

200

P. MADISSON & TH. USSISOO

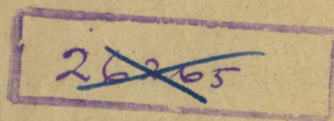
PLANIMEETRIA

K. Ü. „RAHVAÜLIKOOL“
TALLINNA

1921

P. MADISSON & TH. USSISOO

PLANIMEETRIA



K. Ü. „RAHVAÜLIKOOI“,
TALLINNA

Sekv. J. & A. Paalmann'i trükikoja trükk, Tallinnas.

B 117.

2.

Taru Riikliku Ülikooli
Raamatukogu

34916

115436573

Eessõna.

See planimeetria õperaamat on määratud tarviliseks käsiraamatuks peaaesjalikult neile õpilastele, kes ennem geomeetriat näitliku õpeviisi järele on õppinud ja lühikese aja jooksul selle süstemaatilist kursust soovivad läbi võtta. Mõeldud on siin kõige enne meie tehnika-, põllutöö- ja mitmesuguste teiste kursuste õpilasi. Sellepärast on katsutud raamatust võimalikult kõik vähem-tähtis välja jätta ja on ainult kõige tarvilikumad teoreemid toodud. Puudub suurem osa vastupidiseid teoreeme, käsitatud on ainult need, millel järgnevate teoreemide tõestamiseks möödapeasemata tähtsus. Ülesannetest on ainult kõige põhjapanevamad ära lahendatud, kuna nendest olenevad ja kergemad õpilaste eneste lahendada on jäetud. Kavatsusel on ülesannete kogu, mis ligemal ajal eravihuna ilmub ühes lühikese juhatusega maamõõtmisest. Sellele oleks käesolev vihk tarviliseks kaaslaseks.

Raamatu kokkuseadmisel on käidud Saksamaa Tehnikumide sellekohaste õperaamatute järele, iseäranis on silmas peetud A. Lipnovski „Planimetrie“. Peale selle on tarvitatud V. Lietzmann'i ja teiste õperaamatuid.

Siin kohal loeme omaks kohuseks südamelikku tänu ütelda haridusministeeriumi kutsehariduse osakonna juhatajale, herra J. Kiivetile ja Tallinna Tehnikumi direktorile herra H. Reierile nende tarviliste juhatusete eest, mis nad raamatu kokkuseadmise juures meile andsid.

Kokkuseadjad.

Planimeetria.

Planimeetria vaatleb niisuguste kujundite omadusi, mis kõige oma osadega tasapinnal asuvad. Punkt ja selle liikumisest saadud jooned sünnitavad need kujundid.

Esimene peatükk.

Punkt, joon ja pind.

§ 1.

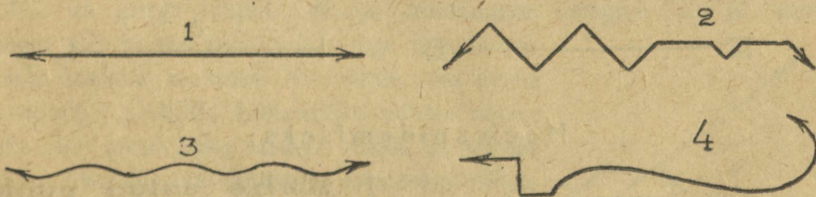
Punkt.

Punkt on teatud kindel koht ruumis, tal ei ole ühtegi mõõtu. Kui meie mõttes määratu arvu punkte üksteise peale laome, siis saame ikka ainult ühe punkti. Punkti ei või osadesse jagada. Punkt märgitakse harilikult ühe Ladina tähega: A, B, C jne.

§ 2.

Joon.

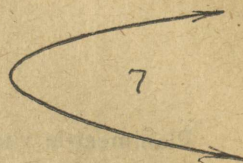
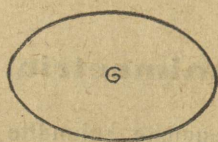
Kui punkt ruumis oma kohta katkemata muudab ja selle juures jälje jätab, siis nimetame seda jälge **jooneks**. Liigub punkt ruumis ilma sihi muutmata, siis sünnitab tema **sirgjoone** (õgev joon). Muudab punkt edasi liikudes pikkamööda ja katkemata oma sihti, siis sünnib **kõverjoon**; sünnib sihi muutmine ainult üksikutes punktides ja järsku,



siis saame **murdjoone**. Murdjoon ja kõverjoon koos sünnitavad **segajoone**. Kukkuv kivi sünnitaks enese kukkumisel jälje jättes sirgjoone, suurtüki- ja püssikuul läbi õhu lennates — kõverjoone, välg —

murdjoone jne. Tuleta meele, mis sünnitavad lainelisejoone, segajoone, ringjoone jne.

1) sirgjoon, 2) murdjoon, 3) lainelinejoon, 4) segajoon, 5) ringjoon, 6) ellips, 7) paraabol j. n. e.

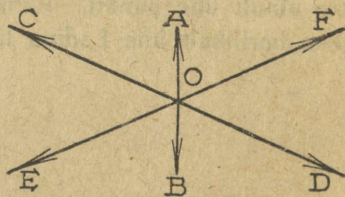
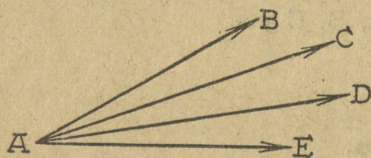


Joonel on ainult üks mõõt — pikkus. Piirame joont ühest otsast teatud kindla punktiga, siis saame **kiire**. Kiir märgitakse harilikult kahe tähega. $A B$ on kiir. Punkti A nimetame kiire **alguspunktiks**. Kiirt võib ühes (noole) sihis lõpmatuseni pikendada.

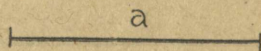
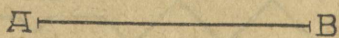


Ühest punktist võib lõpmata hulk kiireid joonistada. AB , AC , AD , ja AE on üksikud kiired, nende kogu nimetame **kiirte vihuks**.

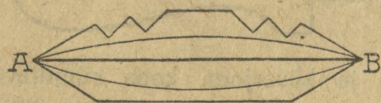
Läbi ühe punkti võib lõpmata palju sirgjooni tõmmata. Igat sirgjoont võib mõlemale poole lõpmatuseni pikendada.



Piirame sirgjoont mõlemast otsast punktiga, siis saame **joonlõigu** (õgvik). Sirgjoone ja joonlõigu märgime kas kahe ladinakeelse suure tähega, mis nende otsade juure paneme, ehk ühe väikse tähega, mis nende keskohta asetame:



Meelespidamiseks:



1. Kahe antud punkti vahele võib ainult ühe sirgjoone tõmmata.

2. Kahe punkti vahel on sirgjoon kõige lühem tee.

§ 3.

Pind.

Muudab joon oma kohta ruumis (kohamuutmine ei tohi joone enese sihis sündida), siis sünnitab ta **pinna**. Sünnib joone kohamuutmine kõige oma punktidega ruumis vaheldavas sihis (kõverjoone sihis), siis saame **kõverpinna**. Sünnib see ainult ühes sihis (teise sirgjoone sihis), siis saame **tasapinna**. Tuleta meele, mis sünnitab tasapinna, mis kõverpinna. Pinnal on kaks mõõtu — pikkus ja laius.

Planimeetrias vaatleme ainult niisuguseid punkte ja joone, mis tasapinnal asuvad. Geomeetrist punkti, joont, tasapinda ja lõpuks keha üksteisest lahus ei ole olemas. Meie võime enesele ainult ettekujutada, et punkt on osa ruumist, millel ei ole pikkust, laiust ega kõrgust; joon—osa ruumist, millel ei ole laiust ega kõrgust, ja pind — osa ruumist, millel ei ole kõrgust või paksust.

Teine peatükk.

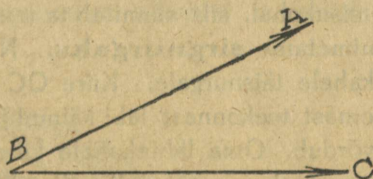
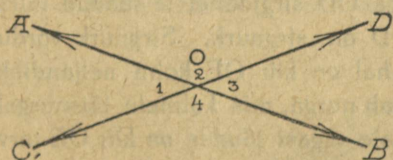
Nurgad.

§ 4.

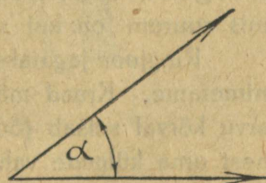
Nurkade saamine ja jaod.

Kaks sirgjoont lõikuvad ainult ühes punktis, kus juures nad neli nurka sünnitavad.

Nurga sünnitavad punkt, sellest punktist tõmmatud kaks kiirt ja nende kiirte vahel olev osa tasapinnast. Punkti, millest kiired välja lähevad, nimetame nurga **tipuks**;

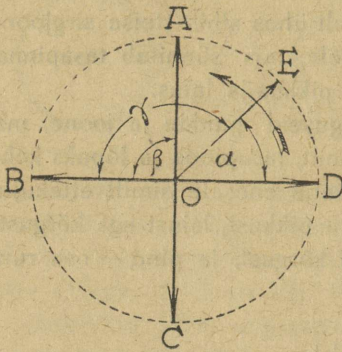


kiireid — **nurga külgedeks**. Punkt B on nurga tipp, kiired BA ja BC on nurga küljed. Nurga tähendame märgiga \angle ja kolme tähega, kus juures tähe, mis nurga tipu juures seisab, keskele asetame. Nii võime oma nurka tähendada: $\angle ABC$. Lühenduse mõttes võime nurka ka ainult ühe tähega märkida, selleks võtame ühe Greeka tähestiku esimestest tähtedest— α (alfa), β (beeta), γ (gamma), δ (delta)—ja paigutame selle antud nurka. Greeka keele tähtede asemel võib ka teise keele tähti ehk numbrid nurkade märkimiseks tarvitada.



Nurga mõõtmine.

Võtame tasapinnal kaks üksteise peale paigutatud kiirt OD ja OE, mis ühest punktist O välja lähevad, jätame ühe neist OD omale kohale seisma ja hakkame teist OE



noole sihis punkt O ümber ringi keera. Jätaks nüüd kiire OE viimane liikuv punkt täht E juures enesest tasapinnale jälje, siis saaksime, kui kiir OE oma lähtekohale OD peale tagasi jõuab, tasapinnale kinnise kõvera joone, mida **ringjooneks** (siir) nimetame, ja mille üksikud punktid kõik ühekaugusel keskpunktist O seisavad. Ringjoonega piiratud osa tasapinnast nimetame **ringiks** (söör); osa ringjoonest—DE, DC jne.—nimetame kaareks.

Meie kiir OE sünnitab noole sihis liikudes teise seisva kiirega OD lõpmata hulga nurke, mis seda **suuremaks** lähevad, mida kaugemale kiir OE teisest kiirest OD läheb. On kiir OE ühe neljandiku omast teekonnast läbi käinud ja seisab kiire OA seisukohal, siis nimetame saadud nurka **täisnurgaks**. Täisnurga küljed seisavad vastastikku risti või **perpendikulaarselt**. Täisnurga tähendame Ladina tähega d (esimene täht Prantsuse keele sõnast „droit“ — õige).

On kiir OE poole omast teekonnast läbi käinud ja seisab kiire OB seisukohal, siis sünnitab ta teise kiirega OD sirgjoone, ja saadud nurka nimetame **sirgnurgaks**. Nurk BOD on sirgnurk. Sirgnurk võrdub kahele täisnurgale. Kiire OC seisukohal on kiir OE kolm neljandikku omast teekonnast läbi käinud ja sünnitab nurga, mis kolmele täisnurgale võrdub. Oma lähtekohale kiire OD peale tagasi jõudes on kiir OE terve oma teekonna või neli neljandikku sellest läbi käinud ja sünnitab nurga, mis neljale täisnurgale võrdub. Nurgad, mis vähemad kui täisnurk, on **teravnurgad**; nurgad, mis suuremad kui täisnurk, on **tõmpnurgad**. Nurk EOD on teravnurk, nurk BOE on tõmpnurk. Nurka, mis suurem on kui sirgnurk, nimetame **ülitõmpnurgaks**.

Ringjoon jagatakse 360 ühesuurusesse osasse, mida **kraadideks** nimetame. Kraad märgitakse väikse nulliga, mis paremal pool üleval arvu kõrval seisab (360°). Täisnurk mahutab ühe neljandiku ringjoonest oma külgede vahele, mis eneses ühe neljandiku ringjoone kraadide arvust või $360^{\circ} : 4 = 90^{\circ}$ sisaldab. Igat niisugust kraadi nimetame **kaare kraadiks**. Ühendame sellel kaarel olevad kraadide punktid sirgjoonte abil nurga tipuga, siis saame omas täisnurgas 90 väikest

10

nurgakest, mida **nurga kraadideks** nimetame. Nii näeme, et täisnurga külgede vahel olev kaar 90 kaare kraadi sisaldab, täisnurk ise — 90 nurga kraadi; sirgnurga külgede vahel olev kaar või pool ringjoonest sisaldab 180 kaare kraadi, sirgnurk ise niisama palju nurga kraade. Kui meie nurga suurusest ja selle mõõtmisest räägime, siis mõtleme selle all, mitu nurga kraadi teatud nurk eneses sisaldab.

Kokkuvõte:

Teravnurk: $0 < \alpha < 90^\circ$ (sõnadega: α on suurem kui 0 ja väiksem kui 90°).

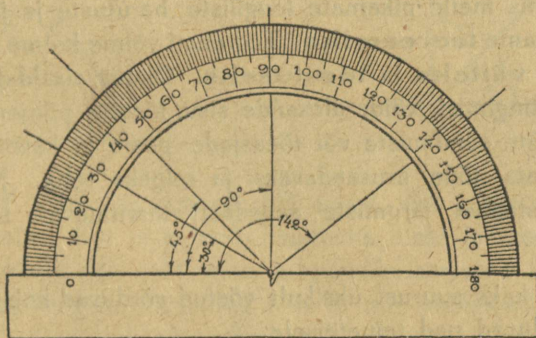
Täisnurk: $\beta = 90^\circ$ (sõnadega: β on 90°).

Tömpnurk: $90^\circ < \gamma < 180^\circ$ (sõnadega: γ on suurem kui 90° ja väiksem kui 180°).

Sirgnurk: $\angle BOD = 180^\circ$ (sõnadega: $\angle BOD$ on 180°).

Täheendus: „ $<$ “ näitab, et üks arv on teisest suurem ehk väiksem; märk „ $=$ “ näitab, et üks arv võrdub teisele ehk on niisama suur kui teine: $2 < 5$ (kaks on väiksem kui viis), $5 > 2$ (viis on suurem kui kaks), $2 + 5 = 7$ (kaks ja viis kokku võrduvad seitsmele).

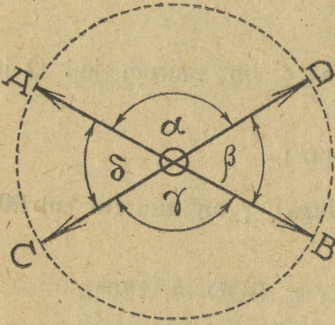
Üks kraad on 60 minutit ($60'$), üks minut on 60 sekundit ($60''$): $1^\circ = 60' = 3600''$. Uuemal ajal tarvitatakse minutite ja sekundite



asemel kümnend-jagamise viisi. Nii võime kirjutada $16^\circ 8' 24''$ asemel $16, 14$; $56^\circ 45' 36''$ asemel $56, 76$. Nurkade joonistamisel ja mõõtmisel tarvitame malli ehk transportööri.

Kõrvu- ja vertikaalnurgad.

I. Nurgad α , β , γ ja δ sünnivad kahe sirgjoone läbilõikel. Kui meie nende nurga külgede ühepikkuste osade ümber ringjoone tõmbame, mille keskpunkt nurkade ühiseks tipuks on, siis näeme, et kõik neli nurka mahutavad oma külgede vahele terve ringjoone, mis võrdub 360° (kaare kraadi), sellest võime järeldada ja meeles pidada: **kahe sirgjoone läbilõikel sündinud nelja nurga summa on 360° (nurga kraadi).**



II. Nurke α ja β , β ja γ , γ ja δ paarikaupa nimetatakse **kõrvunurkadeks**. Kõrvunurkadel on üks külge ühine ja kaks teist külge sünnitavad sirgjoone. Nurkade δ ja α kaks külge CO ja OD—sünnitavad sirgjoone ja sirgnurga, mis võrdub 180° ; niisama sünnitavad nurkade α ja β küljed AO ja OB sirgjoone ja sirgnurga. Sellest võime järeldada ja meeles pidada: **kõrvunurgad kokku on 180° ehk kaks täisnurka.**

On kaks kõrvunurka ühesuurused, siis on nad mõlemad täisnurgad.

III. Nurke α ja γ , δ ja β paarikaupa nimetatakse vertikaalnurkadeks (tippnurgad). **Vertikaalnurgad** on ühesuurused. Katsume seda tõestada.

Tõde, mis meile pikemate loogiliste harutuste ja järelduste tõttu selgub, nimetame **teoreemiks**. Teoreemi võime kolme osasse jagada: **oletuseks**, **väiteks** ja **tõestuseks**. Oletus sisaldab eneses ülesande tuntud tingimisi, väide ülesande sisu, tõestus põhjeneb rea ennem tuntud loogiliste sündmuste või tõeasjade peale ja katsub nende varal meile tundmata tõde arusaadavaks ja selgeks teha. Nii võime oma teoreemi tõestamist järgmiste sagedasti tarvitavate tõeasjade peale põhjendada:

1) Kui kaks suurust üksikult võetud võrduvad kolmandale suursele, siis võrduvad nad teineteisele.

Kui $a=c$ ja $b=c$, siis $a=b$.

2) Kui kahele ühesuurusele arvule kolmanda arvu juure ehk nendest selle arvu maha arvame, siis saame ühesuurused arvud.

Kui $a=b$, siis $a+c=b+c$ ja $a-c=b-c$.

Tõestame nüüd teoreemi:

Oletus: α ja γ , δ ja β on vertikaalnurgad.

Väide: $\alpha = \gamma$ ja $\delta = \beta$.

Tõestus: $\alpha + \beta = 180^\circ$ } kõrvunurkade omadus.
 $\gamma + \beta = 180^\circ$ }

Järgneb: $\alpha + \beta = \gamma + \beta$; arvame mõlemast ühesuurusest summast β maha, jääb järele $\alpha = \gamma$.

Tõesta ise, et $\delta = \beta$.

§ 7.

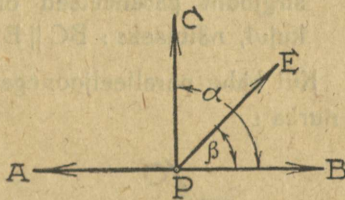
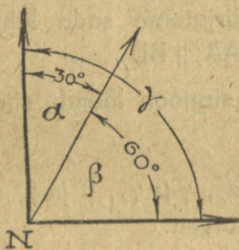
Täisnurk ja selle osad.

1) On kahe nurga summa 90° , siis nimetame niisuguseid nurke **täiendusnurkadeks**, sest üks nurk täiendab teist kuni üheksakümne kraadini.

Meie joonistusel on nurga α täiendusnurk β ja ümberpöörduvalt.

Näit. kui $\alpha = 30^\circ$, siis $\beta = 60^\circ$,
" $\alpha = 52^\circ 20'$, " $\beta = 37^\circ 40'$,
" $\alpha = 67^\circ 47' 15''$, " $\beta = 22^\circ 12' 45''$.

2) Meie nimetasime juba (§ 5), et täisnurga küljed seisavad vastastikku perpendikulaarselt. Lühendatud kujul kirjutame seda järgmiselt, näit.: $AB \perp CP$ ehk $CP \perp AB$.



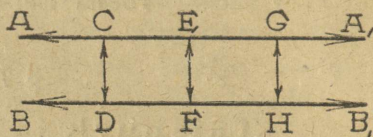
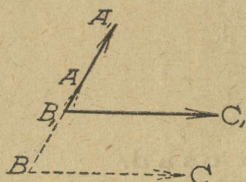
Punktist P võime sirgjoonele AB ainult ühe perpendikulaarjoone PC üles tõmmata. Kui see teisiti võimalik oleks ja meie punktist P võiksim sirgjoonele AB veel teise perpendikulaarjoone PE üles tõmmata, siis saaksime kaks täisnurka α ja β , mis mõlemad ühesuurused peaksid olema. See on aga võimata, sest nurk β on väiksem, kui täisnurk α , sellega siis teravnurk. (§ 5).

Punktist C võime sirgjoonele AB ainult ühe perpendikulaarjoone alla tõmmata. Tõestus järgneb alamal. **Perpendikulaarjoonega PC mõõdame punkti C kaugust sirgjoonest AB.**

Paralleeljooned.

(Kõrvujooned).

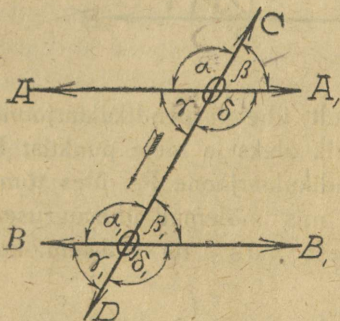
1. Kui teatud nurga tema ühte külge mööda tasapinnal edasi lükkame, ehk külje pikendust mööda tagasi tõmbame, siis sünnitab nurga teine külge oma endiste seisukohtadega **paralleeljooned**.



BC ja B, C, on paralleeljooned. Kahe paralleeljoone vahe või kaugus on igas punktis ühesuurune. Kahe sirgjoone kaugust teineteisest mõõdame joonlõiguga, mis mõlemale sirgjoonele perpendikulaarne.

Märkus: On üks sirgjoon teisele perpendikulaarne, siis on ta perpendikulaarne kõigile teistele sirgjoontele, mis esimesega paralleelsed. Seda näeme siis, kui täisnurga tema ühte külge mööda edasi lükkame: igas uues punktis sünnib uus täisnurk. Kui $CD=EF=GH$, siis on AA, ja BB, paralleeljooned. **Paralleeljooned ei lõiku teineteisega, kui kaugele meie neid ka ei pikenda.** Kui kaks sirgjoont paralleelsed on, siis kirjutame seda lühendatud kujul, näituseks: $BC \parallel B,C$, ehk $AA, \parallel BB,$.

II. Kui kahe paralleeljoonega kolmas sirgjoon lõikub, siis saame kaheksa nurka:



1) α ja $\alpha,$ γ ja $\gamma,$ β ja $\beta,$ δ ja $\delta,$ on vastavad nurgad.

2) γ ja $\beta,$ δ ja $\alpha,$ on sisemised põiknurgad.

3) α ja $\delta,$ β ja $\gamma,$ on välimised põiknurgad.

4) γ ja $\alpha,$ δ ja $\beta,$ on sisemised ühekülgsed nurgad.

5) α ja $\gamma,$ β ja $\delta,$ on välimised ühekülgsed nurgad.

6) α ja $\delta,$ β ja $\gamma,$ $\alpha,$ ja $\delta,$ $\beta,$ ja $\gamma,$ on vertikaalnurgad.

7) loe ise kõik kõrvunurgad üles.

Märkused:

Märkused:

1) Vastavad nurgad on võrdsed.

Oletame, et meile on antud kaks sirgjoont AA_1 ja CD , mis lõikuvad punktis O ja sünnitavad neli nurka: α , β , γ ja δ . Et paralleeljooned siis sünnivad, kui meie teatud nurga tema ühte külge ehk selle pikendust mööda edasi lükkame, siis võime nurga γ tema külge OD mööda D sihis mõttes edasi lükata kuni punktini O_1 , kus ta nurga γ sünnitab. Sedasama võime ka kõikide teiste nurkadega teha: iga nurk sünnitab punkt O juures omale vastavalt võrdse nurga.

2) Sisemised ja välimised põiknurgad on võrdsed.

Sisemised. Oletus: $AA_1 \parallel BB_1$.

Väide: $\gamma = \beta$, ja $\delta = \alpha$.

Tõestus: $\gamma = \gamma_1$ (vastavad nurgad)

ja $\beta_1 = \beta$ (vertikaal- ").

Siit: $\gamma = \beta$.

Tõesta ise, et $\delta = \alpha$.

Välimised. Oletus: $AA_1 \parallel BB_1$.

Väide: $\alpha = \delta$, ja $\beta = \gamma$.

Tõestus: $\alpha = \alpha_1$ (vastavad nurgad)

ja $\alpha_1 = \delta$ (vertikaal- ").

Siit: $\alpha = \delta$.

