TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS
ALUSTATUD 1893.a Vihik 366 Выпуск ОСНОВАНЫ В 1893.г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XVI

Tartu 1975

TARTU RIIKLIKU ÜLIKOOLI TOIMETISED
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ
ТАРТУСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ACTA ET COMMENTATIONES UNIVERSITATIS TARTUENSIS

ALUSTATUD 1893.a Vihik 366 Выпуск ОСНОВАНЫ В 1893.г.

MATEMAATIKA- JA MEHHAANIKA-ALASEID TÖID

ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ

XVI

Tartu 1975

О ПОЛИКАТЕГОРИИ МНОГОМЕСТНЫХ ОТНОШЕНИЙ И ПОЛИКОЛЬЦОИДЕ ЧАСТИЧНЫХ МНОГОМЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Э.Реди

Кафедра алгебры и геометрии

В работе найдены некоторые идеалы поликатегории многоместных отношений, а также поликольцоида частичных многоместных функций. В частности, найдены их наименьшие нетривиальные двусторонние идеалы. Эти утверждения аналогичны результатам Л.М. Глускина [2].

Все понятия, которые в работе не определены, можно найти в работах [5,6] автора или в книге Кона [4].

§ I. Поликатегория многоместных отношений

Пусть $(M_i, i \in J)$ - фиксированная система непустых и непересекающихся множеств или Ω-алгебр (см. [4], стр. 62). Для декартова (прямого) произведения (см. [4], стр. 63) множеств (Ω-алгебр) этой системы и элементов такого произведения введем следующие обозначения (см. [6], стр. 67):

$$M_{i_1^m} = M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_m} \ (m>0), \quad M_{i_1^0} = \phi,$$

$$(x_1^m) = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \ (m>0), \quad (x_1^0) = \phi.$$

Через $\mathfrak{P}(X)$ обозначим множество всех подмножеств множества X (включая пустое подмножество). Для множества всех $(m+1)$-местных отношений (см. [I], стр. 90) между элементами множеств $M_{i_1}, \ldots, M_{i_m}, M_j$ введем обозначение

$$P_{i_1^m}^j = \mathfrak{P}(M_{i_1^m j}) = \mathfrak{P}(M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_m} \times M_j).$$

Запись $(x_1^m, y) \in \alpha$ при $(x_1^m) \in M_{i_1^m}$, $y \in M_j$, $\alpha \in P_{i_1^m}^j$ означает, что элементы $x_1, \ldots, x_m, y$ находятся в отношении α. Пустое отношение из $P_{i_1^m}^j$ обозначим через $O_{i_1^m}^j$.

При $m>0$ введем следующие понятия: множество

$$x_1^m a = \{y \in M_j \mid (x_1^m, y) \in a\} \qquad (I)$$

называется полным образом набора $(x_1^m) \in M_{i_1^m}$ при $a \in P^j_{i_1^m}$. Пусть K произвольное подмножество из M_{i_u} (при $1 \leq u \leq m$). Введем обозначение

$$x_1^{u-1} K x_{u+1}^m a = \bigcup_{x_u \in K} x_1^{u-1} x_u x_{u+1}^m a. \qquad (2)$$

Множество

$$Ra = \{y \in M_j \mid (x_1^m, y) \in a \text{ для некоторого } (x_1^m) \in M_{i_1^m}\} \qquad (3)$$

называется образом отношения $a \in P^j_{i_1^m}$, а кардинальное число $|Ra|$ называется рангом отношения a.

Множество

$$ya^{-1} = \{(x_1^m) \in M_{i_1^m} \mid (x_1^m, y) \in a\} \qquad (4)$$

называется полным прообразом элемента y при отношении a, а множество

$$Da = \{(x_1^m) \in M_{i_1^m} \mid (x_1^m, y) \in a \text{ при некотором } y \in M_j\} \qquad (5)$$

называется областью определения отношения a.

В силу этих определений имеем следующие равенства:

$$Ra = \bigcup_{(x_1^m) \in M_{i_1^m}} x_1^m a = \bigcup_{(x_1^m) \in Da} x_1^m a,$$

$$Da = \bigcup_{y \in M_j} ya^{-1} = \bigcup_{y \in Ra} ya^{-1}.$$

Отметим, что при $m=0$ мы положим $Ra = a$, но множества Da и ya^{-1} не определяем.

Очевидно, что только пустое отношение $O^j_{i_1^m}$ из $P^j_{i_1^m}$ имеет пустую область определения и пустой образ, т.е. из $Da = \phi$ или $Ra = \phi$ для $a \in P^j_{i_1^m}$ вытекает, что $a = O^j_{i_1^m}$. Отметим, что при $m > 0$ имеют место следующие равенства:

$$Ra = \{y \in M_j \mid ya^{-1} \neq \phi\},$$

$$Da = \{(x_1^m) \in M_{i_1^m} \mid x_1^m a \neq \phi\}.$$

Если все $M_i\ (i \in J)$ суть Ω-алгебры, то мы можем на каждом $P^{j}_{i_1^m}$ следующим образом задать структуру Ω-алгебры.

I) В случае $m>0$ для всяких $a_1,\dots,a_n\in P^{j}_{i_1^m}$, $\omega\in\Omega_n\,(n\geq 1)$ положим

$$x_1^m\Big(\sum_i^{\omega} a_i\Big)=\sum_i^{\omega}(x_1^m a_i) \tag{6}$$

при любом $(x_1^m)\in M_{i_1^m}$. Здесь и в дальнейшем пользуемся обозначением

$$\sum_i^{\omega} K_i=\{y\in M_j \mid y=\sum_i^{\omega} y_i \text{ для некоторых } y_i\in K_i\,(i=1,\dots,n)\} \tag{7}$$

для всех непустых подмножеств $K_i\subseteq M_j\,(i=1,\dots,n)$. Если хотя бы одно $K_i=\phi$, то и $\sum\limits_i^{\omega} K_i=\phi$.

В случае $m=0$ мы определим $\sum\limits_i^{\omega} a_i$ согласно (7).

2) При $\nu\in\Omega_0$ для всякого $(x_1^m)\in M_{i_1^m}$ положим

$$x_1^m 0^{\nu j}_{i_1^m}=\{0_j^{\nu}\}, \tag{8}$$

где 0_j^{ν} – элемент Ω-алгебры M_j, отмеченный операцией ν (в частности, $0^{\nu j}=\{0_j^{\nu}\}$).

Пусть $(J,\mathcal{J})$ есть (π-замкнутый) полиграф (см. [5], стр. 32). Образуем набор

$$P_{\mathcal{J}}=P_{\mathcal{J}}(M_i\,;\,i\in J)=(J,\mathcal{J},P^{j}_{i_1^m},\Omega,\pi)$$

и определим операции $\pi_1,\pi_2,\dots$ следующим образом:

Операция π^u применима ко всяким $a\in P^{j_u}_{i_1^m}$, $b\in P^{k}_{j_1^p}$ при $1\leq u\leq p$ и произведение $a\pi^u b\in P^{k}_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}$ есть такое отношение, что[I]

$$x_1^{m\oplus p}(a\pi^u b)=x_1^{u-1}(x_u^{m\oplus u}a)\,x_{m+u}^{m\oplus p}\,b \tag{9}$$

для всякого $(x_1^{m\oplus p})\in M_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}$, где правую часть надо истолковать по формуле (2). Значит, в случае $m\oplus p>0$ имеем, что

$$D(a\pi^u b)=\{(x_1^{m\oplus p})\in M_{j_1^{u-1}i_1^m j_{u+1}^p}\mid (x_u^{m\oplus u})\in Da \text{ и}$$
$$(x_1^{u-1},y,x_{m+u}^{m\oplus p})\in Db \text{ при некотором } y\in x_u^{m\oplus u}a\}. \tag{10}$$

[I] В работе введено обозначение $m\oplus p=m+p-1$ для всех целых чисел $m\geq 0$, $p>0$.

Заметим, что при $m \oplus p = 0$, т.е. при $m = 0,\ p = u = 1,\ a \in P_{j^1}$, $b \in P^{k}_{j^1}$ произведение $a\pi^1 b \subseteq M_k$ и

$$a\pi^1 b = \bigcup_{x \in a} x b. \tag{9}$$

<u>Замечание I</u>. Если хотя бы одно из отношений a и b является пустым, то и произведение $a\pi^u b$ есть пустое отношение из соответствующего множества отношений.

<u>Предложение I</u>. Набор P_J является поликатегорией (определение см. [5], стр. 32) но, вообще говоря, не поликольцоидом.

<u>Доказательство</u>. Проверим ассоциативность, т.е. выполненность равенства

$$(a\pi^u b)\pi^v c = a\pi^{u\oplus v}(b\pi^v c) \tag{II}$$

для всяких отношений $a \in P^{j_u}_{i_1^m}$, $b \in P^{k_v}_{j_1^p}$, $c \in P^{\ell}_{k_1^r}$ целых чисел $1 \le u \le p$, $1 \le v \le r$ и граней $(i_1^m; j_u), (j_1^p; k_v), (k_1^r; \ell) \in J$. Действительно, для любого $(x_1^{m\oplus p\oplus r}) \in M_{k_1^{v-1}; j_1^{u-1}; i_1^m; j_{u+1}^p; k_{v+1}^r}$ имеем

$$x_1^{m\oplus p\oplus r}[(a\pi^u b)\pi^v c] \underset{(9)}{=} x_1^{v-1}[x_v^{m\oplus p\oplus v}(a\pi^u b)]x_{m\oplus p+v}^{m\oplus p\oplus r} c \underset{(9)}{=}$$

$$= x_1^{v-1}[x_v^{v-1+u-1}(x_{u\oplus v}^{m\oplus u\oplus v} a)x_{m+u\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b]x_{m\oplus p+v}^{m\oplus p\oplus r} c \underset{(2)}{=}$$

$$= \bigcup_{z \in x_{u\oplus v}^{m\oplus u\oplus v} a} x_1^{v-1}[x_v^{u\oplus v-1} z\, x_{m+u\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b]x_{m\oplus p+v}^{m\oplus p\oplus r} c \underset{(9)}{=}$$

$$= \bigcup_{z \in x_{u\oplus v}^{m\oplus v} a} x_1^{u\oplus v-1} z\, x_{m+u\oplus v}^{m\oplus p\oplus r}(b\pi^v c) \underset{(2)}{=}$$

$$= x_1^{u\oplus v}[x_{u\oplus v}^{m\oplus u\oplus v} a]x_{m+u\oplus v}^{m\oplus p\oplus r}(b\pi^v c) \underset{(9)}{=} x_1^{m\oplus p\oplus r}[a\pi^{u\oplus v}(b\pi^v c)].$$

В силу произвольности набора $(x_1^{m\oplus p\oplus r})$ нами доказано, что

$$(a\pi^u b)\pi^v c = a\pi^{u\oplus v}(b\pi^v c).$$

Здесь мы пользовались легко проверяемым фактом, что отношения a и b из $P^{j}_{i_1^m}$ равны тогда и только тогда, когда множества $x_1^m a$ и $x_1^m b$ совпадают для любого набора $(x_1^m) \in M_{i_1^m}$. В дальнейшем будем пользоваться этим фактом без дополнительного напоминания.

Аналогично проверяется и частичная коммутативность, т.е. выполненность равенства

$$a\pi^u(b\pi^v c) = b\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c) \tag{I2}$$

для всяких $a \in P_{i_1^m}^{k_u}$, $b \in P_{j_1^p}^{k_v}$, $c \in P_{k_1^r}^{\ell}$, $1 \le u < v \le r$, $(i_1^m; k_u), (j_1^p; k_v), (k_1^r; \ell) \in \mathcal{J}$. В самом деле, при любом $(x_1^{m\oplus p\oplus r}) \in M_{k_1^{u-1} i_1^m k_{u+1}^{v-1} j_1^p k_{v+1}^r}$ имеем

$$x_1^{m\oplus p\oplus r}[a\pi^u(b\pi^v c)] \underset{(9)}{=} x_1^{u-1}[x_u^{m\oplus u} a]\, x_{m+u}^{m\oplus p\oplus r}(b\pi^v c) \underset{(1)}{=}$$

$$= \bigcup_{z \in x_u^{m\oplus u} a} x_1^{u-1} z\, x_{m+u}^{m\oplus p\oplus r}(b\pi^v c) \underset{(9)}{=}$$

$$= \bigcup_{z \in x_u^{m\oplus u} a} x_1^{u-1} z\, x_{m+u}^{v+(m-1)-1}[x_{m\oplus v}^{p\oplus m\oplus v} b]\, x_{m\oplus p+v}^{m\oplus p\oplus r} c \underset{(1)}{=}$$

$$= \bigcup_{z \in x_u^{m\oplus u} a} \Big(\bigcup_{y \in x_{m\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b} x_1^{u-1} z\, x_{m+u}^{m\oplus v-1}\, y\, x_{p+m\oplus v}^{m\oplus p\oplus r} c\Big) =$$

$$= \bigcup_{y \in x_{m\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b} \Big(\bigcup_{z \in x_u^{m\oplus u} a} x_1^{u-1} z\, x_{m+u}^{m\oplus v-1}\, y\, x_{p+m\oplus v}^{m\oplus p\oplus r} c\Big) \underset{(1)}{=}$$

$$= \bigcup_{y \in x_{m\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b} x_1^{u-1}[x_u^{m\oplus u} a]\, x_{m\oplus u}^{m\oplus v-1}\, y\, x_{p+m\oplus v}^{m\oplus p\oplus r} c \underset{(9)}{=}$$

$$= \bigcup_{y \in x_{m\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b} x_1^{m\oplus v-1}\, y\, x_{p+m\oplus v}^{m\oplus p\oplus r}(a\pi^u c) \underset{(1)}{=}$$

$$= x_1^{m\oplus v-1}[x_{m\oplus v}^{m\oplus p\oplus v} b]\, x_{p+m\oplus v}^{m\oplus p\oplus v}(a\pi^u c) =$$

$$= x_1^{m\oplus p\oplus r}[b\pi^{m\oplus v}(a\pi^u c)]$$

В силу произвольности набора $(x_1^{m\oplus p\oplus r})$ и отношений a, b, c нами доказано, что равенство (I2) выполняется в $P_{\mathcal{J}}$ как только произведения определены.

Аналогично получим равенства (II) и (I2), когда $m\oplus p\oplus r = 0$, т.е. когда в формуле (II) будет $m = 0$, $p = r = 1$ или в (I2) выполняется $m = p = 0$, $r = 2$.

Следовательно, $P_{\mathcal{J}}$ является поликатегорией. Покажем, что в P_J дистрибутивность в общем не имеет места, т.е. равенство

$$a\pi^u\left(\sum_i^{\omega} b_i\right) = \sum_i^{\omega} a\pi^u b_i \tag{I3}$$

не выполняется для всех $a \in P^{j}_{i_1^m}$, $b_1, \ldots, b_n \in P^{k}_{j_1^p}$, $1 \leq u \leq p$, $\omega \in \Omega_n$ $(n \geq 1)$, $(i_1^m; j_n), (j_1^p; k) \in J$. Предположим, что

$$z \in x_1^{m \oplus p}\left[a\pi^u\left(\sum_i^{\omega} b_i\right)\right] \underset{(9)}{=} x_1^{u-1}\left[x_u^{m \oplus u} a\right] x_{m+u}^{m \oplus p}\left(\sum_i^{\omega} b_i\right).$$

Ввиду (7) отсюда следует существование таких $z_1, \ldots, z_n \in M_k$, что

$$z = \sum_i^{\omega} z_i \quad \text{и} \quad z_i \in x_1^{u-1} y x_{m+u}^{m \oplus p} b_i .$$

Значит, согласно (2) имеем

$$z_i \in x_1^{u-1}\left[x_u^{m \oplus u} a\right] x_{m+u}^{m \oplus p} b_i \underset{(6)}{=} x_1^{m \oplus p}(a\pi^u b_i).$$

Теперь из (7) заключаем, что

$$z \in \sum_i^{\omega} x_1^{m \oplus p}(a\pi^u b_i) \underset{(6)}{=} x_1^{m \oplus p}\left(\sum_i^{\omega} a\pi^u b_i\right).$$

Этим нами доказано включение

$$a\pi^u\left(\sum_i^{\omega} b_i\right) \subseteq \sum_i^{\omega} a\pi^u b_i . \tag{I4}$$

Аналогично получим включение (I4) и при $m \oplus p = 0$, т.е. при $m = 0$, $p = 1$.

Пусть $|M_{j_k}| \geq 2$, $\omega \in \Omega_n$, $n \geq 2$. Выберем такие отношения $a \in P^{j_u}_{i_1^m}$, $b_1, \ldots, b_n \in P^{k}_{j_1^p}$ $(1 \leq u \leq p)$, что при фиксированных $(x_1^m) \in M_{i_1^m}$, $(y_1^{u-1}, y_{u+1}^p) \in M_{j_1^{u-1}\, j_{u+1}^p}$ имеем

$$Da = \{(x_1^m)\}, \quad Ra = \{x, y\}\ (x \neq y), \quad Rb_i \neq \emptyset\ (i = 1, \ldots, n),$$
$$Db_1 = \{(y_1^{u-1}, x, y_{u+1}^p)\}, \quad Db_2 = \ldots = Db_n = \{(y_1^{u-1}, y, y_{u+1}^p)\}.$$

Тогда согласно (I0) получим

$$D(a\pi^u b_i) = \{(y_1^{u-1}, x_1^m, y_{u+1}^p)\} \neq \emptyset \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Из определений (6), (7) и (9) вытекает, что $D\left(\sum_i^{\omega} a\pi^u b_i\right) = \{(y_1^{u-1}, x_1^m, y_{u+1}^p)\} \neq \emptyset$, но $D\left(a\pi^u\left(\sum_i^{\omega} b_i\right)\right) = \emptyset$. Следовательно,

$$\sum_i^{\omega} a\pi^u b_i \neq O^{k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}, \quad \text{а} \quad a\pi^u\left(\sum_i^{\omega} b_i\right) = O^{k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}.$$

Приведенный пример показывает, что включение, обратное к (I4), вообще говоря, не имеет места в P_J. Следовательно,

P_J не является поликольцоидом (определение см. [6], стр. 63). Отметим, что если все M_i $(i \in J)$ тривиальные, т.е. одноэлементные Ω-алгебры, то P_J является поликольцоидом при любой сигнатуре Ω (определение см. [4], стр. 62).

Предложение доказано.

Построенную поликатегорию $P_J(M_i; i \in J)$ назовем J-поликатегорией многоместных отношений над системой $(M_i; i \in J)$.

Отметим еще, что операции $\pi^1, \pi^2, \ldots$ являются для многоместных отношений более естественными чем операция, рассмотренная в [2]. Именно, Л.М. Глускин [2] показал, что многоместные отношения не образуют системы Менгера, так как не выполняется соответствующий закон ассоциативности.

§ 2. Поликольцоид частичных многоместных функций

Обозначим через $W^j_{i_1^m}$ подмножество всех однозначных отношений (частичных функций) из $P^j_{i_1^m}$ вместе с пустым отношением, т.е.

$$W^j_{i_1^m} = \{O^j_{i_1^m}, a \in P^j_{i_1^m} \mid \text{из } y_1, y_2 \in x_1^m a \text{ следует } y_1 = y_2\}. \qquad (15)$$

В частности, когда $m=0$ и $a \in W^j$, то $a \neq O^j$ является одноэлементным множеством.

Замечание 2. Если множество $x_1^m a$ одноэлементно, т.е. $x_1^m a = \{y\}$, то будем писать $x_1^m a = y$.

Образуем набор

$$W_J = W_J(M_i; i \in J) = (J, J, W^j_{i_1^m}, \Omega, \pi),$$

где операции определены по формулам (6), (8) и (9).

Предложение 2. Если для Ω будет $\Omega_0 = \phi$, то набор W_J является поликольцоидом и подполикатегорией в P_J.

Доказательство. Проверим, что определения (6) и (9) корректны, т.е., применив операции к однозначным отношениям, получим опять однозначные отношения.

Пусть взяты произвольные $a \in W^{j_u}_{i_1^m}$, $b \in W^k_{j_1^p}$, $1 \le u \le p$, $(i_1^m; j_u)$, $(j_1^p; k) \in J$. Предположим, что

$$z_1, z_2 \in x_1^{m \oplus p}(a \pi^u b) \underset{(9)}{=} x_1^{u-1}[x_u^{m \oplus u} a]\, x_{m+u}^{m \oplus p} b.$$

Ввиду (2) это означает существование таких $y_1, y_2 \in x_1^m a$, что

$z_i \in x_1^{u-1} y_i x_{m+u}^{m\oplus p} b \ (i=1,2)$. Из $a \in W_{i_1^m}^j$ по (I5) вытекает $y_1 = y_2$ и теперь в силу $b \in W_{j_1^p}^k$ по (I5) заключаем, что $z_1 = z_2$. Значит, $a\pi^u b \in W^k_{i_1^{u-1} ; i_1^m ; j_{u+1}^p}$ и определение (9) корректно. Этим же мы показали, что W_J является подполикатегорией в P_J.

Корректность определения (6) означает, что $W_{i_1^m}^j$ образует Ω-подалгебру в $P_{i_1^m}^j$ при любом $(i_1^m ; j) \in J$. Проверим это. Пусть ω – произвольная операция из Ω_n. Напомним, что по условию теоремы $n \geqslant$ I. Берем произвольные $a_1, \dots, a_n \in W_{i_1^m}^j$. Предположим, что

$$y, z \in x_1^m \left(\sum_t^{\omega} a_t\right) \underset{(6)}{=} \sum_t^{\omega} x_1^m a_t .$$

Ввиду (7) существуют такие $y_t, z_t \in M_j \ (t=1, \dots, n)$, что

$$y = \sum_t^{\omega} y_t, \quad z = \sum_t^{\omega} z_t, \quad x_t, z_t \in x_1^m a_t \ (t=1,\dots,n).$$

Поскольку $a_t \in W_{i_1^m}^j$, то $y_t = z_t \ (t=1,\dots,n)$. Поэтому $y = \sum_t^{\omega} y_t = \sum_t^{\omega} z_t = z$ и $\sum_t^{\omega} a_t \in W_{i_1^m}^j$.

Остается проверить дистрибутивность. Мы знаем, что имеет место включение (I4). Надо доказать обратное включение. Предположим, что

$$z \in x_1^{m\oplus p}\left[\sum_t^{\omega} a\pi^u b_t\right] \underset{(6)}{=} \sum_i^{\omega} x_1^{m\oplus p}(a\pi^u b_t).$$

Ввиду (7) существуют $z_t \in M_k$ такие, что

$$z = \sum_t^{\omega} z_t, \quad z_t \in x_1^{m\oplus p}(a\pi^u b_t) \underset{(9)}{=} x_1^{u-1}\left[x_u^{m\oplus u} a\right] x_{m+u}^{m\oplus p} b_t .$$

Поскольку $a \in W_{i_1^m}^j$, то $x_u^{m\oplus u} a = y$ (в силу замечания 2) и мы имеем

$$z \in \sum_t z_t, \quad z_t = x_1^{u-1} y x_{m+u}^{m\oplus p} b_t .$$

Значит, ввиду (7) получим

$$z \in \sum_t^{\omega} x_1^{u-1} y x_{m+u}^{m\oplus p} b_t \underset{(6)}{=} x_1^{u-1} y x_{m+u}^{m\oplus p}\left(\sum_t^{\omega} b_t\right) = x_1^{u-1}\left[x_u^{m\oplus u} a\right] x_{m+u}^{m\oplus p}\left(\sum_t^{\omega} b_t\right) \underset{(9)}{=}$$
$$= x_1^{m\oplus p}\left[a\pi^u\left(\sum_t^{\omega} b_t\right)\right].$$

Следовательно, равенство (I3) имеет место в P_J, если только первый сомножитель является однозначным отношением. Поэтому W_J является поликольцоидом.

Предложение доказано.

Условие $\Omega_0 = \emptyset$ является существенным, если система

$(M_i; i\in J)$ нетривиальна, т.е. хотя бы одна Ω-алгебра M_i не является одноэлементной. Действительно, если $\nu\in\Omega_0$, то при $a\in W^{j_u}_{i_1^m}$ $(m>0)$, $Da \neq M_{i_1^m}$ $(1\leq u\leq p)$ не выполняется свойство элементов, выделенных нульарными операциями, т.е. не выполняется равенство

$$a\pi^u O^{\nu k}_{j_1^p} = O^{\nu k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}, \tag{I6}$$

так как $D(O^{\nu k}_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}) = M_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}$,

а $D(a\pi^u O^{\nu k}_{j_1^p}) = \{(x_1^{m\oplus p})\in M_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p} \mid (x_u^{m\oplus u})\in Da\,(\neq M_{i_1^m})\}$.

Поликольцоид $W_J(M_i; i\in J)$ назовем J-<u>поликольцоидом частичных функций</u> или частичных отображений над системой $(M_i; i\in J)$.

Поскольку для всех $a\in W^j_{i_1^m}$, $(x_1^m)\in M_{i_1^m}$ множество $x_1^m a$ одноэлементно, то определения (6) и (9) означают равенства элементов, а не множеств, как в общем случае.

Обозначим через $\mathcal{F}^j_{i_1^m}$ (как и в [5]) подмножество всех полных функций из $W^j_{i_1^m}$, т.е.

$$\mathcal{F}^j_{i_1^m} = \{a\in W^j_{i_1^m} \mid Da = M_{i_1^m}\}. \tag{I7}$$

<u>Следствие</u>.I Набор $\mathcal{F}_J = \mathcal{F}_J(M_i; i\in J) = (J; J, M_{i_1^m}, \Omega, \pi)$ является подполикольцоидом поликольцоида W_J.

<u>Доказательство</u>. Поскольку $D(\sum_i a_i) = \bigcap_i Da_i$, то сумма полных функций опять полная функция. Из (I0) следует, что π^u-произведение полных функций также является полной функцией. Поэтому $\mathcal{F}_J$ является подполикольцоидом в W_J. Отметим, что $\mathcal{F}_J$ является поликольцоидом при любой сигнатуре Ω (даже при $\Omega_0\neq\emptyset$, см. [6], предложение 2).

Напомним, что $\mathcal{F}_J(M_i; i\in J)$ называется J-<u>симметрическим поликольцоидом</u> [6] над системой $(M_i, i\in J)$.

§ 3. Цилиндрические отношения

При $m>0$ отношение $a\in P^j_{i_1^m}$ называется <u>цилиндрическим</u>, если для любых $(x_1^m)\in M_{i_1^m}$, $z\in M_j$ имеет место $z\in x_1^m a$, тогда и только тогда, когда $(x_1^m)\in Da$ и $y\in Ra$, т.е.

$$a = Da \times Ra. \tag{18}$$

Если $Da = L$ и $Ra = K$, то такое цилиндрическое отношение обозначим через (L, K). Из одноместных отношений цилиндрическими считаются все непустые отношения, причем отношение, которое совпадает с непустым подмножеством $K \subseteq M_j$, обозначим через (K).

Введем обозначения

$$C^j_{i_1^m} = \{ \mathcal{O}^j_{i_1^m},\ a \in P^j_{i_1^m} \mid a = Da \times Ra \} \ (m > 0),$$
$$C^j = \{ O^j, (K) \mid \emptyset \neq K \subseteq M_j \}, \tag{19}$$
$$C_J = C_J(M_i; i \in J) = (J, J, C^j_{i_1^m}, \Omega, \pi).$$

Далее введем для любых множеств $L_1 \subseteq M_{i_1^m}$, $L_2 \subseteq M_{j_1^p}$ $(p > 0)$, $K \subseteq M_{j_u}$, числа $u \in \{1, \dots, p\}$ и отношения $a \in P^j_{i_1^m}$ следующие обозначения:

$$L_1 \overset{u}{\underset{K}{\times}} L_2 = \{ (x_1^{m \oplus p}) \in M_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p} \mid (x_u^{m \oplus u}) \in L_1, (x_1^{u-1}, y, x_{m+u}^{m \oplus p}) \in$$
$$\in L_2 \text{ для некоторого } y \in K \}, \tag{20}$$

$$L_1 \overset{u}{\underset{a}{\times}} L_2 = \bigcup_{y \in Ra} [(L_1 \cap y a^{-1}) \overset{u}{\underset{\{y\}}{\times}} L_2] =$$
$$= \{ (x_1^{m \oplus p}) \in M_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p} \mid (x_u^{m \oplus u}) \in L_1 \cap Da,$$
$$(x_1^{u-1}, y, x_{m+u}^{m \oplus p}) \in L_2 \text{ для некоторого } y \in x_u^{m \oplus u} a. \}. \tag{21}$$

Заметим, что $L_1 \overset{u}{\underset{K}{\times}} L_2 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда либо $L_1 = \emptyset$ $(p = 1)$, $L_2 = \emptyset$, либо $K \cap pr_u L_2 = \emptyset$, где

$$pr_u L_2 = \{ y \in M_{j_u} \mid (x_1^{u-1}, y, x_{u+1}^p) \in L_2 \text{ для некоторого}$$
$$(x_1^{u-1}, x_{u+1}^p) \in M_{j_1^{u-1} j_{u+1}^p} \}. \tag{22}$$

Можно считать, что при $m = 0$ формулы (20) и (21) принимают соответственно вид

$$\overset{u}{\underset{K}{\times}} L_2 = \{ (x_1^{u-1}, x_{u+1}^p) \in M_{j_1^{u-1} j_{u+1}^p} \mid (x_1^{u-1}, y, x_{u+1}^p) \in$$
$$\in L_2 \text{ при некотором } y \in K \}, \tag{20'}$$
$$\overset{u}{\underset{a}{\times}} L_2 = \bigcup_{y \in a} \overset{u}{\underset{\{y\}}{\times}} L_2 = \{ (x_1^{u-1}, x_{u+1}^p) \in M_{j_1^{u-1} j_{u+1}^p} \mid (x_1^{u-1}, y, x_{u+1}^p) \in$$
$$\in L_2 \text{ при некотором } y \in a \} \tag{21'}$$

Кроме того, сравнивая определения (10) и (21), получим

$$D(a\pi^u b) = Da \overset{u}{\underset{a}{\times}} Db. \tag{23}$$

Теорема 1. Поликатегория C_J является двусторонним идеалом поликатегории P_J, замкнутым относительно операций из Ω.

Доказательство. Покажем, что для всех непустых $a \in P^{j_u}_{i_1^m}$, $(L, K) \in C^k_{j_1^p}$, $(L_\ell, K_{t_\ell}) \in C^{t_\ell}_{i_{\ell 1} \dots i_{\ell m_\ell}}$ $(\ell = 1, \dots, r)$, $K_\ell \subseteq M_{j_\ell}$ $(\ell = 1, \dots, p)$, $b \in P^k_{j_1^p}$, $(L', K') \in C^{j_u}_{i_1^m}$, $K' \subseteq M_{j_u}$, $(L'_i, K'_i) \in C^{j}_{i_1^m}$ $(i = 1, \dots, n)$, $\omega \in \Omega_n$ $(n \geq 1)$, $p > 0$, $u \in \{1, \dots, p\}$

имеют место следующие равенства

$$a\pi^u(L, K) = \begin{cases} (Da \overset{u}{\underset{a}{\times}} L, K), & \text{если } Ra \cap pr_u L \neq \emptyset, \\ O^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{24}$$

$$(K_1)\pi^1 \dots (K_{t_1-1})\pi^{t_1-1}(L_1 K_{t_1})\pi^{t_1} \dots (L_r, K_{t_r})\pi^{t_r}(K_{t_r+1})\pi^{t_r+1} \dots (K_p)\pi^p b =$$
$$= \begin{cases} (L_1 \times \dots \times L_r, (K_1 \times \dots \times K_p)\, b), & \text{если } (K_1 \times \dots \times K_p) \cap Db \neq \emptyset, \\ O^k_{i_{11} \dots i_{r m_r}}, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{25}$$

$$(L' K')\pi^u(L, K) = \begin{cases} (L' \overset{u}{\underset{K'}{\times}} L, K), & \text{если } K' \cap pr_u L \neq \emptyset \\ O^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{26}$$

$$(K')\pi^u(L, K) = \begin{cases} (\overset{u}{\underset{K'}{\times}} L, K), & \text{если } K' \cap pr_u L \neq \emptyset, \\ O^k, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{27}$$

$$\sum_i^{\omega} (L'_i, K'_i) = \begin{cases} (\bigcap_{i=1}^{n} L'_i, \sum_i^{\omega} K_i), & \text{если } \bigcap_{i=1}^{n} L'_i \neq \emptyset, \\ O^j_{i_1^m}, & \text{в противном случае} \end{cases} \tag{28}$$

$$O^{\nu j}_{i_1^m} = (M_{i_1^m}, \{0^\nu_j\}). \tag{29}$$

Для доказательства равенства (24) берем произвольные $a \in P^{j_u}_{i_1^m}$, $(L, K) \in C^k_{j_1^p}$, $u \in \{1, \dots, p\}$, $(i_1^m; j_u)$, $(j_1^p, k) \in J$. Если $Ra \cap pr_u L = \emptyset$, то из (21) и (23) следует, что $D(a\pi^u(L, K)) = \emptyset$, т.е. $a\pi^u(L, K) = O^k_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^p}$. Так как в силу (9) будет

$$R(a\pi^u b) \subseteq Rb$$

для любых отношений $a \in P^j_{i_1^m}$, $b \in P^k_{j_1^p}$, то из $Ra \cap pr_u L \neq \emptyset$ по (23) следует, что

$$a\pi^u(L, K) \subseteq (Da \overset{u}{\underset{a}{\times}} L, K).$$

Пусть теперь элементы $x_1, \dots, x_{m\oplus p}, z$ находятся в отношении $(Da \overset{u}{\underset{a}{\times}} L, K)$, т.е. ввиду (I8) имеем

$$(x_1^{m\oplus p}) \in Da \overset{u}{\underset{a}{\times}} L, \quad z \in K.$$

Это означает согласно (2I), что

$(x_u^{m\oplus u}) \in Da, (x_1^{u-1}, y, x_{m+u}^{m\oplus p}) \in L$ для некоторого $y \in x_u^{m\oplus u} a$.

Значит, $z \in x_1^{u-1} y x_{m+u}^{m\oplus p}(L, K)$ и $y \in x_u^{m\oplus u} a$. Из (2) и (9) заключаем, что $z \in x_1^{m\oplus p}[a\pi^u(L, K)]$. Следовательно,

$$(Da \overset{u}{\underset{a}{\times}} L, K) \subseteq a\pi^u(L, K)$$

и равенство (24) проверено.

Равенства (26) и (27) являются частными случаями равенства (24) при $a = (L', K')$ и $a = (K')$ соответственно.

Чтобы доказать равенство (25), возьмем произвольные $(L_l, K_{t_l}) \in C^{j_l}_{i_{l1}\dots i_{lm_l}}$ $(l = 1, \dots, r)$, $b \in P^{k}_{jp_1}$, $K_l \subseteq M_{j_l}$ $(l = 1, \dots, p)$ и предположим, что $K_1 \times \dots \times K_p \cap Db \neq \emptyset$ и $z \in x_{11} \dots x_{rm_r}(L_1 \times \dots \times L_r, (K_1 \times \dots \times K_p)b)$. Следовательно, ввиду (I) и (I8) получим

$$(x_{11}, \dots, x_{rm_r}) \in L_1 \times \dots \times L_r, \quad z \in (K_1 \times \dots \times K_p)b.$$

Значит, $(x_{l1}, \dots, x_{lm_l}) \in L_l$ $(l = 1, \dots, r)$ и существуют такие $y_l \in K_l$ $(l = 1, \dots, p)$, что $z \in y_1^p b$. Поэтому ввиду (I8) имеем

$$y_{t_l} \in x_{l1} \dots x_{lm_l}(L_l, K_l) \ (l = 1, \dots, r), \ y_l \in K_l \ (l = 1, \dots, p),$$

$$z \in y_1^p b.$$

Отсюда, применив p раз определение (9) и равенство (2), получим

$$z \in x_{11} \dots x_{rm_r}[(K_1)\pi^1 \dots (K_{t_1-1})\pi^{t_1-1}(L_1, K_{t_1})\pi^{t_1} \dots (L_r, K_{t_r})\pi^{t_r} \dots (K_p)\pi^p b].$$

Все приведенные рассуждения проходят и в обратном порядке, поэтому равенство (25) проверено.

Равенства (24) и (25) показывают, что C_j является соответственно левым и правым идеалом (определение см. [5], стр. 35) поликатегории P_j. Значит, C_j есть двусторонний идеал (см. [5], стр. 35) в P_j

Для проверки равенства (28) возьмем произвольные $(L'_i, K'_i) \in$

$\in C^{j}_{m}$ $(i=1,\dots,n)$, $\omega\in\Omega_n$ $(n\geq 1)$. Тогда из (6) и (7) имеем, что $D(\sum^{\omega}(L'_i,K'_i))=\bigcap_{i=1}^{n}L'_i$. Согласно определениям (6) и (7) ясно также, что

$$\sum_i^{\omega}(L'_i,K'_i)\subseteq(\bigcap_{i=1}^{n}L'_i,\ \sum_i^{\omega}K'_i).$$

Поэтому, пусть $z\in x_1^m(\bigcap_{i=1}^{n}L'_i,\sum_i^{\omega}K'_i)$, т.е.

$$z=\sum_i^{\omega}z_i,\quad z_i\in K'_i\ (i=1,\dots,n),\ (x_1^m)\in\bigcap_{i=1}^{n}L'_i.$$

Значит, ввиду (18) имеем $z_i\in x_1^m(L'_i,K'_i)$. Наконец, ввиду (7) заключаем, что

$$z\in\sum_i^{\omega}x_1m(L'_i,K'_i)\underset{(6)}{=}x_1^m\sum_i^{\omega}(L'_i,K'_i).$$

Этим доказано, что

$$(\bigcap_{i=1}^{n}L'_i,\ \sum_i^{\omega}K_i)\subseteq\sum_i^{\omega}(L'_i,K'_i),$$

и тем самым завершена проверка равенства (28).

Равенство (29) вытекает непосредственно из определения (8).

Поликатегория C_J не является, вообще говоря, поликольцоидом, так как дистрибутивность не выполняется (все отношения, встречающиеся в контрапримере на стр. 8, являются цилиндрическими), но в силу равенств (28) и (29) поликатегория C_J замкнута относительно всех операций из Ω.

Теорема доказана.

Назовем тривиальными в P_J все идеалы, состоящие только из одноместных и пустых отношений, остальные назовем нетривиальными. Идеал, отличающийся от самой поликатегории, назовем собственным.

Опишем все тривиальные идеалы поликатегории $P_{\bar{J}}$, где $\bar{J}=\bigcup_{m=1}^{\tilde{\omega}}J^m$, т.е. полной поликатегории отношений над системой $(M_i;\ i\in J)$. Если $B=(J',\mathcal{J}',B^j_{im},\Omega,\pi)$ левый, (строгий) правый или (строгий) двусторонний идеал поликатегории $A=(J,\mathcal{J},A^j_{im},\Omega,\pi)$, то полиграф $(J',\mathcal{J}')$ является соответственно левым, (строгим) правым или (строгим) двусторонним идеалом полиграфа $(J,\mathcal{J})$ (см. [5], стр. 35).

По предложению 2.3 и следствию 2.10 из [5] левыми идеалами полного полиграфа $(J,\bar{J})$ являются все полиграфы $(J,J_2\cup\bar{J}(J_1))$ и только они, где

$$\bar{J}(J_1) = \bigcup_{k\in J_1} \bar{J}(k) = \bigcup_{k\in J_1} \bigcup_{m=0}^{\infty} (J^m \times \{k\})$$

и хотя бы одно из множеств $J_1 \subseteq J$ и $J_2 \subseteq J \setminus J_1$ является непустым.

При $(i_1^m; j) \in J(\bar{J}_1)$, $m>0$ положим

$$H^j_{i_1^m} = \{O^j_{i_1^m}\},$$

при $j \in J_1$ берем $H^j \subseteq P^j$ так, чтобы $O^j \in H^j$, а для $j \in J_2$ возьмем произвольное непустое подмножество $H^j \subseteq P^j$. Образуем набор

$$H_{J_2 \cup \bar{J}(J_1)} = (\bar{J}, J_2 \cup \bar{J}(J_1), H^j_{i_1^m}, \Omega, \pi).$$

<u>Предложение 3</u>. Тривиальными левыми идеалами поликатегории $P_{\bar{J}}$ являются наборы $H_{J_2\cup \bar{J}(J_1)}$, и только они, где $J_1 \subseteq J$, $J_2 \subseteq J$, $J_1 \cap J_2 = \phi$ и хотя бы одно из множеств J_1, J_2 не пусто.

<u>Доказательство</u>. Ясно, что все $H_{J_2\cup \bar{J}(J_1)}$ являются левыми идеалами, притом тривиальными (если правый сомножитель есть пустое отношение с индексами из $\bar{J}(J_1)$, то и произведение есть пустое отношение с индексами из $\bar{J}(J_1)$, а одноместные отношения не могут быть правыми сомножителями). Ясно также, что других тривиальных левых идеалов в $P_{\bar{J}}$ не существует, так как из $H^k_{j_1^p} = \{O^k_{j_1^p}\}$ при $p>0$ следует, что $O^k_{i_1^m} \in H^k_{i_1^m}$ для всякого $(i_1^m; k) \in \bar{J}(J_1)$. В самом деле, для любых $a_1 \in P^{j_1}_{i_1^m}$, $a_2 \in P^{j_2}, \ldots, a_p \in P^{j_p}$ имеем, что

$$a_1 \pi^1 (a_2 \pi (\ldots (a_p \pi^p O^k_{j_1^p}) \cdots) = O^k_{i_1^m}$$

принадлежит рассматриваемому левому идеалу. Но мы можем еще произвольным образом прибавить 0-местные отношения.

Предложение доказано.

<u>Замечание 3</u>. Мы будем писать C, W, P вместо $C_{\bar{J}}, W_{\bar{J}}, P_{\bar{J}}$, где $\bar{J} = \bigcup_{m=1}^{\infty} J^m$. Через

$$\mathcal{O}_{J_2\cup \bar{J}(J_1)} = (J, J_2 \cup \bar{J}(J_1), \{O^j_{i_1^m}\}, \Omega, \pi)$$

обозначим подполикольцоид пустых отношений из P. В частности, $\mathcal{O}$ состоит из всевозможных пустых отношений над системой $(M_i, i \in J)$.

По предложению 2.4 из [5] граф (J, J) является единственным тривиальным правым идеалом в $(J, \bar{J})$. По следствию 3.8 из [5] нетривиальными правыми идеалами в $(J, \bar{J})$ являются все полиграфы $(J, \mathfrak{X} \times J)$ и $(J, J \cup (\mathfrak{X} \times J))$ и только они, где $\mathfrak{X}$ подполугруппа свободной полугруппы $\bar{J}$ (см. [5], стр. 41).

Предложение 4. Кроме $\mathcal{O}_J, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}\times J}, \mathcal{O}_{J\cup(\mathfrak{X}\times J)}$ все наборы $R_J = (J, J, P^j, \pi)$ и $R_{J\cup(\mathfrak{X}\times J)} = (J, J\cup(\mathfrak{X}\times J), P^j, \{O^j_{i_1 m}\}\ (m>0), \pi)$, и только они, являются тривиальными правыми идеалами поликатегории P.

Доказательство. Ясно, что все эти наборы являются правыми идеалами в P. Действительно, если хотя бы одно отношение из отношений $a_1, \ldots, a_p$ фиксированного набора есть пустое отношение, то при любом $b \in P^k_{j_1 p}$ произведение $a_1\pi^1 \ldots a_p\pi^p b$ является пустым отношением этого же набора. Если все $a_1, \ldots, a_p$ есть одноместные отношения, то и $a_1\pi^1 \ldots a_p\pi^p b$ является одноместным отношением.

Наоборот, пусть $A = (J', J', A^j_{i_1 m}, \pi)$ - произвольный тривиальный правый идеал в P. Тогда совокупность индексов пустых отношений из A образует правый идеал полного полиграфа $(J, \bar{J})$, который, как отмечено выше, имеет один из следующих видов: (J, J), $(J, \mathfrak{X}\times J)$, $(J, J\cup(\mathfrak{X}\times J))$, где $\mathfrak{X}$ подполугруппа свободной полугруппы $\bar{J}$. Если в A нет непустых отношений, то A совпадает с одним из наборов $\mathcal{O}_J$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}\times J}$ или $\mathcal{O}_{J\cup(\mathfrak{X}\times J)}$. Пусть теперь существует $O^j \neq a \in A^j$, т.е. пусть a есть непустое подмножество из M_j. Для любого $O^k \neq b \in P^k$, т.е. непустого подмножества $b \in M_k$, образуем цилиндрическое отношение $(a, b) \in P^k_j$. Тогда произведение

$$a\pi^1(a, b) = b$$

принадлежит A как правому идеалу. Значит, $P^k \subseteq A^k$ для всех $k \in J$ и идеал A имеет вид R_J или $R_{J\cup(\mathfrak{X}\times J)}$.

Предложение доказано.

Легко проверить, что единственным двусторонним идеалом полного полиграфа $(J, \bar{J})$ является тривиальный идеал (J, J). Нетрудно также убедиться, что верно следующее предложение.

Предложение 5. Единственными тривиальными двусторонними идеалами поликатегории P являются наборы, $\mathcal{O}_J$, C, R_J и $R = R_{\bar{J}} = (J, \bar{J}, P^j, \{O^j_{i_1 m}\}\ (m>0), \pi)$.

3

Предложение 6. Собственный строгий правый идеал поликатегории $\mathcal{P}$ не содержит непустых одноместных отношений.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}=(J', \mathcal{J}', \mathcal{A}^j_{i_1^m}, \Omega, \pi)$ – строгий правый идеал поликатегории $\mathcal{P}$ и пусть $0_j \neq a \in \mathcal{A}_j$ при некотором $j \in J$. Для любого непустого отношения $b \in \mathcal{P}^k_{i_1^m}$ образуем отношение

$$a \times b = \{(x, x_1, \dots, x_m, y) \in M_{j i_1^m k} \mid x \in a, (x_1^m, y) \in b\} \in \mathcal{P}^k_{j i_1^m},$$

называемое прямым произведением отношений a (одноместного) и b (любого). Тогда произведение

$$a\pi^1(a \times b) = b$$

принадлежит $\mathcal{A}$ как строгому правому идеалу. Значит, $\mathcal{A}=\mathcal{P}$, т.е. $\mathcal{A}$ не является собственным.

Следствие 2. Тривиальными строгими правыми идеалами поликатегории $\mathcal{P}$ являются $\mathcal{O}$, все наборы $\mathcal{O}_{\mathcal{X}\times J}=(J, \mathcal{X}\times J, \{0^j_{i_1^m}\}, \Omega, \pi)$, и только они, где $\mathcal{X}$ двусторонний идеал свободной полугруппы $\bar{J}$.

Доказательство. По предыдущему предложению произвольный строгий правый идеал $\mathcal{A}=(J', J', \mathcal{A}^j_{i_1^m}, \Omega, \pi)$ поликатегории $\mathcal{P}$ не содержит непустых одноместных отношений. Поэтому $\mathcal{A}^j_{i_1^m}=\{0^j_{i_1^m}\}$ для всех $(i_1^m, j) \in \mathcal{J}'$. Понятно, что $(J', \mathcal{J}')$ является строгим правым идеалом полного полиграфа и поэтому по следствию 3.5 из [5] полиграф $(J', \mathcal{J}')$ совпадает с $(J, \bar{J})$ или имеет вид $(J, \mathcal{X}\times J)$, где $\mathcal{X}$ двусторонний идеал свободной полугруппы $\bar{J}$.

Следствие 3. Единственным строгим двусторонним идеалом поликатегории $\mathcal{P}$ является $\mathcal{O}$.

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{O}$ является строгим двусторонним идеалом, так как произведение является пустым отношением, если один из сомножителей есть пустое отношение. С другой стороны совокупность индексов всех пустых отношений идеала является строгим двусторонним идеалом полного полиграфа, но $(J, \bar{J})$ не имеет собственных строгих двусторонних идеалов. По предложению 6 собственный строгий правый (тем более строгий двусторонний) идеал не содержит непустых одноместных отношений. А из существования в идеале непустого более чем одноместного отношения вытекает существование в нем непустого одноместного отношения.

Следствие доказано.

Пусть выбран произвольный элемент $k \in J$ и взято любое непустое подмножество $K \subseteq M_k$. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
&\bar{J}(k) = \bigcup_{m=0}^{\infty} J^m \times \{k\},\\
&C^k_{i_1^m}(k,K) = \{ 0^k_{i_1^m}, (L,K) \mid \phi \neq L \subseteq M_{i_1^m} \} \ (m>0),\\
&C^k(k,K) = \{0^k, (K)\}\\
&C(k,K) = (J, \bar{J}(k), C^k_{i_1^m}(k,K), \Omega, \pi).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Теорема 2. Все поликатегории $C(k,K)$, и только они, являются минимальными нетривиальными левыми идеалами поликатегории P.

Доказательство. В силу равенства (24) все наборы $C(k,K)$ являются левыми идеалами поликатегории P, притом нетривиальными.

Пусть $A = (J', \bar{J}', A^j_{i_1^m}, \pi)$ - произвольный нетривиальный левый идеал поликатегории P, содержащийся в $C(k,K)$. В силу нетривиальности существует $m \geq 1$ такое, что $(L', K) \in A^k_{i_1^m}$ $(L' \neq \phi)$. Пусть взято произвольное отношение (L,K) из $C^k_{j_1^p}$ при $(j_1^p) \in J^p$. Поскольку $L' \neq \phi$, то существует $(x_1^m) \in L'$. Образуем цилиндрические отношения $(L, x_1), (x_2), \ldots, (x_m)$. (Здесь и в дальнейшем будем пользоваться короткими обозначениями (L,x) и (x) вместо $(L,\{x\})$ и $(\{x\})$ соответственно). Тогда произведение

$$(L, x_1)\pi^1(x_2)\pi \cdots (x_m)\pi^m(L', K) \underset{(25)}{=} (L, K)$$

принадлежит вместе с (L', K) к левому идеалу A. Значит, $C(k,K) \subseteq A$. По выбору идеала A имеем, что $A \subseteq C(k,K)$. Следовательно, $A = C(k,K)$ и $C(k,K)$ является минимальным нетривиальным левым идеалом в P.

Остается доказать, что других минимальных левых идеалов в P не существует. Предположим, что $A = (J', \bar{J}', A^j_{i_1^m}, \Omega, \pi)$ является минимальным нетривиальным левым идеалом в P. В силу нетривиальности идеала A для некоторого $(i_1^m, k) \in \bar{J}'$ $(m>0)$ существует $0^k_{i_1^m} \neq b \in A^k_{i_1^m}$. Образуем цилиндрические отношения $(M_{i_1}, x_1), \ldots, (M_{i_m}, x_m)$, где $(x_1^m) \in Db$ $(\neq \phi)$. Произведение

$$(M_{i_1}, x_1)\pi^1 \cdots (M_{i_m}, x_m)\pi^m b = (M_{i_1^m}, x_1^m b)$$

принадлежит вместе с b левому идеалу A (напомним, что $x_1^m b$ является множеством). Образуем набор $C(k, x_1^m b)$. Отношение

$(M_{i_1^m}, x_1^m b)$ принадлежит к $A^k_{i_1^m} \cap C^k_{i_1^m}(k, x_1^m b)$. Значит, набор $A \cap C(k, x_1^m b)$ как пересечение левых идеалов является левым идеалом поликатегории P, притом нетривиальным. Поэтому из минимальности идеалов A и $C(k, x_1^m b)$ вытекает, что $A = C(k, x_1^m b)$.

Теорема доказана.

Введем обозначения

$$B^j_{i_1^m} = C^j_{i_1^m} \cap W^j_{i_1^m}, \quad B_J = (J, \mathcal{J}, B^j_{i_1^m}, \Omega, \pi), \tag{31}$$

$$C'^j_{i_1^m} = C^j_{i_1^m} \cap \mathcal{F}^j_{i_1^m}, \quad C'_J = (J, \mathcal{J}, C'^j_{i_1^m}, \Omega, \pi). \tag{32}$$

По построению $C'^j_{i_1^m}$ ($B^j_{i_1^m}$) состоит из всех полных (частичных) константных функций из $M_{i_1} \times \cdots \times M_{i_m}$ в M_j. Далее введем еще обозначения:

$$\begin{aligned} &B^k_{i_1^m}(k, y) = \{O^k_{i_1^m}, (L, y) \mid \phi \neq L \subseteq M_{i_1^m}\} \ (m > 0), \\ &B^k(k, y) = \{O^k_{i_1^m}, (y)\}, \\ &B(k, y) = (J, \bar{J}(k), B^k_{i_1^m}(k, y), \Omega, \pi), \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} &C'^k_{i_1^m}(k, y) = \{(M_{i_1^m}, y)\}, \quad C'^k(k, y) = \{(y)\}, \\ &C'(k, y) = (J, \bar{J}(k), C'^k_{i_1^m}(k, y), \Omega, \pi). \end{aligned} \tag{34}$$

Следствие 4. Все подполикатегории $B(k, y)$ ($C'(k, y)$), и только они, являются минимальными нетривиальными левыми идеалами поликатегории $W(\mathcal{Y})$.

Утверждение следует из доказательства теоремы 2 в силу того, что произведение (полных) однозначных отношений является (полным) однозначным отношением и того, что используемые в доказательстве вспомогательные отношения (M_{i_ℓ}, x_ℓ), (x_ℓ) являются полными и однозначными.

Теорема 3. Поликатегория всех цилиндрических отношений является наименьшим нетривиальным двусторонним идеалом поликатегории P.

Доказательство. По теореме I C является двусторонним идеалом поликатегории P. Покажем, что C содержится в произвольном нетривиальном двустороннем идеале $A = (J', \mathcal{J}', A^j_{i_1^m}, \Omega, \pi)$ поликатегории P.

В силу нетривиальности для некоторого $m>0$ существует непустое $b \in A^{j}_{i_1^m}$ $((i_1^m; j) \in J')$. Как и в предыдущей теореме получим, что

$$C(k, x_1^m b) \subseteq A$$

при некотором $(x_1^m) \in Db$. Пусть $(L, K) \in C^{k}_{j\rho_1}$, $(j\rho_1; k) \in \bar{J}$ взяты произвольно. Мы должны доказать, что $(L, K) \in A^{k}_{j\rho_1}$. Поскольку $C(k, x_1^m b) \subseteq A$, то $(L, x_1^m b) \in A^{k}_{j\rho_1}$. Произведение

$$(L, x_1^m b)\pi^1(M_j, K) \underset{(25)}{=} (L \overset{u}{\underset{x_1^m b}{\times}} M_j, K) = (L, K)$$

принадлежит вместе с $(L, x_1^m b)$ правому идеалу A. Значит, $C^{k}_{j\rho_1} \subseteq A^{k}_{j\rho_1}$ при любом $(j\rho_1; k) \in \bar{J}$, т.е. $C \subseteq A$.

Следствие 5. Подполикольцоид частичных (полных) константных функций $B(C')$ является наименьшим нетривиальным двусторонним идеалом в $W(\mathcal{f})$.

Доказательство. Так как все использованные в доказательствах теорем 2 и 3 вспомогательные отношения принадлежат поликольцоиду $\mathcal{f}$, то доказательство теоремы 3 проходит и в этих случаях.

Следствие доказано.

§ 4. Об идеалах

Напомним, что весом [5] системы $(M_i; i \in J)$ называется наименьшее кардинальное число $w(M)$ такое, что $|M_i| < w(M)$ для всякого $i \in J$. Пусть ν - произвольное, λ - произвольное бесконечное кардинальное число. Введем обозначения

$$
\begin{aligned}
{}^{\nu}_{\lambda}P^{j}_{i_1^m} &= \{a \in P^{j}_{i_1^m} \mid |Da| < \lambda, |Ra| < \nu\}, \\
{}^{\nu}_{\lambda}P_J &= (J, J, {}^{\nu}_{\lambda}P^{j}_{i_1^m}, \Omega, \pi).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Если $\lambda \geqslant w = w(M)$, то вместо ${}^{\nu}_{\lambda}P^{j}_{i_1^m}$ $({}^{\nu}_{\lambda}P_J)$ будем писать просто ${}^{\nu}P^{j}_{i_1^m}$ $({}^{\nu}P_J)$. Далее введем обозначения

$$ {}^{\nu}_{\lambda}W_J = {}^{\nu}_{\lambda}P_J \cap W_J, \quad {}^{\nu}W_J = {}^{\nu}P_J \cap W_J, $$

$$ {}^{\nu}\mathcal{f}_J = {}^{\nu}P_J \cap \mathcal{f}_J $$

Здесь мы предположим, что $\nu < \lambda$, так как иначе введение ν не накладывает никаких ограничений.

Теорема 4. Если ν - произвольное, а λ - произвольное бесконечное кардинальное число, то все ${}^{\nu}_{\lambda}P_J$ являются подкатегориями, а все ${}^{\nu}P_J$ левыми идеалами поликатегории P_J. Все ${}^{\nu}_{\lambda}P_J$ являются правыми идеалами в ${}^{\nu}P_J$.

Доказательство. Пусть $a \in P^{j_u}_{i^m_1}$, $b \in {}^{\nu}P^{k}_{j^p_1}$, $1 \le u \le p$, $(i^m_1; j_u)$, $(j^p_1; k) \in J$ взяты произвольно. По определениям (3) и (9) всегда имеет место включение

$$R(a\pi^u b) \subseteq Rb.$$

Поэтому из $|Rb| < \nu$ вытекает, что $|R(a\pi^u b)| \le |Rb| < \nu$ и $a\pi^u b$ принадлежит к $P^{k}_{j^{u-1}_1 i^m_1 j^p_{u+1}}$. Значит, ${}^{\nu}P_J$ является левым идеалом в P_J.

Пусть $a \in {}^{\nu}P^{k}_{j^p_1}$, $b_t \in {}^{\nu}_{\lambda}P^{j_t}_{i_{t1}\dots i_{tm_t}}$ $(t=1,\dots,p)$ взяты произвольно. Применив p раз формулу (10) получим, что

$$D(b_1\pi^1\dots b_p\pi^p a) \subseteq Db_1\times\dots\times Db_p. \qquad (36)$$

В силу бесконечности числа λ получим

$$|D(b_1\pi^1\dots b_p\pi^p a)| \le |Db_1\times\dots\times Db_p| = |Db_1|\cdots|Db_p| < \lambda^p = \lambda.$$

Как и выше заключаем, что $|R(b_1\pi^1\dots b_p\pi^p a)| \le |Ra| < \nu$. Значит, $b_1\pi^1\dots b_p\pi^p a \in {}^{\nu}_{\lambda}P^{k}_{i_{11}\dots i_{pm_p}}$ и ${}^{\nu}_{\lambda}P_J$ является правым идеалом в ${}^{\nu}P_J$.

Пусть $a \in {}^{\nu}_{\lambda}P^{j_u}_{i^m_1}$, $b \in {}^{\nu}_{\lambda}P^{k}_{j^p_1}$, $1 \le u \le p$ взяты произвольно. Тогда по (10) в силу бесконечности числа λ получим

$$|D(a\pi^u b)| \le |Da||Db| < \lambda\cdot\lambda = \lambda,$$

т.е. $a\pi^u b \in {}^{\nu}_{\lambda}P_{j^{u-1}_1 i^m_1 j^p_{u+1}}$ и ${}^{\nu}_{\lambda}P_J$ является подполикатегорией в P_J.

Теорема доказана.

В силу введенных обозначений получим следующее утверждение.

Следствие 6. Если ν - произвольное, λ - произвольное бесконечное кардинальное число, то все ${}^{\nu}_{\lambda}W_J$ являются подкатегориями, а все ${}^{\nu}W_J$ левыми идеалами поликатегории W_J. Все ${}^{\nu}_{\lambda}W_J$ являются правыми идеалами поликатегории ${}^{\nu}W_J$. Все ${}^{\nu}\mathcal{F}_J$ являются левыми идеалами поликатегории $\mathcal{F}_J$.

Для всякого непустого множества $K \subseteq M_\kappa$ такого, что

$|K|<\nu$, введем обозначение

$$^{\nu}_{\lambda}C(\kappa, K) = {}^{\nu}_{\lambda}P \cap C(\kappa, K).$$

Введем также обозначение

$$_{\lambda}B(\kappa, y) = {}^{\nu}_{\lambda}W \cap B(\kappa, y).$$

Следствие 7. Все поликатегории $^{\nu}_{\lambda}C(\kappa, K)$, $({}_{\lambda}B(\kappa, y))$ и только они, являются минимальными нетривиальными левыми идеалами поликатегории $^{\nu}_{\lambda}P$ $({}^{\nu}_{\lambda}W)$.

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 2, только вместо $(M_{i_1}, x_1), \ldots, (M_{i_m}, x_m)$ можно взять, например, $(x_1, x_1), \ldots, (x_m, x_m)$ и получить отношение $(x_1^m, x_1^m b)$ в качестве общего элемента левых идеалов A и $^{\nu}_{\lambda}C(\kappa, x_1^m b)$ $(A$ и $_{\lambda}B(\kappa, x_1^m b))$.

Следствие 8. Поликатегория $^{\nu}_{\lambda}C$ $({}^{\nu}_{\lambda}B)$ является наименьшим нетривиальным двусторонним идеалом поликатегории $^{\nu}_{\lambda}P$ $({}^{\nu}_{\lambda}W)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3, только (M_j, K) (соответственно (M_j, y)) надо заменить на $(x_1^m b, K)$ (соответственно $(x_1^m b, y)$).

Теорема 5. Если $\nu = 2$ или бесконечно, то все $^{\nu}_{\lambda}W_J$ являются правыми идеалами, а все $^{\nu}W_J$ двусторонними идеалами поликольцоида W_J. Все $^{\nu}\mathcal{P}_J$ являются двусторонними идеалами поликольцоида $\mathcal{P}_J$.

Доказательство. Если $\omega \in \Omega_n$ $(n \geq 1)$, $a_1, \ldots, a_n \in P^{j}_{i_1^m}$, $(i_1^m; j) \in J$ произвольны, то из определений (6) и (7) и из однозначности операции ω как $(n+1)$-местного отношения вытекает неравенство

$$|R(\sum_i^{\omega} a_i)| \leq |Ra_1| \cdots |Ra_n|. \tag{37}$$

Поэтому из $a_1, \ldots, a_n \in {}^{\nu}P^{j}_{i_1^m}$ в силу бесконечности числа ν следует, что

$$|R(\sum_i^{\omega} a_i)| \leq |Ra_1| \cdots |Ra_n| < \nu^n = \nu,$$

т.е. $\sum_i^{\omega} a_i \in {}^{\nu}P^{j}_{i_1^m}$. Так как $D(\sum_i^{\omega} a_i) = \bigcap_{i=1}^{n} Da_i$, то все $^{\nu}_{\lambda}P^{j}_{i_1^m}$ $((i_1^m; j) \in J)$ при бесконечном ν замкнуты относительно операций из Ω.

При $\nu = 2$ имеем, что

$$|R(\sum_i^{\omega} a_i)| \leq |Ra_1| \dots |Ra_n| = 1 \dots 1 = 1.$$

Следовательно, ${}^{r}_{\lambda}P^{j}_{i_1^m}$ при $r = 2$ или бесконечном r является Ω - подалгеброй в $P^j_{i_1^m}$.

Для всех a из W выполняется неравенство $|Ra| \leq |Da|$ Поэтому аналогично предложению 3 из [5] доказывается, что

$$|R(b_1\pi^1 \dots b_p\pi^p a)| \leq |Rb_1| \cdots |Rb_p| \tag{38}$$

для всяких $b_t \in P^j{}_{i_{t1} \dots i_{tm_t}}$ $(t = 1, \dots, p)$, $a \in W^k_{j p_1}$. Если все $b_1, \dots, b_p$ принадлежат ${}^{r}_{\lambda}W_j$, то в силу бесконечности числа r получим, что

$$|R(b_1\pi^1 \dots b_p\pi^p a)| \leq |Rb_1| \cdots |Rb_p| < r^p = r,$$

т.е. $b_1\pi^1 \dots b_p\pi^p a \in {}^{r}W_j$, если только $a \in W_j$. Аналогично при $r = 2$ получим, что $|R(b_1\pi^1 \dots b_p\pi^p a)| \leq 1^p = 1$ и $b_1\pi^1 \dots b_p\pi^p a \in {}^{r}W_j$.

В силу (36) из $b_1, \dots, b_p \in {}^{r}_{\lambda}W_j$ вытекает, что $b_1\pi^1 \dots b_p\pi^p a \in {}^{r}_{\lambda}W_j$ при $a \in W_j$. Значит, ${}^{r}_{\lambda}W_j$ является правым идеалом в W_j, а ${}^{r}W_j({}^{r}\mathcal{G}_j)$ является двусторонним идеалом поликольцоида $W_j(\mathcal{G}_j)$.

Теорема доказана

Введем обозначения

$$\begin{gathered} P'^{j}_{i_1^m} = \{a \in P^j_{i_1^m} \mid Da \neq M_{i_1^m}\} \ (m>0), \ P'^{j} = \{0^j\}, \\ P'_j = (J, j, P'^{j}_{i_1^m}, \Omega, \pi), \\ W'^{j}_{i_1^m} = W^j_{i_1^m} \setminus \mathcal{G}^j_{i_1^m}, \quad W'_j = (J, j, W'^{j}_{i_1^m}, \Omega, \pi). \end{gathered} \tag{39}$$

<u>Теорема 6</u>. Поликатегория ${}^{r}P'_j({}^{r}W'_j)$ является строгим правым идеалом поликатегории ${}^{r}P_j({}^{r}W_j)$. При $r = 2$ или бесконечном r поликольцоид ${}^{r}W'_j$ является строгим правым идеалом поликольцоида ${}^{r}W_j$.

<u>Доказательство</u>. По формуле (10) ясно, что из $Da \neq M_{i_1^m}$ вытекает, что $D(a\pi^u b) \neq M_{j_1^{u-1} i_1^m j_{u+1}^{\ell}}$ для любых $a, b \in P_j$, для которых произведение определено. Поэтому ${}^{r}P'_j({}^{r}W'_j)$ является строгим правым идеалом поликатегории ${}^{r}P_j({}^{r}W_j)$.

Если $r = 2$ или r бесконечно, то ${}^{r}W_j$ является поликольцоидом. Каждое ${}^{r}W'^{j}_{i_1^m}$ замкнуто относительно всех $\omega \in \Omega_n (n \geq 1)$. Действительно,

$$D(\sum_i^{\omega} a_i) = \bigcap_{i=1}^{n} Da_i \neq M_{i_1^m},$$

как только хотя бы одно из $Da_i \neq M_{i_1^m}$. Значит, все ${}^{r}W'^{j}_{i_1^m}$ суть

Ω-подалгебры в ${}^{\sim}W^{j}_{i_1^m}\ ((i_1^m; j) \in \mathcal{J})$ и ${}^{\sim}W'_{\mathcal{J}}$ является строгим правым идеалом поликольцоида ${}^{\sim}W_{\mathcal{J}}$.

Теорема доказана.

Предложение 6. Собственный строгий правый идеал поликатегории ${}^{\sim}_{\lambda}P({}^{\sim}_{\lambda}W)$ не содержит непустых одноместных отношений.

Доказательство совпадает с доказательством предложения 5.

Теорема 7. Поликатегория ${}^{\sim}_{\lambda}P({}^{\sim}_{\lambda}W)$ не содержит собственных строгих двусторонних идеалов кроме O.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} = (\mathcal{I}', \mathcal{J}', A^{j}_{i_1^m}, \Omega, \pi)$ нетривиальный строгий двусторонний идеал поликатегории ${}^{\sim}_{\lambda}P({}^{\sim}_{\lambda}W)$. Тогда $\mathcal{A}$ является и нетривиальным двусторонним идеалом и по следствию 8 содержит наименьший двусторонний идеал ${}^{\sim}_{\lambda}C({}^{*}_{\lambda}B)$. Поэтому он содержит и непустые одноместные отношения и по предложению 6 не является собственным.

Теорема доказана.

Литература

1. Вагнер В. В., Теория отношений и алгебра частичных отображений. В сб. "Теория полугрупп и ее приложения". Вып. I, Саратов, 1965, 3-178.
2. Глускин Л. М., Суперпозиция многоместных функций. Publs. Math., 1970, 17, 1-4, 349-378.
3. Зарецкий К. А., Абстрактная характеристика полугруппы всех бинарных отношений. Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, 183, 231-263.
4. Кон П. М., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
5. Реди Э., Односторонние идеалы симметрических поликатегорий. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 31-61.
6. Реди Э., О симметрических поликольцоидах. Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 62-99.

Поступило
17 I 1974

MITMEKOHALISTE SEOSTE POLÜKATEGOORIAST JA OSALISTE MITMEKOHALISTE FUNKTSIOONIDE POLÜRINGOIDIST

E.Redi

R e s ü m e e

Töös on leitud mõningad ideaalid mitmekohaliste seoste polükategoorias ning osaliste mitmekohaliste funktsioonide polüringoidis. Nende hulgas on minimaalsed mittetriviaalsed vasakpoolsed ideaalid ja vähim mittetriviaalne kahepoolne ideaal. Viimaseks osutus mitmekohaliste seoste polükategoorias kõigi silindriliste seoste alampolükategooria ning osaliste mitmekohaliste funktsioonide polüringoidis kõigi osaliste konstantsete funktsioonide alampolüringoid.

ÜBER DER POLYKATEGORIE DER MEHRSTELLIGEN BEZIEHUNGEN UND ÜBER DEM POLYRINGOIDE DER TEILIGEN MEHRSTELLIGEN FUNKTIONEN

E. Redi

Z u s a m m e n f a s s u n g

In der Arbeit sind einige Ideale der Polykategorie der mehrstelligen Beziehungen und des Polyringoide der teiligen mehrstelligen Funktionen beschrieben. Unter ihnen sind auch die minimalen nichttrivialen Linksideale und das kleinste nichttriviale zweiseitige Ideal. Nämlich, in der Polykategorie der mehrstelligen Beziehungen bilden alle zylindrische Beziehungen und im Polyringoide der teiligen mehrstelligen Funktionen bilden alle teiligen konstanten Funktionen das kleinste zweiseitige Ideal.

ОПРЕДЕЛЯЕМОСТЬ СВОБОДНОГО ПОЛИГОНА ЕГО ПОЛУГРУППОЙ ЭНДОМОРФИЗМОВ

В. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

Настоящая статья продолжает изучение полугруппы эндоморфизмов свободных полигонов, начатое в работе автора [3]. Ввиду этого, предполагается знакомство читателя с определениями, обозначениями и результатами упомянутой работы. Через $\mathrm{End}\,(S,\xi)$ обозначена полугруппа эндоморфизмов свободного S-полигона с ξ образующими ($\xi \neq \phi$ - произвольная мощность) над моноидом S. Основным результатом данной статьи является доказательство того, что полугруппы $\mathrm{End}\,(S,\xi)$ и $\mathrm{End}\,(T,\eta)$ при $\xi,\eta \neq 1$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\xi=\eta$ и моноиды S и T изоморфны. Этот результат допускает и более сильную формулировку (теорема 5). Заметим, что аналогичный результат для полигонов с нулем доказан в работе [1], однако в предположении, что исходные моноиды не содержат нетривиальные идемпотенты. В заключение данной статьи приведен общий вид изоморфного отображения полугруппы $\mathrm{End}\,(S,\xi)$ на полугруппу $\mathrm{End}\,(T,\eta)$. Эти результаты являются аналогами некоторых результатов Л.М. Глускина [2]. Однако, методы исследования в данной работе и в [2] различны: мы рассматриваем матрицы над моноидами, а в [2] берутся матрицы над телами.

Пусть S - моноид, т.е. полугруппа с единицей 1. Напомним, что полугруппа $\mathrm{End}\,(S,\xi)$ изоморфна ([3], теорема 1) матричной полугруппе S_ξ, элементы которой суть всевозможные матрицы порядка ξ, в каждом столбце которых стоит ровно один элемент из S, а на остальных местах - символ 0. Правило умножения матриц задается обычным образом, полагая

$$0+s=s+0=s, \quad s0=0s=0$$

для каждого $s\in S$. То обстоятельство, что элемент $a\in S$ стоит на месте (i,j) в матрице $X=(x_{ij})$ из S_ξ, будем обозначать $a=x_{ij}$. Как и в [3], I - вполне упорядоченное множество индексов строк (или столбцов) матриц из S_ξ

и ξ – его мощность, т.е. $|I| = \xi$. Через S_ξ^η $(1 \leq \eta \leq \xi)$ обозначена совокупность всех матриц из S_ξ, содержащих элементы из S не более, чем в η строках. Через $S_\xi(J)$, где $\phi \neq J \leq I$, обозначена совокупность всех матриц из S_ξ, содержащих элементы из S только в строках с индексами из J. Для каждого J $(\phi \neq J \leq I)$ зафиксируем матрицу $E_J = (e_{ij})$ из $S_\xi(J)$, определенную следующим образом: для каждого $j \in I$

$$e_{ij} = \begin{cases} 1_s & \text{и} \quad i = j, \text{если } j \in J \\ 1_s & \text{и} \quad i = j_0, \text{если } j \notin J \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{0}$$

где j_0 – минимальный элемент в J. Ясно, что при $J = I$ матрица $E_I = E$ есть единица полугруппы S_ξ, а в случае $J = \{i\}$, где $i \in I$, матрица E_i, такова, что все элементы в i-ой ее строке равны $1_s \in S$. В работе [3] показано, что для произвольного J $(\phi \neq J \subseteq I)$ множество $S_\xi(J)$ есть правый идеал в S_ξ.

<u>Лемма 1</u> Множество $S_\xi(J)$ $(\phi \neq J \subseteq I)$ является главным правым идеалом в S_ξ, порожденным идемпотентом E_J.

<u>Доказательство</u>. Нам, очевидно, достаточно доказать, что для любой матрицы $X = (x_{ij})$ из $S_\xi(J)$ выполняется $E_J X = X$. Пусть $E_J X = Y = (y_{ij})$. Тогда для каждого $j \in J$ и $y_{ij} = 0$ будет

$$y_{ij} = e_{ik} x_{kj}$$

при некоторых $i, k \in I$. Так как $X \in S_\xi(J)$ и $x_{kj} \neq 0$, то $k \in J$ и, ввиду (0), $i = k$ и $e_{ik} = 1_s$, т.е. $y_{ij} = x_{ij}$. Поскольку X и Y имеют в j-ом столбце только один ненулевой элемент, то $Y = X$ и лемма доказана.

Двусторонний идеал P полугруппы T назовем разложимым, если его можно представить в виде объединения попарно непересекающихся правых идеалов P_j $(j \in J, |J| > 1)$ полугруппы T. В этом случае обозначаем $P = \dot{\bigcup}_{j \in J} P_j$.

<u>Теорема 1</u>. Множество S_ξ^1 является разложимым двусторонним идеалом в полугруппе S_ξ $(\xi \neq 1)$ и $S_\xi^1 = \dot{\bigcup}_{i \in I} S_\xi(i) = \dot{\bigcup}_{i \in I} (E_i \cdot S_\xi)$.

<u>Доказательство</u>. В работе [3] показано, что S_ξ^1 есть двусторонний идеал в S_ξ. По определению идеала S_ξ^1 имеем

$S_\xi^1 = \bigcup_{i\in I} S_\xi(i)$, а ввиду $S_\xi(i) \cap S_\xi(j) = \phi$ при $i \neq j$, получаем $S_\xi^1 = \dot{\bigcup}_{i\in I} S_\xi(i)$. Для каждого $i \in I$, по лемме 1, имеем $S_\xi(i) = E_i \cdot S_\xi$, следовательно, $S_\xi = \dot{\bigcup}_{i\in I} S_\xi(i) = \dot{\bigcup}_{i\in I} (E_i \cdot S_\xi)$.

<u>Лемма 2.</u> Если в моноиде $\mathcal{U}$ для двустороннего идеала P имеем

$$P = \dot{\bigcup}_{i\in I} (p_i \mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{j\in J} (q_j \mathcal{U}),$$

где $\{u_i\}_{i\in I}$, $\{q_j\}_{j\in J}$ $(|I|, |J| > 1)$ системы элементов из $\mathcal{U}$, то существует взаимно-однозначное соответствие π между элементами множеств I и J такое, что $p_i \mathcal{U} = q_{\pi(i)} \mathcal{U}$ для каждого $i \in I$.

<u>Доказательство.</u> Для произвольного $i \in I$, ввиду того, что $\mathcal{U}$ - моноид, имеем $p_i \in p_i \mathcal{U}$ и, следовательно, $p_i \in \bigcup_{i\in J} (p_i \mathcal{U}) = \dot{\bigcup}_{j\in J} (q_j \mathcal{U})$. Поэтому существует такой $j \in J$, что $p_i \in q_j \mathcal{U}$. Этот элемент j обозначим через $\pi(i)$. Ясно, что этим определено однозначное отображение $\pi : I \to J$, такое, что $\pi : i \to \pi(i)$ для каждого $i \in I$. Аналогично, для каждого $j \in J$ существует ровно один $i \in I$, такой, что $q_j \in p_i \mathcal{U}$. Этот элемент i обозначим $\pi'(j)$ и этим определено отображение $\pi' : J \to I$. Тогда для произвольного $i \in I$ имеем

$$p_i \mathcal{U} \subseteq q_{\pi(i)} \mathcal{U} \subseteq p_{\pi'(\pi(i))} \mathcal{U}.$$

Если бы $\pi'(\pi(i)) \neq i$, то $p_i \mathcal{U} \cap p_{\pi'(\pi(i))} \mathcal{U} \neq \phi$, что противоречит первому разложению идеала P. Поэтому $\pi'(\pi(i)) = i$ и тогда $p_i \mathcal{U} \subseteq q_{\pi(i)} \mathcal{U} \subseteq p_i \mathcal{U}$, т.е. $p_i \mathcal{U} = q_{\pi(i)} \mathcal{U}$. Аналогично для каждого $j \in J$ выполняется

$$q_j \mathcal{U} \subseteq p_{\pi'(j)} \mathcal{U} \subseteq q_{\pi(\pi'(j))} \mathcal{U},$$

т.е. $\pi(\pi'(j)) = j$ и $q_j \mathcal{U} = p_{\pi'(j)} \mathcal{U}$. Отсюда следует, что π - взаимно-однозначное отображение и $p_i \mathcal{U} = q_{\pi(i)} \mathcal{U}$ для каждого $i \in I$. Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, в частности, что разложение идеала $S_\xi^1 = \dot{\bigcup}_{i\in I} (E_i \cdot S_\xi)$ единственно. Покажем, что S_ξ^1 является наибольшим разложимым двусторонним идеалом в S_ξ. Для этого вначале докажем ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $\mathfrak{B}$ - некоторое множество матриц из S_ξ. Совокупность $[\mathfrak{B}]_i$ всех элементов из S, встречающихся в i-ой строке $(i \in I)$ матриц из $\mathfrak{B}$ назовем i-ым основанием множества $\mathfrak{B}$.

