on võrdne positiivse arvuga  $a$ , üks neist on positiivne arv  $\sqrt[2n]{a}$  ja teine selle vastandarv —  $\sqrt[2n]{a}$ ; neid kahte teineteisest erinevat arvu, kui neid koos vaadeldakse, väljendatakse ühe üleskirjutisega:  $\pm \sqrt[2n]{a}$ .

Negatiivsest arvust ei saa olla paarisarvulise juurijaga juurt, sest ühegi arvu astendamisel paarisarvuga ei ole tulemuseks negatiivne arv.

Paarituuravulise juurijaga juur negatiivsest arvust on negatiivne; seega

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a}.$$

Teoreem 1. Korrutise juur võrdub tegurite sama juurijaga juurte korrutisega. Niisiis:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

Teoreem 2. Murru juur võrdub lugeja ja nimetaja sama juurijaga juurte jagatisega.

Seega:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

Teoreem 3. Astme juurimisel juuritava astendaja jagatakse juurijaga:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

### Üksliikme juurimine.

Selleks, et leida juur üksliikmest, määratakse kõige esmalt tulemuse märk märkide juhtise järgi, siis leitakse antud juurijaga juur igast tegurist ja igast jagajast eraldi ning tulemustega sooritatakse vastavalt need tehted, mis on näidatud antud üksliikmes.

Siinjuures numbriliste kordajate juurimisel kirjutatakse välja nende kordajate juurte numbrilised väärtused, kuid

tähealiste tegurite juurimisel rakendatakse kolmandat juurimise teoreemi. Näiteks:

$$\sqrt[3]{\frac{27a^6b^3}{64c^{3n}d^{15}}} = \frac{3a^2b}{4c^nd^5}.$$

Juurija võib olla negatiivne arv.

*Negatiivse juurijaga juur võrdub murruga, mille lugejaks on arv 1 ja nimetajaks on juur antud juuritavast, kusjuures juurijaks on antud juurija vastandaru. Seega:*

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}.$$

Juurimisel negatiivse juurijaga rakendatakse ülaltoodud märkide juhust, juurimise teoreeme ja üksliikme juurimise reeglit.

Leida juured üksliikmetest:

- |                                |                                  |   |  |
|--------------------------------|----------------------------------|---|--|
| 1. $\sqrt[6]{2^{12}}$ .        | 1. $\sqrt[4]{3^8}$ .             | 2. $\sqrt[3]{-a^6}$ .                   | 2. $\sqrt{-10^{10}}$ .                 |
| 3. $\sqrt[n]{a^{3n}}$ .        | 3. $\sqrt[3n]{a^{6n+9nm}}$ .     | 4. $\sqrt[n+2]{a^{3n+6}}$ .             | 4. $\sqrt[3+n]{a^{15+5n}}$ .           |
| 5. $\sqrt[3]{8 \cdot 3^3}$ .   | 5. $\sqrt[5]{32 \cdot 10^5}$ .   | 6. $\sqrt[4]{16 \cdot 81}$ .            | 6. $\sqrt[3]{125 \cdot 1000}$ .        |
| 7. $\sqrt{\frac{a^4}{9}}$ .    | 7. $\sqrt[3]{-\frac{a^3}{64}}$ . | 8. $\sqrt[5]{-\frac{a^{10}}{b^{15}}}$ . | 8. $\sqrt[7]{\frac{a^{21}}{b^{14}}}$ . |
| 9. $\sqrt[4]{a^{16}b^8c^4}$ .  | 9. $\sqrt{2^4a^6b^{12}}$ .       |   |  |
| 10. $\sqrt[3]{-27a^{12}b^3}$ . | 10. $\sqrt[5]{-32a^5b^{10}}$ .   |   |  |
| 11. $\sqrt[3]{27}$ .           | 11. $\sqrt[5]{32}$ .             |   |  |
| 12. $\sqrt[2]{\frac{4}{9}}$ .  | 12. $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ .   | 13. $\sqrt[3]{a^{-6}}$ .                | 13. $\sqrt[3]{a^{-12}}$ .              |
| 14. $\sqrt[5]{-a^{-20}}$ .     | 14. $\sqrt[7]{-a^{-14}}$ .       |   |  |

$$15. \sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$$

$$16. \sqrt[n]{-\frac{1}{a^{5n}}}$$

$$17. \sqrt[4]{16a^{-4}b^{12}}$$

$$18. \sqrt[3]{\frac{8}{125}a^{3n}b^{-6}}$$

$$19. \sqrt{6\frac{1}{4}a^6c^{4m}}$$

$$20. \sqrt[4]{\frac{16}{81}a^{8n}b^{16}}$$

$$21. \sqrt[3]{0,027a^{6n-3}b^{18}c^{-6}}$$

$$22. \sqrt[5]{-10^{10}a^{-20n}b^{5-15m}}$$

$$23. \sqrt{\frac{4-1a^4b^{-6}}{9-1c^8d^{-2}}}$$

$$25. \sqrt[2]{\frac{a^2b^{2n-6}c^{-2m}}{4a^{-6}f^{-4n+2}}}$$

$$27. \sqrt[9]{2^{36}a^{-40}b^7\frac{(a+b)^{27}}{a^{-4}b^{-11}}}$$

$$29. \sqrt[n]{\frac{(3a^3b^{-2})^{2n}a^{-(2+n)}b^{-(n+np)}c^n}{a^{-p}}}$$

$$30. 3a^5-nb^{-4n}\sqrt[3]{\frac{27}{64}a^{-15}b^{3n}c^{6-3n}d^9}$$

$$15. \sqrt[3]{-\frac{1}{64}}$$

$$16. \sqrt[n]{-\frac{1}{a^{3n}}}$$

$$17. \sqrt[6]{64a^{-12}b^6}$$

$$18. \sqrt[4]{\frac{1}{81}a^{-8n}b^4}$$

$$19. \sqrt{1\frac{11}{25}a^4b^{10n}}$$

$$20. \sqrt[3]{\frac{125}{64}a^{6n}c^{15}}$$

$$21. \sqrt[4]{0,0625a^{4n+8}b^{24}c^{-12}}$$

$$22. \sqrt[3]{-64a^{3n-6}b^{-15n}}$$

$$24. \sqrt[3]{\frac{343a^{-15}b^{18}}{2^{-6}c^9d^{-3}}}$$

$$26. \sqrt[3]{-\frac{1000p^{12}q^{-6}r^{3n}}{27a^{-3m}b^9}}$$

$$28. 2ab^2\sqrt[3]{2a^3bc^2}\sqrt[3]{8a^3b^9c^6}$$

## § 2. Teguri juurimismärgi ette toomine ja teguri juurimismärgi alla viimine.

Kui juuritavat saab teisendada kahe teguri korrutiseks, millest üks on täisaste (s. o. aste, mille astendaja on võrdne juurijaga või on selle kordne) ja teine on mittetäisaste (s. o.

aste, mille astendaja on juurijast väiksem), siis võib esimesest tegurist leida ratsionaalse juure ja sellega korrutada juurt teisest tegurist. Niisugust teisendamist nimetatakse teguri juurimismärgi ette toomiseks.

- |  |   |                                      |                                      |
|--|---|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 31. $\sqrt{8}$ .                             | 31. $\sqrt{18}$ .                             | 32. $\sqrt{75}$ .                    | 32. $\sqrt{28}$ .                    |
| 33. $\sqrt[3]{81}$ .                         | 33. $\sqrt[3]{500}$ .                         | 34. $\sqrt[3]{-108}$ .               | 34. $\sqrt[3]{-72}$ .                |
| 35. $\sqrt[4]{48}$ .                         | 35. $\sqrt[4]{162}$ .                         | 36. $\sqrt[4]{1250}$ .               | 36. $\sqrt[4]{112}$ .                |
| 37. $\sqrt[5]{486}$ .                        | 37. $\sqrt[5]{96}$ .                          | 38. $\sqrt[5]{-224}$ .               | 38. $\sqrt[5]{-1215}$ .              |
| 39. $2\sqrt{405}$ .                          | 39. $\sqrt[3]{192}$ .                         | 40. $\frac{2}{3}\sqrt[4]{243}$ .     | 40. $\frac{5}{2}\sqrt[5]{128}$ .     |
| 41. $\sqrt[4]{a^8c^3}$ .                     | 41. $\sqrt[6]{a^{12}c^5}$ .                   | 42. $\sqrt[5]{a^{15}b^6}$ .          | 42. $\sqrt[3]{a^6b^4}$ .             |
| 43. $\sqrt[3]{x^4y^5}$ .                     | 43. $\sqrt[3]{x^{10}y^7}$ .                   | 44. $\sqrt[4]{a^5b^6}$ .             | 44. $\sqrt[4]{a^{10}b^7}$ .          |
| 45. $\sqrt{4a^4b}$ .                         | 45. $\sqrt{25a^2b}$ .                         | 46. $\sqrt[3]{64x^6y^4}$ .           | 46. $\sqrt[8]{27x^8y^3}$ .           |
| 47. $\sqrt[3]{80c^4d^2}$ .                   | 47. $2\sqrt{75c^6d^4}$ .                      | 48. $2\sqrt{\frac{a^5}{4}}$ .        | 48. $3\sqrt{\frac{a^4}{27}}$ .       |
| 49. $\sqrt[3]{\frac{a^8}{b^9}}$ .            | 49. $\sqrt[5]{\frac{a^{14}}{b^{10}}}$ .       | 50. $\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^{18}}}$ . | 50. $\sqrt[4]{\frac{a^9}{b^{16}}}$ . |
| 51. $a\sqrt{\frac{0,54z}{a^2x^2}}$ .         | 51. $c^2\sqrt{\frac{-0,54z}{a^6x^6}}$ .       |                                      |                                      |
| 52. $\sqrt[3]{\frac{-0,729m}{a^6}}$ .        | 52. $\sqrt{\frac{8,64m}{a^4}}$ .              |                                      |                                      |
| 53. $\sqrt{\frac{(a^2-2ab+b^2)y}{25}}$ .     | 53. $\sqrt{\frac{50z}{a^2+2ab+b^2}}$ .        |                                      |                                      |
| 54. $\sqrt{\frac{a}{b^2}-\frac{1}{b}}$ .     | 54. $\sqrt[3]{\frac{x^3}{a^6}-\frac{1}{a}}$ . |                                      |                                      |
| 55. $\sqrt[3]{\frac{(y^2-x^2)^4}{8(x+y)}}$ . | 55. $\sqrt[5]{\frac{(x^2-y^2)^6}{32(y-x)}}$ . |                                      |                                      |

$$56. a \sqrt[3]{\frac{b^3}{a^4} - \frac{b^5}{a^6}}.$$

$$56. \frac{3}{2a} \sqrt[3]{4a^2 - \frac{8a^2b^2}{9}}.$$

$$57. \sqrt[m]{2^{m+1}a^{5m}b^{m+n}c^{mp+1}}.$$

$$57. \sqrt[m+n]{a^{2m+n}b^{m+2n}c^{m^2-n^2}}.$$

$$58. yz^2 \sqrt[2r]{x^{4r+1}y^{6r+2}z^5}.$$

$$59. \frac{ac}{b} \sqrt[n]{3^{n+2}a^{n+5}b^{2n-1}c^{1-3n}}.$$

Kui juurimismärgi ees seisab ratsionaalne tegur, siis võib selle viia juurimismärgi alla, teda enne seda astendades arvuga, mis on juurimismärgis juurijaks; see tulemus korrutatakse siis juurimismärgi all seisva teguriga. Nii-sugust teisendamist nimetatakse teguri juurimis-märgi alla viimiseks.

$$60. 2\sqrt[3]{3}.$$

$$60. 3\sqrt[3]{2}.$$

$$61. 6\sqrt[3]{5}$$

$$61. 4\sqrt[3]{3}.$$

$$62. 3\sqrt[5]{2}.$$

$$62. 2\sqrt[5]{3}.$$

$$63. 5\sqrt[3]{3}.$$

$$63. 7\sqrt[3]{2}.$$

$$64. 2\sqrt[5]{5}.$$

$$64. 3\sqrt[4]{4}.$$

$$65. a\sqrt[5]{5}.$$

$$65. 5\sqrt[4]{a}.$$

$$66. x\sqrt[4]{2}.$$

$$66. y\sqrt[6]{5}.$$

$$67. 5\sqrt[4]{a}.$$

$$67. a\sqrt[4]{5}.$$

$$68. -m\sqrt[3]{n}.$$

$$68. -n\sqrt[5]{m^2}.$$

$$69. -n^2\sqrt[3]{a}.$$

$$69. -m\sqrt[3]{a}.$$

$$70. 3a\sqrt[3]{ax}.$$

$$70. a^3\sqrt[3]{2ab}.$$

$$71. m^2\sqrt[3]{mn}.$$

$$71. 2n\sqrt[3]{m^2n}.$$

$$72. \frac{1}{2}\sqrt[3]{a}.$$

$$72. \frac{2}{3}\sqrt[3]{a^2}.$$

$$73. \frac{x}{y}\sqrt[3]{y^2}.$$

$$73. \frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{x}{y}}.$$

$$74. -\frac{a}{b}\sqrt[3]{-\frac{b^4}{a^5}}.$$

$$74. -\frac{b}{a}\sqrt[5]{-\frac{a^2}{b^3}}.$$

$$74. -\frac{b}{a}\sqrt[5]{-\frac{a^2}{b^3}}.$$

$$74. -\frac{b}{a}\sqrt[5]{-\frac{a^2}{b^3}}.$$

$$75. m\sqrt[5]{1-\frac{1}{m^5}}.$$

$$75. \frac{1}{m}\sqrt[4]{m^5-1}.$$

$$75. \frac{1}{m}\sqrt[4]{m^5-1}.$$

$$75. \frac{1}{m}\sqrt[4]{m^5-1}.$$

$$76. (m+n)\sqrt[3]{\frac{1}{m^2-n^2}}.$$

$$76. \frac{1}{m-n}\sqrt[5]{m^2-n^2}.$$

$$76. \frac{1}{m-n}\sqrt[5]{m^2-n^2}.$$

$$76. \frac{1}{m-n}\sqrt[5]{m^2-n^2}.$$

$$77. 2ac^3\sqrt[3]{3abc^2}.$$

$$77. \frac{4a}{3b}\sqrt[5]{\frac{27b^3}{16a^4}}.$$

$$77. \frac{4a}{3b}\sqrt[5]{\frac{27b^3}{16a^4}}.$$

$$77. \frac{4a}{3b}\sqrt[5]{\frac{27b^3}{16a^4}}.$$

$$78. 3a^m b \cdot \sqrt[m]{3a^2 b}.$$

$$78. 2ab^m \cdot \sqrt[n]{3a^m b^2}.$$

$$79. 3a^2 c^3 \sqrt[4]{2a^n b^{-3}}.$$

$$79. 2a^n b^{-2} \sqrt[3]{5a^{-n} b^3}.$$

### § 3. Juure taandamine ja juurte teisendamine ühisjuurijatega juurteks.

Juure väärtus ei muutu, kui korrutame või jagame juurijat ja juuritava astendajat ühe ja sama arvuga. Sellest teoreemist järeldub:

1. Kui juurijal ja juuritava astendajal on ühine tegur, siis võib mõlemast selle ühise teguri ära jätta.

2. Kui antud juuravaldistel on erinevad juurijad, siis võib need juuravaldised teisendada võrdsete juurijatega juurteks, korrutades iga juuravaldise juurijat ja juuritava astendajat vastavalt ühe ja sama arvuga.

Korrutada juuritava astendajat mingi teguriga tähendab antud juuravaldist astendada selle teguriga.

Juuritava astendaja jagamine mingi arvuga tähendab antud juuravaldise juurimist selle arvuga.

Taandada juured:

$$80. \sqrt[9]{a^6}.$$

$$80. \sqrt[6]{a^4}.$$

$$81. \sqrt[8]{a^{10} b^{12}}.$$

$$81. \sqrt[10]{a^{15} b^{25}}.$$

$$82. \sqrt[3n]{a^{2n} b^{3n}}.$$

$$82. \sqrt[5n]{a^{10} b^{5n}}.$$

$$83. \sqrt[nm]{a^m b^{2m}}.$$

$$83. \sqrt[mn]{a^{2mn} b^{3n}}.$$

$$84. \sqrt[6]{9a^4 b^6}.$$

$$84. \sqrt[4]{4a^8 b^2}.$$

$$85. \sqrt[9]{27a^3 b^6}.$$

$$85. \sqrt[12]{64a^9 b^{3m}}.$$

$$86. \sqrt[12]{64a^4 b^{2n}}.$$

$$86. \sqrt[18]{81a^{16} b^{4n}}.$$

$$87. \sqrt[6n]{\frac{16a^{10} b^{-6}}{9c^{18}}}.$$

$$87. \sqrt[6n]{\frac{27a^{-9} b^{12}}{8c^{15}}}.$$

$$88. \sqrt[12]{\frac{1000a^{-6}}{729b^9c^{-3}}}.$$

$$89. \sqrt[4]{a^{-8}b^{10}c^{-2}}.$$

$$88. \sqrt[8]{\frac{16a^4b^{12}}{81c^{-6}}}.$$

$$89. \sqrt[6]{9a^4b^{-8}c^4}.$$

Teisendada ühisjuurijaga juurteks:

$$90. \sqrt[6]{a^5} \text{ ja } \sqrt[4]{a^3}.$$

$$91. \sqrt[3]{2a^2} \text{ ja } \sqrt[6]{ab^5}.$$

$$92. \sqrt[3]{2a^2b} \text{ ja } \sqrt[4]{3a^3b}.$$

$$93. \sqrt[12]{\frac{3a^5}{b^3}} \text{ ja } \sqrt[9]{\frac{10b^2}{a}}.$$

$$94. \sqrt[m^2]{\frac{3a^2}{bc^3}} \text{ ja } \sqrt[mn]{\frac{2ab^2}{c^3}}.$$

$$95. \sqrt[12]{a^2b^3}, \sqrt[4]{a} \text{ ja } \sqrt[8]{b^3}.$$

$$96. \sqrt[6]{a^2b}, \sqrt[15]{a^3b^4} \text{ ja } \sqrt[50]{a^{10}b^{20}}.$$

$$97. \sqrt[5]{\frac{x}{y}}, \sqrt[3]{\frac{y^3}{z^2}} \text{ ja } \sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}.$$

$$98. \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}, \sqrt[2n]{\frac{x+1}{x-1}} \text{ ja } \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

$$99. \sqrt[2n]{\frac{a+b}{x}}, \sqrt[6]{\frac{a}{x+y}} \text{ ja } \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$$

$$90. \sqrt[9]{a^4} \text{ ja } \sqrt[6]{a^5}.$$

$$91. \sqrt[3]{3a} \text{ ja } \sqrt[4]{2b^3}.$$

$$92. \sqrt[5]{3a^3b^2} \text{ ja } \sqrt[3]{2ab}.$$

$$93. \sqrt[8]{\frac{5a}{b^2}} \text{ ja } \sqrt[6]{\frac{3a^2}{b}}.$$

$$94. \sqrt[mn]{\frac{2b^3}{ac^4}} \text{ ja } \sqrt[n^2]{\frac{3a^2c}{b^2}}.$$

$$95. \sqrt[6]{ab^4}, \sqrt[9]{a^4} \text{ ja } \sqrt[12]{b^5}.$$

$$96. \sqrt[8]{a^4b^5}, \sqrt[12]{a^7b^3} \text{ ja } \sqrt[15]{a^{10}b^{25}}.$$

$$97. \sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}, \sqrt[5]{\frac{x}{y^4}} \text{ ja } \sqrt[3]{\frac{y}{z^2}}.$$

#### § 4. Juuravaldiste lihtsustamine.

Juuravaldise lihtsustamisel lihtsaimaks juuravaldiseks sooritatakse järgemööda järgmised teisendamised:

teisendatakse juuritav üksliikmeks, kui see on võimalik ja kui ta juba ei ole üksliige;

taandatakse antud juurt, kui juurijal ja kõigil astendajatel juuritavas on ühiseid tegureid;

tuuakse juurimismärgi ette see osa juuritavast, mille juurimise sooritamine on võimalik vabastatakse nimetaja juurtest.

Viimane teisendus seisab selles, et juuritava lugeja ja nimetaja korrutatakse ühe ja sama niisuguse avaldisega, et nimetajaks tuleb täisaste, seejärel leitakse juur nimetajast.

Lihtsustada järgmised juuravaldised:

$$100. \frac{3xy^2}{2} \sqrt[3]{\frac{8}{xy}}$$

$$100. \frac{2x}{3y^2} \sqrt[3]{\frac{8y^3}{x^5}}$$

$$101. a^2 \sqrt[3]{\frac{2ab^3}{3c^2d}}$$

$$102. \frac{2ab^2}{c} \sqrt[3]{\frac{5a}{16b^2c^3}}$$

$$103. \frac{1}{a} \sqrt[3]{a^8 - a^6b^2}$$

$$104. a^2 \sqrt[4]{\frac{1}{a^3} - \frac{b}{a^4}}$$

$$105. 5n^x \sqrt[3]{\frac{ab^5}{25n^{3x+1}}}$$

$$106. \frac{c^{n-m}}{a^m} \sqrt[3]{\frac{a^{m^2-n^2} \cdot b^{m+6n}}{c^{m+2n}}}$$

$$107. \frac{a+b}{a} \sqrt[3]{\frac{a^{13} - a^{12}b}{(a-b)^2}}$$

$$108. \frac{a}{c} \sqrt[3]{\frac{a^3b - 4a^2b^2 + 4ab^3}{c^2}}$$

## § 5. Sarnased juured.

Kui antud juuravaldis on teisendatud kõige lihtsamaks, siis tulemuses juurimismärgi ees seisvat ratsionaalset tegurit nimetatakse juuravaldise kordajaks.

Juuravaldisi nimetatakse sarnasteks, kui nad erinevad ainult oma kordajatelt; sarnaste juurte juurijad on võrdsed ja juuritavad on võrdsed. Et otsustada, kas antud juured on sarnased või mitte, selleks tuleb need juured lihtsustada.

Näidata, et juured on sarnased:

$$109. \sqrt{3} \text{ ja } \sqrt{12}.$$

$$110. \sqrt{63} \text{ ja } \sqrt{28}.$$

$$111. \sqrt[3]{54} \text{ ja } 2 \sqrt[3]{2}.$$

$$112. \sqrt[4]{80} \text{ ja } \sqrt[4]{405}.$$

$$113. \sqrt{18}, \sqrt{128} \text{ ja } \sqrt{32}.$$

$$114. \sqrt[3]{54}, \sqrt[3]{16} \text{ ja } \sqrt[3]{432}.$$

$$115. \sqrt{\frac{4}{3}} \text{ ja } \sqrt{12}.$$

$$116. \sqrt{\frac{2}{5}} \text{ ja } \sqrt{\frac{2}{45}}.$$

$$117. \frac{1}{4} \sqrt{0,2} \text{ ja } \frac{1}{5} \sqrt{5}.$$

$$118. \sqrt[3]{\frac{8}{3}} \text{ ja } \sqrt[3]{\frac{9}{8}}.$$

$$119. \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} \text{ ja } \sqrt{\frac{8}{9} - \frac{1}{3}}.$$

$$120. \sqrt{\frac{6}{25} - \frac{1}{4}} \text{ ja } \sqrt{\frac{1}{27} - \frac{1}{32}}.$$

$$121. \sqrt[6]{a^7 b} \text{ ja } \sqrt[6]{a^{13} b^7}.$$

$$122. \sqrt[3]{0,027xy^2} \text{ ja } \sqrt[3]{0,064\frac{x}{y}}.$$

$$123. \sqrt{a - \frac{1}{a^2}} \text{ ja } \sqrt{\frac{a^3 - 1}{a^4}}.$$

$$124. \sqrt{\frac{1}{b} - a} \text{ ja } \sqrt{\frac{bd^2 - ab^2d^2}{c^2}}.$$

$$125. \sqrt{\left(\frac{a^2 - b^2}{a + b}\right)^3}, \sqrt{\frac{(a^2 + b)^2}{a - b}} \text{ ja } \sqrt{a^3 - a^2 b}.$$

$$126. \frac{x}{y} \sqrt{x^2 y \left(\frac{x}{y} - 1\right)}, x \sqrt{\frac{z}{xz - yz}} \text{ ja } \sqrt{\frac{4x}{y^2} - \frac{4}{y}}.$$

$$127. \sqrt[3]{8a^5 - 16a^3 b^2}, ab \sqrt[3]{\frac{1}{a} - \frac{2b^2}{a^3}} \text{ ja } \sqrt[3]{\frac{2}{a^3 b} - \frac{1}{ab^3}}.$$

$$128. \frac{x^2}{y} \sqrt[n]{x^{-3(n-1)} y^{2n+1}}, \frac{1}{xy} \sqrt[n]{x^{n+3} y^{n+1}} \text{ ja } (2x - y) \sqrt[n]{x^{3-n} y}.$$

## § 6. Juurte liitmine ja lahutamine.

Antud juurte liitmiseks ja lahutamiseks ühendatakse nad nimetatud tehete märkidega. Seejärel teisendatakse juured kõige lihtsamaks, ja kui nende hulgas on sarnaseid juuri, siis need koondatakse. Koondamine seisab selles, et sarnaste juurte kordajad oma märkidega võetakse sulgudesse ja

ühine juur kirjutatakse teguriks sulgude taha. Lõpuks lihtsustatakse sulgudes olevat üldkordajat.

$$129. (5\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{3}) + (3\sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{3}).$$

$$129. (7\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{5}) - (5\sqrt[3]{4} - 4\sqrt[3]{5}).$$

$$130. (10\sqrt[4]{7} + \sqrt[5]{3}) - (5\sqrt[5]{3} + 2\sqrt[4]{7}).$$

$$130. (2\sqrt[3]{11} - 8\sqrt[5]{7}) + (7\sqrt[5]{7} - \sqrt[3]{11}).$$

$$131. (a\sqrt{b} - b\sqrt{c}) - (3a\sqrt{b} - 5b\sqrt{c}).$$

$$131. (3\sqrt[3]{a} + b\sqrt{c}) - (2\sqrt[3]{a} + 3b\sqrt{c}).$$

$$132. (a\sqrt[5]{b^4} - 2c\sqrt[4]{d}) - (-5c\sqrt[4]{d} + 3a\sqrt[5]{b^4}).$$

$$132. (2\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[3]{a^2b}) + (-\sqrt[4]{a^3}) + 5\sqrt[3]{a^2b}).$$

$$133. \sqrt{2} + 3\sqrt{32} + \frac{1}{2}\sqrt{128} - 6\sqrt{18}.$$

$$133. \sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{48} - \frac{1}{5}\sqrt{300}.$$

$$134. 20\sqrt{245} - \sqrt{5} + \sqrt{125} - 2\frac{1}{2}\sqrt{180}.$$

$$134. \sqrt{275} - 10\sqrt{11} - 2\sqrt{99} + \sqrt{396}.$$

$$135. \frac{1}{2}\sqrt[3]{5} - 2\frac{1}{4}\sqrt[3]{40} + 10\sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{320}.$$

$$135. 3\sqrt[5]{2} - \frac{1}{2}\sqrt[5]{64} + 10\sqrt[5]{486} - 6\frac{1}{2}\sqrt[5]{2}.$$

$$136. \sqrt{\frac{45}{4}} - \sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{18}} - \frac{1}{6}\sqrt{245} - \sqrt{\frac{49}{2}}.$$

$$136. 2\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{60} - \sqrt{15} + \sqrt{\frac{3}{5}} + \sqrt{\frac{4}{15}}.$$

$$137. 3\frac{1}{2}\sqrt{24} - \frac{\sqrt{54}}{4} + 2\frac{\sqrt{99}}{3} - 1\frac{1}{2}\sqrt{44} + 3\sqrt[3]{2}.$$

$$137. \sqrt[3]{54} + \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt[3]{250} - \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{9}} + \sqrt{6\frac{3}{4}}.$$

$$138. 5\sqrt[5]{8} - 8\sqrt[3]{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{4\frac{1}{2}} + 6\sqrt[3]{\frac{5}{3} - \frac{13}{9}} + \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}.$$

$$138. 3\sqrt[3]{32} + \sqrt[3]{\frac{1}{9}} - \sqrt[3]{108} - 16\sqrt[3]{\frac{1}{16}} + 4\sqrt[3]{\frac{1}{72}}.$$

$$139. \sqrt{a^3} + b\sqrt{a} - \sqrt{9a}. \quad 139. \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{\frac{a^5}{8}} - 3a\sqrt[3]{\frac{1}{a}}.$$

$$140. \sqrt[3]{27a^4} - 3\sqrt[3]{8a} + 3\sqrt[3]{125a^7}.$$

$$140. \sqrt[5]{a^5b} - \sqrt[5]{32b^6} + 3a\sqrt[5]{b}.$$

$$141. 3\sqrt[3]{125a^3b^2} + b\sqrt[3]{20a^3} - \sqrt[3]{500a^3b^2}.$$

$$141. 2\sqrt[3]{a^6b} - 3a^2\sqrt[3]{64b} + 2a^2\sqrt[3]{125b^4}.$$

$$142. \frac{1}{a^2c}\sqrt[3]{3a^8c^4d} - \frac{2}{ac^2}\sqrt[3]{12a^6c^6d} - a^4c^2\sqrt[3]{\frac{3d}{a^4c^2}}.$$

$$142. 4ac^2\sqrt[3]{a^5b^7} + b^3\sqrt[3]{a^2b^4c^6} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{8a^2b^{13}c^6}.$$

$$143. 5\sqrt[3]{x^2y^5} + 4y^2\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} + \frac{4y}{x^2}\sqrt[3]{-x^8y^2} - 6xy\sqrt[3]{\frac{y^2}{x}} - \frac{3}{2}xy^2\sqrt[3]{-\frac{8}{xy}}.$$

$$143. \sqrt[3]{xy} + 6xy\sqrt[3]{\frac{1}{x^2y^2}} - 4x^2y^2\sqrt[3]{-\frac{1}{x^5y^5}} + \frac{1}{2}y\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}} - \frac{3}{2x}\sqrt[3]{-x^4y}.$$

$$144. \sqrt{m^3 - m^2n} - \sqrt{(m+n)(m^2 - n^2)} - \sqrt{mn^2 - n^3}.$$

$$145. \sqrt{1 - \frac{x}{2}} - 3\sqrt{4 - 2x} - \sqrt{16 - 8x} + 8\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{x}{8}}.$$

$$146. (a^4 - 2b^4)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - (a^2 + b^2)\sqrt{(a+b)^3(a-b)} + \frac{b^2}{a-b}\sqrt{a^2b^4 - b^6}.$$

$$147. \frac{x}{2} \sqrt[4]{(1+2x+x^2)(x+1)(x^2-1)} - \sqrt[4]{x^5(1-x^{-1})} + \frac{1}{2} x^3 \sqrt[4]{x^{-3}-x^{-4}}.$$

$$148. \sqrt[3]{8x^9-8x^6y^3} + x \sqrt[3]{x^3y^3-x^6} + \sqrt[3]{1-x^3y^{-3}} + \frac{x^2}{y^2} \sqrt[3]{x^{-3}y^3-x^{-6}y^6}.$$

## § 7. Juurte korrutamine ja jagamine.

Ühisjuurijaga juurte korrutis võrdub juuritavate korrutise juurega, millel on sama juuriija.

Ühisjuurijaga juurte jagatis võrdub juuritavate jagatise juurega, millel on sama juuriija.

Kui antud juurte korrutises või jagatises on juurijad erinevad, siis antud juured teisendatakse ühisjuurijaga juurteks ning saadud juurtega sooritatakse siis korrutamine või jagamine ülalantud juhiste järgi.

Kui antud juurtel on kordajad, siis viimastega sooritatakse eraldi korrutamine või jagamine ja tulemus kirjutatakse kordajaks juure ette.

Sooritada osutatud tehted juurtega:

$$149. \sqrt{3} \cdot \sqrt{27}.$$

$$149. \sqrt{5} \cdot \sqrt{20}.$$

$$150. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{16}.$$

$$150. \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{18}.$$

$$151. 3 \sqrt[3]{18} \cdot \frac{5}{6} \sqrt[3]{-6}.$$

$$151. 2 \sqrt[3]{16} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[3]{-5}.$$

$$152. \frac{1}{3} \sqrt[4]{27} \cdot \frac{1}{9} \sqrt[4]{243}.$$

$$152. \frac{1}{2} \sqrt[6]{32} \cdot \frac{1}{4} \sqrt[6]{128}.$$

$$153. \sqrt[3]{-108} \cdot \sqrt[3]{50} \cdot \sqrt[3]{40}.$$

$$153. \sqrt[5]{7^8} \cdot \sqrt[5]{-112} \cdot \sqrt[5]{14}.$$

$$154. 2 \sqrt[4]{32} \cdot \sqrt[4]{216} \cdot 3 \sqrt[4]{60}.$$

$$154. \sqrt[6]{1024} \cdot 2 \sqrt[6]{6561} \cdot \sqrt[6]{1620}.$$

$$155. \left( 4 \sqrt[3]{8} + \frac{1}{12} \sqrt[3]{12} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{32} \right) \cdot 8 \sqrt[3]{32}.$$

$$155. \left( 2 \sqrt[3]{135} - 5 \sqrt[3]{5} - 10 \sqrt[3]{15} \right) \cdot \frac{1}{2} \sqrt[3]{75}.$$

$$156. \left( \sqrt[3]{9} - 7 \sqrt[3]{72} + 6 \sqrt[3]{1125} \right) \cdot 4 \sqrt[3]{\frac{1}{9}}.$$

$$156. \left( 2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 8 \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + 3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right) \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

$$157. \left( 3 \sqrt[3]{\frac{5}{6}} - 5 \sqrt[3]{30} - 2 \sqrt[3]{\frac{15}{2}} \right) \cdot 2 \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

$$157. \left( 6 \sqrt[3]{\frac{9}{4}} - 5 \sqrt[3]{36} + 9 \sqrt[3]{\frac{16}{81}} \right) \cdot \frac{4}{3} \sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

$$158. (2 \sqrt[3]{6} - 3 \sqrt[3]{5}) \cdot (\sqrt[3]{3} + 2 \sqrt[3]{2}).$$

$$158. (\sqrt[3]{9} - 2 \sqrt[3]{4}) \cdot (4 \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2}).$$

$$159. (\sqrt[3]{16} - 2 \sqrt[3]{2} + 4 \sqrt[3]{54}) \cdot \left( 5 \sqrt[3]{4} - 3 \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right).$$

$$159. \left( \frac{2}{5} \sqrt[3]{25} + \frac{1}{5} \sqrt[3]{200} - \frac{1}{2} \sqrt[3]{75} \right) \cdot (2 \sqrt[3]{5} - 5 \sqrt[3]{15}).$$

$$160. \left( 3 \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{12} - \sqrt[3]{6} \right) \cdot \left( 2 \sqrt[3]{\frac{2}{3}} - 8 \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + 3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \right).$$

$$160. \left( 5 \sqrt[3]{\frac{4}{3}} - 3 \sqrt[3]{\frac{3}{8}} + 4 \sqrt[3]{\frac{2}{9}} \right) \cdot \left( 6 \sqrt[3]{\frac{9}{4}} - \sqrt[3]{36} - \sqrt[3]{72} \right).$$

$$161. \sqrt[3]{a^3 b} \cdot \sqrt[3]{a^5 b^2}. \quad 161. \sqrt[3]{a^2 b} \cdot \sqrt[3]{ab^4}.$$

$$162. a^2 \sqrt[3]{2x} \cdot \frac{1}{a} \sqrt[3]{4x}. \quad 162. \frac{1}{a} \sqrt[4]{4x^2} \cdot a^3 \sqrt[4]{8x}.$$

$$163. 2 \sqrt[3]{25a^5} \cdot 3 \sqrt[3]{15a^4}. \quad 163. 5 \sqrt[3]{12a^2} \cdot 2 \sqrt[3]{18a^5}.$$

$$164. 3 \sqrt[3]{\frac{5a}{b^2}} \cdot 2 \sqrt[3]{\frac{4b^4}{5a^3}}. \quad 164. \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{8a}{3b^2}} \cdot \frac{3}{4} \sqrt[3]{\frac{3b^3}{2a^3}}.$$

$$165. \frac{x}{a} \sqrt[3]{\frac{a^2}{x}} \cdot \frac{1}{4} a \sqrt[3]{\frac{8a}{x^4}}. \quad 165. 5 \sqrt[3]{\frac{2a}{25x^5}} \cdot \sqrt[3]{\frac{4a^5}{5x^2}}.$$

$$166. \frac{12a^3}{5x^2} \sqrt[4]{a^7x} \cdot \frac{10x^3}{3a^2} \sqrt[4]{\frac{4}{a^3x}} \quad 166. \frac{x^2}{a^2} \sqrt[3]{\frac{3\alpha}{x^2}} \cdot \frac{1}{a^2x^5} \sqrt[3]{\frac{x^3}{a^4}}$$

$$167. \sqrt[3]{\frac{3a-2b^5}{5a^4b-2}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{6a-2}{5b^3}\right)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{-60a^5b^2}$$

$$167. \sqrt[3]{\left(\frac{2a-3b}{9a^5b-1}\right)^{-2}} \cdot \sqrt[3]{\left(-\frac{3b-4}{4a-5}\right)^{-1}} \cdot \sqrt[3]{72a^4b^6}$$

$$168. \left(\sqrt{a} + \sqrt{ab} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right) \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$168. \left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2}} - \sqrt[3]{ab^2}\right) \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$$

$$169. \left(\sqrt{a} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \cdot \left(\sqrt{ab} - \sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

$$169. \left(a + \frac{2}{a} \sqrt{ab}\right) \cdot \left(a - 2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$

$$170. \left(\sqrt[3]{a^2b} + \sqrt[3]{ab^2}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)$$

$$170. \left(\sqrt[3]{a^2b^2} - \sqrt[3]{ab}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}} - \sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}\right)$$

$$171. \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{2} \quad 171. \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$172. \sqrt[5]{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \quad 172. \sqrt[3]{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

$$173. \sqrt[6]{54} \cdot \sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{2} \quad 173. \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{\frac{3}{4}}$$

$$174. \sqrt[9]{\frac{9}{4}} \cdot \sqrt[4]{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[12]{3}$$

$$174. \sqrt[7]{12} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[14]{6} \cdot \sqrt[6]{3}$$

$$175. \left(3\sqrt[3]{10} - 2\sqrt[6]{4} + 6\sqrt[4]{25}\right) \cdot \sqrt[4]{2}$$

$$175. \left(2\sqrt[3]{6} + 3\sqrt[5]{15} - \sqrt[4]{10}\right) \cdot \sqrt[4]{12}$$

$$176. (2\sqrt[7]{10} + 3\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[4]{5}) \cdot \sqrt[4]{10}.$$

$$176. (2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[4]{2} - 4\sqrt[6]{2}) \cdot 3\sqrt[2]{2}.$$

$$177. (3\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[3]{3}) \cdot (\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{3}).$$

$$177. (5\sqrt[4]{3} - 2\sqrt[3]{2}) \cdot (\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{3}).$$

$$178. (6\sqrt[3]{2} - \sqrt[6]{32}) \cdot \left( \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[6]{\frac{1}{2}} \right).$$

$$178. (\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[4]{8}) \cdot \left( 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[4]{\frac{1}{2}} \right).$$

$$179. \sqrt[4]{a^3b} \cdot \sqrt[6]{ab^4}.$$

$$179. \sqrt[12]{a^3b^5} \cdot \sqrt[9]{ab^2}.$$

$$180. 3a^2b\sqrt[3]{3bc} \cdot 5ab\sqrt[3]{2a^2c}.$$

$$180. 8a^2b\sqrt[3]{3ac^2} \cdot 2ac^2\sqrt[4]{2b^2c}.$$

$$181. a^2\sqrt[4]{a^5b^2} \cdot b\sqrt[3]{\frac{a^5}{b}} \cdot \sqrt[4]{a^6b^7} \cdot ab\sqrt[3]{a^4b^7}.$$

$$181. a\sqrt[5]{a^4b^3} \cdot ab^2\sqrt[3]{ab^2} \cdot \sqrt[5]{ab^4} \cdot a\sqrt[3]{\frac{b^4}{a}}.$$

$$182. (\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[4]{b^2} - a\sqrt[6]{b^5}) \cdot a^2\sqrt[3]{ab}.$$

$$183. \sqrt[5]{a^2} - \sqrt[3]{a^4} + a\sqrt[3]{a^3} \cdot (-2a\sqrt[3]{a^2}).$$

$$184. (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[5]{a^4}) \cdot (\sqrt[3]{a} - \sqrt[15]{a^4}).$$

$$185. \sqrt[3]{28} : \sqrt[7]{7}.$$

$$185. \sqrt[4]{45} : \sqrt[5]{5}.$$

$$186. \frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}.$$

$$186. \frac{\sqrt[3]{256}}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$187. \sqrt[3]{\frac{12}{35}} : \sqrt[7]{\frac{7}{5}}.$$

$$187. \sqrt[3]{\frac{10}{3}} : \sqrt[7]{\frac{3}{5}}.$$

$$188. \frac{3}{2}\sqrt[3]{96} : 3\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$$

$$188. 2\sqrt[3]{\frac{4}{25}} : \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{125}}.$$

$$189. (\sqrt[3]{5\sqrt{4}} - \sqrt[3]{6\sqrt{10}} + \sqrt[3]{15\sqrt{16}}) : 3\sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

$$189. (\sqrt[3]{3\sqrt{6}} + \sqrt[3]{2\sqrt{18}} - \sqrt[3]{4\sqrt{12}}) : 2\sqrt[3]{\frac{2}{3}}.$$

$$190. \sqrt{5a} : \sqrt{a}.$$

$$190. \sqrt[3]{3a^2} : \sqrt[3]{a}.$$

$$191. \sqrt[3]{4a^8} : \sqrt[3]{2a^2}.$$

$$191. \sqrt{2a^2} : \sqrt{2a}.$$

$$192. \sqrt[4]{27a^3} : \sqrt[4]{\frac{a^2}{3}}.$$

$$192. \sqrt[4]{\frac{3a^2}{2}} : \sqrt[4]{\frac{8}{27a^3}}.$$

$$193. \sqrt[4]{\frac{8a^5}{3b}} : \sqrt[4]{\frac{6a}{b^3}}.$$

$$193. \sqrt[4]{\frac{3}{a^3}} : \sqrt[4]{\frac{4b^2}{3a^5}}.$$

$$194. (ab^2\sqrt{x} - x\sqrt{b}) : \sqrt{bx}.$$

$$194. (2ab\sqrt{x^2} - x\sqrt{b}) : \sqrt{bx}.$$

$$195. (\sqrt[4]{a^3x^3} - x\sqrt[4]{a^3} - 4a\sqrt[4]{ax^2}) : \sqrt[4]{ax^3}.$$

$$196. \left( 2\sqrt[4]{x^3y} - 3\sqrt[4]{\frac{xy^3}{2}} + \sqrt[4]{\frac{1}{x}} \right) : \frac{1}{xy}\sqrt[4]{x^3y^2}.$$

$$197. (\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}) : (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}).$$

$$198. (\sqrt[3]{a^2b} - 2\sqrt[3]{2ab^2} + b\sqrt[3]{4}) : (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2b}).$$

$$199. (\sqrt[4]{8a^3} - b\sqrt[4]{27b^2}) : (\sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{3b^2}).$$

$$200. (a^2\sqrt[4]{a} + b^2\sqrt[4]{8b}) : (\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{2b^3}).$$

$$201. (x^2\sqrt[3]{x^2} + xy\sqrt[3]{xy} + y^2\sqrt[3]{y^2}) : (x\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2y^2} + y\sqrt[3]{y}).$$

$$202. \sqrt[3]{9} : \sqrt[3]{3}.$$

$$202. \sqrt[5]{8} : \sqrt[3]{2}.$$

$$203. \sqrt[5]{\frac{4}{5}} : 2\sqrt[5]{\frac{1}{400}}.$$

$$203. \sqrt[5]{1\frac{2}{3}} : \frac{1}{3}\sqrt[6]{3\frac{3}{8}}.$$

$$204. (\sqrt[4]{6} - 2\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{6}) : \frac{1}{2}\sqrt[3]{6}.$$

$$204. (3\sqrt[3]{2} - 12\sqrt[3]{12} + 10\sqrt[3]{2}): \frac{2}{3}\sqrt[4]{2}.$$

$$205. \sqrt[3]{a}: \sqrt[3]{a^2}.$$

$$205. \sqrt[5]{a^3}: \sqrt[3]{a^2}.$$

$$206. \sqrt[3]{4a^2}: \sqrt[6]{2a^3}.$$

$$206. \sqrt[10]{2a^4}: \sqrt[5]{2a^2}.$$

$$207. \sqrt[6]{6a^5}: \sqrt[6]{27a^{-9}}.$$

$$207. \sqrt[4]{\frac{4}{a^3}}: \sqrt[12]{4a^{-8}}.$$

$$208. 10a\sqrt[3]{a}: \sqrt[3]{a^2}.$$

$$208. 3a\sqrt[3]{a}: \sqrt[5]{a^4}.$$

$$209. 6a^2\sqrt[3]{3a^{-1}b}: 2a^3\sqrt[3]{2ab^{-1}}.$$

$$209. 2a^3b\sqrt[3]{a^{-2}b^3}: 6ab^2\sqrt[3]{a^3b^{-7}}.$$

$$210. 5x^2y: \sqrt[3]{25xy^4}.$$

$$210. 2x^2y^3: \sqrt[3]{8x^3y^2}.$$

$$211. \frac{24a^5b^2}{a^2}\sqrt[5]{\frac{a^2b^7}{c^2}}: \frac{4a^2}{b}\sqrt[3]{\frac{a^4b^7}{cd^5}}.$$

$$211. \frac{2a^2b}{3}\sqrt[3]{\frac{a^3b^2}{c^4d^2}}: \frac{4ab^2}{c^2}\sqrt[5]{\frac{a^6d^2}{b^8c^4}}.$$

$$212. (a^2b + ax^2)\sqrt[3n]{\frac{x}{a^{n-1}c^3}}: ax\sqrt[2n]{\frac{x^4}{anc^2}}.$$

$$213. (x + y): \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2 - y^2}.$$

$$214. (x^2 - y^2): \frac{a}{x}\sqrt[3]{\frac{2a}{(x+y)^2}}.$$

$$215. (\sqrt[4]{8a^6b^9} - ab\sqrt[6]{8a^4b^5} + ab^2\sqrt[4]{2a^4b}): \sqrt[4]{2b}.$$

$$216. (\sqrt[5]{8x^3} - 3\sqrt[5]{3}): (\sqrt[5]{2x} - \sqrt[5]{3}).$$

$$217. (2a\sqrt[3]{ax^2} - a\sqrt[6]{ax^5} - ax): (\sqrt[3]{a^2x} - \sqrt[3]{ax}).$$

$$218. (x^2\sqrt[4]{27xy^3} + 2xy\sqrt[4]{2xy}): (\sqrt[4]{3x^3y} + 2xy).$$

## § 8. Juure astendamine ja juure juurimine.

Juure astendamisel astendatakse juuritav antud astendajaga. Juure astendamisel jääb juuriija muutuseta, kuid astendajad juuritavas korrutatakse antud astendajaga.

Kui antud juure ees on kordaja, siis see kordaja astendatakse eraldi antud astendajaga ja tulemus kirjutatakse kordajaks astendatud juure ette.

