243

D. ROOTSMAN

ALGEBRALINE ANALÜÜS

ÜLESANDEIS

KOOLIDELE JA ISEÕPPIJAILE

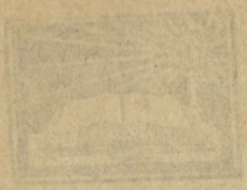
I.

K./U. „RAHVAULIKOOL"
TALLINNA



ALGEBRALINE ANALÜÜS

ÜLESANDEIS



B-82

D. ROOTSMAN

ALGEBRALINE ANALÜÜS

ÜLESANDEIS

KOOLIDELE JA ISEÕPPIJAILE

I

K./Ü. „RAHVAÜLIKOOL“
TALLINNA

i 353722795

ARHIIVKOGU

TARTU ÜLIKOOLI
RAAMATUKOGU

ED. BERGMANN'I TRÜKKIKODA TARTUS, JAANI UUL. 15.

Sisukord.

I. Algebraline sümboolika.

§ 1. Ülesannete lahendamine üldisel kujul.
§ 2. Algebraline vormul ja tema arvsuurus.
§ 3. Algebraline suurus.
§ 4. Arvude geomeetriline kujutamine.
§ 5. Esimese järgu tehted: liitmine ja lahutamine.
§ 6. Teise järgu tehted: kasvatamine ja jagamine.
§ 7. Kolmanda järgu tehted: astme võtmine ja juure leidmine.
§ 8. Koeffitsient.
§ 9. Täiendavad teated algebralisest sümboolikast.
§ 10. Võrdused, samasused ja võrrandused.
§ 11. Tehete järjestus ja klambrid.
§ 12. Algebraline diktaat ja õigekirjutus.

II. Algebraliste avalduste teisendamine.

§ 1. Üksliigete ühendamine.
§ 2. Hulkliigete ühendamine; klambrite avamine ja panemine.
§ 3. Üksliigete kasvatamine, jagamine ja astme võtmine.
§ 4. Hulkliigete kasvatamine.
§ 5. Hulkliigete lahutamine teguriteks ja jagamine üksliikmele.

III. Suhtelised arvud.

§ 1. Null algebras.
§ 2. Negatiivsed arvud.
§ 3. Suhteliste arvude liitmine ja lahutamine.
§ 4. Arvu- ja tehtemärk.
§ 5. Hulkliikmeliste avalduste ühendamine.
§ 6. Suhteliste arvude kasvatamine ja jagamine.
§ 7. Hulkliigete kasvatamine.
§ 8. Hulkliigete jagamine ja teguriteks lahutamine.

IV. Murrud.

§ 1. Algebralise murru mõiste.
§ 2. Murdude teisendamine.
§ 3. Murdude liitmine ja lahutamine võrdsete nimetajatega.
§ 4. Murdude kasvatamine ja jagamine.
§ 5. Mitmekordsed ja ahelmurrud.
§ 6. Nullised ja negatiivsed astmenäitajad.
§ 7. Proportsjonaalsus.
§ 8. Proportsjoonid.

V. Esimese astme võrrandused ühe tundmatuga.

§ 1. Esimese astme võrrandused.
§ 2. Ülesanded ühe tundmatuga esimese astme võrranduse seadmiseks ja otsustamiseks.

I. Algebraline sümboolika

§ 1. Ülesannete lahendamine üldisel kujul.

Aritmeetikas esinevad sagedasti ülesanded, millede mõte on ühesugune ja mis ainult andmeilt, s. o. arvudelt erinevad. Niisuguste ülesannete lahendamiseks on tarvis toime panna samu tehteid samas järjekorras.

Võtame näitused:

1°. Kangas, mille pikkus 12 meetrit, tarvitab värvimisel 4 grammi pulbrit. Kui palju värv-ainet kulub niisamasuguse kanga värvimiseks, mis 9 meetrit pikk?

Seatud küsimuse võib, näit., „ühe kaudu arvamise" viisil otsustada: kui 12 meetri värvimiseks kulub 4 grammi värv-ainet, siis kulub ühe meetri värvimiseks 12 korda vähem ehk $\frac{4}{12}$ gr. $= \frac{1}{3}$ gr., kuid 9 meetri kanga värvimiseks kulub 9 korda enam värv-ainet ehk $\frac{4 \cdot 9}{12}$ gr. $= 3$ grammi.

2°. Kangas, mille pikkus 15 meetrit, tarvitab värvimisel 6 grammi pulbrit. Kui palju värv-ainet kulub niisamasuguse kanga värvimiseks, mis 20 meetrit pikk?

Küsimus otsustakse endist viisi: kui 15 meetri värvimiseks kulub 6 grammi värv-ainet, siis on ühe meetri värvimiseks 15 korda vähem ehk $\frac{6}{15}$ grammi vaja, kuid 20-meetrilise kanga värvimiseks kulub 20 korda enam värv-ainet ehk $\frac{6 \cdot 20}{15}$ gr. $= 8$ grammi.

Peale esitud kahe võiksime piiramatu hulga samalaadilisi ülesandeid mõelda, millede kõigi lahendamise viis on ühesugune. Selle asemel, et alati sama arutust korrata, seame eeskirja ehk määruse, mille abil neid ülesandeid vormaalselt, s. o. ilma arutamiseta, võiks lahendada: otsitav värv-aine kulu saadakse, kui esimesel korral võetud värv-aine grammide arv jagada kanga pikkuse meetrite arvule ja jagami-

sel saadud resultaat kasvatada teisel korral võetud värv-aine grammide arvuga.

Selle juhtmääruse võime aritmeetiliste tehete märkide abil palju lühemalt kirjutada:

$$\frac{\left|\begin{array}{c}\text{Esimesel korral võetud}\\ \text{pulbri grammide arv}\end{array}\right| \times \left|\begin{array}{c}\text{Teisel korral võetud kanga}\\ \text{pikkuse meetrite arv}\end{array}\right|}{\left|\begin{array}{c}\text{Esimesel korral võetud}\\ \text{kanga pikkuse meetrite arv}\end{array}\right|},$$

kus horisontaalne kriips tähendab jagamist.

Eelneva kirjutuse võime veel enam lihtsustada. Tähendame esimesel korral võetud värv-aine grammide arvu mõne kirjatähe näit., a abil, teisel korral võetud kanga pikkuse meetrite arvu c ja esimesel korral võetud kanga pikkuse meetrite arvu b abil, siis saame endise kirjutuse lühemal kujul:

$$\frac{a \cdot c}{b} \qquad (1)$$

Seesugune matemaatilise mõtte lühendud kirjutamine annab sagedasti ülesande kiireks ja kergeks otsustamiseks võimaluse.

Selle asemel, et ülesande lahendamise viisi tähtede numbrite asemele seadmisega üldistada, võiks üldistuse teostada juba varasemal astmel, seades esiti niisuguse ülesande: kangas, mille pikkus b meetrit, kulutab värvimisel a grammi pulbrit. Kui palju värv-ainet kulub c-meetrilise kanga värvimiseks?

Selle ülesande lahendame tuttaval viisil: kui b meetri värvimiseks kulub a grammi värv-ainet, siis kulub ühe meetri värvimiseks $\frac{a}{b}$ grammi, kuid c meetri värvimiseks kulub c kord enam, ehk $\frac{a \cdot c}{b}$ grammi. Järjelikult, lõpusaavutus on üks ja seesama.

§ 2. Algebraline vormul ja tema arvsuurus.

Mõne ülesande lahendamise viisi tähendamine kirjatähtede ja tehete märkide abil kutsutakse algebraliseks kirjutuseks ehk avalduseks, sagedamini — vormuliks *). Vormuliks kutsutakse erandiliselt ka üksik kirjatäht, näit. x, kui selle all mõt-

*) Ka valemiks.

leme arve, näit., loomulikust arvude reast: 1, 2, 3, ... Algebralist vormulit võib ka iseseisvana vaadelda, eraldi ülesandest, mille põhjal ta tuletud. Nii võib ütelda: algebraline vormul on tehete märkide abil seotud tähtede ja numbrite kogu.

Kui eelmise §-i ülesandes otsitav värv-aine hulk grammides tähendada x-i abil, siis võime kirjutada võrduse:

$$x = \frac{a \cdot c}{b} \qquad (2)$$

Võrduse (2) abil võime lahendada lugematu hulga samatüübilisi ülesandeid, milleks ainult tarvis on seada arvud tähtede asemele. Näit., kui tarvis on teada, kui palju värvi-ainet kulub 11 meetri kanga värvimiseks, kui 9 meetri värvimiseks kulub 2 grammi, siis on meil:

$$a = 2,\ b = 9,\ c = 11;$$

seades need arvud võrduses (2) tähtede asemele, saame

$$x = \frac{2.11}{9} \text{ gr.} = 2^{4}/_{9} \text{ grammi.}$$

Niisugune arv, mis saadakse vormulist, temas esinevate tehete lõpetamise järel, kui panna arvud tähtede asemele, kutsutakse vormuli arvsuuruseks ehk lihtsalt suuruseks. Kui algebralist vormulit eraldi vaadelda ülesandest, mille põhjal ta saadud, siis võib tähtede asemele mõelda mistahes arvud; on selge, et ka vormuli arvsuurusi võib olla mitu ehk koguni piiramatu hulk. Vormulitesse, mis kokku seatud ülesannete põhjal, satuvad aga võimalused, kus tähed tohivad esitada ainult naturaalseid arve, näit., kui kõne on mõnesugustest indiviididest. Mõnikord aga ei sünni arvud tähtede jaoks seepärast, et nad tegelise elu andmeile ei vasta.

Leiame vormuli $\frac{a.c}{b}$ arvsuuruse, kui $a = 1$, $b = 0$, $c = 2$. Kirjutades arvud tähtede asemele, leiame: $x = \frac{2}{0}$, kus x-i suurust pole mitte võimalik leida, sest et nullile jagamine on mõttetu.

§ 3. Algebraline suurus.

Mõni täht, mis esineb üksinda ehk vormulis teiste tähtedega ühenduses, kutsutakse algebraliseks suuruseks, kui mõelda tähe all mõnda arvu, — olgu mõnda täisarvu loomulikust arvude reast, ehk murdarvu, nulli või niisuguseid arve, milledega alamal tutvume. Algebraline suurus on mõne tähe ehk ka vormuli arvsuuruste kogu.

Kui vormulis mõni kirjatäht kordub, siis mõeldakse selle all korraga sama arvu. Nõuda, näit., kui $a = 5$, $b = 10$, siis on vormuli $\frac{a+b}{a}$ arvsuurus 3; kui $a = 4$, $b = 7$, siis on vormuli arvsuurus $2^3/_4$.

Ülesanded. Lahendada üldisel kujul:

1. Põllumehel kulus 4-ja vakamaa suuruse nurme täiskülimiseks 12 puuda rukkid. Teisel nurmel, mille suurus 5 vakamaad, soovis ta rukkid niisama tihedalt külvata. Mitu puuda kulus tal selleks rukkid?

Seada ülesande lahendamiseks vormul, esiti numbrite, siis tähtede abil, võttes $12 = a$, $4 = b$, $5 = c$. Pärast üldise vormuli leidmist on tarvis arvata selle arvsuurus, kui $a = 15$, $b = 5$, $c = 5$. — Leida veel mõned vormuli arvsuurused, valides ise tähtede jaoks arvud. Kas kõlbab käesoleva ülesande algebralises vormulis tähtede asemele iga naturaalne arv?

2. Kapitaal a marka on pandud kasu peale p protsendiga t aasta kesteks. Leida kasu ja lõpukapitaali vormulid ja nende arvsuurused, kui:

1) $a = 2000$, $p = 6\%$, $t = 2$;

2) $a = 450$, $p = 3^1/_2\%$, $t = 5$.

3. Teadmatu kapitaal muutub p protsendiga t aasta pärast b rublaks. Leida alguskapitaal, kui:

1) $p = 4\%$, $t = 3$, $b = 336$;

2) $p = 5{,}5$, $t = ^1/_2$, $b = 10275$.

4. Termomeeter näitas keskpäeval a kraadi sooja; kell 2 lõunal oli soojaseis b kraadi võrra tõusnud. Seada lõpulise temperatuuri vormul ja leida selle arvsuurus, kui: $a = 10^0$, $b = 5^1/_2{}^0$. Kui palju tõusis temperatuur keskmiselt tunnis? Näidata vormuli ja arvsuuruse kujul.

5. Kalapüüdja vene seisatas kesköö jõel parvelt, vastu vett lugedes, a sülda; kell 3 hommikul oli ta b sülda pärivett edasi nihkunud. Kui kaugel oli ta siis parvelt ja kui palju liikus ta keskmiselt tunnis? $a = 75$, $b = 45$.

6. Kaks sõidurongi, millede kiirus tunnis vastavalt v ja u kilomeetrit, hakkavad kahest jaamast, millede vahe r kilomeetrit, ühel ajal teineteise vastu liikuma ja kohtavad teineteist t tundi hiljem. Millal sünnib see? $u = 60$, $v = 45$, $r = 630$.

7. Kalakasvatuse vee-tagavara bassäänil, millesse mahub d pange vett, on 2 kraani. Esimene annab vett juure tunnis v pange teise kaudu voolab tunnis akvaariumi u pange. Bassään oli alguses täis. Millal tühjub ta?

1) $d=30,\ u=8,\ v=5$;
2) $d=9,\ u=2,\ v=2$;
3) $d=13,\ u=1,\ v=2$.

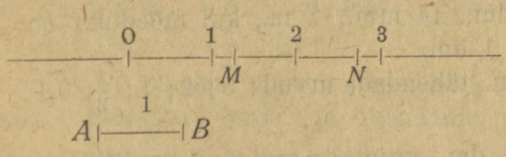
8. Mõelda mõned ülesanded vormulites:

1) $p+q$; 2) $p-q$; 3) pq;
4) $\frac{p}{q}$; 5) pqr; 6) $pqrs$;
7) $\frac{a}{b-c}$; 8) $\frac{a}{b+c}$; 9) $\frac{a+b}{c}$;
10) $\frac{a-b}{c}$; 11) $\frac{ap+bq}{a+b}$; 12) $a+bn$.

9. Mõelda iseseisvalt mõned vormulid ja seada nendele vastavad ülesanded.

§ 4. Arvude geomeetriline kujutamine.

Arvude geomeetriliseks kujutamiseks, millel suur tähtsus matemaatikas, tarvitakse järgmist lihtsat vahendit. Piiramatul sirgel joonel võetakse mõni punkt O, mis kutsutakse algpunktiks ehk alguseks. Ühtlasi valitakse mõni mõet ehk üheline pikkus AB, mille abil punktilt O mõedetakse samas sihis, näit., pahemalt paremale. Nii saadakse otsatul joonel punktid järgemööda: 1, 2, 3, . . ., millede kaugus alguselt on 1, 2, 3, . . . mõetu. Iga järjestikune punkt on vastavalt arvude 1, 2, 3, . . . kujutus. Mõnikord mõeldakse arvu all ka selle joonlõigu pikkust (abstsiss), mis vastava punkti kaugust alguselt mõedab. Niisugune sirge joon, mille abil arve nägelikult kujutakse, kutsutakse arvjooneks.



Mõned arvjoone omadused:

1°. Iga täis- ja murdarvu vastab arvjoonel üks ainus punkt. Nõnda, näit., arvu $1\frac{1}{4}$ vastab punkt M, arvu $2\frac{3}{4}$ vastab punkt N. Nähtavasti vastab ka mõnda punkti üks ainus arv,

kuid küsimuse, kas see arv alati täisarvude ehk murdude piirkonnast pärit, jätame pärastiseks otsustada. Selle omaduse nimi on punktide ja arvude ühene vastavus.

2°. Arvjoon on niisama otsatu, nagu loomulik arvude rida.

3°. Iga arvjoone punkt kujutab seda suuremat arvu, mida kaugemal ta on alguselt. Kõige pahempoolsem punkt antud tingimustes on algus O, mis kujutab arvu 0 (nullpunkt).

Ülesanded.

10. Piiramatul sirgjoonel valida punkt O (algus), millelt mõeta määratud sihis (pahemalt poolt paremale):

1) 1, 2, 3, . . . sentimeetrit;

2) 1, 2, 3, . . . mistahes pikkusemõetu.

Kui O arvuks lugeda, missugune punkt kujutab teda?

11. Kujutada arvjoonel järjestikka täisarve: 1, 2, 3, . . . punktidena, kui mõet on:

1) 1 sentimeeter; 2) 1 detsimeeter; 3) mistahes joonlõik.

12. Kujutada arvjoonel järjestikka kümnend-murdusid: 0,1; 0,2; 0,3, . . .

13. Leida arvjoonel punktid, mis vastavad murdarve: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, $5\frac{6}{5}$.

14. Missugustele arvudele vastavad punktid, millede abstsissid on: 5 cm., 12 cm., 16 cm., 6 dm., 14 mm., 2 m., kui mõeduks on võetud: 1) 1 cm., 2) 3 cm., 3) 1 dm.

15. Kasutades mõetu 3 cm., tähendada arvud: 3; 2; 1; $\frac{1}{3}$; 0,1; 0,6; 0,25 geomeetriliselt.

16. Kasutades mõetu $1\frac{1}{2}$ dm., kujutada arvjoonel punktidena: $7\frac{1}{2}$ dm.; 3 dm.; $1\frac{1}{2}$ dm.; 6 cm.; 0,3 cm.; $\frac{3}{4}$ cm.; 1 cm.

§ 5. Esimese järgu tehted: liitmine ja lahutamine.

Aritmeetikas ja algebras kõige sagedamini vaadeldavad tehted on: liitmine (kokkuarvamine, aditsjoon), lahutamine (mahaarvamine, subtraktsjoon), kasvatamine (kordamine, multiplikatsjoon), jagamine (mõetmine, divisjoon), astme võtmine ja juure ehk astme aluse leidmine.

Liitmine. Liita kaks naturaalist arvu tähendab ühe arvu ühtedele juure lugeda (lisada, arvata) teise arvu ühed. Liita kaks samanimelist murdu tähendab ühe murru osadele juure lugeda teise murru osad.

Kui on tarvis liita algebralised suurused a ja b, siis ühendakse tähed $+$ (plus) märgiga:

$$a+b,$$

missugune vormul ongi liidetavate a ja b summa. Muidugi ei või meie enne selle summa arvsuurust leida, kuni a ja b ei ole arvudes teada. Kui summa otsitava suuruse tähendame x-i abil, siis saame võrduse:

$$x=a+b.$$

Liitmise omadused. — 1°. Kommutatiivne ehk ümberasendatavuse omadus:

$$a+b=b+a.$$

Summa suurus ei olene liidetavate järjestusest.

2°. Assotsiatiivne ehk ühendatavuse omadus:

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c.$$

Et a-ga liita b ja c summa, võib a-ga liita b ja saadud summaga liita c, ehk: et a-ga liita b ja c summa, võib a-ga liita liidetavad b ja c eraldi üks teise järel.

Näitus. Leida summa $1+2+3+\ldots+10$ lihtsal viisil. Asendame liidetavad ümber ja ühendame paari viisi:

$$(1+10)+(2+9)+(3+8)+(4+7)+(5+6).$$

Igas klambris on 11, klambrite arv on 5, järjelikult on kokku 55.

Lahutamine. Lahutamist võib vaadelda kui liitmise vastastehet, kus antud summa ja ühe liidetava abil leitakse teine liidetav. Kui on tarvis lahutada algebralisest suurusest a algebraline suurus b, siis ühendakse a ja b — (miinus) märgiga, mis loetakse ka „ära“, „vähem“:

$$a-b.$$

Antud summa a kutsutakse lahutatav, b — võetav ja saadus — vahe ehk jääk.

Lahutamise omadused. Kommutatiivne ja assotsiatiivne omadus on ka lahutamisel maksev.

1°. $a-(b+c)=a-b-c=a-c-b.$

Et lahutada (ära võtta) summa, võib lahutada järgemööda kõik selle osad (liidetavad) üksikult.

2°. $a+(b-c)=a+b-c.$

Et a-ga liita b ja c vahe, võib a-ga liita b ja saadud summast lahutada c.

3°. $a-(b-c)=a-b+c=a+c-b.$

Et a-st lahutada b ja c vahe, võib a-st lahutada b ja saadud vahega liita c, ehk: et a-st lahutada b ja c vahe, võib a-ga liita c ja saadud summast lahutada b.

Ülesanded.

Liitmine.

17. Mis tähendab liita: 1) kaks täisarvu, näit., 3 ja 5; 2) kaks samanimelist murdu, näit., $\frac{3}{5}$ ja $\frac{6}{5}$?

18. Kuidas kirjutada, kui tarvis liita: 1) 5 ja 6; 2) 4 ja a; 3) a ja b?

19. Kuidas lugeda, kui on kirjutud: 1) $4+11$; 2) $x+1$; 3) $x+y$?

20. Arvjoone abil näidata, et: 1) $1+1=2$; 2) $2+1=3$; 3) $3+1=4$; 4) $4+3=7$; 5) $5+4=9$; 6) $1+2+3=6$; 7) $2++3+4=9$; 8) $3+1+4=8$.

21. Arvjoone abil liita: 1) 3, 2 ja 1; 2) 3, 1 ja 2; 3) 2, 1 ja 3; 4) 1, 2 ja 3; 5) 2, 3 ja 1; 6) 1, 3 ja 2.

22. Missuguses sihis asendume arvjoonel liites? Mispärast on arvjoone abil summa leidmine alati võimalik?

23. Leida arvjoone abil summad: 1) $1+\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}+1$; 3) $\frac{2}{3}+\frac{1}{3}$; 4) $0{,}4+0{,}3$; 5) $1\frac{4}{5}+1{,}3$; 6) $5{,}7+2{,}4$.

24. Kui a, b ja c on joonlõikudena antud, näidata arvjoonel, et: 1) $a+b=b+a$; 2) $a+b+c=a+c+b=\ldots$

25. Leida kõige lihtsamal viisil järgnevate arvridade summad: 1) $20+21+22+\ldots+29$; 2) $1+2+3+\ldots+100$; 3) $1+2++3+\ldots+1000$; 4) $1+3+5+\ldots+11$; 5) $12+10+8+\ldots+2$; 6) $21+20+19+\ldots+5$.

Summa muutumised.

26. Missugused on summa $a+b$ arvsuurused, kui $a=1$ on jäädav, kuid b arvsuurused on järjestikku: 0, 1, 2, . . . 10. Kirjutada summa ja selle osade suurused järgmiselt tabelisse:

a	b	$+b$
1	0	1
1	1	2

ja ütelda: On a suurus 1, b suurus 0, siis on $a+b$ suurus 1; on a suurus 1, b suurus 1, siis on $a+b$ suurus 2, j. n. e. Lõpetada algatud tabel, kujutada summa suuruseid arvjoonel ja leida summa muutuvuse omadus.

27. Missugused on summa $a+b$ suurused, kui $b=3$ on jäädav, kuid a kahaneb järgemööda: 11, 10, 9, . . . 1? Näidata summa muutuvust tabeli abil. Missugune on ta muutumise omadus?

28. Leida summa $a+b$ suurused, kui a on järjestikku: 0, 1, 2, . . . 10, kuid b on vastavalt: 10, 9, 8, . . . 0. Kirjutada summa suurused tabelis ja leida nende omadus.

29. Kujutada summa $x+y$ muutumist tabelis, kui x kasvab, ühest algades, paarita arvude, ja y kahaneb, sajast algades, paaris arvude järjes. Võtta tabeli 8 esimest rida ja vaadelda, kuidas muutub summa.

30. Leida summa $m+n$ kõik arvsuurused tabelis, kui m kasvab, ühest algades, algarvude, kuid n kahaneb, 33-st algade järjestikkude kolmele jagavate arvude järjes. Seada summa muutumise tabel.

31. Summas $a+b$ kasvab a naturaaliste arvude järjes: 1, 2, 3, . . . 99. Kuidas muutub b?

32. On antud vormul: $a+b=3$. Kui a ja b võivad olla ainult täisarvud, mitu arvsuurust võib olla siis a-l ja b-l?

33. Kui suur on vormulis $x+y=3{,}14$ vastavalt x, kui y on järjestikku: 0,10; 1,07; 3,13; 3,14; 4?

34. Näidata summa kommutatiivne omadus:

$$a+b=b+a,$$

arvjoone abil, kui:

1) $a=6$; $b=1$; 2) $a=1{,}2$; $b=4{,}8$.

35. Näidata summa assotsiatiivne omadus:

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c,$$

arvjoone abil, kui $a=4$; $b=9$; $c=11$.

Lahutamine.

36. Kuidas kirjutakse: 1) 5-st lahutada ehk ära võtta 2; 2) a-st lahutada 3; 3) 4-st b; 4) a-st b?

37. Kuidas loetakse: 1) $1-k$; 2) $1-5$; 3) $m-n$? Kuidas kutsutakse m, n ja arv, mis leitakse?

38. Arvjoone abil näidata, et: 1) $5-2=3$; 2) $6-5=1$; 3) $8-5=3$; 4) $6-6=0$.

39. Arvjoone abil lahutada: 1) $\frac{3}{4}-\frac{1}{4}$; 2) $1\frac{5}{6}-\frac{2}{3}$; 3) $4{,}5-2{,}8$;

40. Kujutada $a-b$, kui a ja b on joonlõikudena antud (a pikem kui b).

41. Missuguses sihis tuleb meil lahutamisel arvjoont mööda minna? Mispärast ei ole pahemal pool algpunktist märgitud punkte olemas?

42. Arvjoonel kujutada vahed: 1) $5-3$; 2) $5-4$; 3) $5-5$; 4) $5-6$. Mispärast ei leidu igal juhusel vastavad punktid nullpunktist paremal?

43. Arvjoonel lahutada: 1) $1-0{,}3$; 2) $3\frac{1}{6}-2\frac{5}{6}$; 3) $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ 4) $0{,}7-0{,}2$; 5) $5{,}6-6{,}1$. Ehk küll viimasel juhusel on võimata ära võtta, siiski on arvjoonel vastav punkt olemas. Leida tema seisukoht.

44. Leida vormuli $a-b$ arvsuurus, kui: 1) $a=7$; $b=4$; 2) $a=0{,}81$; $b=0{,}65$; 3) $a=\frac{5}{6}$; $b=\frac{5}{7}$.

45. Missugune on vormulis $f=g-e$ 1) f, kui $g=10$; $e=4$; 2) g, kui $f=100$, $e=25$; 3) e, kui $f=37$; $g=74$?

46. Vahe ehk jäägi muutumised.

47. Leida vormulist $c=a-b$ c suurused, kui $a=8$ ja jäädav, kuid b kasvab nullist kuni kümneni naturaaliste arvude järjes. Teha suuruste tabel ja võtta a, b ja c-le vastavad punktid.

48. Vormulis $c=a-b$ on $b=6$ ja jäädav, kuid a kasvab naturaaliste arvude järjes 6-st kuni 20-ni. Kuidas muutub c?

49. Vormulis $r=p-q$ kasvavad p ja q naturaaliste arvude järjes, p arvust 8 ja q arvust 7 algades. Seada p, q ja r jaoks suuruste tabel.

50. Algebralises avalduses $m = k - l$ on $k = 10$ ja jäädav. Võrrelda m suurusi tabelisse tähendatuina, kui l suurused lähevad kahanedes 10-st kuni 0-ni naturaaliste arvude järjes.

51. Eelmise üesande vormulis on $l = 7$ ja jäädav, kuid k muutub vähenedes järjestikkude täisarvude kohaselt 11-st allapoole. Leida tabeli abil m muutumise omadus.

52. Kui on antud vormul $a - b = c$, tõestada algebraliselt järgmised laused, milledest kumbki seisab koos kahest osast: 1) Kui lahutatav järgemööda kasvab (kahaneb) 1 kuni n võrra, kuid võetav jääb, siis kasvab ka jääk 1 kuni n võrra; 2) kui lahutav järgemööda kasvab (kahaneb) 1 kuni n võrra, kuid lahutatav jääb, siis kahaneb (kasvab) jääk 1 kuni n võrra.

Juhatus: 1) $(a \pm 1) - b = c \pm 1$,
$(a \pm 2) - b = c \pm 2$,
. . . . . .

53. Kuidas muutuvad lahutatav ja võetav, kui vahe on jäädav?

54. Vormulis $p - q = 15$ kasvab p järjestikku: 15, 16, 17, ... 25 Kuidas muutub q?

55. Vormulis $f - g$ on f ja g muutuvad algebralised suurused; $f = 9, 8, 7, \ldots 1$ ja vastavalt $g = 7, 6, 5, \ldots$ Leida vormuli algebraline suurus ja selle muutuvuse omadus.

56. Sellessamas vormulis kasvab g järjestikkude viiele jagavate arvude järjes, kuid f kahaneb 31-st algades algarvude järjes; on tarvis f, g ja saaduse vastavad arvsuurused tabeleerida.

57. Järele katsuda vormulid:

$$A - (a + b) = A - a - b$$
$$A + (a - b) = A + a - b$$
$$A - (a - b) = A + b - a,$$

kui 1) $A = 10$; $a = 5$; $b = 3$; 2) $A = 4$; $a = 9$; $b = 10$; 3) $A = 7$; $a = 9$; $b = 8$.

Missugune vormul missugusel korral ei ole mõeldav? Leida iga vormuli maksvuse tingimused, kui tähtede asemele seatud arvud on pärit loomuliku arvuderea piirkonnast.

§ 6. Teise järgu tehted: kasvatamine ja jagamine.

Kasvatamine.

Definitsjoonid ja tähendamised. — Kasvatada ehk korrata naturaalse arvuga mõnda arvu, tähendab seda arvu võtta liidetavana niipalju korda, mitu ühte on selles naturaalses teguris. Kasvatada murruga mõnda arvu, tähendab antud arv murru nimetajale jagada ja saadud resultaat murru lugejaga kasvatada. Murruga kasvatamine sisaldab nõnda kaks tehet. Arv, mis näitab, mitu korda antud arv tuleb liidetavana korrata ehk missugune murruline osa tarvis leida, kutsutakse kasvatajaks. Antud arv, mis võetakse liidetavana ehk millest leitakse murruline osa, kutsutakse kasvatatavaks. Kasvatatav ja kasvataja on tegurid; saadus on kasvatis ehk teos.

Kui tahetakse tähendada, et a on tarvis b-ga kasvatada, siis kirjutakse need tähed teineteise ligi, ilma mingisuguse vahemärgita: ab. Niisama kirjutakse arvu ja algebralise suuruse teos, näit.: $5a$.

Kasvatamise omadused.

1°. Kommutatiivne omadus:

$$ab = ba.$$

Teose suurus ei olene tegurite järjestusest

2°. Assotsiatiivne omadus:

$$a(bc) = (ab)c = abc.$$

Et a kasvatada b ja c teosega, võib a kasvatada b-ga ja saadud teos kasvatada c-ga, ehk: et a kasvatada b ja c teosega, võib a kasvatada b ja c-ga üks teise järel üksikult.

3°. Distributiivne ehk jaotatavuse omadus:

$$(a + b)c = ac + bc,$$
$$(a - b)c = ac - bc.$$

Et kasvatada mõni summa, võib kasvatada selle summa osad; et kasvatada a ja b vahe, võib eraldi kasvatada a ja b.

Jagamine.

Jagamist võib vaadelda kui kasvatamise vastastehet, kus antud teose ja ühe teguri abil leitakse otsitav tegur.

Kui tahetakse näidata, et a on tarvis jagada b-le, ehk a on tarvis mõeta b-ga, siis kirjutakse: $a:b$ ehk $\frac{a}{b}$. Need vormulid tähendavad ka ühtlasi jagamise ehk mõetmise saadust, mille suurus saadakse teada alles siis, kui a ja b asemel võtta arvud; kui saaduse c-ga tähendame, siis on meil:

$$\frac{a}{b} = c,$$

kus a on jagatav ehk mõedetav, b — jagaja ehk mõet, c — suhe ehk jagu. Jagamise ehk mõetmise saadus vormuli näol $\frac{a}{b}$ kutsutakse sagedasti algebraliseks murruks, mille lugeja on a ja nimetaja b.

Jagamise omadused.

1°. $a:(bc) = (a:b):c.$

Et a jagada b ja c teosele, võib a jagada b-le ja resultaat jagada c-le.

2°. $(ab):c = (a:c)b.$

Et a ja b teos jagada c-le, võib a jagada c-le ja resultaat kasvatada b-ga.

3°. $a:(b:c) = (a:b)c.$

Et a jagada b ja c jagamise resultaadile, võib a jagada b-le ja saadud jagu kasvatada c-ga.

Ülesanded.

58. Näidata arvjoonel, et: 1) $2 \cdot 3 = 6$; 2) $3 \cdot 2 = 6$; 3) $\frac{2}{3} \cdot 5 = 3\frac{1}{3}$; 4) $5 \cdot \frac{2}{3} = 3\frac{1}{3}$.

59. Arvjoone abil leida teosed: 1) $2 \cdot 4 = 8$; 2) $7 \cdot 3$; $3\frac{1}{3} \cdot 5$; 4) $\frac{2}{5} \cdot 3$; 5) $0{,}1 \cdot 3$; 6) $0{,}6 \cdot 2$; 7) $2 \cdot \frac{2}{3}$; 8) $3 \cdot 0{,}4$; 9) $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$; 10) $0{,}7 \cdot 0{,}2$.

60. Mis tähendab: mõnda arvu 1) $\frac{3}{4}$-ga; 2) $\frac{2}{7}$-ga; 3) 0,4-ga kasvatada?

61. Leida joonlõigust: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{2}{4}$; 6) $\frac{3}{4}$; 7) 0,1; 8) 0,6; 9) 5%; 10) 20%; 11) 100%; 12) 150%.

62. Tähendada algebraliselt, kui on tarvis: 1) a kasvatada 3-ga; 2) 3 — a-ga; 3) a — $\frac{1}{2}$-ga; 4) b — $\frac{3}{4}$-ga; 5) n — 0,1-ga.

63. Kujutada täisnurksed nelinurgad, millede küljed on sentimeetrites: 1) 2 ja 3; 2) 5 ja a; 3) a ja b. Leida täisnelinurkade pinna suurused ruutsentimeetrites, ruutdetsimeetrites ja ruutmillimeetrites.

64. Kahe täisnelinurga mõeted on vastavalt a ja b, c ja d pikkusemõetu. 1) Kui palju võrra ja 2) mitu korda on esimese täisnelinurga pind teise pinnast suurem?

1) $a=3$; $b=5$; $c=2$; $d=3$;
2) $a=8$; $b=8$; $c=5$; $d=5$;
3) $a=1$; $b=\frac{1}{2}$; $c=\frac{1}{2}$; $d=\frac{1}{3}$;
4) $a=0{,}4$; $b=0{,}5$; $c=1{,}2$; $d=0{,}1$.

Teose muutumine.

65. Algebralises vormulis ab on $a=4$ ja jäädav; b muutub naturaaliste arvude järjes: 1, 2, 3, . . . Kuidas muutub ab? Seada tabel järgmisel eeskujul:

a	b	ab
4	1	4
4	2	8

ja jätkata seda kuni $b=1$. Missugune on teose muutumise omadus?

66. Kujutades rea täisnelinurke, millede küljed vastavad a ja b suuruste paare, vaadelda, kuidas olenevad nende väljad muutuva külje pikkusest.

67. Kui suur on $y=3x$, kui $x=1, 2, 3, \ldots 6$?

68. Vormulis ab on $b=5$ ja jäädav, kuid a kahaneb 15-st algades järgemööda: 15, 14, 13, . . . 1. Leida vormuli ab suuruste muutumise omadus ja kujutada rida täisnelinurke a ja b suurustele vastavate külgedega.

69. Leida vormuli $\frac{1}{5}p$ arvsuurused, kui p on: 1) 1, 2, 3, 4, 5; 2) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$.

70. Missugused on vormuli $10q$ arvsuurused, kui q on: 1) 0,1; 0,2; 0,5; 2) 1, 2, 7, 10?

71. Missugused arvsuurused on y-l vormulis $y = 0{,}1x$, kui x on: 1) 1, 2, 5, 10, 100, 1000; 2) 0,1; 0,2; 0,3; 4,5; 8,1?

72. Vormulis pq seada p ja q asemele vastavalt arvud: $p = 4, 5, 6, \ldots$, $q = 1, 2, 3, \ldots$ Leida vormuli suurused ja joonestada täisnelinurgad, millede küljed vastaksid p ja q arvude paare.

73. Vormulis pq kahanevad mõlemad tegurid järgmiselt: $p = 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots$, $q = 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots$ Leida vormuli pq kümme järjestikku suurust ja seada nende tabel.

74. Algebralises vormulis mn kasvab $m = 2, 4, 8, \ldots$ ja kahaneb $n = 12, 6, 3, \ldots$ Leida teose arvsuurused.

75. On teada: $a = 1$, $b = 3$, $c = 5$. Leida abc arvsuurus.

76. Teosed abc, kus $a = 4$, $b = 7$ on jäädavad, muutub d, ühest algades, paarita arvude järjes. Leida vormuli arvsuurused. Missugune on nende geomeetriline interpretatsioon?

77. Kandilise tikutoosi — täisnurkse püstise parallelepipeedi — pikkus on a, laius b ja kõrgus c sentimeetrit. Missugune on kuupsentimeetrites tema mahutus? $a = 6{,}2$; $b = 4{,}5$; $c = 2{,}1$.

78. Määrata täisnurkse obeliski ehk samba raskus x, kui selle mõõted sentimeetrites ja tihedus grammides on vastavalt: 1) 3, 5, 10, 4; 2) 4, a, 100, 5; 3) a, b, 500, 3; 4) a, b, c, d; 5) p, q, r, s.

79. Kanga pikkus on p ja laius l küünart. Tähendada algebraliselt kanga hind, kui 1 □-küünar maksab r rubla; $r = 15$ ja jäädav, kuid: 1) $p = 20$; $l = \frac{1}{3}$; 2) $p = 10$; $l = \frac{2}{3}$; 3) $p = 5$; $l = 1\frac{1}{3}$.

80. Kuidas muutub vormuli $u + 2v$ suurus, kui: 1) $u = 4$; $v = 1; 2; 3; \ldots$ 2) $v = 2$; $u = 1; 2; 3; \ldots$

81. Kujutada arvjoonel vormul $u + 2v$, kui u ja v on joonlõikudena antud.

82. Kuidas kutsutakse vormulitest: $n - 2$, $n - 1$, $n - 3$, $2n - 1$, $2n + 1$, $3n + 2$ saadavad arvud $n = 3$ asemelepanemisel?

83. Kui $k = 8$, leida järgnevate avalduste suurused: 1) $4k$; 2) $4k + 2$; 3) $4k + 3k$; 4) $7k - 5$; 5) $40 - 3k$; 6) $10k - k$; 7) $1 + 4k$; 8) $100 - 10k$; 9) $31 - 6k$; 10) $27 + 11k$.

84. Välja arvata järgnevate vormulite arvsuurused, kui $p = 3$, $q = 5$: 1) $5p + 3q$; 2) $3p + 5q$; 3) $5p = 5q$; 4) $4p - 2q$; 5) $10p + q + 1$; 6) $100p - 10q + 7$; 7) $6p - q + 10$; 8) $4q - p - 11$; 9) $3p + 1 - 2q$; 10) $1{,}2p + 0{,}08q$; 11) $\frac{1}{3}p + \frac{1}{5}q + 1$; 12) $1 + \frac{4}{5}p - \frac{2}{3}q$.

85. Kui $a=\frac{1}{2}$, $b+\frac{2}{3}$, missugused on siis arvsuurused vormulitel: 1) $3a+b$; 2) $4a-2b$; 3) $a-\frac{1}{2}b$; 4) $\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}b$; 5) $4\frac{1}{2}a+$ $+1\frac{1}{6}b$; 6) $\frac{1}{3}a+\frac{1}{2}b$; 7) $\frac{1}{5}a+\frac{1}{4}b$; 8) $2\frac{1}{3}a-1\frac{1}{2}b$; 9) $7\frac{1}{3}a-4\frac{3}{4}b$.

86. Kui $x=10$, $y=0{,}4$, missugused on siis arvsuurused järgnevail avaldusil: 1) $8x+5y$; 2) $x+4y$; 3) $4x-3y$; 4) $2{,}3x+y$; 5) $10x-100y$; 6) $0{,}3x+2{,}5x$?

87. Missugused arvud annab vormul $10n+n$, kui $n=1, 2, 3, \ldots 9$?

88. Missugused arvud peab vormulisse $100p+10q+r$ tähtede p, q ja r asemele seadma, et saada: 1) 365; 2) 702; 3) 200; 4) 56; 5) 10; 6) 5?

89. Missugused arvud peab vormulisse $1000p+100q+10r+s$ tähtede p, q, r, s asemele seadma, et saada: 1) 3961; 2) 7659; 3) 7045; 4) 521; 5) 1000; 6) 100; 7) 10; 8) 1.

90. Leida vormulite: 1) ab; 2) $a+b$; 3) $a+ab$; 4) $3ab-a$; 5) $ab-ba$; 6) $5ab+a-4$; 7) $12a-4b+10$; 8) $25ab-9a+4b-1$ suurused, kui 1) $a=2$, $b=6$; 2) $a=3{,}6$; $b=1{,}5$.

91. Missugused on vormulite: 1) xyz; 2) xzy; 3) zxy; 4) $x+y+z$; 5) $xy+z$; 6) $x+yz$; 7) $xyz+xy+x$; 8) $4xy+7xz$ suurused, kui 1) $x=3$; $y=2$; $z=4$; 2) $x=4{,}2$; $y=0{,}5$; $z=2{,}4$.

Kasvatamise omadused.

92. Tõestada nägelikult kommutatiivne omadus: $ab=ba$, 1) kirjutades b rida punkte, igas reas a punkti; 2) joonestades täisnurga, mille külje pikkused on a ja b mõetu. $a=3$; $b=4$.

93. Tõestada nägelikult kommutatiivne omadus, kui on olemas kolm tegurit.

94. Näidata geomeetrilises interpretatsjoonis, et $a\,(bc)=(ab)\,c$.

95. Nägelikult katsuda, et $(a+b)c=ac+bc$, 1) kirjutades c rida punkte, kus igas reas $a+b$ punkti; 2) joonestades täisnelinurga, mille pikkus c ja laius $a+b$ sentimeetrit. $a=2$; $b=3$; $c=4$.

96. Võimalikult lihtsal viisil leida teosed: 1) $4.9.25$; 2) $8.53.75$; 3) $65.8.3$; 4) $125.8.4$; 5) $5.39.6$; 6) $125.16.4.75$; 7) $8.15.7$; 8) $5.5.2.7$.

97. Näidata, et: $a(bc)=(ab)c=abc$, kui: 1) $a=3$; $b=5$; $c=2$; 2) $a=0{,}8$; $b=1{,}5$; $c=0{,}4$; 3) $a=\frac{3}{8}$; $b=\frac{1}{2}$; $c=\frac{1}{4}$.

98. Võimalikult lihtsal viisil ja ruttu leida: 1) $75 \cdot 28 = 75 \cdot 4 \cdot 7 =$; 2) $95 \cdot 24$; 3) $375 \cdot 16$; 4) $625 \cdot 16$; 5) $26 \cdot 25 = 26 \cdot 100 : 4$; 6) $756 \cdot 50$; 7) $64 \cdot 75$; 8) $48 \cdot 125$; 9) $1\,00 : 25 = 100 \cdot 100 : 4$; 10) $2400 : 75$; 11) $7200 : 125$; 12) $1700 : 25$.

Jagamine.

99. Arvjoone abil jagada: 1) $4 : 2$; 2) $6 : 2$; 3) $6 : 3$; 4) $8 : 4$.

100. Missugune arv leitakse mõetmise resultaadina, kui pole võimalik ilma jäägita mõeta? Kuidas kirjutada ja ütelda resultaat: 1) $5 : 3$; 2) $3 : 5$; 3) $3 : 10$?

101. Kui suur on: 1) 2-ga mõedetud 8; 2) 3-ga mõedetud 5; 3) a-ga mõedetud 14; 4) 6-ga mõedetud b; 5) a-ga mõedetud b; 6) b-ga mõedetud a?

102. Liikumise kiirus sekundis on v ja kahe koha kaugus teineteiselt on s meetrit; leida ühest kohast teiseni jõudmise aeg.

103. Eelmise ülesande vormuli abil otsustada küsimused: 1) Kui palju aega kuluks Tallinnast Tartu jõudmiseks *a*) rongil, *b*) häälel, *c*) aeroplaanil, *d*) tigul; 2) kui palju aega kuluks valgusel, et jõuda maa pealt *a*) kuuni, *b*) päikeseni, *c*) kõige ligema tähe ni (α Centauri)?

A. Liikumise kiirused sekundis:		B. Kaugused:	
Rongil	8 m.	Tallinna ja Tartu vahe	180 km.
häälel	330 m.	kuu ja maakera vahe	380000 „
aeroplaanil . . .	30 m.	päikese ja maakera vahe	150 miljoni km.
tigul	0,5 mm.	α Centauri ja maak. vahe	40 miljardi km.
valgusel . . .	300000 km.		

104. Maakohas on aastas p selget päeva. Missugune on selgete ja pilviste ilmade protsent?

Jagamise resultaadi olenevus jagatavast ja jagajast.

105. Vormulis $\frac{r}{s}$ on $r = 3$ ja jäädav, kuid s kasvab paaris numbrite järjes, ühest algades; 2) r kahaneb paarita arvude järjes 27-st algades. Leida mõned vormuli arvsuurused ja seada nende tabel.

106. Leida vormulite: 1) $\frac{p}{q}$; 2) $\frac{q}{p}$; 3) $\frac{18p}{2q}$; 4) $\frac{14q}{7p}$ arvsuurused, kui $p = 10$, $q = 5$.

107. Vormulist $c = pv$ leida: 1) c, kui $p = 760$, $v = 1000$; 2) p, kui $c = 640$, $v = 80$; 3) v, kui $c = 1$, $p = 760$.

108. Vormulis $ab = 30$ kasvab üks teguritest 1-st kuni 30-ni. Kuidas muutub teine tegur?

109. Missugusel juhusel ei olene: 1) teose suurus tegurite muutumisest; 2) suhte suurus selle liigete muutumisest?

110. Vormulis $\frac{p}{q}$ kasvab p ühel ajal q-ga. Missugusel juhtumisel 1) kasvab; 2) kahaneb; 3) jääb muutumatuks vormuli suurus?

111. Vormulis $\frac{m}{n}$ kahaneb m ühes n-ga. Missugusel juhusel 1) kasvab; 2) kahaneb; 3) jääb muutumatuks vormuli suurus?

112. Vormulist $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ leida f, kui $d = 72$, $F = 10$.

Kasvatamise ja jagamise omadused.

113. Järele katsuda:

1) $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$;
2) $a : (bc) = (a : b) : c$; } (ühendatavus)
3) $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$;
4) $(a : b) \cdot c = (a \cdot c) : b$; } (ümberasendatavus)
5) $[(a : b) \cdot c] : d = ac : bd$;

kui $a = 12$, $b = 2$, $c = 4$, $d = 3$.

§ 7. Kolmanda järgu tehted: astme võtmine ja juure leidmine.

Astme võtmine on tehe, mille abil mõni arv võetakse tegurina nii palju korda, mitu ühte on arvus, mis kutsutakse astme näitajaks.

Arv, mille aste võetakse, on astme alus; leitav arv on aste. Näit., 3-me teine aste on 9, 2-e kolmas aste on 8. Esimene neist lauseist kirjutakse järgmiselt: $3 \cdot 3 = 9$, ehk lühemalt $3^2 = 9$, kus 3 on astme alus (ehk juur), 2 — astme näitaja, 9 — aste.

Teine aste kutsutakse ruuduks ehk kvadraadiks, kolmas aste — kuubiks. Nõnda, näit., 9 on 3-me ruut(-arv), 8 on 2-e kuup(-arv). Viimased nimetused tulevad geomeetriast, sest kui, näit., a tähendab pikkusemõetudes ruudu külge, siis on a^2

arv, mis mõedab ruudu välja ruutmõetudes ja a^3 on arv, mis mõedab kuubi (mille serva pikkus a) mahutust kuupmõetudes. Teise astme võtmise nimetame ruudutamiseks, kolmanda astme võtmise — kuubitamiseks.

Vormul a^n tähendab: n astme a ehk a on n astmel; tema mõte on: $a^n = \underbrace{aaa \ldots a}_{n}$, kus teoses on n tegurit, milledest igaüks on a.

Ümberasendamise omadus ei ole astme võtmisel maksev. Näit., $3^2 = 9$, kuid $2^3 = 8$.

Astme aluse ehk juure leidmine on astme leidmise vastastehe, kus antud astme ja astme näitaja abil leitakse astme alus ehk juur. Näit., kui astme alus on 2 ja astme näitaja 3, siis võib leida astme 8; ümberpöördud, kui on teada arv 8 ja astme näitaja 3, võib leida astme aluse 2. Niisugune vastastehe tähendakse iseäralise n. n. radikaali märgi abil, mis arvu ette kirjutakse, kuna radikaali kohale pannakse astme (ehk juure) näitaja: $\sqrt[3]{8} = 2$.

Kolmanda astme juur kutsutakse ka kuubiseks juureks (kuupjuureks); järjelikult on kuubine juur niisugune arv, mis tegurina võetud 3 korda annab antud arvu. Teise astme juur kutsutakse ka ruuduseks juureks (ruutjuureks). Järjelikult on ruudune juur niisugune arv, mis 2 korda tegurina võetuna sünnitab antud arvu. Ruuduse juure tähendamiseks ei kirjutata radikaali kohale arvu 2 harilikult mitte. Näit., $\sqrt{9} = 3$. Arv, mis radikaali all, kutsutakse juure- ehk radikaali-aluseks arvuks. Kui astme alus (juur) on a, astme näitaja k ja aste N, siis võib kirjutada:

$$a^k = N$$

ehk

$$\sqrt[k]{N} = a.$$

Juure leidmise definitsioonist järgneb: kui võtta juure nii mitmes aste, mitu ühte on juure näitajas, siis leiame juurealuse arvu:

$$\left(\sqrt[k]{N}\right)^k = N.$$

On võimalik leida astme alused ainult neist arvudest, mis on täielised astmed. Nõnda, näit., 1, 4, 9 on täielised arvude 1, 2, 3 ruudud; järjelikult on: $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$. Kuid leida,

näit., $\sqrt{7}$ pole mitte võimalik, sest meie ei tea niisugust täit ega murrulist arvu, mille ruut oleks 7. Nagu alamal näeme, tekivad siit täitsa iselaadilised arvud.

Logaritm.

Et astme võtmisel pole kommutatiivne omadus maksev, siis ei vasta astme võtmisele mitte üksainus vastastehe, nagu seda liitmise ja kasvatamise juures nägime, vaid kaks. Peale juure leidmise võib olla veel teine vastastehe, kus astme ja selle aluse abil leitakse astme näitaja, mis logaritmiks kutsutakse. Nõnda, näit., kui astme alus on 2 ja mõni aste 16, siis on otsitav astme näitaja ehk logaritm 4, mida järgmiselt tähendakse: $log_2 16 = 4$ s. o.: kui astme alus on 2, siis on 16-ne logaritm 4.

Kujutame algebraliselt:

$a^k = N$ . . . . astme võtmine.

$\sqrt[k]{N} = a$ . . . I vastastehe — juure leidmine.

$log_a N = k$ . . II vastastehe — logaritmimine.

Ülesanded. — Astme võtmine.

114. Joonestada ruut, mille külg on: 1) 5; 2) 3; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0,4 sentimeetrit. Kui suur on ruudu pind?

115. Kuubi serv on: 1) 3; 2) 2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0,9 jalga pikk. Leida kuubi ruum ehk mahutus kuupjalgades.

116. Kirjutada arvude 1, 2, 3, . . ., 10 ruut- ja kuuparvud.

117. Aias on kümme õunapuud, igal õunapuul kümme haru, gal harul kümme oksa, igal oksal kümme õuna, igas õunas kümme seemet. Missugune on kõigi seemnete arv ja selle vormul?

118. On olemas vormulite rida: a, a^2, a^3, a^4, a^5. Missugused arvude read saadakse neist, kui a on: 1) 10; 2) 3; 3) 2; 4) 1; 5) $\frac{1}{2}$; 6) 0; 7) 0,1?

119. Leida murdude: 0,1; 0,2; 0,3, . . . 0,9 ruudud.

120. Kuidas muutub vormuli k^2 algebraline suurus, kui k kasvab arvude: 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, . . . järjes?

121. Missugune algebraline suurus on enam: a või a^2? Missugusel kahel korral on nad võrdsed?

122. Joonestada paberil ehk tahvlil rida ruute, millede küljed on vastavalt: $\frac{1}{4}$, 1, 3 ühelist pikkust (joonmõetu). Kirjutada pinna suuruste arvud ruutmõetudes nende ruutude sisse.

123. Võrrelda a^2 ja a^3 algebralisi suurusi. Näidata, mil tingimusel on nad võrdsed.

124. Missugune algebraline suurus on enam: 1) a või b; 2) a^2 või b^2; 3) a^2 või b; 4) a^3 või b^4?

125. Välja arvata: 1) $(7{,}8)^2$; 2) $(6{,}4)^2$; 3) $(0{,}87)^2$; 4) $(1{,}11)^2$; 5) $(1{,}001)^2$.

126. Leida: 1) 2^3, 3^2; 2) 2^4, 4^2; 3) 3^4, 4^3. Missugune kasvatamise omadus ei ole — eelmiste näituste põhjal — astme võtmisel õige?

127. Kuidas kutsutakse vormulitest: $k-3$, $\frac{1}{4}k^2$, $2k+1$, $4k$, $6k+1$, k^3-7k saadavad arvud, $k=4$ asemelepanekul?

Kordamise ülesanded

128. Leida pinna suurus joonestud ruudul, mille külje mõet on sentimeetrites: 1) 2; 2) 7; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0,1; 5) a; 6) x.

129. Leida joonestud täisnelinurga pinna suurus, kui külgede mõeted on tollides: 1) 2 ja 3; 2) 5 ja $\frac{2}{5}$; 3) 6 ja a; 4) a ja 4; 5) a ja b; 6) a ja x; 7) x ja y.

130. Määrata kuubi mahutus kui külgede mõeted on sentimeetrites: 1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0,1; 4) 2; 5) 6; 7) a; 8) b.

131. Missugune arv saadakse: 1) 4 ja 3; 2) 4 ja $3b$; 3) $4b$ ja $3b$; 4) $\frac{3}{4}$ ja $\frac{1}{4}$; 5) $\frac{3}{4}p$ ja $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{3}{4}p+\frac{1}{4}p$; 7) 1; 2 ja a; 8) 1; 2 ja $3a$; 9) a, $2a$ ja $3a$; 10) a, $2b$ ja $3c$ liitmisel?

132. Nimetada, missugune naturaalne arv järgneb arvudele: 1) 10; 2) 100; 3) a; 4) $2a$; 5) $a+1$; 6) $2a+1$; 7) $a+10$; 8) $k-1$; 9) $k-2$; 10) $2k+3$.

133 Kirjutada arv, mis naturaalses arvude reas on:

1) 2. kohal arvu 5-e järel
2) 2. „ „ a „
3) 4. „ „ y „
4) 7. „ „ $10n$ „
5) p. „ „ q „

134. Poja iga on x aastat, isa iga on poja omast 1) 20; 2) y; 3) $3z$ aasta võrra enam. Kui vana on isa?

135. Kolmnurga külgede pikkused on detsimeetrites: 1) 3, 4, 5; 2) a, 7, 8; 3) a, b, 8; 4) a, b, c. Leida perimeeter. Missugustel tingimustel on kolm viimast juhust võimalikud?

136. Kirjutada arvude 1) a ja 5; 2) 5 ja a; 3) a ja b vahe. Missugustel juhustel on need näitused võimalikud?

137. Missugune arv on naturaaliste arvude reas:

1) 3. kohal arvu 7-e eel;
2) 3. „ „ a „ ;
3) 5. „ „ p „ ;
4) q. „ „ p „ ?

On alati niisugune arv olemas?

138. Venna ja õe vanadus on vastavalt: 1) 6 ja r; 2) s ja 10; 3) r ja s aastat. Kui palju on õde vennast noorem?

Missuguse mõtte omandab ülesanne, kui: 1) r on suurem kui 6; 2) s on vähem kui 10; 3) r on vähem kui s?

139. Lõpukapitaal on 800 rubla; kasu kahe aasta jooksul on a rubla. Kui suur oli alguskapitaal?

140. Tähendada teos, millel on tegurid: 1) 4 ja 3; 2) 2 ja i 3) i ja k; 4) i ja i. Mispärast võib kasvatamisemärki tähttegurite vahel välja jätta, kuid arvtegurite vahel mitte?

141. Kirjutada: 1) kaheksa jagatud kolmele; 2) a jagatud b-le; 3) x mõedetud y-ga.

142. Lugeda: 1) $6:5$; 2) $4:b$; 3) $m:n$.

143. Leida naturaalne arv, mis

1) 6 korda vähem, kui 24;
2) 2 „ „ „ k;
3) 5 „ „ „ $10k$;
4) l „ „ „ k;
5) k „ „ „ $10k$.

Missuguste küsimuste vastustel võib mõnikord mõte puududa?

144. Isa jagas lastele x õuna, igaühele y tükki. Mitu last oli? Missugune arv peab olema x, et vastus oleks alati mõeldav?

145. Ratas, mille ümbermõet (sõõrjoone pikkus) on c sentimeetrit, tegi kilomeetril n tiiru. Mitu tiiru tegi ratas, ja mispärast on n alati võimalik?

146. Kõigi lillede valamiseks aias kulus p pange vett, kus iga lill sai q toopi. Mitu lille oli aias, ja missugustel tingimustel on ülesande otsus võimalik?

147. Kella minutinäitaja tegi 1) 12; 2) 9; 3) $\frac{1}{5}$; 4) a täit tiiru. Mitu täit tiiru tegi selsamal ajal sekundinäitaja ja tunninäitaja? On kostus alati võimalik?

148. Kantselei, kus n kirjatoimetajat ametis, tarvitas p tosinat sulgi ära. Mitu kirjatoimetajat võtab kantselei tõist osa, kui igaüks neist tarvitab q sulge? Missugused arvud peavad olema p ja p, et n oleks võimalik?

149. Kirjutada arv, mis naturaaliste arvude reas on:

1) 4-dal kohal arvu 1-e järel;
2) n „ „ „ 1 „ ;
3) 4 „ „ „ n „ ;
4) n „ „ „ n „ ;
5) 4 „ „ „ n eel ;
6) k „ „ „ n „ .

Missugustes näitustes ja missugustel tingimustel pole võimalik otsitavat arvu leida?

150. Kui palju:

1) 11 on suurem kui 6;
2) $p+8$ „ „ „ 3;
3) $p+8$ „ „ „ p;
4) $p+q$ „ „ „ p;
5) p „ „ „ q?

151. Mille võrra on:

1) a vähem, kui $a+5$;
2) 4 „ „ $a+5$;
3) 4 „ „ $a+1$;
4) $\frac{1}{2}a$ „ „ a;
5) x „ „ y?

Missuguses näituses ja missugustel tingimustel on otsus võimatu?

152. Missugune arv on:

1) 5 korda suurem kui 9;
2) 4 „ „ „ a;
3) n „ „ „ 8;
4) b „ „ „ q;
5) a „ „ „ a?

153. Kirjutada arv, mis

1) 2-le jagades annab jao 11;
2) 4 „ „ „ k;
3) p „ „ „ 3;
4) u „ „ „ v;
5) 3 „ „ „ 6 ja jäägi 1;
6) 5 „ „ „ m „ „ 4;
7) r „ „ „ 10 „ „ s;
8) p „ „ „ q „ „ r.

154. Kirjutada arv, mis oleks

1) $\frac{1}{2}$ arvust 32;
2) $\frac{1}{2}$ „ 0,1;
3) $\frac{1}{3}$ „ 7;
4) $\frac{1}{4}$ „ n;
5) $\frac{1}{k}$ „ 100;
6) $\frac{1}{x}$ „ y.

155. Kirjutada arv, mis:

1) 2-ga kasvatades annab 14;
2) 8 „ „ a;
3) b „ „ 100;
4) k „ „ l.

156. Kuidas tähendakse üldisel viisil mõni:

1) paaris arv; 2) paaritu arv; 3) arv, mis 3-le jagab; 4) arv, mis 10-le jagab?

157. Mitu ühte on arvus, milles:

1) d kümmend; 2) c sada; 3) m tuhandet; 4) a ühte ja b kümmend; 5) a ühte ja c sada; 6) a ühte, b kümmend, c sada?

158. Kirjutada üldisel kujul kahekohaline arv, mis: 1) lõpeks nulliga; 2) lõpeks ühega; 3) nulliga mitte ei lõpeks; 4) viiele jagaks.

159. Kirjutada üldisel kujul kolmekohane arv, mille: 1) viimane (ühtede) number on null; 2) ainult kümnete number on null; 3) ühtede, kümnete ja sadade numbrid ei ole nullid.

160. Tähendada üldine kuju arvul, millel on p ühte, q kümmend, r sada ja s tuhandet.

161. Kirjutada üldisel kujul arv, mille numbrid on ümberpöördud järjes asendud (v. eelmine ülesanne).

162. Tähendada nimega arv: a kilom. b hektom. c dekam. d meetrit 1) meetrites; 2) sentimeetrites; 3) detsimeetrites; 4) kilomeetrites.

163. Mitu 1) penni, 2) marka on kapitaalis, milles p marka q penni?

164. 1) Mitu grammi on nimega arvus, milles r kilo, s grammi? 2) Mitu kilo?

165. Mitu 1) sekundit; 2) tundi, 3) päeva, 4) nädalat on nimega arvus, milles a nädalat b päeva c tundi d minutit e sekundit?

Juure leidmine.

166. Ruudu väli on: 64; 36; 1; $\frac{1}{9}$; 0,01; a^2; a ruutsentimeetrit. Kui pikk on ruudu külg?

167. Toa mahutus, mille mõeted — pikkus, laius ja kõrgus — võrdsed, on: 1) 343; 2) 125; 3) x^3; 4) x kuupsülda. Leida toa laius?

168. Kuubikujulise kastikese mahutus on: 1) 8 kuupsentim.; 2) 1 kuupdm.; 3) $\frac{1}{27}$ kuupmeetrit; 4) 0,001 kuupsülda. Leida kastikese serva pikkus.

169. Igal õpilasel oli niipalju raamatuid, mitu õpilast klassis. Mitu õpilast oli, kui neil oli üleüldse 144 raamatut?

170. Igal lillepõõsal on nii mitu õit, kui palju põõsaid peenral. Mitu põõsast on peenral, kui õite arv on 49?

171. Kuubikujulise seebitüki hind on 2 rubla 43 kopikat. Kui suur on kuubi serv, kui selles on niisama palju sentimeetrid, mitu kopikat maksab 1 gramm ja mitu grammi kaalub 1 kuupsentimeeter?

172. Võrrelda vormuli $\sqrt{a}$ ja $\sqrt[3]{a}$ suurusi, seades a asemele arvud: 64; $\frac{1}{64}$; 1; 0. Missugustest arvudest on ruutjuur ja kuupjuur võrdsed?

173. Leida vormulites $\sqrt{a}$ ja $\sqrt[3]{a}$ a jaoks arvud nii, et korraga oleks võimalik $\sqrt{a}$ ja $\sqrt[3]{a}$.

Logaritm.

174. Antud alusel 2 leida arvude 2, 4, 8, 16, 32, 64 logaritmid.

175. Alusel 10 leida arvude 10, 100, 1000 logaritmid.

176. Leida arvude $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ logaritmid, kui alus on $\frac{1}{2}$.

177. Kui suur on x võrdustes: $3^x = 9$; $3^x = 81$; $5^x = 125$; $\left(\frac{1}{7}\right)^x = \frac{1}{49}$?

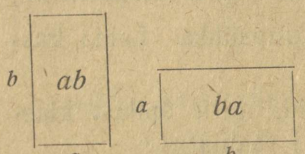
§ 8. Koeffitsient.

Kui on tarvis liita mitu võrdset algebralist suurust, siis võib seda tähendada lihtsamalt, näit., $a + a + a = 3a$.

Arv 3, mis a ette kirjutud, näitab, mitu korda tarvis on a-d liidetavana võtta.

Mitte ainult mõnda tähte, vaid ka mõnda keerulisemat algebralist avaldust võib korrata. Arvtegur kirjutakse siis harilikult kõige ette ja kutsutakse koeffitsiendiks ehk kordajaks.

Näitus. — On olemas kaks täisnelinurka, milledest esimese laius ja pikkus on vastavalt a ja b sentimeetrit, teise laius ja pikkus — b ja a sentimeetrit. Leida nende täisnelinurkade pindade summa.



$$ab + ba = ab + ab = 2ab.$$

Koeffitsient võib ka murruline arv olla, tähendades, missugune osa tuleb algebralisest suurusest leida, näit., $\frac{3}{7}a$, $\frac{4}{5}ab$, 0,01 m, ja esineb mõnikord tähena, näit., avalduses

$$k\,\frac{Mm}{r^2},$$

kus M, m ja r kui muutuvate suuruste juures k kui jäädav suurus on koeffitsient; koeffitsiendi mõiste on siiski küllalt painduv, sest analüüsis räägitakse juba sagedasti ka muutuvast koeffitsiendist.