Лемма 3. Пусть $\mathfrak{V}$ – правый идеал в S_ξ. Тогда из $[\mathfrak{V}]_i \neq \phi$ $(i \in I)$ следует, что $[\mathfrak{V}]_i$ является правым идеалом в S.

Доказательство. Пусть $b \in [\mathfrak{V}]_i$, т.е. найдется матрица $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{V}$, так что $b = b_{ij}$ для некоторого $j \in I$. Для произвольного $s \in S$ существует матрица $X = (x_{ij}) \in S_\xi$ такая, что $s = x_{jj}$. Тогда $C = (c_{ij}) = BX \in \mathfrak{V}$ и

$$c_{ij} = b_{ij} \cdot x_{jj} = bs,$$

т.е. $bs \in [\mathfrak{V}]_i$. Лемма доказана.

Лемма 4. Пусть матрица $B = (b_{ij}) \in S_\xi$ идемпотентна, $\mathfrak{V} = B \cdot S_\xi$ и $[\mathfrak{V}]_i \neq \phi$. Тогда элемент $b = b_{ii} \in S$ идемпотентен и $[\mathfrak{V}]_i = bS$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{V} = B \cdot S_\xi$ и s – произвольный элемент из $[\mathfrak{V}]_i$. Это значит, что существует матрица $Y = (y_{ij}) = BX \in \mathfrak{V}$ ($X = (x_{ij})$ – некоторая матрица из S_ξ), такая, что

$$s = y_{ij} = b_{ik} x_{kj}$$

для некоторых $j, k \in J$. В i-ом столбце матрицы $B \in S_\xi$ находится единственный элемент из S, который мы обозначим $b = b_{li}$ $(l \in J)$. Тогда, ввиду $B^2 = B$, элемент $b_{lk} = b_{li} \cdot b_{ik}$ принадлежит S и также как и b_{ik} стоит в k-ом столбце матрицы B, следовательно, $l = i$ и $b = b_{ii}$, $b_{ii} \cdot b_{ik} = b_{ik}$. Тогда

$$bs = b_{ii} y_{ij} = b_{ii}(b_{ik} x_{kj}) = (b_{ii} b_{ik}) x_{kj} = b_{ik} x_{kj} = s.$$

Так как $B \in \mathfrak{V}$, то $b = b_{ii} \in [\mathfrak{V}]_i$ и, положив $s = b = b_{ii}$, получим $b^2 = b$.

Лемма 5. Пусть $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}'$ являются правыми идеалами в S_ξ. Для того, чтобы $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}' = \phi$, необходимо и достаточно, чтобы $[\mathfrak{V}]_i \cap [\mathfrak{V}']_i = \phi$ для каждого $i \in I$.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть $\mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}' = \phi$ и предположим противное, что найдется такой $i \in I$, что $[\mathfrak{V}]_i \cap [\mathfrak{V}']_i \neq \phi$. Пусть $s \in [\mathfrak{V}]_i \cap [\mathfrak{V}']_i$. Это значит, что найдутся матрицы $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{V}$, $B' = (b'_{ij}) \in \mathfrak{V}'$, такие, что $s = b_{ij} = b'_{ik}$ для некоторых $j, k \in I$. Тогда матрицы BE_j и $B'E_k$ совпадают с матрицей из S_ξ, все элементы из S которой равны s и находятся в i-ой строке, т.е. $BE_j = B'E_k$. Но $BE_j \in \mathfrak{V}$, $B'E_k \in \mathfrak{V}'$, т.е. $BE_j \in \mathfrak{V} \cap \mathfrak{V}'$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемму 5 мы будем часто использовать в такой форме: из условия $[\mathfrak{B}]_i \cap [\mathfrak{B}']_i \neq \phi$ для некоторого $i \in I$ следует $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}' \neq \phi$.

<u>Теорема 2.</u> Пусть двусторонний идеал $\mathfrak{B}$ полугруппы S_ξ $(\xi \neq 1)$ является разложимым и $\mathfrak{B} = \bigcup_{\mu \in \mathfrak{M}} (B_\mu \cdot S_\xi)$, где $|\mathfrak{M}| > 1$, $B_\mu B_\mu = B_\mu$ для каждого $\mu \in \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{B} \subseteq S'_\xi$.

<u>Доказательство.</u> Предположим противное, пусть $\mathfrak{B} \not\subseteq S^1_\xi$. Это значит, что существует матрица $B \in \mathfrak{B}$, содержащая элементы из S более, чем в одной строке. Тогда существует такое $\mu \in \mathfrak{M}$, что $B \in B_\mu \cdot S_\xi$ и, следовательно, матрица B_μ содержит элементы из S более, чем в одной строке. Покажем, что тогда матрица B_μ необходимо диагональная.

Пусть $i, j \in I$ $(i \neq j)$ индексы строк матрицы $B_\mu = (b_{ij})$, в которых находятся элементы из S. Тогда, ввиду леммы 4, на местах (i,i), (j,j) матрицы B_μ стоят идемпотенты из S, соответственно, b_i и b_j. Зафиксируем некоторый произвольный элемент $k \in I$ и пусть A – некоторая матрица из S_ξ, такая, что $a_{ii} = 1_s = a_{kj}$. Матрица $\mathfrak{D} = (d_{ij}) = A B_\mu$ принадлежит идеалу $\mathfrak{B}$, следовательно, для некоторого $\mu' \in \mathfrak{M}$ выполняется $\mathfrak{D} \in B_{\mu'} \cdot S_\xi$. Из того, что

$$d_{ii} = a_{ii} \cdot b_{ii} = 1_s \cdot b_i = b_i$$

следует $b_i \in [B_\mu S_\xi]_i \cap [B_{\mu'} S_\xi]_i$, т.е. $[B_\mu S_\xi]_i \cap \cap [B_{\mu'} S_\xi]_i \neq \phi$. Ввиду леммы 5, отсюда следует $B_\mu S_\xi \cap \cap B_{\mu'} S_\xi \neq \phi$. Тогда, по предположению, $\mu = \mu'$ и $\mathfrak{D} \in B_\mu \cdot S_\xi$. Из равенства

$$d_{kj} = a_{kj} \cdot b_{jj} = 1_s \cdot b_j = b_j$$

следует $[B_\mu \cdot S_\xi]_k \neq \phi$. Это, ввиду леммы 4, означает, что на месте (k,k) матрицы B_μ стоит некоторый идемпотент $b_k \in S$. Ввиду произвольности индекса $k \in I$, матрица B_μ - диагональная.

Теперь покажем, что наше предположение приводит к противоречию. Ввиду $|\mathfrak{M}| > 1$, существует $\mu' \in \mathfrak{M}$ $(\mu' \neq \mu)$ такой, что $B_\mu S_\xi \cap B_{\mu'} S_\xi = \phi$. Пусть $k \in I$ некоторый индекс строки матрицы $B_{\mu'} = (b'_{ij})$, в которой на месте (k,k) стоит идемпотент $b'_k \in S$. Пусть, далее $A = (a_{ij})$ – произвольная матрица из S_ξ, такая, что $a_{kj} = b'_k$, $a_{ii} = 1_s$. Для матрицы $\mathfrak{D} = (d_{ij}) = A \cdot B_\mu$ выполняется

$$d_{ii} = a_{ii}\, b_{ii} = 1_S \cdot b_i = b_i,$$

$$d_{kj} = a_{kj} \cdot b_{j} = b'_k\, b_j$$

Ввиду $b_i \in [\mathcal{D} S_\xi]_i \cap [B_\mu S_\xi]_i \neq \phi$, по лемме 5 получаем $\mathcal{D} \in B_\mu S_\xi$, а, ввиду $b'_k b_j \in [\mathcal{D} S_\xi]_k \cap [B_{\mu'} S_\xi]_k \neq \phi$, по той же лемме имеем $\mathcal{D} \in B_{\mu'} S_\xi$, т.е. $\mathcal{D} \in B_\mu S_\xi \cap B_{\mu'} S_\xi \neq \phi$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Из теорем I и 2 вытекает

<u>Следствие I.</u> Двусторонний идеал S^1_ξ полугруппы S_ξ $(\xi > 1)$ и только он является наибольшим идеалом, разложимым в объединение попарно непересекающихся правых идеалов, порожденных идемпотентами.

Пусть T_η - другая матричная полугруппа над моноидом T, состоящая из всевозможных матриц порядка η, в каждом столбце которых стоит ровно один элемент из T, а на остальных местах - символ O, и пусть I' - вполне упорядоченное множество индексов строк (или столбцов) матриц из T_η $(\eta = |I'|)$.

<u>Теорема 3.</u> Если полугруппы S_ξ и T_η изоморфны, то $\xi = \eta$ и существует взаимно однозначное отображение π множества I на множество I', так что $S_\xi(i)$ и $T_\eta(\pi(i))$ изоморфны для каждого $i \in I$.

<u>Доказательство.</u> Пусть φ - изоморфное отображение полугруппы S_ξ на полугруппу T_η. Так как при изоморфизме свойство идеала быть наибольшим разложимым в объединение попарно непересекающихся правых идеалов, порожденных идемпотентами, сохраняется, то, по следствию I, идеал $\varphi(S^1_\xi)$ является таковым в T_η. Однако, применяя следствие I к полугруппе T_η, получим, что этим свойством обладает идеал T^1_η и только он. Отсюда следует, что $\varphi(S^1_\xi) = T^1_\eta$. Но $T^1_\eta = \dot{\bigcup}_{i' \in I'} (E'_{i'} T_\eta)$, $S^1_\xi = \dot{\bigcup}_{i \in I} (E_i S_\xi)$, и тогда

$$\varphi(S^1_\xi) = \varphi\left(\dot{\bigcup}_{i \in I} (E_i S_\xi)\right) = \dot{\bigcup}_{i \in I} \varphi(E_i S_\xi) = \dot{\bigcup}_{i \in I} (\varphi(E_i) T_\eta) = \dot{\bigcup}_{i' \in I'} (E'_{i'} T_\eta).$$

Здесь через $E'_{i'}$ обозначена матрица из T_η, все элементы из T которой равны единице 1_T моноида T и находятся в i'-ой строке. Из последнего равенства, по лемме 2, вытекает, что существует взаимно однозначное отображение π множества I на множество I', так что $\varphi(E_i) T_\eta = E'_{\pi(i)} T_\eta$, т.е. $\xi = |I| = |\pi(I)| = |I'| = \eta$ и

$$\varphi(S_\xi(i)) = \varphi(E_i \cdot S_\xi) = \varphi(E_i) T_\eta = E'_{\pi(i)} T_\eta = T_\eta(\pi(i))$$

для каждого $i \in I$. Теорема доказана.

Произвольная матрица $A = (a_{ij}) \in S_\xi$ допускает, как это показано в [3], запись в виде $(\xi+1)$-мерного вектора

$$(\sigma, \ldots, a_j, \ldots)_{j \in I},$$

где $a_j = a_{ij}$ для каждого $j \in I$ и σ – отображение множества I в себя, такое, что $\sigma(j) = i$ тогда и только тогда, когда в матрице A на месте (i,j) находится элемент из S. Правило умножения таких векторов записывается следующим образом:

$$(\sigma, \ldots, a_j, \ldots)_{j \in I} (\tau, \ldots, b_j, \ldots)_{j \in I} = (\sigma\tau, \ldots, a_{\tau(j)} b_j, \ldots)_{j \in I}.$$

Через ν_i обозначим отображение множества I в элемент $i \in I$. Тогда произвольная матрица $A = (a_{ij})$ из $S_\xi(i)$ запишется в виде

$$(\nu_i, \ldots, a_j, \ldots)_{j \in I}.$$

<u>Теорема 4.</u> Пусть S и T – моноиды. Изоморфизм полугрупп $S_\xi(k)$ и $T_\xi(j)$, где $k, j \in I$, индуцирует изоморфизм моноидов S и T.

<u>Доказательство.</u> Пусть φ – изоморфизм полугруппы $S_\xi(k)$ на полугруппу $T_\xi(j)$. Пусть $\mathcal{X} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i \in I}$ – произвольный элемент из $S_\xi(k)$ и $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y} = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots)_{i \in I} \in T_\xi(j)$. Определим отображение ψ полугруппы S в T:

$$\psi(x_k) = y_j.$$

Так как $\mathcal{X}$ – произвольный элемент из $S_\xi(k)$, то и элемент x_k – произвольный из S, т.е. отображение ψ определено на всей полугруппе S. С другой стороны, для произвольного $y \in T$ существует $\mathcal{Y} = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots)_{i \in I}$ из $T_\xi(j)$ такой, что $y = y_j$. Существует, также, $\mathcal{X} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i \in I} \in S_\xi(k)$ такой, что $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$ и тогда

$$\psi(x_k) = y_j = y \quad ,$$

т.е. ψ отображает S на всю полугруппу T.

Проверим однозначность отображения ψ. Пусть для некоторого $x \in S$ выполняется $\psi(x) = y$ и $\psi(x) = y'$. Это значит, что существуют элементы $\mathcal{X} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i \in I}$, $\mathcal{X}' = (\nu_k, \ldots, x'_k, \ldots, x'_i, \ldots)_{i \in I}$ из $S_\xi(k)$ такие, что $x_k = x'_k = x$ и $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y} = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots)_{i \in I}$, $\varphi(\mathcal{X}') = \mathcal{Y}' = (\nu_j, \ldots, y'_j, \ldots, y'_i, \ldots)_{i \in I}$

из $T_\xi(j)$, где $y_j = y$, $y'_j = y'$. Для произвольного элемента $\mathcal{A} = (\nu_k, \ldots, a_i, \ldots)_{i\in I}$ из $S_\xi(k)$ выполняется

$$\mathcal{X}\mathcal{A} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i\in I}(\nu_k, \ldots, a_i, \ldots)_{i\in I} = (\nu_k, \ldots, x_k a_i, \ldots)_{i\in I}$$

$$\mathcal{X}'\mathcal{A} = (\nu_k, \ldots, x'_k, \ldots, x'_i, \ldots)_{i\in I}(\nu_k, \ldots, a_i, \ldots)_{i\in I} = (\nu_k, \ldots, x'_k a_i, \ldots)_{i\in I},$$

но $x_k = x'_k = x$, следовательно, $\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{X}\mathcal{A}'$. Это означает, ввиду произвольности элемента $\mathcal{A} \in S_\xi(k)$, что для любого $\mathcal{B} \in T_\xi(j)$ выполняется

$$\mathcal{Y}\mathcal{B} = \mathcal{Y}'\mathcal{B}.$$

Возьмем в качестве элемента $\mathcal{B}$ элемент E_j из $T_\xi(j)$. Тогда

$$\mathcal{Y}E_j = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots)_{i\in I}(\nu_j, \ldots, 1_T, \ldots)_{i\in I} = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots)_{i\in I}$$

$$\mathcal{Y}'E_j = (\nu_j, \ldots, y'_j, \ldots, y'_i, \ldots)_{i\in I}(\nu_j, \ldots, 1_T, \ldots)_{i\in I} = (\nu_j, \ldots, y'_j, \ldots)_{i\in I}$$

и, ввиду $\mathcal{Y}E_j = \mathcal{Y}'E_j$, получим $y_j = y'_j$.

Проверим взаимную однозначность отображения ψ. Пусть для некоторых $x, x' \in S$ выполняется $\psi(x) = \psi(x') = y$. Это значит, что существуют элементы $\mathcal{X} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i\in I}$, $\mathcal{X}' = (\nu_k, \ldots, x'_k, \ldots, x'_i, \ldots)_{i\in I}$ из $S_\xi(k)$ и $\mathcal{Y} = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots)_{i\in I}$, $\mathcal{Y}' = (\nu_j, \ldots, y'_j, \ldots, y'_i, \ldots)_{i\in I}$ из $T_\xi(j)$ такие, что

$$\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}, \qquad \varphi(\mathcal{X}') = \mathcal{Y}'$$

и $y_j = y'_j = y$, $x_j = x$, $x'_j = x'$. То, что $y_j = y'_j$ означает, что для любого $\mathcal{B} \in T_\xi(j)$ выполняется

$$\mathcal{Y}\mathcal{B} = \mathcal{Y}'\mathcal{B}.$$

Следовательно, для каждого $\mathcal{A} \in S_\xi(k)$ должно выполняться $\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{X}'\mathcal{A}$. В качестве элемента $\mathcal{A}$ возьмем E_k. Тогда

$$\mathcal{X}E_k = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i\in I}(\nu_k, \ldots, 1_S, \ldots)_{i\in I} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots)_{i\in I},$$

$$\mathcal{X}'E_k = (\nu_k, \ldots, x'_k, \ldots, x'_i, \ldots)_{i\in I}(\nu_k, \ldots, 1_S, \ldots)_{i\in I} = (\nu_k, \ldots, x'_k, \ldots)_{i\in I},$$

т.е. $x_k = x'_k$.

Остается показать, что φ сохраняет операцию. Пусть $\psi(x) = y$ и $\psi(x') = y'$, где $x, x' \in S$, $y, y' \in T$. Тогда существуют $\mathcal{X} = (\nu_k, \ldots, x_k, \ldots, x_i, \ldots)_{i\in I}$, $\mathcal{X}' = (\nu_k, \ldots, x'_k, \ldots, x'_i, \ldots)_{i\in I} \in S_\xi(k)$, $\mathcal{Y} = (\nu_j, \ldots, y_j, \ldots, y_i, \ldots)_{i\in I}$, $\mathcal{Y}' = (\nu_j, \ldots, y'_j, \ldots, y'_i, \ldots)_{i\in I} \in T_\xi(j)$ такие, что $\varphi(\mathcal{X}) = \mathcal{Y}$, $\varphi(\mathcal{X}') = \mathcal{Y}'$ и $x_i = x$, $x'_i = x'$, $y_j = y$, $y'_j = y'$.

Так как φ – изоморфизм, то

$$\varphi(x)\varphi(x') = \varphi(xx') = \varphi[(v_k, \ldots, x_k x'_k, \ldots, x_k x_i, \ldots)_{i\in I}] =$$
$$= yy' = (v_j, \ldots, y_j y'_j, \ldots, y_j y_i, \ldots)_{i\in I},$$

т.е. $\varphi(xx') = \varphi(x_k x'_k) = y_j y'_j = yy'$. Теорема доказана.

Следствие 2. Полугруппы S_ξ и T_η $(\xi, \eta \neq 1)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\xi = \eta$ и моноиды S и T изоморфны.

Достаточность очевидна. Необходимость непосредственно следует из теоремы 3 и теоремы 4.

Заметим, что предположение $\xi, \eta \neq 1$ в следствии 2 существенно. Действительно, пусть S – конечный моноид. Полугруппу S_2 можно рассматривать, как матричную полугруппу первого порядка. Таким образом, $(S_2)_1 = S_2$, но S_2 не изоморфна полугруппе S.

Теорема 5. Полугруппы S_ξ^η и $T_{\xi'}^{\eta'}$ $(\xi, \xi' \neq 1;\ 1 \leq \eta \leq \xi,\ 1 \leq \eta' \leq \xi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\eta = \eta'$, $\xi = \xi'$ и моноид S изоморфен моноиду T.

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Как показано в ([3], стр. 198), полугруппы S_ξ^η и $T_{\xi'}^{\eta'}$ являются плотно вложенными идеалами, соответственно, в S_ξ и $T_{\xi'}$. Из следствия 3 работы [4] следует, что из изоморфизма полугрупп S_ξ^η и $T_{\xi'}^{\eta'}$ следует изоморфизм полугрупп S_ξ и $T_{\xi'}$. Из следствия 2 следует тогда, что $\xi = \xi'$ и моноиды S и T изоморфны, причем, если $\varphi: S_\xi \to T_\xi$ изоморфизм, то существует взаимно однозначное отображение $\pi: I \to I'$, так что

$$\varphi(S_\xi(i)) = T_\xi(\pi(i))$$

для любого $i \in I$. Покажем, что $\eta = \eta'$. Предположим противное и пусть $\eta > \eta'$. Возьмем некоторое множество $I_0 \subseteq I$ мощности η и рассмотрим правый идеал $S_\xi(I_0)$, который, по лемме I, порождается матрицей E_{I_0}. Поскольку $S_\xi(I_0)$ содержит ровно η правых идеалов вида $S_\xi(i)$, а именно, идеалы $S_\xi(i)$, где $i \in I_0$, то правый идеал $\varphi(S_\xi(I_0)) \subseteq T_\xi^{\eta'}$, порождаемый матрицей $\varphi(E_{I_0})$, содержит ровно η правых идеалов вида $T_\xi(j)$, $j \in \pi(I_0)$. Это означает, что матрица $\varphi(E_{I_0}) \in$

$\in T_\xi^{\eta'}$ содержит элементы из T по крайней мере в η строках, что, ввиду $\eta' < \eta$, невозможно. Если $\eta' > \eta$, то, применяя изложенное рассуждение к изоморфизму $\varphi^{-1}: T_\xi \to S_\xi$, также получим противоречие. Теорема доказана.

Лемма 6. Элемент $C = (\pi, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I} \in S_\xi$ обратим тогда и только тогда, когда π – обратимое преобразование множества I и c_i – обратимый элемент в S при любом $i \in I$.

Доказательство. Необходимость. Единица полугруппы S_ξ представляется в виде вектора $E = (\varepsilon, \ldots, 1_S, \ldots)$, где ε – тождественное преобразование множества I, а все остальные координаты равны $1_S \in S$. Если элемент $C = (\pi, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I}$ обратим, то найдется элемент $Y = (\sigma, \ldots, y_i, \ldots)_{i \in I}$ из S_ξ, так что $CY = YC = E$, т.е.

$$(\pi, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I} (\sigma, \ldots, y_i, \ldots)_{i \in I} = (\pi\sigma, \ldots, c_{\sigma(i)} y_i, \ldots)_{i \in I} = (\varepsilon, \ldots, 1_S, \ldots),$$

$$(\sigma, \ldots, y_i, \ldots)_{i \in I} (\pi, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I} = (\sigma\pi, \ldots, y_{\sigma(i)} c_i, \ldots)_{i \in I} = (\varepsilon, \ldots, 1_S, \ldots).$$

Отсюда следует, что $\pi\sigma = \sigma\pi = \varepsilon$, т.е. π – обратимое преобразование множества I и

$$y_{\pi(i)} c_i = 1_S, \quad c_i y_{\pi(i)} = c_{\sigma\pi(i)} y_{\pi(i)} = 1_S,$$

т.е. c_i – обратимый элемент в S.

Достаточность. Положим $D = (\pi^{-1}, \ldots, d_i, \ldots)_{i \in I}$, где $d_i = c^{-1}_{\pi^{-1}(i)}$ для каждого $i \in I$. Тогда

$$CD = (\pi, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I} (\pi^{-1}, \ldots, d_i, \ldots)_{i \in I} = (\pi\pi^{-1}, \ldots, c_{\pi^{-1}(i)} d_i, \ldots)_{i \in I} = (\varepsilon, \ldots, 1_S, \ldots)_{i \in I},$$

где ε – тождественное преобразование и

$$DC = (\pi^{-1}, \ldots, d_i, \ldots)_{i \in I} (\pi, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I} = (\varepsilon, \ldots, d_{\pi(i)} c_i, \ldots)_{i \in I} = (\varepsilon, \ldots, c^{-1}_{\pi^{-1}\pi(i)} c_i, \ldots)_{i \in I} = (\varepsilon, \ldots, 1_S, \ldots)_{i \in I}.$$

Теорема 6. Всякий автоморфизм φ полугруппы S_ξ имеет вид

$$\varphi(A) = C^{-1}(\psi \cdot A) C, \qquad (1)$$

где C – обратимый элемент из S_ξ, а $\psi \cdot A$ обозначает применение автоморфизма ψ полугруппы S к элементам из S произвольной матрицы $A \in S_\xi$.

Доказательство. Пусть φ – произвольный автоморфизм полугруппы S_ξ. По теореме 3, существует взаимно однозначное преобразование π множества I, так что

$$\varphi(S_\xi(i)) = S_\xi(\pi(i)) \tag{2}$$

для любого $i \in I$. Для произвольного $k \in I$ элемент $E_k = (\nu_k, \ldots, 1, \ldots)$ принадлежит $S_\xi(k)$ и поэтому, согласно (2), $\varphi(E_k) \in S_\xi(\pi(k))$. Обозначим элемент $\varphi(E_k)$ через $C^k = (\nu_{\pi(k)}, \ldots, c_i^k, \ldots)_{i \in I}$. Теперь зафиксируем некоторый элемент $j \in I$. Для него имеем $C^j = (\nu_{\pi(j)}, \ldots, c_i^j, \ldots)_{i \in I}$. Положим $C = (\pi^{-1}, \ldots, c_i, \ldots)_{i \in I}$, где π – преобразование множества I, определенное формулой (2), и $c_i = c_i^j$ для каждого $i \in I$. Покажем, что построенный элемент C удовлетворяет формуле (I). Вначале покажем, что C – обратимый элемент.

Для произвольного $k \in I$ имеем $\varphi(E_k) = C^k = (\nu_{\pi(k)}, \ldots, c_i^k, \ldots)_{i \in I}$. Так как E_k является левой единицей правого идеала $S_\xi(k)$, то C^k необходимо является левой единицей правого идеала $S_\xi(\pi(k))$. Тогда, ввиду $E_{\pi(k)} \in S_\xi(\pi(k))$, должно выполняться $C^k \cdot E_{\pi(k)} = E_{\pi(k)}$, т.е.

$$(\nu_{\pi(k)}, \ldots, 1, \ldots) = (\nu_{\pi(k)}, \ldots, c_i^k, \ldots)_{i \in I}(\nu_{\pi(k)}, \ldots, 1, \ldots) = (\nu_{\pi(k)}, \ldots, c_{\pi(k)}^k, \ldots)$$

и значит

$$c_{\pi(k)}^k = 1_S \tag{3}$$

для произвольного $k \in I$. Далее, из условия $E_\ell E_k = E_\ell$ для произвольных $k, \ell \in I$, следует $C^\ell C^k = C^\ell$, т.е.

$$(\nu_{\pi(\ell)}, \ldots, c_i^\ell, \ldots)_{i \in I}(\nu_{\pi(k)}, \ldots, c_i^k, \ldots)_{i \in I} = (\nu_{\pi(\ell)}, \ldots, c_{\pi(k)}^\ell c_i^k, \ldots)_{i \in I} =$$
$$= (\nu_{\pi(\ell)}, \ldots, c_i^\ell, \ldots)_{i \in I}.$$

Следовательно,

$$c_{\pi(k)}^\ell c_i^k = c_i^\ell \tag{4}$$

для произвольных $k, \ell, i \in I$. Отсюда, взяв $i = \pi(\ell)$, получим

$$c_{\pi(k)}^\ell \cdot c_{\pi(\ell)}^k = c_{\pi(\ell)}^\ell \overset{(3)}{=} 1$$

и, ввиду симметричности k и ℓ,

$$c^k_{\pi(\ell)}\, c^\ell_{\pi(k)} = c^k_{\pi(k)} = 1 .$$

Таким образом, элементы $c^k_{\pi(\ell)}$ $(k,\ell \in I)$ обратимы и

$$(c^k_{\pi(\ell)})^{-1} = c^\ell_{\pi(k)} . \qquad (5)$$

Отсюда, ввиду леммы 6, элемент $C = (\pi^{-1},\dots,c_i,\dots)_{i\in I}$ обратим и $C^{-1} = (\pi,\dots,d_i,\dots)_{i\in I}$, где $d_i = c^{-1}_{\pi(i)}$ для каждого $i \in I$.

Покажем, что для произвольного $A = (\nu_k,\dots,a_i,\dots)_{i\in I}$ из S^1_ξ имеет место формула (I). Согласно (2), $\varphi(S_\xi(j)) = S_\xi(\pi(j))$. Из теоремы 4 следует, что изоморфизм φ индуцирует автоморфизм ψ полугруппы S. При этом, если $X = (\nu_j,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots)_{i\in I}$ и $\varphi(X) = Y = (\nu_{\pi(j)},\dots,y_{\pi(j)},\dots,y_i,\dots)_{i\in I}$, то

$$\psi(x_j) = y_{\pi(j)} .$$

Пусть $A = (\nu_k,\dots,a_i,\dots)_{i\in I}$ - произвольный элемент из S_ξ и $\varphi(A) = B = (\nu_{\pi(k)},\dots,b_i,\dots)_{i\in I}$. Для произвольного $\ell \in I$ элементу

$$E_j A E_\ell = (\nu_j,\dots,1_S,\dots)_{i\in I}(\nu_k,\dots,a_i,\dots)_{i\in I}(\nu_\ell,\dots,1_S,\dots)_{i\in I} = (\nu_j,\dots,a_\ell,\dots)_{i\in I}$$

соответствует элемент

$$\varphi(E_j A E_\ell) = C^j B C^\ell = (\nu_{\pi(j)},c^j_i,\dots)_{i\in I}(\nu_{\pi(k)},\dots,b_i,\dots)_{i\in I}(\nu_{\pi(\ell)},\dots,c^\ell_i,\dots)_{i\in I} = (\nu_{\pi(j)},\dots\ c^j_{\pi(k)}\, b_{\pi(\ell)}\, c^\ell_i,\dots)_{i\in I} .$$

В силу определения автоморфизма ψ, отсюда следует

$$\psi(a_\ell) = c^j_{\pi(k)}\, b_{\pi(\ell)}\, c^\ell_{\pi(j)} \qquad (6)$$

Тогда, ввиду (5), получим

$$b_{\pi(\ell)} = (c^j_{\pi(k)})^{-1}\psi(a_\ell)\, c^j_{\pi(\ell)} = c^{-1}_{\pi(k)}\psi(a_\ell)c_{\pi(\ell)}$$

для любого $\ell \in I$. С другой стороны

$$\begin{aligned}C^{-1}(\psi\cdot A)C &= (\pi,\dots,d_i,\dots)_{i\in I}(\nu_k,\dots,\psi(a_i),\dots)_{i\in I}(\pi^{-1},\dots,c_i,\dots)_{i\in I} = \\ &= (\nu_{\pi(k)},\dots,d_k\psi(a_{\pi^{-1}(i)})c_i,\dots)_{i\in I} = \\ &= (\nu_{\pi(k)},\dots,c^{-1}_{\pi(k)}\psi(a_{\pi^{-1}(i)})c_{\pi\pi^{-1}(i)},\dots)_{i\in I} \overset{(6)}{=} \\ &= (\nu_{\pi(k)},\dots,b_{\pi\pi^{-1}(i)},\dots)_{i\in I} = (\nu_{\pi(k)},\dots,b_i,\dots)_{i\in I} = B.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что для любого элемента $A \in S_\xi^1$ формула (I) имеет место, т.е. автоморфизм φ полугруппы S_ξ индуцирует автоморфизм φ' полугруппы S_ξ^1 вида (I). Продолжим автоморфизм φ' до автоморфизма φ'' всей полугруппы S_ξ, имеющего вид (I). Так как S_ξ^1 – плотно вложенный идеал в S_ξ, то, ввиду следствия 5 работы [4], следует, что это продолжение единственно, т.е. $\varphi'' = \varphi$. Теорема доказана.

Теорема 6. Всякий изоморфизм φ полугруппы S_ξ^n на полугруппу T_ξ^n имеет вид

$$\varphi(A) = C^{-1}(\psi \cdot A)C \ ,$$

где C – обратимый элемент из T_ξ, а ψ – изоморфизм полугруппы S на T, применяемый к элементам из S матрицы $A \in S_\xi^n$.

Доказательство. Полугруппы S_ξ^n и T_ξ^n являются плотно вложенными идеалами, соответственно, в S_ξ и T_ξ. Из следствия 3 работы [4] следует, что изоморфизм φ полугруппы S_ξ^n на T_ξ^n можно однозначно продолжить до изоморфизма φ' полугруппы S_ξ на T_ξ.

Пусть χ – некоторый изоморфизм полугруппы T на S. Определим отображение χ' элементов из T_ξ в S_ξ следующим образом:

$$\chi'(B) = \chi \cdot B$$

для любого $B \in T_\xi$. Легко проверить, что χ' – изоморфизм полугруппы T_ξ на S_ξ. Тогда $\chi'\varphi'$ является автоморфизмом полугруппы S_ξ. Из теоремы 5 следует, что существует обратимый элемент $G \in S_\xi$ и автоморфизм ψ' полугруппы S так, что для произвольного элемента $X \in S_\xi$ имеет место равенство $\chi'\varphi'(X) = G^{-1}(\psi' \cdot X)G$. Тогда

$$\varphi'(X) = \chi'^{-1}[G^{-1}(\psi' \cdot X)G] = \chi'^{-1}(G^{-1})\chi'^{-1}(\psi \cdot X)\chi'^{-1}(G) =$$

$$= (\chi^{-1} \cdot G^{-1})(\chi^{-1}\psi' \cdot X)(\chi^{-1} \cdot G). \qquad (6)$$

Обозначим изоморфизм $\chi^{-1}\psi'$ полугруппы S на T через ψ, элемент $(\chi^{-1} \cdot G) \in T_\xi$ через C. Тогда равенство (6) запишется в следующем виде:

$$\varphi'(X) = C^{-1}(\psi \cdot X)C$$

для любого $X \in S_\xi$ и в частности, для любого $A \in S_\xi^{\,n}$ выполняется

$$\varphi'(A) = \varphi(A) = C^{-1}(\psi \cdot A)C.$$

Теорема доказана.

Замечание. Аналогичным образом, отказываясь от матричного языка и делая очевидные изменения, можно доказать определяемость свободного полигона над моноидом с нулем своей полугруппой эндоморфизмов (т.е. доказать следствие 2, где S и T - моноиды с нулем). Это позволяет снять ограничения на исходные моноиды, наложенные в работе [I].

В заключение автор искренне благодарит доцента Я.В. Хиона за руководство работой.

Литература

1. K n a u e r U., M i k h a l e v A., Endomorfism monoids of act over monoids, Semigroup Forum, 1973, 6, 50-58.
2. Г л у с к и н Л. М., О матричных полугруппах, Изв. АН СССР, сер. матем., 1958, 22, 439-448.
3. Ф л я й ш е р В., Об эндоморфизмах свободных полигонов, Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 336, 189-205.
4. Ш е в р и н Л. Н., Плотно вложенные идеалы полугрупп, Матем. сб., 1969, 79, № 3, 425-432.

Поступило
IO I 1974

VABA POLÜGOONI MÄÄRATAVUS ENDOMORFISMIPOOLRÜHMA ABIL

V. Fleischer

R e s ü m e e

Olgu S monoid. Tõestatakse ühest suurema moodustajate arvuga vaba S-polügooni määratavus endomorfismipoolrühma abil.

DETERMINABILITY OF A FREE POLYGON BY ITS ENDOMORPHISM SEMIGROUP

V.Fleischer

S u m m a r y

Let S be a monoid. The endomorphism semigroup of a free S-polygon (S-set) with ξ generators is denoted by $\mathcal{E}nd(S,\xi)$.

Theorem. The semigroups $\mathcal{E}nd(S,\xi)$ and $\mathcal{E}nd(T,\eta)$ where $\xi,\eta \neq 1$ are isomorphic iff $\xi = \eta$ and S is isomorphic to T.

Analogously this theorem can be proved for monoids S, T with zero.

The automorphisms of $\mathcal{E}nd(S,\xi)$ are described.

О ГОМОЛОГИЧЕСКОЙ КЛАССИФИКАЦИИ ПОЛУКОЛЕЦ С НУЛЕМ

В. Фляйшер

Кафедра алгебры и геометрии

§ I. Введение

Множество A называется полукольцом с нулем, если на нем определены две бинарные операции "+" и "·", такие, что

I. (A, +) - коммутативная полугруппа ,

2. (A, ·) - полугруппа с нулем 0 ,

3. для произвольных $a,b,c\in A$ выполняется

$$(a+b)c = ac+bc, \quad c(a+b) = ca+cb, \quad a0 = 0\cdot a = 0.$$

Понятие полукольца есть, таким образом, частный вид Ω-кольца [7], в котором Ω состоит из нульарной операции, фиксирующей 0_A, и ассоциативной коммутативной бинарной операции "+". Полигоны [3] над такими Ω-кольцами называются полумодулями, т.е. множество M называется правым A-полумодулем, если (M, +)- коммутативная полугруппа с фиксированным элементом 0_M и для произвольных $m,n\in M$, $a,b\in A$ определено $ma\in M$ так, что

$$(ma)b = m(ab), \qquad (m+n)a = ma+na,$$
$$m(a+b) = ma+mb, \qquad m0 = 0_M .$$

В дальнейшем полукольцо A предполагается содержащим единицу $1\neq 0$ и все A-полумодули считаются правыми унитарными, а также вместо термина "полукольцо с нулем" будем просто говорить "полукольцо".

В ряде работ рассматривались вопросы гомологической классификации различных классов Ω-колец, например, колец [4], моноидов [5], некоторые вопросы рассматривались и для дистрибутивных структур [6]. Понятие полукольца является обобщением понятий кольца, дистрибутивной структуры, а также моноида с нулем, поскольку моноид S с нулем 0_S можно рассматривать как полукольцо с нулевым сложением, т.е. для любых $s, t \in S$ выполняется $s+t = 0_S$. В предлагаемой работе дана гомологическая классификация полуколец по свойствам проективности и инъективности. При этом оказывается целесообразным конкретизировать класс рассматриваемых A-полумодулей над полукольцом A.

Пусть A - произвольное полукольцо. Ясно, что полукольцо A можно рассматривать как полумодуль над самим собой. Пусть Λ - некоторое многообразие A-полумодулей, такое, что A-полумодуль A принадлежит Λ. В настоящей работе решается вопрос[1]: для каких A и Λ все A-полумодули из Λ проективны и для каких A и Λ все A-полумодули из Λ инъективны.

Совокупность A-полумодулей Λ вместе с их гомоморфизмами образуют категорию, которую мы также обозначим Λ. Всюду в дальнейшем, говоря об A-полумодулях, предполагается, что они содержатся в Λ. Заметим, что если в полукольце A элемент 0 является аддитивно нейтральным, т.е. $a+0=a$ для любого $a \in A$ (в этой работе такие полукольца мы называем специальными), то необходимость во введении многообразия Λ отпадает. В этом случае свободный A-полумодуль совпадает с прямой суммой некоторого числа A-полумодулей A (см. [8]) и, следовательно, ввиду $A \in \Lambda$, произвольный A-полумодуль будет принадлежать Λ, т.е. Λ совпадает с многообразием всех A-полумодулей. Для единообразия (со случаем не специального полукольца) мы, однако, сохраним обозначение Λ, как класса рассматриваемых A-полумодулей.

Напомним, что A-полумодуль P называется проективным, если всякая диаграмма

---

[1] Аналогичный вопрос естественно ставить и для полуколец без нуля. Оказывается, что этот случай сводится к случаю, рассматриваемому в настоящей статье. Этот факт отражен в кратком сообщении автора, опубликованном в Сборнике резюме сообщений II Всесоюзного симпозиума по теории колец, алгебр и модулей, Кишинев, 1974, стр. 62.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \\ M \arrow[r, "\pi"] & N \end{tikzcd} \qquad (I)$$

в категории A-полумодулей, где π - эпиморфизм, замыкается, т.е. существует $\psi : P \longrightarrow M$, такой, что $\pi\psi=\varphi$. Здесь под понятием эпиморфизма понимается гомоморфизм, являющийся сюръективным отображением. (Заметим, что категорное понятие эпиморфизма в категории полумодулей над полукольцом, вообще говоря, не совпадает с понятием сюръективного гомоморфизма. Например, в категории абелевых полугрупп с нулем, т.е. полумодулей над полукольцом натуральных чисел N с нулем, вложение $N \longrightarrow Z$, где Z - множество целых чисел, легко видеть, будет категорным эпиморфизмом, но не сюръективным отображением.)

Полумодуль Q называется инъективным, если всякая диаграмма

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"] & M \\ Q \end{tikzcd}$$

в категории A-полумодулей, где i - мономорфизм, замыкается.

В заключение этого параграфа докажем одно утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем. Пусть A - полукольцо. Отношение ρ на A назовем правой конгруэнцией, если ρ есть конгруэнция на полугруппе $(A, +)$ и, кроме того, из $(a,b)\in\rho$ следует $(ac, bc)\in\rho$ для произвольных $a,b,c\in A$. Правую конгруэнцию ρ на A назовем двусторонней или просто конгруэнцией, если для произвольных $a,b,c\in A$ из $(a,b)\in\rho$ следует $(ca, cb)\in\rho$.

<u>Теорема I</u>. Пусть ρ - двусторонняя конгруэнция на полукольце A, Λ - некоторое многообразие A-полумодулей. Пусть $\bar{\Lambda}$ - многообразие A/ρ -полумодулей, порожденное A/ρ -полумодулем A/ρ. Тогда все A/ρ-полумодули из $\bar{\Lambda}$ суть A-полумодули из Λ, а A/ρ-гомоморфизмы суть A-гомоморфизмы. Если все A-полумодули из Λ проективны (инъективны), то все A/ρ- полумодули из $\bar{\Lambda}$ проективны (инъективны).

Доказательство. Сперва докажем первое утверждение. Пусть M - произвольный A/ρ-полумодуль из $\bar{\Lambda}$. Для произвольных $m \in M$, $a \in A$ положим

$$ma = m[a],$$

где $[a]$ - класс конгруэнции ρ, содержащий элемент $a \in A$. Простой проверкой аксиом полумодуля легко убедиться, что A/ρ-полумодуль M относительно введенного умножения на элементы из A будет A-полумодулем. По определению $\bar{\Lambda}$, A/ρ-полумодуль M получается из A/ρ применением операторов взятия прямых произведений, подполумодулей и гомоморфных образов (см. [2], стр. 185).

Условие $M \in \Lambda$ будет доказано, ввиду $A/\rho \in \Lambda$, если мы покажем, что применение операторов взятия прямых произведений, подполумодулей и гомоморфных образов к A/ρ-полумодулям из $\bar{\Lambda}$ равносильно применению этих операторов к ним, как к A-полумодулям. Для операторов взятия прямых произведений и подполумодулей это очевидно. Покажем это для оператора взятия гомоморфных образов. Пусть $\varphi : N \to K$ -произвольный A/ρ-гомоморфизм A/ρ-полумодулей из $\bar{\Lambda}$. Тогда для любых $n \in N$, $a \in A$

$$\varphi(na) = \varphi(n[a]) = \varphi(n)[a] = \varphi(n)a,$$

т.е. φ есть A-гомоморфизм. Таким образом, $M \in \Lambda$.

Последнее рассуждение доказывает, что всякий A/ρ-гомоморфизм A/ρ-полумодулей из $\bar{\Lambda}$ является A-гомоморфизмом.

Докажем теперь, что если все A-полумодули из Λ проективны, то и все A/ρ-полумодули из $\bar{\Lambda}$ проективны. Пусть задана произвольная диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} & & P \\ & & \downarrow \varphi \\ M & \xrightarrow{\pi} & N \end{array}$$

в категории $\bar{\Lambda}$ и π- эпиморфизм. Ввиду вышесказанного, эту диаграмму можно рассматривать в категории Λ и тогда, поскольку A-полумодуль P проективен, существует A-гомоморфизм $\psi : P \to M$, так что $\pi\psi = \varphi$. Для произвольных $p \in P$, $a \in A$

$$\psi(p[a]) = \psi(pa) = \psi(p)a = \psi(p)[a],$$

т.е. ψ есть A/ρ-гомоморфизм и, следовательно, P- проективный A/ρ-полумодуль. Утверждение в скобках доказывается аналогично. Теорема доказана.

§ 2. Полукольца, над которыми все полумодули проективны

Пусть всюду в дальнейшем A - полукольцо с нулем 0 и единицей 1, Λ - некоторое фиксированное многообразие A-полумодулей, такое, что $A \in \Lambda$. Обозначим через $e \in A$ элемент $1 + 0$, т.е. $e = 1 + 0$.

Лемма 0. Элемент $e \in A$ является идемпотентом и для любого $a \in A$ выполняется $ae = ea$.

Действительно, $e^2 = (1 + 0)(1+0) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1 + 0(1 + 1 + 1) = 1 + 0 = e$, т.е. $e^2 = e$, и для любого $a \in A$ выполняется $ea = a + 0 = ae$.

Полукольцо A назовем специальным, если в нем $e=1$. Ясно, что полукольцо специально тогда и только тогда, когда $a+0 = a$ для любого $a \in A$. Наша первая цель - показать, что все A-полумодули из Λ над специальным полукольцом A проективны тогда и только тогда, когда A - классически полупростое кольцо. Для этого сформулируем ряд вспомогательных утверждений.

Полукольцо A назовем полукольцом с аддитивно внешним нулем, если для произвольных $a, b \in A$ из условия $a+b=0$ следует $a=b=0$. Пусть A - произвольное специальное полукольцо. Определим на A отношение ρ следующим образом:

$$(a,b) \in \rho \Leftrightarrow a+x=b, \quad b+y=a \tag{2}$$

для некоторых $x, y \in A$. Ввиду специальности полукольца A (благодаря ей ρ рефлексивно), легко проверить, что ρ - отношение эквивалентности и, более того, ρ - двусторонняя конгруэнция на A. Через R обозначим множество $\{a \in A \mid (a,0) \in \rho\}$, т.е. $R = [0]$.

Лемма 1. Пусть A - специальное полукольцо и ρ - конгруэнция на A, заданная условием (2). Тогда $R = [0]$ является подкольцом в A, причем из $a+b=0$ для некоторых $a, b \in A$ следует $a, b \in R$. Полукольцо A/ρ является специальным с аддитивно внешним нулем.

Доказательство. Вначале докажем первое утверждение. Для любого $r \in R$, ввиду $(r,0) \in \rho$, найдется $x \in A$, такой, что $r+x=0$. При этом $x \in R$, так как $x+r=0$, $0+x=x$ и значит $(x,0) \in \rho$. Остальные аксиомы кольца для R, очевидно, выполняются. Если теперь $a+b=0$ для некоторых $a,b \in A$, то из $0+a=a$, $0+b=b$ следует $(a,0) \in \rho$, $(b,0) \in \rho$, т.е. $a,b \in R$.

Покажем теперь, что A/ρ - специальное полукольцо с аддитивно внешним нулем. Специальность A/ρ следует из того, что

$$[a]+[0]=[a+0]=[a]$$

для любого $a \in A$. Пусть теперь $[a]+[b]=[0]$ для некоторых $a,b \in A$. Тогда $(a+b,0) \in \rho$ и значит найдется $x \in A$, такой, что $(a+b)+x=0$. Тогда $a+(b+x)=0$ и, ввиду вышедоказанного, $a \in R$, т.е. $(a,0) \in \rho$ и $[a]=0$. Аналогично, $b+(a+x)=0$ и $[b]=[0]$. Лемма доказана.

Для произвольного $a \in A$ обозначим $Ann(a)=\{c \in A \mid ac=0\}$.

Лемма 2. Пусть A - специальное полукольцо с аддитивно внешним нулем. Если все A-полумодули из Λ проективны, то $A=0$.

Доказательство. Рассмотрим A-полумодуль $F=A\times A\times A$, являющийся декартовым кубом A-полигона A. Элементами A-полигона F являются трехмерные векторы с элементами из A, а операции и равенство на элементах из F определены покомпонентно. Поскольку A-полигон A принадлежит Λ, то A-полигон F также принадлежит Λ.

Определим на F отношение $\sim$ следующим образом:

$$(a_1,a_2,a_3)\sim(b_1,b_2,b_3) \Leftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2,$$

$$\text{из } c \in Ann(a_1)\cup Ann(a_2) \text{ следует } a_3c=b_3c.$$

Покажем, что отношение $\sim$ является конгруэнцией на A-полумодуле F. Очевидно, что $\sim$ эквивалентность.

Пусть $(a_1,a_2,a_3)\sim(b_1,b_2,b_3)$, тогда для произвольного $d \in A$ выполняется $(a_1d,a_2d,a_3d)\sim(b_1d,b_2d,b_3d)$. Действительно, $a_1d=b_1d$ и $a_2d=b_2d$, ввиду $a_1=b_1$, $a_2=b_2$. Если теперь $c \in Ann(a_1d)\cup Ann(a_2d)$, то $dc \in Ann(a_1)\cup Ann(a_2)$ и тогда $a_3(dc)=b_3(dc)$, т.е. $(a_3d)c=(b_3d)c$. Пусть теперь $(a_1,a_2,a_3)\sim(b_1,b_2,b_3)$ и $(c_1,c_2,c_3)\sim(d_1,d_2,d_3)$

Тогда $(a_1+c_1, a_2+c_2, a_3+c_3) \sim (b_1+d_1, b_2+d_2, b_3+d_3)$. Действительно, $a_1+c_1 = b_1+d_1$, $a_2+c_2 = b_2+d_2$, ввиду $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $c_1 = d_1$, $c_2 = d_2$. Если $x \in \mathrm{Ann}(a_1+c_1) \cup \mathrm{Ann}(a_2+c_2)$ то $(a_1+c_1)x = 0$ или $(a_2+c_2)x = 0$, т.е. $a_1x + c_1x = 0$ или $a_2x + c_2x = 0$. Поскольку $\mathcal{A}$ – полукольцо с аддитивно внешним нулем, отсюда следует $a_1x = c_1x = 0$, или $a_2x = c_2x = 0$, т.е. $x \in \mathrm{Ann}(a_1) \cup \mathrm{Ann}(a_2)$ и $x \in \mathrm{Ann}(c_1) \cup \mathrm{Ann}(c_2)$. Тогда $a_3x = b_3x$ и $c_3x = d_3x$, т.е. $(a_3+c_3)x = (b_3+d_3)x$. Таким образом, $\sim$ – конгруэнция на $\mathcal{F}$. Ясно, что $\mathcal{F}/\sim\, \in \Lambda$.

По предположению все $\mathcal{A}$-полумодули из Λ, проективны и, следовательно, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{F}/\sim \arrow[d, "I"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "\pi"] & \mathcal{F}/\sim \end{tikzcd},$$

где π – естественный эпиморфизм, должна замыкаться, т.е. существует такой гомоморфизм $\varphi : \mathcal{F}/\sim \longrightarrow \mathcal{F}$, что $\pi\varphi = I$. Здесь и всюду в дальнейшем через I обозначен тождественный гомоморфизм. Теперь обозначим $(1,0,0) = f_1$; $(0,1,0) = f_2$, $(0,0,1) \in f_3$. Покажем, что $[f_i] = f_i$ $(i=1,2,3)$, где через $[f_i]$ обозначен класс конгруэнции $\sim$, содержащий элемент f_i.

Действительно, если $(a_1,a_2,a_3) \sim (1,0,0)$, то $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, а так как $1 \in \mathrm{Ann}(a_2)$, то $a_3 \cdot 1 = 0 \cdot 1$, т.е. $a_3 = 0$ и $(a_1,a_2,a_3) = (1,0,0)$. Аналогично для f_2 и f_3. Так как $\pi\varphi([f_i]) = I[f_i] = [f_i]$, то $\varphi([f_i]) \in [f_i]$ и тогда $\varphi([f_i]) = f_i$ для любого $i = 1,2,3$.

С другой стороны, для любого $a \in \mathcal{A}$

$$(1,1,a) \sim (1,1,0),$$

поскольку из $x \in \mathrm{Ann}(1) \cup \mathrm{Ann}(1)$ следует $x = 0$ и тогда $ax = 0x = 0$. Ввиду специальности полукольца $\mathcal{A}$, $(1,1,a) = f_1 + f_2 + f_3a$, $(1,1,0) = f_1 + f_2$ и значит

$$[f_1] + [f_2] + [f_3]a = [f_1 + f_2 + f_3a] = [(1,1,a)] = [1,1,0] = \\ = [f_1] + [f_2].$$

Применяя гомоморфизм φ к обеим частям этого равенства, получим

$$f_1 + f_2 + f_3a = f_1 + f_2,$$

т.е. $(1,1,a)=(1,1,0)$ для любого $a\in A$. Отсюда следует $a=0$ для любого $a\in A$. Лемма доказана.

Теорема 2. Все A-полумодули из Λ над специальным полукольцом A проективны тогда и только тогда, когда A - классически полупростое кольцо.

Доказательство. Достаточность следует из [I] (стр. 27, теорема 4.2) и из того, что всякий A-полумодуль из Λ над кольцом A при любом Λ является модулем.

Необходимость. Если все A-полумодули из Λ проективны, то, по теореме I, все A/ρ-полумодули из $\bar{\Lambda}$ также проективны, где ρ - конгруэнция на A, определенная условием (2). По лемме I полукольцо A/ρ является специальным полукольцом с аддитивно внешним нулем и, ввиду леммы 2, $A/\rho=0$. Это значит, что $(1,0)\in\rho$, т.е. существует такой $x\in A$, что $1+x=0$. Тогда для любого $a\in A$ существует противоположный ему элемент $ax\in A$, поскольку

$$a+ax=a(1+x)=0,$$

т.е. A - кольцо и, следовательно, ([I], стр. 27, теорема 4.2) классически полупростое. Теорема доказана.

Предположим теперь, что полукольцо A не является специальным, т.е. $e=1+0\neq 1$. Рассмотрим A-полумодуль $M=(A\times A)\in\Lambda$, являющийся декартовым квадратом A, действие на элементах которого определено покомпонентно, и рассмотрим подполумодуль $B\in\Lambda$ полумодуля M, порожденный элементами $\bar{b}_1=(1,0)$ и $\bar{b}_2=(0,1)$. Тогда для произвольных $x,y\in A$ элемент $\bar{b}_1x+\bar{b}_2y$ имеет вид $(1,0)x+(0,1)y=$ $=(x,0)+(0,y)=(x+0,\ 0+y)=(ex,\ ey)$. Следовательно,

$$B=\{(x,0)\mid x\in A\}\cup\{(0,y)\mid y\in A\}\cup\{(x,y)\mid x,y\in eA\}. \qquad (3)$$

Заметим, что $B\neq M$. Действительно, элемент $e\in A$, ввиду леммы 0, является идемпотентом и по предположению $e\neq 1$. Тогда $eA\neq A$, ибо в противном случае, если $eA=A$, найдется такой $x\in A$, что $ex=1$ и, следовательно, $e=e\cdot 1=e\cdot ex=$ $=e^2x=ex=1$, т.е. $e=1$, что противоречит предположению $e\neq 1$. Подполумодуль $B\in\Lambda$, будет нами использован в следующей лемме.

Лемма 3. Если все A-полумодули из Λ проективны, то в Λ выполняется тождество

$$x+y=xe+ye=x+y+0.$$

Доказательство. Если полукольцо A – специальное, т.е. $e=1+0=1$, то равенство $x+y=xe+ye=(x+y)e=x+y+0$, очевидно, выполняется. Предположим, что полукольцо A не специальное. Пусть F – свободный A-полумодуль из Λ с двумя свободными образующими f_1 и f_2. Заметим, что такой A-полумодуль $F\in\Lambda$ существует, поскольку в многообразии Ω-алгебр существуют свободные Ω-алгебры с произвольным числом свободных образующих (см., например, [2], стр. 186).

Элементами свободного полумодуля F, очевидно, являются всевозможные элементы вида f_1a, f_2c, f_1a+f_2c $(a,c\in A)$. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & & B \\ & & \downarrow{\scriptstyle I} \\ F & \xrightarrow{\pi} & B \end{array},$$

где π – эпиморфизм, такой, что $\pi(f_i)=\bar{b}_i$ $(i=1,2)$, ввиду проективности A-полумодуля B, замыкается, т.е. существует $\varphi: B\to F$, так что $\pi\varphi=I$.

Покажем, что при эпиморфизме π в элемент $\bar{b}_i$ переходит лишь один элемент f_i $(i=1,2)$. Действительно, пусть $g\in F$ такой элемент, что $\pi(g)=\bar{b}_1$. Если $g=f_1x+f_2y$ при некоторых $x,y\in A$, то

$$\pi(g)=\pi(f_1x+f_2y)=\pi(f_1)x+\pi(f_2)y=\bar{b}_1x+\bar{b}_2y=(x,0)+(0,y)=(ex,ey),$$

т.е. $\bar{b}_1=(1,0)=(ex,ey)$ и $ex=1$, что невозможно, ввиду $eA\subset A$. Если $g=f_2y$, то $\pi(g)=\pi(f_2y)=\pi(f_2)y=\bar{b}_2y=(0,y)$ и тогда мы получим $(1,0)=(0,y)$, что невозможно, ввиду $1\neq 0$. Если, наконец, $g=f_1x$, то $\pi(g)=\pi(f_1)x=\bar{b}_1x=(x,0)$ и тогда получим $(1,0)=(x,0)$, т.е. $x=1$ и $g=f_1$. Таким образом, в элемент $\bar{b}_1$ при эпиморфизме π отображается только один элемент f_1. Аналогично можно показать, что только элемент f_2 отображается эпиморфизмом π в элемент $\bar{b}_2$.

Но теперь из $\pi\varphi(\bar{b}_i)=I(\bar{b}_i)=\bar{b}_i$ следует, что $\varphi(\bar{b}_i)=$

$=f_i$ $(i=1,2)$. Заметим, что в полумодуле B выполняется следующее равенство

$$\bar{b}_1+\bar{b}_2 = (1,0)+(0,1)=(1+0,0+1)=(e,e)=(e,e)e=\bar{b}_1e+\bar{b}_2e.$$

Применим к обеим частям этого равенства гомоморфизм φ и получим

$$f_1+f_2=f_1e+f_2e=(f_1+f_2)e=(f_1+f_2)(1+0)=f_1+f_2+0.$$

Этим, очевидно, лемма доказана.

Сформулируем еще два вспомогательных утверждения, которые представляют и самостоятельный интерес. Правую конгруэнцию ρ на полукольце A назовем порожденной элементом $a\in A$, если

$$(x,y)\in\rho \Leftrightarrow ax=ay\ . \tag{4}$$

Легко проверить, что это определение корректно, т.е. отношение ρ, определенное условием (4), действительно является правой конгруэнцией.

<u>Лемма 4</u>. Все циклические A-полумодули проективны тогда и только тогда, когда каждая правая конгруэнция ρ на A порождается некоторым идемпотентом $a\in A$, таким, что $(a,1)\in\rho$.

<u>Доказательство</u>. <u>Необходимость</u>. Пусть ρ – произвольная правая конгруэнция на A, тогда A/ρ есть циклический A-полумодуль с образующим [I], поскольку $[1]x=[x]$ для любого $x\in A$. Ввиду проективности A-полумодуля A/ρ диаграмма

$$\begin{tikzcd} & A/\rho \arrow[d, "I"] \\ A \arrow[r, "\pi"] & A/\rho \end{tikzcd},$$

где π – естественный эпиморфизм, замыкается гомоморфизмом $\varphi: A/\rho\to A$, т.е. $\pi\varphi=I$. Обозначим $a=\varphi[1]$. Тогда $\pi(a)=\pi\varphi([1])=I([1])=[1]$, т.е. $(a,1)\in\rho$. Далее, $aa=\varphi([1])a=\varphi([1]a)=\varphi([a])=\varphi([1])=a$, т.е. $a^2=a$. Пусть $(x,y)\in\rho$, т.е. $[1]x=[x]=[y]=[1]y$, тогда

$$ax=\varphi([1])x=\varphi([x])=\varphi([y])=ay.$$

Обратно, если $ax=ay$, то

$$[x]=[1]x=\pi(a)x=\pi(ax)=\pi(ay)=\pi(a)y=[y].$$

Таким образом, ρ порождается элементом $a\in A$ и необходимость доказана.

Достаточность. Всякий циклический A-полумодуль изоморфен фактор-полумодулю A/ρ, где ρ – подходящая правая конгруэнция на A. Как и в теории модулей над кольцами нам достаточно показать, что существуют гомоморфизмы $\psi: A\to A/\rho$ и $\varphi: A/\rho\to A$, так что $\psi\varphi=I$. Пусть $M\simeq A/\rho$ – произвольный циклический A-полумодуль. Тогда по предположению, правая конгруэнция ρ порождается некоторым идемпотентом $a\in A$, таким что $(a,1)\in\rho$. Пусть теперь $\psi: A\to A/\rho$ – естественный эпиморфизм и $\varphi: A/\rho\to A$ такое отображение, что $\varphi[x]=ax$ для любого $x\in A$. Из того, что $a\in A$ порождает ρ, следует однозначность φ и то, что φ – вложение. Легко проверить также, что φ есть A-гомоморфизм. Тогда $\psi\varphi([x])=\psi(\varphi[x])=\psi(ax)=\psi(a)x=[1]x=[x]$, т.е. $\psi\varphi=I$. Лемма доказана.

Лемма 5. Для того, чтобы все S-полигоны над моноидом S с нулем 0 были проективны, необходимо и достаточно, чтобы $S=\{1,0\}$ (ср. [5]), теорема 3).

Доказательство. Достаточность очевидна.

Необходимость. Пусть R – собственный правый идеал в S и ρ – правая конгруэнция Риса, склеивающая все элементы из R и не склеивающая никакие различные элементы из $S\setminus R$. По лемме 4 ρ порождается идемпотентом $a\in S$, таким, что $(a,1)\in\rho$. Последнее, по определению ρ, означает: $a=1$, т.е. ρ есть нулевая конгруэнция и $R=0$. Отсюда следует (ввиду того, что S содержит единицу), что S есть группа с внешним нулем. Пусть теперь σ – конгруэнция на S, склеивающая все элементы из группы $S\setminus 0$. По лемме 4 она также порождается идемпотентом $a\in S$, таким, что $(a,1)\in\sigma$, т.е. $a\in S\setminus 0$. Но так как a – идемпотент в группе $S\setminus 0$, то $a=1$ и σ – нулевая конгруэнция. Это возможно лишь в случае $S=\{1,0\}$. Лемма доказана.

Теорема 3. Все A-полумодули из Λ над полукольцом A проективны тогда и только тогда, когда либо

I) A – классически полупростое кольцо, либо

2) $A=\{1,0\}$ – моноид с нулевым сложением и в Λ выполняется тождество $x+y=0$.

Доказательство. Достаточность следует из теоремы 2 и леммы 5.

Необходимость. Если полукольцо A специальное, то по теореме 2, A удовлетворяет условию I).

Предположим, что все полумодули из Λ над не специальным полукольцом A проективны и докажем, что тогда выполняется условие 2). Так как $e=1+0\neq 1$, то по лемме 0, eA – собственный двусторонний идеал в A. Более того, $eA=\{ea \mid a\in A\}=\{a+0 \mid a\in A\}$ легко видеть, является идеалом в аддитивной полугруппе $(A,+)$. Теперь можно определить конгруэнцию Риса, склеивающую все элементы из eA в один элемент и не склеивающую никакие различные элементы из $A\setminus eA$. По лемме 4 эта конгруэнция ρ порождается идемпотентом $a\in A$, таким, что $(a,1)\in\rho$. Так как $1\notin eA$, последнее означает, что $a=1$ и следовательно, ρ – нулевая конгруэнция, т.е. $eA=0$ и $e=0$. Тогда по лемме 3 в Λ выполняется тождество

$$x+y=xe+ye=0.$$

Теперь произвольный полигон M над A как моноидом, можно превратить в A-полумодуль, введя на M нулевое сложение (легко видеть, что все аксиомы полумодуля выполняются) и, очевидно, $M\in\Lambda$. Поскольку все A-полумодули из Λ проективны, то все полигоны над моноидом A проективны. Тогда, по лемме 5, $A=\{1,0\}$. Теорема доказана.

Замечание. При выводе результатов этого параграфа мы пользовались лишь тем условием, что все конечно порожденные A-полумодули из Λ проективны.

§ 3. Специальные полукольца, над которыми все полумодули инъективны

В этом параграфе мы всюду, если не оговорено противное, будем рассматривать A-полумодули из Λ над специальным полукольцом A, т.е. полукольцом, где $0+a=a$ для любого $a\in A$. Наша цель: показать, что если все A-полумодули из Λ над специальным полукольцом A инъективны, то A является классически полупростым кольцом.

Как и в § 2 , изучение специальных полуколец мы сведем к изучению специальных полуколец с аддитивно внешним нулем. Поэтому вначале докажем ряд вспомогательных утверждений для специальных полуколец с аддитивно внешним нулем (как уже было замечено, термин "специальное" в этом параграфе для краткости опускается).

Лемма 6. Пусть A - полукольцо с аддитивно внешним нулем. Тогда отношение ρ на A, определенное :

$$(x,y)\in\rho \Leftrightarrow \mathrm{Ann}(x)=\mathrm{Ann}(y),$$

является правой конгруэнцией на A.

Доказательство. Очевидно, что ρ - эквивалентность. Если теперь $(x,y)\in\rho$, то $(xa,ya)\in\rho$ для любого $a\in A$. Действительно, пусть $c\in \mathrm{Ann}(xa)$, т.е. $(xa)c=0$. Тогда $x(ac)=0$ и $ac\in\mathrm{Ann}(x)$, значит $ac\in\mathrm{Ann}(y)$, т.е. $y(ac)=0$ и $(ya)c=0$. Следовательно, $c\in\mathrm{Ann}(ya)$ и мы получили $\mathrm{Ann}(xa)\subseteq\mathrm{Ann}(ya)$. Аналогично доказывается и обратное включение.

Пусть, наконец, $(x,y)\in\rho$ и $(x_1,y_1)\in\rho$. Покажем, что $(x+x_1,\ y+y_1)\in\rho$. Действительно, если $a\in\mathrm{Ann}(x+x_1)$, т.е. $(x+x_1)a=xa+x_1a=0$, то поскольку A - полукольцо с аддитивно внешним нулем, $xa=x_1a=0$. Тогда $ya=y_1a=0$ и $a\in\mathrm{Ann}(y+y_1)$, т.е. $\mathrm{Ann}(x+x_1)\subseteq\mathrm{Ann}(y+y_1)$. Аналогично доказывается обратное включение. Лемма доказана.

Правую конгруэнцию ρ из леммы 6 назовем эквианнуляторной конгруэнцией. Заметим, что нулевой класс $[0]$ конгруэнции ρ состоит лишь из одного элемента 0, поскольку из $(a,0)\in\rho$ и $1\in\mathrm{Ann}(0)$ следует $a\cdot 1=0\cdot 1$, т.е. $a=0$. Этот факт будет нами использоваться в следующей лемме.

Лемма 7. Пусть A - полукольцо с аддитивно внешним нулем, над которым все полумодули из Λ инъективны. Тогда в A существует элемент $y\in A$, порождающий эквианнуляторную конгруэнцию и такой, что $y^2=y$, $y+a=y$ для любого $a\in A$.

Доказательство. Рассмотрим A-полумодуль $M=A/\rho\times A$, являющийся прямым произведением A-полумодулей A/ρ и A, где ρ - эквианнуляторная конгруэнция на A. Ясно, что $M\in\Lambda$. Определим на M отношение σ следующим образом:

$([a],b)\,\sigma\,([a_1],b_1) \Leftrightarrow [a]=[a_1]$ и из $[a]c=[0]$ следует $bc=b_1c$. Отношение σ, очевидно, является эквивалентностью.

Покажем, что σ есть конгруэнция A-полумодуля M. Отношение σ сохраняет умножение на элементы из A. Действительно, из $([a],b)\,\sigma\,([a_1],b_1)$ для любого $x\in A$ следует $[a]x=[a_1]x$, ввиду $[a]=[a_1]$. Если $([a]x)c=[0]$, то $[a](xc)=0$ и, следовательно, $b(xc)=b_1(xc)$. Тогда $(bx)c=(b_1x)c$ и значит $([a]x,\ bx)\,\sigma\,([a_1]x,\ b_1x)$. Отношение σ сохраняет операцию сложения. Действительно, пусть $([a],b)\sigma$ $\sigma([a_1],b_1)$ и $([a_2],b_2)\,\sigma\,([a_3],b_3)$. Тогда ввиду $[a]=[a_1]$, $[a_2]=[a_3]$, имеем $[a]+[a_2]=[a_1]+[a_3]$. Если теперь $([a]+[a_2])c=[0]$, то, поскольку $[0]=0$ имеем $ac+a_2c=0$. Но отсюда следует $ac=a_2c=0$ и $[a]c=[a_2]c=[0]$. Тогда необходимо $bc=b_1c$, $b_2c=b_3c$ и $(b+b_2)c=(b_1+b_3)c$. Таким образом $([a]+[a_2],\ b+b_2)\ \sigma\ ([a_1]+[a_3],\ b_1+b_3)$.

Заметим, что из условия $([0],b)\,\sigma\,([0],b_1)$ следует $b=b_1$, так как $[0]\cdot 1=[0]$ и тогда $b\cdot 1=b_1\cdot 1$. Поэтому отображение $i: A\to M/\sigma$ такое, что

$$i(a)=([0],a)_\sigma,$$

где правая часть этого равенства означает класс конгруэнции σ, является вложением. Следовательно, ввиду инъективности A, диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I"'] & M/\sigma \\ A & \end{tikzcd}$$

замыкается гомоморфизмом $\varphi: M/\sigma\to A$, так что $\varphi i=I$. Обозначим $y=\varphi([1],0)\sigma$. Покажем, что элемент $y\in A$ удовлетворяет нужным нам условиям.

Действительно, для произвольного $a\in A$ выполняется $([1],0)\,\sigma\,([1],a)$, поскольку из $[1]c=[0]$ следует $c=0$ и тогда $0\cdot c=a\cdot c=0$. Поэтому

$$y+a=\varphi([1],0)\sigma+\varphi i(a)=\varphi([1],0)\sigma+\varphi([0],a)\sigma=$$
$$=\varphi([1],a)\sigma=\varphi([1],0)\sigma=y.$$

Теперь покажем, что y порождает эквианнуляторную конгруэнцию ρ. Действительно, пусть $(a,b)\in\rho$, тогда

$$ya = \varphi([1],0)_\sigma \cdot a = \varphi([a]+0)_\sigma = \varphi([b]+0)_\sigma = yb.$$

Обратное докажем от противного. Пусть найдутся такие $a,b\in A$, что $ya=yb$ и $(a,b)\notin\rho$. Тогда $Ann(a)\neq Ann(b)$ и, следовательно, существует $c\in A$, такой, что, для определенности, $ac=0$, $bc\neq 0$. Тогда $y(bc)=(yb)c=(ya)c=y(ac)=0$, т.е. $y(bc)=0$. Но из $yd=0$ для некоторого $d\in A$ следует $d=0$, ибо

$$0 = yd = (y+1)d = yd+d = 0+d = d.$$

Поэтому $bc=0$, что противоречит условию $bc\neq 0$. Таким образом, y порождает эквианнуляторную конгруэнцию.

Последнее рассуждение доказывало то, что y не является делителем нуля, т.е. $Ann(y)=Ann(1)=0$, другими словами $(y,1)\in\rho$ и тогда $y\cdot y=y$. Лемма доказана.

Прежде, чем сформулировать следующую лемму, докажем одно утверждение, которое имеет место и для не специального полукольца.

<u>Лемма 8</u>. Если правый идеал R полукольца A инъективен как A-полумодуль, то он порождается идемпотентом, являющимся левой единицей в R.

<u>Доказательство</u>. Ввиду инъективности R, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & A \\ {\scriptstyle I}\big| & & \\ R & & \end{array},$$

где i - естественное вложение, должна замыкаться гомоморфизмом $\varphi: A\to R$, так что $\varphi i = I$. Пусть $f=\varphi(1)$. Тогда для произвольного $r\in R$

$$fr = \varphi(1)r = \varphi(r) = \varphi i(r) = I(r) = r.$$

В частности, $f^2=f$. Лемма доказана.

<u>Лемма 9</u>. Если над полукольцом $A\neq 0$ с аддитивно внешним нулем все полумодули из Λ инъективны и на нем отсутствуют нетривиальные двусторонние конгруэнции, то эквианнуляторная конгруэнция на A является нулевой и для любого

$a \in A$ будет $1 + a = 1$.

Доказательство. По лемме 7 в полукольце A найдется элемент $y \in A$, порождающий эквианнуляторную конгруэнцию, и такой, что $y + a = y$ для любого $a \in A$ и $y^2 = y$. Как было показано в конце доказательства леммы 7, из $ya = 0$ следует $a = 0$ и аналогично из $ay = 0$ следует $a = 0$, т.е. y не является делителем нуля.

Докажем, что для произвольного $a \neq 0$ из A будет $yay = y$. Для этого сперва покажем, что $Ann(ay) = 0$.

Действительно, пусть $c \in Ann(ay)$, т.е. $(ay)c = 0$. Тогда для произвольного $x \in A$ имеем

$$(ay)xc = (ay)xc + 0 = a(yx)c + ayc = a(yx + y)c =$$
$$= ayc = 0,$$

поскольку $y + yx = y$. Теперь определим отношение σ формулой

$$(c_1, c_2) \in \sigma \Leftrightarrow ay(xc_1) = ay(xc_2) \text{ для любого } x \in A$$

Легко проверить, что σ - двусторонняя конгруэнция на A. Мы видели, что $ay(xc) = 0$ для любого $x \in A$, т.е. $(c, 0) \in \sigma$. По предположению, σ - тривиальная конгруэнция. Ясно, что σ не единичная, ибо тогда $(1, 0) \in \sigma$ и $ay1 = ay0 = 0$, т.е. $ay = 0$, что противоречит условию $ay \neq 0$. Следовательно, σ - нулевая конгруэнция и значит $c = 0$. Таким образом $Ann(ay) = 0 = Ann(1)$.

Так как $y \in A$ порождал эквианнуляторную конгруэнцию, то $yay = y$ для любого $a \in A$, $a \neq 0$.

Рассмотрим идеал AyA. Если $AyA = A$, то найдутся $a, b \in A$, так что $ayb = 1$. Тогда $y = y1 = y(ayb) = (yay)b = yb$ и $y = 1y = (ayb)y = a(yby) = ay$, т.е. $1 = (ay)b = yb = y$ и утверждение леммы, очевидно, выполняется.

Покажем теперь, что строгое включение $AyA \subset A$ невозможно. Действительно, идеал AyA - инъективный правый идеал и по лемме 8, он порождается идемпотентом $f = cyd$. Тогда для произвольных $a, b \in A (a, b \neq 0)$

8

$$ayb = f(ayb) = (cyd)(ayb) = c(yday)b = cyb.$$

В частности, взяв $a = b = y$, получим $cy = y$, а взяв $b = y$, получим $ay = cy = y$ для любого $a \in A$. Но тогда в A отсутствуют делители нуля, ибо если $ab = 0$ $(a, b \neq 0)$, то $0 = (ab)y = a(by) = ay = y$, что невозможно, ввиду $A \neq 0$. Это значит, что элемент 0 оказывается внешним в полугруппе $(A, \cdot)$ и, следовательно, в полукольце A. Конгруэнция, склеивающая все ненулевые элементы в один, должна быть тривиальной, т.е. $A = \{1, 0\}$ и здесь $y = 1$, что противоречит предположению $AyA \subset A$. Лемма доказана.

Теорема 4. Все полумодули из Λ над специальным полукольцом A инъективны тогда и только тогда, когда A - классически полупростое кольцо.

Доказательство. Достаточность, как и в теореме 2, следует из ([I], теорема 4.2, стр. 27).

Необходимость. Если A - кольцо, то справедливость утверждения следует из теоремы 4.2 ([I], стр. 27). Пусть A не является кольцом, тогда на A двусторонняя конгруэнция ρ, заданная условием (2) в § 2, будет нетривиальной. Покажем, что это приведет нас к противоречию.

По лемме I A/ρ - специальное полукольцо с аддитивно внешним нулем и, по теореме I, все A/ρ-полумодули инъективны. По следствию 6.4 (см. [2], стр. IO3) на полукольце $A' = A/\rho$ существует максимальная собственная двусторонняя конгруэнция σ. Тогда на полукольце $A'' = A'/\sigma$ отсутствуют нетривиальные двусторонние конгруэнции и все A''-полумодули инъективны. Ясно, что A'' также является специальным полукольцом.

Покажем, что A'' - полукольцо с аддитивно внешним нулем. Действительно, конгруэнция (2) из § 2, определенная на A'', должна быть тривиальной, т.е. либо A'' - полукольцо с аддитивно внешним нулем, либо A'' - кольцо. Последнее невозможно, поскольку в $A' = A/\rho$, по лемме 7, содержится такой элемент $y' \in A'$, что $y' + a' = y'$ для любого $a' \in A'$. Тогда $[y']_\sigma + [a']_\sigma = [y']_\sigma$. Но такое равенство в кольце A'' возможно лишь, когда $A'' = 0$, что противоречит собственности

σ. Значит A'' – полукольцо с аддитивно внешним нулем.

Теперь по лемме 9 эквианнуляторная конгруэнция на A'' является нулевой и для любого $a''\in A''$ будет $a''+1''=1''$. Покажем, что тогда A'' – дистрибутивная структура.

Действительно, для произвольного $a''\in A''$ правый идеал $a''A''$ инъективен и по лемме 8 существует идемпотент $f''\in a''A''$, такой, что $a''=f''a''$. Пусть $f''=a''c''$. Тогда $a''c''a''=a''$. Легко видеть, что $\mathrm{Ann}(c''a'')=\mathrm{Ann}(a'')$, ибо из $a''x''=0$ следует $(c''a'')x''=0$, а из $(c''a'')x''=0$ следует $a''x''=a''(c''a'')x=0$. Но тогда $c''a''=a''$ и $a''\cdot a''=a''$.

Теперь остается доказать лишь коммутативность умножения. Для произвольных $a'', b''\in A''$ будет

$$a''b''+a''=a''(b''+1'')=a''.$$

Умножив слева на $a''b''$, получим

$$(a''b'')(a''b'')+a''b''a''=a''b''a'',$$

но $(a''b'')(a''b'')=a''b''$ и, следовательно,

$$a''b''a''=a''b''+a''b''a''=a''b''(1+a'')=a''b''.$$

С другой стороны, имеем

$$a''b''+b''=(a''+1'')b''=b''.$$

Умножив справа на $a''b''$, получим

$$b''a''b''=(a''b'')(a''b'')+b''(a''b'')=a''b''+b''(a''b'')=a''b''.$$

Тогда

$$a''b''=(a''b'')a''=(b''a''b'')a''=(b''a'')(b''a'')=b''a''.$$

Таким образом, A'' – дистрибутивная структура, над которой все полумодули инъективны. Из результатов работы ([6], стр. 1159) следует, что $A''=0$, что противоречит собственности σ. Теорема доказана.