Hulkliikmeliste juuravaldiste astendamine toimub hulkliikme astendamise juhiste järgi.

$$219. (\sqrt[4]{a^3})^4. \quad 219. (\sqrt[7]{a^4})^7. \quad 220. (\sqrt[3]{a^2})^2. \quad 220. (\sqrt[4]{a^3})^3.$$

$$221. (\sqrt[4]{2x^5})^5. \quad 221. (\sqrt[3]{4x^2})^2.$$

$$222. (-a\sqrt[8]{a^2b^3})^7. \quad 222. (-a\sqrt[5]{a^3x})^4.$$

$$223. (a^2x\sqrt[3]{3a^2x})^4. \quad 223. (ax^2\sqrt[3]{2ax^2})^2.$$

$$224. \left(-2a\sqrt[6]{\frac{3}{a^4}}\right)^4. \quad 224. \left(-\frac{3}{a^2}\sqrt[6]{\frac{2}{a^2}}\right)^3.$$

$$225. (\sqrt[5]{(x-y)^2})^4. \quad 225. (\sqrt[3]{(x+y)^2})^5.$$

$$226. \left(\frac{\sqrt[4]{a^{-3}b^2}}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}. \quad 226. \left(\frac{a^5b^{-3}}{\sqrt[5]{a^{-4}b}}\right)^{-4}.$$

$$227. (a^{-1}b^2\sqrt[3]{4a^nb^2})^{-2}. \quad 227. (a^2b^{-1}\sqrt[3]{2a^{-3}b^n})^{-3}.$$

$$228. (\sqrt[n]{(x^2+y^2)^m})^{np}. \quad 228. (\sqrt[m]{(x^2+y^2)^n})^{mp}.$$

$$229. (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2. \quad 229. (\sqrt{5}+\sqrt{2})^2.$$

$$230. \left(\frac{1}{2}+2\sqrt{2}\right)^2. \quad 230. \left(2\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right)^2.$$

$$231. (\sqrt[3]{4}+\sqrt{2})^2. \quad 231. (\sqrt[6]{2}-\sqrt{3})^2.$$

$$232. (\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2})^3. \quad 232. (\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3})^3.$$

$$233. (\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{6})^2. \quad 233. (\sqrt{2}+\sqrt{5}-\sqrt{10})^2.$$

$$234. (3\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10})^2. \quad 234. (5\sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})^2.$$

$$235. (\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2.$$

$$235. (\sqrt{7 + 2\sqrt{6}} + \sqrt{7 - 2\sqrt{6}})^2.$$

$$236. (\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{11 - 6\sqrt{2}})^2.$$

$$236. (\sqrt{13 + 5\sqrt{4,2}} + \sqrt{13 - 5\sqrt{4,2}})^2.$$

$$237. (\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} - \sqrt{11 - 4\sqrt{7}})^2.$$

$$237. (\sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} - \sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}})^2.$$

$$238. \left(\frac{b}{4}\sqrt{ab} - \frac{2}{\sqrt{a}}\right)^2. \quad 238. \left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} - \frac{3}{\sqrt{ab}}\right)^2.$$

$$239. (a\sqrt{a} + a\sqrt{2a})^3. \quad 239. (a\sqrt{b} - 2a\sqrt{2b})^3.$$

Juure juurimisel korrutatakse juurijad, kuid juuritav avaldis jääb endiseks.

Kui antud juure ees on kordaja, siis enne uue juure leidmist tavaliselt viiakse see kordaja antud juure juurimis-märgi alla.

Juurida:

$$240. \sqrt[3]{\sqrt{a^2}}. \quad 240. \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}.$$

$$241. \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}}. \quad 241. \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^3}}.$$

$$242. \sqrt[3]{\sqrt{125}}. \quad 242. \sqrt[4]{\sqrt[5]{81}}.$$

$$243. \sqrt[4]{\sqrt{256a^{10}}}. \quad 243. \sqrt[9]{\sqrt[3]{512a^{18}}}.$$

$$244. \sqrt[4]{a\sqrt{a^3}}. \quad 244. \sqrt[3]{a\sqrt{a}}.$$

$$245. \sqrt[4]{a^2 \sqrt[3]{a^4}}.$$

$$245. \sqrt[6]{a^3 \sqrt[5]{a^6}}.$$

$$246. \sqrt[4]{\sqrt[10]{a^{10} b^2 c^8}}.$$

$$246. \sqrt[3]{\sqrt[10]{a^{10} b^5 c^{15}}}.$$

$$247. \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^2} \cdot \sqrt[3]{b}}.$$

$$247. \sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^2}}}.$$

$$248. \sqrt[3]{x^3 \sqrt[4]{x \sqrt{x}}}.$$

$$248. \sqrt[3]{x^2 \sqrt[3]{x \sqrt{x}}}.$$

$$249. \sqrt[3]{x \sqrt{\frac{x^2}{y}} \sqrt{\frac{y}{x}}}.$$

$$249. \sqrt[3]{\frac{x}{y} \sqrt{\frac{x}{y}} \sqrt{\frac{y^3}{x}}}.$$

$$250. \sqrt[4]{2x \sqrt[3]{2x^2 y \cdot 3y \sqrt{3xy^3}}}. \quad 251. \sqrt[4]{20736}.$$

$$252. \sqrt[10]{59049}. \quad 253. \sqrt[12]{4096}. \quad 254. \sqrt[9]{262144}.$$

### § 9. Juure kaotamine murru nimetajast.

Juure kaotamisel murru nimetajast leitakse kõige lihtsam niisugune avaldis, mille korrutamisel murru nimetajaga saame ratsionaalse (juurevaba) tulemuse; leitud avaldisega korrutatakse siis antud murru lugeja ja nimetaja. Näiteks, kui murru nimetajas esineb avaldis  $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ , siis peab murru lugejat ja nimetajat korrutama selle avaldisega ka a avaldisega, see tähendab, summat peab korrutama vastava vahega ja ümberpöördukt.

Keerulisematel juhtudel ei kaotata juurt nimetajast ühe korruga, vaid mitme võttega, korrutades murru lugejat ja nimetajat järgemööda mitme teguriga.

Kaotada juur murru nimetajast:

$$255. \frac{a}{\sqrt{a}}. \quad 255. \frac{b^2}{\sqrt{b}}. \quad 256. \frac{m}{\sqrt{m^3}}. \quad 256. \frac{n}{\sqrt{n^5}}.$$

$$\begin{array}{ll}
257. \frac{a}{\sqrt[3]{a^2}} & 257. \frac{a}{\sqrt[5]{a^2}} \\
259. \frac{4}{\sqrt{2}} & 259. \frac{15}{\sqrt{5}} \\
261. \frac{\sqrt[6]{49}}{\sqrt{21}} & 261. \frac{\sqrt[8]{36}}{\sqrt{12}} \\
\cancel{264.} \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} & 264. \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\
\cancel{265.} \frac{a}{1-\sqrt{a}} & 265. \frac{a}{\sqrt{a}+1} \\
\cancel{266.} \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} & 266. \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}} \\
267. \frac{1-a}{\sqrt{1-\sqrt{a}}} & 267. \frac{1-a}{\sqrt{1+\sqrt{a}}} \\
268. \frac{n}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}} & 268. \frac{n}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}} \\
269. \frac{12}{3+\sqrt{2}-\sqrt{3}} & 270. \frac{2+\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}-\sqrt{7}} \\
271. \frac{1+3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}} & 272. \frac{n}{\sqrt{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}} \\
273. \frac{\sqrt{a^2-b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2+b^2}} & 274. \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}} \\
275. \frac{47}{2\sqrt{3}-\sqrt[4]{3}} &
\end{array}$$

### § 10. Ruutjuur kaksliikmest $A \pm \sqrt{B}$ .

Ruutjuurt kaksliikmest  $A \pm \sqrt{B}$  saab teisendada lihtsaks, kui  $A^2 - B$  on täisruut.

Lihtsustamise valem:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Lihtsustada järgmised avaldised:

- |  |  |
|--|--|
| 276. $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .                             | 276. $\sqrt{4 - \sqrt{7}}$ .             |
| 277. $\sqrt{6 + 4\sqrt{2}}$ .                            | 277. $\sqrt{7 + 2\sqrt{10}}$ .           |
| 278. $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$ .                            | 278. $\sqrt{8 - \sqrt{15}}$ .            |
| 279. $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ .                            | 279. $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$ .           |
| 280. $\sqrt{4\sqrt{2} + 2\sqrt{6}}$ .                    | 280. $\sqrt{5\sqrt{5} - 2\sqrt{30}}$ .   |
| 281. $\sqrt{4\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}$ .                   | 281. $\sqrt{3\sqrt{7} + 2\sqrt{14}}$ .   |
| 282. $\sqrt{\sqrt{14} + 6\sqrt{5}}$ .                    | 282. $\sqrt{\sqrt{124} - 32\sqrt{15}}$ . |
| 283. $\sqrt{17 + 6\sqrt{4 - \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}$ .    |  |
| 284. $\sqrt{(a + b) - 2\sqrt{ab}}$ .                     | 285. $\sqrt{2a^2 + 2\sqrt{a^4 - b^2}}$ . |
| 286. $\sqrt{\frac{19}{20} + \sqrt{\frac{3}{5}}}$ .       | 287. $\sqrt{0,38 + 3\sqrt{0,0091}}$ .    |
| 288. $\sqrt{3a + 2a\sqrt{2}} + \sqrt{3a - 2a\sqrt{2}}$ . |  |

§ 11. Ülesandeid kõikidele tehetele juuravaldistega.

- |  |  |
|--|--|
| 289. $\frac{3}{5 - \sqrt{5}} - \frac{1}{3 + \sqrt{5}}$ .   | 289. $\frac{1}{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{3 - \sqrt{5}}$ .                       |
| 290. $\frac{5}{4 - \sqrt{11}} - \frac{4}{\sqrt{11} - \sqrt{7}} - \frac{2}{3 + \sqrt{7}}$ .           |  |
| 290. $\frac{9}{5 - \sqrt{7}} + \frac{22}{7 + \sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7} + \sqrt{5}}$ .            |  |
| 291. $\frac{1}{7 + 4\sqrt{3}} + \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}}$ .   | 291. $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{5} + 1} + \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$ . |
| 292. $\frac{\sqrt{12}}{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{3})}$ .                                       | 292. $\frac{1}{2 + \sqrt{3}} + 2 + \sqrt{3}$ .                                 |
| 293. $\frac{3 - \sqrt{5}}{(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2} + \frac{3 + \sqrt{5}}{(\sqrt{3} - \sqrt{5})^2}$ . | 293. $\frac{4}{3\sqrt{5} - 5} - \frac{3}{\sqrt{5}}$ .                          |
| 294. $\frac{1}{5 + \sqrt{5}} + \frac{1}{7 - \sqrt{29}}$ .  | 294. $\frac{7}{4 - \sqrt{7}} - \frac{16}{7 + \sqrt{13}}$ .                     |

$$295. \frac{5}{4 - \sqrt{11}} + \frac{1}{3 + \sqrt{7}} - \frac{6}{\sqrt{7} - 2} - \frac{1}{2}(\sqrt{7} - 5).$$

$$295. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}.$$

$$296. \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} + \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

$$297. \frac{14}{\sqrt{\frac{2}{3}x - 4}} - \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}x - 9}}.$$

$$298. a\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} - b\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} - \frac{2b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

$$299. \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1\right).$$

$$300. \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - x^2}}{a + \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

$$301. \frac{17}{2}\sqrt{4\sqrt{63}} - 10\sqrt{3\sqrt{7}} - 3\sqrt{6\sqrt{28}}.$$

$$302. x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} - 2\sqrt{x^3\sqrt{x^3}} + 3\sqrt{x^{-5}\sqrt{x^5}} - 4x^2\sqrt{x\sqrt{\frac{1}{x}}}.$$

$$303. \frac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4}}{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}} + \frac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}}{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4}}.$$

$$304. \left[\frac{a}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{x}} : \left(\sqrt{\frac{a^2}{x}} \cdot a^{-1}\sqrt{x}\right)^6\right] \cdot \sqrt{\frac{1}{4}a^2\sqrt{\frac{a}{x}}}.$$

$$305. \left(1 + \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right) : \left(1 - \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\right).$$

$$306. 5a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}} - 2\sqrt{a^3\sqrt{a^3}} + 3\sqrt{a^{-5}\sqrt{a^5}} - 4a^2\sqrt{a\sqrt{\frac{1}{a}}}.$$

$$307. \left(-4a \sqrt[3]{a^{-2} \sqrt{ax}}\right)^3 + \left(-10a \sqrt{x} \sqrt[4]{\frac{1}{ax}}\right)^2 - 5 \left[\left(\sqrt[3]{a \sqrt{\frac{a}{x}}}\right)^3\right]^2.$$

$$308. \sqrt[3]{\frac{1}{4} a^2 \sqrt{\frac{a}{x}}} \cdot \left[\frac{a}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{a}{2\sqrt{x}} : \left(\sqrt{\frac{a^2}{x}} \cdot a^{-1} \sqrt{x}\right)^6\right].$$

$$309. \left[\sqrt[3]{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right]^{-1} : \sqrt[3]{\frac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^2}}}.$$

$$310. \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \sqrt{1-x}\right) : (\sqrt{1-x^2} + 1).$$

$$311. \left(\frac{ax+n^2}{\sqrt{a^2nx-an^3}} - \sqrt{\frac{n}{x}} \cdot \frac{2nx}{\sqrt{ax-n^2} \cdot \sqrt{ax}}\right) : \sqrt[4]{\frac{x}{an^2} - a^{-2}}.$$

$$312. \sqrt{\frac{a}{b} \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right)} + 2\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b} \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{c}\right)} - 2\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

$$313. \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

Leida avaldiste numbrilised väärtused:

$$314. \frac{1+x}{1+\sqrt{1+x}} + \frac{1-x}{1-\sqrt{1-x}}, \text{ kui } x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$315. \frac{x+1}{x+\sqrt{x^2+x}} + \frac{x-1}{x-\sqrt{x^2-x}}, \text{ kui } x = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

$$316. \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}}, \text{ kui } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right).$$

$$317. \frac{1-ax}{1+ax} \sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}, \text{ kui } x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2a}{b} - 1}.$$

§ 12. Murdarvuliste astendajatega astmed ja murdarvuliste juurijatega juured.

Antud arvu murdarvulise astendajaga aste tähendab juurt, mille juurijaks on murdarvulise astendaja nimetaja ja juuritavaks on antud arvu aste, mille astendajaks on murru lugeja.

Niisiis:

$$a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3};$$

üldiselt:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Murdarvulise juurijaga juur tähendab astet, mille astendajaks on juurija pöördarv.

Seega:

$$\sqrt{\frac{3}{2}a} = a^{\frac{2}{3}};$$

üldiselt:

$$\sqrt[\frac{m}{n}]{a} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Tehted murdarvuliste astendajatega astmete ja murdarvuliste juurijatega juurte puhul toimuvad samade juhiste järgi nagu tehted astmetega, mille astendajad on täisarvud, ja nagu tehted juurtega, mille juurijad on täisarvud.

Avaldada juuravaldised murdarvuliste astendajatega astmetena:

$$318. \sqrt[3]{a^2}. \quad 318. \sqrt[5]{a^3}. \quad 319. \sqrt[4]{a^{-3}}. \quad 319. \sqrt[3]{a^{-2}}.$$

$$320. \sqrt[5]{a^{-3}b^4}. \quad 320. \sqrt[4]{a^3b^{-2}}. \quad 321. \sqrt[{-2}]{a^{-3}}. \quad 321. \sqrt[{-3]}{a^{-5}}.$$

$$322. \sqrt{a^2 + b^2}. \quad 322. \sqrt[3]{a^3 - b^3}.$$

$$323. \sqrt[3]{\frac{a^3 - b^3}{a - 1} b^2}.$$

$$324. \sqrt[m]{x^{n+1}}.$$

$$326. \sqrt[m]{\frac{x^2}{y^n}}.$$

$$328. \sqrt[3]{a \sqrt[5]{b}}.$$

$$329. \sqrt[2]{a^2 + x^2 - 2ax}.$$

$$323. \sqrt[2]{\frac{a^2 b - 2}{a^2 - b^2}}.$$

$$325. \sqrt[m p + m q]{a^{p+q}}.$$

$$327. \sqrt[p r]{\frac{2}{a^{p n}}}.$$

$$328. \sqrt[n]{x^2 \sqrt{y}}.$$

$$329. \sqrt[n]{a^2 + 2ab + b^2}.$$

Asendada murdarvuliste astendajatega astmed juuraval-  
distega:

$$330. a^{\frac{5}{6}}.$$

$$330. a^{\frac{2}{3}}.$$

$$331. a^{-\frac{3}{4}}.$$

$$331. a^{-\frac{3}{7}}.$$

$$332. (a + b)^{\frac{2}{3}}.$$

$$332. (a - b)^{\frac{5}{3}}.$$

$$333. 3a^{-\frac{1}{2}} (a - b)^{\frac{3}{8}}.$$

$$333. 4a^{-\frac{2}{3}} (a + b)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$334. (4a)^{-\frac{1}{4}}.$$

$$334. a^{\frac{k-1}{k}}.$$

$$335. (a + b)^{0,25}. \quad 335. (a - x)^{-1,5}. \quad 336. m^{-\frac{1}{2}x}. \quad 336. \left(\frac{1}{x}\right)^{-0,3n}.$$

$$337. x^{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}n}.$$

$$337. x^{p - \frac{p^2}{p-n}}.$$

$$338. e^{-\frac{1}{x}}.$$

$$338. e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

$$339. n^{2,5}.$$

$$339. \frac{1}{(a - b)^{-0,6}}.$$

Arvutada:

$$340. 4^{\frac{1}{2}}.$$

$$340. 27^{\frac{1}{3}}.$$

$$341. 81^{\frac{3}{4}}.$$

$$341. 16^{\frac{5}{4}}.$$

$$342. 16^{-\frac{5}{4}}.$$

$$342. 32^{-\frac{4}{5}}.$$

$$343. (-8)^{\frac{2}{3}}.$$

$$343. (-27)^{\frac{4}{3}}.$$

$$344. \left(\frac{25}{36}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$344. \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

$$345. \left(-3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}. \quad 345. \left(-1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

$$346. (0,64)^{0,5}. \quad 346. (0,027)^{\frac{2}{3}}. \quad 347. 81^{-0,75}. \quad 347. 1024^{-0,6}.$$

$$348. 8^{\frac{2}{3}} - 16^{\frac{1}{4}} + 9^{\frac{1}{2}}. \quad 348. 25^{\frac{1}{2}} - 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}}.$$

$$349. 16^{0,5} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}. \quad 349. 9^{-0,5} - 8^{-1\frac{1}{3}} + (0,25)^{-\frac{3}{2}}.$$

Teostada näidatud tehted:

$$350. a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}}. \quad 350. a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}}.$$

$$351. a^{\frac{7}{12}} b^{\frac{5}{6}} : a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}}. \quad 351. a^{\frac{11}{15}} b^{\frac{2}{3}} : a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{5}{6}}.$$

$$352. \left(a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right). \quad 352. \left(a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}\right) : \left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right).$$

$$353. \left(a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(a^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{2}}\right).$$

$$354. \left(a^{\frac{3n}{2}} + b^{-\frac{3n}{2}}\right) : \left(a^{\frac{n}{2}} + b^{-\frac{n}{2}}\right).$$

$$355. \left(a^{\frac{4}{3}} + 4a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} + 16b^{\frac{4}{3}}\right) : \left(a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + 4b^{\frac{2}{3}}\right).$$

$$356. \left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} - c^{\frac{1}{2}} + 2b^{\frac{1}{4}} c^{\frac{1}{4}}\right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}} - c^{\frac{1}{4}}\right).$$

$$357. \left(a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{1}{6}} b^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{3}{2}}\right)^2. \quad 357. \left(a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{5}{4}}\right)^2.$$

$$358. \left(a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{4}}\right)^3. \quad 358. \left(a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} - 3a^{\frac{3}{4}} b^{\frac{2}{3}}\right)^3.$$

$$359. \left[\left(a^{-\frac{3}{2}} b\right) \cdot (ab^{-2})^{-\frac{1}{2}} \cdot (a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3.$$

$$359. \left[\left(a^{\frac{2}{3}} b^{-1}\right)^2 \cdot (a^2 b^{-1})^{\frac{1}{2}} \cdot \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{3}{2}}\right]^2.$$

$$360. \frac{a-b}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}}}{a-b}. \quad 361. \sqrt{a^{\frac{3}{2}} b^{-2} - 6a^{\frac{3}{4}} b^{-\frac{1}{3}} + 9b^{\frac{4}{3}}}.$$

$$362. \sqrt[0,4]{\frac{a^{-2}b^3 \sqrt{2a^6 b^{-3}}}{(\sqrt{a^{-5}b^3})^{15}}}. \quad 363. \sqrt[\frac{2}{3}]{a^{\frac{4}{3}} + a - 2a^{\frac{7}{6}}}.$$

$$364. \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) : \left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a \sqrt[3]{b}}{b \sqrt[3]{a^3}}} + \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\sqrt[3]{a}}{a \sqrt[3]{b^3}}}\right).$$

### § 13. Kompleksarvud.

Ruutjuuri negatiivsetest (ratsionaalsetest või irratsionaalsetest) arvudest nimetatakse *imaginaararvudeks*. Need on uut liiki arvud.

Erinevalt imaginaararvudest nimetatakse kõiki ratsionaalseid ja irratsionaalseid arve *reaalarvudeks*.

Kõige lihtsam imaginaararv on  $\sqrt{-1}$ . Teda tähistatakse tähega *i*, nii et

$$\sqrt{-1} = i.$$

Selle kokkuleppe põhjal

$$i^2 = -1.$$

Kui arvu *i* astendada järjestikuste astendajatega, siis saame:

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = -i;$$

$$i^4 = +1.$$

Edasisel astendaja suurendamisel need neli tulemust korduvad perioodiliselt. Seepärast võrdub arvu *i* mistahes positiivse täisarvulise astendajaga aste niisuguse astmega,

mille astendajaks on jääk, mis tekib antud astendaja jagamisel arvuga 4.

Nii

$$i^{26} = i^2 = -1;$$

$$i^{35} = i^3 = -i.$$

Iga imaginaararvu  $\sqrt{-a}$  saab väljendada reaalarvu ja arvu  $i$  korrutisena:

$$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}.$$

Niisugust imaginaararvu avaldist nimetatakse normaalkujuks. Tehete sooritamiseks teisendatakse imaginaararvud normaalkujulisteks.

Avaldist  $a+bi$ , kus  $a$  ja  $b$  on reaalarvud, nimetatakse kompleksarvuks. Ta väljendab reaalarvu, kui  $b=0$ . Kompleksarvused  $a+bi$  ja  $a-bi$  nimetatakse teineteise kaaskompleksarvudeks. Avaldist  $\sqrt{a^2+b^2}$ , mis kompleksarvudega arutamise teoorias sagedasti esineb, nimetatakse kompleksarvu  $a+bi$  mooduliks ehk absoluutvärtuseks ja teda tähistatakse tähega  $M$ .

Kompleksarvudega arutamisel nende imaginaarosa teisendatakse algul normaalkujuliseks.

Kahe kompleksarvu summa (või vahe) on kompleksarv, mille reaalosa saadakse antud kompleksarvude reaalosade liitmise (või lahutamise) teel ja imaginaarosa kordaja saadakse antud liidetavate imaginaarosade kordajate liitmise (või lahutamise) teel.

Niisiis:

$$(a+bi) \pm (a_1+b_1i) = (a \pm a_1) + (b \pm b_1)i.$$

Kompleksarvude korrutamise juhise saame, teostades korrutamist üldjuhiste järgi, siinjuures silmas pidades, et  $i^2 = -1$ .

Seega:

$$(a + bi)(a_1 + b_1i) = aa_1 + a_1bi + ab_1i - bb_1 = \\ = (aa_1 - bb_1) + (a_1b + ab_1)i.$$

Kompleksarvuga jagamise sooritamisel korrutatakse jagatav ja jagaja antud kompleksarvulise jagaja kaaskompleksarvuga, mille tõttu uueks jagajaks saame reaalarvu, — nimelt antud jagaja mooduli ruudu.

Sel viisil saame:

$$(a + bi) : (a_1 + b_1i) = \frac{(a + bi)(a_1 - b_1i)}{a_1^2 + b_1^2} = \\ = \frac{aa_1 + bb_1}{M_1^2} + \frac{a_1b - ab_1}{M_1^2} i.$$

Kompleksarvu ruutu ja kuupi tõstmisel rakendatakse valemeid, mis kehtivad reaalarvudega arvutamisel. Nende valemite rakendamisel on kasulik imaginaarvu  $i$  astmed esmalt täielikult üles kirjutada ja pärast seda asendada nad lihtsamate avaldistega.

Sel viisil saame:

$$(a + bi)^3 = a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 = \\ = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i.$$

Ruutjuure leidmine kompleksarvust toimub alltoodud valemite järgi:

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{M+a}{2}} + \sqrt{\frac{M-a}{2}} i \right), \text{ kui } b > 0;$$

$$\sqrt{a + bi} = \pm \left( \sqrt{\frac{M+a}{2}} - \sqrt{\frac{M-a}{2}} i \right), \text{ kui } b < 0;$$

siin  $M$  tähendab kompleksarvu moodulit.

Arvutada:

365. $(\sqrt{-1})^6$ .	366. $(\sqrt{-1})^{21}$ .	367. $(\sqrt{-1})^7$ .
368. $(\sqrt{-1})^{56}$ .	369. $i^{40}$ .	370. $i^{37}$ .
371. $i^{18}$ .	372. $i^{4n+2}$ .	373. $i^{4n+3}$ .
374. $i^{8n+5}$ .	375. $i^{4n-1}$ .	

Lihtsustada imaginaaravaldised:

375.  $\sqrt{-4}$ .                      376.  $\sqrt{-81}$ .                      377.  $\sqrt{-a^2}$ .  
 378.  $\sqrt{-b}$ .                      379.  $\sqrt{-\frac{9}{4}}$ .                      380.  $\sqrt{-\frac{a^4}{b^8}}$ .  
 381.  $\sqrt{-a}$ .                      382.  $\sqrt{-9x}$ .                      383.  $\sqrt{-a^2 - b^2}$ .  
 383.  $\sqrt{-(a-b)^2}$ .                      384.  $\sqrt{-x^2 - y^2 + 2xy}$ .

Teostada näidatud tehted:

385.  $\sqrt{-25} + \sqrt{-49} - \sqrt{-64} + \sqrt{-1}$ .  
 385.  $\sqrt{-144} - \sqrt{-81} - \sqrt{-1} + \sqrt{-9}$ .  
 386.  $3\sqrt{-4} + 5\sqrt{-27} - 3\sqrt{-16} - 5\sqrt{-3}$ .  
 386.  $10\sqrt{-25} - 5\sqrt{-8} + \sqrt{-49} - 2\sqrt{-2}$ .  
 387.  $3 + 2i + (4 - 3i) - [(8 - 5i) - (5 + 13i)]$ .  
 388.  $a + bi - (2a - 3bi) + [(a - 4bi) + (5a - 2bi)]$ .  
 389.  $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-9}$ .                      389.  $\sqrt{-8} \cdot \sqrt{-2}$ .  
 390.  $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}$ .                      390.  $\sqrt{-m} \cdot \sqrt{-n}$ .  
 391.  $i\sqrt{-x^2}$ .                      391.  $-i\sqrt{-y^2}$ .  
 392.  $\sqrt{a-b} \cdot \sqrt{b-a}$ .                      393.  $(2 - 5i)(8 - 3i)$ .  
 394.  $(5 + 2\sqrt{-7}) \cdot (6 - 5\sqrt{-7})$ .  
 395.  $(\sqrt{a} - \sqrt{-b}) \cdot (\sqrt{a} + 3\sqrt{-b})$ .  
 396.  $(3\sqrt{-5} - 2\sqrt{-7}) \cdot (2\sqrt{-7} + 3\sqrt{-5})$ .  
 397.  $a : \sqrt{-a}$ .                      397.  $ai : \sqrt{-a}$ .                      398.  $\sqrt{-ax} : \sqrt{-x}$ .  
 399.  $\frac{a^2 + b^2}{a - bi}$ .                      399.  $\frac{a^2 + b^2}{a + bi}$ .                      400.  $\frac{x - y}{x + yi}$ .                      400.  $\frac{x - y}{x - yi}$ .  
 401.  $\frac{4}{1 + \sqrt{-3}}$ .                      402.  $\frac{3 - 5i\sqrt{8}}{3 + 5i\sqrt{8}}$ .  
 403.  $\frac{36 - \sqrt{-2}}{2 + 3i\sqrt{2}}$ .                      403.  $\frac{5 - 29i\sqrt{5}}{5 - 3\sqrt{-5}}$ .                      404.  $\frac{2 - \sqrt{-7}}{3 + \sqrt{-21}}$ .  
 405.  $(a + bi)^2$ .                      405.  $(a - bi)^2$ .                      406.  $(3 - \sqrt{-2})^2$ .  
 407.  $\left(\frac{1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^2$ .                      408.  $(3\sqrt{-5} + 2\sqrt{-1})^2$ .

409.  $(2 - 3\sqrt{-2})^2$ .    410.  $\left(\frac{-1 + 2\sqrt{-2}}{2}\right)^2$ .  
 411.  $(a - bi)^3$ .    411.  $(a + bi)^3$ .  
 412.  $(3 + \sqrt{-2})^3$ .    413.  $(\sqrt{-3} - 2\sqrt{-1})^3$ .  
 414.  $\left(\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\right)^3$ .    415.  $\sqrt{3 + 4\sqrt{-1}}$ .    416.  $\sqrt{-3 - 4i}$ .  
 417.  $\sqrt{1 + 4\sqrt{-3}}$ .    418.  $\sqrt{2 - 3\sqrt{-5}}$ .  
 419.  $\sqrt{20 - 4\sqrt{-11}}$ .    420.  $\sqrt{6 + \sqrt{-13}}$ .  
 421.  $\sqrt{\sqrt{-1}}$ .    421.  $\sqrt{-\sqrt{-1}}$ .    422.  $\sqrt[8]{-1}$ .

## Peatükk X.

### Funktsioonid ja nende graafikud.

1. Ehitada koordinaatteljestikus järgmised punktid:

(5; 8); (−9; 3); (−6; −10); (12; −7).

2. Ehitada punktid järgmiste koordinaatidega:

$(10\frac{1}{2}; 3\frac{1}{2})$ ;  $(-18; 7\frac{1}{2})$ ;  $(-8\frac{1}{2}; -8\frac{1}{2})$ ; (2,7; −3,6).

3. Kus asetsevad punktid:

(12; 0); (−7; 0); (0; 0); (0; 9); (0; −17); (0; −8,6)?

4. Mis joonel asetsevad niisugused punktid, mille abstsiss ja ordinaat on võrdsed absoluutväärtuste poolest ja on ühesuguse märgiga? Kuidas asetseb see joon? Kui suured nurgad moodustab ta koordinaattelgedega?

5. Mis joonel asetsevad niisugused punktid, mille abstsiss ja ordinaat on teineteise vastandardvud? Kui suured nurgad moodustab see joon koordinaattelgedega?

6. Ehitada sirglõik, mille otspunktid on järgmised:

(10; 13) ja (−14; −3); (−5; 7) ja (3; −9).

7. Ehitada kolmnurk tema tippude koordinaatide järgi:

(6; 12); (9; 1); (−6; 5).

8. Ehitada nelinurk tema tippude koordinaatide järgi:

(−4; 9); (12; 7); (3; −3); (−10; −6).

9. Joonestada järgmiste võrranditega määratud jooned:

$y = 3x$ ;  $2x = 5y$ ;  $3x - 2y = 0$ ;  $4x - 7y = 0$ .

10. Joonestada jooned:

$$x + y = 2; \quad x - y = 1.$$

11. Ehitada sirgjoon  $y = 2x + 5$  ning leida selle sirgjoone ja ordinaattelje lõikepunkt.

12. Ehitada sirgjoon  $y = 3x - 7$  ning leida selle sirge ja abstsissitelje lõikepunkt.

13. Joonestada sirgjoon  $y = -x + 3$  ning leida punktid, kus ta lõikub koordinaattelgedega.

14. Joonestada sirgjoon  $y = x - 2$  ning leida punktid, kus ta lõikub koordinaattelgedega.

15. Ehitada jooned:

$$xy = 8; \quad xy = 1.$$

16. Joonestada jooned:

$$xy = -5; \quad xy = -9.$$

17. Ehitada graafik üleminekuks tollidelt sentimeetritele, teades, et 1 toll = 2,54 cm.

18. Ehitada ringi übermõõdu ja raadiuse vahelise seose graafik ( $\pi = 3,14$ ).

19. Kaubarongi keskmine liikumiskiirus on 35 km tunnis. Koostada mitmesuguste ajavahemikkude ja nendes ajavahemikkudes ära sõidetud tee pikkuste tabel ning ehitada selle seose graafik. (Näpunäide: võtta mõõtühikuks  $y$ -teljel  $\frac{1}{10}$   $x$ -telje mõõtühikust.)

20. Ehitada ühtlase liikumise võrrandi

$$S = S_0 + vt$$

graafik, võttes  $S_0 = 2$  cm ja  $v = 3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ .

21. Kujutada graafiliselt valem

$$A = 606,5 + 0,305 t,$$

mis väljendab vee aurumissoojuse  $A$  sõltuvust temperatuurist  $t$ .

22. Faraday seaduse järgi elektrolüüdist eralduv ainehulk  $Q$  on võrdeline elektrokeemilise ekvivalendiga  $\alpha$ , voolu tugevusega  $I$  ja ajaga  $t$ . Ehitada selle seose graafik vase jaoks ( $\alpha=0,328$ ) konstantsel voolutugevusel  $I=24$ .

23. Katsete teel on saadud järgmine tabel heli kiiruse  $v$  jaoks kuivas õhus mitmesugustel temperatuuridel  $t$ :

$t^{\circ} \text{C}$	-30	-17	-5	0	8	12	20	30
$v$ m/sec	313	321	329	332	337	339	344	349

Joonestada graafik  $v$  sõltuvuse kohta temperatuurist  $t$ ; võtta selle sõltuvuse graafikuks lähissirge; koostada  $v$  ja  $t$  vahelise seose lineaarne lähisvalem.

24. Elektriveduri tõmbejõu  $P$  (kG) määramisel sõltuvalt voolutugevusest  $I$  (amp.) saadi katsete teel järgmine tabel:

$I$ amp.	65	86	106	116	137	150
$P$ kG	160	360	560	660	850	980

Joonestada  $P$  ja  $I$  vahelise seose graafik; võtta selle graafiku asemel tema lähissirge; koostada  $P$  ja  $I$  vahelise seose lineaarne lähisvalem, leides lähissirge tõusu ja algordinaadi joonisel mõõtmise teel.

25. Ohmi seaduse järgi on  $I = \frac{V}{R}$ , kus  $I$  on voolu tugevus amprites,  $V$  on pinge voltides ja  $R$  on juhtme takistus oomides.

Lugedes  $R$  konstantseks, ehitada  $I$  ja  $V$  vahelise seose graafik; lugedes  $V$  konstantseks, ehitada  $I$  ja  $R$  vahelise seose graafik.

26. Temperatuuril  $14^{\circ} \text{C}$  ja 5-atmosfäärilisel rõhul on gaasi ruumala 6 liitrit. Ehitada Boyle'i-Mariotte'i seaduse

põhjal selle gaasi ruumala muutumise graafik sõltuvalt rõhust.

27. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 3. \end{cases}$$

28. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} y = 2x - 14 \\ y = \frac{2}{3}x - 2. \end{cases}$$

29. Lahendada graafiliselt võrrandisüsteem:

$$\begin{cases} y = -3x - 9 \\ y = \frac{1}{2}x - 2. \end{cases}$$

30. Jalakäija väljus kell 12 päeval linnast maale, käies 3 km tunnis. Kell 14 samal päeval väljus samast linnast teine jalakäija, käies sama teed mööda  $4\frac{1}{2}$  km tunnis. Millal ja kui kaugel linnast jõuab teine jalakäija esimesele järele? (Lahendada graafiliselt.)

31. Jooteõmbluse ligikaudset omahinda  $K$  (kopikates)  $d$  millimeetri paksuse lehe 1 meetritl saab arvutada järgmistele valemite järgi:

$K = 1,5 + 0,95d$  — jootmisel hapnik-atsetüleengaasiga;

$K = 4 + 0,6d$  — jootmisel vesigaasiga.

Missugusest lehe paksusest alates on jootmine vesigaasiga odavam kui hapnik-atsetüleeniaga?

32. Jalgrattur väljus linnast kell 9 hommikul ja sõitis kiirusega 12 km tunnis; kell 10.30 väljus samale teele auto, sõites kiirusega 48 km tunnis. 15 minutit pärast väljasõitu tegi auto 15-minutilise peatuse ja sõitis siis edasi kiirusega 30 km tunnis. Määrata graafiliselt koht ja aeg, kus auto jõuab jalgratturile järele. (Võtta mõõtühikuks  $y$ -teljel  $\frac{1}{10}$   $x$ -telje mõõtühikut.)

33. Moskva ja Kurski vaheline kaugus on 530 km. Kell 6 hommikul väljus Moskvast Kurskisse sõiduks auto, sõites kogu vahemaa kiirusega 50 km tunnis.

Teine auto väljus kell 4.30 hommikul, sõites seda sama teed mööda kiirusega 65 km tunnis. Sõitnud 162 km, peatus teine auto kuni kella 8.30-ni, sõites pärast peatust kuni Orjolini (380 km Moskvast) kiirusega 40 km tunnis. Orjolis peatus see auto  $1\frac{1}{2}$  tundi ja sõitis siis edasi kiirusega 90 km tunnis.

Joonestada mõlema auto liikumise graafik. Kus ja millal autod kohtusid? Kumb auto saabus varem Kurskisse ja kui palju varem? (Võtta mõõtühik  $y$ -teljel  $\frac{1}{10}$   $x$ -telje mõõtühikust.)

## Peatükk XI.

### Ruutvõrrandid.

#### § 1. Täheliste kordajatega ruutvõrrandite lahendamine.

Täheliste kordajatega ruutvõrrandite lihtsustamine ja nende lahendamine toimub samal viisil ja samade juhiste ja valemite järgi, nagu numbriliste ruutvõrrandite lihtsustamine ja lahendamine (vt. ülesannete kogu I jaos).

Lahendada mittetäielikud ruutvõrrandid:

1.  $ax^2 + bx = 0$ .
1.  $\frac{x^2}{a} - \frac{x}{b} = 0$ .
2.  $(x - a)^2 + (x - b)^2 = a^2 + b^2$ .
3.  $n^2x^2 + mx = m^2x^2 + nx$ .
3.  $n^4x^2 - m^2x = m^4x^2 - n^2x$ .
4.  $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x-a}{x+a} = \frac{a(3x+2a)}{x^2-a^2}$ .
4.  $\frac{x+b}{x-a} - \frac{x-b}{x+a} = \frac{4x^2}{x^2-a^2}$ .
5.  $x^2 = 9a^2b^2$ .
5.  $x^2 - 16a^4c^2 = 0$ .
6.  $\frac{x-a}{a} = \frac{a}{x-a}$ .
6.  $\frac{2x+a}{a} = \frac{a}{2x+a}$ .
7.  $\frac{x+a}{x+b} = \frac{a-x}{x-b}$ .
7.  $\frac{x-2a}{x+2a} = \frac{b-x}{x+b}$ .
8.  $1 + 2x + x^2 = n^2 \left( 1 + \frac{2x}{n^2} + \frac{x^2}{n^4} \right)$ .
9.  $\frac{ax}{a+1} = \frac{a+1}{ax}$ .
9.  $\frac{ax-3}{a} = \frac{a+6}{ax+3}$ .
10.  $ax^2 - b^3 = a^3 - bx^2$ .
10.  $a^2x^2 + b^4 = a^4 + b^2x^2$ .
11.  $\frac{2a+b+x}{x+2a-b} = \frac{x-2a+b}{2a+b-x}$ .

$$12. \frac{x^2 + 2ax}{x^3 - a^3} + \frac{x}{(x+a)^2 - ax} = \frac{1}{x-a}.$$

Lahendada täielikud ruutvõrrandid:

$$13. x^2 - 4ax + 3a^2 = 0. \quad 13. x^2 + 8ax + 15a^2 = 0.$$

$$14. x^2 + 2a^3x - 35a^6 = 0. \quad 14. x^2 + 6a^2x - 27a^4 = 0.$$

$$15. x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0. \quad 15. x^2 - 2bx - a^2 + b^2 = 0.$$

$$16. x^2 + 2bx - a^2 + 8ab - 15b^2 = 0.$$

$$17. 2x^2 - 3ax - 2a^2 = 0. \quad 17. 4x^2 - 20ax + 9a^2 = 0.$$

$$18. 6x^2 + 5ax + a^2 = 0. \quad 18. 8x^2 + 2ax - 3a^2 = 0.$$

$$19. 3b^2x^2 + 10abx + 3a^2 = 0.$$

$$19. 6b^2x^2 - 5abx - 6a^2 = 0.$$

$$20. 20b^2x^2 - 9abx - 20a^2 = 0.$$

$$20. 24b^2x^2 + 14abx - 3a^2 = 0.$$

$$21. (mx + n)(nx - m) = 0. \quad 21. (n - mx)(nx + m) = 0.$$

$$22. ab(x^2 + 1) - (a^2 + b^2)x = 0.$$

$$22. ax(bx - a) - c(a - bx) = 0.$$

$$23. bx^2 - a = (a - b)x. \quad 23. (a - b)x^2 + 2b = (a + b)x.$$

$$24. (a^2 - b^2)x^2 + ab = (a^2 + b^2)x.$$

$$24. (a^2 - b^2)x^2 - ab = (a^2 + b^2)x.$$

$$25. x - \frac{1}{x} = \frac{a}{b} - \frac{b}{a}.$$

$$25. x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b}.$$

$$26. \frac{a}{a+x} + \frac{a-x}{x} = \frac{11}{10}.$$

$$26. \frac{a}{x-a} - \frac{x}{x+a} = \frac{7}{5}.$$

$$27. \frac{x+a}{x-a} - \frac{x+b}{x-b} = 1.$$

$$27. \frac{x+a}{x-b} - \frac{x-a}{x+b} = 1.$$

$$28. \frac{a+4b}{x+2b} - \frac{a-4b}{x-2b} = \frac{4b}{a}.$$

$$28. \frac{a+6b}{x+3b} + \frac{a-6b}{3b-x} = \frac{6b}{a}.$$

$$29. \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} + \frac{1}{a+2x} = 0.$$

$$29. \frac{a}{x-a} - \frac{2a}{x-2a} + \frac{3a}{x-3a} = 0.$$

$$30. \frac{x}{x+a} + \frac{2x}{x-a} = \frac{5a^2}{4(x^2-a^2)}.$$

$$31. \frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}.$$

$$32. \frac{a(x-2)}{b} + \frac{a}{bx} \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) = \frac{b(x-2)}{a}.$$

$$33. (a+b)(a-b)x^2 = ab(2ax - ab).$$

$$34. x^2 - \frac{cx}{a+b} - \frac{2c^2}{(a+b)^2} = 0. \quad 35. \frac{2a+b-x}{2b+a-x} = \frac{a}{a} \cdot \frac{x+b}{x+a}.$$

36.  $\frac{4a + 3b - x}{4b + 3a - x} = \frac{2a + b}{2b + a} \cdot \frac{2a + 3b + x}{2b + 3a + x}$ .
37.  $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x - b} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ . 38.  $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} + \frac{1}{x + c} = 0$ .
39.  $\frac{a + b - x}{a - b - x} = \frac{a - c + x}{a - c - x}$ .
40.  $\frac{(a - x)(a - b) + (x - b)^2}{(a - x)^2 + (2x - a - b)(x - b)} = \frac{49}{19}$ .
41.  $\frac{a + c(a + x)}{a + c(a - x)} + \frac{a + x}{x} = \frac{a}{a - 2cx}$ .
42.  $\frac{x + a}{x - a} + \frac{x + b}{x - b} + \frac{x + c}{x - c} = 3$ . 43.  $\frac{x^2 + 1}{a^n} = x(1 + a^{-2n})$ .
44.  $x^2 + a^n x = a^{3n} x + a^{4n}$ .
45.  $x^2 \sqrt{a} = a \sqrt{2a} + (a - a \sqrt{2})x$ .

## § 2. Ruutvõrrandi lahendite sõltuvus võrrandi kordajatest.

Taandatud ruutvõrrandil  $x^2 + px + q = 0$  on kaks reaalselt teineteisest erinevat lahendit, kui  $p^2 > 4q$ ; selle võrrandi lahendid on reaalsed ja teineteisega võrdsed, kui  $p^2 = 4q$ , lahendid on kompleksarvulised, kui  $p^2 < 4q$ .

Üldise ruutvõrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahendid on reaalsed ja teineteisest erinevad, kui  $b^2 > 4ac$ ; lahendid on reaalsed ja teineteisega võrdsed, kui  $b^2 = 4ac$ ; lahendid on kompleksarvulised, kui  $b^2 < 4ac$ .

Võrrandit mitte lahendades otsustada, kas tema lahendid on reaalsed ja teineteisest erinevad või on reaalsed ja teineteisega võrdsed või on kompleksarvulised:

- |                            |                             |
|----------------------------|-----------------------------|
| 46. $x^2 + 6x + 5 = 0$ .   | 46. $x^2 - 6x + 8 = 0$ .    |
| 47. $x^2 - 10x + 25 = 0$ . | 47. $x^2 - 14x + 49 = 0$ .  |
| 48. $x^2 + 4x + 5 = 0$ .   | 48. $x^2 - 9x + 20 = 0$ .   |
| 49. $x^2 + 8x + 25 = 0$ .  | 49. $x^2 + 11x + 130 = 0$ . |

50.  $x^2 + 2x - 120 = 0.$

50.  $x^2 + 3x - 180 = 0.$

51.  $x^2 + 24x + 144 = 0.$

51.  $x^2 + 30x + 225 = 0.$

52.  $12x^2 + 7x - 12 = 0.$

52.  $9x^2 - 12x + 4 = 0.$

53.  $4x^2 - 4x + 13 = 0.$

53.  $3x^2 + 12x + 13 = 0.$

54.  $25x^2 + 30x + 9 = 0.$

54.  $9x^2 - 42x + 49 = 0.$

55.  $2x^2 - 18x + 65 = 0.$

55.  $36x^2 + 48x + 61 = 0.$

Taandatud ruutvõrrandi lahendite summa on võrdne lineaarse liikme kordaja vastand arvuga  $-p$ , lahendite korrutis võrdub vabaliikmega  $q$ .

Üldise võrrandi lahendite summa võrdub teise ja esimese kordaja jagatise vastand arvuga  $-\frac{b}{a}$ , lahendite korrutis võrdub vabaliikme ja ruutliikme kordaja jagatisega  $\frac{c}{a}$ .

Nende seoste põhjal võib võrrandi kordajate järgi otsustada, missuguse märgiga on võrrandi reaalarvulised lahendid.

Alljärgnevaid võrrandeid lahendamata otsustada, misuguse märgiga on lahendid, kui reaalarvulised lahendid on olemas:

56.  $x^2 - 8x + 15 = 0.$

56.  $x^2 + 9x + 14 = 0.$

57.  $x^2 + 4x - 3 = 0.$

57.  $x^2 - 2x - 15 = 0.$

58.  $x^2 - 17x - 60 = 0.$

58.  $x^2 + x - 42 = 0.$

59.  $x^2 - 5x + 130 = 0.$

59.  $x^2 + 7x + 200 = 0.$

60.  $x^2 - 26x + 169 = 0.$

60.  $x^2 - 34x + 289 = 0.$

61.  $x^2 - 3x - 460 = 0.$

61.  $x^2 - 3x - 340 = 0.$

62.  $2x^2 + 5x + 2 = 0.$

62.  $3x^2 - 7x + 2 = 0.$

63.  $6x^2 - 5x - 6 = 0.$

63.  $9x^2 - 24x - 20 = 0.$

64.  $4x^2 + 2x + 1 = 0.$

64.  $9x^2 + 3x + 1 = 0.$

65.  $8x^2 + 4x - 1 = 0.$

65.  $26x^2 - 30x - 1 = 0.$

Ruuttrinoomi  $x^2 + px + q$  saab teisendada korrutiseks  $(x - x_1)(x - x_2)$ , kus  $x_1$  ja  $x_2$  on ruutvõrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahendid.

Ruuttrinoomi  $ax^2 + bx + c$  saab teisendada korrutiseks  $a(x - x_1)(x - x_2)$ , milles  $x_1$  ja  $x_2$  on võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahendid.

Lahutada järgmised ruuttrinoomid tegureiks:

- |  |   |
|--|---|
| 66. $x^2 - 7x + 12.$                                 | 66. $x^2 - 9x + 18.$                            |
| 67. $x^2 + 3x - 108.$                                | 67. $x^2 + 5x - 204.$                           |
| 68. $6x^2 + 5x - 6.$                                 | 68. $15x^2 + 34x + 15.$                         |
| 69. $30x^2 + 37x + 10.$                              | 69. $21x^2 + 22x - 8.$                          |
| 70. $x^2 - 6x + 11.$                                 | 70. $x^2 - 9x + 21.$                            |
| 71. $x^2 + 15x + 44.$                                | 71. $x^2 - 10x + 22.$                           |
| 72. $x^2 - ax - 6a^2.$                               | 72. $x^2 + ax - 2a^2.$                          |
| 73. $x^2 - 2ax + a^2 - b^2.$                         | 73. $(a^2 + b^2)x^2 - 2b^2x + b^2 - a^2.$       |
| 74. $x^2 - ax - a\sqrt{b} - b.$                      | 74. $x^2 + \sqrt{b} \cdot x - a^2 + a\sqrt{b}.$ |
| 75. $abx^2 - 2a\sqrt{ab} \cdot x + a^2 - b^2.$       |   |
| 75. $a^2b^2x^2 - 2ab^2\sqrt{b} \cdot x + b^3 - a^3.$ |   |

Kasutades võrrandi lahendite ja kordajate vahelisi seoseid, võib antud lahendite järgi koostada võrrandi. Seejuures võrrand koostatakse taandatud kujul. Kui saadud võrrandi kordajad on murdarvulised, siis, teisendades ta täisarvuliste kordajatega võrrandiks, saame üldise võrrandi.

