TARTU ÜLIKOOL
1632
UNIVERSITAS TARTUENSIS

ТАРТУСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Р.Р.Муллари

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Диссертация
на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук
доц. Ю.Г. Лумисте

Тарту 1963

В В Е Д Е Н И Е

В настоящей работе изучается исключительно поверхности V_m класса C^∞ собственно-евклидова пространства R_n. Чтобы сократить объем работы и упростить формулы, а также для лучшей наглядности, автор не рассматривает обобщения полученных результатов на случай поверхностей V_m класса C^s и на случай псевдоевклидова или Римапова пространств.
Заметим только, что во многих случаях такие обобщения возможны.

В гл.I разрабатывается основная методика для дальнейших исследований. Здесь определяются векторы кривизны, векторы кручения и векторы отражения кривизны различных порядков. Такие векторы присоединяются к каждой точке M поверхности V_m; они зависят от свойств поверхности V_m и, кроме того, от выбора касательного репера на ней. Разложение векторов кручения и векторов отражения кривизны по векторам кривизны позволяет вписать для поверхности V_m систему дифференциальных уравнений, напоминающую формулы Френе для кривой. Получены условия интегрируемости этой системы.

Формулы Френе и условия их интегрируемости для поверхности V_m известны и ранее (см.напр. [25] и [II]), однако, наш подход содержит некоторые особенности, которые влияют на все дальнейшее изложение. Таким образом, в качестве векторов репера в нормальной плоскости к V_m в точке M используются сами векторы кривизны. Эти векторы тесно связаны со строе-

ности V_m вблизи M ; тем самым облегчается выяснение инвариантных свойств поверхности V_m . Векторы кривизны могут быть и линейно зависимыми, в таких случаях число векторов репера превышает размерность пространства.

В гл.I изучаются геометрические объекты, присоединенные к отдельным касательным направлениям к V_m или к их совокупности (соответствующие векторы кривизны *), а также объекты, присоединенные к точке M поверхности V_m (индикатрисы кривизны). С помощью этих объектов строятся различные соответствия между касательными направлениями к V_m в M ,позволяющие определить особые типы касательных направлений и выделить различные классы поверхностей. Подробно рассматривается возможности обобщения классического понятия главного направления поверхности на случай многомерной поверхности V_m в R_n ; выясняется, как классические свойства главного направления переносятся на многомерный случай, обобщается понятие сопряженного направления и т.п.

В гл.II рассматриваются поверхности, несущие поля абсолютно главных направлений, определенных в гл.I. Так как изучение общего случая таких поверхностей V_m оказывается при $m > 2$ технически очень сложным, то ограничиваемся (АКТ) только поверхностями V_m , которые несут сопряженные системы (см. [9])

---

*) О векторах первой кривизны в одном или в двух касательных направлениях см., напр., [11] (вектор вынужденной кривизны), [16] , [20] .

абсолютно главных направлений. Оказывается, отдельный случай таких поверхностей представляет многомерное обобщение поверхности Клиффорда (см. [8]), рассматриваемое на гиперсфере пространства R_{2m}.

В гл. IУ изучается вопрос такого погружения пространства S_m постоянной кривизны в пространство R_n, когда все движения в S_m порождают движения в R_n. Оказывается, что, кроме тривиальных случаев плоскости (кривизны $K = 0$) и сферы, среди поверхностей V_m, размерность третьей нормальной плоскости которых не превышает единицу, существует еще четыре реализации существенно различного вида такого погружения. Все эти реализации (кроме плоскости) соединяются между собой непрерывным изгибанием в этом же классе поверхностей.

Ранее А.С. Солодовниковом в [29] решена задача о таком погружении m-мерного эллиптического пространства в пространство R_n, чтобы геодезические эллиптического пространства оказались окружностями в R_n. Решение этой задачи совпадает одной из упомянутых выше четырех нетривиальных реализаций. В [29] также выяснен ряд свойств соответствующей поверхности и получен еще алгебраический способ ее построения.

Каждая глава в работе подразделяется на параграфы, которые, в свою очередь, делятся на пункты. Для облегчения чтения те пункты, содержание которых отклоняется от основной темы параграфа или которые носят относительно всей работы второстепенный, иллюстрационный характер, отмечены звездочкой. Нумерация параграфов, теорем, лемм, примеров и формул в кажд-

дой главе самостоятельная. Нумерация же пунктов самостоятельна только в пределах параграфа. В начале некоторых параграфов имеется краткое введение, не подлежащее нумерации. Для отдельных глав введения не нужны, так как об их содержании было сказано выше.

Автор выражает благодарность доц. Ю.Г. ЛУМИСТЕ, который при составлении этой работы помог ему многими ценными указаниями.

I МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

§ I. ФОРМУЛЫ ФРЕНЕ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

I. Пусть в n -мерном евклидовом пространстве R_n задана вектор-функция $\bar{M}$, конечная точка M которой описывает m - мерную поверхность V_m

Тогда

$$d\bar{M} = \omega^c \bar{e}_c \text{ *)}, \qquad (I)$$

где ω^c - независимые линейные дифференциальные формы, а линейно независимые векторы $\bar{e}_c$ определяют касательную плоскость R_m к поверхности V_m в M. Выражая дифференциал вектора $\bar{e}_a$ в виде

$$d\bar{e}_a = \omega_a^c \bar{e}_c + \bar{\omega}_a , \qquad (2)$$

где векторные дифференциальные формы $\bar{\omega}_a$ ортогональны к R_m.

Дифференциальными следствиями уравнений (I) с учетом (2) являются соотношения

$$D\omega^a = [\omega^c \omega_c^a] , \qquad (3)$$

$$\bar{\omega}_a = \omega^c \bar{e}_{ac} , \quad \bar{e}_{ac} = \bar{e}_{ca} . \qquad (4)$$

Векторы $\bar{e}_{ac}$ **векторами первой кривизны** поверхности V_m в M. Они ортогональны к R_m и определяют первую нормальную плоскость к V_m в M, которую обозначим через R_m^1. Векторы $\bar{e}_a$ и $\bar{e}_{ac}$, все вместе взятые, определяют первую соприкасающуюся плоскость к V_m в M, которую обозначим через $R_{m,1}$.

---

*) Индексы $a, a_c, a_1, \ldots, b, b_c, b_1, \ldots$ и т.д. принимают во всей работе значения $1, \ldots, m$.

Выразим теперь дифференциал вектора $\bar{e}_{ab}$ в виде

$$d\bar{e}_{ab} = \omega^{c}_{ab}\,\bar{e}_{c} + \omega^{cd}_{ab}\,\bar{e}_{cd} + \bar{\omega}_{ab}\,, \qquad (5)$$

где векторные дифференциальные формы $\bar{\omega}_{ab}$ ортогональны к $R_{m,1}$. Здесь и далее в работе взятая подчеркнутая система индексов может принимать значения только в возрастающем порядке.

Дифференциальными следствиями уравнений (2) с учетом (3), (4) и (5) являются соотношения

$$D\omega^{b}_{a} = [\omega^{c}_{a}\,\omega^{b}_{c}] + [\omega^{c}\,\omega^{b}_{ac}]\,, \qquad (6)$$

$$[\omega^{cd}_{ac} - \delta^{c}_{e}\omega^{d}_{a} - \delta^{d}_{a}\omega^{d}_{c}\,;\,\omega^{e}]\,\bar{e}_{cd} = 0\,,$$

$$\bar{\omega}_{ab} = \omega^{c}\,\bar{e}_{abc}\,.$$

Назовем $\bar{e}_{abc}$ **векторами второй кривизны** поверхности V_m в M. Они симметричны по всем индексам, ортогональны к $R_{m,1}$ и определяют вторую нормальную плоскость к V_m в M, которую обозначим через R^{2}_{m}. Векторы $\bar{e}_{a}$, $\bar{e}_{bc}$ и $\bar{e}_{def}$, все вместе взятые, определяют вторую соприкасающуюся плоскость к V_m в M, которую обозначим через $R_{m,2}$.

Продолжая таким образом, получаем уравнения

$$d\bar{e}_{a_0\dots a_\ell} = \sum_{s=0}^{\ell} \omega^{c_0\dots c_s}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{e}_{c_0\dots c_s} + \omega^{c}\,\bar{e}_{a_0\dots a_\ell c}\,, \qquad (7)$$

где $\ell = 0,1,2,\dots$ Назовем $\bar{e}_{a_0\dots a_\ell}$ при $\ell>0$ **векторами ℓ-ой кривизны** поверхности V_m в M. Они симметричны по всем индексам, ортогональны к $R_{m,\ell-1}$ и определяют ℓ-ую нормальную плоскость к V_m в M, которую обозначим через R^{ℓ}_{m}. Векторы $\bar{e}_{a}$, $\bar{e}_{a_0a_1}$, $\dots$, $\bar{e}_{b_0\dots b_\ell}$, все, вместе взятые, определяют ℓ-ую соприкасающуюся плоскость к V_m в M, которую обозначим через $R_{m,\ell}$.

Так как пространство R_n имеет конечную размерность n, то необходимо существует такая минимальная величина K, что все векторы $(K+1)$-ой кривизны равны нулю, т.е. $\bar{l}_{a_0\dots a_{K+1}}=0$. Очевидно, что тогда и все векторы p-ой кривизны, где $p>K$, равны нулю. При этом для l из (7) достаточно будет придавать только значения $l\le K$. Назовем величину K **порядком кривизны** поверхности V_m. Плоскость $R_{m,K}$ назовем **плоскостью поверхности** V_m.

2. Уравнения

$$d(\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_s})=d\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_s}+\bar{l}_{a_0\dots a_l}d\bar{l}_{b_0\dots b_s}$$

являются уравнениями инвариантности метрики пространства R_n. Из них получим, с учетом (7) и ортогональности различных плоскостей R_m^l, соотношения

$$\omega^{c_0\dots c_s}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_s}}\bar{l}_{b_0\dots b_s}=0\,, \tag{8}$$

где $s<l-1$,

$$\omega^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_{l-1}}}\bar{l}_{b_0\dots b_{l-1}}+\omega^{c}\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_{l-1}c}=0\,, \tag{9}$$

$$d(\bar{l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_s})=\left(\omega^{c_0\dots c_l}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{b_0\dots b_s}+\omega^{c_0\dots c_s}_{b_0\dots b_s}\bar{l}_{a_0\dots a_l}\right)\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_l}}\,. \tag{10}$$

Из (8) и (9) следуют соответственно соотношения

$$\omega^{c_0\dots c_s}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_s}}=0\,, \tag{11}$$

$$\omega^{c_0\dots c_{l-1}}_{a_0\dots a_l}\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_{l-1}}}=\omega^{c}\bar{A}_{a_0\dots a_l c}\,, \tag{12}$$

где векторы $\bar{A}_{a_0\dots a_\ell c} \in R_m^{\ell-1}$ однозначно определяются векторами кривизны при помощи соотношений

$$\bar{A}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_{\ell-1}} + \bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_{\ell-1}c} = 0 \quad (\ell > 0),$$
$$\bar{A}_{ab} = 0 \,. \tag{13}$$

Назовем $\bar{A}_{a_0\dots a_\ell c}$ **векторами отражения** ℓ**-ой кривизны поверхности** V_m **в** M.

Разложим векторы отражения кривизны по векторам кривизны:

$$\bar{A}_{a_0\dots a_\ell c} = A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{\ell}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}} \,. \tag{14}$$

Это можно сделать при помощи (13). Заметим, однако, что такое разложение является однозначным только в случае линейной независимости векторов (ℓ-1)-ой кривизны $\bar{\ell}_{a_0\dots a_{\ell-1}}$. В противном случае имеется бесконечное количество по существу равноправных систем величин $A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}$ и мы можем, если будет нужно, выбрать из них для нас самую выгодную. Величины $A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}$ назовем в этой работе координатами векторов отражения ℓ-ой кривизны.

Соотношения (13) и (14) можно использовать для вычисления скалярных произведений векторов кривизны при помощи координат векторов отражения кривизны и скалярных произведений касательных векторов к V_m в M (координат метрического тензора):

$$\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell} = -A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell b_\ell}\,\bar{\ell}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_{\ell-1}} = \dots =$$
$$= (-1)^\ell A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell b_\ell}\,A^{c_0^2\dots c_{\ell-2}^2}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}b_{\ell-1}}\cdots A^{c_0^\ell}_{\underline{c_0^{\ell-1}c_1^{\ell-1}}b_2}\,\bar{\ell}_{c_0^\ell}\,\bar{\ell}_{b_0} \,.$$

Отсюда видно, что метрический тензор и координаты векторов отражения с первой до ℓ-ой кривизны определяют систему векторов ℓ-ой кривизны в плоскости R_m^ℓ с точностью до движения.

3. Для дальнейшего нам понадобится следующая

Лемма I.

Из соотношения $x^{i_0 \dots i_\ell} \bar{l}_{i_0 \dots i_\ell} = 0$, имеющей место в некоторой окрестности $\mathcal{U}$ точки M поверхности V_m, следуют соотношения $x^{i_0 \dots i_\ell} \bar{l}_{i_0 \dots i_\ell a_1 \dots a_s} = 0$ в окрестности $\mathcal{U}$ для любого $s > 0$ и для любой комбинации индексов $a_1 \dots a_s$.

Лемму можно доказать при помощи кратного дифференцирования тождества

$$x^{i_0 \dots i_\ell} \bar{l}_{i_0 \dots i_\ell} \equiv 0$$

с учетом (7).

В силу (II) и (I2) получим вместо (7) систему

$$d\bar{l}_{a_0 \dots a_\ell} = \omega^c \bar{A}_{a_0 \dots a_\ell c} + \omega^{i_0 \dots i_\ell}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_\ell}} + \omega^c \bar{l}_{a_0 \dots a_\ell c} . \qquad (I5)$$

Одним дифференциальным следствием здесь является соотношение

$$\omega^{i_0 \dots i_\ell}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_\ell}} = \omega^{i_0 \dots i_{\ell-1}}_{a_0 \dots a_{\ell-1}} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_{\ell-1}} a_\ell} + \omega^c_{a_\ell} \bar{l}_{a_0 \dots a_{\ell-1} c} + \omega^c \bar{B}'_{a_0 \dots a_\ell c} , \qquad (I6)$$

где векторы $\bar{B}'_{a_0 \dots a_\ell c} \in R^\ell_m$ симметричны относительно всех своих индексов. Так же получается

$$\omega^{i_0 \dots i_{\ell-1}}_{a_0 \dots a_{\ell-1}} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_{\ell-1}}} = \omega^{i_0 \dots i_{\ell-2}}_{a_0 \dots a_{\ell-2}} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_{\ell-2}} a_{\ell-1}} + \omega^c_{a_{\ell-1}} \bar{l}_{a_0 \dots a_{\ell-2} c} + \omega^c \bar{B}'_{a_0 \dots a_{\ell-1} c} . \qquad (I7)$$

Уравнения (I6) и (I7) с учетом леммы I дают

$$\omega^{i_0 \dots i_\ell}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_\ell}} = \omega^{i_0 \dots i_{\ell-2}}_{a_0 \dots a_{\ell-2}} \bar{l}_{\underline{i_0 \dots i_{\ell-2}} a_{\ell-1} a_\ell} + \omega^c_{a_{\ell-1}} \bar{l}_{a_0 \dots a_{\ell-2} c a_\ell} +$$

$$+ \omega^c_{a_\ell} \bar{l}_{a_0 \dots a_{\ell-1} c} + \omega^c \bar{B}''_{a_0 \dots a_\ell c} ,$$

где $\bar{B}''_{a_0 \dots a_\ell c} \in R^\ell_m$.

Продолжая таким образом, в итоге получаем соотношение

$$\omega^{c}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{\underline{c_0\dots c_\ell}} = \omega^{c}\,\bar{B}_{a_0\dots a_\ell c} + \sum_{i=0}^{\ell}\omega^{c}_{a_i}\,\bar{\ell}_{a_0\dots c\dots a_\ell}\,, \qquad (18)$$

где $\bar{B}_{a_0\dots a_\ell c}\in R^{\ell}_{m}$; для простоты пользуемся записью

$$\omega^{c}_{a_i}\,\bar{\ell}_{a_0\dots a_{i-1}c\,a_{i+1}\dots a_\ell} = \omega^{c}_{a_i}\,\bar{\ell}_{a_0\dots c\dots a_\ell}\,.$$

Назовем $\bar{B}_{a_0\dots a_\ell c}$ **векторами** ℓ**-ого кручения** поверхности V_m в M.

Соотношения (I), (I5), (I8), (I3) и (I0) равносильны системе

$$\begin{cases} d\bar{M} = \omega^{c}\,\bar{\ell}_c \\ d\,\bar{\ell}_a = \omega^{c}\,\bar{\ell}_{ac} + \omega^{c}_{a}\,\bar{\ell}_c \\ d\,\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell} = \omega^{c}\left(\bar{A}_{a_0\dots a_\ell c} + \bar{B}_{a_0\dots a_\ell c} + \bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell c}\right) + \sum_{i=0}^{\ell}\omega^{c}_{a_i}\,\bar{\ell}_{a_0\dots c\dots a_\ell} \\ \bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell} = -\,\bar{A}_{a_0\dots a_\ell b_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_{\ell-1}} \\ d\left(\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell}\right) = \omega^{c}\left(\bar{B}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell} + \bar{B}_{b_0\dots b_\ell c}\,\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\right) + \\ \qquad + \sum_{i=0}^{\ell}\omega^{c}_{a_i}\,\bar{\ell}_{a_0\dots c\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell} + \sum_{i=0}^{\ell}\omega^{c}_{b_i}\,\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots c\dots b_\ell}\,, \end{cases} \qquad (19)$$

где $\ell = 1, \dots, k$. Назовем эту систему **формулами Френе** для поверхности V_m . Сходство с известными формулами Френе для кривой становится более ясным, если учесть, что векторы кручения, подобно векторам кривизны (см. (I4)), можно разложить по векторам кривизны, т.е.

$$\bar{B}_{a_0\dots a_\ell c} = B^{c_0\dots c_\ell}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{\ell}_{\underline{c_0\dots c_\ell}}\,.$$

Как видно из (I9), векторы кривизны по всем своим индексам преобразовываются по тензорному закону. Поэтому по тензорному закону преобразовывается и система их скалярных произведений. Тензор с координатами $\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell}$ назовем

тензором ℓ-ой кривизны поверхности V_m в M.

Если (I9) взять по $\mathrm{mod}\,\omega^c$, то очевидно, что плоскости R^ℓ_m и $R_{m,\ell}$ инвариантно связаны с точкой M поверхности V_m.

4. Систему (I9) можно записать по-разному в зависимости от того, какие мы будем иметь линейные зависимости между формами ω^b_a и ω^c. В настоящей работе будем иметь дело с двумя видами зависимостей:

I) формы ω^b_a не зависят от форм ω^c. В этом случае касательный репер может свободно перемещаться на V_m. Формы ω^b_a соответствуют преобразования касательного репера к V_m в фиксированной точке M, а формы ω^c – параллельное перенесение касательного репера на V_m.

2) Все формы ω^b_a линейно выражаются через формы ω^c, т.е. $\omega^b_a = P^b_{ac}\omega^c$. Будем предполагать, что это соотношение является инволютивным. Тогда, если в одной точке M_0 поверхности V_m задать определенный касательный репер, то при помощи (I9) такой репер присоединяется с каждой точкой M поверхности V_m.

В случае 2) систему (I9) можно дать следующий вид:

$$\begin{cases} d\bar{M} = \omega^c \bar{e}_c \\ d\bar{e}_a = \omega^c(\bar{P}_{ac} + \bar{e}_{ac}) \\ d\bar{e}_{a_0\dots a_\ell} = \omega^c(\bar{A}_{a_0\dots a_\ell c} + \bar{P}_{a_0\dots a_\ell c} + \bar{e}_{a_0\dots a_\ell c}) \\ \bar{e}_{a_0\dots a_\ell}\bar{e}_{b_0\dots b_\ell} = -\bar{A}_{a_0\dots a_\ell b_\ell}\bar{e}_{b_0\dots b_{\ell-1}} \\ d(\bar{e}_{a_0\dots a_\ell}\bar{e}_{b_0\dots b_\ell}) = \omega^c(\bar{P}_{a_0\dots a_\ell c}\bar{e}_{b_0\dots b_\ell} + \bar{P}_{b_0\dots b_\ell c}\bar{e}_{a_0\dots a_\ell}) \end{cases} \qquad (20)$$

где $\bar{P}_{ac} = P^d_{ac}\bar{e}_d$ и $\bar{P}_{a_0\dots a_\ell c} = \bar{B}_{a_0\dots a_\ell c} + \sum_{i=0}^{\ell} P^d_{a_i c}\bar{e}_{a_0\dots d\dots a_\ell}$. Векторы $\bar{P}_{a_0\dots a_\ell c}$ будем для простоты также называть **векторами** ℓ-**ого кручения** поверхности V_m в M. Тем самым, говоря о векторах кручения, мы будем знать, какие именно имеют место зависимости между формами ω^b_a и ω^c.

Далее, когда будем говорить о системе (I9), предполагается, что имеет место случай I). То же относительно и к системе (20) и случаю 2).

§ 2. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Формулы Френе для многомерной поверхности имеют решение только тогда, когда их коэффициенты удовлетворяют условиям интегрируемости. На координаты векторов кручения и векторов отражения кривизны накладываются определенные зависимости, которые в силу уравнений инвариантности метрики переносятся на координаты тензоров кривизны. Последние должны в случае собственно-евклидова пространства R_n удовлетворять еще условиям положительной определенности метрики. В настоящем параграфе выведем условия интегрируемости формул Френе при помощи операции внешнего дифференцирования. Условия положительной определенности метрики будут выведены уже при изучении конкретных классов поверхностей.

I. Рассмотрим систему (I9). Условия интегрируемости этой системы получим, если внешние дифференциалы от ее уравнений приравняем нулю. Однако, условия инвариантности метрики не стоит дифференцировать внешним образом, ибо, как известно, они дифференциальных следствий не дают. При внешнем дифференциро-

вания остальных уравнений (I9) получим равенства нулю векторных квадратичных дифференциальных форм. Тем самым следует приравнять нулю и компоненты этих форм на всех нормальных и на касательной плоскостях к V_m в M.

Таким образом, при внешнем дифференцировании из первого уравнения (I9) получим уже известное уравнение (3), а из второго уравнения (I9) – соотношения

$$D\omega_a^b = [\omega_a^c \omega_c^b] + [\omega^c \omega^d] A^b_{acd}, \tag{21}$$

$$\bar{B}_{acd} = \bar{B}_{adc}. \tag{22}$$

Сложнее обстоит дело с третьим уравнением (I9), внешним дифференцированием которого получаем:

$$A^{c_0 \dots c_{q-1}}_{a_0 \dots a_q c} \bar{A}_{\underline{c_0 \dots c_{q-1} d}} [\omega^d \omega^c] = 0, \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
&[dA^{c_0 \dots c_{q-1}}_{a_0 \dots a_q c} \bar{\ell}_{\underline{c_0 \dots c_{q-1}}} + (A^{c_0 \dots c_{q-1}}_{a_0 \dots a_q c} \bar{B}_{\underline{c_0 \dots c_{q-1} d}} + B^{c_0 \dots c_q}_{a_0 \dots a_q c} \bar{A}_{\underline{c_0 \dots c_q d}}) \omega^d + \\
&+ A^{c_0 \dots c_{q-1}}_{a_0 \dots a_q c} \sum_{i=0}^{q-1} \omega^d_{c_i} \bar{\ell}_{c_0 \dots d \dots c_{q-1}} - \sum_{i=0}^{q} \omega^d_{a_i} \bar{A}_{a_0 \dots d \dots a_q c} - \bar{A}_{a_0 \dots a_q d} \omega^d_c ; \omega^c] = 0,
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
&[dB^{c_0 \dots c_q}_{a_0 \dots a_q c} \bar{\ell}_{\underline{c_0 \dots c_q}} + (A^{c_0 \dots c_{q-1}}_{a_0 \dots a_q c} \bar{\ell}_{\underline{c_0 \dots c_{q-1} d}} + \bar{A}_{a_0 \dots a_q c d} + B^{c_0 \dots c_q}_{a_0 \dots a_q c} \bar{B}_{\underline{c_0 \dots c_q d}} - \sum_{i=0}^{q} A^g_{a_i c d} \bar{\ell}_{a_0 \dots g \dots a_q}) \omega^d + \\
&+ B^{c_0 \dots c_q}_{a_0 \dots a_q c} \sum_{i=0}^{q} \omega^d_{c_i} \bar{\ell}_{c_0 \dots d \dots c_q} - \bar{B}_{a_0 \dots a_q d} \omega^d_c - \sum_{i=0}^{q} \omega^d_{a_i} \bar{B}_{a_0 \dots d \dots a_q c} ; \omega^c] = 0,
\end{aligned} \tag{25}$$

$$(B^{c_0 \dots c_q}_{a_0 \dots a_q c} \bar{\ell}_{c_0 \dots c_q d} + \bar{B}_{a_0 \dots a_q c d}) [\omega^d \omega^c] = 0. \tag{26}$$

В силу (I3) из (23) имеем

$$A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{A}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}d}\,\bar{l}_{b_0\dots b_{\ell-2}} = -A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}}\,\bar{l}_{b_0\dots b_{\ell-2}d} =$$

$$= \bar{l}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{l}_{b_0\dots b_{\ell-2}dc}\ .$$

Отсюда видно, что это является следствием требования симметричности векторов кривизны.

Обозначим производную по форме Пфаффа ω^a от произвольной функции f через $f_{,a}$, а симметричность некоторого выражения по индексам c и d символом $\to(cd)$, написанным сразу за этим выражением. Тогда (24) можно придать вид

$$A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c,d}\,\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}} + A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{B}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}d} + B^{c_0\dots c_\ell}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{A}_{c_0\dots c_\ell d} \to (cd)\,. \qquad (27)$$

Нетрудно убедиться, что (27) является следствием уравнений инвариантности метрики и равенства (26). В то же время (25) и (26) в новой записи выглядят следующим образом:

$$B^{c_0\dots c_\ell}_{a_0\dots a_\ell c,d}\,\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_\ell}} + B^{c_0\dots c_\ell}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{B}_{\underline{c_0\dots c_\ell}d} + \bar{A}_{a_0\dots a_\ell cd} + A^{c_0\dots c_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_{\ell-1}}d} - \sum_{i=0}^{\ell} A^{g}_{a_i cd}\,\bar{l}_{a_0\dots g\dots a_\ell} \to (cd), \qquad (28)$$

$$B^{c_0\dots c_\ell}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{l}_{\underline{c_0\dots c_\ell}d} + \bar{B}_{a_0\dots a_\ell cd} \to (cd)\ . \qquad (29)$$

Итак, условиями интегрируемости системы (I9) являются (3), (2I), (22), (28) и (29).

Так как мы будем этими формулами неоднократно пользоваться ниже, то для лучшей обозримости система (I9) и условия ее интегрируемости выписаны на специальной таблице в конце работы и обозначены общей буквой A.

2. Аналогично выводятся условия интегрируемости и для системы (20). В итоге получаем соотношения

$$D\omega^a = [\omega^c \omega^d] P^a_{cd},$$

$$P^g_{cd} \bar{\ell}_{ag} + P^g_{ad} \bar{\ell}_{gc} + \bar{P}_{adc} \to (cd),$$

$$P^g_{cg} \bar{\ell}_{a_0 \cdots a_i g} + P^{c_0 \cdots c_i}_{a_0 \cdots a_i d} \bar{\ell}_{\underline{c_0 \cdots c_i} c} + \bar{P}_{a_0 \cdots a_i dc} \to (cd),$$

$$P^g_{ad,c} \bar{\ell}_g + P^g_{ad} \bar{P}_{gc} + P^g_{cd} \bar{P}_{ag} + \bar{A}_{adc} \to (cd),$$

$$P^{c_0 \cdots c_i}_{a_0 \cdots a_i d,c} \bar{\ell}_{\underline{c_0 \cdots c_i}} + P^{c_0 \cdots c_i}_{a_0 \cdots a_i d} \bar{P}_{\underline{c_0 \cdots c_i} c} + P^g_{cd} \bar{P}_{a_0 \cdots a_i g} + A^{c_0 \cdots c_{i-1}}_{a_0 \cdots a_i d} \bar{\ell}_{\underline{c_0 \cdots c_{i-1}} c} + \bar{A}_{a_0 \cdots a_i dc} \to (cd),$$

которые вместе с системой (20) выписаны на специальной таблице в конце работы и обозначены общей буквой B.

3. Если имеется некоторая система величин (координат векторов кручения, векторов отражения кривизны и тензоров кривизны), удовлетворяющих условиям интегрируемости, инвариантности и положительной определенности метрики, то подставляя эти величины в формулы Френе для многомерной поверхности, получаем систему, определяющую в пространстве R_n при каждой системе начальных условий, удовлетворяющих тем же соотношениям, единственную поверхность V_m. Тем самым, такой системе координат векторов кручения, отражения кривизны и тензоров кривизны соответствует в пространстве R_n (достаточно высокой размерности) с точностью до движения ровно одна поверхность V_m.

Любые добавочные соотношения между координатами векторов кручения, отражения кривизны и тензоров кривизны, независимые от условий интегрируемости формул Френе и уравнений инвариантности метрики, выделяют из всех многомерных поверхностей V_m

некоторый специальный класс. Впрочем, этот класс может быть и пустым, если система (*), состоящая из условий интегрируемости формул Френе, уравнений инвариантности метрики и добавочных соотношений, противоречива.

Система (*) содержит в себе всю информацию о соответствующем классе поверхностей. Эта информация находится в относительно легко геометрически интерпретируемой форме, так как векторы кривизны, кручения и отражения кривизны имеют в формулах Френе вполне конкретный смысл. Однако, часто становится вопрос не о "всех" свойствах изучаемого класса поверхностей, а лишь о некоторых свойствах. Тогда система (*) может оказаться слишком громоздкой. Такое дело, например, обычно имеет место при определении произвола существования некоторого класса поверхностей. Сильные упрощения получаются здесь в тех частных случаях, когда (*) не является системой в частных производных, а алгебраической.

§ 3. ЗАВИСИМОСТЬ РАЗВЕРТОК РАЗЛИЧНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ.

Лемма 1 во многих случаях облегчает исследование условий интегрируемости формул Френе для многомерной поверхности, так как она позволяет получить ряд результатов, выражаемых дифференциальными следствиями формул Френе.

Например, из леммы I вытекает, что линейные зависимости между векторами l-ой кривизны поверхности V_m в некоторой окрестности U точки M влекут за собой в пределах U соот-

ветствующие линейные зависимости между векторами кривизны высших порядков. Тем самым устанавливается зависимость размерностей более высоких нормальных плоскостей к V_m от размерности более низких нормальных плоскостей.

Ранее этот вопрос изучался А.ШВАРЦЕМ в [26]. Им рассматривалась зависимость размерности второй нормальной плоскости к V_m в M от размерности первой нормальной плоскости, в то время, как ничего не известно о конкретном виде зависимостей между векторами первой кривизны, а задана только размерность первой нормальной плоскости.

I. Так как l-ая нормальная плоскость R_m^l к поверхности V_m в M определяется соответствующими векторами l-ой кривизны $I_{a_0 \dots a_l}$, то размерность m_l плоскости R_m^l равна рангу этих векторов.

В силу симметричности, векторы кривизны можно записать в следующем виде:

$$\bar{I}_{a_0 \dots a_l} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} ,$$

где α_a – число индексов a в комбинации $a_0 \dots a_l$. Этим обеспечивается взаимно однозначное соответствие между векторами кривизны и их обозначениями. Там, где невозможна путаница, будем писать еще короче:

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} = (\alpha)_l ,$$

где $\sum_c \alpha_c = l+1$.

Обозначим число векторов l-ой кривизны через π_{ml}. Оно, очевидно, равно числу различных способов представления числа $l+1$ в виде суммы m неотрицательных целочисленных сла-

гаемых, (учитывая и порядок слагаемых). Пусть при заданном ℓ величина α_1 фиксирована, т.е. $\alpha_1 = \alpha_1^\circ$. Тогда число соответствующих векторов $\{\alpha_1^\circ, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$ равно $n_{m-1,\,\ell-\alpha_1^\circ}$. Отсюда получается соотношение

$$n_{m\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} n_{m-1,\ell-i} = \sum_{i=0}^{\ell} n_{m-1,i} .$$

Теперь с помощью математической индукции легко проверить, что

$$n_{m\ell} = \frac{1}{(\ell+1)!}\, m(m+1)\dots(m+\ell) . \qquad (30)$$

Этим определяется максимальная возможная размерность m_ℓ плоскости R_m^ℓ.

2. Пусть в некоторой окрестности U точки M поверхности V_m между векторами $(\alpha)_\ell$ задано S независимых линейных соотношений

$$x_i^j (\alpha^i)_\ell = 0 \quad (j = 1, \dots, S). \qquad (31)$$

Размерность плоскости R_m^ℓ тогда равна

$$m_\ell = n_{m\ell} - S .$$

Из леммы I следует, что между векторами $(\alpha)_L$ при $L > \ell$ имеются зависимости

$$x_i^j (\alpha^i + \delta)_L = 0 \qquad (32)$$

для любых целочисленных неотрицательных δ_c, удовлетворяющих условию $\sum_c \delta_c = L - \ell$. Число этих зависимостей, очевидно, равно $S n_{m,L-\ell-1}$. Для размерности m_L плоскости R_m^L получаем оценку

$$m_L \le n_{m\ell} - x^S(L) ,$$

где $x^s(L)$ – максимальное число независимых соотношений среди (32).