§ 4. Полукольца, над которыми все полумодули инъективны

В этом параграфе мы дадим описание полукольца A (не обязательно специального), над которым все полумодули из Λ инъективны. При этом, как и в § 2, в случае проективных полигонов, возникает некоторое дополнительное условие и на многообразие A-полигонов Λ.

Пусть, по-прежнему, $e = 1+0$.

<u>Лемма 10</u>. **Если все полумодули из Λ над полукольцом A инъективны, то идеал eA полукольца A является классически полупростым кольцом.**

<u>Доказательство</u>. По лемме 0 идемпотент $e \in A$ коммутирует с любым элементом $a \in A$ и потому правая конгруэнция ρ, порожденная элементом $e \in A$, является двусторонней и, легко видеть, $eA \cong A/\rho$. Следовательно, по теореме I, все полумодули из $\bar{\Lambda}$ над полукольцом eA инъективны. Но для любого $x \in eA$ имеем $x+0 = x(1+0) = xe = x$, т.е. полукольцо eA является специальным и тогда, по теореме 4, классически полупростым кольцом. Лемма доказана.

Заметим, что единицей кольца $eA = R$ будет элемент $e \in R$ и для каждого $r \in R$ через $(-r) \in R$ условимся обозначать такой элемент, что $r + (-r) = 0$.

<u>Лемма 11</u>. Если все A-полумодули из Λ инъективны, то в Λ выполняется тождество

$$x + y = xe + ye = x + y + 0 .$$

<u>Доказательство</u>. Пусть F - свободный в Λ полумодуль, порожденный двумя свободными образующими f_1 и f_2. Обозначим через G совокупность пар вида $(x, 0_F)$, $(0_F, x)$, (xe, ye), где x, y пробегают весь полумодуль F. Если теперь на элементах из G определить операцию "+" и умножения справа на элементы из A покомпонентно, то G превращается в A-полумодуль, поскольку для любых $x \in F$, $y \in Fe$ выполняется

$$x + ye = x + y(1+0) = x + (y + 0_F) = (x + 0_F) + y = xe + y \in Fe.$$

Таким образом, G оказывается подполумодулем A-полумодуля $B = F \times F \in \Lambda$ и $G \in \Lambda$.

Поскольку G – инъективный A-полумодуль, диаграмма

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I"'] & B \\ G & \end{tikzcd}$$

где i – естественное вложение, замыкается гомоморфизмом $\varphi : B \longrightarrow G$, так что $\varphi i = I$. Теперь будем различать два случая.

I. Предположим, что $e \neq 0$. Пусть $\varphi(f_1, f_1) = (x, y)$. Тогда

$$(xe,\ ye) = [\varphi(f_1, f_1)]e = \varphi(f_1e, f_1e) = \varphi i(f_1e, f_1e) = (f_1e, f_1e),$$

и, следовательно, $xe = ye = f_1e$. Ввиду $f_1e \neq O_F$, имеем $xe \neq O_F$, $ye \neq O_F$, а это означает, что $x \neq O_F$, $y \neq O_F$. Отсюда, по построению подполумодуля G и ввиду $(x, y) \in G$, следует, что $x, y \in Fe$. Тогда $xe = x$, $ye = y$ и, следовательно,

$$\varphi(f_1, f_1) = (x, y) = (xe, ye) = (f_1e, f_1e).$$

Аналогично можно показать, что $\varphi(f_2, f_1(-e)) = (f_2e, f_1(-e))$. Действительно, если $\varphi(f_2, f_1(-e)) = (x, y)$, то

$$(xe,\ ye) = \varphi(f_2, f_1(-e))e = \varphi(f_2e, f_1(-e)) = \varphi i(f_2e, f_1(-e)) = (f_2e, f_1(-e))$$

т.е. $xe = f_2e$, $ye = f_1(-e)$. Отсюда следует $x, y \neq O_F$ и значит $x, y \in Fe$ и $xe = x$, $ye = y$, т.е.

$$\varphi(f_2, f_1(-e)) = (x, y) = (xe, ye) = (f_2e, f_1(-e)).$$

Заметим, что $1 + (-e) = 1 + [(-e) + 0] = (1 + 0) + (-e) = e + (-e) = 0$

Тогда в B имеет место равенство

$$(f_1, f_1) + (f_2, f_1(-e)) = (f_1 + f_2, f_1 + f_1(-e)) = (f_1 + f_2, f_1(1 + (-e))) = (f_1 + f_2, O_F).$$

Применяя к этому равенству гомоморфизм φ и учитывая, что элемент из правой части принадлежит G, т.е. φ оставляет его на месте, получим

$$(f_1e, f_1e) + (f_2e, f_1(-e)) = ((f_1 + f_2)e, O_F) = (f_1 + f_2, O_F),$$

т.е. $f_1+f_2=(f_1+f_2)e$. Поскольку f_1, f_2 - свободные образующие, то аналогичное равенство выполняется для любых элементов любого A-полумодуля из Λ и в этом случае лемма доказана.

2. Предположим теперь, что $e=0$. Тогда $G=\{(x,0_F),(0_F,y)\mid x,y\in F\}$. Предположим, для определенности, что $\varphi(f_1,f_1)=(x,0_F)$ для некоторого $x\in F$. Заметим, что в B выполняется равенство

$$(f_1,f_1)+(0_F,f_2)=(f_1+0_F,f_1+f_2)=(f_1e,f_1+f_2)=(0_F,f_1+f_2),$$

применяя к нему гомоморфизм φ и учитывая, что $(0_F,f_2)$, $(0_F,f_1+f_2)\in G$, т.е. φ их оставляет на месте, получим

$$(x,0_F)+(0_F,f_2)=(x+0_F,0_F+f_2)=(xe,f_2e)=(0_F,0_F)=(0_F,f_1+f_2)$$

т.е. $f_1+f_2=0_F=(f_1+f_2)e$. Лемма доказана.

Лемма I2. Если все A-полумодули из Λ инъективны, то для всякого идемпотента $f\in A\setminus R$ выполняется $fe=e$.

Доказательство. Пусть $f\in A\setminus R$ и $f^2=f$. Рассмотрим множество $P=fA\cup R$. Множество P является правым идеалом, так как для любых $x,y\in P$, по лемме II, $x+y=(x+y)e\in R$ и для любого $a\in A$, очевидно, $xa\in P$. Поскольку P - инъективный правый идеал, то, по лемме 8, он порождается идемпотентом $p\in P$, являющимся левой единицей в P. Ясно, что $p\notin R$, ибо в противном случае $P\subseteq R$, что противоречит условию $f\notin R$. Значит $p=fa$ для некоторого $a\in A$. Тогда $fp=f(fa)=f^2a=fa=p$ и, поскольку p - левая единица в P, $pe=e$. Отсюда получаем

$$fe=f(pe)=(fp)e=pe=e.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые факты из теории полигонов над моноидами.

Лемма I3. Если все S-полигоны над моноидом S с нулем 0 инъективны, то нуль 0 в моноиде S является внешним.

Доказательство. Вначале покажем, что если $f,g\in S$ идемпотенты в S, то либо $fg=g$, либо $gf=f$. Действительно, аналогично доказательству леммы 8 можно показать, что всякий правый идеал $\mathcal{D}$ моноида S порождается идемпотентом $d \in \mathcal{D}$, т.е. $dS = \mathcal{D}$ и d является левой единицей в $\mathcal{D}$. Пусть теперь f и g – произвольные идемпотенты в S. Тогда правый идеал $fS \cup gS$ порождается идемпотентом $c \in S$ и $cf = f$, $cg = g$. Предположим для определенности, что $c = fx$ для некоторого $x \in S$, т.е. $fc = f^2x = fx = c$. Тогда

$$fg = f(cg) = (fc)g = cg = g.$$

Если предположить, что $c \in gS$, то получим $gf = f$.

Пусть теперь для некоторых $x, y \in S$ выполняется $xy = 0$. Правый идеал xS порождается идемпотентом $xx^*(x^* \in S)$ и $xx^*x = x$. Аналогично найдется $y^* \in S$, так, что $yy^*y = y$ (yy^* – идемпотент). Элементы x^*x, yy^* являются идемпотентами в S и поэтому либо $(x^*x)(yy^*) = yy^*$, либо $(yy^*)(x^*x) = x^*x$. Если выполнено первое равенство, то

$$y = (yy^*)y = (x^*x)(yy^*)y = x^*(xy)y^*y = 0,$$

если выполнено второе, то

$$x = x(x^*x) = x(yy^*)(x^*x) = (xy)y^*x^*x = 0.$$

Лемма доказана.

Теперь введем в рассмотрение одну конструкцию, которая нам понадобится в дальнейшем. Пусть S – произвольный моноид (не обязательно с нулем) с единицей 1_S, R – произвольное кольцо с единицей $e \in R$, $\psi: S \to R$ – некоторый гомоморфизм полугруппы S в мультипликативную полугруппу кольца R, причем $\psi(1_S) = e$. Рассмотрим множество $A = S \cup R$, являющееся непересекающимся объединением множеств S и R. На множестве A операции умножения и сложения являются частичными. Продолжим их на все A, полагая для произвольных $s, t \in S$, $r \in R$

$$s + t = t + s = \psi(s) + \psi(t), \quad s + r = r + s = \psi(s) + r$$

$$sr = \psi(s)r \quad , \quad rs = r\psi(s) \quad . \tag{5}$$

Легко проверить, что A является полукольцом с единицей. Ассоциативность и коммутативность сложения следуют из того, что таковым является сложение в R. Ассоциативность умножения следует из ассоциативности умножения в S и R. Например,

$$(rs)t=(r\psi(s))t=(r\psi(s))\psi(t)=r(\psi(s)\psi(t))=r\psi(st)=r(st)$$

для любых $r\in R$; $s,t\in S$. Дистрибутивность:

$$q(s+t)=q(\psi(s)+\psi(t))=\psi(q)(\psi(s)+\psi(t))=\psi(qs)+\psi(qt)=$$

$$=qs+qt$$

$$s(r+p)=\psi(s)(r+p)=\psi(s)r+\psi(s)p=sr+sp,$$

$$t(s+r)=t(\psi(s)+r)=\psi(t)(\psi(s)+r)=\psi(ts)+\psi(t)r=$$

$$=ts+tr,$$

для любых $q,s,t\in S$; $r,p\in R$. Остальные случаи проверяются аналогично. Таким образом, A является полукольцом, относительно введенных операций (5), причем $1_S\in A$ является единицей в A, поскольку

$$1_S\cdot r=\psi(1_S)r=er=r,\quad r\cdot 1_S=r\psi(1_S)=re=r$$

для любого $r\in R$. Полукольцо $A=S\cup R$, определенное условием (5), будем называть расширением кольца R моноидом S и гомоморфизмом ψ и обозначать (R,S,ψ). Заметим, что говоря о расширении (R,S,ψ) кольца R моноидом S и гомоморфизмом ψ, мы допускаем случай $S=\phi$. Тогда, конечно, $\psi=\phi$ и, очевидно (R,ϕ,ϕ) изоморфно кольцу R. Мы допускаем также случай $R=0$ и, поскольку тогда единица $e\in R$ совпадает с 0, отображение $\psi: S\longrightarrow 0$ $(\psi=0)$ определено корректно (т.е. единица 1_S из S переходит в единицу 0 кольца $R=0$). Ясно, что расширение $(0,S,0)$ является моноидом с нулем 0 и нулевым сложением.

Теорема 5. Если все A - полумодули из Λ инъективны, то полукольцо A изоморфно расширению кольца R моноидом S и гомоморфизмом ψ, где R - классически полупростое кольцо, $S\cup 0$ - моноид, над которым все полигоны инъективны, ψ - гомоморфизм S в мультипликативную полугруппу кольца R, отображающий все идемпотенты из S в единицу $e\in R$ кольца R.

Доказательство. Если все A-полумодули инъективны, то, по лемме II, для произвольных $a, b \in A$ будет $a+b = (a+b)e = ae+be$. Тогда на A, как мы это уже делали в доказательстве теоремы 3, можно определить конгруэнцию Риса ρ, склеивающую все элементы из $eA = R$ в один элемент. Мы получим $A/\rho \cong (A \setminus R) \cup O$, причем на полукольце A/ρ сложение будет нулевым. Если $A/\rho = O$, т.е. $A = R = eA$, то по лемме IO, A – классически полупростое кольцо, т.е. A изоморфно $(R, \emptyset, \emptyset)$.

Пусть теперь $A/\rho \neq O$. По теореме I все A/ρ-полумодули из Λ инъективны, но поскольку всякий полигон над моноидом A/ρ можно рассматривать как A/ρ-полумодуль с нулевым сложением, то получаем, что все A/ρ-полигоны инъективны. Это значит, ввиду леммы I3, что нуль O моноида A/ρ является внешним, т.е. множество $A \setminus R$ замкнуто относительно умножения и является моноидом, который мы обозначим через S. Тогда, очевидно, $A = S \cup R$. По лемме IO, R – классически полупростое кольцо, а по определению S, все полигоны над моноидом $S \cup O = A/\rho$ инъективны.

Для каждого $s \in S = A \setminus R$ положим $\psi(s) = es \in R$ и покажем, что ψ есть гомоморфизм из S в мультипликативную полугруппу кольца R, отображающий все идемпотенты из S в единицу $e \in R$ кольца R. Действительно, при любых $s, t \in S$ ввиду леммы O, имеем

$$\psi(s)\,\psi(t) = (es)(et) = e^2 st = est = \psi(st),$$

и для любого идемпотента $f \in S = A \setminus R$, ввиду леммы I2,

$$\psi(f) = ef = fe = e.$$

Теперь остается проверить выполнение условий (5). Действительно, для любых $s, t \in S$, $r \in R$

$$s+t = se+te = es+et = \psi(s)+\psi(t),$$

$$s+r = s+(r+O) = (s+O)+r = es+r = \psi(s)+r,$$

$$sr = s(er) = (se)r = (es)r = \psi(s)r.$$

Теорема доказана.

Теперь мы покажем, что условия, сформулированные в теореме 5 и лемме II, являются достаточными для того, чтобы все $\mathcal{A}$-полумодули из Λ были инъективными. Вначале докажем вспомогательное утверждение.

Подполумодуль $\mathcal{N}$ полумодуля $\mathcal{M}$ называется ретрактом в $\mathcal{M}$, если существует гомоморфизм $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$, индуцирующий на $\mathcal{N}$ тождественный автоморфизм.

Лемма I4. Если для произвольного $\mathcal{A}$-полумодуля $\mathcal{M} \in \Lambda$ и произвольного собственного его подполумодуля $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ существует $\mathcal{A}$-полумодуль P, такой, что $\mathcal{N} \subset P \subseteq \mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ - ретракт в P, то все $\mathcal{A}$-полумодули из Λ инъективны.

Доказательство. Пусть задана произвольная диаграмма вида

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathcal{M} \\ Q & \end{tikzcd},$$

состоящая из $\mathcal{A}$-полумодулей из Λ и их гомоморфизмов, где i - вложение. Нам хотелось бы продолжить гомоморфизм χ до гомоморфизма $\varphi : \mathcal{M} \to Q$. Пусть $\mathcal{N}'$ максимальный подполумодуль в $\mathcal{M}$, такой, что существует расширение $\chi' : \mathcal{N}' \to Q$ гомоморфизма χ, т.е. $\chi' i = \chi$. Существование такого $\mathcal{N}'$ следует из леммы Цорна (аналогичное рассуждение см., например, в [I], стр. 24). Если $\mathcal{N}' = \mathcal{M}$, то положим $\varphi = \chi'$ и все доказано. Если же $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M}$ $(\mathcal{N}' \neq \mathcal{M})$, то, по предложению, найдется $\mathcal{A}$-полумодуль P, $\mathcal{N}' \subset P \subseteq \mathcal{M}$, и гомоморфизм $\varkappa : P \to \mathcal{N}'$, такой, что $\varkappa|_{\mathcal{N}'} = 1|_{\mathcal{N}'}$. Тогда гомоморфизм $\chi'\varkappa : P \to Q$ является расширением гомоморфизма χ, что противоречит максимальности $\mathcal{N}'$.

Теорема 6. Для того, чтобы все $\mathcal{A}$-полумодули над полукольцом $\mathcal{A}$ были инъективны, необходимо и достаточно, чтобы

I) полукольцо $\mathcal{A}$ было изоморфно расширению (R, S, ψ) кольца R моноидом S и гомоморфизмом $\psi : S \to R$, где R - классически полупростое кольцо, $S \cup O$ - моноид, над которым все полигоны инъективны, ψ - гомоморфизм из S в мультипликативную полугруппу кольца R, отображающий все идемпотенты из S в единицу $e \in R$ кольца R; и

2) в Λ выполняется тождество $x + y = x + y + 0$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 5 и леммы II.

Достаточность. Заметим сразу, что из того, что $\mathcal{A}\cong(R,S,\psi)$ следует, ввиду (5),

$$\psi(1)=e\psi(1)=e1,$$
$$1+0=\psi(1)+0=e+0=e.$$

Отсюда, ввиду условия 2), для любых $m,n\in\mathcal{M}$ $(\mathcal{M}\in\Lambda)$ имеем

$$m+n=m+n+0_{\mathcal{M}}=(m+n)(1+0)=(m+n)e=me+ne \quad (6)$$

Пусть $\mathcal{M}$ – произвольный $\mathcal{A}$-полумодуль из Λ и $\mathcal{N}$ – произвольный собственный подполумодуль в $\mathcal{M}$, т.е. $\mathcal{N}\subset\mathcal{M}$. По лемме I4 нам достаточно показать, что найдется такой $\mathcal{A}$-полумодуль P, что $\mathcal{N}\subset P\subseteq\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ является ретрактом в P. Пусть $m\neq 0_{\mathcal{M}}$ – произвольный элемент из $\mathcal{M}\setminus\mathcal{N}$ и обозначим $P=m\mathcal{A}\cup\mathcal{N}\cup(me\mathcal{A}+\mathcal{N}e)$. По формуле (6) множество P является подполумодулем в $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}\subset P$, поскольку $m\in P$ и $m\notin\mathcal{N}$. Покажем, что $\mathcal{N}$ является ретрактом в P. Для этого будем различать два случая.

I. $m\mathcal{A}\cap\mathcal{N}\subseteq\mathcal{N}e$.

В этом случае вначале построим отображение $\varphi_1: P\longrightarrow \mathcal{N}\cup(me\mathcal{A}+\mathcal{N}e)$, определенное так:

$$\varphi_1(ma)=mea,\quad \varphi_1(n)=n,\quad \varphi_1(ma+n)=mea+ne.$$

Это отображение корректно, поскольку если $ma\in m\mathcal{A}\cap\mathcal{N}$, то $ma\in\mathcal{N}e$, т.е. $ma=ne$ для некоторого $n\in\mathcal{N}$ и $(ma)e=ne\cdot e=ne=ma$, т.е. $\varphi_1(ma)=mea=mae=ma$. Кроме того, если в P выполняется равенство $ma_1+n_1=ma_2+n_2$, то ввиду (6), это означает $ma_1e+n_1e=ma_2e+n_2e$ и значит $\varphi_1(ma_1+n_1)=\varphi_1(ma_2+n_2)$. Отображение φ_1 является $\mathcal{A}$-гомоморфизмом, поскольку

$$\varphi_1(ma)s=(mea)s=me(as)=\varphi_1(mas),$$

для любого $s\in S$ и аналогично $\varphi_1(ma)r=\varphi_1(mar)$ для любого $r\in R$. Ясно, что гомоморфизм φ_1 (по определению) индуцирует тождественный автоморфизм на $\mathcal{N}$.

Теперь заметим, что $me\mathcal{A}+\mathcal{N}e$ является унитарным полумодулем над кольцом $R = eA$ и значит R-модулем. Поскольку R – классически полупростое кольцо, то все R-модули инъективны. Это значит, что существует такой R-гомоморфизм $\varkappa : (meA + Ne) \longrightarrow Ne$, что $\varkappa|_{Ne} = I|_{Ne}$. Определим теперь отображение $\varphi_2 : N \cup (meA + Ne) \longrightarrow N$ так, что

$$\varphi_2(n) = n, \quad \varphi_2(mea) = \varkappa(mea), \quad \varphi_2(mea+ne) = \varkappa(mea)+ne$$

для любых $n \in N$, $a \in A$.

Покажем, что φ_2 является A-гомоморфизмом. Это отображение определено корректно, поскольку если $mea \in N$, то $(mea)e \in Ne$, но $meae = me^2a = mea$, т.е. $mea \in Ne$ и $\varkappa(mea) = mea$, ввиду $\varkappa|_{Ne} = I|_{Ne}$. Остальная часть проверки корректности φ_2 легко следует из корректности $\varkappa$ и формулы (6). Для произвольных $mea \in meA$, $n \in N$, ввиду (6),

$$\varphi_2(mea+n) = \varphi_2(meae+ne) = \varphi_2(meae+ne) = \varkappa(mea)e+ne =$$

$$= \varphi_2(mea)e + ne = \varphi_2(mea)+n = \varphi_2(mea)+\varphi_2(n).$$

Наконец, для произвольного $s \in S$ выполнено $es \in R$ и поэтому

$$\varphi_2(mea)s = \varkappa(mea)s = [\varkappa(mea)e]s = \varkappa(mea)(es) =$$
$$= \varkappa(meaes) = \varkappa(meas) = \varphi_2(meas).$$

Таким образом, φ_2 есть A-гомоморфизм и, по определению, $\varphi_2|_N = I|_N$.

Теперь гомоморфизм $\varphi = \varphi_2\varphi_1 : P \longrightarrow N$ индуцирует на N тождественный автоморфизм и, следовательно, N – ретракт в P. Перейдем ко второму случаю.

2. $mA \cap N \nsubseteq Ne$.

Обозначим через J множество $\{a \in A \mid ma \in N\}$. Легко проверить, что J будет правым идеалом в A и $mA \cap N = mJ$. Ясно, что $J \nsubseteq R$, ибо в противном случае для любого $i \in I$ будет $ei = i$ и тогда $mi = mei = (mi)e \in Ne$, т.е. $mJ \subseteq Ne$, что противоречит предположению. Через T обозначим множество $J \cap S$. Из $J \nsubseteq R$ следует, что $T = J \cap S \neq \phi$. Покажем, что тогда $me \in Ne$, т.е. $mA \subseteq Ne$.

Множество T, поскольку J есть правый идеал в A, является правым идеалом в S. Значит $T' = T \cup 0$ есть правый идеал в $S' = S\cup 0$. Так как все S'-полигоны инъективны, то, по лемме 8, T' порождается идемпотентом $f\neq 0$, являющимся левой единицей в $T' = T\cup 0$. Более того, по теореме 2 работы [5] следует, что f можно считать специальным идемпотентом, т.е., по определению, таким, что для любой правой конгруэнции σ на S' найдется $\gamma\in f\cdot S'$ так, что $(f,\gamma f)\in\sigma$ и из $(x,y)\in\sigma$ следует $(\gamma x,\gamma y)\in\sigma$ для любых $x,y\in S'$.

Определим теперь на $S = S\cup 0$ отношение ρ следующим образом: для любых $x,y\in S = S'\setminus 0$

$$(x,0),(0,y) \Leftrightarrow mx, my\in mR = me\mathcal{A}$$

$$(x,y)\in\rho \Leftrightarrow \begin{cases} mx = my & \text{если } mx, my\notin mR \\ mx, my\in mR & \end{cases}$$

$$(0,0)\in\rho.$$

Легко проверить, что ρ является правой конгруэнцией на моноиде S'. Ввиду специальности идемпотента $f\in T'$ найдется $\gamma\in fS'$, так, что $(f,\gamma f)\in\rho$ и $(x,y)\in\rho$ влечет $(\gamma x,\gamma y)\in\rho$. Легко видеть, что $mf\notin mR$. Действительно, если $mf\in mR$, то $mT = m(fT) = (mf)T\subseteq mR$ и тогда $m\mathcal{J}\subseteq mR = m\mathcal{A}e$, что противоречит предположению $m\mathcal{J}\nsubseteq \mathcal{N}e$. Из $mf\notin mR$ и $(f,\gamma f)\in\rho$, по определению ρ, следует $\gamma\neq 0$ (т.е. $\gamma\in T$) и

$$mf = m\gamma f. \tag{7}$$

Тогда, поскольку $f\cdot e = \psi(f)\cdot e = e\cdot e = e$, получим

$$(m\gamma)e = (m\gamma)(fe) = (m\gamma f)e = (mf)e = m(fe) = me, \tag{8}$$

т.е. $me = m\gamma e\in (mT)e\subseteq (m\mathcal{J})e\subseteq \mathcal{N}e$ В дальнейшем, на самом деле, воспользуемся формулами (7), (8) и свойствами элемента $\gamma\in T$

Построим отображение $\varphi : P\longrightarrow \mathcal{N}$, определенное следующим образом:

$$\varphi(ma) = m\gamma a,\quad \varphi(n) = n,\quad \varphi(ma+n) = m\gamma a+ne$$

Покажем, что φ будет нужным нам гомоморфизмом, индуцирующим на N тождественный автоморфизм.

Сначала проверим однозначность φ. Из $ms=mt$ для некоторых $s,t\in S$ следует $(s,t)\in\rho$ и тогда $(\mu s,\mu t)\in\rho$, т.е. $m(\mu s)=m(\mu t)$ и $\varphi(ms)=\varphi(mt)$. Из $ms=mr$ $(s\in S,\ r\in R)$ следует $(s,0)\in\rho$. Тогда $(\mu s,0)\in\rho$, т.е. $m\mu s\in mR$ и, следовательно, $m\mu s=(m\mu s)e$. Теперь

$$\varphi(ms)=m\mu s=(m\mu s)e=(m\mu e)s\overset{(8)}{=}mes=mse=mre=$$
$$=(me)re\overset{(8)}{=}(m\mu e)re=m\mu re^2=m\mu r=\varphi(mr).$$

Из $mr_1=mr_2$ $(r_1,r_2\in R)$ следует, ввиду (8),

$$\varphi(mr_1)=m\mu r_1=m\mu r_1e=(m\mu e)r_1=mer_1=mr_1=mr_2=$$
$$=mer_2=m\mu er_2=m\mu r_2=\varphi(mr_2).$$

Если $ma=n$, то $a\in J$. Если теперь $a\in T$, то $a=fs$ для некоторого $s\in S$ и тогда, ввиду (7),

$$\varphi(ma)=m\mu a=m\mu(fs)=(m\mu f)s=(mf)s=m(fs)=ma=$$
$$=n=f(n)$$

Если, наконец, $ma_1+n_1=ma_2+n_2$, то по формуле (6) $ma_1e+n_1e=ma_2e+n_2e$ и тогда $\varphi(ma_1+n_1)=\varphi(ma_2+n_2)$.

Покажем теперь, что φ есть A-гомоморфизм из P в N. Проверим лишь то, что φ сохраняет сложение (остальная проверка тривиальна). Для произвольных $a\in A$, $n\in N$

$$\varphi(ma+n)=\varphi(mae+ne)=mae+ne=mea+ne\overset{(8)}{=}(m\mu e)a+ne=(m\mu a)e+ne=m\mu a+n=$$
$$=\varphi(ma)+\varphi(n).$$

Таким образом $\varphi: P\to N$ является гомоморфизмом и, по определению, $\varphi|_N=1_N$, т.е. N - ретракт в P. Теорема доказана.

В заключение остановимся на более подробном описании строения A-полумодулей из Λ, когда все они инъективны.

Пусть M - абелева группа, P - множество и $\chi: P\to M$ некоторое отображение. На множестве $N=P\cup M$ операция "+" является частичной (она определена лишь для элементов из M). Продолжим ее на все N, полагая для произвольных $p,q\in P$,

$m \in M$

$$q+p=p+q=\chi(p)+\chi(q),\quad p+m=m+p=m+\chi(p).$$

Легко проверить, что $(N,+)$ является теперь абелевой полугруппой. Полугруппу $(N,+)$ будем называть расширением группы M множеством P и отображением χ, обозначая при этом $N=(M,P,\chi)$.

Теорема 7. Пусть полукольцо A является расширением (R,S,ψ) кольца R моноидом S и гомоморфизмом ψ. Пусть N - A-полумодуль, в котором $x+y=x+y+0_N$ для любых $x,y\in N$. Тогда N является расширением (M,P,χ) абелевой группы M множеством P и отображением χ, где M является R-модулем, $P\cup\bar{0}$ есть $(S\cup 0)$-полигон и $\chi: P\to M$ такое отображение, что

$$\chi(ps)=\chi(p)\psi(s) \tag{9}$$

для любых $p\in P$, $s\in S$, если $ps\neq\bar{0}$.

Обратно, всякое расширение $N=(M,P,\chi)$, обладающее указанными свойствами, есть A-полумодуль, где $A=(R,S,\psi)$ и в N выполняется тождество $x+y=x+y+0_N$.

Доказательство. В начале докажем прямое утверждение. Пусть $A=(R,S,\psi)$ и N является A-полумодулем, в котором $x+y=x+y+0_N$ для любых $x,y\in N$. Тогда, ввиду $1+0=\psi(1)+0=e+0=e\in R$, получаем

$$x+y=x+y+0_N=(x+y)(1+0)=(x+y)e=xe+ye$$

для любых $x,y\in N$. Ввиду этого равенства, отношение ρ на N, склеивающее все элементы из $NR=N\cdot(eA)=(NA)e=Ne$ в один элемент и не склеивающее никакие различные элементы из $M\setminus Ne$, является конгруэнцией A-полумодуля N.

Рассмотрим теперь A-полумодуль $N/\rho=(N\setminus Ne)\cup\bar{0}=P\cup\bar{0}$, где $P=N\setminus Ne$. Сложение на $P\cup\bar{0}$, очевидно, является нулевым и $P\cup\bar{0}$ аннулируется идеалом $R=eA$. Таким образом $P\cup\bar{0}$ фактически является $(S\cup 0)$-полигоном, на котором определено нулевое сложение. Ввиду $P=N\setminus Ne=N\setminus NR$, имеем $N=P\cup M$, где $M=Ne=NR$. Ясно, что $M=NR$ является R-модулем, поскольку NR есть полумодуль над кольцом R.

Определим теперь отображение $\chi : P \to \mathcal{N}$ следующим образом:

$$\chi(p) = pe$$

для любого $p \in P$. Тогда

$$p + m = pe + me = pe + m = \chi(p) + m$$

$$p + q = pe + qe = \chi(p) + \chi(q),$$

т.е. $\mathcal{N}$ есть расширение $(\mathcal{M}, P, \chi)$ абелевой группы $\mathcal{M}$ множеством P и отображением χ. Справедливость условия (9) вытекает из равенства

$$\chi(ps) = pse = pe \cdot se = \chi(p) \cdot \psi(s)$$

для любых $p \in P$, $s \in S$, таких, что $ps \neq \bar{0}$.

Докажем теперь обратное. Пусть $\mathcal{N} = (\mathcal{M}, P, \chi)$, где $\mathcal{M}$ является R-модулем, $P \cup \bar{0}$ есть $(S \cup 0)$-полигон и отображение χ удовлетворяет условию (9). Покажем, что $\mathcal{N}$ является $\mathcal{A}$-полумодулем, где $\mathcal{A} = (R, S, \psi)$.

Для произвольных $p \in P$, $m \in \mathcal{M}$, $s \in S$, $r \in R$ элементы $ps \in P$ (если $ps \neq \bar{0}$) и $mr \in \mathcal{M}$ уже определены. Если $ps = \bar{0}$, то положим

$$ps = \chi(p)\psi(s) \in \mathcal{M}. \tag{10}$$

Положим также

$$ms = m\psi(s), \quad pr = \chi(p)r. \tag{11}$$

Таким образом, мы определили для любых $n \in \mathcal{N}$, $a \in \mathcal{A}$ их произведение $na \in \mathcal{N}$. Легко проверить, что $\mathcal{N} = (\mathcal{M}, P, \chi)$ теперь является (R, S, ψ)-полумодулем. Проверим некоторые из аксиом полумодуля (остальные проверяются аналогично).

Для произвольных $p \in P$, $m \in \mathcal{M}$, $s, t \in S$, $r \in R$, ввиду (9), (10), (11),

I. $(m + p)s = (m + \chi(p))s = (m + \chi(p))\psi(s) = m\psi(s) + \chi(p)\psi(s) =$

$$= \begin{cases} ms + \chi(ps) = ms + ps, & \text{если } ps \neq \bar{0} \\ ms + ps, & \text{если } ps = \bar{0} \end{cases}$$

2. $(m+p)r = (m+\chi(p))r = mr + \chi(p)r = mr + pr$

3. $p(st) = (ps)t$. Для доказательства этой формулы будем различать три случая:

а) $p(st) \neq \bar{o}$, тогда $(ps)t \neq \bar{o}$ и $(ps)t = p(st)$, поскольку $P \cup \bar{o}$ есть $(S \cup O)$-полигон.

б) $p(st) = \bar{o}$, $ps \neq \bar{o}$, тогда $(ps)t = \bar{o}$, т.е. $(ps)t = \chi(ps)\psi(t)$ и получаем

$$p(st) = \chi(p)\psi(st) = (\chi(p)\psi(s))\psi(t) = \chi(ps)\psi(t) = (ps)t.$$

в) $p(st) = \bar{o}$, $ps = \bar{o}$, тогда $ps \in M$ и

$$p(st) = \chi(p)\psi(st) = (\chi(p)\psi(s))\psi(t) = (ps)\psi(t) = (ps)t.$$

4. $m(st) = m\psi(st) = (m\psi(s))\psi(t) = (ms)t$.

5. $p(sr) = p(\psi(s)r) = \chi(p)(\psi(s)r) = [\chi(p)\psi(s)]r =$

$$\chi(ps)r = (ps)r, \text{ если } ps \neq \bar{o}$$

$$(ps)r, \qquad ps = \bar{o}.$$

6. $m \cdot 1_s = m\psi(1_s) = me = m$, $\quad p0 = \chi(p)0 = 0_N$.

Таким образом, $N = (M, P, \chi)$ является A-полумодулем, $A = (R, S, \psi)$, и для любых $x, y \in N$, ввиду $x+y \in M$, имеем $x+y = x+y+0_N$. Теорема доказана.

Теорема 7 позволяет переформулировать теорему 6 следующим образом:

все A-полумодули из Λ инъективны тогда и только тогда, когда

I) A является расширением (R, S, ψ), где R - классически полупростое кольцо, S - моноид, такой, что все $(S \cup O)$ - полигоны инъективны, ψ - гомоморфизм из S в $(R, \cdot)$, переводящий идемпотенты из S в единицу e кольца R, и

2) каждый A-полумодуль N из Λ является расширением (M, P, χ), где M есть R-модуль, $P \cup \bar{o}$ есть $(S \cup O)$-полигон и

$$\chi(ps) = \chi(p)\psi(s)$$

для любых $p \in P$, $s \in S$, таких, что $ps \neq \bar{o}$

В заключение автор приносит искреннюю благодарность доценту Я.В.Хиону за ценные советы и замечания, сделанные при чтении рукописи.

Литература

1. К а р т а н А., Э й л е н б е р г С. Гомологическая алгебра. Москва, 1960
2. К о н П., Универсальная алгебра. Москва, 1968.
3. С к о р н я к о в Л. А., Радикалы в Ω-кольцах. В кн.: Избранные вопросы алгебры и логики. Новосибирск, 1972.
4. С к о р н я к о в Л. А., Гомологическая классификация колец. Мат. весн., 1967, 4, № 4, 415-434 .
5. С к о р н я к о в Л. А., О гомологической классификации моноидов. Сиб. матем. ж., 1969, 10, № 5, 1139-1143.
6. Ф о ф а н о в а Г. С., Полигоны над дистрибутивными структурами, Сиб. матем. ж., 1971, 12, № 5, 1158-1163.
7. Х и о н Я. В., Ω-кольца, Ω-кольцоиды и их представления. Тр. Моск. матем. о-ва, 1963, 14, 3-47.
8. Ч а к а н ь Б., Примитивные классы алгебр, эквивалентные классам полумодулей и модулей. Acta Sci. Math., 24, 1-2, 1963, 157-164.

Поступило
15 I 1974

NULLIGA POOLRINGIDE HOMOLOOGILISEST KLASSIFIKATSIOONIST

V. Fleischer

R e s ü m e e

Olgu $\mathcal{A}$ ühikuga ja multiplikatiivse nulliga poolring ning $\mathcal{K}$ selline parempoolsete $\mathcal{A}$-poolmoodulite muutkond, et $\mathcal{A}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{K}$. Käesolevas artiklis kirjeldatakse sellised $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{K}$, et kõik $\mathcal{A}$-poolmoodulid muutkonnast $\mathcal{K}$ on projektiivsed (injektiivsed).

ON HOMOLOGICAL CLASSIFICATION OF SEMIRINGS WITH ZERO

V. Fleischer

S u m m a r y

Let $\mathfrak{A}$ be a semiring with identity 1 and multiplicative zero $0 (1 \neq 0)$. Let Λ be some variety of right $\mathfrak{A}$-semimodules such that $\mathfrak{A}$-semimodule $\mathfrak{A}$ belongs to Λ. In the present paper we investigate for which $\mathfrak{A}$ and Λ all $\mathfrak{A}$-semimodules from Λ are projective (injective).

Theorem 3. All $\mathfrak{A}$-semimodules from Λ are projective iff either $\mathfrak{A}$ is a semisimple (in the sense of Bourbaki) ring or $\mathfrak{A} = \{1, 0\}$ and $x + y = 0$ holds in Λ.

Let R be an arbitrary ring, S a semigroup, $\psi: S \to (R, \cdot)$ a homomorphism. On the set $\mathfrak{A} = S \cup R$ the structure of a semiring can be introduced in the following way:

$$r + s = s + r = \psi(s) + r, \quad rs = r\psi(s), \quad sr = \psi(s) r$$

for all $r \in R$, $s \in S$. We denote this semiring by (R, S, ψ).

Theorem 6. All $\mathfrak{A}$-semimodules from Λ are injective iff $\mathfrak{A} = (R, S, \psi)$ where R is a semisimple ring with identity $e \in R$, $S \cup 0$ is a completely right injective monoid, ψ is such homomorphism that $\psi(f) = e$ for each idempotent $f \in S$ and $x + y = x + y + 0$ holds in Λ.

ИДЕМПОТЕНТЫ ПОЛУГРУПП ЭНДОМОРФИЗМОВ ГРУПП

П. Пуусемп

Кафедра алгебры и геометрии

Основной целью данной статьи является исследование связи между группой G и идемпотентами ее полугруппы эндоморфизмов $\mathrm{End}\ G$.

В § I указано связь между полупрямыми разложениями группы и ее идемпотентными эндоморфизмами. Доказано, что разложение группы в прямое произведение можно описывать при помощи ее идемпотентных эндоморфизмов без действия сложения. Из этого выведен ряд полезных следствий.

В § 2 определены все конечные группы, которые обладают собственными ненулевыми эндоморфизмами и все они идемпотентны. Такими оказываются только группы диэдра D_q, где q - простое число.

В § 3 показано, какое строение имеет коммутативная полугруппа эндоморфизмов конечной некоммутативной p-группы. Наконец, в § 4 на основе предыдущих параграфов показано, что каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов. Ранее Бэром было доказано [5], что каждая коммутативная p-группа определяется своим кольцом эндоморфизмов.

Будем придерживаться следующих обозначений:

$O(g)$ - порядок элемента g группы G;

$[g,h] = g^{-1}h^{-1}gh$;

$J(G)$ - совокупность всех идемпотентов полугруппы $\mathrm{End}\ G$;

$\varphi|_N$ - ограничение отображения φ на подгруппе N

$K(x) = \{y \in \mathrm{End}\ G \mid yx = xy = y\}$, где $x \in \mathrm{End}\ G$;

$C_M(x) = \{y \in M \mid yx = xy\}$;

$\langle a, b, c, \dots, A, B, \dots \rangle$-подгруппа, порожденная элементами $a, b, c, \dots$ и подмножествами $A, B, \dots$.

Отметим, что при $x \in J(G)$ подмножество $K(x)$ образует подполугруппу с единицей x в полугруппе $\mathrm{End}\ G$.

§ I. Идемпотенты полугруппы End G

Пусть в течение этого параграфа через G обозначена произвольная группа.

Лемма I.I. Если x является идемпотентом полугруппы End G, то группа G разлагается в полупрямое произведение $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x$ и $\mathrm{Im}\, x$ совпадает с совокупностью неподвижных точек эндоморфизма x, т.е. $\mathrm{Im}\, x = \{ g \in G \mid gx = g \}$.

Доказательство. Пусть $x \in J(G)$. Равенство $\mathrm{Im}\, x = \{ g \in G \mid gx = g \}$ вытекает сразу из равенства $x^2 = x$. Пусть $g \in G$. Тогда $gx = (gx)x$, $g^{-1} \cdot (gx) \in \mathrm{Ker}\, x$, т.е. $g = (gx) \cdot h$ при некотором $h \in \mathrm{Ker}\, x$. Поэтому $G = \mathrm{Im}\, x \cdot \mathrm{Ker}\, x$. Если $g \in \mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Im}\, x$, то $gx = 1 = g$ и, следовательно, $\mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Im}\, x = \langle 1 \rangle$ и $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x$, ибо $\mathrm{Ker} \lhd G$ (т.е. $\mathrm{Ker}\, x$ - нормальный делитель группы G). Лемма доказана.

Лемма I.2. Если $G = H \leftthreetimes K$ и $\varphi \in \mathrm{End}\, K$, то отображение $\varphi^* : G \to G$, где $(kh)\varphi^* = k\varphi$, $k \in K$, $h \in H$, является эндоморфизмом группы G.

Доказательство. Действительно, каждый элемент группы G имеет вид kh, где $k \in K$, $h \in H$ и $((k_1 h_1)(k_2 h_2))\varphi^* = ((k_1 k_2)(k_2^{-1} h_1 k_2 \cdot h))\varphi^* = (k_1 k_2)\varphi = (k_1 \varphi)(k_2 \varphi) = ((k_1 h_1)\varphi^*)((k_2 h_2)\varphi^*)$, где $k_1, k_2 \in K$, $h_1, h_2 \in H$. Поэтому $\varphi^* \in \mathrm{End}\, G$. Лемма доказана.

Лемма I.3. Если $G = H \leftthreetimes K$, то существует единственный $x \in J(G)$ такой, что $H = \mathrm{Ker}\, x$ и $K = \mathrm{Im}\, x$

Доказательство. По лемме I.2 отображение $\varepsilon : G \to G$, определенное равенством $(kh)\varepsilon = k$, является эндоморфизмом группы G. По определению отображения ε ясно, что $\varepsilon^2 = \varepsilon$ и $H = \mathrm{Ker}\, \varepsilon$, $K = \mathrm{Im}\, \varepsilon$. Если существует еще $x \in J(G)$ со свойствами $H = \mathrm{Ker}\, x$, $K = \mathrm{Im}\, x$, то по лемме I.I $kx = k$ при каждом $k \in K$ и $(kh)x = k$, $k \in K$, $h \in \mathrm{Ker}\, x$. Следовательно, $x = \varepsilon$. Лемма доказана.

Из лемм I.I и I.3 следует, что существует взаимно однозначное соответствие между идемпотентами полугруппы End G и полупрямыми разложениями группы G.

Определение. Если $G = H \leftthreetimes K$ и $H = \mathrm{Ker}\, x$, $K = \mathrm{Im}\, x$, $x \in J(G)$, то будем говорить, что идемпотент x соответствует полупрямому разложению $G = H \leftthreetimes K$.

По лемме I.3 идемпотент, соответствующий полупрямому разложению $G = H \leftthreetimes K$ определен однозначно.

Лемма I.4. Если $G = H \leftthreetimes K$ и подгруппа $L \geq K$, то $L = (L \cap H) \leftthreetimes K$. В частности, если $y \in J(G)$ и $\mathrm{Im}\, y \leq L$, то $L = (L \cap \mathrm{Ker}\, y) \leftthreetimes \mathrm{Im}\, y$.

Доказательство. Так как $G = H \leftthreetimes K$, то $G = HK$, $H \triangleleft G$, $H \cap K = \langle 1 \rangle$. Ясно, что $H \cap L \triangleleft L$ и $(H \cap L) \cap K = \langle 1 \rangle$. Пусть $g \in L \leq G$. Тогда g выражается в виде $g = kh$, $k \in K$, $h \in H$. Поскольку в силу $K \leq L$ имеем $h = k^{-1} g \in L$, то $h \in H \cap L$ и $L = (H \cap L)K$. Следовательно, $G = (L \cap H) \leftthreetimes K$. В частности, если $y \in J(G)$ и $\mathrm{Im}\, y \leq L$, то по лемме I.I $G = \mathrm{Ker}\, y \leftthreetimes \mathrm{Im}\, y$ и поэтому $L = (\mathrm{Ker}\, y \cap L) \leftthreetimes \mathrm{Im}\, y$ Лемма доказана.

Лемма I.5. Если $x, y \in \mathrm{End}\, G$ и $xy = yx$, то $(\mathrm{Im}\, x) y \leq \mathrm{Im}\, x$ и $(\mathrm{Ker}) y \leq \mathrm{Ker}\, x$, т.е. $y \mid \mathrm{Im}\, x \in \mathrm{End}.(\mathrm{Im}\, x)$ и $y \mid \mathrm{Ker}\, x \in \mathrm{End}\, (\mathrm{Ker}\, x)$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathrm{End}\, G$ и $xy = yx$. Ясно, что $(\mathrm{Im}\, x) y = (Gx) y = (Gy) x \leq Gx = \mathrm{Im}\, x$. Если $g \in (\mathrm{Ker}\, x) y$, то $g = hy$ при некотором $h \in \mathrm{Ker}\, x$ и $gx = (hy)x = (hx)y = 1$, т.е. $g \in \mathrm{Ker}\, x$. Следовательно, $(\mathrm{Ker}\, x) y \leq \mathrm{Ker}\, x$. Лемма доказана.

Лемма I.6. Если $x \in J(G)$, то полугруппы $\mathrm{End}\, (\mathrm{Im}\, x)$ и $K(x) = \{ y \in \mathrm{End}\, G \mid yx = xy = y \}$ изоморфны.

Доказательство. Пусть $x \in J(G)$. Если $y \in K(x)$, то $yx = xy = y$ и по лемме I.5 $y \mid \mathrm{Im}\, x \in \mathrm{End}\, (\mathrm{Im}\, x)$ и $y \mid \mathrm{Ker}\, x \in \mathrm{End}\, (\mathrm{Ker}\, x)$. Так как $y = xy$, то $y \mid \mathrm{Ker}\, x = 0$. Поэтому в силу $G = \mathrm{Ker}\, x \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x$ ясно, что y определен уже ограничением $y \mid \mathrm{Im}\, x$ и соответствие $y \longrightarrow y \mid \mathrm{Im}\, x$ определяет мономорфизм из полугруппы $K(x)$ в полугруппу $\mathrm{End}\, (\mathrm{Im}\, x)$.

Если $\varphi \in \mathrm{End}\, (\mathrm{Im}\, x)$, то по лемме I.2 отображение φ^*, где

$$(kh)\varphi^* = k\varphi, \quad k \in \mathrm{Im}\, x, \quad h \in \mathrm{Ker}\, x$$

является эндоморфизмом группы G. При этом $(kh) x \varphi^* = k\varphi^* = k\varphi = (kh)\varphi^*$, $(kh)\varphi^* x = (k\varphi)x = k\varphi = (kh)\varphi^*$ т.е. $\varphi^* x = x\varphi^* = \varphi^*$ $\varphi^* \in K(x)$. Из определения φ^* следует, что $\varphi^* \mid \mathrm{Im}\, x = \varphi$. Следовательно, отображение $y \longrightarrow y \mid \mathrm{Im}\, x$ является даже эпиморфизмом. Поэтому полугруппы $K(x)$ и $\mathrm{End}\, (\mathrm{Im}\, x)$ изоморфны. Лемма доказана.

Пусть P – произвольная полугруппа и x, y – идемпотенты полугруппы P. Обозначим через $B(x, y)$ совокупность всех таких идемпотентов z полугруппы P, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

I. $x \in K(z)$, $y \in K(z)$;

2. $C_{K(z)}(x) = C_{K(z)}(y)$,

где $K(z) = \{u \in P \mid uz = zu = u\}$ – полугруппа с единицей z. На множестве всех идемпотентов полугруппы P определим частичную бинарную операцию $\times$ следующим образом:

I) $x \times y$ определено тогда и только тогда, когда $xy = yx = 0$, $B(x,y) \neq \emptyset$ и множество $B(x,y)$ содержит свой двусторонний нуль (т.е. существует такой $z \in B(x,y)$, что $zu = uz = z$ для каждого $u \in B(x,y)$);

2) $x \times y$ считаем равным двустороннему нулю множества $B(x,y)$.

Очевидно, что если существует $x \times y$, то он определен однозначно. Выясним смысл полученной частичной операции для полугруппы $P = \mathrm{End}\, G$.

<u>Теорема I.7</u>. Пусть $x, y \in J(G)$. Для того, чтобы существовал $x \times y$, необходимо и достаточно, что $xy = yx = 0$ и

$$G = (\mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Ker}\, y) \leftthreetimes (\mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y). \qquad (I.I)$$

В таком случае идемпотент $x \times y$ соответствует полупрямому разложению (I.I) и

$$\mathrm{Ker}(x \times y) = \mathrm{Ker} \cap \mathrm{Ker}\, y, \quad \mathrm{Im}(x \times y) = \mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y.$$

<u>Доказательство. Достаточность</u>. Пусть $x, y \in J(G)$, $xy = yx = 0$ и имеет место равенство (I.I). Обозначим через z идемпотент, соответствующий полупрямому разложению (I.I). Покажем, что $z = x \times y$. Сначала установим, что $z \in B(x,y)$. По определению идемпотента z имеем

$$\mathrm{Ker}\, z = \mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Ker}\, y, \quad \mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y,$$

$$G = \mathrm{Ker}\, z \leftthreetimes \mathrm{Im}\, z. \qquad (I.2)$$

Поэтому $\mathrm{Im}\, y \leq \mathrm{Im}\, z$ и $\mathrm{Ker}\, z \leq \mathrm{Ker}\, y$. Так как в силу $y, z \in J(G)$ и леммы I.I произвольный элемент g группы G имеет вид $g = kh = lm$, где $k \in \mathrm{Im}\, y$, $h \in \mathrm{Ker}\, y$, $l \in \mathrm{Im}\, z$, $m \in \mathrm{Ker}\, z$, то

$$g(yz) = (kh)(yz) = kz = k = (kh)y = gy,$$

$$g(zy) = (lm)(zy) = ly = (lm)y = gy.$$

Следовательно, $yz = zy = y$, т.е. $y \in K(z)$. Аналогично $x \in K(z)$.

Покажем, что $C_{K(z)}(x) = C_{K(z)}(y)$. Для этого предположим, что $v \in C_{K(z)}(x)$ и покажем, что $\mathrm{Im}\, y$ и $\mathrm{Ker}\, y$ инвариантны относительно v. Тогда $vx = xv$ и $v \in K(z)$, т.е. $vz = zv = v$. По лемме I.5

$$(\mathrm{Im}\, x)v \le \mathrm{Im}\, x, \quad (\mathrm{Ker}\, x)v \le \mathrm{Ker}\, x, \tag{I.3}$$

$$(\mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y)v = (\mathrm{Im}\, z)v \le \mathrm{Im}\, z \le \mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y, \ (\mathrm{Ker}\, z)v \le \mathrm{Ker}\, z. \tag{I.4}$$

Так как $yx = 0$, то $\mathrm{Im}\, y \le \mathrm{Ker}\, x$, $(\mathrm{Im}\, y)v \le (\mathrm{Ker}\, x)v$ откуда в силу соотношений (I.3) и (I.4)

$$(\mathrm{Im}\, y)v \le \mathrm{Ker}\, x \cap (\mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y). \tag{I.5}$$

Пусть $h = km \in \mathrm{Ker}\, x \cap (\mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y)$, где $k \in \mathrm{Im}\, x$, $m \in \mathrm{Im}\, y$. Поскольку $yx = 0$, то $\mathrm{Im}\, y \le \mathrm{Ker}\, x$ и $k = hm^{-1} \in \mathrm{Ker} \cap \mathrm{Im}\, x = \langle 1 \rangle$. Следовательно, $h = m$ и $\mathrm{Ker}\, x \cap (\mathrm{Im}\, x \times \mathrm{Im}\, y) \le \mathrm{Im}\, y$. По соотношению (I.5)

$$(\mathrm{Im}\, y)v \le \mathrm{Im}\, y. \tag{I.6}$$

Поскольку $xy = 0$, то $\mathrm{Im}\, x \le \mathrm{Ker}\, y$. По лемме I.4.

$$\mathrm{Ker}\, y = (\mathrm{Ker}\, y \cap \mathrm{Ker}\, x) \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x = \mathrm{Ker}\, z \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x. \tag{I.7}$$

В силу включений (I.3), (I.4) и равенства (I.7) имеем

$$(\mathrm{Ker}\, y)v \le \mathrm{Ker}\, y. \tag{I.8}$$

Пусть $g \in G$. По лемме I.I существуют такие $k \in \mathrm{Im}\, y$, $h \in \mathrm{Ker}\, y$, что $g = kh$. По включениям (I.6) и (I.8) получим, что

$$g(vy) = (kh)(vy) = ((kv)y)((hv)y) = (kv)y = kv,$$
$$g(yv) = (kh)(yv) = kv,$$

ибо по лемме I.I $cy = c$ для каждого $c \in \mathrm{Im}\, y$. Поэтому $g(yv) = g(vy)$ и $vy = yv$, т.е. $v \in C_{K(z)}(y)$. Следовательно, $C_{K(z)}(x) \le C_{K(z)}(y)$. Аналогично $C_{K(z)}(y) \le C_{K(z)}(x)$. Получим равенство $C_{K(z)}(x) = C_{K(z)}(y)$.

Следовательно, $z \in B(x,y) \neq \varnothing$.

Покажем, что z является двусторонним нулем множества $B(x,y)$. Для этого предположим, что $u \in B(x,y)$. Тогда

$$xu = ux = x, \quad yu = uy = y,$$

откуда получим $\mathrm{Ker}u \leq \mathrm{Ker}x$, $\mathrm{Ker}u \leq \mathrm{Ker}y$, $\mathrm{Im}x \leq \mathrm{Im}u$, $\mathrm{Im}y \leq \mathrm{Im}u$, т.е.

$$\mathrm{Ker}u \leq \mathrm{Ker}x \cap \mathrm{Ker}y = \mathrm{Ker}z, \quad \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}x \times \mathrm{Im}y \leq \mathrm{Im}u.$$

В силу $\mathrm{Im}z \leq \mathrm{Im}u$ имеем $zu = z$, ибо по лемме I.I $ku = k$ для каждого $k \in \mathrm{Im}u$. Так как $u \in J(G)$, то по лемме I.I

$$G = \mathrm{Ker}u \leftthreetimes \mathrm{Im}u. \tag{I.9}$$

По равенству (I.9) каждый элемент группы G имеет вид kh, где $k \in \mathrm{Im}u$, $h \in \mathrm{Ker}u$. Так как $\mathrm{Ker}u \leq \mathrm{Ker}z$, то

$$(kh)(uz) = kz = (kh)z$$

и $kz = z$. Следовательно, $uz = zu = z$ и z является двусторонним нулем в множестве $B(x,y)$. Поэтому $z = x \times y$. Достаточность доказана.

<u>Необходимость</u>. Пусть $x, y \in J(G)$ и существует $x \times y$. Из определения элемента $x \times y$ сразу следует, что $xy = yx = 0$. Покажем справедливость равенства (I.I).

По лемме I.I $G = \mathrm{Ker}y \leftthreetimes \mathrm{Im}y$, ибо $y \in J(G)$. В силу $xy = 0$ имеем $\mathrm{Im}x \leq \mathrm{Ker}y$ откуда по лемме I.4

$$\mathrm{Ker}y = (\mathrm{Ker}x \cap \mathrm{Ker}y) \leftthreetimes \mathrm{Im}x.$$

Поэтому

$$G = \mathrm{Ker}y \leftthreetimes \mathrm{Im}y = ((\mathrm{Ker}x \cap \mathrm{Ker}y) \leftthreetimes \mathrm{Im}x) \leftthreetimes \mathrm{Im}y$$

и для проверки равенства (I.I) достаточно доказать, что

$$\langle \mathrm{Im}x, \mathrm{Im}y \rangle = \mathrm{Im}x \times \mathrm{Im}y. \tag{I.IO}$$

Так как $\mathrm{Im}x \leq \mathrm{Ker}y$ и $\mathrm{Im}y \cap \mathrm{Ker}y = \langle 1 \rangle$, то

$$\mathrm{Im}x \cap \mathrm{Im}y = \langle 1 \rangle. \tag{I.II}$$

Обозначим $z = x \times y$. Поскольку $z \in B(x,y)$, то

II

$$zx = xz = x, \quad yz = zy = y, \tag{I.12}$$
$$C_{K(z)}(x) = C_{K(z)}(y). \tag{I.13}$$

В силу $z \in J(G)$ и леммы I.I $G = \mathrm{Ker}\, z \leftthreetimes \mathrm{Im}\, z$. Поэтому каждый элемент группы G имеет вид kh, где $k \in \mathrm{Im}\, z$, $h \in \mathrm{Ker}\, z$. Поскольку $xz = x$, то $\mathrm{Im}\, x \leq \mathrm{Im}\, z$ и соответствие $k \longrightarrow a^{-1}ka$, где $a \in \mathrm{Im}\, x$, определяет эндоморфизм группы $\mathrm{Im}\, z$. По лемме I.2 отображение μ_a, где

$$(kh)\mu_a = a^{-1}ka, \quad k \in \mathrm{Im}\, z, \quad h \in \mathrm{Ker}\, z,$$

является эндоморфизмом группы G. При этом $(kh)(z\mu_a) = k\mu_a = (kh)\mu_a$, т.е. $z\mu_a = \mu_a$. С другой стороны $\mu_a z = \mu_a$, ибо $\mathrm{Im}\,\mu_a = \mathrm{Im}\, z$. Следовательно, $\mu_a z = z\mu_a = \mu_a$ и $\mu_a \in K(z)$.

Покажем, что $\mu_a \in C_{K(z)}(x)$, т.е. $\mu_a x = x\mu_a$. Так как $\mathrm{Im}\, x \leq \mathrm{Im}\, z$ то по лемме I.4

$$\mathrm{Im}\, z = (\mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Im}\, z) \leftthreetimes \mathrm{Im}\, x.$$

Поэтому в силу $G = \mathrm{Ker}\, z \leftthreetimes \mathrm{Im}\, z$ каждый элемент группы G имеет вид khc, где $k \in \mathrm{Im}\, x$, $h \in \mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Im}\, z$, $c \in \mathrm{Ker}\, z$. Далее

$$(khc)(\mu_a x) = ((khc)\mu_a)x = ((kh)\mu_a)x = ((k\mu_a)(h\mu_a))x = k\mu_a,$$

где второе равенство имеет место по определению μ_a, а четвертое и пятое в силу $h\mu_k \in \mathrm{Ker}\, x \cap \mathrm{Im}\, z$ и $k\mu_a \in \mathrm{Im}\, x$. С другой стороны,

$$(khc)(x\mu_a) = ((kx)(hx)(cx))\mu_a = ((kx)(cx))\mu_a = (kx)\mu_a = k\mu_a,$$

ибо $\mathrm{Ker}\, z \leq \mathrm{Ker}\, x$ в силу $zx = x$ (см. равенства (I.12)). Следовательно, $x\mu_a = \mu_a x$ и $\mu_a \in C_{K(z)}(x)$.

По равенству (I.13) $\mu_a \in C_{K(z)}(y)$, т.е. $\mu_a y = y\mu_a$. Тогда по лемме I.5 $(\mathrm{Im}\, y)\mu_a \leq \mathrm{Im}\, y$. По равенствам (I.12) $yz = y$, т.е. $\mathrm{Im}\, y \leq \mathrm{Im}\, z$. Поэтому в силу определения эндоморфизма μ_a при $k \in \mathrm{Im}\, y$ имеем $k\mu_a = a^{-1}ka$, откуда

$$a^{-1} \cdot (\mathrm{Im}\, y)a = (\mathrm{Im}\, y)\mu_a \leq \mathrm{Im}\, y. \tag{I.14}$$

Ввиду произвольности выбора элемента a из $\mathrm{Im}\, x$ можно утверждать, что включение (I.I4) имеет место для каждого $\alpha \in \operatorname{Im} x$. Аналогично доказывается, что

$$\alpha^{-1} \cdot (\operatorname{Im} x) \cdot \alpha \leqslant \operatorname{Im} x \qquad (I.I5)$$

для каждого $\alpha \in \operatorname{Im} y$. Из включений (I.I4) и (I.I5) вытекает, что

$$\langle \operatorname{Im} x, \operatorname{Im} y \rangle = \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y, \ \operatorname{Im} x \lhd \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y, \operatorname{Im} y \lhd \operatorname{Im} x \cdot \operatorname{Im} y,$$

откуда по равенству (I.II) сразу вытекает равенство (I.I0). Необходимость доказана. Теорема доказана.

Следствие I.8. Пусть $x \in J(G)$. Группа G разлагается в прямое произведение $G = \operatorname{Ker} x \times \operatorname{Im} x$ тогда и только тогда, когда существует такой $y \in J(G)$, что $x \times y = 1$.

Доказательство. Если $x \times y = 1$, $y \in J(G)$, то по теореме I.7 $yx = xy = 0$ и $G = \operatorname{Im} x \times \operatorname{Im} y$, ибо $\operatorname{Ker} 1 = \operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y = \langle 1 \rangle$ и $\operatorname{Im} 1 = \operatorname{Im} x \times \operatorname{Im} y = G$. В силу $yx = 0$ имеем $\operatorname{Im} y \leqslant \operatorname{Ker} x$, откуда по лемме I.4 $\operatorname{Ker} x = (\operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y) \leftthreetimes \operatorname{Im} y = \langle 1 \rangle \leftthreetimes \operatorname{Im} y = \operatorname{Im} y$. Поэтому $G = \operatorname{Im} x \times \operatorname{Ker} x$.

Пусть, наоборот, $G = \operatorname{Ker} x \times \operatorname{Im} x$. Если $g = hk$, где $h \in \operatorname{Ker} x$, $k \in \operatorname{Im} x$, то определим $gy = h$. Тогда $y \in J(G)$, $\operatorname{Im} y = \operatorname{Ker} x$, $\operatorname{Ker} y = \operatorname{Im} x$, $\operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y = \langle 1 \rangle$, $xy = yx = 0$ и $G = (\operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y) \leftthreetimes (\operatorname{Im} x \times \operatorname{Im} y)$. Так как $\operatorname{Ker} 1 = \operatorname{Ker} x \cap \operatorname{Ker} y = \langle 1 \rangle$ и $\operatorname{Im} 1 = \operatorname{Im} x \times \operatorname{Im} y$, то $x \times y = 1$. Следствие доказано.

Другое необходимое и достаточное условие для прямой разложимости $G = \operatorname{Ker} x \times \operatorname{Im} x$, $x \in J(G)$, можно вывести из следующего результата Моргадо [I0]: если $y \in \operatorname{End} G$, то $G = \operatorname{Ker} y \times \operatorname{Im} y$ тогда и только тогда, когда существует такой $z \in \operatorname{Aut} G$, что $yz = y^2 = zy$ и $zuy = yuz$ для каждого внутреннего автоморфизма u группы G. В связи с тем, что по полугруппе $\operatorname{End} G$ трудно узнать, какие ее элементы являются внутренними автоморфизмами группы G, этот результат Моргадо для наших целей неудобен.

Следствие I.9. Если $x, y \in J(G)$ и определено $x \times y \in J(G)$, то

$$g(x \times y) = gx \cdot gy$$

для каждого $g \in G$.

Доказательство. По теореме I.7 $xy=yx=0$ и

$$G=\operatorname{Ker}(x\times y)\curlywedge \operatorname{Im}(x\times y),\ \operatorname{Ker}(x\times y)=\operatorname{Ker}x\cap\operatorname{Ker}y,\ \operatorname{Im}(x\times y)=\operatorname{Im}x\curlywedge\operatorname{Im}y.$$

Поэтому каждый элемент g группы G имеет вид $g=kbc$, где $k\in\operatorname{Im}x$, $b\in\operatorname{Im}y$, $c\in\operatorname{Ker}x\cap\operatorname{Ker}y$. Так как $kb\in\operatorname{Im}(x\times y)$ и $c\in\operatorname{Ker}(x\times y)$, то $g(x\times y)=(kbc)(x\times y)=(kb)(x\times y)=kb$. Поскольку $xy=yx=0$, то $\operatorname{Im}y\leq\operatorname{Ker}x$, $\operatorname{Im}x\leq\operatorname{Ker}y$ и $gx=(kbc)x=kx=k$, $gy=(kbc)y=by=b$. Следовательно, $g(x\times y)=kb=(gx)(gy)$ для каждого $g\in G$. Следствие доказано.

Ввиду следствия I.9 ясно, что $x\times y$ равен обычной сумме $x+y$ эндоморфизмов групп. Прямые разложения идемпотентов произвольной полугруппы рассматривал А.Х.Лившиц [I]. Можно показать, что в случае полугруппы эндоморфизмов группы наша операция $\times$ совпадает с операцией А.Х. Лившица, если в результате получается так называемый S-правильный элемент (см. А.Х.Лившиц [I]).

Следствие I.10. Если $x,y,z\in J(G)$ и существуют $x\times y$ и $(x\times y)\times z$, то существуют идемпотенты $y\times z$, $x\times(y\times z)$ и

$$(x\times y)\times z=x\times(y\times z).$$

Доказательство. Пусть $x,y,z\in J(G)$ и существуют идемпотенты $x\times y$ и $(x\times y)\times z$. По определению операции $\times$ отсюда следуют равенства

$$xy=yx=0,\ (x\times y)z=z(x\times y)=0$$

$$x(x\times y)=(x\times y)x=x,\ y(x\times y)=(x\times y)y.$$

Это дает

$$zx=z((x\times y)\cdot x)=(z\cdot(x\times y))\cdot x=0\cdot x=0.$$

Аналогично

$$xz=yz=zy=0. \tag{I.16}$$

Следовательно, $\operatorname{Im}x\leq\operatorname{Ker}y\cap\operatorname{Ker}z$ и по лемме I.4

$$\operatorname{Ker}y\cap\operatorname{Ker}z=(\operatorname{Ker}x\cap\operatorname{Ker}y\cap\operatorname{Ker}z)\curlywedge\operatorname{Im}x. \tag{I.17}$$

Так как существуют $x\times y$ и $(x\times y)\times z$, то по теореме I.7 и формуле (I.17)

$$G=(\operatorname{Ker}(x\times y)\cap\operatorname{Ker}z)\curlywedge(\operatorname{Im}(x\times y)\curlywedge\operatorname{Im}z)=$$

$$=(\operatorname{Ker}\cap\operatorname{Ker}y\cap\operatorname{Ker}z)\curlywedge(\operatorname{Im}x\times\operatorname{Im}y\times\operatorname{Im}z)=$$

$$=((\mathrm{Ker}\,x \cap \mathrm{Ker}\,y \cap \mathrm{Ker}\,z) \leftthreetimes \mathrm{Im}\,x) \leftthreetimes (\mathrm{Im}\,y \times \mathrm{Im}\,z) =$$

$$= (\mathrm{Ker}\,y \cap \mathrm{Ker}\,z) \leftthreetimes (\mathrm{Im}\,y \times \mathrm{Im}\,z). \qquad (\mathrm{I}.18)$$

Ввиду равенств (I.16), (I.18) и теоремы I.7 идемпотент $y\times z$ существует. При этом по этой теореме

$$\mathrm{Ker}(y\times z) = \mathrm{Ker}\,y \cap \mathrm{Ker}\,z, \quad \mathrm{Im}(y\times z) = \mathrm{Im}\,y \times \mathrm{Im}\,z. \qquad (\mathrm{I}.19)$$

В силу $yx = zx = 0$ и $\mathrm{Im}\,x \leqslant \mathrm{Ker}\,y \cap \mathrm{Ker}\,z$ имеем

$$x\cdot(y\times z) = 0, \ (y\times z)\cdot x = (y+z)\cdot x = yz + zx = 0+0=0. \qquad (\mathrm{I}.20)$$

Из равенств (I.18) и (I.19) следует

$$G = (\mathrm{Ker}\,x \cap \mathrm{Ker}(y\times z)) \leftthreetimes (\mathrm{Im}\,x \times \mathrm{Im}(y\times z)). \qquad (\mathrm{I}.21)$$

Из равенств (I.20) и (I.21) в силу теоремы I.7 следует существование идемпотента $x\times(y\times z)$. При этом образы и ядра идемпотентов $(x\times y)\times z$ и $x\times(y\times z)$ совпадают. По лемме I.3 $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$. Следствие доказано.

Отметим, что коммутативность операции $\times$ следует уже из ее определения. В силу следствия I.10 она даже ассоциативна на $\mathcal{J}(G)$. Поэтому можно записать

$$(x\times y)\times z = x\times y\times z, \ (\dots((x_1\times x_2)\times x_3)\times\dots\times x_n) = x_1\times\dots\times x_n.$$

Индукцией по числу сомножителей получим равенства

$$\mathrm{Ker}(x_1\times\dots\times x_n) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\,x_i, \ \mathrm{Im}(x_1\times\dots\times x_n) = \mathrm{Im}\,x_1\times\dots\times \mathrm{Im}\,x_n = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\,x_i.$$

Отметим, что на множестве идемпотентов произвольной полугруппы операция $\times$ не обязательно ассоциативна.

<u>Следствие I.II</u>. Пусть $G = N \leftthreetimes (G_1\times\dots\times G_n)$ и $\pi_1,\dots,\pi_n,\pi \in \mathcal{J}(G)$ такие, что

$$\mathrm{Ker}\,\pi = N, \ \mathrm{Im}\,\pi = \prod_{j=1}^{n} G_j, \ \mathrm{Ker}\,\pi_i = N \leftthreetimes \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} G_j, \ \mathrm{Im}\,\pi_i = G_i. \qquad (\mathrm{I}.22)$$

Тогда

$$\pi = \pi_1\times\dots\times\pi_n. \qquad (\mathrm{I}.23)$$

Наоборот, если $\pi_1,\dots,\pi_n, \pi \in \mathcal{J}(G)$ и имеет место равенство (I.23), то $G = N \leftthreetimes (G_1\times\dots\times G_n)$, где $N, G_1,\dots, G_n$ удовлетворяют условиям (I.22).

<u>Доказательство</u>. Докажем равенство (I.23) индукцией по числу сомножителей n. Пусть $n = 2$. Так как $\mathrm{Im}\,\pi_1 \leqslant \mathrm{Ker}\,\pi_2$,

$\mathrm{Im}\pi_2 \leqslant \mathrm{Ker}\pi_1$, то $\pi_1\pi_2 = \pi_2\pi_1 = 0$. Далее, если $n_1 g_1 = n_2 g_2$ $(n_i \in \mathcal{N}_i,\ g_i \in G_i,\ i = 1,2)$, то $n_2^{-1} n_1 = g_2 g_1^{-1}$, откуда легко вывести, что $g_1 = g_2 = 1$ и пересечение $\mathrm{Ker}\pi_1 \cap \mathrm{Ker}\pi_2 = (\mathcal{N} \leftthreetimes G_2) \cap (\mathcal{N} \leftthreetimes G_1)$ равно $\mathcal{N}$. Тогда $G = (\mathrm{Ker}\pi_1 \cap \mathrm{Ker}\pi_2) \leftthreetimes (\mathrm{Im}\pi_1 \times \mathrm{Im}\pi_2)$ и по теореме I.7 $\pi = \pi_1 \times \pi_2$.

Предположим теперь, что $n > 2$ и для числа сомножителей меньших чем n равенство (I.23) имеет место. Обозначим $\mathcal{N}' = \mathcal{N} \leftthreetimes G_n$. Тогда $G = \mathcal{N}' \leftthreetimes (G_1 \times \dots \times G_{n-1})$. По лемме I.3 существует $\pi_1' \in \mathcal{J}(G)$, где

$$\mathrm{Ker}\pi_1' = \mathcal{N}', \quad \mathrm{Im}\pi_1' = \prod_{j=1}^{n-1} G_j . \tag{I.23a}$$

Так как π_1' и $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ удовлетворяют равенствам (I.22), то по предположению индукции имеем $\pi_1' = \pi_1 \times \dots \times \pi_{n-1}$. Из (I.22) и (I.23a) следует, что $\mathrm{Im}\pi = \mathrm{Im}\pi_1' \times \mathrm{Im}\pi_n$, $\mathrm{Ker}\pi_n = \mathcal{N} \leftthreetimes \mathrm{Im}\pi_1'$, $\mathrm{Ker}\pi_1' = \mathcal{N} \leftthreetimes \mathrm{Im}\pi_n$. Теперь опять по предположению индукции имеем $\pi = \pi_1' \times \pi_n$, т.е. $\pi = \pi_1 \times \dots \times \pi_n$. Следовательно, равенство (I.23) имеет место для всех n;

Пусть, наоборот, имеет место (I.23). Обозначим $G_i = \mathrm{Im}\pi_i$, $\mathcal{N} = \mathrm{Ker}\pi$. При существовании элемента $x \times y$ $(x, y \in \mathcal{J}(G))$ имеем по теореме I.7 $\mathrm{Ker}(x \times y) = \mathrm{Ker}x \cap \mathrm{Ker}y$ и $\mathrm{Im}(x \times y) = \mathrm{Im}x \times \mathrm{Im}y$. Теперь повторным применением теоремы получаем $G = \mathrm{Ker}\pi \leftthreetimes \mathrm{Im}\pi = \mathrm{Ker}(\pi_1 \times \dots \times \pi_n) \leftthreetimes \mathrm{Im}(\pi_1 \times \dots \times \pi_n) = (\mathrm{Ker}(\pi_1 \times \dots \times \pi_{n-1}) \cap \mathrm{Ker}\pi_n) \leftthreetimes$ $\leftthreetimes (\mathrm{Im}(\pi_1 \times \dots \times \pi_{n-1}) \times \mathrm{Im}\pi_n) = \dots = (\mathrm{Ker}\pi_1 \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\pi_n) \leftthreetimes$ $\leftthreetimes (\mathrm{Im}\pi_1 \times \dots \times \mathrm{Im}\pi_n) = \mathcal{N} \leftthreetimes (G_1 \times \dots \times G_n)$. Равенства (I.22) кроме третьего очевидно выполнены. Ясно, что $\mathcal{N} \leqslant \mathrm{Ker}\pi_i$. По определению произведения $\times$ имеем $(x_1 \times \dots \times x_{i-1} \times x_{i+1} \times \dots \times x_n) \cdot x_i = 0$, т.е. $\prod_{j \neq i} G_j = \prod_{j=1, j \neq i}^{n} \mathrm{Im}\pi_j = \mathrm{Im}(x_1 \times \dots \times x_{i-1} \times x_{i+1} \times \dots \times x_n) \leqslant \mathrm{Ker}\pi_i$. Поэтому $\mathcal{N} \leftthreetimes \prod_{j=1, j \neq i}^{n} G_j \leqslant \mathrm{Ker}\pi_i$ и в силу $G = \mathrm{Ker}\pi_i \leftthreetimes G_i = (\mathcal{N} \leftthreetimes \prod_{j=1, j \neq i}^{n} G_j) \leftthreetimes G_i$ ясно, что имеет место и третье равенство из равенств (I.22). Следствие доказано.

<u>Следствие I.12</u>. Если полугруппы эндоморфизмов групп G и H изоморфны $(\varphi : \mathrm{End}\, G \to \mathrm{End}\, H)$ и существует $x_1 \times \dots \times x_n$, где $x_i \in \mathcal{J}(G)$, то существует $(x_1\varphi) \times \dots \times (x_n\varphi)$ и $(x_1 \times \dots \times x_n)\varphi = (x_1\varphi) \times \dots \times (x_n\varphi)$. Также $K(x)\varphi = K(x\varphi)$ для каждого $x \in \mathrm{End}\, G$.

<u>Доказательство</u>. Так как равенства $yx = xy = y$ и $(y\varphi)(x\varphi) = (x\varphi)(y\varphi) = y\varphi$ $(x, y \in \mathrm{End}\, G)$ равносильны, ибо φ -

изоморфизм, то $K(x)\varphi = K(x\varphi)$ для каждого $x \in \mathrm{End}G$. Поскольку из $xu = ux$ вытекает $(x\varphi)(u\varphi) = (u\varphi)(x\varphi)$ и наоборот, то $(C_{K(z)}(x))\varphi = C_{K(z)\varphi}(x\varphi) = C_{K(z\varphi)}(x\varphi)$. Из $z \in B(x_1, x_2)$ следует $x_1, x_2 \in K(z)$ и $C_{K(z)}(x_1) = C_{K(z)}(x_2)$. Отсюда получаем, что $x_1\varphi, x_2\varphi \in K(z\varphi)$ и $C_{K(z\varphi)}(x_1\varphi) = C_{K(z\varphi)}(x_2\varphi)$. Это дает $z\varphi \in B(x_1\varphi, x_2\varphi)$, откуда $B(x_1, x_2)\varphi \subset B(x_1\varphi, x_2\varphi)$. Аналогично получаем обратное включение. Следовательно, x является двусторонним нулем множества $B(x_1, x_2)$ тогда и только тогда, когда $x\varphi$ является двусторонним нулем множества $B(x_1\varphi, x_2\varphi)$. Поэтому $x_1 \times x_2$ существует тогда и только тогда, когда существует $(x_1\varphi) \times (x_2\varphi)$ $(x_1, x_2 \in J(G))$. При этом $(x_1 \times x_2)\varphi = (x_1\varphi) \times (x_2\varphi)$. Индукцией по n можно убедиться теперь в справедливости утверждения следствия для произвольного n. Следствие доказано.