Koostada ruutvõrrandid nende lahendite järgi:

- |                                       |                                       |  |                                      |
|---------------------------------------|---------------------------------------|--|--------------------------------------|
| 76. 2 ja 3.                           | 76. 7 ja -5.                          | 77. -4 ja 6.                           | 77. -8 ja -5.                        |
| 78. -5 ja 0.                          | 78. 8 ja 0.                           | 79. 3 ja -3.                           | 79. -7 ja 7.                         |
| 80. $\frac{1}{2}$ ja $-\frac{1}{4}$ . | 80. $\frac{2}{3}$ ja $\frac{1}{3}$ .  | 81. $-\frac{2}{3}$ ja $-\frac{3}{2}$ . | 81. $\frac{3}{7}$ ja $\frac{7}{3}$ . |
| 82. $\sqrt{6}$ ja $-\sqrt{3}$ .       | 82. $\sqrt{2}$ ja $-\sqrt{6}$ .       |  |                                      |
| 83. $4 \pm \sqrt{3}$ .                | 84. $-3 \pm \sqrt{-15}$ .             |  |                                      |
| 85. $1 \pm \sqrt{-10}$ .              | 86. $3a$ ja $-2b$ .                   |  |                                      |
| 87. $2a - b$ ja $a - 2b$ .            | 88. $-\frac{a}{3}$ ja $\frac{a}{2}$ . |  |                                      |
| 89. $a \pm b$ .                       | 90. $\frac{a}{b}$ ja $\frac{b}{a}$ .  |  |                                      |

91.  $\frac{a-b}{a+b}$  ja 1.

92.  $\frac{b}{1-a}$  ja  $\frac{a}{1-b}$ .

93.  $a \pm \sqrt{b}$ .

94.  $\sqrt{a} \pm \sqrt{-b}$ .

95. Koostada võrrand, mille lahendid on võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahendite pöördarvud.

95. Sama ülesanne võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  kohta.

96. Koostada võrrand, mille lahendid on võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahenditest  $m$  korda suuremad.

96. Sama ülesanne võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  kohta.

97. Koostada võrrand, mille lahendid on võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahenditest  $\frac{p}{2}$  võrra suuremad.

98. Koostada võrrand, mille lahenditeks on võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahendite summa ja korrutis.

99. Avaldada võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahendite kuupide summa kordajate  $a$ ,  $b$  ja  $c$  kaudu.

100. Avaldada võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahendite summa mittetäielik ruut.

101. Missugusel  $b$  väärtusel on võrrandi  $4x^2 + bx + 25 = 0$  lahendid teineteisega võrdsed?

102. Näidata, et kui ruutvõrrandi  $a^2x^2 \pm bx + c = 0$  diskriminant on null, siis võrrandi vasak pool on täisruut.

102. Sama ülesanne võrrandi  $x^2 \pm px + q = 0$  kohta.

103. Missugustel  $c$  väärtustel on võrrandi  $3x^2 - 18x + c = 0$  lahendid reaalsed ja missugustel kompleksarvud?

104. Lahendada võrrand  $ax^2 + bx = 0$  üldise ruutvõrrandi lahendusvalemi järgi.

105. Lahendada võrrand  $ax^2 + c = 0$  üldise ruutvõrrandi lahendusvalemi järgi.

106. Määrata võrrandis  $x^2 - 6x + q = 0$  vabaliikme  $q$  väärtus nii, et selle võrrandi lahendid  $\alpha$  ja  $\beta$  rahuldaksid seost  $3\alpha + 2\beta = 20$ .

107. Määrata võrrandis  $x^2 - 5x + q = 0$  vabaliikme  $q$  väärtus nii, et võrrandi lahendid  $a$  ja  $\beta$  rahuldaksid võrdust  $3a + 5\beta = 17$ .

108. Missuguses seoses peavad olema võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  kordajad  $p$  ja  $q$ , et võrrandi üks lahend oleks teisest  $m$  korda suurem?

109. Kaotada irratsionaalsus võrrandi  $x^2 + px + q = 0$  lahendusvalemi lugejast.

### § 3. Täheliste kordajatega ruutvõrrandite koostamine.

110. Leida kaks niisugust arvu, millede korrutis on  $p$  ja jagatis on  $q$ .

111. Kui üks arv jagada teisega, siis jagatis on  $a$  ja jääk on  $b$ , arvude korrutis aga on  $c$ . Leida need kaks arvu.

112. Lahutada arv  $a$  kaheks niisuguseks teguriks, millede vahe on  $b$ .

113. Leida kaks arvu, millede ruutude summa on  $S$  ja mis suhtuvad nagu  $p : q$ .

114. Algmurru ja tema pöördarvu summa on  $a$ . Leida selle murru väärtus; selgitada, missugustel  $a$  väärtustel ülesanne on lahendatav.

115. Rahasummast, mille suurus on  $a$  rubla, annab üks osa aastas  $b$  rubla, teine osa aga  $c$  rubla tulu. Mitu protsenti tulu annab kumbki osa, kui teiselt osalt saadakse üks protsent rohkem kui esimeselt?

116. Sirglõik pikkusega  $a$  on jaotatud kaheks osaks nii, et üks osa on kogu sirglõigu ja teise osa keskmiseks võrdliseks. Leida sirglõigu osade pikkused.

117. Jaotada sirglõik, mille pikkus on  $a$ , kaheks niisuguseks osaks, et ühele osale ehitatud ruudu kahekordne pindala

oleks võrdne ristküliku pindalaga, mille mõõdeteks on antud sirglõigu teine osa ja antud sirglõik ise.

118. Ristküliku übermõõt on  $2p$  ja pindala on  $S$ . Leida ristküliku mõõted; uurida lahendit ja selgitada, missuguse  $p$  ja  $S$  seose korral ristkülik osutub ruuduks.

119. Võrdhaarse kolmnurga haar on  $n$  ja kõrgus on alusest  $m$  võrra väiksem. Leida võrdhaarse kolmnurga alus ja kõrgus.

120. Täisnurkses kolmnurgas on täisnurga tipust joonestatud hüpotenuusile ristlõik. Missugusteks osadeks jaotab see ristlõik hüpotenuusi, kui ristlõigu pikkus on  $h$  ja hüpotenuusi pikkus on  $c$ ?

121. Kui ringi raadiust suurendada  $a$  cm võrra, siis ringi pindala suureneb  $n$  korda. Leida ringi raadius.

122. Täisnurga tipust hakkavad ühel ja samal ajal täisnurga haarasid mööda liikuma kaks keha. Ühe keha liikumise kiirus on  $V_1$  cm/sec, teise kiirus on  $V_2$  cm/sec. Mitme sekundi pärast on nende kehade vaheline kaugus  $d$  cm?

123. Kaks jõudu, mille sihid moodustavad nurga  $120^\circ$ , on rakendatud ühes ja samas punktis. Nende jõudude resultant on  $P$  ja nad suhtuvad nagu  $m:n$ . Leida jõudude suurused.

124. Laua kohal rippus  $m$ -küünlaline elektrilamp. Kui see lamp läbi põles, asendati ta  $n$ -küünlalise lambiga, ja et pinnavalgustus laual ei nõrgeneks, lasti lamp  $h$  sentimeetri võrra madalamale. Kui kõrgel lauast ripub nüüd lamp?

125. Magnetipoolused  $A$  ja  $B$  on teineteisest  $d$  sentimeetri kaugusel. Magnetipoolus  $B$  on  $n$  korda tugevam kui magnetipoolus  $A$ . Leida, kui kaugel magnetipoolusest  $A$  poolustevahelisel sirglõigul asetseb niisugune punkt, milles mõlema magnetipooluse tõmbejõud on võrdsed, teades, et magneti tõmbejõud on pöördvõrdeline magneti ja tõmmatava keha vahelise kauguse ruuduga.

126. Kaks veekanaliseerimise toru, mille diameetrid on vastavalt  $a$  ja  $b$ , on tarvis asendada ühe toruga, nii et läbilaskevõime jääks samaks. Kui suur peab olema selle toru läbimõõt?

127. Kivi kukkumisel kaevu vaateleja kuuleb kõla  $n$  sekundit pärast kukkumise algust. Leida kaevu sügavus, kui heli kiirus on 330 m sekundis ja  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ .

128. Ristkülikukujulisest plekitükist, mille mõõted on  $a$  ja  $b$ , on tarvis teha lahtine karp nii, et

1) seinte pindala on võrdne põhja pindalaga;

2) põhja pindala on  $S$ .

Leida karbi kõrgus. Selgitada lahendite kõlblikkus.

129. Teekonna pikkus raudteel on  $a$  kilomeetrit. Kui rongi kiirust suurendada  $b$  kilomeetri võrra tunnis, siis kulub rongil selle tee sõitmiseks  $c$  tundi vähem kui nüüd.

Mitu tundi kulub rongil selle tee sõitmiseks ja kui suur on rongi kiirus?

130. Kaks autot väljub ühel ja samal ajal kohast  $A$  kohta  $B$ . Üks neist sõidab  $m$  kilomeetri võrra tunnis rohkem kui teine ja jõuab seepärast kohta  $B$   $n$  tunni võrra varem kui teine.  $A$  ja  $B$  vaheline kaugus on  $p$  kilomeetrit.

Mitu kilomeetrit tunnis sõidab kumbki auto?

131. Kaks valtsimispingi koos töötades jõuavad  $T$  tunniga valtsida  $a$  kilogrammi terast. Esimene valtsimisping üksi jõuab nimetatud terasehulga ära valtsida  $t$  tunni võrra pikema ajaga kui teine valtsimisping üksi töötades. Mitu tundi kulub kummalgi valtsimispingil üksi töötades  $a$  kilogrammi terase valtsimiseks?

#### § 4. Ruutfunktsiooni graafik. Ruutvõrrandi graafiline lahendamine.

Seose  $y = ax^2$  graafik on parabool, mis puudutab  $x$ -telge punktis  $O$  ja mis asetseb sümmeetriliselt  $y$ -telje suhtes.

Kui  $a > 0$ , siis parabool  $y = ax^2$  on sealpool  $x$ -telge, kuspool asetsevad positiivsed ordinaadid; ümberpöördult, kui  $a < 0$ , siis parabool on sealpool  $x$ -telge, kuspool asetsevad negatiivsed ordinaadid.

Võrrandi  $y = ax^2 + bx + c$  graafik on parabool, mille telg on paralleelne  $y$ -teljega ja mille harud suunduvad  $y$ -telje positiivses või negatiivses suunas vastavalt sellele, kas  $a > 0$  või  $a < 0$ .

Ruutvõrrandit on võimalik graafiliselt lahendada, ja nimelt kahel viisil.

Esimene viis.

Ehitades punktide järgi parabooli  $y = ax^2 + bx + c$ , leiame võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahendid nende punktide abstsissidena, kus parabool lõikub  $x$ -teljega. Kui parabool lõikub  $x$ -teljega kahes punktis, siis võrrandil on kaks reaalist teineteisest erinevat lahendit. Kui parabool puudutab  $x$ -telge, siis võrrandil on kaks teineteisega võrdset reaalist lahendit. Kui parabool  $x$ -teljega ei lõiku, siis võrrandil on kaks kompleksarvulist lahendit (joonis 1).

Teine viis.

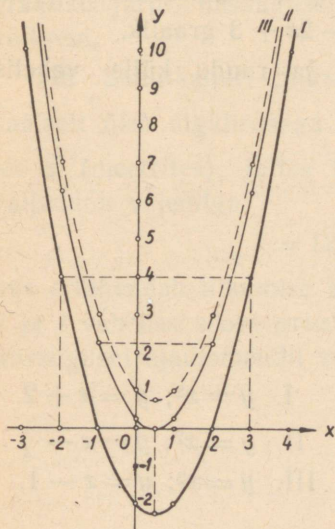
Võtame võrrandis  $ax^2 + bx + c = 0$   $x^2 = y$ , siis saame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ ay + bx + c = 0. \end{cases}$$

Et nende võrrandite lahendid peavad olema ühed ja samad, siis lahenditeks peavad olema niisuguste punktide koordinaadid, mis asetsevad nii ühe kui ka teise võrrandi graafikul, see tähendab, et lahenditeks peavad olema graafikute lõikepunktide koordinaadid.

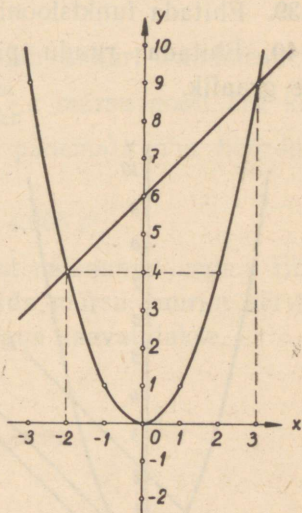
Ehitades ühes ja samas teljestikus nii võrrandi  $y = x^2$  kui ka võrrandi  $ay + bx + c = 0$  graafiku, leiame nende graafikute lõikepunktide koordinaadid (joonis 2); lõikepunktide abstsissid on võrrandi  $ax^2 + bx + c = 0$  lahenditeks.

Kui parabolil  $y = x^2$  ja sirgjoonel  $ay + bx + c = 0$  on kaks ühist punkti, siis võrrandil  $ax^2 + bx + c = 0$  on kaks reaalselt teineteisest erinevat lahendit. Kui neil joontel on üks ühine punkt, siis ruutvõrrandil on kaks võrdset reaalselt lahendit. Kui neil joontel ei ole ühiseid punkte, siis ruutvõrrandil on kaks kompleksarvulist lahendit (joonis 3).



- I.  $x^2 - x - 2 = 0$ .  
 II.  $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$ .  
 III.  $x^2 - x + 1 = 0$ .

Joon. 1.



$$x^2 - x - 6 = 0.$$

$$y = x^2.$$

$$y = x + 6.$$

Joon. 2.

Ex bibl. univ.

132. Ehitada graafikud:  $y = x^2$ ;  $y = \frac{1}{2}x^2$ ;  $y = 2x^2$ .  
 133. Ehitada graafikud:  $y = -x^2$ ;  $y = -\frac{1}{4}x^2$ ;  $y = -3x^2$ .  
 134. Ehitada graafikud järgmistele funktsioonidele:  
 $x^2 + 1$ ;  $x^2 - 2$ .

135. Ehitada graafikud funktsioonidele:

$$x^2 + 3x; \quad x^2 - 4x.$$

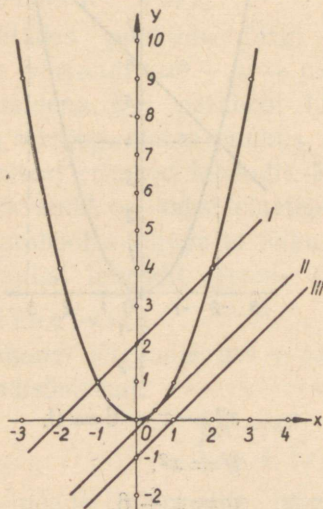
136. Ehitada funktsiooni  $x^2 - 3x + 2$  graafik.

137. Ehitada funktsiooni  $x^2 + x - 12$  graafik.

138. Ehitada funktsiooni  $x^2 - 4x + 4$  graafik.

139. Ehitada funktsiooni  $2x^2 - 2x + 3$  graafik.

140. Ehitada ruudu pindala ja ruudu külje vahelise seose graafik.



Joon. 3.

I.  $y = x^2; y = x + 2.$

II.  $y = x^2; y = x - \frac{1}{4}.$

III.  $y = x^2; y = x - 1.$

141. Ehitada ringi pindala ja raadiuse vahelise seose graafik.

142. Lahendada graafiliselt võrrand  $x^2 - 3x = 0.$

143. Lahendada graafiliselt võrrand  $x^2 + 4x = 0.$

144. Lahendada graafiliselt võrrand  $x^2 - 4 = 0.$

145. Lahendada graafiliselt võrrand  $x^2 - 2x - 3 = 0.$

146. Lahendada graafiliselt võrrand  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

147. Ühe grammi vee ruumala  $V$  sõltuvust temperatuurist  $t^\circ \text{C}$  väljendab ligikaudselt valem:

$$V = 1 + 8,38 \cdot 10^{-6}(t - 4)^2.$$

Ehitada  $V$  ja  $t$  vahelise seose graafik ja määrata selle graafiku järgi, missugusel  $t$  väärtusel on  $V$  väärtus kõige väiksem.

148. Seniitkahuri mürisk lendab kahuri suudmest vertikaalselt üles algkiirusega  $125 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ; mürsu poolt ära käidud tee  $s$  (meetrites), jättes tähele panemata õhu hõõrdumise, väljendub valemiga:

$$s = 125t - 4,905t^2,$$

kus  $t$  tähendab liikumise algusest möödunud aega. Ehitada  $s$  ja  $t$  vahelise seose graafik; leida mürsu suurim kõrgus ja missugusel ajamomendil see kõrgus saavutatakse.

## Kõrgema astme võrrandid.

Kõrgema astme võrrandiks nimetatakse iga niisugust võrrandit, milles otsitav esineb kõrgemas kui teises astmes.

Igal algebralisel  $n$ -enda astme võrrandil on  $n$  lahendit, mis ei tarvitse olla kõik üksteisest erinevad, ja võrrandi polünoomi (võrrandi vasakut poolt) saab teisendada  $n$  lineaarse teguri korrutiseks (Gauss'i teoreem).

Kolmanda astme võrrandi üldkuju on järgmine:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Kui selle võrrandi mõlemad pooled jagame kordajaga  $a$ , siis saame taandatud võrrandi, mis kirjutatakse nii:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0.$$

Neljanda astme võrrandi üldkuju on niisugune:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0;$$

taandatud neljanda astme võrrand kirjutatakse järgmiselt:

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0.$$

### § 1. Bikvadraatvõrrand.

Bikvadraatvõrrandiks nimetatakse niisugust neljanda astme võrrandit, milles paarituastendajatega otsitava astmed puuduvad, s. o. võrrandit.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0.$$

Seda võrrandit võib vaadelda kui ruutvõrrandit, kuid mitte  $x$  suhtes, vaid  $x^2$  suhtes; sellest võrrandist võib  $x^2$  arvutada ruutvõrrandi lahendamisevalemiga abil; võttes tulemusest ruutjuure, leiamegi  $x$  väärtuse.

Seega bikvadraatvõrrandi lahendamise valem on järgmine:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

See valem annab bikvadraatvõrrandi neli lahendit:

$$x_1 = + \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_2 = - \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}};$$

$$x_3 = + \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}; \quad x_4 = - \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Lahendada bikvadraatvõrrandid:

1.  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$
2.  $x^4 + 12x^2 + 32 = 0.$
3.  $5x^4 + x^2 - 4 = 0.$
4.  $12x^4 + x^2 - 6 = 0.$
5.  $x^4 - (a - b)x^2 - ab = 0.$
6.  $x^2 - \frac{4a^2}{x^2} = 4 - a^2.$
7.  $a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0.$
8. Millega võrdub bikvadraatvõrrandi lahendite summa?
8. Millega võrdub bikvadraatvõrrandi lahendite korrutis?
9. Lahutada tegureiks trinoom  $4x^4 - 17x^2 + 4.$
10. Koostada võrrand, mille lahenditeks on  $\pm 1$  ja  $\pm 3.$

## § 2. Kaheliikmeline võrrand.

Taandatud kaheliikmeliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit  $x^n \pm a = 0$ . Niisuguse võrrandi lahendamisel võetakse

$$x = \sqrt[n]{a \cdot z},$$

mistõttu antud võrrand taandub lihtsamaks:

$$z^n - 1 = 0 \text{ või } z^n + 1 = 0.$$

Mittesuure  $n$  puhul need viimased võrrandid lahendatakse vasaku poole tegureiks lahutamise teel, leitud  $z$  väärtused korrutatakse arvuga  $\sqrt[n]{a}$ . Üldkujuline kaheliikmeline võrrand

$$ax^n \pm b = 0$$

teisendatakse kordajaga  $a$  jagamise teel taandatud võrrandiks ja lahendatakse siis samal viisil.

11.  $x^3 = -1.$

11.  $x^3 = 1.$

12.  $x^3 = 8.$

12.  $x^3 = -8.$

13.  $x^3 - a^3 = 0.$

13.  $x^3 + a^3 = 0.$

14.  $x^4 - 16 = 0.$

14.  $x^4 - 81 = 0.$

15.  $x^4 + 81 = 0.$

15.  $x^4 + 16 = 0.$

16.  $x^6 - 64 = 0.$

16.  $x^6 - 729 = 0.$

17.  $125x^3 + 8 = 0.$

17.  $125x^3 - 27 = 0.$

18.  $81x^4 + 4 = 0.$

18.  $16x^4 - 25 = 0.$

19.  $a^8x^8 - b^8 = 0.$

19.  $b^8x^8 - a^8 = 0.$

### § 3. Kolmeliikmeline võrrand.

Kolmeliikmeliseks võrrandiks nimetatakse võrrandit

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0, \text{ kus } n \geq 2.$$

Selle võrrandi lahendamine taandub kahe võrrandi lahendamiseks, millest kumbki on kaheliikmeline võrrand, sest kui teeme asenduse  $x^n = z$ , siis saame antud võrrandist ruutvõrrandi, millest leiame kaks  $z$  väärtust.

20.  $x^6 - 3x^3 + 2 = 0.$

20.  $x^6 + 4x^3 + 3 = 0.$

21.  $x^6 - 28x^3 + 27 = 0.$

21.  $x^6 - 19x^3 - 216 = 0.$

22.  $4 = -\frac{x^{-3} + 3}{x^{-3}}.$

23.  $\frac{8 - x^{-2}}{x^{-4}} = \frac{x^{-2} - (3x + 5x^2)}{5}.$

$$24. x^{\frac{6}{5}} + 8 = 9\sqrt[5]{x^3}. \quad 25. x^{\frac{6}{5}} - 7 = 6\sqrt[5]{x^3}.$$

$$26. \frac{a^3}{9x^{-3} + 7a^3} - \frac{3x^{-3}}{a^3 - 5x^{-3}} = 0. \quad 27. x^{10} - 10x^5 + 9 = 0.$$

#### § 4. Võrrandid, mille vasak pool teisendub korrutiseks.

Mõnikord saab kõrgema astme võrrandi vasaku poole teguriteks lahutada. Siis rakendame seda korrutise omadust, et korrutis on siis ja ainult siis null, kui vähemalt üks tema teguritest on null. Sellest näeme, et meie võrrand on siis rahuldatud, kui tema vasaku poole mistahes tegur on võrdne nulliga. Kirjutades vasaku poole iga teguri võrdseks nulliga, saame antud võrrandi asemel mitu võrrandit; lahendades need võrrandid, saamegi algvõrrandi lahendid.

$$28. x(2x - 7) = 0. \quad 28. x(ax - b) = 0.$$

$$29. (5x - 8)(4x + 7)(x + 9) = 0.$$

$$29. (ax + b)(cx - d)(x - e) = 0.$$

$$30. x^3 - 3x = 2. \quad 30. x^3 + 4 = 3x^2.$$

$$31. x^3 + 6 = 7x. \quad 31. x^3 + 12 = 13x.$$

$$32. x^3 + x^2 = x + 1. \quad 32. x^3 - x^2 = x - 1.$$

$$33. x^3 - 5x^2 = x - 5. \quad 33. x^3 + 2x^2 = 4x + 8.$$

$$34. x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0.$$

$$34. x^3 - 4x^2 - 4x - 5 = 0.$$

$$35. x^3 + 8x^2 + 15x + 18 = 0. \quad 36. x^4 + x^3 = -2x + 4.$$

$$37. x^4 + 2x^3 - 13x^2 - 14x + 24 = 0.$$

$$38. x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 19x - 6 = 0.$$

$$39. nx^3 + x + n + 1 = 0. \quad 40. (a + x)^3 = (3a - x)^3.$$

$$41. x^3 + (b^2 - a^2)x + ab^2 = 0. \quad 42. \frac{a^2 + ax + x^2}{a^2 - ax + x^2} = \frac{a^2}{x^2}.$$

#### § 5. Sümmetriline võrrand.

Sümmetriliseks võrrandiks nimetatakse niisugust mistahes astme võrrandit, mille vasaku poole algusest ja lõpust ühekaugusel asetsevad kordajad on võrdsed.

Sümmeetrilise võrrandi üldise lahendamise juhise saab anda 3-nda, 4-nda ja 5-nda astme võrrandi jaoks. Sümmeetriline kuupvõrrand lahendub lihtsalt vasaku poole tegureiks lahutamise teel.

5-nda astme sümmeetrilise võrrandi vasaku poole saab kaheks teguriks lahutada, milledest üks on lineaarne ja teine on neljanda-astmeline. Seega saame antud 5-nda astme võrrandi asemele ühe lineaarse võrrandi ja ühe 4-nda astme võrrandi, milledest viimane on jälle sümmeetriline võrrand.

Esimest liiki neljanda astme sümmeetriline võrrand on niisugune:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Jagades selle võrrandi iga liikme  $x^2$ -ga, saame:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0.$$

Rühmitades võrdsete kordajatega liikmed, saame:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Asendades siin  $x + \frac{1}{x}$  uue tundmatuga  $y$ , nii et

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

siis

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

seega antud sümmeetriline võrrand taandub  $y$  suhtes ruutvõrrandiks.

Teist liiki neljanda astme sümmeetriline võrrand on niisugune:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0.$$

See võrrand lahendatakse samal viisil nagu esimest liiki võrrand, ainult selle erinevusega, et nüüd uus tundmatu

$y$  asendab avaldist  $x - \frac{1}{x}$  ning avaldist  $x^2 + \frac{1}{x^2}$  asendab avaldis  $y^2 + 2$ .

Nagu juba öeldud, 5-nda astme sümmeetrilise võrrandi lahendamine taandub tema vasaku poole tegureiks lahutamise teel ühe lineaarse võrrandi ja ühe 4-nda astme sümmeetrilise võrrandi lahendamiseks.

Analoogiliselt 4-nda astme sümmeetrilise võrrandi lahendamisega saab iga paarisastme sümmeetrilise võrrandi lahendamise taandada kaks korda madalama astme võrrandi lahendamiseks. Kuid see uus kaks korda madalama astme võrrand ei tule üldiselt enam sümmeetriline.

Näide:

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a = 0;$$

$$ax^3 + bx^2 + cx + d + \frac{c}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{a}{x^3} = 0;$$

$$a\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + b\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + c\left(x + \frac{1}{x}\right) + d = 0;$$

$$x + \frac{1}{x} = y; \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2; \quad x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y;$$

$$a(y^3 - 3y) + b(y^2 - 2) + cy + d = 0$$

ja lõpuks:

$$ay^3 + by^2 - (3a - c)y - (2b - d) = 0.$$

Kui seda võrrandit oskame lahendada, siis saame lahendada ka antud 6-nda astme võrrandi.

On mittetäielikke sümmeetrilisi võrrandeid; neid saab sageli lahendada vasaku poole tegureiks lahutamise teel.

43.  $x^3 - x^2 + x - 1 = 0.$       43.  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$

44.  $2x^4 - 5x^3 + 5x - 2 = 0.$       44.  $3x^4 - 10x^3 + 10x - 3 = 0.$

45.  $6x^4 - 5x^3 - 5x - 6 = 0.$       45.  $12x^4 + 7x^3 + 7x - 12 = 0.$

46.  $ax^4 - bx^3 + bx - a = 0.$       46.  $ax^4 - bx^3 - bx - a = 0.$

47.  $6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$

47.  $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6 = 0.$

48.  $2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2 = 0.$

48.  $2x^4 - 3x^3 - x^2 - 3x + 2 = 0.$

49.  $4x^4 - 33x^3 + 33x + 4 = 0.$

49.  $6x^4 + 73x^3 - 73x + 6 = 0.$

50.  $6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0.$

51.  $2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$

52.  $15x^5 + 34x^4 + 15x^3 - 15x^2 - 34x - 15 = 0.$

53.  $x^6 - 10x^5 + 27x^4 - 20x^3 + 27x^2 - 10x + 1 = 0.$

54.  $2x^6 - x^5 - 8x^4 + 8x^2 + x - 2 = 0.$

55. Tõestada, et esimest liiki 4-nda astme sümmeetrilise võrrandi lahendid on paariviisi teineteise pöördarvud.

55. Tõestada, et teist liiki 4-nda astme sümmeetrilise võrrandi lahendid on paariviisi niisugused, et üks on teise pöördarvu vastandaru.

56. Lahutada tegureiks sümmeetriline polünoom:

$$2x^4 - 9x^3 + 14x^2 - 9x + 2.$$

56. Lahutada tegureiks sümmeetriline polünoom:

$$30x^4 - 17x^3 - 228x^2 + 17x + 30.$$

57. Koostada võrrand, mille lahendid on

$$2, \frac{1}{2}, 3 \text{ ja } \frac{1}{3}.$$

57. Koostada võrrand, mille lahendid on

$$2, -\frac{1}{2}, 3 \text{ ja } -\frac{1}{3}.$$

## Peatükk XIII.

### Juurvõrrandid.

Juurvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles otsitav esineb juuritavas. Juurvõrrandi lahendamisel peab selle võrrandi teisendama niisuguseks, et otsitav ei esine juuritavas. See saavutatakse sel teel, et võrrandi pooled astendatakse, kas üks kord või mitu korda järgemööda.

Et võrrandi poolte astendamisel tekib vöörlahendeid, siis peab pärast juurvõrrandi lahendamist iga saadud lahendit algvõrrandisse asetamise teel kontrollima, kas ta rahuldab algvõrrandit või mitte. Kui selgub, et kontrollitav lahend algvõrrandit ei rahulda, siis see lahend ei kõlba antud algvõrrandi lahendiks, — ta on vöörlahend ja jäetakse kõrvale.

1.  $5 + \sqrt{6 - x} = 7.$

1.  $x + \sqrt{16 + x^2} = 8.$

2.  $\sqrt{5 + \sqrt{x - 4}} = 3.$

2.  $\sqrt{17 - \sqrt{x - 8}} = 4.$

3.  $\sqrt{x + 1} + \sqrt{2x + 3} = 1.$

3.  $\sqrt{2x - 1} + \sqrt{x - 1} = 1.$

4.  $\sqrt{3x + 4} + \sqrt{x + 2} = 8.$

4.  $\sqrt{x + 3} + \sqrt{3x - 3} = 10.$

5.  $\sqrt{22 - x} - \sqrt{10 - x} = 2.$

5.  $\sqrt{x + 20} - \sqrt{x - 1} = 3.$

6.  $2\sqrt{x + 18} + \sqrt{4x - 3} = 15.$

6.  $\sqrt{x - 7} - \sqrt{x + 1} = -2.$

7.  $\sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 3} = 2\sqrt{x}.$

7.  $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 8} = 5\sqrt{x}.$

8.  $\sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-19} = \sqrt{3x+4}$ .
8.  $\sqrt{2x+1} + \sqrt{7x-27} = \sqrt{3x+4}$ .
9.  $\sqrt{1+x}\sqrt{x^2+12} = 1+x$ .
9.  $\sqrt{1+x}\sqrt{x^2-24} = x-1$ .
10.  $x = -2 + \sqrt{4+x}\sqrt{36+x^2}$ .
10.  $x = 1 - \sqrt{1-x}\sqrt{16+x^2}$ .
11.  $\frac{2}{x} + 2 = \sqrt{4 + \frac{1}{x}\sqrt{64 + \frac{144}{x^2}}}$ .
12.  $1 - \frac{1}{x} = \sqrt{1 - \frac{1}{x}\sqrt{4 - \frac{7}{x^2}}}$ .
13.  $\frac{5}{x + \sqrt{5+x^2}} - \frac{5}{x - \sqrt{5+x^2}} = 6$ .
14.  $\frac{4}{x + \sqrt{4-x^2}} + \frac{4}{x - \sqrt{4-x^2}} = \frac{12}{7}$ .
15.  $\frac{x-1}{1+\sqrt{x}} = 4 - \frac{1-\sqrt{x}}{2}$ .
16.  $\sqrt{5x} - \frac{4}{\sqrt{3x+1}} = \sqrt{3x+1}$ .
17.  $\frac{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x-1}} = 2$ .
18.  $\frac{\sqrt{3x^2+1} - \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x^2+1} + \sqrt{2x+1}} = \frac{2}{5}$ .
19.  $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$ .
20.  $\frac{x+1 - \sqrt{2x+1}}{x+1 + \sqrt{2x+1}} = \frac{\sqrt{2x+1} + 1}{\sqrt{2x+1} - 1}$ .
21.  $(x+2)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} = 4(x+2)^{-\frac{1}{2}}$ .
22.  $[5 + (x-4)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} = 3$ .
23.  $\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[3]{x^2} - 3 = 0$ .
24.  $\sqrt{x-3} + 6 = 5\sqrt[4]{x-3}$ .
25.  $x^2 + \sqrt{x^2-9} = 21$ .

$$26. 3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2.$$

$$27. x + \sqrt{2ax + x^2} = a. \quad 27. 2a - \sqrt{2ax + x^2} = x.$$

$$28. \sqrt{x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}. \quad 28. \sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}.$$

$$29. \sqrt{3x+a+2b} - \sqrt{3x+a-2b} = 2\sqrt{x-a}.$$

$$29. \sqrt{5x-3a+4b} + \sqrt{5x-3a-4b} = 2\sqrt{x+a}.$$

$$30. \sqrt{a-bx} + \sqrt{c-dx} = \sqrt{a+c} - (b+d)x.$$

$$31. \sqrt{a+x} + \sqrt{2a+x} = \frac{a}{\sqrt{a+x}}.$$

$$32. \sqrt{a+\sqrt{x}} - \sqrt{a-\sqrt{x}} = \sqrt{a}.$$

$$33. \frac{1}{a} - \frac{1}{x} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \sqrt{\frac{4}{a^2x^2} - \frac{7}{x^4}}}.$$

$$34. \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{a}{x}.$$

$$35. \frac{\sqrt{ax+b} + \sqrt{ax}}{1 + \sqrt{ax-b}} = \frac{\sqrt{ax+b} - \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ax-b}}.$$

$$36. \frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{b+2x} + \sqrt{b-x}} = \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{x-a}}{\sqrt{b+2x} - \sqrt{b-x}}.$$

$$37. \frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}} = \frac{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}}{\sqrt{x-b}}.$$

## Peatükk XIV.

### Ruut- ja kõrgema astme võrrandite süsteemid.

#### § 1. Võrrandisüsteemide lahendamine.

Võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ ax + by = c, \end{cases}$$

milles üks on ruutvõrrand ja teine on lineaarne võrrand, lahendamiseks avaldatakse lineaarsest võrrandist otsitav  $y$  teise otsitava  $x$  kaudu:  $y = \frac{c - ax}{b}$ , ning saadud avaldis  $\frac{c - ax}{b}$  pannakse ruutvõrrandisse  $y$  asemele.

Saame ruutvõrrandi

$$Mx^2 + Nx + P = 0.$$

Selle võrrandi lahendamisel saame kaks  $x$ -i väärtust:  $x_1$  ja  $x_2$ ; asendades nendega  $x$  võrduses  $y = \frac{c - ax}{b}$ , saame kaks  $y$ -i väärtust:  $y_1$  ja  $y_2$ .

Seega võrrandisüsteemi lahendid on:

$$\begin{cases} x_1 \\ y_1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 \\ y_2 \end{cases}.$$

Kahest ruutvõrrandist koosneva võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0 \end{cases}$$

lahendamisel eemaldatakse neist võrranditest esmalt ühe otsitava ruut, näiteks  $y^2$ . Selleks korrutatakse esimese võrrandi pooled arvuga  $C_1$  ja teise võrrandi pooled arvuga  $C$ , siis lahutatakse ühe võrrandi pooltest teise pooled. Saame uue abivõrrandi, millel on niisugune kuju:

$$ax^2 + bxy + dx + ey + f = 0.$$

Kasutades nüüd seda, et saadud võrrandis  $y$  esineb ainult esimeses astmes, väljendame siit  $y$  teise otsitava  $x$  kaudu:

$$y = -\frac{ax^2 + dx + f}{bx + e}.$$

Asetades nüüd ühte antud võrrandisse  $y$  asemele temaga võrdse avaldise, saame  $x$  suhtes 4-nda astme võrrandi. Kui viimase võrrandi saame lahendada, leiame neli  $x$ -i väärtust; neid järgemööda eespoolosutatud võrdusesse  $x$ -i asemele pannes saame neli  $y$ -i väärtust.

Sel juhul, kui ühes võrrandis ühe otsitava ruut puudub, on lahendamine lihtsam.

Lahendada võrrandisüsteemid:

$$1. \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ x - 2y = 2. \end{cases}$$

$$1. \begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ y - x = 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x^2 - 2xy + x = -9 \\ 2y - 3x = 1. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x^2 + 3xy - y^2 = 92 \\ x + 3y = 18. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x^2 + 6xy + 8y^2 = 91 \\ x + 3y - 10 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x^2 + 10xy + 17y^2 = 218 \\ 2x + 5y - 20 = 0. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x^2 + 2xy - 4y^2 - 5x + 4 = 0 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x^2 - xy + 3y^2 - 7x - 12y + 1 = 0 \\ x + 1 = y. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} xy = 0,5 \\ \frac{x}{y} = 2. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \frac{1}{xy} = 5 \\ \frac{x}{y} = 20. \end{cases}$$

- $$6. \begin{cases} xy = 99 \\ \frac{x+y}{x-y} = 10. \end{cases}$$
- $$7. \begin{cases} x - 6 = y + 6 \\ \frac{3}{5}x - y = y(y - 1). \end{cases}$$
- $$8. \begin{cases} x + y = 120 \\ x^2 + y^2 = 10\,400. \end{cases}$$
- $$9. \begin{cases} x^2 + y^2 = 58,4 \\ \frac{11x - 3y}{x - 1} = 10. \end{cases}$$
- $$10. \begin{cases} (x - 2)(y - 3) = 1 \\ \frac{x - 2}{y - 3} = 1. \end{cases}$$
- $$11. \begin{cases} x - y = a \\ \frac{89a^2 - (5y - x)y}{(x + y)^2} = 3. \end{cases}$$
- $$12. \begin{cases} x - y = \frac{2a}{a^2 - 1} \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{a}. \end{cases}$$
- $$13. \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \end{cases}$$
- $$14. \begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = bxy. \end{cases}$$
- $$15. \begin{cases} xy = a \\ \frac{x}{y} = b. \end{cases}$$
- $$16. \begin{cases} x^2 + 3xy = 18 \\ xy + 4y^2 = 7. \end{cases}$$
- $$6. \begin{cases} \frac{x+y}{y} = 2 \\ 1 + \frac{xy}{3} = 4. \end{cases}$$
- $$7. \begin{cases} x - y = 4 \\ \frac{x}{3} = \frac{7}{y}. \end{cases}$$
- $$8. \begin{cases} \frac{x-y}{2} = 1 \\ x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$
- $$9. \begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{x^2 - 2 + y^2}{2} = 1. \end{cases}$$
- $$10. \begin{cases} \frac{(x+y+1)(x+y-1)}{xy+57} = 3 \\ \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} = -\frac{1}{xy}. \end{cases}$$
- $$11. \begin{cases} 2x + y = 5a \\ \frac{x(x-y) + 3y^2}{a(a-1) + 3} = 5. \end{cases}$$
- $$12. \begin{cases} (b+y)x = b^2 \\ \frac{a^2b - b}{a^2b - y} = \frac{b}{b-x}. \end{cases}$$
- $$13. \begin{cases} \frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} = 0. \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = m. \end{cases}$$
- $$14. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b} \\ xy = c^2. \end{cases}$$
- $$15. \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \\ \frac{bx + ay}{bx - ay} = \frac{m}{n}. \end{cases}$$
- $$16. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 21 \\ 2xy - y^2 = 15. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x + y - x^2 = 0 \\ 3y - x - y^2 = 0. \end{cases} \quad 17. \begin{cases} 4x - 4y - xy = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 - 5xy = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 6x^2 + xy - y^2 - 3x - 4y = 15 \\ 4xy - y^2 - 3x^2 + 15x - 7y = 18. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 6x + 21y - 2x^2 - 27xy - 6y^2 = 4 \\ 9xy + 3y^2 - 2x^2 + 6x - 6y = 4. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 43 \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 33. \end{cases} \quad 19. \begin{cases} 3x^2 - xy + 4y^2 = 14 \\ 2x^2 - xy + 2y^2 = 8. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x^2 + xy + 2y^2 = 74 \\ 2x^2 + 2xy + y^2 = 73. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17 \\ y^2 - x^2 = 16. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 19,7 \\ \frac{(x+2)(x-2)}{(y+7)(7-y)} = \frac{4}{3}. \end{cases} \quad 21. \begin{cases} \frac{(x+1)(x-1) - 78,3}{78,3 - (y+1)(y-1)} = 1 \\ x + \frac{10,68}{y-x} + y = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 3x^2 - 4x + y^2 = 40 \\ 2x^2 + 3x + y^2 = 52. \end{cases} \quad 22. \begin{cases} xy + x^2 = 18 \\ 2xy - x^2 = x + 6. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} \frac{2x + 3xy - 6y}{8} = 1 \\ \frac{x - 2xy - 3y}{3} = -1. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 8(x+y) - 7(xy+1) = 0 \\ 4(x-y) - (xy-1) = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 6(x^2 - 1) - y(3x - y) = 13 \\ 4(x^2 - 1) - y(2x - y) = 9. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 68 \\ x^2 - y^2 + x - y = 44. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} x^2 - 4y^2 - xy + 5y = 1 \\ x^2 + 3y^2 - xy - 4y = -1 \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x^2 + xy = a \\ y^2 + xy = b. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 2a \\ x^2 - xy + y^2 = 2b. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x(a-x) = y(a-y) \\ xy = a^2. \end{cases} \quad 27. \begin{cases} x - \frac{1}{y} = a \\ y - \frac{1}{x} = \frac{1}{a}. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x^2 - xy = 2(a+1) \\ y^2 - xy = 2(1-a) \end{cases} \quad 28. \begin{cases} a^2x^2 + y^2 = 2a^4 \\ xy - a^3 = 0 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} (x-a)(y-b) = 0 \\ \frac{x(x-b) - y(x-y)}{a^2 + b^2} = 1 \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} (x+y+a)(x-y+a) = 0 \\ x^2 - \frac{1}{2}(a^4 + y^2 + 1) - x = a - y \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 - (a+x)y - a^2 = 0 \\ \frac{x^2 - 2(x-y) + y^2}{5a-2} = a \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = a^2(a^2 + 1) \\ a^2 + xy = 0 \end{cases}$$

Sageli on võrrandisüsteemi lahendamisel võimalik kasutada erivõtteid vastavalt antud võrrandisüsteemi tüübile. Selgitame järgnevates näidetes mõnda niisugustest võtetest.

1. tüüp.

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ xy = 15 \end{cases}$$

Nendest võrranditest näeme, et  $x$  ja  $y$  on võimalik vaadelda kui ruutvõrrandi

$$z^2 - 8z + 15 = 0$$

lahendeid. Selle võrrandi lahendid on 3 ja 5. Et nendest lahenditest kumbki võib olla nii  $x$  kui ka  $y$  väärtuseks, siis saame antud süsteemile kaks lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ y_1 = 5 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \begin{cases} x_2 = 5 \\ y_2 = 3 \end{cases}$$

2. tüüp.

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

Tõstes esimese võrrandi pooled ruutu ja lahutades saadud võrrandi pooltest teise võrrandi pooled, saame otsitava korrutise

$$xy = 12.$$

Teades otsitavate summat ja korrutist, võime otsitavate väärtused leida, nagu 1. tüüpi puhul.

3. tüüp.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 24 \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Jagades esimese võrrandi pooled teise võrrandi vastavate pooltega, saame lineaarse võrrandi

$$x + y = 6,$$

mis koos antud süsteemi teise võrrandiga määrab ainsa lahendi

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 1. \end{cases}$$

4. tüüp.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12. \end{cases}$$

Korrutame teise võrrandi pooled arvuga 2 ja liidame korrutised esimese võrrandi pooltega; teise võrrandi saamiseks lahutame need korrutised tema esimese võrrandi pooltest.

Saame:

$$\begin{cases} (x + y)^2 = 49 \\ (x - y)^2 = 1, \end{cases}$$

millest:

$$\begin{cases} x + y = \pm 7 \\ x - y = \pm 1; \end{cases}$$

tulemus väljendab nelja võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases}, \begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ ja } \begin{cases} x + y = -7 \\ x - y = -1 \end{cases}.$$

Siit saame antud võrrandisüsteemi lahendid:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 3 \end{cases}; \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 4 \end{cases}; \begin{cases} x_3 = -3 \\ y_3 = -4 \end{cases}; \begin{cases} x_4 = -4 \\ y_4 = -3 \end{cases}.$$

Sama võrrandisüsteemi võinuksime lahendada ka ühe erilise asendusvõttega, mida selgitame järgnevas näites.

5. tüüp.

$$\begin{cases} 2xy - y^2 = 15 \\ x^2 + xy = 36. \end{cases}$$

Selle süsteemi võrrandite vasakud pooled on homogeen-  
sed teiseastmelised avaldised.