Tõesta ise, et $\beta = \gamma$.

3) Sisemised ja välimised ühekülgsed nurgad sünnitavad paarikaupa kaks täisnurka.

Sisemised. Oletus: $AA_1 \parallel BB_1$.

Väide: $\gamma + \alpha = 2d$ ja $\delta + \beta = 2d$.

Tõestus: $\gamma + \delta = 2d$ (kui kõrvunurgad),

$\delta = \alpha$ (kui sisemised põiknurgad),

Siit: $\gamma + \alpha = 2d$ (δ asemele panime võrdse nurga α .)

Tõesta ise, et $\delta + \beta = 2d$.

Välimised. Oletus: $AA_1 \parallel BB_1$.

Väide: $\alpha + \gamma = 2d$ ja $\beta + \delta = 2d$.

Tõestus: $\alpha + \gamma = 2d$ (kui kõrvunurgad),
 $\gamma = \gamma,$ (kui vastavad nurgad).

Siit: $\alpha + \gamma = 2d$ (γ asemele panime võrdse nurga $\gamma,$).

Tõesta ise, et $\beta + \delta = 2d$.

Vastupidised väited:

1) Kui kaks antud sirgjoont kolmandaga nii lõikuvad, et üks paar vastavaid nurke võrdsed on, siis on antud sirgjooned paralleelsed.

Paralleeljooned sünnivad just siis, kui meie nurga tema ühte külge mööda edasi lükkame.

2) Kui kaks antud sirgjoont kolmandaga nii lõikuvad, et üks paar põiknurke võrdsed on, siis on antud sirgjooned paralleelsed.

Oletus: $\gamma = \beta,$

Väide: $A A, \parallel B B,$

Tõestus: $\gamma = \beta$ (kui vertikaalnurgad),
 $\gamma = \beta,$ (oletuse järele).

Siit: $\beta = \beta,$

Kui nüüd $\beta = \beta,$ need on aga vastavad nurgad, siis peavad eelmise tõestuse põhjal antud sirgjooned paralleelsed olema.

3) Kui kaks antud sirgjoont kolmandaga nii lõikuvad, et üks paar ühekülgeid nurke kaks täisnurka sünnitavad, siis on antud sirgjooned paralleelsed.

Oletus: $\gamma + \alpha = 2d$.

Väide: $A A, \parallel B B,$

Tõestus: $\gamma + \alpha = 2d$ (kui kõrvunurgad),
 $\gamma + \alpha = 2d$ (oletuse järele).

Siis: $\gamma + \alpha = \gamma + \alpha,$

ja siit: $\alpha = \alpha,$

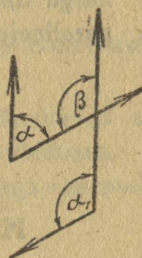
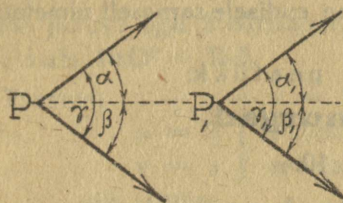
Kui nüüd $\alpha = \alpha,$ need on aga vastavad nurgad, siis peavad esimese tõestuse põhjal antud sirgjooned paralleelsed olema.

Järeldus: Paralleelkülgedega nurgad on võrdsed, ehk sünnitavad kokku kaks täisnurka.

1) Tõestus: Ühendame punktid P ja P', sirgjoonega,

siis: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_1 \\ \beta = \beta_1 \end{array} \right\}$ kui vastavad nurgad
paralleeljoonte juures.

Arvame kokku: $\left. \begin{array}{l} \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 \\ \gamma = \gamma_1 \end{array} \right\}$ ja paneme kokkuarvatavate ase-
mele nende summad.



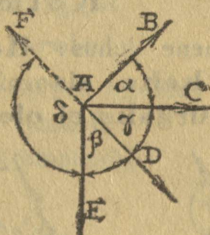
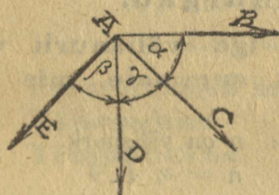
2) Tõestus: $\alpha + \beta = 2d$ (kui sisemised ühekülgsed nurgad).
 $\beta = \alpha_1$ (kui vastavad nurgad).

Siis: $\alpha + \alpha_1 = 2d$ (β asemele panime temale võrdse nurga α_1 .)

§ 9.

Perpendikulaarkülgedega nurgad.

Nurgad, mille küljed vastamisi perpendikulaarsed, on kas ühesuurused, ehk nende summa võrdub kahele täisnurgale.



1) Oletus: $AC \perp AE$ ja $AB \perp AD$.

Väide $\alpha = \beta$.

Tõestus: $\alpha + \gamma = 90^\circ$ (kui täiendusnurgad),
 $\beta + \gamma = 90^\circ$ („ „).

Siis: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$.

Arvame mõlematelt pooltelt γ maha, siis saame: $\alpha = \beta$.

- 2) Oletus: $AB \perp AF$ ja $AC \perp AE$.
 Väide: $\alpha + \delta = 180^\circ = 2d$.
 Tõestus: $\alpha = \beta$ (endine tõestus),
 $\delta + \beta = 2d$ (kõrvunurgad).

Leiame, et $\alpha + \delta = 2d$ (β asemele panime võrdse nurga α).

Märkus: Kui nurkadel ei ole ühine tipp, siis ehitame ühe nurga tippu juure nurga, mille küljed teise nurga külgedega paralleelsed, ja tõestame endisele sarnaselt nimetatud väidet.

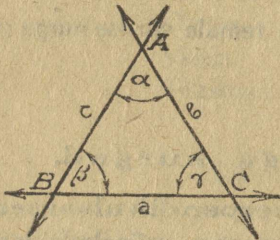
Kolmas peatükk.

Kolmnurgad.

§ 10.

Kolmnurga koosseis.

Kolm tasapinnal olevat mitte-paralleljoont lõikuvad kolmes punktis ja sünnitavad kujundi, mida **kolmnurgaks** nimetame.

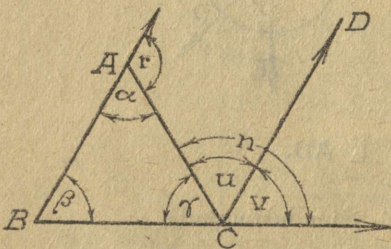


Joonlõigud $BC=a$, $AC=b$ ja $AB=c$ lõikpunktide vahel on kolmnurga **küljed**; α , β ja γ tema **nurgad**, ja lõikpunktid A, B ja C kolmnurga **tippud**. Nurkade α , β ja γ kõrvunurke nimetame kolmnurga **välisnurkadeks**. Kolmnurga kirjutame lühendatult märgiga Δ .

§ 11.

Kolmnurga nurgad.

Esimene juhus: **Kolmnurga iga välisnurk võrdub nende kahe sisemise nurga summale, mis temale kõrvunurgaks ei ole.**



Oletus: n on välisnurk.

Väide: $n = \alpha + \beta$

Tõestus: Tõmbame küljele AB paralleeljoone CD,

siis leiame:

$u = \alpha$ (kui sisemised põiknurgad) ja
 $v = \beta$ („ vastavad nurgad).

Arvame kokku:

$$\underline{u + v = \alpha + \beta},$$

ehk $\underline{n = \alpha + \beta}.$

Järeldus: Kolmnurga iga välisnurk on suurem kui kolmnurga iga sisemine nurk, mis temale kõrvunurkaks ei ole.

Tõestus: Kui $n = \alpha + \beta$,
 siis on: $n > \alpha$ } Välisnurk on suurem jne.
 $n > \beta$ }

Tõesta ise, et $r = \beta + \gamma$.

Teine juhus: Iga kolmnurga sisemiste nurkade summa võrdub $180^\circ = 2d$.

Tõestus: $\gamma + u + v = 180^\circ = 2d$ (sünnitavad sirgnurga).
 $u = \alpha$ } Paneme esimeses võrduses nurga u
 $v = \beta$ } asemele nurga α ja nurga v asemele nurga β ,
 siis saame:

$$\underline{\gamma + \alpha + \beta = 180^\circ = 2d.}$$

Harjutused: Kui $\alpha = 35^\circ$ ja $\beta = 40^\circ$, kui suur on siis γ ?

" $\alpha = 62^\circ 40'$ ja $\gamma = 73^\circ 12'$, kui suur on siis β ?

" $\beta = 105^\circ 40' 25''$ ja $\gamma = 10^\circ 15' 35''$, kui suur on siis α ?

Kolmas juhus: Kolmnurgas võib ainult üks täis- ehk tõmpnurk olla.

Kui $\alpha < 90^\circ$, siis on $\beta + \gamma > 90^\circ$,

" $\alpha = 90^\circ$, " " $\beta + \gamma = 90^\circ$,

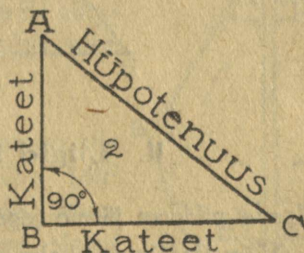
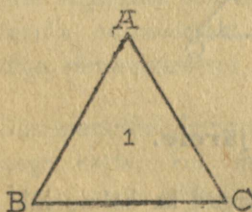
" $\alpha > 90^\circ$, " " $\beta + \gamma < 90^\circ$.

§ 12.

Kolmnurkade liigid.

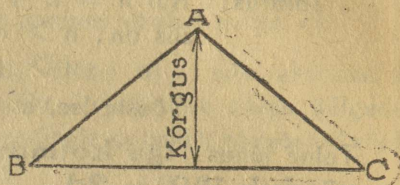
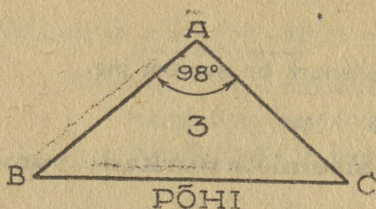
I. Liigid nurkade järele.

- 1) Teravnurkne kolmnurk (kõik nurgad teravad)
- 2) Täisnurkne " (üks täisnurk)
- 3) Tõmpnurkne " (üks tõmpnurk)

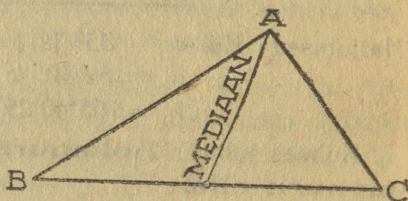
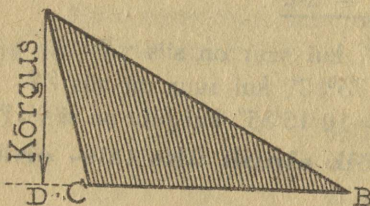


Täisnurkse kolmnurga külgi, mis teineteisele perpendikulaarselt seisavad ja täisnurga sünnitavad, nimetame **kateetideks**; täisnurga

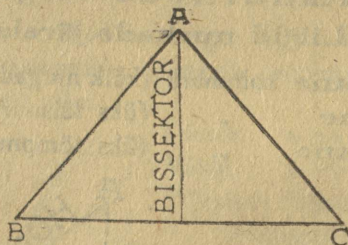
vastaskülge nimetame **kaldküljeks** või **hüpoteenuusiks**. Ühte kolmnurga külge (harilikult kõige alumist) nimetame kolmnurga **põhjaks**.



Perpendikulaarjoont, mis langeb kolmnurga põhja vastastipust kolmnurga põhja või selle pikenduse peale, nimetame kolmnurga **kõrguseks**.



Sirgjoont, mis kolmnurga külje keskpunkti ühendab selle vastasnurga tipuga, nimetame **küljepoolitajaks** või **mediaaniks**; sirgjoont, mis nurga pooleks jagab, nimetame **nurgapoolitajaks** või **bissektoriks**.



II. Liigid külgede järel.

Külgede pikkuse järel jagame kolmnurgad ka kolme liiki :

- 1) **Võrdkülgne** kolmnurk (kõik küljed ühepikkused).
- 2) **Sarikkolmnurk** (kaks külge ühepikkused).
- 3) **Isekülgne** kolmnurk (iga külg isesuguse pikkusega).

Uhtivus (Kongruentsus).

I. Uhtivus ja sümmeetria.

Kujudid ühtivad siis, kui nad üksteise peale pandult kõige oma osadega täielikult ühte langevad; see sünnib siis, kui neil vastavad küljed ja nurgad võrdsed on.

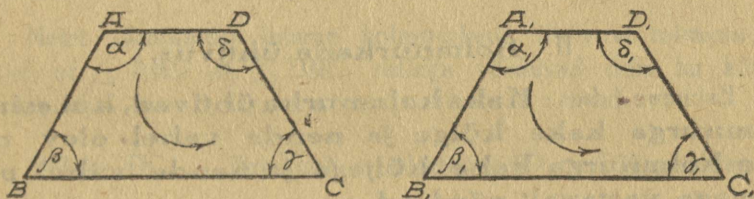
Kujudid $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ ühtivad siis („s“ kujundite ühtivuse märk),

$$\text{kui } AB = A_1B_1, \text{ ja } \alpha = \alpha_1,$$

$$BC = B_1C_1, \text{ „ } \beta = \beta_1,$$

$$CD = C_1D_1, \text{ „ } \gamma = \gamma_1,$$

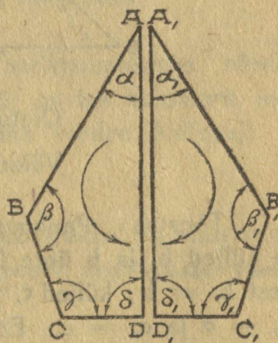
$$DA = D_1A_1, \text{ „ } \delta = \delta_1.$$



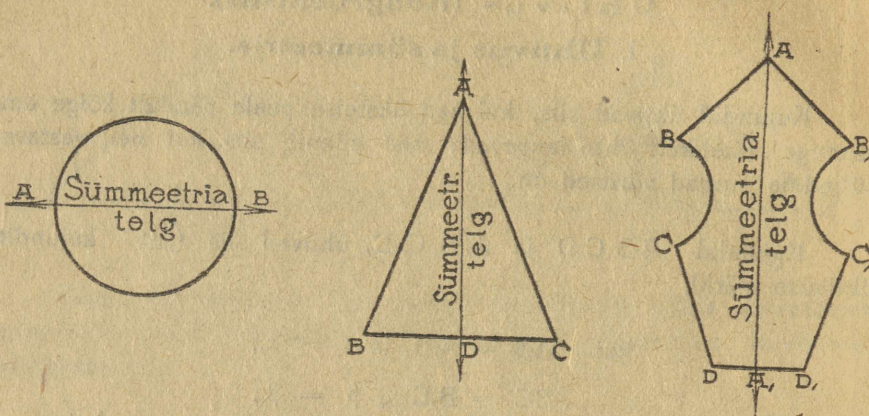
Kujudite ühesuurused osad järgnevad üksteisele nii, kui nool näitab.

Oletame nüüd, et ühe kujundi osad järgnevad vastupidises korras teise kujundi osadele. Niisugust kujundite seisukorda nimetame sümmeetriliseks seisukorraks. Peeglipilt on oma kujundiga sümmeetrilises seisukorras.

Sümmeetrilisi kujundisi võime ainult siis üksteisega katta, kui meie neist ühe 180° tema sümmeetria telje ümber keerame. Sümmeetria teljeks nimetame tasapinnal olevat sirgjoont, mille ümber üht kujundit ehk selle poolt keerame, et sellega teist kujundit ehk teist kujundi poolt katta.



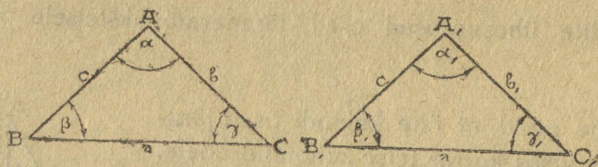
Sümmeetria ja ühtivuse seadused on teineteisega ligidalt seotud: iga sümmeetrilise kujundi üks pool katab täielikult teise poole, kui meie esimese poole 180° tema sümmeetria telje ümber keerame.



Sarikkolmnurk on ka üksikult võetud sümmeetriline kujund, kui tema kõrguse sümmeetria teljeks võtame; ringis on läbimõõtja või diameeter sümmeetria telg.

II. Kolmnurkade ühtivus.

Esimene juhus: **Kaks kolmnurka ühtivad, kui esimese kolmnurga kaks külge ja nende vahel olev nurk teise kolmnurga kahe küljega ja nende vahel oleva nurgaga vastavalt võrdsed on.**



Oletus: $b = b_1$, $c = c_1$, ja $\alpha = \alpha_1$.

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A_1 B_1 C_1$.

Tõestus: Paneme $\triangle A_1 B_1 C_1$ nii $\triangle ABC$ peale, et punktid A_1 ja A ja küljed b_1 ja b ühte langevad, siis langevad ka punktid C_1 ja C ühte, sest $b_1 = b$; küljed c_1 ja c , punktid B_1 ja B langevad ka ühte, sest $\alpha_1 = \alpha$ ja $c_1 = c$. Et punktid C_1 ja C , B_1 ja B vastastikku ühte langesid, siis langevad ka küljed a_1 ja a ühte, sest kahe punkti vahele võib ainult ühe sirgjoone tõmmata.

Tõesta ise, et kolmnurgad ühtivad, kui:

$$a = a', c = c', \text{ ja } \beta = \beta';$$

$$\text{ehk kui } a = a', b = b', \text{ ja } \gamma = \gamma'.$$

Järeldus: **Sarikkolmnurgas jagab võrdsete külgede vahel oleva nurga bissektor selle nurga vastaskülje pooleks ja on temale perpendikulaarne.**

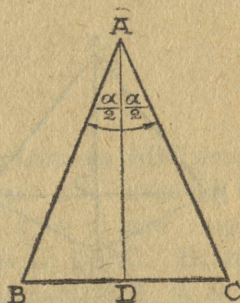
Oletus: $AB = AC$ ja $\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC = \frac{\alpha}{2}$

Väide: $BD = DC$ ja $AD \perp BC$.

Tõestus: $AD = AD$ (iga suurus on iseenese suurune)

$$AB = AC \quad (\text{oletusest}),$$

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC \quad ,$$



Neist tõestustest leiame kolmnurkade ühtivuse esimese juhuse põhjal, et $\triangle ABD \cong \triangle DAC$, sellega võrduvad neis ka kõik vastavad jaod:

$$BD = DC, \quad \text{järgelikult — sirgjoon } AD \text{ on küljepoolitaja};$$

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD, \quad , \quad \text{— sarikkolmnurga põhja juures olevad nurgad on võrdsed};$$

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ADC = d, \quad , \quad \text{— } AD \perp BC, \text{ ja sirgjoon } AD \text{ on antud kolmnurga kõrguseks.}$$

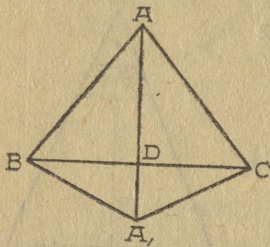
Järeldus: 1) Eelmisest selgub, et sarikkolmnurgas võrdsete külgede vastasnurgad võrdsed on; niisamuti on iga kolmnurk, millel kaks võrdset nurka on, sarikkolmnurk (kahe võrdse küljega). Siit järgneb:

Igas kolmnurgas on võrdsete külgede vastas võrdsed nurgad ja ümberpöördult—võrdsete nurkade vastas võrdsed küljed.

2) Võrdkülgses kolmnurgas on kõik nurgad ühesuurused ja võrduvad $180^\circ : 3 = 60^\circ$.

3) Võrdsete kaldjoonte põhipunktid on selle perpendikulaarjoone põhipunktist, mille peale nad toetavad, ühekaugusel; ja ümberpöördult: kaldjooned, mille põhipunktid on ühekaugusel selle perpendikulaarjoone põhipunktist, mille peale nad toetavad, on võrdsed.

Märkus: Kald- ja perpendikulaarjoone põhipunktideks nime-tame nende punkte sellel sirgjoonel, mille peale nad langevad. (Punktid B, D ja C). Joonlõik BD on kaldjoone AB **projektsioon** ja joonlõik DC kaldjoone AC **projektsioon**.



4) Et sarikkolmnurgas ülemise nurga poolitaja või bissektor ühtlasi põhja poolitaja ja kolmnurga kõrgus (põhjale perpendikulaarne) on, siis leiame, kui meie kahes sarikkolmnurgas, millel ühine põhi, ülemise ja alumise tippu sirgjoonega ühendame, et see sirgjoon nende tippude juures olevad nurgad ja ühispõhja pooleks jagab ja sellele perpendikulaarne on.

Oletus: $AB = AC$ ja $BA = CA$.

Väide: $\left\{ \begin{array}{l} \sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC, \sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC, \\ BD = DC \text{ ja } AA \perp BC. \end{array} \right.$

Tõestus: $\triangle ABA \cong \triangle ACA$, sest
 $AB = AC$, $BA = CA$, ja
 $\sphericalangle ABA = \sphericalangle ACA$ (kui võrdsete suuruste summad,
 sest $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD$ ja $\sphericalangle DBA = \sphericalangle DCA$).

Kolmnurkade ühtivuse esimese juhuse põhjal oleneb, et need kolmnurgad ühtivad ja sellega kõik nende vastavad jaod võrdsed on:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAC$$

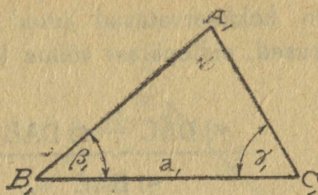
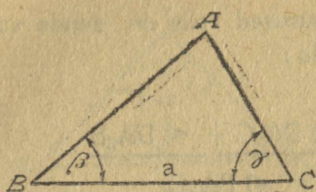
$$\text{ja } \sphericalangle BDA = \sphericalangle DCA.$$

Siit järgneb, et sirgjoon AA, tippude juures olevad nurgad pooleks jagab, sellega nende nurkade bissektoriks on. Sarikkolmnurgas on aga ülemise nurga bissektor põhja poolitajaks,

järjelikult $BD = DC$, ja kolmnurga kõrguseks,

$$AA \perp BC.$$

Teine juhus: **Kaks kolmnurka ühtivad, kui nendel üks külg ja kaks selle külje juures olevat nurka vastavalt võrdsed on.**



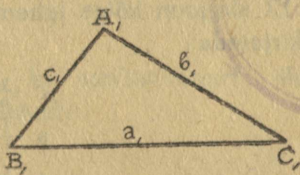
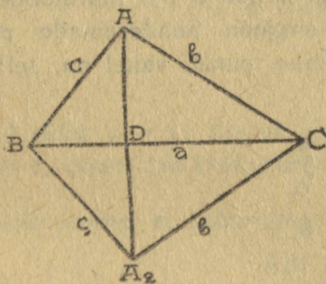
Oletus: $a = a_1$, $\beta = \beta_1$, ja $\gamma = \gamma_1$.

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Paneme kolmnurga $A_1B_1C_1$ nii kolmnurga ABC peale, et punktid B_1 ja B ja küljed a_1 ja a ühte langevad, siis langevad ka punktid C_1 ja C ühte, sest $a_1 = a$. Et $\beta_1 = \beta$ ja $\gamma_1 = \gamma$, siis langevad küljed A_1B_1 ja AB ühte, niisama ka küljed A_1C_1 ja AC . Et kaks sirgjoont ainult ühes punktis lõikuvad, siis peavad punktid A_1 ja A ühte langema. Sellest järgneb, et

$$\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1.$$

Kolmas juhus: **Kaks kolmnurka ühtivad, kui kõik nende vastavad küljed võrdsed on.**



Oletus: $a = a_1$, $b = b_1$, ja $c = c_1$.

Väide: $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Keerame kolmnurga $A_1B_1C_1$ poole ringi (180°) külje B_1C_1 ümber ja tõstame ta siis kolmnurga ABC juure nii, et küljed a_1 ja a kõige oma osadega ühte langevad ja kolmnurk $A_1B_1C_1$ kolmnurga ABC külge rippuma jääb. Ühendame nüüd punktid A_1 ja A sirgjoonega ja vaatame saadud kahte uut kolmnurka: ABA_1 ja ACA_1 .

Neis: $\left. \begin{array}{l} \sphericalangle DAC = \sphericalangle DA_2C \\ \sphericalangle DAB = \sphericalangle DA_2B \end{array} \right\}$ kui sarikkolmnurga põhja juures olevad nurgad.