Koeffitsienti ei pea mitte astme näitajaga ära vahetama, sest esimene tähendab, mitu korda peab algebralist suurust liidetavana, teine — mitu korda tegurina võtma. Näit.,

$$5p = p + p + p + p + p,$$
$$^5p = ppppp.$$

Mõisted „võrd“ ja „kord“.

„Võrd“ tarvitame mõttes „ühesuurune“, „ühepalju“; a on b võrd, ehk võrdne, tähendab algebras: $a = b$; „a on b võrd (võrra) suurendud“, tähendab, a on b-ga suurendud ehk a-le on b juure

lisatud: $a+b$. „a on b kord suurendud“, tähendab, a on b-ga kasvatud: ab.

„Ühevõrra“ ehk „ühevõrd“ asemel tarvitame sõnu „võrd“ ehk „võrra“.

Harilikus elus tarvitusel olev ütelus „poole suurem“ tähendab kaks korda suurem.

Et edaspidi end eksimiste eest hoida, kasutame mõned näitused.

1. Ühe võrdne a: $a=1$; kahe võrdne a: $a=2$; b võrdne a: $a=b$.
2. a ja b on võrdsed: $a=b$.
3. Kahega (kahe võrra) suurendud x: $x+2$.
4. Neljaga (nelja võrra) suurendud a: $a+4$.
5. Kümme kord suurendud a: $10a$.
6. Viiega (viie võrra) suurendud kahekordne a: $2a+5$.
7. Kahekordne viie võrra suurendud a: $2(a+5)$.
8. Kahega suurendud viiekordne a: $5a+2$.

Ülesanded:

179. Kirjutada lühemalt algebralised avaldused: 1) $a+a$; 2) $a+a+a$; 3) $b+b+b+b$; 4) $a+b+a+b+b$; 5) $(a+b)+(a+b)+(a+b)+(a+b)$; 6) $(p-2q)+(p-2q)+(p-2q)$; 7) $pq+pq+pq+pq+pq$; 8) $abc+abc+abc$; 9) $klmn+klmn$; 10) $ab+c+c+c+ab$; 11) $xyz+xyz+xyz+x+x$.

180. Kirjutada ilma koeffitsiendita: 1) $2m$; 2) $5c$; 3) $3x+2y$; 4) $6ab$; 5) $7pqr$; 6) $5xy+3x$.

181. Näidata, et: 1) $2a+3a=5a$; 2) $4x+6x=10x$; 3) $a+2a+3a=6a$; 4) $5y+7y+9y=21y$; 5) $4ab+5ab=12ab$; 6) $3pqr+5pqr+6pqr=14pqr$; 7) $3a+5x+2a+6x=5a+11x$.

182. Lihtsustada: 1) $x-x$; 2) $y+y+y+y+y$; 3) $m-n-n-n$; 4) $4x-x$; 5) $4x-3x$; 6) $4x-4x$; 7) $4x-5x$; 8) $3a+4b+a-4b$; 9) $4p-5q+r-3p-11q-r$; 10) $\sqrt{4}+\sqrt{4}+\sqrt{4}$; 11) $\sqrt{a}+\sqrt{a}$.

183. Kirjutada lühemalt:

1) $\frac{x}{7}+\frac{x}{7}+\frac{x}{7}+\frac{x}{7}$;
2) $\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m+\frac{1}{4}m$;
3) $\frac{pq}{11}+\frac{pq}{11}+\frac{pq}{11}+\frac{pq}{2}+\frac{pq}{11}+\frac{pq}{11}$;
4) $\frac{1}{8}abc+\frac{1}{8}abc$;
5) $\frac{k+k+k}{1+1+1+1}$;
6) $\frac{k+k+k+k+k+k}{1+1}$;
7) $ab+ab+ab+\frac{ab}{3}+\frac{ab}{3}+\frac{ab}{3}$;
8) $\frac{u}{3}+u+\frac{u}{3}+u+\frac{u}{3}+u$.

184. Lihtsustada astmenäitaja abil avaldused:

1) 3.3; 2) $4.4.4$; 3) $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$;
5) $0,1.0,1.0,1$; 6) aa; 7) aaa; 8) $bbbbb$;
9) kkl; 10) $kklll$; 11) $2.2.eee$; 12) $aabbb$;
13) $2.2.3.3.ppp$; 14) $2.2.3.3.3.eeedd$;

185. Kirjutada ilma astmenäitajata:

1) 2^3; 2) 3^4; 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^5$; 4) $(0,01)^2$;
5) a^7; 6) x^{10}; 7) a^2b^3; 8) p^5q^7;

186. Arvata:

1) 2^2; 2) 5^2; 3) 3^4; 4) 4^3;
5) 4^5; 6) 5^4; 7) 3^6; 8) 6^3;
9) 10^2; 10) 2^{10}.

187. Teguriteks lahutada ja kirjutada kõige lühemalt:

1) 1000; 2) 32; 3) 343; 4) 144;
5) 256; 6) 1728; 7) 625; 8) 192.

188. Lihtsustada:

1) $mm+mm$; 2) $nnn+nnn+nnn$; 3) $2nn+5nn$;
4) $a^2+a^2+a^2+b^3+b^3$; 4) $2c^3+d^3+c^3+3d^3$; 6) $2a^2-a^2$;
7) a^3-a^2; 8) $3x^3-x^3$; 9) $4pqr-pqr$;
10) $5ab^2+2a^2b+4ab^2$; 11) $aaabb+bbaaa-pqpqq+abaab+qppqq$.
12) $a-\frac{1}{2}a$; 13) $3z-\frac{3}{4}z$; 14) $5u^2-0,1u^2$;
15) $0,7ab-0,3ab$.

189. Kirjutada ilma koeffitsiendita ja astmenäitajata;

1) $2a^4$; 2) $2a+4b^2+6c^3$; 3) $5x-4y$;
4) $5e^5f^2-2e^2f^5$; 5) $4\sqrt{x}$; 6) $3a^5x^2+4b^3y^2-7c^4z$.

Harjutused kordamiseks.

190. Mille võrra on:

1) $2p$ suurem, kui p;
2) $7p$ „ „ $4p$;
3) np „ „ $(n-1)p$;
4) $3q+4$ „ „ 3;
5) $3q+4$ „ „ $1\frac{1}{2}q+1$?

191. Mille võrra on:

1) a vähem, kui $a+9$;
2) 9 „ „ $a+9$;
3) $a+8$ „ „ $3a+9$?

192. Mille võrra on:

1) $x+1$ vähem, kui $x+7$;
2) $x-4$ „ „ $x+1$;
3) $2x+3$ „ „ $5x+4$?

193. Muuta lihtsamaks avaldused:

1) $2a \cdot 4a$; 2) $3a^2 \cdot 3a$; 3) $\frac{1}{4}p^3 \cdot \frac{1}{2}p^2$; 4) $0{,}1pq \cdot 0{,}01pq$;
5) $\frac{1}{3}a^2b \cdot 9ab^2$.

194. Leida algebraline suurus, mis oleks:

1) a korda $5a$-st suurem;
2) 4 „ $2a$ „
3) $1\frac{1}{2}x$ korda $\frac{2}{3}x$ suurem;
4) $6p^2$ „ $36pq^3$ „

195. Kirjutada algebraliselt ja, kus võimalik, leida arvsuurused:

1) 2-e võrdne x;
2) 3-e kordne y;
3) 2-e kordne x;
4) 3-e võrdne y;
5) poole võrdne x;
6) pool y;
7) 2-e võrdne 3-e kordne a;
8) 3-e kordne 2-e võrdne a;
9) 5-e võrra (5-ga) suurendud 7-e kordne a;
10) 7-e võrra (7-ga) suurendud 5-e kordne a;
11) 5 korda suurendud seitsme võrdne a;
12) 4-ja kordne b võrra (b-ga) suurendud a on veerand b võrra vähendud a;
13) 1-e võrra vähendud kolmekordne k on 3-e võrra vähendud k.

196. Sõnades väljendada vormulid;

1) $a+5$; 2) $b-3$; 3) $7-c$; 4) $x+y$;
5) $2a+3b$; 6) $1+7x$; 7) $8y-1$; 8) $\frac{3}{4}y+q$.

§ 9. Täiendavad teated algebralisest sümboolikast.

Algebraliste suuruste tähestamine.

Tähtede tarvitamine algebras on lühendud keel. Meie ütleme: a meetrit, k kilogrammi, p marka ja t sekundit selle asemel, et ütelda: teatav arv meetrid, kilogramme, markasid ja sekundid. Kuidas tähed arvude tähestamiseks valida, on üks kõik, näit., a, A, e j. n. e. Kuid tähestamise viis peab järjekindlalt läbi viidama, s. o. mõne matemaatilise harutamise kestes ei pea mitte vahetama tähti, milledele juba kord on kindel tähendus mõeldud.

Algebras tarvitakse kõige sagedamini Ladina kirjatähti, mida kas Ladina ehk Prantsuse moodi hääldakse. Need tähed on ka pea kõik meie keeles tarvitusel ja seepärast meile tuttavad. Algustähti ei tarvitata algebras nii tihti, kui geomeetrias, kus neil enamasti on üsna teistsugune mõte. Kuid peale Ladina tähtede on mõnikord ka Gooti ja Greeka tähed tarvitusel. Ilma viimasteta võib harva põhjalikumat matemaatilist tööd leida; seepärast on nendega tutvumine soovitav.

Ei pea aga siiski mõtlema, nagu oleks selgusele ja lihtsusele täiesti ükskõik, missugused tähed valime. Kui on tarvis mõne küsimuse harutamisel võtta palju tähti tarvitusele, siis ei võeta neid mitte juhuliselt, vaid otstarbekohaselt, käies „kombest pühitsetud rada". Üks kõige vanemaist viisidest on see, et antud suurused tähendakse tähestiku esimeste tähtede: a, b, c, . . . abil, aga otsitavad — viimaste tähtede: x, y, z, u abil.

Peale selle on enam tarvitama harjutud tähtede salku ehk ühendusi, milledes tähed võetakse alfabeedilises järjestuses. Kui on olemas, näit., kolm suurust, mis omalt mõttelt sugulased, siis tähestakse neid harilikult: a, b, c; f, g, h; l, m, n; p, q, r; x, y, z; ehk u, w, v; kuid ei tähestata neid, näit., mitte: a, g, n; b, f, l; ehk a, o, s.

Heameelega tarvitakse ka tähti, mis eelolevais salgus on järjelt vastavail kohtadel, näit.: a, f, l; b, g, m; c, h, n; p, x, u; q, y, v; r, z, w, j. m.

Seame, näit., vormulid, mille abil oleks hõlbus tähendada aastaseid lõpukapitaale x, y, z, milleks kasvavad alguskapitaalid a, b, c, mis vastavalt p, q ja r protsendiga antud hoiule.

Sajast margast saadakse p marka, ühest margast $\frac{p}{100}$ marka kasu; sellest järgneb, et iga mark kasvab aasta pärast $1+\frac{p}{100}$ margaks; a marka kasvab $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$ margaks; seepärast on meil:

$$x=a\left(1+\frac{p}{100}\right),$$

ja niisamuti

$$y=b\left(1+\frac{q}{100}\right),$$

$$z=c\left(1+\frac{r}{100}\right).$$

Need vormulid on meelespeetavamad, kui, näit., järgmised:

$$x=b\left(1+\frac{r}{100}\right),$$

$$y=a\left(1+\frac{q}{100}\right),$$

$$z=c\left(1+\frac{p}{100}\right).$$

Greeka tähti tarvitakse ka salkadena: α, β, γ (alfa, beeta, gamma), mis tähti a, b, c vastavad; λ, μ, ν (lambda, mü, nü), mis l, m, n ja ξ, η, ζ (ksi, eeta, dseeta), mis x, y, z vastavad.

Kui tahetakse palju üht liiki suurusi tähestada, siis võib tähtedest puudus tulla. Niisugusel juhusel on hõlpsam üht liiki suurusi ühe ainsa tähe abil näidata, juure lisades numbrid, mis tähest paremale poole madalamale kirjutakse, näit.: a_0 („a nulline“, ehk „algus-a“), a_1 („a esimene“), a_2 („a teine“), ... a_k („k + 1 järgu a“, ehk „a indeksiga k“). Niisugune number kutsutakse järjenäitajaks ehk indeksiks.

On tarvitusel veel kriipsuga tähendamise viis: a', a'', a''', ... (ühe kriipsuga a, j. n. e.).

Tehete tähendamine.

Liitmisel tarvitakse + (plus), lahutamisel — (miinus) märki. Kasvatamisemärka käsitakse harva, vaid tähed kirjutakse lihtsalt üks teise ligi, näit., ab, xyz, $3pqrs$. — Jagamiseks on kaks punkti (koolon) ehk horisontaalne kriips, näit., $a:b$ ehk $\frac{a}{b}$, mis öeldakse: a jagatud b-le ehk a mõedetud b-ga. — Astme võtmisel kirjutakse astmenäitaja paremale poole tähest natuke kõrgemale; näit., a^n, 3^6, mis öeldakse: n astme a (a on n astmel), kuuenda astme kolm (3 on 6-dal astmel). — Juure leidmisel tarvitakse radikaalimärki, kuhu alla kirjutakse arv, mille juur (astme alus) on tarvis leida.

Näit., sümboolid $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{b}$, $\sqrt[n]{k}$

tähendavad: ruutjuur arvust a (arvu a ruutjuur), kuupjuur arvust b (arvu b kuupjuur), n astme juur arvust k.

Suurema hulga arvude ehk algebraliste suuruste summa tähendamiseks on võetud iseäraline märk Σ (Greeka suur sigma). Nii, näit., võib paljude arvude summat: $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ lühemalt tähendada:

$$\sum_{0}^{n} a_i,$$

kus indeks i käib naturaalsed arved järgemööda läbi nullist kuni n-ni. Sellelt sümboolilt jõutakse hiljem, kui asutakse lõpmatu hulga lõpmata väikeste summa osade vaatlemisele, integraali $\int$ märgi juure.

Võrduse ja võrratuse märgid.

Kui tahetakse näidata, et algebralised suurused on võrdsed (ühesuurused), siis ühendakse nad võrduse märgiga =, näit., $a = b$, mis loetakse: a on b (võrdne, võrra). Niisugune kirjutus tähendab, et ehk küll meie a ja b all võime mõelda palju arve, näit., 1, 2, 3, ..., siiski peame korraga a all sedasama arvu mõtlema, mis b all.

Kui a all mõtleme suuremat arvu kui b all, siis kirjutakse: $a > b$; kui a all mõtleme vähemat arvu kui b all, siis kirjutakse: $a < b$. Märgid $>$ („enam“) ja $<$ („vähem“) kutsutakse võrratuse märkideks.

Mõnikord tarvitakse veel märke, mis tähendavad eelmiste otsuste eitamist. Sel korral tõmmatakse märgist kriips läbi.

Näitused.

1°. $a \neq b$, a ei ole b (võrdne),

mis tähendab sedasama, kui kirjutus

$$a \gtrless b,$$

s. o. a on kas enam või vähem kui b.

2°. $a \not> b$, a ei ole suurem kui b,

mis tähendab sedasama, kui kirjutus

$$a \leqq b,$$

s. o. a on kas b või vähem kui b.

3°. $a \not< b$,

tähendab sedasama, mis

$$a \geqq b.$$

§ 10. Võrdused, samasused ja võrrandused.

Võrduseks nimetakse kahe algebralise avalduse ühendus võrdusemärgiga, näit.: 1) $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$, ehk 2) $2x + 5 = 8 + x$.

Avaldus, mis pahemal võrdusemärgist, hüütakse võrduse pahempoolseks osaks; avaldus, mis paremal võrdusemärgist, hüütakse võrduse parempoolseks osaks.

Võrdusi on kahte liiki. Esimest liiki võrdused on niisugused, mis õiged on igal tähtede arvsuurusel. Nõnda, näit., võrdus (1) ei kaota maksvust, kui tähtede asemele panna mistahes arvud. Nii-

sugused võrdused kutsutakse **samasusteks.** — Teist liiki võrdused on niisugused, mis õiged on ainult ühel ehk mõnedel tähtede arvsuurustel. Nõnda, näit., võrduse (2) maksvus püsib ainult siis, kui $x=3$. Niisugune võrdus kutsutakse **võrranduseks** ehk **ekvatsjooniks.**

Võrranduse, milles mõned tähed otsitavaid arvsuurusi tähendavad, saame siis, kui kaks algebralist avaldust, näit., $2x+5$ ja $8+x$ võrrandame, s. o. ühesuuruseks teeme, ühendades neid võrdusemärgiga:

$$2x+5=8+x.$$

Selles võrranduses on x otsitav ehk tundmatu suurus, mis kutsutakse võrranduse juureks ehk otsuseks. Lahendada ehk otsustada ekvatsjoon, tähendab leida tema juur ehk juured, kui neid on mitu olemas.

Juureks võib olla arv, kui ka mõni täht, kui nad otsitava asemele võrrandusse seatuna teda rahuldavad, s. o. muudavad tema samasuseks.

Harjutused.

197. Aritmeetiliselt läbi katsuda ja arvjoonel selgitada võrdused:

1) $a-(b+c)=a-b-c$ 2) $a+(b-c)=a+b-c$
3) $a-(b-c)=a+b-c$ 4) $a+a+a+a=4a$
5) $a+b-b+c=a+c$ 6) $a+b=c+a=b+c$,

kui 1) $a=8$; $b=4$; $c=3$; 2) $a=11$; $b=6$; $c=5$.

Missuguste võrduste liiki käivad eelolevad?

198. Näidata, et 4 on juur järgnevail võrrandusil:

1) $y+1=5$ 2) $10-y=6$
3) $4y-16=0$ 4) $\frac{y}{4}=1$.

199. Näidata, et 0,6 on juur järgnevail võrrandusil:

1) $5z-1{,}8=1{,}2$ 2) $8{,}15+0{,}2z=8{,}25$
3) $z:6=1:10$ 4) $100z=60$.

200. Leida x-suurus, kui tema asemele seada järgemööda arvud 1, 2, 3, ... võrdustesse:

1) $x+9=10$ 2) $2x-5=1$ 3) $8-4x=0$
4) $10:x=2$ 5) $4x=16$ 6) $3x-1=17$

201. Katsumise abil otsustada võrrandused:

1) $u+2=7$ 2) $u-5=1$
3) $2u+5=11$ 4) $4u-15=13$

5) $17-2x=5$ 6) $5u=40$

7) $\frac{u}{4}=1$ 8) $\frac{20}{u}=4$.

202. Kuidas ilmutada x järgnevaist ekvatsjoonest:

1) $a+x=b$ 2) $a-x=b$

3) $x-a=b$ 4) $ax=b$

5) $\frac{a}{x}=b$ 6) $\frac{x}{a}=b$?

203. Tähtede asemele seades vabalt arvud, liigitada võrdused samasusteks ja võrrandusteks.

1) $a+2a+3=3+3a$ 2) $m+5=2m-1$

3) $u+uv-v=u-v+vu$ 4) $10a+1=5$.

204. Võrduste omadused: Kui $a=b$ ja $a>n$, siis on

1) $a+n=b+n$ 2) $a-n=b-n$

3) $an=bn$ 4) $\frac{a}{n}=\frac{b}{n}$.

Avaldada sõnades need 4 omadust. Näit., 1): võrdus jääb püsima, kui sama arvuga suurendada tema mõlemaid osi.

Võrratused.

205. Tähendada kirjalikult:

1) 12 on enam kui 5 2) 5 on vähem kui 12

3) a „ „ „ b 4) b „ „ „ a

206. Lugeda:

1) $14+4>13+3$ 2) $7+x>x$ 3) $6-x<6$

4) $p+q>p-q$ 5) $\frac{p}{q}<\frac{p}{q}+1$ 6) $2n-1<2n<2n+1$.

207. Tähendada algebraliselt:

1) Kahe arvu m ja n summa on suurem, kui iga summa osa eraldi;

2) kui kolmnurga küljed on a, b, c, siis iga külg on kahe teise külje summast vähem ja vahest suurem;

3) kahe arvu summa on suurem, kui nende vahe.

208. Võrratuste omadused: Kui $a>b$, siis on:

1) $a+n>b+n$

2) $a-n>b-n$, $a>n$, $b>n$

3) $n-a<n-b$, $a<n$, $b<n$

4) $an > bn$

5) $\frac{a}{n} > \frac{b}{n}$

6) $\frac{n}{a} < \frac{n}{b}$.

Katsuda, kui:

1) $a = 10$; $b = 8$; $m = 2$; 2) $a = 8$; $b = 5$; $m = 13$;

3) $a = 6{,}28$; $b = 3{,}14$; $m = 1{,}57$; 4) $a = \frac{1}{2}$; $b = \frac{2}{5}$; $m = \frac{1}{10}$.

209. Missugused täisarvud kõlbavad x-i asemele panemiseks võrratustes:

1) $x + 5 > 6$ 2) $x - 8 < 4$ 3) $6 - x > 4$

4) $x + 5 < 5$ 5) $x - 10 > 1$ 6) $8 - x < 9$

7) $x + 3 < 2$ 8) $7 - x < 2$ 9) $9 - x < 1$?

§ 11. Tehete järjestus ja klambrid.

Algebralise avalduse arvsuuruse leidmisel võivad tekkida kahtlused, missuguses järjes toimetada üksikuid tehteid; seepärast peab silmas pidama kindlaid määrusi.

I. Kui mõne klambriteta algebralise vormuli arvsuuruse leidmisel on tarvis toimetada mitmesugused tehted, siis teostakse kõige esite kolmanda, selle järel teise ja viimaks esimese järgu tehted. Sama järgu tehted on teostamise järjestuselt üheväärilised. Kui aga soovitakse tehete järjestust vormulis muuta, siis tarvitakse klambrid.

II. Kõige esite leitakse klambritesse suletud vormuli osa arvsuurus ja saadud resultaatide kallal pannakse toime tehted, mis märgiga klambrite ees tähendud. Kui klambrite sees on olemas veel mõned klambrid, siis leitakse seesmistes klambrites oleva avalduse suurus enne. — Sõna „klambrite“ all mõeldakse iseäralist märki kui ka kogu avaldust, mis klambritesse on suletud.

Näitus 1. Võtame algebralise avalduse

$$a + b^2c, \qquad (1)$$

milles klambrid puuduvad; siin on tehete järjekord: 1) b ruudutamine, 2) b^2 kasvatamine c-ga, 3) a ja b^2c liitmine. — Kui $a=3$, $b=4$, $c=5$, siis on vormuli arvsuurus 83.

Sooviksime aga vormulis (1) endist tehete järjestust muuta, siis peaksime klambrid tarvitama; kui kirjutame

$$(a+b^2)c, \qquad (2)$$

siis on tehete järjestus teistsugune: 1) b astme võtmine, 2) a ja b^2 liitmine ja 3) saadud summa kasvatamine c-ga. Endiseil tingimustel oleks vormuli arvsuurus siin 95.

Kui aga selles vormulis soovime liitmist kõige enne teostada, siis kirjutame

$$(a+b)^2c, \qquad (3)$$

milles tehete järjekord on: 1) a ja b liitmine, 2) saadud summa teise astme võtmine ja 3) selle kasvatamine c-ga. Vormuli arvsuurus on endiseil tingimustel 245.

Näitus 2. Leida vormuli

$$\left(\frac{pr}{q}-s\right)\left(q+\frac{r^2}{s}\right)+3\left(7p-1\right)\left(q+10\right)+\frac{(s-p)\,(p^3-60)^2}{2p}$$

arvsuurus, kui $p=4$, $q=2$, $r=6$, $s=9$.

Leiame kõige esite klambrite suurused määruse põhjal:

$$\frac{pr}{q}-s=\frac{4.6}{2}-9=3$$
$$q+\frac{r^2}{s}=2+\frac{6^2}{9}=6$$
$$7p-1=7.4-1=27$$
$$q+10=2+10=12$$
$$s-p=9-4=5$$
$$p^3-60=64-60=4.$$

Selle järel leiame jälle määruse põhjal

$$3.6+3.27.12+\frac{5.4^2}{8}=18+972+10=1000.$$

Näitus 3.

$$\frac{x+y}{x-3}-\frac{x^2-y^2}{x+7}+\sqrt{\frac{x+y}{x-y}+1}$$

Selles avalduses ei ole klambrid, kuid selle eest on murrud, mille lugeja ja nimetaja on algebralised avaldused; peale selle on siin algebraline avaldus juuremärgi all. Seelaadiliste vormulite arvsuuruste leidmisel peetakse veel järgmist silmas: murru ja

radikaali kriips täidab klambrite aset. — Klambrite abil oleks meie vormulil järgmine väliskuju:

$$(x+y):(x-3)-(x^2-y^2):(x+7)+\sqrt{[(x+y):(x-y)+1]}$$

Kui $x=8$, $y=7$, siis on meil eelnevast vormulist:

$$x+y=15$$
$$x-3=5$$
$$x^2-y^2=15$$
$$x+7=15$$
$$x-y=1$$

ja

$$\frac{15}{5}-\frac{15}{15}+\sqrt{\frac{15}{1}+1}=6.$$

Kui on vaja tehete järjekorra näitamiseks ühed klambrid sulgeda teistesse, siis tarvitakse mitmekujulisi klambrid: 1) väikseid ehk ümargusi ( ), 2) keskmisi ehk nurgelisi [ ], 3) suuri ehk kujulisi { }. Ka üht liiki klambritest oleks küllalt, kui mitte selgus ja ülevaatlikkus seeläbi ei kannataks.

Harjutused.

210. Järgnevais harjutusis leida resultaat, ühtlasi näidates, missuguses järjestuses toimetakse tehted ja kuidas võiks ilma klambriteta läbi saada:

1) $(7+4)+3$ 2) $7+(4+3)$ 3) $(7+4)-3$
4) $7+(4-3)$ 5) $(7-4)+3$ 6) $7-(4+3)$
7) $(7-4)-3$ 8) $7-(4-3)$.

211. Näidata, missugused klambrid on tarvilikud ja ülearused, leides ühtlasi resultaadi:

1) $(20+5-4)+6$ 2) $(20+5)-(4+6)$ 3) $20+(5-4+6)$
4) $[(20+5)-4]+6$ 5) $[20+(5-4)]+6$ 6) $20+[(5-4)+6]$
7) $20+[5-(4+6)]$

212.

1) $(32-8+7)-2$ 2) $(32-8)+(7-2)$ 3) $32-(8+7-2)$
4) $[(32-8)+7]-2$ 5) $[32-(8+7)]-2$ 6) $32-[(8+7)-2]$
7) $32-[8+(7-2)]$

213.

1) $(40-20-15)+5$ 2) $(40-20)-(15+5)$ 3) $40-(20-15+5)$
4) $[(40-20)-15]+5$ 5) $[40-(20-15)]+5$ 6) $40-[(20-15)+5]$
7) $40-[20-(15+5)]$

214.

1) $[(60 . 12) : 6] . 2$ 2) $[60 . (12 : 6)] . 2$ 3) $(60 . 12) : (6 . 2)$
4) $60 . [(12 : 6) . 2]$ 5) $60 . [12 : (6 . 2)]$ 6) $[(60 . 12) . 6] . 2$

215.

1) $[(90 . 18) : 9] : 3$ 2) $[90 . (18 : 9)] : 3$ 3) $(90 . 18) : (9 : 3)$
4) $90 . [(18 : 9) : 3]$ 5) $90 . [18 : (9 : 3)]$ 6) $[(90 : 18) : 9] : 3$
7) $90 : [(18 : 9) : 3]$ 8) $90 : [18 : (9 : 3)]$

216. Arvata:

1) $30 + 6 . 42 - 18 : 9$ 2) $(30 + 6)[(42 - 18) : 9]$ 3) $(30 + 6)[42 - 18 . 9$
4) $27 . 5 + 4 : 2 - 1$ 5) $27 . (5 + 4) : 2 - 1$ 6) $27 . 5 + 4 : (2 - 1)$
7) $27 . (5 + 4) : (2 - 1)$ 8) $27 . [(5 + 4) : (2 - 1)]$

217.

1) $4 . 15 - 10 . 5 + 20 . 3$ 2) $4 . (15 - 10) (5 + 20) . 3$
3) $38 : 19 - 18 : 9 - 7$ 4) $38 : (19 - 18) : (9 - 7)$
5) $420 : 10 + 32 - 8 . 2$ 6) $420 : (10 + 32) - 8 . 2$
7) $420 : (10 + 32 - 8) . 2$

218. 1) $18 . 14 - 21 : 3 + 2 . 13 + 9$
2) $6 . \{[(37 - 9) : 14 + 1] . 5 + 8\}$
3) $22 . \{[39 - 18 : (11 + 7)] . 2 - 16\}$
4) $15 . \{64 - 76 : [5 + 3 (7 + 4)]\}$
5) $54 . \{(99 - 15) : [(12 + 7) . 3 - 15]\}$

219. Näidata tehete järjekord ja võimalikul korral kõrvaldada klambrid:

1) $(2^3) . (4^2)$ 2) $5 . (8^2)$ 3) $(6)^2 . 4$
4) $(3 . 7)^3$ 5) $(a^4) . (b^5)$ 6) $(a^2y)^5$
7) $(2^2z)^3$.

220. Seletada, millelt erinevad avaldused:

1) ab^2 ja a^2b 2) ab^2 ja a^2b^2
3) a^2b ja $(ab)^2$ 4) $2a^2$ ja $(2a)^2$
5) $7x^3$ ja $(7x)^3$ 6) $p^2 + q^2$ ja p^2q^2
7) $p^2 + q^2$ ja $(p + q)^2$ 8) $p^2 - q^2$ ja $(p - q)^2$
9) $m^3 + n^3$ ja $(m + n)^3$ 10) $5x^2y$ ja $5(xy)^2$
11) $4 (uv)^3$ ja $(4uv)^3$ 12) $(8u)^3v$ ja $(8v)^3u$.

221. Arvata:

1) $4u$ ja u^4, kui $u = 1, 2, 3, 4$;
2) $3v$ ja v^3, kui $v = 10$;

3) a^2 ja 2^a, kui $a=3, 4, 5$;

4) millal on $a^2=2^a$?

222. Näituste varal tõestada, et:

1) $na \neq a^n$ 2) $a \neq na$.

223. Leida y-suurused avaldustest:

1) $y=x^2+x+1$, kui $x=1; 2; 3$

2) $y=x^2-3x+4$, kui $x=3; x=5$

3) $y=x^3+x^2+x+3$, kui $x=2$

4) $y=4x^2-x+10$, kui $x=1; x=10$

5) $y=2x^4-3x^3+x^2-2x+6$, kui $x=10$

6) $y=x^2-px+q$, kui $p=4; q=5; x=5$

7) $y=10x^2-x$, kui $x=0{,}1$

8) $y=1000x^3-x$, kui $x=0{,}1$

9) $y=5x^3+2x+6\frac{3}{4}$, kui $x=\frac{1}{2}$

10) $y=x^3+2x^2+4x+8$, kui $x=1; 2; 3; 4$

11) $y=ax^2+bx-c$, kui $a=3; b=7; c=10; x=5$

12) $y=ax^2-bx+c$, kui $a=9; b=4; c=21; x=3$.

224. Leida vormulite

1) $(5m+n):n$

2) $(3m-n):(2n+2)+m$

3) $[2(m-2n+5):(m-3)+1]:(n-1)$

4) $\left(\frac{1}{2}m-\frac{1}{4}n\right)\left(\frac{1}{4}m+\frac{1}{2}n\right)+n-(m-n)^2$

arvsuurused, kui $m=8$, $n=4$.

225. Arvata järgnevad avaldused:

1) $a+bc$ 2) $(a+b)c$,

kui 1) $a=3; b=4; c=5;$ 2) $a=0{,}4; b=2{,}5; c=3$.

226. 1) $a+b^2c$ 2) $(a+b)bc$ 3) $(a+b)^2c$,

kui 1) $a=12; b=6; c=10;$ 2) $a=\frac{1}{4}; b=3\frac{1}{3}; c=\frac{2}{5}$

227. 1) $a^2:c-b$ 2) $a^2:(c-b)$ 3) $a(a:c-b)$

4) $a[:(c-b)]$,

kui $a=24; b=3; c=6$.

228. 1) $a_1=\frac{a^2}{c}$ 2) $b_1=\frac{b^2}{c}$ 3) $h=\sqrt{a_1b_1}$,

kui $a=3; b=4; c=5$.

229. Millelt lähevad üksteisest lahku vormulid:

1) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2}$ ja $\frac{a+b^2}{a^2+b^2}$ 2) $\frac{a^2+b}{a+b^2}$ ja $\frac{a^2+b}{(a+b^2)}$?

230. Leida x vormulist

$$x = n\left[a\left(1+\frac{p}{100}\right)+b\right],$$

kui $a=100$; $p=5$; $b=70$; $n=4$.

Algebraline avaldus, milles viimane tehe on liitmine ehk lahutamine, kutsutakse **hulkliikmeks** ehk **polünoomiks**; vastasel korral kutsutakse algebraline avaldus **üksliikmeks** ehk **monoomiks**.

231. Liigitada järgnevad avaldused monoomideks ja polünoomideks:

1) $x+y$ 2) xy 3) $m-n$

4) $\frac{m}{n}$ 5) $ax+by+c$ 6) x^2+y^2

7) x^2+px+q 8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ 9) $(r+r^1+s)^3-(r+r^1-s)^3$

10) $\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)$ 11) y^2-px 12) $\frac{p}{1+ec}$

13) $\frac{1-e^2}{1+e^2}$ 14) $(x^2+y^2)(x-2a)+a^2x$ 15) $x(x^2+y^2)-2ay^2$

16) $\frac{kmm_1}{r^2}$ 17) $(x^2+y^2)^2-2a^2(x^2-y^2)$ 18) $\sqrt{1-e}+\sqrt{1+e}$

19) $kl-\frac{(k+l)^2}{k^2-l^2}$ 20) $\left(\frac{a}{3}+\frac{3}{a}\right)^2$ 21) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.

232. Vormulitesse

1) $(a+b)^2$ 2) a^2+b^2 3) $(a-b)^2$ 4) a^2-b^2

5) a^2b+ab^2 6) $\frac{a}{5}+\frac{5}{a}$ 7) a^2b^2 8) ab^3

seada a asemele b ja b asemele a; katsuda, missuguste vormulite arvsuurus ei muutu (sümeetrilised avaldused).

233. Vormulis r^2-st asendada tähed sõõri pööramise järjes, s. o. r asemele panna s, s asemele t, t asemele r, nagu näitlikult kujutab joonis. Kirjutada kõik sel viisil uuesti saadavad vormulid ja valida tähtede asemel numbrid nii, et kõigi avalduste suurused oleksid võimalikud.



234. Seada tähtede a, b, c, d, e abil vormulid, milles igaühes esineks kõik neli esimest tehet ja igaüks neist kord viimasena; on tarvis, et iga tähte ainult üks ainus kord võiks kasutada.

235. Kirjutada tähe i abil iga tehe. Kirjutada üksinda tähe i, tehete märkide ja klambrite abil vormulid, milledes esineks kõik kuus tehet.

Vormulite arvsuuruste arvamine.

236. $x = a(b+c) + b(c+a) + c(a+b)$,

kui 1) $x=2$; $b=3$; $c=4$;

2) $a=2{,}135$; $b=3{,}125$; $c=4{,}005$;

3) $a=\frac{3}{4}$; $b=\frac{5}{6}$; $c=\frac{12}{11}$.

237. $u = p(q-r) + q(r-p)$,

kui

1) $p=10$; $q=25$; $r=15$; 2) $p=3{,}14$; $q=6{,}17$; $r=4{,}30$.

238. $z = (a+b)[c+(a+b)(c+d)] + a(b-c)[c+(a-b)d]$

kui 1) $a=4$; $b=3$; $c=2$; $d=1$;

2) $a=0{,}7$; $b=0{,}5$; $c=0{,}2$; $d=1{,}8$.

239. Vormulite

$$p_2 = 2p_1 + p_0$$
$$p_3 = 2p_2 - p_1$$
$$p_4 = 2p_3 + p_2$$
$$p_5 = 2p_4 - p_3$$

põhjal leida p_5, kui $p_0=1$, $p_1=2$.

240. $s = \sqrt{m-n+\sqrt{m+n}}$,

kui 1) $m=5$; $n=4$; 2) $m=18$; $n=7$.

241. $w=[xy+(x-y)z](y-z)+x[y(x+z)+z^2]$,

kui $x=8;\ y=3;\ z=1.$

242. $w=\frac{(x+y)z+x(y+z)}{[y(x+z)+z(x-y)]x+z}+(y+z)\frac{x}{y-z}$,

kui $x=6;\ y=5;\ c=3.$

243. Kaks metallist varrast, millede pikkused a ja b, on otsadega ühte joodetud. Kui kogu varrast t graadi soendada, siis on ta pikkus x tarvis leida.

$x=a(1+\alpha t)+b(1+\beta t)$;
$a=3;\ b=4;\ t=50;\ \alpha=0{,}00001;\ \beta=0{,}00002.$

244. Kapitaali omanik pani kolm summat a_1, a_2, a_3 vastavalt p_1, p_2, p_3 protsendiga hoiule t_1, t_2, t_3 aastaks. Üldise kasu suuruse määrab vormul

$$x=0{,}01\,(a_1p_1t_1+a_2p_2t_2+a_3p_3t_3).$$

Leida saadud kasu x, kui 1) $a_1=1800;\ p_1=4;\ t_1=3;\ a_2=2400;\ p_2=4{,}5;\ t_2=2;\ a_3=3200;\ p_3=5;\ t_3=4$; 2) $a_1=600;\ a_2=900;\ a_3=1500;\ p_1=4;\ p_2=6;\ p_3=5;\ t_1=1\frac{1}{2};\ t_2=2\frac{1}{4};\ t_3=\frac{1}{2}$.

245. Geomeetriast on teada, et kui täisnurkse kolmnurga kateetide pikkus on x ja y, siis on hüpotenuusi pikkus $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Joonestada täisnurksed kolmnurgad, millede kateedid on vastavalt:

	x	y
1)	3	4
2)	6	8
3)	5	12

Leida igal juhusel enne joonestuse ja pärast vormuli abil hüpotenuusi pikkus z.

Esimene neist kolmnurkadest kutsutakse „Egiptuse kolmnurgaks“.

246. Eelmises ülesandes seada x ja y asemele mõned arvud ja leida z. Miks pole alati juure leidmine võimalik?

Võib tõendada, et siis saame z kohta alati täisarvud, kui x ja y on antud vormulites:

$$x = 2ab$$
$$y = a^2 - b^2,$$

kus a ja b asemel mõelda kahte ühistegurita täisarvu. Kui $a = 2$ ja $b = 1$, siis leiamegi „Egiptuse kolmnurga". Leida veel kolmnurgad, millede küljed oleksid x, y, z, kui 1) $a = 3$; $b = 1$; 2) $a = 3$; $b = 2$. Arvude kolmikud x, y, z kutsutakse Pythagorase arvudeks. Kui palju võib niisuguseid olla?

247. Leida kolmnurga — mille küljed a, b, c — sisse-, ümber- ja väljakujutud sõõride raadiuste pikkused r, R, ϱ_a (Greeka r), ϱ_b, ϱ_c vormulite

$$r = \frac{s}{p},\ R = \frac{abc}{45},\ \varrho_a = \frac{s}{p-a},\ \varrho_b = \frac{s}{p-b},\ \varrho_c = \frac{s}{p-c}$$

abil, kui on teada, et

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

ja

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Kasutada vormulid juhustel, kui 1) $a = 3$; $b = 4$; $c = 5$; 2) $a = 4$; $b = 4$; $c = 4$.

248. Kui $n_0 = 0$, $n_1 = 2$, arvata n_2, n_3, n_4, ... n_{10}, vormulite

$$n_2 = 3n_1 - 4n_0$$
$$n_3 = 3n_2 - 4n_1$$
$$n_4 = 3n_3 - 4n_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$n_{k+1} = 3n_k - 4n_{k-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

põhjal.

249. Leida vormuli $x_n = \frac{1}{1+u_n}$

suurused, kui n järjestikku kasvab: 0, 1, 2, 3, ..., aga $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$, $u_0 = 1$, $u_1 = 1$. (Borel)

250. Leida vormuli

$$z_n = \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$$

abil z_0, z_1, z_2, z_3, kui $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + u_{n-1}$ ja $u = 0$, $u_1 = 6$, $u_2 = 1$. (Borel)

TARTU ÜLIKOOLI RAAMATUKOGU

§ 12. Algebraline diktaat ja õigekirjutus.

Mõne harilikus keeles väljendud matemaatilise üteluse ehk lause võime algebraliselt ümber kirjutada ja, vastupidi, algebralistes sümboolides avaldud mõtte võime avaldada harilikus keeles.

Näitused:

1) Kahe suuruse, a ja b, summa ruut (kvadraat); $(a+b)^2$
2) a ja b ruutude summa; a^2+b^2
3) a ja b vahe ruut; $(a-b)^2$
4) a ja b ruutude vahe; a^2-b^2
5) p ja q summa ja vahe teos; $(p+q)(p-q)$
6) Kahega suurendud kolmekordse k ruut on seitsmega vähendud viiekordse k kuup; $(3k)^2+2=(5k-7)^3$
7) x ja y teos on kolm; $xy=3$
8) Ruutjuur c ja d summast on null; $\sqrt{c+d}=0$
9) Ruutjuurte vahe c-st ja d-st on üks; $\sqrt{c}-\sqrt{d}=1$
10) Kahe arvu summa ja vahe teos on nende arvude ruutude vahe; $(8+5)(8-5)=8^2-5^2$; $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

Harjutused. — Vormulite kokkuseadmine ja katsumine.

251. Kirjutada algebraliselt ja näidata, missuguseil arvsuurusil on vormulid võimalikud:

1) Kahe algebralise suuruse, a ja b, summa; 2) x ja y vahe; 3) m ja n teos; 4) r ja s suhe; 5) x ja y teose ja a summa; 6) a ja b teos vähendud c-ga; 7) p vähendud q ja r teosega; 8) p ja q suhte ja r summa; 9) d ja e teos suurendud f ja g teosega.

252. 1) Arvu teine aste ehk ruut (kvadraat); 2) arvu kolmas aste ehk kuup; 3) p ruudu ja q kuubi summa; 4) kahekordne a ruut; 5) viiekordne u kuup; 6) kahekordse a kuup; 7) viiekordse u kuup; 8) a ruudu ja b kuubi teos; 9) m ja n teose kuup; 10) p ja q ruutude summa, vahe, teos, suhe; 11) r ja s kuupide summa, vahe, teos, suhe; 12) p ja q summa ruut, kuup, seitsmes aste, n aste; 13) x ja y vahe ruut, kuup, kaheksas aste, n aste; 14) kahekordse d ja kahekordse d ruudu summa.

253. 1) Paaris ja paarita arv üldisel kujul; 2) a ja b summa paaris astmel; 3) c ja d vahe paarita astmel; 4) arvu vormul, milles a sada, b kümmend, c ühte; 5) viis n-le eelnevat ja viis järgnevat arvu, mis asetada kasvavas järjes.

254. Kirjutada: 1) neli $2k$ eelset ja neli järgnevat arvu, asetades need kahanevas järjes, ja näidata, missugused neist arvudest on paaris ja missugused paarita; 2) mõne paaris arvu üldine vormul ja leida kuue järgneva paarita arvu vormulid; 3) arvu vormul, mis jagab kolmele, viiele, kümnele; 4) arvu vormul, mis ei jaga kahele, seitsmele, üheksale.

255. Mitu ruutmõetu on ruudu pinnas, kui selle külg sentimeetrites on: 1) $3a$; 2) $5b$; 3) $m+n$; 4) $2p+q$.

256. Tõlkida algebra keelde: 1) ruutjuur a ja b summast, vahest, teosest, suhtest; 2) ruutjuur a ja b ruutude kuupide, n astmete vahest; 3) kahekordne a; 4) kahekordne b; kümnekordne c; 5) kahekordne a ja b summa; 6) neljakordne p ja q vahe; 7) viiekordne a ruut; 8) ruutjuur viiekordsest a-st; 9) kaheksakordne b kuup; 10) kolmekordne ruutjuur a ja b summast; 11) neljakordne kuupjuur x ja y ruutude vahest; 12) pool a; 13) veerand a ja b teosest; 14) kaks kolmandikku a ja b ruutude vahest; 15) kahega suurendud a kolmandik; 16) viiega vähendud seitsmekordne z; 17) kahekordse a-ga suurendud kümne ruut.

257. Algebralised kirjutused muuta ütelusteks.

1) $p+q$	2) $p-q$	3) pq
4) $p:q$	5) $\frac{p}{q}$	6) m^2
7) n^3	8) $\sqrt{a}$	9) $\sqrt[3]{b}$
10) $\sqrt{a^3}$	11) $\sqrt[3]{a^2}$	12) x^2+y^2
13) $(x+y)^2$	14) u^2-v^2	15) 5^2-a^2
16) $(u-v)^2$	17) r^2s^2	18) $(rs)^2$
19) $\frac{x^2}{y^2}$	20) $\left(\frac{x}{y}\right)^2$	21) a^3+b^3
22) $(a+b)^3$	23) m^4-n^4	24) $(m-n)^4$
25) $x^{2k}-y^{2k}$	26) $(x-y)^{2k}$	27) $(r+s)(r-s)$
28) $(a^2+b^2)(a-b)$	29) $(a^2-b^2)(a+b)$	30) $\frac{m+n}{m-n}$

31) $\frac{a-b}{a+b}$ 32) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ 33) $\sqrt{p^2-q^2}$

34) $\sqrt[3]{p^3+q^3}$ 35) $3a$ 36) $\frac{1}{4}c^2$

37) $\frac{2}{5}abc$ 38) $2(k^2+b^2)$ 39) $2(k+l)^2$

40) $(p+7)^2$ 41) $(2p+8)^3$ 42) $(4p-10)^5$

43) $(1-2q)^2$ 44) $(3-11q)^6$ 45) $\sqrt{r^2-st}$

46) $5\sqrt{k+l}$ 47) $\frac{3}{4}\sqrt{(k+l)(k-l)}$ 48) $\frac{1}{7}\sqrt[5]{k^{10}-l^{10}}$.

Kirjutada matemaatiliselt laused:

258. 1) a on b; 2) c on d võrdne; 3) e ja f on võrdsed (ühesuurused); 4) a on enam kui b; 5) x on y-st enam; 6) b on vähem kui c; 7) a ja b summa ruut on a ruudu, a ja b kahekordse teose ja b ruudu summa; 8) a ja b vahe ruut on a ja b kahekordse teosega vähendud a ja b ruutude summa; 9) p ja q summa kuup on p kuubi, p ruudu ja q kolmekordse teose, q ruudu ja p kolmekordse teose ja q kuubi summa; 10) s ja t summa ja vahe teos on s ja t ruutude vahe; 11) a ja b summa ruut on enam kui a ja b ruutude summa; 12) neljakordne a ja b teos on a ja b summa ruudust vähem; 13) k kuubi ruut on l ruudu kuup; 14) k ja l ruutude viiekordse summa kolmas aste on k ja l kuupide kahekordne teos; 15) ruutjuur k ja l kuupide vahest on veerand kuupjuurt k ja l vahe ruudust; 16) mõni paaris arv on järgmisest esimesest paarita arvust vähem, kuid eelnevast paarita arvust suurem.

259. Arvude vormulisse seadmise abil näidata, et kui $x=1$; $y=3$; $z=2$; siis on õiged järgmised võrdused:

1) $(x+5)z=xy+3y$
2) $x^2+y=z^2$
3) $x+2y+3z=2x+3y+z$
4) $(y+1)(x^2+z^2)=y(x^2+z^2)+x^2+z^2$
5) $(x+y)^2+(y+z)^2+(x+z)^2=(x+y+z)^2+x^2+y^2+z^2$
6) $x^2+x(y+z)+yz=(x+y)(x+z)$.

Missugused neist võrdustest on samasused, missugused — võrrandused?

II. Algebraliste avalduste teisendamine

§ 1. Üksliigete ühendamine.

Kui üksliikmed „plus“ ehk „miinus“ märkidega ühendame, siis saame algebralise hulkliikme ehk polünoomi, mida mõnel korral lihtsamaks võib muuta. Sellest oleneb, et üksliigete liitmis- ja lahutamise probleem muutub alati mõne algebralise hulkliikme lihtsustamiseks. Tähtsat osa etendab siin: 1) liidetavate ümberasendatavus ühes järeldustega ja 2) üksliigete sarnasuse mõiste. — Sarnasteks nimetakse üksliikmed, mis erinevad ainult koeffitsientidelt ja nende ette kirjutud märkidelt, kuna tähelised avaldused samastena püsivad, näit., $3a^2b$ ja $5a^2b$; kuid $3a^2b$ ja $3ab^2$ ei ole võrdsete koeffitsientide peale vaatamata sarnased üksliikmed, sest et nad tähelistelt avaldustelt erinevad.

Võtame üksliikmed: $5a^2b$, $4ab^2$, $3a^2b$, $4ab^2$, $4ab$, 7 ja ühendame nad + ja — märkide abil, saavutades nõnda algebralise hulkliikme

$$5a^2b + 4ab^2 + 3a^2b - 4ab^2 + 4ab - 7.$$

Nägelikuks abinõuks tähendades sarnased liikmed ühepalju kriipsudega, võime asuda algebralise avalduse lihtsustamisele. Selleks liidame esimese ja kolmanda üksliikme, mis sarnased, saades $8a^2b$; sarnased teine ja neljas üksliige erinevad ainult nende ees olevailt märkidelt ja nad kaovad ühendamisel ära. Jääb järele veel viimne ja eelviimne monoom, milledele ei leidu vastavaid. Lõpuresultaadina ilmub lihtsustatum polünoom

$$8a^2b + 4ab - 7.$$

Hulkliikmes

$$4x^3 - 5xy^2 + 2x^2y - 2xy^2 - 3x^2y + x^3$$

esinevad sarnased liikmed paarikaupa. Esimese ja viimse liitmisel saame $5x^2$. Ära võttes $5xy^2$ ja $2xy^2$ üksikult, on tarvis ära

võtta nende liigete summa $7xy^2$. See asemel, et juure lisada $2x^2y$ ja ära võtta $3x^2y$, on tarvis ainult ära võtta x^2y. Lihtsustamise järel saadakse hulkliige

$$5x^3 - 7xy^2 - x^2y.$$

260. Järele katsuda võrduste

1) $3m + m = 4m$
2) $2m + 6m = 8m$
3) $5ab + 4ab + ab = 10ab$
4) $5x^2y + 11x^2y + x^2y = 17x^2y$
5) $0{,}3uvw + 6{,}1uvw + 0{,}6uvw = 7uvw$
6) $\frac{1}{2}ik^2l + \frac{2}{3}ik^2l = 1\frac{1}{6}ik^2l$

maksvus, kui tähtede asemele seada mõned arvud.

261. Liita monoomid:

1) $2a$, $5b$, $4y$, x, $5a$, $7y$, $10b$, a, y
2) $6a^2$, $4ab$, ab, a, $5b^2$, $7a^2b$, 2, $3a$, 5, $2ab$, $4a^2$
3) a, $6\frac{1}{2}$, ab, 1, b^2, $\frac{1}{4}a$, a^2b, $5b$, $4\frac{1}{2}ab$
4) $4{,}3a^2$; $0{,}3ab$; $6{,}4b^2$; $3{,}6ab$; $4{,}4a^2$; $2{,}5ab$.

262. Kõige lihtsamal viisil leida summad:

1) $3\frac{1}{2} + 5{,}7 + 0{,}8 + \frac{1}{4} + 7{,}1 + \frac{3}{4}$
2) $4\frac{2}{7} + 5{,}6 + 1\frac{3}{14} + 8{,}1$
3) $11{,}03 + 2\frac{5}{9} + 24{,}96 + 5\frac{7}{18} + 3{,}51$
4) $2\frac{1}{3} + 1{,}11 + 5\frac{5}{6} + 7{,}27 + 6{,}84 + \frac{4}{9}$.

263. Lihtsustada polünoomid:

1) $3a + 7b + a$
2) $5a + b + 7b$
3) $7b + a + b + 15b + 6a$
4) $8a + 4b + 3a + 5b + a$
5) $14p + 10q + p + 2q + 7p + 5q$
6) $10q + 6p + 18q + 19p + 13p + 15q$.

264. Leida kõige lihtsamal viisil summad:

1) $x + 2x + 3x + 4x + 5x + 6x + 7x + 8x$
2) $y + 2y + 3y + \ldots + 9y$
3) $3y + x + 2z + 2y + 3x + 3z + z + 5x + y$.

265. Liita üksliikmed:

1) $1\frac{1}{5}a$, $3b$, $1\frac{1}{5}a$, $3a$, $2\frac{1}{3}b$, $5\frac{1}{3}b$, $5\frac{1}{5}a$
2) $3\frac{4}{7}a$, $2b$, $1\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{4}a$, $6\frac{1}{4}b$, $5\frac{3}{4}a$, $6\frac{3}{4}b$, $4\frac{3}{7}a$
3) $2\frac{3}{5}x$, $6\frac{5}{7}y$, $6\frac{1}{5}z$, $1\frac{6}{7}y$, $2\frac{4}{5}z$, $7\frac{2}{5}x$, $\frac{3}{7}y$, $4x$
4) $0{,}23u$; $1{,}07v$; $1{,}6u$; $0{,}23v$; $5{,}17u$; $4{,}70v$
5) $2{,}68uv$; $1{,}01uw$; $0{,}99vw$; $3{,}99uw$; $2{,}48uv$; $1{,}01vw$; $0{,}84uv$
6) $6pqr$, $2\frac{1}{3}qrs$, $2\frac{1}{4}pqr$, $0{,}7prs$, $2{,}75pqr$, $0{,}1prs$, $5\frac{2}{3}qrs + \frac{1}{5}prs$.

266. Arvude abil ja arvjoonel tõendada võrdused:

1) $a + b - b = a$
2) $a - b + b = a$, $\quad a > b$
3) $b + a - b = a$.

Sõnades avaldada vormulid. Näit. (2): Kui mõnest suurusest ära võtta ja juure lisada ühepalju, siis jääb see suurus endiseks.

Arvjoonel vaadelda ka niisugust juhust, kui $a < b$.

267. Lihtsustada hulkliikmed:

1) $25 + 12 - 12$
2) $64 - 47 + 47$
3) $56 + 30 - 56$
4) $15a + 12b - 12b$
5) $10x - 9y + 9y$
6) $2x - 10y + 10y$
7) $2p + 5q - p - 5q = 5q + 2p - p - 5q = 5q + p - 5q = p$
8) $3p + 6q - 2p - 6q = p + 2p + 6q - 2p - 6q = p + 6q - 6q = p$
9) $5ap + 7bq - 3ap - 5bq = 7bq + 5ap - 3ap - 5bq = 7bq + 2ap - 5bq = 2ap + 7bq - 5bq = 2ap + 2bq$
ehk: $5ap + 7bq - 3ap - 5bq = 2ap + 3ap + 7bq - 3ap - 5bq = 2ap + 7bq - 5bq = 2ap + 2bq$
10) $6ab - 4bc - 2bc$
11) $5xy + 3yz - 8xy = 5xy + 3yz - 5xy - 3xy = 3yz - 3xy$.

268. Tõendada arvude ja arvjoone abil võrdused:

(1) $a + b - c = a - c + b$
(2) $a - b - c = a - c - b$.

kui 1) $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$; 2) $a = 4$, $b = 3$, $c = b$.

Mil korral on vormulil (1) ja (2) mõte ja millal puudub see? Millal on võrduse (1) ühel osal mõte ja teisel puudub see?

269. Arvude tähtede asemele seadmisel ja arvjoonel katsuda, et vormulite

(1) $a + b + c + d$
(2) $a - b + c + d$
(3) $a - b - c + d$
(4) $a - b - c - d$

arvsuurused ei olene sellest, kui tähed ümber asendada ühes märkidega, mis nende ees. Näit., vormul (2) annab:

$$a - b + c + d = a + c - b + d = a + c + d - b.$$
$$a = 12;\ b = 5;\ c = 4;\ d = 2.$$

270. Lihtsustada avaldused:

1) $14a + 9b - 5a$
2) $5a + 11b - 4a$
3) $6a + b - 7a$
4) $10a - 3b + 4a$
5) $12a - b - 9a$
6) $16 - 3a + 5$
7) $13 - 15b - 3$
8) $3a + 5x - a - 4x$
9) $12b - 7y - 10b + 15y$
10) $30a - 20x - 5a - 10x$
11) $28b + 15y - 24b - 16y$
12) $13a + 18x - 13x - 18a$
13) $6m - 4n - 5n + 10m + m$
14) $7m + n - 2m - n + 5m$
15) $8m - 6n + 10m - 8n + 12m - 10n$
16) $11m + 5n - 5m + 9n - 6m - 14n$
17) $16m - 5 - n + 2 + 5m + 2n + 6$
18) $m - 9n + 1 + 4n - m + 5n - 1$
19) $k + l + m + 3k + 4l + m + 6k + 8l + m + k$
20) $k - 2l + m + 2m - 5l + 7k + 9k - l + 10m$
21) $32k + 16l - 5 + 5m - 10l + 5 - 17k - 6m$
22) $27k + 18 - 21m + l + 10m + 6 + 11m - 19k - 23$
23) $0{,}5a + 1{,}7b + c + 2{,}8a - 4{,}9b - 0{,}1c + 5{,}1 + 0{,}2 - 0{,}3c$
24) $4a - 5{,}6b + 8{,}1c + 3{,}7a + 2{,}9b - 5{,}4c - 7{,}7a - 2{,}7c + 4{,}7b$
25) $2{,}6 + 5a - 0{,}9b + c - 1{,}7 - 4{,}4 + 1{,}3b - 0{,}7c$
26) $a - b + 5{,}1c + 10{,}2 + 0{,}6a - 5{,}7b - 0{,}4 - 1{,}5c$
27) $4\frac{1}{2}a + b - \frac{2}{3}b + 1\frac{3}{4} + \frac{5}{6}b$

28) $8\frac{4}{5}a - \frac{3}{4}b - 4\frac{3}{5}a - 4\frac{5}{7}b + 5\frac{1}{7}b$

29) $\frac{2}{3}p + 3\frac{1}{2}q - \frac{4}{5}r - \frac{1}{2}p - 1\frac{4}{5}q + \frac{2}{3}r + \frac{5}{6}p - 2\frac{1}{5}q + \frac{2}{15}r$

30) $5\frac{1}{3}p - 2\frac{1}{4}q + \frac{1}{2}r - \frac{2}{3}p + 1\frac{1}{2}q - 1\frac{1}{2}r - 4\frac{2}{3}p + 1\frac{3}{4}q + r$

31) $2{,}48p + 0{,}9q - 1{,}02r - 0{,}51q + 0{,}52p + 0{,}02r$

32) $0{,}3p - 0{,}07r + 1{,}05q - 0{,}6r + 2{,}72p - 0{,}37r - 1\frac{1}{20}q.$

Võrrandused.

271. Leida juured võrrandusil:

1) $x - 4 = 11$
2) $x + 7 = 16$
3) $17 - x = 9$
4) $15 + x = 22$
5) $11 + x = 11$
6) $y - 0{,}3 = 1{,}7$
7) $7{,}5 + y = 8{,}6$
8) $14{,}5 - y = 16{,}1$
9) $z + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
10) $z - \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$
11) $\frac{2}{7} - z = \frac{2}{14}$
12) $0{,}3 = \frac{3}{4} - z$
13) $x + x + 10 = 30$
14) $2x = 6$
15) $3x = 12$
16) $\frac{y}{2} = 7$
17) $\frac{8}{u} = 4$
18) $\frac{2}{3}x = 6$
19) $2v + 7 = 11$
20) $6 - 3v = 3$
21) $5x - 1 = 19$
22) $3y - 4{,}1 = 0{,}7$
23) $0{,}12 - 4y = 0{,}04$
24) $1{,}8 + 5y = 6{,}8$
25) $\frac{z}{2} + 1 = 3$
26) $5 - \frac{z}{3} = 3$
27 $1 - \frac{1}{z} = \frac{3}{4}.$

272. Missuguseil võrrandusil puuduvad juured?

1) $x + 5 = 3$
2) $1 - y = 0$
3) $17 - z = 21$
4) $3u + 4 = 1$
5) $0 = 8 - 4v$
6) $1 - 0{,}8x = 0{,}6$
7) $14 = 3y - 1$
8) $1 = z + 1{,}5$
9) $1 - \frac{3}{2u} = \frac{1}{2}.$

273. Missugust algebralist avaldust peab mõtlema x asemel järgnevais võrrandusis:

1) $a + x = b$ 2) $a = x + b$ 3) $x - a = b$
4) $a - x = b$ 5) $a = x - b$ 6) $a = b - x$
7) $2x - a = b$ 8) $a - 3x = b$ 9) $a = 4x - b$
10) $a = b - 2x$ 11) $a + 5x = b$ 12) $a = 10x + b$?

274. Seada järgnevate ülesannete põhjal võrrandused ja lahendada need:

1) Missuguse arvuga peab arvu 23 suurendama, et saada 18?
2) Missugusele arvule peab juure lisama 45, et saada 61?
3) Missuguse arvuga peab vähendama arvu 36, et saada 17?
4) Missugusest arvust peab lahutama 24, et saada 53?
5) Missuguse arvuga peab suurendama b, et leida a?
6) Missuguse arvu peab ära võtma b-st, et leida a?
7) Missuguse arvuga peab kordama a-d, et leida b?
8) Missugusele arvule peab jagama a, et leida b?
9) Missuguse arvu peab a-le jagama, et saaks b?
10) Missuguse arvu 0,1 osa on a?
11) Mitu korda peab vähendama m, et leida n?
12) Missuguse arvu m kordne on a?

275. 1) Mõelda arv, mille kahega suurendud veerand on neli; 2) mõelda arv, mille kolmega suurendud kolmandik on seitse.

276. Seada ülesanded eelmistel eeskujudel võrranduste põhjal:

1) $2x - 3 = 7$ 2) $3(x + 1) = 18$ 3) $5(7 - x) = 15$
4) $\frac{24 + x}{5} = 3$ 5) $\frac{42}{20 - x} = 14$.

277. Leida võrranduste otsused:

1) $3(x + 2) = 0$ 2) $2(3 - x) = 2$ 3) $5(x - 1) = 20$
4) $\frac{x + 6}{5} = 2$ 5) $\frac{7 - x}{10} = \frac{1}{2}$ 6) $\frac{8}{x - 1} = 2$
7) $\frac{3}{4}(x - 2) = 6$ 8) $2(3x + 5) = 16$.

278. Missugused võrrandused on võimatud ja mispärast?

1) $16 + x = 14$ 2) $13 + x = 10$ 3) $x - 3 = 2$
4) $6 - x = 7$ 5) $2x + 5 = 1$ 6) $5x + 1 = 2$
7) $2(x + 5) = 4$ 8) $x - 8 = 0$ 9) $\frac{1}{2}(x - 1) = 3x - 3.$

279. 1) Kolm poega said isalt 1500 rubla; noorem ja keskmine said ühepalju, vanem — 700 rubla. Kui palju sai igaüks?

2) Kolme venna ea-aastate summa on 54. Keskmine neist on nooremast kaks korda vanem. Vanem on nii vana, kui keskmine ja noorem ühtekokku. Kui vana oli iga vend?

3) 12 töölist tegid tööd 8 päeva ja lahkusid. Et lõpetada töö, kutsuti 5 töölist nende asemele, kes 10 päeva järel töö lõpetasidki, saades 728 marka seejuures vähem, kui esimesed. Kui suur oli esimeste päevapalk, kui teised said 2 marka päevas enam, kui esimesed?

§ 2. Hulkliigete ühendamine; klambrite avamine ja panemine.

Hulkliigete ühendamise all mõeldakse nende liitmist ja lahutamist, mis põhjenevad järgmisil määrusil:

Et liita mõni summa, on tarvis liita liidetavad üks teise järele; algebraliselt:

(I) $$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$$

Et liita vahe, on tarvis juure lisada lahutatav ja saadud resultaadist eraldada võetav; algebraliselt:

(II) $$a + (b - c) = a + b - c$$

Et lahutada mõni summa, on tarvis lahutada liidetavad üks teise järel; algebraliselt:

(III) $$a - (b + c) = a - b - c$$

Et lahutada vahe, on tarvis ära võtta lahutatav ja juure lisada võetav ja ära võtta lahutatav; algebraliselt:

(IV) $$a-(b-c)=a-b+c=a+c-b.$$

Need vormulid annavad ühtlasi klambrite avamise määrused; kui neid võrdusi lugeda paremalt poolt pahemale, siis saame klambritesse sulgemise määrused:

(I) $a+b+c=a(+b+c)$
(II) $a+b-c=a+(b-c)$
(III) $a-b-c=a-(b+c)$
(IV) $a-b+c=a-(b-c)$

Nende eelnevate määruste põhjal võib klambrid avada ja panna ka neil juhuseil, kui klambrites oleval hulkliikmel on enam kui kaks osa.

Näitused.