Võtame

$$y = ux.$$

Siis saame:

$$\begin{cases} x^2(2u - u^2) = 15 \\ x^2(1 + u) = 36. \end{cases}$$

Avaldades kummastki võrrandist  $x^2$  uue otsitava  $u$  kaudu ja ühendades saadud avaldised võrdsusmärgiga, saame võrrandi

$$\frac{15}{2u - u^2} = \frac{36}{1 + u}$$

ehk

$$12u^2 - 19u + 5 = 0.$$

Selle võrrandi lahendid on:

$$u_1 = \frac{5}{4} \text{ ja } u_2 = \frac{1}{3}.$$

Esimese lahendi järgi saame:

$$x^2 = \frac{36}{1 + u} = 16, \text{ millest } x = \pm 4 \text{ ja}$$

seejärel

$$y = ux = \pm 5.$$

Teise  $u$  väärtuse järgi saame, et

$$x^2 = 27, \text{ millest } x = \pm 3\sqrt{3} \text{ ning}$$

seejärel

$$y = \pm \sqrt{3}.$$

Seega saame kokku neli lahendit:

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ y_1 = 5; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -4 \\ y_2 = -5; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 3\sqrt{3} \\ y_3 = \sqrt{3}; \end{cases} \begin{cases} x_4 = -3\sqrt{3} \\ y_4 = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Lahendada järgmised võrrandisüsteemid kas harilike või erivõtetega:

$$31. \begin{cases} x + y = 12 \\ xy = 35. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x - y = 8 \\ xy = 20. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x^2 - y^2 = 5. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 33 \\ 2x^2 - y^2 = 46. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x^2 + y^2 = 74 \\ x + y = 12. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x - y = 2. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x^2 - y^2 = 32 \\ x - y = 4. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} x^2 - y^2 = 120 \\ x + y = 20. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} = \frac{3}{2} \\ xy = 80. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} = \frac{3}{7} \\ xy = 10. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \\ x + y = 4. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 43 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 67 \\ x + y = 9. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} - \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{3}{2} \\ x - y = 6. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 10 \\ \sqrt{xy} = 16. \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} x^2 - y = 7. \\ x^2 y = 18. \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} x^3 - y^3 = 37 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3} \\ x^2 - y^2 = 8. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 18 \\ x + y = 12. \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 45 \\ xy = 3. \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{5}{2} \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \\ x^2 y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{5}{2} \\ x^2 + y^2 = 20. \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{65}{6} \\ x - y = 5. \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 61 \\ x + y - \sqrt{xy} = 7. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{5}{2} \\ x + y = 10. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = 2 \\ \sqrt{xy} = 15. \end{cases}$$

$$41. \begin{cases} x + y^2 = 11 \\ xy^2 = 18. \end{cases}$$

$$42. \begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$43. \begin{cases} \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2} \\ x^2 + y^2 = 45. \end{cases}$$

$$44. \begin{cases} \frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} = \frac{21}{2} \\ x - y = 3. \end{cases}$$

$$45. \begin{cases} 25x^2 - y^2 = 36 \\ xy = 16. \end{cases}$$

$$46. \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{5}{6} \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

$$47. \begin{cases} x^3 + y^3 = 152 \\ x^2 y + xy^2 = 120. \end{cases}$$

$$48. \begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 45. \end{cases}$$

$$49. \begin{cases} x\sqrt{\frac{x}{y}} - y\sqrt{\frac{y}{x}} = 30 \\ x + y = 20. \end{cases}$$

$$50. \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 84 \\ x + y - \sqrt{xy} = 6. \end{cases}$$

51.  $x + y = xy = x^2 + y^2.$       51.  $x - y = xy = x^2 + y^2.$
52.  $x - y = x^2 - y^2 = x^3 - y^3.$
52.  $x + y = x^2 + y^2 = x^3 + y^3.$
53.  $\begin{cases} x + y = 5 \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$       53.  $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^4 + y^4 = 82. \end{cases}$
54.  $\begin{cases} x - y = 3 \\ x^5 - y^5 = 33. \end{cases}$       54.  $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^5 + y^5 = 242. \end{cases}$
55.  $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{112}{9} \\ x + y = 4. \end{cases}$
55.  $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{27}{4} \\ x - y = 2. \end{cases}$
56.  $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{23}{4} \\ x - y = 1. \end{cases}$
56.  $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{11}{4} \\ x + y = 3. \end{cases}$
57.  $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\frac{2x}{3x-2y}} = 2 \\ x^2 - 8 = 2x(2y-3). \end{cases}$
57.  $\begin{cases} \sqrt{\frac{4x+3y}{5y}} + \sqrt{\frac{5y}{4x+3y}} = 2 \\ y^2 + 8 = 2y(x+2). \end{cases}$
58.  $\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2} \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$
58.  $\begin{cases} \sqrt{\frac{5x}{x-y}} - \sqrt{\frac{x-y}{5x}} = \frac{21}{10} \\ xy + x + y = 11. \end{cases}$

$$59. \begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \frac{20}{x+y} \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$

$$59. \begin{cases} x + y - \sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{30}{x-y} \\ xy = 80. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} x + y = 444 \\ \sqrt[3]{x+10} + \sqrt[3]{y+14} = 12. \end{cases}$$

$$60. \begin{cases} x - y = 2 \\ \sqrt[3]{x+14} - \sqrt[3]{y-21} = 1. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} xy = 12 \\ xz = 6 \\ y^2 + z^2 = 20. \end{cases}$$

$$61. \begin{cases} xy = 54 \\ yz = 36 \\ x^2 - z^2 = 20. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} xy = 48 \\ yz = 54 \\ xz = 72. \end{cases}$$

$$62. \begin{cases} xy = 9z \\ xz = 4y \\ yz = 16x. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} xy + yz = 28 \\ xz + yz = 30 \\ xy + xz = 10. \end{cases}$$

$$63. \begin{cases} x^2 + y^2 = 52 \\ y^2 + z^2 = 100 \\ x^2 + z^2 = 80. \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} xy + xz + yz = 27 \\ x - y = 6 \\ y - z = 3. \end{cases}$$

$$64. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 98 \\ x - y = 5 \\ x + z = 8. \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} x(x+y+z) = 70 \\ y(x+y+z) = 28 \\ z(x+y+z) = 98. \end{cases}$$

$$65. \begin{cases} x(x-y+z) = 12 \\ y(x-y+z) = 9 \\ z(x-y+z) = 6. \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} x + y + z = 20 \\ xyz = 130 \\ x - 2y + z = 5. \end{cases}$$

$$66. \begin{cases} x - y + z = 8 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 74 \\ x - y + 3z = 22. \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} x + y + z = 12 \\ xz + yz = 35 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 50. \end{cases}$$

$$67. \begin{cases} x - y + z = 3 \\ xz - yz = 2 \\ x^2 - y^2 + z^2 = 25. \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ yz = x^2. \end{cases}$$

$$68. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ yz = 6. \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x + y + z = 30 \\ xy = 60. \end{cases}$$

$$69. \begin{cases} y^2 + z^2 = x^2 - 6 \\ x + y + z = 8 \\ yz = 3. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} x^2 + z^2 - y^2 = 1 \\ x + y + z = 3 \\ y^2 = xz. \end{cases}$$

$$70. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 35 \\ x - y + z = 3 \\ y^2 = xz + 4. \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} x + y + z = 13 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 61 \\ 2yz = xy + xz. \end{cases}$$

$$71. \begin{cases} x - y + z = 14 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 244 \\ 2z(x - y) = xy. \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 30 \\ y^2 = 2xz + 21 \\ 2x = z. \end{cases}$$

$$72. \begin{cases} xy + xz - yz = 4 \\ z^2 = 2xy - 4 \\ 3x = 2z. \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 12 \\ \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 18 \\ 3y + 10z = 3. \end{cases}$$

$$73. \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 6 \\ \frac{4}{x} - \frac{3}{y} = 7 \\ 8x - 5z = 1. \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 5 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 6 \\ \frac{3}{y} - \frac{1}{xz} = 1. \end{cases}$$

$$74. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 13 \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 1 \\ \frac{1}{xy} - \frac{2}{z} = 0. \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + xz + yz = 11 \\ xyz = 6. \end{cases}$$

$$75. \begin{cases} x - y + z = 0 \\ xz - xy - yz = -31 \\ xyz = 30. \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} x + y + z = 0 \\ xyz = 30 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 38. \end{cases}$$

$$76. \begin{cases} x + y + z = 9 \\ xyz = 24 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 29. \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} x + u = 5 \\ y + z = 9 \\ y^2 + u = 28 \\ x + z^2 = 18.. \end{cases}$$

$$77. \begin{cases} u - x = 3 \\ z - y = 5 \\ u + y^2 = 12 \\ z^2 - x = 44. \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} x + u = 10 \\ y - z = 1 \\ yz = 20 \\ y^2 + u^2 = 74. \end{cases}$$

$$78. \begin{cases} u - x = 5 \\ x^2 + z^2 = 52 \\ xz = 24 \\ y^2 + u^2 = 90. \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} xu = yz \\ x + u = 13 \\ y + z = 11 \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 170. \end{cases}$$

$$79. \begin{cases} xy = zu \\ x + y = 11 \\ z - u = 2 \\ x^2 + y^2 - z^2 - u^2 = 21. \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 252 \\ x + y = 5 \\ z + u = 7 \\ xy = zu. \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} x^3 + y^3 - z^3 + u^3 = 187 \\ x + y = 8 \\ z - u = 1 \\ xy = zu. \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = a \\ \sqrt{xy} = b. \end{cases}$$

$$81. \begin{cases} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} = \frac{a}{b} \\ xy = (a^2 - b^2)^2. \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} x^3 + xy^2 = a \\ y^3 + x^2y = b. \end{cases}$$

$$82. \begin{cases} ax^2 + bxy = a \\ by^2 + axy = b. \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} x^2 + y^2 = 5a^2 \\ y^2 + z^2 = 13a^2 \\ z^2 - 8x^2 = a^2. \end{cases}$$

$$83. \begin{cases} x^2 - y^2 = 4an \\ y^2 - z^2 = n^2 - 2an \\ x^2 + z^2 = n^2 + 2an + a^2. \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b} = \frac{z^2}{c} \\ bcx^2 + acy^2 + abz^2 = m^2. \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = a^2 \\ \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} xy = a \\ xz = b \\ y^2 + z^2 = n^2. \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x^2 + z^2 = b \\ y^2 + z^2 = c. \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} x(y + z) = a \\ y(x + z) = b \\ z(x + y) = c. \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} x + y = az \\ x - y = bz \\ x^2 + y^2 = cz. \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} x^2 - (y - z)^2 = a \\ y^2 - (x - z)^2 = b \\ z^2 - (x - y)^2 = c. \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} x(y + z) = 4a^2 \\ y(x + z) = 3a^2 \\ z(x + y) = 2a^2. \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ y^2 + z^2 = b \\ z^2 + x^2 = c. \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} (x + y)(x + z) = a^2 \\ (x + y)(y + z) = b^2 \\ (x + z)(y + z) = c^2. \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ x^2 = y^2 + z^2. \end{cases}$$

$$89. \begin{cases} x + y + z = a \\ yz = bx \\ x^2 = y^2 + z^2. \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} 2x - 3y + z = 5n \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3m^2 + 2n^2 \\ xy + xz + yz = 3m^2 - n^2. \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} x + y + z = 2m + n \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2m^2 + 3n^2 \\ (x + y)z = 2mn. \end{cases}$$

## § 2. Võrrandisüsteemide koostamine.

91. Lahutada arv 209 kaheks niisuguseks teguriks, millede summa on 30.

92. Lahutada arv 195 kaheks niisuguseks teguriks, millede vahe on 2.

93. Kahe arvu summa on 13, nende ruutude summa on 89. Leida need arvud.

94. Kahe arvu ruutude vahe on 200. Kui kumbagi arvu vähendada 1 võrra, siis nende ruutude vahe on 180. Leida need arvud.

95. Kui kahe antud arvu korrutisega liita väiksem antud arv, siis saame 54. Kui aga sama korrutisega liita suurem antud arv, siis saame 56. Leida need arvud.

96. Kahekohalise arvu numbrite korrutis on kolm korda väiksem kui arv ise. Kui otsitavale arvule lisada 18, siis saame samade numbritega arvu, kuid vahetatud kohtadega. Leida see arv.

97. Kahe positiivse täisarvu korrutis on kolm korda suurem kui nende arvude summa; nende ruutude summa on 160. Leida need arvud.

98. Kahe arvu summa on 22 ja nende arvude kuupide summa on 2926. Leida need arvud.

99. Kahe arvu vahe on 3, nende arvude kuupide vahe on 657. Leida need arvud.

100. Leida niisugune murd, mille lugeja ja nimetaja ruutude summa on 25, murru ja tema pöördarvu summa aga  $\frac{25}{12}$ .

101. Kahekohalise arvu numbrite ruutude summa on 34; otsitava arvu korrutis arvuga, millel on samad numbrid, kuid numbrite kohad on vahetatud, on 1855. Leida see arv.

102. Kolme niisuguse arvu summa, mis moodustavad aritmeetilise ahel-proportsiooni, on 54; nende arvude korrutis on 5760. Leida need arvud.

103. Kolme niisuguse arvu summa, mis moodustavad aritmeetilise ahel-proportsiooni, on 12; nende arvude ruutude summa on 66. Leida need arvud.

104. Kolmekohalise arvu numbrite summa on 11 ja numbrite ruutude summa on 45. Kui otsitavast arvust lahutada 198, siis saame samade numbritega arvu, mis on aga kirjutatud ümberpööratud järjekorras. Leida esialgne arv.

105. Kolme niisuguse arvu summa, mis moodustavad ahelvõrde, on 19 ja nende arvude ruutude summa on 133. Leida need arvud.

**106.** Leida kolmekohaline arv, mis vastab järgmistele tingimustele: otsitava arvu jagatis tema numbrite summaga on 48; numbrite korrutise ja numbrite summa jagatis on  $10\frac{2}{3}$ ; kümneliste number on teiste numbrite aritmeetiline keskmine.

**107.** Leida kaks niisugust arvu, millede ruutude summa on nende esimeste astmete summast  $a$  võrra suurem, kuid ruutude vahe on esimeste astmete vahest  $b$  võrra suurem.

**108.** Kahe arvu summa ja vahe suhtuvad nagu  $p$  ja  $q$ , samade arvude summa ja vahe korrutis on  $a$ . Leida need arvud.

**109.** Ristküliku pindala on  $112 \text{ cm}^2$ . Selle ristküliku kahele lähisküljele ehitatud ruutude pindalade summa on  $260 \text{ cm}^2$ . Leida ristküliku küljed.

**110.** Ristküliku külgede suhe on 6. Nendele külgedele ehitatud ruutude pindalade summa on  $592 \text{ cm}^2$ . Leida ristküliku küljed.

**111.** Trapetsi kõrgus on 18 cm. Tema pindala on võrdne niisuguse ristküliku pindalaga, mis on ehitatud trapetsi alustele; ülemise aluse kolmekordne ja alumine alus on kokku kõrguse neljakordne. Leida trapetsi alused.

**112.** Täisnurkse kolmnurga hüpotenuus on kaatetist 1 cm võrra pikem, kuid hüpotenuusi ja selle kaateti summa on teisest kaatetist 5 korda suurem. Leida selle kolmnurga küljed.

**113.** Täisnurkse kolmnurga übermõõt on 24 cm ja pindala on  $24 \text{ cm}^2$ . Leida kolmnurga küljed.

**114.** Täisnurkse kolmnurga übermõõt on 208 cm ja kaatete summa on hüpotenuusist 30 cm võrra suurem. Leida kolmnurga küljed.

**115.** Rombi diagonaalide summa on übermõõdust 6 cm võrra väiksem. Arvutada rombi külg ja diagonaalid, teades, et rombi pindala on  $24 \text{ cm}^2$ .

116. Kahe teineteist välimiselt puudutava ringi pindalade summa on  $90\pi$  cm<sup>2</sup>. Arvutada ringide diameetrid, kui nende keskpunktide vaheline kaugus on 12 cm.

117. Avaldada täisnurkse kolmnurga kaatetid, kui hüpotenuus on  $a$  ja pindala on  $S$ .

118. Avaldada täisnurkse kolmnurga küljed, kui selle kolmnurga pindala on  $S$  ja übermõõt on  $2p$ .

119. Leida täisnurkse kolmnurga küljed tema übermõõdu  $2p$  ja kaatetite vahe  $d$  järgi.

120. Leida rombi diagonaalid tema külje  $a$  ja pindala  $S$  järgi.

121. Paigal seisev keha hakkas ühtlaselt kiirenevalt liikuma. Selleks hetkeks, kui käidud tee pikkus oli 1440 m, oli keha saavutanud kiiruse 24 meetrit sekundis. Kui kaua ja missuguse kiirendusega liikus keha?

122. Kahe jõu sihid moodustavad täisnurga ja resultantjõud on 15 kG. Kui ühte neist jõududest vähendada 4 kG võrra ja teist suurendada 6 kG võrra, siis resultant on 17 kG. Leida jõudude suurused.

✕ 123. Kahe linna vahet, millede vahemaa on 450 km, liiguvad reisirong ja kaubarong. Reisirong sõidab selle vahemaa 8 tunni võrra lühema ajaga kui kaubarong. Pärast kummagi rongi liikumiskiiruse suurendamist 5 km võrra tunnis hakkab reisirong seda vahemaad läbima ainult 6 tunni võrra lühema ajaga kui kaubarong. Leida kummagi rongi liikumiskiirus.

124. Punktidest  $A$  ja  $B$ , millede vahemaa on 28 km, hakkas kaks jalgratturit ühel ja samal ajal teineteisele vastu sõitma. Pärast 1-tunnilist liikumist nad kohtusid ja jätkasid peatumata sõitu. Esimene saabus punkti  $B$  35 minutit varem kui teine punkti  $A$ . Leida kummagi jalgratturi sõidukiirus.

✕ 125. Kaks keha hakkab täisnurga haarasid mööda tipu poole liikuma. Algul on kehade kaugus teineteisest 13 cm,

esimese keha kiirus  $1 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ , teise kiirus  $4 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ . Leida kehade kaugused nurga tipust, kui on teada, et 2 sekundit pärast liikumise algust nende kehade vaheline kaugus on 5 cm.

**126.** Paaki on juhitud kaks toru, ühe kaudu voolab vesi välja, teise kaudu sisse. Kui torud on mõlemad korruga avatud, siis tühi paak saab 24 tunni jooksul täis. Kui torude ristlõike pindala niiviisi suurendada, et esimene toru tühjendaks paagi 2 tunni võrra kiiremini, ja teine täidaks 2 tunni võrra kiiremini, siis mõlema toru korruga avatud olles paak saaks 12 tunni jooksul täis. Mitme tunniga esimene toru tühjendab paagi ja mitme tunniga teine täidab ta?

**127.** Sõiduki esiratas teeb 18-meetrilisel teel 10 pööret rohkem kui tagaratas. Kui esiratta übermõõtu suurendada 6 dm võrra ja tagaratta übermõõtu vähendada 6 dm võrra, siis samal teel esiratas teeks 4 pööret rohkem kui tagaratas. Leida kummagi ratta übermõõt.

**128.** Sõiduki tagaratas teeb 27-meetrilisel teel 5 pööret vähem kui esiratas. Kui tagaratta übermõõtu suurendada 3 dm võrra ja esiratta übermõõtu vähendada 3 dm võrra, siis samal teel tagaratas teeks 9 pööret vähem kui esiratas. Leida kummagi ratta übermõõt.

**129.** Kangkaalu õlad ei ole ühepikkused ja seetõttu kaal ei näita õigesti; keha kaalumise tulemus on  $p$  grammi, kui keha on esimesel kausil, ja  $q$  grammi, kui ta pannakse teisele kausile. Leida keha õige kaal.

**130.** Kolme elektrijuhtme takistus on 11 oomi, kui nad on ühendatud järjestikku; nende juhtmete takistus on 1 oom, kui nad on ühendatud paralleelselt. Arvutada iga üksiku juhtme takistus, teades, et ühe juhtme takistus on 1 oomi võrra väiksem kui kahe teise juhtme takistuste summa.

**131.** Leida kahe aine erikaalud, kui segu, milles on  $a$  kilogrammi esimest ainet ja  $b$  kilogrammi teist ainet, on erikaa-

luga  $p$ , aga segu, milles on  $c$  kilogrammi esimest ainet ja  $d$  kilogrammi teist ainet, on erikaaluga  $q$ .

**132.** Punktidest  $M$  ja  $N$ , millede kaugus teineteisest on  $d$  sentimeetrit, alustavad sirgjoont  $MN$  mööda ühel ja samal ajal liikumist kaks keha, mis kohtuvad siis, kui esimene on ära käinud  $a$  sentimeetrit. Leida kehade liikumiskiirused, teades, et sentimeetrite arv, mis väljendab esimese ja teise keha kiiruste vahet, on võrdne sekundite arvuga, mis on möödunud liikumise algusest kuni kohtumiseni.

**133.** Kaks keha liiguvad ringjoont mööda; üks katab ringjoone  $d$  sekundi võrra lühema ajaga kui teine; kui nad liiguvad ühtepidi, siis nad kohtuvad iga  $m$  sekundi pärast. Kui suure osa ringjoonest katab kumbki keha sekundis?

**134.** Kolm keha liiguvad sirgjoont mööda punktist  $M$  punkti  $N$  poole. Teine keha algas liikumist  $a$  sekundi võrra ja kolmas  $b$  sekundi võrra hiljem kui esimene keha. Esimese keha kiirus on teise keha kiirusest  $c$  sentimeetri võrra sekundis väiksem, kolmanda keha kiirus on  $v$  sentimeetrit sekundis. Leida kaugus  $MN$  ja esimese keha kiirus, kui on teada, et kõik kolm keha saavad punktisse  $N$  ühel ja samal ajal.

### § 3. Kahe otsitavaga ruutvõrrandisüsteemide graafilise lahendamine.

Joonestatakse antud süsteemi kummagi võrrandi graafikud ja leitakse nende graafikute lõikepunktide koordinaadid; koordinaatide väärtusepaarid ongi antud võrrandisüsteemi lahenditeks.

Lahendada graafiliselt võrrandisüsteemid:

<b>135.</b> $x + y = 5;$	<b>136.</b> $x - y = 2;$	<b>137.</b> $x^2 + y^2 = 25;$
$xy = 2.$	$xy = 3.$	$y = \frac{4}{3}x.$
<b>138.</b> $x^2 + y^2 = 41;$	<b>139.</b> $x^2 + y^2 = 61;$	<b>140.</b> $x + y^2 = 19;$
$x - y = 1.$	$xy = 30.$	$y + x^2 = 13.$

## Peatükk XV.

### Progressioonid.

#### § 1. Aritmeetiline progressioon.

Aritmeetiliseks progressiooniks nimetatakse niisugust arvude jada, milles (alates teisest arvust) iga arvu ja sellele eelneva arvu vahe on muutumatu. Seda antud jada kohta muutumatut vahet nimetatakse aritmeetilise progressiooni vaheks (teda tähistatakse tähega  $d$ ). Jada esimest liiget tähistatakse sümboliga  $a_1$  (või ka lihtsalt tähega  $a$ ), järgnevate liikmete tähisteks on:  $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ . Viimase liikme tähisteks on  $a_n$  (või ka  $u$ ).

Kui aritmeetilise progressiooni vahe  $d$  on positiivne arv, siis progressiooni nimetatakse tõusvaks; progressiooni nimetatakse alanevaks, kui vahe  $d$  on negatiivne.

Aritmeetilise progressiooni liikmete summat, alates mingist liikmest, mida loeme siis esimeseks liikmeks ja tähistame sümboliga  $a_1$ , kuni mingi liikmeni, mida loeme viimaseks liikmeks ja tähistame sümboliga  $a_n$ , tähistatakse sümboliga  $s_n$  (või ka lihtsalt tähega  $s$ ).

Aritmeetilise progressiooni viimase liikme valem:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) \quad \text{ehk} \quad u = a + d(n - 1);$$

summa valemid:

$$s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \quad \text{ehk} \quad s = \frac{a + u}{2} \cdot n;$$

$$s = \frac{2a + d(n - 1)}{2} \cdot n.$$

1. Leida progressiooni

2, 5, 8, 11, ...

15. liige ja 15 liikme summa.

1. Leida progressiooni

3, 7, 11, 15, ...

20. liige ja 20 liikme summa.

2. Leida progressiooni

— 3, — 5, — 7, — 9, ...

18. liige ja 18 liikme summa.

2. Leida progressiooni

— 2, — 6, — 10, — 14, ...

13. liige ja 13 liikme summa.

3. Leida kõikide täisarvude summa, alates 21 kuni 50.

3. Leida kõikide kahekohaliste arvude summa.

4. Leida järjestikuste täisarvude summa 1 kuni  $n$ .

4. Leida järjestikuste täisarvude summa 1 kuni  $2n$ .

5. Leida täisarvude summa 1 kuni 100.

5. Leida täisarvude summa 1 kuni 1000.

6. Leida kõikide paarisarvude summa kuni 200.

6. Leida kõikide paaritu arvude summa kuni 175.

7. Leida  $n$ -es paaritu arv ja  $n$  paaritu arvu summa.

7. Leida  $n$ -es paarisarv ja  $n$  paarisarvu summa.

8. Leida progressiooni

$a, 2a - b, 3a - 2b, \dots$

$n$  liikme summa.

8. Leida progressiooni

$b, 2b - a, 3b - 2a, \dots$

$n$  liikme summa.

9. Arvude 3 ja 24 vahele paigutada 6 arvu nii, et need koos antud arvudega moodustaksid aritmeetilise progressiooni.

9. Arvude 17 ja 82 vahele paigutada 12 arvu nii, et tekiks aritmeetiline progressioon.

10. Arvude 27 ja — 28 vahele paigutada 10 arvu nii, et tekiks aritmeetiline progressioon.

10. Arvude 17 ja — 19 vahele paigutada 17 arvu nii, et tekiks aritmeetiline progressioon.

11.  $a=7$ ;  $d=4$ ;  $n=13$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

11.  $a=2$ ;  $d=2$ ;  $n=40$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

12.  $a=56$ ;  $d=-3$ ;  $n=11$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

12.  $a=63$ ;  $d=-5$ ;  $n=8$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

13.  $u=149$ ;  $d=7$ ;  $n=22$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

13.  $u=65$ ;  $d=5$ ;  $n=12$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

14.  $u=-22$ ;  $d=-2$ ;  $n=40$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

14.  $u=13$ ;  $d=-3$ ;  $n=58$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

15.  $a=2$ ;  $u=87$ ;  $s=801$ . Leida  $d$  ja  $n$ .

15.  $a=-13$ ;  $u=27$ ;  $s=77$ . Leida  $d$  ja  $n$ .

16.  $a=10$ ;  $u=-9$ ;  $s=10$ . Leida  $d$  ja  $n$ .

16.  $a=160$ ;  $u=17$ ;  $s=1062$ . Leida  $d$  ja  $n$ .

17.  $a=3$ ;  $u=63$ ;  $n=16$ . Leida  $d$  ja  $s$ .

17.  $a=1$ ;  $u=81$ ;  $n=17$ . Leida  $d$  ja  $s$ .

18.  $a=36$ ;  $u=8$ ;  $n=15$ . Leida  $d$  ja  $s$ .

18.  $a=169$ ;  $u=8$ ;  $n=24$ . Leida  $d$  ja  $s$ .

19.  $a=10$ ;  $n=14$ ;  $s=1050$ . Leida  $u$  ja  $d$ .

19.  $a=-40$ ;  $n=20$ ;  $s=-40$ . Leida  $u$  ja  $d$ .

20.  $a=-45$ ;  $n=31$ ;  $s=0$ . Leida  $u$  ja  $d$ .

20.  $a=16$ ;  $n=9$ ;  $s=0$ . Leida  $u$  ja  $d$ .

21.  $u=21$ ;  $n=7$ ;  $s=105$ . Leida  $a$  ja  $d$ .

21.  $u=92$ ;  $n=11$ ;  $s=517$ . Leida  $a$  ja  $d$ .

22.  $u=105$ ;  $n=16$ ;  $s=840$ . Leida  $a$  ja  $d$ .

22.  $u=-143$ ;  $n=33$ ;  $s=-2079$ . Leida  $a$  ja  $d$ .

23.  $a=4$ ;  $d=5$ ;  $u=49$ . Leida  $n$  ja  $s$ .

23.  $a = 1; d = 3; u = 22$ . Leida  $n$  ja  $s$ .
24.  $a = 14,5; d = 0,7; u = 32$ . Leida  $n$  ja  $s$ .
24.  $a = -28; d = 7; u = 28$ . Leida  $n$  ja  $s$ .
25.  $d = 6; n = 10; s = 340$ . Leida  $a$  ja  $u$ .
25.  $d = \frac{1}{3}; n = 50; s = 425$ . Leida  $a$  ja  $u$ .
26.  $d = \frac{1}{2}; n = 25; s = -75$ . Leida  $a$  ja  $u$ .
26.  $d = -\frac{3}{4}; n = 33; s = -33$ . Leida  $a$  ja  $u$ .
27.  $a = 2; d = 5; s = 245$ . Leida  $n$  ja  $u$ .
27.  $a = 40; d = -4; s = 180$ . Leida  $n$  ja  $u$ .
28.  $a = 41; d = 2; s = 4784$ . Leida  $n$  ja  $u$ .
28.  $a = 18; d = 6; s = 1782$ . Leida  $n$  ja  $u$ .
29.  $d = 3; u = 29; s = 155$ . Leida  $n$  ja  $a$ .
29.  $d = 5; u = 77; s = 623$ . Leida  $n$  ja  $a$ .
30.  $d = 4; u = 88; s = 1008$ . Leida  $n$  ja  $a$ .
30.  $d = 1,5; u = 45; s = 628,5$ . Leida  $n$  ja  $a$ .
31. Progressiooni kolmas liige on 25; kümnes liige on  $-3$ . Leida esimene liige ja vahe.
31. Progressiooni viies liige on 13, üheksas liige on 19. Leida esimene liige ja vahe.
32. Progressiooni neljas liige on 10, seitsmes liige on 19. Leida esimese kümne liikme summa.
32. Progressiooni viies liige on  $-8$ , seitsmeteistkümnes liige on 28. Leida esimese viieteistkümne liikme summa.
33. Progressiooni neljas liige on 9, üheksas liige on  $-6$ . Mitu liiget progressiooni algusest peab võtma, et nende summa oleks 54?
33. Progressiooni kümnes liige on 4, üheksateistkümnes liige on  $-32$ . Mitu liiget peab progressiooni algusest võtma, et nende summa oleks 180?
34. Progressiooni kolmanda ja seitsmenda liikme summa on 4, teise ja neljateistkümnenenda liikme summa on  $-8$ . Leida progressioon.

34. Progressiooni 4. ja 10. liikme summa on 44 aga 2. ja 15. liikme summa on 53. Leida progressioon.

35. Leida progressiooni vahe, kui 1. liige on 100 ja esimese kuue liikme summa on 5 korda suurem kui järgneva kuue liikme summa.

35. Leida progressiooni 1. liige, kui vahe on 4 ja esimese viie liikme summa on kolm korda väiksem kui järgneva viie liikme summa.

36. Koostada progressioon esimese liikmega 1 ja viimase liikmega 21 nii, et selle progressiooni kõikide liikmete summa suhtub 1 ja 21 vahel olevate liikmete summaga nagu 11 : 9.

36. Koostada progressioon alates arvust 1 ja lõpetades arvuga 29 nii, et progressiooni kõikide liikmete summa suhtub 1 ja 29 vahel olevate liikmete summaga nagu 4 : 3.

37. Progressiooni esimene liige on 1; esimese  $m$  liikme summa suhtub esimese  $n$  liikme summaga nagu  $m^2 : n^2$ . Leida progressioon.

37. Progressiooni esimene liige on 2; esimese  $m$  liikme summa suhtub esimese  $n$  liikme summaga nagu  $m(m + 1) : n(n + 1)$ . Leida progressioon.

38. Leida progressiooni  $m + n$  liikme summa, kui  $m$ -es liige on  $n$  ja  $n$ -es liige on  $m$ .

38. Leida progressiooni esimese  $m - n$  liikme summa, kui esimese  $m$  liikme summa on  $n$  ja esimese  $n$  liikme summa on  $m$ .

39. Leida progressioon, teades, et tema esimese ja teise liikme summa on 7 ja samade liikmete korrutis on 10.

39. Leida progressioon, teades, et tema teise ja esimese liikme vahe on  $a$  ja samade liikmete korrutis on  $\frac{a^2}{16}$ .

40. Leida rea

$$1 - 3 + 5 - 7 + \dots$$

100 liikme summa.

41. Leida progressioon, teades, et tema esimese kolme liikme summa on 15 ja nende liikmete korrutis on 80.

41. Leida progressioon, teades, et tema esimese kolme liikme summa on null ja nende liikmete ruutude summa on 50.

42. Leida progressioon, teades, et selle teise ja neljanda liikme summa on 16 ning esimese ja viienda liikme korrutis on 28.

42. Leida progressioon, teades, et selle esimese ja viienda liikme summa on 12, kuid teise ja neljanda liikme korrutis on 32.

43. Kumera hulknurga nurkade kraadides mõõdetud suurused moodustavad järjestikku progressiooni, mille vahe on  $10^\circ$ ; selle hulknurga kõige väiksem nurk on  $100^\circ$ . Mitu külge on hulknurgal.

44. Kumera hulknurga nurkade kraadides mõõdetud suurused moodustavad järjestikku progressiooni, mille vahe on  $5^\circ$ ; selle hulknurga kõige väiksem nurk on  $120^\circ$ . Leida hulknurga külgede arv.

45. Ohutühjas ruumis vabalt langev keha läbib esimese sekundi vältel 4,9 meetrit ja iga järgneva sekundi vältel 9,8 meetri võrra rohkem kui eelneva sekundi vältel. Kui pika tee katab keha 21. sekundi vältel ja kui pika tee kogu 21 sekundi jooksul?

46\*. Mitu sekundit kukub keha 4410 meetri kõrguselt?

47\*. Üles visatud keha kaotab igas sekundis 9,8 m oma kiirusest. Mitu sekundit liigub keha ülespoole, kui ta visati vertikaalselt algkiirusega 656,6 meetrit sekundis?

48\*. Mitme sekundi pärast kukub keha maha, kui ta visati vertikaalselt üles algkiirusega 784 meetrit sekundis?

---

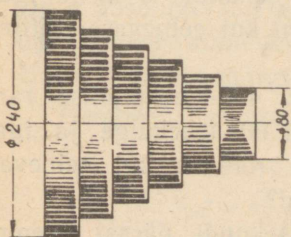
\* Ülesannetes 46—50, 53, 61 ja 62 ei arvestata õhu vastupanu liikumisele. Raskusjõu kiirendus on  $9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ .

49\*. Kui suure algkiirusega visati keha vertikaalselt üles, kui ta 1,5 minuti pärast tagasi maha kukkus?

50\*. Kui kõrgele tõusis vertikaalselt üles visatud keha ja kui suure algkiirusega ta üles visati, kui ta 1 minuti pärast tagasi maha kukkus?

51. Nurga haarade vahele on ehitatud 15 paralleelset sirglõiku nii, et kõrvuti asetsevate lõikude vahelised kaugused on võrdsed ja iga järgnev sirglõik on eelnevast 3 cm võrra pikem. Leida esimese ja viimase lõigu pikkus, kui kõikide lõikude summa on 405 cm.

52. Mägises maakohas langeb õhu temperatuur suvel kõrguse iga 100 meetri kohta  $0,7^{\circ}\text{C}$  võrra. Kell 11 on temperatuur mäel  $14,8^{\circ}\text{C}$ , aga mäejalal  $26^{\circ}\text{C}$ . Kui kõrgel on vaatleja mäel?



Joon. 4.

53\*. Mitme sekundi pärast jõuab kaevu kukkuv kivi põhja, kui kaevu sügavus on 44,1 m?

54. Rihmaratas (joonis 4) koosneb kuuest astmest. Diameetrid moodustavad aritmeetilise progressiooni. Kõige suurem diameeter on 240 mm, kõige väiksem 80 mm. Leida teised diameetrid.

55. Turist jõudis mäkke tõusmisel esimesel päeval 900 m kõrgusele, igal järgneval päeval tõuseb ta aga 50 m võrra vähem kui eelneval päeval. Mitme päevaga jõuab ta mäetipule, kui selle kõrgus on 5250 m?

56. Vedur tuli reisijate jaamast kaubajaama, millede vahemaa on 3 km. Seejuures vedur liikus esimese minuti vältel 480 m ja iga järgneva minuti vältel 40 m võrra vähem kui eelneva minuti vältel. Mitme minutiga jõudis vedur ühest jaamast teise?

57. Maanteed mööda sõidavad ühes ja samas suunas hobusõiduk ja auto. Hobusõiduk on autost 84 m ees ja liigub ühtlaselt kiirusega 3 m sekundis. Auto aga liigub esimese sekundi vältel 8 m ja igas järgnevas sekundis 0,1 m võrra vähem kui eelnevas. Kui kaua aja pärast auto möödub hobusõidukist?

58. Kahest kohast, millede vahemaa on 240 m, liiguvad kaks keha teineteisele vastu. Esimene keha alustas liikumist 3 sekundit varem kui teine ja liigub ühtlaselt kiirusega 10 m sekundis. Teine keha läbib esimesel sekundil 2 m ja igal järgneval sekundil 1 m võrra rohkem kui eelneval. Mitu sekundit pärast esimese keha liikumise algust need kehad kohtuvad?

59. Kahest kohast, millede vahemaa on 153 m, liiguvad kaks keha teineteisele vastu. Esimene keha läbib igas sekundis 10 m, teine keha aga esimeses sekundis 3 m ja igas järgnevas sekundis 5 m võrra rohkem kui eelnevas. Mitme sekundi pärast kehad kohtuvad?

60. Üliõpilane sai raamatukogust 400-leheküljelise raamatu. Esimesel päeval luges ta läbi 60 lehekülge ja igal järgneval päeval 10 lehekülje võrra rohkem kui eelneval. Mitme päevaga on raamat läbi loetud?

61\*. Kaevu lastud kivi jõuab 4 sekundi pärast veepinnani. Leida kaevu sügavus veepinnani.

62\*. Parašütist, hüpates aerostaadi korvist välja, avas langevarju siis, kui ta oli 100 meetrit kukkunud. Kui palju aega möödus langevarju avamiseni?

63. Laskevõistluste jaoks määrati auhindu; kõige suurem nendest oli väärtusega 150 rbl., iga järgneva väärtus oli eelneva väärtusest ühe ja sama võrra väiksem, kuni kõige väiksema auhinnani, mille väärtus oli 30 rbl. Auhindade koguväärtus on 360 rbl. Mitu auhinda oli määratud?

64. Hulknurga übermõõt on 158 cm, kusjuures külgede pikkused moodustavad aritmeetilise progressiooni, mille vahe

on 3 cm. Hulknurga kõige suurem külg on 44 cm. Mitu külge on hulknurgal?

65. Rong, väljudes jaamast, suurendab ühtlaselt oma kiirust ning 25 minuti pärast on tema kiirus 60 km tunnis. Leida rongi kiirendus minutis.

## § 2. Geomeetriline progressioon.

Geomeetriliseks progressiooniks nimetatakse niisugust arvude jada, milles (alates teisest arvust) iga arvu ja sellele eelneva arvu jagatis on muutumatu. Seda muutumatut jagatist nimetatakse geomeetrilise progressiooni teguriks (mille tähiseks on  $q$ ).

Kui geomeetrilise progressiooni teguri  $q$  absoluutväärtus on arvust 1 suurem, siis progressiooni nimetatakse tõusvaks; kui  $q$  absoluutväärtus on arvust 1 väiksem, siis progressiooni nimetatakse alanevaks; kui  $q$  on negatiivne, siis progressiooni liikmete märgid vahelduvad.

Geomeetrilise progressiooni valemid:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \quad \text{ehk} \quad u = a q^{n-1};$$

$$s_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} \quad \text{ehk} \quad s = \frac{u q - a}{q - 1} \quad \text{ehk} \quad s = \frac{a - u q}{1 - q}.$$

66. Leida progressiooni 10, 20, 40, ... kümne liikme summa.

66. Leida progressiooni 5, 15, 45, ... kaheksa liikme summa.

67. Leida progressiooni  $-4, 16, -64, \dots$  seitsme liikme summa.

67. Leida progressiooni 3, 6, 12, ... kümne liikme summa.

68. Leida progressiooni  $3, -1, \frac{1}{3}, \dots$  kaheksa liikme summa.

68. Leida progressiooni  $-2, 1, -\frac{1}{2}, \dots$  üheteistkümne liikme summa.

69. Leida progressiooni  $\sqrt{\frac{2}{3}}, 1, \sqrt{\frac{3}{2}}, \dots$  viie liikme summa.

69. Leida progressiooni  $\sqrt{\frac{5}{6}}, 1, \sqrt{\frac{6}{5}}, \dots$  seitsme liikme summa.

70. Leida progressiooni  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \dots$  esimese  $n$  liikme summa.

70. Leida progressiooni  $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$  esimese  $n$  liikme summa.

71. Leida progressiooni  $\sqrt{6}, 3\sqrt{2}, 3\sqrt{6}, \dots$  esimese  $n$  liikme summa.

71. Leida progressiooni  $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \dots$  esimese  $n$  liikme summa.

72. Arvude 47 ja 1269 vahele paigutada kaks arvu nii, et tekib geomeetriline progressioon.

72. Arvude 31 ja 496 vahele paigutada kolm arvu nii, et tekib geomeetriline progressioon.

73. Arvude  $\frac{a}{b^2}$  ja  $\frac{b}{a^2}$  vahele paigutada viis arvu nii, et tekib geomeetriline progressioon.

73. Arvude  $\frac{b^2}{a^3}$  ja  $\frac{a^2}{b^3}$  vahele paigutada 9 arvu nii, et tekib geomeetriline progressioon.

74. Leida geomeetrilise progressiooni 6 liikme summa, kui üldliige on  $3 \cdot 2^{n-1}$ , kusjuures  $n$  on liikme (järjekorra) number.

74. Leida geomeetrilise progressiooni 5 liikme summa, kui progressiooni üldliige on  $2 \cdot 5^{m-1}$  ja  $m$  on liikme number.

75. Leida geomeetrilise progressiooni  $n$  liikme summa, kui üldliige on  $(-1)^n a^{n-1} b^{m-n+1}$  ja  $n$  on liikme number.

75. Leida geomeetrilise progressiooni  $n$  liikme summa, kui üldliige on  $(-1)^n a^{m-n+1} b^{n-1}$ .

76.  $a=6$ ;  $q=3$ ;  $n=8$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

76.  $a=-5$ ;  $q=2$ ;  $n=9$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

77.  $a=5$ ;  $q=-\frac{1}{5}$ ;  $n=6$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

77.  $a=\frac{3}{4}$ ;  $q=\frac{2}{3}$ ;  $n=10$ . Leida  $u$  ja  $s$ .

78.  $u=128$ ;  $q=2$ ;  $n=7$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

78.  $u=78$  125;  $q=5$ ;  $n=8$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

79.  $u=\frac{2}{27}$ ;  $q=-\frac{2}{3}$ ;  $n=5$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

79.  $u=-243$ ;  $q=-\frac{3}{2}$ ;  $n=6$ . Leida  $a$  ja  $s$ .

80.  $a=3$ ;  $u=12$  288;  $n=5$ . Leida  $q$  ja  $s$ .

80.  $a=8$ ;  $u=10$  368;  $n=5$ . Leida  $q$  ja  $s$ .

81.  $a=81$ ;  $u=-10$   $\frac{2}{3}$ ;  $n=6$ . Leida  $q$  ja  $s$ .

81.  $a=\frac{1}{64}$ ;  $u=-\frac{16}{243}$ ;  $n=6$ . Leida  $q$  ja  $s$ .

82.  $q=2$ ;  $n=7$ ;  $s=635$ . Leida  $a$  ja  $u$ .

82.  $q=-2$ ;  $n=8$ ;  $s=85$ . Leida  $a$  ja  $u$ .

83.  $q=-\frac{1}{2}$ ;  $n=8$ ;  $s=\frac{85}{16}$ . Leida  $a$  ja  $u$ .

83.  $q=\frac{1}{3}$ ;  $n=6$ ;  $s=\frac{364}{9}$ . Leida  $a$  ja  $u$ .

84.  $a=3$ ;  $q=2$ ;  $u=96$ . Leida  $n$  ja  $s$ .

84.  $a=5$ ;  $q=3$ ;  $u=405$ . Leida  $n$  ja  $s$ .

85.  $a=9$ ;  $q=\frac{2}{3}$ ;  $u=\frac{32}{27}$ . Leida  $n$  ja  $s$ .

85.  $a=\frac{3}{8}$ ;  $q=-4$ ;  $u=96$ . Leida  $n$  ja  $s$ .

86.  $a=2$ ;  $u=1458$ ;  $s=2186$ . Leida  $q$  ja  $n$ .

86.  $a=1$ ;  $u=2401$ ;  $s=2801$ . Leida  $q$  ja  $n$ .

87.  $a=3$ ;  $u=96$ ;  $s=189$ . Leida  $q$  ja  $n$ .

87.  $a = 2; u = 1458; s = 1514$ . Leida  $q$  ja  $n$ .  
 88.  $a = 7; q = 3; s = 847$ . Leida  $u$  ja  $n$ .  
 88.  $a = 8; q = 2; s = 4088$ . Leida  $u$  ja  $n$ .  
 89.  $a = 2; q = -3; s = -364$ . Leida  $u$  ja  $n$ .  
 89.  $a = 3; q = -2; s = 33$ . Leida  $u$  ja  $n$ .  
 90.  $u = -216; q = -6; s = -186$ . Leida  $a$  ja  $n$ .  
 90.  $u = 250; q = 5; s = 312$ . Leida  $a$  ja  $n$ .  
 91.  $u = 32\,768; q = 4; s = 43\,690$ . Leida  $a$  ja  $n$ .  
 91.  $u = 1215; q = -3; s = 915$ . Leida  $a$  ja  $n$ .  
 92.  $a = 15; n = 4; s = 225$ . Leida  $q$  ja  $u$ .  
 92.  $a = 12; n = 4; s = 480$ . Leida  $q$  ja  $u$ .  
 93.  $a = 12; n = 3; s = 372$ . Leida  $q$  ja  $u$ .  
 93.  $a = 15; n = 3; s = 105$ . Leida  $q$  ja  $u$ .  
 94.  $u = 135; n = 3; s = 195$ . Leida  $q$  ja  $a$ .  
 95.  $u = 8; n = 3; s = 14$ . Leida  $q$  ja  $a$ .

96. Geomeetrilise progressiooni esimene liige on 1, kolmanda ja viienda liikme summa on 90. Leida progressioon.

96. Progressiooni esimene liige on 3, seitsmenda ja neljanda liikme vahe on 168. Leida progressioon.

97. Progressiooni esimese ja kolmanda liikme summa on 15 ning teise ja neljanda liikme summa on 30. Leida kümne liikme summa.

97. Progressiooni kolmanda ja esimese liikme vahe on 24 ning viienda ja esimese liikme vahe on 624. Leida kuue liikme summa.

98. Leida neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, teades, et esimene on teisest 36 võrra suurem ja kolmas on neljandast 4 võrra suurem.

98. Leida neli arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, teades, et selle äärmiste liikmete summa on 27 ja keskmiste liikmete summa on 18.

99. Kolme arvu, millede summa on 114, võib vaadelda nagu geomeetrilise progressiooni kolme järjestikust liiget või

nagu aritmeetilise progressiooni 1., 4. ja 25. liiget. Leida need arvud.

99. Kolm arvu, millede summa on 124, on geomeetrilise progressiooni kolmeks järjestikuseks liikmeks, kuid samaaegselt ka aritmeetilise progressiooni 3-ndaks, 13-ndaks ja 15-ndaks liikmeks. Leida need arvud.

100. Leida kuuest liikmest koosnev geomeetiline progressioon, teades, et kolme esimese liikme summa on 112 ja kolme viimase liikme summa on 14.

100. Leida kuueliikmeline geomeetiline progressioon, teades, et paaritunumbriga liikmete summa on 455 ja paarisnumbriga liikmete summa on 1365.

101. Kolm arvu moodustavad geomeetrilise progressiooni ja nende summa on 26; kui nende arvudega liita vastavalt 1, 6 ja 3, siis saame kolm arvu, mis moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leida need arvud.

101. Kolm arvu moodustavad aritmeetilise progressiooni ja nende summa on 15; kui nende arvudega liita vastavalt 1, 4 ja 19, siis saame kolm arvu, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leida need arvud.

102. Kui aritmeetilist progressiooni moodustavast neljast arvust lahutada vastavalt 2, 7, 9 ja 5, siis saame arvud, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leida aritmeetilise progressiooni liikmed.

102. Kui neljast niisugusest arvust, mis moodustavad geomeetrilise progressiooni, lahutada vastavalt 5, 6, 9 ja 15, siis saame arvud, mis moodustavad aritmeetilise progressiooni. Leida geomeetrilise progressiooni liikmed.

103. Leida geomeetrilise progressiooni  $m$ -es ja  $n$ -es liige, kui selle  $(m+n)$ -es liige on  $k$  ja  $(m-n)$ -es liige on  $l$ .

103. Leida progressiooni  $n$ -es ja  $(m+p)$ -es liige, kui  $m$ -es liige on  $k$  ja  $p$ -es liiges on  $l$ .

**104.** Tõestada, et igas geomeetrilises progressioonis algusest ja lõpust ühekaugusel seisvate liikmete korrutis on jääv ning on võrdne alg- ja lõppliikme korrutisega.

104. Tuletada geomeetrilise progressiooni  $n$  liikme korrutise valem.

**105.** Arvutada geomeetrilise progressiooni viie liikme korrutis, kui esimene liige on  $\sqrt{2}$  ja tegur on  $\frac{1}{2}$ .

105. Arvutada geomeetrilise progressiooni  $n$  liikme korrutis, kui progressiooni esimene liige on  $\sqrt{a}$  ja tegur on  $\frac{1}{2}$ .

**106.** Treipingi spindli lubatav pöörete arv minutis kõigub  $n_1 = 11$  ja  $n_{11} = 350$  vahel. Peale nende on võimalik veel üheksa pöörete arvu:  $n_2, n_3, \dots, n_{10}$ , mis koos eelmistega moodustavad geomeetrilise progressiooni. Leida need pöörete arvud.

**107.** Arv 9750 jaotati 4 osaks nii, et need osad moodustavad geomeetrilise progressiooni; äärmiste liikmete vahe suhtub keskmiste liikmete vahega nagu  $3,1(6) : 1$ . Leida need osad.

**108.** Arvud, mis väljendavad risttahuka pikkust, laiust ja kõrgust, moodustavad geomeetrilise progressiooni; risttahuka põhja pindala on  $108 \text{ m}^2$  ja täispindala on  $888 \text{ m}^2$ . Leida risttahuka mõõted.

**109.** Arvud, mis väljendavad risttahuka pikkust, laiust ja kõrgust, moodustavad geomeetrilise progressiooni; risttahuka ruumala on  $216 \text{ m}^3$  ja diagonaal on  $\sqrt{364} \text{ m}$ . Leida risttahuka mõõted.

**110.** Pärast õhupumba kannu iga edasi-tagasi käiku jääb kupli alla  $0,83$  seal olnud õhu hulgast. Leida, kui suur on õhurõhk kupli all pärast 15-ndat pumbalööki, kui esialgne rõhk oli  $760 \text{ mm}$ .

111. Anumas on 50 liitrit 80-protsendilist piiritust. Mitu liitrit puhast piiritust jääb veel anumasse, kui sealt 20 korda võetakse ära 1 liiter vedelikku ja iga kord pannakse 1 liiter vett asemele?