On kokkuarvatavad arvud ühesuurused, siis on nende summad ühesuurused, sellepärast võime kirjutada:

$$\frac{\sphericalangle DAC + \sphericalangle DAB}{\sphericalangle BAC} = \frac{\sphericalangle DA_2C + \sphericalangle DA_2B}{\sphericalangle BA_2C}$$

Nüüd teame, et: $b = b_1,$

$$c = c_1,$$

ja $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA_2C$; sellest järgneb kolmnurkade ühtivuse esimese juhuse põhjal, et

$$\triangle ABC \cong \triangle BA_2C.$$

Et aga $\triangle BA_2C \cong \triangle A_1B_1C_1,$

siis $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1.$

Järeldus: 1) Igas kolmnurgas on kahe külje summa suurem kui kolmas külg.

Meie kolmnurgas ABC sünnitavad küljed $c + b$ murdjoone punktide B ja C vahel, külg a on aga sirgjoon nendesamade punktide vahel. Et sirgjoon kõige lühem tee kahe punkti vahel on, sellepärast võime kirjutada:

$$c + b > a,$$

$$a + b > c,$$

$$a + c > b.$$

2) Kolmnurgas on kahe külje vahe väiksem kui kolmas külg.

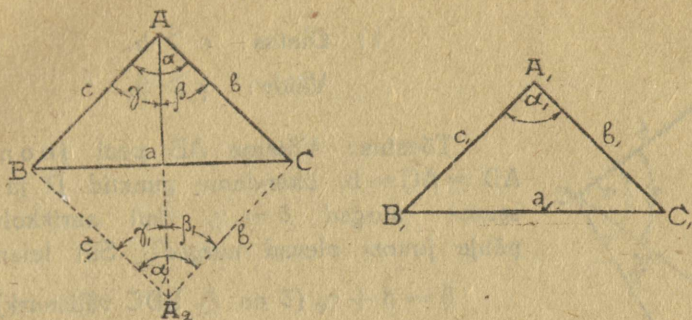
Viime ülemalsaadud võrratustes ühe kokkuarvatava algebra seaduse järele pahemalt poolt vastupidise märgiga paremale poole, siis on:

$$c > a - b,$$

$$a > c - b,$$

$$a > b - c.$$

Neljas juhus: Kaks kolmnurka ühtivad, kui nende kaks külge ja suurema külje vastasnurk vastavalt võrdsed on.



$$\text{Oletus: } \begin{cases} a = a_1, b = b_1, \text{ ja } \alpha = \alpha_1, \\ a > b \text{ ja } a_1 > b_1. \end{cases}$$

$$\text{Väide: } \triangle ABC \cong \triangle A_1 B_1 C_1.$$

Tõestus: Tõestame kolmnurga A, B, C , niisama kui kolmandal juhusel kolmnurga ABC juure, ühendame punktid A ja A_2 , siis leiame, et $\beta = \beta_2$, (kui sarikkolmnurga põhja juures olevad nurgad).

Et aga $\alpha = \alpha_1$, siis arvame võrdsetest nurkadest võrdsed nurgad maha, jäävad võrdsed nurgad järele:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{\gamma} &= \frac{\alpha_1 - \beta_2}{\gamma_1} \\ \gamma &= \gamma_1 \end{aligned}$$

Kui nüüd $\gamma = \gamma_1$, siis on $\triangle ABA_2$ ka sarikkolmnurk, järjestikult külge $c = c_1$, (vaata sarikkolmnurga järeldused).

Nüüd teame, et kolmnurkades

ABC ja BA_2C :

$$b = b_1,$$

$$c = c_1,$$

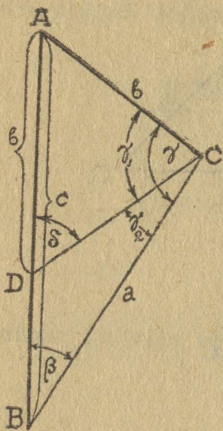
$$\alpha = \alpha_1,$$

järjestikult — $\triangle ABC \cong \triangle BA_2C$ (vaata esimene juhus).

Et aga $\triangle BA_2C \cong \triangle A_1 B_1 C_1$,

siis $\triangle ABC \cong \triangle A_1 B_1 C_1$.

Teoreem: Kolmnurgas on suurema külje vastas suurem nurk ja überpöördukt—suurema nurga vastas suurem külg.



1) Oletus: $c > b$.

Väide: $\gamma > \beta$.

Tõestus: Võtame AB peal joonlõigu $AD = AC = b$, ühendame punktid D ja C, siis saame nurgad $\delta = \gamma$, (kui sarikkolmnurga põhja juures olevad nurgad). Siit leiame, et

$$\delta = \beta + \gamma_2 \quad (\delta \text{ on } \triangle BDC \text{ välisnurk}),$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ja } \delta > \beta \\ \gamma_2 > \beta \end{array} \right\} \text{, sest } \delta = \gamma.$$

Kui nüüd γ , suurem on kui β , siis on ka γ suurem kui β , sest $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$.

2) Oletus: $\gamma > \beta$.

Väide: $c > b$.

Tõestus: Ütleme, et külg c ei ole küljest b mitte suurem. Siis võib ta olla kas niisama suur kui külg b , ehk temast väiksem. Esimesel juhul, kui

$$c = b,$$

peab $\gamma = \beta$ (vaata sarikkolmnurga järeldused).

Teisel juhul, kui

$$c < b,$$

peab $\gamma < \beta$ (vaata eelmine tõestus).

Antud on aga, et $\gamma > \beta$, sellepärast ei kõlba need juhused kumbgi, järjekult on nurk γ suurem kui nurk β , siis peab tema vastaskülg c suurem olema kui nurga β vastaskülg b .

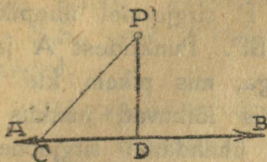
Teoreem: Antud punktist võib antud sirgjoonele ainult ühe perpendikulaarjoone alla tõmmata.

Märkused:

Märkused:

Tõmbame punktist P antud joonlõigule AB perpendikulaarjoone PD.

Oletame nüüd, et punktist P võib veel teise perpendikulaarjoone sirgjoonele AB tõmmata, siis saame kolmnurga, milles kaks täisnurka on: $\sphericalangle PCD = d$, $\sphericalangle PDC = d$. See on aga võimata, et ühes kolmnurgas võib kaks täisnurka olla, tähendab — meie oletus ei ole õige.



Neljas peatükk.

Ülesannete lahendamine.

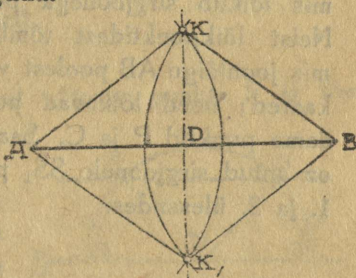
§ 15.

Jaotused ja perpendikulaarjooned.

1. ülesanne: Joonlõik pooleks jagada.

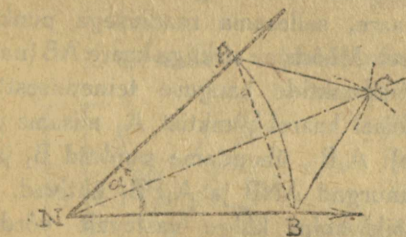
Antud joonlõik AB. Joonistame vaba raadiusega, mis antud joonlõigust lühem ja tema poolest pikem, punktides A ja B kaks kaart, mis lõikuvad punktides K ja K₁. Ühendame need kaks punkti sirgjoonega, siis jagab see antud joonlõigu punktis D pooleks.

Tõestus: $\triangle AKK_1 \cong \triangle BKK_1$, sest $AK = AK_1 = BK = BK_1$ ja KK_1 on neil ühine külge; tähendab — $\triangle AKK_1$ ja $\triangle BKK_1$ on sarikkolmnurgad ühise põhjaga, selle põhja jagab tippusid ühendaja sirgjoon pooleks. (Vaata § 14 — sarikkolmnurgad.)



2. ülesanne: Nurk pooleks jagada.

Antud nurk a. Joonistame vaba raadiusega punktist N kaare, mis lõikub nurga külgedega punktides A ja B. Neist lõikpunktidest joonistame kas sellesama ehk uue vaba raadiusega, mis punktide A ja B poolest vahest pikem, kaks kaart, mis lõikuvad punktis C; punktisid

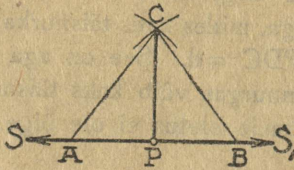


N ja C ühendaja sirgjoon jagab nurga a pooleks.

Tõestus nagu esimeses ülesandes.

3. ülesanne: Sirgjoonel antud punktist perpendikulaarjoon üles tõmmata.

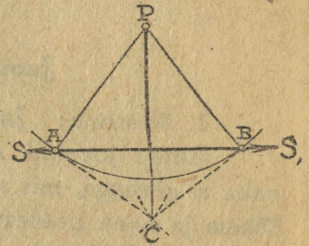
Antud sirgjoon SS_1 ja sellel punkt P . Sirkli vabal sammul märgime punktist P sirgjoonel ühepikkused osad AP ja BP . Punktidest A ja B tõmbame raadiusega, mis pikem kui AP ja BP , kaared, mis lõikuvad punktis C . Punktid C ja P ühendame sirgjoonega, mis antud sirgjoonele SS_1 perpendikulaarne on.



Tõestus: $\triangle ACP \cong \triangle CPB$ (vaata sarikkolmnurga omadused).

4. ülesanne: Antud punktist sirgjoonele perpendikulaarjoon tõmmata.

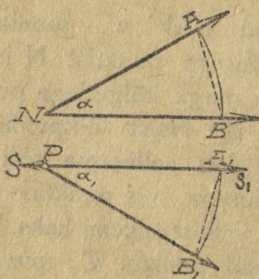
Antud sirgjoon SS_1 ja punkt P . Punktist P tõmbame raadiusega, mis pikem on kui punkti P kaugus sirgjoonest SS_1 , kaare, mis lõikub sirgjoonega punktides A ja B . Neist lõikpunktidest tõmbame raadiusega, mis joonlõigu AB poolest vähe pikem, uued kaared; need lõikuvad punktis C . Ühendame punktid P ja C . Saadud joonlõik PC on antud sirgjoonele SS_1 perpendikulaarne. Tõestus on seesama, mis 1. ja 2. ülesandes.



§ 16.

Nurgad ja paralleeljooned.

5. ülesanne: Antud sirgjoone peal olevast punktist uus nurk joonistada, mis antud nurgale võrdne.



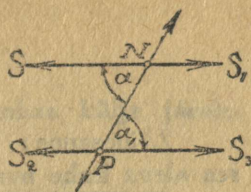
Antud nurk α , sirgjoon SS_1 ja selle peal punkt P . Vaba raadiusega tõmbame nurga α tipust kaare, sellesama raadiusega punktist P teise kaare. Mõõdame sirkliga kaare AB (nurga külgede lõikpunktide kauguse teineteisest) ja märgime teisel kaarel punktist A_1 niisama pika osa (kaare) A_1B_1 , ühendame punktid B_1 ja P .

Kolmnurgad ANB ja A_1PB_1 ühtivad, sest neil on kõik kolm külge vastavalt võrdsed. Sellest järgneb: $\alpha_1 = \alpha$.

7. ülesanne: Läbi antud punkti tõmmata antud sirgjoonele paralleeljoon.

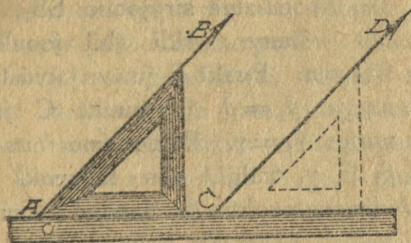
Antud sirgjoon SS_1 ja punkt P . Antud punktist P tõmbame vabal kallakul lõikjoone PN . Saadud nurgale α ehitame punktist P

paremale poole lõikjoont PN võrdse nurga α_1 ja pikendame tema külge punktist P pahemale ja paremale poole. Siis saame paralleelsed sirgjooned SS_1 ja S_2S_3 , sest $\alpha = \alpha_1$ kui sisemised põiknurgad.



Märkus: Paralleeljooni võib veel tõmmata:

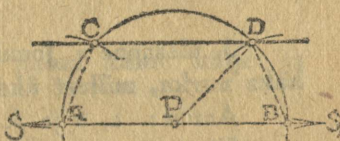
1) Nurk- ja joonlaua abil.



Paneme joonlaua paberile, joonlaua ülemise serva peale nurklaua ja tõmbame selle ühe külje järelle sirgjoone AB. Nüüd nihutame nurklaua saadud sirgjoonest tarvilisele kaugusele ja tõmbame uue sirgjoone CD jne. Kõik saadud sirgjooned on teineteisele paralleelsed.

2) Kaare abil.

Tõmbame sirgjoone SS_1 , selle peal võtame punkti P ja tõmbame sellest vaba raadiusega kaare, mis antud sirgjoonega kahes punktis lõikub. Lõikpunktidest A ja B tõmbame võrdsete raadiustega uued kaared, mis endisega punktides C ja D lõikuvad. Kui meie punktid C ja D joonlõiguga ühendame, siis on see endisele paralleelne. Tõesta ise, et $SS_1 \parallel CD$.



§ 17.

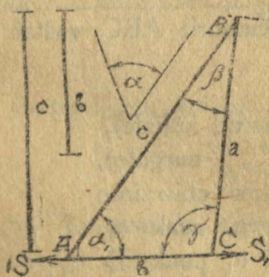
Kolmnurgad.

1. ülesanne: Joonistada kolmnurk antud kahe külje ja nende vahel oleva nurga järelle.

(Kolmnurkade ühtivuse esimene juhus.)

Antud: c , b ja α .

Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame sirkli abil joonlõigu $AC = b$. Punkt A juure joonistame nurga $\alpha_1 = \alpha$, selle küljelt võtame joonlõigu $AB = c$. Ühendame punktid B ja C, siis saame kolmnurga ABC, mis vastab nõutavale kolmnurgale.



Joonista ise, kui on antud:

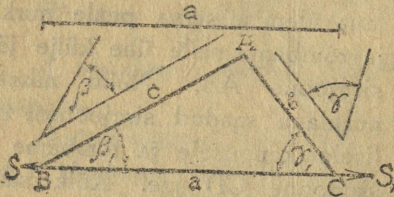
- 1) a, c ja β ;
- 2) b, a ja γ .

2. ülesanne: Joonistada kolmnurk antud külje ja selle juures oleva kahe nurga järelle.

(Kolmnurkade ühtivuse teine juhus.)

Antud: a, β ja γ .

Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame sirkli abil joonlõigu $BC = a$. Punkt B juure joonistame nurga $\beta_1 = \beta$ ja punkt C juure nurga $\gamma_1 = \gamma$. Pikendame nurkade β_1 ja γ_1 külgi, siis lõikuvad nad viimaks punktis A. Saadud kolmnurk vastab nõutavale kolmnurgale.



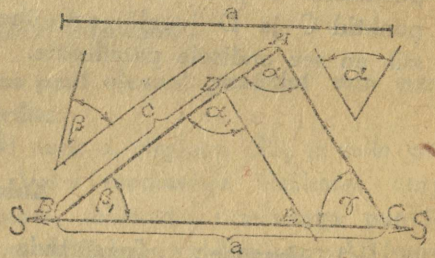
Joonista ise, kui on antud:

- 1) b, a ja γ ;
- 2) c, a ja β .

3. ülesanne: Joonistada kolmnurk, kui on antud üks külge ja kaks nurka, millest üks antud külje juures ja teine selle vastas on.

Antud: a, α ja β .

Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame sirkli abil joonlõigu $BC_1 = a$; punkt B juure joonistame nurga $\beta_1 = \beta$, pikendame selle külge c , selle peale joonistame vabalt võetud punkti D juure nurga $\alpha_1 = \alpha$ ja pikendame selle külge kunni lõikpunktini E. Nüüd tõmbame punktist C joonlõigule ED paralleeljoone AC. Saadud kolmnurk ABC vastab nõutavale kolmnurgale, sest:



- $BC = a$ (joonistasime vastavalt antud küljele),
 $\beta_1 = \beta$ (" " " " nurgale),
 $\alpha_1 = \alpha$ (nurga α_1 punkt D juures ehitasime vastavalt antud nurgale α , nurk α_1 punkt A juures võrdub α_1 punkt D juures, sellega võrdub ta ka a).

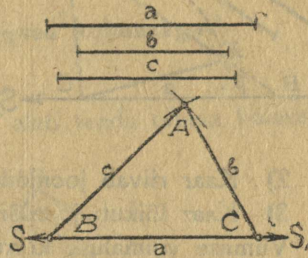
Joonista ise, kui on antud:

- 1) b , α ja β ;
- 2) c , α ja γ .

4. ülesanne: **Joonistada kolmnurk antud kolme külje järele.**
(Kolmnurkade ühtivuse kolmas juhus.)

Antud: a , b ja c .

Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame sirkli abil joonlõigu $BC = a$. Nüüd mõõdame sirkliga b pikkuse, võtame selle raadiuseks ja joonistame punktist C kaare. Siis mõõdame c pikkuse, võtame selle uueks raadiuseks ja joonistame punktist B uue kaare, mis lõikub endisega punktis A . Ühendame punktid A ja B ning A ja C , siis vastab saadud kolmnurk ABC nõutavale kolmnurgale.



Märkus: Ainult siis on võimalik nõutavat kolmnurka joonistada, kui teada on, et:

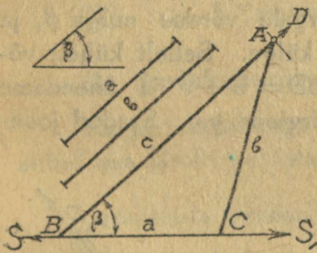
$$\begin{aligned} a + b &> c, \\ \text{ehk: } a + c &> b, \\ \text{ehk: } b + c &> a. \end{aligned}$$

5. ülesanne: a) **Joonistada kolmnurk antud kahe külje ja suurema külje vastasnurga järele.**

(Kolmnurkade ühtivuse neljas juhus.)

Antud: a , b ja β ; $b > a$.

Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame joonlõigu $BC = a$, punkt B juure joonistame nurga $\beta_1 = \beta$ ja pikendame selle külge BD . Nüüd mõõdame sirkliga antud külje b pikkuse, võtame selle raadiuseks ja tõmbame punktist C kaare, mis lõikub joonlõiguga BD punktis A , ühendame punktid A ja C , siis saame kolmnurga ABC , mis vastab nõutavale kolmnurgale.



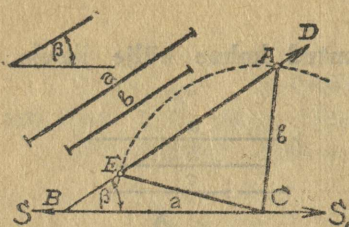
Joonista ise, kui on antud:

- 1) b , c ja β ($b > c$);
- 2) a , c ja $\sphericalangle ACB$ ($c > a$).

b) **Joonistada kolmnurk antud kahe külje ja vähema külje vastasnurga järele.**

Antud: a , b ja β ; $a > b$.

Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame joonlõigu $EC = a$, punkt



B juure joonistame antud nurga β ja pikendame selle külge BD . Nüüd mõõdame sirkliga antud külje b pikkuse, võtame selle raadiuseks ja tõmbame punktist C kaare. Siin võib antud nurgast β ehk ühest antud küljest oleneda kolm võimalust:

- 1) Kaar ei löiku joonlõiguga BD — kolmnurka ei ole võimalik joonistada.
 - 2) Kaar riivab joonlõiku BD — saame ühe kolmnurga.
 - 3) Kaar lõikub joonlõiguga BD kahes punktis.
- Viimase võimaluse korral saame kaks kolmnurka:

$$\triangle EBC \text{ ja } \triangle ABC.$$

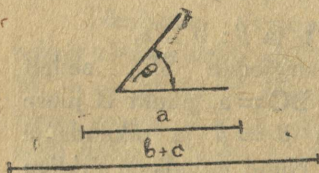
Tõesta, et antud suurema külje $BC = a$ vastasnurgad võrduvad kahele täisnurgale:

$$\sphericalangle BEC + \sphericalangle BAC = 2d.$$

Missugune kolmnurk sünnib siis, kui $a = b$ ja $\beta = d$ (täisnurgale)?

6. ülesanne: Joonistada kolmnurk, kui on antud üks külg, selle külje juures olev nurk ja kahe teise külje summa.

Antud: a , $b + c$ ja β .



Tõmbame sirgjoone SS_1 , sellelt võtame joonlõigu $BC = a$, punkt B juure joonistame antud nurgale võrdse nurga β_1 ja pikendame tema külge. Sellelt küljelt võtame joonlõigu $BD = b + c$ ja ühendame punktid D ja C sirgjoonega. Saadud joon-

lõigu CD jagame pooleks ja tõmbame leitud keskpunktist temale perpendikulaarjoone, mis lõikub joonlõiguga BC punktis A . Ühendame punktid A ja C , siis saame nõutava kolmnurga ABC , sest:

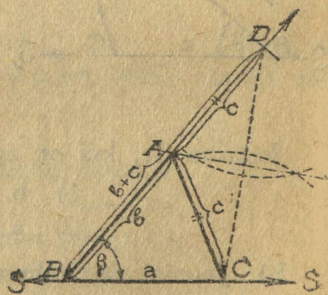
$$BD = BA + AD = b + c \text{ (joonistasime nii),}$$

$$AD = AC \text{ (kui sarikkolmnurga võrdsed küljed).}$$

Tähendab:

$$\underline{BA + AC = b + c.}$$

Mispärast on $\triangle CAD$ sarikkolmnurk?



Nüüd näeme, et saadud kolmnurk kõiki nõutavaid tingimisi täidab:

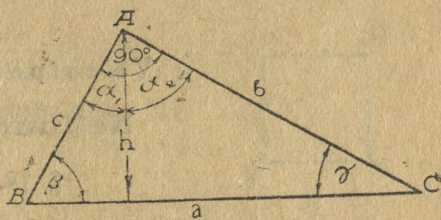
$$\begin{aligned} BC &= a, \\ \sphericalangle ABC &= \beta \\ \text{ja } AB + AC &= b + c. \end{aligned}$$

§ 16.

Täisnurksed, sarik- ja võrdkülgsed kolmnurgad.

I. Täisnurksed.

Kolmnurkade konstrueerimisel peab alati teada olema kolmnurga kolm osa, nende seas vähemalt üks külg. Et aga täisnurkses kolmnurgas üks osa — täisnurk — alati teatud kindel suurus on, siis võime ainult kahe antud osa järele nõutava täisnurkse kolmnurga konstrueerida ehk joonistada.



Joonistada täisnurkne kolmnurk, kui on antud:

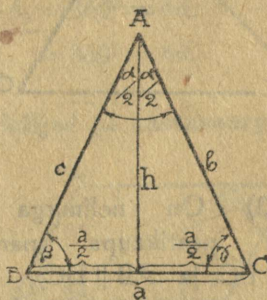
- 7) a ja b (vaata 5. ülesanne — esimene juhused).
- 8) a ja β (vaata 3. ülesanne).
- 9) b „ β („ 3. „).
- 10) h „ β ($\alpha_2 = \beta$ ja $\alpha_1 = \gamma$ — kui nurgad, mille küljed vastastikku perpendikulaarjooned).
- 11) h ja γ (seesama seadus).
- 12) b ja h (seesama seadus ja 5. ülesande esimene juhused).

II. Sarikkolmnurgad.

Ka sarikkolmnurga võib tema võrdsete osade pärast ainult kahe antud osa järele joonistada.

Joonistada sarikkolmnurk, kui on antud:

- 13) a ja b (vaata 4. ülesanne).
- 14) a „ β („ 2. „).
- 15) a „ h („ 1. „).
- 16) b „ α („ 1. „).
- 17) b „ β („ 3. „).
- 18) b „ h („ 5. „ esimene juhused).
- 19) h „ a („ 2. „).



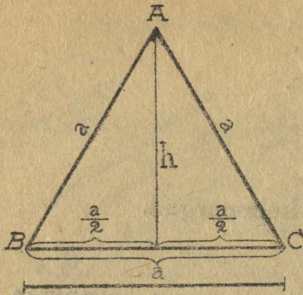
III. Võrdkülgse.

Võrdkülgse kolmnurga võib joonistada ainult ühe antud osa järele.

Joonistada võrdkülgne kolmnurk, kui on antud:

20) a (vaata 4. ülesanne).

21) h („ 2. „).



Viies peatükk.