1) $m+(a+b-c)=m+[a+(b-c)]=m+a+(b-c)=m+a+b-c$
2) $m-(a+b-c)=m-[(a+b)-c]=m-(a+b)+c=m-a-b+c$
ehk: $=m-[a+(b-c)]=m-a-(b-c)=m-a-b+c$
3) $m+a+b-c=m+a+(b-c)=m+[(a+b-c)]$
4) $m-a+b-c=m-a+(b-c)=m-[a-(b-c)]=m-[a-b+c]$.

Klambrite avamisel ja panemisel muutuvad klambrites näidatud tehete märgid alati siis vastasteks, kui miinusmärk on klambrite ees.

280. Tähendada klambrite abil järgmised ülesanded ja leida resultaadid:

1) Arvu 1,7 suurendada 0,4 ja 2,6 summaga
2) „ 5,1 vähendada 2,9 ja 1,4 summaga
3) „ 10,6 suurendada 14,1 ja 8,7 vahega
4) „ 25,14 vähendada 24,72 ja 19,64 vahega
5) 14,5 ja 20,61 summa suurendada 4,92 vahega
6) 24,75 ja 18,06 vahe suurendada 0,31-ga
7) 13,05 ja 10,50 summa vähendada 1,55-ga
8) 8,84 ja 5,97 vahe vähendada 1,87-ga.

281. Nägelikult seletada vormulid I, II, III, IV arvjoone ja arvude abil, kui: 1) $a=7$; $b=4$; $c=2$; 2) $a=1000$; $b=100$; $c=1$; 3) $a=3{,}1$; $b=1{,}2$; $c=0{,}7$; 4) $a=\frac{3}{4}$; $b=\frac{1}{2}$; $c=\frac{1}{8}$.

282. Lihtsustada avaldused, kaotades klambrid ja ühendades sarnased liikmed:

1) $a+(a+b)$ 2) $5a+(a+b)$ 3) $a+(8a+b)$
4) $5c+(4c+d)$ 5) $6d+(2d+3)$ 6) $7+(3+9d)$
7) $p+(p+q)+(p+2q)+(p+3q)+(p+4q)$
8) $3p+(p+5q)+(2p+4q)+(3p+3q)+(4p+2q)+(5p+q)$
9) $10+(r+1)+(r+2)+(r+3)+(r+5)+(r+7)$
10) $(x+0{,}1)+(3x+0{,}3)+(5x+0{,}5)+(7x+0{,}7)+(9x+0{,}9)$
11) $(0{,}7x+0{,}3y)+(0{,}6x+0{,}4y)+(0{,}5x+0{,}5y)+(0{,}4x+0{,}6y)+$ $+(0{,}3x+0{,}7y)$
12) (5 kilo + 4 naela) + (15 kilo + 3 naela) + (9 kilo + 1 nael)
13) (2 meetrit + 5 sülda) + (2 detsim. + 5 jalga) + (5 detsim. 7 sentim. + 2 arss.)

283. Lihtsustada avaldused:

1) $b+(a-b)$ 2) $2b+(a-b)$
3) $5a+(3a-2b)$ 4) $11+(4-7a)$
5) $(5-6a)+6a$ 6) $(14a-5)+5$
7) $(8a-4b)-4b$ 8) $(24a-15b)-9a$
9) $c+d+(c-d)$ 10) $5c+6d+(17c-8d)$
11) $1{,}05c-2{,}52d+(2{,}95c-0{,}48d)$
12) $37k-64l+78m+(18k+35l-77m)$
13) $34{,}7+42{,}5k-90{,}6l+(5{,}3-42{,}5k+90{,}6l)$
14) $3{,}4x-2{,}4y+0{,}1z+(0{,}7x-2{,}1y+0{,}9z)+(4{,}5y-4{,}1y-z)$
15) $10+(x-1)+(x-2)+(x-3)+(x-4)+(x-5)$
16) $(2x-y+3)+(4x-3y+7)+(6x-5y+1)+(8x-7y+15)+$ $+(10x-9y+19)$
17) $(\frac{1}{2}-0{,}6p)+(2{,}7p+\frac{5}{6})+(\frac{1}{3}-1{,}8p)+(0{,}3p-1\frac{1}{2})$.

284. Lühemaks muuta algebralised avaldused:

1) $2a-(a+b)$
2) $8a-(7a+b)$
3) $16-(13a+15)$
4) $29{,}3a-14{,}8b-(26{,}8a+8{,}9b)$

5) $53{,}6a + 43{,}1b - (25{,}9a + 60{,}5b)$
6) $3x + 30y - (x + 5y) - (x + 10y) - (x + 15y)$
7) $4x + 4y + 8 - (3x + 2y + 1)$.

285. Lihtsamaks muuta avaldused:

1) $a - (b - c)$; näidata arvjoone ja arvude abil, et $a - (b - c) \neq a - b - c$;
2) $a - (a - b)$
3) $3a - (2a - b)$
4) $118m - (56m - 25n)$
5) $8{,}6x - (0{,}3y - 0{,}4x)$.

286. Kasutada vormulid (I), (II), (III), (IV) järgmiste aritmeetiliste avalduste väljaarvamiseks lühendud viisil:

1) $89 + 25 = (100 - 11) + 25 = 100 + 25 - 11 = 114$;
ehk: $89 + (1 + 14) = 90 + 24 = 114$
2) $65 + 19$
3) $113 + 48$
4) $586 + 195$
5) $592 + 289$
6) $615 + 499$
7) $84 - 27 = 84 - (24 + 3) = 84 - 24 - 3 = 60 - 3 = 57$
8) $548 - 99$
9) $469 - 103$
10) $1001 - 889$
11) $694 - 152$.

287. Avada klambrid ja ühendada sarnased liikmed:

1) $3a + 7b + (2a + 3b)$
2) $42a - 37b + (18 + 7b)$
3) $54a - 72b + (27a - 18b)$
4) $16a + 5b - (12a + 5b)$
5) $69a - 78b - (12b + a)$
6) $6a - 11b - (a - 12b)$
7) $8{,}3m + 7{,}2n + (5{,}9m + 5{,}6n)$
8) $8{,}3m - 7{,}2n + (5{,}9m + 5{,}6n)$
9) $8{,}3m - 7{,}2n + (5{,}9m - 5{,}6n)$
10) $8{,}3m + 7{,}2n - (5{,}9m + 5{,}6n)$
11) $8{,}3m - 7{,}2n - (5{,}9m + 5{,}6n)$
12) $8{,}3m - 7{,}2n - (5{,}9m - 5{,}6n)$
13) $(p + q - r) + (p - q + r)$
14) $(p + q - r) - (p - q + r)$
15) $(p - q + r) - (p - q - r)$
16) $(p + q + r) - (p - q - r)$
17) $(2c + d) - (5d - 3c) + (4d + 5c)$
18) $18c + (185{,}6c - 70d) - (84{,}16c + 50{,}7d)$

19) $(41{,}5c - 28d) - (60{,}1c - d) + (79{,}3c + 27d)$
20) $(2x - 4y - 1) - (x + 5y + 3) + (3x - 7y - 8)$
21) $(18x + 11 - 5y) + (2y - 60 + 5x) - (22x - 78 - 3y)$
22) $a + [(a + b) - (a - b)]$
23) $c + [(d - c) - (c - d)]$
24) $k - [(k - l) - (k + l)]$
25) $p - [(q + p) - (p - q)]$
26) $(3r - 4s) + [(8r - 5s) - (10r + s) + (10s - r)]$
27) $[(14r - 2s) - (5r - 6s) + 10r] - (20r - 3s) + (11r - 7s)$
28) $[3\frac{1}{2}r - (s - 0{,}5t)] - [(2\frac{1}{4}r - 1{,}75s) - (0{,}25r - \frac{1}{2}t)]$
29) $[28x - (8x - 6y)] - [(13\frac{1}{2}x - 5{,}5y) - (4{,}8y - \frac{1}{4}x) + 5\frac{1}{4}x] - -15{,}3y.$

288. Liita polünoomid, neid kirjutades ritta ehk ülestikku:

1) $3a + 4b + 5c$ ja $3a + 2b + c$
2) $7a - 2a + 4c$ ja $3a + 2a$
3) $4{,}2x + 5{,}1y - 2{,}8z$ ja $15{,}8x - 6{,}7y + 3{,}9z$
4) $3x^2 + 4x + 5$ ja $[(7x^2 - 4x + 1) - (10x^2 + 6)]$
5) $x^2 + x + 1$, $x^2 - x - 1$, $1 + x - 3x^2$ ja $x^2 - x - 1$
6) $(6u - v) + 10$ ja $20 - (v - 4u)$.

289. Lahutada eelnevast hulkliikmest järgnev:

1) $5a - 2b + 6c$ ja $2a + 5b - 8c$
2) $2{,}9a - 5{,}8b - 6{,}7c$ ja $1{,}5a + 2{,}9b - 4{,}2c$
3) $5a - (3\frac{1}{2}b - 2{,}7c)$ ja $3b + (4{,}3a - 3{,}8c)$
4) $(x + y) + (x - y)$ ja $(x + y) - (x - y)$.

290. Tõendada laused: 1) kahe arvu summa ja vahe summa on kahekordne esimene arv; 2) kahe arvu summa ja vahe vahe on kahekordne teine arv.

291. Leida arv, mis:

1) $n + 5$ võrra suurem, kui 10
2) $2n - 1$ „ „ „ 1
3) $2n + 1$ „ vähem „ $2n + 3$
4) $3n + 2$ „ „ „ $3n + 5$.

292. Klambrid avades ja sarnased liikmed ühendades järele katsuda vormulid:

1) $a+b=(a+n)+(b-n)$
2) $a+b=(a-n)+(b+n)$
3) $a+b=(a+n)-(n-b)$
4) $a+b=(b+n)-(n-a)$
5) $a-b=(a+n)-(b+n)$
6) $a-b=(a-n)-(b-n)$
7) $a-b=(n-b)-(n-a)$
8) $a-b=(a-n)-(b-n)$.

293. Kuidas tarvitakse paljukohaste arvude liitmisel ja lahutamisel ümberasendatavuse ja ühendatavuse omadusi?

294. Ühes vabamüürlaste raamatus räägitakse kolmnurga ühest „saladuslistest" omadustest: kui kolmnurga tipud märkida arvudega, näit., 6, 8, 11 ja iga kahe tipu vahel oleva külje juure kirjutada nende tippude juures olevate arvude summa (14, 19, 17), siis on iga tipu ja vastaskülje juure kirjutud arvude summad võrdsed (25). Seletada algebraliselt see „saladusline" kolmnurga omadus.

295. Harjutused.

1) $(8ax+5by)-(6ax+4yb)+(2xa-by)$
2) $(5pq+3pr-7qr)-(5qp-2rp+7rq)$
3) $(6klm-4lmn)+(4kml+8nml)-3mnl$
4) $(10ab-7cd)-(8ba+3bd)+(2dc+4ab)$
5) $(3{,}2pq-0{,}9pr+1{,}08rs)-(2{,}48sr+0{,}96rp-1{,}6qp)$
6) $(4{,}5xy+9{,}1xz-2{,}7yz)-(2{,}8yx-7{,}7zx+5{,}6zy)$
7) $pqrs-qpsr+srqp+rqps-rpqs-rspq$.

296. Lihtsustada avaldused:

1) $16a^2-10a-12a^2+15a-18a$
2) $4a^2b-5ab^2+a^2b-ab^2+18a^2b$
3) $7\frac{3}{5}c^3d^2+2\frac{1}{3}c^2d^3-1\frac{1}{2}c^3d^2-6\frac{5}{9}c^2d^3+c^3d^2-5\frac{2}{3}c^2d^3$
4) $12\frac{2}{7}u^3-u^3v-6\frac{5}{7}u^3+2{,}22u^3v+1\frac{5}{14}u^3-3{,}18u^3v$
5) $5x^2y-2yx^2+6xy^2-3x^2y+2xy^2-8y^2x$

6) $7xxy + 6xxyy - 4xyy - 6yxx - yyxx + 4yyx$
7) $8{,}4ax^3 + 5{,}06bx^3 - 2{,}38x^3 + 1{,}6axxx - 0{,}56xxxb + 0{,}88xxx$
8) $5 - (4m^2 - 2m + 6) + (2m - 6m^2 - 6) - (5 - 4m + 10m^2)$
9) $13mn - m^2 + n^2 + (6m^2 - 7mn - n^2) - (5m + 6mn - 10)$
10) $6{,}3p^2 - 3{,}6pq + 5{,}4q^2 - (5{,}2p^2 + 4{,}5pq - 2{,}9q^2) + (2{,}1pq - -p^2 + q^2) - (0{,}8q^2 - 7{,}2pq - 9{,}7p^2) - 9{,}8p^2$
11) $4{,}09 - 2{,}8p + 1{,}9p^2 - (2{,}92 + 3{,}07p - 1{,}1p^2) - (0{,}06p - 3{,}38 + +7{,}94p^2)$
12) $5{,}84x^3 - x^2 + 0{,}47x - 5{,}06 - [(2{,}4x^3 - 4{,}84) - (24{,}62x + x)]$.

Võrrandused.

297. Lahendada võrrandused:

1) $2x + (5x - 20) = 1$
2) $(5x + 4) - (5 - 6x) = 4\frac{1}{4}$
3) $5 - (10x + 0{,}7) = 0{,}3$
4) $20x - (8x - 11) = 29$
5) $700 = (520 + 2x) - (3x - 280)$
6) $662 = (75 - 6x) + (57 - x)$

298. Seada ülesannete põhjal võrrandused ja lahendada need.

1) Kolme venna aastate summa on 55. Vanem vend on 6 aastat keskmisest ja see viimane 2 aastat nooremast vanem. Leida vendade ead.

2) Neli pommi kaaluvad kokku 30 naela. Üks on 5 naela teisest, teine 6 naela kolmandast ja see viimane 3 naela neljandast raskem. Missugused on pommide raskused?

3) Kolme järjestiku täisarvu summad on 48. Leida arvud.

4) Kahe järjestiku paarita arvu summa on 24. Leida arvud.

5) Nelja järjestiku viiele jagava arvu summa on 90. Leida arvud.

6) „Tere, sada hani!“ — Meid ei ole sada, vaid kui meid oleks veel nii palju, kui meid on nüüd, ja veel pool ja veerand nii palju ja veel sina ise ka oleksid hani, siis meid oleks sada. — Mitu hani oli?

7) Kolm äriosanikku jagasid aastase puhta kasu nõnda, et esimene neist sai $\frac{1}{3}$, teine 40% kõigest kasust ja kolmas $\frac{1}{8}$ sellest, mis esimene ja teine ühtekokku; ülejääva osa 1470 marka kinkisid nad muuseumile. Kui palju kasu tõi ettevõte?

§ 3. Üksliigete kasvatamine, jagamine ja astme võtmine.

Monoomide kasvatamisel ja jagamisel on tähtis meéle tuletada kasvatamise ümberasendatavuse ja ühendatavuse omadused:

$$ab = ba$$
$$a(bc) = (ab)c = abc$$

Ütelusel „kasvatada ühega“ puudub iseenesest mõte, kuid et ümberasendatavuse omadus ka sel juhusel jääks püsima, peab kirjutama:

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a;$$

et siin $1 \cdot a = a$, siis on ka $a \cdot 1 = a$. Nõnda on 1 arv, millega kasvatades antud arv ei muutu.

Niisama on

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0,$$

s. o. nulliga kasvatades on teos null.

Kasvatamine.

Eelharjutused:

$$a \cdot a = aa = a^2$$
$$a^2 \cdot a = aaa = a^3$$
$$a^3 \cdot a = aaaa = a^4$$
$$a^2 \cdot a^2 = aaaa = a^4$$
$$a^3 \cdot a^2 = aaaaa = a^5$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Tõendada, et

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

299. Lihtsustada teosed:

1) $3a \cdot 5a$
2) $12a \cdot 15b$
3) $9a \cdot 6$
4) $b \cdot 24a$
5) $7{,}2a \cdot 10b \cdot 0{,}3c$
6) $\frac{4}{5} a \cdot \frac{5}{8} b \cdot 2c$
7) $6p \cdot 8q$
8) $11p \cdot 12q$
9) $0{,}5p \cdot 4{,}2q \cdot \frac{2}{3}$ r
10) $0{,}36ab \cdot 2{,}5kl \cdot 20xy$.

300. Lihtsustada avaldused:

1) $a \cdot a$ 2) $a^2 \cdot a$ 3) $a^3 \cdot a$ 4) $a^3 \cdot a^2$
5) $x^5 \cdot x^2$ 6) $x \cdot x^2 \cdot x^3$ 7) $y \cdot y^3 \cdot y^5 \cdot y^7$.

301. 1) $2^p \cdot 2$ 2) $2^p \cdot 2^3$
3) $3^q \cdot 3^r$ 4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8$
5) $(0{,}4)^5 \cdot (0{,}4)^7$ 6) $(0{,}01)^u \cdot (0{,}01)^v$
7) $a^x \cdot a$ 8) $a \cdot a^y$
9) $a^x \cdot a^y$ 10) $a^x \cdot a^v \cdot a^z$
11) $a^{x+1} \cdot a^{x-1}$ 12) $a^{2x+5} \cdot a^{3x-4}$.

302. Tõendada arvudega, et

$$a^x + a^y \neq a^{x+y}.$$

Millal kaotab vormul maksvuse?

303. Kasvatada monoomid:

1) ab ja a^2b 2) cd ja cd^2 3) p^2q^3 ja pq^2
4) $4r^5s$ ja $3r^2s^3$ 5) $3x^3y^4$ ja $5xy^6$ 6) $0{,}5x^2y^5$ ja $3{,}6x^4y^3$.

Jagamine.

Eelharjutused:

$a : a = 1$
$a^2 : a = aa : a = a$
$a^3 : a = aaa : a = aa = a^2$
$a^4 : a = aaaa : a = aaa = a^3$
$a^3 : a^2 = aaa : aa = a$
. . . . . .

Tõendada, et

$$a^m : a^n = a^{m-n}, \text{ kui } m > n;$$

tõendada, et

$$a^m : a^m = a^0 = 1.$$

304. Jagada monoomid:

1) $12abc : 4$
2) $75xy : 15$
3) $3{,}6ax : 0{,}9$
4) $\frac{3}{4} pqr : \frac{2}{3}$
5) $18x : x$
6) $54mn : m$
7) $144pq : 12p$
8) $5{,}4pqr : 0{,}6r$
9) $\frac{3}{4} ax : \frac{1}{2} ax$
10) $96pqr : pqr$
11) $\frac{1}{4} uv : uv$
12) $uv : \frac{3}{8} uv$
13) $13\frac{1}{3} abc : 1\frac{1}{3} ac$
14) $2\frac{1}{5} pq : 11p$
15) $0{,}28pqr : 0{,}07pq$
16) $4\frac{2}{3} pqrx : \frac{2}{3} pq.$

305. Lihtsustada avaldused:

1) $3\frac{1}{8} abc \cdot \frac{4}{5} dc : 2\frac{1}{2} cde$
2) $4\frac{1}{3} pqr \cdot 4\frac{1}{2} st : 19\frac{1}{2} pqs$
3) $\frac{1}{5} abx \cdot \frac{2}{3} cy : \frac{4}{15} abc$
4) $\frac{2}{7} abx \cdot 14cy : 2xyc$
5) $(1{,}8xyz : 0{,}45yz) \cdot 0{,}25uy$
6) $(5{,}4amx : 0{,}27am) \cdot 0{,}1xy.$

306. Teisendada algebralised avaldused:

1) $3^2 : 3$
2) $2^3 : 2^2$
3) $2^3 : 2$
4) $2^6 : 2^4$
5) $a^2 : a$
6) $a^5 : a^2$
7) $p^4 : p^4$
8) $x^7 : x^4$
9) $(0{,}5)^4 : (0{,}5)^3$
10) $2^x : 2$
11) $a^p : a^q$
12) $a^{2p-3q} : a^{p+q}.$

307. Tõendada arvudega, et

$$a^x - a^y \neq a^{x-y}.$$

308. Arvata suhted:

1) $a^4b^3 : a^2b$
2) $a^7b : a^5b$
3) $c^6d^4 : c^6d$
4) $p^8q : p^5$
5) $p^5q^5 : p^5q^5$
6) $pq^{11} : q^{10}$
7) $x^{20}y^{14} : x^{18}y^{12}$
8) $18x^3y^4 : 2x^2y^2$
9) $5{,}6a^4x^7 : 7a^3x^6$
10) $14{,}4by^3 : 0{,}06y^3b$
11) $\frac{4}{5} u^3v^7 : 0{,}25v^7u^3$
12) $3\frac{1}{3} r^5s^7t^9 : 2\frac{2}{5} r^3s.$

309. Lühendada algebralised murrud:

1) $\frac{ab}{bc}$ 2) $\frac{m^2n}{mn^2}$ 3) $\frac{p^3qr^2}{p^2q^3r^2}$

4) $\frac{28xy^4z}{34x^2y^2}$ 5) $\frac{24a^{x+2}a+3}{32x^{a-3}a^{x-2}}$ 6) $\frac{192r^7s^{2x}t^v}{144r^2s^xt}$

Võrrandused.

316. 1) $5x = 40$ 2) $28x = 7$

3) $1{,}5x = 0{,}45$ 4) $\frac{p}{3} = 6$

5) $\frac{8}{p} = 2$ 6) $4{,}2x + 5 = 7{,}1$

7) $7{,}62 - 0{,}3x = 6$ 8) $17{,}4 = 27{,}4 - 5x$

9) $8 - x : 6 = 7$ 10) $1 - \frac{3}{x} = 0{,}5$.

311. Üks nurk kolmnurgas on 2 korda suurem kui teine ja kolm korda vähem kui kolmas. Nurkade summa kolmnurgas on 180°. Leida nurkade suurus kraadides.

312. Üks teravnurk täisnurgases kolmnurgas on teisest teravnurgast: 1) 20%, 2) 150%. Leida nurkade suurus kraadides.

313. Kapitaal kasvas 30% võrra ja muutus 546 rublaks. Kui suur oli alguskapitaal?

314. Nelja pommi kogukaal on 1 puud. Määrata nende pommide raskused üksikult, kui iga järgmine on eelmisest 3 korda raskem. (Nende pommide huvitav iseäraldus seisab võimaluses nende abil iga täisnaelalist raskust kaaluda ühest kuni neljakümne naelani).

Astme võtmine.

Võrdsete tegurite kasvatamine kutsutakse astme võtmiseks (astmele ülendamiseks).

Võrdsete tegurite teos kutsutakse *astmeks*. Arv, mille aste võetakse, kutsutakse *astme aluseks*. Arv, mis näitab, missugune aste võetakse, kutsutakse *astme näitajaks*. Esimese astme näitajat ei tähendata:

$$a^1 = a.$$

315. 1) $(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3} = a^6$

2) $(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^{3+3} = a^{3 \cdot 2} = a^6$

3) $(b^3)^2$ 4) $(c^2)^4$ 5) $(c^4)^2$

6) $(2x)^2$ 7) $(2y^2)^2$ 8) $(5z^4)^3$

9) $(3a^4)^2$ 10) $(6a^7)^3$ 11) $(0{,}9b^4)^2$

12) $\left(\frac{1}{2}c\right)^3$ 13) $(1{,}2x^3)^3$.

316. Tõendada võrdused

$$\text{I.}\quad (a^p)^q = a^{pq}$$

$$\text{II.}\quad (ab)^p = a^p b^p$$

on õiged, kui tähtedeks valida mis tahes arvud.

317. Leida vormulite:

$$y = (2x)^2,\quad y = 2x^2,\quad y = (3x)^3,\quad y = 3x^3$$

arvsuurused, kui 1) $x = 1, 2, 3, \ldots$; 2) $x = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$

318. Kirjutada algebraliselt ja teisendada võimaluse järele tähestus lihtsamaks:

1) mõne arvu ruudu ja kuubi teos; 2) mõne arvu kuubi ja ruudu summa; 3) mõne arvu kuubi ja ruudu suhe; 4) mõne arvu kahekordne ruut; 5) mõne kahekordse arvu ruut.

319. Lihtsustada:

1) $(5a^2b - 8a^3) - (6a^3 - 2b^3) + (4ba^2 - 2b^3 + 14a^3)$

2) $(ab^2 - a^3 + b^2a - b^3) - (a^2b - a^3 - b^3) + b^3 + ba^2$

3) $(3p^4q - 7p^3q^2 + 4q^2p^2) + (2qp^4 - 3q^2p^3) - (4p^2q^2 + 4p^4q)$

4) $p^4 + q^4 - (p^3q - p^2q^2 + pq^3) + (p^4 - p^2q^2 + q^4) - (q^3p - qp^3)$.

§ 4. Hulkliigete kasvatamine.

Jaotatavuse omadus:

$$(a+b)m = m(a+b) = am + bm$$
$$(a-b)m = m(a-b) = am - bm$$
$$(a+b) : m = a : m + b : m$$
$$(a-b) : m = a : m - b : m.$$

Hulkliikme kasvatamine üksliikmega.

320. 1) $(a+b).3=(a+b)+(a+b)+(a+b)=a+a+a+$
$+b+b+b=3a+3b$ 2) $(x^3+y^3).2$ 3) $(x^2+y^2).3$
4) $(xy^2+x^2y).5$ 5) $(1+u).4$ 6) $(3+u+u^2).2$
7) $(c-d).2=(c-d)+(c-d)=c+c-d-d=2c-2d$
8) $(5-x).4$ 9) $(2x-3y).6$ 10) $(3xy^2-4xy).5$.

321. Katsuda distributiivset ehk jaotatavuse omadust:

$$(a+b).m=am+bm$$
$$(a-b).m=am-bm.$$

kui 1) $a=10$; $b=6$; $m=9$; 2) $a=110$; $b=10$; $m=10$;
3) $a=4{,}8$; $b=1{,}72$; $m=0{,}5$; 4) $a=1\frac{1}{2}$; $b=\frac{5}{6}$; $m=\frac{3}{4}$.

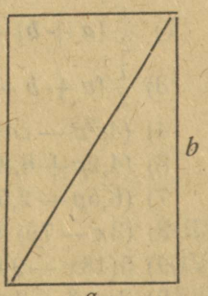
322. Eelneva ülesande vormuli põhjal arvata:

1) $(10+1).8$ 2) $(20+6).11$ 3) $(100+10+1).7$
4) $(300+80+5).9$ 5) $(56+28).\frac{3}{4}$ 6) $(24+84).0{,}4$.

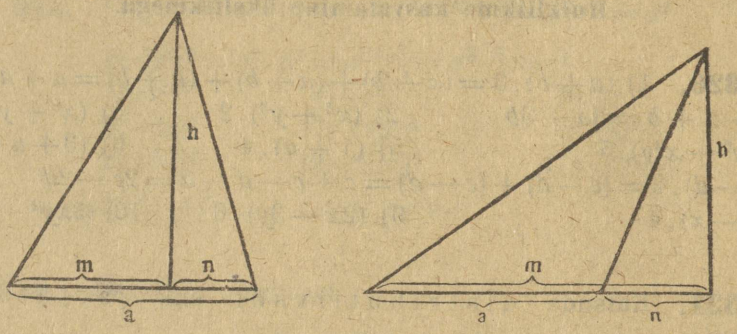
323. Suurendada arvude 318 ja 214 summat 15 korda; 2) vähendada arvude 378 ja 144 vahet 18 korda; 3) leida 565 ja 155 summast 20%; 4) missuguse arvu $\frac{7}{8}$ on 243 ja 187 vahe?

324. Kujutada geomeetriliselt avaldused $(a+b)m$ ja $(a-b)m$ täisnelinurga pinnana, mis seisab koos kahe täisnelinurga summast ehk vahest. $a=4$; $b=2$; $m=3$.

325. Tõmmates täisnelinurgas diagonaali, saame kaks võrdset täisnurkset kolmnurka (joon. 1); et täisnelinurga pinna suurus on ah, siis on täisnurkse kolmnurga pinna suuruse vormul $\frac{1}{2}ah$, kus a ja h on ristkülgede (kateetide) pikkus. On tarvis tõendada, et iga kolmnurga (joon. 2, a ja b) pinna suurus saadakse sellest vormulist.



Joon. 1.



a) *b)*

Joon. 2.

326. Lihtsustada avaldused:

1) $(a-b)\cdot 3+(a-b)\cdot 2$ 2) $4(a+b)+3(a-b)$
3) $(2c-4d)\cdot 5-(3c+d)\cdot 2$ 4) $6(5c+8d)-3(8d-c)$
5) $2(m-2n)+3(m-3n)+4(m-4n)$
6) $5(5m-n)-3(3m-n)-(m-n)$
7) $(a+b-c)\cdot 3$ 8) $6(a-b+c)$
9) $(4a+3b-c)\cdot 2$ 10) $7(a-4b-10c)$
11) $(6p-5q+2)r$ 12) $3r(1-3p+10q)$
13) $r(p+q-r)-q(p+r-q)+p(q+r-p)$
14) $(r-p-q)r+(q-p-r)q-(p-q-r)p$.

327. Lihtsustada avaldused:

1) $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b)$ 2) $\frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b)$
3) $\frac{1}{3}(a+b-c)+\frac{1}{3}(a-b+c)+\frac{1}{3}(a+b-c)+\frac{1}{3}(b+c-a)$
4) $(4c^2d-cd^2)\cdot 5cd$ 5) $12cd^2\cdot(8cd-5c)$
6) $(4{,}2p+6{,}8q-3{,}6r+0{,}8s)\cdot 2{,}5qs$
7) $(6{,}5p-2{,}5q+1{,}5r-8{,}5s)\cdot 0{,}4pr$
8) $(3x-7y)\cdot 6+(6y-x)\cdot 2-2(8x-15y)$
9) $5(18x-9y)-(4y+3x)\cdot 3+(27x+11y)\cdot 3$
10) $3x(x^2+3y)+4x(8x^2-17y)-(11y+5x^2)\cdot 7x$
11) $(5x+11z)y-(8y-3x)\cdot 5z+5y(4z-x)-(5x-3y)\cdot 3z$.

Hulkliigete kasvatamine.

328. Kirjutada klambrite abil ja arvata:

1) 13 ja 14 summa ja 12 ja 15 vahe teos;
2) 16 ja 15 summa ja vahe teos;
3) korrata 35 ja 25 summat nende arvude vahega;
4) võtta 9 ja 11 summa ruut;
5) võtta 15 ja 8 vahe ruut.

329. Katsuda võrdust:

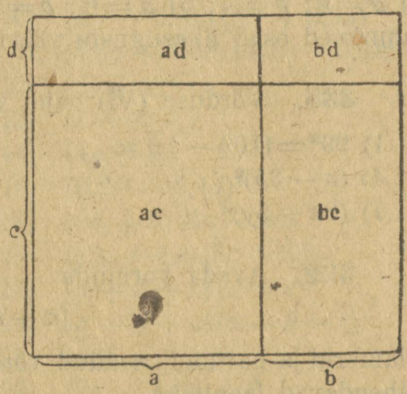
$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd, \qquad \text{(I)}$$

kui

1) $a=3$; $b=2$; $c=4$; $d=5$;
2) $a=99$; $b=1$; $c=9$; $d=1$;
3) $a=\frac{2}{3}$; $b=\frac{1}{3}$; $c=\frac{3}{4}$; $d=\frac{1}{4}$;
4) $a=0{,}8$; $b=0{,}2$; $c=0{,}8$; $d=0{,}2$.

330. Kuidas muutub võrdus (I), kui temas on $c=a$; $d=b$?

331. Tõendada võrdus (I) nägelikult täisnelinurkade abil (joon. 3). $a=4$; $b=2$; $c=3$; $d=1$.



Joon. 3.

Kujutada geomeetriliselt võrdus:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \qquad \text{(II)}$$

mis võrdusest (I) saadakse, kui

$$c=a \text{ ja } d=b;\ a=5;\ b=2.$$

Mis mõte on kummalgi võrduse (II) osal?
Avaldada võrdus (II) sõnades.

332. Näidata, et võrdused

$$(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd \qquad \text{(III)}$$
$$(a-b)(c+d)=ac+ad-bc-bd \qquad \text{(IV)}$$
$$(a-b)(c-d)=ac+bd-ad-bc \qquad \text{(V)}$$

on õiged, kasutades arve ülesandes № 329.

333. Seletada võrdused (III), (IV) ja (V) geomeetriliselt.

334. Võrduse (II) abil arvata:

1) $22^2 = (20+2)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 2 + 2^2 = 400 + 80 + 4 = 484$
2) 61^2 3) 105^2 4) $(x+1)^2$
5) $(y+3)^2$ 6) $(5x+6)^2$ 7) $(9x+7y)^2$.

335. Kuidas muutub vormuli $(a-b)(c-d) = ac - bc - ad + bd$ välimus, kui temas on $c = a$, $d = b$?

336. Seletada võrdus

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \qquad \text{(VI)}$$

vaadeldes geomeetriliselt ruutu, mille külg on $a-b$. Missugune geomeetriline tähendus on kummalgi võrduse osal?

337. Võttes arvesse vormul (VI), joonestada kogu ruute, milledes: 1) $a=6$; $b=1$; 2) $a=6$; $b=2$; 3) $a=6$; $b=3$; 4) $a=6$; $b=4$; 5) $a=6$; $b=1$. Kõigi nende ruutude võrdsed neljanurksed osad ühesuguste värvidega katta.

338. Võrduse (VI) najal välja arvata:

1) $99^2 = (100-1)^2 = \ldots$ 2) 997^2 3) 57^2
4) $(a-3b)^2$ 5) $(1-x)^2$ 6) $(8y-1)^2$
7) $(8x-5y)^2$ 8) $(100p-10q)^2$ 9) $(s^2-t^3)^2$.

339. Avada vormulis

$$(a+b)(a-b)$$

klambrid ja harutada saadud võrduse geomeetrilist mõtet, kus a ja b tähendavad joonlõike.

340. Võrduse

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \qquad \text{(VII)}$$

abil arvata:

1) $16 \cdot 24 = (20-4)(20+4) = \ldots$ 2) $92 \cdot 102$
3) $1003 \cdot 997$ 4) $23^2 - 17^2$
5) $47^2 - 27^2$ 6) $64^2 - 36^2$
7) $169^2 - 81^2$ 8) $1001^2 - 999^2$
9) $78^2 - 42^2$ 10) $(a+1)(a-1)$
11) $(x-5)(x+5)$ 12) $(2n-3)(2n+3)$
13) $(3x-4y)(3x+4y)$ 14) $(7x+10y)(7x-10y)$

341.

$$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \quad \text{(VIII)}$$

$$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3. \quad \text{(IX)}$$

342. Võrduste (VIII) ja (IX) abil leida:

1) $14^3=(10+4)^3=\ldots$ 2) 21^3 3) 102^3
4) 98^3 5) $(x+5)^3$ 6) $(y+1)^3$
7) $(2a+3b)^3$ 8) $(8a-b)^3$.

343. Leida teosed:

1) $(4x-6)(3x+7)$
2) $(5a-4b)(3a-6b)$
3) $(2x+5)(5x-2)$
4) $(6a-b)(b+9a)$
5) $(4{,}8x+3{,}2)(5x+1{,}5)$
6) $(3{,}7-6{,}8a)(8{,}1+0{,}9a)$
7) $(9{,}5y-4{,}5x)(2{,}2x-1{,}8y)$
8) $(5{,}6a+4{,}3b)(4{,}3a-5{,}6b)$
9) $(3x+4y)^2$
10) $(6y+1)^2$
11) $(2x-5y)^2$
12) $(1-4z)^2$
13) $(7p-3)^2$
14) $(4p+q)^2$
15) $(0{,}5c+8d)^2$
16) $(0{,}2c^2-5{,}4d)^2$
17) $(3a-5b)(4a+7b)$
18) $(2a+b)(4a-5b)$
19) $(4c-9d)(9c+4d)$
20) $(12c+5d)(5c+3d)$
21) $(a+b+c)(d+e)$
22) $(a+b+c)(d-e)$
23) $(a+b+c)(a+b-c)$
24) $(a-b+c)(a+b-c)$
25) $(a-b+c)(a-b-c)$
26) $(x+y+z)^2$
27) $(x+y-z)^2$
28) $(2p-3q+4r)^2$
29) $(x^2+xy+y^2)(x-y)$
30) $(x^2-xy+y^2)(x+y)$
31) $(p^2+2pq+q^2)(p+q)$
32) $(p+q)(p+q)(p+q)$
33) $(p-q)(p-q)(p-q)$
34) $(5x+2y)^2$
35) $(8x+1)^2$
36) $(1-u)^3$
37) $(1-\frac{1}{9}u^2)^3$
38) $(4-3u)^3$
39) $(5a+2b)^3$
40) $(0{,}2p+0{,}3q)^3$
41) $(\frac{2}{3}p-1\frac{1}{2}q)^3$
42) $(1+0{,}8m^3)^3$
43) $(a+x)(a+y)(a+z)$
44) $(x-a)(x-b)(x-c)$
45) $(2d+3c)(d-c)+(5d-4c)(3d+2c)$
46) $(2c-d)(c+d)+(c+2d)(c-d)$

47) $(2p+3q)(2p-3q)$ 48) $(5p-0{,}4)(5p+0{,}4)$

49) $(1{,}5p+0{,}8q)(1{,}5p-0{,}8q)$ 50) $\left(\frac{1}{2}r-\frac{1}{3}s\right)\left(\frac{1}{3}s+\frac{1}{2}r\right)$

51) $(u+v)(u-v)(u^2+v^2)$ 52) $(u+1)(u-1)(u^2+1)$

53) $(x^2+3)(x^2-3)(x^4-3)$ 54) $(3a-8)(3a+8)(9a^2+64)$

55) $(x+y)(x-y)(x^2-y^2)$ 56) $(1+\frac{1}{2}a)(1-\frac{1}{2}a)(1+\frac{1}{4}a^2)$

57) $(7c+\frac{1}{4}d)(\frac{1}{16}d^2-49c^2)(\frac{1}{4}d-7c)$

58) $(3x+5y)(3x-5y)-(5y+4x)(5y-4x)$

59) $(10y+3x)^2+(10y-6x)(10y+6x)-(3x-10y)^2$

60) $(0{,}8a+1{,}2b)^2-(0{,}5a-1{,}4b)^2+(0{,}4a+0{,}7b)(0{,}4a-0{,}7b)$

61) $(15c+8d)(8d-9c)+(2c+5d)(c-7d)$

62) $(c-22d)(12c-d)-(5c-4d)(11c+3d)$

63) $(8p+3q)(8p-3q)-(2p+4q)(2p-5q)+(5p-4q)(5p+6q)$

64) $(4r+8s-3t)(5s-3r+8t)$

65) $(8r-4s+3t)(5r+7s-10t)$

66) $(3{,}6l+1{,}2m-5{,}7n)(2{,}5l-0{,}8m-0{,}5n)$.

344. Korraldades tegurid mõne tähe tõusvate ehk kahanevate astmete järjes, kasvatada:

1) $(3a^3-5a^2+a-3)(a+2)$
2) $(5a^3+2a^2-7a+1)(a-5)$
3) $(4x^2-5x+2)(10x^2+3x-5)$
4) $(3-9x+x^2)(12+7x-4x^2)$
5) $(5a^2-3ab+2b^2)(4b^2+2ab+6b^2)$
6) $2a^2+4ab-8b^2)(6b^2-7ab+9b^2)$
7) $8x^3-4x^2a+xa^2-3a^3)(3x-5a)$
8) $(5x^2a-4x^3+a^3-10xa^2)(5a-8x)$
9) $(m^3-2m^2n+5n^3-6mn^2)(3mn-m^2+n^2)$
10) $(6n^3-11m^3+5m^2n+8mn^2)(12m^2-5n^3-mn)$.

345. Võrrelda polünoomide ja paljukohaste arvude kasvatamist, võttes vastavad näitused ($x=10$):

1) $(2x+5)(x+2)$; $25\cdot 12=(20+5)(10+2)$
2) $(x+2)(x+1)$; $12\cdot 11$
3) $(5x^2+4x+2)(3x+1)$; $542\cdot 31$
3) $(3x^2+8x+1)(5x+2)$; $381\cdot 52$.

346. On antud teos $z = xy$. Leida:

1) kui palju muutub z, kui y jääb endiseks, aga x-le kasvab järjestikku juure: 1, 2, 3, ... 10;

Näitus. $(x+1)y = xy + y$; $xy + y - xy = y$; $(x+2)y = xy + 2y$; ...

2) kui palju muutub z, kui x jääb endiseks, aga y kahaneb arvude 1, 2, 3, ... 10 võrra;

3) x ja y mõlemad kasvavad vastavalt arvude 1, 2, 3, ... 10 võrra;

4) x kasvab ja y kahanevad vastavalt arvude 1, 2, 3, ... 10 võrra;

5) x ja y mõlemad kahanevad vastavalt arvude 1, 2, 3, ... 10 võrra

Näitus. $xy - (x-1)(y-1) = xy - (xy - x - y + 1) = x + y - 1$; ...

Märkus. Eelnevaid näitusi harutades on soovitav kasutada geomeetrilisi interpretatsjoone, vaadeldes z, kui x ja y külgedega täisnelinurga pinda.

347. Kui palju muutub 48 ja 52 teos, 1) kui mõlemad tegurid kasvavad 1 võrra; 2) kui esimene tegur kasvab ja teine kahaneb 1 võrra; 3) mõlemad tegurid vähenevad 1 võrra.

348. Arvata:

1) (6 meetrit + 2 detsim.) (4 meetrit + 6 detsim.);
2) (1 detsim. + 2 sentim.)^2;
3) (2 jalga + 5 tolli)^2.

349. Mitu ruutmillimeetrit paisub aknaklaasi pind soojuse tõusmisel 20°C võrra, kui 1° võrra tõusmisel iga külg paisub 0,000 0089 omast algpikkusest (lineaarne laiumise koeffitsient). Seada vormul arvamiseks, kui ruuduse klaasi külg on $1m. = 1000mm$.

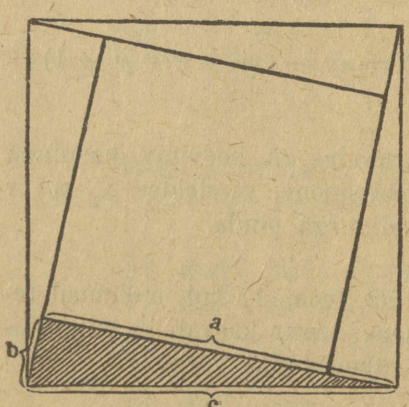
350. Missuguse antud perimeetriga nelinurga pind on kõige suurem?

J u h a t u s. Vaadelda ruutu, mille külg on a, ja järjestikka täisnelinurki, mis ruudust sel viisil saadakse, et ühest küljest võetakse niipalju ära, kui palju teisele lisatakse juure:

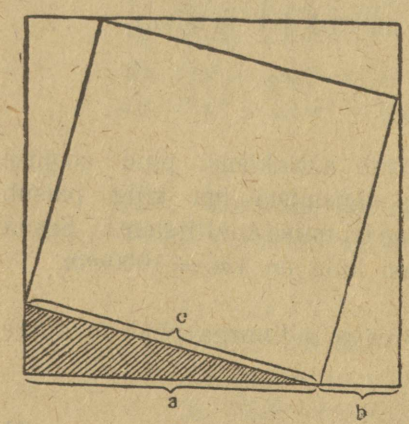
küljed:	perimeeter:	pind:
$a,\ a$	$4a$	a^2
$a-1,\ a+1$	„	a^2-1
$a-2,\ a+2$	„	n^2-4
. . . . .		

351. Leheküljele mahub r rida, igasse ritta t tähte. Kui palju kasvab tähtede hulk leheküljel, kus ridu on üks enam, kuid reas üks täht vähem?

352. Ruudu sees on selle tippudelt tõmmatud sirgjooned, mis omakeskes sünnitavad vähema ruudu ja antud ruudu külgedega neli võrdset täisnurgast kolmnurka. Vanul hindudel oli joonestuse alla kirjutud sõna: „vaata!“



Joon. 4*a*.



Joon. 4*b*.

Kui kolmnurga ristküljed on a ja b ja kaldkülg c mõetu pikk, siis võib joonestuse omaduse vaatlemisel leida arvude a, b, c huvitav vastastikune ühendus (joon. 4*a* ja 4 *b*). Tõelikult,

$$\text{iga kolmnurga väli} = \frac{ab}{2};$$

$$\text{seesmise ruudu väli} = (a-b)^2.$$

Et antud ruudu väli seisab koos kolmnurkade ja vähema ruudu väljast, siis saame võrranduse:

$$4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = c^2,$$

millest järjestikku saadakse:

$$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2,$$

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

s. o. täisnurgase kolmnurga ristkülgedele toe-

tuvate ruutude pindade summa on kaldküljele toetuva ruudu pind (Pythagorase teoreem).

353. Näidata, et $z^2 = x^2 + y^2$, kus $z = a^2 + b^2$; $x = a^2 - b^2$; $y = 2ab$. Leida mõned x, y, z arvsuurused, kui a ja b kasvavad ühest kuni kuueni, ühtlasi järele katsudes nende kõlbavust vormulile. Niisugused arvud x, y, z kõlbavad täisnurgase kolmnurga külgede avaldamiseks mõnedes pikkuse täismõõtudes ja kutsutakse Pythagorase arvudeks.

354. Avada klambrid vormulites: $(a+b+c)^2$, $(a+b+c+d)^2$ ja tõlgitseda resultaadid geomeetriliselt.

355. Klambrid avada ja lihtsustada: $(a+b)^2$, $(a+b)^3$ j. n. e. kuni $(a+b)^5$. Kirjutada leitavate koeffitsientide tabel alamaltähendud viisil ja näidata nende arvude seadupärasust („Pascali kolmnurk").

1 1
1 2 1
1 3 3 1
. . . . . .

356. Tõendada, et

1) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) - (ax+by+cz)^2 = (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2$;
2) $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = 3(a+b)(a+c)(b+c)$.

357. Tõendada vormul:

$$(x+\tfrac{1}{2})^2 = x(x+1)+\tfrac{1}{4},$$

mille abil leida: 1) $(1\frac{1}{2})^2$; 2) $(2\frac{1}{2})^2$; 3) $(9\frac{1}{2})^2$.

358. Number viiega lõppeva arvu ruudustamiseks võib kasutada vormulit:

$$(x+5)^2 = x(x+10)+25,$$

mille põhjal seada sõnaline avaldus ja leida: 1) 25^2; 2) 65^2; 3) 105^2.

359. Katsuda, et vormulid ülesandes nr. 356 on maksvad, kui

$a=1$; $b=2$; $c=3$; $x=1$; $y=2$; $z=4$.

360. Persias kurdlasil, Valachias ja mõne teate järele ka lihtrahval Itaalias, Hispaanias ja Lõuna-Prantsusmaal on järgmine viis toimetada kümne ja viie vahel olevate arvude kasvatamist.

Kui on näit. tarvis 6 kasvatada 8-ga, siis sirutakse kummagi käe sõrmist nii palju välja, kui palju iga tegur on viiest suurem; vaadeldaval korral on järjekikult ühel käel üks ja teisel kolm sõrme välja sirutud. Kui ülejäävad sõrmed kokku pigistada, siis annab sirutud sõrmede summa kümned $(1+3=4)$ ja surutud sõrmede teos ühed $(2 \cdot 4=8)$. — Tarvis üldlikult selle metoodi õiglus tõendada. [Juhatus: $(5+a)(5+b)=\ldots$]

361. Mõistatada, missugusel seltskonna liikmeist, kellede arv kümnest vähem, on sõrmus ja missuguses sõrmes. Selleks on tarvis mõttes nummerdada isikud ja sõrmed, näit., pahema käe pöidlast algades ja parema käe omaga lõpetades. Selle järel palutakse isiku järjenumber kahega kasvatada, teosele juure lisada neli, summa viiega kasvatada ja veel juure lisada sõrme number, milles sõrmus. Kui saadud summast, mida palutakse teatada, lahutada 20, siis tuleb arv, mille kümnete number tähendab isikut ja ühtede number — sõrme.

Seletada „mõistatus“ algebralise vormuli abil ja näidata, kuidas teisendada vormulit juhusel, kui 1) isikute arv on kümnest enam ja kui 2) sõrmus on kümnendas sõrmes.

Teisendus Leonardo de Pisa (1202) järele.

362. Mõeldes tähtede asemel täisarve katsuda, millal on mõte ja millal puudub see: 1) arvude 4 ja x ruutude vahel ja vahe ruudul, avades viimases vormulis klambrid; 2) 5 ja y kuupide vahel ja vahe kuubil; 3) 8 ja z vahe ja summa teosel; 4) p ja 10 ruutude vahel ja summal.

§ 5. Hulkliigete lahutamine teguriteks ja jagamine üksliikmele

Polünoomide lahutamine teguriteks.

363. Järgnevad summad ja vahed muuta teosteks:

1) $4a+4x$ 2) $6b-6y$ 3) $ab+bc$
4) $xy-xz$ 5) $12+15y$ 6) $1{,}8u-0{,}4v$
7) $10ax+14bx$ 8) $6ax-15ay$ 9) $16a^2+12ab$

10) $21xy - 12y^2$
11) $mn + m$
12) $mn - n$
13) $u - uv$
14) $11a - 11$
15) $9 - 9l$
16) $yy + y$
17) $z - zz$
18) $7a - 4ab$
19) $6cd - 4d$
20) $m^2 + m$
21) $m^3 + m^2$
22) $3p^2 - 7p$
23) $14p^3 - 8p^2$
24) $24q^3 - 6q^2$
25) $ap - bp + cp$
26) $2ap + 5bp - cp$
27) $3ax - 6ay + 15az$
28) $28ax + 20ay - 12az$
29) $20ax - 12bx + 4cx$
30) $45ps + 20qs - 35rs$
31) $36ps - 72qs + 27rs$
32) $pp + pq - pr + ps$
33) $pq - qq + qr - qs$
34) $a(x + y) + b(x + y)$
35) $m(z + u) - n(z + u)$
36) $a(x - y) - b(x - y)$
37) $4a(p - q) + 7b(p - q)$
38) $5m(2a - 1) - (2a - 1)$
39) $a(m + n) + (m + n)$
40) $(m - n) - a(m - n)$
41) $p(q - r) - q + r$
42) $p(5q + 2r) - 5q - 2r$
43) $(3x - 4y)z - 3x + 4y$
44) $ac + ad + bc + bd$
45) $ac + ad - bc - bd$
46) $ab - ax + ay - xy$
47) $ab - ay + bx - xy$
48) $2pr + qr - 2ps - qs$
49) $3p - 1 - 6pq + 2q$
50) $ab + 2b - 3a - 6$
51) $8ac + 6cb + 4ad + 3bd$
52) $40ab + 72ay - 35bx - 63xy$
53) $33bx - 77xy - 28ay + 12ab$
54) $16ab - 5ay - 18bx + xy$
55) $xy - x + y - 1$
56) $ax + ay - x - y$
57) $pq + p - 2q - 2$
58) $pq - p - 15 + 5q$
59) $(p + q)(8r + 5) - (7r + 4)(p + q)$
60) $(p - q)(4r - 1) + (p - q)(6r + 1)$.

Asemeleseadmised (substitutsjoonid).

364. Järgnevais avaldusis: 1) $x + 8$; 2) $3x - 5$; 3) $15 - 2x$; 4) $x^2 - 5x + 2$ panna x-i asemele: 1) $y + 2$; 2) $7 - 3z$; 3) $u + v$ ja lihtsustada saadud vormulid võimalikul juhusel.

365. Asemele panna:

1) $x^2 + 5x + 6$, $x = y - 3$;
2) $x^2 + 7x - 8$, $x = y + 1$;
3) $2a^2 + 5ab + 2b^2$, $a = 1 - 2b$;
4) $x^2 + (a - 1)x - a$, $x = y - a$.

Võrrandused.

366. Otsustada järgmised võrrandused:

1) $2(x+5)=26$
2) $5(x-7)=15$
3) $6=6(5-x)$
4) $18=5(x+2{,}6)$
5) $3(y-2)=y$
6) $y+1=2(y-1)$
7) $3(2z-3)=7y$
8) $3(6z-1)=2(4-2z)$
9) $(3u-2)(4u+z)=6u(2u+1)$
10) $(2-u)(1+u)=(3-u)(3+u)$
11) $a(x+b)=2ab$
12) $3b(2x-a)=6ab$
13) $a(y+b)=a^2$
14) $5(3y+4)=2(4y-5)+7a+23$.

Hulkliikme jagamine üksliikmele.

367. Katsuda võrdused:

$$(a+b):m=a:m+b:m$$
$$(a-b):m=a:m-b:m,$$

kui 1) $a=13$; $b=3$; $m=2$; 2) $a=0{,}84$; $b=0{,}16$; $m=0{,}04$;
3) $a=\frac{1}{2}$; $b=\frac{1}{3}$; $m=\frac{1}{6}$.

368. Eelnevad võrdused tõendada mõlemi osade kasvatamisel m-ga.

369. Jagada:

1) $(4x-4y+4z):4$
2) $(ax+bx+cx):x$
3) $(12p-14q+2r):2$
4) $(au^2+bu-cu):u$
5) $(14ax+7bx-21cx):7x$
6) $(32a^2-16ab+8ac):8a$
7) $(22abc+33acd-11abd):5\frac{1}{2}a$
8) $\left(\frac{2}{3}apq-\frac{1}{2}bpq-\frac{3}{4}cpq\right):\frac{1}{12}pq$
9) $(3\frac{1}{2}pqr-\frac{9}{5}pqs+\frac{7}{15}qrs):1\frac{2}{5}q$
10) $(65x^2y^2-104x^2yz+39xy^2z):13xy$
11) $(117x^3y^2-153x^4y-189xy^4+90x^2y^3):9xy$
12) $(90x^2y^3+105x^3y-75x^4y-135xy^4):15xy$
13) $(2a^3-a^2+1{,}5a):2{,}5a$
14) $(0{,}68ab^2+0{,}04b^3-0{,}4b^2):0{,}4b$.

Paar ajaloolist ülesannet.

370. Paluge kedagi mõelda mis tahes arv, mida kahega laske kasvatada. Ütelge siis ise mõni arv, paludes seda eelmise teosega liita ja saadud summa kahele jagada. Kui lasete tal nüüd saadud resultaadi omale teatada, millest lahutate poole üteldud arvust, siis jääb arv järele, mille seltsiline mõelnud. Seletada algebraliselt.

Baché de Meziriac'i (1613) järele.

371. Paluge mõeldud arv kaks korda suurendada, lisada juure resultaadile mõni paaris arv; mis välja tuli, jagada pooleks ja pärast neljaga kasvatada, selle järel kahekordne juurelisatud paaris arv ära võtta ja teatada viimaks resultaat. Jagage see neljale, siis leiate mõeldud arvu. Näidata, mispärast võib mõeldud arvu niiviisi leida.

Schwenter (1636), Erquickstunden.

Ülesanded vormulite kokkuseadmiseks ja katsumiseks.

372. Mõeldes tähtede asemele täisarve, katsuda, millal on mõte ja millal puudub see 6 ja p ruutude vahe ja 6 ja p vahe ruudu suhtel.

373. Kaupmees, kellel oli 100 marka, ostis s meetrit riiet, mille hind oli x marka meeter. Kui suur on ülejääv summa? Leida kõige suurem võimalik x-i arvsuurus.

374. Kaks autot kihutasid samas sihis olles antud momendil ühes kohas. Esimese auto kiirus on v ja teisel v_1 meetrit minutis. Leida nende kaugus t sekundi järel. Missugustel tingimustel on lahendus võimalik?

Keskarvu leidmine.

375. Oktoobrikuus 1918 olid Tallinnas järgmised õhurõhumised millimeetrites:

Kuupäevad.	Õhurõhumised.
1	748,0
2	761,0
3	769,0
4	769,5
5	763,9

Leida viie päeva keskmine õhurõhumine.

Siin ei ole sugugi tarvis kõigi rõhumiste summat päevade arvule jagada, vaid valida kõige vähem arv ja leida teiste arvude liigsed osad, millede summa jagada viiele ja saadud resultaat lisada juure kõige vähemale arvule (748,0). Kirjutame järgmiselt:

$$748 = 748$$
$$761{,}0 = 748 + 13{,}0$$
$$769{,}0 = 748 + 21{,}0$$
$$769{,}5 = 748 + 21{,}5$$
$$763{,}9 = 748 + 15{,}9$$

$$\frac{13{,}0 + 21{,}0 + 21{,}5 + 15{,}9}{5} = 14{,}3; \quad \text{keskarv} = 748{,}0 + 14{,}3 = 762{,}3.$$

376. Leida arvude: 348, 356, 349 keskarv.

377. Tõendada, et kui on

$$A_1 = a + \alpha_1$$
$$A_2 = a + \alpha_2$$
$$A_3 = a + \alpha_3$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_n = a + \alpha_n,$$

siis on keskarv

$$m = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + \cdots A_n}{n} = a + \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \alpha_i.$$

III. Suhtelised arvud

§ 1. Null algebras.

Null on täisarvude jkogus arv, mis käib ühe eel. Null saadakse mõnest täisarvust k, kui sellest ära võtta k ühte. Lisades juure nulli mõnele arvule a, jääb see arv endiseks, niisama nagu kasvatades a-d ühega.

Mõne arvu kasvatamisel nulliga ehk nulli kasvatamisel mõne arvuga puudub mõte, kuid et vormulid

$$(a-b)c = ac - bc$$
$$c(a-b) = ac - bc$$

oleksid ka sel korral õiged, kui $a = b$, siis saaks

$$(a-a)c = ac - ac$$
$$c(a-a) = ac - ac,$$

s. o.

$$o \,.\, c = o$$
$$c \,.\, o = o.$$

Eelnevast järgneb, et nullile jagamine kaotab mõtte, sest kui oleks

$$\frac{a}{o} = b,$$

siis peaks olema ka

$$a = b \,.\, o = o.$$

Harjutused.

Arvjoone ja arvude abil järele katsuda vormulid:

378. $(a+b)-b = a+(b-b) = a,$

kui 1) $a = 5$; $b = 2$; 2) $a = 3$; $b = 7$.

379. $a-(a-b)=(a-a)+b=b$,

kui 1) $a=7$; $b=4$; 2) $a=2$; $b=6$.

380. $(a-b)m=am-bm$,
$m(a-b)=am-bm$,

kui 1) $a=4$; $b=4$; $m=3$.

381. Kui suur on x vormulist:

$$x=100a+10b+c,$$

kui

	a	b	c
1)	3	6	5
2)	2	5	0
3)	7	0	8
4)	0	6	7
5)	0	0	1
6)	0	0	0

382. Missugused arvud peab tähtede asemele seadma eelnevas vormulis, et saada: 1) 602; 2) 325; 3) 100; 4) 1.

383. Kirjutada neljakohase arvu üldine vormul ja tuletada selle abil: 1) 1001; 2) 1918; 3) 59; 4) 8.

384. Missugune peab olema x, et y muutuks nulliks vormulites:

1) $y=(x-4)(x-1)$
2) $y=(8-x)(6-x)$
3) $y=x(x-5)$
4) $y=7x(x-10)$
5) $y=x^2$
6) $y=(x-1)^3$
7) $y=4x(x-8)(x-3)(x-11)$.

385. Missuguse x-i arvsuurusele pole vastavat y arvsuurust olemas?

1) $y=\frac{3}{x}$ 2) $y=\frac{7}{x-1}$ 3) $y=\frac{x-3}{x-5}$

4) $y=\frac{x+10}{x-10}$ 5) $y=\frac{3x-9}{x-3}$.

§ 2. Negatiivsed arvud.

Naturaaliste arvude rida võib piiramata jätkata, sest et igale täisarvule olgu see kui suur tahes, võib juure lisada ühe. Altpoolt on naturaaliste arvude rida arvuga „üks“ piiratud. Kahe täisarvu liitmine on alati võimalik, sest et nende arvude liitmisel meie asendume arvude suurenemise sihis (arvjoonel pahemalt paremale). Mõnest arvust lahutada teist pole mitte alati võimalik, sest et meie arvude lahutamisel asendume arvude vähenemise sihis (paremalt pahemale).

Et ka lahutamine oleks alati võimalik, selleks peab täisarvude rida pahemale poole lõpmata jätkama. Arv, mis vaadeldavas reas käib 1 eel, on 0; arv, mis käib 0 eel, on $\overline{1}$ (ehk -1); arv, mis käib $\overline{1}$ eel, on $\overline{2}$ (ehk -2) j. n. e. Uued arvud: $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\overline{3}$, ... kutsutakse **negatiivseiks** ehk **eitavaiks**. Sellevastu kutsutakse endised arvud **positiivseiks** ehk **jaatavaiks** ja tähendakse $+$ märgiga, näit., $\overset{+}{1}$ (ehk $+1$), $\overset{+}{2}$, $\overset{+}{3}$, j. n. e. Niiviisi on meil olemas lõpmatu täisarvude rida, arvjoonel kujutuna:

$$\ldots \overline{4}\ \overline{3}\ \overline{2}\ \overline{1}\ 0\ \overset{+}{1}\ \overset{+}{2}\ \overset{+}{3}\ \overset{+}{4}\ \ldots$$

Märgid $+$ ja $-$, mis arvu kohale ehk ette kirjutud, pole mitte tehete, s. o. liitmise ja lahutamise, märgid. Iga eelnev arv selles reas on temale järgnevast arvust vähem; iga järgnev arv on omast eelnevast arvust suurem.

Ka negatiivseil murdarvudel on arvude reas oma koht. Negatiivne murdarv on arvude reas seda pahemal pool, mida enam on temas negatiivseid ühtesid ja ühe negatiivseid osi. Arv ilma $+$ ehk $-$ märgita kutsutakse **absoluutseks** ehk **aritmeetiliseks** suuruseks. Negatiivne arv on seda suurem, mida vähem tema absoluutne suurus ja ümberpöördud. Arvude süsteem, millesse kuuluvad positiivsed ja negatiivsed arvud, kutsutakse **suhteliste** ehk **relatiiviste** arvude süsteemiks.

Negatiiviste arvude tarvituselevõtmise abil võib arvjoonele tähendada mitte ainult neid punkte, mis paremal pool alguspunktist, vaid ka neid, mis temast pahemal. Suhtelisi arve tarvitakse, kui soovitakse tähendada mitte ainult üksi mõnda suurust, vaid ka selle sihti, kui niisugusest rääkida võib.

Harjutused.

386. Tapa jaam, mis Tartu ja Tallinna vahelisel raudteel, on 77 versta Tallinnast kaugel. Rakke jaam on Tapalt 34 versta eemal. Kui kaugel on Rakke Tallinnast? Mitu otsust võib ülesandel olla, kui Rakke siht raudteel Tapalt 1) ei ole teada; 2) on teada?

387. Laeva kiirus oli kell 12 päeval 7 meetrit sekundis. Kui suur oli laeva kiirus kell 1 päeval, kui kiirus oli siis kahe meetri võrra muutunud? Mitu otsust on ülesandel?

388. Termomeeter näitas kell 2 päeval 16° C. Kell 6 õhtul oli soojaseis 4° C võrra muutunud. Missugune oli temperatuur kell 6? Mitu otsust on ülesandel?

389. Kalamehe paat, mis sillalt pärivett 60 meetrit eemal, muutis oma seisukohta 15 meetri võrra. Kui kaugel sillalt peatas paat?

390. Tööstuse-ettevõttesse mahutud kapitaal, mille suurus 300 rubla, muutus aasta pärast 1400 rubla võrra. Kui suur oli kapitaal aasta lõpus?

391. Arvjoonel leida punktid, mis kujutavad x suuruseid vormulis

$$x = y - z,$$

kui y on jäädav ja 4, kuid z kasvab naturaaliste arvude järjes ühest kuni kuueni. On võimalik siin iga kord leida resultaadid ja kuidas asetuvad punktid, mis vastavad neid?

392. Arvust 4 arvjoonel ära võtta 5. On võimalik arvjoonel punkt, mis küsimust vastaks? Missuguses sihis alguspunktilt on niisugune punkt ja missugust arvu vastab ta?

393. Leida arvjoone abil punktid, mis vastaksid resultaate:
1) 5 — 6 2) 5 — 7 3) 4 — 8 4) 1 — 6 5) 0 — 4.

394. Võttes mõne ühelise pikkuse (mõedu), näit., 1 sentimeetri, kujutada joonel geomeetriliselt arvud: $+1, +2, +3, +4, \ldots$; $0, -1, -2, -3, -4, \ldots$ Missuguses sihis lähevad, algpunktilt lugedes, arve kujutavate punktide read?

395. Leida punktid arvjoonel, mis vastaksid arve:

1) $+4$ ja -4 2) $+3$ ja -2 3) $-0{,}6$ ja $-0{,}3$ 4) $+\frac{3}{4}$ ja $-\frac{2}{5}$

5) $+a$ ja $-a$, kus a on joonlõiguna antud.

396. Näidata, missugused punktid vastavad arvude: 1) $+5$; 2) -2; 3) $+\frac{1}{2}$; 4) $-1{,}5$ vastasarvudele.

397. Missugused on arvude: 1) $+3$; 2) -5; 3) $+1{,}5$; 4) $-0{,}7$ vastasarvud? Missugune omadus on vastavate punktide kaugustel (abstsissidel) algpunktilt?

398. Paremale ja vasemale poole jätkata arvude ridasid:

1) ... $+1, +2, +3$, ... 2) ... $-1, 0, +1, +2$, ... 3) ... $-3, -2, -1, 0$, ...