Для того, чтобы иметь лучшее представление о величине $x^s(L)$, упорядочим сначала векторы $(\alpha)_L$. Это легко сделать, так как каждому вектору $(\alpha)_L$ можно естественным образом сопоставить одну с I – до m – местную цифру $(L+2)$-ичной системы, простая сумма которой равна $L+1$. Так, например, в случае $m=3$ векторам $(\alpha)_1$, т.е. $(0,0,2)$, $(0,1,1)$, $(0,2,0)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ и $(2,0,0)$, соответствуют упорядоченные троичные числа 2, 11, 20, 101, 110 и 200.

Далее упорядочим также векторы $(\delta)_{L-\ell-1}$, что равносильно упорядочению зависимостей (31) при каждой фиксированной величине j. Теперь составим $n_{L-\ell-1} \times n_L$ – матрицу A_L^j следующим образом: в ρ –ой строке матрицы A_L^j пусть находятся коэффициенты ρ –ой зависимости (32) (j –фиксировано!) так, чтобы коэффициент x_i^j находился в том столбце, порядковый номер которого совпадает с порядковым номером вектора $(\alpha^i+\delta^\rho)_L$, где через $(\delta^\rho)_{L-\ell-1}$ обозначен ρ–ый вектор $(\delta)_{L-\ell-1}$.

В качестве примера приведем соотношение

$$x(0,2)+y(2,0)=0,$$

из которого следуют соотношения

$$x(0,4)+y(2,2)=0,$$
$$x(1,3)+y(3,1)=0,$$
$$x(2,2)+y(4,0)=0.$$

Матрица A_L^j имеет следующий вид:

	4	13	22	31	40
2	x	0	y	0	0
11	0	x	0	y	0
20	0	0	x	0	y

$= A_3^1$.

Нетрудно убедиться, что ранг матрицы A_L^j всегда равен $n_{L-\ell-1}$.

Составим теперь $5n_{L-\ell-1} \times n_L$ -матрицу A_L, записывая все матрицы A_L^j один под другой.

Очевидна следующая

Теорема 1.

Пусть в окрестности $\mathcal{U}$ точки M поверхности V_m между векторами $(\alpha)_\ell$ заданы зависимости $x_i^j(\alpha^i)_\ell = 0$. Тогда размерность L-ой нормальной плоскости к V_m в M имеет оценку

$$m_L \leq n_{mL} - x(A_L),$$

где $x(A_L)$ - ранг матрицы A_L, составленной для зависимостей $x_i^j(\alpha^i+\delta)_L$. При этом вовсе не требуется независимость соотношений $x_i^j(\alpha^i)_\ell = 0$.

Если среди зависимостей $x_i^j(\alpha^i)_\ell = 0$ - S линейно независимых, то получим оценку

$$x(A_L) \leq n_{m,L-\ell-1} + S - 1. \qquad (33)$$

Так как, в силу (30), $n_{2\ell} = \ell + 2$, то, с учетом теоремы 1 и (33) имеет место

Теорема 2.

Пусть размерность ℓ-ой нормальной плоскости [1К] двумерной поверхности V_2 в некоторой окрестности ее точки M равна

$q < l + 2$. Тогда размерность L-ой нормальной плоскости к V_2 в M не больше q для любых $L > l$.

3.[*]

Рассмотрим случай, когда зависимости (31) имеют следующий простой вид:

$$(\alpha^j)_t = 0 \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Отсюда следует равенство нулю всех векторов $(\alpha^j + \delta)_t$ при каждом $\sum_c \delta_c = L - l > 0$.

Обозначим для каждого значения j множество векторов $(\alpha^j + \delta)_t$ через U_j. Любое множество U_j содержит в качестве своих элементов $n_{m,L-l-1}$ различных нулевых векторов (по их геометрическому смыслу). Нас интересует, сколько различных элементов содержит множество $U = \bigcup_j U_j$.

Обозначим число элементов произвольного конечного множества V через $[V]$. Тогда $[U_j] = n_{m,L-l-1}$. Требуется найти число $[U] = [\bigcup_j U_j]$.

Введем обозначение

$$U_{(i)} = \bigcup_{j_1 > \ldots > j_i} U_{j_1} \cap \ldots \cap U_{j_i} \Big/ \bigcup_{j_2 > \ldots > j_{i+1}} U_{j_2} \cap \ldots \cap U_{j_{i+1}}.$$

Очевидно, что

$$U = \bigcup_i U_{(i)}$$

и имеет место соотношение

$$[U] = \sum_i [U_{(i)}], \tag{34}$$

так как множества $U_{(s)}$ и $U_{(t)}$ не имеют при $s \neq t$ общих элементов.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих равенств:

$$\sum_j [U_j] = \sum_{i=1}^{s} C_i^1 [U_{(i)}],$$

$$\sum_{j_1>j_2} [\mathcal{U}_{j_1} \cap \mathcal{U}_{j_2}] = \sum_{i=1}^{5} C_i^2 [\mathcal{U}_{(i)}] ,$$

.....

$$\sum_{j_1>\ldots>j_t} [\mathcal{U}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{j_t}] = \sum_{i=1}^{5} C_i^t [\mathcal{U}_{(i)}] .$$

Но так как $\sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} C_5^i = 1$ и, кроме того, имеет место (34), то получаем соотношение

$$[\mathcal{U}] = \sum_{i=1}^{5} (-1)^{i-1} \sum_{j_1>\ldots>j_i} [\mathcal{U}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{j_i}] .$$

Остается определить величину $[\mathcal{U}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{j_i}]$. Рассмотрим, для простоты, множество $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, где $\mathcal{U}_\alpha = \{\{\alpha_1+\delta_1, \ldots, \alpha_m+\delta_m\}\}$ и $\mathcal{U}_\beta = \{\{\beta_1+\sigma_1, \ldots, \beta_m+\sigma_m\}\}$, при всех целочисленных неотрицательных δ_c и σ_c, удовлетворяющих условиям $\sum_c \delta_c = \sum_c \sigma_c = L-l$. Множество $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$, очевидно, состоит из векторов $\{\gamma_1+\xi_1, \ldots, \gamma_m+\xi_m\}$, где $\gamma_a = \max(\alpha_a, \beta_a)$, а ξ_a – целочисленные неотрицательные величины, удовлетворяющие условию $\sum_c \xi_c = L+1-\sum_c \gamma_c$. Отсюда следует, что

$$[\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta] = \Pi_{m, L-\sum_c \gamma_c} .$$

В общем случае получаем аналогичное соотношение

$$[\mathcal{U}_{j_1} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{j_i}] = \Pi_{m, L-\sum_c \gamma_c^{j_1 \ldots j_i}} ,$$

где $\gamma_c^{j_1 \ldots j_i} = \max(\alpha_c^{j_1}, \ldots, \alpha_c^{j_i})$.

Тем самым доказана следующая

Теорема 3.

Пусть в окрестности точки M поверхности V_m S векторов $(\alpha^i)_2$ равны нулю. Это накладывает на размерность m_L L-ой

нормальной плоскости R_m^L к поверхности V_m в M ограничение

$$m_L \leqslant n_{mL} - \sum_{i=1}^{s} (-1)^{i-1} \sum_{j_1 > \ldots > j_i} n_{m,L-\sum_c \gamma_c^{j_1 \ldots j_i}} .$$

II ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ МНОГОМЕРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ I. ИНДИКАТРИСЫ КРИВИЗНЫ

I. При помощи векторов ℓ-ой кривизны можно с каждым касательным направлением ($\equiv$ единичным касательным вектором)

$$\bar{x} = x^c \bar{e}_c \qquad (x^c x^d \bar{e}_c \bar{e}_d = 1)$$

к поверхности V_m в точке M инвариантно связать вектор

$$\bar{\xi}(\bar{x}^\ell) = x^{c_0} \dots x^{c_\ell} \bar{e}_{c_0 \dots c_\ell} ,$$

ленащий в соответствующей ℓ-ой нормальной плоскости R_m^ℓ. Назовем этот вектор $\bar{\xi}(\bar{x}^\ell)$ вектором ℓ-ой кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{x}$. В случае $\ell = 1$ он совпадает с известным вектором нормальной кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{x}$ (см.напр. [11]).

В качестве примера укажем на вектор $\bar{e}_{\underbrace{a \dots a}_{\ell+1}}$, который является $|\bar{e}_a|^{\ell+1}$-кратным вектором ℓ-ой кривизны поверхности V_m в направлении вектора $\bar{e}_a$. Если касательный репер к V_m ортонормирован, тогда $\bar{\xi}(\bar{e}_a^\ell) = \bar{e}_{\underbrace{a \dots a}_{\ell+1}}$.

Пусть направление $\bar{x}$ в касательной плоскости R_m к V_m в M свободно поворачивается. Тогда конец вектора $\bar{\xi}(\bar{x}^\ell)$, отложенного из M, описывает в R_m^ℓ некоторое точечное множество J^ℓ, которое назовем индикатрисой ℓ-ой кривизны поверхности V_m в M. В случае $\ell = 1$ эта индикатриса совпадает с известной индикатрисой нормальной кривизны (см., напр., [11]).

Если направление $\bar{x}$ вращается не во всей R_m, а в некоторой ее подплоскости R_q, то описываемую концом вектора $\bar{\xi}(\bar{x}^1)$ фигуру будем называть **сечением индикатрисы** J^1 для R_q. Это сечение похоже по строению на индикатрису l-ой кривизны в точке некоторой q-мерной поверхности V_q.

Так как формам ω^c в (I.I9) соответствует параллельное перенесение касательного репера на V_m (гл.I,§ I, п.4,I)), то векторы первой кривизны $\bar{\xi}'(\bar{x}^2)$ в касательных направлениях некоторой геодезической подповерхности $V_q \subset V_m$, совпадают с соответствующими векторами $\bar{\xi}(\bar{x}^2)$ поверхности V_m в M. Отсюда следует

Теорема I.

Сечение индикатрисы J^1, соответствующее плоскости R_q, является индикатрисой $\tilde{J}^1$ для любой подповерхности $V_q \subset V_m$, геодезической на V_m в M и имеющей R_q своей касательной плоскостью в M.

Для других значений l эта теорема, вообще говоря, не имеет места. Так, например, вектор $\bar{A}_{abb}$ необязательно лежит в плоскости R_2, определяемой векторами $\bar{e}_a$ и $\bar{e}_b$. Тем самым, вектор $\bar{e}_{abb}$, в общем случае, не является вектором второй кривизны некоторой поверхности $V_2 \subset V_m$, геодезической в M.

2. Введем обозначение

$$\mathcal{X}^{a_0 \dots a_l} = \frac{(l+1)!}{\alpha_1! \dots \alpha_m!} x^{a_0} \dots x^{a_l},$$

где α_a – число индексов a в комбинации $a_0 \dots a_l$.

Тогда соотношение $\overset{3}{\text{можно}}$ $\overset{1}{\text{записать}}$ $\overset{2}{\text{записать}}$

$$x^{c_0} \dots x^{c_l} \bar{e}_{c_0 \dots c_l} = \mathcal{X}^{c_0 \dots c_l} \underline{\bar{e}_{c_0 \dots c_l}},$$

в результате чего система

$$\begin{cases} X^{a_0\dots a_\ell} = \dfrac{(\ell+1)!}{\alpha_1!\dots\alpha_m!}\sqrt[\ell+1]{X^{a_0\dots a_0}\dots X^{a_\ell\dots a_\ell}} \\ \sqrt[\ell+1]{X^{c\dots c}X^{d\dots d}}\,\bar{l}_c\bar{l}_d = 1 \end{cases} \qquad (I)$$

представляет индикатрису J^ℓ в аффинной координатной системе, определяющей векторами ℓ-ой кривизны $\bar{l}_{a_0\dots a_\ell}$ (считаем их пока линейно независимыми). Отсюда видно, что индикатриса J^ℓ является, в общем случае, $(m-1)$-мерной алгебраической поверхностью.

Случай линейной зависимости векторов $\bar{l}_{a_0\dots a_\ell}$ не представляется здесь трудным, так как на эти векторы можно смотреть при этом, как на результат предельного перехода от некоторых линейно независимых векторов $\bar{l}'_{a_0\dots a_\ell}$. С другой стороны, строение индикатрисы J^ℓ находится, очевидно, в непрерывном соответствии с расположением векторов $\bar{l}_{a_0\dots a_\ell}$. Поэтому все, что относится к случаю линейно зависимых векторов ℓ-ой кривизны, можно будет выяснить в результате предельного перехода от линейно независимых векторов ℓ-ой кривизны.

Для определения порядка индикатрисы J^ℓ, как алгебраической поверхности, выделим на плоскости R^ℓ_m произвольно некоторую плоскость R_s, где $s = n_{m\ell} - m + 1$, и найдем число точек (действительных и комплексных), в которых эта плоскость пересекается с индикатрисой J^ℓ. Искомые точки являются решениями системы (**), состоящей из уравнений (I) и m-I линейных уравнений плоскости R_s. Исключая из системы (**) координаты $X^{a_0\dots a_\ell}$, у которых не все индексы равны, получаем для определения m величин $X^{a\dots a}$ систему (**), или, что

то же самое, для определения величины $x^a = \sqrt[l+1]{X^{a\dots a}}$ — систему (* * *). Последняя состоит из одного квадратичного уравнения и m –I уравнений $(l+1)$–ой степени.

Такая система имеет $2(l+1)^{m-1}$ решений.

Если $\tilde{X}_0 = (x_0^1, \dots, x_0^m)$ является решением системы (* * *), то $\tilde{X}_0 = ((x_0^1)^{l+1}, \dots, (x_0^m)^{l+1})$ является решением системы (* *). Все $\tilde{X}$, соответствующие таким образом $\tilde{X}_0$, должны, очевидно, иметь вид $\tilde{X} = (\rho_1 x_0^1, \dots, \rho_m x_0^m)$, где $\rho_a = \sin\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right) + i\cos\left(\frac{2q_a}{l+1}\pi\right)$ – корни единицы. Нетрудно убедиться, что, в общем случае, $q_1 = \dots = q_m = q\,(l+1)$, а в случае нечетного l, имеем, кроме того, $q_1 = \dots = q_m = \frac{1}{2} q(l+1)$, где q – произвольное целое число.

Результаты этого пункта резюмирует

Т е о р е м а 2

Индикатриса l–ой кривизны J^l поверхности V_m в M является или $(m-1)$– мерной конечной алгебраической поверхностью, порядка $2(l+1)^{m-1}$, когда l четно, и порядка $(l+1)^{m-1}$, когда l нечетно, или же конечной фигурой, получаемой из такой алгебраической поверхности предельным переходом.

Теорема согласуется с результатами, полученными в [11] для случая $l = 1$, а также с результатами О.Борувка в [19].

3. Займемся строением сечений индикатрисы l–ой кривизны для двумерных подплоскостей касательной плоскости R_m.

Пусть на плоскости R_m совершается инфинитезимальное преобразование репера

$$d\bar{e}_a = \omega_a^c \bar{e}_c .$$

Этому преобразованию соответствует, в силу (I.I9) вполне определенное преобразование векторов ℓ-ой кривизны, которое с учетом обозначений гл.I § 3 п.I, записывается в виде

$$d\{\alpha_1,\dots\alpha_m\} = \sum_{i,j=1}^{m} \omega_i^j \alpha_i \{\alpha_1,\dots,\alpha_i-1,\dots,\alpha_j+1,\dots,\alpha_m\}$$

или, в случае ортонормированного насательного репера, в виде

$$d\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\} = \sum_{i<j} \omega_i^j \left(\alpha_i\{\alpha_1,\dots,\alpha_i-1,\dots\alpha_j+1,\dots\alpha_m\} - \alpha_j\{\alpha_1,\dots,\alpha_i+1,\dots,\alpha_j-1,\dots\alpha_m\}\right) \quad (2)$$

Пусть направление $\bar{x}$ вращается вокруг точки M в двумерной плоскости R_2 .При подходящем выборе ортонормированного подвижного репера для траектории конечной точки вектора $\bar{x}$ можно записать следующие формулы Френе:

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = \bar{e}_2 \\ \dot{\bar{e}}_2 = -\bar{e}_1 \end{cases};$$

здесь $\bar{e}_1 = \bar{x}$, а точка над вектором означает производную по α (α - угол поворота направления $\bar{x}$). Эти же формулы Френе можно записать и в следующем виде:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = -\omega_2^1 = \alpha \\ \omega_a^b = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Второе равенство выполняется для всех значений $(\frac{b}{a}) \neq (\frac{2}{1}), (\frac{b}{a}) \neq (\frac{1}{2})$.

При вращении $\bar{x} = \bar{e}_1$ в R_2 конец вектора $\bar{e}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1}}$ описывает на индикатрисе J^ℓ сечение $\mathcal{L}^\ell$ для R_2 .

В случае $m = 2$ это сечение $\mathcal{L}^\ell$ совпадает с J^ℓ .С учетом (2)

и (3) можно выписать соотношения

$$\frac{d}{d\alpha}\{l+1-s,s,0,\dots,0\} = (l+1-s)\{l-s,s+1,0,\dots,0\} - s\{l+2-s,s-1,0,\dots,0\},$$

где $s = 0,1,\dots,l+1$ и $\{-1,l+2,0,\dots,0\} = \{l+2,-1,0,\dots,0\} = 0$;

они являются своего рода формулами Френе для $\mathcal{L}^l$. Отсюда видно, что $\mathcal{L}^l$ вовсе не является произвольной замкнутой кривой, а имеет определенную структуру.

В самом деле, ведь кривая такого типа описывается концом вектора $\bar{a}_0(\alpha)$, являющегося решением системы

$$\begin{cases} \dot{\bar{a}}_0(\alpha) = (l+1)\bar{a}_1(\alpha) \\ \dot{\bar{a}}_1(\alpha) = l\bar{a}_2(\alpha) - \bar{a}_0(\alpha) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\bar{a}}_s(\alpha) = (l+1-s)\bar{a}_{s+1}(\alpha) - s\bar{a}_{s-1}(\alpha) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\bar{a}}_{l+1}(\alpha) = -(l+1)\bar{a}_l(\alpha) \end{cases} \qquad (4)$$

При $l = 1$ эта система определяет эллипс или его вырожденную форму.

Назовем кривую, определенную системой (4) при линейно независимых начальных значениях векторов $\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_{l+1}$ эллипсом степени l. Нетрудно видеть, что вид системы (4) сохраняется в случае линейно независимых векторов $\bar{a}_0,\dots,\bar{a}_{l+1}$, только при преобразовании вида $\alpha' = \pm\alpha + \alpha_0$, где α_0-постоянная. Поэтому, параметр α является для эллипса степени l каноническим. Так как векторы $\bar{e}_{1\dots12\dots2}$ могут иметь, в зависимости от строения поверхности V_m в близи точки M, любые значения, то нами доказана следующая

Т е о р е м а 3.

Любое сечение $\mathcal{L}^l$ индикатрисы l-ой кривизны J^l для двумерной плоскости является или эллипсом степени l, или его конечной вырожденной формой. С другой стороны, каждый эллипс степени l или его конечная вырожденная форма может быть сечением $\mathcal{L}^l$ некоторой индикатрисы J^l.

4. Выясним, может ли на индикатрисе J^l существовать эллипс степени l, не являющийся сечением индикатрисы для некоторой двумерной плоскости R_2.

Пусть конец единичного вектора $\bar{x}$ описывает в плоскости R_m, касательной к V_m в M, некоторую кривую $\mathcal{L}$. При подходящем выборе ортонормированного репера формулы Френе кривой $\mathcal{L}$ можно придать вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = \varkappa_1 \bar{e}_2 \\ \dot{\bar{e}}_2 = -\varkappa_1 \bar{e}_1 + \varkappa_2 \bar{e}_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\bar{e}}_a = -\varkappa_{a-1} \bar{e}_{a-1} + \varkappa_a \bar{e}_{a+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{\bar{e}}_m = -\varkappa_{m-1} \bar{e}_{m-1} \end{cases}, \qquad (5)$$

где $\bar{e}_1 = \bar{x}$. Эта система равносильна с системой

$$\begin{cases} \omega_a^{a+1} = \varkappa_a \alpha \\ \omega_a^{a+s} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

при произвольном $s > 1$. Нужно выяснить, при каких значениях величин $\varkappa_a$ вектор $\{l+1, 0, \dots, 0\}$ можно представить в виде решения системы (4), если учесть (2) и (6).

В данном случае имеем

$$\bar{a}_0 = \{l+1, 0, \dots, 0\},$$

$$\dot{\bar{a}}_0 = (l+1)\varkappa_1\{l, 1, 0, \dots, 0\},$$

откуда

$$\bar{a}_1 = \varkappa_1\{l, 1, 0, \dots, 0\}.$$

Далее получаем

$$\dot{\bar{a}}_1 = (1-\varkappa_1^2)\{l+1, 0, \dots, 0\} + \dot{\varkappa}_1\{l, 1, 0, \dots, 0\} + \varkappa_1\varkappa_2\{l, 0, 1, 0, \dots, 0\} + l\varkappa_1^2\{l-1, 2, 0, \dots, 0\} - \bar{a}_0,$$

т.е.

$$\bar{a}_2 = \frac{1-\varkappa_1^2}{l}\{l+1, 0, \dots, 0\} + \frac{\dot{\varkappa}_1}{l}\{l, 1, 0, \dots, 0\} + \frac{\varkappa_1\varkappa_2}{l}\{l, 0, 1, 0, \dots, 0\} + \varkappa_1^2\{l-1, 2, 0, \dots, 0\}.$$

Отсюда видно, что общее выражение для вектора $\bar{a}_s$ будет довольно сложным. Однако, не представляет трудностей нахождение коэффициента q_s вектора $\{l+2-s, s-1, 0, \dots, 0\}$ в выражении $\bar{a}_s$. Для этого коэффициента получаем

$$q_s = \frac{s(s-1)}{2(l+2-s)}\varkappa_1^{s-1}\varkappa_2.$$

Это означает, что в случае линейной независимости вектора $\{0, l, 1, 0, \dots, 0\}$ от других векторов l-ой кривизны, необходимым условием того, чтобы имело место

$$\dot{\bar{a}}_{l+1} = -(l+1)\bar{a}_l,$$

является равенство нулю $(l+2)(l+1)\varkappa_1^{l+1}\varkappa_2$, т.е. $\varkappa_2 = 0$

Но тогда формулы Френе для $\mathcal{L}$ (5) примут вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{e}}_1 = \varkappa_1\bar{e}_2 \\ \dot{\bar{e}}_2 = -\varkappa_1\bar{e}_1 \end{cases}, \qquad (7)$$

откуда следует, что единичный вектор $\bar{x} = \bar{e}_1$ вращается в двумерной плоскости, а кривая $\mathcal{L}$, описываемая его концом,

является окружностью с центром M. Следовательно, эллипс l-ой степени, описываемая концом вектора $\{l+1,0,\dots,0\}$, является сечением индикатрисы J^l для плоскости, в которой лежит окружность $\mathcal{L}$.

Тем самым доказана следующая

Теорема 4.

Если индикатриса l-ой кривизны J^l поверхности V_m в точке M не вырождена, то через каждые две ее точки P_1 и P_2 проходит только один эллипс l-ой степени. Этот эллипс l-ой степени является сечением $\mathcal{L}^l$ индикатрисы J^l для двумерной плоскости R_2, определяемой касательными направлениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ к V_m в M, которые соответствуют точкам P_1 и P_2 индикатрисы.

В силу того, что формулы (7) определяют круг единичного радиуса, должно иметь место равенство

$$\varkappa_1 = 1 .$$

Кроме того, α в формуле (6) приобретает вполне определенный смысл, это угол поворота вектора $\bar{x}$. С другой стороны, параметр α является для соответствующего сечения $\mathcal{L}^l$ натуральным. Следовательно, разница значений параметра α в двух точках P_1 и P_2 сечения $\mathcal{L}^l$ равна углу между соответствующими касательными направлениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ к V_m в M.

В силу теоремы 4 может быть теперь сформулирована

Теорема 5.

С помощью (не) выраженной индикатрисы J^l l-ой кривизны по-

верхности V_m в M можно построить естественное соответствие между точками индикатрисы J^l и направлениями касательной плоскости R_m к V_m в M с точностью до движения в R_m.

5. Назовем вектор

$$\overline{\xi}(\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_k^{s_k}) = x_1^{c_1^1}\dots x_1^{c_{s_1}^1}\dots x_k^{c_1^k}\dots x_k^{c_{s_k}^k}\,\bar{l}_{c_1^1\dots c_{s_1}^1\dots c_1^k\dots c_{s_k}^k}, \qquad (8)$$

где $|\bar{x}_1| = \dots = |\bar{x}_k| = 1$ и $\sum_{i=1}^{k} s_i = l+1$, вектором l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях $\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_k^{s_k}$. Символом $\bar{x}^s$ обозначается s-кратное взятие направления $\bar{x}$. Вектор $\overline{\xi}(\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_k^{s_k})$, очевидно, симметричен относительно всех $\bar{x}_i^{s_i}$.

Заметим, например, что в случае ортонормированного касательного репера к V_m в M можно записать:

$$\overline{\xi}(\bar{e}_1^{\alpha_1},\dots,\bar{e}_m^{\alpha_m}) = \{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}.$$

Пусть направление $\bar{x}$ вращается свободно в касательной плоскости R_m к V_m в M. Конец вектора $\overline{\xi}(\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_p^{s_p},\bar{x}^s)$, $s+\sum_{i=1}^{p} s_i = l+1$, отложенного из M, описывает в R_m^l некоторое точечное множество $J^{l,s} = J^l(\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_p^{s_p})$, которое назовем индикатрисой l-ой кривизны поверхности V_m в направлениях $\bar{x}_1^{s_1},\dots,\bar{x}_p^{s_p}$. Из (8) видно, что индикатриса $J^{l,s}$ имеет строение некоторой индикатрисы J^{s-1} и имеет поэтому в общем случае более простое строение, чем индикатриса J^l. Это обстоятельство позволяет, в случае надобности, заменить изучение "всей"

локальной окрестности точки M поверхности V_m более простым изучением окрестности точки M, так сказать, относительно некоторых заданных касательных направлений.

Представление о взаимном расположении индикатрис $J^{\ell,s}$ дает

Теорема 6.

Индикатриса кривизны $J^{\ell,s} = J^{\ell}(\bar{x}_1^{s_1}, \ldots, \bar{x}_k^{s_k})$ обладает свойством индикатрис кривизны $J^{\ell,s-p} = J^{\ell}(\bar{x}_1^{s_1}, \ldots, \bar{x}_k^{s_k}, \bar{y}^p)$ при изменении направления $\bar{y}$. Точной прилегания индикатрис $J^{\ell,s}$ и $J^{\ell,s-p}$ является конец вектора $\bar{\xi}(\bar{x}_1^{s_1}, \ldots, \bar{x}_k^{s_k}, \bar{y}^s)$.

Теорема вытекает из соотношения

$$\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial x^n}\bar{\xi}(\bar{x}_1^{s_1}, \ldots, \bar{x}_k^{s_k}, \bar{x}^s)\Big|_{\bar{x}=\bar{y}} = \frac{1}{s-p}\frac{\partial}{\partial x^n}\bar{\xi}(\bar{x}_1^{s_1}, \ldots, \bar{x}_k^{s_k}, \bar{y}^p, \bar{x}^{s-p})\Big|_{\bar{x}=\bar{y}}. \quad (9)$$

6. Простейшее строение из всех индикатрис кривизны $J^{\ell,s}$ имеют индикатрисы $J^{\ell,1}$, которые, как в этом нетрудно убедиться, являются или $(m-1)$ мерными эллипсоидами с центром в точке M, или вырожденными фигурами, получающимися из таких эллипсоидов, при устремлении длин некоторых из их осей к нулю. При помощи предельного перехода отнесем к этим фигурам все понятия, связанные с эллипсоидами.

Несложные доказательства следующих теорем опустим.

Теорема 7.

Индикатриса $J^{\ell,1} = J^{\ell}(\bar{x}_1^{s_1}, \ldots, \bar{x}_k^{s_k})$ имеет столько осей, отличающихся по длине от нуля, сколько найдется ли-

нейно независимых среди векторов

$$\overline{\xi}_a = x_1^{c_1'} \dots x_1^{c_{s_1}'} \dots x_\kappa^{c_1^\kappa} \dots x_\kappa^{c_{s_\kappa}^\kappa} \overline{\ell}_{c_1' \dots c_{s_1}' \dots c_1^\kappa \dots c_{s_\kappa}^\kappa a} .$$

Теорема 8.

Векторы $\overline{\xi}(\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_\kappa^{s_\kappa}, \bar{x})$ и $\overline{\xi}(\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_\kappa^{s_\kappa}, \bar{y})$ являются сопряженными радиусами-векторами индикатрисы $J^{\ell,1} = J^\ell(\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_\kappa^{s_\kappa})$ тогда и только тогда, когда направления $\bar{x}$ и $\bar{y}$ ортогональны.

§ 2. ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ.

При помощи индикатрис кривизны $J^{\ell,s} = J^\ell(\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_\kappa^{s_\kappa})$ можно определить в касательной плоскости R_m к V_m в M различные соответствия между направлениями. Для примера, можно определить направления $\bar{y}$, для которых радиус-вектор $\overline{\xi}(\bar{x}) = \overline{\xi}(\bar{x}_1^{s_1}, \dots, \bar{x}_\kappa^{s_\kappa}, \bar{x}^s)$ индикатрисы $J^{\ell,s}$ приобретает стационарный квадрат. В результате получается вполне определенное соответствие между направлениями $\bar{y}$ и $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_\kappa$.

Такие соответствия помогут выделить особые типы касательных направлений, классы поверхностей и т.д. Но так как

1) в общем случае не представляет принципиальных трудностей выписать сложные системы уравнений для определения упомянутых выше направлений $\bar{y}$ и

2) этот подход является, по нашему мнению, пока еще слишком формальным, лишенным достаточно содержательной геометрической картины, то мы далее не будем заниматься такой общей

постановкой задачи. Много этого будем исходить из одной конкретной геометрически довольно содержательной задачи о взаимном расположении близких касательных плоскостей к V_m. Как выяснится, эта задача близко связана с инвариантами первой группы $J^{1,1}$ и с определяющими или касательными направлениями. Далее последует анализ результатов и обзор их дальнейшего развития.

Взаимное расположение близких касательных плоскостей в случае поверхности $V_2 \in R_4$ изучал Ван Ди-чжоу в [27].

1. Рассмотрим на поверхности V_m произвольную точку M с некоторой ее окрестностью $\mathcal{U}$. Пусть в $\mathcal{U}$ задана проходящая через точку M кривая $M(s)$, где s - длина дуги; при этом точке M пусть соответствует значение $s=0$. Пусть, далее, на этой кривой $M(s)$ определен подвижный касательный к V_m репер $\bar{e}_a(s)$. Касательную плоскость к V_m в $M(s)$ обозначим через $R_m(s)$. Для простоты вместо $\bar{e}_a(0)$, $\bar{e}_{ac}(0)$ и $R_m(0)$ будем писать соответственно $\bar{e}_a$, $\bar{e}_{ac}$ и R_m.

Выберем в плоскостях R_m и $R_m(s)$ по одному свободно изменяющемуся направлению

$$\bar{x} = x^c \bar{e}_c \in R_m \quad \text{и} \quad \tilde{\bar{x}} = \tilde{x}^c \bar{e}_c(s) \in R_m(s)$$

и обозначим через α угол между ними; тогда $\cos\alpha = \bar{x}\tilde{\bar{x}}$. При заданном $s \neq 0$ на плоскостях R_m и $R_m(s)$ определяются соответственно ориентированных направлений (не обязательно одномерных) $y(s)$ и $\tilde{y}(s)$ соответственно, между которыми косинус (а вместе с тем и квадрат) угла α принимает стационарное значение (см. [8]). При стремлении точки $M(s)$ к

точке M системы $\mathcal{Y}(s)$ и $\tilde{\mathcal{Y}}(s)$ определяют в R_m некоторую предельную систему $\mathcal{Y} = \lim_{s\to 0} \mathcal{Y}(s) = \lim_{s\to 0} \tilde{\mathcal{Y}}(s)$.

Теорема 9

Предельная система $\mathcal{Y}$ в плоскости R_m зависит, кроме строения поверхности V_m вокруг точки M , только от направления кривой $M(s)$ в M .

Доказательство. Системы $\mathcal{Y}(s)$ и $\tilde{\mathcal{Y}}(s)$ являются ортогональными проекциями друг в друга на плоскости $R_m(s)$ и R_m (см.[8]). Следовательно, углы α , имеющие стационарный квадрат, реализуются между векторами вида $\bar{x}$ и $\bar{x}^*(s)$, где $\bar{x}^*(s)$ - вектор в плоскости $R_m(s)$, ортогонально проектирующийся на плоскость R_m в вектор $\bar{x}$.

Так как для достаточно малого значения s функцию $\bar{e}_a(s)$ можно разложить в ряд

$$\bar{e}_a(s) = \bar{e}_a + d\bar{e}_a + \dots = \bar{e}_a + \omega_a^c \bar{e}_c + \omega^c \bar{e}_{ac} + \dots ,$$

а линейные соотношения между векторами при проектировании сохраняются, то, очевидно, соответствующий вектору $\bar{x} = x^c \bar{e}_c$ вектор $\bar{x}^*(s)$ имеет вид

$$\bar{x}^* = x^c \left(\bar{e}_c + \omega^d \bar{e}_{cd} + \bar{O}_c(s) \right), \qquad (10)$$

где $\lim_{s\to 0} \frac{1}{s} \bar{O}(s) = 0$ и $\omega^d \bar{e}_d$ - главная линейная часть вектора $\bar{M}(s) - \bar{M}$. Таким образом, угол α между векторами $\bar{x}$ и $\bar{x}^*(s)$ выразится формулой

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} |\bar{x}^* - \bar{x}| = \operatorname{arc\,tg} \left| s x^c y^d \bar{e}_{cd} + \bar{O}(s) \right| , \qquad (11)$$

где $\bar{y} = y^c \bar{e}_c$ – направление кривой $M(s)$ в точке M.