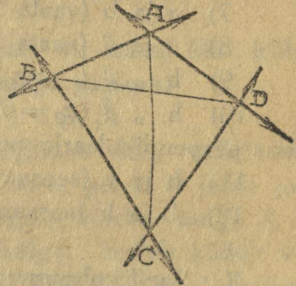
Nelinurgad.

§ 19.

Nelinurga tunnused ja liigid.

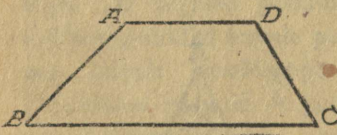
1) Kui neli sirgjoont neljas punktis lõikuvad, siis sünnib **nelinurk**. Joonlõigud AB , BC , CD ja DA on nelinurga **küljed**, nende lõikupunktid A , B , C ja D — nelinurga **tipud**.

Joonlõiku, mis kahte teineteise vastas olevat nurka — vastasnurka — seob, nimetame **nurkjooneks** ehk **diagonaaliks**. BD ja AC on diagonaalid. Igas nelinurgas võib kaks diagonaali tõmmata.

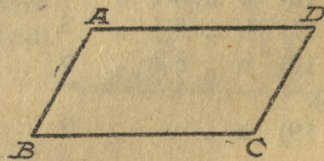


2) On nelinurgal kaks teineteise vastas olevat külge — vastaskülge — paralleel-

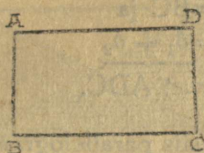
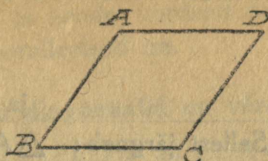
sed ($AD \parallel BC$), siis nimetame niisugust nelinurka **trapeetsiks**. AD ja BC on trapeetsi põhjad ning AB ja DC trapeetsi küljed. On need küljed ühepikkused ($AB = DC$), siis nimetame niisugust trapeetsi **sariktrapeetsiks**.



3) On nelinurga vastasküljed paarikaupa paralleelsed ($AD \parallel BC$ ja $AB \parallel DC$), siis nimetame niisugust nelinurka **parallelogrammiks**.

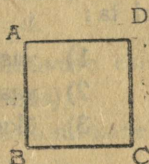


4) On parallelogrammis kõik küljed võrdsed ($AB = BC = CD = DA$), siis nimetame niisugust parallelogrammi **rombiks**.



5) On parallelogrammis kõik nurgad täisnurgad, siis nimetame niisugust parallelogrammi **täisnurkseks nelinurgaks**.

6) On täisnurkse nelinurga küljed kõik ühepikkused, siis nimetame niisugust nelinurka **ruuduks**.



§ 20.

Nelinurkade osad ja nende omadused.

Esimene omadus: Nelinurga nurkade summa võrdub 360° või 4 täisnurgale.

Tõmbame nelinurgas diagonaali BD , mis nelinurga kaheks kolmnurgaks jagab:

$$\triangle ABD \text{ ja } \triangle BCD.$$

Esimeses kolmnurgas võrdub nurkade summa:

$$\alpha + \beta_1 + \delta_1 = 180^\circ = 2d,$$

$$\text{teises —: } \gamma + \beta_2 + \delta_2 = 180^\circ = 2d.$$

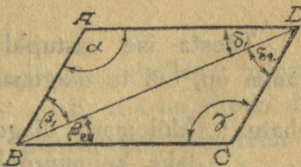
$$\text{Arvame kokku: } \alpha + \gamma + \beta_1 + \beta_2 + \delta_1 + \delta_2 = 360^\circ = 4d,$$

$$\text{ehk: } \alpha + \gamma + \beta + \delta = 360^\circ = 4d.$$

Teine omadus: Parallelogrammi vastasküljed ja vastasnurgad on vastavalt võrdsed.

Oletus: $AD \parallel BC$ ja $AB \parallel DC$.

Väide: $\left\{ \begin{array}{l} 1. AD = BC \text{ ja } AB = DC. \\ 2. \alpha = \gamma \text{ ja } \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADC. \end{array} \right.$



Tõestus: Tõmbame diagonaali BC, siis:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \delta_2 \text{ (kui sisemised põiknurgad),} \\ \beta_2 &= \delta_1 \text{ (" " ")} \\ \text{ja } BD &= BD. \end{aligned}$$

Sellest järgneb: $\triangle ABD \cong \triangle BDC$ (kolmnurkade ühtivuse teise juhuse põhjal)

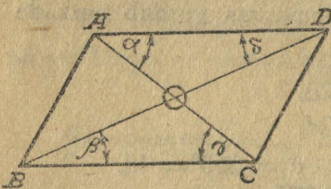
$$\begin{aligned} \text{ja " " } & \begin{cases} 1. AB = DC \text{ ja } AD = BC \text{ ja} \\ 2. a = \gamma \text{ " } \beta_1 + \beta_2 = \delta_1 + \delta_2 \end{cases} \\ & \triangle ABC = \triangle ADC. \end{aligned}$$

Tõesta ise vastupidine väide, et antud nelinurk siis parallelogramm on, kui ta:

- 1) vastasküljed võrdsed on,
- 2) vastasnurgad võrdsed on,
- 3) üks paar vastaskülgi võrdsed ja paralleelsed on.

- Juhatus: 1) Võta abiks diagonaal, kolmnurkade ühtivuse kolmas juhuse ja sisemised põiknurgad.
- 2) Võta abiks nelinurga nurkade summa, tõesta, et $a + (\beta_1 + \beta_2) = 180^\circ = 2d$, ja nende, kui sisemiste ühekülgssete nurkade abil näita, et $AD \parallel BC$. Niisama tõesta teise paari nurkade abil, et $AB \parallel DC$.
- 3) Võta abiks diagonaal, kolmnurkade ühtivuse esimene juhuse ja siit esimene tõestus.

Kolmas omadus: Parallelogrammi diagonaalid poolitavad vastastikku teineteist.



Oletus: $AD \parallel BC$ ja $AB \parallel DC$.
 Väide: $AO = OC$ ja $BO = OD$.
 Tõestus: $a = \gamma$ (kui sisemised põiknurgad),
 $\beta = \delta$ " " "
 ja $AD = BC$ (kui " parallelogrammi vastasküljed).

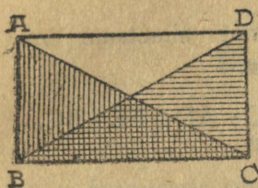
Sellest järgneb: $\triangle AOD \cong \triangle BOC$ (ühtivuse teine juhuse)
 ja " " "
 $AO = OC$ ning $BO = OD$ (ühtivates kolmnurkades on vastavad osad võrdsed),

Tõesta ise vastupidine väide, et antud nelinurk siis parallelogramm on, kui ta diagonaalid teineteist vastastikku poolitavad.

Juhatus: Mõlemaid diagonaale tõmmates jagad antud nelinurga neljaks kolmnurgaks, vastastikku seisvad kolmnurgad ühtivad

esimese juhuse põhjal paarikaupa, ja nende võrdsed nurgad aitavad tõestada, et vastasküljed paralleelsed on.

Neljas omadus: **Täisnurkse nelinurga diagonaalid on võrdsed.**



Oletus: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCD = \sphericalangle CDA = \sphericalangle DAB = d$.

Väide: $AC = BC$.

Tõestus: $AB = DC$ (kui parallelogrammi vastasküljed),
 $BC = BC$ (iga suurus võrdub iseendaga).

ja $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCD = d$.

Sellest järgneb: $\triangle ABC \cong \triangle BDC$ (ühtivuse esimene juhus),

ja " " $AC = BD$ (kui kolmnurkade vastavad jaod).

Viies omadus: **Rombi diagonaalid on vastastikku perpendikulaarsed ja poolitavad nurgad, mille tippusid nad ühendavad.**

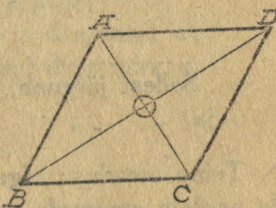
Oletus: $AB = BC = CD = DA$.

Väide: 1. $AC \perp BD$
 2. $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC$, $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ODC$ jne.

Tõestus: $\triangle ABC \cong \triangle ACD$ ja mõlemad on sarikkolmnurgad ühise põhjaga, sellest järgneb:

1. $AC \perp BD$ (§ 14 — ühispõhjaga sarikkolmnurgad).

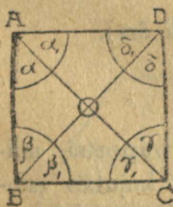
ja 2. $\sphericalangle ABO = \sphericalangle OBC$ ja $\sphericalangle ADO = \sphericalangle ODC$.



Võta kolmnurgad BAD ja BDC ja tõesta analoogiliselt, et $\sphericalangle BAO = \sphericalangle OAC$ ja $\sphericalangle BCO = \sphericalangle OCD$.

Tõesta ise ka vastupidine väide.

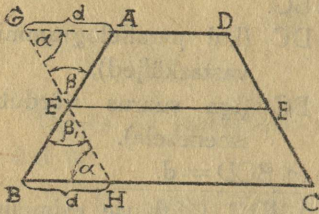
Tä h e n d u s: Kõik omadused, mis on parallelogrammil üleüldse, on ka selle erikujul — täisnurksel nelinurgal, rombil ja ruudul.



Et ruut on parallelogramm üleüldse, niisama ka täisnurkne nelinurk ja romb, siis on ruudu diagonaalid ühepikkused, poolitavad teineteist ja ruudu nurki ning on vastastikku perpendikulaarsed.

Trapeets.

Esimene omadus: **Tõmbame trapeetsi ühe külje keskpunkti trapeetsi põhjadele paralleeljoone, siis jagab see trapeetsi teise külje ka pooleks.**



Niisugust joont nimetame trapeetsi **keskjooneks**.

Oletus: $DE = EC$; $AD \parallel FE \parallel BC$.

Väide: $AF = BF$.

Tõestus: Tõmbame läbi punkti F joonlõigu GH, mis joonlõigule DC paralleelne ja lõikub trapeetsi alumise küljega punktis H ning ülemise külje pikendusega punktis G, siis on:

$$\left. \begin{aligned} GF &= DE \\ \text{ja } FH &= EC \end{aligned} \right\} \text{ et aga } \begin{aligned} DE &= EC, \text{ siis peab} \\ GF &= FH. \end{aligned}$$

Nüüd on $\alpha = \alpha_1$ (kui sisemised põiknurgad),

$\beta = \beta_1$ („ vertikaalnurgad)

ja $GF = FH$.

Sellest järgneb, et $\triangle GFA \cong \triangle FBH$,

ja „ „ „ $AF = BF$.

Teine omadus: **Iga trapeetsi keskjoon võrdub trapeetsi põhjade poolele summale.**

Oletus: $AD \parallel EF \parallel BC$; $EF = m$

(keskjoon).

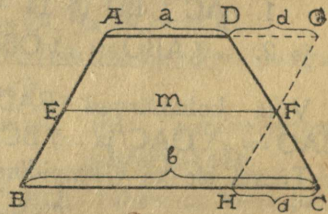
Väide: $m = \frac{a + b}{2}$

Tõestus: $m = a + d$

(parallelogrammi vastasküljed),

$m = b - d$

(parallelogrammi vastasküljed).



Kokku arvates saame: $2m = a + b$ (+ d ja - d kaovad ära),

ja siit: $m = \frac{a + b}{2}$

Järeldus: 1) Igat kolmnurka võib vaadelda kui trapeetsi, millel teine põhi võrdub nullile ehk kujutab endast ainult punkti.

- 2) Igas kolmnurgas on sirgjoon, mis ühendab kolmnurga kahe külje keskpunkte, kolmandale küljele paralleelne ja võrdub selle poolele.

§ 22.

Ülesanded nelinurkade joonistamises.

I. Ruut.

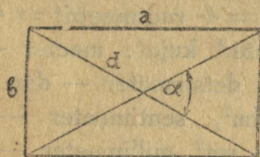
Joonistada ruut, kui on antud:

- 1) külg a ;
- 2) diagonaal d .



II. Täisnurkne nelinurk.

Joonistada täisnurkne nelinurk, kui on antud:

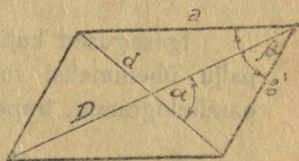


- 3) küljed a ja b ;
- 4) külg a ja diagonaal d ;
- 5) diagonaal d ja nurk α .

III. Paralleloogramm.

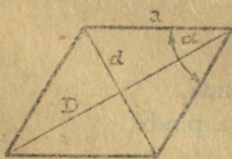
Joonistada paralleloogramm, kui on antud:

- 6) küljed a ja b ning nurk β ;
- 7) „ a ja b ning diagonaal D ;
- 8) külg a , diagonaal D ja nurk β ;
- 9) diagonaalid D ja d ning nurk α .



IV. Romb.

Joonistada romb, kui on antud:



- 10) külg a ja nurk α ;
- 11) külg a ja diagonaal d ;
- 12) diagonaal d ja nurk α ;
- 13) diagonaalid D ja d .

Kuues peatükk.

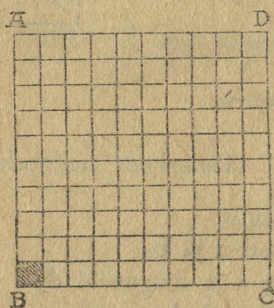
Pindade mõõtmine.

§ 23.

Üleüldised märkused.

Igal pinnal on kaks mõõtu — pikkus ja laius. Pinna mõõtmiseks tarvitame ruutmõõtusid. Võtame ruudu, mille küljed igaüks kümme detsimeetrit pikad on, märgime nendel külgedel detsimeetri pikkused osad ja ühendame vastaskülgedel saadud punktid sirgjoontega, siis jaotavad need sirgjooned antud ruudu saajaks ruuduks: Igat niisugust

saadud ruutu nimetame ruutdetsimeetriks; nende pikkus ja laius on üks detsimeeter. Terve meie antud ruudu pind sisaldab eneses sada ruutdetsimeetrit, mis kokku ruutmeetri sünnitavad. On meil ruut, mille pikkus (ja laius) 2 meetrit, siis on ruudu pind $2 \times 2 = 2^2 = 4$ ruutmeetrit = 4 m^2 . Kirjutame lühendatud kujul: meeter — m, ruutmeeter — m^2 , detsimeeter — dm, ruutdetsimeeter — dm^2 , sentimeeter — sm, ruutsentimeeter — sm^2 , millimeeter — mm, ruutmillimeeter — mm^2 , siis on:



$$\begin{aligned} 1 \text{ m} &= 10 \text{ dm} \text{ ja } 1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2, \\ 1 \text{ dm} &= 10 \text{ sm} \text{ „ } 1 \text{ dm}^2 = 100 \text{ sm}^2, \\ 1 \text{ sm} &= 10 \text{ mm} \text{ „ } 1 \text{ sm}^2 = 100 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Igasugused kujundid on siis võrdpindsed, kui nende pinnad ühepalju ühenimelisi ruutmõõtusid sisaldavad. Nii võivad kolmnurk ja parallelogramm, trapeets ja viisnurk võrdpindsed olla.

Märkus: Kujundite ühtivuse (kongruentsuse) märgiks oli “ \cong ”, nende võrdpindsuse märgiks olgu “=”. Kujundite pinda märgime suure Ladina tähega P (esimene täht sõnast “pind”) ja selle paremale poole kõrvale asetatud kujundi nime esimeste ja viimaste tähtedega.

Nii tähendagu:

Pp_{gm} — parallelogrammi pinda,
Pt_{nk} — täisnurkse nelinurga pinda,
Pn_{nk} — nelinurga pinda,

Märkused:

1920. a. märkused

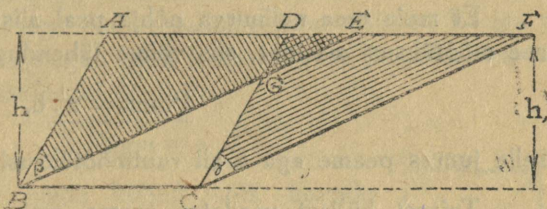
- Prt — ruudu pinda,
 Ptr — trapeetsi pinda,
 Pknk — kolmnurga pinda,
 Phnk — hulknurga pinda, j. n. e.

Ühtivad kujundid on ühtlasi ka võrdpindsed.

§ 24.

Parallelogrammid.

Esimene teoreem:
Parallelogrammid on võrdpindsed, kui nende põhjad ja kõrgused võrdsed on.



Oletus: $BC = BC$, $AD = EF$ ja $h = h_1$

Väide: Parallelogrammi $ABCD$ pind = parallelogrammi $EBCF$ pinnale.

Tõestus: $AB = DC$,
 $BE = CF$,
 $\beta = \gamma$, } sellest järgneb:

$$\triangle ABE \cong \triangle DCF.$$

Arvame neist maha $\triangle DGE \cong \triangle DGE$, siis

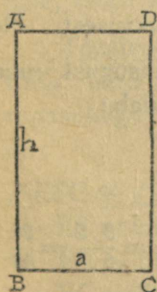
jääb järele — nelinurga $ABGD$ pind = $EGCF$ pinnale;

arvame juure — $\triangle GBC \cong \triangle GBC$, siis saame:

parallelogr. $ABCD$ pind = $EBCF$ pinnale.

Järeldus: Igat parallelogrammi võib võrdpindseks täisnurkseks nelinurgaks muuta ja ümberpöörduvalt.

Teine teoreem: **Täisnurkse nelinurga pind võrdub põhja ja kõrguse kasvavatele ruutmõõtudele:**



Väide: Tähendame täisnurkse nelinurga pinna tähtedega Ptnk, põhja — a ja kõrguse — h , siis peab $Ptnk = a \cdot h$.

Tõestus: 1) Täisnurkse nelinurga küljed BC ja AD sisaldavad eneses a mõõtüksust (näituseks a millimeetrit, sentimeetrit j. n. e.), küljed AB ja DC — h niisamasugust mõõtüksust. Oletame, et a ja h on terved arvud. Märgive nelinurga külgedel mõõtüksuse pikkused osad, siis saame BC ja AD peal a niisugust osa, AB ja DC peal h niisugust osa. Ühendame nüüd

vastaskülgedel olevate osade vahelised punktid sirgjoontega, siis sün- nitavad need sirgjooned teineteisega lõikudes ruudud, mille küljed võrduvad mõõtüksusele ja pinnad ruutmõõtüksusele. Nelinurga põhja BC peal asub nüüd kõrvuti a ruutu, nende peal teine rida, selle peal kolmas rida j. n. e. Üleüldse on meil h niisugust rida, igas reas a ruutu, tähendab — meie nelinurga ABCD pind võrdub:

a ruutu võetud h korda, ehk:

$$\underline{P_{tnnk} = a \text{ ruutu} \times h.}$$

Et meie oma nelinurga põhja peal niisama palju ruute saime, kui see mõõtüksusi sisaldas, siis võime lühenduse mõttes kirjutada:

$$\underline{P_{tnnk} = a \cdot h,}$$

selle juures peame aga a all ruutmõõtüksusi mõtlema.

Teisest küljest vaadates saame oma nelinurga kõrguse sihis h ruutu üksteise peale laotult, tähendab — ühes reas on neid h, a reas a korda rohkem, ehk:

$$\underline{P_{tnnk} = h \cdot a}$$

Siin peame h all ruutmõõtüksusi mõtlema.

Näitus: Ütleme, et $a = 5$ sm. ja $h = 8$ sm., siis saame BC peal 5 ruutu, kõrguse sihis 8 rida (igas reas 5 ruutu), tähendab — meie nelinurga ABCD pind võrdub:

$$\underline{5 \text{ sm}^2 \times 8 = 40 \text{ sm}^2, \text{ ehk } P_{tnnk} = 5 \cdot 8 = 40 \text{ sm}^2.}$$

2) Oletame nüüd, et meie täisnurkse nelinurga laius ja kõrgus on mistahes murdarvud meie endisest mõõtüksusest: laius $a = \frac{b}{c}$ ja kõrgus $h = \frac{d}{e}$. Teeme need murrud ühenimelisteks, siis on $a = \frac{be}{ce}$ ja $h = \frac{dc}{ce}$. Nüüd ehitame ruudukesed, mille külgede pikkus on $\frac{1}{ce}$ endisest mõõtüksusest ja pinnad $\left(\frac{1}{ce}\right)^2$ endisest ruutmõõtüksusest. Nelinurga põhja BC peal asub esimeses reas kõrvuti be niisugust ruudu- kest, selle peal teine rida j. n. e., kokku dc rida, tähendab:

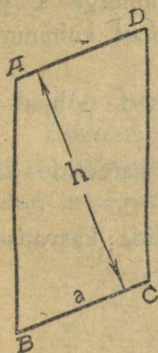
$$P_{tnnk} = \frac{1 \cdot be \cdot dc}{(ce)^2} = \frac{bd \cdot ce}{ce \cdot ce} = \frac{b}{c} \cdot \frac{d}{e} = a \cdot h.$$

Näitus: $a = \frac{3}{5}$ meetrit ja $h = \frac{5}{8}$ meetrit, ehk $a = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} = \frac{24}{40}$ m. ja $h = \frac{5 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{25}{40}$ m. Nelinurga põhja BC peal saame 24 ruudukest,

mille küljed $\frac{1}{40}$ m ja pinnad $\left(\frac{1}{40}\right)^2$ m². Kõrguse sihis on 25 niisugust rida, igas reas on $\frac{24}{(40)^2}$ m², terve pind ehk 25 rida sisaldavad eneses:

$$P_{\text{tnnk}} = \frac{24 \cdot 25}{(40)^2} = \frac{24 \cdot 25}{40 \cdot 40} = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3}{8} \text{ m}^2.$$

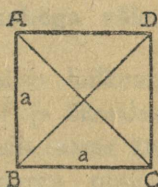
Järeldus: 1) Et igat parallelogrammi võrdpindseks täisnurkseks nelinurgaks võib muuta niisama suure põhja ja kõrgusega kui parallelogramm, siis on ka iga parallelogrammi pind tema kõrguse ja põhja kasvatis ruutmõõtudes:



$$P_{\text{pgm}} = a \cdot h$$

2) Et ruudu küljed kõik ühepikkused on, siis on $h = a$ ja ruudu pind $= a \cdot a = a^2$.

$$P_{\text{rt}} = a^2.$$



§ 25.

Kolmnurk.

Teoreem: Iga kolmnurga pind võrdub niisama suure põhjaga ja kõrgusega parallelogrammi poolele pinnale ehk kolmnurga põhja ja kõrguse poolele kasvatisel ruutmõõtudes.

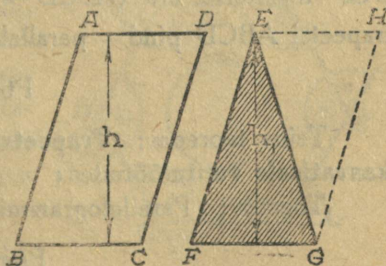
Oletus: $BC = FG$ ja $h = h_1$.

Väide: Parallegr. ABCD pind = kahele kolmnurga EFG pinnale, ehk: $P_{\text{pgm}} = 2P_{\text{knk}}$.

Tõestus: Muudame kolmnurga EFG teise kolmnurga EGH juurepanekuga parallelogrammiks, siis on:

$\triangle EFG \cong \triangle EGH$, sest

$EF = HG,$	}	kolmnurkade ühtivuse kolmas juhus.
$FG = EH,$		
$EG = EG,$		



Sellest järgneb, et $\triangle EFG$ pind = $\frac{EFGH}{2}$ pinnale. Et aga parallelogrammid EFGH ja ABCD võrdpindsed on, sest neil on ühesuurused põhjad ja kõrgused, siis on kolmnurga EFG pind pool parallelogrammi ABCD pinnast, ehk:

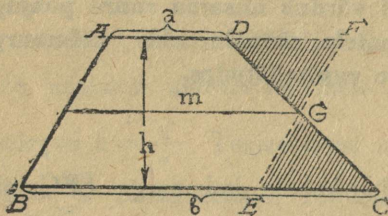
$$P_{knk} = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{h}{2} \cdot a = \frac{a}{2} \cdot h.$$

- Järeldus:
- 1) Igat kolmnurka võib parallelogrammiks muuta, millel niisama suur põhi ja pool kolmnurga kõrgusest, ehk niisama suur kõrgus ja pool kolmnurga põhjast on.
 - 2) Kõik kolmnurgad, millel ühesuurused põhjad ja kõrgused, on võrdpindsed.
 - 3) Täisnurkse kolmnurga pind on pool kateetide kasvatisest ruutmõõtudes.
 - 4) Rombi pind on pool tema diagonaalide kasvatisest ruutmõõtudes.