399. Kasutades arvjoont nimetada järgmistes täisarvude ridades igale arvule eelnev arv: 1) $+3, +2, +1, 0, -1, -2$ j. n. e.; 2) $+7, -7, +3, -3, +1, -1, +12, -12$.

400. Missugune arv järgneb arvudele: 1) $-3, -2, -1, 0, 1, 2$ j. n. e.; 2) $+6, -6, +4, -4, +1, -1, 0$?

401. Missugune arv on neljandal kohal paremal ja pahemal pool igast arvust: $+10, +4, +1, 0, -1, -4, -10$?

402. Seada järgmised kümme arvu:

$$+5;\ -8;\ 0;\ -1;\ +11;\ +100;\ +3;\ -6;\ +5;\ -5$$

kasvavasse järjekorda.

403. Seada järgmised kümme arvu:

$$\overset{-}{7};\ \overset{+}{6};\ \overset{+}{1};\ 0;\ \overset{+}{10};\ \overset{-}{17};\ \overset{-}{11};\ \overset{+}{20};\ \overset{+}{8};\ \overset{-}{9}$$

kahanevasse järjekorda.

404 Suuruse poolest järjestada arvud:

1) $-2{,}2;\ +0{,}4;\ 0{,}0;\ -0{,}1;\ +0{,}5;\ -2{,}0;\ -1{,}6;\ +0{,}2;\ -1{,}9;$
2) $-0{,}36;\ 0{,}00;\ +1{,}25;\ -0{,}37;\ +1{,}28;\ -0{,}33;\ +1{,}30;\ +0{,}01;\ -0{,}02.$

405. Oletades, et järgnevad arvud on mõne suuruse mõetmisel leitud, seletada, mispärast on võimata ütelda, missugune arv on suurem (missugune punkt on paremal pool):

1) 3 ja 3,1; 2) $-4{,}0$ ja -4; 3) -5 ja $-5{,}4$; 4) 5,2 ja $+5{,}21$; 5) $-2{,}65$ ja 2,648; 6) 0 ja $+0{,}3$.

406. Kui pikk on joonlõik järgmisist arvudest antud punktide vahel:

1) $\overset{+}{3}$ ja $\overset{+}{8}$	2) $\overset{+}{3}$ ja $\overset{-}{8}$	3) $\overset{-}{3}$ ja $\overset{+}{8}$	4) $\overset{-}{3}$ ja $\overset{-}{8}$
5) $\overset{+}{1}$ ja $\overset{+}{6}$	6) $\overset{+}{1}$ ja $\overset{-}{6}$	7) $\overset{-}{1}$ ja $\overset{+}{6}$	8) $\overset{-}{1}$ ja $\overset{-}{6}$
9) 0 ja $\overset{+}{6}$	10) 0 ja $\overset{-}{8}$?		

407. *A* kapitaal on 625 marka, kuna võlad üsna puuduvad. *B*-l ei ole raha, kuid sellevastu on tal võlga 472 marka. Kui suured on *A* ja *B* kapitaalid kokku? Kui palju on *A* kapitaal *B* omast suurem?

408. *A* kapitaal on 578 marka ilma võlgadeta. *B*-l on ainult võlga 845 marka. Kui suur on *A* ja *B* kogukapitaal, s. o. kui palju jääb *A*-l järele, kui ta avitab B-l ta võla ära maksta? Kui palju on kapitaal *B* omast suurem, s. o. kui palju peaks *B* teenima, et oma võla tasuda ja et niipalju oleks, kui *A*-lgi?

409. Toa soojaseis on $+14^{\circ}C$, õhu soojaseis õues on $-7^{\circ}C$. Kui suur on seesmise ja välimise soojaseisu vahe?

410. Termomeetri vaatlemine andis talvel: õhus — 5°, maapinna ligidal õhus — 8° ja ühe meetri sügavusel maa sees + 3°. Kui palju on maa soojaseis õhu omast ja õhu soojaseis maapinna omast kõrgem?

411. Kuue inimese vanaduse aastad on: 42, 45, 53, 38, 34, 44. Kui palju on üksiku inimese iga nende igade keskmisest arvust suurem?

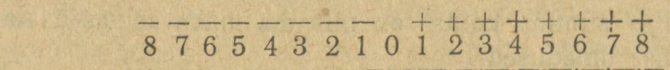
412. Keiser Augustus valitses riiki 30. aastast enne meie ajaarvamist kuni 14. aastani pärast meie ajaarvamist. Suri 75 aasta vanaduses. Kui kaua valitses Augustus? Mil aastal ta sündis ja kui vana oli ta valitsema hakates?

413. Mõnede geograafiliste punktide laiused on:

Tartu . . . . . + 58°23′
Tallinn . . . . + 59°26′
Kaplinna . . . — 33°56′
Pariis . . . . . + 48°50′
Rio de Janeiro — 22°54′

Missugused on nende kohtade laiuste vahed?

414. Arvjoonel on punktid, mis vastavad täisarvudele.



Kuidas neid arve ümber tähendada, kui uueks algpunktiks valida: 1) punkt $\overset{+}{3}$; 2) $\overset{-}{4}$?

415. Tartu-Tapa raudteeliinil on jaamad:

Voldi . . . . 23 kilomeetrit Tartust eemal
Jõgeva . . . 50 „ „ „
Vägeva . . . 70 „ „ „
Tamsalu . . 99 „ „ „
Tapa . . . . 114 „ „ „

Tapa-Tallinna raudteeliinil on jaamad:

Aegviidu . . . 23 kilomeetrit Tapalt eemal
Raasiku . . . 50 „ „ „
Tallinna . . . 82 „ „ „

Joonestada Tartu-Tallinna raudteeliini plaan jaamadega (mõet: 1 km. ühes mm.-is ehk 1 km. ühes cm.-is), tähendades jaamade kaugused, võttes Tartu-Tallinna sihi positiivseks, kui algpunkt on 1) Tartu; 2) Tapa; 3) Tallinna.

Igakordiste lahenduste põhjal otsustada, kui kaugel on 1) Jõgeva Aegviidult; 2) Voldi Raasikult.

§ 3. Suhteliste arvude liitmine ja lahutamine.

Liita kaks suhtelist ehk relatiivist arvu tähendab: 1) kui suhtelisil arvudel on ühesugused märgid, liita nende absoluutsed suurused ja saadud summa ette panna liidetavate märk; 2) kui liidetavail on mitmesugused märgid, lahutada suuremast absoluutsest suurusest vähem ja saadud vahe ette panna suurema absoluutse suurusega arvu märk.

Summa, mille osad on suhtelised arvud, kutsutakse *algebraliseks summaks*. Algebraline summa on harilikult vähem, kui tema osade absoluut-suuruste summa, ja on ainult siis selle võrdne, kui kõik summa osad on positiivsed ehk negatiivsed.

Algebralise summa kohta on niisama maksvad asendatavuse ja ühendatavuse omadused.

Et negatiivse arvu juurelisamise asemel võib ära võtta tema absoluutne suurus, siis annab negatiiviste arvude tarvitusele võtmine võimaluse liitmist lahutamisega vahetada ja ümberpöördud. Ära võtta mõni suhteline arv tähendab juure lisada vastasmärgiga selle arvu absoluutne suurus (vastasarv).

Ülesanded.

416. Arvjoone abil otsustada järgmine ülesanne: Kell 8 hommikul oli ihu temperatuur 37°,1*C*; kella 9-ks tõusis ta 0°,5, kuid kella kümneks langes 0°,3 võrra; pärast seda hakkas temperatuur uuesti tõusma, nõnda et kella 11-ks kasvas ta 0°,2 ja kella 12-ks veel 0°,7 võrra; selle järel langes temperatuur kella 1-ks

$0^{0},6$ ja kella 2-ks veel $0^{0},2$. Kui kõrge oli ihu temperatuur kella 2 ajal? Kuidas küsimus algebraliselt üles tähendada? Tähendus. Arvjoont kasutades võib algpunktiks võtta, näit., $37^{0},0$.

417. Arvjoone abil otsustada ülesanne: Põhi-lõuna sihis hakkas vedur jaama läheduses manööverdama, sõites kõige esite jaamast 60 m. lõuna poole; selle järel liikus ta 144 m. põhja, siis 24 m. jälle lõuna poole; pärast peatamist liikus veel 84 m. lõuna, siis läks 36 m. jälle põhja ja pärast lühikest peatamist veel 12 meetrit. Kui kaugel jaamast oli vedur kõige viimaks? Mitu meetrit liikus vedur manööverdamisel üleüldse? Tähendus. Mõeduks arvjoonel võib võtta, näit., 12 m.

418. Arvjoonel selgitada ülesanne: 1-sel augustil 1918 pandi kapitaal tööstuse-ettevõttesse; 1-eks septembriks andis 300 marka kahju, 1-seks oktoobriks tõi aga 800 marka kahju; selle järel hakkas kapitaalist kasu ilmuma, nõnda et 1-seks novembriks, detsembriks ja jaanuariks tuli kasu vastavalt: 100, 700, 400 marka. Kui palju kasu saadi üleüldse uueks aastaks 1919?

419. Laupäeval 21. sept. 1918 oli Tallinnas kell 9 hommikul õhurõhumine 748,7 mm.; pühapäevaks oli õhurõhumine 5,2 mm. võrra tõusnud, esmaspäevaks veel 5,4 mm.; teisipäevaks aga langes see 3,0 mm. võrra; kolmapäevaks tõusis uuesti 0,4 mm., kuid neljapäevaks langes jälle 6,7 mm. Kui palju näitas baromeeter neljapäeva 26. septembri hommikul?

420. Arvjoone abil leida summad:

1) $+5+3$	2) $+5-3$	3) $-5+3$	4) $-5-3$
5) $+2+7$	6) $+2-7$	7) $-2+7$	8) $-2-7$
9) $+5+4$	10) $+5-4$	11) $+4+5$	12) $+4-5$
13) $-5+4$	14) $-5-4$	15) $-4+5$	16) $-4-5$.

421. Mis tähendab ja mis saadakse, lisades esimesele arvule juure teise:

1) $+6; +4$ 2) $+6; -4$ 3) $-6; +4$ 4) $-6; -4$?

422. Võrduse

$$a+b=b+a$$

katsumine, kui

	a	b
1)	$+4$	$+7$
2)	-4	$+7$
3)	$+4$	-7
4)	-4	-7
5)	$+0{,}5$	$-0{,}4$

423 Leida summad:

1) $+2+4+7$ 2) $+2-4-7$ 3) $-2-4+7$
4) $+2-4+7$ 5) $+2+4-7$ 6) $-2+4-7$
7) $-2-4-7$ 8) $-2+4+7$ 9) $+5+8+10$
10) $+5-8-10$ 11) $-5-8+10$ 12) $+5-8+10$
13) $+5+8-10$ 14) $-5+8-10$ 15) $-5+8-10$.
16) $-5+8+10$.

424. Tõendada, et võrdus

$a+b+c=a+c+b=b+a+c=b+c+a=c+a+b=$
$=c+b+a$

on maksev, kui

	a	b	c
1)	$+4$	$+3$	-6
2)	-4	$+3$	-6
3)	-4	$+3$	$+6$
4)	-4	-3	-6
5)	$-0{,}8$	$-0{,}6$	$+0{,}3$
6)	$0{,}7$	$-1{,}2$	$+0{,}5$

425. Arvata:

1) $(+5+3)+7$ 2) $(+5+3)-7$ 3) $(+5+3)+7$
4) $(-5+3)+7$ 5) $(+5-3)-7$ 6) $(-5+3)-7$
7) $(-5-3)+7$ 8) $(-5-3)-7$ 9) $+5+(3-7)$
10) $+5-(3+7)$ 11) $-5+(3+7)$ 12) $+5-(3+7)$
13) $-5+(3-7)$ 14) $-5-(3+7)$ 15) $-5+(3-7)$
16) $(+5+7)-3$ 17) $(+5-7)+3$ 18) $(-5+7)-3$
19) $(+5-7)-3$ 20) $(-5+7)-3$ 21) $(-5-7)+3$
22) $(-5-7)-3$.

426. Katsuda, et

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c,$$

kui

	a	b	c
1)	$+4$	$+3$	-9
2)	$+4$	-3	-9
3)	-4	$+3$	-9
4)	$+4$	-3	$+9$

427. Kui $a-b=c$, siis on $a=b+c$. Eelneva põhjal katsuda, et järgnevad võrdused on õiged:

1) $+8-+5=+3$ 2) $+8--5=+13$ 3) $-8-+5=-13$
4) $-8--5=-3$ 5) $+11-+9=+2$ 6) $+11--9=+20$
7) $-11-+9=-20$ 8) $-11--9=-2$ 9) $+10-+10=0$
10) $+10--10=+20$ 11) $-10-+10=-20$ 12) $-10--10=0$
13) $+1{,}5-+0{,}8=+0{,}7$ 14) $+1{,}5--0{,}8=+2{,}3$ 15) $-1{,}5-+0{,}8=-2{,}3$
16) $-1{,}5--0{,}8=-0{,}7$.

428. Arvata järgemööda:

1) $\overset{+}{4}-\overset{+}{9}$ 2) $\overset{+}{4}+\overset{-}{9}$ 3) $\overset{+}{4}-\overset{-}{9}$ 4) $\overset{+}{4}+\overset{+}{9}$

5) $\overset{-}{4}-\overset{+}{9}$ 6) $\overset{-}{4}+\overset{-}{9}$ 7) $\overset{-}{4}-\overset{-}{9}$ 8) $\overset{-}{4}+\overset{+}{9}$

9) $\overset{+}{10}-\overset{+}{7}$ 10) $\overset{+}{10}+\overset{-}{7}$ 11) $\overset{+}{10}-\overset{-}{7}$ 12) $\overset{+}{10}+\overset{+}{7}$

13) $\overset{-}{10}-\overset{+}{7}$ 14) $\overset{-}{10}-\overset{-}{7}$ 15) $\overset{-}{10}-\overset{-}{7}$ 16) $\overset{-}{10}+\overset{+}{7}$

17) $(+0{,}8)-(+0{,}8)$ 18) $(+0{,}8)+(-0{,}8)$ 19) $(+0{,}8)-(-0{,}8)$
20) $(+0{,}8)+(+0{,}8)$ 21) $(-0{,}8)-(+0{,}8)$ 22) $(-0{,}8)+(-0{,}8)$
3) $(-0{,}8)-(-0{,}8)$ 24) $(-0{,}8)+(+0{,}8)$.

429. Missugused arvud on arvudele: $\overset{+}{3}$; $\overset{-}{7}$; $\overset{+}{8}$; $\overset{-}{1}$; 0; $-0{,}5$; $+2{,}4$ vastupidised?

430. Missugune arv peab arvule a juure lisatama see asemel, et ära võtta: $\overset{+}{11}$; $\overset{-}{8}$; $\overset{+}{13}$; $\overset{-}{6}$; $\overset{+}{1}$; 0?

431. Lahutamine saadetakse liitmise abil täide.

432. See asemel, et mõni arv lahutada (ära võtta), on ainult arvis tema vastasarv liita (juure lisada).

1) $\overset{+}{8}-\overset{+}{5}=\overset{+}{8}+\overset{-}{5}=\overset{+}{3}$ 2) $\overset{+}{6}-\overset{-}{9}=\overset{+}{6}+\overset{+}{9}=\overset{+}{15}$

3) $\overset{+}{5}-\overset{-}{11}=\overset{+}{5}+\overset{+}{11}=\overset{+}{16}$ 4) $\overset{-}{8}-\overset{+}{10}=\overset{-}{8}+\overset{-}{10}=\overset{-}{18}$

5) $\overset{-}{5}-\overset{-}{13}=\overset{-}{5}+\overset{+}{13}=\overset{+}{8}$.

433. Eelneva ülesande põhjal leida:

1) $\overset{+}{18}-\overset{-}{23}$ 2) $\overset{+}{19}-\overset{-}{13}$ 3) $\overset{+}{26}-\overset{-}{17}$ 4) $\overset{+}{13}-\overset{-}{21}$

5) $\overset{-}{36}-\overset{+}{28}$ 6) $\overset{-}{29}-\overset{+}{33}$ 7) $\overset{-}{42}-\overset{-}{25}$ 8) $\overset{-}{16}-\overset{-}{48}$.

434. Vastasarvude vaatlemisel on soovitav ka ümberpöörduid ehk alaspidiseid arve vaadelda, et neid mitte üksteisega ära vahetada. Need on niisugused arvud, nagu, näit., $\frac{2}{3}$ ja $\frac{3}{2}$, millede teos

on 1 (positiivne üks). Leida arvudele: $\overset{+}{8}$; $\overset{+}{5}$; $\overset{+}{1}$; $+\frac{1}{3}$; $+\frac{2}{9}$; $+\frac{7}{5}$; $+\frac{3}{4}$; $+0{,}4$ ümberpöördud (arvud ümber pöörata).

Läbi katsuda tuttavad võrdused:

$$a+(b-c)=a+b-c$$
$$a-(b-c)=a-b+c$$
$$a-(b+c)=a-b-c,$$

kui

	a	b	c
1)	$+5$	$+4$	$+8$
2)	$+5$	$+4$	-8
3)	$+5$	-4	$+8$
4)	-5	$+4$	$+8$
5)	$+5$	-4	-8
6)	-5	-4	$+8$
7)	-5	$+4$	-8
8)	-5	-4	-8

435. Kui suur on arvude summa:

1) $\overset{+}{6}$ ja $\overset{-}{6}$ 2) $\overset{+}{14}$ ja $\overset{-}{14}$ 3) $-\frac{1}{9}$ ja $+\frac{1}{9}$ 4) $+x$ ja $-x$
5) $-y$ ja $+y$?

436. Kujutades järgnevad avaldused algebraliste summadena, leida nende suurused.

1) $\overset{+}{5}-\overset{+}{18}$ 2) $\overset{+}{6}-\overset{-}{11}$ 3) $\overset{+}{3}+\overset{+}{5}-\overset{-}{6}$
4) $\overset{+}{8}-\overset{+}{5}+\overset{-}{6}$ 5) $\overset{+}{2}-\overset{-}{7}+\overset{+}{5}+\overset{-}{10}$ 6) $\overset{+}{4}-\overset{+}{5}-\overset{-}{6}-\overset{+}{1}$
7) $\overset{+}{2}-\overset{+}{11}-\overset{+}{5}+\overset{-}{7}$ 8) $-4+3-8-13$.

437. Liitmise abil järele katsuda vormulite tõelikkus.

1) $p-(q-r)=p-q+r$
2) $p-(q+r)=p-q-r$.

438. Kõige lihtsam algebralise summa leidmise viis.

1) $\overset{+}{3}+\overset{-}{4}+\overset{+}{8}+\overset{-}{5}=(\overset{+}{3}+\overset{+}{8})+(\overset{-}{4}+\overset{-}{5})=\overset{+}{11}+\overset{-}{9}=\overset{+}{2}$

2) $\overset{-}{6}+\overset{-}{11}+\overset{-}{14}+\overset{+}{9}+\overset{-}{1}+\overset{+}{8}=$

3) $\overset{+}{17}+\overset{-}{23}+\overset{-}{5}+\overset{+}{6}+\overset{-}{1}+\overset{+}{11}=$

4) $\overset{-}{2}+\overset{+}{10}+\overset{-}{12}+\overset{-}{5}+\overset{+}{6}+\overset{-}{3}+\overset{+}{16}=$

439. Avades klambrid, kõige lihtsamal viisil leida resultaat.

1) $(\overset{+}{8}+\overset{-}{5})-(\overset{+}{10}+\overset{-}{6})$ 2) $(\overset{+}{8}+\overset{+}{5})-(\overset{+}{10}+\overset{+}{6})$

3) $(\overset{-}{8}+\overset{+}{5})-(\overset{-}{10}+\overset{+}{6})$ 4) $(\overset{-}{8}+\overset{-}{5})-(\overset{-}{10}+\overset{-}{6})$

5) $(\overset{+}{8}-\overset{+}{5})-(\overset{+}{10}+\overset{+}{6})$ 6) $(\overset{+}{8}-\overset{-}{5})-(\overset{+}{10}-\overset{-}{6})$

7) $(\overset{-}{8}-\overset{+}{5})-(\overset{-}{10}-\overset{+}{6})$ 8) $(\overset{-}{8}-\overset{-}{5})-(\overset{-}{10}-\overset{-}{6})$.

§ 4. Arvu- ja tehtemärk.

Algebralise avalduse suurus ei muutu, kui igal arvul tehtemärk arvumärgiga ära vahetada; näit., $\overset{+}{5}-\overset{+}{6}=\overset{+}{5}+\overset{-}{6}$; $\overset{+}{8}+\overset{-}{4}=\overset{+}{8}-\overset{+}{4}$; $\overset{-}{7}-\overset{+}{9}=\overset{+}{-7}+\overset{-}{9}$.

Algebralise avalduse suurus ei muutu, kui iga arvu juures negatiiviste märkide paari asemele panna positiiviste märkide paar ehk ümberpöördud; näit., $\overset{+}{7}-\overset{-}{5}=\overset{+}{7}+\overset{+}{5}$; $\overset{+}{8}+\overset{+}{11}=\overset{+}{8}-\overset{-}{11}$.

Sel põhjal võib algebralisele summale anda hulkliikme kuju ja, ümberpöördud, hulkliiget võib algebralise summana esitada; näit., $\overset{+}{8}+\overset{+}{6}+\overset{-}{4}=\overset{+}{8}+\overset{+}{6}-\overset{+}{4}$. On kõik arvud positiivsed, siis võib + märgid ära jätta ja kirjutada lihtsamini:

$$\overset{+}{8}+\overset{+}{6}+\overset{-}{4}=8+6-4.$$

Tehtemärgid hulkliikmes on needsamad, mis arvumärgid algebralises summas. Sel põhjal võib kirjutada ka ümberpöördud, näit.,

$$5-7+9=\overset{+}{5}+\overset{-}{7}+\overset{+}{9}.$$

$-a$ all mõeldakse mõnda arvu, mis a all mõeldud arvule vastupidine.

440. Teisendada summadeks ja arvata avaldused:

1) $\overset{+}{6}-\overset{+}{23}$ 2) $\overset{+}{15}-\overset{-}{9}$ 3) $\overset{-}{14}-\overset{+}{16}$ 4) $\overset{-}{19}-\overset{-}{17}$

5) $\overset{+}{6}-\overset{-}{8}-\overset{+}{5}$ 6) $\overset{-}{10}+\overset{+}{1}-\overset{+}{6}$ 7) $\overset{+}{7}-\overset{+}{4}+\overset{-}{2}$.

441. Järele katsuda võrdused:

1) $\overset{+}{11}-\overset{-}{6}+\overset{-}{8}=11+6-8$ 2) $\overset{+}{10}+\overset{-}{4}-\overset{+}{6}=10-4-6$

3) $\overset{+}{9}-\overset{+}{5}-\overset{-}{3}=9-5+3$.

442. Kaotades märgid arvude kohalt, teisendada avaldused ja leida nende suurused.

1) $\overset{+}{14}-\overset{-}{8}+\overset{+}{21}$ 2) $\overset{-}{16}+\overset{-}{5}+\overset{+}{28}$ 3) $\overset{+}{20}-\overset{+}{18}-\overset{-}{24}$

4) $\overset{+}{2}-\overset{+}{5}-\overset{-}{3}+\overset{-}{7}$ 5) $\overset{-}{6}-\overset{-}{4}+\overset{+}{10}-\overset{+}{9}$ 6) $\overset{+}{2}+9-\overset{+}{11}-\overset{-}{3}$.

443. Leida:

1) $+3$-e ja $+4$-ja vastasarvude summa ja vahe;
2) arvudele -8 ja -9 vastasarvude summa ja vahe;
3) arvudele $+7$ ja -4 vastasarvude summa ja vahe;
4) $+9$ ja arvule $+4$ vastasarvu summa ja vahe.

444. Kirjutada arv, mis vastane arvudele:

1) a 2) $-b$ 3) $a+b$ 4) $a-b$
5) $a+b-c$ 6) $a-b+c$ 7) $a-b-c$ 8) $-a+b+c$
9) $a+b+c$ 10) $3p$ 11) $3p-4q$ 12) $2x-7$.

445. Leida: 1) $-m$, kui $+m$ on: $\overset{+}{5}$; $\overset{-}{14}$; $-0{,}5$; 0; 2) $+m$, kui $-m$ on: $\overset{-}{8}$; $\overset{+}{19}$; $\overset{-}{13}$; 0.

446. Missugune arv on suurem: 1) a või $-a$; 2) $a-b$ või $b-a$?

§ 5. Hulkliikmeliste avalduste ühendamine.

Kui on tarvis mõnele arvule juure lisada hulkliige, siis kirjutakse juure selle osad, ilma et märke nende ees muudetaks. Võimalikul juhusel ühendakse sarnased liikmed, näit.,

$$(a+b-c)+(b-a+c)=a+b-c+b-a+c=2b.$$

Hõlpsuse pärast kirjutakse hulkliikmed üksteise alla, seades hulkliikme osad kohastikku:

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ -a+b+c \\ \hline \text{„}\quad 2b\quad \text{„} \end{array}$$

Kui on tarvis mõnest arvust ära võtta hulkliige, siis kirjutakse hulkliikme osad vastasmärkidega (lisatakse juure vastashulkliige), näit.,

$$(a+b-c)-(b-a+c)=a+b-c-b+a-c=2a-2c,$$

ehk ülestikku kirjutades:

$$\begin{array}{r} a+b-c \\ \pm a\mp b\mp c \\ \hline 2a\qquad -2c \end{array}$$

447. Missugune on: 1) $p+q-r$; 2) $p-q-r$, kui 1) $p=a+b$; $q=b-a$; $r=a-b$; 2) $p=a^2+2ab+b^2$; $q=a^2-b^2$; $r=a^2-2ab+b^2$?

448. Järgnevais harjutusis kirjutada liidetavad ülestikku (veergu), nende alla summa. Näituseks, kui on tarvis liita 5 ja $a-4$, siis kirjutada:

$$\begin{array}{r} +5 \\ a-4 \\ \hline a+1 \end{array}$$

1) x ja $+8$ 2) y ja -5 3) $k-1$ ja $+1$
4) $k+1$ ja -1 5) $a+b$ ja -8 6) 4 ja $a+7$
7) -4 ja $b+c$ 8) $b-c$ ja $+11$ 9) -5 ja $3-x$
10) -10 ja $a-10$ 11) $3-y$ ja -3 12) $m+1$ ja -9
13) -11 ja $n+3$ 14) $1-c$ ja $+2$ 15) $4-c$ ja -5
16) $2+2a$ ja $-2a$ 17) $2m-3$ ja $-m$ 18) $x-y$ ja $+y$
19) $p+q$ ja $-q$ 20) $p-q$ ja $-q$ 21) a ja $a-b$
22) $-a$ ja $a-b$ 23) b ja $a-b$ 24) $a-5b$ ja $+6b$
25) $-3a$ ja $a-2b$ 26) $-9b$ ja $x+7b$ 27) $4x-6y$ ja $+5y$
28) $8a$ ja $1-7a$ 29) $3a-1$ ja $+11a$ 30) $n+1$ ja $n-1$
31) $n-8$ ja $n+3$ 32) $n-1$ ja $3-2n$ 33) $a-9$ ja $8-a$
34) $4a-7$ ja $1+a$ 35) $a-1$ ja $1-a$ 36) $p+q$ ja $q-p$
37) $6-2r$ ja $3r-5$ 38) $2r-5s$ ja $4s-r$ 39) $m+4$ ja $n-4$
40) $m-11$ ja $n+10$ 41) $x-8$ ja $6-y$ 42) $5x-y$ ja $y-4z$
43) $x+y$ ja $y-4$ 44) $3a-5b$ ja $4b-7$ 45) $a-8$ ja $a+11$
46) $p-5$ ja $-q+5$ 47) $6p+8$ ja $-5p-7$ 48) $a-9$ ja $-9-b$
49) $-12x+8y$ ja $-5y-4z$
50) $4a-8b+c$ ja $3a+6b-7c$
51) $11a-7b-2c$ ja $-10a+3c+8b$
52) $2p-4q+5r-8s$ ja $8p+4q-5r-2s$
53) $10p-q+7r-11s$ ja $-4p+s-r+q$
54) $3a-4x+6b-y$ ja $5x-5b-8y+a$
55) $1\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}y-3\frac{1}{4}z+\frac{3}{5}u$ ja $\frac{1}{3}x+2\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}z-\frac{1}{2}u$
56) $a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{4}c-\frac{2}{5}d$ ja $-\frac{5}{6}a+\frac{2}{3}d+\frac{1}{3}c-\frac{3}{4}b$
57) $4a-6b+c-7d$, $6a-3b+8d-c$, $12b-16a-d+6c$ ja $4d-b+7c-5a$
58) $3p-8q+10r-s$, $2p+5s-12r+8q$, $7p-6q+8r-s$ ja $6q-12p-6r-3s$
59) $2{,}8x-3{,}7y+0{,}9z$, $4{,}5y-3{,}6x+1{,}8z$ ja $-0{,}2x-0{,}8y-0{,}7z$
60) $0{,}84x-1{,}02y-0{,}34z$, $0{,}18x+0{,}02y+1{,}17z$ ja $-0{,}02x+0{,}00y-0{,}83z$.

449. Lahutada — ära võtta — eelnevast avaldusest järgnev.

1) $8a$; $-3a$ 2) $-10b$; $-4b$ 3) $-6c$; $+e$ 4) $12a$; $+14a$
5) $-a$; $+7a$ 6) $-3x$; $-7x$ 7) $5y$; $-8y$ 8) u; v
9) $-u$; $-v$ 10) u; $-v$ 11) $-u$; $+v$ 12) $6p$; $7q$
13) $-8p$; $+4q$ 14) $+6p$; $-q$ 15) $-4p$; $-9q$ 16) $n-1$; $+1$
17) $n-1$; -1 18) $n+1$; $+1$ 19) 11; $r+3$ 20) $r+1$; $+8$
21) $r-5$; $+4$ 22) $r-3$; $+6$ 23) 4; $x-5$ 24) -9; $4-y$
25) $1-z$; -1 29) -1; $z-1$ 27) -1; $1+u$ 28) -1; $1-a$

29) $k-l$; $+k$ 30) $k-l$; $-l$ 31) l; $k+l$ 32) $-l$; $k-l$
33) $-k$; $k-l$ 34) $a-b$; $2a$ 35) $a-b$; $-3a$ 36) $a-b$; $+2b$
37) $a-b$; $-3b$ 38) $4x-8y$; $5y$ 39) $2x-9y$; $3x$ 40) $x-y$; $-5y$
41) $8u$; $5u-v$ 42) $-10u$; $u-6v$ 43) $3v$; $8u+3v$ 44) $2x+7y$; $10y$
45) $8x$; $x-y$ 46) $4b$; $a+3b$ 47) $12n$; $1-9n$ 48) $-8n$; $1\ \ 14n$
49) $13n-1$; $8n$ 50) $1-6n$; -15.

450.

1) $a-1$; $a+1$ 2) $p-q$; $q-p$ 3) $x+y$; $x-y$
4) $x-y$; $x+y$ 5) $z+6$; $z-4$ 6) $u-10$; $u+4$
7) $u+5$; $3-u$ 8) $a-3$; $4-9a$ 9) $b+1$; $6-4b$
10) $c+1$; $7-c$ 11) $n+1$; $1-n$ 12) $n-1$; $1+n$
13) $n-1$; $1-n$ 14) $1-n$; $n+1$ 15) $2p-8$; $5-4p$
16) $3q-6$; $-4q+7$ 17) $12r-5$; $15r-5$ 18) $x+1$; $y+1$
19) $x-1$; $y-1$ 20) $x+1$; $y-1$ 21) $x-1$; $y+1$
22) $x-1$; $1-y$ 23) $x-1$; $-y-1$ 24) $a+b$; $-b+1$
25) $a-b$; $-a-1$ 26) $a-b$; $-1-b$ 27) $c+d$; $-c-d$
28) $m+5$; $n-2$ 29) $m-4$; $8-n$ 30) $2p-3q$; $3p-2q$
31) $4r+5s$; $5r+4s$ 32) $5x-9y$; $y-5x$
33) $8a-5b+c-4d$; $7a-4b+c+d$
34) $a+6d-4c+9b$; $12d-5a-4c-b$
35) $10p-7q+5r-13$; $-10r+11q-p-3$
36) $4x-z-15u+17y$; $4u-5z-13y+4x$.

451. Avada klambrid ja lihtsustada:

1) $(2ab-5ac)-(4ac-8ab)+(2ab-7ac)-(9ab-16ac)$
2) $(-5ab+4ac)+(8ab+3ac)-(6ab+7ac)+(3ab+ac)$
3) $(6p-3q+9)-(7p+4q-11)+(-8p+5q-13)$
4) $(-11p+2q)-(13p-9q+4)+(12p-11q+4)-2p$
5) $18x+(-10x-2y)-(24x-5y+30)-(-16x+3y-20)$
6) $32y-(14y-6x)+(-52x+2y-38)-(20y+46x-48)$
7) $60a-25m-(48b-28a)+(50b-24n)-(88a-20n)$
8) $24r-53s-(-28t+21r-10s)+(50r-26s-38t)-52r+68s$
9) $-35s+14r-(63t-44s)+(-54r+17s)-(-4s+10r-33t)$
10) $9x-(8u+19y-26x-34v)+(-21y+37x-38v+7u)-$
$-(72x-u-4v)$.

452. 1) $81a-[64a-(52-8b+14c)]+[-43a+(24b-$
$-6a-90c)-50b]+62b$
2) $18a^2-[7ab-5b^2-(24a^2+16ab-45b^2)]+[24b^2-$
$-(48ab+33a^2)]$

3) $0{,}8m^2x + 8{,}4mx - [- 0{,}9m - (1{,}7mx - 8{,}5x)] - - [(4{,}8m^2x - 1{,}8mx) - 6{,}4m + 5{,}5x]$

4) $3{,}6p^2q - 1{,}8pq^2 + 0{,}9p^3 - [- 1{,}8pq^2 + 3{,}4p^2q - - (1{,}3p^3 - pq^2)]$.

Otsustada võrrandused:

453. 1) $10 + x = 3$ 2) $3 - y = 12$
3) $18 = 1 - z$ 4) $x - 10 = - 4$
5) $7 - y = - 1$ 6) $15{,}8 = 14{,}3 - z$
7) $x + 4{,}9 = 1{,}8$ 8) $\frac{1}{3} - y = \frac{5}{6}$
9) $\frac{3}{4} + z = \frac{7}{12}$ 10) $-x + \frac{1}{5} = - \frac{2}{15}$
11) $\frac{5}{8} = - \frac{1}{24} - y$ 12) $x - a = 0$
13) $y - b = - 2b$ 14) $z + c = c$
15) $x - a = a$.

Ülesanded võrranduste kokkuseadmiseks ja lahendamiseks:

454. 1) Leida arv, 1) mis 8-ga suurem, kui tema vastasarv;
2) mis omast vastasarvust 10 võrra vähem;
3) mis oma vastasarvu suurune;
4) mis kahekordse vastasarvuga liidetuna annab 18.

§ 6. Suhteliste arvude kasvatamine ja jagamine.

Mõnda arvu positiivse arvuga kasvatada tähendab teda selle arvu absoluutse suurusega kasvatada.

Mõnda arvu negatiivse arvuga kasvatada tähendab teda selle arvu absoluutse suurusega kasvatada, ja saadud teose märk teha vastaseks.

Seepärast on kahe suhtelise arvu teos nende arvude absoluutsete suuruste teos „plus“ (+) märgiga selle ees, kui mõlemail teguritel on ühesugused märgid, ja miinus“ (—) märgiga selle ees, kui teguritel on mitmesugused märgid. See on *n. n.* märkide seadus, mida võib järgmisel kujul kergesti meeles pidada:

ühesugused märgid annavad +, mitmesugused annavad —.

Kasvatamine arvuga — 1 ei ole muud, kui selle arvu eesoleva märgi asemele vastasmärgi seadmine.

455. Katsuda, et võrdus

$$(a - b)(m - n) = am - bm - an + bn$$

on õige, kui

	a	b	m	n
1)	3	2	7	4
2)	3	3	7	4
3)	3	1	7	4
4)	3	2	7	7
5)	3	2	7	9
6)	3	1	7	9

	a	b	m	n
7)	5	3	6	4
8)	5	5	6	4
9)	5	7	6	4
10)	5	3	6	6
11)	5	3	6	9
12)	5	7	6	9

456. Missugune kuju on eelmise ülesande võrdusel, kui 1) $b=0$; $n=0$; 2) $b=0$; $m=0$; 3) $a=0$; $n=0$; 4) $a=0$; $m=0$.

457. Mis tähendab kasvatada 12 arvuga: 1) 3; 2) $\frac{2}{3}$; 3) -4; 4) $-\frac{3}{4}$?

458. Kasvatamine:

1) $\overset{+}{4} \cdot \overset{+}{3}$
2) $\overset{+}{3} \cdot \overset{+}{4}$
3) $\overset{-}{5} \cdot \overset{+}{2}$
4) $\overset{+}{5} \cdot \overset{-}{2}$
5) $\overset{-}{6} \cdot \overset{+}{8}$
6) $\overset{+}{8} \cdot \overset{-}{6}$
7) $\overset{-}{5} \cdot \overset{-}{2}$
8) $\overset{-}{2} \cdot \overset{-}{5}$
9) $\overset{+}{8} \cdot \left(+\frac{3}{4}\right)$
10) $\left(+\frac{3}{4}\right) \cdot \overset{+}{8}$
11) $\overset{-}{6} \cdot \left(+\frac{2}{3}\right)$
12) $\left(+\frac{2}{3}\right) \cdot \overset{-}{6}$
13) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \overset{+}{10}$
14) $\overset{+}{10} \cdot \left(+\frac{4}{5}\right)$
15) $\left(+\frac{3}{7}\right) \cdot \left(+\frac{5}{3}\right)$
16) $\left(+\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{10}\right)$

17) $\left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$ 18) $(+0{,}8) \cdot (+0{,}5)$

19) $(+0{,}9)\,(-0{,}6)$ 20) $(-0{,}7)\,(-0{,}3)$

21) $(+4{,}8) \cdot (-6{,}3)$ 22) $(-9{,}6)\,(-2{,}5)$.

459. Näidata, et kommutatiivne omadus kasvatamisel $ab = ba$ on ka siis maksev, kui tegurid on suhtelised arvud.

460. Harjutused:

1) $\overset{+}{(4} \cdot \overset{+}{5)} \cdot \overset{+}{6}$ 2) $\overset{+}{4} \cdot (\overset{+}{5} \cdot \overset{+}{6})$ 3) $\overset{+}{(4} \cdot \overset{-}{5)} \cdot \overset{+}{6}$

4) $\overset{+}{4} \cdot (\overset{-}{5} \cdot \overset{+}{6})$ 5) $\overset{-}{(4} \cdot \overset{-}{5)} \cdot \overset{+}{6}$ 6) $\overset{-}{4} \cdot (\overset{-}{5} \cdot \overset{+}{6})$

7) $\overset{-}{(4} \cdot \overset{-}{5)} \cdot \overset{-}{6}$ 8) $\overset{-}{4} \cdot (\overset{-}{5} \cdot \overset{-}{6})$ 9) $[(-0{,}9) \cdot (+2{,}4)] \cdot (-1{,}5)$

10) $(-0{,}9) \cdot [(+2{,}4) \cdot (-1{,}5)]$.

461. Näidata, et assotsiatiivne omadus kasvatamisel: $a(bc) = (ab)c$ on ka siis maksev, kui tegurid on suhtelised arvud.

462. Avada klambrid ja leida resultaadid näitusis:

1) $(-2)^2$ 2) $(-2)^3$ 3) $(-2)^4$ 4) $(-2)^5$

5) $(-2)^6$ 6) $(-3)^2$ 7) $(-3)^3$ 8) $(-1)^2$

9) $(-1)^3$ 10) $(-1)^4$ 11) $(-5)^2$ 12) $(-10)^3$

13) $(-a)^2$ 14) $(b)^2$ 15) $(+x)^3$ 16) $(-x)^3$.

463. Millelt lähevad lahku:

1) -1^2 ja $(-1)^2$ 2) -2^2 ja $(-2)^2$

3) -4^3 ja $(-4)^3$ 4) $-n^2$ ja $(-n)^2$

5) $-2n^2$ ja $(-2n)^2$ 6) $-2n^2$ ja $(-2)^2n$,

7) $-x^3$ ja $(-x)^3$ 8) $-3x^3$ ja $(-3x)^3$

9) $-3x^3$ ja $(-3)^3x$.

464. Lihtsustada:

1) $(-a)bc$ 2) $(-a)(-b)c$

3) $(-a)(-b)(-c)$ 4) $(-6)nn^2$

5) $(-6)(-n)n^2$ 6) $(-6)(-n)(-n^2)$

7) $(-2)^2(-3)^3$ 8) $(-2)^3(-3)^2$
9) $(-1)^9$ 10) $(-1)^{10}$
11) $(-1)^{11}$ 12) $1-(-1)^2$
13) $-1-(-1)^3$ 14) $5-(-5)^2$
15) $5-(-5)^3$ 16) $-5-(-5)^2$
17) $\overset{-}{3}\cdot\overset{+}{2}\cdot\overset{-}{3}\cdot\overset{+}{2}\cdot\overset{-}{5}$ 18) $(-2)^5(-3)^2(-1)^7$.

465. Leida arvsuurused vormulitel:

$x=(u-v)^2$; $y=(u-v)^3$; $z=(u-v)^4$,

kui 1) $u=1$ ja jäädav, kuid v kasvab järjestikkude täisarvude järel: $\overset{-}{3}, \overset{-}{2}, \overset{-}{1}, 0, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}, \overset{+}{4}$; 2) $v=10$ ja jäädav, kuid u kahaneb täisarvude järel 13-st kuni 7-ni.

Võrrandused.

466. Leida igas järgnevas võrranduses y-u suurused, kui $x=\overset{-}{6}, \overset{-}{5}, \overset{-}{4}, \ldots 0 \ldots \overset{+}{4}, \overset{+}{5}, \overset{+}{6}$. Resultaadid asetada tabelisse.

1) $y=x^2$
2) $y=x^2-1$
3) $y=x^2-x$
4) $y=x^2+x-6$
5) $y=x^2-3x-10$
6) $y=x^2+px+q$; $p=+5$; $q=+4$
7) $y=x^2+px+q$; $p=+3$; $q=-18$.

Leitud tabelite põhjal näidata, missugused on x suurused (võrranduste juured ehk otsused), kui $y=0$.

467. Arvata avalduste

1) $4p^2q^2$ 2) pq^2r^3 3) p^3q^2r
4) p^3qr^2 5) $-3pqr^2$ 6) $-8p^3qr$
7) $pq+pr+qr$ 8) $pq-pr+qr$ 9) $pq+pr+qr$
10) $pr-pq+qr$

suurused, kui

1) $p=\overset{+}{3}$; $q=\overset{-}{2}$; $r=\overset{+}{1}$; 2) $p=\overset{-}{3}$; $q=\overset{+}{2}$; $r=\overset{+}{1}$;
3) $p=\overset{+}{3}$; $q=\overset{+}{2}$; $r=\overset{-}{1}$.

468. Katsuda samasused:

1) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
2) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
3) $(a+b)(a+c)(b+c)=a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$,

võttes tähtede asemele suhtelised arvud.

Jagamine.

469. Katsuda kasvatamise abil, et

1) $\overset{+}{12}:\overset{+}{3}=\overset{+}{4}$
2) $\overset{-}{12}:\overset{+}{3}=\overset{-}{4}$
3) $\overset{+}{12}:\overset{-}{3}=\overset{-}{4}$
4) $\overset{-}{12}:\overset{-}{3}=\overset{+}{4}$
5) $(+1{,}8):(-0{,}3):(--6)$
6) $(-0{,}24):(+0{,}3)=-0{,}8$
7) $(-7{,}2):(-12)=+0{,}6$
8) $\left(-\frac{3}{4}\right):\left(+\frac{1}{3}\right)=-2\frac{1}{4}$
9) $\left(+\frac{2}{3}\right):\left(-\frac{5}{6}\right)=-\frac{4}{5}$
10) $\left(-\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{2}{3}\right)=-2\frac{1}{2}$
11) $(-ab):(+a)=-b$
12) $(-ab):(-a)=+b$
13) $(+ab):(-a)=-b$.

470. Jagada:

1) $\overset{+}{15}:\overset{+}{3}$
2) $\overset{-}{15}:\overset{+}{3}$
3) $\overset{+}{15}:\overset{-}{3}$
4) $\overset{-}{15}:\overset{-}{3}$
5) $\overset{+}{20}:\overset{-}{4}$
6) $\overset{-}{36}:\overset{+}{9}$
7) $\overset{-}{54}:\overset{-}{6}$
8) $\overset{-}{3}:\overset{-}{9}$
9) $\overset{-}{4}:\overset{+}{12}$
10) $\overset{+}{8}:\overset{-}{18}$
11) $(+2{,}7):(-0{,}9)$
12) $(-3{,}2):(+0{,}8)$
13) $(-0{,}15):(-0{,}5)$
14) $\left(-2\frac{1}{3}\right):\left(+1\frac{1}{4}\right)$
15) $\left(-5\frac{2}{5}\right):\left(-1\frac{4}{5}\right)$
16) $(+ab):(+b)$
17) $(+6xy):(-2x)$
18) $(-uv):(-u)$
19) $(-18pq):(-9p)$
20) $(+12ab):(-4ab)$
21) $(-32mn):(-8m)$
22) $(+a^2b):(-a)$
23) $a^2b^2:(-ab)$
24) $(-xy^2):(+xy)$
25) $(-pq^3):(-pq^2)$
26) $(+8x^2y^3):(-4xy^2)$
27) $(-26u^4v):(-13u^3)$
28) $(+2\frac{1}{4}a^2b^2c^3):(-\frac{4}{5}abc^2)$
29) $(-3\frac{2}{3}a^3bc^2):(-\frac{3}{11}a^3b)$.

471. Lihtsustada:

1) $(+6a).(+3b):(-18a)$
2) $(+ax).(-by):(-ay)$
3) $(-5p).(-8q):(+20p)$
4) $(+12a^2).(-14b^2):(-28ab)$
5) $(-8ab^2).(-9a^2b):(-12a^2b^2)$
6) $(-24xy):(+6x).(-5x^2y)$
7) $(+7\frac{1}{3}a^2x):(-3\frac{2}{3}ax).(+\frac{1}{2}x)$
8) $(-0{,}81a^2x^3).(-5ay^3):(-0{,}9ax^2y^3)$.

472. Vormulite arvsuurused:

1) a^2-b^2 2) $(a-b)^2$ 3) $(a+b)^2$
4) $(a+b)^3$ 5) $(a-b)^3$ 6) a^3-b^3
7) a^3+b^3 8) $\frac{a^2x^3}{b^4y^5}$ 9) $\frac{abxy}{a^2+b^2}$
10) $\frac{a^3+b^3}{a+b}$ 11) $\frac{a^5-1}{a-1}$ 12) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a-b}$,

kus

$$a=\overset{+}{2};\ b=\overset{-}{3};\ x=\overset{+}{4};\ y=\overset{-}{1}.$$

§ 7. Hulkliigete kasvatamine.

473. Katsuda võrduste

$$(a+b+c)m=am+bm+cm$$
$$m(a+b+c)=ma+mb+mc$$

maksvust, kui 1) $a=-8$; $b=+6$; $c=-5$; $m=-3$; 2) $a=+p^2$; $b=-2pq$; $c=-q^2$; $m=p^2$; 3) $a=+1$; $b=-4x^2$; $c=-4x^4$; $m=1-2x^2$.

474. Kasvatamised:

1) $(4a-5b+c)(-3ac)$ 2) $(5ab-8ac-6bc)(-abc)$
3) $(2x-5y)(8x+3y)$ 4) $(-6x-7y)(x-4y)$
5) $(5x-9y)(-3y+2x)$ 6) $(-6x+5y)(-5x+6y)$
7) $(m+4)(n-3)-(m-2)(n+5)$ 8) $(m-1)(n+1)-(m+1)(n-1)$
9) $(p+2)(q-3)-(3+q)(2-p)$ 10) $(4-p)(-2+q)-(5+p)(2-q)$
11) $(3xy-2xz+5yz)(5xy+2xz-3yz)$
12) $(-xz+6xy-4yz)(-xz-9yz+7xy)$
13) $(10pq-8pr+ps-6qr-4rs)(3pq-5pr+2qr)$
14) $(-7pq+5pr-8rs-2ps+4qr)(-9qr-2pq+4pr)$
15) $(a^2-5a+1)(a-4)$ 16) $(4-6a-2a^2)(3-2a)$
17) $(2p-8+5p^2)(-6-p)$ 18) $(5p^2-6-3p)(-p+7)$
19) $(x^2-x+1)(-x^2+x-1)$ 20) $(s^2+s+1)(s^2-s+1)$
21) $(2x^2-6x+9)(2x^2+6x+9)$ 22) $(-5x-6+4x^2)(7-9x^2+6x)$
23) $(2a^2b-5ab^2-b^3)(-3a^3+6a^2b-ab^2)$

24) $(-3a^3b - 10ab^3 + 5b^4)(-4b^2 + 5ba - 3a^2)$
25) $(8m^3n - 2m^4 - 5m^2n^2 + 6mn^3)(2m - 3n)$
26) $(-6m^2n^2 + 5m^4 - 8mn^3 - 2m^3n)(-m + n)$.

475.

1) $(a + b)(a + b)$
2) $(a - b)(a - b)$
3) $(x + 1)^2$
4) $(x - 1)^2$
5) $(3p - 8q)^2$
6) $(-4p + 3q)^2$
7) $(-m - n)^2$
8) $(a + b)(a - b)$
9) $(6a - 1)(6a + 1)$
10) $(7m - 8n)(8n + 7m)$
11) $(a + b)(a + b)(a + b)$
12) $(m - n)(m - n)(m - n)$
13) $(p + q)^3$
14) $(p - q)^3$
15) $(z + 1)^3$
16) $(z - 1)^3$
17) $(2a - 5b)^3$
18) $(6c + d)^3$
19) $(1 - 6a)^3$
20) $(-1 + 10a)^3$
21) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
22) $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$
23) $(2x - 3)(3x + 4)(4x - 5)$
24) $(5 - 3x)(3 - x)(1 + x)$
25) $(m^2 + mn + n^2)(m - n)$
26) $(m^2 - mn + n^2)(m + n)$
27) $(m^4 - m^3n + m^2n^2 - mn^3 + n^4)(m + n)$
28) $(m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4)(m - n)$
29) $(2p^2 - 5q)(4p^4 + 10p^2q + 25q^2)$
30) $(-3p - 2q^2)(9p^2 - 6pq^2 + 4q^2)$
31) $(4x - 5)^2(3x + 2)^2$
32) $(2 - x^2)^2(5 - 2x)^2$
33) $(u^2 - uv + v^2)(u^2 + uv + v^2)$.

476. Leida: 1) x^4 koeffitsient teoses: $(8x^2 - 5x + 6)(x^3 - 2x^2 + 9)$; 2) z^3 koeffitsient teoses: $(1 - 2z + 5z^2)^2$.

477. Hulkliigete astme võtmine:

1) $(a + b + c)^2$
2) $(a - b + c)^2$
3) $(a + b - c)^2$
4) $(a - b - c)^2$
5) $(2x + 3y + 4z)^2$
6) $(6p - 3q + 1)^2$
7) $(100a + 10b + c)^2$
8) $(0{,}5d - 0{,}8e + 0{,}3f)^2$
9) $(r^2 - r + 3)^2$
10) $(x^2 + px + q)^2$
11) $(ax^2 + bx + c)^2$.
12) $(+10{,}1n + 0{,}001n^2)^2$

478. Näidata, et

1) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$
2) $(a - b)^2 = (b - a)^2$
3) $(a - b)^3 = -(b - a)^3$.

§ 8. Hulkliigete jagamine ja teguriteks lahutamine.

479. 1) $(ax + bx) : x$
2) $(mx - my) : m$
3) $(pq - pr) : (-p)$
4) $(25u^2v - 15uv + 20u) : (-5u)$
5) $(-a^2 + 18a^2b - 2ab) : (-3a)$
6) $(-\frac{3}{4}a^2 + 2a^2b - \frac{1}{8}ab) : (-\frac{1}{4}a)$.

480. Lihtsustada järgmised avaldused jagamise ehk teguriteks lahutamise abil. Järele katsuda kasvatamise abil.

1) $(xy - xz) : (x - z)$
2) $(pq - p) : (q - 1)$
3) $(ab - ac) : (c - b)$
4) $(mx - m) : (1 - x)$
5) $(12nx + 20ny + 16nz) : (3x + 5y + 4z)$
6) $(24p^3r - 12p^2qr + 4pr) : (6p^2 - 3pq + 1)$
7) $(7a^2 - 2{,}4ab - 7{,}4a) : (3{,}5a - 1{,}2b - 3{,}7)$
8) $\left(\frac{6}{5}a^2b^2d^2 - \frac{1}{5}a^3bd^2 + 1\frac{3}{5}\right) : \left(\frac{1}{2}ab^2 - \frac{3}{4}a^2b + \frac{2}{3}ab\right)$
9) $(pr - qr + ps - ps) : (r + s)$
10) $(xz - yz - ux + uy) : (x - y)$
11) $(nk + k - n - 1) : (k - 1)$
12) $(n^3 + mn^2 - n - m) : (n + m)$
13) $(6ac - 12ad - 10bc + 20bd) : (3a - 5b)$
14) $(12ad - 28ac + 35bc - 15bd) : (-4a + 5b)$
15) $(28rt - 63st + 32ru - 72su) : (7t + 8u)$
16) $(21rs - 49ru - 27st + 63tu) : (3s - 7u)$
17) $(55x^2 - 44xy - 15xz - 12yz) : (5x - 4y)$
18) $(36x^2 + 54xy - 24x - 36y) : (6x + 9y)$
19) $(a^2 + 2ab - 3b^2) : (a - b)$
20) $(2a^2 - 3ab - 5b^2) : (a + b)$
21) $(x^2 + 3x - 10) : (x - 2)$
22) $(x^2 - 5x - 24) : (x + 3)$
23) $(3m^2 - 8{,}7mn + 3n^2) : (0{,}6m - 1{,}5n)$
24) $(9{,}6m^2 - 2mn - 2{,}5n^2) : (1{,}2m + 0{,}5n)$
25) $\left(-\frac{1}{5}p^2 + \frac{25}{24}pq - \frac{5}{4}q^2\right) : \left(-\frac{1}{2}p + \frac{5}{3}\right)$

26) $\left(\frac{9}{8}p^2 - \frac{9}{20}p + \frac{2}{25}\right) : \left(\frac{3}{2}p - \frac{1}{5}\right)$

27) $(x^3 + x^2y - 2y^3) : (x - y)$

28) $(x^3 - 6x^2 - 5x - 12) : (x - 3)$

29) $(6y^3 - 5y^2 - 25y + 28) : (3y - 4)$

30) $(20 + 17y - 22y^2 - 15y^3) : (4 + 5y^2)$

31) $(10a^3 + 8a^2b - 15ab^2 - 12b^3) : (5a + 4b)$

32) $(15a^3 - 9a^2b - 25ab^2 + 15b^3) : (3a^2 - 5b)$

33) $(36p^4 - 27p^3q - 16pq^3 + 12q^4) : (4p - 3q)$

34) $(-36q^8 + 81p^2q^5 - 16p^2q^3 + 36p^4) : (9p^2 - 4q^3)$

35) $(0{,}42mp + 0{,}36mq + 0{,}98np + 0{,}84nq) : (0{,}7p + 0{,}6q)$

36) $(0{,}32m^2p - m^2q^2 - 0{,}88np + 2{,}75nq^2) : (0{,}4m^2 - 1{,}1n)$

37) $(\frac{7}{24}ab + \frac{5}{8}ay - \frac{2}{9}bx - \frac{10}{21}xy) : (\frac{3}{8}a - \frac{2}{7}x)$

38) $(-\frac{1}{14}a^2x^4 - \frac{5}{56}b^3x^4 + \frac{2}{5}a^2y + \frac{1}{2}b^3y) : (\frac{4}{7}a^2 + \frac{5}{7}b^3)$

39) $(108m^2 - 231mn + 120n^2) : (12m - 15n)$

40) $(54m^2 + 65mn - 24n^2) : (2m + 3n)$

41) $(4x^2y^2 - 8xy^2z - 9x^2z^2 - 12xyz^2) : (2xy - 3xz - 4yz)$

42) $(p^2 - q^2 + 2qr - r^2) : (p + q - r)$

43) $(10p^2 - 7pq - 7pr - 12q^2 + 12qr - 6r^2) : (2p - 3q + r)$

44) $(12s^2 - 44st - 65su + 40t^2 + 123tu + 77u^2) : (3s - 5t - 11u)$

45) $(15x^2 - xy + 23xz - 28y^2 - 65yz - 28z^2) : (3x + 4y + 7z)$

46) $(64x^2 - 8xy + 25y^2 - 49z^2) : (8x - 5y + 7z)$

47) $(2{,}17a^2 - 5{,}76ab - 1{,}14ac - 5{,}76b^2 + 0{,}09c^2) : (-3{,}1a - 2{,}4b + 0{,}3c)$

48) $(1{,}98a^2 - 5{,}58ab + 2{,}21ac + 3{,}24b^2 - 2{,}89c^2) : (1{,}8b - 2{,}2a + 1{,}7c)$

49) $\left(\frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{5}df - \frac{1}{9}e^2 + \frac{1}{25}f^2\right) : \left(\frac{1}{2}d - \frac{1}{3}e + \frac{1}{5}f\right)$

50) $\left(-9\frac{43}{49}d^2 - 7\frac{19}{35}df + 5\frac{1}{16}e^2 - 1\frac{11}{25}f^2\right) : \left(3\frac{1}{7}d + 2\frac{1}{4}e + 1\frac{1}{5}\right)$

51) $(48m^4 - 142m^3 + 37m^2 + 101m - 56) : (3m - 7)$

52) $(20 + 57m + 96m^2 + 118m^3 + 60m^4) : (4 + 5m)$

53) $(108m^2 - 141m^3 + 63 + 78m^4 - 150m) : (6m - 9)$

54) $(60m^2 - 66 - 47m + 54m^5 - 52m^3 + 51m^4) : (6m + 11)$

55) $(80p^3 - 31p^2 - 3 + 9p^4 + 19p - 48p^5) : (3 - 16p)$

56) $(16p - 24 - 40p^3 + 18p^2 + 21p^5) : (3p^2 - 4)$

57) $(6x^4 - 28x^3 + 11x^2 + 43x - 45) : (3x^2 - 7x + 5)$

58) $(20 + 37x + 9x^2 + 74x^3 - 8x^4) : (4 + 9x - x^2)$

59) $(19x^3 - 40x^2 - 4x + 3x^4 - 32) : (-5x^2 + 3x^3 - 4)$

60) $(42x^4 - 9x + 7x^3 + 8x^5 - 14x^2 - 63 - 6x^7) : (x - x^3 + 7)$

61) $(4u^6 - 9u^4 + 11u^2 - 6) : (4u^4 - 5u^2 + 6)$
62) $(s^4 - s^4t + s^3 + s^3t^2 - s^3t^3 + 2s^2t^2 - s^2t - st) : (s^2 - s^2t + s)$
63) $(12s^4 - 4s^3t - 4st^3 + 29s^2t^2 - 35st^3 - 28t^4) : (6s - 5st - 4t^2)$
64) $(8z^4 - 6z^3 - 23z^2 - 11z - 56) : (2z^3 - 5z^2 + 3z - 8)$
65) $(3il^2 + 4ik^2 - i^2kl - 12kl) : (4k - il)$
66) $(4e^2fg - 5eg^2 - 24ef^2 + 30fg) : (4ef - 5g)$
67) $(a^3b^3c^3 + 343d^3) : (a^2b^2c^2 - 7abcd + 49d^2)$
68) $(p^5q^5r^5 - 32s^5) : (p^4q^4r^4 + 2p^3q^3r^3s + 4p^2q^2r^2s^2 + 8pqrs^3 + 16s^4)$
69) $(3u^3v^3 - 2u^4v - 3u^2v^3 + u^5 + 2uv^4 - v^5) : (-uv + v^2 + u^2)$.

481. Missugusel korral on jagamine ilma jäägita võimatu?

1) $(a^2 + b^2) : (a + b)$
2) $(a^2 + b^2) : (a - b)$
3) $(a^2 - b^2) : (a + b)$
4) $(a^2 - b^2) : (a - b)$
5) $(a^3 + b^3) : (a + b)$
6) $(a^3 + b^3) : (a - b)$
7) $(a^3 - b^3) : (a + b)$
8) $(a^3 - b^3) : (a - b)$
9) $(p^4 + q^4) : (p + q)$
10) $(p^4 + q^4) : (p - q)$
11) $(p^4 - q^4) : (p + q)$
12) $(p^4 - q^4) : (p - q)$
13) $(u^5 + v^5) : (u + v)$
14) $(u^5 + v^5) : (u - v)$
15) $(u^5 - v^5) : (u + v)$
16) $(u^5 - v^5) : (u - v)$
17) $(x^6 + y^6) : (x^3 + y^3)$
18) $(x^6 - y^6) : (x^3 - y^3)$
19) $(m^3 + n^3) : (m^2 - mn + n^2)$
20) $(l^2 + m^2 + n^2) : (l + m + n)$.

482. Jagatavuse tunnuste abil näidata, missuguse näituse korral on ilma jäägita jagamine võimatu. Järele katsuda tehte toimepanemise teel.

1) $(6a^3 - 25a^2b + 34ab^2 - 15b^3 + 10) : (2a - 3b)$
2) $(15e^4 - 3e^3 - 17e^2 + 4e - 4) : (3e^2 - 4)$
3) $(8e^5 - 4e^4 - 14e^3 + 24e^2 - 12e) : (6e + 2e^3)$
4) $(5x^4 - 11x^3 + 10x^2 - 7x) : (x - 3)$.

Arvude ja avalduste teguriteks lahutamine.

483. Seada algarvude tabel kuni 120-ni ehk n. n. „Eratosthenese sõel", iga teist, kolmandat, neljandat j. n. e. arvu maha kriipsutades.

484. Lahutada algteguriteks arvud, kirjutades nad teosena:
1) 12 2) 16 3) 49 4) 256 5) 144 6) 64 7) 96
8) 625 9) 4096 10) 360 11) 216 12) 1728.

485. Võimalikult suurema hulga tegurite abil kirjutada:

1) $24a^2b$ 2) $72a^3b^2$ 3) $192p^4q^5r$
4) $98r^2s^3t^4$ 5) $720x^3yz^5$ 6) $2304u^7v^3$.

$$am + bm = m(a + b).$$

486. Teguriteks lahutada:

1) $3a + 3b$ 2) $5m - 5n$ 3) $4p + 5p$
4) $7x - 7$ 5) $ab - ac$ 6) $-10u - 10v$
7) $pr + r$ 8) $18a - 12c$ 9) $y^2 + y$
10) $8uv - 6zv$ 11) $27ab - 24ab$ 12) $192eg - 96e$
13) $14a^2b - 10ab$ 14) $98m^4n^3 - 42m^3n^4$ 15) $ae - be + ce$
16) $6ab + 22ac - 4ae$ 17) $15p^2 - 10pq - 5pr$
18) $-px + qx - 5x$ 19) $21xy - 15x^2 + 12xz$
20) $au - bu - cu + du$ 21) $a^2v - b^2v + c^2v - d^2v$
22) $a^2x^3 - a^3x^4 + a^4x^5$ 23) $18b^2y^2 - 21by^3 - 15b^3y$
24) $75p^5q^4 - 60p^3q^6 - 90p^7q^2$
25) $60x^2y^5z^3 + 12x^5yz^2 - 24x^4y^2z - 120x^3y^3z^4$
26) $70z^2u^3v^3 - 14z^3u^2v^2 - 21z^2u^3v^2 + 49z^3u^3v^2$
27) $0{,}9x^3y^2 + 2{,}7x^2y^3 - 0{,}3x^5$
28) $3\frac{1}{4}u^4v - 5u^3v^3 - \frac{3}{4}u^2v^3$ 29) $a(x + y) + b(x + y)$
30) $a(x - y) + b(x - y)$ 31) $x(u - v) - y(u - v)$
32) $30(x - 1)^2 - 18(x - 1)^2$ 33) $p(2r - 5s) + q(2r - 5s)$.