112. Tõrres oli 1250 liitrit 80-protsendilist alkoholi. Sealt võeti 3 korda üks ja sama hulk vedelikku ja pandi iga kord sama palju vett asemele. Pärast seda oli tõrres 125 liitrit puhast alkoholi. Kui suur hulk vedelikku võeti tõrrest iga kord?

Kui alanevas geomeetrilises progressioonis liikmete arv  $n$  järjest kasvab, siis progressiooni viimane liige  $a_n$  järjest kahaneb, lähenedes oma väärtuselt nullile, seepärast niisugusel korral kirjutamegi, et  $a_n = 0$ ; sel korral valemist

$$s_n = \frac{a - a_n q}{1 - q} \text{ saame valemi}$$

$$s = \frac{a}{1 - q},$$

mis on alaneva geomeetrilise progressiooni liikmete lõputu summa valemiks.

Arvutada järgmised alanevate geomeetriliste progressioonide liikmete lõputud summad:

$$113. \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad 113. \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$$

$$114. \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots \quad 114. \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots$$

$$115. \quad \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} + \dots$$

$$115. \quad \sqrt{5} + \sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{\sqrt{5}}{2} + \dots$$

$$116. \quad \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{2 - \sqrt{2}} + \frac{1}{2} + \dots$$

$$116. \quad \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - 1 + \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} + \dots$$

117. Koostada niisugune alanev geomeetriline progressioon, milles iga liige on  $K$  korda suurem kui sellele liikmele järgnevate liikmete lõputu summa.

117. Koostada niisugune alanev geomeetriline progressioon, milles iga liige on  $K$  korda väiksem kui sellele liikmele järgnevate liikmete lõputu summa.

118. Sirglõik  $AB$  poolitatakse punktis  $C$ , siis lõik  $AC$  poolitatakse punktis  $D$ , seejärel  $CD$  poolitatakse punktis  $E$ ,  $DE$  poolitatakse punktis  $F$ ,  $EF$  poolitatakse punktis  $G$  jne. lõpmatult. Leida arv, millele läheneb seejuures jaotuspunkti kaugus punktist  $A$ .

118. Sirglõik  $AB$  poolitatakse punktis  $C$ , siis lõik  $BC$  poolitatakse punktis  $D$ , seejärel  $CD$  poolitatakse punktis  $E$ ,  $DE$  poolitatakse punktis  $F$ ,  $EF$  poolitatakse punktis  $G$  jne. lõpmatult. Leida arv, millele läheneb seejuures jaotuspunkti kaugus punktist  $A$ .

119. Ruudu sisse, mille külg on  $a$ , ehitatakse selle ruudu külgede poolitamise teel teine ruut, saadud ruudu sisse ehitatakse samal viisil uus ruut jne. lõpmatult. Arvutada nende ruutude ümbermõõtude lõputu summa ja pindalade lõputu summa.

119. Võrdkülgse kolmnurga sisse, mille külg on  $a$ , ehitatakse selle kolmnurga külgede poolitamise teel teine võrdkülgne kolmnurk, sellesse ehitatakse samal viisil uus kolmnurk jne. lõpmatult. Arvutada nende kolmnurkade ümbermõõtude lõputu summa ja pindalade lõputu summa.

120. Antud on võrdkülgne kolmnurk, mille külg on  $a$ ; selle kolmnurga kõrgused võetakse teise kolmnurga külgedeks; saadud kolmnurga kõrgused võetakse omakorda uue kolmnurga külgedeks jne. lõpmatult. Leida lõputu algebraalne summa, mille liidetavaiks ja lahutatavaiks on vaheldumisi: 1) järjestikused kolmnurkade ümbermõõdud, 2) järjestikused kolmnurkade pindalad.

120. Antud on ruut, mille diagonaal on  $a$ ; selle ruudu külg võetakse teise ruudu diagonaaliks; teise ruudu külg võetakse uue ruudu diagonaaliks jne. lõpmatult. Leida lõputu algebraline summa, mille liidetavaiks ja lahutata-vaiks on vaheldumisi: 1) järjestikused ruutude ümbermõõdud, 2) järjestikused ruutude pindalad.

121. Ringi sisse, mille raadius on  $R$ , on ehitatud ruut, ruudu sisse on ehitatud jälle ring, sellesse ringi teine ruut jne. Leida ringide pindalade lõputu summa ja ruutude pindalade lõputu summa.

121. Ringi sisse, mille raadius on  $R$ , on ehitatud korrapärane kolmnurk, kolmnurga sisse on ehitatud ring, ringi sisse teine korrapärane kolmnurk jne. Leida ringide pindalade lõputu summa ja kolmnurkade pindalade lõputu summa.

122.  $45^\circ$ -se nurga haaral on võetud punkt, mis on nurga tipust kaugusel  $a$ . Sellest punktist on ehitatud ristlõik teisele haarale; selle ristlõigu aluspunktist on ehitatud ristlõik esimesele haarale jne. lõpmatult. Leida nende ristlõikude pikkuste summa.

122.  $60^\circ$ -se nurga haaral on võetud punkt, mis asetseb tipust kaugusel  $a$ . Sellest punktist on ehitatud ristlõik teisele haarale; selle ristlõigu aluspunktist on ehitatud ristlõik esimesele haarale jne. lõpmatult. Leida nende ristlõikude pikkuste summa.

## Peatükk XVI.

### Logaritmid.

#### § 1. Logaritmimine.

Antud arvu  $N$  logaritmiks alusel  $a$  nimetatakse niisugust astendajat, millega alust  $a$  astendades saame arvu  $N$ .

Seda seost tähistatakse nõnda:

$$x = \log_a N.$$

Lähtudes logaritmi definitsioonist, lahendada järgmised ülesanded:

1. Missuguse arvu logaritm alusel 2 on 3?
1. Missuguse arvu logaritm alusel 3 on 2?
2. Missuguse arvu logaritm alusel 8 on  $\frac{1}{3}$ ?
3. Missugusel alusel on arvu 32 logaritm 5?
3. Missugusel alusel on arvu 81 logaritm 4?
4. Missugusel alusel on arvu 4 logaritm  $\frac{1}{3}$ ?
4. Missugusel alusel on arvu 9 logaritm  $\frac{1}{2}$ ?
5. Millega võrdub arvu 16 logaritm alusel 2?
5. Millega võrdub arvu 27 logaritm alusel 3?
6. Millega võrdub arvu 3 logaritm alusel 81?
6. Millega võrdub arvu 7 logaritm alusel 49?
7. Missugusel alusel log 16 on 2?
7. Missugusel alusel log 81 on 2?

8. Leida  $x$ , teades, et  $\log_4 x = 3$ .
8. Leida  $x$ , teades, et  $\log_5 x = 3$ .
9. Missuguse arvu logaritmi alusel 5 on  $-2$ ?
9. Missuguse arvu logaritmi alusel 3 on  $-3$ ?
10. Leida arvu  $\frac{1}{8}$  logaritmi alusel 2.
10. Leida arvu  $\frac{1}{81}$  logaritmi alusel 3.
11. Leida arvu 1024 logaritmi alusel 2; 4; 32.
11. Leida arvu 729 logaritmi alusel 3; 9; 27.
12. Leida arvu 81 logaritmi alusel  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{9}$ ;  $\frac{1}{81}$ .
12. Leida arvu 256 logaritmi alusel  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{16}$ .
13. Missuguse arvu logaritmi alusel 8 on  $-3$ ?
13. Missuguse arvu logaritmi alusel 6 on  $-4$ ?
14. Missugusel alusel on arvu  $\frac{1}{243}$  logaritmi  $-5$ ?
14. Missugusel alusel on arvu  $\frac{1}{64}$  logaritmi  $-3$ ?
15. Leida murru  $\frac{1}{64}$  logaritmid alusel 2, 4 ja 8.
15. Leida murru  $\frac{1}{729}$  logaritmid alusel 3, 9 ja 27.
16. Leida murru  $\frac{1}{729}$  logaritmid alusel  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{9}$  ja  $\frac{1}{27}$ .
16. Leida murru  $\frac{1}{512}$  logaritmid alusel  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  ja  $\frac{1}{8}$ .
17. Alus on  $\frac{3}{4}$ ; leida arvud, mille logaritmid on:  
0; 1;  $-1$ ; 2;  $-2$ ; 3;  $-3$ .
17. Alus on  $1\frac{1}{2}$ ; leida arvud, mille logaritmid on:  
0; 1;  $-1$ ; 3;  $-3$ ; 4;  $-4$ .
18. Alus on  $2\frac{1}{2}$ ; leida arvude  $\frac{2}{5}$ ,  $6\frac{1}{4}$ , 1 ja  $\frac{8}{125}$  logaritmid.

18. Alus on  $\frac{3}{5}$ ; leida arvude  $\frac{3}{5}$ ,  $2\frac{7}{9}$ , 1 ja  $\frac{27}{125}$  logaritmid.

19. Missugustel alustel on arvu 125 logaritmid 3, 1, -3, -1?

19. Missugustel alustel on arvu 343 logaritmid 3, -3, 1, -1?

20. Kui alus on 0,5, siis millised on arvude 1, 4, 2,  $\frac{1}{4}$ , 8 ja  $\frac{1}{8}$  logaritmid?

20. Kui alus on 0,2, siis millised on arvude 1, 25, 5, 0,04, 125 ja 0,008 logaritmid?

21. Missuguse arvu logaritm alusel 3 on  $\frac{3}{4}$ ?

21. Missuguse arvu logaritm alusel 2 on  $\frac{2}{3}$ ?

22. Missuguste täisarvude vahel on arvude 3, 5, 10, 25, 100 ja 500 logaritmid alusel 2?

22. Missuguste täisarvude vahel on arvude 5, 12, 862, 1613 ja 11 111 logaritmid alusel 10?

23. Missuguste negatiivsete täisarvude vahel on murdude 0,02, 0,034, 0,005, 0,000675 ja 0,00009 logaritmid alusel 10?

23. Missuguste negatiivsete täisarvude vahel on arvu 597 logaritm alusel 0,1?

24. Missugusel alusel on arvu 5 logaritm 2?

24. Missugusel alusel on arvu 3 logaritm 2?

25. Leida arv, mille logaritm alusel 8 on  $-\frac{3}{4}$ .

25. Leida arv, mille logaritm alusel 25 on  $-\frac{2}{3}$ .

26. Missugusel alusel on arvu 7 logaritm  $-1\frac{1}{2}$ ?

26. Missugusel alusel on arvu 5 logaritm  $-\frac{3}{4}$ ?

27. Logaritmid alus on -8; leida arvud, mille logaritmid on -1, 3, -2,  $\frac{1}{3}$  ja  $-\frac{1}{3}$ .

27. Logaritmidel alus on  $-81$ ; leida arvud, mille logaritmid on  $2, -1, -2, \frac{1}{4}$  ja  $-\frac{1}{2}$ .

28. Leida arvude  $-\frac{8}{27}, \frac{4}{9}$  ja  $5\frac{1}{16}$  logaritmid alusel  $-\frac{2}{3}$ .

28. Leida arvude  $\frac{1}{4}, -2 - 32$  ja  $64$  logaritmid alusel  $-\frac{1}{8}$ .

29. Millega võrduvad  $\sqrt[5]{9}$  logaritmid alustel  $3, 81, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}$ ?

29. Millega võrduvad  $\sqrt[3]{49}$  logaritmid alustel  $7, \frac{1}{7}, 49, \frac{1}{343}$ ?

30. Missugusel alusel on arvu  $\sqrt{8}$  logaritmi  $\frac{3}{4}, -3, -1, \frac{2}{3}$ ?

30. Missugusel alusel on arvu  $\sqrt[3]{25}$  logaritmi  $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}, -1, -2$ ?

31. Millega võrdub  $\log_a 1$ ?

32. Millega võrdub  $\log_{10} \infty$ ?

32. Millega võrdub  $\log_{0,1} \infty$ ?

33. Millega võrdub  $\log_{10} 0$ ?

33. Millega võrdub  $\log_{0,1} 0$ ?

34. Mis on suurem, kas  $\log_{14} 15$  või  $\log_{15} 14$ ?

Kui mingi arv on koostatud teistest arvudest korrutamise, jagamise, astendamise või juurimise teel, siis selle arvu logaritmi saab väljendada koostisarvude logaritmidel kaudu, näiteks arvude  $ab$  ja  $\frac{a}{b}$  logaritme saab väljendada arvude  $a$  ja  $b$  logaritmidel kaudu. Niisugust antud avaldise logaritmi väljendamist selles avaldises esinevate arvude logaritmidel kaudu, nimetatakse antud avaldise logarit-

mimiseks. Logaritmimine toimub nelja järgmise teoreemi põhjal:

$$1) \log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N;$$

$$2) \log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N;$$

$$3) \log_a (N^k) = k \log_a N;$$

$$4) \log_a \sqrt[k]{N} = \frac{1}{k} \log_a N, \text{ s.o.}$$

1) korrutise logaritm võrdub tegurite logaritmide summaga;

2) murru logaritm võrdub lugeja ja nimetaja logaritmide vahega;

3) astme logaritm võrdub astendatava logaritmi ja astendaja korrutisega;

4) juure logaritm võrdub juuritava logaritmi ja juurija jagatisega.

35.  $\log 6$  avaldada  $\log 2$  ja  $\log 3$  kaudu.

35.  $\log 21$  avaldada  $\log 3$  ja  $\log 7$  kaudu.

36.  $\log 1 \frac{2}{3}$  avaldada  $\log 5$  ja  $\log 3$  kaudu.

36.  $\log 2 \frac{3}{5}$  avaldada  $\log 13$  ja  $\log 5$  kaudu.

37.  $\log 125$  avaldada  $\log 5$  kaudu.

37.  $\log 81$  avaldada  $\log 3$  kaudu.

38.  $\log \sqrt[4]{11}$  avaldada  $\log 11$  kaudu.

38.  $\log \sqrt[5]{2}$  avaldada  $\log 2$  kaudu.

39. Kui logaritmide aluseks on 3, siis  $\log_3 81 = 4$  ja  $\log_3 243 = 5$ . Millega võrdub  $\log_3 (81 \cdot 243)$  ja  $\log_3 \frac{81}{243}$ ?

39. Kui logaritmide aluseks on 2, siis  $\log_2 64 = 6$  ja  $\log_2 1024 = 10$ . Millega võrdub  $\log_2 (1024 \cdot 64)$  ja  $\log_2 \frac{64}{1024}$ ?

40. Missuguste algarvude logaritmid peavad teada olema, et samal alusel saaks leida logaritmid arvudele:

$$24, \frac{125}{27}, \sqrt{38}, \sqrt[3]{\frac{7}{25}}?$$

40. Missuguste algarvude logaritme peab teadma, et samal alusel saaks leida logaritmid arvudele: 18, 27, 36, 40, 50?

41. Teades, et  $\log 2 = 0,30103$ ,  $\log 3 = 0,47712$  ja  $\log 5 = 0,69897$ , leida  $\log 6$ ,  $\log 15$ ,  $\log 30$ ,  $\log 10$  ja  $\log 1000$ .

41. Teades, et  $\log 2 = 0,30103$ ,  $\log 5 = 0,69897$  ja  $\log 7 = 0,84510$ , leida  $\log 14$ ,  $\log 35$ ,  $\log 50$ ,  $\log 100$  ja  $\log 10000$ .

42. Eelmise ülesande andmete järgi leida  $\log 2\frac{1}{2}$ ,  $\log 1\frac{2}{3}$ ,  $\log \frac{2}{25}$ ,  $\log 0,6$  ja  $\log 0,016$ .

42. Ülesande nr. 41 andmete järgi leida  $\log 2\frac{4}{5}$ ,  $\log \frac{2}{7}$ ,  $\log \frac{5}{14}$ ,  $\log 0,07$  ja  $\log 0,0014$ .

43. Ülesande nr. 41 andmete järgi leida  $\log 20$ ,  $\log 200$ ,  $\log 15$ ,  $\log 150$  ja  $\log 1500$ .

43. Ülesande nr. 41 andmete järgi leida  $\log 70$ ,  $\log 700$ ,  $\log 35$ ,  $\log 350$  ja  $\log 3500$ .

44. Ülesande nr. 41 andmete järgi leida  $\log 0,3$ ,  $\log 0,003$ ,  $\log 0,06$  ja  $\log 0,0006$ .

44. Ülesande nr. 41 andmete järgi leida  $\log 0,2$ ,  $\log 0,002$ ,  $\log 0,14$  ja  $\log 0,0014$ .

Logaritmidaja järgmised tähega  $x$  tähistatud avaldised:

45.  $x = 2ab$ .

45.  $x = 3bc$ .

46.  $x = \frac{ab}{c}$ .

46.  $x = \frac{a}{bc}$ .

47.  $x = a^3b^2$ .

47.  $x = a^2bc^3$ .

48.  $x = \frac{a^2}{b^3 c^7}$ .

49.  $x = 2(a + b)$ .

50.  $x = \frac{3}{a^2 - b^2}$ .

51.  $x = \frac{(a - b)^2 c}{(a + b)d}$ .

52.  $x = 5a^2 b \sqrt[3]{c}$ .

53.  $x = \sqrt[5]{\frac{3a^3 b}{c^4}}$ .

54.  $x = 5a \sqrt[3]{a^2(a - b)}$ .

55.  $x = \frac{2ab^3}{c\sqrt{d}}$ .

56.  $x = \left(\sqrt[3]{\frac{10}{a}}\right)^5$ .

57.  $x = \frac{1}{a^n \sqrt{b}}$ .

58.  $x = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{1}{b}}$ .

59.  $x = a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{5}}$ .

60.  $x = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}$ .

61.  $x = \sqrt{2\sqrt{6}\sqrt{15}}$ .

62.  $x = \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{\sqrt[5]{c^3}}}$ .

48.  $x = \frac{a^5 b^6}{c^4}$ .

49.  $x = 5(a - b)$ .

50.  $x = \frac{a^2 - b^2}{7}$ .

51.  $x = \frac{a(b + c)}{(b - c)^2 d}$ .

52.  $x = 2b\sqrt{ac}$ .

53.  $x = \sqrt[4]{\frac{a^3}{2b^2 c}}$ .

54.  $x = 8a^2 \sqrt[5]{a(b + c)^2}$ .

55.  $x = \frac{a^2 \sqrt[3]{b}}{c\sqrt{d}}$ .

56.  $x = \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{1000}}\right)^7$ .

57.  $x = \frac{1}{a\sqrt[n]{b}}$ .

58.  $x = \sqrt{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{b}}$ .

59.  $x = a^{-3} b^{\frac{1}{3}}$ .

60.  $x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{p}{q}}$ .

61.  $x = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{21\sqrt[3]{6}}}$ .

62.  $x = \sqrt[5]{\frac{a^3 \sqrt[3]{b}}{c^2}}$ .

$$63. x = \frac{a^{-\frac{3}{4}} b^2}{c^{-\frac{1}{5}}}$$

$$63. x = \frac{a^{\frac{2}{5}} b^{-3}}{c^{-\frac{3}{4}}}$$

$$64. x = \sqrt[3]{\frac{24\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{4}\sqrt{6}}}$$

$$64. x = \sqrt{\frac{15\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{25}\sqrt{3}}}$$

$$65. x = \sqrt[3]{\frac{a^{-2}}{\sqrt{ab}} \cdot \sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$65. x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{ab}}{b} \cdot \sqrt{\frac{b}{a^3}}}$$

$$66. x = \sqrt[m]{a \sqrt[n]{b}}$$

$$66. x = \sqrt[n]{a \sqrt[b]{c}}$$

$$67. x = \sqrt[-m]{a \sqrt[-n]{b}}$$

$$67. x = \sqrt[-n]{a \sqrt[-n]{b \sqrt[c]{c}}}$$

$$68. x = \sqrt{2^{\sqrt{2}}}$$

$$68. x = 0,5^{\sqrt[5]{0,5}}$$

$$69. x = \log(\sqrt{2^{\sqrt{2}}})$$

$$69. x = \log(0,5^{\sqrt[5]{0,5}})$$

$$70. x = \log(10^{ab})$$

$$70. x = \log(a^{2n})$$

$$71. x = \frac{10 \log a}{\log(a^3)}$$

$$71. x = \frac{\log(a^2)}{\log^2 a}$$

$$72. x = \log[(a+b)^{\log(a+b)}]$$

$$72. x = \log \sqrt{\log(b^n)}$$

$$73. x = \log\left(\sqrt[5]{a^3 \sqrt[3]{a^2}}\right)$$

$$73. x = \log\left(\sqrt[3]{a^7 \sqrt[5]{a^4}}\right)$$

$$74. x = \log \frac{\sqrt{(a+b)^{2 \log(a-b)}}}{\sqrt{(a-b)^{\log(a+b)}}}$$

$$74. x = \log \frac{\sqrt[3]{(a^2+b^2)^{5 \log(a-b)}}}{\sqrt{(a-b)^{\log(a^2+b^2)}}}$$

Arvu vōi avaldise logaritmi jārgi vōib leida arvu enda vōi koostada avaldise.

Arvu leidmist tema logaritmi järgi ja avaldise koostamist selle avaldise logaritmi järgi nimetatakse potentseerimiseks.

Potentseerimine on logaritmime pöördtehe.

Potentseerida:

$$75. \log x = \log 7 - \log 3 + \log 2.$$

$$75. \log x = \log 3 + \log 5 - \log 2.$$

$$76. \log x = 3 \log 5 + 2 \log 3.$$

$$76. \log x = 2 \log 3 + 5 \log 2.$$

$$77. \log x = \frac{3}{5} \log 11 - \frac{2}{7} \log 5.$$

$$77. \log x = \frac{1}{3} \log 17 - \frac{5}{9} \log 3.$$

$$78. \log x = 2 \log 13 - \frac{2}{5} \log 2 - \frac{4}{3} \log 7.$$

$$78. \log x = 3 \log 5 - \frac{7}{3} \log 19 - \frac{2}{3} \log 2.$$

$$79. \log x = 3 \log a + 2 \log b - 4 \log c.$$

$$79. \log x = \log a - 3 \log b + 5 \log c.$$

$$80. \log x = \frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b - \frac{1}{4} \log c.$$

$$80. \log x = \frac{m}{n} \log a + \frac{q}{p} \log b.$$

$$81. \log x = \frac{\log 10}{2} - \frac{\log 5}{3}. \quad 81. \log x = \frac{\log a}{m} - \frac{\log b}{n}.$$

$$82. \log x = \frac{2}{5} \log (a + b) - \frac{3}{5} \log (a - b).$$

$$82. \log x = \frac{3}{2} \log (a - b) - \frac{5}{3} \log (a + b).$$

$$83. \log x = \log (a + b) - \frac{2}{3} \left( 2 \log a + \frac{3}{4} \log b \right).$$

$$83. \log x = 2 \log (a - b) + \frac{3}{4} \left( \log a - \frac{2}{3} \log b \right).$$

$$84. \log x = -3 \log a + \\ + \frac{1}{3} \left[ \log (a + b) + \frac{2}{5} \log (a - b) - \log b - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \log c \right].$$

$$84. \log x = -\frac{2}{3} \log b + \\ + \frac{3}{4} \left[ \log a - 2 \log c - \log (a - b) + \right. \\ \left. + \frac{3}{5} \log (a + b) \right].$$

## § 2. Kümwendlogaritmid.

85. Teades, et  $\log 2 = 0,30103$ , leida logaritmid arvudele 20, 2000, 0,2 ja 0,000002.

85. Teades, et  $\log 3 = 0,47712$ , leida logaritmid arvudele 300, 3000, 0,03 ja 0,0003.

86. Teades, et  $\log 5 = 0,69897$ , leida logaritmid arvudele 2,5, 500, 0,25 ja 0,005.

86. Teades, et  $\log 7 = 0,84510$ , leida logaritmid arvudele 0,7, 4,9, 0,049 ja 0,0007.

87. Teades, et  $\log 3 = 0,47712$  ja  $\log 7 = 0,84510$ , leida logaritmid arvudele 210 ja 0,021.

87. Teades, et  $\log 2 = 0,30103$  ja  $\log 7 = 0,84510$ , leida logaritmid arvudele 140 ja 0,14.

88. Teades, et  $\log 3 = 0,47712$  ja  $\log 5 = 0,69897$ , leida logaritmid arvudele 1,5, 0,12 ja 0,36.

88. Teades, et  $\log 5 = 0,69897$  ja  $\log 7 = 0,84510$ , leida logaritmid arvudele 3,5,  $\frac{5}{7}$ , 0,28,  $\frac{5}{49}$  ja 1,96.

89. Leida järgmiste arvude logaritmid: 8; 141; 954; 420; 640; 1235; 3907; 3010; 18,43; 2,05; 900,1; 0,73; 0,0028; 0,1008; 0,00005.

89. Leida järgmiste arvude logaritmid: 15; 154; 837; 510; 5002; 1309; 8900; 8,315; 790,7; 0,09; 0,6745; 0,000745; 0,04257; 0,00071.

90. Leida järgmiste arvude logaritmid: 2174,6; 1445,7; 2169,5; 8437,2; 46,472; 6,2853; 0,78938; 0,054294; 631,074; 2,79556; 0,747428; 0,00237158.

90. Leida järgmiste arvude logaritmid: 2578,4; 1323,6; 8170,5; 6245,3; 437,65; 87,268; 0,059372; 0,84938; 62,5475; 131,037; 0,593946; 0,00234261.

91. Leida arvud, millede logaritmid on<sup>1</sup>: 3,16227 (3,1623); 3,59207 (3,5921); 2,93318 (2,9332); 0,41078 (0,4108); 1,60065 (1,6007); 2,75686 (2,7569); 3,23528 (3,2353); 1,79692 (1,7969); 4,87806 (4,8781); 5,14613 (5,1461).

91. Leida arvud, millede logaritmid on: 3,07372 (3,0737); 3,69205 (3,6921); 1,64904 (1,6490); 2,16107 (2,1611); 0,70364 (0,7036); 1,31952 (1,3195); 4,30814 (4,3081); 3,00087 (3,0009); 2,69949 (2,6995); 6,57978 (6,5798).

92. Leida arvud, millede logaritmid on: 3,57686 (3,5769); 3,16340 (3,1634); 2,40359 (2,4036); 1,09817 (1,0982); 4,49823 (4,4982); 2,83882 (2,8388); 1,50060 (1,5006); 3,30056 (3,3006); 1,17112 (1,1711); 4,25100 (4,2510).

92. Leida arvud, millede logaritmid on: 3,33720 (3,3372); 3,09875 (3,0988); 0,70093 (0,7009); 4,04640 (4,0464); 1,41509 (1,4151); 2,32649 (2,3265); 4,14631 (4,1463); 3,01290 (3,0129); 5,39003 (5,3900).

93. Väljendada järgmised negatiivsed arvud poolnegatiivsel kujul: — 2,69537; — 4,21293; — 0,54225; — 1,68307; — 3,53820; — 5,89990.

93. Väljendada järgmised negatiivsed arvud poolnegatiivsel kujul: — 3,21729; — 1,73273; — 5,42936; — 0,51395; — 2,43780; — 4,22990.

---

<sup>1</sup> Sulgudes on antud logaritmid murdosad neljakohaliselt.

94. Teisendada järgmised poolnegatiivsel kujul antud arvud negatiivseteks:  $\overline{1,33278}$ ;  $\overline{3,52793}$ ;  $\overline{2,95426}$ ;  $\overline{4,23725}$ ;  $\overline{1,39420}$ ;  $\overline{5,67990}$ .

94. Teisendada järgmised poolnegatiivsel kujul antud arvud negatiivseteks:  $\overline{2,45438}$ ;  $\overline{1,73977}$ ;  $\overline{3,91243}$ ;  $\overline{5,12912}$ ;  $\overline{2,83770}$ ;  $\overline{4,28990}$ .

Kasutades logaritmide tabelit, leida järgmiste avaldiste väärtused:

- |  |   |
|--|---|
| 95. $311 \cdot 25,6$ .                               | 95. $4,51 \cdot 215$ .                              |
| 96. $758 \cdot 0,53$ .                               | 96. $0,037 \cdot 269$ .                             |
| 97. $6603 : 213$ .                                   | 97. $8132 : 338$ .                                  |
| 98. $3,264 : 0,078$ .                                | 98. $23,65 : 0,94$ .                                |
| 99. $23,5^2$ .                                       | 99. $11,8^2$ .                                      |
| 100. $0,028^3$ .                                     | 100. $0,0067^3$ .                                   |
| 101. $\sqrt[3]{12,5}$ .                              | 101. $\sqrt[3]{23,2}$ .                             |
| 102. $\sqrt[3]{0,052}$ .                             | 102. $\sqrt[3]{0,61}$ .                             |
| 103. $\frac{483,6 \cdot 2,138}{25,58}$ .             | 103. $\frac{47,54 \cdot 3,642}{145,4}$ .            |
| 104. $\frac{0,045 \cdot 7,513}{2,071 \cdot 0,864}$ . | 104. $\frac{14,5 \cdot 0,0178}{0,83 \cdot 3,105}$ . |
| 105. $\sqrt[10]{34,567}$ .                           | 105. $\sqrt[7]{71,238^3}$ .                         |
| 106. $\sqrt[9]{0,06432}$ .                           | 106. $\sqrt[8]{0,75^{15}}$ .                        |
| 107. $5 \sqrt[11]{3,1866}$ .                         | 107. $2 \sqrt[13]{2,7892}$ .                        |
| 108. $\frac{109}{716} \sqrt[93]{\frac{76}{93}}$ .    | 108. $\frac{21}{37} \sqrt[295]{\frac{119}{295}}$ .  |
| 109. $1,04^{100}$ .                                  | 109. $2,08^{30}$ .                                  |
| 110. $\sqrt[100]{100}$ .                             | 110. $\sqrt[200]{50}$ .                             |
| 111. $\sqrt[7]{0,098756^3}$ .                        | 111. $\sqrt[5]{0,98437^2}$ .                        |

$$112. \sqrt[3]{\left(\frac{37}{2939}\right)^5}$$

$$113. (8,53 \sqrt{10})^{\frac{2}{3}}$$

$$114. \left(\frac{38}{27}\right)^{0,07} \left(\frac{51}{43}\right)^{0,03}$$

$$115. \sqrt{0,006} \sqrt{0,17624}$$

$$116. \sqrt[5]{0,4293} \sqrt{\frac{19}{34}}$$

$$117. \frac{1}{0,7345^3 \cdot 0,164^2}$$

$$118. \sqrt[3]{0,054} \sqrt[3]{0,0003617}$$

$$119. \left(\frac{4}{7}\right)^{0,45}$$

$$120. \sqrt[15]{\left(\frac{1}{8}\right)^{1,1}}$$

$$121. \frac{0,0045 \cdot 7,5132}{2,0719 \cdot 0,864}$$

$$122. \frac{3,5216^3 \cdot 0,027^2}{0,21785}$$

$$123. \sqrt[9]{\frac{8}{7} \sqrt[6]{54321}}$$

$$124. \frac{0,0875}{9,8304} \sqrt{\frac{78}{0,007615}}$$

$$125. \sqrt[10]{\frac{2 \sqrt{118093}}{3 \sqrt{10}}}$$

$$126. \frac{0,170586^4 \cdot \sqrt{0,2}}{0,06561^3 \cdot \sqrt{0,1}}$$

$$112. \sqrt[9]{\left(\frac{43}{7243}\right)^4}$$

$$113. (2,38 \sqrt{10})^{\frac{3}{5}}$$

$$114. \left(\frac{25}{7}\right)^{0,03} \left(\frac{39}{19}\right)^{0,07}$$

$$115. \sqrt{0,89394} \sqrt{0,092}$$

$$116. \sqrt[8]{\frac{37}{43} \sqrt[5]{0,3798}}$$

$$117. \frac{1}{0,2127^2 \cdot 0,921^3}$$

$$118. \sqrt[5]{0,0007} \sqrt{0,09342}$$

$$119. \sqrt[3]{1 \frac{1}{3}}$$

$$120. \sqrt[0,8]{2,39977^{-9}}$$

$$121. \frac{14,51 \cdot 0,017085}{0,78 \cdot 3,1057}$$

$$122. \frac{40,12^2 \cdot 0,0113^3}{0,98763}$$

$$123. \sqrt{\frac{7}{5} \sqrt[4]{23468}}$$

$$124. \frac{0,0379}{2,4548} \sqrt{\frac{123}{0,009843}}$$

$$125. \sqrt[3]{0,261255 \sqrt{\frac{2}{7}}}$$

$$126. \frac{0,9^{-6} \cdot 5120^{0,4}}{\sqrt[3]{229376}}$$

$$127. \frac{5^{10} \sqrt{0,01059137}}{12,631}$$

$$128. \frac{8,36 \sqrt[3]{0,0067254}}{0,96578 \sqrt{0,000035746}}$$

$$129. \frac{87,285^2 \cdot \sqrt[10]{75,846}}{\sqrt[3]{-3,055}}$$

$$130. \sqrt[5]{\frac{0,03425 \sqrt[7]{136}}{0,00034}}$$

$$131. \sqrt[10]{58} \cdot 0,3599545^{-5}$$

$$132. \frac{(\sqrt[{-5}]{322625})^6}{(\sqrt[7]{10732874})^{-4}}$$

$$133. \frac{109}{716} \sqrt[3]{\frac{95\pi}{404}}$$

$$134. (9,8\pi \sqrt[5]{1,6325})^{\frac{2}{8}}$$

$$135. 0,0009^{0,0009}$$

$$136. 0,0376^{0,0376}$$

$$137. \sqrt[7,062]{0,4275}$$

$$138. 0,513 \sqrt[5]{0,69837}$$

$$127. \frac{10,59952^{10} \cdot \sqrt[3]{0,9}}{67851,3}$$

$$128. \frac{2,79 \sqrt[3]{0,0029745}}{0,79438 \sqrt{0,000054237}}$$

$$129. \frac{29,348^2 \cdot \sqrt{93,594}}{\sqrt[5]{-2,743}}$$

$$130. \sqrt[4]{\frac{0,26758 \sqrt[3]{0,4}}{0,006422}}$$

$$131. \sqrt[8]{0,06084925} \cdot 0,63^{-10}$$

$$132. \frac{1}{(0,03029067 \cdot \sqrt{4834,719})^{\frac{3}{5}}}$$

$$133. \frac{21}{37} \sqrt[4]{\frac{71\pi}{1503}}$$

$$134. (1,6224 \sqrt[3]{4\pi})^{\frac{3}{5}}$$

$$135. 0,0007^{0,0007}$$

$$136. 0,0289^{0,0289}$$

$$137. \sqrt[3,271]{0,2837}$$

$$138. 0,29342 \sqrt[7]{0,4126}$$

139. Täisnurkse kolmnurga pindala on 282,14 cm<sup>2</sup>; üks kaatet on teisest kolm korda suurem. Leida kaatetid.

140. Risttahuka ruumala on 385 m<sup>3</sup>. Leida selle risttahuka mõõted nii, et nad suhtuksid nagu 3 : 5 : 8.

141. Korrapärase kolmnurkse püramiidi ruumala on 187,2 cm<sup>3</sup>. Põhiserv on püramiidi kõrgusest kaks korda väiksem. Leida põhiserva pikkus.

142. Leida niisuguse kuubi serv, mille ruumala on kaks korda suurem kui kuubil, mille serva pikkus on 2,378 m.

143. Leida niisuguse kera ruumala, mille pindala on 0,038 m<sup>2</sup>.

144. Leida niisuguse koonuse põhja raadius  $R$ , mille ruumala  $V = 36,785 \text{ dm}^3$  ja kõrgus  $H = R$ .

145. Leida kuubi serv, kui kuubi ruumala  $V = 0,5 \text{ m}^3$ .

146. Puust kera, ujudes vees, tõrjub 2791,22 cm<sup>3</sup> vett ära. Leida kera raadius (puu erikaal on 0,5).

147. On tarvis valada seatinast kuul, mille ruumala on 2,332 dm<sup>3</sup>. Määrata vormi diameeter.

148. Koonuse ruumala on 96 cm<sup>3</sup>. Põhja raadius on kõrgusest neli korda väiksem. Leida koonuse põhja raadius.

149. Leida ringjoone kaare suurus kraadimõõdus, kui kaare pikkus  $S = 115,3 \text{ m}$  ja ringjoone raadius  $R = 667,5 \text{ m}$ .

150. Kui palju kaalub pronksist telefonitraad, mille pikkus on 1,25 km, kui traadi läbimõõt on 2,7 mm ja pronksi erikaal on  $9 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ?

151. Maakera keskmine tihedus on  $5,54 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Leida Maa mass. (Maa keskmine raadius on 6371 km.)

152. Kasutades valemit  $a = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ , leida Kuu kesktõmbe kiirendus  $a$ , teades, et Kuu kaugus Maast on 60,27 Maa raadiust ja tiirlemisvälde (ümber Maa) on 27,32 ööpäeva. (Maa keskmine raadius on 6371 km.)

153. Kasutades ühtlaselt kiireneva liikumise valemit  $s = \frac{gt^2}{2}$ , leida keha poolt 11 sekundi jooksul ära käidud tee pikkus  $s$ , kui kiirendus  $g = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ .

154. Soojuse hulka kalorites, mille tekitab  $i$ -ampriline vool  $t$  sekundi vältel juhtmes, mille takistus on  $r$  oomi, väljendab valem

$$Q = 0,24 i^2 r t.$$

Kui palju soojust tekib 1 tunni vältel 16-küünlalise lambi põlemisel, mis tarvitab 0,315-amprilist voolu, kui lambi niidi takistus on 357,2 oomi?

155. Leida korrapärase tetraeedri serva pikkus, kui selle tetraeedri ruumala  $V = 1 \text{ dm}^3$ .

156. Leida sulami tihedus, kui katsetest selgus, et sellest sulamist valmistatud silinder, mõõdetega  $R = 5,5 \text{ cm}$  ja  $H = 16,5 \text{ cm}$ , kaalub 13,09 kG.

157. Viht terastraati kaalub 20 kG. Traadi diameeter on 2,5 mm. Leida selle traadi pikkus (võttes terasest traadi erikaaluks  $7,96 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ).

158. Mitu liitrit gaasi mahutab kerakujuline balloon, mille raadius  $R = 1,738 \text{ dm}$ ?

159. Pendli võnke vältet arvutatakse valemi

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

järgi, kus  $l$  tähendab pendli pikkust ja  $g$  tähendab vaba langemise kiirendust. Moskva jaoks  $g = 9,81564 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ . Arvutada sekundipendli pikkus Moskva jaoks (s. o. niisuguse pendli pikkus, mille üks võnge vältab üks sekund).

Kui avaldises esinevad liitmise ja lahutamise tehted, siis saab seda avaldist logaritmidada alles pärast seda, kui ta on teisendatud logaritmitavaks, sest liitmise ja lahutamise tehteid pole võimalik teostada logaritmidade abil.

Sel korral arvutatakse avaldises esinevad summad ja vahed otseselt, teostades liitmise ja lahutamise tehted, muidugi ilma logaritmideta. Kui aga liidetavaid või lahutatavaid endid on raske otsese arvutamisega leida, siis peab neid eraldi logaritmidega arvutama. Niiviisi leitud tulemused siis liidetakse ja lahutatakse ning sel teel saadud summad ja vahed pannakse antud avaldisse vastavate summade ja vahede asemele. Edasi arvutatakse antud avaldise vää-

tus, millel nüüd on uus, logaritmitav kuju, kas otsesel teel või tarbekorral logaritmide abil.

$$160. \sqrt{145,27^2 - 124,49^2}.$$

$$160. \sqrt[3]{273,43^2 - 111,21^2}.$$

$$161. \sqrt[6]{8 - \sqrt[5]{10}}.$$

$$161. \sqrt[5]{21 - \sqrt[3]{17}}.$$

$$162. \sqrt{11,367} - \sqrt[3]{16,729}.$$

$$162. \sqrt[3]{53,114} - \sqrt{15,277}.$$

$$163. \sqrt[10]{2,1663} - \sqrt[11]{4919,6}.$$

$$163. \sqrt[7]{1,5947} - \sqrt[10]{237,53}.$$

$$164. \frac{1}{0,239^3 + 0,083^5}.$$

$$164. \frac{1}{0,0375^2 + 0,597^8}.$$

$$165. \sqrt[16]{\frac{43 + 5\sqrt[3]{268}}{\sqrt{17}}}.$$

$$165. \sqrt[11]{\frac{12 + 7\sqrt[5]{277}}{\sqrt[3]{11}}}.$$

$$166. \sqrt{\frac{17569}{111,11}} - \sqrt[3]{\frac{67685}{1,2365}}.$$

$$167. \sqrt[20]{\frac{27 + 3\sqrt[20]{1,4762}}{\sqrt[5]{11}}}.$$

$$168. \sqrt{0,859^3 + 5\sqrt[8]{11}}.$$

$$169. \sqrt[13]{2,459^{6,3} + 8,74^{2,3}}.$$

$$170. \sqrt[7]{\frac{\sqrt[3]{2} - \sqrt{11}}{30,561}}.$$

$$170. \sqrt[5]{\frac{\sqrt[3]{3} - \sqrt[5]{21}}{50,692}}.$$

$$171. \sqrt[3,2]{(6,263 + \sqrt[3]{-4,94623})^5}.$$

$$171. \sqrt[2,3]{(2,798 + \sqrt[5]{31,5946})^3}.$$

$$172. \sqrt[9]{(\sqrt[4]{0,723} + \sqrt[1,6]{1,23794})^{-2}}.$$

$$172. \sqrt[6]{(\sqrt[5]{0,989} + \sqrt[1,8]{2,54932})^{-5}}.$$

$$173. \frac{\sqrt[5]{0,8 \sqrt[3]{0,7 - (1,2686)^{-2}}}}{\sqrt[20]{0,0874968^3}}.$$

$$174. \frac{\sqrt[4]{1,2 - (1,2368)^{-0,72}}}{(\sqrt[5]{0,423286} - 0,87)^2}.$$

$$173. \frac{\sqrt[3]{0,3 \sqrt[5]{0,11 - (1,6967)^{-4}}}}{\sqrt[10]{0,374932^3}}.$$

$$174. \frac{\sqrt[5]{2,37 - (3,2143)^{-0,67}}}{(\sqrt[5]{0,597296} - 0,713)^3}.$$

### § 3. Eksponentvõrrandid ja logaritmvõrrandid.

Eksponentvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb astendajas või juurijas.

Logaritmvõrrandiks nimetatakse niisugust võrrandit, milles tundmatu esineb logaritmitavas.

Nende võrrandite lahendamise peavõtted on järgmised:

- 1) astendatavate võrdsustamine;
- 2) võrrandi mõlema poole logaritmine kas tabeliteta või tabelite abil;
- 3) võrrandi mõlema poole potentseerimine;
- 4) eksponentvõrrandi või logaritmvõrrandi taandamine algebraliseks võrrandiks selle avaldise suhtes, milles esineb otsitava eksponentfunktsioon või logaritmifunktsioon.

Näiteid:

I.  $2^x = 8$ ;  $2^x = 2^3$ ;  $x = 3$ .

II.  $x^{\log x} = 10$ ;  $\log^2 x = 1$ ;  $\log x = \pm 1$ ;  $x = 10$  või  $0,1$ .

III.  $2^x = 9$ ;  $x \log 2 = \log 9$ ;  $x \cdot 0,30103 = 0,95424$ ;

$$x = \frac{0,95424}{0,30103} \approx 3,17.$$

IV.  $2 \log x - 1 = 0$ ;  $\frac{x^2}{10} = 1$ ;  $x^2 = 10$ ;  $x = \sqrt{10}$

(siin juur ei saa olla miinusmärgiga, sest positiivse aluse puhul negatiivsel arvul logaritmi ei ole).

V.  $10 \cdot 2^x - 2^{2x} = 16$  ehk  $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$ , millest  
 $2^x = 5 \pm \sqrt{25 - 16} = 5 \pm 3$ ; kui  $2^x = 8$ , siis  $x_1 = 3$ ; kui  
 $2^x = 2$ , siis  $x_2 = 1$ .

Lahendada võrrandid:

175.  $10^{-x} = 10\,000$ .  
 176.  $\sqrt[3]{a^x} = \sqrt[3]{a^{3x+2}}$ .  
 177.  $16^x = \frac{1}{4}$ .  
 178.  $\sqrt[1-x]{a^3} = \sqrt[3-x]{a^2}$ .  
 179.  $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$ .  
 180.  $\sqrt{a^{x-1}} \sqrt[3]{a^{2x-1}} \sqrt[4]{a^{2-3x}} = 1$ .  
 181.  $\left(\frac{1}{0,125}\right)^x = 128$ .  
 182.  $a^{(1-x)} (x^{-2}) = \frac{1}{a^6}$ .  
 183.  $\sqrt[x]{256} = 4^x$ .  
 184.  $2^x - 2^{x-2} = 3$ .  
 185.  $2^{2x} \cdot 3^x = 144$ .  
 186.  $5^{x+1} + 5^x = 750$ .  
 187.  $10^{(3-x)} (4^{-x}) = 100$ .  
 188.  $\sqrt{c^{b+x}} = \sqrt{c^{b-x}} \cdot \sqrt{c^{a^2-x^2}}$ .  
 189.  $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ .  
 190.  $5^{(x^2+x-2)(3-x)} = 1$ .  
 191.  $2^{x^2-7,7x+16,5} = 8\sqrt{2}$ .  
 192.  $\sqrt{9x(x-1) - \frac{1}{2}} = \sqrt[4]{3}$ .  
 193.  $92^{\log x} = 778\,688$ .  
 194.  $\sqrt{x-1} \sqrt[2]{4096} = 2 \sqrt[2]{32768}$ .  
 195.  $5 \cdot \sqrt[x+2]{3125^{x+1}} = \sqrt[x+3]{15625^{x+2}}$ .  
 196.  $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$ .  
 197.  $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$ .  
 198.  $5^{1-x} = 7^{x-1}$ .  
 199.  $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt[4]{3}\right)^{3x-4}$ .  
 200.  $5^{2x-1} + 2^{2x} - 5^{2x} + 2^{2x+2} = 0$ .  
 201.  $x^x = x$ .  
 202.  $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ .  
 203.  $3 \cdot 2^x = 4 \sqrt[2]{9}$ .  
 204.  $x^{\log x} = 10$ .

205.  $x^{\log x} = 100x$ .
206.  $\sqrt[3]{x^{\log x-1}} = 100$ .
207.  $10^x = \sqrt[x]{5}$ .
208.  $5^x = 17$ .
209.  $10^x = 200$ .
210.  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 8$ .
211.  $23^x = 100$ .
212.  $10^x = \sqrt[x]{2}$ .
213.  $52^x = 0,1$ .
214.  $\sqrt[x]{1,3713} = \sqrt[10]{10}$ .
215.  $3^x - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$ .
216.  $7^{x-1} + 7^{x-2} + 7^{x-3} = 5^{x-1} + 5^{x-2} + 5^{x-3}$ .
217.  $\left(\frac{1}{8}\right)^x = 5^{10}$ .
218.  $\sqrt{0,35^x} = 0,00007882$ .
219.  $\log x = 1 - \log 3$ .
220.  $\log x = \log 24 - \log 8$ .
221.  $\log x = 3 \log 18 - 4 \log 12$ .
222.  $\frac{\log x}{1 - \log 2} = 2$ .
223.  $1 - \log 5 = \frac{1}{3} \left( \log \frac{1}{2} + \log x + \frac{1}{3} \log 5 \right)$ .
224.  $\log \left( 2x - \frac{9}{4} \right) - \log x = \log (x - 3)$ .
225.  $\log \left( x - \frac{8}{9} \right) = 2 \log \frac{1}{6}$ .
226.  $\log (x - 2) = \log x - \log 2$ .
227.  $\log (3x^2 + 7) - \log (3x - 2) = 1$ .
228.  $\log (x + \sqrt{3}) = -\log (x - \sqrt{3})$ .
229.  $\frac{\log x}{\log (x + 1)} = -1$ .
230.  $\frac{1}{2} \log (x - 9) + \log \sqrt{2x - 1} = 1$ .
231.  $\log 10 + \frac{1}{3} \log (271 + 3^{\sqrt{2x}}) = 2$ .
232.  $\log_a \log_a x = \log_a m + \log_a n$ .
233.  $\log_a \log_a x = \log_a \log_a m - \log_a n$ .
234.  $a^{2x} + c^2 = 2ba^x$ .