§ 26.

Trapeets.

Esimene teoreem: Iga trapeets on võrdpindne parallelogrammile, mille kõrgus võrdub trapeetsi kõrgusele ja põhi — trapeetsi keskjoonele.



Väide: Trapeetsi ABCD pind = parallelogr. ABEF pinnale.

Tõestus: $\triangle DGF \cong \triangle GEC$ (§ 21); sellest järgneb:

$$ABCD - GEC = ABEF - DGF.$$

Algebra seaduse järele hävitavad võrdsed suurused GEC ja DGF teineteise ära ($ABCD - GEC + DGF = ABEF$) ja järele jääb: trapeetsi ABCD pind = parallelogr. ABEF pinnale, ehk:

$$P_{tr} = P_{pgm}.$$

Teine teoreem: Trapeetsi pind võrdub kõrguse ja keskjoone kasvatisel ruutmõõtudes:

Tõestus: Parallelogrammi pind:

$$P_{pgm} = BE \cdot h$$

Parallelogramm ABEF ja trapeets ABCD on võrdpindsed, $BE = m$, siit trapeetsi pind:

$$P_{tr} = m \cdot h, \text{ ehk:}$$

$$P_{tr} = \frac{AD + BC}{2} \cdot h \quad (\S 21).$$

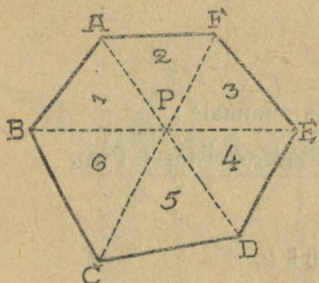
Seitsmes peatükk.

Hulknurgad.

§ 27.

Hulknurga nurgad.

Esimene teoreem: **Hulknurga sisemiste nurkade summa võrdub kahele täisnurgale, kasvatatud hulknurga külgede kahega vähendatud arvuga.**



Võtame kuuekülgelise hulknurga ABCDEF pinnal punkt P ja ühendame selle nurga tippudega, siis saame kuus kolmnurka. Iga kolmnurga nurkade summa võrdub kahele täisnurgale ($2d$). Kuuekülgelise hulknurga nurkade summa saame siis, kui kõik kolmnurga nurgad kokku arvame ehk kaks täisnurka kuuega kasvatame:

$$2d \cdot 6,$$

ja sellest arvust maha arvame neli täisnurka, mis punkt P ümber, siis jääb järele:

$$2d \cdot 6 - 4d = 2d(6 - 2).$$

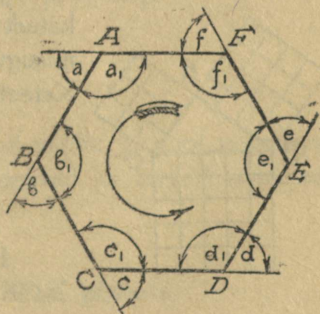
On meil kuuekülgelise asemel n -külgeline hulknurk, siis saame:

$$2d(n - 2).$$

Teine teoreem: **Hulknurga välisnurkade summa võrdub neljale täisnurgale.**

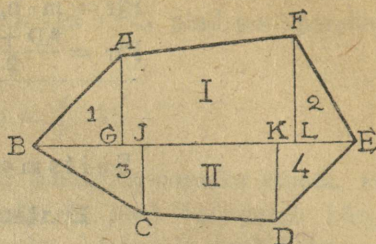
Iga niisugune välisnurk (a, b, c, d, e, f) täiendab sisemist kõrvunurka ($a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$) kuni 180° või kahe täisnurgani. Nende summa ühes sisemiste kõrvunurkadega on $2dn$ (kus n hulknurga külgede arvu tähendab). Sellest arvust arvame sisemiste nurkade summa $2d(n - 2)$ maha, siis jääb järele:

$$2dn - 2d(n - 2) = 2dn - 2dn + 4d = 4d.$$



Hulknurga pind.

Ühendame nurga tipud BE sirgjoonega ja tõmbame teistest nurga tippudest sellele sirgjoonele perpendikulaarjooned, siis saame neli täisnurkset kolmnurka ja kaks trapeetsi.



Nende pinnad:

1) Kolmnurgad:

$$P_{k_1} = \frac{BG \cdot AG}{2}$$

$$P_{k_2} = \frac{LE \cdot FL}{2}$$

$$P_{k_3} = \frac{BJ \cdot JC}{2}$$

$$P_{k_4} = \frac{KE \cdot KD}{2}$$

2) Trapeetsid:

$$P_{tr I} = \frac{AG + FL}{2} \cdot GL$$

$$P_{tr II} = \frac{JC + KD}{2} \cdot JK$$

Hulknurga pind võrdub nende pindade summale:

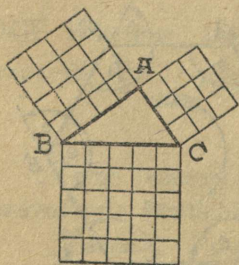
$$P_{hk} = P_{k_1} + P_{k_2} + P_{k_3} + P_{k_4} + P_{tr I} + P_{tr II}$$

Kaheksas peatükk.

Täisnurkne kolmnurk.

Pythagorase teoreem.

Iga täisnurkse kolmnurga kateetide peale ehitatud ruutude summa võrdub sellesama kolmnurga hüpotenuusi peale ehitatud ruudule.



Joonistame täisnurkse kolmnurga, mille üks kateet 3 sm. ja teine 4 sm. pikad on, siis on niisuguse kolmnurga hüpotenuus 5 sm. pikk. Kateetide peale ehitatud ruutude pinnad on:

$$3 \cdot 3 = 9 \text{ sm.}^2$$

$$4 \cdot 4 = 16 \text{ sm.}^2$$

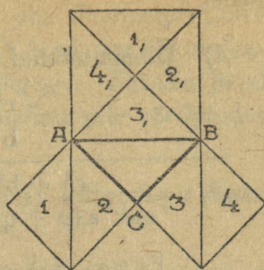
$$\text{Nende summa} = 25 \text{ sm.}^2$$

Hüpotenuusi peale ehitatud ruudu pind on:

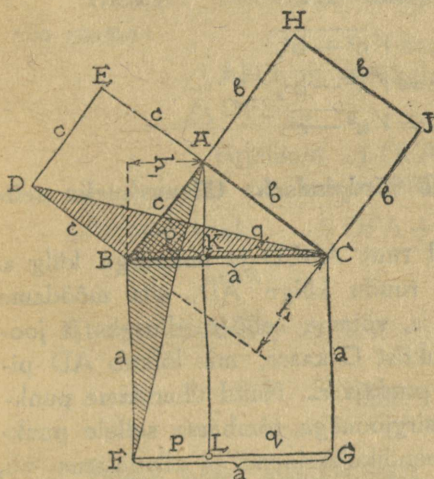
$$5 \cdot 5 = 25 \text{ sm.}^2$$

2) Kui me täisnurkse sarikkolmnurga ABC võtame, siis annavad kateetide peale ehitatud ruudud kumbki kaks ja hüpotenuusi peale ehitatud ruut neli täisnurkset kolmnurka, mis isekeskis võrdsed ja võrdsed antud kolmnurgale (vaata § 14 ja 20 — sarikkolmnurgad ja ruut); sellest järgneb:

$$\triangle 1 + \triangle 2 + \triangle 3 + \triangle 4 = \triangle 1_1 + \triangle 2_1 + \triangle 3_1 + \triangle 4_1.$$



3) Tõestame, et see seadus igasuguse täisnurkse kolmnurga kohta maksev on.



Tõmbame täisnurka tipust perpendicularaarjoone AK hüpotenuusi BC peale ja pikendame seda kuni lõikpunktini L. Nüüd saame kaks täisnurkset nelinurka BFLK ja KLGC.

Tõestame, et nelinurga BFLK pind võrdub ruudu AEDB pinnale ja nelinurga KLGC pind võrdub ruudu ACJH pinnale.

Ühendame punktid D ja C ning A ja F, siis $\triangle DBC \cong \triangle ABF$, sest:

$$DB = AB,$$

$$BC = BF,$$

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABF,$$

(seisavad koos võrdsetest jagudest: $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DBA + \sphericalangle ABC$ ja $\sphericalangle ABF = \sphericalangle ABC + \sphericalangle CBF$; $\sphericalangle DBA = \sphericalangle CBF = d$ ja $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABC$).

$$\left. \begin{aligned} \text{Kolmnurga } DBC \text{ pind} &= \frac{ch}{2} = \frac{c^2}{2} \\ \text{„ ABF „} &= \frac{ah_1}{2} = \frac{ap}{2} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{sest } h = c \\ &\text{ja } h_1 = p. \end{aligned}$$

$$\text{Ruudu } EDBA \text{ pind} = c^2.$$

$$\text{Täisnurkse nelinurga BFLK pind} = ap.$$

Võrdsete kolmnurkade pinnad on pool ruudu ja pool nelinurga pinnast. On suuruste pooled võrdsed, siis peavad ka terved suurused võrdsed olema.

Sellest järgneb, et

$$\text{ruudu } EDBA \text{ pind} = \text{nelinurga BFLK pinnale.}$$

Niisama võib tõestada, et ruudu HACJ pind = nelinurga KLGK pinnale.

4) Ülemaltoodud tõestuste põhjal võime kirjutada:

$$\left. \begin{array}{l} c^2 = ap \\ b^2 = aq \end{array} \right\} \text{arvame kokku, siis saame:}$$

$$\begin{array}{l} c^2 + b^2 = ap + aq, \\ \text{ehk } a(p + q) = c^2 + b^2. \end{array}$$

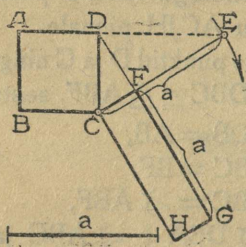
Et aga $p + q = a$, siis võime kirjutada:

$$a^2 = c^2 + b^2.$$

Siit leiame: 1) $c^2 = a^2 - b^2$
ja $b^2 = a^2 - c^2$.

2) $a = \sqrt{c^2 + b^2}$,
 $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,
 $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

Järeldus: 1) Igat ruutu võib võrdpindseks täisnurkseks nelinurgaks muuta, mille külg antud.



Antud ruut ABCD ja nelinurga külg a . Pikendame ruudu külge AD, siis mõõdame antud külje a , võtame selle raadiuseks ja joonistame punktist C kaare, mis lõikub AD pikendusega punktis E. Nüüd ühendame punktid C ja E sirgjoonega, tõmbame sellele punktist D perpendikulaarjoone ja pikendame nii, et $FG = a$.

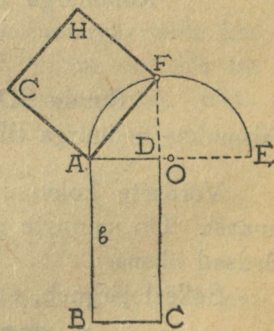
Nelinurk CHGF ja antud ruut on võrdpindsed, sest:

$\triangle DCE$ on täisnurkne kolmnurk, mille tipust D perpendikulaarjoon DF hüpotenuusi CE peale tõmmatud ja pikendatud nii, et $FG = CE$. Selle läbi tekkinud täisnurkne nelinurk ja juuresoleva kateedi CD peale ehitatud ruut on võrdpindsed. (Vaata 3. tõestus).

2) Igat täisnurkset nelinurka võib võrdpindseks ruuduks muuta.

Antud nelinurk ABCD.

Pikendame külge AD ja võtame selle peal punkt E nii, et $AE = AB$, jagame sirg-



joone AE pooleks ja tõmbame saadud keskpunktist O poolringi, mis lõikub sirgjoonega AE (AE on ringi läbimõõt ehk diameeter) punktides A ja E. Nüüd pikendame nelinurga külge CD, kuni see lõikub kaarega punktis F. Punktid A ja F ühendame joonlõiguga. Saadud joonlõigu AF peale ehitame ruudu HGAF, mis antud nelinurgale võrdpindne on.

Selle tõestusel on enne tarvis teada, et
iga nurk, mis oma tipuga ringjoonel seisab ja külgedega diameetri peale toetab, on täisnurk.

Kui me punktid F ja E sirgjoonega ühendame, siis saame nurga AFE, mis diameetri peale toetab ja mille tipp F ringjoonel seisab; see nurk on täisnurk.

Tõestus: Ühendame keskpunkti O ja punkti F sirgjoonega, siis saame:

$$\begin{array}{l} \triangle AFO \text{ on sarikkolmnurk, sest } AO = OF, \\ \triangle OFE \text{ „ „ „ „ } OF = OE, \\ \hline \text{järjelikult } \sphericalangle OFA = \sphericalangle OAF, \text{ } \left. \begin{array}{l} \text{ja} \\ \sphericalangle OFE = \sphericalangle OEF. \end{array} \right\} \text{ kui sarikkolmnurga põh-} \\ \text{ ja } \sphericalangle OFE = \sphericalangle OEF. \text{ } \left. \begin{array}{l} \text{ ja juures olevad nurgad.} \end{array} \right\} \\ \hline \text{Arvame kokku: } \sphericalangle OFA + \sphericalangle OFE = \sphericalangle OAF + \sphericalangle OEF, \\ \text{ehk: } \sphericalangle AFE = \sphericalangle OAF + \sphericalangle OEF. \end{array}$$

Et aga $\sphericalangle AFE + \sphericalangle OAF + \sphericalangle OEF = 180^\circ = 2d$, siis on $\sphericalangle AFE$ pool sellest arvust,
 ehk: $\sphericalangle AFE = 180^\circ : 2 = 90^\circ = d$.

Tõesta nüüd analoogiliselt eelmise juhusega, et ruut HGAF ja täisnurkne nelinurk ABCD on võrdpindsed.

Ülesanne: 1) Ehitada ruut, mis on võrdpindne kahe antud ruudu summale.

Juhatus: Võta antud ruutude küljed täisnurkse kolmnurga kateetideks ja saadud kolmnurga hüpotenuusi peale ehita ruut.

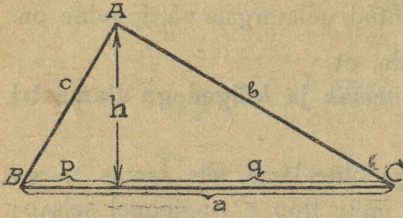
2) Ehitada ruut, mis on võrdpindne kahe antud ruudu vahele.

Juhatus: Võta antud suurema ruudu külge täisnurkse kolmnurga hüpotenuusiks, väiksema ruudu külge selle kateediks. Teise kateedi peale ehitatud ruut on võrdpindne antud ruutude vahele. (Vaata § 18 — 7. ülesanne),

§ 30.

Kõrguse teoreem.

Igas täisnurkses kolmnurgas võrdub kõrgus iseenesega kasvatatult hüpotenuusi lõikude kasvatisel.



Väide: $h^2 = qp$.

Tõestus: $b^2 = h^2 + q^2$, } eelmisest
 ehk: $b^2 = aq$ } § p. 4.

Sellest järgneb: $h^2 + q^2 = aq$, et aga $a = q + p$,
 siis $h^2 + q^2 = q(q + p)$,
 ehk $h^2 + q^2 = q^2 + qp$, siit saame:
 $h^2 = qp$.

Harjutused:

- Antud: 1) $a = 10$ ja $b = 5$ sm., leida c, p, q, h ja Pknk (pind)
 „ 2) $b = 2,5$ „ $h = 0,5$ „ „ a, c, p, q „ Pknk.
 „ 3) $h = 8$ „ $q = 5$ „ „ a, b, c, p „ Pknk.
 „ 4) $p = 3,5$ „ $q = 6,5$ „ „ a, b, c, h „ Pknk.
 „ 5) Pknk = 13 sm^2 „ $b = 4$ „ „ a, c, p, q „ h .

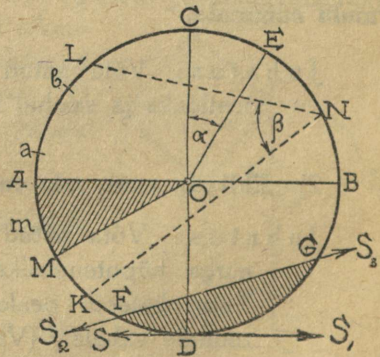
Üheksas peatükk.

Ring (sôôr).

§ 31.

Üleüldised märkused (vaata § 5).

Teeme meie sirkli harud lahti, paneme ühe haru otsa tasapinnal teatud kindlasse punkti O ja joonistame teise haru otsaga tasapinnale kõvera kinnise joone, siis nimetame seda joont **ringjooneks** (siir) ja pinda, mis piiratud ringjoonega, **ringiks** (sôôr). Punkt O on ringi **keskpunkt** ehk tsender, joonlõik OE — **raadius** ja AB ringi läbimõõt ehk **diameeter**. Igas ringis võib lõpmata palju raadiusi ja läbi-



mõõtusid tõmmata ja kõik nad on vastavalt võrdsed. Iga läbimõõt jagab ringi ja ringjoone kaheks ühesuuruseks osaks. Tõmbame ringis kaks perpendikulaar-läbimõõtu, siis jagavad need (AB ja CD) ringi ja ringjoone neljaks ühesuuruseks osaks. Igal sirgjoonel võib ringjoonega olla kas üks ühine punkt, kaks või mitte ühtegi ühist punkti. Sirgjoont, millel ringjoonega üks ühine punkt on, nimetame **riivajaks**. SS_1 on riivaja. Sirgjoont, millel ringjoonega kaks ühist punkti on, nimetame **lõikajaks**. S_2S_3 on lõikaja. Seda lõikaja osa, mis seespool ringjoont kahe lõikpunkti vahel on ja mitte läbi keskpunkti ei lähe, nimetame **sidejooneks**. FG on sidejoon. Seda osa ringjoonest, mis sidejoone, raadiuste või läbimõõtude otsade vahel, nimetame **kaareks**. $\widehat{AM} = \widehat{m}$ ja \widehat{ab} on kaared („ \frown “ on kaare märk). Nurka, mille tipp ringi keskpunktis ja külgedeks raadiused, nimetame **tsentraalnurgaks**; nurka, mille tipp ringjoone peal ja külgedeks sidejooned, nimetame **piirdenurgaks** (sissejoonistatud nurgaks); α on tsentraalnurk ja β — piirdenurk. Seda ringi osa, mis kahest küljest piiratud raadiustega ja ühest kaarega, nimetame **sektoriks** ehk **väljalõiguks**; ringi osa, mis piiratud sidejoonega ja kaarega, nimetame **segmendiks** ehk **lõiguks**. $O\widehat{AM}$ on sektor, \widehat{FG} on segment.

§ 32.

Jooned.

Esimene teoreem: Kaugus ringi keskpunktist on sidejoonel väiksem kui ringi raadius, riivajal võrdub ringi raadiusele ja sirgjoonel, millel ringjoonega ühist punkti ei ole, on suurem kui ringi raadius.

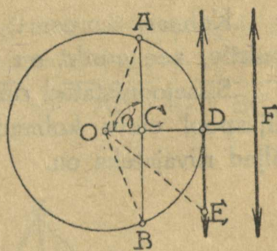
Väide: $OC < r$, $OD = r$ ja $OF > r$.

Tõestus: 1) $\gamma = d$ (sest punkti kaugust antud sirgjoonest mõõdame punktist sirgjoonele tõmmatud perpendikulaarjoonega).

Sellest järgneb: $OA > OC$, ehk $r > OC$, sest igas kolmnurgas on kõige suurema nurga vastas kõige suurem külg.

2) Iga joonlõik OE on pikem kui $OD = r$.

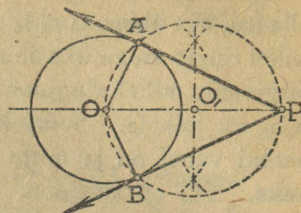
3) Kui $OD = r$, siis peab OF pikem olema kui r.



Järeldus: Iga riivaja seisab ringi raadiusele riivamise punktis perpendikulaarselt, ehk iga perpendikulaarjoon raadiusele selle lõpupunktis on ringile riivajaks.

Teine teoreem: Iga punktist, mis väljaspool ringi, võib tõmata ringile kaks riivajat, mille osad, mis antud punkti ja riivamisepunktide vahel, ühepikkused on.

Antud ring ja punkt P. Ühendame punktid O ja P joonlõiguga, jagame selle pooleks ja joonistame saadud keskpunktist O_1 raadiusega OO_1 uue ringjoone. Lõikepunktid A ja B ühendame punktiga P, siis on:



1) $\sphericalangle OAP = \sphericalangle OBP = d$ (seisavad diameetri OP peal — § 29, 2. järeldus).

Sellest järgneb: $AP \perp AO$
ja $BP \perp OB$,

järjekult — AP ja BP on riivajad.

2) Et $\triangle OAP \cong \triangle OBP$, sest

$$OA = OB$$

$$OP = OP$$

$$\sphericalangle OAP = \sphericalangle OBP$$

ühtivuse neljas juhus,

siis järgneb: $\sphericalangle APO = \sphericalangle BPO$

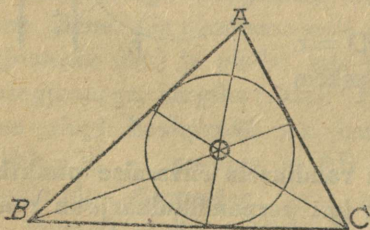
ja AP = BP.

Järeldus: 1) Ringi keskpunkti ja antud punkti vahel olev sirgjoon jagab pooleks selle nurga, mis riivajad antud punkti juures sünnitavad (on selle nurga bissektor).

2) Kui nurga küljed ringi riivavad, siis on selle nurga bissektor ringi keskpunkti geomeetriliseks kohaks.

Kolmas teoreem: Iga kolmnurga bissektorid lõikuvad ühes punktis; see punkt on sissejoonistatud ringi keskpunktiks.

Sissejoonistatud ringiks nimetame niisugust ringi, millele sellest väljaspool oleva kolmnurga või mõne muu sirgküljelise kujundi kõik küljed riivajateks on.

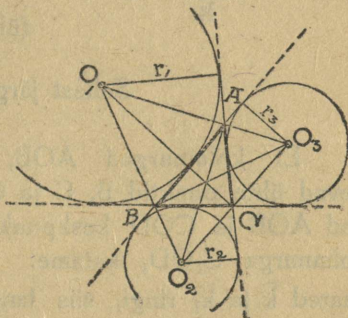


Tõestus: 1) Kolmnurga ABC küljed AB ja AC on riivajateks ringile, mille keskpunkt peab asuma $\sphericalangle BAC$ bissektori peal. Teiselt poolt on küljed CA ja CB ringile ka riivajateks, tähendab — ringi keskpunkt peab asuma $\sphericalangle ACB$ bissektori peal. Lõpuks on küljed

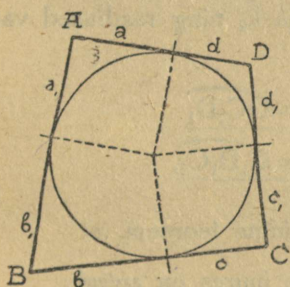
BA ja BC ringile riivajateks, tähendab — ringi keskpunkt peab asuma $\sphericalangle ABC$ bissektori peal. Kui nüüd ringi keskpunkt korruga kõige kolme bissektori peal asub, siis võib niisugune punkt ainult nende bissektorite lõikpunktis olla.

2) AO_2 on nurga BAC bissektor }
 BO_3 " " ABC " } peavad ühes punktis lõikuma.
 CO_1 " " BCA " }

Ringid O_1 , O_2 , ja O_3 , mis riivavad kolmnurga ühte külge ja kahte teise külge pikendusi, nimetame **juurejoonistatud** ringideks. Nende keskpunktid asuvad kolmnurga kahe välisnurga bissektorite lõikpunktis.



Neljas teoreem: **Igas nelinurgas, mille küljed ringile riivajateks, on vastaskülgede summad võrdsed.**



Tõestus:

$a = a_1$, kui ühest punktist tõmmatud riivajad.
 $b = b_1$, " " " " "
 $c = c_1$, " " " " "
 $d = d_1$, " " " " "

Arvame kokku:

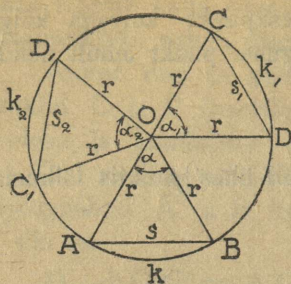
$$a + b + c + d = a_1 + b_1 + c_1 + d_1.$$

$$\text{ehk: } \underbrace{a + d}_{AD} + \underbrace{b + c}_{BC} = \underbrace{a_1 + b_1}_{AB} + \underbrace{c_1 + d_1}_{BC}.$$

§ 33.