<u>Теорема I.13</u>. Если полугруппы эндоморфизмов групп G и H изоморфны и $G = G_1 \times \dots \times G_n$, то существует такое разложение группы H в прямое произведение $H = H_1 \times \dots \times H_n$, что полугруппы $\mathrm{End}\, G_i$ и $\mathrm{End}\, H_i$ изоморфны $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\varphi : \mathrm{End}\, G \to \mathrm{End}\, H$ – изоморфизм. По следствию I.11 будет $\pi_1 \times \dots \times \pi_n = 1_G$, где π_i – проекция группы G на подгруппу G_i. Согласно следствию I.12 имеем $(\pi_1\varphi) \times \dots \times (\pi_n\varphi) = 1_H$. По следствию I.11 $H = \mathrm{Im}(\pi_1\varphi) \times \dots \times \mathrm{Im}(\pi_n\varphi)$. Обозначим $H_i = \mathrm{Im}(\pi_i\varphi)$. Тогда $H = H_1 \times \dots \times H_n$. По следствию I.12 $(K(\pi_i))\varphi = K(\pi_i\varphi)$. Поэтому полугруппы $K(\pi_i)$ и $K(\pi_i\varphi)$ изоморфны. По лемме I.6

$$\mathrm{End}\, G_i = \mathrm{End}(\mathrm{Im}\,\pi_i) \simeq K(\pi_i) \simeq K(\pi_i\varphi) \simeq \mathrm{End}(\mathrm{Im}(\pi_i\varphi)) = \mathrm{End}\, H_i.$$

Теорема доказана.

<u>Следствие I.14</u>. Если $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, H$, G, H – группы, то из неразложимости группы H в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп следует, что группа G не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп.

<u>Доказательство</u>. Будем применять следствие I.11. Пусть $G = G_1 \times G_2$. Тогда $\pi_1 \times \pi_2 = 1_G$, где π_i – проекция группы G на подгруппу G_i $(i = 1,2)$. В силу изоморфизма $\varphi : \mathrm{End}\, G \to \mathrm{End}\, H$ имеем $H = H_1 \times H_2$, где $H_i = \mathrm{Im}(\pi_i\varphi)$ и $\pi_i\varphi$ – образ эндоморфизма π_i. Если $G_1 \neq \langle 1 \rangle, G$, то $\pi_1 \neq 0, 1$ и, следовательно, $\pi_1\varphi \neq 0, 1$, т.е. $H_1 \neq \langle 1 \rangle, H$ (ведь $\pi_1\varphi \in J(H)$).

Так как H неразложима в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп, то случай $H_1 \neq \langle 1 \rangle, H$ невозможен. Следовательно, $G_1 = \langle 1 \rangle$ или G и группа G неразложима в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп. Следствие доказано.

§ 2. Конечные группы, у которых все собственные эндоморфизмы идемпотентны

Известно, что группа диэдра $\mathfrak{D}_r$ задается со следующими определяющими соотношениями:

$$a^2 = b^r = 1, \quad a^{-1}ba = b^{-1}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. Группа диэдра $\mathfrak{D}_r$, где r - нечетное простое число, обладает ненулевыми собственными эндоморфизмами и все они идемпотентны.

Доказательство. В [3] (теоремы 1 и 3) доказано, что ненулевые собственные эндоморфизмы группы диэдра $\mathfrak{D}_r$, r - нечетны, образуют полугруппу $T(\mathfrak{D}_r) = \{\|i,j\| \mid i,j \in Z_r,\ (i,r) \neq 1\}$ с правилом умножения

$$\|i,j\| \cdot \|i',j'\| = \|ii', ji'+j'\|. \tag{2.2}$$

Если r - простое нечетное число, то из неравенства $(i,r) \neq 1$ всегда следует, что $i \equiv 0 \pmod{r}$, т.е. $i = 0$ в кольце вычетов Z_r, и $T(\mathfrak{D}_r) = \{\|0,j\| \mid j \in Z_r\}$. В силу правила (2.2) ясно, что $xy = y$ для каждых $x, y \in T(\mathfrak{D}_r)$. В частности $x^2 = x$ для каждого $x \in T(\mathfrak{D}_r)$. Лемма доказана.

В настоящем параграфе докажем, что указанным свойством обладают только группы диэдра $\mathfrak{D}_r$, где r - нечетное простое число.

Лемма 2.2. Пусть G - конечная группа нечетного порядка, ω - ее автоморфизм, $\omega^2 = 1$, $A = \{g \in G \mid g\omega = g\}$, $B = \{g \in G \mid g\omega = g^{-1}\}$. Тогда $G = AB$ и $A \cap B = \langle 1 \rangle$.

Доказательство. Покажем, что $G = AB$. Для этого предположим, что $g \in G$ и $|G| = 2j-1$. Обозначим $a = g \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega))^j$ и $b = (g^{-1} \cdot (g\omega))^{-j}$. Тогда $g = ab$. Кроме того,

$$\begin{aligned} a\omega &= (g \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega))^j)\omega = (g\omega)((g\omega)^{-1} \cdot g)^j = \\ &= (g\omega) \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega))^{-j} = g \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega)) \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega))^{-j} = \\ &= g \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega))^{-j+1} = g \cdot (g^{-1} \cdot (g\omega))^j = a \end{aligned}$$

$$b\omega = (g^{-1}\cdot(g\omega))^{-\delta}\omega = ((g\omega)^{-1}\cdot g)^{-\delta} = (g^{-1}\cdot(g\omega))^{\delta} = b^{-1}.$$

Следовательно, $a \in A$, $b \in B$, $G = AB$.

Покажем, что $A \cap B = \langle 1 \rangle$. Для того предположим, что $g \in A \cap B$. Тогда $g\omega = g = g^{-1}$, $g^2 = 1$ и ввиду нечетности порядка группы G имеем $g = 1$. Следовательно, $A \cap B = \langle 1 \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. Пусть выполнены предположения леммы 2.2 и $\omega \neq 1$. Тогда или а) $G \simeq C_q$, $B = G$, где q - некоторое нечетное простое число, или б) найдется такой $\lambda \in T(G) = \operatorname{End} G \setminus (\operatorname{Aut} G \cup \{0\})$, что $\omega\lambda = \lambda\omega$.

Доказательство. Фейт и Томпсон [7] доказали, что каждая конечная группа нечетного порядка разрешима. Следовательно, группа G разрешима и $G' < G$ (G' - коммутант группы G). Обозначим $\bar{G} = G/G'$, $\bar{g} = gG'$ и

$$\bar{A} = \{\bar{a} \mid a \in A\}, \quad \bar{B} = \{\bar{b} \mid b \in B\}.$$

Так как G' является характеристической подгруппой группы G, то всегда из $g^{-1}h \in G'$ следует $(g^{-1}h)\omega = (g\omega)^{-1}(h\omega) \in G'$. Поэтому отображение $\omega^*: \bar{G} \to \bar{G}$, где $\bar{g}\omega^* = \overline{g\omega}$, является автоморфизмом группы $\bar{G}$. Так как $\omega^2 = I$, то $\omega^{*2} = I$. По лемме 2.2 $\bar{G} = A^* \cdot B^*$, $A^* \cap B^* = \langle 1 \rangle$, где $A^* = \{\bar{g} \in \bar{G} \mid \bar{g}\omega^* = \bar{g}\}$, $B^* = \{\bar{g} \in \bar{G} \mid \bar{g}\omega^* = \bar{g}^{-1}\}$. Так как группа $\bar{G}$ коммутативна, то A^* и B^* являются подгруппами группы $\bar{G}$. Ясно, что $\bar{A} \leqslant A^*$ и $\bar{B} \leqslant B^*$. В силу $A^* \cap B^* = \langle 1 \rangle$ имеем $\bar{A} \cap \bar{B} = \langle 1 \rangle$. По лемме 2.2 $G = AB$, откуда $\bar{G} = \bar{A} \cdot \bar{B}$. Поэтому $\bar{A} = A^*$, $\bar{B} = B^*$ и

$$\bar{G} = \bar{A} \times \bar{B}. \tag{2.3}$$

Ввиду коммутативности группы $\bar{G}$ и равенства (2.3) найдутся такие $c_1, \dots, c_n \in A \cup B$, что

$$\bar{G} = \langle \bar{c}_1 \rangle \times \dots \times \langle \bar{c}_n \rangle, \quad \bar{c}_i \neq 1,$$

и порядок элемента $\bar{c}_i$ является степенью простого числа ($1 \leqslant i \leqslant n$). Ясно, что $c_i\omega = c_i^{\varepsilon}$, где $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Обозначим $N = \langle c_2, \dots, c_n, G' \rangle$. Тогда $N \triangleleft G$ и $N\omega = N$, ибо $c_i\omega = c_i^{\varepsilon}$ и $G'\omega = G'$. Пусть порядки элементов c_1 и $\bar{c}_1$ суть соответственно q^m и q^k. Тогда также $G/N = \langle c_1 N \rangle$ имеет порядок q^k. Обозначим через λ эндоморфизм группы G, который получается как произведение следующих естественно возникающих гомоморфизмов:

$$G \to G/N = \langle c_1 N \rangle \to \langle c_1^{q^{m-k}} \rangle,$$

т.е.

$$(c_1^j h)\lambda = c_1^{jq^{m-k}}, \quad h \in N.$$

Так как $N\omega = N$ и $\mathrm{Ker}\lambda = N$, то

$$(c_1^j h)(\lambda\omega) = c_1^{jq^{m-k}}\omega = c_1^{\varepsilon j q^{m-k}}, \quad (c_1^j h)(\omega\lambda) = (c_1^{\varepsilon j}(h\omega))\lambda = c_1^{\varepsilon j q^{m-k}},$$

т.е. $\lambda\omega = \omega\lambda$. По построению $\lambda \neq 0$. Если $\lambda \notin \mathrm{Aut}\,G$, то имеет место утверждение б) леммы.

Предположим, что $\lambda \in \mathrm{Aut}\,G$. Тогда $N = \langle 1 \rangle$ и $G = \langle c_1 \rangle \simeq C_{q^m}$. В силу $c_1\omega = c_1^{\varepsilon}$ и $\omega \neq 1$ имеем $\varepsilon = -1$, т.е. $c_1\omega = c_1^{-1}$. Если $m > 1$, то эндоморфизм τ группы G, где $c_1\tau = c_1^{q}$, удовлетворяет равенству $\tau\omega = \omega\tau$. В силу $\tau \notin \mathrm{Aut}\,G \cup \{0\}$ имеем $\tau \in T(G)$ и получим случай б) леммы. Если $m = 1$, то $G \simeq C_q$, $G = B$ и получим случай а) леммы. Лемма доказана.

Лемма 2.4. Если G – конечная группа и $\mathrm{Aut}\,G = \langle 1 \rangle$, то $G = \langle 1 \rangle$ или $G \simeq C_2$.

Доказательство. Если $\mathrm{Aut}\,G = \langle 1 \rangle$, то $G/Z(G) = \langle 1 \rangle$ и группа G коммутативна. Отображение $g \to g^{-1}$, $g \in G$, является автоморфизмом, откуда ввиду $\mathrm{Aut}\,G = \langle 1 \rangle$ следует, что $g = g^{-1}$, т.е. $g^2 = 1$ для каждого $g \in G$. Если $G \neq \langle 1 \rangle$, то $G \simeq C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2$, откуда сразу следует, что $G \simeq C_2$. Лемма доказана.

Теорема 2.5. Конечная группа G обладает собственными ненулевыми эндоморфизмами и все они идемпотентны тогда и только тогда, когда она изоморфна группе диэдра D_q, где q – некоторое нечетное простое число. При этом $xy = y$ для каждых $T(G)$.

Доказательство. По лемме 2.I группа D_q, q – нечетное простое число, обладает ненулевыми собственными эндоморфизмами и все они идемпотентны. При этом $xy = y$ для каждых $x, y \in T(D_q)$.

Пусть конечная группа G обладает собственными ненулевыми эндоморфизмами и все они идемпотентны, т.е. $\emptyset \neq T(G) \subseteq J(G)$. Пусть $x \in T(G)$. Тогда $x \neq 0$ и $x^2 = x$. По лемме I.6 $\mathrm{End}(\mathrm{Im}x) \simeq K(x)$. Так как $K(x) = \{y \in \mathrm{End}\,G \mid xy = yx = y\}$ и $x \in T(G)$, то $K(x) \leqslant T(G) \cup \{0\}$ и все элементы полугрупп $K(x)$ и $\mathrm{End}(\mathrm{Im}\,x)$ являются идемпотентами. Следовательно, $\mathrm{Aut}(\mathrm{Im}\,x) = \langle 1 \rangle$ и по лемме 2.4 $\mathrm{Im}\,x \simeq C_2$, ибо $x \neq 0$.

Фиксируем $x \in T(G)$. Тогда $\mathrm{Im}\,x = \langle a \rangle \simeq C_2$ и по лемме I.I.

$$G = \mathrm{Ker}\,x \leftthreetimes \langle a \rangle, \quad o(a) = 2.$$

Это означает, что каждый элемент $g \in G$ записывается в виде $g = a^i h$, где $i \in Z_2$ и $h \in \mathrm{Ker}\,x$. Порядок группы $\mathrm{Ker}\,x$ является нечетным, ибо в противном случае существует элемент $c \in \mathrm{Ker}\,x$ второго порядка и эндоморфизм τ группы G, для которого $\tau^2 = 0$, $\tau \neq 0$ (например, в качестве τ можно взять произведение следующих естественно возникающих гомоморфизмов: $G \to G/_{\mathrm{Ker}\,x} = \langle a\mathrm{Ker}\,x \rangle \to \langle c \rangle$, т.е. $(a^i h)\tau = c^i$, $h \in \mathrm{Ker}\,x$).

Определим $\omega \in \mathrm{Aut}(\mathrm{Ker}\,x)$ следующим образом:

$$h\omega = a^{-1} h a, \quad h \in \mathrm{Ker}\,x$$

Тогда $\omega^2 = 1$, ибо $a^2 = 1$. Если $\omega = 1$, то $G = \mathrm{Ker}\,x \times \mathrm{Im}\,x$. Построим отображение y по формуле $(a^i h)y = h$, $h \in \mathrm{Ker}\,x$. Тогда $y \in T(G)$ и для него также имеет место $\mathrm{Im}\,y \simeq C_2$. Так как $\mathrm{Im}\,y = \mathrm{Ker}\,x$, то ввиду нечетности порядка группы $\mathrm{Ker}\,x$ получим противоречие. Следовательно, $\omega \neq 1$ и к группе $\mathrm{Ker}\,x$ применима лемма 2.3.

Предположим, что имеет место случай б) леммы 2.2, т.е. существует такой $\lambda \in T(\mathrm{Ker}\,x)$, что $\omega\lambda = \lambda\omega$. Определим отображение $\mu : G \to G$ следующим образом:

$$(a^i h)\mu = a^i \cdot (h\lambda), \quad h \in \mathrm{Ker}\,x.$$

Покажем, что $\mu \in T(G)$. Так как $\lambda \in T(\mathrm{Ker}\,x)$, то для того достаточно доказать, что $\mu \in \mathrm{End}\,G$. Но $\mu \in \mathrm{End}\,G$, ибо

$$\begin{aligned}((a^i h)\cdot(a^{i'} h'))\mu &= (a^{i+i'}(a^{-i'} h a^{i'} \cdot h'))\mu = a^{i+i'}(((h\omega^{i'})\cdot h')\lambda) = \\ &= a^{i+i'}(h(\omega^{i'}\lambda)\cdot(h'\lambda)) = a^{i+i'}\cdot(h(\lambda\omega^{i'})\cdot h'\lambda)) = \\ &= a^{i+i'}\cdot a^{-i'}(h\lambda)a^{i'}\cdot(h'\lambda) = a^i(h\lambda)\cdot a^{i'}(h'\lambda) = \\ &= ((a^i h)\mu)\cdot((a^{i'} h')\mu),\end{aligned}$$

где $h, h' \in \mathrm{Ker}\,x$. Поскольку $a\mu = a$ и ввиду $\lambda \neq 0$ будет $(\mathrm{Ker}\,x)\mu = (\mathrm{Ker}\,x)\lambda \neq \langle 1 \rangle$, то $|\mathrm{Im}\,y| > |\langle a \rangle| = 2$. Ввиду $\mu \in T(G)$ имеем $\mathrm{Im}\,\mu \simeq C_2$, $|\mathrm{Im}\,\mu| = 2$. Полученное противоречие показывает, что случай б) леммы 2.3 в данном случае не имеет место. Следовательно, имеет место случай а) леммы 2.3, т.е. существуют такие $b \in \operatorname{Ker}\varkappa$ и простое нечетное число q, что $\operatorname{Ker}\varkappa = \langle b \rangle \simeq C_q$, $b\omega = a^{-1}ba = b^{-1}$. Поэтому группа G задается определяющими соотношениями $a^2 = b^q = 1$, $a^{-1}ba = b^{-1}$, где q – некоторое нечетное простое число. В силу соотношений (2.I) ясно, что $G \simeq D_q$, q – нечетное простое число. Теорема доказана.

§ 3. Коммутативность полугруппы эндоморфизмов

Неизвестно, для каких групп G полугруппа $\operatorname{End} G$ является коммутативной. Для коммутативных групп этот вопрос рассматривали Селе и Сендрей [I3], Шульц [I2] и Леувен [I4]. В частности из их результатов следует, что в классе всех конечных абелевых групп коммутативными полугруппами эндоморфизмов обладают лишь циклические группы. Среди некоммутативных групп коммутативными полугруппами эндоморфизмов могут обладать только метабелевы группы G, ибо группа $G/Z(G)$ абелева ввиду коммутативности группы внутренних автоморфизмов группы G.

В данном параграфе мы докажем существование таких полугрупп (теорема 3.6) и опишем строение полугруппы $\operatorname{End} G$ в случае, когда эта полугруппа коммутативна и группа G конечна. Если конечная группа G абелева или метабелева, то она разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп $G = G_1 \times \ldots \times G_n$ и ясно, что $\operatorname{End} G \simeq \operatorname{End} G_1 \times \ldots \times \operatorname{End} G_n$. Поэтому достаточно рассматривать только p-группы. Для конечных абелевых групп задача решена. Поэтому рассмотрим только конечные метабелевы p-группы.

Пусть G – конечная метабелева p-группа с коммутативной полугруппой эндоморфизмов $\operatorname{End} G$. Ввиду коммутативности группы G/G' (G' – коммутант группы G) имеем

$$G/G' = \langle g_1 G' \rangle \times \ldots \times \langle g_n G' \rangle, \quad o(g_i) = p^{\alpha_i + \beta_i}, \quad o(g_i G') = p^{\alpha_i} \tag{3.I}$$

при некоторых $g_1, \ldots, g_n \in G$ $(\alpha_i \geq 1)$. Поэтому каждый элемент группы G выражается единственным образом в виде

$$g = g_1^{i_1} \cdots g_n^{i_n} z, \quad 0 \leq i_j < p^{\alpha_j}, \quad z \in G' \tag{3.2}$$

Действительно, в силу равенства (3.I) каждый элемент $g \in G$

выражается в виде (3.2). Если еще $g = g_1^{i_1'} \dots g_n^{i_n'} z'$, где $z' \in G'$, $0 \le i_j' < p^{\alpha_j}$, то $(g_1 G')^{i_1} \dots (g_n G')^{i_n} = (g_1^{i_1'} G') \dots (g_n^{i_n'} G') = g_1^{i_1'} \dots g_n^{i_n'} G' = g_1^{i_1'} \dots g_n^{i_n'} G' = (g_1^{i_1'} G') \dots (g_n^{i_n'} G') = (g_1 G')^{i_1'} \dots (g_n G')^{i_n'}$, откуда по равенству (3.I) $i_1 = i_1', \dots, i_n = i_n'$ и поэтому также $z = z'$. Будем называть этот вид элемента g каноническим.

В группе G справедливы следующие формулы (см. [2], стр. II5):

$$
\begin{aligned}
&[g, hk] = [g, h][g, k], \quad [hk, g] = [h, g][k, g], \\
&(gh)^m = g^m h^m [h, g]^{1/2 \cdot m(m-1)} \\
&[g, h]^m = [g^m, h] = [g, h^m],
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

где $g, k, h \in G$, m - натуральное число. Докажем при сделанных предположениях некоторые леммы.

Лемма 3.I. $\beta_1 = \dots = \beta_n = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$.

Доказательство. Пусть $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ и $\lambda_{ji} = \max\{0, \alpha_i + \beta_i - \alpha_j\}$. Рассмотрим следующие гомоморфизмы: $\varepsilon : G \to G'$ - естественный гомоморфизм; $\varkappa_j : G/G' = \langle g_1 G' \rangle \times \dots \times \langle g_n G' \rangle \to \langle g_j G' \rangle$ - проекция группы G/G' на ее j-ую компоненту; $\theta_k : \langle g_k G' \rangle \to \langle g_k p^{\beta_k} \rangle$, где $(g_k G')\theta_k = g_k^{p^{\beta_k}}$ (θ_k является гомоморфизмом, в силу $O(g_k G') = O(g_k^{p^{\beta_k}}) = p^{\alpha_k}$); $\eta_{ji} : \langle g_j G' \rangle \to \langle g_i^{p^{\lambda_{ji}}} \rangle$, где $(g_j G')\eta = g_i^{p^{\lambda_{ji}}}$ (η_{ji} является гомоморфизмом, ибо $O(g_j G') = p^{\alpha_j}$ и $(g_i^{p^{\lambda_{ji}}})^{p^{\alpha_j}} = 1$.) Рассмотрим гомоморфизмы $\tau_{ji} = \varepsilon \varkappa_j \eta_{ji}$, $\lambda_k = \varepsilon \varkappa_k \theta_k$. Так как $\operatorname{Im} \tau_{ji}$, $\operatorname{Im} \lambda_k \le G$, то можно утверждать, что $\tau_{ji}, \lambda_k \in \operatorname{End} G$. По определению эндоморфизмов τ_{ji} и λ_k получим

$$
g_j(\tau_{ji} \lambda_k) = g_i^{p^{\lambda_{ji}}} \lambda_k = \begin{cases} 1, & \text{если } i \ne k, \\ g_i^{p^{\lambda_{ji} + \beta_i}} & \text{если } i = k, \end{cases} \tag{3.4}
$$

$$
g_j(\lambda_k \tau_{ji}) = \begin{cases} 1, & \text{если } k \ne j \\ g_i^{p^{\beta_j + \lambda_{ji}}}, & \text{если } k = j. \end{cases} \tag{3.5}
$$

Так как полугруппа $\operatorname{End} G$ коммутативна, то $\tau_{ji} \lambda_k = \lambda_k \tau_{ji}$. Поскольку $O(g_i) = p_i^{\alpha_i + \beta_i}$, то в силу равенств (3.4) и (3.5) имеем

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{ji} + \beta_j \ge \alpha_i + \beta_i, && \text{если } i \ne j = k, \\
&\lambda_{ji} + \beta_i \ge \alpha_i + \beta_i, && \text{если } i = k \ne j,
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

т.е.

$$\lambda_{ji} \geq \alpha_i, \quad \text{если } i \neq j. \qquad (3.7)$$

Поскольку $\alpha_i \geq 1$, то при $i = j$ в силу (3.7) имеем $\lambda_{ji} = max\{0, \alpha_i + \beta_i - \alpha_j\} = \alpha_i + \beta_i - \alpha_j \geq \alpha_i$ и в силу (3.6) имеем $\lambda_{ji} + \beta_j = \alpha_i + \beta_i - \alpha_j + \beta_j \geq \alpha_i + \beta_i$. Следовательно, $\beta_i \geq \alpha_j$ при $i \neq j$ и $\beta_j \geq \alpha_j$. Так как i и j являются произвольными числами из множества $\{1, \dots, n\}$, то отсюда ясно, что $\beta_i \geq \alpha_j$ для каждых $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому

$$\beta_i \geq \beta = max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \qquad (3.8)$$

для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$.

Пусть $g, h \in G$ и g задан в каноническом виде (3.2). По формулам (3.3) ввиду включения $G' \leq Z(G)$ получим

$$[g, h]^{p^\beta} = [g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n} z, h]^{p^\beta} = [g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n}, h]^{p^\beta} =$$
$$= ([g_1^{i_1}, h] \dots [g_n^{i_n}, h])^{p^\beta} = [g_1^{i_1}, h]^{p^\beta} \dots [g_n^{i_n}, h]^{p^\beta} =$$
$$= [g_1^{i_1 p^\beta}, h] \dots [g_n^{i_n p^\beta}, h].$$

Так как $O(g_j G') = p^{\alpha_j}$ и $\beta \geq \alpha_j$, то $g_j^{p^\beta} \in G' \leq Z(G)$ и, следовательно, $[g, h]^{p^\beta} = 1$. Поэтому также $c^{p^\beta} = 1$ для каждого $c \in G'$. В частности,

$$(g_j^{p^{\alpha_j}})^{p^\beta} = g_j^{p^{\alpha_j + \beta}} = 1,$$

т.е. $O(g_j) = p^{\alpha_j + \beta_j} \leq p^{\alpha_j + \beta}$, $\alpha_j + \beta_j \leq \alpha_j + \beta$ и $\beta_j \leq \beta$ для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$. Теперь в силу неравенства (3.8) ясно, что

$$\beta_1 = \dots = \beta_n = \beta = max\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}.$$

Лемма доказана.

Пусть $c_1, \dots, c_n \in G'$ и определим отображение $\mu_{c_1, \dots, c_n} : G \to G$ следующим образом:

$$g_i \mu_{c_1, \dots, c_n} = g_i c_i, \quad i \in \{1, \dots, n\};$$
$$z \mu_{c_1, \dots, c_n} = z, \quad z \in G' \qquad (3.9)$$
$$(g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n} z) \mu_{c_1, \dots, c_n} = (g_1 c_1)^{i_1} \dots (g_n c_n)^{i_n} z = g_1^{i_1} \dots g_n^{i_n} c_1^{i_1} \dots c_n^{i_n} z.$$

<u>Лемма 3.2</u>. Отображение $\mu_{c_1, \dots, c_n}$ является эндоморфизмом группы G тогда и только тогда, когда

$$c_i^{p^{\alpha_i}} = 1, \quad i \in \{1, \dots, n\}. \qquad (3.10)$$

<u>Доказательство</u>. Пусть элементы $g, g' \in G$ заданы в каноническом виде:

$$g = g_1^{i_1} \cdots g_n^{i_n} z, \quad g' = g_1^{i'_1} \cdots g_n^{i'_n} z', \ 0 \le i_j, i'_j < p^{\alpha_j}, z, z' \in G'.$$

Так как G/G' коммутативна и $G' \le Z(G)$, то

$$gg' = g_1^{i_1+i'_1} \ldots g_n^{i_n+i'_n} \cdot \tilde{z} z z'$$

для некоторого $\tilde{z} \in G'$. Разделим $i_j + i'_j$ с остатком на p^{α_j}, т.е. выразим $i_j + i'_j$ в виде $i_j + i'_j = s_j \cdot p^{\alpha_j} + t_j$, $0 \le t_j < p^{\alpha_j}$, $s_j \in \{0, 1\}$. Тогда элемент gg' имеет канонический вид

$$gg' = g_1^{t_1} \cdots g_n^{t_n} \cdot g_1^{s_1 p^{\alpha_1}} \ldots g_n^{s_n p^{\alpha_n}} \tilde{z} z z',$$

где $g_j^{s_j p^{\alpha_j}} \in G'$, ибо $o(g_j G') = p^{\alpha_j}$. По определению отображения $\mu = \mu_{c_1, \ldots, c_n}$ получим

$$\begin{aligned}
(g\mu)(g'\mu) &= ((g_1^{i_1} \ldots g_n^{i_n} z)\mu)((g_1^{i'_1} \ldots g_n^{i'_n} z')\mu) = \\
&= g_1^{i_1} \cdots g_n^{i_n} c_1^{i_1} \ldots c_n^{i_n} z \cdot g_1^{i'_1} \ldots g_n^{i'_n} c_1^{i'_1} \ldots c_n^{i'_n} z' = \\
&= g_1^{i_1} \cdots g_n^{i_n} z \cdot g_1^{i'_1} \cdots g_n^{i'_n} z' \cdot c_1^{i_1+i'_1} \ldots c_n^{i_n+i'_n} = \\
&= gg' c_1^{i_1+i'_1} \ldots c_n^{i_n+i'_n},
\end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
(gg')\mu &= (g_1^{t_1} \cdots g_n^{t_n} \cdot g_1^{s_1 p^{\alpha_1}} \ldots g_n^{s_n p^{\alpha_n}} \tilde{z} z z')\mu = \\
&= g_1^{t_1} \cdots g_n^{t_n} \cdot c_1^{t_1} \ldots c_n^{t_n} g_1^{s_1 p^{\alpha_1}} \ldots g_n^{s_n p^{\alpha_n}} \tilde{z} z z' = \\
&= g_1^{t_1} \ldots g_n^{t_n} \cdot g^{s_1 p^{\alpha_1}} \ldots g_n^{s_n p^{\alpha_n}} \tilde{z} z z' \cdot c_1^{t_1} \ldots c_n^{t_n} = \\
&= gg' c_1^{t_1} \ldots c_n^{t_n}.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Из равенств (3.11) и (3.12) следует, что $\mu \in \operatorname{End} G$ тогда и только тогда, когда

$$c_1^{t_1} \ldots c_n^{t_n} = c_1^{i_1+i'_1} \ldots c_n^{i_n+i'_n} \tag{3.13}$$

для каждых i_j, i'_j, где $0 \le i_j, i'_j < p^{\alpha_j}$, $1 \le j \le n$. Пусть $j \in \{1, \ldots, n\}$ и $i_k = i'_k = 0$ при каждом $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}$. Тогда из равенства (3.13) следует, что $c_j^{i_j+i'_j} = c_j^{t_j}$. Следовательно, $\mu \in \operatorname{End} G$ тогда и только тогда

$$c_j^{t_j} = c_j^{i_j+i'_j}$$

для каждых j и i_j, i'_j. Так как $i_j + i'_j = s_j \cdot p^{\alpha_j} + t_j$ и $s_j \in \{0, 1\}$, то ясно, что $\mu \in \operatorname{End} G$ тогда и только тогда, когда имеют место равенства (3.10). Лемма доказана.

<u>Лемма 3.3</u>. Пусть $\tau \in \operatorname{End} G$. Тогда для каждого j, $1 \le j \le n$, существует такое a_j, $0 \le a_j < p^{\alpha_j}$, $z_j \in G'$ и натуральное

число t, что

$$g_j\tau = g_j^{a_j} z_j,$$

и

$$z\tau = z^t$$

для каждого $z \in G'$.

Доказательство. Пусть $\tau \in \mathrm{End}\,G$. Фиксируем $j \in \{1,\dots,n\}$. Пусть $g_j\tau$ имеет канонический вид

$$g_j\tau = g_1^{b_1}\dots g_n^{b_n} z, \quad z \in G', \quad 0 \leq b_i < p^{\alpha_i}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Предположим, что $\mu_{c_1,\dots,c_n} \in \mathrm{End}\,G$. Так как $\tau\cdot\mu_{c_1,\dots,c_n} = \mu_{c_1,\dots,c_n}\tau$ и

$$g_j(\mu_{c_1,\dots,c_n}\cdot\tau) = (g_j c_j)\tau = g_1^{b_1}\cdots g^{b_n} z\cdot(c_j\tau),$$

$$g_j(\tau\cdot\mu_{c_1,\dots,c_n}) = (g_1^{b_1}\dots g_n^{b_n} z)\mu_{c_1,\dots,c_n} = g_1^{b_1}\dots g_n^{b_n} c_1^{b_1}\dots c_n^{b_n} z,$$

то

$$c_j\tau = c_1^{b_1}\dots c_n^{b_n}. \tag{3.14}$$

По лемме 3.2 равенство (3.14) имеет место для каждого набора $(c_1,\dots,c_n)$, который удовлетворяет условию (3.10). Если взять один раз $c_k = 1$, $k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{j\}$, второй раз $c_\ell = 1$, $\ell \in \{1,\dots,n\}\setminus\{j,k\}$, $c_k = g_k^{p^\beta}$, где $\beta = \max\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$, а c_j в обоих случаях одинаково, то из равенства (3.14) следует, что

$$c_j\tau = c_j^{b_j} = c_j^{b_j} g_k^{p^\beta b_k}, \tag{3.15}$$

т.е. $g_k^{p^\beta b_k} = 1$ для каждого $k \in \{1,\dots,n\}\setminus\{j\}$. Так как по лемме 3.1 $\beta = \beta_k$ и $o(g_k) = p^{\beta_k+\alpha_k} = p^{\beta+\alpha_k}$, то в силу $0 \leq b_k < p^{\alpha_k}$ ясно, что $b_k = 0$. Следовательно, $g_j\tau = g_j^{b_j} z$ и первое утверждение леммы доказано.

Как отмечалось в доказательстве леммы 3.1, $c^{p^\beta} = 1$ для каждого $c \in G'$. Существует такой j, что $\beta = \alpha_j$. При таком j в равенстве (3.15) в качестве c_j можно взять любой элемент из G'. Следовательно, $c\tau = c^{b_j}$ для каждого $c \in G'$, откуда следует второе утверждение леммы. Лемма доказана.

Лемма 3.4. Пусть $\tau \in \mathrm{End}\,G$. Тогда в обозначениях леммы 3.3 имеем: 1) если $\tau \in \mathrm{Aut}\,G$, то $a_j = 1$ и $t = 1$

$(1 \leq j \leq n)$; 2) если $\tau \in \mathrm{End}\, G / \mathrm{Aut}\, G$, то $t = 0$ и $\mathrm{Im}\tau \leq$ $\leq G' \leq \mathrm{Ker}\tau$.

Доказательство. Пусть $h \in G$. Обозначим через λ_h отображение $G \to G$, где $g\lambda_h = [g, h]$. В силу равенств (3.3) λ_h является эндоморфизмом группы G. Так как $\tau\lambda_h = \lambda_h\tau$ и по лемме 3.3 имеем $[g_i, h]\tau = [g_i, h]^t$, то

$$g_i(\tau\lambda_h) = [g_i\tau, h] = [g_i^{a_i} z_i, h] = [g_i^{a_i}, h] = [g_i, h]^{a_i},$$

$$g_i(\lambda_h\tau) = [g_i, h]\tau = [g_i\tau, h\tau] = [g_i^{a_i} z_i, h\tau] =$$

$$= [g_i^{a_i}, h\tau] = [g_i, h\tau]^{a_i} = [g_i, h]^t,$$

$$[g_i, h]^{a_i} = [g_i, h\tau]^{a_i} = [g_i, h]^t. \tag{3.16}$$

При $h = g_j$ имеем $[g_i, h\tau] = [g_i, g_j^{a_j} z_j] = [g_i, g_j^{a_j}] = [g_i, g_j]^{a_j}$ и равенства (3.16) принимают вид

$$[g_i, g_j] = [g_i, g_j]^{a_i a_j} = [g_i, g_j]^t. \tag{3.17}$$

Так как группа G' порождается элементами $[g_i, g_j]$ и показатель группы равен p^β, то существуют такие i и j, что $o([g_i, g_j]) = p^\beta$. При этих i и j из равенств (3.17) получим сравнения

$$t \equiv a_i \equiv a_i a_j \pmod{p^\beta}. \tag{3.18}$$

Аналогично

$$t \equiv a_j \equiv a_j a_i \pmod{p^\beta}. \tag{3.19}$$

Пусть $k \in \{1, \dots, n\}$. Так как $g_k^{p^{\alpha_k}} \in G'$, то по лемме 3.3

$$g_k^{p^{\alpha_k}}\tau = g_k^{tp^{\alpha_k}} = (g_k\tau)^{p^{\alpha_k}} = (g_k^{a_k} z_k)^{p^{\alpha_k}} = g_k^{a_k p^{\alpha_k}} z_k^{p^{\alpha_k}},$$

откуда

$$g_k^{tp^\beta} = (g_k^{tp^{\alpha_k}})^{p^{\beta-\alpha_k}} = (g_k^{a_k p^{\alpha_k}} z_k^{p^{\alpha_k}})^{p^{\beta-\alpha_k}} =$$

$$= g_k^{a_k p^\beta} z_k^{p^\beta} = g_k^{a_k p^\beta},$$

ибо $z^{p^\beta} = 1$. Следовательно, $tp^\beta \equiv a_k p^\beta \pmod{p^{\beta+\alpha_k}}$, т.е.

$$t \equiv a_k \pmod{p^{\alpha_k}}. \tag{3.20}$$

Если $\tau \in \mathrm{Aut}\, G$, то ясно, что $(t, p) = 1$. Из формул (3.18) и (3.19) следует, что $(a_i, p) = 1$, $a_j \equiv 1 \pmod{p^\beta}$ и $t = 1$. Сравнивая с (3.20), получаем $a_k = 1$ для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$. Поэтому утверждение I) леммы имеет место.

Пусть $\tau \in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$. Тогда существует такой $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$, что $a_{k_0} \equiv 0 \pmod p$. В силу сравнения (3.20) также $t \equiv 0 \pmod p$. В силу сравнений (3.18) и (3.19) $a_j \equiv 0 \pmod p$ и $a_i \equiv a_i a_j \pmod{p^\beta}$, т.е. $a_i \equiv a_i a_j p^\beta \pmod{p^\beta}$ и $a_i = 0$, ибо $a_j p^\beta \equiv 0 \pmod{p^\beta}$. Следовательно, $t = 0$ и $G' \leq \mathrm{Ker}\, \tau$ (ведь $c\tau = c^t$ для каждого $c \in G'$). В силу сравнения (3.20) $a_k = 0$ для каждого $k \in \{1, \ldots, n\}$. Поэтому $g_k \tau = z_k \in G'$ и $\mathrm{Im}\, \tau \leq G'$. Лемма доказана.

<u>Теорема 3.5</u>. Пусть полугруппа всех эндоморфизмов конечной некоммутативной p-группы G коммутативна. Тогда:
1) полугруппа всех собственных эндоморфизмов группы G является полугруппой с нулевым умножением;
2) группа автоморфизмов группы G изоморфна внешнему прямому произведению подходящих подгрупп коммутанта G' группы G;
3) $\alpha\tau = \tau\alpha = \tau$ для каждого автоморфизма α и каждого собственного эндоморфизма τ группы G.

<u>Доказательство</u>. Пусть $\tau, \tau' \in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$. По второй части леммы 3.4 имеем $\mathrm{Im}\, \tau \leq G' \leq \mathrm{Ker}\, \tau'$, т.е. $\tau\tau' = 0$ и утверждение 1) имеет место.

Из первого утверждения леммы 3.4 следует, что каждый автоморфизм группы G имеет вид $\mu_{c_1, \ldots, c_n}$. Пусть $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Aut}\, G$ и $\alpha = \mu_{c_1, \ldots, c_n}$, $\alpha' = \mu_{c'_1, \ldots, c'_n}$. Тогда

$$g_i(\alpha\alpha') = (g_i c_i)\alpha' = (g_i \alpha')(c_i \alpha') = (g_i \alpha') c_i = g_i c'_i c_i = g_i c_i c'_i,$$

т.е.

$$\mu_{c_1, \ldots, c_n} \cdot \mu_{c'_1, \ldots, c'_n} = \mu_{c_1 c'_1, \ldots, c_n c'_n}. \tag{3.21}$$

Обозначим

$$A_i = \{ g \in G' \mid g^{p^{\alpha_i}} = 1 \}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Так как эндоморфизмы вида $\mu_{c_1, \ldots, c_n}$ являются автоморфизмами группы G и каждый автоморфизм группы G имеет такой вид, то ввиду леммы 3.2 и равенства (3.21) ясно, что группа $\mathrm{Aut}\, G$ изоморфна внешнему прямому произведению групп $A_1, \ldots, A_n$. Утверждение 2) доказано.

Пусть $\alpha = \mu_{c_1, \ldots, c_n} \in \mathrm{Aut}\, G$ и $\tau \in \mathrm{End}\, G \setminus \mathrm{Aut}\, G$. Тогда по лемме 3.4 $G' \leq \mathrm{Ker}\, \tau$ и $g_i(\alpha\tau) = (g_i c_i)\tau = g_i \tau$, откуда $\alpha\tau = \tau$, ибо $G = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$. Теорема доказана.

Следующая теорема показывает, что существуют конечные метабелевы p-группы с коммутативными полугруппами эндоморфизмов.

Теорема 3.6. Группа $G = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \mid a_i^{p^2} = 1;$ $[[a_i, a_j], a_k] = 1,\ 1 \leqslant i, j, k \leqslant 4,\ [a_1, a_2] = a_1^p,\ [a_1, a_3] = a_3^p,$ $[a_2, a_3] = a_2^p,\ [a_2, a_4] = 1,\ [a_3, a_4] = a_3^p\rangle$, где p – нечетное простое число, является конечной метабелевой p-группой с коммутативной полугруппой эндоморфизмов.

Доказательство. В работе [6] доказано, что заданная группа G является конечной метабелевой группой, для которой

$$\operatorname{Im}\tau \leqslant G' \leqslant \operatorname{Ker}\tau \tag{3.22}$$

и

$$(g\alpha)\cdot g^{-1} \in G' \tag{3.23}$$

для каждых $\tau \in \operatorname{End} G \setminus \operatorname{Aut} G,\ \alpha \in \operatorname{Aut} G,\ g \in G$. В силу соотношения (3.22) $\tau\mu = \mu\tau = 0$ для каждых $\tau, \mu \in \operatorname{End} G \setminus \operatorname{Aut} G$. Далее из (3.23) следует $((g\alpha)\cdot g^{-1})\tau = 1,\ g(\alpha\tau) = g\tau$ для любого $g \in G$, т.е. $\alpha\tau = \tau$. Ввиду соотношения (3.23) для каждого $g \in G$ существует такой $c_g \in G'$, что $g\alpha = gc_g$. Так как $c_g \in G' \leqslant Z(G)$, то $[g, h]\alpha = [g\alpha, h\alpha] = [gc_g, hc_h] = [g, h]$ для каждых $g, h \in G$. Следовательно, $g\alpha = g$ для каждого $g \in G'$ и в силу соотношения (3.22) $\tau\alpha = \tau$ $(\tau \in \operatorname{End} G \setminus \setminus \operatorname{Aut} G,\ \alpha \in \operatorname{Aut} G)$.

Пусть $\alpha, \beta \in \operatorname{Aut} G$ и $g \in G$. Как мы отмечали $g\alpha = gc_g,\ g\beta = gd_g$ при некоторых $c_g, d_g \in G'$. Так как $c\alpha = c\beta = c$ для каждого $c \in G'$, то

$$g(\alpha\beta) = (gc_g)\beta = (g\beta)\cdot c_g = gd_gc_g = gc_gd_g,$$

$$g(\beta\alpha) = (gd_g)\alpha = (g\alpha)d_g = gc_gd_g.$$

Следовательно, $\alpha\beta = \beta\alpha$. В силу доказанных равенств ясно, что все эндоморфизмы группы G коммутируют друг с другом. Теорема доказана.

§ 4. Определяемость конечной абелевой группы своей полугруппой эндоморфизмов

Если группа абелева, то совокупность всех ее эндоморфизмов образует кольцо. Существует целый ряд работ, где исследуется связь между абелевой группой и ее кольцом эндоморфизмов. Например, Бэр [5] доказывает, что каждая коммутативная p-группа определяется своим кольцом эндоморфизмов. Используя результаты предыдущих параграфов, дадим простое доказательство факту, что каждая конечная абелева группа определяется своей полугруппой эндоморфизмов.

Лемма 4.I. Если $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, C_{p^n}$, p – простое число, $n \geq 0$, то группы G и C_{p^n} изоморфны.

Доказательство. Пусть $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, C_{p^n}$. Тогда группа G конечна, ибо полугруппа $\mathrm{End}\, G$ конечна (см. [4], теорема 2), и $\mathrm{Aut}\, G \simeq \mathrm{Aut}\, C_{p^n}$. Ввиду коммутативности полугруппы $\mathrm{End}\, G$ группа внутренних автоморфизмов группы G коммутативна, т.е. группа $G/Z(G)$ коммутативна и $G' \leq Z(G)$. Следовательно, группа G коммутативна или метабелева. Поэтому группа G разлагается в прямое произведение своих силовских подгрупп. Так как группа C_{p^n} не разлагается в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп, то по следствию I.I4 группа G также неразложима в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп. Следовательно, группа G является абелевой или метабелевой q-группой для некоторого простого числа q.

Пусть G – абелева. Тогда $G \simeq C_{q^m}$ при некотором m, ибо группа G неразложима в прямое произведение своих нетривиальных подгрупп, и $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, C_{q^m} \simeq \mathrm{End}\, C_{p^n}$. Следовательно, $|\mathrm{End}\, G| = q^m = p^n$, т.е. $p = q$, $m = n$ и группа G изоморфна циклической группе C_{p^n}.

Предположим теперь, что группа G метабелева q-группа. Тогда $p = 2$, ибо в противном случае группа $\mathrm{Aut}\, G$ $(\simeq \mathrm{Aut}\, C_{p^n})$ циклична (см. [II], теорема 9.I) и группа G являлась бы коммутативной ввиду цикличности группы $G/Z(G)$. Следовательно, $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, C_{2^n}$. Так как $\mathrm{End}\, C_{2^n}$ коммутативна, то по теореме 3.5 имеем

$$\tau\alpha = \tau \qquad (4.I)$$

при каждых $\alpha \in \mathrm{Aut}\, C_{2^n}$ и $\tau \in \mathrm{End}\, C_{2^n} \setminus \mathrm{Aut}\, C_{2^n}$. Равенство (4.I) равносильно сравнению

$$ij \equiv (\bmod\ 2^n), \tag{4.2}$$

где

$$i, j \in Z_{2^n};\ (i, 2) = 1,\ (j, 2) = 2.$$

Пусть $i = 3$, $j = 2$. Тогда в силу сравнения (4.2) имеем $6 \equiv 2 \ (\bmod\ 2^n)$, т.е. $4 \equiv 0 \ (\bmod\ 2^n)$. Следовательно, $n \leq 2$. При $n \leq 2$ группа $\mathrm{Aut}\, C_{2^n}$ циклична. Поэтому группа $\mathrm{Aut}\, G$ также циклична, группа $G/Z(G)$ циклична и группа G абелева. Это противоречит предположению, что группа G метабелева. Следовательно, группа G метабелевой быть не может и из изоморфизма $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, C_{p^n}$ следует изоморфизм $G \simeq C_{p^n}$. Лемма доказана.

Теорема 4.2. Если полугруппа всех эндоморфизмов группы G изоморфна полугруппе всех эндоморфизмов конечной коммутативной группы H, то группы G и H изоморфны.

Доказательство. Пусть H - конечная коммутативная группа, G - группа и $\mathrm{End}\, G \simeq \mathrm{End}\, H$. Группа H разлагается в прямое произведение своих циклических примарных подгрупп

$$H = \langle g_1 \rangle \times \dots \times \langle g_n \rangle$$

($o(g_i)$ - степень простого числа). По теореме I.I3 существует такое разложение $G = G_1 \times \dots \times G_n$, что $\mathrm{End}\, G_i \simeq \mathrm{End} \langle g_i \rangle$, $1 \leq i \leq n$. По лемме 4.I группа G_i изоморфна группе $\langle g_i \rangle$. Поэтому группы G и H изоморфны. Теорема доказана.

Отметим, что из изоморфизма $\mathrm{Aut}\, G \simeq \mathrm{Aut}\, H$, где G - конечная абелева группа, еще не следует изоморфизм групп G и H (см. Лептин [9]). Существуют неизоморфные бесконечные абелевы группы, кольца эндоморфизмов которых изоморфны Вольфсон [I4]). Поэтому теорема 4.2 для произвольной абелевой группы H неверна.

Литература

1. Лившиц А. Х., Прямые разложения идемпотентов в полугруппах. Тр. Московск. мат. общ-а, 1962, II, 37-98.
2. Ляпин Е. С., Айзенштат А. Я., Лесохин М. М., Упражнения по теории групп. Москва, 1967.
3. Пуусемп П., Полугруппы эндоморфизмов групп диэдра В сб. "Студенческие труды по алгебре и геометрии", Тарту, 1972, 39-49.
4. Alperin, J. L., Groups with finitely many automorphisms. Pacif. J. Math., 1962, 12, N 1, 1-5.
5. Baer, R., Automorphism rings of primary Abelian operator groups. Ann. Math., 1943, 44, 192-227.
6. Faudree, R., Groups in which each element commutes with its endomorphic images. Proc. Amer. Math. Soc., 1971, 27, N 2, 236-240.
7. Feit, W., Thompson, J., Solvability of groups of odd order. Pacif. J. Math., 1963, 13, N 3, 775-1029.
8. Leeuwen, L. C. A. van, On the endomorphism ring of direct sums of groups. Acta sci. math., 1967, N 1-2, 21-29.
9. Leptin, H., Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen. Math. z., 1960, 73, 235-253.
10. Morgado, J., Direct endomorphisms of groups. Gaz. Mat. (Lisboa), 1969, 30, N 113-116, 9-14.
11. Passman, D., Permutation groups. New York, 1968.
12. Schultz, Ph., On a paper of Szele and Szendrei on groups with commutative endomorphism rings. Acta math. Acad. sci. hung., 1973, 24, N 1-2, 59-63.
13. Szele, T., Szendrei, J., On abelian groups with commutative endomorphism ring. Acta Math. Hung., 1951, 2, 309-324.
14. Wolfson, K. G., Isomorphisms of the endomorphism rings of a class of torsion-free modules. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, 14, N 4, 589-594

Поступило
I5 I 1974

RÜHMADE ENDOMORFISMIRÜHMADE IDEMPOTENDID

P. Puusemp

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis uuritakse vahekorda rühma G ja tema endomorfismipoolrühma $\mathrm{End}\,G$ idempotentide vahel. Paragrahvis 1 defineeritakse poolrühma $\mathrm{End}\,G$ kõigi idempotentsete endomorfismide hulgal $J(G)$ osaline tehe, mille abil on hästi kirjeldatav vahekord rühma G otsesummaks arendiste ja poolrühma $\mathrm{End}\,G$ omaduste vahel. Järgmises paragrahvis näidatakse, et ainsaiks lõplikeks rühmadeks, mis omavad nullist erinevaid pärisendomorfisme ja kõik need on idempotendid, on 2p. järku dieedri rühmad $\mathfrak{D}_p$, kus p on paaritu algarv. Paragrahvis 3 näidatakse, et kui lõpliku mittekommutatiivse p-rühma G endomorfismipoolrühm $\mathrm{End}\,G$ on kommutatiivne, siis: 1) $\tau\lambda=\lambda\tau=0$ iga $\tau,\lambda\in \mathrm{End}\,G\setminus \mathrm{Aut}\,G$ korral; 2) $\alpha\tau=\tau\alpha=\tau$ iga $\alpha\in \mathrm{Aut}\,G$ ja $\tau\in \mathrm{End}\,G\setminus \mathrm{Aut}\,G$ korral; 3) $\mathrm{Aut}\,G\simeq$ $\simeq A_1\times\dots\times A_n$ (väline otsekorrutis), kus $A_1,\dots,A_n$ on teatavad rühma G' alamrühmad. Lõpuks näidatakse, et iga lõplik kommutatiivne rühm määratakse ära oma endomorfismipoolrühmaga (§ 4).

DIE IDEMPOTENTEN DER ENDOMORPHISMENHALBGRUPPEN
DER GRUPPEN

P. Puusemp

Z u s a m m e n f a s s u n g

In diesem Artikel untersuchen wir die Eigenschaften der Idempotenten der Endomorphismenhalbgruppe $\mathrm{End}\,G$ der Gruppe G. Im § 1 führen wir eine neue partielle Verknüpfung auf der Menge $J(G)$ aller Idempotenten der Halbgruppe $\mathrm{End}\,G$ ein. Im § 2 finden wir alle endlichen Gruppen G, die den folgenden Bedingungen genügen: $\mathrm{End}\,G\setminus \mathrm{Aut}\,G = J(G)\neq\{o\}$. Die Klasse solcher Gruppen besteht nur aus Diedergruppen $\mathfrak{D}_p$ von Ordnung $2p$ (p – eine ungerade Primzahl). Im § 3 beweisen wir den folgenden Satz:

Es sei die Halbgruppe $End\,G$ aller Endomorphismen der endlichen nichtabelschen p-Gruppe G kommutativ. Dann gilt es: 1) $\tau\lambda = \lambda\tau = 0$ für alle $\tau, \lambda \in End\,G \setminus Aut\,G$; 2) $\tau\alpha = \alpha\tau = \tau$ für alle $\tau\lambda \in End\,G \setminus Aut\,G$ und $\alpha \in Aut\,G$; 3) $Aut\,G \simeq A_1 \times \ldots \times A_n$ (äußeres direktes Produkt) für die passenden Untergruppen $A_1, \ldots, A_n$ der Gruppe G'.

Mit Hilfe der Resultate der Paragraphen 1 und 3 ist es leicht zu zeigen, daß jede endliche abelsche Gruppe durch ihre Endomorphismenhalbgruppe bis zum Isomorphismus eindeutig bestimmt ist (§4).

МИНИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ В ПОЧТИ-КОЛЬЦАХ

К.Каарли
Кафедра алгебры и геометрии

В первой части статьи (§§I-3) изучаются почти-кольца $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$, введенные Полином в [4]. Полученные результаты далее применяются для исследования артиновых почти-колец. Во второй части (§§ 4-6) получается описание минимальных идеалов артиновых почти-колец. Из этого описания следует, что в любом артиновом почти-кольце R существует ряд идеалов

$$0 = R_0 \subset R_1 \subset \dots \subset R_n = R, \tag{I}$$

факторы которого либо нильпотентны, либо суть полные матричные кольца над телами, либо же почти-кольца $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$, где G/ϱ – свободный конечнопорожденный $\Gamma,0$-полигон.

В § 7 вводится новый класс почти-колец. Именно, почти-кольцо R называется полупримарным, если оно обладает рядом (I). Доказывается, что класс полупримарных почти-колец замкнут относительно взятия идеалов и гомоморфных образов. В следующих публикациях автора будет показано, что почти все известные теоремы о строении артиновых почти-колец останутся верными и в полупримарном случае. Более того, существование ряда (I) позволяет получить новую информацию об артиновых почти-кольцах.

§ I Основные понятия

<u>Почти-кольцом</u> называется тройка $(R,+,\cdot)$, где $(R,+)$-группа, $(R,\cdot)$ – полугруппа и выполняются тождества $r(s+t) = rs + rt$, $0r = 0$ $(r, s, t \in R$, 0 – аддитивный нейтральный элемент).

<u>Модулем над почти-кольцом R</u> или просто <u>R-модулем</u> называется группа $(G,+)$, если для всех $g \in G$, $r \in G$ определены $gr \in G$, так что $g(rs) = (gr)s$, $g(r+s) = gr + gs$ и $0r = 0$ при всех $r, s \in R$, $g \in G$. Если не ясно, над каким почти-кольцом модуль рассматривается, то R-модуль G обозначается через G_R.

Понятия гомоморфизма почти-колец, гомоморфизма модулей и подмодуля ясны. Ядро почти-кольцевого (R-модульного) гомоморфизма назовем идеалом почти-кольца (R-модуля). Подмодули (идеалы) модуля R_R назовем правыми квазиидеалами (правыми идеалами) почти-кольца R.

Символ $S \triangleleft R$ $(A \triangleleft_R G)$ обозначает, что S (A) есть идеал почти-кольца R (R-модуля G). Вместо $S \triangleleft_R R$ иногда пишем $S \triangleleft_r R$.

Хорошо известно, что нормальный делитель M аддитивной группы R-модуля G является идеалом R-модуля тогда и только тогда, когда

$$(h+g)r - gr \in H \tag{2}$$

при всех $h \in H$, $g \in G$, $r \in R$ (см. [II], стр. 442). Правый идеал S почти-кольца R является идеалом тогда и только тогда, когда $rs \in S$ при всех $r \in R$, $s \in S$.

Пусть A и B - подмножества некоторого R-модуля G, а C - подмножество почти-кольца R.
Положим

$$AC = \{ac \mid a \in A,\ c \in C\}$$
$$(B:A)_R = \{r \in R \mid Ar \subseteq B\}.$$

Нильпотентность подмножества почти-кольца понимается в обычном смысле. Правый квазиидеал (правый идеал, идеал) называется нильпотентным, если он нильпотентен, как подмножество[I].

Для любого R-модуля G вводим обозначения

$$\mathcal{G}(G_R) = \{g \in G \mid gR = G\}$$
$$G_R^0 = \{g \in G \mid gR = 0\}.$$

R-модуль G называется

- абелевым, если $(G,+)$ - абелева группа и $(g_1+g_2)r = g_1r + g_2r$ при всех $g_1, g_2 \in G$, $r \in R$;
- тривиальным, если $GR = 0$;
- циклическим, если $\mathcal{G}(G_R) \neq \emptyset$;
- строго циклическим, если $G = \mathcal{G}(G) \cup G^0$ и $G \neq G^0$;

[I] Полин ([5], стр. 72) определил нильпотентность подсистем иначе.

- простым, если он не имеет идеалов, отличных от O и G;
- 0-неприводимым, если он цикличен и прост;
- I-неприводимым, если он строго цикличен и прост;
- 2-неприводимым, если он не имеет подмодулей, отличных от 0 и G;
- точным, если $(0:G)_R = 0$.

Обозначим класс всех i-неприводимых R-модулей через $\mathfrak{M}_R^i$, $(i = 0,1,2)$. Идеал $\bigcap_{G\in\mathfrak{M}_R^i}(0:G)_R$ называется i-радикалом почти-кольца R и обозначается через $J_i(R)$ (см. лемму А). Если R обладает точным i-неприводимым модулем, то R называется i-примитивным.

Почти-кольцо называется артиновым, если оно удовлетворяет условию минимальности для правых квазиидеалов.

Приведем три леммы, находящие неоднократное применение в работе.

Лемма А. Если G является R-модулем, $S \triangleleft_r R$ и $B \triangleleft_R G$, то $(B:A)_S \triangleleft_r R$ при любом подмножестве $A \subseteq G$. Если кроме того $S \triangleleft R$ и $AR \subseteq A$, то $(B:A)_S \triangleleft R$.

Доказательство. Утверждение леммы хорошо известно в частном случае $S = R$ ([II], предложение I.I). Наше утверждение следует теперь из равенства $(B:A)_S = (B:A)_R \cap S$ и того, что пересечение правых идеалов является правым идеалом.

Лемма В ([4], лемма I). Если некоторое R-модульное тождество выполняется в точном R-модуле, то оно выполняется также в модуле R_R. Если некоторое R-модульное тождество выполняется в R_R, то оно выполняется и в любом циклическом R-модуле.

Лемма С ([9], лемма I). Если G - циклический R-модуль, $g \in \mathcal{G}(G_R)$ и $S \triangleleft_r R$, то $gS \triangleleft_R G$.

§ 2. Почти-кольца $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$.

Самым обычным примером почти-кольца является множество $S_0(G)$ всех преобразований, сохраняющих 0, некоторой аддитивной группы G относительно сложения и композиции отображений. Следуя Полину (см. [4], стр. 260), расширим этот круг примеров.

Пусть Γ - группа. Множество A называется Γ-полигоном, если для всех $\gamma \in \Gamma$ и $a \in A$ определен элемент $\gamma a \in A$, причем $(\gamma\delta)a = \gamma(\delta a)$ и $1_\Gamma a = a$ при всех $\gamma, \delta \in \Gamma$ и $a \in A$. Γ-полигон A называется $\Gamma, 0$-полигоном, если отмечен элемент $0_A \in A$ и $\gamma 0_A = 0_A$ при любом $\gamma \in \Gamma$.

Γ-полигоны, а также $\Gamma, 0$-полигоны, являются универсальными алгебрами относительно подходящих систем операций. Следовательно, ясны понятия гомоморфизма и конгруэнции Γ-полигонов, а также $\Gamma, 0$-полигонов.

Пусть A есть $\Gamma, 0$ полигон. Множества вида $\Gamma a = \{\gamma a \mid \gamma \in \Gamma\}$, где $a \in A$, называются Γ-орбитами множества A. Известно, что A есть непересекающееся объединение своих Γ-орбит (см. [3], стр. 84-85). Назовем элементы $a_1, a_2 \in A$ Γ-эквивалентными, если их Γ-орбиты совпадают. Непустую систему $(a_i \mid i \in J)$ элементов множества A назовем Γ-независимой, если она не содержит нулевого элемента и из каждой Γ-орбиты содержит не более чем один элемент. Максимальную Γ-независимую систему назовем базисом $\Gamma, 0$-полигона A. Существование базиса в любом $\Gamma, 0$-полигоне обеспечивается аксиомой выбора. Действительно, базисами являются все подмножества $\Gamma, 0$-полигона, содержащие по одному элементу из каждой ненулевой Γ-орбиты.

Пусть теперь на $\Gamma, 0$-полигоне A фиксирована конгруэнция ϱ. Будем говорить, что элементы $a_1, a_2 \in A$ находятся в отношении τ, если их ϱ-классы Γ-эквивалентны в A/ϱ. Понятно, что τ является эквивалентностью. Скажем, что система $(a_i \mid i \in J)$ элементов $\Gamma, 0$-полигона A τ-независима, если система $([a_i]_\varrho \mid i \in J)$[2] является Γ-независимой системой в A/ϱ. Максимальную τ-независимую систему $\Gamma, 0$-полигона A назовем базисом $\Gamma, 0$-полигона A относительно ϱ.

В дальнейшем применим следующие обозначения. Если M - подмножество в A и Δ - подмножество в Γ, то

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}(H) &= \{\gamma \in \Gamma \mid \forall_{h \in H} (\gamma h) \varrho h\}, \\ Z(\Delta) &= \{g \in G \mid \forall_{\sigma \in \Delta}\ \sigma g = g\}, \\ \bar{H} &= Z(\mathfrak{z}(H)). \end{aligned}$$

---

[2] Через $[a]_\sigma$ обозначим класс элемента a по эквивалентности σ.

Иногда отождествим одноэлементное множество с самим элементом, т.е. вместо $\mathfrak{z}(\{h\})$ пишем $\mathfrak{z}(h)$ и т.д.

Рассмотрим такое множество K преобразований $k: g \to gk$ полигона A, что

1) $0_A k = 0$

2) $(\gamma a)k = \gamma(ak)$

3) $a\varrho b \Rightarrow ak = bk$

при всех $a, b \in A$ и $\gamma \in \Gamma$. Множество K является полугруппой относительно композиции отображений. Условие 3) дает, что каждое $k \in K$ индуцирует функцию $k^*: A/\varrho \to A$, а в силу условий 1) и 2) эта функция является $\Gamma,0$-гомоморфизмом. Отображение $k \to k^*$ биективно и поэтому полугруппа K обозначается через $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(A/\varrho, A)$. В течение §§ 2-3 K имеет это же значение.

Теперь укажем связь между множествами $\bar{g}$, базисами и элементами полугруппы K.

<u>Лемма 1.</u> Пусть ϱ - конгруэнция $\Gamma,0$-полигона A и $K = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(A/\varrho, A)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1) Если $a, b \in A$, $k \in K$ и $ak = b$, то $b \in \bar{a}$.

2) Если в A заданы базис $(a_i \mid i \in J)$ относительно ϱ и для каждого $i \in J$ элементы $b_i \in \bar{a}_i$, то найдется единственный элемент $k \in K$, такой что $a_i k = b_i$ при всех $i \in J$.

<u>Доказательство.</u> 1) Пусть $ak = b$ и $\gamma \in \mathfrak{z}(a)$, т.е. $(\gamma a)\varrho a$. Мы должны показать, что $b \in \bar{a}$, т.е. $\gamma b = b$. На самом деле, в силу $(\gamma a)\varrho a$ и условий 2) и 3) из определения K имеем

$$\gamma b = \gamma(ak) = (\gamma a)k = ak = b.$$

2) Пусть a_i и b_i выбраны, как указано в формулировке леммы. Так как $(a_i \mid i \in J)$ есть базис в A относительно ϱ, то $A \setminus [0]_\varrho$ является непересекающимся объединением τ-классов $[a_i]_\tau$, $i \in J$. Обозначим $[a_i]_\tau = X_i$. Включение $b \in [a_i]_\tau$ означает существование такого $\gamma \in \Gamma$, что $(\gamma a_i)\varrho b$. Отсюда следует $(\delta b)\varrho[(\delta\gamma)a_i]$ при любом $\delta \in \Gamma$, т.е. множества X_i являются Γ-подполигонами Γ-полигона A. Покажем сначала, что для каждого i сущест-

вует Γ-гомоморфизм $\chi_i : \mathfrak{X}_i \to A$, такой что $a_i\chi_i = b_i$.

Так как $\mathfrak{X}_i$ является τ-классом элемента a_i, то для любого $a \in \mathfrak{X}_i$ существует $\gamma \in \Gamma$, такой что $a\varrho(\gamma a_i)$. Положим $a\chi_i = \gamma b_i$ и покажем, что это определение корректно. Действительно, пусть для некоторого $a \in \mathfrak{X}_i$ найдутся γ и δ из Γ, такие что $a\varrho(\gamma a_i)$ и $a\varrho(\delta a_i)$. Тогда $(\gamma a_i)\varrho(\delta a_i)$, откуда $(\delta^{-1}\gamma a_i)\varrho a_i$. Так как $b_i \in \bar{a}_i$, то из последнего соотношения получаем $\delta^{-1}\gamma b_i = b_i$, откуда $\gamma b_i = \delta b_i$. Следовательно, $a\chi_i$ не зависит от выбора $\gamma \in \Gamma$.

Покажем, что χ_i являются Γ-гомоморфизмами. Если $a\varrho(\gamma a_i)$, то при любом $\delta \in \Gamma$ имеем $(\delta a)\varrho[(\delta\gamma)a_i]$. Следовательно, в силу определения χ_i, получаем $a\chi_i = \gamma b_i$ и $(\delta a)\chi_i = (\delta\gamma)b_i$, откуда $\delta(a\chi_i) = (\delta a)\chi_i$.

Определим теперь преобразование κ формулой

$$a\kappa = \begin{cases} a\chi_i, & \text{если } a \in \mathfrak{X}_i \\ 0, & \text{если } a \in [0]\varrho. \end{cases}$$

Определение корректно, так как A есть непересекающееся объединение множеств $[0]_\varrho$ и $\mathfrak{X}_i$, $i \in J$. Так как χ_i являются Γ-гомоморфизмами, то κ есть тоже Γ-гомоморфизм. Явно функции χ_i переводят a_i в b_i и равнодействуют на ϱ-эквивалентных элементах. Следовательно, преобразование κ имеет те же свойства. Лемма доказана.

<u>Следствие I</u>. Если заданы $a_i, b_i \in A$, где $i \in J$, такие, что система $(a_i \mid i \in J)$ τ-независима и $b_i \in \bar{a}_i$ при всех $i \in J$, то существует $\kappa \in K$, такой что $a_i\kappa = b_i$ при всех $i \in J$.

<u>Доказательство</u>. В силу леммы Цорна систему $(a_i \mid i \in J)$ можно вложить в максимальную τ-независимую систему.

<u>Следствие 2.</u> Если $a \in A \setminus [0]_\varrho$, то $\bar{a} = aK = \{a\kappa \mid \kappa \in K\}$.

<u>Доказательство</u>. Включение $aK \subseteq \bar{a}$ следует из первого пункта леммы I. Докажем обратное включение. Так как $a \notin [0]_\varrho$, то одноэлементная система (a) τ-независима. По следствию I тогда для любого $b \in \bar{a}$ найдется $\kappa \in K$, такой что $a\kappa = b$. Таким образом, $b \in aK$, откуда $\bar{a} \subseteq aK$.

Если группа Γ является группой автоморфизмов (не обязательно всех) некоторой аддитивно записанной группы G, то G превращается естественным образом в $\Gamma,0$-полигон. Пусть еще ϱ – некоторая конгруэнция $\Gamma,0$-полигона G. Теперь можно на полугруппе K определить сложение, полагая $g(k_1+k_2)=gk_1+gk_2$ при любом $g\in G$ и всяких $k_1,k_2\in K$. В итоге K превращается в почти-кольцо, являющимся под-почти-кольцом почти-кольца $S_0(G)$.

Далее будем под тройкой понимать систему (Γ, G, ρ), где Γ- группа автоморфизмов аддитивной группы G и ρ - конгруэнция ΓO-полигона G. Соответствующее почти-кольцо $K = \mathrm{Hom}_{\Gamma O}(G/\rho, G)$ назовем почти-кольцом, связанным с тройкой (Γ, G, ρ).

Сопоставляя паре (g, k), где $g\in G$, $k\in K$ элемент $gk\in G$ превратим G в K-модуль.

Так как тройка (Γ, G, ρ) у нас фиксирована, то назовем базисы Γ, O-полигона G относительно ρ просто базисами группы G.

Предложение I. Пусть в группе G задан базис $(g_i \mid i\in J)$. Обозначим $K_i = \bigcap_{j\in J,\ j\neq i} (0:g_j)_K$. Тогда

I) множества $\bar{g}_i$ являются подмодулями в G_K, а множества K_i являются правыми идеалами в K и поэтому подмодулями в K_K.

2) $K_i \simeq_K \bar{g}_i$

3) $K_K \simeq_K \prod_{i\in J} K_i$ [3]

Доказательство. I) Множества $\bar{g}_i$ являются подмодулями в силу равенства $\bar{g}_i = g_i K$, установленного в следствии 2. Множества K_i являются правыми идеалами в силу леммы А.

2) Сопоставим элементу $k_i\in K_i$ элемент $\varphi(k_i)=g_ik_i\in G$. Очевидно, φ есть K-гомоморфизм из K_i на g_iK_i. Заметим, что $K_i = \bar{g}_i$. Действительно, по первому утверждению леммы I имеем $g_iK_i\subseteq \bar{g}_i$, а второе обеспечивает для любого $h\in\bar{g}_i$ существование такого $k\in K$, что $g_ik=h$ и $g_jk=0$ при $j\neq i$. Последние равенства означают, что $k\in K_i$.

Надо еще доказать, что φ взаимно однозначно. Если $\varphi(k_i) = \varphi(k_i')$, то $g_ik_i=g_ik_i'$ и в силу $k_i, k_i'\in K_i$ имеем $0=g_jk_i = g_jk_i'$ при всех $j\in J$, $j\neq i$. Следовательно, на основе второго пункта леммы I мы заключаем, что $k_i=k_i'$.

---

[3] Символ $\prod$ обозначает прямое произведение K-модулей.

2) Каждому $k \in K$ сопоставим систему $(k_i \mid i \in J)$, где $k_i = \varphi_i(k) \in K_i$ определен по правилу

$$g_j \varphi_i(k) = \begin{cases} g_j k, & \text{если } j = i \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases} \quad (3)$$

Элементы k_i существуют и притом однозначно определены в силу леммы I. Следовательно, система $(k_i \mid i \in J)$ однозначно определена.

С другой стороны, любая такая система определяет элемент $k \in K$. Действительно, $g_j k_j \in \bar{g}_j$ по первому пункту леммы I. Из второго пункта той же леммы вытекает существование и единственность такого $k \in K$, что $g_j k = g_j k_j$ при каждом $j \in J$. Очевидно, если теперь к полученному элементу k применить правило (3), то получаем исходную систему.

Таким образом, имеем взаимно однозначное соответствие между K и $\prod K_i$. Легко видеть, что всегда $\varphi_i(k+\ell) = \varphi_i(k) + \varphi_i(\ell)$, $\varphi_i(k\ell) = \varphi_i(k)\ell$, т.е. соответствие сохраняет операции. Предложение доказано.

С точки зрения общей теории особенно важны почти-кольца $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, связанные с тройками (Γ, G, ρ), где $G \neq [0_G]_\rho$ и из $(\gamma g)\rho g$ следует либо $\gamma = 1$, либо $g\rho 0$. Назовем такие тройки <u>регулярными</u>. Известна следующая

<u>Лемма D ([4], лемма 5)</u>. Тройка (Γ, G, ρ) регулярна тогда и только тогда, когда $\Gamma, 0$-полигон G/ρ свободен.

Полин доказал, что любое 2-примитивное почти-кольцо, не являющееся кольцом, изоморфно плотному под-почти-кольцу почти-кольца $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где тройка (Γ, G, ρ) регулярна ([4], теорема 2). Сходное утверждение для I-примитивных почти-колец следует из теоремы 4 работы [9]. Наша работа показывает, какое особое место занимают почти-кольца указанного вида в теории артиновых почти-колец.

<u>Предложение 2</u>. Если (Γ, G, ρ) - регулярная тройка и $K = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, то

1) при любом $g \in G \setminus [0]_\rho$ будет $\bar{g} = G$ и поэтому модуль G_K является строго циклическим,

2) модуль K_K есть прямое произведение изоморфных копий модуля G_K,

3) K имеет левую единицу.

Доказательство. 1) Так как $g \notin [0]_\rho$, то в силу регулярности тройки из $(\gamma g)\rho g$ следует $\gamma = 1$, т.е. $z(g)=1$. Таким образом, $\bar{g} = Z(z(g)) = Z(1) = G$. По следствию 2 имеем $gK = \bar{g} = G$. Поскольку $gK = 0$ при любом $g \in [0]_\rho$, то этим доказана строгая цикличность модуля G_K.

2) По предложению 1 имеем $K_K \cong \prod_{i \in J} \bar{g}_i$, где $(g_i \mid i \in J)$ - базис группы G. Первый пункт настоящего предложения дает $\bar{g}_i = G$ при всех $i \in J$.

3) Пусть $(g_i \mid i \in J)$ есть базис группы G. По первому пункту имеем $\bar{g}_i = G$ при всех $i \in J$. Следовательно, согласно лемме 1, найдется $e \in K$, такой что $g_i e = g_i$ при каждом $i \in J$. Тогда для каждого $i \in J$ и $k \in K$ имеем $g_i(ek) = (g_i e)k = g_i k$, т.е. ek и k равнодействуют на базисе. В силу леммы 1 отсюда получаем $ek = k$.

§ 3. Соответствие между идеалами почти-кольца K и идеалами модуля G_K

В этом параграфе, если отсутствуют оговорки, предполагаем регулярность тройки (Γ, G, ρ).

Обозначим через $J(K)$ множество идеалов почти-кольца K, а через $J(G_K)$ - множество идеалов модуля G_K.

Сопоставим каждому $H \in J(G_K)$ идеал $H^\alpha = (H : G)_K$, а каждому $S \in J(K)$ подмножество $S^\beta = GS \subseteq G$.

В силу леммы A множества H^α действительно являются идеалами в K. Покажем, что множества S^β будут идеалами модуля G_K.

Лемма 2. Если $S \triangleleft K$, то $gS = GS$ при любом $g \in \mathcal{G}(G_K)$ и поэтому $GS \triangleleft_K G$.

Доказательство. Модуль G_K является строго циклическим по предложению 2, откуда получаем $GS = G_K^0 S \cup \mathcal{G}(G_K)S = \mathcal{G}(G_K)S$. Пусть $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(G_K)$. Тогда найдется $k \in K$, такой что $g_1 k = g_2$. Следовательно, $g_1 S \supseteq g_1 kS = g_2 S$. В силу произвольности g_1 и g_2 получаем $g_1 S = g_2 S = \mathcal{G}(G_K)S = GS$.

По лемме C имеем $gS \triangleleft_K G$ при любом $g \in \mathcal{G}(G_K)$. Значит $GS \triangleleft_K G$. Лемма доказана.

Определение ([2], стр. 363). Говорят, что между частично упорядоченными множествами $(M, \leq)$ и $(M', \leq)$ уста-

15

новлено <u>соответствие Галуа</u>, если указаны функции $\varphi: M \to M'$ и $\psi: M' \to M$, удовлетворяющие для любых $a, b \in M$, $a', b' \in M'$ следующим требованиям:

$$1)\quad a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \geq \varphi(b)$$
$$a' \leq b' \Rightarrow \psi(a') \geq \psi(b').$$
$$2)\quad \psi(\varphi(a)) \geq a, \quad \varphi(\psi(a')) \geq a'.$$

<u>Предложение 3</u>. Функции α и β осуществляют соответствие Галуа между $(\mathcal{J}(K), \subseteq)$ и $(\mathcal{J}(G_K), \supseteq)$.

<u>Доказательство</u>. Очевидно, если $H_1, H_2 \subseteq G$, то из $H_1 \subseteq H_2$ следует $(H_1 : G)_K \subseteq (H_2 : G)_K$. Далее из $S_1 \supseteq S_2$ следует $GS_1 \supseteq GS_2$ при любых подмножествах S_1 и S_2 почти-кольца K. Таким образом, условия I) из определения соответствия Галуа выполнены.

Справедливость условий 2) вытекает из включений $G(H:G)_K \subseteq H$ и $(GS:G)_K \supseteq S$. Предложение доказано.

При соответствиях Галуа всегда представляет интерес описать замкнутые подсистемы, т.е. идеалы вида H^{α} и K-идеалы вида S^{β}.

<u>Предложение 4</u>. Идеал H модуля G_K замкнут тогда и только тогда, когда $\Gamma H \subseteq H$.

<u>Замечание</u>. Ясно, что из $\Gamma H \subseteq H$ следует $\gamma H = H$ при любом $\gamma \in \Gamma$.

<u>Доказательство. Необходимость</u>. Если $H = GS$ для некоторого идеала $S \lhd K$, то

$$\gamma(H) = \gamma(GS) = \gamma(G)S = GS = H.$$

при всех $\gamma \in \Gamma$.

<u>Достаточность</u>. Допустим, что $\Gamma H \subseteq H$ и покажем, что тогда $H^{\alpha\beta} = G(H:G)_K$ совпадает с H. Согласно предложению 3 надо для любого $h \in H$ показать, что $h \in G(H:G)_K$. Для этого берем некоторый базис $(g_i \mid i \in \mathcal{J})$ группы G и фиксируем элемент $i_0 \in \mathcal{J}$. Теперь построим для элемента h по лемме I элемент $k \in K$ следующим путем

$$g_i k = \begin{cases} h, & \text{если } i = i_0 \\ 0, & \text{если } i \neq i_0. \end{cases}$$

Так как h - произвольный элемент из H, то для завершения доказательства надо показать, что $k \in (H:G)_K$, т.е. $Gk \subseteq H$. Пусть g – произвольный элемент из $G \setminus [0]_\varrho$. Так как $(g_i \mid i \in J)$ есть базис в G, то найдутся $i \in J$ и $\gamma \in \Gamma$, такие что $g \varrho (\gamma g_i)$. Следовательно,

$$gk = (\gamma g_i)k = \gamma(g_i k) = \begin{cases} \gamma h, & \text{если } i = i_0 \\ 0, & \text{если } i \neq i_0. \end{cases} \qquad (4)$$

В силу условия $\Gamma H \subseteq H$ и произвольности g из (4) получаем $Gk \subseteq H$, что и требовалось доказать.