235.  $5^{2x} - 5^x = 600.$

237.  $0,1 \log^4 x + 0,9 = \log^2 x.$

239. 
$$\begin{cases} 5x + 2y = 100 \\ \log x - \log y = \log 1,6. \end{cases}$$

241. 
$$\begin{cases} 14^x = 63y \\ 17^x = 87y. \end{cases}$$

243. 
$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{12} \\ y^{x+y} = x^3. \end{cases}$$

245. 
$$\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y \\ y^{\sqrt{y}} = x^4. \end{cases}$$

247. 
$$\begin{cases} x^y = 243 \\ \sqrt[y]{1024} = \left(\frac{2}{3} x\right)^2. \end{cases}$$

236.  $3^{2x+5} = 3^{x+2} + 2.$

238.  $8^{x+1} - 8^{2x-1} = 30.$

240. 
$$\begin{cases} \log x + \log y = 7 \\ \log x - \log y = 5. \end{cases}$$

242. 
$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^2 = y^3. \end{cases}$$

244. 
$$\begin{cases} 0,4^{x+y} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \\ 1,4^{x-y} = 1,6565. \end{cases}$$

246. 
$$\begin{cases} x^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = y^4 \\ y^{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = x. \end{cases}$$

248. 
$$\begin{cases} 3^y \sqrt[3]{64} = 36 \\ 5^y \sqrt[5]{512} = 200. \end{cases}$$

#### § 4. Ülesanded liitprotsentidele.

249. Kui suureks kasvab hoius 246 rubla, mis pandi hoiukassasse 8 aastaks 5%-ga?

249. Kui suureks kasvab hoius 3768 rubla, mis pandi hoiukassasse 20 aastaks 4%-ga?

250. Kui suure sissemaksu peab tegema pank, kus makstakse 6% aastas, et 20 aasta pärast saada 8000 rbl.?

250. Kui suure sissemaksu peab tegema pank, mis maksab 3% aastas, et 12 aasta pärast saada 6720 rubla?

251. Mitme aasta pärast kasvab 20 728 rublane kapital 50 000 rublani, kui see on hoiul  $4\frac{1}{2}$ %-ga?

251. Mitme aasta pärast kasvab hoius 18 978 rubla 48 593 rublani, kui hoiuselt makstakse  $7\frac{1}{2}$ %?

252. Mitme protsendiga kasvab hoius 2498 rubla 12 aasta jooksul 4000 rublani?

252. Mitme protsendiga kasvab hoius 2465 rubla 10 aasta jooksul 4015 rbl. ja 30 kopikani?

253. Mitme protsendiga kasvab hoius 10 aasta vältel kahekordseks?

254. Ettevõtte sai 7025 rbl. 15 kop. laenu, mille tasumiseks ettevõtte peab 10 aasta pärast maksma 12 000 rubla. Mitme protsendiga oli laen antud, kui arvutatakse liitprotsentidega?

255. Mitme aasta pärast peab ettevõtte tasuma 8760 rublase laenu, mille kustutamiseks, arvestades liitintressi  $5\frac{1}{2}\%$ , ettevõtte peab maksma 25 000 rubla?

256. Kui suure püsiva summa peab iga aasta alguses pank maksma, et kümnenda aasta lõpuks pangast saada 60 000 rubla, tingimusel, et pank maksab  $5\%$  liitintressi?

257. Kui pika aja jooksul kasvab hoius neljakordseks, kandes  $6\frac{1}{2}\%$  liitintressi?

258. Kui suur summa kogub iga aasta alguses makstavatest 600-rublastest sissemaksudest 20 aasta vältel, kui arvestatakse  $4\frac{1}{2}\%$  liitintressi?

259. Arvutada laenu suurus, mis kooperatiiv sai  $7\frac{1}{2}\%$ -ga, kui selle laenu kustutamiseks peab 12 aasta vältel iga aasta lõpul maksma 1500 rubla.

260. Ehituskooperatiiv kasseerib oma liikmetelt 5-protsendilise laenu kustutamiseks igas kuus 8 rubla igalt võlgnevuse tuhandelt rublalt niisuguse arvestusega, et laen kustutatakse 15 aasta vältel iga aasta lõpul makstavate sissemaksudega. Kas kooperatiiv tegi õige jaotuse oma liikmete vahel?

261. Mitme aastaga saab kustutada 6-protsendilise laenu 14 752 rubla, kui iga aasta lõpul makstakse 3000 rubla.

262. Metsatükilt hinnatakse 4850 m<sup>3</sup> puitu. Kui suureks kasvab metsatüki puiduhulk 12 aasta vältel, kui puidu igaaastane keskmine juurdekasv on  $1,2\%$ ?

**263.** 14 aasta eest oli metsatükil 24 500 m<sup>3</sup> puitu. Nüüd on see kasvanud 33 450 m<sup>3</sup>-ni. Arvutada keskmine aastane juurdekasv protsentides.

**264.** Metsatükk maksab 22 000 rubla ja ta väärtus kasvab igal aastal 2½% võrra. Kui palju maksab see metsatükk 15 aasta pärast?

**265.** Mõned haigust tekitavad pisikud poolituvad iga poole tunni vältel. Kui palju pisikuid võiks olla organismis 24 tundi pärast infektsiooni (tingimusel, et pisikute paljunemine toimub takistamatult), kui infektsiooni silmapilgul sattus organismi 10 pisikut?

**266.** Moskvas oli 1931. aastal 2,8 miljonit elanikku. 1939. aastal oli Moskva elanike arv 4,137 miljonit. Mitu protsenti oli elanike juurdekasv aastas?

**267.** Metsa juurdekasv on aastas keskmiselt 2,25%. Kui palju puitu võib saada metsatükilt 80 aasta pärast, kui puidu praegust hulka hinnatakse seal 13 490 kuupmeetritele?

**268.** Metsa iga-aastane juurdekasv on 3,5%. Praegu võib metsatükilt saada 14 500 m<sup>3</sup> puitu. Mitu kuupmeetrit puitu võib sealt saada 10 aasta pärast?

**269.** Linnas on käesoleval ajal 120 000 elanikku, kuid 20 aasta eest oli seal 65 000 elanikku. Mitme aasta pärast on linnas 200 000 elanikku, kui juurdekasv lugeda ühtlaseks?

**270.** NSVL tööstustoodang 1926/27. aasta hindades oli 1928. aastal 15,7 miljardit rubla ja 1932. aastal 34,3 miljardit rubla. Arvutada esimese viisaastaku keskmine iga-aastane toodangu tõus protsentides.

**271.** NSVL linnade elanikkond oli 1928. a. 27,6 miljonit inimest ja 1932. a. 38,7 miljonit inimest. Arvutada linna elanikkonna keskmine aastane juurdekasv protsentides.

## Peatükk XVII.

### Ühendid.

Ühendeid on kolme liiki: variatsioonid, permutatsioonid ja kombinatsioonid.

Variatsioonideks nimetatakse ühendeid, mida loetakse üksteisest erinevaiks siis, kui nad erinevad elementidelt või ka ainult elementide järjestuselt.

Variatsioonide arvu  $n$  elemendist  $k$ -kaupa tähistatakse sümboliga  $A_n^k$  ehk  $V_n^k$ , kusjuures

$$V_n^k = A_n^k = n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1).$$

Permutatsioonideks  $n$  elemendist nimetatakse variatsioone  $n$  elemendist  $n$ -kaupa.

Seega permutatsioonid  $n$  elemendist on niisugused ühendid  $n$  elemendist, mis erinevad üksteisest ainult elementide järjestuselt.

Permutatsioonide arvu  $n$  elemendist tähistatakse sümboliga  $P_n$ , kusjuures

$$P_n = V_n^n = n(n-1)(n-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Kombinatsioonideks nimetatakse ühendeid, mida loetakse üksteisest erinevaiks ainult siis, kui nad erinevad vähemalt ühelt elemendilt. Elementide järjestust ei võeta siin arvesse.

Kombinatsioonide arvu  $n$  elemendist  $k$ -kaupa tähistatakse sümboliga  $C_n^k$  ehk  $\binom{n}{k}$ , kusjuures

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k}.$$

Kui leppida kokku tähistada esimese  $n$  loomuliku arvu korrutist, s. o. täisarvude korrutist 1 kuni  $n$ , sümboliga  $n!$  (niisugust korrutist nimetatakse „ $n$  faktoriaaliks”), siis ülalantud valemid saavad kuju:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}; P_n = n!; C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

1. Moodustada permutatsioonid kolmest elemendist.

1. Moodustada permutatsioonid neljast elemendist.

2. Moodustada variatsioonid neljast elemendist kolme-kaupa.

2. Moodustada variatsioonid viiest elemendist kolme-kaupa.

3. Moodustada variatsioonide kaudu permutatsioonid kolmest elemendist.

3. Moodustada variatsioonide kaudu permutatsioonid neljast elemendist.

4. Moodustada kõik võimalikud variatsioonid neljast elemendist.

4. Moodustada kõik võimalikud variatsioonid viiest elemendist.

5. Moodustada kõik võimalikud kombinatsioonid neljast elemendist.

5. Moodustada kõik võimalikud kombinatsioonid viiest elemendist.

6. Moodustada kombinatsioonide kaudu kõik võimalikud variatsioonid kolmest elemendist.

6. Moodustada kombinatsioonide kaudu kõik võimalikud variatsioonid neljast elemendist.

7. Arvutada:  $V_7^3; P_5; C_{10}^7$ .

8. Arvutada:  $P_8; V_{13}^7; C_{21}^6$ .

8. Arvutada:  $P_{11}; V_{15}^9; C_{18}^7$ .

9. Väljendada variatsioonide arv  $n + 1$  elemendist  $(k - 1)$ -kaupa.

9. Väljendada variatsioonide arv  $n - 2$  elemendist  $(k + 1)$ -kaupa.

10. Väljendada variatsioonide arv  $m + n$  elemendist  $(m - n + 1)$ -kaupa.

10. Väljendada variatsioonide arv  $m - n$  elemendist  $(m - 2n - 1)$ -kaupa.

11. Kontrollida võrdusi:  $C_9^3 = C_9^6$  ja  $C_{12}^7 = C_{12}^5$ .

11. Kontrollida võrdusi:  $C_8^5 = C_8^3$  ja  $C_{15}^7 = C_{15}^8$ .

12. Kontrollida võrdusi:

$$C_6^4 + C_6^3 = C_7^4;$$

$$C_{10}^6 + C_{10}^5 = C_{11}^6.$$

12. Kontrollida võrdust:

$$C_7^5 + C_7^4 = C_8^5.$$

13. Väljendada kombinatsioonide arv  $n + 2$  elemendist  $(k - 1)$ -kaupa.

13. Väljendada kombinatsioonide arv  $n - 1$  elemendist  $(k + 2)$ -kaupa.

14. Väljendada kombinatsioonide arv  $m - n$  elemendist  $(n + 1)$ -kaupa.

14. Väljendada kombinatsioonide arv  $(m + n)$  elemendist  $(n - 2)$ -kaupa.

15. Mitmel viisil võib nelja inimest paigutada lauda?

15. Mitmel viisil võib viit inimest paigutada lauda?

16. Mitmel viisil saab koostada neljavärvilisi linte seitsmest eri värvi lindist?

16. Mitu kolmekohalist erinevat arvu saab kirjutada üheksa numbril abil?

17. Mitmel viisil saab valida nelja isikut neljale erisugusele ametikohale üheksa kandidaadi hulgast, kes nendele kohtadele üles seati?

17. Mitmel viisil saab valida nelja isikut neljale ühesugusele ametikohale üheksa kandidaadi hulgast, kes esitati nendele kohtadele?

18. Mitu sirgjoont saab joonestada läbi kümne punkti, mis asetsevad nii, et ükski kolm neist ei ole ühel sirgjoonel?

18. Mitu ringjoont saab joonestada läbi kümne punkti, mis asetsevad nii, et ükski neli neist ei ole ühel ringjoonel?

19. Mitmest esemest saab moodustada 210 variatsiooni, kui igas variatsioonis on kaks eset?

19. Mitmest esemest saab moodustada 66 erisugust paari?

20. Mitu eset peab võtma, et variatsioonide arv nendest 4-kaupa oleks 12 korda suurem kui variatsioonide arv 2-kaupa?

20. Mitu eset peab võtma, et kombinatsioonide arv nendest 3-kaupa suhtuks kombinatsioonide arvuga 5-kaupa nagu 2 : 3?

21. Kombinatsioonide arv  $n$  elemendist 3-kaupa on 5 korda väiksem kui kombinatsioonide arv  $n + 2$  elemendist 4-kaupa. Leida  $n$ .

21. Variatsioonide arv  $n$  elemendist 5-kaupa on 18 korda suurem kui variatsioonide arv  $n - 2$  elemendist 4-kaupa. Leida  $n$ .

22. Kombinatsioonide arv  $2n$  elemendist  $(n + 1)$ -kaupa suhtub kombinatsioonide arvuga  $2n + 1$  elemendist  $(n - 1)$ -kaupa nagu 3 : 5. Leida  $n$ .

22. Kombinatsioonide arv  $2n$  elemendist  $(n - 1)$ -kaupa suhtub kombinatsioonide arvuga  $2n - 2$  elemendist  $n$ -kaupa nagu 77 : 20. Leida  $n$ .

23. Näidata, et otsene kombinatsioonide arvu leidmine paarikaupa taandub aritmeetilise progressiooni liikmete summa arvutamisele.

23. Näidata, et otsene kombinatsioonide arvu leidmine kolmekaupaga taandub rea korrutisepaaride liitmisele.

24. Mitu permutatsiooni arvu 12345 numbritest on niisugused, mis algavad numbriga 1? numbripaariga 12? numbrikolmikuga 123?

25. Mitu kombinatsiooni 10 tähest  $a, b, c, \dots$  4-kaupa on niisugused, milles esineb täht  $a$ ? tähed  $a$  ja  $b$ ?

26. Mitu variatsiooni 12 tähest  $a, b, c, \dots$  5-kaupa on niisugused, milles esineb täht  $a$ ? tähed  $a$  ja  $b$ ?

27. Mitu kombinatsiooni  $n$  tähest  $k$ -kaupa on niisugused, milles esineb  $h$  etteantud tähte?

28. Mitu variatsiooni  $n$  tähest  $k$ -kaupa on niisugused, milles esineb  $h$  etteantud tähte?

29. Mitme ja missuguse  $k$  väärtuse korral kehtib võrratus

$$C_n^{k-1} < C_n^k?$$

30. Näidata, et paarisarvulise  $n$  korral kombinatsioonide arvude rea

$$C_n^1, C_n^2, C_n^3, \dots, C_n^{n-1}$$

keskel on üks arv, mis kõigist teistest on suurem.

Peatükk XVIII.

**Newtoni binoomvalem.**

Newtoni binoomvalem on niisugune:

$$(x + a)^n = x^n + \frac{n}{1} ax^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{n-2} + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} x^2 + \frac{n}{1} a^{n-1} x + a^n.$$

Newtoni binoomrea liikme üldavaldis on järgmine:

$$L_{k+1} = C_n^k a^k x^{n-k}.$$

Binoomrea liikme  $L_{k+1}$  üldavaldis binoomi astme  $(x - a)^n$  korral on alljärgnev:

$$L_{k+1} = (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k}.$$

Leida lühendatud teel kaksliikmete korrutised:

1.  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ .
1.  $(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5)$ .
2.  $(x - 1)(x + 3)(x - 4)(x + 5)$ .
2.  $(x + 2)(x - 3)(x + 4)(x - 6)$ .
3.  $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)$ .
3.  $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)(x - 5)$ .
4.  $(x - 2)(x + 3)(x - 4)(x + 5)(x - 6)$ .
4.  $(x + 2)(x - 3)(x - 4)(x + 5)(x - 6)$ .

Arendada järgmised kaksliikmete astmed binoomridadeks:

5.  $(a + b)^6$ . 5.  $(a + b)^8$ . 6.  $(a - b)^7$ . 6.  $(a - b)^5$ .
7.  $(a + 1)^9$ . 7.  $(a + 1)^{12}$ . 8.  $(1 - a)^8$ . 8.  $(1 - a)^{10}$ .
9.  $(a + b^2)^5$ . 9.  $(a^2 - b)^9$ . 10.  $(a - 2b)^8$ . 10.  $(3b + a)^6$ .

11.  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^6$ .

11.  $(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^3$ .

12.  $(\sqrt[3]{2a} - \sqrt[3]{3b})^5$ .

12.  $(\sqrt{3a} + \sqrt{2b})^5$ .

13. Leida  $(a - b)^9$  arendise 5. liige.

13. Leida  $(a - b)^{15}$  arendise 8. liige.

14. Leida  $(a - b)^{14}$  arendise keskmine liige.

14. Leida  $(a - b)^{17}$  arendise kaks keskmist liiget.

15. Leida  $(x + a)^{19}$  arendise need liikmed, milles esineb  $a^8$ ;  $x^8$ .

15. Leida  $(x + a)^{16}$  arendise need liikmed, milles esineb  $a^{11}$ ;  $x^{11}$ .

16. Leida  $(x^2 - ax)^{24}$  arendise need liikmed, mille kordajaks on kombinatsioonide arv 18-kaupa.

16. Leida  $(x^3 - a^2x)^{31}$  arendise need liikmed, mille kordajaks on kombinatsioonide arv 7-kaupa.

17. Leida  $(\sqrt{z} + \sqrt[3]{z})^9$  arendise see liige, milles pärast lihtsustamist täht  $z$  esineb 4-ndas astmes.

17. Leida  $(\sqrt[6]{z} + \sqrt[3]{z^2})^{12}$  arendise see liige, milles pärast lihtsustamist täht  $z$  esineb 6-ndas astmes.

18. Leida  $\left(\frac{2z}{a^2} + \frac{a}{z}\right)^8$  arendise liige, milles  $z$  ei esine.

18. Leida  $\left(\frac{z}{a} + \frac{3a^2}{z}\right)^{10}$  arendise liige, milles  $z$  ei esine.

19. Leida  $(\sqrt{1+z} - \sqrt{1-z})^n$  arendise 5. liige, kui  $n$  on niisugune, et kolmanda liikme kordaja on 78.

19. Leida  $(\sqrt[3]{1+z} - \sqrt[3]{1-z})^n$  arendise 4. liige, kui kolmanda liikme kordaja on 45.

20.  $(\sqrt[3]{z^2} + z^{-2})^n$  arendise 2. ja 3. liikme kordajate summa on 78. Leida arendise see liige, milles  $z$  ei esine.

20. Teise ja kolmanda liikme kordajate summa  $(\sqrt[5]{z^2} + z^{-\frac{1}{5}})^n$  arendises on 153. Leida selle arendise niisugune liige, milles  $z$  ei esine.

Peatükk XIX.

**Hulkliikmete jaguvus.**

Jagamise tehet teostamata selgitada, kas jagamisel tekib jääk või mitte:

1.  $(x^2 - 7x + 12) : (x - 3)$ . 1.  $(x^2 - 7x + 12) : (x - 4)$ .
2.  $(x^3 - x^2 + 4) : (x + 2)$ . 2.  $(x^3 - 3x^2 + 6x) : (x + 3)$ .
3.  $(x^3 - 2x^2 + 3x - 2) : (x - 1)$ .
3.  $(3x^3 - 2x^2 + 7x - 3) : (x - 1)$ .
4.  $(x^3 - 8) : (x - 2)$ . 4.  $(x^3 - 125) : (x + 5)$ .
5.  $(x^3 + 64) : (x + 4)$ . 5.  $(x^3 + 27) : (x - 3)$ .
6.  $(x^4 + 16) : (x - 2)$ . 7.  $(x^5 - 243) : (x + 3)$ .

Jagamist teostamata leida jagamisel tekkiv jääk:

8.  $(2x^4 - 3x^3 - 7x + 6) : (x - 2)$ .
8.  $(x^4 - 5x^2 + 6x - 1) : (x + 4)$ .
9.  $(2x^5 + 8x^4 - 4x^3 + 13) : (x + 1)$ .
9.  $(3x^4 - 6x^3 + 5x^2 - x - 1) : (x + 2)$ .

Lahendada võrrandid:

10.  $x^3 - x^2 + 6x = 0$ . 11.  $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ .
12.  $x^3 - 7x + 6 = 0$ . 13.  $x^3 + 2x^2 - 2x + 3 = 0$ .
14.  $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$ .

Lahutada hulkliikmed lineaarseteks teguriteks:

15.  $x^3 - 4x^2 + x + 6$ . 15.  $x^3 - 4x^2 - 2x + 8$ .
16.  $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16$ .
17.  $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ .

## Peatükk XX.

### Võrratused.

Liita kaks antud võrratust:

1.  $5 > -3$ ,  $8 > 5$ .
2.  $2 < 5$ ,  $-7 < -3$ .
3.  $x^2 > a + 1$ ,  $2x > a - 5$ .
4.  $3x + y < 2a + 1$ ,  $3y - 2x < 14 - 2a$ .

Lahutada esimesest võrratusest teine:

5.  $16 > 13$ ,  $2 < 5$ .
6.  $-8 < -5$ ,  $-2 > -7$ .
7.  $2x > b^2$ ,  $a^2 < 9 - x$ .
8.  $(a - b)^2 < 2$ ,  $(a + b)^2 > 8$ .

Korrutada võrratuse mõlemad pooled antud teguriga:

9.  $5 > -2$  teguriga 5.
10.  $-7 < -5$  teguriga  $-2$ .
11.  $a^2 > b$  teguriga  $-b$ .
12.  $a - 1 < b$  teguriga  $-m$ .

Jagada võrratuse mõlemad pooled antud arvuga:

13.  $-6 < 9$  arvuga 3.
14.  $-15 > -35$  arvuga  $-5$ .
15.  $a^3 < a^2$  arvuga  $-a$ .
16.  $(a - b)^3 > (a - b)^2$  arvuga  $a - b$ .

Korrutada antud võrratuste vastavad pooled:

17.  $5 > 3$ ,  $7 > 2$ .
18.  $2 > -5$ ,  $-3 > -7$ .
19.  $-3 < 5$ ,  $-5 < 2$ .
20.  $-13 < -7$ ,  $-9 > -15$ .

Jagada võrratuste pooled:

21.  $35 < 40$ ,  $7 > 5$ .
22.  $-6 < 4$ ,  $3 > 2$ .
23.  $-\frac{3}{4} > -\frac{14}{9}$ ,  $\frac{3}{7} < \frac{8}{3}$ .
24.  $\frac{8}{5} > \frac{2}{3}$ ,  $-\frac{7}{18} < -\frac{2}{9}$ .

Lahendada võrratused:

25.  $x + 4 > 2 - 3x$ .                      25.  $3 + 5x < 7x + 4$ .  
26.  $4(x - 1) > 2 + 7x$ .                      26.  $3(x - 2) < 4x - 9$ .  
27.  $\frac{3x}{2} - \frac{3}{5} < 4x - 3$ .                      27.  $\frac{x}{5} - 3\frac{1}{3} > 1\frac{3}{4} - \frac{5}{2}x$ .  
28.  $\frac{37 - 2x}{3} + 9 < \frac{3x - 8}{4} - x$ .                      28.  $3 - \frac{3x}{2} > \frac{5}{8} - \frac{4x - 3}{6}$ .  
29.  $(x - 1)^2 + 7 > (x + 4)^2$ .  
29.  $(1 + x)^2 + 3x^2 < (2x - 1)^2 + 7$ .  
30.  $\frac{7 - 6x}{2} + 12 < \frac{8x + 1}{3} - 10x$ .  
30.  $8 + \frac{3x - 4}{5} > \frac{x - 1}{6} - \frac{5x - 3}{8}$ .

Määrata, missugustel  $x$  väärtustel on alljärgnevad avaldised positiivsed:

31.  $2x - 16$ .                      32.  $5 - 3x$ .                      33.  $\frac{3}{8}x - 4$ .  
34.  $\frac{x + 1}{2} - 2x + 2\frac{1}{2}$ .                      35.  $\frac{5 - x}{8} + \frac{3 - 2x}{4}$ .

Leida, missugustel  $x$  väärtustel on alljärgnevad avaldised negatiivsed:

36.  $3x + 15$ .                      37.  $7 - 14x$ .                      38.  $5 - \frac{2}{3}x$ .  
39.  $\frac{x - 2}{3} + \frac{x}{2}$ .                      40.  $\frac{3x - 5}{2} - \frac{2x - 1}{3} + 2$ .

Lahendada võrratussüsteemid:

41.  $2x > 4x + 6$  ja  $4x + 3 < 2x + 1$ .  
42.  $3x + 7 > 7x - 9$  ja  $x - 3 > -3x + 1$ .  
43.  $5x - 3 > 1 + x$  ja  $\frac{1}{2} - 3x < \frac{2}{3}x - 5$ .  
44.  $4x + 7 > 2x + 13$  ja  $3x - 18 < 2x + 1$ .  
45.  $6x - 7 > 5x - 1$  ja  $3x + 6 > 8x - 4$ .  
46.  $2(x - 3) - 1 < 5$  ja  $\frac{3x}{8} - 7 > \frac{x}{12}$ .

47.  $3x + 2 > x - 2$ ,  $x + 15 > 6 - 2x$  ja  
 $x - 14 < 5x + 14$ .

Leida, missugustel  $a$  väärtustel on alljärgnevad murrud positiivsed:

48.  $\frac{2a-3}{3a-2}$       48.  $\frac{3a-8}{5-a}$       49.  $\frac{2-3a}{2a+7}$       49.  $\frac{3a-7}{2-5a}$ .

Leida, missugustel  $a$  väärtustel on alljärgnevad murrud negatiivsed:

50.  $\frac{8-3a}{7a-2}$       51.  $\frac{5a+8}{3a-7}$ .

52. Võrratuse  $(a-b)^2 > 0$  põhjal näidata, et kahe erineva arvu ruutude summa on alati suurem kui nende arvude kahekordne korrutis.

53. Tõestada, et positiivse lugeja ja nimetajaga lihtmurd suureneb, kui tema lugejaga ja nimetajaga liita mingi üks ja sama positiivne arv.

54. Tõestada, et positiivse lugeja ja nimetajaga liigmurd väheneb, kui tema lugejaga ja nimetajaga liita mingi üks ja sama positiivne arv.

55. Tõestada, et kahe erineva positiivse arvu aritmeetiline keskmine on suurem kui geomeetriline keskmine.

56. Tõestada, et iga kolmnurga pool ümbermõõtu on suurem kui selle kolmnurga mistahes külge.

57. Tõestada, et igas täisnurkses kolmnurgas, mis ei ole võrdhaarne, osutub hüpotenuusile ehitatud kõrgus väiksemaks kui pool hüpotenuusi.

58. Tõestada, et igas täisnurkses kolmnurgas hüpotenuusile ehitatud kõrguse kahekordse ruut on väiksem kui hüpotenuusi ruudu ja kaatetite kahekordse korrutise summa.

59. Linn  $N$  on kahe söerajooni vahel. Esimese rajooni süsi on tuumakas, soojusvõimega  $p$  (8000 kalorit), teise rajooni süsi on kõlujas, selle soojusevõime on  $q$  (3500 kalorit);  $q < p$ .

Esimese rajooni süsi ühes pealelaadimisega maksab  $a$  (14) rubla tonn, vedu  $N$  linna maksab  $m$  (16) rubla tonn. Need kulud sõe ostmisel teisest rajoonist on vastavalt  $b$  (7) rubla ja  $n$  (12) rubla. Missugustel  $n$  väärtustel on  $N$  linnal sõe ostmine teisest rajoonist kasulikum?

60. Olgu põllutöomasina hind  $N$  rubla, remondikulu  $P$  rubla,  $n$  — masina tarvitamisjuhtude arv ilma remondita,  $m$  — masina tarvitamisjuhtude arv remondi vajadusega. Mis tingimustel tasub end remondi teostamine?

61. Anumas on 4 liitrit vett tubase temperatuuriga  $13^{\circ}$ . Mis temperatuurini peab soojendama 5 liitrit vett, et selle segamisel eelmisega saaks vee, mille temperatuur ei ole alla  $25^{\circ}$  ega üle  $30^{\circ}$ ?

62. Messing ehk valgevaske on sulam vasest ja tsingist, millede erikaalud kõiguvad vastavalt 8,8 kuni  $9,0 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$  ja 6,85 kuni  $7,2 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ .

Tükk messingit kaalub 400 g ja tema altrõhk vees on 50 g. Kui palju vaske ja tsinki on sulamis?

63. Heli kiiruse mõõtmiseks valiti kaks kuuldepunkti 1000 meetri kaugusel teineteisest. Heli oli kuulda allatuult mitte vähem kui  $2\frac{1}{2}$  sekundi pärast, ja vastutuult mitte vähem kui 3 sekundi pärast.

Leida heli kiiruse ülempiir.

## Määramatute esimese astme võrrandite lahendamine.

Lahendada järgmised võrrandid täisarvudes, kasutades asendamisvõtet:

1.  $x + 2y = 7$ .    2.  $y - 5x = 12$ .    3.  $3x - 5y = 0$ .  
 4.  $5x + 8y = 0$ .    5.  $2x + 3y = 13$ .    6.  $5y - 7x = 21$ .  
 7.  $7x + 13y = 71$ .    8.  $14x - 9y = 11$ .

Lahendada järgmised võrrandid täisarvudes, kasutades järkjärgulise jagamise võtet:

9.  $2x + 3y = 7$ .    10.  $3x - 4y = 11$ .    11.  $5x + 3y = 6$ .  
 12.  $7x - 4y = 3$ .    13.  $7x + 5y = 12$ .    14.  $5x - 11y = 4$ .  
 15.  $11x + 8y = 73$ .    16.  $11x - 7y = -31$ .

Kas alljärgnevatel võrranditel on positiivseid täisarvulisi lahendeid?

17.  $2x + 6y = 25$ .    18.  $6x + 11y = -48$ .  
 19.  $8x + 7y = 3$ .    20.  $9x - 6y = 17$ .  
 21.  $10x + 13y = 16$ .    22.  $13x - 15y = 45$ .  
 23.  $8x + 6y = 12$ .    24.  $15x - 10y = 25$ .

Leida järgmiste võrrandite positiivsed täisarvulised lahendid:

25.  $4x + 11y = 47$ .    26.  $12x - 7y = 45$ .  
 27.  $11x + 18y = 120$ .    28.  $15x - 49y = 11$ .  
 29.  $18x - 35y = 30$ .    30.  $45x + 27y = 117$ .

31.  $\frac{3x}{5} + \frac{2y}{3} = 37.$

32.  $\frac{x+15y}{x-21} = -20.$

33.  $\frac{3x-14}{2} = \frac{2y-0,5}{5}.$

Leida kõige väiksemad positiivsed arvud, mis rahuldavad järgmisi võrrandeid:

34.  $17x - 29y = 100.$

35.  $13x - 15y = 2.$

36.  $52x + 64y = 388.$

37.  $16x - 25y = 1.$

38.  $41x - 37y = 187.$

39.  $9x + 20y = 547.$

Leida positiivsed täisarvulised lahendid järgmistele võrrandisüsteemidele:

40.  $2x - 5y = 5, \quad 2y - 3z = 1.$

41.  $8x - 5y = 6, \quad 7z + 3y = 13.$

42.  $3x + y + z = 14, \quad 5x + 3y + z = 28.$

43.  $4x + y + 3z = 30, \quad 7x + y + 6z = 51.$

44.  $x = 5y + 3 = 11z + 7.$

45.  $x + 2y + 3z = 20, \quad 3x + 5y + 4z = 37.$

46.  $2x + 14y - 7z = 341, \quad 10x + 4y + 9z = 473.$

47. Lahutada arv 200 kaheks liidetavaks, milledest üks jagub jäägita arvuga 7, teine arvuga 13.

48. Kuidas ja mitmel viisil on võimalik maksta 149 rubla kolmerublase ja viierublase rahadega?

49. Leida kaks arvu, millede vahe on 10, teades, et vähendatav on jaguv 8-ga ja lahutatav on jaguv 17-ga.

50. Kuidas ja mitmel viisil on võimalik 5- ja 3-kg pomidega kaaluda 114 kg?

51. Kuidas ja mitmel viisil on võimalik 5- ja 2-kg pomidega kaaluda 87 kg?

52. Kahele töölisbrigaadile maksti 330 rubla. Esimese brigaadi iga tööline sai 16 rbl., teise brigaadi iga tööline sai 9 rbl. Mitu töolist oli kummaski brigaadis?

53. Mitu viiekopikalist ja kahekopikalist vaskraha saab laduda ühele meetrile, oletades et viiekopikalise raha diameeter on 25 mm ja kahekopikalise diameeter on 18 mm?

54. Murd  $\frac{7}{18}$  võrdub kahe murru vahega, milledest ühe nimetaja on 9 ja teise nimetaja on 12. Leida need murrud.

55. Missugusel  $x$  väärtusel murru  $\frac{5x-1}{12}$  väärtus on positiivne paarisarv?

56. Leida niisuguse arvu üldavaldis, mis on arvu 5 kordne ja jagamisel 8-ga jätab jäägi 1.

57. Leida niisuguse arvu üldavaldis, mis jagub jäägita arvuga 7, kuid jagamisel arvuga 5 jätab jäägi 2.

58. Missugusel  $x$  väärtusel tuleb murru  $\frac{3-7x}{10}$  väärtuseks niisugune positiivne arv, mille jagamisel 4-ga saame jäägi 3?

59. Leida niisuguse arvu üldavaldis, mille jagamisel 3-ga saame jäägi 2, kuid jagamisel 7-ga saame jäägi 3.

60. Leida niisuguse arvu üldavaldis, mille jagamisel 7-ga saame jäägi 4 ja jagamisel 8-ga saame jäägi 3.

61. Laskur saab iga tabamuse eest 8 silma, kuid iga mittetabamuse eest kustutatakse 27 silma.

Kui laskur oli teinud vähem kui 120 lasku, siis osutus, et tema saavutus oli 97 silma. Kui palju oli tabamusi ja kui palju mittetabamusi?

61. Ehitatakse 105 meetri pikkune veetorstik; laos on 3 ja 4,5 m pikkusi torusid. Mitu ja missugust toru on tarvis kohale paigutada?

62. Kahe vastastikku asetseva hammasratta pöörlemisel, milledest ühel on 19 hammast ja teisel 23 hammast, satub esimese ratta esimene hammas teise ratta esimesse hambavahesse. Mitu täispööret peavad tegema mõlemad hammasrattad, et esimese ratta esimene hammas satuks jälle teise ratta esimesse hambavahesse? Mitme täispöörde järel see

hammas satub teise ratta teise hambavahesse, kolmandasse hambavahesse jne.?

**63.** Kahe vastastikku asetseva hammasratta pöörlemisel, milledest ühel on 25 hammast ja teisel 36 hammast, satub esimese ratta esimene hammas teise ratta esimesse hambavahesse. Mitu täispööret peavad tegema mõlemad rattad, et esimese ratta esimene hammas satuks jälle teise ratta esimesse hambavahesse? Mitme täispöörde järel see hammas satub teise ratta teise hambavahesse, kolmandasse hambavahesse jne.?

**64.** Leida niisugune kolmekohaline arv, mille numbrite summa on 16 ja millega liites 99 saame samade numbritega arvu, kuid ümberpöördud järjestusega.

**65.** Leida kõige väiksem niisugustest arvudest, mille jagamisel 3-ga, 4-ga ja 5-ga saame vastavalt jäägid 1, 2 ja 3.

**66.** Leida niisuguse arvu üldavaldis, mis on arvu 5 kordne ning jagamisel 8, 11 ja 3-ga annab vastavalt jäägid 1, 3 ja 1.

**67.** Leida kõige väiksem niisugustest arvudest, mille jagamisel 5, 6, 7 ja 8-ga saame vastavalt jäägid 3, 1, 0 ja 5.

**68.** Maksta 25 kopikat 2-, 3- ja 5-kopikaliste rahadega.

**69.** Osakonna 75 töölist premeeriti eeskujuliku töö eest 200 rublaga. See summa otsustati kulutada teatripiletite ostmiseks. Kui palju ja milliseid pileteid peab ostma, kui kassas on järgmiste hindadega piletid: 4 rbl., 2 rbl. 75 kop. ja 2 rbl.?

## Peatükk XXII.

### Ahelmurrud.

Teisendada järgmised ahelmurrud harilikeks murdudeks:

- |                        |                          |
|------------------------|--------------------------|
| 1. (2, 1, 2, 3, 2).    | 2. (2, 3, 1, 1, 12).     |
| 3. (0, 2, 1, 4, 3, 2). | 4. (a, b, a, b, a).      |
| 5. (0, x, 3x, x, 2x).  | 6. (a - 1, a, a + 1, a). |

Teisendada järgmised harilikud murrud ahelmurdudeks:

- |  |                       |                        |                      |
|--|-----------------------|------------------------|----------------------|
| 7. $\frac{117}{55}$ .                      | 7. $\frac{151}{45}$ . | 8. $\frac{117}{139}$ . | 8. $\frac{47}{64}$ . |
| 9. $\frac{239}{99}$ .                      | 9. $\frac{137}{52}$ . | 10. $\frac{71}{193}$ . | 10. $\frac{22}{7}$ . |
| 11. $\frac{a^4 + 2a^2 + 1}{a^3 + a - 1}$ . |                       |                        |                      |

Teisendada järgmised murrud ahelmurdudeks, leida nende lähisväärtused ja arvutada lähisväärtuste vigade kõikumisvahemikud:

- |                        |                        |                       |                         |                           |                         |
|------------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 12. $\frac{99}{239}$ . | 12. $\frac{55}{117}$ . | 13. $\frac{55}{89}$ . | 13. $\frac{463}{640}$ . | 14. $\frac{1702}{3919}$ . | 14. $\frac{685}{126}$ . |
|------------------------|------------------------|-----------------------|-------------------------|---------------------------|-------------------------|

Leida järgmiste lõpmatute ahelmurdude lähisväärtused ning määrata nende lähisväärtuste vigade kõikumisvahemikud:

15. (1, 3, 5, 7, 9, 11, ...).
15. (2, 4, 6, 8, 10, 12, ...).
16. (0, 10, 100, 1000, ...).
16. (0, 5, 50, ...).

Teisendada järgmised juured ahelmurdudeks:

- |                      |                      |                  |                   |
|----------------------|----------------------|------------------|-------------------|
| 17. $\sqrt{2}$ .     | 17. $\sqrt{5}$ .     | 18. $\sqrt{3}$ . | 18. $\sqrt{11}$ . |
| 19. $\sqrt{20}$ .    | 19. $\sqrt{12}$ .    | 20. $\sqrt{7}$ . | 20. $\sqrt{13}$ . |
| 21. $\sqrt{a^2+1}$ . | 21. $\sqrt{a^2+2}$ . |                  |                   |

Teisendada järgmised murrud irratsionaalavaldisteks:

- |                              |                             |
|------------------------------|-----------------------------|
| 22. (4, 8, 8, 8, ...).       | 22. (5, 10, 10, 10, ...).   |
| 23. (3, 1, 6, 1, 6, ...).    | 23. (3, 2, 6, 2, 6, ...).   |
| 24. (0, 2, 3, 2, 3, 2, ...). | 24. (0, 1, 2, 1, 2, ...).   |
| 25. (a, 2, 2a, 2, 2a, ...).  | 25. (a, 1, 2a, 1, 2a, ...). |

Lahendada täisarvudes järgmised määramatud võrrandid:

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| 26. $8x + 13y = 1$ .  | 26. $7x + 12y = 1$ .   |
| 27. $9x - 14y = 3$ .  | 27. $10x - 17y = 2$ .  |
| 28. $23x + 16y = 2$ . | 28. $41x + 29y = 1$ .  |
| 29. $7x - 11y = 1$ .  | 29. $17x - 25y = 3$ .  |
| 30. $49x + 34y = 6$ . | 30. $29x + 17y = 25$ . |

Arendada järgmised logaritmid  $x$  ahelmurdudeks ja arvutada nende lähisväärtused:

- |                     |                    |
|---------------------|--------------------|
| 31. $10^x = 500$ .  | 31. $10^x = 800$ . |
| 32. $10^x = 4000$ . | 32. $10^x = 60$ .  |
| 33. $72^x = 432$ .  | 33. $36^x = 432$ . |
| 34. $50^x = 500$ .  | 34. $75^x = 375$ . |

Arendada järgmiste võrrandite lahendid ahelmurdudeks ja arvutada nende lähisväärtused:

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 35. $x^3 - 2x - 5 = 0$ .      | 35. $x^3 - x - 3 = 0$ .       |
| 36. $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$ . | 36. $x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ . |

37. Kuulus keemik D. Mendelejev leidis XIX sajandi lõpul Mõõtude ja Kaalude Kojas suure täpsusega, et 1 nael = 0,409 512 41 kg ja 1 arssin = 0,711 200 m.

Kiireks üleminekuks ühelt mõõdult teisele, eriti peast arvutamisel, on need suhtearvud keerulised. Leida nendele

suhtearvudele vastavate ahelmurdude ühe, kahe ja kolme lüliga lähismurrud ja selgitada vastava lähismurru täpsus.

38. Ringjoone pikkuse ja diameetri suhe on ligikaudu 3,141 592 653 6; teisendada see suhe ahelmurruks ning võtta selle üks, kaks, kolm, neli, viis lüli ja arvutada iga lähismurru väärtus ja selle täpsus.

## Peatükk XXIII.

### Võrrandite uurimine.

#### § 1. Ühe otsitavaga esimese astme võrrandi uurimine.

Leida, missugustel  $a$  väärtustel on järgmistel võrranditel positiivsed lahendid:

1.  $5(x - 3) = 3(3x - 2a)$ .    2.  $3(x + 1) = 4 + ax$ .

3.  $\frac{5}{3+x} = \frac{a}{x}$ .    4.  $\frac{3}{x+1} = 8 - a$ .

Leida, missugustel  $a$  väärtustel on järgmiste võrrandite lahendid negatiivsed:

5.  $7 - a = \frac{2}{x-1}$ .    6.  $\frac{3}{4x-a} = \frac{2}{ax-5}$ .

Teha igas alljärgnevas võrrandis, mille lahend on negatiivne, niisugune muudatus, et lahend tuleb positiivne:

7.  $4x - 75 = 6(x - 10) + 85$ .

8.  $13x - 22 = 17(x - 2) + 28$ .

9.  $5(3 - 7x) + 4(3x - 7) = 35 + x$ .

10.  $6(x - 1) - 12x = 12(x + 3) - 2(x + 5)$ .

Uurida, missugustel täheliste kordajate väärtustel on alljärgnevatel võrranditel positiivsed lahendid, negatiivsed lahendid, nullised lahendid, lõpmatud lahendid, määramatud lahendid:

11.  $\frac{a}{a-x} = \frac{m}{n}$ .

12.  $3ax + b = b(a + x)$ .

13.  $ax + m = b(x + n)$ .

14.  $\frac{px+m}{x+m} = \frac{a}{b}$ .

15. Kaks töölisbrigaadi said kokku 120 rbl.; esimese brigaadi iga tööline sai 7 rbl., teise brigaadi iga tööline 5 rbl.; teises brigaadis oli kolm töolist rohkem kui esimeses. Mitu töolist oli kummaski brigaadis?

16. Leida niisugune kahekohaline arv, mille kümnete number on üheliste numbrist kaks korda väiksem ning üheliste ja kümneliste numbrite vahe on 6.

Lahendada ja uurida järgmisi ülesandeid, mis lahenduvad täheliste kordajatega võrrandi abil:

17. Ühes reservuaaris on  $a$  pange, teises  $b$  pange vett. Esimesse lisatakse iga tund  $m$  pange, teise  $n$  pange vett. Mitme tunni pärast on mõlemas reservuaaris ühepalju vett?

18. Isa vanus on  $a$  aastat, poja vanus  $b$  aastat. Mitme aasta pärast on isa pojast  $k$  korda vanem?

19. Mis arvu peab lahutama arvudest  $a$  ja  $b$ , et vahede suhe oleks  $k$ ?

20. Veoki esimese ratta übermõõt on  $a$  meetrit, tagumise ratta übermõõt on  $b$  meetrit. Kui pikal teel esiratas teeb ühe pöörde võrra rohkem kui tagaratas?

21. Mis arvu peab lisama murru  $\frac{a}{b}$  lugejale ja nimetajale, et murd saaks väärtuse  $\frac{m}{n}$ ?

22.  $a$  liitris vees on lahustatud  $b$  grammi soola; kui palju peab vett lisama, et iga liitri vee kohta tuleks  $m$  grammi soola?

23. Lahutada arv  $a$  kaheks osaks nii, et esimese osa ja arvu  $m$  ning teise osa ja arvu  $n$  korrutiste summa oleks võrdne esimese osa ja arvu  $p$  ning teise osa ja arvu  $q$  korrutiste summaga.

24. Kolmnurga  $ABC$  küljed on antud:  $AB = c$ ,  $AC = b$  ja  $BC = a$ . Ehitades tipu  $C$  juures oleva välisnurga poolitaja, märkida selle poolitaja ja külje  $AB$  pikenduse lõikepunkt tähega  $D$ . Leida kaugus  $AD$ .

## § 2. Kahe otsitavaga lineaarvõrrandisüsteemi uurimine.

25. Leida, missugustel  $a$  väärtustel on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} x + y = a \\ 3x + 2y = 10 \end{cases}$$

lahendid positiivsed.

26. Leida, missugustel  $a$  väärtustel on võrrandisüsteemi

$$\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ -5x + ay = 8 \end{cases}$$

lahendid negatiivsed.

27. Leida niisugune  $a$  väärtus, mille juures võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} 3x - 7y = 15 \\ 46x + ay = 60 \end{cases}$$

ei ole lahendit.

28. Leida  $a$  nõnda, et võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} 2x + 5y = 7 \\ 7x - ay = 9 \end{cases}$$

ei oleks lahendit.

29. Leida  $a$  ja  $b$  väärtused nõnda, et võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} ax - 6y = 15 \\ 4x + by = 2 \end{cases}$$

oleks lõpmatult palju lahendeid.

30. Leida  $a$  ja  $b$  väärtused nõnda, et võrrandisüsteemil

$$\begin{cases} ax - y = b \\ 4x + 3y = 10 \end{cases}$$

oleks lõpmatu hulk lahendeid.

## § 3. Ruutvõrrandi uurimine.

Alljärgnevat esimeses ülesannetes määrata lahendamisel tingimused, millede puhul lahendid on reaalsed ja positiivsed,

peale selle leida lahendite mõned täisarvulised väärtused, mis vastavad esitatud erinõudeile.

31. Leida kaks arvu, millede summa on  $a$  ja korrutis on  $b$ .

32. Antud ruudu sisse, mille külg on  $a$ , ehitada teine ruut, mille külg on  $b$ .

33. Antud hüpotenuusi  $a$  järgi ehitada täisnurkne kolmnurk, mis on pindvõrdne ruuduga, mille külg on  $b$ .

34. Antud on ringjoon raadiusega  $R$  ja ringjoonest väljaspool asetsev punkt, mille kaugus keskpunktist on  $d$ . Läbi selle punkti on ehitatud ringjoonele lõikaja nii, et selle seesmine lõik on võrdne raadiusega. Leida lõikaja pikkus.

35. Ringisse, mille raadius on  $R$ , ehitada niisugune ristkülik, mis on pindvõrdne ruuduga, mille külg on  $k$ .

Alljärgnevat kahe otsitavaga ruutvõrrandites määrata need reaalarvulised otsitava  $x$  väärtused, millel otsitava  $y$  väärtus on ka reaalarvuline:

36.  $x^2 + y^2 - 2xy + x = 0.$

37.  $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0.$

Peatükk XXIV.

**Piirväärtused.**

Leida piirväärtused:

- |   |  |  |
|---|--|--|
| 1. $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{5}{n+1}.$                    | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 6x - 1}{5x + 3}.$         | 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 4}{x + 4}.$      |
| 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}.$            | 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 3x^2}{x^5 + x^3 + 2x^2}.$ | 6. $\lim_{a \rightarrow 2} \frac{a^2 - 4}{a - 2}.$           |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 + x - 2}.$ |  | 8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}.$   |
| 9. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2}.$      | 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 1}{x + 2}.$          | 11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 1}{4x^2 + 3}.$ |
| 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3}.$   | 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{cx + d}.$         | 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + b}{cx^3 + d}.$ |

Leida alanevate geometriliste progressioonide liikmete summade piirväärtused:

- |   |   |
|---|---|
| 15. $2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$ | 16. $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots$ |
| 18. $2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots$ | 18. $2 + \sqrt{2} + \dots$                  |
| 19. $0,3333 \dots$                              | 20. $2,3(4).$                               |

Missuguste alljärgnevate avaldiste piirväärtuseks on 0, kui  $h$  läheneb nullile?

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 21. $12h, \sqrt{h}, 0,0001h.$ | 22. $\frac{1}{h}, \frac{0,01}{h}, \frac{h}{h^2}, \frac{h^2}{h}, h^3.$ |
| 23. $2^h, 10^h, \log h.$      | 24. $\sin h, \cos h, \tan h, \cot h.$                                 |

Missugused on järgmiste avaldiste piirväärtused, kui  $x \rightarrow 0$ ?