Nurgad.

Esimene teoreem: **Ühes ringis ehk ühesuurustes ringides vastavad ühesuurustele tsentraalnurkadele ühesuurused sidejooned, kaared, sektorid ja segmendid — ja ümberpöördult.**



Oletus: $a = a_1 = a_2$ (raadiused on võrdsed).

Väide: 1) $s = s_1 = s_2$.

2) $\widehat{k} = \widehat{k}_1 = \widehat{k}_2$.

3) $\widehat{OAB} = \widehat{OCD} = \widehat{OD_1C_1}$.

4) $\widehat{ABA} = \widehat{CDC} = \widehat{C_1D_1C_1}$.

Tõestus: $\triangle AOB \cong \triangle COD \cong \triangle C_1OD_1$
(ühtivuse esimene juhus).

Sellest järgneb: 1) $s = s_1 = s_2$.

Et kolmnurgad AOB, COD ja C_1OD_1 ühtivad, siis langevad ühte punktid B, C ja C_1 ning A, D ja D_1 , kui meie kolmnurgad AOB ja COD keskpunkti O ümber ringi keerame ja nendega kolmnurga C_1OD_1 katame. Keerame meie ühes kolmnurkadega ka kaared \widehat{k} ja \widehat{k}_1 ringi, siis langevad kõik nende kaarte punktid kaare \widehat{k}_2 vastavate punktidega ühte, sest iga punkt esimesel ja teisel kaarel on keskpunktist O niisama kaugel, kui iga punkt kolmandal kaarel.

Sellest järgneb: 2) $\widehat{k} = \widehat{k}_1 = \widehat{k}_2$.

Et sidejooned s , s_1 ja s_2 , kaared \widehat{k} , \widehat{k}_1 , ja \widehat{k}_2 ning raadiused vastamisi ühte langevad, siis võrduvad:

3) sektorid $\widehat{OAB} = \widehat{OCD} = \widehat{OC_1D_1}$

ja 4) segmendid $\widehat{ABA} = \widehat{CDC} = \widehat{C_1D_1C_1}$.

Tõesta analoogiliselt katmise teel vastupidine teoreem, et

$a = a_1 = a_2$, kui võrdsete raadiuste juures on antud:

1) $s = s_1 = s_2$,

ehk 2) $\widehat{k} = \widehat{k}_1 = \widehat{k}_2$.

Märkus: Igale sidejoonele vastavad kaks kaart ja kaks tsentraalnurka: üks kaar on harilikult vähem ja teine suurem poolringist ning üks tsentraalnurk vähem ja teine suurem sirgurgast. Meie mõtleme siin ja eespool sidejoonele vastavate kaarte ja nurkade all esimesi. Näituseks: sidejoonele

AB vastavad kaared \widehat{k} ja $\widehat{BDCD_1C_1A}$ ning nurgad a ja $360^\circ - a$; meie vaatleme kaart \widehat{k} ja nurka a .

Márkused:

Markused:

1900/1901

Teine teoreem: Igas ringis on piirdenurk pool tsentraalnurgast, mis oma külgedega sellesama kaare peal asub, ehk piirdenurka mõõdetakse poole kaarega, mille peal ta seisab.

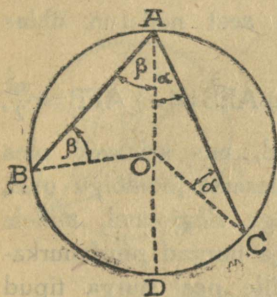
I juhus: Ringi keskpunkt on piirdenurga ühe külje peal.

Väide: $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \sphericalangle DOC$.

Tõestus: $\triangle AOC$ on sarikkolmnurk, sest $AO = OC$,

sellest järgneb: $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \alpha$ (kui sarikkolmnurga põhja juures olevad nurgad);

sellest järgneb: $\sphericalangle DOC = 2 \sphericalangle OAC = 2 \alpha$ (kui kolmnurga välisnurk ja sisemised nurgad, mis esimesele kõrvnurkadeks ei ole).



Et aga $\sphericalangle OAC = \sphericalangle DAC$,
 siis $\sphericalangle DOC = 2 \sphericalangle DAC$
 ja $\sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \sphericalangle DOC$.

II juhus: Ringi keskpunkt on piirdenurga külgede vahel.

Väide: $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC$.

Tõestus: Tõmbame diameetri AD läbi keskpunkti O, siis:

$\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA = \alpha$ (vt. eelm. tõestus),
 $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA = \beta$ (seesama tõestus).

Sellest järgneb: $\sphericalangle DOC = 2 \alpha$ (vaata eelmine tõestus),
 $\sphericalangle BOD = 2 \beta$ (seesama tõestus).

Arvame kokku: $\sphericalangle DOC + \sphericalangle BOD = 2 (\alpha + \beta)$.

Et aga $\sphericalangle DOC + \sphericalangle BOD = \sphericalangle BOC$
 ja $\alpha + \beta = \sphericalangle BAC$,
 siis $\sphericalangle BOC = 2 \sphericalangle BAC$.

Siit: $\sphericalangle BAC = \frac{1}{2} \sphericalangle BOC$.

III juhus: Ringi keskpunkt on väljaspool piirdenurka. Võtame kaare DC peal punkti E ja ühendame punktid E ja O ning E ja A, siis saame piirdenurga EAC ja tsentraalnurga EOC (joonistusel ei ole näidatud); mõlemad seisavad kaare EC peal.

Väitame nüüd, et $\sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \sphericalangle EOC$.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tõestus: } \sphericalangle DAC = \frac{1}{2} \sphericalangle DOC \\ \text{ja } \sphericalangle DAE = \frac{1}{2} \sphericalangle DOE \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{endiste tõestuste} \\ \text{põhjal.} \end{array}$$

$$\text{Arvame maha: } \sphericalangle DAC - \sphericalangle DAE = \frac{1}{2} (\sphericalangle DOC - \sphericalangle DOE).$$

$$\text{Saame: } \sphericalangle EAC = \frac{1}{2} \sphericalangle EOC.$$

Järeldus: 1) Kõik piirdeurgad, mis ühe kaare peal seisavad, on võrdsed, sest neil on ühine tsentraalnurk:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = \sphericalangle AFB = \frac{\alpha}{2}.$$

2) Kõik võrdsed nurgad, mis seisavad oma külgedega ühe ja sellesama joonlõigu peal, asuvad oma tippudega ringjoonel, millele joonlõik sidejooneks ja nurgad piirdeurka-deks. Ringjoont, mille peal nurga tipud asuvad, nimetame nende tippude **geomeet-riliseks kohaks**.

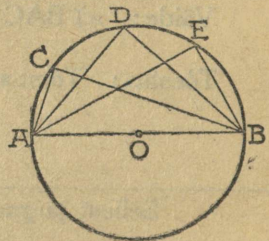
3) Kõik piirdeurgad, mis oma külgedega ringi läbimõõdul või diameetril seisavad, võrduvad täisnurgale.

Tõestus:

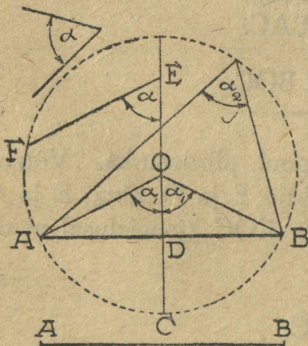
$$\sphericalangle AOB = 180^\circ = 2d,$$

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle AEB = \frac{1}{2} \sphericalangle AOB = d.$$

(Vaata § 29—2. järeldus).



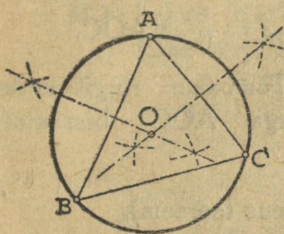
Ülesanne: Joonistada ring, millele antud joonlõik sidejooneks ja antud nurk piirdeurgaks.



Jagame antud joonlõigu AB pooleks ja tõmbame selle keskpunkti D perpendikulaarjoone üles; selle peale ehitame vabalt võetud punkti E juure antud nurga. Nüüd tõmbame punktist A paralleeljoone nurga küljele FE. Lõikpunkt O on nõutava ringi keskpunktiks ja AO selle raadiuseks, sest $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$. Kõik selles ringis olevad piirdeurgad, mis võrduvad α ja seisavad oma külgedega AB peal, asuvad oma tippudega ring-

joonel. Et nüüd $a_1 = a_1$, $AD = DB$, $AB \perp CE$ ja $\widehat{AC} = \widehat{CB}$, siis võime meeles pidada: **tsentraalnurga bissektor jagab pooleks kaare ja sidejoone, mille peal antud nurk seisab, ja on sidejoonele perpendikulaarne.**

Järeldus: 1) Antud ringi sidejoonte keskpunktidest tõmmatud perpendikulaarjooned on sidejoonte otsadest läbimineva ringi keskpunkti geomeetriliseks kohaks.



Antud on ring, mille keskpunkt tarvis üles leida. Võtame sidejooned AB ja AC ning tõmbame nende keskpunktidest perpendikulaarjooned, siis lõikuvad need punktis O, mis antud ringi keskpunktiks. Kui meie veel kolmanda sidejoone AC võtame ja selle keskpunktist perpendikulaarjoone tõmbame, siis lõikub see endistega ka punktis O. Sellest järgneb:

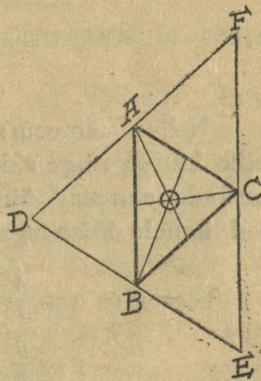
2) kolmnurga külgede keskpunktidest tõmmatud perpendikulaarjooned lõikuvad ühes punktis, mis selle kolmnurga ümberjoonistatud ringi keskpunktiks on.

Kolmnurga ümberjoonistatud ringiks nimetame niisugust ringi, millele kolmnurga küljed sidejoonteks on.

3) Kõik kolmnurga kõrgused lõikuvad ühes punktis.

Antud $\triangle ABC$. Tõmbame selle tippudest sirgjooned, mis tippude vastaskülgedele paralleelsed, siis saame uue kolmnurga DEF, mille külgede keskpunktidest tõmmatud perpendikulaarjooned ühes punktis lõikuvad ja kolmnurga ABC kõrgusteks on.

Tõestus: BDAC on parallelogramm, sest
 $DA \parallel BC$ ja $DB \parallel AC$,
 BAFC on parallelogramm, sest
 $AF \parallel BC$ ja $BA \parallel FC$.

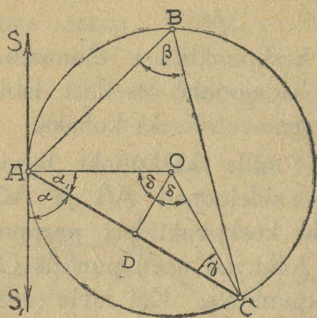


Parallelogrammi vastasküljed on võrdsed, sellest järgneb:

$DA = BC$ (esimeses parallelogrammis)
 ja $AF = BC$ (teises „).

Järgelikult — $DA = AF$ ja punkt A on kolmnurga DEF külje DE keskpunktiks.

Tõesta analoogiliselt, et punkt C külje FE ja punkt B külje ED keskpunktiks on.



Kolmas teoreem: Igas ringis on riivajast ja sidejoonest sünnitatud nurk niisama suur, kui selle nurga külgede vahel oleva kaare peal seisev piirde-nurk, ehk — pool tsentraalnurgast, mis sellesama kaare peal seisab.

Väide: $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$.

Tõestus: Tõmbame ringi kesk-punktist O nurga AOC bissektori OD, siis:

$$\frac{1}{2} \sphericalangle AOC = \delta = \beta \text{ (vaata esimene teoreem),}$$

$$\left. \begin{array}{l} OD \perp AC \\ \sphericalangle ADO = \delta \end{array} \right\} \triangle AOC \text{ on sarikkolmnurk.}$$

Siit: $\alpha_1 + \delta = d$

Et aga $\alpha_1 + \alpha = d$ (sest $SS_1 \perp AO$ — § 32),

siis $\alpha_1 + \delta = \alpha_1 + \alpha$

ja $\delta = \alpha$.

Nüüd teame, et $\delta = \beta = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$

ja $\delta = \alpha$,

siis: $\alpha = \beta = \frac{1}{2} \sphericalangle AOC$.

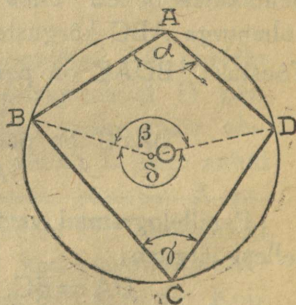
Neljas teoreem: Igas nelinurgas, mille küljed ringi sidejoonteks, on vastas-nurkade summad ühesuurused ja võrduvad kahele täisnurgale.

Tõestus: $\left. \begin{array}{l} \alpha = \frac{\delta}{2} \\ \gamma = \frac{\beta}{2} \end{array} \right\} \text{ kui piirdenurgad.}$

Arvame kokku:

$$\alpha + \gamma = \frac{1}{2} (\delta + \beta) = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ = \underline{2d}.$$

Tõesta ise, et $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ = \underline{2d}$.

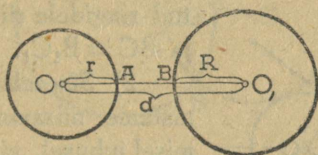


Kahe ringi vastastikune vahekord.

Kahel ringil ei ole ühist punkti. (Ringid ei löika ega riiva teineteist.) Kui kahel ringil ühist punkti ei ole, siis seisab üks neist täielikult väljaspool teist, ehk väiksem ring seisab täielikult suurema ringi sees. Nende ringide keskpunktide joon (d) on esimesel juhul suurem kui mõlemate ringide raadiuste summa, teisel juhul väiksem kui nende raadiuste vahe.

Märkus: Keskpunktide jooneks nimetame seda joonlõiku, mis kahe ringi keskpunkte ühendab.

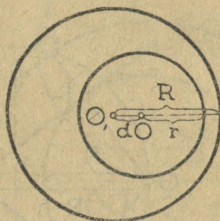
I juhus.



$$OA = r; O_1B = R$$

$$d = OO_1 > R + r.$$

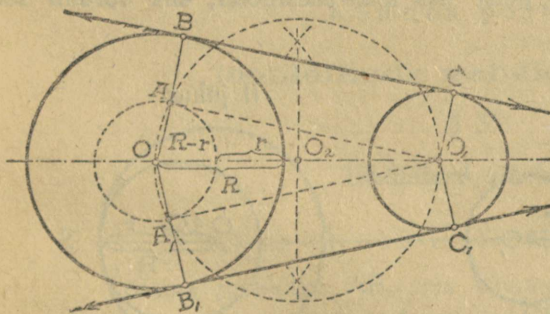
I juhus.



$$d = O_1O < R - r.$$

Märkus: Langevad ringide keskpunktid O ja O₁ ühte, siis nimetame niisuguseid ringisid ühiskeskseteks (ühistsentris-tek) ringideks.

Ülesanne: Kahele antud ringile ühised sisemised ja välised riivajad joonistada.



1) Välised: Antud ringid O ja O₁, nende raadiused on R ja r. Ühendame O ja O₁ joonlõiguga ja joonistame selle keskpunktist O₂ abiringi, mille raadius = O₂O = O₂O₁. Nüüd võtame antud ringide raadiuste vahe ja joonistame keskpunktist O ühiskeskse ringi, mis lõikub abiringiga punktides A ja A₁. Ühendame punktid O ja A ning O ja A₁ ja pikendame neid ühendajaid kuni uute lõikpunktideni B ja

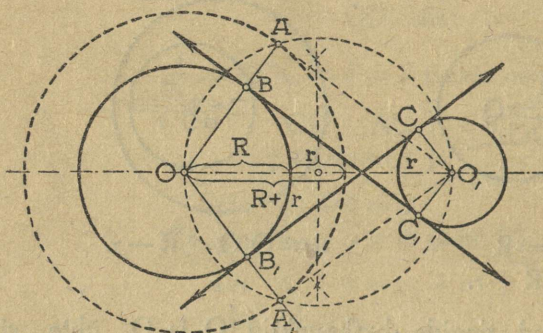
B_1 . Nüüd tõmbame punktist O_1 joonlõigud O_1C ja O_1C_1 , mis joonlõikudele OB ja OB_1 vastavalt paralleelsed. Ühendame nüüd punktid B ja C ning B_1 ja C_1 , siis on need joonlõigud BC ja B_1C_1 antud ringidele riivajad.

$$\text{Tõestus: } \left. \begin{array}{l} AB = O_1C = r, \\ AB \parallel O_1C, \\ AO_1 \parallel BC, \end{array} \right\} \text{joonistasime nii.}$$

Siis on $ABCO$ täisnurkne nelinurk, sest $\sphericalangle OAO_1 = d$ (ringi O_2 piirdenurk ja seisab diameetri OO_1 peal) ja $\sphericalangle OAO_1 = \sphericalangle ABC = \sphericalangle BCO_1 = d$.

Et BC raadiuste OB ja O_1C lõpupunktides ja neile perpendikulaarselt seisab, siis peab ta antud ringidele riivajaks olema (vt. § 33).

Tõesta, et B_1C_1 antud ringidele riivajaks on ja $BC = B_1C_1$.

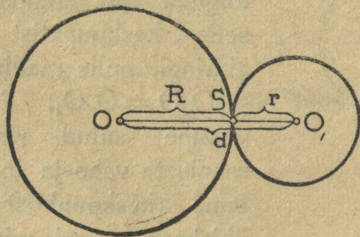


2) **Sisemised.** Joonistame niisama kui eelmisel juhusel, ainult selle vahega, et ühiskeskse ringi jaoks antud ringide raadiuste summa $(R + r)$ võtame ja O_1C paralleelselt OA_1 -le ja O_1C_1 paralleelselt OA -le tõmbame.

Tõestus on seesama, mis väliste riivajate juures.

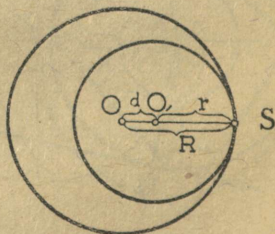
II. Kahel ringil on ühine punkt (riivajad ringid). Riivavad ringid teineteist väljastpoolt, siis võrdub nende keskpunktide joon (d) raadiuste summale; riivab neist üks teist seestpoolt, siis võrdub see raadiuste vahele.

I juhus.



$$OO_1 = R + r = d.$$

II juhus.



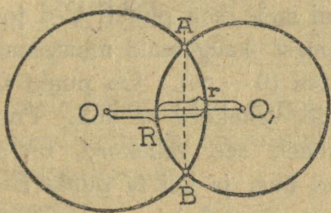
$$OO_1 = R - r = d.$$

$$OS = R \text{ ja } O_1S = r.$$

- Märkus: 1) Et väljastpoolt riivajatele ringidele ühiseid riivajaid joonistada, toimetame niisama, kui esimesel juhusel.
- 2) Seestpoolt riivajatel ringidel on üks ühine riivaja.
- 3) Riivamisepunkt seisab keskpunktide joonel.

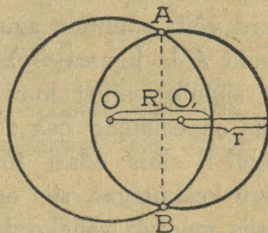
III. **Kaks ringi lõikuvad.** Kui kaks ringi lõikuvad, siis on neil kaks ühist punkti. Niisuguste ringide keskpunktide joon (d) on väiksem kui raadiuste summa ja suurem kui nende vahe. Ühe ringi keskpunkt võib väljaspool ehk seespool teist ringi olla.

I juhus.



$$\begin{aligned} OO_1 &< R + r. \\ OO_1 &> R - r. \end{aligned}$$

II juhus.



$$\begin{aligned} OO_1 &< R + r. \\ OO_1 &> R - r. \end{aligned}$$

Teoreem: Kahe lõikuva ringi ühise sidejoone jaotab keskpunktide joon pooleks ja on sellele perpendikulaarne.

Tõestada võib seda sarikkolmnurga teoreemi abil. Tee seda ise.

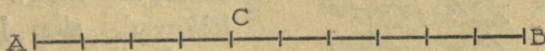
Märkus: Lõikuvatele ringidele võib ühiseid väliseid riivajaid joonistada, sisemisi mitte.

Kümnnes peatükk.

Joonlõikude vahekord (suhe).

§ 35.

Üleüldised märkused.



Võtame joonlõigu AB, mis kümme sentimeetrit pikk, ja jagame selle kahte osasse: $AC = 4$ sm. ja $CB = 6$ sm., siis on joonlõigu osa AC teise osaga CB niisuguses vahekorras, kui neli kuuega, ehk joonlõik AC on nii mitu korda joonlõigust CB väiksem, kui mitu korda on neli kuuest väiksem. (AC suhtub CB-le nii, kui neli kuuele).

Suuruste vahekorra seaduse järele võime kirjutada:

1. $AC:CB = 4:6$.
2. $AC:CB = 2:3$.
3. $\frac{(AC + CB):AC = (4 + 6):4}{AB : AC = 10 : 4}$.
4. $\frac{(AC + CB):CB = (4 + 6):6}{AB : CB = 10:6 \text{ jne.}}$

Iga teatud kindel punkt joonlõigul jagab joonlõigu osadesse, mille vahekord teatud kindel suurus on. Nii määrab joonlõigul AB võetud punkt C joonlõigu osade AC ja AB vahekorra kindlaks. See vahekord võib muutuda ainult siis, kui meie oma punkti C-d joonlõigul kas punkt A-le ligemale ehk seda temast kaugemale nihutame. Muutumine sünnib nullist kuni lõpmatuseni ($0 - \infty$). On punkt C punkt A-s, siis on esimene osa null ja osade vahekord ka null. Punkt C-d joonlõigul B sihis edasi tõstes suureneb see vahekord, on punkt C joonlõigu keskaigas, siis on vahekord üks, ja kui ta punkt B-sse tõstame, siis muutub vahekord ∞ (lõpmata suureks).

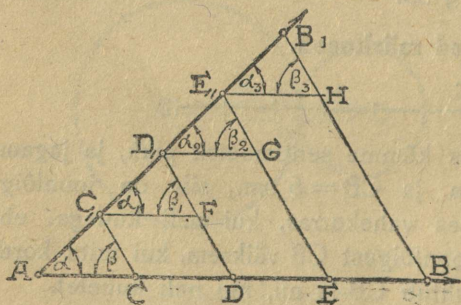
Niisama vastab ka joonlõigu osade teatud kindlale vahekorrale ainult üks teatud kindel punkt. On joonlõigu osade vahekord antud ($AC:CB$), siis on sellega ka punkt C koht joonlõigul kindlaks määratud. Kui meie joonlõigul AB kaks punkti võtame, näituseks C ja D, ja kui neist sünnitatud joonlõigu osade vahekord $AC:CB$ ja $AD:DB$ võrdsed on, siis langevad punktid C ja D ühte. On meil neli joonlõigu osa a, b, c, d ja on nende osade vahekorrad paarikaupa võrdsed — $a:b = c:d$, siis nimetame niisugust kahe vahekorra võrdust **proportsiooniks**.

§ 36.

Nurga külgede vahekord.

Esimene teoreem: Kui meie nurga ühe külje peal ühepikkused

osad võtame ja neist jagamise-punktidest paralleeljooned tõmbame, mis nurga teise küljega lõikuvad, siis jagavad need paralleeljooned ka nurga teise külje niisama mitmeks osaks, mis isekeskis ühepikkused.



Antud nurk α . Võtame selle küljel AB neli ühesuurust osa: $AC = CD = DE = EB$,

ühendame punkt B teisel küljel võetud punkt B_1 -ga ja tõmbame punktidest C, D ja E paralleeljooned joonlõigule BB_1 , siis $AC_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1B_1$.

Tõestus: Selleks tõmbame punktidest C_1 , D_1 ja E_1 paralleeljooned: $C_1F \parallel CD$, $D_1G \parallel DE$ ja $E_1H \parallel EB$. Nüüd saame: $\triangle AC_1C \cong \triangle C_1FD_1 \cong \triangle D_1GE_1 \cong \triangle E_1HB_1$,

sest: $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$ (kui vastavad nurgad),

$\beta = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$ (kui vastastikku paralleelkülgedega nurgad).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Et } AC = CD = C_1F \\ CD = DE = D_1G \\ DE = EB = E_1H \end{array} \right\} \text{ siis } AC = C_1F = D_1G = E_1H.$$

Sellest järeneb: $AC_1 = C_1D_1 = D_1E_1 = E_1B_1$.