Теперь уже нетрудно показать, что искомая система y определяется решениями системы

$$x^b \left(\bar{e}_{bc} \bar{e}_{ad} y^c y^d - K \bar{e}_a \bar{e}_b \right) = 0 , \tag{12}$$

где K – корень уравнения

$$\mathrm{Det} \left| \bar{e}_{bc} \bar{e}_{ad} y^c y^d - K \bar{e}_a \bar{e}_b \right| = 0 . \tag{13}$$

Отсюда видно, что система y зависит только от направления $\bar{y}$ кривой $M(s)$ в M. Теорема доказана.

Направления, образующие систему y, назовем **главными направлениями относительно направления** $\bar{y}$. Каждому p-кратному корню уравнения (13) соответствует p-мерное главное направление относительно $\bar{y}$.

Пример 1. В случае двумерной поверхности V_2 и ортонормированного касательного репера систему (12) можно заменить уравнением

$$tg\,2\theta = 2 \frac{\bar{e}_{12} \bar{e}_{22} tg^2\varphi + (\bar{e}_{11} \bar{e}_{22} + \bar{e}_{12}^2) tg\varphi + \bar{e}_{11} \bar{e}_{12}}{(\bar{e}_{12}^2 - \bar{e}_{22}^2) tg^2\varphi + 2\bar{e}_{12}(\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22}) tg\varphi + \bar{e}_{11}^2 - \bar{e}_{12}^2} , \tag{14}$$

где φ – угол между направлениями $\bar{e}_1$ и $\bar{y}$, а θ – угол между $\bar{e}_1$ и главным направлением относительно $\bar{y}$. Если здесь знаменатель обратится в нуль, то следует предполагать, что $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$. Случай, когда знаменатель и числитель одновременно обращаются в нуль, рассматривается в дальнейших приме-

рах. Для случая V_2 в R_4 аналогичное уравнение получил Ван Ин-чжоу в [27].

2. Ту же систему (I2) можно получить, когда будем искать направления $\bar{x}$, в которых вектор $\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x})$, т.е. радиус-вектор индикатрисы первой кривизны $J^1(\bar{y})$, приобретает стационарный квадрат. Соединяющим звеном между этими подходами является, в силу (I0), получаемое соотношение

$$\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x}) = \lim_{s\to 0} \frac{\bar{x}^* - \bar{x}}{s} .$$

Если учесть еще § I, п.6, то может быть сформулирована

Т е о р е м а I0.

Направление $\bar{x}$ есть главное направление относительно $\bar{y}$ тогда и только тогда, когда $\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x})$ есть главный радиус-вектор индикатрисы первой кривизны в направлении $\bar{y}$.

Приведем еще несколько теорем.

Т е о р е м а II.

Корни уравнения (I3) равны квадратам главных радиусов-векторов индикатрисы кривизны в направлении $\bar{y}$.

Для доказательства этой теоремы достаточно выбрать касательный репер так, чтобы его векторы оказались решениями системы (I2).

Т е о р е м а I2.

Если направления $\bar{x}$ и $\bar{y}$ на V_m сопряжены, т.е. когда $x^c y^d \bar{x}_{cd} = 0$ (см. [11]), то каждое из них является

главным направлением относительно другого.

Направления, сопряженные с направлением $\bar{y}$, соответствуют, очевидно, нулевым корням уравнения (13).

Следствие. Необходимым и достаточным условием существования сопряженных направлений для $\bar{y}$ является вырождение индикатрисы первой кривизны в направлении $\bar{y}$.

Теорема 13.

Касательное направление $\bar{x}$ к поверхности V_m есть главное направление относительно самого себя тогда и только тогда, когда скалярный квадрат вектора первой кривизны $\bar{\xi}(\bar{x}^2)$ поверхности V_m в этом направлении приобретает стационарное значение.

Эта теорема следует из теорем 6 и 10.

3°. Пусть направление $\bar{x}$ вращается в касательной плоскости R_m к V_m в M так, чтобы он всегда оставался ортогональным к касательному направлению $\bar{y}$, т.е. $\bar{x}\bar{y} = 0$. Тогда конец вектора $\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x})$ описывает на индикатрисе $J^1(\bar{y})$ некоторое точечное множество, которое в силу теоремы 8 естественно назвать сопряженным сечением индикатрисы $J^1(y)$. Это сечение является или $(m-2)$-мерным эллипсоидом, или вырожденной фигурой, получаемой из такого эллипсоида при стремлении длин некоторых его осей к нулю (см.§ I п.6). Плоскость сопряженного сечения индикатрисы кривизны $J^1(\bar{y})$, в силу теоремы 6, параллельна касательной плоскости к индикатрисе первой кривизны J^1 в конце вектора $\bar{\xi}(\bar{y}^2)$.

Аналогично теореме 8 имеет место

Теорема 14.

Векторы $\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x})$ и $\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x}')$, где $\bar{x}\bar{y} = \bar{x}'\bar{y} = 0$, являются сопряженными радиусами-векторами сопряженного сечения индикатрисы $J^1(\bar{y})$ тогда и только тогда, когда $\bar{x}\bar{x}' = 0$.

При помощи предельного перехода от линейно независимых векторов $y^c \bar{e}_{ac}$ к линейно зависимым доказывается

Теорема 15.

В случае асимптотического напряжения $\bar{y}$, т.е. в случае $\bar{\xi}(\bar{y}^2) = 0$ (см.напр. [11]), сопряженное сечение индикатрисы $J^1(\bar{y})$ имеет только осей с отличными от нуля длинами, сколько найдется линейно независимых среди векторов $y^c \bar{e}_{ac}$. В случае неасимптотического $\bar{y}$ число таких осей на единицу меньше.

Теорема 16.

Направления $\bar{x}$, для которых вектор $\bar{\xi}(\bar{y},\bar{x})$ служит главным радиусом-вектором сопряженного сечения индикатрисы $J^1(\bar{y})$, являются решениями системы

$$\begin{cases} x^c(\bar{e}_{cd}\bar{e}_{ae}y^d y^e - k\bar{e}_c\bar{e}_a) - l\bar{e}_a\bar{e}_d y^d = 0 \\ \bar{x}\bar{y} = 0 \\ \bar{x}^2 = 1 \end{cases} \qquad (15)$$

Здесь при единичном векторе $\bar{y}$ величина k равна квадрату соответствующего главного радиуса-вектора сопряженного сечения, а l равно скалярному произведению этого главно-

го радиуса-вектора и вектора первой кривизны $\bar{\zeta}(\bar{y}^2)$.

Доказательство. Для получения системы (I5) достаточно выписать уравнения, определяющие стационарные значения функции $(x^c y^d \bar{\ell}_{cd})^2$ от $\bar{x}$, при условиях $\bar{x}^2 = 1$, $\bar{x}\bar{y} = 0$. Эта система по своему геометрическому смыслу всегда имеет $m - 1$ взаимно ортогональных решений.

Пусть ортонормированные векторы $\bar{\ell}_a$ выбраны так, чтобы $\bar{\ell}_1 = \bar{y}$, а остальные из них являются решениями системы (I5). Тогда (I5) примет вид

$$\bar{\ell}_{1a}\bar{\ell}_{1b} - k\delta_{ab} - l\delta_{1a} = 0,$$

где $b \neq 1$. Векторы $\bar{\ell}_{1b}$ $(b \neq 1)$ являются здесь главными радиусами-векторами сопряженного сечения индикатрисы $J^1(\bar{y})$, а $\bar{\ell}_{11}$ – вектором первой кривизны в направлении $\bar{y}$. Утверждение теоремы является теперь очевидным.

Назовем направления, определяемые системой (I5), г л а в н ы м и н а п р а в л е н и я м и в т о р о г о р о д а о т н о с и т е л ь н о н а п р а в л е н и я $\bar{y}$. Они могут быть и многомерными.

Т е о р е м а I7.

Главные направления второго рода относительно направления $\bar{y}$ являются также главными направлениями относительно $\bar{y}$ тогда и только тогда, когда направлению $\bar{y}$ является главным относительно самого себя.

Эта теорема в силу теоремы I0 непосредственно следует из свойств эллипсоида.

§ 3. ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ

Естественно поставить задачу об определении особого типа касательных направлений к V_m, которые зависят только от локального строения поверхности V_m в окрестности точки M и не зависят от выбора других касательных направлений. Одним типом таких направлений являются те направления, которые оказываются главными относительно самого себя.

Возникают следующие вопросы. Можно ли главные направления относительно самого себя считать обобщением классических главных направлений поверхности V_2 в R_3 ? Как они связаны с главными направлениями многомерной поверхности, определенными И.А. СХОУТЕНОМ и Д.Дж.СТРОЙКОМ в [11] или направлениями кривизны Д.И. ПЕРЕПЕЛКИНА (см. [7]) ? Как переносятся характеристические свойства главного направления поверхности V_2 в R_3 на случай многомерной поверхности?

I. Выразим величину k из одного из уравнений (I2) и подставим в остальные уравнения. Тогда (I2) примет вид

$$x^a x^b y^c y^d \bar{\ell}_{ac}\left(g_{eb}\bar{\ell}_{df} - g_{fb}\bar{\ell}_{de}\right) = 0, \qquad (I6)$$

где $g_{eb} = \bar{\ell}_e \bar{\ell}_b$. Если здесь взять $\bar{y} = \bar{x}$, получим систему

$$x^a x^b x^c x^d \bar{\ell}_{ac}\left(g_{eb}\bar{\ell}_{df} - g_{fb}\bar{\ell}_{de}\right) = 0 \qquad (I7)$$

для определения направлений, главных относительно самого себя.

Пример 2. При помощи (I7) нетрудно найти признак того, что все касательные направления к V_m в M являются главными относительно самого себя. В ортонормированном касательном репере необходимыми и достаточными условиями этого являются следующие соотношения между координатами тензора первой кривизны:

$$\begin{cases} \bar{\ell}_{aa}\bar{\ell}_{ab}=0 \\ \bar{\ell}_{aa}\bar{\ell}_{bb}+2\bar{\ell}_{ab}^2-\bar{\ell}_{aa}^2=0 \\ \bar{\ell}_{aa}\bar{\ell}_{bc}+2\bar{\ell}_{ab}\bar{\ell}_{ac}=0 \\ \bar{\ell}_{ab}\bar{\ell}_{cd}+\bar{\ell}_{ad}\bar{\ell}_{bc}+\bar{\ell}_{ac}\bar{\ell}_{db}=0 \end{cases}, \qquad (I8)$$

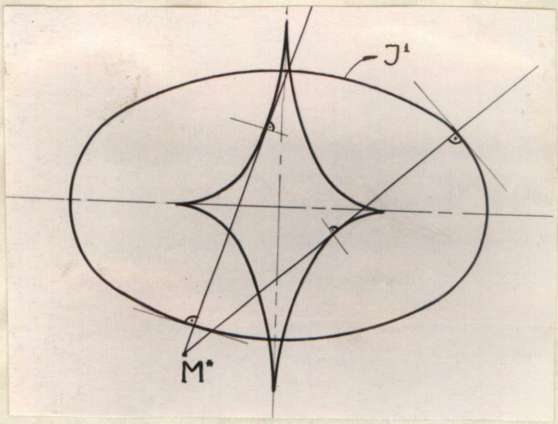
которые должны выполняться для всех различных a, b, c и d. Соответствующая точка M на V_m, очевидно, является соответственно обобщенной омбилической точкой поверхности (см. [24]).

В силу теорем 6 и I0 или I3 в случае невырожденной индикатрисы J^1 главное относительно самого себя направление $\bar{y}$ можно определить также, как такое направление, в котором вектор первой кривизны $\bar{\ell}(\bar{y}^2)$ ортогонален к J^1.

Пример 3. В случае $m=2$ и невырожденной индикатрисы J^1 (эллипс, плоскость которого, вообще говоря, не проходит через M (см., напр., [11])) в точке M поверхности V_2 получается 2, 3 или 4 направления, главных относительно самого себя, в зависимости от того, находится ли ортогональная проекция M^* точки M на плоскости индикатрисы J^1

соответственно вне эволюты индикатрисы J^1_1, в не особой точке эволюты, или внутри эволюты. Если точка M^* окажется особой точкой эволюты индикатрисы J^1, то имеем в M два главных направления относительно самого себя.

Исключение составляет тот случай, когда индикатриса является окружностью. Здесь или все, или только два касательных направления являются



главными относительно самого себя; это зависит от того, находится ли точка M^* в центре индикатрисы или нет. Случай вырождения индикатрисы нетрудно получается при помощи предельного перехода.

Теперь согласно теореме I получается

Т е о р е м а I8.

Если направление $\bar{y}$ является главным относительно самого себя в точке M поверхности V_m, то оно является главным относительно самого себя и на любой подповерхности $V_q \subset V_m$ геодезической на V_m в M и касающейся в M направления $\bar{y}$. Имеет место и обратное утверждение, причем q может быть фиксировано.

Последнее утверждение следует из того, что если радиус-вектор $\bar{a}$ p-мерного эллипсоида J_p является главным радиус-вектором всех s-мерных подэллипсоидов J_s эллипсоида J_p, которым он принадлежит, то он является и главным радиус-вектором эллипсоида J_p.

2. Так как асимптотическое направление на V_m $(\bar{\kappa}(\bar{x}^2)=0)$ всегда является главным направлением относительно самого себя, то последнее нельзя рассматривать как простое обобщение классического главного направления V_2 в R_3 на многомерный случай.

В [11] определяется главное направление многомерной поверхности, как направление, в котором вектор первой кривизны поверхности приобретает экстремальную длину, отличную от нуля. По тем самым исключается из числа главных направлений асимптотическое направление развертывающейся поверхности V_2 в R_3. Кроме того, имеют место случаи, когда вектор первой кривизны имеет стационарную длину, не являющуюся экстремальной. Выделение этих случаев затруднительно.

Пример 4. Пусть ортогональная проекция M^* точки M поверхности V_2 на плоскость соответствующей невырожденной индикатрисы J^1 находится в не особой точке эволюты индикатрисы. Тогда одно из трех стационарных значений длины вектора $\bar{\kappa}(\bar{x}^2)$ не является экстремальной.

Вышеизложенные недостатки устраняет следующее

Определение. Касательное направление $\bar{y}$ к поверхности V_m в ее точке M назовем главным направлением поверхности,

когда вектор первой кривизны поверхности V_m имеет в этом направлении стационарную длину. (Кривые, направления которых являются на V_m главными, назовем л и н и я м и к р и в и з н ы.)

Т е о р е м а I9.

Требование стационарности длины, а не стационарности квадрата вектора первой кривизны) исключается из числа касательных направлений, главных относительно самого себя, те асимптотические направления, в которых поверхность V_m не является тангенциально вырожденной (см. [10]).

Доказательство. Пусть касательный репер и V_m в M ортонормирован. Обозначим символ дифференцирований по $mod\,(\omega^1,\dots,\omega^m)$ через δ . Тогда, в силу (I.I9), получается

$$\delta \bar{e}_{aa} = 2\omega_a^c \bar{e}_{ac} .$$

Теперь, принимая во внимание, что $\bar{e}_{aa}$ является здесь вектором первой кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{e}_a$, можно установить следующее:

I) направление $\bar{e}_a$ является неасимптотическим главным направлением поверхности V_m тогда и только тогда, когда $\bar{e}_{aa} \neq 0$, $\bar{e}_{aa}\,\bar{e}_{ab} = 0$ для всех $b \neq a$. В этом случае понятия "главное направление поверхности" и "главное направление относительно самого себя" совпадают.

2) Направление $\bar{e}_a$ является асимптотическим главным направлением поверхности тогда и только тогда, когда $\bar{e}_{ab} = 0$

для всех b , т.е. в случае тангенциального вырождения поверхности в этом направлении. В то же время каждое асимптотическое направление является главным относительно самого себя.

Теорема доказана.

В силу теоремы I9 ниже определение главного направления поверхности в случае $V_2 \subset R_3$ полностью совпадает с классическим.

3. В докторской диссертации Д.И. ПЕРЕПЕЛКИНА [7] (см.также [6]) направление кривизны определяется как направление, касательное к V_m и имеющее большее число ортогональных к нему сопряженных направлений, чем это имеет место при той же размерности m_1 для первой нормальной плоскости R_m^1 к V_m в общем случае. Так, обычное касательное направление к V_m имеет ∞^{m-m_1-1} сопряженных направлений из которых ∞^{m-m_1-2} с ним ортогональны. Направлению кривизны имеет не менее ∞^{m-m_1-1} ортогональных к нему сопряженных направлений.

Из теорем I2,I9 и свойств эллипсоида непосредственно следует, что при заданном направлении $\bar{y}$ увеличение числа ортогональных к нему сопряженных направлений может произойти только тогда, когда $\bar{y}$ является либо главным направлением поверхности, либо имеет вообще больше сопряженных к нему направлений, чем произвольно взятые касательные направления к V_m в M . В последнем случае $\bar{y}$ не должно быть, вообще говоря, главным.

Пример 5. Пусть в точке M поверхности V_4 при заданном ортонормированном касательном репере имеют место соотношения $\bar{\ell}_{11} = \bar{\ell}_{22} = \bar{\ell}_{33} = \bar{\ell}_{44} = \bar{\ell}_{12} = \bar{a} \neq 0$, $\bar{\ell}_{23} = \bar{\ell}_{24} = \bar{\ell}_{34} = \bar{b} \neq 0$ и $\bar{\ell}_{13} = \bar{\ell}_{14} = 0$, где $\bar{a} \neq \bar{b}$. Тогда $\bar{e}_1$ является направлением кривизны, но не главным направлением поверхности.

4. Имеет место

Теорема 20.

Пусть даны на поверхности V_m точка M, касательная к V_m в M плоскость R_m, направление $\bar{y}$ в R_m и точка M' — инфинитезимальное смещение точки M в направлении $\bar{y}$. Пусть $\bar{x}$ — свободно изменяющееся направление в плоскости R_m. Направление $\bar{y}$ является главным для поверхности V_m тогда и только тогда, когда угол α между $\bar{x}$ и его ортогональной проекцией на плоскость R'_m, касательную к V_m в M', приобретает при $\bar{x} = \bar{y}$ стационарное значение. Если квадрат угла α приобретает при $\bar{x} = \bar{y}$ стационарное значение, то направление $\bar{y}$ — главное относительно самого себя.

Несложное доказательство этой теоремы основывается на соотношениях (9) и (11).

В пространстве R_3 это характеристическое свойство главного направления выражается известной формулой Родрига.

5. Вторым характеристическим свойством классического главного направления для поверхностей V_2 в R_3, является

то, что нормали вдоль линии кривизны образуют развертывающуюся поверхность. Посмотрим, что соответствует этому свойству в случае общего V_m в M .

Каждую точку M^* в первой нормальной плоскости R_m^1 к поверхности V_m в M можно представить вектором вида

$$\bar{M}^* = \bar{M} + x^{cd}\bar{e}_{cd} .$$

Вычислим при помощи (I.I9) дифференциал вектора $\bar{M}^*$ и разложим этот дифференциал на две компоненты

$$d\bar{M}^* = \bar{\Omega} + \bar{\Phi} ,$$

где $\bar{\Omega}$ принадлежит касательной плоскости R_m, а $\bar{\Phi}$ – ортогональна к R_m. При помощи того же (I.I9) для векторной дифференциальной формы $\bar{\Omega}$ можно дать вид

$$\bar{\Omega} = \omega^c \sum_a \{\delta_{ca} - (\bar{M}^* - \bar{M})\bar{e}_{ac}\}\bar{e}_a ,$$

где касательный к V_m репер ортонормирован.

С каждым касательным направлением $\bar{x}$ можно теперь в плоскости R_m^1 связать некоторое многообразие $\mathcal{K}(\bar{x})$,состоящее из всех точек M^* , для которых имеет место

$$\bar{\Omega}(\bar{x}) = x^c \sum_a \{\delta_{ca} - (\bar{M}^* - \bar{M})\bar{e}_{ac}\}\bar{e}_a = 0 . \qquad (I9)$$

Многообразие $\mathcal{K}(\bar{x})$,по-видимому, есть пересечение нормальной плоскости R'_{n-m} в точке M' ,являющейся инфинитезимальным смещением точки M в направлении $\bar{x}$, с первой нормальной плоскостью к V_m в точке M .

Сумма многообразий $K(\bar{x})$,

$$K = \bigcup_{\bar{x}} K(\bar{x})$$

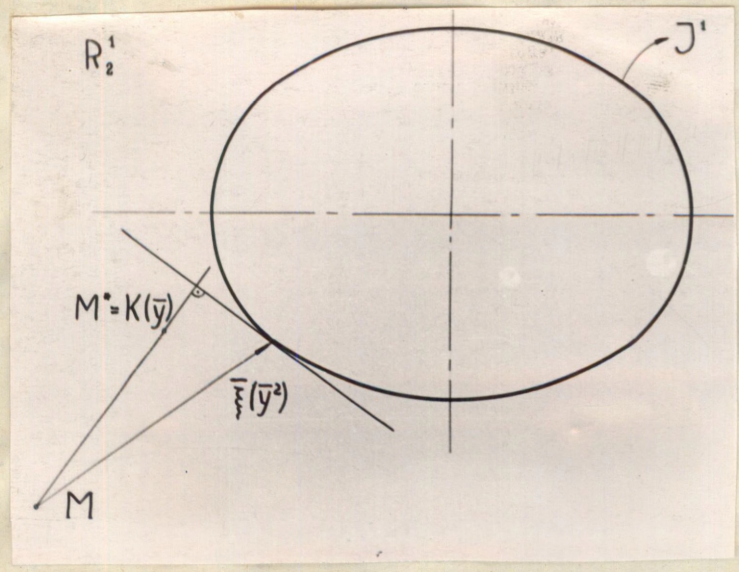
является многообразием K ПЕРЕНЕСЕНИЯ (см. [6], [7]).

Теперь при помощи (I9) получается

Т е о р е м а 2I.

Пусть через точку M на V_m проходит кривая $\mathcal{L}$ с касательным направлением $\bar{y}$. Точка M^* в первой нормальной плоскости R_m^1 является фокальной для семейства нормальных к V_m плоскостей R_{n-m} , взятых по кривой $\mathcal{L}$, тогда и только тогда, когда вектор $\bar{M}^*-\bar{M}$ ортогонален к сопряженному сечению индикатрисы $J^1(\bar{y})$, а его скалярное произведение с вектором первой кривизны $\bar{\xi}(\bar{y}^2)$ равно единице.

Пример 6. В общем случае $V_2 \subset R_4$ имеет место следующая картина:



$$(\bar{M}^*-\bar{M})\,\bar{\xi}(\bar{y}^2)=1 \ .$$

Пусть $\bar{y}$ – неасимптотическое касательное направление к V_m в M. Конечную точку вектора $\bar{M}_{\bar{y}} = \bar{M} + \frac{1}{\Pi^2(\bar{y}^2)} \bar{\Pi}(\bar{y}^2)$ назовем **центром кривизны** поверхности V_m в направлении $\bar{y}$. При помощи теоремы 21 теперь легко доказывается

Теорема 22.

Пусть через точку M поверхности V_m проходит кривая $\mathcal{L}$ с касательным направлением $\bar{y}$. Направление $\bar{y}$ является неасимптотическим главным направлением поверхности V_m тогда и только тогда, когда центр кривизны поверхности V_m в направлении $\bar{y}$ является фокальной точкой семейства нормальных плоскостей к V_m, взятых вдоль кривой $\mathcal{L}$.

Если к этой теореме добавить то обстоятельство, что асимптотическое направление является главным только в случае тангенциального вырождения поверхности V_m в этом направлении, то отсюда в случае $V_2 \subset R_3$ получается упомянутое классическое свойство, что нормали, взятые в точках линии кривизны, образуют развертывающуюся поверхность.

6 #.

Пересечение многообразий $K(\bar{x})$ для всех $\bar{x}$ представляют собой некоторое новое многообразие $K^* \subset K$. Из (19) следует, что M^* является точкой многообразия K^* тогда и только тогда, когда

$$(\bar{M}^* - \bar{M})\bar{e}_{\alpha\nu} = \delta_{\alpha\nu} \qquad (20)$$

для всех a и b.

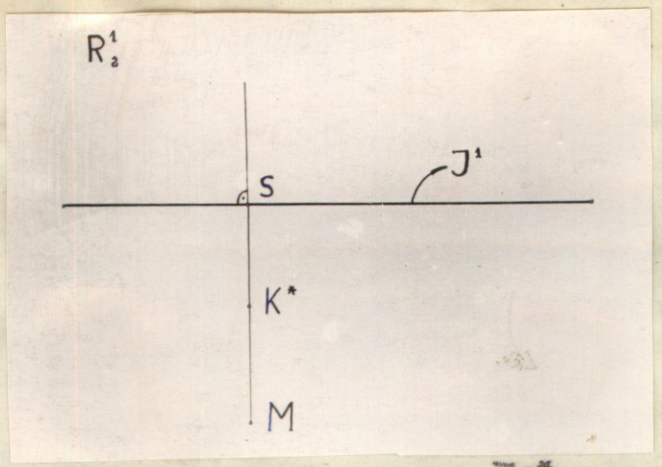
Нетрудно убедиться, что плоскость R^1 индикатрисы J^1 определяется, в случае ортонормированного касательного репера, векторами $\bar{e}_{ac}$ и $\bar{e}_{aa}-\bar{e}_{bb}$ для всех $a \neq b$. Так, например, из (2) следует, что $d\bar{e}_{aa}=2\omega_a^c \bar{e}_{ac}$, $d\bar{e}_{ab}=\omega_a^c(\bar{e}_{bb}-\bar{e}_{aa})+\omega_b^c \bar{e}_{cb}+\omega_b^c \bar{e}_{ac}$, где $c \neq a$, $c \neq b$ (по b не суммировать!). Теперь из (20) следует, что это может иметь решение тогда и только тогда, когда точка M не находится на плоскости R^1. Отсюда получается

Теорема 23.

Многообразие K^* или пусто, или состоит из одной точки. В последнем случае или первая нормальная плоскость R_m^1 к V_m в M имеет максимальную размерность $m_1=\frac{1}{2}m(m+1)$, или M - полуумбилическая точка поверхности V_m (см. [6]). Вектор $\bar{K}^*-\bar{M}$ ортогонален к плоскости R^1 индикатрисы J^1 и длина его равна $\frac{1}{\rho}$, где ρ -расстояние точки M от плоскости R^1.

Ниже, говоря о точке K^*, будем подразумевать непустое многообразие K^*.

Пример 2. В случае поверхности V_2, имеющей в M двумерную первую нормальную плоскость R_2^1 точка K^* существует тогда и только тогда, если индикатриса J^1 вырождена в отрезок. При этом имеем следующую картину:



$$(\bar{S}-\bar{M})(\bar{K}^*-\bar{M})=1 .$$

Множество всех точек K^* для произвольной $M \subset V_m$ образует некоторое многообразие F размерности $m_F \leq m$. Множество нормальных к V_m плоскостей R_{n-m} огибает многообразие F.

Теперь уже очевидна

Теорема 24.

Для существования огибающего семейства первых нормальных плоскостей R^1_m к V_m необходимо, чтобы, или плоскости R^1_m имели размерность $m_1=\frac{1}{2}m(m+1)$, или поверхность V_m состояла из полуэллиптических точек M. Когда порядок кривизны поверхности V_m равен I, то это условие является и достаточным.

Не безынтересно будет сравнить результаты этого пункта с результатами А.В. ЧАКМАЗЯНА в [13] и [14].

7. Назовем $\bar{y}$ **параптактическим направлением** поверхности V_m, когда существует m-мерное направление, главное относительно $\bar{y}$, т.е. когда система (16) превращается относительно $\bar{x}$ в тождество. Отсюда получается для определения параптактического направ-

ления система

$$y^c y^d \left[\bar{\ell}_{ac}(g_{eb}\bar{\ell}_{df} - g_{fb}\bar{\ell}_{de}) + \bar{\ell}_{bc}(g_{ea}\bar{\ell}_{df} - g_{fa}\bar{\ell}_{de})\right] = 0. \qquad (21)$$

Очевидно, что паратактическое направление является частным случаем главного направления относительно самого себя.

Из теоремы I0 следует, что направление $\bar{y}$ является паратактическим тогда и только тогда, когда индикатриса $J^1(\bar{y})$ есть или сфера, или точка. Последний случай равносильно тангенциальному вырождению поверхности V_m в направлении $\bar{y}$. В силу § 2 п.I можно утверждать, что две касательные плоскости R_m и R'_m к V_m в точках M и M' (M' получается инфинитезимальным смещением точки M в паратактическом направлении) – паратактические (см. [8]).

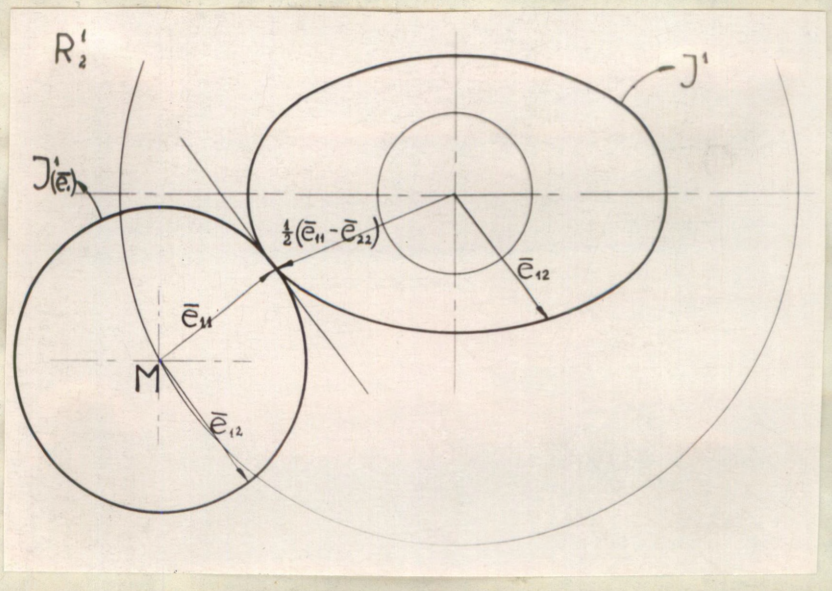
Если касательный к V_m репер ортонормирован, то выполнение условий

$$\begin{cases} \bar{\ell}_{1b}\bar{\ell}_{1n} = 0 \\ \bar{\ell}^2_{1b} = \bar{\ell}^2_{1a} \end{cases} \qquad (22)$$

для всех b и $a \neq 1$, $a \neq b$ являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы направление $\bar{\ell}_1$ было паратактическим (см. (21)). Это следует и из того, что индикатриса $J^1(\bar{y})$ является здесь или сферой или точкой.

Пример 8. Нетрудно убедиться, что пары векторов $\bar{\ell}_{11}, \bar{\ell}_{12}$ и $\frac{1}{2}(\bar{\ell}_{11} - \bar{\ell}_{22}), \bar{\ell}_{12}$ являются в случае ортонормированного касательного репера сопряженными радиусами-векторами сечений соответствующих индикатрис $J^1(\bar{\ell}_1)$ и J^1 для плос-

кости векторов $\bar{\ell}_1$ и $\bar{\ell}_2$. Поэтому в случаях $V_2 \subset R_4$ и невырожденной индикатрисы J^1 для параболического направления $\bar{y}$ имеет место следующая картина:



Так как теорема I очевидным образом распространяется и на индикатрисы $J^{1,1}$, то аналогично теореме I8 получается

Т е о р е м а 25.

Если направление $\bar{y}$ является параболическим в точке M поверхности V_m, то оно является параболическим и на любой подповерхности $V_q \subset V_m$, геодезической на V_m в M и касающейся в M $\bar{y}$. Обратное также имеет место, причем q может быть фиксирована.

Пусть в некоторой плоскости R_2 задан эллипс J, центром которого является точка P, а длины полуосей равны a и b, где $a > b$. Тогда существует единственная поверхность Ω, имеющей линией центров эллипс J и пересекающей плоскость R_2 по двум окружностям. Центры

этих окружностей совпадают с P, а радиусы равны $a+b$ и $a-b$. Точками самопересечения поверхности Ω являются те точки окружности $\mathcal{L}$, проходящей ортогонально к плоскости R_2 через фокусы эллипса J, расстояние которых от R_2 больше $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-b^2}$. В этом можно убедиться после довольно простых выкладок. При помощи предельных переходов $b \to a$, $b \to 0$ и $\begin{cases} b \to 0 \\ a \to c \end{cases}$ все сказанное легко обобщается и на случай окружности и вырожденного эллипса.

Таким образом, сечением $\mathcal{L}^1$ индикатрисы J^1 для произвольной двумерной подплоскости R_2, касательной плоскости R_m всегда можно связать в первой нормальной плоскости R_m^1 некоторое многообразие Ω. Если $\mathcal{L}^1$ не вырождено, то Ω является в R_m^1 каналовой гиперповерхностью, если $\mathcal{L}^1$ - окружность, то геометрическое место самопересечений поверхности Ω состоит только из центра сечения $\mathcal{L}^1$. Если $\mathcal{L}^1$ вырождено в отрезок, то Ω является в R_m^1 гиперсферой с диаметром $\mathcal{L}^1$. Если $\mathcal{L}^1$ вырождено в точку, то Ω тоже вырождено в эту точку.

При помощи (22), теорем I и 25 (см.также пример 8) может быть сформулирована

Т е о р е м а 26.