25.  $5x, ax + b, \frac{ax + b}{cx + d}, \frac{ax^2 + b}{cx^2 + d}, \frac{ax^2 + b}{cx^3 + d}$ .

26.  $a^x - 1, a^x - 2, \log x, \log(5 - x), \sin\left(\frac{ax + \pi}{bx + 2}\right)$ .

27. Leida lõputu korrutise

$$\sqrt[4]{5} \sqrt[8]{5} \sqrt[16]{5} \sqrt[32]{5} \dots \sqrt[2n]{5} \dots$$

väärtus.

# Vastused.

## Peatükk IX.

- |   |  |                                    |                                     |
|---|--|------------------------------------|-------------------------------------|
| 1. 4.   | 2. $-a^2$ .                              | 3. $a^3$ .                         | 4. $a^3$ .                          |
| 5. 6.   | 6. 6.                                    | 7. $\frac{a^2}{3}$ .               | 8. $-\frac{a^2}{b^3}$ .             |
| 9. $a^4b^2c$ .  | 10. $-3a^4b$ .                           | 11. $\frac{1}{3}$ .                | 12. $1\frac{1}{2}$ .                |
| 13. $\frac{1}{a^2}$ .   | 14. $-\frac{1}{a^4}$ .                   | 15. $-2$ .                         | 16. $\frac{a^5}{\sqrt[n]{-1}}$ .    |
| 17. $\frac{2b^3}{a}$ .  | 18. $\frac{5b^2}{2a^n}$ .                | 19. $\frac{5a^3c^{2m}}{2}$ .       | 20. $\frac{2a^{2n}b^4}{3}$ .        |
| 21. $\frac{3a^{2n-1}b^6}{10c^2}$ .  | 22. $-\frac{100}{a^{4n}b^{3m-1}}$ .      | 23. $\frac{3a^2d}{2b^3c^4}$ .      | 24. $\frac{28b^6d}{a^5c^3}$ .       |
| 25. $\frac{2c^m}{ab^{n-3}d^3f^{2n-1}}$ .  | 26. $-\frac{3b^3q^2}{10a^mp^4rn}$ .      | 27. $\frac{16b^2(a+b)^3}{a^4}$ .   | 28. $4a^3b^4c^2$ .                  |
| 29. $\frac{bv+5}{9a^5c}$ .  | 30. $\frac{4c^{n-2}}{a^{n-10}b^5nd^3}$ . | 31. $2\sqrt[4]{2}$ .               | 32. $5\sqrt[4]{3}$ .                |
| 33. $3\sqrt[5]{3}$ .  | 34. $-3\sqrt[5]{4}$ .                    | 35. $2\sqrt[4]{3}$ .               | 36. $5\sqrt[4]{2}$ .                |
| 37. $3\sqrt[4]{2}$ .  | 38. $-2\sqrt[5]{7}$ .                    | 39. $18\sqrt[3]{5}$ .              | 40. $2\sqrt[4]{3}$ .                |
| 41. $a^2\sqrt[4]{c^3}$ .  | 42. $a^3b\sqrt[3]{b}$ .                  | 43. $xy\sqrt[3]{xy^2}$ .           | 44. $ab\sqrt[4]{ab^3}$ .            |
| 45. $2a^2\sqrt[3]{b}$ .   | 46. $4x^2y\sqrt[3]{y}$ .                 | 47. $12c^2d\sqrt[3]{5}$ .          | 48. $a^2\sqrt[3]{a}$ .              |
| 49. $\frac{a^2\sqrt[3]{a^2}}{b^3}$ .  | 50. $\frac{\sqrt[6]{a^5}}{b^3}$ .        | 51. $\frac{3\sqrt[3]{6z}}{10ax}$ . | 52. $-\frac{9\sqrt[3]{m}}{10a^2}$ . |
| 53. $\frac{(a-b)\sqrt[5]{y}}{5}$ , kui $a > b$ , või $\frac{(b-a)\sqrt[5]{y}}{5}$ , kui $a < b$ . |  |                                    | 54. $\frac{\sqrt[3]{a-b}}{b}$ .     |

55.  $\frac{(y^2 - x^2) \sqrt[3]{y - x}}{2}$ .      56.  $b \sqrt[3]{a^2 - b^2}$ .      57.  $2a^5 bc^p \sqrt[3]{2b^n c}$ .
58.  $x^2 y^4 z^2 \sqrt[2r]{xy^2 z^5}$ .      59.  $\frac{3a^2 b}{c^2} \sqrt[n]{\frac{9a^3 c}{b}}$ .      60.  $\sqrt{12}$ .
61.  $\sqrt{180}$ .      62.  $\sqrt[3]{54}$ .      63.  $\sqrt[3]{375}$ .      64.  $\sqrt[5]{160}$ .
65.  $\sqrt{5a^2}$ .      66.  $\sqrt[4]{2x^4}$ .      67.  $\sqrt[4]{625a}$ .      68.  $\sqrt[3]{-m^3 n}$ .
69.  $-\sqrt{an^4}$ .      70.  $\sqrt{9a^3 x}$ .      71.  $\sqrt[3]{m^7 n}$ .      72.  $\sqrt{\frac{a}{4}}$ .
73.  $\sqrt[3]{\frac{x^3}{y}}$ .      74.  $\sqrt[3]{\frac{b}{a^2}}$ .      75.  $\sqrt[5]{m^5 - 1}$ .      76.  $\sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ .
77.  $\sqrt[3]{24a^4 bc^{11}}$ .      78.  $\sqrt[m]{3^{m+1} a^{mn+2} b^{m+1}}$ .      79.  $\sqrt[4]{\frac{162a^{n+8} c^{12}}{b^3}}$ .
80.  $\sqrt[3]{a^2}$ .      81.  $ab \sqrt[4]{ab^2}$ .      82.  $b \sqrt[3]{a^2}$ .      83.  $\sqrt[n]{ab^2}$ .
84.  $b \sqrt[3]{3a^2}$ .      85.  $\sqrt[3]{3a^m b^2}$ .      86.  $\sqrt[6]{8a^2 b^n}$ .      87.  $\sqrt[3n]{\frac{4a^5}{3b^3 c^9}}$ .
88.  $\sqrt[4]{\frac{10c}{9b^3 a^2}}$ .      89.  $\frac{a^2 \sqrt{bc}}{b^3}$ .      90.  $\sqrt[12]{a^{10}}$  ja  $\sqrt[12]{a^9}$ .
91.  $\sqrt[6]{4a^4}$  ja  $\sqrt[6]{ab^5}$ .      92.  $\sqrt[12]{16a^8 b^4}$  ja  $\sqrt[12]{27a^9 b^3}$ .
93.  $\sqrt[36]{\frac{27a^{15}}{b^9}}$  ja  $\sqrt[36]{\frac{10\,000b^8}{a^4}}$ .      94.  $\sqrt[m^2 n]{\frac{3na^{2n}}{b^n c^{3n}}}$  ja  $\sqrt[m^2 n]{\frac{2ma^m b^{2m}}{c^{3m}}}$ .
95.  $\sqrt[24]{a^4 b^6}$ ,  $\sqrt[24]{a^6}$  ja  $\sqrt[24]{a^9}$ .      96.  $\sqrt[30]{a^{10} b^5}$ ,  $\sqrt[30]{a^6 b^8}$  ja  $\sqrt[30]{a^6 b^{12}}$ .
97.  $\sqrt[30]{\frac{x^{15}}{y^{15}}}$ ,  $\sqrt[30]{\frac{y^{18}}{z^{12}}}$  ja  $\sqrt[30]{\frac{a^{20}}{b^{10}}}$ .
98.  $\sqrt[4n]{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n}$ ,  $\sqrt[4n]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$  ja  $\sqrt[4n]{\left(\frac{x}{y}\right)^4}$ .
99.  $\sqrt[6n]{\left(\frac{a+b}{x}\right)^3}$ ,  $\sqrt[6n]{\left(\frac{a}{x+y}\right)^n}$  ja  $\sqrt[6n]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}$ .      100.  $3y \sqrt[3]{x^2 y^2}$ .

101.  $a^2b \frac{\sqrt{6abd}}{3cd}$ . 102.  $\frac{ab}{c^2} \sqrt[3]{\frac{5ab}{2}} = \frac{ab}{2c^2} \sqrt[3]{20ab}$ .
103.  $a \sqrt[3]{a^2 - b^2}$ . 104.  $a \sqrt[4]{a - b}$ . 105.  $\frac{b \sqrt[3]{5ab^2n^2}}{n}$ .
106.  $\frac{b}{a^n c^{m-n+2}} \sqrt[3]{b^{5n} c^m}$ . 107.  $\frac{a^3(a+b) \sqrt{(a-b)^2}}{a-b}$ .
108.  $\frac{a(a-2b) \sqrt{ab}}{c^2}$ , kui  $a > 2b$ . 109.  $\sqrt{3}$  ja  $2\sqrt{3}$ .
110.  $3\sqrt[4]{7}$  ja  $2\sqrt[4]{7}$ . 111.  $3\sqrt[3]{2}$  ja  $2\sqrt[3]{2}$ .
112.  $2\sqrt[4]{5}$  ja  $3\sqrt[4]{5}$ . 113.  $3\sqrt[3]{2}$ ,  $8\sqrt[3]{2}$  ja  $4\sqrt[3]{2}$ .
114.  $3\sqrt[3]{2}$ ,  $2\sqrt[3]{2}$  ja  $6\sqrt[3]{2}$ . 115.  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$  ja  $2\sqrt[3]{3}$ .
116.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  ja  $\frac{\sqrt{10}}{15}$ . 117.  $\frac{\sqrt{5}}{20}$  ja  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ . 118.  $\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$  ja  $\frac{\sqrt[3]{9}}{2}$ .
119.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$  ja  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ . 120.  $-\frac{\sqrt{10}}{10}$  ja  $\frac{\sqrt{10}}{12}$ . 121.  $a\sqrt[6]{ab}$  ja  $a^2b\sqrt[6]{ab}$ .
122.  $0,3\sqrt[3]{xy^2}$  ja  $0,4\sqrt[3]{xy^2}$ . 123.  $\frac{\sqrt{a^3-1}}{a}$  ja  $\frac{\sqrt{a^3-1}}{a^2}$ .
124.  $\frac{\sqrt{b(1-ab)}}{b}$  ja  $\frac{d\sqrt{b(1-ab)}}{c}$ .
125.  $(a-b)\sqrt{a-b}$ ,  $\frac{(a^2+b^2)\sqrt{a-b}}{a-b}$  ja  $a\sqrt{a-b}$  (kui  $a > b$ ).
126.  $\frac{x^2\sqrt{x-y}}{y}$ ,  $\frac{x\sqrt{x-y}}{x-y}$  ja  $\frac{2\sqrt{x-y}}{y}$  (kui  $x > y$ ).
127.  $2a\sqrt[3]{a^2-2b^2}$ ,  $b\sqrt[3]{a^2-2b^2}$  ja  $-\frac{\sqrt[3]{a^2-2b^2}}{ab}$ .
128.  $\frac{y\sqrt[n]{x^3y}}{x}$ ,  $\sqrt[n]{x^3y}$  ja  $\frac{(2x-y)\sqrt[n]{x^3y}}{x}$ .
129.  $2(4\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})$ . 130.  $4(2\sqrt[4]{7} - \sqrt[5]{3})$ .
131.  $2(2b\sqrt[4]{c} - a\sqrt[5]{b})$ . 132.  $3c\sqrt[4]{d} - 2a\sqrt[5]{b^4}$ .

133.  $-\sqrt{2}$ .      134.  $129\sqrt{5}$ .      135.  $22\sqrt[3]{5}$ .  
 136.  $-\frac{5\sqrt{5}+13\sqrt{2}}{3}$ .      137.  $\frac{28\sqrt{6}+9\sqrt{2}-4\sqrt{11}}{4}$ .  
 138.  $\frac{63\sqrt{2}-8\sqrt{3}}{6}$ .      139.  $(a+b-3)\sqrt{a}$ .      140.  $3(5a^2+a-2)\sqrt[3]{a}$ .  
 141.  $7ab\sqrt{5a}$ .      142.  $-4a^2c\sqrt{3d}$ .      143.  $2y\sqrt{x^2y^2}$ .      144.  $-2n\sqrt{m-n}$ .  
 145.  $-\frac{5}{2}\sqrt{2(2-x)}$ .      146. 0 (kui  $a > b$ ).      147.  $\frac{x(2x-1)\sqrt{x-1}}{2}$ .  
 148.  $x^2\sqrt{x^3-y^3}$ .      149. 9.      150.  $2\sqrt[3]{4}$ .      151.  $-\frac{15}{2}\sqrt[3]{4}$ .  
 152.  $\frac{1}{3}$ .      153.  $-60$ .      154.  $72\sqrt[4]{20}$ .      155.  $448+\frac{16}{3}\sqrt{6}$ .  
 156. 68.      157.  $-33\sqrt{5}$ .      158.  $6\sqrt{2}-3\sqrt{15}+8\sqrt{3}-6\sqrt{10}$ .  
 159. 84.      160.  $-\sqrt{2}$ .      161.  $a^4b\sqrt{b}$ .      162.  $2a\sqrt{x^2}$ .  
 163.  $30a^3\sqrt[3]{3}$ .      164.  $\frac{12b}{a}$ .      165.  $\frac{a\sqrt{x}}{2x}$ .      166.  $4a^2x\sqrt[4]{2}$ .  
 167.  $-ab^5\sqrt[3]{25}$ .      168.  $\frac{a(b+\sqrt{b}-1)}{b}$ .      169.  $a\sqrt{b}+b-\frac{a\sqrt{b}}{b}-1$ .  
 170.  $a\sqrt[3]{b}-b\sqrt[3]{a}$ .      171.  $\sqrt[6]{108}$ .      172.  $\frac{1}{\sqrt[15]{144}}$ .      173. 6.  
 174.  $\sqrt[36]{1152}$ .      175.  $3\sqrt[4]{200}-2\sqrt[12]{2048}+6\sqrt[12]{5000}$ .  
 176.  $2\sqrt[28]{10^{11}}+3\sqrt[4]{40}-4\sqrt[12]{625000}$ .      177.  $2(3-\sqrt[6]{72}-4\sqrt[3]{9})$ .  
 178.  $11\sqrt[3]{4}-15\sqrt[6]{2}$ .      179.  $\sqrt[12]{a^{11}b^{11}}$ .  
 180.  $15a^3b^2\sqrt[6]{108a^4b^3c^5}$ .      181.  $a^8b^6\sqrt[4]{a^3b}$ .  
 182.  $a^2(a\sqrt[6]{ab^3}-2b\sqrt{a}-ab\sqrt[6]{a^3b^2})$ .      183.  $2a^2(a-\sqrt[15]{a}-a^2\sqrt[6]{a})$ .  
 184.  $\sqrt[6]{a^5}-a+a\sqrt[15]{a^2}-\sqrt[30]{a^{23}}+\sqrt[15]{a^{14}}-a\sqrt{a}$ .  
 185. 2.      186. 3.      187.  $\frac{2\sqrt[3]{3}}{7}$ .      188.  $2\sqrt[3]{2}$ .

$$189. \frac{2}{3} (5 - 3\sqrt[3]{20} + 15\sqrt[3]{4}). \quad 190. \sqrt[3]{5}. \quad 191. a^2\sqrt[3]{2}.$$

$$192. 3\sqrt[4]{a}. \quad 193. a\sqrt[3]{\frac{2b}{3}} = \frac{a}{3}\sqrt[3]{6b}.$$

$$194. ab\sqrt{b} - \sqrt{ax}. \quad 195. \sqrt{a} - \sqrt[4]{a^2x} - \frac{4a}{x}\sqrt[4]{x^3}.$$

$$196. 2x\sqrt[4]{y^3} - 3y\sqrt[4]{\frac{x^2y}{2}} + \sqrt[4]{y} = 2x\sqrt[4]{y^3} - \frac{3}{2}y\sqrt[4]{8x^2y} + \sqrt[4]{y}.$$

$$197. \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}. \quad 198. \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{2b^2}.$$

$$199. \sqrt{2a} + \sqrt[4]{6ab^2} + b\sqrt[3]{3}. \quad 200. a\sqrt{a} - \sqrt[4]{2a^3b^3} + b\sqrt[3]{2b}.$$

$$201. x\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2y^2} + y\sqrt[3]{y}. \quad 202. \sqrt[6]{3}. \quad 203. 2\sqrt[5]{2500}.$$

$$204. 2\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}} - \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt[6]{6}}\right) = \frac{1}{3}(\sqrt[4]{6^3} - 6\sqrt{2} + \sqrt[6]{6^5}).$$

$$205. \frac{1}{\sqrt[6]{a}} = \frac{1}{a}\sqrt[6]{a^5}. \quad 206. \sqrt[6]{8a}. \quad 207. a^4\sqrt[6]{2}. \quad 208. 10\sqrt[6]{a^5}.$$

$$209. \frac{3}{2a^2}\sqrt[6]{432ab^5}. \quad 210. x\sqrt[3]{\frac{5x^2}{y}} = \frac{x}{y}\sqrt[3]{5x^2y^2}.$$

$$211. \frac{6a^2b^2}{d}\sqrt[15]{\frac{abd^{10}}{c}} = \frac{6a^2b^2}{cd}\sqrt[15]{abc^{14}d^{10}}.$$

$$212. \frac{ab+x^2}{x}\sqrt[6n]{\frac{a^{n+2}}{x^{10}}} = \frac{ab+x^2}{x^2}\sqrt[6n]{a^{n+2}x^{6n-10}}.$$

$$213. 3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}} = \frac{3}{x-y}\sqrt{x^2-y^2}. \quad 214. \frac{x(x^2-y^2)^3}{2a^2}\sqrt[3]{4a^2(x+y)^2}.$$

$$215. ab^2\sqrt[12]{2a} - ab\sqrt[12]{8a^8b^7} + a^2b^2. \quad 216. \sqrt[5]{4x^2} + \sqrt[5]{2x} \cdot \sqrt[5]{3} + 3.$$

$$217. 2\sqrt[3]{a^2x} + \sqrt{ax}. \quad 218. x\sqrt[4]{3xy} - x\sqrt[4]{12xy^3} + 2xy.$$

$$219. a^3. \quad 220. a\sqrt[3]{a}. \quad 221. 2x^3\sqrt[4]{2x^3}. \quad 222. -a^8b^2\sqrt[8]{a^6b^5}.$$

$$223. 3a^{10}x^5\sqrt[3]{3a^2x}. \quad 224. 16a\sqrt[3]{9a}. \quad 225. (x-y)\sqrt[5]{(x-y)^3}.$$

226.  $\frac{b^7 \sqrt[4]{ab^2}}{a^4}$ .      227.  $\frac{1}{4a^{n-2}b^6} \sqrt[3]{4a^n b^2}$ .      228.  $(x^2 + y^2)^{mp}$ .
229.  $5 - 2\sqrt{6}$ .      230.  $\frac{33}{4} + 2\sqrt{2}$ .      231.  $2\sqrt[3]{2} + 4\sqrt[6]{2} + 2$ .
232.  $3\sqrt{3} - 18\sqrt[3]{2} + 12\sqrt[6]{432} - 16$ .      233.  $11 - 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} - 6\sqrt{2}$ .
234.  $48 - 12\sqrt{10} - 12\sqrt{5} + 20\sqrt{2}$ .      235. 10.      236. 8.
237. 16.      238.  $\frac{a^2 b^3 - 16ab\sqrt{b} + 64}{16a}$ .      239.  $a^4 \sqrt{a}(7 + 5\sqrt{2})$ .
240.  $\sqrt[3]{a}$ .      241.  $\sqrt[15]{a^4}$ .      242.  $\sqrt{5}$ .      243.  $2a\sqrt[4]{a}$ .
244.  $\sqrt[8]{a^7}$ .      245.  $\sqrt[6]{a^5}$ .      246.  $ac\sqrt[4]{ab}$ .      247.  $\sqrt[12]{a^4 b^3}$ .
248.  $\sqrt[24]{x^{41}} = x\sqrt[24]{x^{17}}$ .      249.  $\sqrt[12]{\frac{x^9}{y}} = \frac{1}{y} \sqrt[12]{x^9 y^{11}}$ .
250.  $\sqrt[24]{2^8 \cdot 3^3 x^{11} y^7}$ .      251. 12.      252. 3.      253. 2.
254. 4.      255.  $\sqrt{a}$ .      256.  $\frac{\sqrt{m}}{m}$ .      257.  $\sqrt[3]{a}$ .
258.  $\frac{(m+n)\sqrt{m-n}}{m-n}$ .      259.  $2\sqrt{2}$ .      260.  $3\sqrt[4]{2}$ .
261.  $\frac{\sqrt[3]{9}}{3}$ .      262.  $(a+b)\sqrt[3]{(a-b)^2}$ .      263.  $\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2)^2}}{a+b}$ .
264.  $\frac{a - 2\sqrt{ab} + b}{a-b}$ .      265.  $\frac{a(1 + \sqrt{a})}{1-a}$ .      266.  $2\sqrt{3} - 3$ .
267.  $\sqrt{(1-a)(1+\sqrt{a})}$ .      268.  $\frac{n(\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2})}{a-b}$ .
269.  $3(5\sqrt{2} - 6 + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3})$ .      270.  $\frac{\sqrt{5} + \sqrt{6} + \sqrt{7}}{2}$ .
271.  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ .      272.  $n\sqrt[3]{\sqrt{2} + \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})(4 + 2\sqrt[3]{9} + 3\sqrt{3})}$ .
273.  $-\frac{a^2 + \sqrt{a^4 - b^4}}{b^2}$ .      274.  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})$ .
275.  $\frac{(2\sqrt[4]{3} + \sqrt{3})(12 + \sqrt{3})}{3}$ .      276.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ .      277.  $2 + \sqrt{2}$ .

278.  $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2}$ . 279.  $2 + \sqrt{3}$ . 280.  $\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$ . 281.  $\sqrt[4]{45} - \sqrt[4]{5}$ .  
 282.  $\frac{\sqrt{10} + \sqrt{2}}{2}$ . 283.  $3 + \sqrt{2}$ . 284.  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ , kui  $a \geq b$ ;  
 $\sqrt{b} - \sqrt{a}$ , kui  $a \leq b$ .  
 285.  $\sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - b}$ . 286.  $\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt[5]{5}}{5}$ . 287.  $\sqrt{0,315} + \sqrt{0,065}$ .  
 288.  $2\sqrt{2a}$ . 289.  $\frac{2\sqrt[5]{5}}{5}$ . 290. 1. 291. 14.  
 292. 2. 293.  $12 + 5\sqrt{3}$ . 294.  $\frac{12 - \sqrt{5} + \sqrt{29}}{20}$ .  
 295.  $4 + \sqrt{11} - 3\sqrt{7}$ . 296. 6. 297.  $\frac{6\sqrt{6(x-6)}}{x-6}$ .  
 298.  $\sqrt{a^2 - b^2}$ . 299.  $\sqrt{1-x}$ . 300.  $\frac{4a}{x^2} \sqrt{a^2 - x^2}$ . 301.  $\sqrt[4]{63}$ .  
 302.  $-2x\sqrt[8]{x^7}$ . 303.  $a$ . 304.  $\frac{a\sqrt[4]{a}}{2\sqrt[4]{x}} = \frac{a}{2x} \sqrt[4]{ax^3}$ .  
 305.  $\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$ . 306.  $2a\sqrt[3]{a^7}$ . 307.  $31a\sqrt{ax}$ .  
 308.  $\frac{a^2}{2x^2} \sqrt[4]{ax^3}$ . 309.  $\frac{2}{3a} \sqrt[3]{3a(1-a)}$ .  
 310.  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{\sqrt{1+x}}{1+x}$ . 311.  $\sqrt[4]{ax - n^2}$ .  
 312.  $\frac{a}{c} - \frac{c}{b}$ , kui  $\frac{a}{c} > \frac{c}{b}$ . 313.  $\sqrt{2}$ . 314. 1.  
 315. 1. 316.  $a + b$ . 317.  $-1$ , kui  $a > b$  ja 1, kui  $a < b$ .  
 318.  $a^{\frac{2}{3}}$ . 319.  $a^{-\frac{3}{4}}$ . 320.  $a^{-\frac{3}{5}} b^{\frac{4}{5}}$ . 321.  $a^{+\frac{3}{2}}$ .  
 322.  $(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$ . 323.  $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}(a^3 - b^3)^{\frac{1}{3}}}$ . 324.  $x^{\frac{n+1}{m}}$ .  
 325.  $a^{\frac{1}{m}}$ . 326.  $x^{\frac{2}{m}} y^{-\frac{n}{m}}$ . 327.  $a^{-\frac{n}{r}}$ . 328.  $a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{15}}$ .  
 329.  $(a-x)^{\frac{2}{3}}$ . 330.  $\sqrt[6]{a^5}$ . 331.  $\sqrt[4]{a^{-3}}$ . 332.  $\sqrt[3]{(a+b)^2}$ .

333.  $\frac{3\sqrt[8]{(a-b)^3}}{\sqrt{a}}$ .    334.  $\frac{1}{\sqrt[4]{4a}}$ .    335.  $\sqrt[4]{a+b}$ .    336.  $\frac{1}{\sqrt{m^x}}$ .  
 337.  $\frac{1}{\sqrt[12]{x^{2n-3}}}$ .    338.  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ .    339.  $n^2\sqrt{n}$ .    340. 2.  
 341. 27.    342.  $\frac{1}{32}$ .    343. 4.    344.  $\frac{6}{5}$ .  
 345.  $\frac{4}{9}$ .    346. 0,8.    347.  $\frac{1}{27}$ .    348. 5.  
 349. - 52.    350.  $ab\sqrt[60]{a^{25}b^{16}}$ .    351.  $\sqrt[12]{\frac{b}{a}}$ .  
 352.  $a + \sqrt{ab} + b$ .    353.  $a + b + \sqrt{ab}$ .  
 354.  $a^n - \sqrt{\frac{a^n}{b^n}} + \frac{1}{b^n} = \frac{1}{b^n} (a^n b^n - \sqrt{a^n b^n} + 1)$ .  
 355.  $\sqrt[3]{a^2} - 2\sqrt[3]{ab} + 4\sqrt[3]{b^2}$ .    356.  $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c}$ .  
 357.  $a^3 - 2a\sqrt[6]{a^4b^3} + 2ab\sqrt[3]{ab} + b\sqrt[3]{a} - 2b^2\sqrt[6]{a} + b^3$ .  
 358.  $ab^2\sqrt[12]{a} - 6ab\sqrt[6]{a^8b^7} + 12ab\sqrt[6]{a^5b} - 8a^2\sqrt[4]{b^3}$ .  
 359.  $\frac{b^6}{a^4}$ .    360.  $\frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{a - b}$ .  
 361.  $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} - 3\sqrt[3]{b^2}$ , kui  $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} \geq 3\sqrt[3]{b^2}$ ;  $3\sqrt[3]{b^2} - \frac{\sqrt[4]{a^3}}{b}$ , kui  $\frac{\sqrt[4]{a^3}}{b} \leq 3\sqrt[3]{b^2}$ .  
 362.  $2a^4b^2\sqrt[12]{8a^2b^9}$ .    363.  $a^2 - 3a\sqrt[6]{a^5} + 3a\sqrt[3]{a^2} - a\sqrt{a}$ .  
 364.  $ab$ .    365. - 1.    366.  $i$ .    367. -  $i$ .  
 368. 1.    369. 1.    370.  $i$ .    371. - 1.  
 372. - 1.    373. -  $i$ .    374.  $i$ .    375.  $2i$ .  
 376.  $9i$ .    377.  $ai$ .    378.  $i\sqrt{b}$ .    379.  $\frac{3i}{2}$ .  
 380.  $\frac{a^2i}{b^4}$ .    381.  $i\sqrt{a}$ .    382.  $3i\sqrt{x}$ .    383.  $i\sqrt{a^2 + b^2}$ .  
 384.  $(x - y)i$ , kui  $x \geq y$ .    385.  $5i$ .    386.  $2(5\sqrt[3]{3} - 3)i$ .    387.  $4 + 17i$ .  
 388.  $5a - 2bi$ .    389. - 12.    390.  $-\sqrt{ab}$ .    391. -  $x$ .  
 392.  $(a - b)i$ , kui  $a \geq b$ .    393.  $1 - 46i$ .  
 394.  $100 - 13i\sqrt{7}$ .    395.  $a + 3b + 2i\sqrt{ab}$ .

396.  $-17$ .      397.  $-i\sqrt{a}$ .      398.  $\sqrt{a}$ .      399.  $a + bi$ .  
 400.  $\frac{x(x-y)}{x^2+y^2} - \frac{y(x-y)}{x^2+y^2}i$ .      401.  $1 - i\sqrt{3}$ .      402.  $-\frac{191}{209} - \frac{60\sqrt{2}}{209}i$ .  
 403.  $3 - 5i\sqrt{2}$ .      404.  $-\frac{7\sqrt{3}-6}{30} - \frac{(3+2\sqrt{3})\sqrt{7}}{30}i$ .  
 405.  $a^2 - b^2 + 2abi$ .      406.  $7 - 6i\sqrt{2}$ .      407.  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ .  
 408.  $-12\sqrt{5} - 49$ .      409.  $-2(7 + 6i\sqrt{2})$ .  
 410.  $-\frac{7+4i\sqrt{2}}{4}$ .      411.  $a^3 - 3ab^2 - (3a^2b - b^3)i$ .  
 412.  $9 + 25i\sqrt{2}$ .      413.  $-i(\sqrt{3}-2)^3 = (26 - 15\sqrt{3})i$ .      414.  $1$ .  
 415.  $\pm(2+i)$ .      416.  $\pm(1-2i)$ .      417.  $\pm(2+i\sqrt{3})$ .  
 418.  $\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ .      419.  $\pm(\sqrt{22} - i\sqrt{2})$ .  
 420.  $\pm\left[\frac{1}{2}(\sqrt{26} + i\sqrt{2})\right]$ .      421.  $\pm\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \pm\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]$ .  
 422.  $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{\sqrt{2}+1} + i\sqrt{\sqrt{2}-1})$ .

### Peatükk X.

4. 1. ja 3. kvadranti nurgapoolitajal.  
 5. 2. ja 4. kvadranti nurgapoolitajal.  
 31. Ligikaudu alates  $d = 7,15$ .

### Peatükk XI.

1.  $0$  ja  $-\frac{b}{a}$ .      2.  $0$  ja  $a + b$ .      3.  $0$  ja  $\frac{1}{m+n}$ .      4.  $0$  ja  $\frac{3a}{2}$ .  
 5.  $\pm 3ab$ .      6.  $0$  ja  $2a$ .      7.  $\pm\sqrt{ab}$ .      8.  $\pm n$ .  
 9.  $\pm\frac{a+1}{a}$ .      10.  $\pm\sqrt{a^2 - ab + b^2}$ .      11.  $\pm\sqrt{4a^2 + b^2}$ .  
 12.  $-a$ .      13.  $3a$  ja  $a$ .      14.  $-7a^3$  ja  $5a^3$ .      15.  $a \pm b$ .  
 16.  $a - 5b$  ja  $3b - a$ .      17.  $2a$  ja  $-\frac{a}{2}$ .  
 18.  $-\frac{a}{3}$  ja  $-\frac{a}{2}$ .      19.  $-\frac{3a}{b}$  ja  $-\frac{a}{3b}$ .

20.  $\frac{5a}{4b}$  ja  $-\frac{4a}{5b}$ .    21.  $\frac{m}{n}$  ja  $-\frac{n}{m}$ .    22.  $\frac{a}{b}$  ja  $\frac{b}{a}$ .    23.  $\frac{a}{b}$  ja  $-1$ .  
 24.  $\frac{a}{a+b}$  ja  $\frac{b}{a-b}$ .    25.  $\frac{a}{b}$  ja  $-\frac{b}{a}$ .    26.  $\frac{2a}{3}$  ja  $-\frac{5a}{7}$ .  
 27.  $\frac{3a-b \pm \sqrt{9a^2-10ab+b^2}}{2}$ .    28.  $a \pm 2b$ .    29.  $-\frac{a}{2}(3 \pm \sqrt{3})$ .  
 30.  $\frac{a}{2}$  ja  $-\frac{5a}{6}$ .    31.  $-a$  ja  $-b$ .    32.  $1$  ja  $1$ .    33.  $\frac{ab}{a \pm b}$ .  
 34.  $\frac{2c}{a+b}$  ja  $-\frac{c}{a+b}$ .    35.  $a$  ja  $b$ .    36.  $a$  ja  $b$ .  
 37.  $\frac{a+b}{2(a-b)^2}(a^2+b^2 \pm \sqrt{a^4-4a^3b+10a^2b^2-4ab^3+b^4})$ .  
 38.  $\frac{1}{3}(a+b+c \pm \sqrt{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc})$ .  
 39.  $\frac{a \pm \sqrt{a^2-4b(a-c)}}{2}$ .    40.  $\frac{5a+3b}{8}$  ja  $\frac{3a+5b}{8}$ .  
 41.  $-a$  ja  $\frac{a(c+1)}{c(2c+3)}$ .  
 42.  $\frac{ab+ac+bc \pm \sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2-a^2bc-ab^2c-abc^2}}{a+b+c}$ .  
 43.  $a^n$  ja  $a^{-n}$ .    44.  $a^{3n}$  ja  $-a^n$ .    45.  $\sqrt{a}$  ja  $-\sqrt{2a}$ .  
 66.  $(x-3)(x-4)$ .    67.  $(x-9)(x+12)$ .    68.  $(3x-2)(2x+3)$ .  
 69.  $(5x+2)(6x+5)$ .    70.  $[x-(3+i\sqrt{2})][x-(3-i\sqrt{2})]$ .  
 71.  $(x+11)(x+4)$ .    72.  $(x-3a)(x+2a)$ .  
 73.  $(x-a-b) \cdot (x-a+b)$ .  
 74.  $(x-a-\sqrt{b})(x+\sqrt{b})$ .    75.  $(x\sqrt{ab}-a-b)(x\sqrt{ab}-a+b)$ .  
 76.  $x^2-5x+6=0$ .    77.  $x^2-2x-24=0$ .    78.  $x^2+5x=0$ .  
 79.  $x^2-9=0$ .    80.  $8x^2-2x-1=0$ .    81.  $6x^2+13x+6=0$ .  
 82.  $x^2-(\sqrt{6}-\sqrt{3})x-3\sqrt{2}=0$ .    83.  $x^2-8x+13=0$ .  
 84.  $x^2+6x+24=0$ .    85.  $x^2-2x+11=0$ .  
 86.  $x^2+(2b-3a)x-6ab=0$ .  
 87.  $x^2+3(b-a)x+2a^2-5ab+2b^2=0$ .  
 88.  $6x^2-ax-a^2=0$ .    89.  $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ .  
 90.  $abx^2-(a^2+b^2)x+ab=0$ .    91.  $(a+b)x^2-2ax+a-b=0$ .  
 92.  $(1-a)(1-b)x^2-[a(1-a)+b(1-b)]x+ab=0$ .  
 93.  $x^2-2ax+a^2-b=0$ .    94.  $x^2-2x\sqrt{a}+a+b=0$ .  
 95.  $qx^2+px+1=0$ .    96.  $ax^2+mbx+m^2c=0$ .  
 97.  $4x^2-p^2+4q=0$ .    98.  $a^2x^2+a(b-c)x-bc=0$ .

99.  $\frac{b(3ac - b^2)}{a^3}$ . 100.  $p^2 - q$ . 101.  $\pm 20$ .
103.  $c \leq 27$  ja  $c > 27$ . 106.  $-16$ . 107.  $4$ .
108.  $mp^2 - (m+1)^2q = 0$ .
109.  $\frac{2q}{-p \mp \sqrt{p^2 - 4q}}$ . 110.  $\pm \sqrt{pq}$  ja  $\pm \sqrt{\frac{p}{q}}$ .
111.  $\left( \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}, \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right)$  ja  $\left( \frac{b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2}, \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \right)$ .
112.  $\left( \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \right)$  ja  $\left( \frac{b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2}, \frac{-b - \sqrt{b^2 + 4a}}{2} \right)$ .
113.  $\pm p \sqrt{\frac{S}{p^2 + q^2}}$  ja  $\pm q \sqrt{\frac{S}{p^2 + q^2}}$ . 114.  $\frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}$ , ( $a > 2$ ).
115.  $\frac{-a + 100(b+c) + \sqrt{[100(b+c) - a]^2 + 400ab}}{2a} \%$ .
116.  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} a$  ja  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2} a$ . 117. Lõigu peab poolitama.
118. Kolmnurga küljed on:  $\frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4S}}{2}$ ; tuleb ruut, kui  $p^2 = 4S$ .
119.  $\frac{2\sqrt{5n^2 - m^2} + 4m}{5}$  ja  $\frac{2\sqrt{5n^2 - m^2} - m}{5}$ .
120.  $\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4h^2}}{2}$ . 121.  $\frac{a}{\sqrt{n} - 1}$  cm. 122.  $\frac{d}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$  sec.
123.  $\frac{mP}{\sqrt{m^2 - mn + n^2}}$  ja  $\frac{nP}{\sqrt{m^2 - mn + n^2}}$ . 124.  $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}} h$  cm.
125.  $\frac{d}{\sqrt{n} + 1}$  cm. 126.  $\sqrt{a^2 + b^2}$  127. Võrrand:  $\sqrt{\frac{2x}{9,8}} + \frac{x}{330} = n$ .
128.  $\frac{a + b - \sqrt{a^2 - ab + b^2}}{6}$  ja  $\frac{a + b - \sqrt{(a-b)^2 + 4S}}{4}$ .
129.  $\frac{\sqrt{bc(bc + 4a)} - bc}{2c}$  km/t.;  $\frac{\sqrt{bc(bc + 4a)} + bc}{2b}$  tundi.
130.  $\frac{\sqrt{mn(mn + 4p)} - mn}{2n}$  km/t. ja  $\frac{\sqrt{mn(mn + 4p)} + mn}{2n}$  km/t.

$$131. \frac{2T - t + \sqrt{4T^2 + t^2}}{2} \text{ tundi ja } \frac{2T + t + \sqrt{4T^2 + t^2}}{2} \text{ tundi.}$$

$$147. \min V, \text{ kui } t = 4^\circ.$$

$$148. \max S, \text{ kui } t \approx 12,7 \text{ sec.}$$

### Peatükk XII.

$$1. \pm 2; \pm 1. \quad 2. \pm 2i; \pm 2i\sqrt{2} \quad 3. \pm \frac{2}{\sqrt{5}}; \pm i.$$

$$4. \pm \sqrt{\frac{2}{3}}; \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}. \quad 5. \pm \sqrt{a}; \pm i\sqrt{b}.$$

$$6. x_{1,2} = \pm 2; x_{3,4} = \pm ai. \quad 7. x_{1,2} = \pm \frac{a}{b}; x_{3,4} = \pm \frac{b}{a}.$$

$$8. \text{Summa on } 0. \quad 9. 4 \cdot (x-2)(x+2) \left(x - \frac{1}{2}\right) \left(x + \frac{1}{2}\right).$$

$$10. x^4 - 10x^2 + 9 = 0. \quad 11. -1; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad 12. 2; -1 \pm i\sqrt{3}.$$

$$13. a; a \cdot \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \quad 14. \pm 2; \pm 2i. \quad 15. \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 \pm i).$$

$$16. \pm 2; \pm (1 \pm i\sqrt{3}). \quad 17. -\frac{2}{5}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{5}. \quad 18. \frac{\pm (1 \pm i)}{3}.$$

$$19. \pm \frac{b}{a}; \pm \frac{b}{a}i; \frac{b\sqrt{2}}{2a}(\pm 1 \pm i).$$

$$20. 1; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \sqrt[3]{2}; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{\sqrt[3]{4}}.$$

$$21. 1; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; 3; \frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{2}.$$

$$22. -1; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt[3]{9}}{3}; \frac{(1 \pm i\sqrt{3}) \cdot \sqrt[3]{9}}{6}.$$

$$23. \frac{1}{2}; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}; \frac{-1}{\sqrt{5}}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}.$$

$$24. 32; 16(-1 \pm i\sqrt{3}); 1; \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$25. -1; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{3}; 7\sqrt[3]{49}; \frac{(-1 \pm i\sqrt{3})}{2} \cdot 7\sqrt[3]{49}.$$

$$26. \frac{3}{a}; \frac{3(-1 \pm i\sqrt{3})}{2a}; -\frac{1}{a}; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2a}.$$

27.  $1; \frac{\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}; \frac{-(\sqrt{5}+1) \pm i\sqrt{10-2\sqrt{2}}}{4}; \sqrt[5]{9};$   
 $\frac{\sqrt[5]{9}}{4} (\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}); \frac{\sqrt[5]{9}}{4} (-\sqrt{5}-1 \pm i\sqrt{10-2\sqrt{5}}).$
28.  $0; \frac{7}{2}.$  29.  $\frac{8}{5}; -\frac{7}{4}; -9.$  30.  $2; -1; -1.$  31.  $1; 2; -3.$
32.  $-1; \pm 1.$  33.  $5; \pm 1.$  34.  $-3; \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$
35.  $-6; -1 \pm i\sqrt{2}.$  36.  $1; -2; \pm i\sqrt{2}.$  37.  $1; -2; 3; -4.$
38.  $2; -3; \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$  39.  $-1; \frac{n \pm i\sqrt{n(3n+4)}}{2n}.$
40.  $a; a(1 \pm 2i\sqrt{3}).$  41.  $-a; \frac{a \pm \sqrt{a^2-4b^2}}{2}.$
42.  $\pm ai; \frac{a(-1 \pm \sqrt{5})}{2}.$  43.  $1; \pm i.$  44.  $\pm 1; 2; \frac{1}{2}.$
45.  $\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \pm i.$  46.  $\pm 1; \frac{b \pm \sqrt{b^2-4a^2}}{2a}.$
47.  $x_1=2; x_2=\frac{1}{2}; x_3=-\frac{1}{3}; x_4=-3.$
48.  $x_1=2; x_2=\frac{1}{2}; x_3=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; x_4=\frac{-3-\sqrt{5}}{2}.$
49.  $x_{1,2}=4 \pm \sqrt{17}; x_{3,4}=\frac{1 \pm \sqrt{65}}{8}.$
50.  $x_1=2; x_2=-\frac{1}{2}; x_3=\frac{1}{3}; x_4=-3.$
51.  $x_1=-1; x_{2,3}=-2 \pm \sqrt{3}; x_4=2; x_5=\frac{1}{2}.$
52.  $1; -1 \pm i\sqrt{3}; -\frac{11}{15}; -\frac{5}{3}.$
53.  $\pm i; 3 \pm 2\sqrt{2}; 2 \pm \sqrt{3}.$
54.  $x_1=1; x_2=x_3=x_4=-1; x_5=2; x_6=\frac{1}{2}.$
56.  $2(x-1)^2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right).$
57.  $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0.$

### Peatükk XIII.

- |   |                           |   |  |
|---|---------------------------|---|--|
| 1. 2.                                   | 2. 20.                    | 3. $-1$ .                                     | 4. 7.                                  |
| 5. 6.                                   | 6. 7.                     | 7. 4.   | 8. 4.                                  |
| 9. 0; 2.                                | 10. 0; $\frac{5}{2}$ .    | 11. 2.  | 12. 2.                                 |
| 13. $\pm 2$ .                           | 14. 3; $-\frac{2}{3}$ .   | 15. 81.                                       | 16. 5.                                 |
| 17. 2; $2\frac{1}{2}$ .                 | 18. 4; $-\frac{10}{27}$ . | 19. 0; $1\frac{9}{16}$ .                      | 20. $-\frac{2}{3}$ .                   |
| 21. $\frac{2}{3}$ .                     | 22. 20.                   | 23. 1; $-3\frac{3}{8}$ .                      | 24. 84; 19.                            |
| 25. $\pm 3\sqrt{2}$ .                   | 26. 0; $-5$ .             | 27. $\frac{a}{4}$ .                           | 28. 0; $a$ .                           |
| 29. $\frac{1}{2}\sqrt{4a^2+2b^2}$ .     |                           | 30. $\frac{a}{b}$ ; $\frac{c}{d}$ .           | 31. $-\frac{2a}{3}$ .                  |
| 32. $\frac{3a^2}{4}$ .                  | 33. $2a$ .                | 34. $\pm a$ .                                 | 35. $\frac{1 \pm \sqrt{1+4b^2}}{2a}$ . |
| 36. $\frac{a + \sqrt{a^2 + 24ab}}{6}$ . |                           | 37. $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}\sqrt{2}$ . |  |

### Peatükk XIV.

- |   |                            |
|---|----------------------------|
| 1. 6; 2 ja $-7\frac{1}{3}$ ; $-4\frac{2}{3}$ .  | 2. 3; 5 ja $-3$ ; $-4$ .   |
| 3. 1; 3 ja 19; $-3$ .   | 4. 4; 2 ja 3; 1.           |
| 5. 1; $\frac{1}{2}$ ja $-1$ ; $-\frac{1}{2}$ .  | 6. 11; 9 ja $-11$ ; $-9$ . |
| 7. 15; 3 ja 9,6; $-2,4$ .   | 8. 20; 100 ja 100; 20.     |
| 9. 5,6; 5,2 ja $-7,6$ ; 0,8.  | 10. 3; 4 ja 1; 2.          |
| 11. $3a$ ; $2a$ ja $-\frac{27}{16}a$ ; $-\frac{43}{16}a$ .  | 13. $a$ ; 0 ja 0; $b$ .    |
| 12. $\frac{a}{a-1}$ ; $\frac{a}{a+1}$ ja $-\frac{a}{1+a}$ ; $\frac{a}{1-a}$ .   |                            |
| 14. $\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$ ; $\frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$ ja $\frac{a}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$ ;<br>$\frac{a}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{b-2}{b+2}}\right)$ . |                            |
| 15. $\sqrt{ab}$ ; $\sqrt{\frac{a}{b}}$ ; $-\sqrt{ab}$ ; $-\sqrt{\frac{a}{b}}$ .   |                            |

16.  $(3; 1), (-3; -1), \left(12; -3\frac{1}{2}\right)$  ja  $\left(-12; 3\frac{1}{2}\right)$ .
17.  $(0; 0), (2; 2), (\sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$  ja  $(-\sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ . 18.  $3; 5$  ja  $2; 1$ .
19.  $(3; 2), (-3; -2), \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}; -\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$  ja  $\left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; \frac{7\sqrt{3}}{3}\right)$ .
20.  $(3; 5), (-3; -5)$  ja  $(-8; 5), (8; -5)$ .
21.  $(6; 5), (-6; 5), (6; -5)$  ja  $(-6; -5)$ .
22.  $(4; 2\sqrt{2}), (4; -2\sqrt{2}), (3; 5)$  ja  $(3; -5)$ . 23.  $3; \frac{2}{3}$  ja  $-2; -1$ .
24.  $2; 1\frac{1}{2}$  ja  $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ . 25.  $(7; 3), (7; -4), (-8; 3)$  ja  $(-8; -4)$ .
26.  $\frac{a}{\sqrt{a+b}}; \frac{b}{\sqrt{a+b}}$  ja  $-\frac{a}{\sqrt{a+b}}; -\frac{b}{\sqrt{a+b}}$ .
27.  $(a; a), (-a; -a), \left[\frac{a}{2}(1+i\sqrt{3}); \frac{a}{2}(1-i\sqrt{3})\right]$  ja  
 $\left[\frac{a}{2}(1-i\sqrt{3}); \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3})\right]$ .
28.  $(a+1; a-1)$  ja  $(-1-a; 1-a)$ .
29.  $(a; a+b), (a; -b), (b+\sqrt{a^2+b^2}; b)$  ja  $(b-\sqrt{a^2+b^2}; b)$ .
30.  $(-a; 2a-2), (-a; -2a), (2a; a)$  ja  $(-a; -2a)$ . 31.  $7; 5$  ja  $5; 7$ .
32.  $(3; 2), (3; -2), (-3; 2)$  ja  $(-3; -2)$ . 33.  $7; 5$  ja  $5; 7$ .
34.  $6; 2$ . 35.  $20; 4$  ja  $-20; -4$ . 36.  $2; 2$  ja  $2; 2$ .
37.  $(4; 3), (-4; -3), (3; 4)$  ja  $(-3; -4)$ . 38.  $7; 6$  ja  $-6; -7$ .
39.  $8; 2$ . 40.  $4, 64; 64, 4$ .
41.  $(3; 2), (-3; 2), (i\sqrt{2}; -9)$  ja  $(-i\sqrt{2}; -9)$ . 42.  $4; 3$  ja  $-3; -4$ .
43.  $(3; 1), (-3; -1), (i; 3i)$  ja  $(-i; -3i)$ . 44.  $8; 4$  ja  $4; 8$ .
45.  $(3; 1), (-3; -1), \left(1\frac{1}{2}; 2\right)$  ja  $\left(-1\frac{1}{2}; -2\right)$ .
46.  $(2; 1), (-2; -1), (i; 2i)$  ja  $(-i; -2i)$ . 47.  $(3; 2), (-2; -3)$ .
48.  $(3\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-3\sqrt{2}; -\sqrt{2}), (3\sqrt{2}; -\sqrt{2})$  ja  $(-3\sqrt{2}; \sqrt{2})$ .
49.  $(9; 4), (-4; -9)$ .
50.  $(9; 4), (4; 9), (4+\sqrt{15}; 4-\sqrt{15})$  ja  $(4-\sqrt{15}; 4+\sqrt{15})$ .
51.  $(0; 0), \left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}; \frac{3-i\sqrt{3}}{2}\right)$  ja  $\left(\frac{3-i\sqrt{3}}{2}; \frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$ .
52. Mistahes vördsete arvude paar ja ka  $(0; 1), (1; 0)$ .
53.  $(3; 2), (2; 3), \left(\frac{5+i\sqrt{151}}{2}; \frac{5-i\sqrt{151}}{2}\right)$  ja  $\left(\frac{5-i\sqrt{151}}{2}; \frac{5+i\sqrt{151}}{2}\right)$ .
54.  $(2; -1), (1; -2), \left(\frac{3+i\sqrt{19}}{2}; \frac{-3+i\sqrt{19}}{2}\right)$  ja

$$\left(\frac{3-i\sqrt{19}}{2}, \frac{-3-i\sqrt{19}}{2}\right).$$

55. (3; 1), (1; 3),  $\left(2+2\sqrt{\frac{19}{7}}; 2-2\sqrt{\frac{19}{7}}\right)$  ja

$$\left(2-2\sqrt{\frac{19}{7}}; 2+2\sqrt{\frac{19}{7}}\right).$$

56. (2; 1),  $\left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ ,  $\left(\frac{1+\sqrt{41}}{10}; \frac{-9+\sqrt{41}}{10}\right)$  ja

$$\left(\frac{1-\sqrt{41}}{10}; \frac{-9-\sqrt{41}}{10}\right).$$

57. (4; 2), (2; 1), (4; 2) ja (2; 1).