Для описания замкнутых идеалов почти-кольца K придется ввести некоторые новые понятия.

Определение. Если M есть R-модуль, то **носителем** элемента $r \in R$ (относительно M) назовем множество

$$supp(r) = \{m \in M \mid mr \neq 0\}.$$

Пусть $(a_i \mid i \in J)$ есть семейство преобразований из $S_0(G)$, носители которых относительно G попарно не пересекаются. **Суммой** данного семейства назовем элемент $a \in S_0(G)$, определенный правилом

$$ga = \begin{cases} ga_i, & \text{если } g \in supp(a_i), \\ 0, & \text{если } \forall_{i \in J}\ g \notin supp(a_i). \end{cases}$$

Если множество J конечно, то a совпадает с обычной суммой.

Определение. Множество $A \subseteq S_0(G)$ назовем **суммируемым**, если сумма любого семейства элементов из A с попарно непересекающимися носителями принадлежит A.

Лемма 3. Пусть (Γ, G, ϱ) – произвольная тройка. Носитель любого элемента из K относительно G является объединением τ-классов. Почти-кольцо K является суммируемым под-почти-кольцом в $S_0(G)$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно убедиться, что множество $\{g \in G \mid gk = 0\}$ является объединением τ-классов при любом $k \in K$. Но действительно, если $gk = 0$ и $g_1 \varrho (\gamma g)$ для некоторого $\gamma \in \Gamma$, то $g_1 k = (\gamma g)k = \gamma(gk) = \gamma 0 = 0$.

Докажем второе утверждение леммы. Берем семейство $(k_i \mid i \in J)$ элементов K, носители которых попарно не пересекаются. Пусть $(g_j \mid j \in J)$ – базис группы G. Тогда $G = [0]_\rho \cup (\bigcup_{j \in J} X_j)$, где $X_j = [g_j]\tau$. По первому пункту настоящей леммы носитель каждого элемента k_i является объединением τ-классов. Множество индексов соответствующих τ-классов обозначим через J_i, т.е.

$$supp(k_i) = \bigcup_{j \in J_i} X_j . \tag{5}$$

Так как носители элементов семейства $(k_i \mid i \in J)$ попарно не пересекаются, то и $J_i \cap J_{i'} = \emptyset$ при $i \neq i'$. По лемме I существует элемент $k \in K$ определенный формулой

$$g_j k = \begin{cases} g_j k_i, & \text{если } j \in J_i, \\ 0, & \text{если } \forall_{i \in J}\ j \notin J_i. \end{cases}$$

Проверим, что k является суммой семейства $(k_i \mid i \in J)$. Пусть g – произвольный элемент из G. Если $g \in supp(k_i)$, то в силу (5) найдется $j \in J_i$, такой что $g \rho (\gamma g_j)$ при некотором $\gamma \in \Gamma$. Следовательно,

$$gk = (\gamma g_j)k = \gamma(g_j k) = \gamma(g_j k_i) = (\gamma g_j)k_i = gk_i .$$

Если же g не принадлежит ни одному из множеств $supp(k_i)$, то имеем две возможности: I) $g \rho 0$, 2) $g \tau g_j$, где j не принадлежит ни одному из множеств J_i, $i \in J$. В первом случае явно $gk = 0$, а во втором $g \rho (\gamma g_j)$, где $\gamma \in \Gamma$. В силу определения k получаем

$$gk = (\gamma g_j)k = \gamma(g_j k) = 0.$$

Лемма доказана.

<u>Предложение 5</u>. Идеал S почти-кольца K замкнут тогда и только тогда, когда он суммируем.

<u>Доказательство. Необходимость</u>. Пусть $S = H^\alpha$ для некоторого K-идеала $H \triangleleft_K G$. Берем элементы $s_i \in S$, $i \in J$, носители которых попарно не пересекаются. Так как K суммируемо (лемма 3), то в K содержится сумма k семейства $(s_i \mid i \in J)$. По определению суммы имеем для каждого $g \in G$ либо $gk = gs_i \in H$, так как $s_i \in H^\alpha = (H : G)_K$, либо же $gk = 0$. Поэтому $Gk \subseteq H$, т.е. $k \in (H : G)_K = H^\alpha = S$.

Достаточность. Пусть S – суммируемый идеал. Покажем, что $S^{\beta\alpha} = S$. Фиксируем в G базис $(g_i \mid i \in J)$. В силу предложения 2 и следствия 2 тогда $G = \bar{g}_i = g_i K$ при любом $i \in J$. По лемме I K содержит для каждого $i \in J$ элемент e_i, определенный правилом

$$g_j e_i = \begin{cases} g_i, & \text{если } j = i \\ 0, & \text{если } j \neq i. \end{cases}$$

Покажем, что любой элемент $k \in K$, такой что $Gk \subseteq S^\beta$, принадлежит S. Для этого установим сначала, что элементы $e_i k$ принадлежат S.

Поскольку по лемме 2 $S^\beta = GS = g_i S$ и $g_i k \in S^\beta$, то для каждого $i \in J$ существует $s_i \in S$, такой что $g_i k = g_i s_i$. Так как S – идеал, то $e_i s_i \in S$. Покажем, что $e_i k = e_i s_i$. Согласно лемме I для этого достаточно показать, что $e_i k$ и $e_i s_i$ равнодействуют на элементах базиса. Имеем

$$g_i (e_i s_i) = g_i s_i = g_i k = g_i (e_i k).$$

Если же $j \neq i$, то

$$g_j (e_i s_i) = (g_j e_i) s_i = 0 = (g_j e_i) k = g_j (e_i k).$$

Так как по лемме 3 носитель каждого элемента из K есть объединение τ-классов, то из определения элемента e_i следует, что $supp(e_i) = [g_i]_\tau$. Поскольку $supp(e_i k) \subseteq supp(e_i)$, то носители элементов $e_i k$, $i \in J$ попарно не пересекаются. Так как $g_i(e_i k) = (g_i e_i) k = g_i k$ при любом i, то суммой семейства $(e_i k \mid i \in J)$ является k. Из суммируемости идеала S и условия $e_i k = e_i s_i \in S$ теперь получаем $k \in S$. Предложение доказано.

Следствие 3. Если G/ρ является свободным конечнопорожденным $\Gamma, 0$-полигоном, то все идеалы почти-кольца K замкнуты.

Доказательство. По лемме D тройка (Γ, G, ρ) является регулярной и мы можем применить предложение 5. Следовательно, надо убедиться, что все идеалы почти-кольца K суммируемы. Так как $\Gamma, 0$-полигон G/ρ конечно порожден и классы $[g_1]_\rho$ и $[g_2]_\rho$ принадлежат одной Γ-орбите в точности тогда, когда $g_1 \tau g_2$, то G имеет конечное число τ-классов. Таким образом, из леммы 3 следует конечность любого семейства с попарно непересекающимися носителями. Сумма такого семейства совпадает с обычной суммой. Теперь из аддитивной замкнутости идеала следует его суммируемость.

Теперь наша ближайшая цель - описать фактор-почти-кольца почти-кольца K по замкнутым идеалам. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 4. Если M - строго циклический L-модуль, $N \lhd_L M$ и $N \neq M$, то M_L° состоит из полных смежных классов по N.

Доказательство. Пусть $n \in N$ и $m \in M^\circ$. Если $n+m \notin M^\circ$, то в силу строгой цикличности $(n+m)L = M$. Поскольку $N \lhd_L M$ и $ml = 0$, то $(n+m)l = (n+m)l - ml \in N$ при любом $l \in L$. Так как $N \neq M$, то $N \cap \mathcal{G}(M_L) = \emptyset$, откуда ввиду строгой цикличности получаем $N \subseteq M^\circ$. Таким образом, $M = (n+m)L \subseteq N \subseteq M^\circ$, что противоречит строгой цикличности M.

Лемма 5. Пусть $H \lhd_K G$, $H \neq G$ и $g \in \mathcal{G}(G_K)$. Тогда для любого $h \in H$ найдется $\delta \in \Delta$, где

$$\Delta = \{\gamma \in \Gamma \mid \forall_{g \in G}\, \gamma g - g \in H\},$$

такой что $(g+h)\,\rho\,(\delta g)$.

Доказательство. По предложению 2 модуль G_K строго цикличен. Поэтому лемма 4 дает, что $g + h \in \mathcal{G}(G_K)$ при любом $h \in H$. Так как $H \lhd_K G$, то

$$(g+h)k - gk \in H \tag{6}$$

при любом $k \in K$. Отсюда следует, что $(g+h)\tau g$. Действительно, так как $g, g+h \in \mathcal{G}(G_K)$, то по следствию 2 имеем $\overline{g} = \overline{g+h} = G$. Поэтому при $(g+h)\bar{\tau} g$[4] в силу следствия I существовал бы $k \in K$, такой что $(g+h)k \notin H$, $gk = 0$, откуда $(g+h)k - gk \notin H$.

Поскольку $(g+h)\tau g$, то существует такой $\gamma \in \Gamma$, что

$$(g+h)\,\rho\,(\gamma g). \tag{7}$$

---

4 Через $\bar{\tau}$ обозначим отрицание отношения τ.

Покажем, что $\gamma \in \Delta$. Так как $g \in \mathcal{G}(G_K)$, то любой $g_1 \in G$ можно представить в виде $g_1 = gk$. В силу (6) и (7) получаем

$$\gamma g_1 - g_1 = \gamma(gk) - gk = (\gamma g)k - gk = (g+h)k - gk \in H.$$

Из произвольности элемента $g_1 \in G$ следует теперь $\gamma \in \Delta$.

<u>Предложение 6.</u> Пусть (Γ, G, ρ) - регулярная тройка и H - собственный замкнутый идеал модуля G_K. Тогда

I) множество $\Delta = \{\gamma \in \Gamma \mid \forall_{g \in G}\, \gamma g - g \in H\}$ является нормальным делителем группы Γ.

2) отношение ρ индуцирует на G/H следующую эквивалентность ρ'.

$$(g_1 + H)\rho'(g_2 + H) \Longleftrightarrow \exists_{h_1, h_2 \in H}(g_1 + h_1)\rho(g_2 + h_2), \tag{8}$$

3) тройка (Γ', G', ρ'), где $\Gamma' = \Gamma/\Delta$, $G' = G/H$, регулярна.

<u>Доказательство</u>. Группа Γ является группой автоморфизмов группы G по определению тройки. Так как H - замкнутый K-идеал, то в силу предложения 4 имеем $\Gamma H \subseteq H$. Поэтому определено представление группы Γ относительно G/H, т.е. гомоморфизм $t : \Gamma \to \mathrm{Aut}(G/H)$ (см. [3], стр. 82, 87). При этом $t(\gamma)(g + H) = \gamma g + H$, где $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$. Легко видеть, что $\mathrm{Ker}(t) = \{\gamma \in \Gamma \mid {}_{g\in G}\, \gamma g + H = g + H\}$, а последнее множество совпадает с Δ. Следовательно, Δ является нормальным делителем.

2) Проверим, что ρ' есть эквивалентность. Рефлексивность и симметричность отношения ρ' следуют из соответствующих свойств ρ. Докажем транзитивность.

Пусть

$$(g_1 + h_1)\rho(g_2 + h_2),\ (g_2 + h_3)\rho(g_3 + h_4), \tag{9}$$

где $g_1, g_2, g_3 \in G$, $h_1, h_2, h_3, h_4 \in H$. Мы должны найти такие $h_5, h_6 \in H$, что $(g_1 + h_5)\rho(g_3 + h_6)$. Рассмотрим отдельно два подслучая: а) $g_2 \in G_K^o$, б) $g_2 \in \mathcal{G}(G_K)$.

а) Так как $g_2 \in G_K^o$, то по лемме 4 имеем $g_2 + h_2, g_2 + h_3 \in G_K^o$. Из предложения 2 в силу регулярности тройки (Γ, G, ρ) следует, что $\bar{g} = gK = G$ для любого $g \in G \setminus [0]_\rho$. Следовательно, $g_2 + h_2$ и $g_2 + h_3$ содержатся в $[0]_\rho$ и тем самым ρ - эквивалентны. Благодаря транзитивности отношения ρ теперь получаем $(g_1+h_1)\rho(g_3+h_4)$, что и требовалось доказать.

б) Так как $g_2\in\mathcal{G}(G_K)$, то в силу строгой цикличности G_K и леммы 4 также $g_2+h_2\in\mathcal{G}(G_K)$. Из леммы 5 тогда следует существование такого $\delta\in\Delta$, что $(g_2+h_2)\rho$ $(\delta(g_2+h_3)]$. Учитывая соотношения (9) и то, что ρ является $\Gamma,0$-конгруэнцией, получаем

$$(g_1+h_1)\rho(g_2+h_2)\rho[\delta(g_2+h_3)]\rho[\delta(g_3+h_4)]=$$

$$=\delta g_3+\delta h_4=g_3+(-g_3+\delta g_3+\delta h_4),$$

откуда $(g_1+h_1)\rho[g_3+(-g_3+\delta g_3+\delta h_4)]$.
Так как $\delta\in\Delta$, то $-g_3+\delta g_3\in H$, а $\delta h_4\in H$ ввиду замкнутости идеала H. Таким образом, $-g_3+\delta g_3+\delta h_4\in H$ и можно брать $h_5=h_1$, $h_6=-g_3+\delta g_3+\delta h_4$. Утверждение доказано.

3) Так как Δ является ядром представления Γ относительно G/H, то определено также представление Γ' относительно G/H. Оно задается формулой

$$f(\gamma)\varphi(g)=\varphi(\gamma g),\tag{10}$$

где $\varphi: G\to G'$ и $f:\Gamma\to\Gamma'$ – естественные гомоморфизмы. Ядро последнего представления равно единице группы Γ' и поэтому Γ' можно рассматривать как группу автоморфизмов группы G'. Докажем, что ρ' является конгруэнцией $\Gamma',0$-полигона G'.

Пусть $\varphi(g_1)\rho'\varphi(g_2)$, где $g_1,g_2\in G$, т.е. по определению (8), существуют $h_1,h_2\in H$, такие что

$$(g_1+h_1)\rho(g_2+h_2).\tag{11}$$

Поскольку ρ – $\Gamma,0$-конгруэнция, то из (11) следует

$$\gamma g_1+\gamma h_1=\gamma(g_1+h_1)\rho\gamma(g_2+h_2)=\gamma g_2+\gamma h_2\tag{12}$$

при любом $\gamma\in\Gamma$. Так как H замкнут, то $\gamma h_1,\gamma h_2\in H$ и применив опять определение (8), получаем $\varphi(\gamma g_1)\rho'\varphi(\gamma g_2)$. Согласно формуле (10) отсюда вытекает $f(\gamma)\varphi(g_1)\rho' f(\gamma)\varphi(g_2)$. Поскольку отображения f и φ являются эпиморфизмами, то этим доказано, что ρ' есть $\Gamma,0$-конгруэнция.

Покажем, что (Γ', G', ρ') является регулярной тройкой. Пусть $\varphi(g)\bar{\rho}'0$ и $f(\gamma)\varphi(g)=\varphi(\gamma g)\rho'\varphi(g)$. Тогда найдутся $h_1, h_2 \in H$, так что $(\gamma g + h_1)\rho(g+h_2)$. Следовательно,

$$(\gamma g + h_1)k = (g + h_2)k \tag{I3}$$

при всех $k \in K$. Так как $H \triangleleft_K G$, то в силу (2) найдутся h_3, $h_4 \in H$, такие что $(\gamma g + h_1)k - (\gamma g)k = h_3$ и $(g+h_2)k - gk = h_4$. Следовательно, из (I3) получаем $(\gamma g)k - gk = (\gamma g + h_1)k - h_3 + h_4 - (g+h_2)k = (g+h_2)k - h_3 + h_4 - (g+h_2)k \in H$, откуда

$$\gamma(gk) - gk \in H \tag{I4}$$

при любом $k \in K$.

В силу формулы (8) из $\varphi(g)\bar{\rho}'0$ следует $g\bar{\rho}0$, т.е. $g \notin [0]_\rho$. Так как тройка (Γ, G, ρ) регулярна, то предложение 2 дает $gK = G$. Теперь из (I4) получаем $\gamma \in \Delta$, т.е. $f(\gamma)=1$.

<u>Теорема I</u>. Пусть (Γ, G, ρ) – регулярная тройка, S – собственный замкнутый идеал почти-кольца $K = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$ и $H = S^\beta$. Тогда $SK = 0$ и

$$K/S \simeq K' = \mathrm{Hom}_{\Gamma',0}(G'/\rho', G'),$$

где (Γ', G', ρ') – регулярная тройка, определенная по H как в предложении 6.

<u>Доказательство</u>. Так как функции α и β осуществляют соответствие Галуа, то H является собственным идеалом модуля G_K. Поскольку G_K является по предложению 2 строго циклическим модулем, то это влечет $0 = HK = S^\beta K = (GS)K = G(SK)$, откуда $SK = 0$.

Пусть φ и f – естественные гомоморфизмы: $\varphi: G \to G'$, $f: \Gamma \to \Gamma'$. Определим отображение $t: K \to K'$ правилом

$$\varphi(g)t(k) = \varphi(gk), \tag{I5}$$

где $g \in G$ и $k \in K$.

Покажем, что t корректно определено, т.е., что оно действительно является отображением из K в K'. Так как $H \triangleleft_K G$, то естественный гомоморфизм $\varphi: G \to G/H$ является K-гомоморфизмом. Следовательно, если $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$, то

$\varphi(g_1 k) = \varphi(g_1)k = \varphi(g_2)k = \varphi(g_2 k)$ при всех $g_1, g_2 \in G$ и $k \in K$. Таким образом, t есть отображение из K в $S_0(G)$. Покажем, что $t(k) \in K'$ при любом $k \in K$, т.е. для всяких $\gamma' \in \Gamma'$ и $g' \in G'$ выполнены условия:

I) $(\gamma' g')t(k) = \gamma'(g' t(k))$,

2) $g_1' \rho' g_2' \Rightarrow g_1' t(k) = g_2' t(k)$.

I) Представим γ' и g' в виде $\gamma' = f(\gamma)$, $g' = \varphi(g)$, где $\gamma \in \Gamma$, $g \in G$. Учитывая формулы (I0) и (I5), получаем

$$[f(\gamma)\varphi(g)]t(k) = \varphi(\gamma g)t(k) = \varphi[(\gamma g)k] = \varphi[\gamma(gk)] =$$
$$= f(\gamma)\varphi(gk) = f(\gamma)[\varphi(g)t(k)],$$

что и требовалось доказать.

2) Пусть $g_1' \rho' g_2'$ и $g_1' = \varphi(g_1)$, $g_2' = \varphi(g_2)$. По определению отношения ρ' существуют $h_1, h_2 \in H$, такие что $(g_1 + h_1)\rho(g_2 + h_2)$, т.е. представителей g_1 и g_2 можно выбрать так, что $g_1 \rho g_2$. В этом случае имеем

$$g_1' t(k) = \varphi(g_1)t(k) = \varphi(g_1 k) = \varphi(g_2 k) = \varphi(g_2)t(k) = g_2' t(k),$$

что и требовалось доказать.

То что t сохраняет алгебраические операции, вытекает из следующих выкладок. Если $g \in G$, $k_1, k_2 \in K$, то

$$\varphi(g)t(k_1 + k_2) = \varphi[g(k_1 + k_2)] = \varphi(gk_1 + gk_2) =$$
$$= \varphi(gk_1) + \varphi(gk_2) = \varphi(g)t(k_1) + \varphi(g)t(k_2) = \varphi(g)[t_1(k_1) + t(k_2)];$$

$$\varphi(g)t(k_1 k_2) = \varphi[g(k_1 k_2)] = \varphi[(gk_1)k_2] =$$
$$= \varphi(gk_1)t(k_2) = [\varphi(g)t(k_1)]t(k_2) =$$
$$= \varphi(g)[t(k_1)t(k_1)].$$

Для завершения доказательства надо показать, что t является эпиморфизмом и $\mathrm{Ker}(t) = S$, сначала установим первое. Пусть $(\varphi(g_i) \mid i \in J)$ есть базис в G'. Тогда $(g_i \mid i \in J)$ – τ-независимая система в G. Действительно, если было бы $g_i \rho(\gamma g_j)$, где $\gamma \in \Gamma$, то по определению ρ' мы получили бы $\varphi(g_i)\rho' \varphi(\gamma g_j) = f(\gamma)\varphi(g_j)$, т.е. $\varphi(g_i)\tau' \varphi(g_j)$. Последнее противоречило бы τ-независимости системы $(\varphi(g_i) \mid i \in J)$.

Пусть $k' \in K'$. Выберем из каждого класса $\varphi(g_i)k'$ представителя h_i. По предложению 2 и следствию 2 имеем $G = g_i K = \bar{g}_i$ при каждом i. Следовательно, в силу следствия I существует $k \in K$, такой что $g_i k = h_i$ при всех i. Применяя к полученным равенствам φ и учитывая выбор элементов h_i получаем

$$\varphi(g_i)t(k) = \varphi(g_i k) = \varphi(h_i) = \varphi(g_i)k'. \qquad (16)$$

Так как система $(\varphi(g_i) \mid i \in J)$ является базисом, то лемма I дает $t(k) = k'$.

Докажем равенство $S = \mathrm{Ker}(t)$. Так как $H = S^{\beta} = GS$, то по формуле (I5) получаем $\varphi(g)t(s) = \varphi(gs) = 0$ для любых $s \in S$ и $g \in G$. Поскольку φ - эпиморфизм, то это дает $S \subseteq \mathrm{Ker}(t)$. Пусть, наоборот, имеем такой $k \in K$, что $t(k) = 0$. Тогда $\varphi(G)t(k) = 0$, откуда в силу (I5) получаем $\varphi(Gk) = 0$, т.е. $Gk \subseteq H$. Следовательно, $k \in (H : G)_K = H^{\alpha}$. Так как $H = S^{\beta}$ и S - замкнутый идеал, то $k \in S$. Теорема доказана.

Рассмотрим в конце параграфа ситуацию, где K содержится в качестве идеала в некотором почти-кольце R. С такой ситуацией мы встречаемся в следующих параграфах. Заметим, что из $K \lhd R$ следует, что G можно считать R-модулем. По предложению 2 модуль G_K является циклическим, $G = gK$, и $K_K = \prod_{i \in J} K_i$, где $K_i \simeq_K G$. Следовательно, произвольный модуль K_i, где $i \in J$, является циклическим, $K_i = k_i K$. Значит, $K_i R = (k_i K)R = k_i(KR) \subseteq k_i K = K_i$, т.е. K_i является R-модулем. Изоморфизмом $K_i \simeq_K G$ структура R-модуля переносится с K_i на G.

Обозначим через $J_R(K)$ множество идеалов почти-кольца R, содержащихся в K.

<u>Лемма 6</u>. Пусть R - почти-кольцо и $K \lhd R$. Тогда

I) $H \lhd_R G \Rightarrow H^{\alpha} \lhd R$,

2) $S \in J_R(K) \Rightarrow S^{\beta} \lhd_R G$.

Следовательно, ограничения функций α и β осуществляют соответствие Галуа между $(J_R(K), \subseteq)$ и $(J(G_R), \supseteq)$.

<u>Доказательство</u>. I) Следует из леммы 4.

2) По лемме 2 имеем $S^{\beta} = GS = gS$ для любого $g \in \mathcal{G}(G_K)$.

Следовательно, согласно лемме C, из $S \lhd R$ следует $gS = S^{\beta} \lhd_R G$. Лемма доказана.

Наша ближайшая цель показать, что множество

$$\{ S \in J_R(K) \mid S \neq K,\ S^{\beta\alpha} = S \}$$

имеет наибольший элемент. Сначала выведем еще один вспомогательный результат.

Лемма 7. Пусть A является правым квазиидеалом почти-кольца L и M, N - суть L-модули, причем M - циклический A-модуль. Тогда каждый A-гомоморфизм $\varphi: M \to N$ является L-гомоморфизмом. В частности, $\mathrm{Aut}(M_A) = \mathrm{Aut}(M_L)$.

Доказательство. Берем произвольные $m \in M$ и $\ell \in L$. Ввиду цикличности модуля M_A можем представить m в виде $m = na$, где $n \in M$, $a \in A$. Тогда

$$\varphi(m\ell) = \varphi((na)\ell) = \varphi(n(a\ell)) = \varphi(n)(a\ell) = (\varphi(n)a)\ell = (\varphi(na))\ell = (\varphi m)\ell.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть (Γ, G, ρ) есть регулярная тройка и $K = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$. Тогда множество собственных замкнутых идеалов почти-кольца K, являющихся идеалами почти-кольца R, имеет наибольший элемент.

Доказательство. Так как функции α и β осуществляют соответствие Галуа между $(J_R(K), \subseteq)$ и $(J(G_R), \supseteq)$, то они индуцируют взаимно однозначное монотонное соответствие между замкнутыми подсистемами. Следовательно, достаточно убедиться, что G_R имеет наибольший собственный замкнутый идеал.

Покажем сначала, что модуль G_R имеет наибольший собственный идеал. Так как G_R - циклический модуль, то по лемме Цорна он имеет максимальный идеал V. Допустим, что найдется еще R-идеал N, $N \neq G$, не содержащийся в V. Тогда $N + V = G$.

Ввиду того, что модуль G_K строго цикличен по предложению 2, имеем $N \subseteq G_K^0$. По лемме 4 из $n \in N \subseteq G_K^0$ следует, что $n + V \subseteq G_K^0$, поэтому $N + V \subseteq G_K^0$, противоречие. Итак, G_R имеет наибольший идеал V.

Очевидно, что V инвариантен относительно всех R-автоморфизмов модуля G. Так как $\Gamma \subseteq \mathrm{Aut}(G_K)$ и $\mathrm{Aut}(G_K) = \mathrm{Aut}(G_R)$ (лемма 7), то $\Gamma V \subseteq V$. Значит, по предложению 4 V является замкнутым R-идеалом. Теорема доказана.

В дальнейшем нас особенно интересует случай, где G/ρ – конечнопорожденный $\Gamma,0$-полигон. В этом случае верна

Теорема 3. Пусть тройка (Γ, G, ρ) такова, что G/ρ – конечнопорожденный свободный $\Gamma,0$-полигон и $K = \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G) \triangleleft R$. Тогда

I) R имеет единственный идеал S, максимальный относительно свойства $S \subset K$;

2) $SK = 0$;

3) $K/S \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma',0}(G'/\rho', G')$, где G'/ρ' – конечнопорожденный свободный $\Gamma',0$-полигон.

Доказательство. По лемме D тройка (Γ, G, ρ) регулярна, поэтому применимы теоремы I и 2. Следовательно, по теореме 2 в множестве собственных замкнутых идеалов почти-кольца K, являющихся идеалами в R, существует наибольший элемент S. Так как в силу следствия 3 все идеалы в K замкнуты, то S является искомым идеалом. По теореме I имеем $SK = 0$ и $K/S \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma',0}(G'/\rho', G')$, где (Γ', G', ρ') – регулярная тройка. По лемме D $\Gamma,0$-полигон G'/ρ' свободен. Поскольку из $(\gamma g)\rho g_1$ следует $f(\gamma)\varphi(g)\rho'\varphi(g_1)$, то конечная порожденность $\Gamma,0$-полигона G/ρ влечет конечную порожденность $\Gamma',0$-полигона G'/ρ'.

Предложение 7. Пусть выполнены условия теоремы 3. Тогда K будет минимальным идеалом почти-кольца R в том и только том случае, когда $G_R \in \mathfrak{M}_R^c$.

Доказательство. Из леммы 6 следует, что функции α и β осуществляют взаимно однозначное соответствие между замкнутыми объектами из $J_R(K)$ и $J(G_R)$ (см. [2], стр. 374). Таким образом, если K – минимальный идеал, то G_R не имеет замкнутых идеалов, отличных от 0 и G. Пусть $H \triangleleft_R G$, причем $0 \neq H \neq G$. Так как модуль G_R является циклическим, то по лемме Цорна H содержится в максимальном R-идеале F, а последний, как мы показали в теореме 2, является замкнутым. Мы получили противоречие ввиду того, что предполагали существование R-идеала, отличного от 0 и G. Следовательно, $G_R \in \mathfrak{M}_R^c$.

Наоборот, если $G \in \mathfrak{M}_R^0$, то G не содержит R-идеалов, отличных от 0 и G и поэтому K не содержит замкнутых идеалов почти-кольца R, отличных от 0 и K. Из следствия 3 тогда вытекает минимальность идеала K.

§ 4. Одно обобщение теоремы плотности

Свяжем с каждым модулем G_R тройку $T(G_R)=(\Gamma, G, \sigma_R)$, где $\Gamma = \mathrm{Aut}(G_R)$, а σ_R определяется правилом:

$$g_1 \sigma_R g_2 \Leftrightarrow \forall_{r \in R}\ g_1 r = g_2 r.$$

Отношение τ, определенное этой тройкой, обозначим через τ_R.

Бетчем доказана следующая теорема плотности ([7], теорема 2.8).

Если $G \in \mathfrak{M}_R^0$ и $R/(0:G)_R$ не является кольцом, то для любых τ-независимых $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{G}(G)$ и произвольных $h_1, \dots, h_n \in G$ существует $r \in R$ такой что $g_i r = h_i$, $i = 1, \dots, n$.

Мы обобщим эту теорему, показывая, что элемент r может быть выбран из любого правого идеала S, такого что $g_i S \neq G$ $i = 1, \dots, n$.

Начиная с этого места фиксируем следующие объекты исследования и их свойства.

A. R - почти-кольцо.

B. $S \triangleleft_r R$.

C. G - 0-неприводимый R-модуль.

D. G является циклическим S-модулем.

Обозначим $\Gamma = \mathrm{Aut}(G_S)$. В силу леммы 7 имеем также $\Gamma = \mathrm{Aut}(G_R)$. Следовательно, $T(G_S) = (\Gamma, G, \sigma_S)$, $T(G_R) = (\Gamma, G, \sigma_R)$.

<u>Лемма 8</u>. Если $g, f \in \mathcal{G}(G_S)$, то

$$(0:g)_S \subseteq (0:f)_S \Rightarrow (0:g)_S = (0:f)_S.$$

<u>Доказательство</u>. Из заданного включения следует существование S-гомоморфизма $\varphi: gS \to fS$, определенного правилом $\varphi(gs) = fs$. Так как $g, f \in \mathcal{G}(G_S)$, то φ определен на всем G и отображает его на все G. Если включение строгое, то φ имеет ненулевое ядро. Последнее невозможно, поскольку по лемме 7 φ является R-эндоморфизмом, а в силу 0-неприводимости все ненулевые R-эндоморфизмы модуля G являются мономорфизмами. Лемма доказана.

Лемма 9. Если $g, f \in \mathcal{G}(G_S)$, то

$$(0:g)_S = (0:f)_S \Leftrightarrow g\tau_S f.$$

Доказательство. Пусть сначала $g\tau_S f$, т.е. при некотором $\gamma \in \Gamma$ имеем $(\gamma g)\sigma_S f$. Тогда

$$gs = 0 \Leftrightarrow \gamma(gs) = 0 \Leftrightarrow (\gamma g)s = 0 \Leftrightarrow fs = 0.$$

Наоборот, пусть $(0:g)_S = (0:f)_S$. Тогда, как в предыдущей лемме, получаем, что отображение $\gamma: G \to G$, определенное правилом $\gamma(gs) = fs$, есть S-автоморфизм. Поскольку $(\gamma g)s = \gamma(gs) = fs$ при любом $s \in S$, то $(\gamma g)\sigma_S f$, значит $g\tau_S f$.

Лемма 10. Если G - неабелев S-модуль, то из включения $(0:\{g_2, \cdots, g_n\})_S \subseteq (0:g_1)_S$, где $g_i \in \mathcal{G}(G_S)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, следует существование такого $i > 1$, что $g_i\tau_S g_1$.

Доказательство. Если $n = 2$, то утверждение следует из лемм 8 и 9.

Допустим, что лемма верна при $n \leqslant k$ и рассмотрим случай $n = k+1$. Предположим, что в этом случае утверждение не верно. Значит, существуют $g_1, g_2, \cdots, g_{k+1} \in \mathcal{G}(G_S)$, так что $(0:\{g_2, \cdots, g_{k+1}\})_S \subseteq (0:g_1)_S$, но $g_i \bar{\tau}_S g_1$ при всех $i > 1$. Обозначим $K_1 = (0:g_2)_S$, $K_2 = (0:\{g_3, \cdots, g_{k+1}\})_S$. Тогда явно $K_1 \cap K_2 = (0:\{g_2, \cdots, g_{k+1}\})_S$. Если бы $K_1 \subseteq (0:g_1)_S$, то согласно индуктивному предположению мы имели бы $g_1\tau_S g_2$, поэтому $K_1 \not\subseteq (0:g_1)_S$. Аналогично $K_2 \not\subseteq (0:g_1)_S$. Рассмотрим R-модуль

$$L = [(K_1 + (0:g_1)_S) \cap (K_2 + (0:g_1)_S)]/[K_1 \cap K_2 + (0:g_1)_S], \qquad (17)$$

который является абелевым (см. [7] лемма 2.9). Поскольку $g_1 \in \mathcal{G}(G_S)$, то $G \simeq_R S/(0:g_1)_S$. Следовательно, $(0:g_1)_S$ является максимальным идеалом модуля S_R в силу 0-неприводимости модуля G_R. Поэтому $K_1 + (0:g_1)_S = K_2 + (0:g_1)_S = S$. Учитывая еще включение $K_1 \cap K_2 \subseteq (0:g_1)_S$, из (17) получаем $L = S/(0:g_1)_S \simeq_R G$. Таким образом, G_S является абелевым, что противоречит предположению леммы.

Теорема 4. Пусть R - почти-кольцо, $S \triangleleft_n R$ и G - 0-неприводимый R-модуль, являющийся циклическим неабелевым S-модулем. Тогда для любых τ-независимых $g_1, \cdots, g_n \in \mathcal{G}(G_S)$ и произвольных $h_1, \cdots, h_n \in G$ существует

$s \in S$, такой что $g_i s = h_i$, $i = 1, \dots, n$.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $h_2 = \dots = h_n = 0$. Здесь мы должны доказать равенство $g_1(0:\{g_2, \dots, g_n\})_S = G$. Допустим, что это не так. В силу лемм A и C $g_1(0:\{g_2, \dots, g_n\})_S$ является R-идеалом в G, а из-за 0-неприводимости G_R он равен нулю, откуда $(0:\{g_2, \dots, g_n\})_S \subseteq (0:g_1)$. По лемме 10 из этого следует существование такого $i > 1$, что $g_1 \tau_S g_i$. Это противоречит выбору элементов g_i.

Общий случай легко сводится к рассмотренному. Действительно, следуя первой части доказательства найдем элементы $s_1, \dots, s_n \in S$, такие что

$$g_i s_j = \begin{cases} h_i, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Тогда $g_i \sum_{j=1}^{n} s_j = \sum_{j=1}^{n} g_i s_j = h_i$ при любом i. Следовательно, в качестве s можно брать $\sum_{j=1}^{n} s_j$. Теорема доказана.

Следующее предложение устанавливает интересную связь между отношениями τ_S и τ_R.

Предложение 8. Пусть выполнены условия теоремы 4 и $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(G_S)$. Тогда

$$g_1 \tau_S g_2 \Longleftrightarrow g_1 \tau_R g_2 .$$

Доказательство. Доказательства требует лишь импликация „$\Rightarrow$". Мы применим теорему 4 в случае $S = R$. Это можно сделать, так как из неабелевости модуля G_S следует неабелевость модуля G_R.

Докажем сперва импликацию $g_1 \tau_S g_2 \Rightarrow g_1 \tau_R g_2$. Предположим от противного, что существуют $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(G_S)$, такие что $g_1 \tau_S g_2$ и $g_1 \bar{\tau}_R g_2$. В силу теоремы 4 найдется $r \in R$, такой что

$$\begin{aligned} g_1 r &= g_1, \\ g_2 r &= g_2 . \end{aligned} \tag{18}$$

Так как $S \lhd_r R$, то по формуле (2) $(s+r)t - rt \in S$ при любых $s \in S$, $t \in R$. Таким образом, ввиду $g_1 \tau_S g_2$ получаем

$$g_1[(s+r)t - rt] = g_2[(s+r)t - rt],$$

откуда $$(g_1 s + g_1 r)t - (g_1 r)t = (g_2 s + g_2 r)t - (g_2 r)t,$$

или, учитывая (I8)

$$(g+g_1)t - g_1 t = (g+g_2)t - g_2 t, \tag{I9}$$

где $g = g_1 s = g_2 s$. Поскольку $g_1 \in \mathcal{G}(G_S)$, то g можно считать произвольным элементом модуля G, пусть $g = -g_1$. Из (I9) тогда получаем

$$-g_1 t + g_2 t = (-g_1 + g_2)t. \tag{20}$$

По теореме 4 для любого $h \in G$ существует $t \in R$, такой что $g_1 t = 0$, $g_2 t = h$. Учитывая (20), тогда получаем $-g_1 + g_2 \in \mathcal{G}(G_R)$.

Покажем, что $-g_1 + g_2$ τ_R-эквивалентен одному из элементов g_1, g_2. На самом деле, в противном случае из теоремы 4 следовало бы существование такого $t \in R$, что $g_1 t = g_2 t = 0$, $(-g_1 + g_2)t \neq 0$, а это противоречило бы равенству (20).

Пусть $(-g_1 + g_2)\tau_R g_1$ (если вместо g_1 взять g_2, то рассуждения аналогичны). Тогда $(-g_1 + g_2)\,\sigma_R\,(\gamma g_1)$ для некоторого $\gamma \in \Gamma$ и с помощью (20) получаем

$$-g_1 t + g_2 t = (\gamma g_1)t = \gamma(g_1 t) \tag{2I}$$

для всех $t \in R$. Найдем опять по теореме 4 такой $t \in R$, что $g_1 t = 0$, $g_2 t \neq 0$, а это противоречит равенству (2I). Этим доказано $g_1 \tau_R g_2$.

Теперь установим, что $g_1 \sigma_R g_2$. По определению τ_R существует такой $\delta \in \Gamma$, что $g_1 \sigma_R (\delta g_2)$. Следовательно, $g_1 s = (\delta g_2)s = \delta(g_2 s)$ при всех $s \in S$. По предположению $g_1 \sigma_S g_2$ имеем $g_1 s = g_2 s$ для любого $s \in S$. В силу $g_1 \in \mathcal{G}(G_S)$ теперь заключаем, что $g = \delta g$ при любом $g \in G$. Значит, $\delta = 1$ и $g_1 \sigma_R g_2$, что и требовалось доказать.

§ 5. Важный частный случай

В настоящем параграфе предметами изучения будут те же R, S и G, что в § 4. Мы только усилим условии B и D и наложим дополнительное условие E. Эти требования следующие:

B′. $S \lhd R$.

D′. G – точный строго циклический S-модуль.

E. Почти-кольцо R удовлетворяет условию минимальности для правых идеалов, содержащихся в S.

В этих условиях удается описать строение идеала S как почти-кольца.

<u>Предложение 9</u>. Пусть R - почти-кольцо, $S \lhd R$, $G \in \mathfrak{M}_R^{\circ}$, $\Gamma = \mathrm{Aut}(G)$, G является неабелевым S-модулем и выполнены условия D' и E. Тогда

1) $\Gamma, 0$-полигон G/σ_S конечно порожден и свободен.

2) $S \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\sigma_S, G)$.

<u>Доказательство</u>. 1) Докажем, что G/σ_S - свободный $\Gamma, 0$-полигон. По лемме D для этого надо показать, что из $(\gamma g)\, \sigma_S\, g$, где $g \in G \setminus G_S^{\circ}$ и $\gamma \in \Gamma$, следует $\gamma = 1$. Ввиду условия D' имеем $g \in \mathcal{G}(G_S)$. Следовательно, любой $g_1 \in G$ можно записать в виде $g_1 = gs$. Тогда в силу $(\gamma g)\sigma_S g$ получаем $\gamma g_1 = \gamma(gs) = (\gamma g)s = gs = g_1$, откуда $\gamma = 1$.

Покажем, что $\Gamma, 0$-полигон G/σ_S конечно порожден. Допустим от противного, что найдутся $[g_1]_{\sigma_S}, \dots, [g_n]_{\sigma_S}, \dots$, находящиеся в попарно различных ненулевых Γ-орбитах полигона G/σ_S. Ясно, что представители g_i, $i = 1, 2, \dots$ образуют тогда σ_S-независимую систему группы G. В силу условия D' все $g_i \in \mathcal{G}(G_S)$. Образуем убывающую последовательность

$$(0 : g_1)_S \supseteq \dots \supseteq (0 : \{g_1, \dots, g_n\})_S \supseteq \dots , \tag{22}$$

члены которой являются правыми идеалами почти-кольца R по лемме A. Согласно теореме 4 для каждого n существует такой $s \in S$, что $g_1 s = \dots = g_{n-1} s = 0$, $g_n s \neq 0$. Следовательно, все включения в (22) строгие. Таким образом, получено противоречие с условием E.

2) Сопоставим любому $s \in S$ преобразование $g \to gs$ на группе G. Тогда легко проверить, что эти преобразования принадлежат $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\sigma_S, G)$. В силу точности G_S получим вложение $S \subseteq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\sigma_S, G)$, причем оно есть гомоморфизм почти-колец.

Покажем, что мы получили отображение на. Для этого берем базис $g_1, \dots, g_n$ группы G (относительно σ_S).

По теореме 4 для каждого $x \in \mathrm{Hom}_{\Gamma_0}(G/\sigma_S, G)$ существует $s \in S$, такой что $g_i x = g_i s$, $i = 1, \dots, n$. Теперь лемма I дает, что $x = s$. Итак, $S \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma_0}(G/\sigma_S, G)$.

<u>Лемма II</u>. Любой ненулевой S-эндоморфизм модуля G является автоморфизмом.

<u>Доказательство</u>. В силу леммы 7 и 0-неприводимости модуля G_R всякий S-эндоморфизм $\gamma \neq 0$ модуля G является мономорфизмом и поэтому $\gamma G \simeq_S G$. Ввиду строгой цикличности для любого собственного подмодуля $H \subset G$ будет $HS = 0$, но такой модуль не цикличен как G_S. Таким образом, $\gamma G = G$.

<u>Предложение IO</u>. Пусть R – почти-кольцо, $S \triangleleft R$, $G \in \mathfrak{M}^0_R$, $\Gamma_0 = \mathrm{End}(G_S)$, G является абелевым S-модулем и выполнены условия D' и E. Тогда

I) Γ_0 является телом.

2) G является конечномерным векторным пространством над Γ_0.

3) Почти-кольцо S изоморфен полному кольцу матриц над Γ_0.

<u>Доказательство</u>. I) По лемме II имеем $\Gamma_0 = \Gamma \cup \{0\}$, где $\Gamma = \mathrm{Aut}(G_S)$, а из абелевости G_S следует, что Γ_0 есть абелева группа относительно поточечного сложения эндоморфизмов (см. [2], стр. I27-I30). Аксиомы дистрибутивности проверяются тривиально.

2) Очевидно, что G – векторное пространство над Γ_0. По условию D' модуль G_S точен и тогда по лемме B в S_S выполняются тождества коммутативности сложения и правой дистрибутивности. Поэтому S является кольцом.

В силу абелевости G является S-модулем в теоретико-кольцевом смысле. Покажем, что G есть неприводимый S-модуль. Поскольку по условию D' модуль G_S является строго циклическим, то для этого нужно показать, что $G^0_S = 0$. Докажем, что $G^0_S \triangleleft_R G$, тогда желаемый результат следует из 0-неприводимости модуля G_R. Берем $g, h \in G^0_S$, $f \in G$, $r \in R$, $s \in S$. Тогда $(g-h)s = gs - hs = 0$, откуда $g - h \in G^0_S$. Значит, G^0_S есть подгруппа в $(G, +)$, а в силу абелевости даже нормальный делитель. Далее, так как $S \triangleleft R$, получаем $rs \in S$ и

$$[(g+f)r-fr]s=[(g+f)r]s-(fr)s=$$
$$=(g+f)(rs)-f(rs)=g(rs)+f(rs)-f(rs)=g(rs)=0.$$

Итак, $(g+f)r-fr\in G_S^0$ и $G_S^0 \triangleleft_R G$, откуда $G_S^0=0$.

Применяя вместо теоремы 4 теорему плотности для неприводимых модулей ([I], стр. 49), получаем также как в предложении 9, что пространство G конечномерно над Γ_0.

3) Так как кольцо S имеет точный неприводимый модуль, конечномерный над телом S-эндоморфизмов Γ_0, то оно изоморфно полному кольцу матриц над телом Γ_0 (см. [I], стр.55).

Предложение II. Идеал S имеет левую единицу и разлагается в прямую сумму конечного числа минимальных правых идеалов почти-кольца R, каждый из которых R-изоморфен модулю G.

Доказательство. Если модуль G_S абелев, то существование левой единицы следует из предложения IO. Если модуль неабелев, то по предложению 9 имеем $S\simeq \mathrm{Hom}(G/\rho, G)$, где тройка (Γ, G, ρ) регулярна (здесь надо взять $\rho=\sigma_S$). Следовательно, S имеет левую единицу в силу предложения 2.

Докажем второе утверждение. Пусть сначала модуль G_S неабелев. По предложению 9 имеем $S\simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где $\Gamma,0$-полигон G/ρ конечно порожден и свободен. В частности, (Γ, G, ρ) - регулярная тройка по лемме D. В силу предложения 2 имеем разложение $S=\sum_{i=1}^{n} S_i$, где $S_i=\bigcap_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(0:g_j)_S$, причем $g_1,\dots,g_n$ - базис группы G. Там же показано, что $S_i\simeq_S G$, $i=1,\dots,n$.

Множества S_i являются правыми идеалами почти-кольца R по лемме A и, в частности, R-модулями. Теперь из леммы 7 и $S_i\simeq_S G$ следует, что $S_i\simeq_R G$. Так как G не содержит R-идеалов, отличных от 0 и G, то тем более S_i не содержит правых идеалов почти-кольца R, отличных от 0 и S_i.

Пусть теперь модуль G_S абелев. По предложению IO почти-кольцо S изоморфно кольцу всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства. Пусть $g_1,\dots,g_n$ - базис этого пространства. Тогда из теоремы плотности ([I], стр. 49) вытекает, что $S=\sum_{i=1}^{n} S_i$, где $S_i=\bigcap_{j\neq i}^{\tilde{n}}(0:g_i)_S$. Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство случая, где G_S неабелев.

Учитывая следующую простую лемму, сделаем из доказанного предложения одно следствие.

Лемма E. Если правый идеал S почти-кольца R имеет левую единицу e, то $R_R=S+(0:e)_R$.

Следствие 4. Идеал S является прямым слагаемым модуля R_R.

Доказательство. Так как S имеет в силу предложения II левую единицу e, то по лемме E имеем разложение $R_R=S+(0:e)_R$.

Используя предложение 8, можно показать, что $(0:e)_R$ не зависит от выбора левой единицы e и совпадает с $(0:\mathfrak{J}(G_R))_R$. Последний является единственным дополнением к S в R_R.

Слегка усовершенствуя доказательства, можно почти все результаты § 5 получить и тогда, когда S является только правым идеалом. Отличия появляются лишь в случае абелева G_S.

Из полученных результатов можно вывести, что S является минимальным идеалом в R. Если G абелев S-модуль, то это следует из предложения IO, а если неабелев, то из предложения 7. В следующем параграфе мы покажем, что все минимальные идеалы с ненулевым квадратом артинова почти-кольца устроены таким образом.

§ 6. Минимальные идеалы в артиновых почти-кольцах

Впервые минимальные идеалы артиновых почти-колец были рассмотрены в работах [IO, II] Скотта. Он доказал, что ненильпотентный минимальный идеал артинова почти-кольца R выделяется прямым слагаемым в модуле R_R (см. [II], стр. 443) и разлагается в прямую сумму минимальных ненильпотентных правых идеалов почти-кольца R ([II], теорема 4.6). Мы опишем строение минимального идеала как почти-кольца. Из этого описания следуют результаты Скотта.

Лемма F ([II], предложение I.2). Пусть B - подмножество почти-кольца R и $RB\subseteq B$. Тогда правый идеал $(B)_r$, порожденный множеством B, является идеалом.

Лемма I2. Пусть S - минимальный идеал почти-кольца R, содержащий правый квазиидеал F, минимальный относительно свойства $FS \neq 0$. Тогда R обладает 0-неприводимым модулем G, являющимся точным, строго циклическим S-модулем.

Доказательство. Покажем, что F является строго циклическим S-модулем. Для этого убедимся, что из $fS \neq F$ следует $fS = 0$ при любом $f \in F$. Итак, пусть $fS \neq F$. Поскольку $(fS)R = f(SR) \subseteq fS$, то fS - правый квазиидеал в R, причем $fS \subset F$. В силу свойства минимальности F получаем $(fS)S = 0$, откуда $f(S^2) = 0$ а по лемме А $f(S^2)_r = 0$. Ввиду леммы F имеем $(S^2)_r \triangleleft R$, причем ясно, что $0 \leq (S^2)_r \leq S$. Так как по определению F будет $0 \neq FS$ и $FS \leq S^2$, то $S^2 \neq 0$. Следовательно, в силу минимальности S получаем $(S^2)_r = S$ и $fS = 0$.

Таким образом, из $fS \neq F$ следует $fS = 0$. Учитывая еще, что $FS \neq 0$, получаем, что F - строго циклический S-модуль.

Поскольку F - циклический S-модуль, то он цикличен как R-модуль и в силу леммы Цорна имеет максимальный R-идеал H. Явно $G = F/H$ есть 0-неприводимый R-модуль. Кроме того, модуль G_S является строго циклическим как фактормодуль строго циклического модуля F_S.

Покажем, что G - точный S-модуль. По лемме А имеем $(0:G)_S \triangleleft R$. Ввиду минимальности идеала S либо $(0:G)_S = 0$, т.е. G_S точен, либо $(0:G)_S = S$. В последнем случае было бы $GS = 0$ и $FS \subseteq H$, что противоречило бы цикличности F_S. Лемма доказана.

Теорема 5. Простое почти-кольцо R, обладающее правым квазиидеалом F, минимальным относительно свойства $FR \neq 0$, I-примитивно.

Доказательство. Применим лемму I2, взяв за S само R. По ней R обладает точным 0-неприводимым строго циклическим модулем G. Значит, $G \in \mathfrak{M}^1_R$ и R I-примитивно.

Следствие 5. Классы артиновых простых и артиновых I-примитивных почти-колец совпадают.

Доказательство. Как показано в [6] (следствие 2.6), артиново I-примитивное почти-кольцо является простым. Обратное утверждение следует из теоремы 5.

Теорема 6. Пусть S – минимальный идеал почти-кольца R, $S^2 \neq 0$ и R удовлетворяет условию минимальности для правых квазиидеалов, содержащихся в S. Тогда

1) S изоморфен либо полному кольцу матриц над телом, либо почти-кольцу $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где G/ρ – свободный конечнопорожденный $\Gamma,0$-полигон;

2) S разлагается в прямую сумму минимальных правых идеалов почти-кольца R, каждый из которых является 0-неприводимым R-модулем;

3) S имеет левую единицу и поэтому выделяется прямым слагаемым в модуле R_R.

Доказательство. Условия леммы 12 выполнены, ибо из $S^2 \neq 0$ и условия минимальности следует существование правого квазиидеала F, минимального относительно свойства $FS \neq 0$. Поэтому существует $G \in \mathfrak{M}_R^0$, являющийся точным, строго циклическим S-модулем. Условие E также выполнено, так как правые идеалы являются правыми квазиидеалами. Следовательно, применимо предложение 10 или предложение 9 в зависимости от того, является модуль G_S абелевым или нет, а также предложение 11 и следствие 4.

Закончим параграф двумя замечаниями. Во первых, в случае почти-колец перестает быть верной известная теорема из теории колец, утверждающая, что минимальный идеал с ненулевым квадратом является простым кольцом. Во вторых, не всякое почти-кольцо $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\rho, G)$, где G/ρ – конечнопорожденный свободный $\Gamma,0$-полигон, может выступать в качестве минимального идеала. Автор располагает соответствующими примерами.

§ 7. Полупримарные почти-кольца

Пусть R – артиново почти-кольцо. Обозначим через $S(R)$ сумму всех минимальных идеалов с ненулевым квадратом почти-кольца R. В [8](следствия 1.2 и 5.1) установлено, что R имеет наибольший нильпотентный идеал, который совпадает с $J_0(R)$. Построим цепочку

$$0 = F_0 \subseteq E_1 \subset F_1 \subseteq E_2 \subset F_2 \subseteq \dots, \qquad (23)$$

где $E_i / F_{i-1} = J_0(R/F_{i-1})$, $F_i/E_i = S(R/E_i)$. Покажем, что цепочка (23) доходит после конечного числа шагов до R.

Лемма 13. Пусть R - почти-кольцо, обладающее цепочкой идеалов (может быть, бесконечной)

$$0 \subseteq K_1 \subset L_1 \subseteq K_2 \subset L_2 \subseteq \cdots , \tag{24}$$

где каждый идеал L_i имеет левую единицу e_i по модулю K_i. Если обозначить $M_i = (K_i : e_i)_R$, то

$$\bigcap_{i=1}^{n} M_i \neq \bigcap_{i=1}^{n-1} M_i , \quad n = 2, 3, \ldots . \tag{25}$$

Доказательство. Так как идеал L_1/K_1 почти-кольца R/K_1 имеет левую единицу $e_1 + K_1$, то по лемме E имеем разложение

$$R/K_1 = L_1/K_1 \dot{+} M_1/K_1 ,$$

откуда получаем канонические изоморфизмы

$$M_1/K_1 \simeq (R/K_1)/(L_1/K_1) \simeq R/L_1 . \tag{26}$$

Пусть $\varphi : R/L_1 \to M_1/K_1$ есть изоморфизм из (26). Тогда

$$\varphi(N/L_1) = (N \cap M_1)/K_1 \tag{27}$$

при любом подмножестве N, таком что $L_1 \subseteq N \subseteq R$.

Докажем теперь лемму индукцией по n. Пусть $n = 2$ и предположим от противного, что $M_1 = M_1 \cap M_2$. Так как $\varphi(M_2/L_1) = (M_2 \cap M_1)/K_1$ в силу (27), то из $M_1 = M_1 \cap M_2$ следует $M_2 = R$. Поскольку $e_2 + K_2$ - левая единица почти-кольца L_2/K_2, то последнее равенство дает $K_2 = L_2$, противоречие.

Пусть лемма уже доказана при $n = k-1$ и рассмотрим случай $n = k$. В почти-кольце R/L_1 имеем цепочку идеалов

$$0 \subseteq K_2/L_1 \subset L_2/L_1 \subseteq K_3/L_1 \subset \cdots .$$

Применяя к этой цепочке изоморфизм φ, получаем в M_1/K_1 цепочку идеалов

$$0 \subseteq K_2' \subset L_2' \subseteq K_3' \subset , \tag{28}$$

где $K_i' = \varphi(K_i/L_1) = M_1 \cap K_i/K_1$, $L_i' = M_1 \cap L_i/K_1$. Ясно, что здесь идеалы L_i' обладают левыми единицами по модулю K_i'. Последними являются элементы $e_i' = \varphi(e_i + L_1)$. Следовательно, цепочка (28) является цепочкой того же вида, что (24). Поэтому, согласно индуктивному предположению, применима формула (25) в случае $n = k-1$. Получаем

$$\bigcap_{i=2}^{k} (K_i' : e_i')_{M_1/K_1} \neq \bigcap_{i=2}^{k-1} (K_i' : e_i')_{M_1/K_1}. \tag{29}$$

Рассмотрив произведение $(e_i + L_1)(r + L_1)$, где $r \in M_i$, убедимся, что из формулы $M_i = (K_i : e_i)_R$ следует $M_i/L_1 = (K_i/L_1 : e_i + L_1)_{R/L_1}$. Отсюда применением изоморфизма φ получаем $\varphi(M_i/L_1) = (K_i' : e_i')_{M_1/K_1}$, $i = 2, 3, \ldots$. Так как $\varphi(M_i/L_1) = (M_1 \cap M_i)/K_1$, то из формулы (29) вытекает

$\bigcap\limits_{i=2}^{k} (M_1 \cap M_i)/K_1 \neq \bigcap\limits_{i=2}^{k-1} (M_1 \cap M_i)/K_1$, откуда $\bigcap\limits_{i=2}^{k} (M_1 \cap M_i) \neq \bigcap\limits_{i=2}^{k-1} (M_1 \cap M_i)$, т.е. $\bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i \neq \bigcap\limits_{i=1}^{k-1} M_i$. Этим доказана верность формулы (25) при $n = k$, и значит, для любого n.

Определение. Назовем почти-кольцо матричным, если оно изоморфно либо полному кольцу матриц над телом, либо же почти-кольцу $\mathrm{Hom}_{\Gamma O}(G/\rho, G)$, где G/ρ – конечнопорожденный свободный ΓO-полигон.

Заметим, что матричное кольцо над произвольным кольцом не является матричным почти-кольцом по нашему определению. Название оправдывается тем, что матричные почти-кольца занимают в теории артиновых почти-колец то же место, что матричные кольца над телами в теории колец.

Теорема 7. Если R – артиново почти-кольцо, то цепочка (22) доходит после конечного числа шагов до R. Таким образом, R обладает рядом идеалов

$0 = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_n = R$, где R_i/R_{i-1}

либо нильпотентно, либо является
матричным почти-кольцом, $i = 1, \ldots, n$. (30)

Доказательство. Так как гомоморфный образ артинова почти-кольца является артиновым и $E_i/F_{i-1} = J_0(R/F_{i-1})$, то все факторы E_i/F_{i-1} нильпотентны (см. [8], следствия I.2 и 5.I). Рассмотрим факторы F_i/E_i. По определению F_i/E_i есть сумма минимальных идеалов с ненулевым квадратом артинова почти-кольца R/E_i. Известно, что сумма любого семейства минимальных идеалов Ω-группы является прямой суммой некоторого подсемейства ([3], стр. 49). Следовательно, в силу артиновости $F_i/E_i = \sum_{j=1}^{k_i} F_{ij}/E_i$, где F_{ij}/E_i – минимальные идеалы артинова почти-кольца R/E_i, причем $F_{ij}^2 \not\subseteq E_i$.

По теореме 6 факторы F_{ij}/E_i суть матричные почти-кольца и обладают левыми единицами. Теперь утверждение теоремы следует из леммы 13 и артиновости почти-кольца R. Действительно, рядом вида (28) будет ряд

$$0 = F_0 \subseteq E_1 \subset F_{11} \subset F_{11} + F_{12} \subset \dots \subset F_1 \subseteq E_2 \subset F_{21} \subset \dots \subset R.$$

Теорема доказана.

Знание существования ряда (28) позволяет получать новую информацию об артиновых почти-кольцах, а многие уже известные их свойства могут быть установлены исходя лишь из существования этого ряда. Поэтому целесообразно ввести новый класс почти-колец.

Определение. Назовем почти-кольцо полупримарным, если оно обладает рядом вида (28). Обозначим класс всех полупримарных почти-колец через $\mathfrak{A}$, а соответствующий ряд назовем $\mathfrak{A}$-рядом.

Класс $\mathfrak{A}$ шире класса артиновых почти-колец, так как охватывает все нильпотентные почти-кольца и пересекается с классом колец по полупримарным кольцам. Установим некоторые простейшие свойства полупримарных почти-колец.

Определение. Пусть $\mathcal{U}$ и V – идеалы почти-кольца R, причем $\mathcal{U} \subset V$. Фактор $V/\mathcal{U}$ называется минимальным, если между $\mathcal{U}$ и V нет других идеалов почти кольца R. Назовем $\mathfrak{A}$-ряд полупримарного почти-кольца R приведенным, если все его матричные факторы минимальны.

Лемма 14. В каждом полупримарном почти-кольце существует приведенный $\mathfrak{A}$-ряд.

Доказательство. Пусть R_{i+1}/R_i есть матричный фактор $\mathfrak{A}$-ряда почти-кольца R. Если R_{i+1}/R_i является матричным кольцом над телом, то R_{i+1}/R_i сам есть минимальный фактор.

Пусть теперь $R_{i+1}/R_i \simeq \mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/g, G)$, где G/g - конечнопорожденный свободный $\Gamma, 0$-полигон. Тогда, по теореме 3, почти-кольцо R/R_i имеет единственный идеал S/R_i максимальный относительно свойства $S\subset R_{i+1}$. По той же теореме R_{i+1}/S является снова матричным почти-кольцом, а S/R_i нильпотентно. Следовательно, каждый $\mathfrak{A}$-ряд можно уплотнить до приведенного $\mathfrak{A}$-ряда. Лемма доказана.

Предложение I3. Идеал полупримарного почти-кольца является полупримарным почти-кольцом.

Доказательство. Пусть $R\in\mathfrak{A}$ и $0\subset R_1\subset R_2\subset\ldots\subset R_n=R$ есть приведенный $\mathfrak{A}$-ряд. Для идеала S построим ряд

$$0=S_0\subseteq S_1\subseteq S_2\subseteq\cdots\subseteq S_n,$$

где $S_i=S\cap R_i$.

Очевидно, из нильпотентности R_{i+1}/R_i следует нильпотентность S_{i+1}/S_i. Пусть R_{i+1}/R_i – матричный фактор. Тогда он является минимальным в силу приведенности $\mathfrak{A}$-ряда. Так как $R_{i+1}\cap S+R_i$ есть идеал, находящийся между R_i и R_{i+1}, то имеем две возможности: I) $R_{i+1}\cap S+R_i=R_{i+1}$, 2) $R_{i+1}\cap$ $\cap S+R_i=R_i$.

В первом случае получаем

$$R_{i+1}/R_i=(S_{i+1}+R_i)/R_i\simeq S_{i+1}/(S_{i+1}\cap R_i)=S_{i+1}/S_i,$$

а во втором

$$S_{i+1}/S_i=S_{i+1}/(R_i\cap S_{i+1})\simeq(S_{i+1}+R_i)/R_i=0.$$

Предложение доказано.

Примечание. На самом деле даже каждый правый идеал полупримарного почти-кольца полупримарен.

Предложение I4. Класс полупримарных почти-колец замкнут относительно взятия эпиморфных образов.

Доказательство. Пусть $R\in\mathfrak{A}$ и $0\subset R_1\subset R_2\subset\cdots\subset R_n=R$ есть приведенный $\mathfrak{A}$-ряд. Пусть $S\triangleleft R$. Построим для фактор-почти-кольца $R'=R/S$ ряд

$$0=R_0'\subseteq R_1'\subseteq R_2'\subseteq\cdots\subseteq R_n'=R',$$

где $R_i'=(R_i+S)/S$.

Так как $S\triangleleft R$, то из $r_1r_2\cdots r_n\in R_i$ следует $(r_1+s_1)(r_2+s_2)\cdots(r_n+s_n)\in R_i+S$ при всех $r_1,\cdots,r_n\in R$

и $s_1, \dots, s_n \in S$. Таким образом из нильпотентности фактора R_{i+1}/R_i вытекает нильпотентность фактора R'_{i+1}/R'_i.

Пусть R_{i+1}/R_i - матричный фактор. В силу приведенности $\mathfrak{A}$-ряда имеем две возможности: I) $(R_i+S)\cap R_{i+1}=R_i$, 2) $R_{i+1}\subseteq R_i+S$. В первом случае получаем

$$R'_{i+1}/R'_i \simeq (R_{i+1}+S)/(R_i+S) = (R_{i+1}+R_i+S)/(R_i+S) \simeq$$
$$\simeq R_{i+1}/(R_{i+1}\cap(R_i+S)) = R_{i+1}/R_i,$$

а во втором

$$R'_{i+1}/R'_i \simeq (R_{i+1}+S)/(R_i+S)=0$$

Предложение доказано.

Примечание при корректуре

После сдачи рукописи настоящей статьи в печать автору стало известно о работе [I2] Скотта, где доказано, что каждый минимальный идеал артинова почти-кольца является прямой суммой минимальных правых идеалов.

Литература

I. Д ж е к о б с о н Н., Строение колец. Москва, I96I.

2. К у р о ш А. Г., Лекции по общей алгебре. Москва, I973.

3. П л о т к и н Б. И., Группы автоморфизмов алгебраических систем. Москва, I966.

4. П о л и н С.В., Примитивные m-почти-кольца над мультиоператорными группами. Матем. сб. I97I, 84, № 2, 254-272.

5. П о л и н С. В., Радикалы в $m\Omega$-почти-кольцах I. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, I972, № I, 64-75.

6. П о л и н С. В., Радикалы в $m\Omega$-почти-кольцах II.Изв. высш. учебн. заведений. Математика, I972, № 2, 63-7I.

7. B e t s c h, G., Primitive near-rings. Math. z., 1973, 130, №4, 351-361.

8. R a m a k o t a i a h, D., Radicals for near-rings. Math. Z., 1967, 96, 45-56.

9. R a m a k o t a i a h, D., Structure of 1-primitive near-rings, Math. Z., 1969, 111, №1, 15-26.
10. S c o t t, S. D., Near-rings and near-ring modules, Doctoral dissertation, Australian National University, 1970.
11. S c o t t, S. D., Formation radicals for near-rings. Proc. London Math. Soc., 1972, 25, №3, 441-464.
12. S c o t t, S. D., Minimal ideals of near-rings with minimal condition. J. London Math. Soc., 1974, 8, №1, 8-12.

Поступило
20 II 1974

MINIMAALSED IDEAALID RINGOIDIDES

K. Kaarli

R e s ü m e e

Käesolevas artiklis on saadud Artini ringoidi minimaalsete ideaalide kirjeldus. Kasutades seda tulemust õnnestub heita valgust ka Artini ringoidi ehitusele üldse. Töö esimeses pooles uuritakse põhjalikumalt Polini poolt artiklis [4] defineeritud ringoide $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$. Artikli põhitulemuseks on

Teoreem 7. Artini ringoidis R eksisteerib lõplik ideaalide jada

$$0 = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_n = R, \qquad (*)$$

mille kõik faktorid R_{i+1}/R_i on järgmist tüüpi ringoidid:

1) nilpotentsed;

2) täielikud maatriksite ringid üle kaldkorpuse;

3) ringoidid $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$, kus G/ϱ on vaba lõplikult moodustatud $\Gamma,0$-polügoon.

Lähtudes jada (*) olemasolust, tuuakse töö lõpuosas sisse poolprimaarse ringoidi mõiste. Näidatakse, et poolprimaarsete ringoidide klass on kinnine ideaalide ja epimorfsete kujutiste suhtes.

MINIMAL IDEALS IN NEAR-RINGS

K.Kaarli

S u m m a r y

The object of this paper is to describe the structure of a minimal ideal of an artinian (i.e. satisfying d.c.c. for right R-subgroups) near-ring. Using this description we prove the structure theorem for artinian near-rings.

In §§ 2-3 we consider the near-rings $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$ introduced by Polin in [4]. In §§ 4-5 we generalize the theorem of density due to Betsch [7]. The main results of the paper are contained in §§ 6-7.

Theorem 5. A simple near-ring R, which has a right R-subgroup F, minimal with respect to property $FR \neq 0$, is 1-primitive.

Theorem 6. Let S be a minimal ideal of a near-ring R, satisfying d.c.c. for right R-subgroups, contained in S and $S^2 \neq 0$. Then S is isomorphic to the near-ring of following types

1) matrix ring over a division ring,

2) near-ring $\mathrm{Hom}_{\Gamma,0}(G/\varrho, G)$ where G/ϱ is a finitely generated free $\Gamma,0$-polygon.

Theorem 7. In an artinian near-ring R there exists a sequence of ideals

$$0 = R_0 \subset R_1 \subset \ldots \subset R_n = R \qquad (*)$$

all of whose factors are either nilpotent or isomorphic to the near-rings of types 1) and 2) from theorem 6.

Theorem 7 leads us to introduce a new class of near-rings We call a near-ring R semiprimary if it has a sequence (*). We show that the class of semiprimary near-rings is closed under ideals and epimorphic images.

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОВЕРХНОСТЕЙ V_3 РАНГА 2 В ${}^{l}S_N$

Э.Абель

Кафедра алгебры и геометрии

В последнее время в дифференциальной геометрии n-мерных поверхностей N-мерного пространства большое внимание уделяется фокальной классификации поверхностей V_n ранга r (тангенсиально вырожденные поверхности $0 < r < n$) проективного пространства P_N (см. [I,4,7]). В то время метрическая теория поверхностей V_n ранга r неевклидового пространства ${}^{l}S_N$ сравнительно мало развита.

Некоторые вопросы теории a-параметрических семейств m-мерных плоскостей в ${}^{l}S_N$ рассмотрены, например, в работе [2]. Более подробно рассмотрены вопросы метрической теории 2-параметрических семейств прямых 4-мерного и 5-мерного неевклидова пространства (см. например [3,8,9]).

В данной работе рассматривается 3-мерная поверхность V_3 ранга 2 в пространстве ${}^{l}S_N$. Семейство прямолинейных образующих такой поверхности V_3 образует фокальную псевдоконгруэнцию прямых в ${}^{l}S_N$. В статье строится метрическая теория поверхностей V_3 ранга 2 в ${}^{l}S_N$ и рассматриваются некоторые специальные классы таких поверхностей.

§ I. Неевклидово пространство ${}^{l}S_N$

Рассмотрим N-мерное проективное пространство P_N. Его точки задаются векторами (N + I)-мерного векторного пространства L_{N+1}. Пусть в L_{N+1} выбран базис $\{\vec{M}_J\}$ $(J, K, L, \dots = 0, 1, \dots, N)$. Произвольная точка M проективного пространства P_N задается линейной комбинацией базисных $\vec{M}_J$, т.е. вектором

$$\vec{M} = x^J \vec{M}_J \qquad (I.I)$$

Здесь числа x^J называются однородными координатами точки M относительно проективного репера, определяемого базисом $\{\vec{M}_J\}$.

Пусть в проективном пространстве P_N задана невырожденная гиперквадрика

$$g_{jk}x^j x^k = 0, \quad g_{jk} = g_{kj}, \quad (\det \| g_{jk} \| \neq 0), \tag{I.2}$$

называемая абсолютом.

Пусть в каноническом виде квадратичной формы $g_{jk}x^j x^k$ меньшее из чисел коэффициентов одного знака равно ℓ.

В этом случае расширенное неевклидово пространство ${}^{\ell}S_N$ индекса ℓ определяется как проективное пространство P_N, фундаментальной группой которого является подгруппа коллинеаций, сохраняющих абсолют.

При помощи симметрического относительного тензора g_{jk} можно ввести скалярное произведение точек $A(x^j)$, $B(y^k)$ пространства ${}^{\ell}S_N$ как следующий относительный инвариант:

$$(A, B) = g_{jk}x^j y^k, \tag{I.3}$$

где

$$g_{jk} = (\vec{M}_j, \vec{M}_k). \tag{I.4}$$

Следовательно, точка A лежит на абсолюте тогда и только тогда, когда $(A, A) = 0$. Если $(A, B) = 0$, то говорят, что точки A и B полярно сопряжены относительно абсолюта (I.2).

Расстоянием ρ между точками A и B в пространстве ${}^{\ell}S_N$ называется инвариант, который определяется формулой

$$\cos\rho = \frac{(A, B)}{\sqrt{(A, A)} \cdot \sqrt{(B, B)}}. \tag{I.5}$$

Пусть пространство ${}^{\ell}S_N$ отнесено к подвижному, автополярному, нормированному реперу $\{\vec{M}_j\}$, т.е. реперу, при котором

$$g_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j \\ 1 \text{ или } -1, & \text{если } k = j. \end{cases} \tag{I.6}$$

В уравнениях инфинитезимального перемещения репера $\{\vec{M}_j\}$

$$d\vec{M}_j = \omega_j^k \vec{M}_k, \tag{I.7}$$

пфаффовы формы ω_j^k удовлетворяют уравнениям структуры ([10] стр. 143):

$$d\omega_j^k = \omega_j^\ell \wedge \omega_\ell^k \tag{I.8}$$

и условиям инвариантности метрики:

$$dg_{JK} = g_{LK}\omega^L_J + g_{JL}\omega^L_K. \qquad (I.9)$$

В случае, когда выполнены (I.6), из (I.9) следуют:

$$\omega^K_J = -\varepsilon_{JK}\omega^J_K, \qquad (I.IO)$$

где

$$\varepsilon_{JK} = g_{JJ}\cdot g_{KK}. \qquad (I.II)$$

§ 2. Тангенсиально вырожденные поверхности V_3 в ${}^{\ell}S_N$

I. В пространстве P_N n-мерная поверхность V_n называется тангенсиально вырожденной, если ее касательная плоскость зависит от r параметров, где $0 < r < n$. Точнее, в этом случае говорят о V_n ранга r.

Такая поверхность V_n состоит из $(n-r)$-мерных плоских образующих, вдоль каждой из которых касательная плоскость не меняется. В семействе этих образующих существует r развертывающихся однопараметрических подсемейств, образующих так называемые торсы (см. [I,4,7]).

В данной работе рассматривается трехмерная поверхность V_3 ранга 2. Такая V_3 обладает семейством прямолинейных образующих.

Отнесем поверхность V_3 автополярному нормированному подвижному реперу, первые две точки $\vec{M}_i$ $(i, j, \dots = 0,1)$ которого принадлежат прямолинейной образующей, следующие две точки $\vec{M}_\alpha$ $(\alpha, \beta, \dots = 2,3)$ принадлежат общей касательной плоскости к V_3 в точках этой образующей, а остальные $(N-3)$ точки $\vec{M}_p$ $(p, q, \dots = 4, \dots, N)$ принадлежат $(N-4)$-мерной плоскости полярной к касательной плоскости $[\vec{M}_i, \vec{M}_\alpha]$.

Тогда в формулах инфинитезимального перемещения репера

$$\begin{aligned} d\vec{M}_i &= \omega^j_i\vec{M}_j + \omega^\alpha_i\vec{M}_\alpha + \omega^p_i\vec{M}_p, \\ d\vec{M}_\alpha &= \omega^j_\alpha\vec{M}_j + \omega^\beta_\alpha\vec{M}_\beta + \omega^p_\alpha\vec{M}_p, \\ d\vec{M}_p &= \omega^j_p\vec{M}_j + \omega^\alpha_p\vec{M}_\alpha + \omega^q_p\vec{M}_p, \end{aligned} \qquad (2.I)$$

условием инвариантности касательной плоскости $[\vec{M}_i, \vec{M}_\alpha]$ вдоль образующей $[\vec{M}_i]$ является равенство

$$\omega_i^\rho = 0. \tag{2.2}$$

Стационарная подгруппа, оставляющая фиксированными образующую и касательную плоскость, определяется системой

$$\omega_i^\alpha = 0, \quad \omega_\alpha^\rho = 0. \tag{2.3}$$

Если предполагать, что формы ω_0^α линейно независимы и выбрать их за базисные формы, то имеют место соотношения

$$\omega_i^\alpha = \lambda_{i\beta}^\alpha \omega_0^\beta, \quad \omega_\alpha^\rho = \Lambda_{\alpha\beta}^\rho \omega_0^\beta, (\lambda_{o\beta}^\alpha = \delta_\beta^\alpha). \tag{2.4}$$

Дифференцируя соотношение (2.2) и учитывая равенство (2.4), находим

$$\begin{gathered} \lambda_{1\beta}^\alpha \Lambda_{\alpha\gamma}^\rho = \lambda_{1\gamma}^\alpha \Lambda_{\alpha\beta}^\rho, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^\rho = \Lambda_{\beta\alpha}^\rho . \end{gathered} \tag{2.5}$$

Итак, поверхность V_3 ранга 2 в пространстве ${}^\ell S_N$ определяется пфаффовыми системами (2.2) и (2.4) и конечными соотношениями (2.5).

2. Для точки x на образующей, определяемой вектором $\vec{x} = \vec{M}_0 + x\vec{M}_1$, имеем

$$d\vec{x} = x\omega_1^0 \vec{M}_0 + (dx + \omega_0^1)\vec{M}_1 + (\omega_0^\alpha + x\omega_1^\alpha)\vec{M}_\alpha \tag{2.6}$$

Если для точки x и некоторого направления (определяемого некоторым отношением $\omega_0^2 : \omega_0^3$ между значениями форм ω_0^α) точка, которую для этого направления определяет вектор $d\vec{x}$, принадлежит образующей $[\vec{M}_i]$, то x называется фокусом и направление – фокальным. Тогда в (2.6) должны иметь место равенства

$$\omega_0^\alpha + x\omega_1^\alpha = 0, \tag{2.7}$$

которые после выражения главных форм через базисные с помощью уравнений (2.4) примут вид

$$(\delta_\beta^\alpha + x\lambda_{1\beta}^\alpha)\omega_0^\beta = 0. \tag{2.8}$$

Последняя система имеет нетривиальное решение относительно ω_0^β тогда и только тогда, когда

$$\det \| \delta^\alpha_\beta + x \lambda^\alpha_{1\beta} \| = 0,$$

откуда находим уравнение:

$$(\lambda^2_{12}\lambda^3_{13} - \lambda^2_{13}\lambda^3_{12})x^2 + (\lambda^2_{12} + \lambda^3_{13})x + 1 = 0 \qquad (2.9)$$

для определения параметра x фокусов.

Линейчатые подповерхности, определяемые фокальными направлениями, будут развертывающейся (торсы).

Исключая из системы (2.8) параметр x, находим уравнение торсов

$$\lambda^3_{12}(\omega^2_0)^2 + (\lambda^3_{13} - \lambda^2_{12})\omega^2_0\omega^3_0 - \lambda^2_{13}(\omega^3_0)^2 = 0 . \qquad (2.10)$$

3. Как известно, взаимное расположение двух m-плоскостей в ${}^{\ell}S_N$ определяется $(m+1)$ стационарными расстояниями $\rho_1, \dots, \rho_{m+1}$, которые осуществляются на общих перпендикулярах плоскостей ([5], стр. 224). Общие перпендикуляры двух m-плоскостей также перпендикулярны к полярным плоскостям.

Рассмотрим образующую $[\vec{M}_i]$ и бесконечно близкую ей образующую $[\vec{M}_i + d\vec{M}_i]$. Основания их общих перпендикуляров на образующей $[\vec{M}_i]$ зависят от направления, определяемого отношением $\omega^2_0 : \omega^3_0$ и называются горловыми точками образующей.