Если направление $\bar{y}$ в касательной плоскости R_m к V_m в M является параболическим, то M лежит в пересечении многообразий Ω, соответствующих сечениям индикатрисы J^1 для всех двумерных подплоскостей плоскости R_m, проходящих через $\bar{y}$.

В случае $m=2$ нахождение точки M на многообразии Ω, соответствующем индикатрисе J^1, является необходимым и достаточным условием того, чтобы в M существовало параптатическое направление. Если, к тому же, индикатриса J^1 вырождена в отрезок, а M не находится в конечной точке J^1, или, если M находится на линии самопересечения многообразия Ω, то в M имеется два параптатических направления. Если J^1 – окружность, а M находится в центре этой окружности, или, если J^1 вырождена в точку, совпадающую с M, то все касательные направления в M – параптатические (случай двумерного параптатического направления). Последние утверждения являются и необходимыми.

Пример 9. В пространстве R_3, единственный пример параптатического направления является направление вида асимптотического направления развертывающейся поверхности. Здесь индикатриса J^1 вырождена в отрезок или в точку, а M является соответственно конечной точкой этого отрезка или совпадает с J^1.

Среднее арифметическое $\bar{H}$ векторов первой кривизны в m взаимно ортогональных касательных направлениях к V_m в M называется вектором средней кривизны поверхности V_m в M (см.напр. [11]). В случае ортонормированного касательного репера имеем $\bar{H}=\frac{1}{m}\sum_c \bar{k}_{cc}$. Если $\bar{H}=0$, то M называется минимальной точкой поверхности. Для $m=2$ условие $\bar{H}=0$ равносильно тому, что точка M находит-

ся в центре индикатрисы J^1 . Поверхность, состоящая из минимальных точек, называется минимальной (о двумерных минимальных поверхностях см. в [2]-[5],[17],[18],[21]-[23]).

Учитывая вышеизложенное вместе с тем обстоятельством, что поверхность V_m , являющаяся тангенциально вырожденной во всех направлениях, оказывается,очевидно, плоскостью R_m , получаем следующую теорему (см. также (21)):

Теорема 27.

Существование на поверхности V_m более чем двумерного параатактического направления равносильно тангенциальному вырождению поверхности в этом направлении. Если на поверхности все касательные направления параатактические, то поверхность является или плоскостью, или двумерной минимальной поверхностью с окружностью -индикатрисой первой кривизны J_1^1 .

§ 4. АБСОЛЮТНО ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Система (16) сопоставляет каждому касательному направлению $\bar{y}$ к V_m в M ортогональную систему направлений y в R_m . Но можно поставить и обратную задачу: найти для заданной системы ортогональных касательных направлений y к V_m в M , или даже для отдельного касательного направления, те направления, для которых они являются главными. Особое место имеют здесь абсолютно главные направления, являющиеся главными относительно всех касательных направлений к V_m в M . В случае $V_2 \subset R_4$

эти направления определил Ван Юн-чжоу в [27].

I. Для нахождения направлений, относительно которых $\bar{x}$ является главным, нужно систему (I6) решить относительно $\bar{y}$. Если направления некоторой ортогональной системы касательных направлений χ выбрать направлениями векторов ортонормированного касательного репера, то в силу (I6) система

$$y^c y^d \bar{\ell}_{ac} \bar{\ell}_{bd} = 0 \qquad (23)$$

для всех $a \neq b$ определяет все направления $\bar{y}$, относительно которых система χ является главной. Система (23) так же легко получается при помощи теоремы I0, так как здесь имеет место соотношение $y^c \bar{\ell}_{ac} = \bar{\xi}(\bar{y}, \bar{e}_a)$. В силу того, что (23) содержит $\frac{1}{2}m(m-1)$ квадратичных однородных уравнений для определения m величин y^c, произвольно заданная система χ в случае $m > 2$ не является главной относительно некоторого $\bar{y}$.

В случае $m = 2$ системе (23) можно дать, используя (I4), вид

$$\bar{\ell}_{12}\bar{\ell}_{22} tg^2\varphi + (\bar{\ell}_{11}\bar{\ell}_{22} + \bar{\ell}_{12}^2) tg\varphi + \bar{\ell}_{11}\bar{\ell}_{12} = 0 . \qquad (24)$$

Отсюда видно, что система χ на V_2 может быть главной относительно 0, I, 2 или всех касательных направлений.

Пример I0. Получение наглядной картины того, как зависит число решений уравнения (24) от взаимного расположения

векторов первой кривизны, довольно сложно. Поэтому ограничимся простейшими случаями.

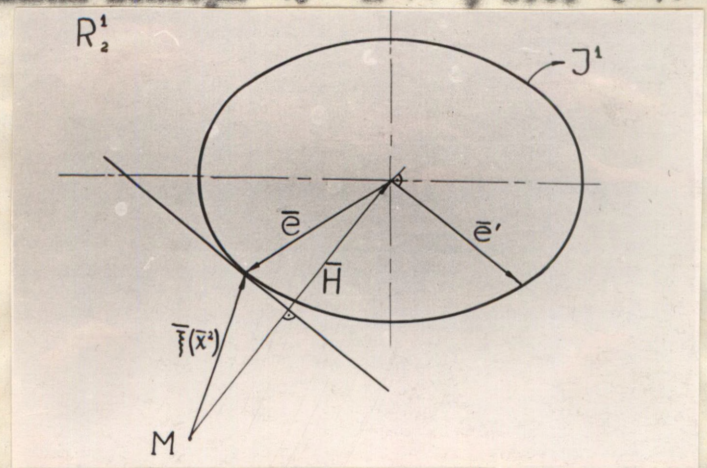
1° Пусть системе $\mathcal{K}$ в точке M поверхности V_2 соответствуют конечные точки большого главного диаметра индикатрисы J^1, являющей эллипсом с полуосями, длины которых суть a и b $(a>b>0)$. Пусть в плоскости R_2^1 заданы еще сферы S и S', центры которых находятся в конечных точках малого главного диаметра индикатрисы J^1, а радиусы равны a. Тогда система $\mathcal{K}$ является главной относительно двух, одного или ни одного касательного направления в зависимости от того, находится точка M поверхности V_m соответственно 1) внутри или вне обеих сфер S и S', 2) на одной из этих сфер, или 3) внутри одной сферы, но вне другого. Если M находится на линии пересечения сфер S и S', система $\mathcal{K}$ является главной относительно всех касательных направлений. Эта линия пересечения является окружностью, проходящей ортогонально к плоскости индикатрисы J^1 через ее фокусы (см.§ 3 п.7 - линия самопересечения поверхности Ω).

2°. Все сказанное в 1°, дословно переносится и на тот случай, когда система $\mathcal{K}$ соответствует конечным точкам малого главного диаметра индикатрисы J^1. Только здесь центры сфер S и S' находятся в конечных точках большого главного диаметра, а радиусы их равны b. Пересечение сфер S и S' пусто. Это можно вывести исходя из (24).

2 ⁰. Для получения лучшего представления об обратной соответствии приведем несколько теорем для случая $m=2$. Здесь, для простоты, не будем говорить о случаях вырожденной индикатрисы J^1.

Теорема 28.

Пусть $\bar{x}$ – касательное к V_2 в M направление, а $\bar{\ell}'$ – сопряженный с $\bar{\ell}=\bar{\xi}(\bar{x}^2)-\bar{H}$ радиус-вектор индикатрисы J^1. Направления $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$, относительно которых $\bar{x}$ являются главными, ортогональны тогда и только тогда, когда ортогональны векторы $\bar{\ell}'$ и $\bar{H}$, т.е. $\bar{\ell}'\bar{H}=0$.



Единственное исключение составляет случай, когда M находится на окружности, проходящей ортогонально к плоскости индикатрисы J^1 через ее фокусы.

Для доказательства нужно $\bar{x}$ выбрать вектором ортонормированного касательного репера к V_2 в M. Остается выяснить, при каких условиях решения φ_1 и φ_2 уравнения (24) ортогональны, т.е. когда $tg\varphi_1 tg\varphi_2=-1$.

Следствие. Необходимым и достаточным условием того, чтобы любые два касательных направления $\bar{y}$ и $\bar{y}'$, относительно

которых главные направления совпадают, были ортогональными, является нахождение точки M на прямой $\mathcal{L}$, проходящей через центр индикатрисы J^1 ортогонально к ее плоскости R^1. Исключение составляют те точки прямой $\mathcal{L}$, расстояние которых от плоскости R^1 равно $\sqrt{a^2-b^2}$, где a и b – длины полуосей индикатрисы.

Теорема 29.

Соответствие между направлениями $\bar{y}$ и главными относительно них направлениями $\bar{x}$ на $V_2 \in M$ будет взаимным (т.е. $\bar{y}$ является также главным относительно $\bar{x}$) только в двух случаях:

1) точка M на V_2 является минимальной;

2) индикатриса J^1 является окружностью, а точка M находится на прямой, проходящей через центр индикатрисы ортогонально к ее плоскости.

Для доказательства можно исходить из соотношения (14), которое здесь симметрично относительно θ и φ. Использование следствия теоремы 28 позволяет упростить вычисления.

Теорема 30.

Пусть ортогональные направления $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ являются главными относительно касательных направлений $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ в $V_2 \in M$ и пусть $\bar{\ell}$ и $-\bar{\ell}$ – радиусы векторы индикатрисы J^1, сопряженные с радиусами-векторами $\bar{\kappa} = \xi(\bar{x}_1^2) - H$ и $-\bar{\kappa} = \xi(\bar{x}_2^2) - H$ соответственно. Одно из направлений $\bar{y}_1$,

$\bar{y}_2$ является биссектрисой угла между направлениями $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ тогда и только тогда, когда расстояние точки M или от конечной точки вектора $\bar{M}+\bar{H}+\bar{\ell}$, или от конечной точки вектора $\bar{M}+\bar{H}-\bar{\ell}$ равно $|\bar{k}|$, т.е. когда верно одно из соотношений $|\bar{H}+\bar{\ell}|=|\bar{k}|$ или $|\bar{H}-\bar{\ell}|=|\bar{k}|$.

Для доказательства $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ можно выбрать векторами касательного репера на V_2 в M. Остается определить, при каких условиях (24) имеет одним из решений $tg\varphi = 1$ или $tg\varphi = -1$.

Теорема 31.

Пусть ортогональные направления $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ являются главными относительно касательных направлений $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ в V_2 в M. Пары направлений $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ и $\bar{y}_1, \bar{y}_2$ имеют общую биссектрису тогда и только тогда, когда направлениям $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ соответствует один из главных осей индикатрисы J^1, т.е. когда $\bar{\xi}(\bar{x}_1^2)-\bar{H}$ (тогда и $\bar{\xi}(\bar{x}_2^2)-\bar{H}$) являются главным радиусом-вектором индикатрисы.

Для доказательства $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ можно выбрать векторами касательного репера на V_2 в M. Остается определить, при каких условиях решения φ_1 и φ_2 уравнения (24) выражаются в виде $\varphi_1 = \frac{\pi}{4} + \alpha$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha$.

В случае $V_2 \subset R_4$ эта теорема доказана Ван Ци-чжоу в [27].

3. Направление, являющееся главным относительно всех

касательных направлений поверхности V_m в M, назовем **абсолютно главным направлением** поверхности. Для определения этих направлений получим из (16) систему

$$x^a x^b [\bar{\ell}_{ac}(g_{ab}\bar{\ell}_{df} - g_{fb}\bar{\ell}_{da}) + \bar{\ell}_{ad}(g_{ab}\bar{\ell}_{cf} - g_{fb}\bar{\ell}_{ce})] = 0 .$$

Отсюда следует, что в случае ортонормированного касательного репера соотношения

$$\bar{\ell}_{1a}\bar{\ell}_{bc} + \bar{\ell}_{1b}\bar{\ell}_{ac} = 0 \qquad (25)$$

(для всех a, b и $c \neq 1$) определяют необходимое и достаточное условие того, чтобы направление $\bar{\ell}_1$ было абсолютно главным. Для случая $m = 2$ эти соотношения примут вид

$$\bar{\ell}_{11}\bar{\ell}_{22} + \bar{\ell}_{12}^2 = \bar{\ell}_{11}\bar{\ell}_{12} = \bar{\ell}_{12}\bar{\ell}_{22} = 0 , \qquad (26)$$

что согласуется и с (24).

Пример 11 В пространстве R_3 единственным примером абсолютно главных направлений являются направления вида главных направлений развертывающейся поверхности (см.пример 9).

Абсолютно главное направление, очевидно, является и главным направлением относительно самого себя. Принимая в (25) $a = 1$, $b = c$ и $\bar{\ell}_{11} = 0$, получим $\bar{\ell}_{1c} = 0$. Это значит, что, если абсолютно главное направление асимпто-

тическое, поверхность V_m в этом направлении тангенциально вырождена. Теперь в силу теоремы 19 получаем, что абсолютно главное направление всегда является и главным направлением поверхности.

Аналогично теоремам 18 и 25 верна

Теорема 32.

Если направление $\bar{y}$ есть абсолютно главное в точке M поверхности V_m, то оно является абсолютно главным и на любой подповерхности $V_q \subset V_m$, геодезической на V_m в M и касающей в M $\bar{y}$.

При помощи (26) нетрудно доказывается

Теорема 33.

Направление $\bar{y}$ в точке M поверхности V_m абсолютно главное тогда и только тогда, когда $\bar{K} = \bar{\xi}(\bar{y}^2) - \bar{H}$ — большой главный радиус-вектор индикатрисы J^1, а точка M находится на окружности $\mathcal{L}$, проходящей через фокусы индикатрисы J^1 ортогонально к ее плоскости. Если индикатриса J^1 является окружностью, то $\mathcal{L}$ вырождена в центральную точку J^1 (случай двумерного абсолютно главного направления).

В случае $V_2 \subset R_4$, когда окружность $\mathcal{L}$ заменена парой фокусов индикатрисы J^1, эта теорема доказана Ван Юн-Чжоу в [27].

4. Для выяснения условий существования двумерных абсо-

лотно главных направлений проведем преобразование репера

$$\begin{cases} \bar{\ell}_1' = \cos\alpha\,\bar{\ell}_1 + \sin\alpha\,\bar{\ell}_2 \\ \bar{\ell}_2' = -\sin\alpha\,\bar{\ell}_1 + \cos\alpha\,\bar{\ell}_2 \\ \bar{\ell}_A' = \bar{\ell}_A \end{cases}, \qquad (27)$$

где $A = 3, \ldots, m$. Для того, чтобы двумерное направление, определяемое направлениями $\bar{\ell}_1$ и $\bar{\ell}_2$, было абсолютно главным, необходимо и достаточно, чтобы при ортонормированном касательном репере к V_m в M условия (25) были инвариантны относительно преобразования (27) при любом заданном $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$.Соответствующими условиями являются

$$\begin{cases} \bar{\ell}_{11} = -\bar{\ell}_{22} & \bar{\ell}_{11}\bar{\ell}_{AB} = 0 \\ \bar{\ell}_{11}\bar{\ell}_{12} = 0 & \bar{\ell}_{12}\bar{\ell}_{AB} = 0 \\ \bar{\ell}_{11}^2 = \bar{\ell}_{12}^2 & \bar{\ell}_{1A} = \bar{\ell}_{2A} = 0 \end{cases}.$$

Здесь сечение индикатрисы J^1 для двумерного абсолютно главного направления – окружность, а точка M поверхности V_m находится в центре этой окружности.

Аналогично теореме 27 получается следующая

Теорема 34.

Существование на поверхности V_m более чем двумерного абсолютно главного направления равносильно тангенциальному вырождению поверхности в этом направлении. Если на поверхности все касательные направления абсолютно главные, то

поверхность является или плоскостью, или двумерной линейчатой поверхностью с окружностью - индикатрисой первой кривизны [1].

III СОПРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ АБСОЛЮТНО ГЛАВНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

§ 1. ЛОКАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

1. Обозначим поверхность V_m, несущую m полей абсолютно главных направлений, которые составляют на ней сопряженную систему, через C_m.

Выберем на поверхности C_m подвижный ортонормированный касательный репер R так, чтобы направления векторов репера оказались абсолютно главными. Назовем этот репер R **канонизированным**.

Так как здесь $\overline{\nabla}(\bar{e}_a, \bar{e}_b) = \bar{\ell}_{ab}$, а направления векторов репера R составляют сопряженную систему, то

$$\bar{\ell}_{ab} = 0 \qquad (1)$$

для всех $a \neq b$. Теперь из (2.25) следует

$$\bar{\ell}_{aa}\bar{\ell}_{bb} = 0 \qquad (2)$$

для всех $a \neq b$. Таким образом, система векторов первой кривизны на поверхности C_m довольно проста: отличными от нуля могут быть только m взаимно ортогональных векторов $\bar{\ell}_{aa}$. В силу леммы 1.1 аналогичное имеет место и для векторов кривизны высших порядков. Только векторы $\bar{\ell}_{a\dots a}$ здесь не обязательно ортогональны. Тем самым, справедливы неравенства

$$m \geq m_1 \geq \dots \geq m_k,$$

где m_ℓ – размерность ℓ-ой нормальной плоскости R^ℓ_m и C_m в ее точке M.

Нетрудно проверить, что при ортонормированном касательном репере соотношения (I) и (2) являются также и достаточными для того, чтобы V_m оказалась поверхностью C_m.

Пример I. Единственным примером поверхностей C_2 в пространстве R_3 являются развертывающиеся поверхности V_2. Здесь $\bar{\ell}_{11} = \bar{\ell}_{12} = 0$, а $\bar{\ell}_{22}$ – произвольный вектор. Одно из абсолютно главных направлений – асимптотическое.

Из соотношений (I) и (2) следует, что поверхности C_m имеют нулевую кривизну (см. [15]).

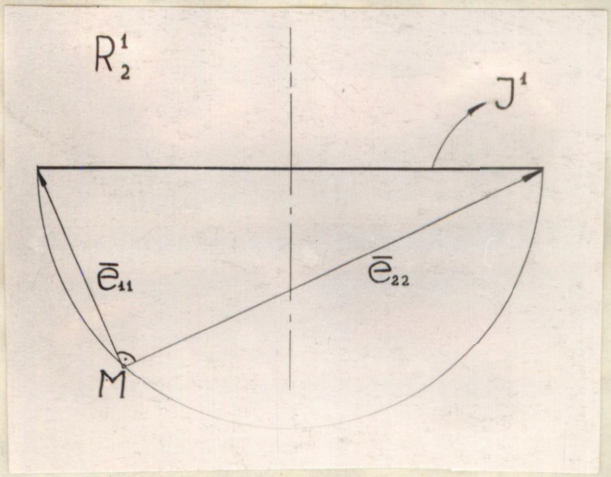
2. Своеобразный вид имеет индикатриса первой кривизны J^1 в точке M поверхности C_m. Она является $(m-1)$-мерным симплексом, который опирается концом вектора.

$$\sum(\bar{x}^2) = \sum_c (x^c)^2 \bar{\ell}_{cc}, \qquad (3)$$

где $\sum_c (x^c)^2 = 1$, отложенного из M. Вершины симплекса совпадают с концами векторов $\bar{\ell}_{aa}$.

Здесь и далее в этой главе будем для простоты предполагать, что все векторы $\bar{\ell}_{aa}$ отличны от нуля. Тем самым будем изучать только те поверхности C_m, которые не являются тангенциально вырожденными.

Пример 2. В случае $m=2$ имеет место следующая картина:



Пусть $\bar{\ell}_{a_1}, \ldots, \bar{\ell}_{a_i}$ – некоторая совокупность абсолютно главных направлений. Множество направлений плоскости R_m, ортогональных со всеми этими направлениями $\bar{\ell}_{a_1}, \ldots, \bar{\ell}_{a_i}$, заполнит в R_m некоторую подплоскость, которую обозначим через $R_{m(a_1 \ldots a_i)}$. Из (3) непосредственно видно, что векторы первой кривизны в направлениях $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ совпадают, т.е. $\bar{\xi}(\bar{x}^2) = \bar{\xi}(\bar{x}'^2)$, тогда и только тогда, когда существует такая плоскость $R_{m(a_1 \ldots a_i)}$, относительно которой векторы $\bar{x}$ и $\bar{x}'$ расположены симметрично. Отсюда каждая внутренняя точка i-мерной грани индикатрисы-симплекса соответствует 2^i касательным направлениям.

3. Приравнивая нулю дифференциал квадрата вектора (3), находим все главные направления в точке M поверхности V_m. Они определяются векторами

$$\bar{p} = \sum_a \varepsilon_a \frac{1}{A} \bar{\ell}_a , \qquad (4)$$

где $\varepsilon_a = 0, 1, -1$ и буквой A обозначена длина век-

тора $\bar{\ell}_{aa}$. Отсюда видно, что главными на C_m являются те и только те направления $\bar{x}$, для которых вектор первой кривизны $\bar{\varkappa}(\bar{x}^2)$ ортогонален к плоскости грани симплекса-индикатрисы J^1 , на которой находится его конечная точка. Число таких направлений равно $\sum_a C_m^a 2^{a-1}$. Так, например, конечные точки векторов первой кривизны в абсолютно главных направлениях находятся на нульмерных гранях симплекса J^1 и, конечно, с ними ортогональны.

Касательные направления поверхности C_m , для которых вектор первой кривизны ортогонален к плоскости всего симплекса J^1 , назовем **основными главными направлениями** поверхности C_m . Они определяются векторами

$$\bar{\rho} = \sum_a \varepsilon_a \frac{1}{A} \bar{\ell}_a ,$$

где $\varepsilon_a = 1, -1$. Число основных главных направлений равно 2^{m-1} .

Нетрудно доказывается

Теорема I.

Пусть $\{\bar{q}\}$ – вся совокупность главных направлений поверхности C_m в M , которым соответствует одна и та же точка индикатрисы J^1 . Тогда относительно всех направлений $\bar{q} \in \{\bar{q}\}$ имеются общие главные направления, один из которых является в общем многомерное направлению, определенное всей совокупностью $\{\bar{q}\}$, а другим – его орто-

гональное дополнение к касательной плоскости R_m. Последнее направление сопряжено со всеми $\bar{q} \in \{\bar{q}\}$. Впрочем, основные главные направления на поверхности C_m -параметрические.

§ 2. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

В этом параграфе исследуется система B для поверхностей C_m, чтобы затем в конкретном случае дать соотношениям этой системы более "прозрачную" форму. Однако, наш подход не является целесообразным для решения вопроса произвола существования поверхностей C_m в общем случае. Поэтому в четвертом пункте параграфа на этот вопрос дается ответ без помощи системы B.

I. Воспользуясь результатами § I п.I и обозначением a_ℓ, вместо совокупности индексов $\underbrace{a \dots a}_{\ell+1}$ дадим систему B для поверхностей C_m следующий вид:

$$\begin{cases} d\bar{M} = \omega^g \bar{e}_g \\ d\bar{e}_a = \omega^a(\bar{P}_{a0} + \bar{e}_{a_2}) + \omega^{g*a}\bar{P}_{ag} \\ d\bar{e}_{a_\ell} = \omega^a(\bar{A}_{a_\ell a} + \bar{P}_{a_\ell a} + \bar{e}_{a_{\ell+1}}) + \omega^{g*a}(\bar{A}_{a_\ell g} + \bar{P}_{a_\ell g}), \end{cases} \tag{5}$$

$$F_{.cd} - P^g_{cd} F_{.g} \to (cd), \tag{6}$$

$$\begin{cases} \bar{A}_{a_1 c} = -(\bar{e}_a, \bar{e}_c)\bar{e}_c \\ \bar{A}_{a_\ell c}\bar{e}_{a_{\ell-1}} = -\bar{e}_{a_\ell}\bar{e}_{a_\ell}\delta_{cc}, \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} P^{\ell}_{ac} = -P^{a}_{\ell c} \\ (\bar{\ell}_{a_\ell}\bar{\ell}_{b_\ell})_{,g} = \bar{P}_{a_\ell g}\bar{\ell}_{b_\ell} + \bar{P}_{b_\ell g}\bar{\ell}_{a_\ell}, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} P^{a}_{cd}\bar{\ell}_{a_1} + P^{c}_{ad}\bar{\ell}_{c_1} + \bar{P}_{adc} \to (cd) \\ P^{a}_{cd}\bar{\ell}_{a_{\ell+1}} + P^{c_\ell}_{a_\ell d}\bar{\ell}_{c_{\ell+1}} + \bar{P}_{a_\ell dc} \to (cd), \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} P^{g}_{ad,c}\bar{\ell}_g + P^{g}_{ad}\bar{P}_{gc} + P^{g}_{cd}\bar{P}_{ag} + \bar{A}_{adc} \to (cd) \\ P^{g_\ell}_{a_\ell d,c}\bar{\ell}_{g_\ell} + P^{g_\ell}_{a_\ell d}\bar{P}_{g_\ell c} + P^{g_\ell}_{cd}\bar{P}_{a_\ell g} + A^{c_{\ell+1}}_{a_\ell d}\bar{\ell}_{c_\ell} + \bar{A}_{a_\ell dc} \to (cd). \end{cases} \tag{10}$$

Здесь суммирование происходит только по индексу g (или g_ℓ). Буквой F обозначена произвольная функция.

2. Переходим к анализу полученных систем. На протяжении всей главы индексы в различной записи, кроме индекса g, нужно считать различными, суммирование без знака $\sum$ будет происходить только по индексам g и s. Буква A обозначает длину вектора $\bar{\ell}_{a_1}$, буква B – длину вектора $\bar{\ell}_{b_1}$ и т.д. Это будем учитывать и при суммировании.

Теперь уравнения (7) принимают вид в более подробной записи

$$\bar{A}_{a,\ell} = 0, \tag{11}$$

$$\bar{A}_{a,a} = -A^2\bar{\ell}_a, \tag{12}$$

$$\bar{A}_{a_2 g} = -\frac{1}{q^2}(\bar{\ell}_{a_2}\bar{\ell}_{g_2})\bar{\ell}_{g_2}\,, \qquad (13)$$

$$\bar{A}_{a_\ell b}\bar{\ell}_{c_{\ell-1}} = 0\,, \qquad (14)$$

$$\bar{A}_{a_\ell b}\bar{\ell}_{a_{\ell-1}} = 0\,, \qquad (15)$$

$$\bar{A}_{a_\ell a}\bar{\ell}_{b_{\ell-1}} = 0\,, \qquad (16)$$

$$\bar{A}_{a_\ell g}\bar{\ell}_{g_{\ell-1}} = -\bar{\ell}_{a_\ell}\bar{\ell}_{g_\ell}\,, \qquad (17)$$

а уравнения (8) – вид

$$P^{a}_{a\ell} = 0\,,$$

$$P^{e}_{aa} = -P^{a}_{ea}\,,$$

$$P^{b}_{ac} = -P^{a}_{bc}\,,$$

$$P^{a_1}_{a_1 g} = \frac{A_{,g}}{A}\,,$$

$$P^{b_1}_{a_1 g}B^2 = -P^{a_1}_{b_1 g}A^2\,,$$

$$(\bar{\ell}_{a_1}\bar{\ell}_{b_\ell})_{,g} = \bar{P}_{a_1 g}\bar{\ell}_{b_\ell} + \bar{P}_{b_\ell g}\bar{\ell}_{a_1}\,, \qquad (18)$$

$$(\bar{\ell}^2_{a_\ell})_{,g} = 2\bar{P}_{a_\ell g}\bar{\ell}_{a_\ell}\,. \qquad (19)$$

Из (9) получается два соотношения, существенно различного вида:

1) $P^{a}_{cd}\bar{\ell}_{a_{\ell+1}} + P^{c_\ell}_{a_\ell d}\bar{\ell}_{c_{\ell+1}} \to (cd) \qquad (\ell = 0, 1, \ldots)$,

которое в случае $\ell = 0$ дает

$$P^{d}_{ac} = 0$$

и, далее,

$$P^{c_\ell}_{a_\ell d}\,\bar{\ell}_{c_{\ell+1}} = P^{d_\ell}_{a_\ell c}\,\bar{\ell}_{d_{\ell+1}} \;;$$

2) $$P^{a_\ell}_{a_\ell d}\,\bar{\ell}_{a_{\ell+1}} = P^{a}_{da}\,\bar{\ell}_{a_{\ell+1}} + P^{d_\ell}_{a_\ell a}\,\bar{\ell}_{d_{\ell+1}} + \bar{P}_{a_{\ell+1}d} \,,$$

отсюда при помощи кратного использования леммы I.I получается соотношение

$$\bar{P}_{a_{\ell+1}d} = (\ell+1)P^{d}_{aa}\,\bar{\ell}_{a_{\ell+1}} - P^{d_\ell}_{a_\ell a}\,\bar{\ell}_{d_{\ell+1}} \qquad (\ell = 0,1,\dots) \,. \tag{20}$$

Для векторов нулевого и первого кручения получаем выражения

$$\bar{P}_{aa} = \sum_{g \neq a} \frac{A_g}{A}\,\bar{\ell}_g \,, \tag{21}$$

$$\bar{P}_{ab} = -\frac{B_{,a}}{B}\,\bar{\ell}_b \,, \tag{22}$$

$$\bar{P}_{a_1 a} = \sum_{g} \frac{A^2 g_{,a}}{g^3}\,\bar{\ell}_{g_1} \,, \tag{23}$$

$$\bar{P}_{a_1 b} = \frac{A_{,b}}{A}\left(\bar{\ell}_{a_1} - \bar{\ell}_{b_1}\right) \,, \tag{24}$$

а (6) и (20) принимают соответственно вид

$$F_{,cd} + \frac{D_{,c}}{D}F_{,d} \to (cd) \,, \tag{25}$$

$$\bar{P}_{a_\ell d} = \ell\,\frac{A_{,d}}{A}\,\bar{\ell}_{a_\ell} - P_{ad\,\ell-1}\,\bar{\ell}_{d_\ell} \,, \tag{26}$$

где $l = 1, 2, \ldots$ и введено обозначение $P^{gl}_{a_l a} = P_{agl}$.

С учетом (26) вместо (18) и (19) можно писать

$$(\bar{l}_{a_l}\bar{l}_{b_2})_{,c} = l\left(\frac{A_{,c}}{A} + \frac{B_{,c}}{B}\right)\bar{l}_{a_l}\bar{l}_{b_2} - P_{acl-1}\bar{l}_{b_2}\bar{l}_{c_l} - P_{bcl-1}\bar{l}_{a_l}\bar{l}_{c_l}, \qquad (27)$$

$$(\bar{l}^2_{a_l})_{,c} = 2l\frac{A_{,c}}{A}\bar{l}^2_{a_l} - 2P_{acl-1}\bar{l}_{a_l}\bar{l}_{c_l}, \qquad (28)$$

$$\bar{P}_{a_l a}\bar{l}_{a_l} = \frac{1}{2}(\bar{l}^2_{a_l})_{,a}, \qquad (29)$$

$$\bar{P}_{a_l a}\bar{l}_{b_l} = (\bar{l}_{a_l}\bar{l}_{b_l})_{,a} - l\frac{B_{,a}}{B}\bar{l}_{a_l}\bar{l}_{b_l} + P_{bal-1}\bar{l}^2_{a_l}, \qquad (30)$$

где $l = 2, 3, \ldots$

При помощи (23), (29) и (30) координаты векторов $\bar{P}_{a_2 a}$, т.е. величины P_{ag2}, можно выразить через координаты тензоров кривизны и их производные. Следующим шагом можно выразить координаты векторов $\bar{P}_{a_3 a}$ и т.д. В итоге получим выражения для всех величин P_{agl} через координаты тензоров кривизны и их производные.

Пример 3. Когда при всяком l все векторы кривизны между собой ортогональны и размерность m_l всех нормальных плоскостей к C_m до k-той равна m, тогда

$$P_{acl} = \frac{A_{l,a}}{A_l}$$

$$P_{abl} = \begin{cases} \dfrac{A_l^2 B_{l-1}^2 \cdots A_2^2 B^2 A_{,c}}{B_l^2 A_{l-1}^2 \cdots B_2^2 A^3}, & \text{если } l \text{ четно и} \\ \dfrac{A_l^2 B_{l-1}^2 \cdots B_2^2 A^2 B_{,a}}{B_l^2 A_{l-1}^2 \cdots A_2^2 B^3}, & \text{если } l \text{ нечетно,} \end{cases}$$

где введено обозначение $A_\ell = |\bar{\ell}_{a_\ell}|$.

Так как выражения для координат всех векторов кручения через координаты тензоров кривизны и их производные теперь в принципе получены, то может быть сформулирована

Т е о р е м а 2.

Поверхность C_m определяется всеми своими тензорами кривизны в пространстве R_n с точностью до движения.

3. Обозначим систему, состоящую из соотношений (II) - (I7), (2I) - (24), (26), (29) и (30) через (*). Если использовать эту систему (*) для определения коэффициентов системы (5) через координаты тензоров кривизны и их производные, то увидим, что координаты тензоров кривизны связаны только соотношениями (I), (2), (I0), (27) и (28). Проанализируем соотношения (I0) в свете полученных результатов более детально.