58. (6; 3),  $\left(-3; -\frac{3}{2}\right)$ ,  $\left(\frac{12+3\sqrt{39}}{23}; 12+3\sqrt{39}\right)$  ja

$$\left(\frac{12-3\sqrt{39}}{23}; 12-3\sqrt{39}\right).$$

59. 5; 3; -3.

60. (333; 111) ja (115; 329).

61.  $\pm 3; \pm 4; \pm 2$ .

62.  $\pm 8; \pm 6; \pm 9$ .

63.  $\pm 1; \pm 4; \pm 6$ .

64. 9; 3; 0 ehk 1; -5; -8.

65.  $\pm 5; \pm 2; \pm 7$ .

66. (13; 5; 2) ja (2; 5; 13).

67. (4; 3; 5), (3; 4; 5),  $\left(\frac{5+i\sqrt{23}}{2}; \frac{5-i\sqrt{23}}{2}; 7\right)$  ja

$$\left(\frac{5-i\sqrt{23}}{2}; \frac{5+i\sqrt{23}}{2}; 7\right).$$

68. (2; 4; 1) ja (2; 1; 4).

69. (5; 12; 13) ja (12; 5; 13).

70. (1; 1; 1), (1; 1; 1),  $\left(\frac{7+i\sqrt{15}}{2}; -4; \frac{7-i\sqrt{15}}{2}\right)$  ja

$$\left(\frac{7-i\sqrt{15}}{2}; -4; \frac{7+i\sqrt{15}}{2}\right).$$

71. (4; 6; 3), (4; 3; 6),  $(9; 2+i\sqrt{14}; 2-i\sqrt{14})$  ja  $(9; 2-i\sqrt{14}; 2+i\sqrt{14})$ .

72. (1; 5; 2), (1; -5; 2),  $(-1; 5; -2)$  ja  $(-1; -5; -2)$ .

73.  $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$  ja  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{5}\right)$ .

74.  $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$  ja  $\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right)$ .

75. (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2) ja (3; 2; 1).

76. (5; -2; -3), (5; -3; -2),  $(-2; 5; -3)$ ,  $(-2; -3; 5)$ ,  $(-3; 5; -2)$  ja  $(-3; -2; 5)$ .

77. (2; 5; 4; 3) ja  $(-7; 4; 5; 12)$ .

78. (3; 5; 4; 7), (17; 5; 4; -7),  $(10+\sqrt{58}; -4; -5; -\sqrt{58})$  ja  $(10-\sqrt{58}; -4; -5; \sqrt{58})$ .

79. (10; 6; 5; 3) ja (3; 5; 6; 10); (10; 5; 6; 3) ja (3; 6; 5; 10).

80. (3; 2; 6; 1) ja (2; 3; 1; 6), (3; 2; 1; 6) ja (2; 3; 6; 1).

81.  $\frac{1}{2}(a^2 + 2b + a\sqrt{a^2 + 4b})$ ;  $\frac{1}{2}(a^2 + 2b - a\sqrt{a^2 + 4b})$ .

82.  $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$ ;  $\left[-\frac{a(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{b(1 + i\sqrt{3})}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\right]$ .  
 $\left[-\frac{a(1 - i\sqrt{3})}{2\sqrt{a^2 + b^2}}; -\frac{b(1 - i\sqrt{3})}{2\sqrt{a^2 + b^2}}\right]$ .

83.  $\pm a$ ;  $\pm 2a$ ;  $\pm 3a$  (8 kombinatsiooni).

84.  $\pm \frac{m}{\sqrt{3bc}}$ ;  $\pm \frac{m}{\sqrt{3ac}}$ ;  $\pm \frac{m}{\sqrt{3ab}}$  (8 kombinatsiooni).

85.  $\pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{n}$ ;  $\pm \frac{an}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ;  $\pm \frac{bn}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

86.  $\pm \sqrt{\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{2(b+c-a)}}$ ;  $\pm \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+b-c)}{2(a+c-b)}}$ ;  
 $\pm \sqrt{\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b-c)}}$ .

87.  $\pm \frac{a(b+c)}{2\sqrt{abc}}$ ;  $\pm \frac{b(a+c)}{2\sqrt{abc}}$ ;  $\pm \frac{c(a+b)}{2\sqrt{abc}}$ .

88.  $\pm \sqrt{\frac{a-b+c}{2}}$ ;  $\pm \sqrt{\frac{a+b-c}{2}}$ ;  $\pm \sqrt{\frac{b+c-a}{2}}$  (8 kombinatsiooni).

89.  $a + b \mp \sqrt{2ab}$ ;  $-b \pm \sqrt{2ab}$ ;  $-a \pm \sqrt{2ab}$ .

90.  $(m+n; m-n; m)$ ,  $(-m+n; -m-n; -m)$ ,

$\left(m + \frac{3}{7}n; m - \frac{8}{7}n; m + \frac{5}{7}n\right)$  ja

$\left(-m + \frac{3}{7}n; -m - \frac{8}{7}n; -m + \frac{5}{7}n\right)$ .

91. 19 ja 11. 92. (13; 15), (-15; -13). 93. 8 ja 5. 94. 15; 5.

95. 6 ja 8 või -9 ja -7. 96. 24. 97. 12 ja 4. 98. 13 ja 9.

99. (10; 7), (-7; -10). 100.  $\frac{3}{4}$  või  $\frac{4}{3}$ . 101. 35 või 53.

102. 20; 18; 16. 103. 1; 4; 7. 104. 452. 105. 9; 6; 4. 106. 864.

107.  $\frac{1 \pm \sqrt{2(a+b)+1}}{2}$  ja  $\frac{1 \pm \sqrt{2(a-b)+1}}{2}$ .

108.  $\pm \frac{a(p+q)}{2\sqrt{apq}}$ ;  $\pm \frac{a(p-q)}{2\sqrt{apq}}$ . 109. 14 cm ja 8 cm.

110. 24 cm ja 4 cm. 111. 36 cm ja 12 cm. 112. 5 cm; 12 cm; 13 cm.  
 113. 6 cm; 8 cm; 10 cm. 114. 80 cm; 39 cm; 89 cm. 115. 5 cm; 6 cm; 8 cm.  
 116. 18 cm ja 6 cm. 117.  $\frac{\sqrt{a^2 + 4s} \pm \sqrt{a^2 - 4s}}{2}$ .  
 118.  $a = \frac{p^2 + s \pm \sqrt{(p^2 + s)^2 - 8p^2s}}{2p}$ ;  $b = \frac{p^2 + s \mp \sqrt{(p^2 + s)^2 - 8p^2s}}{2p}$ ;  
 $c = \frac{p^2 - s}{p}$ .  
 119.  $\frac{4p \pm d - \sqrt{8p^2 + d^2}}{2}$  ja  $\sqrt{8p^2 + d^2} - 2p$ .  
 120.  $\sqrt{a^2 + s} \pm \sqrt{a^2 - s}$ .  
 121. 120 sec,  $20 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ . 122. 12 kG ja 9 kG.  
 123.  $45 \frac{\text{km}}{\text{t}}$  ja  $25 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ .  
 124.  $16 \frac{\text{km}}{\text{t}}$  ja  $12 \frac{\text{km}}{\text{t}}$ .  
 125. (12 cm; 5 cm) ja  $(12 \frac{16}{17} \text{ cm}; 1 \frac{4}{17} \text{ cm})$ .  
 126. 8 t. ja 6 t. 127. 12 dm ja 36 dm.  
 128. 18 dm ja 27 dm. 129.  $\sqrt{pq}$ .  
 130. 5 oomi ja  $(3 \pm \sqrt{1,5})$  oomi.  
 131.  $\frac{(ad - cb) qp}{(a + b) dq - (c + d) bp}$  kg/dm<sup>3</sup>;  $\frac{(bc - ad) pq}{(a + b) cq - (c + d) ap}$  kg/dm<sup>3</sup>.  
 132.  $\frac{a}{\sqrt{2a - d}}$  cm/sec;  $\frac{d - a}{\sqrt{2a - d}}$  cm/sec.  
 133.  $\frac{d + \sqrt{d^2 + 4md}}{2md}$ ;  $\frac{-d + \sqrt{d^2 + 4md}}{2md}$ .  
 134.  $\frac{a(v + c) - 2bc \pm \sqrt{a^2(v + c)^2 - 4abcv}}{2a}$  v cm;  
 $\frac{a(v - c) \pm \sqrt{a^2(v + c)^2 - 4abcv}}{2a}$  cm/sec.

### Peatükk XV.

1. 44; 345. 2. — 37; — 360. 3. 1065. 4.  $\frac{n(n + 1)}{2}$ .  
 5. 5050. 6. 10 100 7.  $2n - 1$ ;  $n^2$ .

8.  $\frac{a(n+1) - b(n-1)}{2}n$ .      9.  $d = 3$ .      10.  $d = -5$ .
11. 55; 403.      12. 26; 451.      13. 2; 1661.      14. 56; 680.
15. 5; 18.      16.  $-1$ ; 20.      17. 4; 528.      18.  $-2$ ; 330.
19. 140; 10.      20. 45; 3.      21. 9; 2.      22. 0; 7.
23. 10; 265.      24. 26; 604,5.      25. 7; 61.      26.  $-9$ ; 3.
27. 10; 47.      28. 52; 143.      29. 10; 2.      30. 24 ja  $-4$ ; 21 ja 8.
33. 9 või 4.      34. 10; 8; 6; ...      35.  $-10$ .      32. 145.
37. 1, 3, 5, ...      38.  $\frac{(m+n)(m+n-1)}{2}$ .
39. 2,5... või 5,2...      40.  $-100$ .
41. 2, 5, 8... või 8, 5, 2...      42. 2, 5, 8... või 14, 11, 8...
43. 8 külge.      44. 9 külge.      45. 200,9 m; 2160,9 m.      46. 30 sec.
47. 67 sec.      48. 160 sec.      49. 441 m/sec.
50. 4410 cm; 294 m/sec.
51. 6 cm; 48 cm.      52. 1600 m.      53. 3 sec.
54. 208 mm; 176 mm; 144 mm; 112 mm.      55. 7 päeva.
56. 10 min.      57. 21 ja 80 sec.      58. 15 sec.
59. 6 sec.      60. 5 päeva.
61. 78,4 m.      62.  $\approx 4,5$  sec.      63. 4 auhinda.
64. 4 külge.      65. 40 m/min<sup>2</sup>.      66. 10 230.      67.  $-13\ 108$ .
68.  $\frac{1640}{729}$ .      69.  $\frac{19\sqrt{6} + 30}{12}$ .      70.  $\frac{8}{3} \left[ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right]$ .
71.  $\frac{\sqrt{6}(\sqrt{3^n} - 1)}{\sqrt{3} - 1}$ .      72. 141 ja 423.      73.  $q = \sqrt{\frac{b}{a}}$ .
74. 189.      75.  $\frac{b^{m+1}}{a+b} \cdot \left[ \left(-\frac{a}{b}\right)^n - 1 \right]$ .      76. 13 122; 19 680.
77.  $-\frac{1}{625}$ ;  $4\frac{104}{625}$ .      78. 2; 254.      79.  $\frac{3}{8}$ ;  $\frac{55}{216}$ .
80. 8; 14 043.      81.  $-\frac{2}{3}$ ;  $44\frac{1}{3}$ .      82. 5; 320.      83. 8;  $-\frac{1}{16}$ .
84. 6; 189.      85. 6;  $24\frac{17}{27}$ .      86. 3; 7.      87. 2; 6.
88. 567; 5.      89.  $-486$ ; 6.      90.  $-6$  ja 3.      91. 2; 8.
92. 2; 120.      93. 5; 300 või  $-6$ ; 432.
94. 3; 15 või  $-\frac{3}{4}$ ; 240.      95. 2; 2 või  $-\frac{2}{3}$ ; 18.
96.  $q = \pm 3$ .      97. 3 069.

98. 54; 18; 6 ja 2 vöi 27; — 9; 3 ja — 1.  
 99. 2; 14; 98. 100. 64; 32; 16; 8; 4 ja 2  
 101. (2; 6; 18) ja (18; 6; 2). 102. 5; 13; 21; 29.
103.  $\pm \sqrt{kl}$  ja  $k \left( \pm \sqrt{\frac{l}{k}} \right)^m$ . 105.  $\frac{\sqrt{2}}{256}$ .
106. 15,5; 22,0 ...; 247,6. 107. 1200; 1800; 2700; 4050.  
 108. 9 m; 12 m; 16 m. 109. 18 m; 6 m; 2 m.  
 110.  $\approx 46,5$ ; mm (760 · 0,83<sup>15</sup>).  
 111.  $\approx 26,7$  l (40 · 0,98<sup>20</sup>). 112. 625 l.
113. 2. 114.  $\frac{3}{4}$ . 115.  $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ . 116.  $\frac{16 + 11\sqrt{2}}{7}$ .
117.  $q = \frac{1}{1+k}$ . 118.  $\frac{1}{3} AB$ . 119.  $4a(2 + \sqrt{2})$  ja  $2a^2$ .
120.  $6a(2 - \sqrt{3})$  ja  $\frac{1}{7} a^2 \sqrt{3}$  121.  $2\pi R^2$  ja  $4R^2$ . 122.  $(1 + \sqrt{2})a$ .

### Peatükk XVI.

1. 8. 2. 2. 3. 2. 4. 64. 5. 4. 6.  $\frac{1}{4}$ . 7.  $\pm 4$ . 8. 64.
9.  $\frac{1}{25}$ . 10. — 3. 11. 10; 5; 2. 12. — 4; — 2; — 1.
13.  $\frac{1}{512}$ . 14. 3. 15. — 6; — 3; — 2.
16. 6; 3; 2. 17. 1;  $\frac{3}{4}$ ;  $\frac{4}{3}$ ;  $\frac{9}{16}$ ;  $1\frac{7}{9}$ ;  $\frac{27}{64}$ ;  $2\frac{10}{27}$ . 18. — 1; — 2; 0; — 3.
19. 5; 125;  $\frac{1}{5}$ ;  $\frac{1}{125}$ . 20. 0; — 2; — 1; 2; — 3; 3.
21.  $\sqrt[4]{27}$ . 22. 1 ja 2; 2 ja 3; 3 ja 4; 4 ja 5; 6 ja 7; 8 ja 9.
23. — 1 ja — 2; — 1 ja — 2; — 2 ja — 3; — 3 ja — 4; — 4 ja — 5.
24.  $\sqrt{5}$ , 25.  $\sqrt[4]{\frac{8}{8}}$ . 26.  $\sqrt[3]{\frac{7}{7}}$ . 27.  $-\frac{1}{8}$ ; — 512;  $\frac{1}{64}$ ; — 2;  $-\frac{1}{2}$ .
28. 3. 2; — 4. 29.  $\frac{2}{5}$ ;  $\frac{1}{10}$ ;  $-\frac{1}{5}$ ;  $-\frac{1}{10}$ . 30. 4;  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ;  $4\sqrt[4]{2}$ .
31. 0. 32.  $\infty$ . 33. —  $\infty$ . 34.  $\log_{14} 15 > \log_{15} 14$ .
35.  $\log 2 + \log 3$ . 36.  $\log 5 - \log 3$ . 37.  $3 \log 5$ . 38.  $\frac{1}{4} \log 11$ .

39. 9; -1.      40. 2 ja 3; 3 ja 5; 2 ja 19; 5 ja 7.
41. 0,77815; 1,17609; 1,47712; 1; 3.
42. 0,39794; 0,22185; -1,09691; -0,22185; -1,79588.
43. 1,30103; 2,30103; 1,17609; 2,17609; 3,17609.
44. -0,52288; -2,52288; -1,22185; -3,22185.
45.  $\log 2 + \log a + \log b$ .      46.  $\log a + \log b - \log c$ .
47.  $3 \log a + 2 \log b$ .      48.  $2 \log a - 3 \log b - 7 \log c$ .
49.  $\log 2 + \log(a + b)$ .      50.  $\log 3 - \log(a + b) - \log(a - b)$ .
51.  $2 \log(a - b) + \log c - \log(a + b) - \log d$ .
52.  $\log 5 + 2 \log a + \log b + \frac{1}{3} \log c$ .
53.  $\frac{1}{5}(\log 3 + 3 \log a + \log b - 4 \log c)$ .
54.  $\log 5 + \frac{1}{3}[5 \log a + \log(a - b)]$ .
55.  $\log 2 + \log a + 3 \log b - \log c - \frac{1}{2} \log d$ .
56.  $\frac{5}{3}(\log 10 - \log a)$ .      57.  $-n \log a - \frac{1}{2} \log b$ .      58.  $-\log a - \frac{1}{2} \log b$ .
59.  $\frac{2}{3} \log a + \frac{3}{5} \log b$ .      60.  $\frac{m}{n}(\log m - \log n)$ .
61.  $\frac{1}{2} \left[ \log 2 + \frac{1}{2} \left( \log 6 + \frac{1}{2} \log 15 \right) \right]$ .      62.  $\frac{1}{3} \left( 2 \log a + \log b - \frac{3}{5} \log c \right)$ .
63.  $-\frac{3}{4} \log a + 2 \log b + \frac{1}{2} \log c$ .
64.  $\frac{1}{2} \left[ \log 24 + \frac{1}{2} \left( \log 2 + \frac{1}{2} \log 3 \right) - \frac{1}{3} \left( \log 4 + \frac{1}{2} \log 6 \right) \right]$ .
65. 0.      66.  $\frac{1}{m} \left( \log a + \frac{1}{n} \log b \right)$ .
67.  $-\frac{1}{m} \left( \log a - \frac{1}{n} \log b \right)$ .      68.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \log 2$ .
69.  $-\frac{1}{2} \log 2 + \log \log 2$ .      70.  $\log a + \log b + \log \log 10$ .
71.  $\log 10 - \log 3$ .      72.  $2 \log \log(a + b)$ .
73.  $\log 4 - \log 5 + \frac{2}{3} \log a + \log \log a$ .
74.  $\log \log(a + b) + \log \log(a - b) - \log 2$ .      75.  $\frac{14}{3}$ .      76. 1125.

$$77. \frac{\sqrt[5]{1331}}{7\sqrt{25}} \quad 78. \frac{169}{\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{2401}} \quad 79. \frac{a^3 b^2}{c^4} \quad 80. \frac{\sqrt[3]{a} \sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{c}}$$

$$81. \frac{\sqrt[3]{10}}{3\sqrt{5}} \quad 82. \frac{\sqrt[4]{(a+b)^2}}{\sqrt{(a-b)^3}} \quad 83. \frac{a+b}{\sqrt[3]{(a^2 \sqrt[4]{b^3})^2}} = \frac{a+b}{a\sqrt[6]{a^2 b^3}}$$

$$84. \frac{1}{a^3} \sqrt[3]{\frac{(a+b)\sqrt[5]{(a-b)^2}}{b\sqrt{c}}}$$

85. 1,30103; 3,30103;  $\bar{1}$ ,30103;  $\bar{6}$ ,30103.

86. 0,39794; 2,69897;  $\bar{1}$ ,39794;  $\bar{3}$ ,69897.

87. 2,32222;  $\bar{2}$ ,32222. 88. 0,17609;  $\bar{1}$ ,07918;  $\bar{1}$ ,55630.

89\*. 0,90309 (0,9031); 2,14922 (2,1492); 2,97955 (2,9795); 2,62325 (2,6232); 2,80618 (2,8062); 3,09167 (3,0917); 3,59184 (3,5919); 3,47857 (3,4786); 1,26553 (1,2655); 0,31175 (0,3118); 2,95429 (2,9542);  $\bar{1}$ ,86332 ( $\bar{1}$ ,8633);  $\bar{3}$ ,44716 ( $\bar{3}$ ,4472);  $\bar{1}$ ,00346 ( $\bar{1}$ ,0035);  $\bar{5}$ ,69897 ( $\bar{5}$ ,6990).

90. 3,33738 (3,3374); 3,16008 (3,1602); 3,33636 (3,3364); 3,92620 (3,9262); 1,66719 (1,6672); 0,79833 (0,7983);  $\bar{1}$ ,89729 ( $\bar{1}$ ,8973);  $\bar{2}$ ,73475 ( $\bar{2}$ ,7347); 2,80008 (2,8001); 0,44647 (0,4465);  $\bar{1}$ ,87357 ( $\bar{1}$ ,8735);  $\bar{3}$ ,37503 ( $\bar{3}$ ,3751).

91. 1453; 3909; 857,4; 2,575; 39,87; 0,05714; 0,001719; 0,6265; 0,0007553; 0,000014.

92\*\*. 3774,5 (3775); 1456,8 (1456); 253,27 (253,3); 12,536 (12,54); 31494 (31490); 0,068995 (0,069); 0,31666 (0,3166); 0,0019978 (0,001998); 0,14829 (0,1483); 0,00017824 (0,0001782).

93.  $\bar{3}$ ,30463;  $\bar{5}$ ,78707;  $\bar{1}$ ,45775;  $\bar{2}$ ,31693;  $\bar{4}$ ,46180;  $\bar{6}$ ,10010.

94. -0,66722; -2,47207; -1,04574; -3,76275; -0,60580; -4,32010.

95\*\*. 7961,6 (7962). 96. 401,75 (401,8). 97. 31 (30,99). 98. 41,846 (41,84).

99. 552,25 (552,4). 100. 0,000021952 (0,00002196). 101. 3,5355 (3,535).

102. 0,37325 (0,3733). 103. 40,42 (40,41). 104. 0,18894 (0,1889). 105. 1,4252

(1,425). 106. 0,7372. 107. 5,5556 (5,556). 108. 0,13762 (0,1376). 109. 50,466

(50,12). 110. 1,04712 (1,047). 111. 0,37077 (0,3708). 112. 0,00068129

(0,0006813). 113. 4,8674 (4,867). 114. 1,0295 (1,029). 115. 0,050188

(0,05019). 116. 0,79668 (0,7967). 117. 93,832 (93,85). 118. 0,1567. 119. 0,77738

(0,7774). 120. 0,85856 (0,8586). 121. 0,018887 (0,01888). 122. 0,14614 (0,1462).

\* Sulgudes on antud arvude logaritmid neljakohaliste murdosadega.

\*\* Sulgudes on antud vastused neljakohaliste tabelite järgi.

**123.** 1,24203 (1,242). **124.** 0,90084 (0,9007). **125.** 0,8233 (0,8233). **126.** 3,1896 (3,188). **127.** 79568 (79640). **128.** 21,55. **129.** — 8094,7 (— 8093). **130.** 2,8946 (2,895). **131.** 248,4 (248,5). **132.** 0,0025534 (0,00255). **133.** 0,13762 (0,1376). **134.** 10,486 (10,48). **135.** 0,9937. **136.** 0,88396 (0,8839) **137.** 0,88662 (0,8865). **138.** 0,53723 (0,5374). **139.** 13,714 cm; 41,142 cm (13,71 ja 41,13). **140.** 4,4247 m; 7,3745 m; 11,7992 m (4,425; 7,375 ja 11,8). **141.** 8,6556 cm (8,656). **142.** 2,9961 m (2,995). **143.** 696,55 cm<sup>3</sup> (696,6). **144.** 3,275 dm. **145.** 0,7937 m (0,7936). **146.**  $\approx 11$  cm. **147.** 16,453 cm (16,450). **148.** 2,8405 cm (2,841). **149.**  $\approx 9^{\circ}54'$ . **150.**  $\approx 64,4$  kg. **151.**  $\approx 6 \cdot 10^{24}$  kg. **152.**  $\approx 0,272$  cm/sec<sup>2</sup>. **153.** 592,9 m. **154.** 30,62 kcal. **155.**  $\approx 2,04$  dm. **156.**  $\approx 8,35$  g/cm<sup>3</sup>. **157.**  $\approx 512$  m. **158.** 21,99 l. **159.** 99,45 cm. **160.** 74,87 (74,86). **161.** 1,3631 (1,362). **162.** 0,814 (0,814). **163.** 0,46272 (0,4627). **164.** 73,228 (73,22). **165.** 1,199. **166.** — 25,395 (— 25,39). **167.** 1,1574 (1,157). **168.** 3,4284 (3,428). **169.** 1,596. **170.** — 0,88852 (— 0,8884). **171.** 0,093428 (0,09344). **172.** 0,8512. **173.** 1,16327 (1,162). **174.** 1672,8 (1673). **175.** — 4. **176.** —  $\frac{6}{7}$ .

|  |                                      |   |                               |
|--|--------------------------------------|---|-------------------------------|
| <b>177.</b> — $\frac{1}{2}$ .                  | <b>178.</b> 7.                       | <b>179.</b> $\frac{5}{2}$ .                         | <b>180.</b> $\frac{4}{5}$ .   |
| <b>181.</b> $\frac{7}{3}$ .                    | <b>182.</b> 4 ja — 1.                | <b>183.</b> $\pm 2$ .                               | <b>184.</b> 2.                |
| <b>185.</b> 2.                                 | <b>186.</b> 3.                       | <b>187.</b> 2 ja 5.                                 | <b>188.</b> $\frac{1}{a+b}$ . |
| <b>189.</b> 35.                                | <b>190.</b> 3; 1 ja — 2.             | <b>191.</b> 5,2 ja 2,5.                             | <b>192.</b> 1,5 ja — 0,5.     |
| <b>193.</b> 1000.                              | <b>194.</b> 3 ja — 5.                | <b>195.</b> 3.                                      | <b>196.</b> 4.                |
| <b>197.</b> 0.                                 | <b>198.</b> 1.                       | <b>199.</b> 2.                                      | <b>200.</b> 1.                |
| <b>201.</b> 1.                                 | <b>202.</b> 0; 1 ja 4.               | <b>203.</b> 2 ja — 1,585.                           | <b>204.</b> 10 ja 0,1.        |
| <b>205.</b> 100 ja 0,1.                        | <b>206.</b> 1000 ja 0,01.            | <b>207.</b> $\pm \sqrt{\log 5} \approx \pm 0,836$ . |                               |
| <b>208.</b> 1,7604.                            | <b>209.</b> 2,30103.                 | <b>210.</b> — 5,1286.                               | <b>211.</b> 1,4687.           |
| <b>212.</b> $\pm 0,54866$ .                    | <b>213.</b> — 0,58274.               | <b>214.</b> 1,3713.                                 | <b>215.</b> — 0,43683.        |
| <b>216.</b> 1,1899.                            | <b>217.</b> — 7,7397.                | <b>218.</b> 18.                                     | <b>219.</b> $3\frac{1}{3}$ .  |
| <b>222.</b> 25.                                | <b>223.</b> $\frac{16}{3\sqrt{5}}$ . | <b>224.</b> $4\frac{1}{2}$ .                        | <b>226.</b> 4.                |
| <b>227.</b> 9; 1.                              | <b>228.</b> 2.                       | <b>229.</b> $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ .                | <b>230.</b> 13.               |
| <b>231.</b> 18.                                | <b>232.</b> $a^{mn}$ .               | <b>233.</b> $\sqrt[n]{m}$ .                         |                               |
| <b>234.</b> $\log_a(b \pm \sqrt{b^2 - c^2})$ . |                                      | <b>235.</b> 2.                                      | <b>236.</b> — 2.              |

237. 1000; 0,001; 10; 0,1.      238.  $\frac{2}{3}$  ja 1,9689.    239. 16 ja 10.  
 240. 1 000 000 ja 10.      241. 1,6625 ja 1,2767.  
 242.  $\left(\frac{27}{8}; \frac{9}{4}\right)$  ja (1; 1).      243. (4; 2); (9; -3); (1; -1 ja (1; 1)).  
 244. 2,25 ja 0,75.      245. (2; 4); (-2; 4) ja (1; 1).    246. (1; 1) ja (16; 4).  
 247. 3 ja 5.      248. 3 ja 2.      249. 363 r. 47 k. (363,5).  
 250. 2493,9 rbl. (2496).    251. 20 aastat.      252. 4%.  
 253. 7,18% (7,2%).    254. 5,5%.      255.  $\approx 19,6$  aastat.  
 256. 4543,1 rbl. (4542).    257.  $\approx 23$  aastat.    258. 19 675 rbl.  
 259. 11 603 rbl. (11 600).    260. 15,5 kop. kuus liigselt.  
 261. 6 aastat.      262.  $\approx 750$  m<sup>3</sup> võrra.    263.  $\approx 2,25\%$  (2,3%).  
 264.  $\approx 31$  900 rbl.    265.  $\approx 28 \cdot 10^{14}$ .    266. 5%.  
 267.  $\approx 80$  000 m<sup>3</sup>.    268. 20 454 m<sup>3</sup> (20 440).    269.  $\approx 16\frac{2}{3}$  aast. (16,8).  
 270. 21,58% (21,6%).    271. 8,82% (8,8%).

### Peatükk XVII.

1.  $abc; acb; bac; bca; cab; cba$ .
2.  $abc; acb; bac; bca; cab; cba;$   
 $abd; adb; bad; bda; dab; dba;$   
 $acd; adc; cad; cda; dac; dca;$   
 $bcd; bdc; cbd; cdb; dbc; dc b$ .
5.  $abcd; abc; abd; bcd; acd; ab; ac; ad; bc; bd; cd; a; b; c; d$ .
7. 210; 120; 15.    8. 40320; 8 648 640; 54 264.
9.  $(n+1)n(n-1)\dots(n-k+3)$ .
10.  $(m+n)(m+n-1)(m+n-2)\dots 2n$ .
13.  $\frac{(n+2)(n+1)n\dots(n-k+4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-1)}$ .
14.  $\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\dots(m-2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n+1)}$ .
15. 24.    16. 840.    17. 3024.    18. 45.    19. 15.    20. 6.
21. 14 või 3.    22. 7.    24. 24; 6; 2.    25. 84; 28.
26.  $5 \cdot A_{11}^4 = 39\ 600$ ;    20.  $A_{10}^3 = 14\ 400$ .    27.  $C_{n-h}^{k-h}$ .
28.  $A_{n-h}^{k-h} \cdot A_k^h$ .    29.  $k < \frac{n+1}{2}; \frac{n-1}{2}$  või  $\frac{n}{2}$ .

### Peatükk XVIII.

1.  $x^4 + 10x^3 + 35x^2 + 50x + 24$ .    2.  $x^4 + 3x^3 - 21x^2 - 43x + 60$ .
3.  $x^5 + 15x^4 + 85x^3 + 225x^2 + 274x + 120$ .



31.  $x > 8$ .                      32.  $x < 1\frac{2}{3}$ .                      33.  $x > 10\frac{2}{3}$ .                      34.  $x < 2$ .  
 35.  $x < \frac{11}{5}$ .                      36.  $x < -5$ .                      37.  $x > \frac{1}{2}$ .                      38.  $x > 7\frac{1}{2}$ .  
 39.  $x < \frac{4}{5}$ .                      40.  $x < \frac{1}{5}$ .                      41.  $x < -3$ .                      42.  $1 < x < 4$ .  
 43.  $x > \frac{3}{2}$ .                      44.  $3 < x < 19$ .                      45. Vasturääkivad.                      46. Vasturääkivad.  
 47.  $x > -2$ .                      48.  $a < \frac{2}{3}$  ja  $a > \frac{3}{2}$ .                      49.  $-3\frac{1}{2} < a < \frac{2}{3}$ .  
 50.  $a < \frac{2}{7}$  või  $a > 2\frac{2}{3}$ .                      51.  $-1\frac{3}{5} < a < 2\frac{1}{3}$ .                      59.  $n < \frac{q}{p}(a+m) - b$ .  
 60.  $\frac{m}{n} > \frac{P}{N} + 1$ .  
 61.  $43^{\circ},6 \geq x \geq 34^{\circ},6$  ( $x$  — otsitav temperatuur).  
 62.  $200 \text{ g} \leq x \leq 259\frac{19}{39} \text{ g}$ ;  $200 \text{ g} \geq y \geq 140\frac{20}{39} \text{ g}$  ( $x$  — vase g arv,  
 $y$  — tsingi g arv).  
 63.  $V \leq 366\frac{2}{3} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ .

## Peatükk XXI.

1.  $7 - 2t$ ;  $t$ .                      2.  $t$ ;  $12 + 5t$ .                      3.  $5t$ ;  $3t$ .                      4.  $8t$ ;  $-5t$ .  
 5.  $5 + 3t$ ;  $1 - 2t$ .                      6.  $5t - 3$ ;  $7t$ .                      7.  $12 - 13t$ ;  $7t - 1$ .  
 8.  $4 + 9t$ ;  $5 + 14t$ .                      9.  $2 + 3t$ ;  $1 - 2t$ .                      10.  $1 + 4t$ ;  $3t - 2$ .  
 11.  $3t$ ;  $2 - 5t$ .                      12.  $4t - 3$ ;  $7t - 6$ .                      13.  $1 - 5t$ ;  $1 + 7t$ .  
 14.  $11t - 8$ ;  $5t - 4$ .                      15.  $3 - 8t$ ;  $5 + 11t$ .  
 16.  $1 + 7t$ ;  $6 + 11t$ .                      17. Ei.                      18. Ei.  
 19. Ei.                      20. Ei.                      21. Ei.                      22. Ja.  
 23. Ei.                      24. Ja.                      25. 9 ja 1.  
 26. 9; 16; ... ja 9; 21; ...                      27. 6 ja 3.  
 28. 4; 53; ... ja 1; 16; ...                      29. 25; 60; ... ja 12; 30; ...  
 30. 2 ja 1.                      31. 5; 15; 25; 35; 45; 55 ja 51; 42; 33; 24; 15; 6.  
 32. 0; 5; 10; 15; 20 ja 28; 21; 14; 7; 0.                      33. 7; 11; ... ja 9; 24; ...  
 34. 11; 3.                      35. 14; 12.                      36. 5; 2.                      37. 11; 7.  
 38. 23; 21.                      39. 23; 17.                      40. (15; 5; 3), (30; 11; 7); ...  
 41. (2; 2; 1).                      42. (0; 7; 7), (1; 6; 5), (2; 5; 3), (3; 4; 1).  
 43. (7; 2; 0), (6; 3; 1); ...                      44. (18; 3; 1), (73; 14; 6) ...  
 45. (2; 3; 4).

46. (34; 22; 5), (27; 26; 11); (20; 30; 17); (13; 34; 23) ja (6; 38; 29).  
 47. 70 ja 130 või 161 ja 39.  
 48. 10 viisil (9 rbl. ja 140 rbl.; 24 rbl. ja 125 rbl.; 39 rbl. ja 110 rbl. jne).  
 49.  $136t - 24$  ja  $136t - 34$ . 50. 8 lahendit või lõpmata palju lahendeid.  
 52. 15 ja 10 või 6 ja 26. 53. 22 ja 25 või 4 ja 50.  
 54. Esimese lugejad on 5, 8, ..., teise 2, 6, .... 55.  $5 + 24t$ .  
 56.  $40t + 25$ . 58.  $-21 - 40t$ . 59.  $17 + 21t$ . 60.  $11 + 56t$ .  
 61. 29 ja 5, või 56 ja 13, või 83 ja 21.  
 62.  $(23t; 19t)$ ;  $(17 + 23t; 14 + 19t)$ ;  $(11 + 23t; 9 + 19t)$ ;  
 $(5 + 23t; 4 + 19t)$  ...  $(-6n + 23t; -5n + 19t)$ .  
 65. 58. 66.  $1320t + 25$ . 68. (4; 4; 1); (1; 6; 1); (3; 3; 2); (6; 1; 2);  
 (2; 2; 3); (1; 1; 4). 69. (25; 0; 50); (22; 8; 45); (19; 16; 40);  
 (16; 24; 35); (13; 32; 30); (10; 40; 25); (7; 48; 20); (4; 56; 15) ja (1; 60; 10).

## Peatükk XXII.

1.  $\frac{62}{23}$ . 2.  $\frac{201}{88}$ . 3.  $\frac{37}{104}$ . 4.  $\frac{a^3b^2 + 4a^2b + 3a}{a^2b^2 + 3ab + 1}$ .  
 5.  $\frac{6x^3 + 5x}{6x^4 + 7x^2 + 1}$ . 6.  $\frac{a^4 + 2a^2 - a + 1}{a^3 + a^2 + 2a}$ . 7. (2, 7, 1, 6).  
 8. (0, 1, 5, 3, 7). 9. (2, 2, 2, 2, 2, 3). 10. (0, 2, 1, 2, 1, 1, 4, 2).  
 11.  $(a, a - 1, a + 1, a)$ . 12.  $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{5}{12}, \frac{12}{29}, \frac{29}{70}, \frac{99}{239}$ .  
 13.  $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}$ .  
 14.  $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{7}, \frac{10}{23}, \frac{33}{76}, \frac{43}{99}, \frac{76}{175}, \frac{271}{624}, \frac{1702}{3919}$ .  
 15.  $1, \frac{4}{3}, \frac{21}{16}, \frac{151}{115}, \frac{1380}{1051}, \frac{15331}{11676}$ . 16.  $0, \frac{1}{10}, \frac{100}{1001}, \frac{100001}{1001010}$ .  
 17. (1, 2, 2, ...). 18. (1, 1, 2, 1, 2, ...). 19. (4, 2, 8, 2, 8, ...).  
 20. (2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4 ...). 21.  $(a, 2a, 2a \dots)$ .  
 22.  $\sqrt{17}$ . 23.  $\sqrt{15}$ . 24.  $\frac{\sqrt{15} - 3}{2}$ . 25.  $\sqrt{a^2 + a}$ .  
 26.  $5 - 13t; 8t - 3$ . 27.  $14t - 9; 9t - 6$ . 28.  $14 - 16t; 23t - 20$ .  
 29.  $11t + 8; 7t + 5$ , 30.  $34t - 20; 29 - 49t$ . 31.  $(2, 1, 2, 3 \dots) \approx 2,7$ .  
 32.  $(3, 1, 1, 1 \dots) \approx \frac{11}{3}$ . 33.  $(1, 2, 2, 1, 1, 2, 2 \dots) \approx \frac{10}{3}$ .  
 34.  $(1, 1, 1, 2, 3, 9 \dots) \approx \frac{8}{9}$ . 35.  $(2, 10, 1, 1 \dots)$ . 36.  $(0, 1, 1, 5 \dots)$ .

### Peatükk XXIII.

1.  $a > 2\frac{1}{2}$ .      2.  $a < 3$ .      3.  $0 < a < 5$ .      4.  $5 < a < 8$ .
5.  $9 > a > 7$ .      6.  $a < 2\frac{2}{3}$  või  $a > 7\frac{1}{2}$ .
15. Lahenditu.      16. Lahenditu.      17.  $\frac{a-b}{n-m}$ ; lahenduv, kui  $a-b$  ja  $m-n$  on ühemärgilised; lahendamatu, kui  $m=n$  ja  $a \neq b$ ; määramatu, kui  $a=b$  ja  $m=n$ .
18.  $\frac{a-bk}{k-1}$ .      19.  $\frac{a-bk}{1-k}$ .      20.  $\frac{ab}{b-a}$ .
21.  $\frac{an-bm}{m-n}$ .      22.  $\frac{b-am}{m}$ .      23.  $\frac{a(q-n)}{m-n+q-p}$ .      24.  $\frac{bc}{b-a}$ .
25.  $5 > a > 3\frac{1}{3}$ .      26.  $-4 < a < 3\frac{3}{4}$ .      27.  $-107\frac{1}{3}$ .
28.  $a = -17,5$ .      31.  $0 < b \leq \frac{a^2}{4}$ .      32.  $b^2 < a^2 \leq 2b^2$ .
33.  $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4b^2} \pm \sqrt{a^2-4b^2})$ ;       $\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+4b^2} \mp \sqrt{a^2-4b^2})$ .
34.  $\frac{-R + \sqrt{4d^2 - 3R^2}}{2}$ ;  $d > R$ .
35.  $\frac{\sqrt{4R^2+2k^2} \pm \sqrt{4R^2-2k^2}}{2}$ ;  $\frac{\sqrt{4R^2+2k^2} \mp \sqrt{4R^2-2k^2}}{2}$ ; lahendid on reaalsed, kui  $R \geq \frac{\sqrt{2}}{2}k$ .

36.  $x < 0$ .      37.  $-1 \leq x \leq 3$ .

### Peatükk XXIV.

1. 5.      2.  $-\frac{1}{3}$ .      3.  $\frac{1}{3}$ .      4. 0.      5.  $\frac{3}{2}$ .      6. 4.
7. -1.      8.  $\frac{4}{3}$ .      9.  $\frac{3a}{2}$ .      10. 3.      11.  $\frac{5}{4}$ .      12. 0.
13.  $\frac{a}{c}$ .      14.  $\frac{a}{c}$ .      15. 4.      16.  $\frac{3}{2}$ .      17.  $\frac{4}{3}$ .
18.  $2(2 + \sqrt{2})$ .      19.  $\frac{1}{3}$ .      20.  $2\frac{31}{90}$ .      21. Kõik.      22.  $\frac{h^2}{h}$  ja  $h^3$ .
24.  $\sin h$  ja  $\tan h$ .      25. 0;  $b$ ;  $\frac{b}{a}$ ;  $\frac{b}{a}$ ;  $\frac{b}{a}$ .      26. 0; -1;  $-\infty$ ;  $\log 5$ ; 1.
27. 5.



## Sisukord.

|  | Lk. |
|--|-----|
| Peatükk IX. Juuravaldised . . . . .  | 3   |
| § 1. Juurimise teoreeme. Üksliikme juurimine . . . . .                                 | 3   |
| § 2. Teguri juurimismärgi ette toomine ja teguri juurimismärgi alla viimine . . . . .  | 6   |
| § 3. Juure taandamine ja juurte teisendamine ühisjuurijatega juurteks . . . . .        | 9   |
| § 4. Juuravaldiste lihtsustamine . . . . .   | 10  |
| § 5. Sarnased juured . . . . .   | 11  |
| § 6. Juurte liitmine ja lahutamine . . . . .   | 12  |
| § 7. Juurte korrutamine ja jagamine . . . . .  | 15  |
| § 8. Juure astendamine ja juure juurimine . . . . .                                    | 20  |
| § 9. Juure kaotamine murru nimetajast . . . . .  | 23  |
| § 10. Ruutjuur kaksliikmest $A \pm \sqrt{B}$ . . . . .                                 | 24  |
| § 11. Ülesandeid kõikidele tehetele juuravaldistega . . . . .                          | 25  |
| § 12. Murdarvuliste astendajatega astmed ja murdarvuliste juurijatega juured . . . . . | 28  |
| § 13. Kompleksarvud . . . . .  | 31  |
| Peatükk X. Funktsioonid ja nende graafikud. . . . .                                    | 36  |
| Peatükk XI. Ruutvõrrandid . . . . .  | 41  |
| § 1. Täheliste kordajatega ruutvõrrandite lahendamine . . . . .                        | 41  |
| § 2. Ruutvõrrandi lahendite sõltuvus võrrandi kordajatest . . . . .                    | 43  |
| § 3. Täheliste kordajatega ruutvõrrandite koostamine . . . . .                         | 47  |
| § 4. Ruutfunktsiooni graafik. Ruutvõrrandi graafiline lahendamine . . . . .            | 49  |
| Peatükk XII. Kõrgema astme võrrandid . . . . .   | 54  |
| § 1. Bikvadraatvõrrand . . . . .   | 54  |
| § 2. Kaheliikmeline võrrand . . . . .  | 55  |
| § 3. Kolmeliikmeline võrrand . . . . .   | 56  |
| § 4. Võrrandid, mille vasak pool teisendub korrutiseks . . . . .                       | 57  |
| § 5. Sümmeetriline võrrand . . . . .   | 57  |

|   | Lk. |
|---|-----|
| Peatükk XIII. Juurvõrrandid . . . . .   | 61  |
| Peatükk XIV. Ruut- ja kõrgema astme<br>võrranditesüsteemid . . . . .              | 64  |
| § 1. Võrrandisüsteemide lahendamine . . . . .                                     | 64  |
| § 2. Võrrandisüsteemide koostamine . . . . .                                      | 77  |
| § 3. Kahe otsitavaga ruutvõrrandisüsteemide graafiline lahenda-<br>mine . . . . . | 82  |
| Peatükk XV. Progressioonid . . . . .  | 83  |
| § 1. Aritmeetiline progressioon . . . . .   | 83  |
| § 2. Geomeetriline progressioon . . . . .   | 91  |
| Peatükk XVI. Logaritmid . . . . .   | 100 |
| § 1. Logaritmimine . . . . .  | 100 |
| § 2. Kümwendlogaritmid . . . . .  | 109 |
| § 3. Eksponentvõrrandid ja logaritmivõrrandid . . . . .                           | 117 |
| § 4. Ülesandeid liitprotsentidele . . . . .                                       | 120 |
| Peatükk XVII. Ühendid . . . . .   | 123 |
| Peatükk XVIII. Newtoni binoomvalem. . . . .                                       | 128 |
| Peatükk XIX. Hulkliikmete jaguvus . . . . .                                       | 130 |
| Peatükk XX. Võrratused . . . . .  | 131 |
| Peatükk XXI. Määramatute esimese astme<br>võrrandite lahendamine . . . . .        | 135 |
| Peatükk XXII. Ahelmurrud . . . . .  | 139 |
| Peatükk XXIII. Võrrandite uurimine . . . . .                                      | 142 |
| § 1. Ühe otsitavaga esimese astme võrrandi uurimine . . . . .                     | 142 |
| § 2. Kahe otsitavaga lineaarvõrrandisüsteemi uurimine . . . . .                   | 144 |
| § 3. Ruutvõrrandi uurimine . . . . .  | 144 |
| Peatükk XXIV. Piirväärtused . . . . .   | 146 |
| Vastused . . . . .  | 148 |



Tõlkinud A. Vihman.  
Vastutav toimetaja A. Humal.  
Keeleline toimetaja H. Kuldma.

Ladumisele antud 16. V 1949. Trükkimisele  
antud 30. VI 1949. Trükiarv 21000. Paber  
56x79,  $\frac{1}{16}$ . Trükipoognaid 11,25. Trükitähti trüki-  
poognas 36120. Arvutuspoognaid 10,2. MB-03575.  
Trükikoda „Hans Heidemann“, Tartu, Valli-  
kraavi 4. Tellimise nr. 1289.

На эстонском языке.

Н. А. Шапошников и Н. К. Вальцов. Сборник  
алгебраических задач для VIII—X классов.

Rbl. 4.50

A

17924

4952943

TÜ RAAMATUKOGU



1 0300 00495294 3

49 303