Если $\vec{X} = x^i\vec{M}_i$, $\vec{U} = u^A\vec{M}_A$ $(A, B, \dots, = 2, 3, \dots, N)$, $\vec{Y} = \vec{X} + \lambda\vec{U}$, $\vec{V} = \mu\vec{X} + \vec{U}$ определяют точки пересечения общего перпендикуляра XY образующих $[\vec{M}_i]$ и $[\vec{M}_i + d\vec{M}_i]$ соответственно с плоскостями $[\vec{M}_i]$, $[\vec{M}_A]$, $[\vec{M}_i + d\vec{M}_i]$ и $[\vec{M}_A + d\vec{M}_A]$, то стационарное расстояние ρ связано с двойным отношением этих точек следующим образом ([6], стр. 69):

$$\cos^2\rho = (XY, UV). \qquad (2.11)$$

Учитывая определение и свойства двойных отношений, находим

$$\cos^2\rho = 1 - \lambda\mu, \qquad (2.12)$$

откуда, с точностью до бесконечно малых второго порядка, получим

$$(\Delta\rho)^2 = \lambda\mu, \qquad (2.13)$$

где $\Delta\rho$ главная часть стационарного расстояния ρ.

Если учитывать, что

$$\vec{y} = x^i \vec{M}_i + \lambda u^A \vec{M}_A = y^i(\vec{M}_j + d\vec{M}_j),$$
$$\vec{v} = \mu x^i \vec{M}_i + u^A \vec{M}_A = v^i(\vec{M}_A + d\vec{M}_A), \qquad (2.14)$$

и приравнивать коэффициенты при соответствующих базисных точках в левой и правой частях, находим с точностью до бесконечно малых второго порядка систему

$$\lambda u^\rho = 0,$$
$$\lambda u^\alpha = x^j \omega_j^\alpha, \qquad (2.15)$$
$$\mu x^i = u^\alpha \omega_\alpha^i.$$

Если здесь $\lambda = 0$, то общий перпендикуляр вырождается в точку x, которая в этом случае является фокусом.

В дальнейшем мы предположим, что $\lambda \neq 0$ в уравнениях (2.15) для горловых точек. Тогда из этих уравнений следует, что

$$x^j(\omega_j^\alpha \omega_\alpha^i - \delta_j^i \lambda\mu) = 0. \qquad (2.16)$$

Следовательно, квадраты главных частей стационарных расстояний определяются собственными значениями матрицы $\|\omega_j^\alpha \omega_\alpha^i\|$, а горловые точки - соответствующими собственными векторами.

Итак, для определения главных частей стационарных расстояний из уравнений (2.16) находим уравнение

$$\lambda^2\mu^2 - \Phi_1 \lambda\mu + \Phi_2 = 0, \qquad (2.17)$$

где инвариантные формы Φ_1 и Φ_2 (см. также [2]) имеют вид:

$$\Phi_1 = -\sum_i \varepsilon_{i\alpha} (\omega_i^\alpha)^2,$$
$$\Phi_2 = \varepsilon_{01}\varepsilon_{23} (\omega_0^2 \omega_1^3 - \omega_0^3 \omega_1^2)^2. \qquad (2.18)$$

С другой стороны на основании (2.13), по формулам Виета, имеем:

$$\Phi_1 = (\Delta\rho_1)^2 + (\Delta\rho_2)^2,$$
$$\Phi_2 = (\Delta\rho_1 \cdot \Delta\rho_2)^2. \qquad (2.19)$$

Из уравнений (2.10) и (2.18) вытекает, что уравнение $\Phi_2 = 0$ определяет торсы.

Если для определения горловой точки X ввести неоднородные координаты

$$y = \frac{x^1}{x^0} \qquad (2.20)$$

и исключить из системы (2.16) произведение $\lambda\mu$, то находим уравнение для определения параметра y горловых точек:

$$\omega_1^\alpha \omega_\alpha^0 y^2 + (-1)^i \omega_i^\alpha \omega_\alpha^i y - \omega_0^\alpha \omega_\alpha^1 = 0. \qquad (2.21)$$

Принимая во внимание соотношения (1.10) и (2.4), получим:

$$A_{\alpha\beta} \omega_0^\alpha \omega_0^\beta y + B_{\alpha\beta} \omega_0^\alpha \omega_0^\beta y - \tau_{01} A_{\alpha\beta} \omega_0^\alpha \omega_0^\beta = 0, \qquad (2.22)$$

где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\tau_{0\alpha} \lambda_{1\beta}^\alpha + \tau_{0\beta} \lambda_{1\alpha}^\beta),$$
$$B_{\alpha\beta} = \tau_{0\gamma} \lambda_{0\alpha}^\gamma \lambda_{0\beta}^\gamma - \tau_{1\gamma} \lambda_{1\alpha}^\gamma \lambda_{1\beta}^\gamma . \qquad (2.23)$$

Пусть y_1 и y_2 являются решениями уравнения (2.22). Тогда по формулам Виета из уравнения (2.22) получим:

$$y_1 \cdot y_2 = -\tau_{01} . \qquad (2.24)$$

Следовательно, горловые точки k_1 и k_2, определяемые соответственно векторами $\vec{k}_1 = \vec{M}_0 + y_1 \vec{M}_1$ и $\vec{k}_2 = \vec{M}_0 + y_2 \vec{M}_1$, полярно сопряжены, так как в силу (2.24) имеет место $(k_1, k_2) = 0$.

При изменении направления, определяемого отношением $\omega_0^2 : \omega_0^3$, горловые точки k_1 и k_2 образуют на образующей $[\vec{M}_i]$ некоторые множества. Точки этих множеств называются (см. [8]) горловыми точками, соответственно, первой и второй серии.

4. Горловые точки P, соответствующие стационарным значениям параметра y, называются граничными (см. также [3,8]).

Чтобы найти параметры граничных точек, введем обобщенный параметр

$$z = y - \frac{\tau_{01}}{y} . \qquad (2.25)$$

Здесь при $\varepsilon_{01} = 1$ стационарным значениям параметра z соответствуют стационарные значения параметра y. Так будет и при $\varepsilon_{01} = -1$, если исключить из рассмотрения случай, когда граничные точки обеих серий горловых точек совпадают и лежат на абсолюте $(z_{1,2} = \pm 2,\ y_{1,2} = \pm 1)$.

На оснований (2.25) приводим уравнение (2.22) к виду

$$A_{\alpha\beta}\,\omega_0^\alpha \omega_0^\beta z + B_{\alpha\beta}\,\omega_0^\alpha \omega_0^\beta = 0. \tag{2.26}$$

Теперь для нахождения стационарных значений параметра z продифференцируем равенство (2.26) по ω_0^β, и имеем

$$A_{\gamma\beta}\,\omega_0^\gamma z + B_{\gamma\beta}\,\omega_0^\gamma = 0. \tag{2.27}$$

Исключая базисные формы из системы (2.27), получим уравнение для определения стационарных значений параметра z в виде

$$\det\|A_{\alpha\beta}\|\, z^2 + (A_{33}B_{22} + A_{22}B_{33} - 2A_{23}B_{23})z + \det\|B_{\alpha\beta}\| = 0. \tag{2.28}$$

Четыре значения параметра $\tilde{y}$ для граничных точек найдем из системы, которая составлена из уравнений (2.28) и (2.25).

Линейчатые подповерхности поверхности V_3, для которых граничные точки являются горловыми, называются главными. Исключим параметр z из системы (2.27) и находим уравнение главных подповерхностей

$$(A_{\alpha 2}B_{\beta 3} - A_{\beta 3}B_{\alpha 2})\,\omega_0^\alpha \omega_0^\beta = 0. \tag{2.29}$$

5. Точки C_1 и C_2, равноудаленные от фокусов, называются центрами образующей $[M_1]$.

Пусть фокусы F_1 и F_2 определены векторами $\vec{F}_1 = \vec{M}_0 + x_1\vec{M}_1$ и $\vec{F}_2 = \vec{M}_0 + x_2\vec{M}_1$, где параметры x_1 и x_2 являются решениями уравнения (2.9). Тогда значения параметра c центра $\vec{C} = \vec{M}_0 + c\vec{M}_1$ определяются формулой

$$c_{1,2} = \frac{x_1x_2 - \varepsilon_{01} \pm \sqrt{(x_1x_2 - \varepsilon_{01})^2 + \varepsilon_{01}(x_1 + x_2)^2}}{x_1 + x_2}. \tag{2.30}$$

Центры C_1 и C_2, определенные векторами $\vec{C}_1 = \vec{M}_0 + c_1\vec{M}_1$ и

$\vec{C}_2 = \vec{M}_0 + c_2 \vec{M}_1$, полярно сопряжены относительно абсолюта, так как $(C_1, C_2) = 0$.

Если существуют поверхности V_3 в ${}^{\ell}S_N$, для которых одновременно выполнены условия

$$\lambda_{12}^{2} = \lambda_{13}^{3} = 0,$$
$$\lambda_{13}^{2}\lambda_{12}^{3} + \varepsilon_{01} = 0, \tag{2.31}$$

то для этих V_3 уравнение (2.9) для определения параметра фокусов x будет в виде

$$x^2 = -\varepsilon_{01}. \tag{2.32}$$

Точки $\vec{F} = \vec{M}_0 + x\vec{M}_1$, неоднородные координаты которых удовлетворяют условию (2.32), лежат на абсолюте, так как $(F, F)=0$. Следовательно, для таких точек расстояние от любой точки C образующей $[\vec{M}_i]$ не определено и поэтому центры неопределены.

В дальнейшем рассмотрим только те поверхности V_3, для которых центры определены, т.е. уравнения в системе (2.31) не выполнены одновременно.

6. Величина p, определяемая уравнением

$$\tan p = \frac{\Delta \varrho_2}{\Delta \varrho_1}, \tag{2.33}$$

называется параметром распределения линейчатой подповерхности поверхности V_3

Из соотношений (2.19) находим, что

$$\tan^2 2p = \frac{4\Phi_2}{\Phi_1^2 - 4\Phi_2}. \tag{2.34}$$

Линейчатые подповерхности, на которых $tg\,p$ имеет стационарное значение, называются распределительными.

Пусть стационарными значениями параметра распределения будут $\tan p_1$ и $\tan p_2$. Тогда величины

$$k = \tan p_1 \tan p_2,$$
$$h = \tan p_1 + \tan p_2, \tag{2.35}$$

называются соответственно полным и средним параметрами распределения поверхности V_3.

§ 3. Центральный репер поверхности V_3

Для некоторых специальных классов поверхностей V_3, целесообразно построить частично канонический репер, аналогичный так называемому центральному реперу, построенному в работе [9].

Поместим точки $\vec{M}_0$ и $\vec{M}_1$ репера в центры $\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$ образующей $[\vec{M}_i]$. Тогда параметры центров должны иметь значения $c_1=0$ и $c_2=\infty$. Следовательно, в формуле (2.30) имеет место условие $x_1+x_2=0$, которое на основе уравнения (2.9) имеет вид

$$\lambda^2_{12}+\lambda^3_{13}=0. \tag{3.1}$$

Теперь легко показать, что граничные точки P_1 и P_2, принадлежащие одной серии горловых точек, равноудалены от центров образующей. Действительно, на оснований (2.23), можем в уравнении (2.28) (уравнение для определения стационарных значений параметра z) коэффициент при параметре z в первой степени представить в виде

$$(\lambda^2_{12}+\lambda^3_{13})[1+z_{01}(\lambda^3_{12}\lambda^2_{13}-\lambda^2_{12}\lambda^3_{13})]. \tag{3.2}$$

Если точки репера $\vec{M}_0$ и $\vec{M}_1$ помещены в центры, то имеет место (3.I). Следовательно и коэффициент (3.2) равен нулю. Если теперь найти расстояния граничных точек P_1 и P_2 от центров, то имеет место равенство $\cos\varrho(P_1, M_i)=\cos\varrho(P_2, M_i)$.

Дальше выберем положение точек $\vec{M}_2$ и $\vec{M}_3$ репера так, чтобы

$$\lambda^2_{12}-\lambda^3_{13}=0, \tag{3.3}$$

т.е. поверхность V_3 отнесено к распределительным подповерхностям, которые будут определяться уравнениями

$$\omega^2_0=0, \quad \omega^3_0=0. \tag{3.4}$$

Условия (3.I) и (3.3) равносильны условиям

$$\lambda^2_{12}=\lambda^3_{13}=0 \tag{3.5}$$

Как мы показали в пункте 5 параграфа 2, условие (3.5) влечет за собой условие

$$\lambda^2_{13}\lambda^3_{12}+\varepsilon_{01}\neq 0. \tag{3.6}$$

Условия (3.5) при (3.6) приводят к частичной канонизации репера только тогда, когда

$$\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12}\neq 0. \tag{3.7}$$

Действительно, для определения форм ω^1_0 и ω^3_2 через базисные ω^α_0 следует продолжить систему (2.4) и в полученной системе

$$\begin{aligned}
d\lambda^2_{12} &= -[(\lambda^2_{12})^2+\lambda^3_{12}\cdot\lambda^2_{13}+\varepsilon_{01}]\omega^1_0+(\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\omega^3_2+\lambda^2_{12\beta}\omega^\beta_0,\\
d\lambda^2_{13} &= -[\lambda^2_{13}(\lambda^2_{12}+\lambda^3_{13})]\omega^1_0-\varepsilon_{23}(\lambda^2_{12}-\lambda^3_{13})\omega^3_2+\lambda^2_{13\beta}\omega^\beta_0,\\
d\lambda^3_{12} &= -\lambda^3_{12}(\lambda^2_{12}+\lambda^3_{13})\omega^1_0+(\lambda^3_{13}-\lambda^2_{12})\omega^3_2+\lambda^3_{12\beta}\omega^\beta_0,\\
d\lambda^3_{13} &= -[(\lambda^3_{13})^3+\lambda^2_{13}\lambda^3_{12}+\varepsilon_{01}]\omega^1_0-(\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\omega^3_2+\lambda^3_{13\beta}\omega^\beta_0,\\
d\Lambda^p_{22} &= -(\Lambda^p_{22}\lambda^2_{12}+\Lambda^p_{23}\lambda^3_{12})\omega^1_0+2\Lambda^p_{23}\omega^3_2-\Lambda^q_{22}\omega^p_q+\Lambda^p_{22\beta}\omega^\beta_0,\\
d\Lambda^p_{23} &= -(\Lambda^p_{22}\lambda^2_{13}+\Lambda^p_{23}\lambda^3_{13})\omega^1_0+(\Lambda^p_{33}-\varepsilon_{23}\Lambda^p_{22})\omega^3_2-\Lambda^q_{23}\omega^p_q+\Lambda^p_{23\beta}\omega^\beta_0,\\
d\Lambda^p_{33} &= -(\Lambda^p_{23}\lambda^2_{13}+\Lambda^p_{33}\lambda^3_{13})\omega^1_0-2\varepsilon_{23}\Lambda^p_{23}\omega^3_2-\Lambda^q_{33}\omega^p_q+\Lambda^p_{33\beta}\omega^\beta_0,
\end{aligned} \tag{3.8}$$

сделать подстановку из (3.5). В итоге получим:

$$\begin{aligned}
-(\lambda^3_{12}\lambda^2_{13}+\varepsilon_{01})\omega^1_0+(\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\omega^3_2+\lambda^2_{12\beta}\omega^\beta_0=0,\\
-(\lambda^3_{12}\lambda^2_{13}+\varepsilon_{01})\omega^1_0-(\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\omega^3_2+\lambda^3_{13\beta}\omega^\beta_0=0.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Отсюда видно, что формы ω^1_0 и ω^3_2 можно выразить через базисные только при условии (3.6) (которое для изучаемых поверхностей V_3 выполнено автоматически) и при условии (3.7).

В выбранном репере уравнение (2.26) для определения обобщенного параметра z запишется в виде

$$\varepsilon_{02}(\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\omega^2_0\omega^3_0 z + B_{\alpha\beta}\omega^\alpha_0\omega^\beta_0 = 0.$$

Если $\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12}=0$, то в общем случае горловой точкой любой линейчатой подповерхности будет точка $\tilde{M}_1$, т.е. параметр горловой точки не зависит от направления.

<u>Определение I.</u> Поверхность V_3 в ${}^{\varepsilon}S_N$ называется <u>изотропной</u> (в случае $N=4$ см. [9]), если горловые точки на каждой образующей поверхности V_3 не зависят от направления смещения.

Следовательно, условием (3.7) исключаются из рассмотрения некоторые подклассы изотропных поверхностей V_3 в ${}^{\varepsilon}S_N$.

Условиями (3.5-7) частично канонизированный репер будем в дальнейшем называть центральным репером.

В центральном репере поверхность V_3' определяется следующей системой пфаффовых уравнений

$$\begin{aligned}
&\omega^p_0=\omega^p_1=0,\\
&\omega^2_1=\lambda^2_{13}\omega^3_0,\\
&\omega^3_1=\lambda^3_{12}\omega^2_0,\\
&\omega^p_\alpha=\Lambda^p_{\alpha\beta}\omega^\beta_0;\\
&\lambda^3_{12}\Lambda^p_{33}=\lambda^2_{13}\Lambda^p_{22}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Продолжение системы (3.10), учитывая (3.6) и (3.7), приводит к системе:

$$\begin{aligned}
&\omega^1_0=\lambda^1_{0\beta}\omega^\beta_0,\\
&\omega^3_2=\lambda^3_{2\beta}\omega^\beta_0,\\
&d\lambda^2_{13}=\lambda^2_{13\beta}\omega^\beta_0,\\
&d\lambda^3_{12}=\lambda^3_{12\beta}\omega^\beta_0,\\
&d\Lambda^p_{22}=-\Lambda^q_{22}\omega^p_q+[\Lambda^p_{22\beta}+\Lambda^p_{23}(2\lambda^3_{2\beta}-\lambda^3_{12}\lambda^1_{0\beta})]\omega^\beta_0,\\
&d\Lambda^p_{23}=-\Lambda^q_{23}\omega^p_q+[\Lambda^p_{23\beta}+(\Lambda^p_{33}-\varepsilon_{23}\Lambda^p_{22})\lambda^3_{2\beta}-\Lambda^p_{22}\lambda^2_{13}\lambda^1_{0\beta}]\omega^\beta_0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$\lambda^2_{132} = (\lambda^3_{12}\lambda^2_{13} + \varepsilon_{01})\lambda^1_{03} - (\lambda^2_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\lambda^3_{23},$$

$$\lambda^3_{123} = (\lambda^3_{12}\lambda^2_{13} + \varepsilon_{01})\lambda^1_{02} + (\lambda^2_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\lambda^3_{22},$$

$$\Lambda^\rho_{223} = \Lambda^\rho_{232}, \tag{3.I2}$$

$$\lambda^3_{12}\Lambda^\rho_{233} = \lambda^2_{13}\Lambda^2_{222} - \Lambda^\rho_{33}\lambda^3_{122} - \Lambda^\rho_{22}[(\lambda^3_{12}\lambda^2_{13} + \varepsilon_{01})\lambda^1_{03} -$$
$$- (\lambda^2_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3_{12})\lambda^3_{23}] + 2\Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{22}(\lambda^3_{12}\lambda^2_{13} + \varepsilon_{01})$$

Продолжение первого уравнения системы (3.II) приводит к уравнениям:

$$\begin{aligned} d\lambda^1_{02} &= \lambda^1_{02\beta}\,\omega_0^\beta, \\ \nabla\lambda^1_{03} &= \lambda^1_{03\beta}\,\omega_0^\beta, \end{aligned} \tag{3.I3}$$

где

$$\nabla\lambda^1_{03} = d\lambda^1_{03} + [\varepsilon_{12}\lambda^2_{13} - \varepsilon_{13}\lambda^3_{12} + \lambda^1_{02}(\lambda^1_{02}\lambda^2_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3_{22}) + \tag{3.I4}$$
$$+ \lambda^1_{03}(\lambda^3_{23} - \lambda^3_{12}\lambda^1_{03})]\,\omega_0^2,$$
$$\lambda^1_{023} = \lambda^1_{032} .$$

§ 4. Рибокуровы поверхности V_3 в ${}^{\ell}S_N$

I. Для дальнейшего введем следующие понятия.

Определение 2. Назовем поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$ рибокуровой первого (второго) типа, если ее торсы секут первую (вторую) среднюю поверхность по сопряженной системе.

Определение 3. Назовем поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$ вполне рибокуровой, если ее торсы секут одновременно оба средние поверхности по сопряженным системам.

На основании соотношений (2.I0) и (3.5), торсы поверхности V_3 в центральном репере определяются уравнением

$$\lambda^3_{12}(\omega_0^2)^2 - \lambda^2_{13}(\omega_0^3)^2 = 0. \tag{4.I}$$

Если $\lambda^3_{12} = 0$ или $\lambda^2_{13} = 0$, то из (2.9) вытекает, что фокусы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ совпадают с центральной точкой $\vec{M}_1$, а торсы сдваиваются и совпадают с распределительной поверхностью.

Определение 4. Поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$, фокусы которой совпадают с центральной точкой, называется параболической поверхностью.

В этой работе мы рассмотрим только непараболические рибокуровы поверхности, т.е. предположим, что в центральном репере

$$\lambda^{3}_{12} \cdot \lambda^{2}_{13} \neq 0. \tag{4.2}$$

2. Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} \vec{E}_\alpha &= \lambda^{1}_{0\alpha} \vec{M}_1 + \vec{M}_\alpha, \\ \vec{F}_\alpha &= \lambda^{\beta}_{1\alpha} \vec{M}_\beta - r_{01} \lambda^{1}_{0\alpha} \vec{M}_0, \end{aligned} \tag{4.3}$$

можем написать дифференциалы центральных точек $\vec{M}_0$ и $\vec{M}_1$ в виде:

$$\begin{aligned} d\vec{M}_0 &= \vec{E}_\beta \omega^{\beta}_0, \\ d\vec{M}_1 &= \vec{F}_\beta \omega^{\beta}_0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Системы точек $\{\vec{M}_i, \vec{E}_\alpha, \vec{M}_p\}$ и $\{\vec{M}_i, \vec{F}_\alpha, \vec{M}_p\}$ линейно независимы и определяют проективные реперы первого порядка соответственно для первой и второй средней поверхности.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Omega^{0}_{\alpha} &= \lambda^{1}_{0\alpha} \omega^{0}_{1} + \omega^{0}_{\alpha}, \\ \Omega^{1}_{\alpha} &= d\lambda^{1}_{0\alpha} + \omega^{1}_{\alpha} - \lambda^{1}_{0\beta} (\lambda^{1}_{0\alpha} \omega^{\beta}_{1} + \omega^{\beta}_{\alpha}), \\ \Omega^{\beta}_{\alpha} &= \lambda^{1}_{0\alpha} \omega^{\beta}_{1} + \omega^{\beta}_{\alpha}, \end{aligned} \tag{4.5}$$

и обозначения (не суммировать по γ и σ и $\gamma \neq \sigma$):

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega}^{0}_{\gamma} &= \lambda^{\sigma}_{1\gamma} \omega^{0}_{\sigma} - r_{01} d\lambda^{1}_{0\gamma} + r_{01} (\lambda^{\sigma}_{1\gamma})^{-1} \lambda^{1}_{0\gamma} (d\lambda^{\sigma}_{1\gamma} - \\ &\quad - r_{01} \lambda^{1}_{0\gamma} \omega^{\sigma}_{0}) + r_{01} (\lambda^{\gamma}_{1\sigma})^{-1} \lambda^{1}_{0\sigma} (\lambda^{\sigma}_{1\gamma} \omega^{\gamma}_{\sigma} - r_{01} \lambda^{1}_{0\gamma} \omega^{\gamma}_{0}), \\ \tilde{\Omega}^{1}_{\gamma} &= \lambda^{\sigma}_{1\gamma} \omega^{1}_{\sigma} - r_{01} \lambda^{1}_{0\gamma} \omega^{1}_{0}, \\ \tilde{\Omega}^{\gamma}_{\gamma} &= (\lambda^{\sigma}_{1\gamma})^{-1} (d\lambda^{\sigma}_{1\gamma} - r_{01} \lambda^{1}_{0\gamma} \omega^{\sigma}_{0}), \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\tilde{\Omega}^{\gamma}_{\sigma} = (\lambda^{\sigma}_{1\gamma})^{-1}(\lambda^{\gamma}_{1\sigma}\omega^{\sigma}_{\gamma} - \tau_{01}\lambda^{1}_{0\sigma}\omega^{\sigma}_{0}),$$

$$\tilde{\Omega}^{p}_{\gamma} = \lambda^{\sigma}_{1\gamma}\omega^{p}_{\sigma}.$$

Тогда дифференциалы точек $\vec{E}_{\alpha}$ и $\vec{F}_{\alpha}$ выражаются в виде:

$$d\vec{E}_{\alpha} = \Omega^{i}_{\alpha}\vec{M}_{i} + \Omega^{\beta}_{\alpha}\vec{E}_{\beta} + \omega^{p}_{\alpha}\vec{M}_{p}, \tag{4.7}$$

$$d\vec{F}_{\alpha} = \tilde{\Omega}^{i}_{\alpha}\vec{M}_{i} + \tilde{\Omega}^{\beta}_{\alpha}\vec{F}_{\beta} + \tilde{\Omega}^{p}_{\alpha}\vec{M}_{p}.$$

Вторыми квадратичными формами для первой средней поверхности являются формы

$$\varphi^{1} = \Omega^{1}_{\beta}\omega^{\beta}_{0}, \tag{4.8}$$

$$\varphi^{p} = \omega^{p}_{\beta}\omega^{\beta}_{0},$$

а для второй средней поверхности формы

$$\varphi^{0} = \tilde{\Omega}^{0}_{\beta}\omega^{\beta}_{0}, \tag{4.9}$$

$$\tilde{\varphi}^{p} = \tilde{\Omega}^{p}_{\beta}\omega^{\beta}_{0}.$$

Пользуясь соотношениями (3.10-14) и (4.5-6), можем выразить квадратичные формы (4.8-9) через базисные формы

$$\varphi^{1} = b^{1}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}_{0}\omega^{\beta}_{0},$$

$$\varphi^{p} = \Lambda^{p}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}_{0}\omega^{\beta}_{0}, \tag{4.10}$$

$$\varphi^{0} = b^{0}_{\alpha\beta}\omega^{\alpha}_{0}\omega^{\beta}_{0},$$

$$\tilde{\varphi}^{p} = \lambda^{3}_{12}\Lambda^{p}_{23}(\omega^{2}_{0})^{2} + 2\lambda^{2}_{13}\Lambda^{p}_{22}\omega^{2}_{0}\omega^{3}_{0} + \lambda^{2}_{13}\Lambda^{p}_{23}(\omega^{3}_{0})^{2},$$

где

$$b^{1}_{22} = \lambda^{1}_{022} - \lambda^{1}_{03}(\lambda^{1}_{02}\lambda^{3}_{12} + \lambda^{3}_{22}),$$

$$b^{1}_{33} = \lambda^{1}_{033} - \lambda^{1}_{02}(\lambda^{1}_{03}\lambda^{2}_{13} - \varepsilon_{23}\lambda^{3}_{23}),$$

$$b^{0}_{22} = -\tau_{01}[\lambda^{1}_{022} - \lambda^{1}_{02}(\lambda^{3}_{12})^{-1}\lambda^{3}_{122} + \tag{4.11}$$

$$+(\lambda^2_{13})^{-1}\lambda^1_{03}(\varepsilon_{23}\lambda^3_{12}\lambda^3_{22}+\varepsilon_{01}\lambda^1_{02})],$$

$$b^0_{33}=\varepsilon_{01}[-\lambda^1_{033}+(\lambda^3_{12})^{-1}\lambda^2_{13}\lambda^1_{02}\lambda^3_{23}-\varepsilon_{01}(\lambda^3_{12})^{-1}\lambda^1_{02}\lambda^1_{03}+$$

$$+(\lambda^2_{13})^{-1}\lambda^1_{03}\lambda^2_{133}],$$

$$b^1_{23}=b^1_{32}\,;\qquad b^0_{23}=b^0_{32}.$$

3. Из уравнения торсов (4.I) вытекает, что направления по которым торсы секут средние поверхности, определяются отношениями:

$$\omega^2_0:\omega^3_0=\pm\sqrt{\lambda^2_{13}}:\sqrt{\lambda^3_{12}}\,. \tag{4.I2}$$

Условия сопряженности направлений (4.I2) на первой средней поверхности сводятся к

$$b^1_{22}\lambda^2_{13}-b^1_{33}\lambda^3_{12}=0, \tag{4.I3}$$

а на второй средней поверхности к

$$b^0_{22}\lambda^2_{13}-b^0_{33}\lambda^3_{12}=0, \tag{4.I4}$$

так как в силу конечных соотношений в (3.I0) условия сопряженности с коэффициентами форм φ^P и $\tilde{\varphi}^P$ сводятся к тождествам.

После подстановок из (4.II), получим эти условия соответственно в виде

$$\lambda^2_{13}(\lambda^1_{022}-\lambda^1_{03}\lambda^3_{22})-\lambda^3_{12}(\lambda^1_{033}+\varepsilon_{23}\lambda^1_{02}\lambda^3_{23})=0, \tag{4.I5}$$

и

$$\lambda^2_{13}[\lambda^1_{022}+\lambda^1_{02}\lambda^3_{23}-(\lambda^3_{12})^{-1}\lambda^1_{02}\lambda^3_{122}]+$$

$$+\lambda^3_{12}[-\lambda^1_{033}+\varepsilon_{23}\lambda^1_{03}\lambda^3_{22}+(\lambda^2_{13})^{-1}\lambda^1_{03}\lambda^2_{133}]=0 \tag{4.I6}$$

Поверхность V_3 является вполне рибокуровой, если одновременно выполнены условия (4.I5) и (4.I6), т.е. если

$$(\lambda^3_{12})^2\lambda^1_{03}\lambda^2_{133}-(\lambda^2_{13})^2\lambda^1_{02}\lambda^3_{122}+\lambda^2_{13}\lambda^3_{12}(\lambda^1_{02}\lambda^3_{23}+\lambda^1_{03}\lambda^3_{22})(\lambda^2_{13}+\varepsilon_{23}\lambda^3_{12})=0 \tag{4.I7}$$

и выполнено условие (4.I5).

Условия (4.I5), (4.I6) и (4.I7) вместе с (4.I5) не только необходимые, но и достаточные условия для соответственных классов рибокуровых поверхностей в ${}^{l}S_N$ Следовательно, справедливы следующие теоремы:

Теорема I. Для того, чтобы непараболическая поверхность V_3 в ${}^{l}S_N$ была рибокуровой поверхностью первого типа, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие (4.I5).

Теорема 2. Для того, чтобы непараболическая поверхность V_3 в ${}^{l}S_N$ была рибокуровой поверхностью второго типа, необходимо и достаточно, чтобы имело место условие (4.I6).

Теорема 3. Для того, чтобы непараболическая поверхность V_3 в ${}^{l}S_N$ была вполне рибокуровой поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы имели место условия (4.I5) и (4.I7).

§ 5. Некоторые специальные классы поверхностей V_3 в ${}^{l}S_N$

I. Перенесем на случай неевклидова пространства следующее понятие, известное в случае евклидова пространства.

Определение 5. Поверхность V_3 называется поверхностью класса C в ${}^{l}S_N$, если ее полный и средний параметры распределения оба постоянны ($k = k_0 = const$ и $h = h_0 = const$).

В центральном репере параметр распределения ρ определяется формулой

$$\tan 2\rho = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}}\,[\lambda^3_{12}(\omega_0^2)^2 - \lambda^2_{13}(\omega_0^3)^2]}{\sqrt{\{[\varepsilon_{03} - \varepsilon_{12}(\lambda^3_{12})^2](\omega_0^2)^2 + [\varepsilon_{02} - \varepsilon_{13}(\lambda^2_{13})^2](\omega_0^3)^2\}^2 + 4\varepsilon_{01}(\lambda^2_{13} - \varepsilon_{23}\lambda^3_{12})^2(\omega_0^2\omega_0^3)^2}} \tag{5.I}$$

Так как параметр распределения ρ имеет стационарное значение на распределительных подповерхностях, которые определены уравнениями (3.4), то в центральном репере имеем:

$$\tan\rho_1 = -\sqrt{\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}}\;\lambda^2_{13}, \qquad \tan\rho_2 = \sqrt{\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}}\;\lambda^3_{12}. \tag{5.2}$$

По определению (2.35), полным и средним параметрами распределения поверхности V_3 в центральном репере будут соответственно величины

$$h = \sqrt{\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}}\,(\lambda^3_{12} - \lambda^2_{13}),$$
$$k = -\varepsilon_{01}\varepsilon_{23}\lambda^2_{13}\lambda^3_{12}. \qquad (5.3)$$

Отсюда следует

Теорема 4. Для того, чтобы поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$ была поверхностью класса C_1 необходимо и достаточно, чтобы величины λ^2_{13} и λ^3_{12} были постоянными.

2. Введем следующее известное понятие.

Определение 6. Поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$ называется нормальной, если она допускает однопараметрическое семейство нормальных поверхностей.

Теорема 5. Поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$ является нормальной, если выполнено условие $\lambda^2_{13} = \varepsilon_{23}\lambda^3_{12}$.

Доказательство проведем в общем автополярном нормированном репере.

Пусть поверхность (M), образуемая точкой

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \varkappa\vec{M}_1, \qquad (5.4)$$

будет ортогональна к образующим поверхности V_3. Пользуясь выражениями (I.7) и (2.3-5), продифференцируем равенство (5.4) и находим

$$d\vec{M} = \varkappa\,\omega^0_1\vec{M} + (d\varkappa + \omega^1_0 - \varkappa^2\omega^0_1)\vec{M}_1 + (\;)\vec{M}_2 + (\;)\vec{M}_3.$$

Чтобы поверхность (M) была бы ортогональна к образующей $[\vec{M}_i]$, необходимо и достаточно, чтобы неизвестная функция $\varkappa$ удовлетворяла уравнению

$$d\varkappa + \omega^1_0 - \varkappa^2\omega^0_1 = 0,$$

или

$$d\varkappa + (1 + \varepsilon_{01}\varkappa^2)\,\omega^1_0 = 0. \qquad (5.5)$$

Условие (5.5) вполне интегрируемое, если

$$d\omega^1_0 = 0.$$

На основе равенств (I.8), (I.10-II) и (2.4), находим условие нормальности поверхности V_3 в автополярном нормированном репере в виде

$$\varepsilon_{12}(\lambda^2_{13} - \varepsilon_{23}\lambda^3_{12}) = 0, \tag{5.6}$$

что и требовалось доказать

3. По определению I параграфа 3, поверхность V_3 в ${}^{\ell}S_N$ называется изотропной, если горловые точки на образующей не зависят от направления смещения.

Рассмотрим сперва условия изотропности поверхности V_3 в общем автополярном нормированном репере.

Обобщенный параметр z в уравнений (2.26) не зависит от смещения на образующей, если

$$\frac{A_{22}}{B_{22}} = \frac{A_{23}}{B_{23}} = \frac{A_{33}}{B_{33}}. \tag{5.7}$$

Следовательно, в рассматриваемом случае условия изотропности поверхности V_3 имеют вид

$$\begin{cases} A_{22}B_{33} = B_{22}A_{33}, \\ A_{23}B_{33} = B_{23}A_{33}. \end{cases}$$

Учитывая здесь обозначения (2.23), получим условия изотропности V_3 в произвольном автополярном нормированном репере в виде:

$$\begin{cases} (\lambda^2_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3_{12})[\varepsilon_{02} - \varepsilon_{13}(\lambda^3_{12})^2] + \\ \quad + \varepsilon_{12}\lambda^2_{12}(2\varepsilon_{23}\lambda^3_{12}\lambda^3_{13} + \lambda^2_{12}\lambda^2_{13} - \varepsilon_{23}\lambda^3_{12}\lambda^2_{12}) = 0 \\ (\lambda^2_{13} + \varepsilon_{23}\lambda^3_{12})[\varepsilon_{03} - \varepsilon_{12}(\lambda^2_{13})^2] + \\ \quad + \varepsilon_{12}\lambda^3_{13}(2\varepsilon_{23}\lambda^2_{12}\lambda^2_{13} + \lambda^3_{12}\lambda^3_{13} - \varepsilon_{23}\lambda^2_{13}\lambda^3_{13}) = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

Если для поверхности V_3 в ${}^{\ell}S_N$, где $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{23}$, выполнены условия (3.5-7), то условия изотропности (5.8) сводятся к условиям

$$\begin{cases} \varepsilon_{01} = \lambda^2_{13} \cdot \lambda^3_{12}, \\ (\lambda^2_{13})^2 = 1 \end{cases} \tag{5.9}$$

<u>Определение 7</u>. В пространстве ${}^{\ell}S_N$, где $\varepsilon_{01} = \varepsilon_{23}$, подклассы изотропных поверхностей V_3, определенные условиями (3.5-7) и (5.9), назовем <u>особо-изотропными</u>.

4. Покажем теперь в ${}^{\ell}S_N$ некоторые связи между классами поверхностей V_3, приведенных выше.

Из условий нормальности (5.6), условий (5.9) и из теоремы 4 следует

Теорема 6. В пространстве ${}^{\ell}S_N$, где $\varepsilon_{01}=\varepsilon_{23}$, особо-изотропные поверхности V_3

I) принадлежат классу нормальных поверхностей,

2) принадлежат классу поверхностей класса C.

Введем еще одно понятие.

Определение 8. Подклассы поверхностей V_3 в ${}^{\ell}S_N$, которые одновременно являются нормальными и классом C, назовем поверхностями класса $C\cap N$.

Покажем теперь, как связаны поверхности класса C и рибокуровы поверхности в ${}^{\ell}S_N$.

Теорема 7. Если непараболическая поверхность класса C в ${}^{\ell}S_N$ принадлежит классу рибокуровых поверхностей первого типа (второго типа), то она является и вполне рибокуровой поверхностью.

Доказательство. Действительно, в случае поверхности класса C имеем $\lambda^2_{13}=t=const$, $\lambda^3_{12}=u=const$. Поэтому $d\lambda^2_{13}=d\lambda^3_{12}=0$. Следовательно, в системе (3.II-I2) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} &\lambda^2_{133}=\lambda^3_{122}=0,\\ &(tu+\varepsilon_{01})\lambda^1_{03}-(t+\varepsilon_{23}u)\lambda^3_{23}=0,\\ &(tu+\varepsilon_{01})\lambda^1_{02}+(t+\varepsilon_{23}u)\lambda^3_{22}=0, \end{aligned} \qquad (5.10)$$

или в силу (3.6) и (3.7) имеем

$$\begin{aligned} &\lambda^2_{133}=\lambda^3_{122}=0,\\ &\lambda^1_{03}=(t+\varepsilon_{23}u)(tu+\varepsilon_{01})^{-1}\lambda^3_{23},\\ &\lambda^1_{02}=-(t+\varepsilon_{23}u)(tu+\varepsilon_{01})^{-1}\lambda^3_{22}. \end{aligned} \qquad (5.11)$$

На основании соотношений (5.II), условие (4.I7) выполнено, а условия (4.I5) и (4.I6) оба приводятся к виду

$$t\lambda^1_{022} - u\lambda^1_{033} - (t + \varepsilon_{23}u)(tu + \varepsilon_{01})^{-1}(t - \varepsilon_{23}u)\lambda^3_{22}\lambda^3_{23} = 0, \quad (5.12)$$

чем и доказывается теорема 7.

Справедлива и следующая

Теорема 8. В пространстве ${}^{\ell}S_N$, непараболические поверхности V_3 класса $C \cap N$ вполне рибокуровы поверхности, если $\lambda^1_{033} = \varepsilon_{23}\lambda^1_{022}$.

Доказательство. Действительно, на основании условия (5.6) и теоремы 4, условием нормальности поверхностей V_3 класса C в пространстве ${}^{\ell}S_N$, является условие

$$t - \varepsilon_{23}u = 0. \quad (5.13)$$

Отсюда следует, что в пространстве ${}^{\ell}S_N$ условие (5.12) для поверхностей V_3 класса $C \cap N$ имеет вид

$$u(\varepsilon\lambda^1_{022} - \lambda_{033}) = 0, \quad (5.14)$$

что и требовалось доказать.

§ 6. Рибокуровы поверхности в ${}^{\ell}S_4$

1. В четырехмерном неевклидовом пространстве ${}^{\ell}S_4$ центральный репер является каноническим репером. В результатах предыдущих параграфов надо считать, что $p, q, \ldots, = 4$ и, следовательно, $\omega^q_p = \omega^4_4 = 0$.

Исследование системы (3.10) показывает, что поверхность V_3 ранга 2 в пространстве ${}^{\ell}S_4$ определяется с произволом двух функций двух аргументов.

Условия (4.15-17), которые определяют рибокуровы поверхности, не зависят от размерности пространства. В этом параграфе покажем, что рибокуровы поверхности существуют в ${}^{\ell}S_4$ и определяем их произвол существования.

Теорема 9. Непараболические рибокуровы поверхности первого типа V_3 существуют в ${}^{\ell}S_4$ с произволом одной функций двух аргументов.

Доказательство. Для общей поверхности V_3 ранга 2 в ${}^{\ell}S_4$ продолженная система систем (3.10-12) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&d\lambda^1_{02} = \lambda^1_{02\beta}\,\omega^\beta_0\,,\\
&\nabla\lambda^1_{03} = \lambda^1_{023}\,\omega^2_0 + \lambda^1_{033}\,\omega^3_0\,,\\
&d\lambda^3_{22} = \lambda^3_{22\beta}\,\omega^\beta_0\,,\\
&\nabla\lambda^3_{23} = \lambda^3_{223}\,\omega^2_0 + \lambda^3_{233}\,\omega^3_0\,,\\
&\nabla\lambda^2_{133} = (t_1\lambda^1_{033} - t_2\lambda^3_{233})\,\omega^2_0 + \lambda^2_{1333}\,\omega^3_0\,,\\
&\nabla\lambda^3_{122} = \lambda^3_{1222}\,\omega^2_0 + (t_1\lambda^1_{022} + t_2\lambda^3_{222})\,\omega^3_0\,, \qquad\qquad (6.\mathrm{I})\\
&\nabla\Lambda^\rho_{222} = (\Lambda^\rho_{2222} - 2\Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{222} + \Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{12}\lambda^1_{022})\,\omega^2_0 +\\
&\qquad + (\Lambda^\rho_{2223} - 2\Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{223} + \Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{12}\lambda^1_{023})\,\omega^3_0\,,\\
&\nabla\Lambda^\rho_{223} = (\Lambda^\rho_{2223} - 2\Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{223} + \Lambda^\rho_{23}\lambda^3_{12}\lambda^1_{023})\,\omega^2_0 +\\
&\qquad + [(\lambda^3_{12})^{-1}\lambda^2_{13}\Lambda^\rho_{2222} + t_3\lambda^3_{233} + t_4\lambda^3_{222} + t_5\lambda^3_{223} +\\
&\qquad + t_6\lambda^1_{033} + t_7\lambda^1_{023} + t_8\lambda^3_{1222}]\,\omega^3_0\,,
\end{aligned}
$$

где новыми величинами являются $\lambda^1_{02\alpha}$, λ^1_{033}, $\lambda^3_{22\alpha}$, λ^3_{233}, λ^3_{1333}, λ^3_{1222} и $\Lambda^\rho_{222\alpha}$, а t_A (A = I, ..., 8) выражаются только через коэффициенты систем (3.I0-I2).

Рибокуровы поверхности первого типа определяются пфаффовыми системами (3.I0-I2) и (6.I), при $\rho = q = 4$, и условием (4.I5).

Представим условие (4.I5) в виде

$$
\lambda^1_{033} = (\lambda^3_{12})^{-1}[\lambda^2_{13}\lambda^1_{022} - \lambda^2_{13}\lambda^1_{03}\lambda^3_{22} - t_{23}\lambda^3_{12}\lambda^1_{02}\lambda^3_{23}]. \qquad (6.2)
$$

Тогда для рибокуровой поверхности первого типа система ковариантов системы (6.I) имеет вид

$$
\begin{aligned}
&\nabla\lambda^1_{022}\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^1_{023}\wedge\omega^3_0 = 0\,,\\
&\nabla\lambda^1_{023}\wedge\omega^2_0 + \lambda^2_{13}(\lambda^3_{12})^{-1}\nabla\lambda^1_{022}\wedge\omega^3_0 = 0\,,\\
&d\lambda^3_{222}\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^3_{223}\wedge\omega^3_0 = 0\,,\\
&\nabla\lambda^3_{223}\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^3_{233}\wedge\omega^3_0 = 0\,,\\
&[\lambda^2_{13}(\lambda^3_{12})^{-1}t_1\nabla\lambda^1_{022} - t_2\nabla\lambda^3_{233}]\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^2_{1333}\wedge\omega^3_0 = 0\,,\\
&\nabla\lambda^3_{1222}\wedge\omega^2_0 + (t_1\nabla\lambda^1_{023} + t_2\, d\lambda^3_{222})\wedge\omega^3_0 = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$(\nabla\Lambda^p_{2222} - 2\Lambda^p_{23} d\lambda^3_{222} + \Lambda^p_{23}\lambda^3_{12}\nabla\lambda^1_{022})\wedge\omega^2_0 +$$
$$+\nabla\Lambda^p_{2223} - 2\Lambda^p_{23}\nabla\lambda^3_{223} + \Lambda^p_{23}\lambda^3_{12}\nabla\lambda^1_{023})\wedge\omega^3_0 = 0,$$
$$(\nabla\Lambda^p_{2223} - 2\Lambda^p_{23}\nabla\lambda^3_{223} + \Lambda^p_{23}\lambda^3_{12}\nabla\lambda^1_{023})\wedge\omega^2_0 + \qquad (6.3)$$
$$+[(\lambda^3_{12})^{-1}\lambda^2_{13}\nabla\Lambda^p_{2222} + t_3\nabla\lambda^3_{233} + t_4 d\lambda^3_{222} + t_5\nabla\lambda^3_{223} +$$
$$+\lambda^2_{13}(\lambda^3_{12})^{-1}t_6\nabla\lambda^1_{022} + t_7\nabla\lambda^1_{023} + t_8\nabla\lambda^3_{1222}]\wedge\omega^3_0 = 0 .$$

Здесь имеется 8 уравнений, содержащих 9 вторичных форм. Исследование системы (6.3) показывает, что характеры системы следующие: $s_1 = 8$, $s_2 = \mathrm{I}$ и $Q = s_1 + 2s_2 = \mathrm{I0}$, а в продолженной системе число новых величин $N = \mathrm{I0}$. Следовательно, по признаку Картана система (6.3) в инволюции и теорема 9 доказана.

2. Рибокуровы поверхности второго типа определяются пфаффовыми системами (3.I0-I2) и (6.I), при $p = q = 4$, и условием (4.I6). В системе ковариантов системы (6.I) при условии (4.I6) имеется, как и в предыдущем случае, 8 уравнений, содержащих 9 вторичных форм. Исследование этой системы показывает, что характеры $s_1 = 8$, $s_2 = \mathrm{I}$ и $Q = \mathrm{I0}$, и что в продолженной системе число новых величин $N = \mathrm{I0}$. Следовательно имеет место

<u>Теорема I0</u>. Непараболические рибокуровы поверхности второго типа V_3 существуют в ${}^{l}S_4$ с произволом одной функций двух аргументов.

3. Вполне рибокуровая поверхность V_3 в ${}^{l}S_4$ определяется пфаффовыми системами (3.I0-I3), где выполнены условия (4.I7) и (4.I5) при $p = 4$.

Систему (3.II), учитывая условие (4.I7), можем представить в виде

$$\omega_0^1 = \lambda^1_{0\beta}\,\omega_0^\beta,$$
$$\omega_2^3 = \lambda^3_{2\beta}\,\omega_0^\beta,$$
$$\lambda^1_{03}\,d\lambda^2_{13} = \lambda^1_{03}(t_1\lambda^1_{03} - t_2\lambda^3_{23})\,\omega_0^2 +$$
$$+[t_{12}\lambda^1_{02}\lambda^3_{122} + t_{13}(\lambda^1_{02}\lambda^3_{23} + \lambda^1_{03}\lambda^3_{22})]\,\omega_0^3, \qquad (6.4)$$
$$d\lambda^3_{12} = \lambda^3_{122}\,\omega_0^2 + (t_1\lambda^1_{02} + t_2\lambda^3_{22})\,\omega_0^3,$$
$$d\Lambda^P_{22} = (\Lambda^P_{222} + t_3\lambda^3_{22} + t_4\lambda^1_{02})\,\omega_0^2 + (\Lambda^P_{223} + t_3\lambda^3_{23} + t_4\lambda^1_{03})\,\omega_0^3,$$
$$d\Lambda^P_{23} = (\Lambda^P_{223} + t_5\lambda^3_{22} + t_6\lambda^1_{02})\,\omega_0^2 + (t_7\Lambda^P_{222} + t_8\lambda^3_{122} + t_9\lambda^1_{03} +$$
$$+ t_{10}\lambda^3_{23} + t_{11}\lambda^3_{22})\,\omega_0^3,$$

где величины t_A ($A = 1,\dots,13$) выражаются через коэффициенты из системы (3.10).

Система ковариантов системы (6.4) имеет вид

$$d\lambda^1_{02}\wedge\omega_0^2 + \nabla\lambda^1_{03}\wedge\omega_0^3 = 0,$$
$$d\lambda^3_{22}\wedge\omega_0^2 + \nabla\lambda^3_{23}\wedge\omega_0^3 = 0,$$
$$(b_1\nabla\lambda^1_{03} + b_2\nabla\lambda^3_{23})\wedge\omega_0^2 + (b_3\nabla\lambda^3_{122} + b_4 d\lambda^1_{02} + b_5\nabla\lambda^1_{03} +$$
$$+ b_6 d\lambda^3_{22} + b_7\nabla\lambda^3_{23})\wedge\omega_0^3 = 0, \qquad (6.5)$$
$$\nabla\lambda^3_{122}\wedge\omega_0^2 + (t_1 d\lambda^1_{02} + t_2 d\lambda^3_{22})\wedge\omega_0^3 = 0,$$
$$(\nabla\Lambda^P_{222} + t_3 d\lambda^3_{22} + t_4 d\lambda^1_{02})\wedge\omega_0^2 + (\nabla\Lambda^P_{223} + t_3\nabla\lambda^3_{23} + t_4\nabla\lambda^1_{03})\wedge\omega_0^3 = 0,$$
$$(\nabla\Lambda^P_{223} + t_5 d\lambda^3_{22} + t_6 d\lambda^1_{02})\wedge\omega_0^2 +$$
$$+ (t_7\nabla\Lambda^P_{222} + t_8\nabla\lambda^3_{122} + t_9\nabla\lambda^1_{03} + t_{10}\nabla\lambda^3_{23} +$$
$$+ t_{11} d\lambda^3_{22})\wedge\omega_0^3 = 0,$$

где величины b_A ($A = 1,\dots,7$) выражаются только через коэффициенты из систем (3.10) и (6.4). В системе (6.5) имеется 6 уравнений, содержащих 7 вторичных форм. Характеры системы равны $s_1 = 6$, $s_2 = 1$, и $Q = 8$.

Разрешая уравнения (6.5) по лемме Картана и учитывая условие (4.I5), находим:

$$
\begin{aligned}
&d\lambda^1_{02} = \lambda^1_{02\beta}\,\omega^\beta_0 ,\\
&\nabla\lambda^1_{03} = \lambda^1_{023}\,\omega^2_0 + (d_1\lambda^1_{022} + d_2)\,\omega^3_0 ,\\
&d\lambda^3_{22} = \lambda^3_{22\beta}\,\omega^\beta_0 ,\\
&\nabla\lambda^3_{23} = \lambda^3_{23\beta}\,\omega^\beta_0 ,\\
&b_3\nabla\lambda^3_{122} = [(b_1 d_1 - b_4)\lambda^1_{022} - b_5\lambda^1_{023} - b_6\lambda^3_{222} - b_7\lambda^3_{223} + b_2\lambda^3_{233} + b_1 d_2]\,\omega^2_0 +\\
&\qquad + b_3(t_1\lambda^1_{022} + t_2\lambda^3_{222})\,\omega^3_0 ,\\
&\nabla\Lambda^P_{222} = (\Lambda^P_{222\beta} - t_3\lambda^3_{22\beta} - t_4\lambda^1_{02\beta})\,\omega^\beta_0 ,\\
&\nabla\Lambda^P_{223} = (\Lambda^P_{2223} - t_3\lambda^3_{223} - t_4\lambda^1_{023})\,\omega^2_0 +\\
&\qquad + [d_8\Lambda^P_{2222} + (d_9 + d_4 d_1)\lambda^1_{022} + d_3\lambda^1_{023} + d_5\lambda^3_{222} + d_6\lambda^3_{223} +\\
&\qquad + d_7\lambda^3_{233} + d_4 d_2]\,\omega^3_0 ,
\end{aligned}
\tag{6.6}
$$

где $\lambda^3_{2\alpha\beta} = \lambda^3_{2\beta\alpha}$ и здесь имеется 7 новых величин. Следовательно $Q > N$ и систему (6.6) надо продолжить.

Система ковариантов системы (6.6) имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\nabla\lambda^1_{022}\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^1_{023}\wedge\omega^3_0 = 0,\\
&\nabla\lambda^1_{023}\wedge\omega^2_0 + d_1\nabla\lambda^1_{022}\wedge\omega^3_0 = 0,\\
&\nabla\lambda^3_{222}\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^3_{223}\wedge\omega^3_0 = 0,\\
&\nabla\lambda^3_{223}\wedge\omega^2_0 + \nabla\lambda^3_{233}\wedge\omega^3_0 = 0,\\
&[(b_1 d_1 - b_4)\nabla\lambda^1_{022} - b_5\nabla\lambda^1_{023} - b_6\nabla\lambda^3_{222} - b_7\nabla\lambda^3_{223} + b_2\nabla\lambda^3_{233}]\wedge\omega^2_0 +\\
&\qquad + b_3(t_1\nabla\lambda^1_{022} + t_2\nabla\lambda^3_{222})\wedge\omega^3_0 = 0,\\
&(\nabla\Lambda^P_{2222} - t_3\nabla\lambda^3_{222} - t_4\nabla\lambda^1_{022})\wedge\omega^2_0 + (\nabla\Lambda^P_{2223} - t_3\nabla\lambda^3_{223} -\\
&\qquad - t_4\nabla\lambda^1_{023})\wedge\omega^3_0 = 0,\\
&(\nabla\Lambda^P_{2223} - t_3\nabla\lambda^3_{223} - t_4\nabla\lambda^1_{023})\wedge\omega^2_0 + [d_8\nabla\Lambda^P_{2222} + (d_3 + d_4 d_1)\nabla\lambda^1_{022} +\\
&\qquad + d_3\nabla\lambda^1_{023} + d_5\nabla\lambda^3_{222} + d_6\nabla\lambda^3_{223} + d_7\nabla\lambda^3_{233}]\wedge\omega^3_0 = 0,
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Здесь имеется 7 уравнений, содержащих 7 вторичных форм. Характеры системы следующие: $s_1 = 7$, $s_2 = 0$ и $Q = 7$. В продолженной системе новых величин $N = 7$. Следовательно, справедливо

<u>Теорема II</u>. Непараболические вполне рибокуровы поверхности V_3 существуют в ${}^{\ell}S_4$ с произволом семи функций одного аргумента.

Литература

1. А к и в и с М. А., Фокальные образы поверхностей ранга r. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1957, № 1, 9-19.
2. Г е й д е л ь м а н Р. М., К теории семейств плоскостей в неевклидовых пространствах. Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 30-42.
3. Г е й д е л ь м а н Р. М., О метрической теории псевдоконгруэнций прямых в ${}^{3}S_5$ и проективной теории пар конгруэнций прямых пространства P_3 Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1971, № 3, 23-32.
4. Л а п т е в Г. Ф., Дифференциальная геометрия многомерных поверхностей. Изв. ВИНИТИ. Итоги науки. Геометрия 1963, 1965, 5-64.
5. Р о з е н ф е л ь д Б.А., Неевклидовы геометрии. Москва, 1955.
6. Р о з е н ф е л ь д Б. А., Неевклидовы пространства. Москва, 1969.
7. Р ы ж к о в В. В., О тангенсиально вырожденных поверхностях. Докл. АН СССР, 1960, 135, № 1, 20-22.
8. С е н и л о в А. С., К теории псевдоконгруэнций прямых в ${}^{\ell}S_4$. Труды МИИТА, 1968, 284, 113-121.
9. С е н и л о в А. С., О некоторых специальных классах фокальных псевдоконгруэнций прямых в ${}^{\ell}S_4$ с действительными центральными поверхностями. Труды МИИТА, 1968, 284, 123-140.
10. Ф и н и к о в С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. Москва-Ленинград, 1948.

Поступило
23 XII 1974

PINDADE V_3, MILLE ASTAK ON 2, MÕNINGATEST KLASSIDEST RUUMIS ${}^{l}S_N$

E.Abel

R e s ü m e e

Artiklis uuritakse pindu V_3, mille astak on 2, mitteeukleidilises N-mõõtmelises ruumis ${}^{l}S_N$ ja luuakse selliste pindade meetriline teooria.

Järgnevalt vaadeldakse lähemalt mõningaid uuritavate pindade eriklasse.

SOME CLASSES OF THE SURFACES V_3 WITH RANK 2 IN SPACE ${}^{l}S_N$

E.Abel

S u m m a r y

In this paper the surfaces V_3 with rank 2 in noneuclidean space ${}^{l}S_N$ are investigated and the metrical theory of such surfaces is created. Some special classes of the surfaces V_3 especially the following classes are considered:

1) the surfaces V_3, the torses of which intersect with the middlesurfaces along the conjugate system(the Ribaucour's surfaces V_3);

2) the surfaces V_3, the full and average distribution parameters of which are constant (the surfaces V_3 of the class C).

ОТНОШЕНИЯ ВКЛЮЧЕНИЯ МЕЖДУ ЯДРАМИ КНОППА И ЯДРАМИ $\mathfrak{z}$-СХОДИМОСТИ

С. Рудаков

Уральский государственный университет

Введение

Кнопп определил ядро $K(x)$ комплексной последовательности $x=\{x_k\}$ как замкнутую выпуклую оболочку ее предельных точек (см. [2], гл. 6).

Л. Лооне в [3] определила ядро $K(x)$ элемента x топологического векторного пространства. Ядро $K(x)$ элемента x топологического векторного пространства F над R (или C) есть множество в R (или C), определяемое некоторым фильтром $\mathfrak{A}$ и в пространстве F' топологически сопряженном к F. При некоторых ограничениях ядро $K(x)$ элемента $x \in F$ определяется только одним множеством пространства F'. Например, в пространстве m всех ограниченных последовательностей $x=\{x_k\}$ с обычной нормой $\|x\| = \sup\{|x_k|\}$ ядро Кноппа $K(x)$ состоит из значений в точке x всех таких функционалов, норма которых равна единице и сужение которых на пространстве всех сходящихся последовательностей $x=\{x_k\}$ совпадает с $\lim x_k$

В настоящей работе будет использовано следующее утверждение, доказанное Л. Лооне ([4], предложение 10):

Пусть L и M – слабо бикомпактные подмножества, определяющие ядра в пространстве m, причем $f \geqslant 0$ для каждого f из $L \cup M$. Пусть $A=(a_{nk})$ – матричное преобразование на m. Для того, чтобы имело место $L(Ax) \subset M(x)$ для всех $x \in m$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1. $f(\{\sum_k |\operatorname{Im} a_{nk}|\}) = 0$,
2. $A_1'(L) \subset M$,

где $A_1 = (\operatorname{Re} a_{nk})$ и A_1' – линейный оператор из m' в m', сопряженный к A_1.

В § 1 приводятся обозначения, известные факты и определения.

В § 2 вводится понятие ядра s-сходимости, общие свойства которого изучены Л.Лооне. Здесь же даются необходимые и достаточные условия на матрицу A, при выполнении которых ядро $K(Ax) \subset (a,b) \subset K(x)$, где (a,b) - произвольный интервал, включенный в ядро Кноппа $K(x)$.

В § 3 указываются необходимые и достаточные условия на матрицу A, при выполнении которых $M_s(Ax) \subset M_s(x)$ и $M_s(Ax) \subset K(x)$, где $M_s(x)$ - ядро s-сходимости.

§ I. Определения и обозначения.

Пусть N - множество всех натуральных чисел; E - пространство ограниченных вещественных последовательностей $x = \{x_k\}$ с нормой $\|x\| = \sup\{|x_k|\}$, E' - пространство вещественных непрерывных линейных функционалов на E с нормой $\|\varphi\| = \sup\{|\langle x,\varphi\rangle| : \|x\| \leq 1\}$, где $\varphi \in E'$, $x \in E$ и $\langle x,\varphi\rangle$ - билинейная форма, которая порождает отношение двойственности между пространствами E и E'.

Определения. Движением называется взаимно-однозначное отображение $s: N \to N$ без циклов, то есть для любых $n, k \in N$ $n \neq s^k(n)$, где s^k означает k-кратную суперпозицию отображения s: $s^k(n) = \underbrace{s[s \cdots [s(n)]]}$. Для общности положим $s^0(n) = n$. Отображение $S: N \to E$ называется согласованным с движением s, если $S[\{x_k\}] = \{x_{s(k)}\}$. Отображение согласованное с движением, очевидно, линейно и непрерывно.

Через K обозначим множество функционалов $\varphi \in E'$, удовлетворяющих следующим свойствам:

$$\langle e_k, \varphi \rangle = 0 \qquad \text{для всех } k \in N, \tag{I}$$

$$\langle e, \varphi \rangle = 1, \tag{2}$$

$$\|\varphi\| = 1, \tag{3}$$

причем $e = \{1, 1, \dots, 1, \dots\}$, $e_k = \{0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots\}$, где I стоит на k-ом месте.

Через M_s обозначим множество функционалов $\varphi \in K$, инвариантных относительно движения s, то есть удовлетворяющих условиям (I), (2), (3) и условию

$$\langle x - Sx, \varphi \rangle = 0, \tag{4}$$

где $S: E \to E$ - отображение согласованное с движением s.

Приведем некоторые известные факты, которые нам понадобятся в дальнейшем:

K и M_s - непустые, выпуклые, слабо бикомпактные подмножества из E' ([3], § 3; 5).

Множество $K(x)=\{\langle x,\varphi\rangle : \varphi\in K\}$ совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества предельных точек последовательности $x=\{x_k\}$, то есть с ядром Кноппа этой последовательности ([3], § 3).

Пусть ℓ - функционал, определенный на подпространстве $E^c\subset E$ всех сходящихся последовательностей из E следующим образом: $\langle x,\ell\rangle = \lim x_k \cdot K$ - множество тех и только тех функционалов из E', которые продолжают ℓ с сохранением нормы ([6], лемма I4).

Положим $M_s(x)=\{\langle x,\varphi\rangle : \varphi\in M_s\}$; S^k - суперпозиция отображения S, согласованного с движением s, на себя k раз $S_n=\frac{1}{n}(I+S+S^2+\dots+S^{n-1})$ - линейный оператор из E в E; k' - точечный функционал из E', то есть $\langle x,k'\rangle = x_k$ для всех $x=\{x_k\}\in E$. Тогда ([6]) выполняются следующие равенства

$$\sup M_s(x)=\overline{\lim_n}\ \sup\{\langle S_n x, k'\rangle\}=\overline{\lim_n}\ \sup_{k\in N}\{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} x_{s^p(k)}\} \tag{5}$$

$$\inf M_s(x)=\underline{\lim_n}\ \inf_{k\in N}\{\langle S_n x, k'\rangle\}=\underline{\lim_n}\ \inf\{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} x_{s^p(k)}\}. \tag{6}$$

Если для некоторого x $\sup M_s(x)=\inf M_s(x)=\alpha$, то пишут $M_s - \lim x=\alpha$, и справедливо равенство

$$M_s - \lim x = \lim_n \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} x_{s^p(k)} \text{ равномерно по } k. \tag{7}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\lim_{k\to\infty} x_k \equiv \lim_k x_k \equiv \lim x;\quad A(x)\equiv Ax;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \equiv \sum_k a_{nk};\quad \sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum x_k;$$

$$\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \equiv \{x_k\};\quad \{a_{nk}\}_{n,k=1}^{\infty} \equiv \{a_{nk}\}_{n,k};$$

$e.p.(t)$ - целая часть от t.

Понятия движения $s: N\to N$, согласованного с ним отображения $S: E\to E$, множества M_s введены и изучались в работах [5-7].

§ 2. Преобразования, уменьшающие ядра последовательностей

Определение. Множество $M_s(x) = \{\langle x, \varphi\rangle : \varphi \in M_s\}$ называется ядром s-сходимости точки x.

Следующее вспомогательное утверждение приводим без доказательства.

Лемма I. Пусть $x = \{x_k\} \in E$ – последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\underline{\lim}\, x = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}\, x = 1. \tag{8}$$

Тогда существуют системы подмножеств натуральных чисел $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$, где $A_n = \{a(n,k)\}_{k=1}^{\infty}$ и $B_n = \{B(n,k)\}_{k=1}^{\infty}$ такие, что выполняются следующие условия:

$\{A_n, B_k\}_{n,k}$ – дизъюнктная система множеств, (9)

$a(n,m) < a(n,m+1)$ и $b(n,m) < b(n,m+1)$ для всех $n, m \in N$; (I0)

$a(n,m) < b(n,m)$ для всех $n, m \in N$; (II)

$|x_{a(n,m)}| < \frac{1}{2^k}$ для всех $n, k \in N$ и $m \geq k$; (I2)

$|x_{b(n,m)} - 1| < \frac{1}{2^k}$ для всех $n, k \in N$ и $m \geq k$. (I3)

Теорема I. Для любой последовательности $x = \{x_k\}$, удовлетворяющей условию (8) и для любых целых чисел q, p, n таких, что $0 \leq q \leq p \leq n$, существует движение $s : N \to N$ такое, что $M_s(x) = [\frac{q}{n}, \frac{p}{n}]$.

Доказательство. Пусть q, p, n – заданные целые числа такие, что $0 \leq q \leq p \leq n$. По лемме I, построим для последовательности $x = \{x_k\}$ системы $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ подмножество натуральных чисел, удовлетворяющих условиям (9)-(I3). Для каждого $i \in N$ построим множества $C_i = \{c(i,m)\}$. В зависимости от значений i, p, q определим $c(i,m)$ следующим образом:

$$c(i,m) = \begin{cases} a(i,m) & \text{при } kn < m \leq kn + (n-q), \\ b(i,m) & \text{при } kn + (n-q) < m \leq (k+1)n \end{cases}$$

для нечетных i,

$$c(i,m) = \begin{cases} a(i,m) & \text{при } kn < m \leq kn + (n-p), \\ b(i,m) & \text{при } kn + (n-p) < m \leq (k+1)n \end{cases}$$

для четных i, где k — некоторое целое неотрицательное число.

Отметим некоторые свойства $\{C_i\}$. Из условия (9) следует

$$C_i \cap C_j = \emptyset \qquad \text{для всех } i = j. \qquad (14)$$

Из неравенств (10), (11) следует, что

$$c(i,m) < c(i,m+1) \qquad \text{для всех } i, m \in N. \qquad (15)$$

Из построения $\{C_i\}$ следует, что множество

$$N \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = \{k_i\}, \quad \text{где } k_{i+1} > k_i \text{ — бесконечно} \qquad (16)$$

Определим отображение $s: N \to N$, положив

$$s(n) = \begin{cases} c(i,1) & \text{при } n = k_i, \\ c(j,m+1) & \text{при } n = c(j,m) \end{cases}$$

для всех $n \in N$. В силу свойств (14)-(16) s — однозначное отображение, определенное на всем N. Далее, пусть $n \in s(N)$, тогда существует только одно число $j \in N$ такое, что $n \in C_j$. Тогда

$$s^{-1}(n) = \begin{cases} k_j & \text{если } n = c(j,1); \\ c(j,m) & \text{если } n = c(j,m+1). \end{cases}$$

Следовательно, s — взаимно-однозначное отображение. Пусть $n = k_j \in N \setminus \bigcup_{i=1}^{m} C_i$. Тогда $k_j \neq s^p(k_j) = c(j,p) \in C_j$ для всех $p \in N$. Если же $n = c(j,m)$, то $s^p(n) = c(j, m+p) > c(j,m)$. Следовательно, s — движение.

Отметим некоторые соотношения, которые нам понадобятся для доказательства равенства $M_s(x) = [\frac{q}{n}, \frac{p}{n}]$.

Так как $s(N) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, то

$$\sum_{p=0}^{m-1} x_{s^p(k)} = x_k + \sum_{p=0}^{m-2} x_{c(j,i+p)} \qquad (17)$$

для некоторых i, j $(i, j = 1, 2, \dots)$, где $s(k) = c(j,i)$. Тогда выполняются неравенства

$$\frac{1}{m}\Big[-\|x\| + \sum_{p=0}^{m-2} x_{c(j,i+p)}\Big] \le \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{s^p(k)} \le \frac{1}{m}\Big[\sum_{p=0}^{m-2} x_{c(j,i+p)} + \|x\|\Big]. \qquad (18)$$

Пусть M_c — некоторое натуральное число, и натуральные числа i, t, l, m такие, что выполняются неравенства

$$(t-1)n+1 \le i+M_0 \le tn < (t+1)n \le ln \le m+i-2 \le (l+1)n-1. \qquad (19)$$

Тогда справедливо равенство

$$\sum_{p=0}^{m-2} x_{c(j,i+p)} = \sum_{p=i}^{m+i-2} x_{c(j,p)} = \sum_{p=i}^{i+M_0-1} x_{c(j,p)} + \sum_{p=i+M_0}^{tn} x_{c(j,p)} + \sum_{p=tn+1}^{ln} x_{c(j,p)} + \sum_{p=ln+1}^{m+i-2} x_{c(j,p)} \qquad (20)$$

В правой части равенства (20) под знаком первой суммы слагаемых не более чем M_0, под знаком второй и четвертой сумм слагаемых не более $2n$. Применяя в неравенстве (18) равенство (20) и заметив, что $|x_k| \le \|x\|$, получаем неравенства

$$\frac{1}{m}\Big[\|x\|(-M_0-2n-1)+\sum_{p=tn+1}^{ln} x_{c(j,p)}\Big] \le \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{jP(k)} \le \le \frac{1}{m}\Big[\|x\|(M_0+2n+1)+\sum_{p=tn+1}^{ln} x_{c(j,p)}\Big] \qquad (21)$$

Покажем, что $M_s(x) \subset \left[\frac{q}{n}, \frac{p}{n}\right]$. Для этого, в силу равенств (5) и (6), достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $M \in N$, что для всех $m > M$ и для всех $k \in N$ выполняются неравенства

$$\frac{q}{n} - \varepsilon < \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{jP(k)} < \frac{p}{n} + \varepsilon. \qquad (22)$$

Пусть z в дальнейших формулах означает q или p.

Справедливо равенство

$$\sum_{p=tn+1}^{ln} x_{c(j,p)} = \sum_{\nu=0}^{l-t-1}\ \sum_{p=(t+\nu)n+1}^{(t+\nu)n+(n-z)} x_{c(j,p)} + \sum_{\nu=0}^{l-t-1}\ \sum_{p=(t+\nu)n+(n-z)+1}^{(t+\nu+1)n} x_{c(j,p)} \qquad (23)$$

Причем, при $z=0$ будем считать вторую двойную сумму равной 0, а при $z=n$ будем считать первую двойную сумму равной 0. В результате такой перестановки слагаемые первой двойной суммы, содержащей $(l-t)(n-z)$ слагаемых, удовлетворяют неравенству (12), а слагаемые второй двойной суммы, содержащей $(l-t)z$ слагаемых, удовлетворяют неравенству (I3). Используя неравенства (I2) и (I3), из равенства (23) получаем неравенства

$$(l-t)z - \frac{1}{2^{tn}} < \sum_{p=tn-1}^{ln} x_{c(j,p)} < (l-t)z + \frac{1}{2^{tn}}\,. \tag{24}$$

Из неравенства (I9) следуют неравенства

$$\frac{z}{n}(m - M_0 - 2n) \le (l-t)z \le (m - M_0 - 2)\frac{z}{n} \le m\cdot\frac{z}{n} \tag{25}$$

Из неравенств (2I), (24) и (25) следуют неравенства

$$-\left[\frac{\|x\| M_0}{m} + \frac{\|x\|(2n+1)}{m} + \frac{1}{2^{tn} m}\right] - \frac{z(M_0+1)}{n\cdot m} - \frac{2z}{n} + \frac{z}{n} <$$

$$< \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{jP(k)} < \left[\frac{\|x\|\cdot M_0}{m} + \frac{\|x\|(2n+1)}{m} + \frac{1}{2^{tn} m}\right] + \frac{z}{n}\,.$$

Нетрудно проверить, что при $m > M_0^2$, где

$$M_0 = e.p.\left[\max\left\{\frac{5\|x\|}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{5\|x\|(2n+1)}{\varepsilon}}, \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}}, \frac{10}{\varepsilon}, \sqrt{\frac{10n}{\varepsilon}}\right\}\right],$$

выполняются неравенства

$$\frac{q}{n} - \varepsilon < \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{jP(k)} < \frac{p}{n} + \varepsilon, \text{ если } j(k) \in C_j \text{ при} \tag{26}$$

нечетных j;

$$\frac{p}{n} - \varepsilon < \frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{jP(k)} < \frac{p}{n} + \varepsilon, \text{ если } j(k) \in C_j \text{ при} \tag{27}$$

четных j.

Тогда будут выполняться и неравенства (22). Следовательно, выполняется включение $M_s(x) \subset [\frac{q}{n}, \frac{p}{n}]$.

Равенство $[\frac{q}{n}, \frac{p}{n}] = M_s(x)$ следует в силу формул (5),(6) из неравенств (26), (27), которые показывают, что $\frac{q}{n}$ и $\frac{p}{n}$ суть предельные точки последовательности

$$\left\{\frac{1}{m}\sum_{p=0}^{m-1} x_{jP(k)}\right\}_{k,m}.$$

<u>Теорема 2</u>. Для каждой последовательности $x \in E$ такой, что $\lim x = a$ и $\lim x = b$, для любых a_1, b_1 таких, что $a \le a_1 \le b_1 \le b$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует движение $s : N \to N$ такое, что выполняются включения

$$(a_1 + \varepsilon,\ b_1 - \varepsilon) \subset M_s(x) \subset (a_1 - \varepsilon,\ b_1 + \varepsilon). \tag{28}$$

Доказательство. Существуют $k \in R$, $c = \{c\} \in E$, $y = \{y_k\} \in E$, причем $\lim y = 0$ и $\lim y = 1$, такие, что $x = ky + c$. Существуют также такие целые числа q, p, n $(0 \le q \le p \le n)$, что $\frac{q}{n} \in ((a_1 - \varepsilon - c)\cdot\frac{1}{k}, (a_1+\varepsilon-c)\frac{1}{k})$ и $\frac{p}{n} \in ((b_1-\varepsilon-c)\cdot\frac{1}{k}, (b_1+\varepsilon-c)\cdot\frac{1}{k})$. Тогда, по теореме I, существует такое движение $s: N \to N$, что $M_s(y) = [\frac{q}{n}, \frac{p}{n}]$. По предложению 3 ([4]) $M_s(x) = M_s(ky+c) = kM_s(y) + c = [k\frac{q}{n} + c_1 k\frac{p}{n} + c]$, откуда и следует (28).

В дальнейшем мы будем рассматривать только непрерывные матричные преобразования $A = (a_{nk})$, то есть такие, что $\sup\{\sum_k |a_{nk}|\} \le M$ для некоторого $M > 0$. Тогда $A': E' \to E'$ определяется по формуле $\langle x, A'y\rangle = \langle Ax, y\rangle$ для всех $x \in E$, $y \in E'$.

Теорема 3. Пусть $A = (a_{nk})$ - действительное матричное преобразование E в E, s - движение. Для того, чтобы включение $K(Ax) \subset M_s(x)$ выполнялось для всех $x \in E$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\lim_k a_{nk} = 0 \quad \text{для всех } k \in N, \tag{29}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{30}$$

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1, \tag{31}$$

$$\lim_n \sum_{k \notin s(N)} |a_{nk}| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_n \sum_k |a_{nk} - a_{ns(k)}|. \tag{32}$$

Необходимость. Условия (29), (30), (31) выполняются, так как выполняются включения $K(Ax) \subset M_s(x) \subset K(x)$ (см. [2], 6, 4.II). Докажем необходимость условий (32). Допустим противное. Пусть существует предельная точка $\alpha \ne 0$ последовательности

$\{\sum_{k\in s(N)} |a_{nk}| + \sum_k |a_{ns(k)} - a_{nk}|$. Рассмотрим матрицу $B = (b_{nm})$, где

$$b_{nm} = \begin{cases} a_{nm}, & \text{если } m \in s(N); \\ a_{ns(k)} - a_{nk}, & \text{если } m = s(k); \end{cases}$$

и двойную последовательность $\{x^n_m\}$, где $x^n_m = \operatorname{sgn} b_{nm}$. Матрица B и двойная последовательность $\{x^n_m$ удовлетворяют условиям леммы ([2], стр. 176). Тогда существует подпоследовательность $\{x_k\} \subset \{x^n_m\}$ такая, что предельная точка последовательности

$$\left\{\sum_{k\notin s(N)} a_{nk}x_k + \sum_k (a_{ns(k)} - a_{nk})\, x_{s(k)}\right\}_n =$$
$$= \left\{\sum_k a_{nk}\,(x_k - x_{s(k)})\right\}_n = A(x - Sx) \tag{33}$$

совпадает с $\alpha \neq 0$. Тогда существует функционал $\varphi \in K$ такой, что $\alpha = \langle A(x-Sx), \varphi\rangle = \langle x - Sx, A'\varphi\rangle \neq 0$. В силу предложения IO ([4]), $A'\varphi \in M_S$ для всех $\varphi \in K$, то есть для функционала $A'\varphi$ выполняется условие (4) для всех $x \in E$. Противоречие с предложением.

Достаточность. Докажем, что при выполнении условий (29)-(32) $A'(K) \subset M_S$. Известно ([2], 6.4,II), что при выполнении условий (29)-(3I) $A'(K) \subset K$. Остается показать, что функционал $A'\varphi$ s-инвариантен для каждого $\varphi \in K$. Для каждого $n \in N$

$$\left|\sum_{k\notin s(N)} a_{nk}x_k + \sum_k (a_{ns(k)} - a_{nk})\, x_{s(k)}\right| \leq$$
$$\leq \|x\| \left[\sum_{k\notin s(N)} |a_{nk}| + \sum_k |a_{ns(k)} - a_{nk}|\right].$$

Из этого неравенства и из неравенства (33) следует, что при выполнении (32) последовательность $\left\{\sum_k a_{nk}(x_k - x_{s(k)})\right\}_n$ сходится к 0. Тогда $\langle A(x-Sx), \varphi\rangle = \langle x - Sx, A'\varphi\rangle = 0$ для всех $\varphi \in K$.

Пример I. Класс матриц, удовлетворяющих условиям (29)-(32), непуст.
Пусть задано некоторое движение $s : N \to N$. Зафиксируем произвольную последовательность $\{k_n\} \subset N$. Положим

$$a_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \notin \{s(k_n), s^2(k_n), \ldots, s^n(k_n)\}; \\ \frac{1}{n} & \text{при } m = s^p(k_n) \quad (p = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Матрица $A = (a_{nm})$ удовлетворяет условиям (29)-(32).

Теорема 4. Для любой последовательности $x \in E$, для любого отрезка $[a_1, b_1] \subset K(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует такое движение $s : N \to N$, что для любой матрицы A, удовлетворяющей условиям (29)-(32), выполняется включение $K(Ax) \subset (a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon)$.

Доказательство. Утверждение теоремы следует непосредственно из теорем 2,3 и из существования матриц, удовлетворяющих условиям (29)-(32).

§ 3. Включения $M_s(Ax)\subset K(x)$ и $M_s(Ax)\subset M_s(x)$

<u>Теорема 5.</u> $A=(a_{nk})$ - действительное матричное преобразование E в E_1, Δ - движение. Чтобы для каждого $x\in E$ имело место включение $M_s(Ax)\subset K(x)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$M_s-\lim_n a_{nk}=0 \qquad \text{для всех } k\in N, \tag{34}$$

$$M_s-\lim_n \sum_k a_{nk}=1, \tag{35}$$

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{k_{n-1}} a_{\Delta^p(k)m}\Big|=1 \qquad \text{равномерно по } k. \tag{36}$$

<u>Доказательство.</u> Используя предложение 10 ([4]), достаточно доказать эквивалентность условий (34)-(36) включению $A'(M_s)\subset K$.

<u>Необходимость.</u> Пусть $A'(M_s)\subset K$. Тогда для каждого $\varphi\in M_s$ функционал $A'\varphi$ удовлетворяет условиям (1)-(3). Из условия (1) $0=\langle e_k, A'\varphi\rangle=\langle Ae_k,\varphi\rangle=\langle\{a_{nk}\},\varphi\rangle$ следует, что $M_s-\lim\limits_n a_{nk}=0$ для всех $k\in N$. Из условия (2) $1=$ $=\langle e, A'\varphi\rangle=\langle Ae,\varphi\rangle=\langle\{\sum\limits_k a_{nk}\},\varphi\rangle$ следует, что M_s- $-\lim\limits_n\sum\limits_{k_{n-1}} a_{nk}=1$, то есть по равенству (7)

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{p=0}\sum_m a_{\Delta^p(k)m}=1$$

равномерно по $k\in N$. Из соотношений

$$\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_m a_{\Delta^p(k)m}=\frac{1}{n}\sum_m\sum_{p=0}^{n-1}a_{\Delta^p(k)m}\leqslant\frac{1}{n}\sum\Big|\sum_{p=0}^{n-1}a_{\Delta^p(k)m}\Big|$$

и предположения, что условие (36) не выполняется, следует, что для некоторого $\varepsilon>0$ существуют $\{n_i\}_i$ и $\{k_i\}_i$ такие подпоследовательности натуральных чисел, что

$$\alpha=\lim_i\frac{1}{n_i}\sum_m\Big|\sum_{p=0}^{k_i-1}a_{\Delta^p(k_i)m}\Big|\geqslant 1+\varepsilon.$$

Матрица $B=(b_{im})$ и двойная последовательность $\{x_i^m\}_{i,m}$, где

$$b_{im}=\frac{1}{n_i}\sum_{p=0}^{n_i-1}a_{\Delta^p(k_i)m} \quad \text{и} \quad x_i^m=\operatorname{sgn}(b_{im})$$

удовлетворяют условиям леммы ([2], стр. 176). Тогда существует подпоследовательность $\{x_m\}\subset\{x_i^m\}$ такая, что $|x_m|=1$ $(m\in N)$ и предельная точка последовательности $\{\sum\limits_m b_{im}x_m\}$ совпадает с $\alpha\geqslant 1+\varepsilon$. Для этой последовательности $x=\{x_m\}$ выполняются соотношения

$$\sup\{\langle Ax, \varphi\rangle : \varphi\in M_s\} = \sup\{\langle x, A'\varphi\rangle : A'\varphi\in K\} =$$

$$= \overline{\lim_n}\, \sup\left\{\frac{1}{n}\sum_m \sum_{p=0}^{n-1} a_{sP(k)m}x_m : k\in N\right\} \geq 1+\varepsilon.$$

Получили противоречие, так как из условий (3) следует неравенство

$$|\langle x, A'\varphi\rangle| \leq \sup\{|\langle x, A'\varphi\rangle| : \|x\|\leq 1\} = 1.$$

Достаточность. Покажем, что при выполнении условий (34)-(36) $A'(M_s)\subset K$. Условия (I) и (2) для функционала $A'\varphi$ сразу следуют из условий (34), (35). Для каждого $\varphi\in M_s$ $\|A'\varphi\| = \sup\{|\langle Ax, \varphi\rangle| : \|x\|\leq 1\}\geq 1$, так как при $x=e$ $\langle e, A'\varphi\rangle = 1$. Допустим, что для некоторых $\varphi\in M_s$, $x\in E\ (\|x\|\leq 1)$ $\langle x, A'\varphi\rangle = \alpha > 1$. Тогда

$$\sup M_s(x) = \overline{\lim_n}\, \sup\left\{\frac{1}{n}\sum_m x_m \sum a_{sP(k)m}\right\} \geq \alpha > 1,$$

что противоречит условию (36), так как

$$\frac{1}{n}\sum_m x_m \sum_{p=0}^{n-1} a_{sP(k)m} \leq \frac{1}{n}\sum_m \left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{sP(k)m}\right| \qquad \text{при } \|x\|\leq 1.$$

Следовательно, $A'(M_s)\subset K$.

Пример 2. Условие (36) не эквивалентно условию

$$M_s - \lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1. \tag{37}$$

Рассмотрим матрицу $A = (a_{nk})$, удовлетворяющую условиям (35)-(37) и $|a_{nk}|\leq M\ (n, k\in N)$, где $M>0$. Определим матрицу $B = (b_{nm})$, положив

$$b_{nk} = \begin{cases} a_{nk}+3M, & \text{если } n = s^{k-1}(1) \quad (k\in N);\\ a_{nk}-3M, & \text{если } n = s^{k}(1) \quad (k\in N);\\ a_{nk} & \text{при остальных } n, k. \end{cases}$$

Очевидно неравенство

$$\sum_m |b_{sP(1)m}| \geq \sum_m |a_{sP(1)m}| + M$$

Тогда

$$\overline{\lim_n}\, \sup\left\{\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_m |b_{sP(k)m}|\right\} \geq \overline{\lim_n}\, \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_m |b_{sP(1)m}| \geq 1+M,$$

то есть условие (37) для матрицы B не выполняется. Покажем, что условие (36) для матрицы B выполняется. Для этого достаточно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ существует $K>0$ такое число, что для любых $k\in N$ и $n>K$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{1}{n}\sum\left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1)m}\right|-1\right|<\varepsilon.$$

Справедливы равенства

$$\sum_m\left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1)m}\right| = \sum_{m=1}^{k-1}\left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1)m}\right| +$$

$$+\sum_{m=k}^{k+n}\left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1)m}\right| + \sum_{m=k+n+1}^{\infty}\left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1)m}\right|,$$

$$\sum_{m=k}^{k+n}\left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1)m}\right| = \left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1)k}\right| + \left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1),k+1}\right| + \ldots$$

$$+\left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1),k+n}\right| = \left|-3M+\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1)k}\right| + \left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1),k+1}\right| + \ldots$$

$$+\left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1),k+n-1}\right| + \left|3M+\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1),k+n}\right|.$$

Из этих равенств следуют неравенства

$$1-\varepsilon<\frac{1}{n}\sum_m\left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1)m}\right|-\frac{6M}{n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_m\left|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^k+p(1)m}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\sum_m\left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^k+p(1)m}\right|+\frac{6M}{n}<1+\varepsilon$$

при $n>K=\max\left\{\frac{12M}{\varepsilon}, N_1\right\}$, где число $N_1\in N$ выбрано так, что

$$\left|\frac{1}{n}\sum_m\left|\sum_{p=0}^{n-1} a_{sp(\ell),m}\right|-1\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $n>N_1$ и $\ell\in N$. Таким образом, матрица $B=(b_{nk})$ удовлетворяет условию (36), но не удовлетворяет условию (37).

Замечание. Из этого примера и из теоремы 5 следует, что условия (34), (35) и (37) суть достаточные, но не необходимые, как это утверждается в предложении I8, сформулированном Л.Лооне в [4] для случая, когда движение $s: N\to N$ есть сдвиг, то есть $s(n)=n+1$.

Теорема 6. Пусть $A=(a_{nk})$ - матричное преобразование E в E, $s: N\to N$ - движение. Чтобы для каждого $x\in E$ имело место включение $M_s(Ax)\subset M_s(x)$ необходимо и достаточно выполнение условий (34), (35), (36) и

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1}(a_{\mathfrak{s}^{p}(k),\mathfrak{s}(m)}-a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m})\Big|=0 \text{ равномерно по } k, \quad (38)$$

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{m\in \mathfrak{s}(N)}\Big|\sum_{p=0}^{n-1}a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m}\Big|=0 \qquad \text{равномерно по } k. \quad (39)$$

Необходимость. Условия (34), (35), (36) необходимы, так как $M_s(Ax)\subset M_s(x)\subset K(x)$. По предложению IO ([4]), $A'(M_s)\subset M_s$, то есть для всех $x\in E$ и для каждого функционала $\varphi\in M_s$ $\langle x-Sx, A'\varphi\rangle=\langle A(x-Sx),\varphi\rangle=0$, где $x=\{x_k\}$. Из последнего равенства следует, что

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\sum_m a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m}(x_m-x_{\mathfrak{s}(m)})=0 \quad \text{равномерно по } k. \quad (40)$$

Из равенства

$$\sum_{p=0}^{n-1}\sum_m a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m}(x_m-x_{\mathfrak{s}(m)})=$$

$$=\sum_m x_{\mathfrak{s}(m)}\sum_{p=0}^{n-1}(a_{\mathfrak{s}^{p}(k),\mathfrak{s}(m)}-a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m})+\sum_{m\notin \mathfrak{s}(N)}x_m\sum_{p=0}^{n-1}a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m}$$

и равенства (40) следует, что

$$\lim \frac{1}{n}\Big[\sum_m x_{\mathfrak{s}(m)}\sum_{p=0}^{n-1}(a_{\mathfrak{s}^{p}(k),\mathfrak{s}(m)}-a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m})+\sum_{m\notin \mathfrak{s}(N)}x_m\sum_{p=0}^{n-1}a_{\mathfrak{s}^{p}(k)m}\Big]=0 \quad (41)$$

равномерно по k для всех $x=\{x_m\}\in E$.

Предположим теперь, что условия (38), (39) не выполняются. Тогда существуют $\alpha>0$, $\{k_i\}\subset N$ такие, что

$$\overline{\lim_n}\ \frac{1}{n}\Big[\sum_m\Big|\sum_{p=0}^{n-1}(a_{\mathfrak{s}^{p}(k_n),\mathfrak{s}(m)}-a_{\mathfrak{s}^{p}(k_n)m})\Big|+\sum_{m\notin \mathfrak{s}(N)}\Big|\sum_{p=0}^{n-1}a_{\mathfrak{s}^{p}(k_n)m}\Big|\Big]=\alpha$$

Матрица $B=(b_{nm})$ и двойная последовательность $\{x_n^m\}_{n,m}$, где

$$b_{nm}=\begin{cases}\frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}(a_{\mathfrak{s}^{p}(k_n),\mathfrak{s}(m)}-a_{\mathfrak{s}^{p}(k_n)m}) & \text{при } m\in \mathfrak{s}(N),\\ \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}a_{\mathfrak{s}^{p}(k_n)m} & \text{при } m\notin \mathfrak{s}(N).\end{cases}$$

и $x_n^m=\operatorname{sgn} b_{nm}$, очевидно, удовлетворяют условиям леммы ([2], стр. I76). Следовательно, существует подпоследовательность $x=\{x_m\}\subset\{x_n^m\}$ такая, что условие (41) неверно. Это противоречие доказывает необходимость условий (38), (39).

Достаточность. Из условий (34)-(36), по теореме 5, следует включение $M_s(Ax) \subset K(x)$. Из условий (38), (39) и из неравенства

$$\left| \sum_m x_{s(m)} \sum_{p=0}^{n-1} (a_{s^p(k),s(m)} - a_{s^p(k)m}) + \sum_{m \notin s(N)} x_m \sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m} \right| \leq$$

$$\leq \|x\| \left[\sum_m \left| \sum_{p=0}^{n-1} (a_{s^p(k),s(m)} - a_{s^p(k)m}) \right| + \sum_{m \notin s(N)} \left| \sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m} \right| \right.$$

следует равенство (41), а значит, и равенство (40), которое влечет включение $A'(M_s) \subset M_s$, откуда, по предложению 10 ([4]), следует включение $M_s(Ax) \subset K(x)$ для всех $x \in E$.

Пример 3. Существует матрица, удовлетворяющая условиям (34)-(36), (38), (39), для которой не выполняется условие

$$M_s\text{-}\lim_n \sum_m |a_{n,s(m)} - a_{nm}| = 0. \qquad (42)$$

Легко проверить, что матрица $A = (a_{nm})$, где

$$a_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \notin \{s(1), s^2(1), \ldots, s^n(1)\}, \\ \frac{1}{n} & \text{при } m = s^p(1) \ (p = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

удовлетворяет условиям (34)-(36), (38), (39) и (42). Построим матрицу $B = (b_{nm})$, положив

$$\begin{array}{lll} a_{nm}, & \text{если } n \notin \{s(1), s^2(1), \ldots\} & \text{или } m \neq s(1); \\ \frac{1}{s^p(1)} + (-1)^p & \text{при } n = s^p(1) \ (p \in N) & \text{и } m = s(1). \end{array}$$

Матрица B отличается от матрицы A элементами, которые находятся в $s(1)$ столбце и в строках с номерами $s^p(1) (p \in N)$. Посмотрим, как это отличие сказывается на условиях (34)-(36), (38), (39) и (42). Из неравенства

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} b_{s^{k+p}(1), s(1)} \right| = \left| \frac{1}{n} \left[\sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{s^{p+k}} + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^{k+p} \right] \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{1}{s^{k+p}(1)} \right| + \frac{1}{n}$$

и из того, что $M_s\text{-}\lim_n a_{nk} = 0 \ (k \in N)$, следует, что $M_s\text{-}\lim_n b_{nk} = 0 \quad (k \in N)$. Так как

$$\frac{1}{n} \sum_m \sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sum_m \sum_{p=0}^{n-1} b_{s^p(k)m} \leq \frac{1}{n} \sum_m \sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m} + \frac{1}{n},$$

то

$$M_s-\lim_n \sum_k b_{nk} = \lim \frac{1}{n}\Big[\sum_{m\neq s(1)}\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m} + \sum_{p=0}^{n-1} b_{s^p(k),\, s(1)}\Big] = 1.$$

Так как A_1 – положительная матрица, то

$$\frac{1}{n}\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m}\Big| - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1} b_{s^p(k)m}\Big| \leq \frac{1}{n}\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1} a_{s^p(k)m}\Big| + \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$M_s-\lim_n \sum_k |b_{nk}| = 1.$$

Выполняются равенства

$$\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1}(b_{s^p(k)m} - b_{s^p(k),\, s(m)})\Big| = \sum_{m\neq 1,\, s(1)}\Big|\sum_{p=0}^{n-1}(a_{s^p(k)m} - a_{s^p(k),\, s(m)})\Big| +$$

$$+\Big|\sum_{p=0}^{n-1}(b_{s^p(k),1} - b_{s^p(k),\, s(1)})\Big| + \Big|\sum_{p=0}^{n-1}(b_{s^p(k),\, s(1)} - b_{s^p(k),\, s^2(1)})\Big|.$$

Если $s(k)\neq s^t(1)$ $(t\in N)$, то $b_{s^p(k,m)}$ можно везде заменить на $a_{s^p(k)m}$. Если же $s(k)=s^t(1)$ для некоторого $t\in N$, то

$$\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1}(b_{s^{t+p}(1),m} - b_{s^{t+p}(1),\, s(m)})\Big| \leq$$

$$\leq \sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1}(a_{s^{t+p}(1),m} - a_{s^{t+p}(1),\, s(m)})\Big| + 1.$$

Отсюда следует, что равномерно по k

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_m \Big|\sum_{p=0}^{n-1}(b_{s^p(k)m} - b_{s^p(k),\, s(m)})\Big| = 0.$$

Условие (39) для матрицы B, очевидно, выполняется. Отметим соотношения

$$\sum_m \sum_{p=1}^{n} |b_{s^p(1),\, s(m)} - b_{s^p(1),m}| = \sum_{m\neq 1,\, s(1)} \sum^{n} |a_{s^p(1),\, s(m)} - a_{s^p(1)m}| +$$

$$+\sum_{p=1}^{n} |b_{s^p(1),\, s(1)} - b_{s^p(1),1}| + \sum_{p=1}^{n} |b_{s^p(1),\, s^2(1)} - b_{s^p(1),\, s(1)}| =$$

$$= \sum_{m\neq 1,\, s(1)}\sum_{p=1}^{n} |a_{s^p(1),\, s(m)} - a_{s^p(1)m}| + \sum_{p=1}^{n} |a_{s^p(1),\, s(1)} - a_{s^p(1),1} + (-1)^p| +$$

$$+\sum_{p=1}^{n} |a_{s^{p}(1),\, s^{2}(1)} - a_{s^{p}(1),\, s(1)} - (-1)^{p}| \geq$$

$$\geq \sum_{m\neq 1,\, s(1)} \sum_{p=1}^{n} |a_{s^{p}(1),\, s(m)} - a_{s^{p}(1)m}| + \frac{3}{2} n.$$

Отсюда следует, что

$M_s - \lim\limits_{n} \sum\limits_{k} |a_{ns(k)} - a_{nk}|$ не существует.

Замечание. Этот пример и теорема 6 показывают, что условия (34)-(36), (42), (39) суть достаточные, но не необходимые, как утверждается Л.Лооне в предложении I9, сформулированном в [4] для случая, когда движение $s: N \to N$ - сдвиг.

Литература

I. Ш е ф е р Х., Топологические векторные пространства. Москва, I97I.

2. К у к Р., Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. Москва, I960.

3. Л о о н е Л., О ядрах элемента отделимого локально выпуклого пространства. Уч. зап. Тартуск. ун-та, I97I, 277, I25-I35.

4. Л о о н е Л., Ядра в локально выпуклом топологическом пространстве. Автореферат кандидатской диссертации, Тарту. I972.

5. D e a n, D., R a i m i, R. A., Permutations with comparable sets of invariant means. Duke Math. J., 27, 1960, 27, 467-480.

6. R a i m i, R. A., Invariant means and invariant matrix methods of summability. Duke Math. J., 1963, 30, 81-94

7. R a i m i, R. A., Homeomorphisms and invariant measures $\beta N - N$. Duke Math. J., 1966, 33, 1-12.

Поступило -
4 IУ 1974

SISALDUVUSE SUHTED KNOPPI JA Δ-KOONDUVUSE TUUMADE VAHEL

S.Rudakov

R e s ü m e e

Töös vaadeldakse Knoppi ja Δ-koonduvuse tuumade vahekordi.

THE RELATIONS OF INCLUSION BETWEEN KNOPP AND Δ-CONVERGENCE CORES

S.Rudakov

S u m m a r y

The core K(x) of a sequence $x = \{x_k\}$ of complex numbers has been defined by Knopp (see [2], ch. 6). This concept was extended by L.Loone who defined the core of an element in a vector space (see [4]). In the present paper investigation of the core defined by L.Loone is continued.

The section 1 contains some known facts and definitions. In the sections 2 and 3 the core of s-convergence of bounded sequence $x = \{x_k\}$ of real numbers is defined and the author investigates the problems of inclusions of the cores $K(Ax) \subset M_s(x)$, $M_s(Ax) \subset M_s(x)$ and $M_s(Ax) \subset K(x)$, where K(x) is the core of Knopp and A is the real matrix which transforms the space of bounded sequences of real numbers into itself.

ОБ АФФИННОЙ КЛАССИФИКАЦИИ И ПРИЗНАКАХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R_n. III

К.Рийвес

Кафедра математической статистики и программирования

В настоящей работе описывается методика получения аналитических признаков для некоторой аффинно инвариантной классификации выпуклых многогранников n-мерного ($n \geq 1$) евклидова пространства R_n, являющихся пересечениями конечного числа $m \geq 2$ замкнутых полупространств, которые заданы, соответственно, m линейными неравенствами. Пусть ранг коэффициентов системы последних неравенств равен ρ $(1 \leq \rho \leq min(m, n))$. Число классов многогранников предлагаемой классификации конечно. Но так как оно при возрастании m в общем случае резко возрастает, то полная классификация и соответствующие аналитические признаки классов даны только в некоторых частных случаях. Мы приводим здесь полное решение задачи при ρ = = I, m - произвольное и один из наиболее типичных подслучаев при $m = 4$, а именно, случай $\rho = 2$, $m = 4$. Отметим, что результаты [2,3] являются частными случаями приведенных в настоящей работе при произвольном $n \geq 2$, $m = 2,3$.

§ I. Основные определения и методика исследований

I. Вводные замечания. По определению многогранник $\mathcal{U}$ задается системой линейных неравенств

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^{\alpha} \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{I.I}$$

где $n \geq$ I, m - произвольное конечное натуральное число, $m \geq 2$ ([2], стр. II6) и для каждого i по крайней мере один $a_{i\alpha} \neq 0$. В дальнейшем через H_i обозначается замкнутое полупространство в R_n, определяемое i-ым неравенством системы (I.I). Тогда $\mathcal{U} = H_1 \cap H_2 \cap \ldots \cap H_m$. Множество всех точек из R_n, удовлетворяющих уравнению

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^{\alpha} = b_i, \tag{I.2}$$

является граничной гиперплоскостью полупространства H_i и обозначается через Γ_i.

Не ограничивая общности, можно предположить, что ранг ρ матрицы коэффициентов $\|a_{i\alpha}\|$ системы (I.I) определяется минором, находящимся в первых ρ столбцах, т.е. $1 \leq \rho \leq \min(m,n)$ и

$$\rho = \operatorname{rang}\|a_{i\alpha}\| = \operatorname{rang}\begin{Vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 \rho} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \dots & a_{i_2 \rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\rho 1} & a_{i_\rho 2} & \dots & a_{i_\rho \rho} \end{Vmatrix}, \quad i_1, i_2, \dots, i_\rho \in \{1,2,\dots,m\}.$$

Этого всегда можно добиться подходящей перенумерацией векторов базиса пространства R_n. При таком предположении координатная плоскость R_ρ, заданная уравнениями

$$x^{\rho+1} = x^{\rho+2} = \dots = x^n = 0, \tag{I.3}$$

пересекается с U. Пусть это пересечение обозначено через U_0, т.е. $U_0 = U \cap R_\rho$. Множество U_0 состоит из всевозможных точек $X_0 = (x_0^1, \dots, x_0^\rho, 0, \dots, 0) \in R_\rho \subset R_n$, удовлетворяющих системе неравенств

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x_0^\alpha \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{I.4}$$

Поэтому U_0 - выпуклый многогранник в R_ρ, являющийся пересечением m замкнутых полупространств $H_i \cap R_\rho$.

Обозначим через $\{z_t, t = \rho+1, \dots, n\}$ множество базисных решений однородной системы

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^\alpha = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Пусть

$$z_t = \Bigg(\underbrace{\frac{\begin{vmatrix} -a_{i_1 t} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 \rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{i_\rho t} & a_{i_\rho 2} & \dots & a_{i_\rho \rho} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 \rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\rho 1} & a_{i_\rho 2} & \dots & a_{i_\rho \rho} \end{vmatrix}}, \dots, \frac{\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & \dots & a_{i_1, \rho-1} & -a_{i_1 t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\rho 1} & \dots & a_{i_\rho, \rho-1} & -a_{i_\rho t} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 \rho} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_\rho 1} & a_{i_\rho 2} & \dots & a_{i_\rho \rho} \end{vmatrix}}, 0, \dots, 0, 1}_{t}, 0, \dots, 0 \Bigg). \tag{I.5}$$

Тогда из определений (I.4), (I.5) следует, в силу (I.I), что любая точка $x \in \mathcal{U} \subset R_n$ представима в виде

$$x = x_o + \sum_{t=\rho+1}^{n} \gamma_t z_t , \; \gamma_t \quad \text{- произвольные числа}, \tag{I.6}$$

т.е. любая $x \in \mathcal{U}$ получается из некоторой $x_o \in \mathcal{U}_o$ параллельным переносом на некоторый вектор подпространства $V(R_{n-\rho}) \subset$ $\subset V(R_n)$, где $V(R_n)$ обозначает множество векторов пространства R_n и базисом его подпространства $V(R_{n-\rho})$ является множество векторов z_t $(t=\rho+1,\dots,n)$, определенных по формуле (I.5). В таком случае говорят, что многогранник $\mathcal{U}$ является суммой многогранника $\mathcal{U}_o$ и подпространства $V(R_{n-\rho})$:

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_o + V(R_{n-\rho}). \tag{I.7}$$

По определению ([2], стр. II6) k-мерная грань $G_k =$ $= \Gamma_{i_1} \cap \dots \cap \Gamma_{i_{n-k}} \cap H_{j_1} \cap \dots \cap H_{j_{m-n+k}}, \{i_1,\dots,i_{n-k}, j_1,\dots,j_{m-n+k}\} \equiv \{1,\dots,m\}$ многогранника $\mathcal{U} \subset R_n$, задаваемого системой (1.1), является либо некоторой k-мерной плоскостью R_k в R_n, либо некоторым выпуклым многогранником в плоскости R_k и при этом $n-\rho \le k \le n-1$. Из теорем о представлении многогранников ([4], стр. II8) следует, что основную роль при описании многогранника $\mathcal{U}$ играют его $(n-\rho)$-мерные грани $G_{n-\rho}$ и такие $(n-\rho+1)$-мерные грани $G_{n-\rho+1}$, которые являются замкнутыми полуплоскостями некоторых плоскостей $R_{n-\rho+1}$ в R_n. Последние разделяются в классы по параллельности, т.е. считается, что в один класс T входят грани $G_{n-\rho+1}$, являющиеся замкнутыми полуплоскостями параллельных плоскостей $R_{n-\rho+1} \subset R_n$. Многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$ характеризуется числом $0 < \nu_{n-\rho} \le C_m^{\rho}$ граней $G_{n-\rho}$ и числом $0 \le p_{n-\rho+1} \le C_m^{\rho-1}$ классов T его граней $G_{n-\rho+1}$.

Отметим, что если $n-\rho \ne 0$, то $(n-\rho)$-мерные грани являются параллельными плоскостями $R_{n-\rho}$ с направляющими векторами (I.5) в R_n. Если же $n-\rho=0$, то ν_o есть число вершин многогранника $\mathcal{U}$ и p_1 - число классов его непараллельных ребер, являющихся замкнутыми полупрямыми или, другими словами, p_1 - это число направляющих векторов неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}$.

Множество вершин и направляющих векторов неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_o = \mathcal{U} \cap R_\rho$ в совокупности с векторами z_t $(t=\rho+1,\dots,n)$ называется множеством определяющих элементов для многогранника $\mathcal{U}$.

Если $p_{n-\rho+1} = 0$, многогранник $\mathcal{U}$ охарактеризуется наиболее точно, если указать число $0 \leq q_{n-1} < C_m^2$ пар его $(n-1)$-мерных параллельных граней. Рассмотрение характеристики q_{n-1} основано на том, что $(n-1)$-мерные грани многогранника $\mathcal{U}$ могут быть параллельны только попарно. Действительно, если среди граничных гиперплоскостей Γ_i $(i = 1, \ldots$ $\ldots, m)$ существует более двух параллельных, то ранг матрицы коэффициентов подсистемы линейных неравенств с соответствующими индексами равняется единице и последнее утверждение следует из результатов § 2.

Пусть многогранники $\mathcal{U} \subset R_n$ и $\mathcal{U}' \subset R_{n'}$ заданы системами типа (I.I) с рангами матриц коэффициентов, соответственно, ρ и ρ'.

<u>Определение I.I</u>. Многогранники $\mathcal{U} \subset R_n$, $\mathcal{U}' \subset R_{n'}$ называются многогранниками одинакового типа, если $\rho = \rho'$, $r_{n-\rho} = r'_{n'-\rho'}$, $p_{n-\rho+1} = p'_{n'-\rho'+1}$ и при $p_{n-\rho+1} = p'_{n'-\rho'+1} = 0$ также $q_{n-1} = q'_{n'-1}$.

В дальнейшем для простоты мы будем говорить о характеристиках $r_{n-\rho}$, $p_{n-\rho+1}$ и q_{n-1}, не упоминая каждый раз о том, что q_{n-1} рассматривается только при $p_{n-\rho+1} = 0$.

Так как между многогранниками $\mathcal{U} \subset R_n$ и $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$ имеет место соотношение (I.7), то они являются многогранниками одинакового типа. Тип $\mathcal{U}_0$ характеризуется числом r_0 вершин, числом p_1 направляющих векторов неограниченных ребер и числом $q_{\rho-1}$ пар параллельных $(\rho-1)$-мерных граней (ср. [4], стр. II5). Множество всевозможных выпуклых многогранников $\mathcal{U}_0$ пространства R_ρ (а также многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$) разбивается на классы многогранников, соответствующие всевозможным различным комбинациям чисел $r_0, p_1, q_{\rho-1}$ $(r'_{n-\rho} = r_0, p'_{n-\rho+1} = p_1, q'_{n-1} = q_{\rho-1})$. Следовательно, в один класс входят многогранники $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$ $(\mathcal{U} \subset R_n)$ с одинаковыми числами $r_0, p_1, q_{\rho-1}$ $(r'_{n-\rho}, p'_{n-\rho+1}, q'_{n-1})$. Так как аффинные преобразования обратимы и сохраняют параллельность,то описанные классы многогранников инвариантны относительно аффинных преобразований. Поэтому эта классификация многогранников является аффинно инвариантной,но следует отметить, что действие аффинной группы преобразований в ее классах иногда оказывается нетранзитивным,т.е. тогда классы нашей классификации состоят из некоторого r-параметрического $(v \geq 1)$ множества аффинных классов.

Действительно. Если рассматривать совокупность всех треугольников $U \subset R_2$, которые составляют один класс нашей классификации и учитывать, что на плоскости R_2 всегда существует аффинное преобразование, переводящее любой треугольник в произвольный другой, то транзитивность действия аффинной группы в классе треугольников очевидна. Если же рассматривать класс нашей классификации, состоящий из всех трапеций $U \subset R_2$, не являющихся параллелограммами, то в нем действие аффинной группы будет нетранзитивным. Это следует из того, что трапеции характеризуются отношением $\lambda \neq 1$ длин своих параллельных сторон, а аффинное преобразование плоскости всегда сохраняет такое отношение. Тем самым, не существует аффинного преобразования, переводящего друг в друга трапеции с различными значениями отношения λ. Следовательно, во всем классе трапеций действие аффинной группы нетранзитивно, но легко проверить, что оно транзитивно в подклассах с одинаковыми значениями λ. Поэтому класс трапеций распадается на I-параметрическое множество аффинных классов. Отметим, что при $\lambda = 1$ трапеция оказывается параллелограммом и действие аффинной группы в классе параллелограммов - транзитивное.

Мы поставили своей задачей выработать методику, которая дала бы принципиальную возможность определения всех классов многогранников $U \subset R_n$ с любыми допустимыми комбинациями чисел $r'_{n-\rho}, p'_{n-\rho+1}, q'_{n-1}$ при помощи задания их аналитических признаков. Как было показано, эта задача равносильна разысканию аналитических признаков различных классов многогранников $U_o \subset R_\rho$ с соответствующими числами $r_o = r'_{n-\rho}, p_1 = p'_{n-\rho+1}, q_{\rho-1} = q'_{n-1}$. Нами вводятся нужные понятия, которые формально дают возможность полностью решать поставленную задачу, задавая признаки классов многогранников в виде некоторых соотношений между определителями, составленными из коэффициентов системы (I.4), определяющей $U_o \subset R_\rho$. Но так как определение всех допустимых комбинаций чисел $r_o, p_1, q_{\rho-1}$ есть самостоятельная, пока в общем случае нерешенная сложная задача, то фактической возможности для решения нашей задачи в самом общем случае нет. Следует отметить, что предлагаемая нами методика исследования дает возможность при любом фиксированном m и соответствующем ρ решить задачу определения комбинаций $(r_0, p_1, q_{\rho-1})$ с помощью введенных понятий, опираясь на свойства определителей. Поэтому задача классификации многогранников полностью решена в некоторых наиболее простых случаях, когда m или соответствующее число классов многогранников не очень велико.

2. <u>Аналитические признаки типов многогранников $U_0 \subset R_\rho$.</u> Пусть многогранник $U_0 \subset R_\rho$ является пересечением $m \geq 2$ замкнутых полупространств $H_i \subset R_\rho$, где $m \geq \rho$ и $i = 1, \dots, m$. Следовательно, координаты $x^1, \dots, x^\rho$ точки $X \in U_0$ удовлетворяют системе

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^\alpha \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{I.8}$$

в которой $\rho = rang \|a_{i\alpha}\|$. При этом граничные гиперплоскости Γ_i полупространств H_i задаются уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^\alpha = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{I.9}$$

В дальнейшем удобно пользоваться следующими обозначениями:

$$A_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \cdots & a_{i_1 \rho} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \cdots & a_{i_2 \rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_\rho 1} & a_{i_\rho 2} & \cdots & a_{i_\rho \rho} \end{Vmatrix}; \tag{I.10A}$$

$$A^{\alpha|b}_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} \cdots a_{i_1, \alpha-1} & b_{i_1} & a_{i_1, \alpha+1} \cdots a_{i_1 \rho} \\ a_{i_2 1} \cdots a_{i_2, \alpha-1} & b_{i_2} & a_{i_2, \alpha+1} \cdots a_{i_2 \rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_\rho 1} \cdots a_{i_\rho, \alpha-1} & b_{i_\rho} & a_{i_\rho, \alpha+1} \cdots a_{i_\rho \rho} \end{Vmatrix}, \quad \alpha = 1, \dots, \rho; \tag{I.10B}$$

$$A_{j_1 j_2 \dots j_{\rho-\tau}} = \begin{Vmatrix} a_{j_1 1} & a_{j_1 2} & \cdots & a_{j_1 \rho} \\ a_{j_2 1} & a_{j_2 2} & \cdots & a_{j_2 \rho} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j_{\rho-\tau} 1} & a_{j_{\rho-\tau} 2} & \cdots & a_{j_{\rho-\tau} \rho} \end{Vmatrix}, \quad 1 \leq \tau < \rho; \tag{I.10C}$$

$$A^{\hat{\alpha}}_{i_1 i_2 \dots i_{\rho-1}} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} \dots a_{i_1,\alpha-1} \; a_{i_1,\alpha+1} \dots a_{i_1 \rho} \\ a_{i_2 1} \dots a_{i_2,\alpha-1} \; a_{i_2,\alpha+1} \dots a_{i_2 \rho} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i_{\rho-1} 1} \dots a_{i_{\rho-1},\alpha-1} \; a_{i_{\rho-1},\alpha+1} \dots a_{i_{\rho-1} \rho} \end{Vmatrix}, \rho>1, \alpha=1,\dots,\rho, \qquad (I.10D)$$

$$\bar{A}_{i_1 i_2 \dots i_{\rho+1}} = \begin{Vmatrix} a_{i_1 1} & a_{i_1 2} & \dots & a_{i_1 \rho} & b_{i_1} \\ a_{i_2 1} & a_{i_2 2} & \dots & a_{i_2 \rho} & b_{i_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_{\rho+1} 1} & a_{i_{\rho+1} 2} & \dots & a_{i_{\rho+1} \rho} & b_{i_{\rho+1}} \end{Vmatrix}; \qquad (I.10E)$$

$$\bar{A}_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}} = \begin{Vmatrix} a_{j 1} & a_{j 2} & \dots & a_{j \rho} & b_{j} \\ a_{j_1 1} & a_{j_1 2} & \dots & a_{j_1 \rho} & b_{j_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j_{\rho-\tau} 1} & a_{j_{\rho-\tau} 2} & \dots & a_{j_{\rho-\tau} \rho} & b_{j_{\rho-\tau}} \end{Vmatrix}, 1 \le \tau < \rho, \; j \notin \{j_1, \dots, j_{\rho-\tau}\}; \qquad (I.10F)$$

$$d_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = \det A_{i_1 i_2 \dots i_\rho}, \qquad (I.11A)$$

$$d^{\alpha|b}_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = \det A^{\alpha|b}_{i_1 i_2 \dots i_\rho}, \qquad (I.11B)$$

$$d^{\hat{\alpha}}_{i_1 i_2 \dots i_{\rho-1}} = (-1)^{\alpha+1} \det A^{\hat{\alpha}}_{i_1 i_2 \dots i_{\rho-1}}, \qquad (I.11C)$$

$$\bar{d}_{i_1 i_2 \dots i_{\rho+1}} = \det \bar{A}_{i_1 i_2 \dots i_{\rho+1}}; \qquad (I.11D)$$

$$g_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = \operatorname{rang} A_{i_1 i_2 \dots i_\rho}, \qquad (I.12A)$$

$$g_{j_1 j_2 \dots j_{\rho-\tau}} = \operatorname{rang} A_{j_1 j_2 \dots j_{\rho-\tau}}, \qquad (I.12B)$$

$$\bar{g}_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}} = \operatorname{rang} A_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}}, \qquad (I.12C)$$

где $i_1, i_2, \dots, i_\rho, i_{\rho+1}, j, j_1, j_2, \dots, j_{\rho-\tau} \in \{1, \dots, m\}, 1 \le \alpha \le \rho$. С учетом введенных обозначений и свойств определителей очевидно, что среди всевозможных определителей $d_{i_1 i_2 \dots i_\rho}$, $d_{i_1 i_2 \dots i_\rho i_{\rho+1}}$ существенными будут те, которые соответствуют различным сочетаниям индексов (без повторений). Остальные могут от них отличаться только знаком или равняются нулю. При помощи этих обозначений легко выписать некоторые прямые следствия системы (I.9), которые сформулированы в виде нижеследующих предложений.

Предложение I.I. Пусть $d_{i_1 i_2 \cdots i_\rho} \neq 0$ (тем самым все $i_1, i_2, \ldots, i_\rho$ - различные). Тогда решение подсистемы системы (I.9), составленной из уравнений с соответствующими индексами, дается формулой

$$x^{\alpha}_{i_1 i_2 \cdots i_\rho} = \frac{d^{\alpha|b}_{i_1 i_2 \ldots i_\rho}}{d_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}}, \quad 1 \leq \alpha \leq \rho. \tag{I.13}$$

Точка

$$X_{i_1 i_2 \cdots i_\rho} = (x^1_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}, x^2_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}, \ldots, x^\rho_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}) \tag{I.14}$$

является однозначно определенной точкой пересечения граничных гиперплоскостей $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \cdots, \Gamma_{i_\rho}$, причем имеет место соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^{\alpha}_{i_1 i_2 \cdots i_\rho} - b_i = (-1)^{\rho-1} \frac{\bar{d}_{i i_1 i_2 \cdots i_\rho}}{d_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}}. \tag{I.15}$$

Предложение I.2. Пусть $\rho > 1$ и для некоторых $i_1, i_2, \cdots, i_{\rho-1} \in \{1, 2, \ldots, m\}$ имеет место

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} (d^{\hat{\alpha}}_{i_1 i_2 \ldots i_{\rho-1}})^2 \neq 0.$$

Обозначим через

$$y^{\alpha}_{i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}} = d^{\hat{\alpha}}_{i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}}, \quad 1 \leq \alpha \leq \rho, \tag{I.16}$$

решение однородной подсистемы системы (I.9), составленной из уравнений с соответствующими индексами. Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} y^{\alpha}_{i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}} = d_{i i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}}, \tag{I.17}$$

и ненулевой вектор

$$y_{i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}} = (y^1_{i_1 i_2 \ldots i_{\rho-1}}, y^2_{i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}}, \ldots, y^\rho_{i_1 i_2 \cdots i_{\rho-1}}) \tag{I.18}$$

является направляющим вектором прямой пересечения граничных гиперплоскостей $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \ldots, \Gamma_{i_{\rho-1}}$. При $\rho = 1$ этот вектор не определен.

Рассмотрим неупорядоченную последовательность, состоящую из ρ различных индексов $i_1, i_2, \ldots, i_\rho$, где $i_1, i_2, \ldots, i_\rho \in$

$\in \{1,2,\dots,m\}$ и обозначим ее через $(i_1, i_2, \dots, i_\rho)$.

Определение I.2. а) Неупорядоченная последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$ называется J-вырожденной (короче JB), если $g_{i_1 i_2\dots i_\rho} = \rho$ и точно J из определителей $\bar{d}_{i i_1 i_2 \dots i_\rho}$ равняются нулю $(J = 0,\dots, m-\rho)$. Тогда J называется порядком вырожденности последовательности. Пусть

$$M_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = \{ i \mid \bar{d}_{i i_1 \dots i_\rho} = 0 \}, \qquad \text{(I.18')}$$

тогда

$$|M_{i_1 i_2 \dots i_\rho}| = \rho + J.$$

b) Последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$ называется А-вырожденной порядка τ (короче $A_\tau B$) при $1 \le \tau \le \rho - 1$, если $g_{i_1 i_2\dots i_\rho} = g_{j_1 j_2 \dots j_{\rho-\tau}} = \rho - \tau$, где $j_1, j_2, \dots, j_{\rho-\tau}$ фиксированы во множестве $\{i_1, i_2, \dots, i_\rho\}$ и $\bar{g}_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}} = g_{i_1 i_2 \dots i_\rho} + 1$ при всех $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_\rho\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{\rho-\tau}\}$.

с) Последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$ называется АБ-вырожденной порядка τ (короче $AБ_\tau B$) при $1 \le \tau \le \rho-1$, если $g_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = g_{j_1 j_2 \dots j_{\rho-\tau}} = \rho - \tau$, где $j_1, j_2, \dots, j_{\rho-\tau}$ фиксированы во множестве $\{i_1, i_2, \dots, i_\rho\}$ и существуют такие $j \in \{i_1, i_2, \dots$ $\dots i_\rho\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{\rho-\tau}\}$, для которых $\bar{g}_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}} = g_{i_1 i_2 \dots i_\rho} + 1$, а также такие, для которых $\bar{g}_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}} = g_{i_1 i_2 \dots i_\rho}$.

d) Последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$ называется Б-вырожденной порядка τ (короче $Б_\tau B$), где $1 \le \tau \le \rho - 1$, если $g_{i_1 i_2 \dots i_\rho} = g_{j_1 j_2 \dots j_{\rho-\tau}} = \bar{g}_{j j_1 \dots j_{\rho-\tau}} = \rho - \tau$ при фиксированных $j_1, j_2, \dots$ $\dots, j_{\rho-\tau} \in \{i_1, i_2, \dots, i_\rho\}$ и при всех $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_\rho\} \setminus \{j_1, j_2, \dots, j_{\rho-\tau}\}$.

Из этих определений следует, что при $\rho = 1$ понятия А-, АБ- и Б-вырожденности последовательности-индекса (i_1) не определены. Кроме того следует отметить, что понятие АБ-вырожденности порядка I последовательности $(i_1, i_2, \dots, i_\rho)$ не определено. Для того, чтобы при некотором $2 \le \tau \le \rho - 1$ $(\rho \ge 3)$ последовательность $(i_1, i_2, \dots, i_\rho)$ являлась АБ-вырожденной порядка τ, должно иметь место неравенство $m \ge \rho + 2$. Последнее утверждение следует из определения I.2, предположения $\operatorname{rang} \| a_{i\alpha} \| = \rho$ и свойств определителей.

Определение I.3. а) Пусть неупорядоченная последовательность $(i_1, i_2, \dots, i_\rho)$ является J-вырожденной и если $\rho =$ I, то $J=0,\dots,m-1$, если же $\rho>1$, то $J=0,\dots,m-\rho-1$. Такая последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$ называется К-допустимой (короче КД), если существует точно К значений индекса $i\in\{1,2,\dots,m\}\setminus M_{i_1i_2\dots i_\rho}$ таких, что

$$\operatorname{sgn} d_{i_1i_2\dots i_\rho}=(-1)^\rho \operatorname{sgn}\bar{d}_{ii_1i_2\dots i_\rho}, \qquad (I.19)$$

при этом $K=0,1,\dots,m-\rho-J$.

b) Пусть неупорядоченная последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$, $\rho>1$ является J-вырожденной и $M_{i_1i_2\dots i_\rho}=\{i\,|\,\bar{d}_{ii_1\dots i_\rho}=0\}\subseteq\{1,2,\dots,m\}$. Множество $M_{i_1i_2\dots i_\rho}$ содержит некоторые $(\rho-1)$-членные подмножества $\{k_1,k_2,\dots,k_{\rho-1}\}\subset M_{i_1i_2\dots i_\rho}$ и индексы k такие, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}(d^{\hat\alpha}_{k_1k_2\dots k_{\rho-1}})^2\neq 0,\quad d_{kk_1\dots k_{\rho-1}}\neq 0. \qquad (I.20)$$

Неупорядоченная последовательность $(k_1,k_2,\dots,k_{\rho-1})$ элементов из $M_{i_1i_2\dots i_\rho}$, удовлетворяющая условиям (I.20), называется К-допустимой относительно множества $M_{i_1i_2\dots i_\rho}$ и индекса $k\in M_{i_1i_2\dots i_\rho}$, если точно $K-1$ определителей $d_{jk_1\dots k_{\rho-1}}$, $j\in M_{i_1i_2\dots i_\rho}\setminus\{k,k_1,\dots,k_\rho\}$ удовлетворяют одному из условий

$$d_{jk_1\dots k_{\rho-1}}=0, \qquad (I.21A)$$

$$\operatorname{sgn} d_{kk_1\dots k_{\rho-1}}=(-1)^{\rho-1}\operatorname{sgn} d_{jk_1\dots k_{\rho-1}}, \qquad (I.21Б)$$

при этом $K=1,2,\dots,J+1$.

При помощи приведенных определений I.2 и I.3, введенных обозначений (I.10), (I.11), (I.12) и предложений I.1, I.2 можно, с учетом систем (I.8), (I.9) и их следствий (I.15), (I.17), доказать следующие утверждения, доказательства которых для краткости изложения опускаются.

Предложение I.3. Однозначно определенная точка $x_{i_1i_2\dots i_\rho}=(x^1_{i_1i_2\dots i_\rho},x^2_{i_1i_2\dots i_\rho},\dots,x^\rho_{i_1i_2\dots i_\rho})$ принадлежит точно J $(J=0,\dots,m-\rho)$ граничным гиперплоскостям Γ_i $(i\in\{1,2,\dots,m\}\setminus\{i_1,i_2,\dots,i_\rho\})$ тогда и только тогда, когда последовательность $(i_1,i_2,\dots,i_\rho)$ является J-вырожденной.

Следствие I.I. При $\rho=1$ точка $x_{i_1}=\Gamma_{i_1}$ совпадает точно с J, $J=0,\dots,m-1$, граничными точками Γ_i $(i\neq i_1)$ тогда и только тогда, когда индекс (i_1) будет J-вырожденным.

Рассмотрим некоторое подмножество индексов $i_1, i_2, \ldots, i_\rho$ из множества индексов $\{1, \ldots, m\}$ линейных уравнений системы (I.9), задающей в пространстве R_n гиперплоскости Γ_i, $i=1, \ldots, m$. Если порядок А-, АБ- или Б-вырожденности τ последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ удовлетворяет условиям $1 \leq \tau \leq \rho-2$, то в силу $g_{i_1 i_2 \ldots i_\rho} = \rho-\tau$ и (I.I2A,B), (I.IOC), должно существовать по крайней мере одно подмножество $\{j_1, j_2, \ldots, j_{\rho-\tau}\} \subset (i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ так, что

$$g_{j_1 j_2 \ldots j_{\rho-\tau}} = \rho-\tau. \tag{I.22}$$

Обозначим через $w_{i_1 i_2 \ldots i_\rho}$ число подмножеств $\{j_1, j_2, \ldots, j_{\rho-\tau}\} \subset \{i_1, i_2, \ldots, i_\rho\}$, удовлетворяющих условию (I.22) (подмножеств полного ранга). Можно показать, что $\tau+1 \leq w_{i_1 i_2 \ldots i_\rho} \leq C_\rho^{\rho-\tau}$. Нумеруем эти подмножества полного ранга при помощи индексов w $(1 \leq w \leq w_{i_1 i_2 \ldots i_\rho})$. При всяком таком подмножестве пересечение $\Gamma_{j_1} \cap \Gamma_{j_2} \cap \ldots \cap \Gamma_{j_{\rho-\tau}}$ оказывается τ-мерной плоскостью, которую обозначим через R_τ^w (при $\tau=\rho-1$ имеет место $R_{\rho-1}^w \equiv \Gamma_{i_w}$, $1 \leq w \leq \rho$). Базисные векторы этого пересечения образуют фундаментальную систему решений системы

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{j_1\alpha} x^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{j_2\alpha} x^\alpha = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{j_{\rho-\tau}\alpha} x^\alpha = 0. \tag{I.23}$$

Из (I.I2A) имеем $g_{i_1 i_2 \ldots i_\rho} = \rho-\tau$ и, по теореме о ранге матрицы, каждая строка матрицы $A_{i_1 i_2 \ldots i_\rho}$ является линейной комбинацией строк с индексами $j_1, j_2, \ldots, j_{\rho-\tau}$. Поэтому координаты упомянутых базисных векторов удовлетворяют также системе

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i_1\alpha} x^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i_2\alpha} x^\alpha = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i_\rho\alpha} x^\alpha = 0. \tag{I.24}$$

Но система эта одинакова для всех пересечений $\Gamma_{j_1} \cap \Gamma_{j_2} \cap \ldots \cap \Gamma_{j_{\rho-\tau}} = R_\tau^w$. Следовательно, все эти плоскости либо параллельны, либо часть их совпадает. Следующее предложение выясняет, когда именно эти случаи имеют место.

<u>Предложение I.4</u>. а) Все плоскости R_τ^w, $1 \leq w \leq w_{i_1 i_2 \ldots i_\rho}$, $1 \leq \tau \leq \rho-1$, будут параллельными (совпадающими) тогда и только тогда, когда последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ является А-вырожденной (Б-вырожденной) порядка τ.

б) Среди плоскостей R_τ^w, $1\le w\le w_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}$, $1\le\tau\le\varrho-1$ имеются как параллельные, так и совпадающие тогда и только тогда, когда последовательность $(i_1, i_2, \cdots, i_\varrho)$ является АБ-вырожденной порядка τ.

Хотя необходимые и достаточные условия параллельности или совпадения гиперплоскостей пространства R_n общеизвестны, нам удобнее сформулировать их в терминах А- и Б-вырожденности. Оба условия являются эквивалентными.

<u>Следствие I.2</u>. При фиксированных индексах $i_1, i_2, \cdots, i_\nu \in \{1, 2, \cdots, m\}$, где $2\le\nu\le\varrho$, гиперплоскости $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \cdots, \Gamma_{i_\nu}$ параллельны (совпадают) тогда и только тогда, когда всевозможные последовательности $(i_1, i_2, \cdots, i_\nu, i_{\nu+1}, \cdots, i_\varrho)$, в которых $i_{\nu+1}, \cdots, i_\varrho \in \{1, 2, \ldots, m\}\setminus\{i_1, i_2, \cdots, i_\nu\}$ и $g_{i i_{\nu+1}\cdots i_\varrho} = \varrho-\nu+1\,(i=i_1, i_2, \cdots, i_\nu)$, являются $A_{\nu-1}$-вырожденными ($Б_{\nu-1}$-вырожденными).

<u>Предложение I.5</u>. Пусть $(i_1, i_2, \cdots, i_\varrho)$, ϱ и J удовлетворяют условиям определения I.3а). Однозначно определенная точка $X_{i_1 i_2\cdots i_\varrho} = (x^1_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}, x^2_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}, \cdots, x^\varrho_{i_1 i_2\cdots i_\varrho})$ пересечения гиперплоскостей Γ_k, $k\in M_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}$, принадлежит точно К открытым полупространствам $H_i\setminus\Gamma_i$ $(i\in\{1, 2, \ldots, m\}\setminus M_{i_1 i_2\cdots i_\varrho})$ тогда и только тогда, когда последовательность $(i_1, i_2, \cdots, i_\varrho)$ является К-допустимой. При этом точка $X_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}$ принадлежит тем $H_i\setminus\Gamma_i$, для индексов i которых выполнены условия (I.I9).

<u>Предложение I.6</u>. Пусть при $\varrho >$ I неупорядоченная последовательность $(i_1, i_2, \cdots, i_\varrho)$ является J-вырожденной $(J\ge 0)$ и $M_{i_1 i_2\cdots i_\varrho} = \{i \mid d_{i i_1\cdots i_\varrho} = 0\}$. Пусть, кроме того, для $(k_1, k_2, \ldots \ldots k_{\varrho-1})$, составленной из элементов $M_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}$, выполняются условия (I.20). Тогда точка

$$X' = X_{i_1 i_2\cdots i_\varrho} - \operatorname{sgn} d_{k k_1\cdots k_{\varrho-1}}\, y_{k_1 k_2\cdots k_{\varrho-1}},$$

где $y_{k_1 k_2\cdots k_{\varrho-1}} = (\hat d^{1}_{k_1 k_2\cdots k_{\varrho-1}}, \hat d^{2}_{k_1 k_2\cdots k_{\varrho-1}}, \cdots, \hat d^{\varrho}_{k_1 k_2\cdots k_{\varrho-1}})$ принадлежит $(H_k\setminus\Gamma_k)\cap\Gamma_{k_1}\cap\Gamma_{k_2}\cap\ldots\cap\Gamma_{k_{\varrho-1}}$. Для того, чтобы X' принадлежала точно $K-1$ $(K=1, 2, \cdots, J+1)$ полупространствам H_j $(j\in M_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}\setminus\{k, k_1, \cdots, k_{\varrho-1}\})$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $(k_1, k_2, \cdots, k_{\varrho-1})$ являлась К-допустимой относительно множества $M_{i_1 i_2\cdots i_\varrho}$ и индекса k. При этом точка X' принадлежит тем $\Gamma_j\subset H_j$, для которых имеет место

(I.21A) и тем $H_j \setminus \Gamma_j$, для которых выполнено условие (I.21Б).

Следствиями предложений I.3-I.6 и определений вершин и направляющих векторов неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$ (см.[4], стр.112-114) являются следующие результаты.

Предложение I.7. Однозначно определенная точка $x_{i_1 i_2 \cdots i_\rho} = (x^1_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}, x^2_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}, \ldots, x^\rho_{i_1 i_2 \cdots i_\rho})$ пересечения гиперплоскостей Γ_k ($k \in M_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$) является вершиной многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$, заданного системой (I.8), тогда и только тогда, когда последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ будет либо J-вырожденной ($J \neq m-\rho$) и $(m-\rho-J)$-допустимой, либо $(m-\rho)$-вырожденной.

Предложение I.8. Пусть $\rho > 1$ и точка $x_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$ является вершиной многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$, заданного системой (I.8), т.е. последовательность $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ характеризована одним из двух условий предложения I.7. Пусть $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{\rho-1})$ является некоторой $(\rho-1)$-членной последовательностью в $M_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$, удовлетворяющей условиям (I.20). Ненулевой вектор

$$y'_{\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_{\rho-1}} = -\operatorname{sgn} d_{\kappa \kappa_1 \cdots \kappa_{\rho-1}} y_{\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_{\rho-1}} = -\operatorname{sgn} d_{\kappa \kappa_1 \cdots \kappa_{\rho-1}} (d^1_{\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_{\rho-1}}, d^2_{\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_{\rho-1}}, \ldots, d^\rho_{\kappa_1 \kappa_2 \cdots \kappa_{\rho-1}})$$

является направляющим вектором неограниченного ребра, проходящего через вершину $x_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$ для многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:

а) при 0-вырожденной и $(m-\rho)$-допустимой последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ любая последовательность $(j, \kappa_1, \ldots, \kappa_{\rho-1})$, где $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1, i_2, \ldots, i_\rho\}$ будет либо J_j-вырожденной и K_j-допустимой так, что $J_j + K_j < m-\rho$, либо А-вырожденной порядка I;

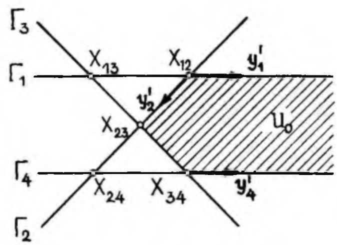
б) при J-вырожденной ($J = 1, 2, \ldots, m-\rho-1$) и $(m-\rho-J)$-допустимой последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ последовательность $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{\rho-1})$ будет $(J+1)$-допустимой относительно множества $M_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$ и индекса κ. Кроме того, для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus M_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$ последовательность $(j, \kappa_1, \ldots, \kappa_{\rho-1})$ будет либо вырожденной порядка J_j (J_j-вырожденной) и K_j-допустимой (в смысле определения I.3а)), так что $J_j + K_j < m-\rho$, либо А-вырожденной порядка I;

с) при $(m-\rho)$-вырожденной последовательности $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ последовательность $(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{\rho-1})$ будет $(m-\rho+1)$-допустимой относительно множества $M_{i_1 i_2 \cdots i_\rho}$ и индекса κ.

Замечание. Если $\rho = 1$, то $\mathcal{U}_0 \subset R_1$, где R_1 - первая координатная ось, направляющим вектором $y=(y^1)$ которой можно выбрать либо $y^1=+1$, либо $y^1=-1$. Поэтому при предположении, что $\mathcal{U}_0$ имеет неограниченное "ребро", его направляющим вектором будет один из двух возможных $y=(y^1)$ (см. § 2).

Проиллюстрируем предложения I.7 и I.8 на одном примере, рассматривая многоугольник $\mathcal{U}_0 \subset R_2$. Для определения всех вершин многоугольника $\mathcal{U}_0$ надо по предложению I.7 исследовать типы вырожденности и допустимости пар индексов, а для определения направляющих векторов неограниченных сторон по предложению I.8 исследуются типы вырожденности и допустимости одного индекса (см. определения I.2, I.3).

Пусть многоугольник $\mathcal{U}_0$ является пересечением четырех замкнутых полуплоскостей H_1, H_2, H_3, H_4, соответственно с граничными прямыми $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, которые пересекаются в точках $x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}$, т.е. $n=2$, $m=4$, $\rho=2$ (см. чертеж, рассматриваемый $\mathcal{U}_0$ - заштрихован).



Рассмотрим точку x_{12}. Так как она принадлежит только прямым Γ_1, Γ_2, то по предложению I.3 пара (I,2) является 0-вырожденной ($j=0$). Кроме того, точка x_{12} принадлежит открытым полуплоскостям $H_3 \setminus \Gamma_3$, $H_4 \setminus \Gamma_4$, и, в силу предложения I.5, пара (I,2) является 2-допустимой ($k = 2$). Следовательно, $j+k = 2 = m-\rho$, т.е. для пары (I,2) выполнено условие предложения I.7 и x_{12} будет вершиной многоугольника $\mathcal{U}_0$. Аналогично проверяется, что и точки x_{23}, x_{34} являются вершинами для $\mathcal{U}_0$.

Рассмотрим вершину x_{12}. Как было сказано, для пары (I,2) имеет место $J = 0$, $K = m - \rho = 2$ (случай а) предложения I.8). Определены ненулевые векторы y'_1, y'_2. В данном случае y'_1 будет направляющим вектором неограниченной стороны U_0, потому что при $j = 3 \in \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2\}$ пара (I,3) является 0-вырожденной и I-допустимой ($J_3 = 0$, $K_3 = 1$, $J_3 + K_3 - 1 < 2$) и при $j = 4$ пара (I,4) является A-вырожденной порядка I. Вектор y'_2 не будет направляющим вектором неограниченной стороны, так как при $j = 3 \in \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2\}$ пара (2,3) является 0-вырожденной и 2-допустимой ($J_3 = 0$, $K_3 = 2$, $J_3 + K_3 = 2 = m - \rho$).

Аналогичным образом проверяется, что через вершину x_{23} не проходит неограниченных сторон, но через x_{34} проходит одна с направляющим вектором y'_4, который в данном случае коллинеарен с y'_1. Следовательно, характеристиками рассматриваемого U_0 будут $r_0 = 3$, $p_1 = 1$, q_1 – не определен.

Соглашение. Пусть фиксированы два индекса $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m\}$ линейных неравенств (I.8), задающих $U_0 \subset R_\rho$. Если при i_1, i_2 выполнены условия совпадения из следствия I.2, то граничные гиперплоскости $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}$ замкнутых полупространств H_{i_1}, H_{i_2} в R_ρ совпадают. При таких предположениях по результатам [2] (стр. I25) пересечением $H_{i_1} \cap H_{i_2}$ будет либо все полупространство $H_{i_1} \equiv H_{i_2}$ (если $\operatorname{sgn} a_{i_1 1} = \operatorname{sgn} a_{i_2 1}$), либо $\Gamma_{i_1} \equiv \Gamma_{i_2}$ (если $\operatorname{sgn} a_{i_1 1} = -\operatorname{sgn} a_{i_2 1}$). В первом случае наша задача исследования пересечений m полупространств H_i ($i = 1, \dots, m$) приводится к самостоятельной задаче исследования пересечений $m - 1$ полупространств H_k $(k = 1, \dots, m;\ k \neq i_2)$. Поэтому в дальнейшем, когда выполнены сделанные предположения, целесообразно изучать только пересечения $U_0 = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_m \subset R_\rho$, соответствующие второму случаю. Система (I.8), задающая такие U_0, называется неприводимой. Тем самым, полупространства H_i $(i = 1, \dots, m)$, определенные неприводимой системой (I.8), будут различными, хотя некоторые граничные гиперплоскости Γ_i могут попарно совпадать. Если $\Gamma_{i_1} \equiv \Gamma_{i_2}$, то $\operatorname{sgn} a_{i_1 1} = -\operatorname{sgn} a_{i_2 1}$.

С помощью введенных понятий J-вырожденности и К-допустимости неупорядоченных последовательностей $(i_1, i_2, \dots, i_\rho)$ или $(i_1, i_2, \dots, i_{\rho-1})$ индексов $i_1, i_2, \dots, i_{\rho-1}, i_\rho \in \{1, 2, \dots, m\}$ можно дать характеристику классов описанной аффинно инвариантной классификации и соответствующие аналитические признаки многогранников $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$, заданных неприводимой системой (I.8). Отдельно рассматриваются три этапа.

I^0. Перечисление всех возможностей взаимного расположения гиперплоскостей Γ_i в R_ρ, заданных уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} a_{i\alpha} x^\alpha = b_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ m \geq 2,$$

при $rang\|a_{i\alpha}\| = \rho$, исследованием типов вырожденности всех различных последовательностей $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$. Комбинации типов вырожденности для всех $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$, совместных в смысле свойств определителей, представляют собой аналитические признаки соответствующих расположений гиперплоскостей Γ_i (ср. [I], стр. 247, 263). Основываясь на результатах предложений I.3, I.4 и следствий I.I, I.2 описываются типы расположений, т.е. указывается число различных точек пересечения гиперплоскостей Γ_i и параллельные или совпадающие Γ_i. Если перечислены все совместные комбинации типов вырожденности $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$, то полученная классификация является полной, т.е. она охватывает все возможные типы расположений Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ при $rang\|a_{i\alpha}\| = \rho$. Если гиперплоскости Γ_i будут граничными гиперплоскостями для $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$, то по сделанному соглашению из дальнейшего рассмотрения опускаются те случаи, когда среди Γ_i совпадают больше чем два. Остальные расположения называются допустимыми.

2^0. Перечисление типов многогранников $\mathcal{U}_0$, заданных неприводимой системой (I.8), по всевозможным комбинациям чисел r_0, p_1, $q_{\rho-1}$. При определении последних применяются описания всех допустимых расположений граничных гиперплоскостей Γ_i, учитывая определения вершин и неограниченных ребер многогранника $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$.

3^0. Нахождение аналитических признаков всех перечисленных типов многогранников $\mathcal{U}_0$ исследованием типов допустимости всех последовательностей $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ или $(i_1, i_2, \ldots, i_{\rho-1})$, основываясь на результатах предложений I.7, I.8. Все возможные допустимые классы взаимного расположения граничных гиперплоскостей Γ_i рассматриваются отдельно. Совместные в смысле свойств определителей комбинации типов вырожденности и допустимости всех $(i_1, i_2, \ldots, i_\rho)$ или $(i_1, i_2, \ldots, i_{\rho-1})$ являются искомыми аналитическими признаками рассматриваемого типа $\mathcal{U}_o \subset R_\rho$. Если перечислены всевозможные такие совместные комбинации, то перечень комплектов признаков всех типов многогранников $\mathcal{U}_o \subset R_\rho$ будет полным. Из соотношения (I.7) следует, что полученные аналитические признаки типов многогранников $\mathcal{U}_o \subset R_\rho$ будут также аналитическими признаками соответствующих многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ такого же типа, заданных неприводимой системой (I.I) при $rang\,\|a_{i\alpha}\| = \rho$.

§ 2. Признаки пересечений m замкнутых полупространств в R_n при $\rho = 1$

Если многогранник $\mathcal{U} \subset R_n$ задается неприводимой системой (I.I), для которой $\rho =$ I, то $\mathcal{U}_o \subset R_1$. Следовательно, при сделанных нами соглашениях $\mathcal{U}_o$ является замкнутым выпуклым подмножеством первой координатной оси. Опишем коротко все три этапа, на которые разделяется решение задачи классификации и характеризации множества $\mathcal{U}_o$, если координаты его точек $\mathcal{X} = (x^1)$ удовлетворяют неприводимой системе

$$a_{i1}x^1 \leq b_i\,,\; a_{i1} \neq 0\,,\quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{2.I}$$

Каждое неравенство системы определяет полупрямую H_i, произвольная точка $\mathcal{X} = (x^1)$ которой представима в виде

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_i + \lambda_i y_i\,,\quad \lambda_i \geq 0, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{X}_i \equiv \Gamma_i = (x^1_i) = (b_i / a_{i1})$ - граничная точка полупрямой H_i и $y_i = (y^1_i) = (-sgn\,a_{i1})$ - направляющий вектор полупрямой H_i.

I⁰. Признаки взаимного расположения m граничных точек Γ_i. В силу $\rho =$ I, в роли неупорядоченной последовательности индексов сейчас будет один индекс (i_1). Как было отмечено, для индекса (i_1) не определены А-, АБ- и Б-вырожденности никаких порядков. По определению I.2 а) индекс (i_1) будет J-вырожденным, если для точно J определителей $\bar{d}_{k_\sigma i_1}$ имеет место $\bar{d}_{k_\sigma i_1} = 0$, $k_\sigma \in \{1, 2, \ldots, m\} \setminus \{i_1\}$, $\sigma = 1, 2, \ldots, \mathrm{J}$; $\mathrm{J} = 0, 1, \ldots, m-1$. По следствию I.I соответствующие точки $\mathcal{X}_{k_\sigma}$ должны совпадать с $\mathcal{X}_{i_1}$. Но так как по предположению система (2.I) является неприводимой, то каждый индекс (i_1) может быть либо 0-вырожденным, либо I-вырожденным. В последнем случае, по сделанному соглашению $sgn\,a_{i_1 1} = -sgn\,a_{s1}$. Очевидно, что тогда и индекс (k_γ) будет I-вырожденным. Поэтому имеются две возможности.

I) Все индексы (i), $i=1,\dots,m$ являются 0-вырожденными. Тогда все точки x_i – различные.

2) Существует по крайней мере одна пара индексов $(i_1),(i_2)$, $i_1,i_2\in\{1,\dots,m\}$, являющихся I-вырожденными. Тогда соответствующие точки x_{i_1},x_{i_2} совпадают.

2°. Перечисление типов замкнутых выпуклых подмножеств прямой R_1. Их будет четыре: отрезок ($r_0 = 2$, $p_1 = 0$), полупрямая ($r_0 = I$, $p_1 = I$), точка ($r_0 = I$, $p_1 = 0$), пустое множество ($r_0 = p_1 = 0$). Отметим, что число q_0 в рассматриваемом случае не определено. Если граничные точки Γ_i множества U_0 все различные, то $r_0 \leq 2$, если же существует хотя бы одна пара совпадающих граничных точек, то $r_0 \leq I$. Соответствующими многогранниками $U\subset R_n$, полученными из указанных U_0 по формуле (I.7), будут: при $r_{n-1} = 2$, $p_n = 0$ – n-мерный слой, при $r_{n-1} = I$, $p_n = I$ – замкнутое полупространство, при $r_{n-1} = I$, $p_n = 0$ – $(n - I)$-мерная плоскость; при $r_{n-1} = p_n = 0$ – пустое множество.

3°. Аналитические признаки всех четырех типов $U\subset R_n$ при $\rho = I$.

<u>Предложение 2.I</u>. а) Пусть все индексы (i), $i=1,\dots,m$, являются 0-вырожденными. Тогда имеет место одна из возможностей:

I) существует точно два индекса (i_1), (i_2), являющихся $(m-1)$-допустимыми,

2) существует точно один индекс (i_1), являющийся $(m-1)$-допустимым,

3) не существует ни одного индекса, являющегося $(m-1)$-допустимым.

б) Пусть $(i_1),(i_2)$ – пара индексов, являющихся I-вырожденными. Тогда либо

I) индексы $(i_1),(i_2)$ будут $(m-2)$-допустимыми,

2) индексы i_1,i_2 не будут $(m-2)$-допустимыми.

Доказательство этого предложения основывается на определении I.3 а) допустимости индекса (i) и соотношении

$$\bar{d}_{k_\delta i} = \begin{vmatrix} a_{k_\delta 1} & b_{k_\delta} \\ a_{i1} & b_i \end{vmatrix} = a_{k_\delta 1} a_{i1} (b_i / a_{i1} - b_{k_\delta} / a_{k_\delta 1}), \; a_{k_\delta 1} a_{i1} \neq 0.$$

Аналитические признаки всех четырех существующих типов $\mathcal{U}$ представляются в виде предложений, дающих необходимые и достаточные условия для того, чтобы неприводимой системой (I.I) при $\rho =$ I задавался $\mathcal{U}$ указанного типа. Так как доказательства этих предложений вполне аналогичны доказательствам, приведенным в [2], и легко следуют из введенных нами определений I.2, I.3 и предложений I.7, I.8, то мы их опустим.

Предложение 2.2. Для того, чтобы $\mathcal{U}$, заданный неприводимой системой (I.I) при $\rho=$I, являлся n-мерным слоем, (n-I)-мерные грани которого проходили бы через точки x_{i_1}, x_{i_2}, необходимо и достаточно, чтобы все индексы (i), $i=1,\dots,m$ являлись 0-вырожденными и существовали точно два индекса (i_1), (i_2), являющихся $(m-1)$-допустимыми. Тогда любая точка $x \in \mathcal{U}$ представима в виде

$$x = \alpha_1 x_{i_1} + \alpha_2 x_{i_2} + \sum_{t=2}^{\tilde{n}} \gamma_t z_t,$$

где z_t определены формулами (I.5), $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, γ_t - произвольные.

Предложение 2.3. Для того, чтобы $\mathcal{U}$, заданный неприводимой системой (I.I) при $\rho=$ I, являлся замкнутым полупространством, необходимо и достаточно, чтобы все индексы (i), $i=1,\dots,m$, являлись 0-вырожденными и существовал бы точно один индекс (i_1), являющийся $(m-1)$-допустимым. Тогда $\mathcal{U}$ совпадает с H_{i_1} и любая его точка x представима в виде

$$x = x_{i_1} + \beta_{i_1} y_{i_1} + \sum_{t=2}^{\tilde{n}} \gamma_t z_t,$$

где $x_{i_1} = (b_{i_1}/a_{i_1 1}, 0, \dots, 0)$, $y_{i_1} = (-\operatorname{sgn} a_{i_1 1}, 0, \dots, 0)$, z_t определены формулами (I.5) и $\beta_{i_1} \geq 0$, γ_t - произвольные.

Предложение 2.4. Для того, чтобы $\mathcal{U}$, заданный неприводимой системой (I.I) при $\rho =$ I, являлся гиперплоскостью, проходящей через точку $x_{i_1} = (b_{i_1}/a_{i_1 1}, 0, \dots, 0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовала одна пара индексов (i_1), (i_2),

$i_1, i_2 \in \{1, \dots, m\}$, являющихся I-вырожденными и $(m-2)$-допустимыми. Тогда $\mathcal{U}$ совпадает с $\Gamma_{i_1} \equiv \Gamma_{i_2}$.

Предложение 2.5. Для того, чтобы неприводимая система (I.I) являлась при $\rho = I$ противоречивой, т.е. - чтобы $\mathcal{U}$ являлся пустым множеством, необходимо и достаточно, чтобы все индексы (i), $i = 1, \dots, m$, являлись J-вырожденными и K-допустимыми, и $J + K < m-1$.

Из результатов предложения 2.I следует, что все возможности совместных комбинаций типов вырожденности и допустимости индексов (i), $i = 1, \dots, m$ исчерпаны предложениями 2.2 - 2.5 и поэтому перечень комплектов признаков имеющихся четырех типов $\mathcal{U} \subset R_n$ является полным.

§ 3. Признаки пересечений четырех замкнутых полупространств в R_n при $\rho = 2$

Кроме примера, приведенного в предыдущем параграфе на применение предлагаемой методики классификации многогранников, нами подробно рассмотрен случай, когда многогранник $\mathcal{U}$ в R_n является пересечением четырех ($m = 4$) замкнутых полупространств. Задача классификации и описания таких многогранников $\mathcal{U}$, заданных неприводимой системой

$$\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha} x^{\alpha} \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.I}$$

приводится к четырем самостоятельным задачам классификации и описания многогранников $\mathcal{U}_0 \subset R_\rho$, $\rho = I, 2, 3, 4$. Эта задача при $\rho = I$ нами полностью решена в § 2 для случая произвольного m, так что в рассматриваемом случае существенно решать поставленные задачи при $2 \leq \rho \leq 4$.

Пусть в (3.I) имеет место $\rho = 2$, следовательно, $\mathcal{U}_0$ является многоугольником на плоскости R_2, заданной уравнениями $x^3 = \dots = x^n = 0$. Многоугольник $\mathcal{U}_0$ определен пересечением $\mathcal{U}_0 = H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \cap R_2$, в котором все H_i различные. Другими словами, координаты произвольной точки $x \in \mathcal{U}_0$ удовлетворяют неприводимой системе линейных неравенств

$$\sum_{\alpha=1}^{2} a_{i\alpha} x^{\alpha} \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \tag{3.2}$$

где по крайней мере один $d_{i_1 i_2} \neq 0$, $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 4\}$. Ниже описываются все три этапа, на которые разделяется решение задачи классификации многоугольников $\mathcal{U}_0 \subset R_2$ (см. п.2 § I).

I^{0}. Признаки взаимного расположения четырех прямых на плоскости R_2. Граничными гиперплоскостями Γ_i в рассматриваемом случае являются граничные прямые Γ_i на плоскости R_2, задаваемые уравнениями

$$\sum_{\alpha=1}^{2} a_{i\alpha} x^{\alpha} = b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \tag{3.3}$$

Исследование взаимного расположения четырех прямых разбивается при $\rho = 2$ на четыре подслучая:

I все Γ_i (i = I,...,4) попарно пересекаются;

II среди Γ_i (i = I,...,4) имеется точно одна пара параллельных;

III среди Γ_i (i = I,...,4) имеется точно две пары параллельных;

IУ среди Γ_i (i = I,...,4) имеется точно три пары параллельных.

Если пар параллельных прямых больше чем три, то ρ = I. Тогда либо все Γ_i параллельны между собой, либо часть из них совпадают друг с другом (ср. предложение 2.I и следствие I.2). В силу предположения $\rho = 2$, этот случай в дальнейшем рассматриваться не будет.

Как было сказано, аналитические признаки всевозможных типов взаимного расположения четырех прямых на R_2 при $\rho = 2$ даются в терминах или J-вырожденности (J = 0,I,2), или А-, или Б-вырожденности порядка I существенных шести пар индексов (i_1, i_2), $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 4\}$. Так как существует единственная возможность $\tau = \rho - 1 = 1$, то АБ-вырожденность пары (i_1, i_2) не определена. Искомые признаки для всех случаев I-IУ получаются, основываясь на результатах предложений I.3, I.4 или следствия I.2, и представляются в виде таблицы 3.I.

Таблица 3.1

№	Тип вырожденности пары						Параллельные прямые	Совпадающие прямые	Число точек пересечения
	(i_1,i_2)	(i_1,i_3)	(i_1,i_4)	(i_2,i_3)	(i_2,i_4)	(i_3,i_4)			
I А	ОВ	ОВ	ОВ	ОВ	ОВ	ОВ	-	-	6
Б	IВ	IВ	ОВ	IВ	ОВ	ОВ	-	-	4
В	2В	2В	2В	2В	2В	2В	-	-	I
II А	ОВ	ОВ	ОВ	ОВ	ОВ	АВ	$\Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	-	5
Б	IВ	IВ	ОВ	IВ	ОВ	АВ	$\Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	-	3
В	ОВ	IВ	IВ	IВ	IВ	БВ	-	$\Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	3
Г	2В	2В	2В	2В	2В	БВ	-	$\Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	I
III А	ОВ	АВ	ОВ	ОВ	АВ	ОВ	$\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_3}; \Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_4}$	-	4
Б	IВ	АВ	IВ	IВ	БВ	IВ	$\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_3}$	$\Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_4}$	2
В	2В	БВ	2В	2В	БВ	2В	-	$\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_3}; \Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_4}$	I
IV А	ОВ	ОВ	ОВ	АВ	АВ	АВ	$\Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	-	3
Б	IВ	IВ	ОВ	БВ	АВ	АВ	$\Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_4}; \Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	$\Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_3}$	2
В	2В	2В	2В	БВ	БВ	БВ	-	$\Gamma_{i_2}, \Gamma_{i_3}, \Gamma_{i_4}$	I

Предложение 3.I. Комбинации типов вырожденности шести различных пар индексов, указанные случаями IА-IУВ таблицы 3.I, исчерпывают все возможности при $\rho = 2$.

Этот результат доказывается при помощи определения I.2 типов вырожденности, учитывая свойства определителей.

Каждой из строк IА-IУВ таблицы 3.I соответствует предложение, которое дает необходимые и достаточные условия для определения взаимного расположения прямых Γ_i, заданных системой (3.3) при $\rho = 2$. Эти предложения доказываются при помощи предложений I.3, I.4 с учетом определения I.2. Сформулируем для примера предложение, соответствующее условиям IА.

Предложение 3.2. Для того, чтобы четыре прямые, задаваемые системой (3.3) на плоскости R_2, пересекались в шести различных точках, необходимо и достаточно, чтобы все шесть пар (i_1, i_2) индексов $i_1, i_2 \in \{1, \dots, 4\}$ были 0-вырожденными.

Если рассматриваемые четыре прямые Γ_i, заданные системой (3.3), являются граничными прямыми многоугольника $\mathcal{U}_c \subset R_2$, то по нашему соглашению все взаимные расположения прямых, соответствующие условиям IА-IУБ, являются допустимыми. Единственное недопустимое расположение граничных прямых определяется условиями IУ8(совпадают три прямые).

2^0. Перечисление типов многоугольников $\mathcal{U}_0 \subset R_2$, заданных системой (3.2).

Предложение 3.3. Для многоугольника $\mathcal{U}_0 \subset R_2$, задаваемого системой (3.2), справедливы соотношения $r_0 \le 4$, $p_1 \le 2$, $q_1 \le 2$. Всевозможные допустимые комбинации (r_0, p_1, q_1) представлены в таблице 3.2.

Таблица 3.2.

№	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II	I2	I3
r_0	4	4	4	3	3	3	2	2	2	I	I	I	0
p_1	0	0	0	0	I	2	0	I	2	0	I	2	0
q_1	0	I	2	0	-	-	0	-	-	0	-	-	0

Доказательство этого предложения основывается на определениях и свойствах вершин и сторон многоугольника $\mathcal{U}_0 \subset R_2$ (см. [4], стр. II2-II4), на определениях чисел r_0, p_1, q_1 и на результатах, указанных в трех последних столбцах таблицы 3.I.

Для целостности изложения приведем определения всевозможных типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, заданных системой (3.I) при $\gamma = 2$, учитывая предложение 3.3 и формулу (I.6), где векторы z_t, $t = 3, \dots, n$, заданы формулами (I.5).

Определение 3.I. Пусть $r_0 = 4$ и соответствующие вершины $\mathcal{U}_0$ обозначены через x_1, x_2, x_3, x_4. Так как $p_1 = 0$, то любая точка x выпуклого многогранника $\mathcal{U} \subset R_n$ представима в виде (см. [4], стр. II5)

$$x = \sum_{u=1}^{4} \alpha_u x_u + \sum_{t=3}^{n} \gamma_t z_t, \qquad (3.4)$$

$$\alpha_u \ge 0, \quad \sum_{u=1}^{4} \alpha_u = 1, \quad \gamma_t \quad \text{— произвольные.}$$

Если $q_1 = 0$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерной призмой над четырехугольником ($\mathcal{U}_0$ - общий выпуклый четырехугольник). Если $q_1 = 1$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерной призмой над трапецией ($\mathcal{U}_0$ - трапеция). Если $q_1 = 2$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерной призмой над параллелограммом ($\mathcal{U}_0$ - параллелограмм).

Определение 3.2. Пусть $r_0 = 3$ и соответствующие вершины $\mathcal{U}_0$ обозначены через x_1, x_2, x_3. По предложению 3.3 многоугольник $\mathcal{U}_0$ может иметь p_1 направляющих векторов неограниченных сторон. Пусть при $p_1 \neq 0$ они обозначены через $y_1, \dots, y_{p_1}$. Тогда для любой $x \in \mathcal{U}$ (см. [43]) имеет место

$$x = \sum_{u=1}^{3} \alpha_u x_u + \sum_{s=1}^{p_1} \beta_s y_s + \sum_{t=3}^{n} \gamma_t z_t, \tag{3.5}$$

$\alpha_u, \beta_s \geq 0, \sum_{u=1}^{3} \alpha_u = 1, \gamma_t$ - произвольные,

где при $p_1 = 0$ считаем $\sum_{s=1}^{0} \beta_s y_s = 0$. Если $p_1 = q_1 = 0$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерной трехгранной призмой ($\mathcal{U}_0$ - треугольник). Если $p_1 = 2$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерным двукратно усеченным двугранным углом ($\mathcal{U}_0$ - двукратно усеченный угол). Если $p_1 = 1$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерным двукратно усеченным слоем ($\mathcal{U}_0$ - двукратно усеченная полоса).

Определение 3.3. Пусть $r_0 = 2$ и соответствующие вершины $\mathcal{U}_0$ обозначены через x_1, x_2. По предложению 3.3 многоугольник $\mathcal{U}_0$ может иметь неограниченные стороны и в обозначениях определения 3.2 для любой точки $x \in \mathcal{U}$ [4] имеет место

$$x = \sum_{u=1}^{2} \alpha_u x_u + \sum_{s=1}^{p_1} \beta_s y_s + \sum_{t=3}^{n} \gamma_t z_t, \tag{3.6}$$

$\alpha_u, \beta_s \geq 0, \sum_{u=1}^{2} \alpha_u = 1, \gamma_t$ - произвольные,

где при $p_1 = 0$ считаем $\sum_{s=1}^{0} \beta_s y_s = 0$. Если $p_1 = q_1 = 0$, то $\mathcal{U}$ является (n - 1)-мерным слоем ($\mathcal{U}_0$ - отрезок). Если $p_1 = 2$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерным усеченным двугранным углом ($\mathcal{U}_0$ - усеченный угол) [3]. Если $p_1 = 1$, то $\mathcal{U}$ называется n-мерным усеченным слоем ($\mathcal{U}_0$ - усеченная полоса) [3].

Определение 3.4. Пусть $r_0 = 1$, т.е. $\mathcal{U}_0$ имеет одну вершину x_1. Тогда с учетом предложения 3.3 в обозначениях определения 3.2 любая точка $x \in \mathcal{U}$ представима в виде [4]

$$x = x_1 + \sum_{s=1}^{p_1} \beta_s y_s + \sum_{t=3}^{n} \gamma_t z_t, \tag{3.7}$$

$\beta_s \geq 0, \sum_{s=1}^{c} \beta_s y_s = 0, \gamma_t$ - произвольные.

Если $p_1 = 0$, то $\mathcal{U}$ является (n -2)-мерной плоскостью ($\mathcal{U}$ - точка). Если $p_1 = 1$, то $\mathcal{U}$ является (n - 1)-мерной замкнутой полуплоскостью ($\mathcal{U}_0$ - полупрямая). Если $p_1 = 2$, то

$\mathcal{U}$ является n-мерным двугранным углом ($\mathcal{U}_0$ - угол).

Если $r_0 = p_1 = q_1 = 0$, то $\mathcal{U}$, а также $\mathcal{U}_0$ будет пустым множеством.

Вообще существует I3 типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, являющихся пересечением четырех различных полупространств, заданных неприводимой системой (3.I) при $\rho = 2$. Отметим, что при $n = 2$ во всех формулах представления (3.4)-(3.7) считается

$$\sum_{t=3}^{2} \gamma_t z_t = 0.$$

3°. Аналитические признаки всех типов $\mathcal{U} \subset R_n$, заданных системой (3.I) при $\rho = 2$ даются с учетом результатов, представленных в таблице 3.I. Случаи IA,Б, IIA-B, IIIA,Б таблицы 3.I рассмотрены в таблице 3.3 и классифицированы по K-допустимости пар (i_1, i_2). Случаям IB, IIГ, IIIB соответствует таблица 3.4, где классификация дается по K-допустимости индексов (i_1).

С помощью применяемых определений понятий типов вырожденности и допустимости, и соответствующих геометрических истолкований, сформулированных в виде предложений I.3, I.4, I.5, I.6, можно обосновать, почему в таблицах 3.3, 3.4 не указаны типы допустимости некоторых пар (i_1, i_2) или индекса (i_1) (они либо не определены, либо совпадают с некоторыми другими). Доказывается также результат, который можно сформулировать следующим образом.

<u>Предложение 3.4</u>. Комбинации типов допустимости пар (i_1, i_2) и индексов (i_1), указанные в таблицах 3.3, 3.4, исчерпывают все возможности при $m = 4$, $\rho = 2$.

Аналогично этапу I° исследования взаимного расположения четырех прямых на плоскости R_2, строкам таблиц 3.3, 3.4 сейчас тоже соответствуют некоторые предложения. Из этих таблиц видно, что часть типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ определяется только одним комплектом признаков (n-мерные призмы над четырехугольниками, n-мерные призмы над трапециями, n-мерные призмы над параллелограммами, n-мерные двукратно усеченные двугранные углы, n-мерные двукратно усеченные слои). Но остальные восемь типов многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$, которые получаются из системы (3.I) и были определены на этапе 2°, определяются несколькими комплектами признаков из соот-

Таблица 3.3

№	Тип многогранников $U \subset R_n$ ($\rho = 2$)	Аналитические признаки типа						Размерность	r_0	p_1	q_1
		(i_1,i_2)	(i_1,i_3)	(i_1,i_4)	(i_2,i_3)	(i_2,i_4)	(i_3,i_4)				
I А I.	n-мерная призма над четырехугольником	IД	2Д	2Д	2Д	2Д	IД	n	4	0	0
2.	n-мерная трехгранная призма	2Д	2Д	IД	2Д	IД	IД	n	3	0	0
3.	n-мерный двукратно усеченный угол	2Д	2Д	IД	IД	ОД	2Д	n	3	2	-
4. а)	n-мерный усеченный двугранный угол	2Д	IД	ОД	2Д	IД	ОД	n	2	2	-
б)		IД	IД	IД	2Д	2Д	ОД				
5. а)	n-мерный двугранный угол	2Д	IД	ОД	IД	ОД	IД	n	I	2	-
б)		ОД	ОД	IД	IД	2Д	ОД				
6.	пустое множество	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	-			
I Б I.	n-мерная трехгранная призма	IД	-	2Д	-	2Д	IД	n	3	0	0
2. а)	n-мерный усеченный двугранный угол	IД	-	2Д	-	IД	ОД	n	2	2	-
б)		ОД	-	2Д	-	2Д	IД				
3. а)	n-мерный двугранный угол	IД	-	ОД	-	ОД	IД	n	I	2	-
б)		ОД	-	2Д	-	IД	ОД				
4.	$(n-2)$-мерная плоскость	IД	-	IД	-	IД	IД	$n-2$	I	0	0
5.	пустое множество	ОД	-	IД, ОД	-	IД, ОД	IД, ОД	-	0	0	0
II А I.	n-мерная призма над трапецией	IД	2Д	2Д	2Д	2Д	-	n	4	0	I
2.	n-мерная трехгранная призма	2Д	2Д	IД	2Д	IД	-	n	3	0	0
3.	n-мерный двукратно усеченный слой	2Д	2Д	IД	IД	2Д	-	n	3	I	-
4.	n-мерный усеченный слой	IД	2Д	2Д	IД	IД	-	n	2	I	-
5. а)	n-мерный усеченный двугранный угол	IД	2Д	ОД	2Д	ОД	-	n	2	2	-
б)		2Д	2Д	IД	IД	ОД	-				
6. а)	n-мерный двугранный угол	IД	2Д	ОД	IД	IД	-	n	I	2	-
б)		2Д	IД	ОД	IД	ОД	-				
7.	пустое множество	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	IД, ОД	-	-	0	0	0
II Б I.	n-мерная трехгранная призма	IД	-	2Д	-	2Д	-	n	3	0	0
2.	n-мерный усеченный двугранный угол	ОД	-	2Д	-	2Д	-	n	2	2	-
3.	n-мерный усеченный слой	IД	-	2Д	-	IД	-	n	2	I	-
4. а)	n-мерный двугранный угол	IД	-	ОД, IД	-	ОД	-	n	I	2	-
б)		ОД	-	2Д	-	IД	-				

№	Тип многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ ($\rho = 2$)	Аналитические признаки типа						Размерность $\mathcal{U} \subset R_n$	r_0	p_1	q_1
		(i_1,i_2)	(i_1,i_3)	(i_1,i_4)	(i_2,i_3)	(i_2,i_4)	(i_3,i_4)				
II Б 5.	$(n-2)$-мерная плоскость	IД	–	IД	–	IД	–	$n-2$	I	0	0
6.	пустое множество	ОД	–	IД,ОД	–	IД,ОД	–	–	0	0	0
II В I.	$(n-I)$-мерный слой	IД	IД	–	IД	–	–	$n-1$	2	0	0
2.	$(n-I)$-мерная замкнутая полуплоскость	IД	IД	–	ОД	–	–	$n-1$	I	I	–
3.	пустое множество	IД	ОД	–	ОД	–	–	–	0	0	0
IIIА I.	n-мерная призма над параллелограммом	2Д	–	2Д	2Д	–	2Д	n	4	0	2
2.	n-мерный усеченный слой	2Д	–	2Д	IД	–	IД	n	2	I	–
3.	n-мерный двугранный угол	2Д	–	IД	IД	–	ОД	n	I	2	–
4.	пустое множество	ОД	–	ОД	ОД	–	ОД	–	0	0	0
IIIБ I.	$(n-I)$-мерный слой	IД	–	–	IД	–	–	$n-1$	2	0	0
2.	$(n-I)$-мерная замкнутая полуплоскость	IД	–	–	ОД	–	–	$n-1$	I	I	–
3.	пустое множество	ОД	–	–	ОД	–	–	–	0	0	0
IУ А I.	n-мерный усеченный слой	2Д	2Д	IД	–	–	–	n	2	I	–
2.	n-мерный двугранный угол	2Д	IД	ОД	–	–	–	n	I	2	–
3.	пустое множество	IД,ОД	IД,ОД	IД,ОД	–	–	–	–	0	0	0
IУ Б I.	$(n-I)$-мерная замкнутая полуплоскость	IД	–	IД	–	–	–	$n-1$	I	I	–
2.	пустое множество	ОД	–	IД	–	–	–	–	0	0	0

Таблица 3.4

№	Тип многогранников $\mathcal{U} \subset R_n$ ($\rho = 2$)	Аналитические признаки типа (i_1)	(i_2)	(i_3)	(i_4)	Размерность $\mathcal{U} \subset R_n$	r_1	p_1	q_1
I B I.	n-мерный двугранный угол	3Д	3Д	2Д	2Д	n	I	2	–
2	$(n-2)$-мерная плоскость	2Д, IД	2Д, IД	2Д, IД	2Д, IД	$n-2$	I	0	0
II Г I.	$(n-1)$-мерная замкнутая полуплоскость	2Д	2Д	3Д	–	$n-I$	I	I	–
2.	$(n-2)$-мерная плоскость	2Д	2Д	2Д	–	$n-2$	I	0	0
III B I.	$(n-2)$-мерная плоскость	2Д	2Д	–	–	$n-2$	I	0	0

ветствующих строк таблиц 3.3, 3.4. В первом случае эти комплекты, а во втором случае их серии, представляют собой необходимые и достаточные условия для того, чтобы $U \subset R_n$ был многогранником данного типа. Для примера сформулируем предложение, соответствующее первой строке таблицы 3.3.

Предложение 3.5. Для того, чтобы многогранник $U \subset R_n$, задаваемый неприводимой системой (3.I) при $\rho = 2$, являлся n-мерной призмой над четырехугольником, $(n-2)$-мерные грани которой проходят через точки $x_{i_1 i_3}, x_{i_1 i_4}, x_{i_2 i_3}, x_{i_2 i_4}$, необходимо и достаточно, чтобы все шесть пар (i, j) индексов $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,3,4\}$ были 0-вырожденными, (i_1, i_3), (i_1, i_4), (i_2, i_3), (i_2, i_4) – 2-допустимыми и (i_1, i_2), (i_3, i_4) – I-допустимыми.

Доказательство этого предложения аналогично доказательствам, приведенным в [2] и основывается на определениях I.2, I.3 и результатах предложений I.3 – I.7.

Для полного решения поставленной нами в начале этого параграфа задачи классификации и описания $U \subset R_n$, заданных системой (3.I), остается рассмотреть случаи $\rho = 3$, $\rho = 4$. Они аналогичны случаю $\rho = 2$ и будут изложены отдельно.

Литература

I. Постников М. М., Аналитическая геометрия. Москва, 1973.

2. Рийвес К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. I Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1972, 305, 116–126.

3. Рийвес К., Об аффинной классификации и признаках выпуклых многогранников в евклидовом пространстве R_n. II Уч. зап. Тартуск. ун-та, 1974, 342, 110–121.

4. Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г., Линейное программирование. Теория, методы и приложения. Москва, 1969.

Поступило
8 IУ 1974

EUKLEIDILISE RUUMI R_n KUMERATE HULKTAHUKATE AFIINSEST KLASSIFIKATSIOONIST JA TUNNUSTEST. III

K.Riives

R e s ü m e e

Töös kirjeldatakse meetodit, mille abil saab anda ruumi R_n selliste kumerate hulktahukate afiinselt invariantse klassifikatsiooni, mis esitatakse lõpliku arvu m kinnise poolruumi lõikena, kusjuures poolruume määrava lineaarse võrratuste süsteemi kordajate maatriksi astak olgu $1 \leq \rho \leq \min(n,m)$. Täielikult on klassifitseerimisülesanne lahendatud ja antud vastavate klasside analüütilised tunnused mõningatel lihtsamatel erijuhtudel, kui klasside arv pole väga suur (m - suvaline, $\rho = 1$ või m = 2,3,4 [2], [3]). Töös esitatakse ülesande täielik lahendus, kui m on suvaline ja $\rho = 1$, ning m = 4, $\rho = 2$.

ABOUT AFFINE CLASSIFICATION AND CHARACTERS OF CONVEX POLYTOPES IN EUCLIDEAN SPACE R_n. III

K.Riives

S u m m a r y

In the paper a method of affinely invariant classification of convex polytopes, intersections of m closed semispaces in Euclidean space R_n, is described. Let the rank of the system of linear inequalities, determining these m semispaces be $1 \leq \rho \leq \min(n,m)$. The problem of classification is completely solved in some particular case, when the number of classes is not very large (m - arbitrary, $\rho = 1$ or m = 2,3,4 [2], [3]) and the characters of corresponding classes of convex polytopes are pointed out. Complete resolution of the problem is presented, when m - arbitrary, $\rho = 1$, and m = 4, $\rho = 2$.

О НАХОЖДЕНИИ КРАЙНИХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ТОЧЕК ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R_3

Е.Ворошнина

Кафедра математической статистики и программирования

Данная статья посвящается нахождению всех крайних целочисленных точек ограниченного многогранника в трехмерном пространстве. В книге Корбута, Финкельштейна ([1], стр. 122) говорится, что эта задача "не менее сложна, чем задача целочисленного программирования, и в настоящее время неизвестны эффективные алгоритмы для ее решения". Поэтому разработка подобного алгоритма для пространства R_3 представляется важным частным случаем. Полученный результат дает возможность найти выпуклую оболочку целочисленных точек и решить соответствующую задачу целочисленного программирования с произвольной целевой функцией.

1. Приведем некоторые определения, используемые нами в дальнейшем. Заметим, что определяемые ниже понятия можно было бы вводить, выбрав произвольную координатную ось (x, y или z). Нами сделан выбор лишь для обеспечения простоты геометрической интерпретации.

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве R_3 задана система неравенств

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &\le b_1, \\ \dots\dots\dots\dots&\dots\dots \\ a_{m1}x + a_{m2}y + a_{m3}z &\le b_m. \end{aligned} \qquad (1.1)$$

Известно (см. [3], стр. 108-109), что система неравенств типа (1.1) определяет выпуклый многогранник. Обозначим этот многогранник через $\mathcal{L}$. Предположим, что система (1.1) задает ограниченный многогранник.

Целочисленная точка $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}$ называется верхней целочисленной точкой относительно координатной оси z, если точка $(x_0, y_0, z_0+1) \notin \mathcal{L}$, и нижней целочисленной точкой относительно z, если точка $(x_0, y_0, z_0-1) \notin \mathcal{L}$. Совокупность всех верхних и нижних целочисленных точек называется множеством крайних целочисленных точек и обозначается через $Z(\mathcal{L})$.

Заметим, что поскольку нами рассматриваются лишь целочисленные крайние точки, то будем всюду ниже говорить о крайних верхних и о крайних нижних точках, подразумевая их целочисленными.

Полупространство

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z \leq b_i$$

называется верхним (нижним) относительно координатной оси z, если $a_{i3} > 0$ $(a_{i3} < 0)$, а соответствующая ему грань многогранника $\mathcal{L}$ верхней (нижней) гранью.

Проекцией множества $\mathcal{L}$ на координатную плоскость x, y называется множество $\mathcal{L}'$ всех таких точек (x, y), для которых существует хотя бы одно значение z, что точка $(x, y, z) \in \mathcal{L}$.

В силу ограниченности $\mathcal{L}$ проекция $\mathcal{L}'$ представляет собой выпуклый ограниченный многоугольник, задаваемый на плоскости x, y при помощи неравенств.

Приведем некоторые теоретические соображения, на которых основывается метод нахождения крайних точек для системы (1.1).

Лемма 1.1. Проекция пересечения конечного числа полуплоскостей F_i $(i = 1, 2, \cdots, k)$ равна пересечению одноименных проекций пересечений всех пар этих множеств, т.е.

$$P_{x,y}\left(\bigcap_{j=1}^{k} F_j\right) = \bigcap_{j=1}^{k} \bigcap_{i=1}^{k} P_{x,y}(F_j \cap F_i). \qquad (1.2)$$

Приведенная лемма является следствием из теоремы 7 статьи Шапота ([2], стр. 1119), где рассматривались множества более общего вида.

Лемма 1.2. Пусть заданы верхнее относительно оси z полупространство

$$a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z - b_i \leq 0 \qquad (1.3)$$

и нижнее полупространство

$$a_{j1}x + a_{j2}y + a_{j3}z - b_j \leqslant 0. \qquad (1.4)$$

Тогда проекция пересечения (1.3) и (1.4) на координатную плоскость x, y задается неравенством

$$\left(\frac{a_{i1}}{a_{i3}} - \frac{a_{j1}}{a_{j3}}\right)x + \left(\frac{a_{i2}}{a_{i3}} - \frac{a_{j2}}{a_{j3}}\right)y - \frac{b_i}{a_{i3}} + \frac{b_j}{a_{j3}} \leqslant 0. \qquad (1.5)$$

Доказательство. Неравенства (1.3), (1.4) и (I.5) представим в виде

$$z \leqslant -\frac{a_{i1}}{a_{i3}}x - \frac{a_{i2}}{a_{i3}}y + \frac{b_i}{a_{i3}} \equiv f_i(x,y), \qquad (1.6)$$

$$z \geqslant -\frac{a_{j1}}{a_{j3}}x - \frac{a_{j2}}{a_{j3}}y + \frac{b_j}{a_{j3}} \equiv f_j(x,y), \qquad (1.7)$$

$$\frac{a_{i1}}{a_{i3}}x + \frac{a_{i2}}{a_{i3}} - \frac{b_i}{a_{i3}} \leqslant \frac{a_{j1}}{a_{j3}}x + \frac{a_{j2}}{a_{j3}}y - \frac{b_j}{a_{j3}}.$$

Последнее, учитывая введенные обозначения, перепишем

$$g_j(x,y) \leqslant f_i(x,y).$$

Возьмем произвольную точку $(x_0, y_0) \in P_{xy}(z \leqslant f_i \cap z \geqslant g_j)$. Тогда найдется хотя бы одно значение $z = z_0$, что выполняются неравенства:

$$z_0 \leqslant f_i(x_0, y_0), \qquad z_0 \geqslant g_j(x_0, y_0),$$

следовательно, верно

$$g_j(x_0, y_0) \leqslant f_i(x_0, y_0),$$

а для значений $x = x_0$, $y = y_0$ верно (1.5), откуда

$$P_{x,y}(z \leqslant f_i \cap z \geqslant g_j) \subset \{(x,y) \mid g_j(x,y) \leqslant f_i(x,y)\}.$$

С другой стороны, возьмем произвольную точку (x_0, y_0) такую, что

$$g_j(x_0, y_0) \leqslant f_i(x_0, y_0).$$

Тогда нетрудно найти значения $z_0^i = f_i(x_0, y_0)$, $z_0^j = g_j(x_0, y_0)$, причем $z_0^j \leqslant z_0^i$, и для любого числа $z_0 \in [z_0^j, z_0^i]$ имеет место

$$z_0 \leqslant f_i(x_0, y_0), \qquad z_0 \geqslant g_j(x_0, y_0),$$

т.е. $(x_0, y_0, z_0) \in (z \leqslant f_i \cap z \geqslant g_j)$ и $(x_0, y_0) \in P_{x,y}(z \leqslant f_i \cap z \geqslant g_j)$. Следовательно,

$$\{x,y \mid g_j(x,y) \leq f_i(x,y)\} \subset P_{x,y}(z \leq f_i \cap z \geq g_j).$$

Сопоставляя полученное, имеем

$$P_{x,y}(z \leq f_i \cap z \geq g_j) \equiv \{x,y \mid g_j(x,y) \leq f_i(x,y)\}.$$

Лемма I.3. Проекцией на координатную плоскость x,y пересечения пары верхних (нижних) относительно оси z полупространств является вся плоскость x,y.

Доказательство проведем для пары верхних полупространств $z \leq f_k(x,y)$, $z \leq f_\ell(x,y)$. Возьмем произвольную точку (x_0, y_0) плоскости. Тогда можно найти значения $z_0^k = f_k(x_0,y_0)$, $z_0^\ell = f_\ell(x_0,y_0)$. Выберем число z_0 так, чтобы было $z_0 \leq z_1 = \min(z_0^k, z_0^\ell)$. Для такого z_0 будет $z_0 \leq f_k(x_0,y_0)$, $z_0 \leq f_\ell(x_0,y_0)$, т.е. $(x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{L}$. Следовательно, имеет место $(x_0,y_0) \in P_{x,y}\mathcal{L}$.

Лемма I.4. Пусть заданы полупространства

$$a_{i1}x + a_{i2}y - b_i \equiv h_i(x,y) \leq 0 \tag{I.8}$$

и

$$a_{j1}x + a_{j2}y + a_{j3}z \leq b_j, \quad a_{j3} \neq 0.$$

Тогда проекция их пересечения задается неравенством (I.8).

Лемма доказывается аналогично двум предыдущим.

Обозначим через $\mathfrak{I}$ совокупность индексов всех верхних ограничений системы (I.I), через $\mathfrak{J}$ -совокупность индексов всех нижних ограничений, через K-совокупность индексов, для которых ограничения имеют вид (I.8).

Лемма I.5. Пусть (x_0,y_0)- произвольная целочисленная точка проекции $\mathcal{L}'$ многогранника, задаваемого системой (I.I),

$$z_{i_0} = \min_{i \in \mathfrak{I}} f_i(x_0,y_0), \qquad z_{j_0} = \max_{j \in \mathfrak{J}} g_j(x_0,y_0).$$

Тогда, если[1] $[z_{i_0}] =]z_{j_0}[= z_*$, то точка (x_0, y_0, z_*) одновременно верхняя и нижняя целочисленная точка; если $[z_{i_0}] >]z_{j_0}[$, то точка $(x_0,y_0,[z_{i_0}])$ верхняя, а $(x_0,y_0,]z_{j_0}[)$ нижняя целочисленные точки многогранника $\mathcal{L}$.

---

[1] Символ $[a]$ означает наибольшее целое, меньшее или равное a, символ $]a[$ означает наименьшее целое, большее или равное a.

Доказательство проведем для нижней целочисленной точки $(x_0, y_0,]z_{j_0}[)$. Возьмем неравенство $z \geqslant g_j(x,y)$ для $j = j_0$. Тогда, учитывая, что $z_{j_0} \leqslant]z_{j_0}[$, имеем

$$]z_{j_0}[\geqslant z_{j_0} = -\frac{a_{j_0 1}}{a_{j_0 3}} x_0 - \frac{a_{j_0 2}}{a_{j_0 3}} y_0 + \frac{b_{j_0}}{a_{j_0 3}} = g_{j_0}(x_0, y_0),$$

но

$$]z_{j_0}[-1 < g_{j_0}(x_0, y_0),$$

следовательно, $(x_0, y_0,]z_{j_0}[-1) \notin \mathcal{L}$ и точка $(x_0, y_0,]z_{j_0}[)$ нижняя целочисленная.

Заметим, что все вышеизложенные леммы I.2–I.5 нетрудно сформулировать и доказать для произвольного n-мерного евклидова пространства. В алгоритме мы используем соответствующие аналоги для R_2.

2. Метод нахождения крайних точек многогранника. Перед точным описанием алгоритма познакомимся с его основной идеей. Как было сказано, нашей задачей является нахождение всех крайних точек многогранника $\mathcal{L}$. Пусть каким-нибудь образом найдена проекция $\mathcal{L}'$ многогранника $\mathcal{L}$ на некоторую координатную плоскость. Далее, пусть найдены все целочисленные точки проекции $\mathcal{L}'$, обозначим их совокупность через $Z'(\mathcal{L}')$. Тогда необходимо исследовать для каждой пары значений $(x_0, y_0) \in Z'(\mathcal{L}')$ пересечение прямой $x = x_0$, $y = y_0$ с верхними и нижними гранями многогранника $\mathcal{L}$. Выбирая из всех точек пересечения с верхними гранями точку с минимальным значением $z = z_{min}$ и, взяв $z_0' = [z_{min}]$, получим по лемме I.4 верхнюю точку (x_0, y_0, z_0'). Беря из всех точек пересечения с нижними гранями точку с максимальным значением $z = z_{max}$, получим нижнюю целочисленную точку (x_0, y_0, z_0''), где $z_0'' =]z_{max}[$. Рассмотрим подробнее основные части алгоритма.

А. Нахождение проекций многогранника $\mathcal{L}$, заданного системой (I.I) на координатную плоскость и ось. Хотя описанным ниже способом можно найти проекцию на любую координатную плоскость, в данном случае находится проекция на плоскость x, y. Как видно из леммы I.I, для нахождения проекции многогранника $\mathcal{L}$, надо найти проекции пересечений всевозможных пар полупространств, задающих грани $\mathcal{L}$. Но в силу леммы I.3

нет смысла учитывать проекции пар одноименных (верхних либо нижних) полупространств. Далее из результата леммы I.4 проекция пересечения полупространства, параллельного оси z, и верхнего либо нижнего полупространства, есть соответствующая полуплоскость (I.6). Учитывая это, проекцию многогранника, задаваемого системой (I.I), можно записать в виде:

$$P_{x,y} = \begin{cases} g_j(x,y) \leq f_i(x,y) & (\forall i \in J, \forall j \in J), \\ h_i(x,y) \leq 0 & (\forall i \in K). \end{cases}$$

Предположим, что проекция $\mathcal{L}'$ найдена в форме

$$\begin{array}{c} \alpha_1 x + \beta_1 y \leq G_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_r x + \beta_r y \leq G_r. \end{array} \tag{2.I}$$

Используя аналоги лемм I.2-I.4 для пространства R_2, нетрудно определить проекцию $\mathcal{L}''$ многоугольника $\mathcal{L}'$, заданного системой (2.I), на некоторую координатную ось, пусть, для определенности на ось x. Заметим, однако, что в отличие от нахождения проекции на плоскость, здесь выгоднее устроить перебор пар граней в порядке убывания наклонов верхних и возрастания наклонов нижних, т.к. наклоны граней выпуклого многоугольника, рассмотренные слева направо, обладают таким свойством.

В. Нахождение множества $Z'(\mathcal{L}')$ целочисленных точек проекции и множества $Z(\mathcal{L})$ крайних целочисленных точек многогранника. Имея в виду лемму I.5 и ее аналог для пространства R_2, определим для каждого целочисленного значения $x_j \in \mathcal{L}''$

$$v_j = [\min_{\substack{\beta_i > 0 \\ i \in \{1,2,\dots,r\}}} (\frac{c_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} x_j)],$$

$$u_j =]\max_{\substack{\beta_i < 0 \\ i \in \{1,2,\dots,r\}}} (\frac{c_i}{\beta_i} - \frac{\alpha_i}{\beta_i} x_j)[;$$

для каждой пары $(x_j, y_j) \in Z'(\mathcal{L}')$

$$s_j = [\min_{i \in J} f_i(x_j, y_j)],$$

$$t_j =]\max_{i \in J} g_i(x_j, y_j)[.$$

Тогда крайние целочисленные точки находятся по правилу:

1^0 если $t_j > s_j$ $(u_j > v_j)$, то крайней целочисленной не существует;

2^0 если $t_j = s_j$ $(u_j = v_j)$, то точка является и верхней и нижней целочисленной;

3^0 если $t_j < s_j$ $(u_j < v_j)$, то имеются различные нижняя и верхняя целочисленные точки.

Отсюда для каждого целочисленного $x_j \in \mathcal{L}''$ получим, если верно 2^0, то $(x_j, u_j) \in Z'(\mathcal{L}')$, если верно 3^0, то последовательность $(x_j, u_j), (x_j, u_j+1), \ldots, (x_j, v_j) \in Z'(\mathcal{L}')$. Если же точка $(x_j, y_j) \in Z'(\mathcal{L}')$ такая, что имеет место 2^0, то найдена крайняя точка $(x_j, y_j, t_j) \in Z(\mathcal{L})$, если же имеет место 3^0, то (x_j, y_j, t_j) - нижняя, (x_j, y_j, s_j) - верхняя точки многогранника.

В алгоритме используется величина $M = \max\limits_{(x,y,z)\in\mathcal{L}} |z|$.

При описании алгоритма используются следующие параметры и обозначения:

$$G = \begin{cases} 0, & \text{если вычисляется крайняя точка проекции,} \\ 1, & \text{если вычисляется крайняя точка многогранника;} \end{cases}$$

$$R = \begin{cases} 0, & \text{если вычисляется верхняя точка,} \\ 1, & \text{если вычисляется нижняя точка;} \end{cases}$$

m - число заданных ограничений;

i, s, n - номера рассматриваемых ограничений;

n_0 - фиксирует число ограничений различных типов;

$k[\varkappa]$ - текущий номер неравенства вида (1.3) [(1.4)];

l, λ - текущий номер неравенства вида (1.5);

j, ν - в части А текущий номер неравенства, содержащего лишь переменную x,

j - в части В номер вычисляемой крайней точки;

p - текущий номер крайней точки проекции;

$a_{i\xi}, b_i$ $(\xi = 1,2,3)$ - коэффициенты исходной системы (1.1):

$c_{k\xi}, d_{\varkappa\xi}$ $(\xi = 1,2,3)$ - коэффициенты исходной системы (1.1), разрешенной относительно z;

$f_{l\xi}, g_{\lambda\xi}$ $(\xi = 1,2)$ - коэффициенты неравенств вида (1.5);

h_j, q_n - коэффициенты неравенств, содержащих лишь переменную x;

z_j - текущее значение верхней $(R = 0)$ или нижней $(R = 1)$

целочисленной точки;

$s_j(t_j)$ – текущее значение верхней (нижней) целочисленной точки;

x'_p, x'_j – текущее значение абсциссы крайней точки;

$v_p, v_j (u_p, u_j)$ – текущее значение ординаты верхней (нижней) целочисленной точки.

Работа части А алгоритма начинается с перебора неравенств – ограничений исходной системы (I.I). Когда коэффициент при переменной z отличен от ноля (п. 2), проводится разбиение неравенств на верхние и нижние относительно оси z (п.п. 3.4,5). В противном случае ищутся коэффициенты, задающие проекцию на плоскость (п.п. II–I3), или на ось, если коэффициент при y есть ноль (п.п. 8–I0). Далее (п.п.I5–28) ищутся коэффициенты неравенств, задающих проекцию на плоскость. Для этого находятся проекции пересечений пар верхних и нижних граней. Одновременно с этим, полученные ограничения разбиваются на верхние и нижние относительно y. Используя полученные в алгоритме коэффициенты (п.п. I2,I3 или I8, 20), верхние и нижние ограничения проекции можно записать в виде

$$y \leq f_{\ell_1} x + f_{\ell_2}, \quad y \geq g_{\lambda_1} x + g_{\lambda_2}.$$

Проведя упорядочивание (п. 29) коэффициентов f_{n1} $(n = 1, 2, \ldots, \ell)$, g_{n1} $(n = 1, 2, \ldots, \lambda)$, по аналогии с предыдущим, ищутся проекции пересечения верхних и нижних граней многоугольника (п.п. 3I–39). В обозначениях алгоритма это $x \leq h_n$ $(n = 1, 2, \ldots, j)$, $x \geq g_n$ $(n = 1, 2, \ldots, \lambda)$. После упорядочивания (п. 40) проекцией на ось будет $[q_1, h_1]$.

Часть В алгоритма начинается перебором целочисленных абсцисс таких, что $x_j \in [q_1, h_1]$. Выбирается минимальная из всех значений ординат, получающихся в п. 7 (там x_j подставляется в равенства, соответствующие верхним ограничениям) и берется ее целая часть (п.п. 4.7,9,I0,I6,I7). Аналогично перебираются нижние ограничения, но из значений ординаты выбирается такое целое, которое больше или равно максимальному (п.п. 2I,4,5,II,I2,I4–I7). Каждая найденная крайняя целочисленная точка фиксируется в п. 26, где p – ее порядковый номер, x'_p – значение абсциссы u_p, v_p – значения ординаты нижней и верхней точек, соответственно. Далее проводится перебор целочисленных точек многогранника, начиная с левой нижней (x'_1, y_1). Ищутся аппликаты z_j пересечения соответствующей прямой с верхними и нижними гранями многогранника тем же способом, как для плоскости, лишь заменяя п. 7 на 8 и пункты 21, 12 на 22, 13. Если найденные s_j, t_j из 10, 15 таковы, что (п. 32) верно $s_j = t_j$, то в п. 33 фиксируется крайняя точка (x'_j, y_j, s_j). В противном случае, и если $y_j+1 \leq r_j$, точка (x_j, y_j+1) рассматривается таким же образом. Как только имеет место $y_j+1 > r_j$ (п.п. 37,38), индекс j заменяется на $j+1$, т.е. берется следующая нижняя целочисленная точка. Если же (п. 39) индекс j таков, что $j > p$, то все точки перебраны, и алгоритм заканчивает работу.

3. Алгоритм нахождения крайних целочисленных точек многогранника.

Часть А.

1. Положим $i=1$, k, $\varkappa$, l, λ, n, s, j, $r=0$.
2. Проверим, будет ли $a_{i3}=0$. Если да, идем к 7. Если нет, к 3.
3. Проверим, будет ли $a_{i3}>0$. Если да, идем к 4. Если нет, к 5.
4. Заменим k на $k+1$, положим $c_{k1}=-a_{i1}/a_{i3}$, $c_{k2}=-a_{i2}/a_{i3}$, $c_{k3}=b_i/a_{i3}$. Идем к 14.
5. Заменим $\varkappa$ на $\varkappa+1$, положим $d_{\varkappa1}=-a_{i1}/a_{i3}$, $d_{\varkappa2}=-a_{i2}/a_{i3}$, $d_{\varkappa3}=b_i/a_{i3}$. Идем к 14.
6. Заменим i на $i+1$. Идем к 2.
7. Проверим, будет ли $a_{i2}=0$. Если да, идем к 8. Если нет, к 11.
8. Проверим будет ли $a_{i1}>0$. Если да, идем к 9. Если нет, к 10.
9. Заменим j на $j+1$. Положим $h_j=b_i/a_{i1}$. Идем к 14.
10. Заменим r на $r+1$. Положим $q_r=b_i/a_{i1}$. Идем к 14.
11. Проверим, будет ли $a_{i2}>0$. Если да, идем к 12. Если нет, к 13.
12. Заменим l на $l+1$. Положим $f_{l1}=-a_{i1}/a_{i2}$, $f_{l2}=b_i/a_{i2}$. Идем к 14.
13. Заменим λ на $\lambda+1$. Положим $g_{\lambda1}=-a_{i1}/a_{i2}$, $g_{\lambda2}=b_i/a_{i2}$. Идем к 14.
14. Проверим, будет ли $i<m$. Если да, идем к 6. Если нет,

к I5.

I5. Положим $s = k$.

I6. Положим $n = \varkappa$.

I7. Проверим, будет ли $d_{n2} \geq c_{s2}$. Если да, идем к I9. Если нет, к I8.

I8. Заменим λ на $\lambda+1$. Положим $g_{\lambda 1}=(c_{s1}-d_{n1})/(d_{n2}-c_{s2})$, $g_{\lambda 2}=(c_{s3}-d_{n3})/(d_{n2}-c_{s2})$. Идем к 25.

I9. Проверим, будет ли $d_{n2}=c_{s2}$. Если да, идем к 2I. Если нет, к 20.

20. Заменим ℓ на $\ell+1$. Положим $f_{\ell 1}=(c_{s1}-d_{n1})/(d_{n2}-c_{s2})$, $f_{\ell 2}=(c_{s3}-d_{n3})/(d_{n2}-c_{s2})$. Идем к 25.

2I. Проверим, будет ли $d_{n1}=c_{s1}$. Если да, идем к 25. Если нет, к 22.

22. Проверим, будет ли $d_{n1}>c_{s1}$. Если да, идем к 23. Если нет, к 24.

23. Заменим j на $j+1$. Положим $h_j=(c_{k3}-d_{\varkappa 3})/(d_{\varkappa 1}-c_{k1})$. Идем к 25.

24. Заменим r на $r+1$. Положим $q_r=(c_{k3}-d_{\varkappa 3})/(d_{\varkappa 1}-c_{k1})$.

25. Заменим n на $n-1$.

26. Проверим, будет ли $n>0$. Если да, идем к I7. Если нет, к 27.

27. Заменим s на $s-1$.

28. Проверим, будет ли $s>0$, если да, идем к I6. Если нет, к 29.

29. Упорядочим f_{n1} $(n=1,2,\ldots,\ell)$ по возрастанию, g_{n1} $(n=1,2,\ldots,\lambda)$ по убыванию.

30. Положим $s=\ell$.

3I. Положим $n=\lambda$.

32. Проверим, будет ли $g_{n1} \geq f_{s1}$. Если да, идем к 33. Если нет, к 35.

33. Проверим, будет ли $g_{n1}=f_{s1}$. Если да, идем к 36. Если нет, к 34.

34. Заменим j на $j+1$. Положим $h_j=(f_{s2}-g_{n2})/(g_{n1}-f_{s1})$. Идем к 36.

35. Заменим r на $r+1$. Положим $q_r=(f_{s2}-g_{n2})/(g_{n1}-f_{s1})$.

36. Заменим n на $n-1$.

37. Проверим, будет ли $n>0$. Если да, идем к 32. Если нет, к 38.

38. Заменим s на $s-1$.

39. Проверим, будет ли $s>0$. Если да, идем к 3I, если нет,

к 40.

40. Упорядочим h_n $(n=1,2,\dots,j)$ по возрастанию, q_n $(n=1,2,\dots,n)$ по убыванию. Идем к BI.

Часть В.

I. Положим $j=1$, $p=0$, $x_j=]q_1[$.
2. Положим $n_0=\ell$, $R=G=0$, $t_j=-M$, $s_j=M$.
3. Проверим, будет ли $x_j>h_1$. Если да, идем к 27. Если нет, к 4.
4. Положим $i=1$.
5. Проверим, будет ли $R=0$. Если да, идем к 6. Если нет, к II.
6. Проверим, будет ли $G=0$. Если да, идем к 7. Если нет, к 8.
7. Положим $z_j=f_{i1}x_j+f_{i2}$. Идем к 9.
8. Положим $z_j=c_{i1}x_j'+c_{i2}y_j+c_{i3}$.
9. Проверим, будет ли $s_j\le z_j$. Если да, идем к I6. Если нет, к I0.
I0. Положим $s_j=]z_j[$. Идем к I6.
II. Проверим, будет ли $G=0$. Если да, идем к I2. Если нет, к I3.
I2. Положим $z_j=g_{i1}x_j+g_{i2}$. Идем к I4.
I3. Положим $z_j=d_{i1}x_j'+d_{i2}y+d_{i3}$.
I4. Проверим, будет ли $t_j\geqslant z_j$. Если да, идем к I6. Если нет, к I5.
I5. Положим $t_j=]z_j[$.
I6. Заменим i на $i+1$.
I7. Проверим, будет ли $i\le n_0$. Если да, идем к 5. Если нет, к I8.
I8. Проверим, будет ли $R=0$. Если да, идем к I9. Если нет, к 23.
I9. Положим $R=1$.
20. Проверим, будет ли $G=0$. Если да, идем к 2I. Если нет, к 22.
2I. Положим $n_0=\lambda$. Идем к 4.
22. Положим $n_0=\varkappa$. Идем к 4.
23. Проверим, будет ли $G=0$. Если да, идем к 24. Если нет, к 3I.
24. Проверим, будет ли $s_j\geqslant t_j$. Если да, идем к 26. Если нет, к

25.

25. Заменим j на $j+1$. Положим $x_j = x_{j-1}+1$. Идем к 2.

26. Заменим p на $p+1$. Положим $x'_p = x_j$, $u_p = t_j$, $v_p = s_j$. Идем к 25.

27. Проверим, будет ли $j=1$. Если да, то конец работы алгоритма. Если нет, идем к 28.

28. Положим $G = I$. $R = 0$, $j = I$.

29. Положим $y_j = u_j$.

30. Положим $n_0 = k$, $s_j = M$, $t_j = -M$. Идем к 4.

3I. Проверим, будет ли $s_j \geqslant t_j$. Если да, идем к 32. Если нет, к 35.

32. Проверим, будет ли $s_j = t_j$. Если да, идем к 33, если нет, к 34.

33. Запишем в таблицу решений x'_j, y_j, s_j. Идем к 35.

34. Запишем в таблицу решений x'_j, y_j, t_j, s_j.

35. Проверим, будет ли $u_j = v_j$. Если да, идем к 38. Если нет, к 36.

36. Заменим y_j на y_j+1.

37. Проверим, будет ли $y_j \leqslant v_j$. Если да, идем к 30. Если нет, к 38.

38. Заменим j на $j+1$.

39. Проверим, будет ли $j \leqslant p$. Если да, идем к 29. Если нет, то конец работы алгоритма.

4. Численный пример на применение алгоритма. Пусть в трехмерном пространстве задана следующая система неравенств:

$$\begin{aligned} -6x+3y+5z &\leqslant 27,\\ 4x+3y-5z &\leqslant 27,\\ -y+z &\leqslant 0,\\ 2x-y-5z &\leqslant -24. \end{aligned} \qquad (4.I)$$

Тогда в список начальных данных следует занести $m = 4$,

$a_{11} = -6$,	$a_{12} = 3$,	$a_{13} = 5$,	$b_1 = 27$,
$a_{21} = 4$,	$a_{22} = 3$,	$a_{23} = -5$	$b_2 = 27$,
$a_{31} = 0$,	$a_{32} = -I$,	$a_{33} = I$	$b_3 = 0$,
$a_{41} = 2$,	$a_{42} = -I$,	$a_{43} = -5$	$b_4 = -24$.

Кроме того, пусть $M = 20$.

В результате работы части A вычисляются коэффициенты неравенств, задающих проекцию $\mathcal{L}'$ многогранника $\mathcal{L}$, определенного системой (4.I), на координатную плоскость x, y. Проекцию $\mathcal{L}'$ можно записать в виде:

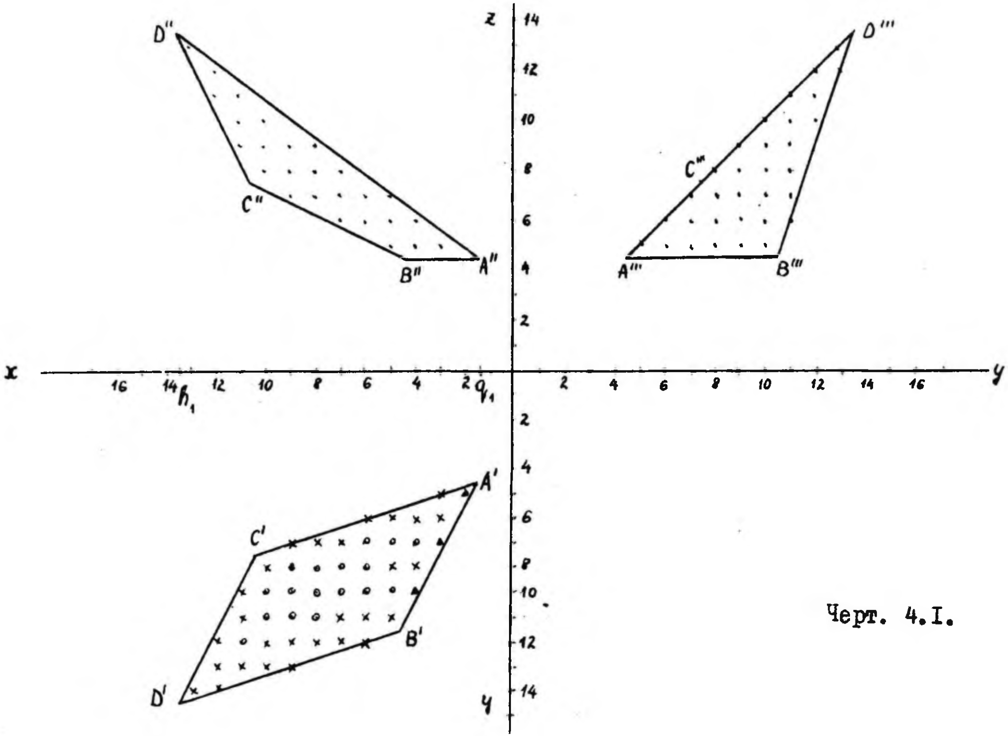
$$
\begin{aligned}
y &\geqslant I/3x + 4, \\
y &\geqslant 2x - 27/2, \\
y &\leqslant 2x + 3/2, \\
y &\leqslant I/3x + 9.
\end{aligned}
$$

На чертеже 4.I изображен заданный этими неравенствами четырехугольник $A'B'C'D'$. Кроме того, найдена проекция $\mathcal{L}''$ многоугольника $\mathcal{L}'$ на ось x, причем $q_1 = I{,}5$, $h_1 = I3{,}5$.

Работа части B алгоритма вначале дает совокупность координат верхних и нижних точек проекции $\mathcal{L}'$, приведем их значения в таблице.

i	I	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II	I2
x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	IO	II	I2	I3
u_i	5	5	6	6	6	7	7	7	8	9	II	I3
v_i	5	7	9	IO	II	II	II	I2	I2	I2	I3	I3

На чертеже найденные точки отмечены в четырехугольнике $A'B'C'D'$. Далее часть B дает ответ на вопрос, существует ли целочисленное значение z_j $(j = 1, \cdots, p)$, что точка (x_j, y_j, z_j) - крайняя целочисленная, и находит это значение. Приведем список верхних и нижних целочисленных точек в следующей таблице



Черт. 4.I.

j	x'_j	y_j	t_j	s_j
I	3	5	5	
2	3	6	5	
3	4	6	6	
4,5	4	7	5	6
6	4	8	5	
7	5	6	6	
8,9	5	7	6	7
IO	5	8	6	
II,I2	5	9	5	6
I3	5	IO	5	
I4	6	6	6	
I5,I6	6	7	6	7
I7,I8	6	8	6	7
I9,20	6	9	6	7
2I	6	IO	6	
22	6	II	6	
23	7	7	7	
24,25	7	8	6	8
26,27	7	9	6	8
28	7	IO	7	
29	7	II	7	
30	8	7	7	
3I,32	8	8	7	8
33,34	8	9	7	9
35,36	8	IO	7	9
37	8	II	8	
38	9	7	7	
39,40	9	8	7	8
4I,42	9	9	8	9
43,44	9	IO	8	IO
45	9	II	9	
46	9	I2	9	
47	IO	8	8	
48,49	IO	9	8	9
50,5I	IO	IO	9	IO
52	IO	II	IO	

i	x'_i	y_i	z_i	z'_i
53	I0	I2	I0	
54	II	9	9	
55	II	I0	I0	
56.57	II	II	I0	II
58	II	I2	II	
59	I2	II	II	
60	I2	I2	I2	
6I	I2	I3	I2	
62	I3	I3	I3	

Задача решена. На чертеже 4.I треугольниками отмечены те целочисленнные точки проекции, для которых не существует целочисленного значения аппликаты, крестиками - те целочисленные точки, для которых существует лишь одно целочисленное z, точками - те, для которых имеются два значения z, т.е. различные верхние и нижние целочисленные точки.

Литература

I. К о р б у т А. А., Ф и н к е л ь ш т е й н Ю. Ю., Дискретное программирование. Москва, I969.

2. Ш а п о т Д. В., О построении ортогональных проекций точечных множеств, заданных системой неравенств. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., I97I, II, № 5, III3-II26.

3. Ю д и н Д. Б., Г о л ь ш т е й н Е. Г., Линейное программирование. Теория, методы и приложения. Москва, I969.

Поступило
5 IУ 1974

EUKLEIDILISE RUUMI R_3 KUMERA HULKTAHUKA ÄÄRMISTE TÄISARVULISTE PUNKTIDE LEIDMISEST

J.Vorošnina

R e s ü m e e

Käesolevas töös antakse meetod, mille abil saab määrata ruumi R_3 kumera hulktahuka kõik äärmised täisarvulised punktid. Esitatakse teoreetiline põhjendus, algoritm ja arvuline näide.

FINDING OF EXTREME INTEGER POINTS OF A POLYTOPE IN EUCLIDEAN SPACE R_3

J.Voroshnina

S u m m a r y

A method that determines all extreme integer points of a polytope in Euclidean space R_3 is described. The theoretical base of the method, corresponding algorithm and a numerical example are given.

НАХОЖДЕНИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИОФАНТОВА УРАВНЕНИЯ

Р. Кундер

Кафедра математической статистики и программирования

В настоящей статье излагается метод, которым можно найти число неотрицательных решений заданного линейного диофантова уравнения и затем вычислить координаты всех таких решений этого уравнения. Получение неотрицательных решений тесно связано с задачами целочисленного линейного программирования, так как в этих задачах значениями переменных могут быть только неотрицательные целые числа. В [2,4,5] рассмотрено нахождение общего решения линейного диофантова уравнения, а в [8] указан метод получения общего решения системы таких уравнений. Неотрицательные решения линейных диофантовых уравнений и неравенств рассматриваются в [6,7], но в этих работах не дается метода получения всех неотрицательных решений таких уравнений.

Линейным диофантовым уравнением называется уравнение

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b, \qquad \text{(I)}$$

где коэффициенты a_j, $j = 1, \cdots, n$ и b целые числа. Решениями уравнения (I) считаются только целочисленные векторы $X = (x_1, \ldots, x_n)$. Не ограничивая общности, можно предполагать, что коэффициенты a_j $(j = 1, \ldots, n)$ положительные, а свободный член b неотрицательный. Если при некотором j будет $a_j < 0$, то можно заменить x_j на $-x_j$ и a_j на $-a_j$.

Из теории чисел известно, что уравнение (I) имеет решение тогда и только тогда, когда b делится нацело на наибольший общий делитель чисел a_j. При этом если $n \geq 2$, то множество решений бесконечно и общее решение является линейным выражением от $n-1$ целочисленного параметра. Для неотрицательных решений, т.е. для решений, в которых все $x_j \geq 0$, это условие разрешимости не является достаточным. Кроме того, если неотрицательные решения найдутся, то число их конечно.

Назовем число неотрицательных решений уравнения (I) денумерантом и обозначим его через $\mathcal{D}(b, a_1, a_2, \dots, a_n)$ [3]. Поскольку коэффициенты a_j заданы, то денумерант можно обозначать через $\mathcal{D}(b)$.

Идея метода решения уравнения (I) следующая: множество всех решений разобьем на два непересекающиеся подмножества, затем оба подмножества разобьем опять на два непересекающиеся подмножества и т.д. При разбиении может оказаться, что одно из подмножеств пусто. Процесс разбиения завершен, если в каждом непустом подмножестве только одно решение.

Основой процесса разбиения служат дополнительные условия, накладываемые на величину координат решения. Обозначим число решений уравнения

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j = x \qquad (2)$$

через $\mathcal{D}_j(x)$, где $j = 1, 2, \dots, n$ и $x = 0, 1, \dots, b$. Имеют место следующее утверждения.

Лемма I. Число решений уравнения (2) с дополнительным условием

$$x_j = k \qquad (3)$$

равно $\mathcal{D}_{j-1}(x - k a_j)$, где k неотрицательное целое число.

Доказательство. Из любого решения X уравнения (2) с дополнительным условием (3) можно элиминировать переменную x_j, поскольку значение ее фиксировано. В результате этого получим уравнение типа (2) со свободным членом $x - k a_j$ и переменными $x_1, \dots, x_{j-1}$. По нашим обозначениям число решений такого уравнения будет $\mathcal{D}_{j-1}(x - k a_j)$. Следовательно, и число решений уравнения (2) с условием (3) равно $\mathcal{D}_{j-1}(x - k a_j)$.

Лемма 2. Число решений уравнения (2) с дополнительным условием $x_j \geq k$ равно

$$\mathcal{D}_j(x - k a_j). \qquad (4)$$

Доказательство. Легко видеть, что любому решению X уравнения (2) с условием (4) можно взаимно однозначно сопоставить решение X' уравнения

$$a_1x_1 + \dots + a_jx_j = x - ka_j. \qquad (5)$$

При этом

$$x_1' = x_1, \dots, x_{j-1}' = x_{j-1}, \quad x_j' = x_j - k. \qquad (6)$$

Так как число решений X' равно $\mathfrak{D}_j(x-ka_j)$, то и число решений X равно $\mathfrak{D}_j(x-ka_j)$.

При помощи приведенных лемм можно получить соотношение, которое позволяет вычислить значения $\mathfrak{D}_j(x)$, если известны значения $\mathfrak{D}_{j-1}(x)$.

Теорема I. Имеет место формула

$$\mathfrak{D}_j(x) = \begin{cases} \mathfrak{D}_{j-1}(x), & \text{если } x < a_j, \\ \mathfrak{D}_{j-1}(x) + \mathfrak{D}_j(x-a_j), & \text{если } x \geq a_j \end{cases} \qquad (7)$$

(см. также [I]).

Доказательство. Разобьем множество всех решений уравнения (2) на два непересекающиеся подмножества. В первое подмножество входят все решения с условием $x_j = 0$, а во второе все решения с условием $x_j \geq 1$. Из леммы I вытекает при $k=0$, что число решений в первом подмножестве равно $\mathfrak{D}_{j-1}(x)$. Из леммы 2 вытекает при $k=1$, что число решений во втором подмножестве равно $\mathfrak{D}_j(x-a_j)$. Если $x < a_j$, то $x - a_j < 0$. Следовательно в любом решении уравнения (2) x_j может иметь только значение 0 и поэтому второе множество является пустым. Это значит, что $\mathfrak{D}_j(x) = \mathfrak{D}_{j-1}(x)$. Если $x \geq a_j$, то $x - a_j \geq 0$ и переменная x_j может иметь и другие значения. Следовательно, $\mathfrak{D}_j(x) = \mathfrak{D}_{j-1}(x) + \mathfrak{D}_j(x-a_j)$. Этим теорема доказана.

В ходе решения уравнения (I) мы составим таблицу денумерантов из чисел $\mathfrak{D}_j(x)$, где $j = 1, \dots, n$ и $x = 0, \dots, b$. Для получения чисел $\mathfrak{D}_1(x)$ отметим, что диофантово уравнение с одной переменной $a_1x_1 = x$ имеет одно решение, если x делится нацело на a_1, и не имеет решения в противном случае. Следовательно,

$$\mathfrak{D}_1(x) = \begin{cases} \text{I}, & \text{если } x \text{ делится на } a_1, \\ 0, & \text{если } x \text{ не делится на } a_1. \end{cases} \qquad (8)$$

Значения $\mathfrak{D}_j(x)$, где $j=2,\dots,n$ вычисляются из формулы (7).

В таблице денумерантов каждое число определяется индексом строки j и индексом столбца x как координатами. Чтобы более наглядно изобразить ход решения уравнения (I), построим ориентированный граф, вершинами которого являются пары (j,x). Если $\mathfrak{D}_j(x)\neq 0$ и $\mathfrak{D}_{j-1}(x)\neq 0$, то введем стрелку из вершины (j,x) в вершину $(j-1,x)$. Если $\mathfrak{D}_j(x)\neq 0$ и $\mathfrak{D}_j(x-a_j)\neq 0$, то введем стрелку из вершины (j,x) в вершину $(j,x-a_j)$. Назовем путем из вершины (n,b) в вершину (I,0) последовательность вершин $(j^1,x^1),\dots,(j^p,x^p)$, где $(j^1,x^1)=(n,b)$ и $(j^p,x^p)=(1,0)$, причем для любого $k=1,\dots,p-1$ из вершины (j^k,x^k) идет стрелка в вершину (j^{k+1},x^{k+1}).

Теорема 2. Число путей из вершины (n,b) в вершину (I,0) равно $\mathfrak{D}_n(b)$.

Для доказательства теоремы достаточно показать, что каждому решению уравнения (I) можно взаимно однозначно сопоставить путь из вершины (n,b) в вершину (I,0).

Пусть задано решение $\mathcal{X}$ уравнения (I) в котором $x_1=k_1,\dots,x_n=k_n$. Построим соответствующий путь. Для этого образуем последовательность вершин

$$(n,b),(n,b-a_n),\dots,(n,b-k_n a_n),(n-1,b-k_n a_n),\\ \dots,(n-1,b-k_n a_n-k_{n-1}a_{n-1}),\dots,(1,b-\sum_{j=n}^{1}k_j a_j). \qquad (9)$$

Поскольку $\mathcal{X}$ решение уравнения (I), то $b-(k_n a_n+\dots+k_1 a_1)=0$ и, следовательно, последняя вершина есть (I,0). Кроме того, в любой вершине последовательности значение денуманта отлично от нуля. В самом деле, предположим, что в некоторой вершине $(j,b-(k_n a_n+\dots+k_{j+1}a_{j+1}))$ значение денуманта равно нулю. Это значит, что не получится ни одного решения, где $x_n=k_n,\dots,x_{j+1}=k_{j+1}$. Но это противоречит тому, что $\mathcal{X}$ решение уравнения (I). Следовательно все соседние вершины последовательности соединены стрелками и поэтому последовательность (9) есть путь из вершины (n,b) в вершину (I,0).

Пусть теперь задан путь из вершины (n,b) в вершину (I,0). Построим соответствующее решение. Исходим из вершины (n,b). Возможны два случая:

I) За вершиной (n,b) следует вершина $(n,b-a_n)$. Тогда положим $x_n=1$ и приступим к рассмотрению вершины $(n, b-a_n)$.

2) За вершиной (n,b) следует вершина $(n-1, b)$. Тогда в соответствующем решении $x_n=0$ и мы приступим к рассмотрению вершины $(n-1, b)$, чтобы аналогичным образом установить значение x_{n-1}.

Предположим теперь, что мы дошли до вершины (j, x). Это значит, что координаты $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{j+1}$ в соответствующем решении уже найдены, а x_j пока имеет значение k_j. Опять возможны два случая.

I) За вершиной (j,x) следует вершина $(j, x-a_j)$. Тогда положим $x_j = x_j+1$ и идем к вершине $(j, x-a_j)$.

2) За вершиной (j,x) следует вершина $(j-1, x)$. Тогда в соответствующем решении x_j имеет значение k_j и мы пойдем к вершине $(j-1, x)$ для установления значения x_{j-1}. Этот процесс продолжается, пока не найдены все координаты соответствующего решения.

Из приведенных конструкций вытекает, что различным путям соответствуют различные решения и различным решениям соответствуют различные пути. Поэтому соответствие между решениями уравнения (I) и путями из вершины (n,b) в вершину (I,0) будет взаимно однозначным. Этим теорема доказана.

В процессе решения уравнения (I) мы пройдем все пути из вершины (n,b) в вершину (I,0) и построим соответствующие решения по приведенной в теореме 2 конструкции. При этом общая часть нескольких путей до ветвления проходится только один раз. Отметим, что значение $D_j(x)$ показывают число путей, проходящих через вершину (j,x) до ветвления.

Пусть (j,x) вершина, для которого $D_j(x)>0$. Если $D_{j-1}(x)=0$, то из соотношения (7) вытекает, что $D_j(x-a_j)=D_j(x)$. Следовательно, из вершины (j,x) все пути направлены к вершине $(j, x-a_j)$. Если $D_{j-1}(x)=D_j(x)$, то из вершины (j,x) все пути направлены к вершине $(j-1,x)$. Если $0<D_{j-1}(x)<D_j(x)$, то из вершины (j,x) часть путей направлены к вершине $(j-1,x)$, остальные к вершине $(j, x-a_j)$. Такие вершины мы назовем точками ветвления. Достигнув некоторой точки ветвления, мы сначало пройдем все пути, направленные к вершине $(j, x-a_j)$, а затем пути, направленные к вершине $(j-1,x)$. Чтобы вернуться к уже пройденной точке ветвления, мы запомним ее координаты

(j, x). Запомним также уже построенную часть нескольких решений, которую назовем неполным решением. Отметим, что в точке ветвления по существу и происходит разбиение множеств решений на две части.

Чтобы разбить множество из $\mathfrak{D}(b)$ элементов на $\mathfrak{D}(b)$ одноэлементных множеств, надо сделать $\mathfrak{D}(b)-1$ разбиение на два множества. Следовательно в ходе решения уравнения (I) мы пройдем через $\mathfrak{D}(b)-1$ точку ветвления.

Алгоритм решения уравнения (I) состоит из двух частей. В части А при помощи формул (7) и (8) составляется таблица денумерантов. Таблица заполняется по строкам и поскольку значение $\mathfrak{D}(b)=\mathfrak{D}_n(b)$ получается последним, то после работы части А $j=n$ и $x=b$.

В части В мы вычислим координаты всех решений уравнения (I). В пункте I мы проверим, будет ли $\mathfrak{D}(b)$ больше нуля. Если да, то начнем построение решений. В противном случае уравнение (I) не имеет решения и работа алгоритма заканчивается. В пункте 2 мы присвоим координатам первого решения уравнения нулевые значения. Если в пункте 3 окажется, что $\mathfrak{D}_{j-1}(x)=\mathfrak{D}_1(x)$, то в соответствующем неполном решении значение (x_j^k) уже найдено. Тогда заменим j на $j+1$ и вернемся опять к пункту 3. В противном случае идем в 6, где проверим, будет ли $\mathfrak{D}_{j-1}(x)$ больше нуля. Если да, то (j, x) точка ветвления. В пункте 8 мы запомним ее координаты и полученное неполное решение $(x_1^l, x_2^l, \dots, x_n^l)$. В противном случае продолжим построение соответствующего неполного решения, заменив x_j^k на x_j^k+1, где k номер продолжаемого решения. Затем будем проверять условие пункта 3 в вершине $(j, x-a_j)$. Если после замены x на $x-a_j$ оказывается, что $x=0$, то найдено очередное решение.

Если в ходе построения решений мы попали в первую строку таблицы денумерантов, то мы не будем находить вершины в этой строке, поскольку значение x_1 получается в виде $x_1=x/a_1$. После нахождения очередного решения заменим k на $k+1$. Если $k \leq \mathfrak{D}(b)$, то вернемся к k-ой точке ветвления, чтобы пройти остальные пути. Если $k > \mathfrak{D}(b)$, то все решения уравнения (I) найдены и работа алгоритма заканчивается.

Наконец, сделаем еще несколько замечаний насчет применения алгоритма.

I. Хотя алгоритмом мы найдем только решения уравнения (I), полученную таблицу денумерантов можно использовать для решения любого уравнения типа (2), где $j \le n$ и $x \le b$. Этот факт является особенно полезным тогда, когда надо решить несколько уравнений с теми же коэффициентами a_j, но с различными свободными членами. Примером такого подхода является простая одномерная задача о раскрое: максимизировать

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \quad \text{при условии} \tag{IO}$$
$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \le b. \tag{II}$$

2. Так как описанный метод является чисто комбинаторным, то он позволяет решить линейное диофантово уравнение с любыми неотрицательными коэффициентами a_j. При этом наибольший общий делитель может быть больше единицы.

3. Предположим, что коэффициенты a_j, $j = 1, \ldots, n$ взаимно просты. Тогда существует неотрицательное целое число $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, которое называется классификатором чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и определяется следующими условиями [7]. Уравнение (I) разрешимо, если $b > K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, и не имеет решения, если $b = K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Из определения денуmeранта и классификатора следует, что $K(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ есть максимальное значение x, для которого $D_n(x) = 0$. Известно, что $K(a_1, a_2) = a_1a_2 - a_1 - a_2$. Ясно так же, что для любого $n > 2$ $K(a_1, a_2, \ldots, a_n) \le K(a_1, a_2)$. Из сказанного следует, что для нахождения классификатора можно использовать модификацию части А, которая находит значения денуmеранта для $j = 1, \ldots, n$ и $x = 0, \ldots, K(a_1, a_2)$. Затем уменьшим значения x до получения первого нуля в последней строке таблицы денумерантов.

Алгоритм

А. Составление таблицы денумерантов

1. Положим $x = 0$, $j = 1$, $D_j(x) = 1$.
2. Заменим x на $x + 1$
3. Если $x \le b$, то 4, в противном случае 7.
4. Если x делится на a_1, то 5, в противном случае 6.
5. Положим $D_1(x) = 1$, идем в 7.
6. Положим $D_1(x) = 0$.

7. Если $j < n$, то 8, в противном случае B1.
8. Заменим j на $j+1$ и положим $x = 0$.
9. Положим $\mathcal{D}_j(x) = \mathcal{D}_{j-1}(x)$.
10. Если $x < b$, то 11, в противном случае 7.
11. Заменим x на $x+1$.
12. Если $x < a_j$, то 9, в противном случае 13.
13. Положим $\mathcal{D}_j(x) = \mathcal{D}_{j-1}(x) + \mathcal{D}_j(x - a_j)$, идем в 10.

B. Нахождение решений уравнения (1).

1. Если $\mathcal{D}_n(b) > 0$, то 2, в противном случае работа алгоритма заканчивается, уравнение не имеет решений.
2. Положим $l = 1$, $k = 1$, $x_i^1 = 0$, где $i = 1, \ldots, n$.
3. Если $\mathcal{D}_{j-1}(x) = \mathcal{D}_j(x)$, то 4, в противном случае 6.
4. Заменим j на $j-1$.
5. Если $j > 1$, то 3, в противном случае 14.
6. Если $\mathcal{D}_{j-1}(x) > 0$, то 7, в противном случае 9.
7. Заменим l на $l+1$.
8. Положим $j^l = j$, $x^l = x$, $x_i^l = x_i^k$, где $i = 1, \ldots, n$.
9. Заменим x_j^k на $x_j^k + 1$ и x на $x - a_j$.
10. Если $x > 0$, то 3, в противном случае 11.
11. Заменим k на $k+1$.
12. Если $k \le \mathcal{D}(b)$, то 13, в противном случае работа алгоритма заканчивается. (Найдены все решения уравнения (1)).
13. Положим $j = j^k$, $x = x^k$, идем в 4.
14. Положим $x_j^k = x/a_j$ идем в 11.

Приведенный алгоритм запрограммирован на языке АЛГОЛ, и испытан на ЭВМ МИНСК-32. Было решено три примера, один из которых здесь представлен.

Пример. Найти все решения уравнения

$$5x_1 + 8x_2 + 11x_3 = 60.$$

В результате работы части I получим таблицу денумерантов $\mathcal{D}_j(x)$, где $j = 1,2,3$; $x = 0,\ldots,60$.

Таблица

0	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6	I7	I8	I9	20	2I	22	23
I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0
I	0	0	0	0	I	0	0	I	0	I	0	0	I	0	I	I	0	I	0	I	I	0	I
I	0	0	0	0	I	0	0	I	0	I	I	0	I	0	I	2	0	I	I	I	2	I	I

24	25	26	27	28	29	30	3I	32	33	34	35	36	37	38	39	40	4I	42	43
0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0
I	I	I	0	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	I	2	I	I	I
2	I	2	2	I	2	2	2	3	2	2	3	2	3	3	2	4	3	3	4

44	45	46	47	48	49	50	5I	52	53	54	55	56	57	58	59	60
0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I	0	0	0	0	I
I	2	I	I	2	I	2	I	I	2	I	2	2	I	2	I	2
3	4	4	3	5	4	4	5	4	5	5	5	6	5	5	6	6

Из таблицы видно, что $\mathcal{D}_3(60) = 6$. Следовательно, уравнение имеет 6 решений. Положим $x_i^1 = 0$, где $i = I,2,3$. Так как $\mathcal{D}_2(60) = 2 < 6$, то $(3,60)$ точка ветвления. Поэтому положим $j^2 = 3$, $x^2 = 60$, $x_i^2 = 0$, $i = I,2,3$. Увеличим x_3^1 на единицу и уменьшим x на $a_3 = II$. Так как $\mathcal{D}_3(49) = 4$, а $\mathcal{D}_2(49) = I$, то $(3,49)$ тоже точка ветвления. Положим $j^3 = 3$, $x^3 = 49$, $x_1^3 = x_2^3 = x_3^3 = 0$. Дальше положим $x_3^1 = 2$ и $x = 49 - II = 38$. Так как $\mathcal{D}_3(38) = 3$, а $\mathcal{D}_2(38) = I$, то $(3,38)$ точка ветвления. Положим $j^4 = 3$, $x^4 = 38$, $x_1^4 = x_2^4 = 0$, $x_3^4 = 2$. Дальше положим $x_3^1 = 3$, $x = 27$. Так как $\mathcal{D}_2(27) = 0$, то $(3,27)$ не является точкой ветвления. Положим $x_3^1 = 4$, $x = I6$. Видим, что $\mathcal{D}_3(I6) = 2$, $\mathcal{D}_2(I6) = I$. Следовательно, $(3,I6)$ точка ветвления. Положим $j^5 = 3$, $x^5 = I6$, $x_1^5 = x_2^5 = 0$, $x_3^5 = 4$. Дальше положим $x_3^1 = 5$, $x = 5$. Так как $\mathcal{D}_3(5) = \mathcal{D}_2(5) = I$, то положим $j = 2$. Но так как $\mathcal{D}_1(5) = I$, то положим $j = I$. Теперь $x_1^1 = 5/5 = I$. Мы получили первое решение уравнения

$$x_1^1 = I, \quad x_2^1 = 0, \quad x_3^1 = 5.$$

Дальше положим $k = 2$. Будем продолжать второе решение уравнения. Положим $j = 3 - I = 2$, $x = 60$; так как $\mathcal{D}_2(60) = 2$, а $\mathcal{D}_1(60) = I$, то $(2,60)$ – точка ветвления. Положим $j^6 = 2$, $x_6 = 60$, $x_i^6 = x_i^2 = 0$, где $i = I,2,3$. Теперь получены все неполные решения. Их можно продолжить аналогично продолжению первого решения.

Решения уравнения даны в следующей таблице

k	x_1^k	x_2^k	x_3^k
I	I	0	5
2	4	5	0
3	5	3	I
4	6	I	2
5	0	2	4
6	I2	0	0

Согласно замечанию 3 $K(a_1, a_2) = K(5,8) = 5\cdot 8-5-8 = 27$. Следовательно, для нахождения $K(5,8,11)$ нам пришлось бы составить таблицу денумерантов до значения $x = 27$. Так как $\mathfrak{D}_3(27) \neq 0$, то уменьшим значение x, пока получим $\mathfrak{D}_3(17) = 0$. Следовательно, $K(5,8,11) = 17$.

Литература

I. В и л е н к и н М. Я., Комбинаторика. Москва, Наука, 1969.

2. Г а б о в и ч Я. А., Периодические непрерывные дроби высших иррациональностей. Диссертация. Тарту, 1950.

3. Р и о р д а н Дж., Введение в комбинаторный анализ. Москва, 1963.

4. С е м м е л ь Л. И., О решении линейных диофантовых уравнений. Дипломная работа, Тарту, 1973.

5. B o n d, J., Calculating the general solution of a linear diophantic equation. Amer. Math. Monthly, 1967, 74,8, 955-975.

6. G i l m o r e, P. C., G o m o r y, R. E., The theory and computation of knapsack functions. Oper. Res., 1966, 14, № 6, 1045-1074.

7. J o h n s o n, S. M., A linear diophantine problem. Canad. J. Math., 1960, 12-13.

8. K u l m e t, R., Diofantiliste võrrandisüsteemide lahendamine. Matemaatika ja kaasaeg, 1972, 18, 23-30.

Поступило
I5 IУ 1974

LINEAARSE DIOFANTILISE VÕRRANDI
MITTENEGATIIVSETE LAHENDITE LEIDMINE

R.Kunder

R e s ü m e e

Käesolevas töös esitatakse lineaarse diofantilise võrrandi kõigi mittenegatiivsete lahendite leidmise meetod. Samuti esitatakse meetodi põhjendus, vastav algoritm ja tuuakse arvuline näide.

FINDING OF NONNEGATIVE SOLUTIONS
OF A LINEAR DIOPHANTINE EQUATION

R.Kunder

S u m m a r y

In this paper a method of finding of all nonnegative solutions of a linear Diophantine equation is described. The theoretical base of the method, corresponding algorithm and also a numerical example are given.

СОДЕРЖАНИЕ - SISUKORD

Ученые записки Тартуского государственного университета. Выпуск 366. ТРУДЫ ПО МАТЕМАТИКЕ И МЕХАНИКЕ XVI. На эстонском и русском языках. Резюме на английском и немецком языках. Тартуский государственный университет. ЭССР, г. Тарту, ул. Юликооли, 18.

Vastutav toimetaja E.Reimers. Korrektor G.Noppel. Paljundamisele antud 23.06.75. Trükipaber nr.1. 30 x 45. 1/4. Trükipoognaid 15,5. Arvestuspoognaid 13,16. Trükiarv 400. MB 05402. Tell.nr. 952. TRÜ trükikoda, ENSV, Tartu, Palsoni t. 14. Hind 1 rbl.32 kop. 2 - 2

Rbl. 1.32