Из (I0) получаются два соотношения существенно различного вида

$$P^{g_\ell}_{a_\ell d,c}\bar{\ell}_{g_\ell} + P^{g_\ell}_{a_\ell d}\bar{P}_{g_\ell c} + P^{g}_{cd}\bar{P}_{a_\ell g} + A^{c_{\ell-1}}_{a_\ell d}\bar{\ell}_{c_\ell} \to (dc) \qquad (3I)$$

и

$$P^{g_\ell}_{a_\ell a,c}\bar{\ell}_{g_\ell} + P^{g_\ell}_{a_\ell a}\bar{P}_{g_\ell c} + P^{g}_{ca}\bar{P}_{a_\ell g} + A^{c_{\ell-1}}_{a_\ell a}\bar{\ell}_{c_\ell} + \bar{A}_{a_{\ell+1}c} =$$
$$= P^{g_\ell}_{a_\ell c,a}\bar{\ell}_{g_\ell} + P^{g_\ell}_{a_\ell c}\bar{P}_{g_\ell a} + P^{g}_{ac}\bar{P}_{a_\ell g} + A^{a_{\ell-1}}_{a_\ell c}\bar{\ell}_{a_\ell} , \qquad (32)$$

где $\ell = 0, I, \ldots$

Используя (*) и (25), вместо (31) можно написать

$$A_{,kc} = \frac{2A_{,k}A_{,c}}{A} - \frac{A_{,c}C_{,k}}{C}, \tag{33}$$

$$\left\{P_{adk,c} + k\frac{D_c}{D}P_{adk}\right\}\bar{l}_{d_{k+1}} + \left\{(k+1)\frac{A_d}{A}P_{ack} - P_{adk}P_{dck} - A^{c_{k-1}}_{a_{k+1}d}\right\}\bar{l}_{c_{k+1}} \to (cd),$$

где $k > 0$. Последнему соотношению естественно придать вид

$$\left\{P_{adk,c} + \left(k\frac{D_c}{D} - (k+1)\frac{A_c}{A}\right)P_{adk} + P_{ack}P_{cdk} + A^{d_k}_{a_{k+1}c}\right\}\bar{l}_{d_{k+1}} \to (cd), \tag{34}$$

где $k > 1$, так как в случае $k = 1$ оно, в силу (13) и (33), приводит к тождеству.

Аналогично вместо (32) получим соотношения

$$CA_{,cc} - 2\frac{C}{A}A^2_{,c} + AC_{,aa} - 2\frac{A}{C}C^2_{,a} = \sum_{\substack{s\neq a\\ s\neq c}} A_{,s}C_{,s}, \tag{35}$$

$$\left\{-k\frac{A_{,ca}}{A} + k\frac{A_aA_c}{A^2} + k\frac{A_cC_a}{AC} - \frac{A_c}{A}P_{aak} + P_{aak,c} + P_{ack}P_{cak} - \right.$$
$$- P_{ack-1}P_{cak-1} - A^{a_{k-1}}_{a_k c} + \left.A^{a_k}_{a_{k+1}c}\right\}\bar{l}_{a_k} +$$
$$+\left\{P_{ack,c} + P_{ack-1,a} + \left[(k-1)\frac{C_{,a}}{C} - P_{aak}\right]P_{ack-1} + \right.$$
$$+\left.\left[P_{cck} - (k+1)\frac{A_c}{A}\right]P_{ack} - P_{ask}P_{sck-1} + A^{c_{k-1}}_{a_k a} + A^{c_k}_{a_{k+1}c}\right\}\bar{l}_{c_k} +$$
$$+\left\{P_{ask,c} + \left[k\frac{S_c}{S} - (k+1)\frac{A_c}{A}\right]P_{ask} + P_{ack}P_{sck} + A^{s_k}_{a_{k+1}c}\right\}\bar{l}_{s_k} = 0, \tag{36}$$

где $k = 1,2\ldots$ и суммирование происходит по $s\neq a, s\neq c$.

Для примера, в случае $k = 1$ из (36) получается

$$\bar{l}_{a_2}\bar{l}_{c_2} = \frac{C^2}{A}A_{,ca} - 2\frac{C^2}{A^2}A_{,a}A_{,c} + \frac{A^2}{C}C_{,ac} - 2\frac{A^2}{C^2}C_{,a}C_{,c} - A^2C^2\sum_{\substack{s\neq a\\ s\neq c}}\frac{S_aS_c}{S^4}. \tag{37}$$

В итоге для определения поверхностей C_m получена система ($\frac{**}{**}$), состоящая из соотношений (5), (I), (2), (27),(28), (33)-(36) и ($*$) .

4. Определить произвол существования поверхностей C_m при помощи системы ($\frac{**}{**}$) неудобно. Дело в том, что система ($\frac{**}{**}$) содержит в явном виде информацию о векторах кривизны, кручения и т.д., которая при определении произвола существования поверхностей C_m не нуждается и только усложняет картину. Целесообразно будет пользоваться другой методикой.

Выберем в пространстве R_n подвижный ортонормированный репер так, чтобы m первых его векторов составляли канонизированный касательный репер к C_m, а m следующих векторов имели направления соответствующих векторов первой кривизны. Остальные векторы репера могут быть произвольными. Тогда, используя систему ($\frac{**}{**}$) для C_m можно выписать следующую систему Пфаффа

$$\begin{cases} \omega^\alpha = 0 & (\alpha > m) \\ \omega_a^\rho = 0 & (\rho > 2m) \\ \omega_a^{m+\rho} = \delta_a^\rho q \omega^\rho \end{cases} \qquad (38)$$

системой ковариантов которой является

$$[\omega_{m+a}^\rho \omega^a] = 0 ,$$
$$[dA\delta_\rho^a - A\omega_\rho^a ; \omega^\rho] = 0 ,$$
$$[B\omega_a^b \omega^b] + [-A\omega_{m+a}^{m+\ell} \omega^a] = 0 .$$

Известной методикой (см.напр. [12]) можно показать, что решение системы (38), т.е. поверхность C_m, существует в пространстве R_n $(n \geq 2m)$ с произволом $m(n-m)$ функций одного переменного

5. Учитывая (*), нетрудно убедиться, что уравнение

$$\omega^a = 0$$

при произвольном фиксированном значении a вполне интегрируемо. Отсюда следует, что конгруэнции абсолютных линий кривизны на C_m - голономные.

Обозначим символом ∂_a дифференцирование по $\mathrm{mod}\,\omega^a$. Тогда, в силу (5), (21) и (22), имеем

$$\partial_a \bar{l}_b = \omega^b \Big(\sum_{\substack{s \neq a \\ s \neq b}} \frac{B_{,s}}{B} \bar{l}_s + \frac{B_{,a}}{B} \bar{l}_a + \bar{l}_{b_1} \Big) - \sum_{\substack{s \neq a \\ s \neq b}} \omega^s \frac{S_{,s}}{S} \bar{l}_s .$$

Здесь для различных значений индекса $b \neq a$ векторы $\bar{l}^a_{b_1} = \frac{B_{,a}}{B} \bar{l}_a + \bar{l}_{b_1}$ в общем случае уже не ортогональны.

Учитывая еще и то, что $\bar{B} = \sum_s B_{,s} \bar{l}_s$ является градиентным вектором скалярного поля B - модуля вектора первой кривизны в абсолютно главном направлении $\bar{l}_b$ -, может быть сформулирована следующая

Т е о р е м а 3.

Подповерхности V_{m-1} поверхности C_m, ортогонально пересекающие поле абсолютно главных направлений $\bar{l}_a$ (a фиксирован!), являются поверхностями C_{m-1} тогда и только тогда, когда не менее, чем $m-2$ градиентных векторов

скалярных полей модулей векторов первой кривизны в остальных абсолютно главных направлениях – ортогональны к $\bar{l}_a$.

§ 3. ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕНОСА

Из результатов предыдущего параграфа видно, что координаты тензоров кривизны общих поверхностей C_m связаны довольно сложными дифференциальными соотношениями и едва ли удастся их значительно упростить. Поэтому ограничимся более детальным анализом некоторых простых частных случаев.

I. Рассмотрим случай, когда направления градиентных векторов скалярных полей модулей векторов первой кривизны в абсолютно главных направлениях совпадут с соответствующими абсолютно главными направлениями, т.е. когда

$$A_{,b} = 0 \qquad (39)$$

для всех неравных a и b . Обозначим такие поверхности через C'_m .

Т е о р е м а 4.

В случае канонизированного касательного репера все векторы кривизны поверхности C'_m взаимно ортогональны и все векторы кручения вида $\bar{P}_{a,b}$ равны нулю.

Допустим, что для всех $a \neq b$ соблюдаются равенства

$\bar{\ell}_{a_\ell}\bar{\ell}_{b_\ell}=0$ и $P_{ab\,\ell-1}=0$ до некоторой $\ell=\ell'$ включительно. Тогда, в силу (30) и (39), имеем

$$P_{ab\,\ell}=0,$$

а из (16) следует $A^{b_{\ell-1}}_{a_\ell a}=0$. Теперь, в силу (36), получается $A^{b_\ell}_{a_{\ell+1}b}=0$, что вместе с (17) дает

$$\bar{\ell}_{a_{\ell+1}}\bar{\ell}_{b_{\ell+1}}=0.$$

Так как, согласно (37), (23) и (39), $\bar{\ell}_{a_2}\bar{\ell}_{b_2}=0$ и $P_{ab\,1}=0$, то тем самым теорема доказана.

Пересмотрим теперь систему $\left(\frac{M}{M}\right)$ в свете теоремы 4 и (39). Получаем, что поверхность C'_m определяется системой

$$\begin{cases} d\bar{M}=\omega^g\bar{\ell}_g \\ d\bar{\ell}_a=\omega^a\bar{\ell}_{a_1} \\ d\bar{\ell}_{a_\ell}=\omega^a\left(-\frac{A_\ell^2}{A_{\ell-1}^2}\bar{\ell}_{a_{\ell-1}}+\frac{A_{\ell,a}}{A_\ell}\bar{\ell}_{a_\ell}+\bar{\ell}_{a_{\ell+1}}\right), \end{cases} \tag{40}$$

где $A_\ell=|\bar{\ell}_{a_\ell}|$, затем требуется выполнение условий

$$A_{\ell,b}=0, \tag{41}$$

$$F_{,cd}=F_{,dc} \tag{42}$$

и, наконец, из $A_\ell=0$ следует, что $A_{\ell+1}=0$.

В результате сравнения (25) и (42) может быть сформулирована

Теорема 5.

Канонизированный касательный репер на поверхности C_m

является голономным тогда и только тогда, когда C_m является поверхностью C'_m .

В силу теорем 4 и 5 и (4I), систему (40) можно записать в виде

$$\begin{cases} d\bar{M} = \bar{\ell}_g du^g \\ d\bar{\ell}_a = \alpha_1 \bar{\ell}_{a1} du^a \\ d\bar{\ell}_{a\ell} = \left(-\alpha_\ell \bar{\ell}_{a\ell-1} + \alpha_{\ell+1} \bar{\ell}_{a\ell+1}\right) du^a \end{cases}, \qquad (43)$$

где $\bar{\ell}_{a\ell} = \frac{1}{A_\ell} \bar{\ell}_{a_\ell}$ - ортонормированные векторы, а величины $\alpha_\ell = \frac{A_\ell}{A_{\ell-1}}$ ($\beta_\ell = \frac{B_\ell}{B_{\ell-1}}$ и т.д.) являются функциями только от соответствующих u^a , т.е. $\alpha_\ell = \alpha_\ell(u^a)$. Кроме того, из $\alpha_\ell = 0$ следует соотношение $\alpha_{\ell+1} = 0$.

При помощи (43) нетрудно доказывается

Т е о р е м а 6.

Каждая поверхность C'_m является поверхностью переноса относительно m проходящих через общую точку кривых L_a, плоскости которых попарно ортогональны. Кривые L_a , на строение которых в общем случае не налагается никаких ограничений, являются на соответствующей C'_m абсолютными линиями кривизны.

В силу того, что канонизированный репер на C'_m является голономным, его по отношению к внутренней геометрии поверхности C_m на достаточно малой окрестности точки можно рассматривать в качестве декартовой системы координат.

Отсюда получается, что в случае канонизированного репера геодезические подповерхности на C'_m определяются линейными уравнениями между переменными u^a.

В частности, верна

Теорема 7.

– Поверхность C'_m расслаивается абсолютными линиями кривизны на вполне ортогональные геодезические подповерхности C'_a; при этом каждая линия кривизны на C'_m является основной на некоторой подповерхности C'_a. Верно и обратное: если поверхность C_m расслаивается абсолютными линиями кривизны в геодезические подповерхности, то она является поверхностью C'_m.

Обратное утверждение следует из (5), (21), (23) и (39).

Очевидно, что C'_m является поверхностью переноса относительно всех своих подповерхностей C'_a.

2. Рассмотрим случай, когда все скаляры α_ℓ в (43) – постоянные. Обозначим соответствующие поверхности через C''_m.

Пусть l_a – максимальное значение l, для которого $\alpha_\ell \neq 0$. Тогда размерность плоскости поверхности C''_m равна

$$m + \sum_{\ell+1}^{K} m_\ell = m + \sum_c l_c .$$

Далее, будем предполагать, что пространство R_n имеет размерность $n = m + \sum_c l_c$.

Из того, что система (43) не зависит от расположения точки M на C_m'' и что она содержит m независимых дифференциалов, следует, что в пространстве R_n существует m - параметрическая группа движений T, траекторией которой является поверхность C_m''. Для более детального изучения движений группы T рассмотрим вектор

$$\bar{M}^* = \bar{M} + \sum_c \sum_{l=0}^{l_c} x^{cl} \bar{l}_{cl} ,$$

где x^{al} - произвольные постоянные и $\bar{l}_{c0} = \bar{l}_c$. Выразим дифференциал вектора $\bar{M}^*$ с учетом (43):

$$d\bar{M}^* = \sum_a \left\{ (1 - x^{a1}\alpha_1)\bar{l}_a + \sum_{l=1}^{l_a-1} (x^{a,l-1}\alpha_l - x^{a,l+1}\alpha_{l+1})\bar{l}_{al} + x^{a,l_a-1}\alpha_{l_a}\bar{l}_{al_a} \right\} du^a ; \quad (44)$$

он характеризует инфинитезимальное перемещение произвольной точки пространства R_n при движениях из группы T.

Для некоторого фиксированного значения a выражение в скобках в (44) равно нулю тогда и только тогда, когда

$$x^{a1} = \frac{1}{\alpha_1} ,$$

$$x^{a,2p} = \frac{\alpha_{2p-1}}{\alpha_{2p}} x^{a,2p-2} = \ldots = \frac{\alpha_{2p-1}\alpha_{2p-3}\cdots\alpha_1}{\alpha_{2p}\alpha_{2p-2}\cdots\alpha_2} x^{a0} ,$$

$$x^{a,2q+1} = \frac{\alpha_{2q}}{\alpha_{2q+1}} x^{a,2q-1} = \ldots = \frac{\alpha_{2q}\alpha_{2q-2}\cdots\alpha_2}{\alpha_{2q+1}\alpha_{2q-1}\cdots\alpha_1} ,$$

$$x^{a,l_a-1} = 0$$

для всех $2p \leq l_a$ и $2q+1 \leq l_a$. Эти соотношения совместны только при нечетном l_a и $x^{a0} = 0$.

Отсюда получается

Теорема 8.

Минимальная размерность траекторий группы T в R_n равна числу четных величин среди l_a. В частности, группа T является вращением тогда и только тогда, когда все величины l_a нечетны.

Пусть все величины l_a нечетны. Тогда поверхность C''_m находится на гиперсфере S_{n-1} пространства R_n, радиус-вектором центра которой является

$$\bar{M}^0 = \bar{M} + \sum_a \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(l_a-1)} \frac{\alpha_{2s}\alpha_{2s-2}\cdots\alpha_2}{\alpha_{2s+1}\alpha_{2s-1}\cdots\alpha_1}\bar{e}_{a,2s+1}$$

и радиус которой равен

$$r = |\bar{M}^0 - \bar{M}| = \sqrt{\sum_a \sum_{s=0}^{\frac{1}{2}(l_a-1)} \frac{\alpha_{2s}^2\cdots\alpha_2^2}{\alpha_{2s+1}^2\cdots\alpha_1^2}} =$$

$$= \sqrt{\sum_a \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\left(1+\frac{\alpha_4^2}{\alpha_3^2}\left(1+\ldots+\frac{\alpha_{l_a-1}^2}{\alpha_{l_a-2}^2}\left(1+\frac{1}{\alpha_{l_a}^2}\right)\ldots\right)\right)}$$

3. Обозначим поверхности C''_m, для которых при всех a имеет место $l_a = 1$, через C'''_m.

Поверхность C'''_m находится на гиперсфере S_{2m-1} пространства R_{2m}. Радиус гиперсферы равен

$$r = \sqrt{\sum_a \frac{1}{A^2}}\ .$$

При помощи (4) и (43) нетрудно убедиться, что все линии кривизны на C'''_m – окружности. В частности, основные линии кривизны на C'''_m – большие окружности на гиперсфере S_{2m-1}.

Найдем все одномерные траектории группы движений T.

соответствующей поверхности C_m'''. Дифференциал (44) в этом случае имеет вид:

$$d\bar{M}^* = \sum_a \{(1 - x^{a'}A)\bar{e}_a + x^a \bar{e}_{a+1}\} du^a .$$

Точка M^* пространства R_{2m}, очевидно, является точкой одномерной траектории группы T тогда и только тогда, когда $d\bar{M}^* \neq 0$, а все значения $d\bar{M}^*$ — коллинеарны. Отсюда при любом a получаем:

$$\begin{cases} x^{b+1} = \frac{1}{B} \\ x^b = 0 \end{cases}$$

для всех $b \neq a$. Таким образом, все полные одномерные траектории, вместе взятые, заполнят m вполне ортогональных двумерных плоскостей, проходящих через центр гиперсферы S_{2m-1}. Каждая из этих плоскостей параллельна одной из абсолютных линий кривизны на C_m'''. Если пересечь эти плоскости семейством гиперсфер, имеющих общий центр с гиперсферой S_{2m-1}, то получим все одномерные траектории группы T. В пересечении этих плоскостей с гиперсферой S_{2m-1} получим m взаимно полярных больших окружностей $\mathcal{L}_a$, расположенных на S_{2m-1}.

Из вышеизложенного следует

Теорема 9.

Поверхность C_m''' на гиперсфере S_{2m-1} пространства

R_{2m}, рассматриваемой, как $(2^m - 1)$-мерное эллиптическое пространство, является эквидистантной поверхностью m взаимнополярных прямых $\mathcal{L}_a$, т.е. многомерным обобщением поверхности Клиффорда (см. [8]). Основную линию кривизны поверхности C_m^{III} в пространстве R_{2m} является прямолинейная образующая m-мерной поверхности Клиффорда в эллиптическом пространстве S_{2m-1}.

IУ. МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

§ I. СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ

Поверхности V_m, реализирующие такое погружение пространства постоянной кривизны S_m в евклидово пространство R_n, чтобы все движения в S_m порождали движения и в R_n, назовем **максимально симметричными** и обозначим через S_m^k. Здесь k – порядок кривизны поверхности. Из поверхностей S_m^k общеизвестными являются m-мерные плоскость и сфера; они представляют собой примеры поверхностей S_m^0 и S_m^1 соответственно.

В настоящем параграфе дадим общую схему, по которой будет проводиться изучение поверхностей S_m^k в следующих параграфах главы.

I. Для изучения поверхности S_m^k естественно выбрать на ней ортонормированный касательный репер R и воспользоваться системой A.

Из определения поверхностей S_m^k следует, что формулы A, описывающие всевозможные перемещения репера R по S_m^k, должны быть инвариантными относительно расположения репера R на S_m^k.

Отсюда следует, что все скалярные величины в A должны быть постоянными *) Верно и обратное: если векторы $\bar{e}_a$ ортонормированы, все скалярные величины в A –постоянные и система A согласована, то она определяет поверхность S_m^k. В самом деле, в данном случае репер R свободно перемещается на некоторой поверхности V_m, причем закон этого перемещения в пространстве R_n не зависит от положения репера R на V_m.

Учитывая вышеизложенное, в силу (A3) получаем соотношение

$$\bar{B}_{a_0\dots a_\ell c}\,\bar{e}_{b_0\dots b_\ell} + \bar{B}_{b_0\dots b_\ell c}\,\bar{e}_{a_0\dots a_\ell} = 0\,, \qquad (I)$$

при помощи которого может быть доказана

Лемма I.

При ортонормированном касательном репере все векторы кручения для поверхности S_m^k равны нулю.

Доказательство.

Допустим, что для некоторого значения ℓ векторы кручения $\bar{B}_{a_1\dots a_\ell dc}$ симметричны относительно всех своих

---

*) В случае линейно зависимых векторов ℓ-ой кривизны можно допустить такое изменение координат векторов ℓ-ого кручения и векторов отражения $(\ell+1)$-ой кривизны, которое оставляет неизменным расположение этих векторов относительно векторов кривизны. Однако, такое изменение координат мы рассматривать не будем, так как оно, очевидно, кроме усложнений, ничего принципиально нового не дает.

индексов. Тогда в силу (I) получается

$$\bar{B}_{a_1\dots a_p dc}\,\bar{\ell}_{b_1\dots b_q h} = \bar{B}_{a_1\dots a_p cd}\,\bar{\ell}_{b_1\dots b_q h} = -\bar{B}_{b_1\dots b_q hd}\,\bar{\ell}_{a_1\dots a_p c} =$$

$$= -\bar{B}_{b_1\dots b_q dh}\,\bar{\ell}_{a_1\dots a_p c} = \bar{B}_{a_1\dots a_p ch}\,\bar{\ell}_{b_1\dots b_q d} = \bar{B}_{a_1\dots a_p hc}\,\bar{\ell}_{b_1\dots b_q d}\,.$$

Но теперь в силу того же (I) будем иметь

$$\bar{B}_{a_0\dots a_p c} = 0\,,$$

а симметричность векторов $\bar{B}_{a_0\dots a_p cd}$ относительно всех своих индексов следует из (A 4).

Так как векторы $\bar{B}_{abc}$, в силу (A 4), симметричны, то лемма доказана.

2. Согласно полученных в предыдущем пункте результатов, при изучении поверхностей S_m^k системе A можно придать следующий вид :

$$\begin{cases} d\bar{M} = \omega^g \bar{\ell}_g \\ d\bar{\ell}_a = \omega^g \bar{\ell}_{ag} + \omega_a^g \bar{\ell}_g \\ d\bar{\ell}_{ab} = \omega^g(\bar{A}_{abg} + \bar{\ell}_{abg}) + \omega_a^g \bar{\ell}_{bg} + \omega_b^g \bar{\ell}_{ag} \\ d\bar{\ell}_{a_0\dots a_p} = \omega^g(\bar{A}_{a_0\dots a_p g} + \bar{\ell}_{a_0\dots a_p g}) + \sum_{i=0}^{p} \omega_{a_i}^g \bar{\ell}_{a_0\dots g\dots a_p}\,, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \bar{A}_{abc}\,\bar{\ell}_d = -\bar{\ell}_{ac}\,\bar{\ell}_{cd} \\ \bar{A}_{a_0\dots a_p b_p}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_{p-1}} = -\bar{\ell}_{a_0\dots a_p}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_p}\,, \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \omega_a^b + \omega_b^a = 0 \\ \sum_{i=0}^{p} \omega_{a_i}^g \bar{\ell}_{a_0\dots g\dots a_p}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_p} + \sum_{i=0}^{p} \omega_{b_i}^g \bar{\ell}_{a_0\dots a_p}\,\bar{\ell}_{b_0\dots g\dots b_p} = 0\,, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} \bar{A}_{abcd} + A^{g}_{abc}\bar{\ell}_{gd} + A^{g}_{adc}\bar{\ell}_{cg} + A^{g}_{cdc}\bar{\ell}_{ga} \to (cd) \\ \bar{A}_{a_0\dots a_\ell cd} + A^{g_0\dots g_{\ell-1}}_{a_0\dots a_\ell c}\bar{\ell}_{g_0\dots g_{\ell-1}d} + \sum_{i=0}^{\ell} A^{g}_{a_i dc}\bar{\ell}_{a_0\dots g\dots a_\ell} \to (cd), \end{cases} \quad (5)$$

где все скалярные величины постоянные. Обозначим эту систему через A^*.

Дальнейшее исследование поверхностей S^k_m будет вестись по следующей схеме:

1) вычисление строения тензоров кривизны при помощи (4) в § 2;

2) нахождение координат векторов отражения кривизны при помощи (3) в § 3;

3) анализ условий интегрируемости (5) в § 4;

4) вычисление некоторых глобальных свойств как поверхностей S^k_m, так и группы движений T, порождаемой в пространстве R_n, поверхностью S^k_m, при помощи (2) в § 5.

Общие исследования заканчиваются из-за технических условий при $k=2$, а при $k=3$ рассмотрен только один частный случай. Поэтому в § 6 рассматривается только пример двумерной поверхности S^k_2 для общего значения k.

В последнем § 7 приведен пример построения некоторых максимально симметричных поверхностей как индикатрис первой и второй кривизны J^1 и J^2.

§ 2. ТОЧКА МАКСИМАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ

1. Когда координаты тензора ℓ-ой кривизны в точке M

поверхности V_m не зависит от выбора ортонормированного касательного репера R в M, будем говорить, что тензор ℓ-ой кривизны поверхности V_m удовлетворяет в точке M у с л о в и я м а к с и м а л ь н о й с и м м е т р и и. Если все тензоры кривизны удовлетворяют в M условиям максимальной симметрии, то назовем M т о ч к о й м а к с и м а л ь н о й (л о к а л ь н о й) с и м м е т р и и поверхности V_m.

Примерами точек максимальной симметрии являются точки плоскости R_m и сферы S_m. В первом случае тензоры кривизны нулевые, во втором случае отличны от нуля только координаты $\bar{\ell}^2_{aa} = \bar{\ell}_{aa}\bar{\ell}_{bb} = \bar{\ell}^2_{bb}$ (это - признак омбилической точки; см., напр., [II]).

Из (А 3) непосредственно следует, что выполнение условий (4) является необходимым и достаточным для того, чтобы точка M поверхности V_m была точкой максимальной симметрии поверхности. Следовательно, (4) в системе A^* равносильно требованию, чтобы поверхность S_m^{κ} состояла из точек максимальной симметрии. Поверхности V_2 в R_3, состоящие из омбилических точек, рассмотрены в [I].

2. Приступим к анализу условий (4).

В силу независимости линейных дифференциальных форм $\omega_a^b = -\omega_b^a$ (репер R может вокруг M свободно вращаться), приведенные коэффициенты всех форм $\omega_a^b = -\omega_b^a$ в (4) должны равняться нулю каждый в отдельности. Чтобы это

лучше записать, воспользуемся обозначением

$$\bar{\ell}_{a_0\dots a_\ell}\,\bar{\ell}_{b_0\dots b_\ell} = \begin{pmatrix} \alpha_1, \dots, \alpha_m \\ \beta_1, \dots, \beta_m \end{pmatrix},$$

где α_c и β_c – число индексов c в совокупностях $a_0\dots a_\ell$ и $b_0\dots b_\ell$ соответственно. Очевидно, что

$$\sum_c \alpha_c = \sum_c \beta_c = \ell + 1 .$$

Так, например, для координаты $\bar{\ell}_{134}\bar{\ell}_{222}$ тензора второй кривизны поверхности V_4 получим обозначение

$$\bar{\ell}_{134}\bar{\ell}_{222} = \begin{pmatrix} 1011 \\ 0300 \end{pmatrix}.$$

Теперь очевидна следующая

Теорема I.

Для того, чтобы тензор ℓ-ой кривизны поверхности V_m удовлетворял условиям максимальной симметрии, необходимо и достаточно соблюдение соотношений

$$\alpha_a \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_a - 1 \dots \alpha_b + 1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_a \dots \beta_b \dots \beta_m \end{pmatrix} - \alpha_b \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_a + 1 \dots \alpha_b - 1 \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_a \dots \beta_b \dots \beta_m \end{pmatrix} +$$
$$+ \beta_a \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_a - 1 \dots \beta_b + 1 \dots \beta_m \end{pmatrix} - \beta_b \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m \\ \beta_1 \dots \beta_a + 1 \dots \beta_b - 1 \dots \beta_m \end{pmatrix} = 0 \qquad (6)$$

для всех индексов a и b и наборов величин α_c и β_c таких, что $\sum_c \alpha_c = \sum_c \beta_c = \ell + 1$. Касательный репер предполагается ортонормированным.

Проверка того, удовлетворяет ли данный тензор ℓ-ой

кривизны условиям (6) или нет, является довольно трудоемкой и автору не удалось в достаточной мере упростить его для общего значения l. Сделаем только следующие легко проверяемые общие замечания:

1^0 Если тензор кривизны нулевой, то он удовлетворяет условиям максимальной симметрии.

2^0 Если тензор кривизны удовлетворяет условиям максимальной симметрии и касательный репер R ортонормирован, то

a) координаты тензора инвариантны относительно нумерации векторов репера R;

b) из соотношения $\bar{l}_{\underbrace{a\dots a}_{l+1}} = 0$ следует, что тензор кривизны - нулевой;

c) имеет место соотношение

$$\bar{l}_{a\dots aa}\bar{l}_{a\dots ab} = \bar{l}_{a\dots ab}\bar{l}_{a\dots ac} = 0,$$

где все a, b и c различны;

d) из соотношения $\bar{l}_{a\dots ab} = 0$ $(b \neq a)$ следует: вектор $\bar{l}_{a\dots a}$ в данной точке M постоянный; справедливо равенство $\bar{l}_{a\dots a} = \bar{l}_{b\dots b}$; размерность l-ой нормальной плоскости R^l_m не превышает единицы.

В дальнейшем условия максимальной симметрии исследуются только в некоторых отдельных случаях.

3. Случай $l = 1$.

При соблюдении условий максимальной симметрии тензор

первой кривизны не может иметь более семи существенно различных координат, так как все остальные координаты можно получить из координат

$$\begin{pmatrix}20\ldots0\\20\ldots0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}200\ldots0\\110\ldots0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}200\ldots0\\020\ldots0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}110\ldots0\\110\ldots0\end{pmatrix},\qquad (7)$$

$$\begin{pmatrix}2000\ldots0\\0110\ldots0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1100\ldots0\\1010\ldots0\end{pmatrix}\text{и}\begin{pmatrix}11000\ldots0\\00110\ldots0\end{pmatrix}$$

В результате перенумерации векторов репера R или замены порядка множителей в скалярных произведениях $\bar{e}_{ab}\bar{e}_{cd}$.

Если m достаточно мало, то число существенных координат будет еще меньше. Так, например, в случае $m=2$ имеем только 4 координаты

$$\begin{pmatrix}20\\20\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}20\\11\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}20\\02\end{pmatrix}\text{и}\ \begin{pmatrix}11\\11\end{pmatrix}.$$

Каждая существенная координата тензора кривизны определяет $\frac{1}{2}m(m-1)$ соотношений (6). Однако, в рассмотрение нужно брать только некоторые из них. Так, для координаты $\begin{pmatrix}200\ldots0\\020\ldots0\end{pmatrix}$ получим два соотношения

$$2\begin{pmatrix}110\ldots0\\020\ldots0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}200\ldots0\\110\ldots0\end{pmatrix}=0,$$

$$2\begin{pmatrix}1010\ldots0\\0200\ldots0\end{pmatrix}=0, \qquad (8)$$

а соотношение

$$2\begin{pmatrix}1001\ldots0\\0200\ldots0\end{pmatrix}=0$$

равносильно (8)

Все координаты тензора кривизны, встречающиеся в получен-ных соотношениях, можно при помощи перестановки рядов и столб-цов привести к виду (7). Тем самым получается ряд соотношений между семью величинами (в общем случае). После некоторых уп-рощений получим следующие необходимые и достаточные условия максимальной симметрии для тензора первой кривизны:

$$* \begin{cases} \bar{l}^{\,2}_{aa} = \alpha^2 \\ \bar{l}^{\,2}_{ab} = \beta^2 \\ \bar{l}_{aa}\bar{l}_{bb} = \alpha^2 - 2\beta^2 \end{cases} ; \qquad (9)$$

знак "$*$" означает, что все остальные координаты тензора кри-визны равны нулю. Этой звездочкой будем пользоваться и ниже. Еще обусловимся в том, что индексы в одной и той же выражении, но в различной записи - различны. Это имеется в виду как в (9), так и в дальнейшем. Исключение будут составлять индексы g и h, которые могут приобрести произвольные значения.

Из соотношений (9) видно - как это можно было и ожидать-, что выполнение (9) влечет за собой и выполнение соотношений (2.18). При помощи (9) также нетрудно установить, что точ-ка M поверхности V_m является полуумбилической тогда и только тогда, когда она - омбилическая ($\beta = 0$).

4. Случай $l = 2$.

Изучение строения тензора второй кривизны, удовлетворяю-щегося условиям максимальной симметрии, проводится также,

как и в случае $l = 1$. Здесь получим 22 существенных координаты тензора, именно:

$$\left\{\begin{array}{lllll}
\begin{pmatrix}3\ldots0\\3\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}21\ldots0\\12\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}210\ldots0\\102\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2100\ldots0\\1011\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1100\ldots0\\1001\ldots0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}30\ldots0\\21\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}300\ldots0\\111\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}210\ldots0\\021\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2100\ldots0\\0111\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1100\ldots0\\0011\ldots0\end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix}30\ldots0\\12\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}300\ldots0\\021\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}210\ldots0\\012\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2100\ldots0\\0021\ldots0\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}30\ldots0\\03\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}210\ldots0\\201\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}111\ldots0\\111\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1110\ldots0\\1101\ldots0\end{pmatrix} & \\
\begin{pmatrix}21\ldots0\\21\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}210\ldots0\\111\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3000\ldots0\\0111\ldots0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2100\ldots0\\0011\ldots0\end{pmatrix} &
\end{array}\right. \qquad (10)$$

где вместо троеточия всюду подразумеваются нули.

В случае достаточно малого значения m число существенных координат соответственно уменьшается.