Kui meie nüüd antud nurga ühe külje mõned osad ehk nende osade summad võtame, siis võrdub nende vahekord teise külje vastavate osade vahekorrale.

Näituseks:

$$AD : DB = 1,$$

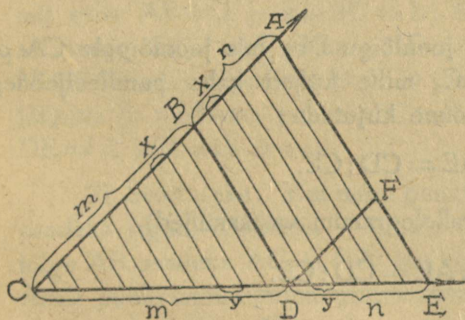
$$AD_1 : D_1B_1 = 1.$$

Kahe vahekorra võrdus annab aga proportsiooni, sellepärast võime kirjutada:

$$AD : DB = AD_1 : D_1B_1.$$

Sellest järeneb teine teoreem.

Teine teoreem: Kui nurga küljed paralleeljoontega lõikuvad, siis on ühel küljel saadud joonlõigud teineteisega niisamasuguses vahekorras, kui teisel küljel saadud joonlõigud, ja lõikpunktide vahel olevad paralleeljoonte osad on teineteisega niisamasuguses vahekorras, kui nende juure kuuluvad nurga küljed lõikpunktidest kuni nurga tipuni arvates.



Oletus: $AE \parallel BD$.

Väide: 1) $CB : BA = CD : DE$

$CB : CA = CD : CE$

$CA : BA = CE : DE$.

2) $BD : AE = CD : CE = CB : CA$.

Tõestus: 1) Jagame nurga külje CA ühesuurusteks osadeks ja nii, et punkt B üheks niisuguseks jagamispunktiks jääb. See on kas täiesti võimalik ehk sünnib lõpmata väikse veaga siis, kui meie külje CA lõpmata väikesteks osadeks jagame. Ütleme, et iga niisugune osakene on x . Tõmbame nüüd neist jagamispunktidest paralleeljooned, mis nurga teise küljega lõikuvad, siis jagavad need paralleeljooned eelmise tõestuse järele ka nurga teise külje niisama mitmeks isekeskis ühesuuruseks osakeseks. Ütleme, et iga niisugune osakene on y . Kõiki osakesi joonlõikudes CB ja CD on m , joonlõikudes AB ja DE on n . Nüüd võime § 35 põhjal kirjutada :

$$CB : BA = mx : nx = m : n \text{ (teise vahekorra koondasime } x\text{-ga).}$$

$$CD : DE = my : ny = m : n \text{ (" " " " y-ga).}$$

$$\text{Siit järgneb — } \underline{CB : BA = CD : DE.}$$

Arvame saadud proportsioonis esimesed liikmed kokku, siis saame :

$$\begin{aligned} \underline{(CB + BA) : CB} &= \underline{(CD + DE) : CD}, \\ \text{ehk } CA : CB &= CE : CD. \end{aligned}$$

Siit saame :

$$\underline{CB : CA = CD : CE.}$$

Niisama võime kirjutada :

$$\begin{aligned} \underline{[CB + BA] : BA} &= \underline{(CD + DE) : DE}, \\ \text{ehk } CA : BA &= CE : DE. \end{aligned}$$

2) Tõmbame punktist D joonlõigu DF, mis joonlõigule CA paralleelne, ja vaatleme nurka AEC, mille küljed kahe paralleeljoonega (DF ja CA) lõikuvad. Nüüd võime kirjutada :

$$AF : AE = CD : CE.$$

Et aga $AF = BD$ (kui parallelogrammi vastasküljed),

$$\text{siis } \underline{BD : AE = CD : CE.}$$

Tõesta ise, et $BD : AE = CB : CA$.

Vastupidine väide: **Lõikuvad nurga küljed kahe sirgjoonega nii, et küljelõigud teineteisega proportsionaalsed on, siis on sirgjooned paralleelsed.**

Tõestus: Antud, et $CB : BA = CD : DE = m : n$.

Oletame nüüd, et BD ei ole paralleelne AE-le, siis võime läbi punkt B paralleeljoone AE-le tõmmata, mis nurga küljega CE punktis D₁ lõikub. Päripidise tõestuse põhjal saame siis:

$$CB : BA = CD_1 : D_1E.$$

Saadud proportsiooni antud proportsiooniga võrreldes leiame, et

$$CD : DE = CD_1 : D_1E.$$

See on aga ainult siis võimalik, kui punktid D ja D₁ ühte langevad (§ 35). Järjeklikult — BD on paralleelne AE-le.

Märkus: Proportsionaalsuse seadus maksab ka siis, kui paralleeljooned nurga külgede ja nende pikenduste vahele on tõmmatud.

Ka siin võime kirjutada:

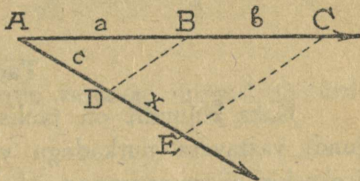
$$\begin{aligned} BC : CD &= AC : CE, \\ AB : DE &= CB : CD \text{ j. n. e.} \end{aligned}$$

Ülesanded: 1) Kolmele antud joonlõigule leida neljas proportsionaalne.

Antud:

$$a : b = c : x \text{ (leida } x \text{).}$$

Vabalt võetud nurga ühel küljel AC võtame nurga tipust A välja minnes esite AB = a ja siis BC = b; teisel nurga küljel AE võtame AD = c. Nüüd ühendame punktid B ja D joonlõiguga ja tõmbame punktist C sellele paralleeljoone CE. Siis saame DE = x, sest a : b = c : x.

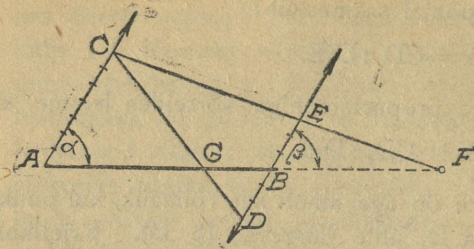


2) Seletuseks: Kui mõni punkt antud joonlõigu peal asub ja selle osadeks jagab, näituseks — punkt G jagab järgmises ülesandes joonlõigu AB osadeks AG ja GB, siis nimetame seda **seestpoolt** jagamiseks. Asub punkt antud joonlõigu pikenduse peal, siis nimetame seda **väljastpoolt** jagamiseks. Näituseks — punkt F asub joonlõigu AB pikenduse peal ja jagab selle osadeks AF ja BF. Kokku nimetame seda kahekordset jagamist **harmooniliseks** jagamiseks, punkte A ja B, G ja F — harmoonilisteks punktideks.

Ülesanne: Antud joonlõik seest- ja väljastpoolt antud vahekorras kaheks jagada.

Antud joonlõik AB kaheks jagada, nii et

$$x:y = 7:3.$$



Punktidest A ja B tõmbame vabalt võetud kallakul paralleeljooned. Esimeselt joonelt võtame punktist A välja minnes seitse ühepikkust osa, saame joonlõigu AC; teiselt võtame punktist B välja minnes mõlemale poole kolm ühe-

pikkust osa, saame joonlõigu ED. Nüüd ühendame punktid C ja D ning C ja E ja pikendame viimast ühendajat joont kuni punkt F-ni (joonlõigu AB pikendusel), siis saame:

$$AG:GB = AC:BD = x:y,$$

$$AF:BF = AC:BE = x:y,$$

$$\text{ehk: } AG:GB = AF:BF = x:y.$$

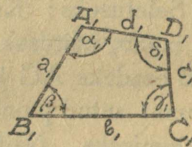
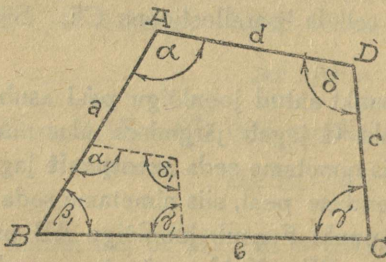
Üksteistkümmes peatükk.

Kujundite taolus.

§ 37.

Taoluse tunnused.

Kaks kujundit on taolised, kui 1) ühe kujundi nurgad teise kujundi vastavate nurkadega võrdsed on ja 2) kui ühe kujundi küljed iseikeskis niisamasuguses vahekorras on kui teise kujundi küljed ise-



keskis, ehk kui ühe kujundi küljed teise kujundi külgedega vastavalt proportsionaalsed on.

$$\text{Kui: } 1) \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1, \delta = \delta_1$$

$$\text{ja } a:b:c:d = a_1:b_1:c_1:d_1$$

$$\text{ehk: } 2) \ a = a_1, \ \beta = \beta_1, \ \gamma = \gamma_1, \ \delta = \delta_1$$

$$\text{ja } a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = d : d_1,$$

siis võime tõestada, et $ABCD \sim A_1B_1C_1D_1$.

Märkus: „ \sim “ on kujundite taoluse märk.

§ 38.

Kolmnurkade taolus.

Abiteoreem: Kui meie kolmnurgas ühele küljele paralleeljoone tõmbame, siis on selle läbi tekkinud uus kolmnurk endise taoline.

Oletus: $DE \parallel BC$.

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle ADE$.

Tõestus:

- $$1) \ \left. \begin{array}{l} \sphericalangle ABC = \sphericalangle ADE \\ \sphericalangle ACB = \sphericalangle AED \end{array} \right\} \text{ kui vastavad} \\ \text{ nurgad,} \\ \sphericalangle BAC \text{ on neil ühine nurk.}$$

- 2) Proportsionaalsuse seaduse põhjal võime kirjutada:

$$BC : DE = a : a_1,$$

$$BC : DE = c : e,$$

$$BC : DE = b : d.$$

Siit saame: $a : a_1 = c : e = b : d$.

Järgelikult — $\triangle ABC \sim \triangle ADE$, sest nende vastavad nurgad on võrdsed ja küljed vastavalt proportsionaalsed.

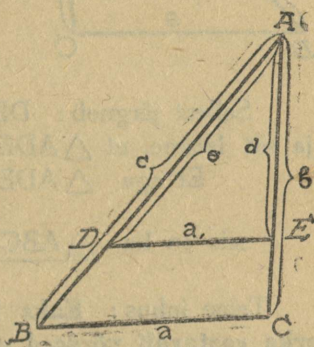
Nimetame seda seisukorda, kui ühe kolmnurga üks nurk teise kolmnurga vastavat nurka täielikult katab, ja kui nende nurkade vastasküljed paralleelsed on, kolmnurkade **taolusseisukorraks**. Meie kolmnurgad ADE ja ABC on taolusseisukorras ja taolised; sellest võime järeldada ja meeles pidada:

1) kolmnurgad, mida taolusseisukorda võib seada, on taolised — ja ümberpöördult —

2) taolisi kolmnurki võib taolusseisukorda seada.

Viimast väidet tõesta ise, abiks võttes taoliste kolmnurkade võrdsed nurki.

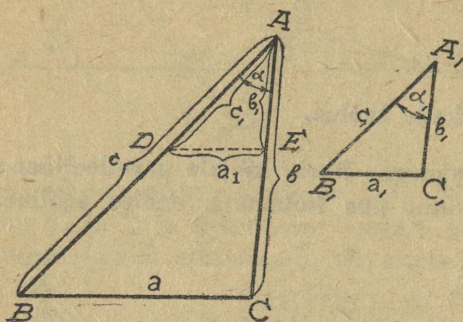
Esimene juhus: Kaks kolmnurka on taolised, kui nende kaks vastavat külge proportsionaalsed ja nende külgede vahel olevad nurgad võrdsed on.



Oletus: $c : c_1 = b : b_1$ ja $\alpha = \alpha_1$.

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Tõstame $\triangle A_1B_1C_1$ $\triangle ABC$ peale nii, et punktid A_1 ja A ühte langevad, külj A_1B_1 külje AB peale jääb, ja punkt B_1 punkti D -sse langeb; siis langeb ka külj A_1C_1 küljega AC ühte, sest $a = a_1$, ja punkt C_1 jääb punkt E -sse.



Nüüd ühendame punktid D ja E joonlõiguga.

Et $c = AB$ ja $c_1 = AD$,

$b = AC$ ja $b_1 = AE$,

siis:

$AB : AD = AC : AE$ (ole-
tuse põhjal).

Sellest järgneb: $DE \parallel BC$ (§ 36 — vastupidine väide),

ja siit leiame, et $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (abiteoreemi põhjal).

Et aga $\triangle ADE \sim \triangle A_1B_1C_1$ (kolmnurkade ühtivuse esimese
juhuse põhjal),

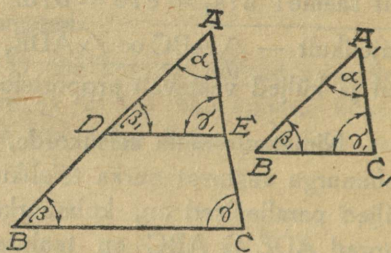
siis on ka $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Teine juhus: Kaks kolmnurka on taolised, kui nende kaks nurka vastavalt võrdsed on.

Oletus: $a = a_1$ ja $\beta = \beta_1$ (ka $\gamma = \gamma_1$)

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Tõstame $\triangle A_1B_1C_1$ kolmnurga ABC peale nii, et langevad ühte nurkade tipud A_1 ja A ning külj A_1B_1 küljega AB kuni punkti D -ni. Sinna ehitame nurga β_1 ja tõmbame joonlõigu DE . Külj A_1C_1 langeb külje AC -ga ühte (sest $a_1 = a$) ja lõikub kolmnurkade ühtivuse teise juhuse põhjal külje DE -ga punktis E .



Nüüd teame, et vastavad nurgad β_1 ja β on võrdsed, sellest järgneb paralleeljoonte vastupidise väite põhjal:

$DE \parallel BC$,

ja sellest järgneb:

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (abiteoreemi põhjal).

Et aga $\triangle ADE \sim \triangle A_1B_1C_1$,

siis on ka $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Märkused:

1000000000

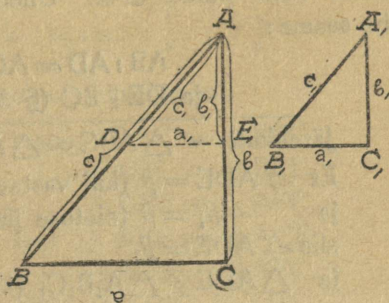
Märkused:

Kolmas juhus: Kaks kolmnurka on taolised, kui kõik nende vastavad küljed proportsionaalsed on.

Oletus: $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1$.

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Paneme kolmnurga $A_1B_1C_1$ külje c_1 nurga tipust A külje AB peale ja oletame, et see ulatab kuni punkt D -ni. Niisama paneme külje b_1 nurga tipust A külje AC peale ja oletame, et see ulatab kuni punkt E -ni. Nüüd ühendame punktid D ja E .



Et $c = AB$ ja $c_1 = AD$,

$b = AC$ „ $b_1 = AE$,

siis on $AB : AD = AC : AE$ (oletuse põhjal).

Sellest järgneb, et $DE \parallel BC$ (§ 36 — vastupidine väide)

ja „ „ „ „ $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ (abiteoreemi põhjal).

Siit näeme, et $a : DE = c : c_1$,

oletusest, et $a : a_1 = c : c_1$,

järelikult — $DE = a_1$.

Nüüd teame, et

$DE = a_1$ (leidsime praegu),

$AD = c_1$

$AE = b_1$ } ehitasime nii,

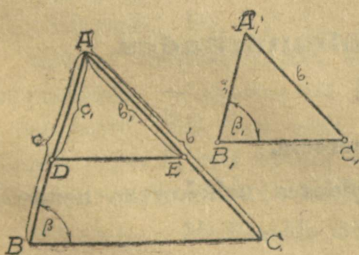
järelikult — $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$ (kolmnurkade ühtivuse kolmanda juhuse põhjal).

Kui nüüd:

$\triangle ABC \sim \triangle ADE$

ja $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$,

siis $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.



Neljas juhus: Kaks kolmnurka on taolised, kui nende kaks külge vastavalt proportsionaalsed on ja kui antud suuremate külgede vastasnurkad võrduvad.

Oletus: $\begin{cases} b : b_1 = c : c_1 \text{ ja } \beta = \beta_1 \\ b > c \text{ ja } b_1 > c_1. \end{cases}$

Väide: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Tõestus: Paneme kolmnurga $A_1B_1C_1$ külje c_1 nurga tipust A külje AB peale ja oletame, et see ulatab kuni punkt D-ni. Niisama paneme külje b_1 nurga tipust A külje AC peale ja oletame, et see ulatab kuni punkt E-ni. Ühendame punktid D ja E joonlõiguga, siis saame:

$$AB:AD = AC:AE \text{ (oletuse põhjal)}$$

$$\text{ja } DE \parallel BC \text{ (§ 36 — vastupidine väide).}$$

Järelikult — $\triangle ABC \infty \triangle ADE$ (abiteoreemi põhjal).

Et $\sphericalangle ADE = \beta$ (kui vastavad nurgad)

ja $\beta_1 = \beta$ (oletuse järele),

siis $\sphericalangle ADE = \beta_1$

ja $\triangle ADE \cong \triangle A_1B_1C_1$ (kolmnurkade ühtivuse neljanda juhuse põhjal).

Siit: $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$.

§ 39.

Taoliste kolmnurkade pinnad.

Teoreem: Taoliste kolmnurkade pinnad on niisuguses vahekorras, kui vastavate külgede ruudud (teine aste).

Tõestus: Võtame viimase juhuse. Kolmnurgad ABC ja $A_1B_1C_1$ on taolised, BC ja B_1C_1 , c ja c_1 , b ja b_1 paarikaupa nende vastavad küljed. Oletame, et BC ja B_1C_1 on nende põhjad ja tõmbame kõrgused AD ja A_1D_1 , siis on $\triangle ADB \infty \triangle A_1D_1B_1$ (Miks?).

Siit leiame:

$$AD:A_1D_1 = c:c_1,$$

$$BC:B_1C_1 = c:c_1 \text{ (endise tõestuse põhjal).}$$

Järelikult — $\underbrace{\left(\frac{1}{2} AD \cdot BC\right)}_{\text{Pknk}} : \underbrace{\left(\frac{1}{2} A_1D_1 \cdot B_1C_1\right)}_{\text{Pknk}} = c^2:c_1^2$ (kasvatasime paari-
kaupa ja jagasime
= $c^2:c_1^2$ esimese vahekorra liikmed kahele).

Kaksteistkümmes peatükk.

Proportsioonid kolmnurkaes.

§ 40.

Kõrguste teoreem.

Kolmnurga kõrgused on vastupidiseses vahekorras nende külgedega, mille peale nad langevad.

Oletus: $\begin{cases} AD \perp BC, BE \perp AC \text{ ja } CF \perp AB. \\ BC = a, AB = c \text{ ja } AC = b. \\ AD = h_1, BE = h_2 \text{ ja } CF = h_3. \end{cases}$

Väide: $\begin{cases} h_1 : h_2 = b : a \\ h_2 : h_3 = c : b \end{cases}$ ehk $h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Tõestus: $\triangle ADC \sim \triangle BEC$ (taoluse teine juhus),

sest $\sphericalangle DAC = \sphericalangle ECB$
 ja $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BEC$.
 $\triangle ABE \sim \triangle AFC$,
 sest $\sphericalangle ABE = \sphericalangle AFC$
 ja $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACF$.

Esimestest kolmnurkadest leiame:

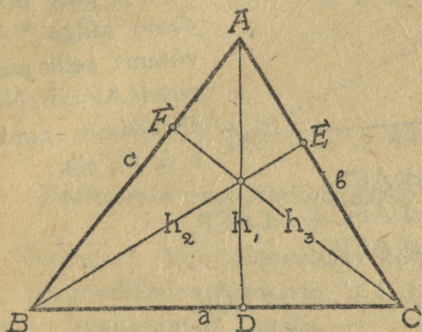
$$h_1 : h_2 = b : a = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}.$$

Teistest kolmnurkadest leiame:

$$h_2 : h_3 = c : b = \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

Järgelikult:

$$h_1 : h_2 : h_3 = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$



§ 41.

Mediaanide teoreem.

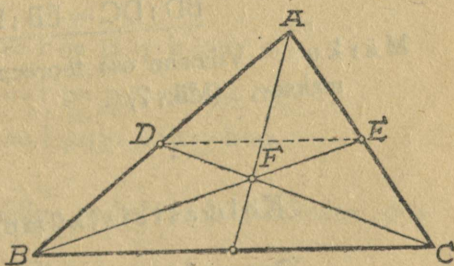
Iga kolmnurga mediaanid lõikuvad teineteisega osadeks, mis niisuguses vahekorras on kui kaks ühega.

Tõestus: Tõmbame mediaanid BE ja CD, mis punkt F-us lõikuvad. Ühendame punktid D ja E, siis on DE paralleelne BC-le ja pool BC pikkusest (§ 21–2 järeldus).

Siit leiame (§ 36 teise teoreemi märkus), et $BF : FE = CF : FD = BC : DE = 2 : 1$.

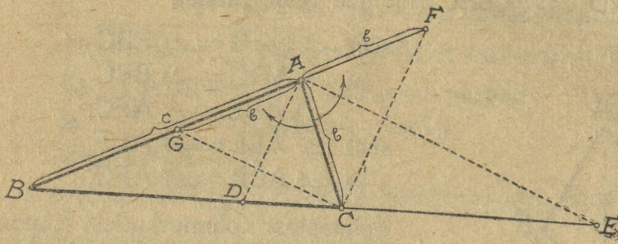
Kolmas mediaan ja BE lõikuvad teineteisega ka osadeks, mis niisamasuguses vahekorras on kui kaks ühega. Tõestus on analoogiline eelmisele. BE peal võib aga ainult üks niisugune punkt olla ja nimelt punkt F, mis sarnast vahekorda lubab sünnitada, tähendab — ka kolmas mediaan läheb läbi F.

Märkus: Mediaanide lõikpunkt on kolmnurga tasakaalu punktiks.



Bissektorite teoreem. (Harmooniline jagamine).

Kolmnurga iga sisemise nurga bissektor jagab selle nurga vastaskülje seespoolt, välisnurga bissektor väljaspoolt osadeks, mis kolmnurga teiste külgedega proportsionaalsed on,



Tõestus: 1) Tõmbame bissektorid AD ja AE, pikendame külge BA ja võtame selle pikenduselt $AF = b$. Nüüd ühendame punktid F ja C, siis:

$$\begin{aligned} \angle DAC &= \angle ACF, \\ \text{sest } \angle BAC &= \angle AFC + \angle ACF, \\ \angle AFC &= \angle ACF \\ \text{ja } \frac{1}{2} \angle BAC &= \angle DAC = \angle ACF. \end{aligned}$$

Siit järgneb, et $AD \parallel FC$
ja $BD : DC = BA : AF$,
ehk $BD : DC = c : b$.

2) Võtame kolmnurga küljelt AB eneselt $AG = b$, siis on:

$$\begin{aligned} GC &\parallel AE \\ \text{ja } EB : EC &= c : b. \end{aligned}$$

Ehk võrdsete vahekorra reana saame:

$$BD : DC = EB : EC = c : b.$$

Märkus: Viimane osa teoreemist ei ole sarikkolmnurga kohta maksev. (Miks?)

Kolmasteistkümmes peatükk.

Proportsionaalne keskmine.

§ 43.

Mõiste äramääramine.

On meil proportsioon, mille sisemisteks ehk välimisteks liigeteks üks ja seesama arv on, siis nimetame seda arvu teiste arvude keskmiks.

seks proportsionaalseks ehk geomeetriliseks keskmiseks. On meil proportsioon $a:x = x:b$, siis on x proportsionaalne keskmine a ja b vahel ja võrdub:

$$x = \sqrt{ab}.$$

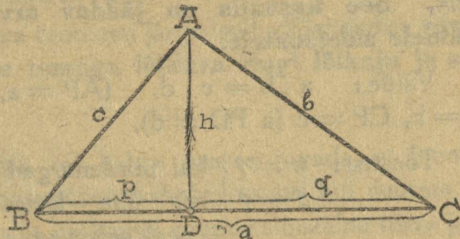
Geomeetriline keskmine a , b ja c vahel on $\sqrt[3]{abc}$.

„ „ „ a , b , c , d ja e vahel on $\sqrt[5]{abcde}$ jne.