487.

$$am + bm + an + bn = (a + b)m + (a + b)n = (a + b)(m + n).$$

1) $ac + ad + bc + bd$ 2) $pr - ps + qr - qs$
3) $ac - ad - bc + bd$ 4) $ab + 3a + 2b + 6$
5) $xy + 4x - y - 4$ 6) $pr - 4p - 2qr + 8q$
7) $10a^2 + 4ac - 15ab - 6bc$ 8) $15x^2 - 5xz - 21xy + 7yz$
9) $1 + 5v - 8u - 4uv$ 10) $a(b + c) - b - c$
11) $a(b - c) - b + c$ 12) $ap - aq + p - q$
13) $ap - a + p - 1$ 14) $pn - qn - p + q$
15) $pn - p - n + 1$ 16) $72r^2 - 56rs - 45rt + 35st$
17) $63r^2 + 35rs - 54rt - 30st$ 18) $x^2 + 4x + 3x + 12$
19) $y^2 - 5y + 4y - 20$ 20) $z^2 - 3z - z + 3$
21) $am - bm + cm + an - bn + cn$
22) $10x^2 + 15xy - 20xz - 2x - 3y + 4z$
23) $ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$

24) $pr - qr + r + p - q + 1$
25) $pqr - pr - qr + r - pq + p + q - 1$
26) $uvz - uz - u^2v + u^2$
27) $xyu + xzu - xyv - xzu$
28) $a^4 - a^2 + a^3 - a$
29) $a^2b - ac - ab^2 + bc$
30) $c^3 + c^2e^2 + c^2 + ce^2$
31) $c^3 - c^2d + c^2e - cde$
32) $5(m - n)m + 4(n - m)m$
33) $8m(3m - n) - 6n(n - 3m)$
34) $2p(p - q) + 5p(q - p) - 3p(q - p)$
35) $(7p - 3q)(4r - s) - (5p - q)(4r - s)$
36) $(6x - 5y)(x - y) - (2x - 7y)(y - x) + (3x + 3y)(y - x)$.

488. I. $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
II. $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

1) $p^2 + q^2 + 2pq$
2) $p^2 + q^2 - 2pq$
3) $x^2 - 2x + 1$
4) $x^2 + 10x + 25$
5) $y^2 - 8y + 16$
6) $36y^2 + 12y + 1$
7) $4z^3 + 4z^2 + z$
8) $9z^3 - 6z^2 + 4z$
9) $m^4 + 2m^2 + 1$
10) $4m^7 - 14m^4 + 49m$
11) $16 - 8z + z^2$
12) $z^2 - z + \frac{1}{4}$
13) $81a^2b^2 - 180abc + 100c^2$
14) $4e^2 - 1{,}2e + 0{,}09$
15) $9e^2 + 25g^2 - 30eg$
16) $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2$
17) $\frac{1}{9}a^4b^2 - \frac{2}{3}a^2b + 1$
18) $9r^6s^2 - 12r^4s^5 + 4s^8r^2$.

489. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

1) $x^2 - y^2 = x^2 + xy - xy - y^2 = x(x + y) - (x + y)y = (x + y)(x - y)$
2) $u^2 - v^2$
3) $9 - a^2$
4) $m^2 - 4$
5) $p^2 - 1$
6) $49r^2 - 81s^2$
7) $u^4 - v^2$
8) $u^4 - v^4$
9) $u^4 - 1$
10) $u^4 - v^6$
11) $1 - z^2u^4$
12) $144a^4 - 1$
13) $36 - 49a^4$
14) $16 - 81e^4g^4$
15) $25p^2q^2 - 100r^2$
16) $81r^4 - 64s^4$
17) $169x^4y^2 - 121x^2y^4$
18) $u^8 - v^8$
19) $256z^8 - 1$
20) $0{,}49a^2 - b^2$
21) $0{,}81a^4 - 0{,}16s^2$
22) $\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{9}n^2$
23) $\frac{4}{25}m^2 - \frac{9}{49}n^2$
24) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$
25) $\left(18\frac{1}{4}\right)^2 - \left(17\frac{3}{4}\right)^2$
26) $1{,}21p^2q^2 - 0{,}81$
27) $0{,}64p^2q^2 - 0{,}01$
28) $0{,}09r^4 - 1{,}44s^2t^2$
29) $0{,}0016u^4 - 0{,}0001$
30) $84^2 - 16^2$
31) $175^2 - 25^2$
32) $299^2 - 101^2$
33) $7{,}3^2 - 2{,}7^2$
34) $(p + q)^2 - r^2$
35) $(p+q)^2 - (p-q)^2$
36) $(p+q)^2 - (r-s)^2$
37) $(3u - 2v)^2 - (2u - v)^2$
38) $-(v - 2u)^2 + (2u - 3v)^2$.

490.

1) $(x+y)^2+(x-y)^2$ 2) $(x+y)^2-4xy$ 3) $(x-y)^2+4xy$
4) $a^2+2ab+b^2-c^2$ 5) $a^2-b^2-c^2-2bc$ 6) $a^2-b^2-c^2+2bc$
7) $(e+f+g)^2-(2f+g)(2e+c)$ 8) $(p^2+pq+q^2)^2-(p^2-pq+q^2)^2$
9) $(x^2+xy-y^2)^2-(x^2-xy-y^2)^2$.

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

491. Teguriteks lahutamine uute liigete juurevõtmisel:

1) $m^3+n^3=m^3+m^2n-m^2n+mn^2-mn^2+n^2=m^3-m^2n+mn^2+$
$+m^2n-mn^2+n^3=m(m^2-mn+n^2)+n(m^2-mn+n^2)=(m+$
$+n)(m^2-mn+n^2)$
2) $m^3-n^3=m^3+m^2n+mn^2-m^2n-mn^2-n^3=m(m^2+mn+$
$+n^2)-n(m^2+mn+n^2)=(m-n)(m^2+mn+n^2)$.

492. Vormulite abil lahutada:

1) c^3+1 2) c^3-1
3) $27x^3+8y^3$ 4) $125u^3-64v^3$
5) m^6+n^6 6) m^6-n^6
7) $343t^3+1$ 8) $1-729a^3b^3$
9) $0{,}001p^3-0{,}125$.

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3.$$

493. 1) $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$
2) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$
3) $8p^3-12p^2q+6pq^2-q^3$
4) r^3-3r^2+3r+1
5) $125r^3+75r^2+15r+1$
6) $u^3-9u^2v^2+27u^2v^4-27v^6$
7) $\frac{1}{9}p^3+p^2q+9pq^2+9q^3$
8) $0{,}064p^3-2{,}4p^2q+30pq^2-125q^3$.

494.

$x^2+(a+b)x+ab=x^2+ax+bx+ab=(x+a)(x+b)$
$abx^2+(am+bn)x+mn=abx^2+amx+bnx+mn=(ax+n)\times$
$\times(bx+m)$
$a^2x^2+2amx+m^2-n^2=(ax+m)^2-n^2=(ax+m+n)(ax+$
$+m-n)$.

1) $r^2+2rs+s^2=(r^2+rs)+(rs+s^2)=r(r+s)+s(r+s)=(r+s)(r+s)=(r+s)^2$

2) $u^2-2uv+v^2=u^2-uv-uv+v^2=u(u-v)-v(u-v)=(u-v)(u-v)=(u-v)^2$

3) $p^2+(m+n)p+mn$

4) $p^2-(m+mn\,p+n)$

5) $p^2+(m-n)p-mn$

6) $p^2-(m-n)p-mn$

7) x^3+3x+2

8) x^2+6x+5

9) x^2+6x+5

10) y^2+5y+6

11) y^2-6y+8

12) z^2-4z+3

13) m^2-m-20

14) m^2+m-7

15) $u^2-11u+10$

16) u^2-u-30

17) $v^2+5v-14$

18) v^2+6v-7

19) a^4-a^2-6

20) $b^2+8b+16$

21) $b^2+14b+45$

22) $6+c-c^2$

23) $12-7c+c^2$

24) $m^2+mn-2n^2$

25) $p^3-4p^2q+3pq^2$

26) p^3-6p^2-36p

27) $-24+11r-r^2$

495.

1) $2x^2+5xy+2y^2$

2) $4x^2-17xy+4y^2$

3) $6y^2-13xy+6x^2$

4) $5u^2+24uv-5v^2$

5) $15u^2+13uv+2v^2$

6) $12u^2-17uv+6v^2$

7) $r^2-rs-56s^2$

8) $r^2-3rs-40s^2$

9) $a^4+14a^2b+48b^2$

10) $20c^2-31cd+12d^2$

11) $18c^2-cd-5d^2$

12) $6m^4-17m^2n+5n^2$.

496. Harjutused kordamiseks:

1) x^2-y^2-x+y

2) $x^4-y^4+2x^3y-2xy^3$

3) $u^3+u^2v-uv^2-v^3$

4) $u^3-uv^2-u^2v+v^3$

5) $u^3-u^2v+uv^2-v^3$

6) $a^3b-a^2b-ab^3+b^4$

7) $a^4+a^3b-a^2b^2-ab^3$

8) $p^6+p^4q-p^2q^2-q^3$

9) $1+q^2-q^4-q^6$

10) z^6-1

11) z^4+z^2-2

12) z^4-5z^2-36

13) $(u^2+3u+1)^2-1$

14) $v^5-v^3+v^2-1$

15) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)$

16) $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

17) $(x+y)^2-4xy$

18) $(3z^2-4u)^2+48z^2u$

19) $(p-q-r)^2+4p(q+r)$

20) $(p+q+r)^2-4(p-q)^2$

21) $(5a-9b)^2-(3a-7b)^2$

22) $(5x^2+18xy+17y^2)^2-(4x^2+12xy+8y^2)^2$

23) $(10x^2+26xy+29y^2)^2-(6x^2-2xy-20y^2)^2$

24) $(y + 5)y^2 - 25(y + 5)$
25) $z^2 - 2zu + 2uv - v^2$
26) $(u + v)^4 - (u - v)^4$
27) $(m + n)^4 - (m^2 - n^2)^2$
28) $(ax - by) - (bx - ay)^2$
29) $(bx + ay)^2 - (ax + by)^2$
30) $prx^2 + (ps + qr)x + qs$
31) $pqx^2 - (p + q)x + 1$
32) $48u^2 - 110uv + 63v^2$
33) $9x^4 + 6x^2 + 1$
34) $y^2 + (a - 1)y - 3(a + 2)$
35) $y^2 + (p + q + r)y + (p + q)r$
36) $10(x + y)(x - y) - 21xy$
37) $(1 - u^2)(3 - u) - (3u - u^2)(1 - u)$
38) $3ab(a + b) + a^3 + b^3$
39) $e^4 - e^3 + e - 1$
40) $1 - g^2 - g^3 + g^5$.

Mõned iseäralised juhused.

497. 1) $(ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 + (ax + by + cz)^2 = (x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)$ [Lagrange'i vormul].

2) $x^3 - 12x + 16 = x^3 - (16x - 4x) + 16 = x^3 - 16x + 4x + 16 = x(x^2 - 16) + 4(x + 4) = x(a+4) \times (x - 4) + 4(x + 4) = (x + 4)(x^2 - 4x + 4) = (x + 4) \times (x - 2)^2$

3) $d^3 - 3d + 2 = (d - 1)^2(d + 2)$

4) $d^3 - 3d - 2 = (d + 1)^2(d - 2)$

5) $p^3 + 3p^2 - 4$

6) $u^4 + u^2v^2 + v^4 = u^4 + u^3v + u^3v + u^2v^2 - u^2v^2 + u^2v^2 + uv^3 - uv^3 + v^4 = (u^2 - uv + v^2)(u^2 + uv + v^2)$

7) $s^4 + s^2 + 1 = (s^2 + s + 1)(s^2 - s + 1)$

8) $w^8 + w^4 + 1 = w^8 + w^6 - w^6 + w^4 + w^4 - w^4 + w^2 - w^2 + 1 = (w^4 - w^2 + 1)(w^4 + w^2 + 1)$

8) $4n^4 + 81 = (2n^2 - 6n + 9)(2n^2 + 6n + 9)$

9) $25x^4 + 109x^2 + 121 = (5x^2 - x + 11)(5x^2 + x + 11)$

10) $a^4 - 5a^2 + 49 = (a^2 - 8a + 7)(a^2 + 8a + 7) = (a + 1) \times (a - 1)(a + 7)(a - 7)$

11) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$

12) $36a^4 - 97a^2 + 36 = (6a^2 - 5a - 6)(6a^2 + 5a - 6) = (2a - 3)(3a + 2)(2a + 3)(3a - 2)$.

Võrrandused.

499. Otsustada järgnevad võrrandused:

1) $-3x = 12$ 2) $5x = -15$ 3) $-2y = -7$
4) $10z = 0$ 5) $9u = -3{,}6$ 6) $0{,}22 = -0{,}11u$
7) $-3{,}5 = 5x$ 8) $-0{,}8 = -10x$ 9) $\frac{1}{2}y = -\frac{3}{4}$
10) $-7y = -2\frac{4}{5}$ 11) $6z + 25 = 1$ 12) $2z - 5 = 25$
13) $9u + 5 = -4$ 14) $11 - 3u = 26$ 15) $14 + 7u = 0$
16) $-3v + 9 = 0$ 17) $9{,}7 = 1{,}3 - 7v$ 18) $-0{,}7 = 8p - 5{,}5$
19) $0 = 0{,}5p - 2$ 20) $\frac{x}{5} = 0$ 21) $\frac{x+4}{6} = 0$
22) $\frac{3x-18}{7} = 0$ 23) $5x + 12 = 2x + 3$ 24) $5 - 4x = 15 + x$
25) $3y - 15 = 17 - 2y$ 26) $4u + 5 = 19 - 3u$
27) $-13 + 11u = 7u - 15$ 28) $25 - 18r = 34 - 23r$
29) $3s + 15 + 11s = 4 + 7s - 10$ 30) $11 + 14x - 16 = 12x - 29 - 8x$
31) $y = 55 - 34y - 66 - 29y - 1 + 71y - 44$
32) $100 - 46u - 11 + 39u - 8 - 61u - 9 + 58u = 0$.

Vormulite arvsuuruste leidmine.

500. Vormulis

$$y = x^2 - px + q$$

on $p = -3$, $q = -2$ ja jäädavad, kuid x kasvab -10 kuni $+10$ täisarvude järjes. Leida y suurused, seades suuruste muutumise tabel.

y	x
$+68$	-10
$+52$	-9
.	.
.	.

$$y = x^2 + 3x - 2$$

501. $y = (x - \alpha)(x - \beta)$; $\alpha = -1$; $\beta = +3$; $x = -10, -9, \ldots +9, +10$.

502. Rahva arv maakonnas kasvab aastas keskmiselt m tuhande võrra; käesoleval ajal on rahva arv n tuhat. Mitme aasta pärast on rahva arv kasvades p tuhandeni jõudnud?

$n + mt = p$; $t = \frac{p-n}{m}$; $p = 180000$; $n = 150000$; $m = 5000$.

503. Temperatuur tõuseb x tundi, igas tunnis a kraadi võrra selle järel langeb y tunni jooksul temperatuur, igas tunnis b kraadi Missugune on lõputemperatuur, kui esialgne temperatuur oli n kaadi?

$t = n + ax - by$; $n = 10^0$; $a = 2^0$; $x = 6$; $b = 3$; $y = 5$.

IV. Murrud

§ 1. Algebralise murru mõiste.

Mõni avaldus, milles pärast kõigi võimalikkude lihtsustamiste lõpetust on veel jagamine mõnele tähele ehk tähte sisaldavale avaldusele, kutsutakse murruliseks avalduseks, näit.,

$$\left(\frac{a}{b}+c\right)^2; \quad \frac{t^2}{r^2}-\frac{r^2}{s^2}+t^2.$$

Avaldus, milles viimane tehe on jagamine mõnele tähele, kutsutakse algebraliseks murruks, näit.,

$$\frac{p}{q}; \quad \frac{a+c}{b}; \quad \frac{5m}{2n-1}.$$

Jagamise märk kirjutakse sel korrál horisontaalse kriipsuna, mille kohale pannakse jagatav ja mille alla — jagaja.

Et nullile jagamisel pole mõtet, siis puudub mõte ka murrul, mille nimetaja on null.

502. Leida algebralise murru $x=\frac{p}{q}$ suurused, kui: 1) $p=4$; $q=5$; 2) $p=1$; $q=3$; 3) $p=8$; $q=2$; 4) $p=9$; $q=7$; 5) $p=-2$; $q=6$; 6) $p=10$; $q=-6$; 7) $p=-12$; $q=-6$; 8) $p=-1{,}8$; $q=0{,}9$; 9) $p=-0{,}7$; $q=-1{,}1$; 10) $p=\frac{3}{4}$; $q=-1\frac{1}{2}$.

503. Kirjutada algebralise murru kujul jagamise resultaat:

1) $a:b$ 2) $5a^2:3b^2$ 3) $pqr:8xyz$
4) $8a^3b^2:11m^2n^3$ 5) $16:3uv^4$ 6) $5cd^2e:8s^2rt^2$.

504. Lihtsustada, kirjutades algebralise murruna:

1) $a^2b^2:ab$ 2) $a^4b^3:a^3b^2$ 3) $p^5q^4:p^5q$
4) $p^3q^6:p^3q^6$ 5) $xy^2:x^2y$ 6) $x^4y^2:x^7y$
7) $u^3v^3:v^3w^3$ 8) $u^2v^3w^4:u^4v^3w^2$.

505. Leida punktid arvjoonel, mis vastaksid arve:

1) $+\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; $+\frac{2}{5}$; $-\frac{2}{5}$; $+\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $+\frac{3}{7}$; $-\frac{3}{7}$; $+\frac{4}{9}$; $-\frac{4}{9}$

2) $+3\frac{1}{3}$; $-2{,}5$; $+4\frac{3}{7}$; $-0{,}9$; $+6{,}1$; $-6{,}1$; $7\frac{1}{2}$; $-8{,}8$.

506. Kui on antud n arvu: a_1, a_2, a_3, ... a_n, siis on nende arvude keskarv

$$a_m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots a_n}{n}.$$

Leida: 1) kõigi arvude 1, 2, 3, ... 10 keskarv; 2) temperatuuride keskarv juulikuu algupäivil: 20°C; 23°C; 22°C; 25°C; 25°C

507. Kasu kapitaalist a marka, mis p protsendiga t aastaks antud, on $b = \frac{apt}{100}$.

Arvata b, kui 1) $a = 300$; $p = 4$; $t = 3$; 2) $a = 750$; $p = 5$; $t = 8$.

§ 2. Murdude teisendamine.

Ühine kõige alam jagatav ja ühine kõige ülem jagaja.

508. Leida ühine kõige alam jagatav ja ühine kõige ülem jagaja:

1) 84 ja 36
2) 96 ja 32
3) 63 ja 20
4) $pq+pr$ ja $pq-pr$
5) $zu-zv$ ja $uw-vw$
6) $m-n$ ja $n-m$
7) $(x-y)^2$ ja $(y-x)^2$
8) $1-a^2$ ja a^2-1
9) k^4-l^4 ja k^2-l^2
10) a^2-b^2 ja a^3-b^3
11) a^2-b^2 ja $(a-b)^2$
12) $6a^2b+3ab^3+3a^2$ ja $4b^3-8ab^2+4a^2b$
13) $6(u-1)(u-2)$ ja $10(1-u)(2-u)$
14) $(p-q)(q-r)(r-p)$ ja $(q-p)(r-q)(p-r)$
115) x^2-2x-3 ja x^2+3x+2
16) x^2+x-6 ja x^2-5x+6
7) $x^2-8x+15$ ja x^2-4x-5
18) $12-7x+x^2$ ja $7x-x^2-12$
19) $4x^2-4x-3$ ja $4x^2-8x-5$
20) $56-28x+6x^2$ ja $21-37x+12x^2$
21) $p^2+2pq-r^2+q^2$ ja $p^2+2pr-q^2+r^2$
22) $a^2-(b+c)^2$ ja $b^2-(a+c)^2$.

509. Ühine kõige alam jagatav leida avaldustele:

1) $a-b$; a^2-b^2; $a+b$;
2) $a+b$; a^2-b^2; $(a+b)^2$;
3) $m+1$; m^2-1; m^3-1; $1-m$;
4) $m-1$; $1-m^2$; m^3+1; $-m-1$;
5) $(p-q)(q-r)$; $(r-p)(r-p)$; $(r-q)(p-r)$?

Murdude koondamine ehk lühendamine.

510. Lihtsustada murrud:

1) $\frac{36}{16}$
2) $\frac{-28}{84}$
3) $\frac{64}{-24}$
4) $\frac{-18}{-63}$
5) $\frac{6a}{a}$
6) $\frac{4b}{4}$
7) $\frac{5pq}{q}$
8) $\frac{x^2y}{x}$
9) $\frac{8u^2v}{6uv}$
10) $\frac{abc}{abd}$
11) $\frac{-15u^3v^2}{25uv^2}$
12) $\frac{9a^2b^2}{-27a^2b^2}$
13) $\frac{33ab^2c^5}{44ab^2c^3}$
14) $\frac{-16a^2b}{-24ab^2}$
15) $\frac{7a^2bc^3}{7ab^2c^3}$
16) $\frac{-42pq^4r^2}{14p^2q^4r}$
17) $\frac{18p^5q^2r^3}{-72p^3qr^3}$
18) $\frac{0{,}48xy^4}{0{,}24x^4y}$
19) $\frac{0{,}22z^5u^3v}{1{,}32z^6u^4v^2}$
20) $\frac{256p^{10}q^8}{-768pq}$
21) $\frac{625z^8u^3v^5}{125v^5u^8z^3}$
22) $\frac{-48am^3x^4}{192bm^3x^5}$

511. Lihtsustada murrud ja teha murru nimetajad positiivseiks:

1) $\frac{a}{-a}$
2) $\frac{cd}{-c^2d}$
3) $\frac{m}{-m^2}$
4) $\frac{10pq^2r^3}{-12p^5q^5}$
5) $\frac{-14xy^4}{-21xy^3}$
6) $\frac{8{,}4z^2u^5v^3}{-0{,}7z^3u^5v^2}$
7) $\frac{-9{,}9ab^2c^5d^3}{-1{,}1a^8b^6c^4d^2}$
8) $\frac{\frac{1}{2}p^5q^2r^5s^7}{-\frac{1}{2}p^6q^4rs^8}$

512. Murrud koondada, kui võimalik:

1) $\frac{a+b}{a+b}$
2) $\frac{a-b}{b-a}$
3) $\frac{m^3-mn}{n^2-mn}$
4) $\frac{pr-qr}{qs-ps}$
5) $\frac{pr+qr}{pr-qr}$
6) $\frac{p^2-pq}{p^2+pq}$
7) $\frac{xz-yz}{yz-xz}$
8) $\frac{5-5u}{4-4u}$
9) $\frac{4u^2+4u}{4u^2-4u}$
10) $\frac{a^2b-ab^2}{3a^2b-3a^3}$
11) $\frac{5a^3-15a^2b}{12b^3-4ab^2}$
12) $\frac{16p^2q^2-24q^4}{18p^2q^2-12p^4}$
13) $\frac{x-x^3}{x-1}$
14) $\frac{x^2-y^2}{x+y}$
15) $\frac{1-z^2}{1+z}$
16) $\frac{z+z^2}{z^2-1}$
17) $\frac{(u-v)^2}{u^2-v^2}$
18) $\frac{(u+1)^2}{1-u^2}$
19) $\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}$
20) $\frac{c^3-cd^2}{d^3-cd^2}$
21) $\frac{m+n}{m-n}$

22) $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$ 23) $\frac{(p-m)^2}{p^2-mp}$ 24) $\frac{(n-q)^2}{(q-n)^2}$

25) $\frac{(m+n)^2}{m^2-n^2}$ 26) $\frac{2rs+r^2+s^2}{r^2+s^2}$ 27) $\frac{s^2-r^2}{s^2+r^2-2rs}$

28) $\frac{u^2+1-2u}{u^2-1}$ 29) $\frac{1-5uv(2-5uv)}{25u^2v^2-1}$ 30) $\frac{a^2-b^3}{a^3+b^2}$

31) $\frac{a^2-ab+b^2}{a^3+b^3}$ 32) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ 33) $\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

34) $\frac{c^3+d^3}{c^2+d^2}$ 35) $\frac{m^4-n^4}{m^2-n^2}$ 36) $\frac{m^2+n^2}{m^4-n^4}$

37) $\frac{p^4+q^4}{p^2+q^2}$ 38) $\frac{p^4-q^4}{p^3-q^3}$ 39) $\frac{p^3+q^3}{p^4-q^4}$

40) $\frac{r^6-s^6}{r^2-s^2}$ 41) $\frac{r^6+s^6}{r^3+s^3}$ 42) $\frac{r^4-s^4}{s^6-r^6}$

43) $\frac{r^6+s^6}{r^2+s^2}$ 44) $\frac{am-bm+cm}{cn-an-bn}$ 45) $\frac{a^2mp+amp-mp}{anq-nq+a^2nq}$

46) $\frac{xy}{x^2+xy}$ 47) $\frac{y^3-y^2}{x^2y^2}$ 48) $\frac{12z^2u-28zu^2}{28z^2u-12zu^2}$

49) $\frac{27m^2y-63mxy}{18mny+81my^2}$ 50) $\frac{30a^2bx-48ab^2y}{32bxy^2-20ax^2y}$ 51) $\frac{21m^2-15mn}{9m^2-30mn+25n^2}$

52) $\frac{u^2-uv-56v^2}{u^2-7uv-8v^2}$ 53) $\frac{6r^2+13rs-5s^2}{6r^2+17rs+5s^2}$ 54) $\frac{2r^2-9rs-5s^2}{4r^2+8rs+3s^2}$

55) $\frac{16a^3b-121ab^2}{4a^3b-7a^2b^2-11ab^3}$ 56) $\frac{9x^2-7xy-2y^2}{45x^2+10xy}$ 57) $\frac{4c^4-3c^2-1}{4c^4+5c^2+1}$

58) $\frac{ax-bx+ay-bx}{ax+bx+ay+by}$ 59) $\frac{p^2-pq-pr+qr}{pr-p^2+pq-qr}$ 60) $\frac{r^2-3r+2}{r^2-4r+3}$

61) $\frac{1-4r-5r^2}{1-6r-5r^2}$ 62) $\frac{15uv-21uz-20vz+28z^2}{16vz-12uv-20z^2+15zu}$.

513. Otsustada võrrandused, kõige esite koondades murrud:

1) $\frac{x}{8}=\frac{48}{96}$ 2) $\frac{28}{63}=\frac{x}{9}$ 3) $\frac{1}{x}=\frac{34}{102}$

4) $\frac{55}{33}=\frac{5}{x}$ 5) $\frac{1}{x}=\frac{b}{ab}$ 6) $\frac{ax}{5ba}=\frac{3ab}{5b^2}$.

514. Tehes murrud ühenimeliseks, leida x järgnevaist võrrandusist:

1) $\frac{x}{12}=\frac{1}{3}$ 2) $\frac{3}{5}=\frac{x}{45}$ 3) $\frac{x}{18}=\frac{4}{9}$

4) $\frac{9}{10}=\frac{x}{100}$ 5) $\frac{14}{x}=\frac{7}{3}$ 6) $\frac{5}{11}=\frac{5}{x}$

7) $\frac{x}{9m}=\frac{1}{3}$ 8) $\frac{4}{5}=\frac{x}{20m^2}$ 9) $\frac{15a^2}{x}=\frac{3a}{m^2}$

10) $\frac{10m}{3a}=\frac{a}{x}$.

515. Võrduses $y=\frac{1}{x}$ kasvab x lõpmata: 1, 2, 3, ... Missugused on järjestikkused y-suurused, ja milleks püüab saada y, kui x lõpmata kasvab?

516. Võrdusis $y=\frac{1+x}{2+x}$ ja $y=\frac{1-x}{2-x}$ kasvab x lõpmata: 1, 2, 3, ... Missugused on järjestikkused y-suurused, ja milleks püüab saada y, kui x kasvab lõpmata?

517. Kuidab muutub y, vormulites: $y=\frac{1-x}{1+x}$, $y=\frac{x+2}{x-2}$, kui x kasvab arvust -5 kuni $+5$? Missugusel korral puudub vormulitel arvsuurus?

518. Leida y-suurused, kui x kasvab täisarvude järjes arvust -4 kuni $+4$ järgnevais vormulites ja näidata, missuguse x-i korral on y null ja mil korral ilma mõtteta.

1) $y=\frac{x+2}{x-2}$ 2) $y=\frac{x-3}{x-1}$ 3) $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

4) $y=\frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ 5) $y=\frac{x^2-5x-6}{x^2+5x+6}$ 6) $y=\frac{x-1}{x+1}$

7) $y=\frac{x+4}{x-4}$ 8) $y=\frac{(x+1)(x-3)}{(x-2)(x+4)}$ 9) $y=\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}$

10) $y=\frac{(x+1)^2}{x^2-1}$ 11) $y=\frac{x^2-4}{(x-2)^2}$ 12) $y=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

13) $y=\frac{(x+1)^3}{x^3+1}$

§ 3. Murdude liitmine ja lahutamine.

Murdude liitmine ja lahutamine võrdsete nimetajatega.

Liita kaks algebralist murdu võrdsete nimetajatega tähendab leida niisugune murd, mille lugeja on antud murdude lugejate summa, kuid nimetaja on endine.

519. Katsuda võrdust

$$\frac{a}{m}+\frac{b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{a+b-c}{m},$$

kui

	a	b	c	m
1)	5	8	3	10
2)	6	−5	−12	4
3)	−7	+3	−6	−2

520. Lihtsustada avaldused:

1) $\frac{4}{7}+\frac{1}{7}$ 2) $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}$ 3) $\left(\frac{3}{8}+\frac{5}{8}\right)+\frac{1}{8}$

4) $\frac{3}{8}+\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{8}\right)$ 5) $\frac{7}{10}+\left(\frac{3}{10}-\frac{4}{10}\right)$ 6) $\left(\frac{7}{10}+\frac{3}{10}\right)-\frac{4}{10}$

7) $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}$ 8) $\frac{p}{n}-\frac{q}{n}$ 9) $\frac{p}{n}+\frac{q}{n}+\frac{r}{n}$

10) $\left(\frac{p}{n}+\frac{q}{n}\right)+\frac{r}{n}$ 11) $\frac{p}{n}+\left(\frac{q}{n}+\frac{r}{n}\right)$ 12) $\frac{p}{n}+\left(\frac{q}{n}-\frac{r}{n}\right)$

13) $\left(\frac{p}{n}+\frac{q}{n}\right)-\frac{r}{n}$ 14) $\left(\frac{p}{n}-\frac{q}{n}\right)+\frac{r}{n}$ 15) $\frac{p}{n}-\left(\frac{q}{n}+\frac{r}{n}\right)$

16) $\frac{p}{n}-\left(\frac{q}{n}-\frac{r}{n}\right)$ 17) $\left(\frac{p}{n}-n\right)-\frac{r}{n}$

521. Lihtsustada avaldused:

1) $\frac{1}{n}+\frac{a+2}{n}+\frac{2a+3}{n}+\frac{3a+4}{n}$

2) $\frac{x-1}{y}+\frac{x-3}{y}+\frac{x-5}{y}+\frac{x-7}{y}$

3) $\frac{5u-2v}{z}-\frac{2u-5v}{z}-\frac{3u+3u}{z}$

4) $\frac{p+q+r}{4s}+\frac{p-q+r}{4s}+\frac{-p+q-r}{4s}+\frac{p+q-r}{4s}$

5) $\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{a-b+c}{a+b+c}+\frac{-a+b+c}{a+b+c}$

6) $\left(\frac{k+1}{n}\right)^2-\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(\frac{n-k}{n}\right)^2-\left(\frac{n-k+1}{n}\right)^2$.

Murdude liitmine ja lahutamine.

522. 1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

3) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}$ 4) $\frac{5}{9}-\frac{1}{3}+\frac{2}{18}$

5) $\frac{6}{7}-\frac{6}{14}+\frac{6}{28}$ 6) $\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}$

7) $\frac{4}{15}-\frac{3}{25}-\frac{2}{35}$ 8) $\frac{7}{60}-\frac{5}{72}+\frac{1}{48}$.

523. 1) $\frac{2x}{5}+\frac{x}{5}$ 2) $\frac{5y}{3}+\frac{2y}{3}$

3) $\frac{6z}{7}-\frac{z}{7}$ 4) $\frac{10u}{3}-\frac{4u}{3}$

5) $\frac{a+2}{2}+\frac{a-2}{2}$ 6) $\frac{a+5}{3}-\frac{a-1}{3}$

7) $\frac{4a-3}{5}+\frac{a+3}{5}$ 8) $\frac{3-5a}{4}-\frac{3-9a}{4}$

9) $\frac{6a+5b}{10}+\frac{9a-15b}{10}$ 10) $\frac{2a-5b}{7}-\frac{9a-2b}{7}$

11) $\frac{3c}{5}+1$ 12) $\frac{4c}{7}-1$

13) $3-\frac{5c}{2}$ 14) $p+\frac{3p}{5}$

15) $p-\frac{2p}{3}$ 16) $\frac{3p}{4}+p$

17) $\frac{2r}{3}+s$ 18) $r-\frac{6s}{5}$

19) $\frac{4x}{7}-\frac{8x}{7}+\frac{11x}{7}$ 20) $\frac{2x}{5}-\frac{6x}{5}-\frac{x}{5}$

21) $\frac{3m}{a}+\frac{2m}{a}$ 22) $\frac{7n}{b}-\frac{10n}{b}$

23) $\frac{1}{x}+\frac{a}{x}$ 24) $\frac{4a}{x}-\frac{3a}{x}$

25) $\frac{6a}{x}-\frac{7a}{x}+\frac{2a}{x}$ 26) $\frac{3a}{5x}+\frac{8a}{5x}-\frac{11a}{5x}$

27) $\frac{2a-3}{4x}+\frac{8a+5}{4x}-\frac{2a+2}{4x}$ 28) $\frac{3a-b}{8x}-\frac{5a+b}{8x}-\frac{a-b}{8x}$

29) $\frac{-7c+d}{3c}+\frac{8c-2d}{3c}-\frac{2d+c}{3c}$

30) $\frac{p}{q}+1$.

31) $\frac{p+3q}{3q}-1$

32) $r+\frac{1}{r}$

33) $\frac{r^2+4}{r}-4$

34) $\frac{3x^2-4y^2}{x+y}-\frac{3y^2-xy}{x+y}-\frac{2x^2-xy}{x+y}$

35) $\frac{5xy-2y^2}{x-y}+\frac{7x^2-3xy}{x-y}-\frac{8x^2-y^2}{x-y}$

36) $\frac{3u^2-4uv-4v^2}{u^2-v^2}-\frac{5u^2+uv-4v^2}{u^2-v^2}-\frac{v^2-uv-2u^2}{u^2-v^2}$

37) $\frac{8uv-u^2+5v^2}{u^2-v^2}-\frac{5u^2-2uv+v^2}{u^2-v^2}+\frac{u^2-2uv}{u^2-v^2}$

38) $\frac{3z^3-5}{z^2-1}+\frac{4z^2-z+4}{z^2-1}-\frac{3z^3+2z^3}{z^2-1}$

39) $\frac{(r+s)^2}{2rs}-\frac{(r-s)^2}{2rs}$

40) $\frac{(r+s)^2}{r^2+s^2}+\frac{(r-s)^2}{r^2+s^2}$

41) $\frac{4}{a}-4+a$

42) $\frac{25x^2+9a^2}{a}+30x$

43) $8ab+\frac{1}{2ab}-4.$

524.

1) $\frac{a}{6}-\frac{5b}{3}-\frac{3a}{5}+\frac{7b}{15}$

2) $\frac{2p}{7}+\frac{3q}{2}-\frac{4p}{5}-\frac{7q}{10}$

3) $\frac{2r}{3}-\frac{s}{6}+\frac{5r}{9}-\frac{3s}{4}$

4) $\frac{x}{4}-\frac{y}{2}-\frac{5x}{6}+\frac{3y}{5}$

5) $\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$

6) $\frac{3}{u}-\frac{5}{v}$

7) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1$

8) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$

9) $\frac{3p}{8}-\frac{p}{q}$

10) $\frac{1}{q}-\frac{1}{4q}$

11) $\frac{4m}{3a}-\frac{3m}{4a}$

12) $\frac{m}{ab}+\frac{n}{ac}$

13) $\frac{8}{ab}+\frac{5}{ac}$

14) $\frac{3b}{5a}-\frac{3b}{8a}$

15) $y-\frac{1}{2}+\frac{y}{4x}$

16) $\frac{1}{z}+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}$

17) $\frac{5}{a}-\frac{3}{b}-\frac{4}{c}$

18) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$

19) $\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}$

20) $\frac{5p}{8q}-\frac{4p}{9q}$

21) $\frac{4xy}{7am}-\frac{xy}{2am}$

22) $\frac{5m}{2x}-\frac{7m}{6x}+\frac{4m}{3x}$

23) $\frac{7n}{8y}-\frac{n}{3y}-\frac{n}{6y}$

24) $\frac{4p}{qr}-\frac{5q}{pr}+\frac{3r}{pq}$

25) $\frac{pq}{5r}+\frac{pr}{4q}-\frac{qr}{3p}$

26) $\frac{r+s}{2}+\frac{r-s}{2}$

27) $\frac{r+s}{2}-\frac{r-s}{2}$

28) $\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u-v}$

29) $\frac{1}{u-v}-\frac{1}{u+v}$

30) $\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}$

31) $\frac{3x-2}{3x-y}-\frac{2x-3}{2x+y}$

32) $\frac{a+b}{2m}-\frac{a-b}{3m}$

33) $\frac{6a-7}{8m}+\frac{4a-5}{6m}$.

525.

1) $\frac{3a-5b+4}{12}+\frac{5a+b-3}{18}-\frac{2a-6b-7}{24}$

2) $\frac{6a-5}{6}-\frac{4+9b}{8}+\frac{3a-7b}{18}-\frac{-1+a}{2}-\frac{8b-11}{12}$

3) $\frac{3p+4q}{15}-\frac{4q-3s}{6}-\frac{7p+2q}{3}+\frac{2q-5s}{10}$

4) $\frac{4(x-8)}{5}+\frac{5(3x+1)}{3}-\frac{3(7x-10)}{4}$

5) $\frac{u^2-v^2}{7}+\frac{(u-v)^2}{5}-\frac{(u+v)^2}{10}$

6) $\frac{(u-v)^2}{3}-\frac{(u+v)^2}{4}+\frac{u^2+v^2}{6}$

7) $\frac{5a-7b}{10a}+\frac{a-2b}{4b}$

8) $\frac{3c-2d}{4d}-\frac{3c+2d}{6c}$

9) $\frac{m+5a}{4n}-\frac{3n-5a}{4n}-\frac{a-3m}{4m}+\frac{a+n}{m}$

10) $\frac{p-6q}{4qr}+\frac{9p+2q}{6pr}-\frac{4q-r-6p}{3pq}+\frac{r-12p}{6pq}$

11) $\frac{1-2y-3z}{6yz}+\frac{5x+3}{15xz}-\frac{y-5}{10xy}+\frac{1}{2y}+\frac{1}{10x}$

12) $\frac{25u-24v}{12v^2}-\frac{v}{u^2}-\frac{3u-4v}{uv}-\frac{v}{15u^2}$

13) $\frac{a(a-4b+6c)}{4bc}+\frac{5a-4b}{5c}+\frac{8b^2-15ac-30c^2}{10bc}+\frac{12c^2-a^2}{4bc}$.

Teisendada üksliigeteks:

526.

1) $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a+b}$

2) $\frac{m}{m+n} - \frac{n}{m+n}$

3) $\frac{p}{p+q} + \frac{q}{p-q}$

4) $\frac{s}{r-s} + \frac{s}{s-r}$

5) $\frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-x}$

6) $\frac{6}{x-y} - \frac{4}{y-x}$

7) $\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2} - \frac{u-v}{u+v}$

8) $\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2} - \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$

9) $\frac{1}{(R-r)^2} - \frac{1}{R^2}$

10) $\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$

11) $\frac{n+1}{n} - \frac{n}{n-1}$

12) $\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2} - \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}$

13) $\frac{u+v}{u-v} + \frac{u+v}{v-u}$

14) $\frac{3m+7n}{3m-7n} - \frac{3m-7n}{3m+7n}$

15) $\frac{6}{a} - \frac{5}{a-b}$

16) $\frac{2}{m+n} - \frac{1}{n}$

17) $\frac{x}{a-1} - \frac{ax}{a^2-1}$

18) $\frac{3}{y^2-4} - \frac{4}{3}$

19) $\frac{5}{2x} - \frac{4}{3-x}$

20) $\frac{5z-1}{1-5z} - \frac{2z-3}{3-2z}$

21) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{x-4}$

22) $\frac{x+1}{y+1} - \frac{x+2}{y+2}$

23) $\frac{7}{8(a-b)} + \frac{8}{9(b-a)}$

24) $\frac{5}{6(x+1)} - \frac{3}{8(x-1)}$

25) $\frac{4a-1}{3a-3} + \frac{a-2}{2a-2} - \frac{3a-4}{3a-3}$

26) $\frac{2b+3}{3b-3} + \frac{b-4}{6b-6} - \frac{b+6}{18b-16}$

27) $\frac{x}{x+1} - \frac{x}{x-1} + \frac{2}{x^2-1}$

28) $\frac{3m-2}{m^2-4} - \frac{2m+1}{m+2} + \frac{m-7}{2-m}$

29) $\frac{1+m}{1-m} - \frac{1-m}{1+m} + \frac{1+m^2}{1-m^2}$

30) $\frac{a}{a-b} - \frac{-b}{b-a}$

31) $\frac{8}{p-q} + \frac{7}{q-p}$

32) $\frac{r^2+rs+s^2}{r^2-s^2} + \frac{r^2-rs+s^2}{s^2-r^2}$

33) $\frac{u^2}{u-v} + \frac{2uv}{v-u} - \frac{v^2}{v-u}$

34) $\frac{5}{2u-2v} + \frac{4}{3v-3u} - \frac{7}{6u-6v}$

35) $\frac{2u}{3u-4v} - \frac{2v}{4v-3u} - \frac{u}{6u-8v}$

36) $\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{a-b}{a^2-ab+b^2}$

37) $\frac{x}{x^2+3x-4} + \frac{x}{x^2+5x+4}$

38) $\frac{y}{x^2-29} - \frac{x}{x^2+8x+15}$

39) $\frac{1}{(p-q)(q+r)} + \frac{1}{(q-p)(p+r)}$

40) $\frac{x+7}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{5}{1-x}$

41) $\frac{5}{2y-3} - \frac{1}{3-2y} - \frac{6y}{2y^2-y-3}$

42) $\frac{1}{z-1} + \frac{3}{z} - \frac{4}{z+1}$

43) $\frac{5}{u-1} - \frac{3}{u-2} - \frac{2}{u-3}$

44) $\frac{2}{m-a} + \frac{1}{m-b} - \frac{3}{m-c}$

45) $\frac{7}{m-a} - \frac{9}{m-b} + \frac{2}{m-c}$

46) $\frac{2}{(x-1)^2} - \frac{1}{x^2-1} + \frac{5}{x} - \frac{9}{1-x}$

47) $\frac{5}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{1-x^2} - \frac{3}{1+x}$

48) $\frac{3p}{3p-2q+r} - \frac{2q}{3p+2q-r} - \frac{9p^2+4q^2-r^2}{9p^2-(2q-r)^2}$

49) $\frac{7r-3s+1}{7r+3s-1} - \frac{7r+3s-1}{7r-3s+1} + \frac{28(1-3s)}{49r^2-(3s-1)^2}$

50) $\frac{x^2}{x^2+y^2+xy} - \frac{y}{x-y} - \frac{xy^2}{y^3-x^3}$

51) $\frac{u(v-u)}{u^3+v^3} + \frac{1}{u+v} + \frac{u-v}{u^2-uv+v^2}$

52) $\frac{1}{(a-c)(b-c)} + \frac{1}{(a-b)(c-b)} + \frac{1}{(a-b)(a-c)}$

53) $\frac{a+b}{(a-c)(b-c)} + \frac{b+c}{(a-b)(a-c)} + \frac{a+c}{(a-b)(c-b)}$

54) $\frac{1}{(x-y)(z+y)} - \frac{1}{(v-x)(x-z)} - \frac{1}{(x-z)(z-y)}$

55) $\frac{y+z}{(x-y)(x-z)} - \frac{x+y}{(x-y)(z-y)} + \frac{x+y}{(x-z)(v-z)}$

56) $\frac{5u-2v}{6u^2-9uv} - \frac{3v-2u}{4uv-6v^2} - \frac{v^2+u^2}{2u^2v-3uv^2} - \frac{1}{6u}$

57) $\frac{4u-v}{uv} + \frac{3u-5v}{8v^2-48uv} - \frac{u+8v}{12u^2-2uv} + \frac{1}{8v}$

58) $\frac{a-b}{a+b} - 2 - \frac{a+b}{b-a}$

59) $\frac{b}{a-b} + \frac{a}{a+b} - \frac{a^2+5b^2}{3}$

60) $1 - \frac{d-c}{c+d} - \frac{c+d}{c-d} - \frac{c^2-5d^2}{c^2-d^2}$

61) $\frac{c+d}{c-d} + \frac{3c^2+d^2}{c^2-d^2} + \frac{d-c}{c+d} - 1$

62) $\frac{m^2+mn+n^2}{m^3+n^3} - \frac{1}{m+n} + \frac{m^2-mn+n^2}{m^3+n^3} + \frac{1}{m-n}$

63) $\frac{m+n}{m^2-mn+n^2} - \frac{m-n}{m^2+mn+n^2} + \frac{1}{m-n} - \frac{1}{m-n}$

64) $\frac{4p-3q}{2p-5} - \frac{2p-5q}{4p-3q} + \frac{34pq-20p^2-2q^2}{(2p-5q)(4p-3q)} + 1$

65) $\frac{2p-7q}{3p-4q} - \frac{3p+4q}{2p+7q} - 2 - \frac{23q^2-22pq-20p^2}{(3p-4q)(2p+7q)}$

66) $\frac{55r^2-30sr}{10r-6s} - \frac{3rs}{5r-3s} + \frac{9s^2}{50r-30s} - 3s - \frac{5r-3s}{10}$

67) $\frac{109u^2+66uv}{24u+18v} + \frac{3v^2}{16u^2+12v} - \frac{4u-3v}{12} + 3v$

68) $\frac{1}{a^3+a-2} + \frac{2}{a^2+3a+2} - \frac{3}{a^2-4}$

69) $\frac{2}{a^2+a-6} - \frac{1}{a^2-a-6} - \frac{1}{a^2-9}$

70) $\frac{1}{10(c+1)} - \frac{1}{2(c-1)} + \frac{7}{5(c-4)}$

71) $\frac{m+n}{2n^2-m^2-mn} + \frac{2n-m}{m^2-n^2} - \frac{n-m}{m^2+3mn+2n^2}$

72) $\frac{t-1}{9(1-t+t^2)} - \frac{1}{9(1+t)} - \frac{1}{9(1+t)^2} + \frac{1}{3(1-t+t^2)^2}$.

Täisavalduse eraldamine algebralisest murrust.

527. Vormulid: 1) $\frac{x^4}{x^2-x+1}$; 2) $\frac{x^3}{x^2+1}$ kujutada täisavalduse ja murru summana, kus x-i aste murru lugejas on alam, kui sellesama tähe ülem aste murru nimetajas.

528. Eraldada täisavaldused algebralisist murdudest:

1) $\frac{x+1}{x}$
2) $\frac{x}{x+1}$
3) $\frac{y-1}{y}$
4) $\frac{y}{y-1}$
5) $\frac{2m-1}{m}$
6) $\frac{2m}{m-1}$
7) $\frac{p+1}{p-1}$
8) $\frac{p-1}{p+1}$
9) $\frac{a^2+1}{a^2-1}$
10) $\frac{a^2-1}{a^2+1}$
11) $\frac{r^2-r+1}{r-1}$
12) $\frac{s^3+s^2+s+1}{s^2+s+1}$
13) $\frac{u^5+1}{u-1}$
14) $\frac{v^3+v^2-v+4}{v+2}$

Võrrandused.

529. Lahendada järgnevad võrrandused:

1) $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}=6$

2) $\frac{1}{6}x+\frac{1}{4}x=5$

3) $\frac{y}{3}-\frac{y}{5}=2$

4) $\frac{1}{6}y-\frac{1}{8}y=1$

5) $\frac{5}{6}z-\frac{1}{2}z=2$

6) $\frac{5}{7}u-1=\frac{2}{3}u$

7) $\frac{3v}{5}+7=\frac{5v}{6}$

8) $3\frac{1}{2}x-2\frac{2}{3}x=5$

9) $5\frac{1}{2}x=6\frac{3}{5}x+11$

10) $3\frac{1}{3}z+4\frac{4}{9}z=4\frac{16}{21}$

11) $5\frac{2}{3}y-2\frac{1}{4}y=10\frac{1}{4}$

12) $4{,}8u-3{,}4u=2{,}8$

13) $\frac{2}{5}v+6=\frac{3}{2}v-5$

14) $\frac{x}{3a}+\frac{x}{a}=8$

15) $\frac{4}{7}v+7=1\frac{1}{3}v+1\frac{2}{3}$

16) $\frac{y}{3b}-\frac{y}{5b}=2$

17) $\frac{c}{z}+d=\frac{d}{z}+c$

18) $\frac{m}{x}+\frac{n-x}{x}=\frac{n-m}{x}+1$

19) $5\left(\frac{y}{3}-5\right)=3\left(\frac{y}{5}-3\right)$

20) $m\left(2-\frac{x}{7}\right)-n\left(7-\frac{x}{2}\right)=0$

21) $\frac{x+b}{a}-\frac{x+a}{b}=2$

22) $\frac{y}{m}+\frac{x}{n}=m+n$

23) $a\left(\frac{z}{a}-2\right)=z\left(\frac{1}{2}-\frac{a}{z}\right)$

24) $5\left(\frac{u}{3}-8\right)=7\left(\frac{u}{3}-8\right)\left(\frac{u}{8}-3\right)$

25) $\frac{4}{15}x-7+\frac{1}{3}x=11-\frac{2}{5}x+15$

26) $\frac{3}{7}y-5-\frac{1}{4}y=36-4\frac{1}{2}y+90$

27) $\frac{3}{4}x-6\frac{1}{2}+\frac{2}{3}x-4\frac{5}{6}+8\frac{1}{2}x=8\frac{1}{2}$

28) $8\frac{1}{6}-\frac{2}{3}x+1\frac{3}{4}+6\frac{1}{2}x+7\frac{7}{12}=0$

29) $\frac{5}{z}-5\frac{1}{4}+\frac{z-7}{2}=2\frac{5}{8}-\frac{5-2z}{4}-9\frac{1}{2}$

30) $\frac{2x+3}{3x}-4\frac{1}{3}+\frac{8x-5}{2x}+2\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$.

§ 4. Murdude kasvatamine ja jagamine.

Kasvatamine.

I. $\frac{a}{b} \cdot m = \frac{am}{b}$; II. $m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}$; III. $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}$.

Jagamine.

I. $\frac{a}{b} : m = \frac{a}{bm}$; II. $m : \frac{a}{b} = \frac{mb}{a}$; III. $\frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \cdot \frac{y}{x} = \frac{ay}{bx}$;

IV. $a : b = a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

530. Näidata, kuidas leida ja missugune on resultaat:

1) $\frac{a}{b} \cdot 3$ 2) $\frac{x}{y} \cdot \overline{4}$ 3) $m \cdot \frac{3}{4}$ 4) $p \cdot \frac{2}{3}$

5) $5 \cdot \frac{c}{d}$ 6) $\overline{3} \cdot \frac{r}{s}$ 7) $\frac{2}{5} \cdot n$ 8) $\left(-\frac{5}{6}\right) \cdot q$

9) $\frac{4}{9} \cdot \frac{a}{b}$ 10) $\frac{3}{b} \cdot \frac{x}{7}$ 11) $\frac{2}{b} \cdot \frac{5}{y}$ 12) $\frac{-7}{b} \cdot \frac{x}{8}$

13) $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{5}$ 14) $\frac{a}{-6} \cdot \frac{-1}{y}$ 15) $\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y}$.

531. Leida ümberpöördud arvud järgnevaile arvudele:

5; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{7}$; $\frac{9}{5}$; $-\frac{2}{5}$; $-\frac{7}{4}$; 1; $0{,}3$; $5{,}4$; -1; $-1{,}5$;

Kuidas asenduvad arvjoonel punktid, mis mõnda arvu ja tema ümberpöördud arvu vastavad?

532. Leida ümberpöördud suurused järgnevaile suurusile:

$\frac{a}{b}$; $\frac{1}{m}$; m; $-\frac{p}{q}$; $-\frac{1}{x}$.

533. Võrrelda suurusi: 1) 3 ja $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{5}$ ja $\frac{5}{2}$; 3) a ja $\frac{1}{a}$; 4) $-m$ ja $-\frac{1}{m}$.

534. Lihtsustada avaldused:

1) $\frac{1}{2} \cdot 2$ 2) $\frac{3}{7} \cdot 7$ 3) $2\frac{2}{3} \cdot 6$ 4) $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}$

5) $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}$ 6) $2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{2}{5}$ 7) $\frac{x}{4} \cdot 4$ 8) $\frac{3x}{5} \cdot 15$

9) $\frac{ab}{c} \cdot c$ 10) $10x \cdot \frac{1}{5}$ 11) $18y \cdot \frac{5}{9}$ 12) $\frac{6}{7} \cdot 14x$

13) $\frac{4}{5}a \cdot 3b$ 14) $11x \cdot 2\frac{3}{4}$ 15) $\frac{4}{m} \cdot 9$ 16) $\frac{a}{3b} \cdot 9$

17) $\frac{a}{6b} \cdot 8b$ 18) $15m \cdot \frac{x}{2mn}$ 19) $20x \cdot \frac{a}{15xy}$ 20) $a \cdot \frac{a}{b}$

21) $4a \cdot \frac{b}{5a}$ 22) $x \cdot \frac{1}{xy}$ 23) $\frac{m}{a} \cdot ma$ 24) $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z}$

25) $\frac{5x}{y} \cdot \frac{y}{x}$ 26) $\frac{3a}{4} \cdot \frac{4a}{3}$ 27) $\frac{10ab}{7cd} \cdot \frac{7a}{15c}$ 28) $\frac{5}{2b} \cdot \frac{12ab}{5cd}$

29) $\frac{3ab}{4cd} \cdot \frac{2cu}{9av}$ 30) $\frac{5am}{7bn} \cdot \frac{24by}{25ax}$ 31) $\frac{2}{5}u \cdot 7\frac{1}{2}v$ 32) $3\frac{1}{3}c \cdot 1\frac{4}{5}g$

33) $1\frac{3}{4}pq \cdot 2\frac{2}{7}pr$ 34) $\frac{5r}{6s} \cdot \frac{9}{10}$ 35) $\frac{3x}{8y} \cdot \frac{7}{9}yz$ 36) $2\frac{1}{4}ab \cdot \frac{2a}{6bm}$

37) $5\frac{1}{3}am \cdot \frac{9b}{mn}$ 38) $\frac{8p}{3q} \cdot \frac{3}{10}qr$ 39) $\frac{6x}{5yz} \cdot 4\frac{1}{6}z$ 40) $8\frac{3}{4}ax \cdot \frac{8b}{7x}$

335. Lihtsustada avaldused:

1) $\frac{2}{3} : 2$ 2) $3\frac{1}{3} : 10$ 3) $\frac{1}{5} : 2$ 4) $1 : \frac{4}{5}$

5) $\frac{1}{2} : 5$ 6) $\frac{5}{6} : 3$ 7) $\frac{4}{7} : 2$ 8) $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}$

9) $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$ 10) $\frac{5}{6} : \frac{6}{7}$ 11) $3\frac{1}{3} : \frac{3}{10}$ 12) $2\frac{1}{3} : \frac{1}{7}$

13) $2x : \frac{1}{2}$ 14) $4y : \frac{4}{5}$ 15) $6z : \frac{3}{4}$ 16) $5a : 2\frac{1}{2}$

17) $\frac{2}{3}ab : 1\frac{2}{3}$ 18) $8 : \frac{4}{m}$ 19) $a : \frac{a}{m}$ 20) $ab : \frac{a}{b}$

21) $p^2 : \frac{p}{q}$ 22) $6x : \frac{10xy}{3z}$ 23) $8x : \frac{16xy}{5z}$ 24) $12u : \frac{8u}{7v}$

25) $\frac{a}{c} : \frac{b}{c}$ 26) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c}$ 27) $\frac{5}{m} : \frac{1}{m}$ 28) $\frac{m}{n} : \frac{m}{3n}$

29) $1\frac{2}{3}pq : 2\frac{7}{9}$ 30) $2\frac{1}{4}pq : 1\frac{1}{2}q$ 31) $10rs : 1\frac{2}{3}s$ 32) $\frac{2xy}{3zu} : \frac{4xy}{7uv}$

33) $\frac{am}{2bn} : \frac{3ax}{4by}$ 34) $\frac{5xy}{6ab} : \frac{4xm}{9an}$ 35) $\frac{4am}{7bn} : \frac{6mx}{7ny}$

36) $\frac{18abc}{25xyz} : \frac{3c}{5z}$ 37) $\frac{14cde}{27zuv} : \frac{7e}{9v}$ 38) $\frac{20ab}{3c} : \frac{5ad}{9c}$

39) $\frac{12ax}{5b} : 3ay$ 40) $\frac{14mp}{9q} : 21mr$ 41) $9xy : \frac{12xz}{5u}$

42) $3am : \frac{9mx}{7y}$ 43) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} : \frac{1}{a}$ 44) $\left(\frac{2a}{3b} : \frac{3a}{4b}\right) \cdot \frac{9}{8}$

45) $\frac{5ab}{14mn} \cdot \frac{7am}{10nb} : \frac{2a}{b^2}$ 46) $\frac{54am}{35bn} \cdot \frac{28n^2}{45m^2n} : \frac{12}{5b}$ 47) $\frac{9a^3x^4}{10b^4y} : \left(\frac{6ax}{5b^3y^3}\right) : \frac{3x}{2b}$

48) $\frac{14a^3b^2c}{25x^3y^2z} \cdot \frac{15xy^2}{7a^2c} : \frac{5az}{6b^2}$ 49) $\frac{84a^3x^4}{55b^4y^2} : \frac{24a^2x^5}{33b^3y^4} \cdot \frac{5by}{7ax} : \left[\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3\right]$.

Kasvatamine.

536.

1) $(x^2 + px + q) \cdot \frac{1}{x}$ 2) $\left(ax^2 + bx + c\right) \cdot \frac{1}{a}$

3) $(3m^2 - 5m + 1) \cdot \frac{1}{m}$ 4) $(8n^3 + 6n^2 - 9n) \cdot \frac{1}{2n^2}$

5) $\left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{3yx} + \frac{5}{y^2}\right) \cdot 3x^2$ 6) $\left(2 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) \cdot 5x^2$

7) $\left(r^2 + r + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2}\right) \cdot r^2$ 8) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \cdot abc$

9) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}\right) \cdot \frac{xy}{z}$ 10) $\left(\frac{3}{4}a + 2\frac{1}{2}b \quad 3\frac{1}{3}c\right) \cdot 1\frac{1}{5}m$

11) $\left(-\frac{3}{5}a + 2\frac{2}{5}b - \frac{2}{7}c\right) \cdot \left(-3\frac{1}{3}c\right)$.

537.

1) $(m - n)\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$ 2) $\left(\frac{p}{q} + 1\right)\left(\frac{q}{p} - 1\right)$

3) $\left(\frac{3}{r} + \frac{4}{s}\right)\left(\frac{r}{3} - \frac{s}{4}\right)$ 4) $\left(\frac{5}{r} + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{r}{5} - \frac{2}{s}\right)$

5) $\left(3x + \frac{y}{6}\right)^2$ 6) $\left(\frac{3x}{10} - 5y\right)^2$

7) $\left(\frac{1}{2}u + 2\frac{1}{2}v\right)^2$ 8) $\left(1 - 1\frac{1}{2}z\right)^2$

9) $\left(\frac{2}{5}a + \frac{3}{4}b\right)\left(\frac{2}{5}a - \frac{3}{4}b\right)$ 10) $\left(0{,}3c - 1{,}2d\right)\left(1{,}2d + 0{,}3c\right)$.

Lihtsustada avaldused:

539.

1) $\left(\frac{6a^3}{5b^3} - \frac{9b^2}{14a^2} + \frac{8a}{15b}\right) \cdot -10a^2b^3$

2) $\left(\frac{2q}{3p} - \frac{5p}{6r} - \frac{4q}{5r}\right) : \frac{30pr}{q}$

3) $\left(\frac{x}{x+y} - \frac{y}{y-x}\right) \cdot (x^2 - y^2)$

4) $\left(\frac{x}{xy-y^2} + \frac{y}{xy+x^2}\right) \cdot (x^2 - y^2)$

5) $\left(\frac{u}{3u-7v} - \frac{v}{6u-14v} + \frac{3u^2-13uv}{49v^2-9u^2}\right) \cdot \frac{7v-3u}{v}$

6) $\left(\frac{4v}{36u-4v} + \frac{46u^2-2uv-v^2}{81u^2-v^2} - \frac{5u}{v+9u}\right) \cdot \frac{9u-v}{u}$

7) $\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2x}{x^2-1}\right) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

8) $\left(\frac{3x+m}{x-3m} + \frac{3m+x}{m-3x}\right) \cdot (3x^2 - 10mx + 3m^2)$

9) $\left(\frac{54a^3b^2}{35m^4n^3} - \frac{15a^5b}{28m^2n^5} + \frac{36a^2b^4}{25m^5n^2}\right) \cdot \frac{7m^3n^4}{12a^4b^3}$

10) $\left(\frac{26p^5q^3}{33rs^5} + \frac{52p^2q}{55r^4s^2} - \frac{5p^4q^6}{77r^3s^5}\right) \cdot -\frac{11r^2s^3}{13p^3q^4}$

11) $\frac{a^2-2ab+b^2}{c^2+2cd+d^2} \cdot \frac{c^2-d^2}{a^2-b^2}$

12) $\frac{p^3-q^3}{r^3+s^3} \cdot \frac{r^2-rs+s^2}{p^2+pq+q^2}$

13) $\frac{u^3+1}{-u^3+1} \cdot \frac{u^2+u+1}{-u^2+u-1}$

14) $\frac{v^3-64}{v^3+64} \cdot \frac{v^2-4v+16}{v^2+4v+16}$

15) $\frac{a^2-7a+10}{a^2-25} \cdot \frac{a+5}{a-2}$

16) $\frac{a^2-5a-14}{a-7} \cdot \frac{49-a^2}{a^2-4}$

17) $\frac{m^2-2m-3}{m^2+8m+15} \cdot \frac{m^2+m-20}{m^2-4m+3}$

18) $\frac{m^2+3m-10}{m^2+m-6} \cdot \frac{m^2+6m+9}{m^2-2m-15}$

19) $\frac{2r^2+5r-3}{5r^2+16r+3} \cdot \frac{5r^2-9r-2}{2r^2-9r+4}$

20) $\frac{5-17r+6r^2}{3-8r-3r^2} \cdot \frac{9-3r-2r^2}{-15+16r-4r^2}$

540.

1) $\left(\frac{y^2}{3}-\frac{2}{3}y-1\right)\left(\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y-\frac{1}{6}\right)$

2) $\left(\frac{3}{5}y^2-\frac{2}{5}y+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+\frac{2}{b}x-\frac{5}{6}\right)$

3) $\left(\frac{4a}{3b}-\frac{a}{5}+\frac{b}{6}\right)\left(\frac{5}{a}-\frac{3}{b}\right)$

4) $\left(\frac{2a^2}{7b}+\frac{3b}{5a}-\frac{4}{5}\right)\left(\frac{7b^2}{8a}-\frac{5a}{2b}\right)$.

541.

1) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)(x+y)$

2) $\left(r-1+\frac{1}{r}\right)\left(r^2+1+\frac{1}{r^2}\right)$

3) $\frac{a^4-b^4}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$

4) $\frac{a^3b+b^3}{a^2+ac}\cdot\frac{a^4+ac^3}{a^4b-b^5}$

5) $\frac{m^3+3m^2n+3mn^2+n^3}{m^2+mn-m-n}\cdot\frac{mn-n^2-m+n}{m^2-mn^2+m^2n-n^3}$

6) $\left(1+\frac{m}{n}+\frac{m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{n}{m}+\frac{n^2}{m^2}\right)$

7) $\frac{27+x^3}{1-2x+x^2}\cdot\left(1-\frac{4}{x+3}\right)$

8) $\frac{r^2-s^2}{r^3+s^3}\cdot\left(1+\frac{s^2}{r-s}\right)$

9) $\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\left(\frac{a}{1-a}+1\right)\cdot\frac{b^3-b}{a^2+a}$

10) $\frac{1-a+a^2}{a^3-1}\cdot\frac{(1+a)^2-a}{a^2-1}\cdot\frac{1-2a+a^2}{a+1}$.

Jagamine:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc};\qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a:c}{b:d}.$$

542.

1) $\left(\frac{10pq}{9r}-\frac{25pr}{8q}+\frac{35qr}{12p}\right):5pq$

2) $\left(\frac{8x^3y^2}{5z}+\frac{18x^4z}{7y}-\frac{54x^2y^3}{x}\right):(-6x^3y^2)$

3) $\frac{54(a-b)^2}{a+b} : 36(a^2-b^2)$

4) $\frac{84(a+b)^2}{a-b} : 28(b^2-a^2)$

5) $\frac{32(m^3+n^3)}{m-n} : 12(m^2+n^2-mn)$

6) $\frac{7m^2+7mn}{2m-2n} : 35(m^4-m^2n^2)$

7) $\frac{p^2+6p+5}{p-4} : (p^2-p-20)$

8) $\frac{3p^2+7p-6}{p+3} : (3p^2-5p+2)$

9) $\frac{8+q^3}{8} : -(4+4q+q^2)$

10) $\frac{27r^3-64s^3}{12rs} : (16s^2-9r^2)$

11) $\frac{x^4-y^4}{4} : (x^2-y^2)$

12) $\frac{x^6+y^6}{3} : -2(x^2+y^2).$

543.

1) $\left(\frac{a-b}{a} - \frac{a+b}{b} + \frac{(a-b)^2}{ab}\right) : (a-b)$

2) $\left(\frac{5a-9b}{a} - \frac{5a+9b}{3b} + \frac{25a^2-81b^2}{2ab}\right) : (25a^2-81b^2)$

3) $\left(\frac{p+6}{p-2} + \frac{p-3}{p+1}\right) : (p^2+3p-18)$

4) $\left(\frac{3p-2}{2p-3} - \frac{4p-3}{3p-4}\right) : (12p^2-17p+6)$

5) $\left(\frac{r+1}{r-2} + \frac{r-2}{r+1}\right) : (r^2-r+2)$

6) $\frac{48(x+y)}{81(x-y)} : \frac{54(x+y)}{64(x+y)}$

7) $\frac{22(x+y)^2}{5(x-y)} : \frac{11(x^2-y^2)}{10(x-y)^2}$

8) $\frac{u^3-v^3}{u^3+v^3} : \frac{u-v}{u+v}$

9) $\frac{u^2-uv+v^2}{u^2+uv+v} : \frac{(u^3+v^3)(u-v)}{(u^3-v^3)(u+v)}$

10) $\frac{a+3}{(b-1)^2} : \frac{a^2+a-6}{1-b^2}$

11) $\frac{m^2-m-2}{m^2+2m-3} : \frac{m-2}{m+3}$

12) $\frac{1}{m^2-3m+2} : \frac{1}{m^2-5m+6}$

13) $\frac{8p^2+10pq-3q^2}{6p^2+5pq-6q^2} : \frac{4p^2-pq+20p-5q}{3p^2-2pq+15p-10q}$

14) $\frac{4}{2r^2-5rs+3s^2} : \frac{5}{5rs-3r^2-2s^2}$

15) $\frac{x^2-2xy-3y^2}{x+y} : \frac{x^2-4xy+3y^2}{x-y}$

16) $\frac{a^2+ab-6b^2}{3b-a} : \frac{a-2b}{ab+6b^2-a^2}$

17) $\frac{c^3-1}{1+c} : \frac{c-1}{c^3+3c^2+3c+1}$

18) $\left(\frac{3}{7a^2} - \frac{5b^3}{8} + \frac{3a^3b^2}{4}\right) : \frac{3b^2}{2a^3}$

19) $\left(24a^2b - \frac{8a^3}{9b^2} + \frac{3b}{10a^2}\right) : -\frac{4a^2}{9b}$

20) $\left(\frac{2mn}{3} - \frac{2}{3mn} + 6m^2n^2\right) : -\frac{1}{9mn}$

21) $\left(\frac{a^3b^3}{x^2y^2} - \frac{a^2b^4}{xy^3} + 1\right) : \frac{a^3b^3}{x^2y^2}$

22) $\left(\frac{2p+3q}{3p-2q} - \frac{2p-3q}{3p+2q}\right) : \frac{4p^2-9q^2}{4q^2-9p^2}$

23) $\left[\frac{r-s}{r} - \frac{r+s}{s} + 2(r-s)\right] : \frac{r^2-s^2}{rs}$.

544.

1) $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) : \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)$

2) $\left(1 - \frac{c^2}{p^2}\right) : \left(1 + \frac{c}{p}\right)$

3) $\left(\frac{p^2}{16q^2} - \frac{q^2}{25}\right) : \left(\frac{5p}{4q} - q\right)$

4) $(1 - r^4s^4) : \left(r^2 - \frac{1}{s^2}\right)$

5) $\left(y^3 + \frac{1}{x^3}\right) : \left(\frac{1}{x} + y\right)$

6) $\left(\frac{x^3}{64} - \frac{y^3}{27}\right) : \left(\frac{3}{4}x - y\right)$

7) $\left(u^3 + \frac{1}{u^3}\right) : \left(u^2 - 1 + \frac{1}{u^2}\right)$

8) $\left(2 - \frac{1}{8a^3}\right) : \left(4a + 1 + \frac{1}{4a}\right)$

9) $\left(m^4 - \frac{1}{n^4}\right) : \left(m + \frac{1}{n}\right)$

10) $\left(m^4 - \frac{1}{n^4}\right) : \left(m - \frac{1}{n}\right)$

11) $\left(\frac{p}{q} - \frac{r}{s}\right) : \left(\frac{q}{p} - \frac{s}{r}\right)$

12) $\left(\frac{x^2}{yu} - \frac{zx}{u^2} - \frac{x}{y} + \frac{z}{u}\right) : \left(\frac{x}{u} - 1\right)$

13) $\left(\frac{a^2}{ad} - \frac{ac}{d^2} - \frac{a}{c} + \frac{b}{d}\right) : \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)$

14) $\frac{m^3-27}{m^3+27} : \frac{m-3}{m+3}$

15) $\left(\frac{p-1}{p+1} + 1\right) : \left(\frac{p-1}{p+1} - 1\right)$

16) $\frac{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}{x^2 + 2xy + y^2} : \frac{x^4 - y^4}{x^3 + y^3}$

17) $\left(\frac{r}{r-s} - \frac{r}{r+s}\right) \frac{2rs}{r^2-s^2}$

18) $\left(\frac{r}{r+s} + \frac{s}{r-s}\right) \left(\frac{1}{r-s} - \frac{1}{r+s}\right)$

19) $\left(\frac{1+u}{1+v} + \frac{1-u}{1-v}\right) : \left(\frac{1+u}{1-v} + \frac{1-u}{1+v}\right)$

20) $\left(\frac{a-1}{a} + \frac{2}{a+1}\right) : \left(1 + \frac{1}{a} - \frac{2}{a(a+1)}\right)$

21) $\left(\frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}\right) : \left(\frac{m}{n^2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)$

22) $\left(p^2+\frac{1}{p^2}+2\right):\left(p+\frac{1}{p}\right)$

23) $\left(\frac{u-v}{u+v}+\frac{(u+v)^2-4u^2}{v^2-u^2}\right):\frac{8u}{u+v}$

24) $(x^2-y^2-z^2+2yz):\frac{x+y-z}{x+y+z}$

25) $\left(\frac{1}{a^2}+1\right):\left(a-\frac{1}{a^3}\right):\frac{(a+1)^2}{a}$

26) $\frac{m^2+m-12}{m^2-3m-10}:\frac{m^2+3m-4}{m^2-7m+10}\cdot\frac{m^2+m-2}{m^2-5m+6}$.

§ 5. Mitmekordsed murrud.

545. Välja arvata x-suurused järgnevais võrdusis:

1) $x=\frac{u}{v}$ 2) $x=\frac{u+v}{u-v}$ 3) $x=\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$,

kui a) $u=1;v=\frac{1}{2}$; b) $u=\frac{1}{3};v=2$; c) $u=\frac{1}{2};v=\frac{1}{3}$;

d) $u=\frac{1}{3};v=\frac{1}{2}$; e) $u=\frac{1}{2};v=-\frac{1}{6}$.

546. Lihtsustada järgnevad avaldused:

1) $\frac{\frac{5}{3}-1}{3-\frac{4}{3}}$ 2) $\frac{3-\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}+5}$ 3) $\frac{5+\frac{4}{7}}{2\frac{5}{7}+1}$

4) $\frac{\frac{5}{6}+\frac{4}{3}}{2\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$ 5) $\frac{\frac{4}{5}-\frac{7}{10}}{\frac{9}{4}+3\frac{1}{2}}$ 6) $\frac{\frac{7}{9}+\frac{11}{18}}{\frac{5}{6}+\frac{1}{3}}$

7) $\frac{3+\frac{1}{3}+\frac{5}{6}}{1+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ 8) $\frac{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}}$ 9) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}$

10) $\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}}$ 11) $\frac{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}}$ 12) $\frac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{3a}{2b}}$

13) $\dfrac{\frac{2}{a}+\frac{a}{2}}{\frac{a}{4}-\frac{4}{a}}$

14) $\dfrac{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$

15) $\dfrac{\frac{p}{q}-\frac{q}{p}}{\frac{1}{q}+\frac{1}{q}}$

16) $\dfrac{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}{\frac{r^2}{s}+\frac{s^2}{r}}$

17) $\dfrac{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{s^2}}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}$

18) $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$

19) $\dfrac{\frac{m^2}{n^2}-\frac{n^2}{m^2}}{\frac{m}{n}-\frac{n}{m}}$

20) $\dfrac{\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}+\frac{2}{uv}}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}$

21) $\dfrac{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{v^2}}{\frac{1}{u^2}-\frac{2}{uv}+\frac{1}{v^2}}$

22) $\dfrac{x+\frac{y}{z}}{x}$

23) $\dfrac{y}{y-\frac{x}{z}}$

24) $\dfrac{\frac{p}{q}-r}{s-\frac{q}{p}}$

25) $\dfrac{a+\frac{1}{b}}{b+\frac{1}{a}}$

26) $\dfrac{\frac{25c^2}{2d}-2d}{\frac{5c}{2d}+1}$

27) $\dfrac{\frac{1}{2x}-2xy^2}{y-\frac{1}{2x}}$

28) $\dfrac{\frac{p}{q}-\frac{p-q}{p+q}}{1+\frac{p}{q}\cdot\frac{p-}{p+q}}$

29) $\dfrac{\frac{x(x-y^3)}{y^3}-x}{\frac{x(1+x)}{y^3}-\frac{x^2}{y^3}}$

30) $\dfrac{\frac{r}{s}-2+\frac{s}{r}}{\frac{r}{s}-\frac{s}{r}}$

31) $\dfrac{\frac{1}{u+v}+\frac{1}{u-v}}{\frac{1}{u-v}-\frac{1}{u+v}}$

32) $\dfrac{\frac{1}{a+3}+\frac{1}{3-a}+\frac{6}{a^2-9}}{\frac{1}{(a-3)^2}-\frac{1}{(a+3)^2}}$

33) $\dfrac{\frac{1}{a-b+c}-\frac{1}{b-a+c}}{\frac{1}{b-a-c}+\frac{1}{a-b-c}}$

34) $\dfrac{\left(\frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{4ab}{a^2-b^2}\right)}{\frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a+b}{b}-\frac{a+b}{a}\right)}$.

547. Arvata ahelmurrud:

1) $\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$

2) $\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$

3) $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

4) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}$ 5) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}$ 6) $\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}$

7) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}$ 8) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{10}}}}$ 9) $\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2}}}}$

548. Leida järgnevate ahelmurdude järjestikud lähendud suurused (lähismurrud):

1) $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}$ 2) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$

549. Arvata murrulised avaldused:

1) $y=\frac{4x+5}{4x-5}$, kui $x=2, \frac{5}{4}, -\frac{5}{4}$

2) $y=\frac{3x+8}{4x-7}$, kui $x=0, 1, 2, \ldots 5$

3) $y=\frac{6x^2+x-1}{9x^2-12x+3}$, kui $x=0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +1, -1$

4) $y=\frac{4x^2-1}{4x^2+1}$, kui $x=\frac{1}{2}, -1, +1$

5) $y=\frac{3x^2+x-6}{3x^2+11x+6}$, kui $x=\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -3$.

550. Et y oleks null ehk võimatu, missugune peaks olema x igas järgnevas vormulis?

1) $y=\frac{8x-5}{4x+3}$ 2) $y=\frac{25x^2+1}{4-9x^2}$ 3) $y=\frac{1-16x^2}{1+16x^2}$

4) $y=\frac{12x^2+2x-2}{12x+18x-15}$ 5) $y=\cfrac{\cfrac{x+1}{x-1}+\cfrac{x-1}{x+1}}{\cfrac{x+1}{x-1}-\cfrac{x-1}{x+1}}$

551. On antud avaldus

$$y = \frac{6x^2 + x - 1}{8x^2 + 2x - 1}.$$

Missugune on y-suurus,

kui 1) $x = \frac{1}{4}$; 2) $x = +\frac{1}{3}$; 3) $x = -\frac{1}{2}$?

Mispärast on viimasel korral arvsuuruse leidmine takistatud, ja kuidas võiks teda siiski leida?

§ 6. Nullised ja negatiivsed astmenäitajad.

552. $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$; $a^3 : a^3 = 1$; järjelikult: $a^0 = 1$.

553. $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$; $a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 a^2} = \frac{1}{a^2}$; järjelikult: $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

554. $a^m : a^{m+n} = a^{-n}$; $a^m : a^{m+n} = \frac{a^m}{a^m a^n} = \frac{1}{a^n}$; järjelikult, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

555. Ilmutada järgnevad resultaadid, võttes tarvitusele nullised ja negatiivsed astmenäitajad:

1) $a^4 : a^4$ 2) $a^4 : a^6$ 3) $x^9 : x^9$ 4) $x^9 : x^{10}$

5) $m : m$ 6) $r^3 : r^4$ 7) $s^m : s^m$ 8) $u^a : u^{a+2}$

9) $ab : b^2$ 10) $ab : a^3b^2$ 11) $xy : yz$ 12) $xyz : xy^2$

13) $4p^2q^3r : 2pq^3r^2$ 14) $6a^2b^3c^4 : 3a^4b^3c^2$

15) $a^x b^x : a^{x-1} b^{x+1}$ 16) $u^{n-2} v^n : u^n v^{n+4}$.

556. Arvata järgnevad avaldused:

1) 7^0 2) $\left(\frac{1}{2}\right)^0$ 3) $(-0{,}8)^0$ 4) $(a+b)^0$

5) 1^{-1} 6) 10^{-1} 7) $(-3)^{-1}$ 8) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$

9) $(0{,}1)^{-1}$ 10) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-1}$ 11) $\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}$ 12) 1^{-2}

13) 1^2 14) 10^{-2} 15) 8^{-2} 16) $(-8)^2$

17) $(-5)^{-2}$ 18) $(-5)^2$ 19) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$ 20) $\left(\frac{1}{4}\right)^2$

21) $\left(-\frac{1}{4}\right)^2$ 22) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-2}$ 23) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$ 24) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

25) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ 26) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 27) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$ 28) $(0{,}4)^{-1}$

29) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$ 30) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$ 31) $\left(\frac{5}{3}\right)^3$.

557. Leida järgnevate vormulite arvsuurused:

1) $\left[5-4\left(\frac{5}{6}\right)^0\right]^{-2}$ 2) $\left[\frac{4^0-3.7^{-1}}{3^{-2}}\right]^{-1}$

3) $\left[\frac{4}{5}-\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right]^0$ 4) $\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{7}\right)^{-2}\right]^0$

5) $\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-2}\cdot\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$

6) $x^0+y^{-1}+z^{-2}$; $x=10$; $y=\frac{1}{3}$; $z=\frac{1}{4}$;

7) $\frac{p^{-1}+q^{-1}}{r^{-2}}$; *a*) $p=\frac{1}{4}$; $q=\frac{1}{5}$; $r=\frac{1}{3}$; *b*) $p=0{,}3$; $q=0{,}5$; $r=0{,}2$;

8) $(u^{-1}-v^{-1})^{-2}$; *a*) $u=6$; $v=3$; *b*) $u=\frac{1}{5}$; $v=\frac{1}{6}$.

558. Järgnevad avaldused teisendada üheväärilisiks, milledes nullised ja negatiivsed astmenäitajad puuduksid; seejärel võimalikul korral saadused lihtsustada.

1) a^0b^{-1} 2) $a^{-3}b^0$ 3) c^0d^0 4) $x^0:y^{-2}$

5) $x^{-4}:y^0$ 6) $u^0:v^0$ 7) $\frac{p^0}{q^{-5}}$ 8) $\frac{r^{-7}}{s^2}$

9) $a^{-2}b^{-3}$ 10) $a^{-6}:b^{-5}$ 11) $a^{-8}:a^{-3}$ 12) $a^{-2}:a^{-7}$

13) $a^{-p}:a^{-q}$ 14) $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}$

15) $\left(u^{-1}+v^{-1}\right):z^{-1}$ 16) $\left(1-m^{-1}\right)^{-1}$

17) $\left(m^{-1}-1\right)^{-1}$ 18) $\frac{r^{-2}-s^{-2}}{r+s}$

19) $\left(1-m^{-2}\right)^{-1}$ 20) $\frac{p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}}{pq+pr+qr}$

21) $\frac{p+q+r}{p^{-1}+q^{-1}+r^{-1}}$ 22) $\frac{m+n}{m^{-1}+n^{-1}}$

23) $\frac{m^{-2}-n^{-2}}{m-n}$ 24) $\frac{u^{-1}-v^{-1}}{u^{-2}-v^{-2}}$

25) $\frac{u^{-2}-v^{-2}}{u^{-1}+v^{-1}}$.

559. Järgnevad murdavaldused muuta täiskujulisiks, kasutades negatiivseid ja nulliseid astmenäitajaid.

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{5}$ 3) $\frac{1}{10}$ 4) $\frac{1}{a}$

5) $\frac{1}{a^2}$ 6) $\frac{1}{x^5}$ 7) $\frac{1}{a^m}$ 8) $\frac{1}{m^x}$

9) $\frac{1}{x^m}$ 10) $\frac{a^2}{b}$ 11) $\frac{a^3}{b^7}$ 12) $\frac{x^m}{y^n}$

13) $\frac{u}{v^2}$ 14) $\frac{v}{u^2}$ 15) $\frac{3a}{4b}$ 16) $\frac{2m^2}{5n^3}$

17) $\frac{3xy}{7z^3}$ 18) $\frac{8p^4qr}{s^2t^2}$ 19) $\frac{2(a-b)}{a+b}$ 20) $\frac{4(m+n)}{5(m^2+n^2)}$

21) $\frac{5(m+n)}{7(m-n)^3}$ 22) $\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^3}$ 23) $\frac{y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$ 24) $\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$

25) $\frac{1}{\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^3}\right)^4}$ 26) $\frac{\frac{1}{x+y}}{x-1}$ 27) $\frac{\frac{1}{x-y}}{x+y}$.

Tehted arvudega, milledel murrulised ja negatiivsed astmenäitajad.

560.

1) $a^{-2} \cdot a^3 = \frac{1}{a^2} \cdot a^3 = \frac{a^3}{a^2} = a = a^{-2+3}$

2) $a^{-2} \cdot a^{-3} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{1}{a^5} = a^{-5} = (-2)+(-3)$

3) $a^{-p} \cdot a^q = \frac{1}{a^p} \cdot a^q = \frac{a^q}{a^p} = \frac{1}{a^{p-q}} = a^{-(p-q)} = a^{(-p)+(+q)}$:

järjelikult,

I. $a^{-p} \cdot a^q = a^{-p+q}$.

561. Eelneva ülesande eeskujul tõendada järgnevad vormulid:

II. $a^p \cdot a^{-q} = a^{p-q}$

III. $a^{-p} \cdot a^{-q} = a^{-p-q}$

IV. $a^{-p} : a^q = a^{-p-q}$

V. $a^p : a^{-q} = a^{p-(-q)} = a^{p+q}$

VI. $a^{-p} : a^{-q} = a^{-p-(-q)} = a^{-p+q}$

562. Järgnevais avaldusis toimetada kõige esite tehted, selle järel vabastada saadused nulliseist ja negatiivseist näitajaist:

1) $a^{-4} \cdot a^5$ 2) $a^{-7} a^5$ 3) $m^{-1} m^6$

4) $m^6 m^{-6}$ 5) $b^{-1} b^{-3}$ 6) $a^{-4} a^{-6}$

7) $x^{-m} x^{-n}$ 8) $a^{-1} : a^2$ 9) $a^{-2} : a^3$

10) $b^3 : b^{-2}$ 11) $b^4 : b^{-1}$ 12) $c^{-7} : c^{-7}$

13) $p^{-1} : p^{-5}$ 14) $p^{-4} : p^{-2}$ 15) $q^{-3} : q^{-4}$

16) $x^{-m} : x^{-n}$ 17) $x^{-m} : x^n$ 18) $x^m : x^{-n}$

19) $r^{-5} r^3 r^{-2}$ 20) $r^{-4} r^{-3} r^5$ 21) $s^{-1} s^{-2} s^{-3}$

22) $2ab^{-3} \cdot 4a^{-1} b$ 23) $3a^{-3} b^4 \cdot 5a^2 b^{-1} c^5$ 24) $10ab^{-3} : 2a^{-1} b^{-3}$

25) $12a^{-2}b^{-1} : 4a^{-3}b^{-2}$

26) $pq^{-2} : p^3q^{-1}r$

27) $(x^{-3} - x^{-2} + x^{-1})^{x^2}$

28) $(x^{-4} + x^{-1} - 1) : x^{-2}$

29) $(y^{-1} - y^0 + y)(-y^{-1})$

30) $(y^{-3} + y^2 - y) : (-y^{-2})$

31) $(u^{-1} + v^{-1})(u^{-1} - v^{-1})$

32) $(u^{-2} + v^{-2})(u^{-2} - v^{-2})$

33) $(m^{-2} + m^{-1}n^{-1} + n^{-2})(m^{-1} + n^{-1})$

34) $(m^{-4} + m^{-2}n^{-2} + n^{-4})(m^{-2} - n^{-2})$

35) $(r^{-3} - s^{-3})(r^{-1} - s^{-1})$

36) $(r^{-3} + s^{-3}) : (r^{-1} + s^{-1})$

37) $(a^{-m} + b^{-m})(a^{-n} - b^{-n})$

38) $(a^{-4m} - b^{-4m}) : (a^{-2m} - b^{-2m})$

39) $(2x^{-2} - 3y^{-3})(3x^{-3} + 2y^{-2})$

40) $(x - 6x^0 + 11x^{-1} - 6x^{-2}) : (1 - 2x^{-1})$.

§ 7. Proportsjonaalsus.

A. Päriproportsjonaalsus.

Kui on olemas kaks arvude rida, näit.,

1, 2, 3, 4, ...
4, 8, 12, 16, ...

kus esimese rea iga arvu ühele vastab teise rea vastavas arvus teatud ja sama arv ühtesid ehk nende osi, siis öeldakse, et esimese

ja teise rea arvud on **proportsjonaalsed**. Teise rea ühtede ehk nende osade arv, mis vastab esimese rea arvu ühele, kutsutakse **proportsjonaalsuse koeffitsiendik (k)**. Käesoleval korral on $k = 4$. Proportsjonaalsuse koeffitsient k saadakse teise rea arvu jagamisel esimese rea vastavale arvule ja, järjelikult, teise rea arvud saadakse esimese rea arve vastavalt k-ga kasvatades.

563. Leida proportsjonaalsuse koeffitsiendid järgnevais arvude ridades:

1) $5;\ 7\frac{1}{2};\ 17\frac{1}{2}$
$4;\ 6;\ 14$

2) $0{,}9;\ 1{,}8;\ 2{,}7$
$0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}5$

3) $a^2;\ 2ab;\ b^2$
$\frac{a}{b};\ 2b^2;\ \frac{b^3}{a}$

4) $\frac{2}{3}x^3;\ \frac{1}{4}x^2y;\ \frac{5}{6}xy^2$
$\frac{1}{2}x^2y^2;\ \frac{3}{16}xy^3;\ \frac{5}{8}y^4.$

564. Proportsjonaalsuse koeffitsiendi abil näidata, et järgnevad arvude read on proportsjonaalsed:

1) $7;\ 28;\ 35;\ 70$
$3;\ 12;\ 15;\ 30$

2) $6;\ 12;\ 30;\ 66$
$-3;\ -6;\ -15;\ -33$

3) $-8;\ +24;\ -72;\ +216$
$+12;\ -36;\ +108;\ -324$

4) $p^2-q^2;\ p-q;\ p+q$
$(p-q)^2;\ \frac{p^2-2pq+q^2}{p+q};\ p^2-q^2.$

565. Alla kriipsutada arvud, mis pole mitte proportsjonaalsed.

$36;\ 24;\ 12;\ 8$
$24;\ 18;\ 8;\ 5\frac{1}{3}.$

Mitte ainult kahe, vaid ka kolme ja mistahes hulga ridade arvud võivad olla proportsjonaalsed. Nii võime, kui meil on rida: 5; 8; 13; 18, leida mõne teise arvude rea, kui antud rea arve järjest ühe ja sellesama arvuga, näit. 2-ga, kasvatada: 10; 16; 26; 36. Kasvatades antud rea arve järgemööda mõne teise arvuga, näit. $\frac{2}{3}$, leiame kolmanda arvude rea: $3\frac{1}{3};\ 5\frac{1}{3};\ 8\frac{2}{3};\ 12$, j. n. e. Nii on meil kolm arvude rida, kus arvud vastavas järjes on proportsjonaalsed:

$\underline{5}$; 8; 13; $\underline{18}$

10; $\underline{16}$; 26; 36

$3\frac{1}{3}$; $5\frac{1}{3}$; $8\frac{2}{3}$; 12.

Niisugust **„arvude välja"** võiks igasse nelja külge lõpmata jätkata. Arvude välja teadmiseks on tarvis võtta: 1) üks ainus rida, ehk 2) igas vertikaalses veerus (nõnda et ükski rida vahele ei jää, nagu alla kriipsutud) vähemalt üks ainus arv ja teada proportsjonaalsuse koeffitsiendid.

566. Missuguste arvude vahekorras ilmub proportsjonaalsus?

64; 42; 56; 96

25; 35; 28; 48

16; $22\frac{2}{5}$; 14; 15.

567. Leida puuduvad proportsjonaalsed arvud ridades:

1) 5; 8; 11; 15
4; —; —; —
—; —; 6; —

2) 8; 10; 21; 30
—; —; 6; —
$\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; 1; $3\frac{1}{2}$
—; —; —; 1,8.

3) 1; 2; 3; —; —
—; —; 4; 5; 6

4) —; 9; —; —
12; 25; 32; 66

5) —; 40; —; —

568. Kus võimalik, täita arvude väljal tühjad kohad:

1) 6; 8; —; —; —; —
3; —; 7; 12; —; 5
—; —; —; —; 2; 10

2) —; 5; —; 6; —
5; —; 6; —; 9
—; 4; —; 10; —

3) 8; —; —; 12
—; 3; 1; —
9; 2; —; 4.

Mispärast on arvude välja (2) äramääramine võimata?

569. Missugune kõige vähem hulk arve võimaldab arvude välja määramise, kui on a) kolm neljaveerulist rida, b) neli kolmeveerulist rida, c) kolm n-veerulist rida, d) n-veerulist m rida?

570. Täita arvude väljad:

1) 3; —; —; ...
1; 1; 1; ...
—; 2; —; ...

2) —; —; 1; ...
9; 9; 9; ...
3; —; —; ...

3) 10; —; —; ...
8; 8; 8; ...
—; —; 3; ...

4) —; —; 21; —; ...
1; 2; 3; 4; ...
—; —; —; 2; ...

5) 3; —; —; —; ...
6; 7; 6; 7; ...
—; —; 2; —; ...

571. Paneme (eelnev ülesanne) igaühe arvu kohale (paberil, tahvlil ehk maa peal) varda ehk nõela püsti ja mõedame varrast mööda alumisest otsast algades nii mitu mõetu, mitu ühte on vastavas arvus, ja murrame varda ülejääva otsa ära. Selle järel mõtleme niisuguse pinna, mis läheb läbi varraste ülemiste otsade. On tarvis sõnades iseloomustada iga pind, mis ülemaltoodud arvude väljule vastab.

572. Kirjutada ridade abil proportsjonaaliste arvude väljad, mis vastaksid umbes pindasid, millede peaomadusi võiks järgmiselt iseloomustada: 1) „lainelise, tõusva põhjaga järjest süvenev org"; 2) „alanev, järjest madalamate küngaste ahelik".

573. Proportsjonaalsuse koeffitsiendi abil leida neljas arv.

1) 8; 14
12; x

2) 18; 10
x; 15

3) 21; x
6; 2

4) x; 5
10; 25.

574. Leida vahelmised puuduvad arvud (**interpoleerimine**):

1) 24,0; —; —; ...; 32,0
3,0; 3,1; 3,2 ...; 4,0

2) 10,00; —; —; —
3,10; 3,14; 3,15; 3,20.

575. On antud kaks proportsjonaaliste arvude rida:

$x = 6; 9; 15; 21, \ldots$
$y = 4; 6; 10; 14, \ldots$

Leida vormuli $y = kx$ abil y-suurused ja võrrelda neid alumise rea arvudega, kui x-suurused on järjest ülemise rea arvud, aga $k = \frac{2}{3}$.

Kui vormulis $y = kx$, milles k on jäädav, ja x on muutuv algebraline suurus, siis on ka y muutuv algebraline suurus. Pannes x-i asemele mistahes arvud, leiame y-ule need vastavalt. Resultaadina saame kaks proportsjonaaliste arvude rida. — Niisugusel korral räägitakse, et y on x-le otse- ehk päriproportsjonaalne, ja k on proportsjonaalsuse koeffitsient. Muutes aga k-d, saame uue proportsjonaaliste arvude rea.

576. Leida vormuli $y = kx$ põhjal proportsjonaaliste arvude read, kus 1) $k = 1$; 2) $x = 5$; 3) $k = 0{,}3$; kuid x kasvab iga kord naturaaliste arvude järjes: 1,2,3,...

577. Seletada, mis mõte on proportsjonaalsuse koeffitsiendil, ja välja arvata selle suurus:

1) Kolm küünart riidekangast maksis 66 marka. a) Palju maksis 10 küünart seda riiet? b) Kui palju riiet oleks võinud osta 100 marga eest?

2) Kasest tilgub kevadel minuti jooksul 3 grammi mahla. a) Palju mahla tilgub tunnis? b) Millal saab liiter täis?

Seletuseks. Mahla voolamise proportsjonaalsuse koeffitsient iseloomustab voolamise eredust (intensiteeti) ja ei ole muud, kui voolanud mahla hulk ühelises ajas (sekundis, minutis j. n. e.). Et aja üksusi tarvitakse mitu ja ka aine (mahla) hulga mõetmist võib kas raskuse ehk ruumi mõetude abil toimetada, siis on selge, et samas ülesandes võib mõelda proportsjonaalsuse koeffitsiente mitu, kuid praktilisel otstarbel peetakse antud korral üht ainust silmas.

3) Niiluse jõgi toob vee tõusu ajal t tunnis q kilogrammi maad üleujutavat muda. Leida muda sadenduse proportsjonaalsuse koeffitsient ja määrata, kui palju muda toob Niilus ööpäevas.

4) Kapitaal a rubla suuruses annab t kuu jooksul b rubla kasu; kui palju kasu annab 1000 rubla aastas?

Tähendus. Proportsjonaalsuse koeffitsendiks võetakse harilikult protsent ($p\%$), mõnikord ka kasu rublast rubla osades $\left(r = \frac{p}{100}\right)$.

5) Üheline (ampeeriline) elektrivool lahutab metallide ühenduste lahudest 8 sekundi jooksul 8,944 mgr. hõbedat, ehk 2,648 mgr. vaske, ehk 1,912 mgr. natriumi. Kui palju metalli lahutab üheline vool 1 sekundis (proportsjonaalsuse koeffitsient = elektrokeemiline ekvivalent)?

6) Auto sõidab ühtlasel kiirusel 10 sekundis 84 meetrit. Mitme sekundi jooksul käib auto kilomeetri? Kuidas kutsutakse proportsjonaalsuse koeffitsienti?

B. Vastuproportsjonaalsus.

Kui meil on olemas kaks arvude rida, näit.,

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$
$$4,\ 2,\ \frac{4}{3},\ 1,\ \frac{4}{5},\ \ldots,$$

kus mõnele esimese rea arvule vastab teises reas esimese rea ühele vastavast arvust nii mitu korda vähem arv, mitu ühte on esimeses arvus, siis öeldakse, et arvud on ümberpöördud- ehk vastuproportsjonaalsed. Teise rea ühtede arv, mis vastab esimese rea arvule 1, kutsutakse proportsjonaalsuse koeffitsiendiks (k), mida võib leida ridade vastavate arvude kasvatamisel. Käesoleval korral on $k = 4$. Soovides leida teise rea arvud, peab proportsjonaalsuse koeffitsienti esimese rea arvudele jagama. Ümberpöördud- ehk vastuporportsjonaalsus esineb, niisama kui proportsjonaalsuski, praktilise elu ülesandeis ja ka looduse seaduste vormulites.

578. Missugune on järgnevais arvude ridades proportsjonaalsuse koeffitsient?

1) $8;\ 5;\ 24;\ 15$
$\frac{3}{4};\ \frac{6}{5};\ \frac{1}{4};\ \frac{2}{5}$

2) $1{,}2;\ 0{,}7;\ 5{,}6;$
$2{,}5;\ 4\frac{2}{7};\ \frac{15}{18}$

3) $p-q;\ p+q;\ (p-q)^2;$
$p^2-q^2;\ (p-q)^2;\ p+q.$

579. Leida puuduvad arvud ridades :

$28;\ -;\ 14;\ -$
$1;\ 4;\ -;\ 28.$

580. Leida y-arvsuuurused vormulis $y = \frac{k}{x}$, kui $k = 12$, kuid $x = 15;\ 12;\ 9;\ 8.$ Siin on x ja y suurused vastuproportsjonaalsed; k on proportsjonaalsuse koeffitsient.

581. Vormulis $u = \frac{9}{v}$, kus v ja u on muutuvad suurused, leida: 1) niisugune v, et u oleks $= 81;\ 3;\ \frac{1}{27};\ -0{,}3$; suurem kui 1000; 2) niisugune u, et v oleks $= 1;\ 7;\ -\frac{1}{3}$; vähem kui $0{,}01$.

Vastuproportsjonaalsuse näitused.

583. 1) a töölist suudavad c päevas kaevada kilomeetri pikkuse kraavi. Mitme päeva jooksul suudavad sellesama kraavi b endise töövõimsusega kaevajat lõpetada?

$$a = 5;\ b = 8;\ c = 10.$$

2) Tee äärde istutati pärnade allee, milles n pärna, igaüks teineteisest c meetri kaugusel. Mitu pärna kuluks selle tee istutamiseks, kui vahed jätta d meetri ulatuses?

$$c = 8;\ d = 12;\ n = 300.$$

3) Jookstes 15 meetrit sekundis, suudab rong 48 minuti jooksul jaamade vahe ära käia. Kui suure kiirusega sekundis peab rong liikuma, et sama kauguse käia tunnis?

4) Missugune kapitaal toob q protsendiga aastas niisama palju kasu, kui kapitaal a marka p protsendiga?

$$a = 1200;\ p = 3\%;\ q = 4\tfrac{1}{2}.$$

Proportsjonaalsuse mõtte laiendamine.

Leides vormulis $y = kx^2$ y-suurused, kui $k = 1$ ja $x = 1; 2; 3; \ldots$, näeme, et y kasvab (ehk kahaneb) nii, nagu x-i ruutarvud; niisugusel korral öeldakse, et y on x-i ruutarvudele otseproportsjonaalne.

$$y = kx^2.$$

x	y
1	1
2	4
3	9
4	16

Vormulis $y = \frac{k}{x^2}$ aga on y x-i ruutarvudele vastuproportsjonaalne, nagu järgnevast tabelist näha:

x	y
1	1
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{9}$
4	$\frac{1}{16}$

Näitused.

1) Keha langemise vormul on

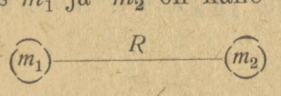
$$s = \frac{gt^2}{2},$$

kus s on kehast läbikäidud tee pikkus (meetrites), ühest antud punktist lugedes, milles keha seisis; t — aeg (sekundites) langemise algusmomendist kuni vaadeldava momendini; g — raskusejõu kiirendus $= 9{,}8$ m. Võrdus näitab, et langevast kehast käidud tee pikkus on sekundite ruutarvudele otseproportsjonaalne.

2) Koguilmlise tõmbevõimu vormul on

$$F = k \cdot \frac{m_1 m_2}{R_2},$$

kus m_1 ja m_2 on kahe keha aine hulk (mass), näit., grammides; R on neid kehi lahutav kaugus, näit., sentimeetrites. Kui $m_1 = m_2 = 1$ gr., $R = 1$ sm., siis on proportsjonaalsuse koeffitsient $k = \frac{6657}{10^{11}}$ (Boys'i järel). Võrdus näitab, et kahe aine osakese vastastikkune külgetõmbamine tungi üksustes (düünides, grammides, 1 gr. = 981 düüni) on otseproportsjonaalne massidele ja vastuproportsjonaalne kauguse ruutarvudele.



§ 8. Proportsjoonid.

Kui on võetud proportsjonaalsed arvud:

$$a, c$$
$$b, d,$$

siis võib nende proportsjonaalsust järgmiselt tähendada:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Seesugune suhete $\frac{a}{b}$ ja $\frac{c}{d}$ võrdus kutsutakse proportsjooniks, mis loetakse: a käib b vastu, nagu c käib d vastu, ehk: a suhtub b-ga, nagu c suhtub d-ga. Arvud a, b, c, d kutsutakse proportsjooni liikmeiks; a ja d — välis- ehk äär-, b ja c sise- ehk kesk-liikmeiks; a ja c on ees-, b ja d — taga-liikmed.

Kui proportsjooni $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ mõlemad osad tagaliigete teosega bd kasvatada, siis saadakse võrdus:

$$ad = bc,$$

mis loetakse: äär- ja keskliigete teosed on võrdsed. See on **proportsjooni põhiomadus**, millest järgneb:

$$a = \frac{bc}{d}; \quad d = \frac{bc}{a},$$

s. o., äärliige on seesliigete teos jagatud teisele äärliikmele, ja

$$b = \frac{ad}{c}; \quad c = \frac{ad}{b},$$

s. o., keskliige on äärliigete teos jagatud teisele keskliikmele.

583. Proportsjoonide:

1) $\frac{5}{15} = \frac{3}{9}$ 2) $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ 3) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a^2-b^2}{(a-b)^2}$

asemel võtta teoste võrdused.

584. Proportsjooni põhiomaduse abil näidata, missugused võrdusist on õiged:

1) $\frac{7}{11} = \frac{56}{88}$

2) $\frac{13}{8} = \frac{247}{144}$

3) $2\frac{1}{7} = 2\frac{10}{63}$

4) $\frac{a+b}{a-b} = \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^3-a^2b-ab^2+b^3}$

5) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^3} = \frac{x^4-x^2y^2+x^2z^2-y^2z^2}{x^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}$

6) $\frac{p-q}{q-r} = \frac{p^2-pq-pr+qr}{r^2+pq-pr-qr}$.

585. Proportsjooni põhiomaduse abil otsustada võrrandused:

1) $42 : 24 = 63 : x$ 2) $62 : x = 93 : 39$

3) $14\frac{1}{2} : 11 = x : 8\frac{4}{5}$ 4) $x : 0{,}9 = 2{,}08 : 1{,}17$

5) $8ab : 5bc = 24a^2 : x$ 6) $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = x : \frac{b}{c}$

7) $\frac{4a}{9b} : x = \frac{20a}{3c} : \frac{15}{c}$

8) $\frac{(m+n)^2}{n} : x = \frac{(m-n)^2}{m} : \frac{m+n}{m-n}$

9) $\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) : \frac{(m-n)^2}{m+n} = \frac{m+n}{n-m} : x.$

586. Leida neljas proportsjonaalne arv järgnevaile arvudele:

1) 3, 4, 6 2) 3, 4, 5 3) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{8}$, $6\frac{2}{3}$

4) x, y, z 5) -6, -8, 9 6) 12, -30, 10.

587. Kui võimalik, siis seada proportsjoonid järgmistest arvudest:

1) 2, 240, 32, 15 2) 6, 35, 10, 21

3) 9, 12, 12, 16 4) 4, 15, 6, 15

5) 10, 15, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ 6) 6, -8, 9, -12

7) 0,3; -4; $-0{,}2$; 6 8) u, v, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$

9) m, m^2, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{m^2}$ 10) $\frac{a^2}{b}$, $\frac{a}{b^3}$, $\frac{a}{b}$, $\frac{a^2}{b^3}$

11) $p+q$, $p-q$, p^2-q^2, 1

12) a^2-1, a^2-a-2, a^2+a-2, a^2-4.

588. Missugused proportsjoonid tekivad võrdusest: $ab = cd$, kui teda liigete kaupa jagada teostele:

1) ac; 2) ad; 3) bc; 4) bd?

589. Tõendada, et kui on antud proportsjoon $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, siis on õiged ka järgmised: 1) $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$; 2) $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$; 3) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, s. o. **proportsjooni äär- ja keskliikmed võib ümber asendada.**

590. Järgnevaist võrdusist:

1) $5.4=2.10$ 2) $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}$ 3) $1{,}2.0{,}8=0{,}2.4{,}8$

4) $pq=rs$ tuletada proportsjoonid igal võimalikul viisil.

591. On võimalik võrdusest $0.3=0.4$ tuletada proportsjoon?

Tuletud proportsjoonid.

Kui on antud proportsjoon

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

siis võib sellest tuletada uued. Selleks kirjutame esite:

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

ja siis järgemööda:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{b}=\frac{c}{d}+\frac{d}{d},$$

$$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d},$$

millest

$$\frac{a+b}{c+d}=\frac{b}{d}.$$

952. Tõendada, et kui on antud proportsjoon $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, siis on õiged ka järgnevad tuletud proportsjoonid:

1) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ 2) $\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$ 3) $\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$

4) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 5) $\frac{ma+nc}{mb+nd}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 6) $\frac{10a+b}{10b+a}=\frac{10c+d}{10d+c}$

593. Katsuda eelnevas ülesandes esinenud proportsjoone, arve tähtede asemele seades: 1) $a=9$; $b=3$; $c=6$; $d=2$; 2) $a=8$: $b=-4$; $c=-6$; $d=8$; 3) $a=x+y$; $b=x-y$; $c=x-y$; $d=y-x$.

594. Tõendada, et kui on antud võrdsed suhted:

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C},$$

siis on maksvad ka võrdused:

1) $\frac{a+b+c}{A+B+C}=\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$; 2) $\frac{ax+by+cz}{Ax+By+Cz}=\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}$.

Järele katsuda, arve tähtede asemele pannes.

595. Tuletud proportsjoonide abil ilmutada x võrrandusis:

1) $\frac{x+2}{x}=\frac{5}{3}$ 2) $\frac{x}{15+x}=\frac{1}{4}$ 3) $\frac{4+x}{8-x}=\frac{7}{5}$

4) $\frac{6-x}{16+x}=\frac{5}{6}$ 5) $\frac{x-5}{x-2}=\frac{x-4}{x+2}$ 6) $\frac{m+x}{x}=\frac{m}{n}$

7) $\frac{a-x}{x}=\frac{a-b}{b}$ 8) $\frac{a+x}{b}=\frac{c+x}{d}$.

596. Kui

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

on mõni proportsjoon, siis kutsutakse arv q, mille annavad võrdused: $a=qb$ ja $c=qd$, proportsjonaalsuse koeffitsiendiks ehk proportsjooni teguriks. Missugune on proportsjooni tegur järgnevais näitusis:

1) $\frac{42}{14}=\frac{21}{7}$

2) $\frac{38}{76}=\frac{51}{102}$

3) $\frac{4}{5}:\frac{3}{10}=\frac{2}{3}:\frac{1}{4}$

4) $0{,}69:0{,}23=0{,}51:0{,}17$

5) $15a^3b^2:27a^2b^3=20ab^4:36b^5$?

597. Kui proportsjooni $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ tegur on q, missugune on ta siis tuletud proportsjoonidel:

1) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ 2) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ 3) $\frac{a+b}{c+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$?

598. Kui proportsjoonide: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, $\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$ tegurid on vastavalt q_1 ja q_2, missugused proportsjooni tegurid on siis proportsjoonidel, mis saadakse antuist, vastastikku liigete kaupa kasvatamisel ja jagamisel? $a=8$; $b=4$; $c=6$; $d=3$; $e=9$; $f=3$; $g=6$; $h=2$.

599. Teoreem: kui $\frac{a}{A}>\frac{b}{B}>\frac{c}{C}$, siis on 1) $\frac{a}{A}>\frac{a+b+c}{A+B+C}>\frac{c}{C}$ ja 2) $\frac{a}{A}>\frac{ax+by+cz}{Ax+By+Cz}>\frac{c}{C}$.

Seletada järgnev vormulites väljendud tõendus:

I. $\frac{a}{A}=q_1$, $\frac{b}{B}=q_2$, $\frac{c}{C}=q_3$,

milledest

$a=Aq_1$, $b=Bq_2$, $c=Cq_3$,
$a+b+c=Aq_1+Bq_2+Cq_3$,
$(A+B+C)q_1>Aq_1+Bq_2+Cq_3>(A+B+C)q_3$,
$(A+B+C)q_1>a+b+c>(A+B+C)q_3$,
$q_1>\frac{a+b+c}{A+B+C}>q_3$, ...
$\frac{a}{A}>\frac{a+b+c}{A+B+C}>\frac{c}{C}$ ..... (1)

II. $ax=Axq_1$, $by=Byq_2$, $cz=Czq_3$,
$ax+by+cz=Axq_1+Byq_2+Czq_3$,
$(Ax+By+Cz)q_1>Axq_1+Byq_2+Czq_3>(Ax+By+Cz)q_3$
$(Ax+By+Cz)q_1>ax+by+cz>(Ax+By+Cz)q_3$,

$$q_1>\frac{ax+by+cz}{Ax+By+Cz}>q_3,$$

$$\frac{a}{A}>\frac{ax+by+cz}{Ax+By+Cz}>\frac{c}{C} \text{ ..... (2)}$$

Katsuda vormulid (1) ja (2), kui

	a	b	c	A	B	C	x	y	z
1)	2	3	0	10	10	10	1	1	1
2)	1	1	1	2	3	4	1	1	1

Jäävad võrratused (1) ja (2) ka siis püsima, kui mõned tabelis olevaist arvudest on negatiivsed?

Keskmine aritmeetiline ja keskmine geomeetriline arv.

600. Leida kõik võimalikud proportsjoonid arvudest:

1) 4, 4, 2, 8
2) 6, 6, 4, 9
3) 8, 8, 4, 16
4) 10, 10, 4, 25
5) a, b, c, kui $a^2 = bc$
6) a, b, c, kui $b^2 = ac$.

601. Pidevaiks kutsutakse proportsjoonid, millede äär- ehk keskliikmed on võrdsed. Leida x järgnevaist proportsjoonides;

1) $\frac{x}{5} = \frac{5}{50}$
2) $\frac{12}{x} = \frac{96}{12}$
3) $\frac{a}{b} = \frac{x}{a}$
4) $\frac{n}{m} = \frac{m}{x}$
5) $\frac{2}{x} = \frac{x}{16}$
6) $\frac{y}{9} = \frac{4}{y}$
7) $\frac{16}{z} = \frac{z}{0{,}25}$
8) $\frac{a}{x} = \frac{x}{a}$
9) $\frac{x}{m^2} = \frac{n^2}{x}$
10) $\frac{1}{y} = \frac{y}{b^4}$
11) $\frac{z}{a^2 b} = \frac{b}{z}$
12) $\frac{p^2 - 2pq + q^2}{x} = \frac{x}{p^2 + 2pq + q^2}$.

602. Leida kõige ligem täisarv, mis rahuldab proportsjoone:

1) $\frac{8}{x} = \frac{x}{6}$
2) $\frac{y}{4} = \frac{6}{y}$
3) $\frac{5}{z} = \frac{z}{17}$
4) $\frac{x}{10} = \frac{4}{x}$.

603. Leida keskmine aritmeetiline (keskarv) ja geomeetriline järgnevaile arvude paaridele:

1) 1,9
2) 4,16
3) 25,9
4) 100,1
5) a, b
6) m^2, n^2
7) $\frac{2}{5}, 2\frac{1}{2}$
8) $16, \frac{1}{4}$
9) 0,8; 0,2
10) 0,9; 0,1
11) $(a+b)^2$, $(a-b)^2$.

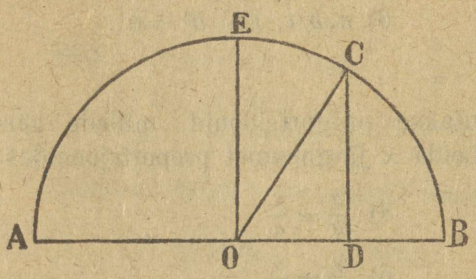
604. Teoreem: Kahe arvu keskmine aritmeetiline on suurem, kui nendesamade arvude keskmine geomeetriline.

Seletada järgnev tõendus vormulites:

$(a-b)^2 > 0$; $(a-b)^2 + 4ab > 4ab$; $a^2 - 2ab + b^2 + 4ab > 4ab$; $a^2 + 2ab + b^2 > 4ab$; $(a+b)^2 > 4ab$; $a + b > 2\sqrt{ab}$; $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$.

Missugusel juhusel on keskmine aritmeetiline ja geomeetriline võrdsed?

605. Geomeetrias tõendakse, et püstjoon (perpendikulaar) *CD* on läbimõetja osade *AD* ja *DB* keskmine geomeetriline.



Joon. 5.

1) Joonestades tahvlile ehk paberile juuresoleva kujutuse (joon. 5) ja võttes perpendikulaarid mitmesugustest ringi punktidest, katsuda mõetmise abil nimetud geomeetrilist omadust.

2) Mispärast on *EO* joonlõikude *AD* ja *DB* keskmine aritmeetiline suurus?

3) Juuresoleva joonestuse abil näidata, et keskmine aritmeetiline on keskmisest geomeetrilisest suurem (peale erandjuhuse, kui joonlõigud on võrdsed).

4) Esitud geomeetrilise metoodi abil leida arvude paaride: 1, 4; 1, 9; 2, 8; 2, 5; 3, 4 keskmine geomeetriline.

606. Kahe arvu, milledest üks on 11, keskmine aritmeetiline on 14. Leida teine arv ja ligidane keskmine geomeetriline.

607. Kahe arvu keskmine aritmeetiline, on $6\frac{1}{2}$ ja nende suhe $2\frac{1}{4}$. Leida nende arvude keskmine geomeetriline.

608. 1. augustil 1918. a. oli Võnnus (Tartu maakonnas) järgmine õhu soojaseis päeva jooksul:

kell	6 e. l.	14,3°*C*
„	8 „ „	15,8 „
„	10 „ „	16,1 „
„	12 lõunal	17,2 „
„	2 p. l.	18,5 „
„	4 „ „	17,6 „
„	6 „ „	16,3 „

Missugune oli keskmine õhu temperatuur päeva jooksul ja kui suured olid kõrvalekaldumised keskmisest arvust üksikuil tundidel?

609. Lugeda iga tunni järel pulsi löökide arvu ja leida nende keskarv minutis päeva kohta.

610. Langev keha vajub esimesel sekundil õhuta ruumis 4,9 m. ja igal järgmisel sekundil 9,8 m. võrra enam. Kui suur on keskmine kiirus: 1) esimese kahe; 2) esimese kolme; 3) kolmanda ja neljanda sekundi kestvusel?

Võrrandused ja proportsjonaalsuse ülesanded.

Seada järgnevate ülesannete kohta võrrandused ja lahendada need.

611.

1) $4^0R = 5^0C$; $9^0C = m^0R$; $m = ?$
2) $13^0C = n^0R$; $n = ?$
3) $23^0R = x^0C$; $x = ?$
4) 1 meeter = 3 jalga 3 tolli; 8 tolli. $= x cm.$; $x = ?$
5) 10 sm. $= y$ tolli; $y = ?$

612.

1) Neli last jagasid 100 õuna niisuguses vahekorras oma vahel ära, nagu 1:2:3:4. Mitu õuna sai iga laps?

2) Kahele töölisele jagati 280 marka arvude 3:4 vahekorras. Mitu marka tasu sai iga tööline?

3) Kuldsõrmuses, mille kaal 9,6 grammi, suhtub puhta kulla raskus juuresegatud metalli (ligatuuri) kaaluga nagu 41:7. Mitu grammi puhast kulda oli sõrmuses?

4) Hõberublas oli 4 solotnikku 21 dooli puhast hõbedat. Metall, millest löödi harilikult täieväärtusline hõberaha, käis ligatuuri vastu rublas, nagu 9:1. Kui raske oli hõberubla? 1 sol. = 96 dooli = 4 grammi (umbes).

5) Neli äriosanikku, kelle osatähtede peale summad 2400, 1200, 4200, 3600 marka kirjutud, jagasid omavahel proportsjonaalselt saadud puhta kasu 380 marka. Kui palju sai iga osanik?

6) Kapitaal a marka annab b marka kasu. Kui palju kasu toob neilsamul tingimusil c marka? Leida üldine vormul ja leida resultaat, kui $a = 630$; $b = 27$; $c = 420$.

7) Kapitaal k marka kasvas t aasta pärast l margaks. Missuguse protsendiga oli kapitaal antud?

8) Kasu, mille kapitaal k toob t aastas p (liht) protsendiga, on $u = \frac{kpt}{100}$. Seletada vormuli saamist ja ilmutada temast iga suurus teiste kaudu. Näidata, missugused suurused on otse- ja missugused vastuproportsjonaalsed.

9) Venna kapitaal tõi 8 kuu jooksul $4\frac{1}{2}$ protsendiga niisama palju kasu, kui õe kapitaal 9 kuu jooksul $3\frac{1}{2}$ protsendiga. Leida kapitaalide suurused ja nende suhe, kui kogusumma on 2070 marka.

Geomeetrilised ülesanded.

613.

1) Joonlõik 90 sentimeetrit lahutada kaheks osaks, millede suhe on a) 7:8; b) 1:5; c) 5:7.

2) Meeter jagada proportsjonaalselt arvudele: a) 1:3:6; b) 5:7:8; c) $a:b:c$.

3) Kahe võrdsete pindadega täisnelinurga lühemad küljed suhtuvad nagu 4:3. Esimese perimeeter on 54 meetrit. Leida teise perimeeter, kui esimese oma külgede vahekord on 4:5.

4) Täisnelinurkne väli on maasstaabis 1:800 kujutud. Kui suur on väli pinnamõetudes (ruutmeetrites), kui plaani vähem külg on 9 cm. ja külgede suhe on 3:7?

Puu ehk torni kõrguse määramine.

614.

1) Horisontaalse maapinna sisse püsti löödud varras (gnoomon, obelisk) on h sentimeetrit kõrge ja tema vari on a sentimeetrit pikk. Leida puu kõrgus, mille vari selsamal ajal, kui varda varju pikkust mõedeti, on b sentimeetrit.

2) Tallinna Oleviste kiriku torni kõrgus on 62 sülda, Pariisi Eiffeli torni kõrgus 141 sülda. Kujutada samas maasstaabis mõlemate tornide ja inimese kõrgus (5 jalga), võttes 1 süld .... 0,5 cm

Ülesanded matemaatilisest geograafiast.

615.

1) Kasutades juhuliselt käesolevat kodumaa kaarti ja selle juures olevat mõetu, leida tähtsamate punktide kaugus ja määrata aja kestvus, mis kulub lenduril ühest kohast teise jõudmiseks. Võib oletada, et lenduri kiirus tunnis on 120 *km.* = 112 versta.

2) Kujutada maailma kehade suurusi, võttes mõeduks 1000 *km.* ühes millimeetris, kui

Maakera raadius = 6400 km.
Kuu „ = 3500 „
Päikese „ = 1400000 „

3) Teha maailma ehituse skeem, võttes mõeduks 1 sentimeeter, mis vastaks maakera kaugust päikeselt („maailma meeter", „astronoomiline pikkuse mõet"), s. o. 150 000 000 kilomeetrit. Meie päikesesüsteemi kõige kaugema praegu tuntud planeedi Neptuni kaugus päikeselt on 4 miljardi 500 miljoni kilomeetrit. Ligemal, Neptuni orbiidist seespool, ringivad ümber päikese teised päikesesüsteemi planeedid. Kõige ligema *n. n.* kinnistähe („naabruspäikese") *d* Centauri kaugus on ümmarguselt 40 biljoni (1 biljon = miljon miljoni) kilomeetrit. Seejärel tulevad teised meile tuttavad tähed, millede kaugus üksteiselt on keskmiselt niisama suur, kui *a* Centauri ja päikese vahe. Kui päikene oleks raekoja hoones, kuidas asetuksid siis planeedid ja kas mahuks *a* Centuri linna piiridesse?

Ülesanded füüsikast.

616.

1) Rõhumist mõedetakse tungi suuruse abil (harilikult raskusemõetudes, näit., kilogramm, nael j.m.), mis ühelise pinna (ehk pinna üksuse) kohta tuleb. Näit., auru surumist katla sees tema seinte vastu võib määrata kilogrammides ühe ruutsentimeetri kohta. Teades, et tung p_0 kilogrammi mõjub ühetasaselt pinnale s_0 □ sentimeetrit, leida rõhumine k ühelisele pinnale (proportsjonaalsuse koeffitsient) ja rõhumine p, mis mõjub s □-sentimeetrilisele pinnale.

2) Õhu rõhumine normaalseis tingimusis on 1033,6 grammi ühele ruutsentimeetrile. Lugedes inimese keha välises pinnas 15000 □ sentimeetrit, leida õhu surumine inimkeha kogupinnale. Kui suur on eelneva ülesande vormulis k, s ja p?

3) Kui on võetud kaks mitmesuguse pikkusega pendlit, siis on nende pikkused niisuguses vahekorras, nagu nende täieliste võnkumisperioodide (aja vältsused kahe momendi vahel, kui pendel samas sihis liikudes samast punktist läbi läheb) ruutarvud. Sekundi pendli (mis sekundis täielise võnkumise lõpetab) pikkus on ligidalt 97 sentimeetrit. Mitu sekundit kulub täieliseks võnkumiseks teatri saali ehk kiriku lakke kinnitud pendlil („Foucault'i pendel"), mille pikkus on 16 meetrit?

V. Esimese astme võrrandused ühe tundmatuga.

§ 1. Esimese astme võrrandused.

617.

1) $x+6=10$ 2) $x-3=5$ 3) $11-x=3$
4) $9=x-5$ 5) $16=9-x$ 6) $x-7=1$
7) $8-x=0$ 8) $14+x=0$ 9) $3+x=2$
10) $12=y+17$ 11) $3\frac{1}{3}-z=2\frac{2}{3}$ 12) $2y+5=9$
13) $3y-8=10$ 14) $18-7y=4$ 15) $5x+17=2$
16) $6z=18$ 17) $15=3z$ 18) $3z+2z=20$
19) $3x=10$ 20) $13x=5$.

618.

1) $7z-10+5z=50$ 2) $29=1-6z+10z$
3) $3z-5+2z-4=6$ 4) $3+2x=x+7$
5) $5y-7=3y-15$ 6) $7x-18=4x+9$
7) $10+6x=5x+7$ 8) $34+6x=84-x$
9) $24-5y=26y+3$ 10) $8x+3=20-x-3$
11) $5-4y=11-8y-19$ 12) $28=6x-41+2x+29$
13) $7z+16-3z-13=-1$ 14) $9u+1-5u-25=0$
15) $0=12u+4-9u-3$ 16) $5x-7+2x=6x+1-3x$
17) $16x+27-5x=33x+15-28x$
18) $84-35u-62=10+40u-18$
19) $32+14y-31=9y+21+55y$
20) $38x-81+23x-28-x+53=0$
21) $y-7+6y+108+10y+70=1$
22) $10v=55v+18+36v-56-43$.

619.

1) $8x+7+19x-10=16x-12+2x-8$
2) $y+13+3y+5y+15+7y+17+19=0$
3) $53u+84+35u+12=78+43u+21+41u$

4) $18u + 13 = 23u + 8 - 42u + 18 + 33u - 17$
5) $-x - 10 - 49x + 42 = -8x + 74 - 49x - 28$
6) $4 + 20x - 8x + 36 - 12x + 14 = -19x$
7) $13y + 34 - 28y - 80 + 60y + 47 - 52y = 0$
8) $1 + 91y + 7 + 12y = 77 + 65y + 100 + 25y$
9) $25v + 1 + 35v + 20 = 20v - 6 + 34v - 3$
10) $-100 = 38 - 11v + 35 - 17v + 10 - 33v$
11) $62x - 68 - 50x - 1 = 45x + 12 - 38x - 19 - x - 60 - 3x$
12) $25x + 52 - 110 + 35x + 48 = 3x - 3 + x + 7 - 49x$
13) $15 + 70 + 60y + 94y + 48 = 27y + 66 + 32y + 46 + 101y$
14) $24y - 67 - 16y + 10 - 7y = 42 - 20y - 35 - 8y - 52$.

620.

1) $\frac{x}{5} = 8$
2) $\frac{2x}{7} = 3$
3) $\frac{1}{x} = 7$
4) $\frac{5}{2x} = 2$
5) $\frac{x}{2} + 5 = 7$
6) $\frac{x}{3} - 3 = 1$
7) $15 - \frac{x}{5} = 10$
8) $\frac{x}{5\frac{2}{5}} = 2\frac{2}{3}$
9) $\frac{x}{4{,}8} = 120$
10) $\frac{1}{2}y + \frac{1}{3}y = 15$
11) $\frac{1}{3}x = \frac{1}{5}x + 2$
12) $\frac{1}{7}z + 1 = \frac{1}{6}z$
13) $\frac{4}{9}z - 3 = \frac{1}{3}z$
14) $8u - 4{,}5 = 3u$
15) $1{,}7u = 6{,}2u - 10{,}6$
16) $4{,}2v = 3{,}8v + 0{,}32$
17) $13{,}5x - 5{,}46 = 17{,}4x$
18) $200{,}8 + 52{,}7x = 27{,}6x$
19) $47{,}5x = 20{,}6x - 26{,}1$
20) $65{,}1x + 15{,}4 - 72{,}8x = 0$
21) $3\frac{3}{4}y = 1\frac{1}{6}y - 17\frac{11}{12}$
22) $18\frac{3}{4} - 7\frac{3}{4}y = -1\frac{1}{2}y$
23) $2\frac{1}{2}x - 4\frac{2}{3} = 7\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x$
24) $2\frac{1}{8}x + 2\frac{5}{6} = 3\frac{1}{12} + 1\frac{3}{8}x$
25) $5{,}8x - 5{,}8 = 6{,}8x + 4{,}2$
26) $1{,}17 - 17{,}7z = 1{,}73 - 18{,}5z$
27) $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100$
28) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x}{5} + \frac{x}{6} = 23$
29) $\frac{1}{6}z + 1\frac{1}{12} - 2\frac{2}{3}z = 5\frac{1}{2} - 3\frac{1}{3}z + 7\frac{3}{4}$
30) $\frac{1}{4}z - \frac{3}{7} - \frac{2}{7}z = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}z + 1\frac{1}{14}$

31) $3-x-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}x+\frac{1}{12}x=\frac{7}{12}+\frac{1}{6}x+1\frac{1}{2}$

32) $-\frac{1}{3}+2x-10=\frac{5}{6}x-1\frac{1}{21}+\frac{7}{21}x-\frac{6}{7}$

33) $1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}x+\frac{1}{32}x=x$

34) $0{,}5+0{,}87z+0{,}22-0{,}74z=0{,}46z+7-1{,}03z$

35) $z-0{,}07-0{,}16z-0{,}8z-0{,}09=0{,}02z+0{,}1$

36) $10+53y=24{,}8z+7{,}44+11{,}42z+0{,}76+16{,}18z+4{,}68$

37) $0=\frac{1}{4}+y+1{,}5-3{,}01y+0{,}27+1{,}81y+0{,}23-0{,}7z$

38) $-1{,}29z-70-0{,}6=0{,}99+2{,}54z+0{,}51+4{,}28z-10z.$

621.

1) $2y-(8-y)=1$
2) $3(8-y)-32=y+12$
3) $4(5-6y)=2y+7$
4) $5(7-3y)=3(12y+7)-3$
5) $5(3u-17)=7(u-3)$
6) $4(15+2u)=9(1-u)$
7) $4v=5(2v-3)-2(3v-7)+1$
8) $3(5v+22)-5(v+5)=1$
9) $10-(7x-60)=2(3x-21)-(x+8)$
10) $7x-2(27-4x)+9-2(2x+5)=0$
11) $(y-5)(y+3)-(y-4)^2=5y+1$
12) $(y+10)(7-y)=(v+5)^2$
13) $(3y-11)(10-y)=y+35-3(v-5)^2$
14) $0=(3y+15)(4y-1)+(31+6y)(3-2y)$
15) $(4+z)(25-6z)+(3z-10)(2z-10)=4$
16) $35=7(2-z)^2-(5z+6)(z-3)-(9-z)(4-2z)=35$
17) $(x+2)(x-1)=(x-2)(x+4)$
18) $(x+1)(x+4)+(1-x)(3+x)=0$
19) $(x+1)(x+2)=(x-1)^2+16$
20) $(x+5)^2-(x-9)^2=140.$

622.

1) $6x-\frac{3}{4}\left(2x+7\right)=\frac{2}{5}\left(3x-5\right)+5$

2) $\frac{2}{3}\left(3x-4\right)+3=1\frac{1}{2}x+\frac{6}{7}\left(9-2x\right)$

3) $3\left(\frac{3}{4}z-5\right)-2\left(6+2\frac{1}{2}z\right)-z+13=0$

4) $0 = 2\left(\frac{5}{2} - z\right)\left(\frac{5}{2} + z\right) + \left(\frac{1}{2} + z\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - z\right)^2$

5) $\left(5y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{8} = \left(\frac{3}{4} - 3y\right)^2 + \left(4y + \frac{1}{4}\right)^2$

6) $\left(y + 0{,}3\right)^2 + \left(y - 0{,}3\right)^2 - y^2 = \left(y + 0{,}3\right)\left(y - 0{,}3\right) + y$

7) $x - \frac{3x-1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 11 - \frac{7x-4}{2}$

8) $15 - \frac{3x+2}{5} = \frac{x+14}{10} - \frac{7x-4}{2}$

9) $\frac{z-1}{2} - \frac{6z+5}{7} = \frac{3-2z}{14} - \frac{3z+2}{2}$

10) $\frac{z+8}{3} - \frac{3-z}{2} = \frac{z+11}{6} + \frac{z-11}{4}$

11) $\frac{5y-4}{6} - \frac{1-3y}{5} = \frac{1}{2}\left(y - 2\right) + \frac{2(1+y)}{3}$

12) $\frac{7y-3}{4} - \left(y - \frac{5+4y}{3}\right) = \frac{2-y}{3} - \left(\frac{y-11}{6} - y\right)$

13) $\frac{1}{5}\left(6 + 5z\right) - \frac{8z-3}{15} = \frac{7-z}{5} - \frac{1}{15}\left(4z - 11\right) - \frac{1}{3}\left(2 - 3z\right)$

14) $\frac{3x+4}{5} + x - \frac{2(2-x)}{10} = -\frac{3-x}{4} + 3 + \frac{5x-17}{2}$

15) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + 2 = \frac{x}{6} + \frac{x}{9}$

16) $-x = \frac{x+1}{3} - \frac{7(5-x)}{2} + 6$

17) $\frac{y}{7} + \frac{y}{14} = \frac{y}{2} - \frac{y}{5} - 6$

18) $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} + \frac{x-4}{4} - \frac{4}{7}\left(x - 5\right) = 0$

19) $\frac{4}{5}\left(x - 3\right) - \frac{7x-1}{4} + 1 = 2x$

20) $\frac{2z-17}{5} - \frac{1-z}{4} = \frac{3(z-15)}{2} + 2.$

623.

1) $\frac{7}{y} = 3$

2) $\frac{3}{2} = \frac{3}{5} : y$

3) $\frac{x}{5} - 2 = 1$

4) $6{,}2 + \frac{11}{x} = 4$

5) $12 : (-z) = 4$

6) $4 - \frac{15}{-z} - 9 = 0$

7) $\frac{7}{x} + 8 = \frac{11}{x}$

8) $\frac{5}{x} = \frac{4}{x} - 2$

9) $\frac{3}{y} + \frac{5}{6} = \frac{4}{y} - \frac{2}{3}$

10) $\frac{1}{x} = 0$

11) $\frac{3}{2x+5} = 0$

12) $\frac{3}{x} + \frac{1}{4} = \frac{2}{3x} - \frac{5-x}{4x}$

13) $\frac{7-x}{x}+\frac{5}{9}-\frac{2}{x}-\frac{4x+3}{9x}=0$

14) $\frac{7}{z}-\frac{z-8}{4z}=\frac{3}{4}+\frac{5}{z}$

15) $\frac{-4+x}{x}+\frac{1}{5}=\frac{3x-10}{10x}+1{,}5$

16) $\frac{5}{y+8}=\frac{5}{6}$

17) $\frac{2}{3}=\frac{6}{4+5y}$

18) $\frac{8}{5x-3}=\frac{2}{3}$

19) $\frac{2}{x+1}=\frac{1}{x-1}$

20) $\frac{2}{x-3}=\frac{3}{x-2}$

21) $\frac{1}{3x+1}=\frac{1}{4x-7}$

22) $\frac{1}{3y+5}=\frac{1}{7y+9}$

23) $\frac{x-5}{x+4}=\frac{x+1}{x-8}$

24) $\frac{x-5}{x-2}=\frac{x}{x+8}$

25) $\frac{3y-7}{y+1}=\frac{7}{4}$

26) $\frac{y+5}{y-5}=\frac{1}{3}$

27) $\frac{5z+1}{5z-1}=\frac{7}{8}$

28) $\frac{4z-11}{3}=\frac{11+2z}{7}$

29) $\frac{4}{x-2}=\frac{9}{x+3}$

30) $\frac{3}{18-4x}=\frac{1}{5x-39}$

31) $\frac{13}{8-5u}=\frac{2}{3u+5}$

32) $\frac{4}{u-\frac{1}{3}}=\frac{3}{u-\frac{1}{2}}$

33) $\frac{2x^2-5x+19}{3x^2+x+3}=\frac{2}{3}$

34) $\frac{9}{9x^2+x-3}=\frac{4}{4x^2-5x+15}$

35) $\frac{5y^2-4y+9}{4y^2+5y-1}=\frac{5}{4}$

36) $\frac{3}{3y^2+2y+1}=\frac{7}{7y^2-2y+9}$

37) $\frac{7z^2+3z+6}{8z^2-4z-8}=\frac{7}{8}$

38) $\frac{3}{3z^2-7z+5}=\frac{5}{5z^2+4z-7}$.

624.

1) $\frac{3x-2}{x+6}-\frac{8-3x}{6}=\frac{3x-7}{3}+\frac{4-x}{2}$

2) $\frac{11-4x}{5}-\frac{9-2x}{2}=\frac{2x-13}{10}-\frac{22+x}{9x-10}$

3) $\frac{4}{3(x-2)}+\frac{3}{4(x-2)}=\frac{1}{36}+\frac{2}{x-2}$

4) $\frac{5}{2(3x+1)}-\frac{1}{4(3x+1)}=\frac{2}{3x+4}+\left(\frac{1}{8}\right)^2$

5) $1=\frac{2u+5}{3u-9}-\frac{u-9}{2u-6}$

6) $\frac{4u+1}{3u-6}+\frac{1-u}{10-5u}=1$

7) $\frac{2x-17}{x-1}-\frac{4-x}{x+1}=\frac{3x^2-213}{x^2-1}$

8) $\frac{3x-14}{x+1}=\frac{10-x}{x-2}+\frac{4x^2-185}{x^2-x-2}$

9) $\frac{2y}{3(y-1)}-\frac{1-3y}{2(y+1)}=\frac{13y^2-21}{6(y^2-1)}$

10) $\frac{3y-10}{5(y-3)}=\frac{y+1}{4(y-2)}-\frac{103-7y^2}{20(y^2-5y+6)}$

11) $\frac{3}{x-3}-\frac{2}{2-x}=\frac{5}{x-1}$

12) $\frac{5}{2x-3}+\frac{2}{4x+1}=\frac{9}{3x-2}$

13) $\frac{3}{3-x}+\frac{4}{4-x}+\frac{14}{1+2x}=0$

14) $\frac{3}{3x-1}+\frac{2}{4x+3}-\frac{3}{2x-3}=0$

15) $-\frac{1}{x+8}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}$

16) $-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}$

17) $\frac{1}{5-y}+\frac{1}{7+x}=\frac{1}{8+y}+\frac{4}{4-y}$

18) $\frac{1}{7-x}+\frac{1}{7+x}=\frac{1}{11+x}+\frac{1}{3-x}$

19) $\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u+2}=\frac{1}{u+3}-\frac{1}{u+4}$

20) $7\left(\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+7}\right)-2\left(\frac{1}{x+11}-\frac{1}{x+4}\right)=0$

21) $5\left(\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-5}\right)-3\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+8}\right)=0$

22) $\frac{8}{p-3}+\frac{4}{3-p}=\frac{2}{p-4}$

23) $\frac{24}{p^2-1}-\frac{5}{p-1}=\frac{2}{p+1}$

24) $\frac{3}{u+3}+\frac{2}{u-3}=\frac{u+5}{u^2+9}$

25) $\frac{7}{z+4}+\frac{5}{z-5}=\frac{11z-13}{z^2-z-20}$

26) $\frac{4}{z+2}+\frac{3}{z-7}=\frac{8(z+1)}{z^2-5z-14}$

27) $\frac{6x+4}{3x+2}+\frac{4x-3}{6x^2-5x-6}=\frac{4x-5}{2x-3}$

28) $\frac{5}{4x+5}+\frac{31}{8x^2-18x-35}=\frac{2}{2x-7}$

29) $\frac{u-1}{u-2}-\frac{u-2}{u-3}=\frac{u-3}{u-4}-\frac{u-4}{u-5}$

30) $\frac{u-1}{u-2}-\frac{u-2}{u-3}=\frac{u-8}{u-9}-\frac{u-9}{u-10}$

31) $\frac{1-z}{2-z}-\frac{2-z}{3-z}-\frac{4-z}{5-z}+\frac{5-z}{6-z}=0$

32) $\frac{2r+7}{4r-5}+\frac{9r-17}{6r+1}=2$

33) $\frac{6(r+1)}{3r+1}-\frac{7r+5}{7r-1}=1$

34) $\frac{2s-5}{s-1}-1=\frac{s-7}{s-5}$

35) $\frac{s+4}{s-6}=2+\frac{s-17}{s-8}$

36) $\frac{5x+1}{2x+5}-3+\frac{2x-27}{4x-15}$

37) $\frac{3x}{2+3x}-2=-\frac{9+2x}{5+2x}$

38) $\frac{5x^2+x-7}{9x^2-4x-1}=\frac{5}{9}$

39) $\frac{2x^2-3x+2}{7x^2-5x+18}=\frac{1}{9}$

40) $\frac{5}{3x-4}-\frac{11x+14}{9x^2-16}=\frac{7}{3x+4}$

41) $\frac{1}{u+1}+\frac{1}{u+3}=\frac{2(u+5)}{(u+3)(u+1)}-\frac{1}{\left(u+\frac{1}{2}\right)\left(u+1\right)}$.

625.

1) $x+a=b$

2) $y-a=b$

3) $x+4=b$

4) $y-8=b$

5) $x+a-b=c$

6) $a-x+b=10$

7) $a-6=x-a+4$

8) $ax+b=c$

9) $k-lx=m$

10) $a-bx=5a+3$

11) $6x-a=5x+b$

12) $5a-5y=y+10b$

13) $2my-n=2n-my$

14) $7a-3b+c-9z=c-b-7z-3a$

15) $11a+13z-5b+2c=2a-2z-2b-c$

16) $k(m-u)=n$

17) $8(u-m)=3u+2m$

18) $7(u-m)=9(m-u)$

19) $3(2u-5m)=5(3u-5m)$

20) $a-x=(b-1)x$

21) $mn+my+n=(m+y)n+m$

22) $(a-z)b+a=ab+b-az$

23) $5(x-6b)+3(x+10b)=4(3x-2a)$

24) $7(4b-5x)=3(x+2a)-2(3a-71b)$

25) $6(7x-3b)-2(5a-b)=2(16x-13b$

26) $ay+by=c$

27) $ay-b=cy-d$

28) $m-ny=n-my$

29) $my-mn=n^2-ny$

30) $k+kz=i$

31) $iz+kz=z+i$

32) $m-nz=mz-z$

33) $m(x-1)+1=a(1+m)-x$

34) $2a(m-n)+nx=(x+1)m-n$

35) $3(y-a)=5(1-a)+2(a-y)$

36) $a(x-n)-n(1+x)=x+1+a(1-nx)$

37) $ax(1-a)+bx=a(b-ax)$
38) $(x-c)a+(a-d)c=b(x-d)+d(c+b)$
39) $5a(y-b)=2y(a+b)-3ab$
40) $3a(y-b)=2y(2a+b)-b(2a-b)$
41) $(e+f)z+(e-f)z=ez+f+g$
42) $(e+f)z-(e-f)z=fz+e+f$
43) $(x-m)(x-n)=x^2$
44) $(x-m)^2=(x-n)^2$
45) $(y-1)(y-c)=y^2-1$
46) $(y-c)(y+d)+y^2=c^2$
47) $(c-y)(d-y)+c^2=y^2$
48) $ax+b^2=bx+a^2$.

626.

1) $\frac{x}{m}=n$
2) $\frac{m}{x}=n$
3) $\frac{y}{a}-b=c$
4) $a-\frac{y}{b}=c$
5) $\frac{a}{y}-b=c$
6) $a-\frac{b}{y}=c$
7) $z-\frac{z}{i}=k$
8) $\frac{i}{z}-\frac{k}{z}=l$
9) $\frac{a}{x}-1=\frac{b}{x}+11$
10) $x-1=a-1+\frac{x}{b}$
11) $\frac{x-bc}{a(2+c)}=\frac{c-x}{2+c}-\frac{b}{a}$
12) $\frac{ax-b}{c}=x-\frac{cx-a}{c}$
13) $\frac{y}{m}+\frac{y}{n}=1$
14) $\frac{y-m}{n}=-\frac{y-n}{m}$
15) $\frac{my-n}{m}=\frac{m-ny}{n}$
16) $\frac{y}{m}-n=\frac{y}{n}-m$
17) $a-\frac{u-m}{m}=b-\frac{u-n}{n}$
18) $\frac{u+n}{n}-m=\frac{u+m}{m}-n$
19) $\frac{m-u}{n}-\frac{n}{m}=\frac{m}{n}-\frac{n+u}{m}$
20) $c\left(\frac{u}{b}-a\right)=d\left(\frac{u}{a}-b\right)$
21) $\frac{a+x}{n-x}=\frac{a-x}{a+x}+\frac{a}{a+x}$
22) $\frac{1+y}{1+y}=\frac{m}{n}$
23) $\frac{1+y}{1-y}=k$
24) $\frac{a-y}{b+3y}=1$
25) $\frac{(n-y)m}{m+y}=n$
26) $\frac{my+n}{my-n}=\frac{a}{x}$
27) $\frac{m}{y-m}=\frac{n}{y-n}$
28) $\frac{y+1}{m+n}=\frac{y-1}{m-n}$
29) $\frac{m+n}{m-n}=\frac{m+y}{m-y}$
30) $\frac{c-x}{c+x}=\frac{a-b}{a+b}$
31) $\frac{a+bx}{a+b}=\frac{c+dx}{c+d}$
32) $\frac{a+bx}{a-b}=\frac{c+dx}{c-d}$
33) $\frac{a-by}{a+b}=\frac{c-dy}{c+d}$
34) $\frac{e-y}{g-y}=\frac{e+y}{g+y}$
35) $\frac{e-3y}{g+3y}=\frac{4g-y}{4e+y}$

36) $\frac{a}{cy} - \frac{c}{ay} = (a-c)ac$

37) $a - \frac{b}{c+x} = b - \frac{d}{c+x}$

38) $\frac{a}{x} + \frac{b}{\kappa x} = 1$

39) $\frac{a^2-b^2}{bx} - \frac{c-a^2}{ax} = 1$

40) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} + \frac{x}{c} = d$

41) $\frac{ax}{b} + \frac{bx}{c} + \frac{cx}{a} = \frac{1}{abc}$

42) $\frac{z}{a} + \frac{a}{z} = \frac{a+2z}{2a} + \frac{a}{2z}$

43) $m - \frac{m}{z} + \frac{n}{mz} = \frac{m}{nz} - \frac{n}{z} + n$

44) $\frac{1}{f} + \frac{1}{d} = \frac{2}{r}$

45) $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} - \frac{x-c}{ab} = \frac{2}{a}$

46) $\frac{e-f+y}{e-f-y} = \frac{e+f+y}{e+f-y}$

47) $\frac{2y-e+f}{y-e-f} = \frac{2y}{y+e+f}$

48) $\frac{6m-8n-4z}{4m-3n-5z} = \frac{3m-2n+4z}{2m+n+5z}$

49) $\frac{27b+6z-12a}{4a-2z-13b} = \frac{3z-6a+19b}{2a-b-z}$

50) $\frac{2z-5a+7b}{10z-29a+41b} = \frac{4a-5b-z}{16a-5z-19b}$

51) $\frac{16a-3z+21b}{-5a+z-6b} = \frac{46a-9z+63b}{-14a+3z-22b}$

52) $\frac{bc-ax}{6bc} + \frac{ac-bx}{2ac} + \frac{ab-cx}{3ab} = 1$

53) $\frac{a(x-b)}{5b} - \frac{7(b-x)}{2a} + \frac{3ax}{b} = 3a$

54) $\frac{p-x}{p} + \frac{q-x}{q} + \frac{r-x}{r} = 0$

55) $\frac{m+3}{m+n} : (m+y) = \frac{n-3}{m+n} : (n-y)$

56) $\frac{y}{e^2} + \frac{y}{f^2} + \frac{y}{g^2} = e^2f^2 + f^2g^2 + e^2g^2$

57) $\frac{ey-2}{fg} + \frac{fy-2}{eg} + \frac{gy-2}{ef} = 0$

58) $\frac{e+fy}{fg} + \frac{f+gy}{eg} + \frac{g+ey}{ef} = 3$

59) $\frac{y-a}{bc} + \frac{y-b}{ac} + \frac{y-c}{ab} = 0$

60) $\frac{a+b}{x-b} + \frac{a}{b-x} = \frac{b}{x-a}$

61) $\frac{a}{a-x} + \frac{a-b}{b+x} = \frac{b}{b-x}$

62) $\frac{n^2}{m(n^2x-1} + \frac{m^2}{n(m^2x-1)} = \frac{m+n}{mnx+2}$

63) $\frac{m}{z-m} - 4 + \frac{3n}{m-z} = 0$

64) $\frac{a^2-b^2}{abx-c^2}+\frac{b}{ax+bc}=\frac{a}{bx+ac}$

65) $\frac{4m}{y-4m}+\frac{8n}{4m-y}=\frac{8(m-n)}{y}$

66) $\frac{3m}{2y-5m}=\frac{7(m+n)}{2y}-\frac{7n}{5m-2y}$

67) $\frac{ac+b^2}{c}=\frac{a}{x-a}-\frac{b^2}{c(a-x)}$

68) $\frac{5}{v+k}=\frac{3}{k-v}+\frac{2v}{v^2-k^2}$

69) $\frac{2(v^2-1)}{k^2-1}-\frac{v-1}{k-1}=\frac{v+1}{k+1}$

70) $\frac{v}{4k-3}+\frac{v}{4k+3}=\frac{4k}{16k^2-9}$

71) $\frac{a}{bx}-3-\frac{b}{x}=\frac{1}{b}-\frac{3a}{x}-\frac{b}{a}$

72) $\frac{1}{x}+\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{3a}+\frac{1}{4a}$

73) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{x}[(a+b)cd+(c-d)ab]$

74) $\frac{1}{py-pq}+\frac{1}{py-pr}=\frac{1}{qy-qr}+\frac{1}{qy-q^2}$

75) $\frac{y}{(m-n)n}-\frac{y}{(m-n)m}=\frac{m+n}{mn}$

76) $\frac{y}{m-4}+5=m+\frac{8}{m+4}-\frac{y}{16-m^2}$

627. 1) Järgnevaist võrdusist ilmutada: 1) a, 2) b:

1) $a+b=c$ 2) $ab=c$ 3) $a-b=c$

4) $\frac{a}{b}=c$ 5) $a-b+c+d=0$ 6) $\frac{a}{b}-c+d=0$

7) $ab+c-d=0$ 8) $a(b-c)=d$ 9) $\frac{a+bc}{d}=c$

10) $\frac{a+bc}{a-bc}+d=0$.

2) Kui suur on koeffitsient m võrdusis:

1) $mx+5=6x-1$, kui $x=4$;
2) $2-my=22+y$, kui $y=3$;
3) $\frac{x}{m}+\frac{1}{6}=\frac{x}{4}+\frac{1}{3}$, kui $x=\frac{2}{3}$;
4) $\frac{m}{y}-2=\frac{1}{25y}+y$, kui $y=\frac{1}{5}$?

3) Kahe arvu a ja b keskmine harmooniline arv m avaldakse vormuli

$$m = \frac{2ab}{a+b}$$

abil; 1) a ilmutada b ja m kaudu; 2) b ilmutada a ja m kaudu.

4) Kui r on sõõrjoone raadiuse pikkus, siis määratakse sõõrjoone pikkus C vormuli: $C = 2\pi r$ abil.

a) Missugune mõte on tähel π? b) Kui suur on maakera raadius, kui ekvaatori pikkus lugeda 40000 km.? [$\pi = 3{,}14\ldots$]

5) Kapitaal k marka, mis $p\%$-ga aasta algul antud, muutub aasta lõpuks K margaks, kus $K = k\left(1 + \frac{p}{100}\right)$. Ilmutada siit 1) k, 2) p teiste suuruste kaudu.

6) Kui summa a rubla diskonteeritakse t päeva enne maksu tähtaega $p\%$-ga, siis määrab maksetava summa s vormul

$$s = a - \frac{apt}{36000}.$$

Ilmutada siit 1) a, 2) p, 3) t teiste suuruste kaudu.

7) Kui v_0 liitrit õhku soeneb t kraadi võrra, siis muutub ta paisudes v liitriks, kus $v = v_0(1 + \alpha t)$. Ilmutada vormulist t, kui $\alpha = \frac{1}{273}$.

§ 2 Ülesanded ühe tundmatuga esimese astme võrranduse seadmiseks ja lahendamiseks.

Eelharjutused.

628. Järgnevaile ülesandeile seada võrrandused, otsustada need ja katsuda leitud saadused.

1) Missugusele arvule peab $\frac{2}{3}$ juure lisama, et saada $\frac{3}{2}$?

2) Missugust arvu peab a võrra suurendama, et saada 0?

3) Missugust arvu peab selle arvu veerandiga suurendama, et saada 35?

4) Missugusest arvust peab ära võtma 6, et saada selle arvu $\frac{5}{8}$?

5) Kui otsitav arv kasvatada arvuga 9 ja juure lisada

a) 7, siis saadakse 88
b) 6, „ „ 888
c) 5, „ „ 8 888
d) 4, „ „ 88 888
e) 3, „ „ 888 888
. . . . . .
k) 0, „ „ 888 888 888

Leida igale juhusele vastav arv ja seada otsuste tabel.

6) Kui otsitav arv kasvatada arvuga 9 ja juure panna resultaadile

a) 2, siis saab 11
b) 3, „ „ 111
c) 4, „ „ 1111
d) 5, „ „ 11111
. . . . . .
k) 9, „ „ 111 111 111

Leida igale juhusele vastav arv ja seada otsuste tabel.

7) Missuguse arvu võrra peab vähendama 144, et saada pool otsitavast arvust?

8) Kui palju peab arvu 123 suurendama ja 321 vähendama, et saada võrdsed resultaadid?

9) Missugune arv on nii palju arvust 13 suurem, kui palju ta ise on vähem arvust, mis kirjutud samade numbritega, kuid vastupidises järjes?

10) Leida arv, kui tema ja 36-e keskmine aritmeetiline arv on 63.

11) Missugusele kahekohalisele arvule, mille ristsumma on 12, juure lisada vaja 25%, et saada 60?

12) Missugusest arvust 5 ära võttes saadakse niisama palju kui jagades viiele?

13) Missugune arv on oma kolmandikust 18 võrra suurem?

14) Missugune arv on 20% võrra vähem kui 84?

15) Missugusele arvule 11-ne juurelisamisel saab niisama palju, kui 11-ga kasvatamisel?

16) Missugusest arvust 10-ne äravõtmine annab selle arvu 0,1 osa?

17) Missuguse arvu veerandi ja kolmandiku summa on 14?

18) Missuguse arvu viiendiku ja seitsmendiku vahe on 2?

19) Missuguse arvu kuuendikule on tarvis 4 juure lisada, et saada niisama palju kui selle arvu veerandist 4 ära võtta?

20) Missuguse arvu kolmekordsele peab 9 juure lisama, et saada niisama palju, kui selle arvu viiendikust ära võtta 5?

21) Leida arv, mille a ja b kordne on ab.

22) Leida arv, millest a ja b osade summa on $a + b$.

23) Missugusele arvule peab juure lisama selle arvu a-kordne, et saada $a^2 - 1$?

24) Missugusest arvust peab ära võtma selle arvu kaks b-list osa, et saada $b^2 - 4$?

25) Missugune arv on omast vastasarvust 24 võrra suurem?

26) Missugune arv on omast vastasarvust 20 võrra vähem?

27) Missuguse arvu kolmandik on oma vastasarvu kahendikust viiega vähem?

28) Missugune arv on oma vastasarvu võrdne?

29) Otsitavast arvust võeti ära 2, saadud vahe korrati 5-ga ja teosele lisati juure 8; summa jagati 7-le ja lisati juure veel 2, mille järel leiti otsitav arv, mis tarvis leida.

30) Otsitava arvu pool liideti ühega ja summa kasvatati viiega; teosest võeti 3 ära ja saadud vahe vähendati 3 korda, leides seega otsitav arv, mis tarvis leida.

31) Kui otsitavale arvule juure lisada 2, summa 2 korda suurendada ja juure lisada veel 8, siis saadakse niisama palju, kui otsitav arv ära võtta 10-st, saadud kahekordse vahe jagada 15-le. Leida arv.

32) Kui palju võrra peaks iga tegurit teostes 3.11 ja 1.18 suurendama, et need teosed võrranduksid?

33) Kui palju võrra peaks iga tegurit teoses 17.28 suurendama ja teoses 7.8 vähendama, et teosed võrranduksid?

34) Kui palju peaks igale liikmele proportsioonis $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ juure lisama, et tekiks uuesti proportsioon?

35) Kui palju peab võrdselt arvule 11 juure lisama ja arvust 7 ära võtma, et tekiks suhe 8?

36) Kui palju tarvis igaühele arvudest 6, 9, 21, 33 juure lisada ja ära võtta, et nad moodustaksid proportsiooni?

37) Kui palju on tarvis arvudest 19, 11, 7 ära moodustaksid pideva proportsjooni?

38) Kui palju peab võrdselt murru $\frac{1}{4}$ lugejale ja juure lisama, et saada $\frac{1}{3}$?

39) Kui palju peab võrdselt murru $\frac{6}{17}$ lugejale ja nimetajale juure lisama, et saaks $\frac{3}{4}$?

40) Murru $\frac{5}{17}$ lugejale on juure lisatud nii palju nelju kui palju murru nimetajale viisi. Kui palju on lisatud neljasid ja viisi?

41) Murru $\frac{26}{61}$ lugejast on ära võetud nii palju kahtesid, kui palju murru nimetajast seitsmeid, mille tagajärjeks on saadud 1. Mitu kahte ja seitset on ära võetud murru osadest?

42) Kui palju peab juure lisama a-le ja b-le, et saadud summade suhe oleks $c:d$?

43) Missuguse arvu peab a-le juure lisama ja b-st ära võtma, et saaduste suhe oleks $c:d$?

44) Arv m lahutada kaheks nõnda, et üks osa käiks teise vastu kui $a:b$?

45) Kui otsitavast kahekohalisest arvust, mille ristsumma on 3, ära võtta 9, siis tekib arv, milles ühed ja kümned on ümber asendud. Leida arv.

46) Kui otsitavas kahekohases arvus ümber asendada kümned ühtedega, siis saame uue arvu, mis suhtub otsitava arvuga kui 8 : 3. Leida arv, kui tema ristsumma on 9.

47) Kui kolmekohasest arvust, mille numbrid ühesugused, ära võtta 102 ja vahe jagada 40-le, siis saadakse üks neist võrdseist numbritest. Leida arv.

48) Kolmekohase arvu, mille numbrite väärtus paremale poole kahega kasvab, ja selle arvu ristsumma suhe on 70. Leida arv.

49) Suurema arvu $\frac{1}{4}$ on vähema arvu $\frac{3}{8}$. Leida mõlemad arvud, kui nende summa on 60.

50) Lahutada arv 55 kaheks osaks, nõnda et esimese osa veerandi ja teise arvu viiendiku summa oleks 12.

51) Leida niisugune arv, millele $\frac{1}{2}$ temast juure lisades ja summast $\frac{1}{3}$ temast ära võttes saadakse 70.

Ülesanded tegelikult alalt.

629.

1) Kolmes kotikeses on kokku 44 naela nisu. Teises on kaks korda enam kui esimeses, kolmandas aga kolm korda vähem kui esimeses ja teises ühtekokku. Mitu naela nisu oli igas kotis?

2) Ladus oli kuuse-, haava- ja kasepuid, kokku 44 sülda. Haavapuid oli 5 korda vähem kui kuusepuid ja kasepuid oli kolmandik sellest, kui palju kuusepuid oli enam kui haavapuid. Kui palju oli iga liiki puid?

3) *A* ja *B* panid äri-ettevõttesse vastavalt 6000 ja 7200 marka ja said 760 marka kasu. Kui palju sai neist kasu kumbki?

4) Kolm venda jagasid mõninga summa raha nõnda, et esimene sai sellest 30% ja veel 300 franki, teine sai 20% ja 200 franki, kolmas 10% ja 76 franki. Kui suur oli jagatav summa ja mitu franki sai vendadest igaüks?

5) Kolm ärinikku jagasid saadud puhta kasu nõnda omavahel, et esimene sai 1751 marka vähem kui 60%, teine sai 342 marka vähem kui 45%, ja kolmas 427 marka vähem kui 30% sellest kasust. Kui suur oli üldine kasu?

6) Neli last jagasid 81 marja omavahel nõnda, et esimene sai 30, teine niipalju nagu esimene ja kolmas ühtekokku, neljas aga ühe veerandi sellest, mis teine. Mitu marja sai igaüks?

7) Kolm last olid marjad, mis ema kinkinud, omavahel jaotanud otseproportsjonaalselt nende igade aastaile — 6, 8, 12, kuid ema ei olnud sellega nõus ja käskis jaotada vastuproportsjonaalselt, nõnda et kõige noorem sai veel 50 marja juure. Mitu marja oli üleüldse jaotud?

8) Kaks õpilast, kelledest ühel oli 180 ja teisel 220 marka, kulutasid igapäev vastavalt toitmiseks 4 ja 5 marka. Mitme päeva järel jäi neil raha ühepalju?

9) Kaks töölist, kelledest kummalgi alguses oli 143 marka, teenisid päevas juure vastavalt 10 ja 15 ja kulutasid 11 ja 4 marka. Mitme päeva järel on teisel neist 2 korda enam raha kui esimesel?

10) Vabriku põletisainete ladus oli võrdselt bensiini ja bensooli. Selle järel kui ära põletati 30 kilogrammi bensiini ja 50% kõigest bensoolist, jäi viimast ainet kolm korda rohkem üle kui esimest. Mitu kilogrammi põletisõli kummastki liigist oli alguses?

11) Isa on nüüd kaheksa korda vanem kui poeg, kuid 24 aasta pärast ainult 2 korda. Kui vana on nüüd poeg ja isa?

12) Kui kahe tuttava vanadused on 36 ja 27 aastat, millal on ehk oli nende igade suhe 10?

13) Kui palju vett peab 30 liitrile 60-kraadilisele viinale (60 osa piiritust, 40 osa vett) juure segama, et saaks 36-kraadilise viina?

14) Mitu solotnikku vaske peab 60 solotnikule 84-proovilisele hõbedale juure lisama, et saaks hõbe, mille proov on 56?

15) Toitlusvalitsus segas kahte sorti suhkrut, $9\frac{1}{2}$ ja 14 marka nael, rahvale suvistepühiks (1919) väljajagamiseks nõnda, et naela eest tuleks maksta 11 marka. Mitu naela odavat sorti suhkrut on tarvis 15-ne naelaga kallimast sordist segada, kui väljaantava kauba hinnale juure lisada 3 marka pakkimisekulu?

16) Kaupmees tarvitas segamiseks kahte sorti nisupüüli, 2 m. 50 p. ja 3 m. 25 p. nael, kusjuures esimest sorti oli $\frac{3}{4}$ korda vähem kui teist. Jättes esimesest sordist omale 2 naela ja müües segu 2 marka nael, sai ta 25 marka kahju. Mitu naela nisupüüli segati?

17) Talunik muretses kevadtalvel (1919) mesilaste toiduks kahte sorti mett, 17 ja 18 marka nael, ja maksis kõige 16 naela mee eest 277 marka. Mitu naela oli iga sorti mett?

18) Mitu pudelit vett on tarvis 50-kraadilise piirituse saamiseks 240 pudelile 60-kraadilisele piiritusele juure lisada?

19) Mitu liitrit 90-kraadilist piiritust on tarvis 120 liitrile 80-kraadilisele piiritusele juure lisada, et saada 84-kraadilise piirituse?

20) Kui palju vett on tarvis ära aurata lasta, et 3200 liitrist 2-protsendilisest soola lahust saada 10-protsendilise?

21) Soovitakse saada 10 liitrit 84-kraadilist piiritust. Selleks segati 72- ja 90-kraadilist. Mitu liitrit tuli võtta igast sordist?

22) Kuldsepp valmistab 84-proovilise hõbedasulatise. Mitu naela 80- ja 85-proovilist hõbedat peab ta selleks võtma, et saada tüki, mis kaalub 1 puud?

630.

1) Perenaine müüs 720 marga eest puuda võid, mis oli segatud kahest sordist, 15 ja 19 marka nael. Kui palju võeti kumbagi sorti võid?

2) Missugune kapitaal muutub $4\frac{1}{2}$ protsendiga 4 kuu pärast 3654 margaks?

3) Millal muutub 5 protsendiga antud kapitaal kahekordseks?

4) Mitme protsendiga peab kapitaal kasvama panema, et lõpukapitaal suhtuks aasta pärast alguskapitaaliga nagu 11 : 10?

5) Vanaisa pani pojapoja ja pojatütre nime peale hoiule kahte panka kokku 4000 marka, ilma et ta oleks neile teatanud, kui palju on igaühel. Esimene pank maksab 5, teine 4 protsenti. Aasta pärast said lapsed üleüldse 229 marka kasusid kätte ja neid huvitas — kui suur summa on igaühel pangas?

6) Haritud tööline andis 3% omast kuupalgast ametiühisusele ja 1% Punasele Ristile; 276 marka kulutas ülespidamiseks ja ülejääva osa pani 4% Krediitühisusse, mis kuus tõi talle 1 marga kasu. Kui suur oli kuupalk?

7) Jahukaupleja ostis 8 kotikest ja veel 6 naela nisujahu ja maksis selle eest 615 marka. Müües jahu 3 marga eest naela, sai ta üleüldse 20% kasu. Mitu naela jahu oli igas kotikeses?

8) Müüdud maja eest on *A-l B* käest saada mõne kuu pärast 36675 marka, kuid *B* tasus 36000 marka kohe nüüdsama. Mitme kuu järel oleks pidanud *B* esialgu tasuma, kui lugeda kapitaalist $4\frac{1}{2}$% aastas?

9) *A* tahtis *B* käest rentidá aia. *B* nõudis summa, mille *A* pidi 4 kuu pärast maksma; kuid *A* maksis nüüdsama 700 marka, Kui palju nõudis *B*, kui ta oli maksu viivitamisega nõus, arvates $4\frac{1}{2}$% kolmes kuus?

10) Kaupmees saab kaubast 32% kasu, müües kaupa 1 m. 98 p. nael. Mitu protsenti saab ta kahju ehk kasu, müües 1 m. 20 p. nael?

11) Kaupmees saab kaubast 25% kasu, kui müüb marga eest naela. Kui kallilt peaks ta naela müüma, et saada 30% kasu?

Ülesanded geomeetrilise sisuga.

631.

1) Jagada joonlõik 5,5 cm. seesmisel ja välisel viisil arvude 4 ja 7 suhtes.

2) Missugune nurk on: a) omast kõrvunurgast 2 korda suurem; b) 4 korda vähem; c) 40% sellest?

3) Võrdkülgse kolmnurga (sarik-kolmnurga) tipu juures olev nurk on: a) 3 korda aluse juures olevast nurgast suurem; b) 25% igast aluse juures olevast nurgast. Missugused on nurgad kolmnurgas?

4) Võrdkülgses kolmnurgas on külje ja aluse suhe 3 : 5. Perimeetri pikkus on 72 cm. Leida äärte pikkused.

5) Missuguses hulknurgas on diagonaale: a) 2 korda enam; b) 2 korda vähem kui ääri?

6) Missuguses kumeras hulknurgas on seésmiste nurkade summa $8d$?

7) Täisnelinurga küljed on 7 ja 9 cm. Kui palju peab pikendama üht külge, lühendades teist 2 cm. võrra, tingimusel, et pinna suurus jääks endiseks?

8) Trapeetsi aluste vahe on 5, kõrgus 8 *dm*. Leida aluste pikkused, kui trapeetsi pind on 100 dm^2?

9) Täisnurkses kolmnurgas on üks kateet 5 cm. ja teine 1 cm. lühem kui hüpotenuus. Arvata kolmnurga ääred (Pythagorase teoreem).

10) Perpendikulaar, mis täisnurga tipust kolmnurgas hüpotenuusile tõmmatud, on 2 cm. pikem kui lühem ja 3 cm. lühem kui pikem hüpotenuusi osa. Missugune on hüpotenuusi pikkus?

11) Kolmnurga ääred on 5 ja 11 m. ja vastavaist kõrgusist on üks 6 cm. pikem kui teine. Leida kõrgused.

12) Võrdkülgse kolmnurga perimeeter on 56 cm. ja kõrguste suhe kolmnurgas on 5:4. Arvata kolmnurga ääred.

Ülesanded liikumisest.

632.

1) Kaks teekäijat puhkavad teel, olles teineteisest 25 km. kaugusel. Millal nad kohtavad teineteist, kui samal silmapilgul hakkavad nad kiirustel $3\frac{3}{4}$ ja $4\frac{1}{2}$ km. tunnis teineteisele liginema?

2) Kaks tuttavat läksid maalt jala linna. Esimene suutis käia tunnis 3,8 km., teine — 4,3 km. Millal jõudis teine esimesele järele, kui esimene oli juba enne teele läinud 1 tund 20 minutit?

3) Üks aeroplaan ajab teist taga. Esimese kiirus on 110 ja teise oma 90 km. tunnis. Mitme tunni järel jõuab esimene teisele järele, kui see oli esimese väljalennul juba 80 km. kaugusel?

4) Kooli kasvandik tuli maalt linna, mis 30 km. kaugel. Osa teest sõitis ta hobusega, osa aurulaeval. Mitu km. oli hobusega ja mitu aurikul sõidetud, kui kiiruste suhe on 7:8?

5) Üks hobune käib vankrit vedades ühtlasel kiirusel maanteed mööda 16 meetrit 9 sekundis, teine — 9 m. 5 sekundis. Esimene läks 3 min. enne teele. Millal ja kus kohas jõuab teine talle järele?

6) Sõidurong jõuab Tallinna-Tartu vahe kõla 6 ja veorong 8 tunniga. Millal saavad rongid kokku, kui nad samal momendil hakkavad lõpujaamadest teineteisele vastu liikuma?

7) Talu ja kiriku vahel tegi esimene vankri ratas 700 tiiru enam kui tagumine. Kui kaugel on kirik talult, kui rataste ümbermõõdu (ringjoone) pikkused on 220 ja 290 cm.?

8) Viljandist läks raudteel veorong Pärnu, sõites tunnis keskmiselt 16 km.; 4 tundi hiljem tuli Pärnust Viljandi poole sõidurong 26 km. kiirusel tunnis. Millal ja kus nad kohtavad teineteist, kui Pärnu ja Viljandi vahe on 100 km.?

9) Sõidurong liikus 48 km. kiirusel tunnis. Reisija, kes vaguni aknast vaatas, nägi veorongi 24 sekundi jooksul endast mööda ruttavat. Missuguse kiirusega tunnis liikus veorong, kui tema vagunite arvu põhjal oli võimalik otsustada, et rongi pikkus oli 240 m.?

10) Teineteisele vastu liikuva sõidu- ja veorongi kiirused on vastavalt 36 ja 18 km. tunnis. Reisija võis sõidurongi vaguni aknast 11 sekundi jooksul vastutormavat rongi näha. Mitu vagunit oli veorongis, kui iga vaguni pikkus arvata 11 meetrit?

11) Kell 6 ööpäevad minuti- ja tunninäitaja virge joone. Millal on kella näitajail jälle samasugune seis?

12) Millal ja kuidas langevad minuti- ja tunninäitaja õhte?

13) Kaks õhulaeva tõusid Stokholmis õhku. Esimene neist jõudis Helsingi, mis Stokholmist 396 km. kaugel, teine, mille kiirus oli $\frac{5}{6}$ esimese omast, jõudis Tallinna, mis Stokholmist 360 km. kaugel, ja tarvitas selleks 1,7 tundi enam kui esimene. Missuguse oli õhulaevade kiirused tunnis?

Ühesandeid lõhkikast.

A. Erikaal (tihedus).

633.

1) Ujuv jääkõkk ulatab vees välja 10 cm. Kui paks on jää? Jää erikaal = 0,9.

2) Jääpaak ujub meres, nõnda et vees välja ulatav osa võtab 3000 kp. meevärti oma alla. Kui suur on umbes kuupmeetrites jääpaagi kogu ja ruskus, kui soola vee erikaal on 1,03 ja jää oma 0,9?

3) Tina ja hõbeda sulatis kaalub 1 kg., kus sulatise erikaal on 8,7. Kui palju hõbedat ja tina on sulatises koos, kui erikaal on hõbedal 10,2 ja tinal 7,3?

4) Kui raske männipuu plank suudab hoida vee pinnast kõrgemal inimese keha, mille raskus on 72 kg.? Männipuu erikaal = 0,6.

5) Kui suur korgitükk on tarvis siduda 5 kg. seatina külge, et selle süsteemi tõstetung oleks vees 1 kg.? Korgi erikaal = 0,24, seatina oma = 11,3.

6) Üleni kinnise kasti välised mõeted on: pikkus — 30, laius — 24 ja kõrgus — 18 cm., kuid seinte ja põhja paksus on ühtlaselt 6 cm. Kast ujub vees, olles vajunud sellesse 6 cm. sügavuselt. Missugune on kasti materjaali tihedus.

Märkus. Arvesse pole võetud õhu raskust kasti sees. Missugune muudatus sünnib ekvatsjoonis, kui võtta viimast asjaolu arvesse?

7) Pealt lahtine kuubikujuline tühi vasest kast, mille serva pikkus on 42 cm., ujub vees, kus kasti seinte paksus on ühtlaselt 1 cm. Kui sügavalt on kast vees, kui vase tiheduse võib lugeda 9?

8) Munade külmas hoidmiseks tarvitas perenaine lahtist tsingist kasti, mille pikkus, laius ja kõrgus olid vastavalt 60, 52 ja 16 cm. Munad laoti kasti, mis asetati külma vette anumas ujuma. Mitu muna on tal võimalik niiviisi hoida? Muna keskmine raskus oli 49 gr., tsingi erikaal = 7 ja kasti seinte paksus ühtlaselt = 1 cm.

9) Veest ja piiritusest tehakse niisugune segu, kus oliiviõli, ettevaatlikult kallatuna, tõmbub kerasarnaseks koguks, mille erikaal on niisama suur, kui ümbritseval vedelikul (Plateau katse). Kui palju on tarvis selle katse valmistamiseks ühele liitrile veele juure valada piiritust? Erikaalud on: piiritusel = 0,8; oliiviõlil = 0,9.

10) Lahtine klaasist kast, mille pikkus, laius, kõrgus väljastpoolt ja seinte paksus on vastavalt 36, 24, 10 ja 1 cm., ujub petrooleumis. Kui paksult peab kasti valama vett, et kast äärteni süüvuks petrooleumi? Erikaalud on: petrooleumil = 0,9, klaasil = 2,5.

11) Laev, mille vesijoonest ümbritsetud pind on 180 rt.-meetrit, võtab 600 inimest peale, kus inimese keha raskus on keskmiselt 81 kg. Mitu sentimeetrit vajub laev? Vesijoon on joon, milles vee pind laeva korpust lõikab.

12) Õhulaev, mille mahutus 1800 kp.-meetrit, on täidetud vesinikuga. Mitu inimest võib ta peale võtta, keskmiselt keha raskusega 82 kg., kui õhulaeva kere kaalub 245 ja ballast 1550 kg.? 1 liiter õhku kaalub mere pinnal 1,3 ja 1 liiter vesinikku — 0,09 gr.

B. Kangid.

634.

1) Varda otsadele, millede kaugus teineteisest on 28 cm, on kinnitud raskused: 2,4 ja 0,8 kg. Missuguses punktis peab varrast toetama, et tekiks tasakaal?

2) Kang, mille pikkus on 48 cm., on toetud mõnes punktis. Ühele kangi õlale on 6-e ja 18-e cm. kaugusel toetuspunktilt seatud rippuma vastavalt 200- ja 600-grammilised raskused. Missugune raskus tuleks riputada teise kangi otsa, et tekiks tasakaalu seisukord?

3) Kangi otsa on riputùd 10 võrdset pommi, teisele poole toetuspunkti 6 cm. kaugusel niisama palju samasuguseid pomme. Missuguse pommiga võib kangi tasakaalutada tema teises otsas? Kangi pikkus on 50 cm.

C. Soojus.

635.

1) Juuresoleval joonestusel on kõrvu kujutud Réaumuri, Celsiuse ja Fahrenheiti termomeetrite astmikud (skaalad).

a) Kui palju näitavad Celsiuse ja Réaumuri termomeetrid, kui Fahrenheiti oma on 100° (inimese vere normaalsoojus)?

b) Kui palju näitab Fahrenheiti soojamõetja, kui Réaumuri oma annab 15° (harilik toa soojus)?

c) Missugused temperatuurid Réaumuri ja Fahrenheiti järele lähevad lahku ainult märkidelt?

Réaumur	Celsius	Fahrenheit
80°	+ 100°	+ 212°
+	+	+
0°	0°	+ 32°
−	−	+ 0° −

2) Raudteerööbaste jätkud, millede pikkused on 12 m., seatakse nõnda, et otsad puutuvad kokku 30° *C* temperatuuril. Kui suur on otsade vahe talvel 20° *C* temperatuuril, kui raua pikenemise koeffitsient on 0,000012?

3) Mitu liitrit keeva vett on tarvis 24 liitrile toas seisnud veele — 16° *C* — juure kallata, et saaks paras vesi vannitamiseks (+ 28° *C*)?

4) Tallinna tütarlaste kommertskooli õpilased tegid 3 korda katset $\frac{1}{2}$ kilogrammilise metallitüki erilise soojuse (c) määramiseks, kirjutades andmed ja resultaadid järgnevalt tabelisse (21. sept. 1918), kus t on 575-e grammi vee hulga esialgne soojaseis kalorimeetris, t_1 — metallitüki soojus enne kalorimeetrisse panemist, T — lõpuline ühtlane vee ja metalli temperatuur kalorimeetris enne jahtumist. On tarvis leida erisoojus kuni sajandiku peenuseni ja määrata, missuguse metalliga oli siin tegemist.

$m = 575$ $\mu = 500$			
T	21,7°	27,0°	32,0°
t	15,0°	21,3°	26,7°
t_1	93,5°	94,0°	93,6°
C			

5) 270 grammi vee sisse, mille temperatuur oli 16° C, lasti keeva veeauru nii kaua voolata, kuni vesi läks keema ja veele tuli juure raskust 42 gr. Leida kalorites auramise ehk keemise soojus.

6) Vannitamiseks võeti 60 liitrit vett, mis leiti olevat natuke soe (+ 35°C). Kui palju on tarvis tuua õuest jääd, et vett jahutada 28 kraadini?

7) Teejooja pani 40-kraadilise sooja tee sisse rutuliseks jahutamiseks 2 teelusika täit lund. Kui palju jahtus tee? Tee hulk klaasis — 200 gr., lume mass — 20 gr.

8) Mitu liitrit toas seisnud vett — 15°C — on tarvis võtta ühe kg. jää sulatamiseks?

D. Rõhumine gaasides.

636.

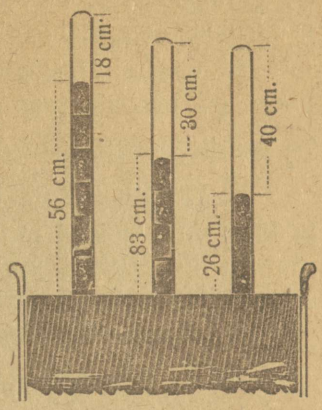
Kinnises anumas, milles kaas võib pühtsihis vabalt liikuda, on kokkusurutud õhk. Esite oli kaane peal raskust 1 kg., pärast — 10 kg. Mitu korda ja kui palju vähenes õhukogu anumas, ku õhkkonnas oletada normaalist õhurõhumist (760mm)? Kaas kaalub $\frac{1}{2}$ kg. ja ta pind mahutab 300 rt.-cm. Elavhõbeda erikaal = 13,6

2) Juuresoleval joonisel on kujutud pikk toru, mille alumine lahtine ots on asendud elavhõbeda sisse anumas. Väljaulatava elav-

hõbeda-samba ja gaasisamba pikkused torus on antud sentimeetrites. Väliše õhkkonna rõhumine on normaalne. a) Mitme cm. võrra peab toru üles tõstma, et gaasi kogu suureneks 2 korda? b) Mitme cm. võrra peab toru sügavamale elavhõbedasse vajutama, et gaasikogu väheneks 2 korda? (V. A. Zinger, Füüsika õperaamat).

3) Mitme kraadi võrra peab 0° temperatuuri juures võetud gaasi soendama, et gaasikogu paisuks 2 korda?

4) Muutumatu ruumi paigutud gaasi soendakse — 20°*C* kuni + 30°*C*. Kuidas muutub gaasi rõhumine?



Mitmesugused ülesanded.

637.

1) Kuidas jagada 47 marka kolmeks osaks nõnda, et teises oleks 5 marka enam kui esimeses ja kolmandas 17 m. vähem kui teises?

2) Poiss pani iga kuu lõpul teatava võrdse summakese laekasse. Viie kuu järel kinkis vanaisa veel 4 marka juure, ja siis oli poisil üldse 34 marka. Mitu marka kogus ta igas kuus?

3) Vabrik töötab 10 tundi päevas 12 masina abil, milledest kõigi töövõimsus on ühesugune. Mitu masinat peab veel panema tööle, kui soovitakse 8-tunnilist tööpäeva maksma panna, ilma et töö hulk selle läbi väheneks?

4) Kasule antud kapitaal muutus 4%-ga aasta pärast 8892 margaks. Missugune oli alguskapitaal?

5) Kapitaal 8640 marka on antud jaolt $4\frac{1}{2}$% ja jaolt 5%-ga 3 aastaks hoiule, mil üldine kasu oli 1188 marka. Missugused olid jaod?

6) *A* ja *B* kahekesi tahtsid osta aeda. *A* võis maksta ainult $\frac{2}{5}$, *B* — $\frac{3}{7}$ nõutavast summast. Mis maksab aed, kui mõlemad panid kokku 12400 marka?

7) Heinalised asusid niitma kahte heinamaad, milledest esimene oli 2 korda suurem kui teine. Kui nad juba olid üheskoos niitnud poole päeva esimest heinamaad, siis jagasid nad endid kahte

ossa, milledest esimene jäi töötama suuremale heinamaale, aga teine hakkas niitma vähemat. Õhtuks oli suurem heinamaa niidetud, kuid vähemast jäi veel niipalju järele, et sellest jätkus kogu päevaks ühele inimesele teha tööd. Kui palju oli heinalisi?

8) Püssirohi seisab koos salpeetrist, väävlist ja söest. Mitu naela iga liiki ainet on puudas püssirohus, kui salpeetrit peab võtma $7\frac{1}{2}$ korda ja sütt $1\frac{1}{2}$ korda enam kui väävlit?

9) Kaupleja ostis 17 tallekest à 54 franki. Mõned neist said ta käes otsa, teised müüs aga nõnda, et igale talle hinnale lisas niipalju 6-frangilisi juure, mitu tallekest sai otsa. Kui on teada, et ta kõik müüs ilma kasu ehk kahju saamata, leida, kui kallilt pidi ta tallekese müüma.

10) $\frac{1}{4}$ liitri alkoholi (tihedus $= 0{,}8$) ja eetri (tihedus $= 0{,}7$) segu kaalub 192,5 gr. Kui palju on segus mõlemaid segatuid aineid?

11) Hõbelusikas kaalub õhus 40,4 gr. ja vees 36,4 gr. Mitu grammi sisaldab lusikas hõbedat (erikaal $= 10{,}5$) ja vaske (erikaal $= 8{,}9$)?

12) Kahel aurumootoril on 108 hobuse kogujõud. Üks neist teeb 25 päeva jooksul niisama palju tööd, kui teine 11 päeva jooksul. Kui suur jõud on igal masinal eraldi?

13) Kolm isikut panid kokku kauba muretsemiseks summa, mis tõi kasu 1575 marka, kus kolmas üksi sai kasu 630 marka. Esimese ja teise osasummade suurused on vastavalt 3600 ja 2700 marka. Kui suur oli kolmas osasumma, ja missugused olid esimese ja teise osasummadest saadud kasud?

14) Karavaan läks teele ja pidi liikuma ühtlasel kiirusel 34 km. päevas, et jõuda määratud päevaks sihile, mis 680 km. eemal. Viie päeva järel pärast teekonna algust väsisid kaamelid, ja karavaani kiirus langes 4 km. võrra. Kui nad nelja päeva järel olid ühe päeva puhanud oaasis, siis asusid nad uuesti teele. Kui palju peab karavaan oma liikumist kiirendama, alguskiirusega võrreldes, et jõuda sihile määratud ajaks?

15) Ema ostis kolmele lapsele mänguasju. Esimele kulus $\frac{1}{8}$ kõigest kotis olevast rahast, teisele $\frac{1}{5}$ jäägist ja kolmandale $\frac{1}{9}$ sellest, mis jäi esimese ja teise mänguasja ostusummast järele. Kui kallis oli iga mänguasi, kui rahakotti jäi 3 marka 80 penni?

Ülesanded vanust raamatuist.

638. Ühes vanas Hiina aritmeetikas, mis kokku seatud 2600 aastat enne meie ajaarvamist ja mille välja annud õpetlane Dsin-Kin-Tschau 1250. a. e. meie ajaarvamist, on paigutud muu seas 3 järgmist ülesannet:

1) Keskpaigas ruudukujulises tiigis, mille laius ja pikkus on 10 jalga, kasvab pilliroog, mis 1 jala võrra veest välja ulatab. Kaldale, ääre keskkohta tõmmatuna, puutus ta oma ladvaga kaldasse. Missugune on tiigi sügavus? (*v.* Pythagorase teoreem)

2) Bambus-pilliroo varre, mille pikkus 10 jalga, on torm katki murdnud nii, et kui ülemine, murtud osa painutada maani, siis puudutab selle latv maapinda tüvelt 3 jalga eemal. Kui kõrgelt on puu murdunud?

3) Puuris on kanad ja kodujänesed. Loomadel on kokku 35 pead ja 94 jalga. Mitu kana ja kodujänest oli puuri pistetud?

639. Kõige vanemas allespüsinud matemaatika mälestuskirjas, Ahmese ehk Rhindi papüüruses (1700. a. e. meie ajaarv.), leidusid muu seas ülesanded:

1) Hau (s. t. hunik) ja ta $\frac{1}{7}$ on 19. Kui suur on hau?

2) Hau, ta $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ ja $\frac{1}{7}$ on 33. Leida hau.

640. Mõned ülesanded Greeka epigrammidest mis kogutud Max Planudist aastal 1300.

1) Antud on neli fontääni, anum suur antud on ka.
Eesmasest ööpäevas anum täituda suudab,
teine seks tarvitab ära kaks päeva ja ööd,
kolmas on nõrgem kolm korda kui eesmane, muudab
anuma neljas täis päivil, kui mitmes on ta.
Avades kraanid kõik, lastes voolata veel,
anum mil täitub siis? Otsusta ruttu nüüd, meel!

2) Hauakiri Diophantese*) haual olnud järgmine:
Näete, see kivi, mis siin — Diophantese hauda ta katab.
Mõistad sa kuulsamat kunsti — arvata aastaid siit pealt:

*) Diophantes — kuulus Greeka matemaatik, kes peaasjalikult aritmeetikaga ja arvude teooriaga tegutses.

Kuuenda osa sest elust on kaunimat lapsepõlve
maitsnud ta; kaksteistkümnendik veel ta oli noormees,
mööda läks seitsmendik east, siis kalli kaasa ta leidis,
viibisid aastatest viis, siis sündis neile üks laps.
Aga — suurt kurbust! — kui pool alles isa aastate arvust
elanud oli see poiss, surm tema mulda siis viis.
Kurvalte kurtis isa neli veel aastakest maa peal.
Ütle, kui osavust sul, kui suur ta aastate hulk!

(R. Kallas, „$12\frac{1}{2}$ toopi pähklid“)

3) Polykratese küsimusele, mitu õpilast on Pythagorasel, vastauud viimane järgmiselt:

Kaunimal teadusel pool neist kosutab end,
uurides arvude kunsti, ja neljandik saladust
looduses uurib, kui seitsmendik pühendab vaikuses mõttele end.
Neitsit kolm majas käib veel, neist kõige targem — Theano.

641. Kaks ülesannet Christoff Rudolfi algebrast (1553. a.).

1) Sulase aastapalk oli ülikond riideid ja raha 10 floriini. Seitsme kuu järel sattusid peremees ja teener tülli, mille tagajärjel tuli arve lõpetada, kus teener sai ülikonna ja 2 floriini. Kui kallis oli ülikond?

2) Karjane ässitas koera rebasele peale; viimane on 60 hüpet ees, ja sel ajal, kui rebane teeb 9 hüpet, suudab koer teha ainult 6. Kuid 3 koera hüpet on 7 rebase hüpet. Mitme hüppe järel saab koer rebasest kinni haarata?

642. Ülesanded Rudolf Kallase „Ülesannete kogust“ (1875.a.).

1) „Ema, anna omist nööpnõelust 10-nes osa minule, siis on mul pool tosinat.“ „O laps, mis sa niipaljuga teed, sul on ju omal neli tükki.“ Mitu nööpnõela on emal?

2) Peetril oli Juhanile 75 rbl. võlgu. Võla tasumiseks võttis ta oma kuupalgast, 36-st rublast veerandi ning andis peale selle veel Juhanile nii mitu vakka nisu à 3 rbl., et võlg sai tasa. Mitu vakka nisu?

3) Ema tõi aidast korvitäie õunu jagamiseks omale kolmele lapsele, kuid naabri Mari ja Jüri tulid ka tuppa ning nüüd sai iga laps ühepalju ning iga oma laps 12 õuna vähem. Mitu õuna oli ema tuppa toonud?

4) Pannakse mingi arvu 5-kordsele 6 juure, siis tuleb selle arvu seitsmekordne välja. Kui suur on see arv?

5) $\frac{1}{4}$ minu rahast on 4 rubla vähem kui $\frac{1}{3}$ sestsamast rahast. Mitu rubla mul on?

6) „Tere, tere, sada hane!“ „Ei meid pole sada. Oleks meid veel 15 hane ning 5 hane ning oleksid need 3 haiget hane, kes täna hommiku koju jäid, ka siin, ning oleksid sina ka veel hani, siis meid oleks niipalju 100-st enam, nagu meid nüüd sajast on vähem.“ Mitu neid oli?

7) Tunnikell pandi loosi peale. Tehakse 50 loosi (liisku), jääb veel $10\frac{2}{5}$ rbl. tunnikella hinnast puudu, tehakse 60 loosi, jääb 4 rubla hinnast puudu. Kui kallis on üks loos?

8) Teener Nukk sai aastas 60 rbl. rahapalka ning ühe ülikonna riideid; 5-e kuu pärast lasti Nukk lahti ning anti talle 5 rbl. hõbedat ning lubatud ülikond. Kui palju tuli ülikond maksma?

9) Poeg oli 20 aastat, isa 60 aastat vana; mitme aasta pärast on isa pojast 2 korda vanem?

10) 4000 rbl. tuleb nõnda ära jaotada, et lesk ema saab 25%, viis tütart aga igaüks 20% enam, kui 6-st pojast saab igaüks. Kui palju igaüks saab?

11) Kaevu ääres oli 2 veeküna. Ühe sees oli 600 toopi vett, teine tühi. Täiest künast jooksis sekundiga $5\frac{5}{8}$ toopi vett välja, aga tühja küna sisse sai kaevust sellesama ajaga $3\frac{3}{4}$ toopi vett. Mitme sekundi pärast on mõlemas künas ühepalju vett?

12) Peeter pani 1000 rubla 4% peale, ning 5-e aasta pärast 1800 rubla 5% peale. Mitme aasta pärast on mõlemad kapitaalid ühepalju kasu toonud?

13) Maril oli 60, Katal 40 naela suhkrut. Maril läks nädalaga 5, Katal 3 naela suhkrut ära. Mitme nädala pärast on mõlemail ühepalju suhkrut?

14) Mis arvule on see väljatulekult ükskõik, kas teda $2\frac{1}{2}$-ga kasvatada või $2\frac{1}{2}$ talle juure panna?

15) Kuldsepp sulatas 5 naela 90-proovilist hõbedat 2-he naela punase vasega ühte ja tegi segatisest lusikaid. Mitme proovilised said lusikad?

16) 18-ne naela 60-proovilisele kullale tahetakse juure sulatada niipalju teistsugust kulda, et saaks 40 naela 49-proovilist. Mitme prooviline peab olema juuresulatatav kuld?

17) 80-ne toobi piima sees oli $\frac{1}{4}$ vett; kui palju selget piima tuleks juure kallata, et segatises oleks paljalt $\frac{1}{10}$ vett?

18) Kui palju vett tuleb 24-ja toobi 60-kraadilise piirituse seest lasta ära aurata, et ülejääk oleks kange 90 kraadi?

19) Jüri jõuab antud töö 7-me, kuid Peeter jõuaks seesama töö 5-e päevaga lõpetada. Mitu päeva kulub ära, kui nad asuvad tööle mõlemad ühekorraga?

20) Antud töö jõuab 1 mees 10-ne, aga 1 naine 15-ne päevaga lõpetada. Selle töö kallale pandi 2 meest ning 2-he päeva pärast veel 4 naist. Mitu päeva kulub nüüd naistel meestega seltsis tööd tehes?

21) 10 tüdrukut jõuavad särgid 12-ne, aga 8 teist tüdrukut needsamad särgid 20-ne päevaga valmis õmmelda. Ühest liigist pannakse 6 tüdrukut õmblema. Mitu tuleks teisest liigist neile abiliseks anda, et 16-ne päeva jooksul lõpeks?

22) Kangur müüs omast kangast 6 küünart vähem kui poole ära ning sai selle eest 54 rubla; mis jäi üle, tuli sedamööda 90 rubla maksma. Mitu küünart oli kangas pikk ja kui kallilt müüs kangur küünra?

23) Juhan müüs omist lambaist kolmanda, aga Mats omist neljanda osa — kokku 40 lammast — lihunikule ning nüüd oli mõlemail ühepalju lambaid. Mitu lammast müüs kumbki neist?

24) Lihunik Kivi ostis omale hulga härgi. Poole neist andis ta karjamaale, kolmandiku nuumamiseks, $\frac{1}{12}$ tappis ära. Mis üle jäi, müüs ära, võttes iga härja eest nii mitu rubla, kui mitu härga ise oli ostnud. Mitu härga oli ostetud?

25) Sürakuusa kuningas, Hiero nimega, andis kuldsepa kätte 16 naela kulda, 4 naela hõbedat ning käskis enesele teha krooni. Valmistud kroon kaalus küll 20 naela, ometi oli kuningal põhjust arvamiseks, et kuldsepp antud kullast muist omale oli varastanud ning selle eest jälle enam hõbedat oli võtnud krooni tegemiseks.

Kuningas andis seepärast krooni kuulsa matemaatiku Archimedese kätte ning käskis järele uurida, kas ning kui palju oli kuldsepp teinud pettust.

Archimedes teadis, et iga asi vees kaalub vähem kui õhus. Ta oli järele katsunud, et 20 naela kulda vees 19 ning 21 naela hõbedat vees ainult 19 naela kaalub. Kroon aga kaalus vees $1\frac{1}{4}$ vähem kui õhus. Sest sai Archimedes teada, et ning kui palju oli kuldsepp petnud kuningat. Kui palju?

Mõistatused, paradoksid ja lõbusad ülesanded.

643. Seletada paradoksid:

1) $1\ kg. = 1000\ gr.$,
$1\ kg. = 1000\ gr.$

Kasvatades osade kaupa võrdused, leiame

$1\ kg. = 1000\,000\ gr.$

2) On võetud samasus:

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2,$$

millest leiame, kui esimeses osas võtta a klambrite taha ja teine osa lahutada teguriteks:

$$a(a-a) = (a+a)(a-a).$$

Jagades avaldusele $a-a$, saame

$$a = 2a,$$

ehk

$$1 = 2.$$

3) Võrrandust

$$3x + 40 = 10x + 12$$

moodustades saame:

$$3x - 12 = 10x - 40,$$
$$3(x-4) = 10(x-4).$$

Koondades leiame, et $3 = 10$.

644. Arvata ruttu peast:

1) Pudel korgiga maksab 11 kop. Pudel on korgist kallim 10 kop. Kui kallis on pudel ja kork?

2) Kui poisikest küsiti, mitu on tal venda ja õde, siis vastas ta, et mõlemaid ühepalju. Kui õde küsiti niisamuti, siis vastas ta, et õdesid on 2 korda vähem kui vendi. Kuidas on see võimalik?

3) Vanajutu järele olla Böömi rahva naisvalitseja Libussa lubanud sellele kosilasele minna mehele, kes otsustab järgmise ülesande. Mitu marja on tal korvis, kui ta esimesele kosilasele annab neist pooled ja veel ühe marja, teisele poole sellest, mis üle jäi, ja veel ühe marja, kolmandale teisest ülejäägist poole ja veel 3 marja, nõnda, et midagi ei jää enam järele?

4) Vana araablane jättis kolmele pojale surres päranduseks 17 kaamelit. Neist pidi kõige noorem saama poole, keskmine — kolmandiku osa ja vanem — ühe üheksandiku kõigest pärandusest. Varanduse jagamisel olid vennad raskes seisukorras, millest üks taipas väljapääsu leida selle läbi, et laenati naabrilt üks kaamel juure, nii et oli 18. Esimene sai siis poole, s. o. 9, teine — kolmandiku, s.o. 6 ja kolmas — üheksandiku, s.o. 2. Nõnda jääb üks kaamel järele, kes naabrile tagasi saadetakse. On pärandus jaotud õiglaselt?

R. Kallase „Ülesaannete kogust" (1875).

645.

1) „Kell on ... ära löönud", laulis öövaht. „Kui palju ta lõi?" — küsis rändaja. „Oleks ta veel napsu löönud, siis oleks ta just $\frac{1}{2}$ löönud neist löökidest, mis ta lõi. Mis kell oli?

2) Perenaine müüs omist õuntest pooled ära, üle selle veel poole õuna, aga ometi olid kõik müüdud õunad terved, s.o. ilma katki lõikamata, ning nüüd jäi veel kolm õuna üle. Mitu õuna oli tal olnud?

3) Tosin munadest maksis 18 kop., aga oleks 5 muna kauba peale saadud, oleks selle läbi tosin $2\frac{1}{2}$ kop. odavam tulnud. Mitu muna oli ostetud?

4) Kaupmees Tedrel oli 4 isesuurust rauatükki, nendega võis ta kõik täisnaelad 1-st kuni 40-ni ära kaaluda. a) Kui raske oli iga rauatükk ning b) mil viisil tuleb nendega kaaluda?

5) Tosin tosinaid sulgi maksis tosina kopikaid 11-nest tosinast (sulgedest) enam. Kui palju maksis 1 sulg?

6) „Mis kell on?" „Kell on 3-me ja 4-ja vahel ja minutinäitaja katab tunninäitajat."

Ülesannete lahendused.

I. Algebraline sümboolika.

1. 15; 15, **2.** $\frac{apt}{100}$; $a+\frac{apt}{100}$; 1) 200; 2200; 2) 78,75; 528,75. **3.** 300; 1000. **4.** $a+b$; $15\frac{1^0}{2}$; $2\frac{3^0}{4}$; $\frac{b}{2}$. **5.** $a-b$; $\frac{a-b}{3}$; 30. **6.** $\frac{r}{u+v}$; $t=6$. **7.** $\frac{d}{u-v}$; 1) 10; 2) $\frac{9}{0}$, iialgi ei tühju; 3) $\frac{13}{1.2}$ pole võimalik, hakkab üle voolama. **10.** Arvu 0 kujutab algus-punkt. **14.** 1) 5; 12; 16; 60; 1,4; 200; 3) $\frac{1}{2}$; 1,2; 1,6; 6; 0,14. **18.** 1) $5+6$; 3) $a+b$. **25.** 1) $(20+29)+(21+28)+\ldots=49.5=$ $=245$; 3) $(1+1000)+(2+999)+\ldots=101.500=500500$. **29.** Summa jäädav $=101$. **30.** 34; 32; 30. **36.** 1) $5-2$; 3) $4-b$. **44.** 1) 3; 3) $\frac{5}{42}$. **45.** 1) 6; 3) 37. **47.** $c=8; 7; 6$. **48.** $c=0; 1; 2; \ldots$ **49.** $r=15; 17; 19; \ldots$ **50.** $m=0; 1; 2; \ldots 0$. **51.** $m=4; 3; \ldots 0$ **54.** $q=0; 1; 2; \ldots 10$. **55.** $f-g=2$ ja jäädav. **56.** $f-g=$ $=26; 19; 18; \ldots$ **62.** 1) $a.3=3a$; 3) $a.\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$; 5) $0{,}1n$. **63.** 1) 6; 3) ab; $\frac{ab}{100}$; $100ab$. **64.** $ab-cd$; $\frac{ab}{cd}$; 1) 9; $2\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{3}$; 3. **67.** $y=$ $=1; 6; 9; \ldots 18$. **68.** $ab=75; 70; 65; \ldots 5$. **69.** 1) $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\ldots 1$. **70.** 1) 1; 2; 5. **71.** $y=0{,}1; 0{,}2; \ldots$ **72.** $pq=4; 10; 18; \ldots$ **73.** $pq=72; 6; \frac{1}{2}; \ldots$ **74.** $mn=24; 24; 24; \ldots$ **75.** $abc=15$. **76.** $abc=28; 84; \ldots$ **77.** 58,59. **78.** 1) 600; 3) $1500ab$; 5) $pqrs$. **79.** prl; 1) 100; 3) 100. **80.** 1) 6; 8; 10; ... **82.** 1; 2; 3; 5; 7; 11. **83.** 1) 32; 3) 56; 5) 16; 7) 33; 9) võimata. **84.** 1) 30; 3) 40 5) 36; 7) 23; 9) 0; 11) 3. **85.** 1) $2\frac{1}{6}$; 3) $\frac{1}{6}$; 5) $3\frac{1}{36}$; 7) $\frac{4}{15}$; $9\frac{5}{6}$

86. 1) 82; 3) 38,8; 5) 60. **87.** 11; 22; ... **88.** 1) $=3$; $q=6$; $r=5$; 3) $p=2$; $q=r=0$; 5) $q=1$; $p=r=0$. **90.** 1) **12**; 5,4; 3) 14; 9; 5) 0; 7) 10; 47,2. **91.** 1) 24; 5,04; 3) 24; 5,04; 5) 10; 4,5; 7) 33; 11,34. **98.** 1) $75.28=75.4.7=300.7=2100$. **101.** 1) 4; 3) $\frac{14}{a}$; 5) $\frac{b}{a}$. **102.** $\frac{s}{v}$. **103.** 1) a) $6\frac{1}{4}$ tundi; b) 9 min. $5\frac{5}{11}$ sek.; c) 1 tund 40 min.; d) $11a.151p.16t.$; 2) a) $1\frac{4}{15}$ sek.; b) $8\frac{1}{3}$ min.; c) enam kui 4 aastat. **104.** $\frac{100p}{365}$; $100-\frac{100p}{365}$. **105.** 1) 3; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; ... **106.** 1) 2; 3) 18. **107.** 1) 760000; 3) $\frac{1}{760}$. **108.** Teine tegur kahaneb: 30; 15; 10; ... 1. **112.** $11\frac{19}{31}$. **115.** 1) 27; 3) $\frac{1}{8}$. **117.** $10^5=10000$. **118.** 1) 10; 100; 1000; ... 3) 2; 4; 8; 16; 32; 5) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; ... 7) 0,1; 0,01; 0,001; ... **119.** 0,01; 0,04; 0,09; ... 0,81. **120.** 0; $\frac{1}{4}$; 1; $\frac{9}{4}$; 4; $6\frac{1}{4}$. **121.** Kui a on suurem kui 1, siis on a^2 suurem kui a; kui a on lihtmurd, siis on a^2 vähem kui a; a on a^2, kui $a=0$ ja $a=1$. **124.** Pole võimalik ütelda, kuni tähed pole antud arvudena. **127.** Ruutarvud ehk kvadraadid. **128.** 1) 4; 3) $\frac{1}{4}$; 5) a^2. **129.** 1) 6; 3) $6a$; 5) ab; 7) xy. **130.** 1) 1; 3) 0,001; 5) 216; 7) b^3. **131.** 1) 12; 3) $7b$; 5) $\frac{3}{4}p$; 7) $3+a$; 9) $6a$. **132.** 1) 11; 3) $a+1$; 5) $a+2$; 7) $a+11$; 9) $k-1$. **133.** 1) 7; 3) $y+4$; 5) $p+q$. **134.** 1) $x+20$; 3) $x+3z$. **135.** 1) 12; 3) $8+a+b$. **137.** 1) 4; 3) $p-5$. **138.** 1) $6-r$; 3) $r-s$. **139.** $800-a$. **140.** 1) 12; 3) ik. **143.** 1) 4; 3) $2k$; 5) 10. **144.** $\frac{x}{y}$. **145** Tiirude arv $n=\frac{10000}{c}$ võib ka murruline olla. **146.** $\frac{10p}{q}$ peab olema mõni täisarv. **147.** 1) 720; 1; 3) 12; $\frac{1}{60}$. **148.** $\frac{12p}{q}$. **149.** 1) 5; 3) $n+4$; 5) $n-4$. **150.** 1) 5; 3) 8; 5) $p-q$. **151.** 1) 5; 3) $a-3$; 5) $y-x$. **152.** 1) 45; 3) $8n$; 5) a^2. **153.** 1) 22; 3) $3p$; 5) 19; 7) $10r+s$. **154.** 1) 16; 3) $2\frac{1}{3}$; 5) $\frac{100}{\kappa}$. **155.** 1) 7; 3) $\frac{100}{b}$ **156.** 1) $2n$; 3) $3n$. **157.** 1) $10d$; 3) $1000m$; 5) $100c+a$. **158.** 1) $10k$; 3) $10k+l$. **159.** 1) $100c+10b$; 3) $100c+10b+a$. **160.** $1000s+100r+10q+p$. **161.** $1000p+100q+10r+s$. **162.** 1) $1000a+100b+10c+d$; 3) $10000a+1000b+100c+10d$. **167.** 1) 7; 3) x. **168.** 1) 2; 3) $\frac{1}{3}$. **169.** 12. **170.** 7. **171.** 3. **174.** 1; 2; 3; 4; 5; 6. **175.** 1; 2; 3.

176. 1; 2; 3; 4. **177.** $x = 2$; 4; 3; 2. **179.** 1) $2a$; 3) $4b$; 5) $4(a+b)$; 7) $5pq$; 9) $2klmn$; 11) $3xyz + 2x$. **180.** 1) $m + m$; 3) $x+x+x+y+y$. **182** 1) 0; 3) $m-3n$; 5) $x;7)x-2x$; 9) $p-16q$; 11) $2\sqrt{a}$. **183.** 1) $\frac{4}{7}x$; 3) $\frac{6}{11}pq$; 5) $\frac{3k}{4l}$; 7) $4ab$. **184.** 1) 9; 3) $\frac{1}{4}$; 5) 0,01; 7) a^3; 9) k^2l; 11) $4e^3$; 13) $36p^3$. **188.** 1) $2m^2$; 3) $7n^2$; 5) $3c^3+4d^3$; 7) võimatu; 9) $3pqr$; 11) $3a^3b^2$; 13) $2\frac{1}{4}z$; 15) $0{,}4ab$. **189.** 1) $aaaa + aaua$; 3) $x+x+x+x+x-y-y-y-y$; 5) $\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}+\sqrt{x}$. **190.** 1) p; 3) p; 5) $1\frac{1}{2}q+3$. **191.** 1) 9; 3) $2a+1$. **192.** 1) 6; 3) $3x+1$. **193.** 1) $8a^2$; 3) $\frac{1}{8}p^5$; 5) $3a^3b^3$. **194.** 1) $5a^2$; 3) x^2. **195.** 1) $x=2$; 3) $2x$; 5) $x=\frac{1}{2}$; 7) $3a=2$; 9) $7a+5$; 11) 5.7; 13) $3k-1=k-3$. **196.** 1) viiega suurendud a; 3) c-ga vähendud 7; 5) 3-kordse b-ga suurendud kahekordne a; 7) ühega vähendud 8-kordne y. **200.** 1) 1; 3) 2; 5) 4. **201.** 1) 5; 3) 3; 5) 6; 7) 4. **205.** 1) $12>5$; 3) $a>b$. **207.** 1) $m+n>m$; 3) $x+y>x-y$. **209.** 1) 0; 3) 0; 1; 5) 11; 12; ... 7) 6; 7; 9) 9. **210.** 1) 14; 3) 8; 5) 6; 7) 0. **211.** 1) 27; 3) 27; 5) 27; 7) 15. **212.** 1) 29; 3) 19; 5) 15; 7) 19. **213.** 1) 10; 3) 30; 5) 30; 7) 40. **214.** 1) 240; 3) 60; 5) 60. **215.** 1) 60; 3) 540; 5) 540; 7) 135. **216.** 1) 284; 3) 7776; 5) $120\frac{1}{2}$; 7) 243. **217.** 1) 70; 3) võimatu; 5) 58; 7) $2\frac{8}{17}$. **218.** 1) 280; 3) 1320; 5) 108. **219.** 1) 2^7; 3) $3^2.2^4$; 4) a^4b^5. **221.** 1) 4; 1; 3) 9; 8. **223.** 1) 3; 7; 13; 3) 17; 5) 17086; 7) 0; 9) 9; 11) 100. **224.** 1) 11; 3) 1. **225.** 1) 23; 7,9. **226.** 1) 372; $4\frac{25}{36}$; 3) 4240; $5\frac{49}{360}$. **227.** 1) 93; 3) 24. **228.** 1) $1\frac{4}{5}$; 3) $2\frac{2}{5}$. **230.** 440. **233.** s^2-tr; t^2-rs. **236.** 1) 52; 3) $4\frac{31}{44}$. **237.** 1) 225. **238.** 1) 173. **239.** 34. **240.** 1) 4. **241.** 282. **242.** $24\frac{27}{97}$. **243.** 7,0055. **244.** 1) 1072. **245.** 1) 5; 3) 13. **246.** 1) 6; 8. **247.** 1) $s=6$; $r=1$; $R=2\frac{1}{2}$; $\rho a=2$; $\rho b=3$; $\rho c=6$. **248.** $n_4=6$. **249.** $x_2=\frac{1}{4}$; $x_3=\frac{1}{8}$. **250.** $z_2=\frac{u_4}{u_3}=2$. **251.** 1) $a+b$; 3) mn; 5) $x+y+a$; 7) $p-qr$; 9) $de+fg$. **252.** 1) a^2; 3) p^2+q^3; 5) $5u^3$; 7) $(5u)^3$; 9) $(mn)^3$; 11) r^3+s^3; 13) $(x-y)^2$. **253.** 1) $2n$; $2n+1$; 3) $(c-d)^{2n+1}$. **254.** 1) $2k+4$; $2k+3$; $2k+1$, $2k$, $2k-1$, ... **256.** 1) $\sqrt{a+b}$; 3) $2a$; 5) $2(a+b)$; 7) $5a^2$; 9) $8b^3$; 11) $4\sqrt[3]{x^2-y^2}$; 13) $\frac{1}{4}ab$; 15) $\frac{a}{3}+2$; 17) 10^2+2a.

257. 17) r ja s ruutude teos; 18) r ja s teose ruut; 25) x ja y paarisastmete vahe; 26) x ja y vahe paarisaste; 27) r ja s summa ja vahe teos; 38) 2-kordne k ja l ruutude summa; 39) 2-kordne k ja l summa ruut; 48) $\frac{1}{7}$ viienda astme juurest, mis võetud k ja l kümnendate astmete vahest. **258.** 1) $a = b$; 3) $e = f$; 5) $x > y$; 7) $(a+b)^2 = a^2 + 2a + b^2$; 9) $(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3$; 11) $(a+b)^2 > a^2 + b^2$; 13) $(k^3)^2 = (l^2)^3$; 15) $\sqrt{k^3 - l^3} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{(k-l)^2}$.

II. Algebraliste avalduste teisendamine.

261. 1) $8a + 15b + 12y + x$; 3) $1\frac{1}{4}a + 8\frac{1}{2} + 5\frac{1}{2}ab + b^2 + a^2b + 5b$. **263.** 1) $4a + 7b$; 3) $7a + 23b$; 5) $22p + 17q$. **265.** 1) $8\frac{1}{5}a + 10\frac{2}{3}b$; 3) $14x + 9y + 9z$; 5) $5uv + 5uw + 2vw$. **267.** 1) 25; 3) 30; 5) $10x$. **270.** 1) $9a + 9b$; 3) $b - a$; 5) $3a - b$; 7) $10 - 15b$; 9) $2b + 8y$; 11) $4b - y$; 13) $27m - 9n$; 15) $30m - 24n$; 17) $21m + n + 3$; 19) $11k + 13l + 3m$; 21) $15k + 6l - m$; 23) $3{,}3a - 3{,}2b + 0{,}6c + 5{,}3$; 25) $5a + 0{,}4b + 0{,}3c - 3{,}5$ 27) $4\frac{1}{2}a + 1\frac{1}{6}b + 1\frac{3}{4}$; 29) $p - \frac{1}{2}q$; 31) $3p + 0{,}39q - r$. **271.** 1) 15; 3) 8; 5) 0; 7) 1,1; 9) $\frac{1}{6}$; 11) $\frac{1}{7}$; 13) 10; 15) 4; 17) 2; 19) 2; 21) 4; 23) 0,04; 25) 4; 27) 4. **272.** 1) võimatu; 3) võimatu; 5) 2; 7) 5; 9) 3. **273.** 1) $b - a$; 3) $a + b$; 5) $a + b$; 7) $\frac{a+b}{2}$; 9) $\frac{a+b}{4}$; 11) $\frac{b-a}{5}$. **274.** 1) vähendamata arvuga 5; 3) 19; 5) $a - b$; 7) $\frac{b}{a}$; 9) ab; 11) $\frac{m}{n}$. **275.** 1) 8. **277.** 1) võimatu; 3) 5; 5) 2; 7) 10. **278.** Võimatud on: 1), 2), 4) 5), 7). **279.** 1) 400; 3) 18. **282.** 1) $2a+b$; 3) $9a+b$; 5) $8d+3$; 7) $5p + 10q$; 9) $28+5r$; 11) $2{,}5x + 2{,}5y$; 13) $2{,}77m + 6\frac{8}{21}s$. **283.** 1) a; 3) $8a - 2b$; 5) 5; 7) $8a - 8b$; 9) $2c$; 11) $4c - 3d$; 13) 40; 15) $5x - 5$; 17) $0{,}6p - 1\frac{1}{2}$. **284.** 1) $a - b$; 3) $1 - 13a$; 5) $27{,}7a - 17{,}4b$; 7) $x + 2y + 7$. **285.** 1) $a - b + c$; 3) $a + b$; 5) $9x - 0{,}3y$. **287.** 1) $5a + 10b$; 3) $81a - 90b$; 5) $68a - 90b$; 7) $14{,}2m + 12{,}8n$; 9) $14{,}2m - 12{,}8n$; 11) $2{,}4m - 12{,}8n$; 13) $2p$; 15) $2p - 2q$; 17) $10c$; 19) $60{,}7c$; 21) $x - 29$; 23) $2d - c$; 25) $p - 2q$; 27) $10r$; 29) $5\frac{1}{2}x + y$. **288.** 1) $6a + 6b + 6c$; 3) $20x - 1{,}6y + 1{,}1z$; 5) 0. **289.** 1) $3a - 7b + 14c$; 3) $0{,}7a - 6\frac{1}{2}b +$

$+6{,}5c$. **291.** 1) $n+15$; 3) 2. **295.** 1) $4ax$; 3) $10klm+mnl$; 5) $4{,}8pq-1{,}86pr-1{,}4rs$; 7) 0. **296.** 1) $4a^2-13a$; 3) $5{,}1c^3d^2-$ $-9\frac{2}{3}c^2d^3$; 5) 0; 7) $10ax^3+4{,}5bx^3-1{,}5x^3$; 9) $5m^2-10$; 11) $5{,}55-$ $-5{,}93p+10{,}94p^2$. **297.** 1) 3; 3) 0,4; 5) 100. **298.** 1) 15; 17; 23; 2) 1; 4; 10; 15; 3) 16; 4) 11; 13; 5) 15; 20; 25; 30; 6) 36; 7) 8400. **299.** 1) $15a^2$; 3) $54a$; 5) $21{,}6abc$; 7) $48pq$; 9) $1{,}4pqr$. **300.** 1) a^2; 3) a^4; 5) x^7; 7) y^{16}. **301.** 1) $2p+1$; 3) $3q+r$; 5) $(0{,}4)^{10}$; 7) a^{x+1} 9) a^{x+y}; 11) a^{2x}. **303.** 1) a^3b^2; 3) p^3q^5; 5) $15x^4y^{10}$. **304.** 1) $3abc$; 3) $3{,}24ax$; 5) 18; 7) $12q$; 9) $\frac{3}{2}$; 11) $\frac{1}{4}$; 13) $10b$; 15) $4r$. **305.** 1) $\frac{abc}{e}$; 3) $\frac{xy}{2}$; 5) xyu. **306.** 1) 3; 3) 4; 5) a; 7) 1; 9) 0,5; 11) a^{p-q}. **308.** 1) a^2b^2; 3) d^3; 5) 1; 7) x^2y^2; 9) $0{,}8ax$; 11) $3\frac{1}{5}$. **309.** 1) $\frac{a}{c}$; 3) $\frac{p}{q^2}$; 5) $\frac{3a^4x^6}{4}$. **310.** 1) 8; 3) 0,3; 5) 4; 7) 5,4; 9) 6 **311.** 20^0; 40^0; 120^0. **312.** 1) 15^0; 75^0. **313.** 420. **314.** 1; 3; 9; 27. **315.** 3) b^6; 5) c^8; 7) $4y^4$; 9) $9a^8$; 11) $0{,}81b^8$; 13) $1{,}728x^9$. **318.** 1) a^5; 3) a; 5) $4a^2$. **319.** 1) $9a^2b$; 3) $p^4q-10p^3q^2$. **320.** 3) $3x^2+3y^3$; 5) $4+4u$; 9) $12x-18y$. **326.** 1) $5a-5b$; 3) $4c-22d$; 5) $9m-29n$; 7) $3a+3b-3c$; 9) $8a+6b-2c$; 11) $6pr-5qr+2r$; 13) $2pr+$ $+q^2-p^2-r^2$. **327.** 1) a; 3) $\frac{2}{3}(a+b-c)$; 5) $96c^2d^3-60c^2d^2$; 7) $2{,}6p^2r-pqr+0{,}6pr^2-3{,}4prs$; 9) $162x-19y$; 11) 0. **328.** 1) 81; 3) 600; 5) 49. **334.** 5) y^2+6y+9; 7) $81x^2+126xy+49y^2$. **338.** 5) $1-2x+x^2$; 7) $64x^2-80xy+25y^2$; 9) $s^4-2s^2t^3+t^6$. **340.** 11) x^2-25; 13) $9x^2-16y^2$. **342.** 5) $x^3+15x^2+75x+125$; 7) $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$. **343.** 1) $12x^2+10x-42$; 3) $10x^2+$ $+21x-10$; 5) $24x^2+23{,}2x+4{,}8$; 7) $29xy-9{,}1y^2$ $9{,}9x^2$; 9) $9x^2+24xy+16y^2$; 11) $4x^2-20xy+25y^2$; 13) $49p^2-42p+9$; 15) $0{,}25c^2+8cd+64d^2$; 17) $12a^2+ab-35b^2$; 19) $36c^2-65cd-$ $-36d^2$; 21) $ad+bd+cd+ae+be+ce$; 23) $a^2+2ab+b^2-c^2$; 25) $a^2-2ab+b^2-c^2$; 27) $x^2+y^2+2xy-2xz-2yz+z^2$; 29) x^3-y^3; 31) $(p+q)^2$; 33) $(p-q)^3=p^3-3p^2q+3pq^2-q^3$; 35) $64x^2+16x+1$; 37) $1-\frac{1}{3}u^2+\frac{1}{27}u^4-\frac{1}{729}u^6$; 39) $125a^3+$ $+150a^2b+60ab^2+8b^3$; 41) $\frac{8}{27}p^3-2p^2q+4\frac{1}{2}pq^2-2\frac{1}{4}q^3$; 43) a^3+ $+a^2(x+y+z)+a(xy+xz+yz)+xyz$; 45) $17d^2-cd-11c^2$; 47) $4p^2-9q^2$; 49) $2{,}25p^2-0{,}64q^2$; 51) u^4-v^4; 53) x^8-12x^4+ $+27$; 55) $x^4-2x^2y^2+y^4$; 57) $\frac{1}{256}d^4-\frac{49}{128}d^2c^2+49^2c^4$; 59) $300y^2+$ $+120xy-36x^2$; 61) $9cd+29d^2-133c^2$; 63) $35p^2-13q^2+12pq$;

65) $40r^2 - 30t^2 - 28s^2 + 36sr - 65rt + 61st$. **344.** 1) $3a^4 + a^3 - 9a^2 - a - 6$; 3) $40x^4 - 48x^3 - 15x^2 + 31x - 10$; 5) $20a^4 - 2a^3b + 32a^2b^2 - 14ab^3 + 12b^4$; 7) $24x^4 - 52ax^3 + 17a^2x^2 - 10xa^3 + 15a^4$; 9) $5n^5 + 9mn^4 - 25m^2n^3 + m^3n^2 + 5m^4n - m^5$. **349.** 356□$mm$. 0,1 peenuseni. **351.** $t - r - 1$. **363.** 1) $4(a + x)$; 3) $b(a + c)$; 5) $3(4 + 5y)$; 7) $2x(5a + 7b)$; 9) $4a(4a + 3b)$; 11) $m(n + 1)$; 13) $u(1 - v)$; 15) $9(1 - l)$; 17) $z(1 - z)$; 19) $2d(3c - 2d)$; 21) $m^2(m + 1)$; 23) $2p^2(7p - 4)$; 25) $p(a - b + c)$; 27) $3a(x - 2y + 5z)$; 29) $4x(5a - 3b + c)$; 31) $9s(4p - 8q + 3r)$; 33) $q(p - q + r - s)$; 35) $(m - n) \times (z + u)$; 37) $(4a + 7b)(p - q)$; 39) $(a + 1)(m + n)$; 41) $(p - 1)(q - r)$; 43) $(z - 1)(3x - 4y)$; 45) $(a - b)(c + d)$; 47) $(a + x)(b - y)$; 49) $(3p - 1)(1 - 2q)$; 51) $(2c + d)(4a + 3b)$; 53) $(4a + 11x)(3b - 7y)$; 55) $(x + 1)(y - 1)$; 57) $(p - 2)(q + 1)$; 59) $(p + q)(r + 1)$. **365.** 1) $y^2 - y$; 3) $y^2 + 9y$. **366.** 1) 8; 3) 4; 5) 3; 7) võimatu; 9) 2; 11) b; 13) $a - b$. **369.** Iga kord järele katsuda kasvatamise abil.

III. Suhtelised arvud:

384. 1) 4; 1; 3) 5; 5) 0; 7) 8; 3; 11; **385.** 1) 0; 3) 5; 5) 3; **391.** $\overset{++}{3}; \overset{+}{2}; \overset{-}{1}; 0; \overset{-}{1}; \overset{-}{2}$. **393.** 1) $\overset{-}{1}$; 3) $\overset{-}{2}$; 5) $\overset{-}{4}$. **398.** 1) ... $\overset{---}{3,2,1,0,}$ $\overset{++++}{1,2,3,4,}$... **402.** 8; 6; 5; 1; 0; $\overset{+}{3}; \overset{+}{5}; \overset{+}{11}; \overset{+}{100}$. **404.** 1) — 2,2; — 2,0; — 1,9; — 1,6; — 0,1; 0,0; + 0,2; + 0,4; + 0,5. **405.** Kui 3 on leitud 1-e peenuseni peenuseni, siis võib olla see arv suuremgi kui 3,1, näit. 3,4. See märkus käib iga näituse kohta. **406.** 1) 5; 3) 11; 5) 5; 7) 7; 9) 6. **407.** + 153; 1097. **408.** — 267; 1423. **409.** 21. **410.** 8^0; 3^0. **411.** $-\frac{2^0}{3}; +2\frac{1^0}{3}; \ldots$ **412.** 44; — 61; 31. **416.** 37,°4. **417.** 108 põhja p.; 276. **419.** 1) $\overset{+}{8}$; 3) $\overset{-}{2}$; 5) $\overset{+}{9}$; 7) $\overset{+}{5}$; 9) $\overset{+}{9}$; 11) $\overset{+}{9}$; 13) $\overset{-}{1}$; 15) $\overset{+}{1}$. **421.** 1) $\overset{+}{10}$; 3) $\overset{-}{2}$. **423.** 1) $\overset{+}{12}$; 3) $\overset{+}{1}$; 5) $\overset{-}{1}$; 7) $\overset{-}{13}$; 9) $\overset{+}{23}$; 11) $\overset{-}{3}$; 13) $\overset{+}{3}$; 15) $\overset{-}{23}$. **425.** 1) $\overset{+}{15}$; 3) $\overset{+}{15}$; 5) $\overset{-}{5}$; 7) $\overset{-}{1}$; 9) $\overset{+}{1}$; 11) $\overset{+}{5}$; 13) $\overset{-}{9}$; 15) $\overset{-}{15}$; 21) $\overset{-}{9}$. **433.** 1) $\overset{+}{41}$; 3) $\overset{+}{43}$; 5) $\overset{-}{64}$; 7) $\overset{-}{17}$. **436.** 1) $\overset{-}{13}$; 3) $\overset{+}{14}$; 5) $\overset{+}{4}$; 7) $\overset{-}{21}$. **439.** 1) $\overset{-}{1}$; 3) $\overset{+}{1}$; 5) $\overset{+}{13}$; 7) $\overset{+}{13}$. **440.** 1) $\overset{-}{17}$; 3) $\overset{-}{30}$; 5) $\overset{+}{9}$; 7) $\overset{+}{1}$. **442.** 1) $\overset{+}{53}$; 3) $\overset{+}{26}$; 5) $\overset{-}{1}$. **443.** 1) $\overset{+}{7}$; $\overset{+}{1}$; 3) $\overset{--}{3;11}$. **444.** 1) $-a$; 3) $-a - b$; 5) $-a - b + c$; 7) $-a + b + c$; 11) $4q - 3p$. **445.** 1) $\overset{-}{5}; \overset{+}{14}; +0,5; 0$; 2) $\overset{+}{8}; \overset{-}{19}; \overset{+}{13}; 0$.

446. Pole võimalik ütelda, seni kui arvud ei ole võetud tähtede asemele. **447.** 1) $3b - a$; $a^2 - b^2 + 4ab$. **448.** 1) $x + 8$; 3) k; 5) $a + b - 8$; 7) $b + c - 4$; 9) $-x - 2$; 11) $-y$; 13) $n - 8$; 15) $-c - 1$; 17) $m - 3$; 19) p; 21) $2a - b$; 23) a; 25) $-2a - 2b$; 27) $4x - y$; 29) $14a - 1$; 31) $2n - 5$; 33) -1; 35) 0; 37) $r + 1$; 39) $m + n$; 41) $x - y - 2$; 43) $x + 2y - 4$; 45) $2a + 3$; 47) $p + 1$; 49) $-12x + 3y - 4z$; 51) $a + b + c$; 53) $6p + 6r - 10s$; 55) $2x + 1\frac{5}{6}y - 4z + \frac{1}{10}u$; 57) $-11a + 2b + 13c + 4d$; 59) $-x + 2z$. **449.** 1) $11a$; 3) $-7c$; 5) $-8a$; 7) $13y$; 9) $v - u$; 11) $-u - v$; 13) $-12p$; 15) $+5q$; 17) n; 19) $8 - r$; 21) $r - 9$; 23) $9 - x$; 25) $2 - z$; 27) $-2 - u$; 29) $-l$; 31) $-k$; 33) $l - 2k$; 35) $-2a - b$; 37) $a + 2b$; 39) $-x - 9y$; 41) $3u + v$; 43) $-5u - 3v$; 45) $7x + y$; 47) $21n - 1$; 49) $5n - 1$. **450.** 1) -2; 3) $2y$; 5) 10; 7) $2u + 2$; 9) $5b - 5$; 11) $2n$; 13) $2n - 2$; 15) $6p - 13$; 17) $-3r$; 19) $x - y$; 21) $x - y - 2$; 23) $x + y$; 25) $2a - b + 1$; 27) $2c + 2d$; 29) $m + n - 12$; 31) $s - r$; 33) $a - b - 5d$; 35) $11p - 18q + 15r - 10$. **451.** 1) $3ab$; 3) $-9p - 2q + 7$; 5) -10; 7) $-25m + 2b - 4n$; 9) $+30s - 50r - 30t$. **452.** 1) $32a + 28b + 52$; 3) $11{,}9mx + 7{,}3m - 14x - 4m^2x$. **453.** 1) -7; 3) -17; 5) $+8$; 7) $-3{,}1$; 9) $-\frac{1}{6}$; 11) $-\frac{2}{3}$; 13) $-b$; 15) $2a$. **454.** 1) $+4$; 3) 0. **458.** 1) $+12$; 3) -10; 4) -10; 5) -48; 7) $+10$; 9) $+6$; 11) -4; 13) -8; 15) $+\frac{5}{7}$; 17) $+\frac{1}{2}$; 19) $-0{,}54$; 21) $-30{,}24$. **460.** 1) $+120$; 3) -120; 5) $+120$; 7) -120; 9) $-3{,}24$. **462.** 1) $+4$; 2) -8; 3) $+16$; 4) -32; 5) $+64$; 7) -27; 9) -1; 11) -25; 13) a^2; 15) x^3. **464.** 1) $-abc$; 2) abc; 3) $-abc$; 5) $6n^3$; 7) -108; 9) -1; 11) -1; 13) 0; 15) 130; 17) -180. **466.** Võrranduste juured: 1) 0; 3) 0; $+1$; 5) $+5$; -2; 7) -6; $+3$. **467.** 1) 144; 3) 108; 5) 18; 7) -5; 9) -1. **470.** Järele katsuda kasvatamise abil. **471.** 1) $-b$; 3) $2q$; 5) $-6ab$; 7) $-ax$. **472.** 1) -5; 3) 1; 5) 125; 7) -19; 9) $1\frac{11}{13}$; 11) 31. **474.** 1) $-12a^2c + 15abc - 3ac^2$; 3) $16x^2 - 34xy - 15y^2$; 5) $10x^2 - 33xy + 27y^2$; 7) $6n - 2m - 2$; 9) $2pq - 12$; 11) $12x^2yz - 8x^2z^2 + 16xy^2z + 16xyz^2 - 15y^2z^2$; 13) $30p^2q^2 - 74p^2qr + 3p^2qs - 10pqrs + 40p^2r^2 - p^2rs + 14pqr^2 + 20pr^2s + 2pq^2r - 12q^2r^2 - 8qr^2s$; 15) $a^3 - 9a^2 + 21a - 4$; 17) $48 - 4p - 32p^2 - 5p^3$; 21) $4x^4 + 81$; 23) $ab^5 - a^2b^4 - 29a^3b^3 + 27a^4b^2 - 6a^5b$; 25) $-18mn^4 + 27m^2n^3 + 22m^4n - 34m^3n^2 - 2m^5$. **475.** 7) $m^2 + 2mn + n^2$; 25) $m^3 - n^3$; 27) $m^5 + n^5$; 29) $8p^6 - 125q^3$; 31) $144x^4 - 168x^3 - 191x^2 + 140x + 100$; 33) $u^4 + u^2v^2 + v^4$. **476.** 1) -21; 2) -20. **477.** 1) $a^2 + 2ab +$

$+ b^2 + 2(a + b)c + c^2$; 9) $r^4 - 2r^3 + 7r^2 - 6r + 9$. **479.** 1) $a + b$; 3) $r - q$; 5) $\frac{a}{3} - 6ab + \frac{2b}{3}$. **480.** 1) x; 3) $-a$; 5) $4n$; 7) $2a$; 9) $p - q$; 11) $n + 1$; 13) $2c - 4d$; 15) $4r - 9s$; 17) $11x - 3z$; 19) $a + 3b$; 21) $x + 5$; 23) $5m - 2n$; 25) $\frac{2}{5}p - \frac{3}{4}q$; 27) $x^2 + 2xy + 2y^2$; 29) $2y^2 + y - 7$; 31) $2a^2 - 3b^2$; 33) $9p^3 - 4q^3$; 35) $0{,}6m + 1{,}4n$; 37) $\frac{7}{9}b + \frac{5}{3}y$; 39) $9m - 8n$; 41) $2xy + 3xz$; 43) $5p + 4q - 6r$; 45) $5x - 7y - 4z$; 47) $-0{,}7a + 2{,}4b + 0{,}3c$; 49) $\frac{1}{2}d + \frac{1}{3}e + \frac{1}{5}f$; 51) $16m^3 - 10m^2 - 11m + 8$; 53) $13m^3 - 4m^2 + 12m - 7$; 55) $3p^4 - 5p^2 + p - 1$; 57) $2x^2 - 4x - 9$; 59) $x + 8$; 61) $u^2 - 1$; 63) $2s^2 + st + rt^2$; 65 $ik - 3l$; 67) $abc + 7d$; 69) $u^3 - u^2v + uv^2 - v^3$. **482.** Jääk on: 1) 10; 2) 0; 3) -42; 3) $-x$. **486.** 1) $3(a + b)$; 3) $9p$; 5) $a(b - c)$; 7) $r(p + 1)$; 9) $y(y + 1)$; 11) $3ab$; 13) $2ab(7a - 5)$; 15) $(a - b + c)e$; 17) $5p(3p - 2q - r)$; 19) $3x(7y - 5x + 4z)$; 29) $(a + b)(x + y)$; 31) $(x - y)(u - v)$; 33) $(p + q)(2r - 5s)$. **487.** 1) $(a + b)(c + d)$; 3) $(a - b)(c - d)$; 5) $(x - 1)(y + 4)$; 7) $(5a + 2c)(2a - 3b)$; 9) $(5 - 4u)(2 + v)$; 11) $(a - 1)(b - c)$; 13) $(a + 1)(p - 1)$; 15) $(p - 1)(n - 1)$; 17) $(7r - 6t)(9r + 5s)$; 19) $(v + 4)(y - 5)$; 21) $(m + n)(a - b + c)$; 23) $(a + b + c)(d + e + f)$; 25) $(r - 1)(pq - p - q + 1)$; 27) $xy(u - v)$; 29) $(a - b)(ab - c)$; 31) $c(c + e)(c - d)$; 33) $2(4m + 3n)(3m - n)$; 35) $2(4r - s)(p - q)$. **488.** 3) $(x - 1)^2$; 5) $(y - 4)^2$; 7) $z(2z + 1)^2$; 9) $(m^2 + 1)^2$; 11) $(4 - z)^2$; 13) $(9ab - 10c)^2$; 15) $(3e - 5g)^2$; 17) $(\frac{1}{3}a^2b - 1)^2$. **489.** 3) $3 + a)(3 - a)$; 5)$(p + 1)(p - 1)$; 7) $u^2 + v)(u^2 - v)$; 17) $(13x^2y + 11xy^2)(13x^2y - 11xy^2)$; 21) $(0{,}9a^2 + 0{,}4s)(0{,}9a^2 - 0{,}4s)$; 23) $(\frac{2}{5}m +; + \frac{3}{7}n)\left(\frac{2}{5}m - \frac{3}{7}n\right)$; 35) $4pq$; 37) $(5u - 3v)(u - v)$. **490.** 1) $2(x^2 + y^2)$; 3) $(x + y)^2$; 5) $(a + b + c)(a - b - c)$; 7) $(2f + g)[(e - f)^2 + g - c]$; 9) $4xy(x + y)(x - y)$. **492.** 1) $(c + 1)(c^2 - c + 1)$; 3) $(3x + 2y)(9x^2 - 6xy + 4y^2)$; 4) $(5u - 4v)(25u^2 + 20uv + 16v^2)$; 5) $(m^2 + n^2)(m^4 - m^2n^2 + n^4)$; 9) $(0{,}1p - 0{,}5)(0{,}01p^2 + 0{,}05p + 0{,}25)$. **493.** 3) $(2p - q)^3$; 7) $\left(\frac{p}{3} + 3q\right)^3$. **494.** 7) $(x + 1)(x + 2)$; 9) $(x + + 2)(x + 3)$; 11) $(y - 2)(y - 4)$; 13) $(m - 5)(m + 4)$; 14) $(v - 1) \times \times (v + 7)$; 15) $(u - 1)(u - 10)$; 17) $(v - 2)(v + 7)$; 19) $(a^2 - 3) \times \times (a^2 + 2)$; 21) $(b + 5)(b + 9)$; 23) $(3 - c)(4 - c)$; 25) $p(p - q) \times \times (p - 3q)$; 27) $(3 - r)(r - 8)$ **495.** 1) $2x^2 + 5xy + 2y^2 = 2x^2 + 4xy +$

$+xy+2y^2=2x(x+2y)+y(x+2y)=(2x+y)(x+2y)$; 3) $6y^2-$ $-13xy+6x^2=6y^2-9xy-4xy+6x^2=3y(2y-3x)-2x(2y-3x)=$ $=(3y-2x)(2y-3x)$; 5) $15u^2+10uv+3uv+2v^2=5u(3u+2v)+$ $+v(3u+2v)=(5u+v)(3u+2v)$; 7) $r^2-rs-56s^2=r^2-$ $-8rs+7rs-56s^2=r(r-8s)+7s(r-8s)=(r+7s)(r-8s)$; 9) $a^4+14a^2b+48b^2=a^4+6a^2b+8a^2b+48b^2=a^2(a^2+6b)+$ $+8b(a^2+6b)=(a^2+8b)(a^2+6b)$; 11) $18c^2-cd-5d^2=$ $=18c^2+9cd-10cd-5d^2=9c(2c+d)-5d(2c+d)=(9c-$ $-5d)(2c+d)$. **496.** 1) $(x+y-1)(x-y)$; 3) $(u-v)\times$ $(u+v)^2$; 5) $(u^2+v^2)(u-v)$; 9) $(1+q)(1+q^2)^2(1-q)$; 11) z^4+ $+2z^2-z^2-2=(z+1)(z-1)(z^2+2)$; 13) $u(u+1)(u+2)(u+3)$; 15) $(b+c)(a^2+ab+ac+bc)$; 23) $(4x+3y)^2(2x+7y)^2$; 31) $(px-$ $-1)(qx-1)$; 33) $(3x^2+1)^2$; 34) $(y-3)(y+a+2)$; koeff. y juures kirjutada $a-1=(a+2)-3$; 36) $(5x+2y)(2x-5y)$; 37) $(1-u)(3-u)$. **497.** 3) $d^3-3d-2=d^3-4d+d+2=...$ 5) $p^3+3p^2-3-1=(p-1)(p+2)^2$. **499.** 17) $-1{,}2$; 20) 0; 21) -4; 23) -3; 25) -6; 27) $-0{,}5$; 29) -3; 31) $+8$. **501.** $y=117;96;\ldots$

IV. Murrud.

504. 5) $\frac{x}{y}$. **508.** 5) $u-v$; $wz(u-v)$; 7) x^2-y^2; 11) $a-b$; $a^2-a^2b-ab^2+b^3$; 15) $x+1$; x^3-7x-6; 19) $2x+1$; $8x^3-$ $-28x^2-26x+15$. **512.** 2) -1; 3) $-\frac{m}{n}$; 13) $-x^2-x-1$; 24) 1; 29) 1; 31) $\frac{1}{a+b}$; 33) $\frac{1}{a-b}$; 37) võimatu; 49) $\frac{3m-7x}{2n-9y}$; 51) võimatu; 53) $\frac{3r-s}{3r+s}$; 55) $\frac{4a+11b}{a+b}$; 57) $\frac{c^2-1}{c^2+1}$; 58) $\frac{a-b}{a+b}$; 59) -1; 61) $\frac{1+r}{1-r}$. **521.** 1) $\frac{2(3a+5)}{n}$; 3) 0; 5) 1. **523.** 11) $\frac{3c+5}{5}$; 15) $\frac{p}{3}$; 23) $\frac{1+a}{x}$; 29) $-\frac{d}{c}$; 31) $\frac{p}{3q}$; 33) $\frac{(r-2)^2}{r}$; 35) $y-x$; 37) $\frac{4v^2-5u^2+8uv}{u^2-v^2}$. **524.** 1) $-\frac{13a+36b}{30}$; 5) $\frac{u+v}{uv}$; 9) $\frac{3pq-8p}{8q}$; 13) $\frac{8c+5b}{abc}$; 15) $\frac{4xy-2x+y}{4x}$; 19) $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$; 21) $\frac{xy}{14am}$; 23) $\frac{3n}{8y}$; 27) s; 29) $\frac{2v}{u^2-v^2}$; **525.** 4) $-\frac{13x+51}{40}$; 5) $\frac{17u^2-3u^2+14uv}{70}$; 9) $\frac{m^2+n^2}{4mn}$; 10) $\frac{3p^2+4q^2+6r^2}{12pqr}$; 11) $\frac{5x+6y+15z}{30xyz}$; 12) $\frac{(5u-4v)^2}{60u^2v^2}$; 13) 0. **526.** 1) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; 5) 1; 7) $\frac{2uv}{u^2-v^2}$; 9) $\frac{(2R-r)r}{(R-r)^2R^2}$; 11) $\frac{1}{(n-1)n}$; 13) 0; 16) $\frac{n-m}{(m+n)n}$; 19) $\frac{15-13x}{2x(3-x)}$; 20) 0; 21) $-\frac{1}{(x-2)(x-4)}$;

23) $-\frac{1}{72(a-b)}$; 25) $\frac{5a}{6a-b}$; 34) 0; 35) 0; 37) $\frac{2x^2}{(x-1)(x-4)(x+4)}$; 39) $\frac{1}{(p+r)(q+r)}$; 41) $\frac{1}{(2x-3)(x+1)}$; 48) $\frac{r}{2q-3p-r}$; 50) $\frac{x^3}{x^3-y^3}$; 51) $\frac{u^2}{u^3-v^3}$; 53) 0; 54) $\frac{2}{(x-y)(y-z)}$; 55) $\frac{2(x+z)}{(x-y)(y-z)}$; 57) $\frac{194u^2-79uv-24v^2}{8uv(6u-v)}$; 59) $\frac{2}{3}$; 61) $\frac{2}{c-d}$; 65) $\frac{p}{2p+7b}$; 67) $4u+3v$; 69) $\frac{-4a+3}{(a+1)(a-1)(a+2)(a-2)}$; 71) $\frac{4n^2-m^2-4mn}{(m+2n)(m^2-n^2)}$. **527.** 1) x^2+x- $-\frac{x}{x^2-x+1}$. **528.** 1) $1+\frac{1}{x}$; 7) $1+\frac{2}{p-1}$. **529.** 17) 1; 21) $a-b$; 23) $2a$; 29) 8. **535.** 47) $\left(\frac{3ay}{2bx}\right)^2$; 48) $\left(\frac{a}{x}\right)^2$. **539.** 3) x^2+y^2; 5) $\frac{37a-7v}{3u+7v}$; 7) $\frac{2-x}{2+x}$; 15) 1; 17) $\frac{a-4}{a-3}$; 19) $\frac{r-2}{r-4}$; 20) -1. **540.** 1) $\frac{1}{6}y^4-$ $-\frac{2}{9}y^3-\frac{7}{9}y^2-\frac{2}{9}y+\frac{1}{6}$. **541.** 1) 0; 5) $\frac{n-1}{m-1}$; 7) $\frac{9-3x+x^2}{x-1}$; 8) $r-s$. 9) $\frac{b(b-1)}{a}$. **542.** 5) $\frac{8(m+n)}{3(m-n)}$; 7) $\frac{p+1}{(p-4)^2}$; 12) $-\frac{1}{6}\times$ $\times(x^4-x^2y^2+y^4)$. **543.** 1) $-\frac{2ab}{a-b}$; 7) $4(x+y)$; 9) 1; 11) $\frac{m+1}{m-1}$; 13) 1; 15) 1; 23) $2rs-r-s$. **544.** 11) $-\frac{pr}{qs}$; 15) $-p$; 17) 1; 19) $\frac{1-xy}{1+xy}$; 21) $n(m+n)$; 23) $\frac{1}{2}$; 25) $\frac{a+1}{a-1}$. **546.** 1) $\frac{4}{5}$; 3) $7\frac{4}{5}$; 5) $\frac{2}{115}$; 7) $1\frac{23}{27}$; 15) $p-q$; 25) $\frac{a}{b}$; 29) x; 31) $\frac{u}{v}$; 33) $\frac{a-b}{c}$; 34) $\frac{a-b}{a+b}$. **547.** 1) $\frac{2}{5}$; 3) $\frac{12}{29}$. **548.** 1) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{11}$; $\frac{11}{30}$. **550.** 1) $y=$ $=0$, kui $x=\frac{5}{8}$; y võimatu, kui $x=-\frac{3}{4}$. **551.** 3) Kui murd kujutada näol $\frac{(2x+1)(3x-1)}{(2x+1)(4x-1)}$, siis võib koondada: $\frac{3x-1}{4x-1}$, missugune murd annab $\frac{5}{6}$, kui $x=-\frac{1}{2}$. **555.** 9) $ab-1$; 13) $2pr-1$; 15) $ab-1$. **556.** 1) 0; 5) 1; 7) -1; 9) 10; 15) $\frac{1}{64}$; 17) $\frac{1}{25}$; 19) 16; 23) $2\frac{7}{9}$; 25) 8. **557.** 1) 1; 3) 0; 5) 16; 7) 1; $133\frac{1}{3}$. **558.** 1) $\frac{1}{b}$; 5) $\frac{1}{x^4}$; 7) q^5; 13) $aq-p$; 15) $\frac{z}{u}+\frac{z}{v}$; 17) $\frac{m}{1-m}$; 19) $1+\frac{1}{m^2-1}$; 21) $\frac{pqr(p+q+r)}{pq+pr+qr}$; 23) $-\frac{m+n}{m^2n^2}$. **559.** 1) $2-1$; 5) $a-2$; 11) a^3b-7;

15) $3a.4-1b-1$; 19) $2(a-b)(a+b)^{-1}$; 25) $(x^{-2}-y^{-3})^{-1}$. **562.** 1) a; 3) m^5; 5) $\frac{1}{b^4}$; 9) $\frac{1}{a^5}$; 15) q; 19) $\frac{1}{r^4}$; 25) $3ab$; 31) $\frac{v^2-u^2}{u^2v^2}$. **563.** 1) $\frac{4}{5}$; 3) $\frac{b}{a}$. **579.** $\frac{28}{1}; \frac{7}{4}; \frac{14}{2}; \frac{1}{28}$. **582.** 1) $6\frac{1}{4}$; 3) 12. **606.** 17; 13. **607.** 4; 7. **612.** 7) $\frac{100(l-k)}{kt}$; 9) 966; 1104. **613.** 3) 58; 4) 12096□ m. **614.** 1) $\frac{bh}{a}$. **615.** Neptun asetuks 30 cm., kuid α Centauri mitte ligemale, kui 2,6 km. kaugusse, nõnda et ta kujutus vaevalt mahuks Tartu linna piiridesse. **616.** 1) $k=\frac{p_0}{s_0}$; $p=p_0\frac{s}{s_0}$; 2) $k=$ $=1033{,}6$ gr.; $s=15000$□ cm.; $p=15504$ kg. $=950$ puuda (umbes).

V. Esimese astme võrrandused ühe tundmatuga.

617. 1) 4; 3) 8; 5) -7; 7) 8; 9) -1; 11) $\frac{2}{3}$; 13) 6; 15) -3; 17) 5; 19) $3\frac{1}{3}$. **618.** 1) 30; 3) 3; 5) -4; 7) -3; 9) $+3$; 11) $-3\frac{1}{4}$; 13) -1; 15) $-\frac{1}{3}$; 17) -2; 19) $-\frac{2}{5}$; 21) -10 **619.** 1) 3; 3) $\frac{3}{4}$; 5) 2; 7) $-\frac{1}{3}$; 9) -5; 11) 0,2; 13) $3\frac{1}{2}$. **620.** 1) 40; 3) $\frac{1}{7}$; 5) 4; 7) 25; 9) 576; 11) 15; 13) 2,7; 15) 2,4; 17) $-1{,}4$; 19) -1; 21) -5; 23) 4; 25) -10; 27) 36; 29) -4; 31) -2; 33) 32; 35) 1,3; 37) 0,25. **621.** 1) 3; 3) $\frac{1}{2}$; 5) 8; 7) 6; 9) 10; 11) 2; 13) 7; 15) 4; 17) 6; 19) -7. **622.** 1) $2\frac{1}{2}$; 3) $-3\frac{11}{15}$; 4) 7,5; 5) 0,2; 6) 0,27; 7) 3; 8) -4; 9) $\frac{1}{3}$; 10) -5; 11) 2; 12) 1; 13) -1; 14) 7; 15) 18; 17) 70; 19) $-\frac{23}{59}$. **623.** 1) $2\frac{1}{3}$; 3) 15; 5) -3; 7) $\frac{1}{2}$; 9) $\frac{2}{3}$; 10) x võimatu; 11) võimatu; 13) võimatu; 15) -5; 17) 1; 19) 3; 21) 8; 23) 2; 25) 7; 27) -3; 29) 6; 31) -1; 32) 1; 33) 3; 35) 1; 37) -2. **624.** 1) 4; 3) 5; 4) 5; 5) 11; 7) 10; 9) 3; 11) $2\frac{1}{4}$; 13) $-3\frac{7}{19}$; 15) -6; 23) 3; 25) 3; 27) 5; 33) 1; 35) 11; 39) 2. **625.** 1) $b-a$; 7) $2a-10$; 9) $\frac{k-m}{l}$; 21) 1; 23) $2a$; 25) $a-b$; 35) 1; 37) $\frac{ab}{a+b}$; 39) $\frac{2ab}{3a-2b}$.

626. 1) mn; 2) $\frac{m}{n}$; 3) $a(b+c)$; 5) $\frac{a}{b+c}$; 7) $\frac{ik}{i-1}$; 9) $\frac{a-b}{12}$; 11) $\frac{ac-2b}{1+a}$; 13) $\frac{m^2+n^2}{m+n}$; 15) $\frac{m^2+n^2}{2mn}$; 17) $\frac{mn(b-a)}{m-n}$; 19) 0; 21) $\frac{a}{5}$; 23) $\frac{k-1}{k+1}$; 25) 0; 27) 0; 29) n; 31) 1; 33) -1; 35) $\frac{4(e-g)}{11}$; 37) $\frac{bc-d+b-ac}{a-b}$; 39) $\frac{a^2-b^2}{b}+\frac{a^2-c^2}{a}$; 41) $\frac{1}{a^2c+ab^2+bc^2}$; 43) $\frac{m+n}{mn}+1$; 45) $\frac{a^2+b^2-c^2+2bc}{a+b-c}$; 47) $\frac{e^2-f^2}{3e+3f}$; 49) $2a-5b$; 51) $5a+7b$; 53) b; 55) 3; 57) $\frac{e^2+f^2+g^2}{2e+2f+2g}$; 59) $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$; 61) $\frac{1}{b}+\frac{2}{a}$; 63) $\frac{3}{4}(m+n)$; 65) $8(m-n)$; 67) $a+1$; 68) $\frac{k}{3}$; 69) 0; $\frac{k}{2}$; 71) a; 73) $abcd$; 75) $m+n$. **628.** 23) $a-1$; 43) $\frac{bc-ad}{c+d}$. **629.** 1) 11; 22; 11; 3) $345\frac{5}{11}$; $414\frac{6}{11}$; 5) 7200; 7) 234; 13) 20; 15) 24; 17) 11; 19) 80. **630.** 1) 10; 30; 2) 3600; 3) 20; 4) 10; 5) 2900; 2100; 6) 600; 7) 30; 8) 5; 9) 742; 10) 20% kahju; 11) 1,04 mk. **631.** 1) 20 ja 35 mm.; $73\frac{1}{3}$ ja $128\frac{1}{3}$ mm. 2) 120°; 36°; $51\frac{3}{7}$°; 3) 36°, 108°; 80°, 20°; 4) $19\frac{7}{11}$; $32\frac{8}{11}$; 5) 7; 4; 5; 6) 6; 7) 2; $3\frac{3}{5}$; 8) 10; 9) 13; 5; 12; 10) 13; 11) 5; 11; 12) 16; $21\frac{7}{13}$. **632.** 1) $3\frac{1}{33}$; 2) 10 t. 8 min.; 3) 4; 4) 14; 16; 5) 4 tundi; 25,92 km.; 6) $3\frac{3}{7}$; 7) 3,19 km.; 8) $4\frac{6}{7}$ t.; $77\frac{5}{7}$ km. Viljandist; 9) 24 km.; 10) 15; 11) iga 1 t. 5 min. $27\frac{3}{11}$ sek. järel. 13) 120; 72. **633.** 1) 1 m. 2) $23769\frac{3}{13}$ kp. m.; 3) $48\frac{8}{29}$ gr. hõb.; 4) 108 kg.; 5) 7,3 kp. dm. kuni 0,1-ni; 6) $2\frac{2}{9}$; 7) umbes 30,65; 8) 100; 9) 1 kg.; 10) 4,8 cm. kuni 0,1-ni; 11) 27; 12) 5. **634.** 1) 7; 21; 2) 400 gr.; 3) 1. **635.** 3) 4; 4) 0,11; 0,10; 0,10; 5) 540; 6) $3\frac{8}{9}$ kg.; 7) $4\frac{4}{11}$° C; 8) 5,3 kg. kuni 0,1-ni. **636.** 1) 1,003 kuni 0,001-ni; 2) 28 cm 47 cm. **637.** 1) 18; 2) 6; 3) 15; 4) 8550; 5) 7200; 1440;

6) 17560 mk.; 7) 8; 8) 30; 4; 6; 9) 8; 10) 175 gr.; 75 gr.; 11) 30,25 gr. hõb. ja 9,65 gr. vaske; 12) 33; 75; 13) 4200; 540; 405; 14) 5 km.; 15) 225, 315; 115. **638.** 1) 12; 2) $4\frac{11}{20}$; 3) 23; 12. **640.** 1) $11\frac{13}{25}$; 2) 84; 3) 28. **641.** 1) $9\frac{1}{5}$; 2) 36. **642.** 1) 20; 2) 22; 3) 90; 4) 3; 6) 76; 7) 64 kop.; 8) $34\frac{2}{7}$; 9) 20; 17) 140; 21) 2; 23) 24; 16; 25) siit erikaal kullal = 20; hõbedal = $= 10\frac{1}{2}$; kui on kulda x naela, siis on hõbedat $20-x$ naela; kuld kaotab vees $\frac{x}{20}$, hõbe — $\frac{20-x}{10,5}$; siit võrrandus $\frac{x}{20}+\frac{20-x}{10,5}=1,25$, millest kulda $x=14\frac{9}{19}$ naela.

Õiendused:

			On trükitud:	Lugeda:
Lhk.	11,	rida 10 ülevalt	värvi-ainet	värv-ainet
„	12,	„ 4 „	Ülesanded	Ülesanded
„	16,	„ 13 „	Ulesanded	Ülesanded
„	17,	„ 4 „	$+b$	$a+b$
„	17,	„ 10 alt	$a+b$	$a+b=100$
„	18,	„ 9 „	Number 46 on ülearune	
„	19,	„ 4 ülevalt	ü esande	ülesande
„	19,	„ 7 „	tõestada	tõendada
„	19,	„ 12 alt	g järjestikkude	g 5-st järjestikkude
„	22,	„ 11 „	$b=1.$	$b=10$
„	23,	„ 14 ülevalt	muutub d	muutub c
„	23,	„ 14 „	Teosed	Teoses
„	23,	„ 9 alt	$n-3$	$2n-3$
„	23,	„ 3 „	$5p=5q$	$5p+5q$
„	24,	„ 1 ülevalt	$b+\frac{2}{3}$	$b=\frac{2}{3}$
„	24,	„ 15 alt	Tõestada	Tõendada
„	24,	„ 12 „	Tõestada	Tõendada
„	25,	„ 11 „	40 miljardi	40 biljoni (miljon miljoni)
„	25,	„ 5 „	r	s
„	28,	„ 17 „	Ülesanded	Ülesanded
„	34,	„ 5 „	^5p	p^5
„	35,	„ 11 „	$4ab$	$7ab$
„	36,	„ 3 „	$\frac{pq}{2}$	$\frac{pq}{11}$
„	39,	„ 3 „	arved	arvud
„	41,	„ 16 „	$a+b=c+a$	$a+b+c-a$
„	43,	„ 5 ja 6 ülevalt	m	n
„	46,	„ 9 „	$[42-18.9$	$[(42-18).9]$
„	47,	„ 3 „	tõestada	tõendada
„	49,	Joonestusel peab pööramise siht olema ümberpöördud		
„	49,	„ 15 ülevalt	$x=2$	$a=2$
„	50,	„ 4 „	c	z
„	51,	„ 11 „	45	$4S$
„	52,	„ 1 alt	d ja kahekordsed	c ja kahekordse d
„	60,	„ 1 ülevalt	$c=b$	$c=6$
„	64,	„ 7 „	$a(+b+c)$	$a+(b+c)$
„	66,	„ 12 „	$1+14$	$1+24$

Lhk. 80,	rida	12	alt	$4b^2$	$4a^3$
„ 86,	„	6	ülevalt	$2z - 3$	$2y - 3$
„ 86,	„	7	„	z	7
„ 98,	„	6	alt	Ulesanded	Ülesanded
„ 107,	„	7	„	$+ e$	$+ c$
„ 112,	„	5	„	9) $pq + pr + qr$	9) $pq + pr - qr$
„ 113,	„	12	ülevalt	$-2\frac{1}{2}$	$+2\frac{1}{2}$
„ 116,	„	11	„	$x - z$	$y - z$
„ 116,	„	9	alt	$- 12yz$	$+ 12yz$
„ 119,	„	9	„	1	10
„ 122,	„	7	ülevalt	x^3	x^2
„ 123,	„	5	„	$(ax - by)$	$(ax - by)^2$
„ 132,	„	9	„	$cn - an - bn$	$cn + an - bn$
„ 132,	„	12	„	$121ab^2$	$11ab^3$
„ 132,	„	12	alt	$ax - bx$	$ax - by$
„ 132,	„	11	„	$1 - 6r - 5r^2$	$1 - 6r + 5r^2$
„ 138,	„	8	„	16	18
„ 148,	„ 4 ja	5	„	Esimeste klambrite järel peab olema jagamise märk:	
„ 150,	„	1	ülevalt	$\frac{1}{q} + \frac{1}{q}$	$\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$
„ 150,	„	6	„	$p -$	$p - q$
„ 157,	„	11	„	$\frac{a}{b}$	ab
„ 157,	„	12	alt	$p^2 - q^2$	$p - q$
„ 162,	„	2	ülevalt	583	582

1.
B
82

Seletuseks.

Käesoleva algebraliste ülesannete kogu kokkuseadmise kavatsus tekkis 1918. a. kevadel, kus suurem osa olevaist ja uuesti avatavaist koolest võttis tarvitusele Eesti õpekeele. Sundisid selleks autorit mitte ainult igapäevane kooli tarvidus, vaid ka keelelise ja ideelise väljendamise tung — teha õpetusliselt omale selgeks aine ja ta suhted. Peale selle ei jätnud ametivendade pealekäimised töö alustamiseks avaldamata oma mõju — aeg paneb kohustused peale, keegi peab tegema selle töö. Ja ka praegusel momendil näeb autor alatud töö jätkamises enam kohustust kui oma vaimliste huvide rahuldamist.

Raamat erineb ideeliselt tuntavalt neist, mida meil sel alal tarvitatud seni. Kõige pealt on püütud teostada funksjooni mõiste järgset arendamist, ehk küll funksjooni nimigi ei esine raamatus. Palju rohkem kui siiamaani on kasutatud graafikalisi kujutusi ja võrrandusi. Üldse on püütud käsitada esimest õpeastet mitmekesiselt ja põhjalikult; kuid siiski ei paku raamat siin mõnesugust metoodi, vaid ainult materjaali, jättes õpetajale vabaduse. Töö kestes on autor sunnitud olnud omast esialgsest plaanist pisut taganema — kirjutada kompendium, mis oleks õperaamat ja harjutuste kogu ühtlasi. Põhjusteks olid töö liiga pikalevenivus ja raamatu paisumine. Nõnda ei leidu siin polünoomide jagamise algorütmi ja võrranduste lahendamise metoodi käsitust, mis oleksid olnud vist küll tarvilikud. Ülesannete vastused on, mõne erandiga, peaasjalikult antud paaritu arvu numbritele.

Mis puutub allikaisse, siis on neid olnud mitmed, milledest esimeses reas võiks mainida V. Lietzmann'i saksakeelist algebra ülesannete kogu. Iseäralikku kasu toonud on aga selle raamatu venekeelne ümbertöötus Volkov'ist, Struve'st ja Böhme'st. Kuid peale ainejaotuse, ülesannete tüüpide ja osalt aine järjestuse, pole ülesanded mitte laenatud, vaid uuesti kokku seatud, enam-vähem kokkukõlas meie oludega. Otsekohe laenatud ülesanded sünnitavad ainult väga väikese erandi, mis enamasti näidatud on allika nimetamisega.

Raamat on katseks uuel alal, esitades muidugi ka puudusi, milledest mõnest autor isegi on aja jooksul saanud teadlikuks, kuid keele suhtes — peale terminoloogia — ei kanna ta täit vastutust. Kõigi puuduste kõrvaldamiseks palub autor kaasabi raamatu tarvitajailt sooviavaldustena ja märkustena, mis võiks saata aadressil: Tartu, Ülikool.

Autor.

Tartus, 9. dets. 1919. a.