Если теперь для всех координат (10) записать соответствующие соотношения (6), то после некоторых упрощений получается соотношение

$$\bar{l}^{\,2}_{aan} - 2\bar{l}_{aan}\bar{l}_{abb} - 3\bar{l}^{\,2}_{aab} = 0\,, \qquad (11)$$

$$3\bar{l}^{\,2}_{aab} - \bar{l}_{aaa}\bar{l}_{abb} - 6\bar{l}^{\,2}_{abc} = 0\,; \qquad (12)$$

все остальные координаты тензора второй привязки, не встречающиеся в (11) и (12), равны нулю. Тем самым необходимым и достаточным условием максимальной симметрии тензора второй

привизны можно придать следующую форму:

$$
* \begin{cases} \bar{\ell}^2_{aaa} = p^2 \\ \bar{\ell}_{aaa}\bar{\ell}_{abb} = pq \\ \bar{\ell}^2_{aab} = \frac{1}{3}p(p-2q) \\ \bar{\ell}_{aab}\bar{\ell}_{bic} = \frac{1}{3}pq \\ \bar{\ell}^2_{abi} = \frac{1}{6}p(p-3q) \end{cases} \qquad (13)
$$

Здесь, как и во всем дальнейшем изложении этой главы, нужно будет иметь ввиду следующее: при изучении поверхностей достаточно малой размерности m все проведенные рассуждения остаются в силе, если исключить из рассмотрения все те соотношения, которые содержат более m различных индексов. Так, например, при изучении двумерных поверхностей мы исключаем из рассмотрения (12) и последнее соотношение в (13).

5. Случай однократной нормальной плоскости.

Если размерность ℓ-ой нормальной плоскости R'_m в V_m в точке M равна $m_\ell = 1$, то все векторы ℓ-ой привизны в M коллинеарны. В этом случае требование инвариантности координат тензора ℓ-ой привизны относительно вращений ортонормированного касательного репера R можно заменить требованием инвариантности самих векторов ℓ-ой привизны. Здесь условия (6) можно дать более простую форму (см. обозначение гл. I § 3, п. 1)

$$
\alpha_a\{\alpha_1 \dots \alpha_a - 1 \dots \alpha_\ell + 1 \dots \alpha_m\} = \alpha_\ell\{\alpha_1 \dots \alpha_a + 1 \dots \alpha_\ell - 1 \dots \alpha_m\}
$$

или, что то же самое

$$\{\alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m\} = \frac{\alpha_b - 1}{\alpha_a + 1} \{\alpha_1 \dots \alpha_a + 2 \dots \alpha_b - 2 \dots \alpha_m\}.$$

В результате многократного использования последнего соотношения получим

$$\{\alpha_1 \dots \alpha_a \dots \alpha_b \dots \alpha_m\} = \begin{cases} 0 \text{ — в случае нечетного } \alpha_b, \\ \dfrac{(\alpha_b - 1)!!}{(\alpha_a+1)(\alpha_a+3)\dots(\alpha_a+\alpha_b-1)} \{\alpha_1 \dots \alpha_a + \alpha_b \dots 0 \dots \alpha_m\} \text{ в} \\ \text{случае четного } \alpha_b. \end{cases}$$

Теперь уже очевидным образом приходим к соотношению

$$\{\alpha_1 \dots \alpha_m\} = \frac{(\alpha_1 - 1)!!(\alpha_2 - 1)!! \dots (\alpha_m - 1)!!}{\ell!!} \bar{\ell}_{\underbrace{a \dots a}_{\ell+1}},$$

если все величины α_a четны, и $\{\alpha_1 \dots \alpha_m\} = 0$, если даже одна из α_a нечетна.

Для примера, в случае $\ell = 1$ отличны от нуля только векторы $\bar{\ell}_{aa}$ (особенная точка), а в случае $\ell = 3$ — векторы

$$\bar{\ell}_{aaaa} = 3\bar{\ell}_{aabb}.$$

Из этих результатов непосредственно получается

Теорема 2.

Если тензор ℓ-ой кривизны поверхности V_m в M удовлетворяет условиям максимальной симметрии и соответствующая ℓ-ая

нормальная плоскость одномерна, то ℓ - нечетно.

Также легко доказывается при помощи полученных результатов следующая

Т е о р е м а 3.

Если тензоры ℓ-ой и $(\ell+1)$-ой кривизн поверхности V_m удовлетворяют условиям максимальной симметрии и ℓ-ая нормальная плоскость к V_m одномерна, то порядок кривизны поверхности V_m равен ℓ.

Доказательство.

В силу леммы 1.1, $(\ell+1)$-ая нормальная плоскость к V_m не более чем одномерна. Но так как, в силу теоремы 2, ℓ-нечетно, то, по той же теореме, размерность $(\ell+1)$-ой нормальной плоскости не может равняться единице; следовательно, она равна нулю.

6. Из полученных в этом параграфе результатов видно, что строение тензора ℓ-ой кривизны поверхности, удовлетворяющего условиям максимальной симметрии, зависит

1) в случае $\ell=1$ - от двух величин α и β,
2) в случае $\ell=2$ - от двух величин ρ и q и
3) в случае одномерной ℓ-ой нормальной плоскости - от одной величины $n^2 = \bar{\ell}^2_{a\dots a}$.

Величины α, β, ρ, q и n не могут, однако, приобрести произвольные, независимые друг от друга значения. Так, во-первых, они должны удовлетворять требованию положи-

тельной определенности метрики пространства R_n.

I^0. В случае $\ell = I$ имеет смысл рассматривать только значения $\alpha^2 > 0$, так как в силу результатов п.2 этого параграфа (2^0 ℓ)) при $\alpha^2 = 0$ получается тривиальный случай $\alpha = \beta = 0$.

При заданной α величина β определяет согласно (9) угол φ между векторами $\bar{\ell}_{aa}$ и $\bar{\ell}_{bb}$. Но так как здесь имеется m векторов, образующих между собой равные углы φ, то верно соотношение

$$\varphi \leq \arccos \frac{-1}{m-1} .$$

Отсюда и из (9) получаем соотношение

$$2(m-1)\beta^2 \leq m\alpha^2 . \qquad (I4)$$

Для вектора средней кривизны поверхности $\bar{H} = \frac{1}{m} \sum_c \bar{\ell}_{cc}$ имеем

$$m\bar{H}^2 = m\alpha^2 - 2(m-1)\beta^2 . \qquad (I5)$$

Отсюда (I4) равносильно соотношению

$$\alpha^2 \geq \bar{H}^2 . \qquad (I6)$$

а) При $\bar{H}^2 = \alpha^2$ ($\beta = 0$) M является омбилической точкой поверхности V_m. Отличны от нуля только m векторов первой кривизны $\bar{\ell}_{aa}$, равные между собой. Первая нормальная плоскость к V_m в M имеет размерность $m_1 = 1$.

b) При $0 < H^2 < \alpha^2$ все векторы первой кривизны в M отличны от нуля и линейно независимы. Первая нормальная плоскость к V_m в M имеет максимальную размерность $m_1 = \frac{1}{2} m(m+1)$.

c) При $\bar{H}^2 = 0$ все векторы первой кривизны в M отличны от нуля. Между ними имеет место точно одна линейная зависимость

$$\sum_c \bar{\ell}_{cc} = m\bar{H} = 0 , \tag{17}$$

которая означает, что M является и минимальной точной поверхности V_m. Размерность первой нормальной плоскости к V_m в M равна $m_1 = \frac{1}{2} m(m+1) - 1$.

2^0. Из (13) следует, что в случае $\ell = 2$ имеет смысл рассматривать только значения $p > 0$. Здесь для каждого значения a получается $m-1$ векторов $\bar{\ell}_{acc}$, образующие между собой равные углы

$$\varphi = \arccos \frac{\bar{\ell}_{acb}\,\bar{\ell}_{acc}}{\bar{\ell}^2_{acc}} = \arccos \frac{q}{p-2q} ,$$

а с вектором $\bar{\ell}_{aaa}$ – угол

$$\psi = \arccos \frac{\bar{\ell}_{aaa}\,\bar{\ell}_{acb}}{|\bar{\ell}_{aaa}||\bar{\ell}_{acb}|} = \arccos \frac{q}{\sqrt{\frac{p}{3}(p-2q)}} .$$

Отсюда получаем границы для величины q:

$$-\frac{p}{m-1} \leq q \leq \frac{p}{3} . \tag{17}$$

Из (I3) видно, что при этом удовлетворяется и требование неотрицательности квадрата $\bar{\ell}^2_{abc}$.

а) При $p+(m-1)q=0$ вместо (I3) получим

$$* \begin{cases} \bar{\ell}^2_{aaa} = p^2 \\ \bar{\ell}_{aaa}\bar{\ell}_{abc} = -\frac{1}{m-1}p^2 \\ \bar{\ell}^2_{aab} = \frac{m+1}{3(m-1)}p^2 \\ \bar{\ell}_{aab}\bar{\ell}_{bcc} = -\frac{1}{3(m-1)}p^2 \\ \bar{\ell}^2_{abc} = \frac{m+2}{6(m-1)}p^2 \end{cases} . \qquad (I8)$$

Все векторы второй кривизны в M отличны от нуля, но они связаны между собой m линейными соотношениями

$$\sum_g \bar{\ell}_{aag} = 0 .$$

Отсюда следует, что размерность второй нормальной плоскости к V_m в M равна $m_2 = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2) - m$.

б) При $-\frac{p}{m-1} < q < \frac{p}{3}$ все векторы второй кривизны в M отличны от нуля и линейно независимы. Вторая нормальная плоскость к V_m в M имеет максимальную размерность

$$m_2 = \frac{1}{6}m(m+1)(m+2) .$$

с) При $3q=p$ вместо (I3) получим

$$* \begin{cases} \bar{\ell}^2_{aaa} = p^2 \\ \bar{\ell}_{aaa}\bar{\ell}_{abc} = \frac{1}{3}p^2 \\ \bar{\ell}^2_{aab} = \frac{1}{9}p^2 \\ \bar{\ell}_{aab}\bar{\ell}_{bcc} = \frac{1}{9}p^2 \end{cases} , \qquad (I9)$$

отсюда

$$\bar{l}_{\alpha\beta\beta} = \frac{1}{3}\bar{l}_{\alpha\alpha\alpha} . \qquad (20)$$

Здесь отличны от нуля те и только те векторы второй кривизны, которые имеют меньше трех различных индексов. Размерность второй нормальной плоскости к V_m в M равна $m_2 = m$.

§ 3. ВЕКТОРЫ ОТРАЖЕНИЯ КРИВИЗНЫ

В предыдущем параграфе мы в некоторых частных случаях подробно выяснили строение тензора кривизны поверхности, удовлетворяющего условиям максимальной симметрии или, что то же, соотношениям (4). Для того, чтобы проверить выполнение условий интегрируемости (5), нужно будет сначала векторы отражения (кривизны) выразить при помощи (3) через векторы кривизны, учитывая, что выполнены (4).

I. Случай $l = 1$.

В силу ортонормированности касательного репера R , (9) и (3) очевидным образом получаем

$$\bar{A}_{\alpha\beta\gamma} = 0 ,$$
$$\bar{A}_{\alpha\alpha\beta} = (2\beta^2 - \alpha^2)\bar{l}_\beta ,$$
$$\bar{A}_{\alpha\beta\beta} = -\beta^2\bar{l}_\alpha ,$$
$$\bar{A}_{\alpha\alpha\alpha} = -\alpha^2\bar{l}_\alpha .$$

Тем самым все векторы отражения первой кривизны найдены.

2. Случай $\ell = 2$.

Здесь имеем семь векторов отражения кривизны существенно различного вида

$$\bar{A}_{abcd}\,,\ \bar{A}_{aacd}\,,\ \bar{A}_{abcc}\,,\ \bar{A}_{aacc}\,,$$
$$\bar{A}_{aaac}\,,\ \bar{A}_{accc}\ \text{и}\ \bar{A}_{aaaa}\,. \qquad (21)$$

Скалярные произведения этих векторов со всеми векторами первой кривизны выражаются при помощи (3) и (13). Выражения для векторов отражения второй кривизны получаются при помощи(9). Сделаем это по порядку записи векторов (21). В вычислениях вполне можно предполагать $\beta \neq 0$, так как в противном случае первая нормальная плоскость одномерна и в силу теоремы 3 получим тривиальный случай: все векторы второй кривизны и векторы отражения второй кривизны равны нулю.

1° Все скалярные произведения вектора $\bar{A}_{abcd}$ с векторами первой кривизны равны нулю, следовательно,

$$\bar{A}_{abcd} = 0\,.$$

2° Здесь отлично от нули только скалярное произведение

$$\bar{A}_{aacd}\,\bar{\ell}_{de} = -\frac{1}{3}\,pq\,.$$

В силу того, что вектор $\bar{\ell}_{cd}$ ортогонален со всеми остальны-

ми векторами первой кривизны, получим

$$\bar{A}_{aacd} = -\frac{pq}{3\beta^2}\bar{\ell}_{cd}.$$

3° Здесь отлично от нуля только скалярное произведение

$$\bar{A}_{abca}\bar{\ell}_{bc} = -\frac{1}{6}p(p-3q),$$

откуда получается

$$\bar{A}_{abca} = -\frac{p}{6\beta^2}(p-3q)\bar{\ell}_{bc}.$$

4° Здесь отличны от нуля только скалярные произведения

$$\begin{cases} \bar{A}_{aacc}\bar{\ell}_{aa} = -\frac{1}{3}p(p-2q) \\ \bar{A}_{aacc}\bar{\ell}_{cc} = -pq \\ \bar{A}_{aacc}\bar{\ell}_{dd} = -\frac{1}{3}pq \end{cases} \qquad (22)$$

Так как векторы $\bar{\ell}_{aa}$ ортогональны со всеми векторами $\bar{\ell}_{ab}$, $\bar{\ell}_{cd}$, то вектор $\bar{A}_{aacc}$ можно в силу (22) представить в виде

$$\bar{A}_{aacc} = A^{aa}_{aacc}\bar{\ell}_{aa} + A^{cc}_{aacc}\bar{\ell}_{cc} + \sum_{\substack{d\neq a \\ d\neq c}} A^{dd}_{aacc}\bar{\ell}_{dd}, \qquad (23)$$

где все величины A^{dd}_{aacc}, очевидно, равны. Выпишем матрицу линейной системы, определяющей величины A^{aa}_{aacc}, A^{cc}_{aacc} и A^{dd}_{aacc}, исходя из (22) и (23):

$$\begin{array}{c|ccc|c} & A^{aa}_{aacc} & A^{cc}_{aacc} & A^{dd}_{aacc} & \\ \hline & \alpha^2 & \alpha^2-2\beta^2 & (m-2)(\alpha^2-2\beta^2) & -\frac{1}{3}p(p-2q) \\ & \alpha^2-2\beta^2 & \alpha^2 & (m-2)(\alpha^2-2\beta^2) & -pq \\ & \alpha^2-2\beta^2 & \alpha^2-2\beta^2 & (m-2)(\alpha^2-2\beta^2)+2\beta^2 & -\frac{1}{3}pq \end{array} .$$

Детерминант этой системы равен

$$D = 4(m\alpha^2-2(m-1)\beta^2)\beta^4$$

или, в силу (15),

$$D = 4m\bar{H}^2\beta^4 .$$

Отсюда получаются две возможности:

a) $\bar{H} \neq 0$, в этом случае

$$A^{aa}_{aacc} = \frac{1}{\xi}p\{p(\alpha^2-2\beta^2-m\bar{H}^2)+q(3m\bar{H}^2-\alpha^2)\} ,$$

$$A^{cc}_{aacc} = \frac{1}{\xi}p\{p(\alpha^2-2\beta^2)-q(2m\bar{H}^2+\alpha^2)\} ,$$

$$A^{dd}_{aacc} = \frac{1}{\xi}p\{p(\alpha^2-2\beta^2)-q\alpha^2\} ,$$

где $\xi = 6m\bar{H}^2\beta^2$, и

b) $\bar{H} = 0$, в этом случае

$$\bar{A}_{aacc} = -\frac{p(p-3q)}{6\beta^2}\bar{e}_{aa} - \frac{pq}{3\beta^2}\bar{e}_{cc} .$$

5° Здесь отлично от нуля только скалярное произведение

$$\bar{A}_{aaac}\bar{e}_{ca} = -pq ,$$

откуда получается

$$\bar{A}_{aaac} = -\frac{pq}{\beta^2}\bar{\ell}_{ac}\,.$$

6^0 Здесь отлично от нуля только скалярное произведение

$$\bar{A}_{accc}\bar{\ell}_{ca} = -\frac{1}{3}p(p-2q),$$

откуда получается

$$\bar{A}_{accc} = -\frac{p}{3\beta^2}(p-2q)\bar{\ell}_{ac}\,.$$

7^0 Здесь отличны от нуля только скалярные произведения

$$\bar{A}_{aaaa}\bar{\ell}_{aa} = -p^2$$

и $$\bar{A}_{aaaa}\bar{\ell}_{cc} = -pq\,.$$

Аналогично случаю 4^0 и здесь получаем две возможности:

a) $\bar{H} \neq 0$, в этом случае

$$A^{aa}_{aaaa} = \frac{1}{\eta}p\left\{p(\alpha^2 - 2\beta^2 - m\bar{H}^2) + q(m\bar{H}^2 - \alpha^2)\right\},$$

$$A^{cc}_{aaaa} = \frac{1}{\eta}p\left\{p(\alpha^2 - 2\beta^2) - q\alpha^2\right\},$$

где $\eta = 2m\bar{H}^2\beta^2$, и

b) $\bar{H} = 0$, в этом случае

$$\bar{A}_{aaaa} = \frac{-p(p-q)}{2\beta^2}\bar{\ell}_{aa}\,.$$

3. Случай $\ell = 3$, когда третья нормальная плоскость одномерна.

В силу результатов § 2 п.5 имеем, что среди векторов третьей кривизны отличны от нуля только векторы

$$\bar{\ell}_{aaaa} = 3\bar{\ell}_{aacc} = \bar{\ell}_{cccc} . \qquad (24)$$

Очевидно, верны соотношения

$$\bar{A}_{aaaaa} = \bar{A}_{ccccc} = 3\bar{A}_{aaccc} = \dots \qquad (25)$$

Таким образом, для нахождения векторов отражения третьей кривизны в данном случае достаточно найти при помощи (3),(24) и (I3) выражение только для вектора $\bar{A}_{aaaag}$. Остальные векторы отражения кривизны получаются тогда уже с учетом (25).

Обозначим

$$\bar{\ell}^2_{aaaa} = n^2 (\neq 0) ,$$

тогда получаем

$$\bar{A}_{aaaag}\,\bar{\ell}_{ggg} = -n^2 ,$$

$$\bar{A}_{aaaag}\,\bar{\ell}_{gbb} = -\tfrac{1}{3}n^2 \ (b \neq g),$$

все остальные скалярные произведения равны нулю.

Решив соответствующую линейную систему, где, очевидно, $p \neq 0$, мы в итоге получим следующие результаты:

а) в случае $p = 3q$

$$\bar{A}_{aaaag} = 3\bar{A}_{aaccg} = -\frac{n^2}{p^2}\bar{\ell}_{ggg} ,$$

б) в случае $\frac{1}{3}p > q > -\frac{1}{m-1}p$

$$\bar{A}_{aaaag} = 3\bar{A}_{aaccg} = -\frac{n^2}{p[p+(m-1)q]}\sum_h \bar{\ell}_{ghh} ,$$

c) в случае $(m-1)q = -p$

приходим к противоречивому соотношению $0 = -\frac{n^2}{p^2}$.

Этим заканчивается рассмотрение частных случаев для нахождения (векторов отражения) кривизны в точке максимальной симметрии поверхности V_m.

§ 4. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

I. В предыдущих двух параграфах подготовлено достаточно материала для того, чтобы при помощи условий интегрируемости (5) найти все максимально симметричные поверхности, размерность третьей нормальной плоскости которых не превышает единицы. Как выяснилось, каждая m-мерная поверхность этого класса полностью описывается пятью величинами α, β, p, q и n, связанными соотношениями (I4) и (I7). В этом параграфе мы выясним необходимые и достаточные соотношения между величинами α, β, p, q и n для существования соответствующих поверхностей S_m^k.

Чтобы лучше представить подлежащие рассмотрению основные случаи соотношений между величинами α, β, p, q и n, запишем их в виде таблицы:

Таблица I.

α	β	p	q	n	осн. сл.
0	0	0	0	0	I
>0	0	0	0	0	II
	$0<\beta^2<\frac{m\alpha^2}{2(m-1)}$	0	0	0	III
		>0	$-\frac{p}{m-1}$	0	IV
			$-\frac{p}{m-1}<q<\frac{p}{3}$	0	V
				>0	VI
			$\frac{p}{3}$	0	VII
				>0	VIII
	$\beta^2=\frac{m\alpha^2}{2(m-1)}$	>0	$-\frac{p}{m-1}$	0	IX
		0	0	0	X

При составлении этой таблицы мы пользовались результатами § 2 п.2 $\to 2^0 \to b)$, теоремой 3, (I4), (I7) и § 3 п.3 $\to$ c).

Случай

$$m\alpha^2 = 2(m-1)\beta^2 \ , \ -\frac{p}{m-1} < q \leq \frac{p}{3}$$

не может иметь место в силу (I7)^a, § 2 п.6 $\to 2^0 \to b)$, c) и леммы I.1 .

Каждые два из полученных десяти основных случаев различаются между собой линейными соотношениями между векторами кривизны и размерностями соответствующих нормальных плоскостей (см.§ 2 п.6).

При последующем анализе условий интегрируемости (5) везде, где возможно, будем рассматривать все случаи I – X вместе взятые. Это не возможно тогда, когда выражения векторов отражения кривизны существенно зависят от выбора случая I – X. Во всем этом параграфе будем без особого замечания пользоваться выражениями для векторов отражения кривизны через векторы кривизны, полученными в предыдущем параграфе.

2. I^0 Случай $\ell = 1$.

В первом соотношении условий (5) мы имеем дело с четырьмя существенно различными комбинациями индексов:

$$cccd,\ dccd,\ accd \text{ и } abcd.$$

При комбинации $cccd$ соответствующее условие интегрируемости принимает вид

$$\bar{A}_{cccd} + A^9_{ccc}\bar{\ell}_{gd} + 2A^9_{dcc}\bar{\ell}_{gc} = \bar{A}_{dccc} + 3A^9_{ccd}\bar{\ell}_{gc},$$

откуда

$$\bar{A}_{cccd} - \bar{A}_{dccc} = 2(4\beta^2 - \alpha^2)\bar{\ell}_{cd}. \qquad (26)$$

Для остальных комбинаций получим соответственно

$$\bar{A}_{ccdd} - \bar{A}_{ddcc} = (4\beta^2 - \alpha^2)(\bar{\ell}_{dd} - \bar{\ell}_{cc}), \qquad (27)$$

$$\bar{A}_{accd} - \bar{A}_{adcc} = (4\beta^2 - \alpha^2)\,\bar{e}_{ad}\,, \qquad (28)$$

$$\bar{A}_{abcd} = \bar{A}_{abdc}\,.$$

Последнее соотношение тождественно исчезает и выпадает из рассмотрения.

2^0 Случай $l = 2$.

Здесь имеет место 9 существенно различных комбинаций индексов:

$$\begin{array}{lll} ccccd\,, & aaccd\,, & aabcd\,, \\ ccdcd\,, & acccd\,, & abccd\,, \\ aaacd\,, & acdcd\,, & abecd\,. \end{array}$$

В дальнейшем будем предполагать $\beta \neq 0$, $\rho \neq 0$, так как для основных случаев I, II и III при $l > 1$ условия (5) очевидно выполнены.

При комбинации $ccccd$ соответствующее условие интегрируемости принимает вид

$$\bar{A}_{ccccd} + A^{gh}_{cccc}\,\bar{e}_{ghd} + 3A^{g}_{dcc}\,\bar{e}_{gcc} = \bar{A}_{dcccc} + A^{gh}_{cccd}\,\bar{e}_{ghc} + 3A^{g}_{ccd}\,\bar{e}_{gcc}\,,$$

откуда

$$\bar{A}_{ccccd} - \bar{A}_{dcccc} = A^{gh}_{ccccd}\,\bar{e}_{ghc} - A^{gh}_{cccc}\,\bar{e}_{ghd} + 3(3\beta^2 - \alpha^2)\,\bar{e}_{dcc}\,.$$

Далее, как и для этой, так и для остальных комбинаций индексов получим соответственно девять соотношений:

$$\bar{A}_{ccccd} - \bar{A}_{dcccc} = \left[3(3\beta^2-\alpha^2) - \frac{pq}{\beta^2} - A^{cc}_{cccc}\right]\bar{\ell}_{dcc} - \sum_{g\neq c} A^{gg}_{cccc}\,\bar{\ell}_{dgg}\,, \tag{29}$$

$$\bar{A}_{ccddd} - \bar{A}_{ddccc} = \left(A^{cc}_{ccdd} + \alpha^2 - 3\beta^2\right)\bar{\ell}_{ccc} +$$

$$+\left[A^{dd}_{ccdd} + \frac{p}{3\beta^2}(p-2q) + 2(3\beta^2-\alpha^2)\right]\bar{\ell}_{cdd} + \sum_{\substack{g\neq c\\ \neq d}} A^{gg}_{ccdd}\,\bar{\ell}_{cgg}\,, \tag{30}$$

$$\bar{A}_{aaacd} = \bar{A}_{aaadc}\,, \tag{31}$$

$$\bar{A}_{aaccd} - \bar{A}_{aadcc} = \left(3\beta^2-\alpha^2-A^{aa}_{aacc}\right)\bar{\ell}_{aad} - \left(\frac{pq}{3\beta^2} + A^{cc}_{aacc}\right)\bar{\ell}_{ccd} -$$

$$- A^{dd}_{aacc}\,\bar{\ell}_{ddd} - \sum_{\substack{g\neq a\\ \neq c\\ \neq d}} A^{gg}_{aacc}\,\bar{\ell}_{ggd}\,, \tag{32}$$

$$\bar{A}_{accdd} - \bar{A}_{adccc} = \left[\frac{p}{3\beta^2}(p-3q) + 2(3\beta^2-\alpha^2)\right]\bar{\ell}_{acd}\,, \tag{33}$$

$$\bar{A}_{accdd} - \bar{A}_{addcc} = \left[-\frac{p}{6\beta^2}(p-3q) - 3\beta^2 + \alpha^2\right](\bar{\ell}_{acc} - \bar{\ell}_{add}), \tag{34}$$

$$\bar{A}_{aabcd} = \bar{A}_{aabdc}\,, \tag{35}$$

$$\bar{A}_{abccd} - \bar{A}_{abdcc} = \left[\frac{p}{6\beta^2}(p-3q) + 3\beta^2 - \alpha^2\right]\bar{\ell}_{abd}\,, \tag{36}$$

$$\bar{A}_{abedc} = \bar{A}_{abecd}. \qquad (37)$$

3^0 Случай $\ell = 3$, когда третья нормальная плоскость не более чем одномерна. Здесь имеет смысл рассматривать семь существенно различных комбинаций индексов

$$ccccd,\ aaaacd,\ aabbcd,\ aacdcd,$$
$$ddcccd,\ aaccdd,\ ccddcd,$$

так как в остальных случаях все члены в условиях интегрируемости обращаются в нуль – см.(24). Таким образом получается семь соотношений

$$A^{ggd}_{ccccc}\bar{\ell}_{ggdd} = A^{ggc}_{ccccd}\bar{\ell}_{ggcc},$$
$$A^{ggd}_{ddccc}\bar{\ell}_{ggdd} = A^{ggc}_{ddccd}\bar{\ell}_{ggcc},$$
$$A^{ggd}_{aaaac}\bar{\ell}_{ggdd} = A^{ggc}_{aaaad}\bar{\ell}_{ggcc},$$
$$A^{ggd}_{aaccc}\bar{\ell}_{ggdd} = A^{ggc}_{aaccd}\bar{\ell}_{ggcc},$$
$$A^{ggd}_{aabbc}\bar{\ell}_{ggdd} = A^{ggc}_{aabbd}\bar{\ell}_{ggcc},$$
$$3A^{d}_{dcc}\bar{\ell}_{ccdd} + A^{c}_{ddc}\bar{\ell}_{cccc} = 3A^{d}_{ccd}\bar{\ell}_{ccdd} + A^{c}_{cdd}\bar{\ell}_{cccc},$$
$$A^{d}_{dcc}\bar{\ell}_{ddaa} + A^{c}_{ddc}\bar{\ell}_{ccaa} = A^{d}_{ccd}\bar{\ell}_{ddaa} + A^{c}_{cdd}\bar{\ell}_{ccaa},$$

которые все, в силу (24), удовлетворены тождественно.

3. Сопоставим полученные условия интегрируемости (26)–(37) с основными случаями I – X.

Случай I тривиальный и здесь условия интегрируемости выполнены тождественно.

Для случаев II, III и X достаточно рассмотреть условия (26) – (28).

В случае II получим

$$\bar{\ell}_{ab} = \bar{\ell}_{aa} - \bar{\ell}_{bb} = 0 ,$$

а в случае III

$$\alpha^2 = 4\beta^2 .$$

Основной случай X приводит к противоречию.

При выводе условий интегрируемости (26)–(37), мы нигде не пользовались требованием, чтобы третья нормальная плоскость к S_m^k была не более чем одномерна. Поэтому условия (26) – (37) действительны для всех поверхностей S_m^k кроме основных случаев I и II ($\beta = 0$). Однако, для случаев, не встречающихся в таблице I, нет основания считать их достаточными для интегрируемости системы A^* . Зато для случаев IV – IX условия интегрируемости упрощаются, так как (31), (35) и (37) превращаются в тождества, а условия (29), (30), (32), (33) и (34) принимают соответственно более простой вид

$$\bar{A}_{ccccd} = \left[3(3\beta^2-\alpha^2) - \frac{pq}{\beta^2} - A^{cc}_{cccc}\right]\bar{\ell}_{dcc} - A^{dd}_{cccc}\bar{\ell}_{ddd} - \sum_{\substack{g\neq d\\ g\neq c}} A^{gg}_{cccc}\bar{\ell}_{dgg} , \qquad (38)$$

$$\bar{A}_{ccddd} = (3\beta^2 - \alpha^2 - A^{dd}_{ddcc})\bar{\ell}_{ddd} +$$

$$+ \left[2(\alpha^2 - 3\beta^2) + \frac{p}{3\beta^2}(2q-p) - A^{cc}_{ddcc}\right]\bar{\ell}_{dcc} - \sum_{\substack{g\neq d\\ \neq c}} A^{gg}_{ddcc}\bar{\ell}_{dgg}, \quad (39)$$

$$\bar{A}_{aaccd} = (3\beta^2 - \alpha^2 - A^{aa}_{aacc})\bar{\ell}_{daa} -$$

$$-\left(\frac{pq}{3\beta^2} + A^{cc}_{aacc}\right)\bar{\ell}_{dcc} - A^{dd}_{aacc}\bar{\ell}_{ddd} - \sum_{\substack{g\neq a\\ \neq c\\ \neq d}} A^{gg}_{aacc}\bar{\ell}_{dgg}, \quad (40)$$

$$[p(p-3q) + 6\beta^2(3\beta^2 - \alpha^2)]\bar{\ell}_{acd} = 0, \quad (41)$$

$$[p(p-3q) + 6\beta^2(3\beta^2 - \alpha^2)](\bar{\ell}_{acc} - \bar{\ell}_{add}) = 0, \quad (42)$$

и (36) равносильно (33).

Подставляя выражения векторов отражения второй кривизны в (26), (27) и (28), выясняется, что все эти условия интегрируемости равносильны соотношению

$$p(p-5q) = 6\beta^2(4\beta^2 - \alpha^2), \quad (43)$$

которое справедливо для всех максимально симметричных поверхностей.

Таким образом, условия интегрируемости (5) для основных случаев IУ – IX принимают вид (38) – (43).

4. I° Рассмотрим основной случай IX. Здесь (41) и (42) равносильны соотношению

$$p(p-3q) = 6\beta^2(\alpha^2 - 3\beta^2),$$

которое вместе с (43) дает

$$p^2 = 3\beta^2(8\alpha^2 - 27\beta^2), \tag{44}$$

$$pq = 3\beta^2(2\alpha^2 - 7\beta^2). \tag{45}$$

Но так как в данном случае,

$$m\alpha^2 = 2(m-1)\beta^2,$$

то (44) приводит к противоречию. Следовательно, основной случай IX не реализуется на поверхности S_m^{gx}.

Для основных случаев IУ – УII условия интегрируемости (38), (39) и (40) принимают вид

$$2\beta^2 \bar{A}_{ccccd} = [6\beta^2(3\beta^2-\alpha^2) + p(p-3q)]\,\bar{\ell}_{dcc} - \frac{p}{mH^2}\{p(\alpha^2-2\beta^2) - q\alpha^2\}\sum_g \bar{\ell}_{dgg}, \tag{46}$$

$$6\beta^2 \bar{A}_{ccddd} = [6\beta^2(3\beta^2-\alpha^2) + p(p-3q)](\bar{\ell}_{ddd} - 2\bar{\ell}_{dcc}) - \frac{p}{mH^2}\{p(\alpha^2-2\beta^2) - q\alpha^2\}\sum_g \bar{\ell}_{dgg}, \tag{47}$$

$$6\beta^2 \bar{A}_{aaccd} = [6\beta^2(3\beta^2-\alpha^2) + p(p-3q)]\,\bar{\ell}_{daa} - \frac{p}{mH^2}\{p(\alpha^2-2\beta^2) - q\alpha^2\}\sum_g \bar{\ell}_{dgg}. \tag{48}$$

2^0 Допустим, что $p \neq 3q$, т.е. берем в рассмотрение основные случаи IУ – УI. Здесь (4I), (42) и (43) можно заме-

нять соотношениями (44) и (45). В силу этого, все условия интегрируемости (46), (47) и (48) равносильны одному соотношению

$$\bar{A}_{cccd} + \frac{9(\alpha^2-3\beta^2)^2}{m\bar{H}^2}\sum_q \bar{\ell}_{dqq} = 0 ,$$

которое для основных случаев IУ, У, и УI дает соответственно

$$0 = 0 ,$$
$$\alpha^2 = 3\beta^2 , \qquad (49)$$

$$m\bar{H}^2\bar{M}^2 = 27\beta^2(\alpha^2-3\beta^2)^2\left[2(m+3)\alpha^2-(7m+20)\beta^2\right] . \qquad (50)$$

Подведем итоги:

а) Случай IУ. Здесь условия интегрируемости (44) и (45) вместе с равенством

$$p+(m-1)q = 0$$

дают соотношение

$$2(m+3)\alpha^2 = (7m+20)\beta^2 .$$

При произвольно заданном α все величины β, p и q однозначно определены.

б) Случай У. Здесь (44) и (49) несовместны. Следовательно, этот основной случай не реализуется на поверхностях S_m^K.

c) Случай VI. Здесь условиями интегрируемости являются (44), (45) и (50). Величину α можно задать произвольно, β может свободно изменяться в интервале

$$0 < (7m+20)\beta^2 < 2(m+3)\alpha^2,$$

а величины p, q и n, при заданных α и β, определены однозначно.

3^0 Пусть $p = 3q \neq 0$. Здесь из (20) и леммы I$^{\cdot 1}$ следуют соотношения

$$\bar{k}_{aaaa} = 3\bar{k}_{aabb} = \bar{k}_{bbbb},$$

$$\bar{k}_{aaab} = 3\bar{k}_{abbb} = 0,$$

которые говорят о том, что в данном случае третья нормальная плоскость и S_m^k не более чем одномерна. Тем самым основные случаи VII и VIII охватывают все рассматриваемые поверхности S_m^k.

Соотношения (41) и (42) превращаются в тождества в силу (19) и (20), а (43) принимает вид

$$q^2 = \beta^2(\alpha^2 - 4\beta^2). \tag{51}$$

Теперь все условия интегрируемости (46), (47) и (48) равносильны соотношению

$$m\bar{H}^2 n^2 = 18(m+1)(\alpha^2 - 3\beta^2)^2(\alpha^2 - 4\beta^2)\beta^2. \tag{52}$$

Отсюда и из (5I) видно, что основной случай УП не может реализоваться на поверхностях S_m^k.

В итоге получаем, что при $p=3q\neq 0$ порядок кривизны максимально симметричной поверхности равен $K=3$ и условия интегрируемости имеют вид (5I) и (52). Величину α можно задать произвольно, β может свободно изменяться в интервале $0<4\beta^2<\alpha^2$, а величины p, q и m определены, при заданных α и β, однозначно.

5. Для лучшей наглядности результаты этого параграфа можно представить в следующей таблице:

Таблица 2.

Обозн.	$\varkappa$	α^2	β^2	p^2	pq	n^2	Осн. сл.
S_m^0	0	0	0	0	0	0	I
$\overline{S}_m^1$	>0	$\varkappa$	0	0	0	0	II
$\underline{S}_m^1$	>0	$4\varkappa$	$\varkappa$	0	0	0	III
S_m^2	>0	$\frac{7m+20}{m+2}\varkappa$	$\frac{2(m+3)}{m+2}\varkappa$	$\frac{12(m-1)(m+3)}{(m+2)^2}\varkappa^2$	$-\frac{12(m+3)}{(m+2)^2}\varkappa^2$	0	IV $(p+(m-1)q=0)$
$\overline{S}_m^3$	>0	$\varkappa+3\beta^2$	$\begin{cases} >0 \\ <\frac{2(m+3)}{m+2}\varkappa \end{cases}$	$3\beta^2(8\varkappa-3\beta^2)$	$3\beta^2(2\varkappa-\beta^2)$	$\frac{27\varkappa^2\beta^2[2(m+3)\varkappa-(m+2)\beta^2]}{m\varkappa+(m+2)\beta^2}$	VI
$\underline{S}_m^3$	>0	$\varkappa+3\beta^2$	$\begin{cases} >0 \\ <\varkappa \end{cases}$	$9\beta^2(\varkappa-\beta^2)$	$3\beta^2(\varkappa-\beta^2)$	$\frac{18\varkappa^2\beta^2(\varkappa-\beta^2)}{m\varkappa+(m+2)\beta^2}$	VIII $(p=3q)$

Здесь введено обозначение

$$\chi = \alpha^2 - 3\beta^2 .$$

В силу (9), χ равно кривизне поверхности S_m^k, или, что то же самое, кривизне пространства S_m постоянной кривизны, погруженного в R_n в виде максимально симметричной поверхности.

В таблицу 2 внесены все существенно различные виды поверхностей S_m^k, размерность третьей нормальной плоскости которых не превышает единицы. Число этих видов равно шести, причем только поверхность S_m^0 имеет нулевую кривизну, остальные поверхности имеют положительную кривизну. Если кривизну $\chi > 0$ фиксировать, то, как видно из таблицы 2, поверхности $\bar{S}_m^3$ и $\underline{S}_m^3$ зависят еще от одного непрерывного параметра β^2, т.е. допускают изгибание, оставаясь при этом поверхностью этого же вида. Грубо говоря, поверхность S_m^3 представляет собой непрерывное звено между поверхностями $\bar{S}_m^1$ и S_m^2, а $\underline{S}_m^3$ – непрерывное звено между поверхностями $\bar{S}_m^1$ и $\underline{S}_m^1$.

§ 5 МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Приступим к изучению строения и свойств приведенных в таблице 2 максимально симметричных поверхностей.

I. Поверхность S_m^0, очевидно, является m-мерной плоскостью R_m.

2. Поверхность $\bar{S}^1_m$, очевидно, является m-мерной сферой с радиусом $R=\frac{1}{\sqrt{k}}$.

3. Поверхность $\underline{S}^1_m$.

А) Выпишем для этого случая систему (2), учитывая полученные уже результаты:

$$\begin{cases} d\bar{M}=\omega^g\bar{e}_g \\ d\bar{e}_a=\omega^a\bar{e}_{aa}+\omega^s\bar{e}_{as}+\omega^s_a\bar{e}_s \\ d\bar{e}_{aa}=-4k\omega^a\bar{e}_a-2k\omega^s\bar{e}_s+2\omega^s_a\bar{e}_{as} \\ d\bar{e}_{ab}=-k\omega^a\bar{e}_b-k\omega^b\bar{e}_a+\omega^b_a(\bar{e}_{bb}-\bar{e}_{aa})+\omega^s_a\bar{e}_{bs}+\omega^s_b\bar{e}_{as} \end{cases} \quad (53)$$

Здесь все векторы $\bar{e}_{ag}$ линейно независимы, откуда следует, что поверхность $\underline{S}^1_m$ помещается в пространство $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$.

Для вектора

$$\bar{M}^*=\bar{M}+\frac{1}{2k(m+1)}\sum_g\bar{e}_{gg} \quad (54)$$

получим $d\bar{M}^*\equiv 0$. Более того, $\bar{M}^*$ является единственным таким вектором в $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$. Отсюда видно, что поверхность $\underline{S}^1_m$ находится на гиперсфере $S_{\frac{1}{2}m(m+3)-1}$ пространства $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$ с радиусом $R=\sqrt{\frac{m}{2k(m+1)}}$. Точку M^* – центр гиперсферы $S_{\frac{1}{2}m(m+3)-1}$ – назовем центром поверхности $\underline{S}^1_m$.

В силу того, что вектор средней кривизны $\bar{H}=\frac{1}{m}\sum_g \bar{\ell}_{gg}$ поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$ в M коллинеарен с вектором $\bar{M}^*-\bar{M}$ и произведение длин этих векторов равно $|\bar{H}|\cdot|\bar{M}^*-\bar{M}|=1$, нетрудно показать, что поверхность $\underset{\sim}{S}^1_m$ на гиперсфере $S_{\frac{1}{2}m(m+3)-1}$, как в эллиптическом пространстве, является минимальной поверхностью постоянной кривизны.

Из системы (53), если взять ее по $mod\,(\omega^s, \omega^\rho_g)$, где $\rho=a+1,\dots,m$, видно, что все a-мерные геодезические подповерхности поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$ являются поверхностями $\underset{\sim}{S}^1_a$. В частности, геодезические линии являются окружностями с радиусом $\frac{1}{2\sqrt{k}}$. При этом, две геодезические линии, проходящие через точку M поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$, в других точках уже не пересекаются. Так, например, плоскости векторов $\bar{\ell}_a, \bar{\ell}_{aa}$ и $\bar{\ell}_b, \bar{\ell}_{bb}$, соответствующие геодезическим линиям в направлениях $\bar{\ell}_a$ и $\bar{\ell}_b$ соответственно, имеют только одну общую точку M. Таким образом, поверхность $\underset{\sim}{S}^1_m$ представляет собой эллиптическое пространство, так сказать " в чистом виде", когда не нужно отождествлять диаметрально противоположных точек, как в случае сферы. Следовательно, $\underset{\sim}{S}^1_m$ совпадает с поверхностью, рассмотренной А.С. Солодовниковым в [29].

В) Рассмотрим подробнее поверхность $\underset{\sim}{S}^1_2$. Она находится на четырехмерной сфере S_4, кривизна которой равна $3k$. В виде минимальной поверхности постоянной кривизны эллиптического пространства S_4, поверхность $\underset{\sim}{S}^1_2$ впервые нашел БОРУВКА (см. [17], а также см [3]), а позднее с другой точки зрения D.Blanuša в [28].

Выберем в пространстве R_5 ортонормированный репер

$\{\bar{M}, \bar{f}_i\}$ ($i = 1, \ldots, 5$), так что

$$\bar{f}_1 = \bar{e}_1,$$
$$\bar{f}_2 = \bar{e}_2,$$
$$\bar{f}_3 = \frac{1}{2\sqrt{\chi}}(\bar{e}_{11} - \bar{e}_{22}),$$
$$\bar{f}_4 = \frac{1}{\sqrt{\chi}}\bar{e}_{12},$$
$$\bar{f}_5 = -\frac{1}{2\sqrt{3\chi}}(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{22});$$

затем вычислим дифференциал вектора $\bar{M}' = \bar{M} + \sum_i x_i \bar{f}_i$, где x_i – постоянные, учитывая (53).

Пусть $\bar{\pi}_1$, $\bar{\pi}_2$ и $\bar{\pi}_3$ – множители соответствующих форм ω^1, ω^2 и ω_1^2 в выражении вектора $d\bar{M}'$. Они характеризуют инфинитезимальные перемещения точки M' с радиусом-вектором $\bar{M}'$ при наличии трехпараметрической группы движений T, порождаемой в пространстве R_5 поверхностью Σ_2^1.

Для того, чтобы M' оказалась точкой меньше чем трехмерной траектории группы T, необходимо и достаточно компланарности векторов $\bar{\pi}_1, \bar{\pi}_2$ и $\bar{\pi}_3$. Отсюда следует, что все меньше чем трехмерные траектории группы T, вместе взятые, заполнят в пространстве R_5 трехмерный конус L, заданный уравнениями

$$\begin{cases} x_1 x_2 = x_4\left(\pm\sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{3}\, x_5\right) \\ x_1^2 - x_2^2 = 2x_3\left(\pm\sqrt{x_3^2 + x_4^2} + \sqrt{3}\, x_5\right) \end{cases}.$$

Здесь векторы $\bar{f}_i$ фиксированы и начало репера перенесено в центр поверхности $\underset{\sim}{S}_2^1$. Все максимально симметричные траектории группы T являются пересечениями конуса L со сферами, имеющими общий центр с поверхностью $\underset{\sim}{S}_2^1$.

При помощи векторов $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ и $\bar{n}_3$ можно исследовать и трехмерные траектории группы T. Они являются специальными ортогональными 3-сопряженными системами.

( ) Рассмотрим некоторые поверхности, инвариантно связанные с поверхностью $\underset{\sim}{S}_m^1$. Они также являются траекториями группы T.

Так как a-мерная геодезическая подповерхность поверхности $\underset{\sim}{S}_m^1$, проходящая через точку M и касающаяся там плоскости векторов $\bar{e}_A$ $(A,B = 1,\dots,a)$, является поверхностью $\underset{\sim}{S}_a^1$, то, в силу (54), точка M_a^* с радиусом-вектором

$$\bar{M}_a^* = \bar{M} + \frac{1}{2\varkappa(a+1)} \sum_A \dot{\bar{e}}_{AA}$$

окажется центром этой поверхности.

Дифференцирование вектора $\bar{M}_a^*$ дает

$$d\bar{M}_a^* = \Omega^\varphi \bar{e}_\varphi + \Omega^{A\varphi}\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\bar{e}_{A\varphi}\right),$$

где

$$\Omega^\varphi = \frac{1}{a+1}\omega^\varphi, \quad \Omega^{A\varphi} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}(a+1)}\omega_A^\varphi, \tag{55}$$

$\varphi,\psi = a+1,\dots,m$, а векторы $\bar{e}_\varphi$ и $\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\bar{e}_{A\varphi}$ ортонорми-

рованы. Отсюда видно, что центры a-мерных геодезических подповерхностей $\underset{\sim}{S}^1_a$ поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$ образуют $(a+1)(m-a)$-мерную поверхность, касательная плоскость которой в точке M^*_a вполне ортогональна к плоскости соответствующей геодезической подповерхности $\underset{\sim}{S}^1_a$. Назовем эту поверхность a-центральной поверхностью для $\underset{\sim}{S}^1_m$ и обозначим через $\underset{\sim}{S}^1_{m,a}$.

Поверхность $\underset{\sim}{S}^1_{m,a}$, очевидно, находится на гиперсфере пространства $R_{\frac{1}{2}m(m+3)}$, центр которой совпадает с центром M^* поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$, а радиус равен

$$R_a = |\bar{M}^* - \bar{M}^*_a| = \frac{\sqrt{(m-a)(m+ma+a+1)}}{(a+1)(m+1)\sqrt{2k}} .$$

Выразим дифференциалы векторов $\bar{e}_\varphi$ и $\frac{1}{\sqrt{k}}\bar{e}_{A\varphi}$ в виде:

$$d\bar{e}_\varphi = \Omega^\varphi(a+1)\bar{e}_{\varphi\varphi} + \Omega^\psi(a+1)\bar{e}_{\varphi\psi} + \\ + \Omega^{B\varphi}\left[-\sqrt{k}(a+1)\bar{e}_B\right] + \Omega^{B\varphi}_{\varphi}\frac{1}{\sqrt{k}}\bar{e}_{B\varphi} + \Omega^\psi_\varphi\bar{e}_\psi , \tag{56}$$

$$d\frac{\bar{e}_{A\varphi}}{\sqrt{k}} = \Omega^{A\varphi}(a+1)(\bar{e}_{\varphi\varphi} - \bar{e}_{AA}) + \Omega^\varphi\left[-\sqrt{k}(a+1)\bar{e}_A\right] + \\ + \Omega^{B\varphi}\left[-(a+1)\bar{e}_{AB}\right] + \Omega^{A\psi}(a+1)\bar{e}_{\varphi\psi} + \\ + \Omega^\varphi_{A\varphi}\bar{e}_\varphi + \Omega^{B\varphi}_{A\varphi}\frac{1}{\sqrt{k}}\bar{e}_{B\varphi} + \Omega^{A\psi}_{A\varphi}\frac{1}{\sqrt{k}}\bar{e}_{A\psi} , \tag{57}$$

где $B \neq A$, $\psi \neq \varphi$; здесь, кроме того, не происходит суммирования по A и φ и верны равенства

$$\begin{cases} \Omega_{\varphi}^{A\varphi} = \sqrt{K}\,\omega^{A} & \Omega_{\varphi}^{\psi} = \omega_{\varphi}^{\psi} \\ \Omega_{A\varphi}^{B\varphi} = \omega_{a}^{\ell} & \Omega_{A\varphi}^{A\psi} = \omega_{\varphi}^{\psi} \\ \Omega_{\varphi}^{B\psi} = \Omega_{A\varphi}^{B\psi} = 0 \end{cases} \qquad (58)$$

При помощи (56) и (57) определены векторы кривизны $\bar{\ell}_{ij}^{a}$ $(i,j = \varphi,(A\varphi))$ в точке M_a^* поверхности $\underset{m,a}{\overset{1}{\Sigma}}$:

$$\begin{cases} \bar{\ell}_{\varphi\varphi}^{a} = (a+1)\bar{\ell}_{\varphi\varphi} & \bar{\ell}_{(A\varphi)(A\varphi)}^{a} = (a+1)(\bar{\ell}_{\varphi\varphi} - \bar{\ell}_{AA}) \\ \bar{\ell}_{\varphi\psi}^{a} = (a+1)\bar{\ell}_{\varphi\psi} & \bar{\ell}_{(A\varphi)(B\varphi)}^{a} = -(a+1)\bar{\ell}_{AB} \\ \bar{\ell}_{\varphi(A\varphi)}^{a} = -\sqrt{K}(a+1)\bar{\ell}_{A} & \bar{\ell}_{(A\varphi)(A\psi)}^{a} = (a+1)\bar{\ell}_{\varphi\psi} \\ \bar{\ell}_{\varphi(A\psi)}^{a} = 0 & \bar{\ell}_{(A\varphi)(B\psi)}^{a} = 0 \end{cases}$$

Здесь $A \neq B$ и $\varphi \neq \psi$. Отсюда видно, что поверхность $\underset{m,a}{\overset{1}{\Sigma}}$ является поверхностью $\underset{\sim}{\overset{1}{\Sigma}}_{m}$ тогда и только тогда, когда $a = m-1$, т.е. в случае геодезических гиперповерхностей. Кривизна этой поверхности $\underset{\sim}{\overset{1}{\Sigma}}_{m}$ $\left(= \underset{m,m-1}{\overset{1}{\Sigma}}\right)$ равна $\underset{\sim}{K} = m^2 K$.

Дифференциальным формам ω_{A}^{φ} соответствуют инфинитезимальные повороты a -мерной геодезической подповерхности $\underset{a}{\overset{1}{\Sigma}}$, касающейся плоскости векторов $\bar{\ell}_{A}$, вокруг точки M поверхности $\underset{m}{\overset{1}{\Sigma}}$. Эти вращения (не) оставляют подповерхность $\underset{a}{\overset{1}{\Sigma}}$ неизменной. С другой стороны, очевидно, что все вращения геодезической подповерхности $\underset{a}{\overset{1}{\Sigma}}$ вокруг точки M , не остав-

ляющие ее неизменной, выражаются через формы ω_A^φ. В силу (55) на поверхности $\underset{\sim}{S}^1_{m,a}$ этим же формам ω_A^φ соответствуют инфинитезимальные смещения точки M_a^* в направлении векторов $\bar{e}_{A\varphi}$. При этом формы (58) не зависят от форм ω_A^φ. Отсюда получается

Теорема 4.

Центры всех a-мерных геодезических подповерхностей $\underset{\sim}{S}^1_a$ поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$, проходящих через точку M, образуют на a-центральной поверхности $\underset{\sim}{S}^1_{m,a}$ поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$ $a(m-a)$-мерную геодезическую подповерхность, плоскость которой вполне ортогональна к касательной плоскости R_m к поверхности $\underset{\sim}{S}^1_m$ в точке M.

4. Поверхность $\bar{S}^3_m$. (Из методических соображений поверхность $\bar{S}^3_m$ лучше изучать раньше чем поверхность S^2_m.) Размерности первой, второй и третьей нормальных плоскостей к поверхности $\bar{S}^3_m$ равны $\frac{1}{2}m(m+1)$, $\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)$ и I соответственно. Отсюда следует, что поверхность $\bar{S}^3_m$ помещается в пространство R_N размерности $N=\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)$.

Оказывается, единственной неподвижной точкой в пространстве R_N при группе движений T, определяемой в R_N поверхностью $\bar{S}^3_m$, является точка M^* с радиусом-вектором

$$\bar{M}^*=\bar{M}+\frac{1}{mK+(m+2)\beta^2}\sum_g \bar{e}_{gg}+\frac{1}{gmK^2}\sum_g \bar{e}_{gggg}, \qquad (59)$$

где $\bar{M}$ – радиус-вектор точки M поверхности $\bar{S}_m^3$. В силу этого ясно, что поверхность $\bar{S}_m^3$ в R_N находится на гиперсфере S_{N-1} с радиусом

$$R = |\bar{M}^* - \bar{M}| = \sqrt{\frac{3k - \beta^2}{3k^2}}.$$

Точку M^*, центр сферы S_{N-1}, назовем **центром поверхности** $\bar{S}_m^3$.

Рассмотрим на $\bar{S}_m^3$ a-мерную геодезическую подповерхность V_a, проходящую через точку M и касающуюся в M плоскости, определяемой векторами $\bar{e}_{AA}$ $(A,B,\ldots = 1,\ldots,a\ ;\ \varphi = a+1,\ldots m)$.

Систему дифференциальных уравнений для V_a можно получить из соответствующей системы A^* для $\bar{S}_m^3$, если последнюю брать по $mod(\omega^\varphi, \omega_g^\varphi)$. Здесь все векторы первой и второй кривизны, а также векторы отражения первой кривизны поверхности $\bar{S}_m^3$, не выпадающие из рассмотрения в силу равенства нулю соответствующих форм Пфаффа (точнее их множителей), сохранят прежнее значение и для V_a. Среди векторов отражения второй кривизны только векторы $\bar{A}_{AAAA}$ и $\bar{A}_{AABB}$ для $\bar{S}_m^3$ не имеют того же значения для V_a, так как они не помещаются в первой нормальной плоскости $R_{\frac{1}{2}a(a+1)}$ поверхности V_a, определяемой векторами $\bar{e}_{AA}, \bar{e}_{AB}$. Следовательно, для нахождения соответствующего вектора кри-

визны $\bar{\ell}^{(a)}_{AAAA}$ и вектора отражения кривизны $\bar{A}^{(a)}_{AAAA}$ для V_a, нужно будет вектор

$$\partial_A \bar{\ell}_{AAA} = \bar{A}_{AAAA} + \bar{\ell}_{AAAA},$$

являющийся производной от вектора второй кривизны $\bar{\ell}_{AAA}$ по форме ω^A, раскладать на слагаемые иначе, а именно так, чтобы одна его компонента была в плоскости $R_{\frac{1}{2}a(a+1)}$, а другая – ортогональна к этой плоскости. То же относится и к вектору

$$\partial_B \bar{\ell}_{AAB} = \bar{A}_{AABB} + \bar{\ell}_{AABB}.$$

Исходя из этих соображений для векторов третьей кривизны геодезической подповерхности V_a получаем следующие выражения:

$$* \begin{cases} \bar{\ell}^{(a)}_{AAAA} = \bar{\ell}_{AAAA} + \dfrac{9K^2}{mK+(m+2)\beta^2}\left[\sum_{\varphi}\bar{\ell}_{\varphi\varphi} - \dfrac{(m-a)(K+\beta^2)}{aK+(a+2)\beta^2}\sum_{G}\bar{\ell}_{GG}\right] \\ \bar{\ell}^{(a)}_{AABB} = \dfrac{1}{3}\bar{\ell}^{(a)}_{AAAA} \end{cases}.$$

Если теперь учитывать еще (59), то в итоге может быть сформулирована следующая

Т е о р е м а 5.

Все геодезические подповерхности поверхности $\bar{S}^3_m$ являются поверхностями того же вида и имеют с $\bar{S}^3_m$ общий центр.

Таким (как) образом, в случае поверхности $\underline{S}^1_m$, в случае поверхности $\bar{S}^3_m$ не существует a-центральных поверхностей.

Рассмотрим на $\bar{S}^3_m$ две геодезические линии L_1 и L_2, проходящие через точку M в направлениях $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ соответственно. Для простоты, но без ограничения общности, можно предполагать, что $m = 2$.

Для геодезической L_1 нетрудно получить следующие формулы Френе:

$$\begin{cases} \dot{\bar{M}} = \bar{a}_1 \\ \dot{\bar{a}}_1 = \alpha \bar{a}_2 \\ \dot{\bar{a}}_2 = -\alpha \bar{a}_1 + \frac{\rho}{\alpha} \bar{a}_3 \\ \dot{\bar{a}}_3 = -\frac{\rho}{\alpha} \bar{a}_2 + \frac{\pi}{\alpha\rho} \bar{a}_4 \\ \dot{\bar{a}}_4 = -\frac{\pi}{\alpha\rho} \bar{a}_3 \end{cases},$$

где

$$\bar{a}_1 = \bar{e}_1 \,, \quad \alpha \bar{a}_2 = \bar{e}_{11} \,, \quad \rho \bar{a}_3 = \bar{e}_{111} \,,$$

$$\pi \bar{a}_4 = \bar{e}_{1111} + \frac{9k^2}{2(k+2\beta^2)} \left[\bar{e}_{22} - \frac{k+\beta^2}{k+3\beta^2} \bar{e}_{11} \right] .$$

Аналогично и для геодезической L_2. Таким образом, выполняется, что геодезические линии L_1 и L_2 помещаются на плоскостях $R_4^{(1)}$ и $R_4^{(2)}$ соответственно; первая из этих плоскостей определяется векторами

$$\bar{e}_1 \,, \ \bar{e}_{11} \,, \ \bar{e}_{111} \quad \text{и} \quad \bar{e}_{1111} + \frac{9k^2}{2(k+2\beta^2)} \left[\bar{e}_{22} - \frac{k+\beta^2}{k+3\beta^2} \bar{e}_{11} \right],$$

а другая – векторами

$$\bar{e}_2 \,, \ \bar{e}_{22} \,, \ \bar{e}_{222} \quad \text{и} \quad \bar{e}_{2222} + \frac{9k^2}{2(k+2\beta^2)} \left[\bar{e}_{11} - \frac{k+\beta^2}{k+3\beta^2} \bar{e}_{22} \right].$$

Так как $\bar{e}_{1111} = \bar{e}_{2222}$, то плоскости $R_4^{(1)}$ и $R_4^{(2)}$ имеют только одно общее направление, это- направление вектора

$$\bar{\ell} = (\varkappa + 2\beta^2)(\bar{e}_{1111} + \bar{e}_{2222}) + 9\varkappa^2(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{22}). \qquad (60)$$

В приведенных выше рассуждениях требование ортогональности геодезических L_1 и L_2 в M, очевидно, не является существенным; это требование введено только для простоты, для лучшей наглядности рассуждений. Дальше мы не будем требовать ортогональность этих геодезических.

Мы видим, что плоскости $R_4^{(1)}$ и $R_4^{(2)}$ двух геодезических L_1 и L_2 поверхности $\bar{S}_m^3$ имеют только одно общее направление. С другой стороны, геодезические L_1 и L_2 находятся на общей сфере вместе с поверхностью $\bar{S}_m^3$. Отсюда следует, что две геодезические линии на $\bar{S}_m^3$ могут пересекаться не более, чем в двух точках.

Из таблицы 2 видно, что при стремлении β к нулю дифференциальные уравнения, описывающие поверхность $\bar{S}_m^3$, стремятся к уравнениям, описывающим сферу $\bar{S}_m^1$. Отсюда следует, что две геодезические линии на $\bar{S}_R^3$ могут пересекаться не менее, чем в двух точках.

Если сравнивать, кроме того, (59) и (60), то получается следующая

Т е о р е м а 6:

Поверхность $\bar{S}_m^3$ топологически гомеоморфна m-мерной

сфере. При этом точки M и M', в которых пересекаются две геодезических линии L_1 и L_2 на $\bar{S}_m^3$, симметричны относительно центра M^* поверхности $\bar{S}_m^3$.

5. Поверхность S_m^2. Размерности первой и второй нормальной плоскости к S_m^2 равны $\frac{1}{2}m(m+1)$ и $\frac{1}{6}m(m+1)(m+2)-m$ соответственно (см. § 2 п.6 → 2^0 → а)). Отсюда вытекает, что поверхность S_m^2 помещается в пространство R_N размерности $N=\frac{1}{6}m(m+1)(m+5)$.

При помощи таблицы 2 нетрудно убедиться, что поверхность S_m^2 является предельным случаем поверхности $\bar{S}_m^3$ при стремлении β^2 к $\frac{2(m+3)}{m+2}k$. Поэтому многие свойства поверхности S_m^2 легко получаются при помощи соответствующих свойств поверхности $\bar{S}_m^3$, полученных в предыдущем пункте.

Таким образом, радиус-вектор центра поверхности S_m^2 является

$$\bar{M}^* = \bar{M} + \frac{1}{3(m+2)k}\sum_g \bar{e}_{gg},$$

а радиус сферы S_{N-1}, содержащей поверхность S_m^2, равен

$$R = \sqrt{\frac{m}{3(m+2)k}}.$$

Но так как здесь $\bar{M}^*-\bar{M} \parallel \bar{H}$ $\left(=\frac{1}{m}\sum_g \bar{e}_{gg}\right)$ и $(\bar{M}^*-\bar{M})\bar{H}=1$, то на поверхность S_m^2 можно смотреть еще как на минимальную поверхность постоянной кривизны эллиптического пространства S_{N-1}, кривизна которой равна

$$k_{N-1} = \frac{1}{R^2} = \frac{3(m+2)}{m}k.$$

Геодезические подповерхности поверхности S_m^2 имеют общий центр с S_m^2, однако, в то же время, они являются поверхностями $\bar{S}_a^3$ $(a \neq m)$. Заметим, что не каждая поверхность $\bar{S}_a^3$ может оказаться геодезической подповерхностью некоторой поверхности $S_{m'}^2$. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$\frac{2(a+x+3)}{a+x+2} K = \beta^2$$

имело целочисленное решение x'. Тогда $m' = a + x'$.

Также очевидно, что на случай поверхности S_m^2 переносится и теорема 6.

В силу полученных результатов верна и следующая

Теорема 7

При помощи непрерывного изгибания в классе максимально симметричных поверхностей сферу $\bar{S}_m^1$ можно в пространстве $R_{\frac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)}$ превратить в поверхность S_m^2.

Запишем это изгибание символически в виде

$$\bar{S}_m^1 - \bar{S}_m^3 - S_m^2 .$$

6. Поверхность $\underline{S}_m^3$. Размерности первой, второй и третьей нормальных плоскостей к $\underline{S}_m^3$ равны $\frac{1}{2}m(m+1)$, m и I соответственно (см. § 2 п.6 $\rightarrow 2^0 \rightarrow$ c)). Отсюда следует, что поверхность $\underline{S}_m^3$ помещается в пространство R_N размерности $N = \frac{1}{2}(m^2+5m+2)$.

Для центра поверхности $\underline{S}_m^3$ получим выражение

$$\bar{M}^* = \bar{M} + \frac{1}{m\bar{k}+(m+2)\beta^2}\sum_g \bar{e}_{gg} + \frac{m+2}{6m(m+1)\bar{k}^2}\sum_g \bar{e}_{gggg},$$

а для радиуса R сферы S_{N-1}, содержащей поверхность $\underset{\sim}{S}{}^3_m$, выражение

$$R = |\bar{M}^* - M| = \sqrt{\frac{2(m+1)\bar{k} - (m+2)\beta^2}{2(m+1)\bar{k}^2}}.$$

Геодезические подповерхности поверхности $\underset{\sim}{S}{}^3_m$ являются поверхностями этого же вида; однако, они не имеют общего центра с $\underset{\sim}{S}{}^3_m$. Аналогично случаю поверхности $\bar{S}^3_m$, и здесь можно доказать, что две геодезических линии на $\underset{\sim}{S}{}^3_2$ имеют две общие точки и что поверхность $\underset{\sim}{S}{}^3_m$ топологически гомеоморфна m-мерной сфере.

При стремлении β^2 к $\bar{k}$ дифференциальные уравнения, описывающие поверхность $\underset{\sim}{S}{}^3_m$, приобретают вид уравнений, описывающих поверхность $\underset{\sim}{S}{}^1_m$. Но так как поверхность $\underset{\sim}{S}{}^1_m$ имеет топологическую структуру m-мерного проективного пространства, то при стремлении β^2 к $\bar{k}$ точки M и M' пересечения двух геодезических линий на $\underset{\sim}{S}{}^3_m$ приближаются друг к другу и в предельном положении сольются. В итоге получится следующая

Т е о р е м а 8.

При помощи непрерывного изгибания в классе максимально симметрических поверхностей сферу $\bar{S}^1_m$ можно в пространстве $R_{\frac{1}{2}(m^2+5m+2)}$ превратить в поверхность $\underset{\sim}{S}{}^1_m$, взятую двукратно.

Это изгибание символически запишем в виде $\bar{S}^1_m \to \underset{\sim}{S}{}^3_m = 2\times\underset{\sim}{S}{}^1_m$.

§ 6. Семейство двумерных поверхностей

В настоящем параграфе рассмотрим семейство таких двумерных максимально симметричных поверхностей, размерность второй нормальной плоскости которых меньше четырех, а размерность первой нормальной плоскости больше единицы. Обозначим поверхности этого семейства через $\tilde{S}_2^k$. Очевидно, что найденные уже поверхности S_2^1 и S_2^2 принадлежат к семейству $\tilde{S}_2^k$.

I. Из определения поверхностей $\tilde{S}_2^k$ следует, в силу § 2 п.6 $\rightarrow$ 1^0 и 2^0, что для них $\beta \neq 0$ и $q=-p$ $(p+(m+1)q=0)$.

Система векторов второй кривизны имеет, согласно (I3), следующий вид

$$\begin{cases} \bar{\ell}_{111} = -\bar{\ell}_{122} \\ \bar{\ell}_{222} = -\bar{\ell}_{112} \\ \bar{\ell}_{111} \perp \bar{\ell}_{222} \end{cases} \qquad (6I)$$

Размерность второй нормальной плоскости к $\tilde{S}_2^k$ при $k>1$ равна двум. Отсюда, в силу этого и теоремы I2, размерность произвольной нормальной плоскости к $\tilde{S}_2^k$, кроме первой, не может превышать двух.

Из (6I) и леммы I.I следует, что в случае $\ell \neq 1$ при изменении двух одноименных индексов произвольного вектора ℓ-ой кривизны $\bar{\ell}$ поверхности $\tilde{S}_2^k$, этот вектор $\bar{\ell}$ превращается в вектор $-\bar{\ell}$, т.е. изменяет знак. Отсюда следует, что при любом $\ell \neq 1$, $\ell \leq k$, мы имеем только два существ-

ветных вектора привязаны $\bar{e}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1}}$ и $\bar{e}_{\underbrace{1\dots12}_{\ell}}$, которые, в силу § 2 п.2 $\to 2^0 \to$ е), ортогональны друг к другу. Обозначим эти векторы через $\bar{E}_{\ell1}$ и $\bar{E}_{\ell2}$ соответственно.

Условия максимальной симметрии (6), записанные для тензора ℓ-ой кривизны поверхности $\tilde{S}_2^k$, дают соотношение

$$(\ell+1)\begin{pmatrix}\ell & 1\\ \ell & 1\end{pmatrix}+\ell\begin{pmatrix}\ell+1 & 0\\ \ell-1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\ell+1 & 0\\ \ell+1 & 0\end{pmatrix}=0,$$

откуда следует, что векторы $\bar{E}_{\ell1}$ и $\bar{E}_{\ell2}$ имеют одинаковую длину, которую обозначим через β_ℓ (в частности, $p=\beta_2$). Все остальные условия максимальной симметрии тогда выполняются уже тождественно.

Тем самым система векторов ℓ-ой кривизны для $\tilde{S}_2^k$ имеет при $\ell\neq 1$, $\ell\le k$ следующую простую структуру: все векторы ℓ-ой кривизны располагаются в двух ортогональных направлениях, определяемых векторами $\bar{E}_{\ell1}$ и $\bar{E}_{\ell2}$, причем вектор $\bar{e}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1-s}\underbrace{2\dots2}_{s}}$ получается из вектора $\bar{E}_{\ell1}$ при повороте последнего в направлении вектора $\bar{E}_{\ell2}$ на угол $s\frac{\pi}{2}$.

2. Согласно результатам предыдущего пункта, из векторов отражения ℓ-ой кривизны при $\ell>1$ достаточно будет найти только векторы $\bar{A}_{\underbrace{1\dots11}_{\ell+1}}$, $\bar{A}_{1\dots12}$, $\bar{A}_{\underbrace{1\dots121}_{\ell}}$ и $\bar{A}_{1\dots122}$, которые обозначим через $\bar{A}_{\ell11}$, $\bar{A}_{\ell12}$, $\bar{A}_{\ell21}$ и $\bar{A}_{\ell22}$ соответственно.

Учитывая результаты § 3, получаем следующие выражения для векторов отражения первой и второй кривизны:

$$\bar{A}_{111} = -\alpha^2 \bar{e}_1 \ ,$$

$$\bar{A}_{112} = (2\beta^2 - \alpha^2)\bar{e}_2 \ ,$$

$$\bar{A}_{121} = -\beta^2 \bar{e}_2 \ ,$$

$$\bar{A}_{122} = -\beta^2 \bar{e}_1 \ ,$$

$$\bar{A}_{2,11} = \frac{\beta_2^2}{2\beta^2}(\bar{e}_{22} - \bar{e}_{11}) \ ,$$

$$\bar{A}_{2,12} = \frac{\beta_2^2}{\beta^2}\bar{e}_{12} \ ,$$

$$\bar{A}_{2,21} = -\frac{\beta_2^2}{\beta^2}\bar{e}_{12} \ ,$$

$$\bar{A}_{2,22} = \frac{\beta_2^2}{2\beta^2}(\bar{e}_{22} - \bar{e}_{11}) \ .$$

Соотношения (3) для векторов отражения ℓ –ой кривизны при $2 < \ell \leq k$ принимают следующий вид :

$$\begin{cases} \bar{A}_{\ell 11}\bar{E}_{\ell-1,1} = -\beta_\ell^2 & \bar{A}_{\ell 12}\bar{E}_{\ell-1,1} = 0 \\ \bar{A}_{\ell 11}\bar{E}_{\ell-1,2} = 0 & \bar{A}_{\ell 12}\bar{E}_{\ell-1,2} = \beta_\ell^2 \\ \bar{A}_{\ell 21}\bar{E}_{\ell-1,1} = 0 & \bar{A}_{\ell 22}\bar{E}_{\ell-1,1} = -\beta_\ell^2 \\ \bar{A}_{\ell 21}\bar{E}_{\ell-1,2} = -\beta_\ell^2 & \bar{A}_{\ell 22}\bar{E}_{\ell-1,2} = 0 \end{cases} ,$$

откуда

$$\begin{cases} \bar{A}_{\ell 11} = -A_\ell^2 \bar{E}_{\ell-1,1} & \bar{A}_{\ell 21} = -A_\ell^2 \bar{E}_{\ell-1,2} \\ \bar{A}_{\ell 12} = A_\ell^2 \bar{E}_{\ell-1,2} & \bar{A}_{\ell 22} = -A_\ell^2 \bar{E}_{\ell-1,1} \end{cases} \qquad (62)$$

Здесь введено обозначение $\frac{\beta_\ell^2}{\beta_{\ell-1}^2} = A_\ell^2$. Если воспользоваться еще обозначениями $\beta = \beta_1$, $\bar{E}_{11} = \frac{1}{2}(\bar{\ell}_{11} - \bar{\ell}_{22})$ и $\bar{E}_{12} = \bar{\ell}_{12}$, то увидим, что (62) верно для $2 \le \ell \le K$.

3. Из результатов п.I следует, что вполне достаточно будет условия интегрируемости (5) для поверхностей $\tilde{S}_2^K$ при каждом $\ell \ge 0$ рассматривать только для двух комбинаций индексов: $\underbrace{1 \dots 1}_{\ell+1} 12$ и $\underbrace{1 \dots 1}_{\ell} 2\,1\,2$.

Первое соотношение в (5) можно при этом заменить двумя соотношениями

$$\bar{A}_{112} + (A_{11}' + 2A_{121}^2)\bar{\ell}_{12} = \bar{A}_{1121} + 3A_{112}^2 \bar{\ell}_{12} ,$$

$$\bar{A}_{1212} + 2A_{121}^2 \bar{\ell}_{22} + A_{221}' \bar{\ell}_{11} = \bar{A}_{1221} + 2A_{122}' \bar{\ell}_{11} + A_{112}^2 \bar{\ell}_{22} ,$$

которые, в свою очередь, равносильны одному равенству

$$A_2^2 = \beta^2 - K .$$

Остальные соотношения в (5) также заменяются каждое двумя соотношениями

$$\bar{A}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1}12} + A^{g_0\dots g_{\ell-1}}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1}1} \bar{\ell}_{g_0\dots g_{\ell-1}2} + (\ell+1)A_{121}^g \bar{\ell}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell}g} =$$

$$= \bar{A}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1}21} + A^{g_0\dots g_{\ell-1}}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell+1}2} \bar{\ell}_{g_0\dots g_{\ell-1}1} + (\ell+1)A_{112}^g \bar{\ell}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell}g} ,$$

$$\bar{A}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell}212} + A^{g_0\dots g_{\ell-1}}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell}21}\bar{e}_{g_0\dots g_{\ell-1}2} + \ell A^{g}_{121}\bar{e}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell-1}2g} + A^{g}_{221}\bar{e}_{\underbrace{1\dots1}_{\ell}g} =$$

$$= \bar{A}_{1\dots1221} + A^{g_0\dots g_{\ell-1}}_{1\dots122}\bar{e}_{g_0\dots g_{\ell-1}2} + \ell A^{g}_{112}\bar{e}_{1\dots12g} + A^{g}_{212}\bar{e}_{1\dots1g},$$

которые в принятых обозначениях запишутся в виде:

$$\left[A^2_{\ell+1} - A^2_{\ell} - (\ell+1)\beta^2\right]\bar{E}_{\ell 2} = \left[-A^2_{\ell+1} + A^2_{\ell} + (\ell+1)(2\beta^2-\alpha^2)\right]\bar{E}_{\ell 2},$$

$$\left[-A^2_{\ell+1} + A^2_{\ell} + \ell\beta^2 + (2\beta^2-\alpha^2)\right]\bar{E}_{\ell 1} = \left[A^2_{\ell+1} - A^2_{\ell} - \ell(2\beta^2-\alpha^2) - \beta^2\right]\bar{E}_{\ell 1}.$$

Отсюда получаем

$$A^2_{\ell+1} = A^2_{\ell} - \frac{\ell+1}{2}K = A^2_{\ell-1} - \frac{\ell}{2}K - \frac{\ell+1}{2}K = \dots$$

и, далее,

$$A^2_{\ell} = \beta^2 - \frac{1}{4}(\ell-1)(\ell+2)K,$$

где $2 \le \ell \le k+1$.

Так как $A^2_{k+1} = 0$, то

$$\beta^2 = \frac{1}{4}k(k+3)K \qquad (63)$$

и, следовательно,

$$A^2_{\ell} = \frac{1}{4}(k+\ell+2)(k-\ell+1)K. \qquad (64)$$

Тем самым условия интегрируемости для поверхностей $\tilde{S}_2^k$ имеют вид (63) и (64).

4. В силу того, что первая нормальная плоскость к поверхности $\tilde{S}_2^k$ имеет размерность три, а размерность ℓ-ой нормальной плоскости при $1 < \ell \leq k$ равна двум, поверхность $\tilde{S}_2^k$ помещается в пространство R_N размерности $N = 2k+3$.

Для центра M^* поверхности $\tilde{S}_2^k$ получаем выражение

$$\bar{M}^* = \bar{M} + \frac{1}{(k+1)(k+2)k}(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{22}),$$

откуда следует, что радиус сферы S_{N-1}, содержащей поверхность $\tilde{S}_2^k$, равен

$$R = |\bar{M}^* - \bar{M}| = \sqrt{\frac{2}{(k+1)(k+2)k}}.$$

Но так как

$$(\bar{M}^* - \bar{M}) \parallel \bar{H} \left(= \tfrac{1}{2}(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{22})\right) \text{ и } (\bar{M}^* - \bar{M}) \cdot \bar{H} = 1,$$

то поверхность $\tilde{S}_2^k$ можно рассмотреть еще как минимальную поверхность постоянной кривизны эллиптического пространства.

Результаты, полученные в этом параграфе, резюмирует следующая

Теорема 9

Пусть двумерное пространство постоянной кривизны S_2 погружается в евклидово пространство R_n в виде поверхности с заданным порядком кривизны k и с размерностью второй нор-

нальной плоскости, меньшей четырех. Мы утверждаем, что существует только один способ такого погружения, когда все движения в S_2 порождают движения во всем пространстве R_n. При этом кривизна k пространства S_2 должна быть положительной, а размерность n пространства R_n должна удовлетворять требованию $n \geq 2k+3$. Это же остается в силе, если вместо пространства R_n взять эллиптическое пространство S_{n-1} размерности $n-1$, кривизна которой равна $k_{n-1} = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)k$.

В последнем случае S_2 погружается в виде минимальной поверхности.

§ 7. МАКСИМАЛЬНО СИММЕТРИЧНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КАК ИНДИКАТРИСА КРИВИЗНЫ

В настоящем параграфе дается один специальный способ построения максимально симметричных поверхностей S_m^k в виде индикатрис l-ой кривизны в точках $(m+1)$-мерной поверхности V_{m+1}.

1. Пусть в точке M $(m+1)$-мерной поверхности V_{m+1}, где $m>1$, задан ортонормированный касательный репер $R = (M, \bar{e}_a, \bar{e}_o)$ и пусть тензор l-ой кривизны поверхности удовлетворяет в M условиям максимальной симметрии (6), причем размерность l-ой нормальной плоскости к V_{m+1} в M пусть будет больше единицы. Когда репер R

свободно вращается вокруг M, конец вектора $\bar{M}^0 = \bar{l}_{\underbrace{0\cdots0}_{l+1}}$ описывает индикатрису l-ой кривизны J^l к V_{m+1} в M.

Инфинитезимальные приращения вектора $\bar{M}^0$ выражаются, в силу (2), соотношением

$$\partial \bar{M}^0 = (l+1)\omega_0^g \bar{l}_{\underbrace{0\cdots0}_{l}g},$$

где символ ∂ означает дифференцирование по $mod\,(\omega^g)$. Так как l-ая нормальная плоскость к V_{m+1} в M имеет размерность больше единицы, то векторы $\bar{l}_{0\cdots0a} = A_l \bar{E}_a$, где $A_l = |\bar{l}_{0\cdots0a}|$ не равны нулю в силу § 2 п.2 $\to 2^0 \to d)$. Отсюда с учетом § 2 п.2 $\to 2^0 \to c)$ следует, что векторы $\bar{E}_a$ составляют ортонормированный касательный репер R' к индикатрисе J^l в M. Следовательно, индикатриса J^l является m-мерной поверхностью.

Формы

$$\Omega^a = A_l (l+1)\omega_0^a,$$

очевидно, определяют инфинитезимальные перемещения точки M^0 на J^l, а формы

$$\Omega_a^b = \omega_a^b$$

-инфинитезимальные вращения касательного репера R'.

Векторы первой кривизны E_{aa} и E_{ab} для поверхности J^l найдем, когда дифференциалы векторов E_a выразим с помощью (2) и возьмем их по $mod\,(\omega^g)$:

$$\partial \bar{E}_a = \frac{1}{A_\ell}\left(\omega_a^0 \bar{\ell}_{0\dots0} + \ell\omega_0^g \bar{\ell}_{0\dots0ag} + \omega_a^g \bar{\ell}_{0\dots0g}\right) =$$

$$= \Omega^a \frac{1}{A_\ell^2(\ell+1)}\left(\ell\bar{\ell}_{0\dots0aa} - \bar{\ell}_{0\dots0}\right) + \tag{65}$$

$$+ \Omega^{gxa} \frac{\ell}{A_\ell^2(\ell+1)} \bar{\ell}_{0\dots0ag} + \Omega_a^g \bar{E}_g \,.$$

Имея в виду условия максимальной симметрии (6), нетрудно убедиться в справедливости равенств

$$\bar{\ell}_{0\dots0g}\bar{\ell}_{0\dots0aa} = \bar{\ell}_{0\dots0g}\bar{\ell}_{0\dots0ab} = 0 \,.$$

Учитывая эти равенства, из (65) получаем

$$\bar{E}_{aa} = \frac{1}{A_\ell^2(\ell+1)}\left(\ell\bar{\ell}_{0\dots0aa} - \bar{\ell}_{0\dots0}\right),$$

$$\bar{E}_{ab} = \frac{\ell}{A_\ell^2(\ell+1)}\bar{\ell}_{0\dots0ab} \,.$$

Продолжая этот процесс, в принципе все векторы кривизны поверхности J^ℓ в общем случае можно выразить в виде линейных комбинаций векторов ℓ-ой кривизны поверхности V_{m+1} с постоянными коэффициентами. Так как, кроме того, тензор ℓ-ой кривизны поверхности V_{m+1} удовлетворяет в M условиям (6), можем утверждать, что J^ℓ является здесь максимально симметричной поверхностью S_m^K.

2. Пусть выполнены условия п.I, причем $\ell = 1$. Тогда имеем

$$\bar{M}^0 = \bar{\ell}_{00} \,,$$

$$\bar{E}_a = \frac{1}{\beta}\bar{\ell}_{oa},$$

$$\bar{E}_{aa} = \frac{1}{2\beta^2}(\bar{\ell}_{aa} - \bar{\ell}_{oo}),$$

$$\bar{E}_{ab} = \frac{1}{2\beta^2}\bar{\ell}_{ab}.$$

В силу (2), дифференциалы векторов $\bar{E}_{aa}, \bar{E}_{ab}$, взятые по $mod(\omega^3)$, помещаются в касательной и первой нормальной плоскостях к J^1 в M^o. Поэтому J^1 является поверхностью S^1_m. Согласно (9) получаем

$$\alpha_o^2 = 4\beta_o^2 = \frac{1}{\beta^2},$$

откуда следует, что кривизна K_o поверхности J^1 равна

$$K_o = \alpha_o^2 - 3\beta_o^2 = \frac{1}{4\beta^2}.$$

3. Пусть выполнены условия п.I, причем $\ell = 2$. Тогда, в силу (I3), получим

$$A_2^2 = \frac{1}{3}p(p-2q)$$

и далее,

$$\begin{cases} \bar{M}^o = \bar{\ell}_{ooo} \\ \bar{E}_a = \sqrt{\frac{3}{p(p-2q)}}\,\bar{\ell}_{ooa} \\ \bar{E}_{aa} = \frac{1}{p(p-2q)}(2\bar{\ell}_{oaa} - \bar{\ell}_{ooo}) \\ \bar{E}_{ab} = \frac{2}{p(p-2q)}\bar{\ell}_{oab} \\ \Omega^a = \sqrt{3p(p-2q)}\,\omega_o^a \\ \Omega_a^b = \omega_a^b \end{cases}.$$

Выразим с помощью (2) дифференциал вектора $\bar{E}_{ab}$ по $mod(\omega^3)$ в виде:

$$\partial\bar{E}_{ab}=\frac{2}{p(p-2q)}\left[\omega_a^a(\bar{\ell}_{aab}-\bar{\ell}_{oob})+\omega_o^b(\bar{\ell}_{abb}-\bar{\ell}_{ooa})+\right.$$

$$\left.+\omega_o^s\bar{\ell}_{abs}+\omega_a^b(\bar{\ell}_{obb}-\bar{\ell}_{oaa})+\omega_a^s\bar{\ell}_{obs}+\omega_b^s\bar{\ell}_{oas}\right]=$$

$$=\Omega^a\frac{2(\bar{\ell}_{aab}-\bar{\ell}_{oob})}{\sqrt{3p^3(p-2q)^3}}+\Omega^b\frac{2(\bar{\ell}_{abb}-\bar{\ell}_{ooa})}{\sqrt{3p^3(p-2q)^3}}+\Omega^s\frac{2\bar{\ell}_{abs}}{\sqrt{3p^3(p-2q)^3}}+$$

$$+\Omega_a^b\bar{E}_{bb}+\Omega_b^a\bar{E}_{aa}+\Omega_a^s\bar{E}_{bs}+\Omega_b^s\bar{E}_{as}.$$

Здесь каждый из сомножителей при формах Ω^a, Ω^b и Ω^s надо представить в виде суммы двух слагаемых, первое из которых есть вектор, принадлежащий к плоскости векторов $\bar{E}_q$, а второе – вектор, ортогональный к этой плоскости. Это можно сделать при помощи (13). Таким образом получаем векторы второй кривизны поверхности J^2 в виде:

$$\bar{E}_{aab}=\frac{2[(p-2q)\bar{\ell}_{aab}-q\bar{\ell}_{oob}]}{\sqrt{3p^3(p-2q)^5}},$$

$$\bar{E}_{abc}=\frac{2}{\sqrt{3p^3(p-2q)^3}}\bar{\ell}_{abc}.$$

Остается определить вектор $\bar{E}_{aaa}$. Для этого в выражении для дифференциала вектора $\bar{E}_{aa}$ определим сомножитель при форме $\Omega^a=\sqrt{3p(p-2q)}\,\omega_o^a=-\sqrt{3p(p-2q)}\,\omega_a^o$,

разложим этот сомножитель на два слагаемых и т.д. В итоге получим:

$$\bar{E}_{aaa}=\frac{2[(p-2q)\bar{\ell}_{aaa}-3q\bar{\ell}_{ooa}]}{\sqrt{3p^3(p-2q)^5}}.$$

Этим самым все векторы второй кривизны поверхности J^2 будут найдены.

Из векторов третьей кривизны прежде всего найден вектор $\bar{E}_{aaaa}$; его мы получим при помощи вектора $\bar{E}_{aaa}$, неизвестными нам уже признаны:

$$\bar{E}_{aaaa}=\frac{2\{[2p-(m+6)q]\bar{\ell}_{000}+3(p-2q)\sum_{\beta}\bar{\ell}_{0\beta\beta}\}}{p^2(p-2q)^2[4(2m+3)q-(3m+4)p]}.$$

Так как здесь $\bar{E}_{aaaa}=\bar{E}_{bbbb}$, то размерность третьей нормальной плоскости к J^2 не превышает единицы. Поэтому J^2 относится к поверхностям, изученным уже в § 5. Отсюда следует, что

$$\bar{E}_{aabb}=\frac{1}{3}\bar{E}_{aaaa}$$

и все остальные векторы третьей кривизны равны нулю.

Квадраты векторов $\bar{E}_{aa}$ и $\bar{E}_{ab}$ будут

$$\alpha_0^2=\frac{7p-20q}{3p(p-2q)^2},\quad \beta_0^2=\frac{2(p-3q)}{3p(p-2q)^2},$$

откуда для кривизны K_0 поверхности J^2 следует выражение

$$K_0=\alpha_0^2-3\beta_0^2=\frac{1}{3p(p-2q)};$$

поэтому можно писать:

$$\beta_0^2=\frac{2(p-3q)}{p-2q}K_0.$$

Так как поверхность V_{m+1} является $(m+1)$-мерной,

то величина q, в силу (I7), может принимать значения в отрезке

$$-\frac{p}{m} \leq q \leq \frac{p}{3},$$

а величина β_0^2 поэтому изменяется в пределах

$$0 \leq \beta_0^2 \leq \frac{2(m+3)}{m+2} K_0.$$

Это согласуется с изгибанием $\bar{S}_m^1 - \bar{S}_m^3 - S_m^2$, упомянутым в теореме 7.

Результаты, полученные в этом параграфе, резюмирует следующая

Т е о р е м а I0

Когда тензор l-ой кривизны в точке M $(m+1)$-мерной поверхности V_{m+1} удовлетворяет условиям максимальной симметрии и при этом размерность l-ой нормальной плоскости к V_{m+1} в M J^l превышает единицу, тогда соответствующая индикатриса l-ой кривизны является поверхностью S_m^k.

При $l = I$ индикатриса J^l является поверхностью $\bar{S}_m^1$, а при $l = 2$ – одной из поверхностей S_m^1, S_m^3 или S_m^2.

Система A

$$\begin{cases} d\bar{M} = \omega^c \bar{e}_c \\ d\bar{e}_a = \omega^c \bar{e}_{ac} + \omega^c_a \bar{e}_c \\ d\bar{e}_{a_0 \dots a_\ell} = \omega^c \left(\bar{A}_{a_0 \dots a_\ell c} + \bar{B}_{a_0 \dots a_\ell c} + \bar{e}_{a_0 \dots a_\ell c} \right) + \sum_{i=0}^{\ell} \omega^c_{a_i} \bar{e}_{a_0 \dots c \dots a_\ell} \end{cases} \tag{I}$$

$$\bar{A}_{a_0 \dots a_\ell b_\ell} \bar{e}_{b_0 \dots b_{\ell-1}} = - \bar{e}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{e}_{b_0 \dots b_\ell} \tag{2}$$

$$\begin{cases} d(\bar{e}_a \bar{e}_b) = \omega^c_a \bar{e}_c \bar{e}_b + \omega^c_b \bar{e}_a \bar{e}_c \\ d(\bar{e}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{e}_{b_0 \dots b_\ell}) = \omega^c \left(\bar{B}_{a_0 \dots a_\ell c} \bar{e}_{b_0 \dots b_\ell} + \bar{B}_{b_0 \dots b_\ell c} \bar{e}_{a_0 \dots a_\ell} \right) + \\ \qquad + \sum_{i=0}^{\ell} \omega^c_{a_i} \bar{e}_{a_0 \dots c \dots a_\ell} \bar{e}_{b_0 \dots b_\ell} + \sum_{i=0}^{\ell} \omega^c_{b_i} \bar{e}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{e}_{b_0 \dots c \dots b_\ell} \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} \bar{B}_{acd} \to (cd) \\ B^{c_0 \dots c_\ell}_{a_0 \dots a_\ell c} \bar{e}_{\underline{c_0 \dots c_\ell} d} + \bar{B}_{a_0 \dots a_\ell cd} \to (cd) \end{cases} \tag{4}$$

$$B^{c_0 \dots c_\ell}_{a_0 \dots a_\ell c, d} \bar{e}_{\underline{c_0 \dots c_\ell}} + B^{c_0 \dots c_\ell}_{a_0 \dots a_\ell c} \bar{B}_{\underline{c_0 \dots c_\ell} d} + \bar{A}_{a_0 \dots a_\ell cd} + \tag{5}$$
$$+ A^{c_0 \dots c_{\ell-1}}_{a_0 \dots a_\ell c} \bar{e}_{c_0 \dots c_{\ell-1} d} - \sum_{i=0}^{\ell} A^{g}_{a_i cd} \bar{e}_{a_0 \dots g \dots a_\ell} \to (cd)$$

$$\begin{cases} D\omega^a = [\omega^c \omega^a_c] \\ D\omega^b_a = [\omega^c_a \omega^b_c] + [\omega^c \omega^g] A^b_{acd} \end{cases} \tag{6}$$

$$\ell = 1, \dots, K$$

Система B

$$\begin{cases} d\bar{M} = \omega^c \bar{\ell}_c \\ d\bar{\ell}_a = \omega^c (\bar{P}_{ac} + \bar{\ell}_{ac}) \\ d\bar{\ell}_{a_0 \dots a_\ell} = \omega^c (\bar{A}_{a_0 \dots a_\ell c} + \bar{P}_{a_0 \dots a_\ell c} + \bar{\ell}_{a_0 \dots a_\ell c}) \end{cases}$$

$$\bar{A}_{a_0 \dots a_\ell b_\ell} \bar{\ell}_{b_0 \dots b_{\ell-1}} = -\bar{\ell}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{\ell}_{b_0 \dots b_\ell}$$

$$\begin{cases} d(\bar{\ell}_a \bar{\ell}_b) = \omega^c (\bar{P}_{ac} \bar{\ell}_b + \bar{P}_{bc} \bar{\ell}_a) \\ d(\bar{\ell}_{a_0 \dots a_\ell} \bar{\ell}_{b_0 \dots b_\ell}) = \omega^c (\bar{P}_{a_0 \dots a_\ell c} \bar{\ell}_{b_0 \dots b_\ell} + \bar{P}_{b_0 \dots b_\ell c} \bar{\ell}_{a_0 \dots a_\ell}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P^g_{cd} \bar{\ell}_{ag} + P^g_{ad} \bar{\ell}_{gc} + \bar{P}_{adc} \to (cd) \\ P^g_{cd} \bar{\ell}_{a_0 \dots a_\ell g} + P^{c_0 \dots c_\ell}_{a_0 \dots a_\ell d} \bar{\ell}_{c_0 \dots c_\ell c} + \bar{P}_{a_0 \dots a_\ell dc} \to (cd) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P^g_{ad,c} \bar{\ell}_g + P^g_{ad} \bar{P}_{gc} + P^g_{cd} \bar{P}_{ag} + \bar{A}_{adc} \to (cd) \\ P^{c_0 \dots c_\ell}_{a_0 \dots a_\ell d,c} \bar{\ell}_{c_0 \dots c_\ell} + P^{c_0 \dots c_\ell}_{a_0 \dots a_\ell d} \bar{P}_{c_0 \dots c_\ell c} + P^g_{cd} \bar{P}_{a_0 \dots a_\ell g} + \\ \qquad + P^{c_0 \dots c_{\ell-1}}_{a_0 \dots a_\ell d} \bar{\ell}_{c_0 \dots c_{\ell-1} c} + \bar{A}_{a_0 \dots a_\ell dc} \to (cd) \end{cases}$$

$$D\omega^a = [\omega^c \omega^d] P^a_{cd}$$

$$\ell = I_2, \dots, E$$

ЛИТЕРАТУРА

I. КАРТАН Э., Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. Изд. Моск.ун-та, 1962.

2. ЛУМИСТЕ Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей I. Теория кривизны. Уч.зап.Тартуск. ун-та, 1961, I02, 3-15.

3. ЛУМИСТЕ Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей II. Поверхности постоянной кривизны. Уч.зап. Тартуск.ун-та, 1961, I02, I6-28.

4. ЛУМИСТЕ Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей II. Основная теорема и погибание. Уч.зап.Тартуск.ун-та, 1962, I29, 74-89.

5. ЛУМИСТЕ Ю.Г., К теории двумерных минимальных поверхностей IУ. Поверхности с окрестностями кривизны. Уч.зап. Тартуск.ун-та, 1962, I29, 90-I02.

6. ПЕРЕПЕЛКИН Д.П., Кривизна и нормальные пространства многообразия V_m в R_n. Матем.сб., 1935, т.42, I00-I20.

7. ПЕРЕПЕЛКИН Д.П., Исследования по теории многообразий в римановом пространстве. Докторск.дисс., 1942, ЛГУ.

8. РОЗЕНФЕЛЬД Б.А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.

9. РЫЖКОВ В.В., Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Тр. Моск. матем. о-ва, 1958, 7, 179-226.

I0. РЫЖКОВ В.В., О тангенциально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР, 1960, I35, 20-22.

II. СХОУТЕН И.А. и СТРОЙК Д.Дж., Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т.II. Москва - Ленинград, 1948.

12. ФИНИКОВ С.П., Метод внешних форм Картана. Москва-Ленинград, 1948.

13. ЧАКМАЗЯН А.В., Эволютные поверхности двумерной двойственно нормализованной D_2 в E_4. Докл. АН СССР, 1962, т.144, № 6, 1233-1236.

14. ЧАКМАЗЯН А.В., О поверхностях D_m пространства K_n. Докл. АН Арм.ССР, 1963, т.XXXVI, № 2, 71-75.

15. ЭЙЗЕНХАРТ Л.П., Римманова геометрия. Москва, 1948.

16. Aoust,L., Théorie des coordennées curvilignes quelconques.Ann.di Mat.,1864,6 , 64- 87.

17. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace á quatre dimensions á courbure constante.C.r. Acad. Sci.,1928, 187, 334-336.

18. Borůvka, O., Sur une classe de surfaces minima plongées dans un espace á cinq dimensions á courbure constante. C.r. Acad. Sci.,1928, 187,1271-1273.

19. Borůvka,O., Recherches sur la courbure des surfaces dans des espaces á n-dimensions á courbure constante I. Brno, 1932.

20. Graustein,W.C., The geometry of Riemann spaces. Trans. Amer.Math.Soc.,1934, 36 ,542-585.

21. Pinl,M., Über einen Statz von G.Ricci-Curbastro und die Gaussche Krümmung der Minimalflächen. Arch. Math.,1953, 4 ,369-373.

22. Pinl,M., B-Kugelbilder reeller Minimalflächen in R_4. Math.Z., 1953, 59, 290-295.

23. Pinl,M., Minimalflächen fester Gaußschen Krümmung.Math. Ann., 1958, 136, 34-40.

24. Schouten,J.A. und Strnik,D.J., Über die Krümmungseigenschaften einer m-dimensionalen Mannigfaltigkeit, die in einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit beliebiger quadratischer Massbestimmung eingebettet ist. Rend.del Circ.Mat.di Palermo, 1922, 46 ,165-184.

25. Schouten, J.A. und von Kampen, E.R., Über die Krümmung einer V_m in V_n ; eine Revision der Krümmungstheorie. Math. Ann., 1931, 105, 144-159.

26. Schwartz, A., On higher normal spaces for V_m in S_n. Am. Journ. of. Math., 1946, LXVIII.

27. Yung-Chow Wong, A new curvature theory for surfaces in an Euclidean 4-space. Comment. Math. Helv., 1952, 26, 152-170.

28. Blanuša, D., Les espaces elliptiques plongées isométriquement dans des espaces euclidiens. Glasnik mat.- fiz. i astron., 1953, 8, Nr. 1, 3-23.

29. Солодовников А.С., Модели эллиптических пространств. Тр. сем. по вект. и тенз. анал. Моск. ун., 1961, II, 293-308.

30. Муллари Р.Р., О поверхностях с полями абсолютно главных направлений. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1961, 102, 275-288.

31. Муллари Р.Р., О главных направлениях m-мерной поверхности. Докл. АН СССР, 1962, 144, 989-992.

32. Муллари Р.Р., О максимально симметричных поверхностях многомерного евклидова пространства. Уч. зап. Тартуск. ун.-та, 1962, 129, 62-73.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 1

I. Методика исследований 5

§ I. Формулы Френе для многомерной поверхности 5
§ 2. Условия интегрируемости I2
§ 3. Зависимость размерностей различных нормальных плоскостей. I6

II. Окрестность точки многомерной поверхности 24

§ I. Индикатрисы кривизны 24
§ 2. Главные направления относительно касательных направлений 35
§ 3. Главные направления поверхности 43
§ 4. Абсолютно главные направления 59

III. Сопряженные системы абсолютно главных направлений. 69

§ I. Локальное исследование 69
§ 2. Условия интегрируемости 73
§ 3. Поверхности переноса 82

IУ. Максимально симметричные поверхности 90

§ I. Схема исследования 90
§ 2. Точка максимальной симметрии 93
§ 3. Векторы отражения кривизны I06
§ 4. Условия интегрируемости II2
§ 5. Максимально симметричные поверхности I25
§ 6. Семейство двумерных повевхностей I40
§ 7. Максимально-симметричная поверхность как индикатриса кривизны I46

Приложения I53

Система А I53
Система В I54
Литература I55