§ 44.

Keskmiised proportsionaalsed täisnurkses kolmnurgas.

Teoreem: Kui täisnurkses kolmnurgas tõmmata täisnurga tipust perpendikulaarjoon või kõrgus hüpotenuusi peale, siis on iga kateet keskmine proportsionaalne tema juures oleva hüpotenuusi lõike ja terve hüpotenuusi vahel; kõrgus on keskmine proportsionaalne kahe hüpotenuusi lõike vahel.



Pythagorase teoreemist teame,

et:

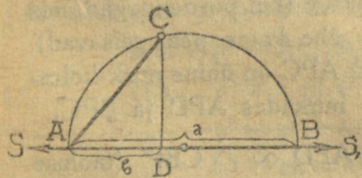
$$b^2 = qa; \text{ siit saame: } b = \sqrt{qa} \text{ ja } q:b = b:a.$$

$$c^2 = pa \text{ „ „ } c = \sqrt{pa} \text{ ja } p:c = c:a.$$

$$h^2 = pq \text{ „ „ } h = \sqrt{pq} \text{ ja } p:h = h:q.$$

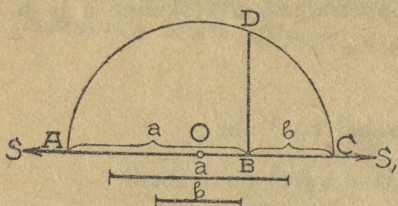
Ülesanne: Kahe antud joonlõigu vahel leida keskmine proportsionaalne.

Antud a ja b.



1) Sirgjoonel SS_1 võtame esiteks $AB = a$ ja siis $AD = b$. Nüüd võtame a diameetriks ja joonistame selle peale poolringi; punktist D tõmbame joonlõigule AB perpendikulaarjoone ja pikendame seda kuni lõikpunktini C, nüüd ühendame punktid A ja C. Saadud joonlõik AC on antud joonlõikude a ja b vahel keskmine proportsionaalne.

- 2) Sirgjoonel SS_1 võtame $AB = a$ ja $BC = b$. Saadud joonlõigu AC peale joonistame poolringi ja tõmbame punktist B perpendikulaarjoone kuni lõikpunktini D . Saadud joonlõik BD on antud joonlõikude a ja b vahel keskmine proportsionaalne.



Tõesta ise, et mõlemad ülesanded on õieti lahendatud.

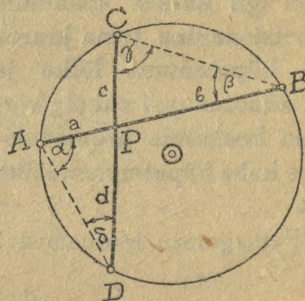
§ 45.

Sidejoonte, lõikajate ja riivajate teoreemid.

- 1) Sidejoonte teoreem: Kui ringi sidejooned lõikuvad, siis võrdub ühe sidejoone lõikude kasvatis teise sidejoone lõikude kasvatisse. See kasvatis on jäädav arv kõikidele sidejoontele.

Väide: $a \cdot b = c \cdot d$. ($AP = a$, $PB = b$, $CP = c$ ja $PD = d$).

Tõestus: $\alpha = \gamma$ } kui piirdeurgad,
 $\beta = \delta$ } mis ühe kaare peal seisavad.



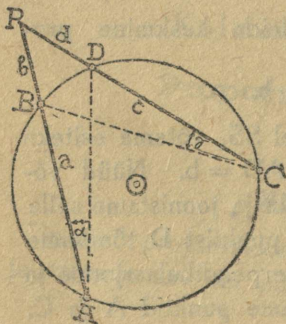
Järjekult on $\triangle APD \sim \triangle CPB$ (taoluse teine juhust).

Sellest järgneb — $a : d = c : b$,
 ehk $a \cdot b = c \cdot d$.

- 2) Lõikajate teoreem: Ühes punktis lõikuvate lõikajate ja nende väliste osade kasvatised on võrdsed.

Väide: $AP \cdot b = CP \cdot d$ ($BP = b$ ja $DP = d$).

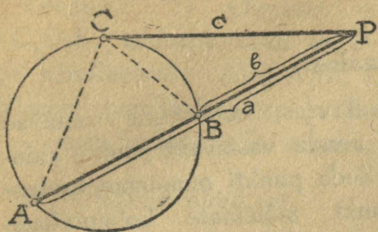
Tõestus: $\alpha = \gamma$ (kui piirdeurgad, mis ühe kaare peal seisavad).
 $\sphericalangle APC$ on ühine nurk kolmnurkades APD ja BPC .



Järjekult on $\triangle APD \sim \triangle CBP$ (taoluse teine juhust).

Sellest järgneb — $AP : d = CP : b$,
 ehk $AP \cdot b = CP \cdot d$.

3) Riivaja ja lõikaja teoreem: Kui ringi lõikaja ja riivaja ühes punktis lõikuvad, siis võrdub lõikaja ja tema välise osa kasvatis riivajale, mis kasvutatud iseenesega.



$$\text{Väide: } \begin{cases} a \cdot b = c^2. \\ c \text{ on riivaja.} \end{cases}$$

Tõestus: Ühendame punktid A ja C ning C ja B, siis on

$$\triangle ACP \sim \triangle CPB, \text{ sest}$$

$\sphericalangle CPA$ on neil ühine,

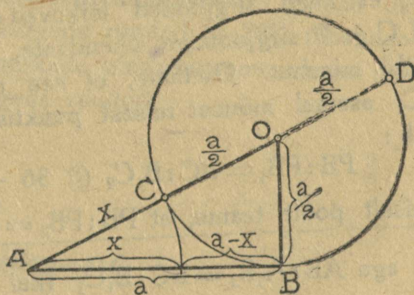
$\sphericalangle CAP = \sphericalangle PCB$ (mõõdetakse ühe ja sellesama kaare CB-ga).

Sellest järgneb — $a : c = c : b$,
ehk $c^2 = a \cdot b$.

Teiste sõnadega võime oma teoreemi järgmiselt väljendada: riivaja on keskmine proportsionaalne temaga lõikuva ringi lõikaja ja selle välimise osa vahel.

Ülesanne: Antud joonlõik nii kahte osasse jagada, et joonlõik ise oma suurema osaga niisamasuguses vahekorras on kui suurem osa väiksemaga. Suurem osa on siis keskmine proportsionaalne terve joonlõigu ja väiksema osa vahel.

Võtame antud joonlõigu a ja tõmbame selle ühest lõpupunktist B perpendikulaarjoone $BO = \frac{a}{2}$. Selle võtame raadiuseks, tõmbame ringjoone ja ühendame punktid A ja O. Tõmbame punktist A raadiusega AC kaare, siis on x nõutav keskmine proportsionaalne,



sest $AB^2 = AC \cdot AD$ (vaata riivaja ja lõikaja teoreem),

ehk $a^2 = x(x + a)$,

„ $a^2 = x^2 + ax$,

„ $a^2 - ax = x^2$,

„ $a(a - x) = x^2$,

„ $a : x = x : (a - x)$.

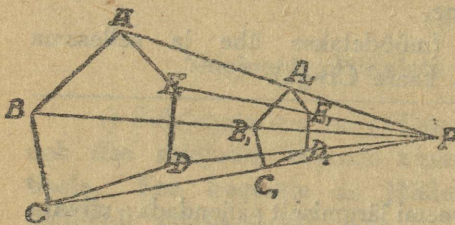
Hulknurgad ja ring.

§ 46.

Hulknurkade taolus.

Kaks hulknurka on siis taolusseisukorras, kui nende vastavad küljed paarikaupa paralleelsed on ja kui nende vastavaid punkte siduvad sirgjooned ühes punktis lõikuvad. Seda punkti nimetame **taoluspunktiks**. Kolmnurkades on taoluspunkt mõlemate kolmnurkade ühine tipp.

Esimene teoreem: **Taolisi hulknurke võib taolusseisukorda seada**



Tõestus: 1) Antud hulknurgad $ABCD$ ja $A_1B_1C_1D_1$ on taolised, AB ja A_1B_1 , BC ja B_1C_1 j. n. e. nende vastavad küljed. Neid hulknurke võime alati niisugusesse seisukorda seada, et nende vastavad küljed paarikaupa paralleelsed on:

$AB \parallel A_1B_1$ } sest $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1$ — kui taoliste kujundite
 $BC \parallel B_1C_1$ } vastavad nurgad.

$CD \parallel C_1D_1$ (sest $\sphericalangle BCD = \sphericalangle B_1C_1D_1$ — põhjus seesama).

Nii võib tõestada, et kõik vastavad küljed on paralleelsed.

2) Ühendame nüüd punktid A ja A_1 , B ja B_1 sirgjoontega ja oletame, et need sirgjooned lõikuvad punktis P . Kui meie nüüd punktid C ja P sirgjoonega ühendame, siis peab see sirgjoon punkt C_1 -st läbi minema. Oletame, et see mitte ei sünni ja meie sirgjoon punkt C_1 asemel mõnest teisest punktist, näituseks C_2 -st, läbi läheb, siis peab:

$$PB : PB_1 = BC : B_1C_2 \quad (\S 36 \text{ — teine teoreem}).$$

Teiselt poolt teame, et $PB : PB_1 = AB : A_1B_1$ (seesama teoreem).

Et aga $AB : A_1B_1 = BC : B_1C_1$ (kui taoliste kujundite vastavad küljed),

$$\text{siis peab } PB : PB_1 = BC : B_1C_1,$$

$$\text{järelikult — } BC : B_1C_1 = BC : B_1C_2.$$

See on aga siis võimalik, kui punktid C_1 ja C_2 ühte langevad. Niisama võib tõestada, et punkte D ja D_1 , E ja E_1 ühendajad sirgjooned punkt P -st läbi lähevad.

Teine teoreem (vastupidine): **Hulknurgad, mida taolusseisukorda võib seada, on taolised.**

Tõestus: 1) Oletame, et antud hulknurkade ABCDE ja $A_1B_1C_1D_1E_1$ taoluspunktiks on P ja nende vastavad küljed on paari-kaupa paralleelsed: $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$, jne. Nurgad, mille küljed paarikaupa paralleelsed on ja ühes sihis lähevad, on võrdsed, tähendab — meie hulknurkade vastavad nurgad on võrdsed.

2) Oletame nüüd, et

$$PA:PA_1 = m:n,$$

siis peab $PB:PB_1 = m:n$ (§ 36 — teine teoreem),

$$PC:PC_1 = m:n \text{ jne.}$$

Niisama peab $AB:A_1B_1 = m:n$,

$$BC:B_1C_1 = m:n \text{ jne.}$$

Tähendab, meie hulknurkade vastavate külgede vahekorrad on võrdsed. Et nüüd vastavad nurgad võrdsed on ja vastavad küljed ühesuguses vahekorras, siis on hulknurgad taolised.

Kolmas teoreem: Taoliste hulknurkade pinnad on niisuguses vahekorras, kui vastavate külgede ruudud.

Tõestus: Seame hulknurgad taolusseisukorda ja jaotame nad diagonaalide abil vastavalt kolmnurkadeks, siis on nende vastavad diagonaalid niisamasuguses vahekorras, kui nende vastavad küljed (§ 36 — teine teoreem). Kõikide vastavate kolmnurkade pinnad on niisuguses vahekorras, kui vastavate külgede ruudud (§ 39), tähendab — ka hulknurkade pinnad, kui kolmnurkade pindade summad, on niisuguses vahekorras, kui vastavate külgede ruudud.

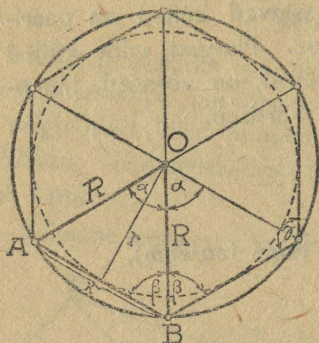
§ 47.

Korrapärased hulknurgad.

I. Mõiste: Korrapärasteks hulknurkadeks nimetame niisuguseid hulknurke, mille küljed kõik ühepikkused ja nurgad kõik võrdsed on. Iga korrapärase hulknurga ümber ja sisse võime ringjoone tõmmata (tõesta bissektorite ja külgede keskpunktidest tõmmatud perpendikulaarjoonte abil). Esimene ringjoon läheb hulknurga nurga tippudest läbi, teine riivab tema külgi.

Esimesele ringjoonele on hulknurga küljed ühepikkusteks sidejoonteks, teisele on külgede osad ühepikkusteks riiva-jateks.

II. Pind: Kui meie antud hulknurga nurkade tipud sisemise ja ühtlasi ka välimise ringi keskpunktiga ühendame, siis jagame oma hulknurga n kolmnurgaks, mille külge deks välimise ringi raadiused R , kõrgusteks sisemise ringi raadiused r ja põhjadeks hulknurga küljed k .



Iga niisuguse kolmnurga pind võrdub:

$$P_{knk} = \frac{k \cdot r}{2}$$

Et meil hulknurgas niipalju kolmnurke on, kui palju meie hulknurgal külgi, siis võrdub meie hulknurga pind

$$P_{hnk} = \frac{k \cdot r \cdot n}{2}$$

Pythagorase seaduse järele leiame, et meie kolmnurkade kõrgus võrdub:

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{k^2}{4}},$$

$$\text{ja külg } k = 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Selle järele võrdub hulknurga pind:

$$P_{hnk} = \frac{n \cdot k}{2} \sqrt{R^2 - \frac{k^2}{4}}, \text{ ehk } P_{hnk} = nr \sqrt{R^2 - r^2}.$$

III. Nurgad: Iga nurk meie kolmnurga tipu ehk ringi keskpunkti juures (hulknurga tsentraalnurk):

$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}, \text{ pool sellest } \frac{\alpha}{2} = \frac{180^\circ}{n},$$

$$\text{ja põhja juures olev nurk } \beta = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n} = \frac{90^\circ n - 180^\circ}{n}.$$

Et meie hulknurga nurk γ kahest niisugusest nurgast koos seisab, siis võrdub ta:

$$\gamma = \frac{2(90^\circ n - 180^\circ)}{n} = \frac{180^\circ n - 360^\circ}{n} = \frac{180^\circ}{n} (n - 2).$$

§ 48.

Korrapäraste hulknurkade joonistamine.

On meil korrapärane kuusnurk, siis võrdub tema nurk:

$$\gamma = \frac{180^\circ}{6} (6 - 2) = 120^\circ,$$

$$\alpha = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Et } \gamma &= 2\beta, \\ \text{siis } \beta &= \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ. \end{aligned}$$

Sellest näeme, et kuusnurka joonistatud kolmnurgad on kõik võrdkülgised, sest nende nurgad on võrdsed; järjekult — kuusnurga küljed võrduvad välimise ringi raadiusele:

$$K_6 = R.$$

Ülesanded.

1) Joonistada antud ringi korrapärane kolmnurk.

Joonistame antud ringi esite korrapärase kuusnurga ja ühendame selle kaks külge üheks, siis saame nõutava kolmnurga. Kuusnurga külgi pooleks jagades saame 12, sellest 24, 48 j. n. e. nurgalise ehk kõik hulknurgad, mille külgede arv võrdub $3 \cdot 2^n$.

2) Joonistada antud ringi ruut.

Tõmbame kaks perpendikulaar-läbimõõtu ja ühendame nende otsad sidejoontega. Keskpunkti juures sündinud nurgad on täisnurgad, ja sidejooned, kui võrdsete nurkade vastasküljed, on võrdsed.

Kõik neli kolmnurka on täisnurksed sarikkolmnurgad, mille võrdsed küljed välimise ringi raadiusele võrduvad.

Ruudu külgi pooleks jagades saame 8, sellest 16, 32 j. n. e. nurgalised ehk kõik korrapärased hulknurgad, mille külgede arv võrdub $4 \cdot 2^n$.

Märkus: Ruudu külj $K_4 = R\sqrt{2}$. Tõesta ise.

3) Joonistada antud ringi korrapärane viisnurk.

Antud ringi raadiuse jagame nii kahte osasse, et suurem osa keskmine proportsionaalne terve raadiuse ja väiksema osa vahel on (§ 45 — ülesanne); suurem osa on siis korrapärase 10-ne nurgalise külj. Selle kahte külge ühendades saame korrapärase viisnurga, igat külge pooleks jagades korrapärase 20, 40 j. n. e. nurgalise ehk kõik korrapärased hulknurgad, mille külgede arv võrdub $5 \cdot 2^n$.

4) Joonistada antud ringi korrapärane 15-ne nurgaline hulknurk.

Võtame antud ringis 6-e ja 10-ne nurgalise küljed ja paneme need ühest punktist ringi sidejoonteks, nende teisi otse sirgjoonega ühendades saame nõutava hulknurga külje, sest

$$\begin{array}{rcl} 6 \text{ nurgalise tsentraalnurk } & \alpha_6 & = 60^\circ \\ 10 \text{ „ „ „ „ } & \alpha_{10} & = 36^\circ. \end{array}$$

$$\text{Nende vahe} = 60^\circ - 36^\circ = 24^\circ = \frac{360^\circ}{15}.$$

Selle külgi pooleks jagades saame 30, 60 j. n. e. nurgalise ehk kõik korrapärased hulknurgad, mille külgede arv võrdub $15 \cdot 2^n$.

Kokkuvõte: Sirkli ja joonlaua abil võib igasse ringi joonistada järgmised korrapäraseid hulknurgad:

3,	3.2,	3.2.2	ehk kõik	3.2 ⁿ
4,	4.2,	4.2.2	„ „	4.2 ⁿ
5,	5.2,	5.2.2	„ „	5.2 ⁿ
6,	6.2,	6.2.2	„ „	6.2 ⁿ
15,	15.2,	15.2.2	„ „	15.2 ⁿ

§ 49.

Ring.

I. Ringjoon ja ringi pind.

Kui meie ringi joonistatud korrapärase hulknurga külgede arvu suurendame, siis lühenevad need küljed ja nende kogupikkus läheneb ringjoonele. Kujutame enesele ette, et meie hulknurga külgi määratu palju on ja nad kõik üksikult võttes määratu lühikesed on, siis võime oletada, ilma et selle juures suure vea teeks, et meie hulknurga küljed ringjoonega ühte langevad.

§ 47 nägime, et ringi joonistatud hulknurga pind võrdub $\frac{k \cdot r \cdot n}{2}$.

Siin on k hulknurga külje pikkus, n nende külgede arv. Esimene neist on meie oletuse järele määratu väike, teine määratu suur, kuid nende kasvatis annab meile ringjoone pikkuse. Kui meie sarnase korrapärase hulknurga nurkade tipud ringi keskpunktiga ühendame, siis saame määratu palju kolmnurke, mille põhjad ringjoone sünnitavad ja mille kõrgused ringi raadiusele võrduvad. Kõikide nende kolmnurkade ja ühtlasi terve ringi pinna saame siis, kui nende põhjade summa — ringjoone — nende ühise kõrgusega — ringi raadiusega — kasvatame ja kahele jagame. Ringjoon on diameetrist ehk läbimõõdust umbes 3,1415926 korda pikem; selle ringjoone ja läbimõõdu vahekorra märgime greekakeelse tähega π (pi).

$$\pi = 3, 1415926 \text{ ehk}$$

$$\pi = 3, 14 \quad \text{„}$$

$$\pi = 3\frac{1}{7} \quad \text{„}$$

$$\pi = \frac{355}{113}$$

Harilikkude ülesannete väljaarvamisel võime tarvitada $\pi = 3,14$ ehk $\pi = 3,1416$.

On meie ringi läbimõõt nüüd d , raadius r , siis on ringjoone pikkus:

$$\pi d \text{ ehk } 2\pi r$$

$$\text{ja ringi pind } P_{\text{rng}} = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2;$$

II. **Kaar ja sektor.** 1) Igas ringis on sektori pind (P_{skr}) ringi pinnaga (P_{rng}) niisuguses vahekorras, kui sektori kaar (\widehat{k}) ringjoonega:

$$P_{\text{skr}} : P_{\text{rng}} = \widehat{k} : 2\pi r,$$

$$\text{ehk } P_{\text{skr}} : \pi r^2 = \widehat{k} : 2\pi r.$$

Siit leiame:

$$P_{\text{skr}} = \frac{\widehat{k} \cdot r}{2}.$$

Meelespidamiseks: **Sektori pind võrdub kaare ja ringi raadiuse kasvatile, jagatud kahele.**

2) Igas ringis on sektori pind ringi pinnaga niisuguses vahekorras, kui sektori tsentraalnurk (a) ringjoone suurusega kraadides (360°),

$$P_{\text{skr}} : \pi r^2 = a : 360^\circ.$$

Siit leiame:

$$P_{\text{skr}} = \frac{\pi r^2 a}{360^\circ}.$$

Meelespidamiseks: **Sektori pind võrdub ringi pinna ja sektori tsentraalnurga kraadides mõõdetud arvu kasvatile, jagatud 360° .**

3) Igas ringis on sektori kaar ringjoonega niisuguses vahekorras, kui sektori tsentraalnurk ringjoone suurusega kraadides (360°).

$$\widehat{K} : 2\pi r = a : 360^\circ$$

$$\widehat{K} = \frac{2\pi r a}{360^\circ} = \frac{\pi r a}{180^\circ}.$$



Sisukord.

Esimene peatükk.

	punkt, joon ja pind.	lhk.
§ 1.	Punkt	7
§ 2.	Joon	7
§ 3.	Pind	9

Teine peatükk.

Nurgad.

§ 4.	Nurkade saamine ja jaod	9
§ 5.	Nurga mõõtmine	10
§ 6.	Kõrvu- ja vertikaalnurgad	12
§ 7.	Täisnurk ja selle osad	13
§ 8.	Paralleeljooned	14
§ 9.	Perpendikulaarkülgedega nurgad	19

Kolmas peatükk.

Kolmnurgad.

§ 10.	Kolmnurga koosseis	20
§ 11.	Kolmnurga nurgad	20
§ 12.	Kolmnurkade liigid	21
§ 13.	Ühtivus (Kongruentsus)	23

Neljas peatükk.

Ülesannete lahendamine.

§ 15.	Jaotused ja perpendikulaarjooned	33
§ 16.	Nurgad ja paralleeljooned	34
§ 17.	Kolmnurgad	35
§ 18.	Täisnurksed, sarik- ja võrdkülgseid kolmnurgad	39

Viies peatükk.

Nelinurgad.

§ 19.	Nelinurga tunnused ja liigid	40
§ 20.	Nelinurkade osad ja nende omadused	41
§ 21.	Trapeets	44
§ 22.	Ülesanded nelinurkade joonistamises	45

Kuues peatükk.

Pindade mõõtmine.

§ 23.	Üleüldised märkused	46
§ 24.	Parallelogrammid	49
§ 25.	Kolmnurk	51
§ 26.	Trapeets	52

Seitsmes peatükk.

Hulknurgad.

§ 27.	Hulknurga nurgad	53
§ 28.	Hulknurga pind	54

Kaheksas peatükk.

Täisnurkne kolmnurk. lhk.

§ 29.	Pythagorase teoreem	54
§ 30.	Kõrguse teoreem	58

Üheksas peatükk.

Ring (sõõr).

§ 31.	Üleüldised märkused (vaata § 5)	58
§ 32.	Jooned	59
§ 33.	Nurgad	61
§ 34.	Kahe ringi vastastikune vahekord	69

Kümnnes peatükk.

Joonlõikude vahekord (suhe).

§ 35.	Üleüldised märkused	71
§ 36.	Nurga külgede vahekord	72

Üksteistkümnnes peatükk.

Kujundite taolus.

§ 37.	Taoluse tunnused	76
§ 38.	Kolmnurkade taolus	77
§ 39.	Taalised kolmnurkade pinnad	82

Kaksteistkümnnes peatükk.

Proportsioonid kolmnurkades.

§ 40.	Kõrguste teoreem	82
§ 41.	Mediaanide teoreem	83
§ 42.	Bissektorite teoreem (Harmoniline jagamine)	84

Kolmasteistkümnnes peatükk.

Proportsionaalne keskmine.

§ 43.	Mõiste äramääramine	84
§ 44.	Keskmiised proportsionaalsed täisnurkses kolmnurgas	85
§ 45.	Sidejoonte, lõikajate ja rii-vajate teoreem	86

Neljasteistkümnnes peatükk.

Hulknurgad ja ring.

§ 46.	Hulknurkade taolus	88
§ 47.	Korrapäraseid hulknurkade	89
§ 48.	Korrapäraseid hulknurkade joonistamine	90
§ 49.	Ring	92

Märkused:

1911

Märkused: